

# Das Augmented–Lagrange–Verfahren bei Reibkontaktproblemen unter transienter Beanspruchung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTOR–INGENIEURS  
von der Fakultät für  
Bauingenieur– und Vermessungswesen  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)  
genehmigte  
DISSERTATION

von  
Dipl.–Ing. Dirk Hoffmann  
aus Kiel

Tag der mündlichen Prüfung: 13. 2. 2003

Hauptreferent: Prof. Dr.–Ing. Karl Schweizerhof  
Korreferenten: Prof. Dr.–Ing. P. Vielsack,  
Prof. Dr.–Ing. habil. P. Wriggers

Karlsruhe 2003

## Kurzfassung

Zu einer Vielzahl von Analysen von Kontaktproblemen gehören Untersuchungen über das lokale Verhalten im Kontaktbereich, Untersuchungen spezifischer Kontaktzustände von typischen Anwendungen sowie Verifikationsrechnungen von Versuchen. Dabei sind besonders die Kraftverläufe auf der in Raum und Zeit veränderlichen Kontaktfläche von Interesse. Dies führt zu hohen Anforderungen an die Genauigkeit.

Ein wesentlicher Aspekt bei der Durchführung einer möglichst realistischen Simulation ist die Berücksichtigung von Reibung. Reibung gilt als Oberbegriff für diverse energiedissipierende Prozesse. Zum besseren Verständnis des Reibverhaltens wird in einem Kapitel ein Einblick zum Stand der Theorien in der Tribologie gegeben. Zu den wesentlichen Mechanismen, die auf der Oberfläche agieren, gehören Adhäsion, Abrasion oder Furchenbildung und elastoplastische Deformation. Die Wichtung des Auftretens dieser Mechanismen ist von der Werkstoffpaarung abhängig. Grundsätzlich werden, um das Reibverhalten einer bestimmten Werkstoffpaarung zu ermitteln, experimentelle Untersuchungen durchgeführt und daraufhin Vorschläge für Reibgesetze gemacht. Hierzu liegen Versuchsergebnisse des Autors für die Paarung Stahl und Beton vor. Die Umsetzung von Reibgesetzen in die Kontaktalgorithmen geschieht mit einer Gleitregel analog zur Fließregel der Plastizitätstheorie.

In Hinblick auf die Problemstellung und nach einer Einführung in den Stand der numerischen Verfahren wird eine Vorgehensweise mit Knoten–Segment–Kontakt gewählt. Bei den zugehörigen Optimierungsverfahren erscheint das Augmented–Lagrange–Verfahren am geeignetsten.

Anhand der lokalen Betrachtung mit dem sogenannten Master–Slave–Konzept lassen sich die Kontaktbedingungen aufstellen. Um eine verschiebungsgesteuerte Lösung des Problems zu ermöglichen, werden Penaltyfaktoren eingeführt. Die zu linearisierenden Kontaktbedingungen werden anschließend in das Prinzip der virtuellen Arbeit integriert.

Der Lösungsprozess des Augmented–Lagrange–Verfahrens wird in zwei Phasen durchgeführt. In der ersten Phase werden die Werte der Multiplikatoren konstant gehalten und der aktuelle Bewegungszustand ermittelt. In der zweiten Phase werden der Bewegungszustand festgehalten und die Werte der Multiplikatoren aktualisiert. Zur Bestimmung der Reibkraft wird die Gleitregel angewendet. Dies führt zur Entwicklung einer unsymmetrischen und einer symmetrischen Lösungsvariante.

Zuerst wird dann die eigene Codierung anhand von Beispielen aus der Literatur verifiziert, anschließend werden die Algorithmen bei dynamischen Problemstellungen angewendet. Untersucht werden typische Kontaktzustände von praxisnahen Beispielen wie das Rollen eines Ringes, das Sich-in-Bewegung-setzen eines Blockes sowie Stoß- und Einschlagprobleme. Schwerpunkte sind der Vergleich der Algorithmen und die Betrachtung der Kraftverläufe auf der Kontaktfläche. Hierzu gehören die Analyse von Reibzuständen wie Haft- Gleitübergänge und auch die Integration komplexerer Reibgesetze.

Als Folge der Rücknahme der Regularisierung durch das Augmented-Lagrange-Verfahren verschwinden die Penetration in Normalenrichtung und die Haftverschiebung in tangentialer Richtung bis auf eine minimale Größe. Somit werden verformte Strukturen realistischer abgebildet. Wesentlicher Vorteil des Verfahrens ist, dass bei dynamischen Problemstellungen als Folge des Anpassungsprozesses – 'Augmentation-Prozesses' – die kinematischen Verläufe und die Kraftverläufe der Kontaktknoten praktisch frei von Oberschwingungen sind. Damit sind die Verläufe der Kinematik und der Normalkraft eines Kontaktknotens auch (quasi) von algorithmischen Schwächen befreit und es stehen genauere Normalkraftverläufe im Kontaktbereich als mögliche Eingangsgrößen für nichtlineare, komplexere Reibgesetze zur Verfügung. Damit wird die Nutzung eines aufwendigeren Reibgesetzes erst sinnvoll.

Als ein weiterer Vorteil zeigt sich, dass die Erfassung von Haft- oder Gleitzuständen einzelner Knoten mit Hilfe des symmetrisierten Verfahrens realistisch ist.

Abschließend werden anhand eigener experimenteller Untersuchungen zur Ermittlung des Reibverhaltens zwischen Stahl und Beton entsprechende numerische Simulationen durchgeführt. Ein auf Basis dieser Versuchsergebnisse vorgeschlagenes Reibgesetz wird implementiert, mit Varianten angewendet und die Ergebnisse werden den experimentellen Resultaten gegenübergestellt. Neben einer zufriedenstellenden Übereinstimmung werden die Möglichkeiten der numerischen Algorithmen deutlich.

## Abstract

A large number of solutions of contact–problems deal with the analysis of the local behavior in the contact area, examination of specific contact states of typical applications and the verification of experiments. In all these cases the evaluation of forces in the contact area varying in space and time is of special interest. This requires a high degree of precision.

Friction is an important aspect when performing realistic simulations. Friction is considered as a generic term for various energy dissipating processes acting on the surface. For a better understanding an insight into the evolution of tribology theories is given. Adhesion, abrasion, ploughing and elastoplastic deformation are part of the most important mechanisms acting on the surface. The significance of these mechanisms depends on the interacting materials themselves. To determine the frictional behaviour of a particular pair of materials experimental work is basically needed. This results in friction law proposals. In this context own experimental results for the pairing steel and concrete exist. For the implementation of friction laws in contact algorithms a slip rule is needed which is analogous to the flow rule in the plasticity theory.

Introducing the objective of this thesis and the given state of the numerical solutions the node–segment–contact algorithm is chosen for further proceedings. As the accompanying optimization method the augmented–Lagrange–method seems to be suited best.

The local contact conditions are set up using the known master–slave–concept. In order to allow displacement driven solutions penalty factors are introduced. The linearized contact conditions are then integrated into the principle of virtual work.

The solution process of the augmented–Lagrange–method is split into two phases. In the first phase the multiplier values remains constant and the current state of motion is determined. Whereas in the second phase the state of motion is fixed and the multiplier values are updated. To determine the friction force the slip–rule is applied. This leads to the generation of a set of unsymmetric and symmetric matrices within the solution process.

At first, the own coding is verified by using examples given in literature. Then the algorithms are applied to a specific range of dynamic examples. Typical practical examples are analysed: the rolling of a ring, the set-going of a block, impact- and knock-in-problems. The main focus is put on the comparison of the algorithms and the examination of force-trends on the contact surface. Stick-slip-transitions and the integration of complex friction laws are also analysed.

As a result of the removal of the regularization of the augmented-Lagrange-method the penetration in normal direction and the displacement in tangential direction in case of the stick situation are approaching a minimum. As a consequence the representation of the contacting structures becomes more precise. A main advantage of the method is that, as a result of the augmentation-process, the kinematic and normal force trends of a contact node are free from any harmonics. Since the kinematics and the normal force of a contact node no longer show major dependencies on algorithmic defects, more precise input values in the contact area for complex nonlinear friction laws and the use of more complex friction laws appear then to be meaningful. An additional advantage is the realistic consideration of stick-slip conditions of individual contact nodes using the symmetric method.

Finally, following own experiments to determine the frictional behavior of steel and concrete the corresponding simulations are carried out. Based on the experimental results, a friction law is proposed, implemented and applied with several variations. Besides the satisfying correspondence between numerical simulations and experiments the possibilities of the numerical algorithms become obvious.

## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand nach Abschluss eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Vorhabens unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing E.h. Dr. techn. h.c. J. Eibl am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe, Abteilung Massivbau.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof für die Aufnahme des Themas, sein Interesse an der Fortführung der Arbeit, seine kompetente Betreuung und die darüber hinausgehende persönliche Unterstützung.

Großer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Vielsack und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. P. Wriggers für die Übernahme der Korreferate mit den damit verbundenen Mühen. Die Veröffentlichungen von Herrn Prof. Wriggers auf diesem Gebiet waren eine große Hilfe.

Weiterhin möchte ich mich bei der Leitung des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie für die großzügige Überlassung der notwendigen Arbeitsausstattung bedanken. Bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern dieses Instituts bedanke ich mich herzlich für die angenehme Atmosphäre, das kollegiale Verhältnis und die Möglichkeit zur Teilnahme an den Diskussionsrunden.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie und meinen Freunden, die mich während dieser Zeit unterstützt haben und Rückhalt gewährten.

Karlsruhe, im Juni 2003

Dirk Hoffmann



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Numerische Lösungsverfahren . . . . .	3
1.3	Eigene Vorgehensweise, Zielsetzung . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Zum Reibverhalten fester Körper</b>	<b>15</b>
2.1	Motivation . . . . .	15
2.2	Reale Oberflächen – Mechanische Prozesse . . . . .	16
2.2.1	Oberflächen . . . . .	16
2.2.2	Kontakt . . . . .	16
2.2.3	Reibung . . . . .	18
2.3	Entwicklung der Reibungstheorien . . . . .	20
2.4	Einsatz in numerischen Verfahren . . . . .	25
2.5	Zur Werkstoffpaarung Stahl und Beton . . . . .	27
2.5.1	Grundlegende Zusammenhänge . . . . .	27
2.5.2	Ergebnisse aus experimentellen Untersuchungen . . . . .	30
2.5.3	Herleitung zu einem Reibgesetz . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Numerische Grundlagen zum Kontakt</b>	<b>37</b>
3.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	37
3.1.1	Notation des Problems . . . . .	37
3.1.2	Lokale Grundgleichungen . . . . .	39
3.1.3	Überführung in das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	40
3.2	Handhabung der Kontaktbedingungen . . . . .	42
3.2.1	Parametrisierung der Kontaktfläche . . . . .	42
3.2.2	Reibungsbedingte Kontaktbedingung in tangentialer Richtung	49
3.2.3	Zusammenfassung der Kontaktbedingungen . . . . .	52
3.2.4	Regularisierung der Kontaktbedingungen mit Penaltyfaktoren	53
3.2.5	Zusammenfassung der Penaltyregularisierung . . . . .	57

3.3	Virtuelle Arbeit im Kontaktbereich und Linearisierung . . . . .	58
3.3.1	Das Integral der virtuellen Kontaktarbeit . . . . .	58
3.3.2	Linearisierung der Kontaktkinematik . . . . .	59
3.3.3	Virtuelle Kontaktarbeit in lokaler Form . . . . .	61
3.3.4	Linearisierung der virtuellen Kontaktarbeit . . . . .	61
3.3.5	Zusammenfassung der Linearisierung . . . . .	64
3.4	Diskretisierung mit finiten Elementen . . . . .	65
3.4.1	Die Bewegungsgleichung . . . . .	65
3.4.2	Räumliche Diskretisierung . . . . .	67
3.4.3	Zeitliche Diskretisierung . . . . .	72
3.5	Herleitung der Kontaktresiduen und –steifigkeit . . . . .	75
3.5.1	Elementierung von Slavepunkt und Mastersegment . . . . .	75
3.5.2	Degenerierung zum Dreiknoten–Kontaktelement . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Augmented–Lagrange und Symmetrisierung</b>	<b>81</b>
4.1	Vorbemerkungen . . . . .	81
4.2	Das Augmented–Lagrange–Verfahren . . . . .	84
4.2.1	Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung . . . . .	84
4.2.2	Augmented–Lagrange–Formulierung . . . . .	85
4.2.3	Augmented–Lagrange–Algorithmus . . . . .	89
4.2.4	Modifizierte Linearisierung und Kontaktsteifigkeitsmatrix . . . . .	96
4.3	Symmetrisierung des Verfahrens . . . . .	97
4.3.1	Zerlegung des Uzawa–Algorithmus . . . . .	97
4.3.2	Symmetrisierter Augmented–Lagrange–Algorithmus . . . . .	99
4.3.3	Modifizierte Linearisierung und Kontaktsteifigkeitsmatrix . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Validierung anhand numerischer Beispiele</b>	<b>103</b>
5.1	Vorbemerkungen . . . . .	103
5.2	Block, unsymmetrisch belastet . . . . .	104
5.3	Block, symmetrisch belastet . . . . .	110
5.4	Kontaktierende Kragarme . . . . .	115
5.5	Entwicklung eines Abbruchkriteriums . . . . .	120
5.6	Bremsender Block mit Anfangsgeschwindigkeit . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Untersuchungen an praxisnahen Beispielen</b>	<b>153</b>
6.1	Vorbemerkungen . . . . .	153
6.2	Rollen . . . . .	154
6.3	Gleiten . . . . .	164
6.3.1	Gleiten mit sinusförmiger Horizontalverschiebung . . . . .	165

---

6.3.2	Gleiten mit 'sanftem' Bewegungsbeginn . . . . .	173
6.3.3	Gleiten im stationären Zustand . . . . .	179
6.4	Stoßen . . . . .	191
6.4.1	Stoß eines Ringes gegen eine starre Ebene . . . . .	191
6.4.2	Stoß eines Ringes gegen eine elastische Ebene . . . . .	193
6.5	Einschlagen eines Zylinders in eine steife Form . . . . .	198
<b>7</b>	<b>Gegenüberstellung experimenteller Untersuchungen und num. Simulationen</b>	<b>211</b>
7.1	Vorbemerkungen . . . . .	211
7.2	Versuchskonzeption . . . . .	212
7.3	Numerische Simulation des statischen Versuches . . . . .	218
7.4	Numerische Simulation des dynamischen Versuches . . . . .	236
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>259</b>
8.1	Bemerkungen zur Numerik . . . . .	259
8.2	Zusammenfassung . . . . .	261
<b>9</b>	<b>Literatur zu Numerik und Tribologie</b>	<b>265</b>
<b>A</b>	<b>Zur Linearisierung</b>	<b>291</b>
A.1	Grundlegende Richtungsableitungen . . . . .	291
A.2	Ableitung der tangentialen Relativbewegung nach der Zeit . . . . .	294
A.3	Erste Variation der Abstandsfunktion . . . . .	295
A.4	Erste Variation des tangentialen Gleitweges . . . . .	296
A.5	Zweite Variation der Abstandsfunktion . . . . .	297
A.6	Zweite Variation des tangentialen Gleitweges . . . . .	299
A.7	Variation der Reibkraft . . . . .	302
<b>B</b>	<b>Zum Knoten–Segment–Kontakt</b>	<b>309</b>
B.1	Isoparametrischer Ansatz nach Laursen . . . . .	309
B.1.1	Normalkontakt . . . . .	312
B.1.2	Tangentialkontakt . . . . .	313
B.2	Ansatz für das Dreiknoten–Kontaktelement . . . . .	317
B.2.1	Normalkontakt . . . . .	320
B.2.2	Tangentialkontakt . . . . .	321

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Problemstellung

Numerische Analysen von Kontaktproblemen haben in vielen technischen Anwendungen Einzug gehalten, beispielsweise im Maschinenbau bei Simulationen von 'Crash'-Verhalten und Umformprozessen sowie bei der Analyse von Verbindungen und Lagern, im Bauwesen bei Betrachtungen von Verbundverhalten oder beim Katastrophenlastfall – Stoß.

Während des Kontaktes zwischen Körpern entstehende Tangentialbewegungen führen zum **Auftreten von Reibung**.

Heute wird je nach Aufgabenstellung zwischen 'low precision contact' und 'high precision contact' unterschieden. Beim 'low precision contact' interessieren in erster Linie das globale Strukturverhalten und damit die Auswirkungen resultierender Kontaktkräfte aus der Interaktion der Körper auf die angrenzende Struktur. Eine typische Anwendung ist z. B. das Crash-Verhalten.

Bei einer Vielzahl von Fragestellungen und Untersuchungszielen ist dagegen die **lokale Betrachtung** auf der Kontaktfläche und damit im 'high precision'-Bereich erforderlich. Im Maschinenbau gibt es Kontaktprobleme mit beweglichen Teilen hauptsächlich im Bereich der Dynamik. Als Beispiele kann man Rad – Schiene – Probleme, Umformprozesse, Zahnräder etc. nennen. Es kommt zu Gleitzuständen und Materialverschleiß. Kenntnisstand und Forschungsbedarf sind deshalb dort vergleichsweise hoch. Im Bauwesen kommt es meistens nur zu statischen Kontaktzuständen. Es interessiert in erster Linie Druckabhängigkeit. Dynamische Gleitzustände treten bei großen Gelenken oder beim Katastrophenlastfall – Stoß auf. Hierbei sind stoffgesetzmäßige Zusammenhänge auf der Oberfläche für realistische 'Impaktsimulation' von Metallteilen auf Beton gesucht.

Dabei ist von ausschlaggebender Bedeutung, Form und Größe der sich in Raum und Zeit verändernden **Kontaktfläche** sowie der zugehörigen Normal- und Reibspannungsverteilung auf der Oberfläche möglichst physikalisch exakt in die Berechnung einzuführen. Hierzu gehören neben der Erfassung der Normalspannungsverläufe sowohl die lokale Kinematik als auch die Relativverschiebungen und -geschwindigkeiten an einem Oberflächeninkrement. Als Basis für die **Beschreibung von Reibvorgängen** bilden diese die Eingangsgrößen zur Ermittlung der Tangentialspannungen.

Für eine realistische Simulation muss das Auftreten von Reibung bei Tangentialverschiebungen auf der Kontaktfläche möglichst wirklichkeitsnah, basierend auf Kenntnissen aus der Tribologie berücksichtigt werden.

Entscheidend für die Qualität der gewonnenen Lösung ist dabei das Zusammenspiel von realistischen, experimentell verifizierten Reibgesetzen mit den zugehörigen darauf abgestimmten physikalisch exakten Algorithmen, die die Eingangsgrößen für diese Reibgesetze bestimmen. Nur durch ein sinnvolles, abgestimmtes Zusammenspiel aller an der numerischen Analyse beteiligten Größen kann das Ziel einer **möglichst realitätsnahen Simulation** verwirklicht werden.

## 1.2 Numerische Lösungsverfahren

Kontaktprobleme gehören zu den nichtlinearen Problemen in der Kontinuumsmechanik. Aufgrund des sich während der Analyse räumlich und zeitlich verändernden Kontaktbereiches ändern sich mit jedem Zeitschritt die Randbedingungen. Dabei sind Kontaktfläche und -kraft bei jedem Schritt unbekannt. Diese Randbedingungen treten in Ungleichungsform – Inpenetrationsbedingung, Druck- und Reibspannungen – auf. Deshalb kann es aus mathematischer Sicht als ein elliptisches Randwertproblem mit Randbedingungen in Ungleichungsform bezeichnet werden.

Bei der Behandlung ist zwischen den klassischen Formulierungen und Variationsmethoden zu unterscheiden. KALKER [1977] macht hierzu eine Bestandsaufnahme. Er gibt einen umfangreichen Überblick mit entsprechender Literatur an.

Die **erste theoretische Behandlung** eines Kontaktproblem es wurde von HERTZ [1881] durchgeführt. Er untersuchte den Kontakt zwischen Körpern mit Hilfe der Potenzialtheorie des elastischen Halbraumes. Vorausgesetzt bei diesen Untersuchungen wurden Reibungsfreiheit, die Beschreibung der Oberfläche mit quadratischen Funktionen, sowie die Tatsache, dass die Kontaktoberfläche klein gegenüber den Abmessungen der Körper ist. Die Annahme einer quadratischen Funktion für den Abstand zwischen Körpern führte zu einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen Anpresskraft und der Annäherung der Körper.

Basis für **analytische Lösungen** sind die von SIGNORINI [1933] formulierten Randbedingungen in Ungleichungsform für den Kontakt eines elastischen Körpers gegen eine starre Barriere ohne Reibung. Analytische Lösungen können grundsätzlich aber nur für einige wenige elastische Kontaktprobleme abgeleitet werden, da man sich auf einfache geometrische Formen und linear elastische Werkstoffe beschränken muss. Eine Zusammenfassung einiger analytischer Lösungen gibt es von GLADWELL [1980]. Analytische Lösungen von Spezialfällen, wie der Kontakt elastischer Kugeln, wurden auch in jüngerer Zeit, so von JÄGER [1992], [1993] und [1994], veröffentlicht.

Die Integration der Randbedingungen in Ungleichungsform in die **Variationsformulierung** der Arbeits- und Extremalprinzipie der Kontinuumsmechanik führt zu einer Variationsungleichung. Erste Untersuchungen zur Behandlung von reibungsfreiem Kontakt eines elastischen Körpers mit einem starren Hindernis wurden von SIGNORINI [1959] durchgeführt. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Kontaktproblemen wurde von FICHERA [1964] nachgewiesen und die dazugehörige Variationsformulierung in der Elastostatik aufgestellt. Eine Erweiterung der Variationsungleichung auf linear elastische Kontaktprobleme unter Berücksichtigung der Reibung

wurde von DUVAUT & LIONS [1976] durchgeführt. Sie machen gleichzeitig Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Zur Untersuchung allgemeiner Fragestellungen haben sich **numerische Lösungsverfahren** und dabei besonders die **Finite-Elemente-Methode** durchgesetzt. Mit diesem universellen Werkzeug ist auch gleichzeitig eine Berücksichtigung von nichtlinearen Materialeigenschaften und großen Verformungen möglich. Dieses numerische Berechnungsverfahren beruht nahezu ausschließlich auf der Variationsmethode. Da eine Variationsungleichung nicht direkt gelöst werden kann, wird sie zu einer Variationsgleichung mit einer Nebenbedingung in Ungleichungsform umgeformt. Die hierzu verwendeten **Lösungstechniken** basieren zumeist auf einem der im Folgenden näher beschriebenen Verfahren:

- direkte Variationsmethoden,
- Lagrange-Multiplikatoren-Methode,
- Penalty-Verfahren,
- Augmented-Lagrange-Verfahren,
- Perturbed-Lagrange-Methode und die Auswertung gemischter Funktionale.

Bemerkenswert dabei ist, dass sich mit der jeweiligen Wahl des aufzustellenden Funktionals die Lösungsverfahren und die Diskretisierung gegenseitig beeinflussen.

Die **direkten Variationsmethoden** wurden von CHAN & TUBA [1971], FRANCAVILLA & ZIENKIEWICZ [1975], FREDRIKSON [1975], WRIGGERS [1981], GUTZEIT [1989] und anderen angewendet. Mit diesen Verfahren wurden auch dynamische Probleme mit Reibung behandelt. Die Lösung geschieht mittels einer inkrementell – iterativen Vorgehensweise. Die zu erfüllenden Kontaktrandbedingungen lassen sich auf der Basis der 'trial-and-error' Strategie über Vorlaufrechnungen bestimmen und anschließend direkt in die Systemgleichungen einarbeiten.

Im Gegensatz dazu werden bei den folgenden Verfahren die Kontaktbedingungen mit der '**active-set-strategie**' eingearbeitet. Dabei wird angenommen, dass sich während eines Iterationsschrittes die Kontaktfläche nicht ändert. Diese Annahme führt innerhalb der Iteration zu einer Nebenbedingung in Gleichungsform. Bei dem zu lösenden Gleichungssystem befinden sich dann Kontaktelemente in der Matrixstruktur, so WRIGGERS [1988].

Ergänzend dazu gibt es die 'mathematische Programmierung' als weiteres Verfahren, welches ebenfalls zu einem 'active-set' führt. Sie wird von KLARBRING [1986], ZHONG & SUN [1988], JOHNSON & QUIGLEY [1989] und CHRISTENSEN, KLARBRING, PANG & STRÖMBERG [1998] vorgeschlagen. Die generellen Vor- und Nachteile beider Techniken im Sinne von Optimierungstheorien sind durch LUENBERGER [1986] und KIKUCHI & ODEN [1988] in allgemeiner Form bekannt.

Mit der **Lagrange-Multiplikatoren-Methode** wird punktweise die exakte Lösung erfüllt. Stärken und Schwächen dieser Methode wurden diskutiert von WRIGGERS & NOUR-OMID [1984] und NOUR-OMID & WRIGGERS [1986]. Elementarer Vorteil dieser Methode ist, dass die exakte Lösung punktweise erfüllt wird. Nachteil dieses Verfahrens ist das sich mit der Anzahl der Kontaktknoten vergrößernde Gleichungssystem. Es sind spezielle Gleichungslöser erforderlich, das Gleichungssystem ist nicht positiv definit und besitzt Nullelemente in den Diagonalen. Bei dynamischen Problemen ist die Erfüllung der lokalen Kontaktbedingung aufwendig. Die Erfüllung des Kontaktes stellt sich in der Praxis als teilweise problematisch heraus. Eine der ersten Umsetzungen gab es von HUGHES, TAYLOR, SACKMAN, CURNIER & KANOKNUKULCHAI [1976]. Die Weiterentwicklung wurde unter anderem mit Varianten von BATHE & CHAUDHARY [1985] mit Schwerpunkt Haften und Reibung vorangetrieben. Eine Darstellung des aktuellen Standes geben BATHE & BOUZINOV [1997]. Es werden außerdem die aktuellen Möglichkeiten mit industrienahen Beispielen, wie der Simulation von Umformprozessen, vorgestellt. Die Schwächen des Verfahrens bei dynamischen Problemstellungen mit kleinen Zeitschrittweiten oder großen Trägheitskräften führten zu folgenden Modifikationsvorschlägen. CARPENTER, TAYLOR & KATONA [1991] kombinierten das explizite Zeitschrittverfahren mit der Lagrange-Multiplikatoren-Methode zu einem Verfahren, das eine ausreichend genaue Lösung und numerische Stabilität garantiert. Zur Vermeidung von Oszillationen modifizieren TAYLOR & PAPADOPOULOS [1993] mit Hilfe einer erweiterten Variationsformulierung das implizite Zeitschrittverfahren. Einen weiteren Vorschlag zur Vermeidung von hochfrequenten Oszillationen macht HU [1997] durch eine einfache Modifikation des impliziten Zeitschrittverfahrens. In Bezug auf die Kontaktkräfte handelt es sich hier um ein gemischtes Verfahren.

Im Gegensatz zur Lagrange-Multiplikatoren-Methode stellt das **Penalty-Verfahren** eine Näherungslösung dar. Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist die Durchführung einer Penaltyregularisierung. Vorteilhaft ist, dass sich durch die Integration der Kontaktbedingungen das Gleichungssystem nicht vergrößert. Außerdem zeigen die praktischen Erfahrungen, dass das Verfahren numerisch einfach zu handhaben ist. Es wird von vielen kommerziellen Rechenprogrammen benutzt. Zu

den ersten numerischen Umsetzungen gehören die von CAMPOS, ODEN & KIKUCHI [1982], MARTINS & ODEN [1983], ODEN & PIRES [1983] und CHENG & KIKUCHI [1985]. Dort wurden bereits die Behandlung von Reibung, die Lösung von dynamischen Problemen und das Auftreten großer Verformungen diskutiert. Explizite Lösungsverfahren zeigten unter anderem HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON [1985].

Bei Reibproblemen bietet das Penalty-Verfahren noch einen weiteren speziellen Vorteil. Dieser besteht in der **Penaltyregularisierung** des Reibgesetzes. Damit wird ermöglicht, die Gleichungen zur Ermittlung der Reibkräfte verformungsgesteuert zu lösen. Von Nachteil dabei ist, dass dies einen starken Einfluss auf das physikalische Ergebnis hat. Durch die Regularisierung wird die Haftkraft zu einer wegabhängigen Tangentialkraft. Bei dynamischen Problemstellungen bilden sich zusätzlich hohe Frequenzen aus. Damit kann es zu Problemen bei der Zeitintegration kommen.

Die **Integration der Reibung** geschieht mit Hilfe der elastoplastischen Betrachtungsweise durch eine Integrationsregel. Der bei diesem Vorgang entstehende 'return-mapping'-Algorithmus wird von WRIGGERS [1987], JU & TAYLOR [1988], GIANNAKOPOULOS [1989], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990], HRYCAJ, CESCOTTO & OUDIN [1991] und LAURSEN & SIMO [1993] verwendet. Als Folge der Nichtassoziiertheit der Gleitregel wird die Steifigkeitsmatrix unsymmetrisch.

Diese zur Fließfläche der Elastoplastizität analoge Gleitfläche bietet auch ausreichende Interpretations- und Entwicklungsmöglichkeiten bei komplexen, von mehreren Parametern abhängigen Reibgesetzen. Die Analogie zur Plastizitätstheorie wurde von MICHALOWSKI & MROZ [1978] dargestellt und erhielt eine weitere Motivation durch eine ausführliche Darstellung dieser Analogie durch CURNIER [1984]. Mit der numerischen Umsetzung von nichtlinearen Reibgesetzen beschäftigten sich auch RODIC & OWEN [1989], ODEN & PIRES [1983], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] und HEEGE, ALART & ONATE [1995]. Das Reibgesetz von Coulomb spielt allerdings als einfachster Fall, da es zum einen linear nur von einem Parameter abhängig ist und zum anderen in der Tangentialebene zu einer Kraftmittelung führt, eine grundlegende und deshalb bedeutende Rolle bei der Modellierung des Reibverhaltens.

Zusätzlich problematisch beim Penalty-Verfahren ist die Konditionierung des Gleichungssystems. Erfolgt beispielsweise durch die Wahl zu hoher Penaltyfaktoren eine schlechte Konditionierung, dann ergeben sich Ungenauigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems. Diese Tatsache ist spezifisch für dieses Verfahren, stellt sich aber zugleich als elementarer Nachteil und nicht zu umgehende Schwäche heraus. Deshalb ist es grundsätzlich wichtig, diese Abhängigkeit möglichst zu vermeiden.

Das **Augmented–Lagrange–Verfahren** verschafft Abhilfe von der Abhängigkeit vom Wert des Penaltyfaktors. Es ist eine Kombination aus Lagrange–Multiplikatoren–Methode und Penalty–Verfahren und verbindet die Vorteile beider Verfahren. Dabei schließt man einen Kompromiss zwischen dem Penalty–Verfahren und der Lagrange–Multiplikatoren–Methode. Bei diesem Vorgehen handelt es sich im Wesentlichen um eine iterative Verbesserung einer Penaltylösung, bis die exakten Multiplikatoren erreicht sind. Ausführliche Diskussionen über das Verfahren als solches erfolgten von BERTSEKAS [1982] und GLOWINSKI & LETALLEC [1989].

Anwendungen mit reibungslosem Kontakt von LANDERS & TAYLOR [1986] und von WRIGGERS, WAGNER & STEIN [1987] sind seit längerer Zeit bekannt. Die zuletzt genannten führten einen Vergleich der Algorithmen im Zusammenhang mit dem Bogenlängenverfahren durch und diskutierten im Wesentlichen die Konvergenzeigenschaften. Weitere Untersuchungen zum Konvergenzverhalten durch Variation des Newton–Verfahrens wurden von ALART & CURNIER [1991] durchgeführt. SIMO & LAURSEN [1992] zeigten detailliert die numerische Umsetzung des Augmented–Lagrange–Verfahrens mit Reibung und demonstrierten die Eignung des Verfahrens an einigen Beispielen. Daran anschließend folgten Darstellungen grundlegender Erkenntnisse über das Master–Slave–Konzept, die Linearisierung und die Symmetrisierung von LAURSEN & SIMO [1993]. Auf diese wird noch im Einzelnen eingegangen. HEEGAARD & CURNIER [1993] beschreiben die Möglichkeiten der Integration der Ungleichungsbedingungen und zeigen den Weg bis zu numerischen Lösungen. Anhand eines sehr einfachen Beispiels zeigen sie die Genauigkeit und das Konvergenzverhalten der Verfahren und stellen die Vorteile des Augmented–Lagrange–Verfahrens heraus.

Im Zusammenhang mit der Forderung nach Präzisionskontakt und nichtlinearen Normalkontaktgesetzen erörtern WRIGGERS & ZAVARISE [1993] das Augmented–Lagrange–Verfahren und geben Hinweise zur praktischen Anwendung. Möglichkeiten der Analyse von thermomechanischen Kontaktproblemen bei der Wärmeübertragung einschließlich der Berücksichtigung von theoretisch begründeten mikromechanischen und –thermischen Kontaktgesetzen diskutieren ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995]. Sie führen Parameterstudien über die Genauigkeit der Einhaltung der Kontaktbedingungen anhand einer einfachen Struktur durch. Weitere Veröffentlichungen zu diesem Verfahren in Verbindung mit Reibung gibt es von HEEGE, ALART & ONATE [1995], CHABRAND & OLIVIER und CUOMO [1998].

Die **Kontaktsuche** wird gemäß der 'active-set-strategie' in jedem Iterationsschritt durchgeführt. Prinzipiell wird dabei im Rahmen des Knoten-Segment-Kontaktes jeder Knoten einer Seite auf Kontakt oder Penetration mit den Segmenten der gegenüberliegenden Oberfläche geprüft. Bei großen Systemen, dynamischen Vorgängen mit großen Relativbewegungen, Mehrkörperkontakt oder bei möglichem Selbstkontakt eines Körpers – Beulen – wird diese Kontaktsuche aufwendig und ineffizient. Zur Optimierung der Kontaktsuche gibt es Vorschläge von ZHONG & NILSSON [1989], BENSON & HALLQUIST [1990], ZHONG [1993] und WILLIAMS & O'CONNOR [1995]. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Konzentration der Suche von Körpern oder Körperteilen, die lediglich innerhalb des nächsten Zeitschrittes in Kontakt treten können. Außerdem wird bei der lokalen Kontaktsuche zwischen Selbstkontakt und globaler Kontaktsuche unterschieden. Für Kontakt zwischen elastischen und starren Körpern haben HALLQUIST, SCHWEIZERHOF & STILLMANN [1992] die Kontaktsuche für bestimmte geometrische Formen optimiert. Zur Problematik der Eindeutigkeit der Segmentzuordnung bei extrem konkaven oder konvexen Oberflächen treffen SIMO & LAURSEN [1992] und HEEGAARD & CURNIER [1993] Aussagen. Kommerzielle Programme, wie LS-DYNA, spielen im Bereich der Kontaktsuche eine hervorzuhebende Rolle.

Alle diese Verfahren führen im Rahmen der **räumlichen Diskretisierung** zu Knoten-Segment-Kontakt-Lösungen.

Im Zuge der **zeitlichen Diskretisierung** wird unterschieden, ob die globalen Gleichungen bei Kontaktp Problemen explizit oder implizit gelöst werden.

**Explizite** Lösungen finden ihre Anwendung bei Problemen, bei denen hohe Frequenzen und kurze Zeiträume eine Rolle spielen, wie z. B. bei Stoßproblemen. Wesentliche Arbeiten hierzu liegen von HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON [1985], BELYTSCHKO & NEAL [1991] vor. Ein weiteres robustes, explizites Verfahren schlagen DESONG & TAMMA [1996] vor. Weitere Entwicklungen zur Lösung von Kontaktproblemen gibt es von ETEROVIC & BATHE [1991] und CARPENTER, TAYLOR & KATONA [1991]. Sie schlagen vor, zumindest die Ungleichungsbedingungen einen Zeitschritt später einzuführen.

Dynamische Probleme im tiefen Frequenzbereich werden in der Regel **implizit** gelöst. Die Lösungen sind unbedingt stabil, und größere Zeitschrittweiten sind möglich. Sie wurden z. B. bei Erdbebenberechnungen angewendet. Allerdings wird bei impliziten Lösungsverfahren neben dem Residuum auch die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix verlangt. Das heißt, dass neben dem Prinzip der virtuellen Arbeit auch die dazu

gehörende Linearisierung benötigt wird. Damit wird bei **impliziten** Verfahren eine **Linearisierung** der nichtlinearen Gleichungen erforderlich. Um das nichtlineare Gleichungssystem inkrementell mit dem Newtonverfahren lösen zu können, ist eine möglichst konsistente Linearisierung notwendig.

Die Behandlung von großen Verformungen und inelastischem Werkstoffverhalten führten zur Weiterentwicklung der Lösungsmöglichkeiten. Zur genauen Linearisierung von reibungsfreien Kontaktproblemen wird auf die Arbeiten von WRIGGERS & SIMO [1985] und PARISH [1989] verwiesen. Verschiedene Vorschläge zur Linearisierung von Kontaktproblemen mit Reibung stammen von BATHE & CHAUDRARY [1985], CHENG & KIKUCHI [1985], JU & TAYLOR [1988], REBELO [1988], BATHE & MIJAILOVICH [1988], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] und REBELO, NAGTEGAAL & HIBBITT [1990]. Diese Linearisierungen wurden aber am diskretisierten Kontinuum durchgeführt, sodass die Herleitungen nicht allgemeingültig sind. Durch die im Rahmen der einzelnen Ansätze getroffenen Vereinfachungen war die Linearisierung mit Reibung in Hinblick auf große Verformungen nicht vollständig.

Erstmals wurde von LAURSEN & SIMO [1993] das Kontaktproblem mit Reibung im Rahmen dieses Master–Slave–Konzeptes konsistent am nichtdiskretisierten Kontinuum linearisiert. Wesentlich für diese konsistente Linearisierung war unter anderem die Nutzung des ursprünglich von HALLQUIST [1979] eingeführten Master–Slave–Konzeptes. Dieses wurde von WRIGGERS & MIEHE [1994] und LAURSEN & SIMO [1993] genutzt, um mit Hilfe der Minimalabstandsfunktion für sich in Kontakt befindende Materialpunkte die notwendigen Bedingungen aufzustellen.

Das Auftreten von Reibung führt zum **Verlust von Potenzialeigenschaften**. Durch den Einsatz des 'return mapping' Algorithmus und der damit verbundenen Nichtassoziiertheit kommt es zur **Unsymmetrie** des zu lösenden Gleichungssystems. Bedenkt man die Tatsache, dass die numerische Kontinuumsmechanik von symmetrischen Gleichungssystemen beherrscht wird, ist die effektive Symmetrisierung der Coulomb'schen Reibung eine entscheidende Voraussetzung für die Steigerung der Effizienz vieler Anwendungen. Eine Möglichkeit zur Symmetrisierung bietet sich durch Verwendung von Zweischritt– statt Einschnitt–Algorithmen beim Penalty–Verfahren an.

Eine weitere Variante der algorithmischen **Symmetrisierung** des ansonsten unsymmetrischen Coulomb'schen Reibtangentenvektors zeigen SIMO & LAURSEN [1992] im Zusammenhang mit dem Augmented–Lagrange–Verfahren. Sie wurde ebenfalls erfolgreich von ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] angewendet.

Als weitere Lösungstechniken bieten sich die **Perturbed–Lagrange–Methode** und **gemischte Funktionale** an. Bei der **Perturbed–Lagrange–Methode** entsteht durch Addition eines Störungsterms zum Funktional bei der Variation eine zweite Gleichung, die als zusätzliche Bedingung erfüllt werden muss. Sie führt infolge der Kompatibilitätsbedingung zu gemischten Ansätzen und nach der Diskretisierung zum oben erwähnten Segment–Segment–Kontakt. Bei der Diskretisierung mit einem bilinearen Verschiebungsansatz, so SIMO, WRIGGERS & TAYLOR [1985] und SHYU, CHANG & SALEEB [1989], kann der Verlauf der Kontaktkraft entlang der Kontaktfläche nur diskontinuierlich erfüllt werden und ist somit segmentweise konstant.

Analog führen Lösungen auf der Basis von **gemischten Funktionalen** ebenfalls auf zusätzlich zu erfüllende Gleichungen. Im Zuge der räumlichen Diskretisierung führt diese Methode auch zu Segment–Segment–Kontakt. Zur numerischen Umsetzung von gemischten Ansätzen gibt es einige Veröffentlichungen. Ein Übergang zu gemischten Methoden wird von GALLEGO & ANZA [1989] mit Hilfe der Perturbed–Lagrange–Methode durchgeführt. Dabei führen verschiedene Interpolationsfunktionen bei den Spannungs– und Verschiebungsansätzen zu unterschiedlichen Kontaktmatrizen. Eine weitere Möglichkeit zur Umsetzung erfolgte von PAPADOPOULOS & TAYLOR [1992]. Von ihnen wird ein Vorschlag zur Kontaktsuche und zur Ermittlung von Kontaktsegmenten bei Elementen mit quadratischen Ansätzen gemacht. Als Ausgangspunkt dient dabei ein Dreifeldfunktional. Die Herleitung von gemischten Kontaktelementen auf der Basis von gemischten Funktionalen zeigen CESCOTTO & CHARLIER [1993]. Sie stellen verschiedene Mehrfeldfunktionale auf und führen die Variationen durch. Anschließend geben sie Beispiele für die unabhängigen Diskretisierungsmöglichkeiten von Verschiebungs– und Kontaktspannungsfeldern bei Zweifeldfunktionalen an und variieren den Grad der Ansätze. Mit reibungsfreien Kontaktproblemen auf der Basis von erweiterten Funktionalen beschäftigten sich QIN & HE [1995]. Es werden Ein–, Zwei– und Dreifeldfunktionale diskutiert und eine neue Methode der Kontaktsuche über Flächenbestimmung vorgestellt. Anschließend wird auf Basis eines Zweifeldfunktionales eine numerische Lösung realisiert.

Allen genannten Veröffentlichungen gemeinsam ist, dass die Beispiele einfach und oft nicht sehr praxisnah sind.

Bis vor kurzer Zeit standen meistens algorithmische Aspekte als vorrangiger Entwicklungsschritt im Vordergrund, da sie natürlich grundlegend für eine Realisierung sind. Doch eine Vielzahl der **neuen Entwicklungen** befasst sich mit **speziellen Anwendungen**, die einen Bezug zur Praxis haben. So beschäftigten sich LEBON & RAOUS [1992] mit Mehrkörperkontakt mit Reibung und experimenteller Verifikation, PANAGOULI & PANAGIOTOPOULOS [1992] koppeln die Finite- mit der Boundary-Element-Methode zur Einbindung von fraktalen Berandungen. Spezielle Diskussionen zur Behandlung von Ecken und Kanten bei Metallumformungen führten HUANG & LEU [1995]. Über die numerische Umsetzung der Umwandlung von Reibarbeit in Wärme berichteten WRIGGERS & MIEHE [1994]. Den Verlauf des Wärmeflusses über eine Kontaktfläche von einem Körper zum anderen zeigten WRIGGERS & ZAVARISE [1993]. Das Verhalten von viskoplastischen Materialien bei Umformungsprozessen analysieren DAWSON, BOYCE, EGGERT & BEAUDOIN [1995]. DIMOVA [1996] vergleicht Techniken zur Reibkraftdarstellung mit experimentellen Verifikationen. Mit Formoptimierung der kontaktierenden Oberfläche beschäftigte sich MYSLINSKI [1997]. MEYER, PLESHA & COOPER [1992] koppeln effizient Kontaktalgorithmen mit Algorithmen zur Behandlung von Viskoelastizität und REFAAT & MEQUID [1996] führen neue Lösungsvarianten mit Hilfe von Mehrschritt-Algorithmen ein. Verbesserungen durch virtuelle Kontaktkräfte erreichen AYARI & SAOUMA [1991].

### 1.3 Eigene Vorgehensweise, Zielsetzung

Im Rahmen dieser Arbeit sollen praxisnahe dynamische Probleme des 'high precision'-Bereiches untersucht werden. Dabei sollen mögliche Einflüsse der Algorithmen auf das Ergebnis geklärt werden. Diese Einflüsse können zusätzliche Folgen auf die Eingangsgroßen zur Ermittlung der Reibspannungen haben.

Hierzu scheinen zunächst die Perturbed-Lagrange-Multiplikatoren-Methode oder die Auswertung von auf gemischten Funktionalen basierenden Verfahren am vorteilhaftesten zu sein, da sie zum Segment-Segment-Kontakt führen, bei dem die Abbildung der Oberfläche am realistischsten ist. Das Ziel ist die Abbildbarkeit von gekrümmten, knickfreien Oberflächen. Damit können Kontaktzonen ohne Knicke bei den Knoten beschrieben werden. Die ersten realisierten Umsetzungen im Schrifttum beschäftigen sich mit den Grundlagen des Algorithmus, sind aber noch weit von praktischer Nutzbarkeit entfernt und befinden sich noch in der Diskussion. Zur allgemeinen Problematik bei gemischten Problemen gehört unter anderem die Ausgewogenheit der Ansätze und die Erfüllung der LBB-Bedingung. Komplikationen sind insbesondere bei großen Relativbewegungen zu erwarten, da sich die Definition der Ränder ständig ändert, so dass die Kontaktsuche numerisch extrem aufwendig ist. Aufgrund der höheren Ansatzfunktionen muss auch zwischen den Knoten eine Kontaktsuche erfolgen. Eine konsistente Linearisierung der virtuellen Kontaktarbeit muss unter Umständen nach einem anderen als dem Master-Slave-Konzept durchgeführt werden. Damit verknüpft sind Fragen in Bezug auf die Linearisierung und dem Konvergenzverhalten. Ungeklärt ist die Lösung für eine effiziente Kontaktsuche. Aufgrund der beschriebenen Zusammenhänge führt die Anwendung des Segment-Segment-Kontaktes bei komplexen praxisnahen Aufgabenstellungen zu einer Vielzahl von Problemen und einem hohen numerischen Aufwand.

Mit dem Ziel, praxisnahe Beispiele zu untersuchen, bietet sich als alternatives Lösungskonzept **Knoten-Segment-Kontakt** an. Das **Augmented-Lagrange-Verfahren** vereint hierfür die Vorteile des Penalty-Verfahrens und eliminiert die Nachteile der Lagrange-Multiplikatoren-Methode. Die Verwendung von Vierknoten-Elementen mit bilinearen Ansätzen, die für Knoten-Segment-Kontakt unabdingbar ist, hat sich im Allgemeinen als robust herausgestellt.

Einen weiteren Einfluss auf die Entscheidung über die Vorgehensweise hat die Frage, ob die gewünschte Genauigkeit im 'high precision'-Bereich unter Verwendung von **adaptiver Netzverfeinerung** erreichbar ist; denn auf diesem Gebiet wurden speziell bei Kontaktproblemen im Rahmen von Knoten-Segment-Kontakt in Zu-

sammenhang mit bilinearen Elementen Weiterentwicklungen vorangetrieben. Adaptive Verfahren zur Lösung von Kontaktproblemen wurden von SCHERF [1997] mit theoretischem Schwerpunkt und von NACKENHORST [1995] anhand von praktischen Beispielen gezeigt. Hierbei besteht die Möglichkeit, nahezu automatisch bei entsprechend auftretenden großen Verformungen das Netz lokal zu verfeinern, um damit effizient die Genauigkeit zu erhöhen.

Bei der bisherigen Anwendung des Knoten–Segment–Kontaktes hat sich gezeigt, dass noch einige Fragen offen sind, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden sollen:

- Die von SIMO & LAURSEN [1993] durchgeführte **Linearisierung** im Kontinuum nach dem Master–Slave–Konzept, unabhängig von der Diskretisierung ist erneut, so SCHERF [1997], in der Diskussion.
- Da die im Zusammenhang mit diesem Verfahren entstehenden Möglichkeiten der **Symmetrisierung** in Bezug auf Effektivität bei impliziten Zeitschrittverfahren und dynamischen Problemstellungen vorteilhaft sein könnten, werden hierzu Untersuchungen angestellt.
- In Verbindung mit **dynamischen Anwendungen** wurden die Vorteile des **Augmented–Lagrange–Verfahrens** noch nicht im Detail gezeigt oder diskutiert, obwohl besonders hier die genannten Vorteile zum Tragen kommen können.
- **Lokale Untersuchungen** auf der Kontaktfläche und **Lösbarkeit praktischer Problemstellungen** sind hierbei ein wesentliches Anliegen.
- Abschließend sollen die **Möglichkeiten und Grenzen der Validierung eigener experimenteller Untersuchungen** durch die numerischen Werkzeuge analysiert werden.

Aus den beschriebenen Problemkreisen ergibt sich die folgende **Vorgehensweise**.

Grundlegend für die realistische Analyse von Kontaktproblemen mit Reibung sind Kenntnisse über die physikalischen Prozesse innerhalb des Kontaktbereiches. Deshalb wird im folgenden Kapitel ein kurzgefasster Überblick über den Kenntnisstand der Tribologie als Wissenschaft der Reibung gegeben. Ziel dabei ist es, ein tiefergehendes Verständnis für das reale Verhalten auf den Kontaktflächen zu vermitteln und die Grundlagen für die numerische Umsetzung bereitzustellen. Die dort dargestellten, teilweise experimentell verifizierten Reibgesetze lassen die Komplexität der Zusammenhänge erkennen. Außerdem wird verdeutlicht, dass das häufig eingesetzte Reibgesetz von Coulomb insbesondere für komplexe Analysen nur eine erste Näherung für die tatsächlichen Verhältnisse sein kann und deshalb erweitert werden muss.

Zunächst werden die numerischen Grundlagen bereitgestellt. Dazu gehört auch die Einführung der notwendigen Definitionen zur Handhabung der Kontaktbedingungen. Sie bilden die Grundlagen des Master–Slave–Konzeptes. Danach wird das Prinzip der virtuellen Kontaktarbeit aufgestellt und die dazugehörige Linearisierung durchgeführt. Anschließend erfolgt die räumliche und zeitliche Diskretisierung, die zum Knoten–Segment–Kontakt führt. Die Erweiterung zum Augmented–Lagrange–Verfahren wird darauf folgend dargestellt. Im Anschluss daran können die sich im Rahmen dieses Verfahrens anbietenden Möglichkeiten zur Symmetrisierung des Algorithmus gezeigt werden.

Für die anstehenden lokalen Betrachtungen an der Oberfläche werden Möglichkeiten zur Ermittlung und Darstellung von Kontaktspannungen und reibspezifischen Knotenzuständen erörtert. Anschließend werden ausgewählte, für die Praxis relevante Fragestellungen untersucht. Der Schwerpunkt dieser Untersuchungen bezieht sich auf die möglichst realitätsnahe Abbildung der verformten Strukturen im Kontaktbereich, der Spannungsänderungen, der reibspezifischen Phänomene wie Haft–Gleitübergänge und Gleitzustände sowie auf das Erzielen von möglichst exakten Eingangsgrößen für Reibgesetze.

Bei dynamischen Problemstellungen wird die Komplexität durch zusätzliche physikalische Effekte wie Massenkräfte, Eigenschwingungen sowie Wellengeschwindigkeiten und numerische Besonderheiten wie Zeitintegrationsverfahren und Dämpfung erhöht.

Abschließend wird die Eignung des Augmented–Lagrange–Verfahrens für diese Fragestellungen erörtert.

# Kapitel 2

## Zum Reibverhalten fester Körper

### 2.1 Motivation

Für eine möglichst wirklichkeitsnahe Simulation von Kontaktproblemen mit Reibung sollten neben einer genauen Numerik auch die Reibgesetze realistisch sein.

Als bekanntestes Reibgesetz gilt der lineare Ansatz  $R = \mu N$ , der nach Coulomb benannt ist. Nach aktuellem Wissen um stoffgesetzliche Beziehungen oder der Tribologie gilt dieser einfache Ansatz, gleichwohl er als globale Beziehung und lineare Näherung zu sehr guten Ergebnissen führt, lokal nicht.

Diese Tatsache führt zur **Betrachtung von realen, sich in Kontakt befindenden Oberflächen**. Abbildung 2.1 zeigt zwei sich in Kontakt befindende Körper. Aufgrund der Oberflächenrauheit berühren sich nur einige Erhebungen. Bei einer tangentialen Relativbewegung entwickelt sich an diesen Erhebungen eine Widerstandskraft. Während dieses Vorganges entwickeln sich dort unterschiedliche energiedissipierende Prozesse. Durch Verformungen und Zerstörung verändern sich die

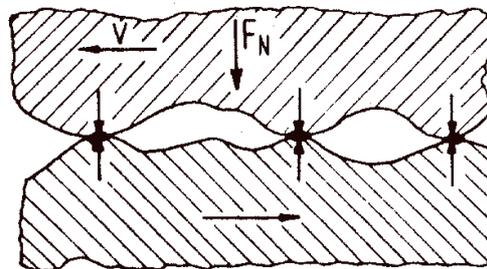


Abbildung 2.1: Trockene Festkörperreibung von realen Körpern.

Oberflächengeometrie und die mechanischen Eigenschaften der Oberflächenschichten sowie des Überganges zum Grundmaterial.

## 2.2 Interaktion realer Oberflächen – Mechanische Prozesse

### 2.2.1 Oberflächen

**Reale Oberflächen sind, in welcher Art auch immer, rauh.** Die Oberflächenbeschaffenheit hat einen wesentlichen Einfluss auf das Reibverhalten. In Abbildung 2.2 (a) wird die Topologie einer realen Oberfläche gezeigt. Verschiedene Größenordnungen der Betrachtungsweisen führen hier immer wieder zu einer Rauigkeit mit einer gewissen Selbstähnlichkeit. Da der Kontakt nicht mit der gesamten Kontaktfläche, sondern nur mit einzelnen Erhebungen stattfindet, muss bei analytischen Betrachtungen, siehe Abbildung 2.2 (b), zwischen nominaler (' $A_a$ ') und realer Kontaktfläche (' $A_r$ ') unterschieden werden. Dabei kann eine Erfassung von realen abgegriffenen Topologien, zur Ermittlung von Traglastanteilen, wie in Abbildung 2.2 (c) ersichtlich, mit mathematischen Hilfsmitteln durchgeführt oder durch entsprechende Modellbildungen ermöglicht werden. Je nach betrachteter Größenordnung kann der Kontakt mit halbkugelförmigen Modellen gebildet werden, wie in Abbildung 2.2 (d) gezeigt wird. Neben der vorhandenen Rauigkeit ist mit Verschmutzung zu rechnen. Durch Stoffumwandlungen können die Materialeigenschaften auf der Oberfläche anderes Verhalten aufweisen als das darunter liegende Material. Bei metallischen Oberflächen bilden sich beispielsweise Oxidationsschichten, siehe Abbildung 2.2 (e).

Zur Erfassung von Oberflächen kann folgende Literatur dienen:

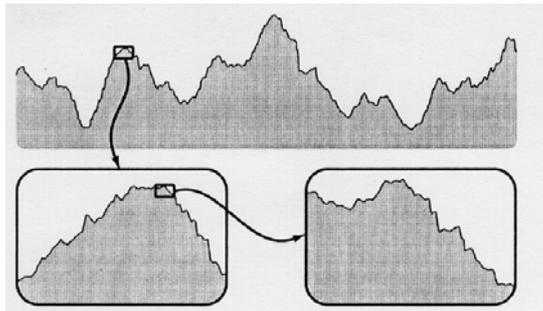
BOWDEN & TABOR [1950] und [1964], GREENWOOD & WILLIAMSON [1966], JONES, HOWELLS & PROBERT [1968], WHITEHOUSE & ARCHARD [1970], ARCHARD [1974], WOO THOMAS [1980] und KRAGELSKI, DOBYCHIN & KOMBALOV [1982].

### 2.2.2 Kontakt

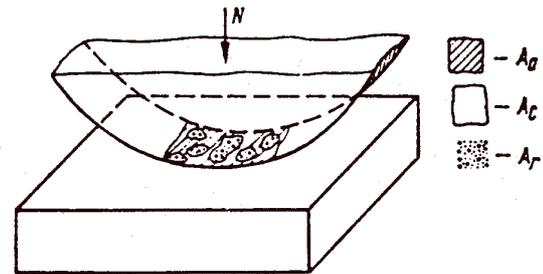
Die in **Kontakt tretenden Oberflächen** von Werkstoffen können in ihren Oberflächenbeschaffenheiten, Steifigkeiten und Materialien sehr verschieden sein. Zu den kennzeichnenden Eigenschaften gehören Verformbarkeit, Duktilität und Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit zu metallischen Werkstoffen. Aufgrund der Rauigkeit und Welligkeit von Oberflächen ist der Druck auf der realen Kontaktfläche um ein Vielfaches höher als auf der nominalen Kontaktfläche. Im Falle von **Kontakt** kommt es auch ohne Tangentialbewegung möglicherweise zu

- Wärmeübertragung,
- Deformation und Mikroverschiebungen, sowie
- Adhäsion.

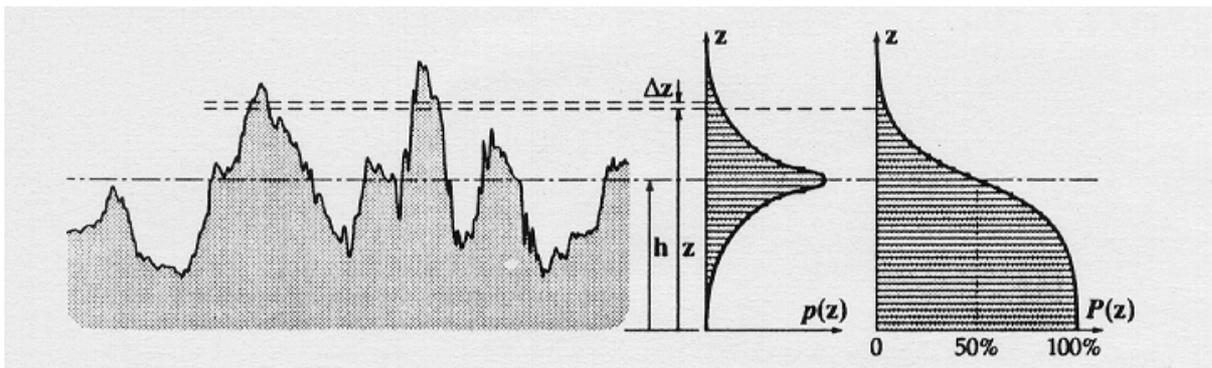
Möglichkeiten zur Beschreibung dieser physikalischen Phänomene in Normalenrichtung wurden unter anderem von HERTZ und MEYER im 19. Jahrhundert, COURTNEY-PRATT & EISNER [1957], BACK, BURDEKIN & COWLEY [1973], TABOR [1981], ODEN & MARTINS [1985], SONG & YOVANOVICH [1987] und MISRA [1997] angegeben.



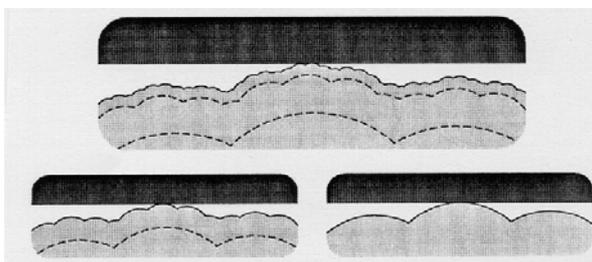
(a) Topologie einer realen Oberfläche



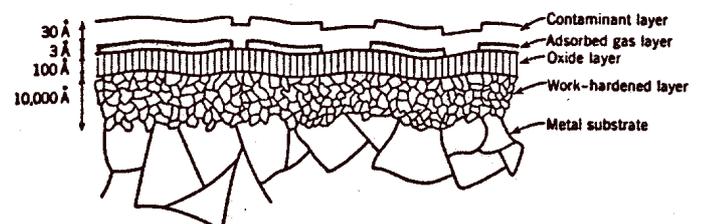
(b) Nominale und reale Kontaktflächen



(c) Bestimmung von Traganteilfunktionen



(d) Möglichkeiten zur Modellbildung



(e) Reale metallische Oberfläche

Abbildung 2.2: Zur Ermittlung realer Oberflächen, entnommen aus der Literatur.

### 2.2.3 Reibung

Reibung steht als **Oberbegriff für diverse energiedissipierende Prozesse**, aktiviert durch Anpressdruck und Tangentialbewegung auf der Oberfläche. Beim Reibungsprozess kommt es im Allgemeinen zu Energieumwandlung in

- Materialzerstörung oder Plastizität,
- Wärmeentwicklung,
- Chemische Reaktionen und Stoffumwandlungen.

Im Einzelnen hängt dieser Vorgang ab von der Werkstoffpaarung, den äußeren Bedingungen und den daraus resultierenden tatsächlichen Aktionen auf der Oberfläche.

Der Widerstand bei tangentialer Bewegung entsteht durch die Aktivierung von wesentlichen Mechanismen auf der Oberfläche, wie

- Adhäsion,
- Elastoplastische Deformation,
- Abrasion – Furchenbildung.

Durch diese Reibungs- und Verschleißmechanismen, so ZUM GAHR [1992] und andere, kommt es zu

- Bildung und Trennung adhäsiver Verbindungen, siehe Abbildung 2.3 (a),
- Abrasion und Mikrofurchung, auch durch während des Prozesses sich bildende 'dritte Körper', siehe Abbildung 2.3 (b),
- Bildung von Zwischenschichten aus Adhäsion und Materialabtrag, siehe Abbildung 2.3 (c),
- Bildung und Ablösung tribochemischer Reaktionsschichten, siehe Abbildung 2.3 (d),
- Schuppen- und Rissbildung sowie Delamination durch akkumulierte plastische Verformung, siehe Abbildung 2.3 (e),
- Oberflächenzerrüttung und Werkstoffermüdung, siehe Abbildung 2.3 (f).

Je nach Werkstoffpaarung treten beim Reibvorgang einzelne Mechanismen in den Vordergrund und verbrauchen entsprechend Energie. Jeder dieser Mechanismen erzeugt bei tangentialer Bewegung eine Widerstandskraft. Mit genauen Kenntnissen über diese Vorgänge lässt sich das Reibverhalten ermitteln.

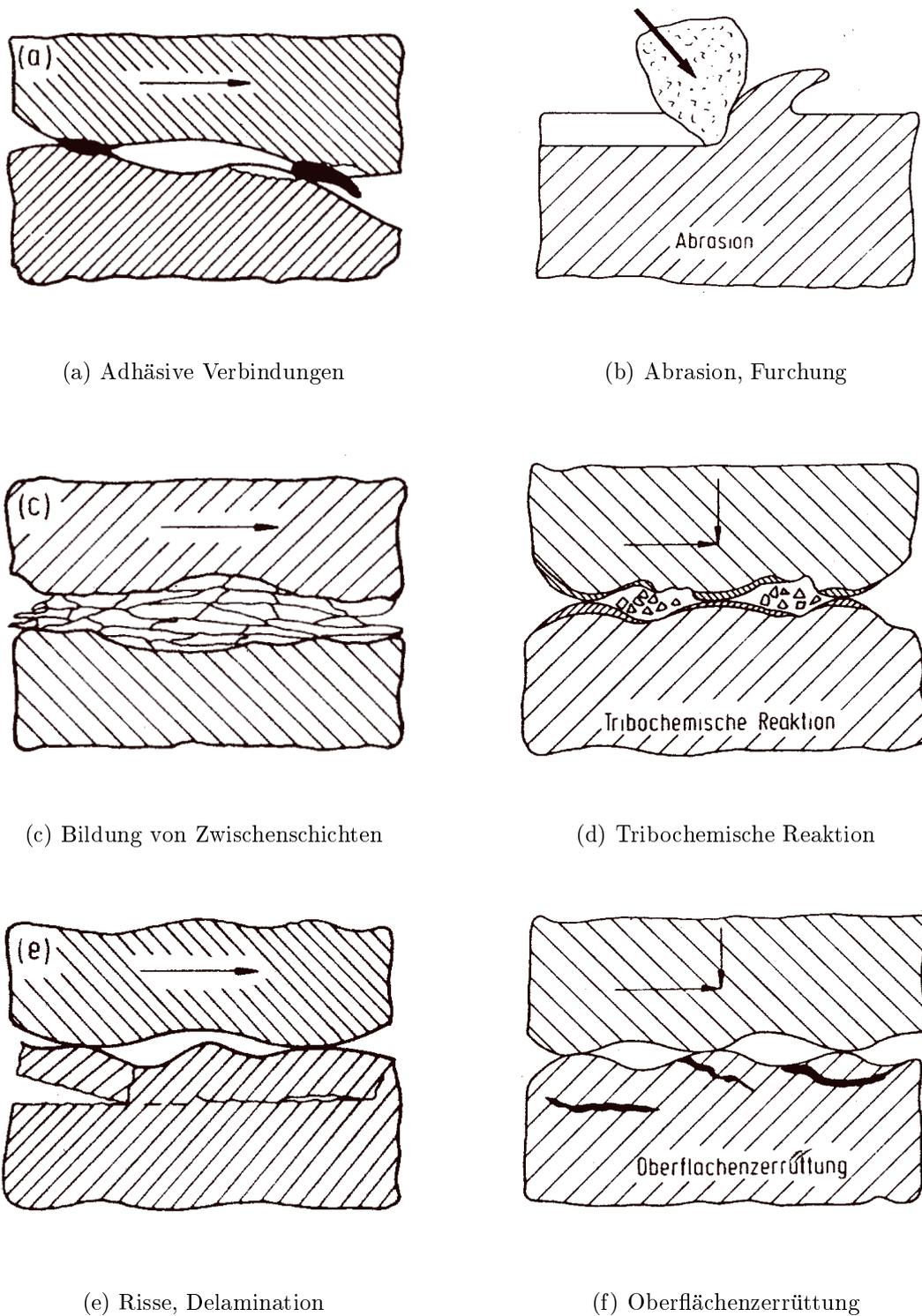


Abbildung 2.3: Auftretende Mechanismen bei Reibung, so ZUM GAHR [1992].

## 2.3 Entwicklung der Reibungstheorien

Die ersten detaillierten Studien zum Reibverhalten haben im 15. Jahrhundert begonnen. Damals hat LEONARDO DA VINCI experimentell verifiziert, dass die **Reibkraft proportional zur aufgebrachten Normalkraft und unabhängig von der Größe der Kontaktfläche ist**. AMONTON hat 1699 diese beiden Gesetzmäßigkeiten wieder entdeckt, weshalb auch sein Name oft mit diesen Aussagen verbunden ist. COULOMB hat im Jahre 1781 eine Unterscheidung zwischen zwei Arten der Reibung vorgenommen: **'statische' Reibung**, welche aus der Kraft resultiert, die benötigt wird, um das Gleiten anzuregen, und **'kinetische' Reibung**, die aus der Kraft resultiert, die benötigt wird, um das Gleiten zu erhalten. Er hat außerdem beobachtet, dass die kinetische Reibung nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Coulomb hat die Idee, dass Reibung der molekularen Adhäsion zugeordnet werden könne, zugunsten einer Verzahnung der Mikroerhebungen mit einer Reibkraft, die aus der Arbeit resultiert, die aufgebrachte Last über diese Rauigkeiten zu heben, verworfen.

Im 18. und 19. Jahrhundert haben sich viele Ansätze, die versuchen, das Reibverhalten zu erklären, auf **Oberflächenrauigkeit** und **Verzahnung der Mikroerhebungen** bezogen. Dabei hat man lediglich über die Form dieser Mikroerhebungen diskutiert. Davon haben BOWDEN & TABOR [1958] und [1964], BARTZ [1988] und DOWSON [1979] berichtet. Auch heute wird Reibung noch als Folge von Oberflächenrauheit und Verzahnung der Mikroerhebungen verstanden.

Ein weiterer wesentlicher Ansatz bezieht die Rolle der **Adhäsion** und der direkten **interatomaren Kräfte** mit ein. Dieser beinhaltet die Adhäsion der Mikroerhebungen, das Auftreten und Anwachsen der Verbindungen sowie das Abscheren an denselben. BOWDEN & TABOR [1958] und [1964] haben damit zwei Haupteinflüsse zur Gleitreibung vorgeschlagen, einen **Adhäsionsterm** und einen **Furchungsterm**, wobei beide Terme plastische Deformationen enthalten. Demnach besteht die Reibkraft aus zwei Komponenten, eine Komponente verlangt das Abscheren von Verbindungen der Kontaktpunkte zweier in Verbindung stehender Oberflächen. Die zweite Komponente zieht Furchen mit den harten Mikroerhebungen oder Verschleißpartikeln über die weichere Oberfläche. Diese Ansätze werden benutzt, um materialspezifische Reibbeiwerte zu bestimmen und um spezifische Abhängigkeiten zu zeigen. Adhäsionstheorien haben sich in bestimmter Weise auf die Deformation der Mikroerhebungen und die sich dadurch formierenden Verbindungen konzentriert. Hierzu gibt es Veröffentlichungen von MCFARLANE & TABOR [1950], RABINOWICZ [1964] und BIKERMANN [1975]. Die Idee, die Adhäsion als alleinige Ursache von Reibung zu betrachten, ist

allerdings von HOLMBERG [1984] kritisiert worden, da der Rauigkeitseffekt nicht genügend berücksichtigt wird. RABINOWICZ [1965] hat eine Beschreibung mit Hilfe einer **Oberflächenenergie** vorgeschlagen, wobei die Adhäsion, die Rauigkeit der Oberfläche und der Radius der Verbindungen berücksichtigt werden können.

KRAGELSKI, DOBCIN & KOMBALOV [1983] haben den gesamten Wissensstand zusammengefasst. Aus diesem Stand entwickelte KRAGELSKI die '**molekular-mechanical theory**'. Der Begriff 'molekular' steht wegen der russischen Terminologie für die Adhäsionskomponente und das Wort 'mechanical' steht für die Deformation. Die Grundzüge dieser Theorien stimmen mit denen von BOWDEN & TABOR [1958] und [1964] überein. Im Wesentlichen werden die folgenden Aspekte diskutiert: **Geometrische Theorien** zum Überwinden von Mikroerhebungen, **Molekulare Theorien** zum Überwinden der molekularen Wechselwirkungskräfte und **Deformationstheorien** zur erforderlichen Arbeit der Deformation von Erhebungen sich berührender Festkörper.

Einige Vorschläge, so unter anderen der von RIGNEY & HIRTH [1979], haben sich mehr auf den Effekt der **plastischen Deformation** bei Reibung beschränkt. Der Einfluss der Deformationen ist von GREEN [1954] erörtert und von EDWARDS & HALLING [1968] ausgebaut worden. Sie zeigen den Bewegungswiderstand der Arbeit, der benötigt wird, um Mikroerhebungen plastisch zu verformen, wenn diese übereinander gleiten. Versuche zur analytischen Bestimmung des Reibbeiwertes haben AVITZUR & NAKAMURA [1986] durchgeführt. CHALLEN & OXLEY [1979] haben Reibverhalten und Verschleiß bei Einzelerhebungen untersucht. Im Zusammenhang mit hohen Drücken bei Metallen sind hierzu Untersuchungen von WANNHEIM [1973] und WANNHEIM, BAY & PETERSEN [1974] erfolgt.

SUH & SIN [1980] haben ein neues Konzept präsentiert, bei dem sie den Einfluss der Geschichte der Gleitkraft berücksichtigen. Dabei wird behauptet, dass der Einfluss der Adhäsion eher gering sei. Auf der Basis von Experimenten haben sie für verschiedene Materialien typische Werte für drei Komponenten bestimmt, die sie in ihrem Reibungskonzept für wesentlich halten. Diese **Komponenten** haben Anteile, die zur **Deformation** der Mikroerhebungen, die zur **Zerfurchung** von harten Erhebungen und Verschleißpartikeln und zur **Adhäsion** gehören. Bei der Addition zu einem gesamten Reibkoeffizienten ist der Anteil der Materialzerfurchung und der Deformation der Mikroerhebung größer als der Anteil der Adhäsion.

POLZER & MEISSNER [1978] haben ausführlich die benötigten Grundlagen aufbereitet, geben eine Zusammenfassung und erörtern die Theorie von KRAGELSKI.

Sie zeigen **Methoden zur Abschätzung von Reibwerten** nach dieser Theorie und diskutieren verschiedene Verfahren zur Verschleißabschätzung, unter anderem mit Nomogrammen. Innerhalb dieser Theorie werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Äußere Reibung erfolgt ausschließlich über diskreten Kontakt der infolge der Oberflächenrauheit angenommenen geometrischen Modelle, wie die Hertz'sche Halbkugel und daraus hergeleiteten dimensionslosen Rauigkeitskenngrößen. Damit ist eine Unterscheidung von nominaler und realer Kontaktfläche möglich.
- In den einzelnen Kontaktstellen werden laufend Adhäsionsbrücken gebildet. Sie bestimmen die Ausbildung von Reaktions- und Haftschichten sogenannter 'dritter Körper'. Diese Schichten haben in der Regel andere mechanische Eigenschaften als die Grundwerkstoffe.
- Für das Entstehen von Abrieb, Verschleiß und einer Reibkraft werden einheitliche physikalische Grundmechanismen angenommen.
- Innerhalb der Theorie werden stationäre Verhältnisse angenommen, eine lineare Kraftverteilung vorausgesetzt und chemische Kenngrößen nur qualitativ einbezogen.
- Die Grundgleichung der Theorie besteht aus zwei zu summierenden Beiwerten, von denen einer für Adhäsion, der andere für Deformation steht. Aufgrund der Voraussetzungen und Einschränkungen können diese Reibbeiwerte superponiert werden.

Der wesentliche Vorteil dieser Theorie ist, dass aus einer Grundgleichung spezielle Berechnungsgleichungen hergeleitet werden können und eine Erweiterung gemäß dem Stand der Erkenntnisse möglich ist. Der wesentliche Nachteil ist, dass viele empirische, nur für einen konkreten Fall begrenzt gültige Konstanten eingehen. Die innerhalb der erörterten Theorie angegebenen Kriterien zu Reibbeiwertabschätzungen sind unbefriedigend, da die zu bestimmenden Eingangsgrößen sehr schwierig zu ermitteln sind.

TABOR [1981] hat sich bei der Beschreibung des **Wissensstandes der trockenen Reibung auf drei Grundelemente** bezogen:

- Wesentlich ist die Größe der realen Kontaktfläche zwischen den Gleitflächen. Es gibt mehrere gute theoretische Berechnungsmodelle für statischen Kontakt, die auf einer genauen topologischen Analyse basieren. Diese Modelle sind aber wenig zufriedenstellend in Bezug auf die Beschreibung des Anwachsens von Verbindungen und auf die entstehende Arbeitsverfestigung beim Gleitvorgang. Der Hauptnachteil ist, dass es keine experimentelle Möglichkeit gibt, die tatsächliche Gleitfläche während des Gleitvorganges zu bestimmen.
- Der Typ des Kontaktes, der innerhalb des Kontaktbereiches geformt wird, muss genannt werden können. Es gibt keine guten Modelle für Kontakt zwischen Oxiden untereinander sowie zwischen Oxiden und Metallen und keine Möglichkeit, die

mechanischen Eigenschaften von Oxidfilmen direkt zu messen.

- Als Letztes hat TABOR die Art und Weise genannt, wie das Material während des Gleitens in und um die Kontaktregion geschert und geschädigt wird. Bei Metallen gibt es einige Lösungen bei Kontakt einer Mikroerhebung, die elastoplastische Deformation, Adhäsion und Furchenbildung kombinieren. Diese Lösungen beinhalten große Schubdeformationen, die auf der Oberfläche auftreten. Sie berücksichtigen aber noch nicht die Arbeitsverfestigung beim Gleitvorgang.

MADAKSEN [1982] hat den Stand der Tribologie diskutiert und bemerkt, dass **verschiedene Phasen** existieren. In der Anfangsphase ist die Reibung abhängig vom natürlichen 'Oberflächenfinish' oder vom Zusammenbruch des entstandenen Oxidfilmes. Anschließend kommt es zu plastischen Deformationen und Arbeitsverfestigung auf der Oberfläche. Erst dann wird ein gleichmäßiger Zustand mit konstanter Mikrostruktur erreicht. Seiner Meinung nach kann man sich auf **vier Mechanismen** beschränken:

- Adhäsion,
- Furchenbildung durch harte Mikroerhebungen,
- Adhäsion mit dritten Körpern und
- Verzahnung von Mikroerhebungen.

Der größte Energieanteil wird auf der Gleitfläche durch Verformung der Mikroerhebungen und bei der Produktion von Verschleißpartikeln verbraucht.

Speziell zum Verschleiß und über die sich bei der **Ausbildung von dritten Körpern** verändernden mechanischen Eigenschaften gibt es Veröffentlichungen von RABINOWICZ, DUNN & RUSSEL [1961], RABINOWICZ & MUTIS [1965], LARSEN-BADSE [1968] und MOORE [1980].

Im Folgenden werden weitere umfangreiche Werke vorgestellt. MOORE [1975] hat zusätzlich eine Reihe von **Anwendungen** angegeben und diskutiert diese ausführlich. Ausschließlich mit Reibung und Verschleiß von Metallen und deren Diagnose hat sich WUTTKE [1978] beschäftigt. SARKAR [1980] hat die Verschleißbildung anhand von Beispielen aus industriellen Anwendungen diskutiert.

CZICHOS [1978] und [1982] hat **systemtechnische Grundlagen** zur Bearbeitung von Reibproblemen eingeführt. Dabei werden die Begriffe und Methoden der Systemanalyse sinngemäß auf ein **tribotechnisches System** übertragen. Spezifisch für die Eigenschaften eines tribologischen Systems ist das Auftreten von Verlustgrößen. Damit verbessern sich Möglichkeiten zur Analyse und Funktionsüberwachung von komplexen tribotechnischen Systemen.

Für die Interaktion von Körpern im Kontaktfall werden vier grundlegende Aspekte genannt. Diese sind

- elastische Spannungen und Verschiebungen,
- das Anwachsen von Verbindungen,
- das Entstehen von Oberflächenkontaminat und
- das Auftreten von Mikroverschiebungen vor dem Gleiten.

Beim Reibvorgang entwickeln sich vier Prozesse und demnach treten entsprechende Einzelkräfte auf. Hierzu gehören

- elastische Deformationen der Einzelerhebungen,
- plastische Deformationen der Einzelerhebungen,
- Ziehen von Furchen und
- Abscheren der adhäsiven Verbindungen.

STACHOWIAK [1993] sieht **Tribologie als ein neues Feld der Wissenschaft**, es befindet sich eher im **Anfangsstadium** und die endlose Zahl von experimentellen Daten und Theorien, soweit sie zusammengefasst sind, hat lediglich geholfen, einen Eindruck über die Tribologie zu bekommen. Generell geht aus unzähligen Experimenten und Theorien hervor, dass sich Reibung als Studium von Charakteristiken von Filmen aus Materialien zwischen in Kontakt befindenden Körpern deuten lässt. Sein Grundkonzept besteht darin, dass Reibung und Verschleiß am besten durch eine dünne Schicht oder einen zwischenliegenden Materialfilm, der beim Gleiten, Rollen oder Stoßen die Körper trennt, erklärt werden können. Demnach entstehen Reibung und Verschleiß in Abhängigkeit davon, ob ein Film versagt oder gar nicht vorhanden ist.

In aktuellen wissenschaftlichen Zeitschriften wird der Begriff der **Nanotribologie** geprägt, da sich das **Forschungsfeld auf die molekulare Ebene** verlagert hat. In diesem Zusammenhang wird von PERSSON [1997] erneut die Filmbildung propagiert. Es wird angenommen, dass sich zwischen den Körpern eine extrem dünne Schmiermittelschicht befindet. Die Moleküle der Körperoberflächen üben Kräfte auf die Moleküle der Zwischenschicht aus. Im Haftzustand ist die molekulare Anordnung starr und regelmäßig. Die Moleküle der Zwischenschicht orientieren sich unmittelbar an den angrenzenden Körpern. Nach Überwindung des Haftzustandes wird die Anordnung der Moleküle verletzt, dadurch verflüssigt sich die Schmiermittelschicht und die Gleitreibungskraft reduziert sich. Beim Übergang vom Gleiten zum Haften kommt es dann wieder zu einer starren Anordnung der Moleküle und damit zu einem Ansteigen der Reibkraft.

## 2.4 Modellierung für den Einsatz in numerischen Verfahren

Um Problemstellungen untersuchen zu können, werden die Strukturen im Rahmen der Elastizitätstheorie in ein Modellkontinuum überführt. Parallel dazu muss das Reibverhalten einer sich in Kontakt befindenden Werkstoffpaarung idealerweise in einem Gesetz erfasst werden und auf einer Modelloberfläche beschrieben werden können. Im Rahmen einer Modellierung für technische Anwendungen ist das Reibverhalten über eine ausreichend große Fläche zu beziehen, um eine Aussage treffen zu können. Die Bezugsflächen im Kontaktbereich müssen gegenüber der Oberflächenrauheit und des sich abspielenden Szenarios so groß sein, dass das Reibverhalten der auftretenden Materialpaarung als homogen betrachtet werden kann. Damit kann die Unterscheidung zwischen Kräften und Spannungen auf der Modelloberfläche analog zum Modellkontinuum erfolgen.

Bei der numerischen Simulation von elastoplastischen deformierbaren Körpern mit Kontaktoberflächen sind zu jedem Zeitpunkt neben der Normalkraft auch Tangentialweg, Tangentialgeschwindigkeit und Temperatur bekannt. Diese Größen sind daher für die Ermittlung des realistischen Reibverhaltens nutzbar. Damit wird eine prinzipielle Berücksichtigung der Abhängigkeit der Reibkraft von

- Druck  $\sigma_N$ ,
- zurückgelegtem Weg  $g_T$ ,
- Geschwindigkeit  $v_T$  und
- Temperatur  $\theta$

im Rahmen der numerischen Simulation möglich. Als Darstellungsweisen ergeben sich die Gleitregel im Kontaktspannungsraum oder die Abhängigkeit des Reibbeiwertes von anderen Größen in einem Koordinatensystem.

In Analogie zur Plastizitätstheorie lässt sich eine sogenannte Gleitregel aufstellen. Diese **Gleitregel im Kontaktspannungsraum** entspricht der Fließregel im Hauptspannungsraum. Dabei wird der Raum nicht durch die Hauptspannungen beschrieben, sondern durch die Kontaktspannungen, worunter die Normalspannung und die in beiden Richtungen wirkenden Tangentialspannungen zu verstehen sind. Diese Analogie wurde von MICHALOWSKI & MROZ [1978] dargestellt und von CURNIER [1984] ausführlich beschrieben. Sie ist ebenfalls bei AVITZUR & NAKAMURA [1986], FREDRIKSON [1976] und anderen zu finden.

Die besonderen Merkmale dieser Theorie sind die Betrachtung endlich großer inelastischer Verformungen, die Verwendung objektiver Gleitgeschwindigkeitsraten sowie

die Berücksichtigung isotroper und anisotroper Ver- und Entfestigungseigenschaften beim Gleiten. Das klassische Reibgesetz von Coulomb mit konstantem Proportionalitätsfaktor  $\mu$  ist als Sonderfall enthalten, die entsprechende Gleitfläche ist kegelförmig. Dagegen ist die Gleitfläche bei dem von VU VAN [1990] vorgeschlagenen Reibgesetz mit nichtlinearer Druckabhängigkeit parabolisch. Die Funktion  $f$  zur Beschreibung einer solchen Gleitfläche setzt sich aus den einzelnen Variablen zusammen, sodass  $f = f(\sigma_T, \sigma_N, g_T, v_T, \theta)$ . Als Beispiel für die Darstellung einer anisotropen Gleitfläche mit Adhäsion dient Abbildung 2.4.

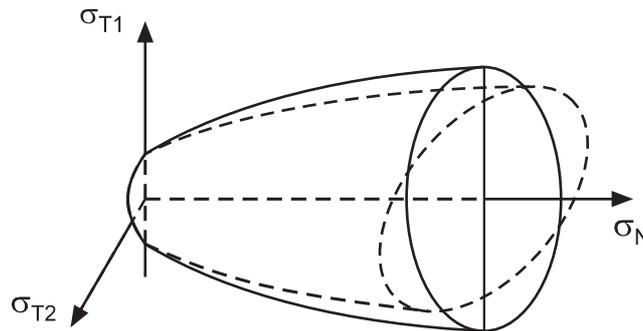


Abbildung 2.4: Darstellung einer Gleitfläche  $f$ .

Implizite numerische Lösungen verlangen die Ermittlung der Reibkraft zum zu errechnenden Zeitpunkt. Der Einsatz der 'radial return method', so GIANNAKOPOULOS [1989], bei der Projektion auf die Fließfläche hat sich hierbei bewährt. Dieses Vorgehen verläuft ebenfalls analog zur Elastoplastizität. Durch diesen Einsatz erhält die Darstellung eine zusätzliche Motivation.

Der wesentliche Einfluss bleibt in den meisten Fällen die Druckabhängigkeit. Deshalb wird oft die Darstellung mit dem **Reibbeiwert**  $\mu$  als Proportionalitätsfaktor zur Druckspannung gewählt. Aufgrund der Anschaulichkeit ist dies die bei Experimenten oft verwendete Darstellung. Im Einzelnen sind das mögliche Abhängigkeiten von

- Druck  $\mu(\sigma_N)$ ,
- zurückgelegtem Weg  $\mu(g_T)$ ,
- Geschwindigkeit  $\mu(v_T)$  und
- Temperatur  $\mu(\theta)$ .

Dreidimensional darstellbar und deshalb besonders anschaulich ist nur ein  $\mu$ , welches von zwei Größen  $\mu(a, b)$  abhängt. Diese Darstellung eignet sich besonders gut, um experimentelle Kurven aus Versuchen auftragen, verfolgen und entsprechend interpretieren zu können.

## 2.5 Eigene Untersuchungen zur Werkstoffpaarung Stahl und Beton

### 2.5.1 Grundlegende Zusammenhänge

**Nachteile der Anwendung von empirisch entwickelten Reibungsmodellen**, die versuchen, Mikrooberflächenverformung durch Materialparameter und Funktionen in die Berechnung mit einzubeziehen, liegen darin, dass die experimentelle Bestimmung dieser Parameter kompliziert ist und ihre physikalische Interpretation unscharf bleibt. Außerdem ist die Reproduzierbarkeit von Oberflächenmikrogeometrien, Verformungen sowie Kontaktoberflächeneigenschaften kaum möglich. Der bei einigen Theorien vorausgesetzte stationäre Zustand stellt lediglich einen Sonderfall dar, denn während eines Gleitvorganges werden im Allgemeinen mehrere Phasen durchlaufen. Grundsätzlich sind Anwendungen von theoretischen Methoden, um für eine Werkstoffpaarung das Reibverhalten zu ermitteln, schwer möglich, da die **Betrachtung einer realen Oberfläche** nur vor oder nach einem Versuch geschehen kann. Die Interaktion auf der Kontaktfläche während eines Reibvorganges kann nicht beobachtet werden. Es kann nur versucht werden, den Ablauf durch eine Bestandsaufnahme vor und nach einem Versuch zu rekonstruieren. Es werden keinerlei in der Realität vorhandenen zeitlich und räumlich stochastischen Einflüsse berücksichtigt. Bei der Durchführung von Versuchen beeinflussen sich allerdings die verschiedenen mechanischen Bedingungen, wie Druck, Geschwindigkeit und Weg, aber auch die Temperatur und der Zustand des umgebenden Mediums gegenseitig. Experimentelle Ergebnisse unterliegen Streuungen, werden unvollständig dargestellt, sind meistens nur für Einzelfälle aussagekräftig und sind teilweise nicht nachvollziehbar.

Damit wird verdeutlicht, dass sich weder ausschließlich theoretische noch ausschließlich experimentell realistische stoffgesetzliche Beziehungen aufstellen lassen. Nur ein gemeinsames Vorgehen kann zu neuen Erkenntnissen führen.

Im Rahmen der Untersuchung des **Reibverhaltens von Beton und Stahl** sollen daher theoretische Überlegungen helfen, tribologisches Verständnis zu wecken, auch um experimentelle Ergebnisse besser interpretieren zu können. Im Folgenden wird versucht, den wahrscheinlich **wesentlichen Mechanismus** für dieses spezielle Reibverhalten zu analysieren. Temperatureinflüsse, tribochemische Reaktionen und die Rolle der Adhäsion sind dabei zu vernachlässigen. Hauptmechanismen werden lediglich **Plastizität und Materialzerstörung** sein. Die Beschreibung eines möglichen **sich einstellenden Szenarios** erfolgt mit einer Modellierung, die für die Oberflächenbeschaffenheit folgende Annahmen trifft. Die Stahloberfläche ist glatt und

starr, während die Betonoberfläche rauh und vergleichsweise weich ist und aus einer Vielzahl von spröden Mikroerhebungen besteht. Betrachtet und analysiert werden soll das **Verhalten einer Mikroerhebung** auf der Oberfläche bei einem Kontaktvorgang mit Reibung:

- Bei ausschließlichem Normalkontakt geraten die Werkstoffpartner lediglich in Kontakt, es kommt zu symmetrischen Verformungen der Mikroerhebung, siehe Abbildung 2.5 (a).
- Durch die anschließende Tangentialbewegung kommt es zur Verzahnung oder Adhäsion der Mikroerhebung mit der anderen Oberfläche. Zu Beginn kommt es nur zu elastischen Verformungen, siehe Abbildung 2.5 (b).
- Aufgrund einer Mikroverzahnung oder Adhäsion und der zunehmenden Tangentialbewegung nimmt die Verformung zu, wie in Abbildung 2.5 (c) ersichtlich wird. Es entstehen örtliche Plastifizierungen der Mikroerhebung.
- Durch die zunehmende Verformung kommt es zu örtlichem Materialversagen und zu einem Aufreißen der Erhebung, siehe Abbildung 2.5 (d).
- Abbildung 2.5 (e) zeigt den vollständigen Abriss der Erhebung. Die abgerissene Mikroerhebung wird anschließend zu einem freien Partikel. Wegen der Rauigkeit und Adhäsion verändert dieses seine Konturen.
- Es legt sich in eine Nische oder ein Tal und vermindert somit die Rauigkeit der Kontaktoberfläche, siehe Abbildung 2.5 (f). Unter Umständen nähert es sich der Kugelform an und fungiert als Rollenlager.

Als wesentliche Aussage aus der Betrachtung dieses Szenarios folgt, dass der Widerstand der Oberfläche in Relation zur Normalkraft und zum Tangentialweg zuerst ansteigt und anschließend abnimmt. Hierfür sind das Plastifizieren und die Zerstörung der Mikroerhebung die Ursachen. Unterstützt wird die Abnahme des Widerstandes durch die sich anschließende abnehmende Oberflächenrauheit. Hinzugefügt werden muss, dass ein solcher Vorgang immer einen gewissen Weg benötigt, der hier nur qualitativ angegeben werden kann. **Das Verhältnis von Reibkraft zur Normalkraft und zum Tangentialweg wird sublinear.**

Bei **weiterer Zunahme des Druckes** in Normalenrichtung bis zum teilweise oder vollständig zerstörten Beton ist als Grenzbetrachtung vorstellbar, dass die Gesamtzahl aller Erhebungen zerstört wird. Vermutlich konvergiert bei der Interaktion mit dem Grundmaterial die Reibspannung gegen die **maximal aufnehmbare Schubspannung**. Dieser Gedanke wird dadurch unterstützt, dass bei Werkstoffen wie Beton die maximal aufnehmbare Schubspannung von außen nach innen zunehmen wird – im Gegensatz dazu existieren bei metallischen Werkstoffen Oberflächen, die härter sind als das Grundmaterial.

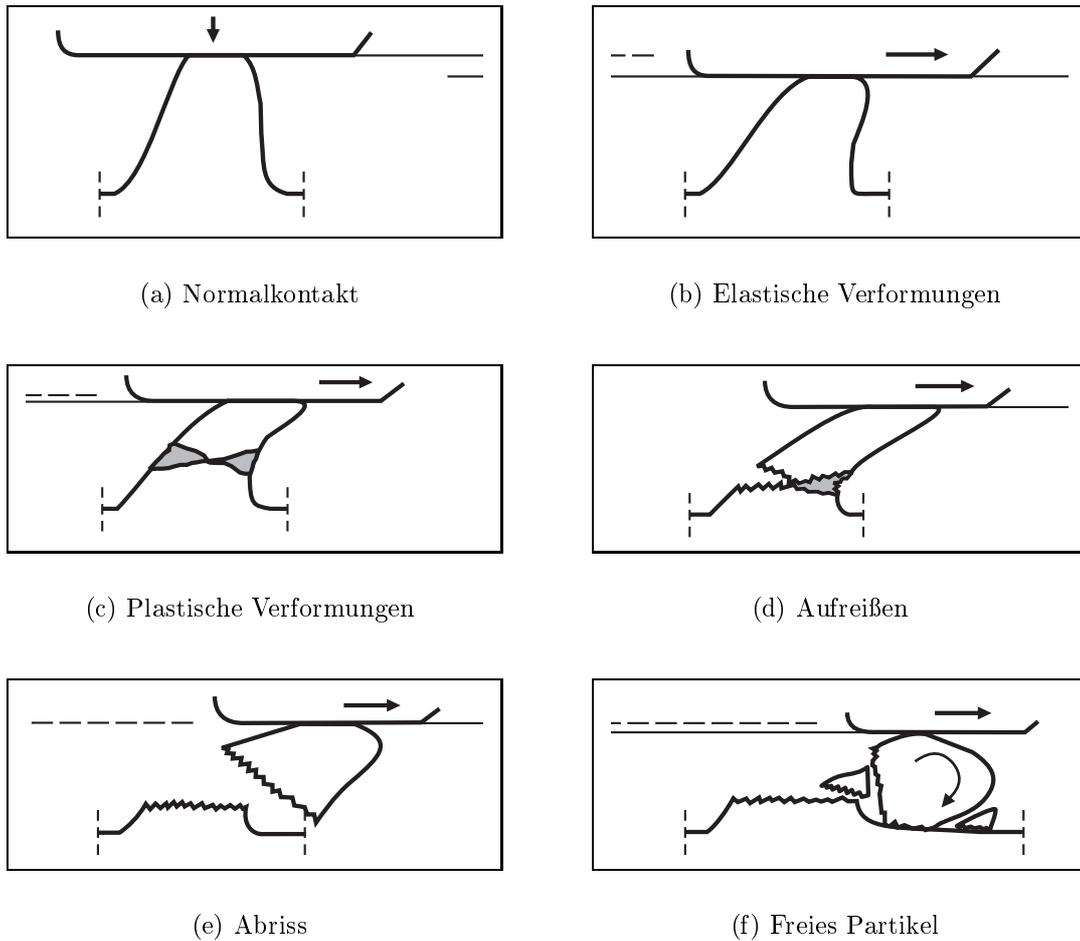


Abbildung 2.5: Mögliches Kontaktszenario von Stahl und Beton.

Mögliche Auswirkungen **dynamischer Effekte** auf den sich einstellenden Mechanismus können zur einer Geschwindigkeitsabhängigkeit der Widerstandskraft führen. Angenommen werden kann ein viskoplastisches Verhalten einer Mikroerhebung während der elastoplastischen Deformation des vorgeschlagenen Mechanismus. Nach dem Abreißen wirken Massenträgheitseffekte auf die Partikel. Diese abgescherten Partikel wirken als Rollen- oder Kugellager, was durch die Betrachtung von Abbildung 2.5 (f) vorstellbar wird. Dies führt letztlich zu einer Abnahme des Widerstandes. In der Literatur wurde dieses Phänomen oft festgestellt, jedoch nicht im tribologischen Sinne interpretiert. Nach BERTHIER [1989] sind jedoch Rollvorgänge der sich bildenden dritten Körper dafür verantwortlich.

Zur theoretischen **Ermittlung des Reibverhaltens** der Werkstoffpaarung Stahl und Beton muss das betrachtete Verhalten einer Mikroerhebung auf das Verhalten einer Gesamtoberfläche übertragen werden. Die Betrachtung einer realen Oberfläche verdeutlicht, dass die Erhebungen verschiedene Größen haben und auf unterschiedlicher Höhe liegen. Auch die örtlichen Materialfestigkeiten sind unterschiedlich, da sie Streuungen unterliegen. Diese Tatsachen haben zur Folge, dass die einzelnen Vorgänge des Mechanismus auf einer realen Oberfläche nicht zu bestimmten Zeitpunkten ablaufen, sondern in Zeitintervallen.

Eine **realistische Erfassung** des ablaufenden Mechanismus könnte daher mit Hilfe einer statistischen Verteilung der Erhebungen und einer Variation von deren Größe und Höhe auf der Oberfläche erfolgen. Mit Hilfe von Gauß- oder Weibull-Verteilungen könnte zusammen mit der Erfassung der Erhebungen der Verlauf der Widerstandskraft des vorgeschlagenen Versagensmechanismus auf die gesamte Oberfläche übertragen werden. Alternativ zu den statistischen Ansätzen ist eine Projektion des Einzelmechanismus auf einen Oberflächenausschnitt einer realen Betonoberfläche möglich.

## 2.5.2 Ergebnisse aus experimentellen Untersuchungen

Allgemeines Ziel ist es, mögliche Abhängigkeiten einer Werkstoffpaarung mit gegebener Oberflächenbeschaffenheit für technische Anwendungen zu untersuchen. Als wesentliche mögliche Abhängigkeiten gelten dabei Druck, Gleitweg, Gleitgeschwindigkeit, Temperatur und andere. Die Zielsetzung und damit die Größenordnungen wesentlicher Versuchsparameter beeinflussen das Versuchskonzept.

Im Rahmen eines DFG-Forschungsvorhabens wurden von EIBL & HOFFMANN [1995] die Reibvorgänge zwischen Stahl und Betonoberflächen untersucht. Dabei wurden speziell Untersuchungen zum Eindringverhalten eines Stahlkonus in einen Betonkreisring durchgeführt.

Die zu untersuchenden Einflüsse auf die Reibkraft, besonders in Hinblick auf die Zielsetzung – z. B. 'Impaktsimulation' –, sind die Ermittlung möglicher Abhängigkeiten der Reibkraft von

- Druck und
- Gleitgeschwindigkeit.

### Versuchskonzept

Ein Konus aus Stahl dringt in eine segmentierte Betonkreisringscheibe ein, siehe Abbildung 2.6. Der Eindringweg ist wegen des Keilprinzips proportional zur Normalspannung  $\sigma_N$ . Auf der Kontaktfläche gilt für die Reibspannung die Annahme von Coulomb mit  $\sigma_T = \mu \sigma_N$ . Während des Eindringens des Konus werden alle notwendigen Größen zur Ermittlung der Normal- und Reibspannung auf der Kontaktfläche gemessen.

Ergebnisse mit diesem Konzept sind in Abbildung 2.7 aufgetragen. Die Reibspannung ist in Abhängigkeit von der Normalspannung und der Reibbeiwert in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.

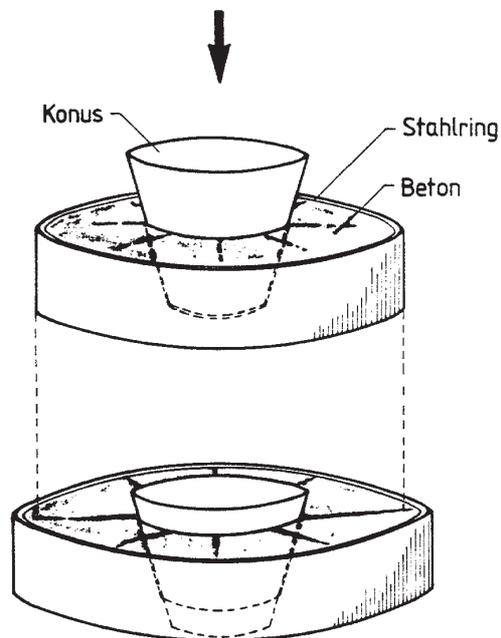
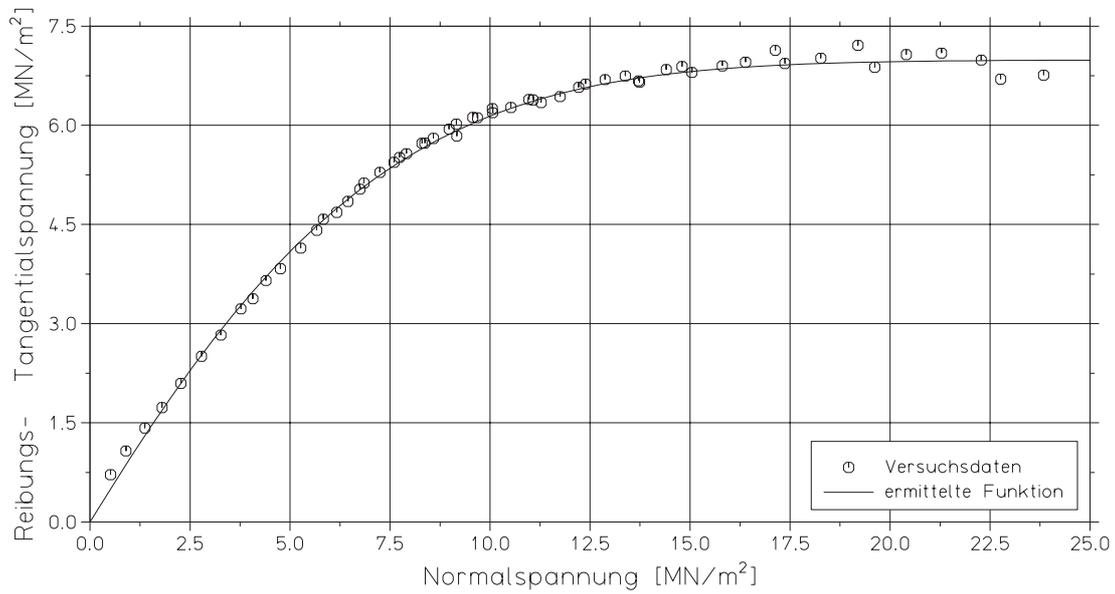
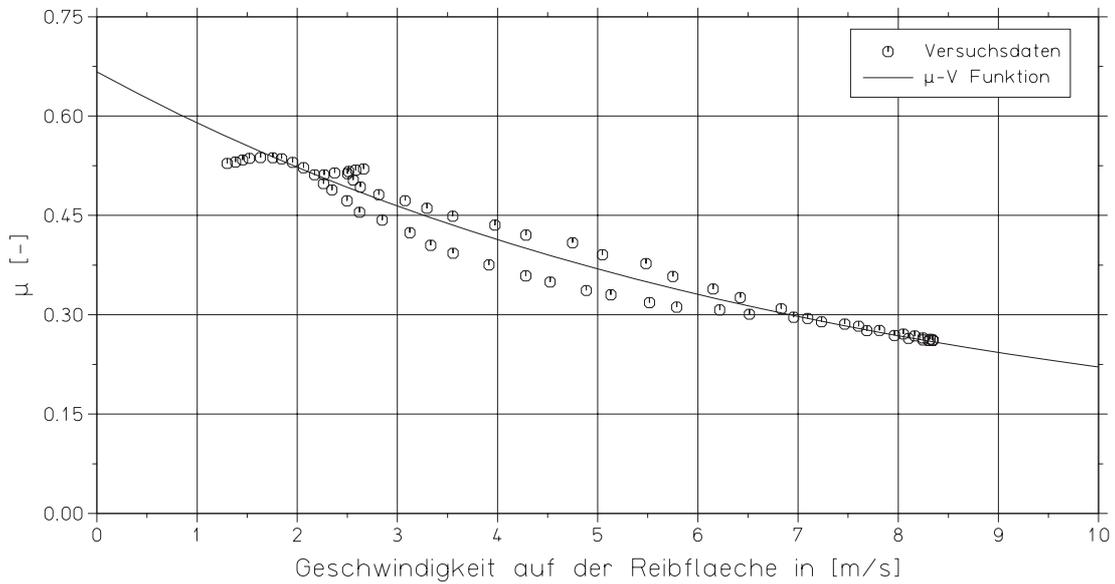


Abbildung 2.6: Experiment mit einem eindringenden Konus.

Weitere experimentelle Untersuchungen finden sich in der Literatur: FRANZ [1959], FIEDLER [1962], HÖLKE [1965], ROIK & BÜRKNER [1978], PASCHEN & ZILICH [1979], RABBAT & RUSSEL [1985], BALTAY & GJELSVIK [1990], MAISSEN [1993] und NASR, EBNER & EIBL [1997].



(a) Reibkraft in Abhängigkeit der Normalkraft:  $\sigma_T = \mu(\sigma_N) \sigma_N$



(b) Reibbeiwert in Abhängigkeit der Geschwindigkeit:  $\mu = \mu(v_T)$

Abbildung 2.7: Darstellung der Ergebnisse aus den Versuchen und aus der anschließenden nichtlinearen Regressionsanalyse.

### 2.5.3 Herleitung zu einem Reibgesetz

#### Vorbemerkungen

Ein komplexes Reib- oder Oberflächenstoffgesetz kann nur aus einer Vielzahl von Versuchsergebnissen zusammen mit Theorien aus der Tribologie entstehen. Im Folgenden soll die Vorgehensweise zur Ermittlung eines komplexen realistischen Reibgesetzes erläutert werden.

Soll für eine gewählte Werkstoffpaarung das Reibverhalten untersucht werden, sind die Untersuchungsziele mit dem Versuchskonzept abzustimmen. Um spezifische Abhängigkeiten zu untersuchen, sollten die Größenordnungen aller beteiligten Größen schon im Voraus abgeschätzt werden können. Die Ergebnisse aller nutzbaren Versuche sind anschließend entsprechend darzustellen.

Wichtig für das Aufstellen von Beziehungen ist, dass zuvor alle verfügbaren Ergebnisse gemeinsam mit ihren spezifischen Abhängigkeiten dargestellt werden können. Zu diesem Zweck wird ein entsprechend gewählter Raum (z.B.  $\mu = \mu(\sigma_N, v_T)$ ) durch Daten, d.h. experimentell ermittelte Raumkurven, gefüllt. Mit zunehmender Dichte von ähnlichen Kurven entsteht eine zunehmend dichtere und damit genauere Ergebnisoberfläche. Bei der Betrachtung solcher entstehenden Oberflächen können Bereiche, in denen Versuchsergebnisse fehlen oder unschlüssig sind, erkannt und dann gezielt durch weitere Versuche oder neue Versuchskonzepte ausgeglichen werden. Die Bedingungen für diese anstehenden Experimente können daraufhin abgestimmt werden.

Für einen solchen Raum lässt sich über eine durch unzählige Ergebniskurven entstehende beliebige Oberfläche mit Regressionsanalysen eine Funktion finden, die diese Oberfläche und damit das Reibverhalten beschreibt. Sie kann als Basis für ein bei numerischen Berechnungen zu nutzendes Reibgesetz dienen.

Da innerhalb der eigenen Zielsetzung die Ermittlung von Reibgesetzen als Basis für eine numerische Simulation im Vordergrund steht, sind die experimentellen Ergebnisse soweit aufzubereiten, dass sie als Basis für ein Reibgesetz dienen können.

Die Versuchsergebnisse werden in einem Raum aufgetragen, hier  $\mu = \mu(\sigma_N, v_T)$ . Anschließend werden die Ergebnisse zur Elimination der jeweiligen zweiten Variablen jeweils auf eine Achse projiziert. Die so entstehenden  $\mu = \mu(\sigma_N)$  und  $\mu = \mu(v_T)$  lassen eine Regressionsanalyse zu. Die Darstellungen hierzu befinden sich in Abbildung 2.7 (a) und (b). Somit können anhand der experimentellen Untersuchungen Funktionen ermittelt werden, die als Vorschlag für ein Reibgesetz dienen.

Als für die numerische Simulation zu nutzende Funktion kann nun beispielsweise Folgendes angegeben werden:

• **Reibbeiwert  $\mu$**

Nach der Ermittlung von Funktionen durch eine nichtlineare Regressionsanalyse mit den Versuchswerten, dargestellt in Abbildung 2.7, lässt sich eine Gleichung für den Reibbeiwert in Abhängigkeit von Druck und Geschwindigkeit angeben:

$$\mu_{S-B,d}(\sigma_N, v_T) = [c + (1 - c) e^{d |v_T|}] [-b/a (1 - e^{a |\sigma_N|})] 1/|\sigma_N|$$

$$\text{mit } a = -0.125, \quad b = -1.11, \quad c = 0.5, \quad d = -0.3$$

Die Abhängigkeit des Reibbeiwertes von Druck und Geschwindigkeit kann anschließend dreidimensional in Abbildung 2.8 dargestellt werden.

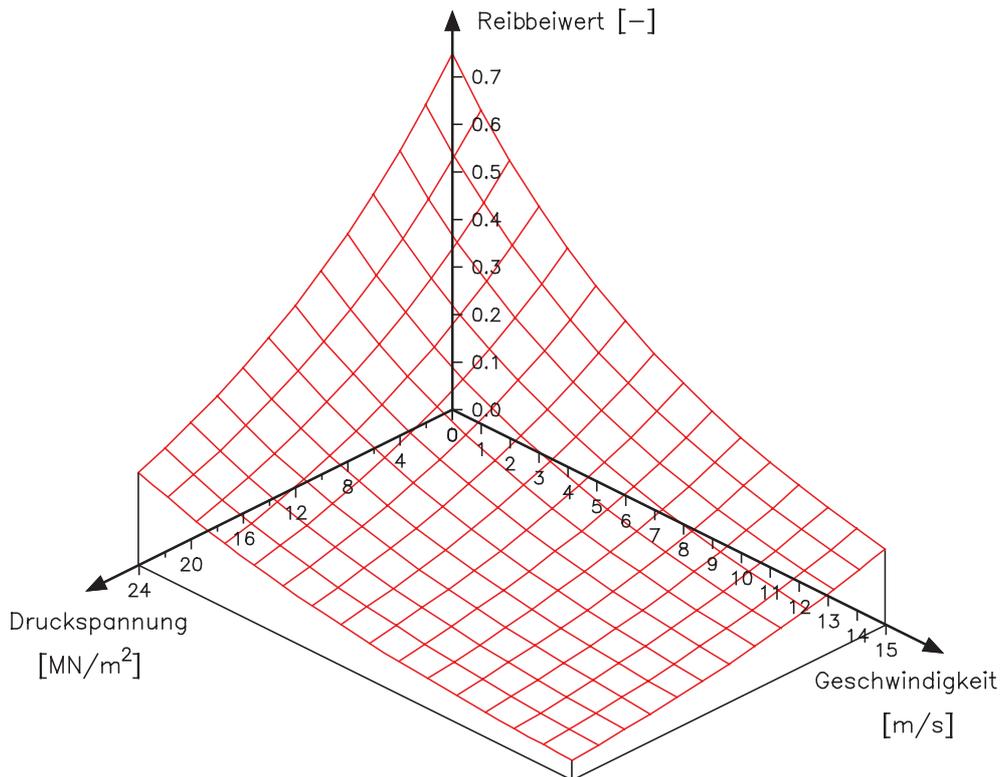


Abbildung 2.8: Darstellung des Reibbeiwertes  $\mu_{S-B,d}$  in Abhängigkeit von der Druckspannung  $\sigma_N$  und der Geschwindigkeit  $v_T$ .

• **Gleitfläche**  $f$

In Anlehnung an stoffgesetzliche Beziehungen kann in Analogie zur Fließfläche eine Gleitfläche aufgestellt werden. Die Darstellung im Oberflächenspannungsraum zeigt Abbildung 2.9. Zur Beschreibung dient die folgende Gleichung:

$$f_{S-B,d}(\sigma_N, \sigma_T, v_T) = 0$$

$$\leq - [c + (1 - c) e^{d |v_T|}] [b/a (1 - e^{a |\sigma_N|})] + |\sigma_T|$$

mit  $a = -0.125$ ,  $b = -1.11$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = -0.3$

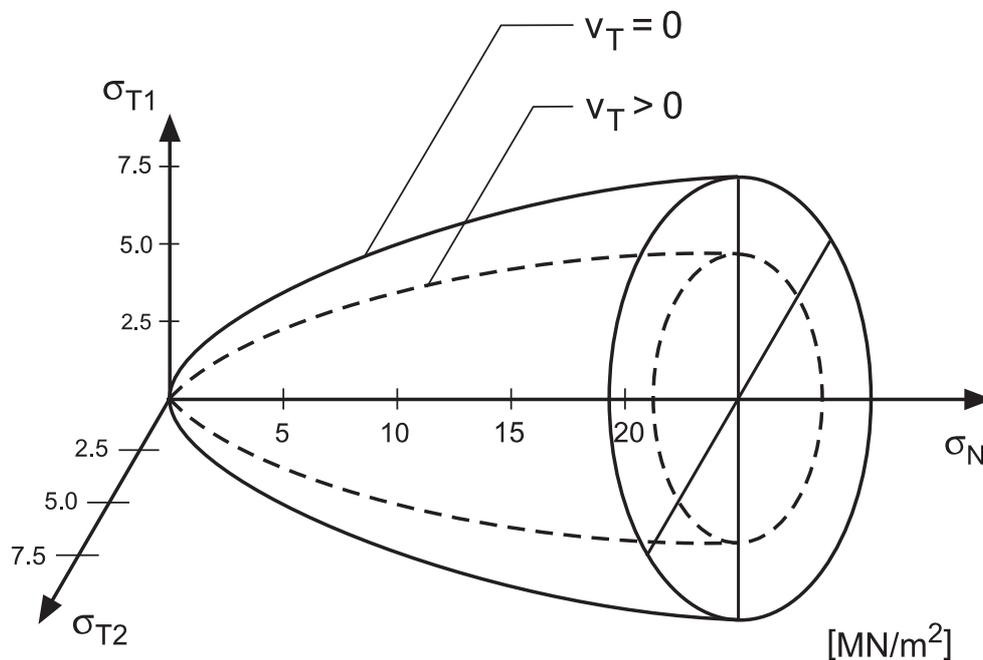


Abbildung 2.9: Darstellung der Gleitfläche  $f_{S-B,d}(\sigma_T, \sigma_N, v_T)$  im Oberflächenspannungsraum.

Diese vorgeschlagenen Reibgesetze wurden in die vorgestellten Algorithmen integriert. Durch numerische Untersuchungen mit diesen Algorithmen konnten die eigenen experimentellen Untersuchungen validiert werden. Die Vorgehensweise dieser Untersuchungen wird in Kapitel 7 beschrieben.

**• Tribologische Interpretation**

Grundsätzlich sollten die Versuchsergebnisse mit einer Interpretation der Theorie verglichen werden können. Zu diesem Zweck wurde versucht, für die betreffende Werkstoffpaarung ein auf Überlegungen aus der Tribologie basierendes Szenario der sich in Kontakt befindenden Oberflächen zu erstellen. Anschließend sollte ein solches Szenario unter Berücksichtigung von statistischen und stochastischen Einflüssen soweit angepasst werden, dass die Versuchsergebnisse damit identifiziert werden und Funktionen mit physikalisch interpretierbaren Parametern beschrieben werden können. Eine genaue Identifikation und eine Erfassung mit diesem Ziel erscheint jedoch nur sinnvoll, wenn die Anzahl der streuenden Größen überschaubar oder die Summe der stochastischen Einflüsse gering ist. Aufgrund der hohen Anzahl der genannten Einflussgrößen soll im vorliegenden Fall eine prinzipielle Interpretation ausreichend sein.

Die speziell für diese Werkstoffpaarung durchzuführende Interpretation wurde im vorherigen Abschnitt durchgeführt. Damit sollte näherungsweise eine sinnvolle tribologische Interpretation mit einer ausreichend genauen Analyse der einzelnen Phasen gegeben sein. Bei dem vorgeschlagenen Szenario ergeben sich zwei Hauptaussagen, die im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen stehen:

- Die Widerstandskraft nimmt mit der abnehmenden Rauigkeit und der zunehmenden Zerstörung der Mikroerhebungen ab. Es ergibt sich ein sublineares Verhalten von Reibung und Normalkraft.
- Die zunehmende Relativgeschwindigkeit führt bei sich nicht umkehrender Relativbewegung ebenfalls zur Abnahme der Widerstandskraft.

Langfristig ist natürlich eine vollständige Theorie, die durch endlos viele Versuchsergebnisse und möglichst fundiertes tribologisches Wissen gestützt wird, anzustreben. Dies ist jedoch ein langfristiger iterativer Vorgang, da auf mehreren Teilgebieten jeweils Fortschritte erzielt werden müssen. Eine Vielzahl von Widersprüchen in diesem Bereich ist noch nicht geklärt.

# Kapitel 3

## Numerische Grundlagen der Kontaktalgorithmen

### 3.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden die Notation und der konzeptionelle Hintergrund aufbereitet, der für das Lösen von Kontaktproblemen notwendig ist. Es ist nicht beabsichtigt, die Entwicklung der Kontinuumsmechanik mit großen Deformationen und Variationsprinzipien darzustellen; hierzu wird auf grundlegende Literatur von MARSDEN & HUGHES [1983], MALVERN [1969], GURTIN [1981], DUVAUT & LIONS [1976] und HUGHES [1987] verwiesen.

Durch Einbeziehung des Kontaktes in die Gesamtbeschreibung ergeben sich in Abhängigkeit von der gewählten Modellierung zusätzliche Zwangsbedingungen. In diesem Abschnitt wird soweit wie nötig auf die Grundlagen eingegangen, um die globalen Gleichungen mit den notwendigen Termen zu erweitern, die sich durch diese zusätzlichen Zwangsbedingungen ergeben.

#### 3.1.1 Notation des Problems

Die Ausgangskonfigurationen der beiden Körper werden, wie in Abbildung 3.1 gezeigt wird, durch  $\Omega^{(1)}$  und  $\Omega^{(2)}$  in  $R^{n_{sd}}$  beschrieben. Die räumliche Dimension wird dabei mit  $n_{sd}$  festgelegt.

Die Bewegungen der Körper werden mit Hilfe von  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  im Zeitintervall  $\mathfrak{N} = [0, T]$  durch folgende Funktionen beschrieben:

$$\varphi^{(i)} : \overline{\Omega}^{(i)} \times \mathfrak{N} \rightarrow R^{n_{sd}}, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Hierbei zeigt  $\overline{\Omega}^{(i)}$  die Geschlossenheit von  $\Omega^{(i)}$ , das heißt den Zusammenschluss mit den Randbedingungen an. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  räumlich zur Ausgangsposition passt, und dass diese Ausgangskonfigurationen so gewählt sind, dass sie sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  nicht in Kontakt befinden.

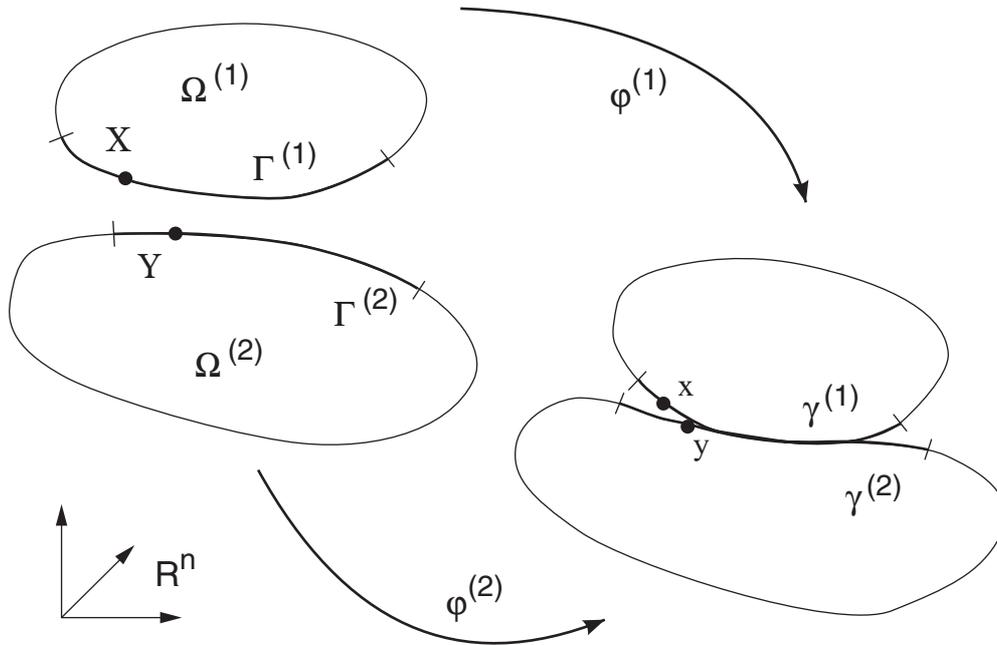


Abbildung 3.1: Deformationen zweier Körper bei einem Kontaktproblem.

Für jeden beliebigen Zeitpunkt aus  $t \in \mathfrak{N}$  können die Konfigurationen durch Festhalten des Zeitargumentes  $\varphi_t^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  fixiert werden.

Geometrische oder tensorielle Objekte, die durch  $\varphi_t^{(i)}(\Omega^{(i)})$  definiert sind, werden im Folgenden als Objekte in der Momentankonfiguration und solche, die als  $\Omega^{(i)}$  definiert sind, als Objekte in der Referenzkonfiguration bezeichnet.

Materialpunkte, die sich auf dem ersten Körper  $\Omega^{(1)}$  befinden, werden mit  $\mathbf{X}$  definiert, und Materialpunkte auf dem zweiten Körper  $\Omega^{(2)}$  mit  $\mathbf{Y}$ , in der momentanen Betrachtungsweise dann entsprechend mit  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

An den Rändern  $\partial\Omega^{(i)}$  auf  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  führt man für Materialpunkte, die im Kontaktbereich liegen können, zum Beispiel  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$ , die Teilmengen  $\Gamma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$  ein. In der momentanen Betrachtungsweise werden diese Teiloberflächen als  $\gamma^{(i)} = \varphi_t^{(i)}(\Gamma^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$  bezeichnet. Über diese Oberflächen  $\Gamma^{(i)}$  werden im Folgenden die Kontaktbedingungen eingeführt.

### 3.1.2 Lokale Grundgleichungen

Mit dieser Notation können nun die Grundgleichungen für einen Körper  $(i)$  hergeleitet werden. Die starke Form der Impulsbilanz wird zusammen mit den Randbedingungen und Anfangsbedingungen folgendermaßen angegeben:

Für alle  $t \in \mathfrak{N}$ ,  $\varphi^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  soll

$$\begin{aligned} \rho_0^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi^{(i)} &= \text{DIV} \mathbf{P}^{(i)} + \mathbf{f}^{(i)} \quad \text{in } \Omega^{(i)}, \\ \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{n}_0^{(i)} &= \bar{\mathbf{t}}^{(i)} \quad \text{auf } \Gamma_\sigma^{(i)}, \\ \varphi^{(i)} &= \bar{\varphi}^{(i)} \quad \text{auf } \Gamma_\varphi^{(i)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)} \Big|_{t=0} &= \mathbf{I} \text{ (Identität)} \quad \text{in } \bar{\Omega}^{(i)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi^{(i)} &= \mathbf{V}_0^{(i)} \quad \text{in } \bar{\Omega}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

gelten. Unter Beachtung der Indizierung  $(i)$  ist  $\rho_0$  die Ausgangsdichte,  $\mathbf{P}$  der erste Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor, DIV stellt den Divergenzoperator dar und  $\mathbf{n}_0$  ist der aus dem Körper zeigende Normalenvektor in der Referenzkonfiguration. Die Abbildungen  $\mathbf{f}^{(i)} : \Omega^{(i)} \times \mathfrak{N} \rightarrow R^{n_{sd}}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}^{(i)} : \Gamma_\sigma^{(i)} \times \mathfrak{N} \rightarrow R^{n_{sd}}$ ,  $\bar{\varphi}_t^{(i)} : \Gamma_\varphi^{(i)} \times \mathfrak{N} \rightarrow R^{n_{sd}}$  beschreiben die Trägheitskräfte, die äußeren Lasten und die Bewegungen in der Ausgangsgeometrie.  $\mathbf{V}_0$  beschreibt als Anfangsbedingung das Geschwindigkeitsfeld. Über die konstitutiven Beziehungen für  $\mathbf{P}$  werden keine näheren Angaben gemacht.  $\mathbf{P}$  ist im Wesentlichen eine Funktion der Verzerrungen, der Zeit- und der Geschichtsvariablen.

Unter Beibehaltung der Lagrange-Beschreibung werden alle Gleichungen für die Referenzgeometrie beschrieben. Für die Ränder wird angenommen, dass  $\Gamma_\sigma^{(i)}$  und  $\Gamma_\varphi^{(i)}$  zeitunabhängig sind. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(i)} \cup \Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma_\varphi^{(i)} &= \partial\Omega^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \cap \Gamma_\sigma^{(i)} &= \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_\varphi^{(i)} = \Gamma_\varphi^{(i)} \cap \Gamma^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Definition der Randbedingungen erfolgt hier in einfacher Form mit (3.2)<sub>2,3</sub>.

### 3.1.3 Überführung in das Prinzip der virtuellen Arbeit

Die starke Form der Grundgleichungen (3.2) und (3.3) kann nun in die schwache Form überführt werden. Hierzu werden Konfigurationsräume  $\mathcal{C}_t^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  festgelegt, in denen die Lösung  $\varphi_t^{(i)}$  für jeden Zeitpunkt von  $t$  liegen muss. Diese Räume werden gegeben als

$$\mathcal{C}_t^{(i)} = \left\{ \varphi_t^{(i)} : \overline{\Omega}^{(i)} \rightarrow R^{n_{sd}} \mid J_t^{(i)} = \det[ D\varphi_t^{(i)} ] > 0 \text{ und } \varphi_t^{(i)}|_{\Gamma_\varphi^{(i)}} = \overline{\varphi}^{(i)}(t) \right\}. \quad (3.5)$$

Die Räume  $\mathcal{C}_t^{(i)}$  sind zeitabhängig, weil mögliche Verschiebungsrandbedingungen ebenfalls zeitabhängig sind. Es wird angenommen, dass  $\mathcal{C}_t^{(i)} \subset H^1(\Omega^{(i)})$  ist, wobei  $H^1$  einen Sobolev-Raum darstellt, bei dem alle Elemente und ihre Ableitungen integrierbar sind. Die zugehörigen Variationsräume  $\mathcal{V}^{(i)} \subset H^1(\Omega^{(i)})$  werden mit

$$\mathcal{V}^{(i)} = \left\{ \overset{*}{\varphi}^{(i)} : \overline{\Omega}^{(i)} \rightarrow R^{n_{sd}} \mid \overset{*}{\varphi}^{(i)} = 0 \text{ auf } \Gamma_\varphi^{(i)} \right\} \quad (3.6)$$

analog definiert. Die Räume  $\mathcal{V}^{(i)}$  sind nicht zeitabhängig.

Mit dem inneren Produkt aller  $\overset{*}{\varphi}^{(i)}$  von  $\mathcal{V}^{(i)}$  mit (3.2)<sub>1</sub> und nach Durchführung einer Integration über das Volumen sowie einer partiellen Integration wird die folgende schwache Form der Grundgleichung eines Körpers ( $i$ ) ermittelt:

$$\begin{aligned} G_{dyn}^{(i)}(\varphi_t^{(i)}, \overset{*}{\varphi}^{(i)}) &= \int_{\Omega^{(i)}} \rho_0^{(i)} \mathbf{A}_t^{(i)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(i)} d\Omega^{(i)} + \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{P}_t^{(i)} \cdot \text{GRAD}[\overset{*}{\varphi}^{(i)}] d\Omega^{(i)} \\ &- \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{f}_t^{(i)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(i)} d\Omega^{(i)} - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \overline{\mathbf{t}}_t^{(i)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(i)} d\Gamma_\sigma^{(i)} \\ &= \int_{\Gamma^{(i)}} \mathbf{t}_t^{(i)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(i)} d\Gamma^{(i)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sie gilt für alle  $\overset{*}{\varphi}^{(i)} \in \mathcal{V}^{(i)}$  und für alle  $t \in \mathfrak{N}$ . In dieser Gleichung (3.7) ist  $\mathbf{A}_t$  die materielle Beschleunigung oder die zweite Ableitung nach der Zeit der Bewegung  $\varphi^{(i)}$  zum Zeitpunkt  $t$ . Die Größe  $G_{dyn}^{(i)}(\varphi_t^{(i)}, \overset{*}{\varphi}^{(i)})$  stellt die Summe aus innerer Trägheitsarbeit, innerer virtueller Arbeit und virtueller Arbeit der aufgebrachten Kräfte und Verschiebungen dar. Sie steht im Gleichgewicht mit der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte auf dem Rand  $\Gamma^{(i)}$ .

Für einen möglichen Kontakt gilt es, ein globales Variationsprinzip für zwei Körper aufzustellen. Zur Vereinfachung werden die Bewegungen  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  zu  $\varphi$  zusammengefasst. Es soll folgende Vorschrift gelten:

$$\varphi : (\overline{\Omega}^{(1)} \cup \overline{\Omega}^{(2)}) \times \mathfrak{N} \rightarrow R^{n_{sd}} \quad (3.8)$$

Die Restriktionen von  $\varphi$  entweder zu  $\overline{\Omega}^{(1)}$  oder zu  $\overline{\Omega}^{(2)}$  ergeben dann  $\varphi^{(1)}$  sowie  $\varphi^{(2)}$ . Die Abbildungsfunktion  $\overset{*}{\varphi}$  mit den Variationsräumen  $\mathcal{C}_t$  und  $\mathcal{V}$  wird ebenfalls auf diese Weise zusammengefasst. Die Addition von Gleichung (3.7) für  $i = 1, 2$  führt zum folgenden globalen Variationsprinzip:

$$\begin{aligned} G_{dyn}(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) &= G_{dyn}^{(1)}(\varphi_t^{(1)}, \overset{*}{\varphi}^{(1)}) + G_{dyn}^{(2)}(\varphi_t^{(2)}, \overset{*}{\varphi}^{(2)}) \\ &= \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{t}_t^{(1)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(1)} d\Gamma^{(1)} + \int_{\Gamma^{(2)}} \mathbf{t}_t^{(2)} \cdot \overset{*}{\varphi}^{(2)} d\Gamma^{(2)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Gleichung (3.9) gilt für alle  $\overset{*}{\varphi} \in \mathcal{V}$  und für alle  $t \in \mathbb{N}$ . Sie führt nach der Diskretisierung zu dem zu lösenden globalen Gleichungssystem.

Die einzelnen Größen von  $G_{dyn}$  sind in den folgenden Kapiteln von sekundärem Interesse. Dagegen sind die durch Kontakt entstehenden Beiträge auf der rechten Seite der Gleichung zusammengefasst worden, sie stellen die virtuelle Kontaktarbeit dar und dienen als Ausgangspunkt für die in den nächsten Abschnitten benötigten Herleitungen.

## 3.2 Handhabung der Kontaktbedingungen

In diesem Abschnitt werden die Kontaktbedingungen mit Hilfe der eingeführten Notation zur Beschreibung des Kontinuums auf lokaler Ebene behandelt. Hierbei hat sich gezeigt, dass die grundlegende, nach Möglichkeit exakte Erörterung der geometrischen Struktur von LAURSEN & SIMO [1992] ein wesentlicher Baustein ist, da diese die Basis für das Aufstellen des Prinzips der virtuellen Kontaktarbeit und deren Linearisierung ist. Im nächsten Unterkapitel werden die hier hergeleiteten Bedingungen in das Prinzip der virtuellen Arbeiten in Gleichung (3.9) eingearbeitet.

### 3.2.1 Parametrisierung der Kontaktfläche

Bei der Handhabung einer Kontaktfläche wird eine aktive Kontaktzone, in der eine gegenseitige Berührung der Körper möglich wird, und eine inaktive Zone, in der die Körper getrennt bleiben, festgelegt. Die in Kapitel 3.1 definierten Oberflächen  $\gamma^{(i)}$  und  $\Gamma^{(i)}$  werden im Folgenden als aktive Kontaktflächen bezeichnet. Zur Beschreibung des Kontaktvorganges werden in der aktiven Kontaktzone parametrisierte Kontaktflächen in natürlicher Parameterdarstellung mit Gauß'schen Flächenparametern definiert. Dabei müssen die Oberflächenformen  $\Gamma^{(i)}$  und  $\gamma^{(i)}$  die notwendigen Bedingungen hinsichtlich Differenzierbarkeit, Konvexität und Stetigkeit erfüllen.

Jeder Körper erhält eine Abbildungsfunktion, die zur Beschreibung dieser Oberflächen dient. Es werden  $A^{(i)} \in R^{n_{sd}-1}$  und eine Abbildungsfunktion  $\Psi_t^{(i)}$  für jeden Körper ( $i$ ) definiert  $\Psi_t^{(i)} : A^{(i)} \rightarrow R^{n_{sd}-1}$ ,  $i = 1, 2$ . Daraus ergibt sich die Beschreibungsmöglichkeit der Flächen in der Referenzkonfiguration mit  $\Gamma^{(i)} = \Psi_0^{(i)}(A^{(i)})$ , und der Momentankonfiguration mit  $\gamma^{(i)} = \Psi_t^{(i)}(A^{(i)})$ .

Zur Erläuterung dient die Betrachtung der Oberfläche von Körper (2) in Abbildung 3.2. Materialpunkte einer Oberfläche  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  können mit dieser Beschreibung in der Referenz- oder der Momentankonfiguration durch  $\mathbf{Y} = \Psi_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$  und  $\mathbf{y} = \Psi_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$  für  $\boldsymbol{\xi} \in A^{(2)}$  identifiziert werden. Damit wird eine Möglichkeit geschaffen, Materialpunkte auf der aktiven Kontaktfläche eines Körpers zusätzlich in Abhängigkeit einer solchen Abbildungsfunktion auszudrücken. Diese Oberflächen existieren ebenfalls für Körper (1).

#### Lokale Basisvektoren

Auf der Oberfläche des Körpers (2),  $\Gamma^{(2)}$  in der Referenz- und  $\gamma^{(2)}$  in der Momentankonfiguration, lassen sich durch partielle Ableitungen der Abbildungsfunktionen  $\Psi_0^{(2)}$  und  $\Psi_t^{(2)}$  nach den einzelnen Komponenten  $\xi, \dots, \xi^{n_{sd}-1}$  von  $\boldsymbol{\xi} \in A^{(2)}$  parametrisierte Ebenen als Basen herleiten:

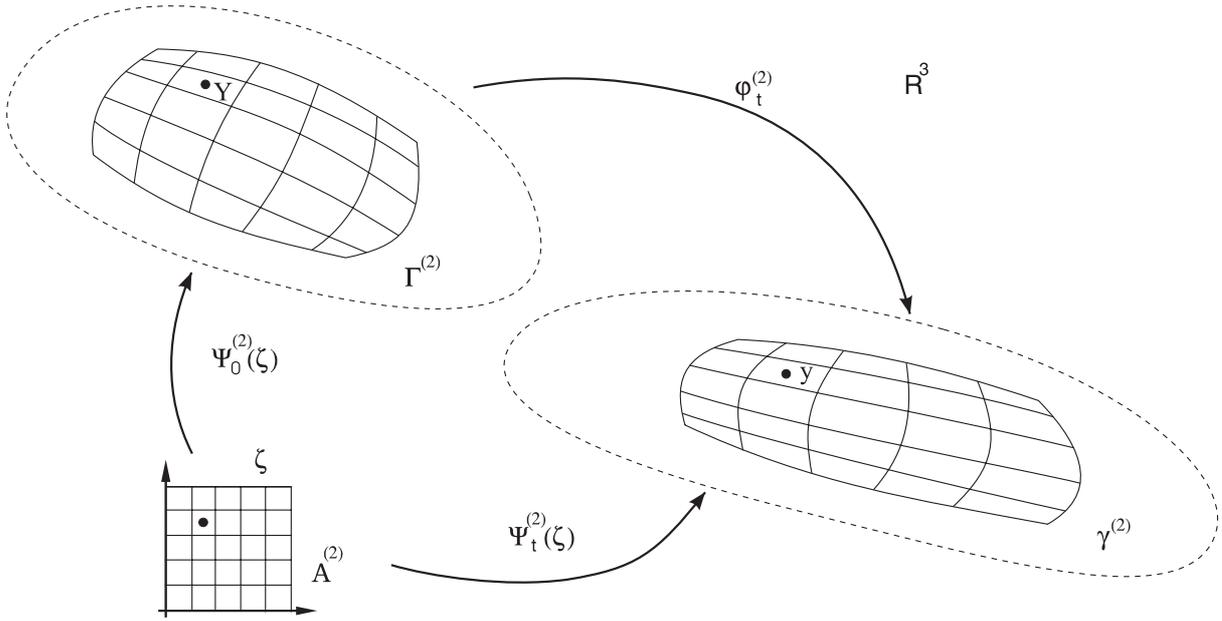


Abbildung 3.2: Parametrisierung der Kontaktfläche von Körper (2) in der Momentan- und Referenzkonfiguration.

$$\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}_{0,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{e}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}_{t,\alpha}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}_t^{(2)}(\boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\boldsymbol{\xi}))\mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \quad \alpha = 1, \dots, n_{sd} - 1 \quad (3.11)$$

Die Schreibweise der Ausdrücke  $(\cdot)_{,\alpha}$  bedeutet dabei die partielle Ableitung nach den natürlichen Parametern  $\xi^\alpha$ . Im Folgenden werden kleine griechische Indizes für Ausdrücke in den Basen benutzt, es gilt die Summenkonvention.  $\mathbf{F}_t^{(2)}$  ist der zu  $\boldsymbol{\varphi}_t^{(2)}$  gehörige Deformationsgradient.

Für die weitere Beschreibung wird die eine Oberfläche als Slave- und die andere als Masteroberfläche bezeichnet. Dieses Konzept stammt von HALLQUIST [1979] und ist heute noch das am meisten verbreitete. In diskretisierter Form führt es zu Knoten-Segment-Kontakt, so unter anderem bei JU & TAYLOR [1988], CURNIER & ALART [1988], WRIGGERS & MIEHE [1994] und SIMO & LAURSEN [1992].

Die Zuordnung von Slave- und Masteroberfläche ist im nichtdiskretisierten Kontinuum willkürlich. Gemäß der vorliegenden Notation wird  $\Gamma^{(2)}$  als Master- und  $\Gamma^{(1)}$  als Slaveoberfläche festgelegt. Befinden sich Materialpunkte der Slaveoberfläche in Kontakt mit der Masteroberfläche, dann wird eine Beschreibung der auftretenden Relativbewegung benötigt.

Voraussetzung zur Beschreibung dieser Relativbewegung von Materialpunkten zweier Körper ist die Erfassung einer Projektionsvorschrift, die zu jedem Zeitpunkt eine Abbildung zwischen Slavepunkt  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  und Masterpunkt  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  definiert. Diese Projektionsvorschrift in Verbindung mit einer Minimierung wurde erstmalig von SIMO & LAURSEN [1992] und WRIGGERS & MIEHE [1994] verwendet. Zu einer vollständigen mathematischen Beschreibung des Kontaktvorganges im Modellkontinuum gehört auch die Beschreibbarkeit von Zuständen, bei denen die in Kontakt tretenden Körper ineinander eindringen oder sich überlappen. Diese Fälle können im Zuge des Lösungsprozesses während der Gleichgewichtsiteration auftreten und werden im Folgenden als Penetration bezeichnet.

Ziel ist es nun, alle notwendigen Kontaktbedingungen durch Betrachtung eines Slavepunktes  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ , dessen aktuelle Position zum Zeitpunkt  $t \in \mathfrak{N}$ , durch  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t^{(1)}(\mathbf{X})$  gegeben ist, zu ermitteln. Die aktuelle Position für einen Masterpunkt  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  auf der gegenüberliegenden Oberfläche  $\Gamma^{(2)}$  wird durch  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}_t^{(2)}(\mathbf{Y})$  auf  $\gamma^{(2)}$  analog ausgedrückt. Da es als Ziel gilt, die Kontaktbedingungen durch Punkte von  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  ermitteln zu können, wird zu jedem Slavepunkt ein Punkt auf der Masteroberfläche gesucht, der den minimalen Abstand hat.

Mit Hilfe einer sich im Kontaktfall entwickelnden Abstandsfunktion wird eine lokale Basis eingeführt, die geeignet ist, die spezifischen Eigenschaften zu beschreiben:

$$|g(\mathbf{X}, t)| = \min \|\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}, t)\| \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{d\xi}|g(\mathbf{X}, t)| = 0 = - \frac{\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t))}{\|\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t))\|} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))$$

Aus der Forderung der Gleichung (3.12)<sub>2</sub> folgt, dass der Vektor  $\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  senkrecht auf dem Differenzvektor  $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t))$  stehen muss. Der bei der Erfüllung der Bedingung ermittelte Punkt  $\boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t))$  stellt dann die orthogonale Projektion von  $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X})$  auf die Masteroberfläche  $\gamma^{(2)}$  dar.

Damit ist gewährleistet, dass der Abstand des Slavepunktes zur Masteroberfläche ein Minimum annimmt, wie auch Abbildung 3.3 verdeutlicht. Größen, die durch diese Minimierung ermittelt werden, sind mit einem Querstrich ( $\bar{\cdot}$ ) gekennzeichnet. Zu jedem Zeitpunkt kann für jeden Materialpunkt  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  ein Punkt  $\mathbf{Y} \in \Gamma^{(2)}$  durch Minimierung von (3.12) ermittelt und anschließend als  $\overline{\mathbf{Y}}$  bezeichnet werden. Zur Verdeutlichung dient Abbildung 3.3.

Analog ergeben sich die Punkte  $\bar{\mathbf{y}}$  sowie  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ . Der Ausdruck  $(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t))$  hängt also von den Bewegungen beider Körper und nicht nur von  $\mathbf{X}$  ab. Man erhält aufgrund der eingeführten parametrisierten Oberfläche und der Projektion die folgenden Bedingungen:

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)) \quad (3.13)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Psi}_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)) \quad (3.14)$$

Zur Beschreibung der parametrisierten Kontaktfläche werden partielle Ableitungen dieser Abbildungsfunktionen als lokale Basis auf der Oberfläche des Körpers benötigt. Damit lassen sich Tangentialebenen bestimmen. Diese benötigte lokale Basis am ermittelten Masterpunkt ist durch die Parametrisierung der Basen in (3.10) und (3.11) sowie dem Punkt  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  gegeben. Für alle  $\alpha = 1, \dots, n_{sd} - 1$  gilt

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{E}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \bar{\mathbf{Y}}_{,\alpha} \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \quad (3.16)$$

Die Abhängigkeiten von  $\mathbf{T}_\alpha$  und  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  von  $\mathbf{X}$  und  $t$  existieren durch  $(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t))$ . Auf der Masteroberfläche werden am ermittelten Masterpunkt Normal- und Tangentialvektoren eingeführt. Im Fall von Kontakt erfolgt die Projektion eines Slavepunktes exakt auf die Masteroberfläche durch die vorgestellte Minimierung. Die Tangentenvektoren  $\mathbf{T}_\alpha$  und  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  beschreiben nun eine Basis, die am Punkt  $\mathbf{X}$  auf  $\Gamma^{(2)}$ , sowie am Punkt  $\mathbf{x}$  auf  $\gamma^{(2)}$  mitgeführt wird. Durch einen nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auf  $\gamma^{(2)}$  am Punkt  $(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t))$  wird die Tangentialbasis ergänzt. Im Zweidimensionalen lautet sie

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1}{\|\boldsymbol{\tau}_1\|} \quad (3.17)$$

mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{i}_3$ . Im Dreidimensionalen lautet sie

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|} \quad (3.18)$$

Dann sind die sich in Kontakt befindenden Materialpunkte auf der Oberfläche identisch mit denen, die durch die Abbildungsfunktion der parametrisierten Oberfläche beschrieben wurden.

### Geometrische Interpretation der Zwangsbedingung

Die im letzten Abschnitt gezeigte Projektion lässt sich zu einer Abstandsfunktion  $g(\mathbf{X}, t)$  als Minimalabstand von einem Slavepunkt zur Masterfläche mit einer speziellen Vorzeichendefinition erweitern. Mit der Beschreibung kann dann zwischen Separation (d. h. kein Kontakt), Kontakt und Penetration unterschieden werden. Diese Abstandsfunktion  $g(\mathbf{X}, t)$  wird für alle  $\mathbf{X}$  und für ein Abbildungspaar  $\varphi^{(1)}(\cdot, t)$ ,  $\varphi^{(2)}(\cdot, t)$  folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{X}, t) &= \text{sign}(g(\mathbf{X}, t)) |g(\mathbf{X}, t)| \\
 &\text{mit} \\
 |g(\mathbf{X}, t)| &= \min \|\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \varphi_t^{(2)}(\mathbf{Y}, t)\|, \\
 &\text{und} \\
 \text{sign}(\mathbf{X}, t) &= \begin{cases} -1 & \text{wenn } \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X}, t) \text{ erlaubt (physikalisch möglich)} \\ 1 & \text{nicht erlaubt, Penetration} \end{cases} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Für jeden Zeitpunkt  $t$  kann  $g(\mathbf{X}, t)$  als Wert des Minimalabstandes von  $\mathbf{x} = \varphi_t^{(1)}(\mathbf{X})$  zu  $\gamma^{(2)}$  definiert werden, wie in der Abbildung 3.3 anschaulich demonstriert wird. Das Vorzeichen von  $g$  wird durch die Signum-Funktion bestimmt. Der Wert dieser Funktion ist, wie man auch aus der Abbildung 3.3 erkennt, wiederum von der Position von  $\varphi_t^{(1)}(\mathbf{X})$  abhängig.

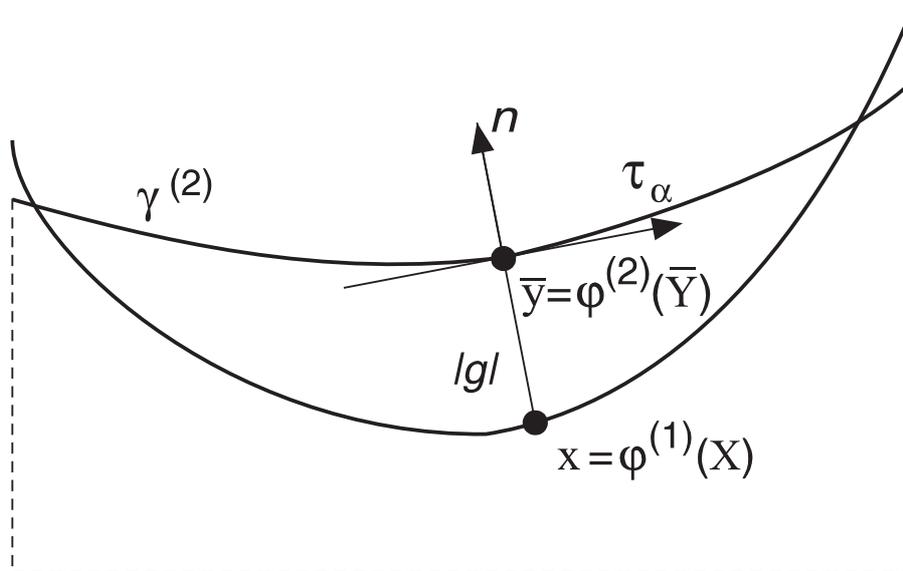


Abbildung 3.3: Schematische Definition der  $g$ -Funktion auf dem Masterkörper.

Nach durchgeführter Minimierung ergibt sich die Abstandsfunktion  $g$  in Abhängigkeit von  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  mit

$$g = -[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \mathbf{n} . \quad (3.20)$$

Der Wert der Abstandsfunktion ist negativ, wenn die beiden Körper getrennt sind. Er ist gleich null, wenn sich die Körper am Slave- und Masterpunkt berühren. Ist der Wert der Abstandsfunktion positiv, dann ist der Slavepunkt in den Masterkörper eingedrungen:

$$g(\mathbf{X}, t) \begin{cases} < 0 : \text{Separation} \\ = 0 : \text{Kontakt} \\ > 0 : \text{Penetration} \end{cases} \quad (3.21)$$

Im Rahmen der kinematischen Zwangsbedingung ist keine Penetration erlaubt. Die lokale kinematische Zwangsbedingung fordert, dass während der Bewegung der beiden Körper zu keinem Zeitpunkt Eindringung bzw. Penetration stattfinden darf. Als analoge Bezeichnung kann der Begriff der Inpenetration eingeführt werden. Diese Bedingung (3.21) für  $\mathbf{X}$ , relativ zur Masteroberfläche, wird durch

$$g(\mathbf{X}, t) \leq 0 \quad (3.22)$$

ausgedrückt. Anschaulich ist diese Bedingung eng mit dem Konzept des Minimalabstandes verknüpft.

Anhand der Abbildung 3.3 kann eine Interpretation gegeben werden. Denn für den Fall, dass die Bedingung (3.19) verletzt wird, kann bei der dann auftretenden Penetration der Slavepunkt auf die Oberfläche der Masterfläche projiziert werden. Die Größe von  $g$  wird durch die physikalische Länge der Rückprojektion von  $\mathbf{x}$  auf die erlaubte Region  $\gamma^{(2)}$  bestimmt. Durch diese Minimierung von  $g$  auf die Masteroberfläche erfolgt die Projektion eines Slavepunktes auf die Position, an der auf der Masteroberfläche Normal- und Tangentialvektoren eingeführt wurden.

Das Prinzip der Minimalabstandsfunktion ist in vielen Algorithmen implizit aufgrund der Diskretisierung mit linearen Elementen enthalten, so bei WRIGGERS & SIMO [1985], PARISCH [1985] und HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON [1985]. Der hier dargestellte Ansatz ist grundlegend für das weitere Vorgehen zur Definition der Kontaktkinematik.

### Definition der Kontaktspannungen

Ausgehend von den nominalen Piola–Kirchhoff’schen Spannungen am Slavepunkt  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  wird die Spannung mit den definierten Normal- und Tangentialvektoren in räumlicher Konfiguration durch

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}_0^{(1)}(\mathbf{X}) \quad (3.23)$$

definiert.  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{n}_0$  wurden in Gleichung (3.2) auf den Punkt  $\mathbf{X}$  bezogen definiert. Die Spannung kann wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = t_N(\mathbf{X}, t)\mathbf{n} + \mathcal{P}_n \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \quad (3.24)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}$  die negative nach außen zeigende Normale von  $\gamma^{(1)}$  in der räumlichen Konfiguration.  $\mathcal{P}_n \mathbf{t}^{(1)}$  ist die Projektion von  $\mathbf{t}^{(1)}$  auf die zugehörige Tangentialebene. Da die negative nach außen zeigende Normale zur Definition der Kontaktkraft  $t_N$  benutzt wird, ist der Wert der Druckspannung am Punkt  $\mathbf{X}$  positiv.

### Kuhn–Tucker–Bedingungen

Mit Hilfe der kinematischen Zwangsbedingung und der eingeführten Kontaktspannung können die vier sogenannten Kuhn–Tucker–Bedingungen für den Normalkontakt festgelegt werden:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}, t) &\leq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) g(\mathbf{X}, t) &= 0 \\ t_N(\mathbf{X}, t) \dot{g}(\mathbf{X}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Gleichungen (3.25)<sub>1–3</sub> stellen die Inpenetrationsbedingung, die Druckkraftbedingung und die Bedingung dar, dass der Druck nur ungleich null sein darf, wenn  $g = 0$  ist, also wenn Kontakt auftritt. Die vierte Bedingung von Gleichung (3.25)<sub>4</sub> ist die Konsistenzbedingung. Sie besagt, dass, wenn die Kontaktkraft ungleich null ist, die zeitliche Ableitung des Abstandes vom Slavepunkt  $\mathbf{X}$  und dem zugehörigen Masterpunkt  $\bar{\mathbf{Y}}$  gleich null sein muss. Diese Bedingung wird bei der Herleitung der Reibungs kinematik eine wesentliche Grundlage sein.

### 3.2.2 Reibungsbedingte Kontaktbedingung in tangentialer Richtung

In diesem Abschnitt werden die Kontaktbedingungen in tangentialer Richtung eingeführt. Das Reibverhalten wurde in Kapitel 2 ausführlich betrachtet. Dabei wurde ein mögliches Reibgesetz als komplexes, von mehreren Parametern abhängiges Oberflächenstoffgesetz vorgestellt. Das einparametrische, lineare Reibgesetz von Coulomb ist als einfachste Form zur Beschreibung der numerischen Grundlagen ausreichend.

#### Reibungskinematik: die Relativgeschwindigkeit

Die vierte der im letzten Abschnitt definierten Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.25)<sub>4</sub> wird genutzt, um die Relativgeschwindigkeit herzuleiten. Diese Bedingung besagt, dass die zeitliche Ableitung der Relativbewegung zwischen Master– und Slavepunkt gleich null sein muss:  $\dot{g}(\mathbf{X}, t) = 0$  mit durch  $t_N(\mathbf{X}, t) \neq 0$  vorausgesetztem Kontakt. Diese Forderung kann als die zu null gesetzte zeitliche Ableitung der Relativbewegung zwischen  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  und  $\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)$  ausgedrückt werden:

$$0 = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)] \quad (3.26)$$

Die Errechnung dieser zeitlichen Ableitung einschließlich Anwendung der Kettenregel, siehe Anhang A A.2, führt zu :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{F}_t^{(2)}(\boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \frac{d}{dt}[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)] \quad (3.27)$$

Die linke Seite der Gleichung (3.27) stellt die Differenz zwischen den Geschwindigkeiten von  $\mathbf{X}$  und  $\bar{\mathbf{Y}}$  in der Momentankonfiguration dar. Sie kann physikalisch als Gleitrate von  $\mathbf{X}$  relativ zur anliegenden Oberfläche  $\gamma^{(2)} = \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\Gamma^{(2)})$  interpretiert werden. Zum weiteren Verständnis dient die Abbildung 3.4. Der Term auf der rechten Seite stellt eine geometrische Größe dar, die sich als grundlegend für das weitere Vorgehen herausstellen wird. Für die Referenzkonfiguration kann durch diesen Term die Relativgeschwindigkeit definiert werden:

$$\mathbf{V}_T(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt}[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)] = \bar{\xi}^\alpha(\mathbf{X}, t)\mathbf{T}_\alpha \quad (3.28)$$

Mathematisch betrachtet repräsentiert  $\mathbf{V}_T(\mathbf{X}, t)$  die Relativgeschwindigkeit in der lokalen, mitgeführten Beschreibung, bezogen auf die Basis der Gleichung (3.15). Die lokale Relativgeschwindigkeit hat keine Komponenten in Normalenrichtung, weil zu Beginn die Annahme  $\dot{g} = 0$  getroffen wurde.

Für das weitere Vorgehen hat es sich als hilfreich erwiesen, bei  $\mathbf{V}_T$  und anderen Größen mit Hilfe von Metrikkoeffizienten einen Basiswechsel von ko- zu kontravariant

vornehmen zu können. Duale Basisvektoren  $\mathbf{T}^\beta$  werden folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{T}^\beta \cdot \mathbf{T}_\alpha = \delta_\alpha^\beta \quad (3.29)$$

Analog dazu definiert sich  $\boldsymbol{\tau}^\beta$ . Eine Metrik kann als

$$M_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta \quad (3.30)$$

ausgedrückt werden, dazu passend wird  $m_{\alpha\beta}$  in der Momentankonfiguration definiert. Die inversen Metrikoperatoren  $M^{\alpha\beta}$  und  $m^{\alpha\beta}$  ergeben sich entsprechend.

Anschließend folgt die Definition der zu  $\mathbf{V}_T$  dualen Größe in der kontravarianten Basis mit entsprechendem Metrikoeffizienten:

$$\mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t) = M_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta(\mathbf{X}, t) \mathbf{T}^\alpha \quad (3.31)$$

### Relative Geschwindigkeit in Momentankonfiguration

Um das Coulomb'sche Reibgesetz in der Momentankonfiguration benutzen zu können, ist dort eine entsprechende Aussage über die Gleitgeschwindigkeit notwendig. Diese ergibt sich aus der Gleichung (3.27), die aussagt, dass die Differenz der Geschwindigkeiten bei  $\mathbf{X}$  und  $\bar{\mathbf{Y}}$  tatsächlich gleich dem 'push-forward' der mitgeführten Größe  $\mathbf{V}_T$  von  $\mathbf{F}_t^{(2)}$  ist. Diese Größe wird in der Momentankonfiguration als

$$\boldsymbol{v}_T(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}_t^{(2)}(\Psi_0^{(2)}(\bar{\xi})) \mathbf{V}_T(\mathbf{X}, t) = \dot{\bar{\xi}}^\alpha(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (3.32)$$

definiert, siehe auch Abbildung 3.4. Analog ergibt sich in der hierzu dualen Basis:

$$\boldsymbol{v}_T^b(\mathbf{X}, t) = m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (3.33)$$

Diese Geschwindigkeit ist nicht gleich  $\mathbf{V}_T^b(\mathbf{X}, t)$ , da die Metrikoeffizienten in den Momentan- und Referenzkonfigurationen unterschiedlich sind. Nur wenn  $\Gamma^{(2)}$  starr ist, sodass keine Änderung der Metrik auftritt, sind die Geschwindigkeiten identisch.

### Formulierung der Coulomb'schen Reibung

Die Reibkraft  $\mathcal{P}_n \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  aus Gleichung (3.24) kann ebenfalls in der momentanen Konfiguration und mit Hilfe der dualen Basis ausgedrückt werden:

$$\mathbf{t}_T^b(\mathbf{X}, t) = -\mathcal{P}_n \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{t}_{T_\alpha}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (3.34)$$

Durch die Wahl des Vorzeichens bei der Definition von  $\mathbf{t}_T^b$  ist sichergestellt, dass die Relativbewegung in gleicher Richtung erfolgt wie die Reibkraft.

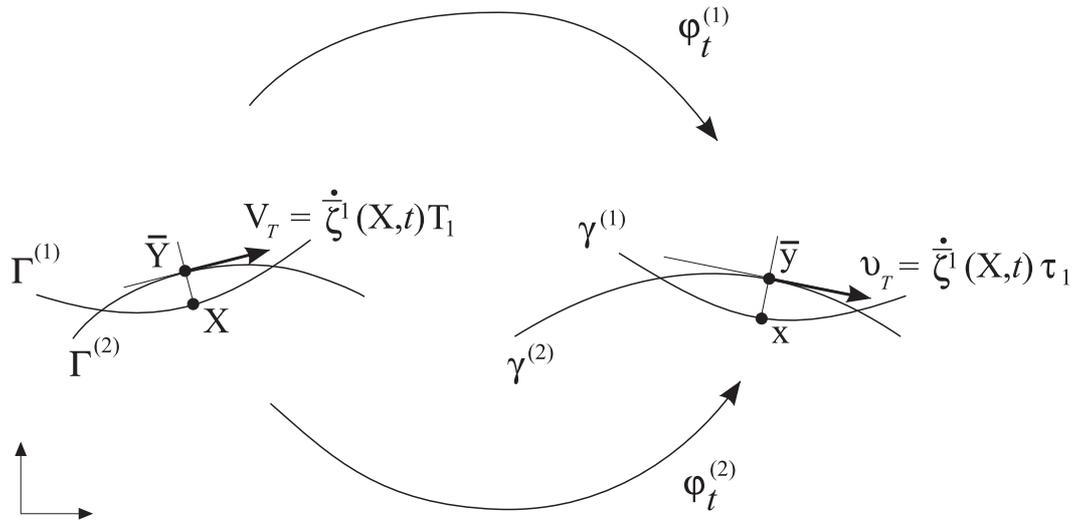


Abbildung 3.4: Tangentialgeschwindigkeit des Masterpunktes in der Referenz- und der Momentankonfiguration.

### Kuhn–Tucker–Bedingungen für Reibung

Die Gleichungen (3.33) und (3.34) werden benutzt, um die Kuhn–Tucker–Bedingungen in tangentialer Richtung für Reibung aufzustellen.

$$\begin{aligned}
 f &= \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \\
 \mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} &= 0 \\
 \zeta &\geq 0 \\
 \zeta f &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Die erste Bedingung verlangt, dass die Größe der Reibkraft kleiner oder gleich dem Produkt aus Reibbeiwert  $\mu$  und Normalkraft sein muss. Entsprechend der Analogie zur Elastoplastizität kann  $f$  als Gleitfläche des Coulomb'schen Reibgesetzes interpretiert werden. Die mittleren beiden Bedingungen sagen aus, dass sämtliche Relativbewegungen in den gleichen Richtungen verlaufen wie die Reibkraft. SCHERF [1998] führt diese Bedingung mit Hilfe der maximalen Dissipationsleistung aus der erweiterten Bilanzgleichung ein. Die vierte Gleichung besagt, dass die Tangentialbewegung nur durch Gleiten mit  $\zeta \geq 0$ , also wenn  $\|\mathbf{t}_T^b\| = \mu t_N$  ist, auftreten kann.

### 3.2.3 Zusammenfassung der Kontaktbedingungen

Kontaktbedingungen in Normalenrichtung:

$$g(\mathbf{X}, t) \leq 0 \quad (3.36)$$

$$t_N(\mathbf{X}, t) \geq 0 \quad (3.37)$$

$$t_N(\mathbf{X}, t) g(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (3.38)$$

$$t_N(\mathbf{X}, t) \dot{g}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (3.39)$$

Kontaktbedingungen für Coulomb'sche Reibung

in der Momentankonfiguration:

$$f = \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \quad (3.40)$$

$$\mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 0 \quad (3.41)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.42)$$

$$\zeta f = 0 \quad (3.43)$$

### 3.2.4 Regularisierung der Kontaktbedingungen mit Penaltyfaktoren

Bei der Herleitung des globalen Variationsprinzips für das Kontaktproblem kommt es durch die Kontaktbedingungen (3.36)–(3.43), die zusätzliche Einschränkungen auflegen, zu einer Variationsungleichung. Im Zuge der numerischen Lösung eines solchen Randwertproblems wird diese Ungleichung in eine äquivalente Gleichung umgeformt. Dies führt dann zu einem Gleichungssystem, welches mit den herkömmlichen Techniken lösbar ist. Im Allgemeinen geschieht dies, wie in Kapitel 1 beschrieben wurde, durch die Penaltyregularisierung oder durch die Einführung von Lagrange-Multiplikatoren. Die erste Lösung hat den Vorteil, dass keine zusätzlichen Variablen eingeführt werden müssen. Außerdem sind die entstehenden Gleichungen physikalisch interpretierbar. Typische Besonderheiten bei Kontaktproblemen, wie lokale Ablösungen und Haft–Gleitübergänge, sind, wie noch gezeigt wird, mit der Penaltyregularisierung einfacher zu handhaben.

Durch die Penaltyregularisierung werden die Reibungsbedingungen, die in (3.40)–(3.43) dargestellt und analog zu den Gleichungen der starren Plastizität sind, zu Gleichungen umgeformt, die dem elastoplastischen Verhalten entsprechen. Diese Regularisierung wurde auch von MICHALOWSKI & MROZ [1978], GIANNAKOPOULOS [1989], CURNIER & ALART [1988] sowie WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] durchgeführt. SCHERF [1998] begründet die Lockerung der Kontaktbedingungen im Verlaufe der Regularisierung mit konstitutiven Beziehungen auf der Oberfläche. Er verweist zur Begründung von Penetration und Mikroverschiebung im Haftbereich auf mikromechanische Effekte. Dagegen führen LAURSEN [1992] und andere die Regularisierung ohne physikalische Interpretation als Lockerung oder Aufweichung der kinematischen Zwangsbedingungen ein. Dabei müssen Penetration in Normalenrichtung und Haftverschiebung in tangentialer Richtung bei der numerischen Umsetzung prinzipiell als unbedeutende Verletzung akzeptiert werden. Diese Verletzungen der Kontaktbedingungen sind möglichst klein zu halten. Diese Nachteile des Penalty-Verfahrens motivieren die Einführung des Augmented–Lagrange–Verfahrens.

Im folgenden Abschnitt wird die Regularisierung auf lokaler Ebene eingeführt. Die entstehenden Ausdrücke können dann direkt in das globale Variationsprinzip integriert werden.

### Regularisierung des Normalkontaktes

Die Regularisierung der Kuhn–Tucker–Bedingungen für Normalkontakt und Reibung erfolgt durch Penaltyfaktoren. Die Bedingungen (3.36)–(3.39) für Normalkontakt können durch folgende Gleichung ersetzt werden:

$$t_N = \epsilon_N g^+ \quad (3.44)$$

Hierbei bildet  $(\cdot)^+$  nur den positiven Teil des Operanden ab, der negative Teil wird zu null gesetzt.  $\epsilon_N$  ist der Penaltyfaktor in Normalenrichtung. Die Regularisierung wird schematisch in Abbildung 3.5 gezeigt. Im zulässigen Bereich für  $g \leq 0$  existiert keine Kontaktkraft, für  $g > 0$  existiert eine Kraft mit einer Proportionalität zwischen  $g$  und  $t_N$ . Ein Vergleich der Gleichung (3.44) mit den Bedingungen (3.36)–(3.39) zeigt, dass trotz Einführung des Penaltyfaktors die Lösung exakt wird, wenn dieser Faktor gegen unendlich geht:  $\epsilon_N \rightarrow \infty$ . Andernfalls entstehen durch die Lockerung der Bedingung Kräfte  $t_N$  für den Bereich  $g > 0$ . Ziel ist es, diese Verletzung durch möglichst hohe Werte für den Penaltyfaktor so gering wie möglich zu halten.

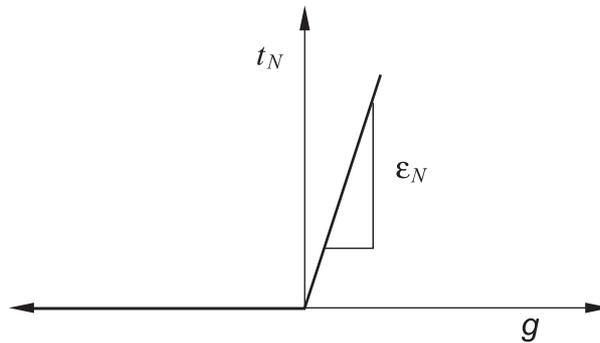


Abbildung 3.5: Regularisierung des Normalkontaktes: 'Lockerung' der Bedingung durch Einführung eines Penaltyfaktors.

Anhand der Abbildung 3.5 und der Kuhn–Tucker–Bedingungen ergeben sich graphische Interpretationsmöglichkeiten. Die nicht regularisierte, erlaubte Region für Paare von  $(g, t_N)$  liegt ausschließlich auf der negativen Seite von der  $g$ -Achse und der positiven Hälfte der  $t_N$ -Achse. Die Regularisierung führt zu einer Erweiterung der zulässigen Region. Dies geschieht mit Hilfe einer Linie, die im Ursprung beginnt und mit einer Steigung von  $\epsilon_N$  auf der positiven Halbachse der  $t_N$ -Achse ansteigt. Diese Linie würde mit  $\epsilon_N \rightarrow \infty$  in die positive  $t_N$ -Achse zur exakten Lösung übergehen.

Eine für das weitere Vorgehen wesentliche Tatsache ist, dass die Normalkraft  $t_N$  nun durch die Definition in Gleichung (3.44) ausschließlich von  $g$  abhängt. Die Abstandsfunktion  $g$  lässt sich wiederum aus dem Verformungszustand bestimmen. Somit kann die Kontaktkraft über die Verschiebungen bestimmt werden.

### Regularisierung der Reibung

Die Regularisierung der Reibungsbedingungen (3.40)–(3.43) wird in der Momentankonfiguration durchgeführt. Dieser Vorgang wird mit Hilfe der Einführung der Zeitableitung für die Reibkraft erreicht. Sie wird als Lie–Ableitung für die Reibkraft, bezogen auf die lokale Basis definiert:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{t}_T^b = \dot{t}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha \quad (3.45)$$

Physikalisch gesehen, gibt diese Gleichung die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{t}_T^b$ , aus der Sicht eines Betrachters an, der auf der lokalen Basis  $\boldsymbol{\tau}^\alpha$  in der Momentankonfiguration steht. Diese Lie–Ableitung  $\mathcal{L}_v \mathbf{t}_T^b$  ist in Hinblick auf die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_T^b$  durchgeführt worden, die ebenfalls auf die lokale Basis in der Momentankonfiguration bezogen ist. Die Darstellung der regularisierten Bedingungen erfolgt in Vektor– und Komponentenform:

### Regularisierung in Vektorform

Nach Einführung des Penaltyfaktors  $\epsilon_T$  in tangentialer Richtung kann die regularisierte Form der Reibungsbedingungen in momentaner Konfiguration folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} f &= \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \\ \mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} &= \frac{1}{\epsilon_T} \mathcal{L}_v \mathbf{t}_T^b \\ \zeta &\geq 0 \\ \zeta f &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Der einzige Unterschied zwischen den Gleichungen (3.40)–(3.43) und (3.46) findet sich in der zweiten Bedingung, in der die Null durch die Lie–Ableitung  $\mathcal{L}_v \mathbf{t}_T^b$  und  $\epsilon_T$  ersetzt worden ist. Analog zur umgeformten Kontaktbedingung in Normalenrichtung wird die Lösung exakt, wenn der Penaltyfaktor gegen unendlich geht:  $\epsilon_T \rightarrow \infty$ .

Abbildung 3.6 illustriert die Penaltyeinführung. Die tangentiale Verschiebung ist auf der Abszisse und die Reibkraft  $t_T$  auf der Ordinate dargestellt. Ohne Einführung der Penaltyfaktoren darf, im Falle von Haften, d. h. wenn  $|t_T| < \mu t_N$  ist, keine tangentiale Verschiebung auftreten. Nach Einführung der Penaltyfaktoren wird ein Weg in diesem Haftbereich zugelassen. Beim Haften ist die Kraft proportional zum Gleitweg  $|t_T| = \epsilon_T u_T$ . Damit ist analog zur Normalenrichtung nun auch in tangentialer Richtung die Kraft durch die Verformung steuerbar.

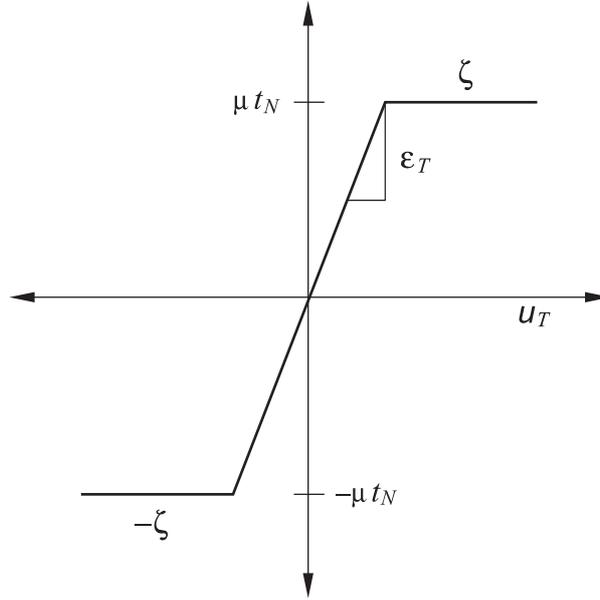


Abbildung 3.6: Regularisierung der Reibung: 'Lockerung' der Bedingung durch Einführung des Penaltyfaktors.

### Regularisierung in Komponentenform

Die Bedingungen (3.46) werden für die in Kapitel 3.4 durchzuführende Zeitintegration in Komponentenform dargestellt. In der Momentankonfiguration beziehen sich die lokalen Bedingungen auf die  $\tau^\alpha$  Basis:

$$\begin{aligned}
 f &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \\
 m_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \zeta \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} &= \frac{1}{\epsilon_T} \dot{t}_{T_\alpha} \\
 \zeta &\geq 0 \\
 \zeta f &= 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

### 3.2.5 Zusammenfassung der Penaltyregularisierung

Es folgt die Darstellung der lokalen Kontaktbedingungen für die Normalen- und Tangentialrichtung nach Einführung der Penaltyfaktoren.

**Penaltyregularisierte Kontaktbedingungen in Normalenrichtung:**

$$t_N = \epsilon_N g^+ \quad (3.48)$$

**Penaltyregularisierte Kontaktbedingungen für Coulomb'sche Reibung in Komponentenform** in der Momentankonfiguration:

$$f = [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \quad (3.49)$$

$$m_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \zeta \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} = \frac{1}{\epsilon_T} \dot{t}_{T_\alpha} \quad (3.50)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.51)$$

$$\zeta f = 0 \quad (3.52)$$

### 3.3 Virtuelle Arbeit im Kontaktbereich und Linearisierung

In diesem Abschnitt werden die lokalen Kontaktgleichungen von Kapitel 3.2 mit den globalen Variationsprinzipien aus Kapitel 3.1 verbunden. Die lokalen Gleichungen und zugehörigen kinematischen Größen werden soweit integriert, dass man einen kompakten, aber geometrisch exakten Ausdruck der virtuellen Arbeit erhält. Nach diesem Schritt erfolgt die komplette Linearisierung der Theorie, die für die implizite Lösung des nichtlinearen globalen Gleichungssystems mit der Newton–Raphson–Technik notwendig ist. Die meisten Linearisierungen von Kontaktproblemen wurden in bereits diskretisierter Form durchgeführt, so von WRIGGERS & SIMO [1985], JU & TAYLOR [1988], PARISH [1989], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990]. Im Gegensatz dazu wurde die Linearisierung am Kontinuum erstmalig von LAURSEN & SIMO [1993] ohne Beachtung einer räumlichen Diskretisierung durchgeführt. Die Form der Darstellung ist aufwendig, doch um Missverständnissen oder erneuten Diskussionen, wie von SCHERF [1998] vorzubeugen, wird hier ebenfalls die aufwendige Form gewählt. Außerdem werden die einzelnen Schritte der Herleitungen ausführlich in Anhang A dargestellt.

#### 3.3.1 Das Integral der virtuellen Kontaktarbeit

Der Ausdruck der Kontaktarbeit wurde mit Termen der materiellen Variation beschrieben. Im Folgenden werden die Anteile näher betrachtet, die in Gleichung (3.9) auf der rechten Seite stehen. Befinden sich zwei Körper in Kontakt, dann kann die nicht diskretisierte Modelloberfläche wie folgt beschrieben werden:

$$G_c(\varphi_t, \dot{\varphi}) = - \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{t}_t^{(1)} \cdot \dot{\varphi}^{(1)} d\Gamma^{(1)} - \int_{\Gamma^{(2)}} \mathbf{t}_t^{(2)} \cdot \dot{\varphi}^{(2)} d\Gamma^{(2)} \quad (3.53)$$

Zusammen mit dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt sich dann:

$$G_{dyn}(\varphi_t, \dot{\varphi}) + G_c(\varphi_t, \dot{\varphi}) = 0 \quad (3.54)$$

Der Ausdruck  $G_c$  besitzt zwei Integrale, von denen jedes über eine der beiden sich gegenüberliegenden Kontaktflächen verläuft. Im vorhergehenden Kapitel wurden alle Größen durch  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  parametrisiert, deshalb wird  $G_c$  nun in ein Integral überführt, welches ausschließlich von  $\Gamma^{(1)}$  abhängt. Dieses wird durch die Annahme erreicht, dass die Kontaktkraft auf Körper (2) bei  $\bar{\mathbf{Y}} \in \Gamma^{(2)}$  gleich derjenigen auf der gegenüberliegenden Seite auf Körper (1) bei  $\mathbf{X}$  ist:

$$\mathbf{t}_t^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))d\Gamma^{(2)} = - \mathbf{t}_t^{(1)}(\mathbf{X})d\Gamma^{(1)} \quad (3.55)$$

Daraus ergibt sich, dass auf allen Flächen, bei denen Kontakt bei einem gegebenen  $\Gamma^{(2)}$  auftritt, dies durch die Identifikation des Punktes  $\bar{\mathbf{Y}} \in \Gamma^{(2)}$  durch den Punkt  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  geschieht. Mit dieser Aussage aus Gleichung (3.55) wird eine Vereinfachung der Kontaktbedingungen von Gleichung (3.54) folgendermaßen ermöglicht:

$$G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) = - \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{t}_t^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] d\Gamma^{(1)} \quad (3.56)$$

Diese Gleichung kann, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, mit Hilfe der linearisierten Variation der Kontaktkinematik weiter vereinfacht werden.

### 3.3.2 Linearisierung der Kontaktkinematik

Für die Betrachtung der schwachen Form des Anfangs- und Randwertproblems aus Gleichung (3.2) und (3.3) wurden in Kapitel 3.1 Test-Funktionen  $\overset{*}{\varphi}^{(i)} \in \mathcal{V}^{(i)}$  für jeden Körper eingeführt. Elemente dieser Räume  $\mathcal{V}^{(i)}$  müssen ausreichend oft differenzierbar sein und auf dem Rand  $\Gamma_{\varphi^{(i)}}$  verschwinden, d. h. gleich null sein. Restriktionen dieser Räume durch die Kontaktbedingungen wurden anschließend im Zuge der Regularisierungen wieder gelockert. Auch der Ausdruck der virtuellen Kontaktarbeit  $G_c$ , dargestellt in Gleichung (3.56), wurde mit Termen der materiellen Variation  $\overset{*}{\varphi} \in \mathcal{V}$  dargestellt.

In Hinblick auf die rechnerische Lösung eines Kontaktproblems stellt es sich aber als sinnvoll heraus, dass  $G_c$  mit Hilfe von Richtungsableitungen der lokalen Kontaktkinematik ausgedrückt wird. Diese werden wiederum mit Hilfe der Deformation  $\varphi$  und der materiellen Variation  $\overset{*}{\varphi}$  ausgedrückt.

#### Bildung von Richtungsableitungen

Zur Ermittlung der gewünschten Richtungsableitung betrachtet man die folgenden Linearkombinationen von:

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon^{(1)} &= \varphi^{(1)} + \epsilon \overset{*}{\varphi}^{(1)} \\ \varphi_\epsilon^{(2)} &= \varphi^{(2)} + \epsilon \overset{*}{\varphi}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Für eine Größe  $\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ , gegeben für alle  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$ , ergibt sich mit Hilfe der folgenden Notation die linearisierte Variation  $\delta\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  für die Richtungsableitung:

$$\delta\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \beta(\mathbf{X}; \varphi_\epsilon^{(1)}, \varphi_\epsilon^{(2)}) \quad (3.58)$$

Die Ermittlung der Variationen  $\delta$  von  $g$  und  $\bar{\xi}^\beta$ , die in Kapitel 3.2 definiert wurden, führt zu der erwünschten Vereinfachung der Gleichung (3.56).

### Linearisierte Kinematik

Mit diesem Verfahren zur Ermittlung der Richtungsableitungen werden die ersten Variationen der Abstandsfunktion und des Tangentialweges in der materiellen Beschreibung durchgeführt. Details zur Herleitung befinden sich in Anhang A A.3 . Die Größe  $\delta g$  ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned}
\delta g &= \delta \{ -[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \mathbf{n} \} \\
&= \delta \{ \text{sign}(g) \|\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\| \} \\
&= \frac{\text{sign}(g)}{|g|} [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\beta] \\
&= -\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad . \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Wie zuvor laufen die Indizes  $\alpha, \beta, \gamma$  zwischen 1 und  $n_{sd} - 1$ . Beachtet werden sollte in Gleichung (3.59)<sub>3</sub>, dass der Term  $\delta \bar{\xi}^\beta$  erscheint. Er kann jedoch entfallen, da  $\mathbf{n}$  und  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  orthogonal sind.

Die Größe  $\bar{\xi}$  kann man nicht explizit über Gleichungen der Deformationen erhalten. Deshalb ist eine implizite Errechnung von  $\delta \bar{\xi}_\alpha$  notwendig. Hierzu betrachtet man folgende Gleichung:

$$[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \quad (3.60)$$

Sie gilt, da  $\boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  eine Projektion von  $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X})$  auf  $\gamma^{(2)}$  ist.

Nach Ermittlung der Richtungsableitung von Gleichung (3.60) erhält man

$$0 = [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha - g \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta] \quad . \quad (3.61)$$

Details hierzu findet man in Anhang A A.4 . Nach einer Umformung ergibt sich

$$A_{\alpha\beta} \delta \bar{\xi}^\beta = [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha - g \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (3.62)$$

mit

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \quad . \quad (3.63)$$

Die Bestimmung von  $\delta \bar{\xi}^\beta$  erfordert noch die Ermittlung von  $\mathbf{A}$ : Im Dreidimensionalen ergibt sich  $\mathbf{A}$  durch Errechnung einer Matrix, im Zweidimensionalen ist  $A_{11}$  eine skalare Größe. Setzt man den Abstand  $g = 0$  und nutzt die Beziehung  $\boldsymbol{\tau}^\beta = m^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_\alpha$ , dann vereinfacht sich die Gleichung (3.62) zu

$$\delta \bar{\xi}^\beta = \boldsymbol{\tau}^\beta \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{wenn } g = 0) \quad . \quad (3.64)$$

### 3.3.3 Virtuelle Kontaktarbeit in lokaler Form

Die Kontaktkraft  $\mathbf{t}_t^{(1)}(\mathbf{X})$  im Integral der Kontaktarbeit aus Gleichung (3.56) kann mit Hilfe der Gleichungen (3.24) und (3.34) in Komponenten normal und tangential zur Kontaktfläche dargestellt werden:

$$G_c(\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}) = - \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \mathbf{n} - t_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha] \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] d\Gamma^{(1)} \quad (3.65)$$

Mit den ermittelten Ausdrücken der linearisierten Kontaktkinematik (3.59) und (3.64) wird Gleichung (3.65) zu der folgenden Form, die nur von lokalen Größen abhängt, umgewandelt:

$$G_c(\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} \quad (3.66)$$

Die Herleitung zu dieser Form ist nur durch die Einführung der geometrischen Beschreibung der Kontaktbedingungen im vorhergehenden Abschnitt möglich. Die Kontaktkräfte selbst können durch die Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.48)–(3.51) bestimmt werden. Gleichung (3.66) ist nur für den nicht penaltyregularisierten Fall uneingeschränkt gültig. Bemerkt werden sollte, dass durch die Wahl von Gleichung (3.64) statt (3.62) davon ausgegangen wird, dass  $g = 0$  ist. Die Verletzungen dieser Bedingungen sind bei praktischen Anwendungen sehr klein und werden durch Nutzung des Augmented–Lagrange–Verfahrens korrigiert.

### 3.3.4 Linearisierung der virtuellen Kontaktarbeit

Algorithmen zur Lösung von nichtlinearen diskreten Gleichungen, und eine solche ist Gleichung (3.54), benötigen vor der Lösung der Gleichungen eine Linearisierung des Problems. Für dieses Ziel wird deshalb die Herleitung der Linearisierung des Integrals der Kontaktkräfte (3.66) durchgeführt. Die Anwendung der Newton–Raphson–Technik verlangt im Zuge der Linearisierung die Herleitung der tangentiellen Kontaktsteifigkeit.

#### Anwendung der Newton–Raphson–Technik

Mit dem Verfahren von Newton–Raphson soll die Gleichung (3.54) gelöst werden. In der Regel beginnt man hierbei mit angenommenen Werten von  $\boldsymbol{\varphi}_t^j$  für die richtige Konfiguration  $\boldsymbol{\varphi}$  und löst das folgende linearisierte Problem

$$G_{dyn}(\boldsymbol{\varphi}_t^j, \boldsymbol{\varphi}^*) + G_c(\boldsymbol{\varphi}_t^j, \boldsymbol{\varphi}^*) + \Delta G_{dyn}(\boldsymbol{\varphi}_t^j, \boldsymbol{\varphi}^*) + \Delta G_c(\boldsymbol{\varphi}_t^j, \boldsymbol{\varphi}^*) = 0 \quad (3.67)$$

für  $\mathbf{u}$ , wobei die Größe  $\Delta(\cdot)$  als Richtungsableitung für die Richtung von  $\mathbf{u}$  bezeichnet wird und zu einer linearen Abbildung von  $\mathbf{u}$  führt.

$$\Delta G_c(\boldsymbol{\varphi}_t^j, \boldsymbol{\varphi}^*) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} G_c(\boldsymbol{\varphi}_t^j + \epsilon \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}^*) \quad (3.68)$$

Die ursprünglich angenommene Lösung  $\varphi_t$  wird durch folgende Addition

$$\varphi_t^{j+1} = \varphi_t^j + \epsilon \mathbf{u} \quad (3.69)$$

so lange durch Iterationen verbessert, hier mit dem Zähler  $j$ , bis die Inkremente von  $\mathbf{u}$  hinreichend klein werden, sodass das nichtlineare Problem (3.54) als gelöst gelten kann. Ziel dieses Abschnittes ist es, die Kontaktsteifigkeit  $\Delta G_c$  zu ermitteln, um die Newton–Raphson–Technik anwenden zu können.

### Zweite Variation der Abstandsfunktion und des Tangentialweges

Die Ermittlung der Ableitung von Gleichung (3.66) ist insofern einfacher, als das Integral in der Referenzkonfiguration ermittelt wurde und nur die Integranden selbst mit der Bewegung variieren:

$$\Delta G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) = \int_{\Gamma^{(1)}} \Delta [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} \quad (3.70)$$

Für alle Terme dieser Gleichung werden die Richtungsableitungen gebildet. Begonnen wird mit der Kontaktnormalkraft  $t_N$ . Es ergibt sich folgende Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \Delta \{ \epsilon_N g^+ \} \\ &= \epsilon_N \frac{\delta g^+}{\delta g} \Delta g \\ &= H(g^+) \epsilon_N \Delta g \end{aligned} \quad (3.71)$$

$H(g)$  stellt die Heaviside–Funktion dar. Sie ist gleich 1, wenn  $g \geq 0$  ist, und verschwindet, d. h. wird zu null bei  $g < 0$ . Diese Funktion eignet sich besonders für die numerische Umsetzung der Frage, ob Kontakt herrscht oder nicht. Der Ausdruck für  $\Delta g$  wird in Gleichung (3.59) beschrieben. Dabei wird der Operator  $\Delta$  mit dem Operator  $\delta$  und  $\mathbf{u}$  mit  $\overset{*}{\varphi}$  getauscht.

Die Größe  $\Delta(\delta g)$  ergibt sich durch die Linearisierung von Gleichung (3.59). Nach einigen Umformungen, die in Anhang A A.5 zu finden sind, folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta g) &= g \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha] \\ &\quad m^{\gamma\beta} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha] \\ &\quad + \delta \bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta \bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &\quad + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta \delta \bar{\xi}^\alpha \end{aligned} \quad (3.72)$$

Hierbei wurde  $\delta \bar{\xi}^\beta$  wegen der Äquivalenz von  $\delta$  und  $\Delta$  mit den Gleichungen (3.62) und (3.63) durch eine Substitution von  $\mathbf{u}$  für  $\overset{*}{\varphi}$  ausgedrückt.

Nach dem Zusammenführen der Ausdrücke von (3.71) und (3.72) lautet der Ausdruck für die Integranden in Normalenrichtung  $\Delta(t_N \delta g)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta(t_N \delta g) &= \Delta(t_N) \delta g + t_N \Delta(\delta g) \\
&= H(g)^+ \epsilon_N \delta g \Delta g \\
&+ t_N \left\{ g \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha] \right. \\
&\quad m^{\gamma\beta} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha] \\
&\quad + \delta \bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta \bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
&\quad \left. + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta \delta \bar{\xi}^\alpha \right\} \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist auf  $\mathbf{u}$  und  $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$  bezogen symmetrisch.

Für die verbleibenden Beträge der Linearisierung des Reibungsterms wird die Ermittlung des Terms  $\Delta \delta \bar{\xi}^\beta$  benötigt. Die Herleitung dieses Terms erfolgt erneut implizit mit Gleichung (3.61). Der detaillierte Lösungsweg wird in Anhang A A.6 dargestellt. Das Ergebnis lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} \Delta \delta \bar{\xi}^\beta &= \\
&- \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^\beta - \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^\beta \\
&- [\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) + g \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi})] \delta \bar{\xi}^\beta \Delta \bar{\xi}^\alpha \\
&- \delta \bar{\xi}^\beta \boldsymbol{\tau}_\beta \cdot [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] \\
&- \Delta \bar{\xi}^\beta \boldsymbol{\tau}_\beta \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] \\
&- g \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^\beta + \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^\beta] \\
&+ [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] \\
&+ [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] \tag{3.74}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist ebenfalls bezogen auf  $\mathbf{u}$  und  $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$  symmetrisch.  $A_{\alpha\beta}$  lässt sich durch Gleichung (3.63) beschreiben.

Zusammengefasst kann die Richtungsableitung der Kontaktarbeit folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Delta G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) &= \Delta \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}} \Delta [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} \right\} \\ &= \int_{\Gamma^{(1)}} [\Delta(t_N \delta g) + \Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] d\Gamma^{(1)}\end{aligned}\quad (3.75)$$

Hierbei werden  $\Delta(t_N \delta g)$  in Gleichung (3.73) und  $\Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)$  in (3.74) beschrieben. Die Ermittlung von  $\Delta t_{T_\alpha}$ , die von der Integration der Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.49)–(3.52) abhängt, wird im Kapitel 3.4.3 durchgeführt.

Bis zu diesem Punkt sind alle Gleichungen beim Linearisierungsvorgang von  $G_c$  symmetrisch geblieben. Nur durch die Linearisierung des Terms  $\Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha$  werden aufgrund der Nichtassoziiertheit des Reibgesetzes Unsymmetrien entstehen.

### 3.3.5 Zusammenfassung der Linearisierung

**Virtuelle Kontaktarbeit:**

$$G_c(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)}\quad (3.76)$$

wobei

$$\delta g = -\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]\quad (3.77)$$

und

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta} \delta \bar{\xi}^\beta &= [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ &\quad - g \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]\end{aligned}\quad (3.78)$$

mit

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\quad (3.79)$$

**Linearisierte virtuelle Kontaktarbeit:**

$$\Delta G_c(\varphi_t, \overset{*}{\varphi}) = \int_{\Gamma^{(1)}} [\Delta(t_N \delta g) + \Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] d\Gamma^{(1)}\quad (3.80)$$

mit

$$(3.73)$$

und

$$(3.74)$$

Die Ermittlung von  $\Delta t_{T_\alpha}$  folgt im Zuge der Zeitintegration in Kapitel 3.4.3 .

## 3.4 Diskretisierung mit finiten Elementen

In diesem Kapitel wird die Diskretisierung der im vorherigen Kapitel aufgestellten Gleichungen durchgeführt. Die entstehenden Ausdrücke sind gleich oder äquivalent mit vielen in der Literatur bereits bekannten Ergebnissen. Für genauere Betrachtungen wird deshalb auf die Literatur verwiesen. Bei Kontaktproblemen wurden die Herleitungen oft am bereits diskretisierten Kontinuum ermittelt. Dies ist dann im zweidimensionalen Fall auf linearen Knoten–Segment–Kontakt beschränkt, so bei WRIGGERS & SIMO [1985], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] und SCHERF [1998].

Nur durch die vollständige Herleitung der Kontaktbedingungen am Kontinuum nach LAURSEN & SIMO [1992] können auch Ansatzfunktionen höherer Ordnung benutzt werden. Mit dieser mehr systematischen Vorgehensweise kann eine Vielzahl von Variationen bezüglich der räumlichen Diskretisierung direkt abgeleitet werden.

### 3.4.1 Die Bewegungsgleichung

Um die diskrete Form des Kontaktproblems angeben zu können, wird analog zur Standardformulierung für Kontinua zuerst eine halbdiskrete Formulierung angenommen, die unter anderem bei HUGHES [1987] beschrieben wurde. Der Grundgedanke besteht darin, dass man zuerst die räumliche Diskretisierung der schwachen Form durchführt, wobei die zeitliche Kontinuität der Knotenverschiebungen noch erhalten bleibt. Als Ergebnis ergeben sich dann Differenzialgleichungen, die für die weitere numerische Analyse über die Zeit integriert werden können.

Man bestimmt  $\varphi^{(i)h}$  und  $\varphi^{*(i)h}$  als finite Ansatzfunktionen von  $\varphi^{(i)}$  und  $\varphi^{*(i)}$ . Dabei ist  $\varphi^{(i)h}$  kontinuierlich im Zeitraum  $\mathfrak{N} = [0, T]$  definiert, es gilt:

$$\varphi^{*(i)h} \in \mathcal{V}_t^{(i)h} \subset \mathcal{V}_t^{(i)} \quad \text{und} \quad \varphi_t^{(i)h} \in \mathcal{C}_t^{(i)h} \subset \mathcal{C}_t^{(i)} \quad (3.81)$$

Die Räume  $\mathcal{C}_t^{(i)}$  und  $\mathcal{V}^{(i)}$  wurden anhand der Gleichungen (3.5) und (3.6) definiert. Nach der Substitution dieser finiten Größen in das globale Variationsprinzip von Gleichung (3.9) verbleiben nichtlineare Differenzialgleichungen, die über die Zeit integriert werden müssen. Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{d}) = \mathbf{F}^{ext}(t) \quad (3.82)$$

Der Vektor  $\mathbf{d}$  präsentiert den Lösungsvektor oder Knotenverschiebungsvektor für  $\varphi^h$ . Entsprechend sind  $\dot{\mathbf{d}}$  die Knotengeschwindigkeiten und  $\ddot{\mathbf{d}}$  die Knotenbeschleunigungen. Zu berücksichtigen sind noch die Anfangsbedingungen von  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\mathbf{d}$ . In

Gleichung (3.82) stellen  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{C}$  die Dämpfungsmatrix,  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d})$  den Vektor der inneren Kräfte,  $\mathbf{R}_c(\mathbf{d})$  den Kontaktkraftvektor und  $\mathbf{F}^{ext}(t)$  den Vektor der bekannten äußeren Kräfte dar. Die notwendigen Umformungen, um von Gleichung (3.9) zu Gleichung (3.82) zu gelangen, sind in der Literatur unter anderem bei HUGHES [1987] zu finden. Die Lösung der Bewegungsgleichung wird mit einem Zeitschrittverfahren, beschrieben im Kapitel 3.4.3, erzielt.

Die Bewegungsgleichung ist, wegen der Terme  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d})$  und  $\mathbf{R}_c(\mathbf{d})$ , nichtlinear. Der erste Term ist der Vektor der inneren Kräfte und enthält oft geometrische und stoffgesetzliche Nichtlinearitäten, welche wiederum von  $\mathbf{d}$  abhängen. Somit lautet die eventuell benötigte Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^{int}(\mathbf{d}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}). \quad (3.83)$$

Der zweite Term ist der Vektor der Kontaktkräfte, er wurde anhand von Gleichung (3.76) hergeleitet. Die entsprechende Kontaktsteifigkeitsmatrix basiert auf Gleichung (3.80) und wird folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{d}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{R}_c(\mathbf{d}) \quad (3.84)$$

Neben der räumlichen Diskretisierung von  $\mathbf{K}_c(\mathbf{d})$  und  $\mathbf{R}_c(\mathbf{d})$  wird die zeitliche Diskretisierung von  $\mathbf{d}$  benötigt, um Gleichung (3.82) numerisch lösen zu können.

Bei der Lösung von nichtlinearen dynamischen Problemstellungen empfiehlt sich die Einführung einer **Dämpfung**. Es wird meist eine Proportionalität von Dämpfungskraft und Geschwindigkeit angenommen. Gewählt wird eine Zusammensetzung der Dämpfungsmatrix nach Rayleigh. Dabei setzen sich die Dämpfungsparameter aus zwei Termen zusammen. Elemente der Massenmatrix werden mit dem Faktor  $\alpha_D$  multipliziert und mit Elementen der Steifigkeitsmatrix der inneren Kräfte, die mit dem Faktor  $\beta_D$  multipliziert wurden, addiert. Die Steifigkeitsmatrix wurde hierbei zu Beginn eines Rechenlaufes in Abhängigkeit von  $\mathbf{d}_0$  ermittelt.

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} = [\alpha_D \mathbf{K}(\mathbf{d}_0) + \beta_D \mathbf{M}] \dot{\mathbf{d}} \quad (3.85)$$

Der Aufwand für die Bestimmung der beiden Faktoren wird möglichst gering gehalten und erfolgt für jeden Einzelfall. Weiterführende Literatur ist bei HUGHES [1987] und anderen zu finden.

### 3.4.2 Räumliche Diskretisierung

Neben der im Folgenden dargestellten Herleitung mit isoparametrischen Elementen und numerischer Integration wurde in der Literatur z. B. bei WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990], WRIGGERS & MIEHE [1994], SCHERF [1998] ein lineares Knoten–Segment–Kontaktelement auf konservativem Weg konzipiert. Im Anhang B ist der Weg zu diesem Dreiknoten–Element beschrieben. Die Diskretisierung der Oberfläche wird im Folgenden mit höheren isoparametrischen Ansätzen durchgeführt. Die Einführung von diskreten Approximationen der Bewegung und der Oberflächengeometrie erfordert einige praktische Rechentechniken, wie die Durchführung von numerischer Integration und Kontaktsuche.

#### Diskretisierung der Kontaktflächen

Alle Herleitungen der vorangegangenen Kapitel beschäftigten sich ausschließlich mit Konfigurationen und Variationen auf der Oberfläche  $\Gamma^{(i)}$  und nicht mit dem Inneren eines Körpers. Im Zuge der Diskretisierung mit dem Ziel, die Größen  $\mathbf{K}_c(\mathbf{d})$  und  $\mathbf{R}_c(\mathbf{d})$  zu ermitteln, fehlen nur noch Restriktionen für  $\boldsymbol{\varphi}^{(i)h}$  und  $\boldsymbol{\varphi}^{*(i)}$  auf  $\Gamma^{(i)h}$ . Diese Restriktionen werden durch Sammlung der lokalen Abbildungen mit  $(\cdot)_e$  über alle einzelnen Segmente der Oberflächen vorgenommen. Für Körper (1) wird zum Beispiel  $\boldsymbol{\varphi}_e^{(1)h}(\eta)$  mit  $\eta \in \mathcal{A}_e^{(1)h}$  als

$$\boldsymbol{\varphi}_e^{(1)h}(\eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N^a(\eta) \mathbf{d}_a^{(1)}(t) \quad (3.86)$$

ausgedrückt, wobei  $\mathbf{d}_a^{(1)}(t)$  ein Knotenwert von  $\boldsymbol{\varphi}^{(1)h}$  und  $n_{en}$  die Anzahl der Knoten auf der Elementoberfläche ist.  $N^a(\eta)$  ist die Bezeichnung für eine standardisierte isoparametrische Formfunktion, definiert über die Fläche von  $\mathcal{A}_e^{(1)h}$  im Dreidimensionalen und auf  $\mathcal{A}_e^{(1)h} = [-1, 1]$  im Zweidimensionalen. Die Interpolation von  $\boldsymbol{\varphi}^{*(1)h}$  verläuft mit

$$\boldsymbol{\varphi}_e^{*(1)h}(\eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N^a(\eta) \mathbf{w}_a^{(1)} \quad (3.87)$$

analog. Hier ist  $\mathbf{w}_a^{(1)}$  der von der Zeit unabhängige Knotenwert  $\boldsymbol{\varphi}^{*(1)h}$ . Mit einem isoparametrischen Interpolationsschema erhält man:

$$\mathbf{X}_e^h(\eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N^a(\eta) \mathbf{X}_a \quad (3.88)$$

Analog zu den Gleichungen (3.86), (3.87) und (3.88) werden für Körper (2) die entsprechenden Größen  $\boldsymbol{\varphi}_e^{(2)h}(\xi)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_e^{*(2)h}(\xi)$  und  $\mathbf{Y}_e^h(\xi)$  über  $\mathcal{A}_e^{(2)h}$  ermittelt.

Die virtuelle Kontaktarbeit kann nun durch Substitution der diskretisierten Felder in Gleichung (3.76) in diskretisierter Form dargestellt werden. Dabei wird das Integral für die virtuelle Kontaktarbeit umgeschrieben:

$$G_c(\boldsymbol{\varphi}_t^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) = \int_{\Gamma^{(1)h}} \left[ t_{N_t}^h \delta g^h + t_{T_{\alpha t}}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \right] d \Gamma^{(1)h} \quad (3.89)$$

Alle Größen innerhalb des Integrals hängen nun von Größen der diskretisierten Felder ab. Alle Indizes  $\alpha, \beta, \gamma$  bewegen sich grundsätzlich zwischen 1 und  $n_{sd}-1$  in Gleichung (3.89) und den folgenden.

### Numerische Auflösung des Kontaktintegrals

Ein Tausch von Variablen und die Durchführung der numerischen Integration führt zur Darstellung der diskretisierten Kontaktarbeit. Damit lassen sich für die Bewegungsgleichung die Kontaktkräfte und für die Variation der virtuellen Kontaktarbeit die Steifigkeitsmatrix bestimmen. Die Gleichung (3.89) kann unter Vernachlässigung der Zeit  $t$  als Summe der Integrale über  $n_{el}$  Oberflächensegmente von  $\Gamma^{(1)h}$  bezeichnet werden:

$$G_c(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) = \sum_{j=1}^{n_{el}} G_{c_{e_j}}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) = \sum_{j=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{e_j}^{(1)h}} \left[ t_{N_t}^h \delta g^h + t_{T_{\alpha t}}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \right] d \Gamma_{e_j}^{(1)h} \quad (3.90)$$

Das in Teilintegrale zerlegte Kontaktintegral bezieht sich auf den diskretisierten Rand  $\Gamma_{(1)}^h$ . Durch Tausch der Variablen und Durchführung der numerischen Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_c(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) &\approx \sum_{j=1}^{n_{el}} G_{c_{e_j}}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta) \left[ t_N^h(\eta^k) \delta g^h(\eta^k) + t_{T_{\alpha}}^h(\eta^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\eta^k) \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{r}_c^k \right\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Hierbei wird  $n_{int}$  als Anzahl der Integrationspunkte auf der Elementoberfläche  $\Gamma^{(1)h}$  entsprechend der Integrationsregel bezeichnet.  $W^k$  ist die Wichtung zum lokalen Integrationspunkt  $k$ , und  $j$  ist die Jacobi-Determinante für die Transformation zwischen den Abbildungen.  $\eta^k \in \mathcal{A}_e^{(1)h}$  ist die lokale Koordinate des Integrationspunktes  $k$ .  $\delta \boldsymbol{\Phi}_c^k$  ist der Vektor der zu den Integrationspunkten  $k$  gehörenden Knotenvariationen, und  $\mathbf{r}_c^k$  ist der zum Integrationspunkt  $k$  gehörende lokale Kontaktkraftvektor. Die Größen  $\delta g^h(\eta^k)$  und  $\delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\eta^k)$  werden unter Nutzung der Gleichungen (3.77) und (3.78) errechnet, wobei das Kontinuum durch diskrete Felder ersetzt wurde.

Die diskretisierte virtuelle Kontaktarbeit ist gleich der Summe der Beträge der Integrationspunkte. Der **globale Kontaktkraftvektor**  $\mathbf{R}_c$  kann deshalb ausgedrückt werden als:

$$\mathbf{R}_c = \bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_{el} \cdot n_{int}} W^{\tilde{k}} j(\eta^{\tilde{k}}) \mathbf{r}_c^{\tilde{k}} \quad (3.92)$$

Der Operator  $\bigcup$  symbolisiert den Zusammenbau der finiten Elemente, und  $\tilde{k}$  ist der Index der Integrationspunkte, der über das gesamte Gebiet verläuft.

Die Linearisierung von Gleichung (3.91) ergibt die Kontaktsteifigkeit, die für die Lösung mit der Newton–Raphson–Technik notwendig ist. Da  $G_c$  ein Integral in der Referenzkonfiguration ist, wird die Linearisierung von (3.91) mit der Anwendung der numerischen Integration von (3.80) begründet. Analog zum Vorgehen zur Ermittlung von Gleichung (3.91) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta G_c(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{*h}) &\approx \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \left[ \Delta[t_N^h(\eta^k) \delta g^h(\eta^k)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta[t_{T_\alpha}^h(\eta^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\eta^k) + t_T^h(\eta^k) \Delta[\delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\eta^k)]] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n_{el}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \delta \Phi_c^k \cdot \mathbf{k}_c^k \Delta \Phi_c^k \right\} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$\mathbf{k}_c^k$  ist die lokale Kontaktsteifigkeitsmatrix. Die Größen  $\Delta[t_N^h(\eta^k) \delta g^h(\eta^k)]$  und  $\Delta[\delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\eta^k)]$  werden mit Hilfe der Gleichungen (3.73) und (3.74) nach Substitution der diskreten Größen mit denjenigen aus der Kontinuumsformulierung ausgedrückt.

Der Vektor  $\Delta \Phi_c^k$  beinhaltet die Knotenwerte von  $\mathbf{u}^h$ , womit die Finite–Elemente–Approximation von  $\mathbf{u}$  bezeichnet wird. Genau wie der  $\mathbf{R}_c^k$  kann jetzt die **globale Kontaktsteifigkeitsmatrix** geschrieben werden als

$$\mathbf{K}_c = \bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_{el} \cdot n_{int}} W^{\tilde{k}} j(\eta^{\tilde{k}}) \mathbf{k}_c^{\tilde{k}} \quad (3.94)$$

Im Zuge der zur Lösung durchzuführenden Linearisierung verbleibt nur noch die Ermittlung von  $\Delta t_{T_\alpha}^h(\eta^k)$ , die direkt in den Zeitschrittalgorithmus integriert wird.

### Kontaktsuche und Kennung

Bei der Kontaktsuche, wie bereits in Kapitel 1 kurz beschrieben, bieten sich je nach Schwerpunkt der Untersuchungsziele mehrere Möglichkeiten an. Für die zu bearbeitende Problemstellung wurde ein Dreiknoten–Kontaktelement benutzt, siehe Kapitel 3.5.2. Spezifisch hierfür ist, dass im Zuge dieser Diskretisierung jedem Slavepunkt ein Slaveknoten fest zugeordnet wird, der Masterpunkt aber jeweils ermittelt werden muss. Hinzu kommt, dass die Oberfläche auf der Masterseite elementweise linear veränderlich ist.

Es wurde der folgende Algorithmus verwendet. Er ist unter anderem von BENSON & HALLQUIST [1990] beschrieben worden. Dieser Suchalgorithmus gliedert sich in drei Phasen:

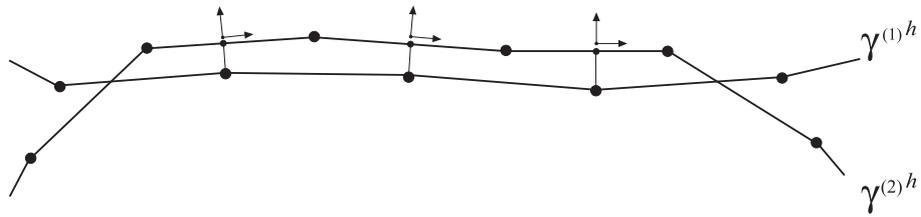
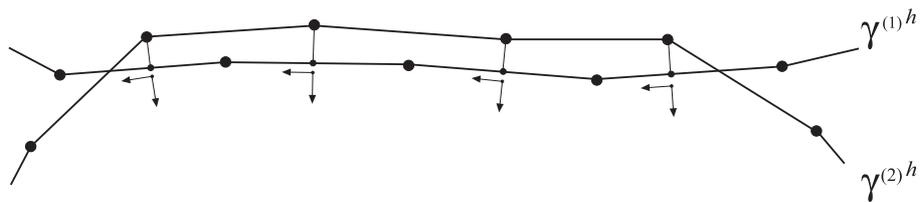
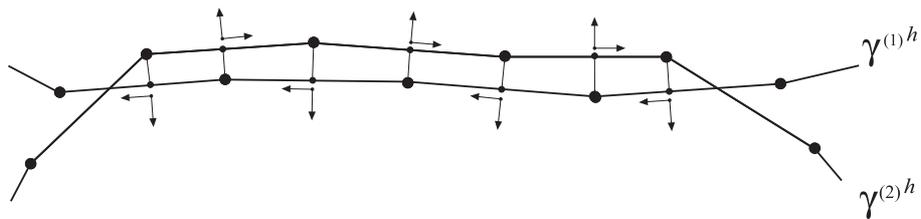
- Suchen des nächsten Masterknotens für einen Slaveknoten  $\mathbf{x}$ ,
- Zuordnung dieses dichtesten Masterknotens zum passenden Masterelement und Identifikation des Masterpunktes  $\bar{\mathbf{y}}$  auf der Elementoberfläche durch Projektion, siehe Gleichung (3.12), und
- Errechnung der Laufkoordinate  $\bar{\xi} \in \mathcal{A}_e^{(2)h}$  des Masterpunktes  $\bar{\mathbf{y}}$  auf der Elementoberfläche zur Bestimmung des zurückgelegten Weges in tangentialer Richtung.

### Vertauschung von Slave– und Masterknoten bei der Kontaktsuche

In der Regel wird bei zwei in Kontakt tretenden Körpern mit unterschiedlichen Steifigkeiten der mit der steiferen Oberfläche als Masteroberfläche gewählt. Haben beide Körper annähernd gleiche Steifigkeiten, dann ist die Wahl praktisch beliebig. Sie kann aber durch spezifische Abweichungen die Lösung erheblich beeinflussen, siehe hierzu HALLQUIST, GOUDREAU & BENSON [1985].

Abhilfe dieser Situation führt zu einem symmetrischen Suchalgorithmus, bei dem die Kontaktbeiträge zu den globalen Gleichungen von beiden Master–Slave–Kombinationen berücksichtigt werden. In jedem Iterationsschritt nimmt man erst die eine gegebene Master–Slave–Kombination und ermittelt die jeweiligen Kontaktkräfte und Anteile der Steifigkeitsmatrix – im Schrifttum als einseitige Kontaktsuche 'one-pass' bezeichnet. Anschließend werden Slave– und Masterknoten vertauscht und die Prozedur wiederholt. Das Resultat ist praktisch ein Kontaktalgorithmus, der symmetrisch ist, – im Schrifttum als zweiseitige Kontaktsuche 'two-pass' bezeichnet. Somit tritt kein Vorteil für die eine oder andere Seite auf.

In der Abbildung 3.7 werden zur Verdeutlichung alle Varianten dieser Kontaktsuche gezeigt. Die Diskretisierung erfolgte hierbei mit linearen Ansätzen. Abbildung 3.7 (a)

(a) einfache Kontaktsuche, Slaveknoten auf  $\gamma^{(1)h}$ (b) einfache Kontaktsuche, Slaveknoten auf  $\gamma^{(2)h}$ 

(c) symmetrische Kontaktsuche 'two-pass'

Abbildung 3.7: Einfache und symmetrische Kontaktsuche bei mit Dreiknoten-Kontaktelementen diskretisierten Oberflächen.

zeigt die unsymmetrische Kontaktsuche, wobei die Slaveknoten auf der Oberfläche  $\gamma^{(1)h}$  positioniert sind. In diesem Fall stehen drei Knoten in Kontakt. Die zu den Slaveknoten gehörenden Masterpunkte sind durch die Richtungsvektoren gekennzeichnet. Abbildung 3.7 (b) zeigt erneut die unsymmetrische Kontaktsuche, wobei die Slaveknoten nun auf der Oberfläche  $\gamma^{(2)h}$  liegen. In diesem Fall stehen vier Knoten in Kontakt. Abbildung 3.7 (c) zeigt die symmetrische Kontaktsuche. Bei dieser zweiseitigen Kontaktsuche fungiert zuerst die Oberfläche  $\gamma^{(1)h}$  und anschließend die Oberfläche  $\gamma^{(2)h}$  als Slaveknotenseite. Insgesamt stehen somit sieben Knoten in Kontakt.

Am Beispiel zweier kontaktierender Kragarme in Kapitel 5.4 werden diese Varianten der Kontaktsuche gezeigt.

### 3.4.3 Zeitliche Diskretisierung

Das Zeitintervall  $\mathfrak{N}$  wird in eine Serie von Teilintervallen  $\mathfrak{N} = \cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$  zerlegt. Die angenommene Kontinuität im Zeitbereich aus Gleichung (3.82) wird durch die Anwendung eines diskreten Zeitschrittverfahrens in jedem Teilintervall ersetzt. Die Wahl des Lösungsalgorithmus verlangt die Errechnung der Kontaktkräfte zu einer Zeit  $t_{n+\alpha}$  in jedem Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$ , wobei  $\alpha \in [0, 1]$  ist und auch selbst durch den Algorithmus bestimmt wird. Für die vorliegende Problemstellung wird das Verfahren von Newmark gewählt. Ausführlich beschrieben wird es von HUGHES [1987] und anderen.

Im Zuge der Integration der Kontaktbedingungen wird die Ermittlung der Kontaktkräfte zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  benötigt. Dabei werden die Gleichungen (3.49)–(3.52) mit Hilfe einer Anwendung der impliziten Euler-Integrationsregel und des Prädiktor-Korrektor-Algorithmus, der aus der Elastoplastizität stammt, integriert. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie durch die Linearisierung des Terms der Reibkräfte in zum Zeitintegrationsalgorithmus konsistenter Weise die gesamte Linearisierung einschließlich der Gleichungen (3.80)–(3.81) vervollständigt wird.

#### Globales Zeitintegrationschema

Beim Zeitintegrationsverfahren von Newmark wird die Gleichung (3.82) in folgende Gleichungen zur Bestimmung des Zeitpunktes  $t_{n+1}$  bei bekanntem Zeitpunkt  $t_n$  umgeformt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^{ext} &= \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{d}_{n+1}) \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.95)$$

Mit den Parametern  $\gamma \geq 1/2$  und  $\beta \leq \gamma/2$  ergibt sich für den linearen Fall eine unbedingte stabile implizite Integration. Am bekanntesten ist die Trapezregel. Mit den Werten  $\gamma = 1/2$  und  $\beta = 1/4$  erreicht sie eine Genauigkeit zweiter Ordnung. Für einige Berechnungen empfiehlt sich, wie noch gezeigt wird, eine numerische Dämpfung zu benutzen. Dies geschieht durch die entsprechende Wahl der Parameter  $\gamma$  und  $\beta$ .

Die Gleichungen (3.95) enthalten im Allgemeinen nichtlineare Terme bezüglich der Verschiebung, wie (3.83) und (3.84). Daher ist es notwendig, mit der Newton–Raphson–Technik das folgende linearisierte Problem iterativ zu lösen:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^j) + \mathbf{K}_c(\mathbf{d}_{n+1}^j) \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^j \\ & = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1}^j - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1}^j - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^j) - \mathbf{R}_c(\mathbf{d}_{n+1}^j) \end{aligned} \quad (3.96)$$

wobei die mit  $j$  gekennzeichneten Iterationen jeweils durch

$$\mathbf{d}_{n+1}^{j+1} = \mathbf{d}_{n+1}^j + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^j \quad (3.97)$$

verbessert werden. Somit wird deutlich, dass die Größen  $\mathbf{R}_c$  und  $\mathbf{K}_c$  in das Gesamtkonzept zur Lösung der globalen Gleichungen eingebettet werden können.

### Anwendung der impliziten Euler–Integrationsregel auf das Reibgesetz

Der globale Zeitintegrationsalgorithmus verlangt die Ermittlung der Reibkräfte zum Zeitschritt  $t_{n+1}$ . Zu diesem Zweck werden die zeitabhängigen Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.49)–(3.52) über die Zeit integriert. Die Anwendung der impliziten Euler–Integrationsregel führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\| - \mu t_{N_{n+1}} \leq 0 \\ t_{T_{n+1}\alpha} &= t_{T_{n\alpha}} + \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] - \zeta \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} \right\} \\ \zeta &\geq 0 \\ \zeta f_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Hierbei ist  $\|\mathbf{t}_T^b\| = [t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}$ . Das in Gleichung (3.98) gestellte Problem ist nun verschiebungsgesteuert lösbar. Die 'updates' für die Reibkräfte erfolgen zusammen mit den 'updates' für die Größen  $g_{n+1}$  und  $\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta$ . Nur durch die Penaltyregularisierung der Kuhn–Tucker–Bedingungen ist die Lösung in dieser Weise möglich.

### Prädiktor–Korrektor–Algorithmus

Die endgültige Ermittlung der Reibkräfte erfolgt mit den Gleichungen (3.98). Es wird ein Algorithmus mit einem Prädiktorschritt und anschließendem Korrektorschritt eingeführt. Er wird häufig in der Elastoplastizität benutzt und für Reibung auch unter dem Begriff 'trial–return'–Algorithmus von GIANNAKOPOULOS [1989], WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] und anderen angewendet. Als Erstes errechnet man

diesen Prädiktorschritt ('trial') und nimmt an, dass kein Gleiten existiert:

$$\begin{aligned} t_{N_{n+1}} &= \epsilon_N g_{n+1}^+ \\ t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} &= \mathbf{t}_{T_{n\alpha}} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] \\ f_{n+1}^{trial} &= \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}}\| - \mu t_{N_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Als Zweites wird anhand der Gleitbedingung  $f_{n+1}^{trial}$  Gleichung (3.100) kontrolliert, ob Haften oder Gleiten auftritt. Anschließend wird die Reibkraft  $t_{T_{n+1}\alpha}$  entsprechend der Gleitbedingung anhand Gleichung (3.99) bestimmt. Es wird also ein Prädiktorschritt ('trial') errechnet und anschließend mit der Gleitbedingung geprüft, ob Haften oder Gleiten vorliegt. Somit ist die Reibkraft ermittelbar:

$$t_{T_{n+1}\alpha} = \begin{cases} t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} & \text{wenn } f_{n+1}^{trial} < 0 & : \text{Haften} \\ \mu t_{N_{n+1}} \frac{t_{T_{n+1}\alpha}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}}\|} & \text{wenn } f_{n+1}^{trial} \geq 0 & : \text{Gleiten} \end{cases} \quad (3.100)$$

Obleich der Korrektorvorgang ('return'), in diesem Fall aufgrund dieses Reibgesetzes sehr einfach ist, lässt er sich für komplexere Reibgesetze, die diverse nichtlineare Effekte berücksichtigen, erweitern, siehe Kapitel 7, Anhang A A.7 und WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990]. Zum Verständnis dient hier die Darstellung der Analogie zur Elastoplastizität von CURNIER [1984] und anderen.

### Konsistente Linearisierung der Reibkräfte

In diesem Abschnitt werden die letzten noch fehlenden Größen aus Gleichung (3.80)  $\Delta t_{T_{n+1}\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha$  für die Kontaktlinearisierung ermittelt. Sie kann als direkte Reibungssteifigkeit betrachtet werden. Die Linearisierung erfolgt durch Ermittlung der Richtungsableitung der Ausdrücke der Gleichungen (3.99) und (3.100). Details zur Herleitung befinden sich im Anhang A A.7. Die in der Momentankonfiguration aufgestellten Gleichungen führen zu folgender Linearisierung:

$$\Delta t_{T_{n+1}\alpha} = \begin{cases} \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} = \epsilon_T [m_{\alpha\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta + m_{\alpha\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta)] & : \text{Haften} \\ = \mu \epsilon_N H(g) p_{T\alpha} \Delta g + \frac{\mu t_{N_{n+1}}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{b^{trial}}\|} \Delta \mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{trial} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T\alpha}] & : \text{Gleiten} \\ + \mu t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\xi}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] p_T^\beta p_{T\alpha} & \end{cases} \quad (3.101)$$

Hierbei ist  $\mathbf{p}_T = \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|}$ . Alle Unsymmetrien, die während der Linearisierung auftreten, werden durch den ersten Term von Gleichung (3.101)<sub>2</sub> induziert und durch das im Zuge der Linearisierung entstehende Produkt  $\Delta g \delta \bar{\xi}^\alpha$  weiter entwickelt.

## 3.5 Herleitung der Kontaktresiduen und –steifigkeit

Ziel dieses Abschnittes ist es, die zum Einbau in ein Finite-Elemente-Programm benötigten Steifigkeitsmatrizen und Kraftvektoren für Kontakt bereitzustellen. Bis zu diesem Abschnitt wurde die Herleitung allgemein, unabhängig von einer Diskretisierung, gehalten.

Im zweidimensionalen Fall kommt es gegenüber der Herleitung am Kontinuum zu einigen Vereinfachungen. Die Fläche  $\mathcal{A}^{(i)}$  ist Element eines zweidimensionalen Raumes. Die griechischen Indizes  $\alpha, \beta, \gamma$  wachsen nur bis 1 an, sodass sich die Summation über diese Indizes vereinfacht.

Als Erstes folgt die Diskretisierung mit einem Slaveknoten und einem Masterelement isoparametrischen Typs. Zu diesem Zweck wird ein Masterelement, welches über den gesamten Rand  $\Gamma^{(2)}$  verläuft, als Mastersegment  $1-n_m$  definiert. Da die Herleitung am Kontinuum erfolgte, können Formfunktionen  $N$  gewählt werden, bei denen die zweite Ableitung ungleich null sind. Die diskretisierte Oberfläche eines solchen Mastersegmentes kann dann gekrümmte Oberflächen knickfrei abbilden. Numerisch aufwendiger ist allerdings das weitere Vorgehen zur Lösung von praktischen Problemstellungen unter anderem in Hinblick auf die Kontaktsuche und Kennung.

Als Zweites werden die vereinfachte Diskretisierung eines Slaveknotens und ein isoparametrisches Zweiknoten-Masterelement mit linearer Ansatzfunktion gezeigt. Es eignet sich zum Zusammenspiel mit einem durch bilineare Vierknoten-Elemente diskretisierten Kontinuum.

Im Anhang B wird der Weg von den linearisierten Gleichungen zu den Matrizenformulierungen in B.1 gezeigt und zusätzlich der konventionelle Weg zum Dreiknoten-Kontaktelement in B.2 beschrieben.

### 3.5.1 Elementierung von Slavepunkt und Mastersegment

Es folgt die Darstellung des Kontaktkraftvektors und der Kontaktsteifigkeit in Matrizenform für normal- und reibbedingten Tangentialkontakt. Nach durchgeführter numerischer Integration lassen sich folgende Vektoren  $\delta \Phi$  und  $\Delta \Phi$  definieren:

$$\delta \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s^{(1)} \\ \mathbf{w}_1^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_{n_m}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \Phi = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_s^{(1)} \\ \Delta \mathbf{d}_1^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \mathbf{d}_{n_m}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Zusätzlich werden folgende Vektoren definiert:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{n_m}(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_1(\bar{\xi}^1)\boldsymbol{\tau}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_1(\bar{\xi}^1)_{n_m}\boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{n_m,1}(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Die indizierten Ableitungen  $(\cdot)_{,1}$  werden nach der Variablen  $\xi^1$  durchgeführt. Auf diese Vektoren aufbauend werden weitere Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \frac{1}{m_{11} + g\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1)} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \\ \bar{\mathbf{N}}_1 &= \mathbf{N}_1 - [\mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{D}_1 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Der Kontaktbeitrag für das **Residuum** ergibt sich dann wie folgt:

$$\mathbf{r}_c = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}_1 \quad (3.105)$$

Die Beiträge für die **Kontaktsteifigkeitsmatrix** werden zerlegt in einen Anteil für die normale und einen Anteil für die tangentielle Richtung:

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_{c_N} + \mathbf{k}_{c_T} \quad (3.106)$$

Der Ausdruck für die **Normalenrichtung** lautet:

$$\mathbf{k}_{c_N} = \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[ \frac{g}{m_{11}} \bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_1^T - \mathbf{D}_1 \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^T + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \right] \quad (3.107)$$

Um den Ausdruck für die **tangentiale Richtung** darzustellen, werden weitere Vektoren eingeführt:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1)\boldsymbol{\tau}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1)_{n_m}\boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,11}(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ -N_{n_m,11}(\bar{\xi}^1)\mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

und

$$\bar{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{T}_1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{D}_1 \quad (3.109)$$

Damit kann die Steifigkeitsmatrix dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{c_T} = \mathbf{k}_{c_T}^{direkt} + \frac{t_{T_1}}{m_{11} + \mathbf{gn} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1)} & \left[ 2(\mathbf{T}_1 \mathbf{D}_1^T + \mathbf{D}_1 \mathbf{T}_1^T) \right. \\ - \left[ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) + \mathbf{gn} \cdot \mathbf{e}_{1,11}(\bar{\xi}^1) \right] \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T + g(\mathbf{N}_{11} \mathbf{D}_1^T + \mathbf{D}_1 \mathbf{N}_{11}^T) & \\ \left. - \mathbf{N} \bar{\mathbf{N}}_1^T - \bar{\mathbf{N}}_1 \mathbf{N}^T - \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} \bar{\mathbf{T}}_1^T + \bar{\mathbf{T}}_1 \mathbf{T}^T) \right] & \quad (3.110) \end{aligned}$$

Der Anteil von  $\mathbf{k}_{c_T}^{direkt}$  hängt davon ab, ob ein Haft- oder Gleitzustand vorliegt. Im Einzelnen ergibt sich dann für das **Haften** eine symmetrische Matrix:

$$\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ H} = \epsilon_T [m_{11} + 2g_T^1 \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \cdot \boldsymbol{\tau}_1] \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \quad (3.111)$$

und für das **Gleiten** eine unsymmetrische Matrix:

$$\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ G} = -\mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \mathbf{D}_1 \mathbf{N}^T - \mu t_N p_T^1 \mathbf{D}_1 \bar{\mathbf{T}}_1^T \quad (3.112)$$

### 3.5.2 Degenerierung zum Dreiknoten–Kontaktelement

LAURSEN [1992] schlägt eine Diskretisierung der Kontaktzone mit isoparametrischen, numerisch zu integrierenden Ansätzen vor. Es sei nochmals in Erinnerung gerufen, dass  $\boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  den mit Hilfe der Minimierung zu ermittelnden Masterpunkt und  $\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X})$  den Slavepunkt beschreibt. Während der Slavepunkt ein diskretisierter Knoten ist, liegt der Masterpunkt zwischen zwei Knoten auf der Masterseite  $\gamma^{(2)}$ . Deshalb benötigt man zur Abbildung eine Interpolation. Für die Lösung von Kontaktproblemen mit Vierknoten–Elementen mit bilinearen Ansätzen im Kontinuum müssen passende lineare Ansätze am Masterelement gewählt werden. Für die Formfunktionen  $N$  gelten die Zusammenhänge  $\xi^1 = \frac{1}{2}(1 - \eta_a \eta)$ ;  $\eta \in [-1, 1]$  und  $\xi^1 \in [0, 1]$ . Für zweidimensionale Berechnungen erhalten die Bezeichnungen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  den Wert 1, da keine Summation stattfindet. Entsprechend erfolgen die indizierten Ableitungen von  $N_i$  mit  $(\cdot)_{,1}$  durch  $\xi^1$ . Die zweiten Ableitungen  $N_{i,11}$  sind aufgrund der Ansatzfunktionen gleich null. Aufgrund der Tatsache, dass die Ansätze an den Elementrändern linear sind, entfallen einige Terme der linearisierten virtuellen Kontaktarbeit  $\Delta G_c$  aus Gleichung (3.80). Terme, die die Oberflächenkrümmung beschreiben, wie

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}^1) = \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$$

werden null. Eine genauere Darstellung einiger Teile der Herleitung befindet sich in Anhang B B.1 .

### Numerische Integration und räumliche Diskretisierung

Nach Durchführung der numerischen Integration mit Gaußquadratur zweiter Ordnung können die Kontaktsteifigkeitsmatrix und der Kontaktkraftvektor in das globale Gleichungssystem eingebunden werden. Die virtuelle Kontaktarbeit an einem Element nach der räumlichen Diskretisierung lautet analog zu Gleichung (3.91):

$$G_{c_e}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{h*}) \approx \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [\delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{r}_c^k] \quad (3.113)$$

Daraus ergibt sich der Kontaktkraftvektor für ein Element:

$$\mathbf{R}_{c_e} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k \quad (3.114)$$

mit  $n_{int} = 2$  als Anzahl der Integrationspunkte,  $\eta^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  und  $\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  als Stützstellen,  $W^k = 1$  als Wichtungsfaktoren und  $j(\eta^k)$  als Jacobi-Determinante.

Die Variation der virtuellen Kontaktarbeit analog zu Gleichung (3.93) ergibt sich mit

$$\Delta G_{c_e}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{h*}) \approx \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot [\mathbf{k}_{c_N}^k + \mathbf{k}_{c_T}^{direkt^k} + \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt^k}] \Delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \quad (3.115)$$

und führt zur Kontaktsteifigkeitsmatrix an einem Element:

$$\mathbf{K}_{c_e} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_c^k = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [\mathbf{k}_{c_N}^k + \mathbf{k}_{c_T}^{direkt^k} + \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt^k}] \quad (3.116)$$

Die globalen Verschiebungsvektoren analog zu (3.102) für das Dreiknoten-Kontakt-element lauten:

$$\delta \boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s^{(1)} \\ \mathbf{w}_1^{(2)} \\ \mathbf{w}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_s^{(1)} \\ \Delta \mathbf{d}_1^{(2)} \\ \Delta \mathbf{d}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Für eine Diskretisierung des Randes eines bilinearen Elementes ergeben sich folgende Matrizen analog zu (3.103):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \\ -N_2(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_1(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_2(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \\ -N_{2,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_{2,1}(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Die zur Beschreibung der Kontaktsteifigkeitsmatrix zusammengestellten Vektoren vereinfachen sich, da die Krümmung im Element  $\mathbf{e}_{1,1} = 0$  ist, zu

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{N}}_1 &= \mathbf{N}_1, \quad \bar{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{N}_{11} = 0 \\ \mathbf{D}_1 &= \frac{1}{m_{11}}[\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1].\end{aligned}\quad (3.119)$$

Für den **Kontaktkraftvektor** ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{c_e} &= \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k \\ \mathbf{r}_c &= t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{R}_{c_e} &= \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k = \tilde{t}_N \mathbf{N} + \frac{\tilde{t}_T}{l} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1]\end{aligned}\quad (3.120)$$

Der Ausdruck für die **Kontaktsteifigkeitsmatrix in Normalenrichtung** vereinfacht sich zu folgendem Ausdruck:

$$\mathbf{k}_{c_N} = \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + \frac{t_N}{m_{11}} [-\mathbf{T} \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T - g \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \quad (3.121)$$

Nach der numerischen Integration ergibt sich für das Dreiknoten–Kontaktelement:

$$\mathbf{K}_{c_{Ne}} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{c_N}^k = \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + \frac{\tilde{t}_N}{l^2} [-\mathbf{T} \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T - g \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \quad (3.122)$$

Der Ausdruck der Steifigkeitsmatrix für **Tangentialkontakt** wurde aufgrund der auftretenden Terme bei der Linearisierung  $\mathbf{k}_{c_T} = \mathbf{k}_{c_T}^{direkt} + \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt}$  in einen **direkten** und einen **indirekten** Teil zerlegt. Beim direkten Anteil muss zwischen Haft– und Gleitzustand unterschieden werden. Aufgrund der Ansatzfunktion vereinfacht sich die angegebene Gleichung (3.121) für den Fall **Haften**:

$$\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ H} = \epsilon_T \frac{m_{11}}{m_{11} m_{11}} [\mathbf{T} \mathbf{T}^T + g \mathbf{T} \mathbf{N}_1^T + g \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T + g^2 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \quad (3.123)$$

Nach Durchführung der numerischen Integration von  $\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ H}$  ergibt sich für den Fall **Haften** beim Dreiknoten–Kontaktelement:

$$\mathbf{K}_{c_{Te}}^{direkt\ H} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{c_T}^k = \frac{\epsilon_T}{l^2} [\mathbf{T} \mathbf{T}^T + g \mathbf{T} \mathbf{N}_1^T + g \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T + g^2 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \quad (3.124)$$

Aufgrund der Ansatzfunktion vereinfacht sich die angegebene Gleichung (3.112) für den Fall **Gleiten**:

$$\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ G} = -\mu\epsilon_N H(g)p_{T_1} \left[ \frac{1}{m_{11}}(\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1) \right] \mathbf{N}^T - \mu t_N p_T^1 \left[ \frac{1}{m_{11}}(\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1) \right] \mathbf{T}_1^T \quad (3.125)$$

Nach der numerischen Integration von  $\mathbf{k}_{c_T}^{direkt\ G}$  für den Fall **Gleiten** ergibt sich für das Dreiknoten-Kontaktelement:

$$\mathbf{K}_{c_{T_e}}^{direkt\ G} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{c_T}^k = -\mu \frac{\tilde{\epsilon}_N}{l} H(g) [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{N}^T - \frac{\mu t_N}{l^3} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{T}_1^T \quad (3.126)$$

mit

$$\mathbf{p}_T = \frac{t_T^1 \boldsymbol{\tau}_1}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = \frac{t_{T_1} \boldsymbol{\tau}^1}{\|\mathbf{t}_T^b\|}, \quad p_T^1 = \frac{t_T^1}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 1/l, \quad p_{T_1} = \frac{t_{T_1}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = l \quad (3.127)$$

Für den **indirekten** Anteil  $\mathbf{k}_{c_T}^{indirekt}$  vereinfacht sich die Gleichung (3.110) aufgrund der Ansatzfunktion folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt} &= \frac{t_{T_1}}{m_{11}} \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1\mathbf{T}^T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2g}{m_{11}} (\mathbf{T}_1\mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1\mathbf{T}_1^T) - \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T \right] \end{aligned} \quad (3.128)$$

Nach Durchführung der numerischen Integration von  $\mathbf{k}_{c_T}^{indirekt}$  für das Dreiknoten-Kontaktelement entsteht:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_T}^{indirekt} &= \bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_{int}} W^{\tilde{k}} j(\eta^{\tilde{k}}) \mathbf{k}_{c_T}^{\tilde{k}} = \frac{\tilde{t}_{T_1}}{l} \left[ \frac{1}{l^2} (\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1\mathbf{T}^T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2g}{l^2} (\mathbf{T}_1\mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1\mathbf{T}_1^T) - \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T \right] \end{aligned} \quad (3.129)$$

Nach der numerischen Integration entwickelt sich  $\tilde{t}_T$  zu  $\tilde{t}_T = t_{T_1} l$  und die Metrik zu  $m_{11} = l^2$

# Kapitel 4

## Augmented–Lagrange–Verfahren und Symmetrisierung

### 4.1 Vorbemerkungen

In Kapitel 3 wurden alle notwendigen Herleitungen dargestellt, die zur numerischen Umsetzung mit der Finite–Elemente–Methode genutzt werden. Zu Beginn wurde das Kontaktproblem aus Sicht der Kontinuumsmechanik betrachtet. Anschließend wurde das Prinzip der virtuellen Arbeit um die Kontaktbedingungen erweitert und linearisiert. Am Ende wurden die benötigten Gleichungen für den Kontaktkraftvektor und die Kontaktsteifigkeit bereitgestellt. Die numerische Umsetzung der Lösung der Bewegungsgleichung (3.82) verlangt die Beachtung weiterer zahlreicher Details, die hier nicht weiter diskutiert werden. Zwei wesentliche Schwierigkeiten bei der Lösung von Kontaktproblemen blieben bisher im Hintergrund und werden nun behandelt. Das sind

- die Penaltyabhängigkeit und die damit verbundene Penetration, sowie
- die Unsymmetrie des zu lösenden Gleichungssystems.

In diesem Kapitel sollen diese Probleme und Möglichkeiten zu deren Beseitigung untersucht werden, um zu einer effektiven Lösung des globalen Gleichungssystems zu kommen.

Die Sensibilität der Regularisierung der Kuhn–Tucker–Bedingung infolge der Penaltyfaktoren wurde bereits im Kapitel 3.2 erwähnt. Dort wurde gesagt, dass die Penaltyregulierung nur exakt erfüllt ist, wenn die Penaltyfaktoren gegen unendlich gehen, das heißt  $\epsilon_N, \epsilon_T \longrightarrow \infty$ . Andererseits ist bekannt, dass eine schlechte Konditionierung des Gleichungssystems auftritt, wenn die Penaltyfaktoren sehr groß werden.

Die Wirkung einer solchen schlechten Konditionierung kann erheblich sein. Durch die Nutzung von Eliminationstechniken zur Lösung von Gleichung (3.96) verliert man durch eine schlechte Konditionierung an numerischer Genauigkeit, was zu mangelhafter Konvergenz oder zu Divergenz führt. Iterative Lösungstechniken sind dann nicht mehr nutzbar. Die Schwierigkeiten beim Penalty–Verfahren bestehen darin, die Penaltyfaktoren so zu wählen, dass sie groß genug sind, um die Kontaktbedingungen möglichst genau zu erfüllen, aber dabei die Konditionierung des Gleichungssystems nicht soweit zu verändern, dass eine Lösung aus oben genannten Gründen nicht möglich ist. Diese Wahl gestaltet sich teilweise unmöglich.

Weitere Bedenken ergeben sich bezüglich der Verwendung von Ansätzen niedriger Ordnung und schlechten Approximation der Kontaktfläche. Letzteres wird im Folgenden nicht diskutiert.

Die Unsymmetrie des globalen Gleichungssystems beruht auf der Nichtassoziiiertheit des Reibgesetzes. Da in der Strukturmechanik nahezu ausschließlich Potenzialprobleme mit symmetrischen Systemmatrizen gelöst werden, führt die Einführung der Unsymmetrie durch Reibung zu einem höheren Aufwand bei der Gleichungslösung. Bei komplexen Anwendungen leidet darunter die Effizienz von impliziten dynamischen Verfahren. Versuche, auf künstlichen Wegen eine Symmetrie einzuführen, waren überwiegend mit mangelnder Konvergenz behaftet. Nur eine zuverlässige und auf theoretischer Basis stehende Symmetrisierung der globalen Gleichungen ist sinnvoll. Eine symmetrische Lösung muss den Vergleich mit einer unsymmetrischen Lösung in Bezug auf Effektivität von praktischen Problemstellungen standhalten.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie durch die Anwendung des Augmented–Lagrange–Verfahrens die beiden aufgezeigten Problemkreise umgangen werden können. Die Möglichkeiten dieses Verfahrens, die Konditionierung des Penalty–Verfahrens zu entschärfen, wurden im Zusammenhang mit mathematischen Programmiermethoden entdeckt. Nachdem die ersten Anwendungen der Methode im Rahmen von Optimierungsverfahren bei Gleichungen mit Nebenbedingungen realisiert wurden, konnte das Anwendungsspektrum auf Probleme mit Nebenbedingungen in Ungleichungsform erweitert werden, so BERTSEKAS [1982], LUENBERGER [1984]. Die praktische Umsetzung ist relativ einfach. Erfolgreiche Anwendungen dieses Augmented–Lagrange–Verfahrens mit der Finite–Elemente–Methode wurden bei inkompressibler Elastizität von GLOWINSKI & LETALLEC [1989] und anderen, sowie bei reibungslosem Kontakt von LANDERS & TAYLOR [1986], STEIN, WRIGGERS & WAGNER [1987] durchgeführt. Als erste wesentliche Entwicklung wird gezeigt, wie das reibungsbehaftete Kontaktproblem ohne eine möglicherweise schlechte Konditionierung des

Gleichungssysteme gelöst werden kann.

Bei Kontakt mit Reibung, so SIMO & LAURSEN [1992], gestaltet sich die Erweiterung komplizierter, da die zusätzlichen Reibungsbedingungen (3.40)–(3.43) integriert werden müssen. Die Vorteile der Erweiterung des standardisierten Penalty-Verfahrens mit Lagrange-Multiplikatoren wurden auch von ALART & CURNIER [1991] gezeigt. Ebenfalls ohne Reibung, aber mit einem Schwerpunkt auf den nichtlinearen konstitutiven Beziehungen, zeigen WRIGGERS & ZAVARISE [1993], wie man bei Untersuchungen mit hohen Präzisionsanforderungen mit extrem harten Oberflächen durch Anwendung des Augmented-Lagrange-Verfahrens die schlechte Konditionierung und auch die Penetration umgehen kann.

Im Zusammenhang mit großen reibungsfreien Gleitwegen stellen HEEGAARD & CURNIER [1993] eine erfolgreiche Realisierung der Methode vor. Die resultierenden diskreten Gleichungen bleiben auch bei Anwendung des Augmented-Lagrange-Schemas weiterhin unsymmetrisch. Die Entwicklung der algorithmischen Symmetrisierung der Gleichungen bei gleichzeitiger Erhaltung der Vorteile des Augmented-Lagrange-Verfahrens wird von SIMO & LAURSEN [1992] gezeigt.

Für thermomechanische Kontaktprobleme mit Reibung unter Berücksichtigung von mikromechanischen Effekten zeigen ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] die Vorteile der Symmetrisierung und stellen dabei zusätzliche Varianten vor. Diese Symmetrisierung ist eng verbunden mit dem Konzept des sogenannten Operator-splittings, das im Zusammenhang mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren bereits von GLOWINSKI & LETALLEC [1989] diskutiert wurde.

Im Gegensatz zu einigen mäßig erfolgreichen Zweischnitt-Algorithmen für Kontakt mit Reibung, wie von KIKUCHI & ODEN [1988] gezeigt, behält diese Methode die sehr guten Konvergenzeigenschaften der standardisierten Penaltyregularisierung, bei fast exakter Einhaltung der Bedingungen selbst bei großen Deformationen und Inelastizität. Unter Berücksichtigung eines verallgemeinerten Reibgesetzes zeigen auch HEEGE, ALART & ONATE [1995] statische Anwendungen des Augmented-Lagrange-Verfahrens.

## 4.2 Das Augmented–Lagrange–Verfahren

Das Augmented–Lagrange–Verfahren wurde bereits in Kapitel 1 im Zusammenhang mit dem Penalty–Verfahren und der Lagrange–Multiplikatoren–Methode einleitend beschrieben. Die einzuführende Augmented–Lagrange–Regularisierung ist allgemeingültiger als die Penaltyregularisierung. In diesem Kapitel wird diese Tatsache anhand der reibungsbedingten Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.40)–(3.43) in der Momentanconfiguration erörtert.

### 4.2.1 Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung

Für die Darstellung der Grundgleichung der Kontaktarbeit mit Lagrange–Multiplikatoren müssen  $\lambda_N$  und  $\lambda_T^b$  für die Kontaktkräfte  $t_N$  und  $t_T^b$  eingeführt werden. Beide Größen sind zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathfrak{N}$  zeitabhängig. Wesentlich ist, dass  $\lambda_N$  und  $\lambda_T^b$  genauso wie  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$  als unabhängige Variablen anzusehen sind. Das zu lösende Problem kann gemeinsam mit den nichtregularisierten Nebenbedingungen folgendermaßen formuliert werden.

Gesucht werden  $\varphi^{(i)}$   $i = 1, 2$ ,  $\lambda_N$  und  $\lambda_T^b$ , sodass für alle  $t \in \mathfrak{N}$  gilt:

$$G_{dyn}(\varphi_t, \dot{\varphi}) + \int_{\Gamma^{(1)}} [\lambda_N \delta g + \lambda_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} = 0 \quad (4.1)$$

Für alle  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  soll gelten:

$$\begin{aligned} g &\leq 0 \\ \lambda_N &\geq 0 \\ \lambda_N g &= 0 \\ f &= [\lambda_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} \lambda_{T_\beta}]^{1/2} - \mu \lambda_N \leq 0 \\ m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta - \zeta \frac{\lambda_T^b}{[\lambda_{T_\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_\gamma}]^{1/2}} &= 0 \\ \zeta &\geq 0 \\ f \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vereinfacht ausgedrückt wird diese Formulierung als Sattelpunktproblem für die gesuchten Verformungen und Multiplikatoren bezeichnet, so GLOWINSKI & LETALLEC [1989]. Die zugelassenen Variationen  $\dot{\varphi}$  sind unabhängig von den Kontaktbedingungen. Das Ziel, die Erfüllung aller Bedingungen, wird durch die zusätzlichen Variablen  $\lambda_N$ ,  $\lambda_T^b$  und durch die sieben zusätzlichen Nebenbedingungen (4.2) erreicht.

### 4.2.2 Augmented–Lagrange–Formulierung

Für die Augmented–Lagrange–Regularisierung wird das Integral der Kontaktarbeit wiederum mit den Kontaktkräften eingeführt. Es werden die regularisierten Nebenbedingungen benutzt. Diese Nebenbedingungen werden um die Multiplikatoren  $\lambda_N$  und  $\lambda_T^b$  erweitert. Die Multiplikatoren dienen als Partner für die Kontaktkräfte  $t_N$  und  $\mathbf{t}_T^b$ .

Gesucht werden  $\varphi^{(i)}$   $i = 1, 2$ ,  $\lambda_N$  und  $\lambda_T^b$ , sodass für alle  $t \in \mathfrak{N}$  gilt:

$$G_{dyn}(\varphi_t, \dot{\varphi}) + \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} = 0 \quad (4.3)$$

Für alle  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  soll gelten:

$$\begin{aligned} \dot{t}_N &= [\dot{\lambda}_N + \epsilon_N \dot{g}]^+ \\ f &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \\ m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta - \zeta \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} &= \frac{1}{\epsilon_T} [\dot{t}_{T_\alpha} - \dot{\lambda}_{T_\alpha}] \\ \zeta &\geq 0 \\ f\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Man kann durch einfaches Weglassen oder Zu–null–setzen der Lagrange–Multiplikatoren  $\lambda_N$  und  $\lambda_{T_\alpha}$  in den Bedingungen (4.4) zeigen, dass sich diese Gleichungen in die Gleichungen der regularisierten Kuhn–Tucker–Bedingungen (3.48), (3.49)–(3.52) überführen lassen.

Die neuen Regularisierungen ermöglichen die Anwendung des Zeitintegrationsschemas aus Kapitel 3.4 sowohl auf die Lagrange–Multiplikatoren–Methode als auch auf das Augmented–Lagrange–Verfahren. Die Lösungen, die man dabei mit der Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung erhält, erfüllen gleichzeitig die Gleichungen (4.3) und (4.4) der Augmented–Lagrange–Formulierung. Diese zeitintegrierte Form der Gleichungen (4.4) mit den eingeführten Penaltyfaktoren erfüllen wiederum die Bedingungen für die Multiplikatoren und die Verschiebungsfelder der Gleichung (4.2). Vorausgesetzt wird hierbei, dass die Paare  $(t_N, \mathbf{t}_T^b)$  der Gleichungen (4.4) dann den zugehörigen Multiplikatoren  $(\lambda_N, \lambda_T^b)$  entsprechen. Diese Eigenschaften werden im folgenden Abschnitt verifiziert. Sie bleiben unabhängig von den Beträgen von  $\epsilon_N$  und  $\epsilon_T$ . Genau diese in der Theorie exakte Erfüllung der Bedingungen mit diskreten Penaltyfaktoren ist nun der Kerninhalt des Augmented–Lagrange–Verfahrens.

Wie im Folgenden gezeigt wird, lässt sich dieser Sachverhalt direkt durch Überführung von einem zum anderen Verfahren, siehe auch LAURSEN [1992], direkt nachweisen:

### Überführung in Normalenrichtung

Angenommen, man hat eine Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung mit den Gleichungen (4.1) und (4.2) zu einem Zeitpunkt  $t \in \mathfrak{N}$  gelöst und ein Paar  $(g, \lambda_N)$  für  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  ermittelt, dann ergeben sich die folgenden beiden Möglichkeiten:

Mit  $g \leq 0$  und  $\lambda_N = 0$  erhält man als erste Möglichkeit die Trivillösung  $[\lambda_N + \epsilon_N g]^+ = [\epsilon_N g]^+$  und  $t_N = \lambda_N = 0$ . Als zweite Möglichkeit ergibt sich  $g = 0$  und  $\lambda_N \geq 0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} t_N &= [\lambda_N + \epsilon_N g]^+ \\ &= [\lambda_N]^+ \\ &= \lambda_N \end{aligned} \tag{4.5}$$

Damit sind die Grenzfälle gezeigt. Die wesentliche Eigenschaft von Gleichung (4.4)<sub>1</sub> ist, dass die Kontaktkraft  $t_N$  auch ungleich null sein kann, wenn  $g$  mit einem kleinen Betrag im negativen Bereich liegt  $g \leq 0$ . In einem solchen Fall ist der Multiplikator  $\lambda_N$  nicht exakt. Diese Regularisierung ist charakteristisch für die Einhaltung der Ungleichungsbedingungen.

### Überführung in tangentialer Richtung

Um in tangentialer Richtung eine Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung in eine Augmented–Lagrange–Formulierung überführen zu können, ist es erforderlich, die zeitlich diskretisierte Form über das Intervall  $[t_n, t_{n+1}] \subset \mathfrak{N}$  zu benutzen. Man erhält sie durch Anwendung der impliziten Euler–Integration auf die Gleichungen (4.2) und (4.4), siehe auch Kapitel 3.6.3.

Damit ergibt sich für die Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung:

$$\begin{aligned} g_{n+1} &\leq 0 \\ \lambda_{N_{n+1}} &\geq 0 \\ \lambda_{N_{n+1}} g_{n+1} &= 0 \\ f_{n+1} &= [\lambda_{T_{n+1}\alpha} m^{\alpha\beta} \lambda_{T_{n+1}\beta}]^{1/2} - \mu \lambda_{N_{n+1}} \leq 0 \\ m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] - \zeta \frac{\lambda_{T_{n+1}\alpha}}{[\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}} &= 0 \\ \zeta &\geq 0 \\ f_{n+1} \zeta &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

und für die Augmented–Lagrange–Formulierung:

$$\begin{aligned}
t_{N_{n+1}} &= [\lambda_{N_{n+1}} + \epsilon_N g_{n+1}]^+ \\
f_{n+1} &= [t_{T_{n+1}\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1}\beta}]^{1/2} - \mu t_{N_{n+1}} \\
t_{T_{n+1}\alpha} &= \lambda_{T_{n+1}\alpha} + \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] - \zeta \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}} \right\} \\
\zeta &\geq 0 \\
f_{n+1} \zeta &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

In Gleichung (4.7)<sub>3</sub> werden die beiden aus dem Zeitschritt  $n$  bekannten Größen  $t_{T_{n\alpha}}$  und  $\lambda_{T_{n\alpha}}$  gleichgesetzt. Dies ist zumindest für den allerersten Zeitschritt  $t_1 = 0$  korrekt, da dann beide Größen gleich null sind und sich erst im weiteren Verlauf entwickeln.

Basierend auf Gleichung (4.6)<sub>5</sub> führt die exakte Lagrange–Multiplikatoren–Lösung zu:

$$m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] = \zeta_\lambda \frac{\lambda_{T_{n+1}\alpha}}{[\lambda_{T_{n+1}\alpha} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}} \tag{4.8}$$

$\zeta_\lambda$  ist dabei der sogenannte Konsistenzparameter. Nach Einsetzen von Gleichung (4.8) in die Bedingung (4.7)<sub>3</sub> ergibt sich

$$t_{T_{n+1}\alpha} \left( 1 + \frac{\epsilon_T \zeta}{[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}} \right) = \lambda_{T_{n+1}\alpha} \left( 1 + \frac{\epsilon_T \zeta_\lambda}{[\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}} \right) \tag{4.9}$$

mit  $\zeta$  als Konsistenzparameter der Augmented–Lagrange–Formulierung. Da Gleichung (4.9) für alle Komponenten von  $\alpha$  gilt, können auch die Normen von beiden Seiten gebildet werden:

$$[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} + \epsilon_T \zeta = [\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} + \epsilon_T \zeta_\lambda \tag{4.10}$$

Im Folgenden ist zwischen den beiden Fällen **Haften** und **Gleiten** zu unterscheiden: Beim **Gleiten** mit der Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung wird  $\zeta_\lambda \geq 0$  impliziert und Gleichung (4.6)<sub>4</sub> führt dann mit  $f_{n+1} = 0$  zu

$$[\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} = \mu \lambda_{N_{n+1}}. \tag{4.11}$$

Aus der Bedingung (4.5) für die Normalenrichtung ist bekannt, dass  $\lambda_{N_{n+1}} = t_{N_{n+1}}$  ist. Diese Bedingung wird zuerst in Gleichung (4.11) und anschließend werden beide gemeinsam in Gleichung (4.10) eingesetzt:

$$[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} - \mu t_{N_{n+1}} = \epsilon_T (\zeta_\lambda - \zeta) \quad (4.12)$$

Aus den Gleichungen (4.7)<sub>2</sub> und (4.12) folgt, dass  $\zeta_\lambda - \zeta \leq 0$  oder  $\zeta \geq \zeta_\lambda \geq 0$  sein muss. Angenommen, es gilt  $\zeta > 0$ , dann gilt aufgrund Gleichung (4.7)<sub>5</sub>, dass  $f_{n+1} = 0$  ist und somit gilt  $[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} = \mu t_{N_{n+1}}$ . Diese Bedingung in Gleichung (4.9) eingesetzt, ergibt die gesuchte Beziehung  $t_{T_{n+1}\alpha} = \lambda_{T_{n+1}\alpha}$ .

Für den Fall des **Haftens** ergibt sich bei der Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung  $\zeta_\lambda = 0$ . Dann folgt aus Gleichung (4.10):

$$[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} + \epsilon_T \zeta = [\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} \quad (4.13)$$

Wird nun erneut angenommen, dass  $\zeta > 0$  ist, ergibt sich mit (4.7)<sub>5</sub>, dass  $f_{n+1} = 0$  und somit

$$[t_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} = \mu t_{N_{n+1}} \quad (4.14)$$

gilt. Wird Gleichung (4.14) unter erneuter Annahme von Gleichung (4.5)  $t_{N_{n+1}} = \lambda_{N_{n+1}}$  in Gleichung (4.13) eingesetzt, erhält man

$$\epsilon_T \zeta + \mu \lambda_{N_{n+1}} = [\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2}. \quad (4.15)$$

Mit der Annahme von  $\zeta \geq 0$  in Gleichung (4.15) müsste gleichzeitig

$$\mu \lambda_{N_{n+1}} \geq [\lambda_{T_{n+1}\beta} m^{\beta\gamma} \lambda_{T_{n+1}\gamma}]^{1/2} \quad (4.16)$$

gelten. Diese Aussage steht aber eindeutig im Widerspruch zu der Bedingung (4.6)<sub>4</sub>  $f_{n+1} \leq 0$ . Daraus folgt, dass nur mit  $\zeta = \zeta_\lambda = 0$ , eingesetzt in Gleichung (4.9), die gesuchte Beziehung  $t_{T_{n+1}\alpha} = \lambda_{T_{n+1}\alpha}$  ermittelt werden kann.

Mit diesen Überführungen ist gezeigt worden, dass die in der Zeit diskretisierte Form von Gleichung (4.4) der Augmented–Lagrange–Formulierung unter Berücksichtigung der Penaltyregularisierung in tangentialer Richtung der Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung entspricht.

### 4.2.3 Augmented–Lagrange–Algorithmus

Für die numerische Umsetzung der Augmented–Lagrange–Formulierung nach den Gleichungen (4.3)–(4.4) gibt es verschiedene Vorgehensweisen, siehe beispielsweise GLOWINSKI & LETALLEC [1989]. Hiervon ist in der Mechanik der Uzawa–Algorithmus am weitesten verbreitet, siehe zum Beispiel BERTSEKAS [1982] und LUENBERGER [1984]. Im Folgenden wird dieser Algorithmus mit allen zugehörigen algorithmischen Details vorgestellt und auf Kontaktprobleme mit Reibung angewendet. Im Weiteren wird eine angepasste Zuweisung eines aktuellen Zahlenwertes einer Variablen im Laufe eines Algorithmus als 'update' verstanden.

#### Der Uzawa–Algorithmus

Zu Beginn wird erneut die globale Augmented–Lagrange–Formulierung anhand der Gleichungen (4.3)–(4.4) betrachtet:

$$\begin{aligned}
 G_{dyn}(\varphi_t, \varphi) &+ \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} = 0 \\
 \dot{t}_N &= H(\lambda_N + \epsilon_N g)[\epsilon_N \dot{g} + \dot{\lambda}_N] \\
 \dot{t}_{T_\alpha} &= \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta - \zeta \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} \right\} + \dot{\lambda}_{T_\alpha} \\
 f &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \\
 \zeta &\geq 0 \\
 f\zeta &= 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Der Grundgedanke, der hinter dem Uzawa–Algorithmus steht, ist der Folgende: Man löst in diskreter Form die Gleichungen (4.3)–(4.4) für alle  $\varphi^{(i)}$   $i = 1, 2$  zu jedem Zeitpunkt von  $t \in \mathfrak{N}$  unter der Annahme, dass die Werte für die Multiplikatoren  $\lambda_N$  und  $\lambda_T$  einen konstanten Wert haben. Erst anschließend – in einem weiteren Schritt – werden die Werte für die Multiplikatoren verbessert. Das Gleichungssystem (4.17) wird deshalb durch einen sogenannten 'operator–split' soweit zerlegt, dass es in zwei Schritten gelöst werden kann.

### Aufteilung in zwei Phasen

Für eine Lösung in zwei Phasen wird die folgende Aufteilung der Formulierung vorgenommen und ist für alle  $\varphi^{(i)}$   $i = 1, 2$  und für alle  $\lambda_N$  und  $\lambda_T$  zu lösen.

**Phase 1:** Den ersten Teil der Lösung erhält man, wenn die Werte der beiden Multiplikatoren  $\lambda_N, \lambda_T$  konstant gehalten werden und die Bewegung  $\varphi$  ermittelt wird:

$$\begin{aligned}
 G_{dyn}(\varphi_t, \dot{\varphi}) + \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} &= 0 \\
 \dot{t}_N &= H(\lambda_N + \epsilon_N g) \epsilon_N \dot{g} \\
 \dot{t}_{T_\alpha} &= \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta - \zeta \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} \right\} \\
 f &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \\
 \zeta &\geq 0 \\
 f\zeta &= 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

**Phase 2:** Den zweiten Teil der Lösung erhält man durch Festhalten der Bewegung  $\varphi$  und Auflösen der beiden Multiplikatoren  $\lambda_N, \lambda_T$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{t}_N &= H(\lambda_N + \epsilon_N g) \dot{\lambda}_N \\
 \dot{t}_{T_\alpha} &= \dot{\lambda}_{T_\alpha}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Für die Gesamtlösung (4.17) werden die Lösungen der beiden Teilprobleme (4.18) und (4.19) zusammengeführt. In **Phase 1** wird das Gleichungssystem nach den Verschiebungen gelöst und in **Phase 2** werden die Werte der Multiplikatoren aktualisiert. Mit diesen aktualisierten Werten der Multiplikatoren wird der Lösungsvorgang in **Phase 1** mit den nun verbesserten Annahmen für die Multiplikatoren wiederholt. Diese Vorgänge werden solange fortgeführt, bis die im Rahmen einer Toleranz exakten Werte für die Multiplikatoren erreicht werden.

In Abbildung 4.1 wird das Vorgehen für den eindimensionalen Fall eines Punktes  $\mathbf{x}$  auf der Oberfläche  $\gamma^{(1)}$  dargestellt. Der Einfachheit halber wird nur Normalkontakt betrachtet. Für die über die Zeit integrierten Gleichungen von (4.18)<sub>2</sub> und (4.19)<sub>1</sub> ergibt sich

$$\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)} = t_{N_{n+1}}^{(k)} = \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{n+1}^{(k)}$$

Sofern Kontakt vorhanden ist, beginnt man mit einer Anfangsabschätzung  $k = 0$ , für die Druckkraft  $\lambda^{(0)} = 0$ . In **Phase 1** werden die Bewegungen ermittelt, und man erhält einen Wert der Abstandsfunktion  $g^{(0)}$  an diesem Punkt auf der Oberfläche. Mit dem Penaltyfaktor  $\epsilon_N$  ergibt sich daraus eine Kontaktkraft  $t_{N_{n+1}}^{(0)}$ . In der **Phase 2** wird der Wert dieser Kontaktkraft in den Multiplikator  $\lambda_{N_{n+1}}^{(1)}$  überführt. Anschaulich gesehen wird die verbesserte Lösung dabei auf die  $t_N$ -Achse im Koordinatensystem projiziert. Die in der Abbildung erkennbare Steigung ergibt sich aus dem Wert von  $\epsilon_N$ .

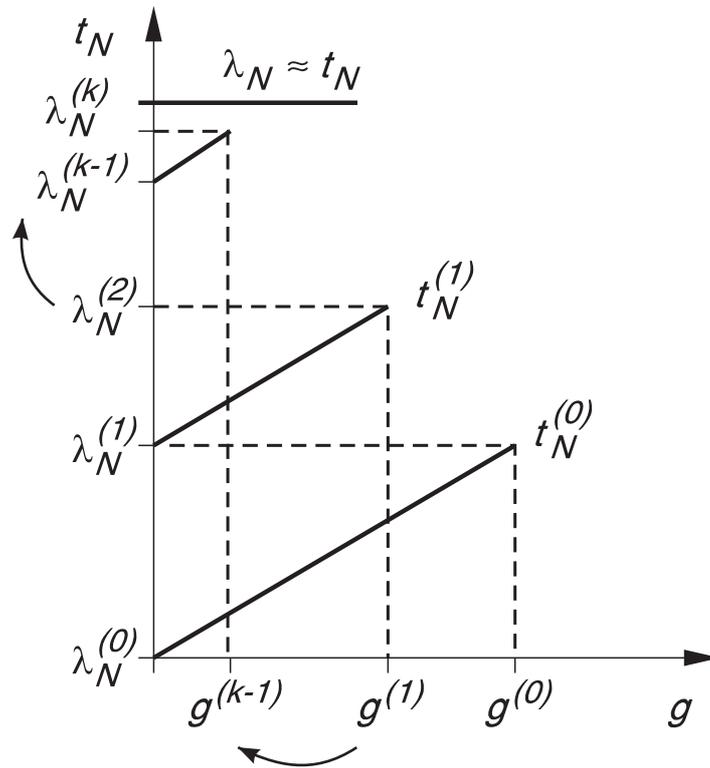


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Augmented-Lagrange 'update'-Vorganges in Normalenrichtung.  $\epsilon_N$  entspricht der Steigung.

Mit der verbesserten Abschätzung  $\lambda_N^{(1)}$  für die Kontaktkraft werden die Gleichungen in **Phase 1** erneut gelöst. Die in dieser Phase ermittelte Kontaktkraft, die sich

aus  $\lambda_N^{(1)}$  und einem Produkt von  $g^{(1)}$  und dem Penaltyfaktor zusammensetzt, wird dann in **Phase 2** zu einer verbesserten Schätzung für  $\lambda_N^{(2)}$ . Dieser Prozess wird mehrmals wiederholt, dabei wird stets  $k = k + 1$  gesetzt. Mit zunehmender Anzahl von Wiederholungen verringert sich die Penetration, bis sie quasi verschwindet und die Kontaktkraft unabhängig vom Penaltyfaktor und der Penetration ist. Die ermittelten Multiplikatoren sind von Verschiebungen unabhängige Kräfte. Diese Vorgehensweise führt also dazu, dass die exakten Multiplikatoren nahezu erreicht werden, wobei die Inpenetrationsbedingungen  $g \leq 0$  nur geringfügig verletzt werden. Für den Algorithmus in tangentialer Richtung verläuft dieser Vorgang analog, allerdings, wie aus Abbildung 4.2 ersichtlich, mit der zusätzlichen Integration der Reibungsbedingungen. Am Ende der Prozesse kann mit Hilfe eines Abbruchkriteriums gewährleistet werden, dass  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \approx t_{N_{n+1}}^{(k)}$  und  $\lambda_{T_{n+1}\alpha}^{(k)} \approx t_{T_{n+1}\alpha}^k$  innerhalb einer gewissen Toleranz gleich sind.

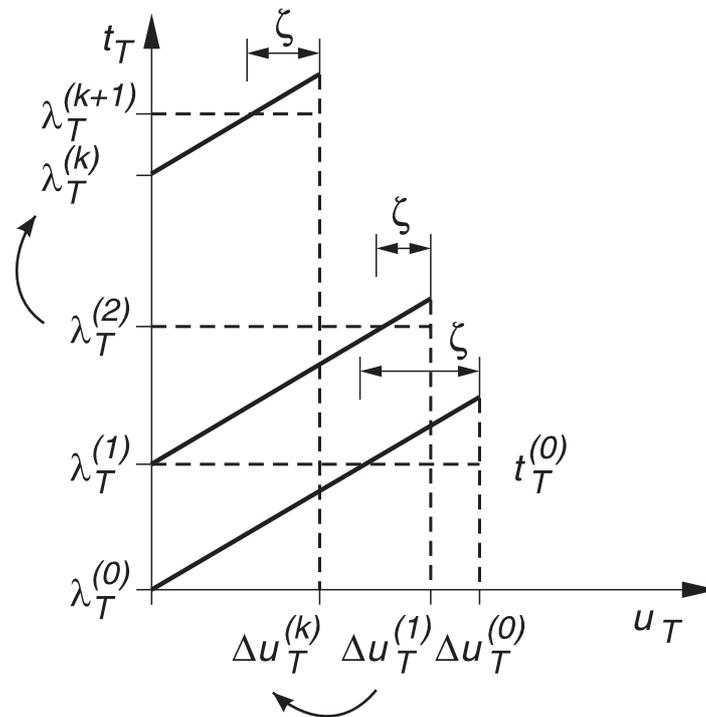


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des Augmented-Lagrange 'update'-Vorganges in tangentialer Richtung,  $\Delta u_T = m_{11}[\bar{\xi}_{n+1}^{1(k)} - \bar{\xi}_n^1]$ .  $\epsilon_T$  entspricht der Steigung.

Als **Abbruchkriterien** bieten sich mehrere Möglichkeiten an:

Als eine Möglichkeit der Beobachtung der Entwicklung des Prozesses bietet sich die Beobachtung der Verhältnisse der Penetration, der Haftverschiebung oder Multiplikatoren eines sich in Kontakt befindenden Punktes  $\mathbf{x}$  an. Hierzu bieten sich die folgenden Quotienten (4.20) an.

$$\frac{g_{n+1}^{(k+1)}}{g_{n+1}^{(k)}} \quad ; \quad \frac{\Delta u_{T_{n+1}}^{(k+1)}}{\Delta u_{T_{n+1}}^{(k)}} \quad ; \quad \frac{\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)}}{\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}} \quad ; \quad \frac{\lambda_{T_{n+1}}^{(k+1)}}{\lambda_{T_{n+1}}^{(k)}} \quad (4.20)$$

Stellt man bei der Beobachtung der Verhältnisse fest, dass diese sich im Verlauf zweier aufeinander folgender 'update'–Prozesse nicht mehr verändern, kann der Vorgang abgebrochen werden, da kein weiterer Fortschritt bei der Minimierung erzielt wird. Da es sich hierbei lediglich um ein relatives Kriterium handelt, liegt der Grenzwert bei eins.

Wenn die Werte der Penetration oder der Haftverschiebung eines sich in Kontakt befindenden Punktes  $\mathbf{x}$  so klein werden, dass sie einen als Grenzwert  $Tol_u$  vorgegebenen Absolutwert unterschreiten, siehe Gleichung (4.21), kann der Prozess abgebrochen werden.

$$g_{n+1}^{(k+1)} + \Delta u_{T_{n+1}}^{(k+1)} \leq Tol_u \quad (4.21)$$

Prinzipiell vergleichbar mit dem Abbruchkriterium bei der Gleichgewichtsiteration ist die Ermittlung der durch den Penaltyfaktor gespeicherten Energie an einem Kontaktpunkt  $\mathbf{x}$ . Diese Energieanteile entstehen nur durch Penetration und Haftverschiebung. Für die in beiden Richtungen auftretenden Penaltyenergien, siehe Gleichung (4.22), kann ein nicht zu unterschreitender Grenzwert  $Tol_E$  festgelegt werden.

$$\begin{aligned} E_N &= 0.5 \epsilon_N g^2 \\ E_T &= 0.5 \epsilon_T (\Delta u_T)^2 \\ E_N + E_T &\leq Tol_E \end{aligned} \quad (4.22)$$

Weitere Überlegungen und ausführliche Untersuchungen anhand eines Beispiels werden in Kapitel 5.5 beschrieben.

### Unsymmetrischer Augmented–Lagrange–Algorithmus

Für die Lösung des Gesamtproblems, bestehend aus den Gleichungen (4.18) und (4.19), ergibt sich im Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}] \in \mathfrak{N}$  der folgende Algorithmus:

**1.** Initialisierung des Zählers  $k$  für die Schleife der Augmented–Lagrange–Iteration und erstes Schätzen der Anfangswerte der Multiplikatoren:

$$\begin{aligned}\lambda_{N_{n+1}}^{(0)} &= \lambda_{N_n} \\ \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(0)} &= \lambda_{T_{n\alpha}} \\ k &= 0\end{aligned}\tag{4.23}$$

**2.** Ermittlung des Lösungsvektors  $\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$  mit den Annahmen der Werte der fixierten Multiplikatoren der  $k$ -ten Iteration durch Lösen der Gleichung, gemäß **Phase 1**:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{ext} &= \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}) \\ \mathbf{d}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}^{(k)}] \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}^{(k)}]\end{aligned}\tag{4.24}$$

Die Kontaktkräfte auf der diskretisierten Oberfläche  $\Gamma^{(1)^h}$  werden dabei folgendermaßen festgelegt:

$$\begin{aligned}t_{N_{n+1}}^{(k)} &= [\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{n+1}^{(k)}]^+ \\ t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} &= \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} + \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1\alpha}^{\beta(k)} - \bar{\xi}_n^\beta] - \zeta \frac{t_{T_{n+1}}^{(k)}}{[t_{T_{n+1\beta}}^{(k)} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1\gamma}}^{(k)}]^{1/2}} \right\} \\ f_{n+1}^{(k)} &= [t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1\beta}}^{(k)}]^{1/2} - \mu t_{N_{n+1}}^{(k)} \\ \zeta &\geq 0 \\ f_{n+1}^{(k)} \zeta &= 0\end{aligned}\tag{4.25}$$

**3.** 'update' der Lagrange–Multiplikatoren und des Iterationszählers  $k$ , gemäß **Phase 2**:

$$\begin{aligned}\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)} &= t_{N_{n+1}}^{(k)} \\ \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k+1)} &= t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} \\ k &\leftarrow k + 1\end{aligned}\tag{4.26}$$

**4.** Abfrage nach dem Abbruchkriterium:

$$\text{Abbruchkriterium} \begin{cases} \text{nicht erfüllt,} & \text{zurück,} & \text{zu } \mathbf{2}. \\ \text{erfüllt,} & \text{nächster Zeitschritt,} & \text{zu } \mathbf{1}. \end{cases}$$

Die Schritte **2.**–**4.** des vorgestellten Algorithmus werden generell solange wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist, sodass  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \approx t_{N_{n+1}}^{(k)}$  und  $\lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} \approx t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)}$  gilt. Die erforderlichen Änderungen für  $\mathbf{R}_c$ , die durch Gleichung (4.25) gegenüber Gleichung (3.71) und (3.99) entstehen, werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

### Diskussion verschiedener 'update'–Möglichkeiten

Ursprünglich wurde der Uzawa–Algorithmus für Probleme benutzt, bei denen in Schritt **2** des oben vorgestellten Algorithmus Lösungen von linearen Problemen erzeugt werden. In diesem Fall ist es eindeutig, wann die 'updates' von Schritt **3** durchgeführt werden müssen. Dazu wird das lineare Problem in Schritt **2** gelöst und anschließend werden die 'updates' im Schritt **3** vorgenommen. Wenn das Problem von Schritt **2** allerdings nichtlinear ist, dann ergeben sich wegen der für die Lösung notwendigen Iterationstechniken Auswahlmöglichkeiten für die 'updates' der Multiplikatoren. Eine davon besteht darin, die 'updates' von Schritt **3** gleichzeitig mit den Gleichgewichtsiterationen von Schritt **2** auszuführen. Das heißt, dass unmittelbar nach jedem Iterationsschritt die verbesserte Lösung ebenfalls angepasst wird. Hierbei ist der numerische Aufwand geringer, da beide Schritte kombiniert werden können. Dieses Vorgehen wird üblicherweise in der Strömungsmechanik verwendet und ist als gleichzeitige oder simultane Iteration bekannt. Angewendet bei der Lösung von Kontaktproblemen wurde es von STEIN, WRIGGERS & WAGNER [1987]. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Schritt **2** komplett zu lösen, auch wenn das Problem nichtlinear ist, und erst dann Schritt **3** auszuführen. Dieses Schema wird als eingeschlossene Iteration bezeichnet, da die Iterationsschleife für die Newton–Iterationen, die notwendig sind, um die Gleichung (4.24) zu lösen, von der äußeren Schleife umschlossen wird. Sie wird als Augmented–Lagrange–Schleife mit dem Zähler ( $k$ ) bezeichnet. Dieses Schema scheint im Vergleich mit dem simultanen 'update' zunächst uneffizient, da bei jeder Augmented–Lagrange–Iteration ( $k$ ) das Gleichungssystem iterativ gelöst werden muss. Aber speziell die Möglichkeit der eingeschlossenen Gleichgewichtsiteration hat sich gegenüber der Möglichkeit der simultanen Iteration bei Kontaktproblemen als deutlich effizienter erwiesen. Dieser Vorteil, so LAURSEN [1992], rührt daher, dass die Multiplikatoren während der Lösungsphase absolut konstant bleiben. Somit ist die konsistente Linearisierung der virtuellen Arbeit genauso effektiv wie bei der standardisierten Penaltyregularisierung. Dagegen können bei der simultanen Iteration die Multiplikatoren während der Lösungsphase variieren, da nach jedem Iterationsschritt ein 'update' erfolgt. Da diese Operationen nicht konsistent linearisiert werden können, fällt die Konvergenzrate merklich ab. Deshalb wird im weiteren Vorgehen ausschließlich das eingeschlossene Iterationsverfahren benutzt.

#### 4.2.4 Modifizierte Linearisierung und Kontaktsteifigkeitsmatrix

Um einen expliziten Ausdruck für  $\mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial}$  zu erhalten, wird der in Kapitel 3.5 eingeführte Prädiktor–Korrektor–Algorithmus (3.99) auf die Gleichungen (4.25) angewendet:

**Prädiktor–Zustand:**

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{N_{n+1}}^{(k)} &= [\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{n+1}^{(k)}]^+ \\ \mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial} &= \lambda_{T_{n+1}\alpha}^{(k)} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^{\beta(k)} - \bar{\xi}_n^\beta] \\ f_{n+1}^{(k)trial} &= \|t_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1}\beta}^{(k)trial}\| - \mu t_{N_{n+1}}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

**Korrektor–Vorgang:**

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial} = \begin{cases} \mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial} & \text{wenn } f_{n+1}^{(k)trial} \leq 0 & : \text{Haften} \\ \mu t_{N_{n+1}}^{(k)} \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial}}{\|t_{T_{n+1}\alpha}^{(k)trial} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1}\beta}^{(k)trial}\|} & & : \text{Gleiten} \end{cases} \quad (4.28)$$

Die notwendigen Veränderungen der Kontaktkraft und der Kontaktsteifigkeitsmatrix gegenüber Gleichung (3.99) durch das Augmented–Lagrange–Verfahren sind geringfügig. Zum einen werden  $t_N$  und  $t_{T_\alpha}$  nun bei jedem Auftreten durch die Gleichungen (4.27) und (4.28) beschrieben. Zum anderen ergibt sich ein neuer Ausdruck für  $\Delta t_N$ , der den alten Ausdruck (3.71) ersetzt.

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \Delta \{ [\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g]^+ \} \\ &= H(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g) \epsilon_N \Delta g \end{aligned} \quad (4.29)$$

In Bezug auf die diskretisierten Ausdrücke von Kapitel 3.4 ist eine Überarbeitung der Linearisierung einfach, da jedes Auftreten von  $H(g)$  lediglich durch  $H(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g)$  ersetzt wird. Dies sind die beiden einzigen Änderungen, die notwendig sind, um die Ausdrücke  $\mathbf{K}_c$  und  $\mathbf{R}_c$  soweit anzupassen, dass sie nach (4.24) gelöst werden können. Dies rührt daher, dass das hier vorgestellte Augmented–Lagrange–Verfahren dem Penalty–Verfahren sehr verwandt ist. Bei genauer Betrachtung zeigt sich, dass sofern in einem Zeitschritt kein Anpassungsprozess durchgeführt wird, die resultierenden Methoden identisch mit dem üblichen Penalty–Verfahren sind.

## 4.3 Symmetrisierung des Verfahrens

Im letzten Abschnitt wurde das Augmented–Lagrange–Verfahren für Kontaktprobleme eingeführt. Damit können die schlechte Konditionierung und die Abhängigkeit von Penaltyfaktoren verschwinden, allerdings auf Kosten einer mehrfachen Gleichungslösung. In diesem Abschnitt wird nun der Vorgang der Symmetrisierung der wesentlichen Gleichungen in Zusammenhang mit Reibung durchgeführt. Diese Symmetrisierung gilt auch bei großen Verformungen.

### 4.3.1 Zerlegung des Uzawa–Algorithmus

Basis der Betrachtungen ist erneut die Augmented–Lagrange–Formulierung aus den Gleichungen (4.3)–(4.4). Das daraus entstandene Gleichungssystem (4.17) ist für alle  $(\varphi, \lambda_N, \lambda_T)$  zu jedem Zeitpunkt von  $t \in \mathbb{N}$  zu lösen. Zu diesem Zweck wird es erneut derart zerlegt, dass es in zwei Schritten mit dem sogenannten 'operator–split' gelöst werden kann.

Beim unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Algorithmus, beschrieben in Kapitel 4.2, entwickelte sich mit Anwendung der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung von (4.18) der Schritt **2** des Uzawa–Algorithmus. Die Diskretisierung von Gleichung (4.19) ergibt wieder den aus Schritt **3** bekannten 'update'–Prozess der Multiplikatoren. Die enge Verknüpfung zwischen dem Augmented–Lagrange–Verfahren und sogenannten 'operator–split'–Methoden wurde schon von GLOWINSKI & LETALLEC [1989] diskutiert, doch für die Entwicklung der Symmetrisierung bei der Lösung von Kontaktproblemen ist eine weitere Erörterung der Aufspaltung notwendig.

Wie bereits mehrfach erwähnt, stammt die Unsymmetrie aus der Nichtassoziiertheit der Coulomb'schen Reibung. Bei einer assoziierten Gleitregel würde auch Gleiten in die Normalenrichtung auftreten, dies wird aber bei der Mehrzahl aller physikalisch sinnvollen Reibgesetze nicht erwartet und ist somit auch beim konventionellen Coulomb'schen Reibgesetz ausgeschlossen. Nimmt man an, dass die Normalkraft in der Gleitfunktion von (4.17)<sub>4</sub> während der Gleichgewichtsiteration konstant bleibt, dann hat der Gradient dieser Funktion keine Komponente in Normalenrichtung. Dies hat zur Folge, dass die Kontaktsteifigkeitsmatrix keine unsymmetrischen Anteile enthält.

Im Folgenden wird eine alternative Aufteilung durchgeführt, die die Nichtassoziiertheit des ersten Lösungsteils, der auf eine ursprünglich unsymmetrische Steifigkeitsmatrix führt, eliminiert.

Den ersten Teil der Lösung erhält man, wenn die Werte der beiden Multiplikatoren  $\lambda_N, \lambda_T$  konstant gehalten werden, während man den zweiten Teil der Lösung durch Festhalten der Bewegung  $\varphi$  erhält:

**Phase 1:** Ermittlung von  $\varphi$  bei konstant gehaltenen Multiplikatoren  $\lambda_N, \lambda_T$  :

$$\begin{aligned}
G_{dyn}(\varphi_t, \dot{\varphi}^*) &+ \int_{\Gamma^{(1)}} [t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma^{(1)} = 0 \\
\dot{t}_N &= H(\lambda_N + \epsilon_N g) \epsilon_N \dot{g} \\
\dot{t}_{T_\alpha} &= \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta - \tilde{\zeta} \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} \right\} \\
\tilde{f} &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu \lambda_N \leq 0 \\
\tilde{\zeta} &\geq 0 \\
\tilde{f} \tilde{\zeta} &= 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

**Phase 2:** Ermittlung von  $\lambda_N, \lambda_T$  bei konstant gehaltenen Konfigurationen von  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
\dot{t}_N &= H(\lambda_N + \epsilon_N g) \dot{\lambda}_N \\
\dot{t}_{T_\alpha} &= \epsilon_T (\tilde{\zeta} - \zeta) \frac{t_{T_\alpha}}{[t_{T_\beta} m^{\beta\gamma} t_{T_\gamma}]^{1/2}} + \dot{\lambda}_{T_\alpha} \\
f &= [t_{T_\alpha} m^{\alpha\beta} t_{T_\beta}]^{1/2} - \mu t_N \leq 0 \\
\zeta &\geq 0 \\
f \zeta &= 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Gegenüber der Zerlegung für den unsymmetrischen Lösungsalgorithmus werden nun zusätzlich Teile der Gleichungen (4.17)<sub>4,5,6</sub> in **Phase 2** gelegt. Außerdem wird in **Phase 1** eine zusätzliche Gleitbedingung  $\tilde{f}$  und ein Konsistenzparameter  $\tilde{\zeta}$  eingeführt. In **Phase 2** wird der Beitrag dieses Parameters zur Reibkraft durch ein korrigierendes  $\zeta$  eliminiert. Für die Gesamtlösung (4.17) werden die beiden Teilprobleme (4.30) und (4.31) wieder zusammengeführt. Wesentlich bei diesem Vorgang ist, dass die Gleitregel  $\tilde{f}$  in **Phase 1** assoziiert ist und dass der Multiplikator  $\lambda_N$  in (4.30)<sub>4</sub> festgehalten, das heißt als konstante Größe betrachtet wird. Die Einführung der Gleitregel  $\tilde{f}$  und des Konsistenzparameters  $\tilde{\zeta}$  erfolgt eher unter formalen Aspekten und um eine Basis zur Untersuchung von Varianten zu haben. Abbildung 4.3 zeigt den Anpassungsprozess in tangentialer Richtung mit der Integration der Reibungsbedingungen.

### 4.3.2 Symmetrisierter Augmented–Lagrange–Algorithmus

Analog zur Erstellung des unsymmetrischen Lösungsalgorithmus aus Kapitel 4.1.3 kann nun anhand der beiden Gleichungen (4.30) und (4.31) der folgende symmetrisierte Algorithmus erstellt werden:

**1.** Initialisierung des Zählers  $k$  für die Schleife der Augmented–Lagrange–Iteration und erstes Schätzen der Anfangswerte der Multiplikatoren:

$$\begin{aligned}\lambda_{N_{n+1}}^{(0)} &= \lambda_{N_n} \\ \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(0)} &= \lambda_{T_{n\alpha}} \\ k &= 0\end{aligned}\tag{4.32}$$

**2.** Ermittlung des Lösungsvektors  $\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$  mit den Annahmen der Werte der fixierten Multiplikatoren, gemäß **Phase 1** der  $k$ -ten Iteration durch Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^{ext} &= \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)}) \\ \mathbf{d}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}^{(k)}] \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}^{(k)}]\end{aligned}\tag{4.33}$$

Die Kontaktkräfte auf der diskretisierten Oberfläche  $\Gamma^{(1)^h}$  werden dabei folgendermaßen festgelegt:

$$\begin{aligned}t_{N_{n+1}}^{(k)} &= [\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{n+1}^{(k)}]^+ \\ t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} &= \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} + \epsilon_T \left\{ m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^{\beta(k)} - \bar{\xi}_n^\beta] - \tilde{\zeta} \frac{t_{T_{n+1}}^{(k)}}{[t_{T_{n+1\beta}}^{(k)} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1\gamma}}^{(k)}]^{1/2}} \right\} \\ \tilde{f}_{n+1}^{(k)} &= [t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1\beta}}^{(k)}]^{1/2} - \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \leq 0 \\ \tilde{\zeta} &\geq 0 \\ \tilde{f}_{n+1}^{(k)} \tilde{\zeta} &= 0\end{aligned}\tag{4.34}$$

**3.** 'update' der Lagrange–Multiplikatoren unter Beachtung von  $f$  gemäß **Phase 2** und des Iterationszählers  $k$ :

$$\begin{aligned}\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)} &= t_{N_{n+1}}^{(k)} \\ \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k+1)} &= t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} + \epsilon_T (\tilde{\zeta} - \zeta) \frac{t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)}}{[t_{T_{n+1\beta}}^{(k)} m^{\beta\gamma} t_{T_{n+1\gamma}}^{(k)}]^{1/2}} \\ f_{n+1}^{(k+1)} &= [\lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k+1)} m^{\alpha\beta} \lambda_{T_{n+1\beta}}^{(k+1)}]^{1/2} - \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)} \leq 0 \\ \zeta &\geq 0 \\ f_{n+1}^{(k+1)} \zeta &= 0 \\ k &\leftarrow k + 1\end{aligned}\tag{4.35}$$

4. Abfrage nach dem Abbruchkriterium:

$$\text{Abbruchkriterium} \begin{cases} \text{nicht erfüllt,} & \text{zurück,} & \text{zu 2.} \\ \text{erfüllt,} & \text{nächster Zeitschritt,} & \text{zu 1.} \end{cases}$$

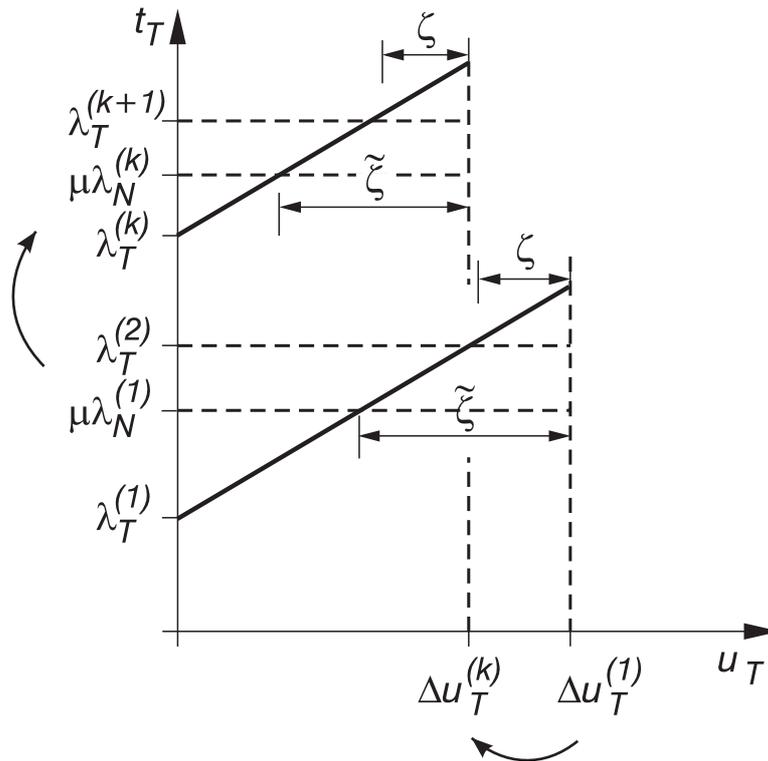


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des Augmented-Lagrange 'update'-Vorganges in tangentialer Richtung beim symmetrisierten Algorithmus. Hierbei ist  $\Delta u_T = m_{11}[\bar{\xi}_{n+1}^{-1(k)} - \bar{\xi}_n^{-1}]$  und  $\epsilon_T$  die Steigung.

Gegenüber dem unsymmetrischen Lösungsalgorithmus aus Kapitel 4.1.3 treten zwei wesentliche Unterschiede auf. Der erste Unterschied besteht in der Gleitregel  $\tilde{f}$ , die vom Lagrange-Multiplikator  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}$  und nicht vom aktuellen Wert von  $t_{N_{n+1}}^{(k)}$  abhängt. Das bedeutet, dass der das Gleitkriterium bestimmende Druck und der Metrikkoeffizient  $m^{\beta\gamma}$  um einen Iterationschritt der Augmented-Lagrange-Schleife ( $k$ ) hinter der aktuellen Annahme aus der Gleichgewichtsiteration zurückliegen. Das Coulomb'sche Reibungskriterium wird auch bei diesem Algorithmus im Laufe des Anpassungsprozesses nahezu exakt erfüllt, da die Multiplikatoren  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}$  zur exakten Lösung  $\lambda_{N_{n+1}}$  konvergieren.

Der zweite wesentliche Unterschied besteht darin, dass in der sogenannten 'update'-Phase ein zusätzlicher Korrektor-Vorgang notwendig ist, um sicherzustellen, dass  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)}$  und  $\lambda_{T_{n+1}}^{(k+1)}$  das Gleitkriterium erfüllen. Bemerkenswert ist dabei, dass die Größe  $t_{T_\alpha}$  aus Gleichung (4.31)<sub>3</sub> aufgrund der Symmetrisierung durch den Multiplikator  $\lambda_{T_\alpha}$  ersetzt wird. Dies liegt darin begründet, dass die im Algorithmus auftretende Größe  $t_T^{(k)}$  nicht unbedingt das Gleitkriterium von  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)}$  erfüllen muss. Erst dieser zusätzliche Schritt in der 'update'-Phase ermöglicht aber die Elimination aller Größen, die zu einer Unsymmetrie führen können.

Für jeden Slavepunkt von  $\Gamma^{(1)(k)}$  der innerhalb eines Zeitschrittes in Kontakt tritt, aber diesen Zeitschritt beginnt, ohne in Kontakt zu stehen, ist  $\lambda_{T_n} = 0$ . Damit bleibt dieser gesamte Zeitschritt für diesen Slavepunkt reibungsfrei.

Im Rahmen der Symmetrisierung ergeben sich damit verschiedene Varianten bei der Realisierung von Schritt **2** und **3**. Die Anwendung der Gleitregel  $\tilde{f}$  im Schritt **2** kann auch mit den Multiplikatoren  $\lambda_T$  anstatt mit  $t_T$  erfolgen. Damit ist die Wirkung der Gleitregel genau gleich der aus dem vorherigen Schritt **3**. Während der Gleichgewichtsiteration ist dann ausgeschlossen, dass ein Slavepunkt seinen Zustand vom Haften zum Gleiten ändern kann. Die formal eingeführte Gleitregel  $\tilde{f}$  und der eingeführte Konsistenzparameter  $\tilde{\zeta}$  haben keinerlei Wirkung. Während des folgenden 'update'-Prozesses in Schritt **3** werden dann mit den im Zuge der Gleichgewichtsiteration ermittelten Kräften durch Anwendung der Gleitregel geprüft, ob Haften oder Gleiten vorliegt. Diese Variante wurde für die eigene Vorgehensweise benutzt.

Eine weitere Variante wirkt nach ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] konvergenzbeschleunigend und führt zur Vermeidung von Konvergenzproblemen, die oft durch zu große Sprünge des Kontaktkraftvektors entstehen. Falls während der Gleichgewichtsiteration ein Slavepunkt anhand der Anwendung der Gleitregel  $\tilde{f}$  ins Gleiten kommt, wird dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator der Wert der möglichen aktuellen Reibkraft sofort zugeordnet und die Steifigkeit zu null gesetzt. Im weiteren Verlauf der Iteration dieses Zeitschrittes wird der Wert dieses Multiplikators dann konstant gehalten. Damit wird die ursprüngliche Bedingung, dass in **Phase 1** die Multiplikatoren festgehalten werden, gelockert. Numerische Beispiele hierzu befinden sich in Kapitel 5.3. Die bei diesem Vorgehen gesammelten Erfahrungen an einigen numerischen Beispielen sind positiv.

### 4.3.3 Modifizierte Linearisierung und Kontaktsteifigkeitsmatrix

Für diesen symmetrisierten Algorithmus werden nur wenige Änderungen der Kontaktsteifigkeitsmatrix benötigt. Wie schon zuvor wird Gleichung (4.34) mit Hilfe der folgenden Ausdrücke gelöst:

**Prädiktor–Zustand:**

$$\begin{aligned}
 t_{N_{n+1}}^{(k)} &= [\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{n+1}^{(k)}]^+ \\
 t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial} &= \lambda_{T_{n+1\alpha}}^{(k)} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^{\beta(k)} - \bar{\xi}_n^\beta] \\
 \tilde{f}_{n+1}^{(k)trial} &= \|t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1\beta}}^{(k)trial}\| - \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

**Korrektor–Vorgang:**

$$t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial} = \begin{cases} t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial} & \text{wenn } \tilde{f}_{n+1}^{(k)trial} \leq 0 & : \text{Haften} \\ \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \frac{t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial}}{\|t_{T_{n+1\alpha}}^{(k)trial} m^{\alpha\beta} t_{T_{n+1\beta}}^{(k)trial}\|} & & : \text{Gleiten} \end{cases} \tag{4.37}$$

Für den Einsatz dieses gerade diskutierten Algorithmus wird in Normalenrichtung analog zu Gleichung (4.29) verfahren. In tangentialer Richtung entstehen beim unrelevanten Prädiktor–Korrektor–Schritt der Gleichungen (4.36) und (4.37) während der Gleichgewichtsiteration keine unsymmetrischen Anteile, da  $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}$  eine feste Größe bleibt. Der relevante Prädiktor–Korrektor–Schritt in Gleichung (4.35) wird dagegen im Gleichgewichtszustand in Schritt **3** des Algorithmus vollzogen.

# Kapitel 5

## Validierung anhand numerischer Beispiele

### 5.1 Vorbemerkungen

Die vorgestellten Algorithmen wurden in das Finite-Elemente-Programm FEAP implementiert. Das Konzept und wesentliche Details des Programms werden von ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1993] in Band 1 in Kapitel 15 und in Band 2 in Kapitel 16 beschrieben.

Die **Validierung** der in das Rechenprogramm implementierten Algorithmen ist mit analytischen Lösungen kaum möglich. Eine Validierung kann jedoch durch im Schrifttum bekannte Beispiele beginnen. Ein für diesen Zweck oft benutztes Beispiel von ODEN & PIRES [1983] sind Untersuchungen von Belastungen eines auf einer starren Unterlage liegenden elastischen Blockes. Damit folgt:

- Verifikation des Augmented-Lagrange-Verfahrens durch einen Vergleich mit SIMO & LAURSEN [1992].
- Verifikation von Anwendungen mit nichtlinearen Reibgesetzen, die mit dem Penalty-Verfahren von WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] ermittelt wurden.
- Verifikation des Augmented-Lagrange-Verfahrens durch einen Vergleich mit ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995].

Weitere Verifikationen erfolgen in diesem Kapitel durch Ausnutzen von Symmetriebedingungen und durch Vergleiche mit Starrkörperlösungen.

## 5.2 Block, unsymmetrisch belastet

Der auf einer starren Unterlage liegende quaderförmige elastische Block wurde von SIMO & LAURSEN [1992] benutzt, um Anwendungen des Augmented–Lagrange–Verfahrens zu zeigen. Um die eigenen Ergebnisse mit denen aus der Literatur vergleichen zu können, wurden alle Daten übernommen und es wurde analog vorgegangen: Die Belastung des Blockes erfolgte durch gleichzeitiges vertikales Anpressen auf der Oberseite und durch Ziehen in horizontaler Richtung an der rechten Seite. Die Vertikalkräfte griffen auf der oberen Seite, aber nicht auf den Eckknoten an. Der erste und letzte Knoten des Blockes waren reibungsfrei gelagert. Der Block unterlag einem ebenen Verzerrungszustand. Die Belastung wurde in einem Schritt aufgebracht. Die Diskretisierung erfolgte mit 200 bilinearen Vierknoten–Elementen. Abbildung 5.1 zeigt links die unverformte und rechts die verformte Struktur.

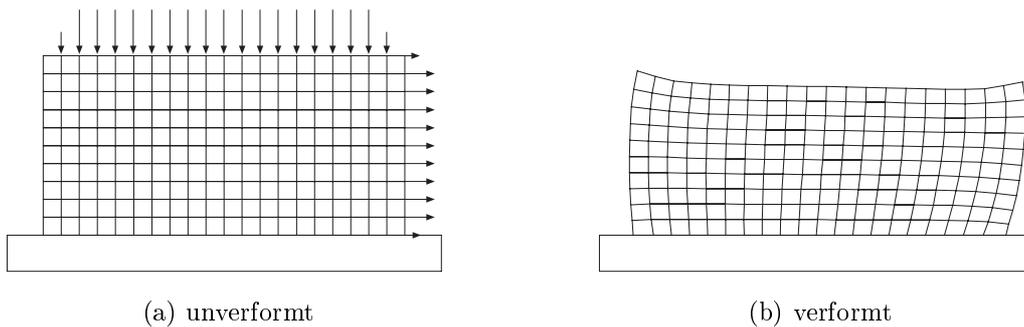


Abbildung 5.1: Block, ebener Verzerrungszustand

Folgende Parameter wurden benutzt:

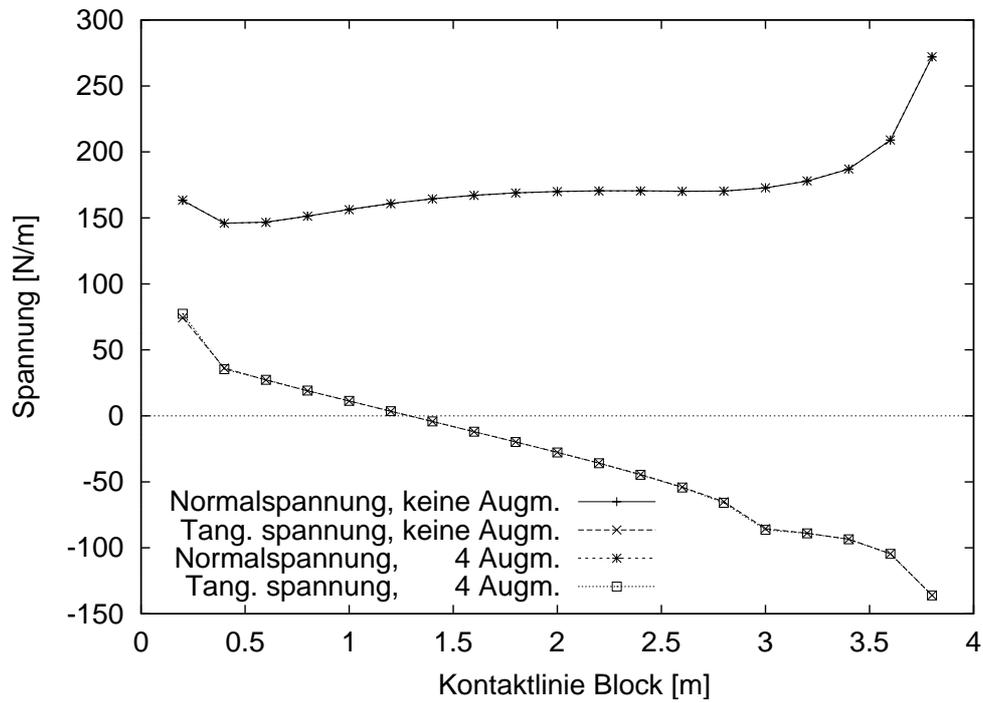
Elastizitätsmodul: $E = 1000.0$ [N/m]	Geometrie :	$b = 4.0$ , $h = 2.0$ [m]
Querdehnzahl: $\nu = 0.3$ [-]	Penaltyfaktoren: $\epsilon_N = 10^8$ , $\epsilon_T = 10^4$ [N/m]	
Vertikalbelastung = $200.0$ [N/m]	Reibbeiwert: $\mu = 0.5$ [-]	
Horizontalbelastung = $60.0$ [N/m]		

Die in Abbildung 5.2 (a) dargestellten Spannungen entstanden auf der Kontaktfläche. Sie basierten auf den auf Elementlängen bezogenen Kontaktkräften. Die Spannungen blieben bei diesem Beispiel auch beim Anpassungsprozess unverändert. Dies gilt nicht für den allgemeinen Fall. Es setzt voraus, dass die benutzten, aus dem Schrifttum stammenden Penaltyfaktoren eine gewisse Größe haben. Als Weiteres sollen die Verschiebungen untersucht werden. Wie in Abbildung 5.2 (b) er-

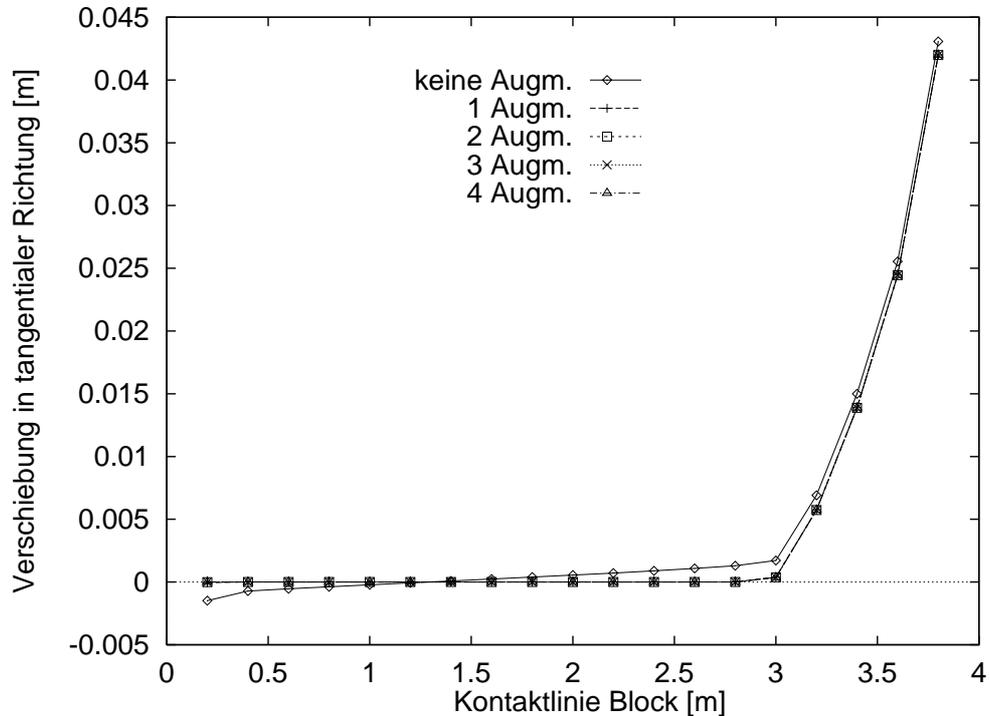
sichtlich, kommt es durch die Anwendung des Augmented–Lagrange–Verfahrens bei den Tangentialverschiebungen zu Veränderungen, die bei diesem Verfahren auch erwartet werden: Der Verlauf der Tangentialverschiebungen in Abbildung 5.2 (b), der zur Penalty–Lösung gehört, zeigt auch im Falle des Haftens Verschiebungen, die deutlich von null verschieden sind. Ursache hierfür ist die Penaltyregularisierung. In diesem Beispiel reicht ein Anpassungsschritt aus, um die Situation zu korrigieren. Bei den ermittelten Lösungen kann anschaulich zwischen Haften und Gleiten unterschieden werden, da die haftenden Knoten nahezu keine Relativverschiebung zeigen. Nur die letzten fünf Knoten sind im Gleitzustand und haben sich in tangentialer Richtung verschoben. Im Weiteren wird der **symmetrisierte** Augmented–Lagrange–Algorithmus auf die Lösung dieses Problems angewendet. Abbildung 5.3 zeigt die Entwicklung der Kontaktspannungen und Tangentialverschiebungen während der Anpassungsschritte. Obwohl die ersten Lösungen wegen der Annahme, dass die Knoten während der Ermittlung des Gleichgewichtszustandes haften, nicht realistisch sind, konvergiert die Lösung mit der Anzahl der Anpassungsprozesse gegen die erwartete Lösung. Der Vorteil dieses Algorithmus ist, dass während der Gleichgewichtsiteration das zu lösende Problem linear bleibt, weil der Prädiktor–Korrektor–Algorithmus während der Lösungsphase wegfällt. Dies ist beim Penalty–Verfahren und bei den unsymmetrischen Verfahren nicht der Fall. Da der Werkstoff des Blockes linear elastisch ist und die Kontaktfläche während der Belastung konstant bleibt, wird dieser Vorteil bei der Gleichgewichtsiteration deutlich. Die Konvergenzrate der Anpassungsschritte ist hier bei beiden Algorithmen unterschiedlich. Die ermittelten Spannungen und Verschiebungen stimmen mit den Lösungen in den oben genannten Veröffentlichungen nahezu exakt überein.

Die für die Lösung dieses Problems benötigten MACRO–Kommandos zur Steuerung des Algorithmus im Programm FEAP lauten für den unsymmetrischen Fall (linke Spalte) und den symmetrischen Fall (rechte Spalte):

LOOP, TIME, 1	LOOP, TIME, 1
TIME	TIME
LOOP, AUG, 4	LOOP, AUG, 4
AUGM	AUGS
LOOP, ITER, 9	LOOP, ITER, 9
UTAN,, 1	TANG,, 1
SOLV	SOLV
NEXT, ITER	NEXT, ITER
NEXT, AUG	NEXT, AUG
NEXT, TIME	NEXT, TIME

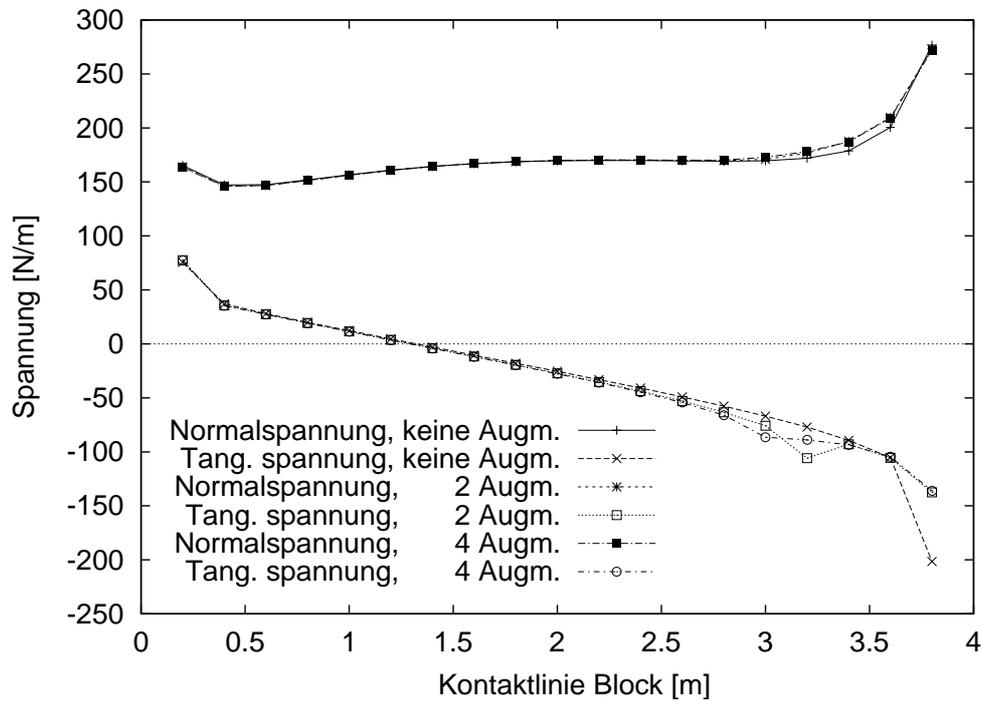


(a) Spannungen

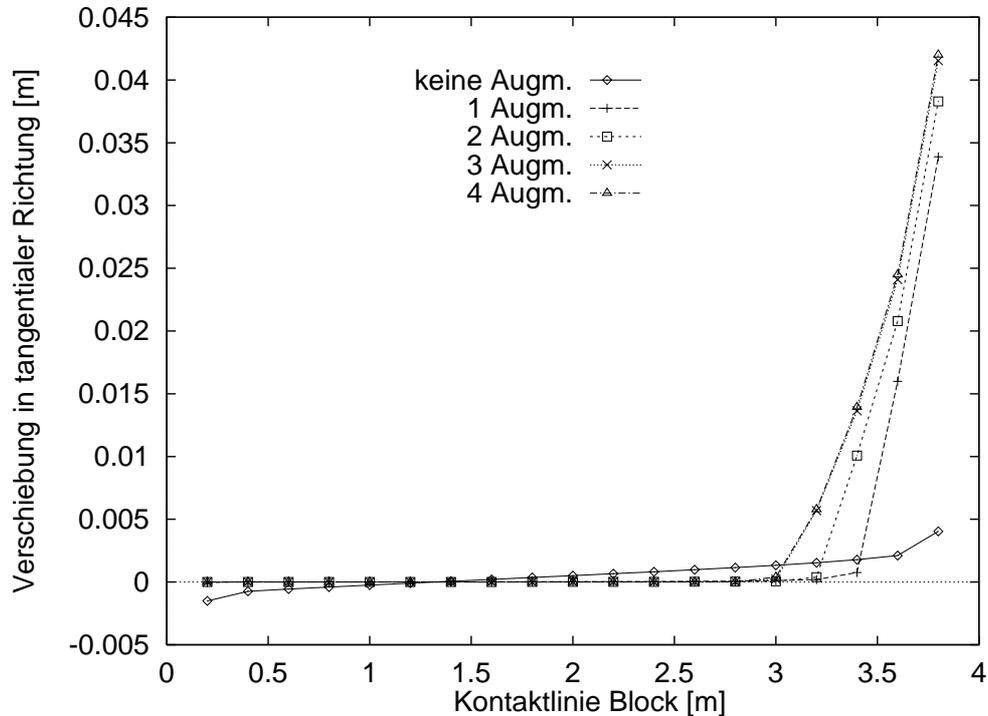


(b) Verschiebungen in tangentialer Richtung

Abbildung 5.2: Konvergenzverhalten für den Block bei Verwendung des unsymmetrischen Augmented-Lagrange-Algorithmus.



(a) Spannungen



(b) Verschiebungen in tangentialer Richtung

Abbildung 5.3: Konvergenzverhalten für den Block bei Verwendung des symmetrierten Augmented-Lagrange-Algorithmus.

### Anwendung von nichtlinearen Reibgesetzen

Zur weiteren Verifikation der Algorithmen kann das von WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] vorgeschlagene Reibgesetz genutzt werden. Dazu wird wieder der im vorherigen Beispiel vorgestellte Block mit den dort aufgeführten Parametern verwendet. Das von VU VAN [1990] vorgeschlagene Reibgesetz stellt im Gegensatz zu dem Coulomb'schen Ansatz einen sublinearen Zusammenhang von Normal- und Tangentialspannungen her. Der Ansatz lautet:

$$f(t_N, t_T) = -\alpha|t_N|^n - \beta|t_N| + t_T \leq 0$$

Folgende Parameter wurden von VU VAN [1990] verwendet:

f1:	$n = 1.000$	$\alpha + \beta$	$= 0.5$
f2:	$n = 0.833$	$\alpha = 0.2$	$\beta = 0.3$
f3:	$n = 0.500$	$\alpha = 0.2$	$\beta = 0.3$
f4:	$n = 0.833$	$\alpha = 0.5$	$\beta = 0.0$

Der erste Fall (f1) entspricht dem aus dem vorhergehenden Beispiel mit  $\mu = 0.5$ . Abbildung 5.4 zeigt die unterschiedlichen Spannungsverteilungen der mit den verschiedenen Parametern für die vier Fälle ermittelten Spannungen auf der Kontaktfläche. Die ermittelten Ergebnisse sind mit denen von WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] nahezu identisch.

Außerdem wird das **Konvergenzverhalten während der Gleichgewichtsiteration** mit denen von WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990] verglichen. Die Belastung wurde in einem Schritt aufgebracht und das Penalty-Verfahren benutzt. Als Reibgesetze wurden ein lineares (f1) und ein sublineares (f3) mit folgender Tangente ausgewählt:

$$\frac{df(t_N, t_T)}{dt_N} = -\alpha n|t_N|^{n-1} - \beta$$

Das Konvergenzverhalten bei der Gleichgewichtsiteration für ein lineares (f1) und ein sublineares (f3) Reibgesetz wird in Tabelle 5.1 gezeigt. Aufgrund der Nichtlinearität des Reibgesetzes im Fall f3 ist die Konvergenzrate kleiner als im Fall f1.

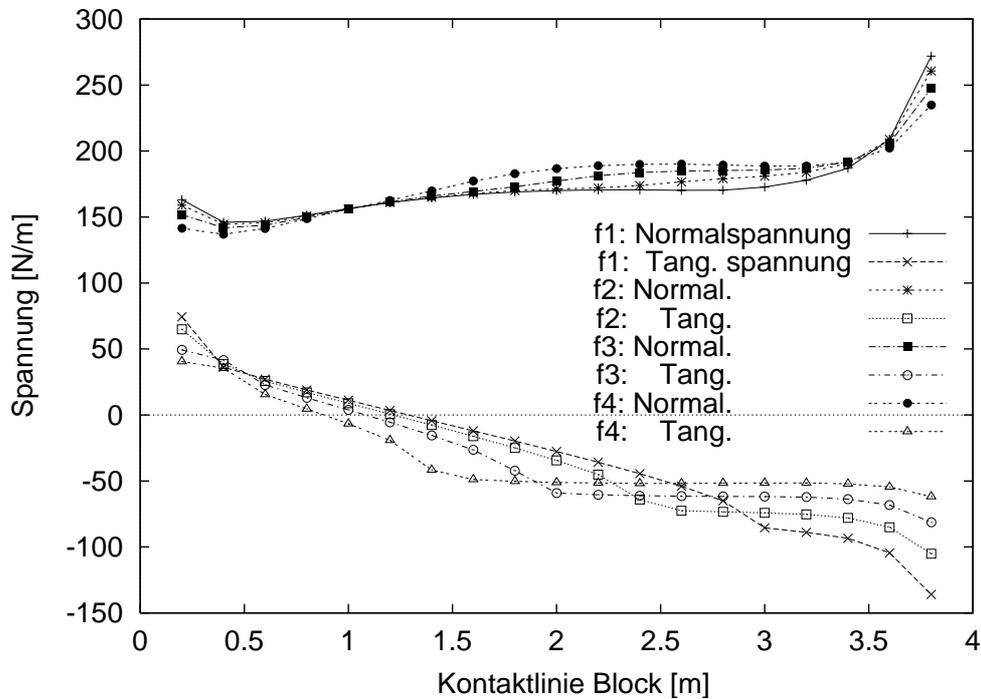


Abbildung 5.4: Spannungsverläufe auf der Kontaktfläche des Blockes, ermittelt mit verschiedenen Parametern für das von VU VAN [1990] vorgeschlagene Reibgesetz.

Verlauf der Fehlernorm $\ \mathbf{R}\ $		
Iterationen	f1 : linear	f3 : sublinear
1	0.1714 E+3	0.1714 E+3
2	0.1268 E+2	0.2499 E+2
3	0.6043 E+1	0.1266 E+2
4	0.3220 E+1	0.6957 E+1
5	0.7304 E-11	0.1297 E+1
6		0.1042 E-5
7		0.3309 E-11

Tabelle 5.1: Konvergenzverhalten bei der Ermittlung des Gleichgewichtes.

### 5.3 Block, symmetrisch belastet

Als weitere Möglichkeit zur Verifikation der eigenen codierten Algorithmen bieten sich Vergleiche mit den Berechnungen von ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] an. Ziel dieser Autoren war es, in Verbindung mit Wärmeübertragung und unter Berücksichtigung von Mikromechanik die erreichbare Genauigkeit im Kontaktbereich für Präzisionskontakt zu untersuchen. Verwendet wurde ebenfalls ein elastischer Block auf einer starren Unterlage.

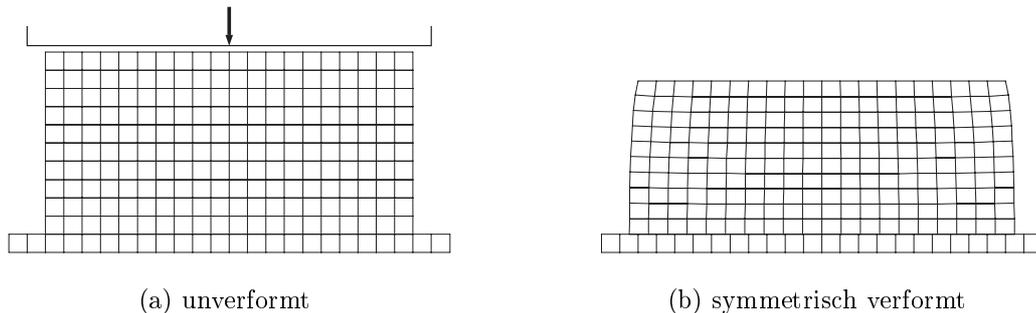


Abbildung 5.5: Block, ebener Spannungszustand aufgrund einer gleichförmigen Vertikalverschiebung des oberen Randes.

Der Block wurde mit bilinearen Vierknoten-Elementen diskretisiert. Gewählt wurde ein ebener Spannungszustand. Alle Knoten auf der unteren Seite standen in Kontakt mit der starren Unterlage. Als Belastung wurde eine Vertikalverschiebung von 0.32 Längeneinheiten [m] in einem Lastschritt aufgebracht. Abbildung 5.5 zeigt die Struktur. Die Material- und Geometriedaten sind die gleichen wie in den vorhergehenden Beispielen.

Als erstes wird das **Konvergenzverhalten bei der Gleichgewichtsiteration** des eigenen Algorithmus überprüft. Zu diesem Zweck werden für den reibungslosen Fall ein Penaltyfaktor von  $\epsilon_N = 10^{10}$  und für den Fall mit Reibung zusätzlich der Penaltyfaktor  $\epsilon_T = 10^{10}$  sowie der Reibbeiwert  $\mu = 0.1$  gewählt. Aufgrund der Zahlenlänge ('doubleprecision') des mit FORTRAN codierten Rechenprogramms wird als Abbruchkriterium die Energietoleranz mit 1.E-25 gewählt. Dies führt zu einer erreichbaren Fehlernorm von 1.E-12 für das Residuum der Kraft. Tabelle 5.2 zeigt das Konvergenzverhalten zur Ermittlung des Gleichgewichtszustandes. Als Folge der Reibung und der damit verbundenen Anwendung des Prädiktor-Korrektor-Algorithmus verlangsamt sich die Konvergenzrate. Die erreichten Werte stimmen mit denen von ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] überein.

Verlauf der Fehlernorm $\ \mathbf{R}\ $		
Iterationen	ohne Reibung	mit Reibung
1	0.156 E+4	0.156 E+4
2	0.146 E-11	0.103 E+2
3	0.405 E-12	0.708 E+1
4		0.388 E-12

Tabelle 5.2: Konvergenzverhalten bei der Ermittlung des Gleichgewichtszustandes.

Ziel der weiteren Untersuchungen ist nun einerseits zu analysieren, inwiefern die Penetration minimiert werden kann, und andererseits festzustellen, ob die Wahl der Penaltyfaktoren einen Einfluss auf diesen Minimierungsvorgang hat. Als Erstes wurden Berechnungen ohne Reibung durchgeführt. Es wurden drei verschiedene Penaltyfaktoren  $\epsilon_N = 10^4, 10^5, 10^6$  gewählt. Die Gleichgewichtsiterationen zwischen den Anpassungsprozessen erfolgten analog zu Tabelle 5.2. Nach jedem Anpassungsprozess wurde die Penetration  $|g_N|$  aller sich auf der Kontaktfläche befindenden Knoten  $n_c$  auf folgende Weise summiert:

$$|g_N| = \sum_{l=1}^{n_c} |g_N^l|$$

In Tabelle 5.3 sind die Summen aufgetragen. Das Ergebnis der Minimierung mit einer gesamten Penetration in der Größenordnung von unter  $1.E-16$  ist sehr zufriedenstellend. Ersichtlich ist, dass in diesem Fall die Untersuchungen mit höheren Penaltyfaktoren zu einer schnelleren Konvergenz führen. So wird mit einem Penaltyfaktor von  $\epsilon_N = 10^6$  bereits nach fünf Wiederholungen des Anpassungsprozesses das Ergebnis erreicht, während der Penaltyfaktor von  $\epsilon_N = 10^4$  für dieses Ergebnis zwölf Wiederholungen benötigt.

Eine Möglichkeit zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit der Minimierung wurde bereits in der Veröffentlichung von WRIGGERS & ZAVARISE [1992] diskutiert. Diese Erhöhung geschieht durch Veränderung der Penaltyfaktoren. Mehrere Möglichkeiten zur Anpassung sind denkbar. Für dieses Beispiel wurde folgendes Kriterium gewählt: Verringert sich die Penetration  $g$  eines Knotens nach dem Anpassungsprozess um mehr als ein Viertel des alten Wertes, dann wird der zu diesem Knoten gehörende Penaltyfaktor  $\epsilon_N$  um den Faktor 10 ('Inkr. 10') erhöht:

$$\epsilon_{N_{n+1}} = 10 \epsilon_{N_n} \quad \text{falls} \quad g_{N_{n+1}} \geq 0.25 g_{N_n}$$

$$\epsilon_{N_{n+1}} = 1 \epsilon_{N_n} \quad \text{falls} \quad g_{N_{n+1}} \leq 0.25 g_{N_n}$$

Anzahl der Augm.	Summe von $ g_N $ auf der Kontaktfläche					
	$\epsilon_N = 10^4$	$\epsilon_N = 10^5$	$\epsilon_N = 10^6$	$\epsilon_N = 10^4$ Inkr. 10	$\epsilon_N = 10^5$ Inkr. 10	$\epsilon_N = 10^6$ Inkr. 10
1	0.650E-01	0.656E-02	0.657E-03	0.650E-01	0.656E-02	0.657E-03
2	0.680E-03	0.697E-05	0.698E-07	0.688E-04	0.697E-06	0.698E-08
3	0.880E-05	0.927E-08	0.932E-11	0.911E-07	0.930E-10	0.932E-13
4	0.213E-06	0.258E-10	0.263E-14	0.245E-09	0.262E-13	0.264E-17
5	0.107E-07	0.144E-12	0.145E-17	0.136E-11	0.147E-16	
6	0.671E-09	0.731E-17		0.909E-14		
7	0.440E-10			0.647E-16		
8	0.303E-11					
9	0.224E-12					
10	0.166E-13					
11	0.123E-14					
12	0.982E-16					

Tabelle 5.3: Entwicklung der Minimierung der Penetration von  $|g_N|$  durch vielfache Anwendung des Anpassungsprozesses und Variation der Penaltyfaktoren.

Die Konvergenzgeschwindigkeit zur Minimierung der Penetration wird, wie in Tabelle 5.3 auf der rechten Seite ersichtlich ist, durch die Veränderung der Penaltyfaktoren verbessert. Besondere Fortschritte ergaben sich für die Rechenläufe, die mit geringen Penaltyfaktoren gestartet wurden. Die Größenordnungen der in Tabelle 5.3 dargestellten Werte stimmen mit denen aus der Veröffentlichung von ZAVARISE, WRIGGERS & SCHREFLER [1995] überein. Als weitere Verifikation der eigenen Algorithmen wurde die Minimierung der Penetration und des Haftweges für ein Problem mit Reibung untersucht. Prinzipiell soll beobachtet werden, wie die durch die Penaltyregularisierung eingeführten Größen durch den mehrfach wiederholten Anpassungsprozess bei dem Augmented-Lagrange-Verfahren zurückgenommen wird. In der Tabelle 5.4 sind die Summe der Beträge der Penetration und der Tangentialverschiebung beim Haften einander gegenübergestellt. Aufgrund der Reibung werden zum Vergleich die Ergebnisse mit dem unsymmetrischen sowie dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren gegenübergestellt.

Bei dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren wird eine zweite Variante von ZAVARISE & WRIGGERS [1995] vorgestellt. Diese Variante wirkt beschleunigend und vermeidet Konvergenzprobleme bei der Gleichgewichtsiteration: Im Gegensatz zum standardisierten symmetrischen Verfahren wird, falls während der Gleichgewichtsiteration die im Iterationsschritt ermittelte Reibkraft größer ist als die durch

die Gleitregel definierte Reibkraft, diese Kraft schon während dieser Iteration als Gleitreibungskraft definiert und für die folgenden Iterationsschritte als äußere Last behandelt. Die Gleitregel wird hier bereits während der Gleichgewichtsiteration und nicht ausschließlich beim Anpassungsprozess angewendet. Da die auf diesem Weg ermittelte Reibkraft als äußere Last behandelt wird, bleibt die Symmetrie erhalten.

In der Tabelle 5.4 werden die Spalten mit 'unsym.' für das unsymmetrische Verfahren, mit 'sym.(1)' für das symmetrisierte Verfahren und mit 'sym.(2)' für das beschleunigte symmetrisierte Verfahren bezeichnet. Als Parameter wurden  $\epsilon_N = 10^5$ ,  $\epsilon_T = 10^2$  und  $\mu = 0.1$  gewählt. In Bezug auf die Gleichgewichtsiteration wird analog zu Tabelle 5.2 verfahren. Einander gegenübergestellt sind in der Tabelle 5.4 die auf folgende Weise summierten Beträge der Penetration und der Haftverschiebung:

$$|g| = \sum_{l=1}^{n_c} |g_N^l| + |g_T^l \text{ Haftverschiebung}|$$

In der Tabelle 5.4 sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen aufgetragen. Die Minimierung von  $|g|$  schreitet nur sehr langsam voran. Die Größenordnung bleibt in Verbindung mit konstant gehaltenen Penaltyfaktoren mit 1.E-3 relativ hoch. Ein Einfluss der drei hierbei gegenübergestellten Algorithmen auf die Minimierungsgeschwindigkeit von  $|g|$  ist verschwindend gering.

Anschließend wurde die bei den vorhergehenden Untersuchungen sich als erfolgreich herausstellende Methode zur inkrementellen Anpassung der Penaltyfaktoren zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit eingesetzt. Mit dem gleichen Kriterium wurde eine Steigerung des Penaltyfaktors  $\epsilon_T$  mit dem Faktor zwei ('Inkr.2') vorgenommen. Die erzielten Ergebnisse, dargestellt auf der rechten Seite von Tabelle 5.4, machen deutlich, dass sich durch die Möglichkeit der Anpassung der Penaltyfaktoren nicht nur die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht, sondern dass auch andere Größenordnungen von  $|g|$  bei der Minimierung erzielt werden können. Die Sensitivität der inkrementellen Anpassung ist, wie man an den Steigerungsfaktoren erkennt, in beiden Richtungen unterschiedlich.

Mit konstanten Penaltyfaktoren wurde lediglich eine Penetration von unter 1.E-3, mit der Möglichkeit der Penaltyanpassung wurden jedoch Werte für die Penetration von 1.E-16 erreicht. Diese Ergebnisse wurden durch die Möglichkeit erzielt, jedem Knoten einen individuellen Penaltyfaktor zuzuordnen und ihn bei Bedarf anhand der einfachen Regel bei jedem Anpassungsprozess zu verändern. Auch hier ist der Einfluss der unterschiedlichen Algorithmen in Verbindung mit der Penaltyanpassung relativ gering. Dagegen ist der Einfluss der Penaltyanpassung auf die Penetration auffallend groß.

Anzahl der Augm.	Summe von $ g $ auf der Kontaktfläche					
	$\epsilon_N = 10^5, \epsilon_T = 10^2$			$\epsilon_N = 10^5, \epsilon_T = 10^2$ Inkr. 2		
	unsym.	sym.(1)	sym.(2)	unsym.	sym.(1)	sym.(2)
1	0.413 E-0	0.396 E-0	0.396 E-0	0.413 E-0	0.396 E-0	0.396 E-0
2	0.905 E-1	0.994 E-1	0.531 E-1	0.905 E-1	0.994 E-1	0.531 E-1
3	0.327 E-1	0.380 E-1	0.208 E-1	0.227 E-1	0.240 E-1	0.171 E-1
4	0.150 E-1	0.175 E-1	0.154 E-1	0.581 E-2	0.855 E-2	0.344 E-2
5	0.113 E-1	0.129 E-1	0.116 E-1	0.107 E-2	0.134 E-2	0.111 E-2
6	0.629 E-2	0.978 E-2	0.362 E-2	0.270 E-3	0.321 E-3	0.283 E-3
7	0.281 E-2	0.283 E-2	0.286 E-2	0.904 E-4	0.840 E-4	0.924 E-4
8	0.228 E-2	0.268 E-2	0.232 E-2	0.305 E-4	0.201 E-4	0.308 E-4
9	0.185 E-2	0.212 E-2	0.188 E-2	0.807 E-5	0.398 E-5	0.809 E-5
10	0.150 E-2	0.172 E-2	0.152 E-2	0.180 E-5	0.812 E-6	0.181 E-5
11	0.121 E-2	0.140 E-2	0.123 E-2	0.275 E-6	0.161 E-6	0.275 E-6
12	0.978 E-3	0.113 E-2	0.992 E-3	0.420 E-7	0.326 E-7	0.419 E-7
13	0.790 E-3	0.911 E-3	0.801 E-3	0.631 E-8	0.658 E-8	0.630 E-8
14	0.637 E-3	0.735 E-3	0.646 E-3	0.950 E-9	0.133 E-8	0.945 E-9
15	0.534 E-3	0.592 E-3	0.538 E-3	0.143 E-9	0.267 E-9	0.141 E-9
16	0.480 E-3	0.515 E-3	0.483 E-3	0.214 E-10	0.539 E-10	0.211 E-10
17	0.432 E-3	0.463 E-3	0.435 E-3	0.321 E-11	0.109 E-10	0.314 E-11
18	0.390 E-3	0.417 E-3	0.393 E-3	0.481 E-12	0.219 E-11	0.469 E-12
19	0.353 E-3	0.377 E-3	0.355 E-3	0.723 E-13	0.441 E-12	0.699 E-13
20	0.319 E-3	0.341 E-3	0.321 E-3	0.108 E-13	0.888 E-13	0.104 E-13
21	0.289 E-3	0.309 E-3	0.291 E-3	0.163 E-14	0.179 E-13	0.156 E-14
22	0.263 E-3	0.280 E-3	0.265 E-3	0.267 E-15	0.364 E-14	0.252 E-15
23	0.239 E-3	0.254 E-3	0.240 E-3	0.559 E-16	0.711 E-15	0.380 E-16
24	0.217 E-3	0.231 E-3	0.219 E-3	0.193 E-16	0.161 E-15	0.674 E-17
25	0.198 E-3	0.211 E-3	0.199 E-3	0.567 E-17	0.497 E-16	0.303 E-17

Tabelle 5.4: Entwicklung der Penetration und der 'Haftverschiebung' bei vielen Anpassungsschritten und Variation der Penaltyfaktoren.

## 5.4 Kontaktierende Kragarme

Betrachtet werden zwei in Kontakt tretende Kragarme, bei denen die Verformungen untersucht werden sollen. Dabei handelt es sich um ein antisymmetrisches System mit antisymmetrischer Belastung. Prinzipiell ist eine vollständig antisymmetrische Verformung zu erwarten. Im Rahmen der Behandlung von Kontaktproblemen mit dem Master–Slave–Konzept ist eine solche antisymmetrische Verformung jedoch nur mit einer kompletten symmetrischen Behandlung möglich. Ziel ist es, die entwickelten Algorithmen durch Überprüfung der Symmetrie zu verifizieren und die Möglichkeiten der Kontaktsuche zu erläutern.

Abbildung 5.6 (a) zeigt den Ausgangszustand und die Knotennummerierung des im Folgenden beschriebenen Systems: Die Länge eines Armes beträgt 18 [m], die Höhe 2 [m] und der Abstand zum anderen Kragarm liegt bei 1 [m]. Jeder Arm wurde mit 18 Elementen diskretisiert. Gewählt wurde ein Elementtyp, mit dem große Starrkörperrotationen erfassbar sind. An den Auflagern sind die inneren Knoten 10 und 51 jeweils völlig fest und die äußeren Knoten vertikal verschieblich gehalten. Die Belastung wurde auf die Knoten 27 und 34 mit einem Endwert von 7200.00 [N] aufgebracht. Bei allen Untersuchungen wurde die Belastung mit 40 gleichen Lastschritten von null an linear gesteigert. Gewählt wurde ein ebener Spannungszustand. Als Abbruchkriterium der Gleichgewichtsiteration wurde das Energiekriterium mit einer Toleranzschranke von  $1.E-20$  benutzt. Folgende Materialparameter wurden verwendet:

Elastizitätsmodul:  $E = 70000.0$  [N/m<sup>2</sup>]

Querdehnzahl:  $\nu = 0.3$  [-]

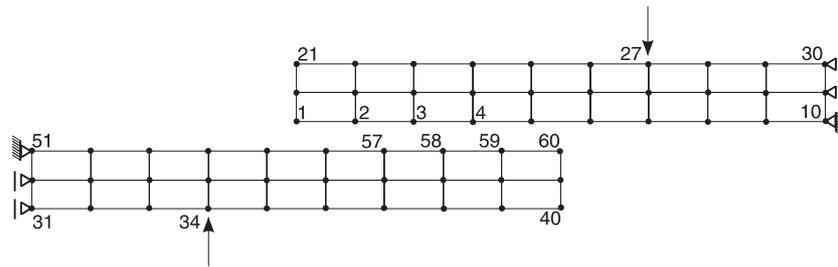
Penaltyfaktoren:  $\epsilon_N = 5000.0$  [N/m]

$\epsilon_T = 2500.0$  [N/m]

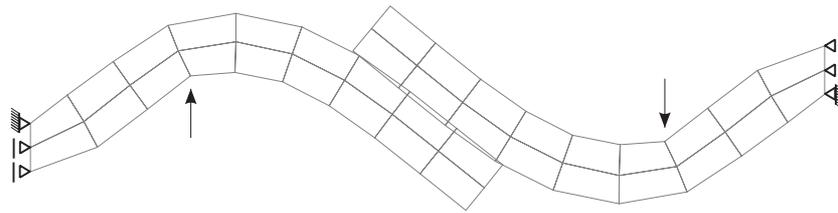
Reibbeiwert :  $\mu = 0.3$  [-]

### Vergleich der Verformungen mit unterschiedlichen Algorithmen

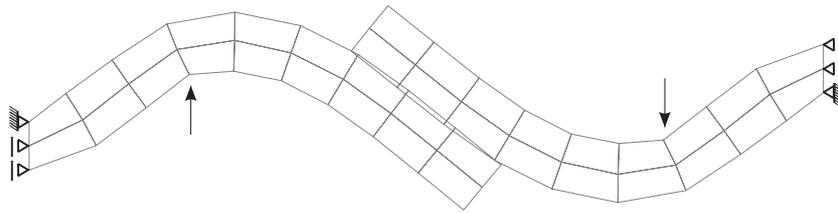
Zuerst wurde das System mit jeweils einseitiger Kontaktsuche und dem Penalty–Verfahren berechnet. Dann wurde das System mit symmetrischer Kontaktsuche und dem Penalty–Verfahren untersucht. Abschließend wurde das System mit dem Augmented–Lagrange–Verfahren und symmetrischer Kontaktsuche berechnet. Abbildung 5.6 (b) zeigt die verformte Struktur einer Berechnung mit dem Penalty–Verfahren, wobei die Slaveknoten auf dem oberen und die Masterknoten auf dem unteren Kragarm festgelegt wurden. Wegen der einseitigen Kontaktsuche sind die Knotenverschiebungen nicht antisymmetrisch.



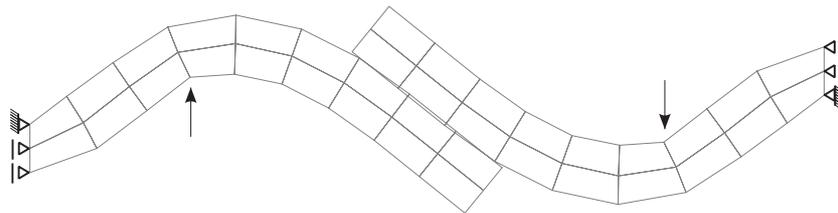
(a) Ausgangszustand



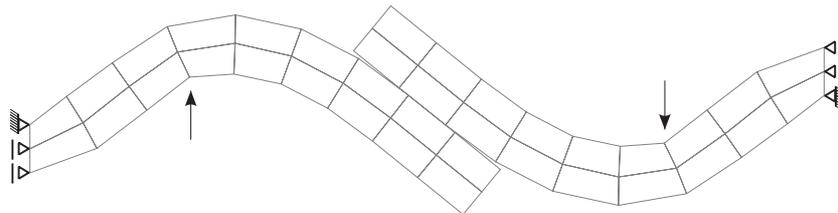
(b) Lösung mit dem Penalty-Verfahren, einfache Kontaktsuche, Slaveknoten am oberen Kragarm.



(c) Lösung mit dem Penalty-Verfahren, einfache Kontaktsuche, Slaveknoten am unteren Kragarm.



(d) Lösung mit dem Penalty-Verfahren und symmetrischer Kontaktsuche.



(e) Lösung mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren und symmetrischer Kontaktsuche.

Abbildung 5.6: Kontaktierende Kragarme, Struktur und Belastung antisymmetrisch.

In der Tabelle 5.5 oben sind die Knotenverschiebungen der Eckknoten 1 und 60, sowie die sich in Kontakt befindenden vier Slaveknoten des oberen Kragarmes mit der entsprechenden Penetration dargestellt. Anschließend wurde eine zweite Berechnung mit dem Penalty-Verfahren durchgeführt, wobei die Masterknoten auf dem oberen und die Slaveknoten auf dem unteren Kragarm festgelegt wurden. Abbildung 5.6 (c) zeigt die verformte Struktur. Wegen der einseitigen Kontaktsuche sind die Knotenverschiebungen ebenfalls nicht antisymmetrisch. In der Tabelle 5.5 unten sind die Knotenverschiebungen der Eckknoten 1 und 60, sowie die sich in Kontakt befindenden vier Slaveknoten mit Penetration dargestellt. Die aus den beiden Rechenläufen ermittelten Verformungen lassen sich vergleichen, wobei der Unterschied im Tausch der Slave- und Masterseite besteht: Die Verschiebungen der jeweiligen Eckknoten und

Slaveknoten am oberen Kragarm:			
Knoten	$d_1$	$d_2$	$g$
1	1.944738E+00	1.422082E+00	.12025E-02
2	1.507066E+00	1.732277E-01	.14601E+00
3	1.098256E+00	-1.097234E+00	.15556E+00
4	8.145467E-01	-2.323017E+00	.18882E-01
60	-1.961405E+00	-1.482106E+00	
Slaveknoten am unteren Kragarm:			
Knoten	$d_1$	$d_2$	$g$
1	1.961405E+00	1.482106E+00	
57	-8.145467E-01	2.323017E+00	.18882E-01
58	-1.098256E+00	1.097234E+00	.15556E+00
59	-1.507066E+00	-1.732277E-01	.14601E+00
60	-1.944738E+00	-1.422082E+00	.12025E-02

Tabelle 5.5: Ermittelte Knotenverschiebungen und Penetration mit einfacher Kontaktsuche.

Slaveknoten verhalten sich antisymmetrisch, d. h., dass die Beträge der Verschiebungen von Knoten 1 und 2, die bei der ersten Berechnung auf der Slaveseite lagen, denen von Knoten 59 und 60, die bei der zweiten Berechnung auf der Slaveseite lagen, entsprechen. Abbildung 5.6 (d) zeigt die verformte Struktur einer Untersuchung mit dem Penalty-Verfahren und der symmetrischen Kontaktsuche. Zur zusätzlichen Verifikation der Codierung wurden zwei Berechnungen parallel mit unterschiedlicher Reihenfolge der Kontaktsuche durchgeführt: Es ergeben sich identische Ergebnisse.

In Tabelle 5.6 sind die Beträge der Verschiebungen der jeweiligen Slaveknoten dargestellt. Da sich die Strukturen bei dieser Berechnung aufgrund der symmetrischen Kontaktsuche antisymmetrisch verformt haben, sind die Verschiebungen der Knoten antisymmetrisch. Die Penetration hat sich bei gleichbleibender Anzahl von aktiven Kontaktknoten verringert.

Symmetrische Kontaktsuche:			
Knoten	$d_1$	$d_2$	$g$
1	1.951250E+00	1.487406E+00	
2	1.510729E+00	2.352553E-01	.69643E-01
3	1.096836E+00	-1.037683E+00	.91543E-01
58	-1.096836E+00	1.037683E+00	.91543E-01
59	-1.510729E+00	-2.352553E-01	.69643E-01
60	-1.951250E+00	-1.487406E+00	

Tabelle 5.6: Knotenverschiebungen und Penetration, Lösung nach dem Penalty-Verfahren mit symmetrischer Kontaktsuche.

Abbildung 5.6 (e) zeigt die verformte Struktur einer Berechnung mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren und symmetrischer Kontaktsuche. Der Anpassungsprozess wurde siebenmal wiederholt: In der Tabelle 5.7 sind die Knotenverschiebungen der Eckknoten 1 und 60, sowie die beiden sich in Kontakt befindenden Slaveknoten dargestellt. Die Knotenverschiebungen sind antisymmetrisch. Gegenüber der Penalty-Lösung gibt es folgende Veränderungen: Durch die Erhöhung der Genauigkeit ist die Penetration verschwindend gering und die Anzahl der aktiven Kontaktknoten hat sich halbiert. Es befinden sich nur noch die Knoten 58 und 3 in Kontakt. Nur die auftretenden Zahlenwerte für die Penetration in Tabelle 5.7 sind nicht antisymmetrisch, da diese Zahlenwerte unterhalb der Rechengenauigkeit ('doubleprecision') liegen.

Symmetrische Kontaktsuche:			
Knoten	$d_1$	$d_2$	$g$
1	2.004482E+00	1.531375E+00	
3	1.130957E+00	-1.012931E+00	.44409E-15
58	-1.130957E+00	1.012931E+00	.83267E-16
60	-2.004482E+00	-1.531375E+00	

Tabelle 5.7: Knotenverschiebungen und Penetration, Lösung nach dem Augmented-Lagrange-Verfahren mit symmetrischer Kontaktsuche.

### Konvergenzverhalten bei der Gleichgewichtsiteration

Zur Demonstration des Konvergenzverhaltens bei der Gleichgewichtsiteration wurde bei der Ermittlung des letzten Lastschrittes ein Vergleich mit der linearen Kontaktsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_c^{linear}$  und der nichtlinearen Kontaktsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_c^{nichtlinear}$  geführt. In Tabelle 5.8 sind die Verläufe der Energienormen einander gegenübergestellt: Mit Hilfe der nichtlinearen Kontaktsteifigkeitsmatrix verringert sich die Anzahl der benötigten Iterationen gegenüber der linearen Kontaktsteifigkeitsmatrix auf weniger als ein Drittel.

Verlauf der Energienorm bei Laststufe $\lambda = 1.0$ :			
$\mathbf{K}_c^{linear}$		$\mathbf{K}_c^{nichtlinear}$	
.41377E+02	.76672E-06	.19699E-13	.14200E+02
.61208E+01	.15654E-06	.82114E-15	.41091E+02
.12408E+01	.31960E-07	.16764E-15	.22824E+01
.25350E+00	.65251E-08	.34227E-16	.62313E-02
.51786E-01	.13322E-08	.69882E-17	.12314E-06
.10580E-01	.27199E-09	.14270E-17	.27048E-16
.21607E-02	.55531E-10	.29122E-18	.35118E-24
.44122E-03	.11337E-10	.59471E-19	
.90088E-04	.23147E-11	.12141E-19	
.18393E-04	.47259E-12	.24899E-20	
.37553E-05	.96487E-13		

Tabelle 5.8: Konvergenzverhalten der Gleichgewichtsiteration bei symmetrischer Kontaktsuche mit dem Penalty-Verfahren.

Bemerkung:

Dieses Beispiel zeigt, dass mit den vorgestellten Algorithmen eine genaue Erfüllung der Kontaktbedingungen auf Oberflächen ermöglicht wird. Fraglich bleibt jedoch, ob diese Erfüllung für Aufgabenstellungen in der Praxis immer sinnvoll und als richtige Lösung anzusehen ist.

## 5.5 Entwicklung eines Abbruchkriteriums für das Augmented–Lagrange–Verfahren

### Motivation

Untersuchungen von realitätsnahen komplexen Kontaktproblemen benötigen zur Analyse der verschiedenartigen Verformungszustände längere Beobachtungszeiträume mit einer erheblichen Anzahl von Zeitschritten. In diesem Zusammenhang ergeben sich folgende Aussagen:

- Spezifisch für den Anpassungsprozess des Augmented–Lagrange–Verfahrens ist, dass er innerhalb eines Zeitschrittes mehrmals aktiviert wird. Mit zunehmender Anzahl der Wiederholungen dieses Anpassungsprozesses innerhalb jeden Zeitschrittes nimmt die Rechenzeit linear zu.
- Auch durch Vorgabe einer hohen Anzahl von Wiederholungen ist eine erfolgreiche Rücknahme der Regularisierung durch den Anpassungsprozess in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung nicht unbedingt gegeben.
- Inwieweit die Rücknahme der Regularisierung innerhalb eines Zeitschrittes qualitativ von Erfolg ist, wird nicht explizit geprüft. Dies kann besonders bei komplexen Problemstellungen zu ineffizienten Lösungen führen.

Die Effizienz des Verfahrens soll nun durch eine qualitative Kontrolle mit Hilfe eines Abbruchkriteriums gesteigert werden. Damit soll gewährleistet werden, dass die Anzahl von Wiederholungen erhöht wird, wo es nötig ist, um die Qualität zu sichern und die Anzahl von Wiederholungen verringert wird, wo es bei gesicherter Qualität möglich ist, die Rechenzeit zu verkürzen.

Zu diesem Zweck werden in den folgenden Abschnitten versucht, Abbruchkriterien für das unsymmetrische und symmetrisierte Verfahren zu finden.

### Vorüberlegungen

Für die Wahl geeigneter Abbruchkriterien bieten sich, wie in Kapitel 4 beschrieben wurde, mehrere Möglichkeiten an. Um Aussagen über die Zustände auf der Kontaktfläche zu erhalten, werden die folgenden spezifischen Größen jeweils über alle auf einer Kontaktfläche sich in Kontakt befindenden Knoten summiert:

- Summierung
  - der Penetration in Normalenrichtung 'Sum.  $|g_N|$ ', des
  - tangentialen Gesamtverschiebungsweges 'Sum.  $|g_T|$ ' und des
  - tangentialen Haftverschiebungsweges 'Sum.  $|g_T^H|$ '.

Je geringer die Summen von  $|g_N|$  und  $|g_T^H|$  sind, desto erfolgreicher ist die Rücknahme der Regularisierung mit Hilfe des Anpassungsprozesses.

- Die Energie im Kontaktbereich, die in den Penaltyfaktoren gespeichert ist, wird mit Hilfe dieser Größen ermittelt:

- ' $E_{N-pen}$ ' =  $0.5 \epsilon_N |g_N|^2$
- ' $E_{T-pen}$ ' =  $0.5 \epsilon_T |g_T^H|^2$

Diese Energieanteile sollten im Zuge des Anpassungsprozesses möglichst verschwinden, da sie zu unrealistischem Kontaktverhalten führen.

- Beobachtung des Wirkungsgrades der Rücknahme der Regularisierung zwischen den einzelnen Anpassungsprozessen ( $i$ ). Zu diesem Zweck werden die Verhältnisse der Summen der

- Penetration in Normalenrichtung ' $Ratio g_N$ ' =  $\frac{g_{N_{i+1}}}{g_{N_i}}$  und der
- Haftverschiebung in tangentialer Richtung ' $Ratio g_T^H$ ' =  $\frac{g_{T_{i+1}}^H}{g_{T_i}^H}$

gebildet. Je kleiner die Verhältnisse sind, desto besser ist der Wirkungsgrad bei der jeweiligen Rücknahme der Anpassungsprozesse.

Für die numerische Umsetzung wird im Folgenden anhand eines Beispiels das Konvergenzverhalten der Rücknahme der Regularisierung durch den Anpassungsprozess mit den genannten Kriterien tabellarisch aufgetragen und analysiert.

### Untersuchungen anhand eines Beispiels: Einpressen eines Zylinders

Ein Zylinder wird statisch in eine konische Form gepresst und verformt sich dabei. Die geometrische Struktur dieses Beispiels wurde mehrfach in der Literatur, so auch von SIMO & LAURSEN [1992] und KIKUCHI & ODEN [1988] mit den folgenden Geometriedaten verwendet:

Eckknoten [mm]	Zylinder	Form
$(x_1, y_1)$ :	00.00 000.00	73.0022 000.00
$(x_2, y_2)$ :	50.80 000.00	110.0000 000.00
$(x_3, y_3)$ :	50.80 254.00	110.0000 508.00
$(x_4, y_4)$ :	00.00 254.00	28.5778 508.00

Der Zylinder wird in 20 Lastschritten um 200 [mm] eingepresst und wieder herausgezogen. Abbildung 5.7 zeigt den Verlauf der Verschiebungsfunktion. Als Lastangriffspunkte dienen die Knoten auf der gesamten Unterseite des Zylinders.

Dieses Beispiel ist besonders realitätsnah, da sich die Größe der Kontaktfläche und die Normalkraftverteilung aufgrund der Belastung verändern. Durch den Richtungswechsel des sich konisch verformten Zylinders werden sich die Verformungen und die Haft- oder Reibkraftverläufe verändern.

Der Zylinder wird mit 80 bilinearen Vierknoten-Elementen diskretisiert. Abbildung 5.8 (a) zeigt den Zylinder und die Form. Folgende Material- und Steuerdaten wurden benutzt:

Elastizitätsmodul:	$E$	= 1000.0	[N/mm <sup>2</sup> ]
Querdehnzahl:	$\nu$	= 0.3	[-]
Reibbeiwert:	$\mu$	= 0.1	[-]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N$	= 10 <sup>8</sup>	[N/mm]
	$\epsilon_T$	= 10 <sup>3</sup>	[N/mm]
Verschiebung:	$V_{max}$	= 200.0	[mm]
Gesamtzeit:	T	= 2.0	[s]
Zeitschrittweite:	$dt$	= 0.1	[s]

Bevor anhand von Tabellen untersucht werden soll, wie sich die spezifischen Größen während der Anpassungsprozesse entwickeln, werden Untersuchungen zu den Verformungen und Haft- oder Reibkraftverläufen mit dem unsymmetrischen und dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren durchgeführt.

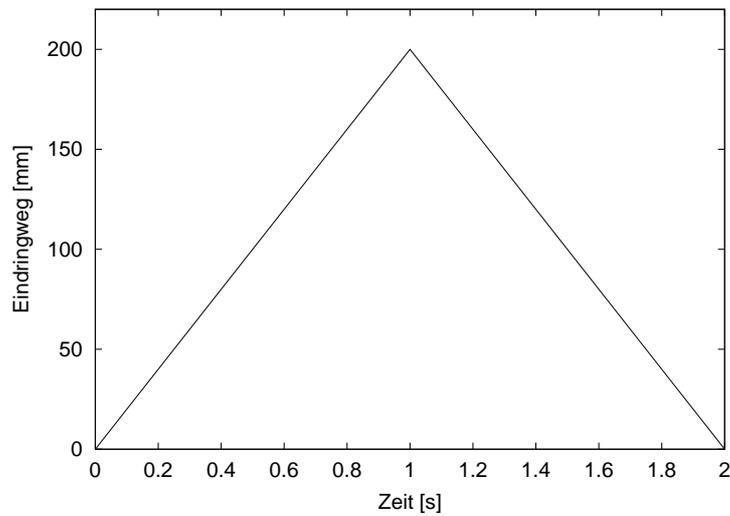


Abbildung 5.7: Verlauf der an der Unterseite des Zylinders angreifenden Verschiebungsfunktion.

Die Abbildung 5.8 (b)–(h) zeigt die zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellte verformte Struktur. Abbildung 5.10 (a) zeigt die mit beiden Algorithmen ermittelten Verläufe der Haft- oder Reibkräfte über der Kontaktlinie, ebenfalls zu verschiedenen Zeitpunkten. Während im Zeitraum von  $t = 0.0$ – $1.0$  [s] die Reibkraft beim Eindringen entgegen der Bewegungsrichtung verläuft, haben die Verläufe im Zeitraum von  $t = 1.1$ – $1.2$  [s] zu Beginn des Herausziehens verschiedene Vorzeichen. Ursache sind Umlagerungen der Verformungen, hervorgerufen durch den Richtungswechsel. Dieses Verhalten gibt, wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, eine zusätzliche Motivation für ein Abbruchkriterium zur Sicherung der Qualität. Im Zeitraum von  $t = 1.3$ – $2.0$  [s] verläuft die Reibkraft beim Herausziehen wieder entgegen der Bewegungsrichtung.

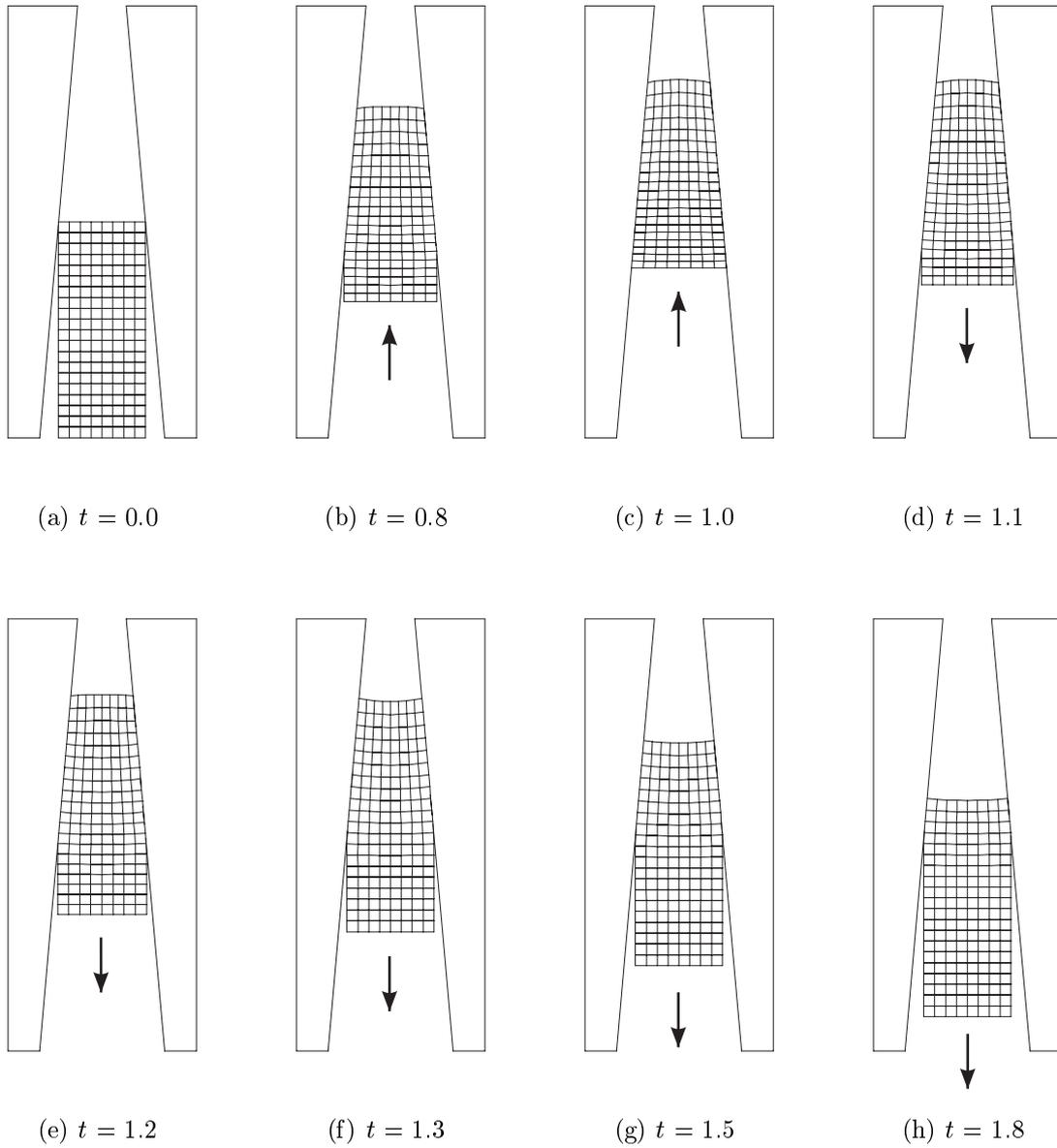


Abbildung 5.8: Eindrücken ( $0.0 < t \leq 1.0$  [s]) eines Zylinders in eine und Herausziehen ( $1.0 < t \leq 2.0$  [s]) aus einer Form. Beachtet werden sollten die Verformungen aufgrund der Reibung.

**Untersuchungen der Entwicklungen während der Anpassungsprozesse**

Für eine Analyse des Verhaltens im Kontaktbereich des unsymmetrischen und des symmetrisierten Anpassungsprozesses werden von ausgewählten Zeitschritten die Entwicklung spezifischer Größen anhand der Tabellen 5.9 bis 5.14 analysiert.

Die Beobachtung der **Entwicklung des Verhaltens in Normalenrichtung** mit dem **unsymmetrischen Algorithmus** erfolgen anhand der Tabellen 5.9 und 5.10. In den Spalten 2 und 3 ist die Summe der Penetration ' $g_N$ ' mit ihren relativen Verbesserungen ' $Ratio\ g_N$ ' und in Spalte 6 die Summe der in den Penaltyfaktoren gespeicherte Energie ' $E_{N-pen}$ ' aufgetragen. Für die Zeitschritte  $t = 0.6, 1.0, 1.3$  und  $1.6$  [s] ist das Verhalten nahezu gleich. Der Anpassungsprozess verläuft zügig, denn bereits nach vier Wiederholungen sind Werte erreicht worden, die der Rechengenauigkeit ('doubleprecision') der FORTRAN-Codierung entsprechen. Lediglich bei Zahlenwerten, deren Größenordnungen unterhalb dieser Genauigkeit liegen, entsteht eine Divergenz, die durch einen Vorzeichenwechsel erkennbar wird. Die Entwicklung des Energieverlaufes der Penalty-Energie ' $E_{N-pen}$ ' verläuft entsprechend der Penetration ' $g_N$ '. Die Größenordnungen der hierbei verbleibenden Fehler sind analog zu den Residuen einer Gleichgewichtsiteration. In den Zeitschritten  $t = 1.1$  und  $1.2$  [s] ist die Konvergenzrate wesentlich langsamer. Innerhalb der als Maximum vorgegebenen Anzahl von Wiederholungen werden die Werte, die bei den anderen Zeitschritten erzielt werden, nicht erreicht.

Die Beobachtung der **Entwicklung in Normalenrichtung** mit dem **symmetrisierten Algorithmus** erfolgen anhand der Tabellen 5.13 und 5.14. In den Spalten 2 und 3 ist die Summe der Penetration ' $g_N$ ' mit ihren relativen Verbesserungen und in Spalte 6 die Summe der in den Penaltyfaktoren gespeicherte Energie ' $E_{N-pen}$ ' aufgetragen. Die Rücknahme der Regularisierung verläuft über den gesamten Zeitraum sehr ähnlich, nur etwas langsamer als bei dem unsymmetrischen Verfahren.

In der **tangentialen Richtung** zeigen beiden Algorithmen jedoch unterschiedliches Verhalten. Bei dem **unsymmetrischen Verfahren** beobachtet man in den Tabellen 5.9 und 5.10 in der Spalte 4, dass ein hoher Anteil der Haftverschiebung ' $g_T^H$ ' und somit auch ein hoher Anteil von Penalty-Energie, siehe Spalte 7, in tangentialer Richtung verbleibt. Das Verhältnis der Verbesserungen der Haftverschiebungen ' $Ratio\ g_T^H$ ' konvergiert zum Wert eins, siehe Spalte 6. Daraus folgt, dass ein hoher Anteil verbleibt und keine weitere Verbesserung zu erwarten ist. Da jedoch der Verlauf der Haft- oder Reibkraft und der Gesamtverschiebung ' $g_T$ ' mit den Ergebnissen aus dem symmetrisierten Verfahren übereinstimmen, liegt die Ursache hierzu im Algorithmus selbst. Beim unsymmetrischen Verfahren wird während der Gleichgewichtsiteration

durch die Anwendung der Gleitregel zwischen Haft- und Gleitzuständen unterschieden und dabei im Gleitfall in jedem Iterationsschritt der Gesamtweg in einen elastischen und einen plastischen Weganteil zerlegt und entsprechend summiert. Dabei wird die Aufteilung der Haft- und Gleitanteile durch numerisch bedingte Ursachen der Gleichgewichtsiteration des Algorithmus beeinflusst und ist somit entsprechend zu werten.

Bei dem **symmetrisierten Verfahren**, siehe Tabelle 5.13 und 5.14, verringert sich die elastische Tangentialverschiebung ' $g_T^H$ ', siehe Spalte 4, etwas langsamer als in Normalenrichtung bis zu Fehlergrößen, die den Rechengenauigkeiten der Codierung entsprechen. Analog dazu sinkt die Penalty-Energie in tangentialer Richtung, siehe Spalte 7. Die Konvergenzrate in tangentialer Richtung ist etwas geringer als in Normalenrichtung, siehe Spalte 2. Ursache hierfür mag die jeweilige Anwendung der Gleitregel im Gleichgewichtszustand zwischen den Anpassungsprozessen sein. Die erreichten Minimalwerte sind etwas höher als die der Normalenrichtung, hierfür mag die Ursache die Anwendung der Gleitregel mit ihren Operationen sein. Im Zeitraum von  $t = 1.1$  und  $1.2$  [s] haben alle Größen, wie beim unsymmetrischen Verfahren auch, eine wesentlich langsamere Konvergenzrate. Innerhalb der als Maximum vorgegebenen Anzahl von Wiederholungen werden die Werte, die bei den anderen Zeitschritten erzielt werden, nicht erreicht.

Die Tabellen 5.11 und 5.12 zeigen das **Verhalten der** mit beiden Algorithmen ermittelten **tangentialen Gesamtverschiebung** ' $g_T$ '. Die Entwicklung ist durch die geringere Konvergenzrate der symmetrisierten Variante, siehe Spalte 3 und 4, gegenüber der unsymmetrischen, siehe Spalte 5 und 6, gekennzeichnet. Die jeweils erzielten Verschiebungen sind gleich. Ursache für diese geringere Konvergenzrate bei der symmetrisierten Variante des Algorithmus liegt in der Tatsache, dass die Gleitregel nur im Gleichgewichtszustand während des Anpassungsprozesses angewendet wird.

Festzustellen ist, dass sich die Entwicklung der Minimierung der Penetration in Normalenrichtung bei beiden Algorithmen nahezu gleich vollzieht, während die Minimierung der elastischen Verschiebung in Tangentialrichtung sehr unterschiedlich verläuft. Dieses Verhalten ist bedingt durch die verschiedenen Algorithmen.

Anzahl der Augm.	Unsymmetrisches Augmented–Lagrange–Verfahren mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^3$					
	Sum. $ g_N $	<i>Ratio</i> $g_N$	Sum. $ g_T^H $	<i>Ratio</i> $g_T^H$	$E_{N-pen}$	$E_{T-pen}$
$t = 0.6$						
1	.2598E-02	.0000E+00	.3374E+02	.3446E+01	.3551E+02	.7835E+05
2	.4366E-06	.1617E-03	.1001E+02	.3217E+00	.1105E-05	.8946E+04
3	.7543E-10	.1418E-03	.1001E+02	.9999E+00	.4320E-13	.8946E+04
4	.6750E-13	-.1701E-03	.1001E+02	.1000E+01	.3471E-19	.8946E+04
6	.2487E-13	.1563E+00	.1001E+02	.1000E+01	.5680E-20	.8946E+04
7	.3197E-13	-.3000E+00	.1001E+02	.1000E+01	.8204E-20	.8946E+04
8	.5329E-13	-.7500E+00	.1001E+02	.1000E+01	.2083E-19	.8946E+04
10	.6395E-13	-.6296E+00	.1001E+02	.1000E+01	.3029E-19	.8946E+04
$t = 1.0$						
1	.7427E-02	.0000E+00	.1022E+03	.1075E+02	.1445E+03	.3112E+06
2	.1690E-05	.2123E-03	.3899E+02	.3795E+00	.8491E-05	.6470E+05
3	.3986E-09	.1804E-03	.3898E+02	.9992E+00	.5303E-12	.6470E+05
4	.1315E-12	.2661E-03	.3898E+02	.1000E+01	.7005E-19	.6470E+05
6	.9592E-13	-.5417E+00	.3898E+02	.1000E+01	.4481E-19	.6470E+05
8	.9237E-13	-.6579E+00	.3898E+02	.1000E+01	.3913E-19	.6470E+05
10	.8527E-13	-.6842E+00	.3898E+02	.1000E+01	.3408E-19	.6470E+05
$t = 1.1$						
1	.5591E-02	.0000E+00	.1006E+03	-.1038E+02	.1104E+03	.3854E+06
2	.7359E-03	-.1259E+00	.4431E+02	.9460E+00	.2107E+01	.8913E+05
4	.1308E-03	.3361E+00	.4061E+02	.8958E+00	.6618E-01	.9477E+05
8	.2699E-04	-.3482E+00	.4041E+02	.1038E+01	.3534E-02	.9346E+05
10	.2288E-04	.9208E+00	.4043E+02	.1024E+01	.2376E-02	.9150E+05
30	.2087E-05	.9189E+00	.4098E+02	.1001E+01	.1789E-04	.8667E+05
60	.9195E-07	.8353E+00	.4103E+02	.1000E+01	.9198E-07	.8606E+05
90	.1734E-07	.9681E+00	.4103E+02	.1000E+01	.1546E-08	.8608E+05
120	.8626E-08	.9714E+00	.4103E+02	.1000E+01	.4299E-09	.8608E+05
150	.4570E-08	.9766E+00	.4103E+02	.1000E+01	.1253E-09	.8608E+05
180	.2501E-08	.9832E+00	.4103E+02	.1000E+01	.3874E-10	.8608E+05

Tabelle 5.9: Entwicklung der Anpassung in den Zeitschritten  $t = 0.6, 1.0$  und  $1.1$  [s] mit dem unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren.

Anzahl der Augm.	Unsymmetrisches Augmented–Lagrange–Verfahren					
	mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^3$					
	Sum. $ g_N $	<i>Ratio</i> $g_N$	Sum. $ g_T^H $	<i>Ratio</i> $g_T^H$	$E_{N-pen}$	$E_{T-pen}$
$t = 1.2$						
1	.4603E-02	.0000E+00	.5079E+02	-.5753E+00	.8040E+02	.1465E+06
2	.3478E-03	-.6467E-01	.1910E+02	.2238E+00	.7203E+00	.2114E+05
4	.7462E-04	.6712E+00	.3076E+02	.1097E+01	.2965E-01	.5826E+05
8	.1633E-04	.7215E+00	3665E+02	.1010E+01	.2266E-02	.8243E+05
10	.7028E-05	.9737E+00	.3748E+02	.1001E+01	6927E-03	.8433E+05
30	.1887E-05	.9459E+00	.3731E+02	.1000E+01	.5368E-04	.8284E+05
60	.9715E-07	.9415E+00	.3735E+02	.1000E+01	.1579E-06	.8263E+05
90	.3044E-07	.9678E+00	.3735E+02	.1000E+01	.9557E-08	.8265E+05
120	.1120E-07	.9661E+00	.3735E+02	.1000E+01	.9855E-09	.8264E+05
150	.4941E-08	.9764E+00	.3735E+02	.1000E+01	.2150E-09	.8264E+05
180	.2570E-08	.9746E+00	.3735E+02	.1000E+01	.6146E-10	.8264E+05
$t = 1.3$						
1	.3489E-02	.0000E+00	.4258E+02	-.2705E+00	.5619E+02	.1380E+06
2	.2171E-03	-.3162E-01	.1407E+02	.1995E+00	.3270E+00	.1252E+05
4	.4648E-04	.6016E+00	.1955E+02	.1641E+01	.1589E-01	.2753E+05
6	.3109E-08	.1772E-03	.2550E+02	.1036E+01	.8548E-10	.4955E+05
8	.5684E-13	.1454E+00	.2550E+02	.1000E+01	.2019E-19	.4955E+05
10	.6040E-13	-.1364E+00	.2550E+02	.1000E+01	.2966E-19	.4955E+05
$t = 1.6$						
1	.2300E-02	.0000E+00	.8257E+01	.9609E+00	.3922E+02	.7684E+04
2	.4572E-06	.1882E-03	.6147E+01	.1639E+01	.1732E-05	.3687E+04
4	.7105E-13	.1811E-02	.5683E+01	.1000E+01	.4544E-19	.3254E+04
6	.3908E-13	-.5714E+00	.5683E+01	.1000E+01	.1578E-19	.3254E+04
8	.3197E-13	-.5000E+00	.5683E+01	.1000E+01	.1073E-19	.3254E+04
10	.3197E-13	-.7857E+00	.5683E+01	.1000E+01	.9466E-20	.3254E+04

Tabelle 5.10: Entwicklung der Anpassung in den Zeitschritten  $t = 1.2, 1.3$  und  $1.6$  [s] mit dem unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren.

Anzahl der Augm.	Unsymm. Augm.-Lagr.-Verfahren		Symmetr. Augm.-Lagr.-Verfahren	
	mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^3$			
	Sum. $g_T$	Ratio $g_T$	Sum. $g_T$	Ratio $g_T$
$t = 0.6$				
1	.379082E+03	.107743E+01	.380926E+03	.108446E+01
2	.379076E+03	.999976E+00	.379982E+03	.100323E+01
3	.379076E+03	.100000E+01	.379011E+03	.996418E+00
4	.379076E+03	.100000E+01	.379085E+03	.100027E+01
5	.379076E+03	.100000E+01	.379079E+03	.999977E+00
6			.379079E+03	.100000E+01
7			.379079E+03	.100000E+01
$t = 1.0$				
1	.118699E+04	.118940E+01	.123806E+04	.125121E+01
2	.118698E+04	.999985E+00	.118523E+04	.955669E+00
3	.118698E+04	.100000E+01	.118661E+04	.100033E+01
4	.118698E+04	.100000E+01	.118702E+04	.100044E+01
5	.118698E+04	.100000E+01	.118698E+04	.999967E+00
6			.118698E+04	.999998E+00
7			.118698E+04	.100000E+01
8			.118698E+04	.100000E+01
$t = 1.1$				
1	.101876E+04	.765684E+00	.859535E+03	.496949E+00
2	.108824E+04	.115197E+01	.119323E+04	.136063E+01
3	.110728E+04	.103433E+01	.114773E+04	.949090E+00
4	.111579E+04	.101248E+01	.113196E+04	.983148E+00
6	.112020E+04	.100284E+01	.112343E+04	.998276E+00
8	.111999E+04	.100058E+01	.112050E+04	.100003E+01
10	.112041E+04	.100069E+01	.112059E+04	.100055E+01
15	.112023E+04	.100014E+01	.112022E+04	.100020E+01
20	.112056E+04	.100016E+01	.112059E+04	.100016E+01
30	.112102E+04	.100008E+01	.112104E+04	.100007E+01
60	.112112E+04	.999998E+00	.112112E+04	.999998E+00
90	.112111E+04	.100000E+01	.112112E+04	.100000E+01
120	.112112E+04	.100000E+01	.112112E+04	.100000E+01
150			.112112E+04	.100000E+01
180			.112113E+04	.100000E+01

Tabelle 5.11: Gegenüberstellung der Entwicklung der tangentialen Gesamtverschiebung  $g_T$  in den Zeitschritten  $t = 0.6, 1.0$  und  $1.1$  [s].

Anzahl der Augm.	Unsymm. Augm.-Lagr.-Verfahren		Symmetr. Augm.-Lagr.-Verfahren	
	Sum. $g_T$	Ratio $g_T$	Sum. $g_T$	Ratio $g_T$
$t = 1.2$				
2	.974295E+03	.107788E+01	.974750E+03	.104966E+01
4	.101147E+04	.101326E+01	.101140E+04	.101933E+01
6	.101981E+04	.100359E+01	.101877E+04	.100469E+01
8	.102222E+04	.100117E+01	.102192E+04	.100147E+01
10	.102185E+04	.999594E+00	.102175E+04	.999059E+00
20	.102205E+04	.100010E+01	.102204E+04	.100010E+01
30	.102249E+04	.100006E+01	.102248E+04	.100006E+01
60	.102239E+04	.100000E+01	.102240E+04	.100000E+01
90	.102243E+04	.100000E+01	.102243E+04	.100000E+01
120	.102244E+04	.100000E+01	.102244E+04	.100000E+01
150	.102244E+04	.100000E+01	.102245E+04	.100000E+01
180			.102245E+04	.100000E+01
$t = 1.3$				
1	.816321E+03	.798414E+00	.837797E+03	.824937E+00
2	.856995E+03	.105986E+01	.861173E+03	.102929E+01
3	.873770E+03	.102314E+01	.875954E+03	.101966E+01
4	.882108E+03	.101118E+01	.878752E+03	.100371E+01
5	.888958E+03	.100907E+01	.886167E+03	.100987E+01
6	.889121E+03	.100021E+01	.892311E+03	.100808E+01
7	.889121E+03	.100000E+01	.889237E+03	.995986E+00
8	.889121E+03	.100000E+01	.889131E+03	.999863E+00
9	.889121E+03	.100000E+01	.889124E+03	.999992E+00
10			.889124E+03	.100000E+01
$t = 1.6$				
1	.253075E+03	.469875E+00	.271936E+03	.551841E+00
2	.253072E+03	.999995E+00	.254626E+03	.110194E+01
3	.253072E+03	.100000E+01	.253190E+03	.998545E+00
4	.253072E+03	.100000E+01	.253080E+03	.999857E+00
5	.253072E+03	.100000E+01	.253071E+03	.999989E+00
6			.253071E+03	.999999E+00
7			.253071E+03	.100000E+01
8			.253071E+03	.100000E+01

Tabelle 5.12: Gegenüberstellung der Entwicklung der tangentialen Gesamtverschiebung  $g_T$  in den Zeitschritten  $t = 1.2, 1.3$  und  $1.6$  [s].

Anzahl der Augm.	Symmetrisiertes Augmented–Lagrange–Verfahren					
	mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^3$					
	Sum. $ g_N $	<i>Ratio</i> $g_N$	Sum. $ g_T^H $	<i>Ratio</i> $g_T^H$	$E_{N-pen}$	$E_{T-pen}$
$t = 0.6$						
2	.1035E-03	.4732E-01	.8024E+00	.4171E-01	.6367E-01	.5163E+05
6	.3238E-08	-.3819E-01	.3010E-04	-.2895E-01	7918E-10	.1366E-04
10	.1066E-12	-.6723E-01	.9948E-09	-.5234E-01	.1035E-18	.1754E-13
12	.2842E-13	-.1296E+00	.2132E-09	.2441E+04	.5049E-20	.9466E-17
14	.3197E-13	-.3542E+00	.2842E-09	-.4883E+04	.1073E-19	.4418E-17
16	.2487E-13	-.6429E+00	.1776E-09	-.3125E+00	5680E-20	.3786E-17
18	.2487E-13	-.4259E+00	.2132E-09	-.3542E+00	.5680E-20	.1010E-16
20	.3908E-13	-.2222E+00	.2842E-09	-.1667E+00	.1325E-19	.1199E-16
$t = 1.0$						
1	.7199E-02	0000E+00	.7030E+02	.0000E+00	.1322E+03	.0000E+00
2	.7912E-03	.5390E-01	.6469E+01	.5903E-03	.1848E+01	.1539E+06
4	.6827E-05	-.4552E-01	.5278E-01	.2565E+00	.1385E-03	.5174E+01
8	.3580E-09	-.5805E-01	.3346E-05	-.6494E-01	.3779E-12	.8242E-07
20	.8882E-13	.0000E+00	.8527E-09	.2170E+04	.3723E-19	.1830E-16
30	.6395E-13	-.4306E+00	.5685E-09	.1085E+04	.1893E-19	.2335E-16
40	.1066E-12	-.4667E+00	.8882E-09	.4340E+04	.3787E-19	.2651E-16
50	.9237E-13	-.3860E+00	.7105E-09	-.2170E+04	.3282E-19	.2903E-16
60	.1066E-12	-.2292E+00	.9948E-09	.2170E+04	.4670E-19	.2146E-16
$t = 1.1$						
2	.3212E-02	-.2889E+00	.6595E+02	-.3119E-01	.4388E+02	.3314E+06
4	.1358E-03	.8394E+00	.1458E+02	.7295E+00	.7335E-01	.3568E+05
8	.2397E-04	.1178E+01	.4581E+01	.6978E+00	.3092E-02	.1902E+04
20	.4786E-05	.9199E+00	.8982E+00	.9128E+00	.1005E-03	.9927E+02
30	.2021E-05	.9188E+00	.4730E+00	.9254E+00	.1677E-04	.3265E+02
60	.9017E-07	.8122E+00	.3781E-01	.8426E+00	.8806E-07	.1311E+00
90	.1717E-07	.9676E+00	.1287E-01	.1003E+01	.1518E-08	.2534E-01
120	.8569E-08	.9710E+00	.6715E-02	.9818E+00	.4243E-09	.7845E-02
150	.4541E-08	.9766E+00	.3644E-02	.9527E+00	.1237E-09	.2672E-02
180	.2486E-08	.9825E+00	.2283E-02	.9802E+00	.3828E-10	.9707E-03

Tabelle 5.13: Entwicklung der Anpassung in den Zeitschritten  $t = 0.6, 1.0$  und  $1.1$  [s] mit dem symmetrisierten Augmented–Lagrange–Verfahren.

Anzahl der Augm.	Symmetrisierten Augmented–Lagrange–Verfahren mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^3$					
	Sum. $ g_N $	<i>Ratio</i> $g_N$	Sum. $ g_T^H $	<i>Ratio</i> $g_T^H$	$E_{N-pen}$	$E_{T-pen}$
$t = 1.2$						
2	.3053E-03	-.1195E-01	.3591E+02	.3238E+00	.4627E+00	.3652E+06
4	.1142E-03	.7701E+00	.7760E+01	.5961E+00	.6914E-01	.3060E+05
8	.1782E-04	.7561E+00	.3156E+01	.1056E+01	.2423E-02	.1419E+04
10	.7913E-05	-.2005E+01	.1640E+01	-.1446E+01	.6784E-03	.7290E+03
20	.3374E-05	.9485E+00	.9118E+00	.9522E+00	.1824E-03	.1300E+03
30	.1910E-05	.9459E+00	.5320E+00	.9486E+00	.5503E-04	.4783E+02
60	.9820E-07	.9444E+00	.3395E-01	.9662E+00	.1616E-06	.2187E+00
90	.3070E-07	.9679E+00	.1396E-01	.9597E+00	.9755E-08	.3778E-01
120	.1128E-07	.9662E+00	.7396E-02	.9738E+00	.9997E-09	.1007E-01
150	.4969E-08	.9761E+00	.4069E-02	.9709E+00	.2172E-09	.3137E-02
180	.2583E-08	.9736E+00	.2216E-02	.9803E+00	.6205E-10	.1033E-02
$t = 1.3$						
1	.3293E-02	.0000E+00	.6864E+02	-.1589E+05	.5039E+02	.1866E-02
2	.2161E-03	.3612E-01	.2529E+02	.2225E+00	.3330E+00	.2986E+06
6	.3452E-04	.8331E+00	.1980E+01	.7934E+00	.8745E-02	.9917E+04
10	.1023E-08	.5573E-01	.1023E-04	.5573E-01	.6285E-11	.1120E-04
14	.4974E-13	.2485E+00	.4974E-09	.2259E+00	.2019E-19	.7750E-15
18	.6395E-13	-.9545E+00	.6395E-09	-.8636E+00	.2146E-19	.1704E-16
$t = 1.6$						
1	.2116E-02	.0000E+00	.2116E+02	-.2172E+05	.3312E+02	.2982E-01
2	.1698E-03	.7738E-01	.1698E+01	.7738E-01	.2667E+00	.3312E+05
6	.5810E-08	.7582E-01	.5810E-04	.7582E-01	.3111E-09	.5320E-04
10	.2061E-12	.8572E-01	.2061E-08	.8572E-01	.4064E-18	.6165E-13
14	.2487E-13	.8333E+00	.2487E-09	.3572E+00	.1199E-19	.3786E-17
16	.4263E-13	-.1867E+01	.4263E-09	-.1333E+01	.2903E-19	.7573E-17

Tabelle 5.14: Entwicklung der Anpassung in den Zeitschritten  $t = 1.2, 1.3$  und  $1.6$  [s] mit dem symmetrisierten Augmented–Lagrange–Verfahren.

**Vorschläge für Abbruchkriterien**

Da bei dieser Untersuchung deutlich wurde, dass es bedingt durch die beiden Richtungen und durch die verschiedenen Algorithmen unterschiedliches Verhalten gibt, können demzufolge folgende Abbruchkriterien verwendet werden:

- Für das unsymmetrische Verfahren werden als Kriterien in
  - Normalenrichtung die Penalty-Energie ' $E_{N-pen}$ ' und in
  - tangentialer Richtung das Verhältnis der Verbesserungen ' $Ratio - g_T^H$ ' als relatives Kriterium

vorgeschlagen.

- Für das symmetrisierte Verfahren werden als Kriterien in
  - Normalenrichtung die Penalty-Energie ' $E_{N-pen}$ ' und in
  - tangentialer Richtung die Penalty-Energie ' $E_{T-pen}$ '

vorgeschlagen.

Für die Penalty-Energien können als Fehlertoleranzen die gleichen Größenordnungen wie die zum Energiekriterium der Gleichgewichtsiteration gehörenden Toleranzen benutzt werden. Bei komplexeren Untersuchungen liegt diese bei  $10^{-18}$ . In tangentialer Richtung liegt die Toleranzgrenze vermutlich wegen der Anzahl der Operationen, die durch die Anwendung der Gleitregel entstehen, etwas höher.

- Als Größenordnungen für die Toleranzen werden in
  - Normalenrichtung mit  $10^{-18}$ , in
  - tangentialer Richtung  $10^{-17}$ , sowie
  - für das relative Kriterium in tangentialer Richtung  $10^{-6}$

verwendet. Im Folgenden werden Anwendungen der Abbruchkriterien untersucht.

### Anwendungen der Abbruchkriterien anhand des vorherigen Beispiels

Im Folgenden werden anhand des Beispiels des Einpressvorganges eines Zylinders Anwendungen der Abbruchkriterien untersucht. Hierzu werden in der Tabelle 5.16 die Anzahl der für den Anpassungsprozess benötigten Wiederholungen unter Anwendung der Abbruchkriterien über den Beobachtungszeitraum aufgetragen. Einander gegenübergestellt sind mit dem unsymmetrischen und dem symmetrisierten Verfahren ermittelte Größen mit jeweils unterschiedlichen Penaltyfaktoren für die tangentielle Richtung: Die Anzahl der benötigten Wiederholungen bei den vorherigen Untersuchungen mit  $\epsilon_N = 10^8$  und  $\epsilon_T = 10^3$  [N/mm] sind in den Spalten 2 und 4 dargestellt. Aufgrund der Penaltywahl werden in den Zeitschritten  $t = 1.1$  und  $1.2$  [s] bei der vorgegebenen maximalen Anzahl von Wiederholungen die Abbruchkriterien nicht erfüllt. Deshalb wird zur Beschleunigung der Konvergenz der Penaltyfaktor auf  $\epsilon_T = 10^4$  erhöht. Durch diese Erhöhung werden nun mit dem unsymmetrischen Verfahren in allen Zeitschritten innerhalb der vorgegebenen maximalen Anzahl von Wiederholungen die Abbruchkriterien, siehe Spalte 3, erfüllt. Die mit diesem Penaltyfaktor erzielten Konvergenzraten von zu beobachtenden Größen werden anhand von ausgewählten kritischen Zeitschritten in Tabelle 5.15 aufgetragen.

Abbildung 5.9 (a) zeigt den Verlauf der Normalkraft und Abbildung 5.9 (b) zeigt den Verlauf der Penetration  $g_N$  in Abhängigkeit von der Kontaktlinie und der Zeit. Anhand der Größenordnung der Penetration im gesamten Untersuchungszeitraum wird die erfolgreiche Anwendung der Abbruchkriterien deutlich. Im Gegensatz zum Penalty-Verfahren ist der Normalkraftverlauf durch die Rücknahme der Regularisierung unabhängig vom Verlauf der mit sehr kleinen Zahlenwerten behafteten Penetration.

Die benötigten Wiederholungen bei der Anwendung des symmetrisierten Verfahrens mit einem Penaltyfaktor von  $\epsilon_T = 10^4$  sind in der Tabelle 5.16 in Spalte 5 dargestellt. Unter Beibehaltung der Zeitschrittweite führt diese Variante dazu, dass die Haft- oder Reibkraftverläufe in den Zeitschritten  $t = 1.1$  und  $1.2$  [s] falsch ermittelt werden. Die Ursache hierfür liegt in dem für die aktuelle Normalkraft zu hohen Prädiktorwert für die Reibkraft. Bei diesem Verfahren wird die Gleitregel nur im Gleichgewichtszustand angewendet. In Verbindung mit diesem höheren Penaltyfaktor muss wie im Folgenden gezeigt wird, bei Verwendung des symmetrisierten Verfahrens eine geringere Zeitschrittweite gewählt werden. Damit wird ein wesentlicher Nachteil dieses symmetrisierten Verfahrens deutlich, der allerdings nur bei sehr hohen Penaltyfaktoren auftritt.

Um eine **direkte Gegenüberstellung des unsymmetrischen mit dem symmetrisierten Verfahren und den jeweilig vorgeschlagenen Abbruchkriterien** unter Verwendung der gleichen Penaltyfaktoren  $\epsilon_N = 10^8$  und  $\epsilon_T = 10^4$  durchführen zu können, wird für diese Untersuchung eine Zeitschrittweite von  $dt = 0.01$  [s] gewählt. Die Tabelle 5.17 zeigt die Anzahl der benötigten Wiederholungen zur Einhaltung der Abbruchkriterien in den einzelnen Zeitschritten für den Anpassungsprozess. Auch hier zeigt sich die Effizienz der vorgeschlagenen Abbruchkriterien durch die in den jeweiligen Zeitschritten wechselnde Anzahl der Wiederholungen. Dabei ist die Anzahl der benötigten Wiederholungen beim symmetrisierten Verfahren grundsätzlich höher und ungleichmäßiger als beim unsymmetrischen Verfahren. Während bei der symmetrisierten Variante 5871 Wiederholungen des Anpassungsprozesses nötig werden, sind es bei der unsymmetrischen Variante 3978 Wiederholungen. Die Gesamtrechnzeit wird jedoch durch die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen bestimmt. Das Verhältnis der benötigten Iterationen ist mit 12710 beim symmetrisierten zu 12907 beim unsymmetrischen Verfahren annähernd gleich. Außerdem wird deutlich, dass auch hier in dem Zeitraum von  $t = 1.01$ – $1.28$  [s] – unmittelbar nach der Richtungsumkehr der Verschiebung – in dem Haft- oder Reibkräfte mit unterschiedlichem Vorzeichen existieren, zum Erreichen der Abbruchkriterien eine wesentlich höhere Anzahl von Wiederholungen benötigt wird. Diese Besonderheit ist unabhängig von der Zeitschrittweite und dem gewählten Verfahren. Die Ursache für die geringe Konvergenzrate in diesem Zeitraum ist weniger in dem Augmented-Lagrange-Verfahren zu suchen, als eher in dem speziellen Verformungszustand.

Abbildung 5.10 (b) zeigt den Verlauf der Haft- oder Reibkräfte, dargestellt mit einer Schrittweite von  $dt_{plot} = 0.1$  [s]. Geringe Veränderungen dieser Kraftverläufe gegenüber denjenigen in Abbildung 5.10 (a) entstehen aufgrund der Verringerung der Zeitschrittweite auf  $dt = 0.01$  [s]. Abbildung 5.11 (a) zeigt den Verlauf der Penetration  $g_N$  und Abbildung 5.11 (b) zeigt den Verlauf der mit dem symmetrisierten Verfahren ermittelten Haftverschiebung  $g_T^H$  in tangentialer Richtung in Abhängigkeit von der Kontaktlinie und der Zeit. Die in den Abbildungen jeweilig erreichten Größenordnungen über den gesamten Untersuchungszeitraum demonstrieren die erfolgreiche Anwendung der Abbruchkriterien. Anhand der Tabellen wird die erhöhte Effizienz deutlich. Denn die Anzahl von Wiederholungen steigt nur dort an, wo es gemäß der Erfüllung der Kriterien nötig ist und der Prozess wird abgebrochen, wenn diese Kriterien erfüllt sind.

Anzahl der Augm.	Unsymmetrisches Augmented–Lagrange–Verfahren mit $\epsilon_N = 10^8$ und $\epsilon_T = 10^4$					
	Sum. $ g_N $	Ratio $g_N$	Sum. $ g_T^H $	Ratio $g_T^H$	$E_{N-pen}$	$E_{T-pen}$
$t = 1.0$						
1	.7427E-02	.0000E+00	.1454E+02	.3564E+01	.1445E+03	.6664E+05
2	.1690E-05	.2123E-03	.9281E+01	.5736E+00	.8491E-05	.3908E+05
3	.3986E-09	.1804E-03	.9280E+01	.9995E+00	.5303E-12	.3908E+05
4	.1634E-12	.2818E-02	.9280E+01	.1000E+01	.9593E-19	.3908E+05
$t = 1.1$						
1	.4273E-02	.0000E+00	.1699E+02	-.1070E+02	.8670E+02	.1256E+06
2	.2137E-03	-.1185E+00	.8622E+01	.9679E+00	.1753E+00	.4269E+05
4	.2427E-04	.5128E+00	.8419E+01	.8618E+00	.2369E-02	.3910E+05
10	.2435E-06	.6267E+00	.8491E+01	.1000E+01	.3491E-06	.3758E+05
20	.2873E-07	.7623E+00	.8492E+01	.1000E+01	.5366E-08	.3757E+05
30	.5616E-08	.8576E+00	.8492E+01	.1000E+01	.1862E-09	.3757E+05
60	.7117E-10	.8673E+00	.8492E+01	.1000E+01	.3831E-13	.3757E+05
90	.1727E-11	.7677E+00	.8492E+01	.1000E+01	.2117E-16	.3757E+05
100	.4512E-12	.1320E+00	.8492E+01	.1000E+01	.1434E-17	.3757E+05
103	.3517E-12	.7653E+00	.8492E+01	.1000E+01	.8198E-18	.3757E+05
$t = 1.2$						
1	.3772E-02	.0000E+00	.7529E+01	-.3366E+00	.6397E+02	.4211E+05
2	.1222E-03	-.3970E-01	.6847E+01	.3593E+00	.7748E-01	.3002E+05
4	.1758E-04	.4202E+00	.7710E+01	.1015E+01	.4531E-02	.3670E+05
10	.4876E-06	.1537E+01	.7760E+01	.1000E+01	.3519E-05	.3632E+05
20	.3010E-07	.8319E+00	.7761E+01	.1000E+01	.7399E-08	.3632E+05
30	.4904E-08	.8594E+00	.7761E+01	.1000E+01	.1891E-09	.3632E+05
60	.7503E-10	.8628E+00	.7761E+01	.1000E+01	.4736E-13	.3632E+05
90	.1496E-11	.5352E+00	.7761E+01	.1000E+01	.1946E-16	.3632E+05
100	.3944E-12	.4797E+00	.7761E+01	.1000E+01	.1275E-17	.3632E+05
102	.3304E-12	.1082E+01	.7761E+01	.1000E+01	.8501E-18	.3632E+05
$t = 1.4$						
1	.3434E-02	.0000E+00	.6758E+01	.1000E+01	.6042E+02	.3176E+05
2	.6979E-06	.1964E-03	.5208E+01	.7299E+00	.2678E-05	.1977E+05
3	.1470E-09	.1831E-03	.5219E+01	.1004E+01	.1364E-12	.1982E+05
4	.5684E-13	.2203E-02	.5219E+01	.1000E+01	.2524E-19	.1982E+05

Tabelle 5.15: Entwicklung des Anpassungsprozesses in den Zeitschritten  $t = 0.6$ ,  $1.0$  und  $1.1$  [s] unter Verwendung von Abbruchkriterien und dem unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren.

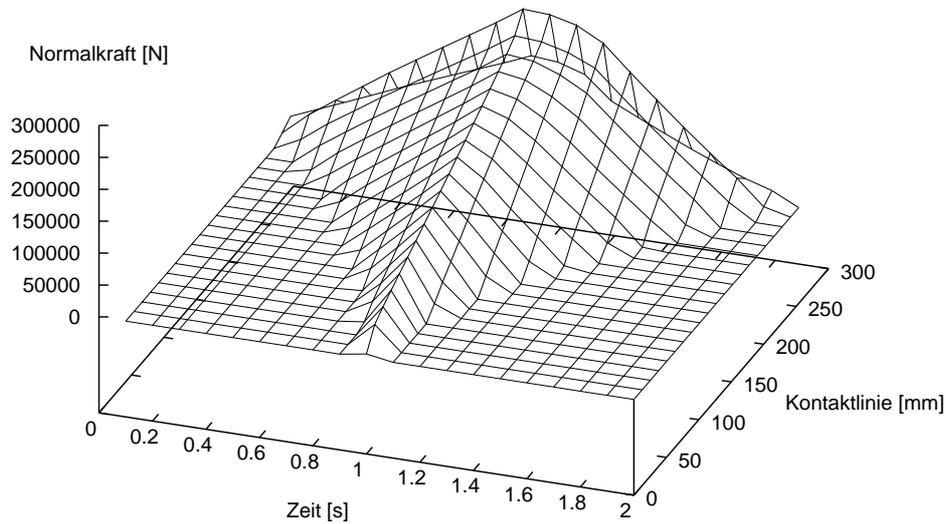
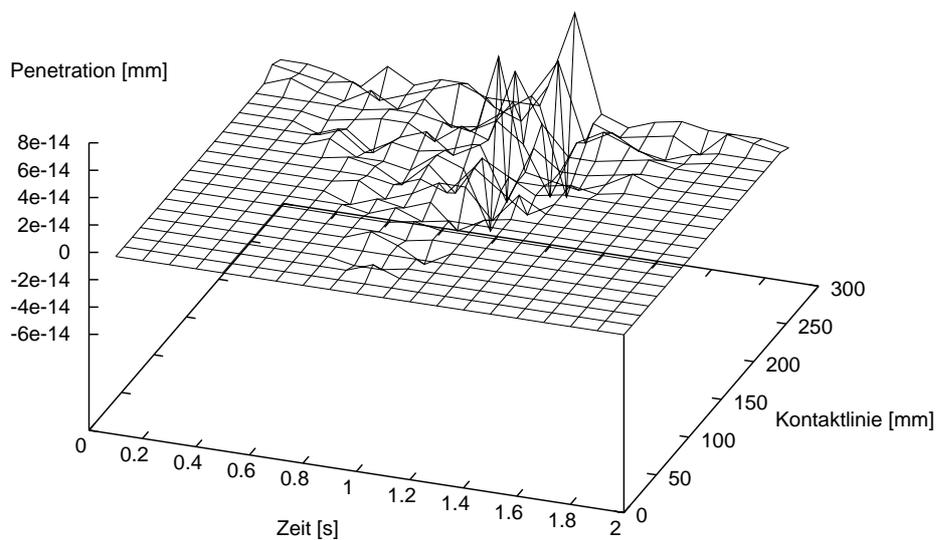
(a) Normalkraft; unabhängig von  $g_N$ .(b) Penetration  $g_N$ ; im gesamten Bereich unterhalb der numerischen Zahlengenauigkeit.

Abbildung 5.9: Gegenüberstellung der Normalkraft und der Penetration  $g_N$  in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktklinie unter Nutzung von Abbruchkriterien und Verwendung des unsymmetrischen Augmented-Lagrange-Algorithmus mit einer Zeitschrittweite von  $dt = 0.1$  [s] und  $\epsilon_N = 10^8$  und  $\epsilon_T = 10^4$  [N/mm].

Anzahl der benötigten Wiederholungen des Anpassungsprozesses				
Zeitschritt	unsymmetrisch		symmetrisiert	
	$\epsilon_T = 10^3$	$\epsilon_T = 10^4$	$\epsilon_T = 10^3$	$\epsilon_T = 10^4$
0.1	4	4	4	4
0.2	4	4	10	10
0.3	4	4	10	10
0.4	4	4	11	12
0.5	4	4	10	12
0.6	4	4	13	12
0.7	4	4	14	12
0.8	4	4	16	12
0.9	4	4	81	12
1.0	4	4	46	13
1.1	> 149	103	> 299	> 299
1.2	> 149	102	> 299	12
1.3	8	4	15	11
1.4	4	4	15	11
1.5	4	5	12	12
1.6	4	4	12	12
1.7	5	5	11	11
1.8	5	5	21	10
1.9	4	5	10	9
2.0	4	4	4	4

Tabelle 5.16: Anzahl der benötigten Wiederholungen des Anpassungsprozesses beim unsymmetrischen und symmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren mit den jeweiligen Abbruchkriterien.

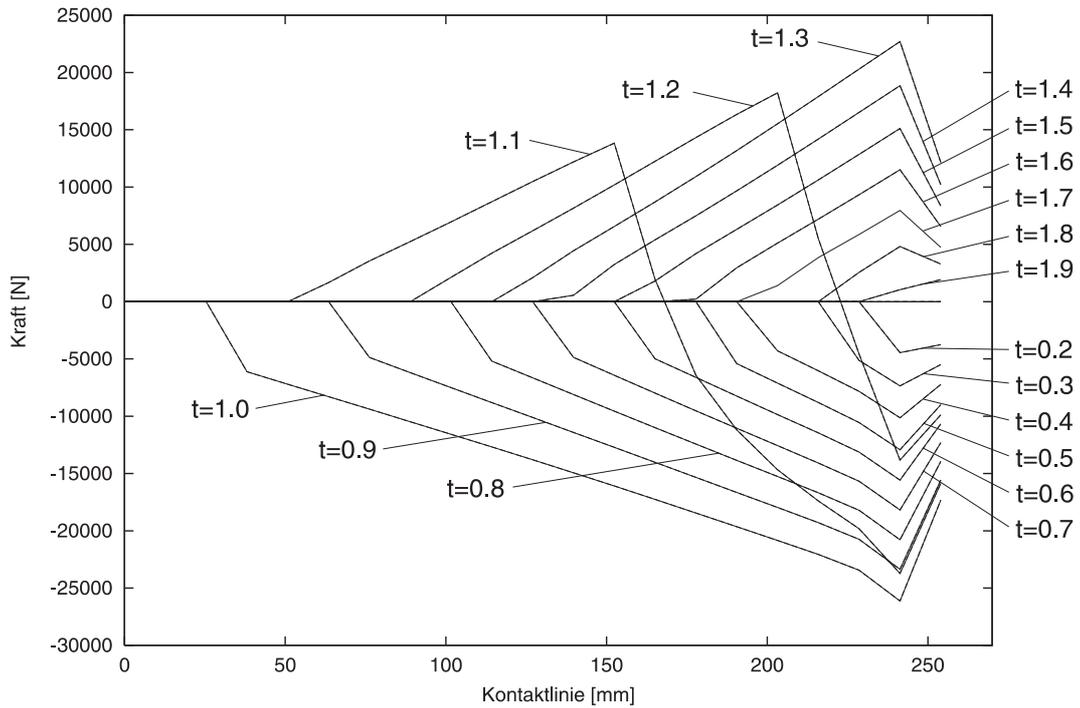
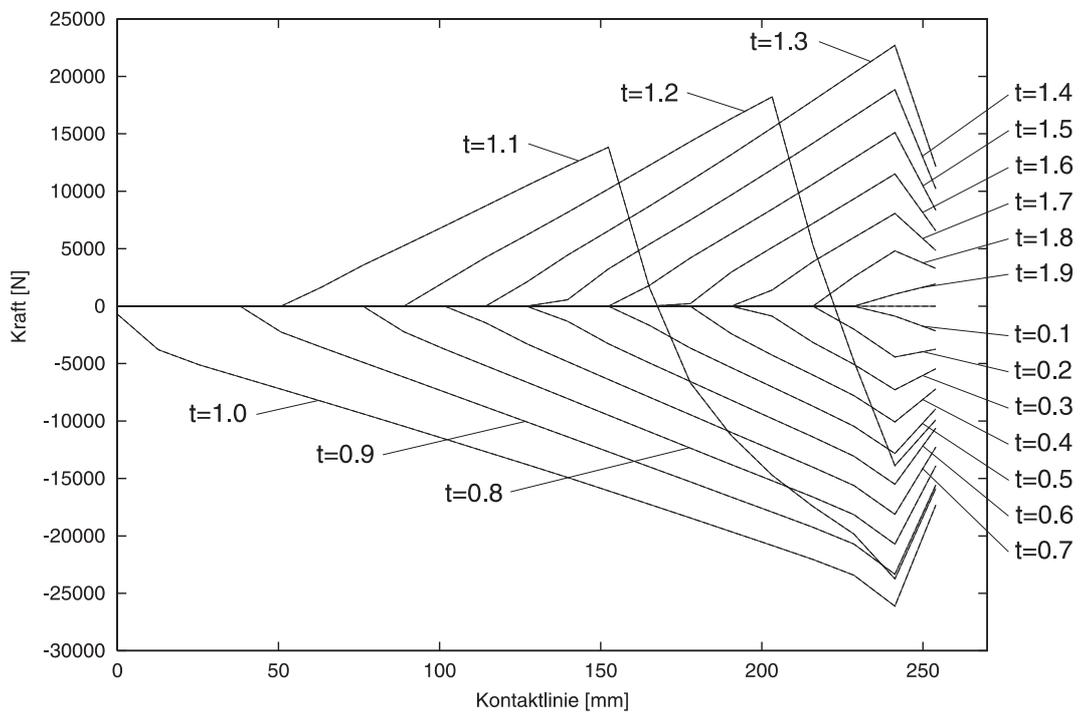
(a)  $dt = 0.1$ (b)  $dt = 0.01$ 

Abbildung 5.10: Gegenüberstellung der mit verschiedenen Zeitschrittweiten ermittelten Haft- oder Reibkraft in Abhängigkeit von der Kontaktklinie im Zeitraum  $t = 0-2.0$  [s]. Die Schrittweite in der Darstellung beträgt  $dt_{plot} = 0.1$  [s].

Unsymmetrisches Augmented–Lagrange–Verfahren					
Zeitschritt	Anzahl	Zeitschritt	Anzahl	Zeitschritt	Anzahl
0.01	4	1.11	107	1.24	100
⋮	4	1.12	100	1.25	78
1.00	4	1.13	106	1.26	81
1.01	108	1.14	85	1.27	81
1.02	108	1.15	105	1.28	16
1.03	93	1.16	106	1.29	4
1.04	98	1.17	101	1.30	4
1.05	88	1.18	106	⋮	4
1.06	109	1.19	107	1.66	4
1.07	107	1.20	103	1.67	5
1.08	97	1.21	104	1.68	4
1.09	107	1.22	88	⋮	4
1.10	101	1.23	100	2.00	4

Symmetrisiertes Augmented–Lagrange–Verfahren					
Zeitschritt	Anzahl	Zeitschritt	Anzahl	Zeitschritt	Anzahl
0.01	4	1.04	150	1.21	127
0.02	10	1.05	140	1.22	141
0.03	8	1.06	169	1.23	116
0.04	9	1.07	157	1.24	128
⋮	9	1.08	149	1.25	131
0.20	9	1.09	167	1.26	95
⋮	10	1.10	150	1.27	99
0.29	11	1.11	165	1.28	102
0.30	11	1.12	149	1.29	22
⋮	11	1.13	163	1.30	11
0.77	11	1.14	136	⋮	11
0.78	12	1.15	145	1.67	11
⋮	12	1.16	171	⋮	10
1.00	12	1.17	145	1.77	10
1.01	168	1.18	130	⋮	9
1.02	168	1.19	165	1.99	8
1.03	159	1.20	127	2.00	4

Tabelle 5.17: Anzahl der beim Anpassungsprozess pro Zeitschritt benötigten Wiederholungen unter Verwendung der Abbruchkriterien und der Penaltyfaktoren  $\epsilon_N = 10^8$  und  $\epsilon_T = 10^4$  [N/mm], sowie einer Schrittweite von  $dt = 0.01$  [s].

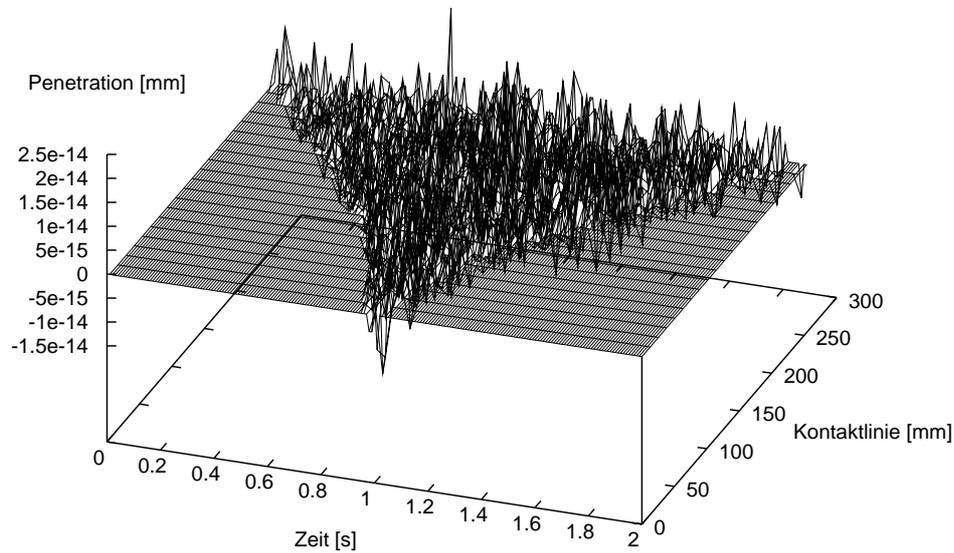
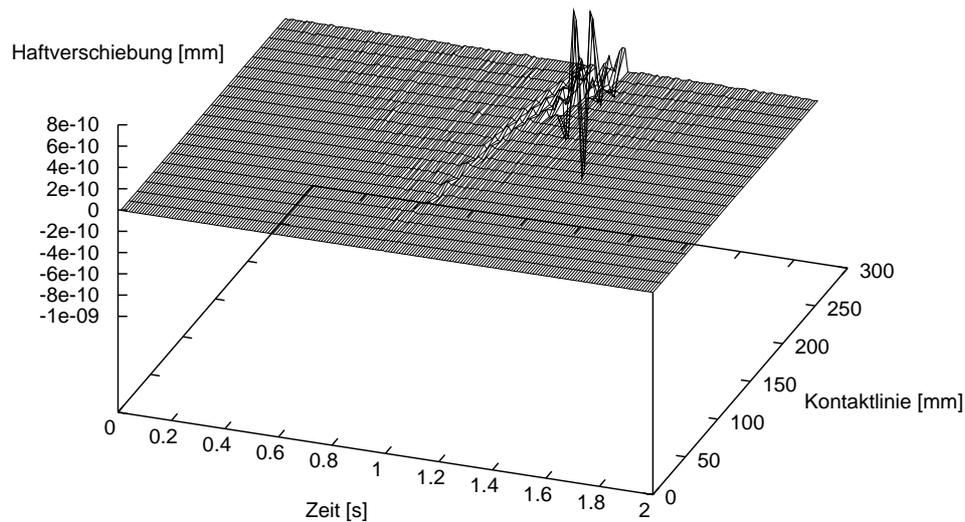
(a) Penetration  $g_N$ (b) Tangentialverschiebung für den Haftzustand  $g_T^H$ 

Abbildung 5.11: Erfolgreiche Rücknahme der Regularisierung in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie, unter Verwendung der Abbruchkriterien mit dem symmetrisierten-Lagrange-Verfahren und einer Zeitschrittweite von  $dt = 0.01$  [s]: Alle Zahlenwerte liegen quasi unterhalb der numerischen Genauigkeit.

## 5.6 Bremsender Block mit Anfangsgeschwindigkeit

Das folgende Beispiel dient dem Vergleich von numerischen Lösungen mit Starrkörperlösungen. Analysiert werden das unsymmetrische und symmetrisierte Augmented-Lagrange- und das Penalty-Verfahren.

Folgende Problemstellung gilt es zu untersuchen: Ein Block liegt auf einer starren Ebene und erhält als Anfangsbedingung eine Horizontalgeschwindigkeit. Dabei unterliegt er der Schwerkraft. Aufgrund der Reibung und der sich entwickelnden Reibarbeit ist nach einer bestimmten Strecke die kinetische Energie verbraucht, der Block kommt zum Stehen. Speziell der Übergang vom Gleitzustand zum Haftzustand soll untersucht werden. Diskretisiert wird der Block mit nur einem Element für den ebenen Spannungszustand. Die Parameter sind so gewählt, dass ein Vergleich mit einer analytischen Starrkörperlösung möglich ist:

Geometrie des Blockes:	$b = 4.0, h = 2.0$	[m]
Elastizitätsmodul:	$E = 1000.0$	[N/m <sup>2</sup> ]
Querdehnzahl:	$\nu = 0.3$	[-]
Dichte:	$\rho = 10.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_T = 10^6, \epsilon_N = 10^2$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.3$	[-]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.05$	[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.25, \gamma = 0.5$	[-]
Anfangsbedingungen:	$V_0 = 3.0$	[m/s]
Basisbeschleunigung:	$b = -1.0$	[m/s <sup>2</sup> ]

Für eine Analyse während der Untersuchungszeit werden soweit möglich die Energiebilanz und die Verläufe der einzelnen Energien über die Zeit aufgestellt:

$$\begin{aligned}
 \text{Reibarbeit:} & \quad W_{frict} = \mu m b l \\
 \text{Potenzielle Energie:} & \quad E_{pot} = m b h \\
 \text{Verzerrungsenergie:} & \quad E_{strain} = \int \frac{1}{2} \epsilon^T E \epsilon \, dv \\
 \text{Kinetische Energie:} & \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m V^2
 \end{aligned}$$

Setzt man die kinetische Energie gleich der Reibarbeit:  $\frac{1}{2} m V^2 = \mu m b l$ , dann kann man die vom Block zurückzulegende Strecke ermitteln. Gemäß der analytischen Starrkörperlösung kommt der Block nach einer Strecke von 15 [m] in einer Zeit von 10 [s] zum Stehen.

In Abbildung 5.12 werden Ergebnisse der numerischen Lösung gezeigt. Dargestellt werden die Strukturen im zeitlichen Abstand von 0.4 [s] während der Untersuchungszeitraumes von 12 [s]. Die Verdichtung der Strukturen verdeutlicht die Verringerung der Geschwindigkeit bis zum Stillstand. Bei der Lösung mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren und den damit verbundenen sechs 'update'-Prozessen wird deutlich, dass die numerische Lösung gut mit der analytischen Lösung übereinstimmt.

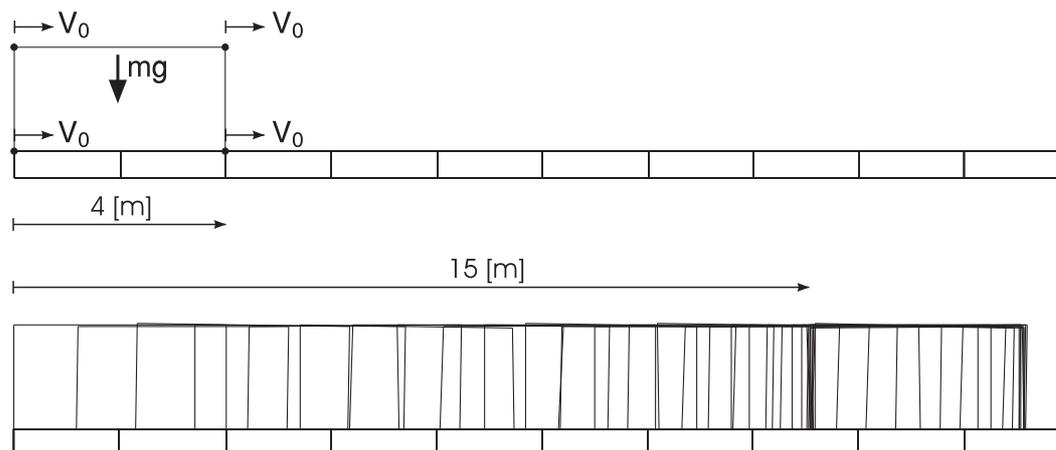


Abbildung 5.12: Bremsender Block, diskretisiert mit einem Element (oben). Untersuchungen mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren (unten).

Für eine tiefergehende Analyse werden im Folgenden einzelne Größen der Untersuchungen aufgetragen. Die Ergebnisse mit dem

- Penalty-Verfahren sind in den Abbildungen 5.14, die mit dem
- unsymmetrischen Augmented-Lagrange-Verfahren in den Abbildungen 5.15 und 5.16 und die mit dem
- symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren sind in den Abbildungen 5.17 und 5.18

dargestellt. Die verwendeten Bezeichnungen sind der Abbildung 5.13 zu entnehmen.

Die Verläufe der auftretenden Tangentialwege und -geschwindigkeiten ( $g_T$ ,  $v_T$ ) der beiden Kontaktknoten sind in den Abbildungen 5.14 (b), 5.15 (b) und 5.18 (a) beschrieben. Bei der Betrachtung der Kinematik der Kontaktknoten wird deutlich, dass bei der Lösung nach dem Penalty-Verfahren die analytische Lösung im Gegensatz zum Augmented-Lagrange-Verfahren nicht erreicht wird. Nach 12 [s] ist der Block immer noch in Bewegung und hat bereits eine Strecke von über 18 [m] zurückgelegt. Ursache hierfür ist im Wesentlichen die Penaltyregularisierung in tangentialer Richtung, da auch im Falle des Haftens eine Wegstrecke zurückgelegt wird.

Zur Verdeutlichung wurden die kinematischen Verläufe nochmals mit einer angepassten Skalierung in Abbildung 5.19 dargestellt. Gegenüber den vorherigen Abbildungen sind schon aufgrund der Skalierung nur Verschiebungen und Geschwindigkeiten in normaler Richtung ( $g_N, v_N$ ) sichtbar. Mit dieser Gegenüberstellung lässt sich zeigen, dass durch das Augmented–Lagrange–Verfahren die Penetration und ihre erste Ableitung in einem Bereich von weit unter  $1.E-7$  liegen, während die des Penalty–Verfahrens bei  $1.E-3$  bleiben und affin zur Normalkraft sind. In Abbildung 5.19 (b) tritt im Bereich oberhalb von 10 [s] eine Art numerischer Schmutz auf. Die Ursache hierfür liegt vermutlich darin, dass das Zeitintegrationsverfahren verwendet wird, obwohl der Block sich in diesem Zeitbereich nicht mehr bewegt.

Anschließend werden die Verläufe der Knotenkräfte über die Zeit betrachtet. Durch die schlagartig aufgebrachte Schwerkraft zu Beginn werden Schwingungen induziert, die sich in den Verläufen der Vertikalkräfte (N1, N2) wiederfinden. Bei Untersuchungen mit dem Penalty–Verfahren entstehen durch die Penaltyfaktoren Oberschwingungen, die in Abbildung 5.14 (a) erkennbar sind. Durch Anwendung des Augmented–Lagrange–Verfahrens werden diese Oberschwingungen in Normalenrichtung durch den sechsmaligen 'update'–Prozess vollständig eliminiert, was in den Abbildungen 5.15 und 5.17 deutlich wird.

Bei der Betrachtung der Haft– oder Reibkräfte (R1, R2) entstehen beim Penalty–Verfahren schwer nachzuvollziehende Kraftverläufe. Ursachen sind neben dem Normalkraftverlauf auch hohe Schwankungen des Verlaufes des Tangentialweges, der für die Ermittlung des Prädiktorwertes benutzt wird. Bei Nutzung des einfachen Reibgesetzes nach Coulomb mit einem konstanten Beiwert  $\mu$  unterscheiden sich im Gleitzustand die Beträge der Normal– und der Reibkraft lediglich durch diesen Faktor  $\mu$ . Somit müssten sich qualitativ bei den Normalkräften die gleichen Schwingungsverläufe wie bei den in horizontaler Richtung wirkenden Reibkräften wiederfinden. Bei Lösungen nach dem Augmented–Lagrange–Verfahren ist dies der Fall. Ein Vergleich der Zustände, Haften oder Gleiten der sich im Kontakt befindenden Knoten wird am Ende des Abschnittes geführt.

Abschließend wird die Energiebilanz des bremsenden Blockes über die Zeit aufgetragen. Dies ist nur mit dem Augmented–Lagrange–Verfahren möglich, denn nur mit diesem Verfahren lässt sich die Reibarbeit ermitteln. In den Abbildungen 5.16 und 5.18 (b) sind die einzelnen Energieverläufe und die Summierung aller Größen dargestellt. Aus den Anfangsbedingungen in horizontaler Richtung wird die kinetische Energie aufgebaut, die durch die Reibarbeit verbraucht wird und den Block zum Stillstand bringt. Die in vertikaler Richtung angreifende Schwerkraft ist für die

potenzielle Energie verantwortlich. Die Verzerrungsenergie entsteht durch die Eigenschwingungen. Bei den Augmented–Lagrange–Lösungen mit sechs ‘updates’ werden Zeitverläufe ohne Oberschwingungen und mit wesentlich gleichmäßiger Kinematik erzielt. Dieses Beispiel demonstriert die grundlegenden Vorteile des Augmented–Lagrange–Verfahrens besonders bei dynamischen Anwendungen.

Im Folgenden soll eine prinzipielle Möglichkeit zur Definition von Haft– oder Gleitzuständen erörtert werden. Eine solche Definition kann bei unsymmetrischen Verfahren mit Hilfe des Prädiktor–Korrektor–Algorithmus während der Gleichgewichtsiteration nach Newton erfolgen. Dabei wird der im letzten Iterationsschritt eines Zeitschrittes ermittelte Status der Gleitregel mit  $f = 0$  für den Gleitzustand oder  $f < 0$  für den Haftzustand zur Definition des Zustandes des Kontaktknotens benutzt. Bei dem symmetrisierten Augmented–Lagrange–Verfahren erfolgt der Einsatz der Gleitregel lediglich während des ‘update’–Prozesses unabhängig von der Gleichgewichtsiteration und kann zur Definition benutzt werden.

Ein weiteres Ziel bei diesem Vergleich von numerischen mit analytischen Lösungen ist der Versuch, diese Knotenzustände (H/G) zu untersuchen. Diese Knotenzustände (Z) der Kontaktknotenkräfte (1, 2) sind in den Abbildungen 5.14 (a), 5.15 (a) und 5.17 jeweils unten dargestellt. Sie werden mit (Z1, Z2) bezeichnet.

Folgende Erkenntnisse konnten durch dieses vorliegende Beispiel gewonnen werden:

- Beim Penalty–Verfahren kommt es zu einem Verlauf der Zustände, der zumindest bei diesem Beispiel nicht mit dem analytischen Ergebnis im Einklang ist, siehe Abbildung 5.14 (a). Dies liegt an den erwähnten Oberschwingungen und den ermittelten Prädiktorwerten. Diese Prädiktorwerte setzen sich zusammen aus dem Produkt aus Penaltyfaktor und Verschiebungsinkrement, sowie der zuletzt ermittelten Reibkraft.
- Bei dem unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren kann man bei genauer Analyse dieses Beispiels einen in der Anwendung häufig anzutreffenden systematischen Fehler des Verfahrens erkennen. Während der durch die analytische Lösung definierten Gleitphase kommt es vor, dass der letzte Iterationsschritt innerhalb eines Zeitschrittes zu einem Haftzustand führt, siehe Abbildung 5.15 . Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass während einer solchen Iteration das Vorzeichen der Verschiebungsinkremente wechselt. Dies führt dazu, dass die Verschiebungsinkremente einen Teil des zurückzulegenden Weges mehrfach durchlaufen. Der Prädiktorwert ist dann gegenüber der aktuellen Gleitgrenze zu gering, um nach Einsetzen der Gleitregel einen Gleitzustand zu definieren. Grundsätzlich sind wegen der höheren Genauigkeit die Unterschiede der verschiedenen Größen (aktueller Prädiktorwert

und Gleitgrenze) so gering, dass daraus resultierende Richtungswechsel der Verschiebungsinkremente während der Iteration Auswirkungen haben können. Bemerkenswert ist, dass trotz dieser Unzulänglichkeit die Reibarbeit ausreichend genau ermittelt wird. Diese Erkenntnis lässt sich durch die folgende Modifikationsmöglichkeit untermauern: Der erste Iterationsschritt eines neuen Zeitschrittes wird als Haftzustand definiert. Damit wird bei diesem Beispiel gewährleistet, dass bei den folgenden Verschiebungsinkrementen des Iterationsschrittes sich das Vorzeichen nicht ändert, sodass der letzte Prädiktorwert des Zeitschrittes zu einem Gleitzustand führt. Diese Variante lässt sich einfach numerisch umsetzen, doch man kann die Reibarbeit durch diese Veränderung des Algorithmus nicht mehr korrekt ermitteln. Eine weitere Möglichkeit besteht durch Verwendung eines Zweischritt-Algorithmus.

- Bei dem symmetrischen Augmented-Lagrange-Verfahren wird die Gleitregel nur während des 'update'-Prozesses angewendet. Die dort verwendeten Eingangsgrößen befinden sich bereits im Gleichgewicht. Der Prädiktorwert ist unabhängig von den Verschiebungsinkrementen. Die bei dem unsymmetrischen Verfahren aufgezeigte Problematik tritt hier nicht auf, siehe Abbildung 5.17. Die Knotenzustände stehen im Einklang mit der analytischen Lösung. Dies ist ein aus der Symmetrisierung entstandener beachtenswerter Vorteil.

Auf diesen Erkenntnissen aufbauend und mit dem Wissen um die Möglichkeiten der Beschreibung der Knotenzustände erschließt sich die Möglichkeit, besonders mit dem symmetrischen Augmented-Lagrange-Verfahren, spezielle Haft-Gleiteffekte mit wirklichkeitsnahen, nichtlinearen geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzen zu untersuchen.

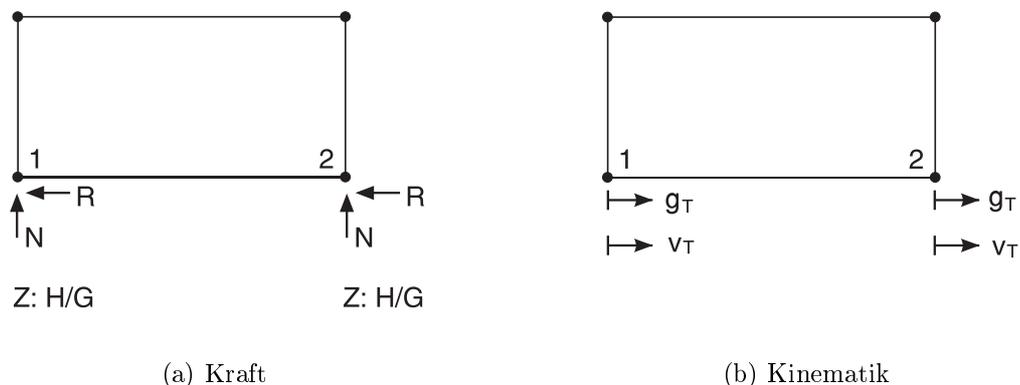
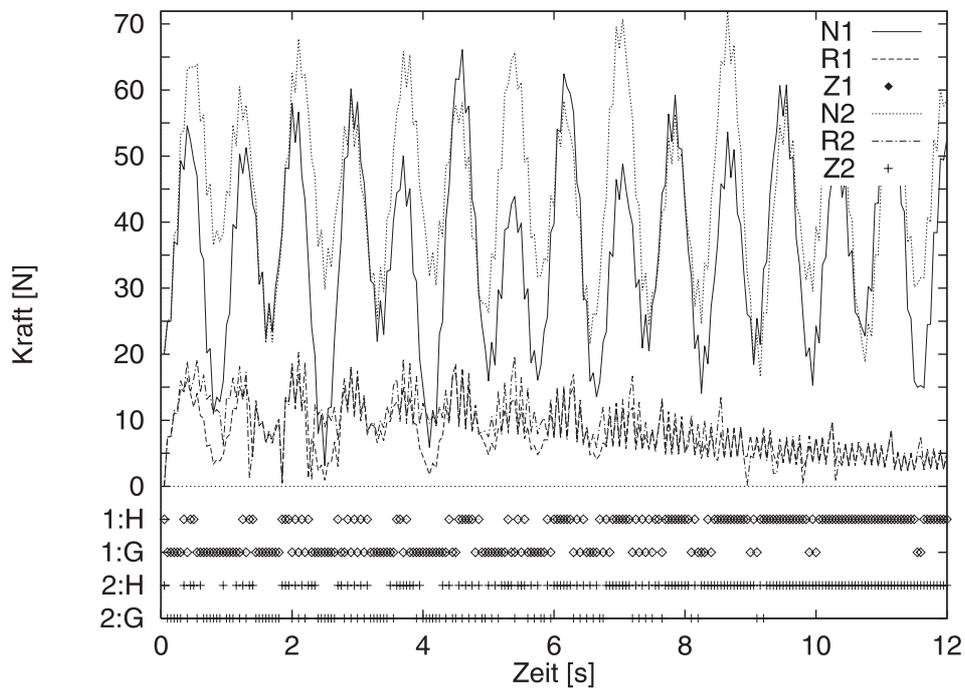
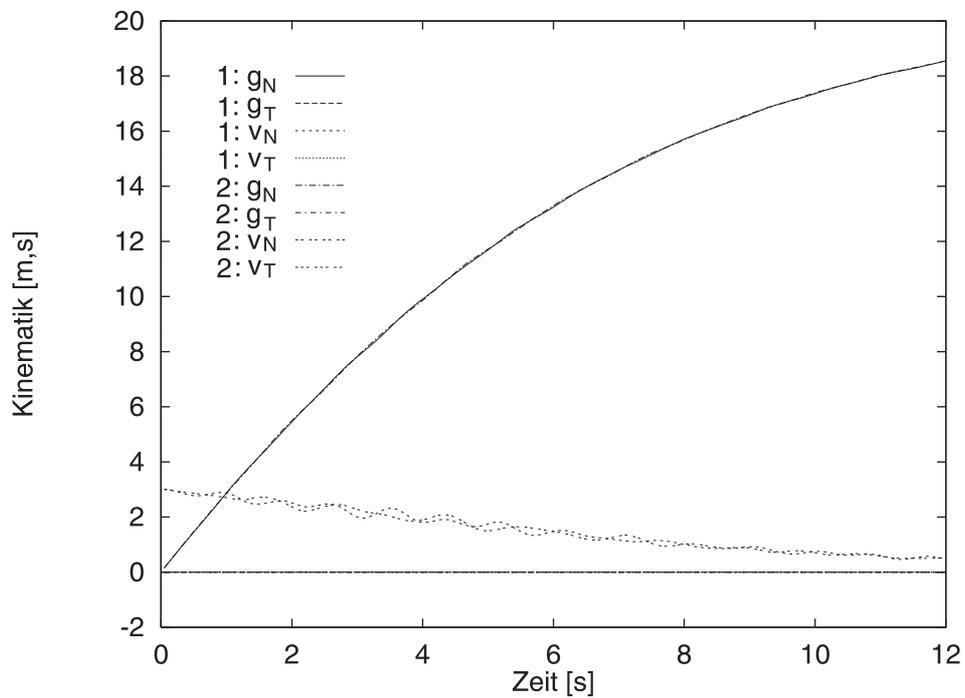


Abbildung 5.13: Bezeichnungen an den beiden Kontaktknoten.

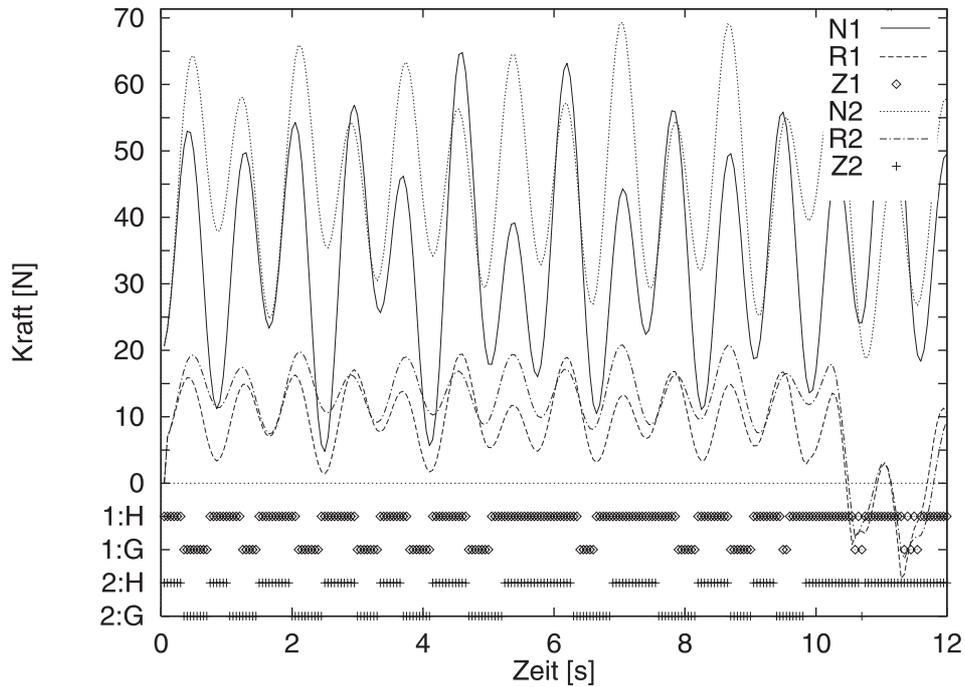


(a) Kontaktkräfte und -zustände

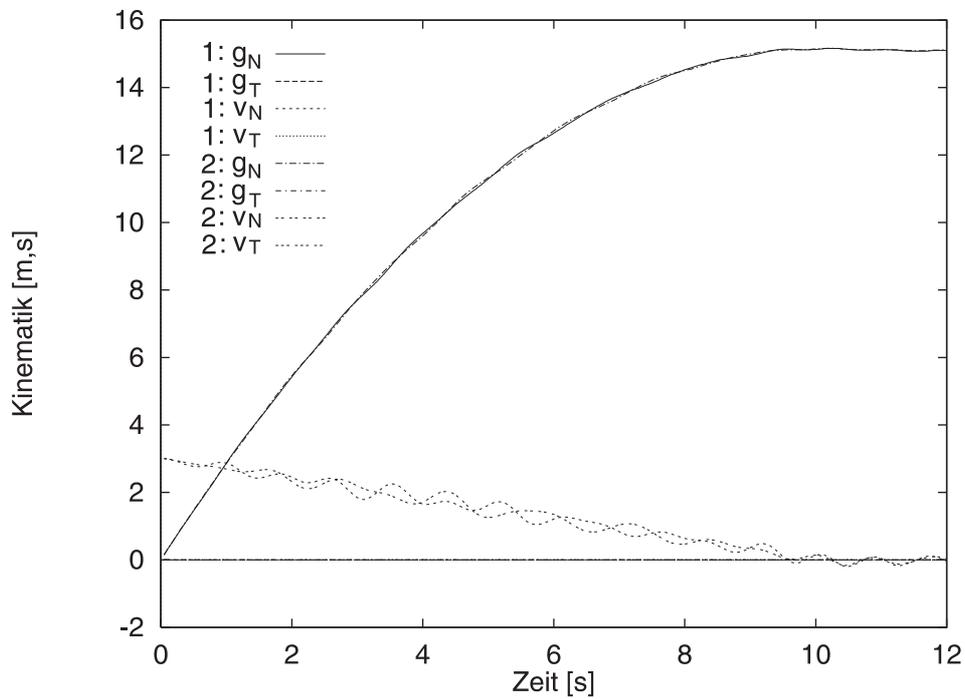


(b) Kinematik der Kontaktknoten

Abbildung 5.14: Numerische Lösung mit dem Penalty-Verfahren.



(a) Kontaktkräfte und -zustände



(b) Kinematik der Kontaktknoten

Abbildung 5.15: Numerische Lösung mit dem unsymmetrischen Augmented-Lagrange-Verfahren.

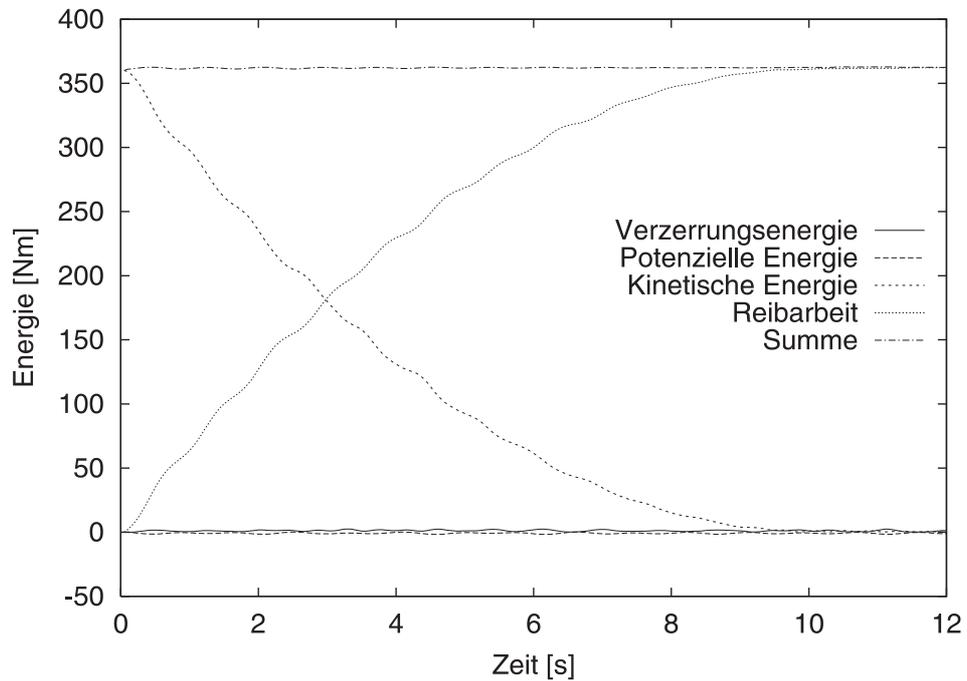


Abbildung 5.16: Energiebilanz. Numerische Lösung mit dem unsymmetrischen Augmented-Lagrange-Verfahren.

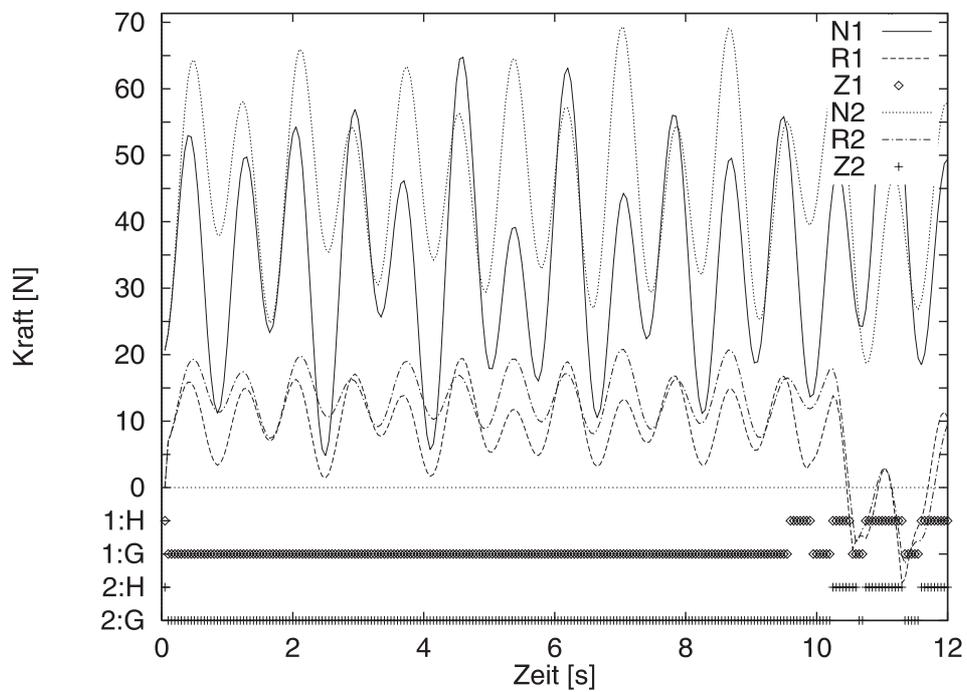
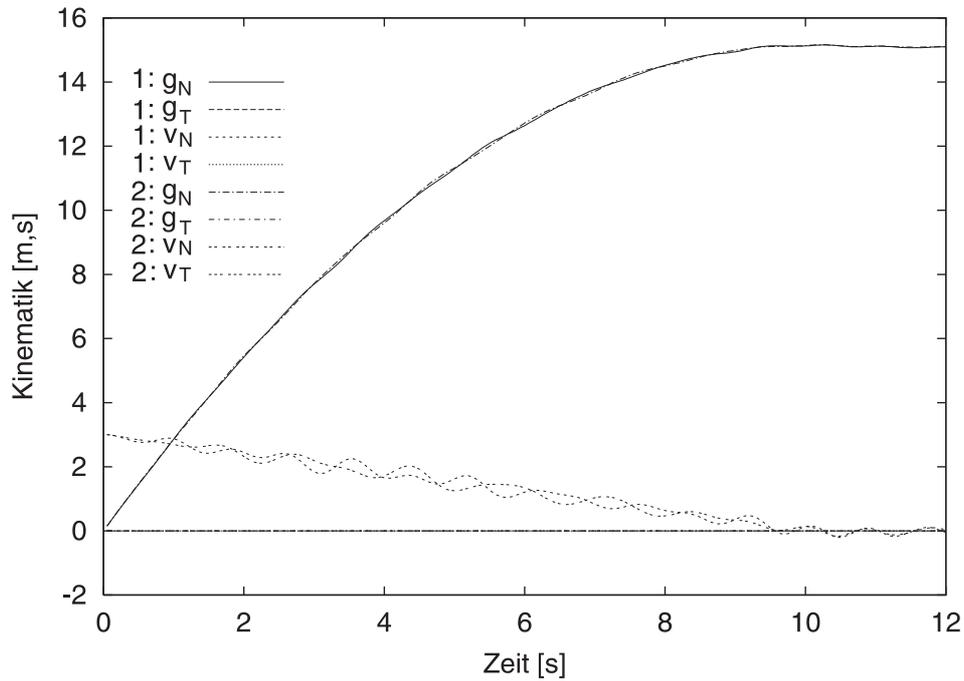
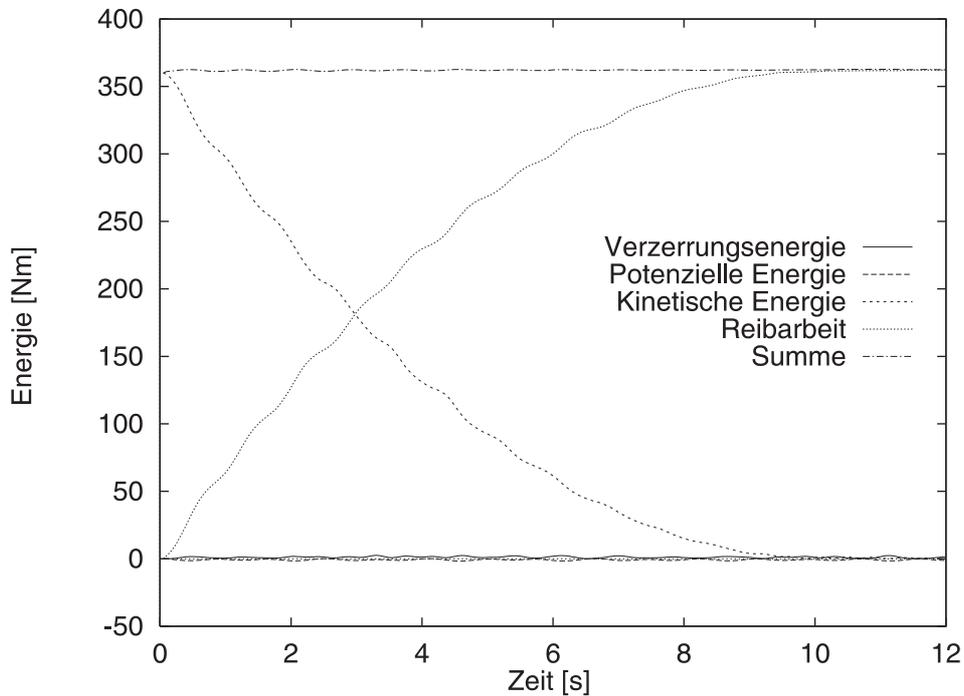


Abbildung 5.17: Knotenkräfte und -zustände. Numerische Lösung mit dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren.

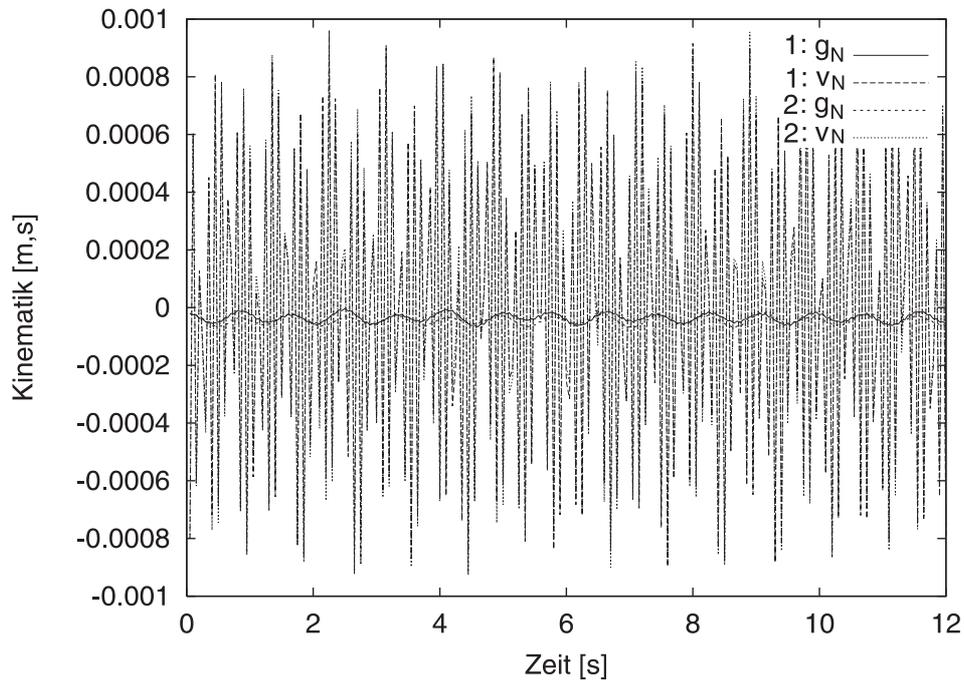


(a) Kontaktknotenkinematik

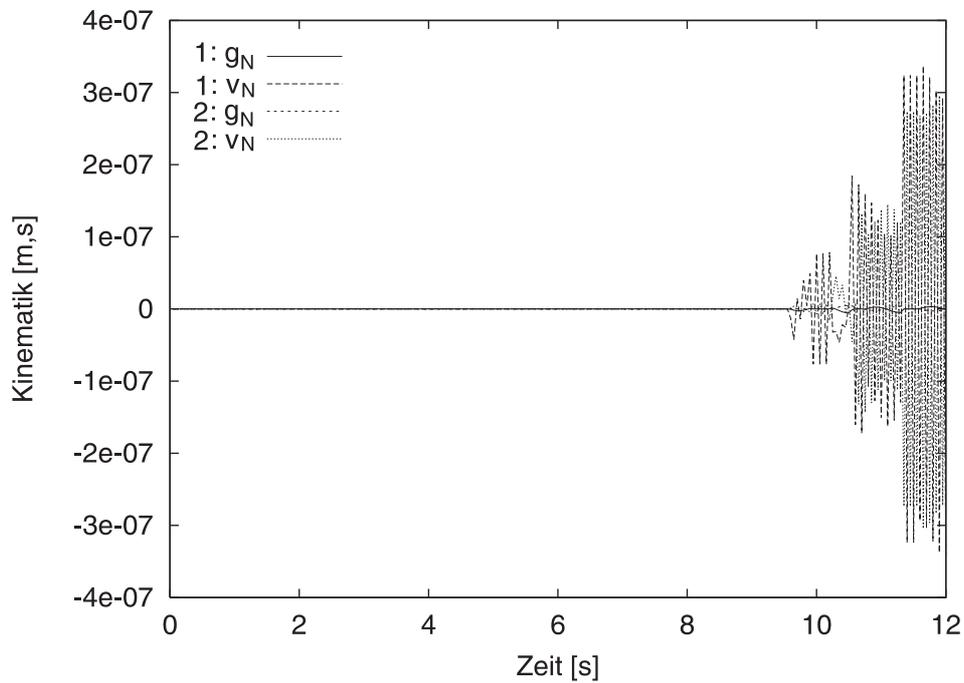


(b) Energiebilanz

Abbildung 5.18: Numerische Lösung mit dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren.



(a) Lösung nach dem Penalty-Verfahren.



(b) Lösung nach dem Augmented-Lagrange-Verfahren.

Abbildung 5.19: Gegenüberstellung der mit verschiedenen Methoden ermittelten Kinematik der Kontaktknoten. Zu beachten sind die Skalierungen auf der Ordinate.



# Kapitel 6

## Untersuchungen an praxisnahen Beispielen

### 6.1 Vorbemerkungen

Bei Betrachtung des Spektrums von in der Technik zu lösenden Kontaktproblemen stellen sich die folgenden spezifischen Grundvorgänge ein. Das sind

- Rollen,
- Gleiten,
- Stoßen und
- Einschlagen.

Deshalb werden im Folgenden praxisnahe, kontaktspezifische, komplexe Vorgänge mit den erstellten Algorithmen untersucht.

Einen besonderen Stellenwert haben die Entwicklungen der Kontaktflächen. Es gibt einerseits Problemstellungen mit konstanten und andererseits mit anwachsenden beziehungsweise abnehmenden Kontaktflächen. Bei Stoß- und Stoßfolgen kommt es oft zu örtlichem Ablösen mit anschließendem Wiederkontakt.

Spezifisch für reibungsbehaftete Vorgänge sind die Erfüllung der Gleitbedingung, ein Richtungswechsel der Reibkraft, sowie Haft – Gleitzustände im Wechsel.

Ein weiteres Augenmerk ist auf die Ermittlung der Normal- und Tangentialspannungen an der Kontaktoberfläche zu richten.

Für dynamische Problemstellungen kommen als physikalische Besonderheiten Massenkräfte, Eigenfrequenzen und Wellengeschwindigkeiten hinzu. Somit erfolgt die Benutzung des impliziten Zeitintegrationsverfahrens nach Newmark und der Rayleigh-Dämpfung.

## 6.2 Rollen

Der Rollzustand eines Ringes ist dadurch gekennzeichnet, dass sich im Kontaktbereich keine Relativgeschwindigkeit zwischen den Oberflächen ausbildet. Der Kontaktbereich befindet sich quasi im Haftzustand. Wenn zwischenzeitlich kein Gleitzustand eintritt, wird keine Reibarbeit verrichtet und die Energie bleibt konstant. Zu diesem Themenbereich werden in diesem Abschnitt drei Beispiele vorgestellt:

1. Ein gleitender Ring beginnt durch Abbremsen zu rollen.
2. Ein Ring beginnt auf einer geneigten Ebene zu rollen.
3. Ein Ring rollt auf einer parabolischen Fläche.

Hierbei sollen Möglichkeiten und Grenzen der Simulation durch mit linearen Elementen angenäherte gekrümmte Oberflächen deutlich werden. Zu diesem Zweck werden die numerischen Lösungen den analytischen Starrkörperlösungen gegenübergestellt.

**1. Ein Ring liegt auf einer Ebene** und erhält als Anfangsbedingung eine Horizontalgeschwindigkeit und unterliegt einer Schwerkraft. Zunächst gleitet der Ring mit einer Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung. Durch das Auftreten der Reibkraft kommt es wegen der sich entwickelnden Reibarbeit zu einem Energieverlust und im weiteren Verlauf beginnt der Ring zu rollen.

Um das Verhalten beim Übergang vom Gleiten ins Rollen zu untersuchen, werden die zurückgelegten Wege und Geschwindigkeiten der mit den Algorithmen erzielten numerischen Lösung denen der Starrkörperlösung gegenübergestellt. Zur Ermittlung der Starrkörperlösung werden folgende Gleichungen benötigt, wobei der Bezugspunkt für  $x$  und  $\varphi$  der Kreismittelpunkt des Ringes ist:

Massenträgheitsmoment des Ringes :	$\Theta_s = \int_{r_i}^{r_a} \rho 2\pi r^3 h dr$
Summe der Kräfte in horizontaler Richtung:	$R = -m\ddot{x}$
Summe der Kräfte in vertikaler Richtung:	$N = mb$
Summe der Momente um den Mittelpunkt des Ringes:	$Rr_a = \Theta_s \ddot{\varphi}$
Coulomb'sches Reibgesetz:	$R = \mu N$
Rollbedingung:	$\dot{x} = r\dot{\varphi}$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{der Zeitpunkt bei dem Rollen eintritt, mit} & \quad t = V_0 / (\mu b (1 + r_a^2 m / \Theta_s)), \\ \text{die Geschwindigkeit mit} & \quad \dot{x} = -\mu b t + V_0 \\ \text{und der Weg mit} & \quad x = -\mu b t^2 / 2 + V_0 t. \end{aligned}$$

Für den Ring werden folgende Material- und Strukturdaten verwendet:

Elastizitätsmodul:	$E = 10^9$	[N/m <sup>2</sup> ]	Querdehnzahl: $\nu = 0.3$	[-]
Innenradius:	$r_i = 4.0$	[m]	Außenradius: $r_a = 5.0$	[m]
Volumen:	$V = 28.27$	[m <sup>3</sup> ]	Dichte: $\rho = 1.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]
Massenträgheitsmoment:	$\Theta_s = 579.62$	[kg m <sup>2</sup> ]		

Als Anfangsbedingung für den Ring wird eine Horizontalgeschwindigkeit von 6 [m/s] gewählt und als Reibbeiwert wird  $\mu = 0.3$  verwendet. Der Ring wird mit 256 bilinearen Vierknoten-Elementen, die für große Starrkörperrotationen geeignet sind, diskretisiert. Es werden folgende Parameter verwendet:

Untersuchungszeitraum:	$T = 2.0$	[s]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.01$	[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.3025, \gamma = 0.6$	[-]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^5, \epsilon_T = 4.0 \cdot 10^5$	[N/m]
Basisbeschleunigung:	$b = -10.0$	[m/s <sup>2</sup> ]

In der Tabelle 6.1 werden die anhand der analytischen Starrkörperlösung ermittelten Geschwindigkeiten und zurückgelegten Wege zu diskreten Zeitpunkten, denen der numerischen Lösung gegenübergestellt. Das Rollen tritt bei der numerischen Lösung mit  $t = 1.0$  [s] um 0.1 [s] später ein als bei der analytischen Lösung. Die auftretenden Abweichungen liegen bei maximal 6 %.

Abbildung 6.1 zeigt qualitativ die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils des Ringes anhand von Vektoren. Zu Beginn des untersuchten Vorganges, siehe Abbildung 6.1 (a), unterliegt der Ring einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit. Dies wird an der horizontalen Ausrichtung der Vektoren deutlich. Im Verlauf des Gleitzustandes beginnt der Ring zunehmend zu rotieren, siehe Abbildung 6.1 (b). Mit Zunahme der Rotation und Abnahme der Tangentialgeschwindigkeit im Kontaktbereich tritt, siehe Abbildung 6.1 (c), der Rollzustand ein. Kennzeichnend für diesen Zustand ist, dass sich der Geschwindigkeitspol im Kontaktbereich befindet und damit die Tangentialgeschwindigkeit in diesem Punkt gleich null ist.

In Abbildung 6.2 (a) ist der Zeitverlauf der Tangentialgeschwindigkeit der sich jeweils in Kontakt befindenden Knoten dargestellt. Es wird deutlich, dass der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit bis zum Zeitpunkt bei dem das Rollen eintritt, linear abfällt. Die zu Beginn der Untersuchung erkennbare geringe Schwingung, hat ihre Ursache in der zu Beginn der Beobachtungszeit einsetzenden Schwerkraft. Sie führt zu Eigenschwingungen des Ringes. Eine zweite sich überlagernde Schwingung entsteht beim Übergang in den Rollzustand. Ursache hierfür mag die Penaltyregularisierung sein.

Abbildung 6.2 (b) zeigt die Kontaktkraft–Zeit–Verläufe des Ringes. Zu Beginn sind bei den Kraftverläufen der Kontaktkräfte ebenfalls die durch die Schwerkraft induzierten sich abbauenden Schwingungen erkennbar. Die Reibkraft wirkt in dem Zeitraum unter einer Sekunde entgegen der Bewegungsrichtung, da sie im Gleitzustand ist. Der Beginn des anschließend eintretenden Rollzustandes im Zeitraum oberhalb einer Sekunde ist durch die Abnahme der Reibkraft gekennzeichnet. Der Wert der beim Rollen auftretenden Haftkraft ist bei wechselndem Vorzeichen sehr klein. Dieser Rollvorgang geht anschließend in einen stationären Zustand über.

Zeit $t$ [s]	Starrkörperlösung		Numerische Lösung	
	Weg $x(t)$ [m]	Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ [m/s]	Weg $x(t)$ [m]	Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ [m/s]
0.25	1.41	5.25	1.39	5.38
0.50	2.63	4.50	2.68	4.71
0.75	3.66	3.75	3.88	4.01
0.90	4.19	3.30	4.45	3.58
1.00	4.52	3.30	4.70	3.29
1.50	6.17	3.30	6.33	3.29
2.00	7.81	3.30	7.91	3.29
2.50	9.47	3.30	9.13	3.29

Tabelle 6.1: Gegenüberstellung von Ergebnissen der Starrkörperlösung mit der numerischen Lösung zu diskreten Zeitpunkten.

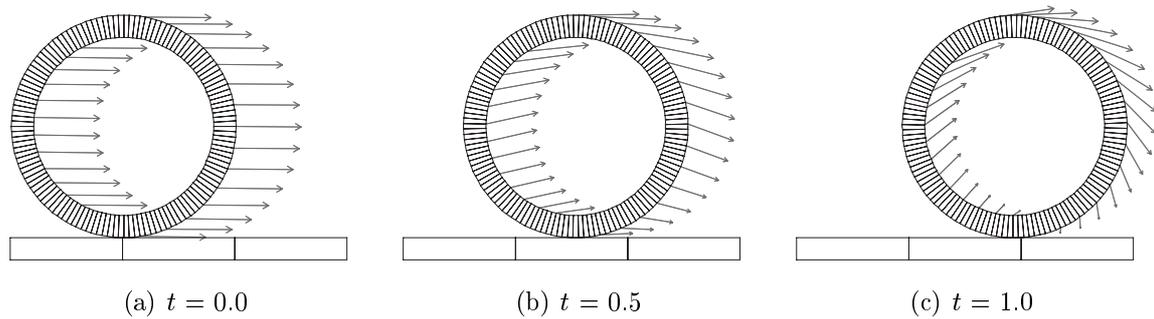
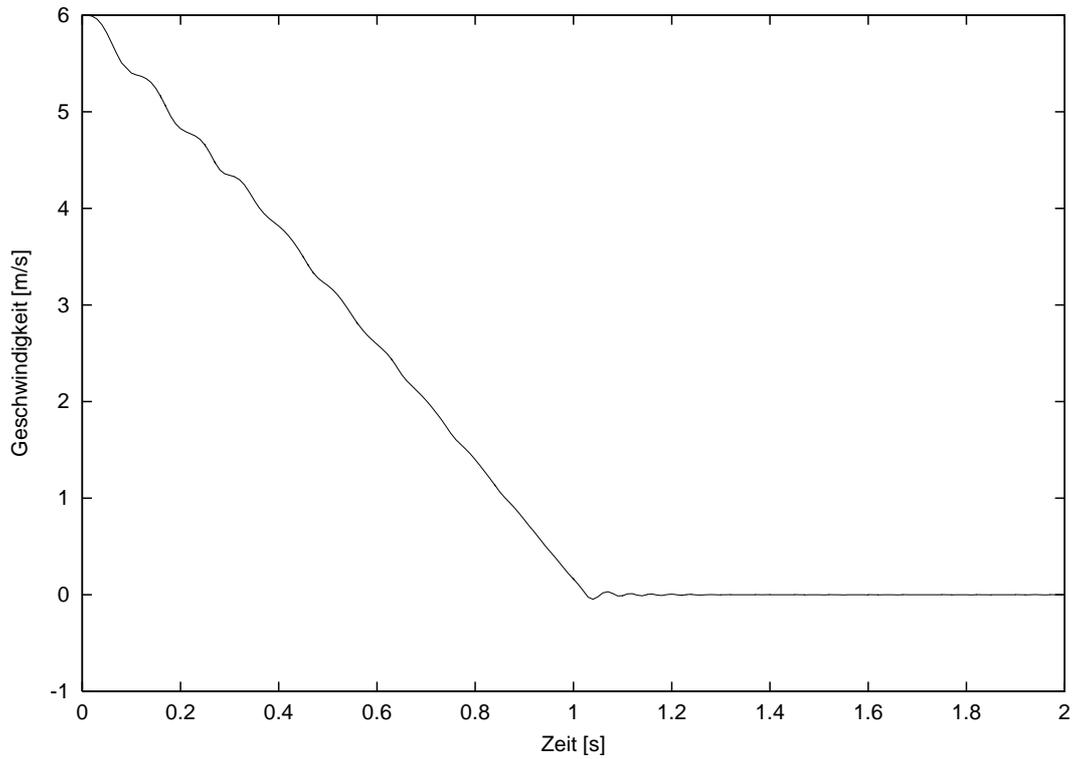


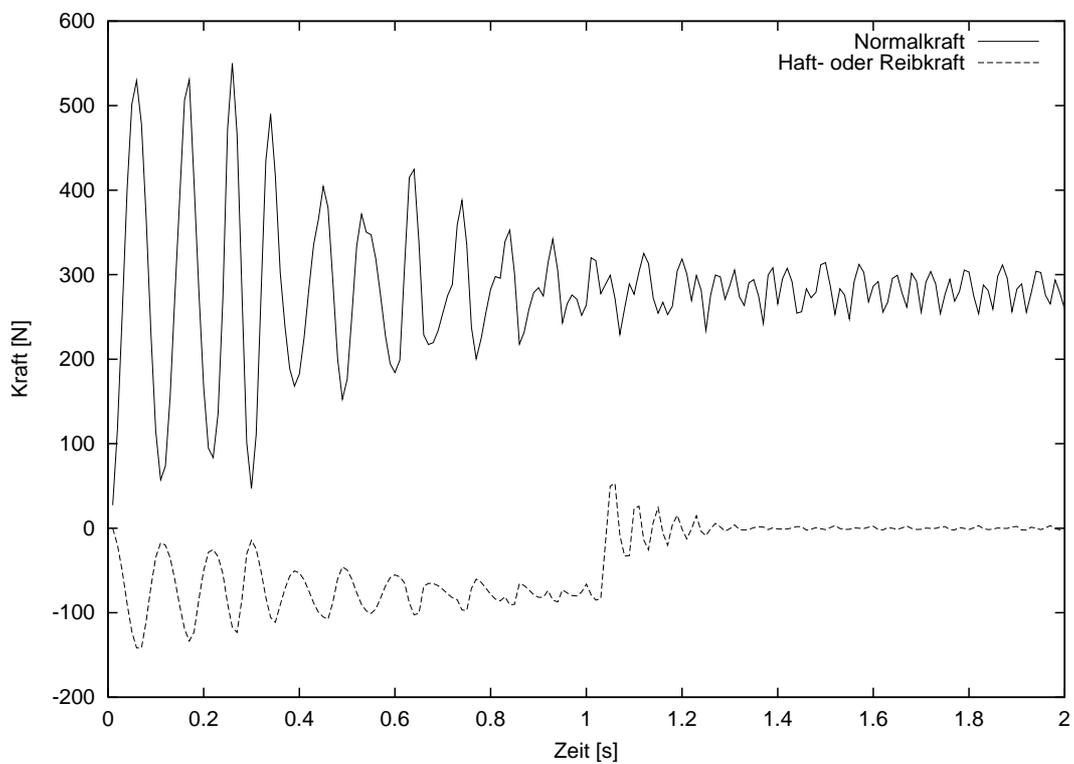
Abbildung 6.1: Darstellung der Geschwindigkeit einzelner Knoten des Ringes anhand von Vektoren beim Übergang vom Gleiten (a) und (b) ins Rollen (c) [s].

Die Abweichungen von der Starrkörperlösung haben folgende Ursachen:

- Der Ring besitzt eine endliche Elastizität. Gegenüber dem Starrkörper treten Eigenschwingungen auf, die einen Energieanteil speichern.
- Die gekrümmte Oberfläche wird durch lineare Bereiche angenähert. Der Ring besteht aus einem Vieleck.
- Der Einsatz der Dämpfung, der in diesem Fall mit Newmark-Parametern durchgeführt wurde, ist für die numerische Lösung notwendig, führt aber zu geringfügigem Energieverlust.
- Wesentlichen Einfluss hat die Tatsache, dass bei der Simulation grundsätzlich der erste Zeitschritt eines in Kontakt tretenden Knotens stets reibungsfrei angenommen wird. Somit verzögert sich der Energieverlust durch Reibung bei einem Wechsel von einem Knoten zum anderen.
- Aufgrund der linearen Annäherung der Ringoberfläche sind beim Knoten-Segment-Kontakt konzeptbedingt ein oder zwei Knoten in Kontakt zur Ebene. Die Normalkraft wird entsprechend auf einen oder zwei Knoten verteilt. Die in Abbildung 6.2 (b) resultierende Normalkraft kann in einem Zeitpunkt aus einem oder, wenn zwei Knoten in Kontakt stehen, aus zwei Knotenkräften bestehen. Somit bleibt der Schwerpunkt des Ringes nicht genau auf einer Höhe und die Größe der Kontaktfläche nicht konstant. In diesem Fall wäre also eine exakte Erfüllung der Kontaktbedingung weniger sinnvoll.



(a) Tangentialgeschwindigkeit



(b) Normal- und Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.2: Tangentialgeschwindigkeit-Zeit-Verlauf und Kontaktkraft-Zeit-Verläufe im Kontaktbereich beim Übergang des Ringes vom Gleiten ins Rollen.

**2. Ein Ring steht auf einer geneigten Ebene** und beginnt aus einer Ruhelage aufgrund von Schwerkrafteinwirkung und Neigung zu rollen. Die Neigung der Ebene beträgt 30 Grad. Um das Rollen zu gewährleisten, wird mit  $\mu = 0.7$  ein relativ hoher Reibbeiwert benutzt. Geometrie, Masse und Diskretisierung des Ringes wurden aus dem vorherigen Beispiel übernommen. Unter Annahme eines Rollzustandes wird das Massenträgheitsmoment für die Starrkörperlösung auf den in der Kontaktfläche liegenden Geschwindigkeitspol bezogen und beträgt  $\Theta_m = 1286.47$  [kg m<sup>2</sup>].

Zur Ermittlung dieser Starrkörperlösung werden die folgenden Gleichungen benötigt:

Energiesatz für den Rollzustand:	$mbh = 1/2 \Theta_m \dot{\varphi}^2$
Summe der Kräfte in horizontaler Richtung:	$0 = \Theta_m \ddot{\varphi} - mb \sin\alpha r$
Rollbedingung:	$\dot{x} = r\dot{\varphi}$

Damit ergeben sich die Geschwindigkeit, mit	$\dot{x} = mb/\Theta_m \sin\alpha r^2 t$
und der Weg mit	$x = mb/\Theta_m \sin\alpha r^2 t^2/2$ .

Folgende Parameter werden verwendet:

Untersuchungszeitraum:	$T = 3.00$	[s]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.01$	[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.3025, \gamma = 0.6$	[-]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^5, \epsilon_T = 10^5$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.7$	[-]
Basisbeschleunigung:	$b = -10$	[m/s <sup>2</sup> ]
Elastizitätsmodul:	$E = 9.0 \cdot 10^9$	[N/m <sup>2</sup> ]

In der Tabelle 6.2 werden die anhand der analytischen Starrkörperlösung und der numerischen Lösung ermittelten Geschwindigkeiten und zurückgelegten Wege gegenübergestellt.  $\dot{x}$  und  $x$  verlaufen in Richtung der Neigung der Ebene. Die Abweichungen der beiden Lösungen voneinander liegen ähnlich wie beim vorherigen Beispiel unter 6 %.

Der sich im Rollzustand befindende diskretisierte Ring ist in Abbildung 6.3 zum Zeitpunkt  $t = 2.0$  [s] dargestellt. Anhand der Richtung und der Länge der Geschwindigkeitsvektoren einzelner Knoten wird das Rotieren um die als Geschwindigkeitspol fungierende Kontaktzone deutlich.

Zeit $t$ [s]	Starrkörperlösung		Numerische Lösung	
	Weg $x(t)$ [m]	Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ [m/s]	Weg $x(t)$ [m]	Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ [m/s]
0.5	0.34	1.37	0.35	1.29
1.0	1.37	2.74	1.37	2.66
2.0	5.48	5.48	5.46	5.45
3.0	12.34	8.23	11.83	8.38

Tabelle 6.2: Gegenüberstellung von Ergebnissen der analytischen Starrkörperlösung mit der numerischen Lösung zu diskreten Zeitpunkten.

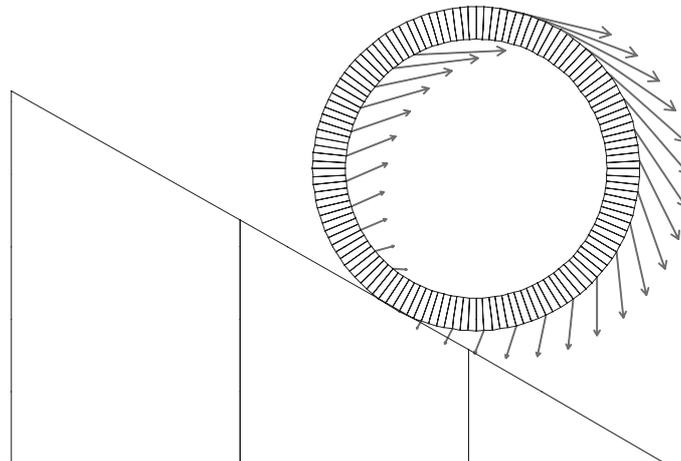


Abbildung 6.3: Ein Ring liegt auf einer geneigten Ebene beginnt schwerkraftbedingt zu rollen. Dargestellt sind die Geschwindigkeitsvektoren einzelner Knoten zum Zeitpunkt  $t = 2.0$  [s].

**3. Ein Ring steht am Rand einer parabolischen Fläche** und beginnt aus einer Ruhelage aufgrund der Einwirkungen aus Schwerkraft und Neigung der Fläche zu rollen.

Der Ring beschleunigt bis zum tiefsten Punkt dieser Fläche und erreicht dort seine maximale Geschwindigkeit. Aufgrund der Steigung der Fläche verringert er anschließend seine Geschwindigkeit bis zum Stillstand. Schwerkraft und Neigung der Fläche führen dann zum Wechsel der Bewegungsrichtung und zur Wiederholung des Vorganges. Im Idealfall, wenn ein reiner Rollzustand vorherrschen würde, bliebe die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie konstant und der sich einstellende Bewegungsablauf – Pendeleffekt – bliebe beliebig lange erhalten.

Untersucht werden sollen Möglichkeiten der numerischen Umsetzung vom Kontakt einer parabolischer Unterlage mit einem durch bilineare Vierknoten-Elemente diskretisierten Ring. Diese gekrümmte parabolisch geformte Fläche wird mit einem Polynom zweiten Grades beschrieben, er lautet  $e(\bar{\xi}) = 0.01(\bar{\xi} - 45.0)^2 + 2.0$ . Der Beobachtungszeitraum beträgt  $T = 40.0$  [s]. Geometrie, Masse, Reibgesetz und Diskretisierung des Ringes wurden aus dem vorherigen Beispiel übernommen. Es werden folgende Parameter verwendet:

Untersuchungszeitraum:	$T = 40.00$	[s]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.01$	[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.3025$ , $\gamma = 0.6$	[-]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^5$ , $\epsilon_T = 10^5$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.7$	[-]
Basisbeschleunigung:	$b = -10.0$	[m/s <sup>2</sup> ]
Elastizitätsmodul:	$E = 3.0 \cdot 10^9$	[N/m <sup>2</sup> ]
Massenträgheitsmoment:	$\Theta_m = 1286.47$	[kg m <sup>2</sup> ]

Der Mittelpunkt des Ringes wurde zu Beginn der Untersuchung auf die Position (15.00, 16.90) [m] des Koordinatensystems gesetzt. Damit hat er gegenüber dem tiefsten Punkt der Fläche eine Höhe von  $h = 9.90$  [m]. Mit Hilfe des Energiesatzes für den Rollzustand, er lautet  $mgh = 1/2 \Theta_m \dot{\varphi}^2$ , lässt sich die Starrkörperlösung ermitteln. Zu Beginn besitzt der Ring eine potenzielle Energie von 2799.5 [Nm]. In Tabelle 6.3 werden die mit der Starrkörperlösung und der numerischen Lösung am tiefsten Punkt in der Mitte der Fläche ermittelten Horizontalgeschwindigkeiten gegenübergestellt. Diese Geschwindigkeiten werden dabei auf den Mittelpunkt des Ringes bezogen. Aufgrund der numerischen Dämpfung mit Newmark-Parametern

verringert sich die Geschwindigkeit im Verlauf des betrachteten Zeitraumes. Abweichungen bewegen sich wie bei den vorherigen Beispielen im Bereich von unter 6 %.

	Starrkörperlösung	Numerische Lösung
Zeit	Geschwindigkeit	Geschwindigkeit
$t$ [s]	$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t) r_a$ [m/s]	$\dot{x}(t)$ [m/s]
5.0	+10.43	+10.37
15.0	-10.43	-10.27
25.0	+10.43	+10.18
35.0	-10.43	-10.08

Tabelle 6.3: Gegenüberstellung von Ergebnissen der analytischen Starrkörperlösung mit der numerischen Lösung zu diskreten Zeitpunkten.

Abbildung 6.4 zeigt den diskretisierten Ring auf der gekrümmten Fläche. Dargestellt ist der Ring am linken und am rechten Umkehrpunkt, sowie während zweier Rollzustände, die durch eindeutige Geschwindigkeitsvektoren gekennzeichnet sind. Am rechten Umkehrpunkt treten aufgrund von Eigenschwingungen und bedingt durch eine diskrete Zeitschrittweite auch hier Knotengeschwindigkeiten auf.

In Abbildung 6.5 werden die aus der numerischen Lösung stammenden Energie–Zeit–Verläufe von potenzieller und kinetischer Energie gezeigt. Während die maximale kinetische Energie am tiefsten Punkt der Fläche auftritt, wird die maximale potenzielle Energie im kurzzeitigen Ruhezustand zum Zeitpunkt des Richtungswechsels erreicht. Der periodische Wechsel der Energiezustände dieses Vorganges und der Rollzustand bleiben während des gesamten Untersuchungszeitraumes erhalten. Somit wird mit dem aus linearen Segmenten bestehenden Ring und einer gekrümmten Fläche ein stationärer Rollzustand erreicht. Aufgrund der numerischen Dämpfung mit Newmark–Parametern ergibt sich während des Beobachtungszeitraumes von 40.00 [s] jedoch ein Energieverlust von 194.47 [Nm].

### Bemerkungen zur numerischen Umsetzung

Zur Bestimmung des Kontaktpunktes auf der Oberfläche wird grundsätzlich in jedem Iterationsschritt der kürzeste Abstand zwischen Slavepunkt  $\varphi^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  und Masterfläche mit der Funktion  $|g(\mathbf{X}, t)|$  gesucht. Die Minimierung dieser Funktion erfolgt mit Hilfe der Bedingung  $\frac{d}{d\xi}|g(\mathbf{X}, t)| = 0$  und wird durch die Bedingung  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = 0$  erfüllt. Es gilt  $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_1(\bar{\xi}(\mathbf{X}, t)) = \boldsymbol{\varphi}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$ . Aufgrund der Form der Fläche wird im Rahmen der numerischen Umsetzung der Punkt  $\varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  auf der Masterfläche mit Hilfe der Bedingung  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = 0$  ermittelt. Hierzu muss in jedem Iterationsschritt zusätzlich ein Polynom dritten Grades gelöst werden.

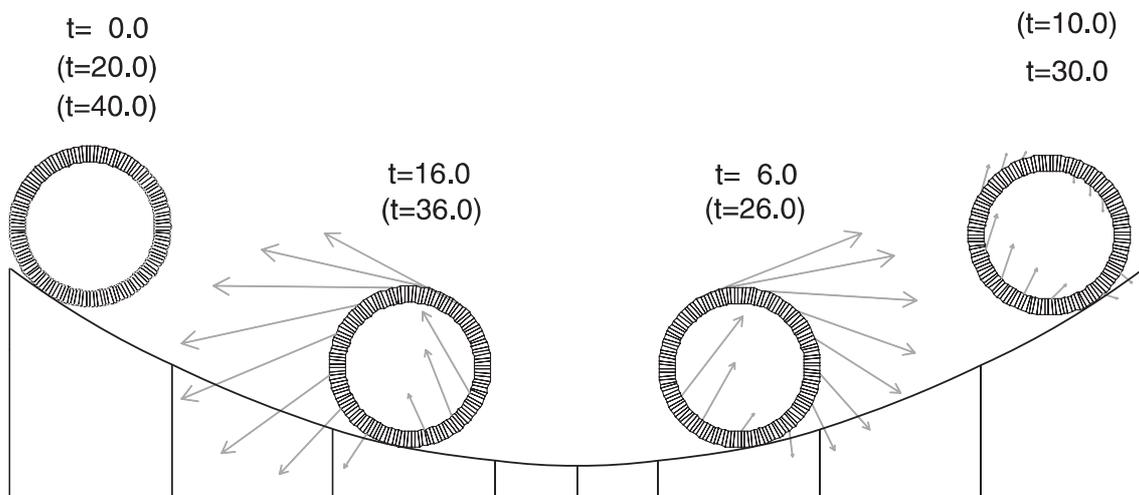


Abbildung 6.4: Ein Ring rollt – pendelartig – auf einer parabelförmigen Fläche [s].

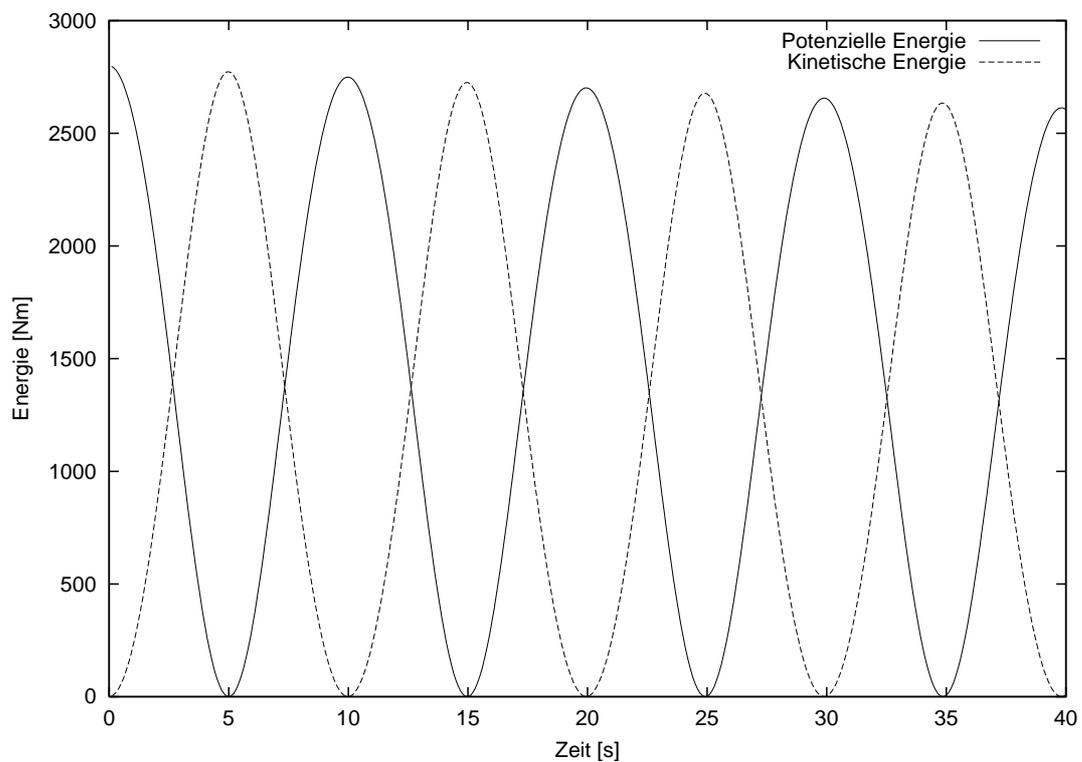


Abbildung 6.5: Darstellung der Energie-Zeit-Verläufe der numerischen Lösung des auf einer parabelförmigen Fläche rollenden Ringes.

## 6.3 Gleiten

Die folgenden Beispiele dienen der Untersuchung der Kraftverläufe auf der Kontaktfläche eines sich bewegenden elastischen Blockes. Hierzu wird ein Block betrachtet, der an seiner gesamten oberen Seite an beiden Freiheitsgraden gehalten beziehungsweise geführt wird. Die Größe der Kontaktfläche bleibt konstant. Dieser verschiebungsgesteuerte Block dient als grundlegendes Beispiel für viele technische Anwendungen. Der Block wird jeweils so belastet, dass die Übergänge vom Haften zum Gleiten und umgekehrt, sowie andauernde Gleitzustände untersucht werden können. Hierzu dient folgende Vorgehensweise:

6.3.1 Der Block wird vertikal angepresst und durchläuft quasi-statisch eine sinusförmige Horizontalverschiebung.

Untersucht werden sollen Richtungswechsel der Reibkraft und periodisch wiederkehrende Gleitzustände mit verschiedenen Algorithmen. Die Kontaktkraftverläufe von Untersuchungen mit einem konstanten und einem wegabhängigen Reibbeiwert werden gegenübergestellt.

6.3.2 Der Block wird zuerst vertikal angepresst und anschließend horizontal verschoben.

Ziel ist die Untersuchung der Kontaktkraftverläufe beim Sich-in-Bewegungsetzen des Blockes bis zum Erreichen eines Gleitzustandes.

Hierbei werden quasi-statische und dynamische Lösungen mit Hilfe von Zeitintegrationsverfahren und verschiedenen Algorithmen gegenübergestellt.

6.3.3 Der Block wird zuerst vertikal angepresst und anschließend horizontal verschoben.

Ziel ist die Untersuchung der Kontaktkraftverläufe bei einem stationären Gleitzustand unter Berücksichtigung dynamischer Effekte.

Dazu wird der Gleitzustand mit einem konstanten und einem geschwindigkeitsabhängigen Reibbeiwert und verschiedenen Belastungsfunktionen betrachtet.

Für den Block werden die bereits bekannten Strukturparameter der Beispiele aus Kapitel 5.2 mit einer Höhe von  $h = 2.0$  [m] und einer Breite von  $b = 4.0$  [m], einem Elastizitätsmodul von  $E = 1000.0$  [N/m<sup>2</sup>] und einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.3$  unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes verwendet.

### 6.3.1 Gleiten mit sinusförmiger Horizontalverschiebung

Um die sich entwickelnden Kraftverläufe auf der Unterseite des Blockes untersuchen zu können, wird dieser vertikal angepresst und durchläuft in horizontaler Richtung eine Sinusperiode. Die Belastungsfunktionen werden in Abbildung 6.6 dargestellt. Abbildung 6.7 zeigt den sich über eine Ebene bewegendem Block. Zu Beginn wurde die Struktur lediglich **mit einem Element diskretisiert**. Auf der Kontaktfläche befinden sich somit zwei Knoten. Betrachtet werden sollen hierbei die Folgen des Richtungswechsels unter anderem auf die Kraft in tangentialer Richtung. Die Untersuchung wurde mit dem unsymmetrischen Augmented–Lagrange–Verfahren durchgeführt. Es wurden durchschnittlich vier 'updates' benötigt. Folgende Parameter wurden verwendet:

Untersuchungszeitraum:	$T = 1.0$	[s]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.0025$	[s]
Vertikale Verschiebung:	$V(t) = 0.5$	[m]
Horizontale Verschiebung:	$H(t) = 5.0 \sin(2\pi t)$	[m]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^7, \epsilon_T = 10^3$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.3$	[–]

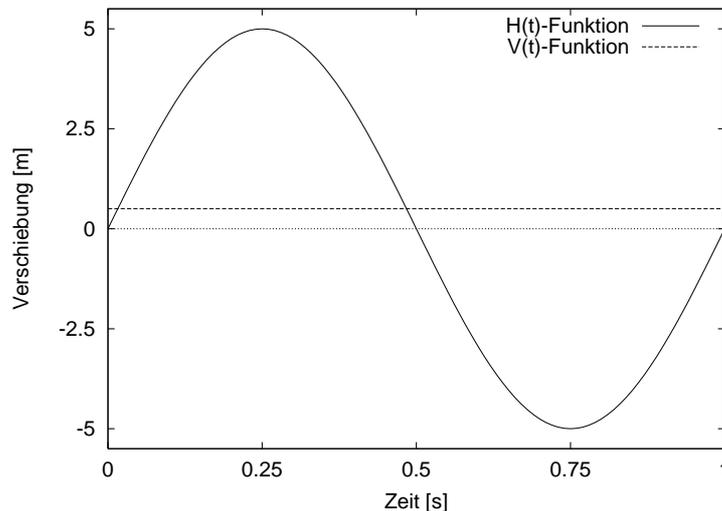


Abbildung 6.6: Verläufe der Belastungsfunktionen  $H(t)$  und  $V(t)$ .

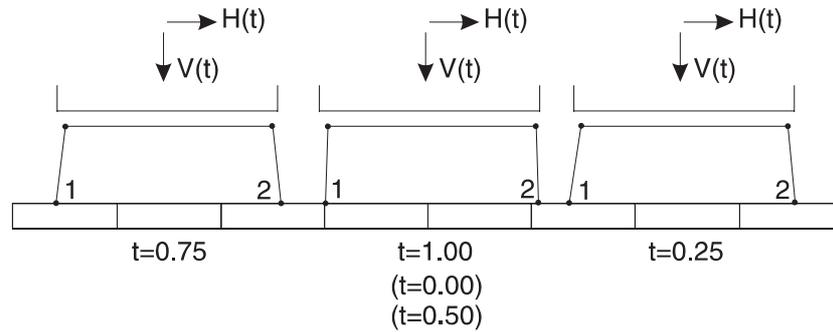


Abbildung 6.7: Verschiebungszustände des mit einem Element diskretisierten Blockes zu den Zeitpunkten  $t = 0.25, 0.75$  und  $1.0$  [s].

Die Zeitverläufe der Reibarbeit, der Verzerrungsenergie und der Gesamtarbeit als Summe aus den beiden wurden in Abbildung 6.8 über die Zeit aufgetragen. Die Zunahme der verrichteten Reibarbeit und damit auch der äußeren Arbeit verringert sich während der horizontalen Verschiebung jeweils vor den beiden Richtungswechseln. Während der Richtungswechsel wird wegen der eintretenden Haftzustände keine Arbeit verrichtet, und die ansonsten konstante Verzerrungsenergie verringert sich infolge der in diesen Phasen auftretenden Verformungsänderungen.

In Abbildung 6.9 sind die Normalkraftverläufe ( $N1, N2$ ) und die Haft- oder Reibkraftverläufe ( $R1, R2$ ) der beiden Kontaktknoten (1,2) sowie der Verlauf des Zustandes der Kontaktfläche ( $Z$ ), der aussagt, ob Haften oder Gleiten vorliegt, über die Zeit aufgetragen. Die je nach horizontaler Bewegungsrichtung vorn liegende Kante des Blockes wird in Normalenrichtung höher belastet, zu Beginn und am Ende ist es die Kante an Knoten 2. Unmittelbar nach den Richtungswechseln der Horizontalverschiebung geraten beide Knoten in den Haftzustand, und die Tangentialkräfte ändern ihre Richtungen.

Um einen Vergleich zwischen dem Penalty- und dem Augmented-Lagrange-Verfahren zu führen, werden in Abbildung 6.10 die jeweilig ermittelten Tangentialverschiebungen und Zustände eines Knotens über die Zeit einer Sinusperiode aufgetragen. Deutlich wird, dass nur durch die Rücknahme der Penaltyregularisierung die Tangentialverschiebung ( $g_T$ ) beim Augmented-Lagrange-Verfahren in den Haftzuständen konstant und damit die Geschwindigkeit gleich null ist. Außerdem erkennt man bei der Betrachtung der Zustände ( $Z$ ) der Kontaktfläche, dass beim Penalty-Verfahren die Dauer des Haftzustandes wegen der Regularisierung etwas länger ist.

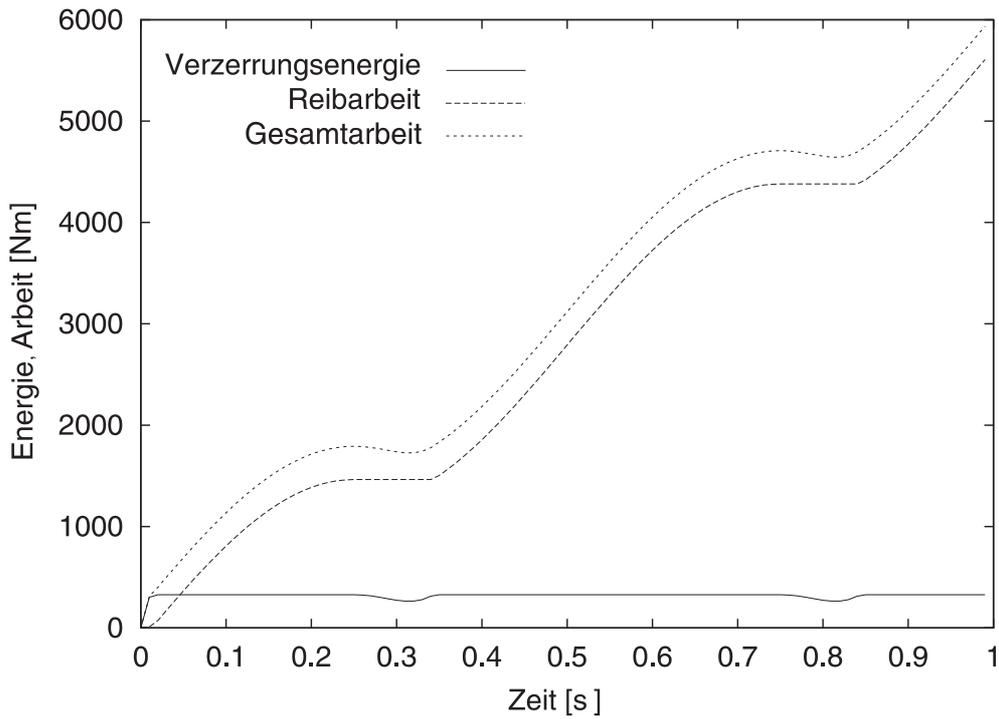


Abbildung 6.8: Verlauf der Verzerrungsenergie, der Reibarbeit sowie der benötigten Gesamtarbeit über die Zeit einer Sinusperiode des mit einem Element diskretisierten Blockes.

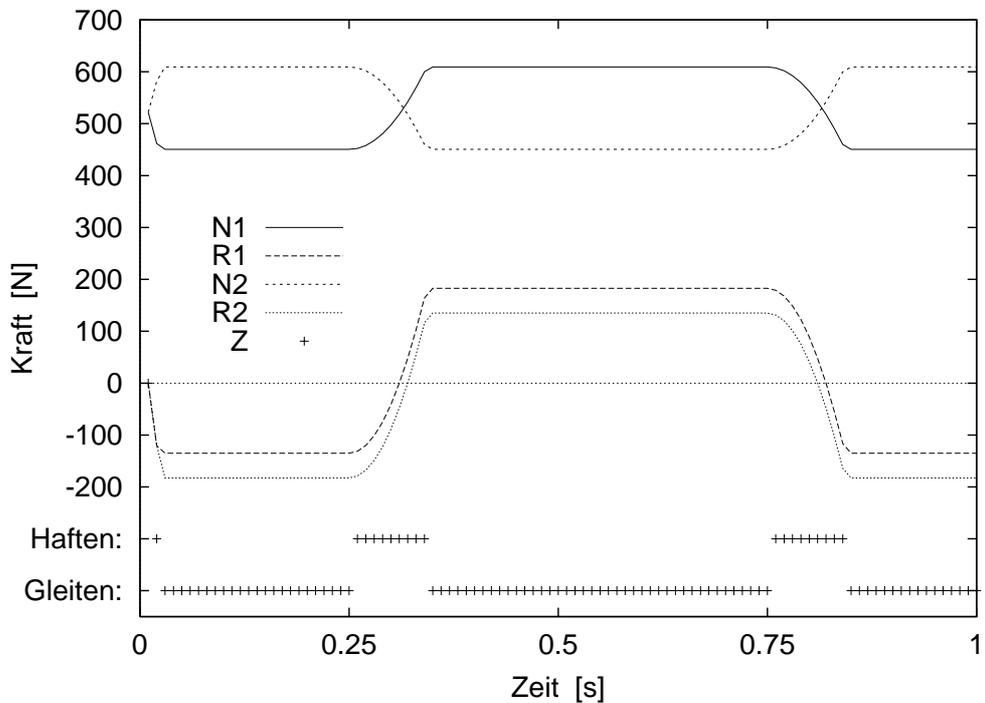


Abbildung 6.9: Verlauf der Kontaktkräfte und der Zustände über die Zeit einer Sinusperiode des mit einem Element diskretisierten Blockes.

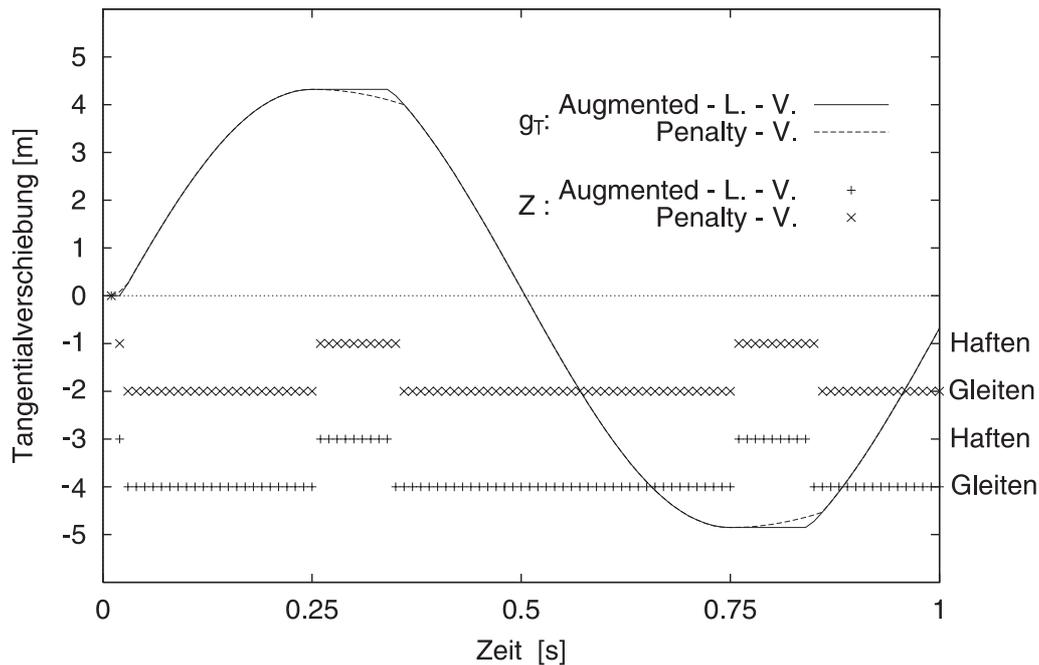


Abbildung 6.10: Gegenüberstellung der Tangentialverschiebung und des Zustandes der Kontaktfläche, ermittelt mit dem Augmented-Lagrange- und dem Penalty-Verfahren.

Um realistische Verformungen und Kraftverläufe auf der Oberfläche betrachten zu können, wird anschließend der **Block mit 200 Elementen diskretisiert**. Die Belastungsfunktionen und alle anderen Parameter wurden beibehalten. Die Kontaktfläche setzt sich aus 21 Kontaktknoten zusammen. Aufgrund der Diskretisierung wurde lediglich die Zeitschrittweite auf  $dt = 0.00025$  [s] verringert, und als Penaltyfaktoren wurden  $\epsilon_T = 500$  und  $\epsilon_N = 10^7$  [N/m] benutzt. Abbildung 6.11 zeigt den diskretisierten, sich über eine Ebene bewegendem Block zu drei Zeitpunkten.

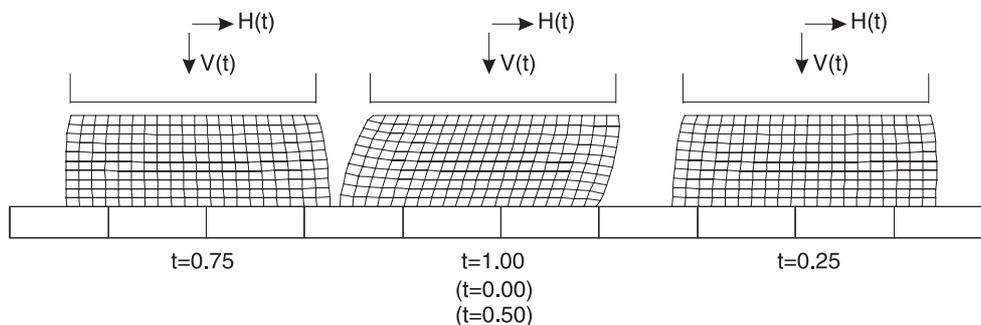


Abbildung 6.11: Verschiebungszustände des mit 200 Elementen diskretisierten Blockes zu den Zeitpunkten  $t = 0.25, 0.75$  und  $1.0$  [s].

Für Untersuchungen mit konstantem Reibbeiwert von  $\mu = 0.3$  wurde der symmetrierte Augmented–Lagrange–Algorithmus mit sieben bis zehn ‘updates’ verwendet. Der Verlauf der Energien, siehe Abbildung 6.12 (a), ergibt sich analog zum vorherigen Beispiel. Die Kraftverläufe auf der Kontaktfläche des Bewegungsvorganges sind in Abbildung 6.13 dargestellt. Wegen einer besseren Übersicht wurden nur Kraftverläufe der zweiten Hälfte der sinusförmigen Belastung von  $T = 0.5\text{--}1.0$  [s] dargestellt. Abbildung 6.13 (a) zeigt den Normalkraftverlauf. Aufgrund der mit der Anpressung einhergehenden Verformungen und der der horizontalen Bewegung entgegenwirkenden Reibung wird der vordere Bereich wesentlich höher belastet als der hintere. Der Haft– oder Reibkraftverlauf, siehe Abbildung 6.13 (b), verläuft, wenn alle Kontaktknoten im Gleitzustand sind, affin zur Normalkraft, da ein konstanter Reibbeiwert benutzt wurde. Bedingt durch den Richtungswechsel der Bewegung kommt es zu einer Haftphase mit Vorzeichenwechsel der Haft– oder Reibkraft.

Exemplarisch für weitere Untersuchungen wird als Beispiel für ein nichtlineares Reibgesetz eines gewählt, bei dem der Reibbeiwert  $\mu$  vom Gleitweg  $g_T$  abhängig ist:

$$\mu(g_T) = 0.04 + (0.4 - 0.04)e^{-.13|g_T|}$$

Als tribologische Motivation ist ein Reibverhalten vorstellbar, bei dem sich aus der Oberfläche Verschleißteilchen herauslösen und eine schmierende Wirkung erzielen, was zu einem mit Zunahme des zurückgelegten Weges abnehmenden Reibbeiwert führt. Bei der Verwendung von wegabhängigen Reibgesetzen ist der symmetrierte Augmented–Lagrange–Algorithmus wesentlich geeigneter als der unsymmetrische, da die Anwendung der Gleitregel bei der symmetrisierten Variante im Gleichgewichtszustand erfolgt. Da bei dieser Variante keine Kontaktsteifigkeitsmatrix im Gleitzustand benutzt wird, ist eine Linearisierung des Reibgesetzes nicht nötig. Der während eines Anpassungsprozesses bei der Anwendung der Gleitregel verwendete wegabhängige Reibbeiwert wird anhand des im vorherigen Anpassungsprozess ermittelten Gleitweges festgelegt.

Die Entwicklung der Reibarbeit wird in Abbildung 6.12 (b) und die des Normalkraftverlaufes und des Haft– oder Reibkraftverlaufes wird in Abbildung 6.14 gezeigt. Mit zunehmendem Gleitweg verringert sich aufgrund des benutzten Reibgesetzes der Zuwachs der Reibarbeit. Aufgrund der Abnahme der Reibkraft bei zunehmendem Gleitweg verändert sich die Verformung des Blockes, wobei sich Verformung und Normalkraftverlaufes wiederum gegenseitig bedingen. Wegen der sich verringernenden Reibung und Verformung nimmt die aufgenommene Verzerrungsenergie ab. Beim zweiten Richtungswechsel ist während des kurzzeitigen Haftzustandes nahezu kein Rückgang der Verformung zu erkennen.

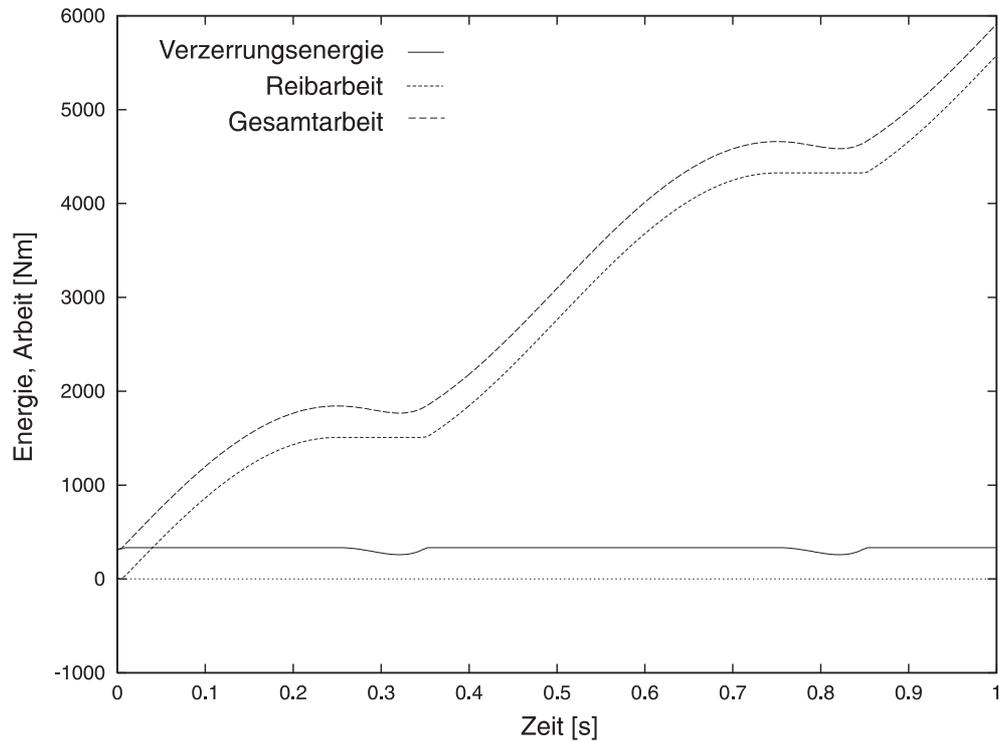
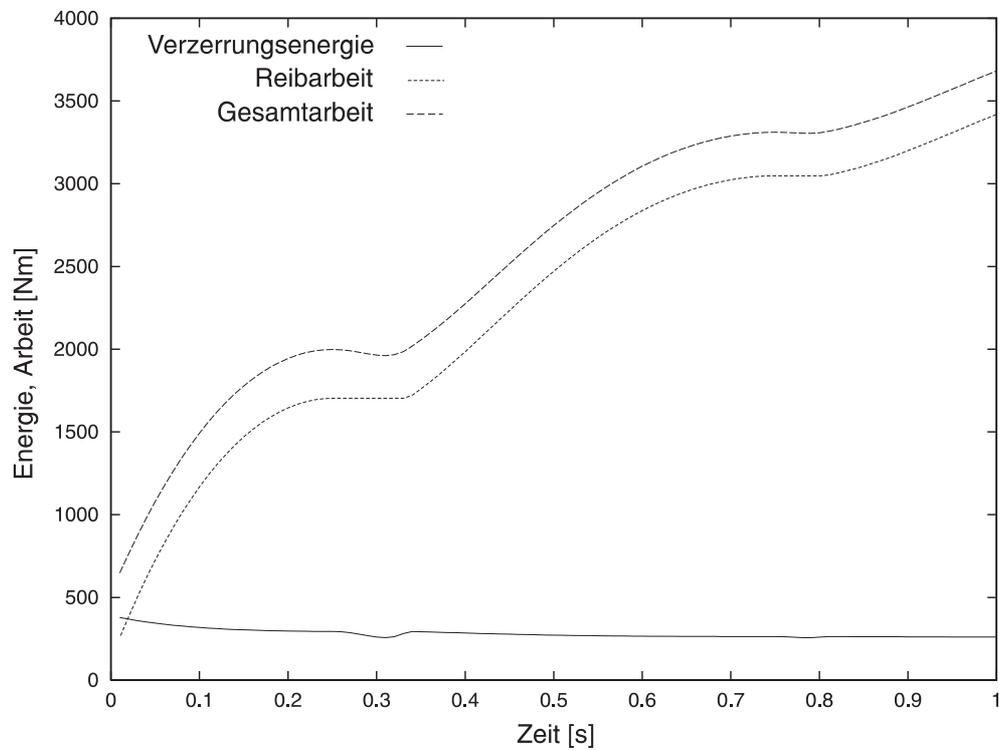
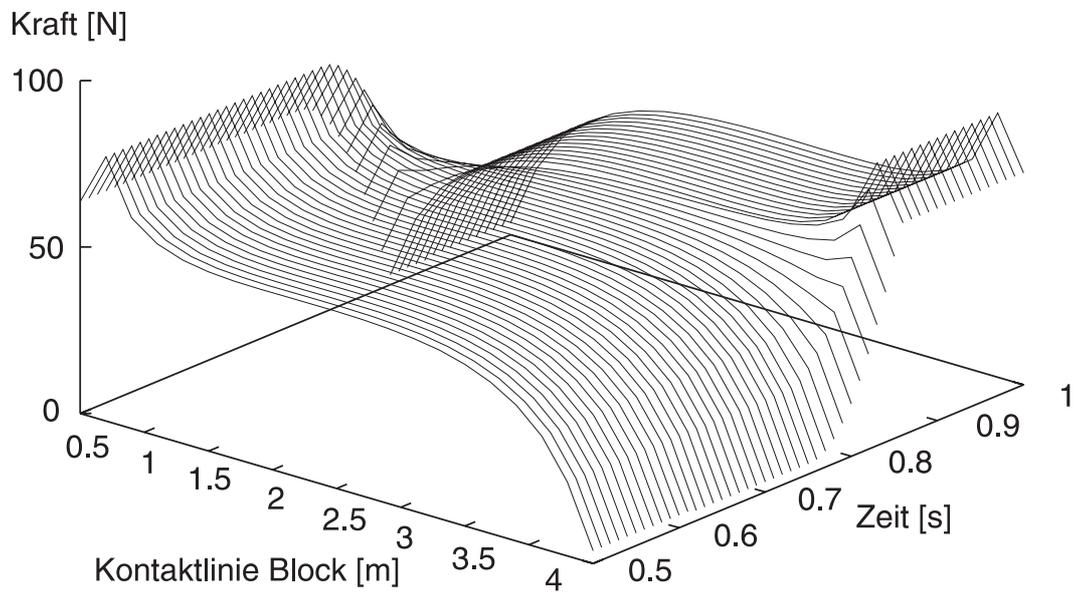
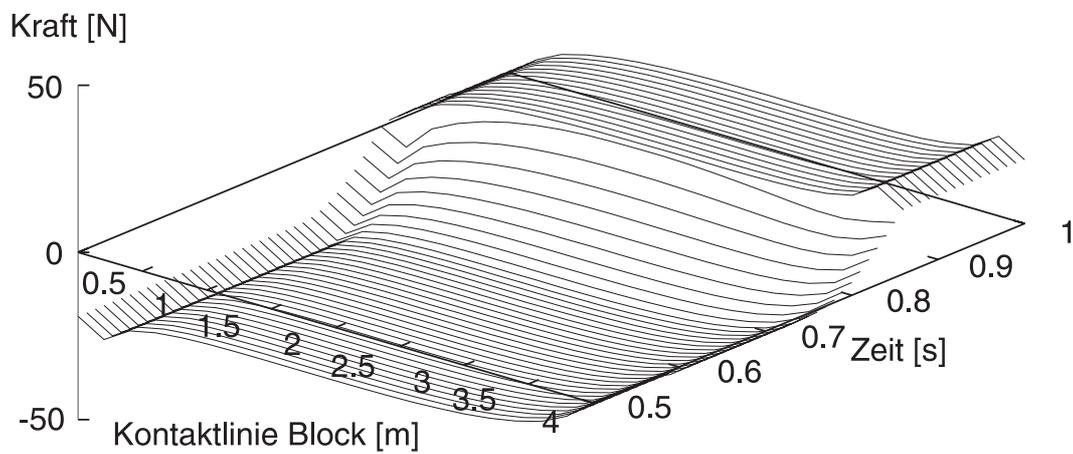
(a) Konstanter Reibbeiwert  $\mu$ (b) Wegabhängiger Reibbeiwert  $\mu(g_T)$ 

Abbildung 6.12: Gegenüberstellung der Zeitverläufe der Verzerrungsenergie, der Reibarbeit sowie der benötigten Gesamtarbeit, ermittelt mit konstantem und mit wegabhängigem Reibbeiwert in der Zeit  $t = 0.0\text{--}1.0$  [s].

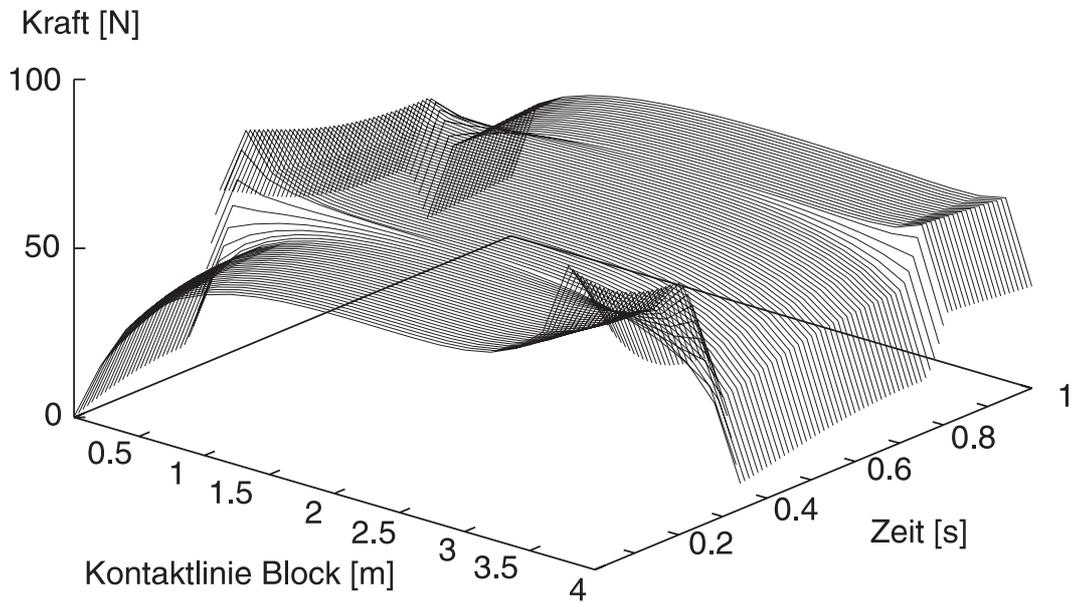


(a) Normalkraft

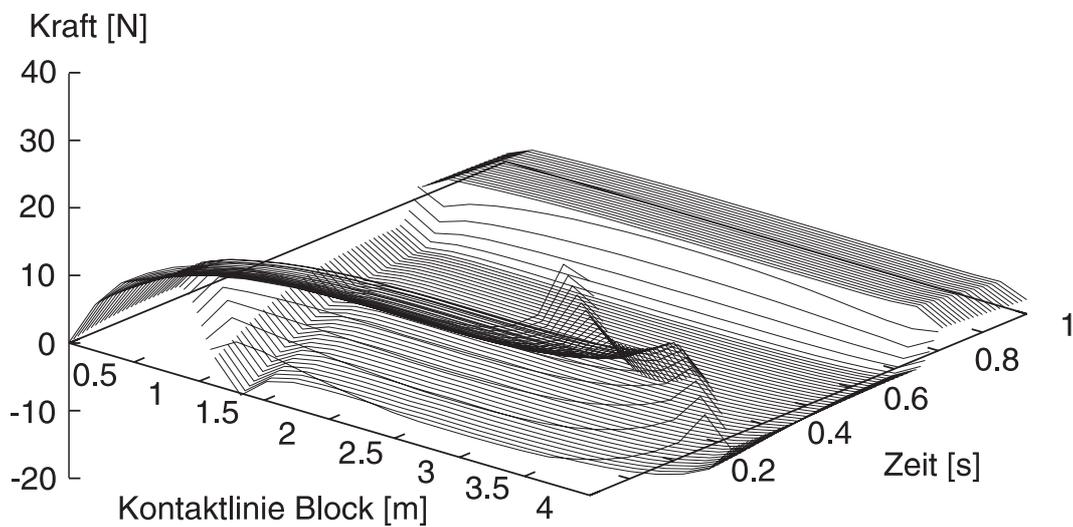


(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.13: Kontaktkraftverläufe eines sinusförmig verschobenen Blockes ermittelt mit einem konstanten Reibbeiwert  $\mu$ , dargestellt sind 50 Zeitschritte im Bereich  $t = 0.5-1.0$  [s].



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.14: Kontaktkraftverläufe eines sinusförmig verschobenen Blockes ermittelt mit einem wegabhängigen Reibbeiwert  $\mu(g_T)$ , dargestellt sind 100 Zeitschritte im Bereich  $t = 0.0-1.0$  [s].

### 6.3.2 Gleiten mit 'sanftem' Bewegungsbeginn

Als Übergang zur Behandlung von Problemen, die von dynamischen Effekten, wie Massenträgheiten, Eigenschwingungen und Wellenausbreitung beeinflusst werden, soll die folgende Untersuchung dienen. Um diese dynamischen Effekte berücksichtigen zu können, wird ein Zeitintegrationsverfahren benötigt. Damit mögliche Abweichungen bei den Kontaktkraftverläufen erkannt werden können, werden mit verschiedenen Algorithmen Voruntersuchungen durchgeführt. Bei dynamischen Problemstellungen werden die Belastungsfunktionen wegen dieser Effekte möglichst harmonisch ohne Sprünge oder Knicke gewählt. Die Belastungsfunktionen sollten möglichst keine Unstetigkeiten aufweisen, damit weitgehend auf numerische Dämpfung verzichtet werden kann. Der vertikale Anpressvorgang und die Einleitung der Horizontalbewegung erfolgen zeitlich nacheinander. Die Verschiebungsfunktionen  $H(t)$  und  $V(t)$  in [m] werden aus den folgenden Polynomen zusammengesetzt und in Abbildung 6.15 dargestellt:

$$\begin{aligned} \text{Vertikal } V(t): \quad & 0.0 \leq t < 5.0 : -0.50 (0.12t^2 - 0.016t^3) \\ & t \geq 5.0 : -0.50 (1.0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Horizontal } H(t): \quad & 5.0 \leq t < 10.0 : 5.0 (0.125 - 0.05t + 0.005t^2) \\ & t \geq 10.0 : 5.0 (-0.375 + 0.05t) \end{aligned}$$

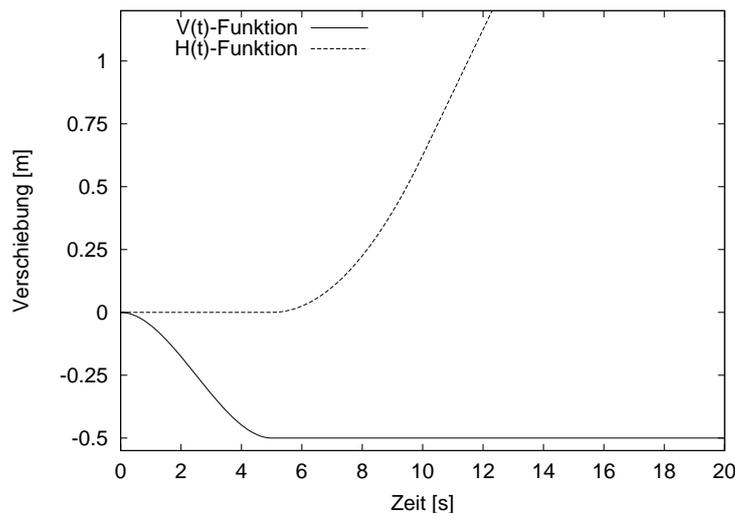


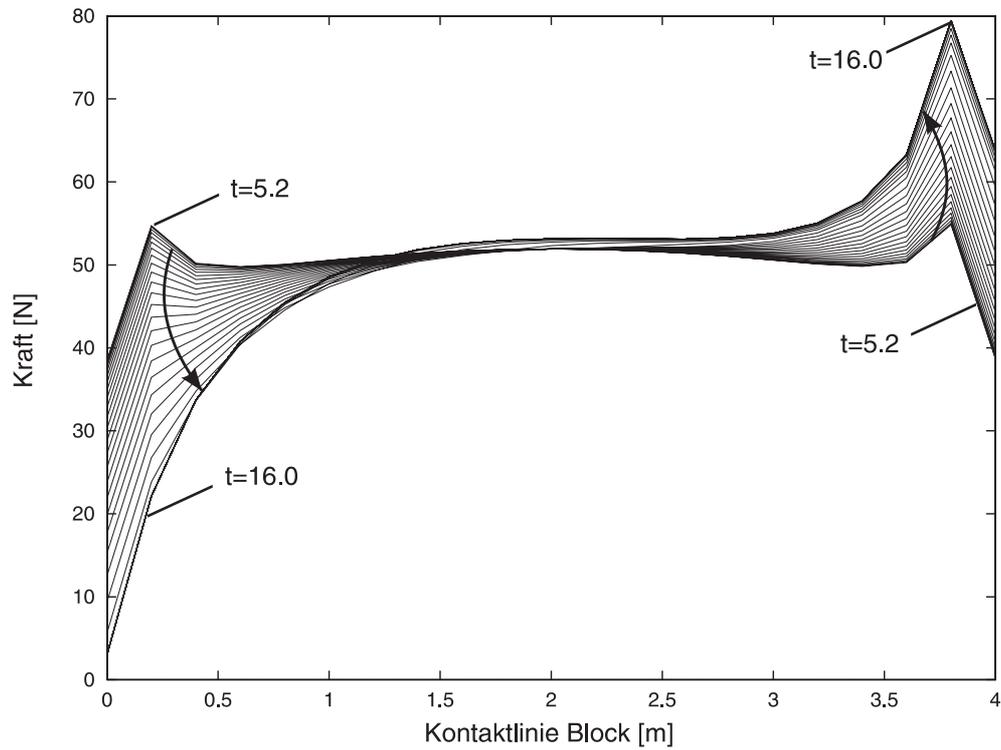
Abbildung 6.15: Zeitverläufe der Belastungsfunktionen in vertikaler  $V(t)$  und horizontaler  $H(t)$  Richtung.

Vergleichsuntersuchungen haben gezeigt, dass trotz der gewählten Belastungsfunktionen numerische Dämpfung nötig ist.

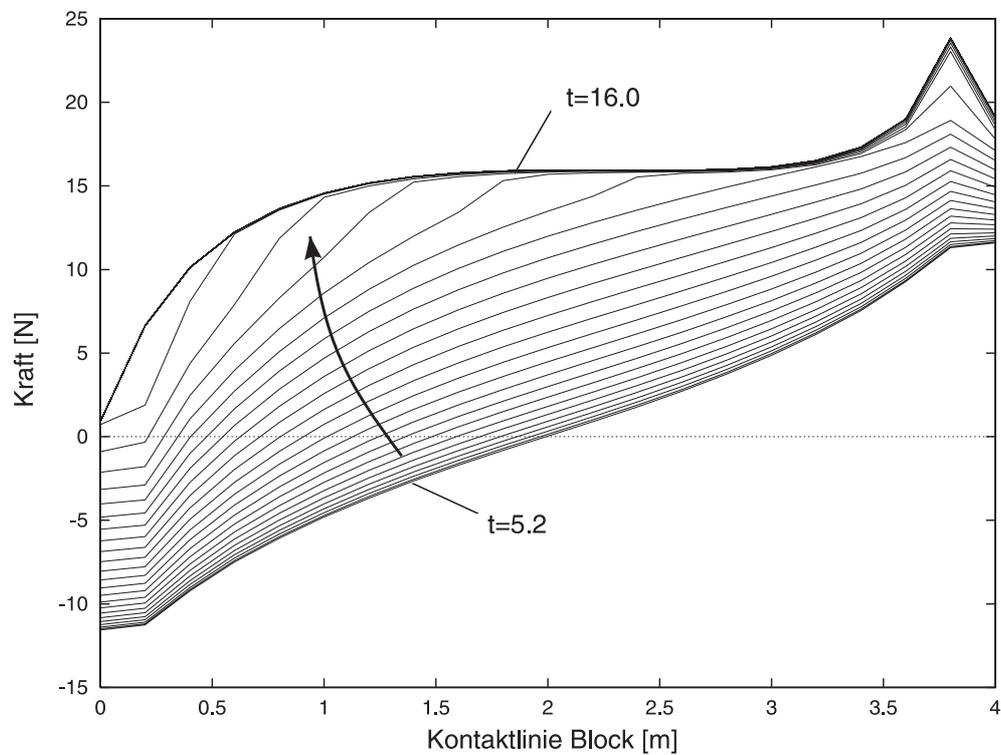
Der Block wurde wie zuvor mit 200 Elementen diskretisiert, und die gesamte Unterseite mit 21 Knoten dient als Kontaktfläche. Folgende Parameter wurden verwendet:

Untersuchungszeitraum:	$T = 16.0$	[s]
Zeitschrittweite:	$dt = 0.005$	[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.7, \gamma = 1.2$	[-]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^7, \epsilon_T = 10^3$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.3$	[-]
Dichte:	$\rho = 10.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]

Um die Verläufe der Kontaktkräfte nach Beendigung des Anpressvorganges bis zum Bewegungsbeginn zu zeigen, werden sie im Zeitraum  $t = 5.2\text{--}16.0$  [s] in Abbildung 6.16 dargestellt. Sie wurden anhand einer quasi-statischen Berechnung des Augmented-Lagrange-Verfahrens mit sechs 'updates' ermittelt. Die zeitliche Abfolge der Belastungen bedingt, dass sich nach dem Anpressen zunächst ein über die Kontaktfläche symmetrischer Kraftverlauf entwickelt. Durch die Horizontalverschiebung und das Auftreten von Reibung entstehen Verformungen, die den Normalkraftverlauf beeinflussen, siehe Abbildung 6.16 (a). Wie Abbildung 6.16 (b) verdeutlicht, entwickelt sich der anfangs symmetrische Haft- oder Reibkraftverlauf durch die Horizontalbewegung in eine der Bewegungsrichtung entgegen wirkende Richtung. Im weiteren Verlauf wird ein stationärer Gleitzustand erreicht, wobei bedingt durch den konstanten Reibbeiwert die Reibkraft dann affin zur Normalkraft ist.



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.16: Darstellung von Kraftverläufen im Bereich von  $t = 5.2$ – $16.0$  bei einer Zeitschrittweite von  $dt = 0.2$  [s], ermittelt mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren.

Um etwaige Abweichungen zwischen quasi-statischen und dynamischen Betrachtungen unter Verwendung eines Zeitintegrationsverfahrens erkennen zu können, werden mit verschiedenen Algorithmen ermittelte Kontaktkraftverläufe zu bestimmten Zeitpunkten einander gegenübergestellt. Untersuchungen wurden

- quasi-statisch, oder mit
- Zeitintegrationsverfahren zur Berücksichtigung dynamischer Effekte

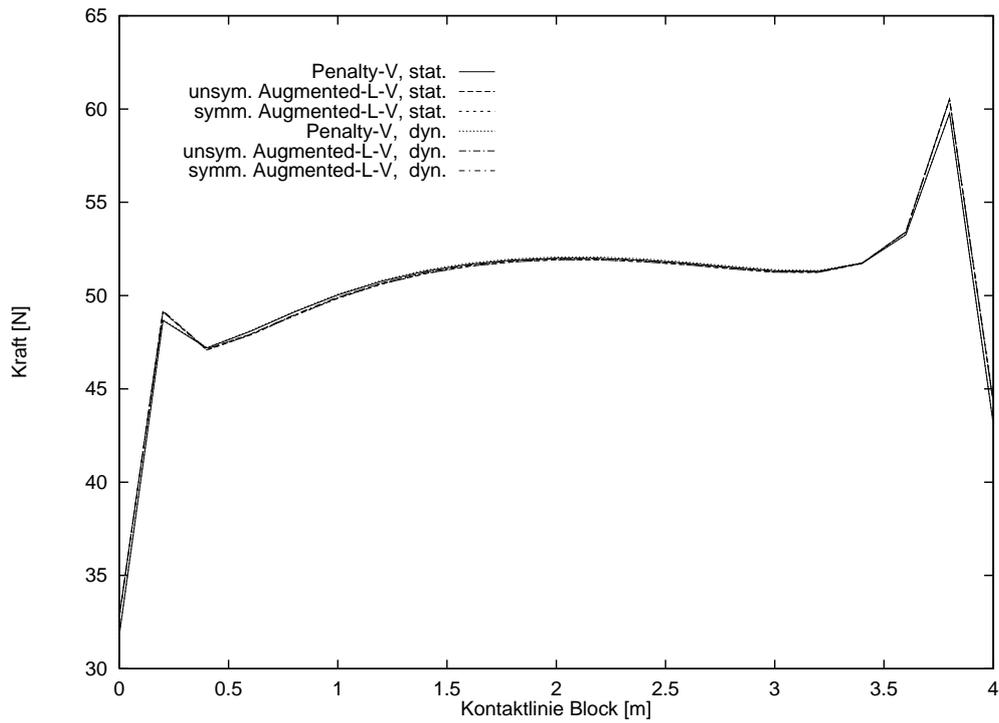
durchgeführt. Dabei wurden jeweils Kraftverläufe, die mit

- dem Penalty-Verfahren,
- dem unsymmetrische Augmented-Lagrange- und
- dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren

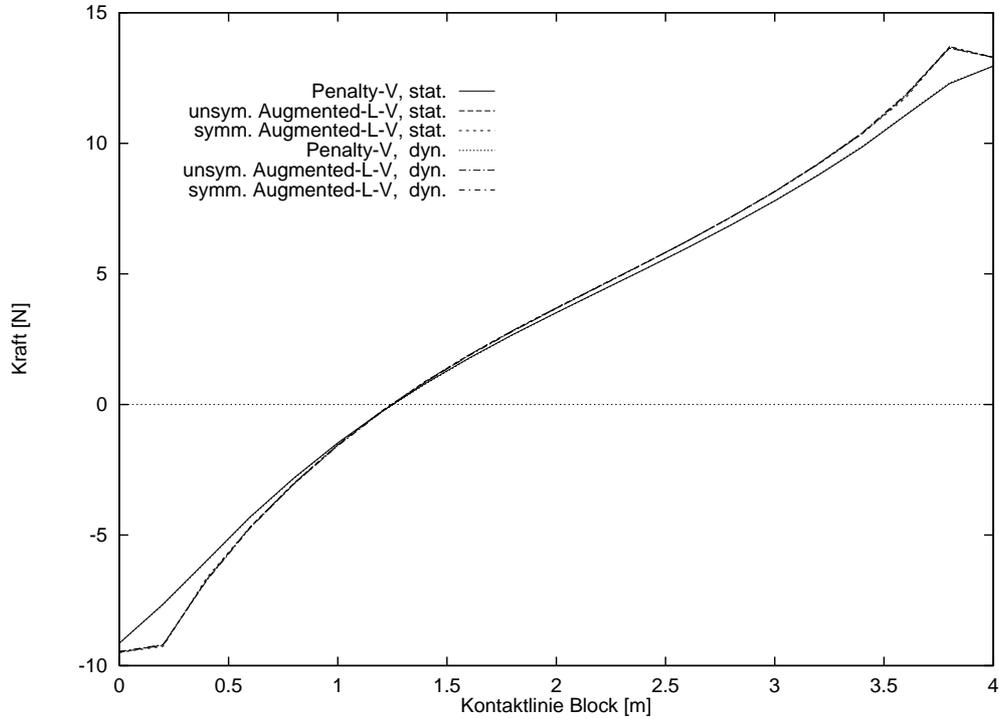
ermittelt wurden, gegenübergestellt. Der Anpassungsprozess des Augmented-Lagrange-Verfahrens wurde grundsätzlich mit sechs 'updates' durchgeführt. Ziel ist es, anhand zweier ausgewählter Zeitpunkte zu prüfen, ob die Ergebnisse unabhängig vom Algorithmus sind und ob mit numerischer Dämpfung und Zeitintegrationsverfahren die gleichen Kraftverläufe erhalten werden wie mit den quasi-statischen.

Abbildung 6.17 zeigt die Kraftverläufe im Haftzustand zum Zeitpunkt  $t = 7.0$  [s]. Der Normalkraftverlauf, siehe Abbildung 6.17 (a), ist bei allen gegenübergestellten Verfahren nahezu identisch. Die zu erkennenden Abweichungen bei den Verläufen der Haft- oder Reibkräfte, siehe Abbildung 6.17 (b), beruhen auf den mit verschiedenen Verfahren erzielten Ergebnissen. Während beim mit der Penalty-Lösung ermittelten von innen nach außen zunehmenden Haft- oder Reibkraftverlauf alle Kontaktkräfte im Haftzustand verbleiben, nimmt dagegen der Verlauf der Beträge bei den Augmented-Lagrange-Lösungen nach außen jeweils mehr zu, und die Randknoten sind bereits im Gleitzustand. Ursache für die Abweichungen der Lösungen ist die nicht zurückgenommene Penaltyregularisierung der Penetration und der Tangentialverschiebung im Haftzustand. Dies führt zu einem anderen Verformungsverhalten der Struktur. Ein Teil der durch die verschiebungsgesteuerte Belastung aufzunehmenden Verzerrungsenergie geht in die als Feder wirkenden Penaltyfaktoren. Deshalb unterliegt bei der Penalty-Lösung die Struktur selbst geringeren Verzerrungen.

Abbildung 6.18 zeigt die Kraftverläufe im Gleitzustand zum Zeitpunkt  $t = 16.0$  [s]. Aufgrund der Wahl der Belastungsfunktionen und der numerischen Dämpfung treten nur geringe Trägheitskräfte auf. Es sind lediglich geringe Unterschiede zwischen den quasi-statischen und denen mit Zeitintegrationsverfahren in den Verläufen der Trägheitskräfte erkennbar.

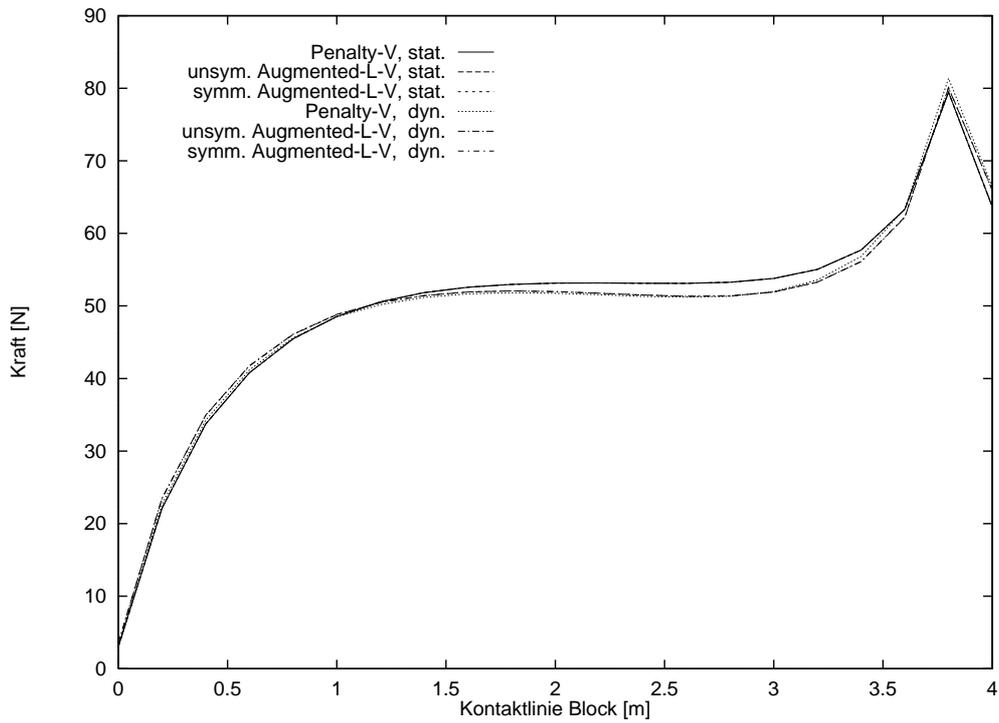


(a) Normalkraft

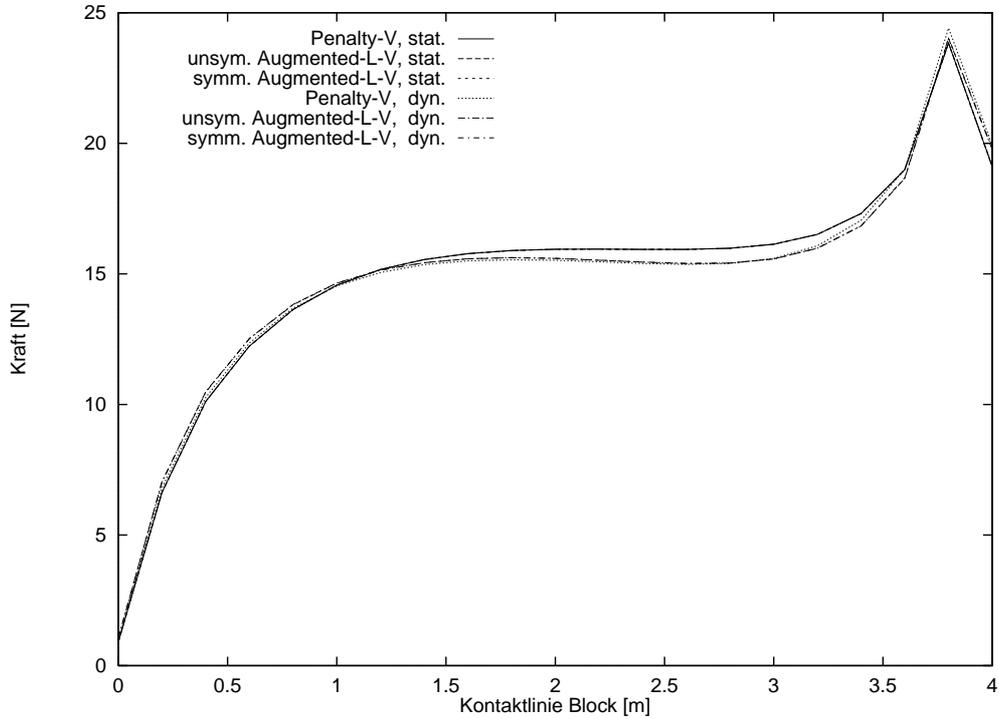


(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.17: Gegenüberstellung der Kontaktkraftverläufe im Haftzustand, ermittelt mit verschiedenen Algorithmen, zum Zeitpunkt  $t = 7.0$  [s].



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.18: Gegenüberstellung der Kontaktkraftverläufe im Gleitzustand, ermittelt mit verschiedenen Algorithmen, zum Zeitpunkt  $t = 16.0$  [s].

### 6.3.3 Gleiten im stationären Zustand

Ziel ist die Untersuchung der Kraftverläufe auf der Kontaktfläche eines in Bewegung gesetzten Blockes in einem quasi-stationären Gleitzustand unter Berücksichtigung dynamischer Effekte. Motivation zu diesen Untersuchungen gaben OESTREICH, HINRICHS & POPP [1996]. Sie analysierten das Auftreten von Haft-Gleit-Wechsel durch selbsterregende Schwingungen und Verwendung geschwindigkeitsabhängiger Reibgesetze mit Starrkörpern.

Die Geometrie und Diskretisierung des Blockes entspricht der des vorherigen Beispiels. Der Block wird zuerst verschiebungsgesteuert vertikal angepresst und anschließend in horizontaler Richtung verschoben. Dabei werden erneut die im letzten Abschnitt verwendeten Belastungsfunktionen, siehe Abbildung 6.15, benutzt.

Bei den Untersuchungen werden die Ergebnisse zweier linearer druckabhängiger Reibgesetze gegenübergestellt. Es wird ein linearer Reibbeiwert von

- $\mu = 0.3$  ,

und ein Reibbeiwert von

- $\mu(v_T) = 0.03 + (0.3 - 0.03) e^{-4.0 |v_T|}$

mit zusätzlicher nichtlinearer Geschwindigkeitsabhängigkeit gewählt. Verringert sich die Tangentialgeschwindigkeit  $v_T$  auf null, haben beide Gesetze den gleichen Beiwert von  $\mu = 0.3$ . Folgende Parameter wurden verwendet:

Elastizitätsmodul:	$E = 1000.0$	[N/m <sup>2</sup> ]
Basisbeschleunigung:	$b = -2.0$	[m/s <sup>2</sup> ]
Dichte:	$\rho = 50.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]

und

Zeitschrittweiten:	$dt = 0.002,$	$dt_{plot} = 0.20$	[s]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 10^7,$	$\epsilon_T = 10^4$	[N/m <sup>2</sup> ]
Dämpfungsparameter:	$\alpha_D = 0.02,$	$\beta_D = 0.02$	[kg/s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.25,$	$\gamma = 0.50$	[-]

Um den Gleitzustand zu untersuchen, wurden zwei verschiedene Horizontalverschiebungsfunktionen benutzt. Die erste Untersuchung wurde ohne die zweite Untersuchung mit einem Zwischenhalt des Blockes durchgeführt.

### **Gleitzustand ohne Zwischenhalt**

Ziel ist die Untersuchung von dynamischen Effekten in einem stationären Gleitzustand. Die im Folgenden gezeigten Ergebnisse wurden mit dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Verfahren, mit einer viermaligen Wiederholung des Anpassungsprozesses ermittelt. Nach dem Anpressvorgang legt der Block in einem Zeitraum von  $T = 30.0$  [s] eine Strecke von 5 [m] zurück. Abbildung 6.19 zeigt den Beginn der Bewegung der Struktur zu diskreten Zeitpunkten.

Abbildung 6.20 zeigt die Verläufe der Haft- Gleitzustände und des zurückgelegten Weges. Durch das nichtlineare geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz ergibt sich ein Wechsel zwischen Haft- und Gleitzuständen. Dieser Wechsel findet relativ zeitgleich über die gesamte Kontaktfläche statt. Im Haftzustand bewegen sich die in Kontakt befindenden Knoten wegen der Rücknahme der Regularisierung nicht in tangentialer Richtung. Dadurch ist der Weg-Zeit-Verlauf tatsächlich treppenförmig. Die mit dem geschwindigkeitsabhängigen Reibbeiwert erzielten Normal- und Haft- oder Reibkraftverläufe sind in der Abbildung 6.21 dargestellt. Aufgrund des nichtlinearen Reibbeiwertes kommt es zu den zwischen Haft- und Gleitzuständen periodisch wechselnden Tangentialkräften. Da Normalkraft, Haft- oder Reibkraft und Verformung sich gegenseitig bedingen, wirken die Verläufe während der Bewegungsphase optisch sehr unruhig. Die Tangentialgeschwindigkeit auf der Kontaktfläche verändert sich nahezu periodisch von null bis auf einen Maximalwert. Dies führt zu einer Veränderung des Reibbeiwertes und folglich zu einer Veränderung der Reibkraft. Zum Vergleich mit diesen Verläufen wird in Abbildung 6.24 (b) der Normalkraftverlauf, der mit konstantem Beiwert ermittelt wurde, dargestellt. Wie zu erwarten ist dieser Verlauf wesentlich gleichmäßiger. Da der Reibbeiwert konstant und der Normalkraftverlauf im Gleitzustand quasi stationär ist, verhält sich die Reibkraft in diesem Fall affin zur Normalkraft.

Es wird deutlich, dass die Augmented-Lagrange-Algorithmen wegen der erreichten Präzision eine Basis für eine Vielzahl von technischen Anwendungen im dynamischen Bereich sein können. Neben dem in tangentialer Richtung erreichten treppenförmigen Weg-Zeit-Verlauf wird auch die Penetration in Normalenrichtung, siehe Abbildung 6.22, mit Beträgen von  $1.0E-11$  sehr gering und quasi unabhängig vom Normalkraftverlauf.

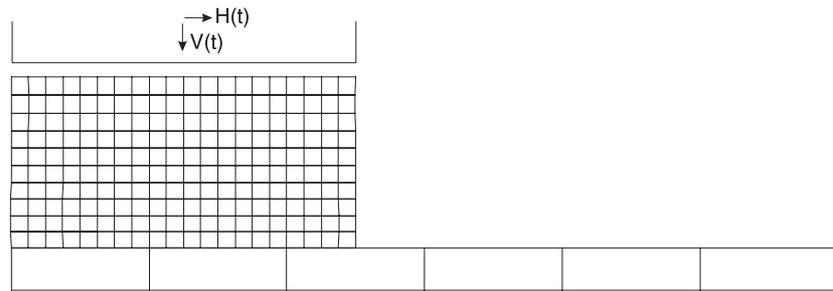
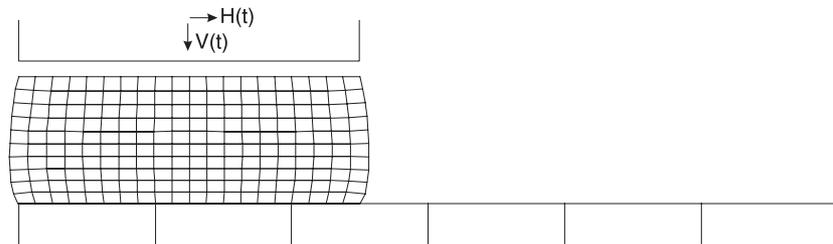
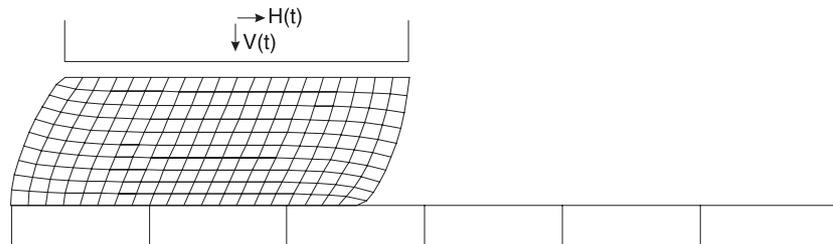
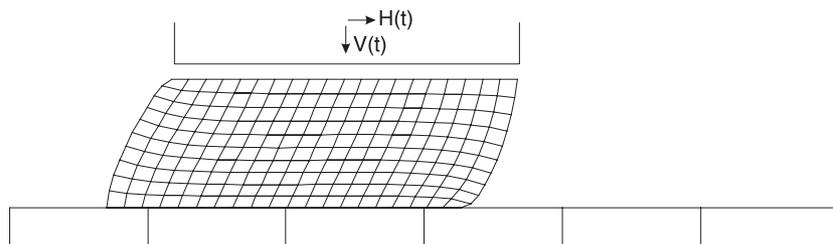
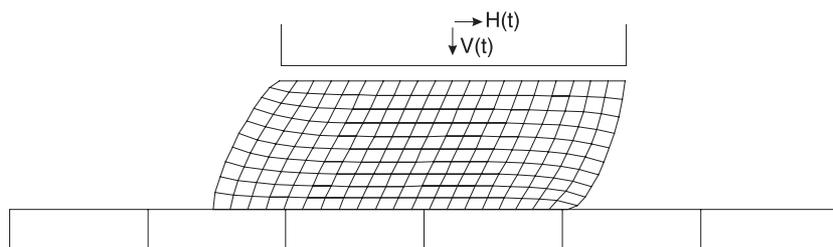
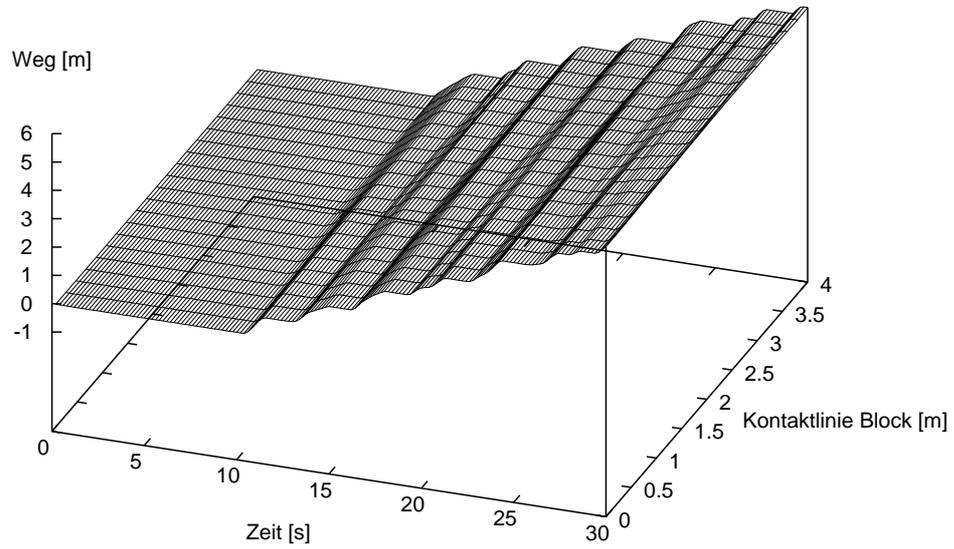
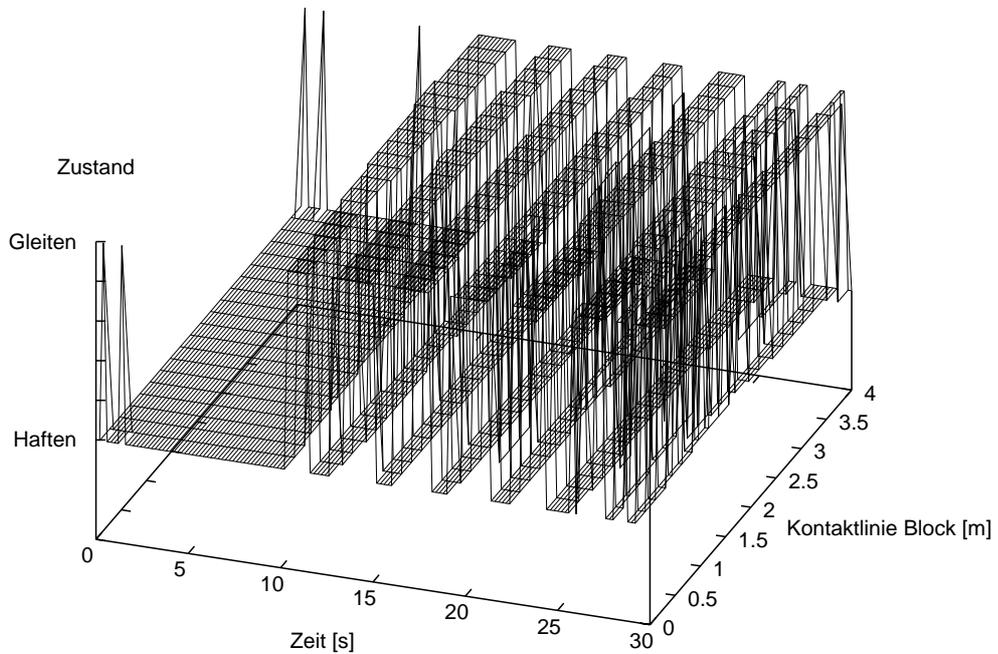
(a) Ausgangszustand:  $t = 0.0$ (b)  $t = 5.0$ (c)  $t = 10.0$ (d)  $t = 15.0$ (e)  $t = 20.0$ 

Abbildung 6.19: Sich-in-Bewegung-setzen des Blockes, ermittelt mit dem konstanten Reibbeiwert. Dargestellt ist der Block zu verschiedenen Zeitpunkten [s].

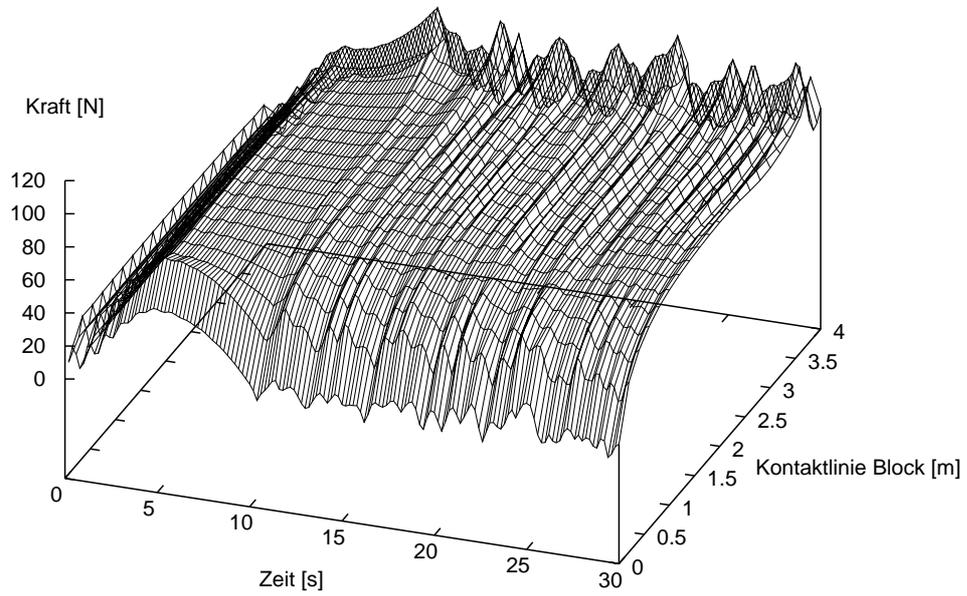


(a) Tangentialweg

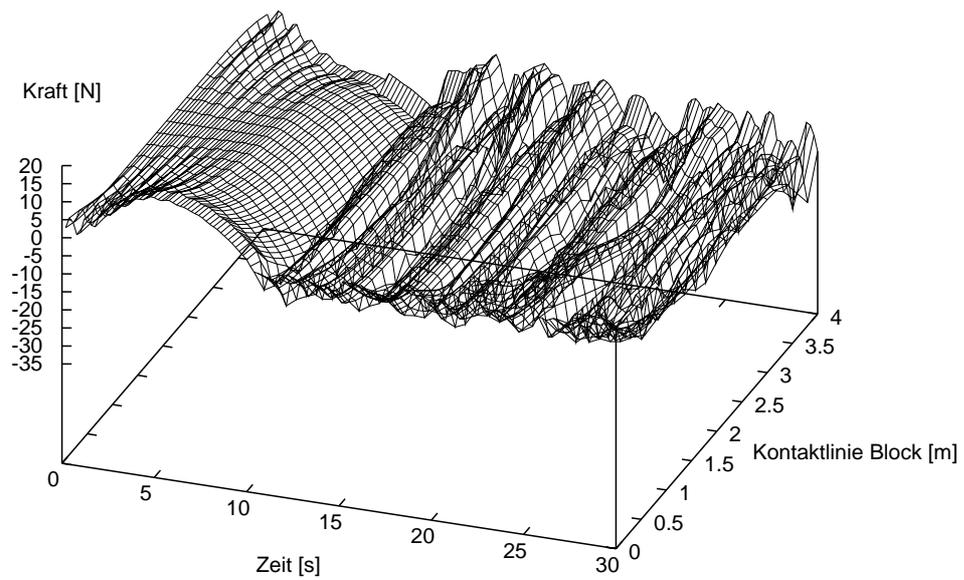


(b) Zustand der Kontaktknoten

Abbildung 6.20: Darstellung der Verläufe des Tangentialweges und der zugehörigen Haft- Gleitzustände mit einem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz  $\mu = \mu(v_T)$  in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.21: Darstellung der Kraftverläufe mit einem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz  $\mu = \mu(v_T)$  in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

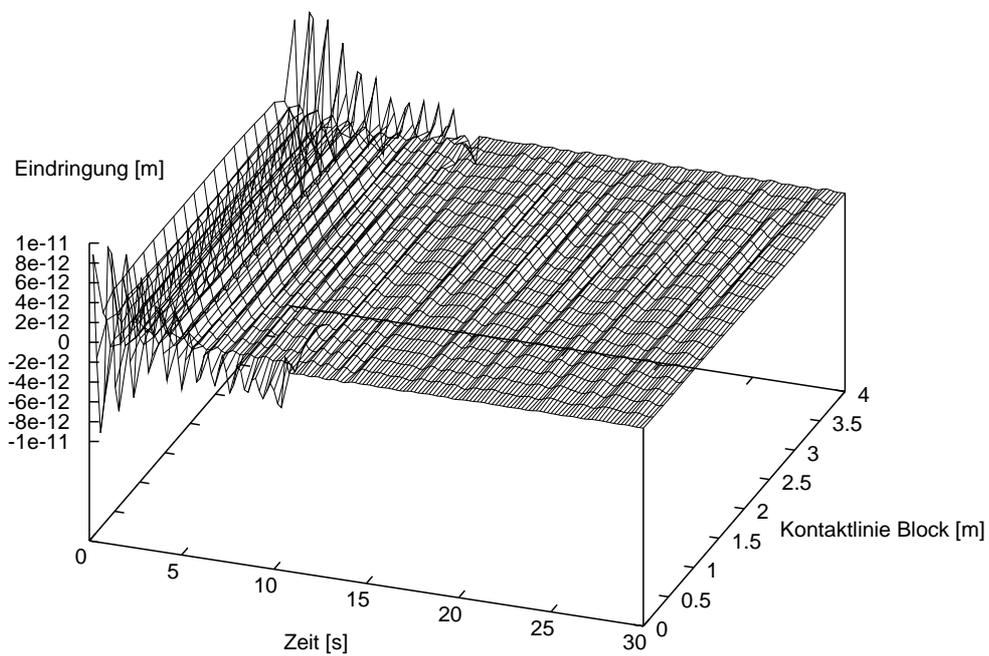


Abbildung 6.22: Verlauf der Eindringung – Penetration in Normalenrichtung  $g_N$  – in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie nach erfolgreicher Rücknahme der Regularisierung: Alle Zahlenwerte liegen quasi unterhalb der numerischen Zahlengenauigkeit.

### Bemerkungen zur Dämpfung

Bei Untersuchungen von dynamischen Problemstellungen unter Verwendung von Zeitintegrationsverfahren ist der Einsatz von Dämpfung notwendig. Da die numerische Dämpfung durch die Newmark-Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  unter Umständen nicht zu kontrollierende Effekte aufweist, wurde möglichst die Rayleigh-Dämpfung  $\mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}$  verwendet. Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben wurde, setzt sich die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  aus der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  sowie den Faktoren  $\alpha_D$  und  $\beta_D$  zusammen:

$$\mathbf{C} = \alpha_D \mathbf{M} + \beta_D \mathbf{K}$$

Grundsätzlich ist die Dämpfung stets möglichst gering zu halten. Um ihren Einfluss zu zeigen, wurden mit dem konstanten Reibbeiwert und durch Verwendung von unterschiedlichen Dämpfungsparametern ermittelte Normalkraftverläufe einander gegenübergestellt. In Abbildung 6.23 sind die mit  $\alpha_D = \beta_D = 0.007$ , in Abbildung 6.24 (a) sind die mit  $\alpha_D = \beta_D = 0.01$  und in Abbildung 6.24 (b) sind die mit  $\alpha_D = \beta_D = 0.02$  ermittelten Normalkraftverläufe dargestellt. Bei diesen Normalkraftverläufen wird deutlich, dass eine Grundschwingung und eine Oberschwingung auftreten, wobei letztere mit dem zunehmenden Dämpfungsgrad abnimmt.

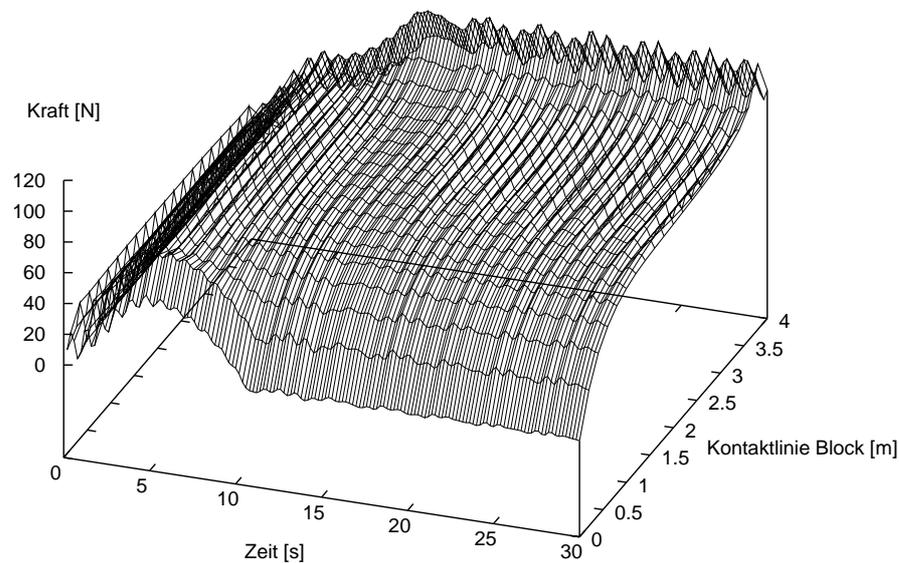


Abbildung 6.23: Darstellung eines Normalkraftverlaufes mit konstantem Reibbeiwert und Dämpfungsparameter  $\alpha_D = 0.007$  und  $\beta_D = 0.007$  in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

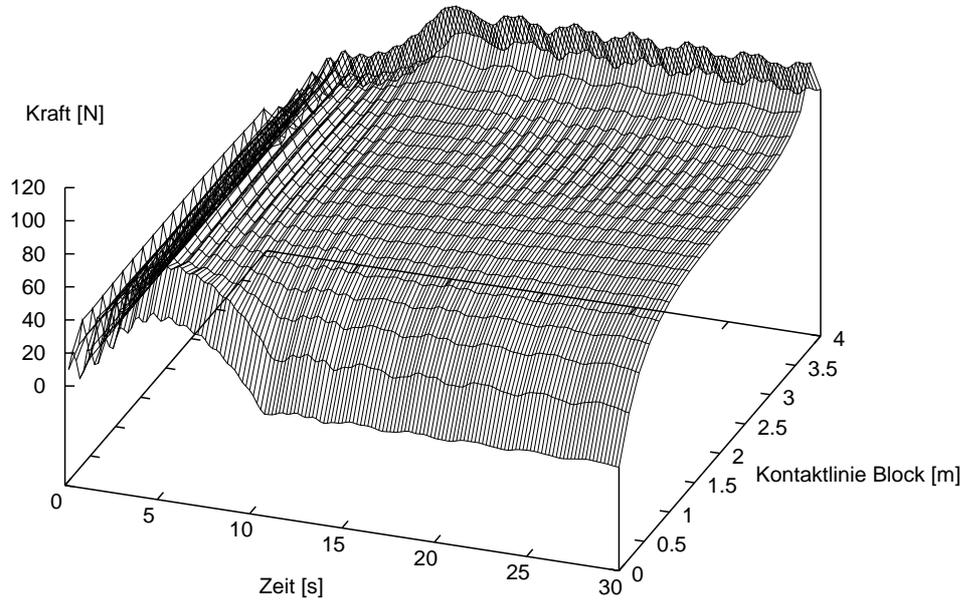
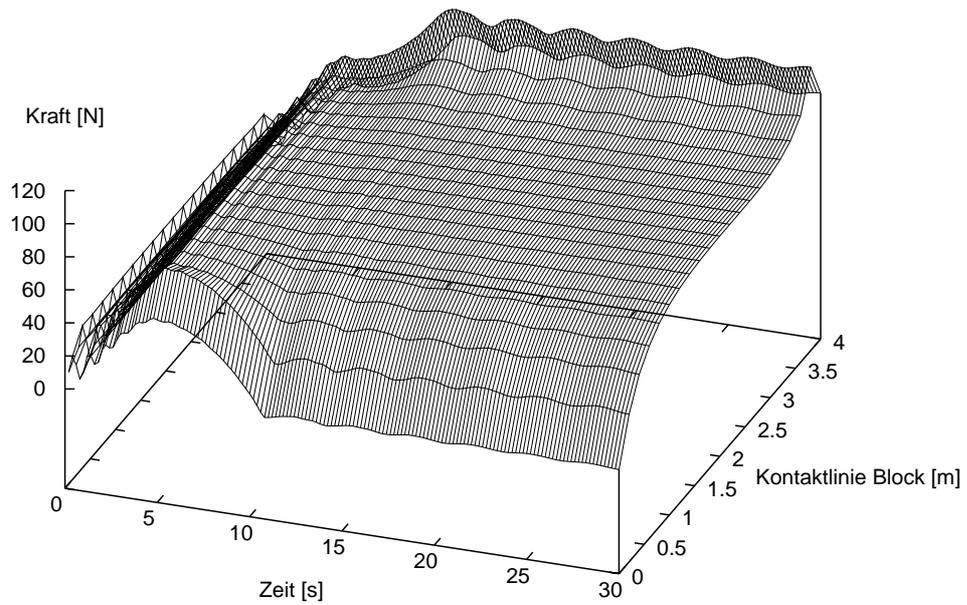
(a)  $\alpha_D = 0.01$ ,  $\beta_D = 0.01$ (b)  $\alpha_D = 0.02$ ,  $\beta_D = 0.02$ 

Abbildung 6.24: Darstellung von Normalkraftverläufen mit konstantem Reibbeiwert und verschiedenen Dämpfungsparametern in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

### Gleitzustand mit Zwischenhalt

Ziel ist die Untersuchung des Verhaltens des Blockes über einen längeren Beobachtungszeitraum mit einem Zwischenhalt. Während der Beobachtungszeit von  $T = 55.0$  [s] wird der Block im Gleitzustand für einen Zeitraum von  $\Delta t = 10.0$  [s] angehalten. Hierzu wird die horizontale Verschiebungsfunktion  $H(t)$  folgendermaßen modifiziert:

$$\begin{aligned} \text{Horizontal } (t): \quad & 5.0 \leq t < 10.0 : && 5.0 (0.125 - 0.05t + 0.005t^2) \\ & 10.0 \leq t < 20.0 : && 5.0 (-0.375 + 0.05t) \\ & 20.0 \leq t < 25.0 : && 5.0 (-2.375 + 0.25t - 0.005t^2) \\ & 25.0 \leq t < 35.0 : && 5.0 (0.750) \\ & 35.0 \leq t < 40.0 : && 5.0 (6.875 - 0.35t + 0.005t^2) \\ & 40.0 \leq t < 55.0 : && 5.0 (-1.125 + 0.05t) \end{aligned}$$

Es wurden die gleichen Reibgesetze und Parameter wie beim vorherigen Beispiel und das symmetrisierte Augmented–Lagrange–Verfahren mit viermaligem 'update' verwendet. Beobachtet werden sollten etwaige Auswirkungen durch das Anhalten und wieder Anfahren. Deshalb werden in den folgenden Abbildungen jeweils die mit dem konstanten  $\mu$  und dem geschwindigkeitsabhängigen Reibbeiwert  $\mu(v_T)$  erzielten Ergebnisse gegenübergestellt. Die Zeitschrittweite beträgt dort  $dt_{plot} = 0.4$  [s].

Abbildung 6.25 zeigt jeweils die Haft– und Gleitzustände. Die Zustände ändern sich gleichmäßig über die gesamte Kontaktfläche. Die Haft–Gleit–Wechsel erfolgen schlagartig. Das Anhalten und wieder Anfahren geschieht ohne Auffälligkeiten.

Abbildung 6.26 zeigt die zurückgelegten Wege. Im Gegensatz zu dem mit konstantem Reibbeiwert ermittelten Verlauf kommt es beim Verlauf mit dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz in den Gleitphasen zu einem treppenartigen Verlauf, der durch den Haft–Gleit–Wechsel bedingt ist.

Abbildung 6.27 zeigt die Verläufe der Haft– oder Reibkraft. Bei Berechnungen mit dem konstanten Reibbeiwert ist die Reibkraft im Gleitzustand affin zur Normalkraft. Bei Verwendung des geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes wechseln sich in diesem Zustand Gleit– und Haftphasen ab. Während des Zwischenhaltes sind die Kraftverläufe in tangentialer Richtung aufgrund der verwendeten Reibgesetze unterschiedlich. Dies liegt vermutlich an unterschiedlichen Verformungszuständen. Vor dem Zwischenhalt des mit dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz ermittelten Verlaufes ist der Gleitzustand auffallend kurz. Dadurch entsteht eine gegenüber den Berechnungen mit dem konstanten Beiwert abweichende Verformung. Da der Verformungszustand wiederum den Kraftverlauf beeinflusst, sind die Kraftverläufe während dieses Zwischenhaltes nicht gleich.

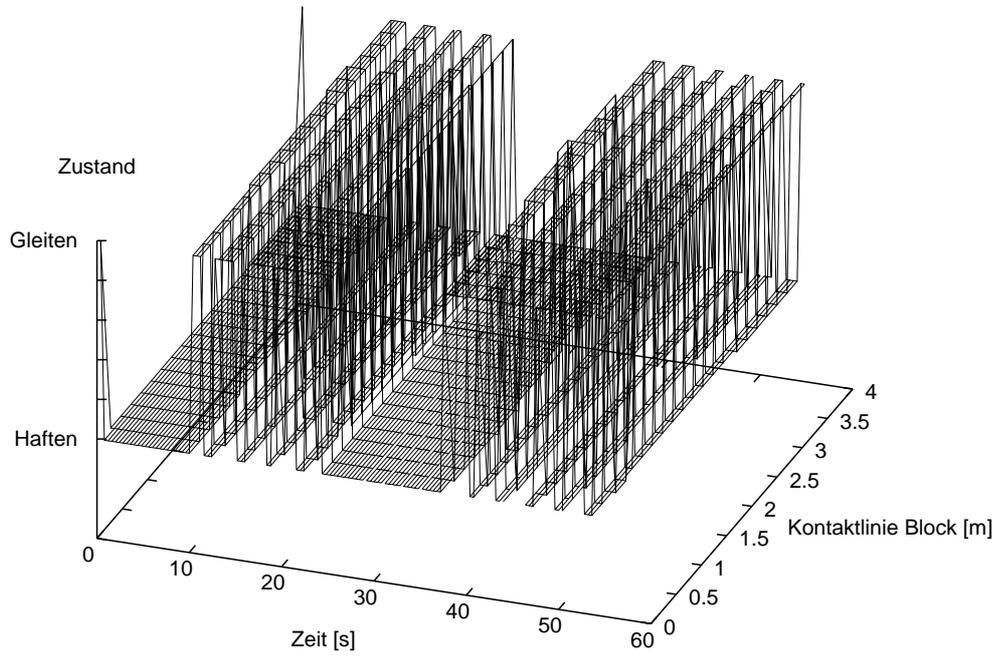
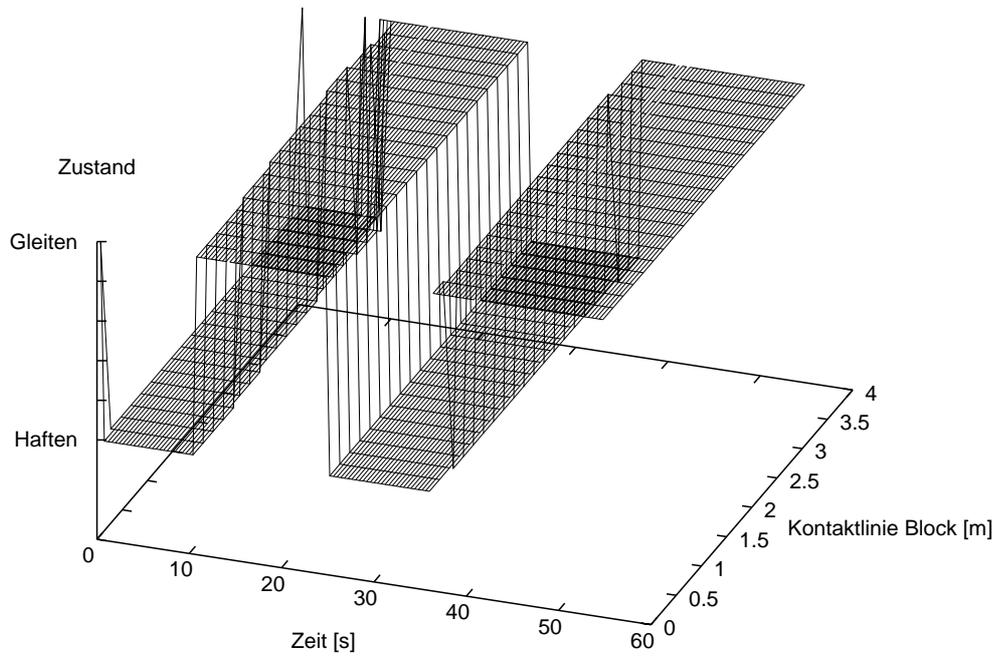
(a)  $\mu = \mu(v_T)$ (b)  $\mu = 0.3$ 

Abbildung 6.25: Gegenüberstellung von mit verschiedenen Reibgesetzen ermittelten Haft- und Gleitzuständen bei einer Horizontalverschiebung mit Zwischenhalt in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

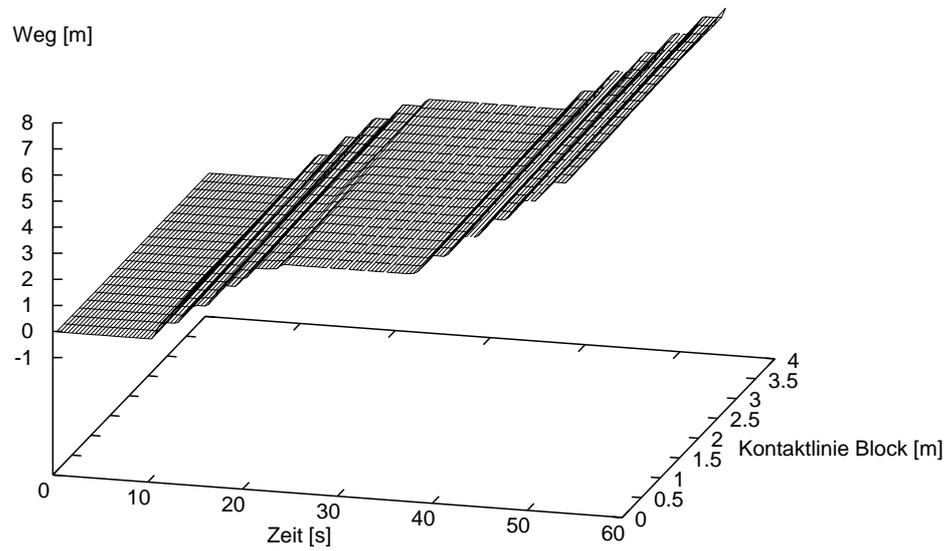
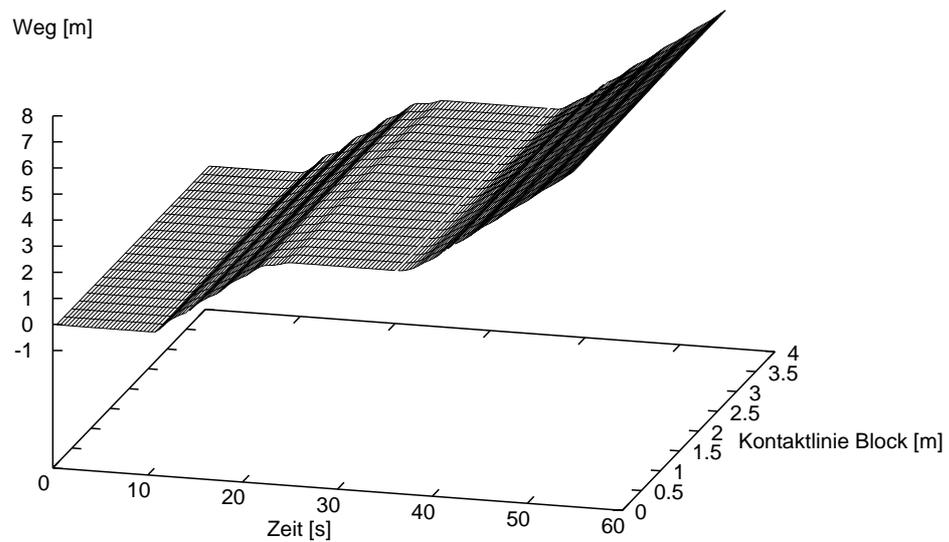
(a)  $\mu = \mu(v_T)$ (b)  $\mu = 0.3$ 

Abbildung 6.26: Gegenüberstellung von mit verschiedenen Reibgesetzen ermittelten zurückgelegten Wegen bei einer Horizontalverschiebung mit Zwischenhalt in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

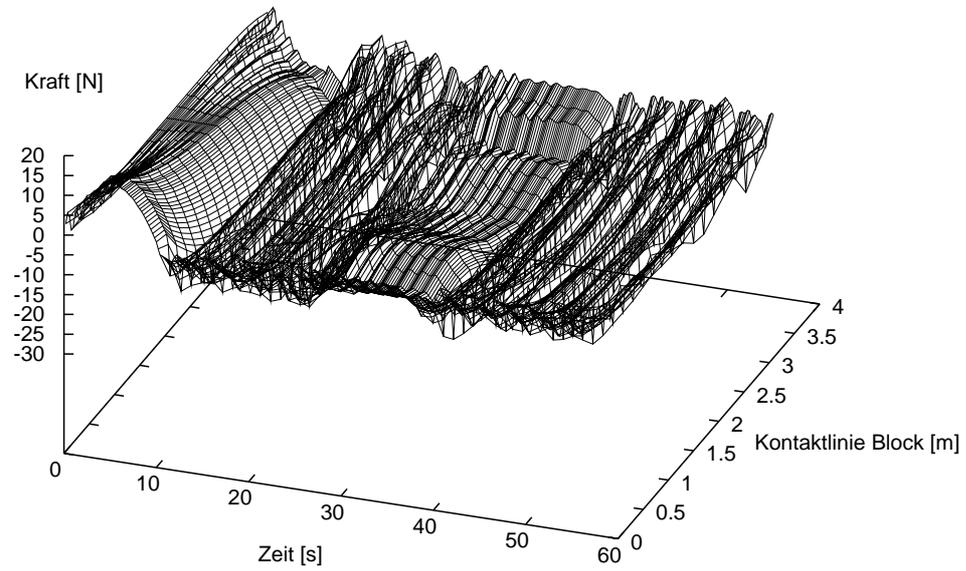
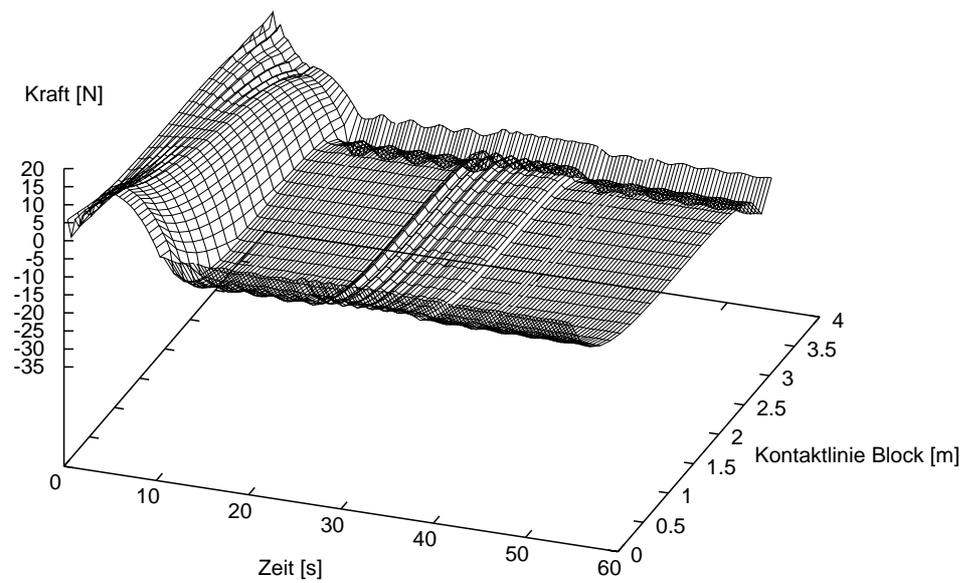
(a)  $\mu = \mu(v_T)$ (b)  $\mu = 0.3$ 

Abbildung 6.27: Gegenüberstellung von mit verschiedenen Reibgesetzen ermittelten Haft- oder Reibkraftverläufen bei einer Horizontalverschiebung mit Zwischenhalt in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

## 6.4 Stoßen

### 6.4.1 Stoß eines Ringes gegen eine starre Ebene

Zur Untersuchung des globalen Strukturverhaltens eines Stoßvorganges wird ein sich bewegender Ring betrachtet, der unter einem bestimmten Einfallswinkel gegen eine starre Ebene stößt. Es wird das Verhalten des Ringes mit und ohne Reibung gegenübergestellt. Motivation hierzu wurde auch durch Beispiele von STEIN, WRIGGERS & VU VAN [1992] gegeben.

Folgende Parameter wurden verwendet:

Elastizitätsmodul:	$E_{Ring} = 200.0$	[N/m <sup>2</sup> ]	Querdehnzahl:	$\nu = 0.3$	[-]
Dichte:	$\rho_{Ring} = 0.02$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Volumen:	$v = 14.922$	[m <sup>3</sup> ]
Geometrie Ring:	$r_i = 4.50,$		$r_a = 5.00$		[m]
Dicke Ring:	$h = 0.1$	[m]			
Anfangsbedingung:	$V_x = 2.0,$		$V_y = -2.0$		[m/s]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 200.0,$		$\epsilon_T = 200.0$		[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.5$	[-]			
Zeitschrittweite:	$dt = 0.0025,$		$dt_{plot} = 1.0$		[s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.4,$		$\gamma = 0.7$		[-]
Untersuchungszeit:	$T = 10.0,$		Eigenschwingzeit:	$T_E = 6.62$	[s]

Der Ring wurde mit 128 bilinearen Vierknoten-Elementen in zwei Lagen diskretisiert. Abbildung 6.28 zeigt diese Stoßvorgänge. Als Anfangsbedingung erhält der Ring eine Geschwindigkeit in einem Winkel von 45 Grad. In Abbildung 6.28 (a) ist das Verhalten ohne und in Abbildung 6.28 (b) mit Reibung dargestellt.

Zum Grundverständnis des Stoßvorganges werden die folgenden Gleichungen aufgestellt.

Reibarbeit:	$W_{frict} = \mu N l$	Potenzielle Energie:	$E_{pot} = m b h$
Verzerrungsenergie:	$E_{strain} = \int \frac{1}{2} E \epsilon^2 dv$	Kinetische Energie:	$E_{kin} = \frac{1}{2} m V^2$

Impulsbilanz:  $S_i(t) = \int P_i(t) ds dt = m \Delta V_i$

Prinzipiell ist das Aufstellen der Energiebilanz und der Impulsbilanzen über die Zeit mit den folgenden Größen möglich. Unter Vernachlässigung der Einflüsse aus der potenziellen Energie und der im Zeitintegrationsverfahren benötigten Dämpfung lassen sich die folgenden qualitativen Aussagen machen:

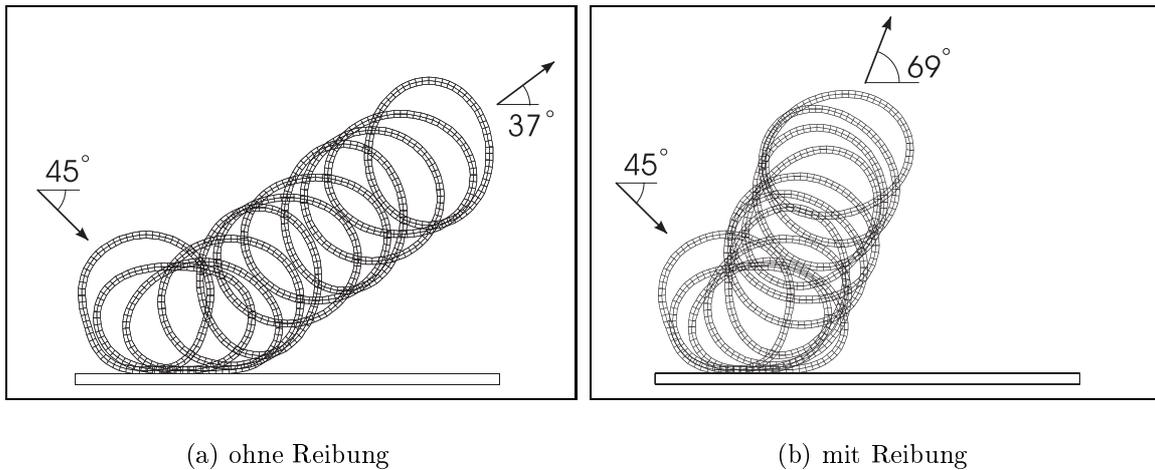


Abbildung 6.28: Ein Ring stößt gegen eine starre Ebene, links ohne und rechts mit Reibung. Dargestellt sind die Strukturen jeweils in elf Schritten mit  $dt = 0.1$  [s] in einem Zeitraum von  $T = 10.0$  [s].

Der Einfallswinkel des Ringes beträgt vor dem Stoßvorgang in beiden Fällen 45 Grad und die gesamte Energie ist dann noch gleich der kinetischen Energie  $E_{kin}$ . Nach dem reibungsfreien Stoß gegen die starre Ebene ist der Ausfallswinkel des Ringes ungleich dem des Einfallswinkels. Da der Ring durch den Stoß zu schwingen beginnt, wird ein Teil der zur Verfügung stehenden Energie in Verzerrungsenergie  $E_{strain}$  überführt. Nach dem Stoß setzt sich die gesamte Energie aus kinetischer  $E_{kin}$  und Verzerrungsenergie  $E_{strain}$  zusammen. Deshalb ist der Ausfallswinkel mit 37 Grad kleiner als der Einfallswinkel.

Bei dem Stoßvorgang mit auftretender Reibung hat die in Tangentialrichtung wirkende Kraft Einfluss auf die Impulsbilanz. Die Tangentialgeschwindigkeit verringert sich. Da während dieses Stoßes zusätzlich Reibarbeit verrichtet wird, entsteht neben der Verzerrungsenergie  $E_{strain}$ , die durch das Entfachen der Eigenschwingung entsteht, ein Energieverlust durch Reibarbeit  $W_{fric}$ . Dies führt zu einem wesentlich größeren Ausfallswinkel von 69 Grad. Hierzu ist lediglich ein qualitativer Vergleich mit Beispielen aus der Literatur möglich.

### 6.4.2 Stoß eines Ringes gegen eine elastische Ebene

Ziel ist neben der Untersuchung des globalen Verhaltens der Strukturen beim Stoß auch die des lokalen Verhaltens. Hierzu gehört die Betrachtung der Kontaktspannungsverläufe. Zuerst wird der Stoß eines Ringes senkrecht gegen eine aufgelagerte elastische Ebene, die fixiert ist, und anschließend der Stoß eines Ringes senkrecht gegen eine aufgelagerte Ebene, die sich in tangentialer Richtung bewegt, untersucht. Der mit 256 Elementen diskretisierte Ring erhält als Anfangsbedingung eine Geschwindigkeit in senkrechter Richtung. Die Auflagerung der mit 86 Elementen diskretisierten Ebene erfolgt an den vier Eckpunkten. Es wird ein Element für große Starrkörperrotationen im ebenen Spannungszustand verwendet. Die Kontaktfläche des Ringes wird als Slave-Seite und die der Ebene als Master-Seite gewählt.

Folgende Parameter werden verwendet:

Geometrie Ring:	Radius = 5.0,	Dicke = 0.5 [m]
Geometrie Ebene:	Länge = 10.0,	Dicke = 0.5 [m]
Elastizitätsmodul Ring:	$E_{Ring} = 200.0$ [N/m <sup>2</sup> ],	$\nu_{Ring} = 0.3$ [-]
Elastizitätsmodul Ebene:	$E_{Ebene} = 2000.0$ [N/m <sup>2</sup> ],	$\nu_{Ebene} = 0.3$ [-]
Dichte:	$\rho_{Ring} = 0.02$ ,	$\rho_{Ebene} = 0.02$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Anfangsbedingung Ring:	$V_x = 0.0$ ,	$V_y = -2.0$ [m/s]
Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = 600.0$ ,	$\epsilon_T = 600.0$ [N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.4$ [-]	
Untersuchungszeit:	T = 3.0 [s]	
Zeitschrittweite:	$dt = 0.0025$ ,	$dt_{plot} = 0.02$ [s]
Newmark-Parameter:	$\beta = 0.25$ ,	$\gamma = 0.5$ [-]
Dämpfungsparameter:	$\alpha_D = 0.001$ ,	$\beta_D = 0.001$ [kg/s]

#### Ein Ring stößt gegen eine fixierte elastische Ebene

Abbildung 6.29 zeigt die Strukturen zu drei Zeitpunkten während des Stoßvorganges. Der Spannungsverlauf der Normalkraft auf der Oberfläche der Masterseite während des Stoßes wird in Abbildung 6.30 dargestellt. Die Größe der Kontaktfläche verändert sich während des Stoßvorganges. Die Höhe der Spannungen verändert sich ebenfalls.

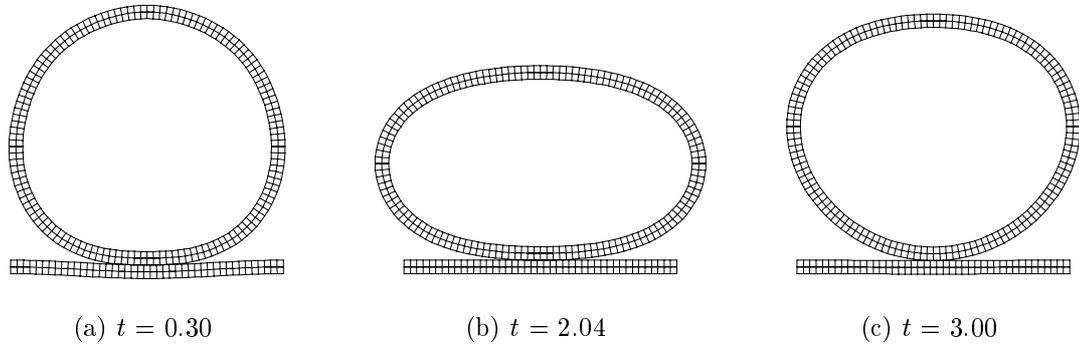


Abbildung 6.29: Stoß eines Ringes senkrecht gegen eine elastische Ebene. Dargestellt ist der Ring zu verschiedenen Zeitpunkten [s].

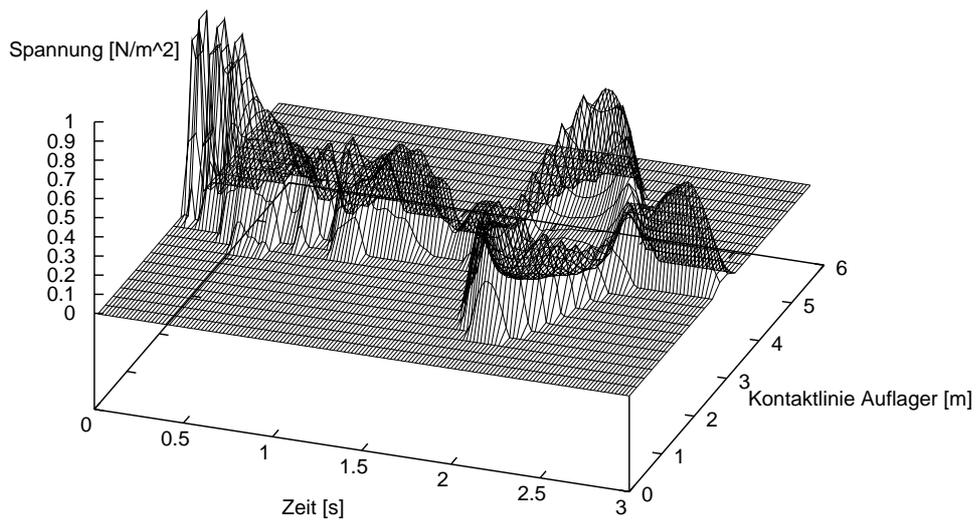


Abbildung 6.30: Normalspannungsverlauf während des Stoßvorganges auf der Masterseite am Auflager in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

**Ein Ring stößt gegen eine sich bewegende elastische Ebene**

Beim Stoß des Ringes gegen eine sich bewegende elastische Ebene werden die Auflager der Ebene mit einer Horizontalgeschwindigkeit von  $V_T = 6$  [m/s] geführt. Der Ring tritt unter einer senkrecht wirkenden Anfangsgeschwindigkeit auf der rechten Hälfte der Ebene in Kontakt, siehe Abbildung 6.31 (a). Während der Kontaktzeit wird als Folge des hohen Reibbeiwertes ein fast permanenter Haftzustand gewährleistet, daher beginnt der Ring sich während des Kontaktes zu drehen, siehe Abbildung 6.31 (b)–(e), und rollt über die Ebene. Die momentanen Geschwindigkeiten einzelner Knoten werden hierzu qualitativ anhand von Vektoren gezeigt. Am Ende des Stoßes befindet er sich auf der linken Hälfte der Ebene und besitzt nahezu die gleiche Tangentialgeschwindigkeit wie die Ebene selbst, siehe Abbildung 6.31 (f). Deshalb ändert er seine Bewegungsrichtung und der Ausfallswinkel beträgt 17 Grad, siehe Abbildung 6.31 (g). Dieser Effekt wird beim Sport als 'topspin' bezeichnet. Abbildungen 6.32 zeigt den Verlauf der sich dabei räumlich und zeitlich entwickelnden Kontaktspannungen auf der als Masterseite fungierenden Ebene. Da ein permanenter Haftzustand gefordert wurde, sind die Tangentialspannungen wesentlich höher als die Normalspannungen.

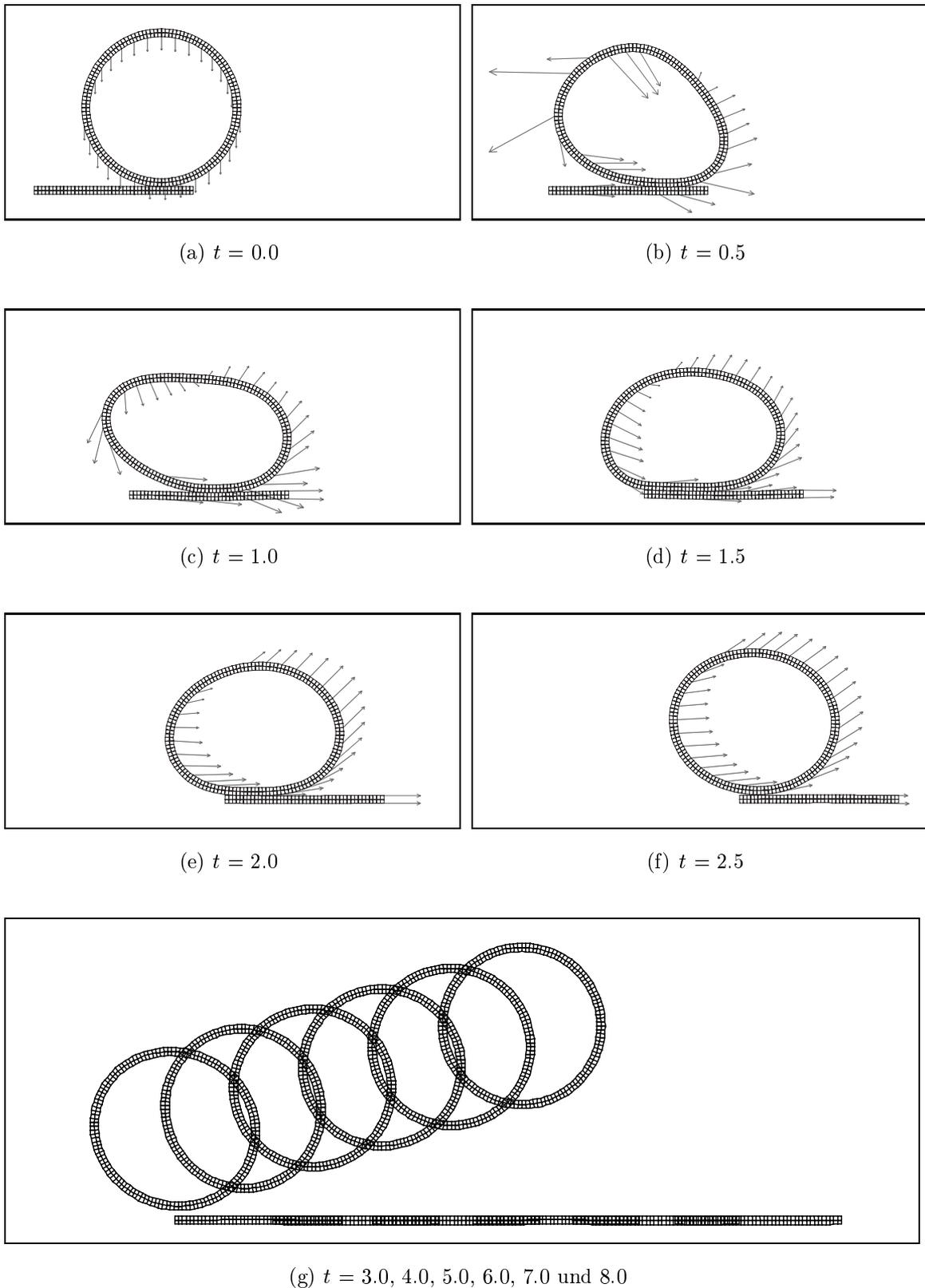
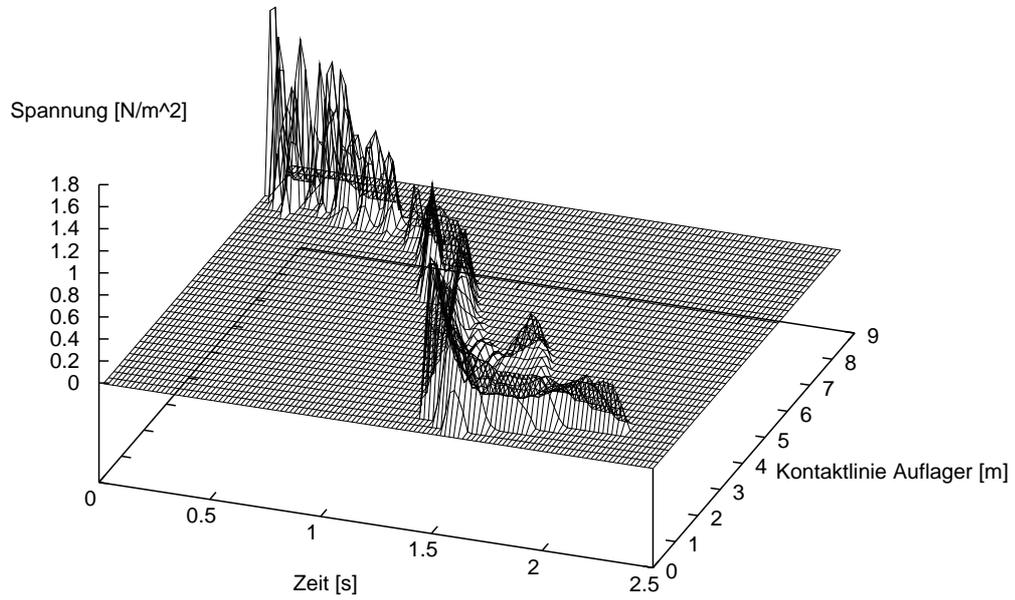
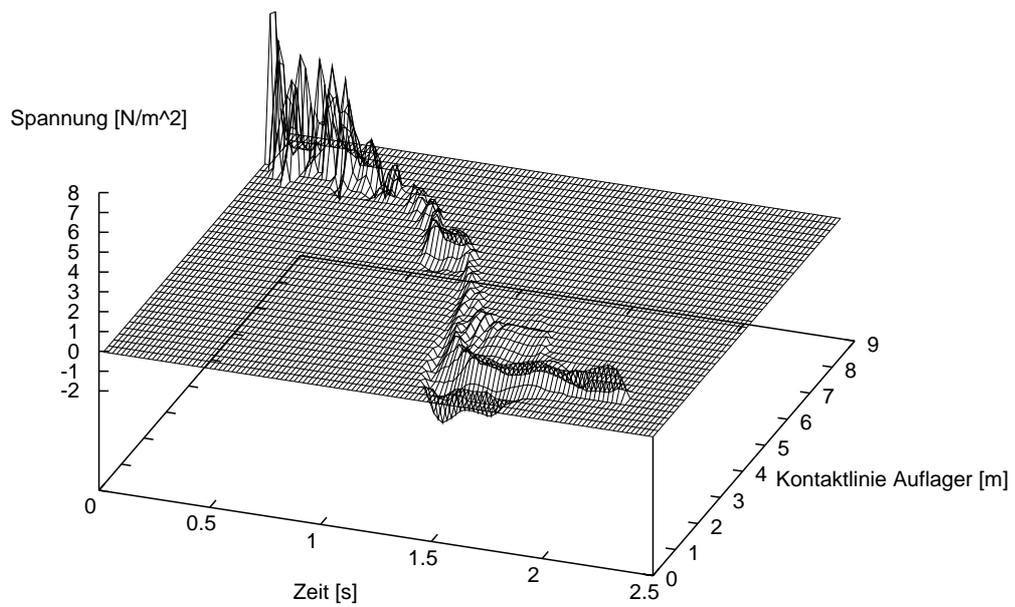


Abbildung 6.31: Ein Ring stößt senkrecht gegen eine sich bewegende Ebene und ändert seine Bewegungsrichtung. Dieser Effekt wird beim Sport als 'topspin' bezeichnet. Dargestellt ist der Ring zu verschiedenen Zeitpunkten [s] mit den momentanen Geschwindigkeiten einzelner Knoten (a)–(f).



(a) Normalspannung



(b) Tangentialspannung

Abbildung 6.32: Darstellung der Spannungsverläufe auf der Masterseite am Auflager während des Stoßvorganges in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

## 6.5 Einschlagen eines Zylinders in eine steife Form

### Einschlagvorgänge – Keilwirkung

Die Keilwirkung ist ein aus der Steinzeit bekanntes Phänomen. Das Einbringen eines Keiles in einen Festkörper ist ein relativ komplexer Vorgang:

Durch einen Stoß in die Einschlagrichtung wird die Haftgrenze eines einzuschlagenden Gegenstandes auf der Kontaktfläche überwunden, und es wirkt eine Gleitreibung entgegen der Bewegungsrichtung. Kommt der Gegenstand wieder zur Ruhe, dann wirkt eine Haftkraft, die diesen Gegenstand weiterhin in diesem Ruhezustand hält. Dieser von vielen Größen abhängige komplexe Vorgang soll exemplarisch an einem Beispiel untersucht werden. Das Beispiel soll dem grundlegenden Verständnis dienen. Daran anschließend ist eine Vielzahl von Anwendungen denkbar z. B. in der Befestigungstechnik.

### Einschlagen eines Zylinders in eine steife Form

Betrachtet werden hierzu erneut der Zylinder und die konische Form, die bereits aus Kapitel 5.5 bekannt sind. Die Geometrien der beiden Strukturen wurden bereits beschrieben. Im Gegensatz zum Urbeispiel wird der Zylinder nicht statisch eingeschoben, sondern eingeschlagen. Dieses Einschlagen des Zylinders erfolgt mit einer Last-Zeit-Funktion, die an der Stirnseite angreift. Abbildung 6.33 zeigt diesen Kraft-Zeit-Verlauf für einen dreimaligen Stoß jeweils mit einer halbsinusförmigen  $P(t)$ -Funktion, die Intensität der Belastung wurde mit jedem Stoß gesteigert:

$$\Delta t_1: 0.00-0.01 \text{ [s]} : 1 \quad P(t)$$

$$\Delta t_2: 0.03-0.04 \text{ [s]} : 2 \quad P(t)$$

$$\Delta t_3: 0.06-0.07 \text{ [s]} : 3 \quad P(t)$$

Die Untersuchungszeit beträgt  $T = 0.1 \text{ [s]}$ . Zylinder und konische Form werden elastisch abgebildet. Um Vergleichsuntersuchungen zu ermöglichen, wurden die Strukturen in drei Varianten diskretisiert, siehe Abbildung 6.34: Bei Variante (a) wurden 80 Elemente für den Zylinder und 180 Elemente für die Form, bei Variante (b) wurden 320 und 180, und bei Variante (c) wurden 320 und 720 Elemente benutzt. Als Lastangriffspunkte für die Stoßfunktion  $P(t)$  dienen die Knoten am unteren Rand des in zwei Varianten diskretisierten Zylinders. Für die erste Variante des Zylinders mit einer Diskretisierung von 80 Elementen werden auf der Stirnseite symmetrisch von innen nach außen fortschreitend fünf Knoten mit folgenden Maximalkräften belastet: 875.0, 1750.0, 1750.0, 1750.0 und 875.0 [N]. Für die zweite Variante mit 320 Elementen werden dagegen symmetrisch von innen nach außen fortschreitend neun Knoten mit folgenden Maximalkräften belastet: 437.5, 875.0, 875.0, 875.0, 875.0, 875.0, 875.0, 875.0 und 437.5 [N]. In beiden Fällen entspricht die Summe von 7000 [N] = 1  $P(t)$ .

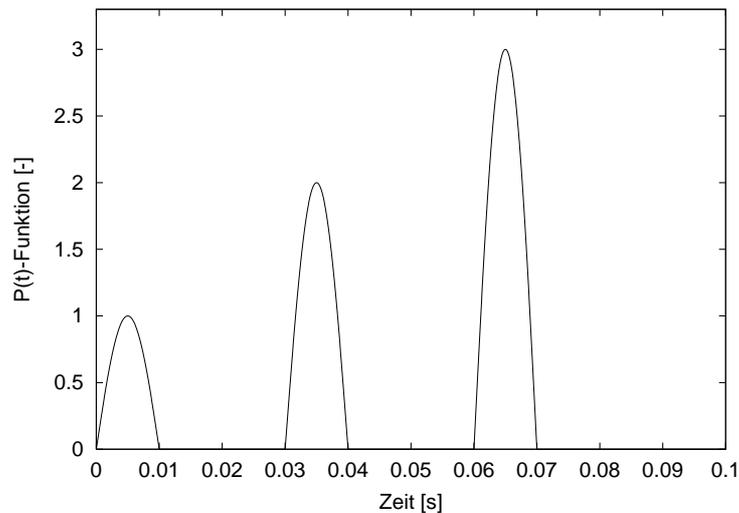


Abbildung 6.33: Kraft-Zeit-Verlauf der auf der Stirnseite des Zylinders angreifenden Belastung.

Um dynamische Effekte berücksichtigen zu können, werden das Zeitintegrationsverfahren nach Newmark und eine konsistente Massenmatrix benutzt. Die benötigte Zeitschrittweite beträgt für Untersuchungen mit der groben Diskretisierung des Zylinders mit 80 Elementen  $dt = 5.0 \cdot 10^{-5}$  [s], und musste bei der feinen Diskretisierung mit 320 Elementen auf  $dt = 2.5 \cdot 10^{-5}$  [s] verringert werden.

Es wurden der unsymmetrische und der symmetrisierte Augmented-Lagrange-Algorithmus angewendet. Um vergleichbare Ergebnisse zu bekommen, wurde der Anpassungsprozess bei beiden Verfahren grundsätzlich zehnmal wiederholt. Folgende Parameter wurden gewählt:

Zylinder:

Elastizitätsmodul:	$E = 65.0 \cdot 10^6$	[N/m <sup>2</sup> ]
Querdehnzahl:	$\nu = 0.32$	[-]
Dichte:	$\rho = 2700.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]

Form:

Elastizitätsmodul:	$E = 10^{12}$	[N/m <sup>2</sup> ]
Querdehnzahl:	$\nu = 0.32$	[-]
Dichte:	$\rho = 7600.0$	[kg/m <sup>3</sup> ]

Penaltyfaktoren:	$\epsilon_N = \epsilon_T = 10^6$	[N/m]
Reibbeiwert:	$\mu = 0.3$	[-]

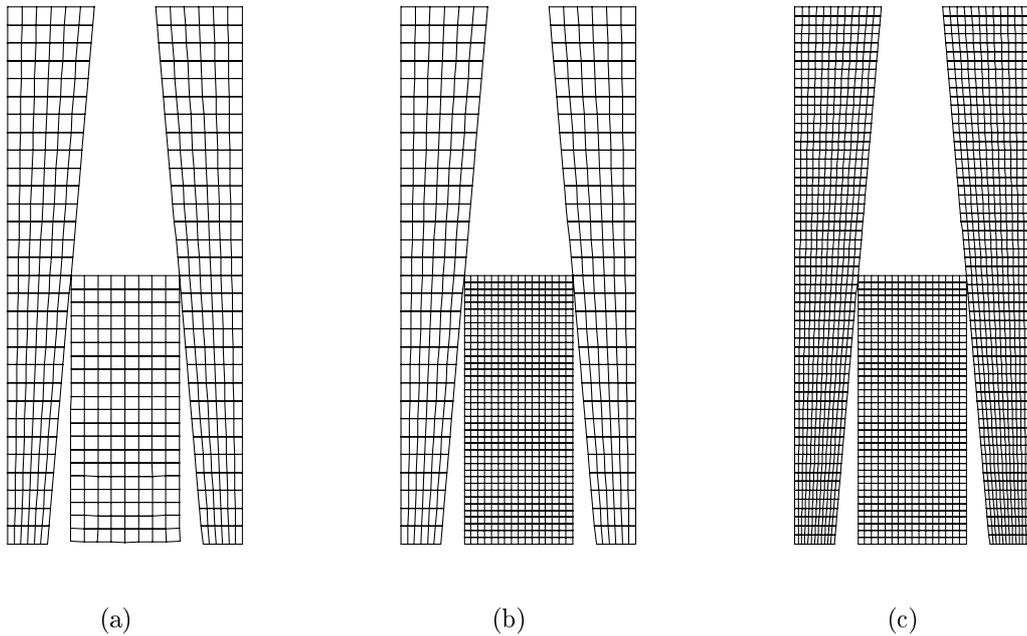


Abbildung 6.34: Verschiedene Diskretisierungen des Zylinders und der Form.

Die notwendige Dämpfung sollte so gering wie möglich gehalten werden. Zusammen mit den beiden Augmented-Lagrange-Algorithmen werden zwei Möglichkeiten der Dämpfung gegenübergestellt. Das sind die

- Numerische Dämpfung durch Setzen der Newmark-Parameter auf  $\beta = 0.3025$  und  $\gamma = 0.6$ , und die
- Rayleigh-Dämpfung durch Wahl der Parameter  $\alpha_D$  und  $\beta_D$ . Bei der groben Diskretisierung des Zylinders mit 80 Elementen wurden als Dämpfungsparameter  $\alpha_D = \beta_D = 2.0 \cdot 10^{-5}$  gewählt. Bei Berechnungen mit der feinen Diskretisierung mit 320 Elementen hat sich gezeigt, dass die Dämpfung auf  $\alpha_D = \beta_D = 10^{-5}$  reduziert werden konnte.

Dargestellt werden Ergebnisse von Untersuchungen, bei denen der Zylinder mit 320 und die einhüllende Form mit 720 Elementen diskretisiert wurde. Alle Varianten führen zu gleichen Ergebnissen.

Zur Verdeutlichung des Ablaufes werden die zu den Untersuchungen gehörenden

- kontaktierende Strukturen zu ausgewählten Zeitpunkten, siehe Abbildung 6.35,
- Kontaktkraftverläufe, siehe Abbildungen 6.36 und 6.37,
- und Energie- und Arbeitsverläufe, siehe Abbildung 6.38

betrachtet.

### **Verhalten der kontaktierenden Strukturen**

Die Abbildung 6.35 zeigt die Strukturen zu verschiedenen Zeitpunkten während der Stöße (a), (c) und (e) sowie in den Ruhephasen zwischen den Stößen (b), (d) und (f). Grundsätzlich erhöht sich die Normalkraft auf der Kontaktfläche mit der gewählten Geometrie während des Eindringvorganges aufgrund der Keilwirkung. Bei einem Stoß durch die  $P(t)$ -Funktion erhöht sich diese Kraft zusätzlich. Trotz dieser Erhöhung wird die Haftgrenze überschritten, der Zylinder gleitet eine gewisse Strecke in die Form und gelangt dann wieder in den Haftzustand. Während dieses Stoßes wirkt die im Gleitzustand auftretende Reibkraft der Bewegung entgegen. Die Haftzustände zwischen den Stößen hindern den Zylinder an einer rückwärtigen Bewegung.

### **Darstellung der Kontaktkraftverläufe**

Die Verläufe der Normal- und Haft- oder Reibkräfte am Zylinder, dessen Oberfläche als Slaveseite gewählt wurde, sind in Abbildung 6.36 dargestellt. Die Schrittweite der Darstellung der Kontaktkraftverläufe beträgt  $dt_{plot} = 5.0 \cdot 10^{-4}$  [s]. Deutlich wird die Erhöhung der Normalkraft durch die Keilwirkung während des Eindringens, sowohl in den Schlag- als auch in den Ruhephasen. Die Reibkraft tritt während der Schlagphasen jeweils entgegen der Bewegungsrichtung auf. Dabei treten Gleitzustände jeweils in beiden Richtungen auf. In den Haftphasen existieren bei diesem Beispiel die Tangentialkräfte, die entlang der Kontaktfläche in beiden Richtungen wirken. Erkennbar sind Eigenschwingungen des Zylinders in beiden Richtungen während der Haftphasen. Aus einem anderen Blickwinkel sind die Verläufe der Normal- und Haft- oder Reibkräfte in der einhüllenden Form, deren Oberfläche als Masterseite gewählt wurde, in Abbildung 6.37 dargestellt.

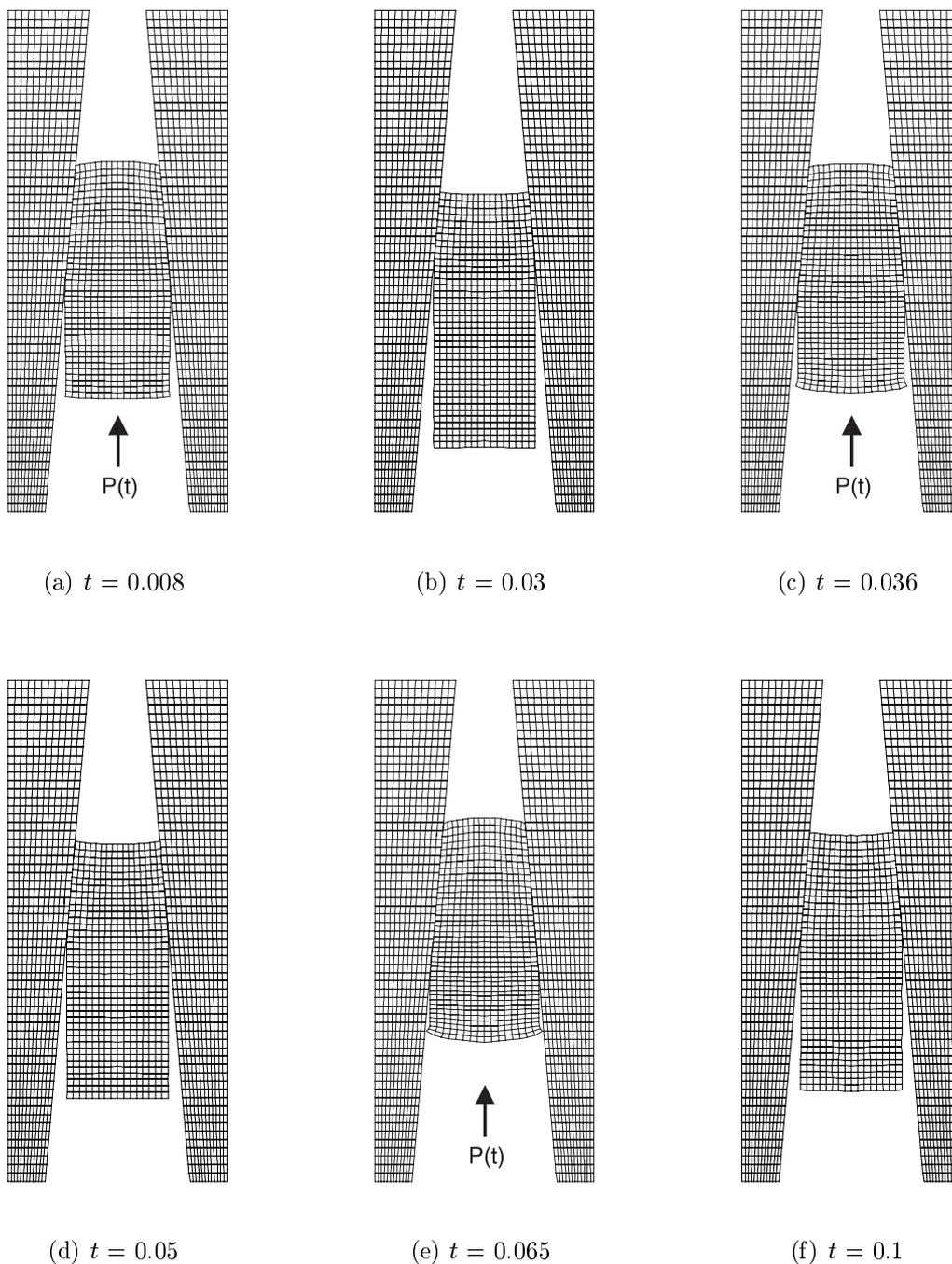
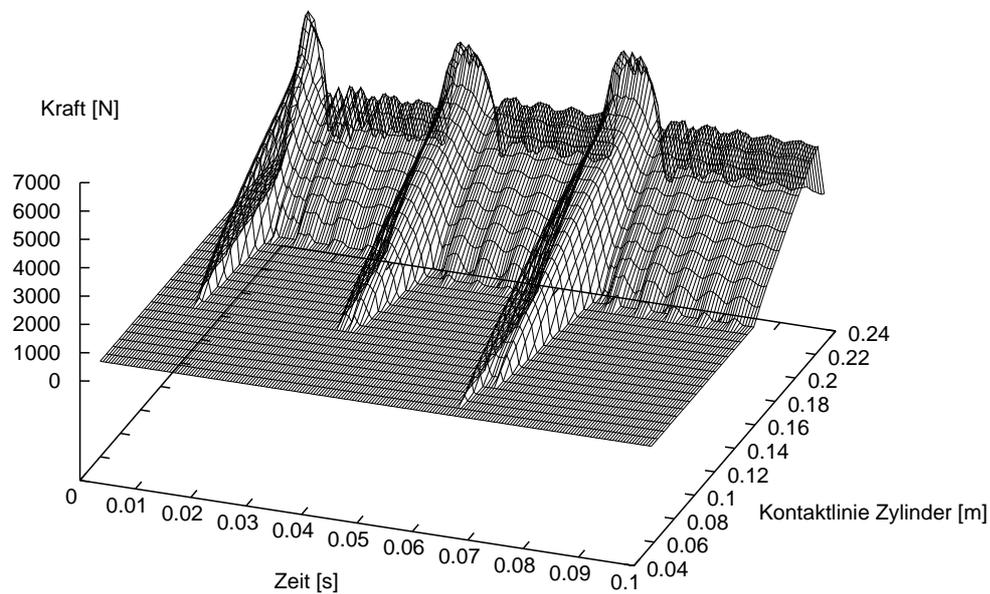
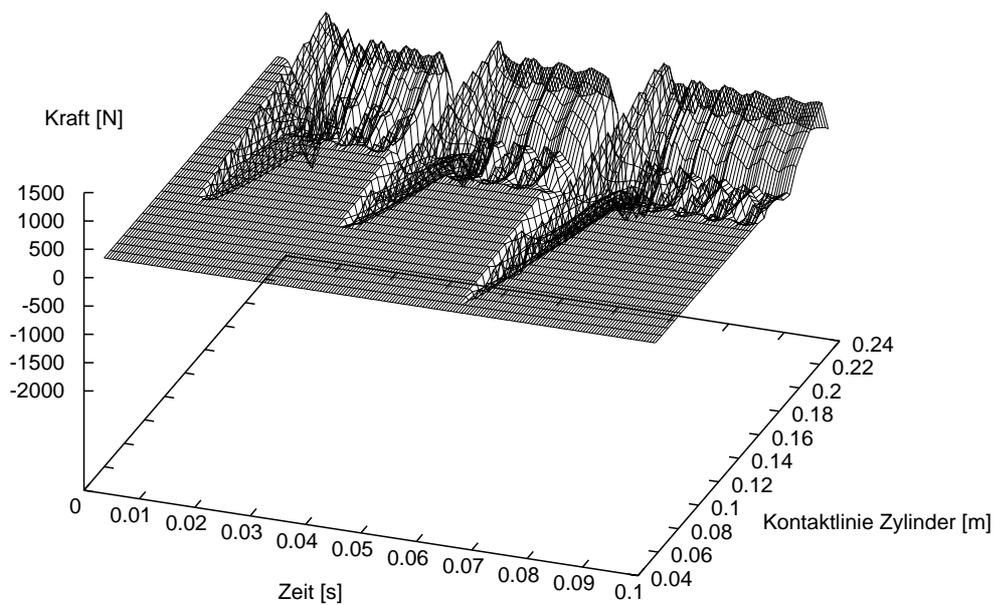


Abbildung 6.35: Einschlagen eines Zylinders in eine Form. Dargestellt sind die Strukturen zu verschiedenen Zeitpunkten [s] während der Stöße (a), (c) und (e) sowie in den Ruhephasen zwischen den Stößen (b), (d) und (f).

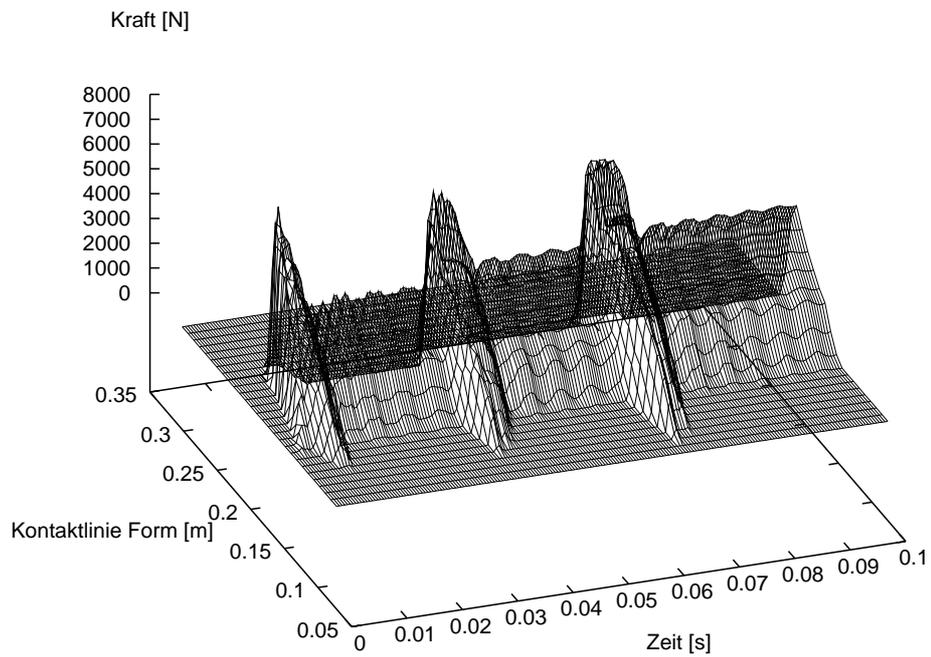


(a) Normalkraft

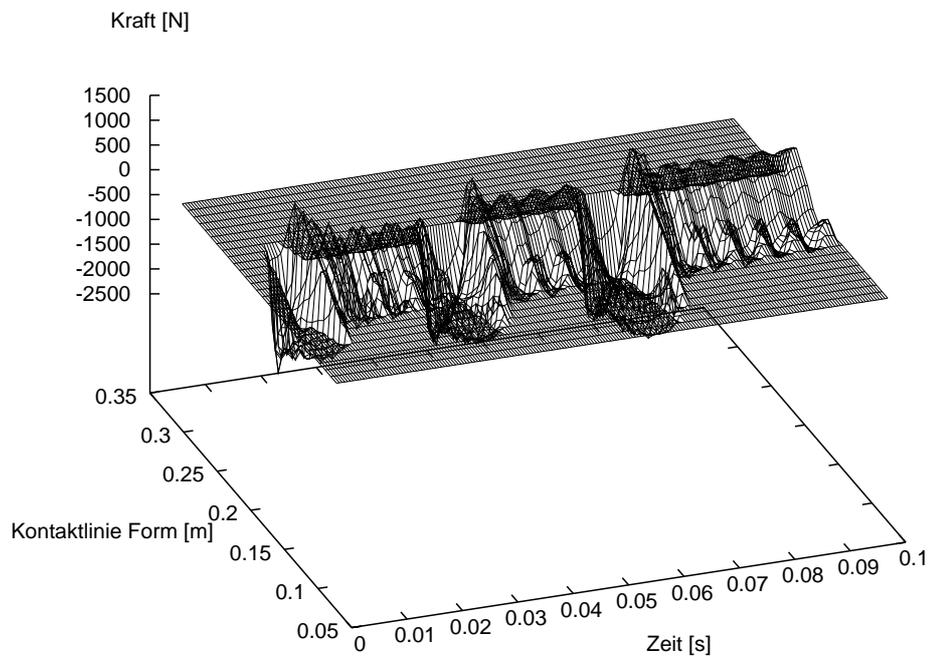


(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.36: Kraftverläufe auf der Slaveseite am Zylinder während des Eindringvorganges in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.37: Kraftverläufe auf der Masterseite an der umhüllenden Form während des Eindringvorganges in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

### Zeitverläufe einzelner Energieanteile

Abbildung 6.38 zeigt die Verläufe der Verzerrungsenergie, der kinetischen Energie und der Reibarbeit. Während der Schlagphasen setzt sich der Zylinder in Bewegung und wird sehr stark verformt. Dies führt zu Spitzenwerten bei der Verzerrungsenergie und der kinetischen Energie. Bei der ersten Schlagphase steigt der Anteil der kinetischen Energie besonders hoch an. Der Verlauf der kinetischen Energie sinkt zwischen den Stößen während der Haftphasen auf Werte nahe null, da der Zylinder im Ruhezustand nur geringen Eigenschwingungen unterliegt. Die im System gebundene Verzerrungsenergie erhöht sich jeweils mit zunehmender Eindringtiefe. Reibarbeit selbst wird nur während der Schlagphasen in den Gleitzuständen verrichtet, dabei werden auch die kurzen Gleitphasen in rückwärtiger Richtung berücksichtigt. Diese zweite Gleitphase findet sich auch am Verlauf der kinetischen Energie wieder, es bilden sich in den Schlagphasen jeweils zwei Spitzen aus.

Die erzielten Ergebnisse machen deutlich, dass die Simulation solcher komplexen Vorgänge mit diesen Algorithmen möglich ist. Aufbauend auf Betrachtungen dieser Zeitverläufe lassen sich vielerlei Optimierungen und Parameterstudien von Einschlagvorgängen durchführen.

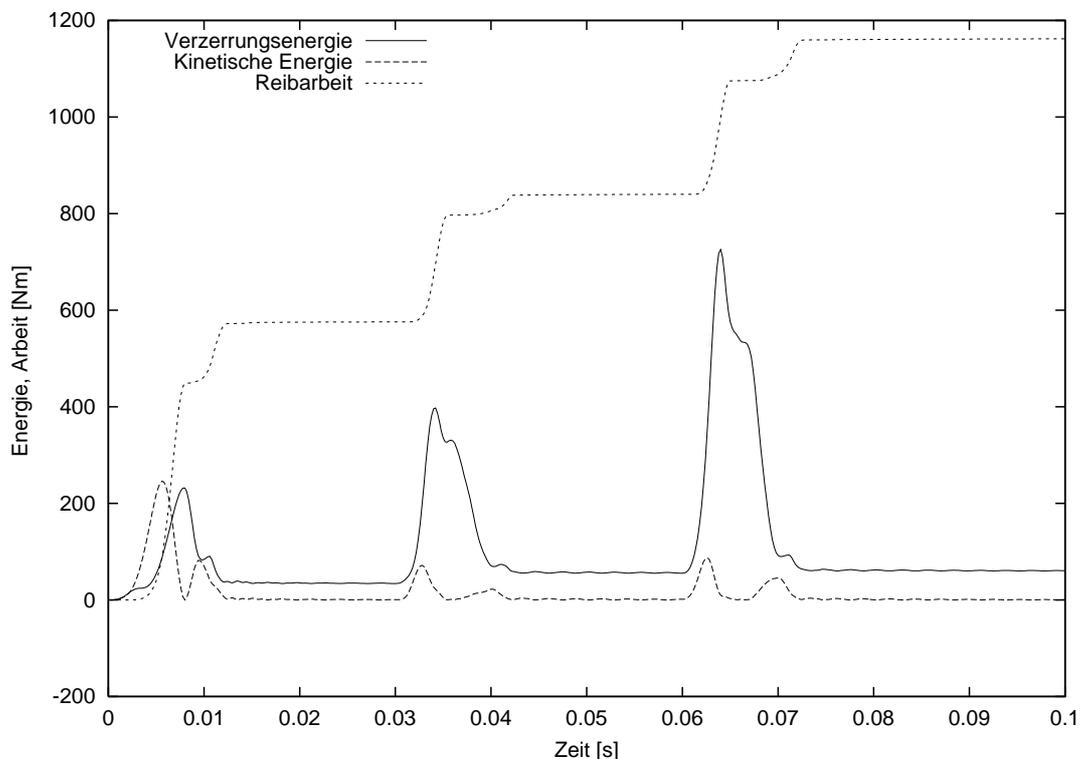


Abbildung 6.38: Darstellung der Energieverläufe während des Eindringvorganges.

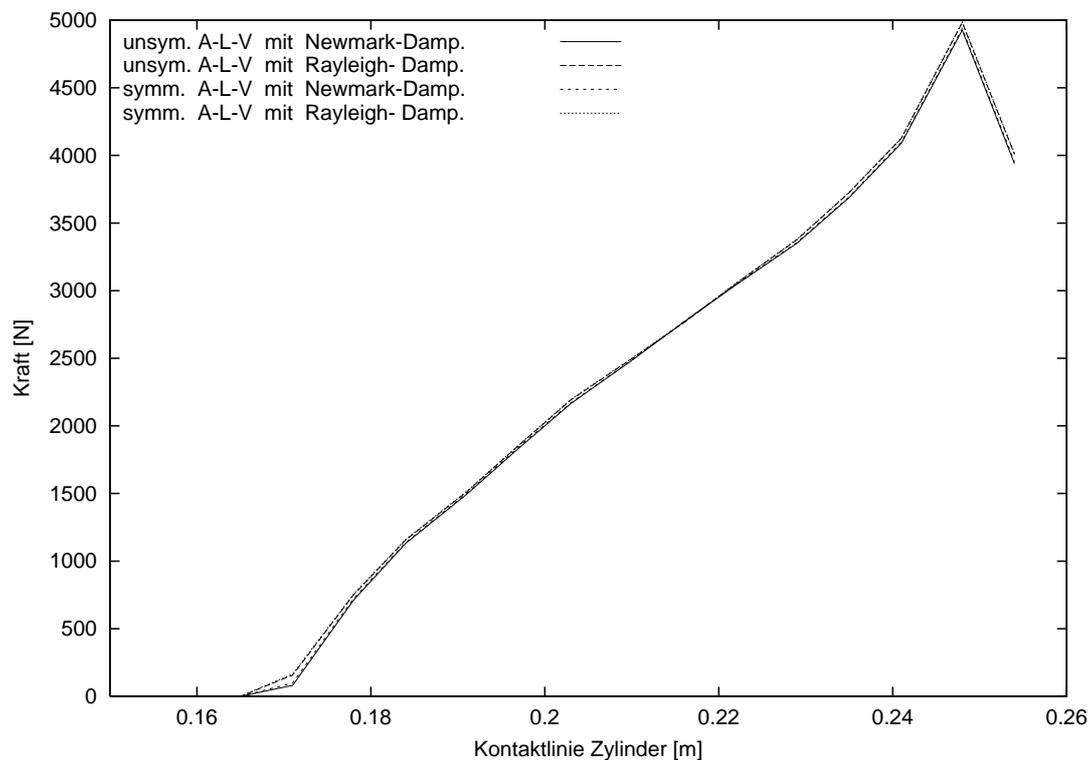
### **Gegenüberstellung der mit verschiedenen Algorithmen ermittelten Kontaktkraftverläufe**

Die Kraftverläufe der Normal- und der Haft- oder Reibkraft entlang der Kontaktlinie des mit 320 Elementen diskretisierten Zylinders werden von zwei ausgewählten Zeitpunkten dargestellt. Abbildung 6.39 zeigt die Kräfte während der letzten Schlagphase zum Zeitpunkt  $t = 0.07$  [s] und Abbildung 6.40 zeigt die Kräfte während der letzten Haftphase zum Zeitpunkt  $t = 0.10$  [s]. Auf jeder Abbildung sind die Kraftverläufe, die mit dem unsymmetrischen und dem symmetrischen Augmented-Lagrange-Algorithmus jeweils mit numerischer Dämpfung nach Newmark und geschwindigkeitsabhängiger Dämpfung nach Rayleigh ermittelt wurden, dargestellt. Es wird deutlich, dass die Kraftverläufe unabhängig vom Algorithmus sind. Die geringen Abweichungen bei den Kraftverläufen resultieren lediglich aus der unterschiedlichen Dämpfung.

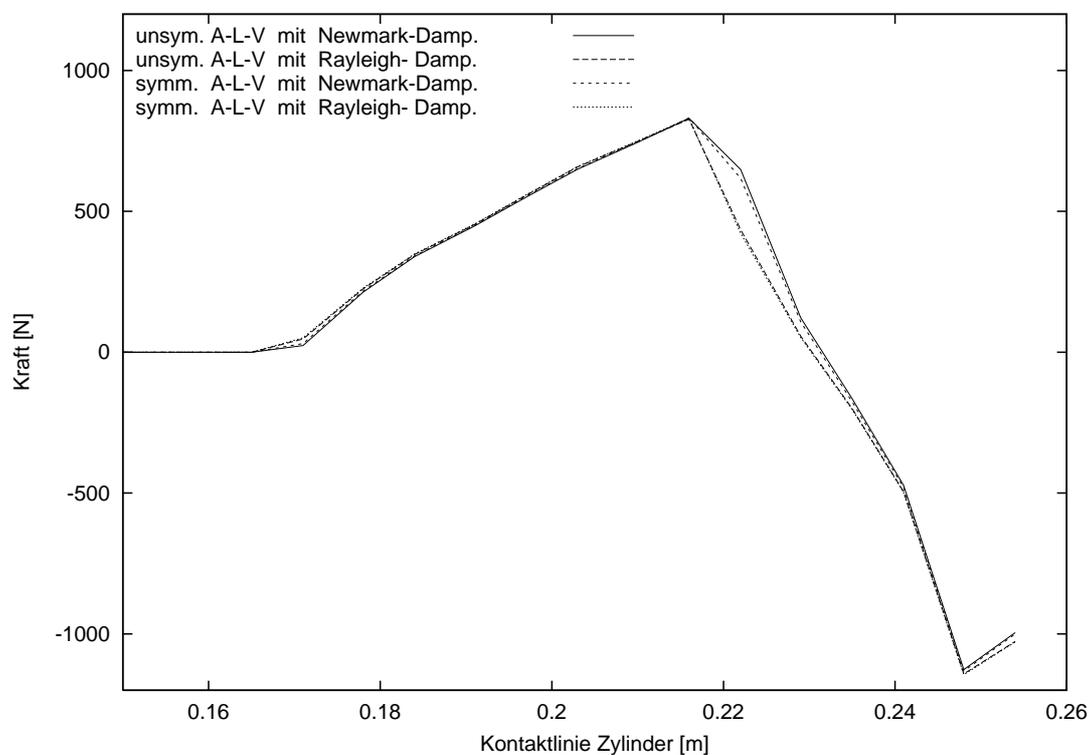
### **Gegenüberstellung der mit verschiedenen Algorithmen ermittelten maximalen Eindringtiefe**

Untersucht wird, ob die Eindringtiefe des äußeren Eckknotens des Zylinders abhängig von Algorithmen ist. In Tabelle 6.4 wurden die erreichten Eindringtiefen des äußeren Eckknotens des Zylinders aufgetragen. Als Maximum wird die größte erreichte Eindringtiefe und als Endwert wird der Haftzustand des letzten Zeitschrittes bei  $t = 0.1$  [s] bezeichnet.

Es wurden Ergebnisse mit dem unsymmetrischen und dem symmetrisierten Augmented-Lagrange-Algorithmus mit den jeweiligen Dämpfungsmöglichkeiten nach Newmark oder Rayleigh gegenübergestellt. Gleichzeitig wurden mit verschiedenen Diskretisierungen erzielte Ergebnisse aufgetragen. Während die erreichten Maximalwerte bei allen Varianten nahezu gleich sind, weisen die Endwerte des letzten Zeitschrittes geringe Unterschiede auf. Bei der Dämpfungsmöglichkeit nach Newmark verändern sich die Werte außerdem mit Änderung der Zeitschrittweite und Diskretisierung. Demnach ist diese Art der Dämpfung weniger brauchbar.

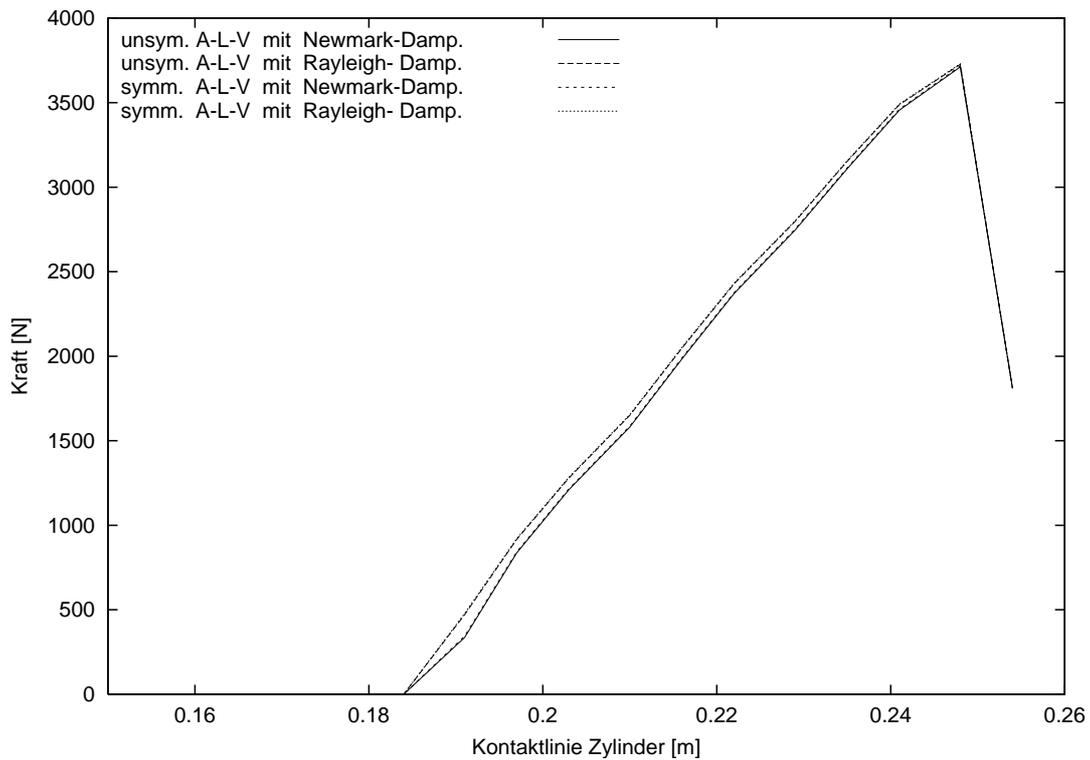


(a) Normalkraft

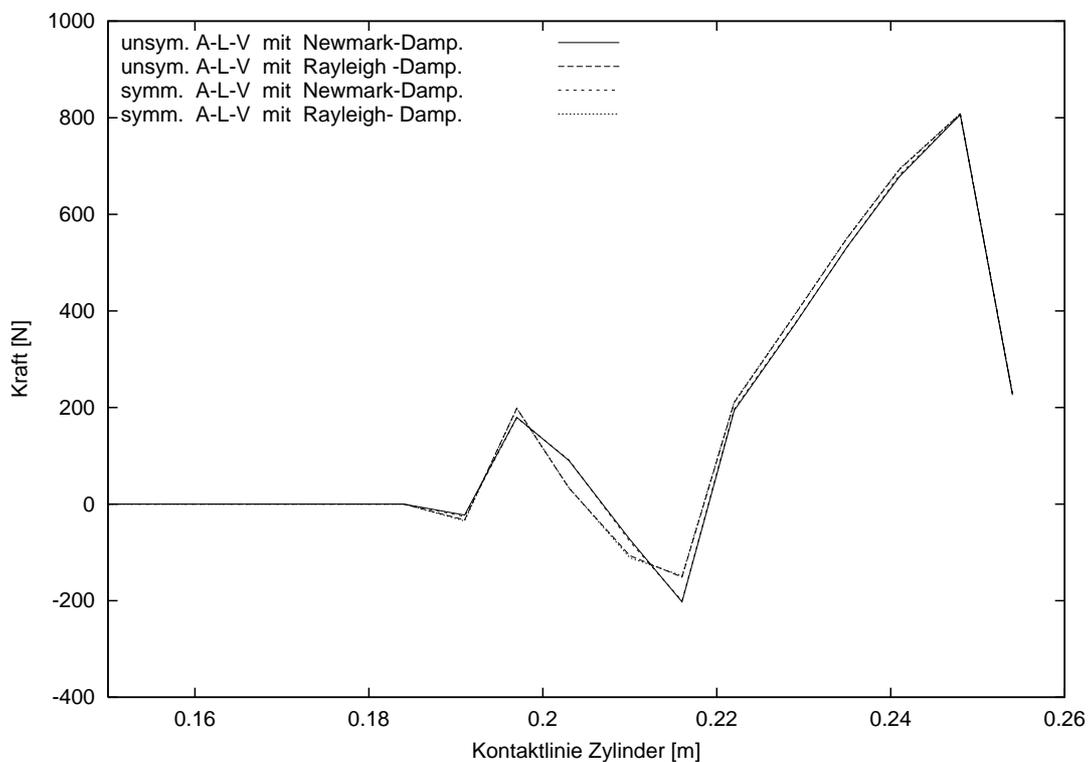


(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.39: Gegenüberstellung von mit verschiedenen Algorithmen ermittelten Kraftverläufen während einer Schlagphase zum Zeitpunkt  $t = 0.07$  [s].



(a) Normalkraft



(b) Haft- oder Reibkraft

Abbildung 6.40: Gegenüberstellung von mit verschiedenen Algorithmen ermittelten Kraftverläufen während einer Ruhephase zum Zeitpunkt  $t = 0.1$  [s].

Algorithmus:	unsymmetrisch		symmetrisiert	
Dämpfung:	Newmark	Rayleigh	Newmark	Rayleigh
Diskretisierung:	Zylinder mit 80 Elementen,		Form starr	
Maximum:	.0893	.0894	.0893	.0895
Endwert:	.0803	.0818	.0807	.0819
Diskretisierung:	Zylinder mit 80 Elementen,		Form mit 180 Elementen	
Maximum:	.0893	.0894	.0893	.0895
Endwert:	.0803	.0818	.0807	.0819
Diskretisierung:	Zylinder mit 320 Elementen,		Form starr	
Maximum:	.0894	.0894	.0894	.0894
Endwert:	.0811	.0818	.0813	.0819
Diskretisierung:	Zylinder mit 320 Elementen,		Form mit 180 Elementen	
Maximum:	.0894	.0894	.0894	.0894
Endwert:	.0811	.0818	.0813	.0819
Diskretisierung:	Zylinder mit 320 Elementen,		Form mit 720 Elementen	
Maximum:	.0894	.0894	.0895	.0894
Endwert:	.0811	.0818	.0820	.0819

Tabelle 6.4: Gegenüberstellung der Eindringtiefe [m] in Abhängigkeit der Algorithmen, Dämpfungsart und Diskretisierung.



# Kapitel 7

## Gegenüberstellung experimenteller Untersuchungen und numerischer Simulationen

### 7.1 Vorbemerkungen

Für die numerische Simulation von Stoßvorgängen werden stoffgesetzliche Beziehungen für das Kontakt- und Reibverhalten benötigt. Da derartige Beziehungen nur experimentell ermittelt werden können, wurden im Rahmen eines DFG-Forschungsvorhabens von EIBL & HOFFMANN [1995] die Reibvorgänge zwischen Stahl und Betonoberflächen untersucht. Dabei wurden Untersuchungen speziell zum Eindringverhalten eines Stahlkonus in einen Betonkreisring, wie bereits in Kapitel 2.5 aufgeführt, vorgenommen. Da bei diesen Untersuchungen konzeptbedingt die Reibkräfte nicht direkt gemessen werden konnten, musste für die Auswertung ein Starrkörpermodell herangezogen werden. Auf der Basis der dabei gewonnenen Versuchsergebnisse wurde anhand dieses Modells ein druck- und geschwindigkeitsabhängiges Reibgesetz entwickelt.

Um die nach Beendigung des Forschungsvorhabens noch nicht erfolgte vergleichende Gegenüberstellung mit Hilfe der numerischen Simulation durchzuführen, werden im vorliegenden Kapitel die folgenden Untersuchungen vorgenommen:

- Numerische Prüfung der Eignung dieses entwickelten Reibgesetzes durch Implementierung in die erstellten Kontaktalgorithmen,
- Heranziehung des ermittelten Reibgesetzes zur Simulation der Versuche, und
- Überprüfung der Eignung des vereinfachten Starrkörpermodells in Hinblick auf die Erfassung der wesentlichen mechanischen Zusammenhänge.

## 7.2 Versuchskonzeption

### Versuchskonzept und Aufbau

Bei diesem DFG–Forschungsvorhaben wurde ein Stahlkonus in einen Betonkreisring gedrückt, dessen äußere Mantelfläche von einem Stahlring begrenzt und dessen innere Mantelfläche konusförmig war, wobei der Öffnungswinkel demjenigen des Stahlkonus entsprach. Abbildung 7.1 zeigt das Versuchskonzept, mit dem statische und dynamische Versuche durchgeführt wurden.

Der Stahlkonus liegt bereits mit seiner Mantelfläche auf der inneren Mantelfläche des in Segmente geteilten Betonkreisringes vollständig auf und stellt damit schon vor Versuchsbeginn Kontakt zwischen Stahl und Beton her. Durch eine senkrecht zum Betonkreisring angreifende Kraft wird der Konus in die innere Öffnung des Kreisringes eingedrückt.

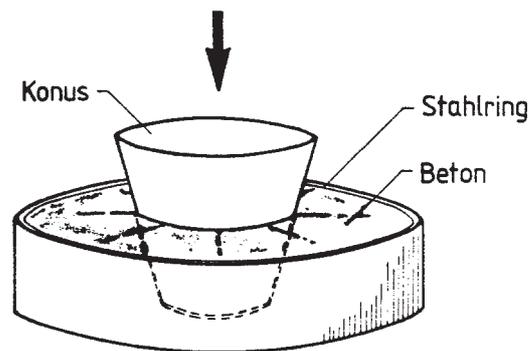


Abbildung 7.1: Versuchskonzept: Eindringen eines Konus in einen Betonkreisring.

Bedingt durch die Keilwirkung will sich der Betonkreisring radial nach außen bewegen. Dem entgegen wirkt der den Betonkreisring umfassende Stahlring. Mit zunehmender Eindringtiefe des Konus steigt der Anpressdruck auf der Kontaktfläche an. Die Größe der Kontaktfläche bleibt während des Eindringens konstant, da die Höhe des Konus größer als die des Betonkreisringes ist. Aufgrund der Keilwirkung des Konus nehmen während des Eindringvorganges der Gleitweg und die Normalkraft zu.

Um dabei eine hohe Eindringtiefe zu erreichen, wurde zwischen dem Stahl- und dem Betonkreisring eine ebenfalls segmentierte Elastomerschicht angeordnet. Sie diente zur Unterstützung der Federwirkung des Stahlringes.

Durch die auf den Stahlkonus einwirkende Kraft entsteht an der Kontaktfläche zwischen der Mantelfläche des Konus und der inneren, geneigten Fläche des Betonkreis-

ringes eine Reibkraft. Da diese Reibkraft konzeptbedingt nicht unmittelbar gemessen werden kann, muss sie rechnerisch mit Hilfe des Starrkörpermodells ermittelt werden.

Der Aufbau des statischen Versuches wird in Abbildung 7.2 gezeigt. Die auf den Stahlkonus einwirkende Anpresskraft wurde als äußere Kraft von einer Prüfmaschine aufgebracht. Ziel dieses statischen Versuches war die Bestimmung aller notwendigen Größen, um die Kräfte auf der Kontaktfläche bestimmen zu können. Abbildung 7.3 zeigt den Versuchsaufbau zu Beginn (a) und während des Eindringens (b).

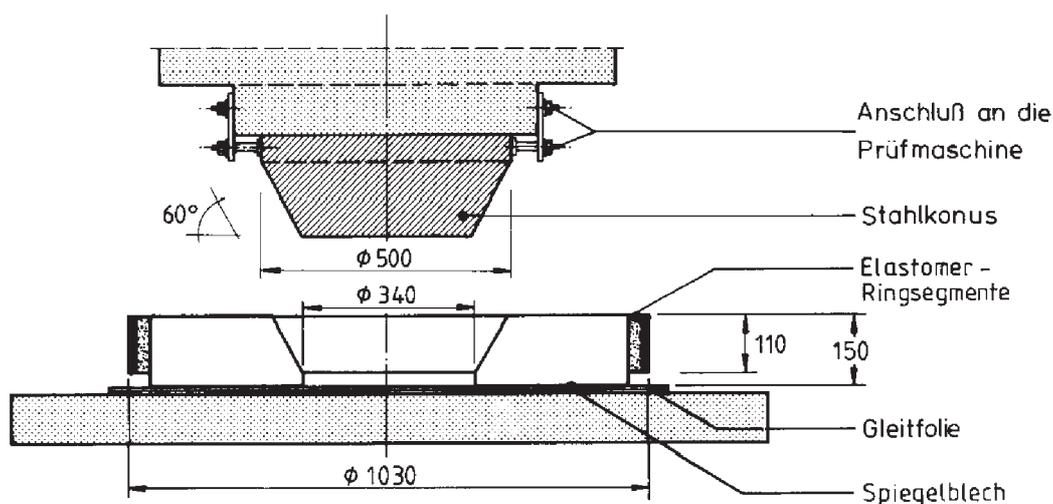
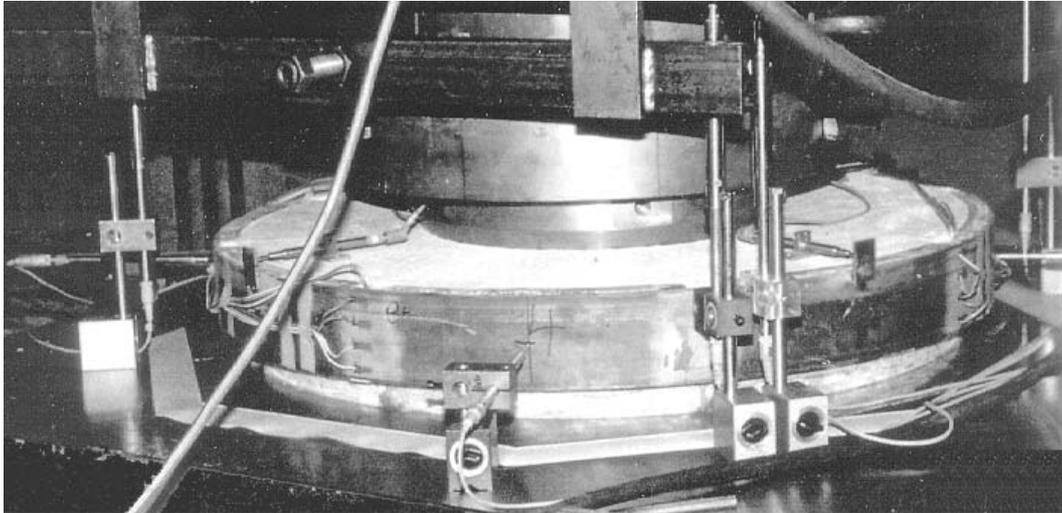
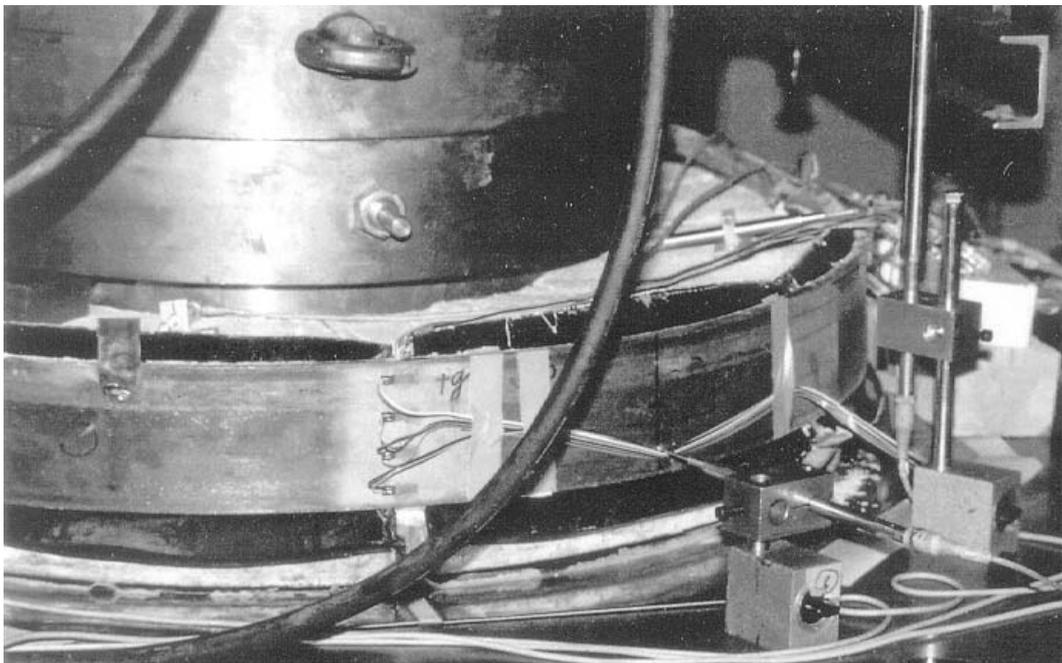


Abbildung 7.2: Versuchsaufbau des statischen Versuches. Längenangaben in [mm].

Um anschließend dynamische Effekte beim Reibverhalten untersuchen zu können, wurde der oben erläuterte, im statischen Versuch bereits erprobte Aufbau zusammen mit einer Fallmassenanlage benutzt. Abbildung 7.4 zeigt den Versuchsaufbau. Eine in einem Fallrohr geführte Stahlmasse wurde durch die Schwerkraft beschleunigt und stieß von oben auf den Konus. Die einwirkende Kraft entsteht hierbei durch einen Stoß der Fallmasse auf den Konus. Der durch den Stoß beschleunigte Konus drang dann zentrisch in den segmentierten Betonkreisring ein. Ziel der dynamischen Versuche war es, ebenso wie bei den statischen Versuchen, die während des Eindringvorganges auf der Kontaktfläche entstehenden Kräfte zu ermitteln. Aufgrund des komplexen Aufbaus, des instationären Ablaufes und der zu messenden Beschleunigungen zur Ermittlung der Massenkräfte war die Messtechnik wesentlich aufwendiger als bei den statischen Versuchen.



(a) Zu Beginn



(b) Während des Eindringens

Abbildung 7.3: Blick auf den Versuchsaufbau.

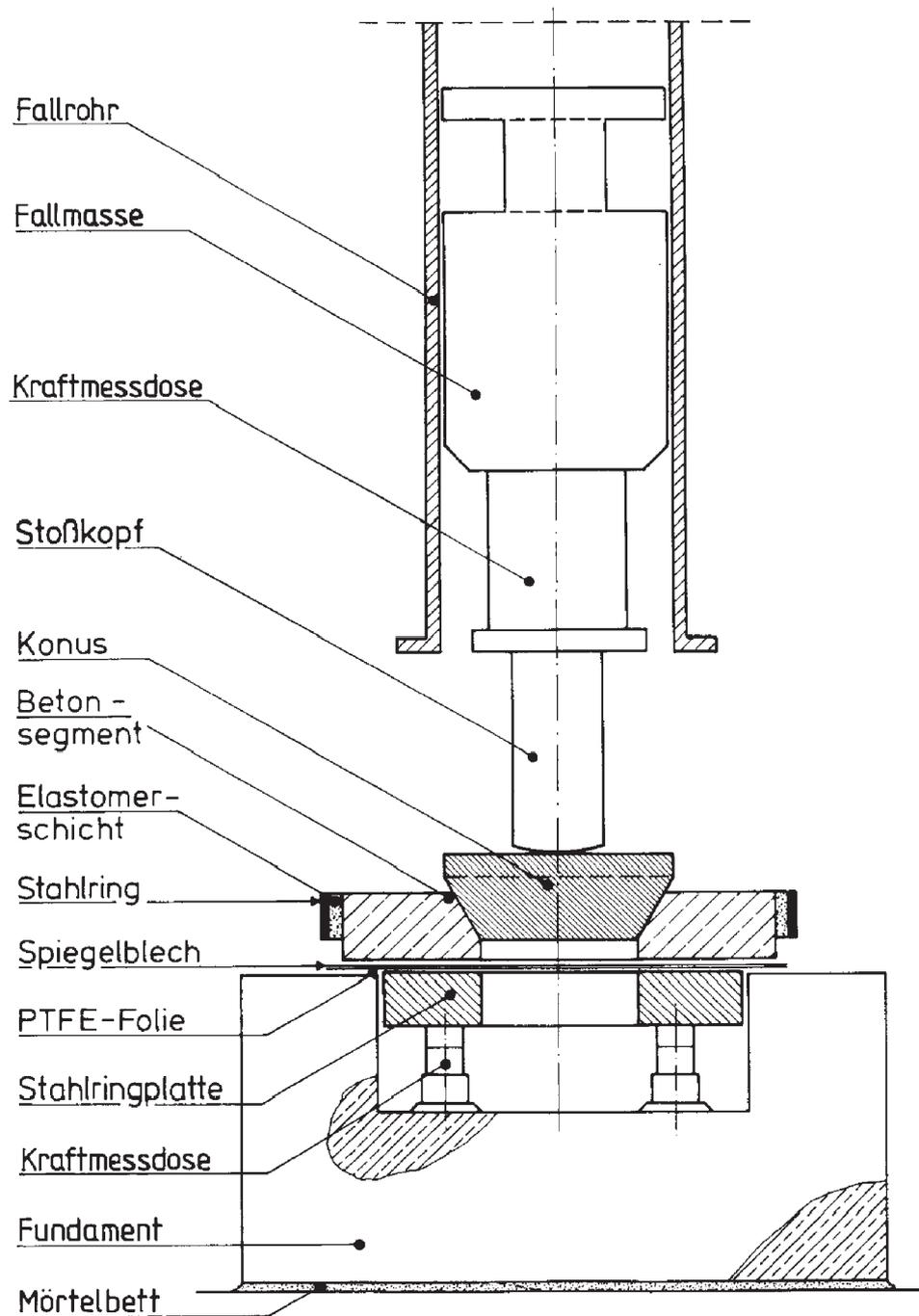


Abbildung 7.4: Versuchsaufbau mit Fallmassenanlage.

### Starrkörpermodell

Da die Reibkraft konzeptbedingt nicht unmittelbar gemessen werden kann, muss sie rechnerisch aus den im Versuch messbaren Kraft- und Weggrößen bestimmt werden. Zur Ermittlung dient ein Starrkörpermodell. Es ist rotationssymmetrisch und besteht aus einem oberen und einem unteren Teilsystem, die in Kontakt stehen, siehe Abbildung 7.5. Anhand dieses Modells werden der Reibbeiwert  $\mu(t)$  und die Normalkraft  $n(t)$  auf der Kontaktfläche ermittelt:

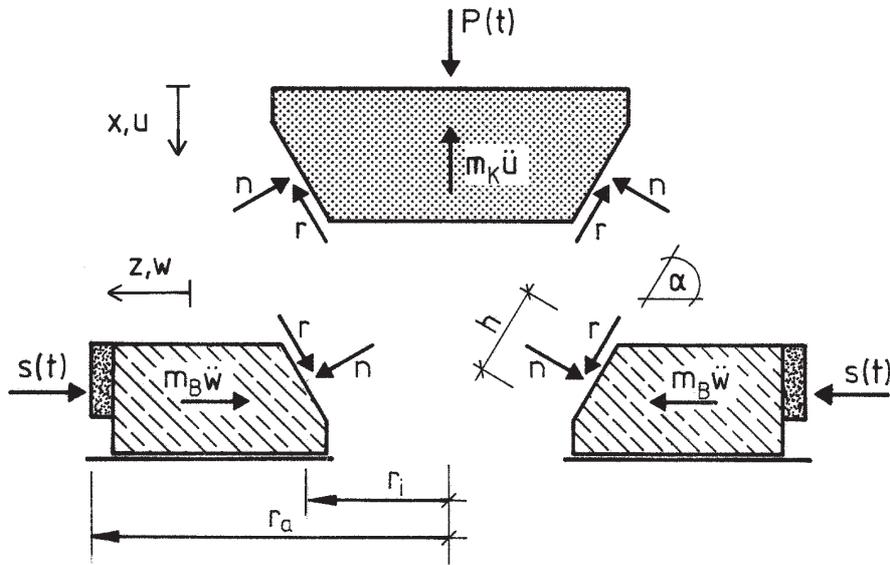


Abbildung 7.5: Zur Auswertung herangezogenes Starrkörpermodell.

Mit Hilfe der Beziehung für die Reibkraft  $r(t) = \mu(t) n(t)$  und den Gleichgewichtsbedingungen des oberen Teilsystems mit

$$n(t) = \frac{P(t) - m_K \ddot{u}}{2\pi r_i (\cos\alpha + \mu(t) \sin\alpha)} \quad (7.1)$$

und des unteren Teilsystems mit

$$n(t) = \frac{2\pi r_a s(t) + m_B \ddot{w}}{2\pi r_i (\sin\alpha - \mu(t) \cos\alpha)} \quad (7.2)$$

ergibt sich, da die Normalkräfte  $n(t)$  der beiden Teilsysteme auf der Kontaktfläche gleich sind, der Reibbeiwert durch Gleichsetzen der Gleichungen (7.1) und (7.2) zu

$$\mu(t) = \frac{-(s(t)2\pi r_a + m_B \ddot{w})\cos\alpha + (P(t) - m_K \ddot{u})\sin\alpha}{(s(t)2\pi r_a + m_B \ddot{w})\sin\alpha + (P(t) - m_K \ddot{u})\cos\alpha} \quad (7.3)$$

Die während der Versuche aufgenommenen Werte für die Kräfte, Beschleunigungen und Dehnungen, werden zu Kraft–Zeit–Verläufen aufbereitet. Um den Reibbeiwert–Zeit–Verlauf zu ermitteln, werden diese Zeitverläufe für die Kraft  $P(t)$ , für die Massenkräfte  $m_B\ddot{w}$  und  $m_K\ddot{u}$  und für die im Stahlring ermittelten Ringzugkraft  $s(t)r_a$  in Gleichung (7.3) eingesetzt. Im statischen Fall sind die Massenkräfte  $m_B\ddot{w}$  und  $m_K\ddot{u}$  zu vernachlässigen.

### Versuchsergebnisse

Nach Durchführung der experimentellen Untersuchungen und anschließender Auswertung mit dem Starrkörpermodell ließen sich folgende Aussagen treffen:

- Der Reibbeiwert nimmt bei steigendem Druck ab. Das Verhältnis von Reib- zu Normalkraft ist sublinear.
- Trotz der bei dynamischen Versuchen auftretenden Schwierigkeiten kann festgestellt werden, dass bei zunehmender Gleitgeschwindigkeit der Reibbeiwert abnimmt.
- Beide Effekte überlagern sich.

Erste physikalische Erklärungen wurden hierzu in Kapitel 2.5 gegeben. Die lokale Zerstörung der Betonoberfläche nach dem Eindringen zeigt Abbildung 7.6.

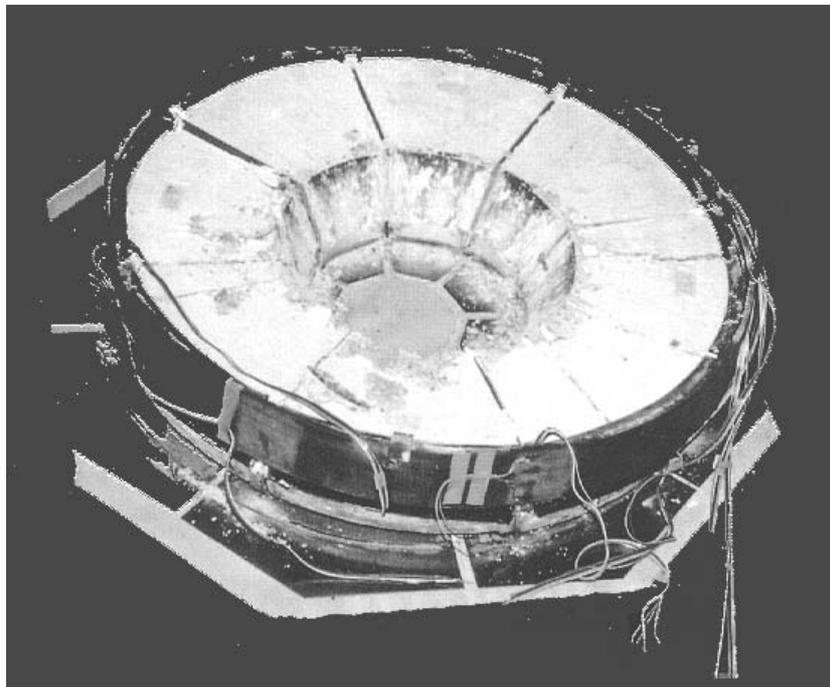


Abbildung 7.6: Blick auf die Betonsegmente nach Versuchsende.

## 7.3 Simulation des statischen Versuches

### Numerische Modellierung des statischen Versuches

Für die Durchführung der numerischen Untersuchungen wurde der Versuchsaufbau mit finiten Elementen diskretisiert und unter folgenden Bedingungen modelliert:

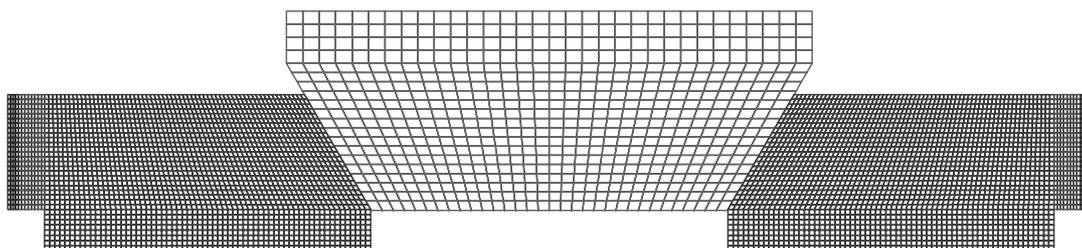
- Diskretisiert wurde eine Hälfte des rotationssymmetrischen Aufbaus mit insgesamt 2656 Elementen. Abbildung 7.7 (a) zeigt den diskretisierten Aufbau im Ausgangszustand. Die Betonsegmente wurden in horizontaler Richtung verschieblich gelagert.
- Alle Werkstoffe wurden linear elastisch abgebildet. Wegen der Segmentierung des Betonkreisringes und der Elastomerschicht zur Vermeidung von Spannungen in Umfangsrichtung wurden diese beiden Teilkörper numerisch als ebener Verzerrungszustand behandelt.
- Als Belastung wurde eine über die Oberseite des Stahlkonus konstante Verschiebung von 30 [mm] in insgesamt 100 Schritten von null an linear ansteigend vorgenommen. Abbildung 7.7 (b) zeigt den Zustand nach dem Eindringen.
- Die Masterseite wurde am Konus und die Slaveseite auf den Betonsegmenten mit jeweils 25 Knoten definiert. Als Penaltyfaktoren wurden  $\epsilon_N = 10^4$  [MN/m] und  $\epsilon_T = 10^2$  [MN/m] gewählt.
- Materialdaten:

	Konus	Betonsegment	Elastomer	Stahlring
E-Modul [MN/m <sup>2</sup> ] :	210000.00	34000.00	31.25	200000.00
Querdehnzahl [-] :	0.30	0.20	0.45	0.30
Dichte [kg/m <sup>3</sup> ] :	8000.0	2300.0	1000.0	8000.0
Anzahl der Elemente :	320	2048	192	96

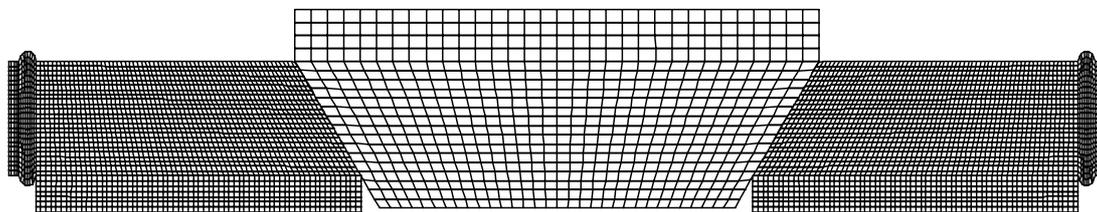
- Geometriedaten:

Eckknoten [m]	Konus	Betonsegment	Elastomer	Stahlring
$(x_1, y_1)$ :	0.00000 0.039	0.17000 0.00	0.480 0.04	0.505 0.04
$(x_2, y_2)$ :	0.16942 0.039	0.48000 0.00	0.505 0.04	0.515 0.04
$(x_3, y_3)$ :	0.25000 0.180	0.48000 0.15	0.505 0.15	0.515 0.15
$(x_4, y_4)$ :	0.25000 0.230	0.23285 0.15	0.480 0.15	0.505 0.15
$(x_5, y_5)$ :	0.00000 0.230	0.17000 0.04		

Eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen und der wesentlichen Ergebnisse wird in den folgenden Abschnitten dieses Unterkapitels gegeben. Zuerst werden dem Versuchsergebnis Untersuchungsergebnisse mit linearen Reibgesetzen, anschließend mit anhand des Starrkörpermodells ermittelten nichtlinearen Reibgesetzen gegenübergestellt und diskutiert.



(a) Ausgangszustand



(b) Zustand nach dem Eindringen

Abbildung 7.7: Darstellung der diskretisierten Struktur.

### Numerische Untersuchungen mit linearen Reibgesetzen

Zu Beginn der Gegenüberstellung wurden, um das grundlegende Verhalten und den prinzipiellen Einfluss der Reibung zu untersuchen, Berechnungen mit konstanten Reibbeiwerten durchgeführt. Als Reibbeiwerte wurden  $\mu = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  und  $1.0$  gewählt.

Um die Kraftverläufe der numerischen Untersuchungen mit denjenigen aus dem statischen Versuch vergleichen zu können, werden

- die numerisch ermittelte Anpresskraft  $P(t)$  aus der Summation der Reaktionskräfte an der Konusoberfläche,
- die numerisch ermittelte Stahlringzugkraft  $[s(t)r_a]$  aus der Integration der Spannungen  $\sigma_{33}$  des Stahlringes und
- die resultierende Kontaktkraft in Normalenrichtung  $[2\pi r_i n(t)]$  aus der Summation aller Slaveknotenkräfte auf der Kontaktfläche

ermittelt.

Anschließend wurden diese Größen aus den verschiebungsgesteuerten numerischen Untersuchungen denjenigen aus dem Versuch beziehungsweise den mit Hilfe des Starrkörpermodells ermittelten Größen gegenübergestellt. Die Ergebnisse können den Abbildungen 7.8 und 7.9 entnommen werden. Die Verläufe der Anpresskraft  $P(t)$  über der Stahlringzugkraft  $[s(t)r_a]$  und die Verläufe der Anpresskraft  $P(t)$  über der resultierenden Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$  auf der Kontaktzone während des Eindringens sind in den Abbildungen 7.8 (a) und (b) aufgetragen. Die Verläufe der Anpresskraft  $P(t)$  und der Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$  über den Eindringweg  $[u(t)]$  zeigen die Abbildungen 7.9 (a) und (b).

Bei den Berechnungen mit konstantem Reibbeiwert sind die Verhältnisse der Kräfte und Wege während des Eindringens jeweils konstant. Bei Verwendung unterschiedlicher Reibbeiwerte verändern sich diese Verhältnisse, da sich hierdurch die Größe und die Richtung der resultierenden Kontaktkräfte verändern. Dieses Verhalten ist analog zu Betrachtungen, welche am Starrkörpermodell gewonnen wurden.

Da die Verformungen des Systems bei der gewählten Materialkombination dieses Verhalten nicht beeinflussen, lässt sich aussagen, dass das Starrkörpermodell prinzipiell für die Auswertung der statischen Versuche geeignet ist.

Die auf Messungen des Versuches basierenden Größen  $P(t)$  stehen dagegen in einem nichtlinearen Zusammenhang mit  $[s(t)r_a]$ . Als Ursache hierfür wird ein nichtlineares Reibverhalten angenommen.

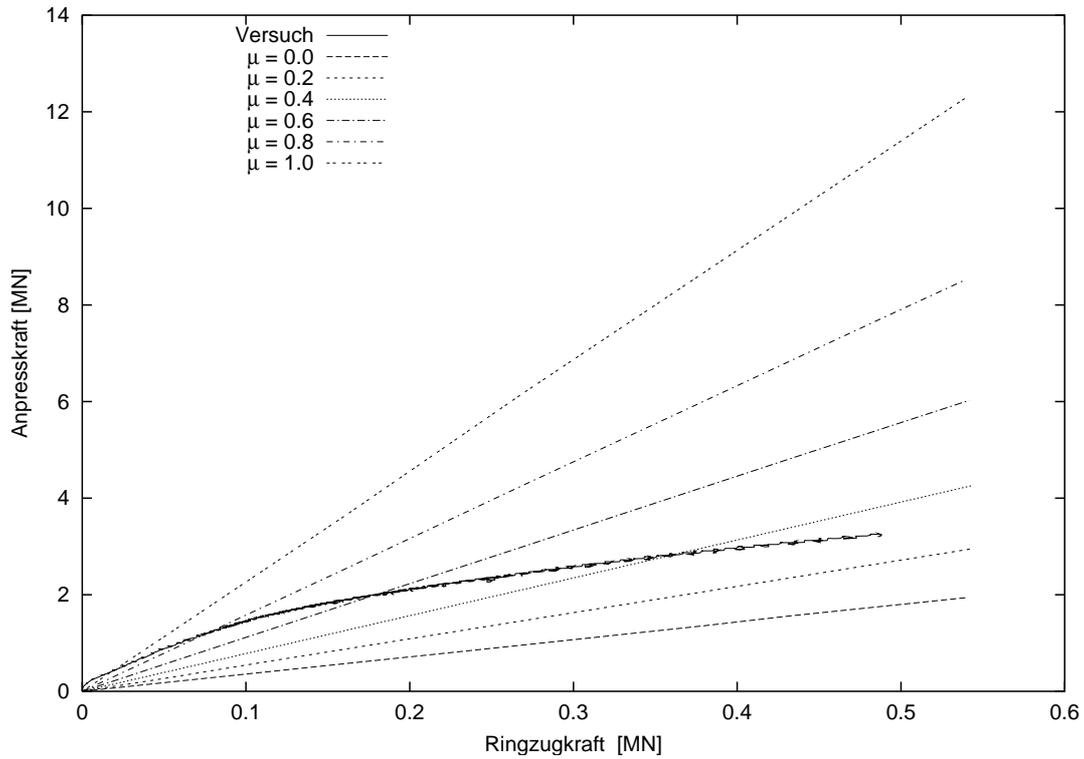
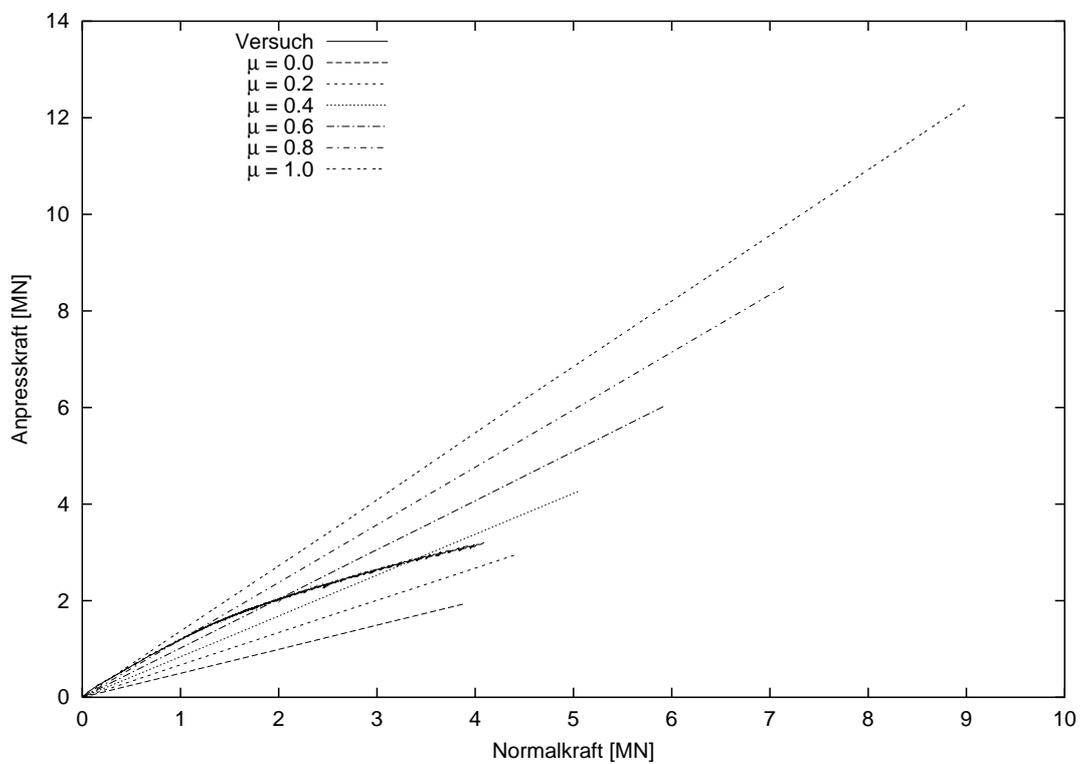
(a) Anpresskraft  $P(t)$  über Ringzugkraft  $s(t)r_a$ (b) Anpresskraft  $P(t)$  über Normalkraft  $2\pi r_i n(t)$ 

Abbildung 7.8: Gegenüberstellung von Kraft–Kraft–Verläufen von Messungen aus dem Versuch und numerischen Berechnungen mit verschiedenen konstanten Reibbeiwerten  $\mu$ .

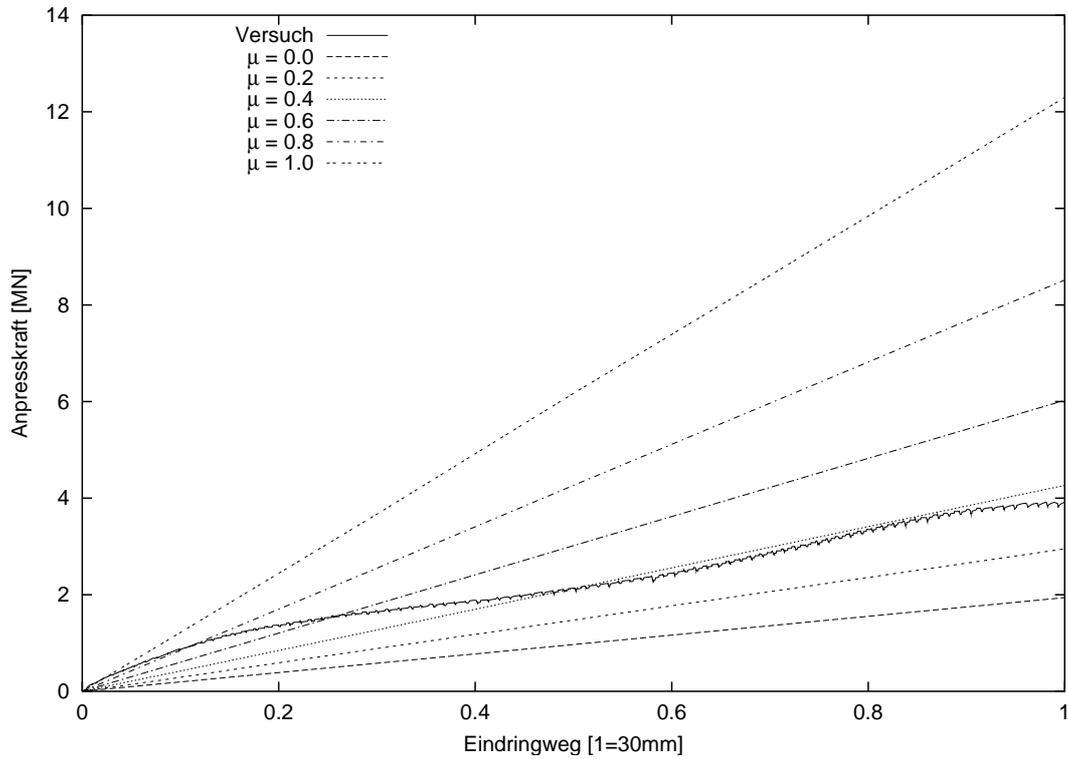
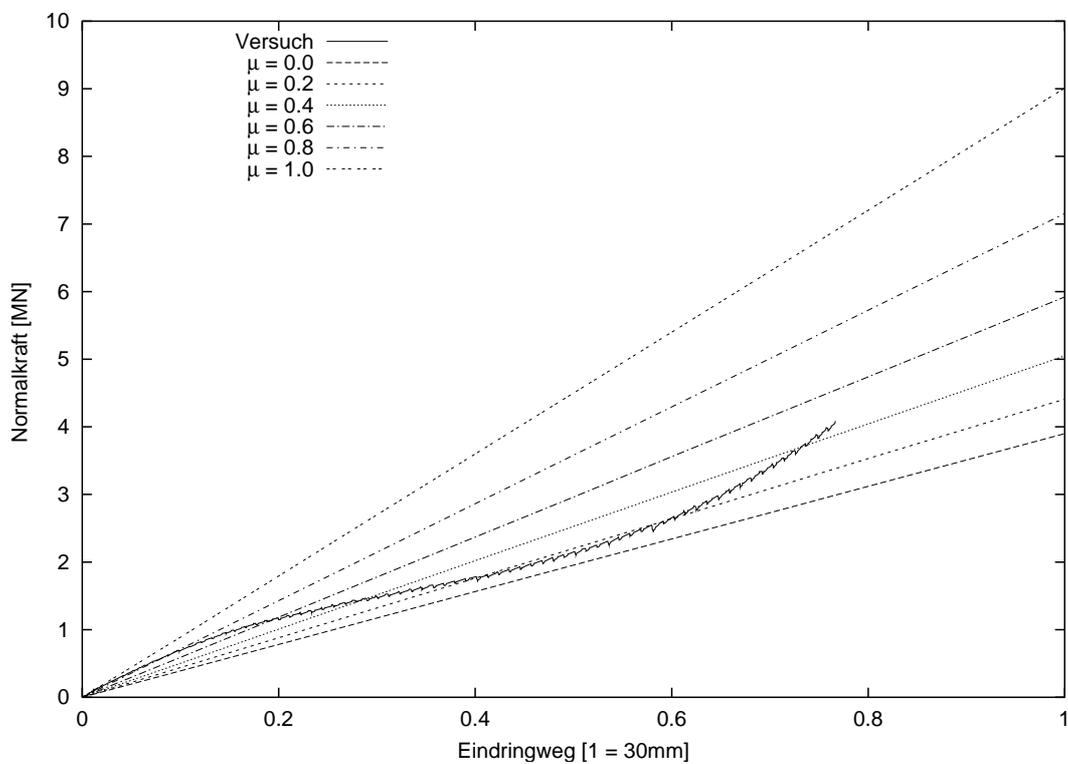
(a) Anpresskraft  $P(t)$  über Eindringweg  $u(t)$ (b) Normalkraft  $2\pi r_i n(t)$  über Eindringweg  $u(t)$ 

Abbildung 7.9: Gegenüberstellung von Kraft–Weg–Verläufen von Messungen aus dem Versuch und numerischen Berechnungen mit verschiedenen konstanten Reibbeiwerten  $\mu$ .

### Zur Simulation mit nichtlinearen Reibgesetzen

Als Ergebnis der experimentellen Untersuchungen konnten die Normal- und die Reibkraft, die anhand der Messergebnisse und mit Hilfe des Starrkörpermodells ermittelt wurden, gemeinsam dargestellt werden. Als Basis für die Simulation und als Vorschlag für ein **nichtlinear druckabhängiges Reibgesetz** wurde mit Hilfe der nichtlinearen Regressionsanalyse eine zu diesen Versuchsergebnissen passende Funktion bestimmt. Diese Funktion wurde bereits in Kapitel 2.5.3 vorgestellt. Abbildung 7.10 zeigt die resultierenden Kontaktkräfte des Starrkörpermodells und den Verlauf der dazu ermittelten Funktion. Diese resultierenden Kontaktkräfte ergeben sich in Normalenrichtung mit  $[\sigma_N \ 2\pi r_i \ h]$  und in Tangentialrichtung mit  $[\sigma_T \ 2\pi r_i \ h]$ .

Die für die numerische Umsetzung zu einer Gleitregel umgeformte Funktion lautet:

$$f_{S-B,s}(\sigma_N, \sigma_T) = 0 = -8.88 (1 - e^{-0.125 |\sigma_N|}) + \sigma_T \quad (7.4)$$

Die zugehörige benötigte Tangente lautet:

$$\frac{df_{S-B,s}(\sigma_N, \sigma_T)}{d\sigma_N} = 1.11 e^{-0.125 |\sigma_N|} \quad (7.5)$$

Damit ergibt sich folgende Funktion für den Verlauf des Reibbeiwertes über die Normalkraft:

$$\mu_{S-B,s}(\sigma_N) = 8.88 (1 - e^{-0.125 |\sigma_N|}) 1/|\sigma_N| \quad (7.6)$$

Abbildung 7.11 stellt die Verläufe der Reibbeiwerte in Abhängigkeit der resultierenden Normalkraft aus dem Versuch und des anhand dieser Funktion ermittelten gegenüber.

Als erste Stufe der numerischen Simulation wird analog zum Vorgehen mit dem Starrkörpermodell lediglich mit einer resultierenden Kontaktkraft gerechnet. Dabei wird der Kontakt nur über einen Slaveknoten, der in der Mitte der Kontaktfläche angeordnet ist, hergestellt. Damit ist sichergestellt, dass analog zur Versuchsauswertung die Spannungsverteilung über die Kontaktfläche konstant ist. Anschließend werden entsprechend der Diskretisierung des Modells Berechnungen mit 25 Slaveknoten durchgeführt.

Aufgrund der in Abbildung 7.16 dargestellten Versuchsergebnisse ergibt sich eine zweite Möglichkeit zur Interpretation. Bei dieser Abbildung ist der aus Messdaten ermittelte Reibbeiwert über dem Eindringweg aufgetragen: Er fällt nach Durchlaufen eines Maximums über den Eindringweg linear ab. Als Folgerung daraus wird als Alternative ein Reibgesetz vorgeschlagen, bei dem der **Reibbeiwert wegabhängig**

ist. Für eine Simulation mit diesem alternativen Reibgesetz wird der folgende vereinfachte bilineare Ansatz aufgestellt:

$$\begin{aligned} |g_T| \geq 0.003 & : \mu(g_T) = 1.20 - 112.74 |g_T| \\ |g_T| < 0.003 & : \mu(g_T) = 0.92 - 23.11 |g_T| \end{aligned}$$

Untersuchungen mit diesem Reibgesetz werden gemeinsam mit den anderen im folgenden Abschnitt dargestellt.

### **Besonderheit bei der numerischen Umsetzung**

Bei der Anwendung einer Gleitregel mit nichtlinearer Druckabhängigkeit ergibt sich im Rahmen des Master–Slave–Konzeptes eine prinzipbedingte Besonderheit:

- Grundsätzlich sind die Größen der Normalkräfte auf der Kontaktfläche abhängig von der Diskretisierung beziehungsweise von der Anzahl der Slaveknoten. Die Summe aller Normalkräfte im Kontaktbereich beziehungsweise die Spannung bleibt konstant.
- Die numerische Anwendung der Gleitregel erfolgt knotenweise entlang der Kontaktlinie. Je feiner die Kontaktfläche diskretisiert ist, um so geringer sind im Kontaktfall die Beträge der einzelnen Normalkräfte der zugehörigen Kontaktknoten. Bei Anwendung eines sublinear druckabhängigen Reibgesetzes wird im Gleitzustand das Verhältnis der Reibkraft zur Normalkraft wegen der geringeren Beträge der Eingangsgrößen relativ hoch sein. Das liegt daran, dass wegen der feinen Diskretisierung die Normalkräfte, die als Eingangsgrößen der Gleitregel dienen, geringer sind als bei einer groben Diskretisierung. Dies führt fälschlicherweise bezogen auf den gesamten Kontaktbereich zu einer höheren Reibkraft.
- Im **nichtlinearen Fall** muss daher die **Anwendung der Gleitregel mit Spannungen** oder **mit Gesamtkräften** bzw. **gemittelten Kräften über eine Fläche** erfolgen. Ansonsten sind die Ergebnisse direkt von der Diskretisierung abhängig.

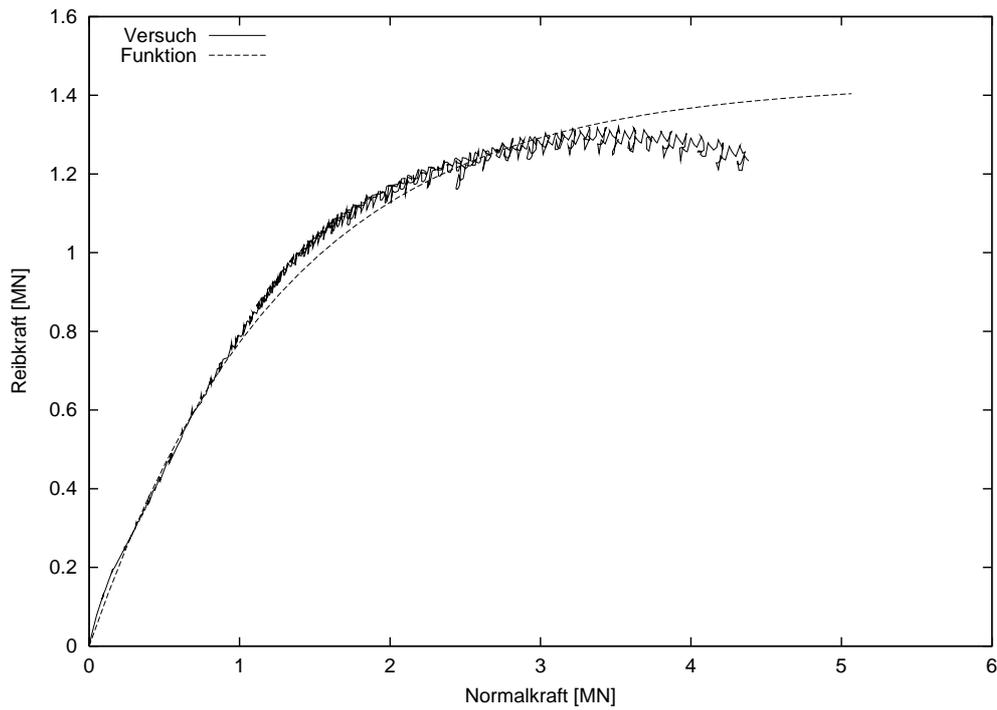


Abbildung 7.10: Ermittlung der Funktion  $f_{S-B,s}$  aus den aus dem Versuch anhand des Starrkörpermodells ermittelten Kraftverläufen.

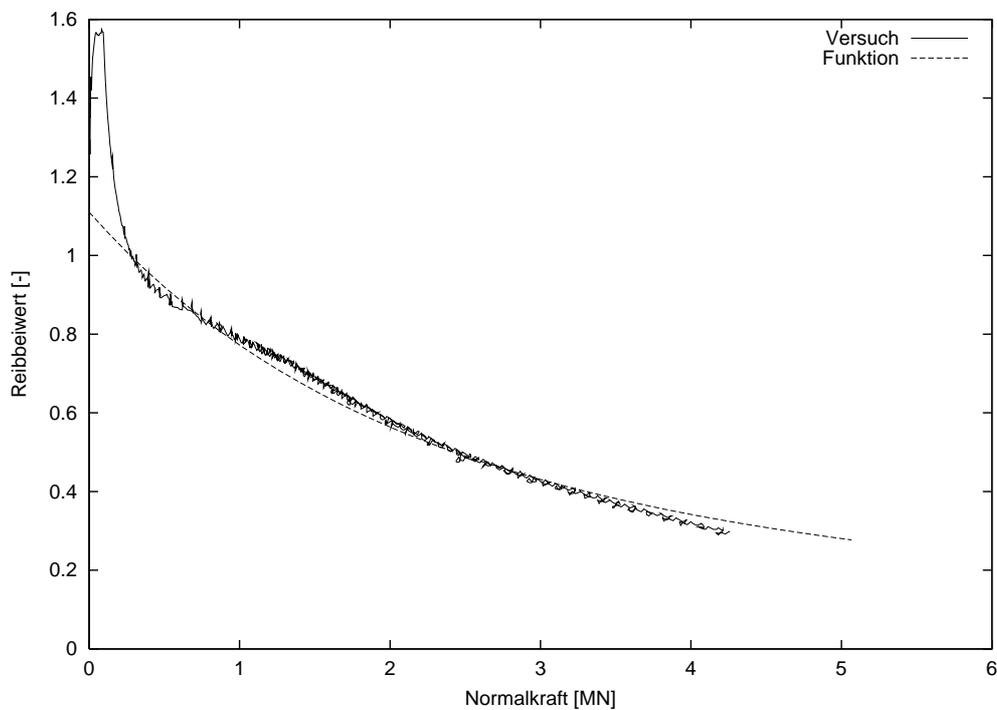


Abbildung 7.11: Ermittlung des Reibbeiwertes  $\mu_{S-B,s}$  aus den aus dem Versuch anhand des Starrkörpermodells ermittelten Kraftverläufen.

**Untersuchungen mit weiteren Parametervariationen**

Im Folgenden werden Versuchsergebnisse mit Größen aus numerischen Untersuchungen gegenübergestellt.

Bei diesen Berechnungen werden Varianten mit

- dem wegabhängigen Reibgesetz  $\mu(g_T)$ ,
- dem druckabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}$  und
- dem druckabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}$  mit nur einem Slaveknoten untersucht.

Abbildung 7.12 (a) zeigt den Verlauf der Anpresskraft  $P(t)$  über der Ringzugkraft  $[s(t)r_a]$  und Abbildung 7.12 (b) den Verlauf der Anpresskraft  $P(t)$  über der Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$ . Beide Darstellungen lassen nahezu gleiche Aussagen zu: Die Lösungen mit druckabhängigem Reibgesetz  $f_{S-B,s}$  stimmen sehr gut mit den Größen aus dem Versuch überein. Die relativen Abweichungen dieser beiden Lösungen verringern sich während des Eindringvorganges. Die Ursache dafür ist in der räumlichen Verteilung der Reibkraft zu suchen. Am Ende des Eindringvorganges ist sie, wie im folgenden Abschnitt noch näher erläutert wird, nahezu konstant über der Kontaktfläche. Dann ist die Reibkraftverteilung über die Fläche beider Rechenläufe nahezu gleich.

Die Verläufe mit dem alternativ vorgeschlagenen wegabhängigen Reibgesetz  $\mu(g_T)$  stimmen besonders im mittleren Bereich weniger gut mit denen aus dem Versuch überein. Eine mögliche Erklärung hierzu wird anhand der Verläufe der Anpresskraft  $P(t)$  und der Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$  über dem Eindringweg  $u(t)$  in den Abbildungen 7.13 deutlich. Bei den rechnerisch ermittelten Lösungen ergibt sich zusammen mit konstanten Reibbeiwerten ein lineares Verhalten, zusammen mit dem druckabhängigen Reibgesetz dagegen ein sublineares Verhalten. Bei den aus dem Versuch ermittelten Kraftverläufen ist jedoch erst ein Abfallen und anschließend ein Ansteigen zu beobachten. Für dieses Verhalten sind wahrscheinlich der Einfluss der Reibung in der Lagerung oder das nichtlineare Materialverhalten des Elastomers verantwortlich: Der Versuchsaufbau ließ ein seitliches Austreten des Elastomers zu, wie in Abbildung 7.3 (b) erkennbar wird. Durch das Herausquetschen bei zunehmendem Druck verringerte sich die zur Federwirkung nutzbare Masse. Diese Tatsache wird beim Auftragen der Kraftgrößen über den Eindringweg besonders deutlich. Der Vorschlag, alternativ einen wegabhängigen Reibbeiwert zu verwenden, scheint, wie aus dem nichtlinearen Verformungsverhalten erkennbar ist, weniger realistisch zu sein.

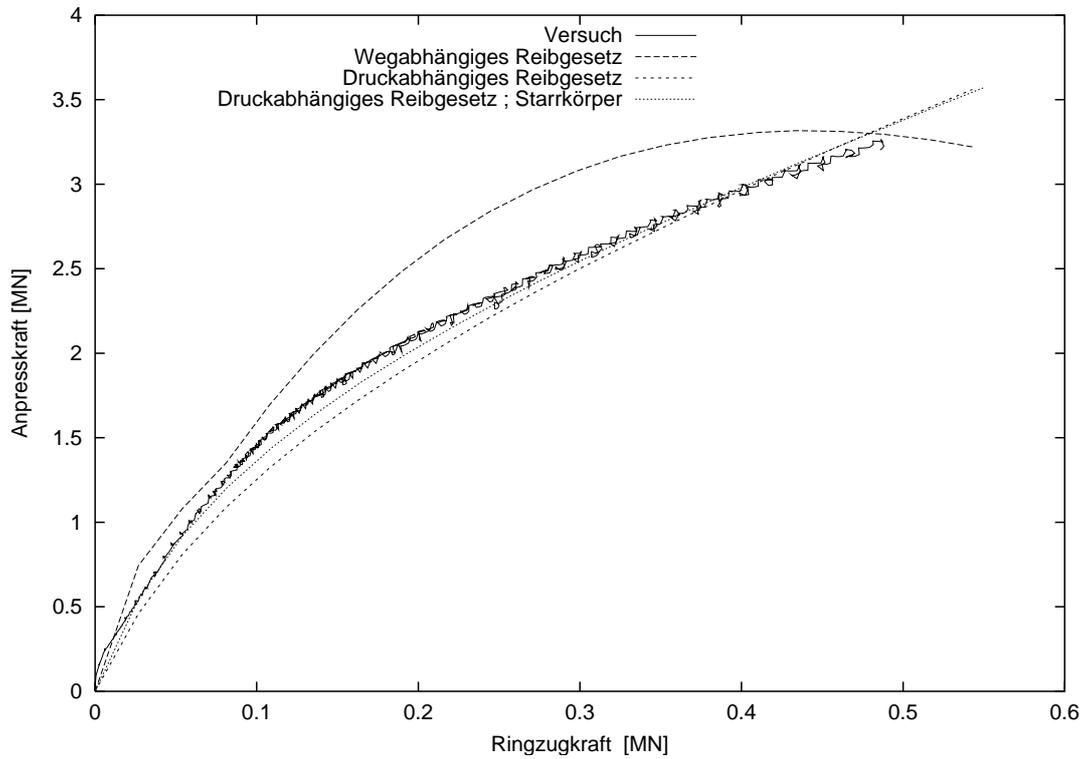
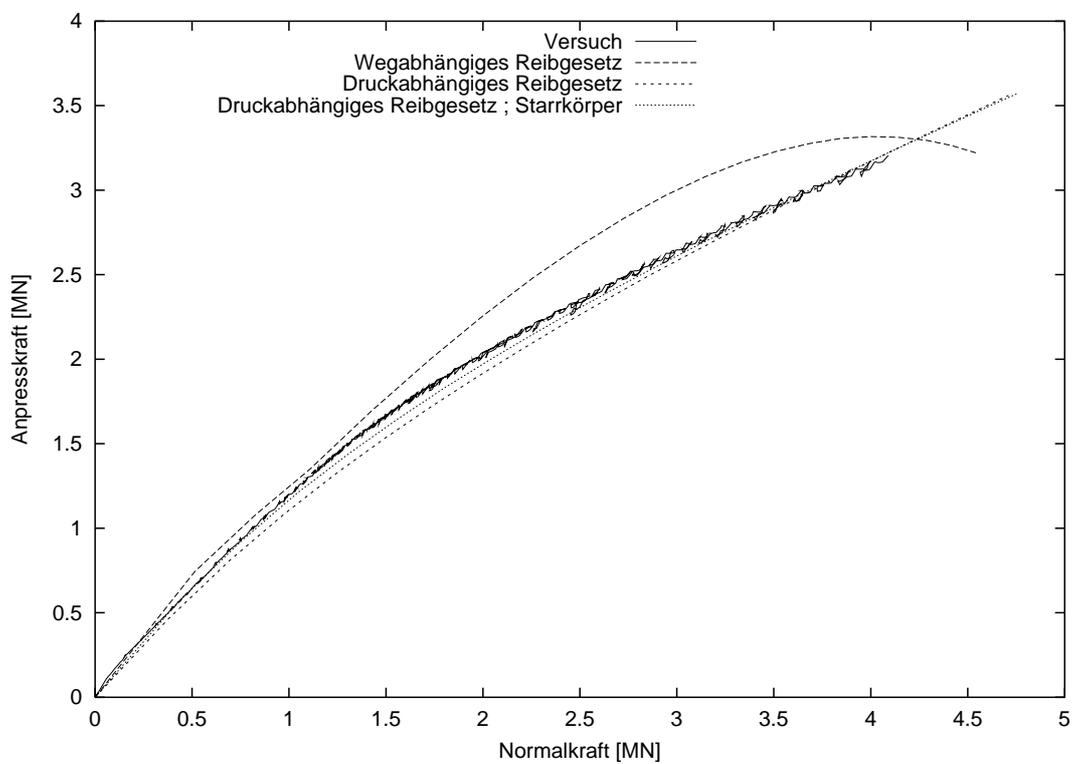
(a) Anpresskraft  $P(t)$  über Ringzugkraft  $s(t)r_a$ (b) Anpresskraft  $P(t)$  über Normalkraft  $2\pi r_i n(t)$ 

Abbildung 7.12: Gegenüberstellung von Kraft–Kraft–Verläufen von Messungen und numerischen Berechnungen mit nichtlinearen Reibgesetzen.

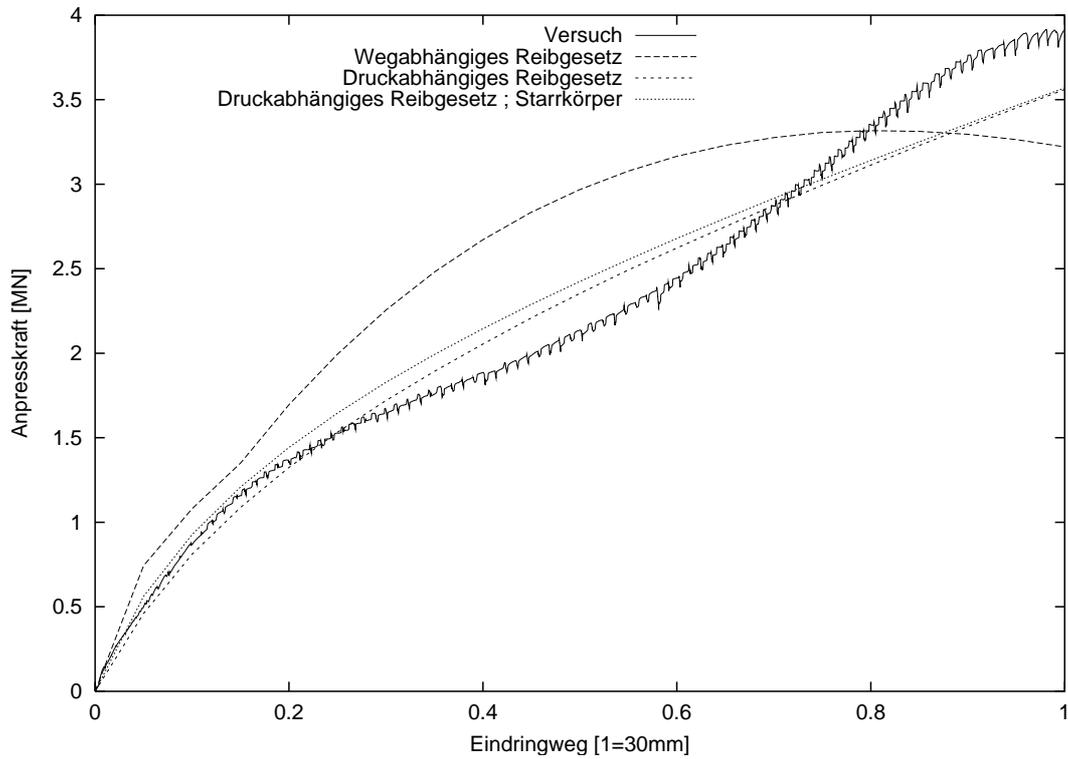
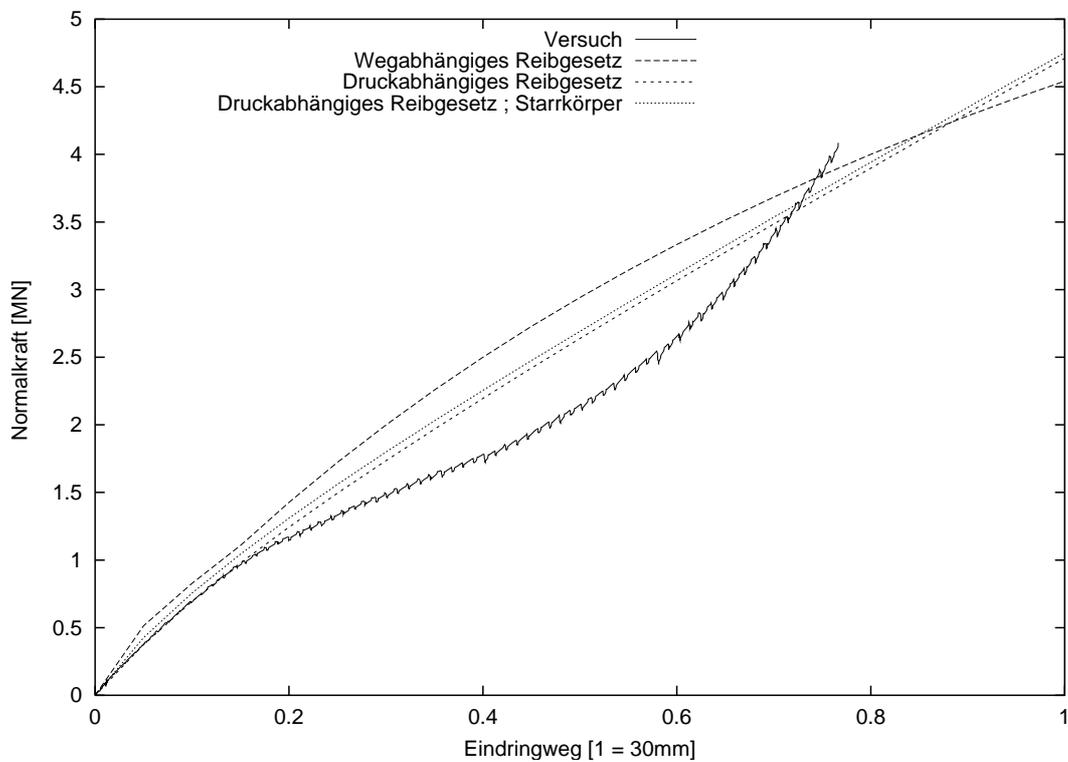
(a) Anpresskraft  $P(t)$  über Eindringweg  $u(t)$ (b) Normalkraft  $2\pi r_i n(t)$  über Eindringweg  $u(t)$ 

Abbildung 7.13: Gegenüberstellung von Kraft–Weg–Verläufen von Messungen und numerischen Berechnungen mit nichtlinearen Reibgesetzen.

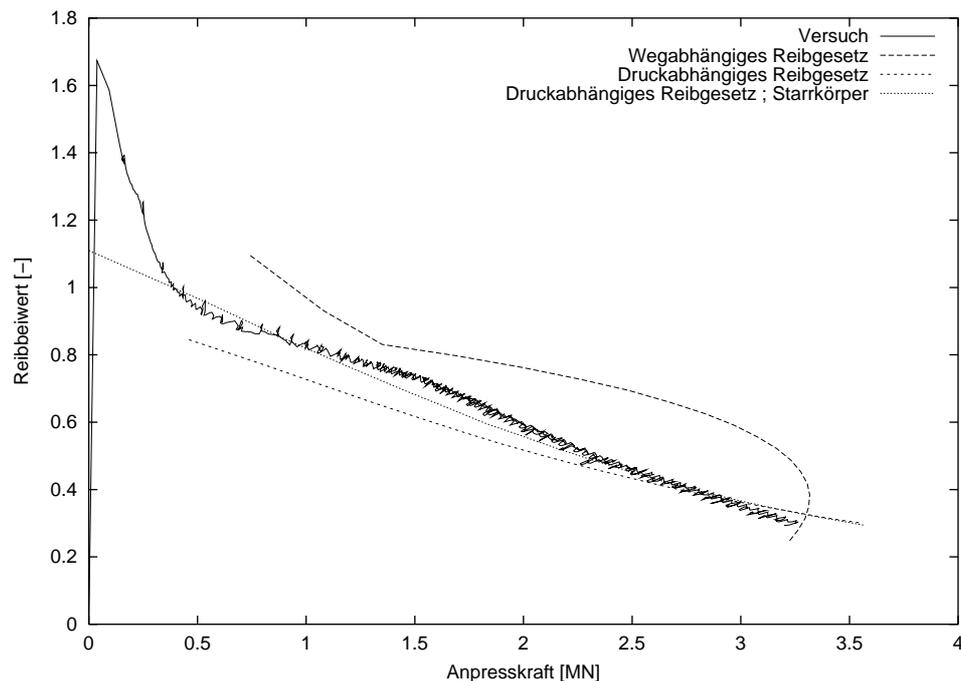


Abbildung 7.14: Gegenüberstellung von Verläufen von mit nichtlinearen Reibgesetzen und anhand des Starrkörpermodells ermittelten Reibbeiwerten  $\mu(t)$  über die Anpresskraft  $P(t)$ .

Weiterhin sind in Abbildung 7.14 die Verläufe der Reibbeiwerte  $\mu(t)$  über die Anpresskraft  $P(t)$ , in Abbildung 7.15 die Verläufe über die Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$  und in Abbildung 7.16 die Verläufe über den Eindringweg  $u(t)$  dargestellt. Bei allen drei Darstellungen verschmelzen die Verläufe der beiden druckabhängigen Varianten während des Eindringens ineinander.

Wie aus den Abbildungen 7.14 und 7.15 deutlich ersichtlich ist, stimmt jeweils zu Beginn der Simulation des Eindringvorganges der mit dem vorgegebenen über die Fläche konstanten Spannungsverlauf am besten mit dem anhand des Starrkörpermodells aus dem Versuch ermittelten Verlauf überein.

Die Abweichungen dieser beiden Verläufe voneinander sind mit den auftretenden veränderlichen Kraftverläufe über die Fläche zu erklären. Diese können von dem für die Versuchsauswertung verwendeten Modell nicht abgebildet werden, da es starr ist.

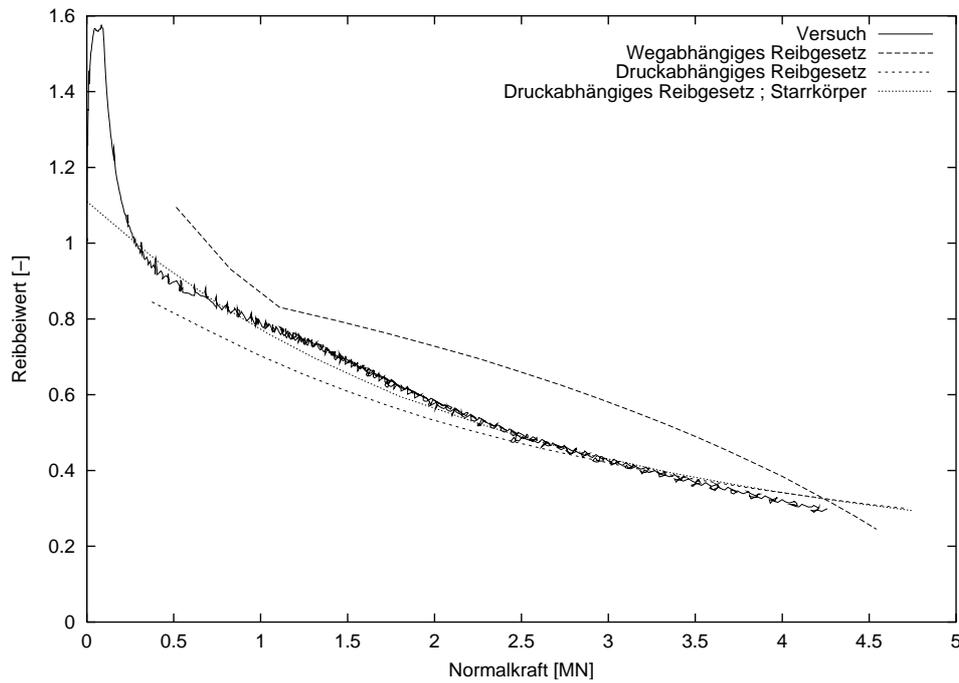


Abbildung 7.15: Gegenüberstellung von Verläufen von mit nichtlinearen Reibgesetzen und anhand des Starrkörpermodells ermittelten Reibbeiwerten  $\mu(t)$  über die Normalkraft  $2\pi r_i n(t)$ .

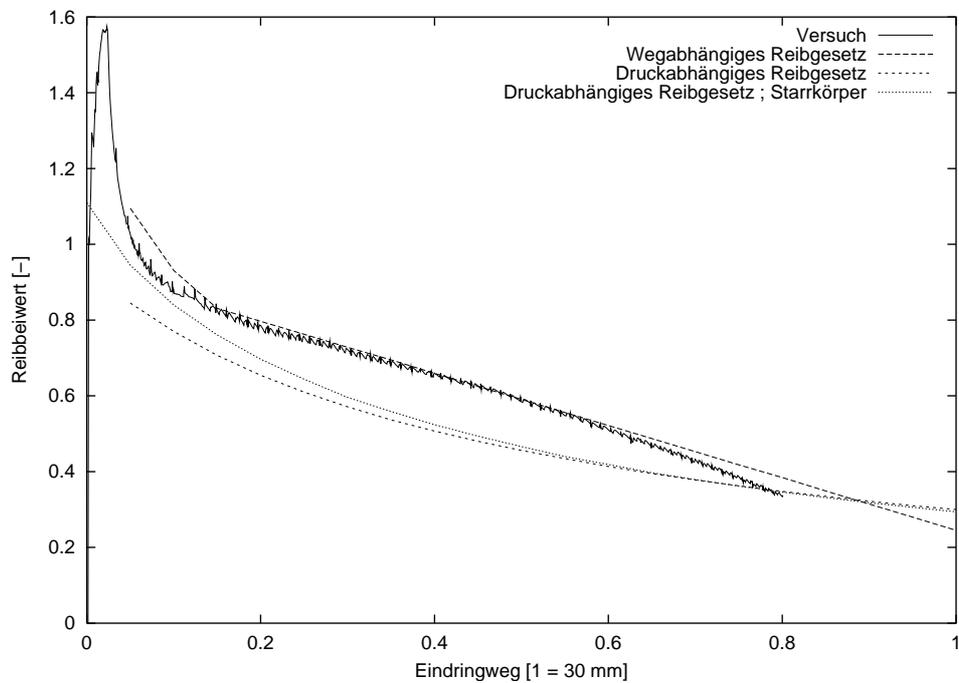


Abbildung 7.16: Gegenüberstellung von Verläufen von mit nichtlinearen Reibgesetzen und anhand des Starrkörpermodells ermittelten Reibbeiwerten  $\mu(t)$  über den Eindringweg  $u(t)$ .

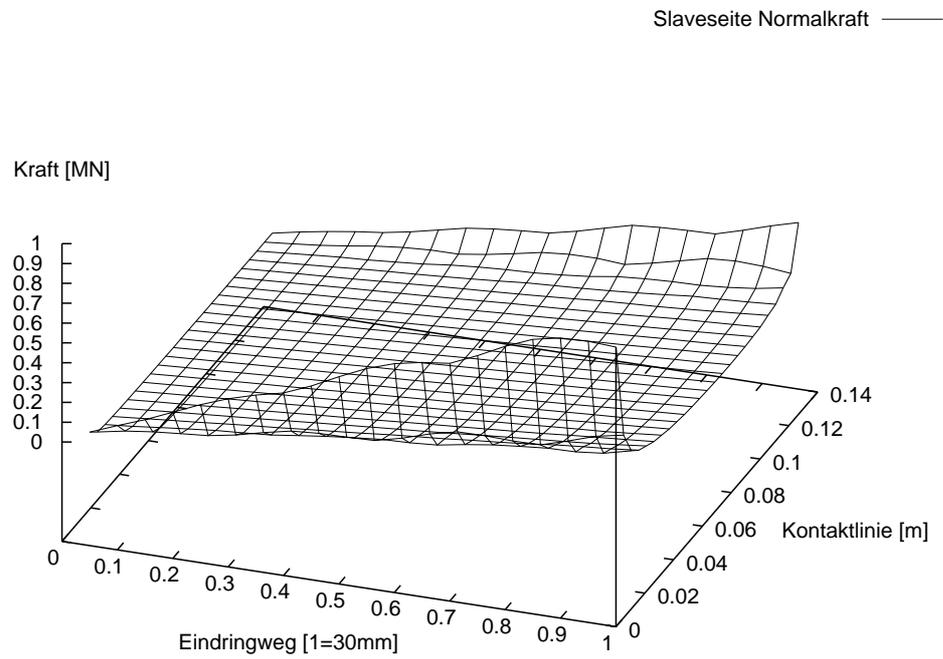
### Darstellung der Kraftverläufe auf der Oberfläche

Da die direkt aus dem Versuch ermittelten Kontaktkräfte lediglich mit dem Starrkörpermodell ermittelt wurden, weisen sie einen konstanten Verlauf über die Kontaktfläche auf. In diesem Abschnitt werden die anhand der numerischen Simulation ermittelten Kraftverläufe auf der Kontaktfläche dargestellt. Auf der Konusseite befinden sich die Master- und auf der Seite der Betonsegmente die Slaveknoten.

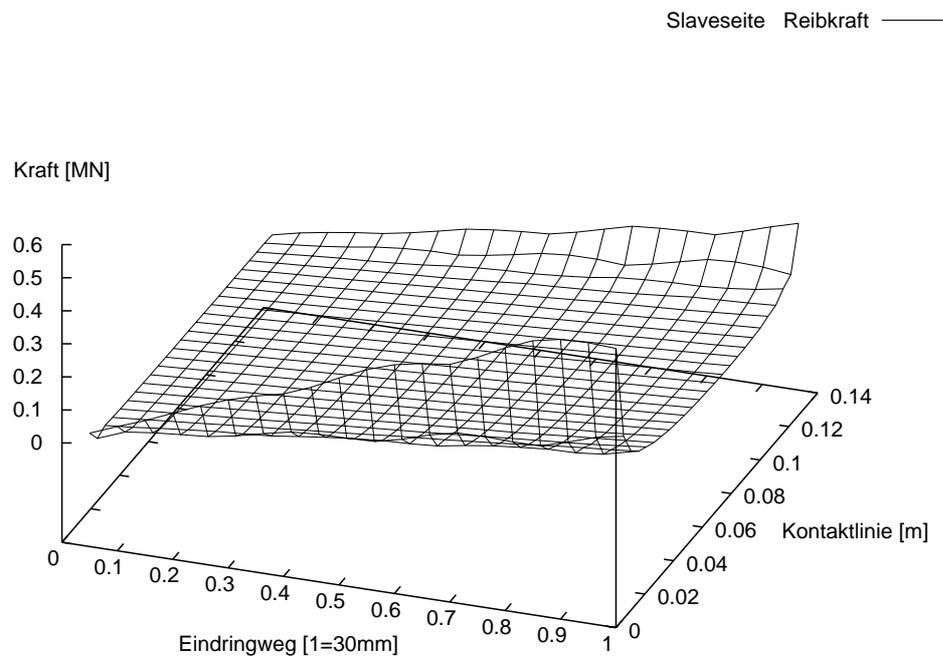
Für eine zusätzliche Betrachtung sind in den Abbildungen 7.17 (a) und (b) die Kraftverläufe beim Eindringvorgang einer numerischen Lösung mit dem konstanten Beiwert von  $\mu = 0.6$  für die Slaveseite dargestellt. Aufgrund der Linearität der Reibkraft bleibt der Reibkraftverlauf  $r_i(t)$  affin zum Normalkraftverlauf  $n_i(t)$ . Die Kraftverläufe sind während des Eindringens über die Kontaktfläche stark veränderlich. Sie sind an den Rändern, vor allem am unteren Rand der Kontaktflächen, besonders hoch und im mittleren Bereich relativ gleichmäßig. Die Ursache hierfür liegt in den unterschiedlichen Steifigkeiten der kontaktierenden Teilkörper.

Die mit dem nichtlinearen druckabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}$  ermittelten Kraftverläufe sind für die Slaveseite in Abbildung 7.18 und für die Masterseite in Abbildung 7.19 dargestellt. Sichtbar wird ein typisches Merkmal des Slave-Master-Konzeptes: Beim Eindringen bewegt sich die Slaveseite mit dem Konus mit, während die Masterseite fest bleibt.

Bei Anwendung des nichtlinearen druckabhängigen Reibgesetzes  $f_{S-B,s}$  behält die Normalkraftverteilung in Abbildung 7.18 (a) qualitativ ihren Verlauf gegenüber der Lösung mit dem konstanten Reibbeiwert in Abbildung 7.17 (a) bei. Dagegen kommt es bei der Reibkraftverteilung in Abbildung 7.18 (b) im Gegensatz zu Abbildung 7.17 (b) zum Abbau der Spitzenwerte an den Rändern der Kontaktfläche während des Eindringvorganges. Der Verlauf der Reibkräfte nähert sich dann einem über die Fläche konstanten Wert an. Der Anstieg der Reibkraft nimmt mit dem Eindringweg ab. Die Steigung wird immer kleiner, sodass es offenbar eine **maximal aufnehmbare Reibkraft** gibt, die nicht überschritten werden kann. Dieses Verhalten ist bei einem Werkstoff wie Beton vorstellbar. Tribologische Betrachtungen aus Kapitel 2.5 führen zur folgenden Aussage: Bei der vorliegenden Werkstoffpaarung kommt es zu **Plastifizierungen und anschließenden Zerstörungen der Mikroerhebungen** des weicheren Werkstoffes. Anschließend erfolgt eine **Interaktion mit dem Grundmaterial**, das heißt dem Werkstoff selbst. Dabei stellt sich die **maximal aufnehmbare Schubkraft** als Grenze dar. Damit wird die Problemstellung durch Fragen zur Erfassung des Betonverhaltens erweitert.



(a) Normalkraftverlauf  $n_i(t)$



(b) Reibkraftverlauf  $r_i(t)$

Abbildung 7.17: Darstellung der Kraftverläufe über die Kontaktklinie auf der Slave-seite am Betonsegment während des Eindringvorganges mit einem konstanten Reib-beiwert von  $\mu = 0.6$ .

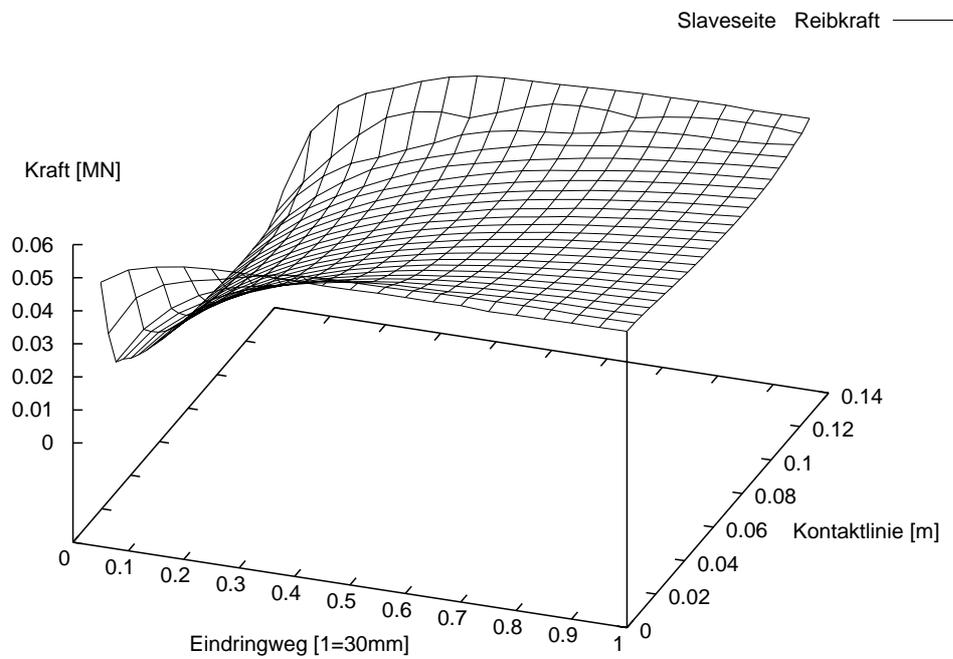
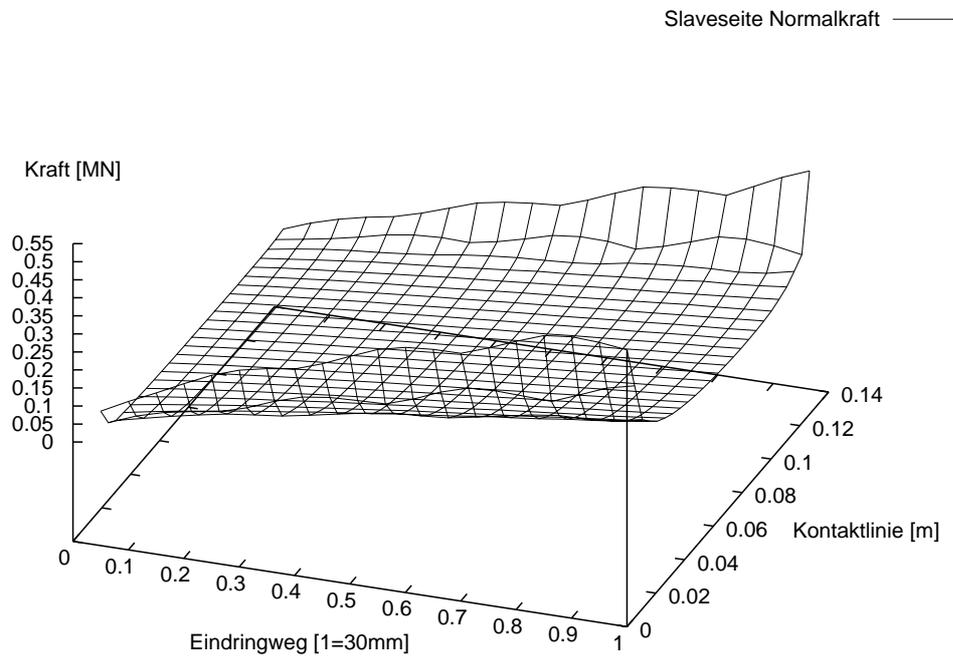
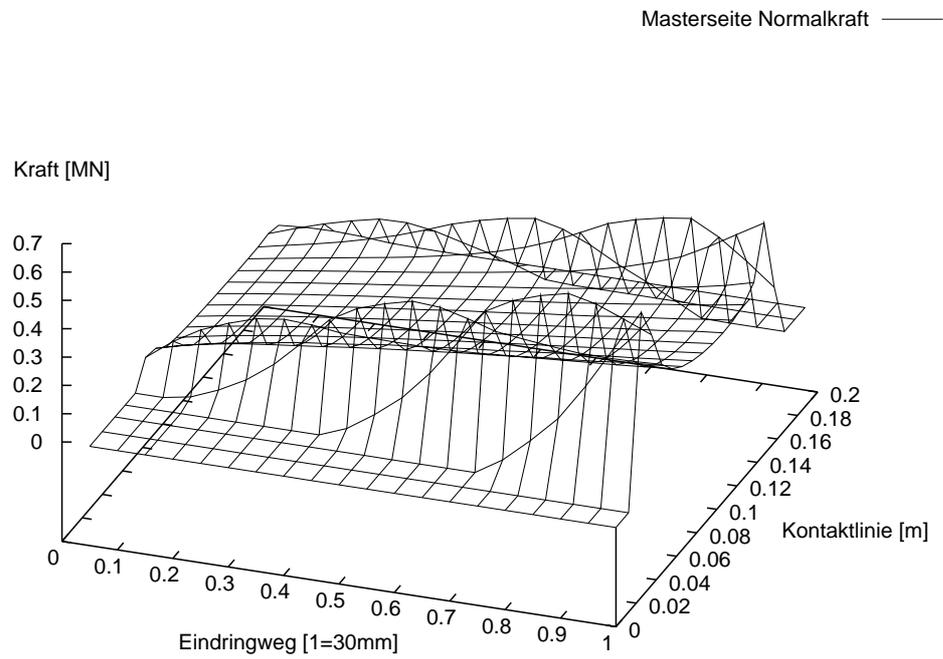
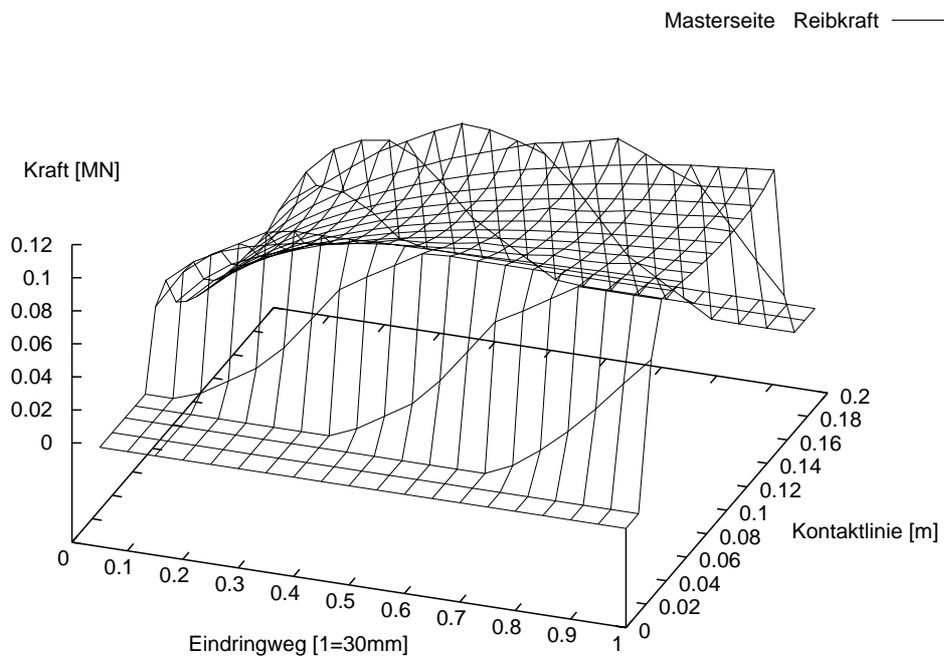


Abbildung 7.18: Darstellung der Kraftverläufe über die Kontaktlinie auf der Slave-seite am Betonsegment während des Eindringvorganges mit dem nichtlinearen druck-abhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}$ .



(a) Normalkraftverlauf  $n_i(t)$



(b) Reibkraftverlauf  $r_i(t)$

Abbildung 7.19: Darstellung der Kraftverläufe über die Kontaktlinie auf der Masterseite am Stahlkonus während des Eindringvorganges mit dem nichtlinearen druckabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}$ .

### Diskussion zum statischen Versuch

Von Nachteil für die Versuchsauswertung sind die Umstände, dass das gewählte Starrkörpermodell keine Verformungen berücksichtigen kann und dass die Kontaktspannungsverteilung über die Fläche als konstant angenommen werden musste. Besonders die größeren Verformungen am Ende des Versuches sind durch das Starrkörpermodell nicht darstellbar.

Grundsätzlich schwierig zu modellieren ist der Versuchsbeginn, da sich ein Kraftschluss im Versuchsaufbau erst einstellen muss. Dies ist eine mögliche Ursache für den Spitzenwert des Reibbeiwertes, siehe beispielsweise in Abbildung 7.16.

Die Verwendung eines Elastomerstreifens als Feder im Versuchsaufbau führte zu einer nichtlinearen Federwirkung. Für eine numerische Simulation ist eine passende Federkennlinie schwierig zu bestimmen, zumal das Herausquetschen des Elastomers nur begrenzt modellierbar ist. Der Grundgedanke zur Nutzung des Elastomers entstand durch den Zwang, die Dehnungen des Stahlringes nicht in den plastischen Bereich geraten zu lassen. Grundsätzlich ließe sich jedoch durch Variation einer Feder eine Trennung der Untersuchung von Wegabhängigkeit und Normalkraftabhängigkeit erreichen.

Es hat sich herausgestellt, dass die angenommene Linearität einzelner Größen des Modells bei numerischen Untersuchungen mit konstanten Reibbeiwerten erhalten bleibt. Hierbei ist die Kontaktspannungsverteilung über die Fläche nicht konstant. Die mit dem von der Normalkraft abhängigen Reibgesetz durchgeführten Untersuchungen basieren lediglich auf der mit Hilfe des Starrkörpermodells ermittelten Normalkraft. Der Kraftverlauf wurde dabei als über die Fläche konstant angenommen.

Zukünftig ergeben sich die folgenden weiteren Möglichkeiten:

- Durch einen iterativen Prozess könnte die Funktion, die das Reibverhalten dieses Versuches beschreibt, noch besser, nämlich auf das numerische Modell hin verifiziert werden.
- Eine Kopplung mit elastoplastischen Stoffgesetzen für das Kontinuum könnte die Kontaktkraftverläufe beeinflussen und weitere Erkenntnisse in Bezug auf die maximal aufnehmbare Schubkraft bringen.

Positiv zu bewerten sind weniger die quantitativen als die qualitativen, prinzipiellen Ergebnisse und die gewonnenen Erkenntnisse über diesen Versuchsaufbau. Die hier gezeigten Möglichkeiten der numerischen Simulation sollten nicht nur zur zufriedenstellenden Gegenüberstellung, sondern, bestärkt durch diese ersten Ergebnisse, als Werkzeug für zukünftige Forschungsvorhaben genutzt werden.

## 7.4 Simulation des dynamischen Versuches

Abbildung 7.20 zeigt die Positionierung der messtechnischen Einbauten und das Starrkörpermodell. Vor Beginn der Auswertung wurden zur Kontrolle der Kraftmessungen die Verläufe der Impulse der Fallmasse, der Stoßkraft auf den Konus und der auf das Fundament wirkenden Kraft unterhalb des Prüfkörpers einander gegenübergestellt. Zur Überprüfung der Kinematik des Konus wurden die Beschleunigungs- und Weg-Zeit-Verläufe mit ihren Integrationen bzw. Differentiationen verglichen. Hierzu musste eine Möglichkeit zur Filterung geschaffen werden; die Wirkungsweise dieser Filterung ist annähernd gleich der eines Tiefpassfilters.

Nach erfolgreicher Durchführung des dynamischen Versuches standen der Weg- und Beschleunigungs-Zeit-Verlauf des Konus, die Dehnungs-Zeit-Verläufe des Stahlringes und der ermittelte Kraft-Zeit-Verlauf der Fallmasse zur Verfügung.

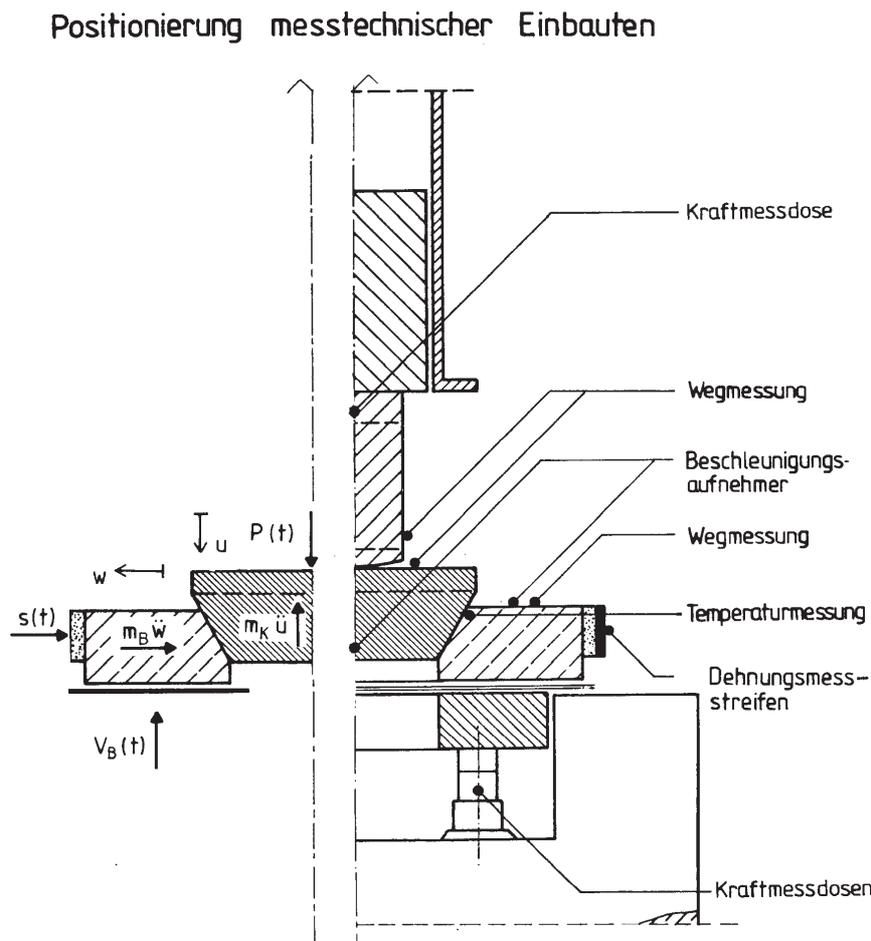


Abbildung 7.20: Starrkörpermodell und Versuchsaufbau mit messtechnischen Einbauten.

### Numerische Modellierung des dynamischen Versuches

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen wurden, um sich auf die Untersuchung des Reibverhaltens konzentrieren zu können, die Modellierung durch den Wegfall der Fallmasse und der Bodenplatte vereinfacht. Im Einzelnen wurden folgende Annahmen getroffen:

- Geometrie- und Materialdaten sowie Lagerung stimmen mit denjenigen aus dem statischen Versuch überein. Eine Hälfte des rotationssymmetrischen Aufbaus wurde mit 680 Elementen und jeweils 13 Knoten im Kontaktbereich diskretisiert. Die Last greift auf der Oberseite des Konus von der Mitte aus an fünf benachbarten Knoten an. Abbildung 7.21 zeigt die diskretisierte Struktur.
- Das implizite Zeitschrittverfahren von Newmark mit  $\beta = 0.25, \gamma = 0.50$  wurde mit einer konsistenten Massenmatrix verwendet. Die Penaltyfaktoren wurden mit  $\epsilon_N = 2000.0$  und  $\epsilon_T = 3000.0$  [MN/m] angenommen.
- Die nach mehreren Untersuchungen gewählten Zeitschrittweiten betragen bei verschiebungsgesteuerten Berechnungen  $dt = 0.5 \cdot 10^{-6}$  [s], bei kraftgesteuerten Berechnungen mit dem Penalty-Verfahren  $dt = 2.0 \cdot 10^{-6}$  [s] und mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren  $dt = 4.0 \cdot 10^{-6}$  [s]. Die Schrittweite bei den Abbildungen beträgt  $dt_{plot} = 4.0 \cdot 10^{-5}$  [s].
- Nach mehreren Voruntersuchungen wurden als minimale Dämpfungsparameter für Berechnungen mit dem Penalty-Verfahren  $\beta_D = 10^{-8}$  und mit dem Augmented-Lagrange-Verfahren  $\beta_D = 10^{-5}$  für die Rayleigh-Dämpfung ermittelt.

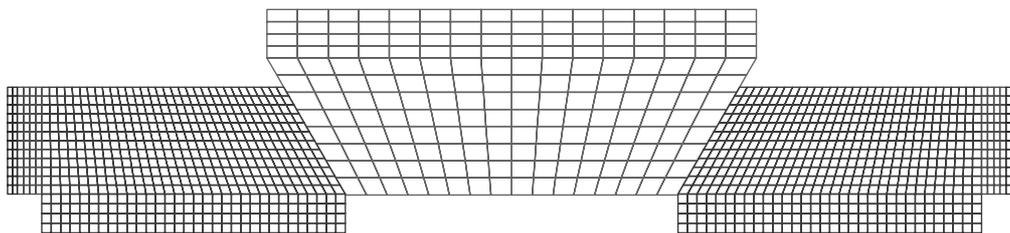


Abbildung 7.21: Diskretisierung der Struktur mit 680 Elementen.

Um den Stoßvorgang simulieren zu können, wurde ein Beobachtungszeitraum von  $T=0.008$  [s] benötigt. Als Reibgesetz wurde eine Kombination des anhand des statischen Versuches vorgeschlagenen Gesetzes mit einem geschwindigkeitsabhängigen Anteil, der ebenfalls als Versuchsergebnis in Kapitel 2.5.3 vorliegt, gekoppelt.

**Zur Integration des geschwindigkeitsabhängigen Anteils ins Reibgesetz**

Auf Basis der Versuchsergebnisse des dynamischen Versuches lässt sich der Rückgang der Reibkraft bei zunehmender Geschwindigkeit durch den folgenden Ansatz ausdrücken:

$$\bar{f}_v(|v_T|) = c + (1 - c) e^{d |v_T|} \tag{7.7}$$

Die zugehörige für die Linearisierung benötigte Ableitung ergibt sich zu:

$$\frac{d\bar{f}_v(|v_T|)}{d|v_T|} = d (1 - c) e^{d |v_T|} \tag{7.8}$$

Abbildung 7.22 zeigt die Verläufe der beiden Funktionen. Der geschwindigkeits-

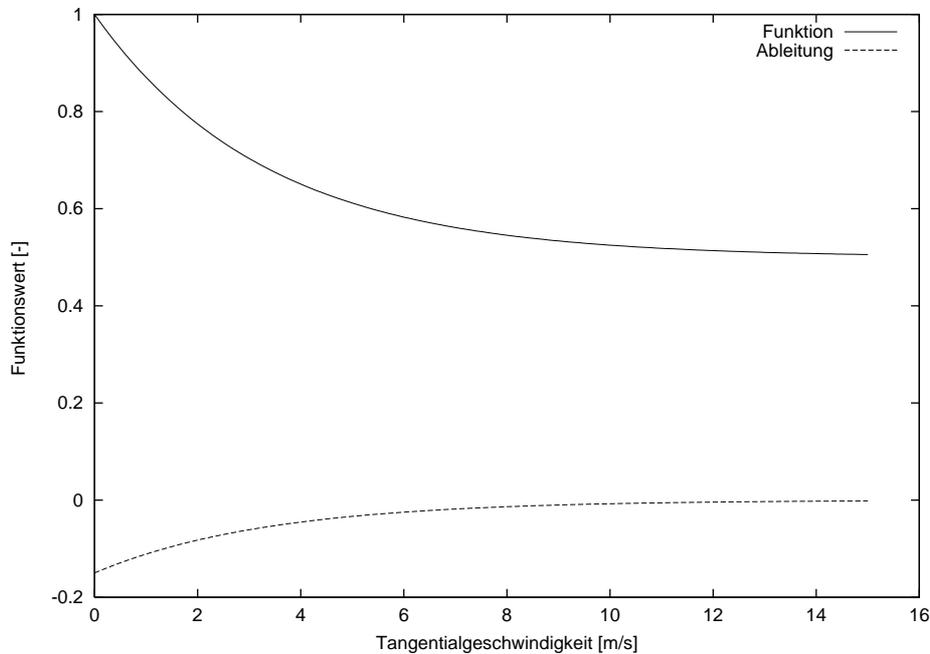


Abbildung 7.22: Darstellung des geschwindigkeitsabhängigen Anteils  $\bar{f}_v$  mit  $c = 0.5$  und  $d = -0.3$ .

abhängige Anteil  $\bar{f}_v$  wurde mit den Ergebnissen des statischen Versuches zu einem mehrparametrischen Reibgesetz gekoppelt. Damit ergibt sich der folgende auf Versuchsergebnissen basierende Vorschlag:

$$t_T = [c + (1 - c)e^{d |v_T|}] [-b/a (1 - e^{a |t_N|})] \tag{7.9}$$

Die für die numerische Umsetzung benötigte Gleitfläche lautet:

$$f_{S-B,d}(t_N, t_T, v_T) = 0 \leq -[c + (1 - c)e^{d |v_T|}] [-b/a (1 - e^{a |t_N|})] + |t_T|^{trial} \tag{7.10}$$

Im Zuge der Linearisierung entsteht ein dritter Term in der Kontaktsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{Gdirekt}$ . Die Herleitung dieses Terms wird in Anhang A A.7 dargestellt.

### Voruntersuchungen

Zuerst wurden kraftgesteuerte Berechnungen mit dem im Rahmen des Forschungsvorhabens ermittelten Stoßkraft–Zeit–Verlauf  $P(t)$  durchgeführt. Auch nach einer Reihe von verschiedenen Parameterstudien waren die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen stets unbefriedigend:

Abweichungen der Zeit–Verläufe von zu vergleichenden Größen aus dem Versuch und numerischer Simulation waren nicht interpretierbar.

Deshalb wurde die Möglichkeit, verschiebungsgesteuerte Berechnungen durchführen zu können, genutzt. Als Eingangsgröße wurde der gemessene Weg–Zeit–Verlauf eingesetzt. Diese direkt gemessenen Werte wurden auch noch durch eine zweimalige Integration der Messwerte des Beschleunigungsaufnehmers verifiziert.

Die Durchführung der verschiebungsgesteuerten Berechnungen war erfolgreich. Auch der Kraft–Zeit–Verlauf der Stoßkraft konnte mit Hilfe der Summierung der entsprechenden Knotenreaktionskräfte am oberen Ende des Konus ermittelt werden. Der Verlauf selbst war, wie aus Abbildung 7.23 ersichtlich ist, von starken Oberschwingungen überlagert. Ein wesentlicher Anteil der Oberschwingungen resultiert aus den Eigenschwingungen des Konus und der Fallmasse. Die Eigenfrequenz des Konus wurde im Rahmen des DFG–Berichtes mit 1500 [Hz] ermittelt. Diese Frequenz findet sich auch im vorliegenden Verlauf wieder. Ursache für das Auftreten dieser Oberschwingungen sind Besonderheiten der Verschiebungssteuerung, denn aufgrund der gebundenen Freiheitsgrade ist die Schwingungsanfälligkeit sehr hoch. Außerdem wirken kleine Schwankungen oder Knicke des vorgegebenen Zeitverlaufes der vorgegebenen Verschiebung aufrauhend. Dies wirkt sich auch auf die errechneten Zeitverläufe anderer Größen aus.

Wegen dieser Nachteile bei verschiebungsgesteuerten Berechnungen wurden die im Folgenden erläuterten Untersuchungen kraftgesteuert durchgeführt. Dabei wurde ein anhand des verschiebungsgesteuerten Rechenlaufes ermittelter Stoßkraft–Zeit–Verlauf eingesetzt. Abbildung 7.23 zeigt den ungefilterten und den leicht gefilterten Stoßkraft–Zeit–Verlauf der verschiebungsgesteuerten Berechnungen, sowie den aus diesen ermittelten Stoßkraft–Zeit–Verlauf, welcher bei den folgenden der Gegenüberstellung dienenden Berechnungen verwendet wurde.

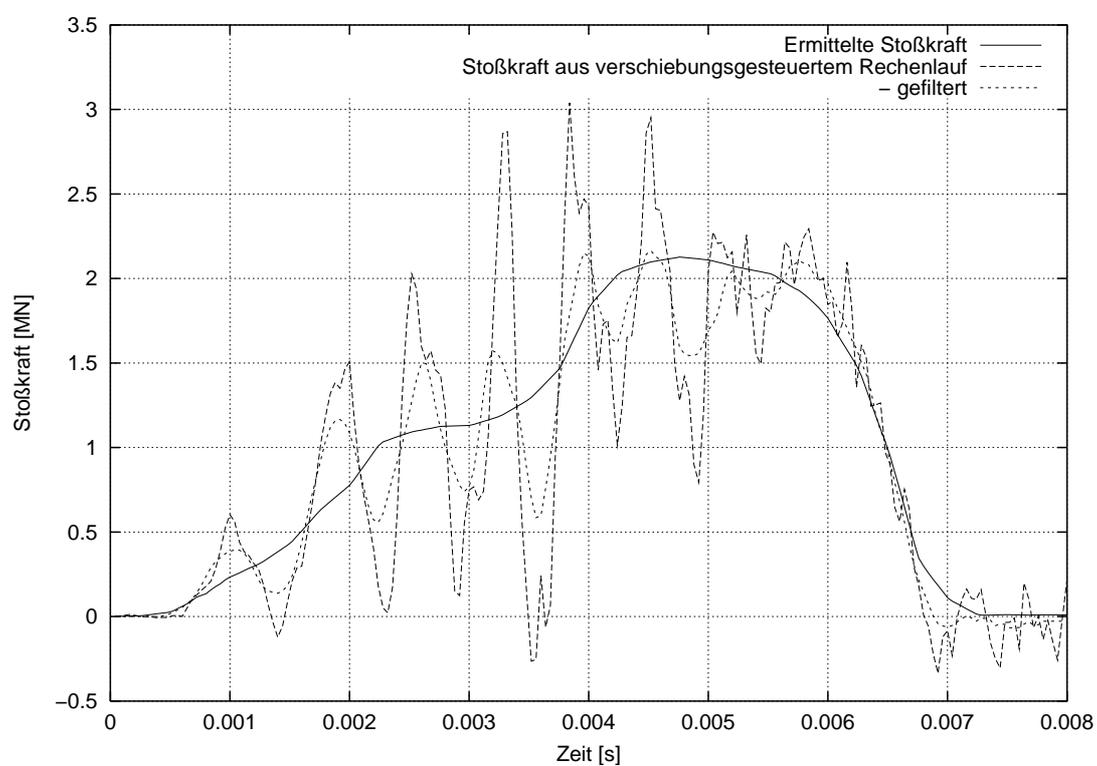


Abbildung 7.23: Ermittlung des Stoßkraft–Zeit–Verlaufes  $P(t)$  anhand verschiebungsgesteuerter Berechnungen.

### Untersuchungen mit weiteren Parametervariationen

Für die numerische Überprüfung des anhand der Versuchsergebnisse vorgeschlagenen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes wird der Versuchsablauf mit diesem Reibgesetz und Alternativen simuliert.

Um einen Vergleich führen zu können, wurden

- alle für die Auswertung mit dem Starrkörpermodell gemessenen und aufbereiteten Zeitverläufe aus dem Versuch
- den Zeitverläufen aus der numerischen Simulation mit verschiedenen Reibgesetzen

gegenübergestellt. Das sind die Ringzugkraft  $[2\pi r_a s(t)]$ , die Massenkräfte des Konus  $[m_K \ddot{u}]$  und der Betonsegmente  $[m_B \ddot{w}]$ , die Normalkraft  $[2\pi r_i n(t)]$  auf der Kontaktfläche, der Reibbeiwert  $\mu(t)$  sowie der Eindringweg  $u$ ,  $w$  und die Geschwindigkeit  $\dot{u}$ ,  $\dot{w}$ .

Um neben dem vorgeschlagenen Reibgesetz  $f_{S-B,d}$  gleichzeitig die Auswirkungen von unterschiedlichen Reibgesetzen zu zeigen, werden zum Vergleich Untersuchungen

- mit konstantem Beiwert  $\mu = 0.6$ ,
- mit konstantem Beiwert  $\mu = 0.8$ ,
- mit nichtlinearem druckabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,s}(\sigma_N, \sigma_N)$  auf Basis des statischen Versuches und
- mit nichtlinearem druckabhängigen Reibgesetz und Berücksichtigung der Tangentialgeschwindigkeit  $f_{S-B,d}(\sigma_T, \sigma_N, v_T)$  auf Basis des dynamischen Versuches

durchgeführt.

Da die beim Stoß der Fallmasse auf den Konus entstehende Kontaktkraft vom Reibverhalten des Reibgesetzes  $f_{S-B,d}$  abhängig ist und bei Berechnungen mit den oben genannten Varianten der gleiche Stoßkraft-Zeit-Verlauf verwendet wurde, können und sollen die Vergleichsuntersuchungen nur die relativen Unterschiede, die durch die Verwendung unterschiedlicher Reibgesetze entstehen, verdeutlichen.

Als effizientester Algorithmus für diese Untersuchungen hat sich nicht zuletzt wegen der Rechenzeit das unsymmetrische Augmented-Lagrange-Verfahren mit einer zweifachen Wiederholung des Anpassungsprozesses erwiesen. Im Folgenden werden die Zeitverläufe der einzelnen Größen gegenübergestellt:

Beim Zugkraft–Zeit–Verlauf im Stahlring  $[2\pi r_a s(t)]$ , siehe Abbildung 7.24, sind große Abweichungen zwischen dem Versuch und den numerischen Untersuchungen vorhanden. Eine der Ursachen für diese Abweichungen liegt im Verhalten des Elastomers. Hinzu kommt, dass der Ring schon bei Vorversuchen benutzt wurde und unter Umständen örtlich plastifiziert war.

Der Massenkraft–Zeit–Verlauf des Konus  $[m_K \ddot{u}(t)]$  und derjenige der Betonsegmente  $[m_B \ddot{w}(t)]$  stimmen sehr gut mit den Versuchsergebnissen, siehe Abbildung 7.25 (a) und (b), überein. Zu Beginn der Beschleunigung und am Ende der Abbremsung wird eine Schwingung angeregt, die aufgrund der Dämpfung nach kurzer Zeit ausklingt. Grund für die Anregung der Schwingung ist vermutlich der Haft–Gleit–Übergang zu Beginn und der Gleit–Haft–Übergang am Ende der Simulation. Die aufgetragenen Signale des Beschleunigungsaufnehmers zeigen keine solche Schwingungen, da diese im Rahmen der Versuchsauswertung herausgefiltert wurden und der Konus am Versuchsende nicht sofort stecken blieb.

Die Abbildungen 7.26 (a) und (b) zeigen den Weg–Zeit–Verlauf  $u(t)$  und den Geschwindigkeit–Zeit–Verlauf  $\dot{u}(t)$  des Konus. Die durch die verschiedenen Reibgesetze verursachten Unterschiede zeigen sich hier sowohl im Verlauf als auch in der erreichten Eindringtiefe selbst. Die Übereinstimmung dieser Verläufe mit dem druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz ist sehr zufriedenstellend. Der Umstand, dass bei allen numerischen Berechnungen der Konus stecken bleibt, während dies im Versuch nicht der Fall ist, ist wahrscheinlich auf das Verhalten des Elastomers und der unter Umständen örtlichen Plastifizierung des Stahlringes zurückzuführen.

Der Normalkraft–Zeit–Verlauf  $[2\pi r_i n(t)]$  auf der Kontaktoberfläche, siehe Abbildung 7.27, ist eine wesentliche Einflussgröße für das Reibverhalten. Erkennbar ist das Auftreten der bereits oben erwähnten Schwingungen zu Beginn der Bewegungsphase. Die Normalkraft steigt aufgrund der Keilwirkung mit zunehmender Eindringtiefe an.

Der Reibbeiwert–Zeit–Verlauf  $\mu(t)$  in Abbildung 7.28 stellt das Verhältnis von Reibkraft zur Normalkraft auf der Kontaktfläche dar. Es wird das reale Verhältnis von Normalkraft und Reibkraft während des gesamten Stoßvorganges und somit der tatsächliche Einfluss der Reibgesetze beschrieben. Die jeweiligen Richtungswechsel und Haftphasen der Bewegungsvorgänge werden sichtbar. Anhand dieses Verlaufes wären Schwächen des Kontaktalgorithmus, wie numerisch bedingte Ablösungen oder falsch errechnete Reibkräfte, erkennbar.

Dies ist nicht der Fall, der Algorithmus scheint für diese Aufgabenstellung sehr gut geeignet.

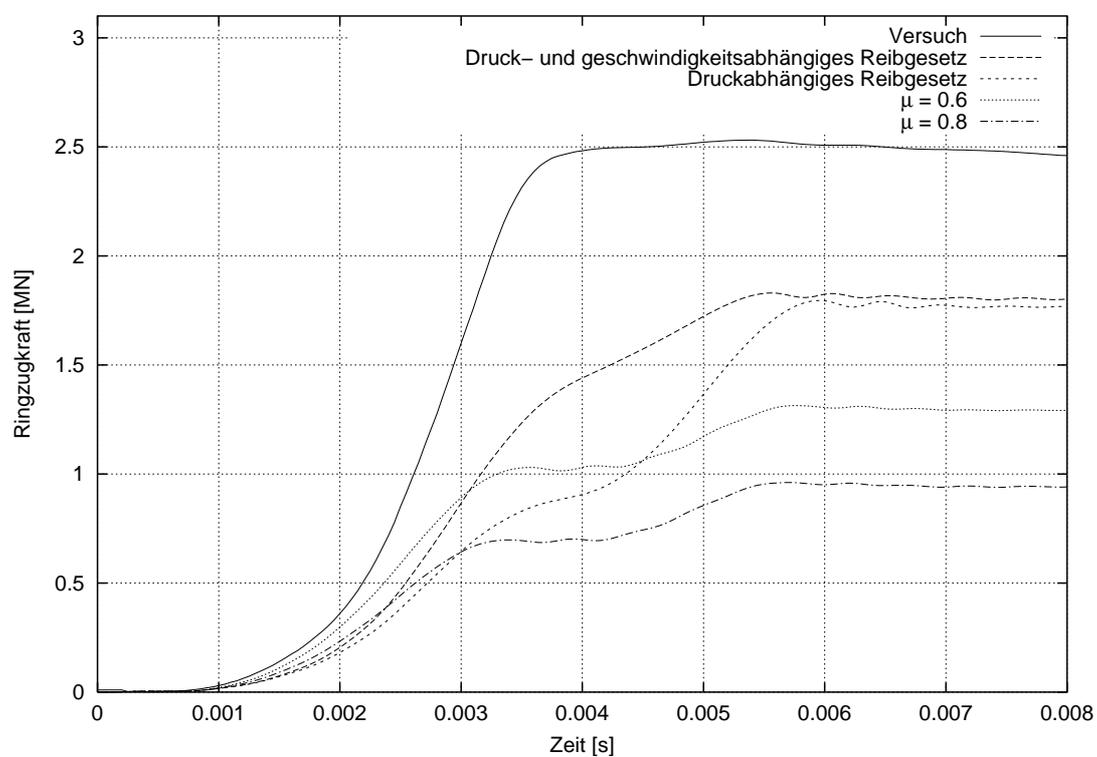


Abbildung 7.24: Gegenüberstellung von Kraft-Zeit-Verläufen des Stahlringes  $2\pi r_a s(t)$ .

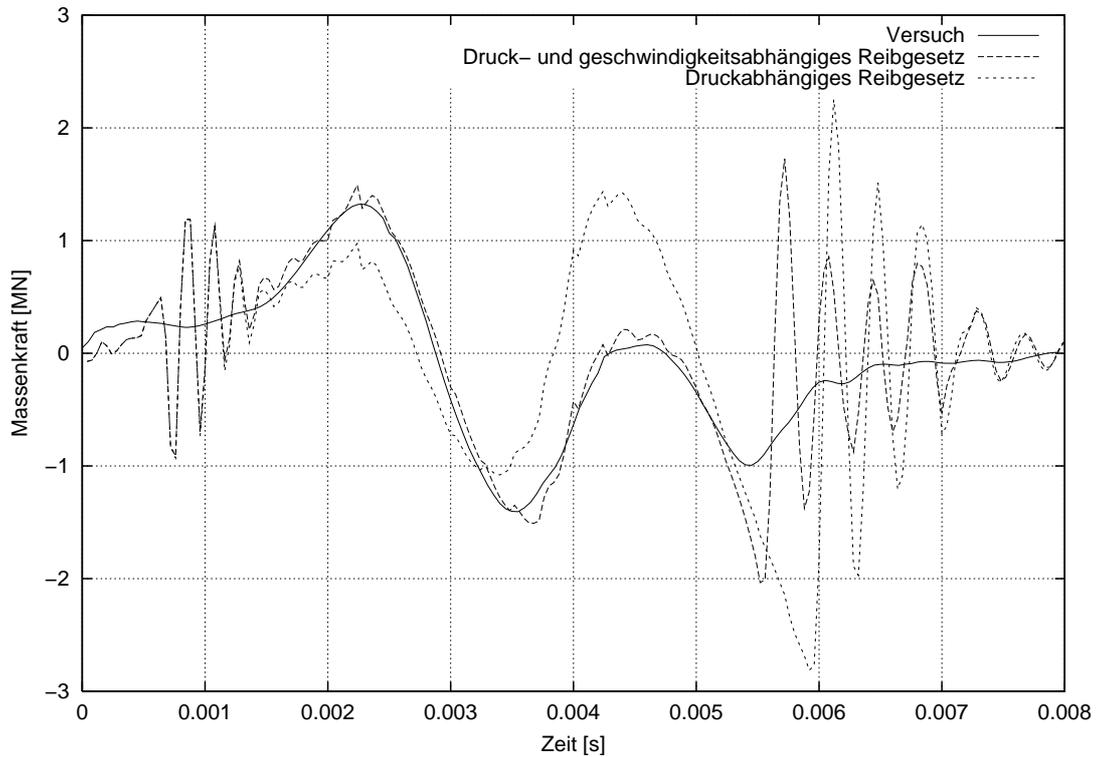
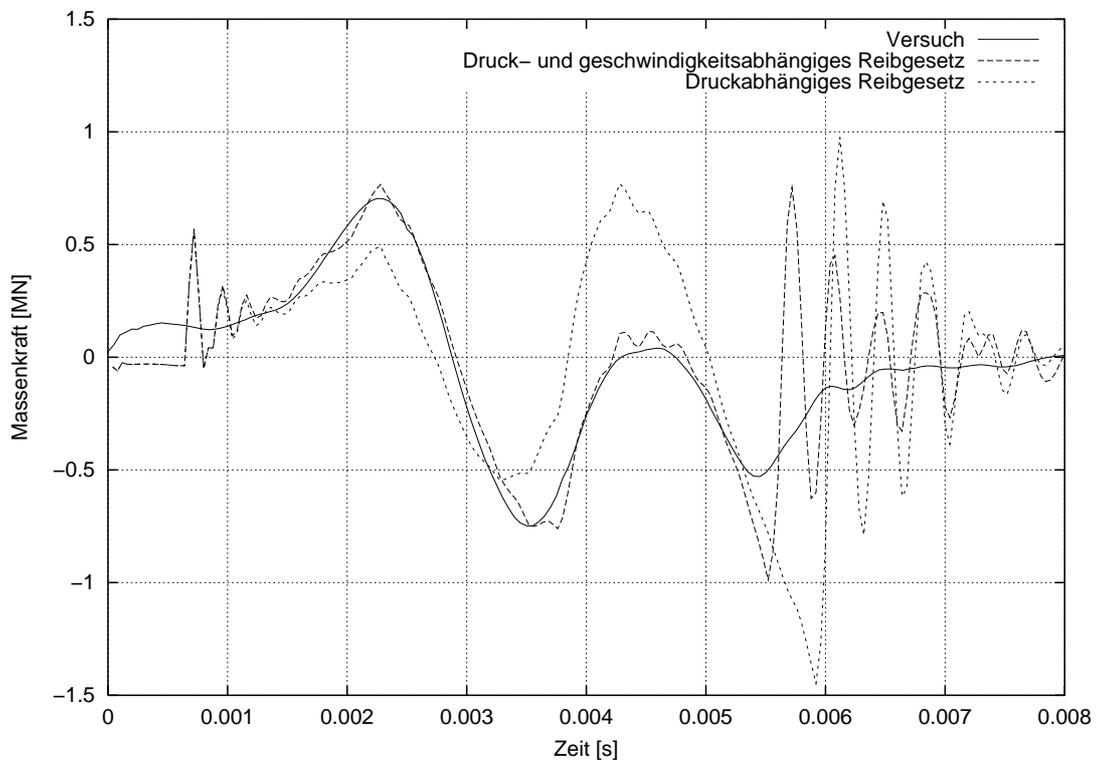
(a) Massenkraft des Konus  $m_K \ddot{u}(t)$ (b) Massenkraft der Betonsegmente  $m_B \ddot{u}(t)$ 

Abbildung 7.25: Gegenüberstellung von Massenkraft-Zeit-Verläufen aus Messung und Berechnungen mit verschiedenen Reibgesetzen.

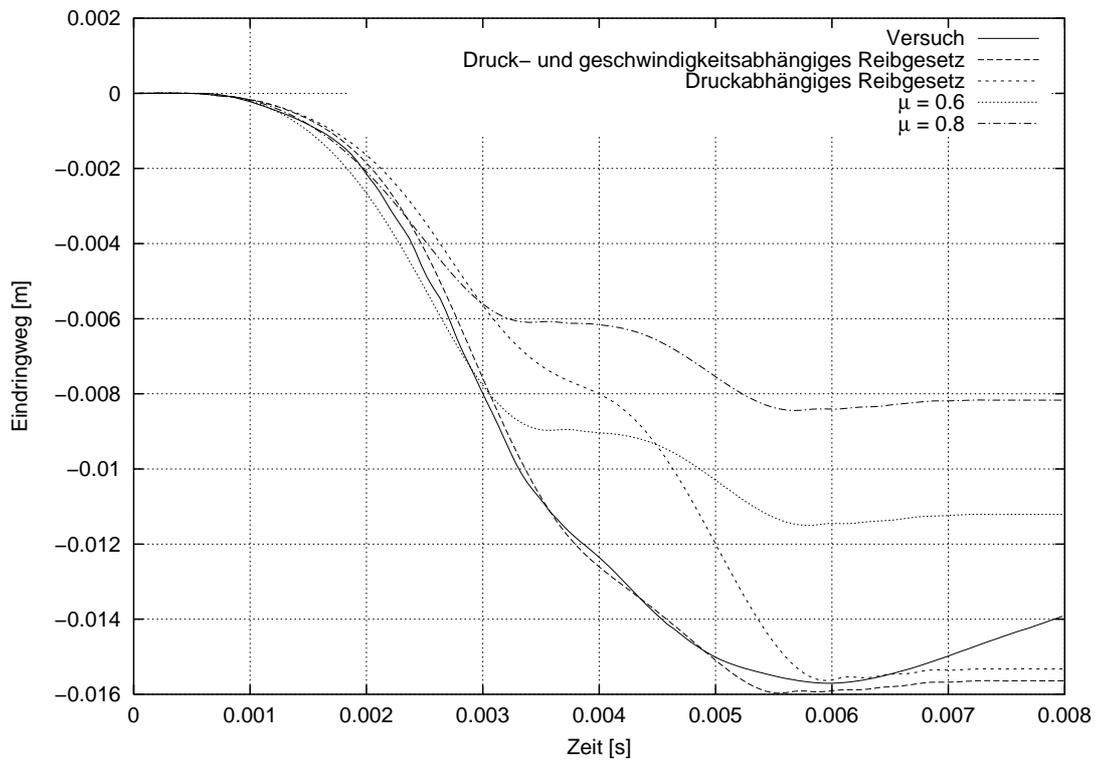
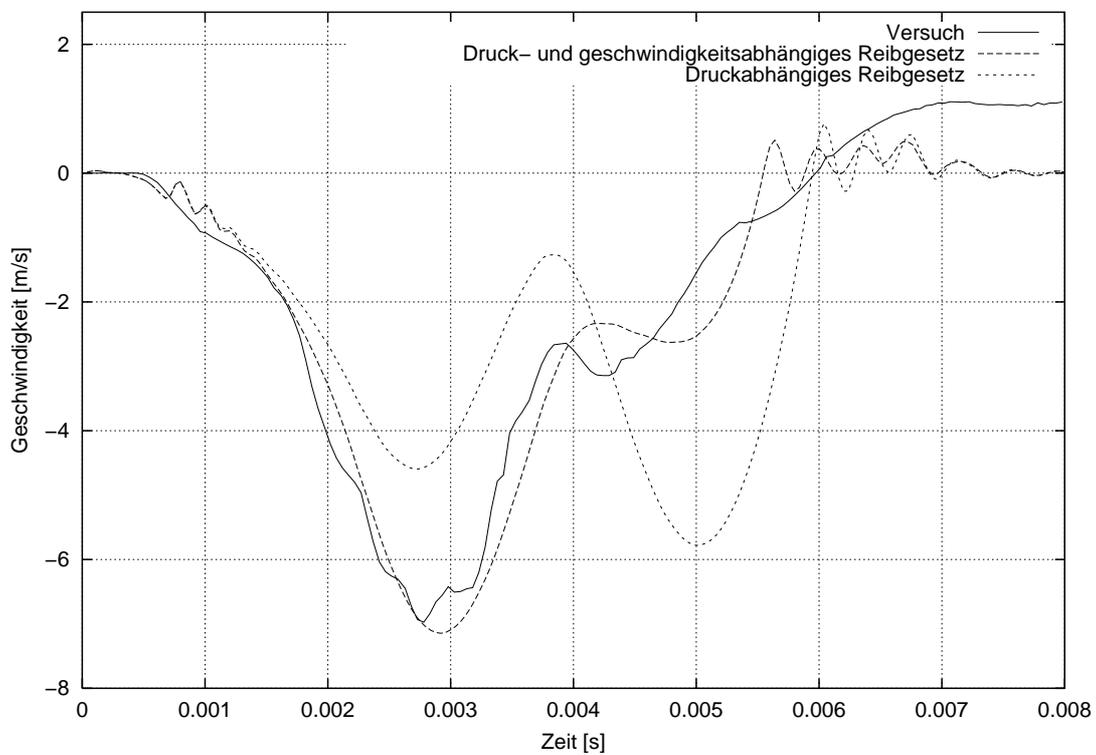
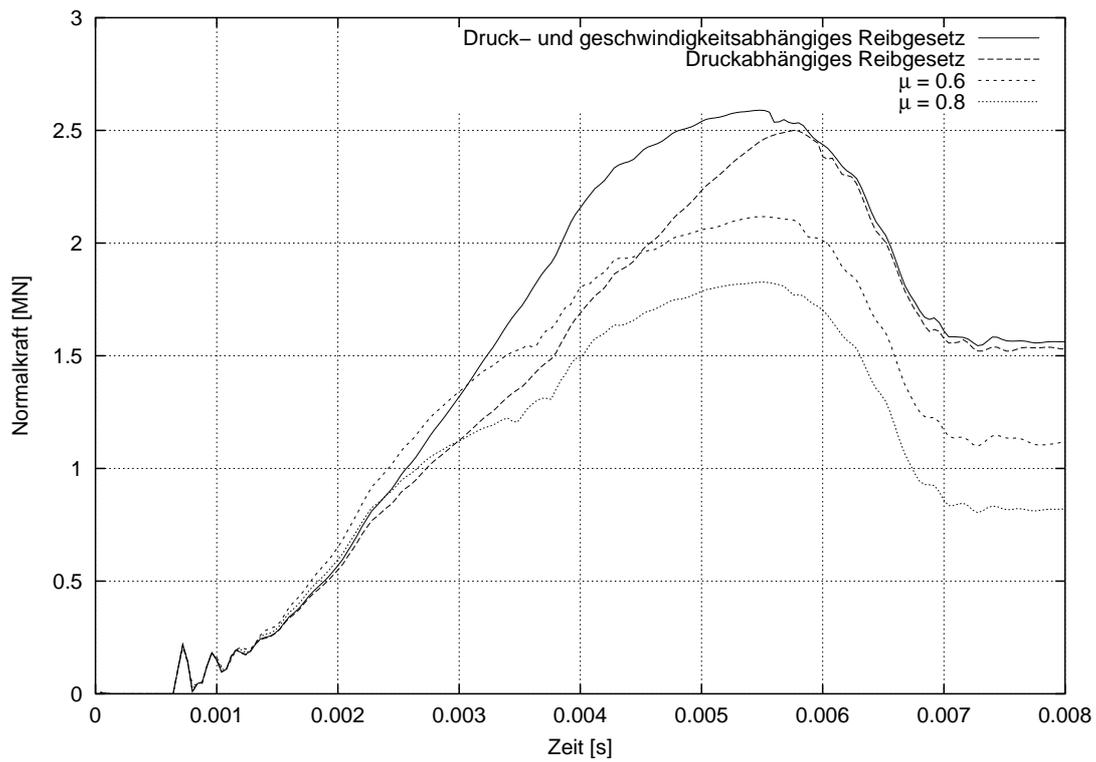
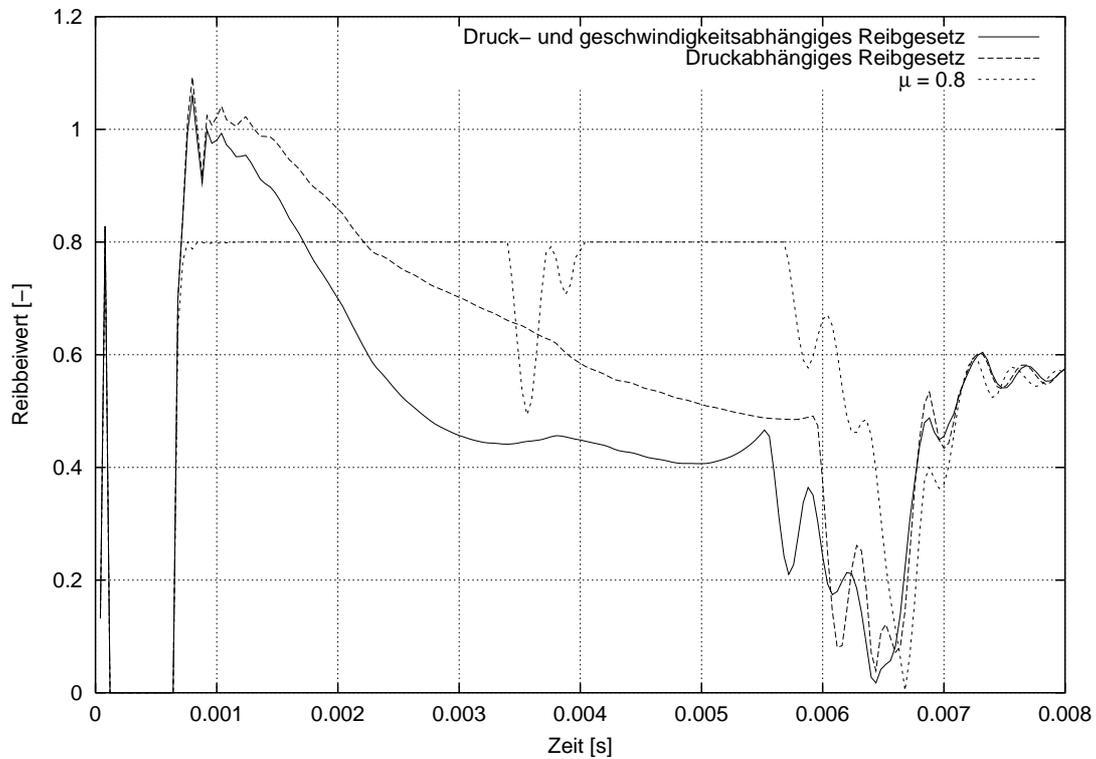
(a) Eindringweg  $u(t)$ (b) Eindringgeschwindigkeit  $\dot{u}(t)$ 

Abbildung 7.26: Gegenüberstellung von Zeit-Verläufen aus Messung und Berechnungen mit verschiedenen Reibgesetzen.

Abbildung 7.27: Normalkraft-Zeit-Verlauf  $2\pi r_i n(t)$  auf der Kontaktoberfläche.Abbildung 7.28: Reibbeiwert-Zeit-Verlauf  $\mu(t)$  als Quotient von Haft- oder Reib- und Normalkraft.

### Zum Vergleich der Algorithmen

Um die Vorteile des Augmented–Lagrange–Verfahrens gegenüber dem Penalty–Verfahren zu zeigen, werden einige Weg– und Kraft–Zeit–Verläufe, die mit diesen Verfahren und dem druck– und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz berechnet wurden, gemeinsam dargestellt.

Abbildung 7.29 (a) zeigt eine Gegenüberstellung von mit verschiedenen Verfahren errechneten Weg–Zeit–Verläufen. Die Penalty–Lösung zeigt eine geringere Eindringtiefe und somit eine größere Abweichung von den Versuchsergebnissen. Ursachen dafür sind die mit der Eindringtiefe zunehmende Penetration und die Bindung von Energie in die als Federkraft wirkenden Kontaktkräfte. Denn trotz der Wahl von geringeren Dämpfungsparametern beim Penalty–Verfahren wird scheinbar ein gewisser Energieanteil nicht dahingehend umgesetzt, dass die Eindringtiefe erhöht und realistisch wird. Vielmehr bewirken als Federkräfte fungierende Kontaktkräfte unrealistische Penetrationen und speichern Energie. Abbildung 7.29 (b) zeigt eine Gegenüberstellung von mit verschiedenen Verfahren errechneten Massenkraft–Zeit–Verläufen. Der Zeitverlauf der Penalty–Lösung unterliegt relativ gleichmäßigen Oberschwingungen. Solche finden sich auch bei den Zeitverläufen in den Abbildungen 7.30. Es ist anzunehmen, dass diese Schwingungen durch die bereits penetrierenden aus Federkräften bestehenden Kontaktkräfte entstehen. Abbildung 7.30 (a) zeigt die resultierende Normalkraft auf der Kontaktfläche. Ursachen für die Abweichungen gegenüber den Ergebnissen der Augmented–Lagrange–Lösung sind die geringere Eindringtiefe und die auftretende Penetration. Der Reibbeiwert–Zeit–Verlauf, siehe Abbildung 7.30 (b), weicht von demjenigen mit dem Augmented–Lagrange–Verfahren erzielten Verlauf ab und ist ebenfalls mit Oberschwingungen überlagert. Da als Eingangsgrößen für das Reibgesetz die weniger realistischen Eingangsgrößen aus der Penalty–Lösung benutzt wurden, entwickelt sich eine weniger realistische Reibkraft. Mit dem Penalty–Verfahren ermittelte Verläufe der Kontaktspannungen werden in der Abbildung 7.33 gezeigt und im folgenden Abschnitt diskutiert.

### Darstellung der Kontaktspannungsverläufe

Die Abbildungen 7.31 und 7.32 zeigen die Spannungsverläufe auf der Slave– und auf der Masterseite während des Stoßvorganges. Für die Ermittlung der Spannungen wurden die Knotenkräfte  $[2\pi r n_i(t)]$  oder  $[2\pi r r_i(t)]$  im Mittelbereich durch die beiden benachbarten halbierten Elementlängen und im Endbereich durch die anliegende halbe Elementlänge dividiert. Zum Vergleich sind die mit dem Penalty–Verfahren ermittelten Spannungsverläufe in den Abbildungen 7.33 (a) und (b) aufgetragen. Auffällig sind die durch Oberschwingungen verursachten rauheren Verläufe der Penalty–Lösung und das niedrigere Maximum der äußeren Kontaktknoten auf der Slaveseite.

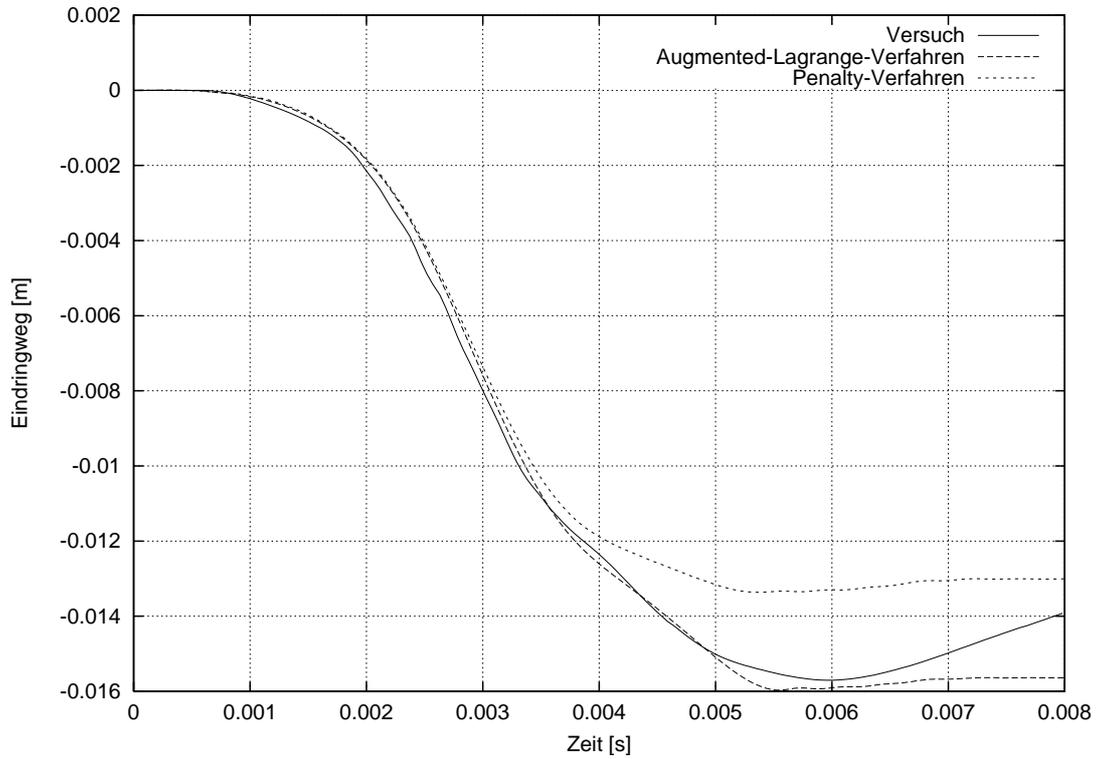
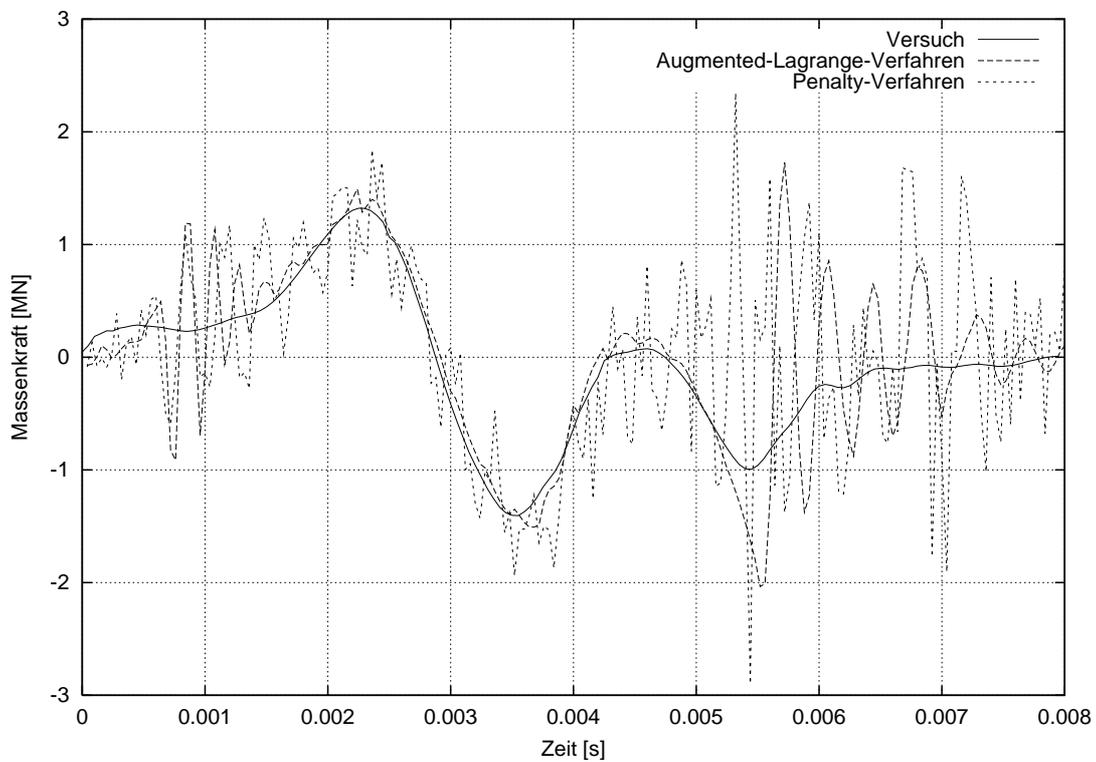
(a) Eindringweg  $u(t)$ (b) Massenkraft  $m_K \ddot{u}(t)$ 

Abbildung 7.29: Gegenüberstellung von errechneten Zeitverläufen nach dem Penalty- und nach dem Augmented-Lagrange-Verfahren.

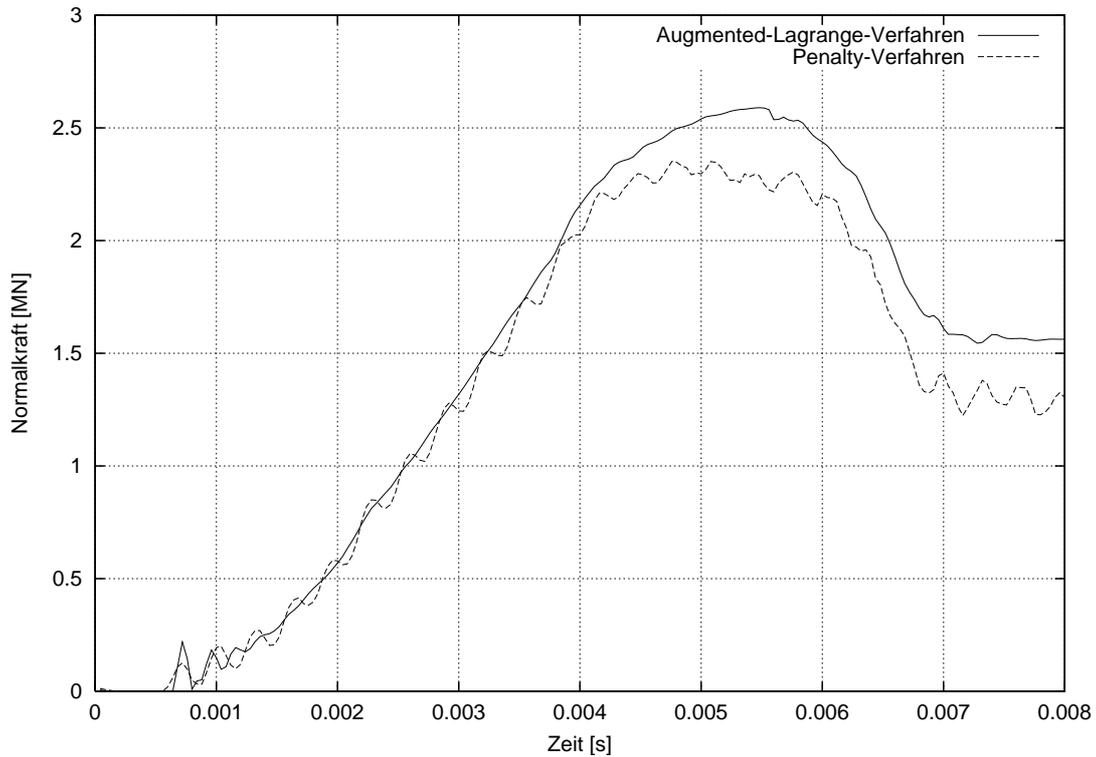
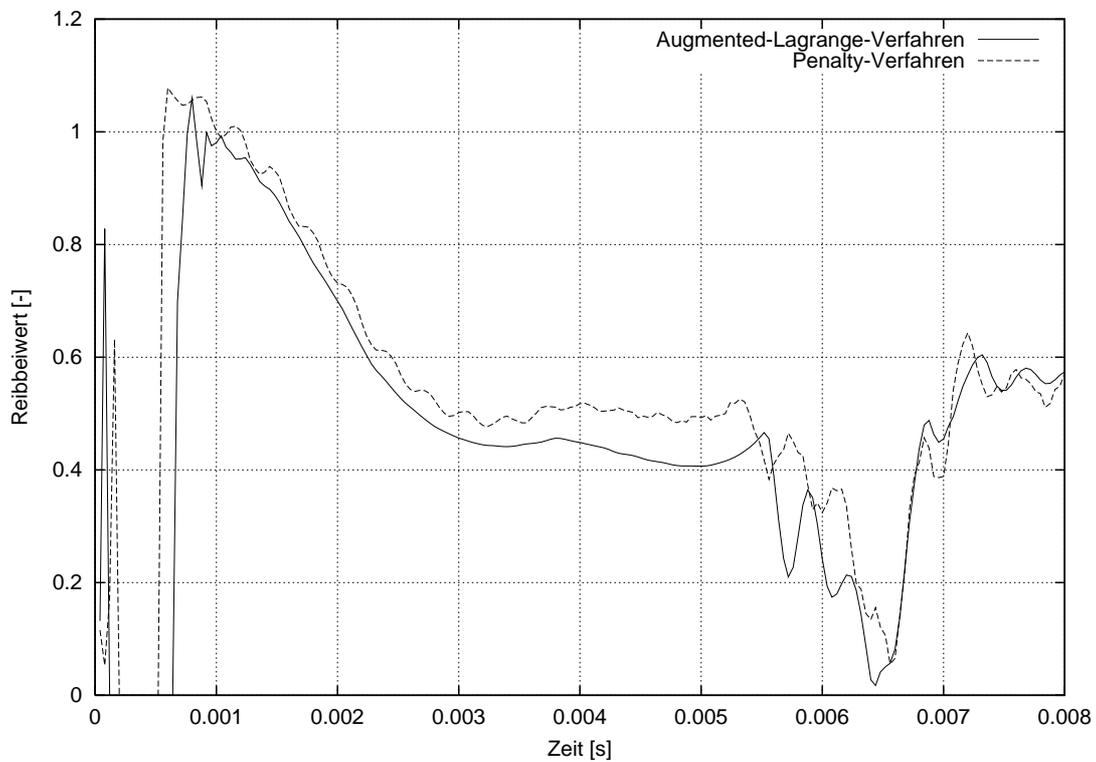
(a) Normalkraft  $2\pi r n(t)$ (b) Reibbeiwert  $\mu(t)$ 

Abbildung 7.30: Gegenüberstellung von errechneten Zeitverläufen nach dem Penalty- und nach dem Augmented-Lagrange-Verfahren.

### Zum Konvergenzverhalten der unterschiedlichen Reibgesetze

Um das Konvergenzverhalten der Gleichgewichtsiteration mit den nichtlinearen Reibgesetzen zu untersuchen, wurde im Zuge der numerischen Simulation mit den vier verschiedenen Reibgesetzen Vergleiche durchgeführt. Hierzu wurde für die beiden elastischen Körper ein unsymmetrischer Kontaktalgorithmus nach dem Penalty-Verfahren benutzt. Als Abbruchkriterium wurde das Energiekriterium mit  $1.0 \text{ E-}24$  gewählt. Das Konvergenzverhalten der Gleichgewichtsiterationen zu den drei Zeitpunkten  $t_1 = 0.002$ ,  $t_2 = 0.004$  und  $t_3 = 0.006$  [s] zeigt Tabelle 7.1: Es lässt sich keine eindeutige Aussage bezüglich der nichtlinearen Reibgesetze dahingehend treffen, dass diese zu einer geringeren Konvergenzrate führen.

Um die jeweilig benötigten Iterationen über die gesamte Rechenzeit  $T$  vergleichen zu können, wurden in der untersten Zeile von Tabelle 7.1 die bezogene Anzahl der jeweilig benötigten Iterationschritte aufgetragen. Alle Berechnungen wurden auf diejenige mit dem nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,d}$  mit der Größe 1.00 bezogen. Die Anzahl der benötigten Iterationschritte der anderen Reibgesetze ist mit Werten unter 1.00 geringfügig geringer.

		Verlauf der Fehlernorm $\ \mathbf{R}\ $			
Iterationen		$\mu = 0.6$	$\mu = 0.8$	$f_{S-B,s}(t_N, t_T)$	$f_{S-B,d}(t_N, t_T, v_T)$
$t_1$ :	1	0.263 E-2	0.392 E-2	0.589 E-2	0.504 E-2
	2	0.321 E-4	0.677 E-4	0.112 E-3	0.688 E-4
	3	0.152 E-9	0.324 E-9	0.602 E-9	0.156 E-5
	4		0.381 E-10	0.698 E-10	0.437 E-9
	5				0.464 E-10
$t_2$ :	1	0.711 E-2	0.517 E-2	0.462 E-2	0.511 E-2
	2	0.843 E-4	0.265 E-7	0.501 E-4	0.629 E-4
	3	0.331 E-6	0.311 E-8	0.591 E-9	0.196 E-9
	4	0.134 E-8	0.372 E-9	0.568 E-10	
	5	0.116 E-9	0.449 E-10		
$t_3$ :	1	0.364 E-2	0.719 E-2	0.347 E-2	0.148 E-1
	2	0.791 E-8	0.303 E-7	0.113 E-7	0.761 E-7
	3	0.789 E-9	0.338 E-8	0.132 E-8	0.366 E-8
	4	0.831 E-10	0.392 E-9	0.159 E-9	0.389 E-9
	5		0.471 E-10		0.431 E-10
T: Bezogene Anzahl		0.85	0.91	0.89	1.00

Tabelle 7.1: Konvergenzverhalten bei der Ermittlung des Gleichgewichtszustandes zu verschiedenen Zeitpunkten und über die Gesamtzeit mit verschiedenen Reibgesetzen.

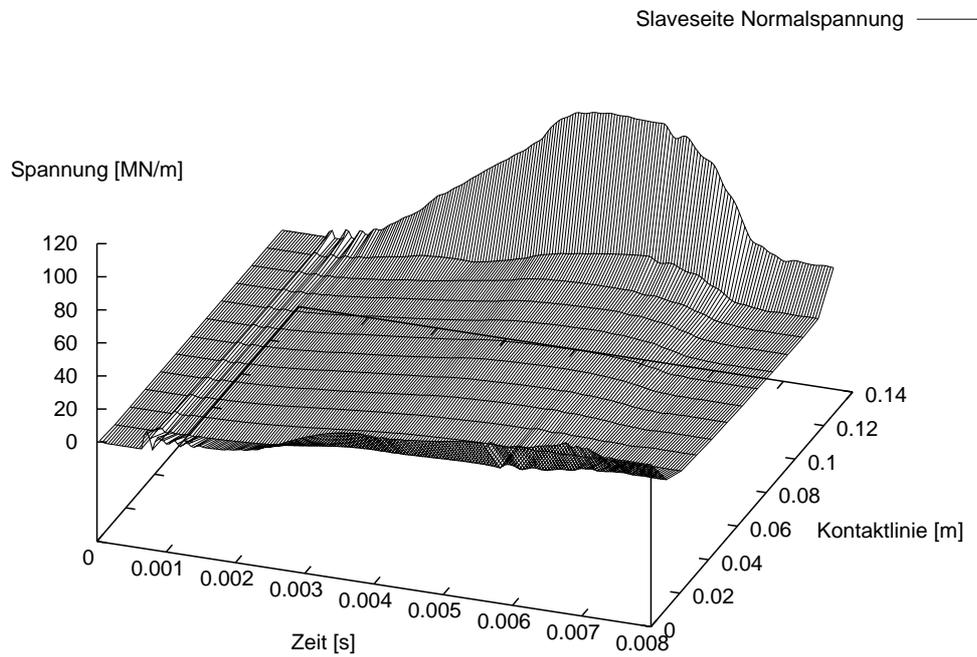
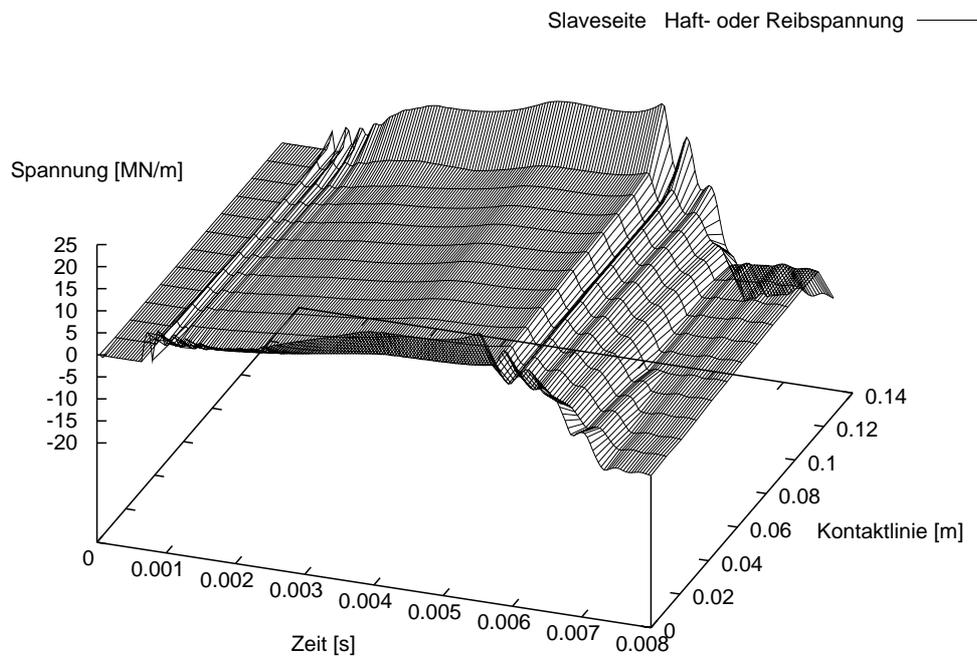
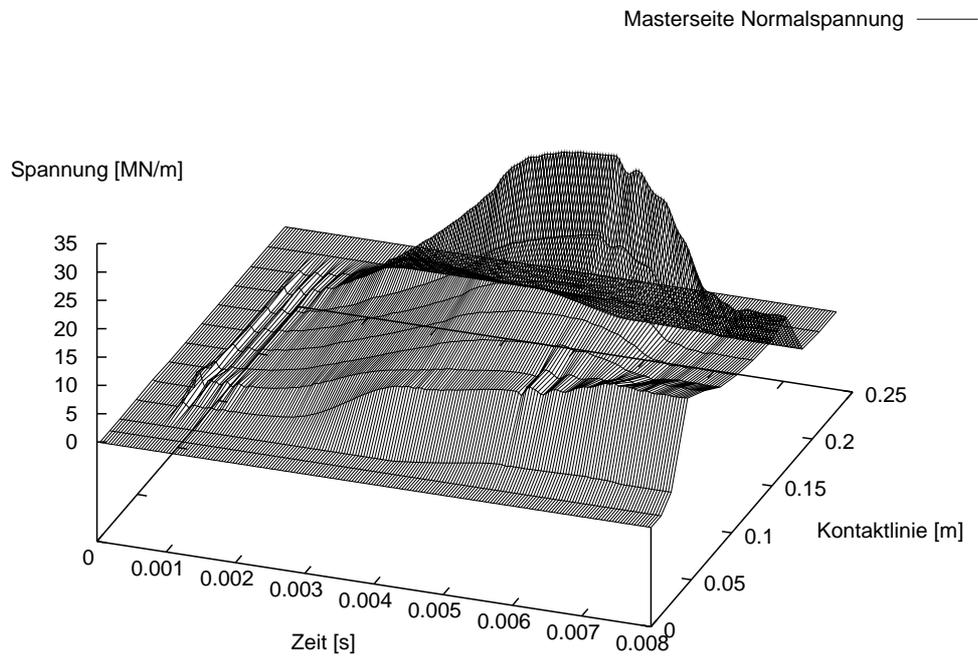
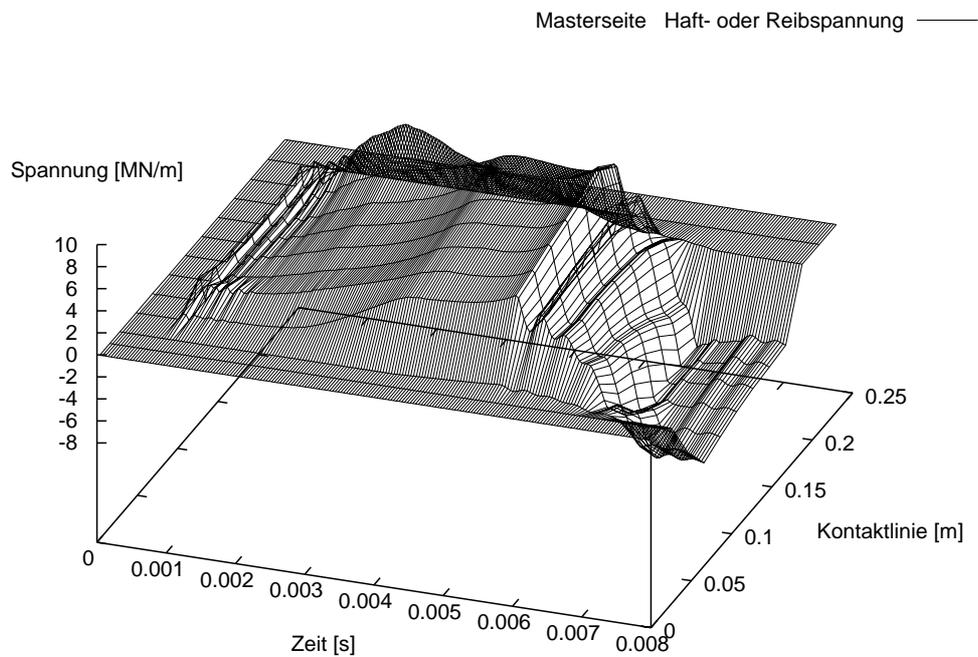
(a) Normalspannungsverlauf  $\sigma_N$ (b) Haft- oder Reibspannungsverlauf  $\sigma_T$ 

Abbildung 7.31: Darstellung der Spannungsverläufe auf der Slaveseite am Betonsegment während des Stoßvorganges mit dem nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.



(a) Normalspannungsverlauf  $\sigma_N$



(b) Haft- oder Reibspannungsverlauf  $\sigma_T$

Abbildung 7.32: Darstellung der Spannungsverläufe auf der Masterseite am Betonsegment während des Stoßvorganges mit dem nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

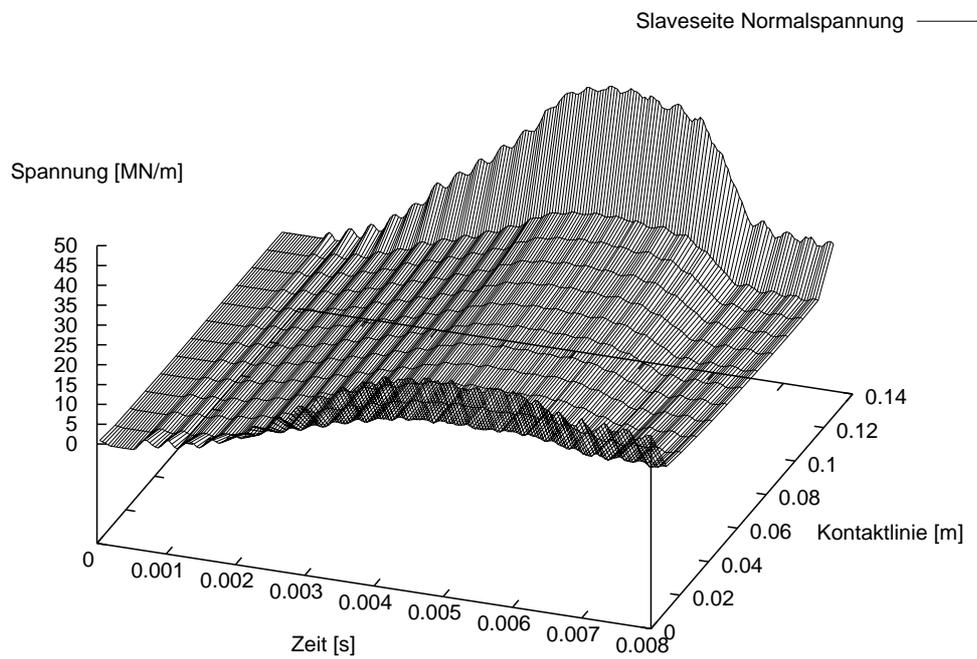
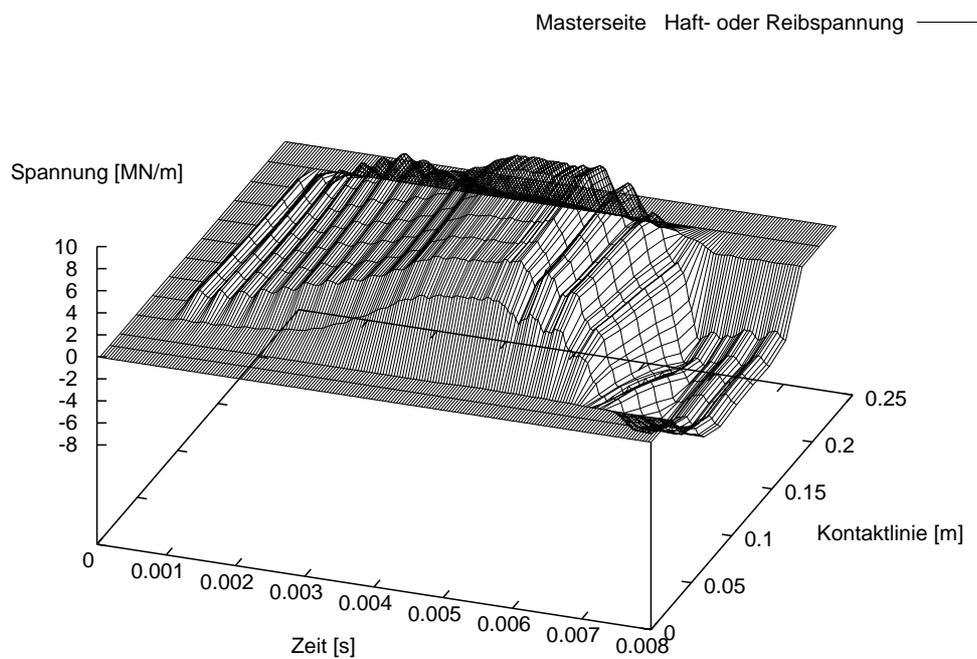
(a) Normalspannungsverlauf  $\sigma_N$ (b) Haft- oder Reibspannungsverlauf  $\sigma_T$ 

Abbildung 7.33: Darstellung der Spannungsverläufe von Lösungen nach dem Penalty-Verfahren während des Stoßvorganges mit dem nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz in Abhängigkeit von der Zeit und der Kontaktlinie.

### Diskussion zur Eignung des Starrkörpermodells

Mit Hilfe der hier vorgestellten numerischen Verfahren können im Folgenden die Grenzen des zur Versuchsauswertung herangezogenen Starrkörpermodells aufgezeigt werden.

Da bei den Versuchen konzeptbedingt weder die Normalkraft  $n(t)$  noch die Reibkraft  $r(t)$  direkt gemessen werden konnten, wurden sie anhand des Starrkörpermodells ermittelt. Dazu wurden die zu Kraft–Zeit–Verläufen  $P(t)$ ,  $[s(t)2\pi r_a]$ ,  $[m_K\ddot{u}]$  und  $[m_B\ddot{w}]$  aufbereiteten Messdaten in die Gleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) eingesetzt und der Reibbeiwert–Zeit–Verlauf  $\mu(t)$  ermittelt.

Im Zuge einer numerischen Simulation bietet sich zur Eignungsprüfung die Möglichkeit, die auf verschiedene Weise ermittelten Reibbeiwert–Zeit–Verläufe gegenüberzustellen:

- Der reale Reibbeiwert–Zeit–Verlauf auf der Oberfläche kann durch Summation der Knotenkräfte auf der Kontaktfläche ermittelt werden. Der Reibbeiwert ergibt sich dabei als Quotient aus den resultierenden Kontaktkräften in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung:

$$\mu(t) = \frac{r_i(t)}{n_i(t)} \quad (7.11)$$

- Anhand von numerischen Berechnungen können mit einem vorgegebenen Reibgesetz alle für die Anwendung des Starrkörpermodells benötigten Kraft–Zeit–Verläufe bestimmt werden. Anstatt der bei der Versuchsauswertung zu Kraft–Zeit–Verläufen weiterverarbeiteten Messdaten können hierbei die bei vorgegebenem Reibgesetz aus den numerischen Berechnungen ermittelten Kraft–Zeit–Verläufe in die Gleichung (7.3)

$$\mu(t) = \frac{-(s(t) 2\pi r_a + m_B\ddot{w}) \cos\alpha + (P(t) - m_K\ddot{u}) \sin\alpha}{(s(t) 2\pi r_a + m_B\ddot{w}) \sin\alpha + (P(t) - m_K\ddot{u}) \cos\alpha}$$

eingesetzt werden.

Zur Überprüfung der Auswertung mit dem Starrkörpermodell sollen die aus numerischen Berechnungen auf verschiedene Weise anhand der Gleichungen (7.11) und (7.3) ermittelten Reibbeiwert–Zeit–Verläufe  $\mu(t)$  einander gegenübergestellt werden. Hierzu wurden zwei Varianten untersucht: Eine mit einem linearen Reibgesetz mit  $\mu = 0.8$  und eine weitere mit dem nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz  $f_{S-B,d}$ .

Es ist zu erwarten, dass die Unterschiede der jeweilig zu vergleichenden Zeitverläufe um so geringer sind, je besser das Starrkörpermodell geeignet ist, die Größen  $\mu(t)$ ,  $n(t)$  und  $r(t)$  zu ermitteln.

Die mit Gleichung (7.3) und (7.11) ermittelten Verläufe der Verhältnisse der Kontaktkräfte weisen jedoch, wie in den Abbildungen 7.34 (a) und (b) erkennbar wird, Unterschiede auf: Die anhand von Gleichung (7.11) erzielten Ergebnisse entsprechen dem vorgegebenen Reibgesetz und sind gegenüber denjenigen von Gleichung (7.3) frei von Oberschwingungen.

Grundsätzlich gilt, dass während der Haftzustände in den Ruhezuständen zu Beginn, beim Richtungswechsel und beim abschließenden Steckenbleiben des Konus der Reibbeiwert  $\mu(t)$  – das Verhältnis von  $r(t)$  zu  $n(t)$  – kleiner ist als während der Gleitphasen, da die haftende Tangentialkraft kleiner ist als die Reibkraft.

Größere Unterschiede zwischen den mit Gleichung (7.3) und Gleichung (7.11) erzielten Reibbeiwert–Zeit–Verläufen werden bei diesen Haftzuständen zu Beginn der Bewegung, beim Richtungswechsel und beim anschließenden Steckenbleiben sichtbar. Scheinbar sind die Abweichungen bei Rechenläufen mit dem nichtlinearen Reibgesetz größer, da hier Eindringweg und damit auch Geschwindigkeit und Beschleunigung größer sind. Außerdem ist dann die Reibkraft im Gleitzustand von mehreren Größen abhängig, wobei sich die Ungenauigkeiten einzelner Größen akkumulieren.

Damit wird deutlich, dass das Starrkörpermodell zur Ermittlung des Reibbeiwert–Zeit–Verlaufes nur begrenzt geeignet ist und eher zur Bestimmung von qualitativen Tendenzen dienen kann. Bei dynamischen Anwendungen müssten zumindest Eigenfrequenzen der Teilkörper ausgefiltert werden, da das Starrkörpermodell diese nicht abbilden kann. Dies wäre am numerischen Modell durchaus machbar.

Grundlegende Ursachen für die oben genannten Abweichungen liegen darin, dass beim Starrkörpermodell für die einzelnen Teilkörper gemittelte Größen benutzt werden. Es steht daher nur ein über Winkelbeziehungen gekoppelter Freiheitsgrad zur Verfügung. Damit sind die Kontaktkräfte über die Fläche konstant. Verformungen der Fläche und des Kontinuums können nicht berücksichtigt werden.

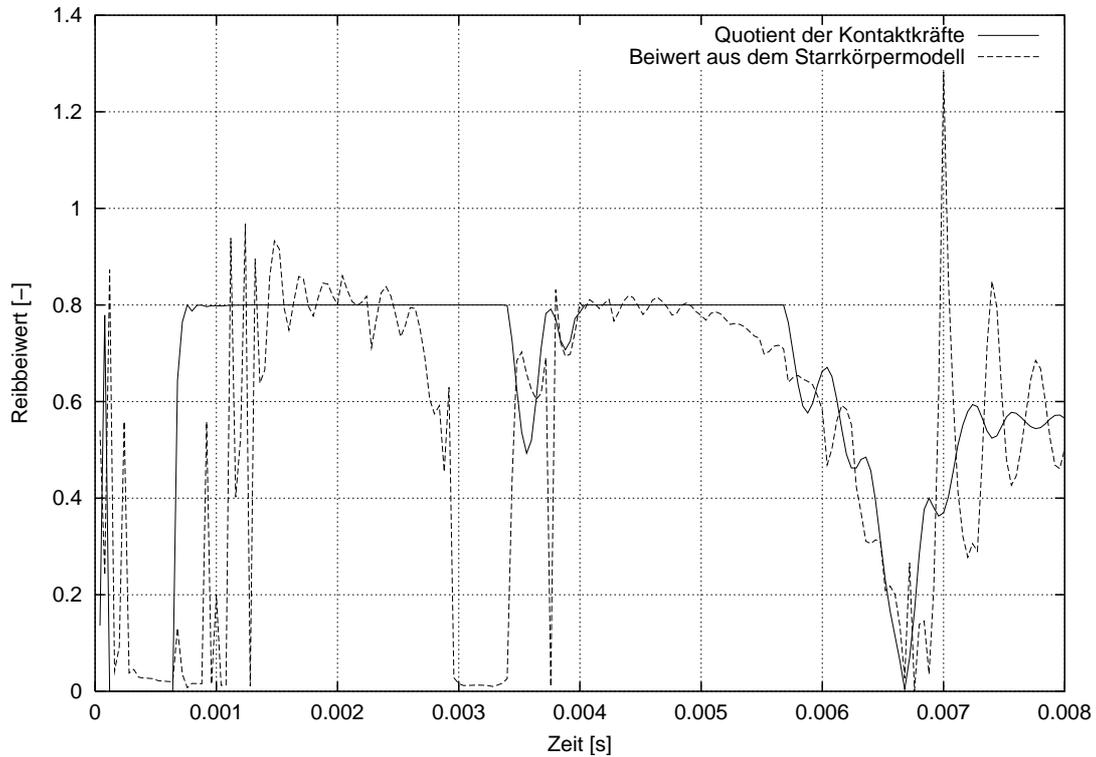
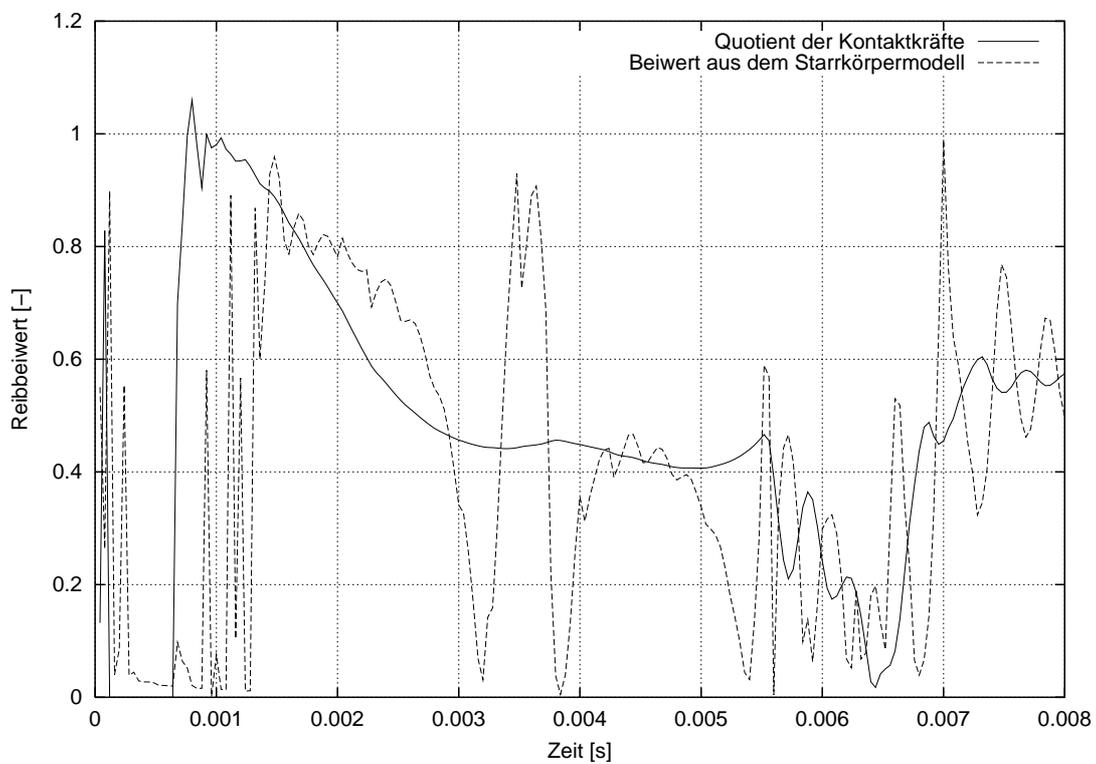
(a) lineares Reibgesetz mit  $\mu = 0.8$ (b) nichtlineares Reibgesetz mit  $f_{S-B,d}$ 

Abbildung 7.34: Gegenüberstellung von Reibbeiwert–Zeit–Verläufen, die einerseits als Quotient der Kontaktkräfte, andererseits mit dem bei der Auswertung benutzten Starrkörpermodell ermittelt wurden.

### Diskussion zum dynamischen Versuch

Als Folge verschiebungsgesteuerter Berechnungen mit unterschiedlichen Parametern wurde erkannt, dass der gemessene Stoßkraft–Zeit–Verlauf unbefriedigenden Abweichungen unterlag. Mit Hilfe dieser verschiebungsgesteuerten Untersuchungen konnte jedoch anschließend, siehe Abbildung 7.23, ein entsprechender Stoßkraft–Zeit–Verlauf ermittelt werden.

Für die unzulängliche Ermittlung dieses Kraft–Zeit–Verlaufes aus dem Versuch kommen mehrere Ursachen in Frage. Zum einen musste, da die Kraftmessdose nicht unmittelbar an der Kontaktstelle positioniert war, ein Teil der Kraft aus anderen Messergebnissen addiert werden. Zum anderen ist vermutlich eine Kombination des Eigenschwingverhaltens der Fallmasse mit dem Konus eine weitere Ursache. Hinzu kommt, dass die Fallmasse aus mehreren verschieden geformten Teilkörpern zusammengesetzt war. Der Kenntnisstand über ein etwaiges Eigenschwingverhalten war relativ gering, da bei früheren Versuchsreihen mit der Fallmassenanlage weniger der Kraft–Zeit–Verlauf selbst als vielmehr der Impuls als integrale Größe interessierte. Bei diesen Versuchsreihen war, da es sich meistens um Bauteilversuche handelte, die Schwingzeit des gestoßenen Bauteils wesentlich länger als diejenige der Fallmasse.

Proportionalität zwischen Eindringweg und Zugkraft im Stahlring war, wie schon mit Hilfe der numerischen Simulation des statischen Versuches deutlich wurde, nicht ständig gegeben. Eine Ursache dafür kann in der nichtlinearen Federwirkung der Elastomerschicht oder an einer Mehrfachnutzung durch Vorversuche liegen.

Gravierender Nachteil dieses Versuchskonzeptes ist es, dass die Messung der Kontaktkräfte nicht direkt möglich ist. Deshalb wird für die Auswertung ein Modell benötigt, was zu einem wesentlich höheren Aufwand führt. Grundsätzlich erschwerend wirkt sich die Tatsache aus, dass ein Stoßvorgang in der Regel in erheblichem Ausmaß instationär ist. Dies war auch hier der Fall.

Wie bei der numerischen Umsetzung dieses Versuchs gezeigt wurde, sind die Genauigkeitsanforderungen konzeptbedingt sehr hoch. Das durch den Stoß hervorgerufene Beschleunigen und Eindringen des Konus führt zu schnellen Veränderungen der Trägheits- und der Kontaktkräfte. Kenntnisse über Filtertechniken sollten daher besser genutzt werden.

Durch die Gegenüberstellung von Rechenläufen mit dem Penalty–Verfahren und solchen mit dem Augmented–Lagrange–Verfahren wurde deutlich, dass die Genauigkeit durch das Augmented–Lagrange–Verfahren erhöht wird und die durch das Penalty–Verfahren algorithmisch bedingten Verfälschungen der Ergebnisse verschwinden.

Positiv zu bewerten ist die Tatsache, dass der Versuchsaufbau für den dynamischen Versuch unmittelbar aus dem statischen Aufbau übernommen werden konnte und es gelungen ist, das für den statischen Fall erzielte Ergebnis für den dynamischen Fall zu erweitern. Der Vorschlag für ein nichtlineares druckabhängiges Reibgesetz konnte um einen geschwindigkeitsabhängigen Anteil erweitert werden.

Für zukünftige Versuchsreihen ergeben sich mehrere Optimierungsmöglichkeiten:

- Eine Vergrößerung des Neigungswinkels  $\alpha$  des Konus wird das Verhältnis der zurückgelegten Wege  $u(t)$  und  $w(t)$  beim Eindringen vergrößern.
- Durch eine Verringerung des benötigten Federweges kann die Dicke der Elastomerschicht verringert oder auf eine solche verzichtet werden.
- Durch eine Verringerung der Masse des Konus kann eine höhere Geschwindigkeit erzielt und die Eigenfrequenz erhöht werden.
- Um möglichst viel Arbeit in das System zu leiten, ist eine möglichst lang andauernde Kontaktzeit zwischen Fallmasse und Konus anzustreben. Dabei ist die Kraft-Zeit-Funktion möglichst exakt zu messen, da sie eine wesentliche Grundlage für die Auswertung ist.

Dieses Forschungsvorhaben und die bei der Gegenüberstellung erkennbar werdenden Grenzen der numerischen Umsetzung der gemessenen Größen zeigen das prinzipielle Vorgehen zur Erweiterung des Wissensstandes über das Reibverhalten und sollen Anstoß für weitere Experimente und Detailuntersuchungen geben. Mit Hilfe der dargestellten numerischen Möglichkeiten und der Nutzung der erzielten Ergebnisse lässt sich zukünftig der Versuchsaufbau schon während der Konzeptionsphase durch Parameterstudien von Material, Geometrie und Kinematik und dem Abschätzen der Kontaktkraftverteilung optimieren.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung

### 8.1 Bemerkungen zur Numerik

Während im unsymmetrischen Fall die Anwendung der Gleitregel im Zuge der Gleichgewichtsiteration erfolgt, wird sie im symmetrisierten Fall nur während des Anpassungsprozesses im Gleichgewichtszustand benutzt. Deshalb ist für das unsymmetrische Verfahren eine Linearisierung der Reibkraft sowohl im Haft- als auch im Gleitfall notwendig. Dabei werden mit den in jedem Iterationsschritt auftretenden Prädiktorschritten anhand der Gleitregel die Reibkräfte bestimmt und die zu den Haft- oder Gleitzuständen gehörenden Weganteile ermittelt. Aufgrund des numerischen Verhaltens des weggesteuerten Iterationsverfahrens entsprechen die ermittelten Haft- oder Gleitzustände sowie die Verteilung  $g_T$  jedoch nicht unbedingt den physikalischen Gegebenheiten. Da die Gleitregel beim symmetrisierten Verfahren nur im Gleichgewichtszustand angewendet wird, hat sich herausgestellt, dass sie gut geeignet ist zur physikalisch nachvollziehbaren Ermittlung von Haft-Gleitzuständen und Weganteilen.

Weiterhin ist bei der Anwendung der Verfahren zu beachten, dass die unsymmetrische und die symmetrisierte Variante des Augmented-Lagrange-Verfahrens ein unterschiedliches Konvergenzverhalten haben. Da bei dem unsymmetrischen Verfahren die Gleitregel bei jedem Iterationsschritt angewendet wird, werden die korrekten Reibkräfte schon in dieser Phase bestimmt. Alle Kontaktknoten entlang einer Kontaktfläche sind schon im nahezu physikalisch korrekten Zustand, bevor der Anpassungsprozess durchgeführt wird. Der Anpassungsprozess kann beim unsymmetrischen Verfahren jederzeit beendet werden. Wird auf die Durchführung des Anpassungsprozesses verzichtet, geht dieses Verfahren in das Penalty-Verfahren über.

Bei der symmetrisierten Variante treten Veränderungen der Reibkräfte auf der Kontaktfläche bezüglich des Haft–Gleitzustandes noch nach mehreren Wiederholungen auf, da die Gleitregel lediglich im Gleichgewichtszustand angewendet wird. Beim symmetrisierten Verfahren muss der Prozess beobachtet und kann erst dann beendet werden, wenn keine Veränderungen mehr auftreten. Es ist also eine Minimalanzahl von Schleifen erforderlich.

Eine systematische Schwäche des Augmented–Lagrange–Verfahrens ist die innerhalb eines Zeitschrittes mit der Anzahl der Wiederholungen linear steigende Rechenzeit. Das Konvergenzverhalten zur Minimierung der Penetration und der elastischen Tangentialverschiebung innerhalb eines Zeitschrittes ist lediglich linear. Für eine effiziente Steuerung benötigt man außerdem Abbruchkriterien. Als Abbruchkriterien für die Schleifen des Anpassungsprozesses wurden für das unsymmetrische und für das symmetrisierte Verfahren verschiedene Kriterien gewählt, hierzu werden die Summe der Penetration oder der Penaltyenergie oder relative Veränderungen zum vorherigen Schritt herangezogen.

Die Penaltyabhängigkeit verschwindet nicht vollständig. Die gewählten Penaltyfaktoren haben einen Einfluss auf die Optimierung der Beträge und die Konvergenzgeschwindigkeiten der zu erreichenden minimalen Penetrationen. Um höhere Konvergenzgeschwindigkeiten und geringere Penetrationen zu erzielen, lassen sich die Penaltyfaktoren eines jeden Slaveknotens während des Anpassungsprozesses verändern.

Bei einigen Beispielrechnungen mit zwei kontaktierenden elastischen Körpern war das Konvergenzverhalten bei symmetrischer Kontaktsuche nicht quadratisch. Der Grund liegt höchstwahrscheinlich in der Kontaktsuche mit der 'active–set–strategie', bei der die Anzahl der Kontaktknoten in jedem Iterationsschritt festgelegt wird und so zu ungünstigen Konstellationen führen kann.

Untersuchungen im Bereich der Dynamik z. B. mit einem impliziten Zeitschrittverfahren erfordern den Einsatz von Dämpfung. Hierzu werden entweder die Newmark–Parameter selbst oder ein zusätzlicher Term für die Rayleigh–Dämpfung benutzt. Dies führt zu einem, wenn auch geringen Einfluss auf die Ergebnisse.

Das Reibverhalten ist komplex; es kann abhängig sein von Druck, Geschwindigkeit, Weg, Temperatur und anderen Einflüssen. Die numerische Umsetzung von nichtlinearen mehrparametrischen Reibgesetzen ist möglich. Die Hauptproblematik liegt in der Ermittlung der stoffgesetzlichen Zusammenhänge selbst. Während druck- und geschwindigkeitsabhängige Reibgesetze lediglich von den aktuellen Eingangsgrößen des Iterationsschrittes abhängen, sind wegabhängige Reibgesetze geschichtsabhängig.

## 8.2 Zusammenfassung

### Problemstellung und Zielsetzung

Zu einer Vielzahl von Analysen von Kontaktproblemen gehören Untersuchungen über das lokale Verhalten im Kontaktbereich. Dabei sind im Gegensatz zur Untersuchung des globalen Verhaltens besonders die Kraftverläufe auf der in Raum und Zeit veränderlichen Kontaktfläche von Interesse. Dies führt (als –'high-precision-contact'–) zu hohen Anforderungen an die Genauigkeit.

Bei Tangentialbewegungen treten neben den Kraftverläufen in Normalenrichtung auch Reibkräfte auf. Eine wesentliche Voraussetzung für die Durchführung einer realistischen Simulation ist die Beschreibbarkeit des tatsächlichen Reibverhaltens.

Folgende Zielsetzungen mussten dabei verfolgt werden:

- Entwicklung, Validierung und Anwendung von geeigneten Algorithmen zur Untersuchung von praxisnahen Problemstellungen,
- Integration von komplexeren Reibgesetzen zur Analyse von Reibzuständen,
- Untersuchungen von Kraftverläufen auf der Kontaktfläche und
- Gegenüberstellung eigener experimenteller Untersuchungen und der dabei entwickelten numerischen Modelle.

Nach einer Einführung in den Stand der numerischen Verfahren wurde in Hinblick auf die Problemstellung eine Vorgehensweise mit Knoten–Segment–Kontakt gewählt, die sich bei den verwendeten linearen Elementen auch direkt ergibt. Bei den zugehörigen Optimierungsverfahren erschien das Augmented–Lagrange–Verfahren am geeignetsten, da dieses die Vorteile des Penalty–Verfahrens mit der verschiebungsgesteuerten Lösbarkeit und der konstant bleibenden Größe des zu lösenden Gleichungssystems mit dem Vorteil der Lagrange–Multiplikatoren–Methode der punktweisen exakten Lösung verbindet. Im Zusammenhang mit dynamischen Anwendungen kommen die genannten Vorteile auch zusammen mit der Möglichkeit zur Symmetrisierung des Gleichungssystems besonders deutlich zum Tragen.

### Das Reibverhalten

Es wurde ein Einblick zum Stand der Theorien in der Tribologie gegeben. In der neueren Literatur wird der Weg beschritten, eher Zusammenhänge und Mechanismen zu erkennen und systematische Näherungen zu bevorzugen, als unvollständige Formeln aus Einzellösungen anzugeben.

Reibung gilt als Oberbegriff für diverse energiedissipierende Prozesse. Diese sind

- Materialzerstörung oder Plastizität,
- Wärmeentwicklung und
- Chemische Reaktionen.

Folgende wesentliche Mechanismen agieren auf der Oberfläche:

- Adhäsion,
- Abrasion oder Furchenbildung und
- Elastoplastische Deformation.

Dabei ist die Wichtung des Auftretens dieser Mechanismen von der Werkstoffpaarung abhängig.

Prinzipiell müssen, um das Reibverhalten einer bestimmten Werkstoffpaarung zu ermitteln, experimentelle Untersuchungen durchgeführt werden. Aus den Ergebnissen dieser Untersuchungen können Vorschläge für Reibgesetze gemacht werden. Für die Paarung Stahl und Beton liegen eigene Versuchsergebnisse vor, die in die Kontaktalgorithmen durch Nutzung der Gleitregel implementiert wurden.

### **Kontaktbedingungen**

Die Kontaktbedingungen wurden anhand der lokalen Betrachtung mit dem Master-Slave-Konzept eingeführt.

Die Beschreibung der Relativbewegung in Normalenrichtung wurde durch die Ermittlung des minimalen Abstandes eines Punktes des Slavekörpers mit dem Masterkörper durch Rückprojektion auf die Masterfläche ermittelt. Für die reibbedingte Kontaktbedingung in tangentialer Richtung wurde die Relativgeschwindigkeit von Slave- und Masterpunkt benötigt. Somit ließen sich die Kontaktbedingungen (Kuhn-Tucker-Bedingungen) in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung mit Reibung aufstellen.

Um das Ziel einer verschiebungsgesteuerten Lösung des Problems zu erreichen, wurden die Bedingungen durch Einführung von Penaltyfaktoren in Normalenrichtung und tangentialer Richtung 'gelockert'. Durch diese Regularisierung sind die Kontaktkräfte von den Verschiebungen abhängig.

Anschließend mussten die Kontaktbedingungen in das Prinzip der virtuellen Arbeit integriert werden. Da die Lösung implizit erfolgt, wurde auch die Linearisierung der virtuellen Kontaktarbeit benötigt. Die Diskretisierung erfolgte beim Knoten-Segment-Kontakt mit einem Dreiknoten-Kontaktelement.

### **Augmented–Lagrange–Verfahren und Symmetrisierung**

Als Optimierungsverfahren beim Knoten–Segment–Konzept bot sich die Lagrange–Multiplikatoren–Formulierung mit nicht regularisierten Kontaktbedingungen oder die Augmented–Lagrange–Formulierung mit erweiterten regularisierten Kontaktbedingungen an. Die letztere ließ sich in das Penalty–Verfahren überführen.

Der Lösungsprozess des Augmented–Lagrange–Verfahrens wurde in zwei Phasen durchgeführt. In der ersten Phase wurden die Werte der Multiplikatoren konstant gehalten und der aktuelle Bewegungszustand ermittelt. In der zweiten Phase wurde der Bewegungszustand festgehalten und die Werte der Multiplikatoren aktualisiert. Diese beiden Phasen wurden solange mit den jeweils verbesserten Multiplikatoren durchlaufen, bis die Penetration oder die elastische Tangentialverschiebung nahezu eliminiert waren und die Multiplikatoren quasi die exakte Lösung erreicht hatten. Grundsätzlicher Vorteil dieser Aufteilung in zwei Phasen ist die Beibehaltung der quadratischen Konvergenz bei der Gleichgewichtsiteration.

Bei der Berücksichtigung von Reibung wurde eine Gleitregel angewendet, um die Reibkraft und den Haft– oder Gleitzustand zu bestimmen. Dieser Umstand führte zur Entwicklung zweier Lösungsvarianten, einem unsymmetrischen und einem symmetrischen Verfahren. Wesentlicher Unterschied ist, dass die Gleitregel bei der unsymmetrischen Variante in der ersten Phase und bei der symmetrischen Variante in der zweiten Phase angewendet wird.

### **Analyse der Algorithmen durch Anwendungen**

Zuerst wurden die codierten Lösungsvarianten anhand von Beispielen aus dem Schrifttum validiert. Anschließend wurden typische Kontaktzustände anhand von praxisnahen, dynamischen Problemstellungen mit Hilfe der Algorithmen untersucht. Hierzu gehörten:

- Das Rollen eines Ringes auf einer Ebene,
- das Sich–in–Bewegung–setzen eines Blockes mit Übergängen vom Haften ins Gleiten,
- das Stoßen eines Ringes gegen eine Ebene – unter Betrachtung des stark veränderlichen Kraftverlaufs und des globalen Verhaltens –, und
- das Einschlagen eines Zylinders in eine konische Form – unter Betrachtung der Entwicklung der Normal– und Reibkraft während der Schlag– und Ruhephasen.

Schwerpunkte waren der Vergleich der Algorithmen und die Betrachtung der Kraftverläufe auf der Kontaktfläche. Hierzu gehörten die Analyse von Reibzuständen wie Haft–Gleit–Übergänge und auch die Integration komplexerer Reibgesetze.

Abschließend wurden anhand eigener experimenteller Untersuchungen die zugehörigen numerischen Simulationen durchgeführt. Die Versuche dienten der Ermittlung des Reibverhaltens von Stahl und Beton. Auf Basis dieser Versuchsergebnisse wurden Reibgesetze implementiert sowie ein statischer Versuch und ein dynamischer Versuch numerisch nachvollzogen. Dabei wurden auch alternative Reibgesetze benutzt und anhand der gewonnenen Erkenntnisse das Versuchskonzept diskutiert.

### **Ausblick**

Mit den vorgestellten Algorithmen ist es möglich, Kontaktprobleme mit Reibung zu behandeln. Die Implementierung komplexer Reibgesetze bereitet prinzipiell keine Schwierigkeiten. Da man zu jedem Zeitpunkt für einen Slave–Knoten Informationen über Druck, zurückgelegten Weg, Geschwindigkeit und Temperatur erhält, lässt sich ein von diesen Größen abhängiges Reibgesetz mit Mehraufwand numerisch realisieren. Dieser Umstand gilt als Motivation, das in der Tribologie diskutierte realistische Reibverhalten bei Lösungen von Kontaktproblemen zu berücksichtigen.

Bis heute wurden meist nur Versuche durchgeführt, die gemäß Zielsetzung (Ermittlung der Reibkraft für ein Einzelproblem) zu Einzellösungen führten. Um konsistente Reibgesetze für bestimmte Werkstoffpaarungen aufzustellen, sollte damit begonnen werden, alle verfügbaren Versuchsergebnisse, die unter vergleichbaren Bedingungen erzielt worden sind, in Abhängigkeit aller genannten Größen (Weg, Druck, Geschwindigkeit, ... ) in eine Art Datenbank aufzutragen. Anschließend würde erkennbar werden, in welchen Bereichen keine Versuchsergebnisse vorliegen (z. B. hoher Druck).

Experimentelle Untersuchungen zum Reibverhalten sind jedoch mit hohem Aufwand verbunden. Deshalb sollten die numerischen Möglichkeiten bereits in der Planungsphase als Hilfe zur Entwicklung von Versuchsaufbauten und –abläufen genutzt werden.

# Kapitel 9

## Literatur zu Numerik und Tribologie

Spezielle Literatur zur Numerik:

AGELET DE SARACIBAR C. & CHIUMENTI M. : On the numerical modelling of frictional wear phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pp. 401–426, [1999].

ALART P. & CURNIER A. : A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, pp. 353–375, [1991].

ALART P., BARBOTEU M., LEBON F. & PAGANO S. : Efficient preconditioners and domain decomposition methods for frictional contact problems and applications. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

ARMERO F. & PETÖCZ E. : On the formulation of stable time-stepping algorithms for contact problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*; Owen D. R. J., Onate E., Hinton E., CIMNE Barcelona [1997].

ARMERO F. & PETÖCZ E. : Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic/impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 158 No. 3–4, pp. 269–300, [1998].

ARMERO F. & PETÖCZ E. : A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 179 No. 1–2, pp. 151–178, [1999].

ARNOLD D. N. : Mixed finite element methods for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 82, pp. 281–300, [1990].

AYARI M. L. & SAOUMA V. E. : Static and dynamic contact/impact problems using fictitious forces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 623–643, [1991].

BAAIJENS F. P. T. : On a numerical method to solve contact problems. Dissertation TU Eindhoven [1987].

BATHE K. J. & CHAUDHARY A. : A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 65–68, [1985].

BATHE K. J. & BOUZINOV P. A. : On the constraint function method for contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 64 No. 5–6, pp. 1069, [1997].

BELYTSCHKO T. : An overview of semidiscretization and time integration procedures. T. Belytschko and T. J. H. Hughes, *Computational Methods for Transient Analysis*, North Holland, Amsterdam, pp. 1–65, [1983].

BELYTSCHKO T. & LAW S. E. : An assembled surface normal algorithm for interior node removal in three-dimensional finite element meshes. *Engineering with Computers*, Vol. 1, pp. 55–60, [1985].

BELYTSCHKO T. & LIN J. I. : A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion. *Computers and Structures*, Vol. 25, pp. 95–104, [1987].

BELYTSCHKO T. & LIU W. K. : Computational methods for impact and penetration. *Impact: Effects of fast transient loadings*, Balkema, Rotterdam, [1988].

BELYTSCHKO T. & NEAL M. O. : The vectorized pinball contact impact routine. Madjian, A.H. (ed.), *Trans. 10th Int. Conference on Structural Mechanics in Reactor Technics, SMIRT*, Vol. 3, Los Angeles, pp. 161–166, [1989].

BELYTSCHKO T. & NEAL M. O. : Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 547–572, [1991].

BENSON D. J. & HALLQUIST J. O. : A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 78, pp. 141–163, [1990].

BERTSEKAS D. P. : *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic Press, New-York, [1982].

BHATTACHARYA A. K. & NIX W. D. : Finite element simulations of indentation experiments. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 24 No. 9, pp. 881–1298, [1988].

BÖHM J. M. : *Eine inkrementelle Formulierung für Festkörperkontakt mit Reibung*. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, RWTH Aachen [1987].

BUCZKOWSKI R. & KLEIBER M. : A stochastic model of rough surfaces for finite element contact analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 169 No. 1–2, pp. 43–60, [1999].

BULSON P. S. : *Structures under shock and impact*. Comp. Mech. Publications, Elsevier, South Boston, [1989].

CAMPOS L. T., ODEN J. T. & KIKUCHI N. : A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics. *Computational Methods for Transient Analysis*, North Holland, Amsterdam, Vol. 34, pp. 821–845, [1982].

CARPENTER N. J., TAYLOR R. L. & KATONA M. G. : Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 103–128, [1991].

CESCOTTO S. & CHARLIER R. : Frictional contact finite elements based on mixed variational principles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 1681–1701, [1993].

CHABRAND P. & OLIVIER C. : Algorithm for multibody large deformation frictional contact problems. Computational Mechanics, New Trends and Applications; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

CHAN S. K. & TUBA I. S. : A finite element method for contact problems of solid bodies. In. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 627–639, [1971].

CHENG J.-H. & KIKUCHI N. : An incremental constitutive relation of uniliteral contact friction for large deformation analysis. Journal of applied Mechanics, 9, Vol. 52, pp. 639, [1985].

CHEN W.-H. & TSAI P. : Finite element analysis of elastodynamic sliding contact problems with friction. Computers and Structures, Vol. 22 No. 6, pp. 925–938, [1986].

CHEN Z. D. : Computational contact mechanics of large deformation based on strain rotation decomposition theorem. Computational Mechanics, New Trends and Applications; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

CHENOT J.-L. & FOURMENT L. : Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation. Computational Mechanics, New Trends and Applications; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

CHRISTENSEN P. W., KLARBRING A., PANG J. S. & STRÖMBERG N. : Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42 No. 1, pp. 145–174, [1998].

CRISFIELD M. A. : The revisited contact patch test. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48 No. 3, pp. 435–450, [2000].

CUOMO M. : Rate formulation of friction problems with internal variables modeling interfaces. Computational Mechanics, New Trends and Applications; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

CURNIER A. : A theory of friction. International Journal of Solids and Structures, Vol. 20, pp. 637–647, [1984].

---

DAWSON P. R., BOYCE D. E., EGGERT G. M. & BEAUDOIN A. J. : A consistent penalty method for contact between a deforming viscoplastic workpiece and a rigid tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 3969–3987, [1995].

DESONG S. & TAMMA K. K. : Robust explicit computational developments and solution strategies for impact problems involving friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 721–739, [1996].

DIMOVA S. : Comparison and experimental verification of two techniques for friction force representation. *Computers and Structures*, Vol. 60 No. 1, pp. 11–19, [1996].

DOLTSINIS J. S. & LUGINSLAND, J. : Umformspezifische Rechenverfahren, Kontakt und Reibung, variable Diskretisierung. ICA-Bericht, Universität Stuttgart, November [1986].

DUVAUT G. & LIONS J. L. : *Inequalities in mechanics and physics*, Springer-Verlag, [1976].

ETEROVIC A. L. & BATHE K. J. : On the treatment of inequality constraints arising from contact conditions in finite element analysis. *Computers and Structures*, Vol. 40 No. 2, pp. 203–209, [1991].

ETEROVIC A. L. & BATHE K. J. : An interface interpolation scheme for quadratic convergence in the FEA of contact problems. *Nonlinear computational mechanics: state of the art*. Eds. Wriggers P. & Wagner W., Springer-Verlag, [1991].

FLANAGAN D. P. & BELYTSCHKO T. : A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 679–706, [1981].

FOURMENT L., CHENOT J. L. & MOCELLIN K. : Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46 No. 9, pp. 1435–1462, [1999].

FREDRIKSON B. : Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanic problems. *Computers and Structures*, Vol. 6, pp. 281–290, [1976].

FRANCAVILLA A. & ZIENKIEWICZ O. C. : A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 913–924, [1975].

GALLEGO F. J. & ANZA J. J. : A mixed finite element model for the elastic contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1249–1264, [1989].

GIANNAKOPOULOS A. E. : The return mapping method for the integration of friction constitutive relations. *Computers and Structures*, Vol. 32, No. 1, pp. 157–167, [1989].

GLADWELL G. M. L. : Contact problems in the classical theory of elasticity. *Alphen aan den Rijn u. a. : Sijthoff & Noordhoff* [1980].

GLÄSER H. : New constitutive equations for the contact of deformable bodies with friction. *Acta Mechanica* 95, pp. 103–116, [1992].

GLÄSER H. : Nichtklassisches Kontaktreibungsgesetz. *ZAMM* 73 4–5, T360–T362, [1993].

GLOWINSKI R. & LETALLEC P. : Augmented Lagrangian and operator–splitting methods in nonlinear mechanics. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, [1989].

GUTZEIT T. : Zur Lösung des Kontaktproblems bei großen Deformationen und unter Berücksichtigung des Coulomb'schen Reibungsgesetzes. *Dissertation TU Chemnitz*, [1990].

GURTIN M. E. : An introduction to continuum mechanics. *Academic Press*, Orlando Florida, [1981].

HABER R. B. : A mixed Eulerian–Lagrangian displacement model for large deformation analysis in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 43, pp. 277–292, [1984].

HALLQUIST J. O. : User's manual for DYNA3D, UCID-19156. *Lawrence Livermore National Laboratory, University of California* [1979].

---

HALLQUIST J. O., GOUDREAU G. L. & BENSON D. J. : Sliding interfaces with contact–impact in large–scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, pp. 107–137, [1985].

HEEGAARD J. H. & CURNIER A. : An augmented Lagrangian method for discrete large–slip contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 569–593, [1993].

HEEGAARD J. H. & KAPLAN M. L. : Energy preserving integration schemes to model impact with friction. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

HEEGE A., ALART P. & ONATE E. : Numerical modelling and simulation of frictional contact using a generalized Coulomb law. *Engineering Computations*, Vol. 12, pp. 641–656, [1995].

HERTZ H. : Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für Mathematik* (92), pp. 156–171, [1881].

HINZMANN R. D. : Ein Beitrag zur Berechnung des Kontaktproblems mit Reibung mittels der Methode der finiten Elemente. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik, Universität Braunschweig [1980].

HOHBERG J. M. : A note on spurious oscillations in FEM joint elements. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 773–779, [1990].

HOHBERG, J. M. : Nichtlineare Berechnungen mit Trennflächenelementen. *FEM in der Baupraxis*, Ernst und Sohn, [1992].

HRYCAJ P., CESCOTTO S. & OUDIN J. : Elasto–plastic finite element analysis of unilateral contact with generalized Coulomb friction. *Engineering Computations*, Vol. 8, pp. 291–303, [1991].

HUANG Y.–M. & LEU D.–K. : Finite element analysis of contact problems for a sheet metal bending process. *Computers and Structures*, Vol. 57 No. 1, pp. 15–27, [1995].

HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L., SACKMAN J. L., CURNIER A. & KANOK-NUKULCHAI W. : A finite element method for a class of contact–impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, pp. 249–276, [1976].

HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L. & KANOKNUKULCHAI W. : A finite element method for large displacement contact and impact problems, *Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis*; K. J. Bathe, MIT Press Boston, pp. 468–495, [1977].

HUGHES T. J. R. : The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice–Hall International Editions, [1987].

HU N. : A solution method for dynamic contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 63 No. 6, pp. 1053–1063, [1997].

JÄGER J. : Elastic contact of equal spheres under oblique forces. *Archive of Applied Mechanics*, No. 63, pp. 402–412, [1993].

JIANG L. & ROGERS R. J. : Combined Lagrangian multiplier and penalty function finite element technique for elastic impact analysis. *Computers and Structures*, Vol. 30 No. 6, pp. 1219–1229, [1988].

JONAS G. H. & ZUKAS J. A. : Mechanics of penetration: analysis and experiment. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 16, [1978].

JOHNSON G. R., STRYK A. & DODD R. G. : Dynamic Lagrangian computations for solids with variable nodal connectivity for severe distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 509–522, [1986].

JOHNSON G. R., STRYK R. A. & NIXON M. E. : Two– and three–dimensional computational approaches for steel projectiles impacting concrete targets. *Impact: Effects of Fast Transient Loadings*, Balkema, Rotterdam, [1988].

JOHNSON A. R. & QUIGLEY C. J. : Frictionless geometrically nonlinear contact using quadratic programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 127–144, [1989].

---

JU J. W., TAYLOR R. L. & CHENG L. Y. : A consistent finite element formulation of nonlinear frictional contact problems. Numeta Swansea, [1987].

JU J. W. & TAYLOR R. L. : A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. Journal of theoretical and applied mechanics, Special issue, supplement 1 to Vol. 7, [1988].

KATONA M. G. : A simple contact–friction interface element with applications to buried culverts. Internat. Journ. for num. and analyt. Methods in Geomechanics Vol. 7, pp. 371–384, [1983].

KALKER J. J. : A survey of the mechanics of contact between solid bodies. ZAMM 57 T2–T17, [1977].

KALKER J. J. : Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. Wear, Vol. 113, pp. 61–77, [1986].

KIKUCHI N. & ODEN J. T. : Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM, Philadelphia [1988].

KLARBRING A. : Derivation and analysis of rate boundary–value problems of frictional contact. European Journal of Mechanics. A / Solids, Vol. 9 No. 1, pp. 53–85, [1990].

KLARBRING A. : General contact boundary conditions and the analysis of frictional systems. International Journal of Solids and Structures, Vol. 22 No. 12, pp. 1377–1398, [1986].

KLARBRING A. : A mathematical programming approach to three dimensional contact problems with friction. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 58, pp. 175–200, [1986].

KLARBRING A., MIKELIC A. & SHILLOR M. : Frictional contact problems with normal compliance. International Journal of Engineering Science, Vol. 26 No. 8, pp. 811–832, [1988].

KLARBRING A. : Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *European Journal of Mechanics. A / Solids*, Vol. 9 No. 1, pp. 53–85, [1990].

KO S. K. & KWAK B. M. : Frictional dynamic contact analysis using finite element modal displacement description. *Computers and Structures*, Vol. 42 No. 5, pp. 797–807, [1992].

KODIKARA J. K. & MOORE I. D. : Nonlinear interaction of solids with rigid surfaces. *Computers and Structures*, Vol. 43 No. 1, pp. 85–91, [1992].

KRAVCHUK A. S. : On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 44, pp. 83–85 [1981].

LANDERS J. A. & TAYLOR R. L. : An augmented Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. NCEL Contract Report, Naval Civil Engineering Laboratory. Port Hueneme California [1986].

LAURSEN T. A. : Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements. SUDAM Report No. 92–6, Division of applied mechanics, Stanford University, Stanford California 94305, [1992].

LAURSEN T. A. & SIMO J. C. : A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3451, [1993].

LAURSEN T. A. : The convected description in large deformation frictional problems. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31 No. 5, pp. 669–681, [1994].

LAURSEN T. A. & CHAWLA V. : Energy consistent algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42 No. 5, pp. 799–827, [1998].

LAURSEN T. A. : On the development of thermodynamically consistent algorithms for thermomechanical frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pp. 383–399, [1999].

---

LAURSEN T. A. & MCDEWITT T. W. : A mortar–finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48 No. 10, pp. 1525–1547, [2000].

LEBON F. & RAOUS, M. : Multibody contact problem including friction in structure assembly. *Computers and Structures*, Vol. 43 No. 5, pp. 925–934, [1992].

LEE C. Y., ODEN J. T. & AINSWORTH M. : Local a posteriori error estimate and numerical results for contact problems and problems of flow through porous media. *Nonlinear computational mechanics: state of the art*. Eds. Wriggers P. & Wagner W., Springer–Verlag, [1991].

LING W. & STOLARSKI H. K. : A contact algorithm for problems involving quadrilateral approximation of surfaces. *Computers and Structures*, Vol. 63 No. 5, pp. 963–975, [1997].

LÖTSTEDT P. : Numerical simulation of time–dependent contact and friction problems in rigid body mechanics. *SIAM Journal of SCI. Stat. Comput.*, Vol. 5 No. 2, [1984].

LUENBERGER D. : Linear and nonlinear programming. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22 No. 12, pp. 1377–1398, [1986].

MAHRENHOLTZ O. & GAUL L. : Die Mechanik des 19. Jahrhunderts. *Zeitschrift der Universität Hannover*, Heft 2, pp. 28–48, [1978].

MALVERN L. E. : *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey [1969].

MARSDEN J. E. & HUGHES T. J. R. : *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey [1983].

MARTINS J. A. C. & ODEN J. T. : A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 40, pp. 327–360, [1983].

MARTINS J. A. C., BARBARIN S., RAOUS M. & PINTO DA COSTA A. : Dynamic stability of finite dimensional linear elastic systems with unilateral contact and Coulomb friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pp. 289–328, [1999].

MATZENMILLER A. & SCHWEIZERHOF K. : Crashworthiness simulations of composite structures – a first step with explicit time integration. *Nonlinear computational mechanics: state of the art*. Eds. Wriggers P. & Wagner W., Springer-Verlag, [1991].

MEYER D. W., PLESHA M. E. & COOPER R. F. : A contact friction algorithm including nonlinear viscoelasticity and a singular yield surface provision. *Computers and Structures*, Vol. 42 No. 6, pp. 913–925, [1992].

MICHALOWSKI R. & MROZ Z. : Associated and nonassociated sliding rules in contact friction problems. *Archives of Mechanics*, Vol. 30, pp. 259–276, [1978].

MYSLINSKI A. : Mixed finite element approach for shape optimal design of large displacement contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 64 No. 1–4, pp. 595, [1997].

NACKENHORST U. : Zur Berechnung von Rollkontaktproblemen mit der Finiten Element Methode, *ZAMM* 73 4–5, T363–T366, [1993].

NACKENHORST U. : An adaptive finite element method to analyze contact problems, *Contact Mechanics 2, Computational Technique*, Editor M. H. Aliabadi, C. Alessandri. *Comp. Mech.* Southampton Boston, [1995].

NILSSON L. & ZHONG Z. H. : High performance algorithms for the solution of general contact–impact problems. *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 138, pp. 65–74, [1992].

NOUR-OMID B. & WRIGGERS P. : A two level iteration method for solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, pp. 131–144, [1986].

NOOR A. K. & PETERS J. M. : Reduction Technique for tire contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 60 No. 2, pp. 223–233, [1996].

---

ODEN J. T. & PIRES E. B. : Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 67–76, [1983].

ODEN J. T. & PIRES E. B. : On the Signorini problem with non-local friction. *Numerical Methods in coupled Systems*, John Wiley and Sons, [1984].

ODEN J. T. & MARTINS J. A. C. : Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, pp. 527–634, [1985].

OESTREICH M., HINRICHS N. & POPP K. : Bifurcation and stability analysis for non-smooth friction oscillator. *Archive of Applied Mechanics* Vol. 66, pp. 301–314, [1996].

OLSEN M. D. : The mixed finite element method in elasticity and elastic contact problems. Chapter 2; Hybrid and mixed finite element methods. Atluri S. N., Gallagher R. H., Zienkiewicz O. L., John Wiley and Sons, [1983].

OSTACHOWICZ W. : Mixed element methods for contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 18, pp. 937–945, [1984].

PANAGIOTOPOULOS P. D., PANAGOULI O. K., SCHERF O. & WRIGGERS P. : Adaptive finite element analysis of fractal interfaces in contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 182 No. 1–2, pp. 17–38, [1999].

PANAGOULI O. K. & PANAGIOTOPOULOS P. D. : The FEM and BEM for fractal boundaries and interfaces. Applications to unilateral problems. *Computers and Structures*, Vol. 42 No. 1, pp. 97–116, [1992].

PAPADOPOULOS P. & TAYLOR R. L. : A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 94, pp. 373–389, [1992].

PAPADOPOULOS P. & TAYLOR R. L. : A simple algorithm for three dimensional finite element analysis of contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 46 No. 6, pp. 1107–1118, [1993].

PAPADOPOULOS P., JONES R. E. & SOLBERG J. M. : A novel finite element formulation for frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 2603–2617, [1995].

PAPADOPOULOS P. & JONES R. E. : A yield-limited Lagrange multiplier formulation for elastoplastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48 No. 8, pp. 1127–1150, [2000].

PARIS F., FOCES A. & GARRIDO J. A. : Application of boundary element method to solve three dimensional elastic contact problems without friction. *Computers and Structures*, Vol. 43 No. 1, pp.19–30, [1992].

PARISCH H. : A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1803–1812, [1989].

PASCOE S. K. & MOTTERSHEAD J. E. : Two new finite element contact algorithms. *Computers and Structures*, Vol. 32 No. 1, pp. 137–144, [1989].

PIETRZAK G. & CURNIER A. : Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*; Owen D. R. J., Onate E., Hinton E., CIMNE Barcelona [1997].

PIETRZAK G. & CURNIER A. : Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pp. 355–381, [1999].

PIRES E. B. & ODEN J. T. : Analysis of contact problems with friction under oscillating Loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 39, pp. 337–362, [1983].

PONTHOT J. P. : An efficient implicit scheme for an extension of the radial return algorithm to account for visco-plasticity and rate dependent effects in frictional contact. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

---

QIN Q. H. & HE X. Q. : Variational principles, FE and MPT for analysis of non-linear impact-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 122, pp. 205–222, [1995].

RAOUS M., CANGEMI L. & COCU M. : A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pp. 383–399, [1999].

RAVID M. & BODNER S. R. : Dynamic perforation of viscoplastic plates by rigid projectiles. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 21 No. 6, pp. 577–591, [1983].

REBELO N. : Development of contact algorithms for a general purpose finite element program. *Journal de Mechanique Theorique et Appliquee*, supplement no 1 to 7, pp. 15–30, [1988].

REBELO N. & NAGTEGAAL J. C., HIBBITT H. D. : Finite element analysis of sheet forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1739–1758, [1990].

REFAAT M. H. & MEGUID S. A. : A novel finite element approach to frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3889–3902, [1996].

REFAAT M. H. & MEGUID S. A. : A new strategy for the solution of frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43 No. 6, pp. 1053–1068, [1998].

RICE J. R. & RUINA A. L. : Stability of steady frictional slipping. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 343–349, [1983].

RODIC T. & OWEN D. R. : A plasticity theory of friction and joint elements. *Proceedings of the 2nd International Conference on computational Plasticity, Barcelona*, pp. 1043–1062, September [1989].

SCHERF O. : *Kontinuumsmechanische Formulierung nichtlinearer Kontaktprobleme und ihre numerische Analyse mit adaptiven Finite-Element-Methoden*. Dissertation, Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt [1997].

SCHWEIZERHOF K. & NILSSON J., HALLQUIST J. O. : Crashworthiness analysis in the automotive industry. *International Journal of Computational Applications in Technology*, Vol. 5, pp. 134–156, [1992].

SCHWEIZERHOF K. & HALLQUIST J. O., WAINSCOTT B. : Improvements in contact algorithms for the simulation of thin sheet metal forming with explicit finite element programs. *Numerical methods in industrial forming processes*, Chenot J. L., Wood R. D., Zienkiewicz O. C., Balkema, Rotterdam, [1992].

SHYU S. C., CHANG T. Y. & SALEEB A. I. : Friction–contact analysis using a mixed finite element method. *Computers and Structures*, Vol. 32, pp. 223–242, [1989].

SEGUCHI Y., SHINO A., TOMITA Y. & SUNOHARA M. : Sliding rule of friction in a plastic forming of metal. *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, [1974].

SIMO J. C., WRIGGERS P. & TAYLOR R. L. : A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, pp. 163–180, [1985].

SIMO J. C. & LAURSEN T. A. : On the formulation and numerical treatment of finite deformation frictional contact problems. *Nonlinear computational mechanics: state of the art*. Eds. Wriggers P. & Wagner W., Springer–Verlag, [1991].

SIMO J. C. & LAURSEN T. A. : An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, Vol. 42 No. 1, pp. 97–116, [1992].

STRÖMBERG N., JOHANSSON L. & KLARBRING A. : Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33 No. 13, pp. 1817–1836, [1996].

TAYLOR R. L., CARPENTER N. J. & KATONA M. G. : Analysis of nonlinear transient problems with constraints. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, [1990].

---

TAYLOR R. L. & PAPADOPOULOS P. : On a patch test for contact problems in two dimensions. *Nonlinear computational mechanics: state of the art*. Eds. Wriggers P. & Wagner W., Springer-Verlag, [1991].

TAYLOR R. L. & PAPADOPOULOS P. : On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2123–2140, [1993].

VOLA D., RAOUS M. & MARTINS J. A. C. : Friction and instability of steady sliding: Squeal of rubber/glass contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46 No. 10, pp. 1699–1720, [1999].

VU VAN T. : Kontaktprobleme mit Reibung unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Dissertation, IBNM Universität Hannover [1990].

VILLANUEVA-LEAL A. & HINDUJA S. : Modelling the characteristics of interface surfaces by the finite element method. *Proceedings of the International Mechanic Engineering*, Vol. 198C No. 4, [1984].

WALTER H., BAILLET L. & BRUNET M. : Modelling of anchors in concrete structures with different contact and friction behaviors. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

WILLIAMS J. R., O'CONNOR R. : A linear complexity intersection algorithm for discret Element Simulation of arbitrary geometries. *Engineering Computations*, Vol. 12 No. 2, pp.185–202, [1995].

WRIGGERS P. : Zur Berechnung von Kontakt- und Stoßproblemen elastischer Körper mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Dissertation, IBNM Universität Hannover [1981].

WRIGGERS P. & NOUR-OMID B. : Solution methods for contact problems. Report UCB/SESM 84/09, [1984].

WRIGGERS P., SIMO J. C. & TAYLOR R. L. : Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems. *Proceedings of NUMETA 85 Conference/Swansea*, [1985].

WRIGGERS P. & SIMO J. C. : A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 1, pp. 199–203, [1985].

WRIGGERS P. : On consistent tangent matrices for frictional contact problems. *Nu-meta*, [1987].

WRIGGERS P., WAGNER W. & STEIN E. : Algorithms for nonlinear contact constraints with applications to stability problems of rods and shells. *Computational Mechanics*, Vol. 2, pp. 215–230, [1987].

WRIGGERS P. : Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode. Habilitation, IBNM Universität Hannover [1988].

WRIGGERS P. & TAYLOR R. L. : A fully non-linear axisymmetrical membran element for rubberlike materials. *Engineering Computations*, Vol. 7, pp. 303–310, [1990].

WRIGGERS P. & ZAVARISE, G. : Thermomechanical contact – a rigorous but simple numerical approach. *Computers and Structures*, Vol. 46 No. 1, pp. 47–53, [1993].

WRIGGERS P. & MIEHE C. : Contact constraints with coupled thermomechanical analysis – a finite element Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, pp. 301–319, [1994].

WRIGGERS P. & SCHERF O. : Adaptiv finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 151 No. 3–4, pp. 593–604, [1998].

ZAVARISE G., WRIGGERS P., STEIN E. & SCHREFLER B. A. : Real contact mechanisms and finite element formulation – a coupled thermomechanical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 767–785, [1992].

ZAVARISE G. & WRIGGERS P. : Application of augmented Lagrangian technique for non-linear constitutive laws in contact interfaces. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 815–824, [1993].

ZAVARISE G., WRIGGERS P. & SCHREFLER B. A. : On augmented Lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 2929–2949, [1995].

ZAVARISE G., WRIGGERS P. & SCHREFLER B. A. : A method for solving contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42 No. 3, pp. 473–498, [1998].

ZHONG W. X. & SUN S. M. : A finite element method for elasto–plastic structures and contact problems by parametric quadratic programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2723–2738, [1988].

ZHONG W. X. & SUN S. M. : A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. *Computers and Structures*, Vol. 32, pp. 37–43, [1989].

ZHONG Z.–H. & NILSSON L. : A contact searching algorithm for general contact problems. *Computers and Structures*, Vol. 33 No. 1, pp. 197–209, [1989].

ZHONG Z.–H. : Finite element procedures for contact impact problems. Oxford University Press, Oxford [1993].

ZIENKIEWICZ O. C. & ZHU J. Z. : Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2839–2853, [1989].

ZIENKIEWICZ O. C. & TAYLOR R. L. : The finite element method (Vol. 1 + 2). McGraw–Hill Book Company (UK), [1991].

ZHAO H. : The virtual contact loading method for contact problems considering material geometric nonlinearities. *Computers and Structures*, Vol. 58 No. 3, pp. 621–632, [1996].

ZMITROWICZ A. : Constitutive Modelling of non–homogeneous and anisotropic friction of materials–sliding path curving effects. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*; Idelsohn S., Onate E., Dvorkin E., CIMNE Barcelona [1998].

## Spezielle Literatur zur Tribologie:

ARCHARD J. F. : Surface topography and tribology. *Tribology International*, Vol. 7, [1974].

AVITZUR B. : Boundary and hydrodynamic lubrication, [1987].

AVITZUR B. & NAKAMURA Y. : Analytical determination of friction resistance as a function of normal load and geometry of surface irregularities. *Wear*, Vol. 107, [1986].

BAM : Dokumentation Tribologie; Verschleiß, Reibung und Schmierung. Bundesanstalt für Materialprüfung, Fachgruppe Rheologie und Tribologie, No. 13, [1976].

BALTAY P. & GJELSVIK A. : Coefficient of friction for steel on concrete at high normal stress. *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 2 No. 1, [1990].

BARBER J. R., DUNDURS J. & COMNINON M. : Stability considerations in thermo-elastic contact. *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 47, pp. 824–871, [1980].

BARTZ W. J. : Zur Geschichte der Tribologie. Expert Verlag, Ehningen, [1988].

BERTHIER Y. : Experimental evidence for friction and wear modelling. *Wear*, [1989].

BIKERMANN : Adhesion in friction. *Wear*, Vol. 39, pp. 1–13, [1976].

BÖHM J. M. : Eine inkrementelle Formulierung für Festkörperkontakt mit Reibung. Dissertation an der Fakultät für Maschinenwesen, RWTH Aachen, [1987].

BOWDEN F. P. & TABOR D. : Friction and lubrication. John Wiley and Sons, [1956].

BOWDEN F. P. & TABOR D. : Reibung und Schmierung fester Körper. Springer-Verlag, Berlin [1959].

BOWDEN F. P. & TABOR D. : The friction and lubrication of solids (Part 1 + 2). Oxford at the Clarendon Press, [1958] + [1964].

---

CHALLEN J. M. & OXLEY P. L. B. : An explanation of the different regimes of friction and wear using asperity deformation models. *Wear*, Vol. 53, pp. 229–243, [1979].

CZICHOS H. : *Tribology, a systems approach*. Elsevier, Amsterdam [1978].

CZICHOS H. u. a. : *Reibung und Verschleiß von Werkstoffen, Bauteilen und Konstruktionen*. Expert Verlag, Grafenau, [1982].

DOKOS S. J. : Sliding friction under extreme pressures, 1. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 13, pp. A 148–156, [1946].

DOWSON D. : *History of tribology*. Longman, [1979].

DRUCKER D. C. : Coulomb friction, plasticity and limit loads. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 3, pp. 71–74, [1954].

DÖRNEN K. & MEYER A. : Die Emsbrücke bei Hembergen in Dübellosem Stahlverbund. *Der Stahlbau*, 29. Jahrgang Heft 7, pp. 199–206, [1960].

EDWARDS C. M. & HALLING J. : An analysis of the plastic interaction of surface asperities and its relevance to the value of the coefficient of friction. *Mechanical Engineering Science*, Vol. 10 No. 2, [1968].

EDWARDS C. M. & HALLING J. : Experimental study of the plastic Interaction of model surface asperities during sliding. *Mechanical Engineering Science*, Vol. 10 No. 2, [1968].

EIBL J. & HOFFMANN D. : Verhalten von Betonkonstruktionen bei harten Stößen. Teil 2: Betonverhalten bei Reibbeanspruchungen. Bisher unveröffentlicht. Schlußbericht zum DFG-Vorhaben Ei-114/13, [1995].

FIEDLER K. : Versuche über den Reibungskoeffizienten in den Fugen zusammengespannter Betonfertigteile. *Bauplanung-Bautechnik*, Jahrgang 16 Heft 3, [1962].

FÖHL J. : Grundvorstellungen über Reibungs- und Verschleißprozesse aus Reibung und Verschleiß bei metallischen und nichtmetallischen Werkstoffen, [1987].

FRANZ G. : Versuche über die Querkraftaufnahme in Fugen von Spannbetonträgern aus Fertigteilen. Beton- und Stahlbetonbau, 54. Jahrgang, Heft 6, pp. 137–140, [1959].

GREEN A. D. : Friction between unlubricated metals: A theoretical analysis of the junction Model, [1954].

GREENWOOD J. A. & WILLIAMSON J. B. P. : Contact of nominally flat surfaces. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 295, pp. 300–319, [1966].

HARALDSSON A. & WRIGGERS P. : A frictional law for soil–concrete contact based on a numerical model for the microstructure. Darmstadt Geotechnics, Vol. 2, pp. 333–344. COST Action A7, Darmstadt, [1999].

HOLMBERG K. : Friction in low speed lubricated rolling and sliding. Technical Research Centre of Finland, Publication 16, April [1984].

HÖLKE A. : Versuche zur Ermittlung der Reibbeiwerte zwischen Stahl und Betonplatten bei dynamischer und statischer Beanspruchung eines Trägers in dübelloser Verbundbauweise. Deutsche Eisenbahntechnik, Jahrgang 13 Heft 11, [1965].

JONES M. H., HOWELLS R. I. L. & PROBERT S. D. : Solids in static contact. Wear, Vol. 12, pp. 225–240, [1968].

KATO K. : Tribology of ceramics. Wear, Vol. 136, pp. 117–133, [1990].

KATO S. & MATSUBAYASHI T. : On the dynamic behaviour of machine tool slideway, Part 1 + 2. Bulletin of the JSME, Vol. 13, pp. 170–188, [1970].

KATO S., SATO N. & MATSUBAYASHI T. : Some considerations on characteristics of static friction of machine tool slideway. Lubrication Technology, Vol. 94, pp. 234–247, [1972].

KOMVOPOULOS K., SAKA N. & SUH N. P. : The role of hard layers in lubricated and dry sliding. Journal of Tribology, Vol. 109, pp. 223–231, [1987].

KRAGELSKI I. V., DOBCIN M. N. & KOMBALOV V. S. : Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß. Carl Hanser Verlag, [1983].

---

LARSEN-BADSE J. : Influence of grit diameter and specimen size on wear during sliding abrasion. *Wear*, Vol. 12, pp. 35–53, [1968].

LING F. F. : *Surface mechanics*. John Wiley and Sons, New York, [1973].

LÖTSTEDT P. : Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics. *SIAM Journal of SCI. Stat. Comput.*, Vol. 5 No. 2, [1984].

MADAKSON P. B. : The frictional behaviour of materials. *Wear*, Vol. 87, pp. 191–206, [1983].

MAISSEN A. : *Festkörperreibung, Reibungszahlen verschiedener Werkstoffe*. Schweizer Ingenieur und Architekt, Nr. 3, [1993].

MASRI S. F. & CAUGHEY T. K. : On the stability of the impact damper. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33 No. 3, [1966].

McFARLANE J. S. & TABOR D. : Relation between friction and adhesion. *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 202, pp. 244–253, [1950].

MISRA A. : Mechanistic model for contact between rough surfaces. *Journal of Engineering Mechanics*, May [1997].

MOORE D. F. : *Principles and applications of tribology*. Pergamon International Library, [1975].

MOORE M. A. : *Abrasive wear*. Material Science Seminar, Pittsburg USA, [1980].

NASR T., EBNER M. & EIBL J. : Bericht zu Reibversuchen, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe [1997].

PASCHEN H. & ZILLICH V. L. : Reibung zwischen Betonflächen unter Einwirkung von Erschütterungen. *Betonwerk und Fertigteil-Technik*, Heft 3, [1979].

POLZER G. & MEISSNER F. : *Grundlagen zu Reibung und Verschleiß*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, [1978].

- PERSSON BO : Pressemitteilung, Forschungszentrum Jülich, [1997].
- RABBAT B. G., RUSSEL H. G. & ASCE M. : Friction coefficient of steel on concrete or groat. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111 No. 3, [1985].
- RABINOWICZ E., DUNN L. A. & RUSSEL P. G. : A study of abrasive wear under three-body conditions. *Wear*, Vol. 4, pp. 345–355, [1961].
- RABINOWICZ E. : Practical uses of the surface energy criterion. *Wear*, Vol. 7, pp. 9–22, [1964].
- RABINOWICZ E. : Friction and wear of materials. John Wiley and Sons, New York, [1965].
- RABINOWICZ E. & MUTIS A. : Effect of abrasive particle size on wear. *Wear*, Vol. 8, pp. 381–390, [1965].
- RICHARDSON R. S. H. & NOLLE H. : Surface friction under time-dependent loads. *Wear*, Vol. 37, pp. 87–101, [1976].
- RIGNEY D. A. & HIRTH J. P. : Plastic deformation and sliding friction of metals. *Wear*, Vol. 53, pp. 345–370, [1979].
- ROIK K. & BÜRKNER K. E. : Reibbeiwert zwischen Stahlgurten und aufgespannten Betonfertigteilen. *Bauingenieur*, Nr. 53, pp. 37–41, [1978].
- SARKAR A. D. : Friction and wear. Academic Press, London [1980].
- SHAW S. W. : On the dynamic response of a system with dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108 (2), [1986].
- STACHOWIAK G. W. & BATCHELOR A. W. : Engineering tribology. Elsevier, Amsterdam [1993].
- SOBIS T., ENGEL U. & GEIGER M. : A theoretical study on wear simulation in metal forming processes. *Intern. Conf. Metal Forming 92*, Krakow, [1992].
- SUH N. P. & SIN H.-C. : The genesis of friction. *Wear*, Vol. 69, pp. 91–114, [1981].

TABOR D. : Friction – The present state of our understanding. *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 103, pp. 169–179, [1981].

WANNHEIM T. : Friction under high normal pressure. *Wear*, Vol. 25, pp. 225–244, [1973].

WANNHEIM T., BAY N. & PETERSEN S. : A theoretical determined model for friction in metal working processes. *Wear*, Vol. 28, pp. 251–258, [1974].

WHITEHOUSE D. J. & ARCHARD J. F. : The properties of random surface of significance in their contact. *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 316, pp. 97–121, [1970].

WOO K. L. & THOMAS T. R. : Contact of rough surfaces a review of experimental work. *Wear*, Vol. 58, pp. 331–340, [1980].

WUTTKE W. : *Tribophysik, Reibung und Verschleiß von Metallen*. Hanser Verlag, [1987].

ZUM GAHR K.-H. : *Reibung und Verschleiß: Ursachen–Arten–Mechanismen*. Grewe, H. (e.d.), *Reibung und Verschleiß*, DGM–Informationsgesellschaft–Verlag, [1992].



# Anhang A

## Details zur Linearisierung der Kontaktkinematik

Nicht zuletzt aufgrund der bei SCHERF [1997] aufkommenden Diskussion der Kontaktformulierung wird die Linearisierung der Kontaktkinematik aus Kapitel 3 überprüft. Zu diesem Zweck werden die von LAURSEN [1992] angegebenen Ergebnisse der Linearisierung in diesem Abschnitt schrittweise nachvollzogen.

### A.1 Grundlegende Richtungsableitungen

In diesem Anhang ständig wiederkehrende Ableitungen werden an dieser Stelle zusammengefasst dargestellt. Es wird jeweils auf die Positionen, wo diese Ableitungen benutzt werden, verwiesen.

Zuvor wird Allgemeines für das **Bilden von Richtungsableitungen** wiederholt:

$$\begin{aligned}\varphi_\epsilon^{(1)} &= \varphi^{(1)} + \epsilon \dot{\varphi}^{*(1)} \\ \varphi_\epsilon^{(2)} &= \varphi^{(2)} + \epsilon \dot{\varphi}^{*(2)}\end{aligned}\tag{A.1}$$

Für eine Größe  $\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  gegeben für alle  $\mathbf{X} \in \Gamma^{(1)}$  ergibt sich die linearisierte Variation  $\delta\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  mit Hilfe dieser Notation für die Richtungsableitung:

$$\delta\beta(\mathbf{X}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \beta(\mathbf{X}; \varphi_\epsilon^{(1)}, \varphi_\epsilon^{(2)})\tag{A.2}$$

- Für die erste Variation  $\delta$  der Abstandsfunktion in **A.3** wird  $\delta\varphi^{(1)}$  mit folgendem Ansatz für die Abbildungsfunktion eines Slavepunktes von Körper (1) benötigt:

$$\varphi_\epsilon^{(1)}(\mathbf{X}) = \varphi^{(1)}(\mathbf{X}) + \epsilon \varphi^{*(1)}(\mathbf{X})$$

Mit der entsprechenden Vorschrift der partiellen Differenziation

$$\frac{D(\cdot)}{\partial\epsilon} = \frac{\delta(\cdot)}{\delta\mathbf{X}} \frac{\delta\mathbf{X}}{\delta\epsilon} + \frac{\delta(\cdot)}{\delta\epsilon}$$

ergibt sich für die einzelnen Terme

$$\frac{\delta\varphi^{(1)}}{\delta\mathbf{X}} = \mathbf{F}^{(1)}(\psi_0^{(1)}) \quad , \quad \frac{\delta\mathbf{X}}{\delta\epsilon} = 0 \quad , \quad \frac{\delta\varphi_\epsilon^{(1)}}{\delta\epsilon} = \varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) \quad .$$

Als Ergebnis der Differenziation ergibt sich:

$$\frac{D(\varphi_\epsilon^{(1)}(\mathbf{X}))}{\partial\epsilon} = \varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.3})$$

Weiterhin wird  $\delta\varphi^{(2)}$  mit folgendem Ansatz für die Abbildungsfunktion eines Masterpunktes von Körper (2) benötigt:

$$\varphi_\epsilon^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) = \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \epsilon \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$$

Mit der entsprechenden Vorschrift der partiellen Differenziation

$$\frac{D(\cdot)}{\delta\epsilon} = \frac{\delta(\cdot)}{\delta\mathbf{Y}} \frac{\delta\mathbf{Y}}{\delta\xi} \frac{\delta\xi}{\delta\epsilon} + \frac{\delta(\cdot)}{\delta\epsilon}$$

ergibt sich für die einzelnen Terme

$$\frac{\delta\varphi^{(2)}}{\delta\mathbf{Y}} = \mathbf{F}^{(2)}(\psi_0^{(2)}) \quad , \quad \frac{\delta\mathbf{Y}}{\delta\xi} = \frac{\delta\psi_0^{(2)}}{\delta\xi} = \psi_{0,\xi}^{(2)} \quad , \quad \frac{\delta\varphi^{(2)}}{\delta\mathbf{Y}} \frac{\delta\mathbf{Y}}{\delta\xi} = \mathbf{F}^{(2)}(\psi_0^{(2)}) \psi_{0,\xi}^{(2)} = \boldsymbol{\tau}_\beta \quad ,$$

$$\frac{\delta\xi}{\delta\epsilon} = \delta\xi^\beta \quad , \quad \frac{\delta\varphi_\epsilon^{(2)}}{\delta\epsilon} = \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \quad .$$

Als Ergebnis der Differenziation ergibt sich:

$$\frac{D(\varphi_\epsilon^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\partial\epsilon} = \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \boldsymbol{\tau}_\beta \delta\xi^\beta \quad (\text{A.4})$$

- Die in **A.4** benötigte Variation zur Ermittlung des tangentialen Gleitweges ergibt sich mit  $D(\boldsymbol{\tau}_1)$ , es gilt  $\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(\bar{\xi}) = \varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  mit folgendem Lösungsansatz für die Richtungsableitung:

$$\varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) = \varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \epsilon \varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$$

Damit ergibt sich die partielle Differenziation von  $D(\tau_\alpha)$  :

$$\frac{D(\varphi_{,\alpha\epsilon}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\delta\epsilon} = \frac{\delta(\cdot)}{\delta\xi} \frac{\delta\xi}{\delta\epsilon} + \frac{\delta(\cdot)}{\delta\epsilon} = \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta + \varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \quad (\text{A.5})$$

- Für die zweite Variation  $\Delta$  der Abstandsfunktion in **A.5** wird  $\Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]$  benötigt. Es ergibt sich mit folgender partieller Differenziationsvorschrift

$$\frac{D(\cdot)}{\Delta\epsilon} = \frac{\Delta(\cdot)}{\Delta\xi} \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} + \frac{\Delta(\cdot)}{\Delta\epsilon} .$$

Für die einzelnen Terme gilt

$$\frac{\Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]}{\Delta\xi} = \varphi_{,\alpha\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) , \quad \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} = \Delta\bar{\xi}^\beta , \quad \frac{\Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]}{\Delta\epsilon} = 0 .$$

Als Ergebnis ergibt sich:

$$\frac{D(\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\Delta\epsilon} = \varphi_{,\alpha\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta \quad (\text{A.6})$$

- Zusätzlich wird die Richtungsableitung für  $\Delta\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})$  ermittelt. Es gilt

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) = \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$$

mit folgendem Lösungsansatz für den Masterpunkt an der Stelle  $\epsilon \neq 0$ :

$$\varphi_{\epsilon, \alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) = \varphi_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \epsilon \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$$

Weiterhin ergibt sich aus der Differenziationsvorschrift für die einzelnen Terme

$$\frac{\Delta\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})}{\Delta\xi} = \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma} , \quad \frac{\Delta\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})}{\Delta\epsilon} = \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) .$$

Als Ergebnis ergibt sich:

$$\frac{D(\varphi_{\epsilon, \alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\Delta\epsilon} = \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}\Delta\delta\bar{\xi}^\beta \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Ableitung der tangentialen Relativbewegung nach der Zeit

Die zeitliche Ableitung der Relativbewegung zwischen  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t)$  und  $\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)$  muss gleich null sein. Diese Forderung wird ausgedrückt als

$$0 = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)]. \quad (\text{A.8})$$

Die Errechnung dieser zeitlichen Ableitungen erfolgt für Körper (1) und Körper (2). Die Ergebnisse für Körper (2) werden durch partielle Differenziation einschließlich der Anwendung der Kettenregel ermittelt:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)] &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)} \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \\ &= \mathbf{F}_t^{(2)}(\boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) \end{aligned}$$

Dies führt zu einem Ausdruck, der als Relativgeschwindigkeit von  $\mathbf{X}$  definiert wird:

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{v}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{F}_t^{(2)}(\boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \frac{d}{dt}[\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)] \quad (\text{A.10})$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}_t^{(2)}$  der materielle Deformationsgradient. Die Größen  $\bar{\mathbf{Y}}$  und  $\bar{\mathbf{y}}$  lassen sich mit  $\bar{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Psi}_0^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t))$  und  $\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Psi}_t^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t))$  in Abhängigkeit der Parameterebene darstellen.

### A.3 Erste Variation der Abstandsfunktion

$g(\mathbf{X}, t)$  entsteht aus Bewegungen von  $\varphi_i^{(1)}(\cdot, t)$  und  $\varphi_i^{(2)}(\cdot, t)$ . Nach der Minimierung werden die Variablen mit  $(\bar{\cdot})$  ausgedrückt:

$$g = -[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.11})$$

Ziel ist Variation ( $\delta$ ) von  $g$ :

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta\{-[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \mathbf{n}\} \\ &= \delta\{\|\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\|\text{sign}(g)\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Die Differenziation geschieht mit Hilfe der Kettenregel, d. h. Bilden von äußeren und inneren Ableitungen. Die äußere Ableitung lautet:

$$\delta g = \frac{\text{sign}(g)}{2} \frac{2(\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\|\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\|} \cdot \delta[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{A.13})$$

Die innere Ableitung erhält man durch Bilden der Richtungsableitungen, siehe **A.1**. Mit Hilfe dieser Gleichungen (A.3) und (A.4) ergibt sich:

$$\delta[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] = \overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \tau_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \quad (\text{A.14})$$

Zusammengefasst lautet die erste Variation der  $g$ -Funktion:

$$\delta g = \frac{\text{sign}(g)}{|g|} [\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \tau_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \quad (\text{A.15})$$

Aufgrund der Tatsache, dass  $\tau_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha$  senkrecht zu  $\mathbf{n}$  ist, kann dieses Produkt zu null gesetzt werden. Unter Zuhilfenahme von

$$\mathbf{n} = -\frac{\text{sign}(g)}{|g|} [\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{A.16})$$

vereinfacht sich die Gleichung der ersten Variation zu

$$\delta g = -\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] . \quad (\text{A.17})$$

## A.4 Erste Variation des tangentialen Gleitweges

Als Ausgangsgleichung dient die Bedingung:

$$[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0 \quad (\text{A.18})$$

Sie gilt, da  $\varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  eine Projektion von  $\varphi^{(1)}(\mathbf{X})$  auf  $\Gamma^{(2)}$  ist. Die Ermittlung erfolgt implizit:

$$0 = \delta \left[ [\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \right] \quad (\text{A.19})$$

Nach Anwendung der Produktregel erhält man

$$0 = \delta[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha + [\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_\alpha . \quad (\text{A.20})$$

Der erste zu variierende Term ergibt sich analog zur Variation der Abstandsfunktion (A.14) mit

$$\delta[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] = \overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta\bar{\xi}^\beta . \quad (\text{A.21})$$

Für den zweiten zu variierenden Term  $\delta(\boldsymbol{\tau}_\alpha)$ , ist der Lösungsweg in **A.1** dargestellt. Mit  $\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(\bar{\xi}) = \varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  und dem Lösungsansatz für die Richtungsableitung, siehe **A.1** Gleichung (A.5), ergibt sich

$$\delta(\boldsymbol{\tau}_\alpha) = \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta + \varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) . \quad (\text{A.22})$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (A.11)

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) = -g\mathbf{n} \quad (\text{A.23})$$

ergibt sich für den zweiten Term von (A.20) die erste Variation des tangentialen Gleitweges:

$$0 = [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\beta \delta\bar{\xi}^\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha - g\mathbf{n} \cdot [\varphi_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] \quad (\text{A.24})$$

Nach Umformung ergibt sich für  $\delta\bar{\xi}^\beta$ :

$$A_{\alpha\beta}\delta\bar{\xi}^\beta = [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha - g\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{A.25})$$

mit

$$A_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + g\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) . \quad (\text{A.26})$$

## A.5 Zweite Variation der Abstandsfunktion

Ausgangspunkt für die Durchführung der zweiten Variation ist Gleichung (A.15), das Ergebnis der ersten Variation von  $\delta g$ :

$$\delta g = \frac{\text{sign}(g)}{|g|} [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \quad (\text{A.27})$$

Die Durchführung der zweiten Variation geschieht der besseren Übersicht wegen mit dem Symbol  $\Delta$  und dem Ansatz  $\boldsymbol{\varphi}_\epsilon^{(i)}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(\mathbf{X}) + \epsilon \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{X})$ . Aufgrund der Äquivalenz von  $\Delta$  und  $\delta$  sowie  $\boldsymbol{\varphi}$  und  $\mathbf{u}$  sind sämtliche Ansätze quasi identisch:

$$\Delta(\delta g) = \Delta \left[ \frac{1}{g} [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \right] \quad (\text{A.28})$$

Nach Anwendung der Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} \Delta(\delta g) &= \frac{1}{g} \left[ \Delta [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \right. \\ &\quad \left. + [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \Delta [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Die Variation des ersten Terms (A.29)<sub>1</sub> wurde bereits in Gleichung (A.14) ermittelt:

$$\Delta[\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] = [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \Delta \bar{\xi}^\alpha] \quad (\text{A.30})$$

Die Variation des vierten Terms (A.29)<sub>4</sub> erfolgt durch Variation der einzelnen Glieder:

$$\Delta[\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] = \Delta[\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X})] - \Delta[\boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] - \Delta[\boldsymbol{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha] \quad (\text{A.31})$$

Für diese drei zu variierenden Terme ergeben sich im Einzelnen:

$$\Delta \boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) = 0$$

$$\frac{D[\boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))]}{\Delta \epsilon} = \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \xi}{\Delta \xi \Delta \epsilon} + \frac{\Delta(\boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})))}{\Delta \epsilon} = \boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^\beta$$

$$\Delta(\boldsymbol{\tau}_\beta \delta \bar{\xi}^\beta) = \Delta(\boldsymbol{\tau}_\beta) \delta \bar{\xi}^\beta + \boldsymbol{\tau}_\beta \Delta(\delta \bar{\xi}^\beta) = (\mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})) \Delta \bar{\xi}^\alpha + (\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))) \delta \bar{\xi}^\beta + \boldsymbol{\tau}_\beta \Delta \delta \bar{\xi}^\beta$$

Die Variation von  $\delta\boldsymbol{\tau}$  wurde bereits in Gleichung (A.5) gezeigt. Auf diese Weise ergibt sich für den zweiten zu variierenden Term (A.29)<sub>4</sub> über Gleichung (A.31):

$$[-\boldsymbol{\varphi}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta - \delta\bar{\xi}^\beta \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\alpha - \mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta - \boldsymbol{\tau}_\beta\Delta\delta\bar{\xi}^\beta] \quad (\text{A.32})$$

Für weitere Umformungen wird die Gleichung (A.24) genutzt, die die Beziehungen für die erste Variation des tangentialen Gleitweges darstellt. Dabei gilt unter Beachtung der Äquivalenz von  $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$  und  $\mathbf{u}$ ,  $\delta$  und  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\gamma\Delta\bar{\xi}^\gamma &= \frac{g\mathbf{n}}{\boldsymbol{\tau}_\beta} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha] \\ \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\beta\delta\bar{\xi}^\beta &= \frac{g\mathbf{n}}{\boldsymbol{\tau}_\gamma} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die Terme (A.29)<sub>1</sub> überführt in (A.30) und (A.29)<sub>2</sub> lassen sich durch diese beiden Gleichungen (A.33) umformen zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{g} \left[ \frac{g\mathbf{n}}{\boldsymbol{\tau}_\gamma} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha] \frac{g\mathbf{n}}{\boldsymbol{\tau}_\beta} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha] \right] \\ &= g\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha] m^{\beta\gamma} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\alpha]. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (A.11)

$$\frac{1}{g} [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] = -\mathbf{n} \quad (\text{A.35})$$

ergibt sich eine Vereinfachung für den zweiten zu variierenden Term (A.29)<sub>3,4</sub>, wobei (A.29)<sub>4</sub> zu (A.32) umgeformt werden konnte:

$$\mathbf{n} \cdot [\delta\bar{\xi}^\beta \mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \Delta\bar{\xi}^\beta \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta \Delta\bar{\xi}^\alpha + \boldsymbol{\tau}_\beta\Delta\delta\bar{\xi}^\beta] \quad (\text{A.36})$$

Wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{n}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  und, da  $\Delta\delta\bar{\xi}^\beta$  zu vernachlässigen ist, wird  $\boldsymbol{\tau}_\beta\Delta\delta\bar{\xi}^\beta = 0$  gesetzt.

Abschließend lässt sich die zweite Variation der Abstandsfunktion  $g$  als Summe von (A.34) und (A.36) darstellen:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta g) &= g\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\alpha}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\alpha] m^{\gamma\beta} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\alpha] \\ &+ \delta\bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta\bar{\xi}^\beta \mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \mathbf{n} \cdot \Delta\bar{\xi}^\beta \delta\bar{\xi}^\alpha [\mathbf{e}_{\beta,\alpha}(\bar{\xi})] \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

## A.6 Zweite Variation des tangentialen Gleitweges

Ausgangspunkt ist das Ergebnis der ersten Variation, Gleichung (A.24):

$$0 = [\dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta] \cdot \tau_\alpha - g\mathbf{n} \cdot [\dot{\varphi}_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta] \quad (\text{A.38})$$

Die Gleichung (A.38) wird zur Durchführung der Variation in zwei Teile zerlegt:

$$\Delta[ [\dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta] \cdot \tau_\alpha ] \quad (\text{A.39})$$

und

$$\Delta[ -g\mathbf{n} \cdot [\dot{\varphi}_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta] ] \quad (\text{A.40})$$

Die Durchführung der Variation beginnt mit Gleichung (A.39):

$$\Delta[ \dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) \cdot \tau_\alpha - \dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \cdot \tau_\alpha - \tau_\beta \cdot \tau_\alpha \delta \bar{\xi}^\beta ] \quad (\text{A.41})$$

Hierbei können die drei Terme der Gleichung (A.41) jeweils getrennt variiert werden. Es wird jeweils die Produktregel angewendet; beim ersten Term:

$$\Delta(\dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) \cdot \tau_\alpha) = \Delta(\dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X})) \cdot \tau_\alpha + \dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) \cdot \Delta(\tau_\alpha) = \dot{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) \cdot \Delta(\tau_\alpha) \quad (\text{A.42})$$

beim zweiten Term:

$$\begin{aligned} -\Delta(\dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \cdot \tau_\alpha) &= -\Delta(\dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))) \cdot \tau_\alpha - \dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \cdot \Delta(\tau_\alpha) \\ &= -\dot{\varphi}_{,\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^\beta \cdot \tau_\alpha - \dot{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \cdot \Delta(\tau_\alpha) \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

und beim dritten Term:

$$\begin{aligned} \Delta(-\tau_\alpha \cdot \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta) &= -\Delta(\tau_\alpha) \cdot \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta - \tau_\alpha \cdot \Delta(\tau_\beta) \delta \bar{\xi}^\beta - \tau_\alpha \cdot \tau_\beta \Delta(\delta \bar{\xi}^\beta) \\ &= -\Delta(\tau_\alpha) \cdot \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta - \tau_\alpha \delta \bar{\xi}^\beta \cdot \Delta \tau_\beta - \tau_\alpha \cdot \tau_\beta \Delta \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

Bei allen drei zu variierenden Termen von Gleichung (A.41) muss nur noch die Variation von  $\Delta \tau_\alpha$  oder  $\Delta \tau_\beta$  durchgeführt werden, welche in **A 1.1** Gleichung (A.5) gezeigt wurde:

$$\Delta \tau_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta, \quad \Delta \tau_\beta = \mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\beta}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta$$

Der dritte Term von Gleichung (A.44) kann aufgrund von  $\Delta\delta\bar{\xi}^\beta$  vernachlässigt werden. Damit ist die Variation von Gleichung (A.39) über (A.41) und mit Hilfe von (A.42), (A.43) sowie (A.44) abgeschlossen:

$$\begin{aligned}
& [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\beta] \\
& \quad - \varphi_{,\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \\
& \quad - [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta \delta\bar{\xi}^\beta \\
& \quad - \boldsymbol{\tau}_\alpha \delta\bar{\xi}^\beta \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\gamma,\beta}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\beta]
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Die Variation von Gleichung (A.40) beginnt mit einer Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\Delta(-g\mathbf{n} \cdot [\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta]) &= \Delta(-g\mathbf{n}) \cdot [\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] \\
& \quad + (-g\mathbf{n}) \cdot \Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta]
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Beim ersten zu variierenden Term kann durch eine Umformung auf die bereits bekannten Gleichungen (A.11) und (A.14) zurückgegriffen werden:

$$\begin{aligned}
\Delta(-g\mathbf{n}) &= \Delta[\varphi^{(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
&= \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \boldsymbol{\tau}_\beta \Delta\bar{\xi}^\beta
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Dagegen ergibt sich für den zweiten zu variierenden Term von (A.46) :

$$\Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] = \Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta[\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\Delta\delta\bar{\xi}^\beta \tag{A.48}$$

Die Variation dieser drei Terme erfolgt getrennt, wobei der dritte Term aufgrund von  $\Delta\delta\bar{\xi}^\beta$  vernachlässigt werden kann. Mit Hilfe der Ableitungen aus Abschnitt **A.1** aus Gleichung (A.6) und (A.7) erhält man die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\Delta[\varphi_{,\alpha}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &= \varphi_{,\alpha\beta}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta \\
\Delta[\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] &= \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta \Delta\bar{\xi}^\alpha
\end{aligned}$$

Die Gleichung (A.48) kann nun geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \Delta[\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] \\ = & \overset{*}{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta\Delta\bar{\xi}^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Mit der Addition von Gleichung (A.47) und (A.49) ist die zweite Variation für (A.46) abgeschlossen:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) - \Delta\bar{\xi}^\beta\boldsymbol{\tau}_\beta] \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta] \\ & - g\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi})\delta\bar{\xi}^\beta\Delta\bar{\xi}^\alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Die zweite Variation des tangentialen Gleitweges lässt sich durch eine Aufteilung in die Gleichungen (A.39) und (A.40), das Durchführen der jeweiligen Variationen, siehe (A.45) und (A.50), und das anschließende Zusammenführen zu folgendem Ausdruck ermitteln:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}\Delta(\delta\bar{\xi}^\beta) = & \\ & - \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \overset{*}{\varphi}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta - \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta \\ & - [\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) + g\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi})]\delta\bar{\xi}^\beta\Delta\bar{\xi}^\alpha \\ & - \delta\bar{\xi}^\beta\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\gamma] \\ & - \Delta\bar{\xi}^\beta\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\gamma] \\ & - g\mathbf{n} \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\Delta\bar{\xi}^\beta + \mathbf{u}_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))\delta\bar{\xi}^\beta] \\ & + [\overset{*}{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \overset{*}{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\gamma] \\ & + [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) + \mathbf{e}_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi})\Delta\bar{\xi}^\gamma] \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Diese Gleichung (A.51) ist bezogen auf  $\mathbf{u}$  und  $\overset{*}{\varphi}$  symmetrisch.  $A_{\alpha\beta}$  wurde in Gleichung (A.25) dargestellt. Die Anordnung geschieht in Hinblick auf die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix.

## A.7 Variation der Reibkraft

Bei der Variation der Reibkraft  $t_T$  wird zwischen dem Haft- und Gleitzustand unterschieden, die Entscheidung wird mit Hilfe der Gleitregel  $f$  getroffen.

Wenn  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$  tritt der Haftzustand ein, dann gilt:

$$t_{T_{n+1}\alpha} = t_{T_{n+1}\alpha}^{trial} \quad (\text{A.52})$$

$$t_{T_{n+1}}^{trial} = t_{T_n} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] \quad (\text{A.53})$$

Für den Fall  $f_{n+1}^{trial} > 0$  tritt dagegen der Gleitzustand ein. Die Ermittlung der Reibkraft  $t_T^G$  hängt vom Reibgesetz und somit von der Art der Gleitfläche ab:

**Variante 1** mit dem linearen druckabhängigen Reibgesetz von Coulomb:

$$t_{T_{n+1}\alpha}^G = \mu t_{N_{n+1}} \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} \quad (\text{A.54})$$

**Variante 2** mit dem nichtlinearen druckabhängigen Reibgesetz, dem Vorschlag für die Werkstoffpaarung Stahl und Beton, basierend auf Ergebnissen des statischen Versuches, siehe auch Kapitel 2.5 und 7.3:

$$t_{T_{n+1}\alpha}^G = -b/a (1 - e^{a |t_{N_{n+1}}|}) \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} \quad (\text{A.55})$$

**Variante 3** mit dem nichtlinearen druckabhängigen und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz, dem Vorschlag für die Werkstoffpaarung Stahl und Beton, basierend auf Ergebnissen des dynamischen Versuches, siehe auch Kapitel 2.5 und 7.4:

$$t_{T_{n+1}\alpha}^G = -b/a (1 - e^{a |t_{N_{n+1}}|}) (c + (1 - c)e^{d |v_T|}) \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} \quad (\text{A.56})$$

- Durchführung der **Variation von  $t_T$  im Haftzustand:**

$$t_{T_{n+1}}^{trial} = t_{T_n} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta] \quad (\text{A.57})$$

$$\Delta[t_{T_{n+1}}^{trial}] = \Delta[t_{T_n}] + \Delta[\epsilon_T m_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta)] \quad (\text{A.58})$$

$\Delta[t_{T_n}]$  gehört zum letzten Zeitschritt  $n$  und fällt heraus. Auf die Restgleichung von (A.58) wird die Produktregel angewendet:

$$\Delta t_{T_{n+1}}^{trial} = \epsilon_T [\Delta m_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) + m_{\alpha\beta} \Delta (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta)] \quad (\text{A.59})$$

Hierzu ist Durchführung der partiellen Differenziation des Metrikkoeffizienten  $m_{\alpha\beta}$  notwendig:

$$\begin{aligned} \frac{Dm_{\alpha\beta}}{\Delta\epsilon} &= \frac{\Delta m_{\alpha\beta}}{\Delta\xi} \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} + \frac{\Delta m_{\alpha\beta}}{\Delta\epsilon} \\ \frac{\Delta m_{\alpha\beta}}{\Delta\xi} &= m_{\alpha\beta,\gamma} \quad ; \quad \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} = \Delta\xi^\gamma \quad ; \quad \frac{\Delta m_{\alpha\beta}}{\Delta\epsilon} = 0 \\ \frac{Dm_{\alpha\beta}}{\Delta\epsilon} &= m_{\alpha\beta,\gamma} \Delta\xi^\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Die Differenziation zweier aufeinander folgender Inkremente lautet:

$$\Delta(\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) = \Delta\bar{\xi}^\beta \quad (\text{A.61})$$

Damit ergibt sich für die Variation der Reibkraft im Haftzustand:

$$\Delta t_{T_{n+1}}^{trial} = \epsilon_T [m_{\alpha\beta,\gamma} \Delta\bar{\xi}^\gamma (\bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta) + m_{\alpha\beta} \Delta\bar{\xi}^\beta] \quad (\text{A.62})$$

• Ermittlung der **Variation der Reibkraft  $t_T$  für den Gleitzustand**

Die Anwendung von Produkt- und Quotientenregel der Gleichungen (A.54), (A.55) und (A.56) führen zu

$$\Delta \left[ t_{T_{n+1}\alpha}^G \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} \right] = \Delta(t_{T_{n+1}\alpha}^G) \frac{t_{T_{n+1}\alpha}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} + t_{T_{n+1}\alpha}^G \left[ \frac{\Delta(t_{T_{n+1}\alpha})}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} - \frac{t_{T_{n+1}\alpha} \Delta(\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|)}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|^2} \right]. \quad (\text{A.63})$$

Unter Vernachlässigung des Indizes  $trial$  und  $n+1$  erfolgt die Variation von  $\Delta(t_{T_{n+1}\alpha}^G)$ , dem ersten Term von Gleichung (A.63)<sub>1</sub>. Hierzu wird die totale Differenziation wie folgt durchgeführt:

$$\frac{Dt_T}{\Delta\epsilon} = \frac{\Delta t_T}{\Delta\xi} \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} + \frac{\Delta t_T}{\Delta t_N} \frac{\Delta t_N}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta\epsilon} + \frac{\Delta t_T}{\Delta|v_T|} \frac{\Delta|v_T|}{\Delta\xi} \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} + \frac{\Delta t_T}{\Delta\epsilon} \quad (\text{A.64})$$

Zur Lösung der **Variante 1** (A.54) ergeben sich im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_T}{\Delta\xi} = 0 & \quad ; \quad \frac{\Delta\xi}{\Delta\epsilon} = \Delta\xi^\beta & \quad ; \quad \frac{\Delta t_T}{\Delta t_N} = \mu \\ \frac{\Delta t_N}{\Delta g} = \epsilon_N H(g) & \quad ; \quad \frac{\Delta g}{\Delta\epsilon} = \Delta g & \quad ; \quad \frac{\Delta t_T}{\Delta|v_T|} = 0 \\ \frac{\Delta|v_T|}{\Delta\xi} = 0 & \quad ; \quad \frac{\Delta t_T}{\Delta\epsilon} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Damit ergibt sich für Variante 1 mit linearer Druckabhängigkeit:

$$\Delta t_T^{Gleit} \frac{t_{T\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = \mu H(g) \epsilon_N \Delta g \frac{t_{T\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \quad (\text{A.66})$$

Für **Variante 2** (A.55) entwickelt sich abweichend von den Differenzialen der Gleichungen (A.65):

$$\frac{\Delta t_T}{\Delta t_N} = b e^{a|t_N|} \quad (\text{A.67})$$

Damit ergibt sich für Variante 2 mit nichtlinearer Druckabhängigkeit:

$$\Delta t_T^{Gleit} \frac{t_{T\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = b e^{a|t_N|} H(g) \epsilon_N \Delta g \frac{t_{T\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \quad (\text{A.68})$$

Für **Variante 3** (A.56) der nichtlinearen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibkraft ergeben sich abweichend von den Differenzialen der Gleichungen (A.65):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_T}{\Delta t_N} &= b e^a |t_N| [c + (1-c) e^d |v_T|] & ; & \quad \frac{\Delta t_N}{\Delta g} = \epsilon_N H(g) \\ \frac{\Delta t_T}{\Delta |v_T|} &= d (1-c) e^d |v_T| [-b/a (1 - e^a |t_N|)] & ; & \quad \frac{\Delta g}{\Delta \epsilon} = \Delta g \\ & \frac{\Delta |v_T|}{\Delta \xi} = |dt| & ; & \quad \frac{\Delta \xi}{\Delta \epsilon} = \Delta \xi^\beta \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Damit ergibt sich die Variation des ersten Terms von Variante 3:

$$\begin{aligned} \Delta t_T^G &= [b e^a |t_N|] [c + (1-c) e^d |v_T|] \epsilon_N H(g) \Delta g \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \\ &+ [d (1-c) e^d |v_T|] [-b/a (1 - e^a |t_N|)] dt \Delta \xi^\beta \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Bemerkung:

Bei Ansätzen von Reibgesetzen mit einer Wegabhängigkeit wäre das Differenzial  $\frac{\Delta t_T}{\Delta \xi}$  ungleich null, und es käme ein weiterer zu linearisierender Term hinzu, der zu einem weiteren Term in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{G\text{direkt}}$  führen würde.

Die Penaltyfaktoren wurden mit  $\epsilon_N$  und  $\epsilon_T$  bezeichnet.

Anschließend folgt die Variation des zweiten und dritten Terms (A.63)<sub>2,3</sub> :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\Delta(t_{T_\alpha})}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha} \Delta(\|\mathbf{t}_T^b\|)}{\|\mathbf{t}_T^b\|^2} \right] \\
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|^2} \left[ \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\boldsymbol{\tau}^\alpha (\Delta t_{T_\alpha}) + (\Delta \boldsymbol{\tau}^\alpha) t_{T_\alpha}) \right] \right] \\
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \left[ \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|^2} \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \boldsymbol{\tau}^\alpha (\Delta t_{T_\alpha}) + \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|^2} \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\Delta \boldsymbol{\tau}^\alpha) t_{T_\alpha} \right] \right] \\
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta \boldsymbol{\tau}_\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{\boldsymbol{\tau}^\alpha}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\Delta t_{T_\alpha}) - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\Delta \boldsymbol{\tau}^\alpha) \right] \\
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\Delta t_{T_\alpha}) - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}^\alpha) \right]
\end{aligned}$$

Nutzung der Beziehung  $\Delta \boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta + \boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}_\beta = 0$

$$\begin{aligned}
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{\delta_\beta^\alpha \Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} + \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} (\Delta \boldsymbol{\tau}_\beta \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha) \right] \\
= & \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{\Delta t_{T_\beta}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} + \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \frac{t_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha}{\|\mathbf{t}_T^b\|} \cdot (\Delta \boldsymbol{\tau}_\beta) \right]
\end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von  $\mathbf{p}_T = \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = p_{T_\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha$ ,  $p_{T_\alpha} = \frac{t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|}$ ,  $p_T^\beta = \frac{t_T^\beta}{\|\mathbf{t}_T^b\|}$

$$= \left[ \frac{\Delta t_{T_\alpha}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} - p_{T_\alpha} p_T^\beta \frac{\Delta t_{T_\beta}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} + p_T^\beta p_{T_\alpha} \mathbf{p}_T \cdot (\Delta \boldsymbol{\tau}_\beta) \right] \quad (\text{A.71})$$

Gleichung (A.71) ergibt sich aus der Variation des zweiten und dritten Terms der Gleichung (A.63)<sub>2,3</sub>. Nach Wiedereinführung von 'trial' und 'n + 1' und Ermittlung von  $\Delta \boldsymbol{\tau}_\beta$  aus Gleichung (A.5) ergibt sich:

$$= \frac{\Delta t_{T_\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_T^{b,trial}\|} [\delta_\alpha^\beta] - \frac{\Delta t_{T_\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_T^{b,trial}\|} p_T^\beta p_{T_\alpha} + \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\xi}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] p_T^\beta p_{T_\alpha} \quad (\text{A.72})$$

Damit ergibt sich die vollständige Variation der Reibkraft im Gleitzustand aus den Gleichungen der einzelnen Varianten (A.66), (A.68) und (A.70) sowie Gleichung (A.72):

Für **Variante 1** (A.66) mit linearer Druckabhängigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^G &= \mu \epsilon_N H(g) p_{T_\alpha} \Delta g \\ &+ t_{T_{n+1}}^G \left[ \frac{\Delta t_{T_{n+1}\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\|} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T_\alpha}] + \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\xi}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] p_T^\beta p_{T_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Für **Variante 2** (A.68) mit nichtlinearer Druckabhängigkeit basierend auf Versuchsergebnissen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^G &= b e^a |t_N| \epsilon_N H(g) p_{T_\alpha} \Delta g \\ &+ t_{T_{n+1}}^G \left[ \frac{\Delta t_{T_{n+1}\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\|} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T_\alpha}] + \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\xi}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] p_T^\beta p_{T_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Für **Variante 3** (A.68) mit nichtlinearer Druck- und Geschwindigkeitsabhängigkeit ebenfalls basierend auf Versuchsergebnissen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_{n+1}\alpha}^G &= b e^a |t_N| [c + (1-c) e^d |v_T|] \epsilon_N H(g) p_{T_1} \Delta g \\ &+ d (1-c) e^d |v_T| [-b/a (1 - e^a |t_N|)] dt p_{T_1} \Delta \xi^\beta \\ &+ t_{T_{n+1}}^G \left[ \frac{\Delta t_{T_{n+1}\beta}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{btrial}\|} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T_\alpha}] + \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,\beta}^{(2)}(\bar{\xi}) + \mathbf{e}_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma] p_T^\beta p_{T_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Für diesen Fall des vorgeschlagenen druck- und geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes wird im Zuge der in Kapitel 3 durchgeführten Diskretisierung hier die aus Gleichung (A.75) entstehende direkte Steifigkeitsmatrix für den Gleitzustand angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{c_{T_e}}^{direkt\ G} &= - [ b e^a |t_N| (c + (1-c) e^d |v_T|) \epsilon_N H(g) p_{T_1} ] \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1) \right] \mathbf{N}^T \\ &+ [ d (1-c) e^d |v_T| ] [-b/a (1 - e^a |t_N|) dt p_{T_1}] \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1) \right] \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1) \right]^T \\ &- [t_T^G] \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1) \right] \mathbf{T}_1^T \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$



# Anhang B

## Herleitung zur Kontaktsteifigkeitsmatrix für Knoten–Segment–Kontakt

### B.1 Isoparametrischer Ansatz nach Laursen

LAURSEN [1992] führt die Diskretisierung der Kontaktzone mit isoparametrischen, numerisch zu integrierenden Ansätzen durch. Aufgrund der konsistenten Linearisierung am Kontinuum kann auf der Masterseite mit Ansätzen höherer Ordnung gearbeitet werden. Der Grad des Ansatzes ist frei wählbar und kann aufgrund der gewissen Systematik der allgemeineren Herleitung mit isoparametrischen Ansätzen flexibel genutzt werden. Es sei nochmal in Erinnerung gerufen, dass  $\varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$  den mit Hilfe der Minimierung zu ermittelnden Masterpunkt, und  $\varphi^{*(1)}(\mathbf{X})$  den Slavepunkt beschreibt. Während der Slavepunkt ein diskretisierter Knoten ist, liegt der Masterpunkt aber zwischen zwei Knoten auf der Masterseite  $\gamma^{(2)}$ , deshalb bedarf es zur Abbildung eine Interpolation. Für die Lösung von Kontaktproblemen mit Vierknoten–Elementen mit bilinearen Ansätzen im Kontinuum müssen bei der allgemeinen Herleitung von LAURSEN lineare Ansätze bei den Formfunktionen  $N$  benutzt werden. Für diese Formfunktionen gelten  $\xi = \frac{1}{2}(1 - \eta_a \eta)$  und  $\eta \in [-1, 1]$  und  $\xi \in [0, 1]$ . Entsprechend folgen die ersten Ableitungen  $N_i$ . Die zweiten Ableitungen  $N_{i,1}$  sind gleich null. Aufgrund der Tatsache, dass die Ansätze an den Elementrändern linear sind, entfallen einige Terme der linearisierten Grundterme der virtuellen Arbeit  $\Delta G_c$ ; d. h. Terme, die die Oberflächenkrümmung beschreiben, fallen heraus:

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) = \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha\beta}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) = 0$$

Für zweidimensionale Berechnungen erhalten die Bezeichnungen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  den Wert

Eins, da keine Summation stattfindet. Der Slavepunkt ist ein diskretisierter Knoten, der Masterpunkt liegt aber zwischen zwei Knoten auf der Masterseite  $\gamma^{(2)}$ , hier bedarf es zur Abbildung einer Interpolation.

### Numerische Integration und räumliche Diskretisierung

Nach Durchführung der numerischen Integration von  $\mathbf{k}_{c_N}$  und  $\mathbf{r}_c$  mit Hilfe der Gaußquadratur zweiter Ordnung werden diese zusätzlichen Gleichungen in das globale Gleichungssystem eingebunden. Der Ansatz für ein Element lautet:

$$G_{c_e}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{h*}) = \int_{\Gamma_e^{(1)h}} [t_{N_t}^h \delta g^h + t_{T_1}^h \delta \bar{\xi}^{1h}] d\Gamma_e^{(1)h} \quad (\text{B.1})$$

Die räumliche Diskretisierung ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} G_{c_e}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{h*}) &\approx \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [t_N^h(\eta^k) \delta g^h(\eta^k) + t_{T_1}^h(\eta^k) \delta \bar{\xi}^{1h}(\eta^k)] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [\delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{r}_c^k] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Daraus entwickelt sich der Kontaktkraftvektor eines Elementes

$$\mathbf{R}_{c_e} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k \quad (\text{B.3})$$

mit

$n_{int} = 2 :$	Anzahl der Integrationspunkte
$\eta^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} :$	Stützstellen
$W^k = 1 :$	Wichtungsfaktoren
$j(\eta^k) :$	Jacobi–Determinante .

Die Variation der virtuellen Arbeit nach den Verschiebungen lautet:

$$\begin{aligned} \Delta G_{c_e}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\varphi}^{h*}) &\approx \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [\Delta [t_N^h(\eta^k) \delta g^h(\eta^k)] \right. \\ &\quad \left. + \Delta t_{T_1}^h(\eta^k) \delta \bar{\xi}^{1h}(\eta^k) + t_{T_1}^h(\eta^k) \Delta [\delta \bar{\xi}^{1h}(\eta^k)]] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot \mathbf{k}_c^k \Delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \cdot [\mathbf{k}_{c_N}^k + \mathbf{k}_{c_T}^{direkt^k} + \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt^k}] \Delta \boldsymbol{\Phi}_c^k \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Daraus ergeben sich für die Kontaktsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{c_e} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_c^k = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) [\mathbf{k}_{c_N}^k + \mathbf{k}_{c_T}^{direkt^k} + \mathbf{k}_{c_T}^{indirekt^k}], \quad (\text{B.5})$$

sowie die folgenden Verschiebungsvektoren für ein Element:

$$\delta \Phi_c = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s^{(1)} \\ \mathbf{w}_1^{(2)} \\ \mathbf{w}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \Phi_c = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_s^{(1)} \\ \Delta \mathbf{d}_1^{(2)} \\ \Delta \mathbf{d}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Für die Diskretisierung des Randes eines bilinearen Elementes werden folgende Vektoren benötigt:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -N_1(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \\ -N_2(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_1(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_2(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \\ -N_{2,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,1}(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \\ -N_{2,1}(\bar{\xi}^1) \boldsymbol{\tau}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Die im Kapitel 3.6 zusammengestellten Vektoren vereinfachen sich, da die Krümmung im Kontaktelement  $\mathbf{e}_{1,1} = 0$  ist, zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_1 &= \mathbf{N}_1, \quad \bar{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{N}_{11} = 0 \\ \mathbf{D}_1 &= \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Für den Kontaktkraftvektor ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{c_e} &= \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k \\ \mathbf{r}_c^k &= t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{r}_c^k &= t_N \mathbf{N} + \frac{t_{T_1}}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] \\ \mathbf{R}_{c_e} &= \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{r}_c^k = t_N \mathbf{N} + \frac{\tilde{t}_T}{l} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Nach der Integration ergibt sich  $t_{T_1}$  zu  $\tilde{t}_T = t_{T_1} l$  und  $m_{11} = l^2$ . Folgende physikalische Einheiten ergeben sich:  $\mathbf{R} \rightarrow [\text{K}]$ ,  $\frac{\tilde{t}_T}{l} \rightarrow [\text{K}/\text{L}]$ ,  $\mathbf{T} \rightarrow [\text{L}]$ ,  $\mathbf{N}_1 \rightarrow [-]$  und  $\mathbf{N} \rightarrow [-]$ .

### B.1.1 Normalkontakt

Nach der Linearisierung der Kontaktarbeit und Vereinfachung durch das Zu-nullsetzen der Krümmung verbleiben die folgenden Terme bei der über das Volumen zu integrierenden Kontaktarbeit in Normalenrichtung:

$$\begin{aligned} \delta t_N \delta g + t_N \Delta \delta g = & H(g) \epsilon_N \delta g \Delta g + t_N \left[ g \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right. \\ & m^{11} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ & \left. + \delta \bar{\xi}^1 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta \bar{\xi}^1 \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \end{aligned}$$

und

$$m_{11} \delta \bar{\xi}^1 = [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - g \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{B.10})$$

Unter Beachtung der Äquivalenz von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  lassen sich für die einzelnen Terme der linearisierten Arbeit im Zuge der Diskretisierung folgende Vektoren angeben:

$$\begin{aligned} \delta g = & -\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \longrightarrow -\mathbf{N} \\ \boldsymbol{\tau}_1 \cdot & [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \longrightarrow \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \cdot & [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \longrightarrow -\mathbf{N}_1 \\ \delta \bar{\xi}^1 = & \frac{1}{m_{11}} \left[ [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - g \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\ & \longrightarrow \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] = \mathbf{D}_1 \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Der ursprünglich in Kapitel 3.6 angegebene Ausdruck für die Steifigkeitsmatrix in Normalenrichtung verändert sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{cN} &= \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[ \frac{g}{m_{11}} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T - \mathbf{D}_1 \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^T + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \right] \\ &= \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[ \frac{g}{m_{11}} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T - \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1]^T \right] \\ &= \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + \frac{t_N}{m_{11}} \left[ -\mathbf{T} \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T - g \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T \right] \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Nach der numerischen Integration zweiter Ordnung für Slavepunkt–Mastersegment–Kontakt erhält man

$$\mathbf{K}_{c_{Ne}} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{c_{Ne}}^k = \epsilon_N H(g) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + \frac{t_N}{l^2} [-\mathbf{T} \mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T - g \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \quad (\text{B.13})$$

mit folgenden physikalische Einheiten:  $m_{11} \rightarrow [\text{LL}]$ ,  $\mathbf{K} \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $\epsilon_N \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $t_N \rightarrow [\text{K}]$ ,  $\mathbf{N} \rightarrow [-]$ ,  $\mathbf{N}_1 \rightarrow [-]$ ,  $\mathbf{T} \rightarrow [\text{L}]$  und  $g \rightarrow [\text{L}]$ .

## B.1.2 Tangentialkontakt

Der über das Volumen zu integrierende Anteil der linearisierten Kontaktarbeit für die Tangentialrichtung lautet:

$$\Delta t_{T1} \delta \bar{\xi}^1 + t_{T1} \Delta (\delta \bar{\xi}^1) \quad (\text{B.14})$$

Da aufgrund der Wahl der Ansatzfunktionen des Slaveknoten – Mastersegments die Krümmung gleich null ist und nicht alle Terme berücksichtigt werden können, vereinfachen die Steifigkeitsmatrizen. Der erste Term  $\Delta \mathbf{t}_T$  – hieraus entwickelt sich  $\mathbf{k}_{c_T}^{\text{direkt}}$  – setzt sich zusammen aus der Variation der Tangentialkraft mit beiden möglichen Zuständen, Haften und Gleiten. Die Indizes  $n_{+1}$  erscheinen wegen der impliziten, diskreten Zeitintegration des Algorithmus.

Für den Zustand **Haften** gilt:

$$\Delta \mathbf{t}_{T_{n+1}}^H = \epsilon_T [m_{11} \Delta \bar{\xi}^1] \quad (\text{B.15})$$

Unter Beachtung der Äquivalenzen von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie  $\mathbf{u}$  entwickeln sich die folgenden Terme der linearisierten Kontaktarbeit im Zuge der Diskretisierung zu Vektoren:

$$\epsilon_T [m_{11} \Delta \bar{\xi}^1] \delta \bar{\xi}^1 \longrightarrow \epsilon_T m_{11} \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1]^T \quad (\text{B.16})$$

Aufgrund der Wahl der Ansatzfunktion vereinfacht sich der ursprüngliche Ausdruck der Kontaktsteifigkeitsmatrix aus Kapitel 3.6 im Folgenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{c_T}^{\text{direkt } H} &= \epsilon_T (m_{11} + 2g_T^1 \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}^1) \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \\ \mathbf{k}_{c_T}^{\text{direkt } H} &= \epsilon_T m_{11} \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1] \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g \mathbf{N}_1]^T \\ &= \epsilon_T \frac{m_{11}}{m_{11} m_{11}} [\mathbf{T} \mathbf{T}^T + g \mathbf{T} \mathbf{N}_1^T + g \mathbf{N}_1 \mathbf{T}^T + g^2 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Nach Durchführung der numerischen Integration zweiter Ordnung von  $\mathbf{k}_{cT}^{direkt H}$  erhält man:

$$\mathbf{K}_{cT_e}^{direkt H} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{cT}^k = \frac{\epsilon_T}{l^2} [\mathbf{T}\mathbf{T}^T + g\mathbf{T}\mathbf{N}_1^T + g\mathbf{N}_1\mathbf{T}^T + g^2\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T] \quad (\text{B.18})$$

Nach der Integration ergeben sich folgende physikalische Einheiten:  $m_{11} \rightarrow [\text{LL}]$ ,  $\mathbf{K} \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $\epsilon_T \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $\mathbf{T} \rightarrow [\text{L}]$ ,  $\mathbf{N}_1 \rightarrow [-]$  und  $\mathbf{N} \rightarrow [-]$ .

Für den **Gleitzustand** ergibt sich im zweidimensionalen Raum:

$$\Delta t_{T_{n+1_1}}^G = \mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \Delta g + \mu t_{N_{n+1}} \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\xi})] p_T^1 p_{T_1} \quad (\text{B.19})$$

Unter Beachtung der Äquivalenzen von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie  $\mathbf{u}$  entwickeln sich die folgenden Terme der linearisierten Kontaktarbeit im Zuge der Diskretisierung zu Vektoren:

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_{n+1_1}}^G \delta \bar{\xi}^1 &= \mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \delta \bar{\xi}^1 \Delta g + \mu t_{N_{n+1}} \delta \bar{\xi}^1 \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\xi})] p_T^1 p_{T_1} \\ p_T^1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\xi})] &\longrightarrow -p_T^1 \mathbf{T}_1^T \\ \delta \bar{\xi}^1 &\longrightarrow \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \\ \Delta g &\longrightarrow -\mathbf{N}^T \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Es ergibt sich die folgende Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{cT}^{direkt G} &= -\mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \mathbf{D}_1 \mathbf{N}^T - \mu t_N p_T^1 \mathbf{D}_1 \bar{\mathbf{T}}_1^T \\ &= -\mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1) \right] \mathbf{N}^T - \mu t_N p_T^1 \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1) \right] \mathbf{T}_1^T \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Nach der numerischen Integration zweiter Ordnung von  $\mathbf{k}_{cT}^{direkt G}$  für den Fall **Gleiten** ergibt sich für den linearen Ansatz:

$$\mathbf{K}_{cT_e}^{direkt G} = \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{cT}^k = -\mu \frac{\epsilon_N}{l} H(g) [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{N}^T - \frac{\mu t_N}{l^3} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{T}_1^T \quad (\text{B.22})$$

Mit

$$p_T^1 = \frac{t_T^1}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 1/l \quad , \quad p_{T_1} = \frac{t_{T_1}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = l \quad (\text{B.23})$$

ergeben sich folgende physikalische Einheiten:  $m_{11} = l^2 \rightarrow [\text{LL}]$ ,  $\mathbf{K} \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  
 $\epsilon_N \rightarrow [\text{K/L}]$   $\mathbf{T}_1 \rightarrow [\text{L}]$ ,  $\mathbf{T} \rightarrow [\text{L}]$ ,  $\mathbf{N}_1 \rightarrow [-]$  und  $\mathbf{N} \rightarrow [-]$ .

Der zweite Term der linearisierten Kontaktarbeit in tangentialer Richtung lautet  $t_{T_1} \Delta(\delta \bar{\xi}^1)$ . Hieraus ergibt sich  $\mathbf{k}_{c_T}^{\text{indirekt}}$ . Der Ausdruck setzt sich zusammen aus der Tangentialkraft und der sich ergebenden vereinfachten Darstellung der zweiten Variation des Tangentialgleitweges:

$$\begin{aligned} t_{T_1} \Delta(\delta \bar{\xi}^1) &= \frac{t_{T_1}}{m_{11}} [ \\ &\quad - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^1 \\ &\quad - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^1 \\ &\quad - \delta \bar{\xi}^1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &\quad - \Delta \bar{\xi}^1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &\quad + [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &\quad + [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Im Einzelnen ergeben sich folgende Terme unter Beachtung der Äquivalenz von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  im Zuge der Diskretisierung zu Vektoren:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^1 &\longrightarrow 2\mathbf{T}_1 \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1]^T \\ -\delta \bar{\xi}^1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] - \Delta \bar{\xi}^1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &\longrightarrow 2 \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{T}_1^T \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned}
& [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
= & \mathbf{n} \left[ [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& + \frac{\tau}{l} \left[ [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& \longrightarrow \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T + \frac{1}{m_{11}}\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T \quad (\text{B.26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
= & \mathbf{n} \left[ [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& + \frac{\tau}{l} \left[ [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& \longrightarrow \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T + \frac{1}{m_{11}}\mathbf{T}_1\mathbf{T}^T \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Ansatzfunktion vereinfacht sich  $\mathbf{k}_{c_T}^{indirekt}$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{c_T}^{indirekt} &= \frac{t_{T_1}}{m_{11}} \left[ 2(\mathbf{T}_1 \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1]^T + \frac{1}{m_{11}} [\mathbf{T} + g\mathbf{N}_1] \mathbf{T}_1^T) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T - \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1\mathbf{T}^T) \right] \\
&= \frac{t_{T_1}}{m_{11}} \left[ \frac{1}{m_{11}} (\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1\mathbf{T}^T) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2g}{m_{11}} (\mathbf{T}_1\mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1\mathbf{T}_1^T) - \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T \right] \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

Nach Durchführung der numerischen Integration zweiter Ordnung von  $\mathbf{k}_{c_T}^{indirekt}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{c_T}^{indirekt} &= \bigcup_{k=1}^{n_{int}} W^k j(\eta^k) \mathbf{k}_{c_T}^k = \frac{\tilde{t}_T}{l} \left[ \frac{1}{l^2} (\mathbf{T}\mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_1\mathbf{T}^T) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2g}{l^2} (\mathbf{T}_1\mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1\mathbf{T}_1^T) - \mathbf{N}\mathbf{N}_1^T - \mathbf{N}_1\mathbf{N}^T \right] \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

mit folgenden physikalischen Einheiten:  $\mathbf{K} \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $\frac{\tilde{t}_T}{l} \rightarrow [\text{K/L}]$ ,  $\mathbf{T}_1 \rightarrow [\text{L}]$ ,  
 $\mathbf{T} \rightarrow [\text{L}]$ ,  $g \rightarrow [\text{L}]$ ,  $\mathbf{N}_1 \rightarrow [-]$  und  $\mathbf{N} \rightarrow [-]$ .

## B.2 Konventioneller Ansatz für das Dreiknoten–Kontaktelement

Im Rahmen der Finite–Element–Methode wird die lineare Knoten–Segment Diskretisierung in Zusammenhang mit bilinearen Vierknoten–Elementen durchgeführt. Dabei wurde im Gegensatz zu LAURSEN [1992] der konventionelle Ansatz von WRIGGERS, VU VAN & STEIN [1990], WRIGGERS & MIEHE [1994] sowie SCHERF [1997] beschrieben und verwendet. Dieser ist anschaulicher, daher einfacher zu verstehen, aber nicht systematisch erweiterbar und ohne numerische Integration zu verwenden:

$$\begin{aligned} G_c &= \int_{\Gamma_e^{(1)}} [t_N \delta g + t_T \delta \bar{\xi}] d\Gamma_e^{(1)} \\ G_c &= \hat{t}_N \delta g_N + \hat{t}_T \delta g_T \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Nach der Integration der virtuellen Kontaktarbeit über die Fläche und der Diskretisierung ergeben sich  $\hat{t}_N$  und  $\hat{t}_T$  als Kräfte [K]. Die zugehörigen Wege [L] ergeben sich in normaler Richtung  $\delta g = \delta g_N$  und tangentialer Richtung  $\delta \bar{\xi} l = \delta g_T$ . Terme mit höheren Ableitungen, wie  $\mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi})$  werden bei der linearen Diskretisierung zu null, damit ergeben sich folgende Terme:

$$\delta g = -\mathbf{n} \cdot [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{B.31})$$

und

$$A_{11} \delta \bar{\xi}^1 = [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - g\mathbf{n} \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{B.32})$$

mit

$$A_{11} = m_{11} + g\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_{1,1}(\bar{\xi}) \quad (\text{B.33})$$

Es wird angenommen, dass der Slavepunkt ein diskreter finite Elementknoten auf der Slaveoberfläche (1) ist, er wird als  $\mathbf{x}_s$  bezeichnet. Der dazugehörige auf die Oberfläche projizierte Masterpunkt wird als  $\bar{\mathbf{y}}_m$  bezeichnet. Dieser Masterpunkt  $\bar{\mathbf{y}}_m$  liegt auf der Masteroberfläche (2) einer linear veränderlichen Oberfläche zwischen zwei benachbarten Knoten  $\mathbf{y}_1$  und  $\mathbf{y}_2$  und kann mit Hilfe der Laufvariablen  $\bar{\xi} [0, 1]$  bestimmt werden. Die aktuelle Segmentlänge bestimmt sich mit  $l = \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|$ .

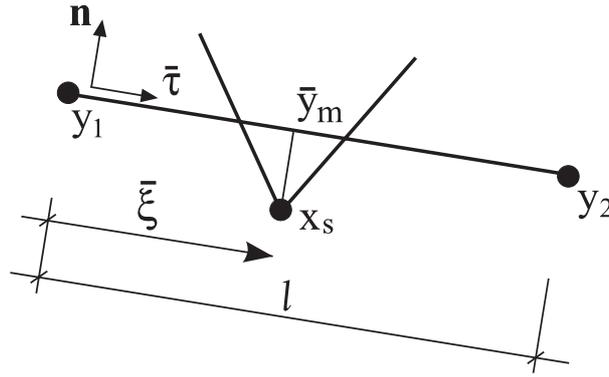


Abbildung B.1: Knoten–Segment–Kontakt mit dem Dreiknoten–Kontaktelement.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = l\bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \bar{\mathbf{y}}_m(\bar{\xi}) &= \mathbf{y}_1 + \bar{\xi}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) &\longrightarrow \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_m(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) &\longrightarrow \mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{y}}_m(\bar{\xi}) = \mathbf{x}_s - (1 - \bar{\xi})\mathbf{y}_1 - \bar{\xi}\mathbf{y}_2\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

Der Vektor  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_s^{(1)} \mathbf{u}_1^{(2)} \mathbf{u}_2^{(2)}]^T$  bzw.  $\mathbf{u}^T = [u_s^{(1)} v_s^{(1)} u_1^{(2)} v_1^{(2)} u_2^{(2)} v_2^{(2)}]^T$  ist eine Testfunktion (virtuelle Verschiebung) aller zu den drei Knoten  $\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  gehörenden Freiheitsgraden und charakterisiert das Kontaktelement.

Für die einzelnen Terme ergeben sich im Zuge der Linearisierung:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &\longrightarrow = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_s^{(1)} - (1 - \bar{\xi})\mathbf{u}_1^{(2)} - \bar{\xi}\mathbf{u}_2^{(2)}] \\ \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{l} \cdot [\boldsymbol{\varphi}^{(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &\longrightarrow = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot [\mathbf{u}_s^{(1)} - (1 - \bar{\xi})\mathbf{u}_1^{(2)} - \bar{\xi}\mathbf{u}_2^{(2)}] \\ \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &\longrightarrow = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_2^{(2)} - \mathbf{u}_1^{(2)}] \\ \delta \bar{\xi} l &\longrightarrow = \delta g_T\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

Damit lassen sich angeben ( $\mathbf{n}$  und  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  haben jeweils die Länge 1):

$$\delta g_N = -\mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_s^{(1)} - (1 - \bar{\xi})\mathbf{u}_1^{(2)} - \bar{\xi}\mathbf{u}_2^{(2)}] \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned}\delta g_T &= \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot [\mathbf{u}_s^{(1)} - (1 - \bar{\xi})\mathbf{u}_1^{(2)} - \bar{\xi}\mathbf{u}_2^{(2)}] \\ &\quad - \frac{g\mathbf{n}}{l} \cdot [\mathbf{u}_2^{(2)} - \mathbf{u}_1^{(2)}]\end{aligned}\quad (\text{B.38})$$

Durch Einführung folgender Matrizen

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -(1 - \bar{\xi})\mathbf{n} \\ -\bar{\xi}\mathbf{n} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\tau}} \\ -(1 - \bar{\xi})\bar{\boldsymbol{\tau}} \\ -\bar{\xi}\bar{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{N}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{T}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

lassen sich die virtuellen Verschiebungen auf der Kontaktfläche in diskreter Form elementweise angeben:

$$\begin{aligned} \delta g_N &= \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{N}} \\ \delta g_T &= \mathbf{u}^T [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Die virtuelle Kontaktarbeit in normaler ( $\delta g = \delta g_N$ ) und in tangentialer Richtung ( $\delta \bar{\xi} l = \delta g_T$ ) an einem Element lautet:

$$\begin{aligned} G_c &= G_c^N + G_c^T \\ G_c &= \delta g_N \hat{t}_N + \delta g_T \hat{t}_T \\ G_c &= \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{N}} \hat{t}_N + \mathbf{u}^T [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \hat{t}_T \\ G_c &= \mathbf{u}^T \mathbf{R}_c \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Der Kontaktkraftvektor an einem Element ergibt sich mit

$$\mathbf{R}_c = \hat{t}_N \hat{\mathbf{N}} + \hat{t}_T [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0]. \quad (\text{B.42})$$

Die auf diesem Wege definierten Vektoren entsprechen denen von Gleichung (B.9). Denn es gelten gegenüber Anhang B.1:

$$\hat{t}_N = \tilde{t}_N, \quad \hat{t}_T = \tilde{t}_T, \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N}, \quad \hat{\mathbf{N}}_0 = -\mathbf{N}_1, \quad \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{l} \mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{T}}_0 = -\mathbf{T}_1/l \quad (\text{B.43})$$

Im Kontaktfall ist hier  $g \geq 0$ .

### B.2.1 Normalkontakt

Der Weg zur Steifigkeitsmatrix führt über die Variation der virtuellen Arbeit. Es verbleibt die aufgrund des Ansatzes reduzierte linearisierte Kontaktarbeit in **Normalenrichtung**.

$$\begin{aligned} \Delta G_c^N = \Delta \hat{t}_N \delta g + \hat{t}_N \Delta \delta g = H(g) \epsilon_N \delta g \Delta g + \hat{t}_N & \left[ g \mathbf{n} \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right. \\ & m^{11} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ & \left. + \delta \bar{\xi}^1 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] + \Delta \bar{\xi}^1 \mathbf{n} \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \end{aligned}$$

mit

$$m_{11} \delta \bar{\xi}^1 = [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - g \mathbf{n} \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \quad (\text{B.44})$$

Unter Beachtung der Äquivalenz von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\varphi$  entwickeln sich folgende Terme der linearisierten Arbeit zu Vektoren:

$$\begin{aligned} \delta g = -\mathbf{n} \cdot [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] & \longrightarrow -\hat{\mathbf{N}} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_1 \cdot [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] & \longrightarrow \hat{\mathbf{T}} \\ \mathbf{n} [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] & \longrightarrow \hat{\mathbf{N}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] & \longrightarrow \hat{\mathbf{T}}_0 \\ \delta \bar{\xi}^1 l = \left[ [\varphi^{*(1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{l} - \frac{g \mathbf{n}}{l} \cdot [\varphi_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] & \longrightarrow \left[ \hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \right] \end{aligned}$$

Es ergibt sich die folgende Steifigkeitsmatrix für Normalkontakt an einem Element:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{c_N} &= \epsilon_N H(g) \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T + \hat{t}_N \left[ \frac{g}{l^2} \hat{\mathbf{N}}_0 \hat{\mathbf{N}}_0^T - \frac{1}{l} [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \hat{\mathbf{N}}_0^T - \frac{1}{l} \hat{\mathbf{N}}_0^T [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \right] \\ &= \epsilon_N H(g) \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T + \frac{\hat{t}_N}{l} \left[ -\frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{N}}_0 \hat{\mathbf{T}}^T \right] \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Die auf diesem Wege definierten Matrizen entsprechen denen von Gleichung (B.13), was mit Hilfe der Gegenüberstellungen (B.43) deutlich wird.

## B.2.2 Tangentialkontakt

Die virtuelle Kontaktarbeit in **tangentialer Richtung** an einem Element lautet:

$$\begin{aligned}
 \Delta G_c^T &= \int_{\Gamma} \Delta(t_T \delta g_T) d\Gamma \\
 \Delta G_c^T &= \int_{\Gamma} \Delta t_T \delta g_T + t_T \Delta \delta g_T d\Gamma \\
 \Delta G_c^T &= \Delta \hat{t}_T \delta g_T + \hat{t}_T \Delta \delta g_T
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

Aufgrund der Variation erfolgt eine Aufteilung in zwei entsprechende Terme. Der erste Term  $\Delta \hat{t}_T \delta g_T$  entwickelt sich zu  $\hat{\mathbf{K}}_{direkt}$  mit der Unterscheidung zwischen Haften und Gleiten. Die Ansatzfunktionen reduzieren sich aufgrund der sich zu null ergebenden Krümmung. Es entwickeln sich die folgenden linearisierten Terme der linearisierten Kontaktarbeit aufgrund des Diskretisierungsvorganges zu Vektoren; Im Fall **Haften**:

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{t}_T \delta g_T &= \epsilon_T [m_{11} \Delta \bar{\xi}^1] \delta \bar{\xi}^1 \\
 \Delta \bar{\xi}^1 l &\longrightarrow [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \\
 \hat{\mathbf{K}}_{cT}^{direkt\ H} &= \epsilon_T [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0]^T \\
 &= \epsilon_T [\hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}}^T - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{N}}_0^T - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \hat{\mathbf{T}}^T + \frac{g^2}{l^2} \hat{\mathbf{N}}_0 \hat{\mathbf{N}}_0^T]
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

Im Fall **Gleiten**:

$$\begin{aligned}
 \Delta t_T \delta \bar{\xi} &= \mu \epsilon_N H(g) p_{T_1} \Delta g \delta \bar{\xi}^1 + \mu t_N \mathbf{p}_T \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\xi})] p_{T_1}^1 p_{T_1} \delta \bar{\xi}^1 \\
 p_T^1 (l \bar{\boldsymbol{\tau}}_1) \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\xi})] &\longrightarrow \hat{\mathbf{T}}_0^T \\
 \delta \bar{\xi}^1 &\longrightarrow \frac{1}{l} [\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0] \\
 \Delta g &\longrightarrow -\hat{\mathbf{N}}^T
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

mit

$$\mathbf{p}_T = \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^b\|} = \frac{t_T^1 \boldsymbol{\tau}_1}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = \frac{t_{T_1} \boldsymbol{\tau}^1}{\|\mathbf{t}_T^b\|}, \quad p_T^1 = \frac{t_T^1}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 1/l, \quad p_{T_1} = \frac{t_{T_1}}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = l \tag{B.49}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{c_T}^{direkt\ G} = -\mu\epsilon_N H(g) \left[ \hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \right] \hat{\mathbf{N}}^T + \mu \frac{t_N}{l} \left[ \hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \right] \hat{\mathbf{T}}_0^T \quad (\text{B.50})$$

Die auf diesem Wege definierten Matrizen entsprechen denen der Gleichungen (B.18) und (B.22), was mit Hilfe der Gegenüberstellungen (B.43) deutlich wird.

Der zweite Term der Gleichung (B.46)<sub>3</sub>  $\hat{t}_T \Delta \delta g_T$ , aus dem sich  $\hat{\mathbf{K}}_{c_T}^{indirekt}$  entwickelt, setzt sich zusammen aus der Tangentialkraft und der aufgrund der sich zu null ergebenden Krümmung einfachen Darstellung der zweiten Variation des Tangentialgleitweges. Nach der Integration über die Fläche ergibt sich mit  $\hat{t}_T = t_{T_1} l$  [Kraft] und  $m_{11} = l^2$ :

$$\begin{aligned} \hat{t}_T \Delta \delta g_T = \hat{t}_T \Delta (\delta \bar{\xi}^{-1}) l &= \frac{\hat{t}_T}{l} \left[ \right. \\ &- \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^{-1} \\ &- \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^{-1} \\ &- \delta \bar{\xi}^{-1} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &- \Delta \bar{\xi}^{-1} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &+ [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\ &\left. + [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \quad (\text{B.51}) \end{aligned}$$

Die folgenden Terme ergeben sich unter Beachtung der Äquivalenz von  $\delta$  und  $\Delta$  sowie  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  im Zuge der Diskretisierung zu Vektoren:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \Delta \bar{\xi}^{-1} - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \delta \bar{\xi}^{-1} &\longrightarrow -2 \hat{\mathbf{T}}_0 \left[ \hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \right]^T \\ -\delta \bar{\xi}^{-1} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] - \Delta \bar{\xi}^{-1} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] &\longrightarrow -2 \left[ \hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l} \hat{\mathbf{N}}_0 \right] \hat{\mathbf{T}}_0^T \quad (\text{B.52}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
= & \mathbf{n} \left[ [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& + \overline{\boldsymbol{\tau}} \left[ [\boldsymbol{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\mathbf{u}_{,1}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& \longrightarrow \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}_0^T
\end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \\
= & \mathbf{n} \left[ [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& + \overline{\boldsymbol{\tau}} \left[ [\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \cdot [\boldsymbol{\varphi}_{,1}^{*(2)}(\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))] \right] \\
& \longrightarrow \hat{\mathbf{N}}_0\hat{\mathbf{N}}^T + \hat{\mathbf{T}}_0\hat{\mathbf{T}}^T
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $\mathbf{k}_{cT}^{indirekt}$  mit folgendem Ansatz:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{K}}_{cT} &= \hat{\mathbf{K}}_{cT}^{direkt} + \frac{\hat{t}_T}{l} \left[ -2 [\hat{\mathbf{T}}_0(\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l}\hat{\mathbf{N}}_0)^T + (\hat{\mathbf{T}} - \frac{g}{l}\hat{\mathbf{N}}_0)\hat{\mathbf{T}}_0^T] \right. \\
& \quad \left. + \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{N}}_0\hat{\mathbf{N}}^T + (\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}_0^T + \hat{\mathbf{T}}_0\hat{\mathbf{T}}^T) \right] \\
&= \hat{\mathbf{K}}_{cT}^{direkt} + \frac{\hat{t}_T}{l} \left[ -[\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}_0^T + \hat{\mathbf{T}}_0\hat{\mathbf{T}}^T] \right. \\
& \quad \left. + \frac{2g}{l}[\hat{\mathbf{T}}_0\hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{N}}_0\hat{\mathbf{T}}_0^T] + \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}}_0^T + \hat{\mathbf{N}}_0\hat{\mathbf{N}}^T \right]
\end{aligned} \tag{B.54}$$

Die auf diesem Wege definierten Matrizen entsprechen denen der Gleichung (B.29), was mit Hilfe der Gegenüberstellungen (B.43) deutlich wird.

Bei einer möglichen Reduzierung auf lineare Probleme ergibt sich;

Im Fall **Haften**:

$$\hat{\mathbf{K}}_{cT}^{linear} = \epsilon_T \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}^T \tag{B.55}$$

Im Fall **Gleiten**:

$$\hat{\mathbf{K}}_{cT}^{linear} = -\mu\epsilon_N H(g)\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}^T \tag{B.56}$$