



---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 6995

# **Strömung von Gasen in prismatischen Kanälen konstanter Temperatur bei beliebigen Knudsen-Zahlen**

**G. Class, A. G. Class**

**Institut für Kern- und Energietechnik**

**Juli 2004**

**Forschungszentrum Karlsruhe**

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6995

**Strömung von Gasen in  
prismatischen Kanälen konstanter Temperatur  
bei beliebigen Knudsen-Zahlen**

Gottfried Class, Andreas G. Class

Institut für Kern- und Energietechnik

**Impressum der Print-Ausgabe:**

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

**ISSN 0947-8620**

**urn:nbn:de:0005-069955**

## **Zusammenfassung**

Bei der Strömung verdünnter Gase in Röhren, bzw. allgemein in prismatischen Kanälen konstanter Temperatur, tritt das seit 1909 bekannte Minimum des Leitwertes bei Knudsen-Zahlen um etwa 1 bis 10 auf. In der vorliegenden Arbeit wird eine geschlossene Gleichung für den Leitwert vorgeschlagen und physikalisch begründet. Diese ist nicht als Interpolationsfunktion anzusehen. Der Gültigkeitsbereich deckt den ganzen Existenzbereich der Knudsen-Zahlen und beliebige Rohrlängen ab. Allerdings wurde der mögliche Einfluß der Akkomodation nicht berücksichtigt. Anhand von neueren Meßdaten aus dem Schrifttum konnte das Modell nicht nur durchgehend bestätigt werden, sondern es konnten auch wichtige Einblicke in das Widerstandsgesetz für Blenden und kurze Rohre bei Annäherung an den Knudsenbereich gewonnen werden. Die gewonnenen Beziehungen erlauben die Berechnung der Rohrströmung für alle Anwendungsbereiche der Vakuumtechnik. Darüber hinaus wird gezeigt, mit welchen Methoden, ohne neue experimentelle Daten beschaffen zu müssen, die Strömungsbeschreibung auch auf andere prismatische, isotherme Strömungskanäle erweitert werden kann. Die vorgestellte Arbeit liefert erstmals eine anschauliche Erklärung des Knudsen-Minimums.

# **Flow of gases in isothermal prismatic channels at arbitrary Knudsen-numbers**

## **Abstract**

For rarified gas flow in ducts or channels of prismatic cross section a minimum of the flow resistance, which is known since 1909, is observed for Knudsen-number ranging from 1 to 10. In the present study a closed relation for the flow resistance is proposed and physically justified. This relation should not be interpreted as an interpolation formula. The relation is applicable to any Knudsen-number and channels of arbitrary length. However, potential accommodation effects are not considered yet. Employing recent experimental data from the literature the model is verified for a wide range of parameters and new physical insight is gained with respect to the flow resistance of short channels and orifice plates when Knudsen-flow is approached. The present study allows for improved computations of channel flow in all vacuum technology applications. Furthermore, we provide methods to extend our results to other isothermal prismatic channel cross sections, which are not explicitly studied in the present work, without resorting to additional experimental data. In the present study we provide the first phenomenological explanation of the Knudsen-minimum.

## **Inhalt**

1.	<i>Einleitung</i> .....	1
2.	<i>Bestimmung der Leitwertfunktion für die Strömung verdünnter Gase in langen Kanälen.</i>	2
2.1	Die Rohrströmung .....	2
2.2	Die Asymptote für die viskose Strömung.....	4
2.3	Die Asymptote für große Kn-Zahlen.....	6
2.4	Formel für die Funktion $F=F(Kn)$ .....	8
3.	<i>Der Effekt der "gerichteten Molekelbewegung"</i> .....	10
3.1	Auftrennung des Summenbeitrags ( $c_2+c_3$ ).....	10
3.2	Übertragung auf kurze Rohre .....	15
3.3	Einlaufeffekt bei kurzen Rohren.....	18
3.4	Der Einfluß der Expansion .....	19
3.5	Die Gleitströmung .....	22
3.6	Modellierung des Koeffizienten $c_4$ .....	23
3.7	Hydraulischer Durchmesser vs. mittlerer Flugweg im Querschnitt .....	24
3.8	Modellierung des Koeffizienten $c_4$ mittels MOVAK3D-Simulation .....	25
4.	<i>Einfluß der Kanalgeometrie</i> .....	31
4.1	Prismatische Kanäle mit beliebigem konvexen Querschnitt .....	31
4.2	Kanal mit quadratischem Querschnitt .....	32
4.3	Weitere konvexe Kanalformen .....	35
4.4	Ableitung von $c_1/A$ und $c_2/A$ für konvexe Kanalgeometrie .....	38
4.5	Diskussion der $c_2/A$ -Ergebnisse .....	39
4.6	Diskussion der $c_3/A$ -Ergebnisse .....	40
4.7	Prismatische Kanäle mit nicht-konvexem Querschnitt.....	42
4.8	Übertragung auf allgemeine Kanalformen .....	42
4.9	"Verblockung" bei überkritischem Druckverhältnis.....	43
4.10	Verifikation an Meßwerten für kurze Rohre .....	45
5.	<i>Zusammenfassung</i> .....	50
6.	<i>Schrifttum</i> .....	50

## 1. Einleitung

Bei der Strömung verdünnter Gase in Rohren, bzw. allgemein in prismatischen Kanälen konstanter Temperatur, tritt das seit 1909 bekannte Minimum des Leitwertes (Knudsen-Minimum) bei Knudsen-Zahlen um etwa 1 bis 10 auf. Die Knudsen-Zahl  $Kn$  ist die mittlere freie Weglänge der Molekel, bezogen auf eine charakteristische Abmessung  $l_{char}$  des Kanalquerschnittes. Bei Rohren wird für  $l_{char}$  hierbei der Rohrradius, oder oft auch der Rohrdurchmesser gewählt.

Als andere naheliegende Bezugslängen könnten entweder die mögliche mittlere freie Flugweglänge  $l_{flug}$  der Molekel im Kanalquerschnitt, oder der sogenannte "hydraulische Durchmesser"  $d_{hyd}$  herangezogen werden (wenn  $A$  die Fläche des Kanalquerschnitts und  $U$  sein Umfang sind, dann gilt  $d_{hyd} = 4 \cdot A / U$ ). Es läßt sich jedoch zeigen, daß (nur) bei konvexen Kanalquerschnitten die feste Beziehung  $l_{flug} = \pi \cdot d_{hyd} / 4$  besteht. Deswegen erscheint es als sinnvoll, bei konvexen Kanalquerschnitten allgemein den hydraulischen Durchmesser  $d_{hyd}$  als Bezugslänge für die Bildung der Knudsen-Zahl heranzuziehen.

Weil die Strömung verdünnter Gase in langen isothermen Rohren schon lange Gegenstand vieler experimenteller Arbeiten war, existieren im Schrifttum hierfür hinreichend sichere Meßdaten. Ausgehend von diesen Meßdaten läßt sich zeigen, daß für alle prismatischen isothermen Kanäle beliebiger Länge eine Funktion  $F$  existiert, welche die charakteristischen Parameter und Zustandsgrößen (lokaler Druck, Druckgradient, Massenstrom, Temperatur, usw.) des Strömungsproblems verknüpft. Einzige Voraussetzung ist hierbei, daß die an beiden Kanalenden eintretenden Molekel der Maxwell-Verteilung entsprechen.

Die neue Funktion  $F$  hat die allgemeine Form

$$F = \frac{c_1}{Kn} + c_{2k} + f_{Strahl} \cdot \frac{c_3 \cdot Kn}{c_4 + Kn}$$

Sämtliche Koeffizienten und Faktoren dieser Funktion  $F$  haben eine klare physikalische Bedeutung und können daher mit verschiedenen Methoden (ohne hierfür Messungen durchzuführen, und weitgehend unabhängig voneinander) bestimmt werden. Dabei steht der Koeffizient  $c_1$  in bekannter Weise für die turbulente oder laminare viskose Strömung bei kleinen  $Kn$ -Zahlen (einschließlich etwaiger Einlaufeffekte), der Koeffizient  $c_{2k}$  repräsentiert in der Hauptsache die viskose Gleitströmung, und die Ausdrücke  $f_{Strahl}$ ,  $c_3$  und  $c_4$  geben die rein geometrieabhängigen Eigenschaften der eigentlichen freien Molekularströmung wieder.

Insgesamt stellt die Funktion  $F$  einen modifizierten Sherman'schen Ansatz dar, der aber wegen der klaren physikalischen Bedeutung aller Glieder eindeutig über eine reine Interpolations-Beziehung hinausgeht. Mit neuen Korrelationen lassen sich die Koeffizienten für ein weites Spektrum an Kanalformen, ohne aufwendige Computer-Berechnungen durchführen zu müssen, bestimmen. Für nicht-konvexe oder für beliebige (nichtprismatische) Kanalformen lassen sich die benötigten Koeffizienten näherungsweise, allerdings unter Heranziehung von teilweise aufwendigen Computer-Berechnungen, bestimmen.

Bei Anwendungen der Funktion  $F$  ist darauf zu achten, daß sie nur den Reibungs-Druckabfall der Strömung beschreibt. Daher wird sie mit der (bei prismatischen Kanälen eindimensionalen) Impulsgleichung verknüpft und kann dann allgemein integriert werden. So wird eine Beziehung erhalten, die den Massenstrom als Funktion der Drücke an den Kanal-

Enden, mit Einschluß des wichtigen Expansions-Effektes, liefert. Gegebenenfalls kann dabei der Druck am Kanal-Ende, der dann höher als der dort herrschende Umgebungsdruck ist, iterativ so bestimmt werden, daß am Kanal-Austritt die Mach-Zahl  $Ma=1$  erhalten wird (kritischer Massenstrom).

Der Einfluß der Akkomodation auf die Transportvorgänge wird hier noch nicht behandelt, sondern stets mit voller Akkomodation (Akkomodationskoeffizient=1) gerechnet. Ebenso wird angenommen, daß die Oberflächen bis herunter zu molekularen Dimensionen glatt sind. Diese beiden Einflüsse sind wesentlich voneinander abhängig und sind bei Messungen und bei technischen Anwendungen nicht streng zu trennen. Sie werden daher im allgemeinen unter der Akkomodation alleine subsumiert. Künftige Erweiterungen der hier vorgelegten Theorie sollten sich besonders mit diesen Einflüssen befassen, weil hier deutlich wurde, daß es ja gerade die fast "streifenden" Molekeltreffer an den Wänden sind, die einerseits für diese Einflüsse besonders sensibel sind, und die andererseits einen wichtigen Anteil des gesamten Transporteffektes ausmachen.

Anhand der Nachrechnung von Messungen an kurzen Rohren (Shinagawa et al.[5]) wird gezeigt, daß die vorgestellte Theorie in der Lage ist, die experimentellen Befunde, einschließlich des Einlauf-Effektes und des wesentlichen Einflusses der Expansion, wiederzugeben.

Die hier vorgestellte neue Theorie für verdünnte Strömungen in prismatischen isothermen Kanälen beliebiger Länge und für beliebige Knudsen-Zahlen erschließt ein weites Feld technisch und wissenschaftlich relevanter Anwendungen, die bisher alleine mit der Interpolationsmethode (Sherman'sches Verfahren), bzw. mit der Annahme "äquivalenter Rohre" zu behandeln waren. Die mit der neuen Funktion F durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, daß das eingangs erwähnte Knudsen-Minimum beim Rohr, im Vergleich mit anderen Formen prismatischer Kanäle, am wenigsten ausgeprägt ist. Solange nicht besonders schwierige Bedingungen in einem Vakuumsystem vorherrschen (z.B. mit Blick auf Besonderheiten des Akkomodations-Koeffizienten, nicht-isotherme Kanäle u.a.m, die aber alle bei jedem bekannten Verfahren "unscharfe" Vorhersagen bewirken), kann die hier vorgestellte Methode zu einer erhöhten Genauigkeit der Vorhersage führen.

Mit einer ersten Anwendung der neuen Theorie im Rechenprogramm ITERVAC [8] wird ein Beitrag zur Beurteilung des geplanten Design von ITER erbracht.

## **2. Bestimmung der Leitwertfunktion für die Strömung verdünnter Gase in langen Kanälen**

### **2.1 Die Rohrströmung**

Die Strömung verdünnter Gase in Rohren der konstanten Temperatur T kann generell mit der Funktion F nach

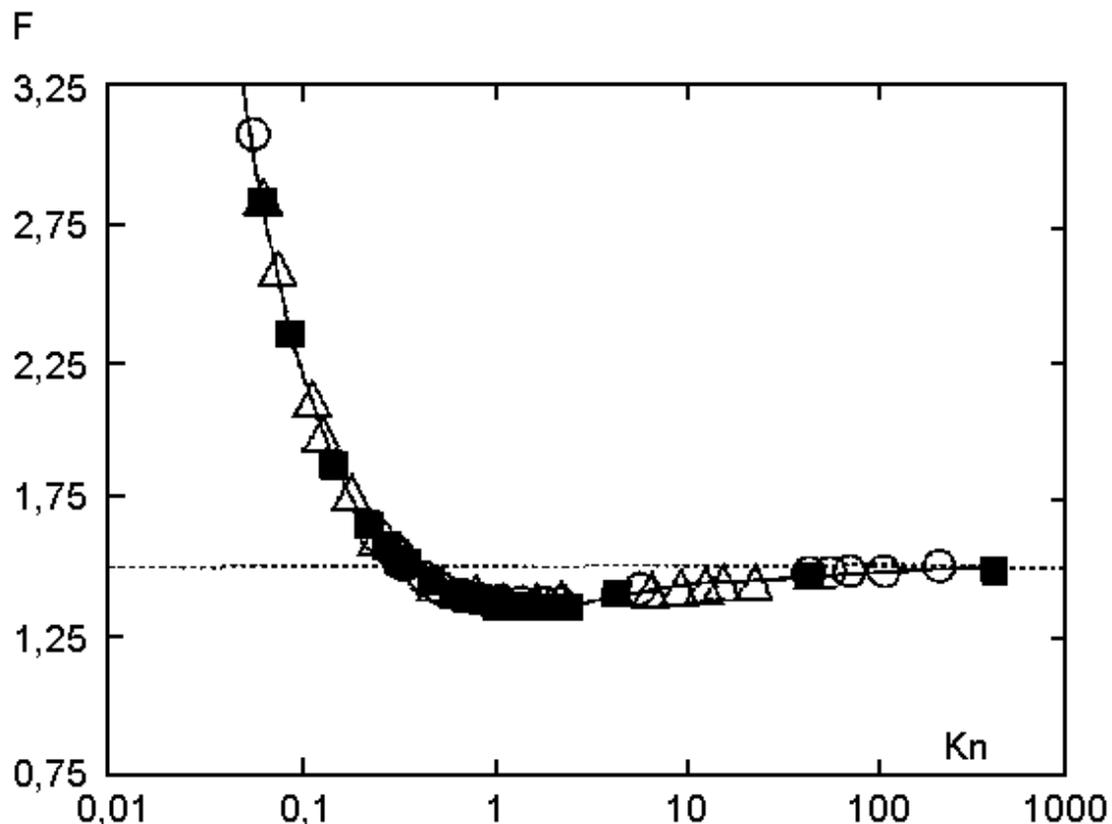
$$F = \dot{m} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot R \cdot T / M_{\text{mol}}}}{\pi \cdot R_{\text{Rohr}}^3 \cdot (\partial P_R / \partial X)} \quad \text{Gl. (1)}$$

beschrieben werden, wobei  $F$  im wesentlichen eine Funktion allein der Knudsen-Zahl  $Kn$  ist. Sie beschreibt nur den Druckabfall infolge des Reibungswiderstandes im Rohr. Sie ist eine Differentialgleichung, die wegen der Kompressibilität des Mediums unter Berücksichtigung der Impulsbilanz zu lösen ist.

Bei Strömungen in relativ schlanken Kanälen genügt es in der Regel, auf die eindimensionale Impulsgleichung in der Form

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial P_R}{\partial x} \quad \text{Gl. (2)}$$

zurückzugreifen, weil und solange die Radialkomponenten der Geschwindigkeit vernachlässigbar sind. Hierin sind  $u$  die mittlere Geschwindigkeit in Achsrichtung  $x$ ,  $\rho$  die lokale Dichte, und  $P_R$  beschreibt, stellvertretend für die Wandschubspannung  $\tau$ , die Wirkung der Schubspannung als Reibungs-Druckverlust.



**Abb. 1:** Meßwerte für die Funktion  $F$  für lange Rohre (nach [1])

Die in Abb. 1 dargestellte Funktion  $F$  (nach [1]) weist jeweils zu niedrigen und zu hohen Knudsen-Zahlen einen asymptotischen Verlauf auf. Mit abnehmender Knudsen-Zahl nähert sich links des Kurven-Minimums der Kurvenverlauf der Grenzgeraden für die viskose Hagen-Poiseuille-Strömung. Für große Knudsen-Zahl nähert sich rechts des Minimums der Verlauf einem konstanten Wert.

Der Zugang zu den weiteren Betrachtungen ergibt sich aus einer formelmäßigen Wiedergabe des Kurvenverlaufes, welche die asymptotischen Verläufe rechts und links des Kuren-

Minimums richtig wiedergibt und damit eine analytische Funktion für den Bereich des Kurven-Minimums "freilegt". Erst diese "Freilegung" des mathematischen Zusammenhangs erschließt auch die Möglichkeit der Freilegung des zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhangs.

## 2.2 Die Asymptote für die viskose Strömung

Für die weiteren Analysen werde die Knudsen-Zahl definiert als

$$\text{Kn} = \frac{l_{\text{frei}}}{D_{\text{Rohr}}} \quad \text{Gl. (3)}$$

Der Verlauf der Asymptote für die viskose Strömung wird auf folgende Weise erhalten:

Nach Haefler [2] berechnet man die freie Weglänge  $l_{\text{frei}}$  aus der Gleichung von Enskog nach

$$l_{\text{frei}} = \frac{2 \cdot \eta \cdot k \cdot T}{P \cdot m_0 \cdot v_{\text{mitt}}} \quad \text{Gl. (4)}$$

mit

$$v_{\text{mitt}} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}} \quad \text{Gl. (5)}$$

$m_0$  = Teilchenmasse

$v_{\text{mitt}}$  = mittlere Teilchengeschwindigkeit,

also zusammengefaßt

$$l_{\text{frei}} = \frac{\eta}{P} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot k \cdot T}{2 \cdot m_0}} \quad \text{Gl. (6)}$$

bzw.

$$l_{\text{frei}} = \frac{\eta}{P} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot R \cdot T}{2 \cdot M_{\text{mol}}}} \quad \text{Gl. (7)}$$

Die Reynoldszahl ist gegeben durch

$$\text{Re} = \frac{w \cdot \rho \cdot D}{\eta} \quad \text{Reynoldszahl} \quad \text{Gl. (8)}$$

Der Massenstrom wird berechnet aus

$$dP = \frac{\zeta \cdot \rho \cdot w^2}{2 \cdot D} \cdot dL \quad \text{Druckverlust} \quad \text{Gl. (9)}$$

und bei Laminarströmung gilt

$$\zeta = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{Gl. (10)}$$

was die Hagen-Poiseuille-Strömung liefert

Aus Gl. (8) wird mit

$$\dot{V} = w \cdot \pi \cdot R_{\text{Rohr}}^2$$

$$\rho = P \cdot M_{\text{mol}} / (R \cdot T)$$

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho$$

und Auflösung nach (dP/dL)

$$(dP/dL) = \dot{m}^2 \cdot (\zeta \cdot R \cdot T) / (\pi^2 \cdot 4 \cdot P \cdot M_{\text{mol}} \cdot R_{\text{Rohr}}^5) \quad \text{Gl. (11)}$$

Daraus erhält man mit Gl. (1)

$$[32 \cdot M_{\text{mol}} / (R \cdot T)]^{1/2} = F_{\text{viskos}} \cdot \dot{m} \cdot \zeta / (\pi \cdot P \cdot R_{\text{Rohr}}^2) \quad \text{Gl. (12)}$$

Aus den Gln. (3) und (7) wird

$$\text{Kn} = (\eta / (P \cdot 2 \cdot R_{\text{Rohr}})) \cdot [\pi \cdot R \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}})]^{1/2}$$

und durch Einsetzen in Gl. (12) erhält man

$$F_{\text{viskos}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\pi} \cdot \eta \cdot R_{\text{Rohr}} / (\text{Kn} \cdot \dot{m} \cdot \zeta) \quad \text{Gl. (13)}$$

In diesem Ausdruck "stört" noch der Quotient  $(\eta \cdot R_{\text{Rohr}} / \dot{m})$  [ $\text{Pa} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m} / \text{kg}$ ] bzw. [-]. Mit der Reynoldszahl wird

$$w \cdot \rho = \text{Re} \cdot \eta / (2 \cdot R_{\text{Rohr}})$$

und für den Massenstrom gilt

$$\dot{m} \cdot 2 = \pi \cdot R_{\text{Rohr}} \cdot \text{Re} \cdot \eta$$

also ergibt sich aus Gl. (13) endlich

$$F_{\text{viskos}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\pi}}{\text{Kn} \cdot \text{Re} \cdot \zeta} \quad \text{für turbulente Strömung} \quad \text{Gl. (14)}$$

Die mittlere Molekel-Geschwindigkeit  $v_{\text{mitt}}$  entspricht angenähert der Schallgeschwindigkeit  $v_s$ . Es gilt

$$v_s = v_{\text{mitt}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{c_p}{c_v}} \quad \text{Gl. (15)}$$

die Schallgeschwindigkeit liegt daher bei monatomaren Gasen um einen Faktor von 1/1,236, bei diatomaren Gasen um einen Faktor von 1/1,349 niedriger als  $v_{\text{mitt}}$ . Deswegen gilt angenähert

$$\text{Re} \approx \text{Ma} / \text{Kn} \quad \text{Gl. (16)}$$

Im Bereich der Knudsenströmung mit  $0.01 < \text{Kn} < 10$  ist daher bis zur Machzahl  $\text{Ma} = 1$  immer

$$\text{Re} < 0.1 \dots 100$$

Das heißt, daß (außer bei hohen Überschallgeschwindigkeiten) die Knudsenströmung immer laminar ist.

Im Bereich der Laminarströmung gilt

$$\zeta = 64 / \text{Re}$$

womit aus Gl. (14) erhalten wird

$$F_{\text{viskos}} = \frac{\sqrt{\pi}}{16 \cdot \text{Kn}} \quad \text{für laminare Strömung} \quad \text{Gl. (17)}$$

Dies ist die (linke) Asymptote der Funktion F für kleine Kn-Zahlen, der ein Kurven-Fit für F unabdingbar genügen muß.

### 2.3 Die Asymptote für große Kn-Zahlen

Es gilt für die Inzidenz, d.h. für die pro Zeit- und Flächeneinheit einfallenden Teilchen bei vorliegender Maxwell-Verteilung (vgl. Haefer [2])

$$I = \frac{P}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot k \cdot m_0 \cdot T} \quad [1/(\text{m}^2 \cdot \text{s})] \quad \text{Gl. (18)}$$

Dabei ist

$$k/m_0 = R/M_{\text{mol}} \quad \text{Gl. (19)}$$

$$m_0 = M_{\text{mol}}/\text{Loschmidt'sche Zahl}$$

und der gesuchte Massenstrom wird zu

$$\dot{m} = m_0 \cdot (I_{\text{Quelle}} \cdot w_{12} \cdot A_1 - I_{\text{Pumpe}} \cdot w_{21} \cdot A_2) \quad \text{Gl. (20)}$$

mit  $A_1$  als Eintritts- und  $A_2$  als KanalAustritts-(=PumpenEintritts-)Strömungsquerschnitt.

Mit Hilfe der Gln. 17 und 18 erhält man den Massenstrom  $\dot{m}$ , wenn die Drücke  $P_1$  und  $P_2$ , sowie die Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12} = w_{21}$  (prismatischer isothermer isotroper Kanal) gegeben sind. Der Massenstrom wird in Gl. (1) eingesetzt und man erhält

$$F_{\text{grenz}} = \dot{m} \cdot 8 \cdot L \cdot [2 \cdot R_{\text{indiv}} \cdot T]^{1/2} / [\pi \cdot d_{\text{hyd}}^3 \cdot (P_1 - P_2)] \quad \text{Gl. (21)}$$

bzw. im einzelnen ausgeführt wird aus den Gln. 18 und 17 erhalten

$$\dot{m} = m_0 \cdot (P_1 - P_2) \cdot w_{12} \cdot A / [2 \cdot \pi \cdot k \cdot m_0 \cdot T]^{1/2} \quad \text{Gl. (22)}$$

Mit

$$A = \text{Kanalfläche}$$

$$L = \text{Kanallänge}$$

$$R/M_{\text{mol}} [ ] = k/m_0 [ ]$$

wird weiter

$$F_{\text{molek}} = w_{12} \cdot A \cdot 8 \cdot L / (\pi^{3/2} \cdot d_{\text{hyd}}^3)$$

Für das Rohr wird hieraus

$$F_{\text{molek}} = \frac{2 \cdot w_{12} \cdot L}{D_{\text{Rohr}} \cdot \sqrt{\pi}} \quad \text{Gl. (23)}$$

Bei einem hinreichend langen Kanal geht  $F_{\text{molek}}$  nach Gl. (23) in  $F_{\text{grenz}}=(c_2+c_3)$  über. Das heißt aber auch, daß das Produkt ( $w_{12} \cdot L$ ) schließlich konstant wird. Es war also zunächst zu untersuchen, was als "hinreichend langes" Rohr anzusehen ist, also bei welchem  $L/D$  bzw.  $L/R$ -Verhältnis das Produkt ( $w_{12} \cdot L$ ) konstant wird. Zu diesem Zweck wurden neue MOVAK3D-Rechnungen für "lange Rohre" durchgeführt [3,4], um die bei Haefer [2] zu findende Tabelle, die bei  $L/R = 20$  endet, nach oben hin zu erweitern.

<b>L/R</b>	<b>Anzahl Simulationen</b>	<b>Anzahl Treffer</b>	$w_{\text{ist}}$	<b>1-<math>\sigma</math>-Streuband</b>	$w_{12}$ [-]	<b><math>\pm</math>Fehler [%]</b>
<b>20</b>	267840	29368	0,10965	0,00064	<b>0,10950</b>	<b>0,58</b>
<b>40</b>	441171	26167	0,05931	0,00037	<b>0,05929</b>	<b>0,62</b>
<b>60</b>	455913	18781	0,04119	0,00030	<b>0,04090</b>	<b>0,73</b>
<b>80</b>	811252	25338	0,03123	0,00020	<b>0,03135</b>	<b>0,64</b>
<b>100</b>	1424229	35756	0,02511	0,00013	<b>0,02537</b>	<b>0,52</b>
<b>120</b>	815753	17524	0,02148	0,00016	<b>0,02125</b>	<b>0,74</b>
<b>140</b>	1042721	19041	0,01826	0,00013	<b>0,01826</b>	<b>0,71</b>
<b>160</b>	2087370	33296	0,01595	0,00009	<b>0,01601</b>	<b>0,56</b>

**Tabelle 1:** Mit MOVAK3D [3,4] berechnete Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12}$  durch lange Rohre (die  $w_{12}$ -Werte sind bereits im Rahmen der 1- $\sigma$ -Streuung geglättete Werte; die letzte Spalte ist der statistische 1  $\sigma$ -Fehler)

Daß nach den Ergebnissen der Tabelle 1 das Produkt ( $w_{12} \cdot L$ ) tatsächlich konstant wird ist aus Abb. 2 zu entnehmen. Danach kann ein Rohr mit  $L/R = 160$ , bzw.  $L/D = 80$  eindeutig als "hinreichend langes" Rohr angesehen werden. Ein genauer Zahlenwert für den für  $L/R \rightarrow \infty$  erreichten asymptotischen Grenzwert von  $w_{12} \cdot L/R$  kann nicht direkt angegeben werden, er kann aber mittels einer Exponentialfunktion nach

$$w_{12} \cdot L/R = 1,797498 + 0,7682555 \cdot (1 - \exp(-0,03248620 \cdot L/R))$$

oder mittels einer hyperbolischen Funktion als Näherung für große  $L/R$ -Werte gemäß

$$w_{12} \cdot L/R = 2,582349 - 2,322810 / (L/R - 48,7563)$$

als Ausgleichskurve abgeschätzt werden, womit sich als Grenzwerte für  $L/R \rightarrow \infty$  schließlich 2,5658 bzw. 2,582349 ergeben. Diese Grenzwerte liegt nur um 0,16 % bzw. 0,8 % über dem sich nach Tabelle 1 für  $L/R=160$  ergebenden Wert.

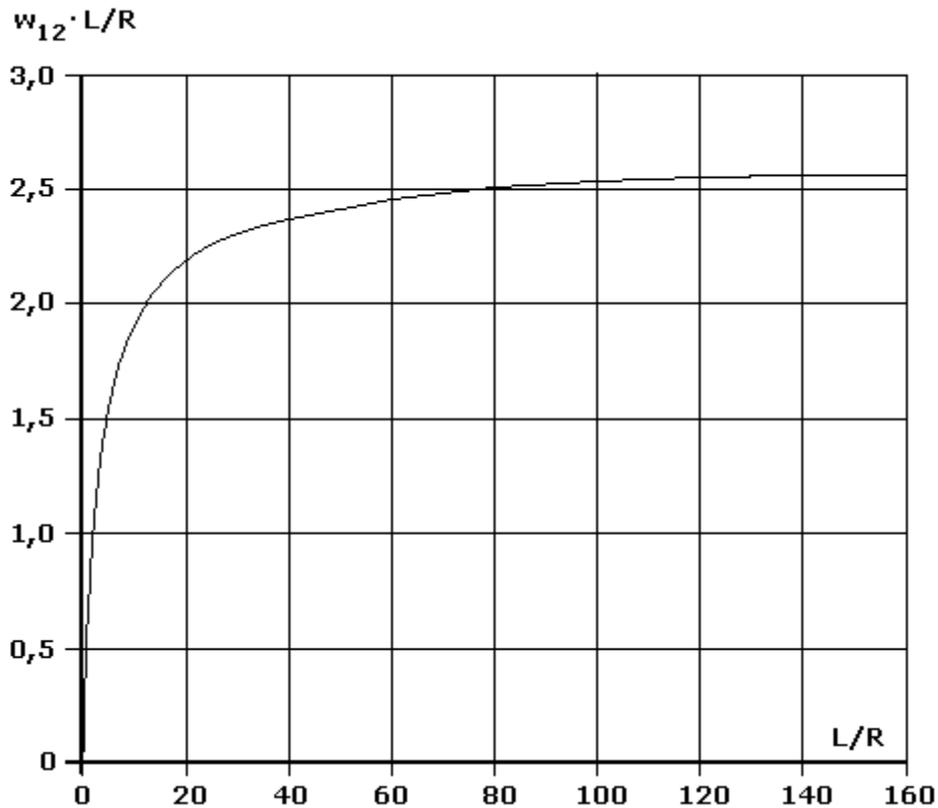
Mit diesen Zahlenwerten kann jetzt zur Kontrolle Gl. (23) für ein langes Rohr ausgewertet werden. Mit  $2 \cdot L/D = L/R = 160$  und  $w_{12} = 0,01601$  wird

$$F_{\text{grenz}} = 0,01601 \cdot 160 / \sqrt{\pi} = 1,4452$$

Nach der Formel Gl. (24) sollte der entsprechende Wert

$$F_{\text{grenz}} = 1,4948$$

sein. Demnach stimmen im Rahmen der Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Daten Kurven-Fit und Theorie sehr gut (Abweichung 3,4 %) überein!



**Abb. 2:** Produkt aus Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12}$  und relativer Rohrlänge  $L/R$  als Funktion von  $L/R$ , nach MOVAK3D-Berechnung (Tabelle1)

#### 2.4 Formel für die Funktion $F=F(Kn)$

Auf der Grundlage der Formulierung der Asymptoten der Funktion  $F$  gelingt mit einem modifizierten Sherman'schen Ansatz die erfolgreiche Wiedergabe des durch die eingezeichneten Meßwerte vorgegebenen Kurvenverlaufs in Abb. 1.

$$F = \frac{0,11078}{Kn} + 1,1581 + \frac{0,3367 \cdot Kn}{2,231 + Kn} \quad \text{Gl. (24)}$$

Für die Diskussion und die weiteren Untersuchungen ist es nützlich, die Gl. (24) in allgemeinerer Form

$$F = \frac{c_1}{Kn} + c_2 + \frac{c_3 \cdot Kn}{c_4 + Kn} \quad \text{Gl. (25)}$$

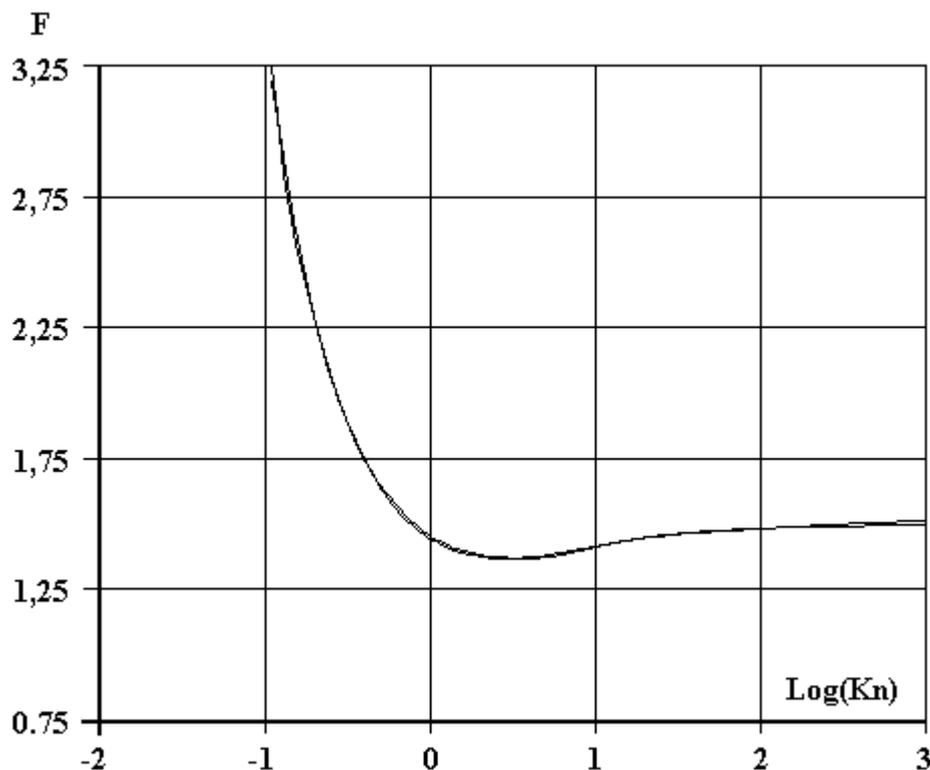
anzuschreiben.

Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß den Zahlenwerten für  $c_2$ ,  $c_3$  und besonders für  $c_4$  eine gewisse **Unschärfe** anhaftet. Diese Unschärfen liegen bei  $c_2$  und  $c_3$  im Bereich von etwa 3 %, während  $c_4$  aus allen Herleitungen und Simulationen deutlich kleiner herauskommt. Es stellt sich also die Frage, wie sensibel der Funktions-Verlauf auf die **gleichzeitige**

Änderungen aller Koeffizienten reagiert. Wird z.B.  $c_4=1,238$  vorgegeben (dieser Wert wird weiter unten abgeleitet), so nehmen  $c_2$  und  $c_3$  die Werte 1,124 und 0,349, ohne wesentliche Veränderung des Kurvenverlaufes. Das bedeutet bei  $c_2$  eine mögliche Unschärfe oder Abnahme um 3,0 % und bei  $c_3$  eine gleichzeitige Zunahme von 3,6 %. Damit wird eindeutig festgestellt, daß der Zahlenwert von  $c_4 \approx 2,231$  der am wenigsten sichere Wert ist.

Die gewonnene Formel gibt, wie in Abb. 3 zu sehen ist, die Meßwerte "präzise" wieder. In Abb. 3 ist die Funktion nach Gl. (24) zusammen mit den digitalisierten Originaldaten aus dem VDI-WA dargestellt. Die beiden Kurvenzüge unterscheiden sich im Rahmen der zu erwartenden Genauigkeit nicht.

Der Ausdruck nach Gl. (24) ist in seiner mathematischen Struktur so einfach, daß er einer einfachen physikalischen Interpretation zugänglich ist. Das zur Knudsen-Zahl  $Kn$  proportionale Glied weist auf einen Prozeß hin, der, im Vergleich zum konstanten Glied 1,158, erst mit wachsender und hinreichend großer freier Weglänge der Molekeln Bedeutung erlangt, um schließlich asymptotisch in eine Sättigung überzugehen.



**Abb. 3:** Der Kurven-Fit nach Gl. (24), zusammen mit der digitalisierten Original-Kurve aus "Bild 13" aus VDI Wärmeatlas [1], Kap. Mo

Es ist klar, daß sich die Summe  $F_{\text{grenz}} = (c_2+c_3)$  aus dem asymptotischen Verhalten des Produktes ( $w_{12} \cdot L$ ) ergibt. Die Summe  $F_{\text{grenz}}$  ist daher eindeutig physikalisch erklärt, wogegen **die Auftrennung in die Einzelterme  $c_2$  und  $c_3$  eine entscheidende Erweiterung und Detaillierung der Modellvorstellungen** notwendig macht.

### 3. Der Effekt der "gerichteten Molekelbewegung"

Der Zugang zu der notwendigen Erweiterung der Modellvorstellung kommt u.a. aus den Erfahrungen bei der Anwendung des bekannten "Additionstheorems der reziproken Leitwerte" [2] auf die Durchtrittswahrscheinlichkeit hintereinander angeordneter Bauelemente. Bei Anwendung dieses Theorems auf hintereinander angeordnete sehr kurze Stücke gleichartiger Bauelemente wird eine virtuelle vollständige Unterdrückung aller "Ordnungsprozesse" der Molekelbewegung bewirkt. **An jeder Fügestelle wird virtuell erneut eine perfekte Maxwell-Verteilung "erzwungen"!** Unter diesen Umständen können sogenannte **Strahlbildungseffekte** nicht auftreten. Unter "Strahlbildung" (diese Bezeichnung ist in Anlehnung z.B. an [2] gewählt) ist ein Prozeß der Beeinflussung der Bewegung der Molekeln zu verstehen, der bewirkt, daß die aus einem Bauelement austretenden Molekeln teilweise eine **"gerichtete Bewegung"** ausführen. Bei langen prismatischen Bauelementen ist der Aufbau eines Anteils gerichteter Molekelbewegung besonders deutlich ausgeprägt. Die Ursache für diese gerichtete Molekelbewegung ist nur ein simpler "Sortiereffekt". Diejenigen Molekeln, die im flachen Winkel von der Kanalwand weg zufällig in Längsrichtung des Bauelementes fliegen, können in diesem Falle auch einen viel größeren freien Flugweg bis zum Auftreffen auf eine Wand zurücklegen, als jene, die quer durch das Bauelement fliegen. Dabei sind die "flachen Winkel" statistisch seltene Ereignisse.

Molekeln, welche direkt vom Rohreintritt zum Rohraustritt durchfliegen, haben in diesem Sinne nichts mit diesem Mechanismus der Strahlbildung zu tun (bei einem Rohr mit  $L/D=80$  sind das ohnehin nur  $(R/L)^2 = 1/160^2 = 0,004 \%$ ). Es tragen zur Strahlbildung nur jene Molekeln bei, die die **Rohrwand** getroffen haben. Voraussetzung für derartige **Ordnungsprozesse** ist daher eine hinreichend große Kn-Zahl und ein langes Rohr, weil in kurzen Rohren keine weiten Flüge von Wand zu Wand möglich wären. Strahlbildung gibt es also nur in langen Kanälen.

Zum eigentlichen Molekel-Transport durch das Rohr tragen nur **die auf die Rohrachse projizierten Flugwege** bei. Auch bei  $Kn \rightarrow \infty$  "tanzen" die Molekeln überwiegend lokal mit relativ kurzen Flugwegen zwischen den Wänden hin und her, im Mittel mit freien Flugwegen von nur  $0,9938 \cdot d_{\text{Rohr}}$ , weil ihre **mittlere Emissionsrichtung normal zur Rohrwand** gerichtet ist. Deswegen ist die Projektion der Flugwege auf die Rohrachse, hier als Transportlänge bezeichnet, im allgemeinen viel kleiner als  $d_{\text{Rohr}}$ . Große freie Flugwege aber ergeben Transportlängen, die dem freien Flugweg annähernd gleich sind, denn große Flugwege können nur in Längsrichtung des Rohres erfolgen. **Unter dem Strahlbildungseffekt ist, wie weiter unten gezeigt wird, der gesamte Transport durch Transportlängen oberhalb von etwa  $1,51 \cdot d_{\text{Rohr}}$  zu verstehen, bzw. der halbe Transport durch Strahlbildung wird für Transportlängen oberhalb von etwa  $2,3 \cdot d_{\text{Rohr}}$  gefunden.**

#### 3.1 Auftrennung des Summenbeitrags ( $c_2+c_3$ )

Betrachtet wird ein **isothermer primatischer Kanal**, der aus kurzen (im Grenzfall differentiellen) Teilstücken zusammengesetzt gedacht sei. Ein solches Teilstück habe die Länge  $\Delta L$  und die Querschnittsfläche  $A$ . An den Enden jeden Teilstückes (und auch überall in seinem Inneren) herrsche eine **Maxwellsche Geschwindigkeits- und Richtungsverteilung**, d.h. daß alle Strahleffekte von vornherein ausgeschlossen sind. **Hier ist noch wichtig anzumerken, daß die freie Weglänge der Molekel in dieser Betrachtung solange keine Rolle spielt, wie eine gegenseitige Beeinflussung der Bewegungsrichtung der Molekel ausgeschlossen wird. Es handelt sich also um die Strömung eines "fiktiven Maxwell-**

**Gases" beliebiger Dichte.** Dabei kann als sicher angenommen werden, daß dieses fiktive Gas, das sich ja vom "realen Gas" dadurch unterscheidet, daß es definitionsgemäß keinerlei Strahlbildungseffekte ausbildet **und** keine gegenseitige Beeinflussung der Bewegungsrichtung der Molekel aufweist, als geeignetes Modellmedium auch für die Zustände des realen Gases in der Übergangsströmung einsetzen läßt.

Die Durchtrittswahrscheinlichkeit durch das Kanal-Teilstück sei wiederum, wie zuvor, mit  $w_{12}$  bezeichnet und ist wegen der Symmetrie in beiden Richtungen gleich, also

$$w_{21} = w_{12} \quad \text{Gl. (26)}$$

Betrachtet werden nun zwei voneinander unabhängige **gegenläufige** Teilchenströme I und J, wobei  $I_1$  der in die Querschnittsfläche  $A_1$  eintretende und  $I_2$  der aus der Fläche  $A_2$  austretende Strom sei.  $J_2$  ist der in umgekehrter Richtung in die Fläche  $A_2$  eintretende und  $J_1$  entsprechend der aus der Fläche  $A_1$  austretende Strom. Dann gelten folgende Bilanzgleichungen

$$I_2 = I_1 \cdot w_{12} + J_2 \cdot (1 - w_{21}) \quad \text{Gl. (27.1)}$$

$$J_1 = I_1 \cdot (1 - w_{12}) + J_2 \cdot w_{21} \quad \text{Gl. (27.2)}$$

Daraus wird wegen Gl. (26)

$$I_2 = I_1 \cdot w_{12} + J_2 \cdot (1 - w_{12}) \quad \text{Gl. (28.1)}$$

$$J_1 = I_1 \cdot (1 - w_{12}) + J_2 \cdot w_{12} \quad \text{Gl. (28.2)}$$

Die Indizierung der Flächen  $A_i$  wird hier nur benutzt, um den jeweils gemeinten Kanalabschnitt zu kennzeichnen, ansonsten sind beim prismatischen Kanal die  $A_i = A = \text{const.}$

Wird an die Fläche  $A_2$  ein identisches Kanalelement angeschlossen mit der neuen Austrittsfläche  $A_3$ , **aber mit der Voraussetzung, daß der in die Fläche  $A_3$  eintretende Strom  $J_3$  identisch Null sei**, dann wird entsprechend

$$I_3 = I_2 \cdot w_{12} \quad \text{Gl. (29.1)}$$

$$J_2 = I_2 \cdot (1 - w_{12}) \quad \text{Gl. (29.2)}$$

Setzt man Gl. (29.2) in Gl. (28.1) ein, so wird nacheinander erhalten

$$I_2 = I_1 \cdot w_{12} + I_2 \cdot (1 - w_{12}) \cdot (1 - w_{12})$$

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot w_{12}}{1 - (1 - w_{12})^2}$$

und mit Gl. (29.1) wird dann

$$I_3 = \frac{I_1 \cdot w_{12}^2}{1 - (1 - w_{12})^2} \quad \text{Gl. (30)}$$

Weil nun auch gilt

$$w_{13} = I_3 / I_1$$

so erhält man die gesuchte Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{13}$  durch die beiden hintereinander geschalteten Kanalelemente zu

$$w_{13} = \frac{w_{12}^2}{1 - (1 - w_{12})^2} \quad \text{Gl. (31)}$$

In dieser letzten Gleichung verbirgt sich ein einfacher Zusammenhang, der durch Umformung sichtbar wird. Bildet man nämlich auf beiden Seiten der Gl. (31) den Reziprokwert und subtrahiert davon Eins, so erhält man nach Umformung die Beziehung

$$(1/w_{13} - 1) = 2 \cdot (1/w_{12} - 1) \quad \text{Gl. (32)}$$

Die Gl. (32) ist **linear** bezüglich des Vorfaktors auf der rechten Seite und kann daher analog nicht nur für weitere "Verdoppelungen" verwendet werden, sondern **sie gilt für jede Zusammenschaltung von n Kanalelementen**, wobei **n** auch nicht mehr eine ganze Zahl sein muß. Also wird jetzt **mit beliebigem n**

$$\left( \frac{1}{w_{1n}} - 1 \right) = n \cdot \left( \frac{1}{w_{12}} - 1 \right) \quad \text{Gl. (33)}$$

Die Ausdrücke  $(1/w_{ij} - 1)$  stellen gemäß

$$(1/w_{ij} - 1) = (1 - w_{ij})/w_{ij} = S_{ij}$$

direkt das Verhältnis  $S_{ij}$  der Rückstreu- zur Durchtrittswahrscheinlichkeit durch den entsprechenden Kanalabschnitt der Länge  $L$  mit seinen (gleichen) Endflächen  $A_i$  und  $A_j$  dar. Werden Kanalstücke mit einer gegen Null strebenden Länge gewählt, dann spielen auch im Fall der realen Strömung Strahlbildungseffekte keine merkliche Rolle mehr, und somit ergibt sich (erfahrungsgemäß, aber auch weil Gl (N 8) ja sowieso linear ist) auch ein linearer Zusammenhang zwischen  $S_{ij}$  und der relativen Länge  $L/D_{\text{Rohr}}$ . Auch für beliebig lange Kanalstücke kann daher für unser fiktives Gas geschrieben werden

$$(1/w_{12} - 1) = s \cdot L/D_{\text{Rohr}} \quad \text{Gl. (34)}$$

Benutzt man die gut gesicherten Zahlenwerte nach de Marcus (vgl. Häfer [2], S. 24), dann wird im realen Fall beim sehr kurzen Rohr für  $L/D_{\text{Rohr}} = 0,05$  und mit  $w_{\text{kurz}} = 0,95240$  erhalten wir aus Gl. (34)

$$\boxed{s = 0,99958} \quad \text{Gl. (35)}$$

Das Ergebnis läßt vermuten, daß der Zahlenwert  $s$  für das fiktive (anstatt für das reale) Gas beim Rohr eigentlich Eins sein sollte. Insofern erscheint das Ergebnis als erstaunlich!

Man kann als Abschätzung die Annahme treffen, daß alle Einwürfe vom Mittelpunkt der kreisförmigen Eintrittsfläche aus erfolgen. Dann wird ein schmaler Streifen der Breite  $\Delta L$  bei  $\cos$ -förmiger Verteilung der Wurfrichtungen mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\cos(\text{max. Wurfwinkel auf Streifen})$$

oder

$$\cos(\pi/2 - \text{asin}(2 \cdot \Delta L/D_{\text{Rohr}}))$$

getroffen, wobei bei hinreichend kleinem  $\Delta L/D_{\text{Rohr}}$  im Grenzfall die Hälfte dieser Treffer zu Rückstreuereignissen werden. Aus dieser Wahrscheinlichkeit erhält man  $s$  endlich durch Division mit  $\Delta L/D_{\text{Rohr}}$ . Auf diese Weise ergibt sich tatsächlich

$$s = 1$$

Damit erhalten wir die Durchtrittswahrscheinlichkeit für unser fiktives Maxwell-Gas durch isotherme prismatische Kanäle **allgemein** zu

$$(1/w_{12} - 1) = s \cdot L/d_{\text{hyd}}$$

oder umgeformt

$$w_{12} \cdot L = 1/(s \cdot d_{\text{hyd}} + 1/L) \quad \text{Gl. (36)}$$

Hierbei ist aber  $s$  von der Querschnittsform des Kanals abhängig. - Demnach wird auch für unser fiktives Gas die Durchtrittswahrscheinlichkeit für lange Kanäle asymptotisch proportional zu  $1/L$ . Das asymptotische Verhalten für lange Kanäle ist ähnlich wie beim realen Gas mit den Strahlbildungseffekten, aber eben mit kleinerer Durchtrittswahrscheinlichkeit, und beim fiktiven Gas gänzlich unabhängig von der Knudsen-Zahl.

Setzen wir für das Rohr für  $s_{ij}$  Eins ein und verwenden für den realen Fall  $F_{\text{grenz}}$  (siehe weiter oben), dann wird das Verhältnis der Durchtrittswahrscheinlichkeiten für lange Rohre bei hinreichend großen Kn-Zahlen einfach zu

$$w_{\text{real}}/w_{\text{fiktiv}} = F_{\text{grenz}} \cdot \sqrt{\pi} / 2 = 1,325$$

womit die Zunahme der Transportleistung durch die "Ordnungsprozesse beim realen Fall" quantitativ erfasst ist. Die hier vorgestellte Ableitung für prismatische Kanäle, insbesondere Gl. (33), stellt im übrigen einen Sonderfall des bekannten allgemeineren "Additionstheorems" [2] dar.

Mit dem Einsatz des **Additionstheorems** gelingt also eine effektive Separation der "Transportleistung durch gerichtete Molekelbewegung" von der gesamten Transportleistung. Für eine Aneinanderfügung von kurzen Rohrstücken (oder anderen prismatischen Kanälen) kann die Strahlwirkung berechnet werden, wenn die Durchtrittswahrscheinlichkeiten für ein möglichst kurzes Rohrstück ( $L_{\text{kurz}} \leq R_{\text{Rohr}}$ ) und für ein hinreichend langes Rohrstück ( $L_{\text{lang}} = 160 \cdot R_{\text{Rohr}}$ ) genau genug bekannt sind. Bei dieser Anwendung reduziert sich das Additionstheorem (nach Gl. (33) bzw. nach [2]) auf die einfache Beziehung

$$w_{\text{lang\_ohneStrEff}} = 1/[1+n \cdot (1/w_{\text{kurz}}-1)], \quad \text{Gl. (37)}$$

mit dem Verhältnis der Längen

$$n = L_{\text{lang}}/L_{\text{kurz}} \quad \text{Gl. (38)}$$

und liefert so die zu erwartende Durchtrittswahrscheinlichkeit ohne Strahlbildungseffekt.

Wurde, wie weiter oben ausgeführt wurde, der Wert der Summe ( $c_2+c_3$ ) unter Verwendung von  $w_{\text{lang}}$  bereits ermittelt, so erhält man, weil nach Gl. (23)  $F_{\text{molek}}$  direkt proportional zu  $w_{12}$  ist, direkt

$$c_3 = (c_2 + c_3) \cdot \left(1 - \frac{w_{\text{lang\_ohneStrEff}}}{w_{\text{lang}}}\right) \quad \text{Gl. (39)}$$

Zur Kontrolle beim Rohr:

$$(c_2 + c_3) = 1,49479 \quad \text{nach Gl. (24)}$$

nach Haefler [2], S. 24, und mit neuer MOVAK3D ([3,4])-Rechnung für  $L/D = 80$  wird

$$w_{\text{lang}} = 0.01601$$

und damit weiter die Werte in Tabelle 2,

L/D	w <sub>kurz</sub>	w <sub>lang_ohneStrEff</sub>	ergibt für c <sub>3</sub>
0,05	0,95240	0,0123508	0,34164
0,1	0,90922	0,0123648	0,34034
0,3	0,77115	0,0124786	0,32971
0,5	0,67198	0,0126419	0,31447
1	0,51423	0,0130595	0,27548
1,6	0,40548	0,013457	0,23836
2	0,35658	0,0136655	0,21890

**Tabelle 2:**  $c_3$  nach Gl. (39), als Funktion von  $L/D = L_{\text{kurz}}$

während nach der Formel Gl. (24) der Wert 0,3367012 zu erwarten ist.

Im übrigen zeigt sich, daß die Strahlbildung die Transportleistung im **Rohr** theoretisch um etwa 29,6 % erhöht, bzw. daß bei gesättigter Strahlbildung ein Transportleistungs-Anteil von  $0,3367/1,4948 = 22,52$  % durch die Strahlbildung erbracht wird. (Wegen der additiven Überlagerung der einzelnen Beiträge tritt der Effekt in Abb. 1 allerdings auf nur etwa 13,3 % abgeschwächt in Erscheinung)

Nach den in Tab. 2 zusammengestellten Ergebnissen ist für die Ermittlung von  $c_3$  eine Paarung mit  $L_{\text{kurz}}/D < 0,5$  und  $L_{\text{lang}}/D = 80$  zu wählen. Je kleiner  $L_{\text{kurz}}/D$  gewählt wird, desto "richtiger" wird das Ergebnis, zugleich wächst aber auch die Auswirkung von kleinen Ungenauigkeiten bei  $w_{\text{kurz}}$ . Daher erscheint die Wahl von ungefähr  $L_{\text{kurz}}/D = (0,1..0,5)$  als sinnvoll. Der Grenzwert der für  $c_3$  berechneten Werte für  $L/D \Rightarrow \text{Null}$  ist jedenfalls in guter Übereinstimmung mit dem Zahlenwert nach der aus den Meßwerten in Abb. 1 für die Funktion F gewonnenen Gl. (24).

Die sehr gute Übereinstimmung kann als überzeugender Beweis dafür angesehen werden, daß das Minimum der Funktion F eine direkte und eindeutige Folge des Effektes der Strahlbildung ist. Mit steigender Kn-Zahl wächst also der Strahlbildungs-Effekt in dem Maße an, wie er durch die Stöße der Molekeln untereinander immer weniger behindert wird, um beim Erreichen der Sättigung des Strahlbildungs-Effektes den durch  $c_3$  ausgedrückten Beitrag zur Transportleistung der Funktion F zu erbringen.

Eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit dieser Interpretation kann mit Hilfe von modifizierten Simulationen mit dem Rechenprogramm MOVAK3D [3,4] erbracht werden. Bei diesen Simulationen wird der Zufallsweg von "Molekeln" durch die vorgegebene Kanalgeometrie von einer Quell-Fläche (= Rohr-Eintritt) bis zu einer Senke (= Rohr-Austritt) verfolgt, wobei für den Grenzfall großer Knudsen-Zahlen keine Molekel-Molekel-Kollisionen vorgesehen werden. Dabei macht man die Beobachtung, daß tatsächlich nur ein recht kleiner

Anteil sehr weiter Flugwege, bezogen auf den Rohrdurchmesser, vorkommt, während die häufigste Flugweglänge knapp gleich dem Rohrdurchmesser ist. Nach den hier entwickelten Vorstellungen waren nun zwei unterschiedliche Möglichkeiten der Modellierung zur Annäherung an einen Zustand der Unterdrückung der Strahlbildung gegeben. Nämlich entweder eine ziemlich direkte Nachbildung des Additions-Theorems, oder aber eine gezielte selektive Unterbrechung langer Flugwege durch ein "künstliches Streuereignis".

Dieser zweiten Möglichkeit, nämlich die Modellierung von Streuereignissen zur Kappung der die Strahlbildung ausmachenden effektiven Transportwürfe, wurde der Vorzug gegeben, weil auf diese Weise ein direkter Einblick in den Mechanismus der Strahlbildungs-Unterdrückung zu gewinnen war, weil es zudem eine "unabhängige" Methode darstellt, und weil diese Methode Rechenzeit-Vorteile aufweist. Es wurde einfach so vorgegangen, daß alle längeren Flugwege im Rohr, die bis maximal 45 Grad gegen die Richtung der Rohrachse geneigt sind, nach einer Strecke von  $d_{\text{Rohr}} \cdot \pi/4$  durch ein Streuereignis unterbrochen werden.

Als Streuereignis wird eine "keulenförmige" Verteilung mit 180° Öffnungswinkel angenommen. In Umfangsrichtung zur Richtung des bisherigen Flugweges ist hierbei eine Richtungs-Gleichverteilung für die Fortsetzung des Flugweges angenommen. Der Winkel zwischen alter und neuer Flugrichtung folgt einer Kosinus-Verteilung zwischen  $\pm\pi/2$ , und entspricht dem Lambert'schen Cos-Gesetz für die Rückstreuung der Molekeln von Wänden. Die neuen Richtungen werden mittels Zufallszahl festgelegt. Durch Vergleichsrechnungen zeigte sich eindeutig, daß nur mit diesen Annahmen sinnvolle Ergebnisse zu erzielen sind, denn eine engere Bündelung der Streuung kann u.U. sogar die Strahlbildung noch verstärken, und eine weitere Dispersion (es käme ja nur noch die  $4\pi$ -Streuung in Frage) erzeugt eine um etwa 30 % zu kleine Durchtrittswahrscheinlichkeit.

Mit diesen Annahmen wurde mit MOVAK3D für ein Rohr mit  $L_{\text{Rohr}}/d_{\text{Rohr}} = 80$  für die Durchtrittswahrscheinlichkeit "mit unterdrückter Strahlbildung" der Wert

$$0,01246 \pm 0,00012$$

berechnet, wogegen der nach Tabelle 1 und Gl (24) erwartete Wert

$$0,01601 \cdot (1,158/1,495) = 0,01240$$

ist. Diese sehr gute Übereinstimmung kann als weiterer klarer Beleg für die Deutung des Minimums in der Funktion F als Folge der Strahlbildung im Rohr gelten.

### 3.2 Übertragung auf kurze Rohre

Nachdem mit Hilfe des Additionstheorems der Gesamtbeitrag des Strahlbildungs-Effektes ermittelt werden konnte, kann nunmehr auf dieselbe Weise aus den Daten für die Durchtrittswahrscheinlichkeit durch kürzere Rohrstücke die Entwicklung des Strahlbildungs-Effektes mit der Rohrlänge, von Null an bis zur Sättigung, bestimmt werden. Bezeichnen  $L_x$ ,  $w_x$  und  $w_{x\_ohneStrEff}$  die der Rohrlänge  $L_x$  zugehörigen Daten der Durchtrittswahrscheinlichkeiten mit und ohne Strahlbildungseffekt, dann gilt entsprechend Gl. (37)

$$w_{x\_ohneStrEff} = 1/[1+(L_x/L_{kurz}) \cdot (1/w_{kurz}-1)] \quad \text{Gl. (40)}$$

und damit läßt sich der **relative** Anteil der Strahlausbildung an der Transportleistung ausdrücken durch

$$f_{\text{Strahl}} = \frac{W_x - W_{x\_ohneStrEffekt}}{W_{x\_ohneStrEffekt}} \cdot \frac{W_{\text{lang\_ohneStrEffekt}}}{W_{\text{lang}} - W_{\text{lang\_ohneStrEffekt}}} \quad \text{Gl. (41)}$$

wobei sichergestellt sein muß, daß "lang" mit ausreichender Genauigkeit im Gebiet der Sättigung zu liegen kommt (was gemäß Abb. 2 bei  $L/D = 80$  erfüllt ist).

Der Anteil  $f_{\text{Strahl}} = f_{\text{Strahl}}(L_x)$  kann unmittelbar als Faktor zu  $c_3$  in die obige Gl. (25) eingebracht werden, so daß die um diesen Term erweiterte Gleichung jetzt lautet

$$F = \frac{c_1}{Kn} + c_{2K} + f_{\text{Strahl}} \cdot \frac{c_3 \cdot Kn}{c_4 + Kn} \quad \text{Gl. (42)}$$

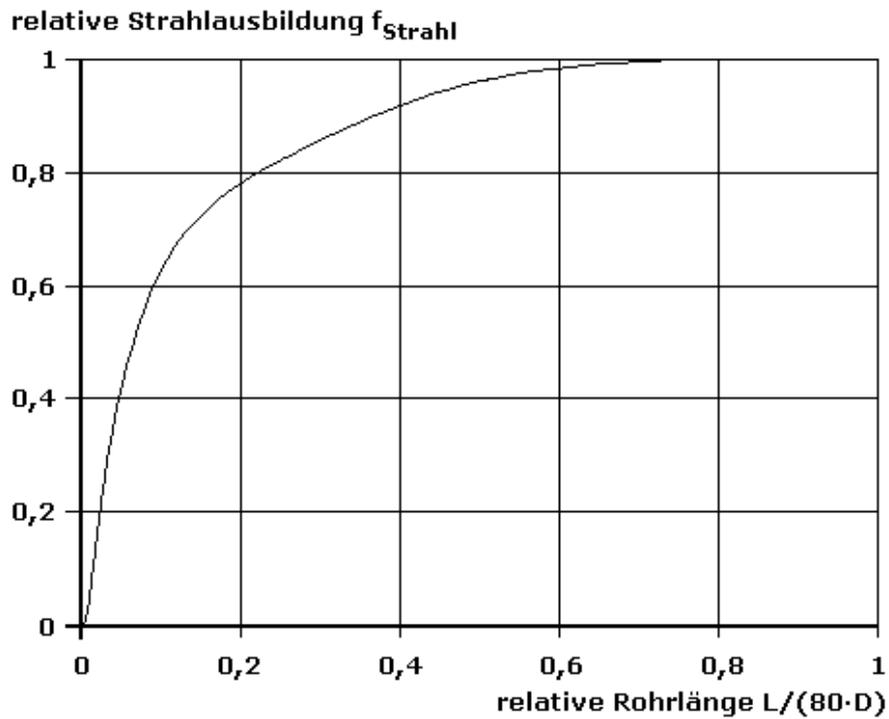
Dabei ist der Koeffizient  $c_{2K}$  **anstelle von  $c_2$**  einzusetzen, der kleiner als der bisherige Zahlenwert 1,1581 für lange Rohr sein muß, und der sich allgemein mittels Gl. (23) wie folgt ergibt.

Auch wenn jetzt nur kurze Rohre betrachtet werden, so ändert sich am Mechanismus der Strahlbildung nichts. Deswegen bleiben die Koeffizienten  $c_3$  und  $c_4$  unverändert gültig und  $f_{\text{Strahl}}$  kann aus Abb. 4 entnommen werden, bzw. für kleine  $L/D$ -Werte genauer aus der Tabelle 3. Der sich für  $F$  ergebende Zahlenwert nach Gl. (23), der die Asymptote für große  $Kn$ -Zahlen repräsentiert, gibt jetzt den durch den Ausdruck

$$F_K = c_{2K} + f_{\text{Strahl}} \cdot \frac{c_3 \cdot Kn}{c_4 + Kn} \quad \text{Gl. (43)}$$

gegebenen Anteil  $F_K$  an der Funktion  $F$  in Gl. (42) wieder, woraus **für  $Kn \rightarrow \infty$**  unmittelbar  $c_{2K}$  zu berechnen ist. Es zeigt sich dabei, daß für kleiner werdende  $L/D$ -Werte der Transportanteil durch die Strahlbildung viel rascher zurückgeht als  $c_{2K}$ , weshalb bei kurzen Kanälen oder Rohren unterhalb von etwa  $L/D = 5$  ein Minimum der Funktion  $F$  nicht mehr merkbar auftreten kann. Für  $L/D \rightarrow 0$  wird also  $c_{2K} \rightarrow F_K$ .

Mit der so um den Faktor  $f_{\text{Strahl}}(L_x)$  erweiterten Gleichung ist die Funktion  $F$ , abgesehen von Einlaufeffekten im viskosen Strömungsbereich, auch für kurze Rohre gültig. Allerdings muß bei kurzen Rohren, besonders wenn sie bis zur Blende degeneriert sein können, ein besonderes Augenmerk auf die möglichen "Einlaufeffekte" gerichtet werden.



**Abb. 4:** Relative Strahlausbildung als Funktion der auf  $80 \cdot D$  bezogenen Rohrlänge

$L/D$	$f_{\text{Strahl}}$
0,05	0,000148
0,10	0,000770
0,15	0,001965
0,20	0,003756
0,25	0,006134
0,30	0,009073
0,35	0,012539
0,40	0,016493
0,45	0,020896
0,50	0,025707
0,55	0,030886
0,60	0,036396
0,65	0,042202
0,70	0,048269
0,75	0,054567
0,80	0,061065
0,85	0,067738
0,90	0,074560
0,95	0,081507
1,00	0,088560

**Tabelle 3:**  $f_{\text{Strahl}}$  nach Gl. (41), als Funktion von  $L/D$

### 3.3 Einlaufeffekt bei kurzen Rohren

Im Bereich der reinen Molekularströmung kann es nur insofern einen Einlaufeffekt geben, weil sich die Molekeln unabhängig voneinander bewegen, als die in das Rohr eintretenden Molekeln nicht Maxwell-verteilt zu sein brauchen. Sie können schon bei der Anströmung durch Strahlbildung eine Vorzugsrichtung in Richtung der Rohrachse aufweisen. Soweit es sich um die sich selbst einstellende Strahlbildung in Rohren handelt, kann sich deren Effekt nur im Rahmen des Zahlenwert-Beitrages  $c_3$  zur Funktion  $F$  bewegen.

Bei viskoser Strömung gibt es die sogenannten "Einlaufeffekte" und sie können bei der Durchführung der Integration von Gl. (1) entlang des Strömungsweges für den Einlaufbereich in der Gl. (14) im Widerstandsbeiwert  $\zeta$  berücksichtigt werden. **Weil jedoch die Strömung im Knudsenbereich immer laminar bleibt, können die üblichen Berechnungsverfahren für den Beitrag zum Widerstandwert  $\zeta$  am Einlauf nicht kritiklos angewendet werden.** Es gibt weder Turbulenz noch, bei schleichender Strömung, eine Strömungsablösung am scharfkantigen Eintritt oder am Austritt. Dies ist ein wichtiger Punkt. Trägheitskräfte können allerdings eine Rolle spielen, wie die bekannte Lösung von Oseen für das Stokessche Kugelproblem zeigt, wobei zu der Stokesschen Lösung ein Korrekturfaktor  $(1+3 \cdot \text{Re}/8)$  kommt, so daß das Widerstandsgesetz lautet

$$\zeta = (24/\text{Re}) \cdot (1+3 \cdot \text{Re}/8)$$

oder ausmultipliziert

$$\zeta = 9 + 24/\text{Re} \quad (\text{Kugel})$$

Infolge der Trägheitskräfte am Einlauf kann somit auch bei rein laminarer Strömung das Widerstandsgesetz von der Form

$$\zeta = W_0 + \frac{W_1}{\text{Re}} \quad \text{Gl. (44)}$$

sein, wobei  $W_0$  und  $W_1$  dimensionslose Funktionen der Geometrie sind. **Beim Rohr gilt  $W_1 = 64$** , beispielsweise bei umströmten Scheiben ist  $W_1 = 20,4$  und bei Kugeln gilt  $W_1 = 24$  (Stokessches Gesetz) und  $W_0 = 9$ . Bei kurzen Rohren und Blenden ist also davon auszugehen, daß  $W_1$  eine reine Funktion von  $(L/D)$  sein wird, die sich mit wachsendem  $(L/D)$  rasch dem Wert 64 nähern muß. Wie diese Funktion im Einzelnen beschaffen sein muß, muß sich auch rein theoretisch ermitteln lassen.

Bei höheren Drücken, wenn die Knudsen-Zahl sehr klein wird, wird  $\zeta$  nach der in der Technik sonst üblichen Weise berechnet. Weil zusätzlich zum Beschleunigungsdruckverlust immer auch eine Kontraktion der Strömung zu berücksichtigen ist, kann nach VDI WA, Kap. Lag [1], für  $\zeta$  bei kleinen Re-Zahlen **etwa 2,0** eingesetzt werden, so daß sich aus Einlaufeffekt und Rohrreibung bei einer **Mittelwertbildung** über die Gesamtlänge  $L_{\text{Rohr}}$  die Beziehung

$$\zeta = \frac{64}{\text{Re}} + \frac{2 \cdot D_{\text{Rohr}}}{L_{\text{Rohr}}} \quad \text{Gl. (45)}$$

ergibt, und entsprechend Gl. (44) folgt

$$W_0 = \frac{2}{L_{\text{Rohr}}/D_{\text{Rohr}}} \quad \text{Gl. (46)}$$

Damit geht Gl. (14) in die Form

$$F_{\text{viskos}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\pi}}{\text{Kn} \cdot (64 + W_0 \cdot \text{Re})} \quad \text{Gl. (47)}$$

über, wobei für die Reynolds-Zahl gilt

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot \dot{m}}{\pi \cdot \eta \cdot D_{\text{Rohr}}} \quad \text{Gl. (48)}$$

**Wie anhand von Messwerten weiter unten gezeigt wird, sind die hier gemachten "Vor"-Aussagen bezüglich  $W_0$  und  $W_1$  zumindest für den Druckbereich nahe der Knudsenströmung erheblich zu modifizieren.**

### 3.4 Der Einfluß der Expansion

Bei technischen Anwendungen, wie auch bei der Durchführung von Messungen, bezieht man sich häufig auf den mittleren Druck im Kanal, der oft als arithmetischer Mittelwert aus den Drücken am Ein- und Austritt gebildet wird. Daher wird eine Form der Impulsgleichung gesucht, die dieser Betrachtungsweise entspricht.

Auch bei kurzen Rohren kann sich der Einfluß der Expansion bei wachsendem Massenstrom bemerkbar machen, weil insbesondere der zusätzliche Beschleunigungsdruckverlust, bezogen auf eine linearisierte Rechnung, nicht mehr vernachlässigbar ist. Das gilt bei Annäherung an den Bereich der Knudsenströmung auch für den Druckgradienten  $dP/dx$  (bzw. nach Gl. (2)  $\partial P_R / \partial x$ ), der umgekehrt proportional zum Druck ist, bzw. weil die Funktion  $F$  proportional zum Druck ist.

Mit dem direkten (vollständigen) Ansatz mit der Impulsgleichung Gl. (2)

$$(\partial P / \partial x) = -\rho \cdot w \cdot (\partial w / \partial x) - (\partial P_R / \partial x)$$

gilt

$$dP = -\rho \cdot w \cdot dw - dP_R$$

wobei

$$\rho = P \cdot M_{\text{mol}} / (R \cdot T)$$

$$\rho \cdot w = 4 \cdot \dot{m} / (\pi \cdot d_{\text{Rohr}}^2)$$

$$w = 4 \cdot \dot{m} \cdot R \cdot T \cdot P^{-2} - 1 / (M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^2)$$

$$dw = -4 \cdot \dot{m} \cdot R \cdot T \cdot dP / (P^2 \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^2)$$

In den Reibungsdruckverlust  $dP_R$  ist die weiter unten behandelte Korrektur für "kurze Rohre"  $f_{\text{kor}} mit$  hinzunehmen nach

$$dP_R = (f_{\text{kor}} \cdot 128 \cdot \dot{m} \cdot \eta \cdot R \cdot T) \cdot dx / (P \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4) \quad \text{Gl. (49)}$$

Dieses  $dP_R$  gilt so nur für die viskose Strömung.  $dP_R$  kann jedoch auch **vollständig** mittels der Funktion  $F$  gebildet werden, um auch im Knudsen-Strömungsbereich gültig zu sein. Auch diese vollständigen Gleichungen können, analog zum folgenden für die viskose Strömung, geschlossen integriert werden. Die Ausdrücke werden dann aber ziemlich unhandlich (siehe ganz unten). Bei den sehr klein werdenden Re-Zahlen (bzw. Massenströmen) im Bereich der Knudsenströmung ist jedoch der Beitrag des Beschleunigungsdruckverlustes zum gesamten Druckabfall im allgemeinen vernachlässigbar.

Im übrigen wird die Korrektur  $f_{\text{korr}}$  im allgemeinen Fall nur als Faktor zu  $\zeta$  bei der Bestimmung des für die viskose Strömung zuständigen Koeffizienten  $c_1$  in der Funktion  $F$  berücksichtigt.

Werden diese Terme in die Impulsgleichung eingesetzt, so erhält man schließlich

$$P \cdot dP = [16 \cdot R \cdot T \cdot \dot{m}^2 / (P \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^4)] \cdot dP - (f_{\text{korr}} \cdot 128 \cdot \dot{m} \cdot \eta \cdot R \cdot T) \cdot dx / (M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4)$$

oder abgekürzt angeschrieben

$$P \cdot dP - \xi \cdot dP / P = -c \cdot dx$$

Diese Gleichung kann geschlossen integriert werden nach

$$P^2/2 - \xi \cdot \ln(P) = -c \cdot L$$

und nach Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt sich

$$P_1^2 - P_2^2 - 2 \cdot \xi \cdot \ln(P_1/P_2) = 2 \cdot \psi \quad \text{Gl. (50)}$$

mit den neuen Koeffizienten

$$\xi = 16 \cdot R \cdot T \cdot \dot{m}^2 / (M_{\text{mol}} \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^4)$$

$$\psi = f_{\text{korr}} \cdot 128 \cdot \dot{m} \cdot \eta \cdot R \cdot T \cdot L / (M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4)$$

Wird der gesamte Druckabfall als  $P_1 - P_2 = \Delta P_{\text{ges}}$  bezeichnet, während der mittlere Druck  $P_{\text{av}}$  sei, dann kann umgeformt werden nach

$$P_1 = P_{\text{av}} + \Delta P_{\text{ges}}/2 \quad \text{Gl. (51.1)}$$

$$P_2 = P_{\text{av}} - \Delta P_{\text{ges}}/2 \quad \text{Gl. (51.2)}$$

$$P_1^2 - P_2^2 = 2 \cdot P_{\text{av}} \cdot \Delta P_{\text{ges}} = 2 \cdot P_{\text{av}} \cdot (P_1 - P_2) = (P_1 + P_2) \cdot (P_1 - P_2)$$

$$\ln(P_1/P_2) = \ln[(1 + \Delta P_{\text{ges}}/(2 \cdot P_{\text{av}})) / (1 - \Delta P_{\text{ges}}/(2 \cdot P_{\text{av}}))]$$

Der Logarithmus wird ersetzt durch die 1. Näherung

$$\ln(P_1/P_2) \approx \Delta P_{\text{ges}}/P_{\text{av}}$$

also ergibt sich als Näherungslösung aus Gl. (50)

$$2 \cdot P_{\text{av}} \cdot \Delta P_{\text{ges}} + 2 \cdot \xi \cdot \Delta P_{\text{ges}}/P_{\text{av}} \approx 2 \cdot \psi$$

$$P_{\text{av}} \cdot \Delta P_{\text{ges}} + \xi \cdot \Delta P_{\text{ges}}/P_{\text{av}} \approx \psi$$

und endlich nach  $\Delta P_{\text{ges}}$  direkt aufgelöst

$$\Delta P_{\text{ges}} \approx \psi / (P_{\text{av}} + \xi/P_{\text{av}})$$

Durch Einsetzen der neuen Koeffizienten  $\xi$  und  $\psi$  wird

$$\Delta P_{\text{ges}} \approx f_{\text{korr}} \cdot 128 \cdot \dot{m} \cdot \eta \cdot R \cdot T \cdot L / [P_{\text{av}} \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4 - 16 \cdot R \cdot T \cdot \dot{m}^2 / (P_{\text{av}} \cdot \pi)]$$

und wegen

$$Re = 4 \cdot \dot{m} / (\pi \cdot \eta \cdot d_{\text{Rohr}})$$

$$[\text{kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{Pa} \cdot \text{m})] = [\text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2)] = [-]$$

$$\dot{m} = \pi \cdot \eta \cdot d_{\text{Rohr}} \cdot Re/4$$

wird

$$\Delta P_{\text{ges}} \approx f_{\text{korr}} \cdot 128 \cdot \pi \cdot Re \cdot \eta^2 \cdot R \cdot T \cdot L \cdot d_{\text{Rohr}} / [4 \cdot P_{\text{av}} \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4 - 4 \cdot R \cdot T \cdot \pi^2 \cdot \eta^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2 \cdot Re^2 / (P_{\text{av}} \cdot \pi)]$$

Mit den weiteren Substitutionen

$$Kn = (\eta / (P_{\text{av}} \cdot d_{\text{Rohr}})) \cdot [\pi \cdot R \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}})]^{1/2}$$

$$Kn^2 = (\eta^2 / (P_{\text{av}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2)) \cdot (\pi \cdot R \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}}))$$

$$Kn^2 = \pi \cdot R \cdot T \cdot \eta^2 / (2 \cdot M_{\text{mol}} \cdot P_{\text{av}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2)$$

$$\eta^2 = Kn^2 \cdot 2 \cdot M_{\text{mol}} \cdot P_{\text{av}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2 / (\pi \cdot R \cdot T)$$

wird daraus endlich

$$\Delta P_{\text{ges}} \approx f_{\text{korr}} \cdot 128 \cdot \pi \cdot Re \cdot Kn^2 \cdot 2 \cdot M_{\text{mol}} \cdot P_{\text{av}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2 \cdot R \cdot T \cdot L \cdot d_{\text{Rohr}}$$

$$/ [\pi \cdot R \cdot T \cdot 4 \cdot P_{\text{av}} \cdot M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4$$

$$- \pi \cdot R \cdot T \cdot 4 \cdot R \cdot T \cdot \pi^2 \cdot Kn^2 \cdot 2 \cdot M_{\text{mol}} \cdot P_{\text{av}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^2 \cdot Re^2 / (\pi \cdot R \cdot T \cdot P_{\text{av}} \cdot \pi)]$$

erhalten und durch Kürzen vereinfacht sich dies zu

$$\Delta P_{\text{ges}} \approx f_{\text{kor}} \cdot \frac{64 \cdot P_{\text{av}} \cdot \text{Kn}^2 \cdot \text{Re}}{\pi - 2 \cdot \text{Kn}^2 \cdot \text{Re}^2} \cdot (L/D) \quad \text{Gl. (52)}$$

Bei den numerischen Auswertungen weiter unten zeigt sich, daß diese Näherungsgleichung sehr gute Ergebnisse liefert, die sich von der exakten Lösung nur in Extremfällen ein wenig (und daher vernachlässigbar) unterscheidet.

Die "exakte" Lösung für  $\Delta P_{\text{ges}}$  erhält man nach Gl. (50) gemäß

$$P_1^2 - P_2^2 - 2 \cdot \xi \cdot \ln(P_1/P_2) = 2 \cdot \psi$$

und daher gilt

$$P_{\text{av}} \cdot \Delta P_{\text{ges}} - \xi \cdot \ln((2 \cdot P_{\text{av}} + \Delta P_{\text{ges}})/(2 \cdot P_{\text{av}} - \Delta P_{\text{ges}})) = \psi \quad \text{Gl. (53)}$$

Diese transzendente Gleichung ist nur iterativ lösbar. Es können  $\xi$  und  $\psi$  weiter zusammengefaßt werden. Aus

$$\xi = -16 \cdot R \cdot T \cdot \dot{m}^2 / (M_{\text{mol}} \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{Rohr}}^4)$$

erhält man

$$\xi = -(2/\pi) \cdot (\text{Kn} \cdot \text{Re} \cdot P_{\text{av}})^2 \quad \text{Gl. (54.1)}$$

und aus

$$\psi = f_{\text{kor}} \cdot 128 \cdot \dot{m} \cdot \eta \cdot R \cdot T \cdot L / (M_{\text{mol}} \cdot \pi \cdot d_{\text{Rohr}}^4)$$

wird schließlich

$$\psi = f_{\text{kor}} \cdot 64 \cdot \text{Re} \cdot (\text{Kn} \cdot P_{\text{av}})^2 / (\pi \cdot (D/L)) \quad \text{Gl. (54.2)}$$

Der auf die Rohrreibung entfallende Anteil im Widerstandsbeiwert  $\zeta$  in Gl. (14) muß wegen des zusätzlichen Druckverlustes infolge der Expansion des Gases im Strömungskanal um den Faktor  $f_{\text{Impuls}}$  vergrößert werden, der sich aus dem Verhältnis des gesamten Druckabfalls  $\Delta P_{\text{ges}}$ , bezogen auf den reinen Reibungsdruckabfall  $\Delta P_{\text{RL}}$  nach

$$f_{\text{Impuls}} = \Delta P_{\text{ges}} / \Delta P_{\text{RL}}$$

ergibt. Im einzelnen gilt hierbei

$$\Delta P_{\text{RL}} = f_{\text{kor}} \cdot 32 \cdot (L/D) \cdot \eta^2 \cdot \text{Re} \cdot R \cdot T / (P_{\text{av}} \cdot M_{\text{mol}} \cdot d_{\text{Rohr}}^2)$$

oder

$$\Delta P_{\text{RL}} = f_{\text{kor}} \cdot 64 \cdot (L/D) \cdot \text{Kn}^2 \cdot P_{\text{av}} \cdot \text{Re} / \pi$$

Also erhält man endlich diesen Korrekturfaktor zu

$$f_{\text{Impuls}} = \frac{\Delta P_{\text{ges}} \cdot \pi}{f_{\text{kor}} \cdot 64 \cdot P_{\text{av}} \cdot (L/D) \cdot \text{Kn}^2 \cdot \text{Re}} \quad \text{Gl. (55)}$$

Auf die Mitnahme des Korrekturfaktors  $f_{\text{kor}}$  für die "kurzen Rohre" hätte hierbei verzichtet werden können, denn in der letzten Gleichung Gl. (55) kürzt sich  $f_{\text{kor}}$  heraus.

Damit wird dann endlich der Reibungs-Beitrag zum Widerstandsbeiwert zu

$$\zeta_{\text{R}} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot f_{\text{Impuls}} \quad \text{Gl. (56)}$$

(wobei der Index R wiederum andeutet, daß nur der Beitrag aus der Rohrreibung selbst gemeint ist).

### 3.5 Die Gleitströmung

Bei mäßig verdünnten Gasen tritt bei der Strömung entlang einer Wand eine Gleitgeschwindigkeit  $u_{\text{slip}}$  auf (vgl. z.B. [1], Kap. Mo, Gl. (13)), die bei abnehmendem Druck einen merklichen Beitrag zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  liefert. Der Strömungskern verhält sich weiterhin viskos und behält, weil die Strömung laminar ist, das parabolische Geschwindigkeitsprofil bei. Die Gleitgeschwindigkeit ist mit dem Geschwindigkeitsgradienten  $du/dr$  an der Rohrwand verknüpft nach der Beziehung

$$u_{\text{slip}} = l_{\text{frei}} \cdot (du/dr) \quad \text{Gl. (57)}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  wird mit dem Rohrradius  $r_0$  und dem Radius  $r$  zu

$$u = u_{\text{slip}} + u_0 \cdot (1 - r^2/r_0^2),$$

wobei angenommen werden kann, daß die mit  $u_{\text{slip}}$  gleitende Kernströmung (mit der additiven Geschwindigkeit  $u_0$ ) vom Gleiten nichts "merkt". Mit diesem Ansatz erhält man weiter

$$du/dr = 2 \cdot u_0 \cdot r/r_0^2$$

$$d\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot u \cdot r \cdot dr$$

$$d\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot u_0 \cdot (r - r^3/r_0^2) \cdot dr$$

$$\dot{V} = \pi \cdot u_{\text{slip}} \cdot r_0^2 + \pi \cdot u_0 \cdot r_0^2/2$$

$$\bar{u} = u_{\text{slip}} + u_0/2$$

Mit dem Geschwindigkeitsgradienten  $du/dr$  ergibt sich daraus

$$\bar{u} = l_{\text{frei}} \cdot 2 \cdot u_0/r_0 + u_0/2$$

oder auch

$$\bar{u} = (1 + 8 \cdot \text{Kn}) \cdot u_0/2 \quad \text{Gl. (58)}$$

Danach würde die Funktion  $F$  nach Gl. (17) um den Faktor  $(1 + 8 \cdot \text{Kn})$  anwachsen (wobei allerdings  $u_0$  selbst mit  $\text{Kn}^{-1}$  abfällt).

Es kann aber die **effektive Viskosität**  $\eta_{\text{eff}}$  bei Annäherung an den Bereich der Knudsenströmung nicht konstant bleiben, weil die tatsächlich mögliche freie Weglänge  $l_{\text{frei}}$  durch die Kanalberandung begrenzt ("gekappt") wird. Man kann die Gl. (6) daher so formulieren

$$\eta_{\text{eff}} = l_{\text{eff}} \cdot P \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot M_{\text{mol}}}{\pi \cdot R \cdot T}} \quad \text{Gl. (59)}$$

mit der effektiven mittleren freien Weglänge

$$l_{\text{eff}} = \frac{1}{\frac{1}{l_{\text{frei}}} + \frac{c_\eta}{D_{\text{Rohr}}}} = \frac{\text{Kn} \cdot D_{\text{Rohr}}}{1 + c_\eta \cdot \text{Kn}} \quad \text{Gl. (60)}$$

Mit dieser Erweiterung erhält man anstelle der obigen Gl. (17) jetzt

$$F = \frac{\sqrt{\pi}}{16 \cdot \text{Kn}} + \frac{(8 + c_\eta) \cdot \sqrt{\pi}}{16} \quad \text{Gl. (61)}$$

Das konstante Glied  $c_2$  in Gl. (24) hat den Wert  $c_2 = 1,124 \dots 1,158$ . Um auf diesen Wert zu kommen, muß für  $c_\eta$  der Wert  $2,453 \dots 2,146$  angenommen werden. Als Näherung kann also gelten

$$c_\eta \approx 2,146 \dots 2,453 \quad \text{Gl. (62)}$$

Mit dieser Ableitung ist gezeigt, daß der Beitrag  $F_{\text{Slip}}$  zur Funktion  $F$  nicht durch eine fiktive, sondern durch eine physikalisch wohlbegründete viskose Gleitströmung geleistet wird. Die viskose Strömung geht in den Bereich der Knudsen-Strömung mit einem konstanten Gleit-Beitrag zur Strömungsgeschwindigkeit und damit zur Funktion  $F$  über, was die Anwendbarkeit der Interpolationsmöglichkeit (Sherman'sche Formel) zwischen viskoser und molekularer Strömung unterstützt. Die hier erzielten Ergebnisse sprechen sehr deutlich dafür, daß die konstanten Beiträge aus dem Gleitprozeß und aus der "fiktiven *Maxwell-verteilten* Rohrströmung" physikalisch identisch sind. Beide Prozesse tragen von beiden Grenzzuständen her "ein und denselben" konstanten Beitrag in den Knudsen-Bereich hinein.

Weiter unten wird gezeigt, daß  $c_\eta$  die Bedeutung einer Kn-Zahl hat, die eine (tatsächlich existierende) Geometrieabhängigkeit der Gleitströmung anspricht.

### 3.6 Modellierung des Koeffizienten $c_4$

Die bisherigen Darlegungen haben aufgezeigt, daß der Term

$$\frac{c_3 \cdot \text{Kn}}{c_4 + \text{Kn}} \quad \text{Gl. (63)}$$

in Gl. (25) bzw. Gl. (42) eindeutig mit dem Strahlbildungs-Effekt verknüpft ist. Deswegen muß sich auch der Koeffizient  $c_4$  eindeutig auf diesen Effekt beziehen und von daher erschließt sich seine physikalische Bedeutung. In der oben durchgeführten Diskussion wurde herausgearbeitet, daß sich das Kollektiv der von der Rohrwand zurückgestreuten Molekeln im Mittel senkrecht zur Rohrachse bewegt, während sich die vom Rohreintritt her eingeworfenen Molekeln im Mittel entlang der Rohrachse bewegen. **Für die Bewegung quer zur Rohrachse ist daher der mögliche mittlere freie Flugweg  $l_{\text{Flug}}$  in einer Ebene senkrecht zur Rohrachse ein charakteristisches Vergleichs-Längenmaß.**

Der Koeffizient  $c_4$  stellt eine "kritische" Knudsen-Zahl dar, die die mittlere freie Weglänge  $l_{\text{frei}}$  der Molekeln zur Querabmessung des Strömungskanals ins Verhältnis setzt und er besagt, daß bei  $\text{Kn} = c_4$  der Strahlbildungs-Effekt gerade **halbiert** wird, um mit weiter wachsender Knudsen-Zahl dem Sättigungswert  $c_3$  zuzustreben.

Nach Gl. (24) ist der Wert von  $c_4 \approx 1,238 \dots 2,231$ . Das bedeutet, daß die Halbierung des Strahlbildungs-Effekts schon bei der mittleren freien Weglänge der Molekeln von etwa 1,238 .. 2,231 Rohrdurchmessern auftritt. Man muß sich jedoch klar machen, daß die die Strahlbildung ausmachenden "flachen Weitwürfe" im Kanal nur einen kleinen Anteil an den Molekelbewegungen haben, sie kommen also eher selten vor. Dafür aber sind die "Weitwürfe" für die Transportleistung überproportional effektiv, eben weil sie einer einseitig bis nach "unendlich" reichenden Wurfweiten-Verteilung folgen. Und dementsprechend empfindlich reagieren diese effektiven Transportwürfe auch auf schon relativ geringe Molekel-Konzentrationen als möglichen Stoßpartnern.

Beim Rohr gilt (wie im nächsten Abschnitt ausführlich dargelegt wird)

$$l_{\text{Flug}} = d_{\text{Rohr}} \cdot \pi / 4$$

Setzt man für  $\text{Kn} = c_4$   $l_{\text{frei}}$  zu  $l_{\text{Flug}}$  ins Verhältnis, so wird

$$k_{\text{frei}} = l_{\text{frei}} / l_{\text{Flug}} = 4 \cdot c_4 / \pi \approx 1,58 \dots 2,84 \quad \text{Gl. (64)}$$

Die Verhältniszahl  $k_{\text{frei}}$  ist eine von der Kanalgeometrie unabhängige Größe. **Wenn die freie Weglänge der Molekeln gerade das etwa 1,58 bis 2,84-fache des in einer**

**Querschnittsebene normal zur Kanalachse möglichen mittleren Flugweges beträgt, dann kommt es zur Halbierung des Strahleffektes.**

### **3.7 Hydraulischer Durchmesser vs. mittlerer Flugweg im Querschnitt**

Die naheliegende Annahme für die charakteristische Kenngröße "mittlerer Flugweg  $l_{\text{Flug}}$  im Kanalquerschnitt" ist natürlich die, daß es sich um eine von anderen Kennzahlen des Querschnitts unabhängige Kenngröße handelt, die gesondert, z.B. mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen, zu ermitteln ist. Die durchgeführten Berechnungen für verschieden Querschnittsformen haben aber das überraschende Ergebnis gezeigt, daß für konvexe Kanalquerschnitte zwischen  $l_{\text{Flug}}$  und dem hydraulischen Durchmesser  $d_{\text{hyd}}$  stets die Beziehung

$$l_{\text{Flug}} = \pi \cdot d_{\text{hyd}} / 4 \quad \text{Gl. (65)}$$

besteht. Sowohl für das Rohr (=Kreis), wie auch für den Spalt (=2 parallele Gerade ohne Seitenbegrenzung) kann der Beweis dafür auf einfache Weise erbracht werden:

#### **- Rohr**

Die Belegungsdichte mit Startpunkten ist an jeder Stelle des Querschnitt-Umfangs gleich, und die Molekeln starten von der Wand gemäß dem Lambert'schen cos-Gesetz. Fliegt das Teilchen in der Ebene unter dem Winkel  $\varphi$ , gemessen von der Wand-Normalen, vom unteren Scheitelpunkt des Rohres zur Rohrwand, die als Kreis um den Nullpunkt gemäß

$$x^2 + y^2 = R^2$$

beschrieben ist, so legt es den Flugweg

$$s = [(y+R)^2 + x^2]^{0,5}$$

zurück, oder einfacher (nach längerem Rechnen, bzw. wenn man direkt sieht, wg. des rechten Winkels zwischen den beiden "Scheitelstrahlen" zum Punkt (x,y)) gilt

$$s = 2 \cdot R \cdot \cos(\varphi)$$

Es seien die Integrationsgrenzen  $0 \leq \varphi \leq (\pi/2)$ , also

$$l_{\text{Flug}} = \int_0^{\pi/2} s \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \quad \text{Gl. (66)}$$

und weiter wird

$$l_{\text{Flug}} = 2 \cdot R \cdot \int [\cos^2(\varphi)] \cdot d\varphi$$

$$l_{\text{Flug}} / (2 \cdot R) = \pi/2 - \int [\sin^2(\varphi)] \cdot d\varphi$$

$$l_{\text{Flug}} / R = \pi + [\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \varphi] + \text{const.}$$

$$l_{\text{Flug}} / R = \pi + [\sin(\pi/2) \cdot \cos(\pi/2) - \pi/2 - \sin(0) \cdot \cos(0) + 0]$$

$$l_{\text{Flug}} = R \cdot \pi/2$$

und wegen

$$d_{\text{hyd}} = d_{\text{Rohr}} = 2 \cdot R$$

wird endlich

$$l_{\text{Flug}} = d_{\text{hyd}} \cdot \pi/4 \quad \text{Gl. (67)}$$

## - Spalt

Fliegt das Teilchen in der Ebene unter dem Winkel  $\varphi$ , gemessen von der Wand-Normalen, von einem beliebigen Wandpunkt zur gegenüberliegenden Wand, so legt es den Flugweg

$$s = s_{\text{Spalt}} / \cos(\varphi)$$

zurück. Es gilt dann

$$l_{\text{Flug}} \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi = s \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi = s_{\text{Spalt}} \cdot d\varphi$$

oder nach Integration

$$l_{\text{Flug}} \cdot \sin(\varphi) = s_{\text{Spalt}} \cdot \varphi + \text{const.}$$

und mit den Grenzen  $0 \leq \varphi \leq (\pi/2)$  wird

$$l_{\text{Flug}} \cdot \sin(\pi/2) - l_{\text{Flug}} \cdot \sin(0) = s_{\text{Spalt}} \cdot \pi/2 - s_{\text{Spalt}} \cdot 0$$

$$l_{\text{Flug}} = s_{\text{Spalt}} \cdot \pi/2 \quad \text{Gl. (68)}$$

Nun ist

$$d_{\text{hyd}} = 2 \cdot s_{\text{Spalt}}$$

also wird wiederum

$$l_{\text{Flug}} = d_{\text{hyd}} \cdot \pi/4$$

**Ein allgemeiner Beweis für die konvexen Kanalquerschnitte steht aber noch aus und wäre dringend gewünscht!** Als vorläufiger Behelf mögen folgende Ergebnisse dienen:

In den folgenden Beispielen ist  $l_{\text{Flug}}$  mittels Monte-Carlo-Simulation ermittelt

Ellipse (2x1):	$d_{\text{hyd}} = 1,2970$ und $l_{\text{Flug}} = 1,0183$ ; Abweichung 0,04 %
Rechteck (2x1)	$d_{\text{hyd}} = 1,3333$ und $l_{\text{Flug}} = 1,0471$ ; Abweichung 0,00 %
Rechteck (4x1)	$d_{\text{hyd}} = 1,6000$ und $l_{\text{Flug}} = 1,2570$ ; Abweichung 0,03 %
Rechteck (10x1)	$d_{\text{hyd}} = 1,8182$ und $l_{\text{Flug}} = 1,4282$ ; Abweichung 0,01 %
gleichs. Dreick	$d_{\text{hyd}} = 0,6667$ und $l_{\text{Flug}} = 0,5235$ ; Abweichung 0,02 %

Die "Abweichungen" des Proportionalitätsfaktors zwischen  $l_{\text{Flug}}$  und  $d_{\text{hyd}}$  vom Zahlenwert  $\pi/4$  liegen in allen überprüften Fällen sehr gut im Rahmen der Rundungsfehler der Einzelergebnisse.

Dagegen gilt bei nichtkonvexen Kanalkonturen dieser Proportionalitätsfaktor eindeutig nicht mehr, so daß in diesen Fällen die Monte-Carlo-Methode zur Berechnung von  $l_{\text{Flug}}$  die wohl naheliegendste Methode darstellt.

### 3.8 Modellierung des Koeffizienten $c_4$ mittels MOVAK3D-Simulation

Im Rechenprogramm MOVAK3D [3] war schon zu einem sehr frühen Zeitpunkt der Entwicklung die Simulation der Molekel-Bewegung auf endliche Knudsen-Zahlen ausgedehnt worden. Hierzu wurde vorgesehen, als Volumen-Eigenschaft die mittlere freie Weglänge der Gasmolekel vorzugeben. In der Simulation wird dann jeder Flugweg daraufhin überprüft, ob eine Molekel-Molekel-Kollision im Gasraum zu berücksichtigen ist. Dabei wird der aktuelle Flugweg jeweils nach einer logarithmischen Verteilungsfunktion mittels Zufallszahl festgelegt.

Es ist klar, daß ein derartiges Vorgehen bei steigender Gasdichte, also bei abnehmender Knudsen-Zahl, zu einer wachsenden Abweichung vom realen Verhalten des Molekel-

Kollektivs führen muß, weil bei zunehmendem Verhältnis der Anzahl der Molekel-Molekel-Kollisionen zu den Molekel-Wand-Kollisionen die Rückwirkungen auf die Bewegung des Molekel-Kollektivs natürlich nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, aber in MOVAK3D vernachlässigt werden müssen.

Das Verhältnis  $V_K$  der Anzahl der Molekel-Molekel-Kollisionen  $N_{MM}$  zu den Molekel-Wand-Kollisionen  $N_{MW}$  kann mit Hilfe der MOVAK3D-Simulationen ermittelt werden und ergibt sich zu

$$V_K = \frac{N_{MM}}{N_{MW}} = \frac{C_K}{Kn} \quad \text{Gl. (69)}$$

wobei  $C_K$  (immer etwa) Eins beträgt. Die mittlere Anzahl der Molekel-Wand-Kollisionen  $N_{MW}$  pro Simulation (also pro "eingeworfenem Teilchen") erweist sich als unabhängig von der Knudsen-Zahl.

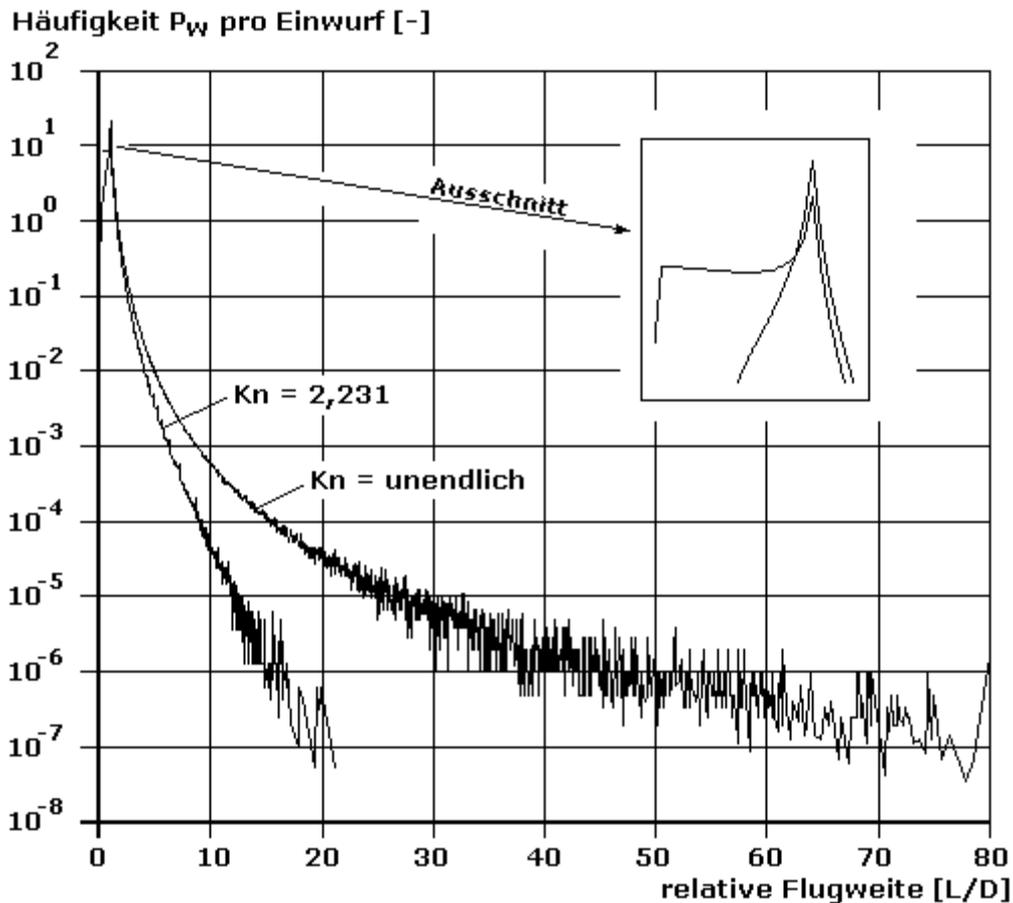
Die logarithmische Verteilungsfunktion der freien Weglängen liefert mittels einer zwischen Null und Eins gleichverteilten Zufallszahl  $Z$  den "aktuellen" Wert der freien Weglänge nach

$$l_{\text{aktuell}} = l_{\text{mittel}} \cdot \ln(Z) \quad \text{Gl. (70)}$$

Das bedeutet, daß bereits bei relativ großen Knudsen-Zahlen ein erheblicher Anteil an kurzen Flugwegen zwischen zwei Kollisionen auftritt. Während bei großen bis mittleren Knudsen-Zahlen die häufigste Flugweglänge noch sehr nahe dem Rohrdurchmesser liegt, verlagert sich die häufigste Flugweglänge bei hinreichend kleinen Knudsen-Zahlen zunehmend und drastisch zu kleineren Werten hin. Derselbe Trend zeigt sich besonders deutlich bei den "weiten Transportwürfen".

Diese Zusammenhänge sind der Abb. 5 klar zu entnehmen. Sie zeigt die Häufigkeit des Auftretens der auf  $d_{\text{Rohr}}$  bezogenen Flugweglängen  $L$  pro "eingeworfenem Molekel". Die Daten wurden mittels MOVAK3D-Simulationen gewonnen. Weil keine gegenseitige Schleppeffekt der Molekel berücksichtigt ist, diffundieren bei endlichen Knudsen-Zahlen zuviele Molekel kurz nach ihrem Einwurf wieder aus dem Rohreintritt heraus, weshalb die resultierende Durchtrittswahrscheinlichkeit zu klein wird. Trotzdem kann der Effekt der Molekel-Molekel-Stöße klar erkannt werden: Gegenüber dem Fall reiner freier Molekularströmung werden die effektiven weiten Transportwürfe sehr viel seltener, so daß die weiten Würfe gar nicht mehr in Erscheinung treten. Die Strahlbildung wird also durch die Molekel-Molekel-Stöße stark eingeschränkt, ohne jedoch ganz zu verschwinden.

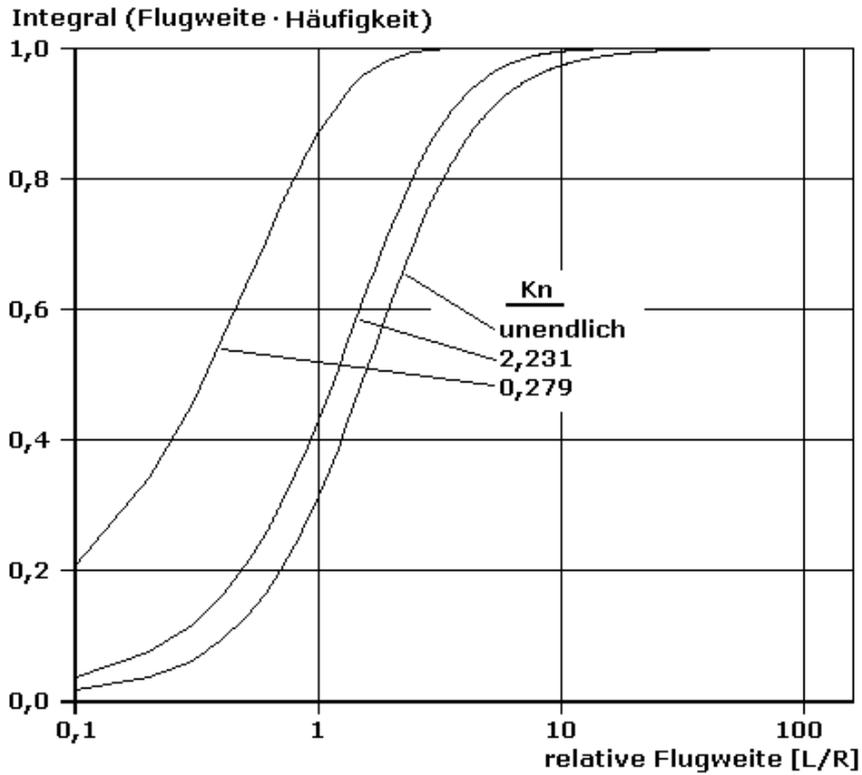
Im übrigen zeigt Abb. 5 ganz deutlich, was unter der Strahlbildung bei freier Molekularströmung im Rohr, bzw. allgemein in prismatischen Kanälen, zu verstehen ist. Die weiten bis sehr weiten Flugwege tragen trotz ihres selteneren Auftretens deswegen so deutlich zur gesamten Transportleistung bei, weil das Produkt aus Flugweglänge und Häufigkeit für diese weiten Flugwege nicht vernachlässigbar klein wird. Bildlich gesprochen tritt die Mehrzahl der Molekeln mehr oder weniger im Kanal "auf der Stelle", während einem kleinen Prozentsatz "unverhofft" die weiten Sprünge gelingen.



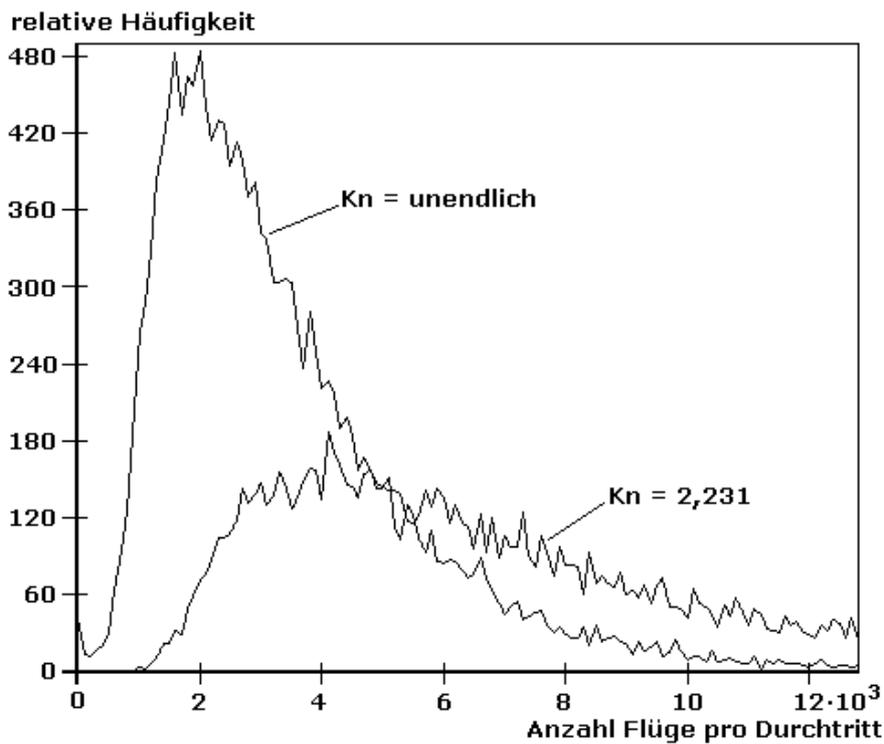
**Abb. 5:** Häufigkeit  $P_W$  pro eingeworfener Molekel für freie Flugweglängen zwischen  $L$  und  $L+D/20$  (Maximum bei  $L/D=1$ ), für ein Rohr der Gesamtlänge  $L/D=80$

Pro Einwurf werden im Mittel bei  $L/D=80$  etwa 160 freie Flüge zurückgelegt. Wesentlich sind die Transportlängen pro Flug. 22,52 % der durchtretenden Molekeln legen Transportlängen von  $\geq 1,51 \cdot D$  zurück.

In Abb. 6 ist (nach MOVAK3D-Simulationen) der Transportbeitrag als Integral über das Produkt aus der auf die Rohrachse projizierten Flugweite und der Häufigkeit des Auftretens der jeweiligen Längsflugweite für drei verschiedene Knudsen-Zahlen dargestellt. Man erkennt, daß mit dem Übergang von  $Kn=2,231$  auf  $Kn=\infty$  ein exponentieller Anstieg des Transportbeitrags der Flugweiten oberhalb etwa  $3 \cdot R$ , bzw.  $1,5 \cdot D$  einhergeht. Derartige Flugweiten sind an große Kn-Zahlen und lange Rohre gebunden. Der entsprechende "zusätzliche" Transportbeitrag stellt jenen Effekt dar, der sich in der Vakuum-Technik (vgl. Haefler [2]) im allgemeinen hinter dem gewöhnlich ziemlich "unscharf" bleibenden Begriff "Strahlbildungs-Effekt" verbirgt.



**Abb. 6:** Transportbeitrag als Integral über (Längsflugweite·Häufigkeit) von Null bis zur relativen Flugweite, gemessen als  $L/R$ , für ein Rohr der Gesamtlänge  $L/D=80$



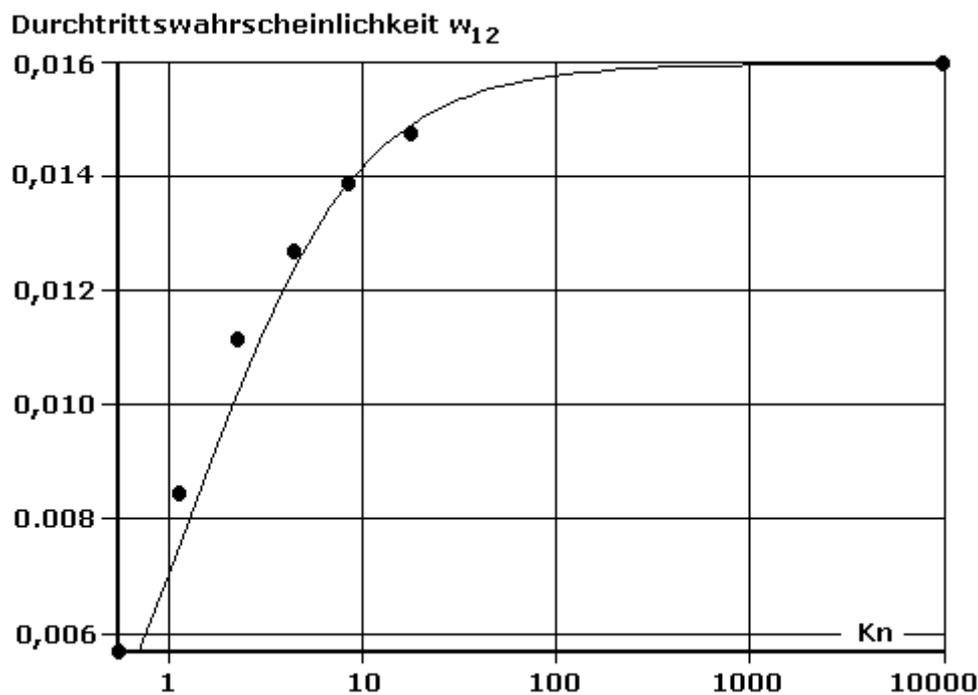
**Abb. 7:** Relative Häufigkeit der für den Durchtritt einer Molekel notwendigen Anzahl von "Flügen", für ein Rohr der Gesamtlänge  $L/D=80$

Abb. 7 zeigt (nach MOVAK3D-Simulationen), wie mit abnehmender Kn-Zahl die Anzahl der "Flüge" pro durchtretender Molekel stark zunimmt. Bei  $Kn=\infty$  sind es im Mittel etwa 3393, bei  $Kn=2,231$  werden schon 7182 und bei  $Kn=0,279$  bereits 64316 "Flüge" zwischen aufeinanderfolgenden Kollisionen für den Durchtritt einer Molekel benötigt. Bei  $Kn=\infty$  gibt es zusätzlich einen (sehr) kleinen Anteil direkt vom Rohreintritt zum Austritt durchfliegender Molekel.

Es war nach diesen Überlegungen zu erwarten, daß die Simulation mit MOVAK3D, von der reinen Molekularströmung her kommend, noch einen brauchbaren "Einstieg" in den Bereich der Knudsen-Strömung zu leisten vermag. Es war also zu untersuchen, inwieweit der Term

$$\frac{Kn}{c_4 + Kn} \quad \text{Gl. (71)}$$

in Gl. (25) bzw. Gl. (42), der mit dem Strahlbildungs-Effekt verknüpft ist, mit Hilfe von Simulationen mit MOVAK3D direkt aufzufinden ist. Das Ergebnis ist in Abb. 8 dargestellt. Aufgetragen ist die Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12}$  als Funktion der Knudsen-Zahl  $Kn$ , wobei die durchgezogene Kurve den Term  $Kn/(c_4+Kn)$  als Ausgleichfunktion wiedergibt. Damit ergibt sich der gesuchte Zahlenwert  $c_4$  zu etwa 1,15.



**Abb. 8:** MOVAK3D-Ergebnis für  $w_{12}$  als Funktion der Knudsen-Zahl  $Kn$

Das in Abb. 8 dargestellte Ergebnis (die gezeigten Abweichungen zwischen den MOVAK3D-Datenpunkten und der Funktions-Kurve sind zufallsbedingt, verursacht durch die verbliebene statistische Unsicherheit aufgrund des endlichen Stichprobenumfangs) bestätigt die zuvor angesprochene Vermutung, daß MOVAK3D den (ausgehend von "großen" Knudsen-Zahlen bei reiner Molekular-Strömung) von Null an wachsenden Einfluß der Molekel-Molekel-Kollisionen bei abnehmender Kn-Zahl und damit zunehmender Gasdichte noch richtig

wiederzugeben vermag, daß aber der sich bei Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der Molekelbewegungen einstellende Übergang auf eine Maxwell-verteilte (viskose) Gasbewegung nahezu ohne Strahleffekte nicht auftritt. und in dieser Simulation voraussetzungsgemäß auch nicht auftreten kann. Interessant ist, daß bei der Simulation gefundene Zusammenhang im Rahmen der gegebenen Unsicherheiten funktional gerade demjenigen des Term

$$\frac{Kn}{c_4 + Kn}$$

aus Gl. (24) entspricht, womit sich zeigt, daß dieser Term, wie oben im Zusammenhang mit dem Strahlbildungs-Effekt diskutiert, den physikalischen Zusammenhang mit dem Zusammenbruch der Stahlbildung bei wachsender Gasdichte realistisch wiedergibt.

Der nach Abb. 8 erhaltene Zahlenwert für  $c_4$  von etwa 1,15 erscheint gegenüber dem nach Gl. (24) erwarteten Wert von 1,238 .. 2,231 als etwas zu niedrig, denn die in Abb.3 gezeigte Kurve reagiert auf Änderungen an diesem Koeffizienten  $c_4$  letztendlich doch "nicht unmerklich". **Trotzdem ist festzuhalten, daß mit Hilfe der MOVAK3D-Simulationen auch der Koeffizienten  $c_4$  unabhängig von der Durchführung von Messungen zu ermitteln ist.**

**Eine von MOVAK3D-Ergebnissen unabhängige Abschätzung für  $c_4$  kann wie folgt gemacht werden:** Wie weiter unten gezeigt wird, ist der mittlere Flugweg beim Spalt  $s_{\text{Spalt}} \cdot \pi/2$ , während er beim Rohr nach Gl. (67)  $d_{\text{Rohr}} \cdot \pi/4$  beträgt. Jeder Schnitt durch das Rohr parallel zur Rohrachse liefert zwei parallele Schnittkanten, also einen "Spalt", so daß für die mittlere Flugweglänge in Längsrichtung der Faktor Spaltbreite  $\cdot \pi/2$ , wie für den Spalt, angewendet werden kann. Setzt man für die Breite den Wert nach Gl. (67) ein, so ergibt sich für den mittleren Flugweg  $d_{\text{Rohr}} \cdot \pi^2/8 = 1,234 \cdot d_{\text{Rohr}}$ . Diese Abschätzung für  $c_4$  liegt (relativ) sehr nahe bei dem Wert von 1,15 nach Abb. 8.

Auf der Basis dieser Vergleichrechnungen und Abschätzungen wurde eine **vorläufig letzte kritische Würdigung des bisher bestehenden Zahlenmaterials und der aktuellen "Beweislage"** durchgeführt. Es besteht danach die Möglichkeit, daß unter Berücksichtigung der in Abb. 1 zu den großen Kn-Zahlen hin sichtbaren "Unschärfen" das hier erhaltene Produkt aus  $(L/D)=80$  und der zugeordneten Durchtrittswahrscheinlichkeit von 0,01601 ein wenig (um knapp 2 %) zu niedrig sein könnte. **Des weiteren zeigt dieser Vergleich, daß für den Koeffizienten  $c_4$  ein Wert von etwa 1,4 als realistischer erscheint, als der ursprünglich erhaltene Wert von 2,231.** Der Wert von 1,4 liegt auch viel näher an dem Wert von 1,15, der in den entsprechenden MOVAK3D-Simulationen (siehe weiter oben) gefunden wurde. **Es erscheint daher als sinnvoll, zukünftig eher mit  $c_4=1,4$  weiterzuarbeiten.**

### - Nachtrag

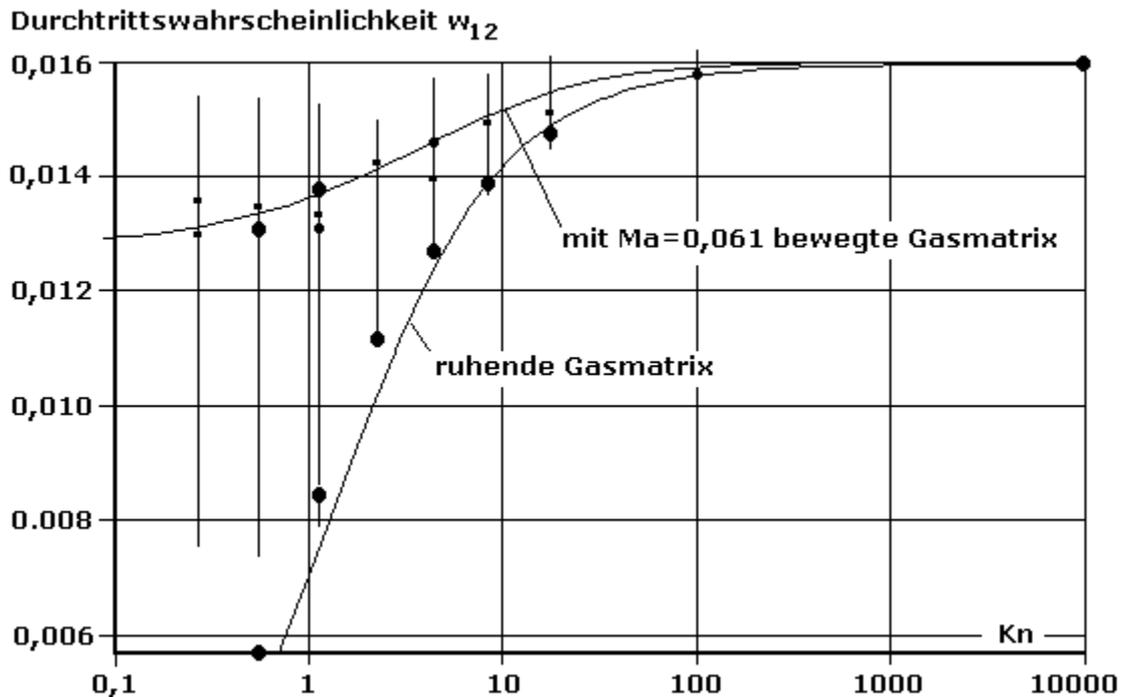
Wird in Gl. (1)  $F = c_2$  gesetzt und der Massenstrom mittels Dichte und Rohrquerschnittsfläche in eine mittlere Geschwindigkeit umgerechnet, so kann diese auf die Schallgeschwindigkeit bezogen werden. Weil bei den MOVAK3D-Rechnungen für die reine Molekularströmung der Austrittsdruck immer zu Null angenommen wird, muß diese Annahme hier ebenfalls übernommen werden, so daß der Differentialquotient  $dP/dx$  als recht grobe Näherung durch  $P/L$  ersetzt werden kann, und man erhält als "Anhaltsformel" den Ausdruck

$$c_2 = Ma \cdot (L/D) \cdot (c_p/c_v)^{1/2} \tag{Gl. (72)}$$

aus dem sich als weitere Näherung mit  $c_2 \approx (c_p/c_v)^{1/2}$  ergibt

$$Ma \approx (L/D)^{-1} \quad \text{Gl. (73)}$$

Für den "realistischen" Übergang in Abb. 9 mußte allerdings der Wert  $Ma=0,061$  anstelle  $0,125$  nach Gl. (73) verwendet werden (was zeigt, daß die Ableitung der Gl. (72) bereits sehr grobe Vereinfachungen enthält).



**Abb. 9:** MOVAK3D-Ergebnis für  $w_{12}$  als Funktion der Knudsen-Zahl  $Kn$ , mit Simulation einer mit  $Ma=0,061$  strömenden Kontinuums-Gleitströmung

In MOVAK3D erfolgt die Berücksichtigung einer sich bewegenden Gasmatrix zum einen über die Einführung der freien Weglänge und zum zweiten über eine Addition der Richtungsvektoren beim simulierten Molekel-Molekel-Stoß. Auf diese Weise wird eine von der Mach-Zahl abhängige Vorwärtsstreuung erreicht. Allerdings muß die Mach-Zahl vorgegeben werden und es wird auch kein Strömungsprofil für die Gleitströmung berücksichtigt. Andererseits brauchen keinerlei zusätzliche Annahmen für das allmähliche Verschwinden der Wirkung der Gleitströmung mit wachsender  $Kn$ -Zahl getroffen zu werden.

#### 4. Einfluß der Kanalgeometrie

##### 4.1 Prismatische Kanäle mit beliebigem konvexen Querschnitt

Bei Strömungskanälen mit konvexer Querschnittsfläche kann die mittlere freie Flugweglänge  $l_{\text{Flug}}$  vollständig durch  $d_{\text{hyd}}$  ausgedrückt werden. Damit schreiben sich die hier zusammengestellten und mit dem Vorsatz "S" gekennzeichneten Gleichungen wie folgt neu:

$l_{\text{frei}} = (\eta/P) \cdot [1000 \cdot \pi \cdot R_{\text{Gas}} \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}})]^{1/2}$	Gl. (74.1)
$Kn = l_{\text{frei}} / d_{\text{hyd}}$	Gl. (74.2)
$d_{\text{hyd}} = 4 \cdot A / U$	Gl. (74.3)
$c_1 = c_{\text{lam}} \cdot 16 \cdot A / (\sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2 \cdot Re \cdot \zeta)$	Gl. (74.4)
$(c_2 + c_3) = 8 \cdot w_{12} \cdot L \cdot A / [\pi^{3/2} \cdot d_{\text{hyd}}^3]$	Gl. (74.5)
$c_4 = 1.4$ (statt bisher 2.231)	Gl. (74.6)

Die Anwendung dieser Gleichungen auf den Spalt erfordert Sorgfalt. Bei allen geschlossenen Kanalquerschnitten ist das Verhältnis  $A/d_{\text{hyd}}^2$  unabhängig von den Abmessungen, also auch unabhängig von  $d_{\text{hyd}}$ . Beim Spalt als "offenem" Querschnitt ist A auf die Längeneinheit zu beziehen, also ändert sich A proportional zu  $d_{\text{hyd}}$  anstelle zu  $d_{\text{hyd}}^2$ . Deshalb bleibt in den Gl. (74.4) und Gl. (74.5) jeweils ein Faktor  $d_{\text{hyd}}$  im Nenner "übrig". Die Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  sind in diesem Falle somit nicht konstant, sondern proportional zu  $1/d_{\text{hyd}}$ , aber unabhängig von der "Weite".

Die Größe  $c_{\text{lam}}$  ist ein Faktor, der wegen der Anwendung des Konzepts des hydraulischen Durchmessers auch auf laminare Strömungen notwendig ist. Er kann z.B. nach [6] festgelegt werden:

Kanalform	$c_{\text{lam}}$
Rohr	1
Quadrat	1.12462
Rechteck 1.5x1	1.08756
Rechteck 2x1	1.02907
Rechteck 3x1	0.91365
Rechteck 10x1	0.75582
Rechteck 20x1	0.71184
Spalt	2/3
gleichs. Dreieck	1.2
Ellipse 1.5x1	0.98093
Ellipse 2x1	0.95108
Ellipse $\infty \times 1$	0.81058

**Tabelle 4:** Laminarfaktor  $c_{\text{lam}}$  für verschiedene Kanalformen (Werte berechnet nach [7])

Auf diese Formulierung wird nun im folgenden stets zurückgegriffen. **Der Laminarfaktor  $c_{\text{lam}}$  ist beim Rohr und bei allen Kanalformen bei turbulenter Strömung = Eins, bei ungerundeten Kanalformen und reiner Laminarströmung aber  $\neq$  Eins**

#### 4.2 Kanal mit quadratischem Querschnitt

Der quadratische Kanal ist für einen Vergleich mit dem runden Rohr deswegen besonders interessant, weil sowohl der hydraulische Durchmesser  $d_{\text{hyd}}$ , als auch die mittlere freie Weglänge im Querschnitt  $l_{\text{flug}}$ , mit den Werten des Rohres exakt übereinstimmt (bei einer Seitenlänge a des Quadrates gleich dem Rohrdurchmesser  $d_{\text{Rohr}}$ ), obwohl dabei die Querschnittsfläche A um etwa 27,3 % größer ist. Um hier einen genauen Einblick zu bekommen, wurden mit MOVAK3D ziemlich ausführliche Simulationsrechnungen für die Durchtrittswahrscheinlichkeit beim Quadrat-Kanal durchgeführt.

**Der bisher für das Rohr gefundene  $c_3$ -Grundwert 0.3367 ist nur für das Rohr gültig und weicht bei anderen Geometrien von diesem Wert teilweise stark ab! Der Wert von  $c_3$  muß also für jede Geometrie gesondert ermittelt werden!**

Eine erste Nachrechnung mit den Gl. (37) bis Gl. (39) ergibt folgende Wert für den Quadrat-Kanal:

$$(c_2 + c_3) = 2,0597, \quad c_3 = 0,5735, \quad c_2 = 1,4862$$

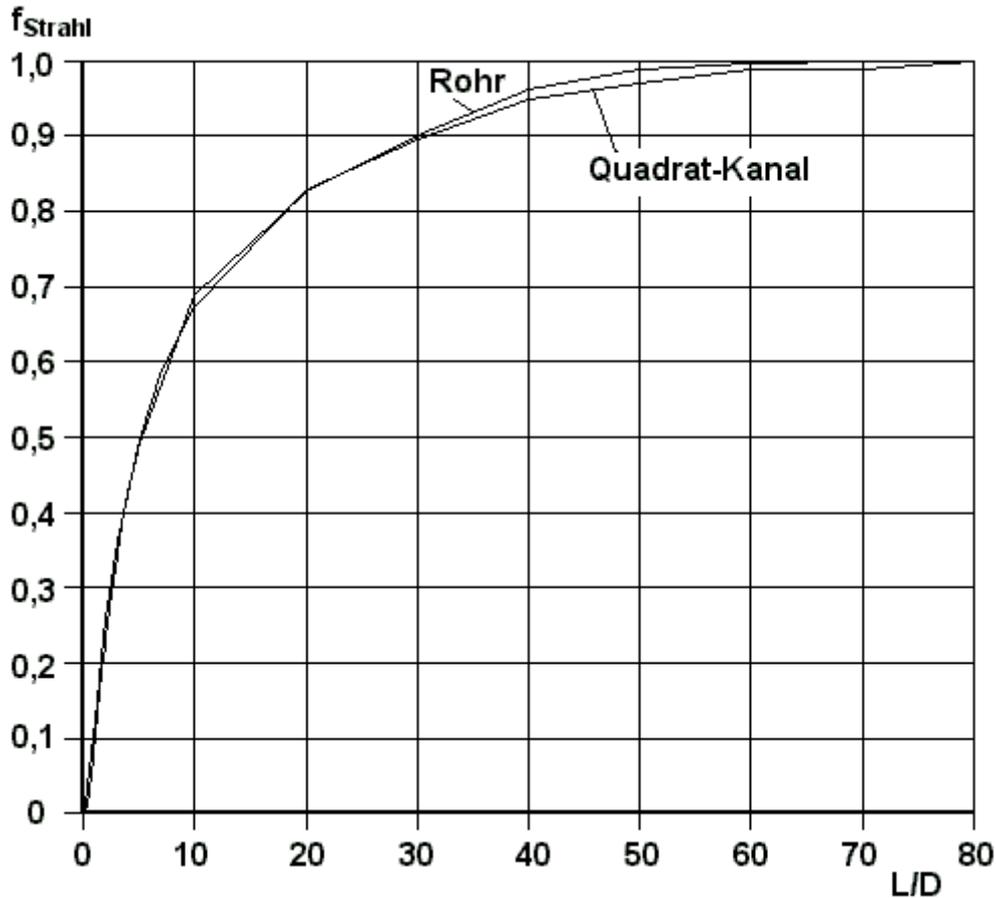
Die entsprechenden Werte beim Rohr sind (nach der ursprünglichen Korrelation)

$$(c_2 + c_3) = 1,4948, \quad c_3 = 0,3367, \quad c_2 = 1,1581$$

L/a	Anzahl Simulationen	Anzahl Treffer	1- $\sigma$ -Streuband	w <sub>12</sub> [-]	±Fehler [%]
<b>0,1</b>	9000000	8216000	0,00032	<b>0,91289</b>	<b>0,035</b>
<b>0,2</b>	9000000	7582358	0,00031	<b>0,84248</b>	<b>0,036</b>
<b>0,4</b>	9000000	6600567	0,00029	<b>0,73340</b>	<b>0,039</b>
<b>1,0</b>	9000000	4826715	0,00024	<b>0,53630</b>	<b>0,046</b>
<b>2,0</b>	9000000	3401478	0,00020	<b>0,37794</b>	<b>0,054</b>
<b>3,0</b>	9000000	2653124	0,00018	<b>0,29479</b>	<b>0,061</b>
<b>5,0</b>	9000000	1856298	0,00015	<b>0,20626</b>	<b>0,073</b>
<b>7,0</b>	7200000	1148995	0,00015	<b>0,15958</b>	<b>0,093</b>
<b>10</b>	9000000	1073246	0,00012	<b>0,11925</b>	<b>0,097</b>
<b>20</b>	3650031	239381	0,00013	<b>0,06558</b>	<b>0,204</b>
<b>30</b>	1000000	45318	0,00021	<b>0,04532</b>	<b>0,470</b>
<b>40</b>	940000	32715	0,00019	<b>0,03480</b>	<b>0,553</b>
<b>50</b>	1420000	39985	0,00014	<b>0,02816</b>	<b>0,500</b>
<b>60</b>	2520000	59629	0,00010	<b>0,02366</b>	<b>0,410</b>
<b>70</b>	4060000	82554	0,00007	<b>0,02033</b>	<b>0,348</b>
<b>80</b>	8100000	144864	0,00005	<b>0,01788</b>	<b>0,263</b>

**Tabelle 5:** Mit MOVAK3D [3,4] berechnete Durchtrittswahrscheinlichkeit w<sub>12</sub> durch Kanäle mit quadratischem Querschnitt (a=d<sub>hyd</sub> ist die Quadrat-Seitenlänge bzw. Schlüsselweite und dem hydraulischen Durchmesser gleich)

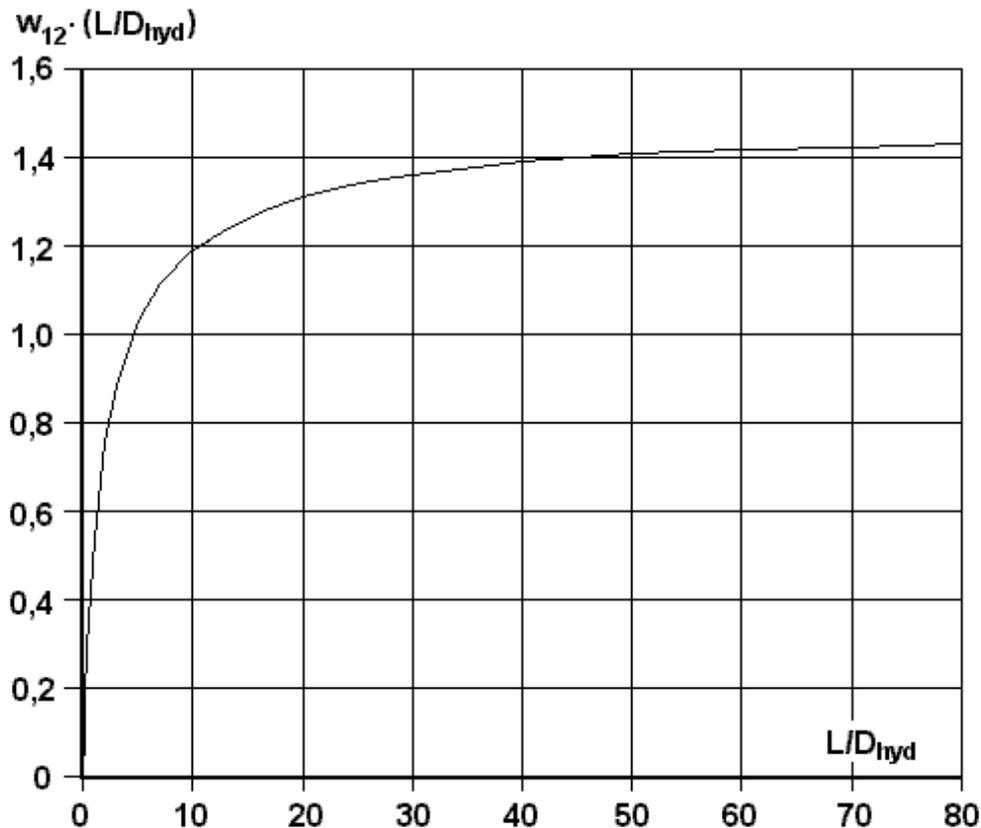
Dabei wird erkennbar, daß sich die Werte für  $c_2$  (grob angenähert) proportional zur Querschnittsfläche einstellen, und daß die Strahlbildung beim Quadrat-Kanal deutlich stärker ausgeprägt ist als beim Rohr. **Daher ist das Knudsen-Minimum beim Quadrat-Kanal auch deutlicher ausgeprägt, als dasjenige beim Rohr.**



**Abb. 10:** Vergleich der berechneten Funktion  $f_{\text{Strahl}}$  für das Rohr und für den Quadrat-Kanal in Abhängigkeit von  $L/d_{\text{hyd}}$

Die Abb. 10 belegt, daß der Verlauf  $f_{\text{Strahl}}$  der relativen Strahlausbildung bei den beiden sich in ihren Eigenschaften sonst sehr deutlich unterscheidenden Kanalformen durchaus gleichzusetzen ist. Dabei sind offensichtlich beide Kurven im Bereich der großen Längen noch merklich durch die statisch bedingten Restfehler der Durchtrittswahrscheinlichkeit gestört (zur Behebung dieser Restfehler wären allerdings sehr lange Rechenzeiten erforderlich). **Für die weitere Behandlung der Frage der Strahlausbildung, die sich bei der Berechnung für kurze Kanäle immer stellt, kann daher davon ausgegangen werden, daß die relative Strahlausbildung bei unterschiedlichen prismatischen Kanälen stets in ausreichender Näherung durch den  $f_{\text{Strahl}}$ -Verlauf für das Rohr beschrieben wird.**

Die Abb. 11 belegt hinreichend, daß auch beim Quadrat-Kanal eine Länge von  $L/d_{\text{hyd}} = 80$  als ausreichend für die "gesättigte" Strahlausbildung anzusehen ist. Die leichte Krümmung des Kurvenverlaufs "am rechten Ende" nach oben hin beweist ebenso wie der entsprechende Kurvenverlauf in Abb. 10, daß hier noch ein Einfluß der statistischen Restfehler zu bemerken ist.



**Abb. 11:** Verlauf der Funktion  $w_{12}(L/d_{hyd})$  für den Quadrat-Kanal in Abhängigkeit von  $L/d_{hyd}$  (im rechten Teile der Kurve machen sich die statistischen Restfehler noch deutlich durch einen unregelmäßigen Kurvenanstieg bemerkbar)

**Anmerkung:** Bei der Ermittlung der Koeffizienten  $c_2$  und  $c_3$  zeigt sich vom Rechenaufwand die Verwendung des Additionstheorems gegenüber der Methode der "fiktiven Streueignisse" als weit überlegen, denn im ersten Fall wird zusätzlich zum Wert für den langen Kanal nur noch die Durchtrittswahrscheinlichkeit für einen sehr kurzen Kanalabschnitt benötigt (typische Länge =  $0,1 \cdot d_{hyd}$ ). Bei so kurzen Kanälen läuft die MOVAK3D-Simulation sehr rasch. Im zweiten Fall der "fiktiven Streueignisse" muß die Rechnung direkt für den "langen Kanal" durchgeführt werden und benötigt um Größenordnungen längere Rechenzeiten, bis ein hinreichend kleiner statistischer Fehler des Ergebnisses gesichert ist.

### 4.3 Weitere konvexe Kanalformen

In der Tabelle 6 sind die Ergebnisse aus umfangreichen Simulationsrechnungen mit MOVAK3D für einige konvexe Kanalformen zusammengestellt. Bei allen Formen ist  $d_{hyd}=1$ , explizit angegeben sind aber nur die Seiten- oder Achsenverhältnisse. Für jede Kanalform wurden zwei Durchtrittswahrscheinlichkeiten ermittelt, nämlich  $w_{12, kurz}$  für  $L/d_{hyd}=0,1$  und  $w_{12, lang}$  für  $L/d_{hyd}=80$ . Weil die Rechnungen für  $w_{12, kurz}$  sehr rasch laufen, wurden dort, um einen kleinen statistischen Fehler zu erreichen,  $9 \cdot 10^6$  Simulationen durchgeführt. Demgegenüber sind die Simulationen bei  $L/d_{hyd}=80$  sehr zeitaufwendig, so daß dort nur zwischen  $(0,2..2,1) \cdot 10^6$  Simulationen durchgeführt wurden. Zur Kontrolle wurde auch noch ein  $w_{12, kurz}$ -Wert für das Rohr neu berechnet (vgl. Tabelle 2), wobei eine sehr gute

Übereinstimmung festzustellen ist. Deswegen können die in Tabelle 6 aufgeführten Werte (im Rahmen der angegebenen Fehlergrenzen) als sicher angesehen werden.

Beim Spalt ist die Fläche A unbegrenzt (oder "unbestimmt"). Es müssen alle Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2, c_3$  und  $c_4$ , sowie die Funktion F auf die Breite "eine Längeneinheit" bezogen werden.

Kanal-Typ	$L/d_{hyd}$	$w_{12}$ [-]	$\pm$ Fehler [%]
Rohr	0,1	0,90924	0,035
"	80	0,01601	0,56
Quadrat	0,1	0,91289	0,035
"	80	0,01788	0,263
Rechteck(1.5x1)	0,1	0,91288	0,035
"	80	0,01840	1,446
Rechteck(2x1)	0,1	0,91258	0,035
"	80	0,01854	0,700
Rechteck(20x1)	0,1	0,90993	0,032
"	80	0,02506	0,673
Spalt	0,1	0,90954	0,035
"	80	0,03315	0,915
Dreieck(gleichs.)	0,1	0,91465	0,035
"	80	0,01964	1,521
Ellipse(1.5x1)	0,1	0,90987	0,035
"	80	0,01669	1,731
Ellipse(2x1)	0,1	0,91006	0,035
"	80	0,01720	1,078

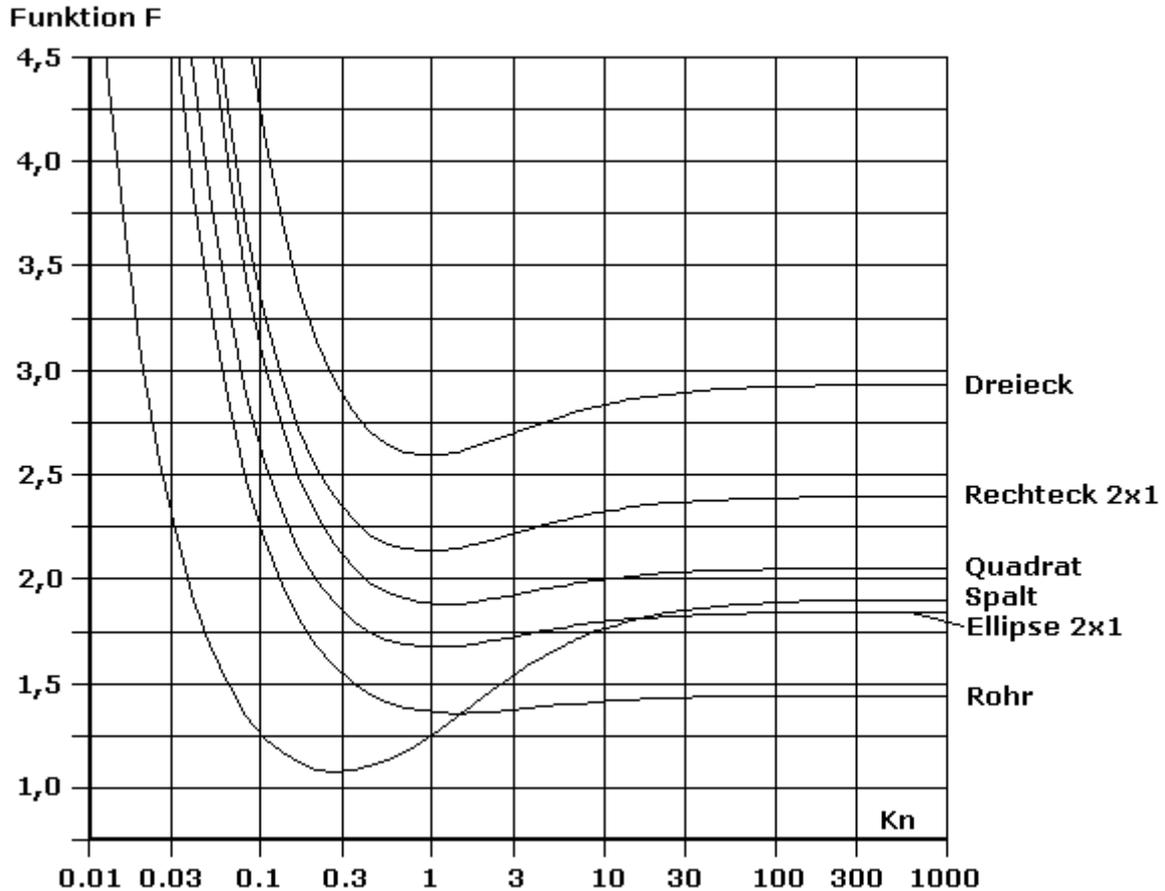
**Tabelle 6:** Mit MOVAK3D berechnete Durchtrittswahrscheinlichkeiten  $w_{12}$  für verschiedene Kanaltypen ( $d_{hyd}=1$ )

In Tabelle 7 sind die mit den Werten aus Tabelle 6 mit den Gl. (74.5) und Gl. (39) berechneten Koeffizienten  $c_2$  und  $c_3$  aufgeführt.

Die in Tabelle 7 wiedergegebenen Werte  $c_2/A$  sind offenbar für eine bestimmte Kanal-Type (Rechteck-Kanal, elliptischer Kanal) jeweils annähernd konstant und damit für eine Interpolation geeignet. Die Werte  $c_3/A$  zeigen wesentlich andere und deutlich kompliziertere Zusammenhänge auf.

Kanal-Typ	$c_2$	$c_3$	Faktor	A	$c_2/A$	$c_3/A$
Rohr	1,1162	0,3291	1	0,78540	1.4212	0.4190
Quadrat	1,4862	0,5735	1.1193	1#	1.4862	0.5735
Rechteck(1.5x1)	1,5479	0,6551	1.1493	1,04166	1.4860	0.6289
Rechteck(2x1)	1,6655	0,7318	1.1580	1,12500	1.4804	0.6505
Rechteck(20x1)(p.LEinh)	0,7525	0,7597	1.5653	5,51250	1.4333	1.4470
Spalt(pro Längeneinheit)	0,7133	1,1918	2,0704	0,5	1,4266	2,3835
Dreieck(gleichs.)	1,9706	0,9632	1.2267	1,29904	1.5170	0.7415
Ellipse(1.5x1)	1,1954	0,4123	1.0468	0,83461	1.4322	0.4940
Ellipse(2x1)	1,3404	0,5054	1.0743	0,93370	1.4356	0.5413

**Tabelle 7:** Mittels Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12}$  berechnete Koeffizienten der Funktion F für verschiedene Kanaltypen (Faktor =  $w_{12}/w_{12,Rohr}$  für  $L/d_{hyd}=80$ )



**Abb. 12:** Berechnete Funktion  $F$  für verschiedene Kanalformen

Die auf der Basis der Durchtrittswahrscheinlichkeiten nach Tab. 6 und der Laminar-Faktoren  $c_{lam}$  nach Tab. 4 sich nach den Gl. (74) ergebenden Verläufe der  $F$ -Funktion für einige der Kanalformen sind in Abb. 12 dargestellt. Für den Spalt ist anzumerken, daß hier die Funktion  $F$  nicht für die Querschnittsfläche (die ja unendlich ist), sondern nur bezogen auf die Längeneinheit der Kanalbreite angegeben werden kann. Auffällig ist, daß (außer beim Spalt bei  $Kn < 2$ ) alle Kurven oberhalb derjenigen für das Rohr liegen. Der Grund dafür liegt darin, daß  $F$  den absoluten Massenstrom als Faktor enthält und die Querschnittsfläche  $A$ , bei gleichen hydraulischen Durchmesser  $d_{hyd}$ , beim Rohr am kleinsten ist. Das Knudsen-Minimum ist beim Spalt am stärksten ausgeprägt. Hier fällt  $F$  auf etwa 61 % des Wertes für große  $Kn$ -Zahlen ab, während nach diesen Ergebnissen beim Rohr ein Abfall auf gut 90 % eintritt. Im übrigen wird mit den Durchtrittswahrscheinlichkeiten nach Tab. 6 das Knudsenminimum beim Rohr geringfügig flacher, als nach Abb. 1. Diese Unterschiede haben aber keine grundsätzliche Bedeutung. Sie sind vielmehr Folge der restlichen statistischen Fehler bei der Berechnung der Durchtrittswahrscheinlichkeiten.

#### 4.4 Ableitung von $c_1/A$ und $c_2/A$ für konvexe Kanalgeometrie

Die folgende Ableitung wird konsequent durchgehend mit den Definitionen für  $\eta_{\text{eff}}$  und  $l_{\text{eff}}$  nach den Gl. (59) und Gl. (60) durchgeführt. Zudem ist der Laminarfaktor  $c_{\text{lam}}$  (vgl. Tabelle 4) berücksichtigt.

Die Gültigkeit der folgenden Ableitung ist gegeben, weil die Differentialgleichung für die Laminarströmung linear ist, so daß die Superposition der Lösungen mit und ohne lokal variables Gleiten an der Kanalwand erlaubt ist. Obwohl durch das lokal unterschiedliche Gleiten das Geschwindigkeitsprofil verformt wird, kann jeder Fall mit Gleiten aus dem Fall ohne Gleiten (Index 0) gemäß

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + (du/dz)_0 \cdot l_{\text{frei}} \quad \text{Gl. (75)}$$

berechnet werden. Der Mittelwert des Differentialquotienten  $du/dz$  erweist sich als von  $l_{\text{frei}}$  unabhängig!

Die Slip-Geschwindigkeit bei Laminarströmung ist mit dem Gradienten  $du/dz$  am Rande

$$u_{\text{slip}} = l_{\text{eff}} du/dz \quad \text{Gl. (76)}$$

Der mittlere Geschwindigkeits-Gradient am Rande wird mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_{\text{hyd}}$  allgemein zu

$$du/dz = -(dP/dx) \cdot d_{\text{hyd}} / (4 \cdot \eta_{\text{eff}}) \quad \text{Gl. (77)}$$

Dabei ist der Druckverlust derjenige eines Rohres mit  $d_{\text{Rohr}} = d_{\text{hyd}}$ , dividiert durch den "Laminarfaktor"  $c_{\text{lam}}$

$$\dot{V}_{\text{Rohr}} = \bar{u}_{\text{Rohr}} \cdot \pi \cdot R_{\text{Rohr}}^2 = [\pi / (8 \cdot \eta_{\text{eff}})] \cdot [R_{\text{Rohr}}^4] \cdot (dP/dx)$$

$$\bar{u}_{\text{Rohr}} = [1 / (32 \cdot \eta_{\text{eff}})] \cdot [d_{\text{Rohr}}^2] \cdot (dP/dx)$$

Nunmehr wird mit Übergang auf den allgemeinen Kanal deshalb

$$dP/dx = 32 \cdot \bar{u} \cdot \eta_{\text{eff}} / (c_{\text{lam}} \cdot d_{\text{hyd}}^2)$$

weshalb sich allgemein für  $du/dz$  ergibt

$$du/dz = -(8 \cdot \bar{u}) / (c_{\text{lam}} \cdot d_{\text{hyd}}) \quad \text{Gl. (78)}$$

Das ist aber nur der Gradient aufgrund des "parabolischen Profils" ohne  $u_{\text{slip}}$ , mit dem nun  $u_{\text{slip}}$  bestimmt wird (Vorzeichen jetzt weggelassen). Daher wird der wahre Volumenstrom

$$\dot{V} = A \cdot (\bar{u} + u_{\text{slip}})$$

$$\dot{V} = A \cdot \bar{u} \cdot [1 + l_{\text{eff}} 8 / (c_{\text{lam}} \cdot d_{\text{hyd}})]$$

und wiederum kann  $\bar{u}$  ersetzt werden, so daß jetzt erhalten wird

$$\dot{V} = A \cdot [d_{\text{hyd}}^2 / (32 \cdot \eta_{\text{eff}})] \cdot [c_{\text{lam}} + l_{\text{eff}} 8 / d_{\text{hyd}}] \cdot (dP/dx)$$

Das ist die um die Gleitgeschwindigkeit  $u_{\text{slip}}$  erweiterte allgemeine Durchsatzformel

Nun gilt für  $\dot{m}$

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho \quad [\text{m}^3/\text{s}] \cdot [\text{kg}/\text{m}^3]$$

mit

$$P \cdot v = R \cdot T$$

$$v = (R \cdot T) / P$$

$$\rho = P \cdot M_{\text{mol}} / (R \cdot T)$$

Also wird daraus

$$\dot{m} = A \cdot d_{\text{hyd}}^2 \cdot (dP/dx) \cdot [c_{\text{lam}} + l_{\text{eff}} 8 / d_{\text{hyd}}] \cdot [P \cdot M_{\text{mol}} / (32 \cdot \eta_{\text{eff}} \cdot R \cdot T)] \quad \text{Gl. (79)}$$

Die Funktion F lautet für den allgemeinen Fall

$$F_{\text{Kanal}} = - \dot{m} \cdot \sqrt{[128 \cdot R \cdot T / M_{\text{mol}}] / [\pi \cdot d_{\text{hyd}}^3 \cdot (dP/dx)]}$$

wobei  $\dot{m}$  der wahre Massenstrom ist, und es ist weiterhin definiert

$$\text{Kn} = l_{\text{frei}} / d_{\text{hyd}}$$

$$d_{\text{hyd}} = 4 \cdot A / \text{Umfang}$$

sowie

$$F_{\text{Kanal}} = c_1 / \text{Kn} + c_2 + c_3 \cdot \text{Kn} / (c_4 + \text{Kn})$$

Danach wird also (das Vorzeichen von  $F_{\text{Kanal}}$  wird weggelassen)

$$F_{\text{Kanal}} = \dot{m} \cdot \sqrt{[128 \cdot R \cdot T / M_{\text{mol}}] / [\pi \cdot d_{\text{hyd}}^3 \cdot (dP/dx)]}$$

und weiter

$$F_{\text{Kanal}} = A \cdot [c_{\text{lam}} + 8 \cdot \text{Kn} / (1 + c_\eta \cdot \text{Kn})] \cdot [P / \eta_{\text{eff}}] \cdot \sqrt{[128 \cdot M_{\text{mol}} / R \cdot T] / [32 \cdot \pi \cdot d_{\text{hyd}}]}$$

Aus der Gleichung (48) für  $l_{\text{eff}}$

$$l_{\text{eff}} = (\eta_{\text{eff}} / P) \cdot \sqrt{(\pi \cdot R \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}}))} \quad \text{Gl. (80)}$$

wird mittels Gl. (60)  $l_{\text{eff}}$  eliminiert nach

$$l_{\text{eff}} = (\text{Kn} \cdot d_{\text{hyd}}) / (1 + c_\eta \cdot \text{Kn})$$

bzw. umgeformt wird daraus

$$(P / \eta_{\text{eff}}) = (1 + c_\eta \cdot \text{Kn}) \cdot \sqrt{[\pi \cdot R \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}})]} / [d_{\text{hyd}} \cdot \text{Kn}]$$

und diesen Ausdruck in die vorige Gleichung eingesetzt liefert jetzt

$$F_{\text{Kanal}} = A \cdot [(8 + c_{\text{lam}} \cdot c_\eta) + c_{\text{lam}} / \text{Kn}] / [4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2]$$

Ganz formal wird daraus weiterhin mit

$$F_{\text{Kanal}} = c_1 / \text{Kn} + c_2 + c_3 \cdot \text{Kn} / (c_4 + \text{Kn})$$

durch Koeffizienten-Vergleich

$$c_1 = A \cdot c_{\text{lam}} / [4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2] \quad \text{Gl. (81.1)}$$

$$c_2 = A \cdot (8 + c_{\text{lam}} \cdot c_\eta) / [4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2] \quad \text{Gl. (81.2)}$$

und bezogen auf die Kanal-Fläche wird daraus endlich

$c_1 / A = c_{\text{lam}} / [4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2]$	Gl. (82.1)
$c_2 / A = (8 + c_{\text{lam}} \cdot c_\eta) / [4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot d_{\text{hyd}}^2]$	Gl. (82.2)

Der Ausdruck für  $c_1/a$  stimmt hiernach mit Gl. (74.4) für den Fall der Laminarströmung vollständig überein.

#### 4.5 Diskussion der $c_2/A$ -Ergebnisse

Der Ansatz mit Gl. (59) und Gl. (60) für eine "effektive Viskosität"  $\eta_{\text{eff}}$  bei großen Kn-Zahlen steht also in voller Übereinstimmung mit den mit MOVAK3D gewonnenen Ergebnissen für die Durchtrittswahrscheinlichkeiten durch verschiedene Kanalgeometrien. Diese Ergebnisse belegen eindeutig die (wenn auch geringe) Geometrieabhängigkeit des Ausdrucks  $c_2/A$ . Wird hingegen auf die Einführung einer "effektive Viskosität"  $\eta_{\text{eff}}$  verzichtet, dann ist  $c_\eta = \text{Null}$  und der Ausdruck  $c_2/A$  liefert für alle Kanalgeometrien einen konstanten Wert. Ein solches Ergebnis stünde jedoch im nicht auflösbaren Widerspruch zu den Ergebnissen aus den Durchtrittswahrscheinlichkeiten.

Der Ausdruck für  $c_2/A$  besteht (entsprechend den Festlegungen mit den Gl. (59) und Gl. (60)) aus einem Grund-Anteil und einem "kleineren" Anteil, der mit der Kanalgeometrie variiert. Während für die Strömung im Rohr  $c_\eta = 2,453$  gefunden wurde (bzw. mit den mittels MOVAK3D gefundenen Werten wird  $c_\eta = 2,076$ ), werden, unter Berücksichtigung der  $c_{\text{lam}}$ -Werte nach Tabelle 4, folgende Daten erhalten. Dabei ergibt sich der Maximalwert  $l_{\text{eff,max}}$  (das ist der durch die Kanalgeometrie erzwungene größte Wert für die effektive mittlere freie Weglänge der Molekeln) nach Gl. (60) für  $\text{Kn} \rightarrow \infty$  gemäß

$$l_{\text{eff,max}} = d_{\text{hyd}}/c_{\eta}$$

Gl. (83)

Kanal-Typ	$c_2/A$	$c_{\text{lam}} \cdot c_{\eta}$	$c_{\eta}$	$l_{\text{eff,max}}/d_{\text{hyd}}$
Rohr	1,4212	2,076	2,076	<b>0,482</b>
Quadrat	1,4862	2,537	2,233	<b>0,443</b>
Rechteck (2x1)	1,4808	2,499	2,423	<b>0,412</b>
gleichs. Dreieck	1,5170	2,755	2,296	<b>0,435</b>
Spalt	1,4266	2,114	3,171	<b>0,315</b>

**Tabelle 8:** Aus  $c_2/A$  berechnete Werte für  $c_{\eta}$  und  $l_{\text{eff,max}}/d_{\text{hyd}}$  für verschiedene Kanalformen

Daß nach diesen Überlegungen und Berechnungen eine größtmögliche effektive mittlere freie Weglänge  $l_{\text{eff,max}}$  der Molekeln erhalten wird, die sogar etwas kleiner als der Rohrradius ist, überrascht zunächst doch etwas. Aber für diesen Befund spricht die Tatsache, daß im Rohr (wir haben hier ja immer die Bezugsgröße eines "hydraulischen" Durchmessers zugrunde gelegt) kein Stoßprozeß zwischen zwei Molekeln weiter von der Rohrwand entfernt stattfinden kann, als eben maximal einen Rohrradius. Und der Größtwert von  $l_{\text{eff,max}}$  wurde hier nur um 3,6 % kleiner als der Rohrradius gefunden. In dieser Hinsicht passen diese Werte exzellent zusammen.

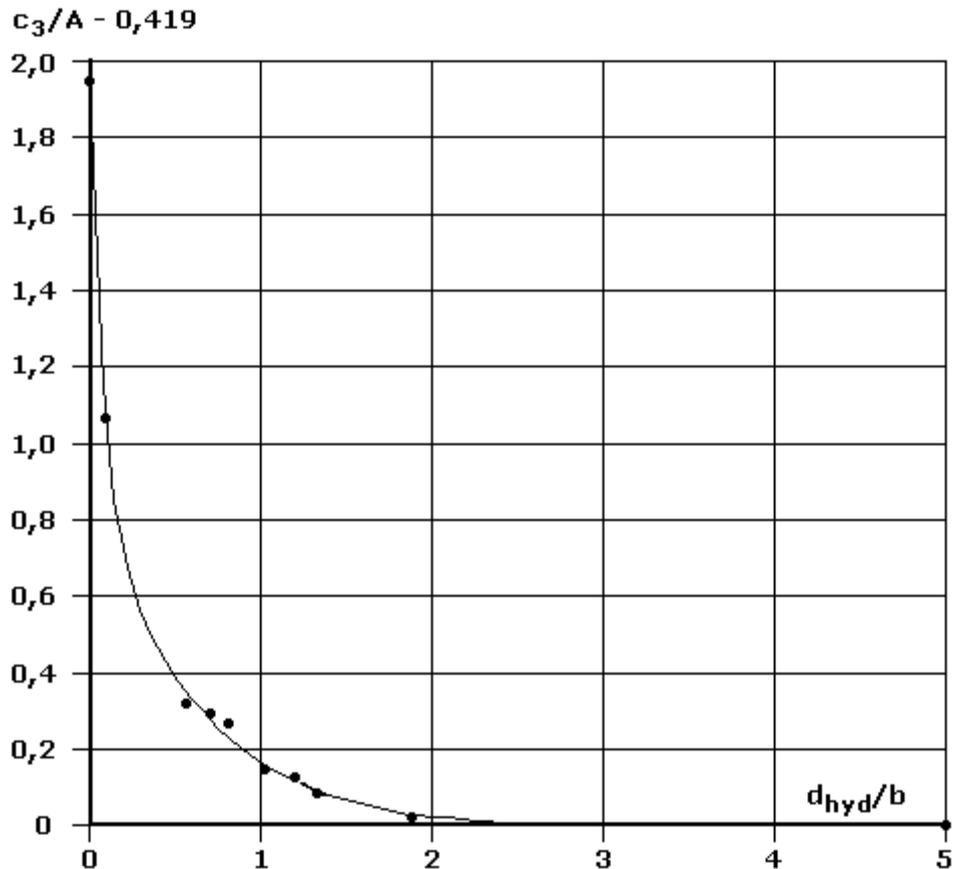
Die Tabelle 8 zeigt, daß beim Quadrat die Länge  $l_{\text{eff,max}}$  unter dem Einfluß der "Ecken" gegenüber dem Rohr, bei gleichem hydraulischen Durchmesser  $d_{\text{hyd}}$ , auf etwa 93 % verringert ist. Wiederum bei gleichem  $d_{\text{hyd}}$  wird beim Spalt schließlich der Minimalwert erreicht, der gegenüber dem Rohr auf etwa 65 % verringert ist, was aber immer noch 63 % der Spaltweite  $s_{\text{Spalt}}$  entspricht. Demnach gibt es beim Spalt, im Vergleich zum Rohr, eben doch "Kredit" auf die unbegrenzte Breiten-Ausdehnung.

Diese Beziehungen zwischen Kanalform und  $l_{\text{eff,max}}/d_{\text{hyd}}$  können via Interpolation zu "Voraussagen" des Wertes  $c_2/A$  herangezogen werden. Hilfreich ist dabei, daß ja nur der relativ kleine geometrieabhängige Anteil von  $c_2/A$  "vorauszusagen" ist, so daß die dabei gemachten Fehler nur stark abgeschwächt auf  $c_2$  selbst durchschlagen.

#### 4.6 Diskussion der $c_3/A$ -Ergebnisse

Der Koeffizient  $c_3$  bzw.  $c_3/A$  weist ganz andere Abhängigkeiten auf, als  $c_2$  bzw.  $c_2/A$ . Es zeigt sich, daß der Wert von  $c_3/A$  eindeutig damit zusammenhängt, wie "flach" die Kanalwand ist. Beim wahren Spalt ist die Kanalwand absolut (maximal) flach, beim Rohr ist sie am wenigsten (minimal) flach, nämlich nur in einer Dimension. Deswegen ist  $c_3/A$  beim Kanal am größten, und beim Rohr am kleinsten.

Der physikalische Grund für diesen Befund liegt darin, daß es ja vor allem die "flachen Würfe" sind, die zum Transporteffekt der "Strahlbildung" beitragen. Je ausgedehnter ein ebenes Wandstück ist, desto mehr können solche Weitwürfe davon ausgehend auftreten und zum Transport beitragen, allerdings nur bis zur "Sättigung". Es ist daher möglich, eine Näherungsfunktion für diesen Zusammenhang zu erstellen, wie in Abb. 13 dargestellt.



**Abb. 13:** Beitrag ebener Wandstreifen der Breite  $b$  zum Wert des Koeffizienten  $c_3$  bei Kanälen mit polygonalem Querschnitt der Fläche  $A$  und mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_{hyd}$ , sowie dem Umfang  $U$  (die einzelnen Beiträge aller Streifen müssen mit  $b/U$  gewichtet und addiert werden)

Die in Abb. 13 gezeigte Näherung für die Berechnung des Wertes des Koeffizienten  $c_3$  gilt nur für polygonale Kanalquerschnitte mit Eck-Winkeln, die  $90^\circ$  nicht zu sehr überschreiten (also wohl höchstens bis zum regelmäßigen Hexagon). Ellipsen können angenähert berechnet werden, wenn zwei Streifen der Breite  $b=1,25 \cdot d_{hyd} \cdot n_{EX}$  angenommen werden, wobei  $n_{EX}=\sqrt{(a_e^2-b_e^2)}/a_e$  die "numerische Exzentrizität" der Ellipse bedeutet (mit  $a_e$ =großer und  $b_e$ =kleiner Halbachse).

Als Resümee ist hier festzuhalten, daß sich **das Modell der "Flachheit" für die Wiedergabe der  $c_3$ -Abhängigkeiten in der Hauptsache sehr beeindruckend bestätigt!**

Die hier vorgestellten Näherungen für die Koeffizienten  $c_2$  und  $c_3$  können auch dazu verwendet werden, für ein weites Spektrum von Kanalformen die Durchtrittswahrscheinlichkeit  $w_{12}$  zu bestimmen, ohne die etwas langwierigen MOVAK3D-Rechnungen durchführen zu müssen.

#### 4.7 Prismatische Kanäle mit nicht-konvexem Querschnitt

Bei den Prismatischen Kanalformen mit nicht konvexem Querschnitt muß die charakteristische Kenngröße  $l_{\text{Flug}}$  wieder explizit eingeführt werden, weil der feste Zusammenhang zwischen  $l_{\text{Flug}}$  und  $d_{\text{hyd}}$  nicht mehr gegeben ist.

$$l_{\text{frei}} = (\eta/P) \cdot [1000 \cdot \pi \cdot R_{\text{Gas}} \cdot T / (2 \cdot M_{\text{mol}})]^{1/2} \quad \text{Gl. (84.1)}$$

$$\text{Kn} = \pi \cdot l_{\text{frei}} / (4 \cdot l_{\text{Flug}}) \quad \text{Gl. (84.2)}$$

$$d_{\text{hyd}} = 4 \cdot A / U \quad \text{Gl. (84.3)}$$

$$c_1 = c_{\text{lam}} \cdot 4 \cdot \sqrt{\pi} \cdot A / (l_{\text{Flug}} \cdot d_{\text{hyd}} \cdot \text{Re} \cdot \zeta) \quad \text{Gl. (84.4)}$$

$$(c_2 + c_3) = 8 \cdot w_{12} \cdot L \cdot A / [\pi^{3/2} \cdot d_{\text{hyd}}^3] \quad \text{Gl. (84.5)}$$

$$c_4 = 1.4 \cdot \pi \cdot d_{\text{hyd}} / (4 \cdot l_{\text{Flug}}) \quad \text{Gl. (84.6)}$$

Die Funktion  $f_{\text{Strahl}}$  für die Strahl-Ausbildung sollte eigentlich, anstatt mit  $d_{\text{hyd}}$ , mit  $d_{\text{char}}$  berechnet werden, wobei zu gelten hätte

$$d_{\text{char}} = 4 \cdot l_{\text{Flug}} / \pi .$$

Hier unterscheidet sich nun  $d_{\text{char}}$  mehr oder weniger von  $d_{\text{hyd}}$ . Aber ob diese Unterscheidung wirklich erforderlich ist, müßte erst noch untersucht werden.

#### 4.8 Übertragung auf allgemeine Kanalformen

Die Größe  $l_{\text{Flug}}$  erscheint in den letzten Gleichungen für Kanäle mit nicht konvexem Querschnitt nur in den Gleichungen für  $\text{Kn}$ ,  $c_1$  und  $c_4$ . Sie hat nur in Bezug auf  $c_4$  eine **physikalische** Bedeutung, und  $c_4$  wiederum hat nur dann eine physikalische Bedeutung, wenn nicht  $c_3 \ll c_2$  ist.

Ist also im speziellen Fall

$$c_2 \ll c_3 \quad \text{Gl. (85)}$$

erfüllt, dann kann in allen Gleichungen wieder nach Gl. (65) der für ein Rohr gültige Wert

$$l_{\text{Flug}} = \pi \cdot d_{\text{hyd}} / 4$$

benutzt werden. Je größer  $c_3$  gegenüber  $c_2$  wird, desto wichtiger wäre eine genauere Festlegung von  $l_{\text{Flug}}$ . Allerdings bleibt selbst im "Idealfall der langen Rohre" der Einfluß von  $c_3$  auf  $c_{3,\text{max}}/c_2 = 0,296$  beschränkt, während er im Fall allgemeiner (eher "baffle-artiger" kurzer) Kanalformen gegen Null tendiert.

Man benötigt also eine Methode, um die Werte von  $c_2$  und  $c_3$  für einen beliebig geformten Vakuum-Kanal zu ermitteln. Hierzu ist wie folgt vorzugehen:

- 1.) Man modelliert den Kanal sinnvoll z.B. mit einem Code wie FLUENT und macht "anwendungsnahe" Berechnungen für die Funktion  $\dot{m} = f(P_1 - P_2)$  und ermittelt das Widerstandsgesetz  $\zeta = f(\text{Re})$ . Mit "anwendungsnahe" ist gemeint, daß es sinnvoll ist für Vakuumbedingungen mit Laminarströmung zu rechnen. Diese Modellierung selbst wird im allgemeinen Fall allerdings ziemlich aufwendig sein!
- 2.) Im nächsten Schritt muß man die erhaltene Funktion  $\dot{m} = f(P_1 - P_2)$  mit einem "Rohrmodell" wiedergeben; dazu schätzt man zunächst den hydraulischen Durchmesser  $d_{\text{hyd}}$  ab, dann variiert man solange  $d_{\text{hyd}}$  und  $L$ , bis die  $\dot{m}$ -Funktion zumindest hinreichend approximiert ist.

- 3.) Nun wird abermals eine aufwendige Modellierung benötigt, doch diesmal für MOVAK3D. Dann führt man mit MOVAK3D zwei Berechnungen durch, nämlich eine für  $Kn \rightarrow \infty$ , und eine zweite, bei der die Methode der "fiktiven Streueignisse" für Flugweiten  $\geq \pi \cdot d_{hyd}/4$  angewandt wird (die genaue Festlegung dieses Wertes ist relativ unkritisch). Man erhält so zwei Durchtrittswahrscheinlichkeiten  $w_{12\_k}$  und  $w_{12}$  (letzteres für  $Kn \rightarrow \infty$ ).
- 4.) Mittels Gl. (84.5) erhält man aus  $w_{12}$  die Summe  $(c_2+c_3)$ , während man aus  $w_{12\_k}$  direkt den Wert  $c_2$  gewinnt. Die Differenz beider Ergebniss ist also direkt  $c_3$ . Ist nun  $c_3/c_2 \rightarrow 0$  hinreichend erfüllt, dann kann  $c_3=0$  angenommen werden.
- 5.) Die Beziehungen zur Berechnung von  $\dot{m}$  erweisen sich bei  $c_4$  als sensibel hinsichtlich der Rundungsfehler, insbesondere ergibt  $c_4=0$  einen Überlauf-Fehler, auch wenn  $c_3=0$  gesetzt wird! Daher sollte  $c_4$  immer auf einen endlichen positiven Wert etwa zwischen 0,1 und 2,5 eingestellt bleiben.
- 6.) Nur wenn für einen solchen beliebigen Kanal  $c_3/c_2$  deutlich über Null liegt, hat die genaue Wahl von  $l_{Flug}$  und von  $c_4$  eine merkliche Bedeutung, die aber kaum mehr als knapp 30 % des Beitrages aus  $c_2$  erreichen kann. Deswegen besteht hier eine (stets kleine) Unschärfe der Modellierung, vor allem für ganz beliebige (also auch nicht-konvexe nicht-prismatische) Kanalformen.

#### 4.9 "Verblockung" bei überkritischem Druckverhältnis

Die hier zusammengestellten Gleichungen (1), (2..), (25), (56) müssen generell mit der Impulsgleichung (2) kombiniert werden, um das Strömungsverhalten in prismatischen Kanälen zu beschreiben. Hierbei muß auf das L/D-Verhältnis der Rohre und Kanäle geachtet werden, denn zu kurze Kanalstücke können Sonderfälle darstellen. Die in der Strömungstechnik "üblichen" Kriterien für "lange" Rohre sind allerdings nur "mit Vorsicht" anwendbar.

Ein nicht unerheblicher Vorteil der hier dargestellten Theorie besteht nun darin, daß sich die Impulsgleichung Gl. (2) geschlossen integrieren und nach dem Massenstrom  $\dot{m}$  auflösen läßt. Auf diese Weise erhält man eine Beziehung, die in geschlossener Form den Massenstrom als Funktion der Drücke an den Kanal-Enden liefert, wobei es keine Rolle spielt, wie weit diese Drücke auseinanderliegen. Zumindest für "hinreichend lange" Kanäle wird so der gesamte Übergang z.B. von eingangs viskoser in ausgangs molekulare Strömung direkt erfaßt, wobei alle möglichen Übergangszustände automatisch enthalten sind.

Hält man nun den Eintrittsdruck in einen Kanal konstant und senkt den Austrittsdruck mehr und mehr ab, so wird, wie erwartet, der Massenstrom mit wachsender Druckdifferenz zunächst anwachsen, um dann jedoch ein Maximum zu erreichen. Bei weitergeführter Druckabsenkung muß nun wieder ein Abfall des Massenstromes eintreten, weil das Gas zum Austritt hin sehr stark beschleunigt wird. Schließlich erreicht die Austrittsgeschwindigkeit  $w_a$  die **Schallgeschwindigkeit**, so daß sie im prismatischen Kanal nicht mehr weiter anzuwachsen vermag.

Die Lösung dieser Gleichungen lautet wie folgt (wobei der Koeffizient  $c_4 \neq$  Null sein muß):  
mit den Abkürzungen (Dimensionen beachten)

$$c_k = \pi \cdot \eta \cdot \sqrt{[\pi \cdot R_{Gas} \cdot T / (2 \cdot M_{mol})] / (4 \cdot l_{Flug})}$$

$$R_m = R_{Gas} \cdot T / (M_{mol} \cdot A^2)$$

$$R_t = \sqrt{[128 \cdot R_{Gas} \cdot T / M_{mol}] / (\pi \cdot d_h^3)}$$

$$L_p = \ln((c_k + c_4 \cdot P_1) / (c_k + c_4 \cdot P_2))$$

$$\begin{aligned}
K_a &= (c_1 - c_3 \cdot c_4) \cdot \ln(P_1/P_2) + c_3 \cdot c_4 \cdot L_p \\
N_n &= 2 \cdot c_4 \cdot R_m \cdot (-(c_2 + c_3) \cdot c_k \cdot (P_1 - P_2) - P_1 \cdot P_2 \cdot K_a) \\
K_b &= c_4 \cdot (P_1 - P_2) \cdot (2 \cdot c_2 \cdot c_k + c_1 \cdot (P_1 + P_2)) + 2 \cdot c_3 \cdot c_k^2 \cdot L_p \\
A_k &= (c_2 + c_3) \cdot c_k \cdot (P_1 - P_2) + P_1 \cdot P_2 \cdot K_a \\
A_w &= c_4 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot (c_4 \cdot c_k^2 \cdot L^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot R_t^2 + 2 \cdot R_m \cdot A_k \cdot K_b)
\end{aligned}$$

wird endlich der gesuchte Massenstrom

$$\dot{m} = [c_4 \cdot c_k \cdot L \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot R_t \cdot \sqrt{A_w}] / N_n \quad \text{Gl. (86)}$$

Die mittlere Molekelgeschwindigkeit  $v_{\text{mitt}}$  nach Gl. (5) und die Schallgeschwindigkeit  $v_s$  nach Gl. (15) ergeben sich nach

$$v_{\text{mitt}} = \sqrt{\frac{8 \cdot R_{\text{gas}} \cdot T}{\pi \cdot M_{\text{mol}}}} \quad \text{Gl. (87)}$$

und

$$v_s = v_{\text{mitt}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{c_p}{c_v}} \quad \text{Gl. (88)}$$

wobei der Quotient  $c_p/c_v$  den Isentropenexponenten  $\kappa$  repräsentiert.

Die Austrittsgeschwindigkeit  $v_a$  aus dem Kanal ist hingegen

$$v_a = \dot{m} \cdot R_{\text{Gas}} \cdot T / (A \cdot P_2 \cdot M_{\text{mol}}) \quad \text{Gl. (89)}$$

so daß sich die Mach-Zahl nach

$$Ma = v_a / v_s \quad \text{Gl. (90)}$$

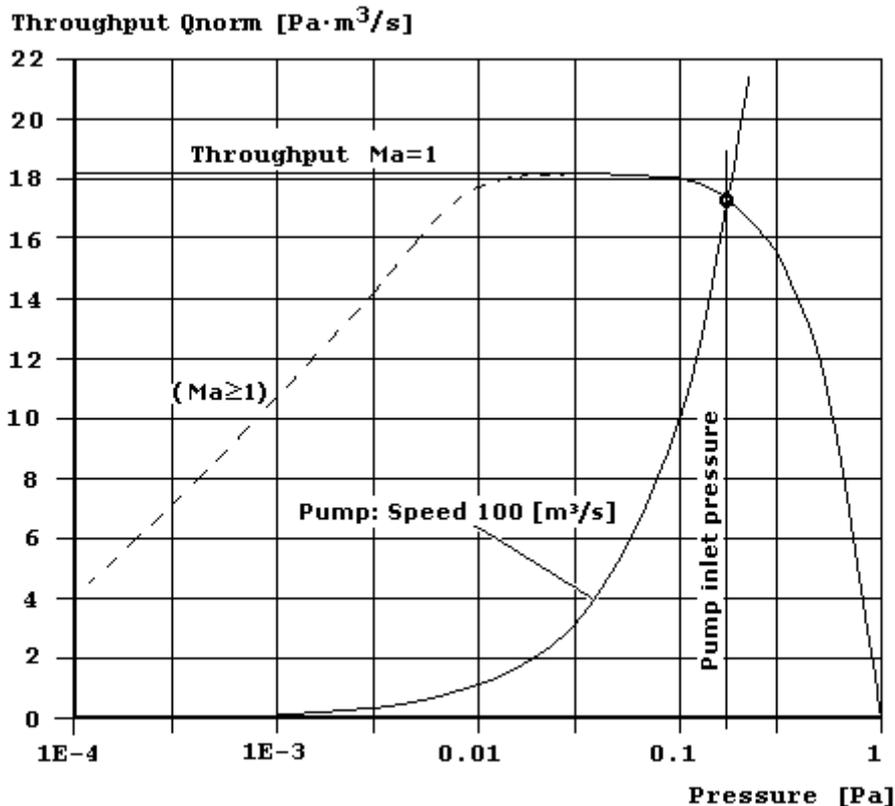
ergibt. Wird  $Ma > 1$ , dann muß  $P_2$  durch den Mündungsdruck ersetzt werden, der immer zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liegen muß, so daß gerade  $Ma = 1$  erhalten wird. Dieses Verfahren ist natürlich nur dann erlaubt, wenn das Gas nach dem Verlassen des Kanals auf den vorgegebenen Druck  $P_2$  expandieren kann. Denn wenn der "Austritt" zugleich den "Eintritt" in einen Kanalabschnitt mit gleicher Querschnittsfläche darstellt, dann muß sich (bei einer gekoppelten Rechnung automatisch) die kritische Ausströmung nach weiter stromab verlagern.

Weil die Ableitung aller Beziehungen für die Kanalströmung von isothermen Kanälen und isothermen Zustandsbedingungen ausgeht, wird mit den Gl. (87) und Gl. (88) eine merklich zu hohe Schallgeschwindigkeit erhalten. In Wirklichkeit wird sich bei der raschen Expansion in der Nähe des Kanalaustritts auch in einem isotherm gehaltenen Kanal eher eine adiabate Expansion einstellen, wobei die Gastemperatur in erheblichem Maße abfällt. Diese Abweichung von den realen Verhältnissen muß hier (fürs Erste) in Kauf genommen werden.

Das Durchflußverhalten durch einen Kanal bzw. durch ein Kanalsystem, bei festgehaltenem Eintrittsdruck  $P_1$  und unterschiedlich weit abgesenktem Austrittsdruck  $P_2$  stellt sich in der Regel so dar, wie in der Abb. 14 gezeigt. Dabei wird, wie in der Vakuumtechnik häufig verwendet, mit einer Normierungs-Temperatur  $T_{\text{norm}}$  der Gasmengenstrom  $Q$  (gemessen in  $[\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s}]$ ) aus dem Massenstrom  $\dot{m}$   $[\text{kg}/\text{s}]$  nach

$$Q = \dot{m} \cdot R_{\text{Gas}} \cdot T_{\text{norm}} / M_{\text{mol}} \quad [\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s}] \quad \text{Gl. (91)}$$

erhalten.



Throughput as function of pump pressure, inlet pressure 1 [Pa]

**Abb. 14:** Durchflußverhalten durch ein Kanalsystem in Abhängigkeit vom Umgebungsdruck am Kanal-Auslaß und vom Saugvermögen der Pumpe, bei konstant gehaltenem Eintrittsdruck von 1 [Pa]

#### 4.10 Verifikation an Meßwerten für kurze Rohre

Die aus jüngerer Zeit stammenden Meßdaten für "kurze Rohre" von **Shinagawa et al. [5]** bieten sich für die Verifikation der hier vorgelegten neuen Theorie an. Die Strömungsleitwerte wurden ermittelt, (Zitat: "as the ration of the volumetric flowrate of the gas to the pressure drop across the tube". Gemessen wurden u.a. die Drücke  $P_1$  in der großen Eintrittskammer und  $P_2$  in der ebensogroßen Austrittskammer. Als kennzeichnender Systemdruck wird daraus der arithmetische Mittelwert  $P_{av}$  gebildet.

Die eigentlichen Meßdaten [5] sind, für Massenströme  $\leq 0,0219$  [kg/(m<sup>2</sup>·s)], dort vollständig in Abb. 8 enthalten. Gas ist Stickstoff mit Raumtemperatur (18.26 [°C]), die Rohrdurchmesser sind im Mittel 3,000 [mm]. Mit den Definitionen nach Haefer [2] erhält man den Strömungsleitwert nach

$$C = \frac{\dot{m} \cdot R \cdot T}{M_{mol} \cdot (P_1 - P_2)} \quad \text{Gl. (92)}$$

Eliminiert man mit Gl. (1) daraus den Massenstrom, und setzt als mittlere Temperatur  $T = 295$  [K] ein, dann erhält man schließlich die **spezielle Zahlenwertgleichung**

$$C = F \cdot \pi \cdot R_{Rohr}^3 \cdot (R \cdot T)^{1/2} / [L \cdot (2 \cdot M_{mol})^{1/2}]$$

$$C = \frac{F}{1352,3 \cdot (L/D)} \quad \text{Gl. (93)}$$

für eine "Vorhersage" der in der zitierten Abb. 8 dargestellten Meßdaten, wobei F nach den Gl. (42) und (33) (nach Ermittlung von  $W_0$  und  $W_1$ ) berechnet wird.

Um die berechneten Daten mit den Meßdaten korrekt vergleichen zu können, muß beachtet werden, daß die obere Skala für  $\text{Kn}^{-1}$  in Abb. 8 in [5] nicht ganz mit der unteren Druckskala kompatibel ist. Es sprechen hinreichende Argumente dafür, die untere (Druck-) Skala als die korrekte anzunehmen.

Es war schnell zu erkennen, daß die nach Gl. (93) berechneten Daten für die L/D-Werte  $\geq 3,35$  sehr gut zu den Meßdaten passen, während mit kleineren L/D-Werten schließlich dramatisch wachsende Abweichungen auftraten. In weiteren Untersuchungen wurde versucht, diese Diskrepanzen mit dem Effekt der "Verblockung" zu erklären, obwohl Shinagawa et al. [5] die Überschreitung des kritischen Druckverhältnisses gerade auch für das kürzeste Rohr (mit  $L/D = 0,015$ ) weitgehend ausschließen. Diese und auch Erklärungsversuche mittels der Gl. (46) und Gl. (47), also mit einem "normalen" Eintritts-Druckverlust, scheiterten alle .

Die einzige schlüssige Lösung konnte schließlich auf der Basis der Gl. (44) gefunden werden, die hier in der Form

$$\zeta_R = f_{\text{Korr}} \cdot \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{Gl. (94)}$$

verwendet wird. Die Korrekturfunktion  $f_{\text{Korr}}$  muß mit wachsendem L/D-Wert rasch auf Eins abfallen. Es mußten also (iterativ), abhängig von L/D, aus den 4 maßgeblichen Meßkurven brauchbare Werte für  $f_{\text{Korr}}$  gefunden werden. Das Ergebnis ist in Tabelle 9 zusammengestellt.

L/D	Messung $f_{\text{Korr}}$	Rechnung $f_{\text{Korr}}$	Rechnung Re	Gl. (95) $f_{\text{Korr}}$
0,015	48,8	39,1..77,8	0,00518..26,4	48,7
0,323	3,04	2,75..4,1	0,00346..23,0	3,04
0,664	1,86	1,85..2,4	0,00252..19,5	1,91
1,66	1,32	1,34..1,44	0,00139..13,0	1,32
3,35	→ 1,00	1,17..1,19	0,00080..7,86	1,14
6,66	→ 1,00	1,08..1,1	0,00434..4,27	1,07
$\geq 6,66$	→ 1,00	→ 1,00	---	→ 1,00

**Tabelle 9:**  $W_1$  nach Gl. (44), als Funktion von L/D, aus den Meßwerten [5], nach theor. Berechnung und nach der Korrelation Gl. (95)

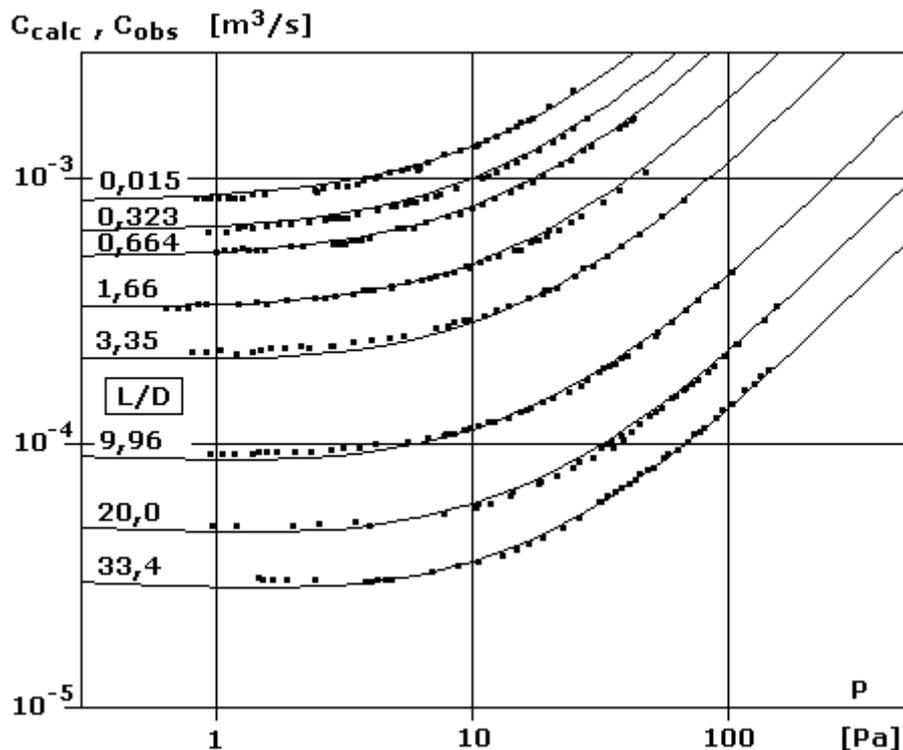
Für den L/D-Wert von 0,015, der eigentlich eine Blende repräsentiert, ergibt sich auf diese Weise ein unerwartet hoher Zahlenwert, der zunächst Skepsis aufkommen ließ. Weil sich aber die von Shinagawa et al. in ihrer Abb. 8 gezeigten Meßdaten im Laufe der hier durchgeführten Untersuchungen mehr und mehr als sehr zuverlässig herausstellten, hatten wir den Befund schließlich zu akzeptieren. Die Zahlenwerte der Tabelle 9 für  $f_{\text{Korr}}$  sind sehr gut mit der einfachen Gleichung

$$f_{\text{Korr}} = 1 + \frac{0,573}{(0,0059 + L/D)^{1,143}} \quad \text{Gl. (95)}$$

wiederzugeben. **Deswegen wurde die ganze weitere Berechnung durchgehend auf der Basis der Gleichungen (14), (25), (31), (82) bis (84) durchgeführt.**

Das Ergebnis dieser "Vorhersage" ist in Abb. 15, zusammen mit sämtlichen Meßdaten aus Abb. 8 von Shinagawa et al [5], dargestellt. Die Übereinstimmung der Meßdaten mit den theoretischen Werten ist bei allen L/D-Werten als sehr gut anzusehen. Ein Einfluß des innerhalb der einzelnen Meßreihen (für jeweils konstantes L/D) variierenden Massenstromes und damit der Reynolds-Zahl  $Re$  ist bis maximal  $Re \approx 3,7$  offensichtlich nicht zu bemerken. Das bestätigt sowohl die hohe Qualität der durchgeführten Meßreihen, als auch die Richtigkeit des verwendeten Widerstandsgesetzes nach Gl. (94) und Gl. (95). Die Übereinstimmung ist so gut und einheitlich, daß anderen Ansätzen und Erklärungsversuchen kein Raum mehr bleiben sollte.

Im übrigen ist den in Abb. 15 gezeigten Kurven zu entnehmen, daß erste Anzeichen des Knudsen-Minimums erst bei den größeren L/D-Werten ab etwa 10 sichtbar werden. Bei noch größeren L/D-Werten würde das Minimum auch in "verrauschten" Meßdaten nachweisbar sein.



**Abb. 15:** Gemessene Strömungsleitwerte nach [5] und theoretisch berechnete Strömungsleitwerte (bis  $Re \approx 3,7$ )

Die übrigen von Shinagawa et al. [5] dargestellten Meßwerte zeigen, daß für "lange Rohre" mit  $L/D \geq 3,35$  bei ausreichend hohen Drücken eine lineare Beziehung zwischen dem Druck und dem gemessenen Strömungsleitwert besteht, wobei mit wachsendem L/D-Wert der Anstieg über dem Druck geringer wird. Man realisiert leicht, daß nach der Gl. (17) und zusammen mit Gl. (93), weil

$$Kn^{-1} \sim P,$$

der Strömungsleitwert  $C$  proportional zum Druck und umgekehrt proportional zu  $L/D$  ist, solange nicht der Expansionseffekt zu stark stört. Also gilt **bei "langen" Rohren für den rein laminaren Strömungsbereich**

$$C \sim \frac{P}{L/D}$$

(mit dem Widerstandsgesetz nach Blasius erhalte man **nur für turbulente Strömung**

$$C \sim \frac{P}{\dot{m}^{0,75} \cdot L/D} ).$$

Diese Gleichungen können zur Überprüfung von vorgestellten Meßdaten verwendet werden, denn sie gehen unmittelbar aus den klassischen Beziehungen für die viskose Rohrströmung hervor. Wenn also Meßdaten für Kn-Zahlen deutlich unterhalb des Bereiches der Knudsenströmung gezeigt werden, dann **müssen** sie, falls sie korrekt sind, diesen Beziehungen genügen. Wird der gemessene Strömungsleitwert über der linearen Druckskala aufgetragen, dann folgen bei konstant gehaltenem Massenstrom und konstantem  $L/D$  immer nur Nullpunktsgerade, außer im Bereich der Knudsenströmung und der Molekularströmung. Ist das nicht gegeben, dann müssen die Meßwerte "sachfremden Einflüssen" (wie z.B. Expansionseffekt, Verblockung, Meßfehler, Fehler durch unzulässige Linearisierung u.a.m.) unterliegen.

Die Massenstromdichten bei den Experimenten von Sinawaga et al. waren (bei kurzen Rohren, in [5] nach Abb. 7a und 7b) typischerweise etwa 0,015, 0,09 und als größter vorkommender Wert 0,28 [kg/(m<sup>2</sup>·s)]. Damit erhält man nach Gl. (48) die Werte **Re ≈ 2,54, 15,3 und 47,5**. Damit ist sichergestellt, daß Turbulenz hier gänzlich ausgeschlossen werden kann.

Bei der Kugel betrug bereits  $W_0 = 9$ . Nach Gl. (46) war für das Rohr  $W_0 = 2/(L/D)$  als Näherung genannt worden. Beim kleinsten  $L/D$ -Wert von 0,015 würde in Gl. (47) bereits bei  $Re=0,48$  der Wert der Funktion  $F$  halbiert werden und bei  $Re \approx 48$  auf 1/100 gefallen sein. **Ein solcher Zusammenhang kann aber aus den von Shinagawa et al.** (dort in Abb. 8) **berichteten Ergebnissen keinesfalls herausgelesen werden.** Die Nachrechnung dieser Experimente spricht eindeutig dafür, daß **immer**  $W_1$  gegenüber  $(W_0 \cdot Re)$  deutlich dominiert und die Gl. (94) und Gl. (95) das "richtige" Widerstandsgesetz beschreiben. Man kann sich das dann so denken, als wäre das Rohr um eine zusätzliche "Reiblänge"  $L_0$  verlängert. Diese Zusatz-Reiblänge würde dann (irgendwie unmotiviert) mit fallendem  $L/D$  von Null an anwachsen, um bei  $L/D=0,015$  den Wert  $L_0/d_{\text{Rohr}} \approx 0,72$  zu erreichen.

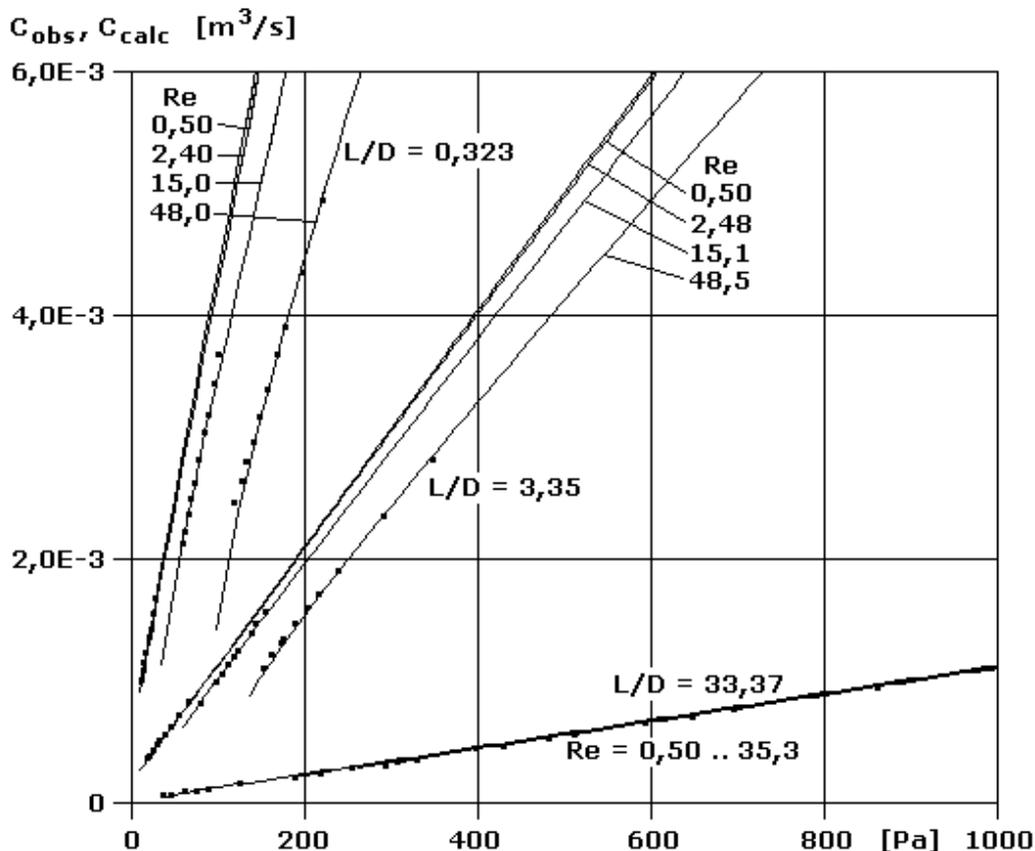
Daß es sich um einen "vernünftigen" Zusammenhang handelt, **konnte mit theoretischen Untersuchungen über die viskose Strömung durch Blenden und kurze Rohre abgesichert werden.** Als Modell wurde eine inkompressible Strömung angenommen und mit den Rechenprogrammen FLUENT und FEMLAB berechnet. Die erreichten Reynoldszahlen waren maximal 26,4 bei  $L/D = 0,015$  und 4,27 bei  $L/D = 6,66$ . Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in der Tabelle 9, zusammen mit den aus den Meßdaten [5] abgeleiteten  $f_{\text{Korr}}$ -Werten, angegeben. Bei kleinen  $Re$ -Zahlen sind die für die kürzesten  $L/D$ -Werte erhaltenen berechneten  $f_{\text{Korr}}$ -Werte etwas kleiner, als jene aus dem Experiment. Für praktische Berechnungen ist der Unterschied eher belanglos, jedoch werden hier die weiteren Nachrechnungen ausschließlich mit den Werten nach der Korrelation Gl. (95) durchgeführt.

Aus den Gl. (14), (44), (50) bis Gl. (56), (93) und (95) erhält man für den Strömungsleitwert  $C$  im Bereich hinreichend hoher Drücke (also oberhalb des Bereiches der Knudsenströmung) die Zahlenwert-Beziehung

$$C = \frac{4 \cdot \sqrt{\pi}}{1352,3 \cdot (L/D) \cdot Kn \cdot (W_0 \cdot Re + f_{\text{Korr}} \cdot f_{\text{Impuls}} \cdot 64)} \quad \text{Gl. (96)}$$

Danach wird auch im Bereich "hoher Drücke" bereits bei Reynolds-Zahlen ab etwa 2 aufwärts der lineare Zusammenhang zwischen C und P durch den Einfluß der Expansion (Korrektur  $f_{\text{Impuls}}$ ) gestört. **Für  $W_0$  wurde bei der Nachrechnung der experimentellen Daten (anstelle der erwarteten Konstanten 2) die Funktion  $1/(L/D)$  als angemessen gefunden.**

Die Meßdaten aus den Abb. 7a bis 7c konnten also nur mit der Annahme nachgerechnet werden, daß einerseits  $W_0 = 1/(L/D)$  ist, und daß andererseits die Expansion im Rohr gemäß Gl. (50) bis Gl. (56) berücksichtigt wird. Das Ergebnis dieser Nachrechnungen ist in Abb. 16 gezeigt.



**Abb. 16:** Gemessene Strömungsleitwerte nach [5] und theoretisch berechnete Strömungsleitwerte (bis  $Re \approx 48,5$ )

Die kleinen lokalen Abweichungen zwischen Messung und Rechnung bei  $L/D = 0,323$  und  $L/D = 3,35$ , jeweils bei  $Re \approx 48$ , machen sich dann bemerkbar, wenn sich das Druckverhältnis  $P_2/P_1$  sehr stark dem kritischen Druckverhältnis nähert oder es überschreitet.

**Nicht alle in [5] als Meßdaten erklärten Datenpunkte in den dortigen Abb. 9, 10a und 10b sind hinreichend zuverlässig wiedergegeben**, ebenso wie die dort angegebenen  $Kn^{-1}$ -Skalen offenbar nur der groben Information dienen sollen.

## 5. Zusammenfassung

Die vorgestellte Methode der Strömungsbeschreibung erschließt die physikalische Ursache des bei der Gasströmung durch lange isotherme Rohre im Knudsenbereich auftretenden minimalen Strömungs-Leitwertes. Es wird eine geschlossene Gleichung vorgestellt und im Einzelnen begründet, die nicht als Interpolationsfunktion anzusehen ist, die über den ganzen Existenzbereich der Knudsen-Zahlen und für alle Rohrlängen Gültigkeit besitzt. Allerdings wurde der mögliche Einfluß der Akkomodation nicht berücksichtigt.

Anhand von neueren Meßdaten aus dem Schrifttum konnte das Modell nicht nur durchgehend bestätigt werden, sondern es konnten auch wichtige Einblicke in das Widerstandsgesetz bei Blenden und kurzen Rohren bei Annäherung an den Knudsenbereich gewonnen werden. Die gewonnenen Beziehungen erlauben die Berechnung der Rohrströmung für alle Anwendungsbereiche der Vakuumtechnik.

Darüber hinaus wird gezeigt, mit welchen Methoden, ohne neue experimentelle Daten beschaffen zu müssen, die Strömungsbeschreibung auch auf andere prismatische isotherme Strömungskanäle erweitert werden kann.

Die vorgestellte Arbeit liefert eine anschauliche Erklärung des Knudsen-Minimums, welches seit rund 100 Jahren bekannt ist, aber bislang nur unzureichend erklärt werden konnte.

## 6. Schrifttum

- [1] VDI-Wärmeatlas, 9. Auflage, Springer 2002
- [2] R.A. Haefler, Kryo-Vakuumtechnik, Springer 1981
- [3] G. Class, Rechenprogramm MOVAK3D, KfK 4292, Juli 1987
- [4] G. Class, Rechenprogramm MOVAK3D, auf Microsoft Windows übertragene und erweiterte Version, 2002
- [5] H. Shinagawa, H. Setyawan, T. Asai, Y. Sugiyama, K. Okuyama, "An experimental and theoretical investigation of rarefied gas flow through circular tube of finite length", *Chemical Engineering Science* 57 (2002), 4027-4036
- [6] Dubbel (14. Aufl., S. 163, Abschnitt 6.2.3)
- [7] R.K. Shah, A.L. London: *Laminar flow forced convection in ducts*, Academic Press, New York, San Francisco, London (1978)
- [8] G. Class, Rechenprogramm ITERVAC (2003), eingesetzt bei ITP (DI. A. Mack)