

# Überlagerungen von Modulräumen für Kurven

Zur Erlangung des akademischen  
Grades eines

DOKTORS DER  
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der  
Universität Karlsruhe  
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Volker Braungardt  
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: Mittwoch, 14. Februar 2001  
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich  
Korreferent: Privatdozent Dr. Hans Peter Rehm



## Vorrede

Das Thema sind Überlagerungen von Modulräumen für Kurven. Was das ist und warum Menschen sich dafür interessieren, steht in § 1.

Im § 2 erinnere ich an Techniken der Quotientbildung (Stacks), wie sie in der Modultheorie gebraucht werden, und zwar sowohl zur Konstruktion der Modulräume als auch, wie sich zeigen wird, zur Beschreibung von Kurven, die von Randpunkten des Modulraums parametrisiert werden.

§ 3 behandelt unendliche Verzweigungspunkte (Spitzen) von Überlagerungen, identifiziert den Abikoff-Teichmüllerraum  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  als universelle über dem Rand verzweigte Überlagerung von  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  und ordnet weitere Modulräume in den Verband der Zwischenüberlagerungen ein. In § 4 geht es um die universelle Familie über  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  und um die universelle Eigenschaft dieses Modulraums für stabile Kurven mit Teichmüllerstruktur.

Anschließend (§ 5) wende ich mich endlichen Überlagerungen von  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ , d. h. Modulräumen für Kurven mit endlicher Zusatzstruktur zu. Davon gibt es sehr viele; seit 1979 ist bekannt, dass sich unter den Überlagerungen von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  bzw.  $\bar{\mathcal{M}}_{1,1}$  sogar sämtliche algebraischen Kurven über  $\bar{\mathbb{Q}}$  finden. In § 6 geht es um die Frage, inwieweit für Flächen Ähnliches gilt. Für die meisten Klassen von Flächen erhalte ich eine positive Antwort, für den sogenannten allgemeinen Typ kann ich allerdings nur Beispiele angeben. Um die konkrete Behandlung von Beispielen geht es dann in § 7.

In einigen Beweisen benutze ich den Begriff „offenbar“. Ich versichere, dass mir die entsprechenden Offenbarungen zuteil geworden sind.

Mein Dank richtet sich zunächst an Herrn Prof. Herrlich, der diese Arbeit ebenso wie die vorausgehende und vorbereitende Diplomarbeit betreut hat. Seine Tür ist stets offen für seine Studenten (außer mittwochs, aber das hat seine Gründe), wofür ihm nicht genug gedankt werden kann [24]. Last, aber not least hätte ich mir ohne seine Unterstützung niemals einreden können, dass diese Arbeit fertig sei.

Weiter danke ich allen anderen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben, namentlich Stefan Kühnlein (siehe § 7) und Markus Even (siehe § 6.2) sowie Bernhard Köck. Außerdem danke ich Markus, Martin Möller und Stefan, die unfertige Teile der Arbeit Korrektur gelesen haben, und schließlich Bernhard Haak für  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Problemlösungen.

*Karlsruhe, 7. Januar 2001*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Moduli für Kurven</b>	<b>5</b>
1.1	Einführung . . . . .	5
1.2	Teichmüllerräume . . . . .	7
1.3	Kurven mit Teichmüllerstruktur . . . . .	8
1.4	Stabile Kurven . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Quotientobjekte</b>	<b>11</b>
2.1	Gruppoide . . . . .	12
2.2	Quotientgruppoide . . . . .	14
2.3	Stacks . . . . .	18
2.4	Kategorienwechsel . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Spitzen des Teichmüllerraums</b>	<b>20</b>
3.1	Abschluss von Überlagerungen . . . . .	20
3.2	Erweiterte Teichmüllerräume . . . . .	25
3.3	B-Gruppen . . . . .	26
3.4	Abikoffs Teichmüllerraum . . . . .	30
3.5	Räume zwischen $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ und Modulraum . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Moduli für stabile Teichmüllerkurven</b>	<b>34</b>
4.1	Stabile Teichmüllerkurven . . . . .	34
4.2	Die universelle stabile Teichmüllerkurve . . . . .	36
4.3	Die universelle Eigenschaft . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Endliche Überlagerungen von Modulräumen</b>	<b>47</b>
5.1	Feine Modulräume unterhalb des Schottkyraums . . . . .	48
5.2	Zweidimensionale Modulräume . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Belyiabbildungen für Flächen?</b>	<b>53</b>
6.1	Belyis Satz und gefaserte Flächen . . . . .	54
6.2	Die einfachsten Fälle . . . . .	55
6.3	Elliptische Faserungen . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Endliche Überlagerungen von <math>\mathcal{M}_{0,5}</math></b>	<b>59</b>
7.1	Invarianten von $\mathcal{M}_{0,5}$ und $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ . . . . .	59
7.2	Zweiblättrige Überlagerungen . . . . .	60
7.3	Zellenzerlegung von $\mathcal{M}_{0,5}$ . . . . .	62
7.4	Chernzahlen der glatten Überlagerungen . . . . .	63
7.5	Auflösung der Singularitäten von Überlagerungen . . . . .	67
7.6	Chernzahlen der singulären Überlagerungen . . . . .	70
7.7	Galoisüberlagerungen . . . . .	73

# 1 Moduli für Kurven

## 1.1 Einführung

Sei  $\mathbb{S}_g$  eine kompakte riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Die Struktur von  $\mathbb{S}_g$  hängt, wie schon Riemann an den Fingern abzählte, von  $3g - 3$  komplexen Parametern ab. Nachdem Grothendieck dieser Aussage eine mathematische Bedeutung verliehen hatte, konnte Mumford [48] sie beweisen. Lohn der Mühe war ein geometrisches Objekt, dessen Erforschung mit der Klassifikationstheorie algebraischer Kurven gleichzusetzen ist: der Modulraum für glatte projektive Kurven. Mumford gewann ihn, indem er aus einem Hilbertschema eine algebraische Gruppe austeilte; dieses Verfahren funktioniert dank der von Mumford entwickelten geometrischen Invariantentheorie über einem beliebigen Basisschema.

Speziell zur Parametrisierung projektiver Kurven über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$ , d. h. kompakter riemannscher Flächen, hat Teichmüller um 1940 einen anderen Weg gewiesen, der von Ahlfors weiter verfolgt wurde und zu einer komplexen Mannigfaltigkeit führte, die markierte Flächen parametrisiert. Für den Begriff der Markierung sind mehrere Definitionen in Gebrauch, die für glatte Flächen äquivalent sind.

Schon Newton (für  $g = 1$ ) wusste, dass riemannsche Flächen degenerieren können. Geometrisch gesehen: Am Rand von Riemanns Modulraum verbergen sich weitere Punkte, die nicht für glatte Flächen stehen. Wie hat man Teichmüllers Parameterraum zu vergrößern, um solche Erscheinungen zu erfassen?

Seit Deligne und Mumford [19] für Riemanns Modulraum eine überzeugende Kompaktifizierung entwickelt haben, die stabile Kurven parametrisiert, konzentriert sich das Interesse auf Räume, die für den Teichmüllerraum Ähnliches leisten. Der Rand hat dann komplexe Kodimension 1 und besteht aus „Spitzen“. (Harvey [32] hat eine Art Borel-Serre-Rand mit reeller Kodimension 1 konstruiert. Dieser und ähnliche Ränder werden bei geometrisch-topologischen Untersuchungen benutzt, sind aber nicht Thema der vorliegenden Arbeit.) Abikoff [3] und Herrlich [34] haben den Teichmüllerraum auf unterschiedliche Weise mit Spitzen umrandet. Abikoff parametrisiert stabile Flächen  $X$ , die durch eine Homotopieklasse von Deformationen  $\mathbb{S}_g \rightarrow X$  markiert sind. Herrlich dagegen identifiziert solche Markierungen, wenn sie den gleichen Homomorphismus der Fundamentalgruppen induzieren. Beide Autoren erhalten Hausdorffräume; nur Herrlich hat sich die Mühe gemacht, seinen Raum mit einer komplexen Struktur auszustatten.

Die Qual der Wahl zwischen unterschiedlichen Teilkompaktifizierungen

und komplexen Strukturen entfällt bei den Räumen, die Teichmüllerniveaustrukturen für endliche Gruppen parametrisieren (vgl. [19] Definition 5.6). Sie überlagern den Modulraum endlich und verzweigen über dem Rand. Unter ihnen wurden von Looijenga [44], de Jong und Pikaart [38] glatte Varietäten entdeckt; dies ist bemerkenswert, da die Existenz glatter endlicher Überlagerungen des Modulraums vorher nicht bekannt war. Kompaktifiziert werden diese Räume einfach, indem man den Modulraum für stabile Kurven in ihnen normalisiert. Im Fall abelscher Niveaustrukturen wollte Popp [53] zeigen, dass die dabei entstehenden Randpunkte stabile Kurven  $C|S$  mit einer  $n$ -Teilungspunktstruktur parametrisieren; damit meint er symplektische Garbenhomomorphismen  $H^1(C|S) \rightarrow (\mathbb{Z}/n)^{2g}$ . Sein Doktorand Mostafa [47] bemerkte, dass das beispielsweise für irreduzible Kurven mit mehr als einem Knoten nicht stimmt.

Abramovich, Vistoli [5] und andere verfolgen derzeit einen Ansatz, der weiter zu tragen verspricht. Sie betrachten auf (semi)stabilen Kurven  $C$  allgemeinere Zusatzstrukturen, nämlich solche, die durch eine Abbildung von  $C$  in einen Deligne-Mumford-Stack  $\mathcal{M}$  gegeben sind; wobei  $\mathcal{M}$  gewissen geometrischen Anforderungen genügen muss. Ist  $\mathcal{M}$  Modulstack für irgendwelche geometrischen Objekte, so besteht die Zusatzstruktur auf  $C$  in einer Familie solcher Objekte über  $C$ . Im Zusammenhang mit  $G$ -Niveaustrukturen interessieren  $G$ -Prinzipalbündel bzw. deren Modulstack  $\mathcal{M} := \mathcal{B}G$ .

Aus dieser Sicht von Zusatzstrukturen ergibt sich die Suche nach Klassen von Abbildungen  $C \rightarrow \mathcal{M}$ , die durch ansehnliche Modulräume oder Stacks parametrisiert werden. Vorbild sind Kontsevichs Modulräume für stabile Abbildungen in projektive Schemata. Der Trick besteht darin, dass man den Kurven  $C$  selbst erlaubt, zu „echten Stacks“ zu entarten: Die Stacks  $\mathcal{K}_{g,n}(\mathcal{M}, d)$  nach Abramovich und Vistoli sind laut [5] Theorem 1.11.1 eigentlich mit projektivem Modulraum und bestehen aus *twisted stable maps*  $C \rightarrow \mathcal{M}$  vom Grad  $d$ ; hierbei ist  $C$  eine  $n$ -fach punktierte *twisted stable curve* vom Geschlecht  $g$ . Der *twist* bei einer solchen Kurve  $C$  besteht in einer Trägheitsgruppe (Stack-Struktur) bei den Knoten von  $C$ . Das Phänomen der Degeneration von Kurven in Orbifolds entspricht der Lebenserfahrung, dass bei Kurven dieselben Singularitäten und sonstigen Absonderlichkeiten auftreten wie in ihrem Modulraum. Moralisch hängt das damit zusammen, dass  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  die universelle Kurve über  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  ist.

Für  $G := (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2g}$  findet sich in  $\mathcal{K}_g(\mathcal{B}G, 0)$  eine Zusammenhangskomponente, die – wenn die Operation von  $G$  aus der Stack-Struktur entfernt wird – laut [5] Proposition 3.5.2 zur Normalisierung von  $\bar{\mathcal{M}}_g$  im Stack  $\mathcal{M}_g^{(m)}$  der Kurven mit abelscher Niveau- $m$ -Struktur isomorph ist. Die Autoren von

[5] versprechen, in [4] auf nicht abelsche Niveaustrukturen einzugehen.

Unendliche Gruppen  $G$  betrachten sie wohl nicht. Auch umgekehrt wird in den komplex-geometrischen Arbeiten von Abikoff [3] und Herrlich [34], [25] die Verbindung zu der hochentwickelten algebraisch-geometrischen Theorie endlicher Niveaustrukturen nicht weiter verfolgt.

## 1.2 Teichmüllerräume

Mannigfaltigkeiten, insbesondere riemannsche Flächen sind zusammenhängend.

**1.2.1 Definition:** Unter einer  $n$ -punktierten riemannschen Fläche verstehe ich ein Datum

$$(C, p_1, \dots, p_n)$$

aus einer kompakten riemannschen Fläche  $C$  und  $n$  verschiedenen Punkten  $p_1, \dots, p_n \in C$ . Für die gelochte Fläche wird das Symbol  $C^0 := C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  verwendet. Mit Abbildungen (Homöomorphismen usw.) zwischen punktierten riemannschen Flächen sind punktierungstreue Abbildungen (Homöomorphismen usw.) zwischen den zugrundeliegenden riemannschen Flächen gemeint.

Sei  $\mathbb{L}$  die untere und  $\mathbb{U}$  die obere Halbebene. Sei  $\mathbb{S}_{g,n}$  eine  $n$ -punktierte riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ , im folgenden *Referenzfläche* genannt. Aus praktischen Gründen (vgl. § 4) wird

$$\mathbb{S}_{g,n} = (\mathbb{S}_{g,0}, p_{g,1}, \dots, p_{g,n})$$

mit paarweise verschiedenen Punkten  $p_{g,1}, p_{g,2}, \dots$  der Referenzfläche  $\mathbb{S}_{g,0}$  gewählt. Ab sofort wird  $3g - 3 + n \geq 0$  vorausgesetzt. Sei  $\pi_{g,n}$  die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{S}_{g,n}^0$ , identifiziert mit einer fuchsschen Gruppe  $\pi_{g,n} < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , sodass  $\mathbb{S}_{g,n}^0 = \mathbb{U}/\pi_{g,n}$  von der oberen Halbebene uniformisiert wird. Diese Bezeichnungen gelten für die gesamte vorliegende Arbeit.

Der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\mathbb{S}_{g,n})$  ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. Er parametrisiert Paare  $(C, \phi)$  aus einer riemannschen Fläche  $C$  und einer Homotopieklasse von quasikonformen Homöomorphismen  $\phi$  zwischen der Referenzfläche  $\mathbb{S}_{g,n}$  und  $C$ . Alternativ parametrisiert er quasifuchssche Deformationen von  $\pi_{g,n}$ .

**1.2.2 Definition:** Eine *Deformation* von  $\pi_{g,n}$  ist ein Paar  $(f, \phi)$  aus einem Homomorphismus  $\phi: \pi_{g,n} \rightarrow \mathrm{Aut} \hat{\mathbb{C}}$  und einer konformen Einbettung  $f:$

$\mathbb{L} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{L} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ f(\mathbb{L}) & \xrightarrow{\phi(\gamma)} & f(\mathbb{L}) \end{array}$$

für alle  $\gamma \in \pi_{g,n}$  kommutiert.

Als Invariante unter Koordinatenwechsel auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  wird einer Deformation  $(f, \phi)$  die schwarzsche Ableitung von  $f$  zugeordnet. Diese Zuordnung bildet die Menge der Deformationen von  $\pi_{g,n}$  modulo  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  injektiv in den Vektorraum der  $\pi_{g,n}$ -invarianten quadratischen Differentiale auf der unteren Halbebene ab. Das Bild liegt im endlichdimensionalen (im punktierten Fall echten) Unterraum  $B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$  der beschränkten quadratischen Differentiale.

**1.2.3 Definition:** Eine Deformation  $(f, \phi)$  ist *quasifuchssch*, wenn  $f$  sich zu einem quasikonformen Homöomorphismus  $\tilde{f}$  von  $\widehat{\mathbb{C}}$  fortsetzen lässt, sodass  $\phi: \pi_{g,n} \rightarrow \text{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$  die Konjugation mit  $\tilde{f}$  ist.

In diesem Fall zerfällt der Diskontinuitätsbereich von  $G := \phi(\pi_{g,n})$  in eine Komponente  $\Omega^+(G) = \tilde{f}(\mathbb{U})$  zur Linken und eine Komponente  $\Omega^-(G) = \tilde{f}(\mathbb{L})$  zur Rechten des Quasikreises  $\tilde{f}(\mathbb{R})$ . Der Quotient  $C := \Omega^+(G)/G$  ist eine riemannsche Fläche in  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Die Abbildung  $\tilde{f}$  steigt zu einem quasikonformen Homöomorphismus  $\mathbb{S}_{g,n}^0 \rightarrow C^0$  ab, der sich zu einem punktierungstreuen Homöomorphismus („Markierung“)  $\mathbb{S}_{g,n} \rightarrow C$  fortsetzen lässt.

Sei  $\mathcal{T}(\pi_{g,n}) \subset B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$  die Menge der schwarzschen Ableitungen von quasifuchsschen Deformationen. Nach Sätzen von Ahlfors und Bers ist  $\mathcal{T}(\pi_{g,n})$  ein offenes Gebiet in  $B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$  und wird durch die obige Konstruktion von  $\Omega^+(G)/G$  mit dem Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\mathbb{S}_{g,n})$  identifiziert.

Normiert man die Deformationen zu  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  und  $f(\infty) = \infty$ , oder alternativ und für unsere späteren Zwecke besser zu  $f(z-i) = z + O(z^3)$ , so fügen sich die  $\Omega^+(G)$  zu einer Familie  $\Omega^+ \subset \widehat{\mathbb{C}} \times \mathcal{T}_{g,n}$  zusammen.  $\Omega^+/\pi_{g,n}$  ist die universelle Kurve über dem Teichmüllerraum. Ihre universelle Eigenschaft steht in Satz 1.3.5.

### 1.3 Kurven mit Teichmüllerstruktur

Die axiomatische Beschreibung von Teichmüllerräumen geht auf Grothendieck [28] zurück, der bei dieser Gelegenheit den Teichmüllerraum mit Hilfe

des Hilbertschemas konstruierte, also ohne quasikonforme Geometrie zu benutzen. (Leider lieferte dieser Zugang nicht die Zusammenziehbarkeit des Teichmüllerraums.)

Die ersten Verallgemeinerungen auf den von Grothendieck nicht betrachteten Fall punktierter Kurven stammen von Earle [20] und Hubbard [37]. Eine Teichmüllermarkierung einer riemannschen Fläche ist hier ein Homöomorphismus zur Referenzfläche  $\mathbb{S}_{g,n}$ , modulo Homotopie. Solche Markierungen werden von der Abbildungsklassengruppe

$$\Gamma_{g,n} = \{\text{Homöomorphismen } \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow \mathbb{S}_{g,n}\} / \text{Homotopie}$$

permutiert. Ich folge Engber [23]. Eine Variante davon gibt es bei Nag [49] (5.4.1) in Lehrbuchform.

**1.3.1 Definition:** Eine *n-punktierte Kurve* vom Geschlecht  $g$  über einem komplexen Raum  $S$  ist ein komplexer Raum  $C|S$ , der eigentlich und glatt über  $S$  ist und dessen Fasern glatte Kurven vom Geschlecht  $g$  sind, zusammen mit  $n$  disjunkten Schnitten („Punktierungen“)  $s_1, \dots, s_n: S \rightarrow C$ .

Morphismen von  $n$ -punktierten Kurven sind Isomorphismen über  $S$ , die die Punktierungen einschließlich ihrer Reihenfolge respektieren.

$\mathcal{M}_{g,n}(S)$  ist das Gruppoid (siehe § 2) dieser Kurven.

**1.3.2 Bemerkung:** Jede Kurve  $C \in \mathcal{M}_{g,n}(S)$  ist topologisch ein Faserbündel über  $S$ . Die Menge  $R_{C|S}$  der Homotopieklassen von orientierungstreuen Homöomorphismen zwischen der Referenzfläche  $\mathbb{S}_{g,n}$  und Fasern von  $C$  bildet in natürlicher Weise ein  $\Gamma_{g,n}$ -Bündel über  $S$ .

**Beweis:** [23] Lemma 2.3 und Proposition 2.4. □

**1.3.3 Definition:** Eine *Teichmüllerstruktur* auf einer Kurve  $C \in \mathcal{M}_{g,n}(S)$  ist ein Schnitt von  $R_{C|S}$ .

Aus [50] schreibe ich folgende Variante von  $R_{C|S}$  ab:

**1.3.4 Definition:** Eine  $\pi_{g,n}$ -*Markierung* einer  $n$ -punktierten riemannschen Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$  ist ein Isomorphismus  $\pi_{g,n} \rightarrow \pi_1(S^0)$ , der

- die Konjugationsklassen der Schleifen um die Punktierungen respektiert,
- einen Isomorphismus  $\pi_{g,0} \rightarrow \pi_1(S)$  induziert und
- die Orientierungsklasse in der zweiten Kohomologie respektiert.

Für eine Familie von Kurven  $C \in \mathcal{M}_{g,n}(S)$  bilden die  $\pi_{g,n}$ -Markierungen der Fasern ein Unterbündel  $R_C|_S$  unter den äußeren Homomorphismen zwischen  $\pi_{g,n} \times S$  und der relativen Fundamentalgruppe von  $C^0|_S$ .

Da die Abbildungsklassengruppe  $\Gamma_{g,n}$  natürlich in die äußere Automorphismengruppe von  $\pi_{g,n}$  eingebettet ist und das Bild genau aus den  $\pi_{g,n}$ -Markierungen gemäß obiger Definition besteht, sind die beiden Bündel  $R_C|_S$  isomorph und liefern denselben Teichmüllerfunktorkomplex.

**1.3.5 Satz:** *Der als Deformationsraum quasifuchscher Gruppen konstruierte Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{g,n}$  stellt den Teichmüllerfunktorkomplex dar, der jedem komplexen Raum  $S$  die  $n$ -punktierten Kurven vom Geschlecht  $g$  über  $S$  mit Teichmüllerstruktur zuordnet.*

Für meine Zwecke (vgl. § 4.3) sollte sich folgende Subvariante des Funktors eignen:

**1.3.6 Definition:** Eine *Teichmüllerstruktur* auf einer Kurve  $C \in \mathcal{M}_{g,n}(S)$  ist ein  $\pi_{g,n}$ -Bündel  $U|_C^0$ , das eine  $\pi_{g,n}$ -Markierung der Fasern induziert. Isomorphismen zwischen Teichmüllerkurven sind  $\pi_{g,n}$ -Bündelisomorphismen.

## 1.4 Stabile Kurven

**1.4.1 Definition:** Eine *normale Überkreuzung* ist eine (offene) komplexe Kurve, die zum Achsenkreuz im Dizylinder  $\mathbb{D}^2$  isomorph ist, also topologisch die zusammenhängende Summe von zwei Kreisscheiben. Ein *Knoten* ist die Singularität einer normalen Überkreuzung.

**1.4.2 Definition:** Unter einer  *$n$ -punktierten riemannschen Fläche mit Knoten* verstehe ich ein Datum  $(C, p_1, \dots, p_n)$  aus einer projektiven Kurve  $C|\mathbb{C}$ , deren Singularitäten höchstens Knoten sind, und  $n$  verschiedenen Punkten  $p_1, \dots, p_n$  im glatten Teil von  $C$ . Für die gelochte Fläche wird das Symbol  $C^0 := C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  verwendet. Die Fläche ist *stabil*, wenn ihre Automorphismengruppe (Morphismen respektieren die Punktierungen!) endlich ist.

**1.4.3 Definition:** *Besondere Punkte* einer stabilen riemannschen Fläche sind die  $n$  markierten Punkte und die Knoten. Der Rest sind *gewöhnliche Punkte*.

**1.4.4 Definition:** Eine  *$n$ -punktierte stabile Kurve* vom Geschlecht  $g$  über einem komplexen Raum  $S$  ist ein komplexer Raum  $C|_S$ , der eigentlich und

flach über  $S$  ist, zusammen mit  $n$  disjunkten Schnitten  $s_1, \dots, s_n: S \rightarrow C$  des glatten Ortes von  $C|S$ , sodass die Fasern  $(C(t), s_1(t), \dots, s_n(t))$  (für  $t \in S$ )  $n$ -punktierte stabile riemannsche Flächen vom arithmetischen Geschlecht  $g$  sind.

Morphismen von  $n$ -punktierten Kurven sind Isomorphismen über  $S$ , die die Punktierungen (Schnitte) einschließlich ihrer Reihenfolge respektieren.

$\bar{\mathcal{M}}_{g,n}(S)$  ist das Gruppoid (vgl. §2) dieser Kurven.

## 2 Quotientobjekte

Alle wissen, dass die Abbildungsklassengruppe  $\Gamma_{g,n}$  diskontinuierlich auf dem Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{g,n}$  operiert und als Quotienten den Modulraum  $M_{g,n}$  liefert.

Wenn es keine Fixpunkte gäbe, ach, wie leicht wäre das Leben! Der Modulraum wäre eine Mannigfaltigkeit, weil der Teichmüllerraum eine ist; die Abbildungsklassengruppe wäre die Fundamentalgruppe von  $M_{g,n}$  und der Teichmüllerraum die universelle Überlagerung. Leider stimmt das nur für  $g = 0$ .

Per definitionem ist  $M_{g,n}$  die Menge der Kurven modulo Isomorphie. Jeder Isomorphismus  $f: C \xrightarrow{\sim} C'$  zwischen zwei Kurven wird also benutzt, um zwei Kurven zu einem Punkt im Modulraum zu identifizieren – außer wenn zufällig sowieso schon  $C = C'$  ist: in diesem Fall ignoriert  $M_{g,n}$  die Existenz von  $f$ . Diese Ungerechtigkeit ist die Wurzel allen Übels.

Orbifolds und analytische oder algebraische Stacks sind Datenstrukturen, in denen geometrische Gebilde zusammen mit Zusatzinformationen der Art von  $\text{Aut}(C)$  verpackt werden können. Die Schlüsseltechnologie ist dabei, dass man Mengen (von Bahnen) durch Gruppoide ersetzt.

Quellen zur Stacktheorie sind zunächst Giraud [26] für die abstrakte, Deligne und Mumford [19] für die étale und Artin [7] für die fppf-Version. Zur leichteren Verdauung aufbereitete Einführungen sind das Preprint [27] oder der Anhang zu [56]. Siehe auch [22]. Ein ganzes Buch über algebraische Stacks haben G. Laumon und L. Moret-Bailly zu Papier [42] gebracht. Für die topologische Version kenne ich keine Referenz. Da ich allerdings nur sehr spezielle Stacks, nämlich Quotientobjekte benutze, kann ich mich auf Elementares beschränken.

Für Quotientstacks  $[X/G]$  braucht man den Begriff im Prinzip gar nicht, weil alle Probleme in  $G$ -äquivalente Probleme auf  $X$  übersetzt werden können – genau wie bei Quotientorbifolds –, aber das wäre oft mühsamer, unkanonischer (Urbilder wählen...) und nicht so intuitiv. Außerdem ist

manchmal der Stack  $[X/G]$  zuerst da, bevor man noch die Überlagerung  $X$  kennt.

Ich gehe grundsätzlich davon aus, dass alle meine Kategorien klein sind, sodass keine klassentheoretischen Probleme auftreten. Das ist erreichbar, indem man seine mathematischen Objekte mehr oder weniger weitgehend einer festen Menge (Universum) entnimmt. In SGA und den zitierten Dissertationen [26] [30], die aus diesem Umfeld hervorgegangen sind, wird beschrieben, wie das im Einzelnen geht.

## 2.1 Gruppoide

**2.1.1 Definition:** Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

Mit Funktoren als 1-Morphismen und natürlichen Transformationen von Funktoren als 2-Morphismen bilden Gruppoide eine 2-Kategorie. (Die 3-Kategorie der 2-Kategorien führt J. Benabou [13] ein.) Zwei Gruppoide werden als isomorph ( $\cong$ ) betrachtet, wenn sie als Kategorien äquivalent sind.

**2.1.2 Anmerkung:** Wie jede Kategorie ist auch ein Gruppoid äquivalent zu seinem *Skelett*: man wählt aus jeder Isomorphieklasse einen Vertreter aus. Wenn man möchte, kann man das für jedes Gruppoid tun. Dann ist ein Gruppoid einfach eine Menge  $X$  zusammen mit einer Familie von Gruppen  $\text{Aut}(x)$ ,  $x \in X$ .

Das sieht auf den ersten Blick nach einer Vereinfachung der Theorie ohne Substanzverlust aus. Wenn man allerdings bei einem in der Natur vorkommenden Gruppoid (z. B. Modulstacks, s. u.) versucht, zum Skelett überzugehen, dann ist das mit praktisch undurchführbaren Auswahlprozessen verbunden. Siehe auch Übungsaufgabe 2.1.4 zum Skelett des Faserprodukts.

Für den Anfang haben Skelettgruppoiden einen Vorteil: Im Skelett stehen genau die Daten zusammengefasst, auf die es ankommt. Man kann auch 2-Morphismen (natürliche Transformationen von Funktoren) leichter verstehen: 1-Morphismen  $Y \rightarrow X$  von Skelettgruppoiden sind nur dann (und genau dann) 2-isomorph, wenn sie auf Objekten übereinstimmen und sich auf den Pfeilen höchstens durch innere Automorphismen von  $\text{Aut}(x)$ ,  $x \in X$ , unterscheiden. Insbesondere sind Skelette nur dann äquivalent, wenn sie 1-isomorph sind.

### Vergissfunktork

Gruppoide sind hier als Verallgemeinerung von Mengen aufzufassen. Genauer gesagt haben wir einen volltreuen Funktor  $\text{Gpd}$  von Mengen zu (Skelett-) Gruppoiden, der aus einer Menge  $M$  ein Gruppoid  $\text{Gpd}(M)$  macht: Die Punkte von  $\text{Gpd}(M)$  sind die Elemente von  $M$ ; dann wird  $\text{Aut}(x) := \{\text{id}\}$  und  $\text{Hom}(x, y) := \emptyset$  für  $x \neq y$  gesetzt ( $x, y \in M$ ). Zu diesem Funktor gibt es einen rechtsadjungierten, der einem Gruppoid  $X$  die Menge  $|X|$  der Isomorphieklassen seiner Punkte zuordnet; d. h. bei Skelettgruppoiden einfach die Automorphismengruppen vergisst.

Weil  $\text{Gpd}$  volltreu ist, darf man konsequent  $M$  mit  $\text{Gpd}(M)$  verwechseln. Der Funktor  $\text{Gpd}$  wird als Vergissfunktork betrachtet: Er vergisst, dass  $M$  eine Menge ist. Umgekehrt sagt man, ein Gruppoid  $X$  *ist eine Menge*, wenn  $X \cong \text{Gpd}(M)$  für eine Menge  $M$ . Das ist genau dann der Fall, wenn alle  $\text{Hom}_X(x, y)$  höchstens ein Element haben; dann ist nämlich  $X \cong \text{Gpd}(|X|)$ .

„Geometrisch“ stellt man sich unter einem Gruppoid in erster Näherung die Klassenmenge  $|X|$  vor. Zwei Punkte in einem Gruppoid  $X$  werden als identisch betrachtet, wenn es einen Pfeil zwischen ihnen gibt. Im Gegensatz zur Klassenmenge  $|X|$  merkt sich das Gruppoid aber, ob dabei zwei Punkte mehrfach miteinander bzw. ein Punkt (mehrfach) mit sich selbst identifiziert worden sind.

### Faserprodukt

**Definition** Seien  $f: X \rightarrow S$  und  $g: Y \rightarrow S$  Gruppoidmorphismen. Das *Faserprodukt* ist das folgende Gruppoid  $P = X \times_S Y$ : Objekte von  $P$  sind Tripel  $(x, y, \gamma)$ , wobei  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , und  $\gamma: f(x) \rightarrow g(y)$  ein Isomorphismus in  $S$  ist. Pfeile von  $(x, y, \gamma)$  nach  $(x', y', \gamma')$  in  $P$  sind Paare  $(\alpha: x \rightarrow_X x', \beta: y \rightarrow_Y y')$ , für die  $\gamma' \circ f(\alpha) = g(\beta) \circ \gamma$ .

Dieses Faserprodukt hat die übliche 2-universelle Eigenschaft.

**2.1.3 Übungsaufgabe:**  $P = X \times_S Y$  ist wirklich ein Gruppoid.

**Lösung:** Ich unterstelle, dass ein Pfeil  $(\alpha_i, \beta_i)$  in  $P$  von  $(x_i, y_i, \gamma_i)$  nach  $(x'_i, y'_i, \gamma'_i)$  geht. Im Fall  $(x'_1, y'_1, \gamma'_1) = (x_2, y_2, \gamma_2)$  kann ich Pfeile verketteten. Sei nämlich

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) := (\alpha_2 \alpha_1, \beta_2 \beta_1)$$

Das ist ein Pfeil von  $(x_1, y_1, \gamma_1)$  nach  $(x'_2, y'_2, \gamma'_2)$ , denn

$$\begin{aligned} \gamma'_2 f(\alpha_2 \alpha_1) &= \gamma'_2 f(\alpha_2) f(\alpha_1) = g(\beta_2) \gamma_2 f(\alpha_1) = g(\beta_2) \gamma'_1 f(\alpha_1) \\ &= g(\beta_2) g(\beta_1) \gamma_1 = g(\beta_2 \beta_1) \gamma_1 \end{aligned}$$

Die Assoziativität der Verkettung ist klar, ebenso  $\text{id}_{(x,y,\gamma)} = (\text{id}_x, \text{id}_y)$ . Diese ist übrigens ein Pfeil in  $P$ , weil

$$\gamma f(\text{id}_x) = \gamma \text{id}_{f(x)} = \gamma = \text{id}_{g(y)} \gamma = g(\text{id}_y) \gamma$$

Der Umkehrpfeil von  $(\alpha, \beta)$  ist  $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ . □

**2.1.4 Übungsaufgabe:** Wenn  $X$  und  $Y$  in Skelettform sind, dann bekommt man das Skelett  $P$  des Faserprodukts folgendermaßen: Objekte von  $P$  sind Tripel  $(x, y, \gamma)$ , wobei  $f(x) = g(y) =: s$  und  $\gamma \in \text{Aut}(s)$  aus einem Vertretersystem von  $g(\text{Aut } y) \setminus \text{Aut}(s) / f(\text{Aut } x)$ . Morphismen in  $P$  sind

$$\text{Aut}_P(x, y, \gamma) = \{(\alpha, \beta) \in \text{Aut}(x) \times \text{Aut}(y) \mid g(\beta) = \gamma f(\alpha) \gamma^{-1}\}$$

Das Faserprodukt von Mengen über einem Gruppoid ist stets eine Menge.

## 2.2 Quotientgruppoid

Sei  $c$  ein Situs, das heißt: eine Kategorie mit einer Grothendieck-Topologie. Ich unterstelle, dass die Topologie durch eine *prétopologie* gegeben ist, das heißt: Es ist definiert, welche Morphismen  $f: U \rightarrow X$  in  $c$  als („zulässige“) *Überdeckungen* (oder *Atlanten*) zu betrachten sind. Weiter setze ich voraus, dass  $c$  ein Initialobjekt  $\emptyset$ , ein Finalobjekt  $\text{pt}$  und endliche Faserprodukte hat und dass Abstiegsprobleme für Morphismen stets eindeutig lösbar sind, das heißt: Ein Morphismus  $X \rightarrow Y$  in  $c$  ist wohldefiniert, wenn er auf einer (zulässigen) Überdeckung von  $X$  gegeben ist.

Man denke dabei an topologische Räume, komplexe Räume mit der klassischen Topologie (Atlanten sind surjektive, lokal isomorphe Abbildungen), Varietäten oder Schemata oder algebraische Räume mit der étalen oder fppf-Topologie. Genauer gesagt denke man an kleine Unterkategorien davon.

Sei  $X$  ein Objekt von  $c$  und  $G$  eine Gruppe in  $c$ , die auf  $X$  operiert. Gesucht ist eine Datenstruktur für den Quotienten  $X/G$ , die der Anwesenheit von Fixpunkten Rechnung trägt, um aus der Theorie fixpunktfreier Gruppenaktionen so viel Substanz wie möglich zu retten. (Und natürlich im fixpunktfreien Fall ein Objekt  $X/G$  liefert, das sich in natürlicher Weise mit dem bewährten Quotientraum  $X/G$  identifiziert, siehe Bemerkung 2.2.5.)

Die folgenden zwei Beobachtungen liefern einen Ansatz zur Lösung:

- Yoneda Lemma. Ein Objekt  $X$  von  $c$  ist eindeutig durch seinen *Punkt-funktor*  $T \mapsto X(T) := \text{Hom}(T, X)$  ( $T \in c$ ) bestimmt.

- Angenommen, die Quotientenbildung funktioniert in  $c$ , d. h. es gibt ein Objekt  $X/G \in c$ , über dem  $X$  ein  $G$ -Prinzipalbündel<sup>1</sup> ist. Dann lässt sich jeder  $T$ -wertige Punkt  $f \in \text{Hom}(T, X/G)$  durch die Hochhebung  $\tilde{f} \in \text{Hom}_G(B, X)$  beschreiben, wobei  $B := T \times_{X/G} X$  ein  $G$ -Prinzipalbündel über  $T$  ist.

Um aus diesen Beobachtungen eine Definition von  $X/G$  zu machen, muss man  $B := T \times_{X/G} X$  durch ein unbestimmtes Prinzipalbündel  $B|T$  ersetzen. Und dafür sagen, dass  $x \in X(B)$  mit  $x' \in X(B')$  identifiziert wird, wenn es einen Bündelisomorphismus  $B \rightarrow B'$  gibt, der  $x$  in  $x'$  überführt. Wie schon angedeutet: Um dieses Identifizieren richtig zu erfassen, wird als Datenstruktur für  $(X/G)(T)$  ein Gruppoid benutzt.

**2.2.1 Definition:** Der Quotient  $Q = [X/G]$  ist ein kontravarianter gruppoidwertiger Funktor auf  $c$  mit

$$Q(T) := \{x : B \rightarrow X \mid B \text{ ist } G\text{-Prinzipalbündel über } T, \\ x \text{ ist } G\text{-äquivariant}\}$$

und für  $x : B \rightarrow X$ ,  $x' : B' \rightarrow X$  aus  $Q(T)$  sei

$$\text{Hom}_{Q(T)}(x', x) := \{b : B' \rightarrow B \mid b \text{ ist Bündelisomorphismus, } x' = x \circ b\}$$

Jeder Pfeil  $f : T' \rightarrow T$  in  $c$  induziert einen Gruppoidmorphismus  $Q(f) = f^* : Q(T) \rightarrow Q(T')$  mit

$$f^*(x : B \rightarrow X) = (x \circ \text{pr}_B : B \times_T T' \rightarrow X).$$

Für  $b \in \text{Hom}_{Q(T)}(x' : B' \rightarrow X, x : B \rightarrow X)$  ist  $f^*(b) := b \times \text{id}_{T'}$  wohldefiniert, d. h.  $f^*(b)$  ist ein Bündelisomorphismus  $f^*B' \rightarrow f^*B$ , der  $f^*x'$  in  $f^*x$  überführt.

Die Schreibweise  $f^*$  für  $Q(f)$  ist bei gruppoidwertigen Funktoren allgemein üblich, da es sich in vielen Anwendungen tatsächlich um ein Pullback handelt.

Statt „gruppoidwertiger kontravarianter Funktor auf  $c$ “ sagt man auch *Gruppoid über  $c$*  oder *2-Funktor auf  $c$* . Gruppoid über  $c$  sollen eine Verallgemeinerung von Objekten von  $c$  sein. Dazu wird  $c$  volltreu in die 2-Kategorie der 2-Funktoren eingebettet: Yoneda macht aus  $X \in c$  einen Funktor  $\text{Hom}(\cdot, X)$ , und Gpd macht aus dem Funktor einen 2-Funktor, siehe z. B. [30] I 1.9.

<sup>1</sup>Ein  $G$ -Prinzipalbündel in  $c$  ist ein Objekt  $B \in c$  zusammen mit einer Abbildung  $B \rightarrow T$  und einer  $G$ -Operation auf  $B$ , sodass  $B \times_T U$  für eine geeignete Überdeckung  $U \rightarrow T$  isomorph zu  $G \times U$  wird, wobei natürlich die  $G$ -Operation respektiert werden soll.

**2.2.2 Übungsaufgabe:** Sei  $X$  ein Gruppoid über  $c$ . Für  $S \in c$  gilt

$$|X(S)| = \text{Hom}(S, X) / \cong_2$$

Siehe auch [56] (7.10) oder [27] (2.18).

**2.2.3 Definition:** Sei  $P$  eine Eigenschaft von Morphismen in  $c$ , die stabil unter Basiswechsel ist. Ein Morphismus  $f: Y \rightarrow X$  von Gruppoiden über  $c$  hat die Eigenschaft  $P$ , wenn für jeden Punkt  $x \in X(T)$  mit  $T \in c$  das Faserprodukt  $Y_T = Y \times_X T$  darstellbar ist und das Pullback  $f_T = f \times \text{id}_T: Y_T \rightarrow T$  die Eigenschaft  $P$  hat.

Ab sofort setze ich voraus, dass  $G$ -Prinzipalbündel in  $c$  (zulässige) Überdeckungen sind. Nach wie vor ist  $X \in c$  ein Objekt, auf dem  $G$  operiert.

**2.2.4 Bemerkung:** Dann ist  $X$  ein  $G$ -Prinzipalbündel über  $Q = [X/G]$  mit der folgenden Bündelprojektion  $\pi: X \rightarrow Q$ : Für  $x \in X(T)$ ,  $T \in c$ , ist  $\pi(x) \in Q(T)$  der Morphismus  $G \times T \rightarrow X$ ,  $(g, t) \mapsto g \cdot x(t)$ .

**Beweis:** Ich behaupte:

(1)  $X \rightarrow Q$  ist eine Überdeckung, d.h. für jedes  $S \in c$  und jeden Morphismus  $q: S \rightarrow Q$  ist  $X \times_Q S$  darstellbar durch ein Objekt  $U \in c$  und die Projektion  $U \rightarrow S$  eine Überdeckung in  $c$ .

(2) Das Pullback  $X \times_Q X$  ist darstellbar durch das triviale Bündel  $G \times X \in c$ , wobei die (zweite) Projektion von  $X \times_Q X$  in die Projektion  $G \times X \rightarrow X$  überführt wird.

*Beweis* (1): Laut Übungsaufgabe 2.2.2 kommt  $q$  von einem Element  $\tilde{q} \in Q(S)$ , also einem äquivarianten Morphismus  $\tilde{q}: B \rightarrow X$ , wobei  $B|S$  ein  $G$ -Prinzipalbündel ist. Genauer ist

$$(\forall T \in c) (\forall s: T \rightarrow S) \quad q(s) = (s^* \tilde{q}: s^* B \rightarrow X)$$

Ein Punkt im Faserprodukt  $(X \times_Q S)(T)$  ist nun ein Tripel  $(x, s, \gamma)$ , wobei  $x \in X(T)$ ,  $s \in S(T)$  und  $\gamma \in \text{Hom}_Q(\bar{x}, q(s))$ . Dabei ist

- $\bar{x} \in Q(T)$  das Bild von  $x \in X(T)$  unter der Projektion  $X \rightarrow Q$ , also der äquivariante Morphismus  $G \times T \rightarrow X$ ,  $(g, t) \mapsto g \cdot x(t)$
- $q(s)$  ist  $s^* \tilde{q}: B \times_S T \rightarrow X$ ,  $(b, t) \mapsto \tilde{q}(b)$
- $\gamma$  ein  $G$ -Bündelisomorphismus  $G \times T \rightarrow B \times_S T$  mit  $g \cdot x(t) \equiv \tilde{q}(\gamma(g, t))$ .

Nach Voraussetzung ist  $B \rightarrow Q$  eine Überdeckung in  $c$ . Ich will einen Isomorphismus  $X \times_Q S \rightarrow B$  erklären, indem ich  $(x, s, \gamma) \in X \times_Q S(T)$  auf  $\gamma(1, \_)\in B(T)$  abbilde. Der Umkehrmorphismus schickt dann  $b \in B(T)$  auf  $(x, s, \gamma)$  mit  $x = \tilde{q} \circ b$ ,  $s = (B \rightarrow S) \circ b$  und  $\gamma(g, t) = (g \cdot b(t), t)$ . Nach Konstruktion sind diese beiden Morphismen auf dem Niveau von Objekten zueinander invers. Das reicht:  $B$  hat als Menge (genauer: mengenwertiger Funktor) keine nichttrivialen Morphismen;  $X \times_Q S$  auch nicht, siehe Übungsaufgabe 2.1.4.

*Beweis (2):* Auch  $X \times_Q X$  ist mengenwertig. Die Punkte von  $X \times_Q X(T)$  sind  $(x', x, \gamma)$ , wobei  $x', x \in X(T)$  und  $\gamma$  ein  $G$ -Bündelisomorphismus von  $G \times T$  nach  $G \times T$  ist mit  $g \cdot x'(t) \equiv \gamma_1(g, t) \cdot x(t)$ , wobei  $\gamma_1 := \text{pr}_G \circ \gamma$ , also  $\gamma(g, t) \equiv (\gamma_1(g, t), t) \equiv (g \cdot \gamma_1(1, t), t)$ . Ich erhalte einen  $G$ -Bündelisomorphismus  $X \times_Q X \rightarrow G \times X$ ,  $(x', x, \gamma) \mapsto (\gamma_1(1, \_), x)$ .  $\square$

**2.2.5 Bemerkung:** *Gibt es in  $c$  einen Quotienten  $X/G$ , über dem  $X$  ein  $G$ -Prinzipalbündel ist, dann ist  $[X/G] \cong X/G$ .*

**Beweis:** Sei  $Q = [X/G]$ . Von  $X/G$  nach  $Q$  führt der offensichtliche Morphismus  $h$  mit

$$h(\bar{x} : T \rightarrow X/G) := (x = \bar{x} \times \text{id}_X : T \times_{X/G} X \mapsto X).$$

Ich konstruiere jetzt den Umkehrmorphismus  $h'$ . Sei zunächst  $q \in Q(T)$ , also  $q: B \rightarrow X$  äquivariant für ein  $G$ -Prinzipalbündel  $B \rightarrow T$ . Weil  $B \rightarrow T$  eine Überdeckung in  $c$  ist, steigt  $q$  zu einem Morphismus  $h'(q): T \rightarrow X/G$  ab. Sei  $B'|T$  das Pullback von  $X$  via  $h'(q)$ . Dann geht  $hh'(q)$  äquivariant von  $B'$  nach  $X$ , und es gibt genau einen Bündelisomorphismus  $\Phi_B: B \rightarrow B'$ , der das Dreieck mit  $q$  und  $hh'(q)$  kommutativ macht. (Das ist klar, wenn die Bündel trivial sind, und folgt allgemein mit der Abstiegsvoraussetzung.) Die Zuordnung  $q \mapsto \Phi_B$  definiert den erwünschten 2-Isomorphismus (natürliche Transformation)  $\Phi: \text{id}_Q \xrightarrow{\sim} hh'$ .

Offenbar ist  $h'h = \text{id}_{X/G}$ .  $\square$

**2.2.6 Beispiel:** Sei  $c$  die Kategorie der  $\mathbb{C}$ -Schemata mit der fppf-Topologie. Das Gruppoid  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  aus § 1 ist Quotient  $[U/\text{PGL}_N]$  für den lokal abgeschlossenen Teil  $U$  des Hilbertschemas von  $\mathbb{P}^N$ , der kanonisch eingebettete Kurven parametrisiert. In der étalen Topologie oder (bei komplexen Räumen) in der klassischen Topologie ist  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  nur lokal ein Quotientgruppoid.

## 2.3 Stacks

**2.3.1 Definition:** Sei  $X$  ein Gruppoid über  $c$  und  $f: U \rightarrow T$  eine (zulässige) Überdeckung in  $c$ .

Ein *Abstiegsdatum für ein Objekt* (von  $X(T)$ , über  $f$ ) ist ein Objekt  $x \in X(U)$  zusammen mit einem Isomorphismus  $\phi: \text{pr}_1^* x \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* x$  in  $X(U \times_T U)$ , der die *Kozykelbedingung* über  $U \times_T U \times_T U$

$$\text{pr}_{2,3}^*(\phi) \circ \text{pr}_{1,2}^*(\phi) = \text{pr}_{1,3}^*(\phi)$$

erfüllt.<sup>2</sup>

Das Abstiegsdatum *kommt von* einem Objekt  $\bar{x} \in X(T)$ , wenn es einen Isomorphismus  $\psi: f^* \bar{x} \xrightarrow{\sim} x$  in  $X(U)$  gibt, sodass

$$\begin{array}{ccc} (f \circ \text{pr}_1)^* \bar{x} & \xlongequal{\quad} & (f \circ \text{pr}_2)^* \bar{x} \\ \text{pr}_1^*(\psi) \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2^*(\psi) \\ \text{pr}_1^* x & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \text{pr}_2^* x \end{array}$$

kommutiert.

Das Abstiegsdatum ist *effektiv*, wenn es von einem Objekt  $\bar{x} \in X(T)$  kommt.

**2.3.2 Definition:** Sei  $X$  ein Gruppoid über  $c$ . Seien  $x, y \in X(T)$  für ein Objekt  $T \in c$ , und sei  $f: U \rightarrow T$  eine (zulässige) Überdeckung.

Ein *Abstiegsdatum für einen Morphismus* (von  $x$  nach  $y$ , via  $f$ ) ist ein Morphismus  $\alpha: f^* x \rightarrow f^* y$  in  $X(U)$ , sodass

$$\text{pr}_1^*(\alpha) = \text{pr}_2^*(\alpha)$$

in  $X(U \times_T U)$ .<sup>3</sup> Das Abstiegsdatum ist *effektiv*, wenn  $\alpha = f^* \bar{\alpha}$  für einen Morphismus  $\bar{\alpha}: x \rightarrow y$  in  $X(T)$  gilt.

**2.3.3 Definition:** Ein *Stack* ist eine Garbe von Gruppoiden auf  $c$ , das heißt: ein Gruppoid  $X$  über  $c$ , in dem

- (a) Abstiegsprobleme für Morphismen eindeutig lösbar sind, d. h. jedes Abstiegsdatum ist effektiv, und der Morphismus  $\bar{\alpha}$  in Definition 2.3.2 ist durch  $\alpha$  stets eindeutig bestimmt;

<sup>2</sup>In der Tat: Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Isomorphismen in  $X(U \times_T U \times_T U)$  von  $\text{pr}_1^* x$  nach  $\text{pr}_3^* x$ .

<sup>3</sup>In der Tat: Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Isomorphismen von  $\text{pr}_1^* f^* x = \text{pr}_2^* f^* x$  nach  $\text{pr}_1^* f^* y = \text{pr}_2^* f^* y$ .

(b) Abstiegsdaten für Objekte effektiv sind.

$X$  ist ein *geometrischer Stack*<sup>4</sup>, wenn außerdem gilt:

(c) Für je zwei Objekte  $x \in X(T)$ ,  $x' \in X(S)$  mit  $T, S \in c$  ist das Faserprodukt  $T \times_X S$  darstellbar.

(d) Es gibt eine (zulässige) Überdeckung  $U \rightarrow X$  durch ein Objekt  $U \in c$ .

**2.3.4 Anmerkung:** Wenn  $X$  ein Stack ist, dann ist auch das Objekt  $\bar{x}$  in Definition 2.3.1 durch das Abstiegsdatum eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt, weil der Isomorphismus  $\psi$  absteigt.

**2.3.5 Anmerkung:** In der Situation von Definition 2.2.3 sei  $Y \in c$  und  $X$  ein geometrischer Stack. Wenn die Eigenschaft  $P$  lokal in der Basis ist, braucht sie nur auf einer zulässigen Überdeckung  $U \rightarrow X$  überprüft zu werden: Aus  $P(f_U)$  folgt für beliebige  $x \in X(T)$  zunächst per Basiswechsel  $P(f_{T \times_X U})$  und daraus  $P(f_T)$ , weil  $T \times_X U$  eine zulässige Überdeckung von  $T$  ist.

**2.3.6 Satz:** *Unter geeigneten Voraussetzungen ist  $[X/G]$  ein geometrischer Stack.*

**Beweis:** Wenn man den Satz so formuliert, ist er allerdings trivial. Die „optimale“ Formulierung der Voraussetzungen ist mir aber nicht bekannt. Daher kümmere ich mich nur um Spezialfälle, die ich später brauche.

Im algebraischen Fall, wenn  $G$  glatt und affin ist, ist die Aussage weder trivial noch elementar, aber richtig: Siehe [42] (2.4.2), [56] example 7.17, [22] proposition 2.2. Der topologische Fall ist viel einfacher.

Für die Garbeneigenschaft (a, b) wird der Abstieg von  $G$ -Prinzipalbündeln und deren Morphismen benötigt. In der topologischen (auch komplex geringsten) Kategorie gilt aber viel mehr: Abstiegsdaten für Objekte sind immer effektiv, was nichts anderes bedeutet, als dass man Räume an offenen Teilen verkleben kann.

**2.3.7 Bemerkung:** *Ein Quotientstack  $[X/G]$  ist genau dann geometrisch, wenn in jedem  $G$ -äquivalenten cartesischen Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & X \end{array}$$

---

<sup>4</sup>Das ist eine Definition ad hoc. Meine Stacks sind alle „geometrisch“ und damit spezieller als die Stacks, die man im étalen Fall „algebraisch“ oder „Deligne-Mumford“, im fppf-Fall „algebraisch“ oder „Artin“, im analytischen Fall „analytisch“ nennt.

mit  $G$ -Prinzipalbündeln  $E, E'$  der Quotient  $[F/G]$  darstellbar ist.

**Beweis:** Als zulässige Überdeckung von  $[X/G]$  taugt das  $G$ -Prinzipalbündel  $X \rightarrow [X/G]$ . Zu überprüfen bleibt die Darstellbarkeit von Faserprodukten über  $Q := [X/G]$ . Seien dazu  $E \in Q(T)$  und  $E' \in Q(T')$  Punkte von  $Q$ , also  $G$ -Prinzipalbündel mit äquivarianten Abbildungen nach  $X$ . Offenbar ist  $T \times_Q T' = [E \times_X E'/G]$ .  $\square$

Zurück zu Satz 2.3.6: Die Bedingung in Bemerkung 2.3.7 ist erfüllt, wenn  $c$  die Kategorie topologischer oder komplex geringter Räume und  $G$  eine diskrete Gruppe ist. Jeder Punkt  $p \in E$  hat nämlich eine offene Umgebung  $U \subseteq E$ , die zu ihren Translaten  $gU$  unter  $g \in G, g \neq 1$ , disjunkt ist. Das gilt dann auch für das Urbild  $V \subseteq F$  von  $U$ . Infolgedessen wird  $V$  isomorph auf das Bild in  $[F/G] = F/G$  abgebildet.  $\square$

## 2.4 Kategorienwechsel

Sei  $c'$  ein weiterer Situs, der den gleichen Anforderungen wie  $c$  genügt, und  $A: c \rightarrow c'$  ein Funktor, der zulässige Überdeckungen auf ebensolche schickt und Faserprodukte respektiert. Man denke an die Analytifizierung

(algebraische Schemata über  $\mathbb{C}$ , étale Topologie)  $\rightarrow$  (komplexe Räume)

oder den Vergissfunktor

(komplexe Räume)  $\rightarrow$  (topologische Räume).

**2.4.1 Definition:** Aus einem Stack  $X$  über  $c$  wird ein Stack  $A(X)$  über  $c'$  als Vergarbung [26] des Gruppoids  $A'(X)$  mit

$$A'(X)(T) = \{(f, x) \mid (\exists U \in c) f \in \text{Hom}_{c'}(T, A(U)), x \in X(U)\}$$

und dem offensichtlichen Isomorphiebegriff. Ein Morphismus  $U \rightarrow A(X)$  faktorisiert also lokal (in der Topologie von  $c'$ ) über Objekte aus  $c$ .

Die hier betrachteten Funktoren (s. o.) respektieren auch Prinzipalbündel und führen daher Quotientstacks wie  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  in ebensolche über.

## 3 Spitzen des Teichmüllerraums

### 3.1 Abschluss von Überlagerungen

Im folgenden sei  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $A = S \setminus S_0$  eine nirgends dichte analytische Teilmenge von  $S$ .

Gedacht ist dabei an den Modulraum  $S = \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  mit seinem Rand  $A = \bar{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$ . Ziel ist es, einen Teichmüllerraum zu konstruieren, der einige der in § 1.1 aufgeführten Konstruktionen (über  $\mathbb{C}$ ) als Quotienten liefert, mithin die Beziehungen zwischen ihnen aufhellt, und gleichzeitig Modulraum für Kurven mit einer explizit zu beschreibenden Markierung ist.

Bekanntlich gibt es in der Kategorie der verzweigten Überlagerungen kein universelles (initiales) Objekt. Deswegen muss ich Überlagerungen mit „Spitzen“ einbeziehen, wie man sie aus der Kompaktifizierung symmetrischer Räume [9] kennt.

**3.1.1 Definition:** Sei  $\pi: X \rightarrow S$  eine stetige Abbildung, sodass  $S = X/G$  für eine Gruppe  $G \leq \text{Aut}(X)$ .

- (a) Sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist *genau unter  $H$  invariant* (*precisely invariant* [46] II.E.3, *brauchbar* [17]), wenn gilt:  $U = HU$ , und  $gU$  trifft  $U$  nicht für  $g \in G \setminus H$ .
- (b) Sei  $x \in X$ . Eine Umgebung von  $x$  ist *anständig* bezüglich  $G$  (*nice* [46] II.E.5, *brauchbar* [17]), wenn sie genau unter dem Stabilisator  $G_x$  invariant ist.

**3.1.2 Anmerkung:** (1) Sei  $U \subset X$  offen und zusammenhängend,  $V = \pi(U)$ . Wenn  $U$  genau unter  $H \leq G$  invariant ist, dann ist  $V = U/H$  und  $U$  Zusammenhangskomponente des Urbilds von  $V$  in  $X$ .

(2) Ist umgekehrt  $V \subset S$  offen und  $X$  lokal zusammenhängend, so ist jede Zusammenhangskomponente des Urbilds  $\pi^{-1}(V)$  genau unter ihrem Stabilisator invariant.

**Beweis:** (1) Das Urbild von  $V$  ist  $GU$ . Weil  $U$  und  $(G \setminus H)U$  offen sind, ist  $U$  eine Zusammenhangskomponente davon. Außerdem ist  $U/H = (GU)/G = V$ .

(2) Sei  $U$  eine Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(V)$  und  $H$  ihr Stabilisator. Weil  $X$  lokal zusammenhängt, ist  $U$  offen. Für  $\gamma \in G$  mit  $\gamma U \cap U \neq \emptyset$  ist  $U \cup \gamma U$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $\pi^{-1}(V)$ , also  $\gamma U \subseteq U$ . Da auch  $U \cup \gamma^{-1}U$  zusammenhängt, folgt analog  $U \subseteq \gamma^{-1}U$ , insgesamt  $\gamma \in H$ . Somit ist  $U$  genau unter  $H$  invariant.  $\square$

**3.1.3 Definition:** (Siehe [17] § 1.3.) Sei  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit,  $A \subset S$  eine nirgends dichte analytische Teilmenge und  $S_0 := S \setminus A$  ihr Komplement. Sei  $X$  ein lokal komplex geringter Raum, dessen Strukturgarbe aus stetigen Funktionen besteht und Riemanns Hebbarkeitssatz erfüllt.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Ist  $U \subset X$  offen,  $A \subset U$  analytisch und nirgends dicht,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und auf  $U \setminus A$  holomorph, so ist  $f$  holomorph.

Sei außerdem  $S = X/G$  für eine Gruppe  $G \leq \text{Aut}(X)$  und  $p: X \rightarrow S$  die Quotientabbildung.

1. Die Abbildung  $p$  ist eine *Überlagerung mit Spitzen* (ÜlSp) über  $A$ , wenn  $X_0 := p^{-1}(S_0)$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und unverzweigte Überlagerung von  $S_0$  mit Deckgruppe  $G$  ist und wenn jeder Punkt von  $X$  eine Umgebungsbasis aus anständigen Umgebungen besitzt.
2. Eine ÜlSp  $p$  ist eine *richtige Überlagerung mit Spitzen* (RÜlSp), wenn  $X$  ein normaler komplexer Raum ist.

**3.1.4 Anmerkung:** Die rein topologische Variante davon (ohne komplexe Struktur) schreibe ich nicht extra auf. Auch ein Raum  $X|S$ , der nur als topologischer Raum gegeben ist, kann via  $\mathcal{O}_X := p^*\mathcal{O}_S$  als ÜlSp betrachtet werden.

**3.1.5 Anmerkung:** Mit der topologischen Einschränkung an  $X$  wird erreicht, dass erstens ein Initialobjekt überhaupt existiert (siehe [17] § 1.4), zweitens wenigstens etwas Ähnliches wie eine Überlagerung herauskommt; wenn  $X$  schon nicht lokal homöomorph zu  $S$  sein kann, so soll doch die Topologie von  $X$  möglichst weitgehend der von  $S$  entsprechen, das heißt: nicht zu viele offene Mengen beim Übergang zum Quotienten verloren gehen.

Die Anforderungen an die Strukturgarbe von  $X$  haben zur Folge, dass  $\mathcal{O}_X$  durch  $\mathcal{O}_{X_0}$  eindeutig bestimmt ist: Schnitte von  $\mathcal{O}_X$  über  $U \subseteq X$  sind stetige Funktionen, die auf  $U \cap X_0$  holomorph sind.

Zwischen ÜlSp und RÜlSp gibt es einen rein topologischen Unterschied: Um Herrlichs *extended Teichmüller space* mit zu erfassen – zumindest auf topologischem Niveau, denn seine Strukturgarbe genügt dem Hebbarkeitsatz nicht –, muss ich ÜlSp's zulassen, die die verschiedenen Äste von  $X$  in der Nähe einer Spitze nicht auseinanderhalten. Ist  $X$  ein normaler komplexer Raum, so tritt das Problem nicht auf. Dieses Standardargument wird in Bemerkung 3.1.8 ausgeführt.

Im folgenden sei  $p: X \rightarrow S$  stets eine ÜlSp mit Spitzen über  $A \subset S$ ,  $S_0 = S \setminus A$  und  $X_0 = p^{-1}(S_0)$  der unverzweigte Teil. Mit Blick auf die späteren Anwendungen wird  $A$  und alles, was darüber liegt, als *Rand* bezeichnet.

**3.1.6 Bemerkung:**  $X$  ist hausdorffsch.

**Beweis:** Seien  $x$  und  $y$  verschiedene Punkte von  $X$ . Falls sie in derselben Faser liegen, liefert Definition 3.1.3 sofort (anständige) disjunkte Umgebungen. Ansonsten nehme man Urbilder disjunkter Umgebungen von  $p(x)$  und  $p(y)$ . □

Diese Trivialität wird später ständig benutzt, um zu schließen: Stimmen Abbildungen, die auf  $X$  definiert sind, auf  $X_0$  überein, so sind sie gleich. Hier geht ein, dass  $\mathcal{O}_X$  reduziert ist.

Wenn aus  $X$  ein Normalteiler der Deckgruppe herausfaktoriert wird, werden anständige Umgebungen auf ebensolche abgebildet:

**3.1.7 Bemerkung:** Für jeden Normalteiler  $H \trianglelefteq G$  ist  $X/H$  eine  $\check{U}lSp$  beziehungsweise  $R\check{U}lSp$  von  $S$ .

Jeder Punkt von  $X$  hat eine Umgebungsbasis aus anständigen zusammenhängenden Umgebungen ([17] § 2.3 Hilfssatz 5). Daher ist  $X$  lokal zusammenhängend.

**3.1.8 Bemerkung:** Ist  $p$  eine  $R\check{U}lSp$ , so gilt: Eine offene Teilmenge  $U$  von  $X$  hängt genau dann zusammen, wenn ihr Schnitt mit  $X_0$  zusammenhängend ist.

**Beweis:** Siehe [17] § 3.1 Hilfssatz 8. Die Implikation rückwärts gilt, weil  $X_0$  dicht liegt.

Sei  $U \cap X_0 = Z_1 \cup Z_2$  mit in  $U \cap X_0$  offen-abgeschlossenen, disjunkten Teilen  $Z_1, Z_2$ . Dann gilt  $U = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$ , wobei natürlich die Abschlüsse in  $U$  gemeint sind. Zu zeigen bleibt, dass auch  $\bar{Z}_1$  zu  $\bar{Z}_2$  disjunkt ist.

Sei  $x \in U$  beliebig und  $W$  eine so kleine Umgebung von  $p(x)$ , dass  $\mathcal{O}_S(W)$  integer ist und eine Funktion  $f \neq 0$  enthält, die auf  $A$  verschwindet. Sei  $\chi$  die charakteristische Funktion von  $U \cap Z_1$ . Dann ist  $g := \chi \cdot p^* f$  holomorph um  $x$ . Da  $g/p^* f$  ganz über  $\mathcal{O}_{X,x}$  (sogar über  $\mathbb{C}$ ) ist, muß  $g/p^* f$  in  $\mathcal{O}_{X,x}$  liegen, also stetig sein. Dann kann  $x$  aber nicht gleichzeitig in  $\bar{Z}_1$  und  $\bar{Z}_2$  liegen.  $\square$

**3.1.9 Satz:** Sei  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $A$  eine nirgends dichte analytische Teilmenge.

1. Es gibt eine bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmte universelle  $R\check{U}lSp$   $p : X \rightarrow S$  mit Spitzen über  $A$ . Sie ist gleichzeitig universelle  $\check{U}lSp$ . Der über  $S \setminus A$  gelegene Teil ist die universelle Überlagerung von  $S \setminus A$ .
2. Ist  $p' : X' \rightarrow S'$  eine  $\check{U}lSp$  einer Mannigfaltigkeit  $S'$  mit Spitzen über einer nirgends dichten analytischen Teilmenge  $A' \subset S'$ ,  $f : S \rightarrow S'$  holomorph mit  $f^{-1}(A') \subseteq A$ ,  $x \in X$  mit  $p(x) \notin A$  und  $x' \in p'^{-1}(fp(x))$ , so gibt es genau einen Pfeil  $F : X \rightarrow X'$  mit  $fp = p'F$  und  $F(x) = x'$ . Ist  $p'$  eine  $R\check{U}lSp$ , so ist  $F$  holomorph.

3. Ist  $S' = S$  und  $p'$  irgendeine RÜlSp, so faktorisiert  $F$  über einen Isomorphismus  $\bar{F} : X/G \xrightarrow{\sim} X'$  für eine Untergruppe  $G$  von  $\text{Aut}_S(X)$ .

4. Ist  $f$  eine offene Einbettung mit  $A = f^{-1}(A')$  und  $p'$  universell, so ist auch

$$X/\ker(f_* : \pi_1(S \setminus A) \rightarrow \pi_1(S' \setminus A')) \rightarrow X'$$

eine offene Einbettung.

**3.1.10 Bemerkung und Definition:** Jeder Punkt  $a \in A$  hat eine ausgezeichnete Umgebungsbasis  $\mathfrak{U}$ , sodass  $\pi_1(U \setminus A) = \pi_1(U' \setminus A)$  kanonisch für alle  $U, U' \in \mathfrak{U}$ . Solche Umgebungen  $U \in \mathfrak{U}$  von  $a$  nenne ich auch *anständig*, weil das Urbild von  $U$  in der universellen RÜlSp  $X|S$  in anständige Umgebungen der Urbilder von  $a$  zerfällt. Das ergibt sich aus der Konstruktion [17].

**Beweis** von Satz 3.1.9: 1. und 2. Siehe [17] Satz 7 ff.

3. Über  $S_0 := S \setminus A$  ist  $X' \rightarrow S$  eine unverzweigte Überlagerung, sodass dort  $p : X_0 \rightarrow S$  zu  $q : X_0 \rightarrow X'$  liftet und schließlich zu einem Isomorphismus  $\bar{q} : X_0/G \xrightarrow{\sim} X' \times_S S_0$  faktorisiert (beachte dabei:  $\text{Aut}_S X = \text{Aut}_{S_0} X_0$ ). Der Morphismus  $X \rightarrow X'$  aus (2) setzt  $q$  fort und heiße daher auch  $q$ . Die Gleichung  $(\forall g \in G) q \circ g = q$  gilt über  $S \setminus A$ , also überall (weil  $X$  hausdorffsch und reduziert ist und  $X \times_S A$  dünn liegt). Daher faktorisiert  $q$  zu  $\bar{q} : X/G \rightarrow X'$ .

Die Umkehrabbildung  $\bar{q}^{-1} : X' \rightarrow X/G$  ist zunächst über  $S \setminus A$  erklärt. Nach Bemerkung 3.1.8 und Definition entsprechen die Punkte einer Faser  $p'^{-1}(a)$  über  $a \in A$  umkehrbar eindeutig den Zusammenhangskomponenten von  $p'^{-1}(U \cap S_0)$  für eine anständige Umgebung  $U$  von  $a$ . Das gleiche gilt für  $X/G$  statt  $X'$ , wenn  $U$  auch für  $X$  anständig ist. Da  $U$  sich in der Tat so wählen lässt – offensichtlich können Umgebungen, wenn man sie verkleinert, nur noch anständiger werden, als sie ohnehin schon sind –, folgt die Bijektivität von  $\bar{q}$ .

Für einen Punkt  $x \in X$  mit  $p(x) = a$  wird jetzt überprüft, ob  $\bar{q}$  bei  $\bar{x} := Gx/G$  offen ist. Sei  $V$  die Komponente von  $p^{-1}(U)$ , die  $x$  enthält. Weil die Projektionen  $\bar{V} \subseteq X/G$  von Mengen dieser Bauart eine Umgebungsbasis von  $\bar{x}$  bilden, genügt der Nachweis, dass  $q(V) = \bar{q}(\bar{V})$  offen ist. Sei dazu  $v$  ein Vertretersystem von  $G \backslash \text{Aut}_S(X) / \text{Aut}_S(X)_x$ . Dann ist  $p'^{-1}(U)$  die disjunkte Vereinigung der zusammenhängenden Mengen  $q(\gamma V)$ ,  $\gamma \in v$ , von denen jede genau einen Punkt über  $a$  enthält. Es kann sich also nur um die Zusammenhangskomponenten von  $p'^{-1}(U)$  handeln:  $q(V)$  ist sogar eine anständige Umgebung von  $q(x)$ .

Die geringste Struktur ist auf beiden Seiten die für (R)ÜISp eindeutig (s.o.) bestimmte Fortsetzung der Struktur auf  $X/G \cong X' \times_S S_0$ .

4. folgt aus 3. □

**3.1.11 Anmerkung:** In (3) wird „RÜISp“ nur gebraucht, damit  $\bar{F}$  am Rand injektiv ist. Eine topologische Quotientabbildung  $X/G \rightarrow X'$ , die über  $S_0$  ein Isomorphismus ist, erhält man auch, wenn  $p'$  nur eine ÜISp ist.

**3.1.12 Anmerkung:** Der riemannsche Hebbarkeitssatz auf  $X'$  wird nur für die Holomorphie der Umkehrabbildung benötigt.

**3.1.13 Beispiel:** Ist  $S = \mathbb{D}$  eine Kreisscheibe und  $A = \{0\}$  der Mittelpunkt, so wird die obere Halbebene  $\mathbb{U}$  mit der Spitze  $i\infty$  (und der üblichen Horozykeltopologie) zur universellen RÜISp via

$$\hat{\mathbb{U}} := \mathbb{U} \cup \{i\infty\} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto e^{2\pi iz}.$$

**3.1.14 Anmerkung:** Die Voraussetzung, dass die Basis  $S$  glatt sei, habe ich [17] gebraucht, um aus der lokalen Kegelförmigkeit analytischer Mengen schließen zu können, dass der Limes  $\varinjlim_U \pi_1(U \setminus A)$  über geeignete Basismengen  $U$  eines beliebigen Punktes  $a \in A$  stets stationär wird (siehe Definition 3.1.10). Für den singulären Fall kannte ich keinen passenden Satz. Für einen Knoten  $a$  in einer Kurve  $S$  allerdings wird der Limes offensichtlich stationär  $\mathbb{Z}^2$ . Als universelle RÜISp einer normalen Überkreuzung mit Spitze über dem Knoten ist dann die zusammenhängende Summe von zwei Kopien von  $\hat{\mathbb{U}}$  zu betrachten (verklebt in der Spitze). Dieses Objekt ist als *doppelter Spitzenbereich* aus der Strukturtheorie kleinscher Gruppen bekannt, siehe später. Entsprechend haben auch stabile Kurven universelle RÜISp's mit Spitzen über dem singulären Ort; die Spitzen am Rand des Teichmüller-raums parametrisieren solche RÜISp's (mit markierter Deckgruppe), siehe später.

## 3.2 Erweiterte Teichmüllerräume

Ab hier ist die Basismannigfaltigkeit  $S := \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ , und über dem Ort  $A$  der singulären Kurven werden Spitzen zugelassen. Dummerweise ist  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  keine Mannigfaltigkeit, sondern bloß ein glatter Stack. Die Eigenschaft, (R)ÜISp zu sein, ist aber lokal in der Basis, was die folgende Definition ermöglicht (vgl. Definition 2.2.3):

**3.2.1 Definition:** Eine (R)ÜISp von  $S = \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  ist lokal (R)ÜISp von Überlagerungen  $U' \rightarrow U \subseteq S$ , wobei  $U'$  eine Mannigfaltigkeit ist.

Ist  $X'$  die universelle RÜlSp von  $U'$  und  $U''$  noch so eine lokale Überlagerung, so ist  $U'' \times_S U'$  eine lokale Überlagerung von  $U'$  und  $U'' \times_S X'$  eine RÜlSp einer Zusammenhangskomponente von  $U'' \times_S U'$  und somit ein Quotient der universellen RÜlSp davon (Satz 3.1.9(3)). Die

$$X' / \ker(\pi_1(U' \setminus A) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,n}))$$

verkleben dann zur universellen RÜlSp  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Alternativ könnte man auch gleich ganz  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  durch eine höchstens über  $A$  verzweigte Überlagerung ersetzen, die wenigstens über  $\mathcal{M}_{g,n}$  ein Schema ist; etwa  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}[l]$  für ein Niveau  $l \geq 3$ .

**3.2.2 Anmerkung:** Da  $A$  ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist, ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  lokal isomorph zu Räumen der Form

$$U := \hat{U}^s \times \mathbb{D}^{3g-3+n-s}$$

mit  $\hat{U}$  aus Beispiel 3.1.13 (vgl. [17]); wobei der Punkt  $(i\infty, \dots, i\infty, 0, \dots, 0) \in U$  einer Kurve  $C$  mit  $s \geq 0$  singulären Punkten entspricht.

Um das genauer zu beschreiben: Die Kurve  $C$  besitzt eine lokale universelle Deformation über dem Parameterraum  $B := \mathbb{D}^{3g-3+n}$ , in dem die ersten  $s$  Koordinatenachsen jeweils für einen der Doppelpunkte von  $C$  der Ort sind, wo er überlebt (vgl. [44] § 2, [38] S. 495 oder [52] S. 34).  $B$  ist eine étale Karte für  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  um  $[C]_{\cong}$ . Der Spitzenbereich  $U$  überlagert  $\mathbb{D}^{3g-3+n}$  universell mit Spitzen über dem Achsenkreuz

$$\partial B := \{(z_1, \dots, z_{3g-3+n}) \in \mathbb{D}^{3g-3+n} \mid z_1 \cdots z_s = 0\}.$$

Die (lokale) Deckgruppe  $\text{Aut}_B(U)$  wird einerseits mit der Fundamentalgruppe des Achsenkreuzkomplements  $B_0 := B \setminus \partial B$  identifiziert, einer freien abelschen Gruppe in  $s$  Erzeugern; andererseits als Fixgruppe von  $(i\infty, \dots, i\infty, 0, \dots, 0) \in U$  mit  $\text{Aut}_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}}(\bar{\mathcal{T}}_{g,n})_x$  für irgendeinen Punkt  $x$  über  $[C]_{\cong}$ , siehe z.B. [52] 3.3.3: Die Schleifen um die ersten  $s$  Koordinatenachsen von  $B$  werden von Dehn-Twists  $\tau_1, \dots, \tau_s$  längs Schleifen  $c_1, \dots, c_s$  überlagert, die in  $C$  degeneriert sind. Diese Dehn-Twists erzeugen frei die Fixgruppe von  $x$  über  $B$ . Insbesondere wird die Fundamentalgruppe von  $B_0$  in die Fundamentalgruppe von  $\mathcal{M}_g$  eingebettet, und Satz 3.1.9 (4) liefert eine offene Einbettung  $U \hookrightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ .

### 3.3 B-Gruppen

Die Spitzen von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  sollten stabile Kurven mit Teichmüllerstruktur parametrisieren. Es geht also hier darum, was mit der Teichmüllerstruktur auf einer Kurve passiert, wenn die Kurve entartet.

Ausgehend von Bers [14] und Maskit [45] haben in den siebziger Jahren zahlreiche Leute verfolgt, wie (markierte) quasifuchssche Gruppen degenerieren, und haben dabei die Spitzen von  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  innerhalb des Bers-Randes von  $\mathcal{T}_{g,n}$  identifiziert. Der *Bers-Rand* von  $\mathcal{T}_{g,n}$  ist der Rand des Bers-Modells  $\mathcal{T}(\pi_{g,n})$  im Vektorraum der quadratischen Differentiale  $B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$ . Er hängt wesentlich von der Wahl der Referenzfläche  $\mathbb{S}_{g,n}$  ab [39]. Interessanterweise hat Abikoff jedoch eine Teilmenge der Bers-Kompaktifizierung von  $\mathcal{T}_{g,n}$  mit einer Topologie versehen, die nicht von der Referenzfläche abhängt ([3] Theorem 2). Es wird sich zeigen, dass dies der topologische Raum ist, der  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  zugrundeliegt.

Abikoff [2] [3] erweitert den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}(\pi_{g,n})$  um reguläre B-Gruppen, siehe auch [1]. Daher muss ich an dieser Stelle die entsprechende Fachsprache einführen und folge dabei Maskit [46] (Kapitel IX). Der Zusammenhang zwischen B-Gruppen und entarteten riemannschen Flächen findet sich u. a. zusammengefasst bei Hejhal [33].

**3.3.1 Definition:** Eine *B-Gruppe*  $(G, D)$  besteht aus einer endlich erzeugten kleinschen Gruppe  $G$  und einer einfach zusammenhängenden  $G$ -invarianten Komponente  $D$  ihres Diskontinuitätsbereichs  $\Omega(G) \subset \hat{\mathbb{C}}$ .

Solche Gruppen kommen am Rand des Teichmüllerraums  $\mathcal{T}(\pi_{g,n}) \subset B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$  vor; in diesem Zusammenhang hat Bers [14] sie „B“ (boundary) genannt. Die entsprechenden Deformationen  $(\phi: \pi_{g,n} \rightarrow G, f: \mathbb{L} \rightarrow D)$  bilden die untere Halbebene  $\mathbb{L}$  konform auf die einfach zusammenhängende Komponente  $\Omega^-(G) := D$  der B-Gruppe  $(G, D)$  ab; diese Komponente uniformisiert also nach wie vor die Referenzfläche. Die restlichen Komponenten des Diskontinuitätsbereichs der B-Gruppe uniformisieren irreduzible Komponenten einer deformierten Fläche. (Ahlfors hat bewiesen, dass die Quotientfläche einer endlich erzeugten kleinschen Gruppe immer aus endlich vielen konform endlichen Komponenten besteht, d. h. aus geschlossenen riemannschen Flächen minus endlich viele Punkte.)

Im Hinblick auf diese Situation interessiere ich mich nur für nicht elementare B-Gruppen. Für eine solche B-Gruppe  $(G, D)$  gibt es einen Isomorphismus  $\beta: D \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}$ , d. h. die B-Gruppe ist konform ähnlich zu einer fuchsschen Gruppe  $F := \beta G \beta^{-1}$ , dem *fuchsschen Modell* von  $G$ . Weil die Quotientfläche  $\mathbb{U}/F$  konform endlich ist, handelt es sich um eine endlich erzeugte fuchssche Gruppe erster Art.

**3.3.2 Bemerkung:** Sei  $(G, D)$  eine nicht elementare B-Gruppe mit  $D \neq \Omega(G)$ .

Die Grenzmenge  $\Lambda(G)$  ist der Rand von  $D$ , insbesondere zusammenhängend. Alle Komponenten  $\Omega_i$  von  $\Omega(G)$  hängen einfach zusammen.

Sei  $G_i$  der Stabilisator von  $\Omega_i$ . Wenn  $\Omega_i/G_i$  konform endlich ist, dann ist  $\Omega_i$  auch eine Komponente von  $\Omega(G_i)$ .

Jeder Homöomorphismus  $\phi$  von  $\Omega$ , der  $G$  zentralisiert, lässt sich durch  $\phi|_\Lambda := \text{id}$  zu einer Deformation fortsetzen, d. h. einem Homöomorphismus von  $\widehat{\mathbb{C}}$ , der  $G$  zentralisiert.

Wenn  $G$  nicht quasifuchsisch ist, dann ist  $D$  die einzige invariante Komponente.

**Beweis:** vgl. Maskit [46] Kapitel IX.D. □

Bei manchen B-Gruppen  $(G, D)$  ist die einfach zusammenhängende Komponente  $D$  schon der ganze Diskontinuitätsbereich. Man nennt diese B-Gruppen *entartet*. Im folgenden wird erklärt, wie  $G$  aussehen muss, damit  $\Omega(G) \setminus D$  nicht leer ist und eine Fläche mit Knoten uniformisiert.

**3.3.3 Definition:** Sei  $(G, D)$  eine B-Gruppe. Ein *versehentlich parabolisches Element* (*accidental parabolic* [46] IX.D.6) ist ein parabolisches Element  $\gamma \in G$ , das unter einer konformen Ähnlichkeit zu einem nicht parabolischen Element einer (anderen) B-Gruppe konjugiert ist. (Eine *Ähnlichkeit* zwischen  $(G, D)$  und  $(G', D')$  ist ein Homöomorphismus  $f: D \rightarrow D'$  mit  $fGf^{-1} = G'$ .)

Das heißt: Ein versehentlich parabolisches Element gehört nicht zu einem punktförmigen Loch, sondern überlagert eine Schleife in der Quotientfläche. Nur ist die universelle Überlagerung  $D \rightarrow D/G$  so verzerrt in  $\widehat{\mathbb{C}}$  eingebettet, dass das Element trotzdem parabolisch wird.

**3.3.4 Bemerkung:** *In fuchsischen Gruppen erster Art ist niemand aus Versehen parabolisch.*

**Beweis:** Siehe [46] IX.D.7 und VI.A.7. Nimm ein primitives parabolisches Element  $\gamma$ , normiere zu  $\gamma(z) = z + 1$ . Die Überlagerung  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}/G$  faktorisiert über die punktierte Kreisscheibe  $\mathbb{U}/\langle \gamma \rangle$ . Die Quotientfläche  $\mathbb{U}/G$  enthält also eine gelochte Kreisscheibe, und  $\gamma$  überlagert das Loch. Nach Ahlfors' Lemma [46] IX.A.5 kann die Schleife um eine Punktierung niemals von einem loxodromischen/hyperbolischen Element überlagert werden. □

Genauso sieht es in quasifuchsischen Gruppen aus. Parabolische Elemente einer beliebigen B-Gruppe sind also genau dann nur versehentlich parabolisch, wenn sie im (quasi)fuchsischen Modell hyperbolisch sind.

**3.3.5 Definition:** Die *Achse* einer versehentlich parabolischen Transformation in  $(G, D)$  ist ihre Achse als Isometrie von  $D$  mit der hyperbolischen Metrik.

Die Achse ist also in  $D$  eine Geodätische, in  $\hat{\mathbb{C}}$  dagegen eine Schleife, die beim Fixpunkt der parabolischen Transformation beginnt und endet.

**3.3.6 Definition:** Sei  $(G, D)$  eine B-Gruppe.

(1) Ein *Spitzenbereich* (*cusped region* [46] VI.A.8) ist eine offene Kreisscheibe für die sphärische Metrik in  $\hat{\mathbb{C}}$ , die genau unter einer zyklischen Untergruppe von  $G$  invariant (vgl. Definition 3.1.1) ist.

Diese Untergruppe besteht dann aus parabolischen Elementen mit einem gemeinsamen Fixpunkt (*Spitze*) auf dem Rand des Spitzenbereichs.

(2) Ein *doppelter Spitzenbereich* (*doubly cusped region* [46] VI.A.8) besteht aus zwei disjunkten Spitzenbereichen mit derselben Fixgruppe sowie der (gemeinsamen) Spitze. (Ich verwende den Ausdruck gelegentlich auch für Bereiche, die zu so etwas isomorph sind.) Da ich mich nur für torsionsfreie B-Gruppen interessiere, möchte ich in dieser Definition außerdem ausschließen, dass eine Transformation in  $G$  die beiden Hälften des doppelten Spitzenbereichs vertauscht. Die Fixgruppe des doppelten Spitzenbereichs ist also die gemeinsame Fixgruppe der beiden Hälften.

(3) Die B-Gruppe  $(G, D)$  ist *regulär* [1], wenn sie nicht entartet ist und zu jeder parabolischen Transformation ein doppelter Spitzenbereich gehört.

(4) Sei  $(G, D)$  eine reguläre B-Gruppe. Der *erweiterte Diskontinuitätsbereich*  $\hat{\Omega}(G)$  der Gruppe besteht aus dem Diskontinuitätsbereich  $\Omega(G)$  sowie den parabolischen Fixpunkten von  $G$  und wird mit der *Spitzentopologie* versehen (vgl. Hidalgo [35] §1 oder [36] Seite 210), die von den offenen Mengen der üblichen Topologie zusammen mit den doppelten Spitzenbereichen erzeugt wird.

**3.3.7 Bemerkung:** Jeder doppelte Spitzenbereich  $D \subset \hat{\Omega}(G)$  überlagert eine normale Überkreuzung im Quotientenraum  $\hat{\Omega}(G)/G$ .

**Beweis:** Sei  $D$  ein doppelter Spitzenbereich und  $\langle \gamma \rangle$  seine Fixgruppe. Bei geeigneter Koordinatenwahl wird  $\gamma = (z \mapsto z+1)$  Translation. Dann fällt die Spitze auf  $\infty$ , und der doppelte Spitzenbereich enthält das Komplement eines horizontalen Streifens. Im Quotientenraum  $\Omega(G)/G$  überlagern die beiden Hälften von  $D$  jeweils eine gelochte Kreisscheibe. Das Bild der Spitze füllt die Löcher beider Kreisscheiben, es entsteht topologisch eine Überkreuzung. Die Strukturgarbe des Quotientenraums ordnet einem offenen Teil  $V/\langle \gamma \rangle$  von  $D/\langle \gamma \rangle$  die Algebra  $\mathcal{O}_D(V)$  zu, also invariante Funktionen, die in der Spitze

stetig und sonst holomorph sind. Das ist kanonisch dasselbe wie Funktionen auf  $V/\langle\gamma\rangle$ , die im Knoten stetig und sonst holomorph sind, also die Strukturgarbe einer normalen Überkreuzung.  $\square$

Sei  $(G, D)$  eine reguläre B-Gruppe am Rand von  $\mathcal{T}(\pi_{g,n})$ ,  $\Omega^-(G) = D$  die invariante Komponente und  $\Omega^+(G)$  der Rest des Diskontinuitätsbereichs. Mit  $\hat{\Omega}^+(G)$  ist die Vereinigung dieses Rests mit den Fixpunkten der versehentlich parabolischen Elemente gemeint. Der Quotient  $C(G) := \hat{\Omega}^+(G)/G$  ist dann eine riemannsche Fläche mit normalen Überkreuzungen. Sie hängt zusammen und ist stabil mit arithmetischem Geschlecht  $g$  und  $n$  Punktierungen (vgl. [45] und/oder [1] Theorem 1). Die Punktierungen sind die Bilder der versehentlich parabolischen Fixpunkte, deren doppelter Spitzenbereich zur Hälfte in  $D = \Omega^-(G)$  liegt.

**3.3.8 Hilfssatz:** *Sei  $(G, D)$  eine reguläre B-Gruppe am Rand des Teichmüllerraums. Dann ist  $\hat{\Omega}(G)$  eine RÜlSp von  $\hat{\Omega}(G)/G$  mit Spitzen über den Knoten. Somit ist  $\hat{\Omega}^+(G)$  eine RÜlSp von  $C(G)$  mit Spitzen über den Knoten und den Punktierungen von  $C(G)$ .*

**Beweis:** Nur an den Knoten ist etwas zu zeigen. Sei  $U$  eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $C(G)$ , die nur einen Knoten enthält. Ich zeige, dass  $U$  eine für die Überlagerung  $\hat{\Omega}^+(G) \rightarrow C(G)$  anständige Umgebung des Knotens enthält.

Sei  $z$  der Knoten in  $U$  und  $z_1 \in \hat{\Omega}(G)$  ein beliebiges Urbild davon. Das Urbild von  $U$  ist eine Umgebung der Spitze  $z_1$ , enthält also einen doppelten Spitzenbereich  $V_1 \subset \hat{\Omega}(G)$ . Das Bild von  $V_1$  in  $C(G)$  besteht aus zwei disjunkten punktierten Kreisscheiben und deren gemeinsamem Zentrum: dem Knoten. Das Bild von  $V_1$  ist also eine Umgebung  $U_1$  des Knotens. Das Urbild von  $U_1$  in  $\hat{\Omega}(G)$  besteht aus den disjunkten doppelten Spitzenbereichen  $g(V_1)$ , wobei  $g \in G$  ein Vertretersystem modulo der zyklischen Untergruppe  $\text{Stab}(z_1)$  durchläuft, unter der  $V_1$  genau invariant ist.  $\square$

### 3.4 Abikoffs Teichmüllerraum

**3.4.1 Definition:** Abikoffs *augmented Teichmüller space*  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  besteht aus dem Teichmüllerraum  $\mathcal{T}(\pi_{g,n})$  und den regulären B-Gruppen an seinem Rand.

Punkte  $G \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  schreibe ich auch (siehe [3]) als  $[C, f]$ , wobei  $C = \hat{\Omega}^+(G)/G$  die von  $G$  uniformisierte stabile Kurve ist und  $f: \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow C$  die zugehörige Deformation (stetige Abbildung, die Schleifen kontrahiert).

Die Topologie auf  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  erklärt Abikoff folgendermaßen: Basisumgebungen  $U_{K,\varepsilon}(G)$  von  $G = [C, f]$  bestehen aus markierten Flächen  $[C', f']$ , die eine markierungstreue Deformation  $\phi: C' \rightarrow C$  zulassen (d. h.  $\phi \circ f' \sim f$ ), die außerhalb einer vorgegebenen Umgebung  $K$  der Knoten von  $C$  quasikonform oder auch quasiisometrisch mit vorgegebenem Modul  $1 + \varepsilon$  ist.

**3.4.2 Satz:** *Abikoffs augmented Teichmüller space  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  ist der topologische Raum, der  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  zugrundeliegt.*

Dazu muss ich zuerst den Stabilisator  $\text{Stab}(G)$  einer Gruppe  $G \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  beschreiben, die einer degenerierten Kurve  $C$  wie oben entspricht. Abikoff [3] ist an dieser Stelle (§ 2.2, Theorem 4) nicht so explizit, wie ich das brauche, außerdem hat der AMS-Reviewer C. Earle einen (unwesentlichen) Fehler entdeckt.<sup>6</sup>

**3.4.3 Hilfssatz:** *Seien  $\alpha_i$  disjunkte Jordankurven auf einer Fläche  $S$ . Sei  $\sigma$  ein Homöomorphismus von  $S$ , der jede der Kurven  $\alpha_i$  auf eine isotope Kurve  $\sigma(\alpha_i)$  abbildet. Dann gibt es einen zu  $\sigma$  isotopen Homöomorphismus, der die  $\alpha_i$  punktweise festhält.*

**Beweis:** Baer [8], Satz 1a □

**3.4.4 Hilfssatz:** *Seien  $c_1, \dots, c_s \subset \mathbb{S}_{g,n}$  die Schleifen, die zu den versehentlich parabolischen Elementen in  $G$  gehören. Sei  $\mathbb{Z}^s$  die von den Dehtwists  $\tau_1, \dots, \tau_s$  um  $c_1, \dots, c_s$  erzeugte Untergruppe der Abbildungsklassengruppe  $\Gamma_{g,n}$ . Dann steht  $\text{Stab}(G)$  in einer exakten Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow \text{Stab}(G) \rightarrow \text{Aut}(C) \rightarrow 1$$

**Beweis:** Abikoff [3] behauptet eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow M\langle G \rangle \rightarrow \text{Stab}(G) \rightarrow \text{Aut}(C) \rightarrow 1,$$

wobei – mit den Bezeichnungen aus Anmerkung 3.2.2 –  $\text{Aut}(C)$  die Automorphismengruppe von  $B^0$  über  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  ist. Ich muss nur noch zeigen, dass  $M\langle G \rangle$  die freie abelsche Gruppe ist, die von den Dehtwists wie oben erzeugt wird.

Sei  $\sigma \in M\langle G \rangle$ . Laut [3] (2.2) zentralisiert  $\sigma$  die Dehtwists  $\tau_i$ , fixiert also die Isotopieklassen der degenerierten Kurven  $c_i$ , und außerdem gilt

---

<sup>6</sup>Abikoff hatte übersehen, dass das von ihm  $\langle G \rangle$  genannte Randstratum von Modultransformationen stabilisiert wird, die zu den gemeinsamen Automorphismen aller Kurven in diesem Stratum gehören.

$\sigma(\alpha) = \alpha$  für alle Kurven  $\alpha$ , die keine  $c_i$  schneiden. Ich wähle eine maximale Entartung der stabilen Kurve  $C$ , ergänze  $c_1, \dots, c_s$  also zu einem System  $(c_1, \dots, c_N)$  von  $N = 3g - 3 + n$  disjunkten Kurven, sodass die Komponenten des Komplements dreifach gelochte Sphären sind. Nach dem Hilfssatz 3.4.3 kann ich annehmen, dass  $\sigma$  alle diese Kurven festhält (einschliesslich ihrer Orientierung). Dann hält  $\sigma$  auch alle Komponenten des Komplements  $C^0 \setminus (c_1 \cup \dots \cup c_N)$  fest, und weil die Abbildungsklassengruppe einer dreifach gelochten Sphäre trivial ist bzw. bei festgehaltenem Rand von den Dehntwists entlang den drei Randkurven erzeugt wird, ist  $\sigma$  auf dem Komplement der  $N$  Kurven isotop zur Identität. Insgesamt ist  $\sigma$  ein Produkt von Dehntwists an den  $N$  Kurven. Dass daran eine Kurve  $\alpha$  außer  $c_1, \dots, c_s$  beteiligt ist, kann ich ausschließen:

Die von den Dehntwists  $\tau_i$  an  $c_i$  ( $s + 1 \leq i \leq N$ ) erzeugte freie abelsche Gruppe wird injektiv in die äußere Automorphismengruppe von  $\prod_i \pi_i$  abgebildet, wobei  $\pi_i$  die Fundamentalgruppen der irreduziblen Komponenten von  $C$  sind. Erst recht operiert sie treu auf der Fundamentalgruppe  $\pi_1(C)$ , also auch fixpunktfrei auf der Bahn in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Herrlich}}$ , erst recht in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$ .  $\square$

**Beweis** von Satz 3.4.2: Laut [34] gibt es eine Quotientabbildung

$$p: \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$$

Abikoffs Topologie genügt den Anforderungen dafür, dass  $p$  eine ÜISp ist: Für  $G = [C, f] \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  muss ich eine Umgebungsbasis aus anständigen Umgebungen finden. Ich behaupte: Die Schnitte

$$\cap_{\sigma \in \text{Aut}(C)} \sigma(U_{K,\varepsilon}(G))$$

tun es. Dazu habe ich nach Hilfssatz 3.4.4 noch zu zeigen, dass  $U_{K,\varepsilon}(G)$  unter  $\mathbb{Z}^s$  invariant ist. Das ist aber klar.

Jetzt greift der dritte Teil von Satz 3.1.9, genauer gesagt Anmerkung 3.1.11. Die Abbildung  $\tilde{p}: \bar{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  ist bijektiv wegen Hilfssatz 3.4.4: Ein Punkt in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  hat keinen größeren Stabilisator als sein Urbild in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ . (Das wird auch in [31] S. 207 angedeutet.)  $\square$

**3.4.5 Definition:** Zu  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  bezeichne ich die entsprechende B-Gruppe  $G \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  mit  $G_t$ , den erweiterten Diskontinuitätsbereich mit  $\hat{\Omega}_t^+$ , die Quotientkurve mit  $C_t$  usw. Die Gruppen  $G_t < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  werden normiert wie zum Beispiel in [33], sodass die universelle Deformation  $\pi_{g,n} \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  stetig ist.

### 3.5 Räume zwischen $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ und Modulraum

**3.5.1 Bemerkung:** Von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  führt eine holomorphe Surjektion in Herrlich's extended Teichmüller space. Sie ist auf dem Rand nicht injektiv und hat nicht einmal überall endliche Fasern. Eine Quotientabbildung ist sie nur auf topologischem Niveau.

**Beweis:** Herrlich's Teichmüllerraum ist nach [34] Proposition 2 und Theorem eine  $\ddot{\text{U}}\text{Sp}$ . (Seine Strukturgarbe ist gröber als die von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  induzierte.) Es gibt also eine stetige Abbildung ( $\ddot{\text{U}}\text{Sp}$ )  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Herrlich}}$ . Nach Anmerkung 3.1.11 ist sie surjektiv. Sie ist holomorph, weil auch Herrlich's holomorphe Funktionen stetig und im Inneren  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  holomorph sind. Sie ist nach Definition von Herrlich's Topologie und Satz 3.4.2 topologisch eine Quotientabbildung. Sie ist aber auf dem Rand nicht injektiv: Im *extended Teichmüller space* nach Herrlich überschneiden sich am Rand Spitzen verschiedener Zweige von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ . Siehe dazu [34] (1.3) und (1.4).  $\square$

**3.5.2 Bemerkung:** Die Modulräume für stabile Kurven mit endlicher Niveaustruktur bestehen aus Zusammenhangskomponenten, die zu Quotienten von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  isomorph sind.

**Beweis:** Das ist der dritte Teil von Satz 3.1.9.  $\square$

**3.5.3 Bemerkung:** Sei  $H$  eine Untergruppe der Teichmüllermodulgruppe  $\Gamma_g := \text{Aut}_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}}(\bar{\mathcal{T}}_{g,n})$ . Genau dann ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}/H$  ein komplexer Raum, wenn für jeden Dehntwist  $\tau \in \Gamma_g$  eine Potenz  $\tau^n$  ( $n \geq 1$ ) in  $H$  liegt.

**Beweis:** Ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}/H$  ein komplexer Raum und  $\tau$  ein Dehntwist, so sei  $x \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  mit  $\tau(x) = x$ ,  $K \subset \bar{\mathcal{T}}_{g,n}/H$  eine kompakte Umgebung von  $Hx$  und  $U \subset K$  eine offene, deren Abschluss im Inneren  $K^\circ$  von  $K$  liegt. Das Urbild  $V \subset \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  von  $U$  umgibt  $x$ ;  $U$  lässt sich verkleinern, sodass  $\Gamma_x V = V$ . In  $V$  gibt es einen Punkt  $y$ , der über dem automorphismenfreien Ort von  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  liegt. Da  $\bar{U}$  kompakt ist, konvergiert  $H\tau^n(y)$  gegen einen Punkt  $Hx \in \bar{U}$  für eine Teilfolge  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $H' := \{\gamma \in \Gamma \mid H\gamma(y) \neq Hx\}$ . Da die  $\Gamma$ -Bahnen in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  diskret sind, ist  $K^\circ \setminus (H'y)/H$  offen in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}/H$ ; mit  $Hx$  liegen auch fast alle  $H\tau^n(y)$  aus der gewählten Teilfolge darin. Für diese  $n$  gilt dann  $H\tau^n(y) = Hx$ . Seien  $n' > n$  aus der Teilfolge. Aus  $\tau^{n'}y = h\tau^n y$  für ein passendes Element  $h \in H$  folgt — weil  $\Gamma$  auf der Bahn von  $y$  treu operiert — schon  $\tau^{n'} = h\tau^n$ , also  $\tau^{n'-n} \in H$ .

Umkehrung: Um  $x$  herum ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  isomorph zu  $U := (\mathbb{U} \cup \{i\infty\})^s \times \mathbb{D}^{3g-3+n-s}$ , und die Deckgruppe von  $U$  über  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  enthält die Deckgruppe

$\mathbb{Z}^s$  über einer lokalen universellen Deformation  $B = \mathbb{D}^{3g-3+n}$  als Normalteiler von endlichem Index ( $B : \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ ). (Der Quotient ist die Automorphismengruppe der entsprechenden Kurve.)  $H' := \mathbb{Z}^s \cap H$  ist normal in  $H_x = \Gamma_x \cap H$  und von endlichem Index sowohl in  $H_x$  als auch in  $\mathbb{Z}^s$ . Wir haben also  $U/H_x \subset \bar{\mathcal{T}}_{g,n}/H$  als Quotient von  $U/H'$  nach einer endlichen Gruppe dargestellt und brauchen nur noch zu zeigen, dass  $U/H'$  ein komplexer Raum ist. Als koendliche Untergruppe von  $\mathbb{Z}^s$  enthält  $H'$  eine (wiederum koendliche) Untergruppe  $(d\mathbb{Z})^s$ , und  $U/H'$  ist Quotient von  $U/(d\mathbb{Z})^s$  nach einer endlichen Gruppe.  $U/(d\mathbb{Z})^s$  schließlich ist offensichtlich ein komplexer Raum, isomorph zu  $\mathbb{D}^{3g-3+n}$ .  $\square$

## 4 Moduli für stabile Teichmüllerkurven

### 4.1 Stabile Teichmüllerkurven

Wir haben jetzt einen Zugang zu den Spitzen des Teichmüllerraums in der Begriffswelt der Deformation kleinscher Gruppen. Als nächste Aufgabe wird das in die Sprechweise der in §1.3 besprochenen axiomatischen Definitionen von  $\mathcal{T}_{g,n}$  zu übersetzen sein. Ein Problem ist dabei, dass in den Fundamental- und Abbildungsklassengruppen bei entarteten Kurven zu viel verloren geht, um den Teichmüllerfunktors formal wie oben definieren zu können. Das Problem will ich umgehen, indem ich statt einer stabilen Kurve  $C(G) := \hat{\Omega}^+(G)/G$  den Quotienten  $\tilde{C}(G) := [\hat{\Omega}^+(G)/G]$  in der 2-Kategorie der geometrischen Stacks von komplexen Räumen mit Spitzen betrachte. Siehe auch [6], wo eine endliche Version dieser Konstruktion motiviert wird.

**4.1.1 Definition:** Zu jeder stabilen Kurve  $C$  betrachte ich den Quotientenstack  $\tilde{C}$  in der Spitzenkategorie, der aus  $C$  hervorgeht, indem die Knoten wie folgt durch Quotientpunkte ersetzt werden: Sei  $z \in C$  ein Knoten und  $U \cong \mathbb{D} \sqcup_z \mathbb{D}$  eine Umgebung. Sei  $V$  die universelle RÜlSp von  $U$  mit Spitzen über dem Knoten wie in Anmerkung 3.1.14. Dieser geringte Raum ist isomorph zu einem doppelten Spitzenbereich. Die Deckgruppe  $\text{Aut}_U V \cong \mathbb{Z}^2$  ist in offensichtlicher Weise das Produkt der Fundamentalgruppen der beiden punktierten Kreisscheiben, aus denen der glatte Teil von  $U$  besteht. Sei nun  $\gamma \in \text{Aut}_U V$  die Transformation, die auf der einen Hälfte des doppelten Spitzenbereichs einem positiv orientierten, auf der anderen Hälfte einem negativ orientierten Umlauf in der darunterliegenden gelochten Kreisscheibe entspricht. Wohldefiniert ist zwar nicht  $\gamma$  selbst, aber die von  $\gamma$  erzeugte Untergruppe in  $\text{Aut}_U V$  (die zweite Winkelhalbierende in  $\mathbb{Z}^2$ ). Das Quotientengruppoide  $\tilde{U} := [V/\langle \gamma \rangle]$  ist außerhalb des Knotens zu  $U$  isomorph. Der

Stack  $\tilde{C}$  entsteht aus  $C$ , indem ich  $U$  durch  $\tilde{U}$  ersetze.

**4.1.2 Anmerkung:** Sei  $(G, D)$  eine reguläre B-Gruppe und  $C$  die Quotientkurve  $\hat{\Omega}^+(G)/G$ . Dann ist  $\tilde{C}$  das Quotientgruppoid  $[\hat{\Omega}^+(G)/G]$ . (Nach Definition von regulären B-Gruppen wird jeder Knoten in  $C$  durch doppelte Spitzenbereiche überlagert.) Weil der topologische Raum  $\hat{\Omega}^+(G)$  einfach zusammenhängt, hat der Quotient die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\tilde{C}) \cong G$ .

**4.1.3 Bemerkung:** Jede Deformation  $f: C \rightarrow C'$  induziert einen eindeutig bestimmten Morphismus  $\tilde{f}: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$  (von topologischen Stacks).

**Beweis:** Seien  $t, \tau \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  mit  $C = C_t$  und  $C' = C_\tau$ . Sei  $\zeta \in C'$  ein Knoten. Zwei Fälle:

(1) Das Urbild von  $\zeta$  ist ein Knoten  $z \in C$ . Die Deformation  $f$  ist homöomorph in einer Umgebung  $U \subset C$  von  $z$ , die aus zwei sich überkreuzenden Kreisscheiben besteht. Das Urbild von  $U$  in  $\hat{\Omega}_t^+$  besteht (evtl. nach Verkleinern von  $U$ ) aus doppelten Spitzenbereichen, d. h. die Komponenten sind isomorph zu  $\hat{U} \sqcup_{i\infty} \hat{U}$ , wobei die lokale Deckgruppe sich als Translationsgruppe  $\mathbb{Z}$  schreibt.

Das gleiche gilt für  $f(U)$ . Daher induziert  $f$  lokal einen Homöomorphismus zwischen  $\hat{\Omega}_t^+$  und  $\hat{\Omega}_\tau^+$ , d. h. einen Isomorphismus zwischen  $\tilde{C}$  und  $\tilde{C}'$ .

(2) Das Urbild von  $\zeta$  ist eine einfache Schleife  $\alpha \subset C$ . In diesem Fall sei  $U \subset C$  ein Kragen um  $\alpha$ , also topologisch zusammengesetzt aus der Schleife  $\alpha$  und zwei offenen Ringgebieten. Dann sieht  $f(U)$  aus wie im Fall (1) und dementsprechend das Urbild in  $\hat{\Omega}_\tau^+$ . Das Urbild von  $U$  in  $\Omega_t$  besteht aus Streifen mit zyklischer Deckgruppe, erzeugt von  $\alpha$  (als Element der Fundamentalgruppe von  $C$ ). Ich habe also dort eine  $\mathbb{Z}$ -äquivariante Liftung von  $\Omega_t^+$  nach  $\hat{\Omega}_\tau^+$ , die das Urbild der Schleife  $\alpha$  auf eine Spitze in  $\hat{\Omega}_\tau^+$  abbildet.  $\square$

Ist insbesondere  $C = C_0$  die Referenzfläche, so induziert die Deformation einen äußeren Homomorphismus

$$\pi_{g,n} = \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(\tilde{C}').$$

**4.1.4 Folge:** Seien  $t, \tau \in \bar{\mathcal{T}}(\pi_{g,n})$ . Jede Deformation  $f: C_t \rightarrow C_\tau$  lässt eine Liftung  $\hat{f}: \hat{\Omega}_t^+ \rightarrow \hat{\Omega}_\tau^+$  zu.

**Beweis:** Der Morphismus

$$\hat{\Omega}_t^+ \xrightarrow{/G_t} \tilde{C}_t \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{C}_\tau$$

(mit  $\tilde{f}$  aus Bemerkung 4.1.3) kommt von einem  $\pi_{g,n}$ -Bündel  $B|\hat{\Omega}_t^+$  (das Pullback von  $\hat{\Omega}_\tau^+|C_\tau$ ). Als Überlagerung des einfach zusammenhängenden Raums  $\hat{\Omega}_t^+$  ist  $B$  disjunkte Vereinigung von Kopien von  $\hat{\Omega}_t^+$ . Somit induziert  $B \rightarrow \hat{\Omega}_\tau^+$  die gewünschte Abbildung  $\tilde{f}: \hat{\Omega}_t^+ \rightarrow \hat{\Omega}_\tau^+$ .  $\square$

**4.1.5 Anmerkung:** Die im Beweis konstruierte Liftung  $\hat{f}$  liftet auch den Gruppoidmorphismus  $\tilde{C}_t \rightarrow \tilde{C}_\tau$  aus Bemerkung 4.1.3 und ist durch diese Zusatzforderung eindeutig modulo  $\pi_{g,n}$  bestimmt (weil in ein  $\pi_{g,n}$ -Prinzipal-bündel geliftet wird). Die Liftung induziert einen Isomorphismus

$$\text{Aut}(\hat{\Omega}_t^+|C_t) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\hat{\Omega}_\tau^+|C_\tau),$$

der den äußeren Isomorphismus  $\pi_1(\tilde{f}): \pi_1(\tilde{C}_t) \rightarrow \pi_1(\tilde{C}_\tau)$  repräsentiert.

**4.1.6 Folge:** Falls  $f$  markierungstreu ist, also  $\pi_1(f)$  die Identität auf  $\pi_{g,n}$ , so gibt es genau eine  $\pi_{g,n}$ -äquivalente Liftung  $\hat{f}$  von  $\hat{\Omega}_t^+$  nach  $\hat{\Omega}_\tau^+$ .

**Beweis:** Das Zentrum von  $\pi_{g,n}$  ist trivial.  $\square$

## 4.2 Die universelle stabile Teichmüllerkurve

Um einen Parameterraum mit einer universellen Eigenschaft zu versehen, braucht man vor allem ein universelles Objekt. Ich kenne im Wesentlichen zwei Techniken, mit denen im glatten Fall die universelle Familie über dem Teichmüllerraum konstruiert wird.

Erstens kann man den Vergissmorphismus  $\mathcal{T}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  benutzen. Man hat eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_{g,n} \rightarrow \Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n} \rightarrow 1.$$

Der Morphismus  $\mathcal{T}_{g,n+1}/\pi_{g,n} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  ist die universelle Kurve und  $\mathcal{T}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n+1}/\pi_{g,n}$  die universelle Markierung. Genauso kann man natürlich

$$\tilde{C}_{g,n} := \tilde{\mathcal{T}}_{g,n+1}/\pi_{g,n}$$

betrachten. Dabei stellen sich zwei Fragen: Gibt es einen (natürlichen) Morphismus  $\tilde{C}_{g,n} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , und wenn ja: was sind seine Fasern?

Zweitens kann man (wieder im glatten Fall) eine Berseibettung

$$\mathcal{T}_{g,n} \hookrightarrow \text{Hom}(\pi_{g,n}, \text{PSL}_2 \mathbb{C})$$

benutzen und die obere Hälfte  $\Omega^+$  des Diskontinuitätsbereichs verwenden, um die universelle Kurve  $\Omega^+/\pi_{g,n}$  zu markieren. Funktioniert das noch für

stabile Kurven? Faserweise ist klar, was  $\hat{\Omega}^+|\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  ist – sobald man  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  mit  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}^{\text{Abikoff}}$  identifiziert und somit in  $\text{Hom}(\pi_{g,n}, \text{PSL}_2 \mathbb{C})$  eingebettet hat. Das ist kein  $\mathbb{U}$ -Bündel mehr über  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ , aber wenigstens sollte  $\hat{\Omega}^+$  eine natürliche Struktur als komplexer Raum mit Spitzen haben.

Der Isomorphiesatz von Bers [15] stellt fest, dass im glatten Fall beide Konstruktionen zum gleichen Ergebnis führen. Ziel des vorliegenden § 4.2 ist die Verallgemeinerung dieses Isomorphiesatzes auf den nicht glatten (stabilen) Fall.

**4.2.1 Hilfssatz:**  $\Omega^+ := \{(t, z) \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n} \times \hat{\mathbb{C}} \mid z \in \Omega_t^+\}$  ist offen in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \times \hat{\mathbb{C}}$ .

Das stimmt in der Bers-Topologie (die von der Inklusion

$$\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \hookrightarrow B_2(\mathbb{L}/\pi_{g,n})$$

induziert wird) übrigens nicht. Die Gruppen mit nicht leerem  $\Omega^+$  sind eine Nullmenge auf dem Bers-Rand.

**Beweis** von Hilfssatz 4.2.1: Das ist im glatten Bereich [15] Theorem 1 und folgt im degenerierten Fall aus [33] Theorem 1.17. Ich folge dem Argument in [3] unter § 3 Lemma 1: Sei  $\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  und  $t \rightarrow \tau$  in Abikoffs Topologie. Nimm an:  $z_t \notin \Omega_t^+$  mit  $z_t \rightarrow z \in \Omega_\tau^+$ .

Dann gibt es Deformationen  $h_t: C_t \rightarrow C_\tau$  und Umgebungen  $K_t \subset C_\tau$  der Knoten von  $C_\tau$ , sodass  $h_t$  außerhalb von  $K_t$  quasikonform mit Modul  $1 + \varepsilon_t$  und  $\varepsilon_t \rightarrow 0$  ist. Die  $K_t$  haben die Eigenschaft, dass jede Umgebung  $K \subset C_\tau$  der Knoten alle hinreichend späten  $K_t$  enthält.

Laut Folge 4.1.4 gibt es genau eine  $\pi_{g,n}$ -äquivalente Liftung  $\hat{h}_t: \hat{\Omega}_t^+ \rightarrow \hat{\Omega}_\tau^+$ . Die Umkehrabbildungen  $\hat{h}_t^{-1}$  sind auf  $\Omega_\tau^+$  beschränkt und quasikonform, ihre Dilatation geht lokal gleichmäßig gegen Null. Für eine Teilfolge  $t \rightarrow \infty$  konvergiert also  $\hat{h}_t^{-1} \rightarrow h$  lokal gleichmäßig auf  $\Omega_\tau^+$ , und die Grenzfunktion  $h$  ist auf jeder Komponente  $\Omega_i$  von  $\Omega_\tau^+$  entweder konform oder nimmt nur endlich viele Werte an, vgl. [43] § 5. Sei  $H \leq \pi_{g,n}$  der Stabilisator von  $\Omega_i$ . Mit  $h_t$  ist auch  $h$  auf  $\Omega_i$  eine  $H$ -äquivalente Abbildung. Als Deckgruppe einer Komponente der stabilen Kurve  $C_\tau$  ist  $H$  eine nichtelementare kleinste Gruppe, fixiert also keine endliche Menge. Deshalb kann  $h(\Omega_i)$  nicht endlich sein.

Nun ist  $h$  eine  $G_\tau$ -äquivalente konforme Selbstabbildung von  $\Omega_\tau^+$ . Der Quotient  $h(\Omega_\tau^+)/G_\tau$  ist also zum gewöhnlichen Teil von  $C_\tau$  isomorph. Da eine algebraische Kurve nicht isomorph zu einem echten offenen Teil von sich ist, folgt  $h(\Omega_\tau^+) = \Omega_\tau^+$ . (Es gilt übrigens sogar  $h = \text{id}$ , und der Übergang zur Teilfolge ist überflüssig, vgl. [3] loc.cit.)

Sei  $z = h(z')$ . Wegen  $h_t \rightarrow h$  und  $h'(z') \neq 0$  enthält  $\Omega_t^+ = h_t(\Omega_\tau^+)$  für  $t \rightarrow \infty$  eine feste Kreisscheibe um  $z$  (quasikonforme Version des Koebeschen  $\frac{1}{4}$ -Satzes), Widerspruch!  $\square$

**4.2.2 Definition:** Die obere Hälfte des universellen erweiterten Diskontinuitätsbereichs ist

$$\hat{\Omega}_{g,n}^+ := \{(t, z) \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n} \times \hat{\mathbb{C}} \mid z \in \hat{\Omega}_t^+\}$$

In den folgenden Ausführungen benutze ich häufig offene Teilmengen einer stabilen riemannschen Fläche, die so aussehen, wie man sich das vorstellt:

**4.2.3 Definition:** Eine *Standardumgebung* eines Knotens in einer stabilen riemannschen Fläche besteht aus zwei abgeschlossenen Scheiben in den beiden lokalen Komponenten der riemannschen Fläche, die außer dem Knoten keinen weiteren besonderen Punkt enthalten. Eine *Standardumgebung der Knoten* besteht aus disjunkten Standardumgebungen für jeden einzelnen Knoten. Eine Scheibe um einen glatten Punkt  $p$  ist eine *Standardumgebung* von  $p$ , wenn sie außer (evtl.)  $p$  keinen weiteren besonderen Punkt enthält.

**4.2.4 Anmerkung:** Sei  $C$  eine stabile Kurve vom Typ  $(g, n + 1)$  und  $\bar{C}$  die Kurve vom Typ  $(g, n)$ , die aus  $C$  entsteht, indem die letzte Markierung wegfällt und die dabei instabil gewordene Komponente  $E$  gegebenenfalls niedergeblasen wird. (Das passiert dann, wenn die vergessene Markierung auf einer rationalen Komponente mit nur zwei weiteren besonderen Punkten lag.) Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

- (A) Der letzte markierte Punkt  $p_{n+1}(C)$  fällt auf einen gewöhnlichen Punkt von  $\bar{C}$ . Dann gibt es keine Ausnahmekomponente.
- (B) Der Punkt  $p_{n+1}(C)$  wird in  $\bar{C}$  auf einen markierten Punkt  $p_i(\bar{C})$  ( $1 \leq i \leq n$ ) abgebildet. Die Ausnahmekomponente  $E$  enthält als weitere Punkte außer  $p_{n+1}(C)$  noch  $p_i(C)$  und einen Knoten  $k$ .
- (C) Der Punkt  $p_{n+1}(C)$  wird in  $\bar{C}$  auf einen Knoten  $k$  abgebildet. Die Ausnahmekomponente enthält als besondere Punkte außer  $p_{n+1}(C)$  noch zwei Knoten  $k_1$  und  $k_2$ , die beide (wie die ganze Komponente  $E$ ) auf  $k \in \bar{C}$  abgebildet werden.

**4.2.5 Anmerkung:** Seien  $C, C'$  stabile Kurven vom Typ  $(g, n + 1)$  und  $\bar{C}, E$  bzw.  $\bar{C}', E'$  wie in Anmerkung 4.2.4. Um die Projektion von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$

nach  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  zu verstehen, muss ich darauf eingehen, wie sich eine Deformation  $h: C' \rightarrow C$  gegebenenfalls im Bereich der Ausnahmekomponenten  $E$  und  $E'$  verhalten kann. Weil eine Deformation eine rationale Komponente mit drei besonderen Punkten nur auf eine ebensolche abbilden kann (es gibt keine Schleife, die zusammenzuziehen erlaubt wäre), gilt  $h(E') = E$ , sofern überhaupt eine Ausnahmekomponente  $E'$  in  $C'$  existiert. (Insbesondere gibt es dann auch eine Ausnahmekomponente  $E$  in  $C$ .) Umgekehrt ist, sofern eine Ausnahmekomponente  $E$  in  $C$  existiert, deren Urbild topologisch – im allgemeinen nicht konform – ein  $\mathbb{P}^1$  mit drei besonderen Punkten oder Löchern. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

- (a)  $C$  sieht aus wie in Anmerkung 4.2.4 (A). Dann gibt es keine Ausnahmekomponenten.
- (b)  $C$  sieht aus wie in Anmerkung 4.2.4 (B). Das Urbild  $E'$  in  $C'$  sieht genauso aus und wird von der Deformation  $h$  homöomorph auf  $E$  abgebildet.
- (c)  $C$  sieht aus wie in (b), aber das Urbild des Knotens  $k$  ist eine Schleife  $l$  in  $C'$  und berandet die abgeschlossene Scheibe  $h^{-1}(E)$  mit den besonderen Punkten  $p_i(C')$  und  $p_{n+1}(C')$ .
- (d)  $C$  sieht aus wie in Anmerkung 4.2.4 (C). Das Urbild  $E'$  in  $C'$  sieht genauso aus und wird von der Deformation  $h$  homöomorph auf  $E$  abgebildet.
- (e)  $C$  sieht aus wie in (d), aber das Urbild von  $k_1$  ist eine Schleife  $l_1$  in  $C'$  und berandet die abgeschlossene Scheibe  $h^{-1}(E)$  mit den besonderen Punkten  $p_{n+1}(C')$  und einem Knoten  $h^{-1}(k_2)$ .
- (f)  $C$  sieht aus wie in (d), aber die Urbilder von  $k_i$  sind Schleifen  $l_i$  in  $C'$  ( $i = 1, 2$ ) und beranden das Ringgebiet  $h^{-1}(E)$  mit dem besonderen Punkt  $p_{n+1}(C')$ .

Die Deformation  $h$  kontrahiert jeweils die Schleifen  $l$  beziehungsweise  $l_i$  und ist sonst im betrachteten Bereich ein Homöomorphismus.

**4.2.6 Hilfssatz:** *In der Situation von Anmerkung 4.2.5 sei  $K$  eine Standardumgebung der Knoten von  $C$ . Dann gibt es eine Deformation  $\bar{h}: \bar{C}' \rightarrow \bar{C}$ , die außerhalb von  $K$  mit  $h$  übereinstimmt. Die Homotopieklasse von  $\bar{h}$  ist eindeutig bestimmt und hängt nur von der Homotopieklasse von  $h$ , nicht aber von  $K$  ab. Außerdem kann  $\bar{h}$  so gewählt werden, dass das Bild von*

$p_{n+1}(C')$  in  $\bar{C}'$  in eine beliebig kleine Umgebung des Bilds von  $p_{n+1}(C)$  in  $\bar{C}$  abgebildet wird bzw. sogar auf letzteren Punkt fällt, falls der ein gewöhnlicher Punkt von  $\bar{C}$  ist.

**Beweis:** Ich muss die sechs Fälle aus Anmerkung 4.2.5 betrachten. Im ersten Fall tut es  $\bar{h} = h$ . Bei (b) und (d) geht auch  $\bar{h} = h$ , wobei die kontrahierten Komponenten einfach weggelassen werden. Bei (c) ist  $h^{-1}(K)$  eine offene Scheibe, die die abgeschlossene  $h^{-1}(E)$  enthält. Sei  $\sigma: C' \rightarrow C'$  eine stetige Surjektion, die  $h^{-1}(E)$  auf  $p_i(C')$  kontrahiert, sonst ein Homöomorphismus ist und außerhalb von  $h^{-1}(K)$  die Identität. (Insgesamt ist dann  $\sigma$  homotop zur Identität.) Dann ist  $\bar{h} := h \circ \sigma^{-1}$  durch  $\bar{h}(p_i) := k$  zu einer Deformation auf ganz  $\bar{C}'$  fortsetzbar. Die übrigen Fälle (e) und (f) gehen analog;  $\sigma$  zieht hier  $h^{-1}(E)$  auf den Knoten  $h^{-1}(k_2)$  bzw. auf die Schleife  $l_1$  zusammen.

In den Fällen (a,b,d) respektiert  $\bar{h}$  nach Konstruktion die vergessene Markierung. In den übrigen Fällen lässt sich das durch Wahl von  $\sigma$  annähern. Die Eindeutigkeit der Homotopieklasse von  $\bar{h}$  ist klar, weil entweder Scheiben auf Scheiben (Fälle b, c) oder Überkreuzungen (Fälle d, e) bzw. Ringgebiete (Fall f) auf Überkreuzungen abgebildet werden müssen und alle Deformationen dieser Art mit vorgegebenen Randwerten homotop sind (elementar!).

□

**4.2.7 Anmerkung:** Die Konstruktion ist vermutlich sogar funktoriell in der Homotopiekategorie; zumindest ist  $\bar{h} \circ \sigma = \bar{h} \circ \bar{\sigma}$  für einen Homöomorphismus  $\sigma$  von  $C'$ , wenn  $C'$  glatt ist.

Nach Satz 3.1.9 lässt sich die Projektion  $\mathcal{T}_{g,n+1} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  zu einem Morphismus  $\pi: \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  fortsetzen, der den kanonischen Morphismus  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  überlagert.

**4.2.8 Satz:** Sei  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  und  $f: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C_t$  die von diesem Punkt parametrisierte Deformation. Dann parametrisiert der Bildpunkt  $\pi(t) \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  die Deformation  $\bar{f}: \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow C_{\pi(t)}$  aus Hilfssatz 4.2.6.

**Beweis:** Sei  $K$  eine Standardumgebung der Knoten von  $C_t$  und  $U_{K,\varepsilon}(t)$  die entsprechende Umgebung in der Abikoff-Topologie. Ich lege die Referenzfläche in diese Umgebung. (Das darf ich nach Anmerkung 4.2.7.) Dann gibt es eine Deformation  $h: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C_t$ , die außerhalb von  $K$   $(1 + \varepsilon)$ -quasikonform ist und die Markierung von  $C_t$  vertritt. Die Deformation  $\bar{h}$  aus Hilfssatz 4.2.6 ist  $(1 + \varepsilon)$ -quasikonform außer über dem Bild  $K' \subset C_{\pi(t)}$  von  $K$ . Für den Teichmüllerpunkt  $\bar{t}$ , der diese Deformation parametrisiert,

liegt also der Basispunkt in  $U_{K',\varepsilon}(\bar{t})$ . Nun ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  eine RÜISp und  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  auch. Wenn ich  $U_{K,\varepsilon}(t)$  und  $U_{K',\varepsilon}(\bar{t})$  anständig gewählt habe, folgt  $\bar{t} = \pi(t)$ .  $\square$

**4.2.9 Folge:** *Ist  $h$  aus Hilfssatz 4.2.6 markierungstreu, so auch  $\bar{h}$ .*

Ich möchte jetzt eine Bijektion  $\Phi: \hat{\Omega}_{g,n}^+ \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  angeben, die auf den Fasern über  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  Isomorphismen induziert. Die Abbildung  $\Phi$  hängt von der Wahl eines Urbilds  $u_{g,n+1} \in \mathbb{U}$  von  $p_{g,n+1} \in \mathbb{S}_{g,n}^0 = \mathbb{U}/\pi_{g,n}$  ab. Die Wahl sei hiermit für alle Zukunft erfolgt.

**4.2.10 Definition:** Sei  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ ,  $u \in \hat{\Omega}_t^+$  und  $p$  das Bild von  $u$  in  $C_t$ . Sei  $C'$  die stabile Kurve vom Typ  $(g, n+1)$ , die entsteht, wenn in  $C_t$  zusätzlich der Punkt  $p$  markiert wird.

Dann sei  $\Phi(t, u) \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  die Fläche  $C'$ , durch  $f$  aus dem folgenden Hilfssatz 4.2.11 markiert:

**4.2.11 Hilfssatz:** *Es gibt bis auf Homotopie genau eine Markierung  $f: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C'$ , sodass  $\bar{f}: \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow C_t$  (aus Hilfssatz 4.2.6) die Markierung von  $C_t$  ist und die  $\pi_{g,n}$ -äquivariante Liftung  $\hat{f}: \mathbb{U} \rightarrow \hat{\Omega}_t^+$  (aus Folge 4.1.6) den Punkt  $u_{g,n+1}$  auf  $u$  abbildet.*

**Beweis:** Sei  $f_1: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C'$  irgendeine Markierung. Weil die Abbildungsklassengruppe  $\Gamma_{g,n+1}$  auf  $\Gamma_{g,n}$  surjiziert, gibt es einen Homöomorphismus  $\sigma$  von  $\mathbb{S}_{g,n+1}$ , sodass  $\bar{f}_1 \circ \sigma$  (mit  $\bar{f}_1$  aus Hilfssatz 4.2.6) die Markierung von  $C_t$  ist. Sei  $f = f_1 \circ \sigma$  und  $\hat{f}: \mathbb{U} \rightarrow \hat{\Omega}_t^+$  die  $\pi_{g,n}$ -äquivariante Liftung von  $\bar{f}$  (aus Folge 4.1.6). Nach Konstruktion ist  $\hat{f}(u_{g,n+1}) = \gamma^{-1}u$  für ein  $\gamma \in \pi_{g,n}$ . Die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_{g,n} \rightarrow \Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n} \rightarrow 1$$

gibt mir die Möglichkeit,  $\sigma$  so zu wählen, dass  $\gamma = 1$  wird: Die Behauptung folgt aus dem folgenden Hilfssatz.  $\square$

**4.2.12 Hilfssatz:** *Zu jedem Element  $\gamma \in \pi_{g,n}$  gibt es (bis auf Isotopie) genau einen Homöomorphismus  $\sigma: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow \mathbb{S}_{g,n+1}$  im Kern von  $\Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n}$ , sodass die  $\pi_{g,n}$ -äquivariante Liftung  $\bar{\sigma}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  von  $\sigma: \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow \mathbb{S}_{g,n}$  den Punkt  $u = u_{g,n+1}$  auf  $\gamma u$  abbildet.*

**Beweis:** Sei  $p \in \mathbb{S}_{g,n}$  der Bildpunkt von  $u$  und  $\alpha$  eine Schleife ab  $p$ , die  $\gamma$  vertritt (mit  $u$  und  $p$  als Basispunkten für die Fundamentalgruppen). Deformiere die Identität auf  $\mathbb{S}_{g,n}$  in ihrer Isotopieklasse so, dass  $u$  längs  $\alpha$  nach

$u$  zurückwandert. Der Homöomorphismus  $\sigma$  am Ende dieser Deformation liegt im Kern von  $\Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n}$ . Indem ich die Isotopie zwischen  $\text{id}$  und  $\sigma$  auf die universelle Überlagerung  $\mathbb{U}$  lifte, erhalte ich zum Schluss die  $\pi_{g,n}$ -äquivariante Liftung von  $\sigma$ : der Punkt  $u$  folgt während der Isotopie einer Liftung von  $\alpha$  und landet schließlich, wo er soll.

Es ist bekannt, dass  $\pi_{g,n}$  durch die beschriebene Konstruktion mit dem Kern von  $\Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n}$  identifiziert wird. Daher ist  $\sigma$  bis auf Isotopie eindeutig bestimmt.  $\square$

**4.2.13 Satz:** *Die Abbildung  $\Phi: \hat{\Omega}_{g,n}^+ \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  aus Definition 4.2.10 ist bijektiv und induziert auf den Fasern über  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  Isomorphismen.*

**Beweis:** Satz 4.2.8 zeigt, dass  $\Phi$  mit der Projektion auf  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  vertauscht. Nach Konstruktion vertauscht  $\Phi$  auch mit der Projektion auf  $\mathcal{C}_{g,n} = \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ . Außerdem ist  $\Phi$  nach Konstruktion äquivariant für die Operationen von

$$\pi_{g,n} = \ker(\Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n})$$

auf  $\hat{\Omega}_{g,n}^+$  und auf  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$ , also ist  $\Phi$  auf den Fasern über  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n} \times \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  surjektiv. Die Injektivität auf diesen Fasern wird sich aus dem Vergleich der Stabilisatoren in  $\pi_{g,n}$  ergeben, sodass  $\Phi$  bijektiv ist. Ich führe den Beweis jetzt für automorphismenfreie Kurven. Ansonsten wäre  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  durch eine lokale Überlagerung wie in Anmerkung 3.2.2 und der Stabilisator durch die entsprechende Untergruppe zu ersetzen.

**4.2.14 Hilfssatz:** *Die Punkte  $(t, u) \in \hat{\Omega}_{g,n}^+$  und  $\Phi(t, u) \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  haben denselben Stabilisator in  $\pi_{g,n} = \ker(\Gamma_{g,n} \rightarrow \Gamma_{g,n+1})$ .*

**Beweis:** Sei  $S$  die Menge der von  $f$  zusammengezogenen Schleifen auf  $\mathbb{S}_{g,n+1}$  und  $\bar{S}$  die Menge der von  $\bar{f}$  zusammengezogenen Schleifen auf  $\mathbb{S}_{g,n}$ . Nach Konstruktion ist mit den Bezeichnungen aus Anmerkung 4.2.4 entweder (Fall A)  $S = \bar{S}$  oder (Fall B)  $S = \bar{S} \cup \{f^{-1}(k)\}$  oder (Fall C)  $S = S_0 \cup \{f^{-1}(k_1), f^{-1}(k_2)\}$  mit  $S_0 = \bar{S} \setminus \{\bar{f}^{-1}(k)\}$ . Der Stabilisator von  $\Phi(t, u)$  in  $\Gamma_{g,n+1}$  ist die von Dehntwists erzeugte freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}^S$ ; analog ist  $\mathbb{Z}^{\bar{S}}$  der Stabilisator von  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ . Der kanonische Homomorphismus  $\Gamma_{g,n+1} \rightarrow \Gamma_{g,n}$  bildet (Fall B)  $f^{-1}(k)$  auf 0 bzw. (Fall C)  $f^{-1}(k_1)$  und  $f^{-1}(k_2)$  auf  $\bar{f}^{-1}(k)$  ab und die übrigen Erzeuger identisch. Ich muss zeigen, dass der Stabilisator von  $(t, u) \in \hat{\Omega}_{g,n}^+$  auf den Stabilisator von  $\Phi(t, u)$  surjiziert. Weil er sicher auf den Stabilisator von  $t$  in  $\Gamma_{g,n}$  surjiziert, brauche ich nur für jedes Element des Kerns von  $\mathbb{Z}^S \rightarrow \mathbb{Z}^{\bar{S}}$  ein Urbild in  $\pi_{g,n}$  (Fundamentalgruppe mit Basispunkt  $p_{g,n+1}$ ) zu finden, das  $u$  stabilisiert. Im Fall

(C) betrachte ich die Schleife  $\bar{f}^{-1}(k)$ . Ihr Bild in  $\Gamma_{g,n+1}$  ist die Differenz der Dehntwists entlang  $f^{-1}(k_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Im Fall (B) betrachte ich eine Schleife, die innerhalb von  $f^{-1}(E)$  um die Markierung  $p_i$  herumläuft. Ihr Bild in  $\Gamma_{g,n+1}$  ist der Dehntwist längs  $f^{-1}(k)$ .  $\square$

Sei  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  mit Bild  $m \in \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Auf  $\hat{\Omega}_t^+$  sei  $\tau'$  die Initialtopologie für  $\Phi$ :  $\hat{\Omega}_{g,n}^+ \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  und  $\tau$  die Spitzentopologie aus Definition 3.3.6. Zu zeigen ist  $\tau = \tau'$ . Sei  $u \in \hat{\Omega}_t^+$  mit Bild  $c \in C_t$ . Zunächst ist  $\hat{\Omega}_t^+ \rightarrow C_t$  auch  $\tau'$ -stetig, weil

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Omega}_t^+ & \longrightarrow & \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_t = \bar{\mathcal{C}}_{g,n}(m) & \equiv & \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m) \end{array} \quad (1)$$

kommutiert. Ich setze  $\bar{C} = C_t$  und  $C = C_{\Phi(t,u)}$  und rufe noch einmal die Fallunterscheidung aus Anmerkung 4.2.4 in Erinnerung. Sei  $U \subset \bar{C}$  eine Standardumgebung um  $c$ . Sei  $V$  die  $u$  enthaltende  $\tau$ -Zusammenhangskomponente des Urbilds von  $U$  in  $\hat{\Omega}_t^+$ . Dann ist  $V$  genau unter dem Stabilisator  $\langle \gamma \rangle \leq \pi_{g,n}$  von  $u$  invariant, und das volle Urbild  $\pi_{g,n}V$  von  $U$  ist disjunkte Vereinigung von Kopien von  $V$ .

**4.2.15 Hilfssatz:** Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $K$  eine Standardumgebung der Knoten in  $C$  und  $\bar{K} \subset \bar{C}$  ihr Bild. Für hinreichend kleine  $U$  ist  $\Phi(V)$  in  $U_{K,\varepsilon}(\Phi(t,u))$  enthalten.

**Beweis:** Sei  $f: \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C$  die zu  $\Phi(t,u)$  gehörige Markierung, also  $\bar{f}: \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow \bar{C}$  die zu  $t$  gehörige. Die folgenden Fälle A–C sind die aus Anmerkung 4.2.4.

Fall (A):  $c$  ist ein gewöhnlicher Punkt von  $\bar{C}$ , der Stabilisator von  $u$  trivial ( $\gamma = 1$ ),  $U$  und  $V$  sind Scheiben. Sei  $U_1 \subset \bar{C}$  eine beliebige Standardumgebung von  $c$ . Bekanntlich gibt es  $\delta > 0$ , sodass sich für  $|\zeta| < \delta$  die Identität auf  $\mathbb{D}$  stets zu einem  $(1 + \varepsilon)$  quasikonformen Homöomorphismus  $\sigma$  mit  $\sigma(\zeta) = 0$  bei festen Randwerten deformieren lässt. Somit enthält  $U_1$  eine Scheibe  $U$ , sodass zu  $c' \in U$  stets ein isotopietrivialer,  $(1 + \varepsilon)$ -quasikonformer Homöomorphismus  $\sigma: \bar{C} \rightarrow \bar{C}$  mit  $\sigma = \text{id}$  außerhalb von  $U_1$  und  $\sigma(c') = c$  existiert. Sei  $V$  wie oben und  $z' \in V$  mit Bild  $c' \in U$ . Da die  $\pi_{g,n}$ -äquivalente Liftung  $\widehat{\phi \circ f}$  außerhalb von  $U$  mit  $\hat{f}$  übereinstimmt (und stetig ist), muss mit  $u = \hat{f}(u_{g,n+1})$  auch  $\phi^{-1} \circ \hat{f}(u_{g,n+1})$  in  $V$  liegen. Andererseits ist  $\phi^{-1} \circ f(p_{g,n+1}) = c'$ , es folgt  $\phi^{-1} \circ \hat{f}(u_{g,n+1}) = z'$ . Nach Definition ist  $\Phi(t, z')$  die Kurve  $C$  mit der Markierung  $\phi^{-1} \circ f$ .

Fall (B):  $c$  ist eine Punktierung  $\bar{f}(p_i)$ ,  $\gamma$  ist parabolisch,  $U$  ist eine Scheibe mit markiertem Mittelpunkt,  $V$  ein einfacher Spitzenbereich. Sei  $K_1 \subset K$  die Zusammenhangskomponente bei  $k$ . Ihr Bild in  $\bar{C}$  ist eine Scheibe  $\bar{K}_1$  um  $c = p_i(t)$ . Sei  $l \subset \bar{K}_1$  eine Schleife um  $c$  und  $U_1$  das von der Schleife umschlossene Gebiet. Weiter sei

$$U_r = \{c' \in U_1 \mid \mu(U_1, c, c') < \mu(E \setminus K_1, p_i, p_{n+1})\},$$

wobei  $\mu(D, a, b)$  den Modul einer zweifach punktierten Kreisscheibe  $D \setminus \{a, b\}$  bezeichne mit  $\mu(\mathbb{D}, 0, z) := |z|$ . Dann liegt also  $U$  als konforme Kreisscheibe in  $U_1$ . Sei  $c' \in U$ ,  $c' \neq c$  (insbesondere ein gewöhnlicher Punkt) und  $f': \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow \bar{C}$  eine Markierung mit  $f'(p_{g,n+1}) = c'$  und  $f' = \bar{f} = f$  außerhalb von  $\bar{K}_1$ . Dann finde ich eine Deformation  $\phi: \bar{C} \rightarrow C$  mit  $\phi = \text{id}$  außerhalb von  $\bar{K}_1$ , die  $l$  kontrahiert,  $U_1$  auf die Ausnahmekomponente  $E$  und die Punkte  $c, c' \in U_1$  auf  $p_i(C)$  bzw.  $p_{n+1}(C)$  abbildet. Außerdem erreiche ich, dass  $\phi$  außerhalb von  $\phi^{-1}(U)$  konform ist, indem ich eine Scheibe  $U'$  mit  $U \subset U' \subset U_1$  und  $\mu(U', c, c') = \mu(E \setminus K_1, p_i, p_{n+1})$  wähle und konform auf  $E \setminus K_1$  abbilde.

Wie in Hilfssatz 4.2.6 sieht man ein, dass die Markierung  $\phi \circ f': \mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow C$  homotop zu  $f$  ist. Das Argument aus Fall (A) zeigt wieder, dass die Markierung  $\mathbb{S}_{g,n+1} \rightarrow (\bar{C}, c')$  einen Punkt  $\Phi(t, u')$  in  $U_{K,\varepsilon}(\Phi(t, u))$  mit  $u' \in V$  beschreibt. Um jedes Urbild  $\gamma^k u'$  von  $c'$  in  $V$  zu erreichen, modifiziere man  $f'$  um einen  $k$ -fachen Dehntwist längs  $l$ .

Fall (C):  $c$  ist ein Knoten von  $C_t$ ,  $\gamma$  ist hyperbolisch,  $U$  eine Überkreuzung,  $V$  ein doppelter Spitzenbereich. Sei  $K_i \subset K$  die Komponente bei  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ). Das Bild von  $K_1$  in  $\bar{C}$  ist eine Scheibe  $\bar{K}_1$  um  $c = k$ . Das Bild von  $K_2$  in  $\bar{C}$  ist eine Scheibe  $\bar{K}_2$  um  $c = k$  in der anderen lokalen Komponente von  $\bar{C}$  bei  $k$ . Ähnlich wie im Fall (B) wähle ich  $U \subset U_1 \subset \bar{K}_1$  mit

$$(\forall c' \in U) \quad \mu(U_1, c, c') < \mu(E \setminus K_1, k_2, p_{n+1})$$

Sei  $c' \in U$ ,  $c' \neq c$  (insbesondere ein gewöhnlicher Punkt) und  $f': \mathbb{S}_{g,n} \rightarrow \bar{C}$  eine Markierung mit  $f'(p_{g,n+1}) = c'$  und  $f' = \bar{f} = f$  außerhalb von  $\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2$ . Dann finde ich eine Deformation  $\phi: \bar{C} \rightarrow C$  mit  $\phi = \text{id}$  außerhalb von  $\bar{K}_1$ , die  $k$  auf  $k_2$  und  $c'$  auf  $p_{n+1}(C)$  abbildet. Sie kontrahiert eine Schleife  $l \subset \bar{K}_1$ , die die beiden Punkte  $k$  und  $c'$  umläuft, zum Knoten  $k_1$  und bildet das Innere dieser Schleife auf die Ausnahmekomponente  $E \subset C$  ab. Das Urbild  $\phi^{-1}(K_1)$  ist ein Kragen um  $l$ , also das Urbild von  $E \setminus K_1$  eine Scheibe um  $k$  und  $c'$ . Wie in (B) folgt, dass  $\phi$  sich außerhalb von  $K_1$  konform wählen lässt usw.  $U$  ist zwar nur eine einseitige Umgebung von  $c = k$ , aber die Rollen von  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  sind selbstverständlich austauschbar.  $\square$

Da die Projektion  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  eine RÜlSp ist, kann ich  $K \subset C$  und  $\varepsilon > 0$  so wählen, dass  $U_{K,\varepsilon}(\Phi(t,u))$  in einer anständigen Umgebung  $W$  von  $\Phi(t,u)$  enthalten ist. Das Bild  $\bar{W} \subset \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  von  $W$  enthält  $U$ . Die Umgebung  $\bar{W}_1 = (\bar{W} \setminus \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m)) \cup U$  ist ebenfalls anständig. (Jede zusammenhängende Umgebung, die in einer anständigen enthalten ist, ist selbst anständig.) Sei  $W_1 \subset \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  die  $\Phi(t,u)$  enthaltende Urbildkomponente von  $\bar{W}_1$  und  $V_1$  das Urbild von  $W_1$  in  $\hat{\Omega}_t^+$ . Dann gilt  $V \subset V_1$ , weil  $W_1$  denselben Stabilisator wie  $W$  (und  $\Phi(t,u)$ ) hat und daher  $\Phi(V)$  kein echtes Translat von  $W_1$  treffen kann. Es folgt sogar  $V = V_1$ , weil jede von beiden Mengen genau eine  $\langle \gamma \rangle$ -Bahn aus dem Urbild jedes Punktes  $u \in U$  enthält.

Jetzt ist zumindest bewiesen, dass  $\tau$  nicht gröber als  $\tau'$  sein kann, weil Mengen wie  $V$  die Topologie  $\tau$  erzeugen. Andererseits erzeugen Mengen wie  $V_1$  die Topologie auf  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}(t)$ , weil jeder Punkt in  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  eine Umgebungsbasis aus anständigen  $W$  hat, die jeweils noch ein  $U_{K,\varepsilon}$  enthalten.

Somit induziert  $\Phi$  Homöomorphismen auf den Fasern. Aber die Strukturgarbe? Das Diagramm (1) zeigt zunächst, dass  $\hat{\Omega}_t^+ \rightarrow C_t$  in der von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  induzierten Strukturgarbe  $\mathcal{O}'_{\hat{\Omega}_+}$  holomorph ist. Die Garbenaxiome liefern  $\mathcal{O}_{\hat{\Omega}_+} = \mathcal{O}'_{\hat{\Omega}_+}$  auf dem Teil, wo  $\hat{\Omega}_t^+ \rightarrow C_t$  ein lokaler Homöomorphismus ist.

Für den Rand fiel mir nur ein indirektes Argument ein, das übrigens noch einmal abstrakt die Existenz der oben konkret beschriebenen Abbildung  $\Phi$  impliziert, allerdings nur faserweise.

**4.2.16 Hilfssatz:** *Die Abbildung  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m)$  ist eine RÜlSp.*

**Beweis:** Wie man (zum Beispiel Knudsen [40] S. 179) weiß, hat ein Knoten in  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m)$  eine Umgebung  $U \subset \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  mit Koordinaten

$$U \xrightarrow{\sim} \{(z, w, m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^{3g-3+n} \mid zw = m_1\},$$

die via  $(m_1, m_2, \dots)$  auf  $\bar{U} \subset \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ ,  $\bar{U} \cong \mathbb{D}^{3g-3+n}$  projiziert, und  $\partial\bar{\mathcal{M}}_{g,n} \cap \bar{U}$  wird durch eine Gleichung  $m_1 m_2 \cdots m_s$  beschrieben.

Der Rand von  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$  besteht aus dem Urbild des Randes von  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  sowie den speziellen Punkten der Fasern. Auf  $U$  ist der Rand also durch die Gleichung  $m_1 m_2 \cdots m_s = zw m_2 \cdots m_s$  gegeben. Dann wird  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}$  dort durch  $\hat{U}^{s+1} \times \mathbb{D}^{3g-3+n-s}$  parametrisiert. Die Faser  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t)$  mit den Gleichungen

$$u_1 \text{ oder } u_2 = i\infty, \quad u_3 = \cdots = u_5 = i\infty, \quad \text{Rest } 0$$

wird durch

$$(e^{iu_1}, \dots, e^{iu_s}, u_{s+1}, \dots, u_{3g-3+n-s})$$

auf die Faser  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m)$  abgebildet, also ein doppelter Spitzenbereich

$$\{(u_1, u_2) \in \hat{\mathcal{U}}^2 \mid u_1 = i\infty \text{ oder } u_2 = i\infty\} \subset \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t)$$

auf einen Knoten

$$\{zw = 0\} \subset \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}(m).$$

Dann lässt sich nämlich  $\Omega_t \rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t)$  wegen Satz 3.1.9 zu einem Isomorphismus  $\hat{\Omega}_t^+ \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{T}}_{g,n+1}(t)$  fortsetzen. Das muss der Homöomorphismus  $\Phi$  sein!  $\square$

Damit ist auch Satz 4.2.13 bewiesen.

### 4.3 Die universelle Eigenschaft

Was parametrisiert der Modulstack  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  über der Kategorie der lokal komplex geringten Hausdorffräume? Nach der Lektüre von [30] lässt er sich auch hier als Stack von relativen stabilen Kurven über geringten Räumen auffassen. Um Teichmüllerstrukturen auf relativen stabilen Kurven wie in Definition 1.3.6 erklären zu können, muss ich auf die Konstruktion aus Definition 4.1.1 zurückgreifen.

**4.3.1 Definition:** Eine *Teichmüllerstruktur* auf einer Kurve  $C \in \bar{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{C})$  ist eine universelle Überlagerung  $U \rightarrow \hat{C}$  zusammen mit einer Markierung  $\pi_{g,n} \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(U|\hat{C})$ . Isomorphismen zwischen Teichmüllerkurven sind  $\pi_{g,n}$ -Bündelisomorphismen.

Eine stabile Teichmüllerkurve hat keine Automorphismen: Sonst gäbe es eine B-Gruppe  $G$  und einen Automorphismus von  $\hat{\Omega}^+(G)$ , der  $G$  zentralisiert. Dieser ließe sich zu einem Automorphismus von  $\hat{C}$  fortsetzen. Der Zentralisator einer nichtelementaren kleinschen Gruppe ist jedoch trivial.

Somit ist das Gruppoid der Teichmüllerkurven über  $\mathbb{C}$  äquivalent zur Menge der Isomorphieklassen von Teichmüllerkurven. Der Teichmüllerraum  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  parametrisiert diese Isomorphieklassen. Da er eine Familie von Teichmüllerkurven  $C = \hat{\Omega}_{g,n}^+/\pi_{g,n}$  mit einer universellen Markierung  $\hat{\Omega}_{g,n}^+ \rightarrow C$  trägt, stellt er den Funktor dar, wenn man Teichmüllerstrukturen auf Familien von stabilen Kurven passend definiert.

Der Teichmüllerraum  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  ist also ein feiner Modulraum für Teichmüllerstrukturen auf stabilen Kurven.

**4.3.2 Anmerkung:** Vermutlich ist  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  die universelle Überlagerung des Stacks  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$  der getwisteten stabilen Kurven im Sinn von Definition 4.1.1.

Ich muss das als Vermutung formulieren, weil ich gar nicht beschrieben habe, was das Twisten für eine relative stabile Kurve über einem geringten Raum bedeutet. Siehe hierzu die algebraische Analogie [6]. Der wesentliche Unterschied zwischen  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$  und  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  ( $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  ist einfach zusammenhängend!) ist folgender:

Wenn  $t \in \bar{\mathcal{T}}_{g,n}$  zu einer stabilen Teichmüllerkurve  $C_t$  mit  $s > 0$  Knoten gehört, dann wird  $t$  ja von der Untergruppe  $\mathbb{Z}^s \leq \Gamma_{g,n}$  stabilisiert, die von den Dehntwists entlang den entarteten Schleifen erzeugt wird. Über  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  sollte diese Untergruppe jedoch keine Verzweigung bewirken, weil sie im Gruppoid  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$  als Untergruppe von  $\text{Aut}(\tilde{C}_t)$  auftritt: Der Dehntwist um einen Knoten gibt einen nichttrivialen Gruppoidautomorphismus  $\tilde{C}_t \rightarrow \tilde{C}_t$ , weil er in der Bezeichnungsweise aus Definition 4.1.1 lokal einer Transformation  $(0, 1) \in \mathbb{Z}^2 = \text{Aut}(V|C_t)$  entspricht, während die Deckgruppe  $\text{Aut}(V|\tilde{C}_t)$  nur die von  $(1, -1)$  erzeugte Untergruppe ist.

## 5 Endliche Überlagerungen von Modulräumen

Wenn von Überlagerungen von Modulräumen für Kurven die Rede ist, dann ist grundsätzlich Verzweigung höchstens über dem Rand erlaubt. Im eindimensionalen Fall sind solche Überlagerungen (von  $\bar{\mathcal{M}}_{1,1}$  oder  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ ) ein klassisches Thema („Modulkurven“), das nicht zuletzt aus zahlentheoretischem Interesse exzessiv studiert worden ist.

Die bekanntesten Überlagerungen (im ein- wie höherdimensionalen Fall) sind die Modulräume  $\bar{\mathcal{M}}_{g,0}[l]$  für Kurven mit *abelscher Niveaustruktur*, das heißt: für Kurven  $C$  vom Geschlecht  $g$  zusammen mit einem Isomorphismus  $H^1(C, \mathbb{Z}/l) \rightarrow (\mathbb{Z}/l)^{2g}$ . Sie wurden eingeführt, weil eine Niveaustruktur auf  $C$  vom Niveau  $l \geq 3$  die Kurve  $C$  *rigidifiziert*, das heißt:  $C$  besitzt keine nichttrivialen Automorphismen, die die Niveaustruktur respektieren. Das hat zur Folge, dass der Stack  $\mathcal{M}_{g,n}[l]$  einen feinen Modulraum besitzt.

Etwas allgemeinere Überlagerungen wurden in den letzten Jahren hauptsächlich von einer Arbeitsgruppe in Utrecht untersucht. Einige Ergebnisse:

**Glatte Überlagerungen** Jeder Modulstack  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  besitzt Überlagerungen, deren grober Modulraum glatt ist [44] [52] [16]. Darunter sind die Räume  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}/\Gamma_{g,n}^{k,l}$  mit

$$\Gamma_{g,n}^{k,l} = \ker(\Gamma_{g,n} \rightarrow \text{Out}(\pi_{g,n}/V^{k,l}\pi_{g,n})),$$

wobei  $V^{k,l}\pi_{g,n} \leq \pi_{g,n}$  erzeugt wird von

- den  $l$ -ten Potenzen,
- den  $(h + 1)$ -stelligen Kommutatoren,
- den  $h$ -stelligen Kommutatoren, die gleichzeitig in  $W^{h+i}\pi_{g,n}$  liegen,

wobei  $k = h(h + 1)/2 + i$  mit  $0 \leq i \leq h$ . Zu erklären bleibt  $W^j\pi_{g,n}$ , und das geht so:  $W^1\pi_{g,n} = \pi_{g,n}$ .  $W^2\pi_{g,n}$  wird von den Kommutatoren und  $N := \ker(\pi_{g,n} \rightarrow \pi_{g,0})$  erzeugt; schließlich

$$W^{j+1}\pi_{g,n} = [\pi_{g,n}, W^j\pi_{g,n}] \cdot [N, W^{j-1}\pi_{g,n}]$$

für  $j \geq 2$ . Außerdem muss

- $k = 3, 5, 6$  oder  $7$ ,  $l$  ungerade und  $n = 1$ ; oder
- $k = 4$  und  $l$  ungerade; oder
- $g = 2$

gelten. Dann ist  $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}^{k,l}$  glatt über  $\mathbb{Z}[1/l]$ . Dagegen ist die universelle Kurve über diesen Modulräumen stets singulär (auch stacktheoretisch).

**Geometrie** Es wird gezeigt, dass einige (Serien von) Modulstacks einfach zusammenhängen, darunter die Modulräume  $\mathcal{M}_{g,n}[l]$  für abelsche Niveaustrukturen,  $l \geq 3$ . Bei den oben erwähnten  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}/\Gamma_{g,0}^{6,2l+3}$  ist die Picardgruppe endlich erzeugt ( $g \geq 3$ ).

**Randdivisoren** [16] §2 enthält eine Version von Knudsens kombinatorischer Beschreibung der Randkomponenten, die Niveaustrukturen berücksichtigt. Wenn der grobe Modulraum glatt ist (s. o.), dann auch sämtliche Randkomponenten.

## 5.1 Feine Modulräume unterhalb des Schottkyraums

Bei Looijenga [44] und Pikaart [52] geht das Argument ein, dass die Prym-Niveaustruktur bzw. die Niveau- $G$ -Struktur glatte Kurven rigidifiziert, weil sie eine abelsche Niveau- $n$ -Struktur verfeinert. Entsprechend geht es auch unterhalb von Schottkyräumen:

**5.1.1 Definition:** Eine *abelsche Schottky-Niveau- $n$ -Struktur* auf einer glatten Kurve  $X$  ist ein äußerer Homomorphismus  $\pi_1(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$ , der sich zu einer Schottkystruktur  $\pi_1(X) \rightarrow F_g$  hochheben lässt.<sup>7</sup>  $S_g[n]$  sei der entsprechende Modulraum.

<sup>7</sup> $F_g$  ist die freie Gruppe in  $g$  Erzeugern

**5.1.2 Bemerkung:** Für  $n \geq 3$  ist  $S_g[n]$  ein feiner Modulraum.

**Beweis:** Zu zeigen ist, dass keine Kurve Automorphismen hat, die eine Niveaustuktur festhalten. Sei also  $f : \pi_1(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$  eine abelsche Schottky-Niveau- $n$ -Struktur auf  $X$  und  $\sigma$  ein Automorphismus von  $(X, f)$ . Nach Voraussetzung faktorisiert  $f$  über eine Schottkystruktur, die durch ein Schnittsystem  $(c_1, \dots, c_g)$  auf  $X$  gegeben ist. Die  $c_i$  sind freie Homotopieklassen von Wegen  $\alpha_i \in \pi_1(X)$ , die sich zu einem geometrischen Erzeugendensystem  $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$  der Fundamentalgruppe ergänzen lassen; die Schnittform auf  $H_1(X, \mathbb{Z})$  hat darin die Gestalt  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , wobei alle Zahlen für  $(g \times g)$ -Blöcke stehen.  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$  hat die Basis  $(f(\beta_1), \dots, f(\beta_g))$ , und der von  $f$  induzierte Homomorphismus  $\bar{f} : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g$  schreibt sich als  $(g \times 2g)$ -Matrix  $(0 \ \bar{1})$ .

Der Automorphismus  $\sigma$  induziert eine symplektische Transformation  $\sigma_*$  auf  $H_1(X)$ , gegeben durch eine Matrix  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . (Die symplektische Form ist die Schnittform von oben, also durch die Matrix  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben.) Die  $\sigma$ -Invarianz der Niveaustuktur liest sich als  $\bar{f} \circ \sigma_* = \bar{f}$ , also  $C \equiv 0$  und  $D \equiv 1$  modulo  $n$ .

*Behauptung:*  $C = 0$  und  $D = 1$ .

*Beweis:* Indem man  $\sigma$  durch eine geeignete Potenz ersetzt, kann man annehmen, dass  $\sigma$  Primzahlordnung  $q$  hat. Wegen  $n \geq 3$  enthält  $n$  eine Primzahlpotenz  $p^l$ , wobei  $p \geq 3$  oder  $l \geq 2$  ist. Gilt  $C \neq 0$  oder  $D \neq 1$ , so schreibe ich

$$\sigma_* = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p^s X$$

mit  $X \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$  und  $X \not\equiv 0$  modulo  $p$ . Es ist  $s \geq l$  und  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}$ . In der Matrizenkongruenz

$$1 = \left( \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p^s X \right)^q \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^q + qp^s \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{q-1} X \pmod{p^{2s}}$$

betrachte man die unteren  $g$  Zeilen:  $qp^s X \equiv 0$  modulo  $p^{2s}$ . Da  $X$  einen Eintrag hat, der nicht durch  $p$  teilbar ist, folgt  $p = q$  und  $s = 1$ ; erst recht  $l = 1$ , also  $p \geq 3$ .

Die nächst feinere Kongruenz

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + pX \right)^p \\ &\equiv \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p + p^2 \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-1} X + \frac{p(p-1)}{2} p^2 \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-2} X^2 \end{aligned}$$

modulo  $p^3$  liefert dann in den unteren  $g$  Zeilen nach Division durch  $p^2$  die Kongruenz  $X \equiv 0$  modulo  $p$ , Widerspruch!

Erwiesen ist jetzt, dass  $\sigma_* : H_1(X) \rightarrow H_1(X)$  die Gestalt  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  annimmt. Die Symplektizität ergibt  $A = 1$ , und mit  $m := \text{ord}(\sigma)$  gilt

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & mB \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also  $B = 0$ . Aus  $\sigma_* = 1$  folgt (für  $g \geq 2$ ) schon  $\sigma = 1$ .  $\square$

## 5.2 Zweidimensionale Modulräume

Ich wende mich nun speziellen Modulräumen zu. Dabei liegt es nahe, sich zunächst die zweidimensionalen Modulräume vorzunehmen. Im Unterschied zum höherdimensionalen Fall sind die zweidimensionalen Teichmüllerräume  $\mathcal{T}_{1,2}$  und  $\mathcal{T}_{0,5}$  isomorph. Ihre Automorphismengruppe ist nach dem Satz von Royden [54] [21] genau die Modulgruppe  $\Gamma_{0,[5]}$  der Abbildungsklassen eines fünffach punktierten  $\mathbb{P}^1$ , wobei (und das ist der Unterschied zwischen  $\Gamma_{0,[5]}$  und  $\Gamma_{0,5}$ ) die fünf Punkte permutiert werden dürfen. Das Symbol  $\mathcal{M}_{0,[5]}$  bezeichnet entsprechend den Stack der Kurven mit einer ausgezeichneten Teilmenge von 5 Punkten. Die Überlagerung  $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,[5]}$  ist der offensichtliche Quotient nach der symmetrischen Gruppe  $S_5$ : auf einem fünffach punktierten  $\mathbb{P}^1$  wird die Reihenfolge der fünf markierten Punkte „vergessen“.

In der Kette von Überlagerungen

$$\mathcal{T}_{1,2} = \mathcal{T}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{1,2} \rightarrow \mathcal{M}_{0,[5]}$$

ist  $\mathcal{M}_{0,5}$  das letzte Schema, dann kommen „echte“ Stacks:  $\mathcal{M}_{1,2}$  parametrisiert zweifach punktierte Kurven  $(E, p_1, p_2)$  vom Geschlecht 1, und diese haben z. B. die elliptische Involution als Automorphismus, wenn  $p_2 - p_1$  ein Zweiteilungspunkt ist. Der Stack  $\mathcal{M}_{1,2}$  ist also zwar generisch ein Schema, aber immerhin auf einem Divisor nicht.

Die Überlagerung  $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{1,2}$  ordnet einer Geraden mit fünf ausgezeichneten Punkten eine elliptische Kurve zu, die die Gerade zweiblättrig überlagert und über den ersten vier ausgezeichneten Punkten verzweigt; die markierten Punkte auf der elliptischen Kurve sind die beiden Urbilder des fünften ausgezeichneten Punktes auf der Geraden. Die Reihenfolge der beiden Punkte ist dabei egal, weil die elliptische Involution beide identifiziert. Mit anderen Worten:  $\mathcal{M}_{1,[2]}$  ist Quotient  $\mathcal{M}_{1,2}/S_2$ , wobei  $S_2$  trivial operiert. Somit ist  $\mathcal{M}_{1,[2]}$  keine Überlagerung von  $\mathcal{M}_{0,[5]}$ .

Die universelle Überlagerung all dieser Modulräume (auch  $\mathcal{M}_{1,[2]}$ ) ist der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{0,5} = \mathcal{T}_{1,2}$ : ein offenes beschränktes Gebiet in  $\mathbb{C}^2$ , topologisch ein Ball, holomorph aber nicht. Die Faserungen  $\mathcal{T}_{0,5} \rightarrow \mathcal{T}_{0,4}$  und  $\mathcal{T}_{1,2} \rightarrow \mathcal{T}_{1,1}$  machen  $\mathcal{T}_{0,5} = \mathcal{T}_{1,2}$  jeweils zu einem  $\mathbb{D}$ -Bündel über  $\mathbb{D}$ , das nicht trivial ist, denn der „Teichmüllerball“ hat, wie schon erwähnt, eine diskrete Automorphismengruppe.

Die Frage ist nun, was für Flächen außer den drei genannten als Quotienten von  $\mathcal{T}_{0,5}$  auftreten.

Ich gehe im Folgenden meist von  $\mathcal{M}_{0,5}$  aus, weil diese Fläche unter den genannten am einfachsten explizit zu beschreiben ist: Eine glatte rationale Kurve mit fünf verschiedenen ausgezeichneten Punkten kann ich mit  $\mathbb{P}^1$  identifizieren, indem ich die ersten drei Punkte  $0, 1$  beziehungsweise  $\infty$  nenne. Als Moduli bleiben dann die Bilder  $x_4, x_5 \in \mathbb{P}^1$  des vierten und fünften ausgezeichneten Punktes. Es folgt

$$\mathcal{M}_{0,5} \cong (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus (\text{Diagonale}).$$

Offensichtlich trägt dieser Raum eine universelle Familie von fünffach punktierten Geraden. Die dazu passende Parametrisierung von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  erhält man, indem man die Fläche  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  in den drei Punkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  und  $(\infty, \infty)$  aufbläst. Der Randdivisor besteht aus zehn Geraden. Es sind dies

- die strikten Transformierten  $D_{14}, D_{24}, D_{34}$  der senkrechten Geraden  $x_4 = 0, 1, \infty$ , wo der vierte markierte Punkt auf einen der ersten drei stößt
- die strikten Transformierten  $D_{15}, D_{25}, D_{35}$  der waagrechten Geraden  $x_5 = 0, 1, \infty$ , wo der fünfte markierte Punkt auf einen der ersten drei stößt
- die strikte Transformierte  $D_{45}$  der Diagonalen des projektiven Quadrats; dort stoßen der vierte und der fünfte ausgezeichnete Punkt aufeinander
- die Ausnahme Gerade  $D_{23}$  über  $(0, 0)$ , wo der zweite ausgezeichnete Punkt auf den dritten stößt
- die Ausnahme Gerade  $D_{13}$  über  $(1, 1)$ , wo der erste ausgezeichnete Punkt auf den dritten stößt
- die Ausnahme Gerade  $D_{12}$  über  $(\infty, \infty)$ , wo der erste ausgezeichnete Punkt auf den zweiten stößt

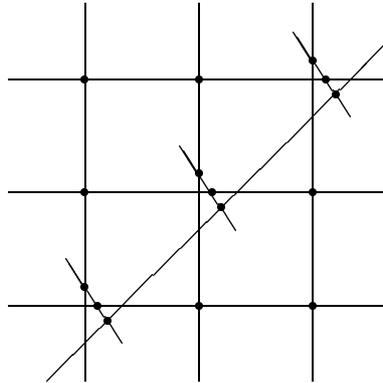
Alle diese Randgeraden sind  $(-1)$ -Kurven, und es sind die einzigen  $(-1)$ -Kurven in  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ . Soweit sie sich gegenseitig schneiden, tun sie das transversal in einfachen Doppelpunkten des Randdivisors. Die Picardgruppe von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  ist frei abelsch vom Rang 5. Als Erzeuger kann man Urbilder (totale Transformierte)  $d, d'$  von Koordinatenachsen des Quadrats sowie die Klassen  $d_{23}, d_{13}, d_{12}$  der drei Ausnahmegeraden heranziehen. Die Schnittmatrix der Fläche  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  wird in dieser Basis als

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

dargestellt. Die Randgeraden haben die Klassen

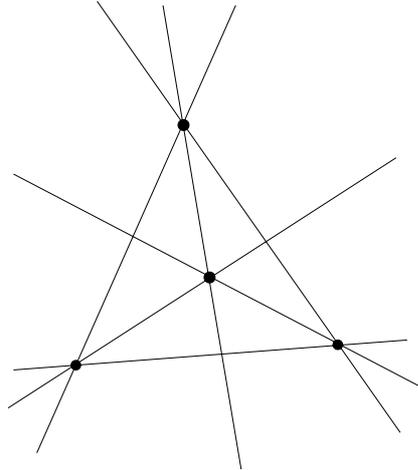
$$\begin{aligned} [D_{14}] &= d - d_{23} \\ [D_{24}] &= d - d_{13} \\ [D_{34}] &= d - d_{12} \\ [D_{15}] &= d' - d_{23} \\ [D_{25}] &= d' - d_{13} \\ [D_{35}] &= d' - d_{12} \\ [D_{45}] &= (d + d') - (d_{23} + d_{13} + d_{12}) \end{aligned}$$

Abbildung 5.2 zeigt diese Geradenkonfiguration im Quadrat.



Alternativ lässt sich  $\mathcal{M}_{0,5}$  auch in die projektive Ebene einbetten, und zwar als Komplement einer klassischen Geradenkonfiguration, dem *vollständigen Quadrat* (oder *Tetraederkonfiguration* [11]). Es handelt sich um

sämtliche Verbindungsgeraden von vier Punkten in allgemeiner Lage in der projektiven Ebene. Man beachte, dass die Automorphismengruppe  $\mathrm{PGL}_3$  der projektiven Ebene transitiv auf Quadrupeln von Punkten in allgemeiner Lage operiert, sodass diese Geradenkonfiguration nicht von Moduli abhängt.



Die passende Realisierung von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  entsteht, indem man die projektive Ebene in den vier gewählten Punkten (in allgemeiner Lage) aufbläst. Umgekehrt entsteht die Quadratkonfiguration aus  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , wenn vier disjunkte Randgeraden niedergeblasen werden, also etwa  $D_{12}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{14}$  und  $D_{15}$ .

## 6 Belyiabbildungen für Flächen?

Welche Varietäten liegen zwischen den Teichmüller- und Modulräumen? Im eindimensionalen Fall werden sie durch den Satz von Belyi [12] bestimmt: Es sind genau die Kurven, die über den algebraischen Zahlen definiert sind. Grothendieck erwähnt diese Beobachtung in *Esquisse d'un programme* [29]. Hier geht es um den zweidimensionalen Fall: Welche Flächen sind birational äquivalent zu endlichen Überlagerungen von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,[5]}$ ? Ich betrachte die Frage bis auf birationale Äquivalenz, weil eine Fläche  $X$  (im Gegensatz zu einer Kurve) kein ausgezeichnetes Modell hat, auf dem alle rationalen Abbildungen  $X \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  definiert sind. Dass das minimale oder gar kanonische Modell im allgemeinen nicht genügen wird, ist leicht einzusehen: Jedes Modell  $X|\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  lässt eine Faserung zu, weil  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  in fünf verschiedene Richtungen

über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  fasert. Schon die projektive Ebene liegt also nicht selbst über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  – dafür zum Beispiel in der aufgeblasenen Gestalt ihres Modells  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ .

**6.0.1 Satz (Weil):** *Sei  $X$  eine endliche Überlagerung von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , die höchstens über dem Rand verzweigt. Dann ist  $X \cong X' \otimes \mathbb{C}$  für eine projektive Fläche  $X'|\bar{\mathbb{Q}}$ .*

## 6.1 Belyis Satz und gefaserte Flächen

Dummerweise gibt es, soweit ich informiert bin, keinen Belyi-Algorithmus über Funktionenkörpern. Das wäre aber nett, denn dann würde jede über  $\bar{\mathbb{Q}}$  definierte Fläche über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  auftreten.

**6.1.1 Satz:** *Sei  $X$  eine glatte irreduzible Fläche über  $\bar{\mathbb{Q}}$  und  $X \rightarrow C$  ein Morphismus mit zusammenhängenden Fasern auf eine Kurve  $C|\bar{\mathbb{Q}}$ . Sei  $K = K(C)$  der Funktionenkörper der Kurve. Wenn die generische Faser  $X_K$  einen Morphismus  $X_K \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  zulässt, der höchstens über vier  $K$ -rationalen Punkten verzweigt, dann gibt es eine Fläche  $X'|\bar{\mathbb{Q}}$ , die birational zu  $X$  ist, den Modulraum  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  endlich überlagert und höchstens über dem Rand verzweigt.*

**Beweis:** Mit  $X$  ist auch  $X_K$  glatt (und geometrisch integer). Laut Annahme gibt es einen  $K$ -Morphismus  $g_K : X_K \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ , der höchstens über vier  $K$ -rationalen Punkten verzweigt. Ich nenne sie  $0, 1, \infty$  und  $t$ .

Ich kann  $t$  als Morphismus  $C \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1$  auffassen, weil jede rationale Abbildung auf einer glatten Kurve überall definiert ist. Wenn die Abbildung konstant, also  $t \in \bar{\mathbb{Q}}$  ist, tut Belyis Algorithmus den Rest. Sei also  $t$  transzendent über  $\bar{\mathbb{Q}}$ .

Sei  $C_0 \subset C$  ein offener Teil, sodass  $X_0 := X \times_C C_0$  über  $C_0$  glatt ist, außerdem  $g_K$  von einem Morphismus  $g_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$  kommt und die Einschränkung von  $g_0$  auf eine (jede) Faser  $X(c)$ ,  $c \in C_0$ , höchstens über  $0, 1, \infty$  und  $t(c)$  verzweigt. Ich blase  $X$  auf, bis  $g_0$  sich zu  $g : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  fortsetzt. Alle Ausnahmekurven, die dabei entstehen, liegen über  $C \setminus C_0$ .

Belyi produziert mir einen Morphismus  $b : \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1$ , der nicht nur  $0, 1, \infty$  sowie alle Verzweigungspunkte von  $b$  und kritischen Werte von  $t$ , sondern auch  $t(C \setminus C_0)$  nach  $0, 1$  oder  $\infty$  befördert.

Sei  $h : X \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  die durch  $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty, z_4 = b \circ t \circ (X \rightarrow C), z_5 = b \circ g$  definierte Abbildung. Ich behaupte, dass  $h$  nur über dem Rand verzweigt.

Sei  $x \in X$  ein Punkt, wo  $h$  verzweigt. Sei  $c$  der Bildpunkt von  $x$  in  $C$ . Dann ist  $h$  nicht lokal injektiv auf den komplexen Punkten bei  $x$ , und es tritt mindestens einer der folgenden beiden Fälle ein:

(a)  $z_5: X(c) \rightarrow \mathbb{P}^1$  ist nicht lokal injektiv bei  $x$ . Falls  $c \notin C_0$ , so ist  $z_4(x) \in \{0, 1, \infty\}$  und ich bin über dem Rand. Sonst ist  $x$  ein Verzweigungspunkt von  $X(c) \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Wegen  $z_5 = b \circ g$  kann das zwei Gründe haben:

(aa)  $b$  verzweigt in  $g(x)$ . Dann ist  $z_5(x) \in \{0, 1, \infty\}$ .

(ab)  $g$  verzweigt in  $x$ . Dann ist  $g(x) \in \{0, 1, \infty, t(c)\}$  und folglich  $z_5(x) \in \{0, 1, \infty, b(t(c))\}$ . Jedenfalls bin ich über dem Rand, und zwar im Fall  $z_5(x) = b(t(c)) = z_4(x)$  über der „Diagonalen“.

(b)  $b \circ t: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  verzweigt bei  $c$ . Nach Wahl von  $b$  ist dann  $z_4(x) \in \{0, 1, \infty\}$ .

Ich muss noch die Fasern von  $h$  niederblasen (Stein-Faktorisierung), damit  $h$  endlich wird.  $\square$

Ich will jetzt für spezielle Faserungen  $X|C$  Morphismen von  $X_K$  nach  $\mathbb{P}_K^1$  konstruieren und werde dabei gelegentlich ausnutzen, dass  $\mathbb{P}^1$  über  $K$  nur in der Standardform auftritt:

**6.1.2 Anmerkung:** Jede glatte Kurve vom Geschlecht 0 über  $K$  ist zur projektiven Geraden  $\mathbb{P}_K^1$  isomorph. Das ist die birationale Klassifikation von Regelflächen:  $\mathbb{P}^1$ -Bündel über einer komplexen Kurve sind Zariski-lokal trivial, vgl. [10] Proposition V.4.1.

## 6.2 Die einfachsten Fälle

Alle Varietäten in diesem Abschnitt leben über  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Belyi realisiert zwar (vielleicht) nicht alle Flächen als endliche Überlagerungen von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , aber doch einige (ich betrachte das immer bis auf birationale Äquivalenz):

**6.2.1 Anmerkung:** Flächen der Form  $C \times C'$  lassen sich realisieren, und zwar sogar so, dass sie über der „Diagonalen“ nicht verzweigen: Man setze einfach Belyiabbildungen von  $C$  und  $C'$  zusammen.

Damit sind realisiert:

- alle rationalen Flächen (es gibt nur eine), überhaupt alle Regelflächen
- manche abelsche und elliptische Flächen, manche Flächen vom allgemeinen Typ

**6.2.2 Bemerkung:** *Jedes Faserbündel hat einen Belyimorphismus.*

**Beweis:** Sei  $X \rightarrow C$  ein étales Bündel mit Faser  $F$ . Sei  $\bar{F} := F/\text{Aut}(F)$  und  $V \subset \bar{F}$  der Verzweigungsort von  $F \rightarrow \bar{F}$ . Dann habe ich (s.u.) einen

Morphismus  $p: X \rightarrow \bar{F} \times C$ , der genau über  $V \times C$  verzweigt. Aus Belyimorphismen für die Kurven  $C$  und  $\bar{F}$ , wobei der von  $\bar{F}$  auch noch  $V$  nach  $\{0, 1, \infty\}$  schicken soll, entsteht der Belyimorphismus für die Fläche  $X$ .

Der Morphismus  $p: X \rightarrow \bar{F} \times C$  soll faserweise die Projektion  $F \rightarrow \bar{F}$  sein. Hier soll ausführlich vorgerechnet werden, dass wirklich ein Abstiegsdatum vorliegt. Sei  $C'|C$  étale und surjektiv,  $X' = X \times_C C'$  und  $\phi: X' \xrightarrow{\sim} F \times C'$  ein Isomorphismus über  $C'$ . Ich muss zeigen, dass

$$\psi := (F \rightarrow \bar{F}) \circ \text{pr}_F \circ \phi : \quad X' \rightarrow \bar{F}$$

über  $X$  faktorisiert. Das bedeutet, dass auf  $X'' = X' \times_X X'$  die beiden Abbildungen  $\psi \circ \text{pr}_1$  und  $\psi \circ \text{pr}_2$  übereinstimmen.

Sei  $T$  ein Schema. Für jeden  $T$ -wertigen Punkt  $x'' = (x'_1, x'_2) \in X''(T)$  ist  $\psi(x'_1) = \psi(x'_2)$  zu zeigen. Wegen  $x'' \in X' \times_X X'(T)$  gilt  $x'_1 = (x, c'_1)$  und  $x'_2 = (x, c'_2)$  mit demselben  $x \in X(T)$ . Sei  $c := \text{pr}_C(x) \in C(T)$ . Wegen  $x'_1, x'_2 \in X \times_C C'$  ist  $c = \text{pr}_C(c'_1) = \text{pr}_C(c'_2)$ . Also ist

$$\sigma : \quad F_T = (F \times C')_{c'_1} \xrightarrow{\phi^{-1}} X'_{c'_1} = X_c = X'_{c'_2} \xrightarrow{\phi} (F \times C')_{c'_2} = F_T$$

ein Automorphismus von  $F_T|T$ , anders gesagt: ein  $T$ -wertiger Punkt von  $\text{Aut}(F)$ . Aus

$$\sigma(\text{pr}_F \circ \phi(x'_1)) = \text{pr}_F \circ \phi(x'_2)$$

folgt  $\psi(x'_1) = \psi(x'_2)$ . □

**6.2.3 Bemerkung (mit M. Even):** Jede abelsche Fläche lässt sich über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,[5]}$  realisieren.

**Beweis:** Wenn die abelsche Fläche  $A$  isogen zum Produkt von zwei elliptischen Kurven ist, sind wir fertig. Sonst ist  $A$  die Jacobivarietät einer Kurve  $C$  vom Geschlecht 2. M. EVEN hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass eine solche Jacobifläche birational zum symmetrischen Quadrat  $\text{Sym}^2 C = (C \times C)/S_2$  der Kurve ist. Aus einem Belyimorphismus  $\beta: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  bekommt man also eine Abbildung  $(\beta, \beta): A \rightarrow \text{Sym}^2(\mathbb{P}^1)$ , die nur über  $(0, t)$ ,  $(1, t)$ ,  $(\infty, t)$  und  $(t, t)$  verzweigt ( $t \in \mathbb{C}$ ). □

Der letzte Spezialfall, den ich behandeln konnte, macht etwas mehr Mühe.

### 6.3 Elliptische Faserungen

Die Fläche  $X$  in diesem Abschnitt fasert über einer Kurve  $C$ , und die allgemeine Faser ist eine glatte Kurve vom Geschlecht 1.  $K := K(C)$  ist der Funktionenkörper (oder der generische Punkt) der Basiskurve. Die generische Faser  $X_K = X \times_C K$  ist dann eine Kurve vom Geschlecht 1 über  $K$ .

**6.3.1 Hilfssatz:** *Wenn  $X_K$  einen Schnitt und eine Zweiteilungspunktstruktur zulässt, dann hat  $X$  eine Belyiabbildung.*

Man erinnere sich: Eine Zweiteilungspunktstruktur auf einer elliptischen Kurve  $E|T$  besteht aus vier Schnitten  $T \rightarrow E$ , die in den geometrischen Fasern die Zweiteilungspunkte abdecken.

Eine Zweiteilungspunktstruktur auf  $X_K$  ist also ein injektiver Homomorphismus  $V_4 \hookrightarrow X(K)$ . Das Bild von  $0 \in V_4$  wird als Nullpunkt von  $X_K$  betrachtet; die anderen drei Bildpunkte sind dann die Zweiteilungspunkte von  $X_K$ .

**Beweis** von Hilfssatz 6.3.1: Ich bilde  $X_K$  auf  $\mathbb{P}^1$  ab, indem ich die Gruppeninversion austeile. Der Morphismus verzweigt in den Fixpunkten der Inversion. Das sind die vier Zweiteilungspunkte, die kraft Voraussetzung  $K$ -rational sind.  $\square$

**6.3.2 Hilfssatz:** *Wenn  $X_K$  einen Schnitt zulässt, dann hat  $X$  eine Belyiabbildung.*

**Beweis:** Sei  $o \in X(K)$  der Schnitt. Er macht  $X_K$  zu einer elliptischen Kurve über  $K$ , also einem Gruppenschema über  $K$  mit Neutralelement  $o$ . Sei  $q: X_K \rightarrow \mathbb{P}^1$  der Quotient nach der Gruppeninversion.

Die Zweiteilungspunkte bilden ein  $K$ -Unterschema  $X_K(2)$ , nämlich die Faser über  $o$  unter  $x \mapsto x + x$ . Ihr Bild unter  $q$  sind die kritischen Werte von  $q$ : eine über  $K$  definierte Untervarietät von  $\mathbb{P}^1$  mit vier Punkten  $q(o)$ ,  $z_1, z_2, z_3$  über einem algebraischen Abschluss  $\bar{K}$  von  $K$ .

Sei  $H$  die Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ , die die drei kritischen Werte  $z_1, z_2, z_3$  permutiert. Über  $\bar{K}$  ist sie zur symmetrischen Gruppe  $S_3$  isomorph. Über  $K$  sind möglicherweise nicht ihre einzelnen Elemente definiert, sehr wohl aber die Menge der drei Involutionen, die Menge der beiden 3-Zyklen und das Untergruppenschema insgesamt.

Sei  $q_2: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  der Quotient nach  $H$ . Seine Verzweigungspunkte über  $\bar{K}$  zerfallen in drei Bahnen:

- die Fixpunkte der 3-Zyklen sind unter jeder Involution konjugiert
- die  $z_i$  sind nach Konstruktion von  $H(\bar{K})$  konjugiert
- die drei übrigen Fixpunkte der Involutionen sind dann ebenfalls konjugiert

Alle drei Bahnen sind über  $K$  definiert. Ihre Bilder unter  $q_2$ , die kritischen Werte von  $q_2$ , sind daher  $K$ -rational. Ich darf sie 1728,  $\infty$  und 0 nennen. Der Punkt  $q(o)$  wird dann auf die  $j$ -Invariante von  $X_K$  abgebildet.

Die Verkettung  $q_2 \circ q: X_K \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  verzweigt nur über den  $K$ -rationalen Punkten 0, 1728,  $j(X_{\bar{K}}) = j(X_K)$  und  $\infty$ .  $\square$

**6.3.3 Satz:** *Jede elliptische Faserung hat einen Belyimorphismus.*

**Beweis:** Nach Hilfssatz 6.3.2 genügt es, eine Isogenie von  $X_K$  auf eine Kurve  $X'$  über  $K$  mit einem  $K$ -rationalen Punkt zu finden.<sup>8</sup>

Sei  $L|K$  eine endliche normale Erweiterung, sodass  $X_K$  einen  $L$ -rationalen Punkt  $o$  hat. Dann ist  $X_L = X_K \times_K L$  eine elliptische Kurve über  $L$  mit Nullpunkt  $o$ .

Die Galoisgruppe  $G := \text{Aut}_K L$  operiert auf  $X_L|K$ , nämlich auf dem rechten Faktor von  $X_L = X_K \times_K L$ . Offenbar gilt  $X_L/G = X_K$ .

Die Bilder von  $o \in X_L(L)$  unter  $G$ , nämlich die Schnitte  $\sigma o \sigma^{-1}: L \rightarrow X_L$ , bilden eine endliche Untergruppe  $H$  von  $X_L(L)$ . Als Translationsgruppe operiert sie fixpunktfrei, sodass  $X_L/H$  wieder eine elliptische Kurve über  $L$  ist. Da  $G$  im Normalisator von  $H \leq \text{Aut}_K(X_L)$  liegt, operiert  $G$  auf  $X_L/H$  (als Gruppe von  $K$ -Automorphismen) und liefert ein  $K$ -Schema  $X' := X_L/HG$ .

Um zu sehen, dass  $X'$  eine elliptische Kurve über  $K$  ist, schaue ich mir an, was über einem geometrischen Punkt  $c$  von  $K$  passiert. Sein Urbild in  $L$  ist eine (treue)  $G$ -Bahn  $L(c) = G\tilde{c}$ ,  $\tilde{c} \in L(c)$ .  $X_K(c)$  ist eine elliptische Kurve über  $c$ . Darüber liegt eine disjunkte Vereinigung von  $|G|$  elliptischen Kurven:  $X_L(c) = X_K(c) \times L(c)$ .  $H$  permutiert diese  $|G|$  Kopien von  $X_K(c)$ . Die geometrische Faser von  $X' = X_L/HG$  ist also  $X'(c) = X_K(c)/H$ , eine elliptische Kurve.

Ich habe auch gezeigt, dass  $X_K \rightarrow X'$  unverzweigt ist. (Das folgt sowieso aus der Formel von Riemann-Hurwitz.)  $\square$

Damit sind über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  realisiert:

<sup>8</sup>Die folgende Konstruktion hätte ich mir sparen können, denn natürlich definiert jeder Punkt  $a \in X_K$  eine Polarisierung von  $X_K$  vom Grad  $m = [a : K]$ , d. h. eine Isogenie  $X_K \rightarrow \text{Pic}^0 X_K$ ,  $p \mapsto \mathcal{O}(m[p] - [a])$  vom Grad  $m$ .

- alle elliptischen, hyperelliptischen und Enriques-Flächen
- manche abelsche und K3-Flächen – nicht alle lassen elliptische Faserungen zu

## 7 Endliche Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$

Jetzt geht es um Beispiele: Wie lassen sich einzelne Überlagerungen von  $\mathcal{M}_{0,5}$  bestimmen und beschreiben, etwa ihre diskreten Invarianten ausrechnen?

### 7.1 Invarianten von $\mathcal{M}_{0,5}$ und $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$

Die (meromorphe) kanonische Form  $dx_4 \wedge dx_5$  auf  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , hier aufgefasst als dreimal aufgeblasenes Quadrat, bestimmt den kanonischen Divisor

$$K = -2D_{34} - 2D_{35} + D_{23} + D_{13} - 3D_{12}.$$

Seine Picardklasse schreibt sich in der Basis aus § 5.2 als

$$(-2, -2, 1, 1, 1).$$

Damit berechnet sich die Chernzahl

$$c_1^2(\bar{\mathcal{M}}_{0,5}) = K^2 = 5$$

und die logarithmische Chernzahl

$$\bar{c}_1^2(\bar{\mathcal{M}}_{0,5}, \partial\bar{\mathcal{M}}_{0,5}) = (K + \partial\bar{\mathcal{M}}_{0,5})^2 = 5.$$

Die zweite Chernzahl, also die topologische Eulercharakteristik, ist

$$c_2(\bar{\mathcal{M}}_{0,5}) = \chi_{\text{top}}(\bar{\mathcal{M}}_{0,5}) = \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^1)^2 + 3 = 7;$$

logarithmisch

$$\begin{aligned} \bar{c}_2(\bar{\mathcal{M}}_{0,5}, \partial\bar{\mathcal{M}}_{0,5}) &= \chi_{\text{top}}(\mathcal{M}_{0,5}) \\ &= \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^2 - \chi_{\text{top}}(D_{45} \setminus \{0, 1, \infty\}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_{0,5}$  (und damit alle zweidimensionalen Modulräume) liegt also etwas unterhalb der Bogomolov-Miyaoka-Yau-Schranke ( $\bar{c}_1^2 \leq 3\bar{c}_2$ ), die von den Ballquotienten erreicht wird.

## 7.2 Zweiblättrige Überlagerungen

Die kann man leicht alle bestimmen, und es gibt fertige Formeln für die diskreten Invarianten der Überlagerungsfläche beziehungsweise ihres glatten Modells. Ich verweise auf [51]. Sei also  $X \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  eine zweiblättrige Überlagerung mit branch divisor  $B \subseteq \partial\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ .  $X$  ist genau dann glatt, wenn  $B$  regulär ist, und genau dann normal, wenn  $B$  keine mehrfachen Komponenten hat. Da ich mich nur für die Normalisierung von  $X$  interessiere, die ja auch noch eine höchstens über dem Rand verzweigte Überlagerung von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  ist, brauche ich nur Divisoren  $B$  zu betrachten, in denen alle Randkomponenten Koeffizient 0 oder 1 haben. Die Konstruktion von  $X$  aus  $B$  entspricht dem Wurzelziehen aus  $B$  in der Picardgruppe. Genauer: Ist  $D$  ein Divisor mit  $2D \sim B$  und  $L$  das zugehörige Geradenbündel, so konstruiert man  $X$  als  $\{x \in L \mid x^2 = 1\}$ , wobei mit 1 die konstante Funktion 1 als Schnitt von  $\mathcal{O}_X(D)$  gemeint ist.

Ich suche also Linearkombinationen aus den zehn Randgeraden mit Koeffizienten 0 und 1, die in der Picardgruppe  $\text{Pic}(\bar{\mathcal{M}}_{0,5})$  eine Wurzel haben. Da ich oben bereits eine Basis der Picardgruppe angegeben und die Randgeraden in dieser Basis dargestellt habe, brauche ich jetzt nur noch für  $2^{10}$  Linearkombinationen zu testen, ob ihre Picardklasse gerade Koeffizienten hat. Ein PC kam auf die nachstehenden Möglichkeiten für  $B$ :

$$\begin{aligned}
d_{14} + d_{24} + d_{15} + d_{25} &\sim (2, 2, -2, -2, 0) \\
d_{14} + d_{34} + d_{15} + d_{35} &\sim (2, 2, -2, 0, -2) \\
d_{24} + d_{34} + d_{25} + d_{35} &\sim (2, 2, 0, -2, -2) \\
d_{14} + d_{24} + d_{23} + d_{13} &\sim (2, 0, 0, 0, 0) \\
d_{15} + d_{25} + d_{23} + d_{13} &\sim (0, 2, 0, 0, 0) \\
d_{14} + d_{34} + d_{23} + d_{12} &\sim (2, 0, 0, 0, 0) \\
d_{15} + d_{35} + d_{23} + d_{12} &\sim (0, 2, 0, 0, 0) \\
d_{24} + d_{34} + d_{13} + d_{12} &\sim (2, 0, 0, 0, 0) \\
d_{25} + d_{35} + d_{13} + d_{12} &\sim (0, 2, 0, 0, 0) \\
d_{34} + d_{25} + d_{23} + d_{45} &\sim (2, 2, 0, -2, -2) \\
d_{24} + d_{35} + d_{23} + d_{45} &\sim (2, 2, 0, -2, -2) \\
d_{34} + d_{15} + d_{13} + d_{45} &\sim (2, 2, -2, 0, -2) \\
d_{14} + d_{35} + d_{13} + d_{45} &\sim (2, 2, -2, 0, -2) \\
d_{24} + d_{15} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 2, -2, -2, 0) \\
d_{14} + d_{25} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 2, -2, -2, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{24} + d_{34} + d_{15} + d_{35} + d_{23} + d_{13} &\sim (2, 2, 0, 0, -2) \\
d_{14} + d_{34} + d_{25} + d_{35} + d_{23} + d_{13} &\sim (2, 2, 0, 0, -2) \\
d_{24} + d_{34} + d_{15} + d_{25} + d_{23} + d_{12} &\sim (2, 2, 0, -2, 0) \\
d_{14} + d_{24} + d_{25} + d_{35} + d_{23} + d_{12} &\sim (2, 2, 0, -2, 0) \\
d_{14} + d_{34} + d_{15} + d_{25} + d_{13} + d_{12} &\sim (2, 2, -2, 0, 0) \\
d_{14} + d_{24} + d_{15} + d_{35} + d_{13} + d_{12} &\sim (2, 2, -2, 0, 0) \\
d_{14} + d_{24} + d_{34} + d_{15} + d_{23} + d_{45} &\sim (4, 2, -2, -2, -2) \\
d_{14} + d_{15} + d_{25} + d_{35} + d_{23} + d_{45} &\sim (2, 4, -2, -2, -2) \\
d_{14} + d_{24} + d_{34} + d_{25} + d_{13} + d_{45} &\sim (4, 2, -2, -2, -2) \\
d_{24} + d_{15} + d_{25} + d_{35} + d_{13} + d_{45} &\sim (2, 4, -2, -2, -2) \\
d_{14} + d_{24} + d_{34} + d_{35} + d_{12} + d_{45} &\sim (4, 2, -2, -2, -2) \\
d_{34} + d_{15} + d_{25} + d_{35} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 4, -2, -2, -2) \\
d_{14} + d_{15} + d_{23} + d_{13} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 2, -2, 0, 0) \\
d_{24} + d_{25} + d_{23} + d_{13} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 2, 0, -2, 0) \\
d_{34} + d_{35} + d_{23} + d_{13} + d_{12} + d_{45} &\sim (2, 2, 0, 0, -2)
\end{aligned}$$

$$d_{14} + d_{24} + d_{34} + d_{15} + d_{25} + d_{35} + d_{23} + d_{13} + d_{12} + d_{45} \sim (4, 4, -2, -2, -2)$$

Links steht der Divisor, rechts seine Picardklasse bezüglich der oben angegebenen Basis von  $\text{Pic}(\bar{\mathcal{M}}_{0,5})$ .

Diese einunddreißig Kombinationen sind natürlich nicht alle wesentlich verschieden. Auf  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  operiert, wie schon erwähnt, die symmetrische Gruppe  $S_5$ , indem sie die Nummern der fünf Punkte auf den durch  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  parametrisierten Kurven permutiert. Weitere Automorphismen, die das Innere auf sich abbilden, hat  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  nicht. Das folgt aus Roydens Satz über die Automorphismengruppe von  $\bar{\mathcal{T}}_{g,n}$ .

Die 15 Überlagerungen mit vier Verzweigungsgeraden sind alle unter  $S_5$  konjugiert, denn z. B. die Konfiguration  $d_{14} + d_{24} + d_{15} + d_{25}$  zeichnet das Viereck (1425) aus, ihr Stabilisator in  $S_5$  ist also höchstens eine Diedergruppe  $D_4$  mit  $8 = 120/15$  Elementen. Auch die 15 Verzweigungskonfigurationen aus sechs Geraden sind konjugiert. Zusammen mit der Konfiguration aus allen zehn Randgeraden gibt es also genau 3 zweiblättrige Überlagerungen  $X|\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ .

Um die Überlagerungsflächen näher zu bestimmen, benutze ich wieder die projektive Ebene als Modell für  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , wobei das vollständige Quadrat dem Rand  $\partial\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  entspricht. Alle Singularitäten des vollständigen Quadrats sind gewöhnliche ebene Dreifachpunkte, also einfache (ADE-) Singularitäten, nämlich  $D_4$ , siehe [10] Seite 64 unten. Somit sind die Formeln in [10], Seite 183 direkt anwendbar. Die Überlagerungen, die über vier oder

sechs Randgeraden verzweigen (dann je nach Lage über 2–4 Geraden des Quadrats in  $\mathbb{P}^2$ ), sind rationale Flächen. Über dem ganzen Rand verzweigt eine minimale K3-Fläche.

### 7.3 Zellenzerlegung von $\mathcal{M}_{0,5}$

Um die Topologie einer Überlagerung von  $X := \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  darzustellen, brauche ich eine Zellenzerlegung von  $\mathcal{M}_{0,5}$ .

**7.3.1 Definition:** Zwei Punkte in  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  liegen in der gleichen Zelle, wenn sie unter jeder der (im Wesentlichen 5) Projektionen auf  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  in eine gemeinsame Zelle abgebildet werden. Dabei wird  $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$  wie üblich in obere und untere Halbebene, die Punkte 0, 1 und  $\infty$  und die reellen Intervalle dazwischen zerlegt.

Das gibt 20 4-Zellen, die alle konjugiert sind. Die Zerlegung ist nach Konstruktion  $S_5$ -stabil. Jede 4-Zelle hat eine Fixgruppe  $H \cong S_3$ , die in  $S_5$  zu  $H = \langle (123), (12)(45) \rangle$  konjugiert ist.

Im folgenden sei  $Y \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$  eine endliche Überlagerung,  $\bar{Y}$  ihr Abschluss über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  und  $\bar{Y}$  dessen minimale Desingularisierung. Sei  $M^*$  die Vereinigung der 4-Zellen in  $\mathcal{M}_{0,5}$  mit 3-Zellen, die zusammen einen maximalen Teilbaum im Inzidenzdiagramm bilden.  $M^*$  ist also zusammenziehbar.

**7.3.2 Definition:** Sei  $\mathcal{C} = \pi_0(Y|M^*)$  die Menge der zusammenziehbaren Teilmengen von  $Y$ , die isomorph auf  $M^*$  abgebildet werden. Für jede 3-Zelle  $i$  gibt es genau eine Permutation  $\sigma_i$  von  $\mathcal{C}$  mit der folgenden Eigenschaft:

Ein Weg, der in der Komponente  $c \in \mathcal{C}$  im Bereich über einer 4-Zelle  $Z$  beginnt und aus diesem Bereich durch das Urbild der 3-Zelle  $i$  in den Bereich über einer 4-Zelle  $Z'$  übertritt, führt in die Komponente  $\sigma_i(c)$  beziehungsweise  $\sigma_i^{-1}(c)$ , je nachdem die 3-Zelle  $i$  vorwärts oder rückwärts durchlaufen wird bezüglich einer Orientierung, die bei Bedarf, d. h. vom Computerprogramm, willkürlich festgelegt wird.

Durch die  $\sigma_i$  ist der Isomorphietyp der Überlagerung eindeutig bestimmt. Ich unterstelle im folgenden oft, dass die Komponenten  $c \in \mathcal{C}$  durchnummeriert sind, und fasse die  $\sigma_i$  als Elemente von  $S_{[Y:X]}$  auf. Das Dreißigtupel der  $\sigma_i$  in  $S_{[Y:X]}$  ist dann bis auf Konjugation durch den Isomorphietyp der Überlagerung bestimmt. Neben den inneren Automorphismen der symmetrischen Gruppe operiert noch die Symmetriegruppe  $S_5$  der Basis  $\mathcal{M}_{0,5}$  auf den Dreißigtupeln. Dreißigtupel, die in der selben Doppelbahn unter diesen beiden Operationen liegen, sind als äquivalent zu betrachten.

Aus der Forderung, dass um die zwölf 2-Zellen in  $\mathcal{M}_{0,5}$  herum keine Verzweigung auftrete, ergeben sich Relationen für die  $\sigma_i$ , die sich mit GAP [GAP00] zu sechs Kommutatorrelationen an fünf Erzeuger vereinfachen lassen. Fünf Permutationen  $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7$  und  $\sigma_8$  definieren genau dann eine unverzweigte Überlagerung von  $\mathcal{M}_{0,5}$ , wenn sie diese Relationen erfüllen.

Wie S. Kühnlein bemerkte, sind diese sechs Relationen immer erfüllt, wenn für jede davon die beteiligten Permutationen vertauschbar sind. Diese Beobachtung liefert ganze Serien von Beispielen für alle Grade  $[Y : X]$ .

Die einfachste dieser Serien ist durch  $\sigma_i = \sigma$  ( $i = 2, 4, 5, 7, 8$ ) für eine einzige Permutation  $\sigma \in S_n$  gegeben,  $n := [Y : X]$ . Die Überlagerung hängt genau dann zusammen, wenn die von  $\sigma$  erzeugte Gruppe transitiv operiert. Da nur zusammenhängende Überlagerungen interessieren und es außerdem nur auf den Isomorphietyp über  $\mathcal{M}_{0,5}$  ankommt, d. h. auf die Konjugationsklasse des Dreißigtupels  $(\sigma_i)$ , ist  $\sigma$  o.B.d.A. der  $n$ -Zyklus  $(1234 \dots n)$ . Für jede Blätterzahl  $n$  enthält diese einfachste Serie somit genau eine Überlagerung  $A_n$ ,  $n \geq 1$ .

Eine dreiblättrige Überlagerung, für die  $\sigma_2$  nicht mit  $\sigma_4$  kommutiert, ist beispielsweise durch die Permutationen

$$\sigma_2 = (23), \quad \sigma_4 = (13), \quad \sigma_5 = (23), \quad \sigma_7 = (123), \quad \sigma_8 = (23)$$

gegeben. Auch dieses Beispiel stammt von S. Kühnlein. Diese Überlagerung hängt zusammen, da die von den  $\sigma_i$  erzeugte Gruppe transitiv auf  $\{1, 2, 3\}$  operiert; letzteres erkennt man besonders schnell durch einen scharfen Blick auf  $\sigma_7$ . Auch dieses Beispiel lässt sich zu einer Serie ausbauen.

## 7.4 Chernzahlen der glatten Überlagerungen

Ich gehe erst einmal davon aus, dass die Überlagerung glatt ist. Sei  $n$  der Überlagerungsgrad  $n = [Y : \mathcal{M}_{0,5}]$  und  $G \leq S_n$  die Monodromiegruppe, also das Erzeugnis von  $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7$  und  $\sigma_8$  in  $S_n$ . Die zweite Chernzahl, die topologische Eulercharakteristik von  $\tilde{Y} = \bar{Y}$ , ergibt sich leicht durch Abzählen: Sei  $\mathcal{K}$  die Menge der Komponenten und  $\mathcal{E}$  die Menge der Doppelpunkte von  $\partial\mathcal{M}_{0,5}$ . Die lokalen Monodromiegruppen  $G_l$  bei den Randgeraden  $l \in \mathcal{K}$  und  $G_p$  bei den Ecken  $p \in \mathcal{E}$  sind bis auf Konjugation als Untergruppen der symmetrischen Gruppe  $S_n$  bestimmt.

Sei  $l$  eine Randgerade. Seien  $p_1, p_2$  und  $p_3$  die auf  $l$  gelegenen Ecken und  $l^*$  der Rest von  $l$ . Seien  $C_i$  die Urbildkurven von  $l^*$  in  $\tilde{Y}$  ( $i \in I_l$ ) und  $e_i$  die lokalen Verzweigungsordnungen von  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$  um  $C_i$ ,  $f_i$  der Überlagerungsgrad  $[C_i : l^*]$ . Es gilt  $\pi^*l^* = \sum_i e_i C_i$  und  $\sum_i e_i f_i = n$ .

Sei  $x' \in \mathcal{M}_{0,5}$  ein Punkt in der Nähe von  $x \in l$  und  $y' \in Y$  ein Urbild von  $x'$ . Sei  $Z$  die 4-Zelle in  $Y$ , in der  $y'$  liegt. Für  $g \in G$  sei  $g(y')$  das Urbild von  $x'$  in der 4-Zelle  $g(Z)$ .  $y'$  liegt in der Nähe eines Urbilds  $y$  von  $x$ .

**7.4.1 Hilfssatz:** *Ein Urbild  $y''$  von  $x'$  liegt genau dann in der Nähe desselben Urbilds  $y$  von  $x$ , wenn  $y'' = g(y')$  mit  $g \in G_l$ .*

**Beweis:** Sei  $V$  eine anständige Umgebung von  $x$ .  $G_l$  ist das Bild von  $\pi_1(V \cap \mathcal{M}_{0,5}) \cong \mathbb{Z}$  in  $G$ . Die Komponenten des Urbilds von  $V$  oder auch  $V \cap \mathcal{M}_{0,5}$  stehen in Bijektion zur Faser über  $x$ . Hinreichend:  $g \in G_l$  ordnet  $y'$  den Endpunkt der Liftung ab  $y'$  eines Weges in  $V \cap \mathcal{M}_{0,5}$  zu. Dieser Endpunkt liegt in derselben Komponente von  $\pi^{-1}(V)$  wie  $y'$ . Notwendig:  $y''$  liegt in derselben Komponente von  $\pi^{-1}(V)$  wie  $y'$ . Es gibt also einen Weg  $\gamma$ , der im Urbild von  $V \cap \mathcal{M}_{0,5}$  von  $y'$  nach  $y''$  führt. Sei  $g \in G_l$  die Monodromieoperation des Bildwegs  $\pi(\gamma)$ .  $\square$

Per definitionem operiert  $G$  auf der Menge  $\mathcal{C} = \pi_0(Y|M^*)$  der zusammenziehbaren Teilmengen von  $Y$ , die isomorph auf  $M^*$  abgebildet werden. Die Urbilder von  $x \in l^*$  entsprechen nach dem vorigen Lemma den  $G_l$ -Bahnen in  $\mathcal{C}$ , wobei die Länge einer Bahn die Verzweigungsordnung von  $\pi$  beim entsprechenden Urbild von  $x$  angibt. Zu jeder Urbildkurve  $C_i$  gehören demnach  $f_i = [C_i : l^*]$  Bahnen der Länge  $e_i$  in  $\mathcal{C}/G_l$ .

Die topologische Eulercharakteristik von  $\bar{Y}$  zerlege ich

$$\chi(\bar{Y}) = \chi(Y) + \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{i \in I_l} \chi(C_i) + \sum_{p \in \mathcal{E}} \text{card } \pi^{-1}(p).$$

Bei unverzweigten Überlagerungen multipliziert sich die Eulercharakteristik einfach mit dem Überlagerungsgrad:

$$\chi(Y) = n\chi(\mathcal{M}_{0,5})$$

Die (topologische) Eulercharakteristik  $\chi_{\text{top}}(\mathcal{M}_{0,5})$  wurde in Abschnitt 7.1 zu 2 berechnet. Zum Beitrag der Verzweigungsgeraden:

$$\sum_{i \in I_l} \chi(C_i) = \sum_{i \in I_l} f_i \chi(l^*) = \text{card}(\mathcal{C}/G_l) \chi(l^*)$$

Als dreifach gelochte Gerade hat  $l^*$  die Eulercharakteristik  $-1$ . Ich erhalte

$$\chi_{\text{top}}(\bar{Y}) = 2n - \sum_{l \in \mathcal{K}} \text{card}(\mathcal{C}/G_l) + \sum_{p \in \mathcal{E}} \text{card}(\mathcal{C}/G_p). \quad (3)$$

Etwas mehr algebraische Geometrie brauche ich, um die erste Chernzahl  $K_{\bar{Y}}^2$  zu berechnen. Am Anfang steht die Verzweigungsformel

$$K_{\bar{Y}} = \pi^* K_X + \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{i \in I_l} (e_i - 1) C_i$$

mit  $X := \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ . Für das Quadrat sind also zu  $(\pi^* K_X)^2 = n K_X^2 = 5n$  folgende Terme zu addieren: Erstens

$$(\pi^* K_X \cdot C_i) = (K_X \cdot \pi_* C_i) = (K_X \cdot f_i l) = -f_i,$$

wobei ich für die letzte Umformung die Schnittmatrix (2) von  $\mathcal{M}_{0,5}$  und aus Abschnitt 7.1 die Darstellung  $(-2, -2, 1, 1, 1)$  für den kanonischen Divisor verwendet habe. Das hätte ich allerdings nicht zu tun brauchen, denn  $(K_X \cdot l) = -1$  gilt allgemein für  $(-1)$ -Kurven  $l$ .

Zweitens schneiden sich die Urbildkurven von Randgeraden  $l \neq l'$ , die sich in  $p \in \mathcal{E}$  treffen, transversal:

$$\sum_{i \in I_l} \sum_{j \in I_{l'}} (e_i - 1)(e_j - 1)(C_i \cdot C_j) = \sum_{y|p} (e_i - 1)(e_j - 1)$$

Die Punkte  $y$  über  $p$  entsprechen den Bahnen  $o \in \mathcal{C}/G_p$ . Die  $e_i e_j$  Punkte einer solchen Bahn  $o$  entsprechen den Punkten aus einer Faser über  $x' \in \mathcal{M}_{0,5}$  nahe  $p$ . Im folgenden bezeichnen  $e_1(o)$  und  $e_2(o)$  die Verzweigungsordnungen  $e_i$  und  $e_j$  um die beiden Randkurven  $C_i$  und  $C_j$ , die sich in  $y$  treffen. Die Gruppe  $G_p$  wird von den Monodromieoperatoren  $\sigma_1^p, \sigma_2^p$  zweier kleiner Schleifen um die beiden bei  $p$  zusammentreffenden Geraden erzeugt. Die Operatoren werden für eine Ecke von Hand bestimmt und für die anderen automatisch via  $S_5$ -Operation. Ihre Bahnen innerhalb von  $o$  haben die Länge  $e_1(o)$  beziehungsweise  $e_2(o)$ . Die Voraussetzung, dass die Überlagerung bei  $y$  glatt sei, bedeutet, dass  $G_p$  auf  $o$  als direktes Produkt  $(\mathbb{Z}/e_1(o)) \times (\mathbb{Z}/e_2(o))$  mit Erzeugern  $\sigma_1^p|_o$  und  $\sigma_2^p|_o$  operiert.

Drittens bleiben die Schnitte der Urbilder einer festen Randgeraden  $l$ . Die  $C_i$ ,  $i \in I_l$ , schneiden sich gegenseitig nicht. Daher brauche ich nur noch die Selbstschnitte

$$C_i^2 = \frac{1}{e_i} (C_i \cdot \pi^* l) = \frac{1}{e_i} (f_i l \cdot l) = -\frac{f_i}{e_i}.$$

Insgesamt

$$\begin{aligned} K_{\bar{Y}}^2 &= 5n - 2 \sum_i (e_i - 1) f_i + 2 \sum_p \sum_{y|p} (e_i - 1)(e_j - 1) - \sum_i (e_i - 1)^2 \frac{f_i}{e_i} \\ &= 5n - \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_l} (3\sharp o - 4 + \frac{1}{\sharp o}) + 2 \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_p} (e_1(o) - 1)(e_2(o) - 1) \end{aligned}$$

Vorstehende Überlegungen gestatten es, für festes  $n \ll \infty$  sämtliche  $n$ -blättrigen Überlagerungen  $Y$  von  $\mathcal{M}_{0,5}$  zu bestimmen, deren Abschluss über  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  glatt ist.

Maschinelle Rechnung zeigt, dass es nur zehn glatte Überlagerungen vom Grad  $2 \leq n \leq 6$  gibt. Sie sind alle vierblättrig. Die Deckgruppe ist eine kleinsche Vierergruppe, die einfach transitiv auf  $\{0, 1, 2, 3\}$  operiert. Somit ist die Überlagerung zusammenhängend und galoissch mit  $\text{Aut}_X \bar{Y} \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ . Die Chernzahlen sind  $c_1^2(\bar{Y}) = 2$ ,  $c_2(\bar{Y}) = 10$ . Es handelt sich also höchstwahrscheinlich um 6- bis 7-mal aufgeblasene rationale Flächen.

$\bar{Y}$  verzweigt einfach über einem Sechseck  $B \subset \partial\mathcal{M}_{0,5}$ . Dieses Sechseck besteht aus allen Randgeraden, die eine bestimmte Randgerade nicht schneiden. Da die Automorphismen von  $\mathcal{M}_{0,5}$  transitiv auf der Kantenmenge operieren, gibt es neun weitere Überlagerungen, die unter  $\text{Aut } \mathcal{M}_{0,5}$  zu  $\bar{Y}$  konjugiert sind. Die zehn nichttrivialen glatten Überlagerungen sind also eigentlich nur eine.

Die sechs Ecken des Verzweigungssechsecks haben jeweils nur ein Urbild, in dem sich zwei Verzweigungsgeraden schneiden. Die sechs Schnittpunkte des Sechsecks mit den übrigen Randkomponenten haben jeweils zwei Urbilder, nämlich gewöhnliche Punkte von Verzweigungsgeraden. Außerdem gibt es noch die drei Ecken außerhalb des Sechsecks; sie haben je vier einfache Urbilder.

In [11] wird die Serie der glatten Überlagerungen betrachtet, die über allen Randgeraden „konstant  $e$ -fach verzweigt“ sind, und festgestellt, dass im Fall  $e = 5$  ein Ballquotient entsteht. Die zugehörigen Permutationen deute ich für  $n = 5$  in Zykelschreibweise an:

$$\begin{aligned} \tau &= (01234)(56789)(1011121314) \dots \\ \sigma_2 &= (05101520)(16111621) \dots (49141924)(2530354045) \dots \\ \sigma_4 &= (0255075100)(1265176101) \dots \end{aligned}$$

und so weiter. Die Überlagerungen sind offensichtlich galoissch mit Deckgruppe  $\text{Aut}_X Y \cong (\mathbb{Z}/(e))^5$ . Wir erhalten die folgenden Chernzahlen:

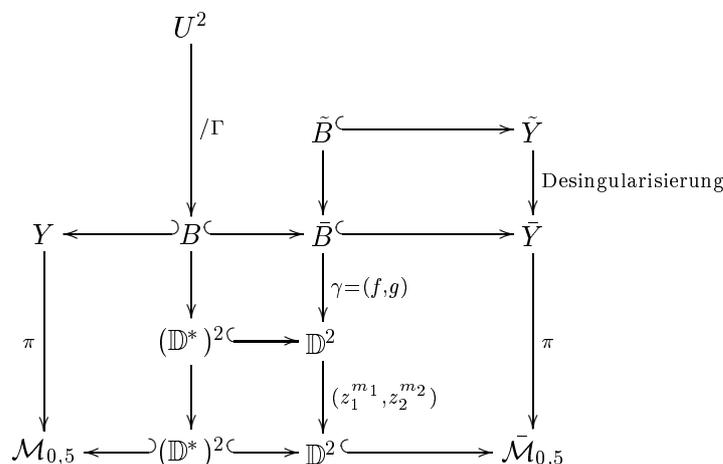
$e$	$n = [Y : \mathcal{M}_{0,5}]$	$c_1^2(\bar{Y})$	$c_2(\bar{Y})$	$c_1^2/c_2$
2	32	0	24	0
3	243	135	81	1,666
4	1024	1280	448	2,857
5	3125	5625	1875	3
6	7776	17380	5832	2,962
7	16807	42875	14749	2,906
8	32768			segmentation fault

[11] gibt auch Formeln für die Chernzahlen von Überlagerungen dieses speziellen Typs an, die einfacher sind als die hier angegebenen Formeln und sich auch noch für größere  $e$  einsetzen lassen.

### 7.5 Auflösung der Singularitäten von Überlagerungen

Sei  $\pi : Y \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$  die durch die Permutationen  $\sigma_i$  gegebene unverzweigte Überlagerung von  $\mathcal{M}_{0,5}$ ,  $\bar{Y}$  ihre Normalisierung im Funktionenkörper von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  und  $\tilde{Y}$  die minimale Desingularisierung von  $\bar{Y}$ .

Singularitäten von  $\tilde{Y}$  können über den Singularitäten des Verzweigungsorts, d. h. über den Ecken  $p$  von  $\partial\mathcal{M}_{0,5}$  auftreten. Wie die Überlagerungen in der Nähe eines Urbilds von  $p$  aussehen, steht in [10] auf Seite 82/83. Ich übernehme einige Bezeichnungen von dort.



Dabei ist  $U$  die obere Halbebene,  $\mathbb{D}$  die komplexe Einheitskreisscheibe,  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Die Abbildung von  $U$  nach  $\mathbb{D}^*$  ist die universelle Überlagerung  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ . Alle Rechtecke sind cartesisch. Die senkrechten Pfeile in der linken Hälfte des Diagramms sind unverzweigte Überlagerungen.

Sei (vorübergehend)  $V$  die im Diagramm als  $(\mathbb{D}^*)^2$  beschriebene Teilmenge von  $\mathcal{M}_{0,5}$ . Die im Diagramm angesprochene Gruppe  $\Gamma = \text{Aut}_B U^2$  ist der Kern der lokalen Monodromieoperation

$$\text{Aut}_V U^2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(V) \rightarrow \text{Aut}_V B.$$

(Die Deckgruppe von  $U^2|V$  ist *kanonisch* isomorph zur Fundamentalgruppe von  $V$ , weil sie abelsch ist.) Ist  $\Gamma$  nicht von der Form  $\langle m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ , dann tritt eine  $A_{n,q}$ -Singularität in  $\bar{B}$  auf, die in  $\tilde{B}$  durch eine Hirzebruch-Jung-Kette aufgelöst wird. Siehe dazu [10] Seite 80ff.

Die Invarianten  $m_1, m_2, n, q$  und damit  $e_i, \lambda_i$  und  $\mu_i$  (vgl. [10]) lassen sich berechnen, wenn man  $\Gamma \leq \mathbb{Z}^2$  kennt. Die von  $m_1 \binom{0}{1}$  und  $m_2 \binom{0}{2}$  erzeugte Untergruppe  $\Gamma'$  gehört zu einer maximalen glatten Überlagerung von  $\bar{\mathcal{M}}_{0,5}$ , die von  $\bar{B}$  dominiert wird.  $\Gamma'$  enthält offenbar  $\Gamma$ . Zur Berechnung von  $n$  und  $q$  aus  $\Gamma/\Gamma'$  siehe [10] Seite 83 oben (d). Wie man die Kennzahlen der Hirzebruch-Jung-Kette mittels  $n/q$  bekommt, steht auf Seite 80/81 im selben Buch.

Sei  $p \in \mathcal{E}$  ein Doppelpunkt von  $\partial\mathcal{M}_{0,5}$ . Das Urbild  $\bar{Y}(p)$  steht in (äußerer) Bijektion zur Restklassenmenge  $\mathcal{C}/G_p$ . Die Bijektion hängt von der Wahl eines Punktes  $x' \in \mathcal{M}_{0,5}$  ab, der in einer 4-Zelle, aber nahe an  $p$  liegt; zu  $g \in G$  gehört dann das Urbild von  $p$  in der Nähe von  $Y(x') \cap g(C_0)$ , wobei  $C_0 \in \mathcal{C}$  im Prinzip auch willkürlich zu wählen ist. (In den Rechnungen sind die Zellen ohnehin durchnummeriert.) Sei nun  $y \in \bar{Y}$  ein festes Urbild von  $p$  und  $o \in \mathcal{C}/G_p$  die zugehörige Bahn. Seien  $l_1(p)$  und  $l_2(p)$  die beiden Randgeraden, die sich in  $p$  treffen. Ich identifiziere die lokale Monodromiegruppe  $\pi_1(U; x')$ ,  $U \subset \mathcal{M}_{0,5}$ , mit  $\mathbb{Z}^2$ , erzeugt von kleinen Schleifen  $\tau_1$  um  $l_1(p)$  und  $\tau_2$  um  $l_2(p)$ , und will den Kern

$$\Gamma = \ker(\mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Sym}(o))$$

der lokalen Monodromieoperation ausrechnen. Ich folge [10] Seite 83 oben (d). Seien  $\tilde{N}$  und  $b_0$  die Ordnungen von  $\tau_1|_o$  beziehungsweise  $\tau_2|_o$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma \cap (\mathbb{Z} \times 0) &= \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma \cap (0 \times \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt kann ich alle Paare  $(a, b)$  mit  $a = 1, \dots, \tilde{N} - 1$  und  $b = 1, \dots, b_0 - 1$  bestimmen, für die  $\binom{a}{b} \in \Gamma$ , das heißt  $\tau_1^a \circ \tau_2^b|_o = \text{id}$  gilt. Wenn es keine solchen Paare gibt, liegt unabhängige Verzweigung um die beiden Randkurven vor; dann ist  $\bar{Y}$  bei  $y$  glatt, und ich brauche nichts weiter zu unternehmen. Andernfalls schreibe ich all die Paare in eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{N} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \end{pmatrix}$$

mit  $a_0 := 0$  zusammen.

Die Faktorgruppe  $\Gamma/\mathbb{Z} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ 0 \end{pmatrix}$  ist torsionsfrei vom Rang 1, also zyklisch. Daher hat  $\Gamma$  die Gestalt

$$\Gamma = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen  $\tilde{q}$  und  $m_2$  lassen sich so wählen, dass  $\tilde{q} \in \{0, \dots, \tilde{N} - 1\}$  und  $m_2 > 0$ . Sie sind durch diese Zusatzbedingung eindeutig bestimmt. Offenbar gilt  $m_2 | b_0$ . Da ich von einem singulären Punkt  $y \in \tilde{Y}$  ausgehe, ist  $\tilde{q} \neq 0$ . Die Zahl  $m_2$  ist offenbar der größte gemeinsame Teiler der  $b_i$ . Euklids Algorithmus bestimmt  $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$ , sodass  $d_1 := u_1 b_0 + v_1 b_1$  der größte gemeinsame Teiler von  $b_0$  und  $b_1$  ist. Der Vektor  $\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$  mit  $c_1 := u_1 a_0 + v_1 a_1$  liegt dann in  $\Gamma$ . Ich bestimme jetzt  $u_2$  und  $v_2$ , sodass  $d_2 := u_2 d_1 + v_2 b_2$  der größte gemeinsame Teiler von  $d_1$  und  $b_2$  (und somit von  $b_0, b_1$  und  $b_2$ ) ist, setze  $c_2 := u_2 c_1 + v_2 a_2$ , fahre so fort und erhalte schließlich  $(c_r, d_r) \in \Gamma$  mit  $d_r = m_2$ . Dann muss  $\tilde{q}$  der Rest von  $c_r$  modulo  $\tilde{N}$  sein. Laut [10] Seite 83 oben (d) liegt dann eine Hirzebruch-Jung-Singularität vom Typ  $A_{N,q}$ , wobei man  $N$  und  $q$  aus  $\tilde{N}$  und  $\tilde{q}$  erhält, indem man den größten gemeinsamen Teiler aus beiden herauszieht.

Um die Singularität aufzulösen, muss man [10] in  $y$  eine Hirzebruch-Jung-Kette aus rationalen Kurven  $C_k$  mit Selbstschnitten  $e_k$  hineinblasen. Vorübergehend nummeriere ich sie  $C_1, \dots, C_r$  und zitiere aus [10] (Seite 80) den Schnittgraphen

$$C_0 \text{ --- } C_1 \text{ --- } C_2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } C_r \text{ --- } C_{r+1},$$

wobei  $C_0$  eine Urbildkurve der Randgeraden  $l_1(y)$  und  $C_{r+1}$  eine Urbildkurve der Randgeraden  $l_2(y)$  ist. Sei  $\rho_k = \rho_{C_k}$  die Vielfachheit von  $C_k$  im kanonischen Divisor von  $\tilde{Y}$ , also

$$K_{\tilde{Y}} = \pi^* K_X + \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)C + \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{C|p} \rho_C C.$$

Die Adjunktionsformel

$$(K_{\tilde{Y}} + C_k) \cdot C_k = \deg K_{C_k}$$

liest sich

$$\rho_{k-1} + (\rho_k + 1)e_k + \rho_{k+1} = -2, \quad k = 1, \dots, r.$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die  $\rho_k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , nämlich

$$\begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & e_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & e_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & e_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \rho_0 - e_1 \\ -2 - e_2 \\ \vdots \\ -2 - e_{r-1} \\ -2 - \rho_{r+1} - e_r \end{pmatrix}$$

auf dessen linker Seite die Schnittmatrix der Hirzebruch-Jung-Kette steht. Die Matrix ist negativ definit [10]. Ich kann die  $\rho_k$  also ausrechnen, wenn ich die  $e_k$  kenne. Die  $e_k$  erhalte ich aber aus einer Kettenbruchentwicklung von  $n/q$ , siehe [10] Seite 80 unten.

## 7.6 Chernzahlen der singulären Überlagerungen

Mit diesem Vorwissen kann ich es wagen,

$$K_{\tilde{Y}} = \pi^* K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} + \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)C + \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{C|p} \rho_C C$$

zu quadrieren:

(1) Zunächst ist

$$(\pi^* K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}})^2 = n K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}}^2 = 5n$$

(2) Wie im glatten Fall

$$\begin{aligned} (\pi^* K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} \cdot \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)C) &= \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1) (K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} \cdot \pi_* C) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1) f_C(K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} \cdot l) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_l} (|o| - 1) (K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} \cdot l) \end{aligned}$$

(3) Für die Kurven  $C$ , die über Punkten  $p \in \mathcal{E}$  liegen, ist das Schnittprodukt  $(\pi^* K_{\tilde{\mathcal{M}}_{0,5}} \cdot C) = 0$  nach der Projektionsformel.

(4) Die Urbilder der Verzweigungsgeraden schneiden sich gegenseitig transversal in denjenigen Urbildern der Ecken, wo  $\tilde{Y}$  glatt ist, also nichts hineingeblasen wird. An einem solchen Punkt  $y \in \tilde{Y}$  seien  $e_1(y)$ ,  $e_2(y)$  die Verzweigungsordnungen um die beteiligten Randkurven. Dann

$$\left( \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)C \cdot \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)C \right) = \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)^2 C^2 + 2 \sum_{p \in \mathcal{E}} \#\tilde{Y}_{\text{reg}}(p)$$

Die Selbstschnitte  $C^2$ ,  $C|l$ , müssen auf die mit der Projektionsformel berechenbare Größe

$$(C \cdot \pi^* l) = (\pi_* C \cdot l) = (f_C l \cdot l) = -f_C$$

zurückgeführt werden. Dazu muss ich mir überlegen, welche Komponenten, die in  $\pi^*l$  stecken, von  $C$  geschnitten werden. Zunächst steckt  $C$  selbst mit Vielfachheit  $e_C$  in  $\pi^*l$ . Lläuft  $C$  durch eine Stelle, wo  $\bar{Y}$  aufgeblasen wurde, so schneidet  $C$  außerdem eine der dortigen Ausnahmekurven; ich übernehme die Bezeichnungen von weiter oben, wo das Aufblasen von  $\bar{Y}$  besprochen wurde.

- Entweder ist  $C = C_0$  in der Hirzebruch-Jung-Konfiguration. Dann ist  $\pi^*l$  lokal durch die Gleichung  $f^{m_1}$  gegeben (mit den Bezeichnungen von oben). Die von  $C = C_0$  getroffene Ausnahmekurve  $C_1$  tritt mit Vielfachheit  $\lambda_1 m_1 = q m_1$  in  $\pi^*l$  auf.
- Andernfalls ist  $C = C_{r+1}$ . Dann ist  $\pi^*l$  lokal durch die Gleichung  $g^{m_2}$  gegeben. Die von  $C = C_{r+1}$  getroffene Ausnahmekurve  $C_r$  tritt mit Vielfachheit  $\mu_r m_r = q' m_r$  in  $\pi^*l$  auf.

Fazit:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1)^2 C^2 &= \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} \frac{(e_C - 1)^2}{e_C} (C \cdot \pi^*l - \sum_{C=C_0} q m_1 C_1 - \sum_{C=C_{r+1}} q' m_r C_r) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} \frac{(e_C - 1)^2}{e_C} (-f_C) - \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}(p)} \frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \\ &= - \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in C/G_l} \frac{(|o| - 1)^2}{|o|} - \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}(p)} \frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \end{aligned}$$

(5) Der nächste Term betrifft schon wieder die Schnitte von Rand- und Ausnahmekurven in der Überlagerung, diesmal direkt:

$$\left( \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (e_C - 1) C \cdot \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{C|p} \rho_C C \right) = \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}(p)} ((\rho_0 - 1) \rho_1 + \rho_r (\rho_{r+1} - 1))$$

(6) Schließlich die Selbstschnitte der Ausnahmekomponenten: Zu einer Hirzebruch-Jung-Kette über  $y \in \bar{Y}_{\text{sing}}$  gehört die Schnittmatrix  $E(y)$  und ihr Anteil  $\rho(y) = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  am kanonischen Divisor. Mit dieser Symbolik

$$\begin{aligned} \left( \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{C|p} \rho_C C \right)^2 &= \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{y \in \bar{Y}_{\text{sing}}} {}^t \rho(y) E(y) \rho(y) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}} (\rho_1(-2 - \rho_0 - e_1) + \rho_2(-2 - e_2) + \dots + \rho_r(-2 - \rho_{r+1} - e_r)) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}} (-\rho_0 \rho_1 - \rho_r \rho_{r+1} - \sum_{k=1}^r \rho_k (e_k + 2)) \end{aligned}$$

Unterm Strich

$$\begin{aligned}
K_{\bar{Y}}^2 &= 5n + \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_l} \left( (-2)(|o| - 1) - \frac{(|o| - 1)^2}{|o|} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{y \in \bar{Y}_{\text{reg}}(p)} (e_1(y) - 1)(e_2(y) - 1) \\
&\quad + \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}} \left( - \left( \frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 2((\rho_0 - 1)\rho_1 + \rho_r(\rho_{r+1} - 1)) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + (-\rho_0\rho_1 - \rho_r\rho_{r+1} - \sum_{k=1}^r \rho_k(e_k + 2)) \right) \\
&= 5n - \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_l} (|o| - 1) \left( 3 - \frac{1}{|o|} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{y \in \bar{Y}_{\text{reg}}(p)} (e_1(y) - 1)(e_2(y) - 1) \\
&\quad + \sum_{\bar{Y}_{\text{sing}}} \left( - \frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + (\rho_0 - 2)\rho_1 - \sum_{k=1}^r \rho_k(e_k + 2) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \rho_r(\rho_{r+1} - 2) - \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \right)
\end{aligned}$$

Zur topologischen Eulercharakteristik gibt es Beiträge des Inneren

$$\chi_{\text{top}}(Y) = n\chi_{\text{top}}(\mathcal{M}_{0,5}) = 2n,$$

der Verzweigungskurven (ohne Ecken)

$$\sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} \chi_{\text{top}}(C) = \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{C|l} (-f_C) = - \sum_{l \in \mathcal{K}} \text{card}(\mathcal{C}/G_l),$$

der Ecken mit regulärer Verzweigung

$$\sum_{p \in \mathcal{E}} \text{card}(\bar{Y}_{\text{reg}})$$

und der Ausnahmehereiche

$$\sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{\tilde{Y}_{\text{sing}}} (r+1).$$

Insgesamt

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{Y}) = 2n - \sum_{l \in \mathcal{K}} \text{card}(\mathcal{C}/G_l) + \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{o \in \mathcal{C}/G_p} (r+1),$$

wobei  $r := 0$  für eine Ecke  $y \in \tilde{Y}$  mit regulärer Verzweigung.

## 7.7 Galoisüberlagerungen

Ist  $\tilde{Y} | \bar{\mathcal{M}}_{0,5}$  galoissch, so kann man  $\mathcal{C} = \{g(C_0) \mid g \in G\}$  mit  $G = \text{Aut}_{\bar{\mathcal{M}}_{0,5}} \tilde{Y}$  identifizieren. Die Monodromieoperation wird zur Linkstranslation  $G \times G \rightarrow G$ . Die Überlagerungen, deren Deckgruppe isomorph zu einer bestimmten abelschen Gruppe  $G$  ist, entsprechen den Quintupeln  $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_8) \in G^5$ , modulo Automorphismen von  $G$ . Die sechs sechsstelligen Relationen für die  $\sigma_i$  sind nämlich in abelschen Gruppen automatisch erfüllt.

Bei der Berechnung der Chernzahlen hat man im galoisschen Fall den Vorteil, dass man für jede Kante und Ecke nur ein Urbild zu betrachten braucht; die anderen sehen ja genauso aus:

$$\begin{aligned} K_{\tilde{Y}}^2 &= 5n - \sum_{l \in \mathcal{K}} \sum_{o \in G/G_l} (|o| - 1) \left(3 - \frac{1}{|o|}\right) + 2 \sum_{p \in \mathcal{E}} \sum_{y \in \tilde{Y}_{\text{reg}}(p)} (e_1(y) - 1)(e_2(y) - 1) \\ &\quad + \sum_{\tilde{Y}_{\text{sing}}} \left( -\frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + (\rho_0 - 2) \rho_1 - \sum_{k=1}^r \rho_k (e_k + 2) \right. \\ &\quad \left. + \rho_r (\rho_{r+1} - 2) - \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \right) \\ &= 5n - \sum_{l \in \mathcal{K}} (G : G_l) (|G_l| - 1) \left(3 - \frac{1}{|G_l|}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{p=l \cap l' \text{ reg.}} (G : G_p) (|G_l| - 1) (|G_{l'}| - 1) \\ &\quad + \sum_{p=l \cap l' \text{ sing.}} (G : G_p) \left( -\frac{(\rho_0 - 1)^2}{\rho_0} q m_1 + (\rho_0 - 2) \rho_1 - \sum_{k=1}^r \rho_k (e_k + 2) \right. \\ &\quad \left. + \rho_r (\rho_{r+1} - 2) - \frac{(\rho_{r+1} - 1)^2}{\rho_{r+1}} q' m_r \right) \end{aligned}$$

und

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{Y}) = 2n - \sum_{l \in \mathcal{K}} (G : G_l) + \sum_{p \in \mathcal{E}} (G : G_p)(r + 1).$$

Ich habe maschinell alle Überlagerungen vom Grad  $2 \leq n \leq 10$  sowie die Galoisüberlagerungen für einige Gruppen bestimmt und deren diskrete Kenndaten (Chernzahlen, Homologie) ausgerechnet.

**Literatur**

- [1] Abikoff, William: *On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. III.* Acta Math. 134, 211–237 (1975)
- [2] Abikoff, William: *Augmented Teichmueller spaces.* Bull. Am. Math. Soc. 82, 333–334 (1976)
- [3] Abikoff, William: *Degenerating families of Riemann surfaces.* Ann. of Math., II. Ser. 105, 29–44 (1977)
- [4] Abramovich, Dan; Corti, A.; de Jong, A. J.; Vistoli, Angelo: *Twisted bundles, admissible covers and level structures.* (in preparation)
- [5] Abramovich, Dan; Vistoli, Angelo: *Complete moduli for families over semistable curves.* Preprint [math.AG/9811059](#) (1998)
- [6] Abramovich, Dan; Vistoli, Angelo: *Compactifying the space of stable maps.* Preprint [math.AG/9908167](#) (1999)
- [7] Artin, Michael: *Versal deformations and algebraic stacks.* Invent. Math. 27, 165–189 (1974)
- [8] Baer, R.: *Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen.* J. Reine Angew. Math. 159, 101–111 (1928)
- [9] Baily, W. L.; Borel, Armand: *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains.* Ann. Math., II. Ser. 84, 442–528 (1966)
- [10] Barth, Wolf; Peters, Chris; van de Ven, Antonius: *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer 1984
- [11] Barthel, Gottfried; Hirzebruch, Friedrich; Höfer, Thomas: *Geradenkonfigurationen und algebraische Flächen.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg (1987)
- [12] Belyi, G. V.: *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field.* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 43, 267–276 (1979)
- [13] Benabou, Jean: *Introduction to bicategories.* In *Reports of the Midwest Category Seminar.* Lecture Notes in Mathematics 47, Springer (1967)

- [14] Bers, Lipman: *On boundaries of Teichmueller spaces and on kleinian groups. I.* Ann. Math. 91, 570–600 (1970)
- [15] Bers, Lipman: *Fiber spaces over Teichmueller spaces.* Acta Math. 130, 89–126 (1973)
- [16] Boggi, Marco; Pikaart, Martin: *Galois covers of moduli of curves.* Compos. Math. 120, No. 2, 171–191 (2000)
- [17] Braungardt, Volker: *Abschluß von Überlagerungen.* Diplomarbeit, Karlsruhe 1996
- [18] Carocca, Angel (ed.) et al.: *Complex geometry of groups. Proceedings of the 1st Iberoamerican congress on geometry, Olmue, Chile, January 5–11, 1998.* Contemporary Mathematics 240. American Mathematical Society (1999)
- [19] Deligne, Pierre; Mumford, David: *The irreducibility of the space of curves of a given genus.* Publ. Math. IHES 36, 75–109 (1969)
- [20] Earle, Clifford J.: *On holomorphic families of pointed Riemann surfaces.* Bull. AMS 79, 163–166 (1973)
- [21] Earle, Clifford J.; Kra, Irwin: *On isometries between Teichmueller spaces.* Duke Math. J. 41, 583–591 (1974)
- [22] Edidin, Dan: *Notes on the construction of the moduli space of curves.* Preprint math.AG/9805101 (1998)
- [23] Engber, Michael: *Teichmüller spaces and representability of functors.* Trans. AMS 201, 213–226 (1975)
- [24] Even, Markus: *Über die Topologie des Raumes der metrisierten Bändergraphen.* Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH) 1997
- [25] Gerritzen, Lothar; Herrlich, Frank: *The extended Schottky space.* J. Reine Angew. Math. 389 (1988) 190–208
- [26] Giraud, Jean: *Cohomologie non abélienne.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 179. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1971)
- [27] Gómez, Tomás L.: *Algebraic stacks.* Preprint math.AG/9911199 (1999)

- [28] Grothendieck, A.: *Techniques de construction en géométrie analytique. Familles d'Espaces Complexes et Fondements de la Géométrie Analytique*, Sémin. H. Cartan 13 (1960/61), No. 7–17 (1962)
- [29] Grothendieck, A.: *Esquisse d'un programme*. In [55], 5–48
- [30] Hakim, Monique: *Topos annelés et schémas relatifs*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 64. Springer (1972)
- [31] Harvey, W. J.: *Modular groups and representation spaces*. Contemp. Math. 74 (1988) 205–214
- [32] Harvey, W. J.: *Boundary structure of the modular group*. In [41], 245–251 (1981)
- [33] Hejhal, Dennis A.: *Regular  $b$ -groups, degenerating Riemann surfaces, and spectral theory*. Mem. AMS 437 (1990)
- [34] Herrlich, Frank: *The Extended Teichmüller Space*. Math. Zeitschrift 203, 279–291 (1990)
- [35] Hidalgo, Rubén A.: *Noded Fuchsian groups. I*. Complex Variables, Theory Appl. 36, No.1, 45–66 (1998)
- [36] Hidalgo, Rubén A.: *Noded function groups*. In [18], pp. 209–222 (1999)
- [37] Hubbard, John Hamal: *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmueller*. Diss., Mem. AMS 166 (1976)
- [38] de Jong, A.; Pikaart, Martin: *Moduli for curves with non-abelian level structures*. The moduli space of curves, Birkhäuser 1995, 483–509
- [39] Kerckhoff, Steven P.; Thurston, William P.: *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmueller space*. Invent. Math. 100, 25–47 (1990)
- [40] Knudsen, Finn F.: *The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks  $M_{g,n}$* . Math. Scand. 52, 161–199 (1983)
- [41] Kra, Irwin (ed.); Maskit, Bernard (ed.): *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*. Annals of Mathematics Studies 97. Princeton, New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo Press (1981)

- [42] Laumon, Gérard; Moret-Bailly, Laurent: *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin: Springer (2000)
- [43] Lehto, Olli; Virtanen, K.I.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1965)
- [44] Looijenga, E.: *Smooth Deligne-Mumford compactifications by means of Prym level structures*. J. Alg. Geom. 3, 283–293 (1994)
- [45] Maskit, Bernard: *On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups. II*. Ann. Math. 91, 607–639 (1970)
- [46] Maskit, Bernard: *Kleinian groups*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 287, Springer (1988)
- [47] Mostafa, S. M.: *Die Singularitäten der Modulmannigfaltigkeit  $\bar{M}_g(n)$  der stabilen Kurven vom Geschlecht  $g \geq 2$  mit  $n$ -Teilungspunktstruktur*. J. reine angew. Math. 343, 81–98 (1983)
- [48] Mumford, David: *Geometric Invariant Theory*. Springer 1965
- [49] Nag, Subhashis: *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. New York etc.: Wiley (1988)
- [50] Oda, Takayuki: *Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves*. In [55], 85–95
- [51] Persson, Ulf: *Double coverings and surfaces of general type*. Algebraic Geometry, Proc. Tromsø Symp. 1977, Lecture Notes Math. 687, 168–195 (1978)
- [52] Pikaart, Martin: *Moduli spaces of curves: stable cohomology and Galois covers*. Proefschrift, Utrecht 1997
- [53] Popp, H.: *On moduli of algebraic varieties III. Fine moduli spaces*. Comp. Math. 31 (1975), 237–258
- [54] Royden, H.L.: *Remarks on the Kobayashi metric*. Several Complex Variables II, Conf. Univ. Maryland 1970, 125–137 (1971)
- [55] Schneps, Leila (ed.); Lochak, Pierre (ed.): *Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's esquisse d'un programme*. Proceedings of the conference on geometry and arithmetic of moduli spaces, Luminy 1995.

London Mathematical Society Lecture Note Series 242. Cambridge University Press 1997.

[56] Vistoli, Angelo: *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*. Invent. Math. 97, 613–670 (1989)

[GAP00] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.2*, Aachen, St Andrews, 2000,  
(<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap>).



Volker Braungardt  
Mathematisches Institut  
Universität München  
Theresienstr. 39  
80 333 München

## Lebenslauf

2. 9. 1972	geboren in Karlsruhe
1978–1982	Drais-Grundschule in Karlsruhe
1982–1991	Helmholtz-Gymnasium in Karlsruhe
ab 1991	Physikstudium an der Universität Karlsruhe (TH)
11. 10. 1993	Vordiplom in Physik
ab 1993	Parallelstudium Mathematik (Karlsruhe)
1995–1996	Diplomarbeit bei Prof. F. Herrlich Thema: „Abschluß von Überlagerungen“
15. 10. 1996	Diplom in Mathematik
15. 4. 1997–14. 4. 2001	wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut II (Karlsruhe)
1997–12. 1. 2001	Dissertation
seit 17. 4. 2001	wissenschaftlicher Angestellter im DFG-Projekt „Geometrie von Flächenbündeln“, LMU München

*16. August 2001*