Störungssätze

für Operatorenhalbgruppen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Cornelia Kaiser
aus Karlsbad

Tag der mündlichen Prüfung:	13. Februar 2002
Referent:	Prof. Dr. Lutz Weis
Korreferent:	Prof. Dr. Wolfgang Arendt

Karlsruhe
2002

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Promotionsstipendiums der Landesgraduiertenförderung bzw. während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe (TH).

Mein herzlicher Dank geht an Herrn Prof. Dr. Lutz Weis für seine Betreuung. Er hat mich in allem unterstützt und sich immer für den Fortgang der Arbeit interessiert.

Bei Herrn Prof. Dr. Wolfgang Arendt bedanke ich mich für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Danken möchte ich außerdem Herrn Dr. P. C. Kunstmann. Für meine Fragen hatte er immer ein offenes Ohr, und seine Anregungen waren mir stets eine Hilfe. Frau Dipl.-Inf. Inge Lange danke ich dafür, daß sie mir bei Computerproblemen immer mit Rat und Tat zur Seite stand.

Schließlich danke ich meinen Eltern, auf deren Unterstützung und Ermutigung ich mich, nicht nur während der Anfertigung dieser Arbeit, stets verlassen konnte. Meinem Vater danke ich außerdem fürs Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Störungstheorie spielt in verschiedenen Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik eine wichtige Rolle. Kato beschreibt die Idee dahinter im Vorwort zu seinem Buch "Perturbation Theory for Linear Operators" [39] so:

> [Perturbation theory is] based on the idea of studying a system deviating slightly from a simple ideal system for which the complete solution of the problem under consideration is known. [39]

In dieser Arbeit werden die "Systeme" lineare Evolutionsgleichungen in einem Banachraum X sein, die sich als abstraktes Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \qquad (t \geq 0) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

mit vorgegebenem Anfangswert $x \in X$ und einem abgeschlossenen linearen Operator A in X mit Definitionsbereich $D(A)$ schreiben lassen. Gleichungen dieser Art haben vielfältige Anwendungen z.B. in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder in der mathematischen Physik. Beispiele hierfür sind die Wärmeleitungsgleichung $u'(t) = \Delta u(t)$ oder die Schrödingergleichung $u'(t) = i\Delta u(t)$.

1.1 Lösungsbegriffe

Bevor wir weiter auf die Störungstheorie für Gleichungen dieser Art eingehen, müssen wir zuerst klären, was überhaupt eine "Lösung" von (1.1) sein soll.

Am naheliegendsten ist zunächst folgende Definition: Eine Lösung von (1.1) ist eine auf $[0, \infty)$ stetig differenzierbare Funktion u mit Werten in X, sodaß $u(t)$ für alle $t \geq 0$ im Definitionsbereich $D(A)$ von A liegt und (1.1) erfüllt ist. Existiert für einen Anfangswert x eine solche *klassische* Lösung u von (1.1), dann muß $x = u(0)$ notwendigerweise in $D(A)$ sein. Es ist deswegen sinnvoll, einen schwächeren Lösungsbegriff zu definieren, der allgemeinere $x \in X$ als Anfangswerte zuläßt, etwa durch Integrieren der ersten

Gleichung in (1.1) bzgl. t: Eine auf $[0,\infty)$ stetige Funktion u mit Werten in X heißt dann *milde Lösung* von (1.1), falls für jedes $t \geq 0$

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \qquad \text{und} \qquad A\int_0^t u(s)ds = u(t) - x \tag{1.2}$$

gilt.

Eine milde Lösung u von (1.1) ist eine klassische Lösung genau dann, wenn u stetig differenzierbar ist. Also unterscheiden sich milde Lösungen und klassische Lösungen von (1.1) nur durch ihre Regularität, und der Begriff der milden Lösung ist sinnvoll. Existiert für jedes $x \in X$ genau eine milde Lösung von (1.1), dann heißt (1.1) *wohlgestellt*. Ein fundamentaler Satz der Theorie der C_0-Halbgruppen besagt, daß ein abgeschlossener linearer Operator A genau dann eine C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn das zugehörige abstrakte Cauchy-Problem wohlgestellt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\rho(A) \neq 0$ ist und (1.1) für alle $x \in D(A)$ eine klassische Lösung besitzt (vgl. z.B. [4, 24, 31, 57]).

Wir gehen nun kurz auf die Charakterisierung von milden Lösungen mit Hilfe der Laplace-Transformation ein, da die vektorwertige Laplace-Transformation ein wichtiges Hilfsmittel in dieser Arbeit ist.

Ist u eine exponentiell beschränkte, stetige Funktion, können wir für große λ die Laplace-Transformation

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)dt$$

von u betrachten. Dann ist u eine milde Lösung von (1.1) genau dann, wenn für große λ die charakteristische Gleichung

$$(\lambda - A)\hat{u}(\lambda) = x \tag{1.3}$$

gilt ([4, Theorem 3.1.3]). Liegt λ in der Resolventenmenge von $(A, D(A))$, dann ist

$$\hat{u}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}x.$$

Existiert die Resolvente auf einer Halbgeraden (ω,∞) und läßt sie sich dort als Laplace-Transformation einer stark stetigen Funktion T von $[0,\infty)$ in den Raum $\mathcal{L}(X)$ der beschränkten Operatoren auf X schreiben, also

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt \qquad \text{für alle } \lambda > \omega,$$

dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $t \mapsto T(t)x$ milde Lösung von (1.1), d.h. das Cauchy-Problem ist wohlgestellt.

Allerdings gibt es viele für die Anwendung interessante Operatoren, für die das zugehörige Cauchyproblem nicht wohlgestellt ist, so z.B. der Schrödinger-Operator $i\Delta$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \neq 2$ ([32, 38]). Um das Lösungsverhalten des Cauchyproblems in solchen

Fällen zu beschreiben, führen wir durch erneutes Integrieren einen noch allgemeineren Lösungsbegriff ein. Hierfür sei zunächst u eine milde Lösung von (1.1). Dann gilt

$$\int_0^t \int_0^s u(\tau)d\tau ds \in D(A) \qquad \text{und} \qquad A\int_0^t \int_0^s u(\tau)d\tau ds = \int_0^t u(s)ds - tx.$$

Setzen wir $U(t) := \int_0^t u(s)ds$, erhalten wir

$$\int_0^t U(s)ds \in D(A) \qquad \text{und} \qquad A\int_0^t U(s)ds = U(t) - tx. \tag{1.4}$$

Nun vergessen wir, daß u eine milde Lösung war, und sagen, eine auf $[0,\infty)$ stetige Funktion U mit Werten in X ist eine *integrierte Lösung* von (1.1), falls (1.4) erfüllt ist. Ist U auf $[0,\infty)$ stetig differenzierbar, dann ist die Ableitung U' von U eine milde Lösung von (1.1).

Eine stetige, exponentiell beschränkte Funktion U ist integrierte Lösung von (1.1), genau dann, wenn für große λ

$$\lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda) = x \tag{1.5}$$

gilt. Liegt nun $\lambda \neq 0$ in der Resolventenmenge von A, dann gilt

$$\hat{U}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}x.$$

Nun betrachten wir alle Operatoren A, für die die Resolvente auf einer Halbgeraden (ω,∞) existiert und für die sich $\frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}$ als Laplace-Transformation einer stark stetigen Funktion $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ schreiben läßt. Die Familie $(S(t))_{t\geq 0}$ ist dann die von $(A, D(A))$ erzeugte *integrierte Halbgruppe*. Erzeugt A eine integrierte Halbgruppe, dann hat das zugehörige Cauchy-Problem für alle $x \in D(A)$ eine milde Lösung und für alle $x \in D(A^2)$ eine klassische Lösung.

Auf die gleiche Weise werden nun für $k \in \mathbb{N}$ k-fach integrierte Lösungen von (1.1) und k-fach integrierte Halbgruppen definiert.

Die Idee, integrierte Halbgruppen zu betrachten, geht auf W. Arendt [2, 3] zurück. Die Theorie der integrierten Halbgruppen wurde dann u.a. von Arendt, Kellermann, Hieber und Neubrander [5, 40, 53] weiterverfolgt. M. Hieber [32, 34, 36] führte dann für nichtnegative reelle Zahlen den Begriff der α-integrierten Halbgruppen ein.

1.2 Störungstheorie

In dieser Arbeit wollen wir nun Störungssätze für Halbgruppen von Operatoren zeigen. Wir setzen dabei lediglich die relative Beschränktheit der Störung B bzgl. dem Halbgruppenerzeuger A (bzw. von B^* bzgl. A^*) voraus, d.h. wir nehmen an, daß eine der Bedingungen

$$\|Bx\| \leq M\|(\lambda - A)x\| \qquad \text{bzw.} \qquad \|B(\lambda - A)^{-1}\| \leq M < 1 \tag{1.6}$$

oder

$$\|B^*x^*\| \leq M\|(\lambda - A^*)x^*\| \qquad \text{bzw.} \qquad \|(\lambda - A)^{-1}B\| \leq M < 1, \tag{1.7}$$

erfüllt ist, allerdings auf einer Parallelen zur imaginären Achse.

Die relative Beschränktheit liegt vielen bekannten Störungssätzen für C_0-Halbgruppen zugrunde. Der Beweis des bekannten Resultats für beschränkte Störungen (vgl. [57]) beruht im wesentlichen auf (1.6). Die Beweise der Sätze von Miyadera-Voigt bzw. von Desch-Schappacher (vgl. [24]) verwenden (1.6) bzw. (1.7) an entscheidender Stelle. Falls schließlich A eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt und (1.6) auf der rechten Halbebene erfüllt ist, dann erzeugt auch $(A + B)$ eine analytische Halbgruppe.

Es ist ein Hauptziel dieser Arbeit, zu untersuchen, inwieweit diese relative Beschränktheit bereits ausreicht, um Störungssätze zu erhalten. Die Tendenz unserer Ergebnisse ist, daß man (außer im bekannten analytischen Fall) zwar Störungssätze erhält, man aber bei der Lösung des gestörten Cauchy-Problems einen Verlust an Regularität hinnehmen muß: Ist das ursprüngliche Cauchy-Problem wohlgestellt, kann man für das gestörte Problem mit beliebigem Anfangswert aus X nur eine α-fach integrierte Lösung erwarten. Hierbei hängt die Integrationsstufe α von der Geometrie des Banachraumes ab. Dies werden wir in Kapitel 3 in allgemeinerer Form zeigen:

Der Operator $(A, D(A))$ erzeuge eine α-integrierte Halbgruppe auf einem Banachraum X und B erfülle eine der Bedingungen (1.6) oder (1.7). Dann erzeugt eine Erweiterung von $A + B$ mit Definitionsbereich $D(A) \cap D(B)$ eine β-integrierte Halbgruppe auf X. Hierbei ist $\beta > \alpha + s$ zu wählen, wobei s eine positive reelle Zahl ist, die von der Geometrie des Banachraumes abhängt.

In Kapitel 4 setzen wir voraus, daß A eine C_0-Halbgruppe auf einem Hilbertraum H erzeugt. Außerdem sei B eine abgeschlossener Operator in H mit $D(B) \supset D(A)$, der auf einer rechten Halbebene in $\mathbb{C}$ *beiden* Bedingungen in (1.6) genügt. Unter diesen Annahmen zeigen wir, daß dann die Summe $A + B$ mit Definitionsbereich $D(A)$ eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe erzeugt, d.h. das zugehörige Cauchy-Problem hat für alle $x \in D(A)$ eine Lösung u mit folgenen Eigenschaften: u ist auf $[0, \infty)$ stetig mit Werten in X und auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar. Weiter ist für alle $t > 0$ $u(t) \in D(A)$ und $u'(t) = Au(t)$. Ausserdem erfüllt u die Anfangsbedingung $u(0) = x$. Diesen (abgeschwächten) Lösungsbegriff findet man z.B. bei Krein [41] und Taira [71], ebenso wie Beispiele für Operatoren, die eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe erzeugen, aber nicht stark stetig in 0 sind ([41, 70, 71]).

Unter diesen Beispielen sind auch solche Operatoren, für die die Lösung des zugehörigen Cauchy-Problems für alle $x \in D(A)$ auf einem offenen Sektor analytisch ist. Nach der Terminologie von Taira [71] erzeugen diese Operatoren eine analytische Halbgruppe mit schwacher Singultarität. In Kapitel 5 werden wir Störungssätze für solche Halbgruppen zeigen. Um mehr Informationen darüber zu haben, wie gut oder schlecht sich die Halbgruppe in der Nähe der 0 verhält, definieren wir hierzu analytische Halbgruppen mit

σ-Singularität, wobei σ eine nichtnegative reelle Zahl ist.

1.3 Anwendungen

Die restlichen Kapitel sind Anwendungen gewidmet, die unsere Ergebnisse illustrieren. In Kapitel 6 betrachten wir Anfangswertprobleme von der Form

$$\begin{cases} u'(t) & = (A+B)u(t) \qquad t \geq 0, \\ u(0) & = x \end{cases} \tag{1.8}$$

in $L^p(\mathbb{R})$. Hierbei sei $(A, D(A))$ ein gewöhnlicher Differentialoperator der Form

$$A = i\frac{d^m}{dx^m} \qquad \text{für eine gerade Zahl } m$$

oder

$$A = \frac{d^m}{dx^m} \qquad \text{für eine ungerade Zahl } m$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(A) := W^{m,p}(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe auf X genau dann, wenn $p = 2$ ist ([32]). Im Fall $m = 2$ wurde dies zuerst von Hörmander in [38] bewiesen. Für $p \neq 2$ erzeugt A eine α-integrierte Halbgruppe auf X, falls $\alpha > \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ gewählt ist. Dies ist ein Resultat von M. Hieber [32].

Der Störungsoperator B sei für ein Potential V und eine Zahl $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch

$$Bf := V \cdot \frac{d^l}{dx^l} f$$

mit maximalem Definitionsbereich gegeben. Mit Hilfe der Resultate aus Kapitel 3 zeigen wir, daß $A+B$ für jedes $\beta > \sigma_p$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt, falls das Potential V einer der Bedingungen

(i) $l \leq \frac{1}{p}(m-1)$ und $V \in L^p(\mathbb{R})$

oder

(ii) $l = 0$ und $V \in L^p(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$

genügt. Die Zahl σ_p ist dabei durch

$$\sigma_p = \begin{cases} \frac{2}{p} - \frac{1}{2} & p \in (1, 2] \\ \frac{3}{2} - \frac{2}{p} & p \in (2, \infty) \end{cases}$$

gegeben. Ist dann n die kleinste natürliche Zahl, die echt größer als σ_p ist, dann hat (1.8) für jedes $x \in D((A+B)^{n+1})$ genau eine klassische Lösung.

Ist $p = 2$, liefert unser Störungssatz für C_0-Halbgruppen in Hilberträumen, daß $A + B$ sogar eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe erzeugt. Dann hat das gestörte Anfangswertproblem für alle $x \in D(A)$ eine Lösung im abgeschwächten Sinn wie oben beschrieben.

Insbesondere gelten diese Ergebnisse für die eindimensionale Schrödingergleichung

$$\begin{cases} u_t &= iu_{xx} + V \cdot u, \qquad \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.9}$$

in L^p mit Potential $V \in L^p + L^\infty$ und Anfangszustand $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$.

Wir betrachten auch die n-dimensionale Schrödingergleichung ($n \geq 3$)

$$\begin{cases} u_t &= i\Delta u + Bu, \qquad \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.10}$$

in L^p, wobei p in einem (von n abhängigen) offenen Intervall um 2 gewählt sei. Ist B ein beschränkter Operator von L^p nach $L^{p'}$ (mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), dann zeigen wir, daß $i\Delta + B$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt. Die Schranke für β hängt hier von p und n ab.

In Kapitel 7 studieren wir lineare Differentialgleichungen mit Delay. Gleichungen dieser Art spielen z.B. in der Kontrolltheorie eine wichtige Rolle ([80]). Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \Phi u_t, \qquad t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u_0 = f. \end{cases} \tag{1.11}$$

mit Anfangswert x in einem Banachraum X und $f \in L^p([-1, 0]; X)$, $1 \leq p < \infty$. A sei ein abgeschlossener Operator in X, und der Delay-Operator Φ sei linear und beschränkt von $W^{1,p}([-1, 0]; X)$ nach X. u sei definiert in $[-1, \infty)$ mit Werten in X, und $u_t : [-1, 0] \to X$ mit $u_t(\sigma) = u(t + \sigma)$ für $\sigma \in [-1, 0]$.

Ein Lösungsansatz ist, die Gleichung (1.11) in ein äquivalentes abstraktes Cauchyproblem mit einem Operator $\mathcal{A}$ auf dem Produktraum $\mathcal{X} = X \times L^p([-1, 0], X)$ umzuschreiben. A. Batkai und S. Piazzera [9] verwenden Störungstheorie, um Bedingungen zu finden, sodaß das assoziierte Cauchy-Problem wohlgestellt ist, d.h. $\mathcal{A}$ eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Wir geben Bedingungen an A und den Delay-Operator Φ an, sodaß der assoziierte Operator $\mathcal{A}$ eine α-integrierte Halbgruppe auf $\mathcal{X}$ erzeugt. Dies liefert dann Lösungen von (1.11) für eine Klasse von Anfangsbedingungen x, f. Hierzu verwenden wir unsere Störungssätze.

2 Grundlagen

2.1 Notation

In dieser Arbeit sind X und Y stets komplexe Banachräume. Mit $\mathcal{L}(X,Y)$ bezeichnen wir den Raum aller beschränkten linearen Operatoren von X nach Y. Falls $X = Y$, schreiben wir $\mathcal{L}(X)$ anstatt $\mathcal{L}(X,X)$. $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ ist der **Dualraum** von X. Ist $x \in X$ und $x^* \in X^*$, dann schreiben wir für $x^*(x)$ auch $\langle x^*, x\rangle$. Mit I_X oder I bezeichnen wir die Identität auf X.

Einen linearen Operator A von einem Teilraum $D(A)$ von X nach X bezeichnen wir mit $(A, D(A))$ oder einfach A, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, was der Definitionsbereich $D(A)$ von A ist. Für den **Bildbereich** $\{Ax : x \in D(A)\}$ schreiben wir $\mathrm{Ran}(A)$. Liegt $D(A)$ dicht in X, sagen wir, $(A, D(A))$ sei **dicht definiert**. Der Operator $(A, D(A))$ heißt **abgeschlossen**, wenn sein Graph $\{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ abgeschlossen ist in $X \times X$ bzgl. der Produkttopologie.

Ist $(A, D(A))$ dicht definiert, dann ist der **zu** A **adjungierte Operator** $(A^*, D(A^*))$ durch

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{x^* \in X^* : \exists y^*(x^*) \in X^* \text{ mit } \langle x^*, Ax\rangle = \langle y^*, x\rangle\} \\ A^*x^* &= y^*(x^*) \end{aligned}$$

definiert.

Sei $(A, D(A))$ ein linearer Operator in X. Die **Resolventenmenge** von A ist definiert als

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ ist bijektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt **Spektrum** von A. Die **Resolvente** von A ist die Abbildung $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, definiert durch $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$. Ist $\rho(A) \neq \emptyset$, dann ist $(A, D(A))$ abgeschlossen. Ist A dicht definiert, dann ist $\rho(A) = \rho(A^*)$ und es gilt $R(\lambda, A)^* = R(\lambda, A^*)$ für alle $\lambda \in \rho(A)$.

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Familie $(T(t))_{t\in I} := \{T(t) \in \mathcal{B}(X) : t \in [0,\infty)$ von beschränkten Operatoren heißt **stark stetig**, falls $T(\cdot)x$ für jedes $x \in X$ stetig ist auf I. Sie heißt **exponentiell beschränkt**, falls es Zahlen $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \in I$ gilt.

Den Raum der stetigen Funktionen auf einem Intervall I in $\mathbb{R}$ mit Werten in einem Banachraum X bezeichnen wir mit $C(I, X)$. Für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ist $C^k(I, X)$ der Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach X.

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann definiert

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} & \text{für } p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & \text{für } p = \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

eine Norm auf $X \times Y$. Die so normierte direkte Summe wird mit $X \oplus_p Y$ bezeichnet und ist wieder ein Banachraum. Alle diese Normen sind äquivalent und erzeugen die Produkttopologie auf $X \times Y$.

2.2 Die vektorwertige Laplace-Transformation

In diesem Abschnitt stellen wir einige Eigenschaften der vektorwertigen Laplace-Transformation zusammen. Für die Beweise der Sätze verweisen wir auf [4].

2.2.1 Das Bochner-Integral

Sei X ein Banachraum und I ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall in $\mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : I \to X$ heißt **einfach**, wenn sie sich als $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{\Omega_k}$ schreiben läßt, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_k \in X$ und $\Omega_k \subseteq I$ $(k = 1, \dots, n)$ Lebesgue-meßbare Mengen mit endlichem Lebesgue-Maß $\mu(\Omega_k)$ seien. Hierbei ist χ_Ω die charakteristische Funktion von Ω. Analog zum skalarwertigen Fall ist das Integral einer einfachen Funktionen $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{\Omega_k}$ definiert durch

$$\int_I f(t)dt := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(\Omega_k).$$

Ebenfalls wie im skalarwertigen Fall zeigt man, daß das Integral unabhängig ist von der Darstellung von f.

Eine Funktion $f : I \to X$ heißt **meßbar**, wenn eine Folge (g_n) von einfachen Funktionen $g_n : I \to X$ existiert, sodaß $f(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ für fast alle $t \in I$. Sie heißt **Bochner-integrierbar**, falls eine Folge (g_n) von einfachen Funktionen $g_n : I \to X$ existiert, sodaß $f(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ für fast alle $t \in I$ und $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\|dt = 0$. In diesem Fall ist das **Bochner-Integral von** f **auf** I definiert durch

$$\int_I f(t)dt := \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)dt.$$

Die Klasse der Bochner-integrierbaren Funktionen läßt sich einfach charakterisieren:

2.2.1 Satz *Eine Funktion $f : I \to X$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn f meßbar und $\|f\|$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar, so gilt die Normabschätzung*

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\|dt.$$

Das Verhalten des Bochner-Integrals unter linearen Operatoren läßt sich wie folgt beschreiben:

2.2.2 Satz *(a) Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator und $f : I \to X$ Bochner-integrierbar. Dann ist $T \circ f : I \to Y$ Bochner-integrierbar und*

$$T \int_I f(t)dt = \int_I T(f(t))dt.$$

(b) Sei $(A, D(A))$ ein abgeschlossener linearer Operator in einem Banachraum X und $f : I \to X$ Bochner-integrierbar. Falls $f(t) \in D(A)$ für jedes $t \in I$ und $A \circ f : I \to X$ Bochner-integrierbar ist, dann ist auch $\int_I f(t)dt \in D(A)$ und

$$A \int_I f(t)dt = \int_I A(f(t))dt.$$

Klassische Sätze der Integrationstheorie wie der Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue) oder der Satz von Fubini gelten auch im vektorwertigen Fall.

Mit $L^1(I, X)$ bezeichnen wir den Raum aller Bochner-integrierbaren Funktionen $f : I \to X$. Hierbei identifizieren wir wie im skalarwertigen Fall alle Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Dann ist

$$\|f\|_1 := \int_I \|f(t)\|dt$$

eine Norm auf $L^1(I, X)$, und $(L^1(I, X), \|.\|_1)$ ist ein Banachraum.

Für die Laplace-Transformation werden wir vor allem den Fall $I = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ brauchen. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, daß

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau f(t)dt \tag{2.2}$$

gilt. Falls $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ ist, d.h. f Bochner-integrierbar ist auf $[0, \tau]$ für jedes $\tau \in \mathbb{R}_+$, kann der Grenzwert in (2.2) existieren, obwohl f nicht Bochner-integrierbar auf $\mathbb{R}_+$ ist. In diesem Fall definieren wir das **uneigentliches Integral** $\int_0^\infty f(t)dt$ durch

$$\int_0^\infty f(t)dt := \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau f(t)dt.$$

Für $1 < p < \infty$ sei $L^p(I, X)$ der Raum aller meßbaren Funktionen $f : I \to X$ mit

$$\|f\|_p := \left(\int_I \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

$L^\infty(I, X)$ sei der Raum aller meßbaren Funktionen $f : I \to X$ mit

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|f(t)\| := \inf\{c > 0 : \|f(t)\| \leq c \ \mu - \text{f.ü.}\} < \infty.$$

Mit den üblichen Identifikationen wird $(L^p(I, X), \|.\|_p)$ ein Banachraum.

2.2.2 Das Laplace-Integral

Sei X ein komplexer Banachraum, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Für die Existenz des **Laplace-Integrals**

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt := \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t) dt$$

ist die **Konvergenzschranke** $\text{abs}(f)$ von Bedeutung, die durch

$$\text{abs}(f) := \inf\{\operatorname{Re} \lambda : \hat{f}(\lambda) \text{ existiert}\}$$

gegeben ist. Es gilt nämlich folgender Satz.

2.2.3 Satz *Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$. Dann ist das Laplace-Integral $\hat{f}(\lambda)$ für $\operatorname{Re} \lambda >abs(f)$ konvergent, für $\operatorname{Re} \lambda <abs(f)$ dagegen divergent.*

Ist $\text{abs}(f) < \infty$, dann heißt $\hat{f} : \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \text{abs}(f)\} \to X$ die **Laplace-Transformierte** von f.

Im folgenden wird $\text{abs}(f)$ durch das exponentielle Wachstum von f und seinen Stammfunktionen beschrieben. Hierzu definieren wir für $f : \mathbb{R}_+ \to X$ zunächst die **exponentielle Wachstumsschranke**

$$\omega(f) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} f(t)\| < \infty\}.$$

Es ist offensichtlich, daß $\text{abs}(f) \leq \omega(f)$ ist.

Sei $F(t) := \int_0^t f(s) ds$ und $F_\infty := \lim_{t \to \infty} F(t)$, falls der Limes existiert, und $F_\infty := 0$ sonst. Dann gilt:

2.2.4 Satz *Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$. Dann ist abs$(f) = \omega(F - F_\infty)$.*

Für $\omega \geq 0$ folgt mit der Dreiecksungleichung, daß $\omega(F) \leq \omega$ ist genau dann, wenn $\omega(F - F_\infty) \leq \omega$. Damit erhält man das folgende Korollar.

2.2.5 Korollar *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ und $\omega \geq 0$. Dann gilt*

$$\mathrm{abs}(f) \leq \omega \Longleftrightarrow \omega(F) \leq \omega.$$

Schließlich wollen wir die Resultate dieses Abschnitts noch für stark stetige operatorwertige Funktionen $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ formulieren. Wir definieren die exponentielle Wachstumsschranke von T durch

$$\omega(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} T(t)\| < \infty\}.$$

Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit ist

$$\omega(T) = \sup\{\omega(u_x) : \ x \in X\},$$

wobei $u_x(t) := T(t)x$ ist.

Falls $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ stark stetig und λ eine komplexe Zahl ist, dann bezeichnet $\int_0^t e^{-\lambda s} T(s) ds$ den beschränkten Operator $x \mapsto \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) x \, ds$, und wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{abs}(T) &:= \inf\left\{ \mathrm{Re}\,\lambda : \ \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \text{ existiert für jedes } x \in X \right\} \\ &= \sup\{\mathrm{abs}(u_x) : \ x \in X\}. \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.2.5 folgt dann

2.2.6 Satz *Sei $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ stark stetig, $S(t) := \int_0^t T(s) ds$ und $\omega \geq 0$. Dann ist*

$$\mathrm{abs}(T) \leq \omega \Longleftrightarrow \omega(S) \leq \omega.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit folgendem Eindeutigkeitssatz.

2.2.7 Satz *Seien $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ mit $abs(f) < \infty$ und $abs(g) < \infty$, und sei $\lambda_0 > \max\{abs(f), abs(f)\}$. Gilt $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ für alle $\lambda > \lambda_0$, dann ist $f(t) = g(t)$ fast überall.*

2.3 Die vektorwertige Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Zusammenfassung wichtiger Eigenschaften der vektorwertigen Fourier-Transformation.

Für $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ ist die **Fourier-Transformierte** von f die Funktion $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to X$, gegeben durch

$$(\mathcal{F}f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t) dt.$$

Außerdem definieren wir

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt = (\mathcal{F}f)(-s) = (\mathcal{F}\check{f})(s),$$

wobei $\check{f}(t) := f(-t)$.

Viele Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}, X)$ können genauso wie im skalarwertigen Fall gezeigt werden. Beweise für die folgenden Sätze im skalarwertigen Fall findet man z.B. in [62].

2.3.1 Satz *(Inversionssatz) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Falls auch $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ ist, dann ist $f = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$ fast überall.*

2.3.2 Satz *(Lemma von Riemann-Lebesgue) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Dann ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ von f in $C_0(\mathbb{R}, X)$.*

Insbesondere ist die Fourier-Transformation ein beschränkter Operator von $L^1(\mathbb{R}, X)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}, X)$.

Der Satz von Plancherel allerdings gilt im vektorwertigen Fall nur, wenn X ein Hilbertraum ist. Für den Beweis verweisen wir auf [4].

2.3.3 Satz *Sei X ein Hilbertraum. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^2(\mathbb{R}, X)$, dann ist $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ und es gilt $\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$. Die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^2(\mathbb{R}, X)$ kann zu einem beschränkten linearen Operator $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}, X)$ erweitert werden.*

Für $p \in [1, 2]$ kann die skalarwertige Fourier-Transformation zu einem beschränkten linearen Operator von $L^p(\mathbb{R}) \to L^{p'}(\mathbb{R})$ erweitert werden, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ sei. Dies gilt im vektorwertigen Fall nicht allgemein, wie wir schon im Fall $p = 2$ bemerkt haben. Deshalb definieren wir

2.3.4 Definition Sei $p \in [1, 2]$. Ein Banachraum X hat **Fourier-Typ** p, falls die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, X)$ zu einem beschränkten linearen Operator

$$\mathcal{F} :\ L^p(\mathbb{R}, X) \to L^{p'}(\mathbb{R}, X), \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1,$$

erweitert werden kann.

Wir stellen einige Aussagen über Banachräume mit Fourier-Typ p zusammen:

- Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue hat jeder Banachraum Fourier-Typ 1.
- Ein Banachraum hat Fourier-Typ 2 genau dann, wenn er zu einem Hilbertraum isomorph ist ([45]).
- Hat ein Banachraum Fourier-Typ p, dann hat er auch Fourier-Typ r für jedes $r \in [1, p]$.
- Der Raum $L^r(\Omega, \mu)$ hat Fourier-Typ $\min\{r, \frac{r}{r-1}\}$ ([58]).

- Jeder abgeschlossene Teilraum und jeder Quotientenraum eines Banachraums X hat denselben Fourier-Typ wie X.
- Jeder B-konvexe Banachraum hat Fourier-Typ $p > 1$ ([11, 12]). Für die Definition von B-konvexen Banachräumen verweisen wir auf [59, Section 3.d].
- Seien X, Y Banachräume mit Fourier-Typ p. Dann hat auch $X \times Y$ Fourier-Typ p. Dies zeigt man z.B. mit der verallgemeinerten Minkowskischen Ungleichung.
- Hat X Fourier-Typ p, dann auch X^* ([30]).
- Hat X Fourier-Typ p und ist $q \in [p, p']$, dann hat auch $L^q(\mathbb{R}, X)$ Fourier-Typ p ([30]).

Schließlich weisen wir noch auf den Zusammenhang zwischen Laplace- und Fourier-Transformation hin. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$. Wir setzen $f(t) = 0$ für $t < 0$. Dann kann f als Element von $L^1(\mathbb{R}, X)$ aufgefaßt werden. Damit können wir $\mathcal{F}f$ bilden, und es gilt:

$$(\mathcal{F}f)(s) = \int_0^\infty e^{-ist} f(t) dt = \hat{f}(is),$$

wobei $\hat{f}$ die Laplace-Transformierte von f ist. Daher können Sätze über die Fourier-Transformation angewandt werden, um die Laplace-Transformation zu studieren. Hiervon werden wir später mehrere Male Gebrauch machen.

2.4 Vektorwertige analytische Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung f von Ω in einen Banachraum X heißt **analytisch in** Ω, wenn

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

für alle $z \in \Omega$ existiert. Klassische Sätze der Funktionentheorie wie der Cauchysche Integralsatz oder die Cauchysche Integralformel gelten auch für vektorwertige analytische Funktionen. Dies zeigt man z.B. mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach. Wir werden diese Sätze in dieser Arbeit häufig verwenden, ebenso wie eine vektorwertige Version des Satzes von Phragmen-Lindelöf von dem man in der Literatur mehrere Versionen findet (vgl. z.B. [13, 46]). Um später einfacher zitieren zu können, formulieren und beweisen wir den Satz an dieser Stelle in der Form, in der wir ihn verwenden werden.

2.4.1 Satz *Sei X ein Banachraum, $\omega \in \mathbb{R}$ und $H_\omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \omega\}$. Sei $f : \overline{H_\omega} \to X$ stetig und holomorph in H_ω. Falls Konstanten $M, C > 0$ und $\gamma \in [0, 1)$ existieren mit*

- *$\|f(z)\| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = \omega$ und*

- $\|f(z)\| \leq C\exp(|z|^\gamma)$ *für alle* $z \in H_\omega$,

dann ist $\|f(z)\| \leq M$ *für alle* $z \in H_\omega$.

Beweis Sei $\beta \in (\gamma, 1)$, $\varepsilon > 0$ und $S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Wir definieren die Funktion $g_\varepsilon : \overline{S} \to X$ durch

$$g_\varepsilon(z) := \frac{1}{M} f(\omega + e^{iz}) e^{-2\varepsilon\cos(\beta z)}. \tag{2.3}$$

Dann ist g_ε stetig auf $\overline{S}$ und holomorph in S. Wir wollen zeigen, daß $\|g_\varepsilon\|$ für $|z| \to \infty$ ($z \in S$) gegen 0 konvergiert. Zunächst gilt:

$$2\operatorname{Re}\cos(\beta z) = \operatorname{Re}(e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}) = \left(e^{\beta \operatorname{Im} z} + e^{-\beta \operatorname{Im} z}\right)\cos(\beta \operatorname{Re} z). \tag{2.4}$$

Wegen $0 \leq \gamma < \beta < 1$ existiert ein $c > 0$ mit $c \leq \cos(\beta \operatorname{Re} z)$ für alle $\operatorname{Re} z \in [-\pi/2, \pi/2]$. Also ist $\exp(-2\varepsilon \operatorname{Re}\cos(\beta z)) \leq \exp(-\varepsilon c(e^{\beta \operatorname{Im} z} + e^{-\beta \operatorname{Im} z})) \leq \exp(-2\varepsilon c e^{\gamma|\operatorname{Im} z|})$. Außerdem gilt für alle $z \in S$ mit $|\operatorname{Im} z|$ groß genug, daß

$$\|f(\omega + e^{iz})\| \leq C\exp(|\omega + e^{iz}|^\gamma) \leq C\exp(C' e^{\gamma|\operatorname{Im} z|}). \tag{2.5}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon\| &\leq \frac{1}{M}\|f(\omega + e^{iz})\| e^{-2\varepsilon \operatorname{Re}\cos(\beta z)} \\ &\leq \frac{C}{M}\exp\left(C' e^{\gamma|\operatorname{Im} z|}\right)\exp\left(-2\varepsilon c\left(e^{\beta|\operatorname{Im} z|}\right)\right) \xrightarrow[z\in S]{|\operatorname{Im} z|\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Da für $z \in \partial S$ $\|g_\varepsilon(z)\| \leq 1$ ist, gilt nach dem Maximumprinzip auf endlichen Rechtecken, daß $\|g_\varepsilon(z)\| \leq 1$ für alle $z \in S$. Daher ist $\|f(\omega + e^{iz})\| \leq M e^{2\varepsilon \operatorname{Re}\cos(\beta z)}$.

Sei nun $R \subseteq S$ ein endliches Rechteck. Dann existiert $c' > 0$ mit $\operatorname{Re}\cos(\beta z) \leq c'$ in R. Also ist $\|f(\omega + e^{iz})\| \leq M e^{2\varepsilon c'}$ für alle $z \in R$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\|f(\omega + e^{iz})\| \leq M$ für alle $z \in R$ und damit auch für alle $z \in \overline{S}$. Weil sich jedes $\lambda \in H_\omega$ als $\omega + e^{iz}$ ($z \in S$) darstellen läßt, ist damit der Satz bewiesen. □

2.5 Existenz und Darstellung der Resolvente von $A + B$

In diesem Abschnitt werden wir einige technische Lemmata beweisen, die in dieser Arbeit immer wieder verwendet werden. Inhalt der Lemmata ist die Existenz und Darstellung der Resolvente einer Summe von zwei abgeschlossenen Operatoren $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ in einem Banachraum X. Wir setzen dabei voraus, daß A nichtleere Resolventenmenge hat.

Zur Motivation sei $\lambda \in \rho(A)$ und $x \in D(A) \cap D(B)$. Dann läßt sich $(\lambda I - A - B)x$ als

$$(\lambda I - A - B)x = [I - BR(\lambda, A)](\lambda I - A)x \tag{2.6}$$

bzw. als

$$(\lambda I - A - B)x = (\lambda I - A)[I - R(\lambda, A)B]x \tag{2.7}$$

schreiben. Wir betrachten zunächst Gleichung (2.6) und zeigen folgendes Lemma:

2.5.1 Lemma *Seien $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ abgeschlossene Operatoren in X mit $D(A) \subseteq D(B)$. Falls $\lambda \in \rho(A)$ existiert mit $\|BR(\lambda, A)\| < 1$, dann gilt:*

- *$(A + B, D(A))$ ist abgeschlossen,*
- *$\lambda \in \rho(A + B)$ und*
- *$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1} = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Also ist $I - BR(\lambda, A)$ invertierbar in $\mathcal{L}(X)$ und es gilt (Neumannsche Reihe):

$$[I - BR(\lambda, A)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k.$$

Sei $R := R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}$. Da der Bildraum $\operatorname{Ran} R$ von R nach Definition in $D(A)$ enthalten ist, gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A - B)Rx &= (\lambda I - A - B)R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}x \\
&= [I - BR(\lambda, A)][I - BR(\lambda, A)]^{-1}x \;=\; x.
\end{aligned}$$

Andererseits ist für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
R(\lambda I - A - B)x &= R(\lambda, A) \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k (\lambda I - A - B)x \\
&= R(\lambda, A)(\lambda I - A - B)x \\
&\quad + R(\lambda, A) \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k (\lambda I - A - B)x \\
&= x - R(\lambda, A)Bx + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k (\lambda I - A)x \\
&\quad - \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k Bx \\
&= x + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^{k-1} BR(\lambda, A)(\lambda I - A)x \\
&\quad - \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, A)[BR(\lambda, A)]^k Bx \\
&= x.
\end{aligned}$$

Also ist $\lambda \in \rho(A + B)$, $R = R(\lambda, A + B)$ und damit $(A + B, D(A))$ abgeschlossen. □

Nun wenden wir uns Gleichung (2.7) zu.

2.5.2 Lemma *Seien $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ abgeschlossene Operatoren in X. A habe nichtleere Resolventenmenge. Falls $M \in [0, 1)$, $G \subseteq \rho(A)$ und eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß $\|R(\lambda, A)Bx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in D$ und alle $\lambda \in G$, dann gilt:*

(a) *Es gibt eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A + B, D(A) \cap D(B))$ mit*

- *$G \subseteq \rho(C)$ und*
- *$R(\lambda, C) = [I - R(\lambda, A)B]^{-1}R(\lambda, A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}[R(\lambda, A)B]^k R(\lambda, A)$ für alle $\lambda \in G$.*

(b) *Sind A und B dicht definiert, dann ist $D(A^*) \subseteq D(B^*)$ und $\|B^*R(\lambda, A^*)\| \leq M$ für alle $\lambda \in G$.*

(c) *Ist schließlich noch $\overline{D(A^*)} = X^*$, so ist der in (a) definierte Operator C gerade der Teil von $(A^* + B^*)^*$ in X, d.h. $Cx = (A^* + B^*)^*x$ für $x \in D(C) = \{x \in D((A^* + B^*)^*) \cap X : (A^* + B^*)^* \in X\}$.*

Beweis: (a) Für $\lambda \in G$ kann $R(\lambda, A)B$ zu einem beschränkten Operator auf X mit Norm $\leq M$ erweitert werden. Wir bezeichnen diese (eindeutige) Erweiterung ebenfalls mit $R(\lambda, A)B$. Da $\|R(\lambda, A)B\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, ist $I - R(\lambda, A)B$ invertierbar in $\mathcal{L}(X)$. Also existiert der Operator

$$R_\lambda := [I - R(\lambda, A)B]^{-1}R(\lambda, A) = \sum_{k=0}^{\infty}[R(\lambda, A)B]^k R(\lambda, A).$$

Sei $\lambda \in G$. Weil R_λ für jedes $\lambda \in G$ injektiv ist, ist der durch

$$\begin{aligned} D(C_\lambda) &= \operatorname{Ran} R_\lambda \\ C_\lambda &= \lambda I - R_\lambda^{-1} \end{aligned}$$

gegebene Operator C_λ wohldefiniert. Unmittelbar aus der Definition folgt

$$(\lambda I - C_\lambda)R_\lambda x = x \qquad \text{bzw.} \qquad R_\lambda(\lambda I - C_\lambda)y = y$$

für $x \in X$ bzw. $y \in D(C_\lambda)$. Also ist $\lambda \in \rho(C_\lambda)$ und $R(\lambda, C_\lambda) = R_\lambda$. Insbesondere ist C_λ abgeschlossen. Wir zeigen jetzt, daß C_λ nicht von $\lambda \in G$ abhängt.

Man kann nachrechnen, daß $\{R_\lambda, \lambda \in G\}$ der Resolventengleichung genügt und damit eine Pseudoresolvente ist. Daher hängt $\operatorname{Ran} R_\lambda$ nicht von $\lambda \in G$ ab ([57, Lemma 1.9.2]) und es gilt für $\lambda, \mu \in G$

$$\begin{aligned} (\mu I - C_\lambda)R_\mu x &= [(\mu - \lambda)I + (\lambda I - C_\lambda)]R_\mu x \\ &= [(\mu - \lambda)I + (\lambda I - C_\lambda)]R_\lambda(I - (\mu - \lambda)R_\mu)x \\ &= x + (\mu - \lambda)[R_\lambda - R_\mu - (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda]x \\ &= x \end{aligned}$$

für $x \in X$ bzw.

$$\begin{aligned} R_\mu(\mu I - C_\lambda)x &= (I - (\mu - \lambda)R_\mu)R_\lambda[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - C_\lambda)]x \\ &= x + (\mu - \lambda)[R_\lambda - R_\mu - (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda]x \\ &= x \end{aligned}$$

für $x \in D(C_\lambda)$. Daher ist $R_\mu = R(\mu, C_\lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in G$. Insbesondere ist $C := C_\lambda$ unabhängig von $\lambda \in G$. Da für $x \in D(A) \cap D(B)$ und $\lambda \in G$

$$\begin{aligned} R_\lambda(\lambda I - A - B)x &= R_\lambda(\lambda I - A)x - R_\lambda Bx \\ &= [I - R(\lambda, A)B]^{-1}x - [I - R(\lambda, A)B]^{-1}R(\lambda, A)Bx \\ &= [I - R(\lambda, A)B]^{-1}[I - R(\lambda, A)B]x \;=\; x. \end{aligned}$$

gilt, ist $(C, D(C))$ eine Erweiterung von $(A + B, D(A) \cap D(B))$.

(b) Da A, B dicht definiert sind, sind die Adjungierten A^*, B^* wohldefiniert. Sei $y^* \in D(A^*)$ und $\lambda \in G$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit $y^* = R(\lambda, A^*)x^*$, und für alle $x \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \langle y^*, Bx\rangle &= \langle R(\lambda, A^*)x^*, Bx\rangle = \langle R(\lambda, A)^*x^*, Bx\rangle \\ &= \langle x^*, R(\lambda, A)Bx\rangle \le M\|x^*\|\|x\|. \end{aligned}$$

Damit ist $y^* \in D(B^*)$ und $\|B^*y^*\| \le M\|x^*\|$. Hieraus folgt die Behauptung.

(c) Nach Teil (b) und Lemma 2.5.1 ist $(A^* + B^*, D(A^*))$ abgeschlossen, $G \subseteq \rho(A^* + B^*)$ und $R(\lambda, A^* + B^*) = R(\lambda, A^*)[I - B^*R(\lambda, A^*)]^{-1}$ für jedes $\lambda \in G$.
Weiter ist $R(\lambda, A^* + B^*) = R(\lambda, C)^*$. Sei nämlich $x^* \in X^*$ und $\lambda \in G$. Wir haben in Teil (b) gezeigt, daß $R(\lambda, A^*)x^* \in D(B^*)$ und $(R(\lambda, A)B)^* = B^*R(\lambda, A^*)$. Damit ist

$$\begin{aligned} R(\lambda, A^* + B^*) &= R(\lambda, A^*)\sum_{k=0}^{\infty}[B^*R(\lambda, A^*)]^k \\ &= R(\lambda, A)^*\sum_{k=0}^{\infty}\big([R(\lambda, A)B]^k\big)^* \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}[R(\lambda, A)B]^k R(\lambda, A)\right)^* \;=\; R(\lambda, C)^*. \end{aligned}$$

Dies impliziert $R(\lambda, A^* + B^*)^*|_X = (R(\lambda, C)^*)^*|_X = R(\lambda, C)$. Falls $D(A^*)$ dicht in X^* ist, ist die Adjungierte $(A^* + B^*)^*$ von $(A^* + B^*, D(A^*))$ definiert und es gilt

$$\begin{aligned} D(C) &= R(\lambda, C)(X) \;=\; R(\lambda, (A^* + B^*)^*)(X) \\ &= \{x \in X \cap D((A^* + B^*)^*) :\; (A^* + B^*)^*x \in X\}. \end{aligned}$$

Also ist C der Teil von $(A^* + B^*)^*$ in X. □

Das nächste Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 2.5.1 und läßt sich wie Lemma 2.5.2 beweisen.

2.5.3 Lemma *Seien $(A, D(A))$, $(B, D(B))$ abgeschlossene Operatoren in X. A habe nichtleere Resolventenmenge. Falls $M \in [0, 1)$, $G \subseteq \rho(A)$ und eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß für alle $x \in D$ und alle $\lambda \in G$ $R(\lambda, A)x \in D(B)$ und $\|BR(\lambda, A)x\| \le M\|x\|$ ist, dann gilt:*

(a) *Es gibt eine abgeschlossene Erweiterung* $(C, D(C))$ *von* $(A + B, D(A) \cap D(B))$ *mit*

- $G \subseteq \rho(C)$ *und*
- $R(\lambda, C) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1} = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k$ *für alle* $\lambda \in G$.

(b) *Sind* A *und* B *dicht definiert, dann ist* $\|R(\lambda, A^*)B^*x^*\| \leq M\|x^*\|$ *für alle* $x^* \in D(B^*)$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer einfachen Folgerung.

2.5.4 Lemma *Seien* $(A, D(A))$ *und* $(B, D(B))$ *abgeschlossene Operatoren in* X *mit* $D(A) \subseteq D(B)$. A *und* A^* *seien dicht definiert,* A *habe nichtleere Resolventenmenge. Falls* $M \in [0, 1)$ *und* $\emptyset \neq G \subseteq \rho(A)$ *existieren mit*

$$\|BR(\lambda, A)x\| \leq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in X \tag{2.8}$$

und

$$\|R(\lambda, A)Bx\| \leq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in D(B) \tag{2.9}$$

für alle $\lambda \in G$, *dann ist* $(A + B, D(A))$ *abgeschlossen,* $G \subseteq \rho(A + B)$ *und*

$$R(\lambda, A + B) = [I - R(\lambda, A)B]^{-1}R(\lambda, A) \tag{2.10}$$

und

$$R(\lambda, (A + B)^*) = [I - R(\lambda, A^*)B^*]^{-1}R(\lambda, A^*). \tag{2.11}$$

für alle $\lambda \in G$.

Beweis Nach Lemma 2.5.1 ist $(A+B, D(A))$ abgeschlossen und $G \subseteq \rho(A+B)$. Andererseits existiert wegen Lemma 2.5.2 (a) eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A + B, D(A))$ mit $G \subseteq \rho(C)$ und $R(\lambda, C) = [I - R(\lambda, A)B]^{-1}R(\lambda, A)$ für alle $\lambda \in G$. Da $C \supseteq A + B$ und $\rho(C) \cap \rho(A + B) \supseteq G \neq \emptyset$, ist $C = A + B$.

Lemma 2.5.2 (b) liefert, daß $D(A^*) \subseteq D(B^*)$ und $\|B^*R(\lambda, A^*)\| \leq M$ in G. Des weiteren ist $\|R(\lambda, A^*)B^*x^*\| \leq M\|x^*\|$ für alle $\lambda \in G$ und alle $x^* \in D(B^*)$ nach Lemma 2.5.3 (b). Damit folgt wie oben $R(\lambda, A^* + B^*) = [I - R(\lambda, A^*)B^*]^{-1}R(\lambda, A^*)$.

Es bleibt noch $A^* + B^* = (A + B)^*$ zu zeigen, was aber sofort aus $A^* + B^* \subset (A + B)^*$ und $\rho(A^* + B^*) \cap \rho((A + B)^*) \supseteq G \neq \emptyset$ folgt. $\square$

3 Störungssätze für α-integrierte Halbgruppen

In diesem Kapitel zeigen wir Störungssätze für α-integrierte Halbgruppen.

3.1 α-integrierte Halbgruppen

Zur Motivation für die Definition einer α-integrierte Halbgruppe seien zunächst eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X mit Erzeuger $(A, D(A))$ und eine Zahl $\alpha > 0$ gegeben. Dann ist die durch

$$S_\alpha(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \, T(s)\, ds, \qquad t \geq 0 \tag{3.1}$$

definierte Familie $(S_\alpha(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ stark stetig und exponentiell beschränkt. Daher ist die Konvergenzschranke $\operatorname{abs}(S_\alpha)$ von S_α endlich (zur Definition der Konvergenzschranke vgl. Abschnitt 2.2). Wir wenden die Laplace-Transformation auf S_α an und erhalten für $\lambda > \operatorname{abs}(S_\alpha)$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S_\alpha(t)\, dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, T(s)\, ds\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_s^\infty \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda t}\, dt\, T(s)\, ds \\
&= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda t}\, dt \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\lambda^\alpha} R(\lambda, A)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

nach dem Satz von Fubini. Die Gleichung (3.2) ist die Hauptidee hinter folgender Definition.

3.1.1 Definition Es sei $\alpha \geq 0$ und $(A, D(A))$ ein linearer Operator auf einem Banachraum X. A heißt **Erzeuger einer α-integrierten Halbgruppe**, falls Zahlen $\omega, M \geq 0$ und eine Abbildung $S:\ [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ existieren mit

- $(S(t))_{t\geq 0}$ stark stetig und $\| \int_0^t S(s)\, ds\| \leq M e^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$,

- $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$,
- $R(\lambda, A) = \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)\, dt$ für $\lambda > \omega$.

$(S(t))_{t\geq 0}$ heißt dann die von A erzeugte α-**integrierte Halbgruppe**.

3.1.2 Bemerkung (1) Da $(S(t))_{t\geq 0}$ stark stetig ist und $\| \int_0^t S(s)\; ds\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ gilt, existiert das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\; S(t)x\; dt := \lim_{\tau\to 0} \int_0^\tau e^{-\lambda t}\; S(t)x\; dt \tag{3.3}$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(S)$ und jedes $x \in X$ und definiert einen beschränkten Operator $\hat{S}(\lambda)$ auf X (vgl. Satz 2.2.3). Dies impliziert, daß die Halbebene $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(S)\}$ in $\rho(A)$ enthalten ist und daß $\hat{S}(\lambda)$ für alle $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(S)$ mit der Resolvente $R(\lambda, A)$ übereinstimmt.
(2) Der Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation (Satz 2.2.7) liefert, daß $(S(t))_{t\geq 0}$ eindeutig bestimmt ist.
(3) Für $\alpha = 0$ ist obige Definition konsistent mit der Definition einer C_0-Halbgruppe (vgl. [4, Theorem 3.1.7]).
(4) Falls A eine α-integrierte Halbgruppe $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ erzeugt, dann erzeugt A auch eine β-integrierte Halbgruppe $(S_\beta(t))_{t\geq 0}$ für jedes $\beta > \alpha$:

$$S_\beta(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\; S_\alpha(s)\; ds, \qquad t \geq 0.$$

Folgendes Beispiel zeigt, daß es Operatoren gibt, die eine α-integrierte Halbgruppe, aber keine C_0-Halbgruppe erzeugen.

3.1.3 Beispiel Sei $X = L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$, versehen mit der Norm $\|(u,v)\|_X := \|u\|_2+\|v\|_2$. Der Operator $(A, D(A))$ sei gegeben durch

$$(A(u,v))(s) = \begin{pmatrix} is & is \\ 0 & is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(A) = \{(u, v) \in X : A(u, v) \in X\}$. Dann ist $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda \neq 0\}$ und

$$(R(\lambda, A)(u,v))(s) = \begin{pmatrix} (\lambda - is)^{-1} & is(\lambda - is)^{-2} \\ 0 & (\lambda - is)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

für $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. A erzeugt keine C_0-Halbgruppe, denn der "Kandidat" für T

$$(T(t)(u,v))(s) = \begin{pmatrix} e^{ist} & ist\, e^{ist} \\ 0 & e^{ist} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

ist unbeschränkt. Aber A erzeugt eine 1-integrierte Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$, die durch

$$(S(t)(u,v))(s) = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{is\tau}\; d\tau & t\, e^{is\tau} - \int_0^t e^{is\tau}\; d\tau \\ 0 & \int_0^t e^{is\tau}\; d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, denn:

- $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|S(t)\| \leq Mt$,
- $S(\cdot)$ stark stetig auf $[0, \infty)$ und
- $R(\lambda, A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\; dt$ für $\lambda > 0$. □

Für Erzeuger von C_0-Halbgruppen gilt, daß mit $(A, D(A))$ auch $(A + \omega, D(A))$ ein Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist für jede reelle Zahl ω. Dies ist auch für α-integrierte Halbgruppen richtig. Allerdings ist die Darstellungsformel für die gestörte Halbgruppe komplizierter.

3.1.4 Satz *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ in X und sei $w \in \mathbb{R}$. Dann erzeugt auch $(A + w, D(A))$ eine α-integrierte Halbgruppe in X. Sie ist gegeben durch*

$$V(t) = e^{\omega t}\left(S(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \omega^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} S(s)ds\right), \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Beweis Zunächst zeigen wir, daß die unendliche Reihe in (3.4) für jedes $t \geq 0$ bezüglich der Operatornorm absolut konvergiert.

Sei $l = [\alpha]$ die größte Zahl in $\mathbb{N} \cup \{0\}$, die kleiner oder gleich α ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\binom{-\alpha}{n}\right| = \left|\binom{n-1+\alpha}{n}\right| \leq \binom{n+l}{n} = \binom{n+l}{l} \leq (n+l)^l$$

und

$$\left\|\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} S(s)ds\right\| \leq \sup_{0\leq s\leq t} \|S(s)\| \int_0^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{t^n}{n!} \sup_{0\leq s\leq t} \|S(s)\|.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert daher die Reihe (3.4) auf $[0, \infty)$ absolut bzgl. der Operatornorm, also gleichmäßig auf kompakten Intervallen in $[0, \infty)$. Damit ist $V(t) \in \mathcal{L}(X)$ für jedes $t \geq 0$, und $V(\cdot)x$ ist stetig für jedes $x \in X$.

Sei $\lambda > \operatorname{abs}(S) + \omega$. Dann ist $\lambda > \operatorname{abs}(V)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)dt \;&=\; \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda)t} S(t)dt \\ &\quad + \lambda^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \omega^n \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda)t} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\; S(s)ds\, dt.\end{aligned}$$

Analog wie in (3.2) zeigt man

$$\int_0^\infty e^{(\omega-\lambda)t} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\; S(s)ds\, dt = (\lambda - \omega)^{-\alpha-n} R(\lambda - \omega, A),$$

und damit ist

$$\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)dt = \lambda^\alpha R(\lambda, A+\omega) \sum_{n=0}^\infty \binom{-\alpha}{n} \omega^n (\lambda-\omega)^{-\alpha-n} \;=\; R(\lambda, A+\omega),$$

d.h. $(V(t))_{t\geq 0}$ ist die von $(A+\omega, D(A))$ erzeugte α-integrierte Halbgruppe. □

Wir betrachten nun das abstrakte Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in [0,\tau], \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{3.5}$$

wobei $x \in X$, $\tau > 0$ und $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe auf X für ein $\alpha \geq 0$ sei. u heißt **klassische Lösung** von (3.5), falls $u \in C^1([0,\tau], X) \cap C([0,\tau], D(A))$ und außerdem (3.5) erfüllt ist. Dann gilt der folgenden Satz [32]:

3.1.5 Satz *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n-1 < \alpha \leq n$ und $x \in D(A^{n+1})$. Dann hat (3.5) genau eine klassische Lösung u.*

3.2 Ein Störungssatz für α-integrierte Halbgruppen

Bekannt ist folgender Störungssatz für C_0-Halbgruppen: Sei $(A, D(A))$ Erzeuger eine C_0-Halbgruppe und $B \in \mathcal{L}(X)$. Dann erzeugt $(A+B, D(A))$ eine C_0-Halbgruppe auf X. "C_0-Halbgruppe" kann hier nicht durch "α-integrierte Halbgruppe" ersetzt werden, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

3.2.1 Beispiel Der Raum X und der Operator $(A, D(A))$ sei wie in Beispiel 3.1.3 gewählt. Als Störung betrachten wir den beschränkten Operator

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_X & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{i\lambda \pm \sqrt{i\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \sigma(A+B)$. Also ist die Resolventenmenge nicht in einer rechten Halbebene enthalten. Daher kann $(A+B, D(A))$ keine β-integrierte Halbgruppe erzeugen ($\beta \geq 0$).

Im folgenden formulieren und beweisen wir einen Störungssatz für α-integrierte Halbgruppen.

3.2.2 Satz *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierten Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ in X, $(B, D(B))$ ein abgeschlossener Operator in X und*

$$\omega_0 := \inf\big\{\omega \in \mathbb{R} : \exists K \geq 0 \text{ mit } \big\|\textstyle\int_0^t S(s)ds\big\| \leq Ke^{\omega t}\big\}.$$

Falls Zahlen $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$ und $M \in [0,1)$ sowie eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0$ und jedes $x \in D$ eine der Bedingungen

$$(a)\ \ \|BR(\lambda,A)x\| \le M\|x\| \qquad \text{oder} \qquad (b)\ \ \|R(\lambda,A)Bx\| \le M\|x\|,$$

erfüllt ist, dann gibt es eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A+B, D(A) \cap D(B))$, die für jedes $\beta > \alpha + 2$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt .

Im Beweis von Satz 3.2.2 verwenden wir folgenden Satz ([32, Theorem 5.1]). Er gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, wann ein Operator A eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt.

3.2.3 Satz *Sei X ein Banachraum und $(A, D(A))$ ein linearer Operator in X. Falls Zahlen $\omega, L \ge 0$ und $\tau \ge -1$ existieren mit*

- $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ *und*
- $\|R(\lambda, A)\| \le L|\lambda|^\tau$ *für* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$,

dann erzeugt A für jedes $\alpha > \tau + 1$ eine α-integrierte Halbgruppe.

Beweis Sei $\omega' > \omega$, $\gamma := \omega' + i\mathbb{R}$ und $\alpha > \tau + 1$. Für $t \ge 0$ definieren wir

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t}\ \mu^{-\alpha}\ R(\mu, A)\ d\mu. \tag{3.6}$$

Da für alle $\mu \in \gamma$ und alle $t \ge 0$ die Ungleichung $\|e^{\mu t}\ \mu^{-\alpha}\ R(\mu, A)\| \le Le^{\omega' t}|\mu|^{\tau-\alpha}$ gilt, ist das Integral in (3.6) absolut konvergent, und es folgt $\|S(t)\| \le Ce^{\omega' t}$. Weiter ist $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ stark stetig. Schließlich gilt für alle $\lambda > \omega'$ und alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ S(t)x\ dt &= \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t}\ \mu^{-\alpha}\ R(\mu, A)x\ d\mu\ dt \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t}\ \mu^{-\alpha}\ dt\ R(\mu, A)x\ d\mu \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mu^{-\alpha}}{\mu - \lambda}\ R(\mu, A)x\ d\mu \\
&= R(\lambda, A)x
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini und der Cauchyschen Integralformel. □

Beweis von Satz 3.2.2 Wir setzen zunächst (a) voraus. Da D dicht ist in X, kann $BR(\lambda, A)$ für jedes $\lambda \in \lambda_0 + i\mathbb{R}$ zu einem beschränkten Operator auf X mit Norm $\le M$ erweitert werden. Wir bezeichnen diesen Operator ebenfalls mit $BR(\lambda, A)$. Nun wollen wir mit Hilfe des Satzes von Phragmen-Lindelöf (Satz 2.4.1) zeigen, daß die Ungleichung $\|BR(\lambda, A)\| \le M$ sogar für alle λ in der rechten Halbebene $H_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_0\}$ richtig ist.

Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\mu > \lambda_0$ setzen wir $\lambda := \lambda_0 + i\operatorname{Im}\mu$. Nach der Resolventengleichung gilt

$$R(\mu, A) = R(\lambda, A)[I + (\lambda - \mu)R(\mu, A)].$$

Da $(A, D(A))$ eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt, kann man die Resolvente von $R(\lambda, A)$ von A wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)\| &= \left\|\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt\right\| = \left\|\lambda^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S(s) ds\, dt\right\| \\ &\leq |\lambda|^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} \left\|\int_0^t S(s) ds\right\| dt \leq K|\lambda|^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda_0)t} dt \\ &= K|\lambda|^{\alpha+1}(\omega - \lambda_0)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Hierbei seien $\omega \in (\omega_0, \lambda_0)$ und $K \geq 0$ so gewählt, daß $\|\int_0^t S(s) ds\| \leq K e^{\omega t}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|BR(\mu, A)\| &\leq \|BR(\lambda, A)\| \|I + (\lambda - \mu) R(\mu, A)\| \\ &\leq M\big[1 + |\lambda - \mu| \cdot K|\mu|^{\alpha+1}(\operatorname{Re}\mu - \omega)^{-1}\big] \\ &= M\big[1 + K|\mu|^{\alpha+1}(\operatorname{Re}\mu - \lambda_0)(\operatorname{Re}\mu - \omega)^{-1}\big] \\ &\leq M(1 + K|\mu|^\alpha)\end{aligned}$$

und $BR(\mu, A)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.4.1. Daher ist die Ungleichung $\|BR(\lambda, A)\| \leq M$ für alle $\lambda \in H_{\lambda_0}$ richtig, und wir erhalten mit Lemma 2.5.3 eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A + B, D(A) \cap D(B))$ mit $H_{\lambda_0} \subseteq \rho(C)$ und $R(\lambda, C) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}$. Nun existiert wegen (3.7) und der Darstellung der Resolvente von C eine Konstante $L \geq 0$, sodaß für alle $\lambda \in H_{\lambda_0}$ die Abschätzung

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \|R(\lambda, A)\| \|[I - BR(\lambda, A)]^{-1}\| \leq L|\lambda|^{\alpha+1}$$

gilt. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.2.3.

Der Beweis für Fall (b) ist analog. Statt Lemma 2.5.3 wird Lemma 2.5.2 angewandt. □

Falls $(S(t))_{t\geq 0}$ exponentiell beschränkt ist, kann die Schranke für β in Satz 3.2.2 durch $\alpha + 1$ ersetzt werden. Dies ist Gegenstand des folgenden Satzes.

3.2.4 Satz *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer exponentiell beschränkten α-integrierten Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ in X mit Wachstumsschranke ω_0 und $(B, D(B))$ ein abgeschlossener Operator in X. Falls $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$, $M \in [0, 1)$ und eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0$ und jedes $x \in D$*

(a) $\|BR(\lambda, A)x\| \leq M\|x\|$ *oder* *(b)* $\|R(\lambda, A)Bx\| \leq M\|x\|$,

dann gibt es eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A + B, D(A) \cap D(B))$, die eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt für jedes $\beta > \alpha + 1$.

Beweis Der Beweis geht analog wie der Beweis von Satz 3.2.2. Man muß nur (3.7) durch

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)\| = \|\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt\| &\leq |\lambda|^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} \|S(t)\| dt \\ &\leq K|\lambda|^\alpha \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda_0)t} dt = K|\lambda|^\alpha(\omega - \lambda_0)^{-1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

ersetzen, wobei $\omega \in (\omega_0, \lambda_0)$ und $K \geq 0$ so gewählt sind, daß $\|S(t)\| \leq Ke^{\omega t}$ gilt. □

3.2.5 Bemerkung Bei stärkeren Voraussetzungen kann man mehr über den Operator $(C, D(C))$ aussagen:

(i) Ist zusätzlich $D(B) \supset D(A)$ und $\|BR(\lambda, A)\| \leq M$, dann ist $(C, D(C)) = (A + B, D(A))$.

(ii) Sind A, A^* und B dicht definiert und gilt (b), dann ist $(C, D(C))$ der Teil von $(A^* + B^*)^*$ in X.

Beweis (i) folgt mit Satz 3.2.2 und Lemma 2.5.1. Für (ii) verwendet man Satz 3.2.2 und Lemma 2.5.2 (c). □

3.3 Ein Störungssatz für α-integrierte Halbgruppen in Banachräumen mit Fourier-Typ p

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß wir die Schranke $\alpha+1$ für β in Satz 3.2.4 verkleinern können, wenn wir für den Banachraum X eine spezielle Geometrie voraussetzen.

3.3.1 Satz *Sei X ein Banachraum vom Fourier-Typ $p \in [1, 2]$. $(A, D(A))$ erzeuge eine exponentiell beschränkte α-integrierte Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ in X mit Wachstumsschranke ω_0, und $(B, D(B))$ sei ein abgeschlossener Operator in X.*

a) Falls Zahlen $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$ und $M \in [0, 1)$ sowie eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda = \lambda_0$ und jedes $x \in D$ die Bedingung

$$\|R(\lambda, A)Bx\| \leq M\|x\|$$

erfüllt ist, dann gibt es eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A + B, D(A) \cap D(B))$, die für jedes $\beta > \alpha + \frac{1}{p}$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt. Sind A, A^* und B dicht definiert, dann ist $(C, D(C))$ der Teil von $(A^* + B^*)^*$ in X.

b) Ist A dicht definiert, $D(A) \subset D(B)$ und existieren Zahlen $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$ und $M \in [0, 1)$, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda = \lambda_0$ die Bedingung

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq M$$

gilt, dann erzeugt $(A + B, D(A)$ für jedes $\beta > \alpha + \frac{1}{p}$ eine β-integrierte Halbgruppe.

Beweis: Den Fall $p = 1$ haben wir oben schon gezeigt. Sei also $p \in (1, 2]$.

a) Für $x \in X$, $r \geq \lambda_0$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^\infty (e^{-rt}\|S(t)x\|)^p dt < \infty$$

und

$$(r - is)^{-\alpha} R(r - is, A)x = \int_0^\infty e^{ist}(e^{-rt}S(t)x)dt.$$

Nach Voraussetzung hat X Fourier-Typ p. Daher ist die Fourier-Transformation ein beschränkter Operator von $L^p(\mathbb{R}, X)$ nach $L^q(\mathbb{R}, X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und wir erhalten für $r \geq \lambda_0$ und $x \in X$, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(r+is)^{-\alpha} R(r+is, A)x\|^q ds < \infty. \tag{3.9}$$

Analog wie im Beweis von Satz 3.2.2 können wir zeigen, daß die Voraussetzungen von Lemma 2.5.2 erfüllt sind. Also existiert eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A+B, D(A) \cap D(B))$, deren Resolvente für $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$ die Darstellung $R(\lambda, C) = [I - R(\lambda, A)B]^{-1} R(\lambda, A)$ hat. Daher folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(r+is)^{-\alpha} R(r+is, C)x\|^q ds < \infty.$$

Weiter ist $\lambda^{-\alpha} R(\lambda, C)$ holomorph für $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$. Daher gilt nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue und [37, Theorem 6.6.1], daß die Funktion

$$U(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0} e^{\lambda t} \lambda^{-\gamma} [\lambda^{-\alpha} R(\lambda, C)] d\lambda$$

für jedes $\gamma > \frac{1}{p}$ in $[0, \infty)$ stark stetig ist und für $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$

$$\lambda^{-\alpha} R(\lambda, C) = \lambda^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t)\ dt$$

gilt. Damit folgt die Behauptung nach Definition 3.1.1.

b) Für $x \in X$, $r \geq \lambda_0$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^{\infty} (e^{-rt} \|S(t)x\|)^p dt < \infty$$

und

$$(r-is)^{-\alpha} R(r-is, A)x = \int_0^{\infty} e^{ist} (e^{-rt} S(t)x) dt.$$

Damit gilt auch

$$\int_0^{\infty} (e^{-rt} \|S(t)^* x^*\|)^p dt < \infty$$

und

$$(r-is)^{-\alpha} R(r-is, A)^* x^* = \int_0^{\infty} e^{ist} (e^{-rt} S(t)^* x^*) dt.$$

Nach Voraussetzung hat X und damit auch X^* Fourier-Typ p. Daher ist die Fourier-Transformation ein beschränkter Operator von $L^p(\mathbb{R}, X^*)$ nach $L^q(\mathbb{R}, X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und wir erhalten für $r \geq \lambda_0$ und $x^* \in X^*$, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(r+is)^{-\alpha} R(r+is, A)^* x^*\|^q ds < \infty. \tag{3.10}$$

Analog wie im Beweis von Satz 3.2.2 können wir zeigen, daß $\|BR(\lambda, A)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$. Also gilt nach Lemma 2.5.1 für alle $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$, daß $R(\lambda, A+B) = R(\lambda, A)[I-BR(\lambda, A)]^{-1}$ und damit $R(\lambda, A+B)^* = ([I-BR(\lambda, A)]^{-1})^* R(\lambda, A)^*$. Daher folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(r+is)^{-\alpha} R(r+is, A+B)^* x^*\|^q ds < \infty.$$

Weiter ist $\lambda^{-\alpha}R(\lambda, A+B)^* = \lambda^{-\alpha}R(\lambda, (A+B)^*)$ holomorph für $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$. Daher gilt nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue und [37, Theorem 6.6.1], daß die Funktion

$$U^*(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0} e^{\lambda t} \lambda^{-\gamma} [\lambda^{-\alpha} R(\lambda, A+B)^*] d\lambda$$

für jedes $\gamma > \frac{1}{p}$ in $[0, \infty)$ stark stetig ist und für $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$

$$\lambda^{-\alpha} R(\lambda, A+B)^* = \lambda^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U^*(t)\, dt$$

gilt. $(U^*(t))_{t\geq 0}$ ist exponentiell beschränkt und es ist

$$\lambda^{-\alpha} R(\lambda, A+B)^{**} = \lambda^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (U^*(t))^*\, dt.$$

Für $x \in D(A)$ ist das Integral in

$$U(t)x := \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0} e^{\lambda t} \lambda^{-\gamma} [\lambda^{-\alpha} R(\lambda, A+B)x] d\lambda$$

für alle $t \in [0, \infty)$ absolut konvergent und daher $t \mapsto U(t)x$ stetig in $[0, \infty)$. Damit ist

$$R(\lambda, A+B)x = \lambda^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t)x\, dt$$

und der Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation liefert, daß $U(t)x$ für $x \in D(A)$ fast überall mit $(U^*(t))^*x$ übereinstimmt. Da $((U^*(t))^*)_{t\geq 0}$ exponentiell beschränkt ist und $D(A)$ dicht ist, folgt damit die Behauptung nach Definition 3.1.1. □

3.3.2 Korollar *Sei X ein B-konvexer Banachraum. $(A, D(A))$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe in X mit Wachstumsschranke ω_0, und $(B, D(B))$ sei ein abgeschlossener Operator in X.*

a) Falls Zahlen $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$ und $M \in [0, 1)$ sowie eine dichte Teilmenge D von X existieren, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0$ und jedes $x \in D$ die Bedingung

$$\|R(\lambda, A)Bx\| \leq M\|x\|$$

erfüllt ist, dann gibt es eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A+B, D(A) \cap D(B))$, die eine 1-integrierte Halbgruppe erzeugt. Sind A, A^* und B dicht definiert,

dann ist $(C, D(C))$ der Teil von $(A^* + B^*)^*$ in X.
b) Ist A dicht definiert, $D(A) \subset D(B)$ und existieren Zahlen $\lambda_0 > \max\{0, \omega_0\}$ und $M \in [0,1)$, sodaß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0$ die Bedingung

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq M$$

gilt, dann erzeugt $(A + B, D(A)$ eine 1-integrierte Halbgruppe.

Folgendes Beispiel zeigt, daß die Schranke für β in Satz 3.3.1 optimal ist und daß der Satz für $M = 1$ nicht richtig ist.

3.3.3 Beispiel Sei $X = L^p(0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$ und $\gamma \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Operatoren A, B_γ und C_γ durch

$$\begin{aligned}
(Af)(x) &:= \frac{d}{dx} f(x), \\
(B_\gamma f)(x) &:= \frac{\gamma}{x} f(x), \\
(C_\gamma f)(x) &:= \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\gamma}{x} f(x),
\end{aligned}$$

jeweils mit maximalem Definitionsbereich in $L^p(0,\infty)$. Dann gilt:
a) $\|R(\lambda, A)B_\gamma x\|_p \leq |\gamma| p \, \|x\|_p$ für alle $x \in D(B)$ und alle $\operatorname{Re}\lambda > 0$, d.h. für $|\gamma| < \frac{1}{p}$ erzeugt $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ eine α-integrierte Halbgruppe für $\alpha > \max\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\}$.
b) Falls $0 \leq \gamma \leq \alpha < \frac{1}{p}$, so erzeugt $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ keine α-integrierte Halbgruppe .
c) Für $\gamma \geq \frac{1}{p}$ gibt es kein $\alpha > 0$, sodaß $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt.

Beweis a) Sei $1 < p < \infty$, $|\gamma| < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $f \in D(B_\gamma)$ und $g \in L^q(0,\infty)$. $(T(t))_{t \geq 0}$ sei die von $(A, D(A))$ erzeugte C_0-Halbgruppe, die durch $T(t)f(x) = f(x+t)$ gegeben ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle g, R(\lambda, A)B_\gamma f \rangle &= \left\langle g, \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) B_\gamma f \; dt \right\rangle \\
&= \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) B_\gamma f(x) \; dt \; dx \\
&= \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} (B_\gamma f)(x+t) \; dt \; dx \\
&= \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\gamma}{x+t} f(x+t) \; dt \; dx \\
&= \gamma \int_0^\infty g(x) \int_x^\infty e^{-\lambda(t-x)} \frac{f(t)}{t} \; dt \; dx \\
&= \gamma \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} g(x) \; dx \; dt
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}|\langle g, R(\lambda,A)B_\gamma f\rangle &\leq |\gamma| \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{t}\int_0^t e^{-\operatorname{Re}\lambda(t-x)}|g(x)|\;dx\;dt\\ &\leq |\gamma| \int_0^\infty |f(t)|\;\frac{1}{t}\int_0^t |g(x)|\;dx\;dt.\end{aligned}$$

Wir definieren $G(t) := \frac{1}{t}\int_0^t |g(x)|\;dx$. Nach der Hardyschen Ungleichung ([23, VI.10.11]) gilt dann $\|G\|_q \leq p\|g\|_q$. Mit der Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}|\langle g, R(\lambda,A)B_\gamma f\rangle| &\leq |\gamma| \int_0^\infty |f(t)|\;G(t)\;dt\\ &\leq |\gamma|\;\|f\|_p\;\|G\|_q\\ &\leq p|\gamma|\;\|f\|_p\;\|g\|_q\end{aligned}$$

und deshalb $\|R(\lambda,A)B_\gamma\|_p \leq p|\gamma|\;\|f\|_p$.

Weiter ist $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ abgeschlossen und X reflexiv, d.h. $(C_\gamma^*)^* = C_\gamma$. Also erzeugt $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ nach Satz 3.3.1 eine α-integrierte Halbgruppe für $\alpha > \max\{\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\}$.

b) Sei $0 \leq \gamma \leq \alpha < \frac{1}{p}$. Für eine Testfunktion $f \in C_c^\infty(0,\infty)$ und $t \geq 0$ definieren wir $S_t f$ durch

$$S_t f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{x+s}{x}\right)^\gamma f(x+s)\;ds.$$

Nach a) und Lemma 2.5.2 ist $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(C_\gamma)$. Weiter gilt für $f \in C_c^\infty(0,\infty)$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$R(\lambda, C_\gamma)f = \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_t f\;dt =: R_\lambda f,$$

denn: Sei $f \in C_c^\infty(0,\infty)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und $x > 0$. Dann

$$\begin{aligned}&\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_t f(x)\;dt\ =\\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\gamma}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(x+s)^\gamma f(x+s)\;ds\;dt\\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\gamma}\int_0^\infty (x+s)^\gamma f(x+s)\int_s^\infty e^{-\lambda t}(t-s)^{\alpha-1}\;dt\;ds\\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\gamma}\int_x^\infty s^\gamma f(s)\int_{s-x}^\infty e^{-\lambda t}(t-s+x)^{\alpha-1}\;dt\;ds\\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\gamma}\int_x^\infty s^\gamma f(s)\int_0^\infty e^{-\lambda(t+s-x)}t^{\alpha-1}\;dt\;ds\\ &= x^{-\gamma}e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda s}s^\gamma f(s)\;ds.\end{aligned}$$

Jetzt rechnet man leicht nach, daß $(\lambda - C_\gamma)R_\lambda f = f = R_\lambda(\lambda - C_\gamma)f$.

Falls nun $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt, dann ist diese nach dem Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation für $f \in C_c^\infty(0,\infty)$ durch $S_t f$ gegeben.

Aber S_t kann nicht zu einem beschränkten Operator auf X erweitert werden. Sei hierzu $t > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{t}{3}$. Wir wählen eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c^\infty(0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften

- $\mathrm{supp} f_\varepsilon \subseteq [t-2\varepsilon, t+\varepsilon]$
- $|f_\varepsilon| \leq 1$
- $f_\varepsilon(x) = 1$ für $x \in [t-\varepsilon, t]$.

Dann ist $\|f_\varepsilon\|_p \leq (3\varepsilon)^{1/p}$. Weiter gilt für $x \in (0, t-\varepsilon)$

$$\begin{aligned} S_t f_\varepsilon(x) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{-\gamma} \int_{t-x-\varepsilon}^{t-x} (t-s)^{\alpha-1}(x+s)^\gamma \, ds \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-\varepsilon)^\gamma x^{-\gamma} \int_{t-x-\varepsilon}^{t-x} (t-s)^{\alpha-1} \, ds \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2t}{3}\right)^\gamma x^{-\gamma} [(x+\varepsilon)^\alpha - x^\alpha]. \end{aligned}$$

Da $\lim_{x\to 0}[(x+\varepsilon)^\alpha - x^\alpha] = \varepsilon^\alpha$, existiert ein $\delta \in (0, t-\varepsilon)$, sodaß

$$S_t f_\varepsilon(x) \geq \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2t}{3}\right)^\gamma x^{-\gamma} \varepsilon^\alpha$$

für alle $x \in (0,\delta)$. Also ist

$$\|S_t f_\varepsilon\|_p \geq \frac{1}{2\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2t}{3}\right)^\gamma \int_0^\delta x^{-\gamma p} \, dx \; \varepsilon^\alpha =: c\varepsilon^\alpha$$

und damit

$$\frac{\|S_t f_\varepsilon\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} \geq 3^{-1/p} C \varepsilon^{\alpha - 1/p} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Also erzeugt $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ keine α-integrierte Halbgruppe auf $L^p(0,\infty)$.

c) Für $f \in C_c^\infty(0,\infty)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir $R_\lambda f$ durch

$$R_\lambda f(x) := x^{-\gamma} e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda t} t^\gamma f(t) \, dt.$$

Dann ist $R_\lambda(\lambda - C_\gamma) f = f = (\lambda - C_\gamma) R_\lambda f$.

Aber für $\gamma \geq \frac{1}{p}$ kann R_λ nicht zu einem beschränkten Operator auf $L^p(0,\infty)$ fortgesetzt werden. Sei z.B. für $\varepsilon \in (0, 1/2)$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C_c^\infty(0,\infty)$ mit den Eigenschaften

- $\mathrm{supp} f_\varepsilon \subseteq [\varepsilon/2, 2]$

- $|f_\varepsilon| \leq 1$
- $f_\varepsilon(x) = 1$ für $x \in [\varepsilon, 1]$

gegeben. Dann ist $\|f_\varepsilon\|_p \leq 2^{1/p}$.

Sei $x \in [\varepsilon, 1/2]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine von ε und x unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$R_\lambda f_\varepsilon(x) \geq x^{-\gamma} e^{\lambda x} \int_x^1 e^{-\lambda t} t^\gamma \, dt \geq C x^{-\gamma}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|R_\lambda f_\varepsilon\|_p &\geq c\left(\int_\varepsilon^{1/2} x^{-\gamma p} dx\right)^{1/p} \\ &\geq c\left(\int_\varepsilon^{1/2} x^{-1} dx\right)^{1/p} = c\left(\log \frac{1}{2\varepsilon}\right)^{1/p} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{R} \subseteq \sigma(C_\gamma)$. Da $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ abgeschlossen ist in $L^p(0,\infty)$, kann es kein $\alpha > 0$ geben, sodaß $(C_\gamma, D(C_\gamma))$ eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt. Nach Bemerkung 3.1.2 müßte sonst eine rechte Halbebene in der Resolventenmenge enthalten sein. □

3.4 Ein Störungssatz für C_0-Halbgruppen

3.4.1 Satz *Sei X ein B-konvexer Banachraum und $(A, D(A))$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ($M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$) und $(B, D(B))$ ein abgeschlossener Operator in X. Falls es Zahlen $b \in (0,\infty)$ und $K < \frac{1}{M}$ gibt, sodaß entweder*

(a) *die Abbildung $s \mapsto BT(s)x$ meßbar ist auf $[0,\infty)$ für alle $x \in D(A)$ und*

$$\int_0^b |\langle x^*, BT(s)x\rangle| ds \leq K\|x\|\|x^*\|$$

gilt für jedes $x^* \in X^*$ und jedes $x \in D(A)$

oder

(b) *B dicht definiert ist und*

$$\int_0^b |\langle x^*, T(s)Bx\rangle| ds \leq K\|x\|\|x^*\|$$

gilt für jedes $x^* \in X^*$ und jedes $x \in D(B)$,

dann existiert eine abgeschlossene Erweiterung $(C, D(C))$ von $(A+B, D(A)\cap D(B))$, die eine β-integrierte Halbgruppe für $\beta > \frac{1}{p}$ erzeugt. Hierbei sei $p \in (1,2]$ der Fouriertyp von X. Insbesondere erzeugt $(C, D(C))$ eine 1-integrierte Halbgruppe in X.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $K_\varepsilon := MK(1-e^{-\varepsilon}b)^{-1} < 1$. (Solch ein ε existiert, da $MK < 1$ ist.) Dann gibt es eine Zahl $a \geq 0$, sodaß die von $(\tilde{A}, D(\tilde{A})) = (A - a, D(A))$ erzeugte C_0-Halbgruppe$(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$ für alle $t \geq 0$ die Ungleichung $\|\tilde{T}(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}$ erfüllt.

Wir setzen zunächst (a) voraus. Dann gilt für $x \in D(A)$ und $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\langle x^*, B\tilde{T}(s)x\rangle| ds &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^b |\langle x^*, B\tilde{T}(s)\tilde{T}(nb)x\rangle| ds \\
&\leq \sum_{n=0}^\infty \int_0^b |\langle x^*, BT(s)\tilde{T}(nb)x\rangle| ds \\
&\leq \sum_{n=0}^\infty K\|\tilde{T}(nb)x\|\|x^*\| \\
&\leq \sum_{n=0}^\infty KMe^{-\varepsilon nb}\|x\|\|x^*\| \;=\; K_\varepsilon\|x\|\|x^*\|.
\end{aligned}$$

Da mit $s \mapsto BT(s)x$ auch $f : [0,\infty) \to X$ $, s \mapsto B\tilde{T}(s)x = e^{-as}BT(s)x$ meßbar ist, existiert eine meßbare Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $[0,\infty)$, sodaß f auf E_k essentiell beschränkt ist für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$y_k := \int_{E_k} e^{-\lambda s} B\tilde{T}(s)x ds \in X$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty |\langle x^*, y_k\rangle| &= \sum_{k=1}^\infty \Big|\Big\langle x^*, \int_{E_k} e^{-\lambda s} B\tilde{T}(s)x ds\Big\rangle\Big| \\
&= \sum_{k=1}^\infty \Big|\int_{E_k} e^{-\lambda s}\langle x^*, B\tilde{T}(s)x ds\rangle\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} e^{-\operatorname{Re}\lambda s}|\langle x^*, B\tilde{T}(s)x\rangle| ds \\
&\leq \int_0^\infty |\langle x^*, B\tilde{T}(s)x\rangle| ds \;\leq\; K_\varepsilon\|x\|\|x^*\|.
\end{aligned}$$

Da ein B-konvexer Banachraum keinen zu c_0 isomorphen Unterraum enthält [59, Section 3.d], konvergiert $\sum_{k=1}^\infty y_k$ nach [48, Proposition 2.e.4] gegen ein $y \in X$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\langle x^*, y\rangle &= \Big\langle x^*, \sum_{k=1}^\infty y_k\Big\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle x^*, y_k\rangle = \sum_{k=1}^\infty \Big\langle x^*, \int_{E_k} e^{-\lambda s} B\tilde{T}(s)x ds\Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} e^{-\lambda s}\langle x^*, B\tilde{T}(s)x\rangle ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle x^*, B\tilde{T}(s)x\rangle ds.
\end{aligned}$$

Da $(B, D(B))$ abgeschlossen ist, hat man aber

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} e^{-\lambda s} B\tilde{T}(s)xds \\ &= B\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} e^{-\lambda s}\tilde{T}(s)xds = BR(\lambda, \tilde{A})x. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$\|BR(\lambda, \tilde{A})x\| \leq K_\varepsilon \|x\| \qquad \forall\ x \in D(A).$$

Da $\overline{D}(A) = X$ ist, gibt es nach Satz 3.3.1 eine abgeschlossene Erweiterung $(\tilde{C}, D(\tilde{C}))$ von $(\tilde{A} + B, D(A) \cap D(B))$, die eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt für $\alpha > \frac{1}{p}$. Satz 3.1.4 liefert dann die Behauptung.

Sei nun (b) vorausgesetzt. Dann gilt für $x \in D(B)$ und $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\langle x^*, \tilde{T}(s)Bx\rangle| ds &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b |\langle x^*, \tilde{T}(s)\tilde{T}(nb)Bx\rangle| ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b |\langle \tilde{T}^*(nb)x^*, \tilde{T}(s)Bx\rangle| ds \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b |\langle \tilde{T}(nb)^*x^*, T(s)Bx\rangle| ds \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} K\|\tilde{T}^*(nb)x^*\|\|x\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} KMe^{-\varepsilon nb}\|x\|\|x^*\| = K_\varepsilon\|x\|\|x^*\|. \end{aligned}$$

Da T stark stetig ist , ist $s \mapsto T(s)Bx$ und damit auch $g : [0, \infty) \to X$, $s \mapsto \tilde{T}(s)Bx = e^{-as}T(s)Bx$ meßbar. Genau wie bei (a) können wir dann zeigen, daß

$$\|R(\lambda, \tilde{A})Bx\| \leq K_\varepsilon \|x\| \qquad \forall\ x \in D(B).$$

Da $\overline{D}(B) = X$ ist, gibt es nach Satz 3.3.1 eine abgeschlossene Erweiterung $(\tilde{C}, D(\tilde{C}))$ von $(\tilde{A} + B, D(A) \cap D(B))$, die eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt für $\alpha > \frac{1}{p}$. Satz 3.1.4 liefert dann die Behauptung. □

3.5 Anmerkungen

Integrierte Halbgruppen wurden zuerst von W. Arendt [3, 2] zur Untersuchung von Operatoren mit positiver Resolvente eingeführt. In [2] findet sich auch das Gegenbeispiel

3.3.3 und folgender, mit unseren Resultaten eng verwandter Störungssatz für Operatoren mit positiver Resolvente :

> Hat $(A, D(A))$ positive Resolvente und ist $B : D(A) \to X$ positiv mit $r(BR(\lambda, A)) < 1$ für ein λ, dann hat $(A + B, D(A))$ positive Resolvente.

M. Hieber definierte in seiner Dissertation [32] α-integrierte Halbgruppen. Dort findet man auch folgendes Störungsresultat für beschränkte Störungen:

> Ist $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe in X, $n \geq \alpha$ und $B \in \mathcal{L}(X, D(A^n))$, dann erzeugt $(A+B, D(A))$ eine α-integrierte Halbgruppe in X.

Satz 3.1.4 wurde für $\alpha = 1$ in [40] gezeigt. Ein Beweis in viel allgemeinerer Form stammt von Li und Shaw [47].

4 Störungssätze für C_0-Halbgruppen

In den Störungssätzen von Kapitel 3 haben wir vorausgesetzt, daß *mindestens eine* der beiden Bedingungen

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq M < 1 \qquad \text{oder} \qquad \|R(\lambda, A)B\| \leq M < 1 \tag{4.1}$$

für λ auf einer Parallele zur imaginären Achse erfüllt ist. Hierbei war $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe und B ein abgeschlossener Operator.

In diesem Kapitel nehmen wir an, daß $(A, D(A))$ eine C_0-Halbgruppe erzeugt und daß *beide* Bedingungen in (4.1) gelten. Ist dann der zugrundeliegende Raum ein Hilbertraum, erzeugt $(A + B, D(A))$ eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe. Für Banachräume mit Fourier-Typ $p \in (1, 2)$ gilt unter zusätzlichen Voraussetzungen an A und B ein entspechender Satz.

Bevor wir diese Resultate formulieren und beweisen, definieren wir, was wir unter einer auf $(0, \infty)$ stark stetigen Halbgruppe und ihrem Erzeuger verstehen.

4.1 Auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppen

Sei X ein Banachraum und sei $T : (0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine stark stetige Abbildung, die der Halbgruppeneigenschaft $T(t)T(s) = T(t + s)$ genügt für alle $s, t > 0$. Dann heißt die Familie $(T(t))_{t>0}$ eine **auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe**.

Es ist offensichtlich, daß jede C_0-Halbgruppe insbesondere eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe erzeugt. Die umgekehrte Richtung gilt nicht.

4.1.1 Beispiel Sei $X = L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$ und $\beta \geq 0$. Für $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$T(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x^2 t} & t x^\beta e^{-x^2 t} \\ 0 & e^{-x^2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, daß $T(t)$ für alle $t \geq 0$ ein beschränkter linearer Operator in X ist und daß die Halbgruppeneigenschaft $T(t)T(s) = T(s + t)$ für alle $t, s \geq 0$ erfüllt ist. Außerdem ist $(T(t))_{t\geq 0}$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz stark stetig in $(0,\infty)$. Ist $\beta \leq 2$, dann ist T auch stark stetig in 0, ebenfalls nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Für $\beta > 2$ gilt aber

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |tx^\beta e^{-x^2 t}| \geq t(t^{-1/2})^\beta e^{-1} = t^{1-\beta/2}e^{-1} \to \infty \qquad (t \to 0).$$

Nach dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit kann $(T(t))_{t\geq 0}$ daher für $\beta > 2$ nicht stark stetig in 0 sein. □

Wir wollen die Laplace-Transformation verwenden, um den Erzeuger einer auf $(0,\infty)$ stark stetigen Halbgruppe zu definieren. Deshalb setzen wir von jetzt an voraus, daß $T(\cdot)x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ ist für alle $x \in X$ und daß

$$\operatorname{abs}(T) := \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \lim_{t\to 0}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \text{ existiert für alle } x \in X\} < \infty.$$

Ist dann $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(T)$, können wir nach Satz 2.2.3 für jedes $x \in X$ die Laplace-Transformierte

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt := \lim_{t\to 0}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$$

von $T(\cdot)x$ definieren.

4.1.2 Definition Sei $(T(t))_{t>0}$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbguppe in einem Banachraum X. $T(\cdot)x$ sei in $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ für jedes $x \in X$, und es gelte $\operatorname{abs}(T) < \infty$. Falls ein linearer Operator $(A, D(A))$ in X und eine Zahl $\omega \geq \operatorname{abs}(T)$ existiert mit $(\omega,\infty) \subseteq \rho(A)$ und

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \tag{4.2}$$

für alle $\lambda > \omega$ und alle $x \in X$, dann heißt $(A, D(A))$ **Erzeuger** von $(T(t))_{t>0}$.

4.1.3 Bemerkung (a) Der Operator $(A, D(A))$ in Definition 4.1.2 ist eindeutig gestimmt.

(b) Ist $(A, D(A))$ Erzeuger einer auf $(0,\infty)$ stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t>0}$, und ist a eine reelle Zahl, dann erzeugt $(A - a, D(A))$ die auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe $(e^{at}T(t))_{t>0}$.

4.1.4 Beispiel Sei X und $(T(t))_{t\geq 0}$ wie in Beispiel 4.1.1. Dann ist für $\lambda > 0$ und $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ die Laplace-Transformierte von $T(\cdot)\binom{f}{g}$ durch

$$R(\lambda)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x)dt = \begin{pmatrix} (\lambda + x^2)^{-1} & x^\beta(\lambda + x^2)^{-1} \\ 0 & (\lambda + x^2)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

gegeben. Ist $\beta > 4$, dann kann $R(\lambda)$ nicht zu einem beschränkten Operator auf X erweitert werden. Ist dagegen $\beta \in [0,4]$ gewählt, dann ist der durch

$$A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} -x^2 & x^\beta \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

definierte Operator $(A, D(A))$ mit maximalem Definitionsbereich $D(A)$ Erzeuger von $(T(t))_{t\geq 0}$. $\square$

Wir betrachten nun das abstrakte Cauchyproblem

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{4.3}$$

mit Anfangswert $x \in X$.

Unter einer **Lösung** des abstrakten Cauchy-Problems (4.3) verstehen wir eine Funktion $u \in C([0,\infty), X) \cap C^1((0,\infty), X)$ mit $u(t) \in D(A)$ und $u'(t) = Au(t)$ für alle $t > 0$ und $u(0) = x$ (vgl. [71, 41]).

Dann gilt folgender Satz:

4.1.5 Satz *Sei $(T(t))_{t>0}$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe in einem Banachraum X mit Erzeuger $(A, D(A))$. Dann ist für $x \in D(A)$ die Funktion u_x, definiert durch*

$$u_x(t) := \begin{cases} T(t)x, & t > 0, \\ x, & t = 0, \end{cases}$$

eine Lösung des abstrakten Cauchyproblems (4.3).

Zunächst beweisen wir ein Lemma, das Aussagen über das Verhalten einer auf $(0,\infty)$ stark stetigen Halbgruppe auf dem Definitionsbereich ihres Erzeugers enthält.

4.1.6 Lemma *Sei $(T(t))_{t>0}$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe in einem Banachraum X mit Erzeuger $(A, D(A))$. Dann gelten:*
(a) Falls $x \in D(A)$, dann ist $T(t)x \in D(A)$ und $AT(t)x = T(t)Ax$ für alle $t > 0$.
(b) Falls $x \in D(A)$ und $t > 0$, dann ist $x = T(t)x - \int_0^t T(s)Axds$.

Beweis (a) Zunächst ist $R(\lambda, A)T(t) = T(t)R(\lambda, A)$ für alle $\lambda \in \rho(A)$ und alle $t > 0$, denn für $x \in X$ und $\mu > \omega$ (ω wie in Definition 4.1.2) ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)R(\lambda, A)x\,dt &= R(\mu, A)R(\lambda, A)x = R(\lambda, A)R(\mu, A)x \\ &= R(\lambda, A)\int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)x\,dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} R(\lambda, A)T(t)x\,dt. \end{aligned}$$

Es folgt $T(t)R(\lambda, A)x = R(\lambda, A)T(t)x$ für alle $t > 0$ mit dem Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation (Satz 2.2.7) und damit die Behauptung.

(b) Sei $x \in D(A)$ und $\lambda > \omega$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)Ax\,ds\,dt &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} T(t)Ax\,dt \\ &= \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax = R(\lambda, A)x - \frac{x}{\lambda} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t)x - x)\,dt.\end{aligned}$$

Der Eindeutigkeitssatz der Laplace-Transformation liefert die Behauptung. □

Beweis von Satz 4.1.5 Sei $x \in D(A)$ und $t > 0$. Dann ist nach Lemma 4.1.6 $u_x(t) = T(t)x \in D(A)$ und es gilt

$$\begin{aligned}u_x'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)Ax\;ds = T(t)Ax = AT(t)x \\ &= Au_x(t).\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\lim_{t\to 0+} T(t)x = x + \lim_{t\to 0+} \int_0^t T(s)Ax\;ds = x.$$

Daher ist $u_x \in C([0,\infty), X) \cap C^1((0,\infty), X)$. □

4.2 Kriterium für Erzeuger einer auf $(0, \infty)$ stark stetigen Halbgruppe

Wann erzeugt ein Operator $(A, D(A))$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe? Folgender Satz gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an.

4.2.1 Theorem *Sei X ein Banachraum vom Fouriertyp $p \in (1,2]$. $(A, D(A))$ sei ein abgeschlossener, dicht definierter Operator in X, sodaß die Resolvente $R(\lambda, A)$ in $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ existiert und gleichmäßig beschränkt ist durch $M \geq 0$. A^* sei dicht definiert, und es existiere ein $C \geq 0$, sodaß für alle $x \in X$*

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \|R(is, A)x\|^p ds\right)^{1/p} \leq C\|x\| \tag{4.4}$$

und für alle $x^* \in X^*$

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \|R(is, A^*)x^*\|^p ds\right)^{1/p} \leq C\|x^*\| \tag{4.5}$$

gilt. Dann erzeugt $(A, D(A))$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe $(T(t))_{t>0}$.

Um diesen Satz zu zeigen, formulieren und beweisen wir zwei Lemmata. Das erste dient als technisches Hilfsmittel.

4.2.2 Lemma *Sei $(A, D(A))$ ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X mit $0 \in \rho(A)$. Falls wir eine Teilmenge G von $\rho(A)$ und eine Konstante $M \geq 0$ finden können, sodaß $\|R(\lambda, A)\| \leq M$ ist auf G, dann existiert ein $c \geq 0$ mit*

$$\|R(\lambda, A)x\| \leq \tfrac{c}{1+|\lambda|}\|Ax\| \qquad \textit{und} \qquad \|R(\lambda, A)^2 y\| \leq \tfrac{c}{1+|\lambda|^2}\|A^2 y\|$$

für alle $\lambda \in G$ und alle $x \in D(A)$, $y \in D(A^2)$.

Beweis Sei $\lambda \in G \setminus \{0\}$. Für $x \in D(A)$ kann man $R(\lambda, A)x$ schreiben als $R(\lambda, A)x = \frac{1}{\lambda}(x+R(\lambda, A)Ax)$, und für $y \in D(A^2)$ ist $R(\lambda, A)^2 y = \frac{1}{\lambda^2}(y+2R(\lambda, A)Ay+R(\lambda, A)^2A^2y)$. Da 0 in der Resolventenmenge von A liegt und die Resolvente auf G gleichmäßig beschränkt ist, folgt damit die Behauptung. □

Als Kandidaten für $T(t)x$ in Satz 4.2.1 wollen wir die Inversionsformel der Laplace-Transformation

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-ir}^{ir} e^{\mu t} R(\mu, A)x \, d\mu \tag{4.6}$$

verwenden. Das folgende Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von (4.6) an.

4.2.3 Lemma *Sei $(A, D(A))$ ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X, so daß $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\| \leq M < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Für $x \in X$, $t > 0$ und $a \geq 0$ definieren wir*

$$U(t)x := \frac{1}{2\pi i t} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\mu t} R(\mu, A)^2 x \, d\mu. \tag{4.7}$$

Dann gilt:

(a) Ist $x \in D(A^2)$, dann konvergiert das Integral in (4.7) absolut und hängt nicht von $a \geq 0$ ab.

(b) Für alle $x \in D(A^2)$ und alle $t > 0$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ir}^{a+ir} e^{\mu t} R(\mu, A)x \, d\mu \tag{4.8}$$

und ist gleich $U(t)x$.

(c) Ist $x \in D(A^2)$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$, so gilt die Gleichung

$$R(\lambda, A)x = \frac{x}{\lambda} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}(U(t)x - x)dt. \tag{4.9}$$

(d) Die Halbgruppeneigenschaft $U(t)U(s)x = U(t+s)x$ gilt für alle $t, s > 0$ und alle $x \in D(A^4)$.

Beweis Sei $x \in D(A^2)$ und $t, s > 0$.
(a) Lemma 4.2.2 impliziert, daß das Integral in (4.7) absolut konvergiert. Die Unabhaängigkeit des Integrals von $a \geq 0$ folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz.
(b) Partielle Integration liefert für $r > 0$

$$\int_{a-ir}^{a+ir} e^{\mu t} R(\mu, A)x \, d\mu = \frac{1}{t}(e^{a+irt} R(a+ir, A)x - e^{a-irt} R(a-ir, A)x) + \frac{1}{t} \int_{a-ir}^{a+ir} e^{\mu t} R(\mu, A)^2 x \, d\mu.$$

Wegen Lemma 4.2.2 konvergiert $\|R(ir, A)x\|$ gegen 0 für $|r| \to \infty$. Deshalb existiert der Grenzwert (4.8) und ist gleich $U(t)x$.
(c) Sei $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Für $x \in D(A)$, $t > 0$ und $0 < a < \operatorname{Re} \lambda$ gilt

$$U(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\mu t} \left(R(\mu, A)x - \frac{x}{\mu} \right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\mu t} R(\mu, A)Ax \, \frac{d\mu}{\mu}.$$

Ist $x \in D(A^2)$, dann liefert Lemma 4.2.2, daß $\|R(\mu, A)Ax\| \leq \frac{c}{1+|\mu|} \|A^2 x\|$. Deshalb ist obiges Integral absolut konvergent und es gilt $\|U(t)x - x\| \leq c' \|A^2 x\|$ für alle $t > 0$. Deshalb können wir die Laplacetransformation auf $U(t)x - x$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(U(t)x - x)dt &= \frac{\lambda}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\mu t} R(\mu, A)Ax \, \frac{d\mu}{\mu} \, dt \\
&= \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t} dt \; R(\mu, A)Ax \, \frac{d\mu}{\mu} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\lambda - \mu} R(\mu, A)Ax \, \frac{d\mu}{\mu} \\
&= R(\lambda, A)Ax \;=\; \lambda R(\lambda, A)x - x,
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini und der Cauchy'schen Integralformel.

(d) Sei $\mu > \lambda > 0$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda,A)x - R(\mu,A)x}{\mu-\lambda} &= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} R(\lambda,A)x\,dt - \frac{x}{\mu(\mu-\lambda)} \\
&\quad - \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} e^{-\lambda t}(U(t)x - x)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\frac{x}{\lambda}\,dt + \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(s)x-x)\,ds\,dt \\
&\quad - \frac{x}{\mu(\mu-\lambda)} - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s}(U(s)x-x)\,ds\,dt \\
&= \frac{x}{\lambda(\mu-\lambda)} - \frac{x}{\mu(\mu-\lambda)} + \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}(U(s)x-x)\,ds\,dt \\
&= \frac{\mu x - \lambda x}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} + \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_t^\infty e^{\lambda(t-s)}(U(s)x-x)\,ds\,dt \\
&= \frac{x}{\lambda\mu} + \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(t+s)x-x)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Ist andererseits $x \in D(A^4)$, dann ist $U(t)x \in D(A^2)$ und

$$\begin{aligned}
R(\mu,A)R(\lambda,A)x &= \frac{R(\lambda,A)x}{\mu} + \int_0^\infty e^{-\mu t}(U(t)R(\lambda,A)x - R(\lambda,A)x)\,dt \\
&= \frac{x}{\lambda\mu} + \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(s)x-x)\,ds + \int_0^\infty e^{-\mu t}\left(U(t)\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)dt \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(t)(U(s)x-x) - (U(s)x-x))\,ds\,dt \\
&= \frac{x}{\lambda\mu} + \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(t)U(s)x-x)\,ds\,dt
\end{aligned}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz der Laplacetransformation erhalten wir für fast alle $s,t>0$ und alle $x \in D(A^4)$

$$U(t+s)x - x = U(t)U(s)x - x. \tag{4.10}$$

Für festes s sind die Funktionen $t \mapsto U(t+s)x$ und $t \mapsto U(t)U(s)x$ stetig. Also gilt (4.10) für alle $t > 0$ und fast alle $s > 0$. Durch Vertauschen der Rollen von s und t erhalten wir

$$U(t+s)x = U(t)U(s)x$$

für alle $s,t>0$ und alle $x \in D(A^4)$. □

Nun können wir Theorem 4.2.1 beweisen.

Beweis von Theorem 4.2.1 Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Mit c sei stets eine reelle Konstante gemeint.

Schritt 1: Definition eines "Kanditaten" für die Halbgruppe
Wir wenden die inverse Fouriertransformation auf $R(i\cdot, A)x \in L^p(\mathbb{R}, X)$ an. Sei hierzu $t > 0$ und $x \in X$ und

$$T(t)x := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} R(is, A)x \, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x \, d\lambda.$$

Da X Fouriertyp p hat, ist $T(\cdot)x \in L^q(\mathbb{R}_+, X)$ für jedes $x \in X$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) und es gilt

$$\|T(\cdot)x\|_q \le c \left(\int_0^\infty \|R(is, A)x\|^p ds \right)^{1/p} \le c\, C\|x\|.$$

T ist offensichtlich linear in x, und nach Lemma 4.2.3 gilt die Halbgruppeneigenschaft $T(t)T(s)x = T(t+s)x$ für alle $x \in D(A^4)$ und alle $t, s > 0$.

Schritt 2: Beschränktheit von T
Wir betrachten zunächst A^*. Genau wie in Schritt 1 zeigen wir, daß $T^*(\cdot)x^*$, definiert durch

$$T^*(t)x := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} R(is, A^*)x^* ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A^*)x^* d\lambda, \quad t > 0,$$

für jedes $x^* \in X^*$ in $L^q(\mathbb{R}_+, X^*)$ liegt und daß

$$\|T^*(\cdot)x^*\|_q \le c \left(\int_0^\infty \|R(is, A^*)x^*\|^p ds \right)^{1/p} \le c\, C\|x^*\|.$$

Außerdem sieht man leicht, daß für alle $x \in X$, $x^* \in X^*$ und $t > 0$ die Beziehung $\langle x^*, T(t)x \rangle = \langle T^*(t)x^*, x \rangle$ gilt.

Sei nun $t > 0$, $x \in D(A^4)$ und $x^* \in X^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} t\langle x^*, T(t)x \rangle &= \int_0^t \langle x^*, T(t)x \rangle ds = \int_0^t \langle x^*, T(t-s)T(s)x \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle T^*(t-s)x^*, T(s)x \rangle ds \le \int_0^t \|T^*(t-s)x^*\| \|T(s)x\| ds \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $p = 2$, also X ein Hilbertraum, können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \int_0^t \|T^*(t-s)x^*\| \|T(s)x\| ds &\le \left(\int_0^t \|T^*(t-s)x^*\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|T(s)x\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_0^\infty \|T^*(s)x^*\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \|T(s)x\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\le c\, \|x\| \|x^*\|. \end{aligned}$$

und es ist

$$\|T(t)x\| \leq \frac{c}{t}\|x\| \qquad \text{für alle } x \in D(A^4). \tag{4.11}$$

Falls $p \in (1,2)$ ist, wählen wir $r = \frac{p}{2-p}$ und $\beta > \frac{1}{r}$. Dann ist $\frac{2}{q} + \frac{1}{r} = 1$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|T^*(t-s)x^*\|\|T(s)x\|ds &= \int_0^t (1+s)^\beta \frac{1}{(1+s)^\beta}\|T^*(t-s)x^*\|\|T(s)x\|ds \\
&\leq (1+t)^\beta \Big(\int_0^t (1+s)^{-\beta r}ds\Big)^{1/r} \Big(\int_0^t \|T^*(t-s)x^*\|^q ds\Big)^{1/q} \Big(\int_0^t \|T(s)x\|^q ds\Big)^{1/q} \\
&\leq c\,(1+t)^\beta \Big(\int_0^\infty \|T^*(s)x^*\|^q ds\Big)^{1/q} \Big(\int_0^\infty \|T(s)x\|^q ds\Big)^{1/q} \\
&\leq c\,(1+t)^\beta \|x\|\|x^*\|.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\|T(t)x\| \leq \frac{c(1+t)^\beta}{t}\|x\| \qquad \text{für alle } x \in D(A^4). \tag{4.12}$$

Da $(A^*)^{-4}$ injektiv ist, ist $D(A^4)$ dicht ist in X. Daher ist $T(t)$ für jedes $t > 0$ beschränkt in X, und die Halbgruppeneigenschaft $T(t)T(s) = T(t+s)$ ist für alle $s, t > 0$ richtig.

Schritt 3: Erzeuger von $(T(t))_{t>0}$
Sei $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Wir zeigen, daß $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt$.

Nach Lemma 4.2.3 (c) ist $R(\lambda, A)x = \frac{x}{\lambda} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t)x - x)dt$ für alle $x \in D(A^2)$. Da $\|T(\cdot)x\|_q \leq c\|x\|$ und $D(A^2)$ dicht ist in X, ist die Behauptung bewiesen.

Schritt 4: Starke Stetigkeit in $(0,\infty)$
Wir zeigen, daß $t \mapsto T(t)x$ für jedes $x \in X$ stetig ist auf $(0,\infty)$.

Für $x \in D(A^2)$ ist nach Lemma 4.2.2

$$T(t)x - x = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

absolut und auf kompakten Intervallen in $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergent. Damit ist $t \mapsto T(t)x$ stetig auf $[0,\infty)$ für jedes $x \in D(A^2)$. Weiter ist $tT(t)x$ ($p = 2$) bzw. $\frac{t}{(1+t)^\beta}T(t)x$ ($p \in (1,2)$) nach (4.11) bzw. (4.12) für $x \in D(A^4)$ gleichmäßig beschränkt. Da $D(A^4)$ dicht ist in X, ist $t \mapsto T(t)x$ stetig in $(0,\infty)$ für jedes $x \in X$ und damit $(T(t))_{t>0}$ stark stetig in $(0,\infty)$. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß ein Operator $(A, D(A))$, der den Voraussetzungen von Satz 4.2.1 genügt, im allgemeinen keine C_0-Halbgruppe erzeugt.

4.2.4 Beispiel Sei $X = L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$ mit $p \in (1,2]$. Versehen mit einer der äquivalenten Normen (2.1) ist X ein Banachraum vom Fourier-Typ p. Für $\beta \in [0,4]$ betrachten wir den Multiplikationsoperator

$$A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} -x^2 - 1 & x^\beta \\ 0 & -x^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(A)$ in X. Die Resolventenmenge $\rho(A)$ von A ist $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$, und für $\lambda \in \rho(A)$ ist die Resolvente von A gegeben durch

$$R(\lambda, A)\binom{f}{g}(x) = \begin{pmatrix} (\lambda+1+x^2)^{-1} & x^\beta(\lambda+1+x^2)^{-2} \\ 0 & (\lambda+1+x^2)^{-1} \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Norm der Resolvente schätzen wir ab durch

$$\|R(\lambda, A)\| \le c\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{|1+\lambda+x^2|} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|^\beta}{|1+\lambda+x^2|^2}\right).$$

Daher ist $R(\lambda, A)$ in $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \ge 0\}$ gleichmäßig beschränkt ist und es gilt

$$\|R(is, A)\| \le c\left(\frac{1}{(1+s^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+s^2)^{1-\beta/4}}\right).$$

Ist nun $p(2 - \frac{\beta}{2}) > 0$, d.h. $\beta < 4 - \frac{2}{p}$, dann ist $R(i\cdot, A) \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Aufgrund von Dualitätsüberlegungen gilt in diesem Fall auch $R(i\cdot, A^*) \in L^p(\mathbb{R}, X^*)$. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 4.2.1 erfüllt. Aber für $\beta \in (2, 4)$ erzeugt $(A, D(A))$ keine C_0-Halbgruppe (vgl Beispiel 4.1.1 und Beispiel 4.1.4).

4.3 Ein Störungssatz für C_0-Halbgruppen auf Hilberträumen

In diesem Abschnitt ist der zugrundeliegende Raum ein Hilbertraum. Der Beweis des folgenden Störungssatzes beruht im wesentlichen auf Theorem 4.2.1.

4.3.1 Theorem *Sei H ein Hilbertraum, $(A, D(A))$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\ge0}$ auf H und $(B, D(B))$ ein abgeschlossener Operator in H mit $D(B) \supseteq D(A)$. Weiter existiere $M \in [0, 1)$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, sodaß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$, alle $x \in X$ und alle $y \in D(B)$ die Abschätzungen*

$$\|BR(\lambda, A)x\| \le M\|x\| \qquad \text{und} \qquad \|R(\lambda, A)Bx\| \le M\|x\| \tag{4.13}$$

gelten. Dann erzeugt $(A + B, D(A))$ eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe $(S(t))_{t>0}$ mit $\int_0^1 \|S(t)\|^2 dt < \infty$.

Beweis Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\max\{\omega(T), \lambda_0\} < 0$ annehmen. Sonst ersetzen wir $(A, D(A))$ durch $(A-\omega, D(A))$, wobei $\omega > \max\{\omega(T), \lambda_0\}$ (vgl. Bemerkung 4.1.3).

Für $x \in H$ sei die Funktion $u_x : \mathbb{R} \to H$ definiert durch

$$u_x(t) := \begin{cases} T(t)x, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Wegen $\omega(T) < 0$ ist $u_x \in L^2(\mathbb{R}, H)$, und es existiert eine Konstante $c \geq 0$, sodaß $(\int_{-\infty}^{\infty} \|u_x(t)\|^2 dt)^{1/2} \leq c\|x\|$ gilt. Nach dem Satz von Plancherel (Satz 2.3.3) ist dann die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}u_x$ von u_x ebenfalls in $L^2(\mathbb{R}, H)$, und es ist $\|\mathcal{F}u_x\|_2 = \sqrt{2\pi}\|u_x\|_2$. Für $s \in \mathbb{R}$ ist aber $(\mathcal{F}u_x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}u_x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-ist}T(t)xdt = R(is, A)x$. Also ist

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A)x\|^2 ds\right)^{1/2} \leq c\sqrt{2\pi}\,\|x\|,$$

woraus mit Lemma 2.5.4 folgt, daß

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A+B)x\|^2 ds\right)^{1/2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|[I - R(is, A)B]^{-1}R(is, A)x\|^2 ds\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{1-M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A)x\|^2 ds\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c\sqrt{2\pi}}{1-M}\|x\|\end{aligned}$$

für alle $x \in H$.

Wir betrachten nun $(A+B)^*$. Genau wie oben zeigen wir, daß für jedes $x^* \in H^*$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, (A+B)^*)x^*\|^2 ds\right)^{1/2} \leq \frac{c\sqrt{2\pi}}{1-M}\|x^*\|$$

gilt. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 4.2.1 erfüllt und $(A+B, D(A))$ erzeugt eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe $(S(t))_{t>0}$. $S(t)$ kann wie im Beweis von 4.2.1 durch die Inversionsformel der Laplace-Transformation dargestellt werden. Schritt 2 desselben Beweises liefert dann, daß $\int_0^1 \|S(t)\|^2 dt < \infty$ gilt. □

4.3.2 Offenes Problem Kann man unter den Voraussetzungen von Theorem 4.3.1 sogar zeigen, daß $A+B$ eine C_0-Halbgruppe auf H erzeugt? Wir vermuten, daß dies nicht möglich ist, konnten aber bisher kein Gegenbeispiel finden.

4.4 Ein Störungssatz für C_0-Halbgruppen auf Banachräumen mit Fourier-Typ p

Jetzt betrachten wir C_0-Halbgruppen auf Banachräumen mit Fourier-Typ $p \in (1,2)$. Unter etwas stärkeren Voraussetzungen erhalten wir auch hier ein Störungsresultat.

Wir nehmen an, daß $(A, D(A))$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit negativer Wachstumsschranke erzeugt. Dann können wir für $(-A)$ gebrochene Potenzen definieren (vgl. [74]).

4.4.1 Theorem *Sei X ein Banachraum mit Fourier-Typ $p \in (1,2)$, $(A, D(A))$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X mit Wachstumsschranke $\omega(T) < 0$ und*

$(B, D(B))$ ein abgeschlossener Operator in H mit $D(B) \supseteq D(A)$. Weiter existiere $M \in [0,1)$, $C \geq 0$, $\lambda > \omega(T)$ und $\alpha \in \left(\frac{2-p}{p}, 1\right)$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A)x\| &\leq M\|x\| && \text{für alle } x \in X \\ \|R(\lambda, A)Bx\| &\leq M\|x\| && \text{für alle } x \in D(B) \\ \|(-A)^\alpha BR(\lambda, A)x\| &\leq \ C\|x\| && \text{für alle } x \in X \\ \|R(\lambda, A)B(-A)^\alpha x\| &\leq \ C\|x\| && \text{für alle } x \in D((-A)^\alpha) \end{aligned}$$

Dann erzeugt $(A + B, D(A))$ eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe $(S(t))_{t>0}$.

Den Störungssatz 4.3.1 im Hilbertraum-Fall haben wir mit Hilfe des Kriteriums 4.2.1 für Erzeuger von auf $(0, \infty)$ stark stetigen Halbgruppen bewiesen. Dies ist hier nicht so direkt möglich. Wir übernehmen aber die Idee des Beweises von 4.2.1 und modifizieren nur an manchen Stellen etwas. Hierzu zeigen wir zunächst folgendes Lemma.

4.4.2 Lemma *Sei X ein Banachraum mit Fourier-Typ $p \in (1, 2)$ und $(A, D(A))$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X mit Wachstumsschranke $\omega(T) < 0$. Für $x \in D(A)$ ist dann*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A)x\|^p ds\right)^{1/p} \leq c\|Ax\| \tag{4.14}$$

und $T(t)x$ läßt sich schreiben als

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda, \qquad \text{für fast alle } t > 0. \tag{4.15}$$

Beweis Für $x \in D(A)$ ist $\|R(\lambda, A)x\| \leq \frac{c}{1+|\lambda|}\|Ax\|$ nach Lemma 4.2.2. Damit folgt die Abschätzung (4.14).

Wir definieren für $t > 0$ und $x \in D(A)$

$$\tilde{T}(t)x := \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda.$$

Da X vom Fourier-Typ p ist, ist $(\int_0^\infty \|\tilde{T}(t)x\|^q dt)^{1/q} \leq c\|Ax\|$. Sei

$$R_\lambda x := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{T}(t)x dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Dann ist nach der Hölderschen Ungleichung $\|R_\lambda x\| \leq c(\lambda)\|Ax\|$, d.h. $R_\lambda A^{-1}$ ist beschränkt. Falls $x \in D(A^2)$, ist nach Lemma 4.2.3 $T(t)x = \tilde{T}(t)x$ für alle $t > 0$. Damit ist $R_\lambda x = R(\lambda, A)x$ für $x \in D(A^2)$, also $R_\lambda A^{-1}x = R(\lambda, A)A^{-1}x$ für alle $x \in D(A)$. Wegen der Dichtheit von $D(A)$ folgt damit $R_\lambda A^{-1} = R(\lambda, A)A^{-1}$, d.h. $R_\lambda x = R(\lambda, A)x$

für alle $x \in D(A)$. Der Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation (Satz 2.2.7) liefert dann, daß $T(t)x = \tilde{T}(t)x$ für fast alle t und alle $x \in D(A)$ gilt. $\square$

Beweis von Theorem 4.4.1 Wie bei Theorem 4.2.1 führen wir den Beweis in vier Schritten. Mit c sei wieder eine reelle Konstante gemeint.

Schritt 1: Definition eines Kanditaten für die Halbgruppe
Für $x \in X$ sei die Funktion $u_x : \mathbb{R} \to X$ definiert durch

$$u_x(t) := \begin{cases} T(t)x, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Da $\omega(T) < 0$, ist $u_x \in L^p(\mathbb{R}, X)$, existiert eine Konstante $c_1 \geq 0$, sodaß

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|u_x(t)\|^p dt \right)^{1/p} \leq c_1 \|x\|.$$

Nun ist aber X vom Fourier-Typ p. Damit ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}u_x$ von u_x in $L^q(\mathbb{R}, X)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) und es ist $\|\mathcal{F}u_x\|_q \leq c_2 \|u_x\|_p$. Für $s \in \mathbb{R}$ ist aber $(\mathcal{F}u_x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} u_x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ist} T(t)x \, dt = R(is, A)x$. Also ist

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A)x\|^q ds \right)^{1/q} \leq c_1 c_2 \|x\|,$$

woraus mit Lemma 2.5.4 folgt, daß

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A+B)x\|^q ds \right)^{1/q} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|[I - R(is, A)B]^{-1} R(is, A)x\|^q ds \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{1-M} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is, A)x\|^q ds \right)^{1/q} \leq \frac{c_1 c_2}{1-M} \|x\| \end{aligned}$$

für alle $x \in X$.

Wir wollen den Kandidaten für die gesuchte Halbgruppe wieder durch die Inversionsformel für die Laplace-Transformation darstellen. Hierzu zeigen wir zunächst, daß $R(i\cdot, A+B)x - R(i\cdot, A)x \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Es ist für $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} R(is, A+B)x - R(is, A)x &= \sum_{k=0}^{\infty} [R(is, A)B]^k R(is, A)x - R(is, A)x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [R(is, A)B]^k R(is, A)x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [R(is, A)B]^k R(is, A)BR(is, A)x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [R(is, A)B]^k R(is, A)B(-A)^{\alpha}(-A)^{-\alpha} R(is, A)x \end{aligned}$$

und damit nach Voraussetzung

$$\|R(is, A+B)x - R(is, A)x\| \leq \frac{C}{1-M}\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)x\|.$$

Es reicht also zu zeigen, daß

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)x\|^p ds\right)^{1/p} \leq c\|x\|$$

Für $s \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
(-A)^{-\alpha}R(is, A)x &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty} t^{-\alpha}R(t, A)R(is, A)x dt \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t-is}\,[R(is, A)x - R(t, A)x]dt \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t-is}dt\; R(is, A)x \\
&\quad - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t-is}\; R(t, A)x dt \\
&= (-is)^{-\alpha}R(is, A)x - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t-is}R(t, A)x dt
\end{aligned}$$

nach der Cauchyschen Integralformel und damit für $h \in L^q(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|h(s)|\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)x\|ds &= \int_{-1}^{1}|h(s)|\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)x\|ds \\
&+ \int_{|s|\geq 1}|h(s)|\left\|(-is)^{-\alpha}R(is, A)x - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}}{t-is}R(t, A)x dt\right\|ds.
\end{aligned}$$

Zunächst ist

$$\int_{-1}^{1}|h(s)|\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)x\|ds \leq c \sup_{s\in[-1,1]}\|(-A)^{-\alpha}R(is, A)\|\|x\|\|h\|_q.$$

Für $r = \frac{p}{2-p}$ ist $\frac{1}{r} + \frac{2}{q} = 1$ und $\alpha r > 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{|s|\geq 1}|h(s)||s|^{-\alpha}\|R(is, A)x\|ds &\leq \|h\|_q\left(\int_{|s|\geq 1}|s|^{-\alpha r}dt\right)^{1/r}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|R(is, A)x\|^q ds\right)^{1/q} \\
&\leq c\|x\|\|h\|_q.
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\int_{|s|\geq 1}|h(s)|\left\|\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}}{t-is}R(t, A)x dt\right\|ds &\leq \int_{|s|\geq 1}|h(s)|\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}}{|t-is|}\|R(t, A)x\|dt\, ds \\
&\leq c\int_{|s|\geq 1}\frac{|h(s)|}{|s|}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}}{t+1}\|x\|dt\, ds \\
&\leq c\|x\|\|h\|_q\left(\int_{|s|\geq 1}|s|^{-p}\right)^{1/p} \leq c\|x\|\|h\|_q.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|(-A)^{-\alpha} R(is,A)x\|^p ds\right)^{1/p} \leq c\|x\|, \qquad x \in X$$

und wir erhalten

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|R(is,A+B)x - R(is,A)x\|^p ds\right)^{1/p} \leq c\|x\|, \qquad x \in X.$$

Wir können daher die inverse Fouriertransformation auf $R(is,A+B)x - R(is,A)x$ anwenden. Für $t > 0$ und $x \in X$ definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t)x &:= T(t)x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}(R(is,A+B)x - R(is,A)x)ds \\ &= T(t)x + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}(R(\lambda,A+B)x - R(\lambda,A)x)d\lambda. \end{aligned}$$

Da X Fourier-Typ p hat, ist $\tilde{S}(\cdot)x - T(\cdot)x \in L^q((0,\infty),X)$ für jedes $x \in X$, also auch $\tilde{S}(\cdot)x \in L^q((0,\infty),X)$, da $T(\cdot)x \in L^q((0,\infty),X)$. $\tilde{S}$ ist offensichtlich linear in x, weshalb die Schreibweise gerechtfertigt ist.

Nach Lemma 4.4.2 ist $R(i\cdot,A)x \in L^p(\mathbb{R},X)$ für $x \in D(A)$. Also ist auch $R(i\cdot,A+B)x \in L^p(\mathbb{R},X)$ und es ist sinnvoll zu definieren:

$$S(t)x := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}R(is,A+B)x ds, \qquad t > 0,\ x \in D(A)$$

Wiederum nach Lemma 4.4.2 ist $T(t)x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}R(is,A)x\, ds$ für fast alle $t > 0$ und alle $x \in D(A)$. Damit ist $S(t)x = \tilde{S}(t)x$ für fast alle $t > 0$ und alle $x \in D(A)$. Die Halbgruppeneigenschaft $S(t)S(s)x = S(t+x)x$ gilt nach Lemma 4.2.3 für alle $x \in D((A+B)^4)$.

Schritt 2: Beschränktheit von S

Wir betrachten zunächst $(A+B)^*$. Genau wie in Schritt 1 können wir zeigen, daß $(R(i\cdot,(A+B)^*)x^* - R(i\cdot,A^*)x^*)$ für jedes $x^* \in X^*$ in $L^p(\mathbb{R},X^*)$ liegt. Deshalb ist $S^*(\cdot)x^*$, definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{S}^*(t)x &:= T^*(t)x^* + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}[R(is,(A+B)^*)x^* - R(is,A^*)x^*]ds \\ &= T^*(t)x^* + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}(R(\lambda,(A+B)^*)x^* - R(\lambda,A^*)x^*)d\lambda \quad t > 0, \end{aligned}$$

in $L^q(\mathbb{R}_+,X^*)$. Wie oben stimmt auch $S^*(t)x^*$, definiert durch

$$S^*(t)x := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}R(is,(A+B)^*)x^* ds, \qquad t > 0,\ x^* \in D(A^*)$$

in $D(A^*)$ für fast alle $t > 0$ mit $\tilde{S}^*(t)x^*$ überein. Außerdem sieht man leicht, daß $\langle x^*, S(t)x\rangle = \langle S^*(t)x^*, x\rangle$ ist für jedes $x \in D(A)$ und jedes $x^* \in D(A^*)$.

Sei nun $t > 0$, $x \in D((A+B)^4)$ und $x^* \in D(A^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} t\langle x^*, S(t)x\rangle &= \int_0^t \langle x^*, S(t)x\rangle ds = \int_0^t \langle x^*, S(t-s)S(s)x\rangle ds \\ &= \int_0^t \langle S^*(t-s)x^*, S(s)x\rangle ds \le \int_0^t \|S^*(t-s)x^*\|\|S(s)x\| ds \end{aligned}$$

Wir wählen $r = \frac{p}{2-p}$ und $\beta > \frac{1}{r}$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|S^*(t-s)x^*\|\|S(s)x\| ds &= \int_0^t (1+s)^\beta \frac{1}{(1+s)^\beta} \|S^*(t-s)x^*\|\|S(s)x\| ds \\ &\le (1+t)^\beta \Big(\int_0^t (1+s)^{-\beta r} ds\Big)^{1/r} \Big(\int_0^t \|S^*(t-s)x^*\|^q ds\Big)^{1/q} \Big(\int_0^t \|S(s)x\|^q ds\Big)^{1/q} \\ &= (1+t)^\beta \Big(\int_0^t (1+s)^{-\beta r} ds\Big)^{1/r} \Big(\int_0^t \|\tilde{S}^*(t-s)x^*\|^q ds\Big)^{1/q} \Big(\int_0^t \|\tilde{S}(s)x\|^q ds\Big)^{1/q} \\ &\le c(1+t)^\beta \Big(\int_0^\infty \|\tilde{S}^*(s)x^*\|^q ds\Big)^{1/q} \Big(\int_0^\infty \|\tilde{S}(s)x\|^q ds\Big)^{1/q} \\ &\le c(1+t)^\beta \|x\|\|x^*\|. \end{aligned}$$

Damit ist $\|S(t)x\| \le \frac{c(1+t)^\beta}{t}\|x\|$ für alle $x \in D((A+B)^4)$. Es ist $((A+B)^*)^{-4}$ injektiv, d.h. $D((A+B)^4) = R((A+B)^{-4})$ ist dicht in X. Daher ist $S(t)$ beschränkt und $\|S(t)\| \le \frac{c(1+t)^\beta}{t}$. Außerdem gilt in beiden Fällen die Halbgruppeneigenschaft $S(t)S(s) = S(t+s)$ für alle $s, t > 0$.

Schritt 3 ($A+B$ ist Erzeuger von $(S(t)_{t>0})$ und Schritt 4 (Starke Stetigkeit von $(S(t))_{t>0}$ in $(0,\infty)$) kann man genau wie in Theorem 4.2.1 zeigen. Man muß nur A durch $A+B$ ersetzen. □

4.5 Matrixoperatoren

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|)_Y$ Hilberträume. Versehen mit der Norm $\|(x,y)\| := (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$ ist $X \times Y$ ebenfalls ein Hilbertraum. Sei $(A_1, D(A_1))$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X und $(A_2, D(A_2))$ der Erzeuger eine C_0-Halbgruppe auf Y. Dann erzeugt der durch

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad D(\mathcal{A}) = D(A_1) \times D(A_2)$$

definierte Operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ eine C_0-Halbgruppe auf $X \times Y$.

Wir betrachten nun abgeschlossene Operatoren $B_1 : D(B_1) \to Y$, $B_2 : D(B_2) \to X$, wobei $D(B_1)$ bzw. $D(B_2)$ dichte Teilräume von X bzw. Y seien. Dann ist der durch

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\mathcal{B}) = D(B_1) \times D(B_2)$$

gegebene Operator $(\mathcal{B}, D(\mathcal{B}))$ abgeschlossen und dicht definiert in $X \times Y$.

4.5.1 Satz *Seien $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ wie oben und es gelte $D(B_1) \supseteq D(A_1)$ und $D(B_2) \supseteq D(A_2)$. Falls ein $M \in [0, 1)$ existiert mit*

$$\begin{aligned} \|B_1 R(\lambda, A_1)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &\leq M \\ \|B_2 R(\lambda, A_2)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} &\leq M \\ \|R(\lambda, A_2) B_1 x\|_Y &\leq M \|x\|_Y \qquad \forall x \in D(B_1) \\ \|R(\lambda, A_1) B_2 y\|_X &\leq M \|y\|_Y \qquad \forall y \in D(B_2) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in i\mathbb{R}$, dann erzeugt $(\mathcal{A} + \mathcal{B}, D(\mathcal{A}))$ eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe in $X \times Y$.

Beweis Für $\operatorname{Re} \lambda > 0$ gilt

$$\mathcal{B} R(\lambda, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, A_1) & 0 \\ 0 & R(\lambda, A_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_2 R(\lambda, A_2) \\ B_1 R(\lambda, A_1) & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \mathcal{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda, A_1) & 0 \\ 0 & R(\lambda, A_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 y \\ B_1 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda, A_1) B_2 y \\ R(\lambda, A_2) B_1 x \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{B} R(\lambda, \mathcal{A}) \tbinom{x}{y} \right\|_{X \times Y} &= (\|B_1 R(\lambda, A_1) x\|_X^2 + \|B_2 R(\lambda, A_2) y\|_Y^2)^{1/2} \\ &\leq M (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2} = \|(x, y)\|_{X \times Y}, \qquad (x, y) \in X \times Y, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left\| R(\lambda, \mathcal{A}) \mathcal{B} \tbinom{x}{y} \right\|_{X \times Y} &= (\|R(\lambda, A_1) B_2 y\|_X^2 + \|R(\lambda, A_2) B_1 x\|_Y^2)^{1/2} \\ &\leq M (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2} = \|(x, y)\|_{X \times Y}, \qquad (x, y) \in D(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit Satz 4.3.1. □

4.5.2 Beispiel Wir wählen $X = Y = L^2(0, \infty)$ und $A = \frac{d}{dx}$ mit Definitionsbereich $D(A) = W^{1,2}(0, \infty)$. Sei $(B, D(B))$ für $\gamma \in \mathbb{R}$ durch

$$(Bf)(x) := \frac{\gamma}{x} f(x)$$

definiert mit maximalem Definitionsbereich in $L^2(0,\infty)$. Dann ist nach Beispiel 3.3.3

$$\|R(\lambda, A)Bf\|_2 \le 2|\gamma|\|f\|_2$$

für alle $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und alle $f \in D(B)$. Da für alle $f \in L^2(0,\infty)$ und alle $g \in D(B)$ die Beziehung $\langle g, BR(\lambda, A^*)f\rangle = \langle Bg, R(\lambda, A^*)f\rangle = \langle R(\lambda, A)Bg, f\rangle$ gilt, ist auch

$$\|BR(\lambda, A^*)\| \le 2|\gamma|$$

für alle $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Damit folgt mit Satz 4.5.1, daß

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^* \end{pmatrix}, \qquad D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A^*)$$

für $|\gamma| < \frac{1}{2}$ in $L^2(0,\infty) \times L^2(0,\infty)$ eine auf $(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe erzeugt.

4.5.3 Bemerkung In obigem Beispiel ist weder der Satz von Miyadera-Voigt noch der Satz von Desch-Schappacher anwendbar.

4.6 Anmerkungen

Halbgruppen, die in 0 nicht stark stetig sind, werden u.a. von Krein [41] und von Taira [70, 71] behandelt. Auf Krein geht auch das Beispiel 4.1.1 bzw. 4.1.4 zurück. Matrixoperatoren wie in Abschnitt 4.5 findet man z.B. bei Nagel [52].

5 Analytische Halbgruppen mit σ-Singularität

In diesem Kapitel betrachten wir analytische Halbgruppen, die in 0 nicht stark stetig sind, und zeigen Störungssätze.

5.1 Halbgruppen mit σ-Singularität

5.1.1 Stark stetige Halbgruppen mit σ-Singularität

In Abschnitt 4.1 haben wir auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppen betrachtet. Jetzt wollen wir detailliertere Voraussetzungen über das Verhalten solcher Halbgruppen in der Nähe der 0 machen.

5.1.1 Definition Sei $\sigma \geq 0$. Eine Familie $(T(t))_{t>0}$ von beschränkten Operatoren auf einem Banachraum X heißt **stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität**, falls

(i) die Halbguppeneigenschaft $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s > 0$ erfüllt ist,

(ii) die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ stetig ist in $(0, \infty)$ für alle $x \in X$ und

(iii) eine Konstante $C > 0$ existiert, sodaß $\|T(t)\| \leq Ct^{-\sigma}$ für alle $t \in (0, 1)$.

5.1.2 Bemerkung (1) Falls $(T(t))_{t>0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität ist für ein $\sigma \leq 0$, dann auch für alle $\sigma' > \sigma$.

(2) Ist $(T(t))_{t>0}$ eine stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität, dann gibt es Konstanten $C' > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit

$$\|T(t)\| \leq C' e^{\omega t} t^{-\sigma} \qquad \text{für alle } t > 0. \tag{5.1}$$

Seien nämlich für $t \geq 1$ Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in [1, 2)$ so gewählt, daß $t = n + s$. Da $t \mapsto T(t)x$ stetig ist auf dem kompakten Intervall $[1, 2]$ für alle $x \in X$, ist $M := \sup\{\|T(t)\| : \; t \in [1, 2]\} < \infty$ nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit. Damit ist $\|T(t)\| = \|T(n)T(s)\| \leq \|T(1)\|^n \|T(s)\| \leq M^{n+1} \leq M^t = e^{\omega t}$ für alle $t \geq 1$, wobei $\omega = \log M$ gesetzt sei. Hieraus folgt (5.1).

Eine stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität ist insbesondere eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe. Falls $0 \leq \sigma < 1$ ist, folgt aus (5.1), daß $\operatorname{abs}(T) < \infty$ und wir können wie in 4.1.2 den Erzeuger definieren. Alle Aussagen im Abschnitt 4.1 gelten dann auch hier.

5.1.3 Bemerkung Sei $0 \leq \sigma < 1$ und $(A, D(A))$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t>0}$ mit σ-Singularität. Dann ist $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(T)\} \subseteq \rho(A)$ und es gilt

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

für alle $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{abs}(T)$.

5.1.2 Analytische Halbgruppen mit σ-Singularität

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Für $\varphi \in (0, \pi]$ sei

$$\begin{aligned} \Sigma_\varphi &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0,\ |\arg\lambda| < \varphi\}, \\ \overline{\Sigma}_\varphi &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0,\ |\arg\lambda| \leq \varphi\}. \end{aligned}$$

5.1.4 Definition Sei $\sigma \geq 0$ und $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Eine Familie $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ von beschränkten Operatoren auf einem Banachraum X heißt **analytische Halbgruppe (vom Winkel φ) mit σ-Singularität**, falls

(i) die Halbguppeneigenschaft $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi$ erfüllt ist,

(ii) die Abbildung $z \mapsto T(z)$ analytisch ist in Σ_φ und

(iii) für jedes $\delta \in (0, \varphi)$ eine Konstante $C_\delta > 0$ existiert, sodaß $\|T(z)\| \leq C_\delta |z|^{-\sigma}$ für alle $z \in \overline{\Sigma}_{\varphi-\delta} \cap B(0, 1)$.

5.1.5 Beispiel Sei X und $(T(t))_{t\geq0}$ wie in Beispiel 4.1.1 mit $\beta \geq 2$. Dann läßt sich $(T(t))_{t\geq0}$ zu einer analytischen Halbgruppe $(T(z))_{z\in\Sigma_{\pi/2}}$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit $(\frac{\beta}{2} - 1)$-Singularität fortsetzen.

Ist $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ eine analytische Halbguppe mit σ-Singularität und schränkt man T auf die positive reelle Achse ein, so ist $(T(t))_{t>0}$ insbesondere eine stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität.

Sei nun $0 \leq \sigma < 1$. Falls $(T(t))_{t>0}$ einem Erzeuger $(A, D(A))$ im Sinne von Definition 4.1.2 hat, dann heißt $(A, D(A))$ auch Erzeuger von $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$, und es gilt folgendes Lemma:

5.1.6 Lemma *Sei $0 \leq \sigma < 1$ und $(A, D(A))$ der Erzeuger einer analytischen Halbgruppe vom Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit σ-Singularität. Dann erzeugt $(e^{i\psi}A, D(A))$ eine stark stetige Halbgruppe mit σ-Singularität für jedes $\psi \in (-\varphi, \varphi)$.*

Beweis Sei $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ die von $(A, D(A))$ erzeugte analytische Halbgruppe und $\psi \in (-\varphi, \varphi)$. $(S(t))_{t>0}$ sei definiert durch $S(t) := T(e^{i\psi}t)$. Dann ist $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ für jedes

$t > 0$ und $\|S(t)\| = \|T(e^{i\psi}t)\| \leq M|e^{i\psi}t|^{-\sigma} = Mt^{-\sigma}$ für $t \in (0,1)$. Da T in Σ_φ analytisch ist, ist S in $(0,\infty)$ stark stetig. Weiter gilt für $s,t > 0$, daß $S(t)S(s) = T(e^{i\psi}t)T(e^{i\psi}s) = T(e^{i\psi}(t+s)) = S(t+s)$. Für $\lambda > \max\{0, \operatorname{abs}(S)\}$ ist

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(e^{i\psi}t)\,dt = \int_\Gamma e^{-\lambda e^{-i\psi}s}T(s)e^{-i\psi}ds,$$

wobei Γ durch $\gamma(u) := e^{i\psi}u$, $u \in (0,\infty)$ parametrisiert sei. Da T in Σ_φ holomorph ist und

$$\int_0^\psi |e^{-r\operatorname{Re}(\lambda e^{i(u-\psi)})}|\,\|T(re^{iu})\|r\,du \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \to 0 \text{ bzw. } r \to \infty,$$

können wir den Cauchyschen Integralsatz anwenden und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\,dt = e^{-i\psi}\int_0^\infty e^{-\lambda e^{-i\psi}s}T(s)ds = e^{-i\psi}R(\lambda e^{-i\psi}, A) = R(\lambda, e^{i\psi}A).$$

□

5.1.7 Korollar *Sei $0 \leq \sigma < 1$ und $(A, D(A))$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ vom Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit σ-Singularität und $\operatorname{abs}(T) \leq 0$. Dann ist $\Sigma_{\varphi+\pi/2} \subseteq \rho(A)$.*

Beweis Nach Lemma 5.1.6 und Bemerkung 5.1.3 ist $\Sigma_{\pi/2} \subseteq \rho(e^{i\psi}A)$ für jedes $\psi \in (-\varphi,\varphi)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Wie sich die Resolvente eines Erzeugers einer analytischen Halbgruppe verhält, zeigt der nächste Satz.

5.1.8 Satz *Sei $0 \leq \sigma < 1$ und $(A, D(A))$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ vom Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit σ-Singularität. Für jedes $\delta \in (0,\varphi)$ existiere eine Konstante C_δ mit $\|T(t)\| \leq C_\delta|z|^{-\sigma}$ für alle $z \in \overline{\Sigma}_{\varphi-\delta/2}$. Dann existiert zu jedem δ eine Konstante $K_\delta > 0$ mit $\|R(\lambda, A)\| \leq K_\delta|\lambda|^{\sigma-1}$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\varphi-\delta}$.*

Beweis Sei $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\varphi-\delta}$. Wir wählen $\psi = -\varphi + \frac{\delta}{2}$, falls $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ und $\psi = \varphi - \frac{\delta}{2}$ sonst. Dann ist $\lambda e^{i\psi} \in \Sigma_{\pi/2-\delta/2}$ und es gilt $\operatorname{Re}(\lambda e^{i\psi}) = |\lambda|\cos(\arg(\lambda)+\psi) \geq |\lambda|\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2})$. Damit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\| &= \|e^{i\psi}R(e^{i\psi}\lambda, e^{i\psi}A)\| = \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda e^{i\psi}t}T(e^{i\psi}t)\,dt\right\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda e^{i\psi})t}\|T(e^{i\psi}t)\|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda e^{i\psi})t}C_{|\psi|}t^{-\sigma}dt \\
&= C_{\varphi-\delta/2}\Gamma(1-\sigma)(\operatorname{Re}(\lambda e^{i\psi}))^{\sigma-1} \leq K_\delta|\lambda|^{\sigma-1},
\end{aligned}$$

wobei $K_\delta := C_{\varphi-\delta/2}\Gamma(1-\sigma)(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}))^{\sigma-1}$. □

5.2 τ-sektorielle Operatoren

Der soeben bewiesene Satz motiviert folgende Definition:

5.2.1 Definition Sei X ein Banachraum, $\tau \in (0,1]$ und $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ein linearer Operator $(A, D(A))$ in X heißt τ-**sektoriell mit Winkel** θ, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Resolventenmenge von A enthält das Gebiet Σ_θ.

(ii) Für jedes kleine $\varepsilon \in (0, \theta)$ existiert eine Konstante $K_\varepsilon > 0$, sodaß

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K_\varepsilon}{|\lambda|^\tau} \qquad \text{für alle } \lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}. \tag{5.2}$$

5.2.2 Beispiel Sei X und $(A, D(A))$ wie in Beispiel 4.1.4 mit $\beta \in [2, 4)$. Dann ist $(A, D(A))$ $(2 - \frac{\beta}{2})$-sektoriell mit Winkel π.

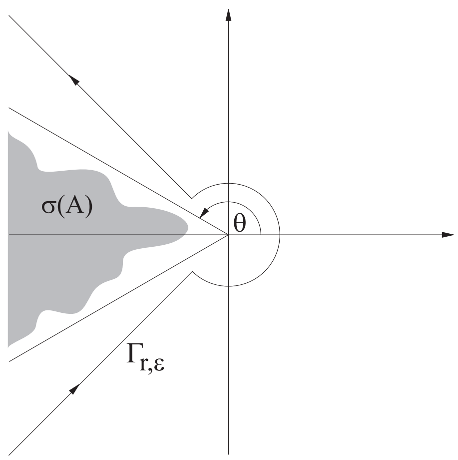
Sei $(A, D(A))$ τ-sektoriell mit Winkel $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Wir definieren

$$T(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} e^{\mu z} R(\mu, A)\, d\mu, \qquad z \in \Sigma_\varphi, \tag{5.3}$$

wobei $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ und die Kurve $\Gamma_{r,\varepsilon}$ für $\varepsilon \in (0, \varphi)$ und $r > 0$ durch

$$\gamma_{r,\varepsilon}(t) = \begin{cases} -rte^{-i(\theta-\varepsilon)}, & -\infty < t < -1 \\ re^{it(\theta-\varepsilon)}, & -1 \leq t \leq 1 \\ rte^{i(\theta-\varepsilon)}, & 1 < t < \infty. \end{cases} \tag{5.4}$$

parametrisiert sei.



Dann können wir folgenden Satz beweisen.

5.2.3 Satz *Sei $(A, D(A))$ τ-sektoriell vom Winkel $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\varphi := \theta - \frac{\pi}{2}$ und sei $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ durch (5.3) gegeben. Dann gilt:*

(1) *$T(z) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $z \in \Sigma_\varphi$.*

(2) *Für alle $\delta \in (0, \varphi)$ existiert ein $C_\delta > 0$ mit $\|T(z)\| \le C_\delta |z|^{\tau-1}$ für alle $z \in \overline{\Sigma}_{\varphi-\delta}$.*

(3) *$z \mapsto T(z)$ ist analytisch in Σ_φ.*

(4) *$T(z_1)T(z_2) = T(z_1 + z_2)$ für alle $z \in \Sigma_\varphi$.*

(5) *$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{\lambda t} T(t)\, dt$ für alle* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Insbesondere ist also $(T(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ eine analytische Halbgruppe mit $(1-\tau)$-Singularität, und $(A, D(A))$ ist ihr Erzeuger.

Beweis Der Integrand ist analytisch in Σ_θ. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral (falls es existiert) unabhängig von der Wahl von r und ε.

Sei $\delta \in (0, \varphi)$ und $z \in \overline{\Sigma}_{\varphi-\delta}$. Wir wählen $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ und $r = |z|^{-1}$. Zunächst ist $|e^{\mu z}| = e^{\operatorname{Re}(\mu z)} = e^{|\mu z| \cos(\arg z + \arg \mu)}$. Damit gilt für $\mu \in \gamma_{r,\varepsilon}([-1, 1]) =: \Gamma^{(2)}_{r,\varepsilon}$, daß $|e^{\mu z}| \le e^{r|z|} = e$. Für $\mu \in \gamma_{r,\varepsilon}((1, \infty)) =: \Gamma^{(3)}_{r,\varepsilon}$ ist $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \le \arg z + \arg \mu \le \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, also $|e^{\mu z}| \le e^{|\mu z| \cos(\pi/2+\varepsilon)} = e^{-|\mu z| \sin \varepsilon}$. Diese Abschätzung kann man analog für $\mu \in \gamma_{r,\varepsilon}((-\infty, -1)) =: \Gamma^{(1)}_{r,\varepsilon}$ zeigen. Damit ist

$$\int_{\Gamma^{(2)}_{r,\varepsilon}} \|e^{\mu z} R(\mu, A)\|\, |d\mu| \le K_\varepsilon \int_{\Gamma^{(3)}_{r,\varepsilon}} e|\mu|^{-\tau} |d\mu| \le 2K_\varepsilon e(\theta - \varepsilon) r^{1-\tau}$$

und

$$\int_{\Gamma^{(1)}_{r,\varepsilon} \cup \Gamma^{(3)}_{r,\varepsilon}} \|e^{\mu z} R(\mu, A)\|\, |d\mu| \le 2K_\varepsilon \int_{\Gamma^{(3)}_{r,\varepsilon}} e^{-|\mu z| \sin \varepsilon} |\mu|^{-\tau} |d\mu| = 2K_\varepsilon r^{1-\tau} \int_1^\infty e^{-t \sin \varepsilon} t^{-\tau} dt.$$

Also ist $T(z) \in \mathcal{L}(X)$ und $\|T(z)\| \le C_\varepsilon r^{1-\tau} = C_\varepsilon |z|^{\tau-1}$ und (1) und (2) sind gezeigt. Außerdem folgt (3), da das Integral auf $\Sigma_{\varphi-\delta} \setminus U(0)$ gleichmäßig konvergiert.

Als nächstes zeigen wir (4). Sei hierzu $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varphi$ und $0 < r < r'$. Dann ist

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} \int_{\Gamma_{r',\varepsilon'}} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} R(\mu, A) R(\lambda, A)\, d\lambda\, d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} \int_{\Gamma_{r',\varepsilon'}} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} (\lambda - \mu)^{-1} (R(\mu, A) - R(\lambda, A))\, d\lambda\, d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} \int_{\Gamma_{r',\varepsilon'}} e^{\lambda z_2} (\lambda - \mu)^{-1}\, d\lambda\, e^{\mu z_1} R(\mu, A)\, d\mu \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{r',\varepsilon'}} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} e^{\mu z_1} (\mu - \lambda)^{-1}\, d\mu\, e^{\lambda z_2} R(\lambda, A)\, d\lambda
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini. Der Cauchysche Integralsatz liefert aber

$$\int_{\Gamma_{r',\varepsilon'}} e^{\lambda z_2}(\lambda-\mu)^{-1}\,d\lambda = 2\pi i e^{\mu z_2}$$

für $\mu \in \Gamma_{r,\varepsilon}$ und

$$\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} e^{\mu z_1}(\mu-\lambda)^{-1}\,d\mu = 0$$

für $\lambda \in \Gamma_{r',\varepsilon'}$. Damit ist

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} e^{\mu z_1}e^{\mu z_2}R(\mu,A)\,d\mu = T(z_1+z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \sigma_\varphi$.

Schließlich zeigen wir noch (5). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Wir wählen r so, daß λ rechts von $\Gamma_{r,\varepsilon}$ liegt. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} e^{\mu t}R(\mu,A)\,d\mu\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}}\int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t}dt\,R(\mu,A)\,d\mu\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}}(\lambda-\mu)^{-1}R(\mu,A)\,d\mu = R(\lambda,A)\end{aligned}$$

nach der Cauchyschen Integralformel und der Satz ist bewiesen. □

5.2.4 Lemma *Sei $(A, D(A))$ linearer Operator in einem Banachraum X und $\tau \in (0,1)$. Falls positive Konstanten θ, r und M existieren mit $\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| > r,\ |\arg\lambda < \pi/2+\theta\} \subseteq \rho(A)$ und $\|R(\lambda,A)\| \leq M|\lambda|^{-\tau}$ für alle $\lambda \in \Sigma$, dann ist $(A-\omega, D(A))$ τ-sektoriell für $\omega \in \mathbb{R}$ groß genug.*

Beweis Wir wählen $\omega > 0$ so gross, daß

$$\rho(A-\omega) \supseteq \Sigma - \omega \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0,\ |\arg\lambda| < \pi/2+\theta\}.$$

Dann ist $\|R(\lambda, A-\omega)\| = \|R(\lambda+\omega, A)\| \leq M|\lambda+\omega|^{-\tau}$ für alle $\lambda \in \Sigma-\omega$. Da $\frac{|\lambda+\omega|}{|\lambda|}$ für $|\lambda| \to \infty$ gegen 1 und für $|\lambda| \to 0$ gegen $+\infty$ strebt, existiert ein $c > 0$ mit $|\lambda+\omega| \geq c|\lambda|$. Damit ist $\|R(\lambda, A-\omega)\| \leq M(c|\lambda|)^{-\tau}$ für alle $\lambda \in \Sigma-\omega$. □

Aus Satz 5.1.8 und Satz 5.2.3 erhalten wir folgende Charakterisierung τ-sektorieller Operatoren:

5.2.5 Satz *Sei X ein Banachraum und $(A, D(A))$ ein linearer Operator in X. Sei $\tau \in [0,1)$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert ein $\omega > 0$, sodaß $(A-\omega, D(A))$ τ-sektoriell ist vom Winkel $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$.*

(b) *$(A, D(A))$ erzeugt eine eine analytische Halbgruppe $(T(z))$ Winkel $\theta - \frac{\pi}{2}$ mit $(1-\tau)$-Singularität.*

5.3 Gebrochene Potenzen

Sei $(A, D(A))$ τ-sektoriell mit Winkel θ und $\lambda \in \Sigma_\theta$. . Für $\alpha > 1-\tau$ definieren wir die gebrochene Potenz $(\lambda - A)^{-\alpha}$ durch die Formel

$$(\lambda - A)^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} (\lambda-\mu)^{-\alpha} R(\mu, A) d\mu. \tag{5.5}$$

Hierbei sei $\Gamma_{r,\varepsilon}$ durch (5.4) gegeben mit $0 < r < |\lambda|$ und $0 < \varepsilon < \theta - |\arg\lambda|$. Für $(\lambda-\mu)^{-\alpha} = e^{-\alpha\log(\lambda-\mu)}$ wählen wir den Zweig, dessen Argument zwischen $-\alpha\pi$ und $\alpha\pi$ liegt.

5.3.1 Lemma *Das Integral* (5.5) *konvergiert absolut, und es ist* $(\lambda - A)^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ *für alle* $\alpha > 1-\tau$.

Beweis Mit $|(\lambda-\mu)^{-\alpha}| = |e^{-\alpha\log(\lambda-\mu)}| = e^{-\alpha\log|\lambda-\mu|} = |\lambda-\mu|^{-\alpha}$ und $\|R(\mu, A)\| \leq M|\mu|^{-\tau}$ folgt die Behauptung. □

5.3.2 Lemma *(i) Für* $\alpha, \beta > 1-\tau$ *gilt* $(\lambda - A)^{-\alpha}(\lambda - A)^{-\beta} = (\lambda - A)^{-\alpha-\beta}$.
(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ *ist* $(\lambda - A)^{-n} = R(\lambda, A)^n$.

Beweis (i) Sei $\Gamma_1 = \Gamma_{r_1,\varepsilon_1}$ und $\Gamma_2 = \Gamma_{r_2,\varepsilon_2}$ mit $0 < r_1 < r_2 < |\lambda|$ und $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \theta - |\arg\lambda|$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^{-\alpha}(\lambda - A)^{-\beta} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (\lambda-\mu)^{-\alpha}(\lambda-\nu)^{-\beta} R(\mu, A) R(\nu, A) d\nu\, d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (\lambda-\mu)^{-\alpha}(\lambda-\nu)^{-\beta}(\nu-\mu)^{-1}[R(\mu, A) - R(\nu, A)] d\nu\, d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} (\lambda-\nu)^{-\beta}(\nu-\mu)^{-1} d\nu\, (\lambda-\mu)^{-\alpha} R(\mu, A)\, d\mu \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1} (\lambda-\mu)^{-\alpha}(\mu-\nu)^{-1}\, d\mu\, (\lambda-\nu)^{-\beta} R(\nu, A)\, d\nu.
\end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz bzw. der Cauchyschen Integralformel ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (\lambda-\nu)^{-\beta}(\nu-\mu)^{-1} d\nu = (\lambda-\mu)^{-\beta} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\lambda-\mu)^{-\alpha}(\mu-\nu)^{-1} d\mu = 0$$

für $\mu \in \Gamma_1$ bzw. $\nu \in \Gamma_2$. Damit gilt

$$(\lambda - A)^{-\alpha}(\lambda - A)^{-\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda-\mu)^{-(\alpha+\beta)} R(\mu, A) d\mu = (\lambda - A)^{-(\alpha+\beta)}.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in (0, \pi)$ ist $\lim_{r\to\infty} \left| \int_{-\omega}^{\omega} (\lambda - re^{i\eta})^{-n} R(re^{i\eta}, A)\, ire^{i\eta}\, d\eta \right| = 0$, und damit nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(\lambda - A)^{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} (\lambda-\mu)^{-n} R(\mu, A) d\mu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C} (\lambda-\mu)^{-n} R(\mu, A) d\mu,$$

wobei C ein positiv orientierter geschlossener Weg in Σ_θ um λ ist. Jetzt können wir den Residuensatz anwenden und erhalten

$$(\lambda - A)^{-n} = -\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}R(\mu, A)|_{\mu=\lambda} = R(\lambda, A)^n.$$

Hiermit ist das Lemma bewiesen. □

5.3.3 Lemma *Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > n + 1 - \tau$ und $x \in X$. Dann ist $(\lambda - A)^{-\alpha}x \in D(A^n)$ und $(\lambda - A)^n(\lambda - A)^{-\alpha} = (\lambda - A)^{n-\alpha}$.*

Beweis Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Sei $n = 1$ und $\alpha > 2 - \tau$. Dann ist für $\Gamma = \Gamma_{r,\varepsilon}$ mit $0 < r < |\lambda|$ und $0 < \varepsilon < \theta - |\arg\lambda|$

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)(\lambda - A)^{-\alpha}x &= \frac{1}{2\pi i}(\lambda - A)\int_\Gamma(\lambda - \mu)^{-\alpha}R(\mu, A)x\,d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - \mu)^{-\alpha}(\lambda - A)R(\mu, A)x\,d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - \mu)^{-\alpha}(x - \mu R(\mu, A)x)\,d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - \mu)^{-\alpha}x\,d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - \mu)^{1-\alpha}R(\mu, A)x\,d\mu \\
&= (\lambda - A)^{1-\alpha}x.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit vollständiger Induktion. □

5.3.4 Definition Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n - \alpha > 1 - \tau$. Definiere $(\lambda - A)^\alpha$ durch

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^\alpha x &= (\lambda - A)^n(\lambda - A)^{\alpha-n}x \\
D((\lambda - A)^\alpha) &= \{x \in X : (\lambda - A)^{\alpha-n}x \in D(A^n)\}.
\end{aligned}$$

5.3.5 Bemerkung (1) Nach Lemma 5.3.3 ist die Definition 5.3.4 konsistent mit (5.5).

(2) Die Definition von $(\lambda - A)^\alpha$ ist unabhängig von n nach Lemma 5.3.2 und Lemma 5.3.3.

(3) $(\lambda - A)^\alpha$ ist abgeschlossen: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n - \alpha > 1 - \tau$. Sei (x_k) eine Folge in $D((\lambda-A)^\alpha)$ mit $x_k \to x \in X$ und $(\lambda-A)^\alpha x_k = (\lambda-A)^n(\lambda-A)^{\alpha-n}x_k \to y \in X$ für $k \to \infty$. Da $(\lambda - A)^{\alpha-n}$ ein beschränkter Operator ist, konvergiert $(\lambda - A)^{\alpha-n}x_k$ gegen $(\lambda - A)^{\alpha-n}x$. Da $(\lambda - A)^n$ abgeschlossen ist, ist auch $(\lambda - A)^\alpha$ abgeschlossen.

5.3.6 Lemma *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$(\lambda - A)^\alpha(\lambda - A)^\beta x = (\lambda - A)^{\alpha+\beta}x = (\lambda - A)^\beta(\lambda - A)^\alpha x$$

für alle $x \in D((\lambda - A)^\alpha) \cap D((\lambda - A)^\beta) \cap D((\lambda - A)^{\alpha+\beta})$. Insbesondere ist

$$(\lambda - A)^{-\alpha}(\lambda - A)^\alpha x = x$$

für $x \in D((\lambda - A)^\alpha) \cap D((\lambda - A)^{-\alpha})$.

Beweis Sei $x \in D((\lambda - A)^{\beta}) \cap D((\lambda - A)^{\alpha+\beta})$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > 1 + \alpha - \tau$ bzw. $m > 1 + \beta - \tau$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{\alpha-n}(\lambda - A)^{m}(\lambda - A)^{\beta-m}x &= (\lambda - A)^{m}(\lambda - A)^{\alpha-n}(\lambda - A)^{\beta-m}x \\ &= (\lambda - A)^{m}(\lambda - A)^{\alpha+\beta-n-m}x.\end{aligned}$$

Da $x \in D((\lambda - A)^{\alpha+\beta})$ und $m+n > 1+\alpha+\beta-\tau$, d.h. $(\lambda - A)^{\alpha+\beta-n-m}x \in D((\lambda - A)^{m+n})$ ist $(\lambda - A)^{\alpha-n}(\lambda - A)^{m}(\lambda - A)^{\beta-m}x \in D((\lambda - A)^{n})$. Weiter ist

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{\alpha}(\lambda - A)^{\beta}x &= (\lambda - A)^{n}(\lambda - A)^{m}(\lambda - A)^{\alpha+\beta-n-m}x \\ &= (\lambda - A)^{n+m}(\lambda - A)^{\alpha+\beta-n-m}x \\ &= (\lambda - A)^{\alpha+\beta}x.\end{aligned}$$

□

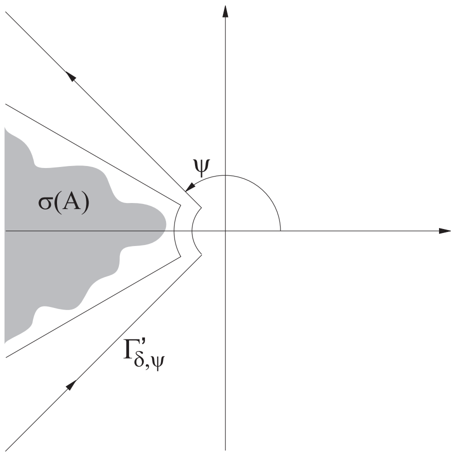
5.3.7 Bemerkung Falls zusätzlich $0 \in \rho(A)$, dann gilt für die Resolvente von A die Abschätzung

$$\|R(\mu, A)\| \leq K(1 + |\mu|)^{-\tau}$$

für alle $\mu \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon} \cup \overline{B}(0, r)$ für geeignete $r, \varepsilon > 0$. Dann können wir auch für $(-A)$ gebrochene Potenzen definieren. Hierzu ersetzen wir $\Gamma_{r,\varepsilon}$ in (5.5) durch die Kurve $\Gamma'_{\delta,\psi}$ mit $0 < \delta \leq r$ und $0 \leq \psi \leq \theta - \varepsilon$, die durch

$$\gamma'_{\delta,\psi}(t) = \begin{cases} -\delta t e^{-i\psi} & -\infty < t < -1 \\ -\delta e^{-it(\pi-\psi)} & -1 \leq t \leq 1 \\ \delta t e^{i\psi} & 1 < t < \infty \end{cases} \tag{5.6}$$

parametrisiert sei.



Danach können wir genau wie oben verfahren.

5.3.8 Beispiel Sei X und $(A, D(A))$ wie in Beispiel 4.2.4 mit $\beta \in [2,4)$. Dann ist $(A, D(A))$ $(2 - \frac{\beta}{2})$-sektoriell, und 0 liegt in der Resolventenmenge von A. $(-A)^\alpha$ ist dann für $\alpha \in \mathbb{R}$ durch

$$(-A)^\alpha \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} (x^2+1)^\alpha & -\alpha x^\beta (x^2+1)^{\alpha-1} \\ 0 & (x^2+1)^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

gegeben. $(-A)^\alpha$ ist also beschränkt genau dann, wenn $\alpha \leq 1 - \frac{\beta}{2}$.

5.4 Störungssätze

Folgender Störungssatz für τ–sektorielle Operatoren ist einfach zu beweisen.

5.4.1 Satz *Sei $(A, D(A))$ τ sektoriell mit Winkel θ und sei $(B, D(B))$ abgeschlossen mit $D(B) \supseteq D(A)$. Falls eine Konstante $M < 1$ existiert mit $\|BR(\lambda, A)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \Sigma_\theta$, dann ist auch $(A + B, D(A))$ τ-sektoriell mit Winkel θ.*

Beweis Nach Lemma 2.5.1 ist $(A + B, D(A))$ abgeschlossen, $\Sigma_\theta \subseteq \rho(A + B)$ und es gilt $R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}$ für alle $\lambda \in \Sigma_\theta$.
Sei $\varepsilon \in (0, \theta)$. Dann existiert eine Konstante $K_\varepsilon \geq 0$ mit $\|R(\lambda, A)\| \leq K_\varepsilon |\lambda|^\tau$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}$. Damit folgt, daß $\|R(\lambda, A + B)\| \leq \frac{K_\varepsilon}{1-M}|\lambda|^{-\tau}$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}$. □

Als Folgerung erhalten wir einen Störungssatz für analytische Halbgruppen mit σ-Singularität.

5.4.2 Korollar *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe vom Winkel φ mit σ-Singularität ($0 \leq \sigma < 1$) und sei $(B, D(B))$ abgeschlossen mit $D(B) \supseteq D(A)$. Falls Konstanten $M < 1$ und $R > 0$ existieren, sodaß $\|BR(\lambda, A)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \Sigma_{\varphi+\pi/2} \cap \{|\lambda| \geq R\}$. Dann erzeugt auch $(A + B, D(A))$ eine analytische Halbgruppe vom Winkel φ mit σ-Singularität.*

Beweis Nach Satz 5.2.5 existiert ein $\omega \geq 0$, sodaß $(A-\omega, D(A))$ τ-sektoriell ist. Weiter gilt $\|BR(\lambda, a - \omega)\| = \|BR(\lambda + \omega, A)\| \leq M$ für alle $\lambda \in \Sigma_{\varphi+\pi/2}$, d.h. Satz 5.4.1 liefert, daß $(A - \omega + B, D(A))$ τ-sektoriell ist. Damit erzeugt $(A + B, D(A))$ wiederum nach Satz 5.2.5 eine analytische Halbgruppe mit σ-Singularität. □

Wann ist die Bedingung in Satz 5.4.1 erfüllt?

Falls $0 \in \rho(A)$ ist, dann gilt für die Resolvente von A die Abschätzung

$$\|R(\mu, A)\| \leq K(1 + |\mu|)^{-\tau}$$

für alle $\mu \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon} \cup \overline{B}(0, r)$ für geeignete $r, \varepsilon > 0$. Dann können wir für $(-A)$ gebrochene Potenzen definieren.

5.4.3 Lemma *Sei $(A, D(A))$ τ-sektoriell mit Winkel θ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert für jedes $\alpha \in (0, \tau)$ und jedes $\varepsilon \in (0, \theta)$ eine Konstante $L_{\alpha,\varepsilon}$ mit $\|(-A)^\alpha R(\lambda, A)\| \leq L_{\alpha,\varepsilon}$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}$.*

Beweis Sei λ in Σ_θ. Nach der Definition der gebrochenen Potenzen gilt

$$\begin{aligned}
(-A)^\alpha R(\lambda, A) &= (-A)^{\alpha-1}(-A)R(\lambda, A) = (-A)^{\alpha-1}(I - \lambda R(\lambda, A) \\
&= (-A)^{\alpha-1} - \lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A).
\end{aligned}$$

Da $\alpha < \tau$, ist $-(\alpha - 1) > 1 - \tau$, d.h. $(-A)^{\alpha-1}$ ist beschränkt. Wir betrachten nun $\lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A)$.

Sei nun $\varepsilon \in (0, \theta)$ und $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}$. Sei δ so klein, daß $\overline{B}(0, \delta) \subset \rho(A)$ gilt. Ist $|\lambda| \leq 2\delta$, dann gilt

$$\|\lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A)\| \leq \frac{2\delta K_\varepsilon}{(1 + |\lambda|)^\tau}\|(-A)^{\alpha-1}\| \leq 2\delta K_\varepsilon\|(-A)^{\alpha-1}\|.$$

Nun betrachten wir den Fall, daß $|\lambda| > 2\delta$ ist, und schreiben

$$\begin{aligned}
\lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A) &= \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}R(\nu, A)R(\lambda, A)\, d\nu \\
&= \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}(\lambda - \nu)^{-1}(R(\nu, A) - R(\lambda, A))\, d\nu \\
&= \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}(\lambda - \nu)^{-1}R(\nu, A)\, d\nu \\
&\quad + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}(\nu - \lambda)^{-1}d\nu\, R(\lambda, A).
\end{aligned}$$

Hierbei sei $\Gamma_{\delta,\psi}$ durch (5.6) parametrisiert mit $0 \leq \psi \leq \theta - \varepsilon$.

Falls $|\arg\lambda| \leq \frac{\theta-\varepsilon}{2}$, wählen wir $\psi = \theta - \varepsilon$. Dann ist $\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}(\nu - \lambda)^{-1}d\nu = 0$ und $\frac{|\lambda|}{\min\{|\lambda-\nu| : \nu \in \Gamma_{\delta,\psi}\}} \leq c_\varepsilon$, d.h.

$$\begin{aligned}
\|\lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A)\| &\leq \frac{|\lambda|}{2\pi}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} \frac{|\nu|^{\alpha-1}}{|\lambda - \nu|}\|R(\nu, A)\|\, d\nu \\
&\leq \frac{c_\varepsilon K_\varepsilon}{2\pi}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} \frac{|\nu|^{\alpha-1}}{(1 + |\nu|)^\tau}\, d\nu.
\end{aligned}$$

Ist andererseits $|\arg\lambda| > \frac{\theta-\varepsilon}{2}$, wählen wir $\psi = 0$. Dann ist $\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} (-\nu)^{\alpha-1}(\nu - \lambda)^{-1}d\nu = 2\pi i(-\lambda)^{\alpha-1}$ und $\frac{|\lambda|}{\min\{|\lambda-\nu| : \nu \in \Gamma_{\delta,\psi}\}} \leq c_\varepsilon$, d.h.

$$\|\lambda(-A)^{\alpha-1}R(\lambda, A)\| \leq \frac{M|\lambda|^\alpha}{(1 + |\lambda|)^\tau} + \frac{c_\varepsilon M}{2\pi}\int_{\Gamma_{\delta,\psi}} \frac{|\nu|^{\alpha-1}}{(1 + |\nu|)^\tau}\, d\nu.$$

Da $\alpha \in (0, \tau)$ gewählt war, folgt damit die Behauptung. □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun folgenden Störungssatz für τ-sektorielle Operatoren zeigen:

5.4.4 Theorem *Sei $(A, D(A))$ τ-sektoriell mit Winkel θ und $0 \in \rho(A)$. $(B, D(B))$ sei ein abgeschlossener Operator in X. Weiter existiere eine Zahl $\alpha \in (0, \tau)$, sodaß $D(B) \supseteq D((-A)^\alpha)$ und*

$$\|Bx\| \leq a\|(-A)^\alpha x\| + b\|x\| \qquad \text{für alle } x \in D((-A)^\alpha). \tag{5.7}$$

Falls $a > 0$ klein genug ist, existiert $M < 1$, $R \geq 0$ und $\theta' > \frac{\pi}{2}$, sodaß

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq M \qquad \text{für alle } \lambda \in \Sigma_{\theta'} \cap \{|\lambda| \geq R\}. \tag{5.8}$$

Insbesondere existiert ein ω, sodaß $(A + B - \omega, D(A))$ τ-sektoriell ist.

Beweis Wegen $\alpha \in (0, \tau)$ ist $D(A) \subseteq D((-A)^\alpha)$ und damit $BR(\lambda, A)$ ein beschränkter linearer Operator für alle $\lambda \in \rho(A)$. Nach (5.7) und Lemma 5.4.3 gilt für $x \in X$

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A)x\| &\leq a\|(-A)^\alpha R(\lambda, A)x\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\ &\leq aL_{\alpha,\varepsilon}\|x\| + \frac{bK_\varepsilon}{(1 + |\lambda|)^\tau}\|x\| \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta-\varepsilon}$. Sei nun $\varepsilon \in (\frac{\pi}{2}, \theta)$ fest gewählt und $a > 0$ so klein, daß $aL_{\alpha,\varepsilon} < \frac{1}{2}$ ist. Weiter sei R so groß, daß $\frac{bK_\varepsilon}{(1+R)^\tau} < \frac{1}{2}$. Wir setzen $M := aL_{\alpha,\varepsilon} + \frac{bK_\varepsilon}{(1+R)^\tau} < 1$ und $\theta' := \theta - \varepsilon$. Dann gilt für alle $\lambda \in \Sigma_{\theta'} \cap \{|\lambda| \geq R\}$ die Abschätzung (5.8). □

5.5 Anmerkungen

Die Definition und Eigenschaften analytischer Halbgruppen mit Singularität findet man z.B. bei Taira [71]. Das Beispiel 5.2.2 stammt von Krein [41]. Für weitere Beispiele analytischer Halbgruppen mit Singularität sei auf die Arbeiten von Evzerov, Silchenko und Sobolevskii [26, 27, 28, 67, 68] verwiesen.

Viele der Sätze für analytische Halbgruppen mit Singularität in diesem Kapitel sind direkte Verallgemeinerungen der entsprechenden Sätze für analytische C_0-Halbgruppen (vgl. z.B.[24, 31, 57]). Die Störungssätze in Abschnitt 5.4 sind naheliegende Verallgemeinerungen des klassischen Störungssatzes für analytische Halbgruppen bzw. für sektorielle Operatoren. Nach unserer Kenntnis gibt es die Sätze aber in dieser Form noch nicht. Ein Störungssatz mit etwas anderen Bedingungen findet man bei Krein [41].

6 Partielle Differentialgleichungen in L^p

In diesem Kapitel wollen wir unsere Störungsresultate aus Kapitel 3 und 4 auf Differentialoperatoren in $L^p(\mathbb{R}^n)$ anwenden. Zunächst betrachten wir den Fall $n = 1$.

6.1 Gewöhnliche Differentialoperatoren

Sei $X = L^p(\mathbb{R})$ mit $1 < p < \infty$ und $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Der Operator $(A_m, D(A_m))$ sei definiert durch

$$A_m f := i f^{(m)}, \qquad \text{falls } m \text{ gerade ist,}$$

und durch

$$A_m f := f^{(m)}, \qquad \text{falls } m \text{ ungerade ist,}$$

jeweils mit Definitionsbereich $D(A) := W^{m,p}(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$.

Dann erzeugt $(A_m, D(A_m))$ eine C_0-Halbgruppe auf X genau dann, wenn $p = 2$ ist ([32]). Im Fall $m = 2$ wurde dies zuerst von Hörmander [38] bewiesen. Für $p \neq 2$ erzeugt $(A_m, D(A_m))$ eine α-integrierte Halbgruppe auf X, falls $\alpha > \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ gewählt ist ([32]).

Insbesondere hat das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u'(t) &= A_m u(t), \qquad t \geq 0, \\ u(0) &= x \end{cases}$$

für jedes $x \in D(A_m^2)$ eine klassische Lösung u (vgl. Satz 3.1.5).

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) &= (A_m + B)u(t), \qquad t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{cases} \tag{6.1}$$

wobei $(B, D(B))$ für ein Potential V und eine Zahl $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch

$$Bf := V \cdot f^{(l)}$$

mit maximalem Definitionsbereich

$$D(B) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) : V \cdot f^{(l)} \in L^p(\mathbb{R})\}$$

in $L^p(\mathbb{R})$ gegeben sei. Wir werden die Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4 anwenden, um folgenden Satz zu zeigen:

6.1.1 Satz *Sei $X = L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$. $(A_m, D(A_m))$ und $(B, D(B))$ seien wie oben definiert. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $l \leq \frac{1}{p}(m-1)$ und $V \in L^p(\mathbb{R})$

oder

(ii) $l = 0$ und $V \in L^p(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$

erfüllt ist, dann ist $D(B) \supseteq D(A)$ und $(A_m + B, D(A_m))$ erzeugt für jedes $\beta > \sigma_p$ eine β-integrierte Halbgruppe. Hierbei ist

$$\sigma_p = \begin{cases} \frac{2}{p} - \frac{1}{2} & p \in (1, 2] \\ \frac{3}{2} - \frac{2}{p} & p \in (2, \infty). \end{cases}$$

Ist n die kleinste natürliche Zahl, die echt größer als σ_p ist, dann hat (6.1) für jedes $x \in D((A_m+B)^{n+1})$ genau eine klassische Lösung. Ist $p = 2$, dann erzeugt $(A_m+B, D(A_m))$ sogar eine auf $(0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe, d.h. das zugehörige Cauchy-Problem hat für jedes $x \in D(A)$ eine Lösung im Sinne von Abschnitt 4.1.

Für den Beweis unterscheiden wir die Fälle, daß m gerade bzw. ungerade ist.

6.1.1 Der Fall m gerade

Zunächst bestimmen wir die Resolvente von $(A_m, D(A_m))$. Sei hierzu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$. Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung

$$\lambda u - iu^m = 0 \tag{6.2}$$

Ein Fundamentalsystem von (6.2) ist

$$\{e^{\mu_1 x}, \ldots, e^{\mu_k x}, e^{-\mu_1 x}, \ldots, e^{-\mu_k x}\},$$

wobei $m = 2k$ und μ_j $(j = 1, \ldots, k)$ die paarweise verschiedenen Lösungen der Gleichung $\lambda - i\mu^{2k} = 0$ mit positivem Realteil seien. Eine allgemeine Lösung von (6.2) ist dann

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} (c_j e^{\mu_j x} + \tilde{c}_j e^{-\mu_j x})$$

mit komplexen Zahlen c_j, $\tilde{c}_j$ ($j = 1, \dots, k$). Da wir aber nur an Lösungen in $L^p(\mathbb{R})$ interessiert sind, muß $c_1 = \dots = c_k = \tilde{c}_1 = \dots = \tilde{c}_k = 0$ sein. Damit hat (6.2) in $L^p(\mathbb{R})$ nur die triviale Lösung, und die inhomogene Gleichung

$$\lambda v - iv^{2k} = f \tag{6.3}$$

ist für jedes $f \in L^p(\mathbb{R})$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist durch

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{-\mu_j |x-s|}}{(-\mu_j)^{2k-1}} f(s)\, ds \\ &= \frac{i}{2k} \sum_{j=1}^{k} \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\mu_j (x-s)}}{(-\mu_j)^{2k-1}} f(s)\, ds - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{\mu_j (x-s)}}{\mu_j^{2k-1}} f(s)\, ds \right) \end{aligned}$$

gegeben, was wir jetzt nachrechnen wollen. Zunächst ist v in $L^p(\mathbb{R})$, da mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|v\|_p &\leq \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\operatorname{Re}\mu_j |s|}}{|\mu_j|^{2k-1}} ds\, \|f\|_p = \frac{\|f\|_p}{2k|\lambda|^{1-1/(2k)}} \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{\operatorname{Re}\mu_j} \\ &\leq \frac{\|f\|_p}{|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \dots, k\}} \end{aligned}$$

gilt. Daß v tatsächlich die Differentialgleichung (6.3) löst, sieht man z.B. ein, indem man die Ableitungen von v berechnet. Da wir diese später sowieso brauchen, rechnen wir sie explizit aus. Für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist

$$v^{(l)}(x) = \frac{i}{2k} \sum_{j=1}^{k} \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\mu_j (x-s)}}{(-\mu_j)^{2k-l-1}} f(s)\, ds - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{\mu_j (x-s)}}{\mu_j^{2k-l-1}} f(s)\, ds \right)$$

für $l = 1, \dots, 2k-1$ und

$$\begin{aligned} v^{(2k)}(x) &= \frac{i}{2k} \sum_{j=1}^{k} \left(2f(x) + \int_{-\infty}^{x} (-\mu_j) e^{-\mu_j (x-s)} f(s)\, ds - \int_{x}^{\infty} \mu_j e^{\mu_j (x-s)} f(s)\, ds \right) \\ &= if(x) - i\lambda v(x). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt:

(a) $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}) \subseteq \rho(A_{2k})$

(b) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$ ist die Resolvente von A durch

$$R(\lambda, A_{2k}) f(x) = \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{-\mu_j |x-s|}}{(-\mu_j)^{2k-1}} f(s)\, ds$$

gegeben, und es gilt die Abschätzung

$$\|R(\lambda, A_{2k})f\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \ldots, k\}}. \tag{6.4}$$

(c) Für $l = 0, \ldots, 2k-1$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist

$$(R(\lambda, A_{2k})f)^{(l)}(x) = \frac{i}{2k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\mu_j(x-s)}}{(-\mu_j)^{2k-l-1}} f(s)\, ds - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{2k-l-1}} f(s)\, ds \Big). \tag{6.5}$$

Wir sehen uns nun den Ausdruck

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \ldots, k\}$$

in der Resolventenabschätzung (6.4) genauer an. Sei hierzu $\lambda = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß k gerade ist und setzen

$$\psi_{k,j} := \tfrac{\varphi}{2k} + \tfrac{\pi}{k}\big(j - \tfrac{k}{2} - \tfrac{1}{4}\big), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Wegen $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ ist $\psi_{k,j} \in \big(\frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\big), \frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k}{2}\big)\big) \subseteq \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, und $\mu_j := |\lambda|^{1/(2k)} e^{i\psi_{k,j}}$ $(j = 1, \ldots, k)$ sind die paarweise verschiedenen Lösungen der Gleichung $\lambda - i\mu^{2k} = 0$ mit $\operatorname{Re}\mu_j = |\lambda|^{1/(2k)} \cos\psi_{k,j} > 0$. Damit ist

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \ldots, k\} = |\lambda| \min\{\cos\psi_{k,j} :\ j = 1, \ldots, k\}. \tag{6.6}$$

Die Wertebereiche $\cos(I_j)$ der Intervalle $I_j := \big(\frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\big), \frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k}{2}\big)\big)$ $(j = 1, \ldots, k)$ unter der Kosinusfunktion sind disjunkt. Das Minimum in (6.6) wird für $j = k$ angenommen. Beachtet man $|\lambda| = \frac{\operatorname{Re}\lambda}{\cos\varphi}$, so kann der gesuchte Ausdruck als

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \ldots, k\} = \operatorname{Re}\lambda\, \frac{\cos\psi_{k,k}}{\cos\varphi}$$

geschrieben werden. Die auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definierte Funktion

$$h(\varphi) := \frac{\cos\psi_{k,k}}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\frac{\varphi}{2k} - \frac{\pi}{4k} + \frac{\pi}{2})}{\cos\varphi}$$

ist strikt positiv und stetig . Für $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$ wächst h gegen $+\infty$, für $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ konvergiert h gegen $\frac{1}{2k}$. Also existiert eine Konstante $c_k > 0$, sodaß $h(\varphi) \geq c_k$ für alle $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, d.h.

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \ldots, k\} \geq c_k \operatorname{Re}\lambda. \tag{6.7}$$

c_k hängt hierbei nur von k ab.

Ist k ungerade, setzen wir

$$\psi_{k,j} := \tfrac{\varphi}{2k} + \tfrac{\pi}{k}\big(j - \tfrac{k+1}{2} - \tfrac{1}{4}\big), \qquad j = 1, \dots, k.$$

Dann ist $\psi_{k,j} \in \big(\frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k+1}{2} - \frac{1}{2}\big), \frac{\pi}{k}\big(j - \frac{k+1}{2}\big)\big) \subseteq \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, und die paarweise verschiedenen Lösungen der Gleichung $\lambda - i\mu^{2k} = 0$ mit $\operatorname{Re}\mu_j > 0$ sind $\mu_j = |\lambda|^{1/(2k)} e^{i\psi_{k,j}}$. Durch ähnliche Überlegungen wie im obigen Fall sieht man, daß das Minimum $\min\{\cos\psi_j : j = 1, \dots, k\}$ für $j = 1$ angenommen wird. Daher ist hier

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \dots, k\} = \operatorname{Re}\lambda \frac{\cos\psi_{k,1}}{\cos\varphi}$$

geschrieben werden. Analog wie oben zeigt man, daß eine Konstante $c_k > 0$ existiert, sodaß

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{\operatorname{Re}\mu_j :\ j = 1, \dots, k\} \geq c_k \operatorname{Re}\lambda. \tag{6.8}$$

c_k hängt wieder nur von k ab.

Aus den Ungleichungen (6.7) bzw. (6.8) und der Resolventenabschätung (6.4) folgt dann, daß ein $C \geq 0$ existiert, sodaß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ die Abschätzung

$$\|R(\lambda, A_{2k})\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda} \tag{6.9}$$

gilt.

Sei nun $V \in L^p(\mathbb{R})$ und l eine nichtnegative ganze Zahl mit $l \leq \frac{1}{p}(2k-1)$. Der Operator B sei wie oben durch

$$Bf := V \cdot f^{(l)} \tag{6.10}$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(B) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ V \cdot f^{(l)} \in L^p(\mathbb{R})\}$ gegeben.

Wir wollen nun $BR(\lambda, A_{2k})$ untersuchen. Seien hierzu $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und μ_j wieder die paarweise verschiedenen Lösungen von $\lambda - i\mu^{2k} = 0$ mit $\operatorname{Re}\mu > 0$. Dann gilt mit (6.5), daß für $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$
\begin{aligned}
|\langle g, BR(\lambda, A_{2k})f\rangle| = \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)V(x)\frac{i}{2k}\sum_{j=1}^{k}\Bigg(\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\mu_j(x-s)}}{(-\mu_j)^{2k-l-1}} f(s)\, ds \\
- \int_{x}^{\infty} \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{2k-l-1}} f(s)\, ds\Bigg)\, dx\Bigg| \\
\le \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,|V(x)|\,\frac{i}{2k}\sum_{j=1}^{k}\Bigg(\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}}{|\mu_j|^{2k-l-1}} |f(s)|\, ds \\
- \int_{x}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}}{|\mu_j|^{2k-l-1}} |f(s)|\, ds\Bigg)\, dx \\
= \frac{1}{2k|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)}} \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,|V(x)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\operatorname{Re}\mu_j|x-s|}\,|f(s)|\, ds\, dx \\
\le \frac{\|f\|_p}{2k|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)}} \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,|V(x)| \Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\operatorname{Re}\mu_j|x-s|} ds\Bigg)^{1/q} dx \\
= \frac{\|f\|_p}{2k|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)}} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{2}{q\operatorname{Re}\mu_j}\right)^{1/q} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,|V(x)| dx \\
\le \frac{c}{|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)}} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu_j}\right)^{1/q} \|V\|_p \|g\|_q \|f\|_p
\end{aligned}
$$

für ein $c>0$. Weil $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ dicht ist in $L^p(\mathbb{R})$ und in $L^q(\mathbb{R})$, ist $D(B)\supset D(A)$ und

$$
\begin{aligned}
\|BR(\lambda, A_{2k})\| &\le \frac{c\|V\|_p}{|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)}} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu_j}\right)^{1/q} \\
&\le \frac{c\|V\|_p}{|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)} \min\{(\operatorname{Re}\mu_j)^{1/q} : j=1,\dots,k\}}
\end{aligned}
$$

für alle $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda>0$. Nach obigen Überlegungen ist

$$
\min\{(\operatorname{Re}\mu_j)^{1/q} : j=1,\dots,k\} = |\lambda|^{1/(2kq)}(\cos\psi_k)^{1/q},
$$

wobei für k gerade $\psi_k=\psi_{k,k}$ und für k ungerade $\psi_k=\psi_{k,1}$ gesetzt sei. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|\lambda|^{1-(l+1)/(2k)} \min\{(\operatorname{Re}\mu_j)^{1/q} : j=1,\dots,k\} &= |\lambda|^{1-(l+1)/(2k)+1/(2kq)}(\cos\psi_k)^{1/q} \\
&= |\lambda|^{1-(lp+1)/(2kp)}(\cos\psi_k)^{1/q} \\
&= (\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(2kp)} \frac{(\cos\psi_k)^{1/q}}{(\cos\varphi)^{1-(lp+1)/(2kp)}} \\
&= (\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(2kp)} \left(\frac{\cos\psi_k}{\cos\varphi}\right)^{1/q} (\cos\varphi)^{1/q-1+(lp+1)/(2kp)}.
\end{aligned}
$$

Da $\frac{1}{q} - 1 + \frac{lp+1}{2kp} = \frac{lp+1}{2kp} - \frac{1}{p} \leq \frac{2k-1+1}{2kp} - \frac{1}{p} = 0$, existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{(\operatorname{Re}\mu_j)^{1/q} : j = 1, \dots, k\} \geq c(\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(2kp)}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq \frac{c\|V\|_p}{(\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(mp)}} \tag{6.11}$$

gilt. Man beachte hierbei, daß $m = 2k$ gesetzt war.

6.1.2 Der Fall m ungerade

Wir gehen genauso vor wie im Fall, daß m gerade ist, und bestimmen zunächst die Resolvente von $(A_m, D(A_m))$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$ und μ_j $(j = 1, \dots, m)$ die paarweise verschiedenen Lösungen der Gleichung $\lambda - \mu^{2k+1} = 0$. Dann können wir genauso wie oben folgende Aussagen zeigen:

(a) $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}) \subseteq \rho(A_m)$

(b) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$ ist die Resolvente von A durch

$$R(\lambda, A_m)f(x) = \frac{1}{m}\left(\sum_{\operatorname{Re}\mu_j > 0} \int_x^\infty \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-1}} f(s)\, ds - \sum_{\operatorname{Re}\mu_j < 0} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-1}} f(s)\, ds\right)$$

gegeben und es gilt die Abschätzung

$$\|R(\lambda, A_m)f\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{|\lambda|^{1-1/m} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j| :\ j = 1, \dots, m\}} \tag{6.12}$$

(c) Für $l = 0, \dots, 2k-1$ ist

$$\begin{aligned}(R(\lambda, A_m)f)^{(l)}(x) = \frac{1}{m}\Bigg(&\sum_{\operatorname{Re}\mu_j > 0} \int_x^\infty \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-l-1}} f(s)\, ds \\ &- \sum_{\operatorname{Re}\mu_j < 0} \int_{-\infty}^x \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-l-1}} f(s)\, ds\Bigg).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Wir wollen uns wieder den Ausdruck $|\lambda|^{1-1/m} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j| :\ j = 1, \dots, m\}$ in der Resolventenabschätzung (6.12) genauer ansehen. Sei hierzu $\lambda = re^{i\varphi}$ mit $r = |\lambda| > 0$ und $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Wir setzen

$$\psi_{m,j} := \frac{\varphi + 2\pi j}{m}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Dann sind $\mu_j := r^{1/m} e^{i\psi_{m,j}}$ $(j \in \mathbb{Z})$ die Lösungen der Gleichung $\lambda - \mu^m = 0$. Der Realteil von μ_j ist $|\lambda|^{1/(m)} \cos\psi_j$. Damit ist

$$|\lambda|^{1-1/(2k)} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j| : j \in \mathbb{Z}\} = |\lambda| \min\{|\cos\psi_{m,j}| : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir bestimmen $\min\{\cos\psi_{m,j} : j \in \mathbb{Z}\}$.

Sei hierzu zunächst $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist $\psi_{m,j} \in \left[\frac{2\pi j}{m}, \frac{\pi(4j+1)}{2m}\right)$. Sieht man sich das Verhalten der Kosinusfunktion auf diesen Intervallen genauer an, dann stellt man fest, daß das Minimum für $j = \frac{m-1}{4}$ (falls $m \equiv 1 \mod 4$) bzw. für $j = -\frac{m+1}{4}$ (falls $m \equiv 3 \mod 4$) angenommen wird.

Für $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ist $\psi_{m,j} \in (\frac{\pi(4j-1)}{2m}, \frac{2\pi j}{m})$, und das Minimum wird hier angenommen für $j = \frac{1-m}{4}$ (falls $m \equiv 1 \mod 4$) bzw. für $j = \frac{m+1}{4}$ (falls $m \equiv 3 \mod 4$).

Wir definieren

$$\psi_m(\varphi) := \begin{cases} \frac{\varphi}{m} + \frac{\pi(1-m)}{2m}, & \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \frac{\varphi}{m} + \frac{\pi(m-1)}{2m}, & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad \text{für } m \equiv 1 \mod 4$$

bzw.

$$\psi_m(\varphi) := \begin{cases} \frac{\varphi}{m} + \frac{\pi(m+1)}{2m}, & \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \frac{\varphi}{m} - \frac{\pi(m+1)}{2m}, & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad \text{für } m \equiv 3 \mod 4.$$

Dann kann der gesuchte Ausdruck als

$$|\lambda|^{1-1/m} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j| : j \in \mathbb{Z}\} = \operatorname{Re}\lambda \frac{|\cos(\psi_m(\varphi))|}{\cos\varphi}$$

geschrieben werden. Die auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definierte Funktion

$$h(\varphi) := \frac{|\cos(\psi_m(\varphi))|}{\cos\varphi}$$

ist strikt positiv und stetig . Für $\varphi \to \pm\frac{\pi}{2}$ konvergiert h gegen $\frac{1}{m}$. Also existiert eine Konstante $c_m > 0$, sodaß $h(\varphi) \geq c_m$ für alle $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, d.h.

$$|\lambda|^{1-1/(m)} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j| : j \in \mathbb{Z}\} \geq c_m \operatorname{Re}\lambda.$$

c_m hängt hierbei nur von m ab.

Wir haben also für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A_m)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda} \tag{6.14}$$

gezeigt.

Als nächstes betrachten wir ein Potential $V \in L^p(\mathbb{R})$ und definieren

$$Bf := V \cdot f^{(l)}, \qquad D(B) := \{f \in X : \ V \cdot f^{(l)} \in X\},$$

wobei $l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq \frac{1}{p}(m-1)$ sei. Wir wollen nun $BR(\lambda, A_m)$ untersuchen. Seien hierzu $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und μ_j die paarweise verschiedenen Lösungen von $\lambda - \mu^m = 0$. Dann gilt mit (6.13), daß

$$\begin{aligned}
|\langle g, BR(\lambda, A_m)f\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)V(x)\frac{1}{m}\left(\sum_{\operatorname{Re}\mu_j>0}\int_x^\infty \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-l-1}}f(s)\,ds\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - \sum_{\operatorname{Re}\mu_j<0}\int_{-\infty}^x \frac{e^{\mu_j(x-s)}}{\mu_j^{m-l-1}}f(s)\,ds\right)dx\right|\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,|V(x)|\,\frac{1}{m}\left(\sum_{\operatorname{Re}\mu_j>0}\int_x^\infty \frac{e^{\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}}{|\mu_j|^{m-l-1}}|f(s)|\,ds\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{\operatorname{Re}\mu_j<0}\int_{-\infty}^x \frac{e^{\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}}{|\mu_j|^{m-l-1}}|f(s)|\,ds\right)dx\\
&= \frac{1}{m|\lambda|^{1-(l+1)/m}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,|V(x)|\left(\sum_{\operatorname{Re}\mu_j>0}\int_x^\infty e^{\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}|f(s)|\,ds\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{\operatorname{Re}\mu_j<0}\int_{-\infty}^x e^{\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}|f(s)|\,ds\right)dx\\
&\leq \frac{1}{m|\lambda|^{1-(l+1)/m}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,|V(x)|\left(\sum_{\operatorname{Re}\mu_j>0}\left(\int_x^\infty e^{q\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}\,ds\right)^{1/q}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{\operatorname{Re}\mu_j<0}\left(\int_{-\infty}^x e^{q\operatorname{Re}\mu_j(x-s)}\,ds\right)^{1/q}\right)dx\|f\|_p\\
&= \frac{1}{m|\lambda|^{1-(l+1)/m}}\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{q|\operatorname{Re}\mu_j|}\right)^{1/q}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,|V(x)|dx\|f\|_p\\
&\leq \frac{c}{|\lambda|^{1-(l+1)/m}}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{|\operatorname{Re}\mu_j|}\right)^{1/q}\|V\|_p\|g\|_q\|f\|_p
\end{aligned}$$

für $c > 0$. Weil $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht ist in $L^p(\mathbb{R})$ und in $L^q(\mathbb{R})$, ist

$$\begin{aligned}
\|BR(\lambda, A_m)\| &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1-(l+1)/m}}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{|\operatorname{Re}\mu_j|}\right)^{1/q}\\
&\leq \frac{c}{|\lambda|^{1-(l+1)/m}\min\{|\operatorname{Re}\mu_j|^{1/q} : j = 1, \ldots, m\}}.
\end{aligned}$$

Nach obigen Überlegungen ist

$$\min\{|\operatorname{Re}\mu_j|^{1/q} : j = 1, \ldots, m\} = |\lambda|^{1/(mq)} |\cos\psi_m(\varphi)|^{1/q}$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\lambda|^{1-(l+1)/m} \min\{|\operatorname{Re}\mu_j|^{1/q} : j = 1, \ldots, m\} &= |\lambda|^{1+1/(mq)-(l+1)/m} |\cos\psi_m(\varphi)|^{1/q} \\
&= (\operatorname{Re}\lambda)^{1-(l+1)/m+1/(mq)} \frac{|\cos\psi_m(\varphi)|^{1/q}}{(\cos\varphi)^{1+1/(mq)-(l+1)/m}} \\
&= (\operatorname{Re}\lambda)^{1-(l+1)/m+1/(mq)} \left(\frac{|\cos\psi_m(\varphi)|}{\cos\varphi}\right)^{1/q} (\cos\varphi)^{1/q-1-1/(mq)+(l+1)/m}.
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{q} - 1 + \frac{l+1}{m} - \frac{1}{mq} = \frac{1}{m}(l - \frac{1}{p}(m-1)) \leq 0$, existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\lambda|^{1-1/m} \min\{(\operatorname{Re}\mu_j)^{1/q} : j = 1, \ldots, m\} \leq c(\operatorname{Re}\lambda)^{1-(l+1)/(m)+1/(mq)}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq \frac{c\|V\|_p}{(\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(mp)}}. \tag{6.15}$$

6.1.3 Beweis von Satz 6.1.1

Jetzt haben wir alles beisammen, um Satz 6.1.1 zu beweisen.

Beweis von Satz 6.1.1 Wir setzen zunächst (i) voraus. Nach (6.11) bzw. (6.15) existiert ein $c \geq 0$, sodaß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq \frac{c\|V\|_p}{(\operatorname{Re}\lambda)^{1-(lp+1)/(mp)}}$$

gilt. Da $l \leq \frac{1}{p}(m-1)$ und $p > 1$ ist, gilt $1 - \frac{lp+1}{mp} \geq 1 - \frac{m}{mp} = 1 - \frac{1}{p} > 0$. Daher existiert ein $\lambda_0 > 0$, sodaß $M := C\|V\|_p \lambda_0^{-1+(lp+1)/(mp)} < 1$ ist. Damit ist

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq M \qquad \text{für } \operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0.$$

Sei nun (ii) vorausgesetzt. Dann läßt sich V als $V_p + V_\infty$ schreiben mit $V_p \in L^p(\mathbb{R})$ und $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sei

$$B_p f := V_p \cdot f$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(B_p) = D(B)$. B_∞, definiert durch

$$B_\infty f := V_\infty \cdot f$$

ist ein beschränkter Operator auf $L^p(\mathbb{R})$ und es gilt $B = B_p + B_\infty$. Damit ist

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq \|B_p R(\lambda, A_m)\| + \|B_\infty R(\lambda, A_m)\|.$$

$\|B_p R(\lambda, A_m)\|$ läßt sich nach (6.11) bzw. (6.15) abschätzen durch

$$\|B_p R(\lambda, A_m)\| \leq \frac{c\|V_p\|_p}{(\operatorname{Re}\lambda)^{1-1/(mp)}}$$

und für $\|B_\infty R(\lambda, A_m)\|$ gilt nach (6.9) bzw. (6.14)

$$\|R(\lambda, A_m)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Sei nun $\lambda_0 > 0$ so gewählt, daß

$$M := \frac{c\|V_p\|_p}{\lambda_0^{1-1/(mp)}} + \frac{C\|V_\infty\|_\infty}{\lambda_0} < 1.$$

Dann ist auch hier

$$\|BR(\lambda, A_m)\| \leq M \qquad \text{für alle } \operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0.$$

Da $(A_m, D(A_m))$ für jedes $\alpha > \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ eine α-integrierte Halbgruppe erzeugt, sind in beiden Fällen die Voraussetzungen für Satz 3.3.1 erfüllt, und wir erhalten, daß der Operator $(A_m+B, D(A_m))$ für $\beta > \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|+\max\left\{\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right\}$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt. Für $p \in (1,2)$ ist $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|+\max\left\{\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{p} = \frac{2}{p}-\frac{1}{2}$, und für $p \in (2,\infty)$ gilt $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \max\left\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{3}{2} - \frac{2}{p}$.

Falls $p = 2$, können wir mit Hilfe von Dualitätsüberlegungen auch

$$\|R(\lambda, A_m)Bx\| \leq M\|x\|$$

für alle $x \in D(B)$ und alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$ zeigen und dann Satz 4.3.1 anwenden . □

6.2 Die Schrödinger-Gleichung in L^p für $n \geq 3$

Sei $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 < p < \infty)$ und $n \geq 3$. Sei

$$A_p := i\Delta$$

mit maximalem Definitionsbereich $D(A_p)$ in X. Dann erzeugt $(A_p, D(A_p))$ nach [32] für alle $\alpha > \gamma_{n,p} := n|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$ eine α-integrierte Halbgruppe.

Nach [8] gilt folgende Normabschätzung für die Resolvente von $(A_p, D(A_p))$:

6.2.1 Satz *Sei $n \geq 3$, k eine natürliche Zahl $> n$, $p \in (\frac{2k}{k+1}, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $\theta = \frac{2}{p} - 1$. Dann existiert eine positive Konstante C, sodaß für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$*

$$\|R(\lambda, A_p)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C\frac{1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{k\theta}}{|\operatorname{Re}\lambda|}.$$

gilt.

Damit erhalten wir folgendes Resultat:

6.2.2 Satz *Sei $n \geq 3$ und k eine natürliche Zahl $> n$. Dann gilt:*
(a) Ist $p \in (\frac{2k}{k+1}, 2]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ und $B \in \mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$, dann erzeugt $(A_p+B, D(A_p))$ für $\beta > \frac{n+1}{p} - \frac{n}{2}$ eine β-integrierte Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
(b) Ist $p \in [2, \frac{2k}{k-1})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $B \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$, dann erzeugt eine abgeschlossene Erweiterung von $(A_p+B, D(A_p) \cap D(B))$ für $\beta > \frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{p}$ eine β-integrierte Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist $D(B) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : Bf \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$.

Beweis (a) Da $\theta := \frac{2}{p} - 1 < \frac{2(k+1)}{2k} - 1 = \frac{1}{k}$, ist $k\theta < 1$. Damit gilt nach Satz 6.2.1

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A_p)\|_{\mathcal{L}(L^p)} &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(L^q,L^p)} \|R(\lambda, A_p)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \\ &\leq C\|B\|_{\mathcal{L}(L^q,L^p)} \frac{1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{k\theta}}{|\operatorname{Re}\lambda|} < 1, \end{aligned}$$

falls $\operatorname{Re}\lambda$ groß genug ist. Damit folgt mit Satz 3.3.1, daß $(A_p + B, D(A_p))$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt für $\beta > \gamma_{n,p} + \frac{1}{p} = \frac{n}{p} - \frac{n}{2} + \frac{1}{p} = \frac{n+1}{p} - \frac{n}{2}$.

(b) Da $p \in [2, \frac{2k}{k-1})$ ist $q \in (\frac{2k}{k+1}, 2]$ und damit

$$\|R(\lambda, A_q)\|_{\mathcal{L}(L^q,L^p)} \leq C\frac{1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{k\theta}}{|\operatorname{Re}\lambda|},$$

wobei θ diesmal als $\frac{2}{q} - 1$ definiert ist. Für $x \in D(B)$ ist $Bx \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ und damit

$$\|R(\lambda, A_p)Bx\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \|R(\lambda, A_q)Bx\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq \|R(\lambda, A_q)\|_{\mathcal{L}(L^q,L^p)} \|B\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} < 1$$

für große $\operatorname{Re}\lambda$. Also erhalten wir mit Satz 3.3.1, daß eine abgeschlossene Erweiterung von $(A_p + B, D(A_p) \cap D(B))$ eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt für $\beta > \gamma_{n,p} + \frac{1}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{p}$. □

7 Differentialgleichungen mit Delay

Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \Phi u_t, & t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u_0 = f. \end{cases} \tag{7.1}$$

unter den folgenden Voraussetzungen:

- X ist ein Banachraum und $x \in X$,
- $(A, D(A))$ ist ein abgeschlossener Operator in X,
- $f \in L^p([-1,0], X)$, $1 \leq p < \infty$,
- der Delay-Operator Φ sei linear und beschränkt von $W^{1,p}([-1,0], X)$ nach X,
- $u : [-1, \infty) \to X$ und $u_t : [-1, 0] \to X$ mit $u_t(\sigma) = u(t + \sigma)$ für $\sigma \in [-1, 0]$.

Eine Funktion $u : [-1, \infty) \to X$ heißt **(klassische) Lösung** von (7.1), falls

(i) $u \in C([-1, \infty), X) \cap C^1([0, \infty), X)$,

(ii) $u(t) \in D(A)$ und $u_t \in W^{1,p}([-1, 0], X)$ für alle $t \geq 0$ und

(iii) u für alle $t \geq 0$ der Delay-Gleichung (7.1) genügt.

7.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

A. Batkai und S. Piazzera [9] haben gezeigt, daß die eindeutige Lösbarkeit von (7.1) äquivalent ist zur Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung eines assoziierten abstrakten Cauchyproblems:
Sei $\mathcal{X}$ der Banachraum

$$\mathcal{X} := X \times L^p([-1, 0], X)$$

und der Operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ in $\mathcal{X}$ durch

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & \Phi \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \binom{x}{f} \in D(A) \times W^{1,p}([-1,0], X) : f(0) = x \right\}.$$

gegeben. Dann ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen. Ist A dicht definiert, dann auch $\mathcal{A}$. Hat (7.1) eine Lösung, dann ist notwendigerweise $u_0 = f \in W^{1,p}([-1,0], X)$ und $u(0) = x \in D(A)$, d.h. $\binom{x}{f} \in D(\mathcal{A})$.

Das zu (7.1) assoziierte Cauchyproblem ist dann

$$\begin{cases} \mathcal{U}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{U}(t), & t \geq 0 \\ \mathcal{U}(0) = \binom{x}{f}. \end{cases} \tag{7.3}$$

und es gilt folgender Satz [9]:

7.1.1 Satz *Sei* $\binom{x}{f} \in D(\mathcal{A})$.

(a) Ist $u : [-1, \infty) \to X$ *eine Lösung von* (7.1), *so ist*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} [0, \infty) & \to & \mathcal{X} \\ t & \mapsto & \binom{u(t)}{u_t} \end{cases}$$

eine klassische Lösung des abstrakten Cauchy–Problems (7.3).

(b) Sei

$$\mathcal{U} : \begin{cases} [0, \infty) & \to & \mathcal{X} \\ t & \mapsto & \binom{z(t)}{v(t)} \end{cases}$$

eine klassische Lösung von (7.3) *und* $u : [-1, \infty) \to X$ *definiert durch*

$$u(t) := \begin{cases} z(t), & t \geq 0 \\ f(t), & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Dann ist $u_t = v(t)$ *für alle* $t \geq 0$ *und* u *ist eine Lösung von* (7.1).

Ist also $\binom{x}{f} \in D(\mathcal{A})$, dann hat die Delay-Gleichung (7.1) genau dann eine eindeutige Lösung, wenn das assoziierte Cauchyproblem (7.3) genau eine klassische Lösung hat.

7.2 Wann erzeugt $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ eine α-integrierte Halbgruppe?

Wir wollen nun untersuchen, wann $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ eine α-integrierte Halbgruppe in $\mathcal{X}$ erzeugt. (In diesem Fall hat dann (7.1) eine eindeutige Lösung in $D(\mathcal{A}^{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \alpha$.)

Zu diesem Zweck schreiben wir $\mathcal{A}$ wie in [9] als die Summe $\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$, wobei

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}$$

mit Definitionsbereich $D(\mathcal{A}_0) := D(\mathcal{A})$ und

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(D(\mathcal{A}_0), \mathcal{X}).$$

Dann gilt folgender Satz:

7.2.1 Satz *Sei $\alpha \geq 0$ und $(A, D(A))$ der Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe auf X. Dann erzeugt $(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$ eine α-integrierte Halbgruppe auf $\mathcal{X}$.*

Zum Beweis bestimmen wir zunächst die Resolvente von $(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\binom{y}{g} \in \mathcal{X}$ suchen wir $\binom{x}{f} \in D(\mathcal{A}_0)$ mit

$$(\lambda - \mathcal{A})\binom{x}{f} = \binom{y}{g}.$$

Dies ist äquivalent dazu, daß $x \in D(A)$ und $f \in W^{1,p}([-1, 0], X)$ mit $f(0) = x$ existieren, sodaß

$$(\lambda - A)x = y \qquad \text{und} \qquad \lambda f - f' = g$$

gilt. Erzeugt $(A, D(A))$ eine α-integrierte Halbgruppe in X, dann ist für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0\}$ in der Resolventenmenge von A enthalten. Daher ist die erste Gleichung für solche λ äquivalent zu $x = R(\lambda, A)y$.

Andererseits hat die lineare Differentialgleichung $\lambda f - f' = g$ mit Anfangsbedingung $f(0) = x$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Lösung $f \in W^{1,p}([-1, 0], X)$. Die Lösung ist durch

$$f(\sigma) = e^{\lambda\sigma}\left(x + \int_\sigma^0 e^{-\lambda t} g(t)dt\right)$$

gegeben. Nun hat aber der Operator $(A_0, D(A_0))$, definiert durch

$$A_0 f = f', \qquad D(A_0) = \{f \in W^{1,p}([-1, 0], X) : f(0) = 0\},$$

leeres Spektrum, und es gilt

$$R(\lambda, A_0)g(\sigma) = e^{\lambda\sigma} \int_\sigma^0 e^{-\lambda t} g(t)dt.$$

Also ist die Resolvente von $(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$ für $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$ durch

$$R(\lambda, \mathcal{A}_0)\binom{x}{f} = \begin{pmatrix} R(\lambda, A)x \\ e^{\lambda\cdot}R(\lambda, A)x + R(\lambda, A_0)f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda, A) & 0 \\ e^{\lambda\cdot}R(\lambda, A) & R(\lambda, A_0) \end{pmatrix}\binom{x}{f} \quad (7.4)$$

gegeben.

$(A_0, D(A_0))$ erzeugt die nilpotente Shifthalbgruppe $(T_0(t))_{t\geq 0}$ in $L^p([-1,0], X)$, gegeben durch

$$(T_0(t)f)(\sigma) := \begin{cases} f(\sigma + t), & \sigma + t \leq 0 \\ 0, & \sigma + t > 0 \end{cases}$$

(siehe [24, I.4.17, II.2.11]). Sei

$$S_0(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} T_0(t)dt.$$

Dann ist $(S_0(t))_{t\geq 0}$ nach (3.2) die von $(A_0, D(A_0))$ erzeugte α-integrierte Halbgruppe.

Wir definieren noch $S_t : X \to L^p([-1,0], X)$ $(t \geq 0)$ durch

$$(S_t x)(\tau) := \begin{cases} S(t+\tau)x, & -t < \tau \leq 0 \\ 0, & -1 \leq \tau \leq -t. \end{cases}$$

Hierbei sei $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $(A, D(A))$ erzeugte α-integrierte Halbgruppe. Nun beweisen wir Satz 7.2.1.

Beweis von Satz 7.2.1 Sei

$$\mathcal{S}_0(t) := \begin{pmatrix} S(t) & 0 \\ S_t & S_0(t) \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Für jedes $t \geq 0$ ist $\mathcal{S}_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Außerdem ist $(\mathcal{S}_0(t))_{t\geq 0}$ stark stetig, da $(S(t))_{t\geq 0}$ und $(S_0(t))_{t\geq 0}$ stark stetig sind.

Es ist $\omega = \max\{\operatorname{abs}(S), \operatorname{abs}(S_0)\} < \infty$, und für $\lambda > \omega$ gilt

$$\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt = R(\lambda, A) \quad \text{bzw.} \quad \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_0(t)dt = R(\lambda, A_0).$$

Ist $x \in X$ und $\tau \in [-1, 0]$, erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}(S_t x)(\tau)dt &= \lambda^\alpha \int_{-\tau}^\infty e^{-\lambda t} S(t+\tau)xdt \\ &= e^{\lambda\tau}\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt \\ &= e^{\lambda\tau} R(\lambda, A)x. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$R(\lambda, \mathcal{A}_0) = \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{S}_0(t)dt,$$

d.h. $(\mathcal{S}_0(t))_{t\geq 0}$ ist die von $(\mathcal{A}_0, D(\mathcal{A}_0))$ erzeugte α-integrierte Halbgruppe. □

Wir setzen ab jetzt voraus, daß $(A, D(A))$ eine α-integrierte Halbgruppe auf X erzeugt, und wenden die Ergebnisse aus Kapitel 3 an, um Bedingungen an den Delay-Operator Φ zu finden, so daß $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ für eine β-integrierte Halbgruppe erzeugt.

Nach (7.4) ist

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{B}R(\lambda, \mathcal{A}_0)\binom{x}{f} \right\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\lambda, A)x \\ e^{\lambda \cdot} R(\lambda, A) + R(\lambda, \mathcal{A}_0)f \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} \\ &= \left\| \Phi(e^{\lambda \cdot} R(\lambda, A)x + R(\lambda, A_0)f) \right\|_X \end{aligned}$$

für $\binom{x}{f} \in \mathcal{X}$. $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$ ist hierbei eine der äquivalenten Normen auf $X \times L^p([-1, 0], X)$ (vgl. Abschnitt 2.1 (2.1)). Damit folgt mit Hilfe der Störungssätze 3.2.2, 3.2.4 und 3.3.1 sofort folgendes Ergebnis:

7.2.2 Satz *Sei X ein Banachraum und $(A, D(A))$ Erzeuger einer α-integrierte Halbgruppe auf X. Sei $\Phi \in \mathcal{L}(W^{1,p}([-1, 0], X), X)$. Falls Zahlen $M \in [0, 1)$ und $\lambda_0 > 0$ existieren, so daß*

$$\left\| \Phi(e^{\lambda \cdot} R(\lambda, A)x + R(\lambda, A_0)f) \right\|_X \leq M \left\| \binom{x}{f} \right\|_{\mathcal{X}} \tag{7.5}$$

für alle $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_0$, dann erzeugt der in (7.2) definierte Operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ für alle $\beta > \alpha + s$ eine β-integrierte Halbgruppe. Hierbei ist $s = 2$ im allgemeinen Fall. Ist $(A, D(A))$ dicht definiert und die von $(A, D(A))$ erzeugte α-integrierte Halbgruppe exponentiell beschränkt, dann kann $s = \frac{1}{q}$ gewählt werden, wobei $q \in [1, 2]$ der Fourier-Typ von $\mathcal{X}$ sei.

7.2.3 Bemerkung Hat X Fourier-Typ $q \in [1, 2]$ und $p \in [q, q']$ ($\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$), dann hat $X \times L^p([-1, 0], X)$ ebenfalls Fourier-Typ q (vgl. die Bemerkungen zu Banachräumen mit Fourier-Typ in Abschnitt 2.3).

7.3 Beispiele

Im folgenden geben wir einige Beispiele für Delay-Operatoren Φ, für die man die Bedingung (7.5) zeigen kann.

7.3.1 Beispiel Sei $\Phi \in \mathcal{L}(L^p([-1, 0], X), X)$. Dann gilt

$$\|\Phi(e^{\lambda \cdot} R(\lambda, A)x + R(\lambda, A_0)f\|_X \leq \|\Phi\| \Big(\|R(\lambda, A)x\|_X + \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda} \|f\|_p \Big).$$

Ist $R(\lambda, A)$ gleichmäßig beschränkt auf einer Parallelen zur imaginären Achse, dann ist (7.5) erfüllt, falls $\|\Phi\|$ klein genug ist. Gilt sogar $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{K}{(\operatorname{Re}\lambda)^\tau}$ für ein $\tau > 0$ auf einer rechten Halbebene, dann ist (7.5) für alle $\Phi \in \mathcal{L}(L^p([-1,0],X),X)$ richtig.

7.3.2 Beispiel Sei X ein Banachraum, $m \in L^1([-1,0])$ und $\Phi : W^{1,p}([-1,0],X) \to X$ definiert durch

$$\Phi f := \int_{-1}^{0} m(\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\|\Phi(e^{\lambda\cdot} R(\lambda, A)x)\|_X &= \left\| \int_{-1}^{0} m(\sigma) e^{\lambda\sigma} R(\lambda, A) x d\sigma \right\|_X \\
&\le \int_{-1}^{0} |m(\sigma)| e^{\operatorname{Re}\lambda\sigma} d\sigma \|R(\lambda, A)x\|_X \\
&\le \|m\|_1 \|R(\lambda, A)x\|_X.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\Phi(R(\lambda, \tfrac{d}{d\sigma})f) &= \int_{-1}^{0} m(\sigma) \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} (T_0(t)f)(\sigma) dt d\sigma \\
&= \int_{-1}^{0} m(\sigma) \int_{0}^{-\sigma} e^{-\lambda t} f(\sigma + t) dt d\sigma
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\|\Phi(R(\lambda, \tfrac{d}{d\sigma})f)\|_X &\le \int_{-1}^{0} |m(\sigma)| \int_{0}^{-\sigma} e^{-\operatorname{Re}\lambda t} \|f(\sigma + t)\|_X dt d\sigma \\
&\le \int_{-1}^{0} |m(\sigma)| \int_{0}^{-\sigma} \|f(\sigma + t)\|_X dt d\sigma \\
&\le \|m\|_1 \|f\|_{L^p([-1,0],X)}.
\end{aligned}$$

Ist $R(\lambda, A)$ gleichmäßig beschränkt auf einer Parallelen zur imaginären Achse, dann ist (7.5) erfüllt, falls $\|m\|_1$ klein genug ist. Gilt sogar $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{K}{(\operatorname{Re}\lambda)^\tau}$ für ein $\tau > 0$ auf einer rechten Halbebene, dann ist (7.5) für alle $\Phi \in \mathcal{L}(L^p([-1,0],X),X)$ richtig.

7.3.3 Beispiel Sei $1 < p < \infty$ und $\eta : [-1,0] \to \mathcal{L}(X)$ von beschränkter Variation. Sei $\Phi : C([-1,0],X) \to X$ gegeben durch das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\Phi f := \int_{-1}^{0} d\eta f, \qquad f \in C([-1,0],X).$$

Dann ist $\Phi \in \mathcal{L}(C([-1,0],X),X)$ und damit insbesondere $\Phi \in \mathcal{L}(W^{1,p}([-1,0],X),X)$, da $W^{1,p}([-1,0],X)$ stetig in $C([-1,0],X)$ eingebettet ist. Falls der Realteil von λ groß genug ist, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(e^{\lambda\cdot}R(\lambda,A)x)\|_X &= \left\|\int_{-1}^{0} d\eta(\sigma)e^{\lambda\sigma}R(\lambda,A)x\right\|_X \\
&\leq \int_{-1}^{0} e^{\operatorname{Re}\lambda\sigma} d|\eta|(\sigma)\,\|R(\lambda,A)x\|_X
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\|\Phi R(\lambda,A_0)f\|_X &= \left\|\int_{-1}^{0} d\eta(\sigma)(R(\lambda,A_0)f)(\sigma)\right\|_X \\
&= \left\|\int_{-1}^{0} d\eta(\sigma)\int_{\sigma}^{0} e^{-\lambda(t-\sigma)}f(t)dt\right\|_X \\
&\leq \int_{-1}^{0}\int_{\sigma}^{0} e^{-\operatorname{Re}\lambda(t-\sigma)}\|f(t)\|_X dt\, d|\eta|(\sigma) \\
&\leq \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sigma}^{0} e^{-\operatorname{Re}\lambda(t-\sigma)q}dt\right)^{1/q} dt\, d|\eta|(\sigma)\|f(t)\|_p \\
&\leq (\operatorname{Re}\lambda q)^{-1/q}\,|\eta|([-1,0])\,\|f\|_p,
\end{aligned}
$$

wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $|\eta|$ das durch die totale Variation von η definierte positive Borelmaß auf $[-1,0]$ sei. Ist $R(\lambda,A)$ gleichmäßig beschränkt auf einer Parallelen zur imaginären Achse, dann ist (7.5) erfüllt, falls $|\eta|([-1,0])$ klein genug ist. Gilt sogar $\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{K}{(\operatorname{Re}\lambda)^\tau}$ für ein $\tau>0$ auf einer rechten Halbebene, dann ist (7.5) für alle $\Phi \in \mathcal{L}(L^p([-1,0],X),X)$ richtig.

7.3.4 Bemerkung (i) Hat $(A,D(A))$ positive Resolvente, dann ist nach [4] $R(\lambda,A)$ gleichmäßig beschränkt auf einer Halbebene.
(ii) Ist $(A,D(A))$ einer der Operatoren $(A_m,D(A_m))$ aus Kapitel 6.1, dann gilt die Abschätzung $\|R(\lambda,A_m)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda}$ für $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Literaturverzeichnis

[1] Amann, H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol. I. Abstract linear theory.* Monographs in Mathematics 89. Birkhäuser Boston, 1995.

[2] Arendt, W. Resolvent positive operators. *Proc. London Math. Soc. (3) 54* (1987), 321–349.

[3] Arendt, W. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. *Israel J. Math. 59* (1987), 327–352.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M. und Neubrander, F. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Birkhäuser Basel Boston Berlin, 2001.

[5] Arendt, W., Neubrander, F. und Schlotterbeck, U. Interpolation of semigroups and integrated semigroups. *Semigroup Forum 45* (1992), 26–37.

[6] Arendt, W. und Rhandi, A. Perturbation of positive semigroups. *Arch. Math. 56* (1991), 107–119.

[7] Balabane, M. und Emami-Rad, H. A. Smooth distribution group and Schrödinger equation in $L^p(\mathbb{R}^n)$. *J. Math. Anal. Appl. 70* (1979), 61–71.

[8] Balabane, M. und Emami-Rad, H. A. L^p estimates for Schrödinger evolution equations. *Trans. Amer. Math. Soc. 292* (1985), 357–373.

[9] Bátkai, A. und Piazzera, S. Semigroups and linear partial differential equations with delay. *J. Math. Anal. Appl. 264* (2001), 1–20.

[10] Beals, R. On the abstract Cauchy problem. *J. Functional Analysis 10* (1972), 281–299.

[11] Bourgain, J. A Hausdorff-Young inequality for B-convex Banach spaces. *Pacific J. Math. 101*, 2 (1982), 255–262.

[12] Bourgain, J. Vector-valued Hausdorff-Young inequalities and applications. In *Geometric aspects of functional analysis (1986/87)*, Lecture Notes in Math., 1317. Springer, 1988, 239–249.

[13] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable.* Springer Verlag, 1978.

[14] Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis.* Springer Verlag, 1990.

[15] Davies, E. B. *One-parameter semigroups.* London Mathematical Society Monographs, 15. Academic Press Inc. London-New York, 1980.

[16] Davies, E. B. *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[17] Davies, E. B. *Spectral Theory and Differential Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[18] deLaubenfels, R. Integrated semigroups, C-semigroups and the abstract Cauchy problem. *Semigroup Forum 41* (1990), 83–95.

[19] deLaubenfels, R. Existence families, functional calculi and evolution equations. *Lect. Notes in Math. 1570* (1994).

[20] deLaubenfels, R., Huang, Z., Wang, S. und Wang, Y. Laplace transforms of polynomially bounded vector-valued functions and semigroups of operators. *Israel J. Math. 98* (1997), 189–207.

[21] deLaubenfels, R. und Jazar, M. Functional calculi, regularized semigroups and integrated semigroups. *Studia Math. 132*, 2 (1999), 151–172.

[22] Diestel, J. und Uhl, J. J. *Vector Measures.* No. 15 in Mathematical Surveys. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[23] Dunford, N. und Schwartz, J. T. *Linear Operators, Part I: General Theory.* Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

[24] Engel, K.-J. und Nagel, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000.

[25] Evans, L. C. *Partial differential equations.* Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[26] Evzerov, I. D. Domains of fractional powers of ordinary differential operators in spaces L_p. *Math. Notes 21* (1977), 285–290.

[27] Evzerov, I. D. und Sobolevskii, P. E. Fractional powers of ordinary differential equations. *Differ. Equations 9* (1973), 174–182.

[28] Evzerov, I. D. und Sobolevskii, P. E. Resolvents and fractional powers of ordinary differential operators on spaces of smooth functions. *Differ. Equations 12* (1976), 155–159.

[29] Gilbarg, D. und Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[30] Girardi, M. und Weis, L. Operator-valued Fourier multiplier theorems on Besov spaces. preprint.

[31] Goldstein, J. A. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985.

[32] Hieber, M. *Integrated semigroups and differential operators on L^p.* Dissertation, Tübingen, 1989.

[33] Hieber, M. An operator-theoretic approach to Dirac's equation in L^p-spaces. *Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen WS 89/90* (1990).

[34] Hieber, M. Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces. *Math. Ann. 291* (1991), 1–16.

[35] Hieber, M. Integrated semigroups and the cauchy problem for systems in L^p spaces. *J. Math. Anal. Appl. 162* (1991), 300–308.

[36] Hieber, M. Laplace transforms and α-times integrated semigroups. *Forum Math. 3* (1991), 595–612.

[37] Hille, E. und Phillips, R. S. *Semigroups and Functional Analysis.* Am. Math. Soc., 1957.

[38] Hörmander, L. Estimates for translation invariant operators in L^p-spaces. *Acta Math. 104* (1960), 93–139.

[39] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[40] Kellermann, H. und Hieber, M. Integrated semigroups. *J. Funct. Anal. 84* (1989), 160–180.

[41] Kreĭn, S. G. *Linear differential equations in Banach spaces. Translated from the Russian by J. M. Danskin.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971.

[42] Kunstmann, P. C. Regularization of semigroups that are strongly continuous for $t > 0$. *Proc. Amer. Math. Soc. 126*, 9 (1998), 2721–2724.

[43] Kunstmann, P. C. Distribution semigroups and abstract Cauchy problems. *Trans. Amer. Math. Soc. 351*, 2 (1999), 837–856.

[44] Kunstmann, P. C. und Weis, L. Perturbation theorems for maximal L^p-regularity. preprint.

[45] Kwapien, S. Isomorphic characterisations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math. 44* (1972), 583–595.

[46] Lang, S. *Complex Analysis.* Graduate Texts in Mathematics, 103. Springer Verlag, New York, 1999.

[47] Li, Y.-C. und Shaw, S.-Y. Perturbation of non-exponentially-bounded α-times integrated C-semigroups. preprint.

[48] Lindenstrauss, J. und Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces. I. Sequence spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 92. Springer-Verlag Berlin New York, 1977.

[49] Lindenstrauss, J. und Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II. Function spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 97. Springer-Verlag Berlin New York, 1979.

[50] Miana, P. J. α-times integrated semigroups and fractional derivation. preprint.

[51] Mijatović, M., Pilipović, S. und Vajzović, F. α-times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). *J. Math. Anal. Appl. 210* (1997), 790–803.

[52] Nagel, R. Towards a "matrix theory" for unbounded operator matrices. *Math. Z. 201* (1989), 57–68.

[53] Neubrander, F. Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem. *Pacific J. Math. 135* (1988), 111–155.

[54] Neubrander, F. Integrated semigroups and their application to complete second order Cauchy problems. *Semigroup Forum 38* (1989), 233–251.

[55] Nicaise, S. The Hille-Yosida and Trotter-Kato theorems for integrated semigroups. *J. Math. Anal. Appl. 180* (1993), 303–316.

[56] Pang, M. M. H. Resolvent estimates for Schrödinger operators in $L^p(\mathbb{R}^N)$ and the theory of exponentially bounded C-semigroups. *Semigroup Forum 41* (1990), 97–114.

[57] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.

[58] Peetre, J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 42* (1969), 15–26.

[59] Pisier, G. *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces.* No. 60 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[60] Prüss, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser Basel Boston Berlin, 1993.

[61] Räbiger, F., Rhandi, A. und Schnaubelt, R. Perturbation and an abstract characterization of evolution semigroups. *J. Math. Anal. Appl. 198* (1996), 516–533.

[62] Reed, M. und Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press, 1975.

[63] Reed, M. und Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, 1980.

[64] Rhandi, A. *Perturbations positves des equations d'evolution et applications.* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1990.

[65] Rhandi, A. Dyson-Phillips expansion and unbounded perturbations of linear C_0-semigroups. *J. Comput. Appl. Math. 44* (1992), 339–349.

[66] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Dsseldorf-Johannesburg, 1974.

[67] Silchenko, Y. T. und Sobolevskii, P. E. Survey of some investigations of evolution equations generating semigroups with singularities and nondensely defined generators. Preprint.

[68] Silchenko, Y. T., and Sobolevskii, P. E. Solvability of the Cauchy problem for an evolution equation in a Banach space with nondensely defined operator coefficient generating a semigroup with singularity. *Sib. Math. J. 27* (1986), 544–553.

[69] Straub, B. Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvent and the semigroups generated by them. *Hiroshima Math. J. 24* (1994), 529–548.

[70] Taira, K. Un théorèm d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes aux limites non-elliptiques. *J. Funct. Anal. 43* (1981), 166–192.

[71] Taira, K. The theory of semigroups with weak singularity and its application to partial differential equations. *Tsucuba J. Math. 13*, 2 (1989), 513–562.

[72] Tanaka, N. und Miyadera, I. Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups. *Tokyo J. Math. 12*, 1 (1989), 99–115.

[73] Thieme, H. und Vosseler, H. A Stieltjes type convolution for integrated semigroups of strong bounded variation and L_p-solutions to the abstract Cauchy-problem. preprint.

[74] Triebel, H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North-Holland Mathematical Library, 18. North-Holland Publishing Co., Amsterdam New York, 1978.

[75] Umezu, K. On the Cauchy problem for analytic semigroups with weak singularity. *Tsucuba J. Math. 15*, 2 (1991), 275–292.

[76] Werner, D. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag Berlin, 1997.

[77] Widder, D. V. *The Laplace Transform.* Princeton Mathematical Series, 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[78] Wrobel, V. Asymptotic behavior of C_0-semigroups in B-convex spaces. *Indiana Univ. Math. J. 38*, 1 (1989), 101–114.

[79] Wrobel, V. Optimal individual stability estimates for C_0-semigroups in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 351*, 12 (1999), 4981–4994.

[80] Wu, J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, 1996.

[81] Xiao, T.-J. und Liang, J. Approximations of Laplace transforms and integrated semigroups. *J. Funct. Anal. 172* (2000), 202–220.

Lebenslauf

Am 22. Juni 1975 wurde ich als Tochter von Gerhard Kaiser und seiner Ehefrau Brigitte, geb. Haberer, in Karlsruhe geboren.

Von August 1981 bis April 1983 besuchte ich die Leopoldschule in Karlsruhe, ab April 1983 bis Juli 1985 die Gundschule in Karlsbad-Ittersbach und anschließend bis 1994 das Gymnasium Karlsbad.

Im Wintersemester 1994 begann ich an der Universität Karlsruhe mit dem Studium der Germanistik und Mathematik für das Lehramt an Gymnasien. Hier legte ich 1997 die Zwischenprüfung und am 31. Mai 1999 das Staatsexamen ab. In meiner Studienzeit war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut II und am Institut für Literaturwissenschaft.

Von Oktober 1999 bis Juli 2001 erhielt ich ein Promotionsstipendium der Landesgraduiertenförderung. Während dieser Zeit war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut I. Seit August 2001 bin ich dort als wissenschaftliche Angestellte tätig.