

**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6680

**Strömungs- und Transportprozesse in Mikrokanälen**

P. Ehrhard, I. Meisel

---

Institut für Kern- und Energietechnik  
Programm Mikrosystemtechnik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
2002

**Impressum der Print-Ausgabe:**

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

**ISSN 0947-8620**

## **Strömungs- und Transportprozesse in Mikrokanälen**

Strömungen in Mikrokanälen, d.h. in Kanälen mit Durchmessern von deutlich unter  $1\text{ mm}$ , werden durch den Fortschritt der Fertigungstechniken für technische Anwendungen relevant. Beispiele hierfür sind Mikrowärmetauscher, Mikrodruckköpfe oder Mikroanalyse-Chips. Abhängig vom Fluid (Flüssigkeit oder Gas) können für solche Strömungen zu den üblichen Effekten (Trägheit, Druck, Viskosität) weitere Effekte hinzutreten, die in makroskopischen Strömungen vernachlässigt werden dürfen. Ähnliche Aussagen gelten für den Wärme- und Stofftransport in solch kleinen Kanälen. In der vorliegenden Arbeit wird, basierend auf Ähnlichkeitsgesetzen, systematisch der Einfluß aller Effekte bewertet. Hieraus werden Modelle für verschiedene Strömungstypen abgeleitet und jeweils ein Vergleich mit aktuellen veröffentlichten Messungen angestellt. Die Arbeit gibt weiterhin einen Überblick über die experimentellen Methoden, welche zur Erfassung der Strömungs-, Temperatur- und Konzentrationsfelder eingesetzt werden können.

## **Fluid flow and transport phenomena in micro channels**

Fluid flow in micro channels, i.e. in channels of cross sections much less than  $1\text{ mm}$ , has become relevant for technical applications due to the enormous progress in manufacturing techniques. Examples for such applications are micro heat exchangers, inkjet printing heads or microchips for biological or chemical analysis. Depending on the fluid (liquid or gas) such flows may be dominated by effects, which are usually neglected in macroscopic flows against the familiar effects of inertia, pressure or viscosity. Similar statements hold for the heat and mass transport in such small channels. Based on similarity analysis, the present report systematically discusses the influence of the relevant effects. Models for various types of flows are inferred and compared to published experimental observations. The paper, further, presents an overview upon the experimental methods appropriate to measure the flow, temperature and concentrational fields.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Behandlung von Mikroströmungen</b>	<b>3</b>
2.1	Klassifizierung von Mikroströmungen . . . . .	4
2.1.1	Kriterien für Gasströmungen . . . . .	5
2.1.2	Kriterien für Flüssigkeitsströmungen . . . . .	7
2.2	Moleküldynamische Simulationen . . . . .	8
2.3	Kontinuumsmodelle . . . . .	11
2.3.1	Navier–Stokes–, Euler–, Stokes–Gleichungen . . . . .	11
2.3.2	Randbedingungen an Fluid/Festkörper–Grenzflächen . . . . .	16
2.3.2.1	Gase an festen Wänden . . . . .	18
2.3.2.2	Flüssigkeiten an festen Wänden . . . . .	20
2.4	Gasströmung durch einen Mikropalt . . . . .	23
2.4.1	Theoretisches Modell . . . . .	23
2.4.2	Vergleich mit Experimenten . . . . .	31
2.5	Flüssigkeitsströmung im Mikropalt mit elektrischer Grenzschicht . . . . .	34
2.5.1	Theoretisches Modell an einer allgemeinen Wand . . . . .	34
2.5.2	Anwendung des Modells auf eine eingelaufene Strömung . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen in Mikroströmungen</b>	<b>46</b>
3.1	Meßmethoden . . . . .	47
3.1.1	Druckdifferenzen . . . . .	47
3.1.2	Massen- und Volumenströme . . . . .	49
3.1.3	Geschwindigkeiten . . . . .	50
3.1.4	Temperatur . . . . .	54
3.2	Parameter für eine Mikrowärmetauscher . . . . .	60
3.3	Messungen zum Druckverlust . . . . .	61
3.4	Messungen zum Wärmeübergang . . . . .	67
3.5	Der Übergang laminar/turbulent . . . . .	71

# 1 Einleitung

Strömungs- und Transportprozesse in Mikrokanälen, d.h. in Kanälen mit Querschnitten von 1–1000  $\mu\text{m}$ , werden durch den Fortschritt der Fertigungstechniken für technische Anwendungen relevant. Moderne Fertigungstechniken erlauben hierbei, kleinste Strukturen in verschiedenen Materialien wie Silizium, Metall oder Kunststoff herzustellen. Die Fertigungsverfahren umfassen mechanisches Bohren und Fräsen, Kunststoff-Abformtechnik, lithographische und galvanische Verfahren sowie Ätztechniken. Die Mikrostrukturierung von Silizium ist sicherlich am weitesten verbreitet – sie entwickelte sich aus den Techniken der Chip-Herstellung. Hierbei kommen insbesondere lithographische Verfahren in Verbindung mit Ätztechniken zum Einsatz. Mit der Möglichkeit, Metalle und Kunststoffe zu strukturieren, haben sich die Anwendungsmöglichkeiten deutlich erweitert. Dies hängt auch damit zusammen, daß gegenüber Silizium ein Kostenvorteil in der Massenfertigung besteht. Die Mikrostrukturierung der Metalle geschieht durch verfeinerte spanabhebende Verfahren oder durch (Röntgen-) Tiefenlithographie. Das heiße Abformen in Kunststoff ist dann in der Regel von (so hergestellten) metallischen Prägwerkzeugen möglich. Auch zum Verbinden mehrerer Strukturen oder zum Deckeln existieren zahlreiche Möglichkeiten, viele auf der Basis von Diffusionsschweißen.

Ein Anwendungsbeispiel für ein mikrofluidisches System mit großer Verbreitung stellt der Druckkopf von Tintenstrahldruckern dar. Hier wird die Tinte durch eine Öffnung von typischerweise 20  $\mu\text{m}$  Durchmesser aus einer Kavität ausgeworfen, um einen Farbpunkt auf dem Papier zu erzeugen. Der Druckaufbau in der Kavität geschieht entweder über Piezo-Kristalle oder durch Wärmezufuhr und Verdampfung. Solche Druckköpfe sind erst nach erheblichem Aufwand an Forschung und Entwicklung in der heute verbreiteten Qualität möglich geworden.

Weitere Anwendungsbeispiele finden wir in Mikroanalyse-Chips. Auch unter dem Begriff „Labor auf dem Chip“ versucht man hier, Bausteine zu entwickeln, in welchen die komplette Analyse einer Substanz abläuft und die die Ergebnisse elektrisch an ein Versorgungsgerät weitergeben. Innerhalb eines solchen Bausteins müssen demnach die Fluidführung, Vermischungsprozesse von Reaktanden und/oder Markierungen, biologische oder chemische Reaktionen sowie die selektive Detektion von Stoffen ablaufen. Der Vorteil der Miniaturisierung liegt hier bei dem geringen Probenvolumen sowie bei den relativ großen Oberflächen, was insbesondere bei den Detektions- und Se-

parationsverfahren der Chromatographie und/oder Elektrochemie die Trennleistung verbessert. Weiterhin sind solche Bausteine für den Einweggebrauch konzipiert, so daß eine kostengünstige Massenfertigung in biologisch und/oder chemisch kompatibelem Material (meist Kunststoff) angestrebt wird. Auch hier ist erheblicher Bedarf an Forschung und Entwicklung im fluiddynamischen Bereich zu erkennen. Die Vermischung von zwei Fluiden, beispielsweise, ist in kleinen Kanälen, d.h. bei kleinen Reynolds-Zahlen, nur langsam zu erreichen. Aus diesen Gründen müssen häufig aktive Maßnahmen die Vermischung beschleunigen.

Die Anwendungen sind durch diese zwei Beispiele bei weitem nicht erschöpft. Vielmehr gibt es unzählige Möglichkeiten des Einsatzes mikrofluidischer Systeme, um konventionelle Anlagen kompakter und effizienter zu machen oder um völlig neue Möglichkeiten zu eröffnen.

Wir wollen uns im folgenden mit Strömungs- und Transportprozessen in solchen Mikrokanälen und -strukturen befassen. Wir werden zunächst die theoretische Behandlung diskutieren. Wir müssen dabei sorgfältig überprüfen, inwiefern das fluiddynamische Modellgerüst auf Basis der Kontinuumsmechanik überhaupt noch gültig ist und wo gegebenenfalls Schwierigkeiten zu erwarten sind. Es wird sich zeigen, daß insbesondere für Gase Modifikationen oder gar molekulare Modelle notwendig werden können. In anderen Fällen, insbesondere bei Flüssigkeiten, bleiben die kontinuumsmechanischen Modelle weitgehend gültig, und nur kleine Modifikationen treten gegebenenfalls hinzu. Ein wichtiger Punkt ist stets die Modellierung der Grenzflächeneffekte, welche aufgrund des großen Verhältnisses von Oberfläche zu Volumen bei Mikrokanälen in den Vordergrund treten. Die Modellierung der Grenzflächenkräfte, auch in Anwesenheit elektrischer Felder, wird somit eine wichtige Rolle spielen. Bei Anwesenheit von Ionen in Flüssigkeiten beispielsweise sind die Grenzflächenkräfte auch durch elektrische Effekte bestimmt. Alle Modelle müssen stets anhand von Validierungsexperimenten überprüft werden. Der Vergleich mit grundlegenden Experimenten in der Literatur wird deshalb ebenfalls eine wichtige Rolle spielen. Wir werden uns darüber hinaus auch mit den experimentellen Methoden in mikrofluidischen Systemen eingehend auseinandersetzen.

## **2 Theoretische Behandlung von Mikroströmungen**

Die folgende Diskussion basiert in etwa auf einem Artikel von Gad-el Hak (1999). Die kontinuumsmechanische Beschreibung der Bewegung von Fluiden stellt die Grundlage der herkömmlichen Strömungsmechanik dar. Hierbei wird der wahre molekulare Charakter von Fluiden ignoriert und stattdessen werden gemittelte Zustandsgrößen verwendet. So haben einzelne Moleküle eines Fluids beispielsweise eine Translationsgeschwindigkeit, überlagert von einer Schwingung – der Brownschen Molekularbewegung, deren Intensität direkt mit der Temperatur verknüpft ist. Mitteln wir diese Bewegung über ein Volumenelement mit genügend vielen Molekülen, so bleibt lediglich ein Translationsanteil erhalten – er bestimmt den (kontinuumsmechanischen) Geschwindigkeitsvektor. Aus der Mittelung der Intensität der Brownschen Molekularbewegung erhalten wir die (kontinuumsmechanische) Temperatur. Aus dem oben Gesagten ergibt sich, daß die Abmessung des Mittelungsvolumens sehr viel größer sein muß als der mittlere Abstand der Moleküle, nur so erfolgt die Mittelung über eine ausreichend große Anzahl von Molekülen. Gleichzeitig muß dieses Mittelungsvolumen klein gegenüber der Abmessung des Strömungskanals sein. Nur so erhalten wir eine kontinuierliche Abhängigkeit der Zustandsgrößen vom Ort und können differentielle Erhaltungsgleichungen formulieren. Mit kleiner werdender Kanalabmessung, wie sie in mikrofluidischen Systemen auftritt, kann nun insbesondere bei großem mittlerem Molekülabstand (Gase, Makromoleküle) eine Situation eintreten, welche nicht mehr durch kontinuumsmechanische Modelle beschrieben werden kann.

Eine weitere Annahme liegt den herkömmlichen kontinuumsmechanischen Modellen zugrunde: man unterstellt, daß die Systeme nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht sind. Dies erlaubt beispielsweise einfache (lineare) Beziehungen zwischen dem Spannungstensor und der Scherrate (Newtonsches Fluid) in den Navier–Stokes–Gleichungen einzuführen. Ähnliche Annahmen nutzen beim Wärmetransport lineare Zusammenhänge zwischen Wärmestrom und Temperaturgradient oder beim Stofftransport lineare Zusammenhänge zwischen Stoffstrom und Konzentrationsgradient. Darüber hinaus müssen wir damit rechnen, daß die Haftbedingung des Fluids an festen Wänden oder die kontinuierliche Veränderung der Temperatur oder einer Konzentration vom Fluid zur Wand nicht mehr gegeben ist, sobald wir die Grundannahmen der Kontinuumsmechanik verletzen. So wird es unter Umständen notwendig, nicht-Newtonsche Fluidmodelle, Rutschen des Fluids an der Wand, oder Temperatur– bzw.

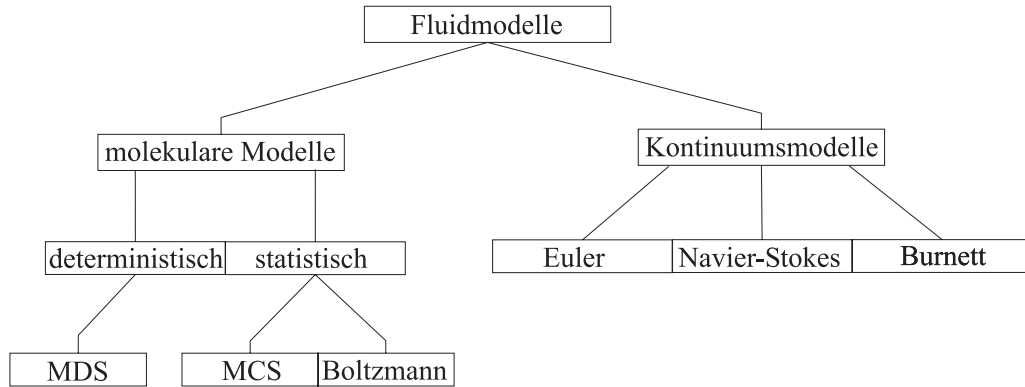


Abbildung 1: Gängige Fluidmodelle.

Konzentrations sprünge an Wänden zuzulassen.

Generell ist die kontinuumsmechanische Behandlung mit Hilfe partieller Differentialgleichungen (vgl. Abb. 1) den molekularen Modellen vorzuziehen. Dies liegt daran, daß der mathematische bzw. numerische Aufwand für die Kontinuumsmodelle um viele Größenordnungen geringer ist als für molekulare Modelle. So können moleküldynamische Simulationen für technische Mikrokanäle für viele Generationen ausgeschlossen werden, weil selbst optimistische Prognosen der Rechnerentwicklung nicht genügend Rechenleistung für solche Simulationen erwarten lassen. Es gilt also Kriterien abzuleiten, welche entscheiden, ob wir uns im Gültigkeitsbereich der Kontinuumsmodelle befinden. Abhängig von diesen Kriterien kann dann eine Entscheidung für ein bestimmtes Modell oder für bestimmte Modifikationen getroffen werden. Diese Kriterien werden wir separat für Gase und für Flüssigkeiten ableiten.

Die verschiedenen Modelle für Fluide sind in Abb. 1 zusammengefaßt. Bei den molekularen Modellen unterscheidet man zwischen deterministischen und statistischen Modellen. Die moleküldynamische Simulation (MDS) ist hierbei ein deterministisches Modell, während die Monte-Carlo-Simulation (MCS) oder die Boltzmann-Gleichungen statistischer Natur sind. Die Kontinuumsmodelle führen je nach Parameterbereich zu den Euler-, den Navier-Stokes- oder den Burnett-Gleichungen.

## 2.1 Klassifizierung von Mikroströmungen

Gase und Flüssigkeiten unterscheiden sich durch den mittleren Abstand der Moleküle sowie durch die Intensität der Brownschen Molekularbewegung. Bei Gasen ist die Bindung zum Nachbarmolekül aufgehoben und ein großer mittlerer Molekülabstand



sorgt dafür, daß die Moleküle meist frei fliegen, unterbrochen von kurzen Stößen mit anderen Molekülen, welche zu einer abrupten Änderung des Geschwindigkeitsvektors führen. Deswegen ist in Gasen der mittlere Weg der Moleküle zwischen zwei Stößen, die mittlere freie Weglänge, eine wichtige Größe. Intermolekulare Kräfte können in Gasen in guter Näherung vernachlässigt werden und die theoretische (auch molekulare) Behandlung solcher Gase ist relativ weit entwickelt. In Flüssigkeiten hingegen ist der mittlere Abstand der Moleküle um eine Größenordnung kleiner, sodaß die Moleküle ständig in Wechselwirkung mit den Nachbarmolekülen stehen. Dies macht die molekulare Behandlung von Flüssigkeiten deutlich schwieriger. Dementsprechend ist die Ableitung von Kriterien zur Gültigkeit der Kontinuumsannahme in Gasen und Flüssigkeiten zum einen grundsätzlich verschieden. Zum anderen sind die Kriterien für Gase deutlich weiter entwickelt (vgl. z.B. Schaaf und Chambré (1961)) als entsprechende Kriterien für Flüssigkeiten (vgl. z.B. Loose und Hess (1989), Thompson und Troian (1997)).

### 2.1.1 Kriterien für Gasströmungen

Bei verdünnten Gasen ist das Konzept der mittleren freien Weglänge in der Literatur etabliert (vgl. Schaaf und Chambré (1961)). Hierbei wird gefordert, daß die mittlere freie Weglänge  $\Lambda$  sehr viel kleiner ist als die Längenskala  $l_0$  in der Strömung. Die mittlere freie Weglänge ist für ein ideales Gas gemäß

$$\Lambda = \nu \sqrt{\frac{\pi}{2\mathbb{R}T}} = \frac{\nu}{c} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}} \quad (2.1)$$

mit der kinematischen Viskosität  $\nu$ , der Temperatur  $T$ , der Gaskonstanten  $\mathbb{R}$ , der Schallgeschwindigkeit  $c$  und dem Isentropenexponenten  $\kappa = c_p/c_v$  verknüpft. Die Längenskala  $l_0$  der Strömung ist beispielsweise der Kanaldurchmesser, oder präziser die Längenskala, über die Gradienten der Zustandsgrößen wie Druck, Dichte, Geschwindigkeit oder Temperatur anliegen. Für eine Geschwindigkeit wäre dies beispielsweise

$$l_0 \sim \frac{u}{|u_y|}, \quad (2.2)$$

wobei der Index  $y$  eine Differentiation nach  $y$  kennzeichnet. Die Forderung zum Größenverhältnis von  $\Lambda$  und  $l_0$  können wir in die Knudsen-Zahl übertragen gemäß

$$Kn = \frac{\Lambda}{l_0} \ll 1. \quad (2.3)$$

Ist (2.3) erfüllt, so können wir davon ausgehen, daß die Kontinuumsannahme gerechtfertigt ist. Die Größe von  $Kn$  erlaubt es also, eine Gasströmung zu klassifizieren. Wir wollen an dieser Stelle die Knudsen-Zahl noch mit den anderen Kennzahlen verknüpfen. Mit den Definitionen einer Reynolds-Zahl und einer Mach-Zahl

$$Re = \frac{u_0 l_0}{\nu}, \quad (2.4)$$

$$Ma = \frac{u_0}{c}, \quad (2.5)$$

mit einer charakteristischen Geschwindigkeit  $u_0$ , gelingt es die Knudsen-Zahl unter Verwendung von (2.1) gemäß

$$Kn = \frac{\nu}{cl_0} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}} = \frac{u_0}{c} \frac{\nu}{u_0 l_0} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}} \quad (2.6)$$

umzuformen. Aus (2.6) wird deutlich, daß der Zusammenhang

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}} \frac{Ma}{Re} \quad (2.7)$$

besteht. Liegt weitergehend wegen  $Re \gg 1$  eine Grenzschichtströmung vor, so ist als Längenskala die Dicke  $\delta$  der kinematischen Grenzschicht relevant. Wegen

$$\frac{\delta}{l_0} \propto \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (2.8)$$

kann für die Grenzschicht deshalb auch

$$Kn \propto \frac{Ma}{Re_\delta} \propto \frac{Ma}{\sqrt{Re}} \quad (2.9)$$

abgeleitet werden. Hierbei ist  $Re_\delta = u_0 \delta / \nu$  die Reynolds-Zahl der Grenzschicht. Die Beziehung (2.9) ist von allgemeinem Interesse, sie wird wegen kleiner Reynolds-Zahlen in Mikrokanälen kaum relevant sein.

Zusammenfassend kann aus der Größe der Knudsen-Zahl auf das anzuwendende Modell geschlossen werden. Gad-el Hak (1999) gibt die Bereiche

$Kn \rightarrow 0$ ( $Re \rightarrow \infty$ )	Euler-Gleichungen
$Kn \leq 10^{-3}$	Navier-Stokes-Gleichungen mit Haftbedingung
$10^{-3} \leq Kn \leq 10^{-1}$	Navier-Stokes-Gleichungen mit Rutschbedingung
$10^{-1} \leq Kn \leq 10$	Übergangsbereich
$10 < Kn$	freie molekulare Strömung

an. Gleichung (2.3) macht deutlich, daß entweder für große freie Weglängen  $\Lambda$  oder für kleine charakteristische Längen  $l_0$  große Knudsen-Zahlen und damit Probleme bei einer kontinuumsmechanischen Behandlung auftreten können. Wir wollen hier ein Beispiel angeben. Nehmen wir Luft bei Standardbedingungen (288 K, 1 atm), so erhalten wir eine mittlere freie Weglänge von  $\Lambda = 0.065 \mu\text{m}$ . Ein Mikrokanal mit  $l_0 = 1 \mu\text{m}$  Durchmesser hat dann  $Kn = 0.065$  zur Folge. Dies ist bereits eine Strömung, bei der Rutschen des Gases an der Wand zu berücksichtigen ist. Bei gleicher Temperatur und einem Druck von 0.1 atm vergrößert sich die mittlere freie Weglänge auf  $\Lambda = 0.65 \mu\text{m}$  und mit  $Kn = 0.65$  haben wir bereits eine Strömung, die nicht mehr mit den Kontinuumsmodellen zu behandeln ist. Wir haben hier zwar einen kleinen Mikrokanal unterstellt, das Beispiel macht dennoch deutlich, daß bei Gasen durchaus solche Situationen auftreten können. In der Tat ist die Situation bei Flüssigkeiten unproblematischer, weil der mittlere Abstand der Moleküle um eine Größenordnung kleiner ist und deshalb die Kontinuumsannahme auch noch für kleine Kanäle trägt.

### 2.1.2 Kriterien für Flüssigkeitsströmungen

Während für Gase mit der Theorie der Gaskinetik ein etabliertes Modell zum Verhalten verdünnter Gase vorliegt, sind die Grenzen der Kontinuumsmechanik bei Flüssigkeiten deutlich schwieriger zu fassen. Das Konzept der mittleren freien Weglänge und der Knudsen-Zahl ist nicht ohne weiteres auf Flüssigkeiten zu übertragen. Ähnlich schwierig und aufwendig gestalten sich molekulardynamische Simulationen, weil die Moleküle kontinuierlich in Wechselwirkung bleiben. Deshalb sind Aussagen häufig empirisch, entweder aus Experimenten oder aus idealisierten MD-Simulationen. Loose und Hess (1989) gewinnen aus MD-Simulationen die Aussage

$$\dot{\gamma} \geq 2\tau^{-1} = 2 \left( \frac{\varepsilon}{m\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

für Scherraten  $\dot{\gamma}$ , welche kein Newtonsches Verhalten der Flüssigkeit mehr zulassen. Für ebene Probleme kann die Scherrate einfach aus dem Gradienten der Tangentialgeschwindigkeit gemäß  $\dot{\gamma} = \partial u / \partial y = u_y$  gewonnen werden.  $\tau$  bezeichnet die Zeitskala,  $\varepsilon$  die Energieskala und  $\sigma$  die Längenskala der Flüssigkeitsmoleküle,  $m$  ist die Molekülmasse. Für gewöhnliche Flüssigkeiten wie Wasser erwarten wir kleine Molekülmassen  $m$  und kleine mittlere Molekülabstände  $\sigma$ . Deshalb muß die Scherrate extrem groß werden, bevor nicht-Newtonsches Verhalten auftritt. Stellen wir

uns hingegen große, langkettige Polymermoleküle vor, so kann aufgrund der großen Molekülmassen und Molekülabstände durchaus der Fall eintreten, bei dem nicht-Newton'sches Verhalten auftritt, weil die Scherrate den in (2.10) berechneten Wert übersteigt.

## 2.2 Moleküldynamische Simulationen

Befinden wir uns im Bereich freier molekularer Strömungen, so ist die moleküldynamische Simulation (MD) eine deterministische Möglichkeit, die Bewegung des Fluids zu berechnen. Diese Methode wird sicherlich in absehbarer Zeit keine Bedeutung bei der Berechnung technischer Strömungen (in Mikrokanälen) haben. Sie kann aber dennoch wertvolle Aussagen in Grenzbereichen liefern, wodurch eine angepaßte Anwendung der Kontinuumsmodelle möglich werden kann. Wir wollen deshalb hier kurz diese Methode diskutieren, um ihre Leistungsfähigkeit beurteilen zu können.

Man betrachtet typischerweise einige zehntausend Fluidmoleküle, welche in Kontakt mit Gittermolekülen eines Festkörpers (Wand) gebracht werden. Es werden Wechselwirkungen zwischen den beteiligten Molekülen, d.h. Wechselwirkungen zwischen den Fluidmolekülen selbst und zwischen Fluid- und Festkörpermolekülen, formuliert. Dies geschieht im Falle von Flüssigkeiten beispielsweise mit Hilfe des Lennard-Jones-Potentials, welches eine vernünftige Beschreibung der Wechselwirkung inerter, nicht-ionisierter, nicht-polarer, sphärischer Flüssigkeitsmoleküle ergibt. Nach Green (1960) gilt für dieses Potential bei nicht zu kleinem Abstand  $r$  der Moleküle die Näherung

$$\Phi_{ff}(r) \simeq -\frac{C_1}{r^6} + \frac{C_2}{r^{12}} . \quad (2.11)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß bei großen Molekülabständen  $r$  die Anziehung aufgrund der gegenseitigen Polarisierung der Flüssigkeitsmoleküle bestimmend ist (van-der-Waals-Kräfte). Bei Annäherung nimmt das Potential gemäß  $\Phi_{ff} \propto r^{-6}$  ab. Für sehr kleine Abstände  $r$  werden die abstoßenden Kräfte dominant, was auf eine Wechselwirkung der Elektronenhüllen zurückgeführt werden kann. Die Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  sind für eine ganze Reihe von Molekülen in der Literatur zu finden. Die Berücksichtigung komplexer Flüssigkeitsmoleküle wie beispielsweise Dipole oder Ketten ist prinzipiell durch Einführung sehr komplexer Potentiale möglich.

Bei der Wechselwirkung zwischen Festkörper- und Flüssigkeitsmolekülen in der Nähe der Wände ist zu berücksichtigen, daß die Festkörpermoleküle in ein elastisches Gitter

eingebunden sind. Durch Integration der elastischen Kräfte ergibt sich im einfachsten Fall für die Wechselwirkung ein Potential der Form

$$\Phi_{fs}(r) \simeq -\frac{C_3}{r^4} + \frac{C_4}{r^{10}}. \quad (2.12)$$

In Gasen oder im Dampf der Flüssigkeit werden die Wechselwirkungen der Moleküle in der Regel vernachlässigt und der Impulssatz erlaubt die Änderung der Geschwindigkeitsvektoren bei Kollisionen zu berechnen.

Mit bekannter Kraftwirkung auf die Moleküle, aus räumlicher Differentiation des Potentials, wird schließlich gemäß dem Newtonschen Gesetz die Molekülposition durch Zeitintegration aus der Beschleunigung numerisch ermittelt und für alle Moleküle verfolgt. Thermische Randbedingungen werden in diesem Kontext durch Vorgabe definierter Brownscher Molekularbewegung an den Festkörpermolekülen der Wände realisiert. Die Vorgabe kinematischer Randbedingungen entfällt vollständig. Auf molekularer Ebene ist die Wirkung der Wände und Grenzflächen auf die Fluide durch die Wechselwirkung der Moleküle vollständig beschrieben. Umgekehrt erlaubt das Verhalten der Fluidmoleküle nach entsprechender Mittelung Aussagen zu den makroskopischen Zustandsgrößen wie Geschwindigkeit, Druck oder Dichte. Die Intensität der Brownschen Molekularbewegung innerhalb eines Mittelungsvolumens legt schließlich die (makroskopische) Temperatur fest. Grenzflächen sind in diesem Kontext durch eine große Änderung der Moleküldichte einer bestimmten Molekülsorte (unscharf) definiert.

Solche moleküldynamischen Simulationen sind mit den leistungsfähigsten Rechnern heute für maximal  $10^5$  einfache Moleküle durchführbar. Dies entspricht einer Begrenzung auf eine Zone von etwa 50–100 nm Durchmesser, wobei die simulierte Echtzeit auf etwa  $10^{-8}$  Sekunden begrenzt bleibt. Entsprechend können nur akademische Simulationen zu verdünnten Gasen, zu bewegten Kontaktlinien in Flüssigkeiten, zu dünnen Flüssigkeitsfilmen oder zu elektrischen Grenzschichten an Wänden durchgeführt werden. Diese akademischen Fälle liefern jedoch durchaus wertvolle Hinweise für kontinuumsmechanische Modelle, indem beispielsweise die präzisen Randbedingungen aus solchen Simulationen übernommen werden können.

Wir wollen an dieser Stelle eine aktuelle Arbeit zur Moleküldynamik aufgreifen und ihre Ergebnisse diskutieren. Dies erlaubt die Grenzen und den Nutzen solcher Simulationen besser zu bewerten. Thompson und Troian (1997) haben für eine „mikroskopische“ Couette-Strömung moleküldynamische Simulationen durchgeführt, das Pro-

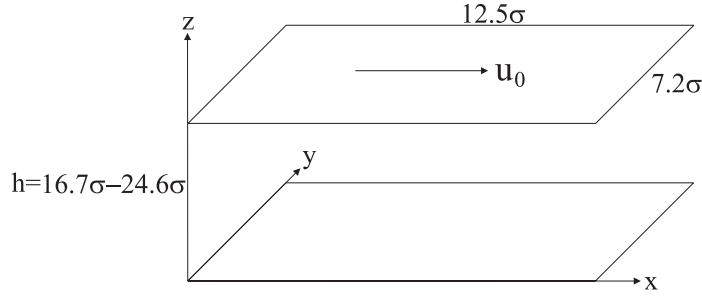


Abbildung 2: Problemskizze zur Couette-Strömung in Thompson und Troian (1997).

blem ist in Abbildung 2 skizziert. Wir erkennen zwei Platten der Größe  $12.5\sigma \times 7.2\sigma$  horizontal im Abstand  $h = 16.7\sigma - 24.6\sigma$  angeordnet. Die untere Platte ist in Ruhe, die obere Platte wird längs  $x$  mit der Geschwindigkeit  $u_0$  bewegt.  $\sigma$  ist die molekulare Längenskala. Mit periodischen Randbedingungen auf den Begrenzungsflächen  $y = \textit{konstant}$  und  $x = \textit{konstant}$  wird eine unendlich ausgedehnte Situation in der  $xy$ -Ebene simuliert. Dies bedeutet beispielsweise, daß Moleküle, die über eine Fläche  $x_1 = \textit{konstant}$  austreten, über die zweite Fläche  $x_2 = \textit{konstant}$  mit gleichem Geschwindigkeitsvektor wieder eintreten. Die festen Wände bei  $z = \textit{konstant}$  werden als Moleküle in einem kubisch flächenzentrierten Gitter simuliert, weiterhin wird das Problem isotherm behandelt. Die Flüssigkeit besteht aus einfachen sphärischen Molekülen, für welche ein Lennard-Jones-Potential formuliert wird. Das Ziel von Thompson und Troian (1997) besteht darin zu untersuchen, für welche Bedingungen und Spalthöhen  $h$  die Haftbedingung erfüllt ist und wann gegebenenfalls mit Rutschen zu rechnen ist. Abbildung 3 zeigt Profile der dimensionslosen Geschwindigkeit  $u/u_0$  über der dimensionslosen vertikalen Koordinate  $z/h$ . Wir erkennen an den offenen Kreisen ein Profil, welches auf beiden Seiten die Haftbedingung erfüllt – ein lineares Profil, das uns aus der makroskopischen Couette-Strömung geläufig ist. Dieses Profil ist erhalten für starke Wechselwirkung zwischen Flüssigkeits- und Festkörpermolekülen, für große „thermische Rauigkeit“ der l/s-Grenzflächen und für gute Verträglichkeit der Moleküldichten in Flüssigkeit und Festkörper. Wird die Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Festkörper schwächer, so findet sich an den Wänden deutliches Rutschen (vgl. ausgefüllte Kreise). Ähnliches beobachten Thompson und Troian (1997) für unverträgliche Moleküldichten (vgl. Sterne). Die Autoren nutzen ihre Ergebnisse, um ein universelles Rutschgesetz auf Basis bestimmter molekularer Parameter abzuleiten. Auch wenn die eigentliche Simulation eine technisch

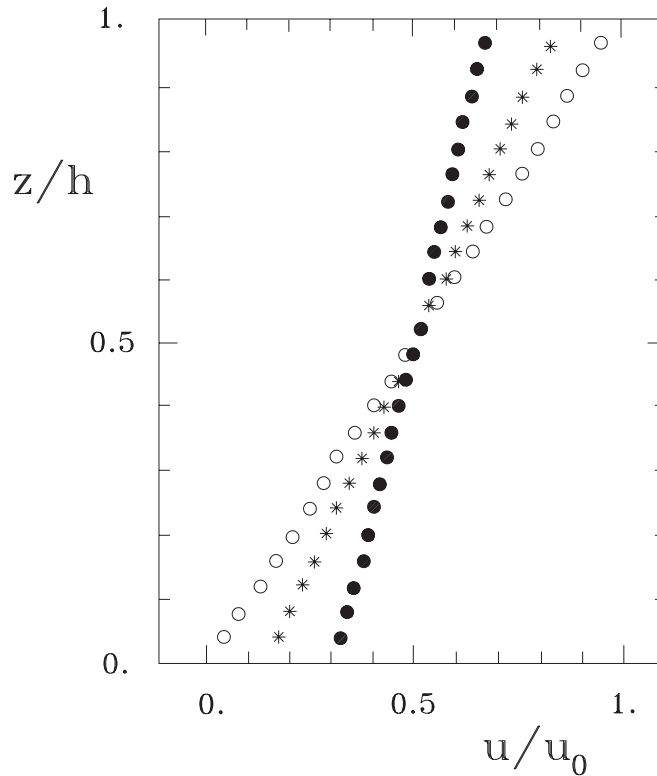


Abbildung 3: Geschwindigkeitsprofile der Couette-Strömung über der Spalthöhe nach Thompson und Troian (1997).

nicht relevante Größe von nur wenigen Moleküldurchmessern hat, sind die Ergebnisse in Form des Rutschmodells durchaus für Kontinuumsmodelle (in technischen Geometrien) wertvoll. Ein Übersichtsartikel zu moleküldynamischen Simulationen findet sich bei Koplik und Banavar (1995).

## 2.3 Kontinuumsmodelle

### 2.3.1 Navier-Stokes-Gleichungen, Euler-Gleichungen, Stokes-Gleichungen

Wir wollen nun die Erhaltungsgleichungen in Differentialform für ein Kontinuum angeben und uns insbesondere verdeutlichen, welche Voraussetzungen wir jeweils getroffen haben. Die genaue Kenntnis der Voraussetzungen ist wichtig, um den Gültigkeitsbereich einschätzen zu können. Die Herleitung der Gleichungen wollen wir unterdrücken, sie findet sich beispielsweise bei Oertel (1995).

Die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie in einem Volumenelement führt ohne weitere Annahmen für ein Kontinuum zu

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 , \quad (2.13)$$

b) Impulserhaltung:

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y + ww_z) = k_x + \tau_{xx,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} , \quad (2.14)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y + ww_z) = k_y + \tau_{xy,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{zy,z} , \quad (2.15)$$

$$\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = k_z + \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \tau_{zz,z} , \quad (2.16)$$

c) Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \rho(e_t + ue_x + ve_y + we_z) &= -(q_{x,x} + q_{y,y} + q_{z,z}) \\ &\quad + \tau_{xx}u_x + \tau_{yx}u_y + \tau_{zx}u_z \\ &\quad + \tau_{xy}v_x + \tau_{yy}v_y + \tau_{zy}v_z \\ &\quad + \tau_{xz}w_x + \tau_{yz}w_y + \tau_{zz}w_z . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hierin ist  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  der Geschwindigkeitsvektor,  $\rho$  die Dichte,  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$  der Vektor der Volumenkräfte,  $e$  die innere Energie,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  der Vektor der Wärmeströme und

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

der Spannungstensor. Die unabhängigen Variablen sind die Zeit  $t$  und die Koordinaten  $x, y$  und  $z$ . Wir notieren Ableitungen durch Indizes, wobei bei indizierten Größen das Komma die (hintenstehende) Ableitung abtrennt.

Der Satz von Gleichungen (2.13–2.17) ist nicht geschlossen, weil den 5 Differentialgleichungen die 17 Unbekannten  $u_i, \rho, \tau_{ki}, e$  und  $q_i$  gegenüberstehen. Es sind demnach weitere Gleichungen zu formulieren. Für ein **Newtonsches Fluid** kann ein **linearer** Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verformungstensor formuliert werden (Verallgemeinerung von  $\tau = \mu u_y$ ). Die **Stokessche Hypothese** stellt eine Beziehung zwischen dem ersten und dem zweiten Koeffizienten der Viskosität her. Für ein **Fourier–Fluid** wird ein **linearer** Zusammenhang zwischen Wärmeleitströmen und Temperaturgradienten unterstellt, die durch Strahlung transportierte



Wärme können wir bei moderaten Temperaturen vernachlässigen. Schließlich benötigen wir noch Zustandsgleichungen für ein **kalorisch perfektes Fluid**, welche mit  $e = c_v T$  und  $h = e + p/\rho = c_p T$  die innere Energie  $e$  und die Enthalpe  $h$  bei konstanten spezifischen Wärmen  $c_v$ ,  $c_p$  angeben. Die obigen Annahmen führen auf die **kompribiblen Navier–Stokes–Gleichungen** (ergänzt durch Massen- und Energieerhaltung):

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 , \quad (2.19)$$

b) Impulserhaltung (Navier–Stokes):

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) &= -p_x + k_x & (2.20) \\ + \mu \left[ \left\{ 2u_x - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_x + \{u_y + v_x\}_y + \{w_x + u_z\}_z \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) &= -p_y + k_y & (2.21) \\ + \mu \left[ \{u_y + v_x\}_x + \left\{ 2v_y - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_y + \{v_z + w_y\}_z \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) &= -p_z + k_z & (2.22) \\ + \mu \left[ \{w_x + u_z\}_x + \{v_z + w_y\}_y + \left\{ 2w_z - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_z \right] , \end{aligned}$$

c) Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \rho c_p (T_t + uT_x + vT_y + wT_z) &= \lambda (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) & (2.23) \\ + (p_t + up_x + vp_y + wp_z) + \mu \Phi . \end{aligned}$$

Hierin tritt die Temperatur  $T$  auf, die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , sowie die Dissipationsfunktion

$$\Phi = 2(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2 - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z)^2 . \quad (2.24)$$

Die Dissipationsfunktion  $\Phi$  wirkt in den Impulsgleichungen (2.20–2.22) als viskose Senke (Impulsverlust) und in der Energiegleichung (2.23) als Quelle (verteilte Wärmequelle).

Von den Gleichungen (2.19–2.23) ausgehend sind unter bestimmten Annahmen weitere Vereinfachungen zu erreichen. Wir wollen zunächst die inkompressible Variante dieser Gleichungen diskutieren. Wenn die Dichte  $\rho$  konstant bleibt, was für Flüssigkeiten immer und für Gase im Bereich kleiner Mach-Zahlen  $Ma < 0.3$  (vgl. (2.5)) näherungsweise erfüllt ist, so können die Erhaltungsgleichungen (2.19–2.23) in der **inkompressiblen Form** benutzt werden. Wir haben dann

a) Kontinuitätsgleichung:

$$u_x + v_y + w_z = 0 , \quad (2.25)$$

b) Impulserhaltung:

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = -p_x + k_x + \mu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) , \quad (2.26)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) = -p_y + k_y + \mu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) , \quad (2.27)$$

$$\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z + k_z + \mu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) , \quad (2.28)$$

c) Energieerhaltung:

$$\rho c_p (T_t + uT_x + vT_y + wT_z) = \lambda(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \mu\Phi_{ink} . \quad (2.29)$$

Die inkompressible Dissipationsfunktion  $\Phi_{ink}$  vereinfacht sich aufgrund der Kontinuitätsgleichung (2.25) zu

$$\Phi_{ink} = 2(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2 . \quad (2.30)$$

Ausgehend von Gleichungssatz (2.19–2.24) sind zwei weitere Vereinfachungen möglich, je nachdem ob die viskosen Terme oder die Trägheitsterme in den Impulsgleichungen (2.20–2.22) klein sind. Das Verhältnis der Trägheits- und der Impulskräfte wird dimensionslos durch die Reynolds-Zahl (vgl. (2.4)) erfaßt. Im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  (oder  $Kn \rightarrow 0$ , vgl. (2.6, 2.7, 2.9)) werden die viskosen Kräfte sehr klein und dürfen vernachlässigt werden. Dies ergibt die Euler-Gleichungen. Bezüglich der Energieerhaltung wird für übliche Fluide wie Luft oder Wasser für die Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.31)$$

die Größenordnung  $Pr \sim 1$  erhalten. In der Folge kann für die Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{u_0 l_0}{\kappa} = RePr \quad (2.32)$$

sofort  $Pe \rightarrow \infty$  abgeleitet werden. Die Péclet-Zahl charakterisiert das Verhältnis aus konvektiv und diffusiv transportierter Wärme. Deshalb entfallen für  $Pe \rightarrow \infty$  in der Energieerhaltung (2.23) die (diffusiven) Wärmeleiterte. Wir haben demnach die **Euler-Gleichungen** (ergänzt durch Massen- und Energieerhaltung) gemäß

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 , \quad (2.33)$$

b) Impulserhaltung (Euler):

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y + ww_z) = -p_x + k_x , \quad (2.34)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y + ww_z) = -p_y + k_y , \quad (2.35)$$

$$\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z + k_z , \quad (2.36)$$

c) Energieerhaltung:

$$\rho c_p (T_t + uT_x + vT_y + wT_z) = p_t + up_x + vp_y + wp_z . \quad (2.37)$$

Der letzte Grenzfall ergibt sich für  $Re \rightarrow 0$ , d.h. wenn die Trägheitskräfte sehr klein sind und deshalb vernachlässigt werden können. Dies ergibt die Stokesschen Gleichungen. Aufgrund von (2.32) kann für übliche Fluide mit  $Pr \sim 1$  unmittelbar  $Pe \rightarrow 0$  gefolgert werden. Somit darf auch die konvektiv transportierte Wärme in der Energieerhaltung (2.23) vernachlässigt werden. Es ergeben sich deshalb die **Stokesschen Gleichungen** (ergänzt durch Massen- und Energieerhaltung) zu

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 , \quad (2.38)$$

b) Impulserhaltung (Stokes):

$$\begin{aligned} 0 &= -p_x + k_x \\ &+ \mu \left[ \left\{ 2u_x - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_x + \{u_y + v_x\}_y + \{w_x + u_z\}_z \right] , \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -p_y + k_y \\ &+ \mu \left[ \{u_y + v_x\}_x + \left\{ 2v_y - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_y + \{v_z + w_y\}_z \right] , \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$0 = -p_z + k_z \tag{2.41}$$

$$+ \mu \left[ \{w_x + u_z\}_x + \{v_z + w_y\}_y + \left\{ 2w_z - \frac{2}{3}(u_x + v_y + w_z) \right\}_z \right] ,$$

c) Energieerhaltung:

$$0 = \lambda (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + (p_t + up_x + vp_y + wp_z) + \mu \Phi . \tag{2.42}$$

### 2.3.2 Randbedingungen an Fluid/Festkörper-Grenzflächen

Nach Auflistung der Erhaltungsgleichungen und Zuordnung der Annahmen wollen wir uns mit den Randbedingungen an festen Rändern beschäftigen. Hierzu konzentrieren wir uns auf ein ebenes Problem, wie in Abbildung 4 gezeigt. Die Wand befindet sich bei  $y = 0$ . Zunächst müssen wir feststellen, daß die Erhaltungsgleichungen in der Regel partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung sind. Die einzige Ausnahme stellen die Euler-Gleichungen (2.33–2.37) dar, welche aufgrund des Wegfalls der diffusiven Terme von 1. Ordnung bleiben. Dies hat Konsequenzen bei der Vorgabe der Randbedingungen: Wir können kinematisch nur eine Randbedingung für die normale Geschwindigkeitskomponente vorgeben,  $v(y = 0) = v_W$ , wobei  $v_W$  die normale Geschwindigkeit der Wand bezeichnet. Bei Fehlen der viskosen Terme können wir für die tangentielle Komponente  $u(y = 0)$  keinerlei Forderung erfüllen. Für die Temperatur (oder andere transportierte Skalare) kann an der Wand ebenfalls keine Bedingung gestellt werden. Dies hängt damit zusammen, daß lediglich der konvektive Transport vorliegt und der diffusive Transport in der wandnormalen Richtung fehlt. An der Wand sind deshalb wegen  $v(y = 0) = v_W$  in der Regel keine Flüsse in Normalenrichtung möglich und deshalb verschwindet  $T_y(y = 0)$ . Diese Einschränkung bei der Vorgabe der Randbedingungen bleibt auf die **Euler-Gleichungen** begrenzt.

Alle übrigen Erhaltungsgleichungen, nämlich die kompressiblen oder inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen und die Stokesschen Gleichungen, erlauben die Vorgabe von Randbedingungen für die normale und für die tangentielle Geschwindigkeitskomponente. In der Regel bedeutet dies die Haftbedingung, d.h.  $u(y = 0) = u_W$ ,  $v(y = 0) = v_W$ , wobei für ruhende Wände  $u_W = v_W = 0$  ist. Die Vorgabe einer Größe auf dem Rand wird als Dirichlet–Randbedingung (RB. 1. Art) bezeichnet. Für die Temperatur (oder andere Skalare) können Bedingungen der Form  $T(y = 0) = T_W$  (RB. 1. Art) oder der Form  $T_y(y = 0) = \textit{konstant}$  gestellt werden. Die Vorgabe der Ableitung einer Größe auf dem Rand wird als Neumann-Randbedingung (RB. 2. Art)

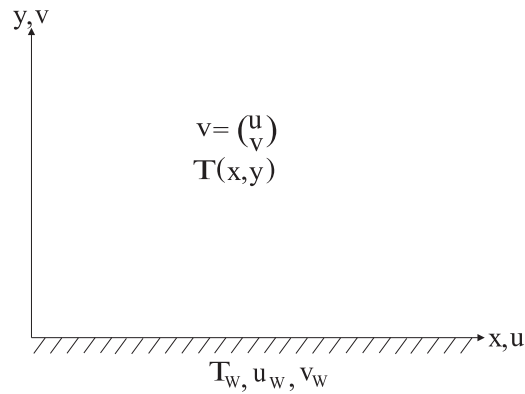


Abbildung 4: Ebenes Koordinatensystem an einer Wand bei  $y = 0$  mit Bezeichnungen.

bezeichnet. Neben der Vorgabe der Temperatur selbst oder ihrer Ableitung auf dem Rand ist auch die kombinierte Vorgabe beider Größen in einer sogenannten Randbedingung 3. Art möglich. Diese hat die Form  $AT_y(y = 0) + BT(y = 0) + C = 0$ . Sowohl für die Geschwindigkeitskomponenten als auch für die Temperatur (oder andere Skalare) geht somit der Wert im Fluid bei Annäherung an die Wand stetig in den Wert der Wand über.

Unterstellen wir beispielsweise einen Sprung der Geschwindigkeitskomponenten (Rutschen) oder der Temperatur an der Wand, so würde dies zu unendlich großen Gradienten  $u_y, v_y, T_y$  führen, welche mit unendlich großen Flüssen sofort den Ausgleich herbeiführen würden. Diese kontinuumsmechanische Vorstellung setzt aber ein thermodynamisches Gleichgewicht voraus. Ein solches Gleichgewicht kann sich nur einstellen, wenn genügend Stöße zwischen Fluid- und Festkörpermolekülen stattfinden, um den Impuls und die Wärme zwischen Fluid und Wand zu übertragen. Für Gase ist die Stoßfrequenz ausreichend groß, solange  $Kn < 0.01$  gilt. Für verdünnte Gase hingegen, im Bereich  $Kn > 0.01$ , wird die Kollisionsfrequenz zu niedrig, sodaß sich kein thermodynamisches Gleichgewicht einstellen kann. Die Folge sind Sprünge der Geschwindigkeitskomponenten (Rutschen) und der Temperatur (sowie anderer Skalare). Für verdünnte Gase ist von Navier beispielsweise das Rutschgesetz

$$u(y = 0) - u_W = L_s u_y(y = 0) \quad (2.43)$$

eingeführt worden. Formal ist dies ebenfalls eine Randbedingung 3. Art, die aus einer Rutschlänge  $L_s$  und der Scherrate  $u_y(y = 0)$  die aktuelle Rutschgeschwindigkeit  $u(y = 0)$  bestimmt. Für  $L_s \rightarrow 0$ , d.h. für sehr kleine Rutschlängen, erhalten wir im übrigen

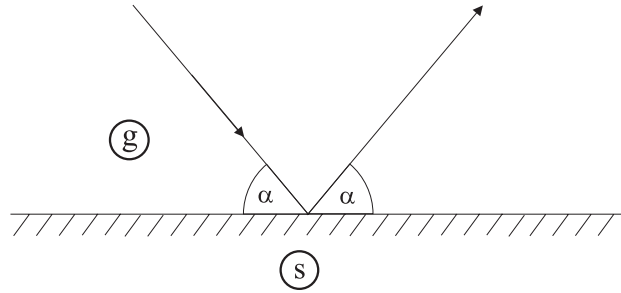


Abbildung 5: Spiegelsymmetrische Reflexion von Gasmolekülen an der perfekt glatten Wand nach Maxwell (1879).

die Haftbedingung. Bevor wir nun quantitative Gesetze ableiten, müssen wir uns auf das betrachtete Fluid festlegen.

**2.3.2.1 Gase an festen Wänden** Wir wollen zunächst zwei idealisierte Grenzfälle diskutieren, wobei wir gleiche Temperatur von Fluid und Wand unterstellen. Maxwell (1879) charakterisiert in seiner kinetischen Theorie verdünnter Gase das Verhalten sphärischer Gasmoleküle an (molekular) glatten Festkörpern (vgl. Abbildung 5). Hiernach erhält jedes Gasmolekül bei Kollision mit der Wand seinen tangentialen Impuls dadurch, daß eine spiegelsymmetrische Reflexion auftritt. Somit ändert sich ausschließlich der normale Impuls der Gasmoleküle. Durch den fehlenden Austausch von tangentialem Impuls zwischen Gasmolekülen und Wand folgt ein perfektes Rutschen der Gasmoleküle an der Wand – das Gas überträgt keine Schubspannung auf die Wand.

Im zweiten Grenzfall unterstellen wir eine sehr rauhe Wand (vgl. Abbildung 6). Durch die Rauigkeit erfolgt die Reflektion der Gasmoleküle statistisch verteilt in alle Richtungen. Im Mittel haben deshalb die Gasmoleküle nach der Reflektion keinen tangentialen Impuls mehr. Das Übertragen des tangentialen Impulses an die Wand bedeutet eine endliche Schubspannung. Eine Kräftebilanz führt auf das Rutschgesetz

$$u(y = 0) - u_W = \Lambda u_y(y = 0) , \tag{2.44}$$

mit der mittleren freien Weglänge  $\Lambda$ . Diese Reflektion wird als diffuse Reflektion bezeichnet, weil zwischen Einfallrichtung und (zufälliger) Reflektionsrichtung keine Korrelation besteht.

Reale Wände sind nun dadurch gekennzeichnet, daß ein (kleiner) Teil der Gasmoleküle spiegelsymmetrisch und ein (großer) Teil diffus reflektiert wird. Um die Wand

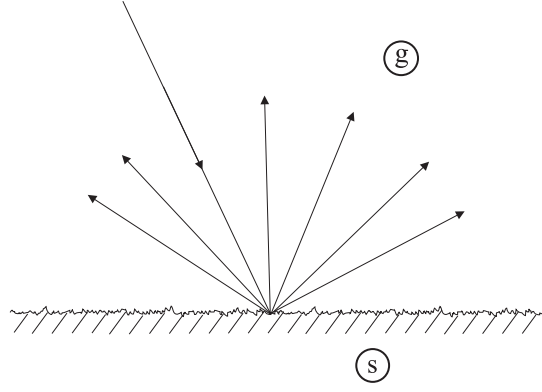


Abbildung 6: Diffuse Reflektion von Gasmolekülen an einer perfekt rauhen Wand.

charakterisieren zu können, führen wir einen Reflektionskoeffizienten  $\sigma_v$  ein, der den Anteil der diffus reflektierten Moleküle an der Gesamtzahl der Reflexionen angibt.  $\sigma_v$  findet sich im Bereich  $\sigma_v = 0.2 - 0.8$ , wobei der Wert 0.2 für ausnehmend glatte Flächen auftritt und der Wert 0.8 für technisch relevante (rauhe) Flächen, welche einen großen Anteil diffuser Reflexionen haben. Unter Verwendung von  $\sigma_v$  kann das Rutschgesetz (2.44) gemäß

$$u(y=0) - u_W = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \Lambda u_y(y=0) \quad (2.45)$$

verallgemeinert werden. Für  $\sigma_v \rightarrow 1$  geht (2.45) in (2.44) über und beschreibt dann die perfekt diffus reflektierende Grenzfläche. Der Grenzfall  $\sigma_v \rightarrow 0$  führt in (2.45) zur vollständigen Entkopplung von Rutschgeschwindigkeit und Scherrate, was letztlich perfektes Rutschen bedeutet.

In der Regel sind die Verhältnisse nicht isotherm, sodaß weitergehend der Einfluß der Fluid- und Wandtemperatur berücksichtigt werden muß. Für  $T \neq T_W$  ist die Rutschbedingung (2.45) zu modifizieren, und eine Bedingung für den Temperatursprung tritt hinzu. Wir haben demnach

$$u(y=0) - u_W = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \Lambda u_y(y=0) + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T(y=0)} T_x(y=0) , \quad (2.46)$$

$$T(y=0) - T_W = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{\Lambda}{Pr} T_y(y=0) . \quad (2.47)$$

In (2.47) tritt, analog zu  $\sigma_v$ , der thermische Kollisionskoeffizient  $\sigma_T$  auf. Formal sind die Kollisionskoeffizienten aus dem tangentialen Impulsfluß  $\tau_i$  und dem Energiefluß  $q_i$  definiert. Es ist

$$\sigma_v = \frac{\tau_g - \tau_r}{\tau_g - \tau_W} , \quad (2.48)$$

$$\sigma_T = \frac{q_g - q_r}{q_g - q_W} . \quad (2.49)$$

Die Indizes stehen für den Gesamtfluß aller Kollisionen ( $g$ ), für den spiegelsymmetrisch reflektierten Fluß ( $r$ ) und für den Fluß an der Wand ( $W$ ). In (2.47) tritt weiterhin das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa = c_p/c_v$  sowie die Prandtl-Zahl  $Pr = \nu/\kappa$  auf. Der zweite Term auf der rechten Seite der Rutschbedingung (2.46) rührt vom „thermischen Kriechen“ her. Hat ein verdünntes Gas an der Wand, beispielsweise infolge der Wandtemperatur  $T_W(x)$ , einen tangentialen Temperaturgradienten  $T_x > 0$ , so kommt es zu einer Geschwindigkeit  $u > u_W$  in Wandnähe. Dieser Umstand wird in einer Knudsen-Pumpe ausgenutzt, welche zum Pumpen verdünnter Gase eingesetzt werden kann und ohne bewegliche Teile das Gas in einem Rohr von der kalten Zone in die warme Zone fördert.

**2.3.2.2 Flüssigkeiten an festen Wänden** Wir haben bereits in Abschnitt 2.1.2 auf die Schwierigkeiten bei der molekularen Behandlung von Flüssigkeiten hingewiesen. Diese Schwierigkeiten sind natürlich auch für die Flüssigkeits/Festkörper-Wechselwirkung zu unterstreichen. Aus der Arbeit von Thompson und Troian (1997), das Problem haben wir bereits in Abbildung 2 diskutiert, können Aussagen zu den Gültigkeitsgrenzen von Randbedingungen auf der Basis von MD-Simulationen abgeleitet werden. In Abbildung 7b ist zum einen die Viskosität  $\mu$  über der Scherrate  $\dot{\gamma}$  aufgetragen. Es wird deutlich, daß unabhängig von der aktuellen Parameterwahl  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $n$  (verschiedene Symbole) die mittlere Viskosität  $\mu$  unabhängig von der Scherrate  $\dot{\gamma}$  bleibt. Die Parameter von Thompson und Troian (1997) charakterisieren mit  $\varepsilon$  die Intensität der Flüssigkeits/Festkörper- Wechselwirkung, mit  $\sigma$  den mittleren Molekülabstand der Flüssigkeitsmoleküle und mit  $n$  das Verhältnis der Moleküldichten in Flüssigkeit und Festkörper.

Der in Abbildung 7b aufgetragene Bereich von Scherraten ist deutlich unterhalb der in (2.10) in Abschnitt 2.1.2 gegebenen Grenze, und die Aussage ist deshalb konsistent mit Loose und Hess (1989). Somit beobachten Thompson und Troian (1997) im ganzen Bereich von Scherraten Newtonsches Verhalten der Flüssigkeit. Die Auswertung der Rutschlänge  $L_s$  in Abbildung 7a (dimensionslos) birgt hingegen eine Überraschung: Bei Steigerung der Scherrate  $\dot{\gamma}$  kommt es für alle Parameterkombinationen bei einer kritischen Scherrate  $\dot{\gamma}_{krit}$  zu einem dramatischen Anstieg der Rutschlänge  $L_s$ . In der Konsequenz bedeutet dies, daß für kleine  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{krit}$  ein konstanter Wert  $L_{lim}$  der



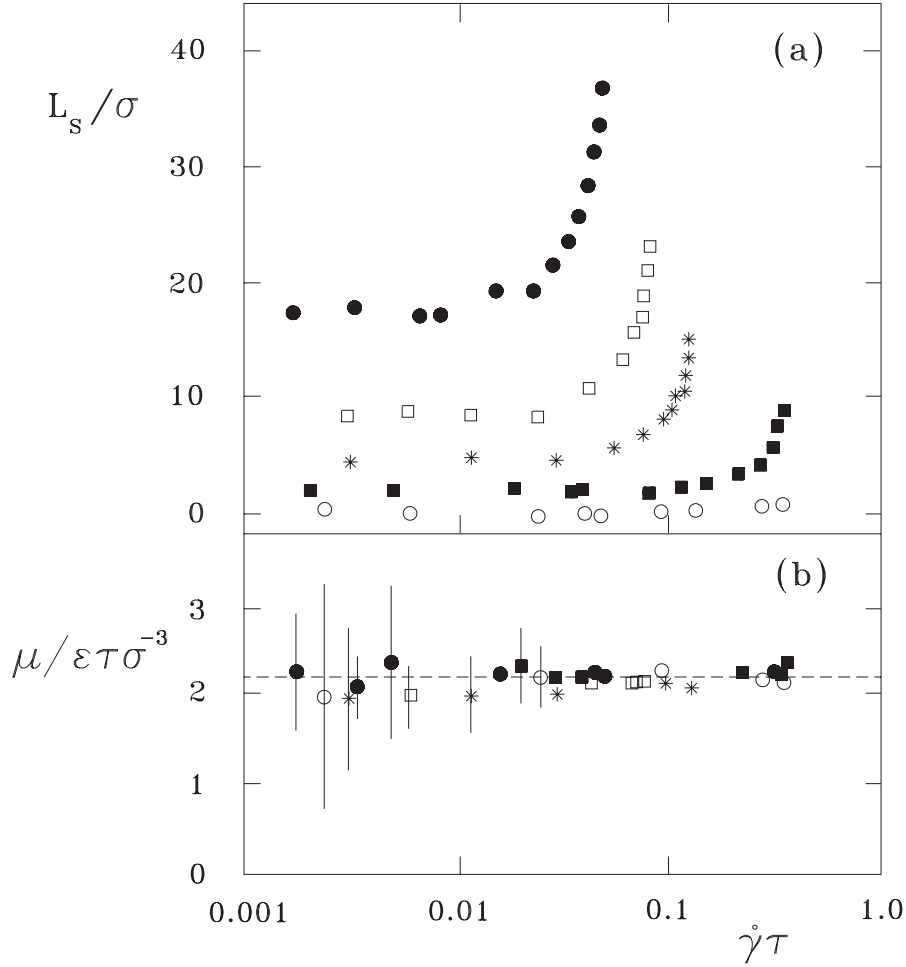


Abbildung 7: Rutschlänge (a) und Viskosität (b) aus MD-Simulationen einer Couette-Strömung nach Thompson und Troian (1997) für eine idealisierte Flüssigkeit.

Rutschlänge die Gültigkeit der Navier-Rutschbedingung

$$u(y=0) - u_W = L_{lim} u_y(y=0) \quad (2.50)$$

bestätigt. Für  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_{krit}$  wird die Rutschbedingung (2.50) dann nichtlinear, obwohl die Flüssigkeit nach wie vor Newtonsches Verhalten zeigt.

Durch eine geeignete Normierung mit  $L_{lim}$  und  $\dot{\gamma}_{krit}$  in Abbildung 7a gelingt es weiterhin, ein universelles Rutschgesetz

$$\frac{L_s}{L_{lim}} = \left[ 1 - \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{krit}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

abzuleiten. Abbildung 8 zeigt, daß mit der so normierten Rutschlänge alle Datenpunkte auf einer Kurve zusammenfallen.

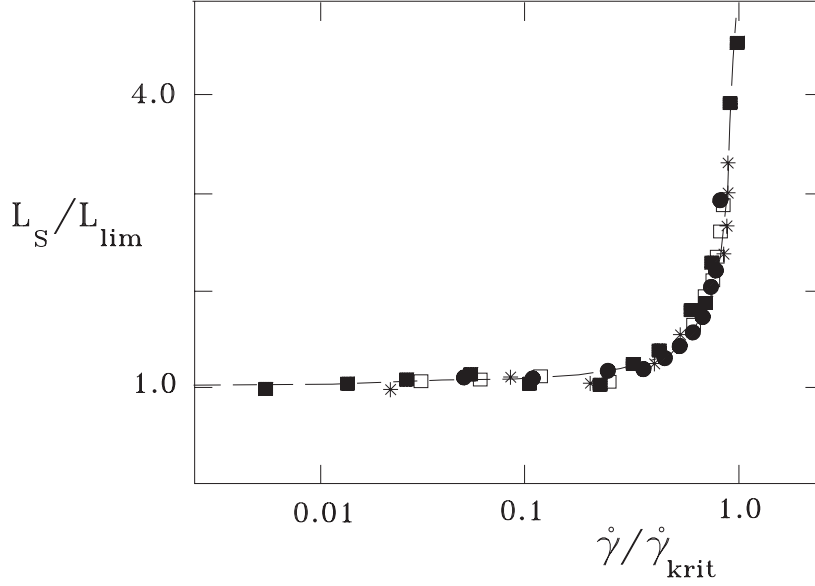


Abbildung 8: Normierte Rutschlänge nach Thompson und Troian (1997) und universelles Rutschgesetz.

Vergleichen wir das Verhalten der Flüssigkeit mit dem Verhalten von Gasen, so wird folgendes deutlich. Für Gase ist im Bereich  $Kn > 0.1$  sowohl der Zusammenbruch der Newtonschen Eigenschaften als auch der Zusammenbruch der Navier-Rutschbedingung aufgetreten. Für die Flüssigkeiten hingegen bleibt das Newtonsche Verhalten bis zu hohen Scherraten erhalten, während das Rutschgesetz von Navier bei deutlich kleineren Scherraten  $\dot{\gamma}_{krit}$  versagt. In der Konsequenz bedeutet das extreme Anwachsen der Rutschlänge bei  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{krit}$ , daß die Impulskopplung zwischen Wand und Flüssigkeit vollständig aufgehoben ist. Kleinste (molekulare) Unterschiede des Festkörpers im Bereich  $\dot{\gamma} \sim \dot{\gamma}_{krit}$  können zu völlig unterschiedlichem makroskopischen Verhalten der Strömung führen.

Wir wollen eine Größenordnungsabschätzung mit Wasser bei Normalbedingungen ( $288\text{ K}$ ,  $1\text{ atm}$ ) durchführen. Die molekulare Masse ist  $m = 3 \cdot 10^{-26}\text{ kg}$ , der mittlere Abstand der Moleküle aus der molekulare Längenskala ist  $\sigma = 2.9 \cdot 10^{-10}\text{ m}$ , und die Intensität der Flüssigkeits/Festkörper-Wechselwirkung ist durch die molekulare Energieskala  $\varepsilon = 3.6 \cdot 10^{-21}\text{ J}$  gegeben. Hieraus errechnet sich gemäß (2.10) eine Scherrate für das Auftreten nicht-Newtonschen Verhaltens von  $\dot{\gamma} = 2.4 \cdot 10^{12}\text{ s}^{-1}$ . Mit einer typischen Parameterkombination in Thompson und Troian (1997) von  $\dot{\gamma}_{krit} \cdot \tau = 0.1$  erhalten wir die kritische Scherrate zu  $\dot{\gamma}_{krit} = 1.2 \cdot 10^{11}\text{ s}^{-1}$  und die Rutschlänge für kleine Scherraten zu  $L_{lim} = 4.9 \cdot 10^{-9}\text{ m}$ . In einem mechanischen Mikrosystem können

wir hohe Scherraten beispielsweise in Lagerungen rotierender Teile erhalten. Wir unterstellen einen Zylinder von  $d = 100 \mu\text{m}$  bei 20000 Umdrehungen/Minute und einem Spalt zwischen Zylinder und Bohrung von  $1 \mu\text{m}$ . Dies führt auf eine Scherrate von  $\dot{\gamma} = 10^5 \text{ s}^{-1}$ . Berücksichtigen wir die Rutschlänge  $L_{lim}$ , so ist die Rutschgeschwindigkeit lediglich  $u(y=0) - u_W = \dot{\gamma}L_{lim} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  bei  $u_W = 0.01 \text{ m/s}$ . Hieraus wird deutlich, daß wir zum einen weit von nicht-Newtonischem Verhalten entfernt sind und zum anderen Rutschlängen von wenigen Nanometern kaum von Bedeutung für die Haftbedingung werden. Andererseits können größere Moleküle durchaus in kritische Bereiche führen.

## 2.4 Gasströmung durch einen Mikrospalt

### 2.4.1 Theoretisches Modell

Wir wollen uns nun mit der Gasströmung in einem Mikrospalt beschäftigen. Es geht hier um das Verständnis der grundlegenden Physik, sodaß wir das ebene Problem in  $(x, y)$  behandeln wollen, um den mathematischen Aufwand nicht unnötig ausufern zu lassen. Eine Skizze des Problems ist in Abbildung 9 gegeben. Der Spalt hat die Höhe  $2d$ , die Länge  $l$ , und ist in der  $z$ -Richtung nicht begrenzt. Das Koordinatensystem liegt in der Mitte des Spalteintritts. Die Strömung wird infolge der Druckdifferenz  $(p_1 - p_0) > 0$  durch den Spalt getrieben. Wir wollen annehmen, daß eine stationäre Strömung auftritt. Weiterhin soll die Strömung isotherm sein, d.h. das Fluid bleibt auf der Temperatur  $T = T_0$ . Dies ist natürlich eine Näherung, weil infolge der viskosen Dissipation in der Wärmetransportgleichung ein Quellterm auftritt. Wir werden die Erwärmung infolge der Dissipation später abschätzen. Wir wollen weiterhin unterstellen, daß sich im Spalt näherungsweise eine parallele Strömung mit  $u \gg v$  einstellt. Dies erlaubt die Gleichungen erheblich zu vereinfachen und ist sicherlich für schlanke Spalte in guter Näherung erfüllt. Für diese Annahmen und Näherungen können wir die Navier-Stokes-Gleichungen für ein kompressibles Fluid aus (2.19–2.23) vereinfachen und erhalten

a) Kontinuitätsgleichung:

$$(\rho u)_x \simeq 0, \quad (2.51)$$

b) Impulserhaltung:

$$\rho u u_x \simeq -p_x + \mu \left( \frac{4}{3} u_{xx} + u_{yy} \right), \quad (2.52)$$

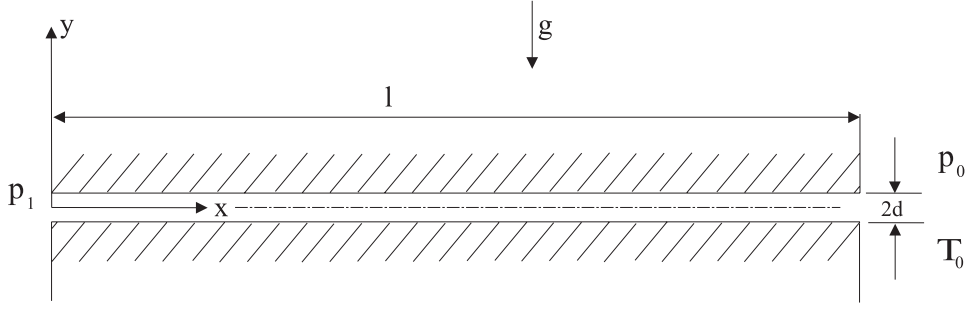


Abbildung 9: Problemskizze zur ebenen Gasströmung durch den Mikroschlitz.

$$0 \simeq -p_y - \rho g + \frac{\mu}{3} u_{xy} . \quad (2.53)$$

In den Gleichungen (2.51–2.53) haben wir im wesentlichen die mathematischen Konsequenzen der Annahmen und Näherungen, nämlich  $w = 0$ ,  $\partial/\partial z = 0$ ,  $\partial/\partial t = 0$ ,  $\Phi \simeq 0$ ,  $T \simeq T_0$ ,  $v \simeq 0$ , ausgenutzt. Die Energieerhaltung braucht in dieser Näherung nicht formuliert zu werden. Schließlich haben wir eine volumetrische Kraft, exemplarisch in Form des Schwereterms, in Gleichung (2.53) präsent. Die Randbedingungen für das Problem in Abbildung 9 sind offensichtlich

$$x = 0, y : p = p_1 , \quad (2.54)$$

$$x = l, y : p = p_0 , \quad (2.55)$$

$$x, y = 0 : u_y = 0 , \quad (2.56)$$

$$x, y = +d : u = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \Lambda u_y , \quad (2.57)$$

$$(x, y = -d : u = +\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \Lambda u_y) . \quad (2.58)$$

In den Gleichungen (2.54) und (2.55) geben wir mangels Kenntnis der Geschwindigkeiten lediglich die Drücke vor. Gleichung (2.56) ist eine Symmetriebedingung für das Geschwindigkeitsfeld. Gleichung (2.57) ist eine Rutschbedingung (vgl. Gleichung (2.46)), wie im übrigen auch Gleichung (2.58). Bei der Anwendung der Rutschbedingung (2.46) müssen wir beachten, daß in Abbildung 4 mit  $y$  die wandnormale Richtung bezeichnet ist. Demzufolge entspricht bei  $y = -d$  die Wandnormale der  $y$ -Koordinate in Abbildung 9, bei  $y = +d$  hingegen ist die Wandnormale durch die negative  $y$ -Richtung gegeben. Die kombinierte Anwendung der Randbedingungen (2.57) und (2.58) stellt die Symmetrie des Stromfeldes sicher, sodaß auf (2.56) verzichtet werden könnte. Für die Rechnung ist es jedoch einfacher (und äquivalent),

die beiden Bedingungen (2.56) und (2.57) zu verwenden. Der Satz von Gleichungen und Randbedingungen (2.51–2.57) unterstellt, daß wir das Fluid noch als Kontinuum behandeln und Rutschen an der Wand zulassen. In Abschnitt 2.1.1 haben wir erkannt, daß dies für Gase mit kleinen Knudsen-Zahlen sichergestellt werden kann. Wir beschränken uns demnach auf  $Kn \leq 0.1$  und müssen später überprüfen, welche Parameter diesen Bereich sicherstellen.

Das Auftreten der dimensionslosen Knudsen-Zahl als Kriterium legt bereits nahe, den Satz von Gleichungen zu entdimensionieren. Grundsätzlich müssen wir zur Bewertung verschiedener Terme in Gleichungen das formale Werkzeug der Skalierung anwenden. Die Skalierung muß die unabhängigen Variablen (Koordinaten) und die abhängigen Variablen ( $u, \rho, p, \dots$ ) sämtlich in eine Größenordnung von eins bringen. Nur so wird es möglich, die Größe von Termen anhand ihrer (dimensionlosen) Vorfaktoren zu bewerten. An dieser Stelle müssen wir alle verfügbaren Informationen über das Problem einbringen. Für das Problem in Abbildung 9 bietet sich die Skalierung

$$X = \frac{x}{l} \quad , \quad Y = \frac{y}{d} \quad , \quad (2.59)$$

$$U = \frac{u}{u_0} \quad , \quad P = \frac{p}{p_0} \quad , \quad (2.60)$$

an. Bei den Koordinaten machen wir von den unterschiedlichen Ausdehnungen des Spaltes in beiden Richtungen Gebrauch. Wir haben so einen kleinen Parameter  $\epsilon = d/l$  implizit in die Formulierung eingebracht. Für Mikrokanäle können wir natürlich  $\epsilon \ll 1$  erwarten. Die Geschwindigkeitsskala  $u_0$  bleibt zunächst offen, den Druck skalieren wir mit dem Austrittsdruck  $p_0$ . Hier wäre auch eine Skalierung mit dem Eintrittsdruck  $p_1$  oder der Druckdifferenz  $(p_1 - p_0)$  möglich, und würde zum gleichen Ergebnis führen. Die Dichte  $\rho$  brauchen wir nicht als abhängige Variable zu behandeln. Unterstellen wir ein ideales Gas, so wird

$$\rho = \frac{p}{RT_0} \quad (2.61)$$

und wir können die Dichte durch den Druck  $p$  ausdrücken. Wir bringen die Skalierung (2.59, 2.60) und die Zustandsgleichung (2.61) in die Erhaltungsgleichungen (2.51–2.53) ein und finden

$$(PU)_X \simeq 0 \quad , \quad (2.62)$$

$$\epsilon U U_X \simeq -\epsilon E u P_X + \frac{1}{Re} \left\{ U_{YY} + \frac{4}{3} \epsilon^2 U_{XX} \right\} \quad , \quad (2.63)$$

$$0 \simeq -\epsilon Eu P_Y - \epsilon \frac{1}{Fr} + \frac{\epsilon^2}{3} \frac{1}{Re} U_{XY} . \quad (2.64)$$

Hierin haben wir die dimensionslosen Kennzahlen Reynolds-Zahl  $Re = u_0 d \rho / \mu$ , Euler-Zahl  $Eu = p_0 / \rho u_0^2$ , und Froude-Zahl  $Fr = u_0^2 / g d$  eingeführt. Wegen  $\rho(x)$  haben wir die Abhängigkeiten  $Eu(x)$  und  $Re(x)$ . Wir betrachten zunächst Gleichung (2.63). Im viskosen Term darf sicherlich wegen  $U_{YY} \gg \frac{4}{3} \epsilon^2 U_{XX}$  der kleine Ausdruck vernachlässigt werden. Weiterhin ist dominant ein Gleichgewicht zwischen (antreibenden) Druckkräften und (dissipativen) viskosen Kräften gegeben. Wollen wir beide Kräfte in der Gleichung belassen, so muß die Größenordnungsbeziehung  $\epsilon Eu \sim 1/Re$  eingehalten werden. Diese Beziehung liefert sofort  $d^2 p_0 \sim \mu l u_0$ , eine Größenordnungsbeziehung für die Geschwindigkeitsskala  $u_0$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die Geschwindigkeitsskala zu  $u_0 = d^2 p_0 / \mu l$  festlegen, wodurch auch die Größenordnungsbeziehungen erfüllt sind. Wir haben dann  $\epsilon Eu = 1/Re$  und können die Impulsgleichung (2.63) gemäß

$$\epsilon Re U U_X \simeq -P_X + U_{YY} \quad (2.65)$$

notieren. Unter Verwendung des festgelegten  $u_0$  wird die zweite Impulsgleichung (2.64) zu

$$0 \simeq -P_Y - \frac{\rho g d}{p_0} + \frac{\epsilon^2}{3} U_{XY} . \quad (2.66)$$

Offensichtlich wird der viskose Term  $\epsilon^2 U_{XY} / 3 \ll 1$  und für Gase in Mikrokanälen ist zudem  $\rho g d \ll p_0$  zu erwarten. Wir haben dann

$$P_Y \simeq 0 \quad \text{bzw.} \quad P = P(X) \quad (2.67)$$

zu erwarten. Dies ist ein erwartetes Ergebnis, welches aussagt, daß quer zum (engen) Spalt kaum Veränderungen des Druckes auftreten – weder infolge des Schwerfeldes noch infolge der viskosen Effekte.

Wir entdimensionieren nun die Randbedingungen (2.54–2.57) mit dem Ergebnis

$$X = 0, Y \quad : \quad P = P_1 = \frac{p_1}{p_0} , \quad (2.68)$$

$$X = 1, Y \quad : \quad P = 1 , \quad (2.69)$$

$$X, Y = 0 \quad : \quad U_Y = 0 , \quad (2.70)$$

$$X, Y = 1 \quad : \quad U = -2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn U_Y . \quad (2.71)$$

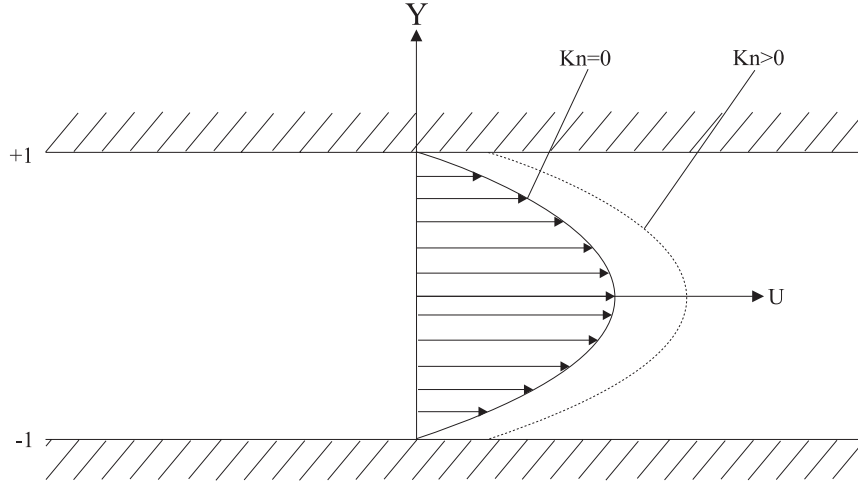


Abbildung 10: Geschwindigkeitsprofil  $U(X, Y)$  im Spalt qualitativ für  $Kn = 0$  und  $Kn > 0$ .

Hierin ist die Knudsen-Zahl  $Kn = \Lambda/2d$  eingeführt. Betrachten wir die Impulsgleichung (2.65), so kann in Mikrokanälen für  $\epsilon Re \ll 1$  der Trägheitsterm vernachlässigt werden, und einer Integration der Gleichung steht nichts mehr im Wege. Wir erhalten durch zweifache Integration bei Beachtung der Randbedingungen (2.70, 2.71)

$$U_Y(X, Y) = P_X Y, \quad (2.72)$$

$$U(X, Y) = -P_X \left\{ \frac{1}{2} (1 - Y^2) + 2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn \right\}. \quad (2.73)$$

Das Profil  $U(X, Y)$  gemäß Gleichung (2.73) ist in Abbildung 10 qualitativ eingetragen. Zunächst erkennen wir für  $Kn = 0$  wegen  $P_X < 0$  eine nach rechts gerichtete Strömung mit parabolischem Profil, welche auf beiden Seiten die Haftbedingung erfüllt. Im kompressiblen Fall wird  $P_X = f(X)$  sein, sodaß die Amplitude des Geschwindigkeitsprofils sich längs des Spaltes ändert. Dies ist ein Ergebnis, welches uns von der kompressiblen Strömung im makroskopischen Spalt vertraut ist. Für  $Kn > 0$  wird nun das Parabelprofil um den Betrag  $2(\sigma_v - 2)KnP_X/\sigma_v$  verschoben, sodaß an der Wand beidseitig Rutschen auftritt. Das Profil ist gestrichelt in Abbildung 10 eingetragen. Die Knudsen-Zahl  $Kn = \Lambda/2d$  hängt über die freie Weglänge  $\Lambda$  vom Druck ab, weshalb wir eine Abhängigkeit  $Kn(X)$  erwarten. Dies impliziert, daß die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Gas und Wand sich längs des Spaltes ändert. Mit abfallendem Druck wird die Knudsen-Zahl anwachsen. Somit erwarten wir am Eintritt des Spaltes (hoher Druck) wenig Rutschen, während am Spaltaustritt (niedriger Druck) starkes Rutschen auftreten wird.

Um mit den Rechnungen fortzufahren, ist es sinnvoll, die Knudsen-Zahl über den Druck auszudrücken. Gemäß Gleichung (2.1) können wir die mittlere freie Weglänge für  $T = T_0$  gemäß

$$\Lambda = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2\mathbb{R}T_0}} \quad (2.74)$$

ausdrücken. Hierin ist die kinematische Viskosität  $\nu = \mu/\rho$  durch die dynamische Viskosität ausgedrückt. Die Zustandsgleichung des idealen Gases (2.61) erlaubt es dann, die Dichte in (2.74) durch den Druck zu ersetzen mit dem Ergebnis

$$\Lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{\frac{\pi\mathbb{R}T_0}{2}} . \quad (2.75)$$

Damit wird die Knudsen-Zahl

$$Kn = \frac{\Lambda}{2d} = \frac{\mu}{2p_0d} \sqrt{\frac{\pi\mathbb{R}T_0}{2}} \frac{p_0}{p} . \quad (2.76)$$

Die Erweiterung des Ausdrucks in (2.76) mit  $p_0$ , dem Druck am Ausgang des Spalts, macht deutlich, daß wir die ortsabhängige Knudsen-Zahl  $Kn$  mit Hilfe des dimensionslosen Drucks  $P = p/p_0$  und der festen Knudsen-Zahl  $Kn_0$  am Spaltaustritt ausdrücken können. Es wird aus (2.76) deshalb

$$Kn = Kn_0 P^{-1} . \quad (2.77)$$

Wir wollen nun den Druckverlauf längs des Spalts sowie den Massenstrom berechnen. Der Massenstrom im Spalt kann sicherlich gemäß

$$\dot{m} = \rho \int_{-d}^{+d} u dy = \frac{2\rho d^3 p_0}{\mu l} \int_0^1 U dY \quad (2.78)$$

ausgedrückt werden. Hierbei sind lediglich dimensionslose Größen eingeführt worden. Wir nutzen wiederum die ideale Gasgleichung (2.61), um  $\rho$  durch den Druck  $p$  auszudrücken und erhalten aus (2.78) bei Verwendung des Geschwindigkeitsfelds aus (2.73)

$$\dot{m} = -\frac{2d^3 p_0^2}{\mu l \mathbb{R} T_0} P P_X \int_0^1 \left[ \frac{1 - Y^2}{2} + 2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn(X) \right] dY . \quad (2.79)$$

Die Integration von (2.79) liefert

$$\dot{m} = -\frac{2d^3 p_0^2}{\mu l \mathbb{R} T_0} \left[ \frac{1}{3} P P_X + 2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn_0 P_X \right] , \quad (2.80)$$



wobei bereits der Zusammenhang (2.77) eingeflossen ist. Selbstredend muß der Massenstrom im Spalt an jeder Stelle  $X$  gleich sein. Es muß demnach gelten

$$PP_X + 6 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn_0 P_X = \textit{konstant} . \quad (2.81)$$

Diese Forderung stellt eine Kontinuitätsaussage dar. Sie ist äquivalent zur integrierten Form der Kontinuitätsgleichung (2.62). Der Ausdruck (2.81) kann bei näherer Betrachtung wegen  $PP_X = 1/2(P^2)_X$  integriert werden mit dem Ergebnis

$$P^2 + 12 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn_0 P = C_1 X + C_2 . \quad (2.82)$$

Wir nutzen die Druckrandbedingungen (2.69, 2.71) aus, um die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen. Das Ergebnis ist eine quadratische Gleichung für  $P$ , nämlich

$$P^2 + AP - P_1(P_1 + A)(1 - X) - X(1 + A) = 0 . \quad (2.83)$$

Hierbei haben wir die Abkürzung  $A = 12(2 - \sigma_v)Kn_0/\sigma_v$  eingefügt. Die Lösung des Polynoms (2.83) ist dann

$$P_{1/2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + P_1(P_1 + A)(1 - X) + X(1 + A)} , \quad (2.84)$$

bzw. für  $Kn_0 = 0$  erhalten wir

$$P_{1/2} = \pm \sqrt{P_1^2(1 - X) + X} . \quad (2.85)$$

Das Ergebnis für den Druckverlauf bei verschiedenen Eintrittsdrücken  $P_1 = 2, 3, 5, 10$  ist in Abbildung 11 zusammengefaßt. Wir erkennen in Form der durchgezogenen Kurven den Druckverlauf für  $Kn_0 = 0$ . Es ist deutlich, daß insbesondere für große  $P_1$  der Druckverlauf deutlich kompressible Effekte zeigt. Für kleine  $P_1$  hingegen wird der Druckabfall nahezu linear, wie wir es im inkompressiblen Fall erwarten. Die gestrichelten Kurven zeigen das Ergebnis für  $A = 2$ , was einer Knudsen-Zahl am Austritt von  $Kn_0 \simeq 0.17$  ( $\sigma_v \simeq 1$ ) entspricht. Wir erkennen, daß im Ein- und Austrittsbereich der Druck durch die Randbedingungen aufgeprägt bleibt. Im mittleren Bereich des Spalts treten durch das Rutschen jedoch niedrigere Drücke auf. Das negative Vorzeichen vor der Wurzel in den Gleichungen (2.84, 2.85) liefert im übrigen physikalisch nicht sinnvolle, negative Drücke. Ausgehend vom Druckverlauf (2.84) können wir nun den Massenstrom im Spalt mithilfe von Gleichung (2.80) berechnen. Hierzu ist es ausreichend, den Ausdruck an der Stelle  $X = 1$  zu betrachten, weil der Massenstrom

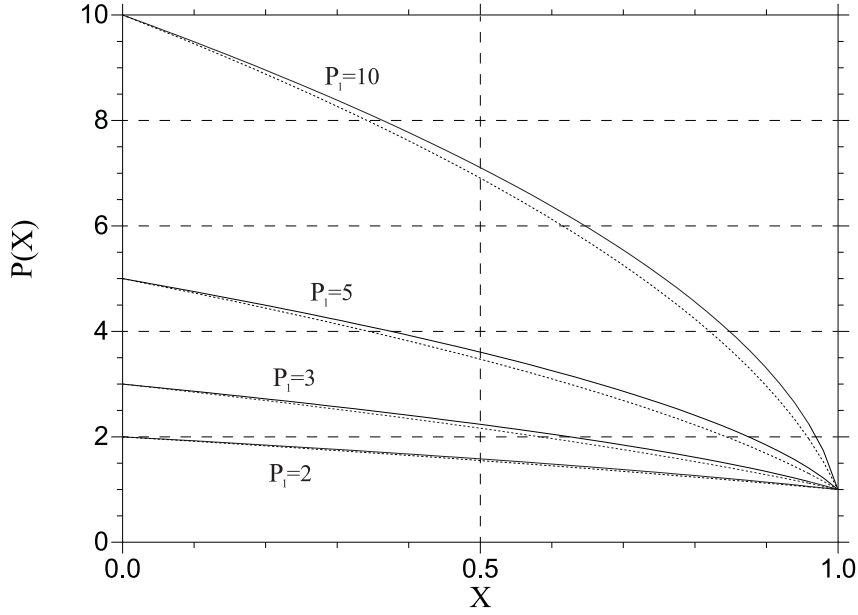


Abbildung 11: Druckverlauf  $P(X)$  für  $Kn_0 = 0$  (durchgezogen) und für  $A = 12(2 - \sigma_v)Kn_0/\sigma_v = 2$  (gestrichelt).

an jeder Stelle gleich bleibt. Wir benötigen demnach  $P_X(X = 1)$  und  $P(X = 1) = 1$ . Aus Gleichung (2.84) verschaffen wir uns durch Differentiation den Druckgradienten und erhalten

$$P_X(X = 1) = -\frac{(P_1 + A)P_1 - (1 + A)}{(2 + A)} . \quad (2.86)$$

Damit wird der Massenstrom

$$\dot{m} = \frac{d^3 p_0^2}{3\mu l \mathbb{R} T_0} [(P_1 + A)P_1 - (1 + A)] , \quad (2.87)$$

bzw. für  $Kn_0 = 0$

$$\dot{m} = \frac{d^3 p_0^2}{3\mu l \mathbb{R} T_0} [P_1^2 - 1] . \quad (2.88)$$

Der Massenstrom ist damit einerseits vom Eintrittsdruck  $P_1$  abhängig – ein erwartetes und bekanntes Ergebnis. Andererseits ist er über  $A$  von der Knudsen-Zahl  $Kn_0$  und von  $\sigma_v$  abhängig, d.h. vom Rutschen des Gases an der Wand. Das Ergebnis ist in Abbildung 12 dargestellt. Wir erkennen anhand der durchgezogenen Kurve die quadratische Abhängigkeit des Massenstroms für  $Kn_0 = 0$ . Für  $A = 2$  ( $Kn_0 \simeq 0.17$ ,  $\sigma_v \simeq 1$ ) finden wir infolge des Rutschens einen deutlich größeren Massenstrom, wie

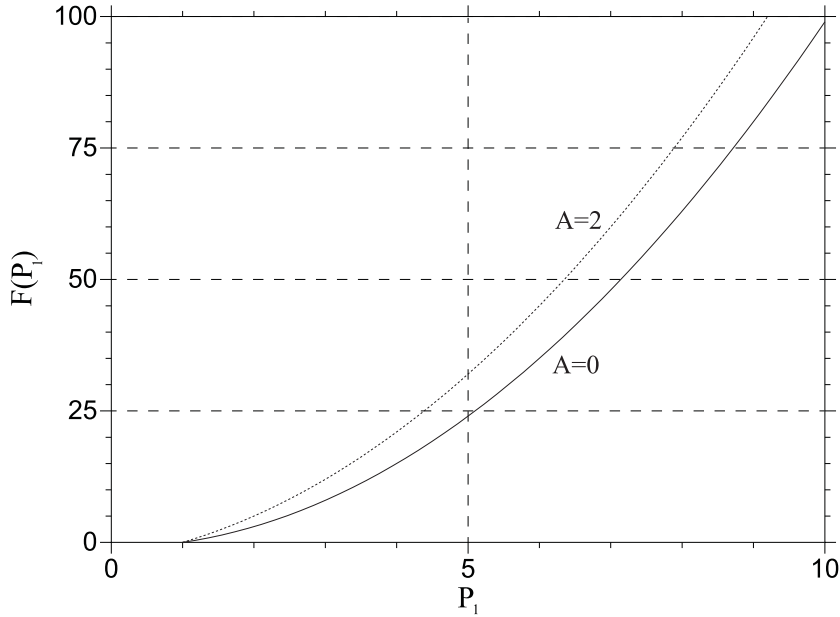


Abbildung 12: Dimensionsloser Massenstrom  $F(P_1) = 3\mu l \Re T_0 \dot{m} / (d^3 p_0^2)$  für  $Kn_0 = 0$  (durchgezogen) und für  $A = 12(2 - \sigma_v)Kn_0/\sigma_v = 2$  (gestrichelt).

anhand der gestrichelten Kurve deutlich wird. Dieses Ergebnis entspricht in der Tat der physikalischen Vorstellung, daß bei Rutschen des Fluids an den Wänden größere Massenströme möglich werden.

Das vorgestellte theoretische Modell ist bis zu Knudsen-Zahlen  $Kn \leq 0.1$  gültig. Weil die größte Knudsen-Zahl am Austritt auftritt, haben wir  $Kn_0 \leq 0.1$  zu fordern. Besok, Karniadakis und Trimmer (1996) haben ein verbessertes Rutschmodell abgeleitet, welches weitere nichtlineare Terme in  $Kn$  berücksichtigt. Dieses verbesserte Modell sollte eine Gültigkeit bis  $Kn_0 \leq 0.5$  besitzen. Wir wollen im folgenden einen Vergleich des Modells mit Experimenten aus der Literatur anstellen.

#### 2.4.2 Vergleich mit Experimenten

In der Literatur bei Shih, Ho, Liu und Tai (1996) finden wir Experimente, die sich eignen, die oben dargestellte Theorie zu überprüfen. In diesem Experiment strömt Helium oder Stickstoff durch einen Spalt von  $2d = 1.2 \mu m$  Höhe und  $l = 4000 \mu m$  Länge. Die Tiefe des Spaltes ist natürlich nicht unbegrenzt wie in der oben diskutierten,

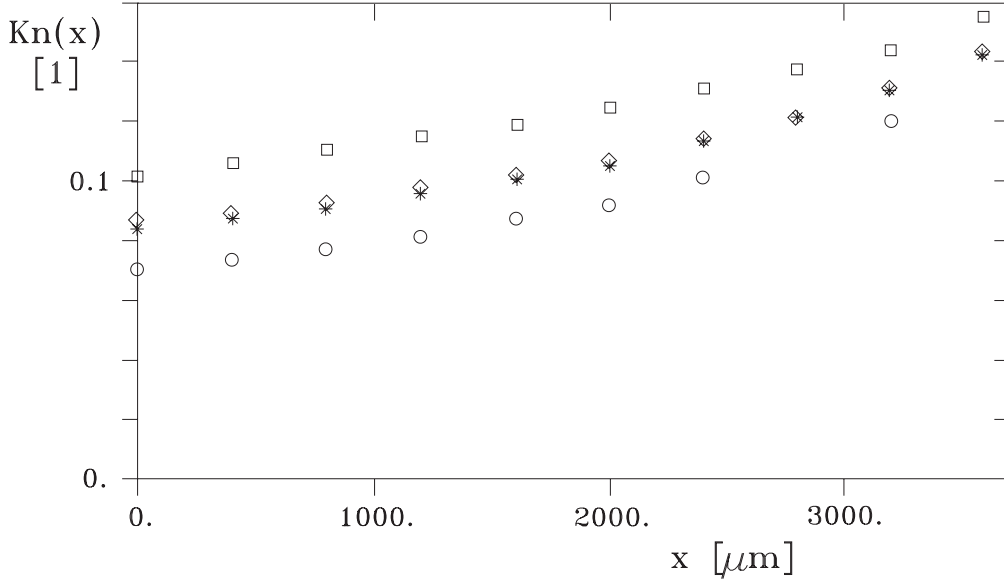


Abbildung 13: Knudsen-Zahl  $Kn(x)$  längs des Spalts für Helium nach Shih et al. (1996). Die Symbole sind für die Eintrittsdrücke  $p_1 = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ( $\square$ ),  $2.35 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ( $\Delta$ ),  $2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (\*),  $3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (o) erhalten. Am Austritt herrscht der Umgebungsdruck  $p_0$ .

zweidimensionalen Theorie. Vielmehr ist im Experiment die Tiefe auf  $\Delta z = 40 \mu\text{m}$  begrenzt. Im Spalt sind Drucksensoren in die Wände integriert, sodaß eine Messung  $p(x)$  anhand von 13 Sensoren möglich ist. Weiterhin werden der Massenstrom des Gases sowie die Drücke am Spalteintritt und -austritt erfaßt, und die Strömung ist in guter Näherung isotherm. Wir wollen an dieser Stelle exemplarisch die Ergebnisse für Helium diskutieren. In Abbildung 13 ist die aus dem lokalen Druck bestimmte Knudsen-Zahl  $Kn$  längs des Spaltes, d.h.  $Kn(x)$ , für verschiedene Eintrittsdrücke  $p_1$  aufgetragen. Wir erkennen zunächst die größte Knudsen-Zahl für den kleinsten Eintrittsdruck (Symbole  $\square$ ) und bei einer Erhöhung des Eintrittsdruckes fallende Knudsen-Zahlen. Weiterhin steigt die Knudsen-Zahl längs  $x$  stetig an, sodaß sie jeweils am Austritt des Spaltes maximal ist. Es wird deutlich, daß die Knudsen-Zahlen im Bereich  $Kn \leq 0.16$  durchaus bis in den Übergangsbereich reichen, sodaß die Anwendung der Rutschbedingung nötig wird.

Der Druckverlauf  $p(x) - p_0$  längs des Spalts ist in Abbildung 14 für verschiedene Eintrittsdrücke dargestellt. Wir erkennen in allen Fällen einen nichtlinearen Abfall vom Eintrittsdruck  $p_1$  auf den Austrittsdruck  $p_0$ . Im Fall der kleinsten Druckdifferenz (Symbole  $\square$ ) kommt der Verlauf einem linearen Abfall recht nahe. Die durchgezogenen Kurven sind mit dem theoretischen Modell für  $\sigma_v = 1.162$  erhalten (vgl. Gleichung

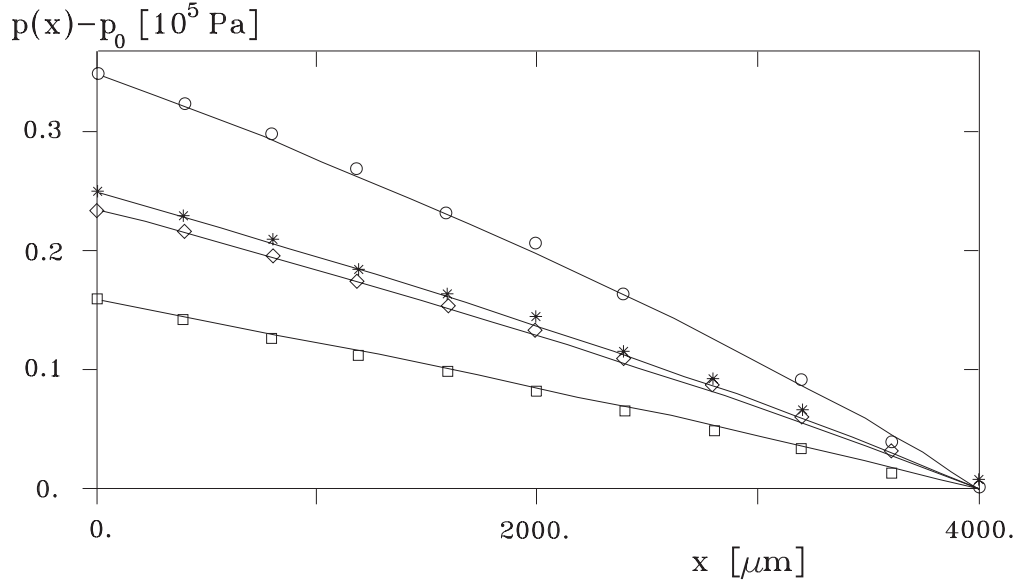


Abbildung 14: Druckverlauf  $p(x) - p_0$  längs des Spalts für Helium nach Shih et al. (1996). Die verschiedenen Symbole sind für verschiedene Eintrittsdrücke erhalten.

(2.84)) und dimensionsbehaftet dargestellt.

Abschließend wollen wir den gemessenen Massenstrom  $\dot{m}$  als Funktion des Eintrittsdrucks diskutieren. Dies ist in Abbildung 15 dargestellt. Wir erkennen zum einen die Meßwerte in Form der Symbole. Weiterhin sind die theoretischen Ergebnisse bei Anwendung der Haftbedingung ( $A = 0$ ) in Form der durchgezogenen Kurve eingetragen. Es ist aus einem Vergleich mit den Meßwerten deutlich, daß die Haftbedingung nicht das gemessene Ergebnis für den Massenstrom wiedergibt. Selbst bei Berücksichtigung des Meßfehlers liefert die Haftbedingung deutlich kleinere Massenströme. Die Einführung der Rutschbedingung mit  $\sigma_v = 1.162$  im Modell (vgl. Gleichung (2.87)) führt hingegen zu einer guten Übereinstimmung der gestrichelten Kurve mit den experimentellen Meßpunkten. Der Wert  $\sigma_v = 1.162$ , für welchen optimale Übereinstimmung zwischen den experimentellen Daten und dem Modell auftritt, ist offensichtlich durch Meßfehler verfälscht. In allen Fällen muß im Modell  $\sigma_v \leq 1$  sein. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Experimente von Shih et al. (1996) mit Stickstoff zu ähnlichen Ergebnissen führen, wobei in diesem Fall die Knudsen-Zahl im Bereich  $Kn \leq 0.05$  bleibt.

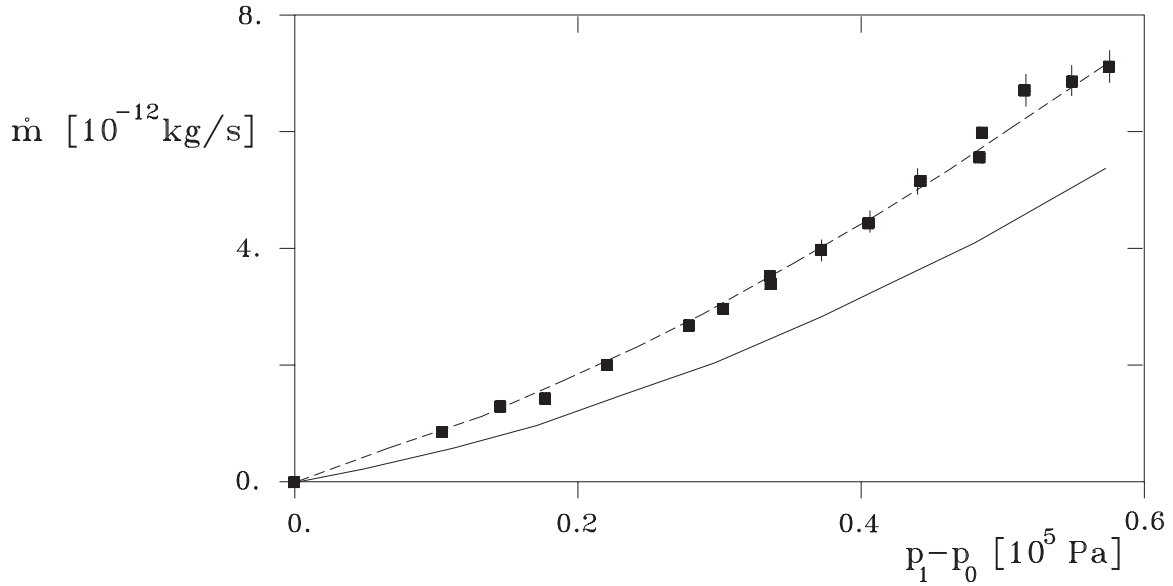


Abbildung 15: Massenstrom  $\dot{m}(p_1)$  als Funktion der Druckdifferenz  $(p_1 - p_0)$  über dem Kanal. Die durchgezogene Kurve ist theoretisch mit der Haftbedingung erhalten ( $A = 0$ ), die gestrichelte Kurve für Rutschen mit  $\sigma_v = 1.162$ . Die Symbole sind Meßwerte und Fehlerbalken.

## 2.5 Flüssigkeitsströmung im Mikropalt mit elektrischer Grenzschicht

### 2.5.1 Theoretisches Modell an einer allgemeinen Wand

Wir wollen uns mit der Auswirkung elektrischer Grenzschichten in Mikrokanälen beschäftigen. Eine Flüssigkeit in einem Mikrokanal beliebiger Geometrie ist in ihrem Innern sicherlich elektrisch neutral. Dies hängt damit zusammen, daß die Moleküle von gleichartigen Molekülen umgeben sind und eine gleiche Anzahl von positiven und negativen Ladungsträgern (Protonen, Elektronen) sich bei homogener Umgebung kompensieren. Analog können wir davon ausgehen, daß ein Festkörper, wie die Wand des Mikrokanals, im Innern elektrisch neutral ist. An der Grenze zwischen Flüssigkeit und Wand hingegen treffen unterschiedliche Moleküle mit verschiedener Anzahl von Ladungsträgern aufeinander. Hier können demnach Wechselwirkungen zwischen den Ladungsträgern beider Molekülarten auftreten. In der Folge kommt es sowohl in der Flüssigkeit als auch im Festkörper unmittelbar an der Grenzfläche zu einer Zone, welche elektrisch nicht neutral ist – der elektrischen Grenzschicht. Für die Ladungsdichte

in der Flüssigkeit  $\rho_e(y)$  kann die Näherung

$$\rho_e(y) \simeq -q_W \frac{1}{l_D} e^{-y/l_D} \quad (2.89)$$

angegeben werden. Diese Näherung ist mit der Debye-Hückel-Linearisierung für schwache elektrische Potentiale aus den Boltzmann-Verteilungen der Ladungsträger abgeleitet (vgl. Anderson (1989)). In (2.89) ist  $q_W$  die Ladungsdichte auf der Wand (in  $C/m^2$ ) und  $l_D$  ist die Debye-Länge. Die Ladungsdichte auf der Wand  $q_W$  ist gemäß  $q_W = \tilde{\epsilon}\zeta/l_D$  mit dem sogenannten Zeta-Potential  $\zeta$  verknüpft. Das Zeta-Potential spiegelt die Differenz des Potentials zwischen dem Innern der Flüssigkeit und der Wand wieder.  $\tilde{\epsilon}$  ist hier die Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit.

Zunächst ist festzustellen, daß die Dicke der elektrischen Grenzschicht recht klein ist,  $l_D$  kann hierfür als Maß dienen, wobei typisch  $l_D < 1 \mu m$  auftritt. Aus diesem Grund dürfen elektrische Grenzschichten in der makroskopischen Strömungsmechanik bedenkenlos vernachlässigt werden. An Grenzflächen muß man aber, selbst in der makroskopischen Strömungsmechanik, Hilfskonstruktionen wie die Grenzflächenspannung einführen, um beispielsweise die Auswirkung der Molekülwechselwirkung an flüssig/gasförmig-Grenzflächen zu erfassen.

In Mikrokanälen kann eine elektrische Grenzschicht nun einen beträchtlichen Anteil des Kanals einnehmen. Wir müssen uns deshalb über ihre Auswirkungen klar werden. Für die Strömungsmechanik müssen die auf das Fluid wirkenden Kräfte berücksichtigt werden. Dies bedeutet, daß innerhalb einer elektrisch nicht neutralen Zone in Anwesenheit eines elektrischen Feldes Kräfte zu berücksichtigen sind. Elektrische Felder können hierbei zum einen von außen angelegt sein. Zum anderen führt auch die Strömung selbst zum Transport elektrischer Ladungen und damit zu selbstinduzierten elektrischen Feldern.

Wir konzentrieren uns auf ein ebenes, instationäres Problem in den tangentialen und normalen Koordinaten  $(x, y)$  bei einem angelegten elektrischen Feld  $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ . Das Problem ist in Abbildung 16 skizziert. Der Mikrokanal habe eine allgemeine Geometrie mit einer typischen Abmessung  $d_0$  und einer typischen Geschwindigkeit  $u_0$ . Wir betrachten lediglich eine Wand bei  $y = 0$ , an welcher wir eine elektrische Grenzschicht haben. Wir behandeln die Flüssigkeit inkompressibel und als Newtonsches Medium (vgl. Abschnitt 2.1.2) und berücksichtigen die Schwerkraft an dieser Stelle nicht. So haben wir die Erhaltungsgleichungen mit elektrischen Kräften in der Flüssigkeit

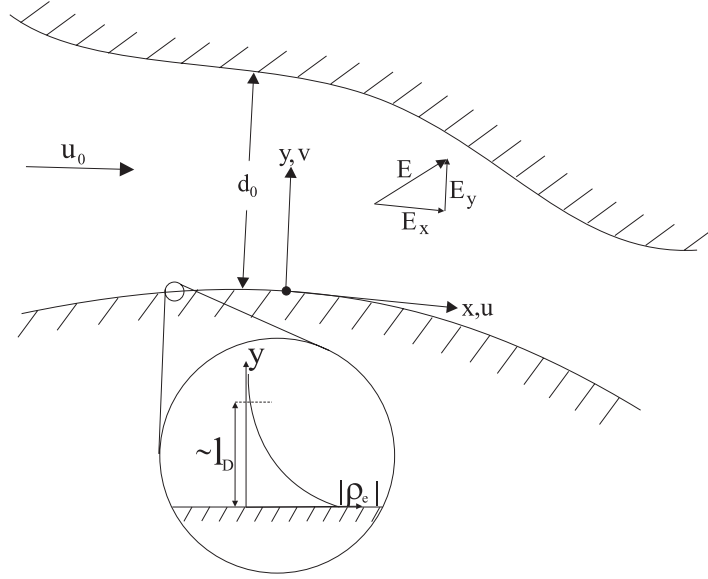


Abbildung 16: Mikrokanal mit elektrischer Grenzschicht.

a) Kontinuitätsgleichung:

$$u_x + v_y = 0 , \quad (2.90)$$

b) Impulserhaltung:

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}) + \rho_e E_x , \quad (2.91)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}) + \rho_e E_y , \quad (2.92)$$

Wir wollen im weiteren die selbstinduzierten Anteile des elektrischen Feldes gegenüber dem (starken) äußeren Feld vernachlässigen. In dieser Näherung wird das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  räumlich konstant. An der Wand können wir die Haftbedingung stellen (vgl. Abschnitt 2.3.2.2), d.h.

$$x, y = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0 . \quad (2.93)$$

Um die Größenordnung der Terme in den Gleichungen (2.89–2.93) abschätzen zu können, entdimensionieren wir mit den Skalen

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{d_0} , \quad (U, V) = \frac{(u, v)}{u_0} , \quad (2.94)$$

$$P = \frac{p}{(\mu u_0 / d_0)} , \quad \tau = \frac{t}{(d_0 / u_0)} . \quad (2.95)$$



Hierbei nutzen wir die Abmessung des Mikrokanals  $d_0$  sowie die Geschwindigkeit  $u_0$  im Kanal. Den Druck entdimensionieren wir mit der viskosen Druckskala. Alternativ wäre auch eine Trägheits-Druckskala (Staudruck  $\rho u_0^2$ ) möglich. Für Reynolds-Zahlen kleiner als eins erwarten wir jedoch, daß die Trägheitskräfte gegenüber den viskosen Kräften in den Hintergrund treten. Die Einführung der Skalen und der Ladungsdichte  $\rho_e(y)$  liefert dann

$$U_X + V_Y = 0 , \quad (2.96)$$

$$Re [U_\tau + UU_X + VU_Y] = -P_X + U_{XX} + U_{YY} - \epsilon^{-1} \Pi_x e^{-Y/\epsilon} , \quad (2.97)$$

$$Re [V_\tau + UV_X + VV_Y] = -P_Y + V_{XX} + V_{YY} - \epsilon^{-1} \Pi_y e^{-Y/\epsilon} , \quad (2.98)$$

$$X, Y = 0 : \quad U = 0, V = 0 . \quad (2.99)$$

Hierin tauchen die die dimensionslosen Parameter

$$Re = \frac{u_0 d_0}{\nu} , \quad (2.100)$$

$$\epsilon = \frac{l_D}{d_0} \ll 1 , \quad (2.101)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_x \\ \Pi_y \end{pmatrix} = \frac{q_W d_0}{\mu u_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} , \quad (2.102)$$

auf.  $Re$  ist die Reynolds-Zahl im Mikrokanal, welche eher klein ist.  $\epsilon$  ist das Verhältnis aus Debye-Länge und Kanalabmessung und ist sicherlich sehr klein.  $\Pi_i$  schließlich ist das Verhältnis aus elektrischen und viskosen Kräften.

Wir wollen das Verhalten der Exponentialfunktion in den Impulsgleichungen (2.97, 2.98) diskutieren. An der Wand für  $Y \rightarrow 0$  wird  $e^{-Y/\epsilon} \rightarrow 1$ . Ist hingegen  $Y$  von der Größenordnung  $Y \sim 1$ , so wird  $e^{-Y/\epsilon} \sim 0$ . Die Funktion fällt also vom Wert eins an der Wand sehr schnell auf den Wert Null ab. Dies bedeutet, daß wir innerhalb des Kanals, wo  $Y \sim 1$  ist, den elektrischen Term vernachlässigen können. Wir wollen deshalb die Lösung aus zwei Teilen zusammensetzen. Zum einen die Kanalströmung unter Ausschluß der wandnahen Zone, und zum anderen die wandnahe Strömung.

(K) Kanalströmung: Es sind hier die Erhaltungsgleichungen

$$U_X + V_Y = 0 , \quad (2.103)$$

$$Re [U_\tau + UU_X + VU_Y] = -P_X + U_{XX} + U_{YY} , \quad (2.104)$$

$$Re [V_\tau + UV_X + VV_Y] = -P_Y + V_{XX} + V_{YY} , \quad (2.105)$$

zu lösen. Die Wand liegt mit der elektrischen Grenzschicht außerhalb des Gültigkeitsbereiches dieser Gleichungen. Wir brauchen hierfür in Wandnähe eine Randbedingung. Diese wird sich hoffentlich aus der wandnahen Lösung ableiten lassen. Zur Lösung der Kanalströmung (2.103–2.105) kann für komplexe Geometrien jedes beliebige kommerzielle CFD-Programm benutzt werden, da hier die üblichen Navier-Stokes-Gleichungen auftreten.

(W) Wandnahe Strömung: In unmittelbarer Wandnähe müssen wir die elektrischen Kräfte berücksichtigen. Dies ist aber nur möglich, wenn wir die adäquate Längenskala benutzen. Innerhalb der elektrischen Grenzschicht ist sicherlich  $y/l_D \sim 1$  (und nicht wie im Kanal  $y/d_0 \sim 1$ ). Diesem Umstand tragen wir durch die Reskalierung

$$\tilde{Y} = \frac{Y}{\epsilon} , \quad \tilde{V} = \frac{V}{\epsilon} \quad (2.106)$$

Rechnung. Die tangentielle Richtung  $X$  und die Geschwindigkeit  $U$  sind sicherlich mit  $d_0$  und  $u_0$  adäquat skaliert. Für die wandnormale Richtung ist mit  $\tilde{Y}$  die richtige Längenskala für die elektrische Grenzschicht gefunden. Die Reskalierung von  $V$  wird durch die separaten Längenskalen  $(X, \tilde{Y})$  notwendig – nur so ist die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen. Wir erhalten mit der Reskalierung (2.106)

$$U_X + \tilde{V}_{\tilde{Y}} = 0 , \quad (2.107)$$

$$Re \left[ U_\tau + UU_X + \tilde{V}U_{\tilde{Y}} \right] = -P_X + U_{XX} + \epsilon^{-2}U_{\tilde{Y}\tilde{Y}} - \epsilon^{-1}\Pi_x e^{-\tilde{Y}} , \quad (2.108)$$

$$Re \left[ V_\tau + U\tilde{V}_X + \tilde{V}\tilde{V}_{\tilde{Y}} \right] = -\epsilon^{-2}P_{\tilde{Y}} + \tilde{V}_{XX} + \epsilon^{-2}\tilde{V}_{\tilde{Y}\tilde{Y}} - \epsilon^{-2}\Pi_y e^{-\tilde{Y}} , \quad (2.109)$$

$$X, \tilde{Y} = 0 : \quad U = 0, \quad \tilde{V} = 0 . \quad (2.110)$$

Es ist offensichtlich in den Gleichungen (2.108, 2.109), daß in Wandnähe (Skala  $\tilde{Y}$ ) einige Terme in den Vordergrund treten. In führender Ordnung haben wir aus (2.107–2.109) deshalb die Erhaltungsgleichungen

$$U_X + \tilde{V}_{\tilde{Y}} = 0 , \quad (2.111)$$

$$0 \simeq U_{\tilde{Y}\tilde{Y}} - \epsilon\Pi_x e^{-\tilde{Y}} , \quad (2.112)$$

$$0 \simeq -P_{\tilde{Y}} + \tilde{V}_{\tilde{Y}\tilde{Y}} - \Pi_y e^{-\tilde{Y}} \quad (2.113)$$

zu lösen. Gleichung (2.112) liefert

$$U_{\tilde{Y}\tilde{Y}} \simeq \epsilon\Pi_x e^{-\tilde{Y}} . \quad (2.114)$$

Diese Gleichung kann nur für  $\epsilon \bar{\Pi}_x \sim 1$  erfüllt werden. Es ist deshalb sinnvoll, die modifizierten Parameter

$$\begin{pmatrix} \bar{\Pi}_x \\ \bar{\Pi}_y \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \Pi_x \\ \Pi_y \end{pmatrix} = \frac{q_W l_D}{\mu u_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

einzuführen, wobei  $\bar{\Pi}_x, \bar{\Pi}_y \sim 1$  sind. Wir integrieren (2.114) doppelt in  $\tilde{Y}$  und erhalten bei Berücksichtigung der Haftbedingung (2.110)

$$U(X, \tilde{Y}) \simeq \bar{\Pi}_x \left( e^{-\tilde{Y}} - 1 \right) + C_1(X) \tilde{Y} . \quad (2.116)$$

Wir bringen  $U$  in die Kontinuitätsgleichung (2.111) ein und berechnen  $\tilde{V}$  durch Integration bei Berücksichtigung der Haftbedingung für ein räumlich konstantes elektrisches Feld zu

$$\tilde{V}(X, \tilde{Y}) \simeq -\frac{1}{2} C_{1,X}(X) \tilde{Y}^2 . \quad (2.117)$$

In den Gleichungen (2.116, 2.117) tritt eine Integrationskonstante  $C_1$  und ihre Ableitung  $C_{1,X}$  auf, welche im allgemeinen noch die Abhängigkeit  $C_1(X)$  haben kann. Die Auswertung der Impulsgleichung (2.113) erlaubt mit dem Ergebnis (2.117), den Druck gemäß

$$P(X, \tilde{Y}) \simeq -C_{1,X}(X) \tilde{Y} + \epsilon^{-1} \bar{\Pi}_y e^{-\tilde{Y}} + C_2(X) \quad (2.118)$$

zu berechnen. Somit gelingt es analytisch, in Wandnähe eine Näherungslösung bei Berücksichtigung der elektrischen Kräfte abzuleiten. Die physikalische Interpretation von (2.112) bedeutet ein Gleichgewicht aus tangentialen elektrischen Kräften und den viskosen Kräften. Aus (2.113) folgt, daß die normalen elektrischen Kräfte sowohl durch Druck- als auch durch viskose Kräfte kompensiert werden können. Im nächsten Schritt gilt es die wandnahe Strömung gemäß (2.116–2.118) mit der Kanalströmung zu verknüpfen, um einerseits die Konstanten  $C_1(X), C_2(X)$  zu bestimmen und andererseits für die Kanalströmung eine Randbedingung in Wandnähe abzuleiten.

Wir benutzen zur Anpassung der beiden Teillösungen eine Vorschrift nach van Dyke (1975). Hiernach ist in der Lösung für die Kanalströmung (K) die zugehörige Variable  $Y$  durch die andere Variable  $\tilde{Y}$  zu ersetzen. Wir haben somit für die (numerisch bestimmte) Kanallösung

$$\begin{aligned} U_K(\tau, X, Y) &\rightarrow U_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) , \\ V_K(\tau, X, Y) &\rightarrow V_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) , \\ P_K(\tau, X, Y) &\rightarrow P_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ist der Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  zu nehmen, sodaß wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) = U_K(\tau, X, 0) , \quad (2.119)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) = V_K(\tau, X, 0) , \quad (2.120)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_K(\tau, X, \epsilon \tilde{Y}) = P_K(\tau, X, 0) , \quad (2.121)$$

erhalten.

Die analoge Prozedur ist nach van Dyke (1975) auf die wandnahe Strömung (W) anzuwenden. Wir müssen demnach in der wandnahen Lösung die zugehörige Variable  $\tilde{Y}$  durch die andere Variable  $Y$  ersetzen. Wir erhalten aus (2.116–2.118) deshalb

$$\begin{aligned} U_W(X, \tilde{Y}) &= \bar{\Pi}_x(e^{-\tilde{Y}} - 1) + C_1 \tilde{Y} \rightarrow \\ U_W(X, Y) &= \bar{\Pi}_x(e^{-Y/\epsilon} - 1) + C_1 \frac{Y}{\epsilon} , \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} V_W(X, \tilde{Y}) &= -\frac{1}{2} C_{1,X} \tilde{Y}^2 \rightarrow \\ V_W(X, Y) &= -\frac{1}{2} C_{1,X} \frac{Y^2}{\epsilon^2} , \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} P_W(X, \tilde{Y}) &= -C_{1,X} \tilde{Y} + \epsilon^{-1} \bar{\Pi}_y e^{-\tilde{Y}} + C_2 \rightarrow \\ P_W(X, Y) &= -C_{1,X} \frac{Y}{\epsilon} + \epsilon^{-1} \bar{\Pi}_y e^{-Y/\epsilon} + C_2 . \end{aligned} \quad (2.124)$$

Die analoge Ausführung des Grenzübergangs  $\epsilon \rightarrow 0$  in Gleichung (2.122) liefert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_W(X, Y) = -\bar{\Pi}_x + C_1 \frac{Y}{\epsilon} . \quad (2.125)$$

Aus (2.125) wird deutlich, daß eine Anpassung nur möglich ist, wenn  $C_1 = 0$  wird, weil ansonsten der zweite Term der rechten Seite über alle Grenzen wächst und nicht anpassbar ist. Wir erhalten somit aus (2.122–2.125)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_W(X, Y) = -\bar{\Pi}_x , \quad (2.126)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V_W(X, Y) = 0 , \quad (2.127)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_W(X, Y) = C_2(X) . \quad (2.128)$$

Nach van Dyke (1975) sind nun beide Ausdrücke (2.119–2.121), (2.126–2.128) gleichzusetzen, woraus wir

$$U_K(\tau, X, 0) = -\bar{\Pi}_x , \quad (2.129)$$

$$V_K(\tau, X, 0) = 0 , \quad (2.130)$$

$$P_K(\tau, X, 0) = C_2(X) , \quad (2.131)$$

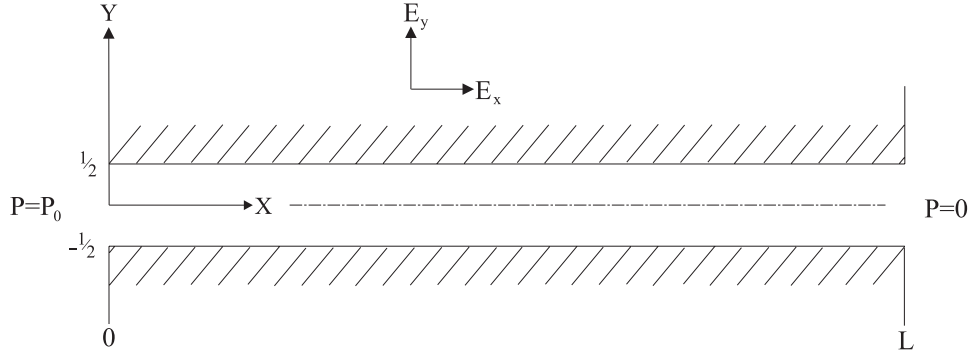


Abbildung 17: Skizze zur eingelaufenen, stationären Strömung im Spalt.

erhalten. (2.129–2.131) stellt einerseits eine Randbedingung für die Kernlösung bezüglich  $U_K, V_K$  bei  $Y = 0$  dar. Andererseits wird deutlich, daß der Druck der Kernlösung als Randbedingung bei  $\tilde{Y} \rightarrow \infty$  für die wandnahe Lösung fungiert. Nach der Anpassung der Kernlösung an die wandnahe Lösung können wir die wandnahe Lösung, ausgehend von (2.122–2.124), bei Verwendung von  $C_1 = 0$  und (2.129–2.131) gemäß

$$U_W(X, \tilde{Y}) \simeq \bar{\Pi}_x (e^{-\tilde{Y}} - 1) , \quad (2.132)$$

$$V_W(X, \tilde{Y}) \simeq 0 , \quad (2.133)$$

$$P_W(X, \tilde{Y}) \simeq \epsilon^{-1} \bar{\Pi}_y e^{-\tilde{Y}} + P_K(\tau, X, 0) , \quad (2.134)$$

$$(2.135)$$

im Detail angeben.

### 2.5.2 Anwendung des Modells auf eine eingelaufene Strömung

Das abgeleitete Modell können wir für beliebige und im allgemeinen numerisch berechnete Kanallösungen anwenden. Zur Demonstration ist es sinnvoll, eine möglichst einfache Strömung zu wählen, welche vollständig analytisch behandelt werden kann. So wird ein direkter Vergleich zwischen der vollen analytischen Lösung und den angepaßten Teillösungen möglich.

Wir wählen hierzu die eingelaufene Spaltströmung, wie sie in Abbildung 17 skizziert ist. Die Strömung soll eben in  $(X, Y)$  und stationär,  $U_\tau = V_\tau = 0$ , sein. Für eine eingelaufene Strömung wird  $U_X = V_X = 0$ , während die Strömung durch einen Druckgradienten  $P_X \neq 0$  angetrieben wird. Dies ist durch die Vorgabe des Druckes bei  $X = 0$  und bei  $X = L$ , d.h. am Ein- und Austritt des Spaltes der Länge  $L$ , realisiert.

Wir wollen uns zunächst die analytische Lösung beschaffen, bevor wir den Vergleich mit der Näherung anstreben. Ausgehend von den entdimensionierten Grundgleichungen (2.96–2.98) erhalten wir die Kontinuitätsgleichung für das eingelaufene Problem zu

$$V_Y = 0 . \quad (2.136)$$

Die Randbedingungen für das Problem in Abbildung 17 sind offensichtlich durch

$$\begin{aligned} X, Y = 0 & : U_Y = 0 \quad , \\ X, Y = \frac{1}{2} & : U = 0 \quad , \quad V = 0 \quad , \\ X = 0, Y & : P = P_0 \quad , \\ X = L, Y & : P = 0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

gegeben. Sie stellen Haften an der Wand und die Symmetrie bei  $Y = 0$  sicher. Durch Integration der Kontinuitätsgleichung (2.136) und Anpassung an die Randbedingungen (2.137) folgt

$$V = 0 . \quad (2.138)$$

Wir erhalten dann aus den Impulsgleichungen (2.97, 2.98)

$$0 = -P_X + U_{YY} - \epsilon^{-2} \bar{\Pi}_x (e^{-\frac{Y+1/2}{\epsilon}} + e^{\frac{Y-1/2}{\epsilon}}) , \quad (2.139)$$

$$0 = -P_Y - \epsilon^{-2} \bar{\Pi}_y (e^{-\frac{Y+1/2}{\epsilon}} + e^{\frac{Y-1/2}{\epsilon}}) . \quad (2.140)$$

Hierbei sind bereits beide elektrischen Grenzschichten bei  $Y = 1/2$  und  $Y = -1/2$  berücksichtigt, wobei auch die Richtung der Wandnormalen (von der Wand ins Fluid) beachtet werden muß.

Gleichung (2.139) kann unbestimmt nach  $Y$  integriert werden. Hierzu ist es sinnvoll, von der folgenden, identischen Form auszugehen

$$U_{YY} = P_X + 2\epsilon^{-2} \bar{\Pi}_x e^{-1/2\epsilon} \cosh(Y/\epsilon) . \quad (2.141)$$

Durch zweifache Integration von (2.141) und Anpassung an die Randbedingungen (2.137) erhalten wir dann

$$U(Y) = -\frac{P_X}{2} \left( \frac{1}{4} - Y^2 \right) + 2\bar{\Pi}_x e^{-1/2\epsilon} [\cosh(Y/\epsilon) - \cosh(1/2\epsilon)] \quad (2.142)$$

als Lösung. Aus Gleichung (2.140) kann gleichfalls nach Umformung gemäß

$$P_Y = -2\epsilon^{-2} \bar{\Pi}_y e^{-1/2\epsilon} \cosh(Y/\epsilon) \quad (2.143)$$

der Druck durch Integration bestimmt werden. Wir erhalten

$$P = -2\epsilon^{-1}\bar{\Pi}_y e^{-1/2\epsilon} \sinh(Y/\epsilon) + C_3(X) . \quad (2.144)$$

Wir nutzen schließlich die Druckrandbedingungen in (2.137), um

$$P_X = -P_0/L , \quad (2.145)$$

$$C_3(X) = \frac{P_0}{L}(L - X) \quad (2.146)$$

zu berechnen. Hierbei interpretieren wir die Druckvorgabe am Ein- und Austrittsquerschnitt als Vorgabe im Kernbereich des Spaltes. Es kommt somit

$$U(Y) = \frac{P_0}{2L}\left(\frac{1}{4} - Y^2\right) + 2\bar{\Pi}_x e^{-1/2\epsilon} [\cosh(Y/\epsilon) - \cosh(1/2\epsilon)] , \quad (2.147)$$

$$V = 0 , \quad (2.148)$$

$$P(X, Y) = \frac{P_0}{L}(L - X) - 2\epsilon^{-1}\bar{\Pi}_y e^{-1/2\epsilon} \sinh(Y/\epsilon) , \quad (2.149)$$

für das Geschwindigkeits- und das Druckfeld.

Im nächsten Schritt gilt es, zum Vergleich die angepaßten asymptotischen Entwicklungen anzugeben. Hierbei wird die Kanalströmung im Spalt ohne elektrische Kräfte berechnet, und die Wirkung der elektrischen Grenzschicht wird über eine Modifikation der Randbedingung an den Wänden berücksichtigt. Für die Kanalströmung (K) erhalten wir die Erhaltungsgleichungen aus (2.96–2.98) für den eingelaufenen, stationären Fall ohne elektrische Kräfte

$$V_Y = 0 , \quad (2.150)$$

$$0 = -P_X + U_{YY} , \quad (2.151)$$

$$0 = -P_Y , \quad (2.152)$$

mit den Randbedingungen

$$X, Y = 0 : U_Y = 0 , \quad (2.153)$$

$$X = 0, Y : P = P_0 , \quad (2.154)$$

$$X = L, Y : P = 0 . \quad (2.155)$$

Die Kanallösung (K) ist demnach aus einer Integration der Erhaltungsgleichungen (2.150–2.152) bei Erfüllung der Randbedingungen (2.153–2.155) zu erhalten gemäß

$$U_K(X, Y) = -\frac{1}{2}\frac{P_0}{L}Y^2 + C_4(X) , \quad (2.156)$$

$$V_K(X) = C_5(X) , \quad (2.157)$$

$$P_K(X) = \frac{P_0}{L}(L - X) . \quad (2.158)$$

In (2.156–2.158) ist auf die Anwendung der Randbedingungen auf der Wand verzichtet worden und lediglich die Symmetrie (2.153) sowie die angelegten Drücke (2.154, 2.155) sind verwendet. Nach (2.129–2.131) sind die Randbedingungen auf der Wand so zu wählen, daß eine Anpassung an die wandnahe Lösung möglich ist. Die Anwendung (2.129–2.131) ermöglicht somit die Wirkung der elektrischen Grenzschicht zu berücksichtigen, und wir erhalten aus (2.156–2.158) mit

$$U_K(X, Y = 1/2) = -\bar{\Pi}_x , \quad (2.159)$$

$$V_K(X, Y = 1/2) = 0 , \quad (2.160)$$

die Näherungslösung für das Geschwindigkeitsfeld zu

$$U_K(X) \simeq \frac{1}{2} \frac{P_0}{L} \left( \frac{1}{4} - Y^2 \right) - \bar{\Pi}_x , \quad (2.161)$$

$$V_K(X) \simeq 0 . \quad (2.162)$$

In Abbildung 18 ist ein Vergleich zwischen der vollen analytischen Lösung für das Geschwindigkeitsprofil  $U(Y)$  gemäß Gleichung (2.147) und der Näherungslösung  $U_K(Y)$  gemäß (2.161) gezogen. Wir erkennen in (a), daß für fallende  $\epsilon = 0.03, 0.01, 0.001$  die elektrische Grenzschicht immer dünner wird, und entsprechendes gilt für die Zone, in welcher sich das Geschwindigkeitsprofil ändert. In allen Fällen in (a) wird die Haftbedingung an der Wand erfüllt und im Mittenbereich bleiben die Profile unverändert. Die Näherungslösung in (b) ist unabhängig von  $\epsilon$  und gibt im Mittenbereich, insbesondere für  $\epsilon \ll 1$ , die exakte Lösung gut wieder. Die Haftbedingung wird für  $U_K(Y)$  nicht erfüllt, über das Rutschen fließt die Auswirkung der elektrischen Grenzschicht in  $U_K(Y)$  ein.



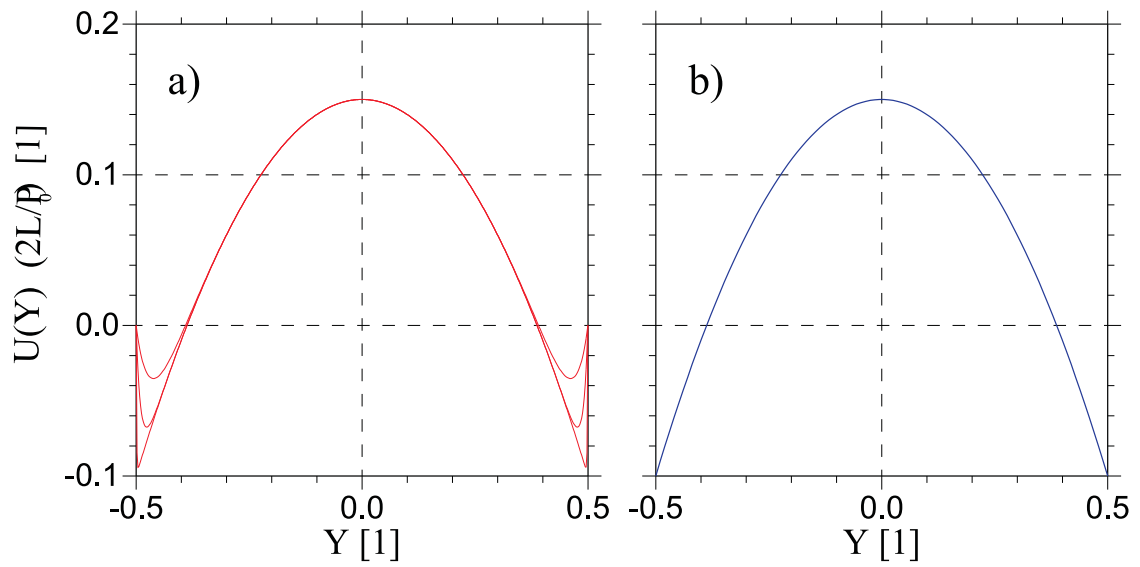


Abbildung 18: (a) Vollständiges Geschwindigkeitsfeld  $U(Y)$  und (b) Näherungslösung  $U_K(Y)$ , beides für  $\epsilon = 0.001, 0.01, 0.03$  und  $2\bar{\Pi}_x L/P_0 = 0.1$  .

### 3 Experimentelle Untersuchungen in Mikroströmungen

Bevor wir uns mit den experimentellen Methoden und den Meßverfahren auseinandersetzen, ist es hilfreich, eine Tabelle zu erstellen, in welcher wir die zu erwartenden Größenordnungen der physikalischen Größen sowie das Verhältnis aus Größenordnungen in Mikro- und Makroströmungen eintragen. Wir fixieren hierin einige Größen und können dann weitere Größen ableiten. Der Grundgedanke ist aus Herwig (2001) entlehnt. In Tabelle 1 legen wir die Grundgrößen Kanaldurchmesser  $d$ , Kanallänge

		makro	mikro	mikro/makro
Kanaldurchmesser	$d$	$\sim 10^{-2} m$	$\sim 10^{-5} m$	$\sim 10^{-3}$
Kanallänge	$l$	$\sim 1 m$	$\sim 10^{-2} m$	$\sim 10^{-2}$
mittlere Geschwindigkeit	$\bar{u}$	$\sim 1 m/s$	$\sim 10^{-3} m/s$	$\sim 10^{-3}$
Druckabfall	$\Delta p$	–	–	$\sim 10$
Massenstrom	$\dot{m}$	–	–	$\sim 10^{-9}$
Volumenstrom	$\dot{V}$	–	–	$\sim 10^{-9}$
angelegte Temperaturdifferenz	$\Delta \bar{T}$	$\sim 10 K$	$\sim 10 K$	$\sim 1$
Temperaturanstieg	$\bar{T}_1 - \bar{T}_0$	–	–	$\sim 10^4$

Tabelle 1: Typische Größenordnungen der physikalischen Größen und Quotienten der Größenordnungen aus Mikroströmung und Makroströmung.

$l$  und mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  fest. Während die Kanäle oder Rohre in Makroströmungen typisch einige  $cm$  Querschnitt haben, wollen wir für Mikroströmungen einige  $10 \mu m$  unterstellen. Entsprechend erwarten wir für die Kanallängen in Makroströmungen einige  $m$  und in Mikroströmungen einige  $cm$ . Die Geschwindigkeiten in Makroströmungen liegen typisch bei einigen  $m/s$ , während in Mikroströmungen einige  $mm/s$  auftreten. Die Festlegung dieser drei Größen kann durchaus um eine Zehnerpotenz nach oben oder unten verschoben werden. Wichtig bleibt lediglich, daß eine vernünftige Größenordnung festgelegt wird, wobei eine leicht andere Festlegung nur den Zahlenwert, nicht aber die Tendenz der Schlußfolgerungen in Frage stellt. Die nachfolgenden Größen wie Druckdifferenz etc. werden in den folgenden Abschnitten abgeleitet und sind hier vorweg eingetragen.

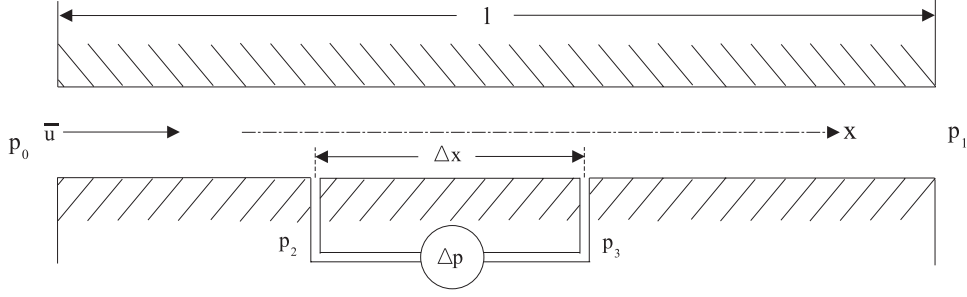


Abbildung 19: Anordnung zur Messung von  $p_x$  in Makrokanälen.

### 3.1 Meßmethoden

#### 3.1.1 Druckdifferenzen

Wir können bei Mikroströmungen in der Regel davon ausgehen, daß eine laminare Strömung vorliegt. Nach Zierep (1993) ist der laminare Druckabfall in Kanälen durch

$$\Delta p_{lam} = \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \lambda_{lam} \frac{l}{d} \quad (3.163)$$

gegeben. Der laminare Druckverlustbeiwert für das Kreisrohr kann durch  $\lambda_{lam} = 64/Re$  mit der Reynolds-Zahl  $Re = \bar{u}d/\nu$  ausgedrückt werden. Für andere Kanalquerschnitte ist gegebenenfalls ein anderer Wert für  $\lambda_{lam}$  zu verwenden. Ähnliches gilt für turbulente Strömung, wo wir  $\lambda_{tur}$  beispielweise nach Blasius zu verwenden haben (vgl. Zierep (1993)). Wir bringen  $\lambda_{lam}$  für das Kreisrohr in die Beziehung (3.163) ein und erhalten

$$\Delta p_{lam} = 32 (\rho\nu) \frac{\bar{u}l}{d^2} \propto \frac{\bar{u}l}{d^2} . \quad (3.164)$$

Unterstellen wir, daß im Mikro- und Makrokanal das gleiche Fluid auftritt, so hängt der Druckabfall von der Gruppe  $\bar{u}l/d^2$  ab. Insbesondere können wir das Verhältnis aus dem Druckabfall im Mikrokanal und im Makrokanal gemäß

$$\frac{\Delta p_{lam,mik}}{\Delta p_{lam,mak}} \sim \frac{\bar{u}_{mik} l_{mik} d_{mak}^2}{\bar{u}_{mak} l_{mak} d_{mik}^2} = 10 \quad (3.165)$$

angeben. Der Druckabfall in Mikrokanälen ist demnach größer als in Makrokanälen. Wir dürfen deshalb erwarten, daß die Messung von Druckdifferenzen in Mikrokanälen eher unproblematisch ist, weil die etablierten Meßtechniken aus Makroströmungen bezüglich der Genauigkeit ausreichen.

Diese Aussage ist leider nur bedingt richtig. Zwar ist die Genauigkeit prinzipiell ausreichend, aber die kleinen Kanäle implizieren einige grundlegende Schwierigkeiten.

Wir wollen zunächst die typische Anordnung einer Druckmessung in Makrokanälen anhand von Abbildung 19 verdeutlichen. In einem Kanal der Länge  $l$  werden hierzu Anbohrungen im Abstand  $\Delta x$  eingebracht, sodaß über die Druckdifferenz  $\Delta p = p_2 - p_3$  eine recht genaue Bestimmung von  $p_x = -\Delta p / \Delta x$  gelingt. Diese Anordnung wird gewählt, weil eine Messung über  $(p_0 - p_1)$  nur sehr ungenaue Ergebnisse liefert. Hierbei ist nämlich der Druckverlauf in den Ein- und Auslaufzonen durch die Beschleunigung bzw. Verzögerung des Fluids störend überlagert. Bei einer Druckmessung in Mikrokanälen kann man in der Regel keine Druckanbohrungen im Kanal realisieren. Nehmen wir einen Kanal von  $100 \mu m$  Querschnitt an, so ist eine Anbohrung von  $0.5 mm$  Durchmesser eine riesige Störung, ganz davon abgesehen, daß im Druckmeßgerät die Auslenkung der Membran oder des Fluidspiegels erforderlich ist, was bei den kleinen Volumenströmen in Mikrokanälen die Strömung für lange Zeiten vollständig in die Meßleitungen umlenken würde. Eine schlichte Übertragung der Meßanordnung auf den Mikrokanal ist also nur schwer möglich, und es verbleibt nur eine Messung der Drücke in den Ein- und Austrittsplenen, d.h.  $p_x \simeq -(p_0 - p_1)/l$ , gegebenenfalls mit entsprechender Korrektur der Ein- und Auslaufeffekte.

Eine Alternative bieten Mikrosensoren, welche in die Kanalwand integriert werden. Solche Sensoren sind für wissenschaftliche Untersuchungen geeignet, wenn das Wandmaterial Silizium ist, und damit der Aufbau von Strukturen und Schaltungen in der Wand selbst mit photochemischen Methoden möglich ist. Solche Sensoren sind beispielsweise von Shih et al. (1996) in Untersuchungen (vgl. Abschnitt 2.4.2) verwendet worden, eine detaillierte Beschreibung des Sensors findet sich in Ho und Tai (1996). Es wird eine  $1.5 \mu m$  dicke quadratische Membran der Größe  $250 \mu m \times 250 \mu m$  aus Silizium-Nitrid über einer Vakuumkavität ( $p_0$ ) aufgebracht (vgl. Abbildung 20). In diese Membran sind auf einem inneren Kreis vier Meßwiderstände  $R_{Mi}$  und auf einem äußeren Kreis vier Kompensationswiderstände  $R_{Ki}$  eingebettet. Diese Widerstände bestehen aus Polysilizium. Die inneren Meßwiderstände  $R_{Mi}$  ändern bei Verformung der Membran ihren Wert, während die äußeren Kompensationswiderstände  $R_{Ki}$  im unverformten Bereich liegen. Die Verschaltung der Meß- und Kompensationswiderstände in einer Meßbrücke (vgl. Abbildung 21) liefert dann ein Spannungssignal, welches proportional zur Druckdifferenz  $(p_1 - p_0)$  ist. Hierbei besteht die Aufgabe der äußeren Widerstände  $R_{Ki}$  in der Kompensation sekundärer Einflüsse wie der Temperatur. Ho und Tai (1996) geben für den realisierten Sensor

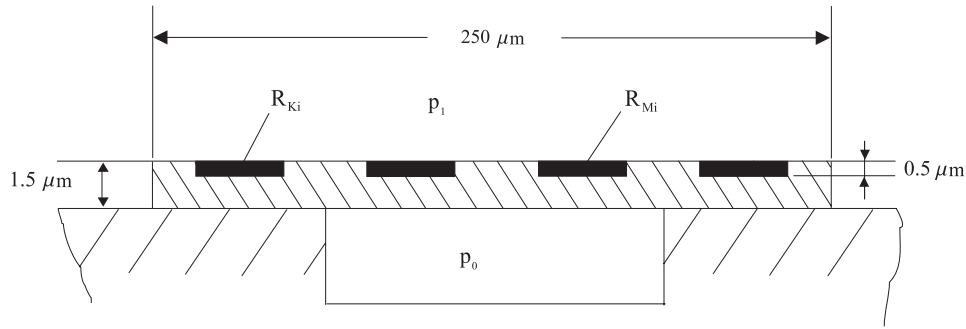


Abbildung 20: Drucksensor nach Ho und Tai (1996).

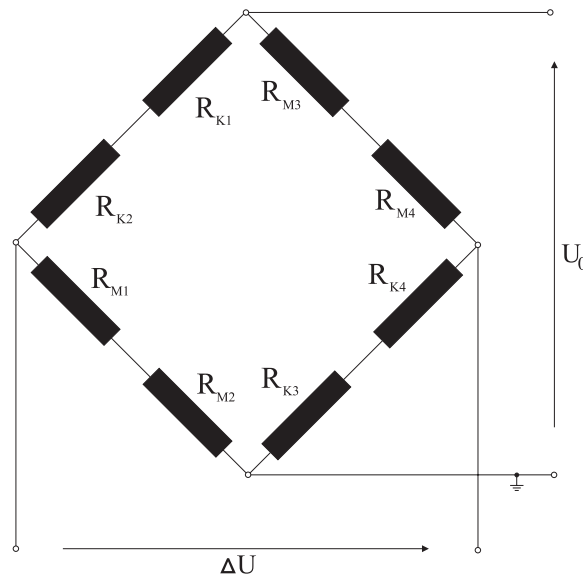


Abbildung 21: Verschaltung der Meß- und Kompensationswiderstände des Drucksensors nach Ho und Tai (1996).

eine Empfindlichkeit von

$$\Delta U = 1332 \frac{\mu V}{V 10^5 Pa} U_0 (p_1 - p_0) \quad (3.166)$$

an. Legen wir demnach an der Brücke eine Versorgungsspannung von  $U_0 = 100 V$  an, so erhalten wir bei einer Druckdifferenz von  $(p_1 - p_0) = 1 mbar \simeq 10^2 Pa$  ein Signal von  $\Delta U = 133.2 \mu V$  – eine durchaus meßbare Spannung.

### 3.1.2 Massen- und Volumenströme

Zwischen den beiden Größen besteht über die Dichte der Zusammenhang  $\dot{m} = \rho \dot{V}$ , was insbesondere bei konstanter Dichte, d.h. bei Flüssigkeiten, eine einfache Umrechnung

erlaubt. Der Volumenstrom kann gemäß

$$\dot{V} = \bar{u} \text{ konstant } d^2 \propto \bar{u} d^2 \quad (3.167)$$

mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und dem Kanaldurchmesser  $d$  verknüpft werden. Die Konstante ist nur von der Form des Kanals (quadratisch, kreisrund, etc.) abhängig. Unter Verwendung der Festlegungen in Tabelle 1 kommt für das Verhältnis

$$\frac{\dot{V}_{mik}}{\dot{V}_{mak}} \sim \frac{\bar{u}_{mik} d_{mik}^2}{\bar{u}_{mak} d_{mak}^2} = 10^{-9} . \quad (3.168)$$

Die Beziehung zwischen Massenstrom und Volumenstrom liefert sofort

$$\frac{\dot{m}_{mik}}{\dot{m}_{mak}} \sim 10^{-9} , \quad (3.169)$$

sofern die Dichte der Fluide in Mikro- und Makrokanälen von der gleichen Größenordnung bleibt. Damit wird deutlich, daß sowohl der Volumen- als auch der Massenstrom dramatisch kleiner als in makroskopischen Kanälen sind. Die Messung dieser Größen erfordert deshalb höchste Genauigkeiten.

Eine direkte Messung des Volumenstroms kann entweder über ein Geschwindigkeitsprofil (siehe Abschnitt 3.1.3) oder über ein Abtasten des auslaufenden, akkumulierten Volumens erfolgen. Dies ist bei Flüssigkeiten über ein Auffanggefäß und eine hochgenaue Füllstandsmessung möglich. Bei Gasen wird in der Regel das Gas in eine geschlossene, ausdehbare Kavität geleitet, deren Volumen, beispielsweise aus Verdrängung, bei konstantem Druck bestimmt werden muß. In allen Fällen erhalten wir eine Messung  $V(t)$ , aus welcher der Volumenstrom  $\dot{V} = \Delta V / \Delta t$ , gemittelt über das Zeitintervall  $\Delta t$ , bestimmt werden kann. Naturgemäß kann die Genauigkeit der Messung durch Verwendung großer  $\Delta t$  erhöht werden, was aber gleichzeitig nur bei langsam veränderlichem oder konstantem Volumenstrom sinnvoll ist.

Die Messung sehr kleiner Massenströme ist zumindest bei Flüssigkeiten über eine hochpräzise, zeitaufgelöste Wägung möglich. Hierzu wird der Massenstrom der Flüssigkeit in einem Gefäß aufgefangen und die Masse mit einer Präzisionswaage bestimmt. Aus  $m(t)$  kann dann der Massenstrom gemäß  $\dot{m} = \Delta m / \Delta t$  bestimmt werden. Die Auswirkung großer  $\Delta t$  auf die Genauigkeit und die zeitliche Auflösung ist analog zum oben diskutierten Volumenstrom.

### 3.1.3 Geschwindigkeiten

Für die Messung von Strömungsgeschwindigkeiten sind als direkte Methoden in makroskopischen Strömungen das Laser-Doppler-Anemometer (LDA) und die Particle

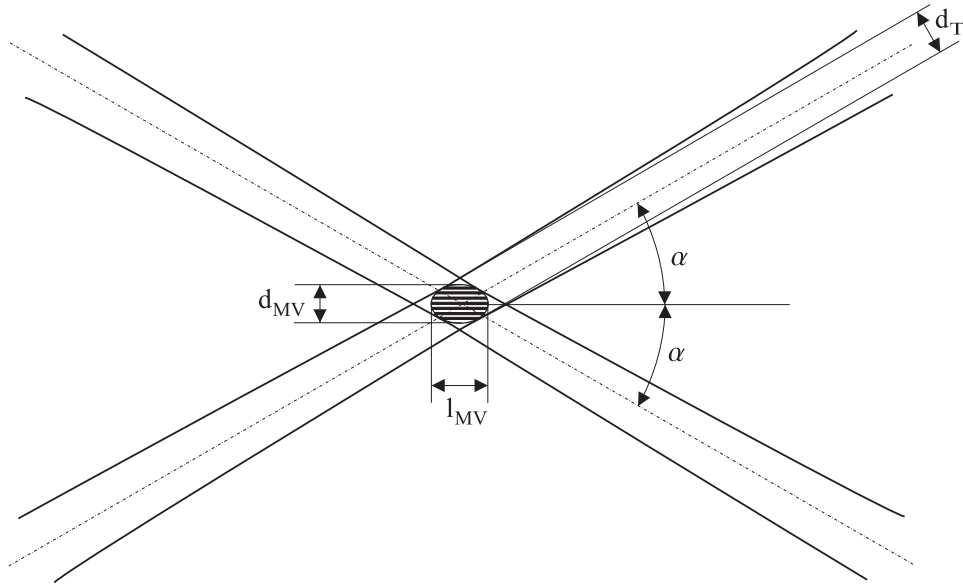


Abbildung 22: Meßvolumen eines LDA nach Oertel, H. sen. und Oertel, H. jun. (1989).

Image Velocimetry (PIV) etabliert. Wir wollen hier hinterfragen, inwiefern diese Methoden in Mikrokanälen eingesetzt werden können und welche Veränderungen an den Verfahren notwendig sind.

Das LDA spannt mit Hilfe von zwei Laserstrahlen ein Meßvolumen auf, innerhalb dessen das Streulicht von Partikeln detektiert wird. Aus den Frequenzen im Streulicht kann dann die Geschwindigkeit des Einzelpartikels und bei geeigneter Partikelgröße auch die Geschwindigkeit des Fluids bestimmt werden. Das Meßverfahren mittelt somit zum einen räumlich über das Meßvolumen, und zum anderen über eine Anzahl von Einzelpartikeln. Das Meßvolumen eines LDA-Systems kann nicht beliebig verkleinert werden, weil aufgrund des Wellencharakters des Laserlichts die Strahltaillen der beiden Strahlen bestenfalls auf  $d_T \simeq 3 - 5 \mu m$  verkleinert werden können. Nach Oertel, H. sen. und Oertel, H. jun. (1989) stellt das Meßvolumen einen Ellipsoid dar, dessen Durchmesser  $d_{MV}$  und Länge  $l_{MV}$  sich aus

$$d_{MV} = \frac{d_T}{\cos \alpha}, \quad l_{MV} = \frac{d_T}{\sin \alpha},$$

ergeben. Die Geometrie ist in Abbildung 22 skizziert. Der Winkel zwischen beiden Strahlen liegt bei den üblichen Systemen etwa im Bereich  $2\alpha \sim 5 - 20^\circ$ . Verwenden wir  $d_T$  und  $\alpha$  in den genannten Bereichen, so kommt  $d_{MV} \sim 3 - 5.1 \mu m$ ,  $l_{MV} \sim 17.3 - 114.6 \mu m$ . Diese Größenordnungen machen bereits deutlich, daß das Meßvolumen für Mikrokanäle zu groß sein wird. Erschwerend kommt hinzu, daß die

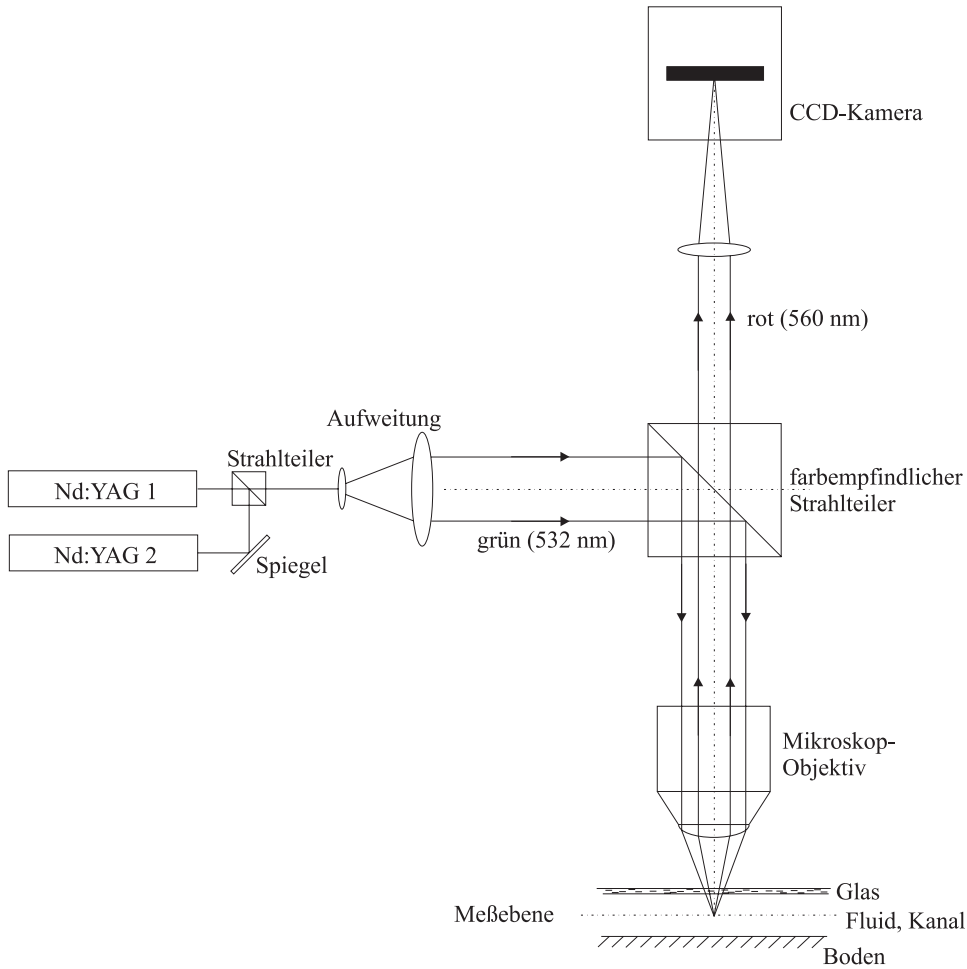


Abbildung 23: Aufbau eines  $\mu$ -PIV-Systems nach Meinhart et al. (1999).

Minimierung von  $d_{MV}$  kleine  $\alpha$  erfordert, während die Minimierung von  $l_{MV}$  große  $\alpha$  erfordert. Entsprechend sind etwa für  $d_T = 3 \mu m$  die Paarungen  $d_{MV} \sim 3 \mu m$ ,  $l_{MV} \sim 68.8 \mu m$  und  $d_{MV} \sim 3.1 \mu m$ ,  $l_{MV} \sim 17.3 \mu m$  relevant, und eine Minimierung beider Abmessungen ist grundsätzlich nicht möglich. Wir können demnach schlußfolgern, daß das Meßvolumen (d.h. das Mittelungsvolumen) solcher Systeme zu groß ist, um sinnvoll in Kanälen von einigen  $10 \mu m$  Abmessung eingesetzt zu werden. Zudem ist der optische Aufwand, um extrem kleine Strahltaillen zu realisieren, sehr groß und bedingt die Deckelung der Kanäle mit hochpräzisem Glas optischer Güte.

Das PIV spannt in makroskopischen Anwendungen einen Lichtschnitt auf, in welchem die Bewegung von Partikeln mit der Strömung verfolgt wird. Aufgrund des Wellencharakters des Lichts ist die Erzeugung eines Lichtschnitts von weniger als  $10 \mu m$  Dicke kaum möglich. Es ist deshalb in Mikrokanälen nur möglich, den kompletten



Kanal auszuleuchten. Die Messung der Geschwindigkeit in einem PIV-System beruht auf der Auswertung des Partikelversatzes  $\Delta \mathbf{s}$  im Zeitintervall  $\Delta t$  gemäß  $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{s} / \Delta t$ . Da die Geschwindigkeiten in Mikrokanälen um drei Größenordnungen kleiner sind als in Makrokanälen (vgl. Tabelle 1), ist es erforderlich, den kleinen Partikelversatz durch Vergrößerung und durch kleine Partikel besser aufzulösen. Parallel kann für stationäre Strömung auch ein großes  $\Delta t$  verwendet werden.

Die oben angegebenen grundsätzlichen Forderungen an ein Mikro-PIV-System haben Meinhart et al. (1999) in ein Meßverfahren umgesetzt. Der Aufbau ist in Abbildung 23 gegeben. Mit Hilfe zweier Nd:YAG-Laser werden zwei Pulse grünen Lichts ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) bei bekanntem Zeitversatz  $\Delta t$  erzeugt und mittels eines Spiegels und eines Strahlteilers vereinigt. Nach einer parallelen Aufweitung (und gegebenenfalls einer Abschwächung) wird dieses Licht coaxial mit Hilfe eines farbempfindlichen Strahlteilers in ein Mikroskop eingekoppelt. Das Licht gelangt durch das Mikroskop-Objektiv und beleuchtet das Fluid im Kanal. Das Fluid ist angereichert mit fluoreszierenden „Microspheres“, die auf dem Markt im Größenbereich  $0.1 \mu\text{m}$ – $100 \mu\text{m}$  erhältlich sind, bei einer großen Vielfalt von Fluoreszenzeigenschaften. Die Partikel werden so gewählt, daß sie bei der Laserwellenlänge optimal angeregt werden und Fluoreszenzlicht im roten Bereich ( $\lambda = 560 \text{ nm}$ ) liefern. Das Fluoreszenzlicht von den Partikeln wird dann über den farbempfindlichen Strahlteiler auf der CCD-Kamera abgebildet. Der farbempfindliche Strahlteiler sorgt dafür, daß an Glas und Wänden gestreutes grünes Beleuchtungslicht nur stark abgeschwächt zur CCD-Kamera gelangt. Bei der Partikelgröße ist ein Kompromiß zwischen der Forderung nach kleinen Partikeln im Kanal und der Forderung nach genügend Streulicht zu suchen. Weiterhin dürfen die Partikel nicht zu klein gewählt werden, damit die Brownsche Molekularbewegung des Fluids sich nicht zu stark auf die Partikel auswirkt. Die Auskopplung der Meßebe-  
geschicht über die Tiefenschärfe der Abbildung und über die Intensitätsverteilung der Beleuchtung. Im Experiment von Meinhart et al. (1999) ist eine Tiefenschärfe von etwa  $0.6 \mu\text{m}$  realisiert. Somit werden nur Partikel unmittelbar um die Meßebe-  
scharf abgebildet. Gleichzeitig ist die Beleuchtung auf die Meßebe-  
maximales Streulicht. Während diese beiden  
Maßnahmen zu einer gewissen Auskopplung der Meßebe-  
bleiben natürlich  
unscharf abgebildete und schwach beleuchtete Partikel aus anderen Ebenen im Bild  
präsent. Dies führt im Vergleich zu makroskopischen PIV-Bildern zu erhöhtem Rau-  
schen in den Doppelbildern eines  $\mu$ -PIV-Systems. Dieses Rauschen kann durch ge-

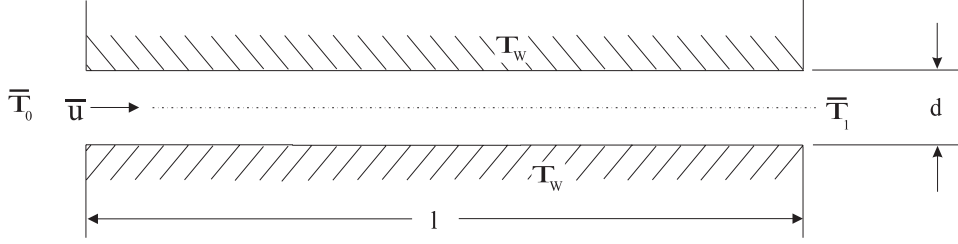


Abbildung 24: Mikrokanal mit Wärmeübertragung.

eignete Auswerteverfahren (Korrelationsverfahren) in seiner Auswirkung minimiert werden. Meinhart et al. (1999) geben für ihren Aufbau eine räumliche Auflösung des Geschwindigkeitsfeldes von etwa  $1 \mu\text{m}$  an.

### 3.1.4 Temperatur

Wir wollen annehmen, daß durch Vorgabe einer Wandtemperatur  $T_W$  eine mittlere Temperaturdifferenz  $\Delta\bar{T}$  sowohl in Mikro- als auch in Makrokanälen von der Größenordnung  $10 \text{ K}$  vorliegt (vgl. Abbildung 24). Diese mittlere Temperaturdifferenz ist etwa gemäß  $\Delta\bar{T} \simeq T_W - \frac{1}{2}(\bar{T}_0 + \bar{T}_1)$  mit den Fluidtemperaturen am Ein- und Austritt und mit der Wandtemperatur  $T_W$  verknüpft. Eine einfache Wärmebilanz zwischen der über die Mantelfläche  $A_M$  zugeführten Wärme und der durch die Strömung im Querschnitt  $A_S$  abtransportierten Wärme liefert

$$hA_M\Delta\bar{T} = \rho c_p \bar{u} A_S (\bar{T}_1 - \bar{T}_0) . \quad (3.170)$$

Die Mantelfläche des Kanals können wir gemäß  $A_M = \textit{konstant} \cdot d \cdot l$  und den Strömungsquerschnitt gemäß  $A_S = \textit{konstant} \cdot d^2$  mit den geometrischen Abmessungen verknüpfen. Somit kommt für den Temperaturanstieg des Fluids

$$(\bar{T}_1 - \bar{T}_0) = \textit{konstant} \frac{hl\Delta\bar{T}}{\rho c_p \bar{u} d} \propto \frac{l}{\bar{u}d} . \quad (3.171)$$

Wir unterstellen wiederum gleiche Fluide und einen vergleichbaren Wärmeübergangskoeffizienten  $h$ , sodaß für das Verhältnis der Temperaturanstiege in Mikrokanälen und Makrokanälen

$$\frac{(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)_{mik}}{(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)_{mak}} \sim \frac{l_{mik} \bar{u}_{mak} d_{mak}}{l_{mak} \bar{u}_{mik} d_{mik}} \sim 10^4 \quad (3.172)$$

folgt. Diese Größenordnungen sind bereits in Tabelle 1 eingetragen. Somit können wir davon ausgehen, daß die zu messenden Temperaturdifferenzen in Mikrokanälen

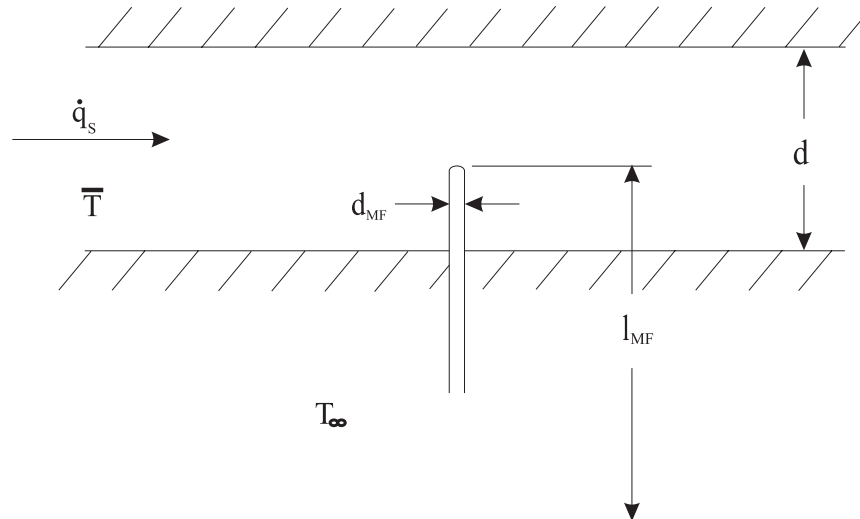


Abbildung 25: Meßfühler im Kanal.

deutlich größer sind als in Makrokanälen. Die Meßtechnik erscheint deshalb zunächst unproblematisch. Das Ergebnis (3.172) ist natürlich für einen Wärmetauscher unbefriedigend, denn die angelegte Temperaturdifferenz  $\Delta\bar{T}$  wird nach kürzester Lauflänge ausgeglichen sein. Somit dient nur ein sehr kleiner Teil der Kanallänge  $l_{mik}$  der Wärmeübertragung. Eine sinnvolle Auslegung für einen Mikrowärmetauscher muß deshalb die Parameter in Tabelle 1 verlassen; diesen Aspekt werden wir separat in Abschnitt 3.2 diskutieren.

Auf den zweiten Blick ist zu beachten, daß jeder Meßfühler eine Störung der zu messenden Größe zur Folge hat. Für den Fall eines Temperaturfühlers sind dies (i) die Störung der Strömung durch die Versperrung und (ii) die Störung durch den Wärmestrom im Meßfühler. Die Störung der Strömung können wir durch eine Verkleinerung des Meßfühlers reduzieren. Der Wärmestrom im Meßfühler jedoch beeinflusst unmittelbar die zu messende Größe. Wir wollen deshalb anhand von Abbildung 25 die Verhältnisse quantitativ diskutieren. Soll in einer Strömung die Temperatur des Fluids gemessen werden, so muß sicherlich der Wärmestrom über den Meßfühler  $\dot{q}_{MF}$  klein sein gegenüber dem Wärmestrom  $\dot{q}_S$ , der durch die Strömung transportiert wird. Wir können deshalb einen Fehler  $F$  gemäß

$$F = \frac{\dot{q}_{MF}}{\dot{q}_S} \quad (3.173)$$

definieren. Für  $|F| \ll 1$  erwarten wir eine unverfälschte Messung der Temperatur.

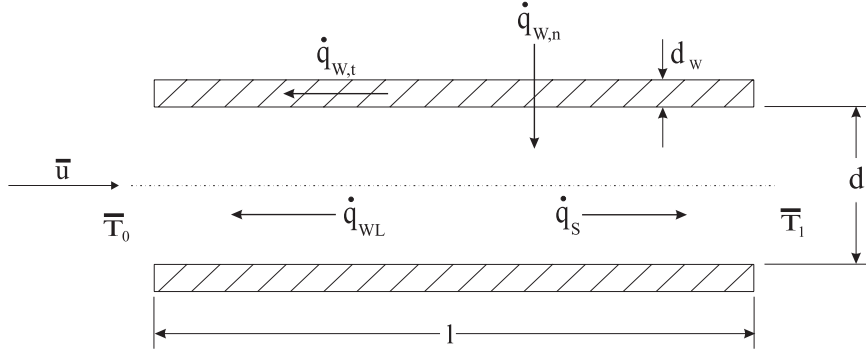


Abbildung 26: Wärmeströme in einem Kanal.

Die beteiligten Wärmeströme können gemäß

$$\dot{q}_{MF} \simeq \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{l_{MF}} \lambda_{MF} A_{MF} , \quad (3.174)$$

$$\dot{q}_S \simeq \rho c_p \bar{u} A_S (\bar{T} - T_\infty) , \quad (3.175)$$

aus der mittleren Fluidtemperatur  $\bar{T}$ , der Umgebungstemperatur  $T_\infty$ , den Materialeigenschaften  $\lambda_{MF}$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ , der Geometrie  $l_{MF}$ ,  $A_{MF}$ ,  $A_S$  und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  abgeschätzt werden. Der Wärmeleitquerschnitt  $A_{MF}$  des Meßfühlers ist  $A_{MF} = \textit{konstant} \cdot d_{MF}^2$ , der Strömungsquerschnitt ist  $A_S = \textit{konstant} \cdot d^2$ . Wir bringen (3.174, 3.175) in (3.173) ein und können den Fehler als

$$F = \textit{konstant} \frac{\lambda_{MF} d_{MF}^2}{l_{MF} \rho c_p \bar{u} d^2} \propto \frac{1}{\bar{u} d^2} \quad (3.176)$$

abschätzen. Dieser Ausdruck macht zum einen deutlich, daß der Fehler für kleine  $\lambda_{MF}$  und  $d_{MF}$  minimiert werden kann. Dies ist in gewissem Umfang durch die Materialwahl des Meßfühlers und durch Miniaturisierung möglich. Andererseits hängt  $F$  aber wesentlich von  $\bar{u}$  und  $d$  ab. Das Verhältnis aus dem Meßfehler im Mikro- und im Makrokanal wird deshalb bei gleichem Meßfühler und Fluid

$$\frac{F_{mik}}{F_{mak}} \sim \frac{u_{mak}}{u_{mik}} \frac{d_{mak}^2}{d_{mik}^2} \sim 10^9 . \quad (3.177)$$

Dies ist ein ernüchterndes Ergebnis, welches deutlich macht, daß der Wärmestrom über den Meßfühler bei Mikrokanälen dramatisch größere Fehler verursacht. Diese Fehler können nur bedingt durch die Größe und das Material des Meßfühlers reduziert werden. So müssen wir davon ausgehen, daß Meßfühler in Mikrokanälen für eine genaue Temperaturmessung in der Regel ausscheiden.

Die oben abgeleitete Aussage zum dramatischen Einfluß des Wärmeleitstroms über den Meßfühler in Mikrokanälen legt nahe, daß auch andere Wärmeleitströme wichtig werden können. Unabhängig von der Frage der Messung wollen wir deshalb die Wärmeströme infolge Wärmeleitung in der Kanalwand und im Fluid selbst bewerten. In Abbildung 26 ist das Problem skizziert. Wir unterstellen, daß wir in einem Kanal (Länge  $l$ , Durchmesser  $d$ ) Fluid durch Einbringen von Wärme  $\dot{q}_{W,n}$  über die Wand von der mittleren Temperatur  $\bar{T}_0$  auf die mittlere Temperatur  $\bar{T}_1$  erwärmen. Dementsprechend transportiert die Strömung konvektiv den Wärmestrom

$$\dot{q}_S \simeq \rho c_p \bar{u} A_S (\bar{T}_1 - \bar{T}_0)$$

ab. Aufgrund der Wärmezufuhr wird  $\bar{T}_1 > \bar{T}_0$  sein, sodaß sowohl im Fluid als auch in der Wand ein Wärmeleitstrom auftritt. Wir unterstellen, daß die Wand in etwa die Fluidtemperatur annimmt und erhalten

$$\dot{q}_{W,t} \simeq \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}_0}{l} \lambda_W A_W, \quad (3.178)$$

$$\dot{q}_{WL} \simeq \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}_0}{l} \lambda A_S, \quad (3.179)$$

für diese Wärmeleitströme.  $A_S$  stellt hierbei den Kanalquerschnitt  $A_S = \textit{konstant} \cdot d^2$  und  $A_W$  den Wärmeleitquerschnitt der Wand  $A_W = \textit{konstant} \cdot d \cdot d_W$  dar. Für die Verhältnisse der Wärmeströme kommt dann

$$\frac{\dot{q}_{W,t}}{\dot{q}_S} \simeq \textit{konstant} \frac{\lambda_W d_W}{l \rho c_p \bar{u} d} \propto \frac{d_W}{l \bar{u} d}, \quad (3.180)$$

$$\frac{\dot{q}_{WL}}{\dot{q}_S} \simeq \textit{konstant} \frac{\lambda}{l \rho c_p \bar{u} d} \propto \frac{1}{l \bar{u}}. \quad (3.181)$$

Somit machen diese Beziehungen deutlich, daß beide Wärmeleitströme relativ zum konvektiven Wärmestrom gemäß  $\propto 1/l\bar{u}$  skalieren. Nach Tabelle 1 bedeutet dies beim Übergang von der Makroströmung zur Mikroströmung eine Vergrößerung der Quotienten (3.180,3.181) um den Faktor  $10^5$ . Wir müssen demnach beachten, daß Wärmeleitströme, welche in Makroströmungen vernachlässigt werden können, in Mikrokanälen relativ zur konvektiv transportierten Wärme wichtig werden.

Aus den oben gemachten Aussagen zu Meßfühlern können wir schlußfolgern, daß lediglich optische, nicht-invasive Meßmethoden zu einer genauen Messung der Temperatur in Frage kommen. Hier bietet sich die Interferometrie an. In Gasen und in

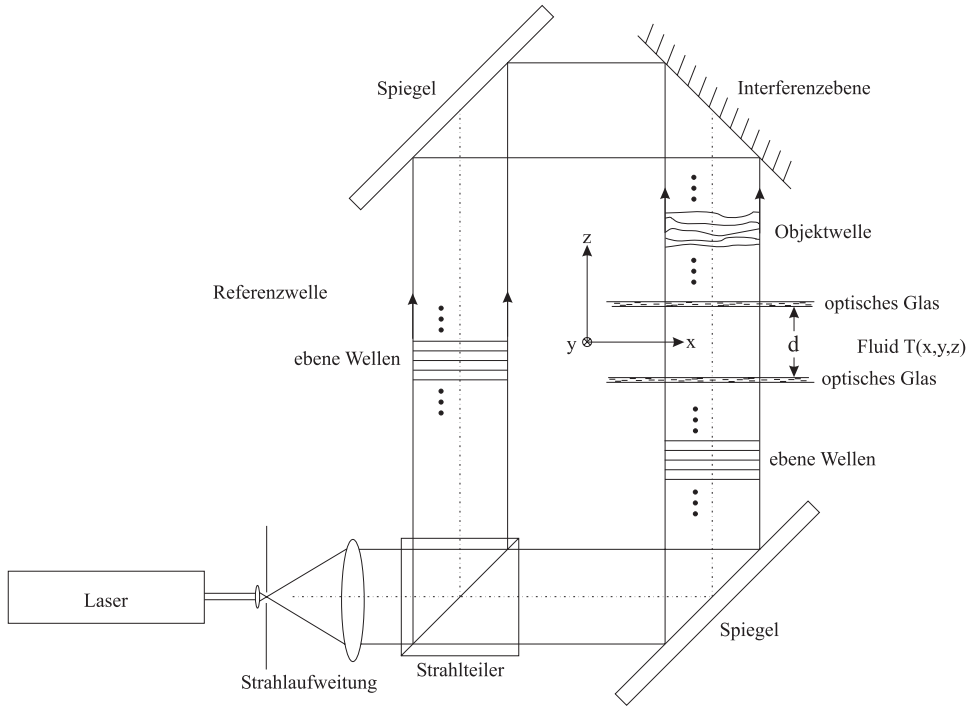


Abbildung 27: Prinzipieller Aufbau für Interferometrie.

Flüssigkeiten ist die Dichte eine Funktion der Temperatur. In Flüssigkeiten fällt  $\rho_F(T)$  üblicherweise gemäß

$$\rho_F(T) = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3.182)$$

mit wachsender Temperatur ab. Hierin stellt  $\rho_0(T_0)$  eine Referenzdichte bei der Temperatur  $T_0$  dar. Der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  liegt etwa für Wasser bei  $\alpha \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$ . Für Gase ist die Situation ähnlich, denn das ideale Gasgesetz liefert mit

$$\rho_G(T) = \frac{p}{R} \frac{1}{T} \quad (3.183)$$

ebenfalls einen Abfall der Dichte mit wachsender Temperatur. Die Dichte eines optisch transparenten Mediums (hier: eines Fluids) ist proportional zum Brechungsindex  $n$ , d.h.  $n(x, y, z) \propto \rho(x, y, z)$ . Eine Messung des Brechungsindex liefert demnach die Dichte, aus welcher wir uns mit Hilfe der Beziehungen (3.182,3.183) die Temperatur berechnen können. Die Interferometrie ermöglicht eine solche Messung des Brechungsindex. Die Interferometrie kann im übrigen auch zur Messung von Konzentrationen dienen, denn der Brechungsindex ist über die Dichte auch mit der Konzentration eines gelösten Stoffes verknüpft. Konzentrationsmessungen sind beispielsweise bei der Mischung von Fluiden in Mikromischern von Bedeutung.

Abbildung 27 zeigt einen interferometrischen Aufbau. Wir erzeugen durch einen Laser kohärentes, paralleles Licht. Dies bedeutet, daß wir ebene Wellenzüge vorliegen haben. Der Strahlteiler trennt dieses Licht in zwei Anteile auf, wobei eine Welle ungestört in Form ebener Wellenzüge zur Interferenzebene gelangt (Referenzwelle). Die zweite Welle durchläuft das Meßobjekt, wo wegen  $T(x, y, z)$  ein ortsabhängiger Brechungsindex  $n(x, y, z)$  vorliegt. Der Brechungsindex bestimmt die Geschwindigkeit, mit der eine Welle im Medium voranschreitet. Deshalb führt  $n(x, y, z)$  zu einer Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  der beiden Wellenzüge zueinander, wobei die Phasenverschiebung durch den integralen Brechungsindex über der Fluidhöhe bestimmt wird. Wir haben also

$$\Delta\varphi(x, y) \propto \int_0^d n(x, y, z) dz .$$

Die Messung der Phasenverschiebung gelingt durch Überlagerung der Objektwelle und der Referenzwelle in der Interferenzebene. Dort entsteht ein Interferenzstreifensystem, aus welchem die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  bestimmt werden kann. Es gelingt somit, die über die Höhe gemittelte Temperaturverteilung  $\bar{T}(x, y)$  aus  $\Delta\varphi(x, y)$  zu bestimmen.

Wir wollen anhand zweier Beispiele die Empfindlichkeit der Interferometrie bei der Messung von Temperaturen und Konzentrationen in Mikrokanälen abschätzen. Wir unterstellen hierzu einen Mikrokanal mit  $100 \mu m$  Höhe, in welchem Wasser bei Temperaturen im Bereich  $20^\circ C \leq T \leq 30^\circ C$  strömt. Aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindices  $n(20^\circ C) = 1.3329$  und  $n(30^\circ C) = 1.33192$  kommt es zu einem Laufunterschied der Lichtwelle über die Kanalhöhe von  $\Delta s = 106 nm$ . Im sichtbaren Bereich bei Wellenlängen um  $500 nm$  tritt Auslöschung bei einem Laufunterschied von einer halben Wellenlänge, d.h. bei  $250 nm$ , auf. Dies bedeutet, daß ein Interferenzstreifen einem Temperaturunterschied von etwa  $20^\circ C$  in diesem Mikrokanal entspricht - keine sonderlich beeindruckende Empfindlichkeit. Unterstellen wir etwa Kochsalzkonzentrationen im Bereich von  $0 \leq C \leq 5 \text{ } \%wt.$  im Wasser des gleichen Kanals, so führen die Brechungsindices  $n(0 \text{ } \%wt.) = 1.3329$  und  $n(5 \text{ } \%wt.) = 1.3418$  zu einem Laufunterschied von  $\Delta s = 2300 nm$ , was etwa 10 Interferenzstreifen entspricht. Ein ähnliches Ergebnis erhalten wir für Äthanolkonzentrationen in Wasser im Bereich  $0 \leq C \leq 20 \text{ } \%wt.$ .

### 3.2 Parameter für eine Mikrowärmetauscher

Wir haben bereits in Abschnitt 3.1.4 erkannt, daß mit den Parametern in Tabelle 1 keine sinnvolle Auslegung eines Wärmetauschers möglich erscheint. Gleichung (3.172) macht aber deutlich welche Änderung der Parameter zu einem sinnvollen Temperaturanstieg des Fluids im Mikrowärmetauscher führen. Der Erhöhung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}_{mik}$  ist hier der Vorzug zu geben vor einer Änderung der geometrischen Parameter  $l_{mik}$  und  $d_{mik}$ . Mit  $\bar{u}_{mik} \sim 1 \text{ m/s}$  erhalten wir die in Tabelle 2 gegebenen Verhältnisse. Gegenüber Tabelle 1 wird durch die große mittlere Strömungsgeschwindigkeit insbesondere ein erhöhter Druckanstieg  $\delta p_{mik}/\Delta p_{mak} \sim 10^4$  und ein moderater Temperaturanstieg  $(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)_{mik}/(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)_{mak} \sim 10$  deutlich. Der moderate Temperaturanstieg ist aber gerade für die Realisierung eines Mikrowärmetauschers notwendig.

		makro	mikro	mikro/makro
Kanaldurchmesser	$d$	$\sim 10^{-2} \text{ m}$	$\sim 10^{-5} \text{ m}$	$\sim 10^{-3}$
Kanallänge	$l$	$\sim 1 \text{ m}$	$\sim 10^{-2} \text{ m}$	$\sim 10^{-2}$
mittlere Geschwindigkeit	$\bar{u}$	$\sim 1 \text{ m/s}$	$\sim 1 \text{ m/s}$	$\sim 1$
Druckabfall	$\Delta p$	–	–	$\sim 10^4$
Massenstrom	$\dot{m}$	–	–	$\sim 10^{-6}$
Volumenstrom	$\dot{V}$	–	–	$\sim 10^{-6}$
angelegte Temperaturdifferenz	$\Delta \bar{T}$	$\sim 10 \text{ K}$	$\sim 10 \text{ K}$	$\sim 1$
Temperaturanstieg	$\bar{T}_1 - \bar{T}_0$	–	–	$\sim 10$

Tabelle 2: Typische Größenordnungen der physikalischen Größen und Quotienten der Größenordnungen aus Mikroströmung und Makroströmung, speziell für einen Mikrowärmetauscher.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß für den Mikrowärmetauscher die Abschätzung des Meßfehlers bei einem Temperaturmeßfühler (vgl. Gleichung (3.177)) nun

$$\frac{F_{mik}}{F_{mak}} \sim 10^6 \tag{3.184}$$

liefert. Ähnliches kann aus den Gleichungen (3.180, 3.181) abgeleitet werden, in welchen nun eine Vergrößerung der Wärmeleitströme um den Faktor  $10^2$  auftritt.



### 3.3 Messungen zum Druckverlust

Wir wollen an dieser Stelle die bisweilen überraschenden Ergebnisse in der Literatur zum Druckverlust in Mikrokanälen diskutieren. Wir folgen hierbei im wesentlichen einem Übersichtsartikel von Sobhan und Garimella (2000). Die in der Literatur verfügbaren Daten können in (i) laminare und (ii) turbulente Strömung unterteilt werden, wobei für beide Arten der Strömung Daten mit kreisförmigem Strömungsquerschnitt und mit rechteckigem oder trapezförmigem Strömungsquerschnitt vorliegen. Abbildung 28 zeigt die im laminaren Bereich gefundenen Resultate verschiedener Autoren. In Kanälen wird der Druckabfall üblicherweise gemäß

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \lambda \frac{l}{d},$$

d.h. mittels eines Druckverlustbeiwertes  $\lambda$ , angegeben. Es konzentriert sich somit jede Messung auf die Bestimmung von  $\lambda$ , welches im laminaren (und turbulenten) Bereich eine Funktion der Reynolds-Zahl  $Re = \bar{u}d/\nu$  darstellt. Für konventionelle (makroskopische) Strömung ist der Druckverlustbeiwert bei laminarer Strömung im kreisförmigen Querschnitt  $\lambda_{K,lam}$  und im quadratischen Querschnitt  $\lambda_{Q,lam}$  wohlbekannt. Wir haben hierfür

$$\lambda_{K,lam} = \frac{64}{Re}, \quad (3.185)$$

$$\lambda_{Q,lam} = \frac{57}{Re}. \quad (3.186)$$

In Abbildung 28 ist der Druckverlustbeiwert  $\lambda$  im sogenannten Nikuradse-Diagramm über der Reynolds-Zahl  $Re$  aufgetragen. Die konventionellen Ergebnisse für laminare Strömung  $\lambda_{K,lam}$  (gestrichelt) und  $\lambda_{Q,lam}$  (durchgezogen) sind dick eingetragen. Weiterhin findet sich eine Schar von Ergebnissen aus der Literatur in Form dünner, durchgezogener oder gestrichelter Linien.

Wir wollen zunächst die laminaren Ergebnisse für kreisförmige Querschnitte diskutieren. Die Kurve (b) ist von Yu, Warrington, Barron und Anieel (1995) mit Stickstoff und Wasser in Rohren von  $d = 19-102 \mu m$  Durchmesser erhalten. Die Kurve bestätigt die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-1}$ , wie sie für das konventionelle, kreisförmige Rohr bekannt ist (vgl. dicke gestrichelte Kurve). Die Werte liegen jedoch um etwa 20% unter der konventionellen Kurve, was durchaus im Bereich der Meßfehler liegen dürfte. Die Kurve (a) ist von Choi, Barron und Warrington (1991) mit Stickstoff in Kreisrohren von  $d = 3 - 81 \mu m$  Durchmesser gefunden. Das Ergebnis von Choi et al. (1991) ähnelt dem von Yu et al. (1995) (vgl. Kurve (b)), indem die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-1}$  auftritt

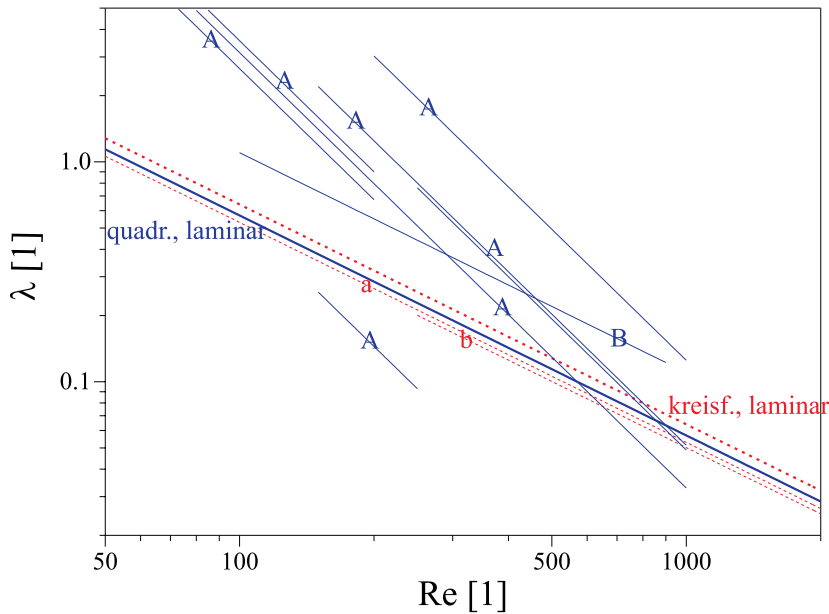


Abbildung 28: Korrelationen zum Druckverlustbeiwert  $\lambda$  bei laminarer Strömung in Mikrokanälen. Kreisförmige Querschnitte sind gestrichelt, rechteckige und trapezförmige Querschnitte sind durchgezogen.

und die Kurve um etwa 17% unter der konventionellen Kurve (dick gestrichelt) liegt. Auch diese Diskrepanz kann durchaus im Rahmen der Meßfehler liegen.

Die Messungen in rechteckigen und trapezförmigen Kanälen zeigen deutlich größere Streuung. Die Kurve (B) ist von Wu und Little (1983) in trapezförmigen Kanälen mit hydraulischen Durchmessern im Bereich  $d_h = 45 - 83 \mu m$  und Seitenverhältnissen von  $d_1/d_2 = 0.21 - 0.44$  mit verschiedenen Gasen (Stickstoff, Wasserstoff, Argon) erhalten. Der hydraulische Durchmesser ist für kreisförmige Querschnitte identisch mit dem Durchmesser, für rechteckige Querschnitte kann er aus den Kanalseiten  $d_1$ ,  $d_2$  gemäß  $d_h = 2d_1d_2/(d_1 + d_2)$  berechnet werden. Die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-1}$  bei Wu und Little (1983) ist gleich wie für konventionelle quadratische Kanäle (vgl. dicke durchgezogene Kurve), die Kurve liegt aber deutlich (ca. 90%) über der konventionellen Kurve. Die Kurven (A) schließlich sind von Peng, Peterson und Wang (1994a) für Wasser in rechteckigen Kanälen von  $d_h = 133 - 343 \mu m$  hydraulischem Durchmesser und  $d_1/d_2 = 0.33 - 1.0$  Seitenverhältnis erhalten. Die Ergebnisse von Peng et al.

(1994a) suggerieren eine Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-1.98}$  sowie eine starke Empfindlichkeit von hydraulischem Durchmesser  $d_h$  und Seitenverhältnis  $d_1/d_2$  (vgl. Schar der Kurven (A)). Verwunderlich ist, daß die Kurven sich mit wachsendem hydraulischen Durchmesser  $d_h$  zum einen nicht stetig verschieben und zum anderen für große  $d_h$  keine Annäherung an die konventionelle (makroskopische) Kurve für quadratische Kanäle (vgl. dicke, durchgezogene Kurve) zu beobachten ist. Insofern erscheinen die Daten von Peng et al. (1994a) bereits in sich inkonsistent.

Wir müssen bei ausnahmslos allen in Abbildung 28 gezeigten Messungen in Mikrokanälen (dünne Linien) beachten, daß der Druckabfall nicht durch Druckbohrungen im Kanal im Bereich eingelaufener Strömung gemessen wird. Vielmehr wird der Druck in den Ein- und Austrittsplenen gemessen. Dies bedingt eine Korrektur um die Ein- und Auslaufeffekte, die in den Arbeiten entweder überhaupt nicht oder nur sehr eingeschränkt erfolgt. Diese Korrektur wäre in sorgfältiger Weise durch einen Vergleich aus Kanälen unterschiedlicher Länge und gleichen Querschnitts im Experiment, oder durch numerische Simulationen zu erhalten. Diese sorgfältige Analyse ist in den vorgestellten Experimenten ausnahmslos unterblieben. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß eine Messung der Volumen- bzw. Massenströme, wie in 3.1.2 diskutiert, insbesondere für Gase mit erheblichen Fehlern behaftet bleibt. Dies schlägt jedoch unmittelbar auf die Genauigkeit der Reynolds-Zahl durch. Diese Aussagen lassen die Ergebnisse aus laminaren (und turbulenten) Druckabfallmessungen in der Literatur in kritischem Licht erscheinen, insbesondere dann, wenn die Daten in sich bereits Merkwürdigkeiten beinhalten. Wir wollen zunächst die Ergebnisse bei turbulenter Strömung diskutieren, bevor wir eine zusammenfassende Bewertung und Korrektur nach Obot (2000) geben.

Ein ähnlich diffuses Bild ergeben die Messungen in der Literatur zum Druckabfall in turbulent durchströmten Mikrokanälen. In Abbildung 29 sind die Ergebnisse zusammengefaßt. Zum Vergleich ist dick gestrichelt das Blasius-Gesetz für konventionelle (makroskopische) Strömung eingetragen. Nach Blasius gilt bei turbulenter Strömung

$$\lambda = 0.316 Re^{-0.25} .$$

Wir wollen zunächst die Ergebnisse für kreisförmige Querschnitte diskutieren. Die Messungen von Choi et al. (1991) mit Stickstoff in Kreisrohren von  $d = 3 - 81 \mu m$  Durchmesser sind mit (a) bezeichnet. Sie ergeben die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-0.182}$  und liegen etwa 55% unterhalb der Blasius-Kurve. Die Daten von Yu et al. (1995) sind

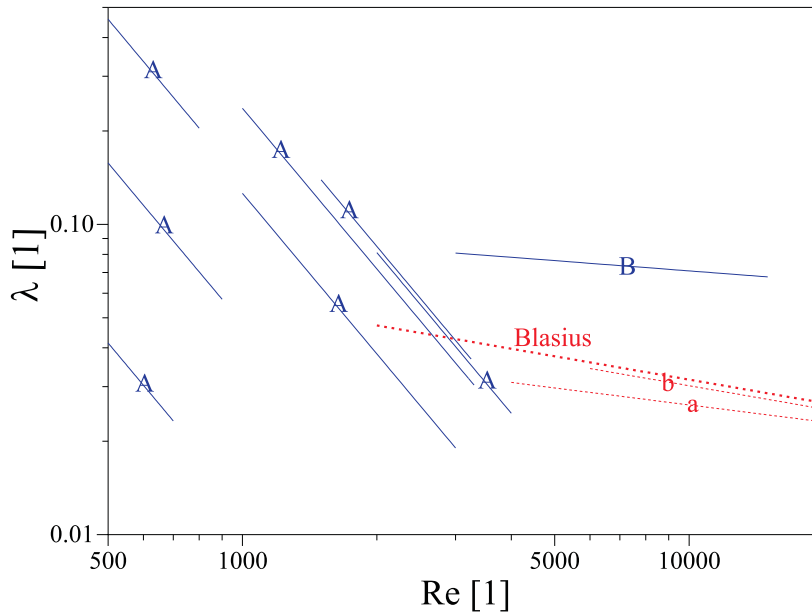


Abbildung 29: Korrelationen zum Druckverlustbeiwert  $\lambda$  bei turbulenter Strömung in Mikrokanälen. Kreisförmige Querschnitte sind gestrichelt, rechteckige und trapezförmige Querschnitte sind durchgezogen.

mit (b) bezeichnet und sind mit Stickstoff und Wasser in Rohren von  $19 - 102 \mu m$  Durchmesser erhalten. Die Kurve (b) bestätigt die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-0.25}$  nach Blasius und liegt etwa 5% unterhalb der Blasius-Kurve. Für rechteckige und trapezförmige Kanäle finden sich die folgenden Daten. Wu und Little (1983) messen mit verschiedenen Gasen in trapezförmigen Kanälen bei hydraulischen Durchmessern von  $d_h = 45 - 83 \mu m$  und Seitenverhältnissen von  $d_1/d_2 = 0.21 - 0.44$ . Die Daten sind mit (B) bezeichnet in Abbildung 29 eingetragen. Wu und Little (1983) finden die Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-0.11}$ , und die Kurve zeigt im Vergleich zur Blasius-Kurve deutlich höhere Werte für  $\lambda$ . Schließlich findet sich eine Schar von Kurven (A) nach Peng et al. (1994a). Die Kurven zeigen alle eine Abhängigkeit  $\lambda \propto Re^{-1.72}$ , welche deutlich stärker ist als im Blasius-Gesetz. Die Daten sind für Wasser in rechteckigen Kanälen von  $d_h = 133 - 343 \mu m$  hydraulischen Durchmesser und  $d_1/d_2 = 0.33 - 1.0$  Seitenverhältnis erhalten. Für die Schar (A) ist festzustellen, daß eine große Empfindlichkeit der Kurven vom hydraulischen Durchmesser  $d_h$  und vom Seitenverhältnis  $d_1/d_2$  be-

steht. Wiederum erscheinen die Ergebnisse in sich nicht konsistent, weil zum einen im Grenzfall großer Kanäle keine Annäherung an die Blasius-Kurve auftritt. Zum anderen verschieben sich die Kurven bei wachsendem hydraulischen Durchmesser  $d_h$  nicht stetig.

Obot (2000) analysiert die Daten zum Druckverlust in der Literatur sorgfältig, indem er die Originaldaten einer Reskalierung und einer sorgfältigen Korrektur unterzieht. Er kommt zu dem Ergebnis, daß ausschließlich die Daten von Wu und Little (1983) genügend detailliert sind, eine solch subtile Auswertung zu ermöglichen. Die Ergebnisse für den Druckverlust, reskaliert aus den Daten von Wu und Little (1983), sind in Abbildung 30 mit Ergebnissen für ein makroskopisches Rohr des Durchmessers  $d = 13.4 \text{ mm}$  nach Obot et al. (1997) verglichen. Dargestellt ist der modifizierte Druckverlustbeiwert  $\lambda_m$  über der modifizierten Reynolds-Zahl  $Re_m$ . Es zeigt sich, daß die reskalierten und korrigierten Daten von Wu und Little (1983) in Form der offenen Kreise im laminaren Bereich mit den Daten aus dem großen Rohr (gefüllte Kreise) zusammenfallen. Der Abfall folgt der Abhängigkeit  $\lambda_m \propto Re_m^{-1}$ . Das Auffächern der Daten nach dem Einsatz der Turbulenz bei  $Re_m \simeq 2000$  ist nach Obot (2000) auf die unterschiedlichen Übergangsprozesse in kreisrunden (gefüllte Symbole) und rechteckigen Kanälen (offene Symbole) zurückzuführen. Der Einfluß der relativen Wandrauhigkeit erscheint nach Obot (2000) von untergeordneter Bedeutung zu sein.

Zusammenfassend legt die kritische Bewertung der experimentellen Resultate und der Meßverfahren in Mikrokanälen den Schluß nahe, daß es bisher keine stichhaltigen Belege dafür gibt, daß der Druckverlust nach anderen Korrelationen als in Makrokanälen zu berechnen ist. Die Daten der verschiedenen Autoren sind teilweise in sich inkonsistent und teilweise nicht ausreichend, um eine sorgfältige Auswertung (z.B. mit Korrektur der Ein- und Auslaufeffekte) vorzunehmen. Das Ergebnis von Obot (2000) für die Daten von Wu und Little (1983) belegt im Gegenteil, daß die in makroskopischen Kanälen entwickelten, empirischen Korrelationen bei geeigneter Anwendung eine zuverlässige Beschreibung des Druckabfalls auch in Mikrokanälen liefern. Hierzu ist gegebenenfalls der Übergangsparameter für den laminar/turbulenten Übergang zu berücksichtigen (vgl. Obot et al. (1997)).

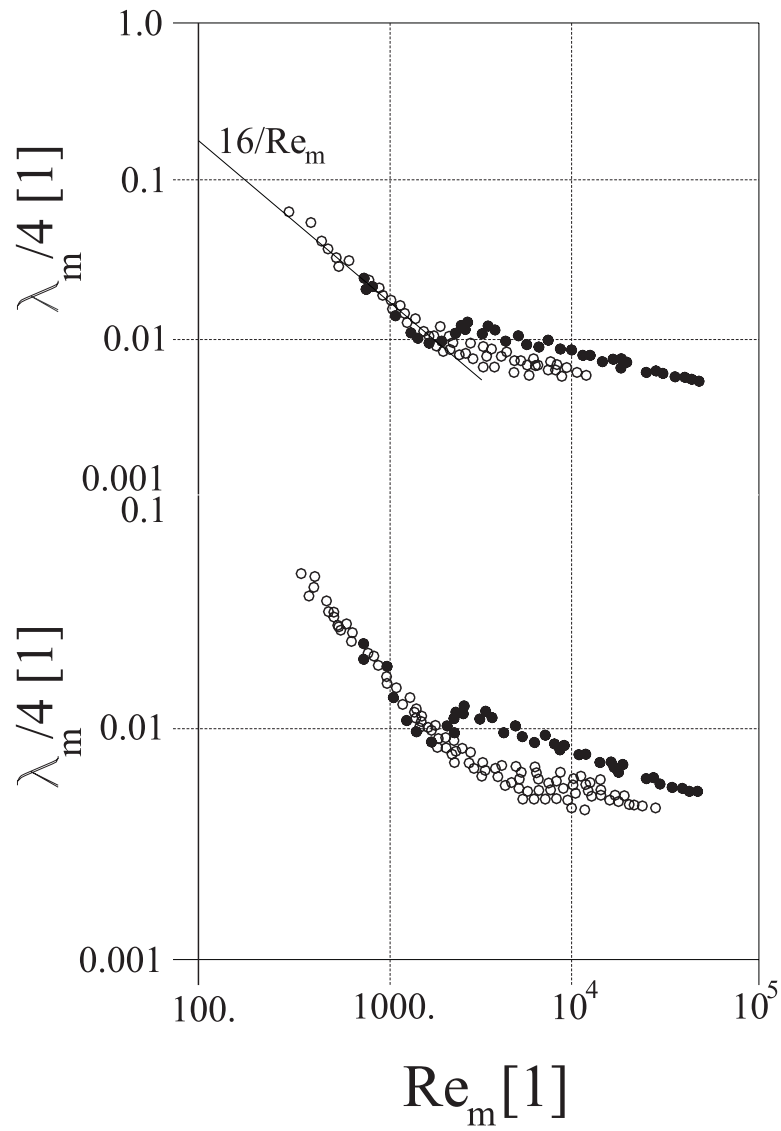


Abbildung 30: Reskalierte und korrigierte Daten zum Druckabfall nach Obot (2000). Offene Kreise geben die neu ausgewerteten Daten von Wu und Little (1983) wieder, die gefüllten Kreise stammen von einem makroskopischen Rohr nach Obot et al. (1997).

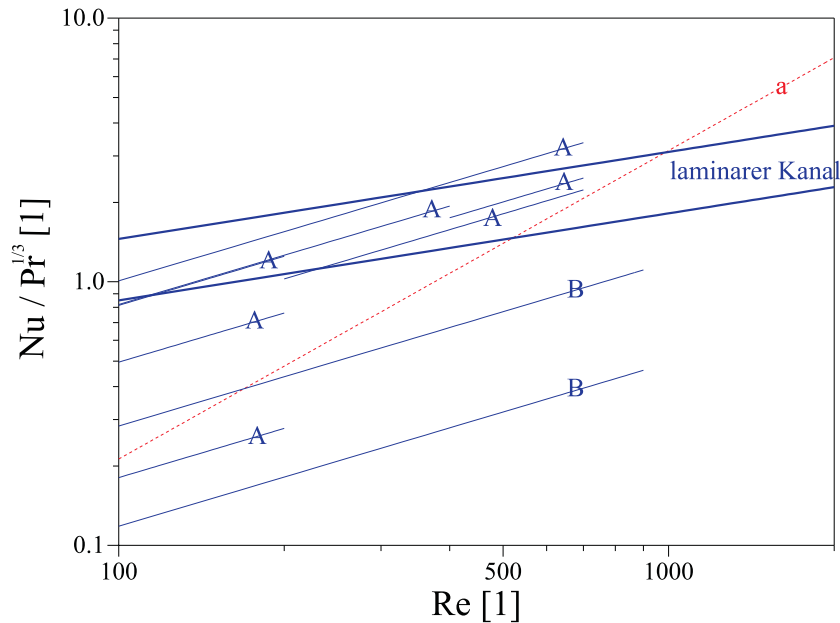


Abbildung 31: Korrelationen zum Wärmeübergang in Form der Nusselt-Zahl als Funktion der Reynolds-Zahl im laminaren Bereich. Die gestrichelten Kurven gelten für kreisförmige Querschnitte, die durchgezogenen Kurven für rechteckige Querschnitte.

### 3.4 Messungen zum Wärmeübergang

Die Literaturstellen zum Wärmeübergang in Mikrokanälen zeigen ebenfalls ein diffuses Bild. Wir folgen auch hier dem schon erwähnten Übersichtsartikel von Sobhan und Garimella (2000). Wir wollen uns zunächst mit den Daten im Bereich (i) laminarer Strömung befassen. In konventionellen (makroskopischen) Kanälen findet sich in der Literatur (vgl. Sobhan und Garimella (2000)) bei laminarer Strömung die Korrelation

$$Nu_{d_h} = 1.86(Re_{d_h} Pr)^{1/3} \left(\frac{d_h}{l}\right)^{1/3} \quad (3.187)$$

für den Wärmeübergang. Hierbei ist die Nusselt-Zahl  $Nu = hd_h/\lambda$  und die Reynolds-Zahl  $Re = \bar{u}d_h/\nu$  mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_h$  gebildet. In Abbildung 31 sind die Ergebnisse aus der Literatur zusammengefaßt. Die Prandtl-Zahl in der Korrelation (3.187) spiegelt den Einfluß der Stoffeigenschaften des Fluids wieder. In Abbildung 31 ist deshalb  $Nu/Pr^{1/3}$  aufgetragen.

Wir finden in Abbildung 31 zwei dicke Geraden, welche aus der konventionellen Korrelation (3.187) für zwei verschiedene Verhältnisse aus hydraulischem Durchmesser

$d_h$  und Kanallänge  $l$ ,  $d_h/l = 0.001, 0.005$ , ermittelt sind. Die mit (a) bezeichnete gestrichelte Kurve ist von Choi et al. (1991) für Stickstoff in Kreisrohren mit Durchmessern  $d = 9.7 - 81.2 \mu m$  erhalten. Die Kurve zeigt die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{1.17}$  und ist damit deutlich steiler als die konventionellen Kurven ( $Nu \propto Re^{0.33}$ ). Die mit (A) bezeichneten durchgezogenen Kurven sind von Peng, Peterson und Wang (1994b) für Wasser in rechteckigen Kanälen erhalten. Die Experimente sind in Kanälen von  $d_h = 133 - 317 \mu m$  hydraulischem Durchmesser durchgeführt, wobei das Verhältnis der Seitenlängen im Bereich  $d_1/d_2 = 0.33 - 1.0$  liegt. Die Kurven (A) zeigen verschiedene Parameterkombinationen, und das rechte Ende der Kurven ist durch einen Übergang zu turbulenter Strömung gegeben. Die Kurven (A) zeigen alle die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{0.62}$ . Sie sind damit deutlich steiler als die konventionelle (makroskopische) Korrelation gemäß  $Nu \propto Re^{0.33}$ . Die mit (B) bezeichneten Kurven sind von Peng und Peterson (1996) in den gleichen Kanälen wie Peng et al. (1994b) mit Wasser erhalten. Diese Autoren betrachten vier parallel geschaltete Kanäle, wobei der dimensionslose Kanalabstand  $\Delta s/d_h$  selbst für große Abstände noch Einfluß auf die Nusselt-Zahl hat. Die Kurven in Abbildung 31 sind beim größten Abstand  $\Delta s/d_h = 33.33$  für zwei verschiedene Seitenverhältnisse  $d_1/d_2 = 0.33, 1.0$  erhalten. Die Kurven enden jeweils bei  $Re = 900$ , weil die Autoren dort einen Übergang zu turbulenter Strömung feststellen. Die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{0.62}$  stimmt mit den Kurven (A) nach Peng et al. (1994b) überein, was angesichts der gleichen Versuchs- und Meßtechnik nicht verwundert.

Für (ii) turbulente Strömung findet in konventionellen Kanälen die sogenannte Dittus-Boelter-Korrelation Anwendung. Sie ist für allgemeine Kanäle mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_h$  gebildet und hat die Form

$$Nu_{d_h} = 0.023 Re_{d_h}^{0.8} Pr^{1/3} . \quad (3.188)$$

Mit der Prandtl-Zahl  $Pr$  gehen die Stoffeigenschaften des Fluids in die Berechnung des Wärmeübergangs ein. In Abbildung 32 ist deshalb  $Nu/Pr^{1/3}$  aufgetragen. Wir wollen zunächst die Literaturdaten für kreisförmige Querschnitte diskutieren. Choi et al. (1991) finden für Stickstoff in Mikrorohren mit Durchmessern von  $d = 9.7 - 81.2 \mu m$  bei turbulenter Strömung die mit (a) bezeichnete Abhängigkeit gemäß  $Nu \propto Re^{1.96} Pr^{1/3}$ , welche deutlich steiler als bei konventionellen Kanälen ausfällt. Die Kurve (a) liefert demnach im gesamten Bereich der Reynolds-Zahlen deutlich größere Nusselt-Zahlen als die Dittus-Boelter-Korrelation. Voll ausgebilde-



te Turbulenz wird von diesen Autoren im Bereich  $Re > 2500$  beobachtet. Yu et al. (1995) untersuchen in Mikrorohren mit Durchmessern von  $d = 19 - 102 \mu m$  bei turbulenter Strömung den Wärmeübergang für die Fluide Wasser ( $Pr = 5$ ) und Stickstoff ( $Pr = 0.7$ ). Sie finden eine Abhängigkeit gemäß  $Nu \propto Re^{1.2} Pr^{0.2}$ , welche für  $Pr = 0.7, 5$  in Form zweier gestrichelter Kurven mit der Bezeichnung (b) in Abbildung 32 eingetragen ist. Auch diese Kurven sind steiler als die Dittus–Boelter–Korrelation ( $Nu \propto Re^{0.8}$ ) und liegen zudem deutlich über dieser. Auffällig ist weiterhin, daß die Abhängigkeit von der Prandtl–Zahl bei Yu et al. (1995) schwächer ist. Adams, Abdel-Khalik, Jeter und Qureshi (1998) untersuchen den turbulenten Wärmeübergang von destilliertem Wasser in Kreisrohren von  $d = 760, 1090 \mu m$  Durchmesser. Ihre Ergebnisse für die beiden Rohre sind mit (c) bezeichnet in Abbildung 32 eingetragen. Im wesentlichen finden Adams et al. (1998) eine modifizierte Gnielinski–Korrelation (vgl. Gnielinski (1976)), wobei die Gnielinski–Korrelation eine etablierte Beschreibung des turbulenten Wärmeübergangs in konventionellen makroskopischen Kanälen bis zu kleinen Reynolds–Zahlen von  $Re = 2300$  darstellt. Die Modifikation nach Adams et al. (1998) liefert größere Nusselt–Zahlen als die eigentliche Gnielinski–Korrelation. Beide Korrelationen (original, modifiziert) bestätigen die Abhängigkeit  $Nu \propto Pr^{1/3}$ . Die Abhängigkeit von der Reynolds–Zahl in Abbildung 32 erweist sich als stärker im Vergleich zur Dittus–Boelter–Korrelation (vgl. Kurven (c)). Auch der Rohrdurchmesser hat einen Einfluß; die obere Kurve gilt für  $d = 760 \mu m$ , die untere Kurve für  $d = 1090 \mu m$ .

Die Ergebnisse in der Literatur für rechteckige Kanäle wollen wir als nächstes diskutieren. Wu und Little (1984) untersuchen die turbulente Strömung von Stickstoff in trapezförmigen Kanälen mit hydraulischen Durchmessern von  $d_h = 134 - 164 \mu m$  und Seitenlängenverhältnissen im Bereich  $d_1/d_2 = 0.168 - 0.285$ . Sie finden die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{1.09} Pr^{0.4}$ , welche mit (B) bezeichnet in Abbildung 32 eingetragen ist. Auch diese Korrelation erscheint steiler in Abbildung 32, was eine stärkere Abhängigkeit von der Reynolds–Zahl im Vergleich zur Dittus–Boelter–Korrelation signalisiert. Die leicht unterschiedliche Potenz der Prandtl–Zahl bei Wu und Little (1984) ist von untergeordneter Bedeutung, weil die Autoren offensichtlich nur mit einem Fluid (Stickstoff) gemessen haben und so keine Anhaltspunkte für eine solche Abhängigkeit haben können. Die Messungen von Peng et al. (1994b) sind mit Wasser in turbulent durchströmten, rechteckigen Kanälen mit hydraulischen Durchmessern im Bereich  $d_h = 133 - 367 \mu m$  und Seitenverhältnissen von  $d_1/d_2 = 0.333 - 1.0$  ausgeführt.

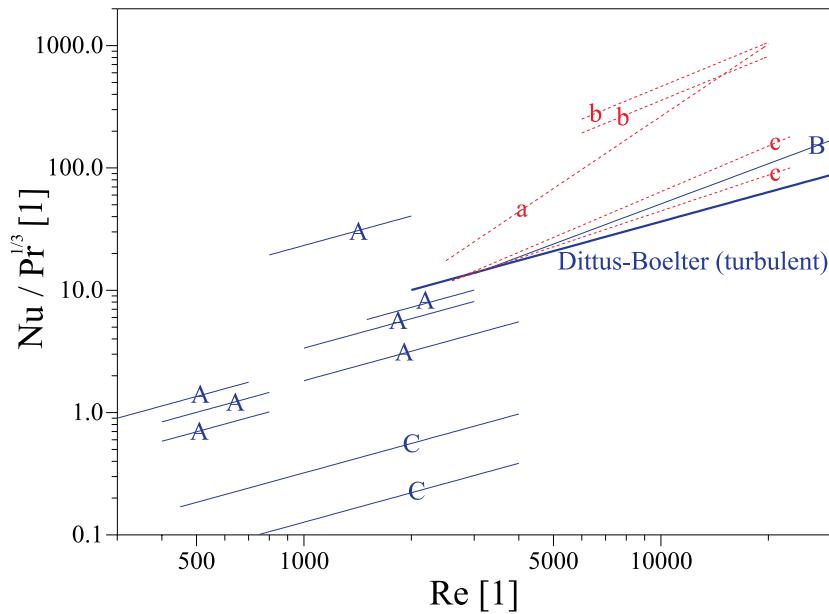


Abbildung 32: Korrelationen zum Wärmeübergang in Form der Nusselt-Zahl als Funktion der Reynolds-Zahl im turbulenten Bereich. Die gestrichelten Kurven gelten für kreisförmige Querschnitte, die durchgezogenen Kurven für rechteckige bzw. trapezförmige Querschnitte.

Die Ergebnisse für verschiedene Parameter sind mit (A) bezeichnet in Abbildung 32 eingetragen. Sie finden für alle Kurven (A) die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{0.8} Pr^{1/3}$  in Übereinstimmung mit der Dittus-Boelter-Korrelation. Auch hier bleibt die Frage, wie die Autoren die Prandtl-Zahl-Abhängigkeit mit nur einem Fluid erhalten können. Weiterhin ist die große Streuung der Kurven bei Veränderung der Kanalgeometrie auffällig. Hinzu kommt, daß keine stetige Abhängigkeit der Kurven vom hydraulischen Durchmesser  $d_h$  erkennbar ist, insbesondere auch keine Annäherung der Kurven an die Dittus-Boelter-Korrelation für große hydraulische Durchmesser. Peng und Peterson (1996) untersuchen bei gleicher Kanalgeometrie wie Peng et al. (1994b) die turbulente Strömung von Wasser, wobei jeweils 4 Kanäle parallel durchströmt werden. Ihre Ergebnisse sind selbst für große Kanalabstände  $\Delta s$  noch von  $\Delta s/d_h$  abhängig. Die Ergebnisse von Peng und Peterson (1996) sind in Abbildung 32 mit (C) bezeichnet für zwei Werte des Parameters  $Z$  beim größten Kanalabstand  $\Delta s$  eingetragen. Der Parameter  $Z$  in Peng und Peterson (1996) charakterisiert das Seiten-

verhältnis der Kanäle. Die Korrelation zeigt die Abhängigkeit  $Nu \propto Re^{0.8} Pr^{1/3}$  und ist damit parallel zur Dittus–Boelter–Korrelation und zu den Kurven (A) von Peng et al. (1994b). Andererseits liegen beide Kurven bei sehr kleinen Nusselt–Zahlen. Diese Diskrepanz kann nur durch den Einfluß mehrerer paralleler Kanäle erklärt werden, welcher offensichtlich bei allen Anordnungen präsent ist.

Die in der Literatur verfügbaren Daten zum Wärmeübergang in Mikrokanälen werden von Obot (2000) einer kritischen Prüfung unterzogen. Die Kritikpunkte in Bezug auf Ein- und Auslaufeffekte sowie in Bezug auf die angewandten Meßverfahren (Temperaturen werden in der Regel in den Ein- und Austrittsplenen gemessen) sind ähnlich denen bei den Druckverlustmessungen. Obot (2000) trägt die Daten von Adams et al. (1998), Choi et al. (1991), Yu et al. (1995) und einige Datensätze von Wu und Little (1984) in Abbildung 33 in reskaliertem und korrigierter Form auf (offene Symbole). Dagegen stellt er Ergebnisse aus einem makroskopischen Kreisrohr nach Obot et al. (1997) für  $d = 13.4 \text{ mm}$  Durchmesser und zwei verschiedenen Prandtl–Zahlen  $Pr = 0.7, 6.8$  (gefüllte Symbole). In der gewählten Auftragung kommen im laminaren Bereich alle Daten für Mikrokanäle der genannten Autoren zur Deckung, die Streuung beträgt weniger als 10%. Auch im turbulenten Bereich liegen die Daten für Mikrokanäle (offene Symbole) und für das makroskopische Kreisrohr sehr gut übereinander, die Abweichung von einer Regressionsgeraden ist kleiner als 20%. Als Schlußfolgerung sind nach Obot (2000) alle Aussagen dieser Experimentatoren bzgl. eines dramatischen Einflusses der Wandrauhigkeit oder des Seitenverhältnisses in Mikrokanälen zurückzuweisen. Es gibt vielmehr keine zuverlässigen Hinweise darauf, daß die Korrelationen, wie für den Wärmeübergang in makroskopischen Kanälen abgeleitet, in Mikrokanälen keine Gültigkeit haben. Die gebräuchlichen Wärmeübergangskorrelationen, welche letztlich alle empirisch begründet sind, können deshalb mit bekanntem Vertrauensintervall nach Obot (2000) auf Mikrokanäle angewandt werden.

### 3.5 Der Übergang laminar/turbulent

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten 3.3 und 3.4 bereits anhand der Kurven für den Druckverlustbeiwert  $\lambda$  und für den Wärmeübergang  $Nu$  gesehen, daß die zitierten Autoren die verschiedensten Bereiche für laminare und turbulente Strömung gefunden haben. Es erscheint deshalb sinnvoll, die Ergebnisse zum Übergang laminar/turbulent zusammenzufassen und einer kritischen Bewertung zu unterziehen. Wir

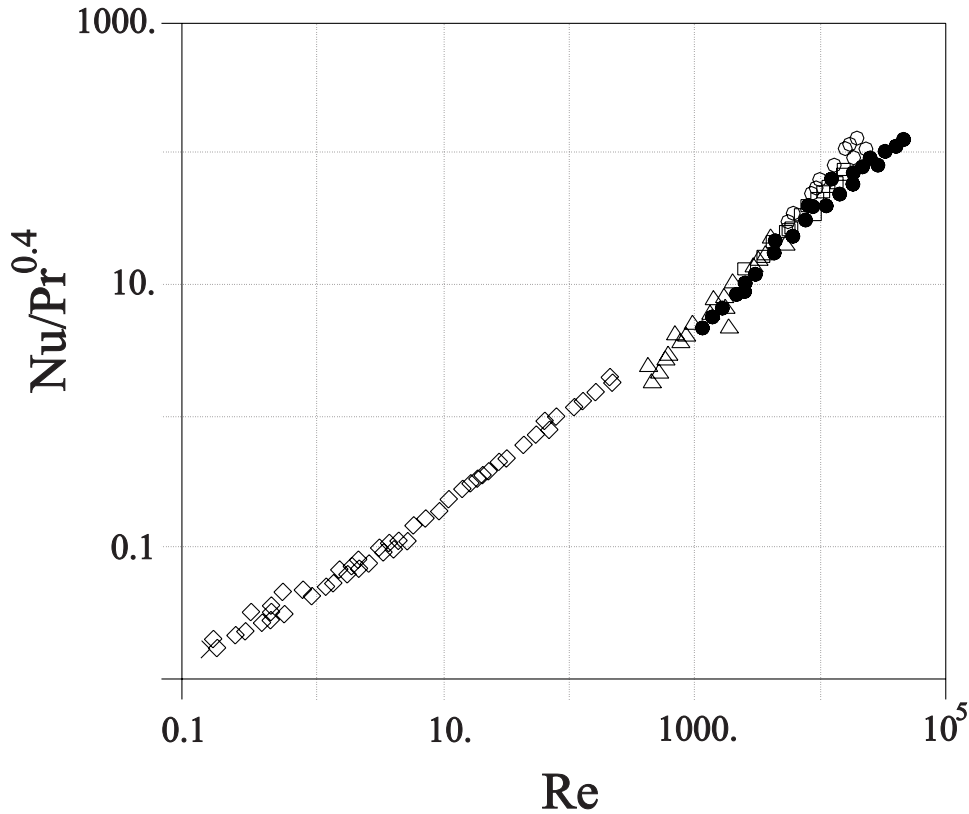


Abbildung 33: Reskalierte und korrigierte Daten zum Wärmeübergang nach Obot (2000). Die offenen Symbole gelten für Mikrokanäle verschiedener Autoren, die gefüllten Symbole gelten für ein makroskopisches Kreisrohr nach Obot et al. (1997).

wollen dies anhand von Abbildung 34 diskutieren.

Wu und Little (1983) berichten für rauhe, trapezförmige Kanäle über einen Einsatz der Turbulenz bei  $Re \simeq 350$ , während für glatte Kanäle die Strömung bis  $Re \simeq 900$  laminar bleibt. In einer nachfolgenden Arbeit in ähnlichen Kanälen geben Wu und Little (1984) den Übergangsbereich laminar/turbulent als  $Re \simeq 1000 - 3000$  an. Es bleibt unklar, ob diese Kanäle „rauh“ oder „glatt“ im Sinne der Arbeit von Wu und Little (1983) sind. Choi et al. (1991) berichten für Kreisrohre mit kleinen Durchmessern von  $d = 6.9, 9.7 \mu m$  über einen Einsatz der Turbulenz bei  $Re \simeq 500$ , während für größere Kanäle mit  $d = 53, 81.2 \mu m$  der Einsatz wie in makroskopischen Rohren bei  $Re \simeq 2000$  auftritt. Peng et al. (1994a) betrachten Mikroströmungen in rechteckigen Kanälen und finden, abhängig vom hydraulischen Durchmesser  $d_h$ , den Einsatz der Turbulenz im Bereich  $Re \simeq 200 - 700$ . Der frühe Einsatz bei  $Re \simeq 200$  wird für Mikrokanäle mit  $d_h = 133 - 200 \mu m$  beobachtet. In einem nachfolgenden Artikel konstatieren Peng et al. (1994b) voll ausgebildete Turbulenz, abhängig vom

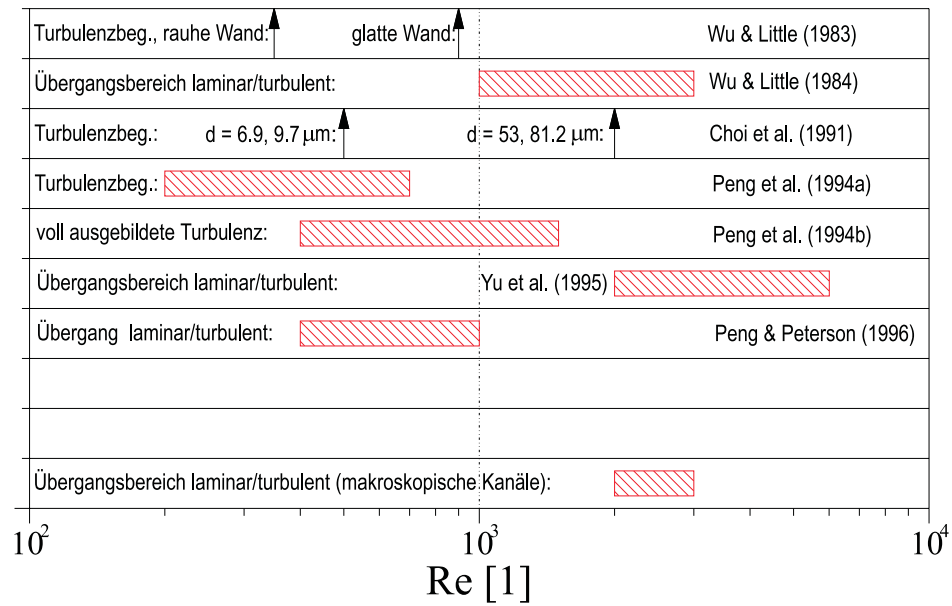


Abbildung 34: Turbulenzübergang nach verschiedenen Autoren.

hydraulischen Durchmesser, bereits im Bereich  $Re \simeq 400 - 1500$ . Schließlich findet sich bei Yu et al. (1995) für kreisförmige Mikrorohre der Übergangsbereich von laminar nach turbulent bei  $Re \simeq 2000 - 6000$ , und Peng und Peterson (1996) geben für rechteckige Mikrokanäle den Übergangsbereich mit  $Re \simeq 400 - 1000$  an. Im Vergleich zum Übergangsbereich in glatten makroskopischen Kreisrohren bei  $Re \simeq 2000 - 3000$ , zeigt sich somit nach Aussage einiger Autoren der Übergang von laminar nach turbulent in Mikrokanälen bei deutlich niedrigeren Reynolds-Zahlen.

Obot (2000) analysiert die Daten der o.g. Autoren sorgfältig und kommt zu dem Schluß, daß bei Wu und Little (1983) die kritischen Reynolds-Zahlen für den Einsatz der Turbulenz für die verschiedenen Mikrokanäle im Bereich  $Re \simeq 510 - 2365$  zu finden ist. Insbesondere für den glatten Kanal tritt der Einsatz der Turbulenz bei  $Re \simeq 2290$  auf. Weder in Peng et al. (1994a), in Peng et al. (1994b) noch in Peng und Peterson (1996) findet sich nach Obot (2000) in den Daten der geringste Hinweis auf einen Turbulenzumschlag für  $Re < 1000$ . In keinem der zitierten Artikel ist ein Kriterium angegeben, nach welchem der laminar/turbulente Übergang festgelegt wird. In Anbetracht der nicht nachvollziehbaren Festlegungen dieser Autoren empfiehlt Obot

(2000) davon auszugehen, daß keinerlei stichhaltige Hinweise auf einen frühzeitigen Turbulenzeinsatz bei glatten Mikrokanälen beliebiger Geometrie bestehen. Deshalb erscheint die Verwendung der makroskopischen Ergebnisse – Obot et al. (1997) finden die kritische Reynolds-Zahl in einem makroskopischen glatten beheizten Rohr bei  $Re \simeq 1900$  ( $Pr = 6.8$ ) und bei  $Re \simeq 2040$  ( $Pr = 0.7$ ) – als die zuverlässigste Methode. Die Ausdehnung des Übergangsbereiches kann dann nach Reynolds (1883) mit  $Re_c \leq Re \leq 1.3Re_c$  angegeben werden. Für die beiden Prandtl-Zahlen erhalten wir etwa  $Re \simeq 1900 - 2470$  bzw.  $Re \simeq 2040 - 2650$  für das glatte Kreisrohr. Für andere als kreisförmige Querschnitte ändert sich der Übergangsbereich nur wenig; die Obergrenze des Übergangsbereiches ist dann etwa bei  $1.4Re_c$  zu finden.

## Literatur

- Adams, T., Abdel-Khalik, S., Jeter, S. und Qureshi, Z.: 1998, An experimental investigation of single-phase forced convection in microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **41**, 851 ff.
- Anderson, J.L.: 1989, Colloid transport by interfacial forces, *Annual Review of Fluid Mechanics* **21**, 61–99.
- Besok, A., Karniadakis, G. und Trimmer, W.: 1996, Rarefaction and compressibility effects in gas microflows, *ASME Journal of Fluids Engineering* **118**, 448–456.
- Choi, S., Barron, R. und Warrington, R.: 1991, Fluid flow and heat transfer in microtubes, *ASME DSC-Vol. 32, Micromechanical Sensors, Actuators and Systems* p. 123 ff.
- Gad-el Hak, M.: 1999, The fluid mechanics of microdevices – the Freeman scholar lecture, *ASME Journal of Fluids Engineering* **121**, 5–33.
- Gnielinski, V.: 1976, New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow, *International Chemical Engineering* **16**, 359 ff.
- Green, H.: 1960, *The structure of liquids, Handbuch der Physik, Band X*, Springer, Berlin.
- Herwig, H.: 2001, Flow and heat transfer in microsystems: is everything different or just smaller?, *ZAMM, in press*.
- Ho, C.-M. und Tai, Y.-C.: 1996, Review: MEMS and its applications for flow control, *ASME Journal of Fluids Engineering* **118**, 437 ff.
- Koplik, J. und Banavar, J.: 1995, Continuum deductions from molecular hydrodynamics, *Annual Review of Fluid Mechanics* **27**, 257–292.
- Loose, W. und Hess, S.: 1989, Rheology of dense fluids via nonequilibrium molecular hydrodynamics: shear thinning and ordering transition, *Rheologica Acta* **28**, 91–101.
- Maxwell, J.: 1879, On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **170, Part 1**, 231–256.

- Meinhart, C., Wereley, S. und Santiago, J.: 1999, PIV measurements of a microchannel flow, *Experiments in Fluids* **27**, 414 ff.
- Obot, N.: 2000, Towards a better understanding of friction and heat/mass transfer in microchannels – a literature review, in Celata, G.P. et al. (ed.), *Proc. Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale*, Banff, Canada, 15.–20. Oktober 2000, Begell House Publ., New York, p. 72 ff.
- Obot, N., Das, L., Vakili, D. und Green, R.: 1997, Effect of Prandtl number on smooth-tube heat transfer and pressure drop, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **24**, 889 ff.
- Oertel, H.: 1995, *Strömungsmechanik*, Springer, Berlin.
- Oertel, H. sen. und Oertel, H. jun.: 1989, *Optische Strömungsmesstechnik*, Verlag G. Braun, Karlsruhe.
- Peng, X., Peterson, G. und Wang, B.: 1994a, Frictional flow characteristics of water flowing through rectangular microchannels, *Experimental Heat Transfer* **7**, 249 ff.
- Peng, X., Peterson, G. und Wang, B.: 1994b, Heat transfer characteristics of water flowing through microchannels, *Experimental Heat Transfer* **7**, 265 ff.
- Peng, X. und Peterson, G.: 1996, Convective heat transfer and flow friction for water flow in microchannel structures, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **39**, 2599 ff.
- Reynolds, O.: 1883, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Philosophical Transactions of the Royal Society London* **174, Series A**, 935 ff.
- Schaaf, S. und Chambré, P.: 1961, *Flow of rarefied gases*, Princeton University Press, Princeton USA.
- Shih, J., Ho, C.-M., Liu, J. und Tai, Y.-C.: 1996, Monatomic and polyatomic gas flow through uniform microchannels, *ASME DSC-Vol. 59, Micromechanical Systems*.



- Sobhan, C. und Garimella, S.: 2000, A comparative analysis of studies on heat transfer and fluid flow in microchannels, in Celata, G.P. et al. (ed.), *Proc. Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale*, Banff, Canada, 15.–20. Oktober 2000, Begell House Publ., New York, p. 80 ff.
- Thompson, P. und Troian, S.: 1997, A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces, *Nature* **389**, 360–362.
- van Dyke, M.: 1975, *Perturbation methods in fluid mechanics*, The Parabolic Press, Stanford.
- Wu, P. und Little, W.: 1983, Measurement of friction factors for the flow of gases in very fine channels used for microminiature Joule–Thomson refrigerators, *Cryogenics* **23**, 273 ff.
- Wu, P. und Little, W.: 1984, Measurements of the heat transfer characteristics of gas flow in fine channel heat exchangers used for microminiature refrigerators, *Cryogenics* **24**, 415 ff.
- Yu, D., Warrington, R., Barron, R. und Anieel, T.: 1995, An experimental and theoretical investigation of fluid flow and heat transfer in microtubes, *Proc. ASME/JSME Thermal Engineering Conference* **1**, 523 ff.
- Zierep, J.: 1993, *Grundzüge der Strömungslehre*, Springer, Berlin.