

**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6228

**Beiträge zur Modellierung und  
numerischen Simulation  
von Zweiphasenströmungen mit  
Wärmeübertragung\***

G. Janssens-Maenhout

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

\*Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1999

# Beiträge zur Modellierung und numerischen Simulation von Zweiphasenströmungen mit Wärmeübertragung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**  
von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte  
**Dissertation**  
von

**Dipl.-Ing. Greet Janssens-Maenhout**  
aus  
Eeklo (Ost-Flandern) in Belgien

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juni 1998

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. U. Müller  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. G. Yadigaroglu  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

# Beiträge zur Modellierung und numerischen Simulation von Zweiphasenströmungen mit Wärmeübertragung.

## Kurzfassung

Bei einem Zwei-Fluid-Modell erfolgt die Beschreibung einer Zweiphasenströmung durch zwei überlagerte, kontinuierliche Felder, die über Zwischenphasen-Austauschsterme für Masse, Impuls und Energie gekoppelt sind. Die Kopplung wird durch Modellansätze zur Beschreibung der kleinskaligen Phänomene an Einzelblasen in einer dispersen Zweiphasenströmung erfaßt. Hierzu wird eine Flüssigkeitsströmung mit dispers verteilten, kugelförmigen Blasen vorausgesetzt. Der Gasvolumenanteil ist dabei genügend klein, so daß eine disperse Blasenströmung als Strömungsform angenommen werden kann.

In einem ersten Schritt wird der Impulsaustausch zwischen den Phasen in einer isothermen Blasenströmung durch eine Widerstandskraft, eine Auftriebskraft, eine Virtuelle Massenkraft und eine Turbulente Diffusionskraft modelliert. Ein Vergleich zwischen berechneten Zustandsgrößen und experimentellen Daten zeigt, daß mit Hilfe der benutzten Modellansätze die Umverteilung der Blasen in einer vertikalen Luft-Wasser-Blasenströmung hinreichend genau simuliert werden kann.

In einem zweiten Schritt werden die Wärmeübertragung in einer nicht-isothermen Blasenströmung und die damit verbundenen Phasenübergänge betrachtet. Die Modellierung der Kondensation von Blasen in unterkühlter Flüssigkeit erfolgt durch eine analytische Beschreibung des Wärmeübergangs über den Blasenrand. Die Blasenbildung und die Blasenablösung an beheizten Wänden werden mit empirischen Korrelationen für die Siedekindichte, den Blasenablösedurchmesser und die Ablösegeschwindigkeit dargestellt. Aus diesen Größen wird die Dampfquellendichte an der Wand in Abhängigkeit des Wandwärmestroms und der Wandtemperatur abgeleitet. Die Modelle werden durch Vergleich einer Simulationsrechnung für eine intern beheizte Ringspaltströmung mit experimentellen Befunden überprüft.

In weiteren Testrechnungen wird nachgewiesen, daß das Programm aufgrund seiner guten, numerischen Struktur in der Lage ist, einheitlich Strömungsgebiete zu behandeln, die in Teilbereichen eine einphasige Strömung und in anderen Teilbereichen eine disperse zweiphasige Strömung aufzeigen.

# Contribution to the Modelling and Computational Fluid Dynamics of Two-Phase Flows with Heat Transfer.

## Abstract

Mixed convection with boiling, establishing a bubbly two-phase flow, is commonly observed in industrial coolant loops, since it offers the potential of large heat transport at small temperature differences. Eulerian two-fluid-models are widely used to describe such dispersed two-phase flow as two interpenetrating continuous fields. In order to couple both fields interfacial exchange terms for mass, momentum and energy are introduced. In the modelling of the interfacial exchange terms the small-scale physical phenomena at a single bubble interface have to be taken into account. A dilute bubbly flow has therefore been considered with single bubbles as small, spherical particles.

First the momentum exchange in an isothermal bubbly flow is analysed. A Drag Force, a Lift Force, a Virtual Mass Force and a Turbulent Diffusion Force are modelled, based on analytical derivations and experimental data for the drag of a single bubble in a flow field under the Lagrangian approach. The models of these interfacial forces are validated by the simulation of the bubble redistribution, measured in a vertical, upward-directed air-water bubbly flow. Good agreement between the models and the experimental data is obtained for all void profiles at different heights confirming the significant contribution of the interfacial forces implemented.

Secondly, a bubbly flow with heat transfer and phase changes is analysed. Models for both the evaporation process and the condensation of bubbles are included. The condensation of steam bubbles in subcooled water is modelled as a bubble diminishing mechanism, controlled by the heat transfer over the bubble interface. The evaporation process at a heated wall is modelled by a bubble formation and detachment mechanism, which is described with empirical correlations for the nucleation site density, bubble detachment diameter and detachment frequency. Based on these three quantities a vapour source term is derived depending on the wall heat flux and the wall superheat. The simulation of subcooled nucleate boiling in an internally heated, annular water flow confirmed that both the condensation and evaporation models allow to predict the experimental data.

The extended, well-structured program provides the possibility to conveniently calculate with the two-fluid-model both a single-phase flow as well as a dispersed two-phase flow in one single computational domain.

## Vorwort

Die vorliegende, von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Doktorandin am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF) des Forschungszentrums Karlsruhe (FZK).

Mein besonderer Dank gilt dem Institutsleiter, Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Müller für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptreferates. Darüberhinaus danke ich ihm für das große Interesse, welches er dem Thema entgegengebracht hat und für die große Freiheit, die er mir bei der Gestaltung meiner Arbeit eingeräumt hat.

Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Yadigaroglu vom Institut für Energietechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETHZ) für die gründliche Überarbeitung des Manuskripts und die Übernahme eines Korreferates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Oertel vom Institut für Strömungslehre der Universität Karlsruhe danke ich für die Übernahme eines Korreferates und die freundliche Aufnahme der Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr.-Ing. J.U. Knebel, der meine Arbeit unterstützte und mir ermöglichte, ein grundlagenorientiertes Forschungsvorhaben innerhalb des Projekts Nukleare Sicherheitsforschung (PSF) durchzuführen.

Bei meinen Institutskollegen bedanke ich mich für ihre tatkräftige Hilfe und für ihre Mitarbeit, die in vielfältiger Weise zum Gelingen der Dissertation beigetragen hat.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.</b>	<b>3</b>
1.1	Begriffe. . . . .	3
1.2	Hintergrund. . . . .	4
1.3	Zielsetzung. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Zwei-Fluid-Modell.</b>	<b>9</b>
2.1	Allgemeine Betrachtung. . . . .	9
2.1.1	Lokale, momentane Transportgleichung. . . . .	9
2.1.2	Lokale, momentane Randbedingungen. . . . .	10
2.1.3	Ensemble-Mittelung. . . . .	12
2.2	Gleichungen des Zwei-Fluid-Modells. . . . .	14
2.2.1	Massentransportgleichung. . . . .	14
2.2.2	Impulstransportgleichung. . . . .	15
2.2.3	Energietransportgleichung. . . . .	16
2.2.4	Schließung des Zwei-Fluid-Modells. . . . .	18
<b>3</b>	<b>Numerische Lösung.</b>	<b>21</b>
3.1	Das Rechenprogramm CFX4.1. . . . .	21
3.2	Testrechnung für eine einphasige Strömung. . . . .	21
3.3	Finite-Volumen-Verfahren. . . . .	23
3.4	Diskretisierung des Gleichungssystems. . . . .	25
3.4.1	Diskretisierung des instationären Terms. . . . .	26
3.4.2	Diskretisierung des diffusiven Terms. . . . .	27
3.4.3	Diskretisierung des Quellterms. . . . .	28
3.4.4	Diskretisierung des konvektiven Terms. . . . .	28
3.5	Numerische Kopplung der Grundgleichungen. . . . .	29
3.5.1	Der SIMPLEC-Algorithmus. . . . .	30
3.5.2	Das IPSAC-Verfahren. . . . .	30
<b>4</b>	<b>Modellierung der Kopplungsbeziehungen.</b>	<b>33</b>
4.1	Kopplung zwischen disperser und kontinuierlicher Phase. . . . .	33
4.2	Zwischenphasenkopplung in einer isothermen Blasenströmung. . . . .	34
4.2.1	Physik des Impulsaustausches an bewegter Einzelblase. . . . .	34
4.2.2	Widerstandskraft. . . . .	39
4.2.3	Auftriebskraft. . . . .	43
4.2.4	Wandkraft. . . . .	46
4.2.5	Virtuelle Massenkraft. . . . .	48
4.2.6	Turbulente Diffusionskraft. . . . .	50

4.2.7	Turbulenzmodulation. . . . .	53
4.2.8	Modellierung der Zwischenphasenkräfte in einer isothermen Blasenströmung. . . . .	54
4.3	Zwischenphasenkopplung in einer Blasenströmung mit Wärmeübertragung. . . . .	57
4.3.1	Physik des Energieaustausches an einer heißen Blase. . . . .	57
4.3.2	Physik des Massenaustausches an einer Dampfblase. . . . .	59
4.3.3	Massentransport zwischen Dampfblase und umgebender Flüssigkeit: numerisches Kondensationsmodell. . . . .	64
4.3.4	Modellierung der Kondensation in einer unterkühlten Blasenströmung. . . . .	66
4.3.5	Blasensieden an einer beheizten Wand: numerisches Wandsiedemodell. . . . .	67
4.3.5.1	Blasenbildung. . . . .	70
4.3.5.2	Blasenablösung. . . . .	70
4.3.5.3	Wärmebilanz an der Wand. . . . .	71
4.3.6	Modellierung der Dampferzeugung an einer beheizten Wand. . . . .	72
<b>5</b>	<b>Ergebnisse.</b>	<b>77</b>
5.1	Simulation einer isothermen Blasenströmung. . . . .	77
5.1.1	Versuchsaufbau. . . . .	77
5.1.2	Berechnung. . . . .	79
5.1.3	Diskussion der Ergebnisse. . . . .	81
5.2	Simulation von unterkühltem Blasensieden. . . . .	88
5.2.1	Versuchsaufbau. . . . .	89
5.2.2	Berechnung. . . . .	90
5.2.3	Diskussion der Ergebnisse. . . . .	92
<b>6</b>	<b>Schlußbetrachtungen.</b>	<b>99</b>
	<b>Anhang</b>	<b>103</b>
	<b>A Randbedingungen der Versuchsanlage SUCOT.</b>	<b>103</b>
	<b>B Überblick verschiedener Rechenprogramme.</b>	<b>105</b>
	<b>C Testrechnung einer einphasigen Strömung mit CFX4.1.</b>	<b>107</b>
	<b>D Umformungen zur Kapitel 3.</b>	<b>109</b>
	<b>E Umformungen zur Kapitel 4.</b>	<b>115</b>
	<b>F Vergleich der Siedemodelle.</b>	<b>123</b>
	<b>G Nomenklatur.</b>	<b>125</b>
	<b>Literatur</b>	<b>131</b>

# Kapitel 1

## Einleitung.

### 1.1 Begriffe.

In Kühlkreisläufen treten häufig mehrphasige Strömungen mit Energiezufuhr auf. So kommt es z. B. auf der Sekundärseite des Dampferzeugers eines Leichtwasserreaktors zur Ausbildung von Siedevorgängen. In Abhängigkeit des Wandwärmestroms bildet sich Bläsensieden oder Filmsieden mit deutlich unterschiedlichen Wärmeübergangsverhalten aus. Die thermohydraulisch optimale Auslegung einer technischen Anlage bezüglich der Wärmeübertragung durch Wärmeleitung, Konvektion oder Sieden an thermisch hochbelasteten Bauteilen ist für die Sicherheit, die Zuverlässigkeit und die Optimierung der Betriebszustände somit unerlässlich.

Grundsätzlich wird in einem Kühlkreislauf Wärme konvektiv zwischen einer Wärmequelle und einer Wärmesenke transportiert. Als Transportmedium dient ein Kühlmittel, das seinen Aggregatzustand ändern kann. Bleibt die Temperatur des Kühlmittels unterhalb der Sättigungstemperatur, so tritt kein Phasenübergang auf, und der Kühlkreislauf ist einphasig. Wird die Sättigungstemperatur des Kühlmittels lokal überschritten, so geht die flüssige Phase in Dampf über, und es liegt eine zweiphasige Strömung vor.

Wird der konvektive Wärmetransport durch schwerkraftbedingte Auf- oder Abtriebskräfte angetrieben, so nennt man dies Naturkonvektion oder freie Konvektion. Ist die den konvektiven Wärmetransport bestimmende Geschwindigkeit die Folge eines von außen angelegten Druckgradienten, so wird dies als Zwangskonvektion bezeichnet. Treten beide Transportmechanismen in einem Kühlkreislauf auf, so liegt eine Mischkonvektionsströmung vor.

Bei einem schwachen Antrieb der Strömung stellt sich i. a. nach einer gewissen Einlaufzeit eine zeitlich konstante Geschwindigkeitsverteilung ein. Man bezeichnet diesen Strömungszustand als laminar. Verstärkt man das treibende Druckgefälle, so wird die Strömung zunehmend durch Trägheitskräfte bestimmt. Übersteigen diese im Vergleich zu den Reibungskräften eine bestimmte kritische Größe, so treten dem mittleren Strömungsverlauf überlagerte, stochastische Geschwindigkeitsfluktuationen auf. Die Strömung wird als turbulent bezeichnet.

Im allgemeinen kann ein Fluid aus mehreren Komponenten und / oder Phasen bestehen. Strömungen in einem solchen Fluid heißen Mehrphasen-Mehrkomponenten-Strömungen. Tritt z. B. in einem zweiphasigen Kühlkreislauf ein nicht-kondensierbares Gas als zweite Komponente auf, so liegt eine Zweiphasen-Zweikomponenten-Strömung vor.

In Mehrphasenströmungen finden an den Phasengrenzflächen Massen-, Impuls- und Energieaustauschvorgänge statt. Sie werden durch die unterschiedlichen thermodynamischen Zustände in den Phasen angetrieben. In Abhängigkeit der untersuchten Geometrie, des



Volumenanteils, des Massenstroms, des Turbulenzgrads und der Strömungsrichtung einer jeden Phase stellen sich verschiedene Strömungsformen ein, wie z. B. Blasenströmung, Pfropfenströmung und geschichtete Strömung. Sind die Phasen durch einfache Phasengrenzflächen getrennt, wie z. B. bei einer Filmströmung, so kann die Mehrphasenströmung durch gekoppelte, kontinuierliche einphasige Strömungen beschrieben werden. Sind die Phasen im gesamten Strömungsbereich durchmischt, wie z. B. bei einer Blasenströmung, so liegt eine disperse Mehrphasenströmung vor. Die Beschreibung einer jeden Phase durch ein kontinuierliches Feld ist ohne Mittelung nicht mehr möglich.

Aufgrund der Vielfältigkeit der in einer Mehrphasenströmung auftretenden, physikalischen Phänomene verhält sich jede Strömungsform anders. Ein allgemein gültiges, physikalisches Modell zur Beschreibung des Verhaltens einer Mehrphasenströmung ist schwierig zu formulieren. In Kühlkreisläufen wird für einen großen Parameterbereich ein Übergang von einer einphasigen zu einer dispersen zweiphasigen Strömung erwartet. In dieser Arbeit wird eine disperse Zweiphasenströmung behandelt, bei der die disperse Phase durch kugelförmige Partikel beschrieben werden kann, die in der kontinuierlichen Phase mitbewegt werden. Die Partikel der dispersen Phase können entweder mit einer ortsfesten, Eulerschen Betrachtungsweise oder entlang der Teilchenbahn mit einer teilchenfesten, Lagrangeschen Betrachtungsweise beschrieben werden. In dieser Arbeit wird eine Eulersche Betrachtungsweise angewandt, und die disperse Phase wird als ein zweites Fluid behandelt. Weiter wird vorausgesetzt, daß der Volumenanteil der flüssigen Phase bedeutend größer ist als der Volumenanteil der Gasphase, so daß die Blasenströmung als eine inkompressible, disperse Zweiphasenströmung betrachtet werden kann. Mit diesen Modellannahmen wird eine Blasenströmung mit geringer Blasenkonzentration in einem Kühlkreislauf mit einem Zwei-Fluid-Modell numerisch beschrieben.

## 1.2 Hintergrund.

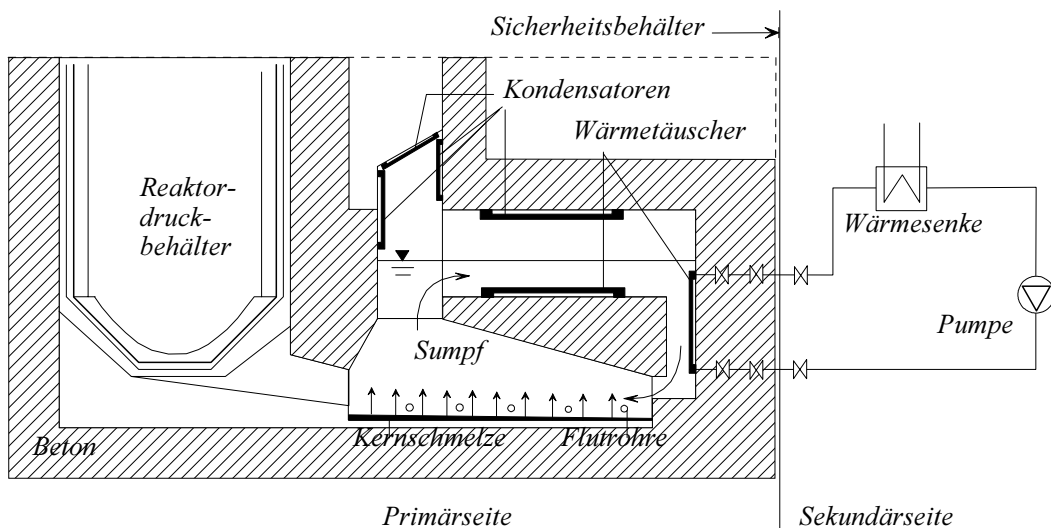


Abbildung 1.1: Innovatives Sumpfkühlkonzept für zukünftige Leichtwasserreaktoren, nach Weisshäupl und Bitterman (1993).

Die Aufgabenstellung dieser Arbeit entstammt der Sicherheitsforschung für Leichtwasserreaktoren (LWR). Bei innovativen Reaktorkonzepten soll durch den Einsatz passiver Systeme

zur Nachwärmeabfuhr nach Störfällen eine neue Sicherheitsqualität erreicht werden. Ein passives Sicherheitskonzept führt in einem ersten Schritt zu einer Störfallverhütung nach einer Schnellabschaltung, ohne daß eine Operator-Intervention notwendig ist. Die Entwicklung findet man in fortgeschrittenen LWR, die passive Sicherheitssysteme zur Störfallverhütung im Anlagendesign vorgesehen haben. In einem zweiten Schritt wird ein passives Sicherheitskonzept zur automatischen Störfallbeherrschung mit Hilfe von passiven Sicherheitssystemen erweitert. Diese Weiterentwicklung wird neuerdings in das Anlagendesign fortgeschrittener, vollständig passiver LWR-Systeme mit sowohl passiver Störfallverhütung als auch passiver Störfallbeherrschung aufgenommen.

Ein zukünftiges Kernkraftwerkskonzept stellt das deutsch-französische Gemeinschaftsprojekt des Europäischen Druckwasserreaktors (EPR) dar, der von der Siemens AG und Framatome entwickelt wird. Der EPR soll, um in Deutschland genehmigungsfähig zu sein, alle Eigenschaften eines fortgeschrittenen LWR haben. Weiterreichende passive Eigenschaften eines LWR-Systems werden derzeit untersucht, da sie eine strengere Fassung des Atomgesetzes § 7 vorwegnehmen. Im Rahmen eines Zusammenarbeitsvertrags zwischen der Siemens AG, den deutschen Energieversorgungsunternehmen und dem Forschungszentrum Karlsruhe werden im Projekt Nukleare Sicherheitsforschung (PSF) Untersuchungen durchgeführt, die sich auf Unfallphänomene für den Fall eines schweren Kernschmelzunfalls konzentrieren. Entsprechend der deutschen Risikostudie (Phase B) der Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS) werden Kernschmelzkühleinrichtungen als eine wesentliche, das Kontainment verstärkende Komponente bei auslegungüberschreitenden Ereignissen untersucht.

Der EPR sieht für den Fall eines Kernschmelzunfalls und eines Versagens des Reaktordruckbehälters teilweise passive Sicherheitseinrichtungen innerhalb des Sicherheitsbehälters vor. Nach einem Kernschmelzunfall sollen diese Sicherheitseinrichtungen die Ausbreitung der Kernschmelze im Reaktorsumpf, die Kühlung durch Flutung mit Wasser und die Abfuhr der Nachzerfallswärme mit hoher Probabilität sicherstellen. Hier ergibt sich die Notwendigkeit, die Funktion der Sicherheitseinrichtungen zur Nachwärmeabfuhr aus dem Sicherheitsbehälter zu einer Wärmesenke außerhalb des Sicherheitsbehälters unter allen relevanten Unfallbedingungen nachzuweisen.

Eine Sicherheitseinrichtung zur Nachwärmeabfuhr aus dem Reaktorsumpf, die gegenüber dem EPR-Referenzkonzept auf passiven Mechanismen innerhalb des Sicherheitsbehälters beruht, stellt das in Abbildung 1.1 skizzierte innovative Sumpfkühlkonzept dar. Nach einer Ausbreitung der Kernschmelze im Reaktorsumpf wird die Kernschmelze von oben durch Kühlwasser aus dem im Sicherheitsbehälter vorhandenen Borwasserflutbehälter (IRWST) geflutet. Die Nachzerfallswärme wird durch Verdampfung, Konvektion und Konduktion an das Kühlwasser übertragen. Im Reaktorsumpf bildet sich kurzzeitig eine zweiphasige Naturkonvektionsströmung aus, die die Nachzerfallswärme an Wärmetauscher und Kondensatoren transportiert. Dabei kann es in Teilbereichen des gefluteten Sumpfs auch zur Ausbildung einphasiger Konvektionsströmungen kommen. Die Sekundärseite der im Sumpf integrierten Wärmetauscher und Kondensatoren wird über Pumpen durchströmt. Die Auslegung des Sumpfkühlkonzepts wird durch den Wärmeübertragungskoeffizienten an der Kernschmelzenoberfläche, durch die in der Kernschmelze entstehende Nachwärme und durch die freigesetzten Reaktionsgase und löslichen oder partikelgetragenen Spaltprodukte bestimmt. Spaltprodukte können als nicht-kondensierbare Gase von der Kernschmelze an das Kühlwasser abgegeben werden. Als feste, partikelgetragene Komponente können sie in dem zweiphasigen Wasser-Wasserdampf-Gemisch transportiert werden und durch das Kühlwasser teilweise zurückgehalten werden oder aber bei Verdampfungsvorgängen als Aerosole in den Sicherheitsbehälter getragen werden. Die genaue thermohydraulische Analyse

und Auslegung der passiven Kernschmelzekühleinrichtung ist daher für die Beherrschung des Kernschmelzunfalls innerhalb des Sicherheitsbehälters von zentraler Bedeutung.

### 1.3 Zielsetzung.

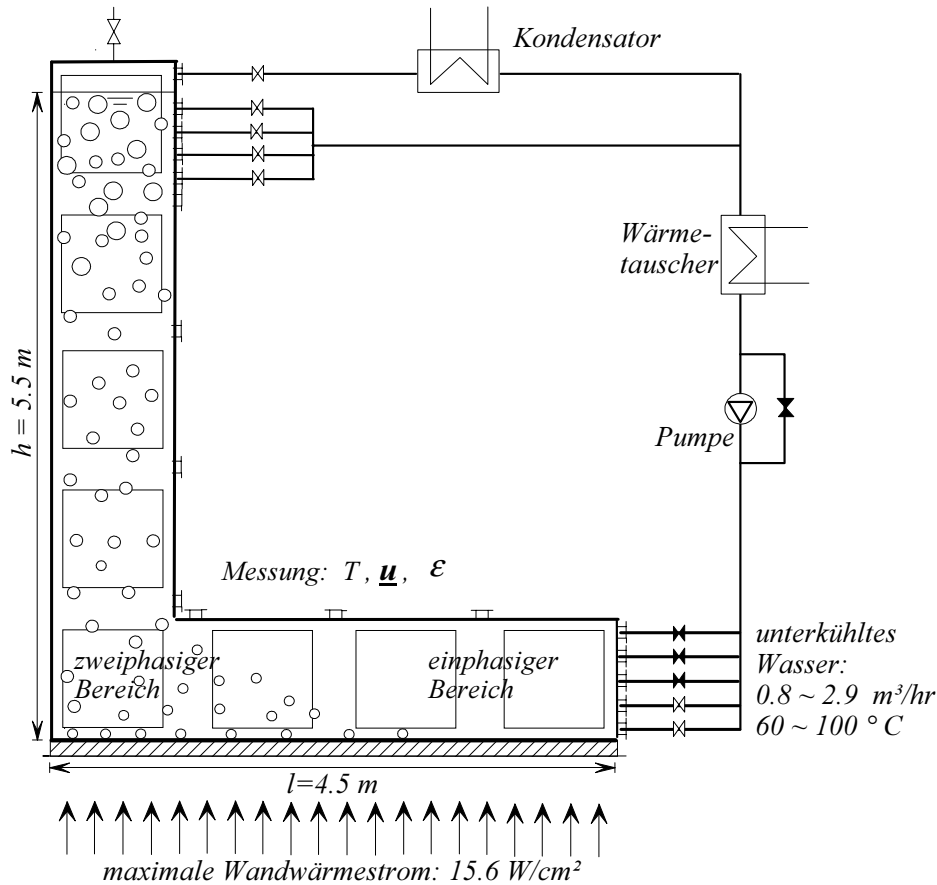


Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau der Versuchsanlage SUCOT.

Der primärseitige Kühlkreislauf des Sumpfkühlkonzepts wird am Forschungszentrum Karlsruhe in der Versuchsanlage SUCOT (Sump Cooling Two-Phase) des Instituts für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik von Knebel und Müller (1996) untersucht. Abbildung 1.2 zeigt den schematischen Aufbau der Versuchsanlage. Über variable Eintrittsstutzen wird durch eine Pumpe unterkühltes Wasser in die Testanlage gefördert, das entlang der Bodenplatte aufgeheizt und zum Sieden gebracht wird. In der Strömung treten lokal stark unterschiedliche Temperaturen und damit Dichtedifferenzen auf, die zu einem Auftrieb führen. Es stellt sich eine zweiphasige Mischkonvektionsströmung ein. Die Flüssigkeitsströmung in der Versuchsanlage wird mit einer Rayleigh-Zahl  $Ra$  charakterisiert, die als das Verhältnis von Auftriebskräften zu Reibungskräften definiert ist und Werte in der Größenordnung von  $10^{12}$  annimmt. Der Übergang von einer einphasigen zu einer zweiphasigen Strömung ist mit der Phasenübergangs-Zahl oder sogenannten Zuber-Zahl  $Zu$  gekennzeichnet, die als das Verhältnis von dem durch Phasenänderung erzeugten Massenstrom zu dem Kühlmittelmassenstrom am Eintritt definiert ist. Sie ist in der Größenordnung von 0.1 bis 1. In der sich einstellenden Mischkonvektionsströmung treten grundsätzlich folgende

physikalischen Phänomene auf: einphasige Naturkonvektion, unterkühltes und gesättigtes Blasensieden mit überlagerter Zwangskonvektion, horizontale und vertikale Blasenströmung und Rekondensation der Dampfblasen.

Ziel der Arbeit ist es, ein allgemeines Rechenprogramm mit geeigneten physikalischen Modellen zur Verfügung zu stellen, das es erlaubt, die in der Versuchsanlage SUCOT auftretende Zweiphasenströmung mit Wärmeübertragung numerisch zu beschreiben. Das Rechenprogramm soll ein Strömungsgebiet mit sowohl einphasigen als auch zweiphasigen Bereichen behandeln können.

Als Rechenprogramm wird das dreidimensionale Mehrphasen-Mehrkomponenten-Programm CFX4.1 von AEA Technology ausgewählt. CFX4.1 erlaubt die numerische Simulation einer in Teilbereichen einphasigen Strömung und in Teilbereichen dispersen Zweiphasenströmung mit einem Zwei-Fluid-Modell, welches die Modellierung des Massen-, Impuls-, und Energieaustausches zwischen den Phasen vorsieht. Mit dem Zwei-Fluid Modell wird jede Phase in Eulerscher Betrachtungsweise durch ein kontinuierliches Feld getrennt beschrieben. Für jedes Feld wird ein Satz von Massen-, Impuls- und Energietransportgleichungen gelöst. Die Eulersche Betrachtungsweise macht für jede Phase eine geeignete räumlich-zeitliche Mittelung notwendig, so daß die Kopplungsbedingungen für Masse, Impuls und Energie an den Phasengrenzflächen verloren gehen. Die beiden Phasen werden daher zunächst als zwei überlagerte, entkoppelte Felder beschrieben. Eine nachträgliche Kopplung erfolgt über eine Modellierung der Zwischenphasen-Austauschvorgänge. In das Zwei-Fluid-Modell werden in der Massen-, Impuls-, und Energietransportgleichung künstliche Massen-, Impuls-, und Energieaustauschtermen eingebaut und die disperse Zweiphasenströmung somit durch zwei gekoppelte Felder modelliert.

Die Vorgehensweise zur Entwicklung der relevanten physikalischen Modelle und zur Validierung der Austauschtermen unterteilt sich in zwei Schritte.

In einem ersten Schritt wird eine isotherme Blasenströmung betrachtet. Die Modellierung des Impulsaustausches erfolgt mit Hilfe von Zwischenphasenkräften. Hierzu werden Modelle für die Widerstandskraft (im Angloamerikanischen: Drag), für die Auftriebskraft (Lift), für die Virtuelle Massenkraft (Virtual Mass) und für die Turbulente Diffusionskraft (Turbulent Diffusion) entwickelt. Es wird eine ideale, verdünnte Blasenströmung vorausgesetzt, in der sowohl die Wechselwirkung zwischen den Einzelblasen als auch Koaleszenz oder Zerteilung vernachlässigt werden können. Dabei wird angenommen, daß die Einzelblasen als kleine, kugelförmige Partikel nicht deformiert werden. Dies ist nach Durst, Schönung, Selanger und Winter (1986) gültig, solange die Oberflächenspannung oder Reibungskraft in der Flüssigkeit größer ist als die Trägheitskraft an der Einzelblase. In dimensionslosen Kennzahlen bedeutet das Eötvos-Zahl  $Eö < 0.2$  oder Blasen-Reynolds-Zahl  $Re_B < 2$ . Für Luftblasen in nicht-kontaminiertem Wasser können in Abhängigkeit des Blasendurchmessers  $D_B$  zwei Bereiche definiert werden: ist  $D_B < 1.3 \text{ mm}$ , so liegen sphärische Blasen vor, ist  $1.3 \text{ mm} < D_B < 10 \text{ mm}$ , so liegen ellipsoidale Blasen vor. Kleine regelmäßige Blasen können numerisch als kugelförmige Partikel modelliert werden, an denen die Zwischenphasenkräfte angreifen. Die Modellierung der Zwischenphasenkräfte wird an experimentellen Daten zur Umverteilung von Blasen in einer vertikalen, turbulenten Luft-Wasser Blasenströmung von Samstag (1996) überprüft.

In einem zweiten Schritt wird eine Blasenströmung mit Wärmeübertragung betrachtet. Es werden Modelle zur Erfassung der Phasenübergänge bei moderaten Wandwärmeströmen und geringem Überdruck entwickelt. Die Modellierung des Blasensiedens erfolgt durch empirische Korrelationen für die Blasenbildung und Blasenablösung an einer beheizten Platte. Die Kondensation wird über eine Verringerung des Blasendurchmessers im unterkühlten

Strömungsbereich modelliert. Im Gegensatz zu den Siedemodellen, die in thermohydraulischen Rechenprogrammen für Sicherheitsanalysen von LWR unter hohem Druck verwendet werden, wird die Modellierung des unterkühlten Blasensiedens im Rahmen dieser Arbeit für atmosphärische Bedingungen zur Verfügung gestellt. Die Überprüfung der physikalischen Modelle zur Beschreibung des unterkühlten Blasensiedens erfolgt an experimentellen Daten zum Sieden an einem Heizleiter in vertikaler, laminarer Ringspaltströmung von Bibeau und Salcudean (1994).

Die so überprüften Modelle zur Beschreibung des Massen-, Impuls-, und Energieaustausches zwischen den Phasen sollen die erfolgreiche Simulation der grundsätzlichen Strömungsphänomene der in der Versuchsanlage SUCOT auftretenden, zweiphasigen Mischkonvektionsströmung ermöglichen.

# Kapitel 2

## Zwei-Fluid-Modell.

### 2.1 Allgemeine Betrachtung.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Beschreibung einer idealen, verdünnten, inkompressiblen Blasenströmung. Die disperse Phase besteht aus kleinen, kugelförmigen Blasen mit festem Durchmesser, die keine Wechselwirkung aufeinander ausüben. Aufgrund der großen Anzahl von Blasen kann nicht jede Blase einzeln betrachtet werden. Es wird deshalb eine Eulersche Betrachtungsweise gewählt. Die Zweiphasenströmung mit Phasenwechselwirkungen wird mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells numerisch beschrieben.

Das Zwei-Fluid-Modell beschreibt jede Phase mit einem Satz von drei vektoriellen Erhaltungsgleichungen, die in Form einer allgemeinen Transportgleichung dargestellt werden können. Für die numerische Behandlung ist es notwendig, die lokalen, momentanen Transportgrößen für jede Phase zu mitteln. Es wird eine Ensemble-Mittelung vorgenommen. Durch sie werden die einzelnen Phasen wie überlagerte kontinuierliche Felder beschrieben. Dabei gehen die Informationen über die lokalen Austauschvorgänge an den Zwischenphasengrenzflächen verloren. In den ensemble-gemittelten Transportgleichungen erscheinen jetzt integrale Zwischenphasenaustauschterme, die die Phasen miteinander koppeln. Diese Zwischenphasenaustauschterme müssen so modelliert werden, daß sie die Physik der Austauschvorgänge hinreichend genau beschreiben. Dazu wird in Kapitel 4 näher auf die physikalischen Grundlagen eingegangen, die das Verhalten einer bewegten Einzelblase mit Wärmeübertragung beschreiben.

#### 2.1.1 Lokale, momentane Transportgleichung.

Ausgehend von einer allgemeinen Bilanzgleichung werden zunächst die lokalen, momentanen Transportgleichungen für Masse, Impuls und Energie für jede einzelne Phase aufgestellt, vergleiche Banerjee und Chan (1980). In einer Phase  $k$  mit einer Dichte  $\rho_k$  erfüllt jede mit einer Geschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_k$  transportierte Erhaltungsgröße  $\underline{\Phi}_k$  folgende Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial(\rho_k \underline{\Phi}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \underline{\mathbf{u}}_k \underline{\Phi}_k) = \underline{\mathbf{F}}_k + \nabla \cdot \underline{\mathbf{j}}_k \quad . \quad (2.1)$$

Die zeitliche Änderung einer Erhaltungsgröße  $\underline{\Phi}_k$  wird durch einen aufgeprägten Volumenquellterm  $\underline{\mathbf{F}}_k$  und die Divergenz eines Flusses  $\underline{\mathbf{j}}_k$  bestimmt. Die einzelnen Terme der Gleichung 2.1 sind für die Transportgleichungen von Masse, Impuls und Energie in Tabelle 2.1 angegeben. In der Massentransportgleichung treten kein Quellterm und kein Flußterm auf. In der Impulstransportgleichung erscheint die Schwerkraft  $\rho_k \underline{\mathbf{g}}$  als Quellterm und der

	Größe : $\underline{\Phi}_k$	Quelle : $\underline{F}_k$	Fluß : $\underline{j}_k$
Masse	1	0	0
Impuls	$\underline{u}_k$	$\rho_k \underline{g}$	$-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\tau}_k$
Energie	$E_k$	$\rho_k \underline{g} \cdot \underline{u}_k + q_k'''$	$\underline{q}_k'' + \left(-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\tau}_k\right) \cdot \underline{u}_k$

Tabelle 2.1: Terme für die Transportgleichungen von Masse, Impuls und Energie.

Spannungstensor  $-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\tau}_k$  als Kräftefluß. Dabei sind  $p_k$  der Druck der Phase  $k$  und  $\underline{\tau}_k$  der Schubspannungstensor der Phase  $k$ . Die Transportgleichung der spezifischen Gesamtenergie  $E_k$  hat einen Leistungsterm der potentiellen Energie  $\rho_k \underline{g} \cdot \underline{u}_k$  und eine Volumenleistung  $q_k'''$  als Quellterme und einen Wärmefluß  $\underline{q}_k''$  und eine Dissipation  $\left(-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\tau}_k\right) \cdot \underline{u}_k$  als Flußterme.

In dieser Arbeit wird eine vektorielle Schreibweise<sup>1</sup> gewählt. In der angewandten, mathematischen Formulierung stellen  $\underline{n}$  und  $\underline{\mathbf{I}}$  einen Einheitsvektor und einen Einheitstensor dar.

### 2.1.2 Lokale, momentane Randbedingungen.

Physikalisch sinnvolle Lösungen der Gleichung 2.1 sind erst durch die Vorgabe des Systemzustandes an den Grenzen des Strömungsgebiets der Phasen  $k$  möglich. Im folgenden ist  $\underline{n}_k$  der Normaleneinheitsvektor auf der Grenzfläche, der aus dem Strömungsgebiet der Phase  $k$  heraus zeigt, siehe Abbildung 2.1. In einer Zweiphasenströmung unterscheidet man prinzipiell zwei Arten von Berandungen: die Zwischenphasengrenzflächen und die Ränder des Rechengebiets.

Die Zwischenphasengrenzflächen können als Diskontinuität in jeder Phase definiert werden. Über die beiden Phasen gibt es nach Ishii (1975) einen durch Oberflächenspannungseffekte bestimmten Zwischenphasensprung, die durch folgende Bedingung an der Zwischenphasengrenzfläche

$$\sum_{k=1}^2 \left( \underline{\Phi}_k \cdot m_{ik} + \underline{j}_k \cdot \underline{n}_k \right) = \underline{L} + \nabla \cdot \underline{M} \quad (2.2)$$

gegeben ist. Dabei beschreibt der Massenaustauschterm  $m_{ik} = \rho_k (\underline{u}_i - \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k$  auf der linken Seite den Massentransport zwischen den Phasen mit  $\underline{u}_i$  als der Geschwindigkeit der Zwischenphasengrenzfläche. Auf der rechten Seite von Gleichung 2.2 befinden sich die Quellterme und Flußterme an der Zwischenphasengrenzfläche  $\underline{L}$  und  $\underline{M}$ , die für die verschiedenen Größen Masse, Impuls und Energie in Tabelle 2.2 aufgelistet sind.

Für  $\underline{\Phi}_k = 1$  bedeutet der Zwischenphasensprung 2.2, daß die von einer Phase zu der Zwischenphasengrenzfläche hin transportierte Masse von der anderen Phase vollständig aufgenommen wird, so daß sich keine Masse an der Grenzfläche ansammelt. Für die Impulsgröße wird anhand eines Flußterms die Deformation der Zwischenphasengrenzfläche beschrieben, mit der Oberflächenspannung  $\sigma$  und mit dem Oberflächentensor  $\underline{\Sigma}^2$ . Für die Energiegröße müssen sowohl die Dissipation bei der Deformation der Zwischenphasengrenzfläche als auch

<sup>1</sup>Ein Vektor ist einmal unterstrichen, ein Tensor zweimal. Es wird nicht mit Indizes auf die einzelnen Komponenten eines Vektors oder Tensors zugegriffen. Die Indizes bezeichnen z. B. die Phase  $k$ , die Zwischenphasengrenzfläche  $i$  oder die Berandung  $w$ .

<sup>2</sup>In der Oberflächentensor werden die Oberflächenkoordinaten in den räumlichen Koordinaten ausgedrückt.

	Größe : $\underline{\Phi}_k$	Quelle $_{ _{Phasengrenze}} : \underline{\mathbf{L}}$	Fluß $_{ _{Phasengrenze}} : \underline{\mathbf{M}}$
Masse	1	0	0
Impuls	$\underline{\mathbf{u}}_k$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\sigma \underline{\Sigma}$
Energie	$E_k$	$\Xi + q_i'''$	$\sigma \underline{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}_i$

Tabelle 2.2: Terme für den Zwischenphasensprung in Masse, Impuls und Energie and der Zwischenphasengrenzfläche.

eine zusätzliche Energie  $\Xi$  und eine Wärmequelle  $q_i'''$  an der Zwischenphasengrenzfläche mit Hilfe eines Flußterms beziehungsweise eines Quellterms berücksichtigt werden. In dem Spezialfall ohne Deformation der Zwischenphasengrenzflächen verschwinden die Quelle  $\underline{\mathbf{L}}$  und der Fluß  $\underline{\mathbf{M}}$  auch für die Impulsgröße und die Energiegröße.

Die Zwischenphasengrenzflächen stellen weiter einen freien Rand dar. Dort ist also eine grenzflächennormale Komponente des Spannungstensors erlaubt. Es treten aber keine grenzflächentangentiale Schubspannungen auf. Diese Bedingungen führen zum Verschwinden der Tangentialkomponente des Spannungstensors an der Grenzfläche:

$$\left(-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}_k\right) \times \underline{\mathbf{n}}_k = \underline{\mathbf{0}} \quad . \quad (2.3)$$

Die Berandungen des Rechengebiets werden durch Wände und durch Eintritte in das Rechengebiet und Austritte aus dem Rechengebiet gebildet. An diesen Berandungen können entweder Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen gestellt werden. Mit einer Dirichletschen Randbedingung wird der Wert der Erhaltungsgröße  $\underline{\Phi}_k$  explizit als  $\underline{\mathbf{W}}$  vorgegeben.

$$\underline{\Phi}_k = \underline{\mathbf{W}} \quad . \quad (2.4)$$

In der Impulstransportgleichung beschreibt dies für  $\underline{\Phi}_k = \underline{\mathbf{u}}_k$  eine Ein- oder Austrittsbedingung mit einem fest vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil  $\underline{\mathbf{u}}_k = \underline{\mathbf{u}}_{kA}$  oder an festen Wänden die Haftbedingung mit  $\underline{\mathbf{u}}_k = \underline{\mathbf{0}}$ . In der Energietransportgleichung für  $\Phi_k = E_k$  bedeutet Gleichung 2.4 eine Randbedingung mit einem fest vorgegebenen Temperaturprofil  $T_k = T_{kA}$ .

Mit einer Neumannschen Randbedingung wird der zum Rand senkrechte Fluß der Erhaltungsgröße  $\underline{\Phi}_k$  vorgegeben.

$$\left(\rho_k \underline{\Phi}_k (\underline{\mathbf{u}}_w - \underline{\mathbf{u}}_k) + (\underline{\mathbf{j}}_k - \underline{\mathbf{j}}_w)\right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_k = \underline{\mathbf{0}} \quad . \quad (2.5)$$

Darin ist  $\underline{\mathbf{j}}_w$  der Fluß der Erhaltungsgröße auf der Berandung. Gleichung 2.5 fordert mit der Geschwindigkeit der Berandung  $\underline{\mathbf{u}}_w$  die Kontinuität der grenzflächennormalen Komponente von  $\rho_k \underline{\Phi}_k (\underline{\mathbf{u}}_w - \underline{\mathbf{u}}_k) + (\underline{\mathbf{j}}_k - \underline{\mathbf{j}}_w)$ . Gleichung 2.5 bedeutet für die Masse mit  $\underline{\mathbf{j}}_w = \underline{\mathbf{0}}$  die Undurchdringbarkeit der Wand.

$$\rho_k (\underline{\mathbf{u}}_w - \underline{\mathbf{u}}_k) \cdot \underline{\mathbf{n}}_k = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Insbesondere fordert diese Bedingung für eine feste Wand das Verschwinden der wandnormalen Komponente der Geschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_k$ . Für den Impuls bedeutet Gleichung 2.5 mit  $\underline{\mathbf{j}}_w = -p_A \underline{\mathbf{I}}$  eine Druckrandbedingung mit vorgegebenem Außendruck  $p_A$ .

$$\left(-p_k \underline{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}_k\right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_k = -p_A \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_k \quad . \quad (2.7)$$



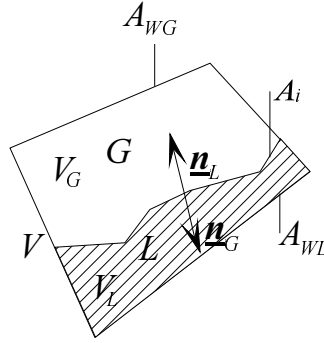


Abbildung 2.1: Kontrollvolumen einer separaten Strömung.

Für die Energie gibt Gleichung 2.5 mit  $\underline{j}_W = \underline{q}_W''$  eine Randbedingung mit einem über eine Wand zugeführten Wandwärmestrom  $\underline{q}_W''$  an.

$$\underline{q}_k'' \cdot \underline{n}_k = \underline{q}_W'' \cdot \underline{n}_k \quad . \quad (2.8)$$

Da die konvektiven Anteile des Wärmetransports an der Wand verschwinden, ergibt sich nach dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz, daß die wandnormale Komponente des Wärmeflusses  $\underline{q}_W''$  die Temperatur der Phase  $k$  erhöht.

### 2.1.3 Ensemble-Mittelung.

Die Transportgleichung (Gleichung 2.1) für jeden Zeitpunkt und jeden Ort im Strömungsgebiet stellt zusammen mit den Randbedingungen an den Zwischenphasengrenzflächen (Gleichungen 2.3 und 2.2) und den Berandungen des Rechengebiets (Gleichungen 2.4 oder 2.5) ein Randwertproblem mit bewegten Rändern dar, das erst nach einem geeigneten Mittelungsverfahren numerisch behandelbar wird. Ein allgemeines, statistisches Mittelungsverfahren für eine Variable  $\underline{F}$  mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $P_k$ , das über viele raum-zeitliche Ereignisse von  $\underline{F}$  integriert, ist das Ensemble-Mittelungsverfahren nach Lahey (1995) mit

$$\langle \underline{F}(\underline{r}, t) \rangle_k = \int_{\Omega} \underline{F}(\underline{r}, t; \omega) \cdot P_k(\underline{r}, t; \omega) d\omega \quad . \quad (2.9)$$

Dabei umfaßt  $\Omega$  alle möglichen Zustände der Größe  $\underline{F}$  in Abhängigkeit des Orts  $\underline{r}$  in einem Kontrollvolumen  $V$  und der Zeit  $t$  in einem Intervall  $\Delta\tau$  :

$$\Omega = \{ \omega : \underline{F}(\underline{r}, t; \omega), \underline{r} \in V, t \in \Delta\tau \} \quad . \quad (2.10)$$

Die Funktion  $P_k(\underline{r}, t; \omega)$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Phase  $k$  in dem Kontrollvolumen  $V_k$  und dem Zeitintervall  $\Delta\tau_k$  und ist als eine Heavyside-Funktion definiert:

$$P_k(\underline{r}, t; \omega) = \begin{cases} 1 & (\forall \underline{r} \in V_k) \wedge (\forall t \in \Delta\tau_k) \\ 0 & (\forall \underline{r} \notin V_k) \vee (\forall t \notin \Delta\tau_k) \end{cases} \quad . \quad (2.11)$$

Nach Delhaye und Achard (1976) beeinflußt die Reihenfolge der zeitlichen und örtlichen Mittelung die Resultate des totalen Mittelungsverfahrens nicht. Die Ensemble-Mittelung ist somit für quasi-stationäre Zweiphasenströmungen ein zeitliches und örtliches Mittelungsverfahren, bei dem über ein Kontrollvolumen und ein kleines Zeitintervall integriert

wird. Dabei wird eine Zeitskalen-Separation eingeführt. Einerseits soll das Zeitintervall  $\Delta\tau$  so groß sein, daß die über  $\Delta\tau$  gemittelten turbulenten Schwankungen verschwinden. Andererseits soll das Zeitintervall  $\Delta\tau$  so klein gewählt werden, daß bei Integration der Transportgleichungen keine Informationen über das transiente Verhalten des gemittelten Parameters verloren gehen. Das Kontrollvolumen, wie in Abbildung 2.1, muß so gewählt sein, daß die räumliche Auflösung die Ergebnisse nicht beeinflusst. Nach Kolev (1994a) kann damit Definition 2.9 ersetzt werden durch

$$\langle \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{r}}, t) \rangle_k = \frac{1}{V} \int_{V_k} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau_k} \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{r}}, t + \tau) d\tau d\underline{\mathbf{r}} \quad . \quad (2.12)$$

Für den Spezialfall, daß  $\underline{\mathbf{F}}$  gleich  $P_k$  ist, bekommt man nach Ensemble-Mittelung einen Ausdruck für den Volumenanteil oder Void  $\varepsilon_k$  der Phase  $k$ .

$$\langle P_k(\underline{\mathbf{r}}, t) \rangle_k = \int_{\Omega} P_k^2(\underline{\mathbf{r}}, t; \omega) d\omega = \frac{V_k}{V} = \varepsilon_k \quad . \quad (2.13)$$

Wird die Mittelungsvorschrift nach Gleichung 2.12 auf Gleichung 2.1 angewandt, so ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_k \langle \rho_k \underline{\Phi}_{\mathbf{k}} \rangle_k}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_i} \rho_k \underline{\Phi}_{\mathbf{k}}(\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}}) dS - \frac{1}{V} \int_{A_{wk}} \rho_k \underline{\Phi}_{\mathbf{k}}(\underline{\mathbf{u}}_w \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}}) dS \\ & + \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \rho_k \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \underline{\Phi}_{\mathbf{k}} \rangle_k + \frac{1}{V} \int_{A_i + A_{wk}} \rho_k \underline{\Phi}_{\mathbf{k}}(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}}) dS \\ & = \varepsilon_k \langle \underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}} \rangle_k + \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \underline{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \rangle_k + \frac{1}{V} \int_{A_i + A_{wk}} \underline{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dabei ist  $A_i$  die Oberfläche der Grenzfläche zwischen den beiden Phasen und  $A_{wk}$  die Oberfläche der Grenzfläche zwischen der Wand und der Phase  $k$ .

In einem weiteren Schritt kann dem Reynoldsschen Ansatz folgend die Variable  $\underline{\mathbf{F}}$  aufgesplittet werden in einen gemittelten Wert  $\langle \underline{\mathbf{F}} \rangle_k$  und einen Schwankungswert  $\underline{\mathbf{F}}'$ . Die Ensemble-Mittelung des Schwankungswerts soll nach Definition verschwinden  $\langle \underline{\mathbf{F}}' \rangle_k = 0$ . Mit diesem Ansatz gilt für ein Produkt von zwei Variablen

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{G}} \rangle_k &= \langle \langle \underline{\mathbf{F}} \rangle_k \langle \underline{\mathbf{G}} \rangle_k + \underline{\mathbf{F}}' \langle \underline{\mathbf{G}} \rangle_k + \langle \underline{\mathbf{F}} \rangle_k \underline{\mathbf{G}}' + \underline{\mathbf{F}}' \underline{\mathbf{G}}' \rangle_k \\ &= \langle \underline{\mathbf{F}} \rangle_k \langle \underline{\mathbf{G}} \rangle_k + \langle \underline{\mathbf{F}}' \underline{\mathbf{G}}' \rangle_k \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Damit läßt sich der vierte Term auf der linken Seite von Gleichung 2.14 vereinfachen zu

$$\nabla \cdot \varepsilon_k \langle \rho_k \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \underline{\Phi}_{\mathbf{k}} \rangle_k = \nabla \cdot \varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \rangle_k \langle \underline{\Phi}_{\mathbf{k}} \rangle_k + \nabla \cdot \varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}'_{\mathbf{k}} \underline{\Phi}'_{\mathbf{k}} \rangle_k \quad . \quad (2.16)$$

Weiter werden ein Phasengrenzflächensprung  $\langle \underline{\mathbf{S}}_{ik} \rangle_k$ , der als

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \left( \underline{\Phi}_{\mathbf{k}} \cdot m_{ik} + \underline{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} \right) dS = \langle \underline{\mathbf{S}}_{ik} \rangle_k \quad (2.17)$$

definiert ist, und ein Phasenwandterm  $\langle \underline{\mathbf{S}}_{wk} \rangle_k$ , der als

$$\frac{1}{V} \int_{A_{wk}} \left( \rho_k \underline{\Phi}_{\mathbf{k}}(\underline{\mathbf{u}}_w - \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}) + \underline{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS = \langle \underline{\mathbf{S}}_{wk} \rangle_k \quad (2.18)$$

definiert ist, eingeführt. Gleichung 2.18 wird mit der Randbedingung (Gleichung 2.6) weiter vereinfacht zu

$$\frac{1}{V} \int_{A_{wk}} \underline{\mathbf{j}}_k \cdot \underline{\mathbf{n}}_k dS = \langle \underline{\mathbf{S}}_{wk} \rangle_k \quad . \quad (2.19)$$

Damit kann Gleichung 2.14 jetzt für eine inkompressible Zweiphasenströmung mit einer konstanten Dichte  $\rho_k$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\Phi}_k \rangle_k}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k \langle \underline{\Phi}_k \rangle_k \\ = & \varepsilon_k \langle \underline{\mathbf{F}}_k \rangle_k + \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \underline{\mathbf{j}}_k \rangle_k - \nabla \cdot \varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}'_k \underline{\Phi}'_k \rangle_k + \langle \underline{\mathbf{S}}_{ik} \rangle_k + \langle \underline{\mathbf{S}}_{wk} \rangle_k \quad . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die Anwendung der Mittelungsvorschrift (Gleichung 2.12) auf Gleichung 2.2 ergibt die ensemble-gemittelte Randbedingung an der Zwischenphasengrenzfläche, die nach Lahey (1995) als Bedingung des Zwischenphasensprungs bezeichnet wird. Mit der Definition des Phasengrenzflächensprungs (Gleichung 2.17) kann diese Bedingung formuliert werden als

$$\langle \underline{\mathbf{S}}_{i1} \rangle_1 = - \langle \underline{\mathbf{S}}_{i2} \rangle_2 \quad . \quad (2.21)$$

Die Ensemble-Mittelung der Randbedingungen für feste, adiabate Wände (Gleichung 2.5) kann mit der Definition des Phasenwandterms (Gleichung 2.18) formuliert werden als

$$\langle \underline{\mathbf{S}}_{wk} \rangle_k = 0 \quad . \quad (2.22)$$

## 2.2 Gleichungen des Zwei-Fluid-Modells.

### 2.2.1 Massentransportgleichung.

Mit Gleichung 2.20 und mit den in Tabelle 2.1 für die Masse aufgelisteten Termen wird die Massentransportgleichung für die Phase  $k$  aufgestellt.

$$\frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k) = \langle m_{ik} \rangle_k \quad . \quad (2.23)$$

Durch die Ensemble-Mittelung ergibt sich auf der rechten Seite von Gleichung 2.23 der Massenaustauschterm  $\langle m_{ik} \rangle_k$ . Dieser Massenaustauschterm  $\langle m_{ik} \rangle_k$  stellt den Massentransport durch Phasenübergänge an den Zwischenphasengrenzflächen in dem Kontrollvolumen dar. In der Modellierung des Massenaustauschs zwischen den Phasen setzt sich  $\langle m_{ik} \rangle_k$  aus zwei Termen,  $\langle m'''_{ik} \rangle_k$  und  $\Gamma_k$ , zusammen.

$$\langle m_{ik} \rangle_k = \langle m'''_{ik} \rangle_k + \Gamma_k \quad . \quad (2.24)$$

Der erste Term  $\langle m'''_{ik} \rangle_k$  stellt den Massentransport zwischen den Phasen im Fluidbereich dar. Damit wird die Kondensation einer Blase in unterkühlter Flüssigkeit oder die Verdampfung von Flüssigkeit im Kern der Strömung modelliert. Der zweite Term  $\Gamma_k$  stellt die Dampfquell-dichte an einer beheizten Wand oder die Kondensatquell-dichte an einer gekühlten Wand dar.

## 2.2.2 Impulstransportgleichung.

Ein Einsetzen der in Tabelle 2.1 für den Impuls angegebenen Terme in Gleichung 2.20 ergibt die Impulstransportgleichung für die Phase  $k$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \rangle_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \rangle_k \langle \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \rangle_k) \\
&= \varepsilon_k \rho_k \underline{\mathbf{g}} + \nabla \cdot \varepsilon_k \left( \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}}} \rangle_k - \langle p_k \underline{\mathbf{I}} \rangle_k \right) - \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}'_{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{u}}'_{\mathbf{k}} \rangle_k) \\
&+ \langle m_{ik} \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}\mathbf{k}} \rangle_k + \underline{\mathbf{W}}_{\mathbf{k}} + \sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \quad .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Diese Gleichung ist der Navier-Stokesschen Gleichung für eine einphasige inkompressible Strömung ähnlich. Der erste Term auf der rechten Seite stellt den Auftrieb dar, der zweite Term die Reibung und den Druck. Durch die Ensemble-Mittelung ergeben sich zusätzliche Terme. Der dritte Term auf der rechten Seite in Gleichung 2.25 kann als Reynoldsscher Schubspannungstensor  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}}^{\text{Re}}$  interpretiert werden

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}'_{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{u}}'_{\mathbf{k}} \rangle_k) = \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}}^{\text{Re}} \rangle_k \right) \quad . \tag{2.26}$$

Dieser Reynoldssche Schubspannungstensor  $\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}}^{\text{Re}} \rangle_k$  kann unter Annahme bestimmter Verteilungen der Geschwindigkeitsschwankungen mit Turbulenzmodellen beschrieben werden. Liegt insbesondere isotrope Turbulenz vor, so kann das k-epsilon-Turbulenzmodell angewandt werden. Der vierte Term ergibt sich aus dem Massenaustausch zwischen den Phasen und wird als Impulsaustauschterm bezeichnet.

Mit dem fünften Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.25 wird analog zu Gleichung 2.18 die normale Grenzflächenkraft  $\underline{\mathbf{W}}_{\mathbf{k}}$  an freien Grenzflächen eingeführt als

$$\frac{1}{V} \int_{A_{wk}} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}} - p_k \underline{\mathbf{I}} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS = \underline{\mathbf{W}}_{\mathbf{k}} \quad . \tag{2.27}$$

Sind die Randbedingungen auf feste Wände und Ein- oder Austritte des Rechengebiets beschränkt, so tritt die normale Grenzflächenkraft (Gleichung 2.27) nicht auf.

Der letzte Term in Gleichung 2.25 stellt die Zwischenphasenkräfte  $\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^*$  dar, die analog zu Gleichung 2.17 definiert ist als

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_{\mathbf{k}} - p_k \underline{\mathbf{I}} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS = \sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \quad . \tag{2.28}$$

Die Gleichungen 2.25 und 2.28 können zum besseren physikalischen Verständnis der Zwischenphasenkräfte weiter vereinfacht werden. Dazu wird der Druckterm in Gleichung 2.28 wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \int_{A_i} p_k \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS &= \frac{1}{V} \int_{A_i} (\langle p_k \rangle_k + \Delta p_{ik}) \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS \\
&= - \langle p_k \rangle_k \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \int_{A_i} \Delta p_{ik} \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} dS \quad .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dabei wird die Zwischenphasendruckdifferenz

$$\Delta p_{ik} = p_{ik} - \langle p_k \rangle_k \quad (2.30)$$

als die Differenz zwischen dem lokalen und dem mittleren Druck der Phase  $k$  an der Zwischenphasengrenzfläche eingeführt.

Aufgrund des ersten Terms auf der rechten Seite der Gleichung 2.29 unterscheidet sich die Impulstransportgleichung 2.25 entscheidend von der Impulstransportgleichung einer einphasigen Strömung. Die Impulstransportgleichung einer einphasigen, stationären Strömung wechselt beim Übergang von einer Unterschallströmung zu einer Überschallströmung von einer elliptischen Gleichung zu einer hyperbolischen Gleichung. Der Typ der Impulstransportgleichung 2.25 einer Zweiphasenströmung ist nicht hyperbolisch. Das gilt auch für eine kompressible Zweiphasenströmung, siehe Nigmatulin (1995). Aufgrund des wesentlichen Einflusses auf den Typ der Gleichung 2.25 bezeichnet Nigmatulin diesen Term als Rakhmatulin-Kraft. Der zweite Term in Gleichung 2.29 mit der Zwischenphasendruckdifferenz  $\Delta p_{ik}$  führt zu der Virtuellen Massenkraft, die in Kapitel 4 mit einem Modellansatz der Form  $\langle D_t \mathbf{u}_G \rangle_G - \langle D_t \mathbf{u}_L \rangle_L$  beschrieben wird.

Zur numerischen Lösung der Impulstransportgleichung wird weiter angenommen, daß

$$p = p_L = p_G = p_{iL} = p_{iG} \quad (2.31)$$

ist, was zu einer Reduktion der Anzahl der Variablen führt. Diese Annahme macht jedoch die Problemstellung inkonsistent und führt zu einem Verschwinden der Zwischenphasendruckdifferenz 2.30. Mit einem künstlichen Ansatz für die Virtuelle Massenkraft erhält man wieder ein konsistentes Problem.

Mit den Vereinfachungen und Umformungen der Gleichungen 2.31 und 2.29 können die Gleichungen 2.25 und 2.28 geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k) + \varepsilon_k \nabla p \\ &= \varepsilon_k \rho_k \underline{\mathbf{g}} + \nabla \cdot \varepsilon_k \left( \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_k \rangle_k - \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_k^{\text{Re}} \rangle_k \right) + \langle m_{ik} \mathbf{u}_{ik} \rangle_k + \sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{j_k} \quad , \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei für die Zwischenphasenkräfte

$$\sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{j_k} = \frac{1}{V} \int_{A_i} \left( \underline{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{n}_k - \Delta p_{ik} \mathbf{n}_k \right) dS \quad (2.33)$$

gilt. Die Zwischenphasenkräfte setzen sich dabei zusammen aus einem Term mit  $\underline{\boldsymbol{\tau}}_k$ , der die Reibung zwischen den Phasen erfaßt und aus einem Term mit  $\Delta p_{ik}$ , der die Virtuelle Massenkraft erfaßt. Die Reibung zwischen den Phasen wird mit einem vereinfachten Ansatz der Form  $\underline{\mathbf{A}} \cdot (\langle \mathbf{u}_G \rangle_G - \langle \mathbf{u}_L \rangle_L)$  im Kapitel 4 modelliert. Mit dem Koeffiziententensor  $\underline{\mathbf{A}}$  werden die Eigenschaften der Zwischenphasengrenzflächen erfaßt.

### 2.2.3 Energietransportgleichung.

Ein Einsetzen der in Tabelle 2.1 für die Energie aufgelisteten Terme in Gleichung 2.20 ergibt die Energietransportgleichung für die Phase  $k$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k \langle E_k \rangle_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k \langle E_k \rangle_k) \\ &= \varepsilon_k \rho_k \underline{\mathbf{g}} \cdot \langle \mathbf{u}_k \rangle_k + \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \mathbf{q}_k'' \rangle_k + \nabla \cdot \varepsilon_k \left\langle \mathbf{u}_k \cdot \left( \underline{\boldsymbol{\tau}}_k - p_k \underline{\mathbf{I}} \right) \right\rangle_k + \varepsilon_k \langle q_k''' \rangle_k \\ & \quad - \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}'_k E'_k \rangle_k) + \langle m_{ik} E_{ik} \rangle_k + w_k + q_{ik}'''^* \quad . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dabei ist  $E_k$  die spezifische Gesamtenergie mit

$$E_k = e_k + \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}{2} = h_k + \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}{2} - \frac{p_k}{\rho_k} \quad (2.35)$$

Sie setzt sich zusammen aus der spezifischen inneren Energie  $e_k$  und der spezifischen kinetischen Energie  $\mathbf{u}_k^2/2$ . Dabei kann die spezifische innere Energie auch durch die statische Enthalpie  $h_k$  ausgedrückt werden.

Die Energietransportgleichung 2.34 kann anstatt mit der spezifischen Energie  $E_k$  auch mit der statischen Enthalpie  $h_k$ , definiert in Gleichung 2.35, formuliert werden. Dazu multipliziert man die lokale, momentane Impulstransportgleichung mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}_k$ , subtrahiert diese Gleichung von der lokalen, momentanen Energietransportgleichung und nimmt eine Ensemble-Mittelung vor. Unter der Annahme der Inkompressibilität der Phasen führt das zu einer für die statische Enthalpie  $h_k$  formulierten Energietransportgleichung.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k \langle h_k \rangle_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k \langle h_k \rangle_k) - \varepsilon_k \frac{\partial \langle p_k \rangle_k}{\partial t} - \varepsilon_k \langle \mathbf{u}_k \cdot \nabla p_k \rangle_k \quad (2.36) \\ = & \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \mathbf{q}_k'' \rangle_k + \varepsilon_k \left\langle \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k - p_k \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_k \right\rangle_k + \varepsilon_k \langle q_k''' \rangle_k \\ & - \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k' h_k' \rangle_k) + \langle m_{ik} h_{ik} \rangle_k + w_k + q_{ik}'''^* \quad . \end{aligned}$$

Die Gleichung 2.36 ist der Enthalpiegleichung für eine einphasige, inkompressible Strömung der Phase  $k$  ähnlich. Die einzelnen Terme der Gleichung 2.36 haben folgende physikalische Bedeutung. Auf der linken Seite befinden sich zusätzlich zu den instationären Termen und dem konvektiven Term ein Term, der die Volumenarbeit beschreibt. Auf der rechten Seite der Gleichung 2.36 stellen die ersten drei Termen die Divergenz des Wärmestroms, die Dissipation und eine interne volumetrische Wärmequelle in der Phase  $k$  dar. Durch die Ensemble-Mittelung ergeben sich gegenüber einer einphasigen Strömung zusätzliche Terme. Der vierte Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.36 kann als turbulenter Wärmestrom  $\langle \mathbf{q}_k'' \mathbf{Re} \rangle_k$  interpretiert werden. Es wird der Zusammenhang

$$\nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \mathbf{u}_k' h_k' \rangle_k) = \nabla \cdot \varepsilon_k \langle \mathbf{q}_k'' \mathbf{Re} \rangle_k \quad (2.37)$$

angenommen. Der fünfte Term ergibt sich aus dem Massenaustausch an der Zwischenphasengrenzfläche und wird als Energieaustauschterm bezeichnet. Mit dem vorletzten Term in Gleichung 2.36 ist die Dissipation  $w_k$  eingeführt, die mit der grenzflächennormalen Komponente des Spannungstensors an freien Rändern gebildet ist. Die Dissipation kann analog zu Gleichung 2.18 als

$$\frac{1}{V} \int_{Awk} \mathbf{u}_k \cdot \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k - p_k \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \cdot \mathbf{n}_k dS = w_k \quad (2.38)$$

dargestellt werden. Sind die Randbedingungen auf feste Wände und Ein- oder Austritte des Rechengebiets beschränkt, so tritt die grenzflächennormale Komponente des Spannungstensors nicht auf und die Dissipation  $w_k$  verschwindet in Gleichung 2.38. Der letzte Term in Gleichung 2.36 ist die über die Zwischenphasengrenzfläche übertragene Wärme  $q_{ik}'''^*$ , die sich analog zu Gleichung 2.17 als

$$\frac{1}{V} \int_{Ai} \left( \mathbf{q}_k'' + \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k - p_k \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \cdot \mathbf{u}_k \right) \cdot \mathbf{n}_k dS = q_{ik}'''^* \quad (2.39)$$

schreiben läßt.

In Übereinstimmung mit der Behandlung des Druckterms in der Impulstransportgleichung wird hier der Druckterm an der Zwischenphasengrenzflächen analog zu Gleichung 2.30 in einen mittleren Druck und eine Zwischenphasendruckdifferenz  $\Delta p_{ik}$  aufgeteilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{Ai} p_k \underline{\mathbf{u}}_k \cdot \underline{\mathbf{n}}_k dS &= \frac{1}{V} \int_{Ai} (\langle p_k \rangle_k + \Delta p_{ik}) \underline{\mathbf{u}}_k \cdot \underline{\mathbf{n}}_k dS \\ &= -\langle p_k \rangle_k \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k \cdot \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \int_{Ai} \Delta p_{ik} \underline{\mathbf{u}}_k \cdot \underline{\mathbf{n}}_k dS \quad . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Schließlich wird analog zur Vereinfachung der Impulstransportgleichung entsprechend Gleichung 2.31 ein einheitlicher Druck in beiden Phasen angenommen. Mit diesen Vereinfachungen und Umformungen schreibt sich Gleichung 2.34 in der Form:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (\varepsilon_k \rho_k \langle h_k \rangle_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k \langle h_k \rangle_k) - \varepsilon_k \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \varepsilon_k p \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k \\ &= \nabla \cdot \varepsilon_k \left( \langle \underline{\mathbf{q}}_k'' \rangle_k - \langle \underline{\mathbf{q}}_k'' \text{Re} \rangle_k \right) + \varepsilon_k \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k - p_k \underline{\underline{\mathbf{1}}} \rangle_k \cdot \nabla \cdot \langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k \\ &\quad + \varepsilon_k \langle q_k''' \rangle_k + \langle m_{ik} h_{ik} \rangle_k + q_{ik}''' \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die in Gleichung 2.41 auftretende über die Zwischenphasengrenzfläche übertragene Wärme  $q_{ik}'''$  mit

$$\frac{1}{V} \int_{Ai} \left( \underline{\mathbf{q}}_k'' + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k \cdot \underline{\mathbf{u}}_k - \Delta p_{ik} \underline{\mathbf{u}}_k \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_k dS = q_{ik}''' \quad (2.42)$$

wird in Kapitel 4 durch vereinfachte Modellansätze beschrieben.

## 2.2.4 Schließung des Zwei-Fluid-Modells.

Das abgeleitete Zwei-Fluid-Modell liefert 10 Gleichungen für die 10 unabhängigen Variablen  $\varepsilon_G$ ,  $\langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L$ ,  $\langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G$ ,  $p$ ,  $\langle h_L \rangle_L$ ,  $\langle h_G \rangle_G$ . Auf der linken Seite dieser Gleichungen befinden sich die zeitlichen und räumlichen Ableitungen. Die rechte Seite umfaßt die Quellen und die Divergenzen der Flüsse dieser Variablen. Als Quellen und Flüsse treten für viskose, nicht-isotherme Fluide ein symmetrischer Schubspannungstensor  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k$ , ein Wärmefluß  $\underline{\mathbf{q}}_k''$  und Zwischenphasenaustauschterme auf. Diese Quellen und Flüsse sind zunächst unbekannt, so daß das Gleichungssystem nicht geschlossen ist. Das Problem ist erst geschlossen lösbar, wenn für diese Quellen und Flüsse Schließungsbeziehungen bereitgestellt werden.

Die 6 Unbekannten des Schubspannungstensors  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k$  werden durch folgende für inkompressible Fluide gültige konstitutive Gleichung gegeben.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k = \rho_k \nu_k (\nabla \underline{\mathbf{u}}_k + \underline{\mathbf{u}}_k \nabla) \quad . \quad (2.43)$$

Die unbekanntenen Wärmeflüsse  $\underline{\mathbf{q}}_k''$  werden mit dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz bestimmt. Die Enthalpien  $h_k$  werden über eine thermodynamische Zustandsgleichung mit der Temperatur gekoppelt. Es gilt:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{q}}_k'' = -\lambda_k \Delta T_k \quad , \quad (2.44)$$

$$c_{p,k}(T_k) = \left( \frac{\partial h_k}{\partial T_k} \right)_p \quad . \quad (2.45)$$

Schließlich müssen die Zwischenphasenaustauschterme durch analytische oder empirische Korrelationen modelliert werden. Auf diese Modellierung wird detailliert im Kapitel 4 eingegangen. Das Gleichungssystem des Zwei-Fluid-Modells, bestehend aus der Massentransportgleichung 2.23, der Impulstransportgleichung 2.32, der Energietransportgleichung 2.36 und den Schließungsgleichungen 2.43, 2.44 und 2.45 zusammen mit den Ausdrücken für die Zwischenphasenaustauschterme, ist somit geschlossen und einer numerischen Lösung zugänglich.

Für eine numerische Behandlung wird das Zwei-Fluid-Modell zu einem System von 10 Gleichungen für einen Lösungsvektor  $\underline{\Phi}$  von 10 Variablen umgeformt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\Phi} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\Phi} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\Phi}) = \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad . \quad (2.46)$$

Der Lösungsvektor  $\underline{\Phi}$  setzt sich aus folgenden Größen zusammen:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\Phi}_2 \\ \underline{\Phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_G \varepsilon_G \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G \\ (1 - \varepsilon_G) \rho_L \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_G \rho_G c_{pG} \langle T_G \rangle_G \\ (1 - \varepsilon_G) \rho_L c_{pL} \langle T_L \rangle_L \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ \rho_G \varepsilon_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.47)$$

Auf der linken Seite des Gleichungssystems 2.46 stehen ein instationärer Term mit dem Operator  $\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , ein Konvektionsterm mit dem Operator  $\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}$  und ein Diffusionsterm mit dem Operator  $\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla$ . In Gleichung 2.46 schreiben sich der Tensor  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , der Vektor  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  und der Vektoroperator  $\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla$  als

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}}}_6 \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varepsilon_G & 0 \\ \varepsilon_G - 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\rho_L}{\rho_G} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.48)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G \\ \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \\ \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G \\ \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G \\ 0 & -\frac{\rho_L}{\rho_G} \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.49)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_G \nabla \\ \nu_L \nabla \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\lambda_G}{\rho_G c_{pG}} \nabla & \\ & \frac{\lambda_L}{\rho_L c_{pL}} \nabla \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0I}}}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.50)$$

Auf der rechten Seite des Gleichungssystems 2.46 stellen  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$  den Quellterm und den



Zwischenphasenaustauschterm jeder Phase dar. Ihre Darstellung ist:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} \rho_G \varepsilon_G \underline{\mathbf{g}} - \nabla \cdot \varepsilon_G \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_G^{\text{Re}} \rangle_G - \varepsilon_G \nabla p \\ (1 - \varepsilon_G) \rho_L \underline{\mathbf{g}} - \nabla \cdot (1 - \varepsilon_G) \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_L^{\text{Re}} \rangle_L - (1 - \varepsilon_G) \nabla p \\ \varepsilon_G \langle q_G''' \rangle_G - \nabla \cdot \varepsilon_G \langle \underline{\mathbf{q}}_G''^{\text{Re}} \rangle_G + \varepsilon_G \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G \cdot \nabla p \\ (1 - \varepsilon_G) \langle q_G''' \rangle_G - \nabla \cdot (1 - \varepsilon_G) \langle \underline{\mathbf{q}}_L''^{\text{Re}} \rangle_L + (1 - \varepsilon_G) \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \cdot \nabla p \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} \langle m_{iG}''' \underline{\mathbf{u}}_{iG} \rangle_G + \Gamma_G \langle \underline{\mathbf{u}}_{wG} \rangle_G + \sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{jG} \\ - \langle m_{iG}''' \underline{\mathbf{u}}_{iG} \rangle_G + \Gamma_L \langle \underline{\mathbf{u}}_{wL} \rangle_L - \sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{jG} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \langle m_{iG}''' \rho_G c_{pG} T_{iG} \rangle_G + \Gamma_G \rho_G c_{pG} \langle T_{wG} \rangle_G + \langle q_{iG}''' \rangle_G \\ - \langle m_{iG}''' \rho_G c_{pG} T_{iG} \rangle_G + \Gamma_L \rho_L c_{pL} \langle T_{wL} \rangle_L + \langle q_{iL}''' \rangle_L \\ - \langle m_{iG}''' \rangle_G + \Gamma_L \\ \langle m_{iG}''' \rangle_G + \Gamma_G \end{array} \right] \end{bmatrix} \cdot \quad (2.52)$$

Im Quellterm  $\underline{\mathbf{D}}$  tritt der Gasvolumenanteil  $\varepsilon_G$  auf, da der Quellterm phasenabhängig ist. Weiter tritt der Druck  $p$  im Quellterm der Impulstransportgleichung und der Energietransportgleichung auf. Diese Druckterme sind von größter Wichtigkeit, da sie die ersten 8 Gleichungen des Gleichungssystems über den Druck koppeln. Damit ist das Gleichungssystem ein über den Gasvolumenanteil  $\varepsilon_G$  und über den Druck  $p$  gekoppeltes nicht-lineares Gleichungssystem.

Im nächsten Kapitel wird erläutert, wie das Gleichungssystem 2.46 numerisch gelöst werden kann.

# Kapitel 3

## Numerische Lösung.

### 3.1 Das Rechenprogramm CFX4.1.

Für die numerische Berechnung der Zweiphasenströmung mit Wärmeübertragung mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells werden die im Anhang B aufgelisteten Rechenprogramme untersucht. Das auszuwählende Rechenprogramm soll grundsätzlich in der Lage sein, eine dreidimensionale Mehrphasen-Mehrkomponenten-Strömung zu berechnen, so daß man für eine Simulation weder in der Geometrie noch in der Anzahl der Fluide beschränkt ist. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Rechenprogramm speziell für die Berechnung einer auftriebsbehafteten, inkompressiblen Blasenströmung mit Wärmezufuhr erweitert werden. An das verwendete numerische Verfahren wird die Forderung gestellt, daß mit dem Zwei-Fluid-Modell eine einphasige Strömung, eine disperse Zweiphasenströmung und der Übergang zwischen beiden Strömungsformen berechnet werden kann. Weiter soll das Rechenprogramm dem Anwender die Möglichkeit bieten, sowohl weitere konstitutive Gleichungen für jede Phase als auch zusätzliche Ausdrücke für Zwischenphasenaustauschterme einzubauen. Das Rechenprogramm CFX4.1 von AEA Technology erfüllt das aufgestellte Anforderungsprofil, siehe Harwell-Laboratory und CFX-Services (1995). Es werden vom Programm die in Kapitel 2.2 dargestellten Gleichungen des Zwei-Fluid-Modells gelöst, und es können zusätzliche Zwischenphasenaustauschterme implementiert werden. Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß CFX4.1 insbesondere eine einphasige Strömung mit den Gleichungen des Zwei-Fluid-Modells berechnen kann. Weiter werden die in CFX4.1 eingesetzten und in dieser Arbeit angewandten numerischen Verfahren skizziert.

### 3.2 Testrechnung für eine einphasige Strömung.

Das Rechenprogramm CFX4.1 soll den kontinuierlichen Übergang von einer einphasigen Strömung zu einer zweiphasigen Strömung simulieren. Aus diesem Grund wird in einer Testrechnung für eine rein einphasige Strömung überprüft, ob das Rechenprogramm eine solche einphasige Strömung mit dem Zwei-Fluid-Modell und einem Volumenanteil der Gasphase  $\varepsilon_G$  von  $10^{-10}$  richtig berechnet. Auftriebseffekte durch die Gasphase sind aufgrund des geringen Wertes von  $\varepsilon_G$  gegenüber Auftriebseffekten durch Dichteunterschiede in der Flüssigkeitsphase vernachlässigbar.

Als Testrechnung wird die rein einphasige Mischkonvektionsströmung von Wasser in der in Abbildung 1.2 skizzierten Versuchsanlage SUCOT definiert. Als Eintrittsbedingung wird der im Experiment vorgegebene Massenstrom mit einem konstanten Geschwindigkeitsprofil

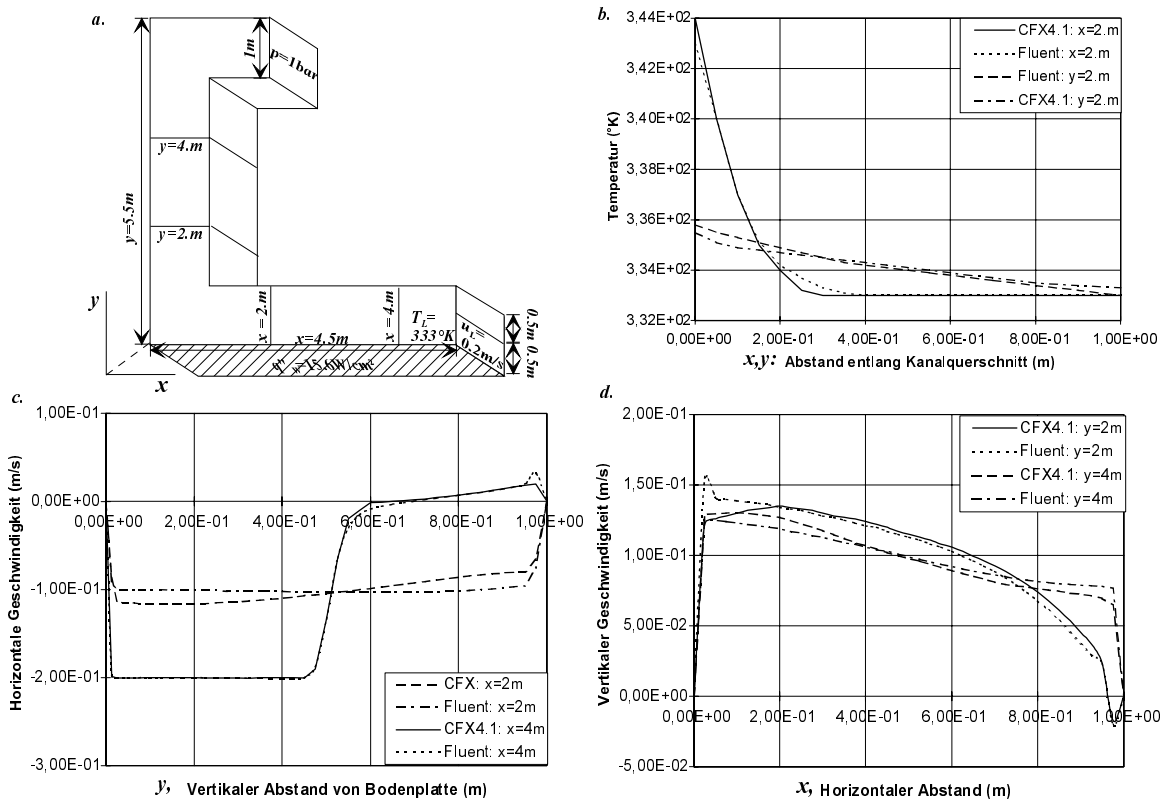


Abbildung 3.1: Vergleich zwischen der zweiphasigen Rechnung mit CFX4.1 und der einphasigen Rechnung mit FLUENT: a. Geometrie mit Randbedingungen, b. Temperatur, c. horizontale Geschwindigkeit, d. vertikale Geschwindigkeit.

mit  $u_L = 0,2\text{ m/s}$  und einem konstanten Temperaturprofil mit  $T_L = 333\text{ K}$  modelliert. Am Austritt wird die freie Oberfläche oben an der Versuchsanlage mit einer Druckrandbedingung mit  $p_{Out} = 1\text{ bar}$  modelliert. An den Wänden wird die Haftbedingung gestellt, die obere, freie Grenzfläche wird als schubspannungsfreie Berandung betrachtet. Am unteren Rand wird ein Wandwärmestrom von  $15,6 \cdot 10^{-4}\text{ W/m}^2$  vorgegeben. Die untersuchte Geometrie und die Randbedingungen sind in Abbildung 3.1.a skizziert. Die Set-Up und die Randbedingungen bei der Definition des Problems werden wegen des Ziels, eine sowohl einphasige als zweiphasige Rechnung für eine identische Problemstellung vergleichen zu können, so festgelegt. Deswegen wird insbesondere eine Druckrandbedingung am Austritt gewählt.

Die Geometrie wird durch ein zweidimensionales Gitter mit  $4 \cdot 10^4$  Zellen beschrieben. Die Strömung ist stationär und turbulent. Es wird das k-epsilon-Turbulenzmodell für die Flüssigkeitsphase verwendet und ein logarithmisches Wandprofil angesetzt. Für die Beschreibung des Auftriebsterms wird die Boussinesq-Approximation angenommen. Nach  $2 \cdot 10^3$  Iterationen ergeben sich Residuen für die Geschwindigkeitskomponenten, die unter  $10^{-6}$  liegen.

Die unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells mit dem Rechenprogramm CFX4.1 berechneten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder werden mit dem Ergebnis einer einphasigen Berechnung mit dem nach Incorporated (1995) beschriebenen, kommerziellen Rechenprogramm FLUENT Version 4.3 überprüft. Für ein ähnliches Gitter (mit gleich großen Gitterzellen) liegen mit dem Rechenprogramm FLUENT berechnete Geschwindigkeits- und

Temperaturfelder vor, die sich nur geringfügig von den mit CFX4.1 erzielten Ergebnissen unterscheiden. Die Rechnungen mit dem Programm FLUENT werden nicht von den Autor selbst durchgeführt aber es wurde berichtet daß  $1 \cdot 10^3$  Iterationen benötigt waren, um Residuen für die Geschwindigkeit zu erreichen, die unter  $10^{-4}$  liegen.

Für den integralen Druckverlust über das Rechengebiet abzüglich des Wertes für den hydrostatischen Druck ergeben sich mit CFX4.1 ein Wert von  $156 Pa$  und mit FLUENT ein Wert von  $164 Pa$ . Abbildung 3.1.b zeigt für beide Programme charakteristische Temperaturprofile; die Abbildungen 3.1.c und 3.1.d geben charakteristische Profile der horizontalen und vertikalen Geschwindigkeit wieder. Die maximalen Abweichungen zwischen den Ergebnissen beider Rechenprogramme liegen unterhalb von 5%. Im Anhang C werden die mit beiden Programmen berechneten Profile des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes für das gesamte Rechengebiet dargestellt.

Als Ergebnis kann festgehalten werden, daß CFX4.1 eine einphasige Strömung mit dem Zwei-Fluid-Modell und einem Gasvolumenanteil von  $\varepsilon_G = 10^{-10}$  zuverlässig berechnet.

### 3.3 Finite-Volumen-Verfahren.

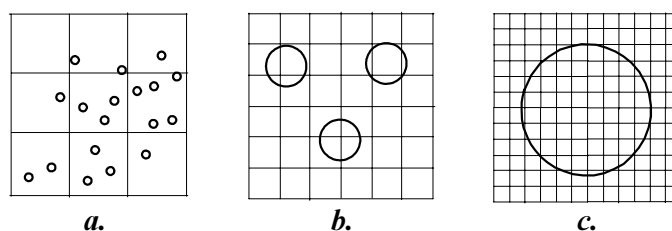


Abbildung 3.2: Betrachtungsweisen einer Blasenströmung: a. mit Ensemble-Mittelung (Zwei-Fluid-Modell), b. mit Betrachtung der Partikel (Partikel Tracking Method), c. mit Beschreibung der Zwischenphasengrenzflächen (Interface Tracking Method).

Im Rechenprogramm CFX4.1 werden die instationären Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für jede Phase numerisch mit einem Finite-Volumen-Verfahren gelöst. Die Erhaltungsgleichungen werden in integraler Form diskretisiert. Das physikalische Integrationsgebiet  $V$  wird mit Hilfe eines numerischen Gitters durch Volumenelemente oder Zellen räumlich diskretisiert, wobei die Erhaltungsgleichungen über das jeweilige Volumenelement in integraler Form exakt erfüllt werden.

Die räumliche Diskretisierung einer Ebene kann durch Verwendung von Vierecken oder von Dreiecken mit Hilfe eines strukturierten oder eines unstrukturierten Gitters erfolgen. In dieser Arbeit werden nur strukturierte Gitter verwendet, so daß die dreidimensionalen Volumenelemente die Form von Hexaedern besitzen. Um die Ränder des Integrationsgebietes genau nachbilden zu können, werden konturangepaßte, krummlinige Koordinaten verwendet. Zur numerischen Berechnung wird das konturangepaßte, krummlinige Koordinatensystem mit nicht-äquidistantem Gitter, das in einem allgemeinen physikalischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  erstellt ist, in ein orthogonales und äquidistantes, kartesisches numerisches Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \varsigma)$  transformiert. Die Transformation läßt sich mit einer nicht-singulären Jacobi-Matrix erfassen. Das physikalische Integrationsgebiet  $V(x, y, z)$  ist somit in ein numerisches Rechengebiet  $\Omega(\xi, \eta, \varsigma)$  umgewandelt.

Abhängig von der Genauigkeit, mit der eine Blasenströmung beschrieben werden soll, gibt es in der numerischen Blasendynamik oder im Angloamerikanischen Computational Bubble Dynamics (CBD) nach Tomiyama (1998) drei unterschiedliche angewandte Betrachtungsweisen einer Blasenströmung. In Abhängigkeit des Verhältnisses von Blasengröße zu Zellgröße ist es möglich, die Phasengrenzflächen direkt zu beschreiben oder abstrakt zu modellieren. Dies ist in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt.

Werden die Makro-Eigenschaften der Blasenströmung betrachtet, so wird die Zellgröße bei der räumlichen Diskretisierung um eine Größenordnung größer als die Blasengröße gewählt. Dies zeigt Abbildung 3.2.a. Die gemittelte Wahrscheinlichkeitsdichte der dispersen Phase wird durch den Volumenanteil beschrieben, und das Verhalten der Blasen wird mit Hilfe von physikalischen Modellen simuliert. Die durch die Mittelung verlorenen physikalischen Eigenschaften der Phasengrenzflächen werden über konstitutive Gleichungen für die Zwischenphasenaustauschterme beschrieben. In dieser Arbeit wird diese Methode der Mittelung über die Blasen zur Beschreibung der Makrostrukturen der Blasenströmung mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells angewandt<sup>1</sup>.

Wird die Zellgröße so gewählt, daß sie von gleicher Größenordnung wie die Blasengröße ist, so können die einzelnen Blasen als bewegte Partikel betrachtet werden. Diese Methode wird nach Tomiyama, Zun, Higaki, Makino und Sakaguchi (1996) "Particle Tracking Method" genannt. Die Phasengrenzfläche jeder Einzelblase wird als fest um den bewegten Blasenmittelpunkt beschrieben. Die einzelnen Teilchen werden als Partikel mit festem Volumen und fester Kontur verfolgt.

Sollen die Mikrostrukturen, also die Einzelblasen und deren individuelle Wechselwirkung in der Blasenströmung betrachtet werden, so erfolgt die räumliche Diskretisierung mit Volumenelementen, die eine Größenordnung kleiner als die Blasengröße sind. Bei dieser Methode, nach Unverdi und Tryggvason (1992) als "Interface (Front oder Volume) Tracking Method" bezeichnet, wird die Phasengrenzfläche für jede Blase getrennt bestimmt und ihre Deformation während der Blasenbewegung aufgelöst. Dieser Ansatz mit einer Auflösung aller Längenskalen der Strukturen und mit direkter Berechnung der Phasengrenzflächen wird in der Direkten Numerischen Simulation (DNS) verfolgt.

Das bedeutet, daß man sich mit fortschreitender Verfeinerung des Gitters von einer Beschreibung der Makrostruktur der Strömung mit der Methode des Zwei-Fluid-Modells zur Beschreibung der Mikrostruktur mit der Methode der Direkten Numerischen Simulation bewegt. Liegt eine Blasenströmung mit Blasen einer breiten Durchmesser-Verteilung vor, so kann es notwendig sein, durch eine Large Eddy Simulation (LES) beide Methoden zu kombinieren. Dabei werden Blasen und Turbulenzstrukturen, die mindestens von der Größenordnung der Volumenelemente sind, direkt berechnet. Kleine Blasen und kleine turbulente Skalen werden durch physikalische Modellansätze beschrieben. Somit werden z. B. Kappenblasen und große, energiereiche Wirbel hinter einer Blase räumlich aufgelöst und numerisch direkt simuliert. Kleine, energiearme Wirbel werden ebenso wie kleine Blasen im Nachlauf einer großen Blase durch physikalische Ansätze modelliert.

---

<sup>1</sup>Das Verhältnis zwischen Blasengröße und Zellgröße ist wichtig für die physikalische Interpretation, es hat keine direkten numerischen Einschränkungen zur Folge. Mit dem Zwei-Fluid-Modell werden die Blasen als ein kontinuierliches Feld mit Eigenschaften wie z. B. dem Blasendurchmesser beschrieben, der zur Berechnung der projizierten Anströmfläche für die Widerstandskraft benötigt wird. Die Gittergröße wird so gewählt, daß keine Gitterabhängigkeit in den berechneten, kontinuierlichen Strömungsfeldern mehr auftritt.

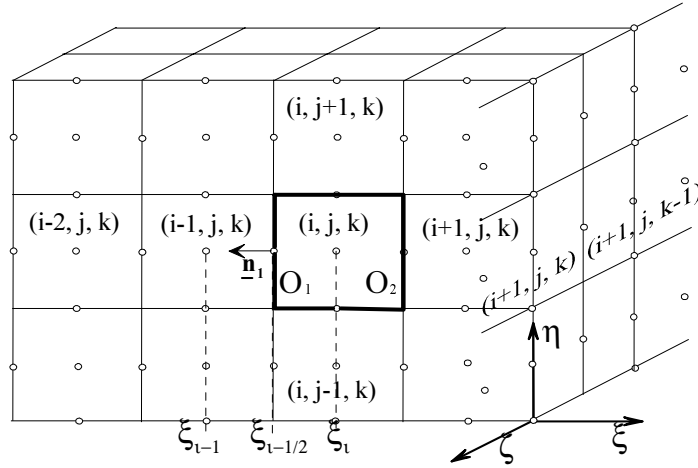


Abbildung 3.3: Diskretisierungsgitter.

### 3.4 Diskretisierung des Gleichungssystems.

Ausgehend von einem nicht-versetzten Zellmittelpunktsschema werden Kontrollvolumen um die Zellmittelpunkte gelegt. Jeder Zellmittelpunkt besitzt die diskretisierten Koordinaten  $(i, j, k)$  in dem transformierten kartesischen Koordinatensystem, wobei  $i$  den Zellenindex in  $\xi$ ,  $j$  den Zellenindex in  $\eta$  und  $k$  den Zellenindex in der  $\zeta$ -Richtung bezeichnet (siehe Abbildung 3.3). Im folgenden wird von dem Gleichungssystem 2.46 aus Kapitel 2.2.4, die allgemeine, differenzielle Erhaltungsform der dreidimensionalen instationären Konvektions-Diffusionsgleichungen, ausgegangen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\Phi}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\underline{\Phi}}) = \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad . \quad (3.1)$$

Für das Zweiphasensystem enthält der gesuchte Lösungsvektor  $\underline{\underline{\Phi}}$  die sechs Erhaltungsgrößen Impuls und Enthalpie der beiden Phasen, Druck und Volumenanteil. Da von einer inkompressiblen Strömung ausgegangen wird, dient der Druck dazu, das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei zu machen. Das Gleichungssystem wird mit einem Druckkorrekturverfahren numerisch gelöst. In einem ersten Schritt wird das System von 10 Erhaltungsgleichungen auf die 8 Erhaltungsgleichungen für den Impuls und die Enthalpie beschränkt, und für jede Raumrichtung getrennt gelöst. In einem zweiten Schritt werden anstatt der Kontinuitätsgleichungen eine Druckkorrekturgleichung und eine Korrektur für den Volumenanteil gelöst, mit denen die numerische Kopplung der Erhaltungsgleichungen für den Impuls und die Enthalpie erfolgt.

Das Finite-Volumen-Verfahren geht von einer Integration über jedes Kontrollvolumen aus. Dies sichert eine konservative Diskretisierung. Die Gleichungen des Systems 3.1 müssen über das numerischen Rechengebiet  $\Omega$  integriert werden:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\Phi}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\underline{\Phi}}) dV = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}) dV \quad . \quad (3.2)$$

Mit  $\Omega$  als raumfestem und nicht von der Zeit abhängigem Rechengebiet kann das Gleichungssystem 3.2 unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes umgewandelt werden

in

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS - \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}) dV \quad . \quad (3.3)$$

Das Integrationsgebiet  $\Omega$  wird durch Volumenelemente  $V_{ijk}$  mit jeweils sechs Oberflächen  $O_l \underline{\mathbf{n}}_l$ ,  $l = 1, \dots, 6$  diskretisiert. Unter der Annahme, daß die Werte von  $\underline{\underline{\Phi}}$  in den Volumenelementen konstant sind, kann das System der Grundgleichungen für jedes einzelne Volumenelement angenähert werden als

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}})_{ijk} V_{ijk} + \left( \sum_{l=1}^6 \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\Phi}} \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)_{ijk} - \left( \sum_{l=1}^6 \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\underline{\Phi}} \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)_{ijk} \quad (3.4) \\ & = \int_{V_{ijk}} (\underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}) dV \quad . \end{aligned}$$

Die Komponenten der konvektiven und diffusiven Flüsse durch die sechs Seitenflächen der diskreten Volumenelemente lassen sich auf die Größen  $\underline{\underline{\Phi}}_{ijk}$  zurückführen und können folglich aus diesen berechnet werden. Zur Berechnung der Flüsse an den Seitenflächen aus den Mittelpunktwerten sind unterschiedliche Interpolationsverfahren möglich, wie für die einzelnen Terme des Gleichungssystems 3.4 in den folgenden Kapitel erläutert wird.

Durch die Diskretisierung wird das System der Differentialgleichungen linearisiert und in ein System algebraischer Gleichungen überführt, welches durch iterative Gleichungslöser gelöst wird. Es gibt nach Harwell-Laboratory und CFX-Services (1995) verschiedene Matrix-Umkehrungstechniken: das Linien-Gauß-Seidel-Iterationsverfahren, die präkonditionierte, unvollständige konjugierte Gradientenmethode nach Cholesky, die vollständige oder unvollständige Lower-Upper-Matrix-Zerlegungsmethode von Stone und das algebraische Mehrgitterverfahren in der normalen oder verallgemeinerten Version. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen setzt das Rechenprogramm zur Lösung der diskretisierten Impuls- und Energietransportgleichungen das Verfahren der unvollständigen Matrix-Zerlegung von Stone ein. Die Druckkorrekturgleichung wird mit der konjugierten Gradientenmethode gelöst. Für die übrigen Gleichungen wird das Linien-Gauß-Seidel-Iterationsverfahren angewandt.

Für die numerische Lösung des Gleichungssystems 3.4 wird in einem ersten Schritt das homogene Gleichungssystem ohne instationären Term und ohne Quellterme betrachtet. In einem zweiten Schritt wird eine partikuläre Lösung des Gleichungssystems mit instationärem Term und Quelltermen gesucht. Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems setzt sich damit aus der homogenen Lösung und der partikulären Lösung zusammen.

### 3.4.1 Diskretisierung des instationären Terms.

Die zeitliche Ableitung der Erhaltungsgröße in den Grundgleichungen wird mit einem impliziten Rückwärts-Differenzen-Verfahren diskretisiert. Bei der Berechnung des Wertes von  $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}})^n$  zum neuen Zeitpunkt  $n$  werden alle nicht-zeitabhängigen Terme zum Zeitpunkt  $n$  bestimmt. Die implizite Differenzenform der zeitlichen Ableitung kann der Taylorreihenentwicklung des alten Wertes  $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}})^{n-1}$  um den Zeitpunkt  $n$  mit dem neuen Zeitschritt  $\Delta t_n$  entnommen werden. Ist für die diskretisierte Zeitableitung ein Abbruchfehler von erster Ordnung in der Zeit erlaubt, so werden die Terme in der Taylorreihenentwicklung von

$O(\Delta t_n^2)$  vernachlässigt. Es ergibt sich das erster Ordnung Euler–Rückwärts-Verfahren:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n = \frac{(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1}}{\Delta t_n} \quad (3.5)$$

Für eine numerische transiente Berechnung wird eine Genauigkeit von zweiter Ordnung gefordert, so daß Terme bis einschließlich  $O(\Delta t_n^2)$  betrachtet werden müssen. Ausgehend von einer ersten Taylorreihe des Terms  $(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1}$  um den Zeitpunkt  $n$  mit dem neuen Zeitschritt  $\Delta t_n$  und einer zweiten Taylorreihe von  $(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2}$  um  $n$  mit der Summe aus neuem und altem Zeitschritt  $\Delta t_n + \Delta t_{n-1}$  erhält man nach kurzer Herleitung, siehe Anhang C, folgenden Ausdruck für die mit einem zweiter Ordnung Rückwärts-Differenzenverfahren diskretisierte Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n &= \frac{2\Delta t_n + \Delta t_{n-1}}{\Delta t_n (\Delta t_n + \Delta t_{n-1})} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \frac{\Delta t_n + \Delta t_{n-1}}{\Delta t_n \Delta t_{n-1}} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1} \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1} (\Delta t_n + \Delta t_{n-1})} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2} \quad (3.6) \end{aligned}$$

Dieses Rückwärts-Differenzenverfahren vereinfacht sich für gleichmäßige Zeitschritte zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n = \frac{3}{2\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \frac{2}{\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1} + \frac{1}{2\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2} \quad (3.7)$$

Dieses Verfahren zeigt nach Peyret und Taylor (1982) unbedingt stabile Eigenschaften und eine gute Dämpfung von Störungen mit kleine Wellenlängen.

Ein implizites Zeitschrittverfahren besitzt keine Einschränkung bezüglich der Größe des Zeitschrittes und zeigt sehr gute numerische Stabilitätseigenschaften. Dabei kann die Größe des Zeitschrittes variabel sein und an das transiente Verhalten des zu untersuchenden Problems angepaßt werden. Ein implizites Verfahren kann aufgrund von Ableitungstermen gerader Ordnung im Abbruchfehler künstliche Diffusion erzeugen. Diese numerische Diffusion wird auch Dissipation genannt.

Die hier beschriebenen instationären Algorithmen können als "Time-Marching"-Methode zur Berechnung stationärer Probleme herangezogen werden. Wird mit Hilfe der instationären Formulierung der Grundgleichungen die stationäre Lösung eines Problems gesucht, so ist die Zeitgenauigkeit während der einzelnen Zeitschritte nicht von Bedeutung. Die einzelnen Gleichungen müssen nicht mehr ausiteriert werden. Mit zunehmender Anzahl der Zeitschritte nähert sich das numerische Ergebnis dem stationären Endwert an und das Konvergenzkriterium wird schließlich erreicht.

### 3.4.2 Diskretisierung des diffusiven Terms.

Der diffusive Term wird mit Zentralen Differenzen (CDS) diskretisiert. Der Gradient der Größe  $\underline{\Phi}$  an den Seitenflächen  $O_l$  des Volumenelements  $V_{ijk}$  wird durch eine lineare Interpolation der Werte an den benachbarten Zellmittelpunkten gewonnen. Zum Beispiel bezeichnet diese Diskretisierung für die Komponente  $\underline{\Phi} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  an der Seitenfläche  $O_1$  in der Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_1$ :

$$O_1 \cdot C \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\Phi} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{CO_1}{\xi_i - \xi_{i-1}} (\underline{\Phi}_{i,j,k} - \underline{\Phi}_{i-1,j,k}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad (3.8)$$

Dabei zeigt nach Abbildung 3.3 der Vektor  $\underline{\mathbf{n}}_1$  in negative  $\xi$ -Richtung.



Die Differenzenform, Gleichung 3.8, kann wie im Anhang C gegeben mit Hilfe der Taylorreihenentwicklungen der Werte  $(\underline{\Phi} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1)_{i,j,k}$  und  $(\underline{\Phi} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1)_{i-1,j,k}$  um den Punkt  $\xi_{i-1/2}$  mit  $\Delta\xi/2 = \xi_i - \xi_{i-1/2}$  abgeleitet werden. Es ergibt sich ein örtliches Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung und somit die Diskretisierungsvorschrift 3.8. Ebenso wird der diffusive Term für die übrigen 5 Seitenflächen mit diesem zweiter Ordnung Zentrale-Differenzen-Verfahren diskretisiert.

### 3.4.3 Diskretisierung des Quellterms.

Der Quellterm wird linearisiert in  $\underline{\Phi}_{ijk}$  mit

$$\int_{V_{ijk}} (\underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{E}}) dV = \underline{\mathbf{S}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\Phi}_{ijk} \quad . \quad (3.9)$$

Konstante Quellen werden durch den Vektor  $\underline{\mathbf{S}}$  wiedergegeben. Senken, die von der Größe  $\underline{\Phi}$  abhängen, sind im Tensor  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  enthalten. Der Term  $-\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\Phi}_{ijk}$  wird ähnlich dem diffusiven Term behandelt. Der Tensor  $-\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  soll positiv-definite Matrixeigenschaften und somit positive Eigenwerte haben, um ein gut konvergierendes Lösungsverhalten zu gewährleisten.

### 3.4.4 Diskretisierung des konvektiven Terms.

Da der konvektive Term über  $\underline{\mathbf{B}}$  den Geschwindigkeitsvektor enthält, ist für die Diskretisierung nicht nur ein Wert von  $\underline{\Phi}$  sondern auch ein Wert von  $\underline{\mathbf{B}}$  an den Seitenflächen des Volumenelements notwendig. Für die Diskretisierung des konvektiven Terms kann nicht ohne weiteres das Zentrale-Differenzen-Verfahren wie bei der Diskretisierung des diffusiven Terms angewendet werden. Bei der Diskretisierung von  $\underline{\Phi}$  ist die Zell-Péclet-Zahl zu berücksichtigen, die als

$$Pe_{\Delta x} = \frac{|\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\Phi}|}{|\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \underline{\Phi}|} = \frac{u \Delta x}{\Gamma} \quad (3.10)$$

definiert ist. Sie ist mit der Zellgröße  $\Delta x$ , der Geschwindigkeit  $u$  und der Diffusivität  $\Gamma$  gebildet. Für den Fall der Impulstransportgleichung ist  $\Gamma = \nu$ , für den Fall der Energietransportgleichung gilt  $\Gamma = \kappa = \lambda / \rho c_p$ .

Nach Patankar (1980) führt das Zentrale-Differenzen-Verfahren für Zell-Péclet-Zahlen von  $Pe_{\Delta x} \geq 2$  zu Instabilitäten. Deshalb muß für  $Pe_{\Delta x} \geq 2$  ein Upwind-Verfahren zur Diskretisierung eingesetzt werden. Für die Diskretisierung von  $\underline{\Phi}$  stehen das sogenannte Donor-Zell-Verfahren, ein Upwind-Verfahren erster Ordnung,

$$\underline{\Phi}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \underline{\Phi}_{i-1,j,k} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad (3.11)$$

oder das sogenannte QUICK-Verfahren (Quadratische-Upwind-Differenzen-Verfahren), ein Upwind-Verfahren zweiter Ordnung,

$$\underline{\Phi}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \frac{1}{8} (3\underline{\Phi}_{ijk} + 6\underline{\Phi}_{i-1,j,k} - \underline{\Phi}_{i-2,j,k}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad (3.12)$$

zur Verfügung.

Das gezielt Einsetzen von Zentralen Differenzen oder Upwind Differenzen wird als Hybrid-Differenzen-Verfahren (HDS) bezeichnet. Das Hybrid-Differenzen-Verfahren verwendet zur Diskretisierung von  $\underline{\Phi}$  für  $Pe_{\Delta x} < 2$  ein Schema des Zentrale-Differenzen-Verfahrens zweiter

Ordnung und schaltet für  $Pe_{\Delta x} \geq 2$  auf ein Upwind-Differenzen-Verfahren um. In der  $\xi$ -Richtung bedeutet das zum Beispiel bei einem erster Ordnung Upwind-Verfahren

$$\underline{\Phi}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \frac{1}{2} (\underline{\Phi}_{ijk} + \underline{\Phi}_{i-1,jk}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad \text{für } Pe_{\Delta x} < 2 \quad , \quad (3.13)$$

$$\underline{\Phi}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \underline{\Phi}_{i-1,jk} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad \text{für } Pe_{\Delta x} \geq 2 \quad . \quad (3.14)$$

Für die Diskretisierung der in  $\underline{\mathbf{B}}$  enthaltenen Geschwindigkeit  $\underline{\mathbf{U}}_{ijk} = (\langle \underline{\mathbf{u}}_k \rangle_k)_{ijk}$  an der Oberfläche  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  kann man von einer mit einem Koeffizienten  $W$  gewichteten linearen Interpolation ausgehen. Dann ergibt sich

$$\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = (W_{i-1,jk} \underline{\mathbf{U}}_{i-1,jk} + W_{ijk} \underline{\mathbf{U}}_{i,jk}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad . \quad (3.15)$$

Damit wird die in  $\underline{\mathbf{D}}$  enthaltene Druckdifferenz  $(\nabla p)_{O1}$  über ein Volumenelement  $V_{ijk}$  in  $\xi$ -Richtung zu

$$(\nabla p)_{O1} = p_{O2} - p_{O1} = W_{ijk} p_{i,j,k} + W_{i+1,j,k} p_{i+1,j,k} - W_{i-1,j,k} p_{i-1,j,k} - W_{ijk} p_{i,j,k} \quad (3.16)$$

linearisiert. Die Druckdifferenz  $(\nabla p)_{O1}$  stellt sich als unabhängig vom Druck  $p_{i,j,k}$  heraus. Damit werden die Druckdifferenzen über Volumenelemente gerader Zellindizes mit den Werten von Drücken an den Mittelpunkten ungerader Zellindizes bestimmt. Sie sind damit von den Druckdifferenzen ungerader Zellindizes entkoppelt. Druckdifferenzen über Volumenelemente ungerader Zellindizes werden mit den Druckwerten an den Mittelpunkten gerader Zellindizes bestimmt. Dieses Vorgehen bringt bei der numerischen Kopplung der Impulstransportgleichungen, beschrieben in Kapitel 3.5, physikalisch falsche Oszillationen des Druckfeldes. Dieses sogenannte Checkerboard-Problem kann durch die Anwendung der Methode des versetzten Gitters (staggered grid) oder der Methode der selektiven Interpolation von Rhie und Chow (1983) umgangen werden.

Bedingt durch den höheren Rechenaufwand bei komplexen Gittergeometrien für das versetzte Gitter hat sich der Rhie-Chow-Algorithmus durchgesetzt. Rhie und Chow bestimmen die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Kontrollvolumens  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  durch eine selektive lineare Interpolation der Impulsgleichung (siehe Anhang D). Sie berechnen aus der Impulsgleichung ohne Druckterm eine modifizierte Geschwindigkeit für den Zellmittelpunkt eines jeden Kontrollvolumens  $\underline{\mathbf{U}}_{ijk}^*$ . Die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Kontrollvolumens wird dann mit diesen modifizierten Geschwindigkeiten und den in dem Kontrollvolumen vorliegenden Druck bestimmt. Für  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  resultiert daraus

$$\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = (W_{i-1,jk} \underline{\mathbf{U}}_{i-1,jk}^* + W_{ijk} \underline{\mathbf{U}}_{ijk}^*) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 + (\nabla p)_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad . \quad (3.17)$$

Damit ist der Fluß der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Kontrollvolumens  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  bestimmt, ohne daß noch Oszillationen im Druckfeld auftreten.

### 3.5 Numerische Kopplung der Grundgleichungen.

Bei der Lösung des nicht-linearen Differentialgleichungssystems 2.46 werden die Grundgleichungen unabhängig voneinander für die verschiedenen Raumrichtungen und für die verschiedenen Phasen berechnet. Es liegt ein entkoppeltes Berechnungsverfahren vor. Da die Grundgleichungen ein gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem darstellen, soll die Kopplung der Gleichungen durch das Lösungsverfahren berücksichtigt werden.

Zur Kopplung der Impulstransportgleichungen für die verschiedenen Raumrichtungen mit dem Druck führen Patankar und Spalding den iterativen Algorithmus SIMPLE (Semi-Implicit-Method-for-Pressure-Linked-Equations) ein. Für diese Arbeit wird der SIMPLEC (SIMPLE Consistent) Algorithmus nach Van Doormal und Raithby (1984), eine modifizierte Version des SIMPLE-Algorithmus, verwendet.

Für Zweiphasenströmungen müssen die Grundgleichungen beider Phasen noch über den Volumenanteil miteinander gekoppelt werden, so daß zusätzlich der Druck mit dem Volumenanteil numerisch zu koppeln ist. Spalding (1979) entwickelt dafür das IPSA (Inter-Phase-Slip-Algorithm) Verfahren, das eine implizite Kopplung zwischen dem Druck und dem Volumenanteil herstellt. Für diese Arbeit wird der IPSAC (IPSA Consistent) Algorithmus, eine erweiterte Version des IPSA-Verfahrens nach Siebert und Antal (1993), eingesetzt.

### 3.5.1 Der SIMPLEC-Algorithmus.

Bei der Lösung des Gleichungssystems 3.1 wird weder für den Druck noch für den Volumenanteil eine explizite Gleichung gelöst. Das Druckfeld und der Volumenanteil sind indirekt über die Kontinuitätsgleichung jeder Phase festgelegt. Wird für eine einphasige Strömung das korrekte Druckfeld in die Impulstransportgleichungen eingesetzt, so erfüllt das berechnete Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung. Die Impulstransportgleichungen sind damit über das Druckfeld gekoppelt, was den Namen SIMPLE, nämlich Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, erklärt. Für eine zweiphasige Strömung liegen zwei Geschwindigkeitsfelder und ein Druckfeld vor. Jetzt müssen sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Volumenanteile der beiden Phasen über das Druckfeld korrigiert werden.

Dabei geht man von einem geschätzten Druckfeld  $p^*$  aus, das mit einer Druckkorrektur  $p'$  korrigiert wird, um das tatsächliche Druckfeld  $p = p^* + p'$  zu erreichen. Dabei werden jedesmal die Geschwindigkeitsfelder und die Volumenanteile beider Phasen korrigiert. Es gelten die Ansätze:

$$\left( \underline{\mathbf{U}}_{ijk} = \underline{\mathbf{U}}_{ijk}^* + \underline{\mathbf{U}}'_{ijk} \left( p' \right) \right)_{1,2} \quad , \quad (3.18)$$

$$\left( \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}^* + \varepsilon'_{ijk} \right)_{1,2} \quad . \quad (3.19)$$

Mit der Volumenerhaltung für die Mischung  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$  und somit mit die Forderung, daß die Summe der Volumenanteilkorrekturen verschwinden soll,

$$\left( \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \right)_{ijk} \rightarrow 0 \quad , \quad (3.20)$$

wird eine Druckkorrekturgleichung für  $p'$  aufgestellt. Das korrigierte Druckfeld  $p^* + p'$  wird iterativ als neue Schätzung  $p^*$  vorgegeben. Die genaue Ableitung der Druckkorrekturgleichung ist im Anhang D angegeben. Mit der Druckkorrekturgleichung sind die Kontinuitätsgleichungen für die einzelnen Phasen noch nicht erfüllt. Die Forderung 3.20 enthält nicht explizit  $(\varepsilon'_1)_{ijk} \rightarrow 0$  und  $(\varepsilon'_2)_{ijk} \rightarrow 0$ . Im Fall  $\rho_1 \gg \rho_2$  wird die Kontinuitätsgleichung für die leichte Phase 2 nicht erfüllt. Um dies zu leisten, entwickelte Spalding (1979) das IPSA-Verfahren, welches den Druck und den Volumenanteil implizit koppelt.

### 3.5.2 Das IPSAC-Verfahren.

Bei dem SIMPLEC-Algorithmus wird in der Ableitung der Druckkorrekturgleichung vorausgesetzt, daß sich die Quellterme in den Impulsgleichungen gegeneinander aufheben.

Diese Voraussetzung gilt nur, wenn die Quellterme unabhängig vom Druck und der Geschwindigkeit sind. In dem Zwei-Fluid-Modell sind in den Quelltermen Zwischenphasenaustauschsterme enthalten. Diese Austauschsterme sind von der Geschwindigkeit jeder Phase abhängig. Sie können in guter Näherung als proportional zu der Relativgeschwindigkeit  $\left(\underline{\mathbf{K}}_{12} \cdot (\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{U}}_1)\right)_{ijk}$  modelliert werden, was den Namen IPSA, Inter-Phase Slip Algorithm, erklärt.

Das IPSA-Verfahren geht von einem korrigierten Geschwindigkeitsfeld  $(\underline{\mathbf{u}}_{ijk} = \underline{\mathbf{u}}_{ijk}^* + \underline{\mathbf{u}}'_{ijk})_{1,2}$  aus, wobei  $\underline{\mathbf{u}}'_{ijk}$  jetzt sowohl von  $p'$  als von  $\underline{\mathbf{K}}_{12} \cdot (\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{U}}_1)$  abhängt. Wie bei dem SIMPLEC-Algorithmus wird eine Druckkorrektur des Geschwindigkeitsfelds abgeleitet und es wird eine Druckkorrekturgleichung aufgestellt. Die genaue Ableitung der Druckkorrekturgleichung ist im Anhang D gegeben. Beim IPSA-Algorithmus wird dabei die Kontinuitätsgleichung für jede Phase auf die Referenzdichte  $(\tilde{\rho} = \rho/\rho_0)_{1,2}$  bezogen. Werden die bezogenen Kontinuitätsgleichungen voneinander subtrahiert, so liefert die Forderung, daß die Summe beider Volumenanteilkorrekturen verschwinden soll,

$$\left(\frac{\varepsilon'_1}{\tilde{\rho}_1} + \frac{\varepsilon'_2}{\tilde{\rho}_2}\right)_{ijk} \rightarrow 0 \quad , \quad (3.21)$$

die Druckkorrekturgleichung für  $p'$ . Mit dem korrigierten Druckfeld  $p^* + p'$  als neue Schätzung  $p^*$  werden die Korrekturen der Volumenanteile  $\varepsilon'_1$  und  $\varepsilon'_2$  berechnet. Mit dem korrigierten Druckfeld und den korrigierten Volumenanteilen werden jetzt iterativ die Geschwindigkeitsfelder korrigiert.

Mit dem IPSA-Verfahren treten Konvergenzprobleme auf, die mit einem modifizierten IPSAC-Verfahren gelöst werden. Für die Ableitung der Druckkorrektur der Geschwindigkeitsfelder wird statt des Ansatzes  $\underline{\mathbf{K}}_{12} \cdot (\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{U}}_1)$  mit einem konstanten Koeffiziententensor  $\underline{\mathbf{K}}_{12}$  eine neue, von beiden Phasen abhängige Beziehung mit  $\underline{\mathbf{K}}_{12}$  ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ) verwendet. Die Druckkorrekturen für jedes Geschwindigkeitsfeld  $(\underline{\mathbf{u}}'_{ijk})_{1,2}$  hängen jetzt zusätzlich von  $\varepsilon_1$  und von  $\varepsilon_2$  ab. In dieser Arbeit wird das IPSAC-Verfahren angewandt.



# Kapitel 4

## Modellierung der Kopplungsbeziehungen.

### 4.1 Kopplung zwischen disperser und kontinuierlicher Phase.

Zur Schließung des Zwei-Fluid-Modells werden zusätzlich zu den in Kapitel 2 angegebenen konstitutiven Gleichungen und den thermodynamischen Zustandsgleichungen Korrelationen für die Zwischenphasenaustauschterme in den Massen-, Impuls-, und Energietransportgleichungen benötigt. Für eine Modellierung des Zwischenphasenaustausches ist die Form der Zwischenphasengrenzfläche der bestimmende Faktor. Für die Modellierung einer idealen, verdünnten Blasenströmung wird das physikalische Verhalten einer Einzelblase untersucht und dann auf die Gesamtheit der Blasen übertragen. Aufgrund der Ensemble-Mittelung über Ort und Zeit in einem Kontrollvolumen wird der Volumenanteil oder Void  $\varepsilon_G$  eingeführt. Die durch  $N$  Blasen des Durchmessers  $D_B$  gebildete Zwischenphasengrenzfläche  $A_i$  in einem Kontrollvolumen der Größe  $V$  kann mit dem Void  $\varepsilon_G$  ausgedrückt werden als

$$\frac{A_i}{V} = \frac{N\pi D_B^2}{N\pi D_B^3/6} \frac{V_G}{V} = \frac{6\varepsilon_G}{D_B} \quad . \quad (4.1)$$

Im folgenden wird in einem ersten Schritt eine isotherme Zweiphasenströmung betrachtet, so daß an den Zwischenphasengrenzflächen nur Zwischenphasenkräfte zu berücksichtigen sind. Diese sind in Kapitel 2, Gleichung 2.33, in der Impulstransportgleichung eingeführt als

$$\sum_j \underline{\mathbf{Z}}_{j\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_{A_i} \left( \underline{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} - \Delta p_{ik} \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}} \right) dS \quad . \quad (4.2)$$

Die einzelnen Zwischenphasenkräfte  $\underline{\mathbf{Z}}_{j\mathbf{k}}$  werden in Kapitel 4.2 durch Integration der Normalspannungen und Schubspannungen über die Zwischenphasengrenzfläche analytisch abgeleitet. Die Zwischenphasenkräfte werden nach Einzelphänomenen getrennt und ausgehend von den an einer bewegten Einzelblase angreifenden Kräften physikalisch beschrieben und schließlich modelliert. Die Ausdrücke für die Kräfte an der Einzelblase werden dann über mehrere Blasen gemittelt. Für  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  erfolgt die Mittelung mit Hilfe der Gleichung 4.1, die den Volumenanteil  $\varepsilon_G$  in den Ausdrücken für die Zwischenphasenkräfte einführt. Dabei ergeben sich folgende volumetrische Zwischenphasenkräfte in  $N/m^3$ : Widerstandskraft  $\underline{\mathbf{Z}}_{1\mathbf{k}}$ , Auftriebskraft  $\underline{\mathbf{Z}}_{2\mathbf{k}}$ , Virtuelle Massenkraft  $\underline{\mathbf{Z}}_{3\mathbf{k}}$  und Turbulente Diffusionskraft  $\underline{\mathbf{Z}}_{4\mathbf{k}}$ .

In einem zweiten Schritt wird eine Zweiphasenströmung mit Wärmetübertragung betrachtet, so daß zusätzlich ein Wärmefluß zwischen den Phasen mit oder ohne Phasenübergang zu berücksichtigen ist. In Kapitel 2, Gleichung 2.41, ist eine über die Zwischenphasengrenzfläche übertragene Wärme  $\langle q''' \rangle_k$  eingeführt in der Form

$$\langle q''' \rangle_k = \frac{1}{V} \int_{Ai} \left( \mathbf{q}''_{\mathbf{k}} + \underline{\underline{\tau}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}} - \Delta p_{ik} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \right) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}} dS \quad . \quad (4.3)$$

Für die Modellierung der über die Zwischenphasengrenzfläche übertragene Wärme in einer Blasenströmung wird von einem konduktiven und konvektiven Wärmetransport an einer kugelförmigen Blase in einer Flüssigkeitsströmung ausgegangen. Bei einem Phasenübergang, das heißt bei Verdampfung von Flüssigkeit  $k = L$  in eine Dampfblase  $k = G$  oder bei Rekondensation einer Dampfblase beim Eintritt in einen unterkühlten Flüssigkeitsbereich, tritt zusätzlich ein Massenaustauschterm  $\langle m_{ik} \rangle$ , Gleichung 2.24, in der Massentransportgleichung auf. Er stellt sich wie folgt dar:

$$\frac{1}{V} \int_{Ai} (\rho_k (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k) dS = \langle m_{ik} \rangle_k = \langle m'''_{ik} \rangle_k + \Gamma_k \quad . \quad (4.4)$$

Bei einem Phasenübergang müssen somit ein Massenaustauschterm in der Massentransportgleichung zusammen mit einem Impulsaustauschterm in der Impulstransportgleichung und einem Energieaustauschterm in der Energietransportgleichung betrachtet werden. Ein Phasenübergang innerhalb der Flüssigkeit wird mit dem Term  $\langle m'''_{ik} \rangle_k$  berücksichtigt. Wird die Blasenbildung an einer beheizten Wand durch Überhitzung einer Flüssigkeit betrachtet, so tritt eine Dampfquellichte  $\Gamma_k$  auf. Dieser Phasenübergang an der Wand wird mit einem auf experimentellen Beziehungen basierenden Wandsiedemodell für  $\Gamma_k$  beschrieben. Die Vorgehensweise und die verwendeten Modelle in dieser Arbeit basieren auf den Modellierungsansätzen nach Podowski (1997).

## 4.2 Zwischenphasenkopplung in einer isothermen Blasenströmung.

### 4.2.1 Physik des Impulsaustausches an bewegter Einzelblase.

Betrachtet wird hier eine Gasblase mit einer Größe zwischen  $0.5 \mu m$  und  $10 cm$ , die von der sie umgebenden Flüssigkeit durch eine Grenzfläche getrennt ist. Der Blasenrand oder die Phasengrenzfläche zwischen der dispersen gasförmigen und die kontinuierlichen flüssigen Phase ist eine freie Oberfläche. Die Erzeugung einer freien Oberfläche benötigt Arbeit gegen die intermolekularen Anziehungskräfte. Als Oberflächenspannung  $\sigma$  definiert man diejenige Kraft pro Längeneinheit der Berandung, die die freie Oberfläche im Gleichgewicht hält. Um die Arbeit zur Erzeugung einer freien Oberfläche gering zu halten, verwendet ein Zweiphasensystem möglichst wenig Fluidteilchen zur Bildung einer freien Oberfläche. Nach diesem Prinzip der Minimalflächen entstehen beim Eindüsen von Luft in Wasser oder beim Verdampfen von Wasser entlang einer beheizten Wand vorzugsweise kugelförmige Blasen. Zur allgemeinen Bestimmung der Oberflächenspannung und der Position der freien Oberfläche kann das Kräftegleichgewicht an einer gekrümmten freien Oberfläche abgeleitet werden. Abbildung 4.1 zeigt ein infinitesimales Flächenelement der Kantenlänge  $|\underline{ds}_1| = R_1 d\theta_1$  und  $|\underline{ds}_2| = R_2 d\theta_2$ . Die Schnittrichtung  $\underline{n}$  ist orthogonal konvex zum Flächenelement gewählt,

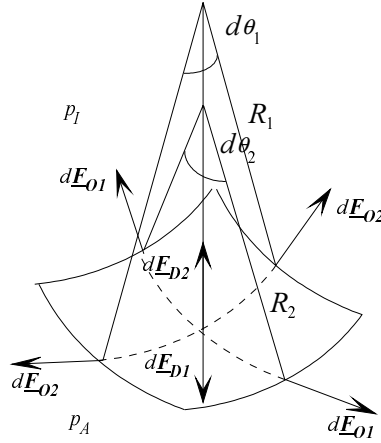


Abbildung 4.1: Kräftegleichgewicht an einer gekrümmten Fläche.

die Krümmungsradien in den über die Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  aufgespannten Schnitten sind mit  $R_1$  und  $R_2$  bezeichnet. Durch einen Schnitt im Flächenelement einer Blase wird die Wirkung der Grenzflächenspannung an den Schnittkanten mit den Oberflächenspannungskräften  $\mathbf{F}_{O1} = \sigma \mathbf{ds}_1 \times \mathbf{n}$  und  $\mathbf{F}_{O2} = \sigma \mathbf{ds}_2 \times \mathbf{n}$  deutlich. Aufgrund der Drücke  $p_A$  und  $p_I$  wirken auf beiden Seiten der freien Oberfläche die Druckkräfte  $\mathbf{F}_{D1} = p_A |\mathbf{ds}_1| |\mathbf{ds}_2| \mathbf{n}$  und  $\mathbf{F}_{D2} = -p_I |\mathbf{ds}_1| |\mathbf{ds}_2| \mathbf{n}$ . Aus dem Kräftegleichgewicht in der Normalenrichtung läßt sich in Abhängigkeit der Krümmung der freien Oberfläche ein Drucksprung berechnen:

$$p_I - p_A = \sigma (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad . \quad (4.5)$$

Nach Gleichung 4.5 ist für eine kugelförmige Blase der Druck in der Blase  $p_G = p_I$  bestimmt durch den Druck außerhalb der Blase  $p_L = p_A$  zuzüglich einem Anteil  $4\sigma/D_B$ , der durch die Oberflächenspannung bewirkt ist.

Zur Bildung einer Blase muß also eine freie Zwischenphasengrenzfläche gekrümmt werden. Dazu wird in Abbildung 4.2 eine Düse betrachtet, die eine horizontale Öffnung mit einem Durchmessers  $d_O$  hat. Es liegt eine instabile Schichtung einer Flüssigkeit größerer Dichte über einem Gas geringerer Dichte an einer horizontalen Öffnung vor. Dies ist als Rayleigh-Taylor-Problem bekannt. Die Position der freien Zwischenphasengrenzfläche wird durch die Oberflächenspannungskraft pro Volumen  $\mathbf{F}_O = 4\sigma / (\pi d_O^2)$  und die Auftriebskraft pro Volumen  $\mathbf{F}_S = (\rho_L - \rho_G) \mathbf{g}$  bedingt. Aus dem Verhältnis beider Kräfte läßt sich ein charakteristisches Längenmaß, die Laplace-Länge  $\Lambda$ ,

$$\Lambda = \left( \frac{\sigma}{|\mathbf{g}| (\rho_L - \rho_G)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

ableiten, die die Stabilität der Schichtung und damit den Vermischungsvorgang bestimmt. Für Öffnungen mit  $d_O < \Lambda$  ist die Zwischenphasengrenzfläche maßgeblich durch die Oberflächenspannungskraft bestimmt und stabil. Für Öffnungen mit  $d_O > \Lambda$  ist die Einspeisung von Gas notwendig, um ein Eindringen der Flüssigkeit in dem Gas zu verhindern und noch eine stabile Zwischenphasengrenzfläche zu erhalten. Im weiteren wird eine Einspeisung von Gas durch eine Düse mit  $d_O < \Lambda$  betrachtet, bei welcher die Oberflächenspannungskraft und die Auftriebskraft deutlich durch die dynamische Druckkraft des Gases übertroffen



sind. Im folgenden werden zunächst die Bildung und Ablösung einer Blase, die dabei auftretenden Kräfte und die charakteristischen Kennzahlen diskutiert. Dabei wird in einem ersten Schritt das statische Verhalten einer Blase bis zum Ablösepunkt beschrieben. In einem zweiten Schritt werden mit einer Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer Blase die Zwischenphasenkräfte aufgezeigt, die auf eine in einer kontinuierlichen Phase aufsteigende Blase wirken.

Soll Gas unter geringem Volumenstrom durch eine Düse mit dem Durchmesser  $d_O$  in eine Flüssigkeit eingespeist werden, so wird nach Gleichung 4.5 ein bestimmter Überdruck benötigt, um eine stabile Blase mit  $D_B \geq d_O$  zu bilden. Auf den Blasenrand, der an dem Düsenrand haftet, wirken die dynamische Druckkraft  $\underline{\mathbf{F}}_P$  des Gases und die Oberflächenspannungskraft  $\underline{\mathbf{F}}_O$ , die sich das Gleichgewicht halten. Werden die Kräfte  $\underline{\mathbf{F}}_P$  und  $\underline{\mathbf{F}}_O$  durch den Blasendurchmesser  $D_B$ , die Gasgeschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_G$  und die Dichte der Flüssigkeit  $\rho_L$  ausgedrückt, so kann aus ihrem Verhältnis die Weber-Zahl  $We$  gebildet werden:

$$\frac{|\underline{\mathbf{F}}_P|}{|\underline{\mathbf{F}}_O|} \sim \frac{\rho_L |\underline{\mathbf{u}}_G|^2 D_B}{\sigma} = We \quad . \quad (4.7)$$

Liegt eine Population von Blasen mit verschiedenen Blasendurchmessern vor, so wird häufig der Sauter-Durchmesser  $D_S$  als das Verhältnis zwischen Volumenanteil und gemitteltem Phasengrenzflächenanteil nach Wu und Ishii (1997) definiert als

$$D_S = \frac{6\varepsilon_G}{\langle A_i \rangle_G} \quad . \quad (4.8)$$

Für die Charakterisierung des Blasenwachstums einschließlich des Blasenzerfalls und / oder der Koaleszenz ist die mit dem Sauter-Durchmesser und der Blasenauftstiegsgeschwindigkeit gebildete Weberzahl die maßgebliche Kennzahl. Nach Ryskin und Leal (1984) ist die Blasenform nicht vom Blasendurchmesser  $D_B$  sondern von der Weber-Zahl  $We$  direkt abhängig. Da aber eine Blase mit einem gegebenen Blasendurchmesser eine bestimmte Blasenauftstiegsgeschwindigkeit hat, der eine bestimmte  $We$  zugeordnet ist, kann die Blasenform indirekt in Abhängigkeit des Blasendurchmessers ausgedrückt werden. Deswegen kann allgemein festgehalten werden, daß Blasen mit einem Durchmesser größer als 2 mm anfangen, von der kugelförmigen Blasenform abzuweichen.

Beim Einströmen von Gas durch eine Düse in eine Fluidvorlage wächst die Blase an. Ab einer bestimmten Größe fängt die Blase an, sich an der Düse einzuschnüren, siehe Abbildung 4.2. Auftriebseffekte und somit die Archimedeskraft sind von Bedeutung. Bei vollständiger Einschnürung beträgt die Archimedeskraft

$$\underline{\mathbf{F}}_A = \frac{\pi}{6} D_B^3 (\rho_L - \rho_G) \underline{\mathbf{g}} \quad , \quad (4.9)$$

wobei  $\rho_L - \rho_G$  der Dichteunterschied zwischen Flüssigkeit und Gas und  $\underline{\mathbf{g}}$  die Erdbeschleunigung sind. Die Blase erreicht den durch den Gasvolumenstrom bestimmten Ablösepunkt, an dem die Archimedeskraft die Oberflächenspannungskraft überschreitet. Das Verhältnis aus Archimedeskraft und Oberflächenspannungskraft wird als Eötvös-Zahl  $E\ddot{o}$  bezeichnet:

$$\frac{|\underline{\mathbf{F}}_A|}{|\underline{\mathbf{F}}_O|} \sim \frac{D_B^2 |\underline{\mathbf{g}}| (\rho_L - \rho_G)}{\sigma} = E\ddot{o} \quad . \quad (4.10)$$

Die Eötvös-Zahl ist direkt ein Maß für die Deformation einer kugeligen Blase zu z. B. einer Kappenblase und kann im Gegensatz zur Weber-Zahl nicht mit einem Blasendurchmesser verknüpft werden. Es wird oft die modifizierte Eötvös-Zahl  $E\ddot{o}^*$  mit der maximalen

horizontalen Abmessung der Blase  $D_{Bh}$

$$E_{\ddot{O}}^* = \frac{D_{Bh}^2 |\underline{g}| (\rho_L - \rho_G)}{\sigma}$$

eingeführt.

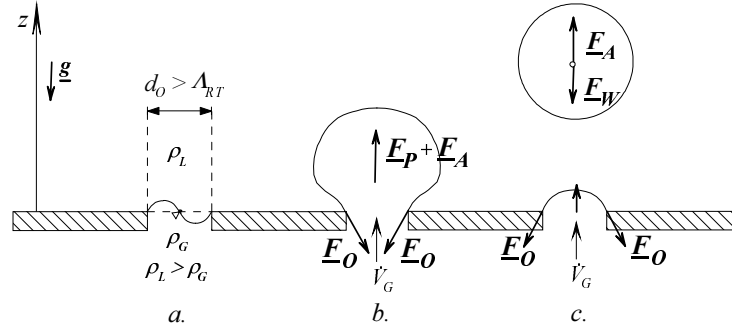


Abbildung 4.2: Kräfte an einer Blase: a. Rayleigh-Taylor-Instabilität, b. Blasenbildung, c. Blasenablösung.

Beim Aufsteigen in der kontinuierlichen Phase erfährt eine Blase einen Widerstand. Bei der Umströmung der Blase wird die Gesamtwiderstandskraft  $\underline{F}_W$  betrachtet, die sich aus dem Reibungswiderstand und dem Formwiderstand zusammensetzt. Die Gesamtwiderstandskraft schreibt sich mit der relativen Geschwindigkeit zwischen der Gasphase und der Flüssigkeitsphase  $\underline{u}_G - \underline{u}_L$ , dem Strömungsquerschnitt  $\pi D_B^2/8$  der Blase und einem Reibungsbeiwert  $c_w$  als

$$\underline{F}_W = c_w \frac{\pi}{8} D_B^2 \rho_L |\underline{u}_G - \underline{u}_L| (\underline{u}_G - \underline{u}_L) \quad . \quad (4.11)$$

Der Reibungsbeiwert  $c_w$  ist dabei von der Reynolds-Zahl  $Re_B$  abhängig. Die Reynolds-Zahl, definiert als das Verhältnis zwischen der Trägheitskraft  $\underline{F}_T$  und der Reibungskraft  $\underline{F}_R$  in der Flüssigkeit, schreibt sich mit der kinematischen Viskosität der Flüssigkeit  $\nu_L$  als

$$\frac{|\underline{F}_T|}{|\underline{F}_R|} \sim \frac{|\underline{u}_L| D_B}{\nu_L} = Re_B \quad . \quad (4.12)$$

Der Indiz  $B$  deutet an, daß die Reynolds-Zahl  $Re_B$  für Zweiphasenströmungen mit dem charakteristischen Blasendurchmesser  $D_B$  gebildet wird.

Im Stokesschen Bereich mit  $Re_B < 0.2$  stellt sich eine schleichende Strömung um die sich als starre Kugel verhaltende Blase ( $D_B < 1mm$ ) ein. Dies ist in Abbildung 4.3.a skizziert. Der Reibungsbeiwert  $c_w$  nimmt nach dem Stokesschen Gesetz wie  $C_D = 24/Re_B$  mit zunehmender Reynolds-Zahl ab bis zu  $Re_B < 500 \sim 1000$ . In diesem laminaren Bereich herrscht stromab der Blase ein Zustand stationärer Ablösung. Bei weiterer Erhöhung der Reynolds-Zahl können die Fluidteilchen aufgrund der Reibung im Nachlauf der Blase nicht mehr den Druckanstieg in der stromab gelegenen Hälfte der kugelförmigen Blase kompensieren, der Wert von  $c_w$  bleibt nahezu konstant. Es stellt sich ein stationäres Rückstromgebiet im Nachlauf unmittelbar hinter der Blase ein, wie in Abbildung 4.3.b dargestellt ist. Bei einer Reynolds-Zahl von  $Re_B = 2000$  bildet sich eine instationäre Wirbelablösung der laminaren Grenzschicht auf der Blasenoberfläche mit einem laminaren Nachlauf aus. Oberhalb von

$Re_B = 2 \cdot 10^3$  bis etwa  $2 \cdot 10^5$  erfolgt der Übergang zu einer turbulenten Nachlaufströmung. In diesem turbulenten Strömungsbereich von  $2 \cdot 10^3 < Re_B < 2 \cdot 10^5$  nimmt der Reibungsbeiwert nahezu einen konstanten Wert an.

Für Reynolds-Zahlen im Bereich von  $2 \cdot 10^5 < Re_B < 4 \cdot 10^5$  wird die Grenzschichtströmung turbulent. Aufgrund des größeren Energieaustausches mit der Außenströmung löst die turbulente Grenzschicht auf der Blasenhintenseite später ab als die laminare Grenzschicht. Das führt zu einer Verjüngung der Nachlaufströmung und einem geringeren Formwiderstand. Bei einer turbulenten Grenzschicht ist der Reibungswiderstand zwar größer als bei einer laminaren Grenzschicht, dafür ist der Formwiderstand erheblich geringer, was zur Verringerung des Gesamtwiderstands führt. Im Bereich von  $4 \cdot 10^5 < Re_B < 1 \cdot 10^6$  wandert der laminar-turbulente Übergangsbereich auf der Kugeloberfläche stromauf. Dadurch steigt der Reibungswiderstand an, während der Formwiderstand weitgehend konstant bleibt. Eine Steigerung des Gesamtwiderstands ist die Folge. Im rein turbulenten Bereich für  $Re_B > 1 \cdot 10^6$  ist die Grenzschicht auf der Kugeloberfläche ab dem vorderen Staupunkt turbulent. Dadurch liegt die Ablösestelle fest, und der Reibungsbeiwert  $c_w$  wird unabhängig von der Reynolds-Zahl  $Re_B$ .

Experimentelle Beobachtungen und numerische Simulationen haben angedeutet daß kleine Blasen in guter Näherung sphärisch sind und als Nachlauf eine von Karmansche Wirbelstraße haben. Bei kugelförmigen Blasen mit  $2 < Re_B < 7 \cdot 10^2$  tritt nach Peebles und Garber (1953) eine durch Reibung induzierte Zirkulation im Innern der Blase auf. Diese Zirkulation bewirkt eine Deformation der kugelförmigen Blasen zu ellipsenförmigen Blasen. Mit zunehmender Größe der ellipsenförmigen Blasen erhöht sich der Reibungsbeiwert, das Ablösegebiet stromab wird größer. Mit ansteigendem Widerstand deformieren die ellipsenförmigen Blasen zu Kappenblasen mit einem ausgeprägten Nachlaufbereich.

Der Nachlauf einer großen Blase wird nach Clift, Grace und Weber (1978) für niedrige Reynolds-Zahlen durch geschlossene Wirbel und für große Reynolds-Zahlen durch offene turbulente Wirbel gebildet. Der Umschlag zu einer Wirbelstraße mit offenen Wirbeln tritt bei Kappenblasen früher ein als bei ellipsenförmigen Blasen. Unmittelbar hinter einer Kappenblase führt der Nachlaufwirbel eine toroidale Bewegung aus, verliert dabei an Wirbelstärke, so daß die Wirbel im Nachlauf nicht mehr geschlossen werden können. Diese Wirbelbildung bewirkt die krummlinigen Trajektorien solcher Blasen.

Im folgenden wird die weitere Vorgehensweise zur Berücksichtigung und Modellierung der Zwischenphasenkräfte aus Gleichung 4.2 aufgezeigt.

Die Widerstandskraft  $\underline{F}_W$  aus Gleichung 4.11 ist als eine Zwischenphasenkraft für eine Blasenströmung grundsätzlich zu modellieren. Befindet sich eine Blase in einem nicht-homogenen Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit, so tritt aufgrund der ungleichmäßigen Umströmung der Blase zusätzlich eine senkrecht zur Bewegungsrichtung der Blase wirkende Querkraft auf. Diese Zwischenphasenkraft wird fortan als Auftriebskraft bezeichnet und bei der Modellierung berücksichtigt. Wird eine Blase in einer Grundströmung beschleunigt, so wird sowohl Arbeit zur Beschleunigung der Blase selbst als auch Arbeit zur Beschleunigung eines mitgeschleppten Flüssigkeitsfilms um den Blasenrand herum geleistet. Dieses Phänomen wird über eine Virtuelle Massenkraft modelliert. Das Vorhandensein mehrerer Blasen erhöht die Geschwindigkeitsschwankungen in der Flüssigkeit. Diese i. a. turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen in der Flüssigkeit bewirken eine Dispersion der Blasen. Dieser Effekt wird in der Modellierung der Zwischenphasenkräfte als Turbulente Diffusionskraft berücksichtigt.

Das Ziel der folgenden 4 Kapitel ist es, den Ausdruck 4.2 für die Zwischenphasenkräfte unter Annahme einer idealen, verdünnten Blasenströmung zu modellieren. Es wird von

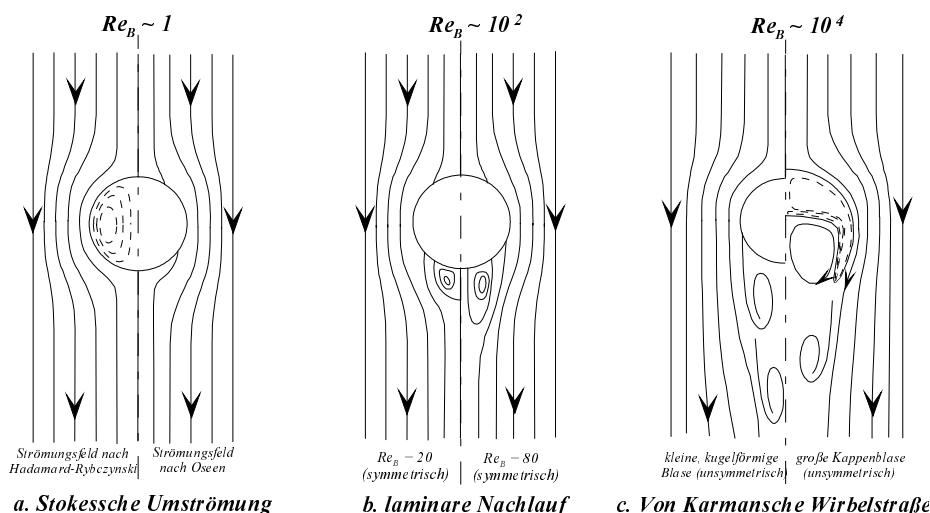


Abbildung 4.3: Umströmung einer kugelförmigen Blase: a. Stokessche Blasenumströmung, b. Blasenumströmung mit einem laminaren Nachlauf, c. Von Karmanische Wirbelstraße hinter eine Blase.

die Umströmung einer Einzelblase ausgegangen. Für die zwei Grenzfälle  $Re_B \rightarrow 0$  und  $Re_B \rightarrow \infty$  kann die Blasenumströmung analytisch berechnet werden, und damit den Ausdruck 4.2 analytisch bestimmt werden. Für die getroffenen Vereinfachungen erfolgt dann eine allgemeine Beschreibung und theoretische Herleitung der einzelnen Zwischenphasenkräfte. Abschließend werden die Beziehungen zur Beschreibung der Zwischenphasenkräfte, die an einer Einzelblase hergeleitet werden, nach Gleichung 4.1 ensemble-gemittelt, um den Übergang zu einer idealen, verdünnten Blasenströmung mehrerer Blasen zu erreichen.

#### 4.2.2 Widerstandskraft.

Wird eine Einzelblase mit der Geschwindigkeit  $\underline{u}_G$  in einer Flüssigkeit mit homogenem Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}_L$  translatorisch bewegt, so erfährt die Flüssigkeit bei der Umströmung der Blase einen Formwiderstand und einen Reibungswiderstand. Wie in Abbildung 4.4 gezeigt, nimmt der Druck auf der Zwischenphasenoberfläche an der Blasenvorderseite

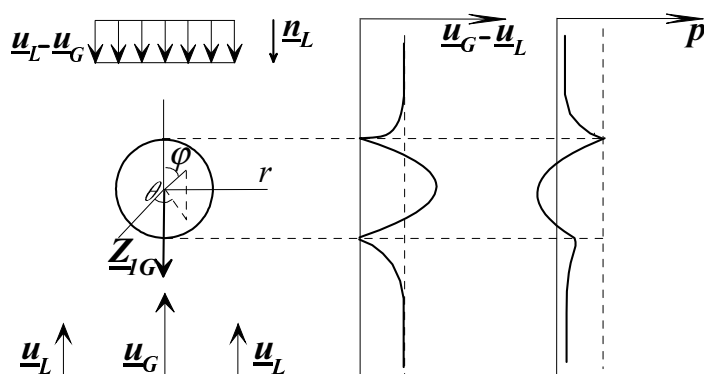


Abbildung 4.4: Widerstandskraft einer stationär und homogen umströmten Kugel.

ab. Stromab des Äquators der Blase nimmt der Druck wieder zu. Entsprechend nimmt die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Blasenvorderseite zu und an der Blasenhinterrseite ab. Der durch Reibungskräfte bewirkte Impulsverlust wird als Widerstandskraft oder im Angloamerikanischen als Drag-Force bezeichnet. Die Widerstandskraft ist für die Beschreibung einer viskosen Blasenumströmung von großer Bedeutung.

Zur analytischen Beschreibung des Gesamtwiderstands mit Gleichung 4.2 wird die stationäre, viskose Umströmung einer Einzelblase betrachtet. Die kugelförmige Einzelblase mit Durchmesser  $D_B$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_G$  im Flüssigkeitsfeld. Es wird ein mit  $\underline{\mathbf{u}}_G$  bewegtes, sphärisches Koordinatensystem  $(r, \theta, \varphi)$  eingeführt, das seinen Ursprung im Mittelpunkt der Blase hat. In großer Entfernung von der Blase, liegt eine gleichmäßige Anströmung des Flüssigkeitsfelds mit einer relativen Geschwindigkeit

$$\underline{\mathbf{u}}_R = \underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_G \quad , \quad \underline{\mathbf{u}}_R|_{r \rightarrow \infty} = u_\infty \underline{\mathbf{n}}_L = \underline{\mathbf{u}}_\infty \quad (4.13)$$

vor. Als Randbedingung an der Blasenoberfläche gilt die Haftbedingung mit  $\underline{\mathbf{u}}_R|_{r=\frac{D_B}{2}} = \underline{\mathbf{0}}$ . Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit geht kontinuierlich über in das Geschwindigkeitsfeld der Blase. Die viskose Strömung ist durch niedrige Reynolds-Zahlen  $Re_B = u_\infty D_B / \nu_L$  bestimmt.

Im weiteren wird unter Verweis auf Kapitel 2.1.1 auf die Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Strömung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}_R = 0 \quad (4.14)$$

und die stationäre Impulstransportgleichung

$$(\underline{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p + \nu_L \nabla^2 \underline{\mathbf{u}}_R \quad (4.15)$$

für eine Newtonsche Flüssigkeit mit der Schubspannung als

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_L = \rho_L \nu_L (\nabla \underline{\mathbf{u}}_L + \underline{\mathbf{u}}_L \nabla) \quad (4.16)$$

zurückgegriffen. Die Impulstransportgleichung ist durch den konvektiven Term der Trägheitskräfte nicht-linear. Für niedrige Reynolds-Zahlen sind die Trägheitskräfte gegenüber den Reibungskräften klein und können linearisiert werden zu  $(\underline{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R$ . Die analytische Lösung dieser linearisierten Gleichung wird nach Milne-Thomson (1974) als Oseensche Kugelumströmung bezeichnet. Für den Grenzwert  $Re_B \rightarrow 0$  sind die Trägheitsterme vernachlässigbar, und man erhält die analytische Lösung der Stokeschen Kugelumströmung.

Im folgenden wird für endliche, niedrige Werte von  $Re_B$  die stationäre, axialsymmetrische, Oseensche Umströmung einer kugelförmigen Blase betrachtet und aus der Integration der Druckverteilung und der Schubspannungsverteilung über die Blase der Gesamtwiderstand abgeleitet.

Die linearisierte Impulstransportgleichung der stationären Oseenschen Kugelumströmung ist

$$(\underline{\mathbf{u}}_\infty \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p + \nu_L \nabla^2 \underline{\mathbf{u}}_R \quad . \quad (4.17)$$

Wird die Rotation auf diese Gleichung angewandt, so ergibt sich nach Einführung einer Wirbelstärke  $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \underline{\mathbf{u}}_R$  und nach einigen Umformungen (siehe Anhang E) für diese viskose, drehungsbehaftete Strömung, die axialsymmetrisch um eine Achse in Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_L$  ist, folgende allgemeine Lösung:

$$\underline{\mathbf{u}}_R = -\nabla \Phi + \frac{\nu_L}{u_\infty} \nabla \chi - \underline{\mathbf{n}}_L \chi \quad . \quad (4.18)$$

Dabei ist  $\Phi$  eine sphärische harmonische Funktion, die die Lösung der Laplaceschen Gleichung ist. Sie macht das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei, so daß die Massentransportgleichung 4.14 erfüllt ist. Mit dem obengenannten Koordinatensystem und Randbedingungen hat  $\Phi$  folgende Form:

$$\Phi = -u_\infty r \cos \theta + \frac{3u_\infty D_B^2}{4Re_B} \left(1 + \frac{3}{16} Re_B\right) \frac{1}{r} - \frac{1}{8} u_\infty D_B^2 \frac{\cos \theta}{r^2} + O(r^{-3}) \quad . \quad (4.19)$$

Der Druck ist gegeben durch

$$\Delta p_{iL} = p - p_\infty = \rho_L u_\infty \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla \Phi \quad , \quad (4.20)$$

die Schubspannung ist für eine axialsymmetrische Umströmung gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_L &= \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \rho_L \nu_L (\nabla \underline{\mathbf{u}}_R) \\ &= \rho_L \nu_L (\nabla \times (\underline{\mathbf{n}}_L \times \underline{\mathbf{u}}_R) + (\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R) = \rho_L \nu_L (\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Durch Integration der Gleichung 4.20 und 4.21 über den Blasenrand kann der Gesamtwiderstand bei der Oseenschen Umströmung der Blase nach kurzer Umformung wie in Milne-Thomson (1974), siehe Anhang E, berechnet werden:

$$\int_{A_i} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_L \cdot \underline{\mathbf{n}}_L - \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L \right) dS = \frac{\pi D_B^2}{4} \frac{\rho_L u_\infty^2 \underline{\mathbf{n}}_L}{2} \frac{24}{Re_B} \left(1 + \frac{3}{16} Re_B\right) \quad . \quad (4.22)$$

Der Gesamtwiderstand für eine laminare Umströmung einer Blase ist somit proportional zum Quadrat der relativen Anströmungsgeschwindigkeit  $u_\infty^2 = |\langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G - \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L|^2$  mit einem von der Reynolds-Zahl abhängigen Widerstandskoeffizienten  $C_D = \frac{24}{Re_B} \left(1 + \frac{3}{16} Re_B\right)$ .

Aus der Form des Widerstandskoeffizienten ist zu erkennen, daß der Faktor  $\frac{24}{Re_B}$ , bekannt als Widerstandskoeffizient für eine Stokessche Kugelumströmung, mit einem von  $Re_B$  abhängige Korrekturterm erweitert ist. Allgemein hat Oseen angedeutet, daß die Korrektur für den Widerstandskoeffizienten mit einer Taylorreihe in  $Re_B$  dargestellt werden kann. Proudman und Pearson (1957) geben eine Methode mit angepaßten, asymptotischen Entwicklungen an, um die Korrekturterm höherer Ordnung in  $Re_B$  zu berechnen. Saffman (1965) wendet diese Methode an, um die Kräfte auf eine Kugel in einer langsamen Scherströmung zu berechnen.

Gleichung 4.22 ist gültig für die Widerstandskraft einer einzelnen, homogen umströmten Blase. Oseen hat den Einfluß benachbarter Blasen nachvollzogen. Seine analytische Ableitung deutet auf eine abstoßende Kraft hin, die zwei nebeneinander fallende Kugeln aufeinander ausüben. Dies wird von Legendre und Magnaudet (1998) bestätigt. Eine weitere numerische Arbeit von Smereka (1993) für  $N$  aufsteigende Blasen, behandelt als ein  $N$ -Körper-Problem zeigt eine Gruppierung der Blasen in horizontale Klusters, die aber nicht experimentell beobachtet werden konnte.

Hier erfolgt eine Verallgemeinerung von einer Einzelblase auf mehrere Blasen durch eine Ensemble-Mittelung von Gleichung 4.22. Die Ensemble-Mittelung der Gesamtwiderstandskraft mit Gleichung 4.1 für eine Blasenströmung mit  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  führt dann zu einer Widerstandskraft pro Volumen von:

$$\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{\mathbf{1L}} = C_D \frac{3\varepsilon_G}{4D_B} \rho_L |\langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G - \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L| (\langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G - \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L) \quad . \quad (4.23)$$

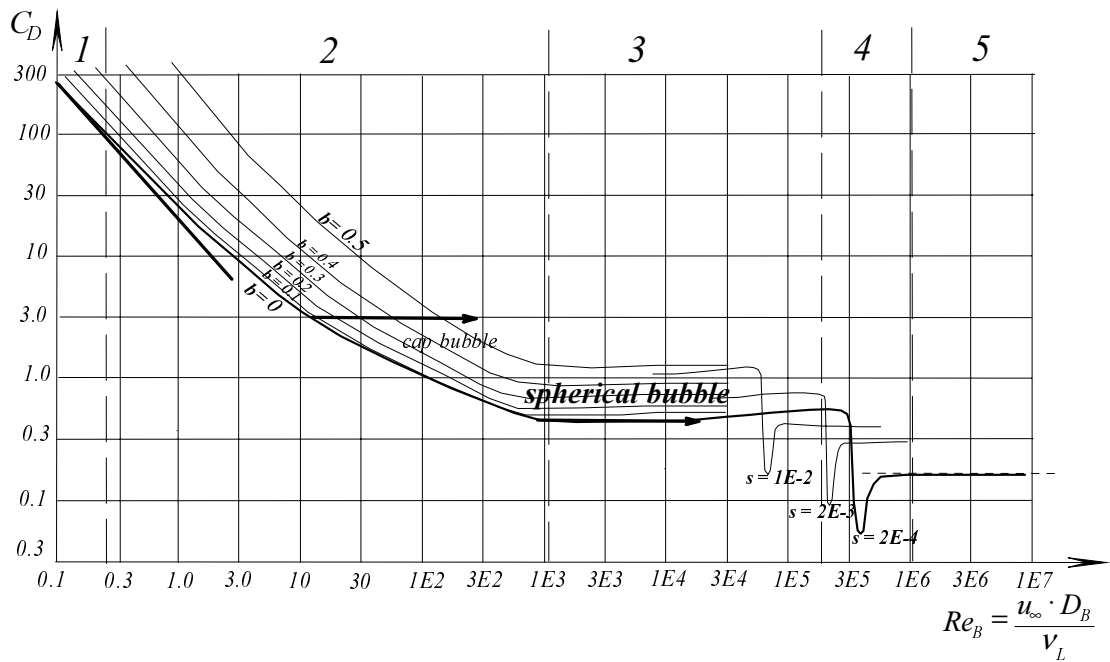


Abbildung 4.5: Standard-Widerstandskurve. Zwei externe Einflüsse sind wiedergegeben: a. Einfluß der naheliegenden Wände (Blockierung) mit  $b = D_B/d$ , b. Einfluß der Oberflächenrauigkeit der Kugel  $s = w_B/D_B$ .

<b>Kugelförmige Blasen</b>	$We < 2$	
<b>1</b> Stokescher Bereich	$Re_B < 0.2$	$C_D = \frac{24}{Re_B}$
<b>2</b> laminares Allensches Gebiet	$Re_B < 1000$	$C_D = \frac{24}{Re_B} (1 + 0.15 Re_B^{0.687})$ (Schiller et al. 1933)
		$C_D = \frac{24}{Re_B^*} (1 + 0.1 Re_B^{*0.75})$ (Ishii et al. 1978)
		mit $Re_B^* = Re_B (1 - 0.79 \varepsilon_G)^{\frac{0.14(\rho_G \nu_G + 0.4 \rho_L \nu_L)}{\rho_G \nu_G + \rho_L \nu_L}}$
<b>3</b> turbulentes Newtonsches Gebiet	$Re_B < 2.E5$	$C_D = 0.44$
		$C_D = \frac{24}{Re_B} + \frac{5.48}{Re_B^{0.573}} + 0.36$ (Ihme et al. 1972)
<b>5</b> turbulentes überkritisches Gebiet	$Re_B > 2.E5$	$C_D = 0.13$
<b>Nicht-kugelförmige Blasen</b>	$We > 2$	$C_D = \frac{2}{3} \left( \frac{E\ddot{o}}{1 - \varepsilon_G} \right)^{0.5}$ (Ishii et al. 1978)

Tabelle 4.1: Widerstandskoeffizient einer Blase in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl.

Der Widerstandskoeffizient  $C_D$  in Gleichung 4.23 ist dabei eine Funktion der Reynolds-Zahl  $Re_B$ .

Ansätze für den Widerstandskoeffizienten in einer Blasenströmung, die auf experimentellen Befunden basieren, sind in der Literatur durch mehrere Autoren angegeben, z. B. Schiller und Nauman (1933), Ishii und Zuber (1978). Der Widerstandskoeffizient als Funktion der

Reynolds-Zahl, oft als Standard-Widerstandskurve bezeichnet, ist in Abbildung 4.5 und Tabelle 4.1 wiedergegeben. Der Verlauf des Widerstandskoeffizienten einer Kugel, gültig für kleine, sphärische Blasen, wird oft als Standard-Widerstandskurve bezeichnet. Einflüsse der Oberflächenrauigkeit der Kugel oder der naheliegenden Wände werden angedeutet. Sie sind experimentellen Untersuchungen nach Achenbach (1974) entnommen. Achenbach hat einerseits festgestellt, daß der Widerstand einer Kugel für eine größere Blockierung des umgebenden Kanals und somit für einen höheren Parameter  $b = D_B/d$  zunimmt. Andererseits bewirkt eine rauhere Kugeloberfläche einen früheren Umschlag zu einem turbulenten Nachlauf mit entsprechend früherer Abnahme des Widerstandskoeffizienten. Der Parameter  $s = w_B/D_B$ , mit  $w_B$  als der Rauigkeit der Kugeloberfläche, bewirkt für zunehmende Werte eine Verschiebung der Widerstandskurve zu niedrigeren Reynolds-Zahlen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Widerstandskoeffizient für eine ideale Blasenströmung im turbulenten Strömungsbereich von  $1 \cdot 10^3 < Re_B < 2 \cdot 10^5$  mit der Korrelation von Ihme, Schmidt-Traub und Brauer (1972) bestimmt nach

$$C_D = \frac{24}{Re_B} + \frac{5.48}{Re_B^{0.573}} + 0.36 \quad . \quad (4.24)$$

Der erste Term der Korrelation 4.24 bestimmt den Wert von  $C_D$  im Stokesschen Gebiet. Die Summe der ersten zwei Terme der Gleichung 4.24 bestimmt den Wert im laminaren Gebiet. Für  $Re_B = 2 \cdot 10^3$  beträgt der Widerstandskoeffizient  $C_D = 0.44$ .

Große, sphärische Blasen zeigen generell niedrigere Werte für den Formwiderstand und die Reibung als Partikel. Das Verhältnis zwischen dem Formwiderstand und der Reibung bleibt aber unverändert. Der Widerstandskoeffizient für eine große sphärische Blase kann nach Haas, Schmidt-Traub und Brauer (1972) in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl ( $Re_B > 2$ ) durch die empirische Korrelation

$$C_D = 14.9 Re_B^{-0.78} \quad (4.25)$$

gegeben werden.

Ist die Deformation der Blasen mitzuberücksichtigen, so soll der Widerstandskoeffizient zusätzlich in Abhängigkeit der Eötvös-Zahl betrachtet werden. Nach Tomiyama (1998) kann für ein System Wasser-Luft mit höchstem Reinheitsgrad folgende Korrelation für den Widerstandskoeffizienten

$$C_D = \max \left[ \min \left[ \frac{16}{Re_B} (1 + 0.15 Re^{0.687}), \frac{48}{Re_B} \right], \frac{8}{3} \frac{E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 4} \right] \quad (4.26)$$

angewendet werden. Liegt eine leichte Kontamination des Wassers vor, so schlägt Tomiyama folgende Korrelation für  $C_D$  in Abhängigkeit von  $Re_B$  und  $E\ddot{o}$  vor:

$$C_D = \max \left[ \min \left[ \frac{24}{Re_B} (1 + 0.15 Re^{0.687}), \frac{72}{Re_B} \right], \frac{8}{3} \frac{E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 4} \right] \quad . \quad (4.27)$$

### 4.2.3 Auftriebskraft.

Wird eine Einzelblase mit der Geschwindigkeit  $\underline{u}_G$  in einer Flüssigkeit mit nicht-homogenem Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}_L(\mathbf{r})$  translatorisch bewegt, so erzeugt die Scherströmung eine senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wirkende Kraft auf die Blase. Diese Kraft entspricht der Auftriebskraft von nicht-symmetrischen Körperumströmungen der Potentialströmungen. Im Angloamerikanischen wird diese Kraft als Lift-Force bezeichnet. Die in der flüssigen



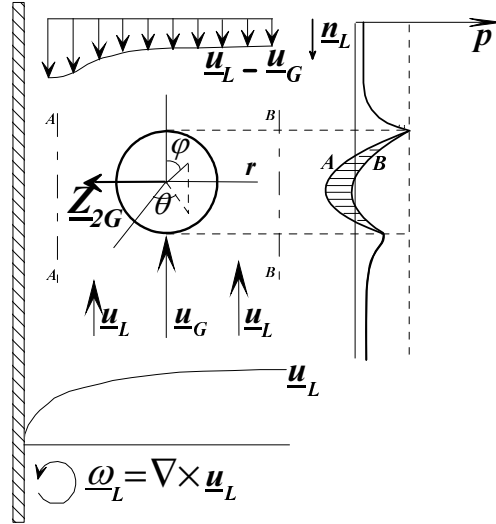


Abbildung 4.6: Auftriebskraft auf eine ungleichmäßig umströmte Blase.

Phase vorliegenden Geschwindigkeitsgradienten führen zu einer ungleichmäßigen Umströmung der Blase, siehe Abbildung 4.6. Es entsteht auf der Blasenoberfläche eine Saugseite mit hoher Strömungsgeschwindigkeit und eine Druckseite mit niedriger Strömungsgeschwindigkeit. Das hat zur Folge, daß eine Querkraft auf die Blase wirkt.

Zur analytischen Beschreibung der Gesamtkraftwirkung mit Gleichung 4.2 wird analog zur Herleitung der Widerstandskraft die stationäre, viskose Umströmung einer Einzelblase für niedrige Reynolds-Zahlen betrachtet. Das vorliegende, relative Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist jetzt nicht-homogen. Es wird deshalb zweckmäßig in ein axialsymmetrisches Feld  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}}$  und ein nicht-axialsymmetrisches Feld  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}$  zerlegt. Eine kugelsymmetrische Blase führt zu einer axialsymmetrischen Beeinflussung des relativen Geschwindigkeitsfelds der Flüssigkeit, so daß für  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}}$  die für die Widerstandskraft abgeleitete Lösung nach Gleichung 4.18 gilt. Die Lösung 4.18 ist nur gültig für Strömungsfelder, die parallel zur Symmetrieachse in Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}}$  sind und eine Wirbelstärke  $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\text{RS}} = \nabla \times \underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}}$  senkrecht zu  $\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}}$  haben. Gleichung 4.18 ergibt die Kraftwirkung, die als Widerstand vom Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}}$  verursacht wird. Das nicht-axialsymmetrische Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}$  mit einer Wirbelstärke  $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\text{RT}} = \nabla \times \underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}$ , die nicht senkrecht zu  $\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}}$  ist, bleibt durch die Blase unverändert. Die Kraftwirkung, die als Widerstand vom Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}$  verursacht wird, hat also keine Komponente in Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}}$ .

Somit bleibt der Ausdruck für den Druck nach Gleichung 4.20 gültig. Der Ausdruck für die Schubspannung ergibt sich zu

$$\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_{\text{L}} = \underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \cdot \rho_L \nu_L (\nabla (\underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}} + \underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}})) = \rho_L \nu_L (\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}) + (\underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_{\text{RS}}) \quad (4.28)$$

Damit kann die gesamte Kraftwirkung auf die Einzelblase für die nicht-homogene, Oseen-sche Umströmung berechnet werden als:

$$\int_{A_i} \left( \underline{\boldsymbol{\tau}}_{\text{L}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} - \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \right) dS = \frac{\pi D_B^2 \rho_L u_\infty^2 \underline{\mathbf{n}}_{\text{L}}}{4} \frac{24}{2 Re_B} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_B \right) \quad (4.29)$$

$$+ \rho_L \int_{A_i} \nu_L \underline{\mathbf{n}}_{\text{L}} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_{\text{RT}}) dS \quad .$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von Gleichung 4.29 ist identisch mit Gleichung 4.22 und liefert den Ausdruck für die Widerstandskraft. Das zweite Integral, das die Auftriebskraft beschreibt, kann nach kurzer Umformung, siehe Anhang E, geschrieben werden als:

$$\int_{Ai} \nu_L \underline{\mathbf{n}}_L \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_{RT}) dS = \frac{\pi D_B^3}{6} \underline{\mathbf{u}}_{RT} \times \nabla \times u_\infty \underline{\mathbf{n}}_L \quad . \quad (4.30)$$

Gleichungen 4.29 und 4.30 liefern den Ausdruck für die gesamte Kraft auf eine Kugel nach der Oseenschen Betrachtungsweise.

Moore und Saffman (1968) haben den Ausdruck für die Kraft, die eine feste Kugel in einer viskosen, linearen Scherströmung erfährt, neu hergeleitet zu:

$$\left| \int_{Ai} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_L \cdot \underline{\mathbf{n}}_L - \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L \right) dS \right| = 0.343 \frac{\pi D_B^2}{4} \frac{24}{Re_B} \frac{\rho_L u_\infty^2 D_B}{4} \left| \frac{(\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_L}{\nu_L} \right|^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.31)$$

Dieses Resultat ist gültig, wenn die Geschwindigkeitsänderung in der Flüssigkeit über die Kugel bedeutend größer ist als die Relativgeschwindigkeit der Kugel. Dafür ist eine sehr starke Scherströmung bei kleinen festen Kugeln notwendig. McLaughlin (1991) hat den Ausdruck 4.31 von Saffman auf moderate Scherströmungen angepaßt. Legendre und Magnaudet (1997) erweiterten den Ausdruck für die Kraft für einen kugelförmigen Tropfen oder eine kugelförmige Blase mit arbiträrer Viskosität in einer Scherströmung mit niedrigem  $Re_L$  und lieferten:

$$\left| \int_{Ai} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_L \cdot \underline{\mathbf{n}}_L - \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L \right) dS \right| = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3\rho_G \nu_G + 2\rho_L \nu_L}{\rho_G \nu_G + \rho_L \nu_L} \right)^2 \left( Re_B \frac{|\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}_L|}{u_\infty / D_B} \right)^{\frac{1}{2}} F \left( \frac{|\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}_L|^{\frac{1}{2}}}{u_\infty / \nu_L} \right) \quad . \quad (4.32)$$

Dabei ist  $F$  ein numerisch auszuwertendes Integral, das die Gleichung 4.32 für den Grenzwert  $|\nu_L (\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_L|^{\frac{1}{2}} / u_\infty \rightarrow \infty$  auf den Ausdruck 4.31 von Saffman zurückführt. Aus dem Resultat von Magnaudet ist festzustellen, daß im Bereich von niedrigen Reynolds-Zahlen die Auftriebskraft auf einer Einzelblase proportional ist zur Wurzel von der Wirbelstärke der Flüssigkeit an der Blasenoberfläche. Gleichung 4.31 wurde in Sato, Hishida und Maeda (1996) zur Modellierung eines turbulenten Sprühstrahls entlang einer Wand angewendet. Da für Bereiche höherer Reynolds-Zahlen die Auftriebskraft in einer moderaten Scherströmung als proportional zur Wirbelstärke der Flüssigkeit angenommen werden kann, siehe Auton (1987) und Antal, Lahey und Flaherty (1991), wird in dieser Arbeit mit Gleichung 4.30 weitergearbeitet.

Gleichung 4.30 kann von einer Einzelblase auf eine Blasenströmung mit  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  verallgemeinert werden. Nach einer Ensemble-Mittelung läßt sich für eine Blasenströmung in einer Oseenschen Näherung eine Auftriebskraft pro Volumen mit einem Auftriebskoeffizienten  $C_L$  modellieren als

$$\underline{\mathbf{Z}}_{2L} = C_L \rho_L \varepsilon_G (\langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G - \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L) \times \langle \nabla \times \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \quad . \quad (4.33)$$

In Auton (1987) wurde die Auftriebskraft für eine Einzelblase proportional zur Wirbelstärke der Flüssigkeit berechnet mit einem Auftriebskoeffizienten  $C_L = 0.5$ . In einer Verallgemeinerung wird der Ausdruck für die Auftriebskraft 4.33 auf andere Strömungsformen angewandt, indem für den Auftriebskoeffizienten  $C_L$  empirische Werte eingesetzt werden. Der Auftriebskoeffizient  $C_L$  ist nach Lahey (1995) für stark viskose Strömungen gleich 0.01

und für schwach viskose Strömungen gleich 0.1. Für schwach viskose, ideal verdünnte Blasenströmungen nimmt  $C_L$  nach Zun (1980) Werte bis zu 0.25 an. Nach Lance und Lopez de Bertodano (1994) erreicht  $C_L$  für solche Strömungen einen Wert von 0.3. Nach Anglart, Nylund, Kurul und Podowski (1993) ist für Blasenströmungen in Wasser  $C_L = 0.5$  ein guter Näherungswert.

Als zusätzlicher physikalischer Effekt kann die Blase um ihren Schwerpunkt rotieren. Die aus dieser Rotation stammende zusätzliche Wirbelstärke bewirkt eine resultierende Kraft, die als Magnuskraft bezeichnet wird. Sie verstärkt i. a. die Auftriebskraft. Nach Beyerlein, Cossmann und Richter (1985) kann die Magnuskraft für Blasenströmungen vernachlässigt werden.

Wird weiter die Deformation der Blase betrachtet, so muß der Auftriebskoeffizient in Abhängigkeit der Eötvös-Zahl modelliert werden. Tomiyama, Sou, Zun, Kanami und Sakaguchi (1995) haben festgestellt, daß für hohe  $Eö$ -Zahlen eine deformierte Blase durch die Wirbel im Nachlauf mit Schlagseite liegen bleiben. Dies kann eine Bewegung der Blase in Richtung Rohrmitte bewirken. Die Wechselwirkung zwischen dem Wirbel hinter der deformierten Blase und dem äußeren Scherströmungsfeld kann durch einen zusätzlichen, von der  $Eö^*$ -Zahl abhängigen Anteil im Auftriebskoeffizienten modelliert werden. Für kleine Blasen mit  $Eö \leq 10$  geben Tomiyama et al.

$$C_L = \min [0.288 \tanh(0.121 Re_B), 0.00105 Eö^{*3} - 0.0159 Eö^{*2} - 0.0204 Eö^* + 0.474] \quad (4.34)$$

an. Dieser Ausdruck für den Auftriebskoeffizienten liefert einen positiven Wert und somit eine Bewegung der kleinen Blase in Richtung der Rohrwand. Für große Blasen mit  $Eö > 10$  wird ein negativer Auftriebskoeffizient  $C_L = -0.29$  angegeben, so daß sich die großen Blasen zur Rohrmitte hinbewegen. Für das System Wasser-Luft unter atmosphärischem Druck ändert der Auftriebskoeffizient, gegeben unter 4.34, sein Vorzeichen bei einem Blasendurchmesser  $D_B = 5.6 \text{ mm}$ . Man kann damit erwarten, daß Blasen mit  $D_B < 5.6 \text{ mm}$  zur Rohrwand hin wandern, während sich größere Blasen zur Rohrmitte bewegen. Um den Effekt der Auftriebskraft physikalisch vollständig bewerten zu können, müssen Blasen unterschiedlicher Größe betrachtet werden. Das heißt, daß verschiedene Blasenklassen mit unterschiedlichen Blasendurchmessern modelliert werden müssen.

Die Magnuskraft und die Deformationseffekte werden im Rahmen dieser Arbeit bei der numerischen Implementierung nicht betrachtet.

#### 4.2.4 Wandkraft.

Bei Annäherung an die Wand ändert sich die Geschwindigkeitsverteilung um die Blase so, daß die Auftriebskraft im Wandbereich nicht mehr mit Gleichung 4.33 beschrieben werden kann. Um die Blasen nicht bis in die Wand vordringen zu lassen, muß ein Wandeffekt eingebracht werden, der z. B. der Auftriebskraft für kleine Blasen entgegenwirkt. Zur Modellierung dieses Wandeffekts wird von Antal et al. (1991) eine Wandkraft eingeführt. Im Angloamerikanischen wird diese Kraft als Wall Lubrication Force bezeichnet. Eine analytische Ableitung für diese Wandkraft kann bis heute nicht gegeben werden. Antal et al. (1991) gibt folgende analytische Abschätzung an. Dabei geht Antal von einem zweidimensionalen Bild einer kugelförmigen, rotierenden Blase aus, die einen Abstand  $y_w$  von der Wand hat, siehe Abbildung 4.7. Das Koordinatensystem  $(y, z)$  wird so gewählt, daß die  $y$ -Achse durch den Blasenmittelpunkt geht und daß die  $z$ -Achse mit der Wand zusammenfällt. Die Wand kann als Spiegelfläche betrachtet werden, so daß die Wand durch das

Spiegelbild der rotierenden, kugelförmigen Blase ersetzt werden kann. Anstatt die Umströmung einer Kugel in Wandnähe zu betrachten, beschreibt Antal die Potentialströmung einer Flüssigkeit mit Relativgeschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}}|_{r \rightarrow \infty} = -u_{\infty} \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{L}}$  zwischen zwei entgegengesetzt drehenden Zylindern mit Durchmesser  $D_B$ , die einen Abstand  $2 y_w$  voneinander haben. Diese Potentialströmung wird durch die in Anhang E angegebene komplexe Funktion  $\Phi + i\Psi$  gegeben. Nach Anwendung des Blasiuschen Theorems und des Cauchyschen Residuensatzes bekommt man:

$$Y = 2\pi \rho_L u_{\infty}^2 \left( \frac{\Gamma}{u_{\infty}} \left( 1 + \frac{D_B^2}{8y_w} \right) - \frac{D_B^4}{64y_w^3} - \frac{\Gamma^2}{2y_w u_{\infty}^2} \right) \quad , \quad (4.35)$$

siehe Anhang E für die Kraft  $Y$  ausgeübt auf den Körper. Für die Wandkraft auf eine Blase muß dabei die Zirkulation  $\Gamma$  in Abhängigkeit von  $u_{\infty}$ ,  $D_B$ ,  $u_G$  und  $y_w$  bestimmt werden. Eine Verallgemeinerung auf mehrere Blasen erfolgt auch hier durch eine Ensemble-Mittelung. Antal gibt folgenden Ausdruck für die Wandkraft an, die den Gasvolumenanteil im Wandbereich verleichmäßig und die Durchdringung der Wand verhindert:

$$\underline{\mathbf{Z}}_{2\mathbf{b}_L} = -C_W \varepsilon_G \rho_L \frac{2}{D_B} |(\underline{\mathbf{u}}_G)_G - (\underline{\mathbf{u}}_L)_L|^2 \cdot \underline{\mathbf{n}}_r \quad . \quad (4.36)$$

Dabei wird der Wandkoeffizient als eine Funktion des Abstands  $y_w$  von der Wand

$$C_W = \max \left[ 0, \left( -0.104 - 0.06 |(\underline{\mathbf{u}}_G)_G - (\underline{\mathbf{u}}_L)_L| + 0.147 \frac{D_B}{2 y_w} \right) \right] \quad (4.37)$$

angegeben.

Tomiyama et al. (1995) deutet auf eine zu große Tragweite der mit Gleichung 4.36 berechneten Wandkraft und schlägt folgende mit experimentellen Daten verbesserte Korrelation für die Wandkraft vor

$$\underline{\mathbf{Z}}_{2\mathbf{b}_L} = C_W \frac{D_B}{2} (y_w^{-2} - (d - y_w)^{-2}) \rho_L |(\underline{\mathbf{u}}_G)_G - (\underline{\mathbf{u}}_L)_L \cdot \underline{\mathbf{n}}_z|^2 \cdot \underline{\mathbf{n}}_r \quad , \quad (4.38)$$

mit einem Wandkoeffizienten in Abhängigkeit der Eötvös-Zahl:

$$\begin{aligned} C_W &= \exp(-0.933 E\ddot{o} + 0.179) && \text{für } 1 \leq E\ddot{o} \leq 5 \quad , \\ C_W &= 0.007 E\ddot{o} + 0.04 && \text{für } 5 \leq E\ddot{o} \leq 33 \quad . \end{aligned} \quad (4.39)$$

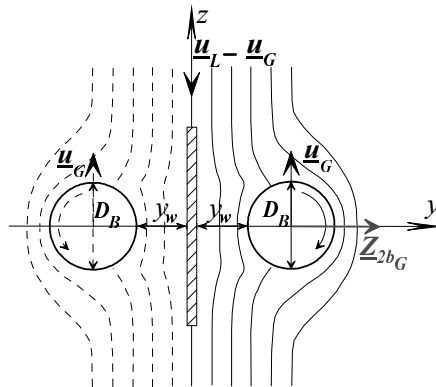


Abbildung 4.7: Wandkraft auf eine Blase.

Da die Wandkraft nur eine Korrektur der Auftriebskraft in Wandnähe bewirkt, wird die Wandkraft in dieser Arbeit nicht numerisch implementiert. Stattdessen wird, um den gewünschten Wandeffect zu erreichen, der Volumenanteil der Blasen an der Rohrwand durch eine vorgegebene Randbedingung explizit zu Null gezwungen.

#### 4.2.5 Virtuelle Massenkraft.

Wird eine stationär von einer Flüssigkeit umströmte Blase gegenüber der Flüssigkeit beschleunigt, so wird das Feld der Relativgeschwindigkeit zwischen Blase und Flüssigkeit verändert (Abbildung 4.8). Für die Beschleunigung der Blase gegenüber der Flüssigkeit muß zusätzlich zur Arbeit für die Beschleunigung der Blase selbst auch Arbeit zur Beschleunigung einer der Blase umgebenden Flüssigkeit geleistet werden. Der verdrängte Flüssigkeitsrand um die Blase liefert in der Modellvorstellung nach Lamb (1973) eine zusätzliche, sogenannte Virtuelle Masse  $M'_B$  der Blase, die im Angloamerikanischen als Virtual Mass bezeichnet wird. Die Kraftwirkung durch diese Virtuelle Masse wird mit einer Virtuellen Massenkraft modelliert. Im Gegensatz zu der Widerstandskraft gewinnt die Virtuelle Massenkraft erst für Blasenströmungen an Bedeutung, die durch Trägheitskräfte bestimmt sind, das heißt für Blasenumströmungen mit vernachlässigbarem Zähigkeitseinfluß.

Zur analytischen Beschreibung des Gesamtwiderstands mit Gleichung 4.2 wird die instationäre, nicht-viskose Umströmung einer Blase betrachtet. Eine kugelförmige Einzelblase mit dem Durchmesser  $D_B$  und der Geschwindigkeit  $\underline{u}_G$  wird in einer Flüssigkeitsströmung der Geschwindigkeit  $\underline{u}_L$  gegenüber der Flüssigkeit beschleunigt. Es wird ein festes, sphärisches Koordinatensystem  $(r, \theta, \varphi)$  gewählt, das seinen Ursprung im Blasenmittelpunkt hat. Als Randbedingungen werden in großer Entfernung von der Blase ein homogenes Flüssigkeitsfeld mit relativer Geschwindigkeit  $u_\infty \underline{u}_L$  angesetzt. An der Blasenoberfläche wird ein stetiger Übergang zwischen dem Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit und dem Geschwindigkeitsfeld des Gases gefordert:

$$\underline{u}_G \cdot \underline{r}|_{r=D_B/2} = \underline{u}_L \cdot \underline{r}|_{r=D_B/2} \quad . \quad (4.40)$$

Diese schwach-viskose Strömung ist durch hohe Reynolds-Zahlen  $Re_B = u_\infty D_B / \nu_L$  bestimmt. Für den Fall  $Re_B \rightarrow \infty$  werden die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften vernachlässigt, so daß der bei der Blasenbewegung durch die Flüssigkeit zu überwindende Gesamtwiderstand analytisch berechnet werden kann. Unter Vernachlässigung der Schub-

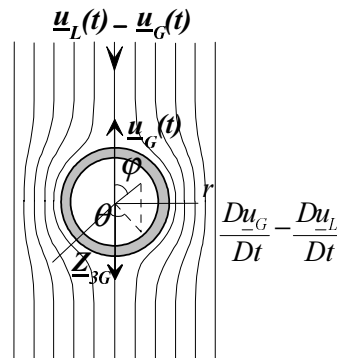


Abbildung 4.8: Virtuelle Masse einer reibungsfrei umströmten, beschleunigten Blase.

spannung wird der Gesamtwiderstand durch Integration der Normalspannungen über die Blasenoberfläche abgeleitet.

Ausgehend von der allgemeinen Massen- und Impulstransportgleichung aus Kapitel 2.1.1 zur Beschreibung der inkompressiblen, instationären, nicht-viskosen Flüssigkeitsströmung folgt die Eulersche Gleichung zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}_L}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_G) \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}_L = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p \quad . \quad (4.41)$$

Für eine nicht-viskose, drehungsfreie Strömung mit  $\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_L = 0$  kann ein Potential  $\Phi_L$  mit

$$\underline{\mathbf{u}}_L = \nabla \Phi_L \quad (4.42)$$

eingeführt werden. Die Eulersche Gleichung 4.41 vereinfacht sich nach kurzer Umformung, siehe Anhang E, zur generalisierten Bernoullischen Gleichung in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_s \nabla \Phi_L ds \right) - (\underline{\mathbf{u}}_G \cdot \nabla) \Phi_L + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_L)^2 + \frac{1}{\rho_L} \int_s \nabla p_L ds = C_s(t) \quad . \quad (4.43)$$

Die Bernoullische Gleichung liefert für die Integration der Normalspannungen

$$\int_{Ai} \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L dS = -\rho_L \int_{Ai} \left( \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - (\underline{\mathbf{u}}_G \cdot \nabla) \Phi_L + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_L)^2 \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_L dS \quad . \quad (4.44)$$

Zur Berechnung von Gleichung 4.44 wird zuerst das Potential  $\Phi_L$  des Geschwindigkeitsfelds der Flüssigkeit bestimmt. Für eine detaillierte Ableitung wird nach Anhang E referiert. Ähnlich wie bei der Herleitung der Widerstandskraft in Kapitel 4.2.2 ist auch hier das Potentialfeld eine Lösung der Laplaceschen Gleichung und kann als eine Reihe von sphärischen harmonischen Funktionen, wie in Gleichung 4.19 ausgedrückt werden. Liegt zum Anfang bei  $t = 0$  eine axialsymmetrische, homogene Kugelumströmung vor, so setzt sich nach dem Butlerschen Kugeltheorem das Potential  $\Phi_L$  aus einem Anteil für eine homogene Anströmung  $\Phi_\infty$  und aus einem Anteil für eine Dipolströmung  $\Phi_d$  zusammen. Das bedeutet, daß bei  $t = 0$  dem Potential der Anströmung ein Störungspotential in Form einer Dipolströmung überlagert ist:  $\Phi_L = \Phi_\infty + \Phi_d$ . Bewegt sich nun die kugelförmige Blase in der Zeit  $t$  relativ gegenüber die Flüssigkeit, so werden neue Störfelder induziert. Die Störungspotentiale stellen ebenfalls Dipolströmungen mit einer in der kugelförmigen Blase liegenden Singularität dar.

Mit diesem Potentialfeld  $\Phi_L = \Phi_\infty + \sum_i \Phi_{di}$  kann die rechte Seite der Gleichung 4.44 nach Pauchon und Banerjee (1986) weiter umgeformt werden, siehe Anhang E. Dabei wird jetzt die Lagrangesche Darstellung gewählt. Mit der Umformulierung

$$\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \quad (4.45)$$

ergibt sich für den Formwiderstand

$$\int_{Ai} \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L dS = \rho_L \frac{\pi D_B^3}{6} \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} - \frac{1}{2} \rho_L \frac{\pi D_B^3}{6} \left( \frac{D_G \underline{\mathbf{u}}_G}{Dt} - \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} \right) \quad . \quad (4.46)$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Beschleunigung der Blase selbst dar. Der zweite Term beschreibt die zusätzliche Beschleunigung des Flüssigkeitsfilms um die Einzelblase. Der zweite Term liefert damit die über die Blasenoberfläche integrierte Virtuelle Massenkraft.

Nach einer Mittelung der Gleichung 4.46 über  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  und unter Verwendung der Gleichung 4.1 erhält man folgenden Ausdruck für die zusätzliche Virtuelle Massenkraft pro Volumen:

$$\underline{\mathbf{z}}_{3L} = C_{VM} \varepsilon_G \rho_L \left( \frac{D_G}{Dt} \langle \underline{\mathbf{u}}_G \rangle_G - \frac{D_L}{Dt} \langle \underline{\mathbf{u}}_L \rangle_L \right) \quad . \quad (4.47)$$

Die Virtuelle Massenkraft ist proportional zu der totalen Änderung der Relativgeschwindigkeit in der Zeit mit einem Virtuellen Massenkoeffizienten  $C_{VM}$ . Der Virtuelle Massenkoeffizient  $C_{VM}$  ergibt sich nach Gleichung 4.46 für eine Einzelblase zu  $C_{VM} = 0.5$ . Damit kann die Virtuelle Masse als die zusätzliche Masse interpretiert werden, die sich durch eine Erhöhung der Gasdichte um die halbe Flüssigkeitsdichte ergibt. Die Virtuelle Massenkraft wird in verschiedenen, theoretischen Arbeiten für eine aufsteigende Einzelblase und gekoppelt mit der Auftriebskraft untersucht, siehe z. B. Saffman (1965) und Felderhof (1991). Für eine Blasenströmung, in der die Auftriebskraft dominiert, ist die Virtuelle Massenkraft jedoch von geringer Bedeutung.

In einer erweiterten, theoretischen Ableitung nach Clift et al. (1978) tritt in Gleichung 4.46 ein zusätzlicher Term auf, der die Geschichte der Wirbelablösung im Nachlauf der Blase beschreibt. Mit der Virtuellen Massenkraft wird die zusätzliche Arbeit für die Verdrängung der Flüssigkeit um eine momentan beschleunigte Blase betrachtet, ohne daß Rücksicht auf die vorhergehende Änderungen in der Blasenbewegung genommen wird. Soll die Geschichte in der Blasenbewegung berücksichtigt werden, so muß auch eine zusätzliche Arbeit für die Verdrängung der Flüssigkeit, verursacht durch vorhergehende Änderungen in der Blasenbewegung  $t - s$  in der Zeit zurück, in Rechnung gebracht werden. Basset, Boussinesq und Oseen leiteten für den Fall kleiner Reynolds-Zahlen folgenden zusätzlichen Term ab:

$$\begin{aligned} \int_{Ai} \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L dS &= \rho_L \frac{\pi D_B^3}{6} \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} - \frac{1}{2} \rho_L \frac{\pi D_B^3}{6} \left( \frac{D_G \underline{\mathbf{u}}_G}{Dt} - \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} \right) \\ &+ 6 \sqrt{\frac{\nu_L}{\pi}} \rho_L \frac{\pi D_B^2}{4} \int_{-\infty}^t \left( \frac{D_G \underline{\mathbf{u}}_G}{Ds} - \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Ds} \right) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \quad , \quad (4.48) \end{aligned}$$

der als Basset'sches Historie-Integral oder Historiekraft, im Angloamerikanischen History-Force bezeichnet wird. Der Ausdruck für die Historiekraft wurde von Mei und Adrian (1992) auf den Fall größerer Reynolds-Zahlen erweitert, für den ein Zerfall mit  $t^{-2}$  anstatt mit  $t^{-\frac{1}{2}}$  für die Kraft angegeben wird. Durch die schnelle Abnahme in der Zeit trägt die Historiekraft weniger als 20 % zu der Virtuellen Massenkraft bei. Nach Domgin, Huilier, Karl, Gardin und Burnage (1998) konnte bisher kein Einfluß der Historiekraft auf die Dispersion von Blasen in einer turbulenten Rohrströmung festgestellt werden. Deswegen wird die Historiekraft für die numerische Modellierung in dieser Arbeit vernachlässigt.

## 4.2.6 Turbulente Diffusionskraft.

Im folgenden wird die Dispersion von Blasen in einer turbulenten, verdünnten Blasenströmung beschrieben. Dabei wird die Wechselwirkung zwischen Blasen und der turbulenten

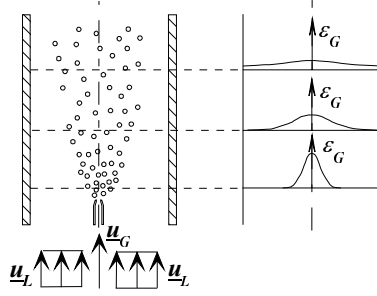


Abbildung 4.9: Turbulente Diffusion von Blasen.

Schwankungsbewegung der kontinuierlichen Phase betrachtet. Turbulente Schwankungen der Flüssigkeitsgeschwindigkeit bewirken eine Dispersion der Blasen, die als turbulente Diffusion, oder im Angloamerikanischen auch als Turbulophoresis bezeichnet wird. Die bisher abgeleiteten Zwischenphasenkräfte sind gemittelte Kräfte auf die Blase und berücksichtigen nur den Gesamtwiderstand durch die gemittelte Größen in der Flüssigkeitsströmung. Zur Beschreibung der turbulenten Diffusion gibt es zwei Betrachtungsweisen. In einer ersten Betrachtungsweise nach Simonin (1990) werden die turbulenten Druckschwankungen auf der Blasenoberfläche explizit beschrieben und daraus eine turbulente Diffusionskraft modelliert. In einer zweiten Betrachtungsweise nach Lopez de Bertodano (1998) resultiert die turbulente Diffusion in einem Punkt aus den Schwankungskomponenten der Kräfte, die auf alle, durch diesen Punkt gehenden Blasen ausgeübt werden. Beide im folgenden beschriebenen Betrachtungsweisen sind konsistent miteinander und liefern einen eindeutigen Ausdruck für die Turbulente Diffusionskraft.

Zur analytischen Beschreibung des Gesamtwiderstands mit Gleichung 4.2 hat Simonin analog zur Herleitung der Virtuellen Massenkraft die schwach-viskose Umströmung einer Einzelblase für hohe Reynolds-Zahlen betrachtet. Die Druckschwankungen auf der Blasenoberfläche werden in der Virtuellen Massenkraft als ensemble-gemittelt über die disperse Phase betrachtet. Der durch die Druckschwankungen bewirkte Anteil wird hier als Turbulente Diffusionskraft modelliert und schreibt sich nach Simonin und Bel F'dhila (1992) als

$$\int_{A_i} \Delta p_{iL} \cdot \mathbf{n}_L dS = \int_{A_i} \langle \Delta p_{iL} \rangle_G \cdot \mathbf{n}_L dS + \int_{A_i} \Delta p'_{iL} \cdot \mathbf{n}_L dS \quad . \quad (4.49)$$

Dabei wird  $\Delta p'_{iL}$  durch die Schwankung der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{u}'_R$  verursacht. Die Dispersion von Partikeln erfolgt somit durch die turbulente Schwankungsbewegung der Flüssigkeitsströmung. Für  $\mathbf{u}'_R$  hat Simonin dabei folgende Gleichung

$$\mathbf{u}'_R = -\tau_G \langle \mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_G \rangle_G \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_G} \nabla \varepsilon_G - \frac{1}{\varepsilon_L} \nabla \varepsilon_L \right) \quad (4.50)$$

angegeben<sup>1</sup>. Dabei ist  $\tau_G$  eine charakteristische Zeitskala für die turbulente Flüssigkeitsbewegung, die die Partikel erfahren. Sie ist ein Maß für die Interaktionszeit zwischen

<sup>1</sup>Diese Gleichung basiert auf dem Grenzfalle für Partikeln mit unendlich kleinem Durchmesser. Für diesen Fall muß die Gleichung für die Schwankung der Relativgeschwindigkeit auf eine einfache Korrelation zwischen dem Volumenanteil der dispersen Phase und den turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen der kontinuierlichen Phase zurückgeführt werden.



dem Partikel und dem turbulenten Wirbel und soll im Verhältnis zu der charakteristischen Zeitskala der energetischen, turbulenten Wirbel  $\tau_L$  klein sein. Weiter stellt  $\langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G$  den Dispersionstensor für die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen der beiden Phasen dar. Die Geschwindigkeitsschwankungen können mit der turbulenten kinetischen Energie der flüssigen Phase  $k_L$  verknüpft werden. Nach kurzer Umformung, siehe Anhang E, erfolgt damit nach Simonin (1990) für eine verdünnte Partikelströmung mit homogener Turbulenz folgende Dispersionsgleichung:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \Delta p'_{iL} \cdot \underline{\mathbf{n}}_L dS = \rho_L F \left( \frac{\tau_G}{\tau_L} \right) k_L \cdot \nabla \varepsilon_G \quad . \quad (4.51)$$

In einer zweiten Betrachtungsweise zur analytischen Beschreibung des Gesamtwiderstands mit Gleichung 4.2 beruft Lopez de Bertodano sich auf eine Arbeit von Reeks, in der der Transport von Partikeln in einer turbulenten Strömung mit Hilfe einer Boltzmann-Gleichung aus der kinetische Gastheorie beschrieben wird. In Reeks (1991) wird eine Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion abgeleitet, die die Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Partikel im Phasenraum beschreibt. In Reeks (1992) wird die Eulersche Impulsgleichung für die Partikelströmung aus dem ersten Moment der ensemble-gemittelten Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion abgeleitet. Aus diese Analyse resultiert für den Dispersionseffekt durch turbulenten Partikeltransport eine Kraft, die Turbulente Diffusionskraft. Für den Fall homogener Turbulenz kann diese Turbulente Diffusionskraft nach Lopez de Bertodano (1998) geschrieben werden als:

$$\underline{\mathbf{Z}}_{4G} = -\rho_G \frac{\tau_G}{\tau_L} \frac{\tau_G}{\tau_G + \tau_L} \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_L \rangle_G \cdot \nabla \varepsilon_G \quad . \quad (4.52)$$

Die vollständige Schließung des Zwei-Fluid-Modells wird durch das k-epsilon-Turbulenzmodell gegeben. In dem Turbulenzmodell werden  $\langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_L \rangle_G$  und  $\tau_L$  mit der turbulenten kinetischen Energie  $k_L$  und der Dissipationsrate  $\epsilon_L$  der flüssigen Phase verknüpft:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{u}}'_{Ll} \underline{\mathbf{u}}'_{Lm} \rangle_G &= \underline{\underline{C}}_{lm} k_L \quad , \\ \tau_L &= 0.165 \frac{k_L}{\epsilon_L} \quad . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Für die Zeitskala  $\tau_G$  der dispersen Phase gibt Lopez de Bertodano folgende Korrelation in Abhängigkeit des Widerstandskoeffizienten  $C_D$  an:

$$\tau_G = \frac{4}{3} \frac{D_B^2}{\nu_G} \frac{1}{Re_B \cdot C_D} \quad . \quad (4.54)$$

Aus beiden Betrachtungsweisen kann für eine verdünnte Blasenströmung auf folgende allgemeine Darstellung einer Turbulenten Diffusionskraft pro Volumen geschlossen werden

$$\underline{\mathbf{Z}}_{4L} = C_{TD} \rho_L k_L \nabla \varepsilon_G \quad . \quad (4.55)$$

Die Modellierung beinhaltet die turbulente kinetische Energie der flüssigen Phase  $k_L$  und einen Turbulenten Diffusionskoeffizienten  $C_{TD}$ . Die mit zunehmendem Void zunehmenden turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen im Flüssigkeitsfeld bewirken eine Dispersion der Blasen. Diese Dispersion kann als ein durch die turbulente kinetische Energie der Flüssigkeit  $k_L$  verursachter Transport von Void  $\varepsilon_G$  aus Bereichen hohen Voids in Bereiche niedrigen Void interpretiert werden. Die blaseninduzierte Turbulenz bewirkt eine Verschmierung

des Voids, wie in Abbildung 4.9 schematisch dargestellt ist. Bildlich gesprochen glättet die turbulente Diffusionskraft die lokale Verteilung des Volumenanteils. Die Modellierung liegt in der Bestimmung des turbulenten Diffusionskoeffizienten  $C_{TD}$ . Die Größenordnung der Zeitskalen wird in Hyland, Simonin und Reeks (1998) angegeben. Für Partikel mit einem Durchmesser im Bereich von 10 bis 50  $\mu m$  ist  $\tau_G$  von der Größenordnung  $10^{-3}$  bis  $10^{-2}$ , der Quotient  $\tau_L/\tau_G$  ist von der Größenordnung 10 bis 2. Weitere Andeutungen über die Größe von  $C_{TD}$  im Zusammenhang mit den verwendeten Parametern im k-epsilon-Turbulenzmodell sind in Lopez de Bertodano (1998) und Issa und Oliveira (1998) zu finden. Nach Anglart et al. (1993) wird der Wert für den turbulenten Diffusionskoeffizienten  $C_{TD}$  auf der Basis von experimentellen Befunden für eine disperse Blasenströmung gleich 0.1 gesetzt.

#### 4.2.7 Turbulenzmodulation.

Eine turbulente Zweiphasenströmung umfaßt verschiedene Facetten: die flüssige Phase kann turbulent sein, die Gasphase kann turbulent sein und die eine Phase kann die turbulenten Schwankungen in der anderen Phase beeinflussen. Für eine disperse Zweiphasenströmung, z. B. eine Blasenströmung, kann die disperse Phase als laminar und die kontinuierliche Phase als turbulent behandelt werden, wenn der Anwesenheit der dispersen Phase durch eine Turbulenzmodulation Rechnung getragen wird. Turbulenzmodulation in einer dispersen Zweiphasenströmung umfaßt den Einfluß der Partikel, in diesem Fall Blasen, auf die Turbulenz der kontinuierlichen Phase. Die disperse Phase beeinflusst die Turbulenz der kontinuierlichen Phase durch:

- Erzeugung eines Nachlaufs stromab des Partikels,
- Dissipation der turbulenten kinetischen Energie durch die Bewegungsenergie des Partikels,
- Änderung der Turbulenzerzeugung im kontinuierlichen Feld aufgrund einer Änderung des Geschwindigkeitsgradienten der kontinuierlichen Phase,
- Zusätzliche Längenskalen für die turbulente Dissipation,
- Störung des Strömungsfeldes durch Partikel-Partikel-Wechselwirkung.

Sowohl Unterdrückung als auch Anregung der Turbulenz können abhängig von der Partikelgröße, des Volumenanteils und des ursprünglichen Turbulenzgrades auftreten. Nach Crowe, Sommerfeld und Tsuji (1998) wird allgemein die Turbulenz durch kleine Partikel abgeschwächt und durch große Partikel verstärkt, ausgedrückt mit  $D_B/L_e < 0.1$  als empirischem Kriterium für Abschwächung. Darin wird der Partikeldurchmesser direkt mit der charakteristischen Längenskala  $L_e$  für die energiereichsten Turbulenzwirbel verglichen.

Für die Modellierung der Turbulenz in einem Zwei-Fluid-Modell für eine turbulente Blasenströmung gibt es folgende Vorgehensweisen. Sato hat die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen der flüssigen Phase in einem durch die Flüssigkeit verursachten Anteil  $\underline{u}'_L{}^L$  und einen durch die Blasen induzierten Anteil  $\underline{u}'_L{}^B$  zerlegt:

$$\underline{u}_L = \langle \underline{u}_L \rangle_L + \underline{u}'_L{}^L + \underline{u}'_L{}^B \quad . \quad (4.56)$$

Damit wurde in Sato und Sekoguchi (1975) eine Transportgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit abgeleitet, um den Reynoldsschen Schubspannungstensor in der Impulsgleichung der flüssigen Phase bestimmen zu können. Weiter wurde von

Sato und Sadatomi (1981) ein Turbulenzmodell entwickelt, das als ein modifiziertes k-epsilon-Turbulenzmodell bezeichnet werden kann. Wie in einem einphasigen k-epsilon-Turbulenzmodell werden Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie der flüssigen Phase  $k_L$  und für deren Dissipationsrate  $\epsilon_L$  aufgestellt. Unter der gängigen Annahme der Wirbel-Viskositäts-Hypothese und der Wirbel-Diffusivitäts-Hypothese werden eine turbulente Viskosität mit Hilfe des Prandtlschen Mischungswegs und eine Wirbeldiffusivität mit Hilfe einer turbulenten Prandtl-Zahl bestimmt. Als Turbulenzmodulation für die durch die disperse Phase induzierte Turbulenz wurde die Prandtlsche Mischungsweglänge modifiziert, so daß sich die turbulente Viskosität zusammensetzt aus:

$$\nu_{Leff} = \nu_L + \nu_{L,turb} + \nu_{G,turb} \quad . \quad (4.57)$$

Darin kann der zusätzliche Anteil mit einem turbulenten Viskositätskoeffizienten modelliert werden als

$$\nu_{G,turb} = C_{\nu,B} \rho_L \varepsilon_G D_B |\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}}| \quad . \quad (4.58)$$

Somit ist in dem Reynoldsschen Schubspannungstensor der blaseninduzierte Turbulenzanteil berücksichtigt.

Lopez de Bertodano geht einen Schritt weiter und berücksichtigt auch eine Modifizierung in der turbulenten kinetischen Energie  $k_L$  selbst, so daß sich die turbulente kinetische Energie der kontinuierlichen Phase zusammensetzt aus:

$$k_L = \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_L \rangle_L + k_B \quad . \quad (4.59)$$

Dabei ist der blaseninduzierte Anteil  $k_B$  mit einem Blasennachlauf-Koeffizienten  $C_{WB}$  nach Saif und Lopez de Bertodano (1997) durch

$$k_B = \frac{1}{2} C_{WB} \varepsilon_G |\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}}|^2 \quad (4.60)$$

gegeben.

Weitere Modifizierungen in den Quelle- und Senkentermen in den Transportgleichungen für  $k_L$  und  $\epsilon_L$  werden untersucht. In Hyland et al. (1998) werden zwei vollständige Zwei-Fluid-Modelle für turbulente disperse Zweiphasenströmungen abgeleitet. Das erste KE-Modell von Reeks basiert sich auf den kinetischen Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Das zweite GLE-Modell von Simonin basiert auf den verallgemeinerten stochastischen Transportgleichungen von Langevin. Beide Modelle liefern gute Resultate im Vergleich zu Large-Eddy-Simulationen. Numerische Modelle für die Turbulenzmodulation sind noch in der Entwicklung und sind im Rahmen dieser Arbeit nicht implementiert.

#### 4.2.8 Modellierung der Zwischenphasenkräfte in einer isothermen Blasenströmung.

Die 4 Zwischenphasenkräfte werden für jede Phase in dem Zwei-Fluid-Modell des Rechenprogramms CFX4.1 implementiert. Die Widerstandskraft wird in der Standard-Version von CFX zur Verfügung gestellt. Die übrigen Zwischenphasenkräfte werden als zusätzliche Quellterme in der Impulstransportgleichung mit Hilfe der User-Subroutinen USRBF und USRSRC implementiert. Bei der Implementierung werden die Zwischenphasenkräfte in eine linearisierte Form gebracht (vergleiche Gleichung 3.12) und mit dem Zentrale-Differenzen-Ansatz diskretisiert.

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}_k} = \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}_k} + T_{ik} \langle \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \rangle_k \quad (4.61)$$

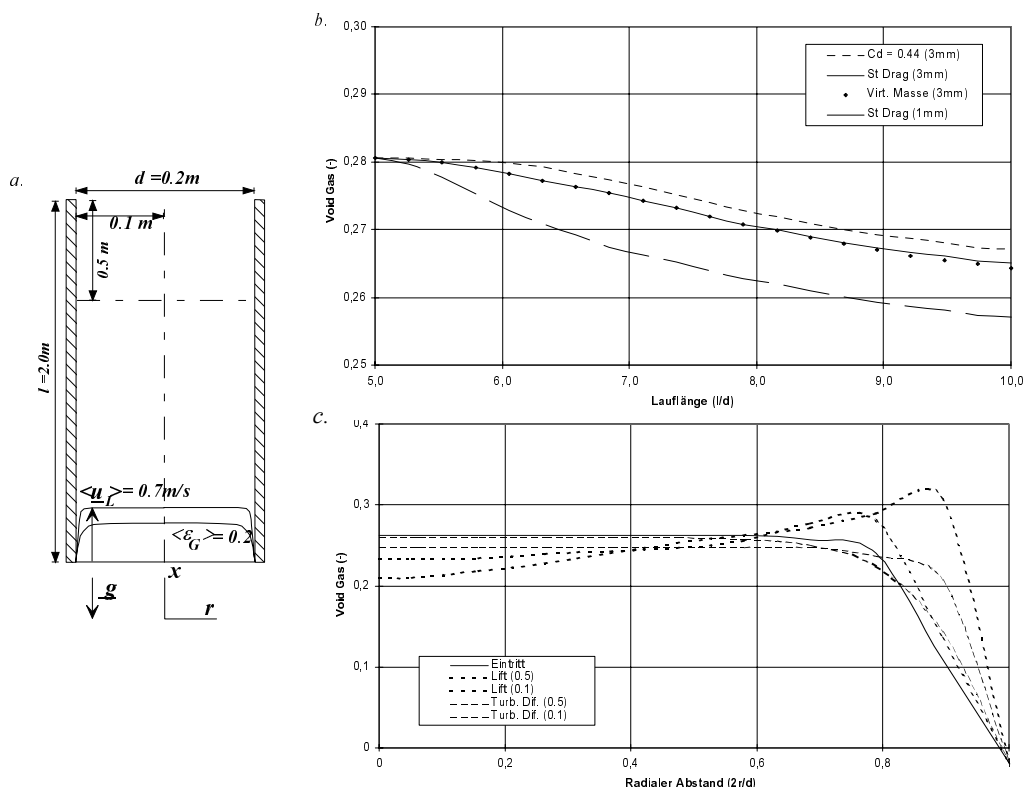


Abbildung 4.10: Einfluß der Zwischenphasenkräfte an Beispiel einer isothermen Blasenströmung: a. Geometrie mit Randbedingungen, b. Einfluß der Widerstandskraft und der Virtuellen Massenkraft, c. Einfluß der Auftriebskraft und der Turbulenten Diffusionskraft.

Die Modellierung und Implementierung dieser Kräfte sollen zuerst verifiziert und danach validiert werden. Für die endgültige Validierung anhand die Simulation von Blasenexperimenten wird auf Kapitel 5.1. verwiesen. Eine Verifizierung der Zwischenphasenkräfte kann hier nicht einfach anhand die Überprüfung analytischer Resultate für Blasen transport durchgeführt werden. Deswegen wird versucht, die numerische Auswirkung der einzelnen Kräfte anhand der numerischen Simulation isothermer Blasenströmungen zu erläutern. Als Ausgangspunkt wird folgendes Gedankenexperiment simuliert.

In einem vertikalen Rohr mit dem Durchmesser  $d = 0.2 \text{ m}$  und der Länge  $l = 2 \text{ m}$  wird eine aufwärtsgerichtete Blasenströmung mit Auftrieb simuliert. Die Geometrie ist zwei-dimensional und umfaßt  $20 \times 50$  Zellen. In einer turbulenten Wasserströmung mit einer Eintrittsgeschwindigkeit von  $\mathbf{u}_L = 0.7 \text{ m/s}$  wird Luft mit einer Geschwindigkeit von  $\mathbf{u}_G = 4 \text{ m/s}$  eingespeist. Für die flüssige Phase gilt an der Wand die Haftbedingung, es wird für die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase ein logarithmisches Wandprofil angesetzt. Für die Gasphase wird ein schubspannungsfreier Rand vorausgesetzt. Am Eintritt wird ein gleichmäßiges Void-Profil mit einem mittleren Gasegehalt von 0.2 über den Strömungsquerschnitt vorgegeben. Der Druck am Austritt beträgt  $1 \text{ bar}$ . Es liegt somit am Eintritt eine bezogene Geschwindigkeit oder mittlerer volumetrischer Fluß für Wasser von  $\mathbf{j}_L = 0.5 \text{ m/s}$  und für Luft von  $\mathbf{j}_G = 0.8 \text{ m/s}$  vor. Die Blasen werden als kugelförmige Partikel mit einem Durchmesser von  $3 \text{ mm}$  angenommen. Die Blasen-Reynolds-Zahl beträgt  $Re_B = |\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L| D_B / \nu_L = 1.10^4$ .

Zur Verifizierung des Einflusses der Kräfte auf die Strömung wird hier zuerst jede Kraft im Einzelnen und ohne Turbulenzmodulation untersucht. Ob denn die gewichteten Kräfte in Kombination für eine vollentwickelte Zweiphasenströmung im Gleichgewicht stehen, wird erst in der weiteren Validierung in Kapitel 5.1 überprüft. Auch die Notwendigkeit einer zusätzlichen Turbulenzmodulation wird erst in Kapitel 5.1 diskutiert. Um hier bei der Verifizierung der einzelnen Zwischenphasenkräfte auch die gewünschten Effekten zu untersuchen, werden die parallel zur Strömungsrichtung gerichtete Kräfte separat von den senkrecht dazu stehenden Kräften betrachtet. Die Auswirkung der Widerstandskraft aus Kapitel 4.2.2 wird anhand die Entwicklung des Voids in der Mitte des Kanals entlang die Strömungsrichtung dargestellt. Dabei wird auf den geringen Effekt der Virtuellen Massenkraft hingewiesen. In Kapitel 4.2.5 wurde die Virtuelle Masse als die zusätzliche, zu beschleunigende Masse interpretiert, die sich durch eine Erhöhung der Gasdichte um die halbe Flüssigkeitsdichte ergibt. Da die Virtuelle Massenkraft durch den Auftrieb bewirkt wird, ist leicht zu überprüfen, daß diese Kraft für den theoretischen Fall eines "Gases" mit gleicher Dichte wie Wasser verschwindet. Mit der Virtuellen Massenkraft werden ähnliche Phänomene als mit einer um der halben Flüssigkeitsdichte erhöhte Dichte des Gases bekommen. Ohne Virtuelle Massenkraft werden Blasen in ruhendem Wasser unphysikalisch schnell beschleunigt, was hier zu einem stabilisierenden Einfluß der Virtuellen Massenkraft deutet. Weiter wird die Auswirkung der Auftriebskraft aus Kapitel 4.2.3 anhand die Entwicklung des Voids über den Rohrquerschnitt in einer Höhe von  $x = 1.5 \text{ m}$  diskutiert. Dabei wird auch der entgegengesetzte Effekt der Turbulenten Diffusionskraft aufgezeigt.

In Abbildung 4.10.b sind die Wirkung der Widerstandskraft und der Einfluß der Virtuellen Massenkraft dargestellt. Die Widerstandskraft zeigt die Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit. Weil durch den Auftrieb die Relativgeschwindigkeit zunimmt, erhöht sich die Widerstandskraft entsprechend. Das heißt, die Widerstandskraft steigt quadratisch mit zunehmender Relativgeschwindigkeit an und bewirkt somit eine Abnahme des Voids. Die unterschiedlichen Ansätze für die Widerstandskraft, das heißt konstanter Widerstandskoeffizient  $C_D = 0.44$  oder Standard-Widerstandskorrelation von Ihme et al. (1972), liefern nahezu identische Resultate. Die Widerstandskraft ist direkt abhängig vom projizierten Strömungsquerschnitt der Blase, so daß eine Vergleichsrechnung für einen Blasendurchmesser von  $1 \text{ mm}$  durchgeführt wird. Für gleichen Void bedeutet ein kleinerer Durchmesser eine größere Anzahl an Blasen und damit eine größere Zwischenphasenoberfläche. Die Simulation zeigt wie erwartet einen stärkeren Einfluß der Widerstandskraft. Die Virtuelle Massenkraft hat einen ähnlichen Einfluß wie die Widerstandskraft. Nur beeinflusst sie das Void-Profil in geringerem Maße als die andere Zwischenphasenkräfte. Da in diesem Beispiel keine plötzlichen Beschleunigungen in der Strömung vorgesehen sind, kann der maßgebliche Einfluß des instationären Anteils dieser Zwischenphasenkraft nicht beobachtet werden.

Abbildung 4.10.c gibt den Einfluß der Auftriebskraft und der Turbulenten Diffusionskraft wieder. Zum einen erfahren die Blasen eine Kraft, die radial zur Wand gerichtet ist und die Blasen von der Mitte des Kanals nach außen treibt. Es bildet sich ein Void-Profil mit Überhöhungen im Wandbereich bei etwa  $2r/d = 0.9$  aus. Über den gesamten Rohrdurchmesser ist eine Entwicklung des vorgegebenen, gleichmäßigen Voidprofils zu einem Void-Profil mit zwei seitlichen Maxima zu erkennen. Mit zunehmendem Auftriebskoeffizienten nimmt die Wirkung dieser Auftriebskraft zu, die Überhöhungen im Void-Profil werden verstärkt. Zum anderen bewirkt die Diffusionskraft eine gleichmäßige Dispersion oder Verteilung der Blasen über den Strömungsquerschnitt. Ein zunehmender Koeffizient  $C_{TD}$  verstärkt die Dispersion der Blasen. Die Turbulente Diffusionskraft ist i. a. der Wirkung der Auftriebskraft entgegengerichtet.

### 4.3 Zwischenphasenkopplung in einer Blasenströmung mit Wärmeübertragung.

#### 4.3.1 Physik des Energieaustausches an einer heißen Blase.

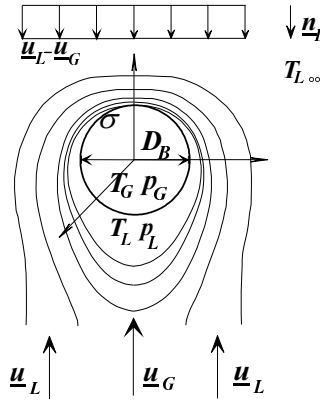


Abbildung 4.11: Wärmeübertragung an einer Blase.

Unterscheidet sich die Temperatur einer Blase  $T_G$  von der Temperatur der sie umgebenden Flüssigkeit  $T_L$ , so findet ein Wärmeaustausch zwischen der Blase und der sie umgebenden Flüssigkeit statt. Ist die Blase relativ zu der Flüssigkeit in Ruhe, so ergibt sich z. B. auf der Fluidseite der Wärmeaustausch durch Wärmeleitung. Es fließt der Wärmestrom  $\underline{q}_L$ , der bestimmt ist durch die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit  $\lambda_L$  und den Temperaturgradienten  $\nabla T_L$  an der Phasengrenzfläche nach dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz:  $\underline{q}_L = \lambda_L \cdot \nabla T_L$ . Bewegt sich die Blase relativ zur Flüssigkeit, so wird zusätzlich Wärme durch Konvektion übertragen. Der Wärmestrom  $\underline{q}_K$  ist im wesentlichen durch die treibende Temperaturdifferenz  $T_L - T_G$  zwischen den Kerntemperaturen in der Flüssigkeit und in der Gasblase bestimmt. Der konvektive Wärmetransport läßt sich im Fluid auch durch den Enthalpietransport in der Form  $\underline{q}_K = \rho_L c_{p,L} T_L \cdot \underline{u}_L$  mit der spezifischen Wärmekapazität  $c_{p,L}$  der Flüssigkeit darstellen. Der gesamte übertragene Wärmestrom  $\underline{q}_T$  auf der Fluidseite der Phasengrenzfläche kann dann über den Newtonschen Ansatz mit einem Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha_{Bi}$  geschrieben werden als  $|\underline{q}_T| = \alpha_{Bi} \cdot (T_G - T_L)$ .

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, das Verhältnis aus der gesamten übertragenen Wärme und der durch Wärmeleitung übertragenen Wärme als eine dimensionslose Kennzahl, die Nusselt-Zahl  $Nu_B$ , einzuführen. Es gilt z. B. auf der Fluidseite:

$$\frac{|\underline{q}_T|}{|\underline{q}_L|} \sim \frac{\alpha_{Bi} D_B}{\lambda_L} = Nu_B \quad . \quad (4.62)$$

Aus dem Verhältnis zwischen dem konvektiven und dem diffusiven Wärmetransport läßt sich unter dem Gesichtspunkt einer Dimensionsbetrachtung eine weitere dimensionslose Kennzahl, die Péclet-Zahl  $Pe$ , definieren. Sie lautet:

$$\frac{|\underline{q}_K|}{|\underline{q}_L|} \sim \frac{\rho_L c_{p,L} |\underline{u}_L| D_B}{\lambda_L} = Pe \quad . \quad (4.63)$$

Die Péclet-Zahl kann auch als Produkt aus Reynolds-Zahl  $Re_B$  und Prandtl-Zahl  $Pr = \nu_L / \kappa_L$  mit  $\kappa_L = \lambda_L / \rho_L c_{p,L}$  geschrieben werden. Während die Reynolds-Zahl ein Maß für die Dicke der Strömungsgrenzschicht mit dem molekularen Transportkoeffizienten für den Impuls  $\nu_L$  darstellt, ist die Péclet-Zahl mit dem molekularen Transportkoeffizienten für Wärme  $\kappa_L$  ein Maß für die Dicke der Temperaturgrenzschicht. Die Prandtl-Zahl stellt somit ein Maß für das Verhältnis zwischen der Dicke der Strömungsgrenzschicht und der Dicke der Temperaturgrenzschicht dar. Für die thermodynamische Beschreibung der Blasenströmung wird in dieser Arbeit angenommen, daß die Temperatur auf dem gesamten Blasenrand konstant ist. Der Marangoni-Effekt, der als Maß für die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung gilt, wird hier nicht berücksichtigt.

Bei der analytischen Beschreibung der Zwischenphasenwärme in einer Blasenströmung geht man von einem konduktiven und konvektiven Wärmetransport an einer in einer Flüssigkeitsströmung bewegten, kugelförmigen Blase aus, vergleiche dazu Abbildung 4.11. Eine kugelförmige Blase mit dem konstanten Durchmesser  $D_B$  und der Temperatur  $T_G$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\underline{u}_G$  in einer Flüssigkeit. Es wird ein mit  $\underline{u}_G$  bewegtes, sphärisches Koordinatensystem  $(r, \theta, \varphi)$  mit Ursprung im Mittelpunkt der kugelförmigen Blase eingeführt. Darin wird die relative Geschwindigkeit  $\underline{u}_R$  zwischen Blase und Flüssigkeit betrachtet. Die Flüssigkeit hat die Temperatur  $T_L$ . In großer Entfernung von der kugelförmigen Blase liegt eine homogene Anströmung mit der relativen Geschwindigkeit  $\underline{u}_R|_{r \rightarrow \infty} = u_\infty \underline{u}_L$  und der Temperatur der Flüssigkeit  $T_L|_{r \rightarrow \infty} = T_{L\infty}$  vor. Als Randbedingung am Kugelrand gelten die Haftbedingung  $\underline{u}_R|_{r=D_B/2} = \mathbf{0}$  und die Stetigkeit der Temperatur  $T_L|_{r=D_B/2} = T_G|_{r=D_B/2}$ . Die Strömung wird durch eine Péclet-Zahl  $Pe = \rho_L c_{p,L} u_\infty D_B / \lambda_L$  charakterisiert.

Im folgenden werden zur prinzipiellen Beschreibung des Wärmeübergangs an der Blase die allgemeinen Transportgleichungen für Masse, Impuls und Energie wie in Kapitel 2.1.1 dargestellt, verwendet. Die Flüssigkeit wird als ein Newtonsches Medium mit konstanten mechanischen und thermischen Eigenschaften angenommen. Es gelten der Fouriersche Wärmeleitungsansatz 2.44 und die Zustandsgleichung 2.45. Die Energietransportgleichung liefert somit im stationären Fall ohne externe Wärmequelle und unter Vernachlässigung der Dissipation

$$\underline{u}_R \cdot \nabla T_L = \frac{\lambda_L}{\rho_L c_{p,L}} \nabla^2 T_L \quad . \quad (4.64)$$

Das Geschwindigkeitsfeld um die Kugel ist bereits mit der Potentialfunktion unter Gleichung 4.19 angegeben. Die Geschwindigkeit wird in Gleichung 4.64 eingesetzt und unter der Annahme  $(2r - D_B) / D_B < 1$  nach Ruckenstein (1959) umgeformt. Es ergibt sich

$$-3u_\infty \frac{2r - D_B}{D_B} \cos \theta \frac{\partial T_L}{\partial r} + 3 \frac{u_\infty}{D_B} \sin \theta \frac{\partial T_L}{\partial \theta} = \frac{\lambda_L}{\rho_L c_{p,L}} \frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} \quad . \quad (4.65)$$

Diese Gleichung 4.65 liefert, nach einige Umformungen in Anhang E, folgende analytische Lösung:

$$T_L = T_G - (T_G - T_{L\infty}) \operatorname{erf} \left( \frac{3u_\infty (2r - D_B) \sin^2 \theta}{2 (u_\infty D_B^3 \kappa_L (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta))^{\frac{1}{2}}} \right) \quad . \quad (4.66)$$

Insbesondere vereinfacht sich diese Lösung für den Fall einer ruhenden, kugelförmigen Blase zu  $T_L = T_G - (T_G - T_{L\infty}) (2r - D_B) / 2r$ . Aus der Lösung 4.66 ergibt sich für die an der

Zwischenphasengrenzfläche von der Blase an der Flüssigkeit übertragene Wärme:

$$q_{iL}''' = 2\pi D_B \lambda_L \cdot \left(1 + \pi^{-\frac{1}{2}} Re_B^{\frac{1}{2}} Pr_L^{\frac{1}{2}}\right) \cdot (T_G - T_{L\infty}) \quad , \quad (4.67)$$

$$= \pi D_B^2 \cdot \alpha_{Bi} \cdot (T_G - T_{L\infty}) \quad . \quad (4.68)$$

Eine andere numerisch berechnete Korrelation für den Wärmetransport von einer Dampfblase an eine unterkühlte Flüssigkeit wird in Pujet, Briere und Magnaudet (1998) angegeben. Der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha_{Bi}$  ist darin ebenso umgekehrt proportional zur Blasenoberfläche und zur Unterkühlung der Flüssigkeit, was den Ausdruck 4.68 bestätigt. Die totale über die Zwischenphasengrenzfläche zwischen einer Blase und der Flüssigkeit übertragene Wärme  $q_{iL}'''$  kann unter Verwendung des Newtonschen Ansatzes in Gleichung 4.67 nach einer Ensemble-Mittelung mit Hilfe von Gleichung 4.1 auf eine Blasenströmung übertragen werden. Für den allgemeinen Fall mit  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  kann die über die Zwischenphasengrenzfläche übertragene Wärme als proportional zur Temperaturdifferenz  $T_G - T_L$  und zum Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha_{Bi}$  modelliert werden. Es soll gelten:

$$\langle q_{iL}''' \rangle_L = \alpha_{Bi} \frac{6\varepsilon_G}{D_B} (T_G - T_L) \quad . \quad (4.69)$$

Der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha_{Bi}$  muß dabei über eine geeignete Beziehung für die Nusselt-Zahl  $Nu_B$  bestimmt werden. Es ist

$$\alpha_{Bi} = \frac{Nu_B \lambda_L}{D_B} \quad . \quad (4.70)$$

Für eine Zwangskonvektionsströmung und für Reynolds-Zahlen zwischen  $0 < Re_B < 200$  kann die Nusselt-Zahl mit der Korrelation von Ranz und Marshall (1952) bestimmt werden. Sie lautet:

$$Nu_B = 2 + 0.6 Re_B^{0.5} Pr_L^{0.3} \quad . \quad (4.71)$$

Die Nusselt-Zahl wird in dieser Korrelation analog zu Gleichung 4.67 über zwei Terme festgelegt. Der erste Term bestimmt den Wärmetransport in ruhender Flüssigkeit, der zweite Term bestimmt den Wärmetransport bei einer Zwangskonvektionsströmung für  $Re_B > 0$ . Diese Ranz-Marshall-Korrelation wird nach Brière, Larrauri und Olive (1995) auch in einem vom EdF neu entwickelten Rechenprogramm für unterkühltes Sieden verwendet. In der Arbeit von Kurul (1990) wird für die Modellierung des unterkühlten Siedens folgende empirische Wärmeübertragungskorrelation von Wolfert, Burwell und Enix (1978) angewandt:

$$\langle q_{iL}''' \rangle_L = \left( \rho_L c_{pL} \lambda_L \frac{4}{\pi} \frac{|\mathbf{u}_R|}{D_B} \frac{\nu_L}{\nu_L + \nu_{L,turb}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{6\varepsilon_G}{D_B} (T_G - T_L) \quad . \quad (4.72)$$

Diese Wärmeübertragungskorrelation beschreibt den allgemeinen Wärmetransport zwischen den Phasen und ist für den Fall eines Phasenübergangs für den Massentransport zwischen den Phasen bestimmend.

### 4.3.2 Physik des Massenaustausches an einer Dampfblase.

Der Phasenübergang eines Stoffes vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand und umgekehrt wird als Verdampfung beziehungsweise als Kondensation bezeichnet. Bei der Verdampfung findet ein statistischer Übergang von Flüssigkeitsmolekülen, die genügend Energie zur Überwindung der Oberflächenspannungskraft haben, aus dem flüssigen in den



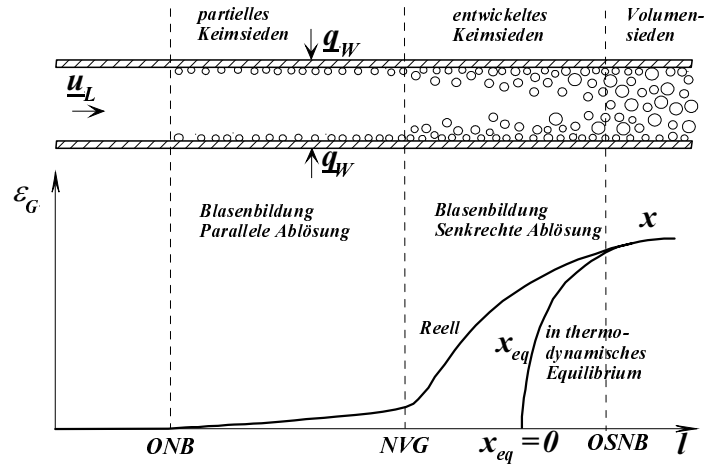


Abbildung 4.12: Unterkühltes Blasensieden: unterschiedliche Gebiete.

gasförmigen Zustand über die freie Oberfläche statt. Dabei nehmen die Moleküle einen Teil der kinetischen Energie mit; die mittlere Molekulargeschwindigkeit und somit die Temperatur in der Flüssigkeit sinken ab. Die Energie, die zur Umwandlung von einer Masseneinheit einer Flüssigkeit konstanter Temperatur in Dampf derselben Temperatur erforderlich ist, heißt Latentwärme oder Verdampfungsenthalpie  $\Delta h_{LG}$ . Im thermodynamischen Gleichgewichtszustand stellt sich die Sättigungstemperatur  $T_{Sat}$  ein, die mit dem Druck des Dampfes an der freien Oberfläche, dem Sättigungsdruck  $p_{Sat}$ , korrespondiert.

Dieser Sättigungszustand wird als Referenzzustand für die Energie des untersuchten Systems definiert. Damit läßt sich die Qualität der Mischung  $x_{eq}$  im thermodynamischen Gleichgewicht als

$$x_{eq} = \frac{h_M - h_L}{h_G - h_L} = \frac{\Delta h_M - c_{pL}(T_L - T_{Sat})}{\Delta h_{LG}} \quad (4.73)$$

definieren. Dabei ist  $h_M = \left( \rho_G \dot{V}_G h_G + \rho_L \dot{V}_L h_L \right) / \left( \rho_G \dot{V}_G + \rho_L \dot{V}_L \right)$  die Enthalpie der Mischung Flüssigkeit-Dampf. Wird die totale Enthalpiedifferenz für die Flüssigkeit betrachtet und ins Verhältnis zu der totalen Enthalpie im Sättigungszustand gestellt, so ergibt sich die Kennzahl  $Ja$  von Jakob (1936)<sup>2</sup>:

$$Ja = \frac{\rho_L c_{pL} (T_L - T_{Sat})}{\rho_G \Delta h_{LG}} \quad (4.74)$$

Findet insbesondere die Verdampfung im Innern der Flüssigkeit oder entlang einer beheizten Wand statt, so wird der Verdampfungsprozeß als homogenes beziehungsweise heterogenes Sieden bezeichnet. Der Phasenübergang beim Sieden durch Aufprägung eines Wandwärmestroms  $\underline{q}_w''$  wird durch eine Phasenübergangs-Zahl oder Zuber-Zahl  $Zu$  charakterisiert, die als dimensionsloser Wandwärmestrom  $\underline{q}_w''$  oder dimensionslose Dampfquellendichte  $\Gamma_G$  interpretiert werden kann. Die Zuber-Zahl ist definiert als das Verhältnis zwischen dem

<sup>2</sup>In der obengenannten Definition der Jakob-Zahl  $Ja$  bedeutet die Temperaturdifferenz für einen siedenden Zweiphasengemisch an einer beheizten Wand die Überhitzung  $\Delta T_{Sup}$ . Auf diese Überhitzung wird weiter in diesem Kapitel eingegangen. In der Definition der Jakob-Zahl wird sie nach Ginoux (1978) als  $\Delta T_{Sup} = T_W - T_{Sat}$  eingeführt und nach Van Stralen und Cole (1979) als  $\Delta T_{Sup} = T_{Sat}(p_G) - T_{Sat}(p_L)$ . In numerischen Siedemodellen wird aber oft eine modifizierte Jakob-Zahl  $Ja^*$  verwendet, die nach Rohsenow und Hartnett (1973) als:  $Ja^* = \rho_L c_{pL} T_{Sat} / \rho_G \Delta h_{LG}$  eingeführt wird.

durch Phasenänderung erzeugten Massenstrom und dem Massenstrom am Eintritt in den beheizten Bereich:

$$Zu = \frac{(\rho_L - \rho_G) \left| \underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}} \right|}{\rho_L \rho_G \left| \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}} \right| \Delta h_{LG}} = \frac{(\rho_L - \rho_G) \Gamma_G / \rho_G}{\rho_L \left| \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}} \right|} \quad (4.75)$$

Sie kann auch als das Verhältnis zwischen der Aufenthaltszeit der Flüssigkeit im beheizten Bereich und der Verdampfungsreaktionszeit interpretiert werden.

Um im Innern einer Flüssigkeit eine Dampfblase zu erzeugen, muß zusätzlich zu der Energie, die notwendig ist, um die Flüssigkeit auf Sättigungstemperatur zu bringen, und der Verdampfungsenthalpie noch die Oberflächenenergie zur Bildung der gekrümmten Blasenoberfläche zugeführt werden. Zur Vereinfachung wird im Rahmen dieser Arbeit angenommen, daß überall in der Dampfblase Sättigungszustand herrscht. Der Sättigungszustand in der Blase ist nicht identisch mit dem Sättigungszustand in der Flüssigkeit. Der Druck in der Blase ist nach Gleichung 4.5 aufgrund der Krümmung höher als in der Flüssigkeit. Somit gilt für die Sättigungstemperatur  $T_{Sat}(p_G) > T_{Sat}(p_L)$ . Das System Wasser-Wasserdampf befindet sich in einem thermischen Nicht-Gleichgewicht, so daß ein Wärme- und Massentransport möglich sind. Das Sieden setzt erst bei einer bestimmten Überhitzung der Flüssigkeit von  $\Delta T_{Sup} = T_{Sat}(p_G) - T_{Sat}(p_L) > 0$  ein.

Der Punkt des Einsetzens des Blasensiedens, der auch im Angloamerikanischen als Onset of Nucleate Boiling (ONB) oder Incipience of Boiling (IB) bezeichnet wird, ist durch die Überhitzung bestimmt. Diese Überhitzung liefert in dem thermodynamischen System eine solche Zunahme der freien Enthalpie  $\Delta G$ , daß statistisch in  $N \sim \exp(-\Delta G/k_0 T)$  Fällen eine Blase mit einem Durchmesser  $D_B$  gebildet wird, vergleiche Stephan (1964). Diese freie Enthalpiezunahme leistet die Energie, die zur Erzeugung der freien Oberfläche der Blase notwendig ist und schreibt sich als die Oberflächenenergie vermindert um die Verluste, die durch die Arbeitsleistung bei der Überführung einer ebenen Trennfläche in eine gekrümmte Form entstehen  $\Delta G = \pi D_B^2 \sigma - (p_G - p_L) \pi D_B^3 / 6$ . Der Zusammenhang zwischen der freien Enthalpiezunahme  $\Delta G$  und dem Blasendurchmesser  $D_B$  ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Das System ist bestrebt, eine minimale freie Enthalpie anzunehmen, so daß das Maximum in dem Verlauf von  $\Delta G$  einen kritischen Blasendurchmesser  $D_C$  bestimmt. Eine Dampfblase befindet sich also nicht in einem stabilen Gleichgewichtszustand mit der umgebenden Flüssigkeit und wächst nur dann weiter an, wenn der kritischen Durchmesser  $D_C$  erreicht ist. Wird die thermodynamische Beziehung für die freie Enthalpiezunahme bei Verdampfung  $\Delta G = \Delta p / \rho - \Delta T \Delta h_{LG} / T$  extrem, so folgt die Clausius-Clapeyron-Gleichung für das Zweiphasengebiet:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\Delta h_{LG}}{T (1/\rho_G - 1/\rho_L)} \quad (4.76)$$

Nach Einsetzen der Gleichung 4.5 für den Drucksprung über den Blasenrand in die Clausius-Clapeyron-Gleichung 4.76 erhält man einen Ausdruck für die Überhitzung  $\Delta T_{Sup}$  in Abhängigkeit vom kritischen Blasendurchmesser  $D_C$ :

$$\Delta T_{Sup} = \frac{T_{Sat}(p_L) (\rho_G - \rho_L)}{\Delta h_{LG} \rho_G \rho_L} \cdot \frac{4\sigma}{D_C} \quad (4.77)$$

Die Überhitzung zur Bildung einer Blase mit dem kritischen Durchmesser  $D_C$  ist im Innern einer reinen Flüssigkeit im allgemeinen sehr hoch, so daß die Blasenbildung vielmehr entlang der beheizten festen Wände stattfindet. Entlang der Wände ist die Adhäsionsspannung, die sich zusammensetzt aus den Oberflächenspannungen zwischen Flüssigkeit

und fester Wand, zwischen Dampf und fester Wand und zwischen Dampf und Flüssigkeit, am geringsten, und somit auch die zur Blasenbildung benötigte Oberflächenenergie. Das Sieden setzt daher bei niedrigen Überhitzungen i. a. an heterogenen Keimen ein. Diese Art des Siedeprozesses wird als heterogenes Keimsieden, im Angloamerikanischen als Nucleate Boiling bezeichnet. Die Keime sind meistens lokale Vertiefungen in der festen Wand, die als eine Mundöffnung mit einem Durchmesser  $d_m$  und einem Winkel  $\beta_m$  und einer Tiefe  $d_V$  charakterisiert werden. An den Vertiefungen ist die Überhitzung am größten, da die über der beheizten Platte strömende Flüssigkeit diese Vertiefungen nicht so effektiv kühlen kann. Weiter erlaubt ein kleiner Öffnungswinkel die Bildung von Blasen mit einem großen Krümmungsradius und somit einem kleinen Überdruck gegenüber der Flüssigkeit. Zudem wird die freie Enthalpiezunahme  $\Delta G$  durch Dampf oder Fremdgase, welche in den Oberflächenrauigkeiten der Wand eingeschlossen sind, herabgesetzt.

Im folgenden wird die Bildung einer Blase in einer Vertiefung der beheizten Wand mit einem von der Größe der Vertiefung abhängigen kritischen Blasendurchmesser betrachtet. Nach Yadigaroglu (1981) kann für das Einsetzen des Blasensiedens (ONB) eine Beziehung zwischen der Überhitzung  $\Delta T_{Sup,ONB}$  und dem Wandwärmestrom  $\left| \underline{q}_{w,ONB}'' \right|$ , der für die Keimbildung in einer Vertiefung der beheizten Wand nötig ist, abgeleitet werden. Dafür wird von einem linearen Temperaturgradienten  $T_L(y)$  an der beheizten Wand ausgegangen, wie in Abbildung 4.13 gezeigt wird. Weiter wird nach dem Postulat von Hsu (1962) gefördert daß am Scheitelpunkt einer stabilen Blase die Kurven für die Flüssigkeitstemperatur  $T_L(y)$  und für die Sättigungstemperatur  $T_{Sat}(p_G)$  tangieren. Nach kurzer Umformung und mit Hilfe der Clausius-Clapeyron-Gleichung 4.76, siehe Anhang E, wird ein kritischer Wandabstand  $y_C$  für den wandentferntesten Punkt der Blase hergeleitet. Damit ergibt sich für den Wandwärmestrom  $\left| \underline{q}_{w,ONB}'' \right|$  beim Einsetzen des Blasensiedens:

$$\left| \underline{q}_{w,ONB}'' \right| = \frac{\lambda_L \Delta h_{LG}}{8\sigma n (1/\rho_G - 1/\rho_L) T_{Sat}(p_L)} \Delta T_{Sup,ONB}^2 \quad . \quad (4.78)$$

Dieser Wandwärmestrom aktiviert die Siedekeime in den Wandvertiefungen und ermöglicht das Einsetzen des Blasensiedens. Wenn die Tiefe der Wandvertiefungen  $d_V$  kleiner als der kritische Durchmesser  $D_C$  ist, so setzt das Blasensieden erst bei höheren Wandwärmeströmen ein. Der Wandwärmestrom  $\left| \underline{q}_{w,ONB}'' \right|$  nach Gleichung 4.78 gibt somit den unteren Grenzwert an.

Mit dem Wandwärmestrom  $\left| \underline{q}_{w,ONB}'' \right|$  liegen die Aktivierung der heterogenen Siedekeime, der Einsatzpunkt des Blasensiedens und somit auch der Beginn des Gebiets des partiellen Keimsiedens, im Angloamerikanischen als Partial Nucleate Boiling bezeichnet, fest. In diesem Gebiet, siehe Abbildung 4.12, werden die an der beheizten Wand gebildeten Blasen während des Wachstums durch die Umströmung mit Flüssigkeit eingeschnürt und lösen ab<sup>3</sup>. Aus Experimenten von Stephan (1964) und Bibeau und Salcudean (1994) weiß man, daß eine Blase zuerst entlang der Wand rollt, was als parallele Ablösung bezeichnet wird. Die Flüssigkeitstemperatur in Wandnähe schwankt dabei zwischen der Sättigungstemperatur  $T_{Sat}(p_L)$  und einer oberen Überhitzungstemperatur  $T_{Sat}(p_G)$ .

Löst eine Blase senkrecht von der Wand ab, so ist der Übergang zum Gebiet des voll entwickelten Keimsiedens erreicht, im Angloamerikanischen als Fully Developed Nuclea-

<sup>3</sup>Unter Blasenablösung ist die Entkopplung der Blase von dem Siedekeim zu verstehen. Eine Blase ist abgelöst, wenn sie nicht mehr in direkter Verbindung mit der Wandvertiefung steht, in der sie gebildet wurde. Eine Blase ist bei der Ablösung nicht notwendigerweise sofort vollständig in die Flüssigkeit aufgenommen.

te Boiling bezeichnet. Der Beginn des Gebiets des voll entwickelten Keimsiedens wird als Einsatzpunkt der Netto-Dampferzeugung, im Angloamerikanischen Point of Net Vapor Generation (NVP) oder Onset of Significant Voiding (OSV) bezeichnet, siehe Abbildung 4.12. Kurze Zeit ( $\sim 1ms$ ) nach dem Entstehen der Blase überwiegen die Auftriebskräfte über die Adhäsionskräfte, und die Blase erfährt einen Auftrieb. Die Blase löst mit einem Ablösedurchmesser  $D_A$  von der Wand ab, was als senkrechte Ablösung bezeichnet wird. Je geringer der Druck in der Flüssigkeit ist, desto schneller wächst die Blase von ihrem kritischen Durchmesser zu ihrem Ablösedurchmesser an. Im Gegenstrom zur Bewegungsrichtung der ablösenden Blase fließt Flüssigkeit zur Wand hin.

Die senkrechte Ablösung einer Blase findet periodisch statt, so daß sich Blasenketten bilden. Für den periodischen Abstand zwischen zwei nacheinander ablösenden Blasen soll das Stabilitätsproblem des Grenzflächenzerfalls gelöst werden. Dabei kann man sich auf die in Kapitel 4.2.1 mit Formel 4.6 beschriebene charakteristische Laplace-Länge  $\Lambda$  des Rayleigh-Taylor-Problems berufen. Nach die Arbeit von Zuber (1959) und Bemerkungen von Lienhard (1994) gibt die Laplace-Länge eine erste Näherung für den Abstand zwischen zwei nacheinander ablösenden Blasen an.

Der Einsatzpunkt der Netto-Dampferzeugung kann nach Saha und Zuber (1974) nicht mit einem Kriterium für die Blasenablösung festgelegt werden. Das Gebiet des voll entwickelten Keimsiedens ist durch die Wärmeübertragung in der Temperaturgrenzschicht mit einer Nusselt-Zahl charakterisiert. Für niedrige lokale Massenströme  $\dot{M}_L$  ist das Gebiet des voll entwickelten Keimsiedens durch die Wärmeleitung in der flüssigen Phase bedingt und kann mit einer konstanten Nusselt-Zahl beschrieben werden. Für hohe Massenströme  $\dot{M}_L$  ist das Gebiet des voll entwickelten Keimsiedens durch den konvektiven Transport in der flüssigen Phase bedingt und kann mit einem konstanten Verhältnis zwischen der Nusselt-Zahl und der Péclet-Zahl beschrieben werden.

$$Nu_B = \frac{|\mathbf{q}''_{w,NVG}| D_B}{\lambda_L \Delta T_{Sup,NVG}} = 45.0 \quad \text{für } Pe < 7 \cdot 10^4 \quad , \quad (4.79)$$

$$\frac{Nu_B}{Pe} = \frac{|\mathbf{q}''_{w,NVG}|}{\dot{M}_L c_{p,L} \Delta T_{Sup,NVG}} = 0.0065 \quad \text{für } Pe > 7 \cdot 10^4 \quad . \quad (4.80)$$

Diese Gleichungen 4.79 und 4.80 ersetzen die Ranz-Marshall-Korrelation 4.71 für die Beschreibung der Wärmeübertragung. In der numerischen Arbeit von Brière et al. (1995) werden folgende Korrelationen für die Nusselt-Zahl in Abhängigkeit der Jakob-Zahl verwendet:

$$Nu_B = \frac{12}{\pi} Ja \quad \text{für } Pe < \frac{36}{\pi} Ja^2 \quad , \quad (4.81)$$

$$Nu_B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Pe^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } Pe > \frac{36}{\pi} Ja^2 \quad . \quad (4.82)$$

Diese Korrelationen 4.81 und 4.82 sind für Probleme mit vorgegebener Wandtemperatur geeignet, während die Beziehungen 4.79 und 4.80 für Probleme mit vorgegebenem Wandwärmestrom zu bevorzugen sind.

Liegt bei einem Siedeprozess die mittlere Flüssigkeitstemperatur  $T_L$  unter der Sättigungstemperatur  $T_{Sat}(p_L)$ , so spricht man von unterkühltem Blasensieden. Die Unterkühlung wird durch die Temperaturdifferenz  $\Delta T_{Sub} = T_{Sat}(p_L) - T_L$  charakterisiert. Für den Fall des unterkühlten Blasensiedens werden die Blasen in der überhitzten Flüssigkeitsgrenzschicht an der beheizten Wand gebildet, die eine Temperatur oberhalb von  $T_{Sat}(p_L)$  hat.

Dringen die Blasen in die unterkühlte Flüssigkeit ein, so befinden sie sich in einem thermodynamischen Nicht-Gleichgewicht, und es tritt Kondensation des Dampfes in der Blase auf.

Im folgenden werden physikalische Modelle zur Beschreibung des Phasenübergangs innerhalb der Flüssigkeit (Kondensationsmodell) und zur Beschreibung des Siedens an einer beheizten Wand (Wandsiedemodell) hergeleitet.

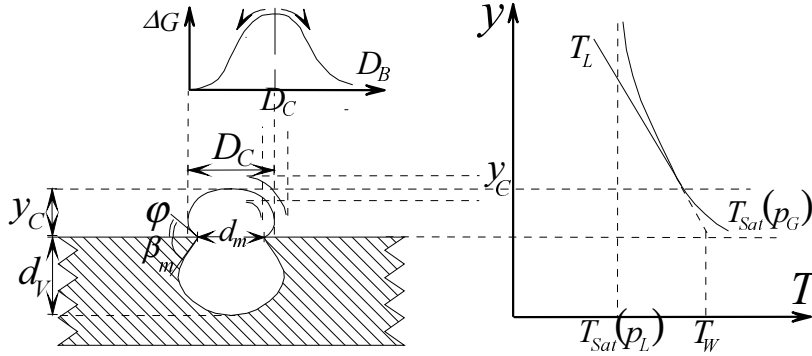


Abbildung 4.13: Mechanismus der Blasenbildung.

### 4.3.3 Massentransport zwischen Dampfblase und umgebender Flüssigkeit: numerisches Kondensationsmodell.

Für die Modellierung des Phasenübergangs beim Sieden oder bei der Kondensation sind drei unterschiedliche Betrachtungsweisen möglich. Plesset und Zwick (1954) gehen davon aus, daß das Blasenwachstum allein durch Wärmeleitung kontrolliert wird. Diese Annahme gilt für eine gegenüber der Flüssigkeit ruhende Einzelblase. In einer anderen Betrachtungsweise von Wolfert et al. (1978) wird angenommen, daß das Blasenwachstum durch Wärmeleitung und Konvektion bedingt wird. Dabei betrachtet Wolfert die Wärmeübertragung für eine bewegte Einzelblase. In einer dritten Betrachtungsweise nach Banerjee (1978) wird vorausgesetzt, daß das Blasenwachstum durch Wärmetransport, der durch molekulare Diffusion bedingt ist, kontrolliert wird. Dabei wird die Erzeugung von neuen Zwischenphasengrenzflächen in einem durch Turbulenz bestimmten Zeitintervall berücksichtigt. Nach Yadigaroglu und Bensalem (1987) kann die letzte Modellannahme nicht durch experimentelle Daten bestätigt werden. Das zweite Modell von Wolfert (1976) kommt der Physik am nächsten. Im Modell von Wolfert wird der Phasenübergang mit einem durch Wärmeleitung bedingten Massenaustauschterm  $\langle m'''_{iG} \rangle_{G-1}$  und einem konvektiv kontrollierten Massenaustauschterm  $\langle m'''_{iG} \rangle_{G-2}$  beschrieben:

$$\langle m'''_{iG} \rangle_G = \langle m'''_{iG} \rangle_{G-1} + \langle m'''_{iG} \rangle_{G-2} \quad . \quad (4.83)$$

Der erste Massenaustauschterm beschreibt das Wachstum einer Dampfblase in Ruhe, der Wärmetransport erfolgt durch Wärmeleitung. Plesset und Zwick (1954) stellen dafür die Bewegungsgleichung des Blasenradius in einer nicht-viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit auf und koppeln diese an die Lösung des Wärmeleitungsproblems um die Blase. Sie finden folgende Beziehung für den Blasendurchmesser in Abhängigkeit von der Zeit:

$$D_B(t) = 4 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot Ja \cdot \left( \frac{\lambda_L}{\rho_L c_{pL}} t \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.84)$$

Mit der Jakob-Zahl  $Ja = \rho_L c_{pL} \Delta T_{Sup} / \rho_G \Delta h_{LG}$  wird dabei der Einfluß der Überhitzung der Flüssigkeit wiedergegeben. Der Massenaustausch zur Beschreibung des durch Wärmeleitung bedingten Phasentübergangs kann für eine Anzahl von  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  mit Gleichung 4.1 angegeben werden als

$$\langle m'''_{iG} \rangle_{G-1} = \frac{6\varepsilon_G}{\pi D_B^2} \cdot \frac{12\lambda_L}{\Delta h_{LG}} Ja \cdot (T_L - T_G) \quad . \quad (4.85)$$

Dieser erste Massenaustauschterm ist maßgeblich für die Beschreibung des Siedens mit niedrigem Void und überhitzter Flüssigkeit.

Der zweite Massenaustauschterm zur Beschreibung des konvektiv kontrollierten Phasentübergangs geht von der Wärmeübertragung an einer bewegten Dampfblase aus. Gleichung 4.67 in Kapitel 4.3.1 beschreibt dazu den Wärmetransport über den Blasenrand einer sich relativ zur Flüssigkeit bewegend Blase. Wolfert vernachlässigt die Oberflächenenergie der Blase und setzt den Massenaustausch gleich dem Verhältnis zwischen konvektivem Energietransport und Verdampfungsenthalpie. Damit kann der zweite Massenaustauschterm zur Beschreibung des konvektiv kontrollierten Phasentübergangs für eine Anzahl von  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  mit Gleichung 4.1 bestimmt werden als

$$\langle m'''_{iG} \rangle_{G-2} = \frac{6\varepsilon_G}{\pi D_B^2} \cdot \frac{2\lambda_L}{\Delta h_{LG}} (\pi Re_B Pr_L)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_L - T_G) \quad . \quad (4.86)$$

Nach Forster und Zuber (1954) ist dieser zweite Massenaustauschterm wichtig zur Beschreibung der Kondensation in einer Zweiphasenströmung mit niedrigem Void und unterkühlter Flüssigkeit.

In Rahmen dieser Arbeit wird ähnlich wie in dem Modell von Wolfert der Massenaustausch durch einen konduktiv-konvektiven Energieaustausch zwischen den Phasen angesetzt. Der Wärmetransport durch Wärmeleitung und durch Konvektion wird allerdings nicht durch zwei getrennte Massenaustauschtermen beschrieben. In dieser Arbeit wird die Wärmeübertragung an einer Blase mit einem Wärmeübertragungskoeffizienten und einem Massenaustauschterm abgeleitet. Der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha_{Bi}$  wird entsprechend Kapitel 4.2.1 mit der Korrelation 4.71 beschrieben. Es ergibt sich:

$$\alpha_{Bi} = \frac{2\lambda_L}{D_B} + \frac{0.6\lambda_L}{D_B} Re_B^{\frac{1}{2}} Pr_L^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (4.87)$$

Der Wärmetransport über den Blasenrand bestimmt die zeitliche Änderung der Energie der Dampfblase. Diese Korrelation kann obwohl sie für eine Einzelblase abgeleitet wurde in erster Näherung auch beim Einsetzen von Blasensieden verwendet werden. Denn aus experimentelle Beobachtungen nach Levy (1967) kann der Abstand zwischen den Blasen am Einsatzzpunkt des Blasensiedens mit dem zweifachen Blasendurchmesser abgeschätzt werden. Da der Dampf in der Blase auf Sättigungszustand angenommen wird, entspricht die Änderung der Energie bei Vernachlässigung der Oberflächenenergie einer Änderung der Blasengröße, welche als Energiebilanz der Form

$$\Delta h_{LG} \frac{d}{dt} \left( \rho_G \frac{\pi}{6} D_B^3 \right) = \alpha_{BI} (T_{Sat} - T_L) \pi D_B^2 \quad (4.88)$$

ausgedrückt werden kann. Dabei wird über diese Gleichung<sup>4</sup> der Verlauf von  $D_B(t)$  festgelegt. Nach Kolev (1995) kann die Proportionalität  $dD_B/dt \sim D_B^{-1/2}$  als allgemein angenommen werden. In Kolev (1994b) wird der Einfluß der Blasenwechselwirkung untersucht.

<sup>4</sup>Nach Einsetzen des Wärmeübertragungskoeffizienten aus Gleichung 4.87 in Gleichung 4.88 erhält man

<i>Einflußgrößen</i>	<i>Variationen</i>			
<i>Unterkühlung</i> $\Delta T_{Sub}$	13°C	18°C	23°C	43°C
<i>Blasendurchmesser</i> $D_B$	0.8 mm	1.0 mm	2.0 mm	5.0 mm
<i>Geschwindigkeit</i> $ \underline{u}_L $	0.1 m/s	0.4 m/s	1.0 m/s	4.0 m/s
<i>Druck</i> $p_{Out}$	0.9 bar	1.0 bar	1.1 bar	1.5 bar

Tabelle 4.2: Variation der Einflußgrößen.

Darin betont er, daß diese Proportionalität jedoch nur das Blasenwachstum in einer gesättigten Flüssigkeit beschreibt. Diese Annahme verursacht nach Kolev (1994b) das Verschwinden der totalen Beschleunigung der Blase. Das bedeutet folgende Vereinfachung: daß die dynamischen Trägheitskräfte und die Virtuelle Massenkraft hier nicht auftreten. Eine Änderung der Blasengröße  $dD_B/dt$  ist direkt an eine Änderung des Volumenanteils gekoppelt. Für eine Anzahl von  $N$  Blasen in einem Kontrollvolumen  $V$  ist der Zwischenphasenmassenaustausch gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle m'''_{iG} \rangle_G &= \frac{N}{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \rho_G \frac{\pi}{6} D_B^3 \right) \\ &= \frac{6\varepsilon_G}{\pi D_B^2} \cdot \frac{\pi \lambda_L}{\Delta h_{LG}} \left( 2 + 0.6 Re_B^{\frac{1}{2}} Pr_L^{\frac{1}{3}} \right) \cdot (T_{Sat} - T_L) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Für  $T_L > T_{Sat}$  ist  $\langle m'''_{iG} \rangle_G > 0$  : Es liegt ein Blasenwachstum vor, die Flüssigkeit verdampft, und der Volumenanteil des Dampfes nimmt zu. Ist  $T_L < T_{Sat}$  und entsprechend  $\langle m'''_{iG} \rangle_G < 0$  , so liegt Kondensation vor: Die Blasengröße und der Volumenanteil an Dampf nehmen ab. Mit zunehmender Unterkühlung nimmt der Zwischenphasenmassenaustausch  $\langle m'''_{iL} \rangle_L = -\langle m'''_{iG} \rangle_G$  zu. Eine zunehmende relative Geschwindigkeit zwischen der Blase und der Flüssigkeit und eine größere Zwischenphasenoberfläche bedingt durch einen größeren Blasendurchmesser  $D_{B,old}$  verbessern den Wärmetransport zwischen den Phasen. Mit einem zunehmenden Massenaustausch  $|\langle m'''_{iG} \rangle_G|$  verstärkt sich das Sieden oder die Kondensation. Der Einfluß des Umgebungsdrucks findet sich in der Änderung der Sättigungstemperatur der Blase  $T_{Sat}(p_G)$  wieder.

Somit liegt ein Kondensationsmodell vor, mit dem der Phasenübergang innerhalb der Flüssigkeit modelliert werden kann.

#### 4.3.4 Modellierung der Kondensation in einer unterkühlten Blasenströmung.

Der Massenaustausch zwischen den Phasen nach Gleichung 4.89 und somit die Änderung des Volumenanteils wird als externer Quellterm in der Massentransportgleichung einer jeden Phase mit Hilfe der User-Subroutinen USRIPM und USRIPT im Rechenprogramm CFX4.1 implementiert. Die Sättigungstemperatur wird aus einer tabellierten Wasserdampf tabel in

---

eine gewöhnliche, nicht-lineare Differentialgleichung für  $D_B(t)$ . Für den Fall von überwiegend konvektivem Wärmetransport über den Blasenrand dominiert der zweite Summand in Gleichung 4.87, und der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha_{Bi}$  kann als proportional zu  $D_B^{-1/2}$  modelliert werden. Die Differentialgleichung kann damit analytisch gelöst werden und liefert für den Blasendurchmesser folgende Funktion der Zeit  $D_B = 2.17 \lambda_L^{2/3} (T_{Sat} - T_L)^{2/3} \rho_G^{-2/3} \Delta h_{LG}^{-2/3} \nu_L^{-1/3} u_\infty^{1/3} Pr_L^{2/9} \cdot t^{2/3}$ .

Abhängigkeit des Drucks bestimmt. Der Einfluß dieses Quellterms wird anhand der Simulation einer unterkühlten Wasser-Wasserdampf Blasenströmung dargestellt. Durch eine Variation der maßgeblichen Einflußgrößen Unterkühlung  $\Delta T_{Sub}$ , Blasendurchmesser  $D_B$ , Flüssigkeitgeschwindigkeit  $|\underline{u}_L|$  und Druck  $p_{Out}$  werden die physikalischen Eigenschaften des Kondensationsmodells verdeutlicht.

In einem horizontalen Kanal werden der konvektive Transport von kugelförmigen Dampfblasen in unterkühltem Wasser und der Zwischenphasenmassenaustausch über der Lauflänge simuliert. Es wird ein Freischnitt in Strömungsrichtung in großer Entfernung von Wänden betrachtet, um einen Wandeinfluß auf dem Kondensationsmodell zu vermeiden. Das zweidimensionale Rechenggebiet umfaßt  $100 \times 10$  gleichmäßige Zellen. und Symmetrieflächen als Ränder, wie in Abbildung 4.14.a skizziert ist. Am Eintritt wird eine thermodynamisch instabile Mischung von unterkühltem Wasser mit einem Dampf-Volumenanteil von  $\varepsilon_{G0} = 0.15$  an gesättigtem Wasserdampf eingespeist.

Es werden die in Tabelle 4.2 angegebenen Variationen der Einflußgrößen durchgeführt. Es liegen somit Péclet-Zahlen  $Pe$  im Bereich  $7 \cdot 10^2 \leq Pe \leq 3 \cdot 10^4$  vor. Das Verlauf des auf den Anfangswert bezogenen Dampf-Volumenanteils  $\varepsilon_G / \varepsilon_{G0}$  wird über der mit dem Blasendurchmesser skalierten und in Form einer Péclet-Zahl normierten Lauflänge  $x / D_B \cdot Pe$  aufgetragen. Durch die Skalierung der Lauflänge mit dem Blasendurchmesser und durch die Normierung mit der Péclet-Zahl  $Pe$  ergibt sich in erster Näherung eine Abhängigkeit der Änderung des Dampf-Volumenanteils, die proportional zu  $\Delta T_{Sub}$  und zu  $D_{B,old}^{-1}$  ist. Weiter wird durch die Normierung durch die Péclet-Zahl die Änderung des Dampf-Volumenanteils in erster Näherung unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Diese physikalischen Effekte werden durch die numerischen Ergebnisse in Abbildung 4.14 gut wiedergegeben. Die Neigungen der angegebenen Kurven stellen ein Maß für die Kondensationsrate dar.

In Abbildung 4.14.b ist zu erkennen, daß die Kondensationsrate mit zunehmender Unterkühlung erhöht wird. Entsprechendes gilt für eine Zunahme des Drucks am Austritt, wodurch eine direkte Erhöhung der Sättigungstemperatur bewirkt wird, siehe Abbildung 4.14.c. Weiter steigt die Kondensationsrate mit zunehmender Reynolds-Zahl  $Re_B$  und somit zunehmender Relativgeschwindigkeit an. Im Kapitel 4.3.3 wurde zwischen dem Massenaustausch und der Relativgeschwindigkeit die Proportionalität  $\langle m_{iG}''' \rangle_G \sim u_\infty + f(\Delta T_{Sub}, D_{B,old}) \cdot u_\infty^{0.5}$  erläutert. Für einen vernachlässigbar kleinen zweiten Summanden liegt ein linearer Zusammenhang zwischen Kondensationsrate und Relativgeschwindigkeit vor; für einen sehr großen zweiten Summanden ist die Kondensationsrate proportional zur Quadratwurzel der Relativgeschwindigkeit. Im vorliegenden Fall ist der Effekt des zweiten Summanden klein, was in der leichten Krümmungsänderung der Kurven in Abbildung 4.14.d und einem Wendepunkt zu erkennen ist. Schließlich bewirkt eine Abnahme des Blasendurchmessers bei gleichem Dampf-Volumenanteil  $\varepsilon_{G0}$  eine zunehmende Zwischenphasenoberfläche und somit eine Zunahme der Kondensationsrate. Dies ist in Abbildung 4.14.e dargestellt.

### 4.3.5 Blasensieden an einer beheizten Wand: numerisches Wand-siedemodell.

Beim Blasensieden an einer beheizten Wand findet eine starke Bildung von Zwischenphasengrenzfläche statt. Im Rahmen dieser Arbeit wird von einem Zwei-Fluid-Modell für eine ensemble-gemittelte, ideal verdünnte Blasenströmung im gesamten Rechenggebiet ausgegangen. Diese Annahmen sind für Wandzellen mit einem von außen aufgeprägten Wandwär-



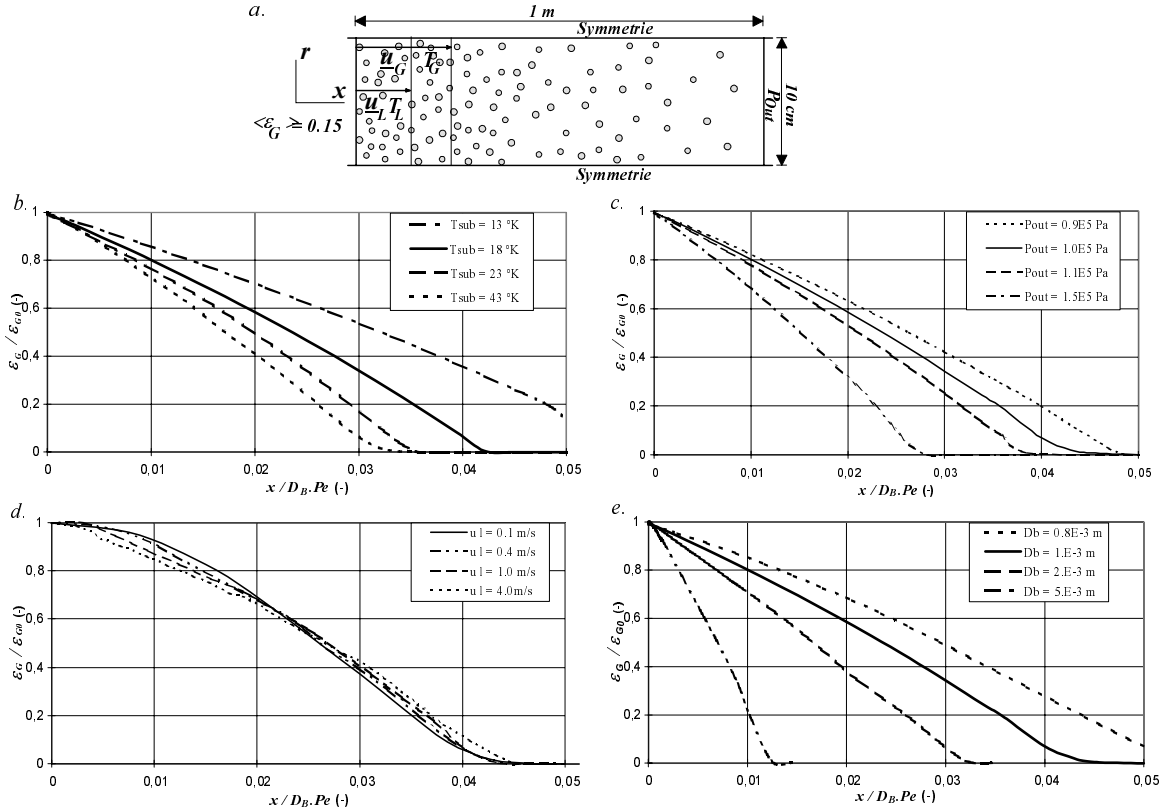


Abbildung 4.14: Modellierung der Kondensation von Dampfblasen in einer unterkühlten Wasserströmung für die unter a) skizzierte Geometrie. Änderung des relativen Gasvolumenanteils  $\varepsilon_G / \varepsilon_{G0}$  über normierter Lauflänge  $x / D_B Pe$  für Variation von b) Unterkühlung  $\Delta T_{Sub}$ , c) Druck  $p_{Out}$ , d) Flüssigkeitgeschwindigkeit  $|\underline{u}_L|$ , e) Blasendurchmesser  $D_B$ .

mestrom und Blasensieden nicht erfüllt. Außerdem liegt ein starker Temperaturgradient über die Wandzelle vor. Das mit dem Massenaustauschterm  $\langle m_{iG}''' \rangle_G$  nach Gleichung 4.89 erweiterte Zwei-Fluid-Modell kann keine Dampfquellichte an einer beheizte Wand erfassen. Für Wandzellen mit einem aufgeprägten Wandwärmestrom wird stattdessen mit einem Wandsiedemodell eine Dampfquellichte  $\Gamma_G$  an der beheizten Wand modelliert.

Das hier entwickelte Wandsiedemodell ist gültig für das System Wasser-Wasserdampf, moderate Wandwärmeströme unter dem kritischen Wandwärmestrom (bis etwa  $1 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$ ) und einem maximalen mittleren Volumenanteil bis etwa 0.3, so daß eine Blasenströmung als Strömungsmuster vorliegt. Für die Bestimmung der Sättigungstemperatur wird die Druckabhängigkeit für geringe Überdrücke gegenüber atmosphärischen Bedingungen (bis etwa  $1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ) berücksichtigt. Wie in Kapitel 4.3.3 wird von quasi-stationären Zuständen ausgegangen. Eine Verdampfung durch plötzliche Druckentlastung wird nicht modelliert. Sobald die Flüssigkeitstemperatur in der wandnahen Zelle die Sättigungstemperatur erreicht hat,  $T_L \geq T_{Sat}(p_L)$ , wird in der numerischen Modellierung Dampf erzeugt. Die Temperatur der Flüssigkeit an der Wand  $T_W$  wird mit Hilfe des Wandsiedemodells aus der Temperatur der Flüssigkeit  $T_L$  in der wandnahen Zelle berechnet. Mit der Wandtemperatur  $T_W$  wird die Überhitzung als  $\Delta T_{Sup} = T_W - T_{Sat}$  berechnet. Die Dampfquellichte  $\Gamma_G$  an der Wand kann unter einer mechanistischen Betrachtungsweise nach Yadigaroglu und

Bensalem (1987) als Funktion der Siedekeimdichte  $N_{as}$ , des Blasenablösedurchmessers  $D_A$  und der Blasenablösefrequenz  $f$  angegeben werden. Die aktive Siedekeimdichte  $N_{as}$  enthält die Beschreibung der Blasenbildung. Die Blasenablösung wird mit dem Blasenablösedurchmesser  $D_A$  und der Blasenablösefrequenz  $f$  beschrieben:

$$\Gamma_G = N_{as}(T_W) \cdot \rho_G \frac{\pi}{6} (D_A(T_W))^3 \cdot f \left( \left| \underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}} \right| \right) \quad . \quad (4.90)$$

Die Blasenablösefrequenz  $f$  wird durch den vorgegebenen Wandwärmestrom  $\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}}$  bestimmt. Die Siedekeimdichte  $N_{as}$  und der Ablösedurchmesser  $D_A$  sind von der Wandtemperatur  $T_W$  abhängig. Die Wandtemperatur wird aus einer Wärmebilanz an der Wand, aufgestellt als Funktion von  $\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}}$  und  $\Gamma_G$ , berechnet.

Mit dieser mechanistischen Betrachtungsweise sind in Abhängigkeit der Modellvorstellungen über Blasenbildung und Blasenablösung und über die Wandwärmebilanz unterschiedliche Modellansätze für  $N_{as}$ ,  $D_A$ ,  $f$  und  $T_W$  und somit unterschiedliche Wandsiedemodelle möglich. Im folgenden werden 4 exemplarische Modellvorstellungen zur Beschreibung der Terme in Gleichung 4.90 angegeben.

Eine erste anfänglich in thermo-hydraulischen Reaktorsicherheitscodes verwendete Modellvorstellung stellt eine Wandwärmebilanz auf, die durch einen makroskopischen, konvektiven Wärmetransport in der Flüssigkeit und einen mikroskopischen Verdampfungsterm gegeben ist. Dazu wird die Chen-Korrelation nach Carlson, Riemke, Rouhani, Shumway und Weaver (1990) verwendet.

Eine zweite Modellvorstellung nach Bartolomei (1987) teilt die Strömung auf in eine Grenzschichtströmung mit Blasen und eine Kernströmung ohne Blasen. Weiter wird eine Rezirkulation von Flüssigkeit aus der Kernströmung in die Grenzschichtströmung hinein betrachtet. Gotovskiy, Zalethniv, Shemyakin, Fyodorov und Isakov (1988) beschreibt diese Rezirkulation mit einer dimensionslosen Rezirkulations-Zahl. Ein drittes Modell nach Fedorov und Fedorov (1985) basiert auf 3 Typen von Blasen. Federov modelliert kleine abgelöste Blasen ohne Widerstand, große abgelöste Blasen mit Widerstand und wachsende, noch nicht abgelöste Blasen an der beheizten Oberfläche.

Eine vierte, weitverbreitete Modellvorstellung nach Lahey und Moody (1979) bestimmt die Einflußzone der Blasen an der Wand. In dieser Einflußzone wird die Wärmeübertragung während der Periode der Blasenbildung durch Verdampfung und während der Periode der Blasenablösung durch einen konvektiv-diffusiven Wärmetransport an das aus der Kernströmung zurückfließende kältere Wasser betrachtet. Lahey beschreibt damit das Blasensieden anhand dreier Gebiete an der Wand: ein einphasiges Gebiet mit einphasigem Wärmetransport von der Wand an die Flüssigkeit, ein Gebiet der Blasenbildung mit reiner Übertragung der Verdampfungswärme und ein Gebiet der Blasenablösung mit einem Wärmetransport von der Wand an das aus der Kernströmung zurückfließende Wasser (siehe Gebiete 1, 2, 3 in Abbildung 4.15). Diese Modellvorstellung liegt auch dem Wandsiedemodell nach Kurul (1990) zugrunde.

Das in dieser Arbeit implementierte Wandsiedemodell basiert auf dem von Kurul entwickelten Modell für voll entwickeltes Keimsieden. In dem Wandsiedemodell wird vorausgesetzt, daß alle Siedekeime aktiviert sind, und daß eine vollständige, normale Blasenablösung stattfindet. Im folgenden wird zuerst auf die Bestimmung der einzelnen Faktoren aus Gleichung 4.90 durch empirische Korrelationen eingegangen. Danach wird die Wärmebilanz zur Berechnung der Wandtemperatur  $T_W$  erklärt. Die Unterschiede zwischen dem in dieser Arbeit verwendeten Modell und dem Modell von Kurul sind im Anhang F dargestellt.



$D_A$  als eine Funktion der modifizierten Jakob-Zahl  $Ja^* = \rho_L c_{pL} T_{Sat} / \rho_G \Delta h_{LG}$  und der Laplace-Länge  $\Lambda = (\sigma / g \Delta \rho)^{\frac{1}{2}}$  ausgedrückt:

$$D_A = 1.5 \cdot 10^{-4} \cdot \Lambda \cdot Ja^{* \frac{5}{4}} \quad . \quad (4.94)$$

Nach Hahne und Grigull (1977) ist der charakteristische Parameter zur Beschreibung der Blasenablösung in siedendem Wasser unter atmosphärischen Bedingungen durch das Produkt  $f \cdot D_A$  gegeben. Malenkov (1973) interpretiert das Produkt  $f \cdot D_A$  als eine Blasenablösegeschwindigkeit. Nach Malenkov verursacht die regelmäßige Erzeugung und Ablösung von Blasen eine periodische Verdrängung der umgebenden Flüssigkeit. Diese Störung pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit  $f \cdot \pi D_A$  durch die Flüssigkeit fort. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit setzt sich aus einem thermodynamisch bestimmten Teil und einem fluid-dynamisch bestimmten Teil zusammen. Der thermodynamische Teil gibt die durch den äußeren Wandwärmestrom aufgeprägte Verdampfungsrate an. Der fluid-dynamische Teil wird durch Auftriebswellen und kapillare Wellen bestimmt. Es wird folgender Ausdruck für die Blasenablösegeschwindigkeit abgeleitet:

$$f \cdot \pi D_A = \frac{|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}}|}{\rho_G \Delta h_{LG}} + \left( \frac{D_A |\underline{\mathbf{g}}| (\rho_L - \rho_G)}{2 (\rho_L + \rho_G)} + \frac{2\sigma}{D_A (\rho_L + \rho_G)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.95)$$

Mit dieser Korrelation ist die Blasenablösefrequenz  $f$  als Funktion des Wandwärmestroms  $\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}}$  bestimmt.

Die empirische Beziehungen 4.94 und 4.95 schränken den Gültigkeitsbereich dieses Wandsiedemodells auf das Blasensieden von Wasser ein. Bei höheren Wandwärmeströmen können die Blasen nicht mehr als Einzelblasen betrachtet werden. Der Einfluß der Blasenwechselwirkung auf den Blasenablösedurchmesser muß berücksichtigt werden. Nach Kolev (1994b) bewirkt die gegenseitige Wechselwirkung der wachsenden und ablösenden Blasen eine solche Schubspannung in der Wandgrenzschicht, daß die Blasen vorzeitig mit kleinerem Durchmesser ablösen. Ein neueres Modell für Sieden von unterkühltem Wasser, das über eine mit höheren Wärmeströmen beheizte Wand strömt, ist in Celata, Cumo und Mariani (1997) dargestellt.

#### 4.3.5.3 Wärmebilanz an der Wand.

Aus den am Anfang des Kapitels 4.3.5 genannten Gründen werden die kleinskaligen Phänomene in der Wärmeübertragung während der Blasenbildung bis zur Blasenablösung mit einer integralen Betrachtungsweise beschrieben. In dieser Betrachtungsweise wird der Wandwärmestrom in drei Teile aufgespalten. Der erste Teil des Wandwärmestroms  $|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}1}|$  gilt für die einphasige Wärmeübertragung an der Wand

$$|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}1}| = \alpha_{LW} (1 - F_{WB}) (T_W - T_L) \quad . \quad (4.96)$$

Der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha_{LW}$  gibt die Wärmeübertragung an das Wasser wie für eine einphasige Strömung an und ist durch eine entsprechende Nusselt-Zahl bestimmt. Der empirische Faktor  $F_{WB}$  gibt das Verhältnis aus der Fläche, in der Wärmeübertragung durch Blasenbildung stattfindet, zur Gesamtfläche der Wand an. Del Valle und Kenning (1985) haben experimentell festgestellt, daß der Flächenanteil  $F_{WB}$  als die vierfache projizierte Blasenoberfläche, bezogen auf die Gesamtfläche der Wand angegeben werden kann. Damit

ergibt sich für den Faktor  $F_{WB}$  bei einer Wand mit einem aktiven Siedekeimdichte  $N_{as}$  zu:

$$F_{WB} = N_{as} \pi D_A^2 \quad . \quad (4.97)$$

Der zweite Teil des Wandwärmestroms  $|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}2}|$  wird für die Verdampfungswärme bei der Beschreibung der Blasenbildung verwendet. Es gilt:

$$|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}2}| = \Gamma_G \Delta h_{LG} \quad . \quad (4.98)$$

Der dritte Teil des Wandwärmestroms  $|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}3}|$  ist notwendig, um die kältere Flüssigkeit, die nach Ablösung der Blase aus dem Fluidkern an die Wand zurückfließt, zu überhitzen. Dieser Teil ist aus einem experimentellen Befund nach Del Valle und Kenning (1985) gegeben durch

$$|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}3}| = F_{WB} f \tau_B \frac{2\lambda_L}{\sqrt{\pi \tau_B} \lambda_L / \rho_L c_{p,L}} (T_W - T_L) \quad . \quad (4.99)$$

Dabei ist  $\tau_B$  die Zeitperiode zwischen zwei aufeinander folgenden abgelösten Blasen. Die Periode  $\tau_B$  kann über die Laplace-Länge  $\Lambda$  aus Gleichung 4.6 bestimmt werden als

$$\tau_B = \Lambda / (f D_A) \quad .$$

Aus diesen drei Wandwärmeströmen, gegeben durch die Gleichungen 4.96, 4.98 und 4.99, kann die Wärmebilanz an der Wand aufgestellt werden zu

$$|\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}}| = |\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}1}| + |\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}2}| + |\underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}3}| \quad . \quad (4.100)$$

Aus der Wandwärmebilanz nach Gleichung 4.100 wird die Wandtemperatur  $T_W$  in Abhängigkeit von der Dampfquellichte  $\Gamma_G$  berechnet. Es liegt ein stark gekoppeltes Problem vor. Dies spiegelt sich in einer schwachen Konvergenz der numerischen Berechnungen wieder. Der numerisch schwierig zu behandelnde Teil des in dieser Arbeit verwendeten Wandsiede-modells liegt in der Berechnung der Wandtemperatur  $T_W$ , die aus der mittleren Temperatur in der ersten wandnahen Fluidzelle berechnet wird. In dieser wandnahen Fluidzelle gilt im allgemeinen  $T_L = T_{Sat}(p_L)$ . Obwohl das Gitter so gewählt ist, daß die makroskopische Temperaturgrenzschicht in der Flüssigkeit gut aufgelöst wird, können die kleinskaligen thermodynamischen Vorgänge der Blasenbildung an der Wand nicht erfaßt werden. Die Wandtemperatur muß daher aus empirischen Korrelationen, Gleichungen 4.96 und 4.99, hergeleitet werden.

### 4.3.6 Modellierung der Dampferzeugung an einer beheizten Wand.

Die Dampfquellichte  $\Gamma_G$  nach Gleichung 4.90 wird als externer Quellterm in der Massentransportgleichung mit Hilfe der User-Subroutinen USRSRC und USRIPT in CFX4.1 implementiert. Dabei wird der in Abbildung 4.16 skizzierte Lösungsalgorithmus verwendet:

- Abschätzung der Wandtemperatur  $T_W$  und somit der Überhitzung  $T_W - T_{Sat}$  ,
- Bestimmung der Siedekeimdichte  $N_{as}$  (mit kritischem Blasendurchmesser  $D_C$ ) ,
- Bestimmung des Blasenablösedurchmessers  $D_A$  ,

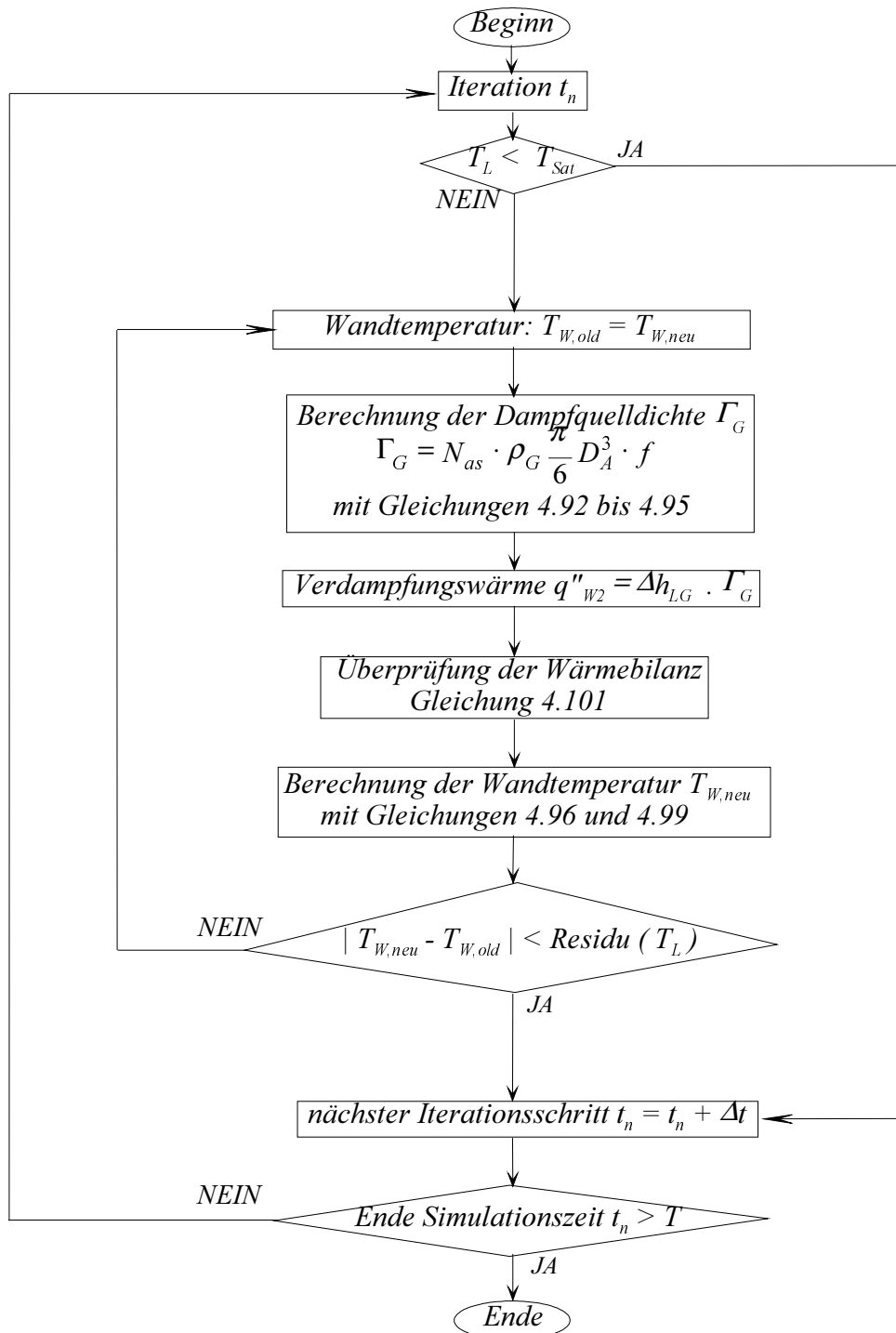


Abbildung 4.16: Lösungsalgorithmus zur Bildung der Dampfquellldichte  $\Gamma_G$ .

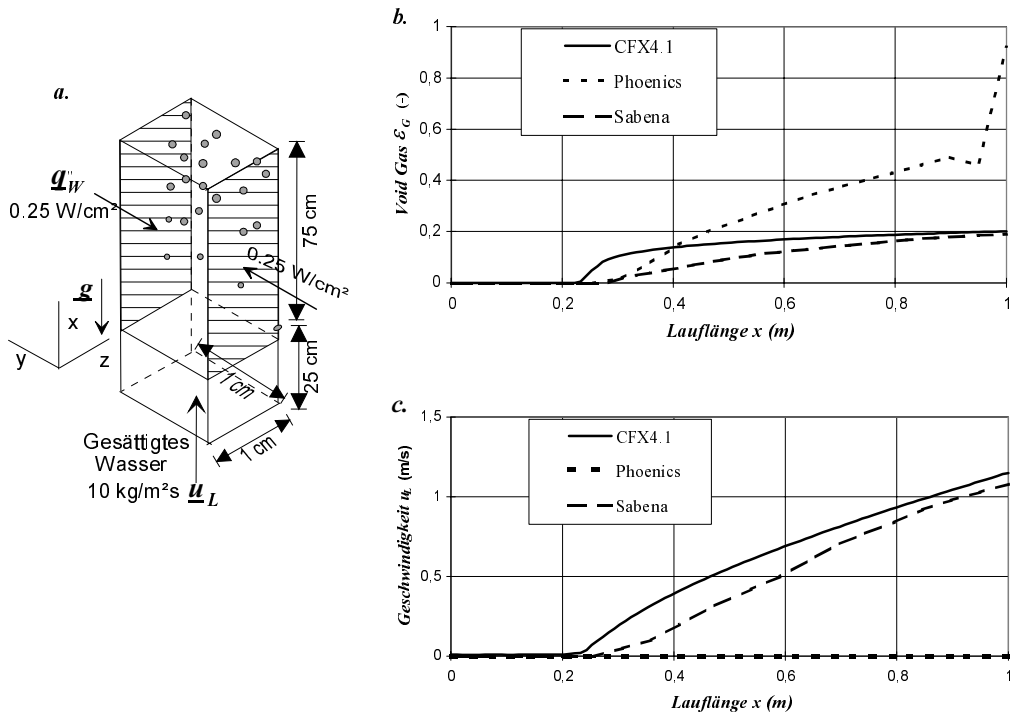


Abbildung 4.17: Numerische Benchmarkrechnung des Wandsiedemodells: a. Skizze, b. Vergleich der mit unterschiedliche Rechenprogramme gerechnete Voidprofile entlang der Wand, c. Vergleich der mit unterschiedliche Rechenprogramme gerechnete Geschwindigkeitsprofile der Flüssigkeit

- Bestimmung der Blasenablösefrequenz  $f$ ,
- Berechnung der Dampfquellichte  $\Gamma_G$ ,
- Überprüfung der Energiebilanz,
- Berechnung eines neuen Werts für die Wandtemperatur  $T_W$ ,
- Fortführung der Iteration, bis das Abbruchkriterium erreicht ist.

In einem ersten Schritt werden die neu implementierten Quellterme zur Beschreibung der Dampfquellichte an einer beheizten Wand anhand der numerischen Simulation eines von Wasser innen durchströmten und von außen beheizten Kanals diskutiert. Die Ergebnisse werden an einer numerischen Benchmarkrechnung nach Spalding und Qin (1992) und Spalding und Radosavljevic (1992) getestet. In einem vertikalen Rechteckkanal mit einem freien Strömungsquerschnitt von  $1 \times 1 \text{ cm}^2$  und einer Länge von  $1 \text{ m}$  strömt Wasser mit Sättigungstemperatur  $T_L = T_{\text{sat}}(p_L)$  und mit einer Geschwindigkeit von  $0.01 \text{ m/s}$  ein, wie in Abbildung 4.17.a schematisch dargestellt ist. Das Rechengebiet umfaßt  $100 \times 10 \times 1$  gleichmäßige Zellen. Das erste Viertel des Kanals ist nicht beheizt, die folgenden drei Viertel sind mit einem Wandwärmestrom von  $5 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$  beaufschlagt. Die mit dem erweiterten Rechenprogramm CFX4.1 berechneten Voidprofile an der Wand und in der Mitte des Kanals werden in Abbildung 4.17.b mit den Ergebnissen anderer Rechenprogramme verglichen. Hier werden exemplarisch die Ergebnisse der Rechenprogramme Phoenics und Sabena zum Vergleich ausgewählt. Die Eigenschaften dieser Rechenprogramme sind im Anhang B aufgenommen. Die Rechnungen mit den Programmen Phoenics und Sabena werden nicht von

Einflußgrößen		Variationen			
Wärmestrom $\underline{q}''_{\text{W}}$		$7.8 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$	$1.3 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$	$7.8 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$	$1.3 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$
Unterkühlung $\Delta T_{\text{Sub}}$		$8^\circ \text{ C}$	$18^\circ \text{ C}$	$23^\circ \text{ C}$	$33^\circ \text{ C}$
Geschwindigkeit $ \underline{u}_{\text{L}} $		$0.05 \text{ m/s}$	$0.10 \text{ m/s}$	$0.15 \text{ m/s}$	$0.20 \text{ m/s}$
Druck $p_{\text{Out}}$		$0.8 \text{ bar}$	$1.0 \text{ bar}$	$1.2 \text{ bar}$	$1.5 \text{ bar}$

Tabelle 4.3: Variation der Einflußgrößen.

den Autor selbst durchgeführt aber der Literatur Spalding und Qin (1992) entnommen. Die Ergebnisse mit dem erweiterten CFX4.1 Rechenprogramm sind den Ergebnissen, die mit Sabena erzielt werden, ähnlich. An der Wand wird 20% Void erzeugt und zur Kanalmitte transportiert, siehe Abbildung 4.17.b. Dabei beeinflussen die erzeugten Blasen in CFX4.1 und Sabena die Geschwindigkeit der Flüssigkeit. Es erfolgt, wie aus Abbildung 4.17.c zu entnehmen ist, ein blaseninduzierter Auftrieb der Flüssigkeit an der beheizten Wand. Die mit dem Programm Phoenics durchgeführte Rechnung ist eindimensional und zeigt also weder einen Transport von Void zur Kanalmitte noch einen Einfluß der Volderzeugung auf die Flüssigkeitgeschwindigkeit. Insgesamt zeigen die numerischen Ergebnisse große Abweichungen voneinander. Ein Vergleich mit experimentellen Daten liegt bisher nicht vor.

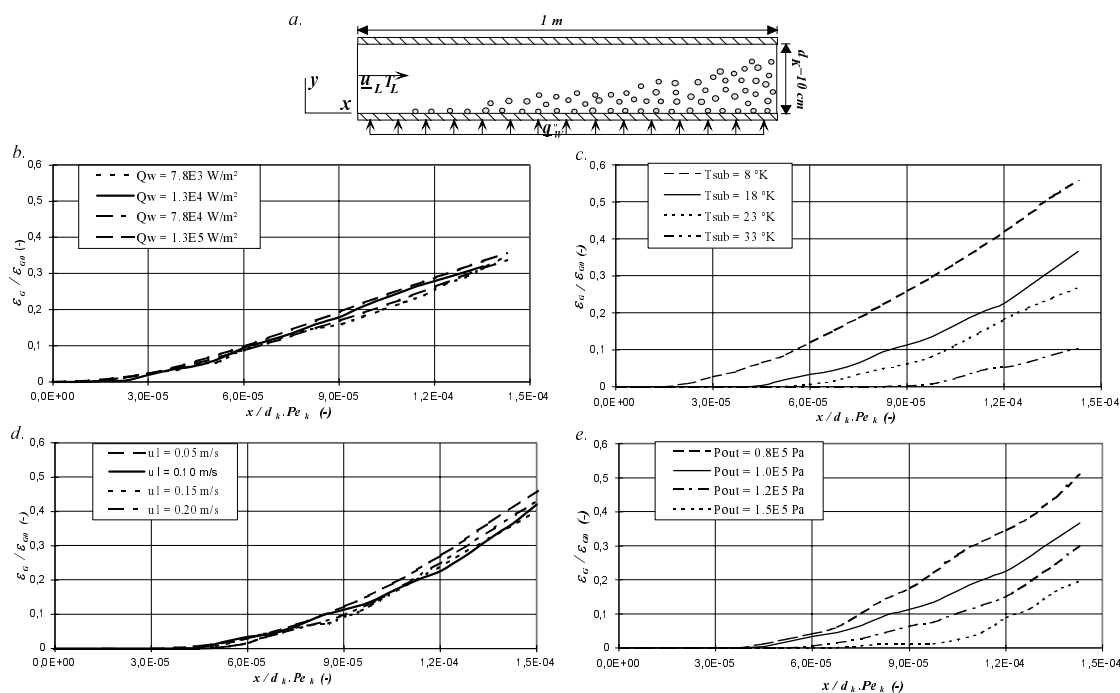


Abbildung 4.18: Modellierung des Blasensiedens an einer beheizten Wand, wie in der Skizze a) dargestellt ist. Änderung des relativen Dampf-Volumenanteils  $\varepsilon_G / \varepsilon_{G0}$  (mit  $\varepsilon_{G0} = \left| \underline{q}''_{\text{W}} \right| / \left| \underline{u}_{\text{L}} \right| \rho_G \Delta h_{\text{LG}}$ ) über normierter Lauflänge  $x / d_k \cdot Pe_k$  für Variation von b) Wandwärmestrom  $q''_{\text{W}}$ , c) Unterkühlung  $\Delta T_{\text{Sub}}$ , d) Geschwindigkeit  $|\underline{u}_{\text{L}}|$  und e) Druck  $p_{\text{Out}}$ .

In einem zweiten Schritt werden durch eine Variation der wesentlichen Einflußgrößen Wandwärmestrom  $\left| \underline{q}''_{\text{W}} \right|$ , Unterkühlung  $\Delta T_{\text{Sub}}$ , Flüssigkeitgeschwindigkeit  $|\underline{u}_{\text{L}}|$  und Druck  $p_{\text{Out}}$



die physikalischen Eigenschaften des Wandsiedemodells verdeutlicht. Für eine Sensitivitätsanalyse wird Blasensieden in einem horizontalen Rechteckkanal mit einem freien Strömungsquerschnitt von  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  und einer Länge von  $1 \text{ m}$  betrachtet, siehe Skizze 4.18.a. Über die gesamte Länge wird ein konstanter Wandwärmestrom aufgeprägt. Das Rechengebiet ist zwei-dimensional und umfaßt  $100 \times 20$  gleichmäßige Zellen. Es werden die in Tabelle 4.3 angegebenen Variationen der Einflußgrößen durchgeführt.

In Abbildung 4.18 ist der normierte Dampf-Volumenanteil  $\varepsilon_G / \varepsilon_{G0}$  über der normierte Lauflänge  $x / d_K Pe$  aufgetragen. Der Dampf-Volumenanteil  $\varepsilon_G$  wird mit dem maximal möglichen Volumenanteil  $\varepsilon_{G0}$  normiert, der aus  $\varepsilon_{G0} = \left| \underline{\mathbf{q}}''_{\mathbf{w}} \right| / \left| \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}} \right| \rho_G \Delta h_{LG}$  berechnet wird. Die Lauflänge  $x$  wird mit der Kanalbreite  $d_K$  und der Kanal-Péclet-Zahl  $Pe_K = \rho_L c_{pL} \cdot \left| \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}} \right| \cdot d_K / \lambda_L$  skaliert. Die Neigungen der aufgetragenen Kurven stellen ein Maß für die Verdampfungsrate dar.

In Abbildung 4.18.b wird die Variation des aufgeprägten Wandwärmestroms wiedergegeben. Durch die Skalierung des Voids mit dem Wandwärmestrom fallen die Kurven für unterschiedliche Wandwärmeströme in einer Kurve zusammen. Damit ist gezeigt, daß die Dampfquellichte proportional zum Wandwärmestrom ansteigt. Abbildung 4.18.c gibt den Einfluß der Unterkühlung an. Mit zunehmender Unterkühlung nimmt die einphasige Lauflänge bis zum Einsetzen des Blasensiedens zu. In Abbildung 4.18.d fallen sämtliche Kurven zusammen, was die Proportionalität zwischen die Dampfquellichte und der Flüssigkeitsgeschwindigkeit bestätigt. Abbildung 4.18.e zeigt die Druckabhängigkeit. Eine Steigerung des Drucks, die mit einer entsprechenden Zunahme der Sättigungstemperatur einhergeht, bedeutet, daß das Einsetzen des Blasensiedens erst bei größeren Lauflängen stattfindet.

Das in den Kapiteln 4.3.3 und 4.3.5 entwickelte und in CFX4.1 implementierte Kondensationsmodell und Wandsiedemodell sind somit anhand eines numerischen Benchmarks und einer Sensitivitätsanalyse auf ihre physikalische Plausibilität untersucht.

# Kapitel 5

## Ergebnisse.

### 5.1 Simulation einer isothermen Blasenströmung.

Für die Entwicklung und Verifizierung von numerischen Rechenverfahren und physikalischen Modellvorstellungen zur Simulation einer isothermen Blasenströmung sind im Forschungszentrum Karlsruhe FZK experimentelle Untersuchungen zu einer vertikalen, turbulenten Blasenströmung des Systems Wasser-Luft am Versuchsstand TWOFLEX durchgeführt worden. Samstag (1996) hat die axiale Entwicklung einer Blasenströmung mit radialer Blasenverteilung in Abhängigkeit von der lokalen Gaszufuhr untersucht. Im folgenden werden der Versuchsaufbau und die experimentell untersuchte Strömungskonfiguration, sowie die Berechnung der Strömung mit CFX4.1 und die Diskussion der Ergebnisse dargestellt.

#### 5.1.1 Versuchsaufbau.

Der Versuchsstand TWOFLEX besteht aus einem 5000 *mm* langen, vertikalen Rohr mit dem Innendurchmesser  $d = 70.3 \text{ mm}$  zur Untersuchung einer vertikalen, aufwärtsgerichteten Luft-Wasser Blasenströmung (Abbildung 5.1). Am Eintritt in das Rohr wird ein mittlerer volumetrischer Fluß des Wassers  $\underline{j}_L = \dot{V}_L / (\pi d^2 / 4)$  über den regelbaren, volumetrischen Wasservolumenstrom  $\dot{V}_L$  eingestellt. Die auf den Innendurchmesser des Rohrs bezogene Reynolds-Zahl ist als  $Re_L$  bezeichnet. Die Strömung ist stationär, isotherm und turbulent. Trotz eines Turbulenzgitters zur Homogenisierung der Turbulenz im Einlauf wird im Experiment anisotrope Turbulenz beobachtet.

Am unteren Ende des Rohrs ist ein Blasengenerator mit 7 Gasdüsen angebracht. Die Luftblasen werden über seitliche Bohrungen ( $d_B = 0.35 \text{ mm}$ ) an den Gasdüsen erzeugt. Damit wird ein mittlerer volumetrischer Fluß des Gases  $\underline{j}_G = \dot{V}_G / (\pi d^2 / 4)$  eingestellt, der über den volumetrischen Gasvolumenstrom  $\dot{V}_G$  regelbar ist. Der volumetrische Gasgehalt wird als  $\beta = \dot{V}_G / (\dot{V}_L + \dot{V}_G)$  bezeichnet. Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte typische Parameterkombination ist in Tabelle 5.1 gegeben.

Mit abnehmendem mittleren volumetrischen Fluß des Wassers  $\underline{j}_L$  und zunehmendem mittleren volumetrischen Fluß des Gases  $\underline{j}_G$  stellt sich ein instabiler Strömungszustand ein, der zwischen Blasenströmung und Pfropfenströmung wechselt. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit exemplarisch das in Tabelle 5.1 angegebene Experiment im Detail nachvollzogen. Für diesen Fall können die Blasen als sphärische Partikel mit einem Durchmesserpektrum von  $1 \text{ mm} < D_B < 4 \text{ mm}$  charakterisiert werden. Die experimentell ermittelten Häufigkeitsverteilungen des Blasendurchmessers zeigen typischerweise einen

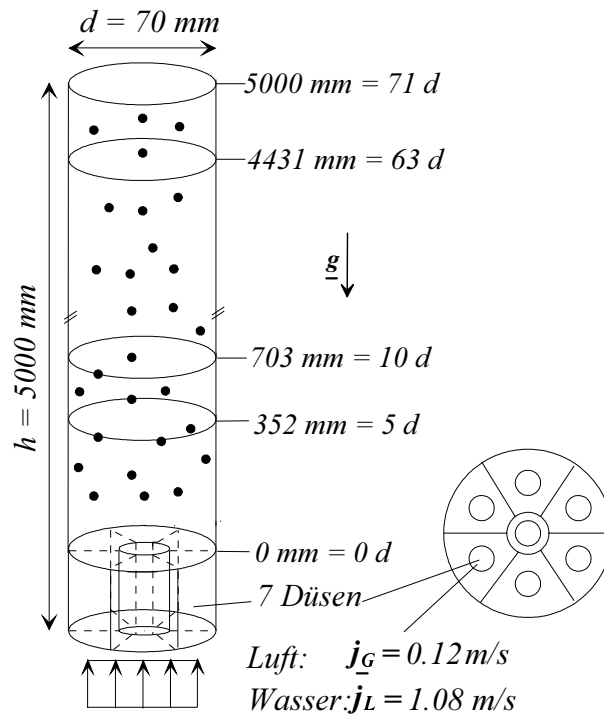


Abbildung 5.1: Versuchsanlage für Blasenströmungen, nach Samstag (1996).

mittleren Blasendurchmesser von  $2 \text{ mm}$  und einen Sauter-Durchmesser von  $3 \text{ mm}$ . Werden die 4 typischen Blasenklassen nach Clift et al. (1978) betrachtet, so können nahezu alle Blasen der zweiten Blasenklasse mit  $1.4 \text{ mm} < D_B < 3.6 \text{ mm}$  zugeordnet werden.

Der Blasengenerator besteht aus einer Zentraldüse und sechs symmetrisch am Umfang verteilten Gasdüsen. Der Gasvolumenstrom durch jede Düse ist einzeln einstellbar. Somit können symmetrische und unsymmetrische Gasverteilungen im Blasengenerator erzeugt werden (siehe Tabelle 5.2). Eine symmetrische Gaszufuhr liegt vor, wenn alle Düsen oder nur die Zentraldüse mit Luft beaufschlagt werden. Eine unsymmetrische Gaszufuhr liegt vor, wenn eine exzentrische Düse oder zwei gegenüberliegende exzentrische Düsen mit Luft beaufschlagt werden.

Die räumliche Blasenverteilung wird mit Hilfe einer Röntgen-Tomographie ausgemessen. Der Röntgen-Tomograph besteht aus einer Röntgenröhre als Strahlungsquelle und 63 Geiger-Müller-Zählern als Meßaufnehmer. Das Meßsystem, dessen Meßebeane senkrecht zur Kanalachse ausgerichtet ist, wird während einer Messung schrittweise um das Rohr herum verfahren, so daß für jede Meßebeane das Voidprofil mit einem Datensatz von  $63 \times 63$  Meßpunkten ausgemessen wird. Zusätzlich werden eine Zwei-Sensor-Widerstandssonde und eine Heißfilmsonde eingesetzt. Die Zwei-Sensor-Widerstandssonde liefert Aussagen über den Blasendurchmesser und die Blasengeschwindigkeit. Mit der Heißfilmsonde wird die lokale, momentane Geschwindigkeit der flüssigen Phase gemessen. Durch Mittelung über die Meßzeit werden die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit und die Mittelwerte der turbulenten Schwankungen bestimmt. Vollständige Meßdatensätze liegen für die horizontalen Ebenen der axialen Höhen von  $x = 5 d = 352 \text{ mm}$ ,  $x = 10 d = 703 \text{ mm}$  und  $x = 63 d = 4431 \text{ mm}$  vor.

<i>Fluid</i>	<i>Parameter</i>	<i>Größe</i>	<i>Bereich</i>
<i>Wasser</i>	<i>Volumenstrom</i>	$\dot{V}_L$	$15 \text{ m}^3/\text{s}$
	<i>mittlerer volumetrischer Fluß</i>	$\underline{j}_L$	$1.08 \text{ m/s}$
	<i>Reynolds – Zahl</i>	$Re_L$	$0.75 \cdot 10^5$
<i>Luft</i>	<i>Volumenstrom</i>	$\dot{V}_G$	$1.65 \text{ m}^3/\text{s}$
	<i>Gasgehalt</i>	$\beta$	0.10
	<i>mittlerer volumetrischer Fluß</i>	$\underline{j}_G$	$0.12 \text{ m/s}$
	<i>Blasen – Reynolds – Zahl</i>	$Re_B$	$3.2 \cdot 10^3$

Tabelle 5.1: Untersuchte Parameterkombination einer Luft-Wasser-Blasenströmung.

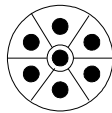
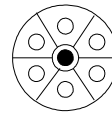
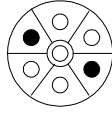
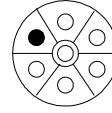
<i>Gaszufuhr</i>	<i>Düsen in Betrieb</i>	
<i>symmetrisch</i>		
<i>nicht – symmetrisch</i>		

Tabelle 5.2: Untersuchte Arten der Gaszufuhr.

### 5.1.2 Berechnung.

Die isotherme, turbulente Luft-Wasser-Blasenströmung wird mit Hilfe des erweiterten Zwei-Fluid-Modells mit dem Rechenprogramm CFX4.1 simuliert, in welches die im Kapitel 4 entwickelten Modelle zur Beschreibung der Zwischenphasen-Austauschterme implementiert sind. Das Rohr wird in der Höhe in 7 Abschnitte von jeweils  $10 d$  axialer Länge mit einer Überlappung von  $2 d$  unterteilt. Die Geometrie wird durch ein dreidimensionales Gitter mit 1 zentralen Block und 4 am Umfang angeordneten Blöcken beschrieben. Eine horizontale Ebene wird in 200 Zellen eingeteilt, die axiale Höhe eines Abschnittes wird durch 125 Ebenen diskretisiert.

Der Eintrittsquerschnitt für die Berechnung des ersten Abschnittes liegt bei einer axialen Höhe von  $x = 5 d$ . Als Eingabeprofil für den Gasvolumenanteil wird das gemessene, radiale Profil vorgegeben. Die Meßwerte an den  $63 \times 63$  Meßpunkten werden mit einem Interpolationsverfahren erster Ordnung in der User-Subroutine USRBCS interpoliert und auf das Rechengitter übertragen. Ebenso wird für die Meßdaten der mittleren Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie des Wassers  $k_L$  am Eintrittsquerschnitt bei  $x = 5 d$  verfahren. Die Dissipationsrate  $\epsilon_L$  wird abgeschätzt gemäß:  $\epsilon_L = k_L^{3/2} / 0.15$ . Die berechneten Profile des Gasvolumenanteils, der Geschwindigkeiten und der turbulenten kinetischen Energie in einem Abstand von  $2 d$  vom Austrittsquerschnitt werden als Eintrittswerte für den jeweils stromab liegenden Abschnitt angegeben. Am Austrittsquerschnitt wird jeweils der Druck konstant gesetzt. Als Randbedingung an der Rohrwand gelten ein logarithmisches Geschwindigkeitsprofil für die turbulente Wasserphase und die Undurchdringbarkeitsbedingung für die laminare Gasphase. Damit wird das Verschwinden des Voids an der Wand gefördert, so daß auf die Wandkraft zur Erfüllung des Impulsaustausches zwischen den Phasen an der Wand verzichtet werden kann.

Die Düsen und die Blasenbildung selbst werden nicht modelliert. Die Luftblasen werden direkt mit einem Partikelmodell für eine disperse laminare Gasphase beschrieben und als

kugelförmige Partikel mit einem konstanten Durchmesser  $D_B = 3 \text{ mm}$  betrachtet. Verschiedene Klassen von Blasenrößen und Blasenwechselwirkungen werden nicht berücksichtigt. Die zusätzlich in CFX4.1 implementierten Modelle des erweiterten Zwei-Fluid-Modells sind für eine ideal verdünnte Blasenströmung entwickelt und zeigen somit keine Sensibilität gegenüber Blasenröße und Blasenwechselwirkungen mit Blasenkoaleszenz oder Blasenzerteilung. Außerdem gehören die im Experiment beobachteten Blasen alle zu der gleichen typischen Blasenklasse nach Clift.

Die Wasserströmung, das heißt die kontinuierliche Phase, wird als stationäre, turbulente Auftriebsströmung simuliert. Die Turbulenz der kontinuierlichen Phase wird mit dem standard k-epsilon-Turbulenzmodell berechnet. Zur Modellierung der im Experiment beobachteten anisotropen Turbulenz ist u. U. auch das Reynolds-Spannung-Modell geeigneter. Die Anwendung dieses Turbulenzmodells für eine Zweiphasenströmung erfordert jedoch in CFX4.1, daß beide Phasen turbulent gerechnet werden. Da die Anwendung eines Reynolds-Spannung-Turbulenzmodells nicht für die Beschreibung von zwei gekoppelten Turbulenzfeldern in einer Zweiphasenströmung validiert ist, wird auf den Einsatz des Reynolds-Spannung-Modells verzichtet. Es wird das k-epsilon Turbulenzmodell mit den standard Koeffizienten nach Launder und Spalding (1974) verwendet. Da die dem Autor vorliegende Version des CFX4.1 Programms weder alle Zwischenphasenkräfte noch eine Turbulenzmodulation zur Verfügung stellt, wird im Rahmen dieser Arbeit der Einfluß der neu implementierten Zwischenphasenkräfte untersucht. Die zusätzliche, blaseninduzierte Turbulenzmodulation, wie sie von Lopez de Bertodano (1998) für das k-epsilon Turbulenzmodell vorgeschlagen wird, ist in dieser Arbeit nicht modelliert.

Die hydraulische Kopplung zwischen der kontinuierlichen Phase und der dispersen Phase erfolgt mit den in Kapitel 4.2 beschriebenen Modellen für die Zwischenphasenkräfte. Die 4 Zwischenphasenkräfte werden für sämtliche untersuchte Arten der Gaszufuhr mit dem in Tabelle 5.3 angegebenen Satz an Koeffizienten bestimmt. Für die untersuchte Blasen-Reynolds-Zahl von  $Re_B = 3.2 \cdot 10^3$  muß nach Tabelle 4.1 ein Widerstandskoeffizient von  $C_D = 0.44$  gewählt werden. Für den Virtuellen Massenkoeffizient wird der theoretische Wert von  $C_{VM} = 0.5$  für eine Einzelblase verwendet. Der Auftriebskoeffizient wird nach Drew und Lahey (1987) auf  $C_A = \rho_G C_{VM} \approx 0.5$  festgelegt. Der turbulente Diffusionskoeffizient wird in Anlehnung an Anglart et al. (1993) als  $C_{TD} = 0.1$  gewählt. Die Werte der Koeffizienten haben teilweise eine theoretische, teilweise eine experimentelle Begründung und deshalb eine gewisse allgemeine Gültigkeit. Die Kombination  $C_A = 0.5$  und  $C_{TD} = 0.1$  wird für die Simulationen von Blasenströmungen nach Ohnuki und Akimoto (1998) bevorzugt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß andere Kombinationen von Koeffizienten ebenfalls gute Resultate liefern. Es hat sich herausgestellt, daß physikalisch konsistente Eintrittsprofile als Start für die Rechnung von großer Bedeutung sind. Um den spezifischen Einfluß der einzelnen Zwischenphasenkräfte zu untersuchen, sollte eine Sensitivitätsanalyse für die Koeffizienten durchgeführt werden. Eine vollständige Sensitivitätsanalyse konnte nicht in Detail durchgeführt werden, da die einzelnen Rechnungen zu lange Rechenzeiten beanspruchen.

Für den vorliegenden Fall einer stationären, inkompressiblen, turbulenten Zweiphasenströmung werden die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen jeder Phase und zwei Transportgleichungen für die turbulenten Größen  $k_L$  und  $\epsilon_L$  gelöst. Zur Stabilisierung der Lösung wird Upwinding zweiter Ordnung mit einer Unterrelaxation der äußeren Iterationen vorgenommen. Es wird in Kapitel 3.4.1 beschriebene "Time-Marching"-Methode zur Berechnung der stationären Zweiphasenströmung herangezogen. Die Simulation wird auf einer IBM Workstation RS6000 590 mit 1 Prozessor und einem Hauptspeicher von 512

<i>Koeffizient</i>	<i>Größe</i>
<i>Widerstandskoeffizient</i>	$C_D = 0.44$
<i>Auftriebskoeffizient</i>	$C_L = 0.5$
<i>Virtueller Massenkoeffizient</i>	$C_{VM} = 0.5$
<i>Turbulenter Diffusionskoeffizient</i>	$C_{TD} = 0.1$

Tabelle 5.3: Verwendeter Satz an Koeffizienten der Zwischenphasenkräfte.

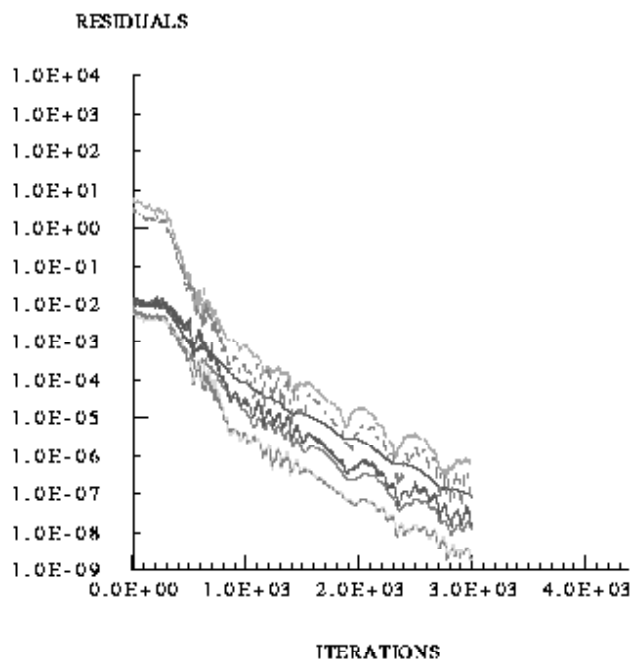


Abbildung 5.2: Typischer Konvergenzverlauf einer CFX4.1-Rechnung

MB durchgeführt. Einen typischen Konvergenzverlauf zeigt Abbildung 5.2. Als Iterationszahl sind hier die äußeren Iterationen des entkoppelten Lösers aufgetragen. Durch die Implementierung der Zwischenphasenkräfte zeigt die Rechnung ein langsames Konvergenzverhalten im Vergleich zu einer Rechnung ohne Zwischenphasenkräfte. Dabei werden gute Startlösungen vorausgerechnet, so daß das Konvergenzkriterium mit Residuen für die Geschwindigkeitskomponenten kleiner als  $1 \cdot 10^{-5}$  erfüllt sind.

### 5.1.3 Diskussion der Ergebnisse.

In Abbildung 5.3 sind für den Fall einer symmetrischen Gaszufuhr durch alle 7 Düsen die gemessenen und berechneten radialen Voidprofile für die Ebenen der axialen Höhen  $x = 5 d$ ,  $x = 10 d$  und  $x = 63 d$  aufgetragen. Grundsätzlich ist eine ansteigende Konzentration von Blasen entlang der Wand zu erkennen, die zu der Ausbildung eines gleichmäßigen Ringprofils des Gasvolumenanteils führt. Die an den Düsen als Punktquelle eingebrachte Luft verteilt sich in azimuthaler Richtung, so daß die Position der Düsen bei  $x = 10 d$  nicht mehr zu erkennen ist. Die gemessene azimuthale Umverteilung der Blasen entlang der Wand kann nur durch die Simulation mit den zusätzlich implementierten Modellen wiedergegeben werden. Ohne die zusätzlichen Modelle wird ein Abbau der hohen Blasenkonzentration entlang der Wand simuliert. Die zusätzliche Auftriebskraft verursacht eine radiale Voidverteilung, die die zwei charakteristischen Maxima an den Wänden zeigt. Da die Flüssigkeitsströmung

für die simulierten Lauflängen noch nicht eingelaufen ist, tritt die Wirbelstärke  $\nabla \times \langle \underline{u}_L \rangle_L$  über den gesamten Rohrquerschnitt auf. Diese Wirbelstärke in der Einlaufstrecke ist die Ursache für die Auftriebskraft, die die Blasen an die Rohrwand treibt. Der Blasen-transport in Richtung Wand ist im Experiment für alle untersuchten Querschnittsebenen zu finden. Am Eintrittsquerschnitt auf  $x = 5 d$  liegt ein gemessenes Voidprofil mit zwei lokalen Maxima in der Rohrmitte vor. Diese lokalen Maxima resultieren von Blasen, die über die Zentraldüse eingegeben werden und im Blasengenerator selbst zu den berandenden Wänden der Zentraldüse hinwandern. Das unterstreicht die Bedeutung der Auftriebskraft und die Notwendigkeit einer korrekten Simulation der Vorgänge mit Hilfe dieser Querkraft.

Unter Berücksichtigung einer Genauigkeit<sup>1</sup> von 3% bis 10% kann festgestellt werden, daß die Rechnung mit den hergeleiteten hydrodynamischen Modellen für die Wechselwirkung zwischen Blasen und Fluid gut mit dem Experiment übereinstimmt. Sowohl der radiale Verlauf als auch die maximalen Werte des Voidprofils werden durch die Rechnung wiedergegeben. Eine Verfeinerung oder Vergrößerung des Rechengitters zeigt, daß die richtige radiale Position des Maximalwertes des Gasvolumenanteils bei einer Auflösung der radialen Querschnittsebene durch 200 Gitterzellen erreicht wird. Die gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten des Voids zeigt, daß die gewählte Kombination der Koeffizienten nach Tabelle 5.3 für diese Blasenströmung den Einfluß der 4 modellierten Zwischenphasenkräfte richtig wiedergibt. Nur mit den zusätzlichen Modellen für die Zwischenphasenkräfte wird für diese Blasenströmung ein Voidprofil mit zwei Maximalwerten an den Wänden simuliert. Ohne die zusätzlichen Modelle wird ein Voidprofil mit nur einem Maximum in der Rohrmitte simuliert. Analoge Resultate werden für die zweite symmetrische Art der Gaszufuhr und für die unsymmetrischen Arten der Gaszufuhr gefunden. Wie aus den folgenden Abbildungen 5.3 bis 5.6 entnommen werden kann, ist der Einfluß der 4 modellierten Zwischenphasenkräfte für alle 4 Arten der Gaszufuhr gültig. Dieses deutet auf eine gewisse Allgemeingültigkeit der Zwischenphasenkräfte mit den verwendeten Koeffizienten für solche Blasenströmungen hin. Die Rechnungen ohne zusätzliche Modelle werden im folgenden nicht mehr dargestellt, da sie keine neue Information enthalten.

In Abbildung 5.4 sind für den Fall einer symmetrischen Gaszufuhr durch die Zentraldüse die gemessenen und berechneten radialen Voidprofile für die Ebenen der axialen Höhen  $x = 5 d$ ,  $x = 10 d$  und  $x = 63 d$  dargestellt. Bereits für eine axiale Höhe von  $x = 10 d$  ist ein starker Blasen-transport zur Wand hin zu erkennen. Die durch den Blasengenerator aufgeprägte hohe Gaskonzentration auf der Rohrachse wird zwischen  $x = 5 d$  und  $x = 10 d$ , das heißt einer axialen Lauflänge von nur  $5 d$ , durch einen Blasen-transport in radialer Richtung auf 40% des Anfangswertes abgebaut. Dieser Blasen-transport wird sowohl durch die turbulente Diffusionskraft als auch durch die Auftriebskraft bewirkt. In der Rohrmitte, wo eine hohe Blasenkonzentration vorliegt, bewirkt die turbulente Diffusionskraft eine Dispersion der Blasen. Die turbulente Diffusionskraft ist proportional zum Void-Gradienten  $\nabla \varepsilon_G$ , das heißt, sie bewirkt eine Abnahme hoher Voidwerte und eine radiale und azimutale Vergleichmäßigung des Voidprofils. Mit Annäherung an die Rohrwand gewinnt die Auftriebskraft an Bedeutung. Sie verursacht einen Aufbau höherer Blasenkonzentration an den Wänden und wirkt der turbulenten Diffusionskraft entgegen. Für die Ebene der axialen Höhe  $x = 10 d$  zeigt die Simulation auf der Rohrachse einen höheren Void, als im Experiment gemessen wird. Das weist auf eine Unvollkommenheit der Turbulenzmodellierung

---

<sup>1</sup>Die mit dem Röntgentomographen gemessenen Voidprofile haben nach Cherdron, Grötzbach, Samstag, Sengpiel, Simon und Tiseanu (1998) einen statistischen Meßfehler von 10% für niedrigere Voidwerte ( $\varepsilon_G \sim 0.005$ ) und einen Meßfehler von bis zu 1% für höhere Voidwerte. Die geometrische Auflösung beträgt  $1.3 \times 1.3 \text{ mm}^2$ .

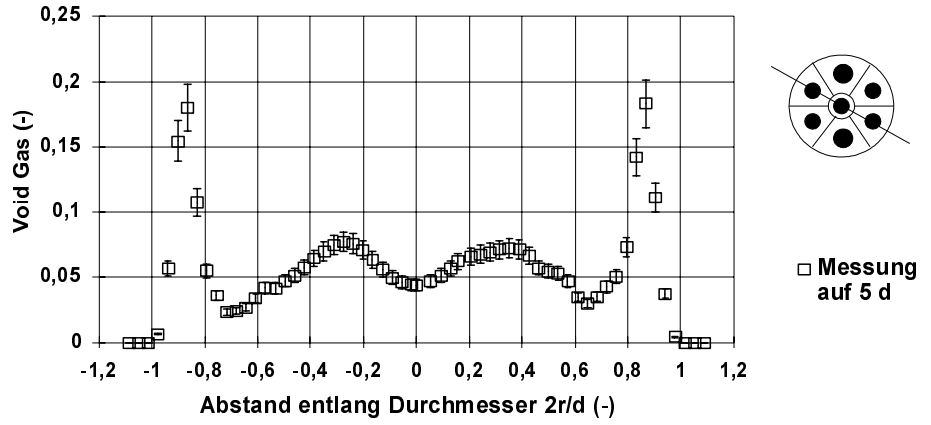
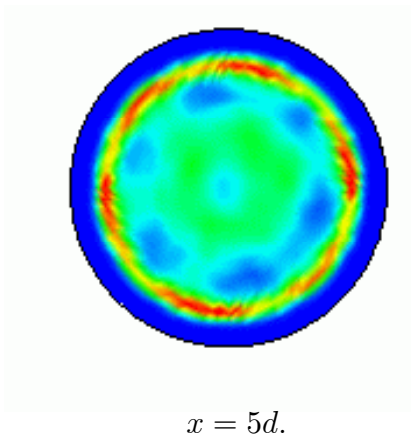
mit dem einfachen k-epsilon-Turbulenzmodell hin. Eine zu niedrige, turbulente kinetische Energie der Flüssigkeit entlang der Wand verursacht eine zu geringe turbulente Diffusionskraft, da die turbulente Diffusionskraft als proportional zur turbulenten kinetischen Energie modelliert wird.

Für den Fall einer unsymmetrischen Gaszufuhr durch eine exzentrische Düse sind in Abbildung 5.5 die gemessenen und berechneten radialen Voidprofile für  $x = 5 d$ ,  $x = 10 d$  und  $x = 63 d$  in analoger Weise aufgetragen. Es ist ein deutlicher turbulenter Blasen-transport in azimuthaler Richtung entlang der Wand zu erkennen. Dabei nimmt die hohe Blasenkonzentration über der exzentrischen Düse ab, und es bildet sich ein Ringprofil des Voids entlang der Wand aus. Dieses Effekt wird in der Simulation durch die turbulente Diffusionskraft verursacht. Die turbulente Diffusionskraft wird direkt durch die turbulente kinetische Energie beeinflusst. Die gemessene, turbulente kinetische Energie, die als Eintrittsprofil in der Rechnung vorgegeben wird, liegt für diese Zweiphasenströmung um den Faktor 3 höher als für eine einphasige Strömung mit der selben Reynolds-Zahl. Für die Ebene der axialen Höhe  $x = 63 d$  ist das berechnete Voidprofil vollständig symmetrisch, obwohl das gemessene Voidprofil eine leichte Asymmetrie zeigt. Unter Berücksichtigung des Meßfehlers und der Vereinfachungen in der Turbulenzmodellierung kann die Modellierung der turbulenten Diffusion als physikalisch richtig erfaßt angesehen werden. Eine Erweiterung des k-epsilon-Turbulenzmodells unter Berücksichtigung einer blaseninduzierten Turbulenz könnte die Bedeutung der turbulenten Diffusionskraft ändern. Diese Turbulenzmodulation würde sowohl für die turbulente Diffusionskraft als auch für die Auftriebskraft nicht die Form sondern lediglich den in Tabelle 5.3 angegebenen Koeffizienten beeinflussen.

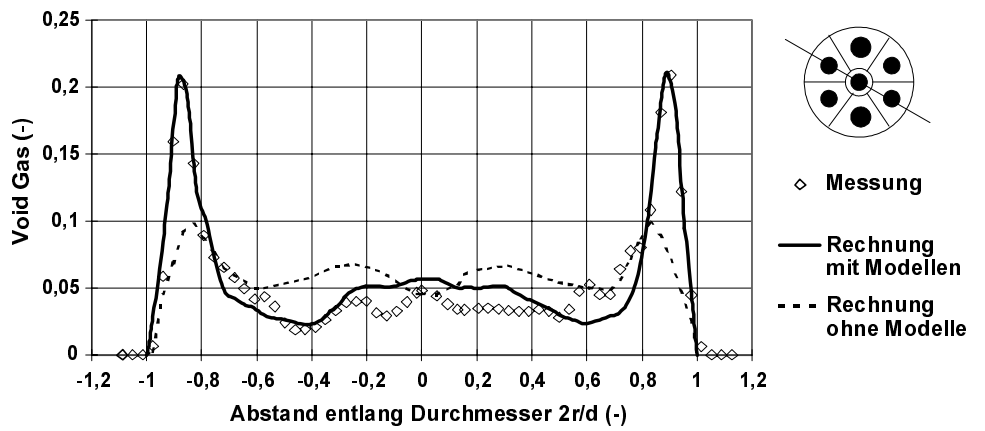
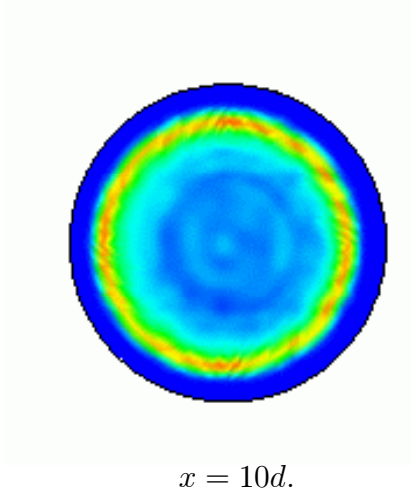
In Abbildung 5.6 sind für den Fall einer unsymmetrischen Gaszufuhr durch zwei gegenüberliegende Düsen die gemessenen und berechneten Voidprofile für  $x = 5 d$ ,  $x = 10 d$  und  $x = 63 d$  dargestellt. Es ist nochmals deutlich das Abklingen der Maximalwerte im Bereich der Düsen und die azimuthale Umverteilung der Blasen entlang der Wand zu beobachten. Das deutet auf den starken Einfluß der Auftriebskraft hin, die durch die Wirkung der turbulenten Diffusionskraft verringert wird. Für die Ebene der Höhe  $x = 63 d$  hat sich nahezu das gleiche Ringprofil des Voids wie in Abbildung 5.3 für eine symmetrische Gaszufuhr durch alle Düsen eingestellt.

Grundsätzlich kann festgehalten werden, daß die Blasenverteilung unabhängig von der Art der Gaszufuhr durch den modellierten Zwischenphasenaustausch in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen simuliert wird. Der maßgebliche Einfluß der Auftriebskraft und der turbulenten Diffusionskraft auf die Blasen wird mit den in Tabelle 5.3 angegebenen Koeffizienten gut wiedergegeben.

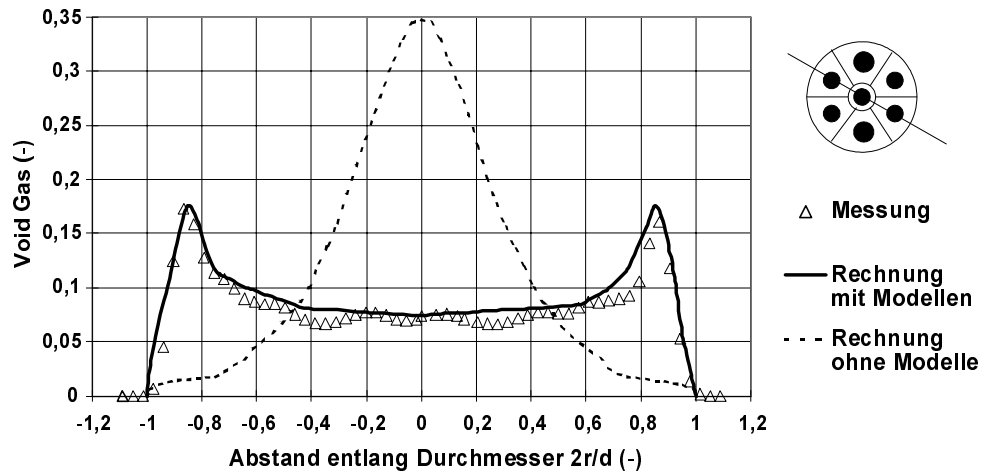
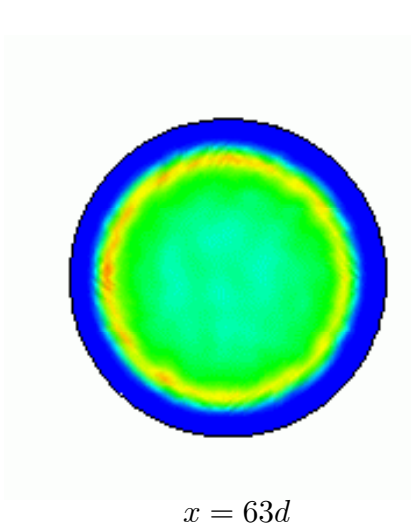




Messung für Querschnitte bei  $x = 5d$ ,  $x = 10d$  und  $x = 63d$ .



Simulation für den Querschnitt bei  $x = 10d$ .



Simulation für den Querschnitt bei  $x = 63d$ .

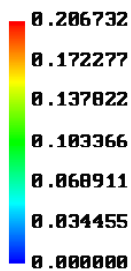
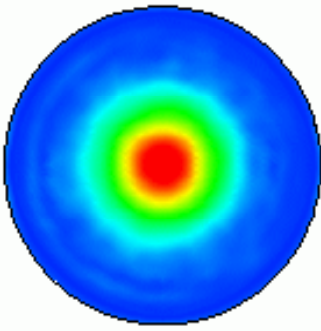
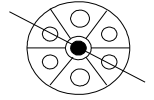
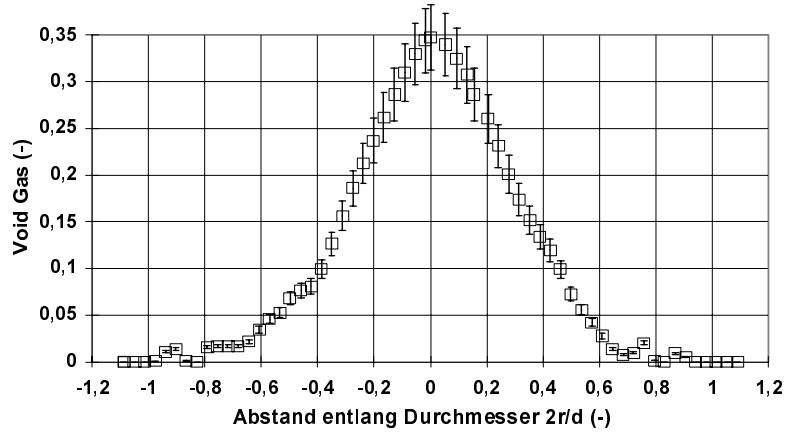


Abbildung 5.3:  
Voidprofile für den symmetrischen Fall:  
Gaszufuhr durch alle 7 Düsen.

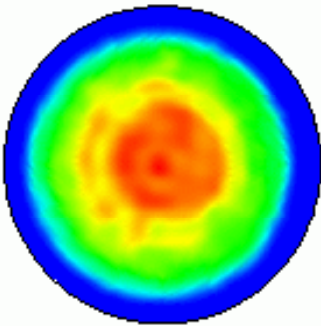


$x = 5d.$

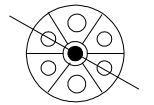
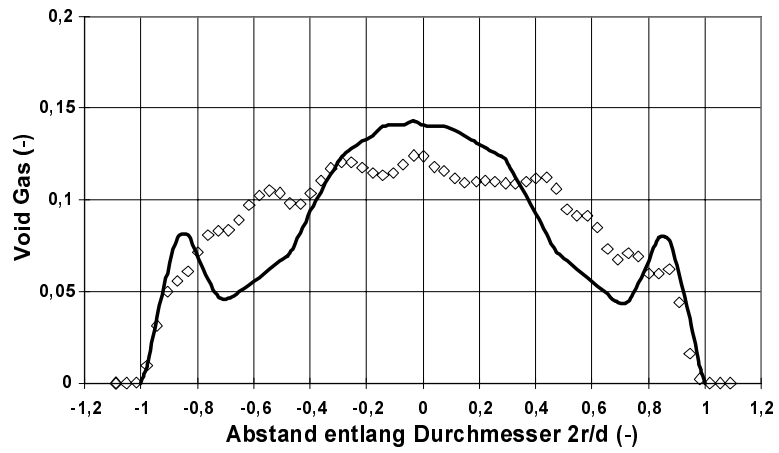


□ Messung auf 5 d

Messung für Querschnitte bei  $x = 5d$  und  $x = 10d$ .



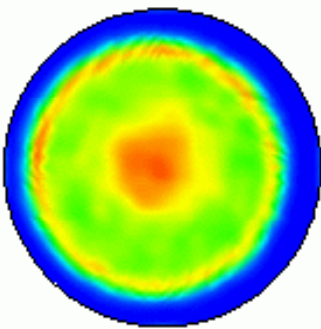
$x = 10d.$



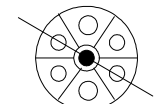
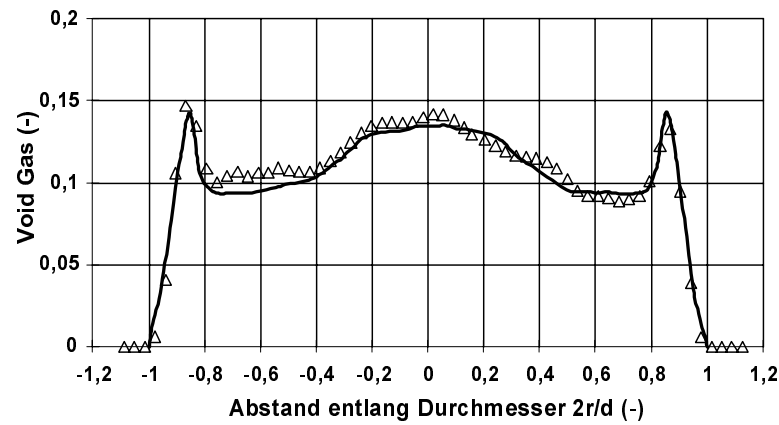
◇ Messung

— Rechnung mit Modellen

Simulation für den Querschnitt bei  $x = 10d$ .



$x = 63d.$



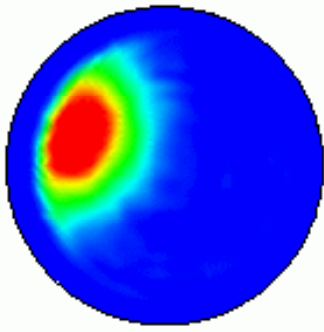
△ Messung

— Rechnung mit Modellen

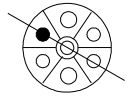
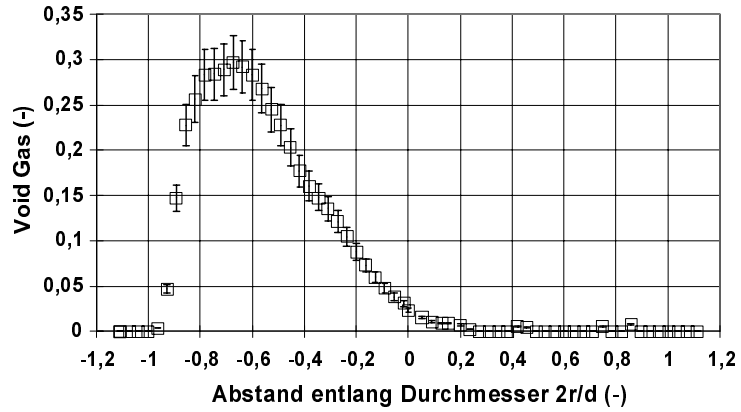
Simulation für den Querschnitt bei  $x = 63d$ .



Abbildung 5.4:  
Voidprofile für den symmetrischen Fall:  
Gaszufuhr durch die zentrale Düse.

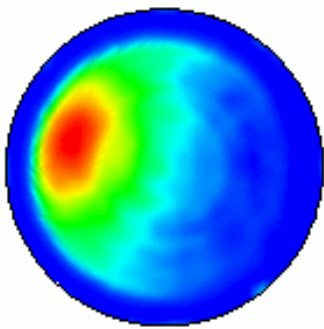


$x = 5d.$

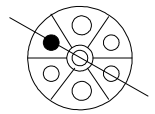
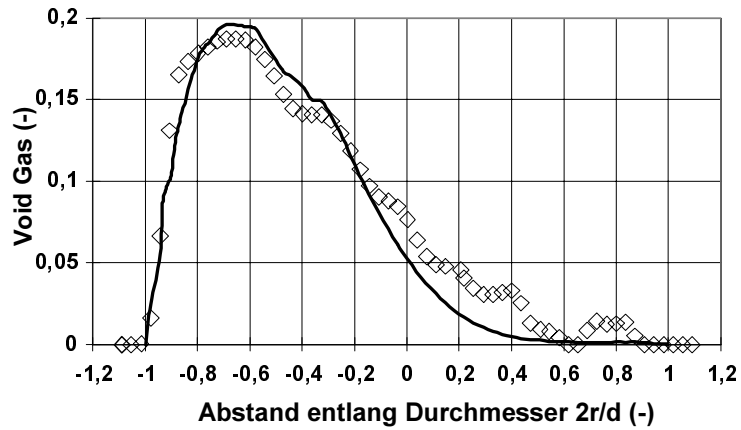


□ Messung auf 5 d

Messung für Querschnitte bei  $x = 5d$  und  $x = 10d$ .



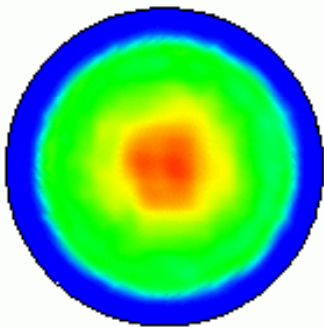
$x = 10d.$



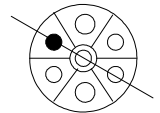
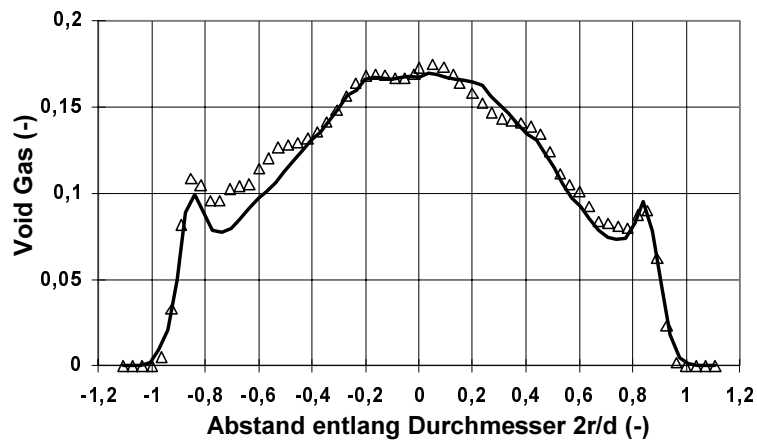
◇ Messung

— Rechnung mit Modellen

Simulation für den Querschnitt bei  $x = 10d$ .



$x = 63d.$



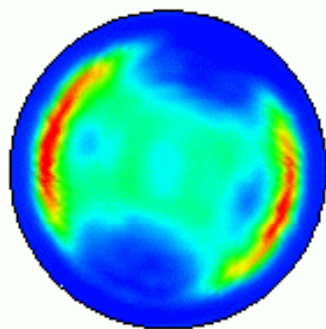
△ Messung

— Rechnung mit Modellen

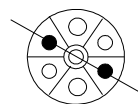
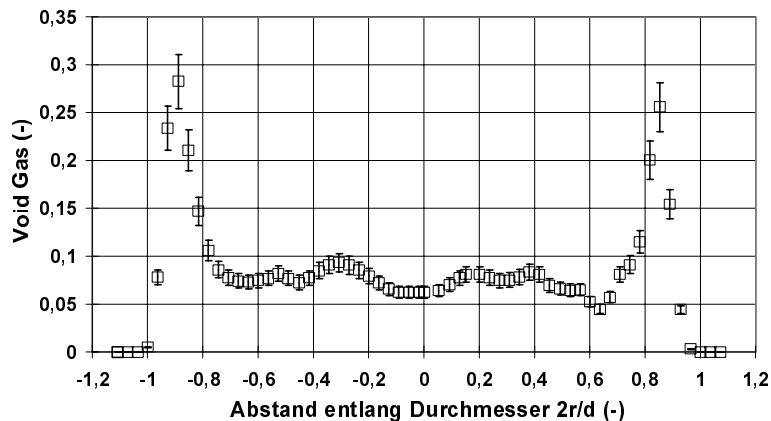
Simulation für den Querschnitt bei  $x = 63d$ .



Abbildung 5.5:  
Voidprofile für den asymmetrischen Fall:  
Gaszufuhr durch eine exzentrische Düse.

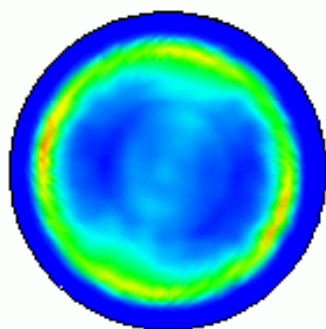


$x = 5d.$

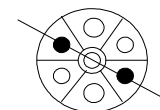
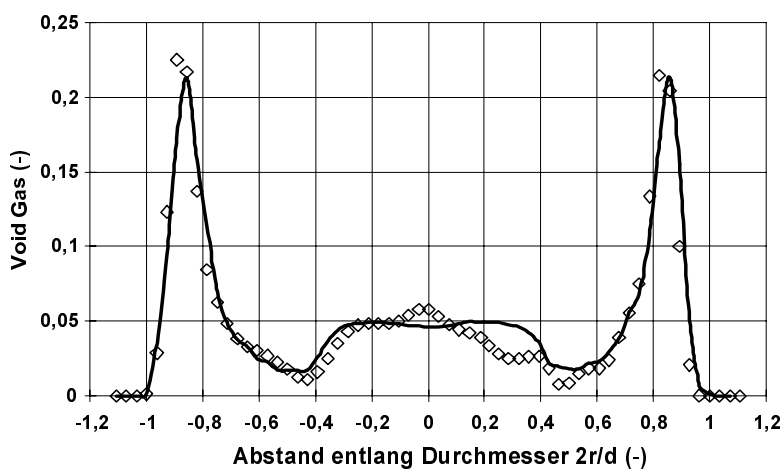


□ Messung auf 5 d

Messung für Querschnitte bei  $x = 5d$  und  $x = 10d$ .

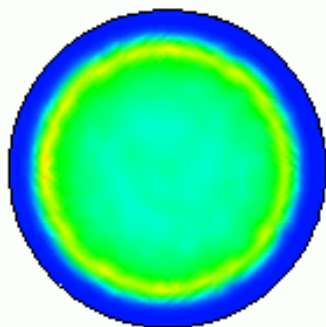


$x = 10d.$

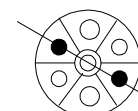
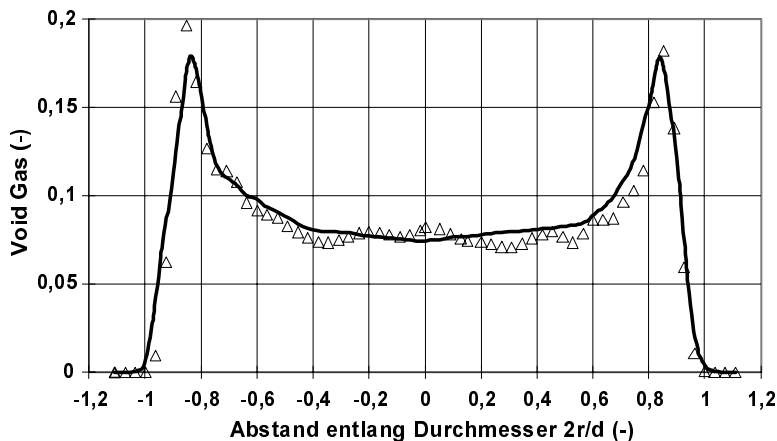


◇ Messung  
— Rechnung mit Modeller

Simulation für den Querschnitt bei  $x = 10d$ .



$x = 63d.$



△ Messung  
— Rechnung mit Modeller

Simulation für den Querschnitt bei  $x = 63d$ .



Abbildung 5.6:  
Voidprofile für den asymmetrischen Fall:  
Gaszufuhr durch 2 gegenüberliegende Düsen.

Werden die Voidprofile für die unterschiedlichen Arten der Gaszufuhr und identischem globalen Void von 0.10 miteinander verglichen, so unterscheiden sich die einzelnen Voidprofile für die Ebene der axialen Höhe  $x = 63 d$  noch immer deutlich voneinander. Die Voidprofile variieren für die unterschiedlichen Arten der Gaszufuhr von einem charakteristischen Profil mit zwei Maximalwerten an den Wänden bis zu einem Profil mit einem Maximum auf der Rohrachse. Die turbulente, zweiphasige Rohrströmung ist also bei  $x = 63 d$  noch nicht vollständig eingelaufen. Für turbulente Zweiphasenströmungen wird die Einlaufstrecke nach Theofanous (1992) auf bis etwa 400 Rohrdurchmesser geschätzt. Sie ist damit bedeutend länger als für eine turbulente einphasige Strömung mit etwa 40 Rohrdurchmessern. Für eine eingelaufene Zweiphasenströmung müssen die Zwischenphasenkräfte im Gleichgewicht sein, so daß sich das Voidprofil mit der Lauflänge nicht mehr ändert. Da unter Kapitel 4.2.7 die Bilanz der Zwischenphasenkräfte für eine eingelaufene Zweiphasenströmung überprüft wurde, kann folgende Schlußfolgerung gezogen werden: Die Modellierung der 4 Zwischenphasenkräfte ist für die hier untersuchte Blasenströmung gültig.

Die Simulationsergebnisse sind in Übereinstimmung mit den Ergebnissen für die Phasenverteilung in einer turbulenten Blasenströmung von Lahey und Lee (1992) und von Serizawa, Kataoka und Michiyoshi (1992). In Abbildung 5.7 wird ein typisches Voidprofil dieser Arbeit ( $x = 35 d$ ,  $\underline{j}_L = 1.08 m/s$  und  $\underline{j}_G = 0.12 m/s$ , Gaszufuhr durch 7 Düsen) mit einem Voidprofil von Lahey und Lee (1992) ( $x = 35 d$ ,  $\underline{j}_L = 0.41 m/s$  und  $\underline{j}_G = 0.1 m/s$ ) für eine aufwärtsgerichtete Blasenströmung in einem vertikalen Rohr mit einem Durchmesser von  $d = 57 mm$  verglichen. Weiter ist von Serizawa et al. (1992) ein Voidprofil für die Höhe  $x = 30 d$  für eine aufwärtsgerichtete Blasenströmung mit  $\underline{j}_L = 1.03 m/s$  und  $\underline{j}_G = 0.132 m/s$  in einem vertikalen Rohr mit einem Durchmesser  $d = 60 mm$  gewählt. Obwohl in Lahey und Lee (1992) der mittlere volumetrische Fluß geringer ist als der Wert der andern beiden Arbeiten, zeigen in Abbildung 5.7 die Voidprofile aller 3 Arbeiten einen wandnahen Bereich mit maximalem Void. Der Maximalwert liegt an der selben radialen Position von etwa  $0.9 d/2$ ; Die grundsätzliche Form der Voidprofile ist für alle 3 Arbeiten ähnlich, und die Breite der Voidüberhöhung ist vergleichbar.

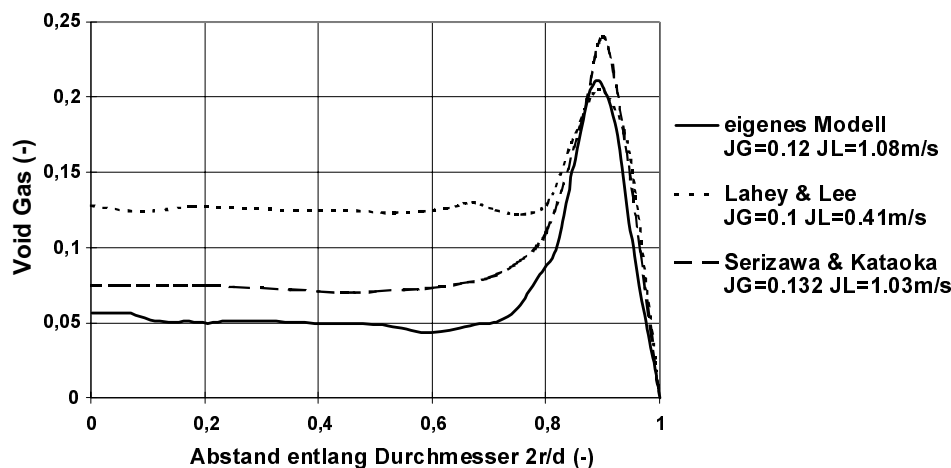


Abbildung 5.7: Vergleich mit den Voidprofilen nach Lahey und Lee (1992) .  
und nach Serizawa et al. (1992)

## 5.2 Simulation von unterkühltem Blasensieden.

Zum Verständnis von Blasensieden sind an der Universität von British Columbia in Canada experimentelle Untersuchungen zum unterkühlten Blasensieden unter Zwangskonvektion

in den Versuchsreaktoren SLOWPOKE und MAPLE durchgeführt worden. Bibeau und Salcudean (1994) haben das Entstehen und Wachsen von Wasserdampf-Blasen an einem Heizleiter untersucht. Die Dampfbildung erfolgt in einer unterkühlten, laminaren Ringspaltströmung unter Zwangskonvektion. Die Meßdaten werden im Rahmen dieser Arbeit zur Verifizierung der numerischen Rechenverfahren in CFX4.1 und der physikalischen Modelle aus Kapitel 4 zur Beschreibung des Blasensiedens benutzt.

### 5.2.1 Versuchsaufbau.

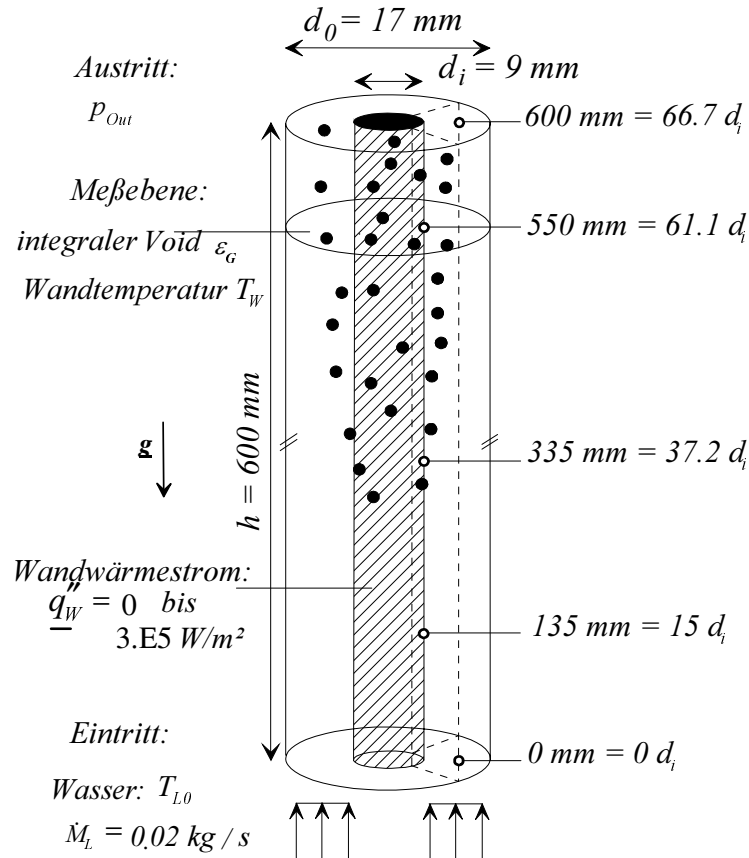


Abbildung 5.8: Versuchsanlage für Siedeexperimente, nach Bibeau und Salcudean (1994)

In einem 600 mm langen, vertikalen Glasrohr mit einem Durchmesser  $d_0 = 17 \text{ mm}$  ist ein zylindrischer, elektrischer Heizleiter aus rostfreiem Stahl mit einem Durchmesser  $d_i = 9 \text{ mm}$  angebracht (Abbildung 5.8). Der Wandwärmestrom  $|\underline{q''}_W|$  in den Siedeexperimenten kann variiert werden und erreicht einen maximalen Wert von  $3 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^2$ , so daß ein maximaler Void von 0.30 erzeugt werden kann. Die hier diskutierten Experimente untersuchen unterkühltes Blasensieden von Wasser in einer laminaren Ringspaltströmung in Abhängigkeit der Kontrollparameter: Unterkühlung des Wassers am Eintritt  $\Delta T_{Sub} = T_{L0} - T_{Sat}$ , Massenstrom des Wassers am Eintritt  $\dot{M}_L$  und Druck am Austritt  $p_{Out}$ . Der untersuchte Parameterbereich ist in Tabelle 5.4 gegeben.

In der Meßebene bei  $x = 61 d_i$  wird der integrale Gas-Volumenanteil mit einem Gamma-Densitometer gemessen. Die Wandtemperatur und die Temperatur der Mischung werden mit Chromel-Alumel Thermoelementen (Durchmesser 0.1 mm) gemessen. Die Wandtemperatur  $T_W$  wird in den Ebenen der Höhen  $x = 15 d_i$ ,  $x = 37 d_i$  und  $x = 61 d_i$  mit

<i>Ort</i>	<i>Parameter</i>	<i>Größe</i>	<i>Bereich</i>		
<i>Eintritt :</i>	<i>Wassertemperatur</i>	$T_{L0}$	$318^\circ K$	$333^\circ K$	$348^\circ K$
	<i>Massenstrom</i>	$\dot{M}_L$	$0.02 \text{ kg/s}$	$0.05 \text{ kg/s}$	$0.10 \text{ kg/s}$
	<i>mittlerer volumetrischer Fluß</i>	$\dot{\mathbf{j}}_L$	$0.13 \text{ m/s}$	$0.33 \text{ m/s}$	$0.65 \text{ m/s}$
<i>Austritt :</i>	<i>Druck</i>	$p_{Out}$	$1 \text{ bar}$	$2 \text{ bar}$	$3 \text{ bar}$

Tabelle 5.4: Untersucher Parameterbereich der Siedeexperimente.

Thermoelementen gemessen, die auf den Heizleiter aufgelötet sind. Sie dienen der Bestimmung der Überhitzung der Wand  $T_{Sup} = T_W - T_{Sat}$ . Die Temperatur der Mischung  $T_M$  wird mit Thermoelementen in der Mitte des Ringspalts am Eintritt und am Austritt aufgenommen, um damit die Qualität der Mischung am Austritt  $x_{eq,Out}$  zu bestimmen.

Die Qualität der Mischung für thermodynamisches Gleichgewicht ist in Gleichung 4.62 definiert als das Verhältnis aus der Enthalpie, die nötig ist, um die Mischung in den Sättigungszustand zu bringen, und der Verdampfungsenthalpie. Für das am Eintritt unterkühlte Wasser ist die Qualität  $x_{eq,0}$  somit negativ:

$$x_{eq,0} = \frac{\Delta h_{Sub}}{\Delta h_{LG}} = \frac{c_{pL} \Delta T_{Sub}}{\Delta h_{LG}} \quad (5.1)$$

Das unterkühlte Wasser wird über die gesamte Strömungslänge mit einer Leistung  $\dot{Q}$  bis zum Sättigungszustand aufgeheizt und dann verdampft. Die Qualität der Mischung am Austritt beträgt

$$x_{eq,Out} = \frac{\Delta h_M}{\Delta h_{LG}} = \frac{\left| \mathbf{q}_W'' \right| \pi d_i h / \dot{M}_L + \Delta h_{Sub}}{\Delta h_{LG}} \quad (5.2)$$

und hat somit um  $\dot{Q} / \dot{M} \Delta h_{LG}$  zugenommen.

In den Experimenten wird bei festgehaltenen Randbedingungen der Wandwärmestrom  $\left| \mathbf{q}_W'' \right|$  schrittweise erhöht. Für jede Heizleistung  $\left| \mathbf{q}_W'' \right| \pi d_i h$  stellt sich ein stationärer Strömungszustand ein. Der integrale Void und die lokalen Temperaturen an der Wand und in der Flüssigkeit werden gemessen und über die Meßzeit gemittelt.

Der Gültigkeitsbereich des in dieser Arbeit entwickelten Wandsiedemodells (Kapitel 4.3.5) erstreckt sich auf niedrige bis moderate Wandwärmeströme, so daß für die Validierung exemplarisch die Experimente mit den in Tabelle 5.4 angegebenen Parametern ausgewählt werden. Im folgenden wird eine Sensitivitätsanalyse für die angegebenen Parameter durchgeführt und diskutiert.

## 5.2.2 Berechnung.

Die stationäre Ringspaltströmung mit Wärmeübertragung wird mit Hilfe des erweiterten Zwei-Fluid-Modells und des in Kapitel 4 entwickelten Kondensationsmodells und Wandsiedemodells mit dem Rechenprogramm CFX4.1 simuliert. Die Ringspaltströmung wird als axialsymmetrisch angenommen, so daß ein Kreissegment über die gesamte Strömungslänge simuliert wird. Die Geometrie wird mit einem Block zwei-dimensional in Zylinderkoordinaten dargestellt. Dabei wird der Strömungsquerschnitt in 15 Zellen und die Höhe in 150 Zellen unterteilt.

Ort	Parameter	Größe	Wert
Eintritt :	Unterkühlung des Wassers	$\Delta T_{Sub}$	60 °K
	Massenstrom des Wassers	$\dot{M}_L$	0.02 kg/ s
Austritt :	Druck	$p_{Out}$	2 bar

Tabelle 5.5: Kombination der Parameter der untersuchten Ringspaltströmung.

Kontrollparameter für Versuch $i$	1	2	3	4	5	6
Wandwärmestrom $ \underline{q}_{w,i}'' $ (W/m <sup>2</sup> )	0	2.8 10 <sup>4</sup>	4. 10 <sup>4</sup>	1. 10 <sup>5</sup>	1.6 10 <sup>5</sup>	2. 10 <sup>5</sup>
Mischungsqualität am Austritt $x_{eq,i}$	-11.6%	-10.5%	-10.1%	-7.9%	-5.5%	-4.0%

Tabelle 5.6: Untersuchte Kontrollparameter der intern beheizten Ringspaltströmung.

In den Rechnungen wird die folgende in Tabelle 5.5 angegebene Kombination der Kontrollparameter untersucht: als Randbedingung am Eintritt werden der Massenstrom des Wassers  $\dot{M}_L = 0.02 \text{ kg/s}$  und die Temperatur des Wassers  $T_{L0} = 333^\circ\text{K}$  vorgegeben, als Randbedingung am Austritt wird der Druck  $p_{Out} = 2 \text{ bar}$  vorgegeben. Die Temperatur  $T_{L0} = 333^\circ\text{K}$  entspricht einer Unterkühlung  $\Delta T_{Sub} = 60^\circ\text{K}$ . Die Flüssigkeitsströmung wird als laminare Mischkonvektionsströmung simuliert. Obwohl die siedende Flüssigkeitsströmung als turbulent angesehen werden kann, wird von einer laminaren, einphasigen Strömung ausgegangen. Durch die am Eintritt vorliegende einphasige Strömung mit niedriger Reynolds-Zahl als laminare Strömung zu betrachten, wird das Einsetzen des Blasen-siedens korrekt simuliert. Die durch Sieden erzeugte turbulente Blasenströmung wird nur beschränkt wiedergegeben, da der turbulente Impuls- und Wärmetransport nicht mit einem Turbulenzmodell berücksichtigt werden. Der einphasige Auftrieb der Ringspaltströmung ist klein, wie die mit der Unterkühlung  $\Delta T_{Sub}$  und der Höhe  $h$  gebildete Rayleigh-Zahl von  $Ra = 6 \cdot 10^3$  zeigt. Der Auftrieb wird durch die sich entlang des Heizstabs bildenden Dampfblasen vergrößert.

Die Simulation des Dampfquellterms und des Phasenübergangs erfolgt mit den zusätzlich in CFX4.1 implementierten Siedemodellen. Für das Wandsiedemodell wird die rostfreie Stahloberfläche des Heizleiters mit einem Benetzungswinkel von  $\varphi = 20^\circ$  modelliert. Der kritische Blasendurchmesser ist von der Größenordnung  $D_C = 10 \mu\text{m}$ . Wenn  $T_{Sat} \leq T_L$  ist, lösen sich Blasen in dem Wandsiedemodell typischerweise mit einem nach Gleichung 4.84 berechneten Durchmesser von  $D_A = 0.2 \text{ mm}$  und mit einer nach Gleichung 4.85 berechneten Frequenz von  $f = 166 \text{ 1/s}$  von der Wand ab. Diese berechneten Parameter entsprechen den experimentellen Beobachtungen mit einem geschätzten Blasenablösedurchmesser  $D_A$  zwischen 0.1 und 0.5 mm. Die abgelösten Blasen können in der thermischen Grenzschicht nach oben aufsteigen und nach einem Massenaustausch mit der unterkühlten Flüssigkeit gegebenenfalls rekondensieren. Diese Phänomene bestimmen den integralen Void in der Ebene der Höhe  $x = 61 d_i$ , der für Rechnung und Experiment miteinander verglichen wird.

Für die Ringspaltströmung ergibt sich eine nach Gleichung 4.50 mit der Spaltweite gebildete Péclet-Zahl von  $Pe = 3 \cdot 10^3$ , was eine dünne, thermische Grenzschicht erwarten läßt. Die thermische Grenzschicht beeinflusst in dem Wandsiedemodell die Dampfquell-dichte  $\Gamma_G$  und



muß durch das verwendete Gitter räumlich ausreichend aufgelöst werden. Weiter wird für jeden Wert des Wandwärmestroms der stationäre Strömungszustand transient nach der Time-Marching Methode berechnet. Das numerische Problem ist über die Temperatur stark gekoppelt: es sind  $3 \cdot 10^4$  Zeitschritte mit einer Schrittweite von  $8 \text{ ms}$  notwendig, um eine konvergente Lösung zu erreichen.

Jedes experimentell ermittelte Meßpunktepaar  $(|\underline{q}_{w,i}''|, \varepsilon_i)$  mit  $i = 1, \dots, n$  muß bei vorgegebenem Wandwärmestrom  $|\underline{q}_{w,i}''|$  durch eine separate transiente Rechnung mit stationärer Lösung simuliert werden. Für die Parameterkombination mit  $\dot{M}_L = 0.02 \text{ kg/s}$ ,  $T_{L0} = 333^\circ\text{K}$  und  $p_{Out} = 2 \text{ bar}$  werden Rechnungen für die in Tabelle 5.6 angegebenen Wandwärmeströme durchgeführt. Die für den Wandwärmestrom  $|\underline{q}_{w,i}''|$  berechneten und in der Ebene der Höhe  $x = 61 d_i$  integrierten Werte des Voids werden zur Validierung der gesamten numerischen Lösung verwendet.

Darüberhinaus werden Rechnungen unter Variation der Unterkühlung, des Drucks und des Massenstroms, wie in Tabelle 5.4 angegeben, durchgeführt. Dabei wird von den numerischen Ergebnisse mit der in Tabelle 5.5 diskutierten Parameterkombination ausgegangen.

### 5.2.3 Diskussion der Ergebnisse.

Zuerst werden die Ergebnisse für den Fall mit  $\dot{M}_L = 0.02 \text{ kg/s}$ ,  $T_{L0} = 333^\circ\text{K}$  und  $p_{Out} = 2 \text{ bar}$  diskutiert. Im stationären Strömungszustand für einen Wandwärmestrom von  $|\underline{q}_{w}''| = 2 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$  entspricht dies einer Unterkühlung der Mischung am Eintritt von  $\Delta T_{Sub} = 60^\circ\text{C}$  und einer Qualität der Mischung am Austritt von  $x_{eq,Out} = -4\%$ .

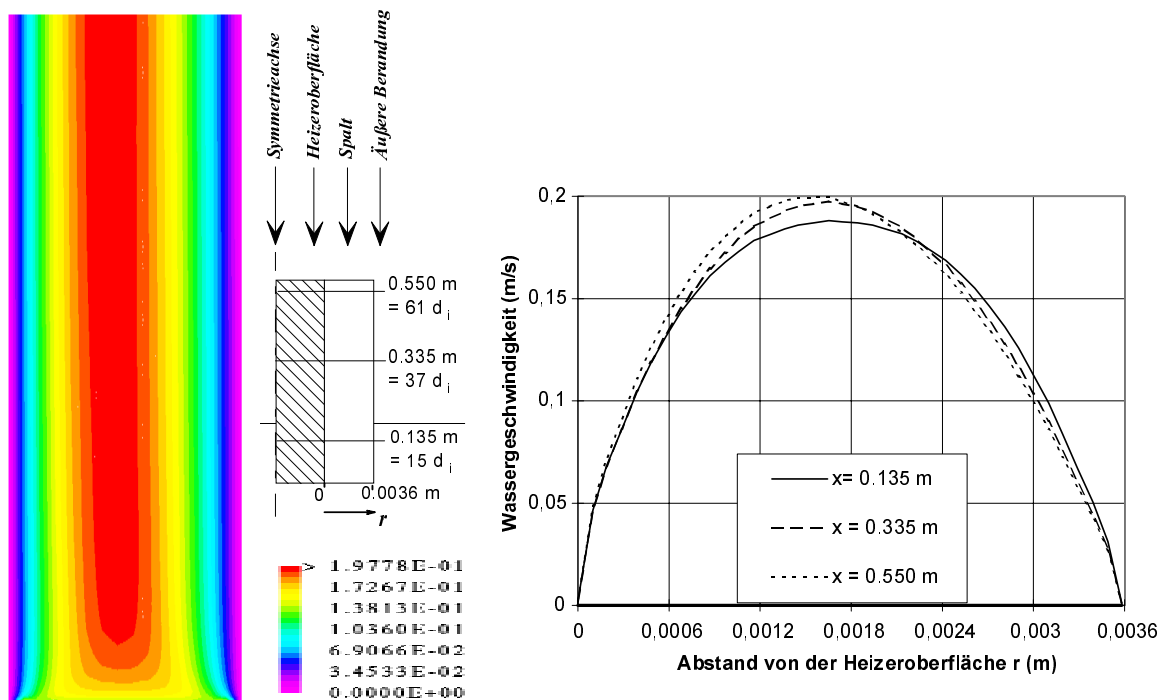


Abbildung 5.9a: Wassergeschwindigkeitsprofile für verschiedene Höhen entlang des Spalts.

Die Abbildung 5.9a stellt das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit im Spalt zwischen Heizeroberfläche und äußerem Glasrohr dar. Es ist deutlich die Strömungsgrenzschicht einer

laminaren und einseitig schwach beheizten Ringspaltströmung zu erkennen. Werden radiale Profile an ausgewählten Lauflängen im Detail betrachtet, so zeigt sich in einer Höhe von  $x = 15 d_i$  ein laminares Geschwindigkeitsprofil nach Hagen-Poiseuille. In einer Höhe von  $x = 37 d_i$  wird das Geschwindigkeitsprofil der Flüssigkeit durch Auftriebseffekte geprägt. Die maximalen Geschwindigkeiten verschieben sich in Richtung der Wand und somit in den Bereich hohen Voids. Der Maximalwert der Geschwindigkeit nimmt leicht zu. Diese Tendenz setzt sich für größer Lauflängen ( $x = 37 d_i$ ) fort. Die Asymmetrie des Geschwindigkeitsprofils für größere Lauflängen wird durch die Vernachlässigung der Turbulenzmodellierung unterschätzt. Der Auftrieb der Blasen beschleunigt die Flüssigkeit in der Grenzschicht entlang der Heizeroberfläche, so daß dort durch eine erhöhte Schubspannung der Austausch zwischen der Grenzschichtströmung und der Kernströmung vergrößert wird. Damit werden ein größerer Geschwindigkeitsgradient an der Heizeroberfläche und ein asymmetrischeres Geschwindigkeitsprofil über den Strömungsquerschnitt erwartet.

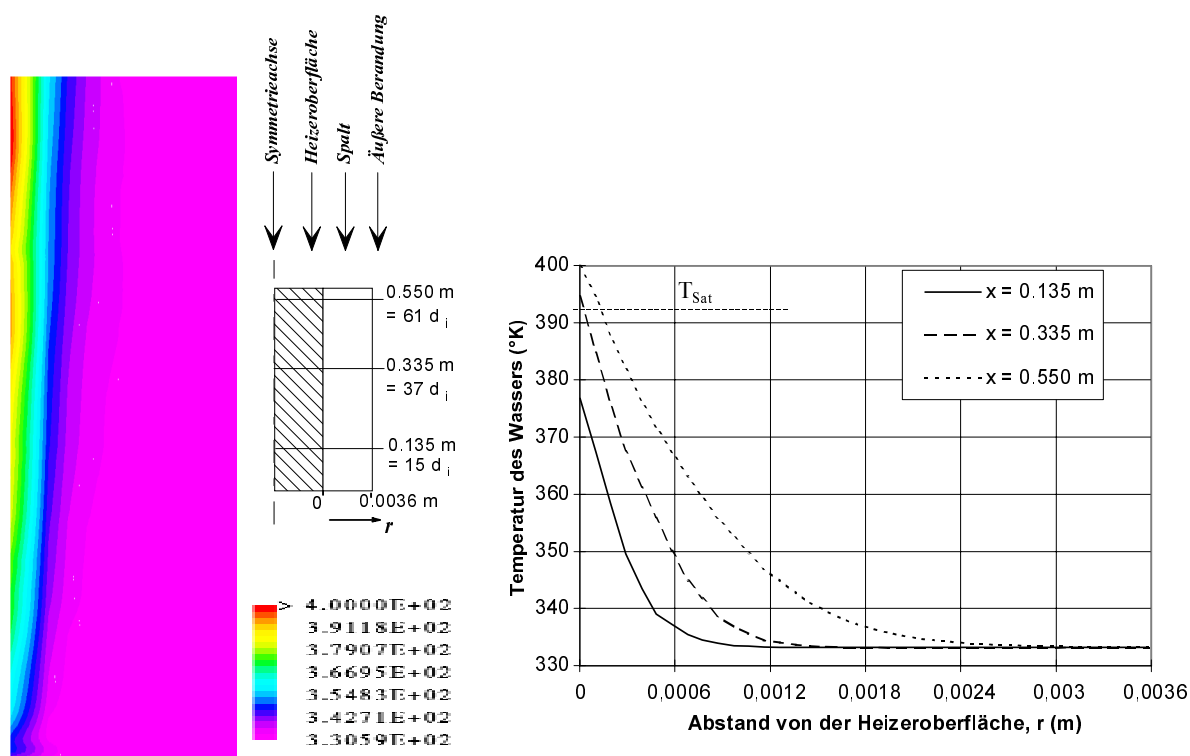


Abbildung 5.9b: Temperaturprofile des Wassers für verschiedene Höhen entlang des Spalts.

In Abbildung 5.9b ist das Temperaturfeld der Flüssigkeit im Spalt zwischen Heizeroberfläche und äußerem Glasrohr dargestellt. Die sich ausbildende Temperaturgrenzschicht ist dünn, sie beträgt am Austritt etwa 50% der Spaltbreite. Durch eine Vernachlässigung des turbulenten Wärmeaustausches in der Simulation wird die Verbesserung des Wärmeübergangs bei dem Sieden unterschätzt. Das radiale Temperaturprofil in einer Höhe von  $x = 15 d_i$  zeigt, daß die Flüssigkeitstemperatur an der Wand noch nicht die Sättigungstemperatur erreicht hat. Somit ist in der Ebene der Höhe  $x = 15 d_i$  kein radiales Voidprofil zu erkennen (siehe Abbildung 5.9c). Mit zunehmender Lauflänge und zunehmendem Wärmeeintrag in die Strömung nimmt die Dicke der Temperaturgrenzschicht zu. Gleichzeitig nimmt die Flüssigkeitstemperatur an der Wand zu und erreicht in etwa der Ebene der Höhe  $x = 29 d_i$  den Wert der Siedetemperatur.

In Abbildung 5.9c ist das Feld des Dampf-Volumenanteils im Spalt zwischen Heizeroberfläche und äußerem Glasrohr dargestellt. Die Lauflänge, bei der das Wandsiedemodell

mit Blasensieden einsetzt, liegt in der Simulation bei  $x = 29 d_i$ . Im Experiment findet Bibeau durch subjektive, optische Beobachtung ein Einsetzen des Blasensiedens bei  $x = 37 d_i$ . Es ist festzustellen, daß in der numerischen Simulation das Blasensieden zu früh einsetzt. Der Grund dafür liegt in der Festlegung des Siedekriteriums, das keine physikalische Überhitzung der modellierten Wandtemperatur  $T_W$  fordert ( $T_W - T_{Sat} > T_{Sup}$ ), sondern auf einer Sättigungsbedingung für die Flüssigkeit in unmittelbarer Wandnähe beruht ( $T_{L,W} - T_{Sat} > 0$ ). Dabei wird  $T_{L,W}$  im Gegensatz zu  $T_W$  nicht mit dem Wandsiedemodell bestimmt aber durch eine lineare Extrapolation der Flüssigkeitstemperaturen der beiden wandnächsten Zellen berechnet.

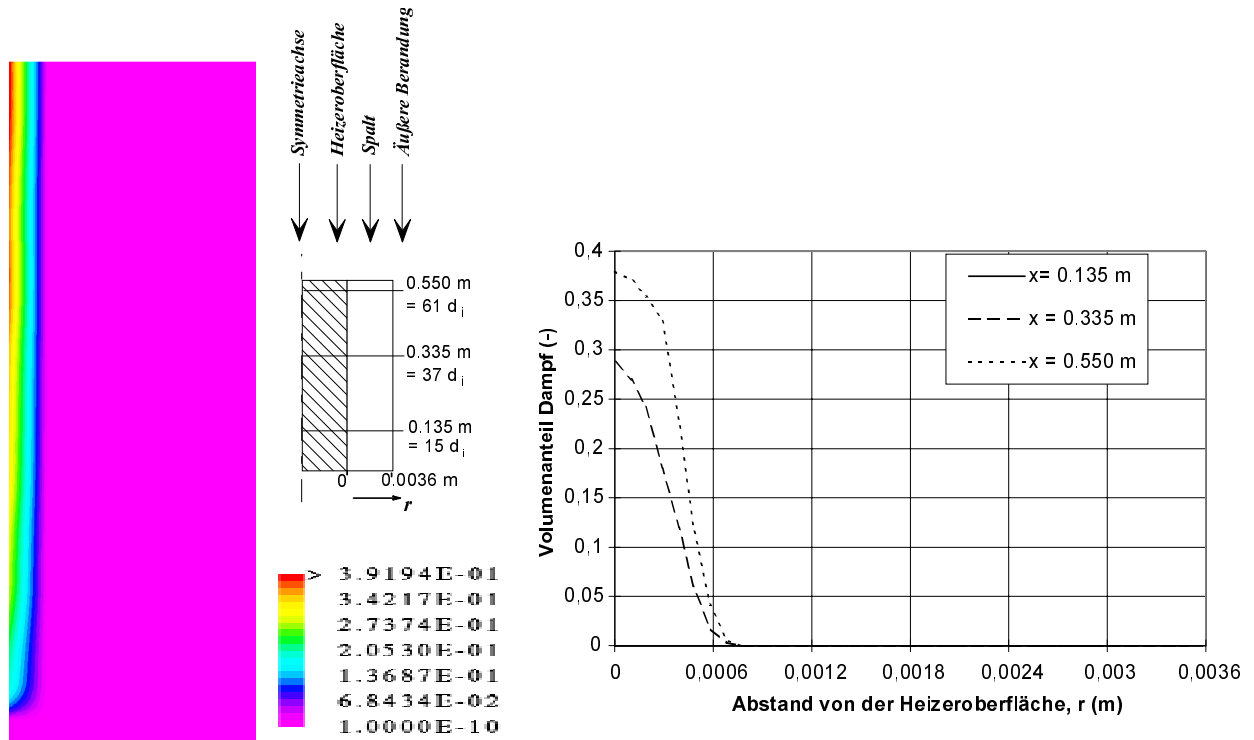


Abbildung 5.9c: Voidprofile des Dampfes für verschiedene Höhen entlang des Spalts.

Das berechnete Voidprofil zeigt deutlich, wie die Blasen im heißen Fluid der thermischen Grenzschicht aufsteigen. Für eine Höhe von  $x = 37 d_i$  wird der Auftriebseinfluß der Blasen auf das Geschwindigkeitsprofil aufgrund der Zunahme des Voids in Wandnähe stärker ausgeprägt. In der Rechnung wird keine maßgebliche Rekondensation der Blasen festgestellt. Die Blasen werden mit dem heißen Fluid in Hauptströmungsrichtung mitgetragen. Der Impuls der Blasen normal zur Wand ist zu klein, als daß die Blasen die Temperaturgrenzschicht verlassen können. Spindler (1994) deutet auf eine durch Sieden induzierte Querkraft hin, die die Blasen senkrecht zur Wand in die Strömungsgrenzschicht hinein transportiert. Diese nach Spindler für die Bewegung der Blasen wichtige Querkraft entspricht der in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Auftriebskraft. Die Trajektorien der von der Wand abgelösten Blasen werden durch die Auftriebskraft und die Querkraft bestimmt. Die Blasen werden in unmittelbarer Wandnähe durch die Auftriebskraft aus dem Ruhezustand beschleunigt. Findet während dieser Beschleunigung ein großer Impulsaustausch zwischen Blase und Fluid statt, und übersteigt dabei die Gasgeschwindigkeit die Flüssigkeitgeschwindigkeit, so führt nach Formel 4.33 diese Querkraft dazu, daß die Blasen aus der Wandgrenzschicht heraus transportiert werden. Dadurch ergibt sich ein Voidprofil, das sich weiter in den Spalt erstreckt. Weil hier eine laminare Grenzschicht ohne turbulenten Impulsaustausch gerechnet

wurde, ist diese Querkraft in der Auswirkung beschränkt. Es gelingt diese Querkraft nicht die Blasen aus dem Grenzschicht mit einer Dicke von nahezu 3 Blasendurchmessern heraus zu treiben, so daß eine erwartete weitere Ausbreitung des Voidprofils nicht auftritt.

Grundsätzlich kann festgehalten werden, daß das Einsetzen des Blasensiedens und die Erzeugung eines Voidprofils an der beheizten Wand mit den implementierten Siedemodellen physikalisch plausibel simuliert werden kann. Während der Rechnungen wurde festgestellt, daß die in Kapitel 4.3.5.3 beschriebene Aufteilung des Wandwärmestroms in 3 Teilwärmeströme (Wärmeübertragung an die Flüssigkeit in der Grenzschicht, Wärmeübertragung durch Verdampfung und Wärmeübertragung an die Flüssigkeit aus der Kernströmung) den größten Einfluß auf die Rechenergebnisse ausübt. Die Simulation zeigt, daß der Dampfquellterm eine starke Abhängigkeit von der Wärmeübertragung an der Wand entsprechend der obigen Aufteilung des Wandwärmestroms hat. Eine genaue, an Experimenten validierte Bestimmung dieser Aufteilung ist ein wichtiger Punkt für weitere Untersuchungen zu diesem Siedemodell. In einer Erweiterung des Siedemodells, die allerdings nicht im Umfang dieser Arbeit enthalten ist, sollte eine Turbulenzmodellierung enthalten sein. Damit könnten die in der Grenzschicht festgehaltenen Blasen durch einen turbulenten Queraustausch die Grenzschicht verlassen, so daß daraus eine stärkere Aufdickung des Voidprofils in die Kernströmung hinein und ein verbesserter Wärmeübergang resultieren können.

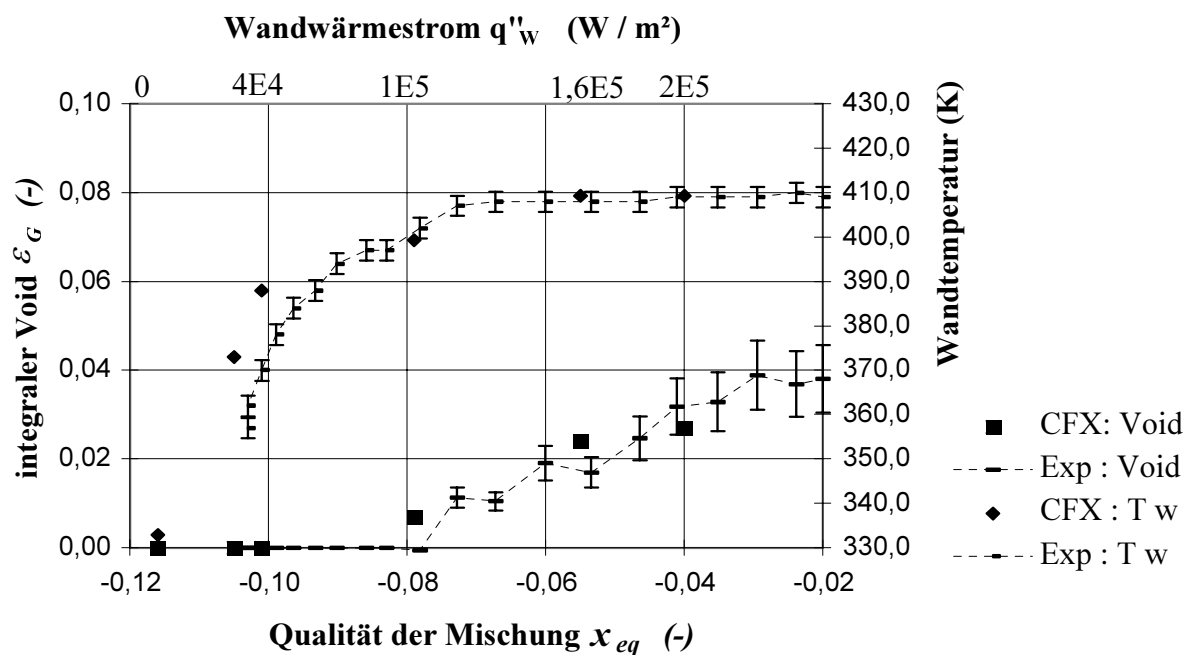


Abbildung 5.10: Voidprofile und Wandtemperaturprofile über der Qualität der Mischung für den Fall:  $\dot{M}_L = 0.02 \text{ kg/s}$ ,  $T_{L0} = 333\text{K}$  und  $p_{Out} = 2 \text{ bar}$ .

In Abbildung 5.10 werden die gemessenen und die berechneten Werte für den integralen Void und für die Temperatur der Flüssigkeit in der Meßebeine bei  $x = 61 d_i$  miteinander verglichen. Der integrale Void ist über der Qualität der Mischung  $x_{eq}$  aufgetragen. Da die Qualität der Mischung von  $|\underline{q''}_w| \pi d_i h$  abhängt, ist somit der Einfluß des beheizten Umfangs und der Einfluß der Lauflänge auf den integralen Void berücksichtigt. Die Ergebnisse der Rechnung für den integralen Void und die Temperatur sind als Symbole bei der Qualität

von  $x_{eq,Out} = -4\%$  eingetragen. Zusätzlich sind die Ergebnisse von 4 weiteren Rechnungen für niedrigere Wandwärmeströme bei Qualitäten von  $x_{eq,Out} = -10.5\%$ ,  $x_{eq,Out} = -10.1\%$ ,  $x_{eq,Out} = -7.9\%$  und  $x_{eq,Out} = -5.5\%$  eingetragen.

Sämtliche Rechnungen sind mit dem erweiterten Zwei-Fluid-Modell durchgeführt worden. Dies gilt auch für die Rechnung mit einem Wandwärmestrom von  $|\underline{q''}_w| = 2.8 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$ , was einer Qualität von  $x_{eq,Out} = -10.5\%$  entspricht. Bei diesem Wandwärmestrom liegt im gesamten Strömungsgebiet eine einphasige Strömung vor. Für diese einphasige Rechnung ist in Abbildung 5.11 das Temperaturprofil an der Wand in skaliertem Form dargestellt. Es ist die dimensionslose Wandtemperatur  $T_{L,W}^* = (T_{L,W} - T_{L0}) \lambda_L / (q''_w \cdot d_i)$  über der dimensionslosen Lauflänge  $x^* = x / (d_i \cdot Pe)$  aufgetragen. Aus dieser Skalierung wird der Wandwärmestrom bestimmt, bei dem auf Höhe der Meßebe  $x = 61 d_i$  die Flüssigkeitstemperatur an der Wand die Sättigungstemperatur erreicht  $T_{L,W} = T_{Sat}$  und das Wandsiedemodell mit Blasensieden einsetzt. Der Wandwärmestrom, bei dem also Blasensieden einsetzt, ergibt sich zu  $|\underline{q''}_w| = 4 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$ , was einer Qualität von  $x_{eq,Out} = -10.1\%$  entspricht. Bei den Rechnungen mit  $x_{eq,Out} = -7.9\%$  und  $x_{eq,Out} = -5.5\%$  findet der Übergang von einer rein einphasigen Strömung in eine zweiphasige Strömung früher, das heißt auf einer Höhe von  $x = 7 d_i$  und  $x = 6 d_i$  statt.

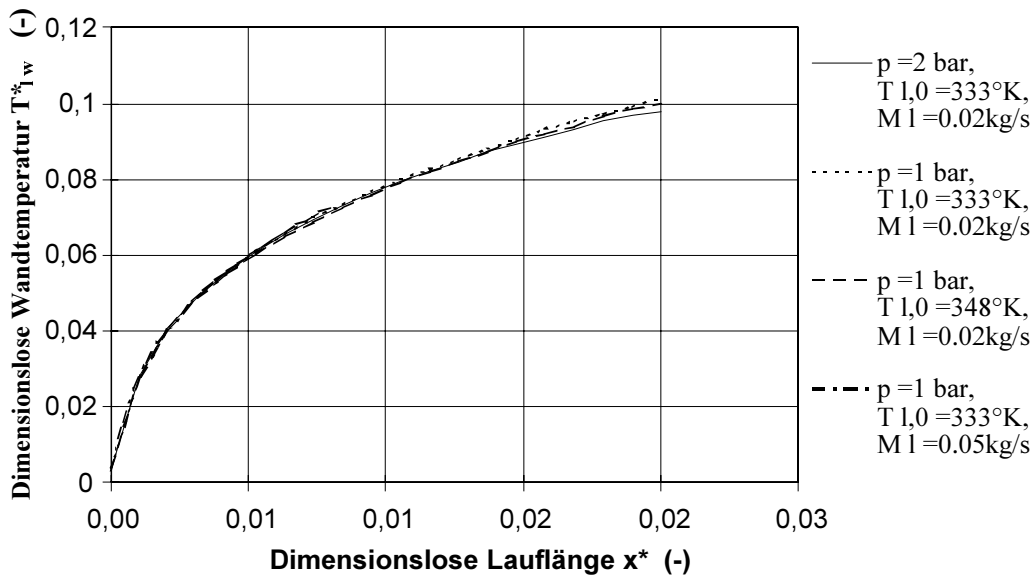


Abbildung 5.11: Skalierung der Wandtemperatur.

Unter Berücksichtigung des experimentellen Fehlers liegt sowohl für den thermodynamischen Zustand des Einsetzens des Blasensiedens als auch für den integralen Void bei  $x = 61 d_i$  eine gute Übereinstimmung zwischen experimentellen und numerischen Daten vor. Die Wandtemperatur steigt in der numerischen Simulation mit zunehmender Lauflänge entsprechend den experimentellen Werten an. Nach dem Einsetzen des Blasensiedens wird die Wandtemperatur mit dem Wandsiedemodell aus der Flüssigkeitstemperatur in der wandnahen Zelle berechnet. Die Flüssigkeit in der wandnahen Zelle befindet sich auf Sättigungstemperatur. Die sich aus der Wärmebilanz des Wandsiedemodells ergebende Wandtemperatur stellt sich in der Rechnung mit etwa  $20 \text{ }^\circ\text{K}$  höher ein.

Weiter wird eine Sensitivitätsanalyse für die Kontrollparameter Unterkühlung  $\Delta T_{Sub}$ , Außendruck  $p_{Out}$  und Massenstrom  $M_L$  durchgeführt. Nach Bibeau und Salcudean (1994) sollen die Werte des integralen Voids bei einer Auftragung über die Qualität der Mischung für

die verschiedenen Kombinationen der Kontrollparameter Unterkühlung, Druck und Massenstrom in einer Kurve zusammenfallen. Die Gültigkeit dieser Aussage kann hier nicht eindeutig bestätigt werden. Erstens ist mit abnehmender Unterkühlung des eintretenden Wassers zu erkennen, daß sich der Energiezustand des Fluids am Eintritt dem Sättigungszustand annähert. Das Wasser hat eine entsprechend höhere Qualität. Der Beginn des Blasensiedens verschiebt sich zu einer höheren Qualität der Mischung. Zweitens bewirkt eine Erhöhung des Drucks eine Erhöhung der Sättigungstemperatur. Die Enthalpie des Wassers am Eintritt ist somit weiter von der Sättigungsenthalpie entfernt, und die Qualität des Fluids am Eintritt nimmt entsprechend ab. Als Folge setzt das Blasensieden bei einer niedrigeren Qualität  $x_{eq}$  ein. Drittens ist mit zunehmendem Massenstrom eine höhere Dampferzeugung und somit ein höherer Void bei gleichen Werten der Qualität  $x_{eq}$  zu erkennen.

Zusammenfassend kann folgende Feststellung getroffen werden. Die Nachrechnung des Experiments von Bibeau und Salcudean erfolgte für 6 charakteristische stationäre Strömungszustände, die den gesamten Bereich von einphasiger Zwangskonvektion über das Einsetzen des Blasensiedens bis zum zweiphasigen, unterkühlten Blasensieden abdecken. Es liegt eine gute, qualitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung vor. Aus den Simulationen hat sich herausgestellt, daß die Blasenerzeugung stark mit der modellierten Wärmeübertragung an der Wand gekoppelt ist. Die Sensitivität der Kontrollparameter Unterkühlung, Druck und Massenstrom wird von den Rechnungen im Vergleich zu den Messungen qualitativ erfaßt. Aus der Auftragung des integralen Dampf-Volumenanteils  $\varepsilon_G$  über die Qualität der Mischung  $x_{eq}$  am Austritt kann auf keine allgemeingültige Gesetzmäßigkeit geschlossen werden. Die mechanistische Betrachtungsweise in dem Siedemodell hat sich als gutes Werkzeug gezeigt, um verschiedene Phänomene, insbesondere die Wärmeübertragung an der Blase und an das aus der Kernströmung zurückfließende Wasser zu modellieren. Durch die Simulationsrechnungen werden die physikalischen Modelle in einem ersten Schritt validiert. Mit dem erweiterten Rechenprogramm CFX4.1 wird die Möglichkeit geboten, in einem nächsten Schritt andere empirische Korrelationen für einzelne Phänomene zu testen.



# Kapitel 6

## Schlußbetrachtungen.

Siedevorgänge bieten das Potential zur Übertragung großer Wärmemengen bei geringer Temperaturdifferenz. Insbesondere unterkühltes Blasensieden findet in großtechnischen Wärmekraftanlagen, beispielsweise im Sumpfkühlkonzept künftiger Kernkraftwerke, Verwendung. Mit dem Sumpfkühlkonzept soll für den Fall eines Kernschmelzunfalls die Nachzerfallswärme einer im Reaktorsumpf ausgebreiteten Kernschmelze über einen zweiphasigen Kühlkreislauf passiv aus dem Kontainment abgeführt werden. Für die Optimierung und den Nachweis der Funktionsfähigkeit eines zweiphasigen Kühlkreislaufs sind sowohl experimentell als auch numerisch gewonnene Kenntnisse über das Verhalten einer Zweiphasenströmung mit Wechselwirkungen zwischen den Phasen notwendig. Die Wechselwirkung zwischen den Phasen bezieht sich i. a. auf einen Austausch von Masse, Impuls und Energie. Zur experimentellen Untersuchung einer zweiphasigen Mischkonvektionsströmung dient die Versuchsanlage SUCOT am Forschungszentrum Karlsruhe. Zur numerischen Simulation der Zweiphasenströmung mit Wärmeübertragung liegt mit dieser Arbeit ein Rechenwerkzeug vor. Das Augenmerk bei der Simulation liegt auf der Entwicklung von Modellen zum unterkühlten Blasensieden.

Diese Arbeit geht zur Modellierung einer dispersen Zweiphasenströmung von einer idealen, verdünnten Blasenströmung aus. Das numerische Rechenwerkzeug kann sowohl eine einphasige Strömung als auch eine zweiphasige Strömung mit niedrigem Gasvolumenanteil so simulieren, daß ein kontinuierlicher Übergang von einem einphasigen zu einem zweiphasigen Strömungsbereich möglich ist. Die Zweiphasenströmung wird mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells berechnet. Dabei liegt über das gesamte Rechengebiet für jede Phase ein ensemblegemitteltes kontinuierliches Feld vor. Zusätzlich zu dem einphasigen Strömungsfeld der Flüssigkeit wird die disperse Gasphase als ein zweites Feld mit den Eigenschaften kugelförmiger Blasen beschrieben. Die zwei Felder werden über Zwischenphasenkopplungsterme miteinander verknüpft. Diese Austauschsterme für Masse, Impuls und Energie zwischen den Phasen werden unter Annahme einer dispersen Zweiphasenströmung im Einzelnen modelliert.

In einem ersten Schritt werden für eine isotherme Blasenströmung die Impulsaustauschsterme eingeführt. Die Modellierung des Impulsaustausches erfolgt über die an einer umströmten Einzelblase angreifenden Kräfte. Aus der homogenen, viskosen Umströmung einer kugelförmigen Blase ergibt sich die Widerstandskraft mit einem von der Blasen-Reynoldszahl abhängigen Widerstandskoeffizienten. Befindet sich die Blase in einer Scherströmung, so tritt durch die ungleichmäßige Umströmung der Blase eine Querkraft auf. Diese Kraft wird in Anlehnung an die Potentialtheorie als Auftriebskraft bezeichnet. Wird die Blase in



der Flüssigkeit beschleunigt, so ist zusätzlich zu der Arbeit zur Beschleunigung der Blase selbst auch Arbeit zur Beschleunigung eines mitgeschleppten Flüssigkeitsfilms zu leisten. Aus der instationären, nicht-viskosen Blasenumströmung resultiert daraus eine Virtuelle Massenkraft. Schließlich wird die turbulente Dispersion von Blasen betrachtet. Es ergibt sich ein Transport des Gasvolumenanteils in Abhängigkeit von der turbulenten kinetischen Energie, der durch eine Turbulente Diffusionskraft modelliert wird.

Die in das Rechenprogramm eingebauten Zwischenphasenkraften werden anhand eines isothermen Blasenexperimentes überprüft, bei dem in einer turbulenten, aufwärtsgerichteten Wasserströmung unterschiedliche Gasverteilungen am Eintritt vorgegeben werden. Die im Experiment beobachtete radiale Umverteilung der Blasen wird von den Rechnungen erst unter Einbeziehung der Zwischenphasenkraften gut simuliert. Dabei transportiert die Auftriebskraft die Blasen in Richtung der Rohrwand und bewirkt für den Void ein Ringprofil mit hohen Werten entlang der Wand. Die Turbulente Diffusionskraft dagegen glättet das Voidprofil. Durch die Modellierung der vier Zwischenphasenkraften wird die für zweiphasige Strömungen bekannte, gegenüber einer einphasigen Strömung erheblich längere Einlauflänge bestätigt. Alle Ergebnisse werden dabei mit einem einheitlichen, theoretisch begründeten Satz von Koeffizienten in den Modellansätzen erzielt.

In einem zweiten Schritt wird eine nicht-isotherme Blasenströmung mit Wärmeübertragung und Phasenübergang betrachtet. Die Modellierung des Energieaustauschs zwischen den Phasen erfolgt über eine empirische Nusselt-Korrelation für die Wärmeübertragung an der Phasengrenzfläche einer umströmten Einzelblase. Für den Dampf in der Blase wird eine Sättigungstemperatur angenommen, die mit dem Blaseninnendruck korrespondiert, der um einen kapillaren Druckanteil höher ist als der Flüssigkeitsdruck.

Mit der Wärmeübertragung von der Dampfblase an die Flüssigkeit ist so eine Reduzierung des Blasen Volumens und damit ein Massenaustausch verknüpft. Der Massenaustausch entspricht im unterkühlten Flüssigkeitsbereich einer Kondensatquellichte.

Die kleinskaligen, thermodynamischen Phänomene des voll entwickelten Blasensiedens an einer Wand werden integral durch zusätzliche Modellansätze erfaßt. Wenn die Flüssigkeitstemperatur an der Wand die Sättigungstemperatur übersteigt, werden die Dampfquellichte und die Temperatur an der Wand iterativ berechnet. Die Dampfquellichte hängt von der aktiven Siedekeimichte an der Wand, dem Blasenablösedurchmesser und der Blasenablösefrequenz ab. Diese Parameter werden über empirische Korrelationen in Abhängigkeit von der Wandtemperatur bestimmt. Zur Bestimmung der Wandtemperatur werden drei Arten von Wärmeübertragung modelliert: eine einphasige Wärmeübertragung, eine Übertragung der Latentwärme zur Blasenbildung und eine Wärmeübertragung an das nach der Blasenablösung aus der Kernströmung zurückfließende Wasser. Der Gültigkeitsbereich der verwendeten empirischen Beziehungen und die Annahme einer idealen, verdünnten Blasenströmung beschränken den Gültigkeitsbereich des Wandsiedemodells auf Wandwärmeströme, die einen maximalen Dampf volumenan teil von 0.3 erzeugen. Der Gültigkeitsbereich ist im Gegensatz zu anderen Mehrphasen-Mehrkomponenten Rechenprogrammen aus der Reaktorsicherheit hier so gewählt, daß unterkühltes Blasensieden bei moderaten Wandwärmeströmen unter atmosphärennahen Drücken modelliert werden kann.

Die Modelle für die Kondensatquellichte und die Dampfquellichte an der Wand werden anhand eines Siedeexperimentes überprüft. In einem vertikalen, von unterkühltem Wasser durchströmten Ringspalt wird das Entstehen von Dampfblasen an einem mit konstantem Wandwärmestrom beaufschlagten Heizleiter untersucht. Die Länge der einphasigen Einlaufstrecke und damit der Einsatzpunkt des Blasensiedens als Funktion der Heizleistung werden von der Rechnung wiedergegeben. Der in Abhängigkeit der zugeführten Heizlei-

stung berechnete, integrale Void stimmt mit der Messung gut überein. Die Blasen in der Temperaturgrenzschicht bewirken eine Verbesserung des Wärmeübergangs und somit ein langsames Ansteigen der Wandtemperatur. Eine Variation der Kontrollparameter Unterkühlung und Massenstrom des Wassers am Eintritt und Druck am Austritt zeigt den physikalisch erwarteten Einfluß. Als grundlegendes Ergebnis gilt, daß mit der Kondensatquellichte und der Dampfquellichte unterkühltes Blasensieden für moderate Wandwärmeströme simuliert werden kann.

Die in dieser Arbeit entwickelten und im Rechenprogramm CFX4.1 implementierten physikalischen Modelle stellen ein Werkzeug zur Verfügung, das z. B. für die Simulation der Mischkonvektionsströmung mit Siede- und Kondensationsvorgängen in der Versuchsanlage SUCOT angewandt werden kann. Bisherige experimentelle Beobachtungen bei der Inbetriebnahme der Versuchsanlage haben gezeigt, daß das sich einstellende Strömungsmuster stark von einer idealen, verdünnten Blasenströmung abweicht. Es werden Blasen mit stark unterschiedlicher Form und Größe beobachtet. In einem weiteren Schritt sollte eine Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der physikalischen Modelle, insbesondere der Zwischenphasenkräfte, auf nicht-ideale Blasenströmungen mit verschiedenen Blasenklassen unterschiedlicher Blasenform und Blasengröße vorgesehen werden. Mit dem Rechenprogramm können schließlich Anwendungsrechnungen zur Optimierung des Sumpfkühlkonzepts durchgeführt werden.



# Anhang A

## Randbedingungen der Versuchsanlage SUCOT.

A1. Aus der Kerntechnik:

Entwurf des Reaktorkerns	
Technische Bedingung	Typische Größenordnung
Reaktorleistung	1450 MWe = 4250 MWth
Zahl der Regelkreise	4
Kerninventar	241 17x17 Brennstoffkassetten (130 t)
Brennstoff	UO <sub>2</sub> -MOX (U angereicht bis 4.9%)
Zyklus	12-18-22 Monate
Abbrand	50000-60000 MWd/t

Tabelle A.1: Reaktortechnischen Randbedingungen für den EPR.

Entwurf des Sicherheitsbehälters	
Technische Randbedingung	Typische Größenordnung
Typ des Reaktorgebäudes	zylindrisch, doppelte Wand
innere Wand	Spannbeton
äußere Wand	Stahlbeton
Auslegungsdruck	7.5 bar abs.
Versagensdruck	8 bar abs.
Temperatur	315-445 K

Tabelle A.2: Sicherheitstechnischen Randbedingungen für den EPR.

## A2. Aus Reaktorsicherheitsanalysen:

Auslegung des Sumpfkühlkonzepts für einen Kernschmelzunfall	
Parameter	Prototyp 1500MW DWR
Fluid	Wasser
Ausbreitungsfläche	160 m <sup>2</sup>
Wasserhöhe	5.5 m
Nachwärme	25 MW
Wärmestromdichte	15.6 W/cm <sup>2</sup>
Zielsetzung	Kühlung der Kernschmelze zusichern

Tabelle A.3: Technischen Randbedingungen für das Sumpfkühlkonzept des EPRs.

das SUCO-Programm.	
Parameter	Testanlage SUCOT
Fluid	Wasser
Ausbreitungsfläche	0.45 m <sup>2</sup>
Wasserhöhe	5.5 m
Nachwärme	0.07 MW
Wärmestromdichte	15.6 W/cm <sup>2</sup>
Zielsetzung	Zweiphasiges Kurzzeitverhalten untersuchen

Tabelle A.4: Technischen Randbedingungen für die Testanlage SUCOT.

# Anhang B

## Überblick verschiedener Rechenprogramme.

Rechenprogramm	Gitter	Kopplungs-Verfahren	Lösungs-Verfahren
IVA 3 (FZK)	3D Finite Volumen		
FLUTAN (FZK)	3D Finite Elemente	Druck-basiert (SIMPLE P-V-Kopplung)	Iterativ (nicht-versetzte Gitter)
FIDAP (kommerziell)	3D Finite Elemente	Druck-basiert	Iterativ
FLUENT (kommerziell)	3D Finite Volumen	Druck-basiert (SIMPLE P-V-Kopplung)	Iterativ (nicht-versetzte Gitter)
CFX4.1 (kommerziell) (AEA)	3D Finite Volumen	Druck-basiert (SIMPLE + IPSA Kopplung)	Iterativ (nicht-versetzte-Gitter) (Rhie-Chow)
PHOENICS (kommerziell)	3D Finite Volumen	Druck-basiert (SIMPLE + IPSA Kopplung)	Iterativ (versetzte Gitter)
ATHLET (nuklear) (GRS)	2D (Kern/RDB)	Dichte-basiert (Newton-sche Methode)	Direkt, mit Total Variation Diminishing
TRAC-P&B (nuklear) (USNRC)	3D	Druck-basiert (SIMPLE P-V-Kopplung)	Iterativ (versetzte Gitter)
RELAP5 Mod2&3 (nuklear) (USNRC)	1D (Röhre), 2D (Kern/RDB)	Druck-basiert (SIMPLE P-V-Kopplung)	Iterativ (algebraisch) (versetzte Gitter)
CATHARE (nuklear) (EdF CEA)	1D (Röhre), 3D (Kern/RDB)	Dichte-basiert (Newton-sche Methode)	Direkt
SABENA (Oarai Jap. Eng. Centre)	2D	Dichte-basiert (Newton-sche Methode)	Direkt

Tabelle B.1: Überblick über die Eigenschaften der untersuchten Programme

In Tabelle B.1 werden die numerische Eigenschaften der für die Simulation von SUCOT in Betracht kommenden Rechenprogramme aufgelistet<sup>1</sup>. Auf die für die Behandlung ei-

<sup>1</sup>In der Tabelle steht  $n$  D für eine  $n$  - dimensionale Geometrie. Weiter deutet P-V-Kopplung auf die Kopplung der Geschwindigkeitsfelder über den Druck hin. Dabei kann in einem Rechenprogramm z. B. der SIMPLE Algorithmus als Druckkorrekturverfahren verwendet werden.

Rechenprogramm	Beschreibung mehrerer Phasen	Zwischenphasen- Kopplung	Siedemodelle
IVA 3 (FZK)	Multi-Fluid-Modell (Eul.-Eul.) / dispers (Eul.-Lagr.)	konstitutive Gleichungen für jede Phase	kein
FLUTAN (FZK)	Einphasig / dispers (Eul.-Lagr.)	kein	kein
FIDAP (kommerziell)	Einphasig / dispers (Eul.-Lagr.)	kein	kein
FLUENT (kommerziell)	Drift-Strömungs- Modell (Eul.) / dispers (Eul.-Lagr.)	kein	kein
CFX4.1 (kommerziell) (AEA)	Multi-Fluid-Modell (Eul.-Eul.) / dispers (Eul.-Lagr.)	Drag / Zwischenphasen- Wärmestrom	kein
PHOENICS (kommerziell)	Multi-Fluid-Modell (Eul.-Eul.) / dispers (Eul.-Lagr.)	Drag (+ andere ?) / Zwischenphasen- Wärmestrom	Filmsieden
ATHLET (nuklear) (GRS)	Zwei-Fluid-Modell (Eul.-Eul.)	Drag (+ andere ?) / Zwischenphasen- Wärmestrom	kein
TRAC-P&B (nuklear) (USNRC)	Zwei-Fluid-Modell (Eul.-Eul.)	konstitutive Gleichungen für Mischung	Blasensieden + Filmsieden ( $\neq$ Strömungsgebiete mit Übergänge)
RELAP5 Mod2&3 (nuklear) (USNRC)	Zwei-Fluid-Modell (Eul.-Eul.)	konstitutive Gleichungen für Mischung	Blasensieden + Filmsieden ( $\neq$ Strömungsgebiete)
CATHARE (nuklear) (EdF CEA)	Multi-Fluid-Modell (Eul.-Eul.) / dispers (Eul.-Lagr.)	Drag + andere / Zwischenphasen- Wärmestr.	Filmsieden / Blasensieden ?
SABENA (Oarai Jap. Eng. Centre)	Zwei-Fluid-Modell (Eul.-Eul.)	Drag / Zwischenphasen- Wärmestrom	Blasensieden

Tabelle B.2: Überblick über die mehrphasige Eigenschaften der untersuchten Programme

ner Mehr-Phasen-Mehr-Komponenten-Strömung wichtigen Eigenschaften wird in Tabelle eingegangen<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>In der Tabelle bedeutet die Abkürzung (Eul.-Eul.), daß jede der beiden Phasen in Eulerscher Betrachtungsweise durch ein kontinuierliches Feld beschrieben wird. Die Abkürzung (Eul.-Lagr.) dagegen referiert nach eine Beschreibung einer dispersen Zweiphasenströmung, in der die zweite Phase nur als Partikel in Lagrangescher Betrachtungsweise modelliert wird.

# Anhang C

## Testrechnung einer einphasigen Strömung mit CFX4.1.

Die Ergebnisse für die in Kapitel 3.2 beschriebene Testrechnung, die mit CFX4.1 und mit FLUENT durchgeführt sind, werden miteinander verglichen. In den Rechnungen mit CFX4.1 ist das Zwei-Fluid-Modell eingesetzt, während die Rechnungen mit FLUENT einphasige Rechnungen sein. Somit ist eine Testrechnung des Zwei-Fluid-Modells in CFX4.1 mit einem Volumenanteil der zweiten Gasphase  $\varepsilon_G = 10^{-10}$  im Vergleich zu eine einphasige Rechnung durchgeführt. In den unterstehenden Diagrammen werden die Profile des Geschwindigkeitsfeldes und des Temperaturfeldes für das gesamte Rechengebiet dargestellt. In Abbildung C.1 und C.2 stellen die links stehenden Bilder die mit dem Zwei-Fluid-Modell gerechneten Ergebnisse dar und die rechts stehenden Bilder geben die Ergebnisse der einphasigen Rechnung wieder.

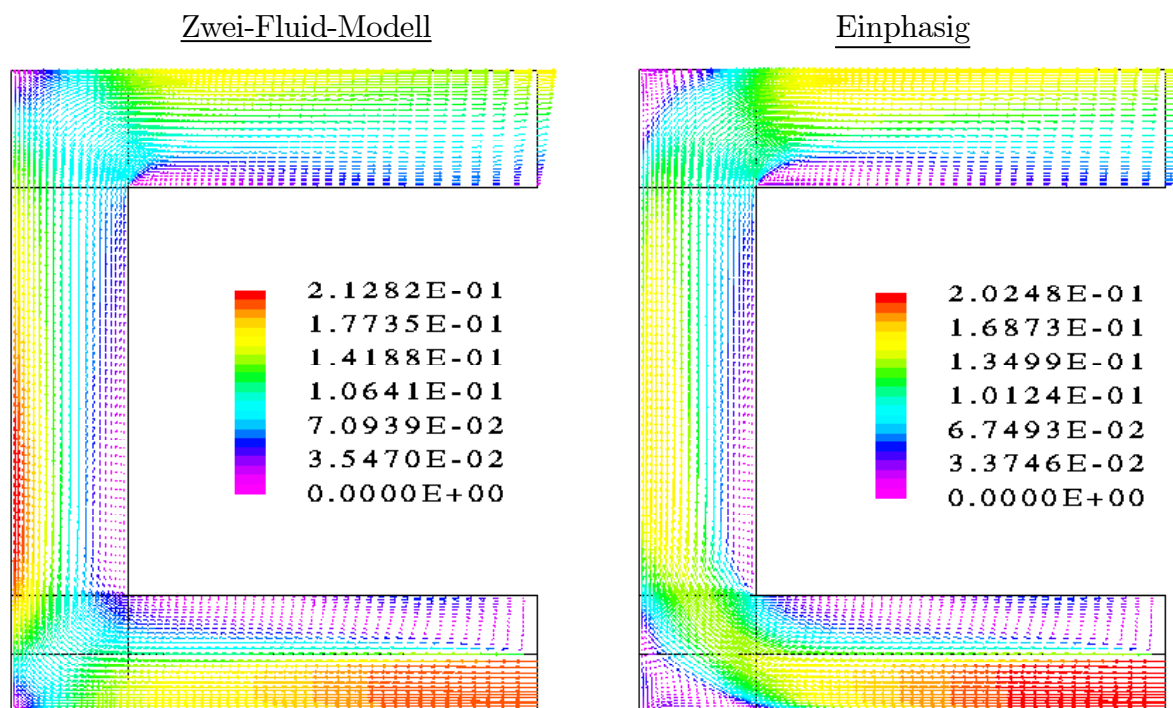


Abbildung C.1: Vergleich der Geschwindigkeitsvektoren



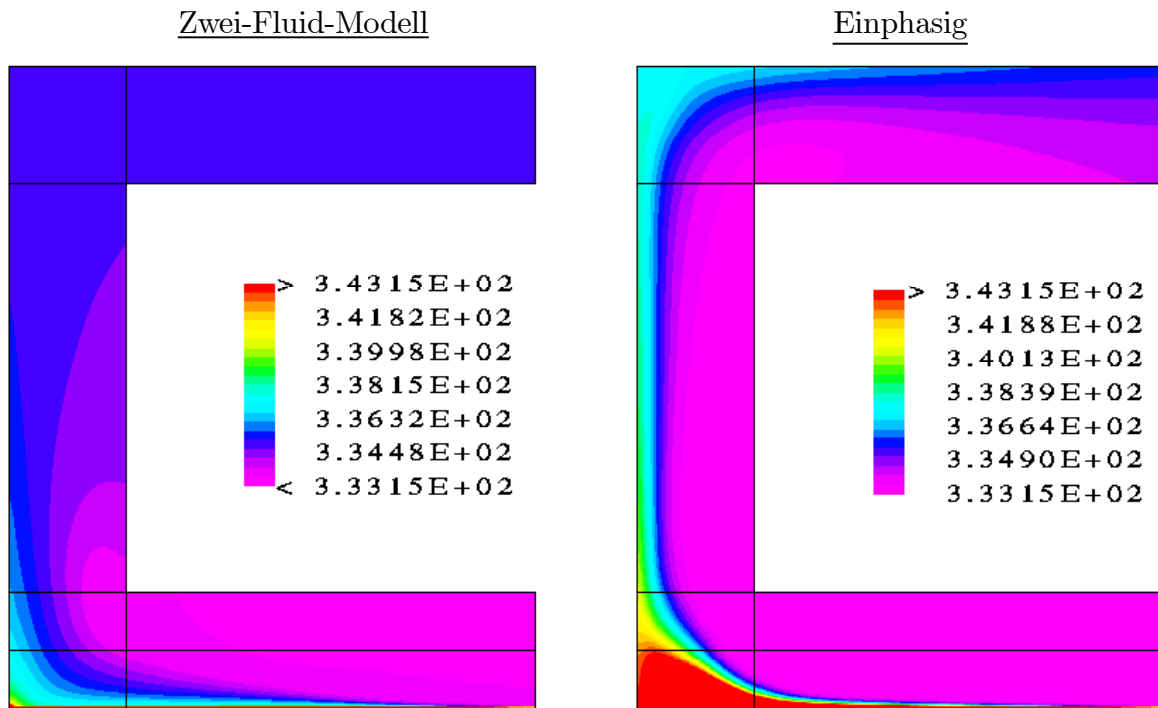


Abbildung C.2: Vergleich der Temperaturprofile

Eine Ursache für die auftretende Unterschiede in z. B. Wirbelgrößen liegt in der Genauigkeit bei der Modellierung der Auftriebskraft und der Turbulenz. Die hier vorliegende Strömung hat so große geometrische Dimensionen, daß die Rechnungen sowohl für die räumliche Auflösung als für die Konvergenz lange Rechenzeiten beanspruchen. Die charakteristische Zeitkonstante für die Diffusion der Wärme in dem Wasser des gesamten Strömungsgebiets ist gegeben durch  $\tau_{DS} = \rho_L c_{pL} l^2 / \lambda_L$  und beträgt für  $l = 5.5m$  hier  $\tau_{DS} = 7 \cdot 10^7 s$ . Das bedeutet, daß um die instabile Schichtung bei dem Auftrieb und den turbulenten Wärmetransport voll aufgelöst und konvergiert zu lösen man mindestens  $10^8 s$  Realzeit rechnen muß. Weiter ist zu bemerken, daß diese Mischkonvektionsströmung nur geringfügig von der Auftriebskraft beeinflusst wird. Dieses betont ebenfalls die Vernachlässigbarkeit des durch Anwesenheit einer zweiten Phase bewirkten Auftriebseffekts. Somit kann festgehalten werden, daß das Rechenprogramm CFX4.1 mit dem Zwei-Fluid-Modell für die Berechnung einphasiger Strömungen verifiziert wurde.

# Anhang D

## Umformungen zur Kapitel 3.

### D1. Diskretisierung des instationären Terms.

Die zeitliche Ableitung der Erhaltungsgröße in den Grundgleichungen wird mit einem impliziten Rückwärts-Differenzen-Verfahren diskretisiert. Bei der Berechnung des Wertes von  $(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})^n$  zum neuen Zeitpunkt  $n$  werden alle nicht-zeitabhängigen Terme zum Zeitpunkt  $n$  bestimmt. Die implizite Differenzenform der zeitlichen Ableitung kann der Taylorreihenentwicklung des alten Wertes  $(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})^{n-1}$  um den Zeitpunkt  $n$  mit dem neuen Zeitschritt  $\Delta t_n$  entnommen werden.

$$(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1} = (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \Delta t_n \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n + \frac{\Delta t_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \frac{\Delta t_n^3}{3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n + \dots \quad (\text{D.1})$$

Ist für die diskretisierte Zeitableitung ein Abruchfehler von erster Ordnung in der Zeit erlaubt, so werden die Terme in der Taylorreihenentwicklung von  $O(\Delta t_n^2)$  vernachlässigt. Es ergibt sich das erster Ordnung Euler-Rückwärts-Verfahren:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n = \frac{(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1}}{\Delta t_n} \quad . \quad (\text{D.2})$$

Für eine numerische Berechnung wird eine Genauigkeit von zweiter Ordnung gefordert, so daß in Gleichung D.1 Terme bis einschließlich  $O(\Delta t_n^2)$  betrachtet werden. Eine zweite Taylorreihe von  $(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2}$  um  $n$  mit der Summe aus neuem und altem Zeitschritt  $\Delta t_n + \Delta t_{n-1}$  wird entsprechend mit Termen bis einschließlich  $O((\Delta t_n + \Delta t_{n-1})^2)$  aufgestellt. Multipliziert man die erste Taylorreihe mit  $(\Delta t_n + \Delta t_{n-1})^2$  und die zweite Taylorreihe mit  $\Delta t_n^2$  und subtrahiert sie voneinander, so fallen die Terme zweiter Ordnung weg. Aus der resultierenden Gleichung erhält man folgenden Ausdruck für die mit einem zweiter Ordnung Rückwärts-Differenzenverfahren diskretisierte Zeitableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n &= \frac{2\Delta t_n + \Delta t_{n-1}}{\Delta t_n (\Delta t_n + \Delta t_{n-1})} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \frac{\Delta t_n + \Delta t_{n-1}}{\Delta t_n \Delta t_{n-1}} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1} \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1} (\Delta t_n + \Delta t_{n-1})} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dieses Rückwärts-Differenzenverfahren vereinfacht sich für gleichmäßige Zeitschritte zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n = \frac{3}{2\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^n - \frac{2}{\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-1} + \frac{1}{2\Delta t} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\Phi})_{ijk}^{n-2} \quad . \quad (\text{D.4})$$

Dieses Verfahren zeigt nach Peyret und Taylor (1982) unbedingt stabile Eigenschaften und eine gute Dämpfung von Störungen mit kleine Wellenlängen.

Ein implizites Zeitschrittverfahren besitzt keine Einschränkung bezüglich der Größe des Zeitschrittes und zeigt sehr gute numerische Stabilitätseigenschaften. Dabei kann die Größe des Zeitschrittes variabel sein und an das transiente Verhalten des zu untersuchenden Problems angepaßt werden. Ein implizites Verfahren kann aufgrund von Ableitungstermen gerader Ordnung im Abbruchfehler künstliche Diffusion erzeugen. Diese numerische Diffusion wird auch Dissipation genannt.

Die hier beschriebenen instationären Algorithmen können als "Time-Marching"-Methode zur Berechnung stationärer Probleme herangezogen werden. Wird mit Hilfe der instationären Formulierung der Grundgleichungen die stationäre Lösung eines Problems gesucht, so ist die Zeitgenauigkeit während der einzelnen Zeitschritte nicht von Bedeutung. Die einzelnen Gleichungen müssen nicht mehr ausiteriert werden. Mit zunehmender Anzahl der Zeitschritte nähert sich das numerische Ergebnis dem stationären Endwert an und das Konvergenzkriterium wird schließlich erreicht.

## D2. Diskretisierung des diffusiven Terms.

Der diffusive Term wird mit Zentralen Differenzen (CDS) diskretisiert. Der Gradient der Größe  $\underline{\Phi}$  an den Seitenflächen  $O_i$  des Volumenelements  $V_{ijk}$  wird durch eine lineare Interpolation der Werte an den benachbarten Zellmittelpunkten gewonnen. Zum Beispiel bezeichnet diese Diskretisierung für die Komponente  $\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1$  an der Seitenfläche  $O_1$  in der Richtung  $\underline{n}_1$  :

$$O_1 \cdot C \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{CO_1}{\xi_i - \xi_{i-1}} (\underline{\Phi}_{i,j,k} - \underline{\Phi}_{i-1,j,k}) \cdot \underline{n}_1 \quad . \quad (D.5)$$

Dabei zeigt nach Abbildung 3.3 der Vektor  $\underline{n}_1$  in negative  $\xi$ -Richtung.

Die Differenzenform, Gleichung D.5, kann wie in Kapitel 3.4.1 mit Hilfe der Taylorreihenentwicklungen der Werte  $(\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i,j,k}$  und  $(\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-1,j,k}$  um den Punkt  $\xi_{i-1/2}$  mit  $\Delta\xi/2 = \xi_i - \xi_{i-1/2}$  abgeleitet werden. Werden die Taylorreihe

$$(\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i,j,k} = (\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} + \frac{\Delta\xi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} + \frac{\Delta\xi^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} + O(\Delta\xi^3) \quad (D.6)$$

und eine analoge Taylorreihe für  $(\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-1,j,k}$  voneinander subtrahiert, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\Phi} \cdot \underline{n}_1)_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{\underline{\Phi}_{i,j,k} - \underline{\Phi}_{i-1,j,k}}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^3) \quad . \quad (D.7)$$

Aus Gleichung D.7 ergibt sich ein örtliches Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung und somit der Diskretisierungsformel D.5. Ebenso wird der diffusive Term für die übrigen 5 Seitenflächen mit diesem zweiter Ordnung Zentrale-Differenzen-Verfahren diskretisiert.

## D3. Der Rhie-Chow-Algorithmus:

Bei dem Rhei-Chow-Algorithmus wird von folgender Form der diskretisierten Impulstransportgleichung ausgegangen, Rhie und Chow (1983)

$$\underline{U}_{ijk} + (\underline{L} \cdot \nabla P)_{ijk} = (\underline{M} \cdot \underline{U})_{ijk} + \underline{N}_{ijk} \quad . \quad (D.8)$$

Chow und Rhie bestimmen die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Kontrollvolumens  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  durch eine selektive lineare Interpolation der Impulsgleichung D.8 folgende Interpolationsgleichung für  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  auf.

$$\left( \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{L}} \cdot \nabla P \right)_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \left( \underline{\mathbf{N}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right)_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \left( \overline{\underline{\mathbf{N}}} - \overline{\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{U}}} \right)_{ijk} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \left( \overline{\underline{\mathbf{U}}} - \overline{\underline{\mathbf{L}} \cdot \nabla P} \right)_{ijk} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad (\text{D.9})$$

Daraus resultiert für  $\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$

$$\underline{\mathbf{U}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 = \overline{\underline{\mathbf{U}}}_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 - \overline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \left( (\overline{\nabla P})_{ijk} - (\nabla P)_{O1} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \quad . \quad (\text{D.10})$$

Dabei umfaßt  $(\overline{\nabla P})_{ijk} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  die linearisierte, entkoppelte Druckdifferenz und  $(\nabla P)_{O1} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1$  die gekoppelte Druckdifferenz.

#### D4. Der SIMPLEC-Algorithmus:

Wird in den diskretisierten Impulstransportgleichungen für jede Phase 1, 2

$$\left( \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}_{ijk} + \left( \underline{\mathbf{M}} \cdot \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}} \right)_{ijk} \right)_{1,2} = \left( \left( \underline{\mathbf{L}} \cdot \varepsilon \nabla p \right)_{ijk} + \underline{\mathbf{N}}_{ijk} \right)_{1,2} \quad (\text{D.11})$$

ein geschätztes Druckfeld  $p^*$

$$p = p^* + p' \quad (\text{D.12})$$

eingesetzt, und werden diese Gleichungen von der Impulstransportgleichungen mit korrektem Druckfeld  $p$  subtrahiert, so bekommt man unter der Voraussetzung, daß sich die Quellterme  $\underline{\mathbf{N}}_{ijk}$  in den Impulstransportgleichungen gegeneinander aufheben, folgende Gleichung für den Impuls

$$\left( \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}'_{ijk} + \left( \underline{\mathbf{M}} \cdot \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}' \right)_{ijk} \right)_{1,2} = \left( \underline{\mathbf{L}} \cdot \varepsilon \nabla p' \right)_{ijk} \quad . \quad (\text{D.13})$$

Dabei wird beim SIMPLEC-Algorithmus die diskretisierte  $\left( \underline{\mathbf{M}} \cdot \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}' \right)_{ijk}$  nicht vernachlässigt aber nur vereinfacht durch  $\underline{\mathbf{u}}'_{ijk}$  über die benachbarten Volumenelemente konstant zu nehmen. Damit ist eine Druckkorrektur für das Geschwindigkeitsfeld jeder Phase bestimmt.

$$\left( \underline{\mathbf{u}}_{ijk} = \underline{\mathbf{u}}^*_{ijk} + \underline{\mathbf{u}}'_{ijk} (p') \right)_{1,2} \quad (\text{D.14})$$

Durch lineare Interpolation und Einsetzen der korrigierten Geschwindigkeiten D.14 in die Kontinuitätsgleichungen

$$\left( \left( \sum_{l=1}^6 \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}} \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)_{ijk} - \underline{\mathbf{E}} V_{ijk} \right)_{1,2} = 0 \quad (\text{D.15})$$

ergibt sich

$$\left( \left( \sum_{l=1}^6 \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}' (p') \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)_{ijk} - \underline{\mathbf{E}}' V_{ijk} \right)_{1,2} = d_{1,2} \quad . \quad (\text{D.16})$$

Werden die Gleichungen D.16 für beiden Phasen addiert,

$$\sum_{z=1}^2 \left( \sum_{l=1}^6 \rho_z \varepsilon_z \underline{\mathbf{u}}'_z (p') \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)_{ijk} = d_1 + d_2 \quad , \quad (\text{D.17})$$

so bestimmt die Forderung, daß die rechte Seite Null wird,  $d_1 + d_2 \rightarrow 0$ , in Gleichung D.17 die Druckkorrekturen für das Geschwindigkeitsfeld D.14. Die Gleichung D.17 mit einer verschwindenden rechten Seite ist als eine Druckkorrekturgleichung für  $p'$  zu interpretieren. Das korrigierte Druckfeld  $p^* + p'$  wird iterativ als neue Schätzung  $p^*$  vorgegeben. Mit der Druckkorrekturgleichung D.17 sind die einzelnen Kontinuitätsgleichungen noch nicht erfüllt. Die Forderung  $d_1 + d_2 \rightarrow 0$  enthält nicht explizit  $d_1 \rightarrow 0$  und  $d_2 \rightarrow 0$ . Im Fall  $\rho_1 \gg \rho_2$  wird die Kontinuitätsgleichung für die leichte Phase 2 nicht erfüllt. Um dies zu leisten entwickelt Spalding das IPSA-Verfahren, welches den Druck und den Volumenanteil implizit koppelt, Spalding (1979).

## D5. Das IPSAC-Verfahren:

Bei dem SIMPLEC-Algorithmus wird in der Ableitung der Gleichung D.13 vorausgesetzt, daß sich die Quellterme gegeneinander aufheben  $\underline{\mathbf{N}}'_{ijk} \approx 0$ . Dieses gilt nur, wenn die Quellterme unabhängig vom Druck und der Geschwindigkeit sind. In dem Zwei-Fluid-Modell sind in den Quelltermen Zwischenphasen-Austauschsterme enthalten. Diese Austauschsterme sind von der Geschwindigkeit jeder Phase abhängig, wie im folgenden Kapitel beschrieben wird. Sie können aber als proportional zu der Relativgeschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_2 - \underline{\mathbf{u}}_1$  modelliert werden, so daß

$$\underline{\mathbf{N}}'_{ijk} \approx (K_{12} \cdot (\underline{\mathbf{u}}'_2 - \underline{\mathbf{u}}'_1))_{ijk} \quad . \quad (\text{D.18})$$

Dieses erklärt den Name IPSA, Inter-Phase Slip Algorithm. Das IPSA-Verfahren geht von einem korrigierten Geschwindigkeitsfeld  $(\underline{\mathbf{u}}_{ijk} = \underline{\mathbf{u}}^*_{ijk} + \underline{\mathbf{u}}'_{ijk}(p'))_{1,2}$  aus wobei  $(\underline{\mathbf{u}}'_{ijk}(p'))_{1,2}$  bestimmt ist durch

$$\left( \left( \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}' \right)_{ijk} + \left( \underline{\mathbf{M}} \cdot \rho \varepsilon \underline{\mathbf{u}}' \right)_{ijk} \right)_{1,2} = \left( \left( \underline{\mathbf{L}} \cdot \varepsilon \nabla p' \right)_{ijk} \right)_{1,2} + \left( \underline{\mathbf{K}}_{12} \cdot (\underline{\mathbf{u}}_2 - \underline{\mathbf{u}}_1) \right)_{ijk} \quad . \quad (\text{D.19})$$

Wie bei dem SIMPLEC-Algorithmus wird eine Druckkorrektur des Geschwindigkeitsfelds abgeleitet und eine Druckkorrekturgleichung aufgestellt. Beim IPSA-Algorithmus wird die Kontinuitätsgleichung D.16 für jede Phase normalisiert mit der Referenzdichte  $(\tilde{\rho} = \rho/\rho_0)_{1,2}$ . Die normalisierten Kontinuitätsgleichungen werden voneinander subtrahiert und nach Differenzierung ergibt sich z. B. für  $\varepsilon_1$

$$\left( d\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 1) \sum_{z=1}^2 d \left( \sum_{l=1}^6 \tilde{\rho}_z \underline{\mathbf{u}}_z(p') \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right) + d \left( \sum_{l=1}^6 \tilde{\rho}_1 \underline{\mathbf{u}}_1(p') \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right) - \sum_{z=1}^2 \frac{1}{\rho_{z,0}} d \underline{\mathbf{E}}'_z V}{\sum_{z=1}^2 \left( \sum_{l=1}^6 \tilde{\rho}_z \underline{\mathbf{u}}_z(p') \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right)} \right)_{ijk} \quad (\text{D.20})$$

Aus Gleichung D.20 folgt, daß die Druckkorrektur eine Voidänderung bewirkt. Für die Voidänderung der Phasen 1 und 2 soll ein Gleichgewicht gelten.

$$1 - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2 = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = D \quad (\text{D.21})$$

Die Forderung einer verschwindenden Diskrepanz zwischen den beiden Voidänderungen  $D \rightarrow 0$  bestimmt die Druckkorrekturgleichung, aus der  $p'$  berechnet wird. Mit dem korrigierten Druckfeld  $p^* + p'$  als neue Schätzung  $p^*$  werden die Korrekturen der Volumenanteile  $d\varepsilon_1$  und  $d\varepsilon_2$  (Gleichung D.20) berechnet.

$$\left( d\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 d \left( \sum_{l=1}^6 \rho_1 \underline{\mathbf{u}}_1(p^*) \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right) - \frac{1}{\rho_{1,0}} d \underline{\mathbf{E}}_1^* V}{\sum_{l=1}^6 \rho_1 \underline{\mathbf{u}}_1(p^*) \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l} \right)_{ijk} \quad (\text{D.22})$$

$$\left( d\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2 d \left( \sum_{l=1}^6 \rho_2 \underline{\mathbf{u}}_2(p^*) \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l \right) - \frac{1}{\rho_{2,0}} d \underline{\mathbf{E}}_2^* V}{\sum_{l=1}^6 \rho_2 \underline{\mathbf{u}}_2(p^*) \cdot O_l \underline{\mathbf{n}}_l} \right)_{ijk} \quad (\text{D.23})$$

Mit dem korrigierten Druckfeld und dem korrigierten Void werden jetzt iterativ die Geschwindigkeitsfelder korrigiert.

Da die Gleichungen D.22 und D.19 für beide Phasen voneinander entkoppelt sind, wird die Konvergenz erschwert. Dieses Problem wird mit einem modifizierten IPSAC-Verfahren gelöst. Für die Ableitung der Druckkorrektur der Geschwindigkeitsfelder werden anstatt Gleichung D.19 neue, von beiden Phasen abhängige Beziehungen verwendet. Dafür werden die Impulstransportgleichungen D.19 differenziert. Für jede Phase ergibt sich unter Vernachlässigung von  $d\varepsilon_1$ ,  $d\varepsilon_2$ ,  $d(\underline{\underline{\mathbf{M}}}_1 \cdot \underline{\mathbf{u}}_1)$  und  $d(\underline{\underline{\mathbf{M}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{u}}_2)$

$$\left( (\rho_1 \varepsilon_1 + K_{12}) d\underline{\mathbf{u}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_1 \cdot \varepsilon_1 \nabla dp + K_{12} d\underline{\mathbf{u}}_2 \right)_{ijk}, \quad (\text{D.24})$$

$$\left( (\rho_2 \varepsilon_2 + K_{12}) d\underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_2 \cdot \varepsilon_2 \nabla dp + K_{12} d\underline{\mathbf{u}}_1 \right)_{ijk}. \quad (\text{D.25})$$

Substitution von Gleichung D.24 in Gleichung D.25 und umgekehrt liefert die Druckkorrekturen für die Geschwindigkeitsfelder  $(\underline{\mathbf{u}}'_1(p'))_{ijk} = (d\underline{\mathbf{u}}_1(dp))_{ijk}$  und  $(\underline{\mathbf{u}}'_2(p'))_{ijk} = (d\underline{\mathbf{u}}_2(dp))_{ijk}$ , die beide sowohl von  $\varepsilon_1$  als auch von  $\varepsilon_2$  abhängen. In dieser Arbeit wird das IPSAC-Verfahren angewandt.



# Anhang E

## Umformungen zur Kapitel 4.

### E1. Zur Widerstandskraft:

Die linearisierte Impulstransportgleichung der stationären Oseenschen Kugelumströmung ist

$$(u_\infty \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p + \nu_L \nabla^2 \underline{\mathbf{u}}_R \quad . \quad (\text{E.1})$$

Wird die Rotation auf diese Gleichung angewandt, so ergibt sich nach Einführung einer Wirbelstärke  $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \underline{\mathbf{u}}_R$  für diese viskose, drehungsbehaftete Strömung

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\nu_L}{u_\infty} \nabla^2 \underline{\boldsymbol{\omega}} \quad . \quad (\text{E.2})$$

Für eine axialsymmetrische Strömung um eine Achse in Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_L$  ist die Wirbelstärke senkrecht zu  $\underline{\mathbf{n}}_L$ . Die Wirbelstärke  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$  kann also geschrieben werden als

$$\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_R = \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\mathbf{n}}_L \times \nabla \chi \quad (\text{E.3})$$

mit  $\chi$  als einer Lösung von Gleichung E.2. Gleichung E.3 hat als spezielle Lösung:

$$\underline{\mathbf{u}}_R = -\underline{\mathbf{n}}_L \chi \quad (\text{E.4})$$

und als allgemeine Lösung:

$$\underline{\mathbf{u}}_R = -\nabla \Phi + \frac{\nu_L}{u_\infty} \nabla \chi - \underline{\mathbf{n}}_L \chi \quad . \quad (\text{E.5})$$

Der Druck ist bei der viskosen Blasenumströmung gegeben durch

$$\Delta p_{iL} = p - p_\infty = \rho_L u_\infty \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla \Phi \quad , \quad (\text{E.6})$$

die Schubspannung ist für eine axialsymmetrische Umströmung gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_L &= \underline{\mathbf{n}}_L \cdot \rho_L \nu_L (\nabla \underline{\mathbf{u}}_R) \\ &= \rho_L \nu_L (\nabla \times (\underline{\mathbf{n}}_L \times \underline{\mathbf{u}}_R) + (\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R) = \rho_L \nu_L (\underline{\mathbf{n}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_R \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Aus der Integration der Gleichung E.6 und E.7 über den Blasenrand kann der Gesamtwiderstand bei der Oseenschen Umströmung der Blase nach kurzer Umformung berechnet



werden, Milne-Thomson (1974):

$$\begin{aligned}
\int_{Ai} \left( \underline{\tau}_L \cdot \underline{n}_L - \Delta p_{iL} \underline{n}_L \right) dS &= \rho_L \underline{n}_L \int_{Ai} \left( \nu_L \frac{\partial u_{R,\theta}}{\partial r} \sin \theta - p \cos \theta \right) dS \\
&= -\rho_L u_\infty \underline{n}_L \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{D_B^2}{4} \sin \theta d\theta \\
&= \frac{\pi D_B^2}{4} \frac{\rho_L u_\infty^2 \underline{n}_L}{2} \frac{24}{Re_B} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_B \right) \quad (E.8)
\end{aligned}$$

## E2. Zur Auftriebskraft:

Damit kann der Gesamtwiderstand für die nicht-homogene, Oseensche Umströmung der symmetrischen Einzelblase berechnet werden als:

$$\begin{aligned}
\int_{Ai} \left( \underline{\tau}_L \cdot \underline{n}_L - \Delta p_{iL} \underline{n}_L \right) dS &= \rho_L \underline{n}_L \int_{Ai} \left( \nu_L \frac{\partial u_{R,\theta}}{\partial r} \sin \theta - p \cos \theta \right) dS \quad (E.9) \\
&\quad + \rho_L \int_{Ai} \nu_L \underline{n}_L \times (\nabla \times \underline{u}_{RT}) dS \quad .
\end{aligned}$$

Der erste Integral auf der rechten Seite von Gleichung E.9 ist identisch mit Gleichung E.8 und liefert den Ausdruck für die Widerstandskraft.

Der zweite Intergral, das die Auftriebskraft beschreibt, kann mit Hilfe von Gleichung E.2 umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned}
\int_{Ai} \nu_L \underline{n}_L \times (\nabla \times \underline{u}_{RT}) dS &= \int_{V_G} \nu_L \nabla \times \nabla \times \underline{u}_{RT} dV = -\rho_L \int_{V_G} \nu_L \nabla^2 \underline{u}_{RT} dV \\
&= \int_{V_G} u_\infty \underline{n}_L \cdot \nabla \underline{u}_{RT} dV \\
&= \int_{V_G} (\underline{u}_{RT} \times \nabla \times u_\infty \underline{n}_L + \nabla \cdot \underline{u}_{RT} u_\infty \underline{n}_L) dV \\
&= \frac{\pi D_B^3}{6} \underline{u}_{RT} \times \nabla \times u_\infty \underline{n}_L \quad (E.10)
\end{aligned}$$

## E3. Zur Wandkraft:

Wir betrachten eine Flüssigkeit, die mit einer Relativgeschwindigkeit  $\underline{u}_R = -u_\infty \underline{n}_L$  zwischen zwei entgegengesetzt drehende Zylindern, mit Durchmesser  $D_B$  auf einem Abstand  $2 y_w$  strömt. Diese Potentialströmung wird durch folgende komplexe Funktion beschrieben:

$$\Phi + i\Psi = u_\infty \left( z + iy + \frac{D_B^2}{4} \left( \frac{1}{z + i(y - y_w)} + \frac{1}{z + i(y + y_w)} \right) + i \frac{\Gamma}{u_\infty} \ln \left( \frac{z + i(y - y_w)}{z + i(y + y_w)} \right) \right) \quad (E.11)$$

Das Theorem von Blasius liefert für eine Umströmung eines Körpers mit komplexe Funktion  $\Phi + i\Psi$  die komplexe Kraft  $Y - iZ$ .

$$Y - iZ = \frac{i\rho_L}{2} \oint \left( \frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(z + iy)} \right)^2 dz \quad (\text{E.12})$$

Nach Anwendung der Residuensatz von Cauchy bekommt man für die auf dem Körper ausgeübte Kraft:

$$Y = 2\pi \rho_L u_\infty^2 \left( \frac{\Gamma}{u_\infty} \left( 1 + \frac{D_B^2}{8y_w} \right) - \frac{D_B^4}{64y_w^3} - \frac{\Gamma^2}{2y_w u_\infty^2} \right) \quad (\text{E.13})$$

#### E4. Zur Virtuellen Massenkraft:

Ausgehend von der allgemeinen Massen- und Impulstransportgleichung aus Kapitel 2.1.1 zur Beschreibung der inkompressiblen, instationären, nicht-viskosen Flüssigkeitsströmung folgt die Eulersche Gleichung zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}_L}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_G) \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}_L = -\frac{1}{\rho_L} \nabla p \quad (\text{E.14})$$

Der zweite Term der Eulerschen Gleichung kann weiter umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{u}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_L &= \underline{\mathbf{u}}_L \cdot (\nabla \underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_L \nabla) + \frac{1}{2} \nabla \underline{\mathbf{u}}_L^2 \\ &= (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_L) \times \underline{\mathbf{u}}_L + \frac{1}{2} \nabla \underline{\mathbf{u}}_L^2 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Für eine nicht-viskose oder drehungsfreie Strömung mit  $\nabla \times \underline{\mathbf{u}}_L = 0$  kann ein Potential  $\Phi_L$

$$\underline{\mathbf{u}}_L = \nabla \Phi_L \quad (\text{E.16})$$

eingeführt werden. Gleichung E.15 vereinfacht sich zu

$$(\underline{\mathbf{u}}_L \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}}_L = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi_L)^2 \quad (\text{E.17})$$

Mit den Gleichungen E.16 und E.17 vereinfacht sich die Eulersche Gleichung E.14 zu der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_s \nabla \Phi_L ds \right) - (\underline{\mathbf{u}}_G \cdot \nabla) \Phi_L + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_L)^2 + \frac{1}{\rho_L} \int_s \nabla p_L ds = C_s(t) \quad (\text{E.18})$$

Die Bernoullische Gleichung liefert für die Integration der Normalspannungen

$$\int_{A_i} \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L dS = -\rho_L \int_{A_i} \left( \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} - (\underline{\mathbf{u}}_G \cdot \nabla) \Phi_L + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_L)^2 \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}_L dS \quad (\text{E.19})$$

Zur Berechnung von Gleichung E.19 wird zuerst das Potential  $\Phi_L$  des Geschwindigkeitsfelds der Flüssigkeit bestimmt. Aufgrund der Voraussetzung der Inkompressibilität,  $\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}_L = 0$ , ist das Potentialfeld im gesamten Gebiet außerhalb der kugelförmigen Blase eine Lösung der

Laplaceschen Gleichung  $\nabla^2 \Phi_L = 0$ , die die obengenannten Randbedingungen erfüllt. Das Potentialfeld kann als eine Reihe von sphärischen harmonischen Funktionen ausgedrückt werden. Liegt zum Anfang bei  $t = 0$  eine axialsymmetrische, homogene Kugelumströmung vor, so setzt sich nach dem Butlerschen Kugeltheorem, vergleiche Milne-Thomson (1974), das Potential  $\Phi_L$  aus einem Anteil für eine homogene Anströmung  $\Phi_\infty$  und aus einem Anteil für eine Dipolströmung  $\Phi_0 = \Phi_d$  zusammen:

$$\Phi_L(r, \vartheta, \varphi) = \Phi_\infty + \Phi_0 = \begin{cases} u_\infty r \cos\vartheta \left(1 + \frac{D_B^3}{16r^3}\right) & \text{für } r > D_B/2 \\ \frac{2|\underline{\mathbf{u}}_G|rcos\vartheta}{D_B} & \text{für } r < D_B/2 \end{cases} . \quad (\text{E.20})$$

Das bedeutet, daß bei  $t = 0$  dem Potential der Anströmung  $\Phi_\infty$  ein Störungspotential in Form einer Dipolströmung  $\Phi_0$  überlagert ist. Bewegt sich nun die kugelförmige Blase in der Zeit  $t$  relativ gegenüber die Flüssigkeit, so werden neue Störfelder induziert. Sie haben die allgemeine Form:

$$\Phi_0 = \Phi_d + \sum_i \Phi_{di} . \quad (\text{E.21})$$

Die Störungspotentiale stellen ebenfalls sphärische harmonische Funktionen mit einer in der kugelförmigen Blase liegenden Singularität dar.

Mit den Gleichungen E.20 und E.21 für das Potentialfeld  $\Phi_L$  kann die rechte Seite der Gleichung E.19 nach Pauchon und Banerjee (1986) weiter umgeformt werden. Dabei wird jetzt die Schreibweise

$$\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \quad (\text{E.22})$$

eingeführt. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung E.19 kommt damit zu

$$\int_{V_G} \nabla \frac{\partial \Phi_L}{\partial t} dV = \frac{\pi D_B^3}{6} \frac{D_G \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} + \frac{\pi D_B^3}{12} \frac{D_G (\underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_G)}{Dt} . \quad (\text{E.23})$$

Der zweite und dritte Term von Gleichung E.19 können umgeformt werden zu

$$\int_{V_G} (-\underline{\mathbf{u}}_G \cdot \nabla^2 \Phi_L + \nabla \Phi_L \cdot \nabla^2 \Phi_L) dV = (\underline{\mathbf{u}}_L - \underline{\mathbf{u}}_G) \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}_L \frac{\pi D_B^3}{4} . \quad (\text{E.24})$$

Werden die Gleichungen E.23 und E.24 in Gleichung E.19 eingesetzt, so ergibt sich für den Formwiderstand

$$\int_{A_i} \Delta p_{iL} \underline{\mathbf{n}}_L dS = \rho_L \frac{\pi D_B^3}{6} \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} - \rho_L \frac{\pi D_B^3}{12} \left( \frac{D_G \underline{\mathbf{u}}_G}{Dt} - \frac{D_L \underline{\mathbf{u}}_L}{Dt} \right) . \quad (\text{E.25})$$

## E5. Zur Turbulente Diffusionskraft:

Der zusätzliche hier als Turbulente Diffusionskraft modellierte Anteil  $\Delta p'_{iL}$  wird nach Simonin durch die schwankende Relativgeschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}'_R$

$$\underline{\mathbf{u}}'_R = -\tau_G \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_G} \nabla \varepsilon_G - \frac{1}{\varepsilon_L} \nabla \varepsilon_L \right) \quad (\text{E.26})$$

verursacht. Dabei ist  $\tau_G$  eine charakteristische Zeitskala für die Interaktionszeit zwischen dem Partikel und dem turbulenten Wirbel und  $\langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G$  der Dispersionstensor mit die turbulente Geschwindigkeitsschwankungen der beiden Phasen. Nach Simonin und Bel F'dhila (1992) erfolgt für eine verdünnte Partikelströmung mit homogener Turbulenz folgende Dispersionsgleichung:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \Delta p'_{iL} \cdot \underline{\mathbf{u}}_L dS = \frac{1}{V} \int_{V_G} \nabla p'_{iL} dV \quad (\text{E.27})$$

$$= \frac{1}{V} \int_{V_G} \rho_L \frac{D}{Dt} \left( \tau_G \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_G} \nabla \varepsilon_G - \frac{1}{\varepsilon_L} \nabla \varepsilon_L \right) \right) dV \quad (\text{E.28})$$

$$= \frac{1}{V} \int_{V_G} \rho_L F \left( \frac{\tau_G}{\tau_L} \right) \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G \cdot \frac{1}{\varepsilon_G} \nabla \varepsilon_G dV \quad (\text{E.29})$$

$$= \rho_L F \left( \frac{\tau_G}{\tau_L} \right) \langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G \cdot \nabla \varepsilon_G \quad . \quad (\text{E.30})$$

Nach Simonin (1990) kann dabei der Dispersionstensor mit die turbulente Geschwindigkeitsschwankungen der beiden Phasen  $\langle \underline{\mathbf{u}}'_L \underline{\mathbf{u}}'_G \rangle_G$  mit der turbulente kinetische Energie der kontinuierlichen Phase  $k_L$  verknüpft werden.

## E6. Zur zwischen den Phasen übertragene Wärme:

Es wird auf den allgemeine Transportgleichungen für Masse, Impuls und Energie, wie unter Kapitel 2.2.1.1 zugegriffen. Die Flüssigkeit ist ein Newtonsches Medium mit konstanten mechanischen und thermischen Eigenschaften. Die Zustandsgleichung  $c_{p,L}(T_L) = (\partial h_L / \partial T_L)_p$  und den Fourierschen Wärmeleitungsgesetz werden angewandt. Die Energietransportgleichung liefert im stationären Fall ohne externe Wärmequelle und unter Vernachlässigung der Dissipation

$$\underline{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla T_L = \kappa_L \nabla^2 T_L \quad . \quad (\text{E.31})$$

Befindet sich die Blase relativ zur Flüssigkeit in Ruhe,  $\underline{\mathbf{u}}_R = \underline{\mathbf{0}}$ , so verschwinden die konvektive Anteile des Wärmetransports. Die Gleichung E.31 geht in die Laplacesche Gleichung für die Temperatur über. Die Lösung für die Temperatur der Flüssigkeit ist eine sphärische, harmonische Funktion, die mit den angegebenen Randbedingungen folgende Form hat:

$$T_L = T_{L\infty} - (T_{L\infty} - T_G) \frac{D_B}{2r} \quad . \quad (\text{E.32})$$

Die an der Zwischenphasengrenzfläche durch Wärmeleitung von der Blase an die Flüssigkeit übertragene Wärme  $q'''_{iL}$  kann somit in der Form

$$\begin{aligned} q'''_{iL} &= 2\pi \lambda_L \int_0^\pi \frac{\partial T_L}{\partial r} r^2 \Big|_{r=D_B/2} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi D_B \lambda_L (T_G - T_{L\infty}) \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

dargestellt werden.

Wird die Blase mit einer Geschwindigkeit  $\underline{\mathbf{u}}_R \neq \underline{\mathbf{0}}$  umströmt, so findet zusätzlich zur Wärmeleitung ein konvektiver Wärmetransport statt. Das Geschwindigkeitsfeld um die Kugel

ist bereits mit der Potentialfunktion unter Gleichung 4.19 angegeben. Mit dem Geschwindigkeitsfeld und unter der Annahme  $(2r - D_B)/D_B < 1$  wird die Differentialgleichung E.31 nach Ruckenstein (1959) umgeformt zu

$$-3u_\infty \frac{2r - D_B}{D_B} \cos \theta \frac{\partial T_L}{\partial r} + 3 \frac{u_\infty}{D_B} \sin \theta \frac{\partial T_L}{\partial \theta} = \kappa_L \frac{\partial^2 T_R}{\partial r^2} \quad (\text{E.34})$$

und mit einem Ansatz der Form

$$y = \frac{3u_\infty (2r - D_B) \sin^2 \theta}{(2u_\infty D_B^3 \kappa_L (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta))^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{E.35})$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführt werden. Diese hat als Lösung

$$T_L = T_G - (T_G - T_{L\infty}) 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^y \exp(-s^2) ds = T_G - (T_G - T_{L\infty}) \operatorname{erf}\left(2^{-\frac{1}{2}}y\right). \quad (\text{E.36})$$

Die totale Wärme von der Blase an die Flüssigkeit übertragen ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} q_{iL}''' &= 2\pi \rho_L c_{p,L} \int_0^\pi \frac{\partial T_L}{\partial r} r^2 \Big|_{r=D_B/2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} D_B^2 (T_G - T_{L\infty}) \left( \frac{4\lambda_L}{D_B} + \int_0^\pi \frac{3\rho_L c_{p,L} u_\infty (2r - D_B) \sin^3 \theta d\theta}{(u_\infty D_B^3 \kappa_L (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta))^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \pi D_B^2 \cdot \frac{2\lambda_L}{D_B} \left( 1 + \frac{Re_B^{\frac{1}{2}} Pr_L^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (T_G - T_{L\infty}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Mit der Definition der Nusselt-Zahl folgt daraus

$$Nu_B = 2 + 2\pi^{-\frac{1}{2}} Re_B^{\frac{1}{2}} Pr_L^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{E.38})$$

## E7. Zum Massenaustausch an einer Dampfblase:

Wird die Bildung einer Blase in einer Vertiefung der beheizten Wand betrachtet, so liegt eine Beziehung zwischen die Größe der Vertiefung und dem kritischen Blasendurchmesser vor. Nach Yadigaroglu (1981) kann für das Einsetzen des Blasensiedens (ONB) eine Beziehung zwischen der Überhitzung  $\Delta T_{Sup,ONB}$  und dem Wandwärmestrom  $|\underline{q}_{W,ONB}''|$ , der für die Keimbildung in einer Vertiefung der beheizten Wand nötig ist, abgeleitet werden. Dafür wird von einem linearen Temperaturgradienten an der beheizten Wand ausgegangen. Es wird

$$T_L(y) = T_W - \frac{|\underline{q}_W''|}{\lambda_L} y \quad (\text{E.39})$$

angesetzt. Dabei ist  $y$  der Abstand senkrecht zur Wand. Der Blasendurchmesser  $D_B$  kann mit einem Geometrieparameter  $n$  als  $2y/n$  ausgedrückt werden. Hsu (1962) postuliert ferner, daß zur Bildung einer stabilen Blase mit dem kritischen Durchmesser  $D_C$  die Temperatur der Flüssigkeit am Scheitelpunkt der Blase mindestens die Sättigungstemperatur

$T_{Sat}(p_G)$  besitzen muß. Das heißt, daß sich in diesem wandentferntesten Punkt einer stabilen Blase mit dem Durchmesser  $D_C$  die Kurven  $T_L(y)$  und  $T_{Sat}(p_G)$  tangieren, wie in Abbildung 4.13 gezeigt wird:

$$\left. \frac{\partial T_L}{\partial y} \right|_{y=y_C} = \left. \frac{\partial T_{Sat}(p_G)}{\partial y} \right|_{D_B=D_C} . \quad (\text{E.40})$$

Mit der Clausius-Clapeyron-Gleichung 4.76 und der Gleichung E.39 folgt aus Gleichung E.40 für den kritischen Wandabstand  $y_C$  dann

$$y_C = \left( T_{Sat}(p_L) \frac{(1/\rho_G - 1/\rho_L) 4\sigma n \lambda_L}{\Delta h_{LG} |\underline{q}_{W,ONB}''|} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{E.41})$$

Damit ergibt sich für den Wandwärmestrom  $|\underline{q}_{W,ONB}''|$  beim Einsetzen des Blasensiedens:

$$|\underline{q}_{W,ONB}''| = \frac{\lambda_L \Delta h_{LG}}{8\sigma n (1/\rho_G - 1/\rho_L) T_{Sat}(p_L)} \Delta T_{Sup,ONB}^2 . \quad (\text{E.42})$$



# Anhang F

## Vergleich der Siedemodelle.

### F1. Wandsiedemodelle.

	Modell in der Doktorarbeit von Kurul (Kurul (1990))	Modell dieser Arbeit
<u>Blasenbildung:</u> Siedekeimdichte	$N_{as} = (210 \cdot (T_W - T_{Sat}))^{1.805}$	$N_{as} = 5 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{(1 - \cos \varphi)}{D_C^6}$ mit $D_C = \frac{4\sigma T_{Sat}}{\rho_G \Delta h_{LG} (T_W - T_{Sat})}$
<u>Blasenablösung:</u> Ablöse-  Durchmesser  Ablösefrequenz	$D_A = 1.10^{-5} \frac{p^{0.709} a}{(b \cdot \Phi)^{0.5}}$ $a = \frac{ \underline{q}''_W  - H_{iL} \Delta T_{Sub} (\mu_L \lambda_W \rho_W c_{p,W})^{0.5}}{(7. E - 3 \Delta h_{LG}^7 / c_{pL})^{0.11} (\sigma / (\rho_L - \rho_G))^{0.167}}$ mit $b = \frac{\Delta T_{Sub}}{2(1 - \rho_G / \rho_L)}$ mit $\Phi = \max \left( \left( \frac{u_L}{0.61} \right)^{0.47}, 1.0 \right)$ $f \cdot D_A^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{4}{3} \frac{ \underline{g}  (\rho_L - \rho_G)}{\rho_L} \right)^{\frac{1}{2}}$	$D_A = 1.5 \cdot 10^{-4} \Lambda Ja^{*5/4}$ mit $Ja^* = \frac{\rho_L c_{pL} T_{Sat}}{\rho_G \Delta h_{LG}}$ mit $\Lambda = (\sigma / g \Delta \rho)^{\frac{1}{2}}$ $f \cdot \pi D_A = \frac{ \underline{q}''_W }{\rho_G \Delta h_{LG}} + \left( \frac{D_A  \underline{g}  (\rho_L - \rho_G)}{2(\rho_L + \rho_G)} + \frac{2\sigma}{D_A (\rho_L + \rho_G)} \right)^{\frac{1}{2}}$
<u>Wärmebilanz:</u>  $ \underline{q}''_{W1} $  $ \underline{q}''_{W2} $  $ \underline{q}''_{W3} $	$ \underline{q}''_{W1}  = \alpha_{LW} (1 - F_{WB}) (T_W - T_L)$ mit $F_{WB} = \frac{N \pi D_A^2}{A_W}$ mit $\alpha_{LW} = C_{Std} \rho_L c_{p,L} u_L$ $ \underline{q}''_{W2}  = \Gamma_G \Delta h_{LG}$ $ \underline{q}''_{W3}  = F_{WB} f \tau_B \frac{2\lambda_L (T_W - T_L)}{\sqrt{\pi \tau_B \lambda_L / \rho_L c_{p,L}}}$ mit $\tau_B = \Lambda / (f D_A)$	$ \underline{q}''_{W1}  = \alpha_{LW} (1 - F_{WB}) (T_W - T_L)$ mit $F_{WB} = \frac{N \pi D_A^2}{A_W}$ mit $Nu = 45$ $ \underline{q}''_{W2}  = \Gamma_G \Delta h_{LG}$ $ \underline{q}''_{W3}  = F_{WB} f \tau_B \frac{2\lambda_L (T_W - T_L)}{\sqrt{\pi \tau_B \lambda_L / \rho_L c_{p,L}}}$ mit $\tau_B = \Lambda / (f D_A)$



## F2. Kondensationsmodelle.

	Modell in der Doktorarbeit von Kurul (Kurul (1990))	Modell dieser Arbeit
<u>Grenzschicht am Blasenrand:</u>		
thermisch	<p>Wärmeübertragung nach Wolfert</p> $\langle q_{iL}''' \rangle_L = \alpha_{Bi} \frac{6\varepsilon_G}{D_B} (T_G - T_L)$ $\alpha_{Bi} = \left( \rho_L c_{pL} \lambda_L \frac{4}{\pi} \frac{ \mathbf{u}_R }{D_B} \frac{\nu_L}{\nu_L + \nu_{L,turb}} \right)^{\frac{1}{2}}$	<p>Wärmeübertragung nach Ranz – Marshall</p> $\langle q_{iL}''' \rangle_L = \alpha_{Bi} \frac{6\varepsilon_G}{D_B} (T_G - T_L)$ <p>mit <math>\alpha_{Bi} = \frac{Nu_B \lambda_L}{D_B}</math>  <math>Nu_B = 2 + 0.6 Re_B^{0.5} Pr_L^{0.3}</math></p>
kinematisch	<p>turbulent</p> <p>mit Prandtlischem Mischungsweg mit Nikuradsesche <math>\nu_{turb}</math></p>	<p>laminar</p>

# Anhang G

## Nomenklatur.

### Symbole.

#### Skalare Größen:

$A_i$	$m^2$	Oberfläche der Zwischenphasengrenzfläche
$A_{wk}$	$m^2$	Oberfläche der Phase $k$ an der Wand
$b$	–	Verhältnis der Blasendurchmesser $D_B$ zur Kanaldurchmesser $d$
$c_p$	$J/kgK$	spezifische Wärmekapazität
$C$	–	Koeffizient
$d$	$m$	Durchmesser des Rohrs oder des Kanals
$D_A$	$m$	Blasenablösedurchmesser
$D_B$	$m$	Blasendurchmesser
$D_{Bh}$	$m$	maximale, horizontale Abmessung der Blase
$D_C$	$m$	kritischer Blasendurchmesser
$D_S$	$m$	Sauter-Durchmesser
$e_k$	$m^2/s^2$	spezifische innere Energie der Phase $k$
$E_k$	$m^2/s^2$	spezifische Gesamtenergie der Phase $k$
$E'_k$	$m^2/s^2$	spezifische Gesamtenergie der Schwankungen der Phase $k$
$f$	$1/s$	Blasenablösefrequenz
$G$	$J/kg$	Freie Enthalpie $G = h - TS$
$h$	$m$	Höhe des Rohrs oder Kanals
$h_k$	$J/kg$	spezifische Enthalpie der Phase $k$ mit $h = e + p/\rho$
$\Delta h_{LG}$	$J/kg$	Latentwärme
$\Delta h_M$	$J/kg$	Enthalpiedifferenz der Mischung zu der Sättigungszustand
$i, j, k$	–	Zellindizes
$k_L$	$m^2/s^2$	turbulente kinetische Energie der Phase $k$
$k_0$	$J/K$	Boltzmannkonstante = 13.8066 $J/K$
$l$	$m$	Lauflänge
$m_{ik}$	$kg/m^2s$	Zwischenphasenmassentransport für die Phase $k$
$N$	–	Anzahl der Blasen
$N_{as}$	$1/m^2$	aktive Siedekeimdichte
$O_l$	$m^2$	Oberfläche der Seite $l$ des Kontrollvolumens
$p$	$Pa$	Druck
$P$	–	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$q'''_{ik}$	$W/m^3$	Zwischenphasenwärme für die Phase $k$

$q_k'''$	$W/m^3$	Wärmequelle in der Phase $k$
$Q$	$J/kg$	spezifische Wärme
$\dot{Q}$	$W$	Heizleistung
$R_{1,2}$	$m$	Krümmung
$s$	–	Verhältnis von Oberflächenrauigkeit zu Durchmesser
$S$	$J/kgK$	Entropie $S = Q/T$
$t$	$s$	Zeit
$T_k$	$K$	Temperatur der Phase $k$
$T_W$	$K$	Wandtemperatur
$T_0$	$K$	Bezugstemperatur oder Eintrittstemperatur
$u_\infty$	$m/s$	mittlere Anströmungsgeschwindigkeit des äußeren Flüssigkeitsfelds
$V$	$m^3$	Volumen
$\dot{V}_k$	$m^3/s$	Volumenstrom der Phase $k$
$w$	$m$	Höhe der Rauigkeit der Oberfläche
$x$	$m$	Lauflänge
$x_{eq}$	–	Qualität der Mischung im thermodynamischen Gleichgewicht
$x, y, z$	$m, m, m$	transformierte, kartesische Koordinaten
$(y, iz)$	$(m, m)$	komplexer zweidimensionaler Raum
$y_w$	$m$	Abstand zwischen Blase und Rohrwand
$\alpha$	$W/m^2K$	Wärmeübertragungskoeffizient
$\alpha_{Bi}$	$W/m^2K$	Wärmeübertragungskoeffizient zwischen Blase und Flüssigkeit
$\beta$	–	Gasgehalt
$\beta$	$^\circ$	Öffnungswinkel
$\beta_L$	$1/K$	Ausdehnungskoeffizient von Wasser
$\delta$	$m$	Grenzschichtdicke
$\Delta$		Differenz
$\Delta G$	$J/K$	Freie Enthalpiezunahme $\Delta G = \Delta p/\rho - S\Delta T$
$\Delta p_{ik}$	$Pa$	Zwischenphasendruckdifferenz
$\Delta t_n$	$s$	Zeitschritt $n$
$\Delta T$	$K$	charakteristische Temperaturdifferenz
$\Delta x$	$m$	Zellgröße
$\Delta \tau$	$s$	Zeitintervall
$\varepsilon_k$	$m^3/m^3$	Volumenanteil der Phase $k$
$\epsilon_L$	$m^2/s^3$	Dissipationsrate in der kontinuierliche Flüssigkeitsphase
$r, \theta, \varphi$	$m, ^\circ, ^\circ$	sphärische Koordinaten
$\Phi$	$m^2/s$	Potentialfeld
$\Gamma$	$m^2/s$	Diffusionskonstante
$\Gamma_G$	$kg/m^2s$	Dampfquellendichte an der Wand
$\kappa_L$	$m^2/s$	Temperaturleitfähigkeit von Wasser $\kappa_L = \lambda_L / \rho_L c_{pL}$
$\lambda$	$W/mK$	Wärmeleitfähigkeit
$\Lambda$	$m$	Laplacelänge
$\nu_k$	$m^2/s$	kinematische Viskosität der Phase $k$
$\rho_k$	$kg/m^3$	Dichte der Phase $k$
$\sigma$	$kg/s^2$	Oberflächenspannung
$\tau$	$s$	Zeitskala (benötigt in der Turbulenzmodellierung)
$\xi, \eta, \zeta$	$m, m, m$	transformiertes, Geometrie-angepaßtes Koordinatensystem

### Vektoren und Tensoren:

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	$[\underline{\underline{\mathbf{A}}}]$	Tensor
$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]$	Quelle der Erhaltungsgröße
$\underline{\underline{\mathbf{F}'}}$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}'}}]$	Schwankungswert der Größe $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$
$\langle \underline{\underline{\mathbf{F}}} \rangle_k$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_k$	der für die Phase $k$ ensembledemittelte Wert der Größe $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$
$\underline{\underline{\mathbf{g}}}$	$m/s^2$	Erdbeschleunigung
$\underline{\underline{\mathbf{j}}}$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}] / m$	Fluß der Erhaltungsgröße
$\underline{\underline{\mathbf{j}}}_k$	$m/s$	Volumetrischer Fluß der Phase $k$
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_n$	–	Einheitstensor von Dimension $n$
$\underline{\underline{\mathbf{n}}}$	–	Normaleneinheitsvektor auf einer Fläche
$\underline{\underline{\mathbf{n}}}_L$	–	Richtungseinheitsvektor für die Flüssigkeitsströmung, senkrecht zur Kontur des umströmten Körpers
$q_i''$	$W/m^2$	Wärmesenke/-Quelle bei der Erzeugung oder Vernichtung der Zwischenphasengrenzfläche
$\underline{\underline{q}}_k''$	$W/m^2$	Wärmestrom in der Phase $k$
$\underline{\underline{q}}_W''$	$W/m^2$	Wandwärmestrom
$\underline{\underline{q}}_k^{Re}$	$W/m^2$	turbulente Wärmeströme der Phase $k$
$\underline{\underline{\mathbf{r}}}$	$m$	Ortsvektor
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{ik}$	$[\underline{\underline{\mathbf{S}}}]$	Phasengrenzflächensprung
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{wk}$	$[\underline{\underline{\mathbf{S}}}]$	Phasenwandterm
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_i$	$m/s$	Geschwindigkeit der Zwischenphasengrenzfläche
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_{ik}$	$m/s$	Geschwindigkeit der Phase $k$ an der Zwischenphasengrenzfläche
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_k$	$m/s$	Strömungsgeschwindigkeit der Phase $k$
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_R$	$m/s$	relatives Geschwindigkeitsfeld, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_R = \underline{\underline{\mathbf{u}}}_L - \underline{\underline{\mathbf{u}}}_G$
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_W$	$m/s$	Geschwindigkeit der Wand
$\underline{\underline{\mathbf{u}}}'_k$	$m/s$	Fluktuation der Geschwindigkeit der Phase $k$
$\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{ijk}$	$m/s$	Geschwindigkeit im numerischen Kontrollvolumen, $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{ijk} = (\langle \underline{\underline{\mathbf{u}}}_k \rangle_k)_{ijk}$
$\underline{\underline{\mathbf{W}}}$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]$	Wert der Erhaltungsgröße an der Wand
$\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_k$	$N$	Zwischenphasenkraft
$\underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}_k$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]$	Erhaltungsgröße der Phase $k$
$\underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}'_k$	$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]$	Schwankungswert der Erhaltungsgröße der Phase $k$
$\underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \nabla \times \underline{\underline{\mathbf{u}}}$	$1/s$	Wirbelstärke
$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}$	$1/m$	Oberflächentensor
$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k$	$kg/ms^2$	Spannungstensor
$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}_k^{Re}$	$kg/ms^2$	Reynoldsscher Spannungstensor
$\underline{\underline{\Xi}}$	$W/m^2$	Energie der Zwischenphasengrenzfläche

### Indizes (tiefgestellt):

$A$	bei Ablösung der Blase
$\mathbf{A}$	bezogen auf der Auftrieb
$as$	bezogen auf aktive Siedekeime
$B$	bezogen auf der Blase
$h$	maximal, horizontal

$c$	kritischer, neutralstabiler Zustand bei der Blasenbildung
$C_D$	Koeffizient für die Widerstandskraft
$d$	für ein Dipolfeld
$eq$	im thermodynamischen Gleichgewicht
$G$	bezogen auf der Gasphase
$h$	des Heizleiters
$i$	an der Zwischenphasengrenzfläche
$i$	Indizierung, z.B. $i = 1, 2, 3$
$i$	innere
$k$	bezogen auf der Phase $k$ , $k = L, G$
$\mathbf{K}$	für Wärmeübertragung durch Konvektion
$\langle \rangle_k$	Ensemble-Mittelung für die Phase $k$
$L$	bezogen auf der Flüssigkeitsphase
$\mathbf{L}$	für Wärmeübertragung durch Wärmeleitung
$C_L$	Koeffizient für die Auftriebskraft
$lm$	Indizes eines zweidimensionalen Tensors
$m$	bezogen auf der Mundöffnung einer Wandvertiefung
$M$	bezogen auf der Mischung
$n$	Indizierung; normal zur Wand
$Neu$	der zu diesem Zeitschritt neu berechnete Wert
$\mathbf{O}$	bezogen auf die Oberflächenspannung
$Old$	der in dem vorhergehenden Zeitschritt berechnete Wert
$Out$	Bezugswert am Austritt
$\mathbf{P}$	bezogen auf den dynamischen Druck
$r$	in radialer Richtung
$\mathbf{R}$	bezogen auf die Reibung
$\mathbf{RS}$	für das relative, axialsymmetrische Feld
$\mathbf{RT}$	für das relative, nicht-axialsymmetrische Feld
$\mathbf{S}$	bezogen auf die Erdschwere
$Sat$	Sättigungszustand
$Sub$	unterkühlter Zustand
$Sup$	überhitzter Zustand
$t$	tangential zur Wand, in Richtung der Achse
$\mathbf{T}$	bezogen auf die Trägheit
$T$	total
$C_{TD}$	Koeffizient für die Turbulente Diffusion
$C_{VM}$	Koeffizient für die Virtuelle Massenkraft
$W$	an der Wand
$0$	Bezugswert am Eintritt
$\infty$	Bezugswert in unendlicher Entfernung

### Indizes (hochgestellt):

$Re$	Reynoldssche
*	modifizierte
.	totale Zeitableitung

I	turbulenter Schwankungsanteil
II	pro Fläche
III	pro Volumen

**Kennzahlen:**

$C_{\Delta x}$	$\frac{u \Delta t}{\Delta x}$	numerische Courant(-Friedrichs-Lewy)-Zahl
$E\ddot{o}$	$\frac{D_B^2 g \Delta \rho}{\sigma}$	Eötvs-Zahl
$\varepsilon_G$	$\frac{V_G}{V_G + V_L}$	Volumenanteil der Gasphase oder Void
$Gr$	$\frac{g \beta_L \Delta T l^3}{\nu_L^2}$	Grashof-Zahl
$Ja$	$\frac{\rho_L c_{pL} \Delta T_{Sat}}{\rho_G \Delta h_{LG}}$	Jakob-Zahl
$Ja^*$	$\frac{\rho_L c_{pL} T_{Sat}}{\rho_G \Delta h_{LG}}$	modifizierte Jakob-Zahl
$N_{Sub}$	$\frac{\Delta \rho c_{pL} \Delta T_{Sub}}{\rho_G \Delta h_{LG}}$	Unterkühlungszahl
$Pe$	$\frac{u_L D_B}{\kappa_L}$	Péclet-Zahl
$Pe_{\Delta x}$	$\frac{u \Delta x}{\Gamma}$	mit der Zellgröße gebildete, numerische Zell-Péclet-Zahl
$Nu$	$\frac{\alpha d}{\lambda}$	Nusselt-Zahl
$Nu_B$	$\frac{\alpha_{Bi} D_B}{\lambda_L}$	mit dem Blasendurchmesser gebildete Nusselt-Zahl
$Pr$	$\frac{\nu_L}{\kappa_L}$	Prandtl-Zahl
$Ra$	$Gr \cdot Pr$	Rayleigh-Zahl
$Re$	$\frac{u_L d}{\nu_L}$	Reynolds-Zahl
$Re_B$	$\frac{u_L D_B}{\nu_L}$	mit dem Blasendurchmesser gebildete Blasen-Reynolds-Zahl
$Sta$	$\frac{Nu}{Re \cdot Pr}$	Stanton-Zahl
$We$	$\frac{\rho_L u_G^2 D_B}{\sigma}$	Weber-Zahl
$x_{eq}$	$\frac{h_M - h_L}{h_G - h_L}$	Qualität der Mischung im thermodynamischen Gleichgewicht
$Zu$	$\frac{\Delta \rho \Gamma_G}{\rho_L \rho_G u_L}$	Zuber-Zahl oder Phasenübergangszahl

**Operatoren:**

$\nabla$	Gradient
$\nabla \cdot$	Divergenz
$\Delta$	Laplace-Operator
$\nabla \times$	Rotation
$\langle \underline{\Phi} \rangle_k$	der für die Phase $k$ ensemble-gemittelte Wert der Größe $\underline{\Phi}$
$\underline{\Phi}'$	Fluktuation, Schwankungswert der Größe $\underline{\Phi}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	partielle Zeitableitung
$\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla$	totale Zeitableitung für die Phase $k$

## Abkürzungen

CBD	Computational Bubble Dynamics
CDS	Central Differencing Scheme
CFX4.1	Computational Fluid Dynamics Code of AEA Technology, Version 4.1
DNS	Direct Numerical Simulation
DWR	Druckwasserreaktor
EPR	European Pressurized Water Reactor
GLE	General Langevin Equation (Stochastic Transport Theory)
HDS	Hybrid Differencing Scheme
IB	Incipience of Boiling
IRWST	In Containment Refueling Water Storage Tanks: Behälters mit boriertem Wasser für Flutung während Stilllegung der Kernkraftanlage (z.B. neu Beladen der Kern)
IPSA	numerisches Verfahren Inter Phase Slip Algorithm zur Kopplung der Geschwindigkeitsfelder der beiden Phasen
IPSAC	Numerical Interphase Slip Algorithm, Consistent Version
KE	Kinetic Equation (Boltzmann Gas Theory)
LES	Large Eddy Simulation
LWR	Light Water Reaktor
NVG	Net Vapour Generation Point
ONB	Onset of Nucleate Boiling
QUICK	Quadratic Upwind Differencing Scheme
RDB	Reaktordruckbehälter (= RPV Reactor Pressure Vessel)
SIMPLE	numerisches semi-impliziten Druckkorrekturverfahren für Druck-Geschwindigkeitskopplung mit insbesondere SIMPLE Revised und SIMPLE Consistent
SIMPLEC	Numerical Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, Consistent version
SUCOT	Sump Cooling Two-Phase Testfacility
UDS	Upwind Differencing Scheme
$n$ D	$n$ -dimensional

# Literaturverzeichnis

- Achenbach, E.: 1974, The effects of surface roughness and tunnel blockage on the flow past spheres., *J. Fluid Mechanics* **65**, 113–125.
- Anglart, H., Nylund, O., Kurul, N. und Podowski, M. Z.: 1993, CFD prediction of flow and phase distribution in fuel assemblies with spacers, *Proc. of the 1st CFDS Int. User Conf., Oxford*.
- Antal, S. P., Lahey, J. R. T. und Flaherty, J. E.: 1991, Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **17**, 635–652.
- Auton, T. R.: 1987, The lift force on a spherical body in a rotational flow, *J. Fluid Mechanics* **183**, 199–218.
- Banerjee, S.: 1978, A surface renewal model for interfacial heat and mass transfer in transient two-phase flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **4**, 571–573.
- Banerjee, S. und Chan, A. M. C.: 1980, Analysis of the averaged and local instantaneous formulations., *Int. J. of Multiphase Flow* **6**, 1–24.
- Bartolomei, G. G.: 1987, A detailed method for calculating the main hydrodynamic characteristics with boiling of subcooled liquid, *Thermal Engineering* **34**(12), 678–682.
- Beyerlein, S. W., Cossmann, R. K. und Richter, H. J.: 1985, Prediction of bubble concentration profiles in vertical turbulent two-phase flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **11**(5), 629–641.
- Bibeau, E. und Salcudean, M.: 1994, Subcooled void growth mechanisms and prediction at low pressure and low velocity., *Int. J. of Multiphase Flow* **20**(5), 837–863.
- Brière, E., Larrauri, D. und Olive, J.: 1995, ASTRID: a 3D eulerian software for subcooled boiling modelling - comparison with experimental results in tubes and annuli., *Proc. of the NURETH-7, Saratoga Springs, NUREG/CP-0142*, 736–749.
- Carlson, K. E., Riemke, R. A., Rouhani, S. Z., Shumway, R. W. und Weaver, W. L.: 1990, *RELAP5/MOD3 Code Manual: Volume 1: Code Structure, System Models, and Solution Methods*, Vol. NUREG/CR-5535, EG-G Idaho, Inc.
- Celata, G. P., Cumo, M. und Mariani, A.: 1997, High heat flux burnout in subcooled flow boiling: Experimentation and modelling., *Rendiconti della Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, serie V XXI, part II*(1), 51–100. Memorie di Scienze Fisiche e Naturali.



- Cherdron, W., Grötzbach, G., Samstag, M., Sengpiel, W., Simon, M. und Tiseanu, I.: 1998, Experimental investigation of air/water bubbly flow in vertical pipes, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Clift, R., Grace, J. R. und Weber, M. E.: 1978, *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York, San Francisco, London.
- Cole, R. und Rohsenow, W.: 1969, Correlations of bubble diameters for boiling of saturated liquids, *Chem. Eng. Prog.* **65**, 211–213.
- Crowe, C., Sommerfeld, M. und Tsuji, Y.: 1998, *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC Press LLC.
- Del Valle, V. H. M. und Kenning, D. B. R.: 1985, Subcooled flow boiling at high heat flux, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **28**(10), 1907–1920.
- Delhaye, J. M. und Achard, J. L.: 1976, On the averaging operators introduced in two-phase flow modeling, *Proc. of the OECD Specialists' Meeting on Transient Two-Phase Flow, Toronto* pp. 289–332.
- Dhir, V. K.: 1990, Nucleate and transition boiling heat transfer under pool and external flow conditions, *Proc. of the 6th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem* pp. 129–155.
- Domgin, J.-F., Huilier, D. G. F., Karl, J.-J., Gardin, P. und Burnage, H.: 1998, Experimental and numerical study of rigid particles, droplets and bubbles motion in quiescent and turbulent flows - influence of the history force, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Drew, D. A. und Lahey, J. R. T.: 1987, The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow., *Int. J. of Multiphase Flow* **13**(1), 113–121.
- Durst, F., Schönung, B., Selanger, K. und Winter, M.: 1986, Bubble-driven liquid flows, *J. Fluid Mechanics* **170**, 53–82.
- Fedorov, V. L. und Fedorov, L. F.: 1985, Void fractions in steam-generating bundles of circular fuel elements, *Fluid Mechanics - Soviet Research* **14**(4), 8–16.
- Felderhof, B. U.: 1991, Virtual mass and drag in two-phase flow, *J. Fluid Mechanics* **225**, 177–196.
- Forster, H. K. und Zuber, N.: 1954, Growth of a vapour bubble in a superheated liquid, *J. Applied Physics* **25**, 474–478.
- Ginoux, J. J.: 1978, *Two-Phase Flows and Heat Transfer with Application to Nuclear Reactor Design Problems.*, Hemisphere Publ. Cor., U.S.A.
- Gotovskiy, M. A., Zalethniv, A. F., Shemyakin, S. Y., Fyodorov, A. V. und Isakov, S. B.: 1988, Subcooled boiling heat transfer to a liquid in tubes, *Heat Transfer - Soviet Research* **20**(6), 728–737.
- Haas, U., Schmidt-Traub, H. und Brauer, H.: 1972, Drag on spherical bubbles, *Chem.-Ing.-Techn.* **44**, 1060–1068.

- Hahne, E. und Grigull, U.: 1977, *Heat Transfer in Boiling*, Hemisphere Publishing Corporation London.
- Harwell-Laboratory und CFX-Services: 1995, *CFX4.1 Flow Solver User Guide*, AEA Technology, Oxfordshire.
- Hsu, Y. Y.: 1962, On the size range of active nucleation cavities on a heating surface., *Int. J. Heat Transfer, Trans. ASME* **84**(3), 207–216.
- Hyland, K., Simonin, O. und Reeks, M.: 1998, On the continuum equations for two phase flows, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Ihme, F., Schmidt-Traub, H. und Brauer, H.: 1972, Interfacial drag coefficient in bubbly flow, *Chem.-Ing.-Tech.* **44**(5), 306–3131.
- Incorporated, F.: 1995, *FLUENT Version 4.3 Solver Guide, NH 03766*, Centerra Resource Park, Lebanon.
- Ishii, M.: 1975, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, Eyrolles (Paris).
- Ishii, M. und Zuber, N.: 1978, Relative motion and interfacial drag coefficient in dispersed two-phase flow of drops and particles, *Proc. of 71th Annual Meeting of AIChE, Miami (Florida)*.
- Issa, R. I. und Oliveira, P. J.: 1998, Accounting for non-equilibrium turbulent fluctuations in the Eulerian two-fluid-model by means of the notion of induction period., *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Jakob, M.: 1936, Heat transfer in evaporation and condensation, *J. Mech. Engineering* **58**, 643–660, 729–739.
- Klausner, J. F. und Zeng, L. Z.: 1993, Bubble departure in pool and flow boiling systems: a review and latest developments, *ASME/JSME Nuclear Engineering Conference* **1**, 1–6.
- Knebel, J. U. und Müller, U.: 1996, Passive decay heat removal by sump cooling after core melt down accident, *Proc. of 4th Int. Conf. Nuclear Engineering ICONE-IV, New Orleans* pp. 357–364.
- Kolev, N. I.: 1994a, The code IVA 4: Modeling of mass conservation in multi-phase multi-component flows in heterogeneous porous media, *Kerntechnik* **59**(4-5), 226–237.
- Kolev, N. I.: 1994b, The influence of mutual bubble interaction on the bubble departure diameter, *Experimental Thermal and Fluid Science* **8**, 167–174.
- Kolev, N. I.: 1995, How accurately can we predict nucleate boiling?, *Experimental Thermal and Fluid Science* **10**, 370–378.
- Kurul, N.: 1990, *Multidimensional Effects in Two-Phase Flow Including Phase Change*, PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Lahey, J. R. T.: 1995, The CFD analysis of multidimensional phenomena in multiphase flow, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Multiphase Flow, Kyoto*.

- Lahey, J. R. T. und Lee, S. J.: 1992, Data set no. 25: Phase distribution and two-phase turbulence for bubbly flows in pipes., *Multiphase Science and Technology* **6**, 303–349.
- Lahey, J. R. T. und Moody, F. J.: 1979, *The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor*, American Nuclear Society, La Grange Park, Illinois.
- Lamb, H.: 1973, *Hydrodynamics*, sixth edn, Cambridge University Press.
- Lance, M. und Lopez de Bertodano, M.: 1994, Phase distribution and wall effects in bubbly two-phase flows, *Multiphase Science and Technology* **8**, 69.
- Lauder, B. E. und Spalding, D. B.: 1974, The numerical computation of turbulent flows., *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.* **3**, 269–289.
- Legendre, D. und Magnaudet, J.: 1997, A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow, *J. Phys. Fluids* **9**(11), 3572–3574.
- Legendre, D. und Magnaudet, J.: 1998, Interaction between two spherical bubbles rising side by side, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Levy, S.: 1967, Forced convection subcooled boiling prediction of vapor volumetric fraction, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **10**, 951–965.
- Lienhard, J. H.: 1994, Snares of pool boiling research: Putting our history to use., *Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf., Brighton* **1**, 333–348.
- Lopez de Bertodano, M. A.: 1998, Two fluid model for two-phase turbulent jets, *Nucl. Eng. and Design* **179**, 65–74.
- Malenkov, I. G.: 1973, Detachment frequency as a function of size for vapor bubbles, *Translated from Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal (at the Academy of Sciences of the USSR)* **20**(6), 988–994.
- McLaughlin, J. B.: 1991, Inertial migration of a small sphere in linear shear flows, *J. Fluid Mechanics* **224**, 261–274.
- Mei, R. und Adrian, R. J.: 1992, Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number, *J. Fluid Mechanics* **237**, 323–341.
- Milne-Thomson, L. M.: 1974, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan Press LTD.
- Moore, D. W. und Saffman, P. G.: 1968, The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length., *J. Fluid Mechanics* **31**(4), 635–642.
- Nigmatulin, R. I.: 1995, Some fundamentals and applications, paradoxes and myths in mechanics of multiphase flow., *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Multiphase Flow, Kyoto* pp. PL1–1, PL1–16.
- Ohnuki, A. und Akimoto, H.: 1998, Flow characteristics of air-water two-phase flow in a large vertical pipe, *Proc. of the 36th European Two-Phase Flow Group Meeting and 1st European-Japanese Two-Phase Flow Group Meeting, Portoroz* pp. 1–8.

- Patankar, S. V.: 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid flow*, Hemisphere Pub. Corp., Washington, New York, London.
- Pauchon, C. und Banerjee, S.: 1986, Interphase momentum interaction effects in the averaged multifield model., *Int. J. of Multiphase Flow* **12**(4), 559–573.
- Peebles, F. N. und Garber, H. J.: 1953, Studies on the motion of gas bubbles in liquids, *Chem. Eng. Progress* **49**, 88–97.
- Peyret, R. und Taylor, T. D.: 1982, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Plesset, M. und Zwick, S. A.: 1954, The growth of vapour bubbles in superheated liquids, *J. of Applied Physics* **25**(4), 493–501.
- Podowski, M. Z.: 1997, Toward next generation multiphase models of nuclear thermal-hydraulics., *Proc. of 8th Int. Top. Meeting Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics, Kyoto* **1**, 53–68.
- Proudman, I. und Pearson, J. R. A.: 1957, Uniform translation of a rigid sphere through an unbounded motionless fluid, *J. Fluid Mechanics* **2**, 237–262.
- Pujet, S., Briere, E. und Magnaudet, J.: 1998, Numerical simulation of flow and heat transfer around a vapour bubble on a heated wall., *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon* pp. 1–8.
- Ranz, W. E. und Marshall, W. R.: 1952, Experimental correlation for heat transfer between particle and fluid, *Chemical Engineering Prog.* **48**(3), 141.
- Reeks, M. W.: 1991, On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows., *J. Phys. Fluids* **A3**(3), 446–456.
- Reeks, M. W.: 1992, On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows, *J. Phys. Fluids* **A4**(6), 1290–1303.
- Rhie, C. M. und Chow, W. L.: 1983, Numerical study of the turbulent flow past an aerofoil with trailing edge separation, *AIAA J1* **21**, 1527–1532.
- Rohsenow, W. M. und Hartnett, J. P.: 1973, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, Inc.
- Ruckenstein, E.: 1959, On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated, *Chemical Engineering Science* **10**, 22–30.
- Ryskin, G. und Leal, L. G.: 1984, Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. buoyance-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid., *J. Fluid Mechanics* **148**, 19–35.
- Saffman, P. G.: 1965, The lift force on a small sphere in a slow shear flow, *J. Fluid Mechanics* **22**, 385–400.
- Saha, P. und Zuber, N.: 1974, Point of net vapor generation and vapor void fraction in subcooled boiling, *Proc. of 5th Int. Heat Transfer Conf., Tokyo* **4**, 175–179.

- Saif, A. und Lopez de Bertodano, M. A.: 1997, Modified k-epsilon model for two-phase turbulent axisymmetric round jets, *Nucl. Eng. and Design* **172**, 187–196.
- Samstag, M.: 1996, *Experimentelle Untersuchungen von Transportphänomenen in vertikalen turbulenten Luft-Wasser-Blasenströmungen*, PhD thesis, University of Karlsruhe.
- Sato, Y., Hishida, K. und Maeda, M.: 1996, Effect of dispersed phase on modification of turbulent flow in a wall jet, *J. Fluids Engineering* **118**, 307–313.
- Sato, Y. und Sadatomi, M.: 1981, Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **7**, 167–177.
- Sato, Y. und Sekoguchi, K.: 1975, Liquid velocity distribution in two-phase bubble flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **2**, 79–85.
- Schiller, L. und Nauman, A.: 1933, Interfacial drag coefficient in bubbly flow, *VDI Zeitschrift* **77**, 318–320.
- Serizawa, A., Kataoka, I. und Michiyoshi, I.: 1992, Data set no. 24: Phase distribution in bubbly flow., *Multiphase Science and Technology* **6**, 257–301.
- Siebert, B. W. und Antal, S. P.: 1993, An IPSA-based two-fluid algorithm for boiling, multiphase flows, *Proc. of the 1st CFDS Int. User Conference, Oxford* pp. 209–232.
- Simonin, O.: 1990, Eulerian formulation for particle dispersion in turbulent two-phase flows, *Proc. of 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions, Jülich* pp. 156–166.
- Simonin, O. und Bel F'dhila, R.: 1992, Eulerian prediction of a turbulent bubbly flow downstream of a sudden pipe expansion, *Proc. of the 6th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*.
- Smereka, P.: 1993, On the motion of bubbles in a periodic box, *J. Fluid Mechanics* **254**, 79–112.
- Spalding, D. B.: 1979, *Two Phase Momentum, Heat and Mass Transfer in Chemical Process, and Energy Engineering Systems.*, F. Durst, Hemisphere Press, Washington.
- Spalding, D. B. und Qin, H. Q.: 1992, Numerical benchmark test no. 1.3: Boiling in pipe, *Multiphase Science and Technology* **6**, 555–576.
- Spalding, D. B. und Radosavljevic, D.: 1992, Numerical benchmark no. 3.2: Boiling in a channel, *Multiphase Science and Technology* **6**, 687–697.
- Spindler, K.: 1994, Flow boiling, *Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf., Brighton* **1**, 349–368.
- Stephan, K.: 1964, *Beitrag zur Thermodynamik des Wärmeübergangs beim Sieden.*, PhD thesis, Universität Karlsruhe.
- Theofanous, T. G., A. W. H.: 1992, Pressure drop and entrained fraction in fully developed flow, *Multiphase Science and Technology* **6**(I, 1), 5–14.
- Tomiyama, A.: 1998, Struggle with computational bubble dynamics, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow, Lyon*.

- Tomiyama, A., Sou, A., Zun, I., Kanami, N. und Sakaguchi, T.: 1995, Effects of Eötvös number and dimensionless liquid volumetric flux on lateral motion of a bubble in a laminar duct flow, *Advances in Multiphase Flow* p. 3.
- Tomiyama, A., Zun, I., Higaki, H., Makino, Y. und Sakaguchi, T.: 1996, A three-dimensional particle tracking method for bubbly flow simulation, *Nucl. Eng. and Design* p. 67.
- Unverdi, S. O. und Tryggvason, G.: 1992, A front tracking method for viscous, incompressible multi-fluid flows, *J. Comp. Phys.* **100**, 25.
- Van Doormal, J. P. und Raithby, G. D.: 1984, Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows, *Numerical Heat Transfer* **7**, 147–163.
- Van Stralen, S. und Cole, R.: 1979, *Boiling Phenomena.*, Vol. 2, Hemisphere Publ. Cor., U.S.A.
- Wang, C. H. und Dhir, V. K.: 1993, Effect of surface wettability on active nucleation site density during pool boiling of water on a vertical surface, *Trans. ASME Journal of Heat Transfer* **115**, 659–669.
- Weisshäupl, H. A. und Bitterman, D.: 1993, Large spreading of core melt for melt retention / stabilization, *Proc. of 5th Int. Seminar on Containment of Nuclear Reactors, Karlsruhe* pp. 347–355.
- Wolfert, K.: 1976, The simulation of blowdown processes with consideration of thermodynamic nonequilibrium phenomena, *Proc. of OECD NEA CSNI Specialists Meeting on Transient Two-Phase Flow, Toronto* pp. 156–198.
- Wolfert, K., Burwell, M. J. und Enix, D.: 1978, Non-equilibrium mass transfer between liquid and vapour phases during depressurization processes in transient two-phase flow, *Proc. of 2nd CSNI Specialists Meeting, Paris*.
- Wu, Q. und Ishii, M.: 1997, One-dimensional model for bubble sauter mean diameter development in vertical air-water bubbly flow., *Proc. of 8th Int. Top. Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics, Kyoto* **1**, 101–108.
- Yadigaroglu, G.: 1981, Regime transitions in boiling heat transfer, *Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering* pp. 307–351.
- Yadigaroglu, G. und Bensalem, A.: 1987, Interfacial mass generation rate modeling in non-equilibrium two-phase flow, *Multiphase Science and Technology* **3**, 85–127.
- Zuber, N.: 1959, *Hydrodynamic Aspects of Boiling Heat Transfer*, PhD thesis, UCLA, los Angeles.
- Zun, I.: 1980, Transverse migration of bubbles influenced by walls in vertical bubbly flow, *Int. J. of Multiphase Flow* **6**, 583–588.



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Janssens-Maenhout, Greet  
 Geburtstag: 19. Juli 1970  
 Geburtsort: Eeklo (Ost-Flandern) in Belgien  
 Staatsangehörigkeit: belgisch  
 Familienstand: verheiratet

## Schulbildung

1976 - 1982 Grundschule: Sint Beatrijs Schule - Eeklo  
 1972 - 1988 Gymnasium: O.L.V. Ten Doorn-Gymnasium - Eeklo  
 Latein - Mathematik  
 30.06.1988 Abschluß: Allgemeine Hochschulreife

## Akademischer Werdegang

1988 - 1993 Universität Gent, Fakultät Für Angewandte Wissenschaften  
 Fachrichtung: Elektrotechnik  
 Wahlfächer: 1. Kernphysik  
 2. Kerntechnik  
 10.07.1993 : Abschluß: Diplom-Ingenieurin  
 Diplomarbeit: bei Westinghouse Energy Systems Int. Co. - Brüssel  
 "Druckentlastung eines Reaktorsicherheitsbehälters  
 im Falle eines Kernschmelzunfalls."

## Beruflicher Werdegang

15.08.1993 Diplom-Ingenieurin in der Entwicklungsabteilung  
 der AIB-Vincotte Nucleaire GmbH (AVN)  
 Tätigkeitsbeschreibung: Kontrolle der Sicherheitsanalysen  
 belgischer Kernkraftanlagen  
 seit 01.06.1995 Doktorandin am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
 des Forschungszentrums Karlsruhe GmbH (FZK)  
 Thema: "Beiträge zur Modellierung und numerischen Simulation  
 von Zweiphasenströmungen mit Wärmeübertragung."