

# **Methoden zur effizienten Berechnung komplexer Strömungen auf unstrukturierten Gittern**

von

Dipl.-Ing. Carl-Henning Rexroth

Karlsruhe 1996

# Methoden zur effizienten Berechnung komplexer Strömungen auf unstrukturierten Gittern

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Carl-Henning Rexroth  
aus Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung:  
Hauptreferent:  
Korreferent:

16. Dezember 1996  
o. Prof. Dr.-Ing. Sigmar Wittig  
o. Prof. Dr.-Ing. Johannes Janicka

## Vorwort

Die numerische Berechnung von Strömungen und die Arbeit an einem wissenschaftlichen Thema weisen eine Gemeinsamkeit auf: Geeignete Randbedingungen sind Voraussetzung für brauchbare Ergebnisse. Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Wittig, der als Leiter des Instituts für Thermische Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH) solche Bedingungen aufrecht erhält, mir die Möglichkeit einräumte, sie zu nutzen und für diese Arbeit das Hauptreferat übernommen hat, schulde ich deshalb besonderen Dank.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Janicka danke ich recht herzlich für Zeit und Interesse, die er der vorliegenden Arbeit als Korreferent gewidmet hat.

Bei Kollegen und Mitarbeitern am Institut für Thermische Strömungsmaschinen bedanke ich mich vor allem für ihre verlässliche und vorbehaltlose Unterstützung. Stellvertretend nennen möchte ich Herrn Dr.-Ing. M. Kurreck, der mich in Fragen der Numerik oft beraten und das gesamte Manuskript korrekturgelesen hat, sowie Herrn Dipl.-Ing. A. Elsässer, dessen ansteckender Optimismus, bedachter Rat und tatkräftige Hilfe der Umsetzung neuer Ideen oftmals den Weg ebneten.

Mein Dank gilt nicht zuletzt meinem Familien- und Freundeskreis für Geduld, Entgegenkommen und Förderung, die ich hier erfahren habe.

Sehr verbunden bin ich ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Arbeit im Rahmen des Graduiertenkollegs 'Energie- und Umwelttechnik' und des Sonderforschungsbereiches 167 'Hochbelastete Brennräume' finanziell ausgestattet hat.

# Inhalt

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Anforderungen und Zielsetzung</b>	<b>3</b>
2.1 Geometrische Flexibilität . . . . .	3
2.2 Hohe Genauigkeit . . . . .	3
2.3 Akzeptable Rechenzeit . . . . .	4
2.4 Gezielte Gitteranpassung . . . . .	4
2.5 Kritische Validierung . . . . .	5
<b>3 Numerische Verfahren zur Strömungsberechnung</b>	<b>6</b>
3.1 Kriterien zur Einordnung numerischer Verfahren . . . . .	6
3.2 Druckkorrektur bei Finite-Volumen-Verfahren auf strukturierten Gittern	10
3.3 Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Gittern . . . . .	11
<b>4 Strömungsgrößen und Bestimmungsgleichungen</b>	<b>15</b>
4.1 Grundgleichungen . . . . .	15
4.2 Bestimmung des Druckfeldes . . . . .	16
4.3 Bestimmung des Turbulenzeinflusses . . . . .	18
<b>5 Numerische Methoden auf unstrukturierten Gittern</b>	<b>21</b>
5.1 Räumliche Diskretisierung . . . . .	21
5.2 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung . . . . .	25
5.2.1 Konvektionsterme . . . . .	26
5.2.2 Diffusionsterme . . . . .	34
5.2.3 Quellterme . . . . .	35
5.2.4 Randbedingungen . . . . .	35
5.3 Datenstruktur . . . . .	36
5.4 Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	38
5.5 Adaption der Rechengitter . . . . .	44

<b>6</b>	<b>Diskretisierung der Bestimmungsgleichungen</b>	<b>51</b>
6.1	Impulsgleichungen . . . . .	51
6.2	Druckkorrekturgleichung . . . . .	53
6.3	Turbulenzgleichungen . . . . .	58
6.3.1	Turbulente kinetische Energie . . . . .	58
6.3.2	Dissipation der turbulenten kinetischen Energie . . . . .	59
6.3.3	Effektive dynamische Viskosität . . . . .	61
6.4	Enthalpiegleichung . . . . .	63
6.5	Dichte . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Validierung des numerischen Verfahrens</b>	<b>67</b>
7.1	Laminare Stufenströmung ( $Re = 389$ ) . . . . .	67
7.2	Laminare Hindernisströmung ( $Re = 145$ ) . . . . .	71
7.3	Laminare Zylinderumströmung ( $Re = 20$ ) . . . . .	75
7.4	Turbulente Stufenströmung ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	79
7.5	Transsonische Kanalströmung ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Behandlung praxisrelevanter Probleme</b>	<b>91</b>
8.1	Hochbelastetes Leitgitter einer Gasturbine . . . . .	91
8.1.1	Niedrige Anströmgeschwindigkeit ( $Re = 87\,000$ ) . . . . .	94
8.1.2	Hohe Anströmgeschwindigkeit ( $Re = 224\,000$ ) . . . . .	96
8.2	Filmgekühltes Laufgitter einer Gasturbine . . . . .	98
8.2.1	Niedrige Ausblaserate ( $M = 0.47$ ) . . . . .	102
8.2.2	Mittlere Ausblaserate ( $M = 0.76$ ) . . . . .	106
8.2.3	Hohe Ausblaserate ( $M = 1.14$ ) . . . . .	109
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>114</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>116</b>

# Abbildungen

5.1	Polygonale Bilanzelemente im unstrukturierten Gitter . . . . .	21
5.2	Schema zur Gittergenerierung für die Buchstabengruppe ‘ITS’ . . . . .	22
5.3	Gitterausschnitt und Geschwindigkeitsfeld um die Buchstabengruppe ‘ITS’	23
5.4	Räumliche Diskretisierung und Besetzung der Koeffizientenmatrix . . .	24
5.5	Upwind- und CD-Interpolation . . . . .	27
5.6	Upwind- und CD-Ansatz im CBC-Stabilitätsdiagramm . . . . .	29
5.7	DISC-, QUICK- und MLU-Ansatz im CBC-Stabilitätsdiagramm . . . . .	31
5.8	Testgitter und Randbedingungen . . . . .	32
5.9	Eintrittsbelegung und berechnete Austrittsprofile von $\phi^*$ . . . . .	33
5.10	Geometrische Verhältnisse an einer Kontrollfläche . . . . .	34
5.11	Datenstruktur am Beispiel des Feldknotentyps . . . . .	37
5.12	Einfügen neuer Gitterknoten . . . . .	46
5.13	Löschen vorhandener Gitterknoten . . . . .	47
5.14	$P(u, v)$ auf Basisgitter und entsprechend adaptiertes Netz . . . . .	48
5.15	Eintrittsbelegung und berechnete Austrittsprofile von $u^*$ bei Verfeinerung	49
5.16	Basisgitter und adaptiertes Netz mit reduzierter Knotenzahl . . . . .	49
5.17	Eintrittsbelegung und berechnete Austrittsprofile von $u^*$ bei Vergrößerung	50
6.1	Projizierte Fläche $A_{i,n}$ zwischen zwei Bilanzelementen . . . . .	55
7.1	Geometrie des Meßkanals mit rückspringender Stufe ( $Re = 389$ ) . . . . .	68
7.2	Verbessertes Basisgitter für rückspringende Stufe ( $Re = 389$ ) . . . . .	69
7.3	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 389$ ) . .	69
7.4	Modifiziertes Gitter für rückspringende Stufe ( $Re = 389$ ) . . . . .	70
7.5	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 389$ ) . . . . .	71
7.6	Geometrie des Meßkanals mit Hindernis ( $Re = 145$ ) . . . . .	72
7.7	Basisgitter für Kanal mit Hindernis ( $Re = 145$ ) . . . . .	73
7.8	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 145$ ) . .	73
7.9	Modifiziertes Gitter für Kanal mit Hindernis ( $Re = 145$ ) . . . . .	74
7.10	Berechnetes Druckfeld im Bereich der Versperrung ( $Re = 145$ ) . . . . .	74
7.11	Geometrie des Kanals mit Zylinder ( $Re = 20$ ) . . . . .	76
7.12	Basisgitter für Kanal mit Zylinder ( $Re = 20$ ) . . . . .	76
7.13	Modif. Netz und Geschwindigkeitsfeld im Zylindernachlauf ( $Re = 20$ ) .	77
7.14	Berechnetes Druckfeld im Bereich des Zylinders ( $Re = 20$ ) . . . . .	78

7.15	Geometrie des Meßkanals mit rückspringender Stufe ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	79
7.16	Basisgitter für rückspringende Stufe ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	80
7.17	Modifiziertes Gitter für rückspringende Stufe ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	80
7.18	Messung und Rechnung für $u$ auf dem Basisgitter ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	81
7.19	Messung und Rechnung für $k$ auf dem Basisgitter ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	82
7.20	Messung und Rechnung für $u$ auf dem modif. Netz ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	83
7.21	Messung und Rechnung für $k$ auf dem modif. Netz ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	84
7.22	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	85
7.23	Geometrie des Meßkanals mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	86
7.24	Basisgitter für Kanal mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	87
7.25	Modifiziertes Gitter für Kanal mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	87
7.26	Dichteverteilung aus Experiment und Simulation ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	88
7.27	Messung und Rechnung auf verschiedenen Gittern ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	89
7.28	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	90
8.1	Geometrie des hochbelasteten Leitgitters . . . . .	92
8.2	Gemessener Geschwindigkeitsverlauf an der hochbelasteten Schaufel . . . . .	92
8.3	Basisgitter für hochbelastete Schaufel . . . . .	93
8.4	Modifiziertes Gitter für hochbelastete Schaufel ( $Re = 87\,000$ ) . . . . .	95
8.5	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 87\,000$ ) . . . . .	95
8.6	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 87\,000$ ) . . . . .	96
8.7	Modifiziertes Gitter für hochbelastete Schaufel ( $Re = 224\,000$ ) . . . . .	97
8.8	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 224\,000$ ) . . . . .	97
8.9	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 224\,000$ ) . . . . .	98
8.10	Geometrie des filmgekühlten Turbinenlaufgitters . . . . .	99
8.11	Gemessene Geschwindigkeitsverläufe an der filmgekühlten Schaufel . . . . .	100
8.12	Basisgitter für filmgekühlte Schaufel . . . . .	101
8.13	Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 0.47$ ) . . . . .	103
8.14	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 0.47$ ) . . . . .	103
8.15	Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 0.47$ ) . . . . .	104
8.16	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 0.47$ ) . . . . .	105
8.17	Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 0.76$ ) . . . . .	107
8.18	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 0.76$ ) . . . . .	107
8.19	Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 0.76$ ) . . . . .	108
8.20	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 0.76$ ) . . . . .	109

---

8.21	Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 1.14$ ) . . . . .	110
8.22	Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 1.14$ ) . . . . .	111
8.23	Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 1.14$ ) . .	112
8.24	Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 1.14$ ) . .	113



# Tabellen

4.1	Konstanten des Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells . . . . .	20
5.1	Iterationsaufwand für verschiedene Testprobleme und Löser . . . . .	42
7.1	Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 389$ ) . . . . .	68
7.2	Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 145$ ) . . . . .	72
7.3	Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 20$ ) . . . . .	76
7.4	Resultate der Benchmark-Rechnungen ( $Re = 20$ ) . . . . .	78
7.5	Geschwindigkeits-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 39\,000$ ) . . . . .	79
7.6	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Ma = 1.27$ ) . . . . .	86
8.1	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 87\,000$ ) . . . . .	94
8.2	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 224\,000$ ) . . . . .	96
8.3	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 0.47$ ) . . . . .	102
8.4	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 0.76$ ) . . . . .	106
8.5	Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 1.14$ ) . . . . .	110

# Symbole

## Lateinische Zeichen:

Formelzeichen	Einheit	Physikalische Bedeutung / Erläuterung
$a_i, a_{i,j}, a_P$	div.	Koeffizienten der allg. Transportgleichung
$a$	$m^2/s$	Temperaturleitfähigkeit, $a = \lambda/(\rho \cdot c_P)$
$A$	$m^2$	Fläche
$\underline{A}$	div.	Koeffizientenmatrix eines lin. Gleichungssystems
$\vec{A}$	$m^2/s$	Vektorpotential
$b$	div.	rechte Seite der allg. Differenzgleichung
$\vec{b}$	div.	rechte Seite eines lin. Gleichungssystems
$c$	$m$	Sehnenlänge eines Profils
$c_D$	1	Widerstandsbeiwert
$c_L$	1	Auftriebsbeiwert
$c_P$	$J/(kgK)$	spezif. Wärme bei konstantem Druck
$c_\mu, c_1, c_2$	1	Konstanten des Turbulenzmodells
$C$	1	dimensionslose Kennzahlen
$C_i$	1	Flächenverhältnis
$D$	1	Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix
$D$	1	Parameter der Druckkorrekturgleichung
$D$	$m$	Durchmesser
$D_h$	$m$	hydraulischer Durchmesser, $D_h = (4A)/U$
$\vec{e}$	div.	Fehlervektor
$E$	1	Konstante im logarithmischen Wandgesetz
$f_{x_i}$	$m/s^2$	Beschleunigung durch Volumenkräfte
$F_D$	$N$	Widerstandskraft
$F_L$	$N$	Auftriebskraft
$h$	$J/kg$	statische Enthalpie
$h, H$	$m$	Kanalhöhe
$H_{tot}$	$J/s$	Totalenthalpiestrom
$k$	$m^2/s^2$	turbulente kinetische Energie
$K$	1	von Kármán-Konstante
$K$	div.	Normierungsgröße
$l$	div.	Element einer unteren Dreiecksmatrix
$l_{char}$	$m$	charakt. Länge im Strömungsfeld
$l_k$	$m$	Kolmogoroff-Länge
$l_\epsilon$	$m$	charakt. Länge der energietragenden Wirbel
$L$	div.	untere Dreiecksmatrix
$L_a$	$m$	Ablöselänge
$m$	$kg/s$	Massenstrom
$M$	div.	Approximation einer Koeffizientenmatrix
$M$	1	Kühlluftausblaserate, $M = (\rho_c  \vec{w}_c )/(\rho_\infty  \vec{w}_\infty )$

$Ma$	1	Machzahl
$n$	$m$	Länge in Normalenrichtung
$\vec{n}$	1	Einheitsvektor in Normalenrichtung
$p$	$Pa$	statischer Druck
$p_{tot}$	$Pa$	Totaldruck
$P$	$m^2/s^3$	Produktionsterm im Turbulenzmodell
$P$	1	dimensionsloser Gradient
$P$	1	Funktion bei Berechnung des Wandwärmestroms
$Pr$	1	Prandtl-Zahl, $Pr = \nu/a$
$q_h$	$J/(m^3s)$	Energiequellterm
$\vec{r}$	div.	Residuenvektor
$R$	$J/(kgK)$	spezielle Gaskonstante
$Re$	1	Reynoldszahl, $Re = (u_\infty \cdot l_{char})/\nu$
$Res$	1	normiertes Residuum
$s$	$m$	Stufenhöhe
$s$	$m$	Lauflänge
$s_{i,j}$	div.	Term bei der LU-Zerlegung
$s_\phi$	div.	volumenbez. Quellterm der allg. Transportgleichung
$S_\phi$	div.	Quellterm der allg. Transportgleichung
$S_C, S_{HOS}, S_P$	div.	Quellterme der allg. Differenzgleichung
$t$	$m$	Teilung eines Schaufelgitters
$t$	$s$	Zeit
$t_{CPU}$	$s$	Prozessorzeit
$\vec{t}$	1	Einheitsvektor in Tangentenrichtung
$T$	$K$	Temperatur
$Tu$	1	Turbulenzgrad
$u$	$m/s$	$x$ -Komponente des Geschwindigkeitsvektors
$u$	div.	Element einer oberen Dreiecksmatrix
$U$	div.	Obere Dreiecksmatrix
$U$	$m$	Umfang
$v$	$m/s$	$y$ -Komponente des Geschwindigkeitsvektors
$V$	$m^3$	Volumen
$w$	$m/s$	Geschwindigkeit
$\vec{w}$	$m/s$	Geschwindigkeitsvektor
$x$	$m$	Länge in $x$ -Richtung des kart. Koordinatensystems
$\vec{x}_j$	1	Einheitsvektor in $x_j$ -Richtung
$y$	$m$	Länge in $y$ -Richtung des kart. Koordinatensystems
$y_P$	$m$	Wandabstand des wandnächsten Gitterknotens
$y^+$	1	dimensionsloser Wandabstand

**Griechische Zeichen:**

Formelzeichen	Einheit	Physikalische Bedeutung / Erläuterung
$\alpha$	1	Relaxationsfaktor
$\alpha$	$^\circ$	Winkel
$\alpha, \beta$	1	Gewichtungsfaktoren
$\gamma$	$Pa \cdot s$	Austauschkoeffizient der Diffusion
$\partial$	1	partielle Ableitung
$\delta_{ij}$	1	Kroneckersymbol
$\Delta$	$m$	Abstand
$\Delta p$	$Pa$	Druckdifferenz
$\epsilon$	$m^2/s^3$	Dissipationsrate der Turbulenzenergie
$\kappa$	1	Isentropenexponent
$\lambda$	$W/(mK)$	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	$Pa \cdot s$	effektive Viskosität
$\mu_l$	$Pa \cdot s$	dynamische Viskosität
$\mu_t$	$Pa \cdot s$	Wirbelviskosität
$\nu$	$m^2/s$	kinematische Viskosität
$\rho$	$kg/m^3$	Dichte
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	1	Konstanten des Turbulenzmodells
$\tau_{ij}$	$N/m^2$	Stokessche Spannung
$\varphi$	$^\circ$	Winkel
$\phi$	div.	Transportgröße
$\vec{\phi}$	div.	Lösungsvektor eines lin. Gleichungssystems
$\Psi$	$m^2/s$	Stromfunktion
$\omega$	$1/s$	Wirbelstärke

**Indizes:**

Formelzeichen	Physikalische Bedeutung / Erläuterung
-1	inverses Element
0	Ausgangselement
<i>aus</i>	am Austritt
<i>c</i>	Kühlluft
<i>CD</i>	Central Difference
<i>diff</i>	diffusiv
<i>DISC</i>	Derivative based Interpolation Scheme for Convection
<i>down</i>	stromab
<i>ein</i>	am Eintritt
<i>HOS</i>	High Order Scheme
<i>i, j</i>	Laufvariablen über Elemente und Koordinatenrichtungen
<i>I</i>	Nachbarelement
<i>konv</i>	konvektiv
<i>l</i>	laminar
<i>m, n</i>	max. Anzahl von Elementen
<i>MLU</i>	Monotonized Linear Upwind
<i>n</i>	in Normalenrichtung
<i>P</i>	Zentralelement
<i>QUICK</i>	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
<i>ref</i>	Referenzgröße
<i>t</i>	turbulent
<i>t</i>	in Tangentenrichtung
<i>up</i>	stromauf
<i>UPW</i>	upwind
<i>Wand</i>	an der Wand
<i>x, y</i>	in <i>x</i> - bzw. <i>y</i> -Richtung
1	Norm der Komponenten-Betragssumme
$\infty$	Maximumnorm
$\infty$	in der Anströmung

**Sonderzeichen:**

Formelzeichen	Physikalische Bedeutung / Erläuterung
'	turbulente Schwankung einer Größe
'	Korrekturwert
*	vorläufiger Wert
*	dimensionslose Größe
-	zeitlich gemittelte Größe
.	nach der Zeit abgeleitete Größe
$\rightarrow$	Vektor

# 1 Einleitung

Der hohe Lebensstandard in rohstoffarmen Industrieländern wie der Bundesrepublik Deutschland beruht zu einem wesentlichen Teil auf der Wertschöpfung bei Produktion und Handel hochwertiger Investitionsgüter. In der Palette weltweit vertriebener Produkte stellen der Maschinenbau und dort speziell die thermischen Strömungsmaschinen für Antrieb und Energieerzeugung ein wichtiges Segment.

Unter den Turbomaschinen steht in jüngster Zeit die Gasturbine zunehmend im Mittelpunkt des Interesses. Ihr Einsatz in neu konzipierten Gas- und Dampf-Kombikraftwerken rückt bei der Erzeugung elektrischer Energie mit konventioneller Prozeßführung unerreichte Wirkungsgrade von mehr als 60 % in den Bereich technischer Realität (Jeffs (1994), Becker et al. (1995)). Damit erschließt sich hinsichtlich Ressourcen- und Umweltschonung ein enormes Potential. Auch auf dem Gebiet der Luftfahrtantriebe, das die Gasturbine von den größten Einheiten bis zur Klasse der Regional- und Geschäftsflugzeuge dominiert, ist ein eindeutiger Trend zu verbrauchs- und schadstoffarmen Typen bei gleichzeitiger Steigerung der Schubleistung je Triebwerk zu beobachten.

Auf dem internationalen Markt steht die einheimische Industrie in Konkurrenz mit Anbietern aus aller Welt. Die entscheidenden Argumente im Wettbewerb um Marktanteile sind dabei Verkaufspreis und technischer Vorsprung gegenüber den Mitbewerbern. Der Erfolg am Markt kann demnach sowohl durch Reduzierung der Produktions- und Entwicklungskosten als auch durch eine Verkürzung der Entwicklungszeiten gesteigert werden. Gute Chancen, diesen Ansatz zu realisieren, bieten sich in der Komponentenentwicklung durch einen verstärkten Einsatz moderner numerischer Werkzeuge im Konzeptions- und Optimierungsprozeß (Kokoschinski (1995), Deitz (1996)).

Die Entwurfsphase für strömungsbeaufschlagte Komponenten neuer stationärer Gasturbinen und Flugtriebwerke läuft üblicherweise in zahlreichen, iterativ wiederholten Schritten ab. Gestützt auf Erfahrungen mit Vorgängermodellen, die in Datenbanken gesammelt sind, und die Ergebnisse aus Rechnungen mit einfachen numerischen Verfahren wird ein Vorentwurf erstellt. Das Betriebsverhalten der neu konzipierten Bauteile muß dann an instrumentierten Modellen im Strömungskanal überprüft werden. Die Ergebnisse aus diesen Messungen liefern Anhaltspunkte für die nachfolgende Optimierung mittels hochgenauer numerischer Berechnungsmethoden. Versuchs- und Optimierungsschritte wechseln einander ab, bis eine verbesserte Version der Komponente alle Zielvorgaben sicher erfüllt.

Im beschriebenen, mehrfach durchlaufenen Zyklus stellen die Modellversuche den zeit- und kostenintensivsten Anteil. Um die Anzahl der erforderlichen Iterationen und damit den finanziellen Aufwand zu senken, muß es gelingen, den pro Zyklus erzielten Fortschritt zu erhöhen. Diese Forderung richtet sich im wesentlichen an die numerischen Auslegungsverfahren. Sie sollten Wechselwirkungen zwischen Bauteil und Strömungsfeld auch nach Variation grundlegender Parameter zuverlässig vorherbestimmen und so aufwendige Experimente ersetzen.

Numerische Werkzeuge zur aerothermischen Auslegung von Gasturbinenkomponenten werden am Institut für Thermische Strömungsmaschinen (ITS) der Universität Karlsruhe seit mehr als 15 Jahren entwickelt und mit Erfolg eingesetzt. Dabei wurden

hinsichtlich der Beschreibung realer Phänomene, der Diskretisierungsgenauigkeit und der Effizienz der Lösungsverfahren international beachtete Erfolge erzielt (Scheurlen et al. (1990), Noll und Wittig (1991), Noll (1992), Benz und Wittig (1992), Wittig et al. (1993), Kurreck und Wittig (1994), Giebert et al. (1995)). Triebfeder dieser Entwicklungsarbeiten sind nicht zuletzt die wechselseitigen Impulse aus der Forschung auf experimentellem, theoretischem und numerischem Gebiet.

Am ITS konzipierte Verfahren zur numerischen Strömungsberechnung arbeiten nach der Methode der Finiten-Volumen auf blockstrukturierten kartesischen und konturangepaßten Rechengittern. Die Untersuchung konkreter Probleme anhand dieser Werkzeuge gliedert sich in drei Phasen. Zunächst wird im Rahmen des sogenannten Preprozessing ein Rechennetz für die betrachtete Strömungskonfiguration generiert. Nach der räumlichen Diskretisierung liefert der eigentliche Berechnungsschritt, der diskretisierte Gleichungen zur Beschreibung der Vorgänge im Fluid nutzt, die Werte der gesuchten Strömungsgrößen an allen Stützstellen im Gitter. Diese Lösung wird im abschließenden Postprozessing ausgewertet.

Bereits im ebenen Fall erfordert das Erstellen optimal problemangepaßter strukturierter Gitter aus vierkantigen Elementen in erheblichem Maß Zeit und Erfahrung. Schwierigkeiten bereitet vor allem die Tatsache, daß derartige Netze durch Entzerren in einfache Rechtecke mit ebensolchen Grundelementen überführbar sein müssen. Unstrukturierte Gitter geben diese strenge Topologie auf und erlauben damit eine deutlich flexiblere räumliche Diskretisierung. In konsequenter Weiterentwicklung vorhandener Ansätze wird in dieser Arbeit das Potential unstrukturierter Gitter aus Dreieckselementen grundlegend untersucht. Schwerpunkte sind dabei im folgenden die auf unstrukturierten Netzen besonders kritischen Fragen der Diskretisierungsgenauigkeit, der Rechenzeit, der numerischen Stabilität und der gezielten Gitteradaption sowie die kritische Validierung und praktische Erprobung der hier entwickelten neuen Berechnungsmethode.

## 2 Anforderungen und Zielsetzung

Entwurf und Realisierung eines neuen Verfahrens zur numerischen Berechnung von Strömungen sollten sich sinnvollerweise an klaren Entwicklungszielen orientieren. Um diese Zielvorgaben festzulegen, müssen zunächst die wesentlichen Anforderungen an die Methode definiert und möglicherweise vorhandene Restriktionen erkannt werden. Eine wichtige Rolle beim Erstellen des Forderungskataloges spielt das für den fertigen Strömungslöser vorgesehene Anwendungsgebiet. Das hier zu entwickelnde Lösungsverfahren soll es erlauben Strömungskonfigurationen, wie sie typischerweise in Turbomaschinen auftreten, numerisch zu berechnen und gleichzeitig deutliche Vorteile gegenüber bereits vorhandenen Methoden aufweisen.

### 2.1 Geometrische Flexibilität

Grundlage jeder numerischen Berechnung komplexer Strömungen ist die Diskretisierung des interessierenden Strömungsgebietes mit einem Rechengitter. Für strömungsmaschinentypische Konfigurationen, beispielsweise filmgekühlte Brennkammern und Turbinenschaufeln, ist das Generieren geeigneter Netze aus vierkantigen bzw. sechsfächigen Grundelementen, wie sie heute noch überwiegend verwendet werden, eine anspruchsvolle und zeitaufwendige Aufgabe. Als Alternative im zweidimensionalen Fall, der als Ausgangspunkt der Programmentwicklung nachfolgend betrachtet wird, bieten sich Dreieckselemente an. Da Flächen beliebiger Form trianguliert werden können, besteht die Möglichkeit, den Prozeß der Gittererzeugung weitestgehend zu automatisieren.

### 2.2 Hohe Genauigkeit

Entscheidend für den Gebrauchswert numerischer Simulationsverfahren ist die Verlässlichkeit ihrer Vorhersagen, d.h. die erzielte Rechengenauigkeit. Einen nicht unbedeutenden Einfluß hat hier bereits die Form der Rechenelemente im Gitter. Vierecke sind in diesem Punkt den Dreieckselementen eindeutig überlegen. Sie lassen sich angepaßt an lokale Strömungsverhältnisse, etwa in Wandgrenzschichten, oftmals so orientieren, daß ihre Kanten paarweise nahezu senkrecht bzw. parallel angeströmt werden. Auf diese Weise kann eine 'Streuung' der einfließenden Information, wie sie bei Dreiecken zwangsläufig auftritt, weitgehend vermieden werden. Des weiteren tauschen dreieckige Elemente nur mit drei Nachbarelementen auf direktem Wege Informationen aus. Daraus resultiert eine vergleichsweise schwache räumliche Koppelung im Rechnernetz.

Dem Koppelungsproblem läßt sich begegnen, indem man vielkantige Rechenelemente auf einem dualen Gitter formuliert, das sich in eindeutiger Weise aus der Triangulation des Strömungsgebietes ergibt (Okabe (1992)). Aber auch die neuen Elemente können nur in Sonderfällen strömungsgerecht angeordnet werden. Daher besteht immer noch das Risiko, daß infolge der beschriebenen Informationsstreuung und -aufweitung die Genauigkeit berechneter Lösungen leidet. Um diese Gefahr zu bannen, müssen besondere Interpolationstechniken entwickelt werden, die eine hochgenaue Rekonstruktion des Informationsflusses zwischen Rechenelementen, unabhängig von deren Form, erlauben.



### 2.3 Akzeptable Rechenzeit

Ein weiterer wichtiger Punkt beim Einsatz numerischer Methoden in der Praxis sind die benötigten Rechenzeiten. Hier sollte aus praktischen Überlegungen die Lösung ebener Strömungsprobleme mit bis zu 10 000 Rechenelementen auf einem durchschnittlich schnellen Arbeitsplatzrechner nicht wesentlich mehr als eine Stunde Prozessorzeit beanspruchen. Andernfalls werden bei deutlicher Überschreitung dieser Zeitspanne Arbeitsablauf und Systemnutzung weitgehend vom Rechenaufwand diktiert.

Grundvoraussetzung für eine schnelle numerische Berechnung von Strömungen sind leistungsfähige Algorithmen und deren Umsetzung in ein effizientes Programm. Auf rechenzeitintensive Verzweigungen nach gestaffelten logischen Abfragen sowie mehrfach geschachtelte Schleifen, wie sie in Such- und Sortiermodulen auftreten, sollte dabei möglichst verzichtet werden. Auf der Grundlage der räumlichen Diskretisierung und ihrer Erfordernisse ist deshalb eine angepaßte Datenstruktur zu entwickeln, die mit einem Minimum an zeitaufwendigen Operationen auskommt.

Bei der numerischen Behandlung von Strömungsproblemen müssen für die Mehrzahl der interessierenden Strömungsgrößen immer wieder große lineare Gleichungssysteme (LGS) mit hoher Genauigkeit gelöst werden. Die dazu eingesetzten Verfahren beanspruchen einen Großteil des insgesamt erforderlichen Zeit- und Speicheraufwandes. Mit einfachen aber wenig robusten Lösungsalgorithmen können bestimmte Probleme oft erst nach langwieriger Variation von Steuerparametern in mehreren Versuchen bewältigt werden. Die Anzahl der während eines vollständigen Rechenganges notwendigen Durchläufe aller LGS ist ebenfalls vom gewählten Löser abhängig. Die zur Zeit leistungsfähigsten Lösungsverfahren arbeiten implizit und iterativ. Je nach Charakter des gestellten Problems treten jedoch auch hier beträchtliche Effizienzschwankungen auf. Aus diesem Grund ist zur Auswahl einer optimalen Löserstrategie ein Leistungsvergleich aktueller Algorithmen anhand repräsentativer Testsysteme angebracht.

Ein großes Potential bezüglich der Einsparung von Rechenzeit erschließen Techniken, die Stabilität und Robustheit einer numerischen Methode insgesamt erhöhen und so den reibungslosen Ablauf der Berechnung auch für kritische Strömungsprobleme sicherstellen. In der Familie von Lösungsalgorithmen, zu denen das hier vorgestellte numerische Verfahren gehört, treten insbesondere bei der Druck- und Turbulenzberechnung immer wieder Schwierigkeiten auf. Es ist also dringend notwendig, die Ursache dieser Unregelmäßigkeiten aufzudecken und zu beseitigen.

### 2.4 Gezielte Gitteranpassung

Ein vielfach verkanntes Problem bei der Bewertung numerisch ermittelter Lösungen von Strömungsproblemen ist der Einfluß der gewählten räumlichen Diskretisierung. Im einfachsten Fall treten beispielsweise Wirbel, die bei der Gittergenerierung nicht berücksichtigt wurden, in deutlich zu grob diskretisierten Netzbereichen auf oder werden, obwohl in der Realität vorhanden, völlig unterdrückt. In derartigen Situationen ist eine nachträgliche Anpassung des Rechengitters geboten, die jedoch aus Zeitgründen keine vollständige Neuberechnung des Strömungsfeldes erfordern darf. Für eine au-

tomatische Netzsadaption müssen Kriterien zur Verfügung gestellt werden, die ein sicheres Erkennen kritischer Strömungsbereiche erlauben. Der zusätzliche Nutzen einer nachträglichen Gitterverfeinerung liegt darin, daß die Gitterunabhängigkeit erhaltener Lösungen anhand mehrfacher Optimierung der räumlichen Diskretisierung sehr einfach zu überprüfen ist.

## 2.5 Kritische Validierung

Vor dem praktischen Einsatz eines neu entwickelten numerischen Verfahrens müssen unbeabsichtigt eingeschleuste Fehler beseitigt und Betriebserfahrung gewonnen werden. Dazu eignen sich hinreichend komplexe Strömungen in geometrisch einfachen Konfigurationen. Bei der Auswahl entsprechender Testfälle und der Reihenfolge ihrer Bearbeitung sollte eine weitgehende Separierung möglicher Fehlerquellen angestrebt werden. Nach erfolgter Validierung ist das Einhalten der anfangs gesetzten Entwicklungsziele an praxistypischen Problemen kritisch zu überprüfen.

## 3 Numerische Verfahren zur Strömungsberechnung

Numerische Methoden zur Simulation komplexer Strömungsvorgänge werden heute an Universitäten und Forschungseinrichtungen, in der Industrie und nicht zuletzt von kommerziellen Anbietern entwickelt und eingesetzt. Entsprechend den unterschiedlichen Problemstellungen und Entwicklungszielen der einzelnen Anwender gibt es mittlerweile eine schwer überschaubare Anzahl verschiedener numerischer Berechnungsverfahren (Ferziger und Perić (1996)). Um trotz dieser Vielfalt eine gewisse Übersicht zu bewahren, ist es hilfreich die vorhandenen Methoden nach bestimmten Kriterien zu ordnen.

### 3.1 Kriterien zur Einordnung numerischer Verfahren

Ein wichtiger Ordnungspunkt zur Systematisierung numerischer Verfahren ist das physikalische Modell, das zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes herangezogen wird. Um Strömungsprobleme aus der Praxis zu behandeln, sind sowohl Euler- als auch Navier-Stokes-Verfahren im Einsatz. Die reibungsfreie Euler-Formulierung wird beispielsweise im Bereich der Tragflügelaerodynamik häufig angewandt, da der Einfluß der Viskosität hier oftmals vernachlässigt werden kann, ohne daß sich signifikante Auswirkungen auf die Genauigkeit der numerischen Lösung ergeben (Jameson und Mavriplis (1985), Hammond und Barth (1992), Hwang und Yang (1993)). Für niedrige und mittlere Strömungsgeschwindigkeiten bzw. Machzahlen, insbesondere bei Durchströmungsproblemen, müssen Reibungsterme in der Regel berücksichtigt werden. Hier sind also die Navier-Stokes-Gleichungen zu lösen. Aufgrund ihres eingeschränkten Gültigkeitsbereiches werden Euler-Verfahren mit steigender Rechnerleistung zunehmend durch Navier-Stokes-Simulationen ersetzt.

Die für eine Beschreibung der Strömungsvorgänge gewählten physikalischen Modelle führen auf gekoppelte, nichtlineare, partielle Differentialgleichungssysteme, so daß nach heutigem Kenntnisstand im allgemeinen keine geschlossenen analytischen Lösungen angegeben werden können. Das interessierende Strömungsgebiet wird deshalb diskretisiert, d.h. mit einem Rechenetz oder -gitter überzogen. Die Schnittpunkte der Gitterlinien dienen dann als Rechenknoten und sind Stützstellen einer numerischen Lösung der Gleichungen. Für diese räumliche Diskretisierung werden sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Netze verwendet.

Wesentliches Merkmal strukturierter Gitter ist eine strenge Ordnung der Rechenknoten bzw. der sie umgebenden Gitterelemente. Mit Ausnahme von Sonderfällen, wie etwa dem Einsatz von Mehrgebietstechniken, besitzt hier ein Gitterknoten im zweidimensionalen Netz genau vier, im räumlichen Fall sechs Nachbarknoten. Die zugehörigen Gitterelemente sind Vierecke bzw. Sechseck. Damit liegt eine immer gleiche, sehr übersichtliche Netztopologie vor. Sie erlaubt eine effiziente Organisation aller Rechendaten bei vergleichsweise unkomplizierter Datenstruktur. Zum Beispiel können Adressen von Nachbarknoten rechnerisch schnell ermittelt werden, so daß ein Speichern der jeweils vier bzw. sechs Nachbarknotenindizes nicht erforderlich ist. Diese Vorteile werden

mit eingeschränkter räumlicher Flexibilität erkaufte. Für Strömungsgebiete mit komplizierter geometrischer Form lassen sich nur unter hohem Aufwand geeignete strukturierte Netze generieren.

Unstrukturierte Gitter nutzen den Umstand, daß beliebig geformte Strömungsgebiete im zweidimensionalen Fall aus Dreiecken, bei räumlichen Problemen aus Tetraedern aufgebaut werden können. Die Anzahl der Nachbarknoten ist hier nicht mehr festgelegt, im Mittel sind jedoch sechs bzw. zwölf Nachbarn vorhanden. Die genannten Zahlenwerte lassen sich leicht aus den Verhältnissen bei räumlich dichtester Kugelpackung von Metallatomen ableiten (Domke (1993)). Aufgrund der im Unterschied zu strukturierten Netzen nunmehr lockeren bzw. unstrukturierten Anordnung der Stützstellen ist eine einfache Berechnung der Indizes benachbarter Knoten nicht mehr möglich. Um unter diesen Bedingungen die Rechenarbeiten effizient zu verwalten, muß im allgemeinen eine vergleichsweise komplizierte Datenstruktur mit indirekter Adressierung der Gitterelemente eingeführt werden. Demgegenüber erlaubt die hohe Flexibilität der Netze, auch geometrisch komplexe Formen problemlos zu diskretisieren.

Um Differentialgleichungen auf einem Rechnernetz in algebraische Gleichungen zu überführen, sind verschiedene Diskretisierungstechniken in Gebrauch. Anhand der jeweils verwendeten Diskretisierung unterscheidet man numerische Methoden, die auf der Basis von Finiten-Elementen (FE), Finiten-Differenzen (FD), Finiten-Volumen (FV) und von Spektralverfahren arbeiten.

Bei der FE-Methode sind einzelne Gruppen von Gitterknoten zu Elementen zusammengefaßt, auf denen für die gesuchten Lösungsvariablen ein funktionaler Zusammenhang vorgegeben wird. Mit Hilfe dieser Ansatzfunktionen werden Knotenwerte berechnet, die alle zugrundeliegenden Differentialgleichungen erfüllen. Rechenzeit, Speicherbedarf und Genauigkeit einer numerischen Lösung sind in hohem Maß von den gewählten Ansatzfunktionen bestimmt (Chung (1983)).

Wie die FE-Verfahren können Spektralverfahren als ein Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen betrachtet werden. Als Ansatzfunktionen werden beliebig oft differenzierbare Funktionen verwendet, die im gesamten Rechengebiet gelten. Die Rechengenauigkeit der Spektralverfahren übertrifft bei vergleichbarer räumlicher Diskretisierung die mit FE-, FD- und FV-Methoden erzielten Werte typischerweise um mehrere Größenordnungen. Dabei spielt jedoch eine korrekte Formulierung der Randbedingungen eine tragende Rolle. Da die mathematisch konsistente Behandlung der Gebietsränder nicht in beliebigen Fällen möglich ist, sind Spektralverfahren für Strömungsprobleme nur beschränkt einsetzbar (Canuto et al. (1988)).

Für eine Diskretisierung nach der FD-Methode werden die partiellen Ableitungen in den Termen der betrachteten Differentialgleichungen durch Taylor-Reihen approximiert. Mit der Ordnung der Glieder, die bei der Reihenentwicklung berücksichtigt werden, nimmt die Genauigkeit der numerischen Rechnung zu. Gleichzeitig steigt die Anzahl der Knotenwerte, die zur Darstellung der einzelnen Terme benötigt werden, so daß sich auch der numerische Aufwand erhöht (Smith (1985)).

Beim FV-Verfahren wird jedem Knoten des Rechnernetzes ein Bilanzelement zugeordnet. In diesen Kontrollvolumina werden die zu lösenden Differentialgleichungen unter Anwendung des Gaußschen Satzes integriert und mit Hilfe der benachbarten Knoten-

werte diskretisiert. Es ergeben sich einfach und übersichtlich aufgebaute algebraische Gleichungen, die zudem konservativ sind, d.h. deren Lösung die Bilanzen der berechneten Transportvariablen im gesamten Rechengebiet erfüllt. Die Diskretisierungsgenauigkeit der FV-Methode läßt sich mit verhältnismäßig einfachen Mitteln deutlich steigern. Dazu werden zum Beispiel die konvektiven Flüsse zwischen den Bilanzelementen mit möglichst exakten Ansätzen interpoliert (Noll (1992)).

Bei der numerischen Berechnung der Geschwindigkeiten in einer Strömung treten, neben den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, unter anderem der Druck sowie bei kompressiblen Fluiden zusätzlich die Dichte als gesuchte Größen auf. Zur Berechnung dieser Variablen stehen Kontinuitäts- und Impulsgleichung zur Verfügung. Für kompressible Medien sind Druck und Dichte über ein Stoffgesetz, beispielsweise die Zustandsgleichung idealer Gase, miteinander verknüpft. Damit bietet sich die Möglichkeit, für einen dieser beiden Skalare eine Transportgleichung zu lösen, um die noch fehlende zweite Unbekannte dann auf einfache Weise mit Hilfe des Stoffgesetzes zu bestimmen. Abhängig von der zuerst berechneten Größe wird zwischen druck- und dichtebasierten Verfahren unterschieden.

Bei kompressibler Strömung werden vorwiegend dichtebasierte Algorithmen verwendet, da hier mit der Kontinuitätsbeziehung bereits die geeignete Basis für eine Transportgleichung vorhanden ist. Um Medien konstanter Dichte zu behandeln, wird eine Koppelung zwischen Kontinuitätsgleichung und Druckfeld hergeleitet. Hier ist es möglich, entweder die Massenerhaltung selbst in geringfügig modifizierter Form zu nutzen oder eine spezielle Druckgleichung einzusetzen (Breuer (1994)). Für inkompressible Strömungsprobleme kommen druck- und dichtebasierte Verfahren in etwa gleichem Umfang zur Anwendung. Mit besonderen druckbasierten Verfahren besteht die Möglichkeit, sowohl inkompressible als auch kompressible Strömungen sehr effizient zu bearbeiten.

Ein weiteres wichtiges Kriterium bei der Klassifizierung numerischer Verfahren zur Strömungsberechnung ist das Vorgehen bei der Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen. Dabei können die Gleichungen mehrerer zu berechnender Transportgrößen jeweils linearisiert und dann zu einem einzigen großen Gleichungssystem geordnet werden. Diese Variante wird als blockimplizites Verfahren bezeichnet, da sich bei der Lösung des Systems Änderungen einer Variablen sofort auf alle übrigen Strömungsgrößen auswirken. Blockimplizite Prozeduren benötigen, sofern ein ausreichend robuster Gleichungslöser zur Verfügung steht, relativ wenige iterative Rechenschritte bis zur Lösung eines Problems, die verwendeten Algorithmen sind jedoch äußerst zeit- und speicherintensiv (Kurreck und Wittig (1994)).

Als Alternative zur blockimpliziten Lösungsstrategie bietet sich das blockiterative Vorgehen an. Dabei werden in einer äußeren Schleife nacheinander die linearisierten Gleichungssysteme für jeweils eine Transportvariable gelöst. Da Koppelungen zwischen den Gleichungsblöcken dabei zunächst vernachlässigt werden, sind bis zum Erreichen einer Lösung im allgemeinen deutlich mehr Iterationsschritte erforderlich, als bei der blockimpliziten Variante. Die auftretenden kompakten linearen Gleichungssysteme (LGS) erfordern andererseits sehr viel weniger Speicherplatz und stellen niedrigere Anforderungen an die verwendeten Lösungsverfahren. Damit ergibt sich bei annähernd gleicher Rechenzeit für die blockiterative Methode der Vorteil geringerer Komplexität.

Wie bereits die Koppelungen der verschiedenen Gleichungsblöcke, können beim Lösen

der LGS die Koppelungen zwischen den Gleichungen für die einzelnen Bilanzelementen implizit oder explizit behandelt werden. Explizite Lösungsverfahren berechnen neue Werte der gesuchten Transportvariablen am Gitterknoten, indem jeweils die Werte an allen benachbarten Knoten als konstant angenommen werden. Auf diese Weise bleibt zwar der numerische Aufwand aber auch der Lösungsfortschritt bei einem einzelnen Durchgang durch das Rechengebiet gering.

Implizite Lösungsverfahren berücksichtigen stets alle Koppelungen zwischen den Gleichungen und gelangen so sehr schnell zu einer entsprechenden Lösung des Systems. Der Preis dafür ist ein deutlich komplizierterer Rechengang, der jedoch in Anbetracht der möglichen Zeitersparnis in Kauf genommen werden sollte.

Das neu entwickelte, in dieser Arbeit vorgestellte numerische Berechnungsverfahren verwendet zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes ebener Strömungen die Navier-Stokes-Gleichungen. Um komplexe Geometrien, wie sie bei der Untersuchung der Strömungsverhältnisse an Komponenten thermischer Strömungsmaschinen in der Regel vorliegen, problemlos zu bewältigen, erfolgt die räumliche Diskretisierung auf der Basis unstrukturierter Gitter aus Dreieckselementen. Zur Diskretisierung der Transportgleichungen wird die Methode der Finiten-Volumen angewendet. Sie erlaubt es, ausgehend von physikalischen Modellen auf sehr direktem und anschaulichem Weg Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Größen herzuleiten. Die angestrebte hohe Rechengenauigkeit, deren Realisierung mit unstrukturierten Netzen häufig scheitert, wird dabei durch Kombination einer Vielzahl überwiegend neuer Techniken erreicht. Zu nennen sind hier insbesondere eine spezielle Formulierung der Kontrollvolumina, ein eigens konzipierter Ansatz für die Beschreibung des konvektiven Transportes sowie fehlersensitive Kriterien zur Optimierung der Rechengitter.

Komponenten in thermischen Strömungsmaschinen sind Strömungsbedingungen in einem weiten Geschwindigkeitsbereich ausgesetzt. Für die Koppelung zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeld kommt daher ein druckbasierter Korrekturalgorithmus zum Einsatz. Auf einer inkompressiblen Formulierung basierend ist er dank spezieller Erweiterungen bis hinein in den transsonischen Bereich sicher anzuwenden. Eine erstmals angewandte, von der Entwicklung der numerischen Lösung bestimmte Relaxationsstrategie für das Druckfeld sichert robuste und schnelle Konvergenz.

Die Berechnung aller gesuchten Transportgrößen erfolgt blockiterativ. Auf diese Weise können sowohl der benötigte Arbeitsspeicher als auch die Anforderungen an den verwendeten Gleichungslöser begrenzt werden. Ferner ist es möglich, den Rechengang beim Bearbeiten der einzelnen Gleichungen weitgehend zu standardisieren. Dadurch läßt sich der Algorithmus sehr leicht um zusätzliche Transportgleichungen erweitern. Die resultierenden LGS werden implizit gelöst. Dabei kommt ein moderner iterativer Algorithmus zum Einsatz, der dank einer angepaßten Präkonditionierung hohe Konvergenzraten erzielt und die auf unstrukturierten Gittern wichtigen Stabilitätsreserven bietet. Schwierigkeiten die trotz dieser Maßnahmen bei der Behandlung des Turbulenzmodells vereinzelt auftraten, konnten nach eingehender Analyse der Ursachen mit einer ebenso einfachen wie eleganten Methode überwunden werden.

### 3.2 Druckkorrektur bei Finite-Volumen-Verfahren auf strukturierten Gittern

Ein spezielles Druckkorrekturverfahren, die sogenannte ‘Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations’ (SIMPLE), wurde zur Berechnung von Transportvorgängen in parabolischen und elliptischen Strömungen entwickelt (Caretto et al. (1972), Patankar und Spalding (1972)). Für die Simulation zweidimensionaler, elliptischer Strömungsprobleme stellt Patankar (1980) ein numerisches Verfahren vor, bei dem die Navier-Stokes-Gleichungen in Verbindung mit einer speziellen Druckkorrekturgleichung gemäß dem SIMPLE-Algorithmus blockiterativ gelöst werden. Die räumliche Diskretisierung erfolgt auf strukturierten, kartesischen Rechennetzen nach der Methode der Finiten-Volumen. Um eine Entkoppelung der numerisch berechneten Strömungsgrößen zu unterbinden, werden Druck- und Geschwindigkeitsvariablen auf versetzten Gittern bearbeitet. Ein linienimpliziter Tridiagonalmatrix-Algorithmus (TDMA) löst dabei die auftretenden LGS.

Auf der Basis eines Lösungsansatzes für ebene, elliptische Strömungen (Pun und Spalding (1977)) erstellte Elbahar (1982) ein Berechnungsverfahren, das eine numerische Untersuchung dreidimensionaler, brennkammertypischer Mischungsvorgänge erlaubt. Zur Bestimmung von Druck und Geschwindigkeit wird der SIMPLE-Algorithmus verwendet. Die Diskretisierung der Transportgleichungen erfolgt wiederum auf versetzten kartesischen Gittern nach dem FV-Prinzip. Als Gleichungslöser dient ebenfalls der semiimplizite TDMA. Noll (1986 und 1987) erweitert diesen Ansatz auf mehrphasige, reagierende Strömungen, so daß Strömungsvorgänge in der Primärzone von Brennkammern analysiert werden können.

Im Rahmen dieser Untersuchung wurde deutlich, daß Effizienz und Genauigkeit eines numerischen Verfahrens ganz wesentlich von der Leistungsfähigkeit des eingesetzten Gleichungslösers und der sorgfältigen Diskretisierung der konvektiven Austausch-terme abhängig sind. Entscheidende Fortschritte konnten hier durch die Einführung des impliziten, iterativen Conjugate-Gradient-Lösers (ILU-CG) mit Präkonditionierung anhand unvollständiger Dreieckszerlegung (ILU) der Koeffizientenmatrix und der hochgenauen ‘Monotonized-Linear-Upwind’-Interpolation (MLU) erzielt werden (Noll (1991 und 1992)). Die Verwendung einer speziellen Geschwindigkeitsinterpolation (Rhie (1981), Hsu (1981), Rhie und Chow (1983)) erlaubt zudem den Verzicht auf die bis dahin zwingend notwendige versetzte Variablenanordnung. Die Druckberechnung erfolgt jetzt alternativ mit einer konsistenteren SIMPLE-Variante, dem SIMPLEC-Algorithmus (Van Doormaal und Raithby (1984)). Dadurch ergeben sich zum Teil erhebliche Vorteile im Bezug auf Konvergenz und Rechenzeit.

In einem weiteren Entwicklungsschritt haben Kurreck und Wittig (1994) das bestehende, als ‘Elliptic Package on Shear-Flows’ (EPOS) eingeführte Programmpaket, an moderne Rechnerarchitekturen angepaßt. Dabei wurden mit jeweils optimierten Programmversionen umfangreiche Studien an Vektor- und Parallelrechnern durchgeführt (Kurreck (1995)).

Für die räumliche Diskretisierung komplex geformter Strömungsgebiete, wie sie in thermischen Turbomaschinen in der Regel anzutreffen sind, eignen sich kartesische Gitter nur bedingt. Stets müssen hier schräge und gekrümmte Berandungen des Rechenbe-

reiches mit Hilfe von Stufen angenähert werden. Dabei sind sowohl aufwendig definierte, unstetige Gebietsgrenzen als auch ein erheblicher Speicherüberhang infolge ausgeblendeter Gitterelemente zu tolerieren. Um solchen Schwierigkeiten zu begegnen, hat Bauer (1989) auf Grundlage der Arbeiten von Elbahar (1982) und Noll (1986) ein FV-Verfahren erstellt, das ebene und rotationssymmetrische Strömungen auf strukturierten, konturangepaßten Netzen numerisch simuliert. Berechnungen für verschiedene Diffusor-, Brennkammer- und Schaufelkonfigurationen demonstrieren eindrucksvoll das Potential dieses Ansatzes.

Eine weitere Steigerung der räumlichen Flexibilität gelingt Benz und Wittig (1992) durch Erweiterung des Verfahrens auf allgemeine dreidimensionale Strömungen und Einführung der Mehrgebietstechnik. Ferner wird der Druckkorrekturalgorithmus modifiziert, so daß Kompressibilitätseinflüsse berücksichtigt und Berechnungen bis in den hohen Überschallbereich möglich sind (Benz (1994)). Ebenso werden der implizite ILU-CG-Löser und die MLU-Diskretisierung der konvektiven Terme implementiert.

Ein vergleichbares Verfahren stellen Demirdžić et al. (1993) für zweidimensionale Strömungen vor. Zur Interpolation des konvektiven Austausches wird hier eine Überlagerung aus 10% Upwind- und 90% Zentraldifferenzen-Anteil verwendet.

### 3.3 Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Gittern

Für Strömungsgebiete komplexer Gestalt ist die Erstellung geeigneter strukturierter Rechnetze, trotz krummliniger Koordinaten und Mehrgebietstechnik, verhältnismäßig mühsam und zeitintensiv. Da eine nachträgliche Gitterverfeinerung wegen ihres hohen zusätzlichen Aufwandes meist nicht vorgesehen ist, muß bereits bei der Erstellung der Gitter der Charakter der erwarteten Lösung berücksichtigt werden. Dieser ist jedoch, wie das gesamte Strömungsfeld, im allgemeinen a priori nicht bekannt. So wird häufig schon die Netzgenerierung selbst zum iterativen Prozeß. Das ist beispielsweise der Fall, wenn vom Benutzer unerwartet eine Strömungsablösung in einem Gitterbereich mit sehr grober räumlicher Diskretisierung auftritt.

Mit unstrukturierten Netzen gibt es derartige Schwierigkeiten nicht. Eine nachträgliche, an Besonderheiten der berechneten Lösung orientierte Modifikation der lokalen Netzdichte kann, aufgrund der bereits vorhandenen geeigneten Datenstruktur, in der Regel einfacher realisiert werden, als im strukturierten Fall. Um den Vorteil der räumlichen Flexibilität für die numerische Strömungssimulation auf der Basis von Finiten-Volumen zu nutzen, wurden zahlreiche unterschiedliche Verfahren vorgeschlagen.

Baliga und Patankar (1983) stellen eine sogenannte Kontrollvolumen-Finite-Element-Methode vor, mit der für ebene inkompressible Strömungen die Navier-Stokes-Gleichungen gemäß dem SIMPLER-Algorithmus (Patankar (1981)) blockiterativ gelöst werden. Nach dem Vorbild der FE-Netze sind die verwendeten Rechengitter aus Dreiecken aufgebaut. Diese Makroelemente bestehen ihrerseits aus vier dreieckigen Subelementen, mit deren Hilfe die eigentlichen polygonalen Kontrollvolumina formuliert werden. Spezielle Interpolationsfunktionen beschreiben den Verlauf der Lösung auf den Subelementen.

Ein Finite-Volumen-Verfahren von Jameson und Mavriplis (1985) simuliert ebene, kompressible Strömungen mit Hilfe der Euler-Gleichungen auf Netzen aus dreieckigen Bilan-



zelementen. Der Algorithmus arbeitet nach einem expliziten Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren. Da alle Strömungsgrößen mit Hilfe des Zentralfdifferenzen-Ansatzes interpoliert werden, muß künstliche Diffusion die numerische Stabilität des Algorithmus sichern. Zur Konvergenzbeschleunigung ist ein Mehrgitter-Schema (Multigrid) vorgesehen. In einer nachfolgenden Veröffentlichung (Jameson und Mavriplis (1987)) können die Transportvariablen sowohl auf den Dreiecken als auch auf polygonalen Elementen, die sich durch Zusammenfassen mehrerer Dreiecke ergeben, bilanziert werden.

Von Dawes (1991) stammt eine numerische Berechnungsmethode, die dreidimensionale, kompressible Strömungen auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichungen und eines  $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells auswertet. Die eingesetzten, adaptierbaren Rechenetze sind aus Tetraedern aufgebaut, die auch als Bilanzelemente dienen. Die Lösung der diskretisierten Gleichungen erfolgt in einem Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren. Um numerischer Instabilität vorzubeugen, wird künstlich Diffusion eingeführt. Als Kriterien für die automatische Gitteradaption dienen Absolutwerte der Gradienten von statischem Druck, Machzahl und Entropie.

Taniguchi et al. (1991) beschreiben ein SIMPLE-Druckkorrekturverfahren, in dem zweidimensionale, inkompressible Strömungen anhand der Navier-Stokes-Gleichungen und eines  $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells simuliert werden. Unstrukturierte Netzbereiche aus Dreieckselementen sind dabei in strukturierte Rechengitter eingebettet. Der Lösungsalgorithmus arbeitet blockiterativ, wobei die einzelnen Gleichungssysteme mit der punktitativen  $SOR$ -Methode berechnet werden. Eine weiterführende Arbeit (Taniguchi und Oshima(1995)) behandelt Implementierung und Einsatz des SMART-Algorithmus (Gaskell und Lau (1988)) zur stabilen und genauen Interpolation der konvektiven Terme.

Kallinderis und Baron (1992) verwenden zur Beschreibung ebener, kompressibler Strömungen abhängig vom Reibungseinfluß sowohl Navier-Stokes- als auch Euler-Gleichungen. Der Einfluß der Turbulenz wird durch einen algebraischen Ansatz berücksichtigt. Die eingesetzten adaptiven Rechenetze bestehen aus viereckigen Bilanzelementen. Als Lösungsalgorithmus wird ein Lax-Wendroff-Zeitschrittverfahren herangezogen (Kallinderis und Baron (1989)).

Ein von Hammond und Barth (1992) vorgeschlagenes Verfahren bewältigt ebene, kompressible Strömungsprobleme mit Hilfe der Euler-Gleichungen. Die Strömungsgrößen werden auf dualen, polygonalen Kontrollvolumina bilanziert, die sich auf eindeutige Weise aus einer Triangulation des Rechengebietes ergeben. Die Arbeit weist nach, daß derartige Bilanzelemente gegenüber den einfachen Dreiecken deutliche Vorteile bezüglich Diskretisierungsgenauigkeit und numerischem Aufwand bieten. Die Lösung der resultierenden Gleichungssysteme erfolgt mit unterschiedlichen Zeitschrittverfahren.

Hwang und Yang (1993) ziehen zur Strömungsberechnung bei kompressiblen, zweidimensionalen Problemen die Euler-Gleichungen heran. Die Bilanzierung der Transportvariablen findet dabei auf adaptiven Netzen aus drei- und viereckigen Kontrollelementen statt. Die Bearbeitung der Gleichungen erfolgt in einem Zeitschrittverfahren.

Eine Methode, die Gehle et al. (1993) zur Analyse kompressibler, zweidimensionaler Strömungsfälle entwickelt haben, basiert auf der Auswertung der Navier-Stokes-Gleichungen und der Triangulation des Rechengebietes. Die adaptiven Rechenetze sind aus dualen, polygonalen Elementen aufgebaut. Die Integration der Transportglei-

chungen wird in einem Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren vorgenommen. Das Verfahren ist durch künstliche Diffusion stabilisiert, ein Turbulenzmodell ist nicht vorgesehen.

Für die numerische Berechnung kompressibler, dreidimensionaler Strömungen verwenden Parthasarathy und Kallinderis (1994) die Euler-Gleichungen. Zur Bilanzierung wird das Lösungsgebiet mit Tetraedern diskretisiert, auf denen dann duale polyedrische Elemente als Kontrollvolumina formuliert sind. Die Berechnung der gesuchten Strömungsgrößen erfolgt in einem Lax-Wendroff-Zeitschrittverfahren. Um numerische Stabilität zu gewährleisten, wird künstliche Diffusion eingesetzt. Zur Konvergenzbeschleunigung sind adaptive Gitterverfeinerung und ein Multigrid-Schema verfügbar.

Irmisch (1995) berechnet kompressible, ebene Strömungen unter Verwendung der Navier-Stokes-Gleichungen und adaptiver Gitter aus Dreieckselementen. Bilanzelemente sind duale Polygone, die sich aus der Triangulation ergeben. Um den Turbulenzeinfluß zu berücksichtigen, wird das Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodell eingesetzt. Die Lösung der Gleichungssysteme bis zu einem stationären Endzustand erfolgt in einem Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren. Zur Stabilisierung des Verfahrens wird künstliche Diffusion herangezogen.

Ein weiteres Druckkorrekturverfahren auf SIMPLE-Basis, das mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen zweidimensionale, inkompressible, laminare Strömungen analysiert, stellen Thomadakis und Leschziner (1995) vor. Grundlage der räumlichen Diskretisierung ist ein aus Dreiecken bestehendes Gitter, in dem die Auswertung der Impulsgleichungen auf dualen, polygonalen Elementen, der Druckkorrekturgleichung auf den Dreiecken selbst erfolgt. Der Algorithmus arbeitet blockiterativ mit stationären Gleichungen, die auftretenden linearen Gleichungssysteme werden mit einem Gauss-Seidel-Verfahren gelöst.

Die genannten numerischen Berechnungsverfahren nutzen zur Beschreibung von Strömungsfeldern sowohl die Euler- als auch die allgemeineren Navier-Stokes-Gleichungen. Im zweiten Fall erfolgt bei einigen vorgestellten Methoden eine Berücksichtigung von Turbulenzeinflüssen entweder algebraisch oder mit Hilfe von Transportgleichungen. Viele Verfahren beschränken sich auf laminare Strömungsprobleme. Die räumliche Diskretisierung kann nur teilweise durch adaptive Gitterverfeinerung modifiziert werden. Die hierbei eingesetzten Adaptionskriterien werden nicht näher erläutert oder bleiben gänzlich unerwähnt. Darstellungen des Zusammenhangs zwischen Netzadaption und Rechengenauigkeit fehlen.

Die verwendeten Lösungsalgorithmen arbeiten sowohl druckbasiert nach Art des SIMPLE-Druckkorrekturverfahrens als auch dichtebasiert mit Variationen der Kontinuitätsbeziehung als Transportgleichung. Dabei kommen dichtebasierte Methoden für kompressible Strömungsfälle, druckbasierte Algorithmen bei inkompressiblen Problemen zum Einsatz. Die Anwendung eines einheitlichen numerischen Verfahrens, das über einen breiten Machzahlbereich sowohl kompressibles als auch inkompressibles Verhalten von Fluiden zuverlässig beschreibt, wird nicht demonstriert. Damit bleibt unklar, inwieweit turbomaschinentypische Konfigurationen, die ein breites Geschwindigkeitsspektrum aufweisen, mit diesen Algorithmen sicher zu behandeln sind.

Alle angeführten dichtebasierten Berechnungsmethoden greifen auf Zeitschrittverfahren zurück, um instationär formulierte Erhaltungsgleichungen bis zu einer stationären

Lösung zu iterieren. In Verbindung mit expliziten Gleichungslösern, die hierzu überwiegend verwendet werden, läßt sich dabei ein gewisser maximaler Zeitschritt nicht überschreiten. Dadurch ist gleichzeitig die Konvergenzgeschwindigkeit des gesamten Lösungsverfahrens limitiert. Ohne einen Mehrgitterbeschleuniger, wie er bei wenigen Methoden eingesetzt wird, ergibt sich für praxisnahe Anwendungen sehr schnell eine hohe Anzahl an Rechenschritten, die mit üblichen Arbeitsplatzrechnern nicht mehr in akzeptabler Zeit bewältigt werden kann.

## 4 Strömungsgrößen und Bestimmungsgleichungen

### 4.1 Grundgleichungen

Die ebene Strömung eines einphasigen, kompressiblen Mediums läßt sich mit Hilfe von fünf abhängigen Variablen räumlich und zeitlich eindeutig beschreiben. Diese Variablen sind der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{w}$  mit den beiden Komponenten  $u$  und  $v$ , der Druck  $p$ , die Dichte  $\rho$  und die Temperatur  $T$ , die für alle räumlichen und zeitlichen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $t$  im Strömungsfeld bekannt sein müssen. Die jeweiligen Werte dieser Größen sind durch vier Erhaltungsgleichungen und ein Stoffgesetz bestimmt. Dabei handelt es sich um die Kontinuitätsgleichung bzw. Massenerhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

die beiden Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho f_x \quad (4.2)$$

und

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho f_y, \quad (4.3)$$

die für Impulserhaltung in  $x$ - und  $y$ -Richtung zuständig sind, den Energiesatz, hier in der Formulierung für die statische Enthalpie  $h$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uh)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vh)}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &+ \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + q_h \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit

$$h = c_p T \quad (4.5)$$

und die Zustandsgleichung für ein ideales Gas

$$\frac{p}{\rho} = R T. \quad (4.6)$$

Die Schub- und Normalspannungen  $\tau_{ij}$  ergeben sich für Newtonsche Medien gemäß dem Stokesschen Schubspannungsansatz zu

$$\tau_{ij} = \mu_l \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (4.7)$$

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks wurde die Volumenviskosität durch  $-\frac{2}{3}\mu_l$  ersetzt, um als Summe der viskosen Normalspannungen  $\tau_{ii}$  Null zu erhalten. Diese Annahme

ist notwendig, damit der Druck  $p$  in den Navier-Stokes-Gleichungen dem thermodynamischen Druck entspricht (Cebeci und Bradshaw (1984)).

Beschleunigungen durch Volumenkräfte, wie beispielsweise die Schwerkraft, sind in den Impulsgleichungen in den Termen  $f_i$  zusammengefaßt. In der Enthalpiegleichung finden lokale Energiequellen und -senken im Ausdruck  $q_h$  Berücksichtigung.

Damit stehen zur Berechnung der fünf unbekanntenen Strömungsgrößen eine entsprechende Anzahl unabhängiger Gleichungen zur Verfügung. Nach Vorgabe geeigneter Anfangs- und Randbedingungen ist das zugehörige Strömungsfeld auf diese Weise eindeutig beschrieben.

## 4.2 Bestimmung des Druckfeldes

Bei der numerischen Berechnung der gesuchten Strömungsgrößen spielt der Druck eine besondere Rolle. Für kompressible Fluide, d.h. Gase bei Machzahlen über 0.3, sind Druck  $p$  und Dichte  $\rho$  über eine Zustandsgleichung gekoppelt. Die lokale Dichte wiederum ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung. Bei inkompressiblen Fluiden sind Druck und Dichte voneinander unabhängig. Die Kontinuitätsgleichung liefert somit keine direkten Informationen über das vorliegende Druckfeld. Um derartige Strömungen dennoch numerisch zu behandeln, sind zahlreiche unterschiedliche Vorgehensweisen entwickelt worden.

Aus Impulserhaltung und Kontinuität lassen sich sowohl im ebenen als auch im dreidimensionalen Fall Wirbeltransportgleichungen herleiten. Sie enthalten nicht den Druck  $p$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{w}$ , sondern die Wirbelstärke  $\omega$  und eine Stromfunktion  $\Psi$  bzw. ein Vektorpotential  $\vec{A}$  als Unbekannte (Breuer (1994)). Für diese Variablen werden eigene Erhaltungsgleichungen aufgestellt und gelöst (Ghia et al. (1982)). Daneben sind Varianten gebräuchlich, in denen die Geschwindigkeitskomponenten als Transportgrößen neben der Wirbelstärke erhalten bleiben (Guevremont et al. (1990)). Während so bei zweidimensionalen Strömungen mindestens zwei Transportgleichungen gelöst werden müssen, sind es in drei Dimensionen bereits sechs. Zusätzlich problematisch an diesem Vorgehen ist das Formulieren sinnvoller Randbedingungen für die Wirbelstärke.

Ebenfalls durch eine spezielle Umformung von Impulserhaltung und Kontinuität ergibt sich eine Poisson-Gleichung zur direkten Bestimmung des Druckes (Harlow und Welch (1965), Ghia et al. (1979)). Schwierigkeiten treten auch hier auf, da zur Berechnung einzelner Gleichungsterme mehrfache Ableitungen des Druckes sowohl im Feld als auch am Rand des Rechengebietes benötigt werden.

Eine weitere Möglichkeit, das Druck-Dichte-Problem bei niedrigen Machzahlen zu bewältigen, bietet das Einführen einer künstlichen Kompressibilität. Dazu wird über eine Kompressibilitätskonstante ein proportionaler Zusammenhang zwischen Druck und Dichte angenommen. Eine Zeitableitung dieses Ausdrucks liefert als zusätzliches Glied in der Kontinuitätsgleichung auch für inkompressible Fluide die gewünschte Koppelung mit dem Druck (Chorin (1967)). Die modifizierte Massenerhaltung muß nun instationär in einer nicht physikalischen Zeitebene bearbeitet werden. Mit Erreichen des stationären

Endzustandes strebt der eingeführte Zusatzterm gegen Null, so daß die Manipulation der Gleichung die Lösung des Strömungsproblems nicht beeinflußt.

Die sogenannte Penalty-Methode verwendet ein der künstlichen Kompressibilität verwandtes Konzept. Dabei ist die Kontinuitätsgleichung Bestandteil einer Penalty-Funktion, welche die Druckterme in den Impulsgleichungen ersetzt (Simoneau (1994)). Die problemgerechte Diskretisierung der Penalty-Formulierung stellt hohe Anforderungen bezüglich Datenstruktur, Speicherbedarf und Robustheit der Gleichungslöser.

Eine grundlegend andere Idee verfolgen die Druckkorrekturverfahren. Hier wird der Druck als Parameter interpretiert, der in den Impulsgleichungen für die Massenerhaltung sorgt. Die erste und am weitesten verbreitete Druckkorrekturmethode, der SIMPLE-Algorithmus, geht auf Caretto et al. (1972) sowie auf Patankar und Spalding (1972) zurück. Druck und Geschwindigkeiten werden in einem blockiterativen Prozeß solange korrigiert, bis die berechnete Lösung Massen- und Impulserhaltung gleichermaßen erfüllt. Dazu dienen auf Basis der Impulsgleichungen formulierte algebraische Näherungen für die Geschwindigkeit an den Grenzflächen der Bilanzelemente, in die Druckwerte von den beiden benachbarten Gitterknoten eingehen. Die Bestimmungsgleichung für die Druckkorrekturen ergibt sich durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kontinuitätsbeziehung (Patankar (1980)).

Um eine Weiterentwicklung des SIMPLE-Algorithmus handelt es sich beim SIMPLEC-Verfahren. Durch einen konsistenteren Ansatz für die Flächengeschwindigkeiten wird das Konvergenzverhalten der iterativen Prozedur nochmals verbessert (Van Doormaal und Raithby (1984)). Weitere Modifikationen erlauben es, auch kompressible trans- und hypersonische Strömungen bei hoher numerischer Effizienz mit SIMPLE- und SIMPLEC-Verfahren zu berechnen (Karki und Patankar (1989), Demirdžić et al. (1993)).

Ebenfalls auf der Grundidee des SIMPLE-Algorithmus basiert die SIMPLER-Methode. Hier ist neben der eigentlichen Druckkorrekturgleichung ein weiteres Gleichungssystem für den Druck selbst zu lösen (Patankar (1981)).

Ein mehrstufiger Korrekturalgorithmus zur Aktualisierung von Druck- und Geschwindigkeitsvariablen wird beim PISO-Verfahren (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) durchlaufen. In diesem Fall dient eine aus Massen- und Impulserhaltung abgeleitete Poisson-Gleichung zur Berechnung des Druckfeldes (Issa (1985)).

Ein wesentlicher Vorzug der Druckkorrekturverfahren gegenüber anderen Methoden der Druckberechnung liegt in der Tatsache, daß sie sowohl für inkompressible als auch für kompressible Strömungsprobleme ohne weiteres anwendbar sind. Einen entsprechenden Vergleich mit einem dichtebasierten Verfahren haben Michelassi et al. (1995) vorgenommen. Numerische Untersuchungen belegen, daß bei Nutzung der Korrekturmethode durch den Einsatz von Mehrschrittalgorithmen wie PISO und SIMPLER, trotz deutlich höherem numerischen Aufwand, in der Regel keinerlei Vorteile gegenüber den einfacheren Varianten SIMPLE oder SIMPLEC erzielt werden (Van Doormaal und Raithby (1984), McGuirk und Palma (1993)).

Aufgrund ihrer universellen Anwendbarkeit, gutmütiger Konvergenzeigenschaften und physikalischer Anschaulichkeit kommen für die Druckbestimmung beim hier vorgestellten numerischen Verfahren wahlweise SIMPLE- oder SIMPLEC-Algorithmus zum Ein-

satz. Auf diese Weise wird der weite Machzahlbereich, den Strömungen in Turbomaschinen einnehmen, mit einer einheitlichen Methode sicher abgedeckt.

### 4.3 Bestimmung des Turbulenzeinflusses

In ihrer instationären Form liefern Kontinuitäts-, Navier-Stokes- und Enthalpiegleichung bei adäquater numerischer Behandlung sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungsprobleme die physikalisch korrekte Lösung. Voraussetzung dazu ist jedoch eine räumliche Diskretisierung, die auch die kleinsten, dissipativen Wirbel im turbulenten Strömungsfeld erfaßt. Die Ausdehnung dieser Turbulenzelemente wird durch die Kolmogoroff-Länge  $l_k$  beschrieben (Tennekes und Lumley (1994)).

$$l_k \sim \frac{1}{Re^{\frac{3}{4}}} \quad (4.8)$$

Demzufolge wächst im dreidimensionalen Fall die Anzahl der Gitterknoten mit  $Re^{\frac{9}{4}}$ , die Anzahl der arithmetischen Operationen mit  $Re^{\frac{10}{4}}$  bis  $Re^{\frac{11}{4}}$ . Damit ist klar, daß Speicher- und Rechenzeitbedarf, den eine solche direkte numerische Simulation (DNS) für technisch relevante Konfigurationen bereits bei mittleren Reynoldszahlen erfordert, die Kapazität verfügbarer Rechner sehr schnell übersteigt (Rotta (1991), Breuer(1996)). Für die numerische Berechnung der Strömung an einer Turbinenschaukel mit typischen Reynoldszahlen zwischen  $10^5$  und  $10^6$  muß bei Einsatz einer CRAY Y-MP ein Zeitaufwand in der Größenordnung von mehreren 1000 Jahren veranschlagt werden.

Die sogenannte Large Eddy Simulation (LES) reduziert den numerischen Aufwand, indem sie die kleinsten Wirbel nicht räumlich auflöst, sondern deren Wirkung mit Hilfe von Feinstrukturmodellen erfaßt. Numerischer Aufwand und Datenaufkommen sind auch bei dieser Simulationsvariante beträchtlich, zumal quasistationäre Probleme hier ebenfalls zeitaufgelöst behandelt werden müssen (Rogallo und Moin (1984), Breuer (1996)).

Um den Simulationsaufwand in Grenzen zu halten, werden heute in Wissenschaft und Industrie für die Berechnung turbulenter Strömungen in der Regel die Reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen verwendet. Dazu wird in den Impulsgleichungen eine Zerlegung der entsprechenden Transportgrößen in einen Mittelwert  $\phi$  und einen turbulenten Schwankungsterm  $\phi'$  vorgenommen. Eine nachfolgende Zeitmittelung führt auf die genannten Reynoldsschen Gleichungen, die hier für ebene, stationäre Strömung angegeben sind.

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{u'v'}) + \rho f_x \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho \overline{v'v'}) + \rho f_y \quad (4.10)$$

Korrelationen die turbulente Schwankungen der Dichte enthalten, können für Ingenieursbelange vernachlässigt werden (Cebeci und Bradshaw (1984)). Im Unterschied zu den Navier-Stokes-Gleichungen treten hier, in Form zeitlich gemittelter Korrelationen, zunächst unbekannte Reynolds-Spannungen  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  auf. Sie müssen abermals berechnet

werden. Diese Schließungsproblematik läßt sich auf unterschiedliche Weise bewältigen (Rotta (1991)).

In sogenannten Reynolds-Stress-Modellen (RSM) wird im dreidimensionalen Fall für die sechs unterschiedlichen Komponenten des symmetrischen Reynoldsschen Spannungstensors jeweils eine Gleichung gelöst. Dazu werden außerdem Werte der Dissipation  $\epsilon$  der turbulenten kinetischen Energie  $k$  benötigt, so daß insgesamt sieben neue Transportgleichungen zu bearbeiten sind. Leider treten jetzt Tripelkorrelationen der turbulenten Schwankungsgrößen  $\phi'$  auf, die wiederum modelliert werden müssen. Trotz erheblichem Mehraufwand unterscheiden sich mit Reynolds-Stress-Ansatz erzielte Resultate oftmals nicht grundlegend von Ergebnissen, die sehr viel einfachere Zweigleichungsmodelle liefern (Lien und Leschziner (1994), Lai (1995)).

Ein häufig verwendetes und bewährtes Zweigleichungsmodell ist das Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodell nach Launder und Spalding (1974), das sich das Wirbelviskositätsprinzip zunutze macht. Es setzt hohe Reynoldszahlen, ein ausgewogenes Verhältnis von Produktion und Dissipation der Turbulenzenergie und eine isotrope Wirbelviskosität voraus (Rodi (1978)).

Beim Wirbelviskositätsprinzip wird mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und deren Dissipation  $\epsilon$  eine Wirbelviskosität  $\mu_t$  berechnet, die zusätzlich zur molekularen Viskosität  $\mu_l$  auftritt. Die Wirkung der turbulenten Schwankungen  $\phi'$  ist damit in einem erhöhten diffusiven Austausch berücksichtigt, der sich aus der gestiegenen effektiven Viskosität  $\mu$  ergibt.

$$k = \frac{1}{2} \cdot \overline{u_i' u_i'} \quad (4.11)$$

$$\epsilon = \nu \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

$$\mu_t = c_\mu \rho \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.13)$$

$$\mu = \mu_t + \mu_l \quad (4.14)$$

Die notwendigen Werte von  $k$  und  $\epsilon$  lassen sich beim Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodell mit zwei Transportgleichungen berechnen.

$$\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v k)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( [\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}] \cdot \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}] \cdot \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \rho P - \rho \epsilon \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial(\rho u \epsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \epsilon)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( [\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}] \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}] \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + c_1 \rho \frac{\epsilon}{k} P - c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.16)$$

$$P = \overline{u_i' u_j'} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\mu_t}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.17)$$

Um die gesuchten Reynoldsspannungen zu ermitteln, wird die Boussinesq-Hypothese herangezogen. Sie beschreibt diese Terme nach dem Vorbild der viskosen Spannungen  $\tau_{ij}$  mit Hilfe der Wirbelviskosität  $\mu_t$  (Jischa (1982), Noll (1992)).

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (4.18)$$



Konstanten	$c_\mu$	$c_1$	$c_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
Werte	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

**Tab. 4.1:** Konstanten des Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells

Damit die Summe der Normalspannungen  $-\overline{\rho u_i' u_i'}$  bei turbulenter Strömung der doppelten turbulenten kinetischen Energie  $k$  entspricht, müssen die Terme  $-\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$  eingeführt werden (Noll (1992)). Andernfalls stimmt der in den Reynoldsschen Gleichungen verwendete Druck  $p$  nicht mehr mit dem thermodynamischen Druck überein.

Die beiden Differentialgleichungen für  $k$  und  $\epsilon$  sind für den inkompressiblen Fall hergeleitet, werden jedoch bei kompressibler Strömung in gleicher Form verwendet (Marvin (1983)). Die Zahlenwerte der freien Parameter  $c_\mu$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\sigma_k$  und  $\sigma_\epsilon$  finden sich in Tabelle 4.1. Sie resultieren aus einer Computeroptimierung für Strömungsprobleme mit ebener Mischungsschicht (Rodi (1978)).

In unmittelbarer Nähe fester Wände verlieren die angeführten Transportgleichungen ihre Gültigkeit. Diesen Bereich der Wandturbulenz überbrückt eine logarithmische Wandfunktion.

Das Standard- $k, \epsilon$ -Modell hat sich in wissenschaftlicher und industrieller Anwendung als robust und leistungsfähig erwiesen. Es kommt deshalb im Rahmen des vorgestellten numerischen Berechnungsverfahrens zum Einsatz.

Auf der Grundlage des Standard- $k, \epsilon$ -Modells wurden von zahlreichen Autoren verschiedene interessante Varianten vorgestellt, die insbesondere die wandnahe Turbulenz mit sogenannten ‘Low-Reynolds’-Erweiterungen detaillierter beschreiben (Sieger (1993)). Ziel dieser Entwicklungen ist es, Anwendungsbereich und Vorhersagegenauigkeit der  $k, \epsilon$ -Methode zu vergrößern. Derart erweiterte Ansätze präsentieren unter anderem Thangam und Speziale (1992) sowie Yakhot et al. (1992). Eine Gegenüberstellung der Resultate unterschiedlicher Zweigleichungsmodelle haben Haroutunian und Engelman (1993) für verschiedene Testfälle vorgenommen. Keine der untersuchten Varianten liefert hierbei signifikant bessere Ergebnisse als das Standard- $k, \epsilon$ -Verfahren.

Algebraischen Spannungsmodelle (ASM) beschreiten einen Mittelweg zwischen Reynolds-Stress- und Zweigleichungsmodellierung. Mit Hilfe spezieller Transportgleichungen sind zunächst Werte für  $k$  und  $\epsilon$  zu bestimmen. Auf dieser Basis können die gesuchten Reynoldsspannungen über entsprechende algebraische Beziehungen berechnet werden. Im direkten Vergleich mit der  $k, \epsilon$ -Methode erzielen die algebraischen Spannungsmodelle trotz höherem Rechenaufwand keine wesentlichen Verbesserungen (Ye (1993)).

Einfache Eingleichungsmodelle lösen in der Mehrzahl eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$ . Ein charakteristisches Längenmaß der Turbulenz ergibt sich hier aus einer algebraischen Gleichung (Sieger (1993)). Sogenannte Nullgleichungsmodelle operieren ausschließlich mit algebraischen Beziehungen (Mavriplis (1990)). Zur Bestimmung der Wirbelviskosität  $\mu_t$  wird hier beispielsweise der Prandtlische Mischungswegansatz herangezogen. Die genannten sehr einfachen Modelle beanspruchen nur geringen numerischen Aufwand. Abnehmende Komplexität der Ansätze ist dabei jedoch in der Regel mit einem Verlust an Allgemeingültigkeit verbunden.

## 5 Numerische Methoden auf unstrukturierten Gittern

### 5.1 Räumliche Diskretisierung

Ein wesentlicher Vorteil unstrukturierter Rechnernetze liegt in der Tatsache, daß sich ebene Rechengebiete jeglicher Form lückenlos und gleichmäßig mit Dreiecken ausfüllen lassen. Damit können selbst geometrisch komplizierte Konfigurationen, wie sie in Turbomaschinen nicht selten auftreten, problemlos diskretisiert werden. Es scheint zunächst naheliegend, auch die Auswertung der Transportgleichungen auf den Dreiecken selbst vorzunehmen. Ein solches Vorgehen würde jedoch zwei entscheidende Nachteile mit sich bringen. Dreieckige Bilanzelemente tauschen lediglich mit jeweils drei unmittelbaren Nachbarn entlang ihrer Grenzflächen auf direktem Weg Informationen über den Strömungszustand aus. Die räumliche Koppelung im Gitter ist also extrem schwach. Zusätzlich treten bei der Formulierung von Randbedingungen Schwierigkeiten auf, sobald nicht eine vollständige Kante, sondern nur der Eckpunkt eines Dreiecks auf dem Rand des Rechengitters liegt.

Aus den genannten Gründen verwendet das in der vorliegenden Arbeit entwickelte numerische Verfahren ein duales Gitter zur Bilanzierung. Die Bilanzelemente ergeben sich in eindeutiger Weise aus der Triangulation des Strömungsgebietes. Dazu werden im Gebietsinneren die Schwerpunkte benachbarter Dreiecke miteinander verbunden. Es entstehen konvexe Polygone die, wie Abbildung 5.1 deutlich macht, den Körnern in einem Metallschliff ähneln (Okabe et al. (1992)). Stützstellen der numerischen Lösung sind die Gitterknoten im Zentrum dieser Kontrollräume, also die Schnittpunkte der Dreiecksseiten.

Bilanzvolumina an Gebietsrändern sind gemäß Abbildung 5.1 geringfügig anders definiert. Hier werden Knoten, die sich unmittelbar auf der Grenzlinie befinden, nach Überspringen einer Schicht von Randdreiecken direkt mit den Schwerpunkten weiter innen liegender Dreiecke verbunden. Auf diese Weise ist jeder Gitterzelle an einem Rand des diskretisierten Gebietes mindestens ein Abschnitt des Randes zugeordnet.

Knoten auf Gebietsrändern nehmen an der numerischen Berechnung nicht teil. Sie dienen lediglich als Speicherstellen zur Darstellung einer vorliegenden Lösung. Randbedingungen werden, analog zum Informationstransport im Inneren des Netzes, durch

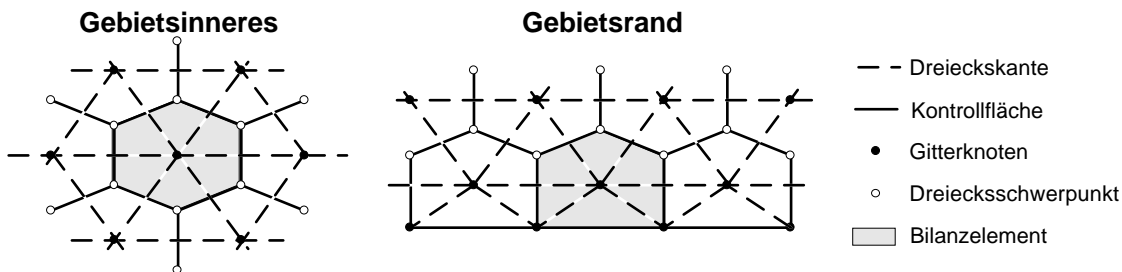


Abb. 5.1: Polygonale Bilanzelemente im unstrukturierten Gitter

konvektive und diffusive Flüsse über Kontrollflächen berücksichtigt. Ein solches Vorgehen erlaubt zahlreiche Vereinfachungen in den verwendeten Algorithmen. Beispielsweise können Wandreibungsterme und zyklische Verknüpfungen implizit behandelt werden.

Voraussetzung für die numerische Analyse von Strömungsproblemen ist die vollständige räumliche Diskretisierung der zu untersuchenden Konfiguration. Die hier eingesetzte Methode stützt sich wie vorgestellt auf eine Triangulation des Strömungsgebietes. Um die entsprechenden Dreiecksgitter zu erzeugen, wurde ausschließlich das Preprocessing-Modul des kommerziellen Finite-Element-Programmpaketes PATRAN genutzt. Der Prozeß der Gittergenerierung gliedert sich dabei in vier Schritte. Zuerst werden mit Hilfspunkten und verbindenden Linienzügen die Grenzen des betrachteten Bereiches aufgespannt. Anhand dieser Hilfslinien erfolgt dann eine Aufteilung des Rechengebietes in mehrere Teilflächen. Anschließend werden die Kanten der Flächen mit Gitterknoten belegt. Die eigentliche Vernetzung aller Hilfsflächen findet im letzten Schritt statt.

Nach dieser knappen Zusammenfassung soll das praktische Vorgehen im Zuge der Gittererzeugung an einem konkreten Beispiel erläutert werden. Bei der dafür ausgewählten Konfiguration handelt es sich um die Buchstabengruppe 'ITS' in einem rechteckigen Areal. Eine schematische Darstellung der Anordnung einschließlich der verwendeten Hilfselemente gibt Abbildung 5.2.

Die Grenzen des Rechengebietes sind durch die schon angesprochenen Hilfspunkte (1-26) abgesteckt. Die Punkte (1-4) markieren in mathematisch positivem Umlaufsinn die äußeren, die Punkte (5-26) in gegenläufiger Abfolge die inneren Gebietsränder. Die vereinbarte Ordnung der Stützstellen erzwingt beim späteren Vernetzen eine fortlaufende Numerierung der Randknoten mit in mathematisch positiver bzw. negativer Richtung ansteigenden Indizes. Diese Eigenschaft setzt das numerische Verfahren beim Einlesen

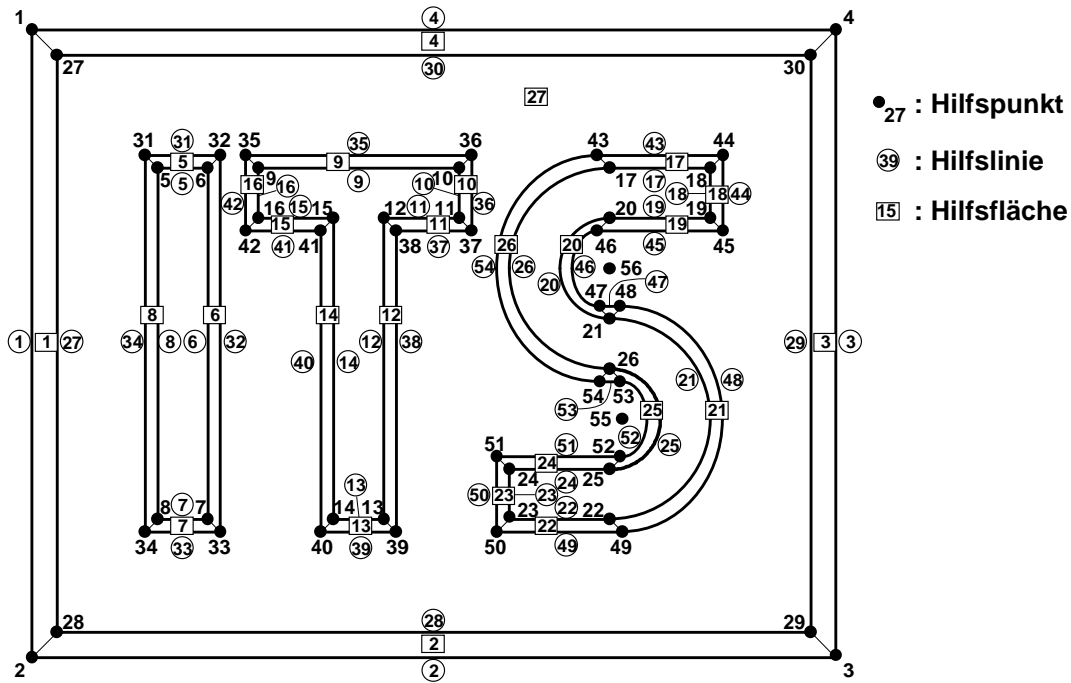


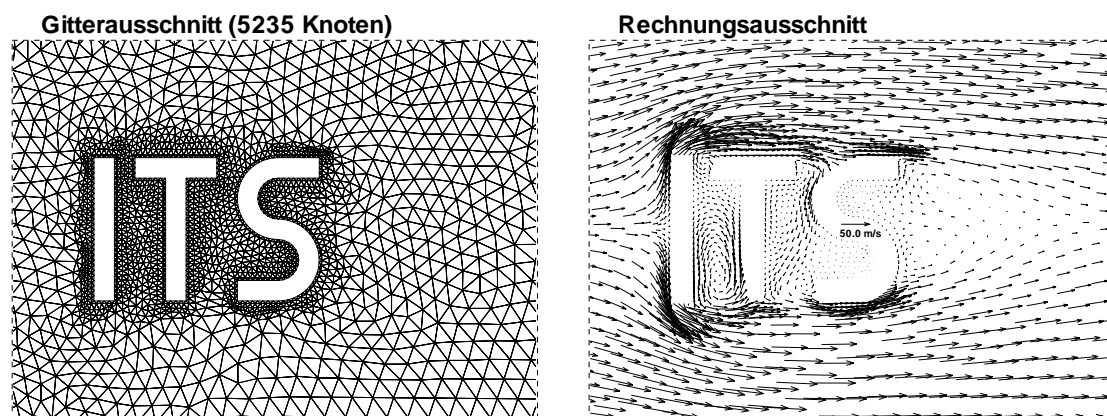
Abb. 5.2: Schema zur Gittergenerierung für die Buchstabengruppe 'ITS'

des Gitters voraus. Eine zweite Schar von Hilfspunkten mit Kennnummern (27-30) und (31-54) wird benötigt, um der besonderen Topologie der Bilanzelemente an den Gittergrenzen Rechnung zu tragen (vgl. Abbildung 5.1). Ihr Abstand zum äußeren Rand richtet sich nach besonderen Regeln, die im folgenden noch näher ausgeführt werden. Die beiden letzten Punkte (55) und (56) dienen als Mittelpunkte bei der Vereinbarung von Kreissegmenten.

Nach dem Festlegen sämtlicher Stützstellen definieren die Hilfslinien (1-26) die endgültigen Konturen des Rechengebietes, die Linienzüge (27-54) die Lage der randnächsten Gitterknoten. Mittels dieser Linien werden Hilfsflächen (1-27) angelegt. Auf den Flächen (1-26) entstehen im weiteren Verlauf die bereits genannten Randdreiecke, während Fläche (27) die Basis für das innere Dreiecksgitter bildet.

Vor der abschließenden Vernetzung ist es notwendig, die Kanten (1-54) der Hilfsflächen mit Knoten zu belegen. Entlang der äußeren Grenzlinien (1-26) des Strömungsgebietes muß die gewählte Knotenverteilung sowohl die geometrische Gestalt des Randes als auch das erwartete Strömungsgeschehen hinreichend genau auflösen. Die Knotenbelegung auf den inneren Hilfslinien (27-54) ergibt sich direkt über die Außenverteilung. Wie Abbildung 5.1 zeigt, befindet sich gegenüber jedem Randsegment zwischen zwei Außenknoten ein zugeordneter Knoten auf der inneren Grenzlinie. Der Abstand dieses Knotens vom zugehörigen Randsegment sollte etwa das 0.3-fache der Segmentlänge betragen, wobei ein Verhältnis zwischen 0.1 und 0.5 toleriert wird. Die genannten Werte gewährleisten erfahrungsgemäß eine günstige Form der Bilanzelemente an Gebietsrändern. Für die Berechnung turbulenter Strömungen sollte gleichzeitig entlang fester Wände ein dimensionsloser Wandabstand in einem bestimmten Wertebereich gehalten werden. Der dazu erforderliche geometrische Wandabstand läßt sich sehr einfach aus Strömungsdaten abschätzen (vgl. Kapitel 6.3.3).

Die Gittergenerierung schließt mit der Vernetzung der einzelnen Teilflächen. Das Erscheinungsbild des Rechnernetzes auf der Innenfläche (27) wird durch die Knotenverteilung an deren Rändern und die zusätzliche Angabe einer mittleren Kantenlänge der Dreiecke beeinflusst. Auf den äußeren Teilflächen (1-26), die gemäß Abbildung 5.1 nur eine Schicht von Randdreiecken enthalten, spielt allein die Belegung der Grenzlinien eine Rolle.



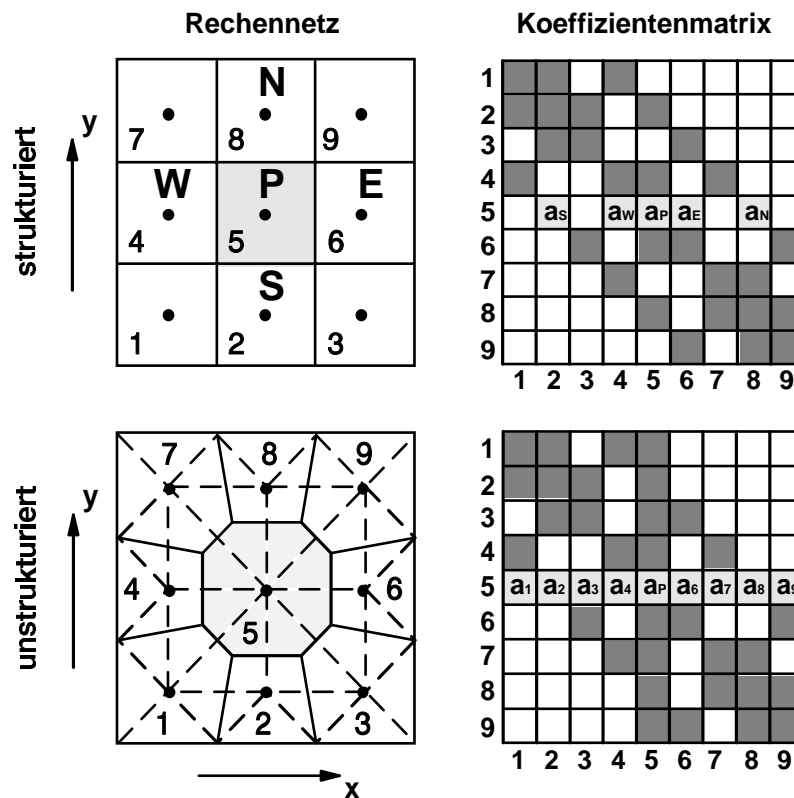
**Abb. 5.3:** Gitterausschnitt und Geschwindigkeitsfeld um die Buchstabengruppe 'ITS'

Von entscheidender Bedeutung für den Erfolg der nachgeschalteten numerischen Berechnung ist neben den geometrischen Eigenschaften des Gitters die Numerierung der Knoten im Netz. Vereinfacht ausgedrückt sollten räumlich benachbarte Rechenknoten vergleichbare Indizes aufweisen. PATRAN stellt zu diesem Zweck verschiedene Indizierungsalgorithmen bereit. Sehr gute Resultate wurden ohne Ausnahme auch mit einer eigenen Numerierungsstrategie erzielt (vgl. Kapitel 5.5). Für das angeführte Beispiel gibt Abbildung 5.3 einen Ausschnitt des fertigen Dreiecksgitters und ein darauf bei turbulenter Strömung berechnetes Geschwindigkeitsfeld wieder.

Die gewählte räumliche Diskretisierung beeinflusst in hohem Maß die Diskretisierung der Transportgleichungen und damit den gesamten Aufbau des numerischen Verfahrens. Abbildung 5.4 verdeutlicht diese Tatsache anhand der Gegenüberstellung eines strukturierten und eines unstrukturierten Gitters mit jeweils neun geordnet nummerierten Bilanzelementen sowie der Besetzung der zugehörigen Koeffizientenmatrizen.

Im strukturierten Netz hat jeder Knoten im Inneren des ebenen Rechengebietes genau vier direkte Nachbarn, die üblicherweise mit Nord (N), Süd (S), Ost (E) und West (W) bezeichnet werden. Ihre Adressen lassen sich ausgehend vom Zentralknoten  $P$  auf einfache Weise berechnen. Nachbarschaftsverhältnisse und Informationsaustausch sind damit für alle Bilanzelemente einheitlich geregelt. Die Koeffizientenmatrizen der Gleichungssysteme, die sich nach Diskretisierung und Linearisierung der Transportgleichungen ergeben, weisen deshalb eine geordnete Bandenstruktur auf.

Im unstrukturierten Gitter sind weder die Anzahl noch die Adressen der Nachbarn ei-



**Abb. 5.4:** Räumliche Diskretisierung und Besetzung der Koeffizientenmatrix

nes Kontrollvolumens festgelegt. Beide Informationen müssen also gespeichert werden. Trotz der hier noch geordneten Numerierung der wenigen Elemente, die im allgemeinen Fall nicht realisierbar ist, zeigt die Koeffizientenmatrix der linearisierten Bestimmungsgleichungen bereits eine regellose, unstrukturierte Besetzung. Aus diesem Grund ist es erforderlich, für eine genaue Diskretisierung, effiziente Verwaltung und schnelle Berechnung der Transportgleichungen neue Methoden zu entwickeln und anzuwenden.

## 5.2 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls, Energie und beliebige andere skalare Transportgrößen  $\phi$  können als spezielle Varianten einer allgemeinen Transportgleichung betrachtet werden. Ihre Form ist hier für den stationären, ebenen Fall angegeben.

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + s_\phi \quad (5.1)$$

Dabei steht der geschwindigkeitsabhängige konvektive Transport von  $\phi$  mit dem diffusiven Austausch, der vom Austauschkoeffizienten  $D$ , und den Gradienten der Transportgröße kontrolliert wird, sowie dem Quellterm  $s_\phi$  im Gleichgewicht. Der Quellterm faßt sämtliche Einflüsse, die neben Konvektion und Diffusion wirksam sind zusammen.

Bei der Methode der Finiten Volumen werden die Erhaltungsgleichungen im Zuge ihrer Diskretisierung auf jedem Bilanzelement im Rechengitter integriert. Zu diesem Zweck kommt der Gaußsche Integralsatz zur Anwendung, der eine Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale erlaubt (Bronstein (1985)).

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dV = \int_A \phi dA_{x_j} = \int_A \phi(\vec{n}, \vec{x}_j) dA \quad (5.2)$$

Der hier eingeführte Vektor  $\vec{n}$  ist der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor des differentiellen Oberflächenelementes  $dA$ ,  $\vec{x}_j$  bezeichnet den Einheitsvektor in  $x_j$ -Richtung des Koordinatensystems. Damit ergibt sich die allgemeine Transportgleichung in integraler Form.

$$\int_A \rho \phi(\vec{w}, \vec{n}) dA = \int_A \rho D \frac{\partial \phi}{\partial n} dA + S_\phi \quad (5.3)$$

Diese Gleichung muß auf polygonalen Bilanzelementen mit jeweils  $m$  Kontrollflächen  $A_i$  diskretisiert werden.

$$\sum_{i=1}^m \{ \rho_i \phi_i(\vec{w}, \vec{n})_i A_i \} = \sum_{i=1}^m \left\{ \rho_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i A_i \right\} + S_\phi \quad (5.4)$$

Die Flächenwerte  $\phi_i$  der betrachteten Transportgröße und ihre Richtungsableitungen  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i$  werden mit Hilfe der im Kontrollvolumen  $P$  und den Nachbarelementen  $I$  vorliegenden Werte  $\phi_P$  und  $\phi_{I,i}$  ausgedrückt. Auf diese Weise lassen sich konvektive und diffusive Terme linearisieren und zu Produkten aus Transportkoeffizienten  $a_i$  und Transportvariablen  $\phi$  zusammenfassen. Der Quellterm  $S_\phi$  wird ebenfalls linearisiert und anteilig dem Zentralkoeffizienten  $a_P$  bzw. der rechten Seite  $b$  der so erhaltenen allgemeinen

Differenzgleichung zugewiesen.

$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^m a_i \phi_{I,i} + b \quad (5.5)$$

$$a_P = \sum_{i=1}^m a_i - S_P \quad (5.6)$$

$$b = S_C + S_{HOS} \quad (5.7)$$

$$S_\phi = S_C + S_P \phi_P \quad (5.8)$$

Bei dieser Umformung sind vier Grundregeln der Diskretisierung zu beachten, die für eine physikalisch korrekte Beschreibung sorgen (Patankar (1980)). Konkret handelt es sich zunächst um die Konsistenz der Flüsse, die besagt, daß konvektive und diffusive Transportterme über Kontrollflächen jeweils für beide angrenzenden Gitterzellen gleich formuliert werden müssen. Des weiteren sollen die Transportkoeffizienten  $a_i$  stets positive Werte aufweisen. Diese Forderung stellt eine physikalisch sinnvolle Koppelung zwischen Zentralwert  $\phi_P$  und Nachbarwerten  $\phi_{I,i}$  der Transportgröße sicher. Der Zentralkoeffizient  $a_P$  der Diskretisierungsgleichung ergibt sich aus einer Summation aller Nachbarkoeffizienten  $a_i$ , von deren Ergebnis der proportionale Anteil  $S_P$  des linearisierten Quellterms  $S_\phi$  abgezogen wird. Der Wert von  $S_P$  ist dabei grundsätzlich negativ. Zur rechten Seite  $b$  der Diskretisierungsgleichung trägt neben dem konstanten positiven Anteil  $S_C$  des Quellterms  $S_\phi$  ein Ausdruck  $S_{HOS}$  bei, der aus einer besonderen Behandlung der Konvektionsterme bei höherwertiger Diskretisierung resultiert.

### 5.2.1 Konvektionsterme

Auf der Grundlage der bereits beschriebenen räumlichen Diskretisierung berechnet das numerische Verfahren Werte der Transportgröße  $\phi$  an den Gitterknoten im Zentrum der Bilanzelemente. Um die konvektiven Terme  $\rho_i \phi_i (\vec{w}, \vec{n})_i A_i$  der Transportgleichungen zu formulieren, werden jedoch Werte  $\phi_i$  direkt auf den Kontrollflächen  $i$  benötigt. Diese Flächenwerte lassen sich mit Hilfe vorhandener Knotenwerte interpolieren. An eine derartige Interpolation müssen drei Forderungen gestellt werden:

- Mathematische Genauigkeit; basierend auf verfügbaren Knotenwerten ist  $\phi_i$  so genau wie möglich zu bestimmen. Die Ordnung des zu erwartenden Diskretisierungsfehlers legt der Abbruchterm in einer Taylor-Entwicklung für  $\phi_i$  fest.
- Numerische Stabilität; sie wird in der Regel mit stets positiven Werten der Transportkoeffizienten  $a_i$ , d.h. physikalisch sinnvoller Koppelung benachbarter Knotenwerte gleichgesetzt.
- Physikalische Beschränktheit; ebenfalls im Sinne physikalischer Plausibilität dürfen interpolierte Flächenwerte  $\phi_i$  die in den beiden unmittelbar angrenzenden Gitterzellen berechneten Werte der Transportvariablen weder über- noch unterschreiten.

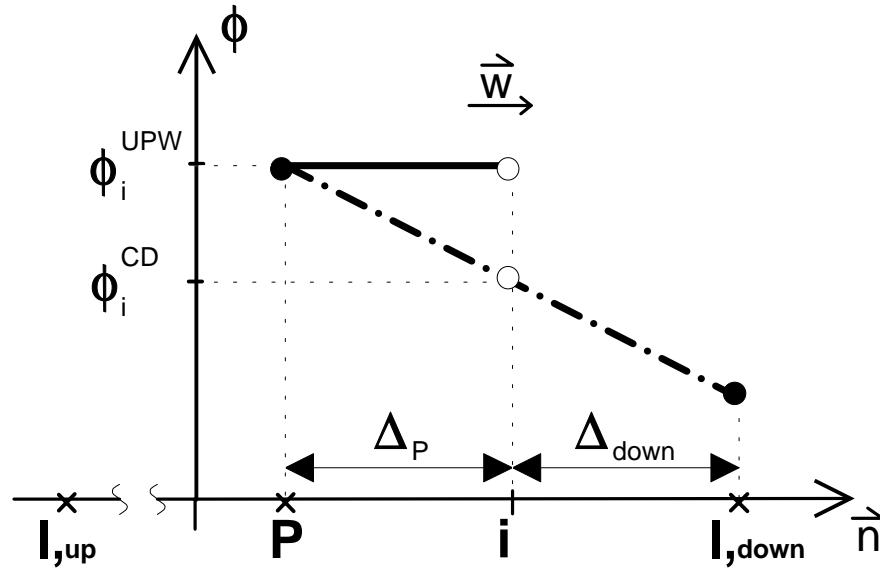


Abb. 5.5: Upwind- und CD-Interpolation

Der bekannteste Interpolationsansatz, der zur Approximierung der konvektiven Terme eingesetzt wird, ist das Upwind-Schema (UPW). Hier nimmt der gesuchte Flächenwert  $\phi_i$ , wie Abbildung 5.5 zeigt, den am stromauf gelegenen Knoten  $P$  berechneten Wert  $\phi_P$  an.

$$\phi_i^{UPW} = \begin{cases} \phi_P, & (\vec{w}, \vec{n}) > 0 \\ \phi_{I,down}, & (\vec{w}, \vec{n}) < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

$$a_{i,konv}^{UPW} = \max[0, -(\rho \cdot A \cdot (\vec{w}, \vec{n}))_i] \quad (5.10)$$

$$\phi_i = \phi_P + O^1 \quad (5.11)$$

Der Upwind-Ansatz gewährleistet positive Werte des konvektiven Anteils  $a_{i,konv}^{UPW}$  der Transportkoeffizienten  $a_i$  und sichert so die numerische Stabilität des Rechenverfahrens. Leider ist die Upwind-Interpolation nur von erster Ordnung genau. Dieser Diskretisierungsfehler tritt insbesondere bei Schräganströmung von Bilanzelementen massiv in Erscheinung. Er erreicht dann die Größenordnung der diffusiven Terme und wird deshalb häufig als numerische Diffusion bezeichnet.

Von zweiter Ordnung mathematisch genau ist der Zentralkommen-Ansatz (CD). Hier handelt es sich, gemäß der Darstellung in Abbildung 5.5, um eine lineare Interpolation des Flächenwertes  $\phi_i$  aus stromauf und stromab berechneten Knotenwerten  $\phi_P$  und  $\phi_{I,down}$ .

$$\phi_i^{CD} = \frac{\Delta_{down} \cdot \phi_P + \Delta_P \cdot \phi_{I,down}}{\Delta_P + \Delta_{down}} \quad (5.12)$$

$$a_{i,konv}^{CD} = -(\rho \cdot A \cdot (\vec{w}, \vec{n}))_i \cdot \frac{\Delta_P}{\Delta_P + \Delta_{down}} \quad (5.13)$$

$$\phi_i = \phi_P + \frac{\phi_{I,down} - \phi_P}{\Delta_P + \Delta_{down}} \cdot \Delta_P + O^2 \quad (5.14)$$



Negative konvektive Transportterme  $a_{i,konv}^{CD}$ , die bei der CD-Interpolation zwangsläufig auftreten, stören nachhaltig die Stabilität des numerischen Verfahrens, sobald ihr Betrag den des diffusiven Austauschterms  $a_{i,diff}$  übersteigt.

Eine Möglichkeit, negative Werte der Transportkoeffizienten  $a_i$  bei CD-Ansatz und allen anderen Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung (HOS) zu vermeiden, bietet die sogenannte ‘deferred correction’ (Khosla und Rubin (1974), Demirdžić (1993)). Hier sind die Transportkoeffizienten  $a_i$  der Diskretisierungsgleichung aus Diffusions- und Upwind-diskretisierten Konvektionstermen  $a_{i,diff}$  und  $a_{i,konv}^{UPW}$  zusammengesetzt. Die höherwertige Diskretisierung ergänzt als zusätzlicher konstanter Quellterm  $S_{HOS}$  die rechte Seite der Gleichung. Der entsprechende Ausdruck ist mit Produkten der Differenzen zwischen konvektiven Transportkoeffizienten  $a_{i,konv}$  aus HOS- und UPW-Diskretisierung sowie zwischen aktuell vorliegenden Werten der Variablen  $\phi$  an den Knoten  $P$  und  $I$  gebildet. Diese Produkte werden über alle  $m$  Kontrollflächen einer Gitterzelle summiert.

$$a_i = a_{i,diff} + a_{i,konv}^{UPW} \quad (5.15)$$

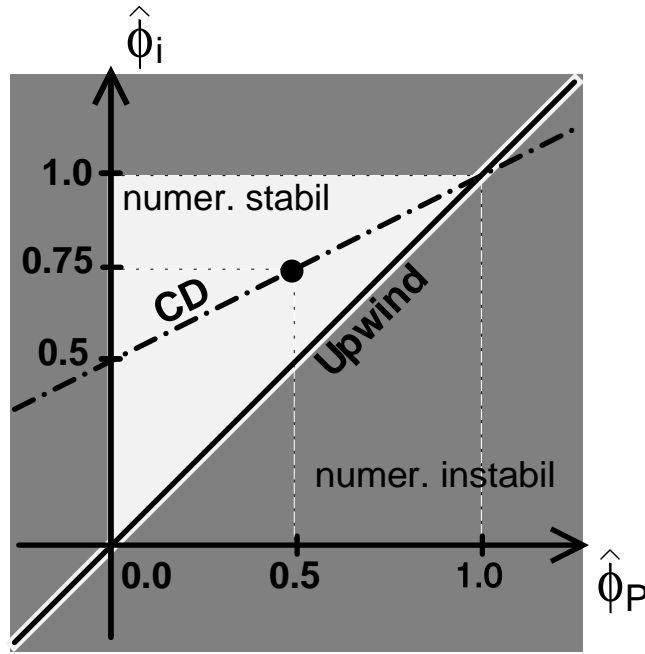
$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^m a_i \phi_{I,i} + S_C + S_{HOS} \quad (5.16)$$

$$S_{HOS} = \sum_{i=1}^m \left\{ (a_{i,konv}^{UPW} - a_{i,konv}^{HOS}) \cdot (\phi_P - \phi_{I,i}) \right\} \quad (5.17)$$

Die im Hinblick auf numerische Stabilität des Verfahrens gestellten Bedingungen sind somit formal erfüllt. Wird jedoch beispielsweise der CD-Ansatz auf diese Weise explizit diskretisiert, treten mit dem vorgestellten Berechnungsverfahren auf unstrukturierten Netzen immer noch erhebliche Konvergenzschwierigkeiten auf, so daß sich der Einsatz in praxisrelevanten Fällen verbietet. Um ein numerisch einwandfreies Verhalten zu garantieren, müssen die verwendeten Interpolationsansätze einer weiteren Bedingung genügen. Diese zusätzliche Restriktion ist mit den bereits angesprochenen Regeln für numerische Stabilität und physikalische Beschränktheit eng verwandt. Danach sind Flächenwerte  $\phi_i$  so zu bestimmen, daß die Erhaltungsgleichung der entsprechenden Transportgröße in jedem Kontrollvolumen stets erfüllbar ist. Für Gitterzellen, in denen ständig gegen diese Forderung verstoßen wird, berechnet das numerische Verfahren, im Bestreben die dort fehlerhafte Bilanz auszugleichen, unrealistische Werte der Variablen  $\phi$ . Da es sich dabei unter bestimmten Umständen um einen selbstverstärkenden Vorgang handelt, bei dem diese Werte monoton steigen oder fallen, ist oftmals schnelle Divergenz des Rechengangs die Folge.

Eine Möglichkeit, vorhandene Diskretisierungsmethoden hinsichtlich mathematischer Genauigkeit, numerischer Stabilität und physikalischer Beschränktheit zu beurteilen bzw. geeignete Ansätze neu zu entwickeln, bietet das von Gaskell und Lau (1988) vorgeschlagene ‘Convection Boundedness Criterion’ (CBC). Der für  $\phi_i$  zulässige, numerisch stabile Wertebereich wird durch einen dimensionslosen Stabilitätsparameter  $\hat{\phi}$  eindeutig festgelegt. Man betrachtet dazu nochmals die in Abbildung 5.5 skizzierte, eindimensionale Strömungskonfiguration. Für die durchströmte Fläche  $i$  ergibt sich  $\hat{\phi}_P$  aus den Werten der Transportvariablen  $\phi$  am Knoten  $P$ , am nächsten stromauf gelegenen Knoten  $I, up$  und am Knoten  $I, down$ .

$$\hat{\phi}_P = \frac{\phi_P - \phi_{I,up}}{\phi_{I,down} - \phi_{I,up}} \quad (5.18)$$



**Abb. 5.6:** Upwind- und CD-Ansatz im CBC-Stabilitätsdiagramm

Dieses Vorgehen reduziert die Anzahl der Einflußgrößen, die beim Bestimmen von  $\phi_i$  beachtet werden müssen, von drei Knotenwerten  $\phi_{I,up}$ ,  $\phi_P$  und  $\phi_{I,down}$  auf nur noch einen dimensionslosen Parameter  $\hat{\phi}_P$ . Im zugehörigen Stabilitätsdiagramm, das in Abbildung 5.6 zu finden ist, lassen sich mit Hilfe von  $\hat{\phi}_P$  erlaubte Werte für  $\hat{\phi}_i$  einfach ablesen. Damit ist gleichzeitig  $\phi_i$  eindeutig festgelegt. Die mit Upwind- und CD-Verfahren interpolierten Flächenwerte  $\hat{\phi}_i$  erscheinen in der gewählten dimensionslosen Darstellung als Geraden.

$$\hat{\phi}_i^{UPW} = \hat{\phi}_P \quad (5.19)$$

$$\hat{\phi}_i^{CD} = \frac{1}{2}\hat{\phi}_P + \frac{1}{2} \quad (5.20)$$

Für  $\hat{\phi}_P$  kleiner 0.0 oder größer 1.0 stellt allein der Upwind-Ansatz numerisch stabile Flächenwerte  $\phi_i$  sicher. Innerhalb des genannten Intervalls öffnet sich in Form eines Dreiecks ein Stabilitätsbereich, in dem sich auch die CD-Interpolation numerisch einwandfrei verhält. In diesem Gebiet passieren Diskretisierungsschemata, die eine mathematische Genauigkeit von mindestens zweiter Ordnung erreichen, den Punkt (0.5, 0.75). Von entscheidender Bedeutung ist außerdem die Tatsache, daß derartige Interpolationsverfahren durch einfache Überlagerung von Upwind- und CD-Anteilen konstruiert werden können.

Auf unstrukturierten Gittern bleibt das Problem, den Wert  $\phi_{I,up}$  der betrachteten Transportgröße, der zur Berechnung von  $\hat{\phi}_P$  in jedem Fall benötigt wird, ohne zeit- und rechenintensiven Such- und Interpolationsaufwand auf unkomplizierte Weise zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe liegt in einer hinreichend genauen Näherung für  $\phi_{I,up}$ . Diese liefert eine Taylor-Entwicklung bis zum Glied erster Ordnung am Knoten  $P$ .

$$\phi_{I,up} = \phi_P - \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_P \cdot (\Delta_P + \Delta_{down}) + O^2 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\text{grad} \phi, \vec{n}) \quad (5.22)$$

Die zur Berechnung der Richtungsableitung  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  notwendigen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$  ergeben sich über den Gaußschen Satz aus den aktuellen Flächenwerten  $\phi_i$  um die jeweils betrachtete Gitterzelle sowie dem Zellvolumen  $V$ , das im zweidimensionalen Fall den Betrag der Bilanzelementfläche hat.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{1}{V} \int_A \phi(\vec{n}, \vec{x}_j) dA = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^m \{\phi_i(\vec{n}_i, \vec{x}_j) A_i\} \quad (5.23)$$

Diese Art der Approximation von  $\phi_{I,up}$  erweist sich in der Praxis als äußerst vorteilhaft. Aufgrund der verwendeten Richtungsableitung reagiert die berechnete Näherung sensibler auf Änderungen der konvektiven Flüsse am Bilanzelement, als der reale Knotenwert. Auf diese Weise werden numerisch kritische Situationen frühzeitig detektiert und entschärft. Zudem stammt die Information, die zur Bewertung der lokalen Situation herangezogen wird, unmittelbar vom betrachteten Kontrollvolumen selbst. Damit wird eine exakte räumliche Auflösung des Strömungsgeschehens gefördert.

Die tragende Rolle der Richtungsableitung bei der Interpolation von  $\phi_{I,up}$  findet im Namen des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten, speziell für unstrukturierte Gitter geeigneten Diskretisierungsansatzes ihren Niederschlag: DISC als Akronym für ‘Derivative based Interpolation Scheme for Convection’. Die Bestimmung der gesuchten Flächenwerte  $\phi_i$  mit DISC erfolgt, wie in Abbildung 5.7 gezeigt, auf der Basis einer dimensionslosen Darstellung der Strömungssituation im CBC-Diagramm. Außerhalb des Stabilitätsdreiecks nutzt der DISC-Ansatz die konventionelle Upwind-Interpolation. Im numerisch stabilen Bereich verbindet eine Parabel die Punkte (0.0, 0.0) und (0.5, 0.75).

$$\hat{\phi}_i^{DISC} = \hat{\phi}_P(2 - \hat{\phi}_P), \quad 0.0 \leq \hat{\phi}_P < 0.5 \quad (5.24)$$

Zwischen der ausgezeichneten Position (0.5, 0.75) und der rechten Grenze des Stabilitätsgebietes verwendet DISC das CD-Schema. Damit bleibt ein sicherer Abstand zu den Stabilitätsgrenzen gewahrt, wobei der Einfluß des stromab gelegenen Knotenwertes  $\phi_{I,down}$  auf  $\phi_i$  50% nicht überschreitet. Der beschriebene Verlauf von  $\hat{\phi}_i$  ist durch lineare Überlagerung von Upwind- und CD-Methode anhand eines Superpositionsparameters  $\alpha(\hat{\phi}_P)$  festgelegt.

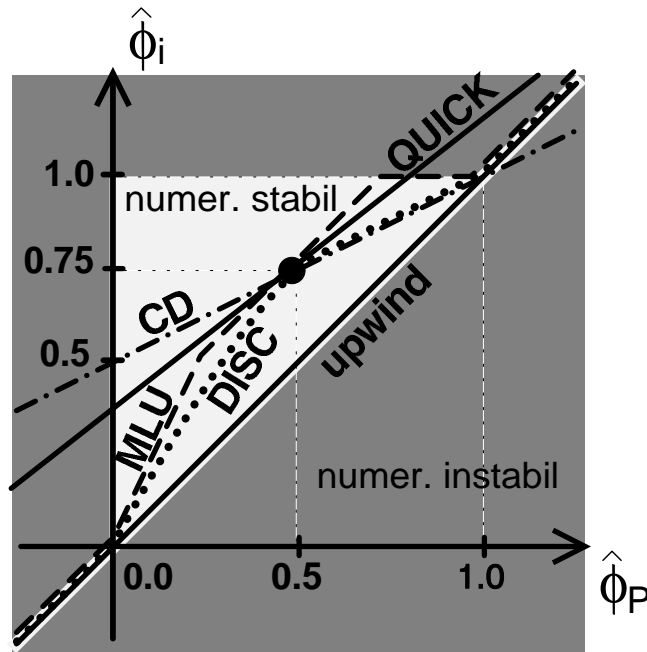
$$\phi_i = \alpha \cdot \phi_i^{CD} + (1 - \alpha) \cdot \phi_i^{UPW} \quad (5.25)$$

$$a_{i,konv} = \alpha \cdot a_{i,konv}^{CD} + (1 - \alpha) \cdot a_{i,konv}^{UPW} \quad (5.26)$$

$$\alpha^{DISC}(\hat{\phi}_P) = \begin{cases} 0.0, & \hat{\phi}_P < 0.0 \\ 2\hat{\phi}_P, & 0 \leq \hat{\phi}_P < 0.5 \\ 1.0, & 0.5 \leq \hat{\phi}_P \leq 1.0 \\ 0.0, & \hat{\phi}_P > 1.0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Die auf den ersten Blick komplex anmutende Fallunterscheidung für  $\alpha^{DISC}(\hat{\phi}_P)$  kann in Standard-FORTRAN mit Hilfe mathematischer Grundfunktionen geschlossen dargestellt werden.

$$\alpha^{DISC}(\hat{\phi}_P) = \min[1.0, 2.0 \cdot \dim\{\text{mod}(\hat{\phi}_P, 1.0), \text{abs}(\text{int}(\hat{\phi}_P))\}] \quad (5.28)$$



**Abb. 5.7:** DISC-, QUICK- und MLU-Ansatz im CBC-Stabilitätsdiagramm

Bei formaler Betrachtung ist der DISC-Ansatz von zweiter Ordnung mathematisch genau. Die Konstruktion von Diskretisierungsschemata mit formaler Genauigkeit von dritter Ordnung ist unter Verwendung des CBC-Diagramms ebenfalls gänzlich unproblematisch. In der praktischen Anwendung jedoch verbessern derartige Ansätze die Rechengenauigkeit nicht wesentlich (Gaskell und Lau (1988)).

Neben der DISC-Interpolation sind im CBC-Diagramm in Abbildung 5.7 zwei weitere Diskretisierungsverfahren aufgeführt. Es handelt sich dabei um das ‘Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics’-Schema (QUICK) (Leonard (1979)) und das ‘Monotonized Linear Upwind’-Schema (MLU) (Noll (1992)).

Der QUICK-Ansatz ist formal von dritter Ordnung genau, die zugehörige Funktion für  $\hat{\phi}_i$  liegt jedoch über weite Strecken außerhalb der Grenzen numerischer Stabilität.

$$\hat{\phi}_i^{QUICK} = \frac{3}{4}\hat{\phi}_P + \frac{3}{8} \quad (5.29)$$

Der Überlagerungsparameter  $\alpha(\hat{\phi}_P)$ , der zur Konstruktion der QUICK-Interpolation aus Upwind- und CD-Anteilen verwendet wird, kommt ohne Fallunterscheidungen aus.

$$\alpha^{QUICK}(\hat{\phi}_P) = \frac{3 - 2\hat{\phi}_P}{4 - 4\hat{\phi}_P} \quad (5.30)$$

Das MLU-Schema erreicht wie der DISC-Ansatz eine mathematische Genauigkeit zweiter Ordnung. Der dimensionslose Flächenwert  $\hat{\phi}_i$  verläßt das Stabilitätsgebiet nicht,

verläuft aber bei  $\hat{\phi}_P$ -Werten zwischen 0.75 und 1.0 an dessen Grenze.

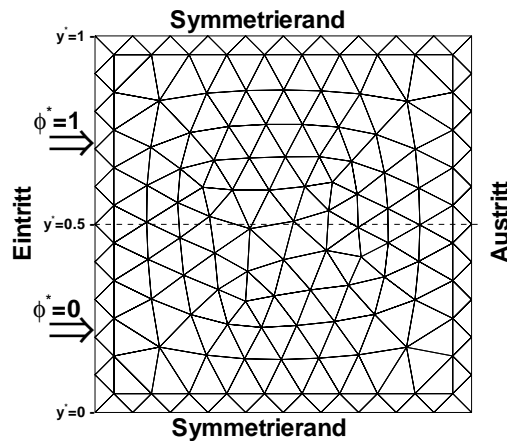
$$\hat{\phi}_i^{MLU} = \begin{cases} \hat{\phi}_P, & \hat{\phi}_P < 0 \\ 2\hat{\phi}_P, & 0 \leq \hat{\phi}_P \leq 0.25 \\ \hat{\phi}_P + \frac{1}{4}, & 0.25 < \hat{\phi}_P < 0.75 \\ 1.0, & 0.75 \leq \hat{\phi}_P \leq 1.0 \\ \hat{\phi}_P, & \hat{\phi}_P > 1.0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Passend zu den einzelnen Abschnitten der Funktion  $\hat{\phi}_i$  kann der Parameter  $\alpha(\hat{\phi}_P)$ , der den CD-Anteil der MLU-Interpolation festlegt, anhand von Fallunterscheidungen bestimmt werden.

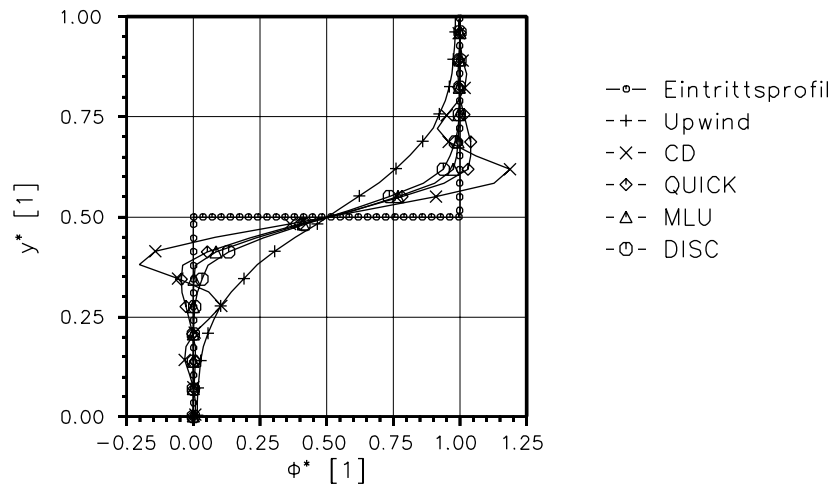
$$\alpha^{MLU}(\hat{\phi}_P) = \begin{cases} 0.0, & \hat{\phi}_P < 0 \\ \frac{2\hat{\phi}_P}{1 - \hat{\phi}_P}, & 0 \leq \hat{\phi}_P \leq 0.25 \\ \frac{1}{2 - 2\hat{\phi}_P}, & 0.25 < \hat{\phi}_P < 0.75 \\ 2.0, & 0.5 \leq \hat{\phi}_P \leq 1.0 \\ 0.0, & \hat{\phi}_P > 1.0 \end{cases} \quad (5.32)$$

Genauigkeit und numerisches Verhalten, das Upwind-, CD-, DISC-, QUICK- und MLU-Ansatz auf unstrukturierten Gittern zeigen, wurden mit einem einfachen, weitverbreiteten Test analysiert. Dabei wird ein Rechnetz einer diffusionsfreien Parallelströmung ausgesetzt, die einen streng konservativen passiven Skalar  $\phi^*$  mit stufenförmiger Wertebelastung am Eintritt ins Rechengebiet transportiert (Noll (1993)).

Das verwendete quadratische Testgitter mit 146 Stützstellen ist einschließlich Randbedingungen und Eintrittsbelastung in Abbildung 5.8 vorgestellt. Da nur Konvektionsterme wirksam sind, erlauben Veränderungen, die das  $\phi^*$ -Profil bis zum Austrittsrand erfährt, Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Diskretisierungsmethode. Es interessieren besonders die Empfindlichkeit gegenüber numerischer Diffusion infolge Schräganströmung von Bilanzelementen und die physikalische Beschränktheit der  $\phi^*$ -Lösung am



**Abb. 5.8:** Testgitter und Randbedingungen



**Abb. 5.9:** Eintritsbelegung und berechnete Austrittsprofile von  $\phi^*$

Austritt. Auf ein Anstellen des Netzes kann hier verzichtet werden, da in unstrukturierten Gittern im allgemeinen keine Vorzugsrichtung existiert, so daß alle Bilanzelemente schräg angeströmt werden.

Eintritsbelegung und die mit den verschiedenen Interpolationsverfahren berechneten Austrittsprofile von  $\phi^*$  sind in Abbildung 5.9 vergleichend aufgenommen. Bei allen fünf Methoden wird der am Eintritt aufgeprägte unstetige Übergang der  $\phi^*$ -Werte von 0 auf 1 infolge numerischer Diffusion durch Fehlanströmung von Gitterzellen im Rechenggebiet am Austritt als stetiger Anstieg wiedergegeben. Der Upwind-Ansatz liefert die Kurve geringster Steigung und hat folglich die stärkste Genauigkeitseinbuße erlitten. Die physikalische Beschränktheit dagegen bleibt gewahrt, was gemäß der Darstellung im CBC-Diagramm zu erwarten war. Im Unterschied dazu zeigen CD- und QUICK-Werte zwar sehr steile Anstiege am Übergang, verlassen jedoch jeweils beiderseits der Stufe den physikalisch sinnvollen Wertebereich. DISC- und MLU-Ansatz führen beide zu relativ steil ansteigenden Profilen, ohne daß ein Überschwingen der Lösung auftritt. Dabei weist die MLU-Interpolation eine geringfügig höhere Genauigkeit auf.

In der Praxis ist die Upwind-Interpolation für konvektionsdominierte Strömungsgrößen, wie beispielsweise bei turbomaschinentypischen Anwendungen die Geschwindigkeitskomponenten, auf unstrukturierten Gittern unbrauchbar. Numerische Diffusion verursacht hier in Verbindung mit polygonalen Gitterzellen untolerierbar hohe Diskretisierungsfehler, die selbst extreme Netzverdichtung nicht mehr kompensieren kann. Heftige Oszillationen schließen die CD-Methode vom weiteren Einsatz aus. MLU- und QUICK-Verfahren sind ebenfalls mit Konvergenzproblemen behaftet, die sich auf starke Annäherung an die Stabilitätsgrenze bzw. deren Überschreiten sowie möglicherweise die Bestimmung von  $\phi_{I,up}$  mittels Taylor-Entwicklung zurückführen lassen. Damit verbleibt als Methode der Wahl auf unstrukturierten Rechennetzen die neuentwickelte DISC-Interpolation, die hohe Genauigkeit durchweg mit numerischer Stabilität und gutmütigem Konvergenzverhalten verbindet (vgl. Kapitel 7 und 8).

### 5.2.2 Diffusionsterme

Um die Diffusionsterme  $\epsilon_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i A_i$  zu diskretisieren, müssen die Richtungsableitungen  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  an den Kontrollflächen  $i$  der Bilanzelemente formuliert werden. Dies geschieht jeweils mittels der an beiden Nachbarknoten der Fläche vorliegenden Werten  $\phi_P$  und  $\phi_I$  der Transportvariablen und dem Abstand  $\Delta_{PI}$  dieser Knoten.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\phi_I - \phi_P}{\Delta n} = \frac{(\phi_I - \phi_P) \cdot \cos \varphi}{\Delta_{PI}} \quad (5.33)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Normale  $\vec{n}$  der Kontrollfläche  $A_i$  gegenüber der Strecke  $PI$  im allgemeinen um einen Winkel  $\varphi$  verkippt ist. Wie in Abbildung 5.10 skizziert, ergibt sich der gesuchte Abstand  $\Delta n$  in Normalenrichtung, indem  $\Delta_{PI}$  durch den Kosinus dieses Winkels dividiert wird. Das führt auf einen stets positiven, zweiter Ordnung genau diskretisierten diffusiven Anteil  $a_{i,diff}$  des Transportkoeffizienten  $a_i$ .

$$a_{i,diff} = \frac{\epsilon_i A_i \cos \varphi}{\Delta_{PI}} \quad (5.34)$$

Die hier für  $a_{i,diff}$  gewählte Diskretisierung basiert auf einer lokal eindimensionalen Betrachtung des diffusiven Austausches über die Kontrollfläche  $A_i$ . Sie setzt voraus, daß Diffusion zwischen den Knoten  $P$  und  $I$  nur über den Flächenanteil  $A_i \cos \varphi$  senkrecht zur Strecke  $PI$  stattfindet.

Im Falle turbulenter Strömungen wird eine Aufspaltung des Austauschkoeffizienten  $\epsilon_i$  in einen laminaren Anteil  $\epsilon_{i,l}$  und einen turbulenten Anteil  $\epsilon_{i,t}$  vorgenommen. Im turbulenten Term ist mit Hilfe des Wirbelviskositätsprinzips ein zusätzlicher Austausch infolge der turbulenten Schwankungsbewegung berücksichtigt. Für beliebige Transportgrößen  $\phi$  ergeben sich Werte von  $\epsilon_i$  mittels entsprechender dimensionsloser Kennzahlen  $C_l$  und  $C_t$  aus molekularer bzw. laminarer Viskosität  $\mu_l$  und Wirbelviskosität

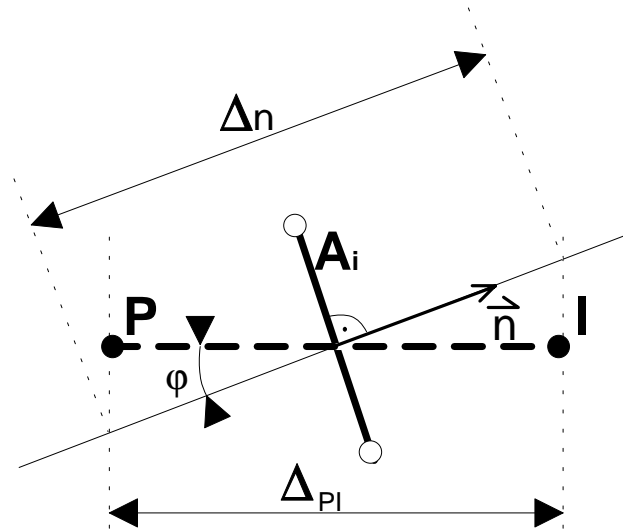


Abb. 5.10: Geometrische Verhältnisse an einer Kontrollfläche

$\mu_t$ , die den diffusiven Impulstransport regeln.

$$\rho_t \phi = \rho_l \phi_l + \rho_t \phi_t = \frac{\mu_l}{C_l} + \frac{\mu_t}{C_t} \quad (5.35)$$

Im Falle des Wärmetransportes entsprechen die genannten Konstanten den Prandtl-Zahlen  $Pr_l$  und  $Pr_t$ .

### 5.2.3 Quellterme

Zur Diskretisierung der Quellterme  $S_\phi$  wird eine Aufspaltung in einen konstanten Anteil  $S_C$  sowie einen proportionalen, linear von der Transportgröße  $\phi$  abhängenden Beitrag  $S_P$  vorgenommen.

$$S_\phi = S_C + S_P \phi_P, \quad S_P \leq 0 \quad (5.36)$$

Die Differenzgleichungen für alle Bilanzelemente eines Rechengitters ergeben ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix  $A$  und rechter Seite  $\vec{b}$ . Der proportionale Quellterm  $S_P$ , dessen Wert stets kleiner oder gleich Null ist, liefert einen zusätzlichen, positiven Beitrag zum Zentralkoeffizienten  $a_P$  und damit zur Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix. Auf diese Weise verstärkt  $S_P$  die Diagonaldominanz dieser Matrix, die so numerisch günstigere Eigenschaften annimmt. Der konstante Ausdruck  $S_C$  bildet zusammen mit einem Term  $S_{HOS}$ , der bei einer höherwertigen Diskretisierung des konvektiven Austausches auftritt, die rechte Seite  $\vec{b}$  des Gleichungssystems (vgl. Kapitel 5.2 und 5.2.1).

### 5.2.4 Randbedingungen

Bei der numerischen Untersuchung von Strömungsproblemen werden reale Konfigurationen auf ein Rechengitter endlicher Ausdehnung abgebildet. Die Grenzen des Rechengbietes sind in diesem Gitter durch unterschiedliche Typen von Berandungen vorgegeben. Im einfachsten Fall, beispielsweise in einer Kanalströmung, sind das Strömungseintritt, feste Wände und Austritt. Speziell bei Kanalströmungen kann das Rechengbiet und damit der numerische Aufwand durch Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften reduziert werden. Dazu wird entlang der Kanalmittellinie eine Symmetrierandbedingung gesetzt.

Strömungen mit räumlich periodischer Struktur, etwa das Durchfließen eines Schaufelgitters, lassen sich ökonomisch bearbeiten, indem zyklische Randbedingungen verwendet werden. Dazu sind lediglich die periodischen Elemente, beim betrachteten Gitter nur eine einzige Schaufel, zu diskretisieren und die entsprechenden Berandungen zyklisch zu verknüpfen. Praktisch bedeutet dies, daß Fluidelemente, die das Rechengbiet durch einen zyklischen Rand verlassen, gleichzeitig an der durch Verknüpfung zugeordneten Gebietsgrenze wieder eintreten.

Konkrete Werte der Transportgrößen an Gebietsrändern werden größtenteils explizit durch Randbedingungen vorgegeben, die sich an den realen physikalischen Gegebenheiten orientieren. Die Vorgabe bestimmter Randwerte stellt unter anderem die Eindeutigkeit einer numerischen Berechnungsaufgabe sicher.

Grundsätzlich wird bei Strömungsproblemen zwischen von Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen unterschieden. Bei letzterer werden bekannte Werte von  $\phi$  gesetzt,



so zum Beispiel der Wert Null für die Geschwindigkeiten an festen Wänden unter der Voraussetzung reibungsbehafteter Strömung ('Haftbedingung'). Die von Neumann-Randbedingung legt die Änderung  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  von Strömungsgrößen senkrecht zum Rand fest, etwa eine beschleunigungsfreie Strömung an Austrittsrändern.

Um den besonderen physikalischen und numerischen Verhältnissen an den Gebietsrändern Rechnung zu tragen, müssen für die Randzellen eines Rechenetzes oftmals die Diskretisierungsgleichungen selbst modifiziert werden. So erzwingt an Austrittsrändern das Löschen der Transportkoeffizienten  $a_i$ , d.h. des diffusiven und konvektiven Austausches, das dort angestrebte parabolische Verhalten der Strömung.

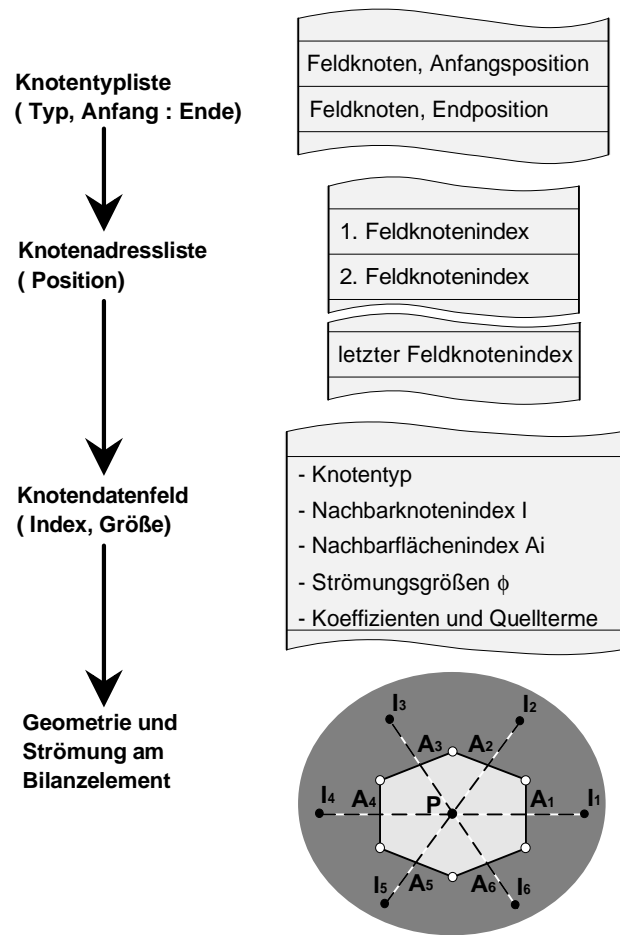
Die Existenz unterschiedlicher Berandungstypen im Rechengebiet erfordert während der numerischen Behandlung eines Problems den Wechsel zwischen verschiedenen Bearbeitungsalgorithmen. Um diese Fallunterscheidungen effizient zu bewältigen, ist ganz besonders auf unstrukturierten Gittern eine sorgfältig abgestimmte Organisation physikalischer, geometrischer und logischer Daten Grundvoraussetzung.

### 5.3 Datenstruktur

Beim hier vorgestellten Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Netzen werden die benötigten Rechendaten mit wenigen Ausnahmen entweder den Gitterknoten oder den Kontrollflächen zugeordnet. Während beispielsweise die Werte der berechneten Strömungsgrößen an den Knoten abgelegt sind, werden die konvektiven und diffusiven Flüsse an den Durchtrittsflächen zwischen den Gitterzellen gespeichert. Dieses Vorgehen läßt es zu, an den äußeren Grenzflächen des Rechengebietes Wandreibungsterme und zyklische Verknüpfungen implizit zu bearbeiten.

Sowohl Gitterknoten als auch Kontrollflächen sind fortlaufend eindimensional indiziert. Der Zugriff auf physikalische, geometrische und logische Daten an diesen Elementen erfolgt über den entsprechenden Elementindex. Innerhalb der beiden Datengruppen werden, je nach Lage der Elemente im Gitterinneren, in unmittelbarer Nachbarschaft einer Berandung oder direkt auf einem Rand, acht verschiedene Knoten- bzw. Flächentypen unterschieden. Dabei handelt es sich um Feldelemente im Gebietsinneren, Randelemente an einem Gebietsrand sowie zyklische, zyklisch zugeordnete, Wand-, Symmetrie-, Eintritts- und Austrittselemente auf den gleichlautend deklarierten Grenzen des Rechengebietes.

Abbildung 5.11 liefert am Beispiel der Feldknoten eine schematische Darstellung von Hierarchie und Organisation der Daten im Rechenverfahren. Gemäß der vorgestellten Typisierung geordnet, sind alle Elementindizes in geschlossener Folge in Knoten- bzw. Flächenadresslisten einsortiert. Zwei Typlisten mit je zweimal acht Einträgen weisen auf die erste und letzte Position eines Elementtyps in den beiden Adresslisten. Der Zugriff auf die Elemente des gewählten Typs erfolgt in einer Schleife, die zwischen diesen Positionen sämtliche Einträge der Adressliste abschreitet. Auf diese Weise können die verschiedenen Elementtypen in jeweils speziell abgestimmten Programmsequenzen einheitlich bearbeitet werden. Dadurch sind nur wenige logische Abfragen erforderlich, so daß sich kurze Bearbeitungszeiten ergeben.



**Abb. 5.11:** Datenstruktur am Beispiel des Feldknotentyps

Die relativ lose Ordnung der Gitterzellen in unstrukturierten Netzen macht es unmöglich, die direkten Nachbarn eines Bilanzelementes direkt über dessen Index zu bestimmen. Aus diesem Grund ist es notwendig, für alle Kontrollvolumen die Indizes ihrer Nachbarknoten bzw. Nachbarlemente zu speichern. Mit jedem dieser Nachbarn ist eine gemeinsame Kontrollfläche vorhanden, deren Adresse ebenfalls am Knoten abgelegt wird. Die Flächen ihrerseits verfügen über die Indizes der dort aneinandertreffenden Gitterzellen. Für den Speicherbedarf, den diese indirekte Adressierung der Nachbarknoten erfordert, ist durch die maximal auftretende Anzahl an Nachbarn, die in der Regel weniger als zehn beträgt, eine obere Grenze festgelegt.

Der Vorteil der realisierten Element- und Indexverwaltung liegt in ihrer hohen Flexibilität. Sie macht es möglich, vorhandene Rechennetze durch Einfügen oder Löschen von Gitterelementen auf unkomplizierte Weise zu modifizieren. Dadurch ist eine wesentliche Voraussetzung für die nachträgliche Anpassung der räumlichen Diskretisierung an das jeweils bearbeitete Strömungsproblem geschaffen. Die Organisation der Daten erlaubt es ferner, alle benötigten Randbedingungen einfach, direkt und rechenzeitoptimal zu formulieren. So werden beispielsweise zyklische Verknüpfungen im Rechenggebiet implizit behandelt. Außerdem können große lineare Gleichungssysteme, wie sie aus der Diskretisierung der Transportgleichungen typischerweise resultieren, mit leistungsfähigen

gen iterativen Algorithmen implizit gelöst werden, da die notwendigen Matrix-Vektor-Operationen effizient kodierbar sind. Die implementierte Datenstruktur leistet damit einen wichtigen Beitrag zur Rechenzeitökonomie der gesamten numerischen Methode.

#### 5.4 Lösung linearer Gleichungssysteme

Die Grundgleichungen, die gemeinsam mit den Randbedingungen die Lösung eines Strömungsproblems festlegen, sind nichtlinear und gekoppelt. Sie werden im Zuge der Diskretisierung auf einem Rechnernetz linearisiert. Um Nichtlinearitäten und Koppelungen der Gleichungen zu berücksichtigen, müssen die einzelnen linearen Gleichungssysteme (LGS) in einer äußeren Schleife nacheinander durchlaufen und berechnet werden. Diese Blockiteration ist für stationäre Probleme solange fortzusetzen, bis die Transportvariablen  $\phi$ , die Transportkoeffizienten  $a_i$  und die rechten Seiten  $b$  der Diskretisierungsgleichungen konstante Werte annehmen, und das Berechnungsergebnis sich somit nicht mehr ändert. Zur Stabilisierung der gesamten Prozedur wird der Lösungsfortschritt je äußerer Iteration im allgemeinen durch Relaxieren gedämpft.

Der Algorithmus, der zur Lösung der großen LGS eingesetzt wird, ist das Herz jeden CFD-Codes. Er bestimmt zu einem großen Teil über den erforderlichen numerischen Aufwand sowie über den Charakter der während des iterativen Prozesses berechneten Zwischenlösungen von  $\vec{\phi}$ . Die spezifischen Eigenarten dieser Lösungen beeinflussen entscheidend die Robustheit und die Konvergenzeigenschaften des gesamten numerischen Verfahrens.

Gesucht ist also eine möglichst schnelle, stabile und einfache Methode zur Berechnung der Lösung eines LGS folgender Form:

$$A \cdot \vec{\phi} = \vec{b} . \quad (5.37)$$

Eine naheliegende Lösungsstrategie führt über die inverse Koeffizientenmatrix  $A^{-1}$ .

$$\vec{\phi} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (5.38)$$

Direkte implizite Lösungsverfahren, wie etwa die Gauß-Elimination, verfolgen diesen Ansatz. Dabei ergibt sich, trotz schwach besetzter Koeffizientenmatrix  $A$ , im allgemeinen eine vollbesetzte invertierte Matrix  $A^{-1}$ , deren Einträge auch gespeichert werden müssen. Für ein System mit  $m$  Gleichungen bzw. Unbekannten führt das auf  $m^2$  Matrixelemente, was selbst die Speicherkapazität großer Rechner schnell überfordert. Da zudem der Rechenaufwand proportional  $m^3$  wächst, sind ab einer gewissen Problemgröße nur noch iterative Algorithmen ökonomisch einsetzbar (Gottwald et al. (1995)).

Einfache punktiterative Methoden vom Jacobi Typ durchlaufen mehrfach alle Zeilen eines Gleichungssystems. Im  $n$ -ten Durchlauf ergibt sich ein neuer Wert  $\phi_i^n$  am betrachteten Knoten  $i$  aus den Werten  $\phi_j^{n-1}$  des vorangegangenen Durchgangs an sämtlichen Nachbarknoten  $j$ . Der Basisalgorithmus arbeitet mit einem internen Dämpfungsparameter  $\alpha$  von 1.0, also ohne innere Dämpfung.

$$\phi_i^n = (1 - \alpha) \phi_i^{n-1} - \frac{\alpha}{a_{i,i}} \left\{ \sum_j a_{i,j} \phi_j^{n-1} - b_i \right\} \quad (5.39)$$

Modifikationen dieser Grundidee, etwa ein sofortiges Aktualisieren des Lösungsvektors  $\vec{\phi}$  beim Gauß-Seidel-Verfahren oder zusätzlich eine Überlagerung alter und neuer Lösungswerte mit Hilfe des internen Dämpfungsfaktors  $\alpha$  ( $0.0 < \alpha \leq 2.0$ ) beim SOR-Verfahren, verbessern das Konvergenzverhalten des Algorithmus während dem Berechnen der einzelnen Gleichungssysteme. Zur Stabilisierung der gesamten Blockiteration wird in der äußeren Schleife eine zweite externe Dämpfung der Ergebnisse vorgenommen.

Aufgrund der punkweisen, expliziten Vorgehensweise von Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren ist nur ein verhältnismäßig schleppender Lösungsfortschritt zu erwarten, zumal ein optimaler Wert für den internen Dämpfungsparameter  $\alpha$  nicht auf einfache Weise ermittelt werden kann. Die Anzahl der insgesamt notwendigen Operationen wächst mit  $m^2$  bei der Gauß-Seidel- und  $m^{\frac{3}{2}}$  bei der SOR-Methode. Um den Lösungsvektor  $\vec{\phi}$  mit guter Genauigkeit zu berechnen, sind daher für große Systeme in der Regel sehr viele Durchläufe bzw. innere Iterationen des Gleichungslösers erforderlich (Sonneveld et al. (1985), Hackbusch (1993), Gottwald et al. (1995)).

Implizite iterative Lösungsverfahren, die nach dem Prinzip der konjugierten Gradienten (CG) oder konjugierten Residuen (CR) vorgehen, sind frei von internen Optimierungsparametern. Sie bestimmen, jeweils über die Zwischenlösung  $\vec{\phi}^{n-1}$  der vorangegangenen inneren Iteration, Residuenvektoren  $\vec{r}^n$ , mit deren Hilfe konjugierte Vektoren erzeugt und zur gesuchten Lösung des LGS überlagert werden. Rein formal wird so eine quadratische Funktion  $F(\vec{\phi}^n)$  minimiert, deren kleinster Wert mit dem exakten Lösungsvektor  $\vec{\phi}$  erreicht ist. Der Residuenvektor  $\vec{r}^n$  entspricht in jedem Schritt  $n$  dem negativen Gradienten von  $F(\vec{\phi}^n)$  und gibt die Richtung des steilsten Abstiegs zum Minimum vor.

$$\vec{r}^n = \vec{b} - A \cdot \vec{\phi}^{n-1} \quad (5.40)$$

CG- und CR-Methoden können auch als direkte Lösungsverfahren betrachtet werden, denn um die exakte Lösung  $\vec{\phi}$  eines LGS mit  $m$  Unbekannten darzustellen, sind theoretisch  $m$  unabhängige Vektoren notwendig. Ein derart hoher Rechenaufwand ist in den meisten praktischen Fällen nicht zweckmäßig, da oft schon nach wenigen inneren Iterationen eine genügend genaue Näherung  $\vec{\phi}^n$  der Lösung vorliegt (Elman (1982)). Die erreichte Genauigkeit wird dabei anhand einer Norm des Residuenvektors  $\vec{r}^n$ , die auf eine geeignete Größe  $K$  bezogen ist, beurteilt. Sinnvolle Bezugsgrößen  $K$  sind beispielsweise mittlere Eintrittswerte der entsprechenden Variablen  $\phi$ . Im allgemeinen wird ein Lösungsvektor  $\vec{\phi}^n$  akzeptiert, sobald das normierte Residuum ein Referenzresiduum  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  unterschreitet.

$$\frac{\|\vec{r}^n\|_1}{K} \leq 5 \cdot 10^{-3} = Res_{ref} \quad (5.41)$$

Für die behandelten Probleme führt das blockiterative Vorgehen vor allem zu Beginn des Rechengangs auf sehr hohe Residuen. Um unnötigen Aufwand zu vermeiden, wird deshalb zusätzlich eine Reduzierung der Eingangsresiduennorm  $\|\vec{r}^0\|_1$  um mehr als zwei Größenordnungen überprüft.

$$\frac{\|\vec{r}^n\|_1}{\|\vec{r}^0\|_1} \leq 10^{-2} \quad (5.42)$$

Problematisch an diesem Vorgehen ist die Tatsache, daß nicht das Residuum  $\vec{r}^n$ , sondern vielmehr der Fehlervektor  $\vec{e}^n$  die Rechengenauigkeit anzeigt. Dieser ist mit dem

Residuenvektor über die unbekannte Inverse  $A^{-1}$  der Koeffizientenmatrix verknüpft.

$$\vec{e}^n = \vec{\phi} - \vec{\phi}^n = A^{-1} \cdot \vec{r}^n \quad (5.43)$$

Bei schlechter Kondition von  $A$ , d.h. hohem Verhältnis von maximalem zu minimalem Eigenwert der Matrix, kann deshalb trotz niedrigem Residuum ein großer Fehler vorliegen. In kritischen Fällen muß deshalb beobachtet werden, wie stark  $\vec{\phi}^n$  auf eine Verringerung des Referenzresiduums reagiert.

Bei Einsatz von CG- und CR-Verfahren in ihrer Grundversion steigt die Anzahl der für eine hinreichend genaue Darstellung  $\vec{\phi}^n$  der exakten Lösung  $\vec{\phi}$  benötigten Basisvektoren mit der Größe des LGS, also der Anzahl  $m$  der Unbekannten. Konkret nimmt der erforderliche numerische Aufwand proportional  $m^{\frac{3}{2}}$  zu. Erweiterte Algorithmen nutzen deshalb Näherungen  $M^{-1}$  der inversen Koeffizientenmatrix  $A^{-1}$  zur Präkonditionierung. Dadurch verringert sich die Zahl der Löseriterationen deutlich und wird nahezu unabhängig von der Größe des bearbeiteten Systems. Der Lösungsaufwand wächst dann lediglich noch mit  $m^{\frac{5}{4}}$  (Elman (1982), Sonneveld et al. (1985)).

Die Matrix  $A$  läßt sich auf einfache Weise invertieren, wenn sie vorher in untere und obere Dreiecksmatrizen  $L$  ('lower') und  $U$  ('upper') zerlegt wurde.

$$A = L \cdot U \quad (5.44)$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad (5.45)$$

Eine solche Dreiecks- oder LU-Zerlegung ist analytisch vorgegeben.

$$s_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{\min(i,j)-1} l_{i,k} \cdot u_{k,j}, \quad i = 1, m, \quad j = 1, m \quad (5.46)$$

$$j \leq i : l_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{l_{i,i}}$$

$$j \geq i : u_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{l_{i,i}}$$

Die so definierte vollständige Zerlegung ist zeit- und speicherintensiv, da hier, trotz schwachbesetzter Koeffizientenmatrix  $A$ , in der Regel vollbesetzte Dreiecksmatrizen generiert werden. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, wird deshalb mit Approximationen  $M$  und  $M^{-1}$  gearbeitet.

$$M \approx A \quad (5.47)$$

$$M = L \cdot U \quad (5.48)$$

$$M^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad (5.49)$$

Derartige unvollständige Dreiecks- oder 'incomplete' LU-Zerlegungen (ILU) ergeben sich zum Beispiel, indem für die Matrix  $M$  die Besetzungsstruktur der Originalmatrix  $A$  gewahrt wird (Elman (1982)).

$$a_{i,j} = 0.0 ; \quad s_{i,j} = 0.0 \quad (5.50)$$

Weitere gängige Vereinfachungen bestehen im Vernachlässigen innerer Produkte  $l_{i,k} \cdot u_{k,j}$  bei vorhandenen Einträgen  $s_{i,j}$ . Eine sehr einfache Form der ILU-Zerlegung ergibt sich

bei Wegfall aller dieser Produkte (Meijerink und Van der Vorst (1981)). Sie wird im folgenden als reduzierte Zerlegung (rILU) bezeichnet.

$$\begin{aligned} a_{i,j} \neq 0.0 ; \quad j \leq i : \quad l_{i,j} &= \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \\ j \geq i : \quad u_{i,j} &= \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Speziell auf unstrukturierten Gittern bietet die rILU-Zerlegung enorme Vorteile, da sie den Rechenaufwand beim Ermitteln von  $M$  vom Numerierungsschema des Rechengitters entkoppelt. Praktische Erfahrungen zeigen, daß gute Konvergenz erreicht wird, solange  $A$  und damit  $M$  annähernd symmetrisch besetzt sind. Symmetrische Besetzung bedeutet, daß für jede Matrixzeile die Anzahl der Einträge  $a_{i,j}$  links und rechts der Hauptdiagonalen bzw. in  $L$ - und  $U$ -Matrix übereinstimmen.

Die Verwendung einer ILU-Zerlegung in einem Verfahren zur iterativen Lösung von LGS wird häufig als ILU-Präkonditionierung bezeichnet. Ein weiteres Mittel, um die Kondition der Systeme zu verbessern und so den numerischen Aufwand zu senken, ist die diagonale Präkonditionierung, die auch als Normalisierung bzw. Skalierung bezeichnet wird. Dabei werden Matrixeinträge  $a_{i,j}$  und rechte Seite  $b_i$  der Gleichungen beispielsweise mit dem Betrag des Hauptdiagonalelementes  $a_{i,i}$  oder der Summe aller Koeffizientenbeträge der jeweiligen Zeile normiert (Schönauer (1987)). In Verbindung mit den untersuchten CG- und CR-Algorithmen ist diese Normierung nur von Nutzen, solange auf eine zusätzliche ILU-Zerlegung verzichtet wird. Die Kombination beider Strategien hat teilweise fatale Folgen.

Die bereits angesprochene externe Dämpfung des berechneten Lösungsvektors  $\vec{\phi}^n$  mittels Relaxation wird auch bei impliziten Verfahren praktiziert. Sie kann schon während der Aufstellung der Gleichungssysteme berücksichtigt werden. Dazu müssen der gewünschte Relaxationsfaktor  $\alpha$  und die vor einer Neuberechnung des LGS vorliegenden 'alten' Lösungswerte  $\phi^0$  verfügbar sein.

$$\frac{1}{\alpha} \cdot a_P \phi_P^n - \sum_i a_i \phi_{I,i}^n = b + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot a_P \phi_P^0 \quad (5.52)$$

Für Werte von  $\alpha$  unter 1.0 vergrößern sich die Zentralkoeffizienten  $a_P$  der einzelnen Gleichungen, so daß die Diagonaldominanz der Matrix  $A$  zunimmt und ihre Kondition günstiger wird. Diese besondere Technik der Relaxation kann deshalb gleichfalls als eine Art Präkonditionierung betrachtet werden (Noll (1992)).

Die Konvergenzbeschleunigung beim Lösen einzelner LGS ist lediglich ein Nebeneffekt der Relaxation der diskretisierten Transportgleichungen. Die eigentliche Motivation des Relaxierens liegt in der Verbesserung des Stabilitäts- und Konvergenzverhaltens der gesamten blockiterativen Prozedur. Diese Wirkung resultiert aus der Dämpfung der für einzelne Systeme Neuberechneten Lösungen  $\vec{\phi}^n$ . Sie verhindert eine Entkopplung von Transportkoeffizienten  $a_i(\phi)$  und Transportvariablen  $\phi$ , die bei zu starkem Lösungsfortschritt infolge der Nichtlinearität der zugrundeliegenden Gleichungen sehr leicht auftreten kann.

Bei Verwendung von Transportgleichungen in ihrer stationären Form entspricht das Relaxieren der Einführung eines zusätzlichen instationären Terms. Die Größe der Pseudozeitschritte ergibt sich individuell für jede Gitterzelle und wird durch den gewählten Relaxationsfaktor  $\alpha(\phi)$  beeinflusst (Van Doormaal (1984)).

LGS	$M$ -Matrix	ILU-CG	CGS	BiCGSTAB	GCR(1)	QMR	QMRCGSTAB
$u(n = 5)$	-	48	26	18	37	26	21
	ILU	7	2	1	6	-	2
	rILU	7	2	2	9	-	2
$u(n = 200)$	-	315	31	15	39	33	17
	ILU	5	2	2	6	-	2
	rILU	6	2	2	8	-	2
$p'(n = 5)$	-	125	198	94	125	205	101
	ILU	13	8	8	23	-	9
	rILU	20	12	12	33	-	14
$p'(n = 200)$	-	36	30	26	36	27	32
	ILU	8	5	5	18	-	6
	rILU	12	8	8	27	-	10

**Tab. 5.1:** Iterationsaufwand für verschiedene Testprobleme und Löser

Als implizite, iterative Gleichungslöser wurden ein Standard-CG-Verfahren (ILU-CG) (Noll und Wittig (1991)) sowie ‘Conjugate Gradient Squared’- (CGS) (Sonneveld und Wesseling (1985)), ‘Bi-Conjugate Gradient Stabilized’- (BiCGSTAB) (Van der Vorst (1992)), ‘Generalized Conjugate Residual (1)’- (GCR(1)) (Elman (1982)), ‘Quasi Minimal Residual’- (QMR) (Freund und Nachtigal (1994)) und ‘Quasi Minimal Residual Conjugate Gradient Stabilized’-Algorithmus (QMRCGSTAB) (Chan et al. (1994)) in Kombination mit ILU- und rILU-Zerlegung erprobt. Dazu fand eine Bewertung von Rechenaufwand und Konvergenzverhalten der unterschiedlichen Lösungsmethoden anhand von vier Testgleichungen statt. Hierbei wurden lineare Gleichungssysteme für die Geschwindigkeitskomponente  $u$  mit unsymmetrischer Koeffizientenmatrix und die Druckkorrektur  $p'$  mit symmetrischer Matrix verwendet. Diese Systeme stammten aus der Diskretisierung von Impulserhaltung und Druckkorrekturgleichung für eine laminare Spaltströmung (vgl. Kapitel 6.1 und 6.2). Sie wurden jeweils nach 5 und 200 Blockiterationen aus der numerischen Lösungsprozedur, die in diesem Fall einen direkten Gleichungslöser nutzte, ausgekoppelt. Zur räumlichen Diskretisierung diente ein unstrukturiertes Gitter mit ca. 1000 Bilanzelementen. Abbruchkriterium bei der Berechnung der Gleichungen war das Unterschreiten eines Referenzresiduums  $Res_{ref}$  von  $10^{-5}$ . Tabelle 5.1 faßt die Ergebnisse der numerischen Tests in Form der jeweils bis zum Erreichen der Abbruchbedingung benötigten Löseriterationen zusammen.

Im Rahmen der Erprobung zeigte sich, daß die Lösung der symmetrischen Druckkorrekturgleichung  $p'$  vor allem zu Beginn des blockiterativen Prozesses erheblich größere Schwierigkeiten bereitet, als die Impulsgleichung  $u$  mit unsymmetrischer Koeffizientenmatrix. Die Verwendung von ILU- oder rILU-Zerlegung reduziert die Anzahl der benötigten Löseriterationen in allen Fällen. Dabei sinkt der numerische Aufwand für CG-Löser und unsymmetrische Matrizen etwas stärker, als bei symmetrischen Problemen und CR-Methodik. Auf eine Vereinfachung der Zerlegung reagieren CG-Verfahren weniger empfindlich, als die überprüften CR-Algorithmen.

Unter den vergleichsweise einfach aufgebauten ILU-CG, CGS- und GCR(1)-Lösern wies der CGS-Algorithmus das günstigste Iterationsverhalten auf. Er wurde deshalb im

neuen numerischen Berechnungsverfahren implementiert. Bei der blockiterativen Behandlung vollständiger Strömungsprobleme waren jedoch teilweise starke Schwankungen der Residuen verbunden mit einer hohen Anzahl an notwendigen Blockiterationen zu beobachten. Van der Vorst (1992), Nachtigal et al. (1992) und Freund (1993) berichten ebenfalls von einem ungleichmäßigen Konvergenzverlauf der CGS-Methode. Zur Beseitigung solcher unerwünschter Oszillationen schlägt Schönauer (1987) eine spezielle nachträgliche Glättung von Residuum  $\vec{r}^n$  und Lösungsvektor  $\vec{\phi}^n$  vor. Für das vorgestellte numerische Verfahren war diese Maßnahme in einigen Fällen erfolgreich, während sie bei anderen Strömungsproblemen wirkungslos blieb oder sogar den Lösungsfortschritt hemmte.

Ein gegenüber dem CGS-Verfahren sehr viel vorteilhafterer Lösungs- und Residuenverlauf mit deutlich reduzierter Anzahl an Löser- und Blockiterationen ergab sich mit dem BiCGSTAB-Algorithmus. Der Preis dafür ist ein höherer numerischer Aufwand pro innerer Iteration, der jedoch im Hinblick auf Stabilität und Funktionssicherheit des Gesamtverfahrens in Kauf genommen wurde. Glücklicherweise wird diese Mehrarbeit im Löser bei den meisten Problemen durch die rasche Konvergenz der äußeren Iteration mehr als ausgeglichen.

Das relativ komplexe QMR-Verfahren schied aufgrund nur durchschnittlicher Leistungen bereits während der Vortests aus. Nach einem direkten Vergleich mit der BiCGSTAB-Methode geben auch Lin et al. (1995) letzterer den Vorzug. Ein vorbildliches Konvergenzverhalten sowohl bei Einzelproblemen wie auch als Bestandteil der vollständigen blockiterativen Prozedur wies dagegen der QMRCGSTAB-Algorithmus auf. Selbst diese Methode wird jedoch vom BiCGSTAB-Verfahren noch geringfügig übertroffen.

Aufgrund der positiven praktischen Erfahrungen hat der BiCGSTAB-Algorithmus den zunächst verwendeten CGS-Löser ersetzt. Die dabei gewählte Implementierung ist im folgenden wiedergegeben.

- Initialisierung

$$\begin{aligned}\vec{r}^0 &= \vec{b} - A \cdot \vec{\phi}^0 \\ \vec{p}^0 &= 0 \\ \vec{v}^0 &= 0 \\ \rho^0 &= (\vec{r}^0, \vec{r}^0) \\ \alpha &= \omega = 1.0, \quad \beta = 0.0\end{aligned}$$

- Iterationsschleife bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums

$$\begin{aligned}\vec{p}^n &= \vec{r}^{n-1} + \beta(\vec{p}^{n-1} - \omega \vec{v}^{n-1}) \\ \text{Löse } LU \cdot \vec{y} &= \vec{p}^n \rightarrow \vec{y} \\ \vec{v}^n &= A \cdot \vec{y} \\ \alpha &= \frac{\rho^{n-1}}{(\vec{r}^0, \vec{v}^n)} \\ \vec{\phi}^{n-\frac{1}{2}} &= \vec{\phi}^{n-1} + \alpha \vec{y}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{r}^{n-1} - \alpha \vec{v}^n \\ \text{Löse } LU \cdot \vec{z} &= \vec{s} \rightarrow L^{-1} \vec{s}, \vec{z} \\ \vec{t} &= A \cdot \vec{z} \\ \text{Löse } L \cdot \vec{x} &= \vec{t} \rightarrow L^{-1} \vec{t} \\ \omega &= \frac{(L^{-1} \vec{t}, L^{-1} \vec{s})}{(L^{-1} \vec{t}, L^{-1} \vec{t})} \\ \vec{\phi}^n &= \vec{\phi}^{n-\frac{1}{2}} + \omega \vec{z} \\ \vec{r}^n &= \vec{s} - \omega \vec{t} \end{aligned}$$

- Iterationsschleife verlassen falls  $\frac{\|\vec{r}^n\|_1}{K} \leq Res_{ref}$  oder  $\frac{\|\vec{r}^n\|_1}{\|\vec{r}^0\|_1} \leq 10^{-2}$

$$\begin{aligned} \rho^n &= -\omega (\vec{r}^0, \vec{t}) \\ \beta &= \frac{\alpha \rho^n}{\omega \rho^{n-1}} \end{aligned}$$

Die Berechnung der skalaren Größe  $\rho^n$  erfolgt gemäß einer von Van der Vorst (1992) vorgeschlagenen Alternative zum Grundalgorithmus, die in zahlreichen Anwendungen einen noch glatteren Residuenverlauf erzielte. Eine ebenfalls erprobte Vereinfachung des Ausdruckes für  $\omega$ , bei der die Vektoren  $L^{-1} \vec{s}$  und  $L^{-1} \vec{t}$  durch  $\vec{s}$  und  $\vec{t}$  ersetzt werden, setzt die Leistungsfähigkeit der Methode stark herab. Für einige der behandelten Strömungsprobleme sind daraufhin kaum noch Unterschiede zum CGS-Löser feststellbar.

Die benötigte Matrix  $M$  resultiert aus der zuvor beschriebenen, sehr einfachen und unaufwendigen rILU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix  $A$ , wobei  $D$ ,  $L'$  und  $U'$  die Hauptdiagonale, die strikte untere und die strikte obere Dreiecksmatrix von  $A$  bezeichnen.

$$M = L \cdot U = (D + L') \cdot D^{-1} \cdot (D + U') \quad (5.53)$$

Diese Form der Präkonditionierung wird von Meijerink und Van der Vorst (1981) für unstrukturierte Gitter empfohlen, ist jedoch auch bei strukturierten Netzen gebräuchlich (Papadrakakis und Bitoulas (1993)).

Nach Abschluß einer sorgfältigen Auswahl und Bewertung steht mit dem BiCGSTAB-Verfahren ein ungewöhnlich robuster und effizienter Algorithmus zur impliziten Lösung linearer Gleichungssysteme zur Verfügung. Einen entscheidenden Anteil an der Leistungsfähigkeit der Methode hat die speziell auf unstrukturierte Netze angepaßte rILU-Präkonditionierung. Anspruchsvolle Konfigurationen aus der Praxis der Turbomaschinen bewältigt der vorgeschlagene Gleichungslöser in akzeptabler Zeit und ohne Konvergenzprobleme (vgl. Kapitel 8).

## 5.5 Adaption der Rechengitter

Wesentliche Motivation für den Einsatz unstrukturierter Gitter ist neben ihrer Fähigkeit, beliebig geformte Strömungsgebiete zu vernetzen, die Möglichkeit bestehende Rechnetze nachträglich zu modifizieren. Dieser Vorteil wird hier in einem eigenständigen Netzmanipulationsprogramm, das auf Geometrie- und Lösungsdaten der jeweils

betrachteten Konfiguration zurückgreift, wahrgenommen. Damit können Rechenknoten hinzugefügt, gelöscht oder neu positioniert werden. Zahlreiche Optionen erlauben es dem Benutzer, die räumliche Diskretisierung manuell oder automatisch gezielt an ein berechnetes Strömungsfeld anzupassen. Auf diese Weise wird eine hohe Speicher- und Rechenzeitökonomie erreicht.

Gitteradaption kommt zum Einsatz, um lokal hohe Diskretisierungsfehler, wie sie beispielsweise bei grobem Netz in Rezirkulationsgebieten und entlang von Verdichtungsstößen auftreten, zu reduzieren. In Bereichen mit unnötig enger Diskretisierung lassen sich überschüssige Stützstellen fehlergesteuert entfernen. Ein weiterer Anwendungsfall ist die globale, gleichmäßige Verfeinerung oder Vergrößerung von Rechengittern.

Um bei Gittern mit stark inhomogener Verteilung der Stützstellen eine konstante Knotendichte zu erzielen, wird das Volumen bzw. im zweidimensionalen Fall die Fläche  $A$  der Bilanzelemente betrachtet. Das Einfügen oder Löschen von Gitterzellen erfolgt in der Umgebung der größten bzw. der kleinsten Elemente im Netz.

Zur Lokalisierung von Diskretisierungsfehlern im Vorfeld einer Netzadaption werden dimensionslose Gradienten der Strömungsgrößen  $\phi$ , die sich anhand der numerisch berechneten Lösung ermitteln lassen, analysiert. Für eine gezielte Verfeinerung in Grenzschichten und Strömungswirbeln hat sich ein dimensionsloser Geschwindigkeitsgradient  $P(u, v)$  bewährt.

$$P(u, v) = \left[ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \right] \cdot \frac{\sqrt{A}}{|\vec{w}|} \quad (5.54)$$

Werte von  $P(u, v)$  ergeben sich für alle Bilanzelemente im Gitterinneren aus den partiellen Ableitungen der Geschwindigkeit, dem Elementvolumen bzw. der -fläche  $A$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{w}$ . Werden die Produkte  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \sqrt{A}$  als Glieder erster Ordnung einer Taylor-Reihe betrachtet, so liefert  $P$  eine Abschätzung des lokalen relativen Diskretisierungsfehlers.

Als Indikator für Gitterbereiche mit starken Variationen im Druckfeld dient ein dimensionsloser Druckgradient  $P(p)$ .

$$P(p) = \left[ \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| \right] \cdot \frac{\sqrt{A}}{\frac{\rho}{2} |\vec{w}|^2 + p} \quad (5.55)$$

$P(p)$  wird aus den Ortsableitungen des Druckes, der Bilanzelementfläche  $A$  und dem lokalen Totaldruck berechnet. Wie die Anwendung zeigt, grenzt  $P(p)$  im Unterschied zu  $P(u, v)$  Gebiete hoher Druckänderung nur relativ unscharf von unkritischen Gitterbereichen ab. Um beispielsweise Verdichtungsstöße zu lokalisieren, ist das Produkt  $P(u, v) \cdot P(p)$  beider Parameter besser geeignet.

Eine Netzverfeinerung in der Umgebung derjenigen Gitterzellen, die maximale Werte von  $A$  bzw.  $P$  aufweisen, wird automatisch vorgenommen, nachdem der Anwender das Adaptionengebiet eingegrenzt und eine Höchstzahl zu überprüfender Zellen spezifiziert hat. Entsprechend findet eine Vergrößerung in der Nähe minimaler Parameterwerte statt. Neben der automatischen Adaption stehen zahlreiche Optionen für rein manuelle Netzmodifikationen zur Verfügung.

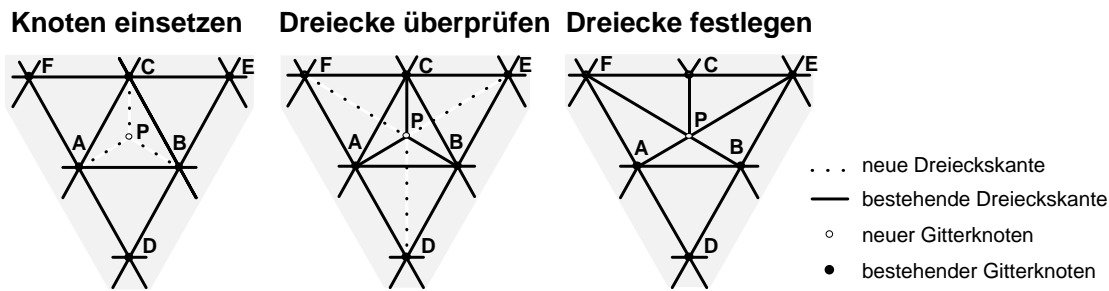


Abb. 5.12: Einfügen neuer Gitterknoten

Die räumliche Diskretisierung auf der Basis einer Triangulation des Strömungsgebietes erlaubt in Verbindung mit der schon beschriebenen Datenstruktur ein schnelles und direktes Vorgehen beim Einfügen und Löschen von Stützstellen. Wie Abbildung 5.12 zeigt, wird bei Gitterverfeinerung der neue Knoten  $P$  als Schwerpunkt des vorhandenen Dreiecks  $ABC$  eingeführt. Dadurch sind alle Nachbarn von  $P$  eindeutig bestimmt und Zugriffe auf erforderliche Daten einfach. Im nächsten Schritt ersetzen neue Verbindungen  $PD$ ,  $PE$  und  $PF$  die bestehenden Dreieckskanten  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$ , sofern dann weniger stark verzerrte Dreiecke entstehen. Im Anschluß daran werden die Nachbarschaftsverhältnisse aktualisiert und das Gitter geglättet.

Um ein Rechennetz lokal zu vergrößern, wird gemäß Abbildung 5.13, wie bei der Verfeinerung, zunächst ein neuer Knoten  $P$  eingefügt. Anschließend werden die drei Nachbarknoten  $A$ ,  $B$  und  $C$  gelöscht und deren Verbindungen mit den Stützstellen  $D$  bis  $M$  durch Verknüpfungen mit  $P$  ersetzt. Es folgt eine Überprüfung der neuen Kanten  $PD$  bis  $PM$ , die teilweise zum Ersatz durch geometrisch günstigere Verbindungen wie etwa  $ME$  und  $FH$  führt. Das Aktualisieren der Adresslisten und Glätten des Gitters beenden den Vergrößerungsschritt.

Nach einer Netzmodifikation wird an den neuen Knoten eine Interpolation der benötigten Strömungsgrößen mit Hilfe der für das Ausgangsgitter berechneten Lösung vorgenommen. Die Kontrollflächen zwischen den einzelnen Bilanzelementen müssen vollständig neu angelegt werden. Während ihre Belegung entlang der Gebietsgrenzen vom alten Netz übernommen wird, sind die Flächenwerte für  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  und  $\mu$  im Gitterinneren ebenfalls neu zu bestimmen. Die gesuchten Variablen können dabei entweder unter Verwendung von Upwind-, CD- oder DISC-Ansatz aus Knotenwerten berechnet oder aber, sofern die beiden Nachbarknoten einer Fläche bereits im ursprünglichen Netz verknüpft waren, von dieser alten Fläche kopiert werden. Die Erfahrung zeigt, daß alte Flächenwerte nur dann genutzt werden sollten, wenn lokal begrenzt eine geringe Anzahl von Stützstellen neu eingefügt wurde. Andernfalls traten bei Wiederaufnahme der Rechnung auf dem neuen Gitter in zahlreichen Fällen Konvergenzprobleme auf. Nach größeren Eingriffen in die räumliche Diskretisierung ist es deshalb ratsam, sämtliche Flächenwerte im Gitterinneren neu zu berechnen. Für Druck  $p$ , Dichte  $\rho$  und Viskosität  $\mu$  wird dazu die CD-Interpolation verwendet. Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  sind sinnvollerweise mit genau dem Diskretisierungsansatz zu ermitteln, der auch beim Fortführen der Rechnung eingesetzt werden soll. Dabei muß die Berechnung von DISC-Werten iterativ ablaufen, da die benötigten Richtungsableitungen der Geschwindigkeit wiederum über die Flächenwerte selbst bestimmt werden.

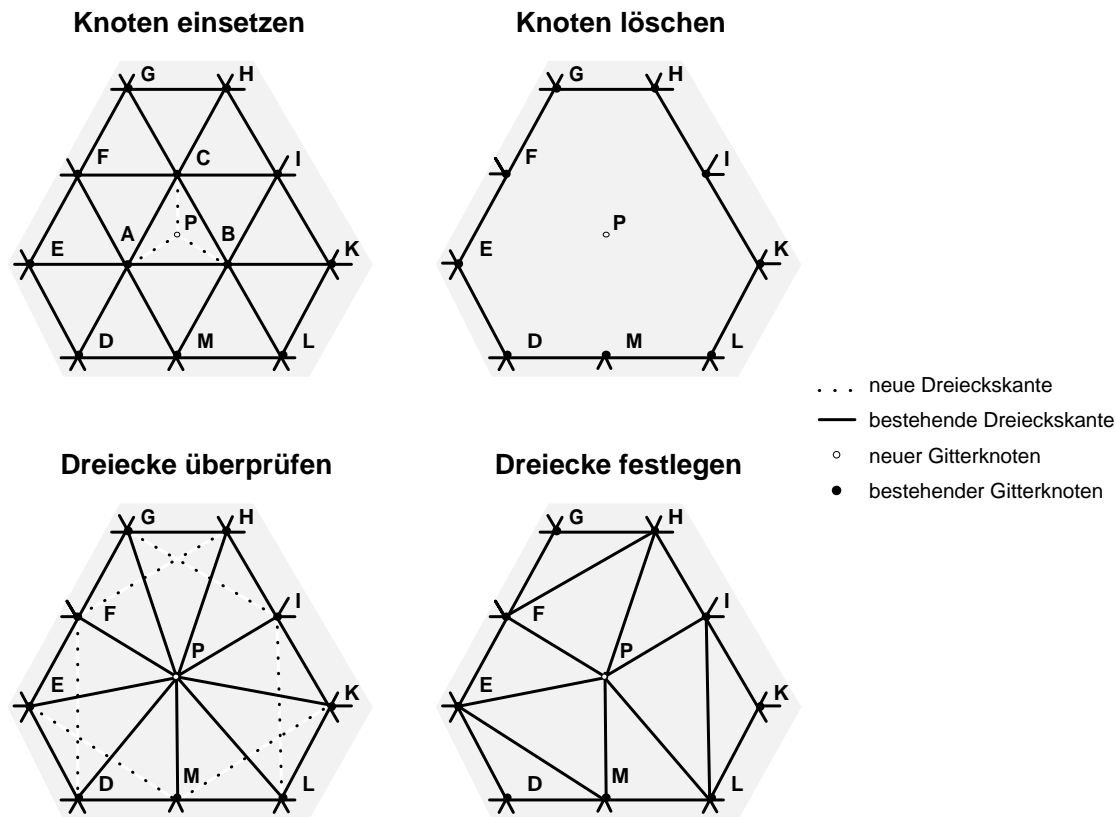
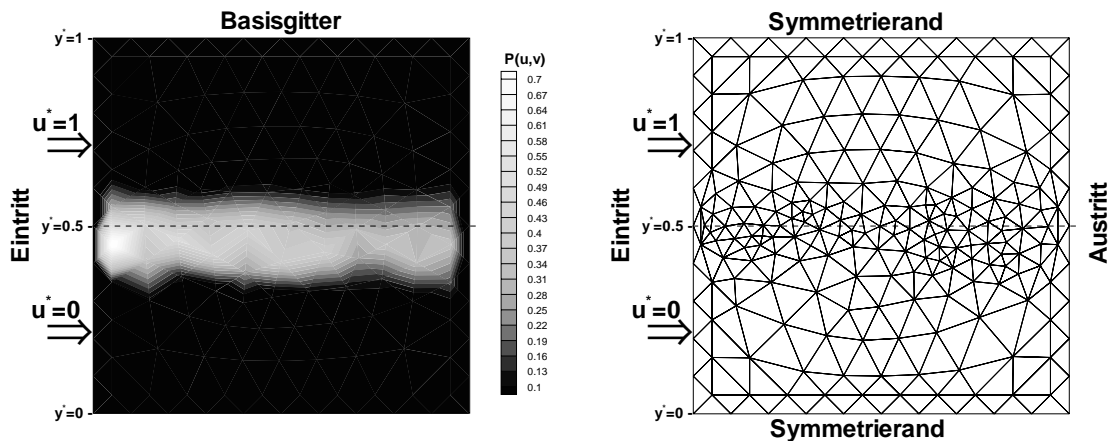


Abb. 5.13: Löschen vorhandener Gitterknoten

Die Indizierung neuer Gitterelemente erfolgt zunächst, ausgehend von den höchsten bereits vorhandenen Elementindizes, in der Reihenfolge ihres Auftretens. Auf diese Weise erhalten neue Nachbarknoten einer alten Gitterzelle stets höhere Adressen als diese. In den zugehörigen Zeilen der LGS sind Austauschkoefizienten  $a_{i,j}$  mit neuen Bilanzelementen demzufolge stets rechts der Hauptdiagonalen  $a_{i,i}$  angeordnet. Umgekehrt befinden sich in den Diskretisierungsgleichungen der hinzugekommenen Kontrollvolumen alle Transportterme links des Zentralkoeffizienten. Bei der ILU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix im Gleichungslöser gelangen in den entsprechenden Matrixzeilen mit Ausnahme der Hauptdiagonalelemente alle Einträge in die obere bzw. die untere Dreiecksmatrix. Diese Asymmetrie wirkt sich äußerst nachteilig auf die Konvergenzeigenschaften des numerischen Verfahrens aus. Um eine annähernd symmetrische Besetzung der Matrix zu gewährleisten, ist im adaptierten Gitter eine Neunummerierung der Knoten erforderlich. Beim neuentwickelten Rechenverfahren erfolgt diese Nummerierung mit Hilfe eines Bezugspunktes weit außerhalb des eigentlichen Rechengebietes. Alle Bilanzelemente im Gitterinneren erhalten neue Adressen entsprechend ihrem Abstand zu diesem Bezugspunkt. Diese sehr einfache und überschaubare Nummerierungsstrategie hat sich als effizient und konvergenzfördernd erwiesen. Die so gewonnene Indizierung der Gitterknoten ist in vielen Fällen mit dem Ergebnis einer Cuthill-McKee-Sortierung identisch (Duff und Meurant (1989)).

Nach Gittermodifikation, Rekonstruktion von Knoten- und Flächenwerten sowie Neunummerierung aller Feld- und Randelemente kann die Berechnung der Strömungsgrößen

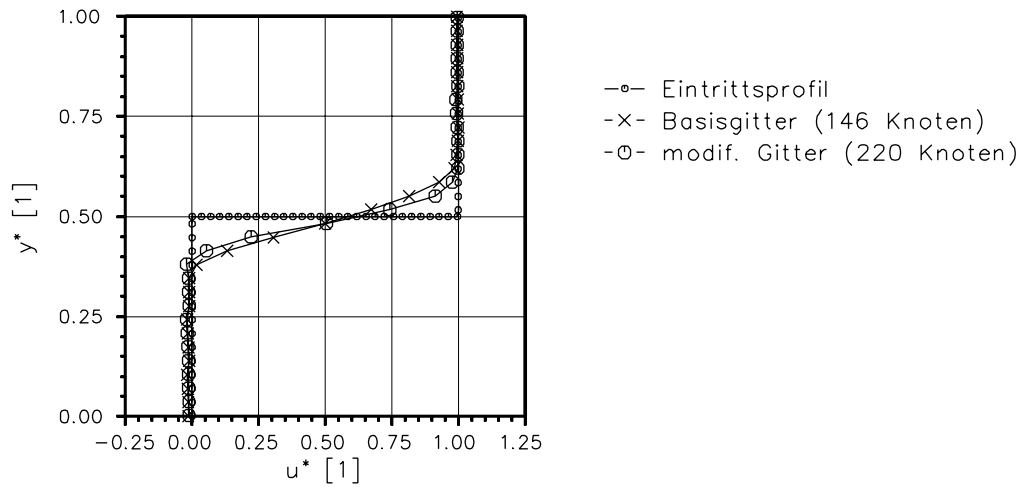


**Abb. 5.14:**  $P(u, v)$  auf Basisgitter und entsprechend adaptiertes Netz

mit optimierter räumlicher Diskretisierung fortgesetzt werden. Dabei wird in der Regel eine sehr viel raschere Konvergenz der Rechnung erzielt, als dies bei einem Neustart des numerischen Verfahrens auf einem vergleichbaren Rechengitter der Fall wäre. Die Begründung dafür liegt in der guten Qualität der Startlösung, die für die gesuchten Strömungsgrößen zur Verfügung steht. Auch bei mehrfacher Wiederholung der Adaptions- und Berechnungssequenz traten keinerlei numerische Probleme auf. Vielmehr konnte die Konvergenzrate stetig gesteigert werden, sofern sich die Gesamtknotenzahl pro Adaptionsschritt nicht mehr als verdoppelte.

Die Auswirkungen, die eine adaptive Gitterverfeinerung anhand des dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten  $P(u, v)$  auf die erzielte Rechengenauigkeit hat, werden nachfolgend demonstriert. Dazu wurde nochmals das Testgitter herangezogen, das bereits zur Analyse der verschiedenen Ansätze für die Interpolation konvektiver Transportterme diente (vgl. Abbildung 5.8). Am Eintritt ins Rechengebiet war die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^*$  so vorgegeben, daß sie bei einer  $y^*$ -Koordinate von 0.5 sprunghaft von 0.0 auf 1.0 wechselte. Der Informationstransport erfolgte ausschließlich mittels Konvektion. Die entsprechenden Austauschterme wurden über den DISC-Ansatz interpoliert. Abbildung 5.14 zeigt den so berechneten Gradienten  $P(u, v)$  auf dem Basisgitter. Die höchsten Werte von  $P(u, v)$  und die demnach größten Diskretisierungsfehler für  $u^*$  treten, wie zu erwarten, entlang der Geraden  $y^* = 0.5$  auf. Eine automatische, fehlergesteuerte Modifikation des Netzes, deren Resultat sich ebenfalls in Abbildung 5.14 findet, führt folgerichtig in diesem kritischen Bereich zu einer Verdichtung der räumlichen Diskretisierung.

Für das Ausgangsgitter und das modifizierte Netz mit jetzt 220 Stützstellen stellt Abbildung 5.15 die Eintrittsbelegung und das jeweils berechnete Austrittsprofil von  $u^*$  einander gegenüber. Bis zum Ende des Rechengebietes hat numerische Diffusion auf dem groben Gitter den anfangs aufgeprägten Sprung in eine Kurve mit endlicher Steigung verwandelt. Die gezielte Adaption ist in der Lage, diese 'numerischen Verluste' zu reduzieren, so daß die Feingitterlösung einen steileren Profilverlauf und damit eine höhere Genauigkeit aufweist.

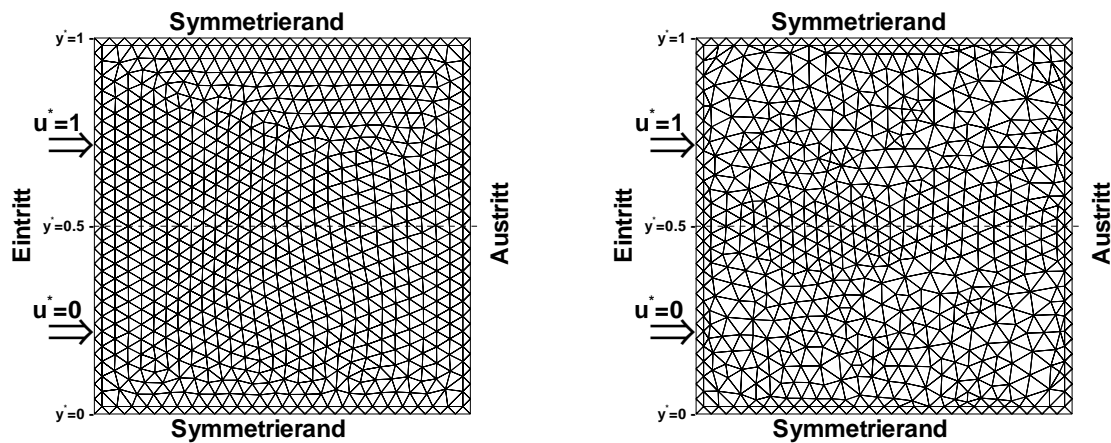


**Abb. 5.15:** Eintritsbelegung und berechnete Austrittsprofile von  $u^*$  bei Verfeinerung

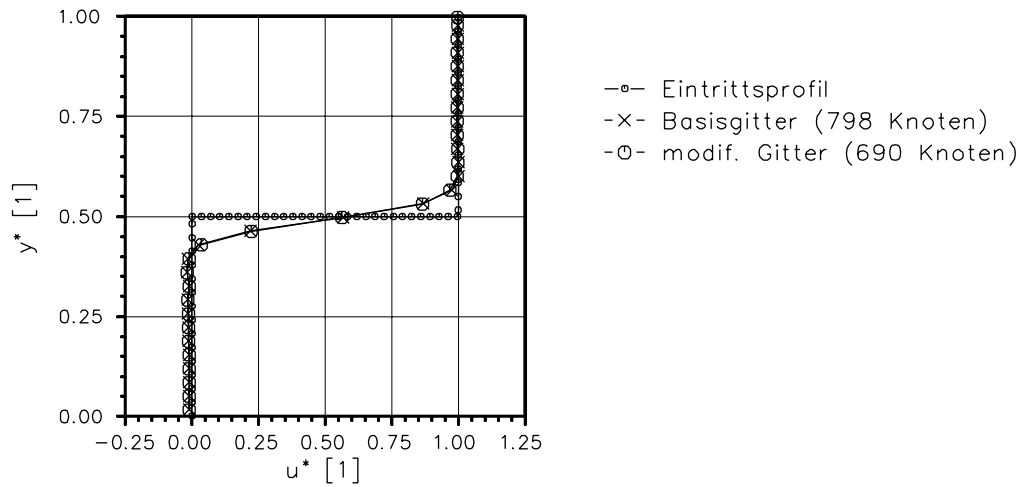
Als Testfall für die Folgen, die eine strömungsangepaßte Netzvergrößerung im Hinblick auf die Güte der numerischen Lösung nach sich zieht, wurde, wie schon bei der Verfeinerung, das Konvektionsproblem mit stufenförmiger Geschwindigkeitsbelegung am Eintritt ausgewählt.

Das jetzt verwendete Basisgitter ist zusammen mit dem vergrößerten Netz in Abbildung 5.16 dargestellt und besitzt 798 Knoten. Beim Löschen von Stützstellen bleibt ein Bereich entlang der Geraden  $y^* = 0.5$ , in dem die größten Werte von  $P(u, v)$  vorliegen, unverändert. Das so modifizierte Gitter weist noch 690 Knoten auf.

Eintritts- und Austrittsprofile von  $u^*$  sind für die Netzvergrößerung in Abbildung 5.17 dokumentiert. Trotz einer Lockerung der räumlichen Diskretisierung um mehr als 100 Rechenknoten verstärkt sich die numerische Diffusion auf dem ausgedünnten Gitter nicht. Der numerische Aufwand läßt sich demnach durch fehlergesteuerte Adaption deutlich senken, ohne dabei Genauigkeitseinbußen in Kauf nehmen zu müssen.



**Abb. 5.16:** Basisgitter und adaptiertes Netz mit reduzierter Knotenzahl



**Abb. 5.17:** Eintrittsbelegung und berechnete Austrittsprofile von  $u^*$  bei Vergrößerung

Mit Hilfe der vorgestellten Techniken zur Modifikation der räumlichen Diskretisierung kann die Verteilung der Rechenknoten im Gitter auch nachträglich gezielt auf den Charakter einer berechneten Strömung abgestimmt werden. Die Nutzung dieses Potentials unstrukturierter Netze ist insbesondere für die Arbeit an Problemstellungen im Turbomaschinenbereich von Bedeutung, da hier im Vorfeld einer Rechnung das Strömungsverhalten oftmals nur unpräzise einschätzbar ist. Im genannten Anwendungsbereich sind Geschwindigkeitsverteilung und Druckfeld in den meisten Fällen die bestimmenden Einflußgrößen. Um hier Diskretisierungsfehler mit Hilfe der Netzanpassung automatisch zu minimieren, wurden zwei Adaptionparameter auf der Basis dimensionsloser Gradienten dieser Variablen vorgestellt. Die Wirksamkeit des Ansatzes, sowohl bei der Erhöhung der Rechengenauigkeit als auch der Reduzierung des numerischen Aufwandes, konnte bereits anhand einfacher Tests demonstriert werden. Sie tritt jedoch im Rahmen der Validierung der gesamten Methode noch deutlicher zutage (vgl. Kapitel 7). Für das Einfügen zusätzlicher und das Löschen vorhandener Stützstellen wurden effiziente Wege aufgezeigt, die sich an der Organisation der Daten orientieren und auf großräumige Auflösung der Gitterstruktur verzichten. Eine unkomplizierte Strategie zur Neuenummerierung der Bilanzelemente sichert in Verbindung mit der interpolierten Basislösung als Startbelegung die rasche Konvergenz weiterführender Rechnungen.

## 6 Diskretisierung der Bestimmungsgleichungen

Das im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte numerische Verfahren, das ebene inkompressible und kompressible Strömungen nach der Methode der Finiten Volumen auf unstrukturierten, adaptiven Netzen berechnet, arbeitet blockiterativ. Dazu werden zwei Gleichungen für die Impulserhaltung, eine Druckkorrekturgleichung und, je nach Charakter des betrachteten Problems, Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie, deren Dissipation und die Enthalpie wie unabhängige Blöcke in einer äußeren Schleife nacheinander gelöst. Da es sich bei den eingesetzten Gleichungen um die diskretisierte und linearisierte Form eines Systems aus nichtlinearen und gekoppelten Differentialgleichungen handelt, muß die Berechnung der gesuchten Transportvariablen  $\phi$  in dieser Schleife solange erfolgen, bis ein konstanter Endzustand erreicht ist. Konvergenzkriterium der Blockiteration ist die normierte maximale Änderung der Strömungsgrößen  $\phi$  zwischen aufeinanderfolgenden Durchgängen. Zur Normierung dienen, wie bereits im Gleichungslöser, geeignete integrale Bezugsgrößen  $K$ . Für die Geschwindigkeitsänderung zum Beispiel ist das die mittlere Eintrittsgeschwindigkeit ins Rechengebiet. Dabei muß, um die Dämpfung der numerischen Lösungen zu kompensieren, die Relaxation  $\alpha(\phi)$  der Variablen berücksichtigt werden. Als Referenzresiduum  $Res_{ref}$  wird in der Regel wie im Gleichungslöser selbst ein Wert von  $5 \cdot 10^{-3}$  gewählt.

$$\frac{\|\vec{\phi}^n - \vec{\phi}^{n-1}\|_\infty}{K \alpha(\phi)} = \frac{\max(|\phi_i^n - \phi_i^{n-1}|)}{K \alpha(\phi)} \leq Res_{ref}, \quad i = 1, m, \quad \phi = u, v, p', k, \epsilon, h \quad (6.1)$$

Im Fall der Druckkorrektur ist der Lösungsvektor  $p'^{n-1}$  der vorangegangenen äußeren Iteration auf Null zu setzen. Diskretisierung und numerische Behandlung der einzelnen Transportgleichungen für  $u, v, p', k, \epsilon$  und  $h$  sind in den folgenden Kapiteln detailliert beschrieben.

### 6.1 Impulsgleichungen

Die Geschwindigkeiten im Strömungsgebiet werden mit Hilfe der Reynoldsschen Gleichungen berechnet, die aus einer Zeitmittelung der Navier-Stokes-Gleichungen resultieren. Der Gradientenansatz nach Boussinesq bzw. das Wirbelviskositätsprinzip erlauben es, die für turbulente Strömungen auftretenden Reynoldsspannungen zu modellieren. Dies geschieht mit Hilfe einer effektiven Viskosität  $\mu$ . Sie setzt sich aus molekularer Viskosität  $\mu_l$  und Wirbelviskosität  $\mu_t$  zusammen (vgl. Kapitel 4.3).

Nach Substitution der Reynoldsschen Spannungsterme werden die differentiellen Gleichungen gemäß dem Gaußschen Integralsatz auf sämtlichen Bilanzelementen integriert und diskretisiert. Damit ergibt sich jeweils eine Bestimmungsgleichung für die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten. Als Beispiel ist hier die Diskretisierungsgleichung für die Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung vorgestellt.



$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \{\rho_i u_i (\vec{w}, \vec{n})_i A_i\} &= \sum_{i=1}^m \left\{ \mu_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i A_i \right\} & (6.2) \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^m \{-p_i (\vec{n}_i, \vec{x}) A_i\}}_A \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^m \left\{ \mu_i \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i (\vec{n}_i, \vec{x}) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_i (\vec{n}_i, \vec{y}) \right] A_i \right\}}_B \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^m \left\{ -\frac{2}{3} \mu_i \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i \right] (\vec{n}_i, \vec{x}) A_i \right\}}_C \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^m \left\{ -\frac{2}{3} \rho_i k_i (\vec{n}_i, \vec{x}) A_i \right\}}_D \\
&+ \underbrace{\rho f_x V}_E
\end{aligned}$$

Die weitergehende Behandlung der Flächengeschwindigkeiten  $u_i$  und Richtungsableitungen  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$  in Konvektions- und Diffusionsterm wurde bereits ausführlich dargestellt (vgl. Kapitel 5.2.1 und 5.2.2). Der ebenfalls im Konvektionsterm auftretende Geschwindigkeitsvektor  $\vec{w}$  ist das Ergebnis einer Interpolation der Flächengeschwindigkeiten, die im Zuge der Druckkorrektur vorgenommen wird (vgl. Kapitel 6.2). Somit sind alle Ausdrücke, die einen Beitrag zu den Koeffizienten  $a_i$  der allgemeinen Diskretisierungsgleichung liefern, vollständig behandelt. Die verbleibenden, mit Großbuchstaben  $A$  bis  $E$  bezeichneten Terme werden als Beiträge zum konstanten Teil  $S_c$  des Quellterms  $S_\phi$  der rechten Seite  $b$  dieser Gleichung zugeordnet.

Bei laminarer Strömung und konstanter Dichte tragen lediglich die Druckkräfte in  $A$  und, soweit vorhanden, Volumenkräfte in  $E$ , wie beispielsweise die Schwerkraft, zum Quellterm bei. Im turbulenten Fall oder mit Dichteänderung ist ein weiterer viskoser Term  $B$  zu berücksichtigen.

Zur Berechnung des Ausdruckes  $B$  sind die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  an den Kontrollflächen  $A_i$  der Bilanzelemente erforderlich. Sie werden durch lineare Interpolation der Werte an den entsprechenden Nachbarknoten ermittelt. Die Knotenwerte wiederum ergeben sich nach Diskretisierung und Umformung aus dem Gaußschen Satzes (vgl. Gleichung (5.23)).

Die Ausdrücke  $C$  und  $D$  wurden eingeführt um sicherzustellen, daß der Druck  $p$  in den Impulsgleichungen exakt dem thermodynamischen Druck entspricht. Der viskose Term  $C$  verschwindet bei Fluiden mit konstanter Dichte, der Turbulenzterm  $D$  entfällt, sofern laminare Strömungsprobleme behandelt werden. Beide Ausdrücke werden im allgemeinen vernachlässigt, da sie die Stabilität numerischer Verfahren stark beeinträchtigen, und nur einen sehr geringen Beitrag zum Druck liefern.

Entlang der Grenzen des Rechengebietes müssen nach physikalischen Überlegungen Randwerte vorgegeben werden. Ferner sind, um die Stabilität des Rechenverfahrens zu sichern, an Gebietsrändern unter bestimmten Umständen Modifikationen der diskretisierten Gleichungen erforderlich.

Für die Geschwindigkeiten  $w_{ein}$  am Eintritt in das Rechengebiet gilt eine Dirichlet-Randbedingung. Dabei werden Betrag und Richtung entweder unmittelbar vorgegeben oder, sofern der Totaldruck  $p_{tot}$  festgelegt ist, der Geschwindigkeitsbetrag  $w_{ein}$  aus statischem Druck  $p$  und Enthalpie  $h$  berechnet. Vorausgesetzt wird hier ein ideales Gas mit isentroper Zustandsänderung.

$$w_{ein} = \sqrt{2 \cdot h \left\{ \left( \frac{p_{tot}}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\}} \quad (6.3)$$

An festen Wänden liegt für das Fluid eine Haftbedingung vor, d.h. Strömungsgeschwindigkeit und Wandgeschwindigkeit stimmen gemäß einer Dirichlet-Randbedingung überein. Sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung sind Wandreibungsterme über die diffusiven Anteile  $a_{i,diff}$  der Transportkoeffizienten  $a_i$  implizit berücksichtigt.

Eine von Neumann-Randbedingung mit  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  kommt für die Geschwindigkeit an Austrittsrändern zur Anwendung. Um hier stromauf gerichtete Einflüsse weitgehend zu unterdrücken, werden konvektive und diffusive Transportterme  $a_i$  an den entsprechenden Kontrollflächen gelöscht.

Entlang von Symmetrierändern gilt für die wandparallele Geschwindigkeitskomponente ebenfalls die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ . Der senkrechte Anteil der Geschwindigkeit ergibt sich aus einer Dirichlet-Randbedingung zu Null.

Betrag und Richtung der Geschwindigkeit an zyklisch verknüpften Randflächen resultieren, wie im Inneren des Rechengitters, aus einer Interpolation, die im Rahmen der Druckkorrektur durchgeführt wird (vgl. Kapitel 6.2). Da zyklische Ränder beim vorgestellten Verfahren implizit behandelt werden, sind konvektive und diffusive Flüsse über diese Grenzen direkt in der Koeffizientenmatrix und nicht wie allgemein üblich auf der rechten Seite der Diskretisierungsgleichung erfaßt.

Der Grad der Dämpfung beider Transportgleichungen für die Geschwindigkeit, mit dem jeweils die höchsten Konvergenzraten erzielt werden, ist vom eingesetzten Druckkorrekturverfahren abhängig. Beim SIMPLE-Algorithmus haben sich Relaxationsfaktoren  $\alpha(u, v)$  von 0.9, bei SIMPLEC von 0.8 bestens bewährt.

## 6.2 Druckkorrekturgleichung

SIMPLE- und SIMPLEC-Algorithmus zur Druckkorrektur basieren gleichermaßen auf einer Zerlegung der Geschwindigkeitskomponenten und des Druckes in aktuell vorliegende Werte  $\phi^*$  und erforderliche Korrekturen  $\phi'$  (Patankar (1980), Van Doormaal und Raithby (1984)).

$$\phi = \phi^* + \phi' \quad (6.4)$$

Zur effizienten Berechnung kompressibler Strömungen wird außerdem eine Aufspaltung der Dichte vorgenommen (Karki und Patankar (1989), Demirdžić et al. (1993)).

Aus den Impulsgleichungen können mittels der angesprochenen Zerlegung von Druck und Geschwindigkeit Approximationen für korrigierte Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  und  $v_i$  an den Kontrollflächen  $A_i$  der Bilanzelemente hergeleitet werden. In diesen algebraischen Ausdrücken treten unter anderem die aktuellen Geschwindigkeiten  $u_i^*$  und  $v_i^*$  sowie die gesuchten Druckkorrekturwerte  $p'_I$  für die jeweils benachbarten Gitterzellen auf. Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die Massenbilanz jeder Zelle ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Druckkorrekturen  $p'_I$ .

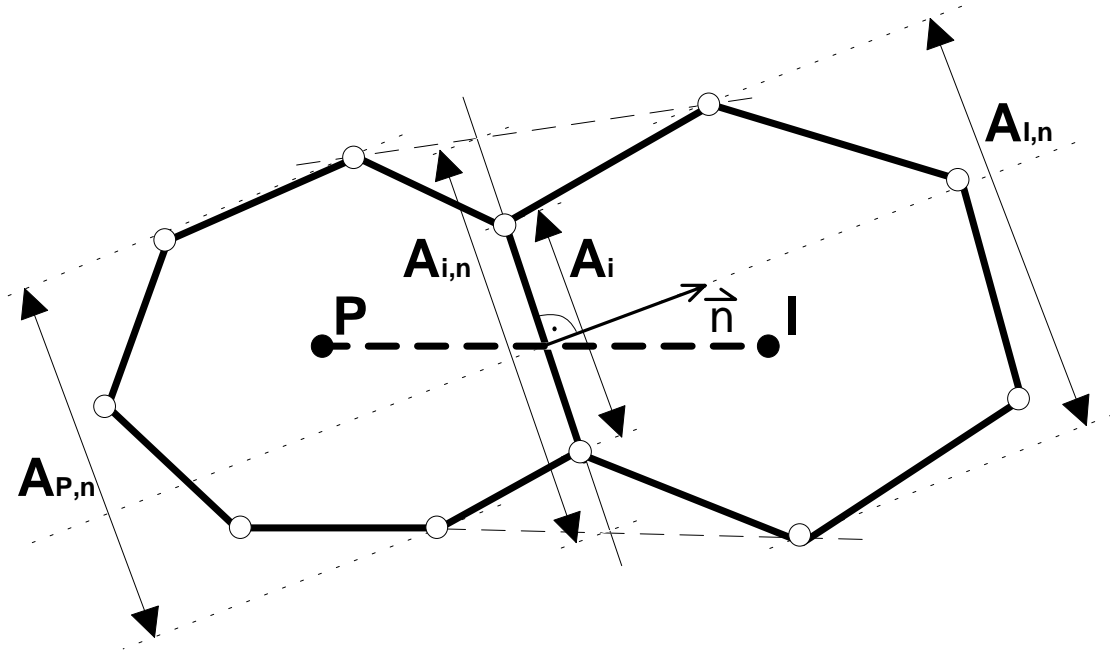
Das SIMPLE-Konzept wurde ursprünglich für Rechenetze mit versetzter Anordnung von Druck- und Geschwindigkeitsvariablen entwickelt. Bei nichtversetzten Gittern müssen die Flächengeschwindigkeiten  $u_i^*$  und  $v_i^*$  mittels einer speziellen Interpolation berechnet werden. Durch eine einfache CD-Annahme für die Geschwindigkeiten an den Kontrollflächen  $i$  würde die Koppelung mit dem Druck am Rechenknoten  $P$  einer Gitterzelle verloren gehen. Eine mögliche Folge wären schachbrettartige Oszillationen von Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Die stattdessen verwendete Interpolationsvorschrift ist ebenfalls auf der Grundlage der Impulsgleichungen erstellt und bezieht von dort Zentralkoeffizienten  $a_P(u, v)$  und Druckterme für die Nachbarknoten  $P$  und  $I$  der betrachteten Kontrollflächen  $A_i$  (Rhie (1981), Hsu (1981), Rhie und Chow (1983), Majundar et al. (1987)). Sie wird hier am Beispiel der Geschwindigkeitskomponente  $u_i^*$  für unstrukturierte Gitter vorgestellt.

$$u_i^* = \alpha \left[ u_P + \frac{\sum_{i=1}^m \{p_i(\vec{n}_i, \vec{x}) A_i\}_P}{a_{P,P}(u, v)} \right] + \beta \left[ u_I + \frac{\sum_{i=1}^m \{p_i(\vec{n}_i, \vec{x}) A_i\}_I}{a_{P,I}(u, v)} \right] \quad (6.5)$$

$$+ \frac{(p_{P,i} - p_{I,i})(\vec{n}_i, \vec{x}) C_i A_i}{\alpha a_{P,P}(u, v) + \beta a_{P,I}(u, v)}, \quad \alpha = \frac{\Delta_I}{\Delta_P + \Delta_I}, \quad \beta = \frac{\Delta_P}{\Delta_P + \Delta_I}$$

Die Gleichung (6.5) kann als eine Impulsbilanz auf einem um ein halbes Kontrollvolumen versetzten Gitter betrachtet werden. Dabei sind die Druckkräfte aus den Impulsgleichungen in den Kontrollvolumen  $P$  und  $I$  subtrahiert und durch eine lokal wirksame Druckdifferenz ersetzt. Damit entsteht eine Beziehung zwischen der interpolierten Geschwindigkeit  $u_i^*$  und den Druckwerten  $p_{P,i}$  und  $p_{I,i}$  an den Nachbarknoten jeder Kontrollfläche  $i$ . In der Massenbilanz für eine eindimensionale Strömung tritt bei einer solchen Interpolation von  $u_i^*$  ein Zusatzglied proportional der vierten Ableitung des Druckes auf. Der Beitrag dieses Druckterms ist im Verhältnis zu den Geschwindigkeitstermen gering, eine Entkoppelung von Druck und Geschwindigkeit wird so jedoch wirksam vermieden (ASC (1994)).

Auch bei der versetzten Bilanz wirkt die lokale Druckkraft in  $x$ -Richtung, wie die ursprünglichen Druckterme in den Impulsgleichungen, auf eine projizierte Fläche  $(\vec{n}_i, \vec{x}) A_{i,n}$  der Bilanzelemente, die senkrecht zur  $x$ -Koordinate orientiert ist. Diese Fläche hat für idealisierte sechseckige Gitterzellen die Größe  $2.0(\vec{n}_i, \vec{x}) A_i$ . Der Wert der Konstanten  $C_i$ , die das Verhältnis von projizierter Fläche  $A_{i,n}$  zu tatsächlicher Fläche  $A_i$  angibt, beträgt in diesem Fall 2.0. Die geometrischen Verhältnisse an der Kontaktfläche zweier beliebiger Kontrollvolumina sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Da die Form der Bilanzelemente im allgemeinen variiert, muß  $C_i$  für alle Kontrollflächen  $i$  mit Hilfe einer linearen Interpolation aus den Projektionsflächen  $A_{P,n}$  und  $A_{I,n}$  der Nachbarelemente bestimmt werden.



**Abb. 6.1:** Projizierte Fläche  $A_{i,n}$  zwischen zwei Bilanzelementen

$$C_i = \frac{A_{i,n}}{A_i} = \frac{\alpha A_{P,n} + \beta A_{I,n}}{A_i} \quad (6.6)$$

$$A_{I,n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \{A_{I,i} |(\vec{n}_{I,i}, \vec{n})|\}$$

Nach Interpolation der vorläufigen Flächengeschwindigkeiten  $u_i^*$  und  $v_i^*$  findet der eigentliche Druckkorrekturschritt statt. Die diskretisierte Bestimmungsgleichung für die gesuchten Druckkorrekturen  $p'$  ist hier in einer allgemeinen Form aufgeführt, die SIMPLE- und SIMPLEC-Variante beinhaltet.

$$\sum_{i=1}^m \{a_i\} p'_P = \sum_{i=1}^m \{a_i p'_{I,i}\} - \sum_{i=1}^m \{\rho_i(\vec{w}^*, \vec{n})_i A_i\} \quad (6.7)$$

$$a_i = \alpha(p)\alpha(\rho) \cdot \frac{c_P A_i}{R h_{I,i}} \cdot \max[0, -(\vec{w}^*, \vec{n})_i] + D \cdot \frac{\rho_i A_i^2}{\alpha a_{P,P}(u, v) + \beta a_{P,I}(u, v)} \quad (6.8)$$

$$D = \begin{cases} \alpha(u, v) & : \text{SIMPLE} \\ \frac{\alpha(u, v)}{1 - \alpha(u, v)} & : \text{SIMPLEC} \end{cases}$$

Für Strömungen mit variabler Dichte  $\rho$  führt deren Aufspaltung gemäß Gleichung (6.4) zu einem Transportterm mit konvektivem Charakter. Dieser erste Term von  $a_i$  beschreibt die Massenstromänderung infolge der Dichteänderung  $\rho'_i$ , die ein ideales Gas durch die Druckkorrektur  $p'_i$  bei konstanter Temperatur an einer Kontrollfläche  $A_i$  erfährt. Der Ausdruck wird mit den Relaxationsparametern  $\alpha(p)$  und  $\alpha(\rho)$  multipliziert, um die später vorgenommene Dämpfung der Lösungen für Druck und Dichte zu berücksichtigen. Gleichzeitig dient der Relaxationsfaktor  $\alpha(\rho)$  zum Ausblenden des Terms

bei Strömungen mit konstanter Dichte. Die hier vorgeschlagene Upwind-Diskretisierung erspart das Berechnen von Flächenwerten der Enthalpie  $h$  und wirkt sich positiv auf den numerischen Aufwand bei der Lösung des resultierenden LGS aus.

Im zweiten, quasidiffusiven Ausdruck bestimmt ein konstanter Vorfaktor  $D$ , dessen Wert durch die Relaxation  $\alpha(u, v)$  der Geschwindigkeiten vorgegeben ist, ob die Druckkorrektur nach dem SIMPLE- oder dem SIMPLEC-Verfahren erfolgt. Der Quellterm bzw. die rechte Seite  $b$  der Diskretisierungsgleichungen (6.7) stellt eine Massenbilanz auf den einzelnen Kontrollvolumen dar. Bei Konvergenz der numerischen Rechnung ist diese Bilanz in jeder Gitterzelle erfüllt, so daß die Korrekturen  $p'$  gegen Null streben.

Für die Druckkorrekturgleichung sind keinerlei Randwertvorgaben erforderlich. An sämtlichen Grenzen des Rechengebietes mit Ausnahme der zyklischen Ränder werden die Transportkoeffizienten  $a_i$  zu Null gesetzt. Entlang von Austrittsrändern wird zusätzlich der Massenquellterm gelöscht, da dort die Einhaltung der Massenbilanz nicht nur vom Druck, sondern auch von den Austrittsrandbedingungen für Geschwindigkeit und Dichte abhängt.

Bei Strömungen ohne Dichtevariation sind für Impuls- und Massenbilanz nicht Absolutwerte des Druckes, sondern vielmehr die Druckunterschiede im Strömungsgebiet von Bedeutung. Dieser Sachverhalt äußert sich mathematisch in linearer Abhängigkeit der diskretisierten Gleichungen für die Druckkorrektur. Es ergibt sich ein LGS mit singularer Koeffizientenmatrix. Um auch hier mit iterativen Gleichungslösern arbeiten zu können, wird das System mit einem Faktor  $\alpha(p')$  von 0.98 relaxiert. Diese Relaxation wirkt sich, da alle Lösungswerte für  $p'$  nach der Aktualisierung des Druckes gelöscht werden, nur auf die Hauptdiagonalelemente  $a_P$  der Koeffizientenmatrix aus. Das führt auf ein geringfügig verändertes, linear unabhängiges Gleichungssystem, dessen Lösung  $p'$  dem betragsmäßig kleinsten Lösungsvektor des Originalsystems nahezu entspricht. Ein solches Vorgehen ist gerechtfertigt, da es sich bei der Druckkorrekturgleichung lediglich um eine Approximation handelt, und die berechneten Korrekturwerte  $p'$  im Falle der Konvergenz beliebig klein werden.

Mit Hilfe der erhaltenen Druckkorrekturen  $p'$  werden Korrekturwerte  $u'_i$  und  $v'_i$  für die Geschwindigkeiten auf den Kontrollflächen berechnet. Die entsprechende Korrekturvorschrift, die bereits zur Herleitung der Druckkorrekturgleichung verwendet wurde, ist nachfolgend in SIMPLE- und SIMPLEC-Form für die x-Komponente des Geschwindigkeitsvektors angegeben.

$$u'_i = D \cdot \frac{(p'_{P,i} - p'_{I,i})(\vec{n}_i, \vec{x}) \cdot A_i}{\alpha a_{P,P}(u, v) + \beta a_{P,I}(u, v)} \quad (6.9)$$

Die so korrigierten Flächengeschwindigkeiten  $u_i$  und  $v_i$  erfüllen bei Strömungen konstanter Dichte die Kontinuitätsgleichung.

Abschließend wird der Druck in jedem Bilanzelement  $I$  aktualisiert. Für die Kontrollflächen ergibt er sich durch lineare Interpolation der Werte an den beiden benachbarten Knoten. Das absolute Druckniveau ist durch den Referenzdruck  $p_{I_{ref}}$ , der an einem bestimmten Gitterknoten  $I_{ref}$  spezifiziert werden muß, festgelegt.

$$p_I^n = p_I^{n-1} + \alpha(p) \cdot (p'_I - p'_{I_{ref}}) \quad (6.10)$$

Je nach eingesetzter Variante der Druckkorrektur werden für die Druckrelaxation  $\alpha(p)$  unterschiedliche Werte verwendet. Der SIMPLE-Algorithmus liefert generell zu hohe Korrekturen  $p'$ . Mit Relaxationsfaktoren  $\alpha(p)$  um 0.15, die eine Überkorrektur unterbinden, wurden hier die besten Konvergenzraten erzielt. Bei üblichen Werten der Geschwindigkeitsrelaxation  $\alpha(u, v)$  führt das SIMPLEC-Verfahren auf deutlich größere Koeffizienten  $a_i$  und damit, da die Massenquellterme unverändert bleiben, auf kleinere Korrekturwerte  $p'$ . Hier wird die Druckrelaxation deshalb mit einem höheren Relaxationsfaktor von 0.99 vorgenommen. Bei Konvergenzschwierigkeiten in wenigen Fällen leistete ein auf 0.7 verminderter Wert gute Dienste.

Im Rahmen der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Berechnungen kam ausschließlich die SIMPLEC-Methode zum Einsatz. Sie wies in zahlreichen Tests ein überlegenes Konvergenzverhalten auf, ohne daß die Standardwerte der Relaxationsfaktoren für die verschiedenen Transportgleichungen variiert werden mußten. Während der Anwendungen fiel jedoch auf, daß zu Beginn des Iterationsprozesses im Austrittsbereich des Rechengebietes extrem niedrige Druckwerte berechnet wurden. Aus dem dann sehr hohen Druckgefälle zwischen Ein- und Austrittsrand ergaben sich entsprechende Übergeschwindigkeiten, so daß in der Folge großräumige Oszillationen in Druck- und Geschwindigkeitsfeld auftraten. Im weiteren Verlauf der Blockiteration bestimmte die Dämpfung dieser Störungen ganz wesentlich die Konvergenz des Verfahrens (vgl. Kapitel 7.4).

Die Ursache für den beobachteten Druckauschlag liegt in der Anfangsbelegung des Rechnernetzes und dem Informationstransport im Strömungsgebiet zu Iterationsbeginn. Unmittelbar nach dem Start der Rechnung wird bereits im gesamten Feld eine Druckkorrektur vorgenommen, obwohl der Eintrittsmassenstrom, je nach gewählter räumlicher Diskretisierung, erst nach mehreren äußeren Iterationen den Austrittsrand erreicht. Die dort bis zu diesem Zeitpunkt berechneten Druckwerte entbehren, buchstäblich mangels Masse, einer soliden physikalischen Grundlage. Um diese Fehlerquelle zu drosseln bietet es sich an, die Korrektur des Druckfeldes mit einem manipulierten Relaxationsfaktor  $\alpha(p)$  künstlich zu begrenzen, bis die Strömungsinformation am Austritt des Rechengebietes angelangt ist. Dazu wird in jeder äußeren Iteration  $n$  ein aktueller Relaxationsparameter  $\alpha(p)^n$  in Abhängigkeit der an Ein- und Austritt vorliegenden Massenströme  $m_{ein}$  und  $m_{aus}$  bestimmt.

$$\alpha(p)^n = \min \left\{ \alpha(p), \max \left[ \alpha(p)^{n-1}, \frac{m_{aus}}{m_{ein}} + 0.01 \right] \right\} \quad (6.11)$$

Ohne Anfangsbelegung für die Strömungsgeschwindigkeit steigt  $\alpha(p)^n$ , ausgehend von einem Minimalwert von 0.01, der den Aufbau eines treibenden Druckgefälles sicherstellt, bis zur vorgesehenen Relaxation  $\alpha(p)$  monoton an. Auf Rechnungen, die bereits mit einer Geschwindigkeitsbelegung starten, übt die beschriebene Vorgehensweise keinen Einfluß aus, sofern der Wert des Quotienten  $\frac{m_{aus}}{m_{ein}}$  über  $\alpha(p)$  liegt.

Die vorgestellte Relaxationsstrategie für den Druck hat sich im praktischen Einsatz sehr gut bewährt. Hohe Anfangsauslenkungen im Druckfeld traten nach Einführung der neuen Methode nicht mehr auf. Damit ergab sich ein deutlicher Gewinn an numerischer Stabilität und eine erhöhte Konvergenzrate, so daß die Gesamtrechnenzeit erheblich reduziert werden konnte.

Als Randbedingung für den Druck wird am Eintritt ins Rechengebiet eine von Neumann-Bedingung gesetzt. Dabei müssen die Druckwerte mit Hilfe der im randnächsten Bilanzenelement bestimmten Richtungsableitung  $\frac{\partial p}{\partial n}$  linear auf die Eintrittsflächen extrapoliert werden. Eine derartige Extrapolation wird auch für die Austrittsränder angewendet.

An festen Wänden und Symmetriegrenzen gilt eine von Neumann-Randbedingung mit  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ . Entlang zyklischer Ränder wird der Druck, wie vorher bereits die Flächengeschwindigkeiten, im Zuge der Druckkorrektur ermittelt.

Im Falle laminarer, inkompressibler, isothermer Strömung ist die äußere Iterationsschleife des numerischen Berechnungsverfahrens nach Auswertung der Druckkorrekturgleichung abgeschlossen.

### 6.3 Turbulenzgleichungen

Zur Simulation turbulenter Strömungen wird im vorgestellten numerischen Verfahren das Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodell nach Launder und Spalding (1974) mit logarithmischer Wandfunktion eingesetzt.

#### 6.3.1 Turbulente kinetische Energie

Eine exakte Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  läßt sich auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichungen herleiten (Jischa (1982)). In dieser Gleichung treten Korrelationen der Schwankungsgeschwindigkeiten  $u'_i$  und ihrer Gradienten auf, die unter der Voraussetzung hoher Reynoldszahlen, näherungsweise Gleichgewicht von Produktion und Dissipation der Turbulenzenergie sowie isotroper Wirbelviskosität  $\mu_t$  modelliert werden. Aus der so erhaltenen Differentialgleichung (vgl. Kapitel 4.3) ergibt sich nach Integration auf den Kontrollvolumen und anschließender Diskretisierung eine Bestimmungsgleichung für  $k$ .

$$\sum_{i=1}^m \{\rho_i k_i (\vec{w}, \vec{n})_i A_i\} = \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right]_i \left( \frac{\partial k}{\partial n} \right)_i A_i \right\} + \underbrace{\rho P V}_A - \underbrace{\rho \epsilon V}_B \quad (6.12)$$

$$P = \frac{\mu_t}{\rho} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Diese Formulierung kann für Strömungen mit und ohne Dichteänderungen gleichermaßen verwendet werden, da Zusatzterme, die bei variabler Dichte auftreten, sich nicht signifikant auf die berechnete Lösung auswirken (Marvin (1983)).

Das weitere Vorgehen bei der Bestimmung der Konvektions- und Diffusionsterme wurde schon ausführlich diskutiert (vgl. Kapitel 5.2.1 und 5.2.2). Die rechte Seite  $b$  der allgemeinen Diskretisierungsgleichung bildet der Produktionsterm  $A$  als konstanter Bestandteil  $S_C$  des Quellterms  $S_\phi$ . Der Dissipationsterm  $B$  wird durch die lokale Turbulenzenergie  $k_P$  dividiert und liefert als variabler Quellterm  $S_P$  einen Beitrag zur Hauptdiagonalen  $a_P$  der Koeffizientenmatrix des resultierenden LGS.

Sofern keine Informationen aus Messungen vorliegen, werden  $k$ -Werte an Eintrittsflächen des Rechengitters mit Hilfe des Turbulenzgrades  $Tu$  über eine Dirichlet-Randbedingung vorgegeben.

$$k = \frac{3}{2} \cdot (Tu|\vec{w}|)^2 \quad (6.13)$$

Dabei wird angenommen, dass die Schwankungsgeschwindigkeiten in allen drei Raumrichtungen dem Betrag nach gleich sind. Abweichend davon setzen Tennekes und Lumley (1994) in bestimmten Fällen die Schwankungen in Hauptströmungsrichtung doppelt so hoch an wie senkrecht dazu. In der Praxis liegt  $Tu$  gewöhnlich zwischen 1 und 20%.

Entlang fester Wände sind Werte  $k = 0$  ebenfalls durch eine Dirichlet-Randbedingung festgelegt. Hier werden zusätzlich konstanter Quellterm  $S_C$  und proportionaler Quellterm  $S_P$  in der Transportgleichung modifiziert.

$$S_C = \mu_{Wand} \cdot \left( \frac{\partial(\vec{w}, \vec{t})}{\partial n} \right)_P^2 \cdot V \quad (6.14)$$

$$S_P = - \frac{c_\mu \rho^2 k_P V}{\mu_{Wand}} \quad (6.15)$$

Mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{t}$  der Wandfläche und des Vektorproduktes  $(\vec{w}, \vec{t})$  ergibt sich im Quellterm  $S_C$  jeweils die wandparallele Geschwindigkeit. Die Bestimmung der effektiven Viskosität  $\mu_{Wand}$  an festen Wänden erfolgt anhand des logarithmischen Wandgesetzes, das später noch eingehend diskutiert wird (vgl. Kapitel 6.3.3).

Die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  wird auf Austrittsflächen angewendet. Zur Unterdrückung des stromauf gerichteten Informationsflusses dient hier in bewährter Weise das Löschen der Transportkoeffizienten  $a_i$ .

Flächenwerte an Symmetrierändern sind ebenfalls durch die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  festgelegt. Zyklische Ränder werden, wie Kontrollflächen innerhalb des Rechengebietes, implizit bearbeitet.

Zur Relaxation der Turbulenzenergie-Gleichung wird durchgehend ein Relaxationsfaktor  $\alpha(k)$  von 0.5 verwendet.

### 6.3.2 Dissipation der turbulenten kinetischen Energie

Zweite Gleichung des eingesetzten Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells ist die Transportgleichung für die Dissipation  $\epsilon$  der turbulenten kinetischen Energie (vgl. Kapitel 4.3).  $\epsilon$  ist ein lokales Maß für die Umwandlung von Energie der turbulenten Schwankungsbewegung in Wärme, die sich in den kleinsten Turbulenzwirbeln vollzieht. Aus der exakten Differentialgleichung resultiert nach Einführung zahlreicher Modellierungsansätze, Integration und abschließender Diskretisierung eine Bestimmungsgleichung für  $\epsilon$ .

$$\sum_{i=1}^m \{\rho_i \epsilon_i(\vec{w}, \vec{n})_i A_i\} = \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right]_i \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right)_i A_i \right\} + \underbrace{c_1 \rho \frac{\epsilon}{k} P V}_A - \underbrace{c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} V}_B \quad (6.16)$$



Abermals gilt die vorgestellte Form streng nur für Strömungsfälle ohne Dichtevariation, kommt aber bei kompressibler und nichtisothermer Strömung in unveränderter Form zur Anwendung.

Wie für die Turbulenzenergie  $k$  sind auch für deren Dissipation  $\epsilon$  nur positive Werte physikalisch sinnvoll. Die Praxis zeigt jedoch, daß besonders bei Einsatz der DISC-Interpolation zur Diskretisierung der konvektiven Terme der Gleichung während des Iterationsprozesses negative  $\epsilon$ -Werte auftreten können. Diese führen oftmals unmittelbar zur Divergenz der numerischen Rechnung. Um das Problem zu bewältigen, wird der zusätzliche Quellterm  $S_{HOS}$ , der sich bei höherwertiger Diskretisierung der Konvektion ergibt (vgl. Kapitel 5.2.1), nach besonderen Regeln behandelt (Noll (1992)). Mit positivem Wert bleibt er als konstanter Quellterm neben  $S_C$  auf der rechten Seite  $b$  der allgemeinen Diskretisierungsgleichung, bei negativem Vorzeichen wechselt er, durch die lokale Größe  $\epsilon_P^0$  dividiert, als proportionaler Quellterm in die Hauptdiagonale der Koeffizientenmatrix.

$$\left( a_P + \frac{\max[0, -S_{HOS}]}{\epsilon_P^0} \right) \cdot \epsilon_P - \sum_{i=1}^m \{a_i \epsilon_{I,i}\} = S_C + \max[0, S_{HOS}] \quad (6.17)$$

Von den eigentlichen Quelltermen der Dissipationsgleichung verbleibt der Ausdruck  $A$  als konstanter Anteil  $S_C$  auf der rechten Seite  $b$  der Gleichungen des LGS. Term  $B$  wird, gleichfalls durch  $\epsilon_P^0$  dividiert, als proportionaler Quellterm  $S_P$  den Hauptdiagonaleinträgen  $a_P$  der Koeffizientenmatrix zugeordnet.

Werte für die Dissipation  $\epsilon$  können experimentell nur äußerst schwierig und auf indirekte Weise bestimmt werden. Entsprechend kompliziert gestaltet sich die numerisch notwendige Vorgabe von physikalisch sinnvollen Randwerten, speziell am Eintritt ins Rechengebiet. Hier wird  $\epsilon$  mittels Dirichlet-Randbedingung gesetzt. Dazu dient eine charakteristische Länge  $l_\epsilon$ , die der Größe der energietragenden Wirbel im Strömungsfeld entspricht. Mit den Annahmen des Turbulenzmodells kann  $\epsilon$  an den Eintrittsflächen aus der Länge  $l_\epsilon$  und der turbulenten kinetischen Energie  $k$  ermittelt werden.

$$\epsilon = c_\mu \cdot \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon} \quad (6.18)$$

Für gittergenerierte Turbulenz läßt sich die charakteristische Länge  $l_\epsilon$  mittels Korrelationen berechnen (Baines und Peterson (1950), Roach (1987)). Liegen keinerlei verwertbare Informationen über das Turbulenzgitter vor, wird  $l_\epsilon$  proportional einer charakteristischen Abmessung  $L_{char}$  des Strömungsgebietes gesetzt.

$$l_\epsilon \approx 0.03 - 0.04 \cdot L_{char} \quad (6.19)$$

Somit steht für  $\epsilon$  in jedem Fall eine realistische Eintrittsbelegung zur Verfügung.

In unmittelbarer Nähe fester Wände verliert die  $\epsilon$ -Gleichung ihre Gültigkeit. Für alle wandnächsten Gitterknoten  $P$  sind die zugehörigen Gleichungszeilen im LGS zu löschen. Zahlenwerte von  $\epsilon_P$  ergeben sich an diesen Stützstellen über eine algebraische Beziehung aus Turbulenzenergie  $k_P$  und Wandabstand  $y_P$  (Pun und Spalding (1977)).

$$\epsilon_P = c_\mu^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{k_P^{\frac{3}{2}}}{K y_P} \quad (6.20)$$

Der verwendete Zahlenwert für die von Kármán-Konstante  $K$  beträgt 0.4.

An Austrittsflächen werden in schon bekannter Manier die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  angewendet und die vorhandenen Transportkoeffizienten  $a_i$  gelöscht.

Für Symmetrierändern kommt ebenfalls die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  zum Einsatz. Zyklische Ränder werden implizit behandelt.

Die Transportgleichung für  $\epsilon$  wird, wie die Gleichung der turbulenten kinetischen Energie  $k$ , mit einem Faktor  $\alpha(\epsilon)$  von 0.5 relaxiert.

Bei der numerischen Behandlung turbulenter Strömungsprobleme mit dem vorgestellten Berechnungsverfahren legt die Transportgleichung für  $\epsilon$  in vielen Fällen ein sehr viel problematischeres Verhalten an den Tag, als jede der übrigen Bestimmungsgleichungen. Bereits angesprochen wurde das Auftreten negativer  $\epsilon$ -Werte, die teilweise infolge des sehr großen Wertebereiches im Strömungsgebiet berechnet werden und meist zu sofortiger Divergenz des iterativen Prozesses führen. Ebenfalls unerfreulich ist ein völliger Stillstand im Konvergenzverlauf des gesamten Verfahrens, der in einigen Fällen zu beobachten war, sobald zur Interpolation der konvektiven Terme der  $\epsilon$ -Gleichung der DISC-Ansatz gewählt wurde. Die Wurzel dieses Phänomens, das sich keineswegs auf das hier vorgestellte Verfahren beschränkt, liegt augenscheinlich im zyklischen Durchlaufen nahezu identischer Folgen von  $\epsilon$ -Werten.

Das kritische Verhalten der Dissipationsgleichung läßt sich auf deren besonderen Aufbau zurückführen. So sind die Ausdrücke  $A$  und  $B$  linear bzw. quadratisch von  $\epsilon$  selbst abhängig, wobei der lineare Term  $A$  auf der rechten Seite  $b$  der diskretisierten Gleichung verbleibt. Damit ist eine iterativ berechnete Lösung für  $\epsilon$ , selbst bei Konstanz aller übrigen Transportvariablen, nur eingeschränkt aktuell, da sich mit ihr die zugrundegelegten Quellterme massiv ändern. Bei den Gleichungen der übrigen Transportgrößen besteht ein derart direkter Zusammenhang zwischen Lösungswerten und Quelltermen lediglich für den Ausdruck  $S_{HOS}$ .

Die besondere Nichtlinearität der Bestimmungsgleichung für  $\epsilon$  muß bei Strömungsproblemen, die sich einer numerischen Lösung hartnäckig widersetzen, durch spezielle Maßnahmen berücksichtigt werden. Konkret wurde in solchen Situationen, nach der gewohnten Berechnung neuer  $\epsilon$ -Werte, der gesamte Vorgang einschließlich Neubestimmung von Koeffizienten, Quelltermen und Randbedingungen noch einmal wiederholt. Erst nach diesem zweiten Berechnungsschritt erfolgte die Fortsetzung der äußeren Iteration. Das doppelte Lösen der  $\epsilon$ -Gleichung trägt dem besonderen Charakter der Quellterme Rechnung und vermeidet extreme Schwankungen der in aufeinanderfolgenden Blockiterationen ermittelten Lösungswerte. Für die kleine Anzahl von Fällen, in denen die übliche Vorgehensweise versagte, führte die vorgeschlagene Strategie ausnahmslos zur Stabilisierung und Konvergenz des iterativen Lösungsprozesses. Dabei kam ein gegenüber dem Standardwert veränderter Relaxationsfaktor  $\alpha(\epsilon)$  von 0.7 zur Anwendung.

### 6.3.3 Effektive dynamische Viskosität

In laminaren Strömungen stimmt die effektive Viskosität  $\mu$  mit der dynamischen Viskosität  $\mu_l$  des Fluides überein. Diese ist ein Stoffwert, der wie die Dichte des Mediums

von Druck und Temperatur abhängt. Bei den in dieser Arbeit behandelten Strömungsproblemen konnte  $\mu_l$  als konstant betrachtet werden.

Im Rahmen der Simulation turbulenter Strömungen mit Hilfe des Standard- $k, \epsilon$ -Modells wird zusätzlich zur molekularen Viskosität  $\mu_l$  eine Wirbelviskosität  $\mu_t$  eingeführt. Die neue Größe  $\mu_t$  erlaubt es, die Wirkung der turbulenten Schwankungen in einer Strömung für die verschiedenen Transportgleichungen auf einfache Weise in Form zusätzlicher viskoser Terme zu berücksichtigen (vgl. Kapitel 4.3 und 5.2.2).

Sowohl am Eintritt als auch im Inneren des Rechengebietes wird die Wirbelviskosität  $\mu_t$  aus Rand- bzw. Knotenwerten der turbulenten kinetischen Energie  $k$ , deren Dissipation  $\epsilon$  und der Dichte  $\rho$  ermittelt.

$$\mu_t = c_\mu \rho \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6.21)$$

Flächenwerte für  $\mu_t$ , die zur numerischen Berechnung ebenfalls benötigt werden, ergeben sich durch lineare Interpolation aus den Knotenwerten.

In der Nähe fester Wände verliert die vorgestellte Beziehung ihre Gültigkeit. Die Wandgrenzschicht wird deshalb durch ein logarithmisches Wandgesetz überbrückt, das zunächst einen Zusammenhang zwischen dimensionslosem Wandabstand  $y^+$  und einer dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit herstellt (Zierep (1982)). Auf dieser Basis läßt sich auch für die effektive Viskosität  $\mu$ , die den diffusiven Austausch zwischen Wand und wandnächstem Gitterknoten  $P$  kontrolliert, eine Berechnungsvorschrift ableiten (Pun und Spalding (1977)).

$$\mu = \begin{cases} \frac{K \mu_l y^+}{\ln(E y^+)}, & y^+ > 11.5 \\ \mu_l, & y^+ \leq 11.5 \end{cases} \quad (6.22)$$

mit  $y^+ = c_\mu^{\frac{1}{4}} \rho y_P \cdot \frac{k_P^{\frac{1}{2}}}{\mu_l}$

Die von Kármán-Konstante  $K$  wurde bereits eingeführt, die Konstante  $E$  besitzt einen festen Zahlenwert von 9.0. Der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  ist eine Funktion der Dichte  $\rho$ , des Wandabstandes  $y_P$ , der turbulenten kinetischen Energie  $k_P$  und der molekularen dynamischen Viskosität  $\mu_l$ .

Liegt am wandnächsten Knoten  $P$  für den dimensionslosen Wandabstand  $y^+$  ein Wert größer als 11.5 vor, kann das entsprechende Bilanzelement dem vollturbulenten Bereich der Strömung zugeordnet werden. Die effektive Viskosität  $\mu$  an der Wand ist dann durch eine logarithmische Wandfunktion gegeben. Für  $y^+$  kleiner oder gleich 11.5 fällt das Kontrollvolumen der laminaren Unterschicht zu, so daß an der Wand die molekulare Viskosität  $\mu_l$  als Effektivwert gesetzt wird.

Um die Gültigkeitsgrenzen der Wandfunktion sicher einzuhalten, sollte der Wandabstand  $y_P$  im Rechnetz so gewählt werden, daß  $y^+$  im Intervall zwischen 30 und 300 liegt (Huang und Bradshaw (1995), Jovic und Driver (1995)). Dazu leistet bei der Gittergenerierung eine Abschätzung gute Dienste, die auf der Annahme eines  $\frac{1}{7}$ -Potenzgesetzes für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von  $y_P$  basiert (Zierep (1982)). In diese Beziehung gehen neben der Geschwindigkeit  $u_\infty$  der Kernströmung und deren

Abstand  $\Delta$  zur Wand die angestrebten  $y^+$ -Werte sowie die molekulare Viskosität  $\mu_l$  und die Dichte  $\rho$  des Fluides ein.

$$y_P \approx \left[ \frac{(2.5 \ln y^+ + 5.5) \Delta^{\frac{1}{7}} y^+ \mu_l}{\rho u_\infty} \right]^{\frac{7}{8}} \quad (6.23)$$

Damit ein Versagen des Turbulenzmodells in Wandnähe ausgeschlossen werden kann, ist es notwendig, die tatsächlich erreichten  $y^+$ -Werte anhand des berechneten Strömungsfeldes nachträglich zu überprüfen.

Die vorgestellte Implementierung des logarithmischen Wandgesetzes erlaubt es, Wandreibungsterme auch bei turbulenter Strömung implizit zu berücksichtigen. Sie liefert gleichzeitig eine Dirichlet-Randbedingung für die effektive dynamische Viskosität  $\mu$  an festen Wänden. Für Austritts- und Symmetrieränder findet die von Neumann-Randbedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  Anwendung. Zyklische Ränder werden wie Kontrollflächen innerhalb des Rechennetzes behandelt.

Bei der numerischen Berechnung turbulenter Strömungsprobleme treten in der Praxis zu Beginn der blockiterativen Prozedur regelmäßig sehr rasche Änderungen der Turbulenzgrößen im Feld auf. Diese wirken sich, sofern keine geeigneten Schutzmaßnahmen getroffen werden, auf die Wirbelviskosität  $\mu_t$  und damit über den diffusiven Austauschterm  $a_{i,diff}$  unmittelbar auf die Transportkoeffizienten aus. Um negative Auswirkungen auf das numerische Verhalten aller Transportgleichungen zu vermeiden, wird die effektive Viskosität  $\mu$ , in der die Turbulenzeffekte berücksichtigt sind, mit einem Dämpfungsfaktor  $\alpha(\mu)$  von 0.1 relaxiert.

Für turbulente, isotherme Strömungen konstanter Dichte ist die äußere Iterationsschleife des Berechnungsalgorithmus nach Aktualisierung der Viskositätswerte beendet.

## 6.4 Enthalpiegleichung

Bei der Berechnung nichtisothermer Strömungen ist mit der Temperatur im Rechengebiet eine weitere Unbekannte zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird im hier beschriebenen numerischen Verfahren die statische Enthalpie  $h$  als Transportgröße herangezogen. Sie ist mit der gesuchten Temperatur  $T$  über die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  verknüpft (vgl. Gleichung (4.5)).

Sofern es sich um ein adiabates Problem handelt, bleibt der Totalenthalpiestrom  $H_{tot}$  über die Grenzen des Rechengebietes erhalten.

$$H_{tot} = m_{ein} h_{tot} = m_{ein} \left( h + \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 \right) = \text{const.} \quad (6.24)$$

Mittels dieser Beziehung kann anhand der lokalen Geschwindigkeit die Enthalpie und damit die Temperatur des Mediums in allen Gitterzellen näherungsweise ermittelt werden. Vernachlässigt ist dabei die Tatsache, daß die spezifische Totalenthalpie  $h_{tot}$  im Inneren des diskretisierten Gebietes durchaus variieren kann, da der Bilanzraum das gesamte Netz umfaßt.

Bei exakter Betrachtung oder Problemen mit Wärmeübergang muß für die statische Enthalpie eine eigene Transportgleichung gelöst werden. Als Grundlage hierfür dient eine Differentialgleichung, die eine Erhaltung der Enthalpie in Medien variabler Dichte bei turbulenter Strömung beschreibt (Cebeci und Bradshaw (1984)). Dabei werden, wie bereits im Fall der Impulsgleichungen, Korrelationen mit turbulenten Dichteschwankungen vernachlässigt. Die Auswirkungen der Turbulenz sind mittels Wirbelviskositätsprinzip bzw. Boussinesq-Hypothese berücksichtigt (vgl. Kapitel 4.3). Nach Integration und Diskretisierung auf dem Kontrollvolumen folgt die gesuchte Bestimmungsgleichung für  $h$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \{\rho_i h_i (\vec{w}, \vec{n})_i A_i\} &= \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right]_i \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right)_i A_i \right\} \\
&+ \underbrace{u \sum_{i=1}^m \{p_i(\vec{n}_i, \vec{x}) A_i\}}_{A1} + \underbrace{v \sum_{i=1}^m \{p_i(\vec{n}_i, \vec{y}) A_i\}}_{A2} \\
&+ \underbrace{\mu_l \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]}_B V \\
&+ \underbrace{\rho \epsilon V}_C
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Konvektions- und Diffusionsterm werden auf bekannte Art diskretisiert. Die Austauschkoefizienten, im Diffusionsterm lassen sich mittels Prandtl-Zahlen  $Pr$  zu molekularer Viskosität  $\mu_l$  und Wirbelviskosität  $\mu_t$  in Beziehung setzen (vgl. Kapitel 5.2.1 und 5.2.2). Bei der Prandtl-Zahl handelt es sich um eine dimensionslose Kennzahl, die das Verhältnis von kinematischer Viskosität  $\nu$ , also einer Art Impulsleitfähigkeit, zu Temperaturleitfähigkeit  $a$  charakterisiert. Laminare und turbulente Prandtl-Zahl  $Pr_l$  und  $Pr_t$  werden für das Strömungsmedium Luft nach Vorschlägen von Sieger (1993) als Konstanten angenommen.

$$\begin{aligned}
Pr &= \frac{\nu}{a} = \frac{\mu_l c_p}{\lambda} \\
Pr_l(\text{Luft}) &\approx 0.69 \\
Pr_t(\text{Luft}) &\approx 0.86
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Unter den Quelltermen, die die rechte Seite  $b$  der linearisierten Gleichung ausmachen, beschreiben die Ausdrücke  $A1$  und  $A2$  die Arbeit der Druckkräfte. Deren Beitrag zur Enthalpie ist, ebenso wie die Arbeit der viskosen Kräfte in Term  $B$ , für kleine Strömungsgeschwindigkeiten gering. Der Enthalpiezuwachs durch Dissipation von Turbulenzenergie ist im Ausdruck  $C$  erfaßt (Jischa (1982)).

Als Randbedingungen für die Enthalpiegleichung werden vom Benutzer Temperaturbelegungen vorgegeben, die das Programm mittels Gleichung (4.5) in die zugehörigen Enthalpiewerte umsetzt. Am Eintritt ins Rechengebiet wird die Enthalpie gemäß einer Dirichlet-Randbedingung gesetzt.

Feste Wände können als isotherme oder adiabate Grenzen des Rechengebietes spezifiziert werden. Bei isothermen Verhältnisse sind konstante Wandwerte ebenfalls durch

eine Dirichlet-Randbedingung bestimmt. Wandwärmeströme werden dann über die diffusiven Anteile  $a_{i,diff}$  der Transportkoeffizienten implizit erfaßt. Um diesen Austausch korrekt zu beschreiben, muß die Wirbelviskosität  $\mu_t$ , die sich aus dem logarithmischen Wandgesetz ergibt, mit einem Korrekturfaktor modifiziert werden. Die resultierende Wandfunktion berücksichtigt den zusätzlichen Widerstand, den die laminare Unterschicht dem Wandwärmestrom entgegensetzt (Jayatilleke (1969)).

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu_t y^+}{y^+ + P \frac{\mu_t}{\mu_l}}, & y^+ > 11.5 \\ \mu_l, & y^+ \leq 11.5 \end{cases} \quad (6.27)$$

$$P = 9.0 \left[ \frac{Pr_l}{Pr_t} - 1 \right] \left( \frac{Pr_l}{Pr_t} \right)^{-\frac{1}{4}}$$

Zugrundegelegt ist auch hier das logarithmische Wandgesetz, allerdings um die sogenannte  $P$ -Funktion erweitert. Mit der nach Pun und Spalding (1977) implementierten Korrelation und den für laminare und turbulente Prandtl-Zahl eingesetzten Konstanten nimmt  $P$  einen Wert von  $-1.88$  an. Der hier eingeschlagene Weg zur Festlegung des Wandwärmestroms nutzt die bereits bekannte Wirbelviskosität  $\mu_t$ . Er vermeidet somit den hohen Berechnungsaufwand, den ein erneutes Auswerten der logarithmischen Wandfunktion erfordert.

Bei adiabaten Wänden kommt eine von Neumann-Randbedingung mit  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  zum Einsatz, so daß die benötigten Werte vom wandnächsten Knoten übernommen werden. Die gleiche Randbedingung wird auch auf Austritts- und Symmetrieebenen angewendet. Zusätzlich findet an Austritten durch Löschen der Transportkoeffizienten  $a_i$  eine Dämpfung des ins Gebietsinnere gerichteten Informationsflusses statt. Zyklisch verknüpfte Ränder werden auch hier implizit behandelt.

Die Relaxation der Enthalpiegleichung wird mit einem Dämpfungsfaktor  $\alpha(h)$  von 0.5 vorgenommen.

## 6.5 Dichte

Für die numerische Berechnung von Strömungen inkompressibler Fluide oder kompressibler Medien bei mäßiger Geschwindigkeit, d.h. einer Machzahl unterhalb von 0.3, kann die Dichte als konstant betrachtet werden, sofern lediglich geringe Temperaturänderungen auftreten. Bei der Simulation kompressibler Fluide mit höherer Geschwindigkeit sowie bei starker Variation der statischen Enthalpie ist es dagegen unerlässlich die Dichteänderungen, die sich aufgrund von Druck- und Temperaturvariation im Rechengebiet ergeben, zu berücksichtigen. Beim vorgestellten numerischen Verfahren werden gasförmige Medien als perfekte Gase betrachtet, so daß sich über die Zustandsgleichung die gesuchte Dichte  $\rho$  aus bekannten Werten von Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und spezieller Gaskonstante  $R$  leicht berechnen läßt.

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p c_p}{R h} \quad (6.28)$$

Die Dichte muß für alle Bilanzelemente und Kontrollflächen im Rechenetz neu bestimmt werden, sobald sich der Druck  $p$  oder die Temperatur  $T$  bzw. die Enthalpie  $h$

geändert haben. Im Verlauf einer Blockiteration sind also maximal zwei Aktualisierungen durchzuführen. Wird auf eine dieser beiden Neuberechnungen verzichtet, nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit des Rechengangs merklich ab. Die Ursache dafür liegt in den konvektiven Transporttermen, zu deren Berechnung dann nicht mehr aktuelle Stoffwerte herangezogen werden.

An Kontrollflächen im Innern des Rechengebietes resultiert die Dichte aus einer linearen Interpolation der in den beiden Nachbarelementen vorliegenden Werte. Für Ein- und Austrittsflächen des Gitters ergibt sie sich, wie an den Rechenknoten selbst, gemäß der idealen Gasgleichung aus den vorliegenden Drücken und Temperaturen. Die Dichte des Mediums an festen Wänden und Symmetrierändern wird während des iterativen Berechnungsvorgangs nicht benötigt, da über diese Begrenzungen hinweg kein konvektiver Austausch stattfindet. Um später jedoch auch hier eine numerische Lösung konsistent darzustellen, wird eine von Neumann Randbedingung mit  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  gesetzt. Für zyklisch verknüpfte Ränder lassen sich Dichtewerte, wie im Inneren des Rechengebietes, durch lineare Interpolation ermitteln.

Ähnlich der effektiven dynamischen Viskosität  $\mu$  sind auch die Strömungsgrößen, mit deren Hilfe die Dichte  $\rho$  bestimmt wird, nach dem Start des blockiterativen Algorithmus starken Schwankungen unterworfen. Die damit verbundenen, oft sprunghaften Dichteänderungen müssen durch Relaxation gedämpft werden, da sie andernfalls linear in den konvektiven Anteil  $a_{i,konv}$  der Transportkoeffizienten  $a_i$  Eingang finden und die Stabilität des Gesamtverfahrens stören. Der entsprechende Dämpfungsfaktor  $\alpha(\rho)$  kann erfahrungsgemäß zwischen 0.1 und 0.5 gewählt werden, wobei mit relativ niedrigen Werten zwar geringere Konvergenzraten, jedoch ein stabileres numerisches Verhalten erreicht wird.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Diskretisierung der Transportgleichungen für die Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$ , die Druckkorrektur  $p'$ , die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  sowie für die statische Enthalpie  $h$  auf ebenen unstrukturierten Gittern ausführlich dargestellt. Ebenfalls im Detail erläutert wurde die Berechnung des Druckes  $p$ , der effektiven dynamischen Viskosität  $\mu$  und der Dichte  $\rho$ . Besondere Aufmerksamkeit galt dabei dem Aufbau der verschiedenen Gleichungsterme und deren Zuordnung zu den Elementen der allgemeinen Diskretisierungsgleichung, der Implementierung von möglichen Randbedingungen und der Auswahl geeigneter Dämpfungsfaktoren für die Relaxation.

Mit der Entscheidung für SIMPLE- oder SIMPLEC-Druckkorrekturverfahren liegen die optimalen Relaxationsparameter bei allen sechs Transportgleichungen und der dynamischen Viskosität fest. Eine Variation der genannten Werte hat sich bisher nicht als sinnvoll erwiesen. Als Maßnahme in den seltenen Fällen gestörter Konvergenz ist eine Erhöhung der Dämpfung von Druck- und Dichtelösung zu empfehlen.

Um Robustheit und Konvergenzrate der gesamten numerischen Methode weiter zu verbessern, wurden zwei neue Techniken entwickelt und zum ersten Mal vorgestellt. Eine automatische lösungsgesteuerte Relaxationsstrategie für den Druck stabilisiert Geschwindigkeits- und Druckfeld speziell während der ersten Blockiterationen zu Beginn jeder Rechnung. Eine besondere Behandlung der Gleichung für die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie vermeidet Stabilitätsprobleme, die mit höherwertiger Diskretisierung der konvektiven Transportterme vereinzelt auftreten.

## 7 Validierung des numerischen Verfahrens

Um ein numerisches Berechnungsverfahren auf praxisrelevante Strömungsprobleme sinnvoll anzuwenden, muß eine fehlerfreie Implementierung der genutzten physikalischen Modelle und numerischen Algorithmen sichergestellt sein. Im Sinne einer möglichst effizienten Nutzung der entsprechenden Programme ist es außerdem erforderlich, deren numerisches Verhalten sowie eventuell vorhandene Einsatzbeschränkungen genau zu kennen. Für das hier vorgestellte Verfahren war neben dem eigentlichen Berechnungsablauf die zur Modifikation der räumlichen Diskretisierung eingeschlagene Strategie kritisch zu überprüfen.

Ein Schwerpunkt der anstehenden Validierung ist die Kontrolle der Diskretisierungsgenauigkeit, die einerseits durch unterschiedliche Interpolation der konvektiven Transportterme mit Upwind- und DISC-Ansatz, andererseits durch Adaption der verwendeten Rechennetze beeinflusst wird. Genauigkeit und Konvergenzeigenschaften der neuen numerischen Methode sollen schrittweise für laminare, turbulente und kompressible nicht-isotherme Anwendungsfälle unter Beweis gestellt werden. Strömungsprobleme aus der Praxis der thermischen Turbomaschinen sind für diesen Zweck nur bedingt geeignet, da sie im allgemeinen eine sehr komplexe geometrische und physikalische Modellierung notwendig machen, so daß Fehlerquellen in einzelnen Programmodulen nur sehr schwierig separiert werden können. Erschwerend kommt hinzu, daß für derartige Konfigurationen nur selten umfassende Meßdaten vorliegen.

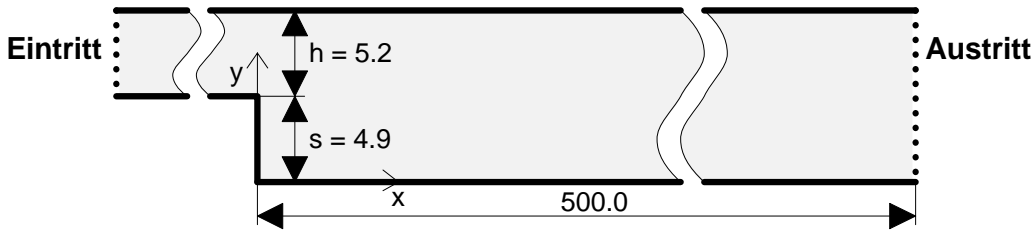
Aus den genannten Gründen wurde die Überprüfung der numerischen Methode anhand bekannter, geometrisch vergleichsweise einfacher Testfälle durchgeführt. Die ausgewählten Probleme weisen jedoch wesentliche praxisrelevante Strömungsphänomene wie Ablösungen und Verdichtungsstöße auf. In ansteigender Komplexität aufgelistet handelt es sich bei diesen Testproblemen um eine laminare Stufenströmung, eine laminare Hindernisströmung, eine laminare Zylinderumströmung, eine turbulente Stufenströmung sowie eine transsonische Strömung über ein Kreisbogenprofil am Boden eines Kanals.

### 7.1 Laminare Stufenströmung ( $Re = 389$ )

Als ersten Testfall für das neue numerische Berechnungsverfahren wurde eine laminare Strömung über eine rückspringende Stufe herangezogen. Die zugrundeliegenden Messungen sowie zusätzliche numerische Untersuchungen wurden von Armaly et al. (1983) durchgeführt.

Ein charakteristisches Merkmal von Stufenströmungen ist eine Strömungsablösung unmittelbar hinter der Querschnittserweiterung, die trotz einfacher geometrischer Konfiguration für ein komplexes Strömungsfeld sorgt. Ein Vergleich gemessener und simulierter Geschwindigkeitsprofile erlaubt deshalb eine zuverlässige Bewertung der erzielten Diskretisierungsgenauigkeit (Freitas (1995)). Abbildung 7.1 gibt die geometrischen Verhältnisse im Meßkanal in einem Längsschnitt wieder. Die Experimente mit Luft als Strömungsmedium wurden in einem weiten Geschwindigkeits- bzw. Reynoldszahlbereich durchgeführt. Die Messung der Geschwindigkeitskomponenten erfolgte optisch





**Abb. 7.1:** Geometrie des Meßkanals mit rückspringender Stufe ( $Re = 389$ )

mittels eines Laser-Doppler-Anemometers (LDA). Dabei wurde festgestellt, daß im Mittelschnitt des Kanals bis zu einer Reynoldszahl  $Re_{D_h}$  von 400 zweidimensionale Strömungsverhältnisse vorliegen. Als charakteristische Länge findet der hydraulische Durchmesser  $D_h$  des Kanals vor der Erweiterung, also dessen doppelte Höhe  $h$ , Eingang in die Reynoldszahl.

Eine numerische Simulation der Stufenströmung wurde bei einer Reynoldszahl  $Re_{D_h}$  von 389 vorgenommen. Als Eintrittsbelegung für die Geschwindigkeit im Zuströmkanal diente, basierend auf den Meßergebnissen, das parabolische Profil einer ausgebildeten, laminaren Spaltströmung. Geschwindigkeits- und Stoffdaten, die im Rahmen der Rechnung benötigt wurden, sind in Tabelle 7.1 zusammengefaßt.

Bei der Gittergenerierung wurde in einem ersten Versuch auf eine Diskretisierung der Einlaufstrecke verzichtet, so daß der Eintritt ins Rechengebiet unmittelbar oberhalb der Stufenkante erfolgte. Die unbefriedigenden Resultate dieser Rechnung machten deutlich, daß die Zulaufströmung am Ende des Eintrittskanals ganz wesentlich von den Verhältnissen stromab der Querschnittserweiterung beeinflußt wird. Demnach darf hier keine parabolische Geschwindigkeitsverteilung mehr angenommen werden.

In ein verbessertes Rechennetz wurde ein 15.6 mm bzw. drei Kanalhöhen  $h$  messender Abschnitt des Zulaufkanals einbezogen. Das Rechengebiet endet 120.25 mm hinter der Stufe und übersteigt damit die im Experiment beobachtete Ablöselänge von etwa 42.0 mm um ein Mehrfaches. Eine Rückwirkung der Austrittsrandbedingung auf die abgelöste Strömung im vorderen Bereich des Kanals ist damit praktisch ausgeschlossen. Ein Teil des beschriebenen Basisgitters mit insgesamt 3808 Gitterknoten ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

Um den Einfluß der Diskretisierung der konvektiven Terme auf die Qualität der Ergebnisse und das Konvergenzverhalten zu analysieren, wurden auf dem Basisgitter sowohl das bekannte Upwind-Schema als auch die im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte DISC-Interpolation eingesetzt. Die Auswirkungen einer verbesserten räumlichen Diskretisierung wurden durch Berechnung der Lösung auf einem nachträglich modifizierten Gitter mit 5062 Knoten überprüft, wobei für die Konvektionsterme der DISC-Ansatz zur Anwendung kam.

	$\bar{u}_{ein}$ [m/s]	$\mu_l$ [Pa s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$Re_{D_h} = 389$	0.5626	$18.2 \cdot 10^{-6}$	1.21

**Tab. 7.1:** Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 389$ )

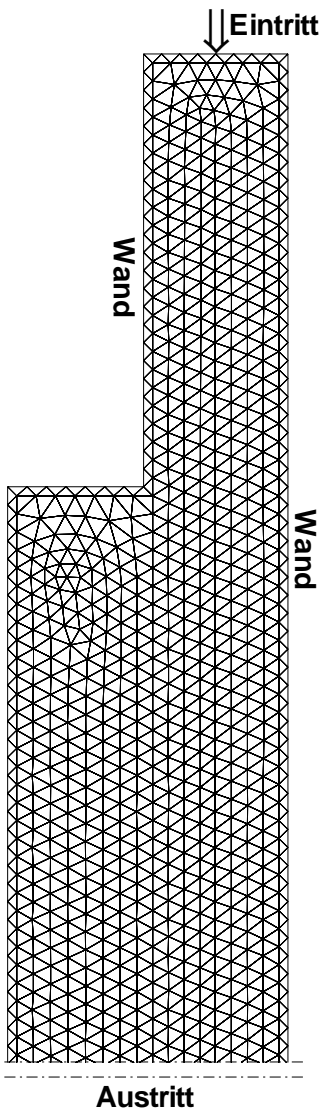


Abb. 7.2: Verbessertes Basisgitter für rückspringende Stufe ( $Re = 389$ )

Für das Basisgitter sind die Resultate von Upwind- und DISC-Rechnung den experimentellen Ergebnissen in Abbildung 7.3 gegenübergestellt. Zu diesem Vergleich ausgewählt wurden Profile der  $x$ -Komponente  $u$  der Geschwindigkeit an den Positionen  $\frac{x}{s}$  von 2.55, 3.06, 4.18, 5.41 und 7.76 Stufenhöhen stromab der Querschnittserweiterung.

Das mit Upwind-Diskretisierung erzielte Berechnungsergebnis demonstriert eindrucksvoll die fatale Wirkung numerischer Diffusion bzw. eines Diskretisierungsfehlers erster Ordnung. Das Geschwindigkeitsprofil flacht sehr schnell ab, so daß keine starken Geschwindigkeitsgradienten mehr vorliegen. Entsprechend ist die errechnete Ablöselänge mit nur 13.4mm deutlich geringer als im praktischen Versuch.

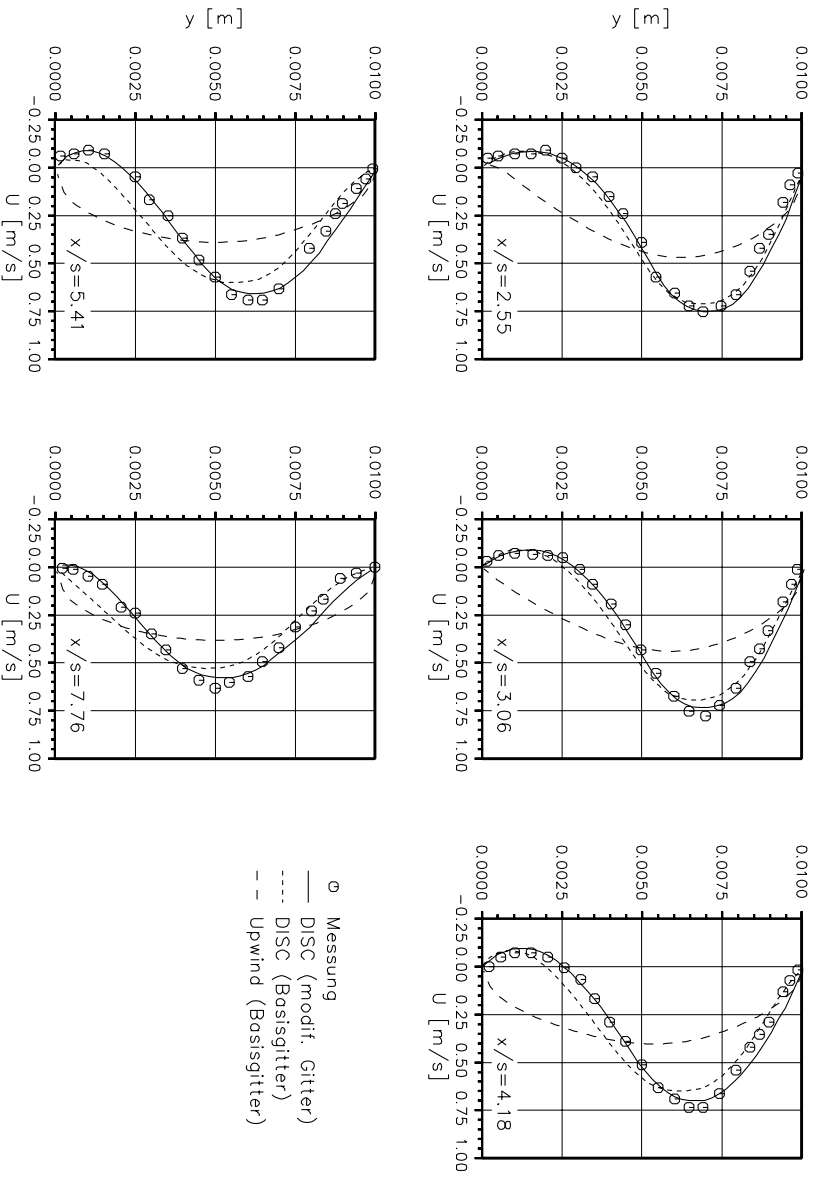


Abb. 7.3: Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 389$ )

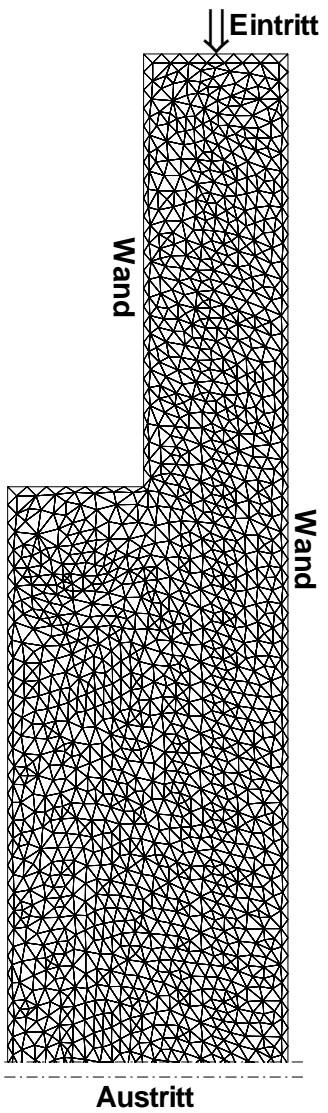


Abb. 7.4: Modifiziertes Gitter für rückspringende Stufe ( $Re = 389$ )

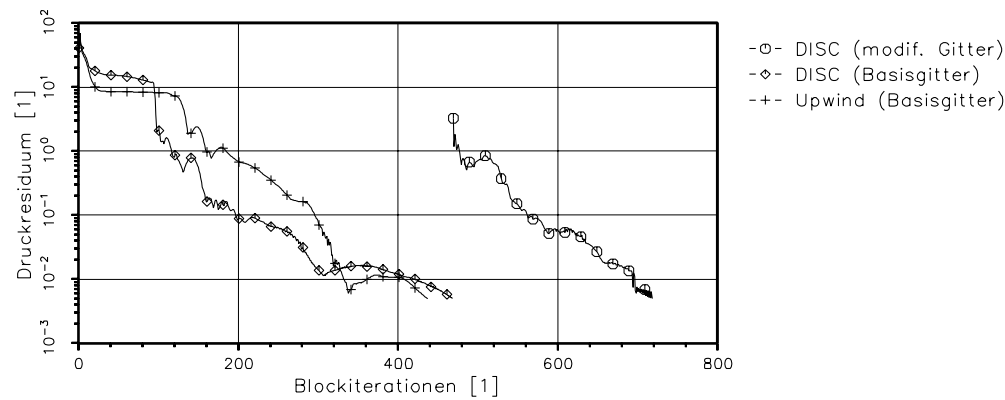
Die DISC-Rechnung liefert bereits auf dem Basisgitter ein relativ genaues Ergebnis. Bis zur dritten Meßebene stimmen Simulation und Experiment gut überein. Im weiteren Verlauf des Kanals macht sich der Einfluß der mit lediglich 17 Stützstellen über der Höhe noch groben räumlichen Auflösung bemerkbar, der die Rechengenauigkeit herabsetzt. Das simulierte Rezirkulationsgebiet ist mit einer  $x$ -Ausdehnung von 31.4 mm noch immer zu kurz.

Um eine nochmals verbesserte, gitterunabhängige Lösung zu erzielen, wurde das Ausgangsgitter durch Adaption verfeinert. Eine strömungsadaptive, fehlergesteuerte Gitterverfeinerung war im vorliegenden Fall aufgrund der Querabmessungen des Kanals problematisch. Die geringe Kanalhöhe führt in Verbindung mit Strömungsablösung und laminarer Grenzschichtausbildung zu starken Geschwindigkeitsgradienten im gesamten Querschnitt. Dimensionslose Fehlerparameter, die auf der Grundlage dieser Gradienten ermittelt werden, weisen deshalb nur geringe Betragsvariationen auf, so daß keine klar abgegrenzten Verfeinerungsgebiete mehr detektiert werden können. Als Adaptionparameter diente deswegen das Flächenkriterium, wodurch das modifizierte Rechengitter, wie Abbildung 7.4 belegt, eine hohe und gleichmäßige Knotendichte aufweist. Quer zur Strömungsrichtung stehen jetzt etwa 25 Stützstellen zur Verfügung.

Mit dem Ergebnis der DISC-Rechnung aus dem Basisgitter als Startbelegung wurde die numerische Berechnung auf dem modifizierten Netz fortgesetzt. Der direkte Vergleich zwischen Experiment und neuer DISC-Lösung in Abbildung 7.3 macht deutlich, daß im Rahmen der Meßgenauigkeit vollständige Übereinstimmung der Geschwindigkeitsprofile erreicht werden konnte. Für die Strömungsablösung wurde eine Länge von 41.4 mm berechnet, was ebenfalls sehr genau dem experimentellen Befund von 42.0 mm entspricht.

Als Abbruchkriterium der äußeren Iteration wird, wie in Kapitel 6 bereits angesprochen, die normierte maximale Änderung der Werte aller in aufeinanderfolgenden Blockiterationen berechneten Transportgrößen  $\phi$  herangezogen. Bei den drei für die rückspringende Stufe vorgestellten Rechnungen wies stets die Lösung für die Druckkorrekturvariablen  $p'$  das größte und damit konvergenzentscheidende Residuum auf. Um Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften des numerischen Verfahrens bei Uppwind- und DISC-Interpolation zu bewerten, ist in Abbildung 7.5 der Verlauf des  $p'$ -Residuums über der Anzahl der Blockiterationen in dargestellt.

Auf dem Basisgitter weisen Uppwind- und DISC-Rechnung ein ähnliches Konvergenzver-



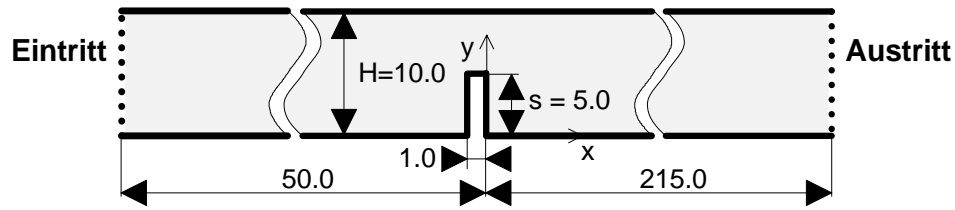
**Abb. 7.5:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 389$ )

halten auf. Nach einer kurzen Stagnationsphase zu Iterationsbeginn fallen die Residuen steil und weitgehend monoton ab, wobei der DISC-Ansatz zunächst leichte Vorteile für sich verbuchen kann. Das Abbruchkriterium  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  wird mit Upwind-Interpolation nach 437, mit DISC-Schema nach 468 äußeren Iterationen erreicht. Die auf einem Sun Sparc 10-TGX4 Arbeitsplatzrechner aufgewendete Prozessorzeit beträgt in beiden Fällen etwa 16 Minuten. Nach Neustart der DISC-Rechnung auf dem modifizierten Gitter wird eine höhere Konvergenzrate erzielt, so daß nach nur 250 weiteren Blockiterationen erneut das Abbruchresiduum erreicht ist.

Die Bearbeitung dieses ersten Validierungsfalls hat gezeigt, daß durch den Einsatz des neuen, zweiter Ordnung genauen DISC-Ansatzes die Rechengenauigkeit des vorgestellten numerischen Verfahrens deutlich gesteigert wird. Dieser Zuwachs an mathematischer Genauigkeit muß, wie die Analyse des Konvergenzverhaltens beweist, im Unterschied zu vielen bekannten Diskretisierungsansätzen höherer Ordnung, nicht durch einen Verlust an numerischer Stabilität erkaufte werden. Erfreulicherweise ist auch der erforderliche Mehraufwand gering, was ein Vergleich der Rechenzeiten belegt. Eine weitere Erhöhung der Diskretisierungsgenauigkeit wird durch die nachträgliche Gitterverfeinerung erreicht, wobei sich das Konvergenzverhalten auf dem modifizierten Netz gegenüber der Rechnung auf dem Basisgitter nochmals verbessert.

## 7.2 Laminare Hindernisströmung ( $Re = 145$ )

Die Basis für den nächsten numerischen Test war die laminare Strömung über ein Hindernis in einem Kanal. Die zugrundeliegenden Messungen und zusätzliche numerische Studien wurden von Carvalho et al. (1987) durchgeführt und veröffentlicht. Das vorliegende Problem ist erheblich anspruchsvoller, als die vorher betrachtete laminare Stufenströmung, da sich sowohl im Strömungsschatten des Hindernisses am Kanalboden als auch stromab in einiger Entfernung an der Kanaldecke große Ablösewirbel ausbilden. Position und Ausdehnung dieser Rezirkulationsgebiete sind ganz wesentlich vom Strömungszustand stromauf der Versperrung bestimmt. Des weiteren stellt die abrupte Verengung des Kanalquerschnittes, die schnelle Änderungen der Strömungsgrößen erzwingt, hohe Anforderungen an die Stabilität eines numerischen Verfahrens.



**Abb. 7.6:** Geometrie des Meßkanals mit Hindernis ( $Re = 145$ )

Abbildung 7.6 gibt die gewählte experimentelle Konfiguration schematisch in einem Längsschnitt wieder. Zur Messung der Geschwindigkeit der im Kanal strömenden Luft wurde ein Laser-Doppler-Anemometer eingesetzt. Im Mittelschnitt des Versuchskanals kann die Strömung als eben betrachtet werden.

Die numerische Berechnung des Strömungsproblems erfolgte bei einer Reynoldszahl  $Re_s$  vom 145, wobei als charakteristische Länge die Höhe  $s$  des Hindernis diente. Als Geschwindigkeitsbelegung am Kanaleintritt wurde der Messung folgend ein ausgebildetes laminares Spaltströmungsprofil vorgegeben. Die zur Simulation verwendeten Werte für Geschwindigkeit und Stoffdaten sind in Tabelle 7.2 aufgeführt.

Die räumliche Diskretisierung des Meßkanals beginnt 49.0 mm stromauf des Hindernisses und endet 150.0 mm hinter diesem. Damit wird die gemessene Länge der Rückströmzone am Kanalboden von 53.0 mm mehrfach überschritten. Einen Ausschnitt aus dem Basisgitter mit 2413 Rechenpunkten zeigt Abbildung 7.7.

Im Rahmen der numerischen Simulation der Hindernisströmung wurde zur Diskretisierung der Konvektionsterme ausschließlich das neue DISC-Verfahren herangezogen. Der Einfluß des Rechengitters auf den Diskretisierungsfehler wurde durch Neustart der Rechnung auf zwei jeweils weiter verfeinerten Netzen mit 4318 und 5929 Knoten überprüft. Abbruchkriterium für den Iterationsprozeß war jeweils ein Referenzresiduum  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$ .

Ein Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Profilen der  $x$ -Komponente  $u$  der Geschwindigkeit wurde an vier Positionen im Gitter vorgenommen. Diese befinden sich unmittelbar am Hindernis bei  $\frac{x}{s} = 0.0$ , sowie 3.4, 8.0 und 12.0 Hindernishöhen stromab der Versperrung. Die entsprechenden experimentellen und numerischen Ergebnisse sind in Abbildung 7.8 aufgeführt.

Auf dem Basisgitter nimmt die Qualität der numerischen Lösung mit zunehmender Entfernung vom Hindernis erkennbar ab. Verantwortlich dafür ist die zu grobe räumliche Diskretisierung mit nur 10 Stützstellen über der Kanalhöhe und lediglich 5 Rechenknoten im engsten Querschnitt über dem Hindernis. Wie die Geschwindigkeitsprofile bei  $\frac{x}{s}$  von 8.0 und 12.0 belegen, ist das Rezirkulationsgebiet am Kanalboden mit nur 30.0 mm Länge viel zu kurz wiedergegeben. Die zweite im Experiment beobachtete

	$\bar{u}_{ein}$ [m/s]	$\mu_l$ [Pa s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$Re_s = 145$	0.4362	$18.2 \cdot 10^{-6}$	1.21

**Tab. 7.2:** Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 145$ )

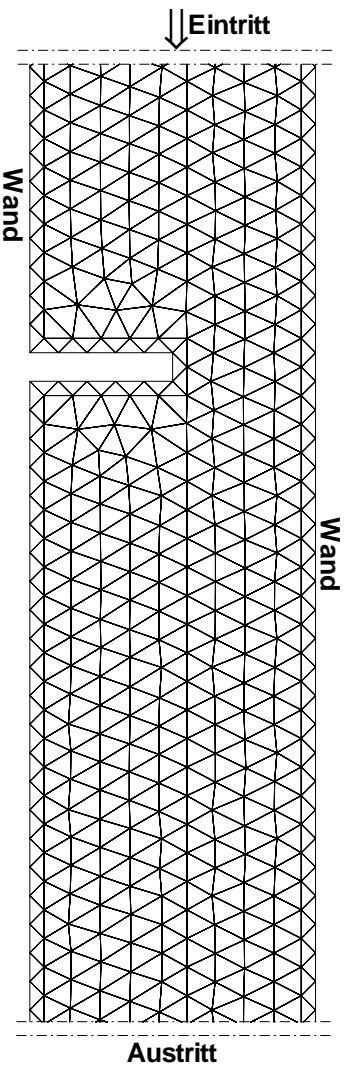


Abb. 7.7: Basisgitter für Kanal mit Hindernis ( $Re = 145$ )

Rückströmzone zwischen 50.0 und 76.0 mm stromab der Versperung an der Kanaldecke wird nicht erfaßt. Ein dritter sehr kleiner Strömungswirbel, der im Experiment unmittelbar vor der Versperung an der unteren Kanalwand nachgewiesen wurde, ist bemerkenswerterweise trotz des groben Netzes aufgelöst.

Aus den schon bei der laminaren Stufenströmung angeführten Gründen wurden die beiden Adaptionen von Basis- und modifiziertem Gitter unter Verwendung des Flächenkriteriums vorgenommen. Der Verfeinerungsbereich erstreckte sich vom Gittereintritt bis hinter das Ende der deckennahen Strömungsablösung 80.0 mm stromab des Hindernisses. Ein Teil des Rechnetzes, wie es nach der zweiten Gitteradaption vorliegt, ist

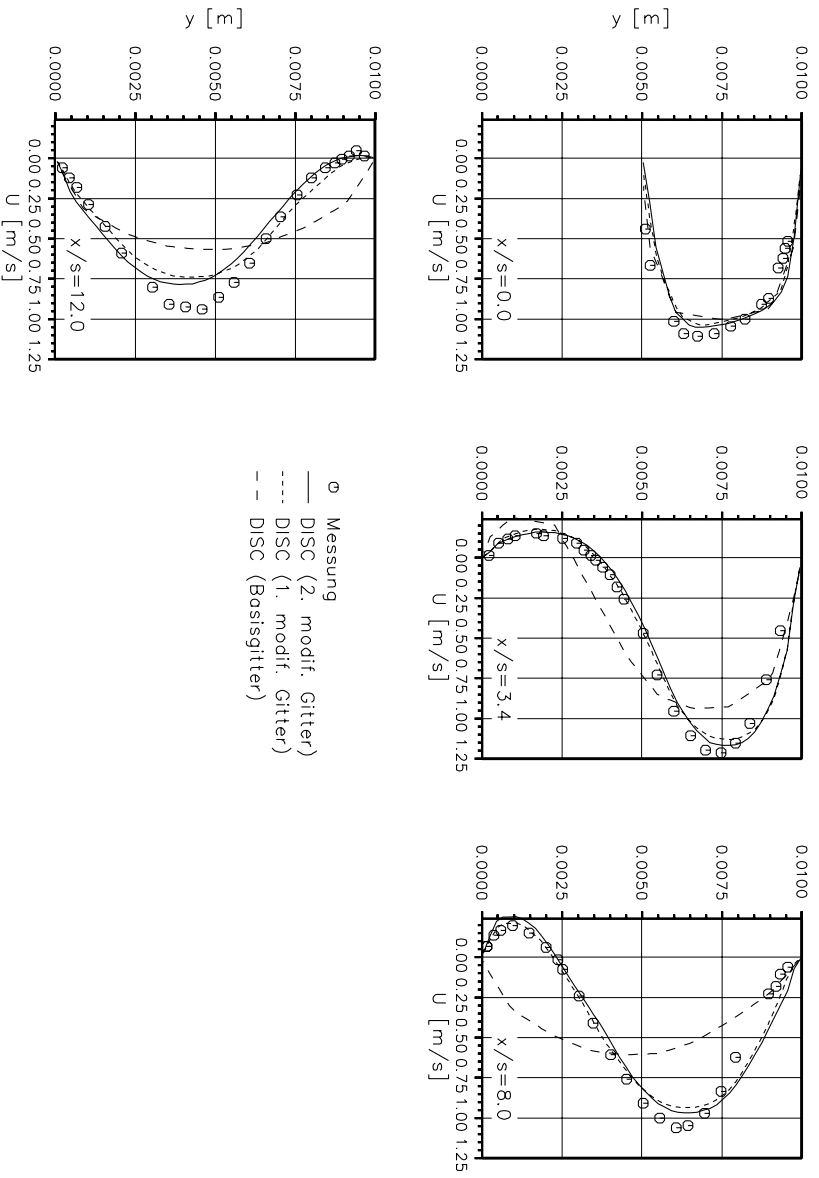
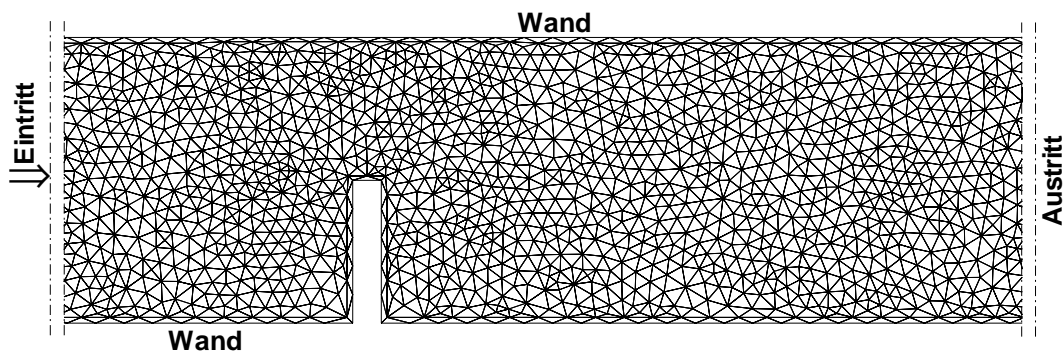


Abb. 7.8: Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 145$ )



**Abb. 7.9:** Modifiziertes Gitter für Kanal mit Hindernis ( $Re = 145$ )

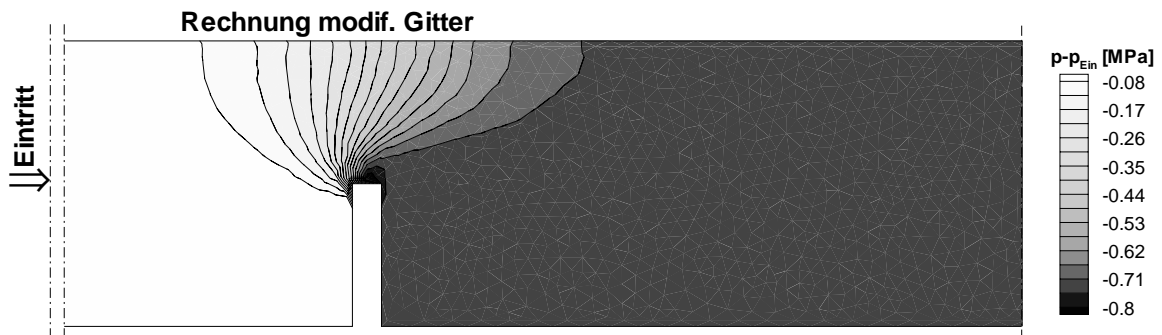
in Abbildung 7.9 zu sehen. Dieses Gitter stellt zwischen unterer und oberer Kanalwand mehr als 20 Rechenknoten bereit.

Bereits nach der ersten Modifikation wird, wie Abbildung 7.8 deutlich macht, gute Übereinstimmung zwischen numerischem und experimentellem Ergebnis erreicht. Als Länge der unteren Ablöseblase hinter der Versperrung ergeben sich, wie im Versuch 53.0 mm. Das zweite große Rezirkulationsgebiet unter der Kanaldecke wird zwischen 45.5 und 65.5 mm stromab des Hindernisses berechnet und ist damit kleiner als im Experiment.

Die zweite Gittermodifikation führt lediglich an der letzten Vergleichsstelle bei  $\frac{x}{s}$  von 12.0 zu einer wesentlichen Verbesserung der numerischen Lösung. Entsprechend stimmt die Ausdehnung der vorhergesagten zweiten Rezirkulation, die sich jetzt zwischen 44.5 und 73.5 mm nach dem Hindernis befindet, besser mit der Messung überein. Aufgrund der geringen Unterschiede zur Lösung nach der ersten Gitterverfeinerung, kann das Ergebnis auf dem zweifach adaptierten Netz als weitgehend gitterunabhängig betrachtet werden.

Ein Indiz für die hohe numerische Stabilität der DISC-Interpolation und des gesamten Rechenverfahrens ist neben einem problemlosen Konvergenzverhalten das Erscheinungsbild des berechneten Druckfeldes. Es ergeben sich, wie anhand von Abbildung 7.10 erkennbar ist, selbst in unmittelbarer Umgebung der Kanalverengung keinerlei Hinweise auf Druckoszillationen.

Die Resultate der numerischen Untersuchung der Hindernisströmung haben die posi-



**Abb. 7.10:** Berechnetes Druckfeld im Bereich der Versperrung ( $Re = 145$ )

tiven Genauigkeits-, Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften von DISC-Ansatz und gesamter numerischer Methode für ein schwieriges Strömungsproblem nochmals unter Beweis gestellt. Die räumliche Diskretisierung kann durch Gitteradaption mehrfach verbessert werden, wobei der nachfolgende Neustart der Rechnung keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Damit läßt sich eine mangelnde Auflösung des Strömungsgeschehens beheben, ohne dazu auf eigens generierten Gittern das Problem vollständig neu zu bearbeiten.

### 7.3 Laminare Zylinderumströmung ( $Re = 20$ )

Beim letzten laminaren Testfall handelt es sich um die stationäre, zweidimensionale Umströmung eines ebenen Kreiszyinders in einem Kanal. Anders als bei den zwei vorangegangenen Strömungsfällen handelt es sich bei dieser Konfiguration um ein Benchmark-Problem, für das auf rein numerischem Weg eine Referenzlösung bestimmt wurde (Schäfer und Turek (1995)). Die für Kanal und Zylinder vorgeschriebene, leicht asymmetrische Geometrie ist in Abbildung 7.11 dargestellt.

Die vorliegende Anordnung kombiniert Um- und Durchströmungsproblem und stellt so ebenfalls hohe Anforderungen an die Stabilität eines numerischen Verfahrens. Die Qualität der berechneten Lösung kann sehr einfach anhand integraler Parameter überprüft werden. Zu diesem Zweck waren im Rahmen des Benchmarking der Widerstandsbeiwert  $c_D$ , der Auftriebsbeiwert  $c_L$ , die Ablöselänge  $L_a$  hinter dem Zylinder und die Druckdifferenz  $\Delta p$  zwischen vorderem und hinterem Staupunkt des Körpers zu berechnen. Auftriebs- und Widerstandsbeiwert lassen sich durch numerische Integration entlang der Zylinderoberfläche ermitteln, wobei hier Anströmung in  $x$ -Richtung vorausgesetzt wird.

$$\begin{aligned} c_L &= \frac{2F_L}{\rho \bar{u}^2 D} = \frac{-2 \int_A \left( \mu \frac{\partial w_t}{\partial n} n_x + p n_y \right) dA}{\rho \bar{u}^2 D} \\ &= \frac{-2}{\rho \bar{u}^2 D} \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \mu_i \frac{(\vec{w}_{P_i}, \vec{t}_i)}{\Delta n_{P_i}} (\vec{n}_i, \vec{x}) + p_i (\vec{n}_i, \vec{y}) \right] \cdot A_i \right\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} c_D &= \frac{2F_D}{\rho \bar{u}^2 D} = \frac{2 \int_A \left( \mu \frac{\partial w_t}{\partial n} n_y - p n_x \right) dA}{\rho \bar{u}^2 D} \\ &= \frac{2}{\rho \bar{u}^2 D} \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \mu_i \frac{(\vec{w}_{P_i}, \vec{t}_i)}{\Delta n_{P_i}} (\vec{n}_i, \vec{y}) - p_i (\vec{n}_i, \vec{x}) \right] \cdot A_i \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Geschwindigkeitsableitung  $\frac{\partial w_t}{\partial n}$  wird mit Hilfe der Geschwindigkeit  $\vec{w}_{P_i}$  am wandnächsten Gitterknoten  $P_i$  anhand des Vektorproduktes  $(\vec{w}_{P_i}, \vec{t}_i)$  aus Geschwindigkeits- und Tangenteneinheitsvektor sowie des Wandabstandes  $\Delta n_{P_i}$  des Rechenknotens  $P_i$  bestimmt.

Bei einer mit dem Zylinderdurchmesser als charakteristischer Länge gebildeten Reynoldszahl  $Re_D$  der Anströmung von 20 erfolgt eine Strömungsablösung hinter dem Dickenmaximum des Zylinders in jedem Fall stationär. Als Randbedingung am Eintritt ins



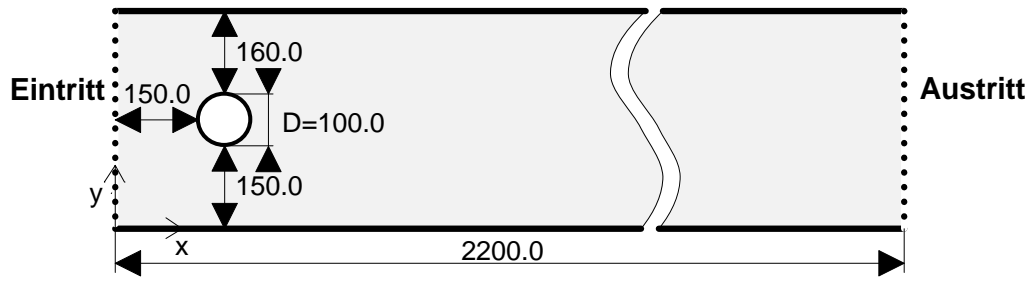


Abb. 7.11: Geometrie des Kanals mit Zylinder ( $Re = 20$ )

Rechengitter war ein ausgebildetes laminares Geschwindigkeitsprofil zu setzen. Alle vorgegebenen Geschwindigkeits- und Stoffwerte sind in Tabelle 7.3 zusammengestellt.

Das Rechengebiet beginnt 150 mm vor dem Zylinder und erstreckt sich über eine Länge von 2200 mm. Ein Teil des entsprechenden Basisgitters mit 8110 Knoten ist in Abbildung 7.12 wiedergegeben. Zu erkennen ist eine Verdichtung des Netzes zum Kreiszyylinder hin. Dessen Oberfläche ist in Winkelschritten von  $1^\circ$  diskretisiert, um die Strömungsgrenzschicht mit Stau- und Ablösepunkten genau zu erfassen. Der Abstand der wandnächsten Knoten zur Zylinderoberfläche beträgt 0.26 mm.

Im Rahmen der Benchmark-Rechnungen auf dem Basisgitter sowie auf zwei adaptierten Netzen mit 9696 und 11570 Stützstellen wurde zur Diskretisierung der konvektiven Terme ausnahmslos die DISC-Interpolation angewendet. Für die automatische Gitterverfeinerung kam sowohl das Flächenkriterium als auch der fehlersensitive dimensionslose Geschwindigkeitsgradient  $P(u, v)$  zum Einsatz. Diese kombinierte Adaptionsstrategie bot sich aufgrund der besonderen Eigenarten des vorliegenden Strömungsproblems an.

	$\bar{u}_{ein}$ [m/s]	$\mu_l$ [Pa s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$Re_D = 20$	0.2	$1.0 \cdot 10^{-3}$	1.0

Tab. 7.3: Geschwindigkeits- und Stoffdaten ( $Re = 20$ )

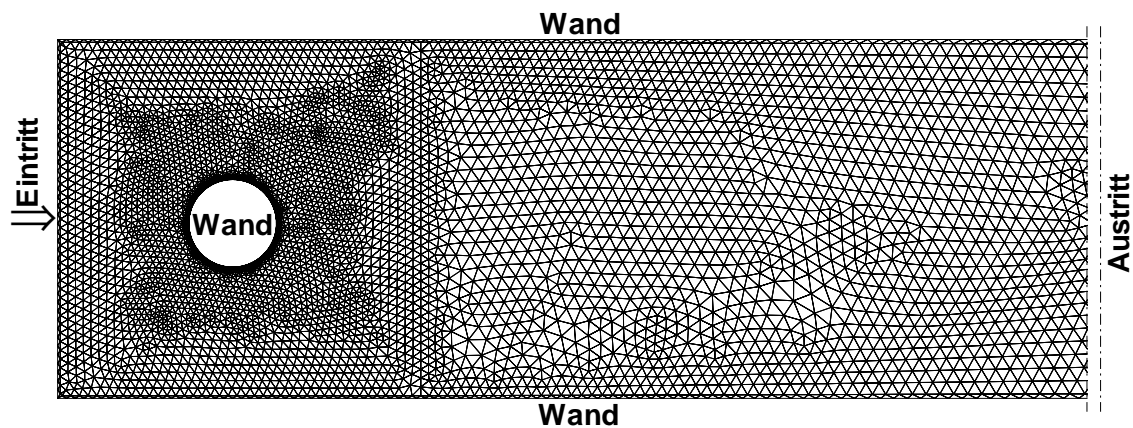
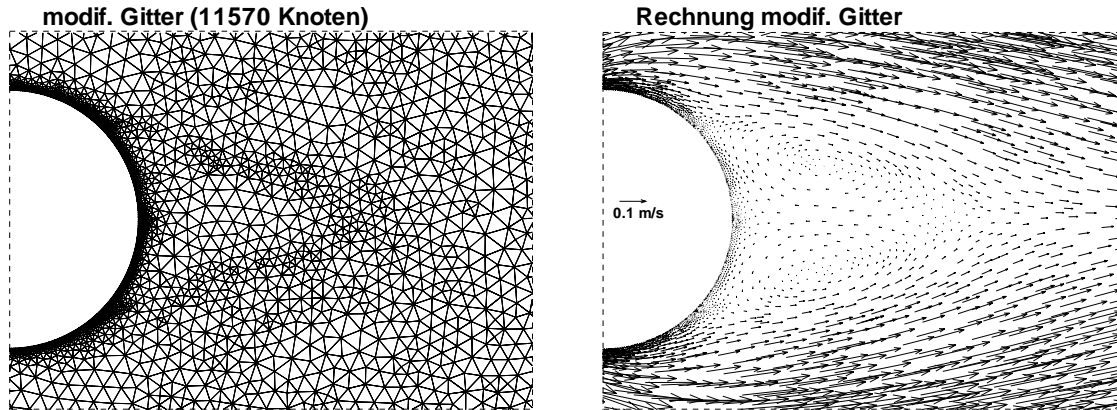


Abb. 7.12: Basisgitter für Kanal mit Zylinder ( $Re = 20$ )



**Abb. 7.13:** Modif. Netz und Geschwindigkeitsfeld im Zylindernachlauf ( $Re = 20$ )

Im freien Querschnitt zwischen Zylinderoberfläche und Kanalwänden prägen ausgedehnte laminare Wandgrenzschichten das Strömungsgeschehen. Die Geschwindigkeitsgradienten und der daraus abgeleitete Fehlerparameter  $P(u, v)$  variieren für dieses Gebiet nur in einem schmalen Wertebereich. Hier ist deshalb, neben der fehlergestützten Adaption des Netzes in der Umgebung des Zylinders, eine gleichmäßige flächenbasierte Modifikation angebracht. Im Nachlauf des Zylinders dagegen bestimmt ein Doppelwirbel das Strömungsbild im Zentralbereich des nun relativ weiten Kanalquerschnittes. In diesem Teil des Rechengebietes ist mehrfache, ausschließlich fehlergesteuerte Adaption möglich und auch sinnvoll.

Abbildung 7.13 zeigt einen Ausschnitt des feinsten Rechengitters stromab des Zylinders und das dort berechnete Geschwindigkeitsfeld. Es ist deutlich zu erkennen, wie das Fehlerkriterium Wandgrenzschicht, Ablöse- und Staupunkte, Scherschichten im Doppelwirbel sowie das Ende des Rezirkulationsgebietes erfaßt, so daß lokal verdichtete Gitterbereiche entstehen.

Die iterative Berechnung der Strömungsgrößen auf dem Basisgitter wie auch die beiden weiterführenden Rechnungen auf modifizierten Netzen wurden beendet, sobald das maximale Residuum der äußeren Iteration einen Wert von  $5 \cdot 10^{-4}$  unterschritten hatte. Um die Sensitivität der berechneten integralen Lösungsparameter gegenüber dem Abbruchkriterium zu analysieren, wurden teilweise zusätzliche Rechnungen mit einem reduzierten Referenzresiduum  $Res_{ref}$  von  $1 \cdot 10^{-4}$  durchgeführt. Der gesamte Lösungs- und Verfeinerungsprozeß wurde beendet, nachdem ein konstanter Wert der Druckdifferenz  $\Delta p$  über den Zylinder erreicht worden war. Tabelle 7.4 gibt die Resultate der verschiedenen Rechnungen zusammen mit der ebenfalls numerisch auf extrem feinen Netzen bestimmten Referenzlösung wieder. Zusätzlich sind die jeweils verwendeten Abbruchresiduen, die auf einer Sun Sparc 10-TGX4 benötigte Prozessorzeit  $t_{CPU}$  sowie in der letzten Zeile die prozentuale Abweichung zwischen den Mittelwerten der Referenzlösung und der Feingitterlösung bei reduziertem Referenzresiduum aufgenommen.

Im Zuge der Gitterverfeinerung nähern sich die Resultate für Auftriebsbeiwert  $c_L$  und Ablöselänge  $L_a$  immer mehr der numerischen Referenzlösung, während sich Wider-

$n_{Gitter}$	$Res_{ref} \cdot 10^4$	$c_D$ [1]	$c_L \cdot 10^2$ [1]	$L_a$ [mm]	$\Delta p$ [Pa]	$t_{CPU}$ [s]
8110	5.0	5.603	-0.31	81.5	0.1167	3437
	1.0	5.608	-0.31	81.2	0.1169	-
9696	5.0	5.513	0.56	82.67	0.1154	1099
	1.0	5.507	1.32	83.04	0.1155	1796
11570	5.0	5.507	1.32	83.04	0.1155	1796
	1.0	5.506	1.13	83.04	0.1155	-
Referenz	-	5.58	1.07	84.7	0.1174	-
	-	$\pm 0.01$	$\pm 0.03$	$\pm 0.5$	$\pm 0.0002$	-
rel. Fehler	-	1.3%	5.6%	1.9%	1.6%	-

**Tab. 7.4:** Resultate der Benchmark-Rechnungen ( $Re = 20$ )

standsbeiwert  $c_D$  und Druckdifferenz  $\Delta p$  minimal verschlechtern. Eine Verschärfung des Abbruchkriteriums bleibt auf dem groben Ausgangsgitter nahezu folgenlos. Auf dem feinsten Netz beeinflusst sie als einzigen der vier Lösungsparameter den Auftriebsbeiwert  $c_L$  signifikant. Eine Ursache dafür ist der sehr geringe Absolutwert von  $c_L$ , durch den selbst dem Betrage nach kleine Korrekturen zu prozentual hohen Abweichungen führen. Verglichen mit der numerischen Referenzlösung liegen die relativen Fehler der Feingitterrechnung mit verschärftem Abbruchkriterium bei Widerstand, Ablöselänge und Druckdifferenz unter 2%. Beim Auftrieb tritt eine Abweichung von 5.6% auf. Mit leichten Abstrichen bezüglich des Auftriebsbeiwertes läßt sich die erreichte Genauigkeit unter Berücksichtigung des maßvollen numerischen Aufwandes als gut bewerten.

Durch das Nutzen der jeweils schon berechneten Grobgitterlösung als Anfangsbelegung beim Neustart ist die benötigte Prozessorzeit  $t_{CPU}$  auf den modifizierten Netzen deutlich kürzer, als auf dem Basisgitter. Selbst nach der zweiten Adaption treten auf dem in Wandnähe extrem verfeinerten Gitter keinerlei Konvergenzprobleme auf. Oszillationen der Lösungsvariablen werden ebenfalls nicht beobachtet. Als Beleg hierfür ist in Abbildung 7.14 die im Bereich des Zylinders berechnete Druckverteilung wiedergegeben.

Damit sind, neben mathematischer Genauigkeit und gutmütigem Konvergenzverhalten, die numerische Stabilität und Effizienz der verwendeten Berechnungsmethode sowie Funktionalität und Nutzen des Adaptionsalgorithmus auch für ein Umströmungsproblem unter Beweis gestellt.



**Abb. 7.14:** Berechnetes Druckfeld im Bereich des Zylinders ( $Re = 20$ )

## 7.4 Turbulente Stufenströmung ( $Re = 39\,000$ )

Nachdem das neu entwickelte numerische Berechnungsverfahren anhand anspruchsvoller laminarer Testfälle validiert worden war, erfolgte im nächsten Schritt die Implementierung und Überprüfung des Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells. Wiederum wurden zahlreiche numerische Untersuchungen an unterschiedlichen Konfigurationen durchgeführt. Stellvertretend dafür sollen hier die Ergebnisse für die turbulente Strömung über eine rückspringende Stufe (Eaton und Johnston (1980)) vorgestellt werden.

Abbildung 7.15 gibt in einem Längsschnitt eine schematische Darstellung der Geometrie des Meßkanals. Wie im laminaren Fall kommt es stromab der Querschnittserweiterung des Kanals zu einer Strömungsablösung, die in der geometrisch einfachen Anordnung für komplexe Strömungsverhältnisse verantwortlich ist. Der Versuchsaufbau ist wiederum so gestaltet, daß in der Mittelebene des Kanals eine nahezu zweidimensionale Strömung vorliegt. Zur Messung von Geschwindigkeit und turbulenter Schwankungsbewegung der Luftströmung wurden ursprünglich Hitzdrahtsonden verwendet. Nachmessungen, die unter Nutzung der Laser-Doppler Technik zu einem späteren Zeitpunkt erfolgten, bestätigen die Verlässlichkeit dieser Daten (Eaton et al. (1982)).

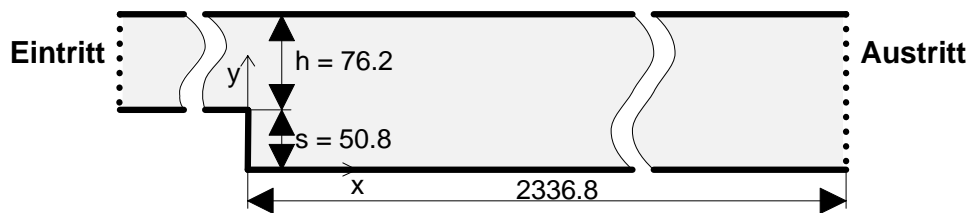
Die Berechnung der Stufenströmung wurde für eine Reynoldszahl  $Re_s$  von 39 000 vorgenommen. Bezugslänge der Kennzahl ist die Stufenhöhe  $s$ . Am Eintritt ins Rechengebiet wurden Geschwindigkeit und turbulente kinetische Energie bzw. Turbulenzgrad  $Tu$  gemäß der vorhandenen Meßdaten belegt. Die Dissipation  $\epsilon$  der turbulenten kinetischen Energie konnte nach Vorgabe eines charakteristischen Längenmaßes  $l_\epsilon$  berechnet werden. Die Werte der für die Rechnung genutzten Geschwindigkeits-, Stoff- und Turbulenzgrößen sind in Tabelle 7.5 zusammengefaßt.

Die Diskretisierung des Strömungsgebietes beginnt 40.64 mm bzw. 0.8 Stufenhöhen stromauf der Stufe und endet 1204 mm hinter dieser. Damit liegt der Austrittsrand in sicherer Entfernung zum Ende der Ablöseblase, die sich von der Querschnittserweiterung an über 405 mm in Strömungsrichtung erstreckt. Auf dem Basisgitter stehen für die numerische Berechnung insgesamt 7535 Stützstellen zur Verfügung.

Um die Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes zu gewährleisten, wurde der Abstand zwischen wandnächstem Knoten und Kanalwand, der in Gleichung (6.23) an-

	$\bar{u}_{ein}$ [m/s]	$\bar{T}u_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]	$\mu_l$ [Pa s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
$Re_s = 39\,000$	11.65	2.4	0.003	$18.2 \cdot 10^{-6}$	1.21

**Tab. 7.5:** Geschwindigkeits-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 39\,000$ )



**Abb. 7.15:** Geometrie des Meßkanals mit rückspringender Stufe ( $Re = 39\,000$ )

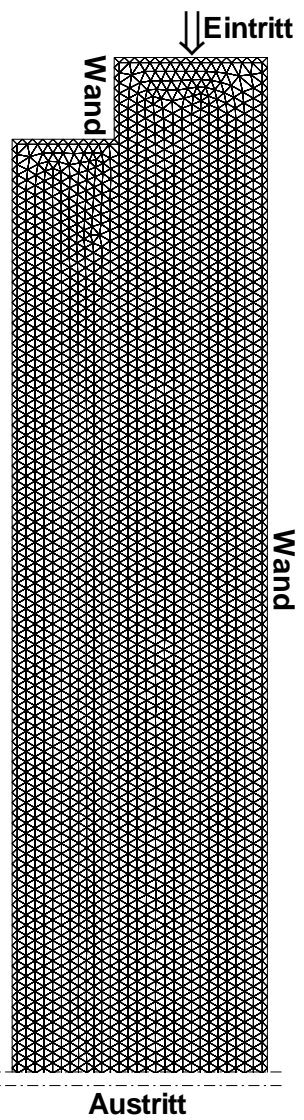


Abb. 7.16: Basisgitter für rückspringende Stufe ( $Re = 39\,000$ )

gegebenen Abschätzung folgend, zunächst auf 2.5 mm festgesetzt. Eine anhand der numerischen Lösung nachträglich vorgenommene Kontrolle des dimensionslosen Wandabstandes  $y^+$  bestätigte die gute Praxistauglichkeit dieses Vorgehens. Den vorderen Teil des Rechennetzes zeigt Abbildung 7.16.

Die Diskretisierung der konvektiven Terme der Impulsgleichungen mittels Upwind-Ansatz führte, wie bei der laminaren Stufenströmung, zu sehr schlechten Resultaten, auf deren Darstellung deshalb verzichtet wird. Im folgenden werden die Ergebnisse numerischer Berechnungen diskutiert, bei denen für die Konvektionsterme in den Impulsgleichungen das DISC-Schema, in den beiden Turbulenzgleichungen sowohl Upwind als auch DISC-Interpolation zur Anwendung kamen.

In turbulenten Strömungen beeinflussen die relativ dünnen Wandgrenzschichten die Strömungsgeschwindigkeit nur in einem sehr begrenzten Bereich. Die Modifikation des Basisgitters konnte daher rein lösungsadaptiv mit Hilfe des dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten  $P(u, v)$  erfolgen. Die so verfeinerten Netze weisen im Fall der DISC/Upwind-Rechnung 9792 Knoten, bei DISC/DISC-Interpolation 9846 Gitterknoten auf. Ein Ausschnitt aus dem erstgenannten Rechengitter mit 9792 Stützstellen ist in Abbildung 7.17 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das Fehlerkriterium im wesentlichen im Rezirkulationsgebiet hinter der Querschnittserweiterung und dort verstärkt entlang der Wandgrenzschicht sowie in einem Streifen zwischen Haupt- und Rückströmung anspricht. Anschaulich ist somit klar, daß eine lösungsadaptive Verfeinerung auch bei turbulenten Problemen tatsächlich in Gebieten mit kritischen

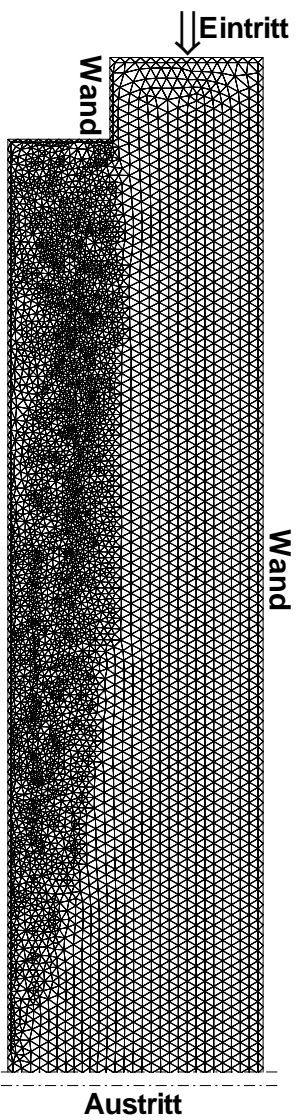
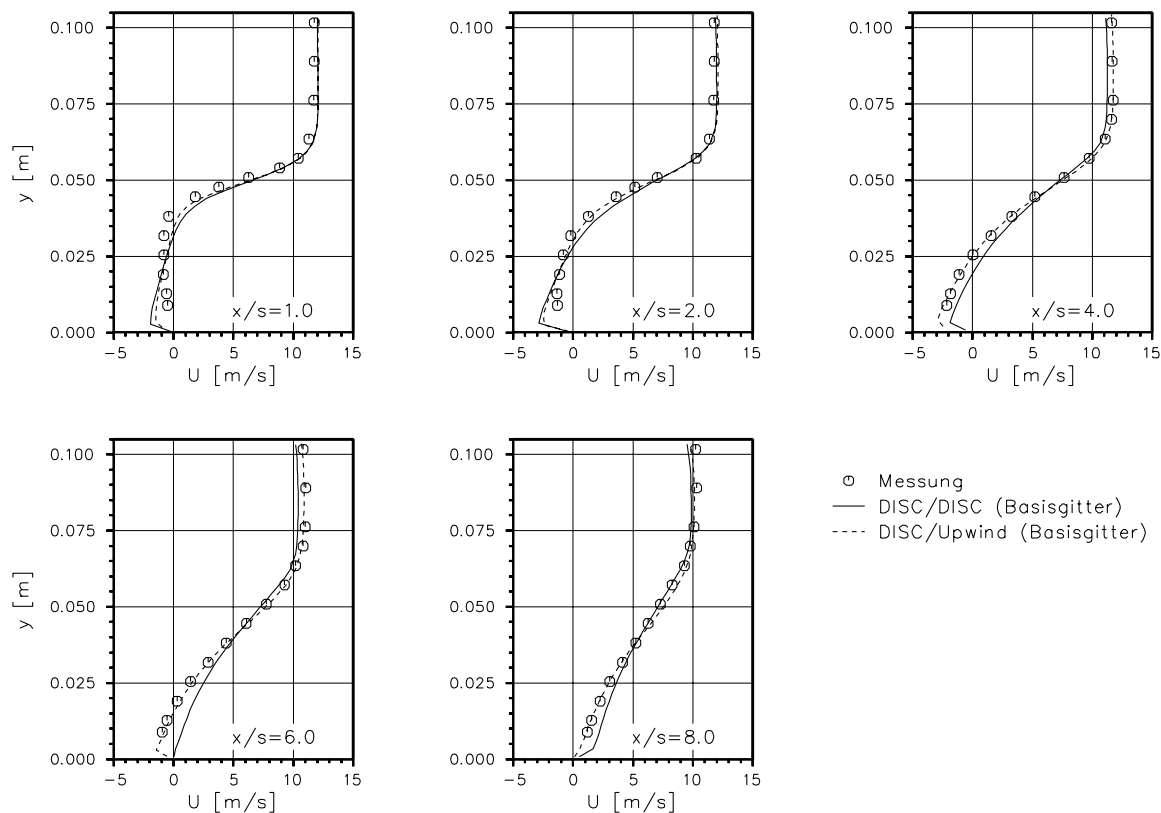


Abb. 7.17: Modifiziertes Gitter für rückspringende Stufe ( $Re = 39\,000$ )



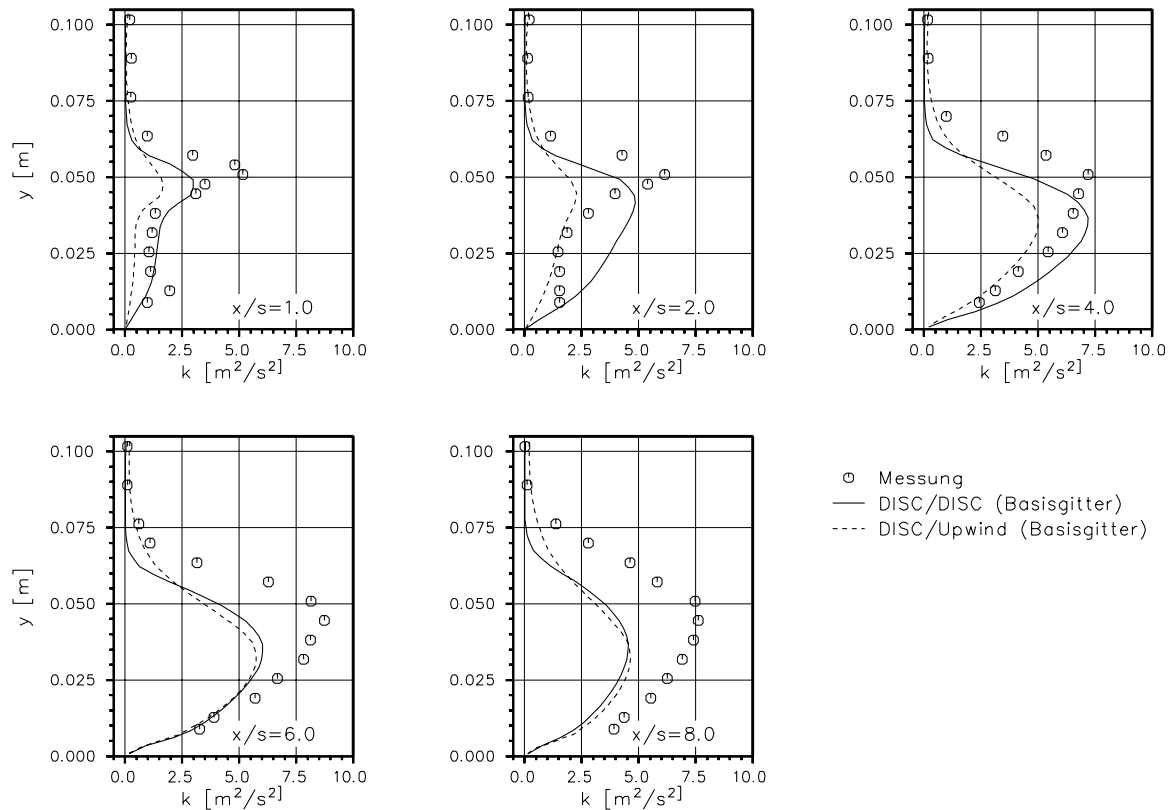
**Abb. 7.18:** Messung und Rechnung für  $u$  auf dem Basisgitter ( $Re = 39\,000$ )

Strömungsverhältnissen vorgenommen wird.

Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen wurden sowohl die Werte der  $x$ -Komponente  $u$  der Geschwindigkeit als auch der turbulenten kinetischen Energie  $k$ , die aus numerischer Simulation und Experiment vorlagen, miteinander verglichen. Diese Gegenüberstellung fand an fünf Positionen bei  $\frac{x}{s}$  von 1.0, 2.0, 4.0, 6.0 und 8.0 Stufenhöhen stromab der Querschnittserweiterung statt. Abbildung 7.18 und 7.19 liefern die entsprechenden Darstellungen von Geschwindigkeit und Turbulenzenergie für Rechnungen auf dem Basisgitter mit DISC/Upwind- und DISC/DISC-Interpolation der konvektiven Transportterme in Impulsgleichungen und Turbulenzmodell.

Die gemessenen Geschwindigkeitsprofile werden mit beiden Diskretisierungsmethoden sehr genau erfaßt, wobei die DISC/Upwind-Diskretisierung im Bereich der Strömungsablösung am Kanalboden, etwas bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt. Dieser Unterschied macht sich in den berechneten Ablöselängen deutlich bemerkbar. Hier ergeben sich mit 378 mm bei der DISC/Upwind- und 308 mm bei der DISC/DISC-Methode Abweichungen von 6.6 % bzw. 24 % gegenüber dem Meßwert von 405 mm.

Die turbulente kinetische Energie  $k$  wird von beiden Simulationen, bei prinzipieller Übereinstimmung der Profilform, zu niedrig berechnet. Bei der Beurteilung muß allerdings berücksichtigt werden, daß aus dem Experiment lediglich Werte für die Korrelation  $u_i^2$  vorlagen, deren nicht unproblematische Umrechnung noch ausführlich erläutert wird. Im stufennahen Bereich des Strömungsfeldes weist hier die DISC/DISC-Strategie das genauere Ergebnis mit höheren  $k$ -Werten auf. Da diese Werte quadratisch in die



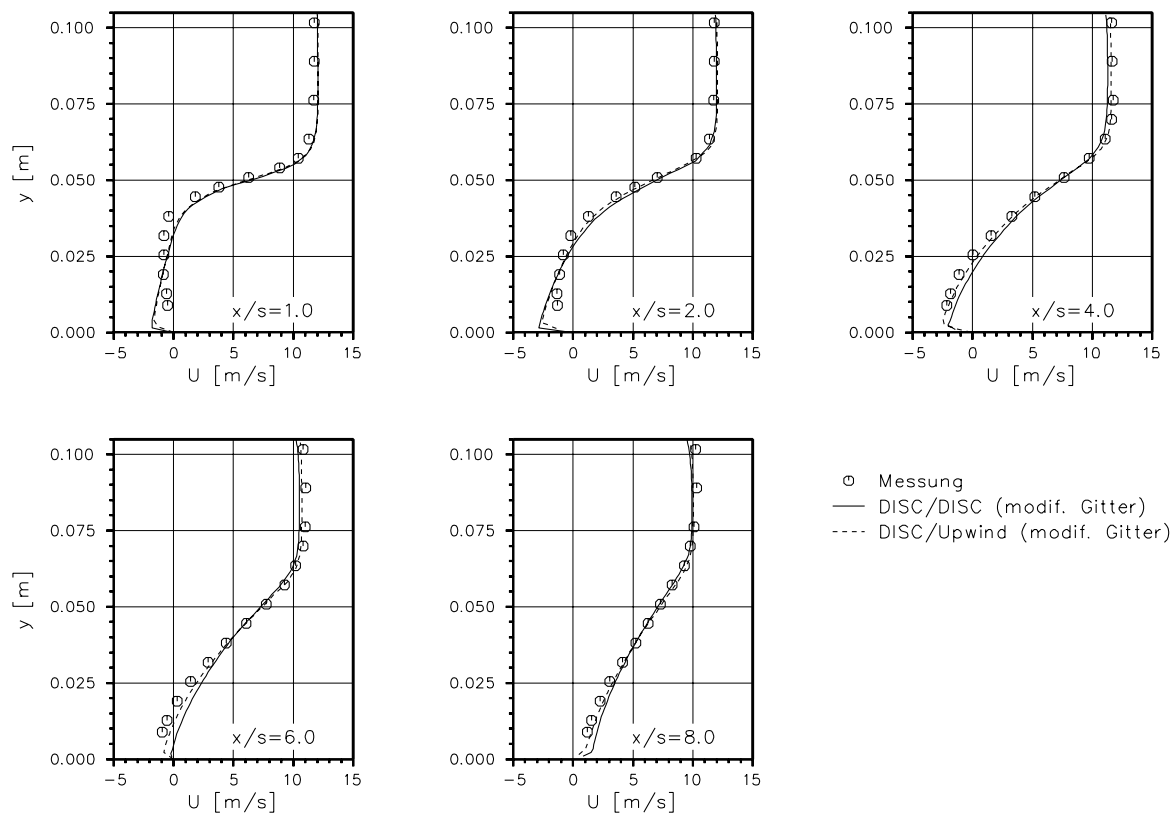
**Abb. 7.19:** Messung und Rechnung für  $k$  auf dem Basisgitter ( $Re = 39000$ )

Berechnung der Wirbelviskosität  $\mu_t$  eingehen, ist hinter der Stufe ein verstärkter diffusiver Austausch zwischen Hauptströmung und abgelöster Strömung die Folge. Aus dieser Tatsache erklärt sich das Schrumpfen des vorhergesagten Ablösewirbels.

Für die beiden modifizierten Rechnetze sind die Geschwindigkeits- und Turbulenzresultate in den Abbildungen 7.20 und 7.21 wiedergegeben. Die berechneten Geschwindigkeitsprofile haben sich im Vergleich zur Lösung auf dem Ausgangsgitter nur wenig verändert, wobei die Unterschiede zwischen den beiden Methoden noch geringer geworden sind. Die Länge des Rezirkulationsgebietes nimmt gegenüber den Basislösungen bei DISC/Upwind-Diskretisierung auf 348 mm ab, bei DISC/DISC-Interpolation auf 318 mm zu. Die Differenzen zur Ablöselänge von 405 mm im Experiment betragen demnach 14 % und 21,5 %.

Das Ergebnis für die turbulente kinetische Energie hat sich bei DISC/Upwind-Rechnung infolge der Gitteradaption deutlich verbessert und weist keine extremen Abweichungen von der nur wenig veränderten DISC/DISC-Lösung mehr auf.

Mit Hilfe des hier durchgeführten Vergleiches von experimentellem Ergebnis und numerischen Resultaten bei unterschiedlicher Diskretisierung des konvektiven Transportes lassen sich grundlegende Aussagen über den Zusammenhang zwischen verwendeter Diskretisierung und erzielter Rechengenauigkeit treffen. Mit DISC-Interpolation der Konvektionsterme in den Impulsgleichungen werden, unabhängig von der entsprechenden Diskretisierung im Turbulenzmodell, nahezu deckungsgleiche Geschwindigkeitsprofile ermittelt. Der Gebrauch des Standard- $k, \epsilon$ -Turbulenzmodells führt auf eine zu geringe



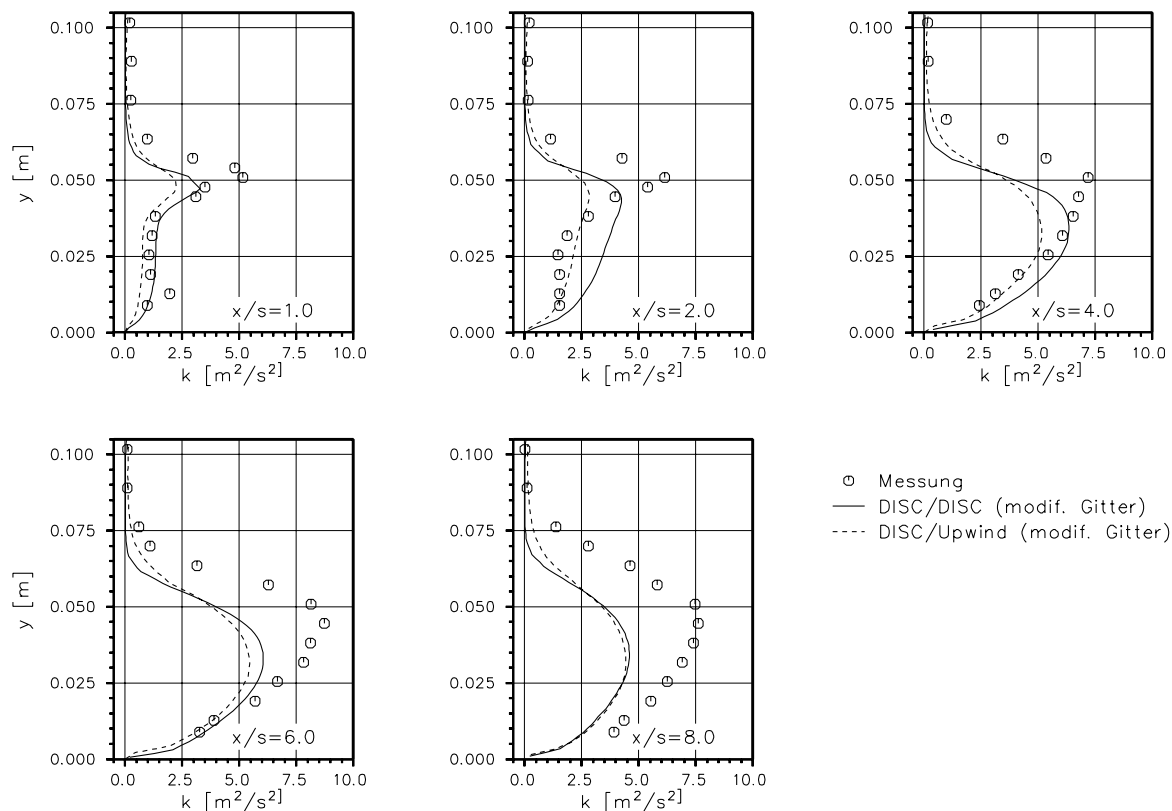
**Abb. 7.20:** Messung und Rechnung für  $u$  auf dem modif. Netz ( $Re = 39\,000$ )

Ablöselänge; eine Tatsache über die wechselnde Autoren immer wieder berichten (Driver und Seigmiller (1985), Thangam und Speziale (1992), Haroutunian und Engelman (1993), Lien und Leschziner (1993), Lai (1995)). Eine formale Erhöhung der Diskretisierungsgenauigkeit reduziert das Rückströmgebiet teilweise noch weiter. Der prinzipielle Verlauf der Turbulenzenergie  $k$  wird in allen Rechnungen korrekt erfaßt, die berechneten Beträge sind jedoch im Mittel um etwa ein Drittel zu gering. Die für  $k$  erzielte Genauigkeit nimmt mit dem Einsatz der DISC-Methode im Turbulenzmodell und durch Netzadaptation zu.

Eine mögliche Ursache der für die Turbulenzenergie  $k$  beobachteten Abweichungen von numerischen und experimentellen Ergebnissen stellt, neben den charakteristischen Eigenschaften des Turbulenzmodells, die Aufbereitung der Meßwerte dar. Bei den zugrundeliegenden Versuchen wurde, wie bereits erwähnt, nicht  $k$  selbst, sondern die Korrelation  $\overline{u_i'^2}$  der Schwankungsgeschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung gemessen. Die für die Gegenüberstellung benötigte turbulente kinetische Energie wurde daraus nach der Annahme  $\overline{u_i'^2} = \overline{v_i'^2} = \overline{w_i'^2}$  berechnet. Bestimmte Autoren schätzen die Schwankungen senkrecht zur Hauptströmungsrichtung gemäß der Beziehung  $\overline{u_i'^2} = 2\overline{v_i'^2} = 2\overline{w_i'^2}$  wesentlich geringer ein (vgl. Kapitel 6.3.1). Daraus würden um ein Drittel niedrigere  $k$ -Werte und damit im Hinblick auf die Rechnungen deutlich reduzierte Abweichungen folgen.

Neben einer möglichst hohen Rechengenauigkeit sind, bei turbulenten Strömungsproblemen noch mehr als im laminaren Fall, die Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften der





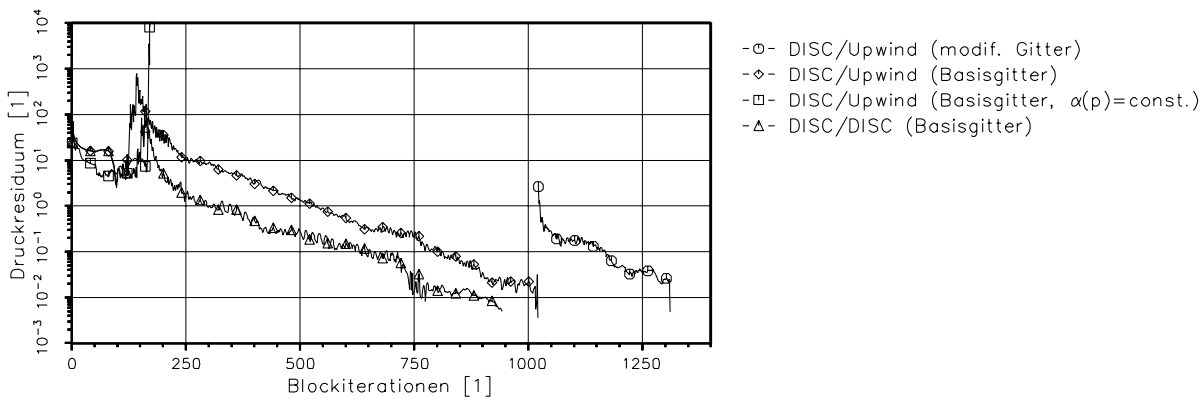
**Abb. 7.21:** Messung und Rechnung für  $k$  auf dem modif. Netz ( $Re = 39000$ )

angewandten numerischen Berechnungsmethode ein wichtiger Gesichtspunkt zu deren Beurteilung. Der Konvergenzverlauf bei unterschiedlichen Diskretisierungsvarianten ist für den vorliegenden Strömungsfall in Form des Druckresiduums der äußeren Iteration abhängig von der Anzahl der durchgeführten Blockiterationen in Abbildung 7.22 aufgetragen. Abbruchkriterium war auch hier das Unterschreiten eines Referenzresiduums von  $5 \cdot 10^{-3}$ .

Der erste Berechnungsversuch wurde auf dem Basisgitter mit DISC/Upwind-Interpolation der Konvektionsterme und konstantem Relaxationsparameter  $\alpha(p)$  für das Druckfeld unternommen. Nach anfänglich sehr guter Konvergenz wird der Residuenverlauf zunehmend wellig. Bei 172 Blockiterationen überschreiten einzelne Transportvariablen den zulässigen Wertebereich der Rechnerarithmetik und das Verfahren divergiert.

Eine Analyse der zugehörigen Protokolldatei sowie weitere nachfolgende Test lokalisierten als Auslöser der Divergenz die  $\epsilon$ -Gleichung. Die Eintrittsinformation erreicht nach etwa 100 Blockiterationen den Austrittsrand des Rechengebietes, worauf sich das Spektrum der im Feld berechneten  $\epsilon$ -Werte extrem verbreitert. Der Wertebereich erstreckt sich schließlich über mehr als drei Größenordnungen, so daß beim Einschwingen der Lösung, aufgrund der expliziten Behandlung der Koppelungen zwischen den einzelnen Gleichungssystemen, physikalisch unsinnige negative Zwischenwerte von  $\epsilon$  auftreten. Diese treiben die gesamte Prozedur in den numerischen Zusammenbruch.

Eine Möglichkeit, einen solchen Ablauf zu vermeiden, ergibt sich über eine Stabilisierung des Quelltermes  $P$  im Turbulenzmodell, wozu das vorübergehende Auftreten



**Abb. 7.22:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 39\,000$ )

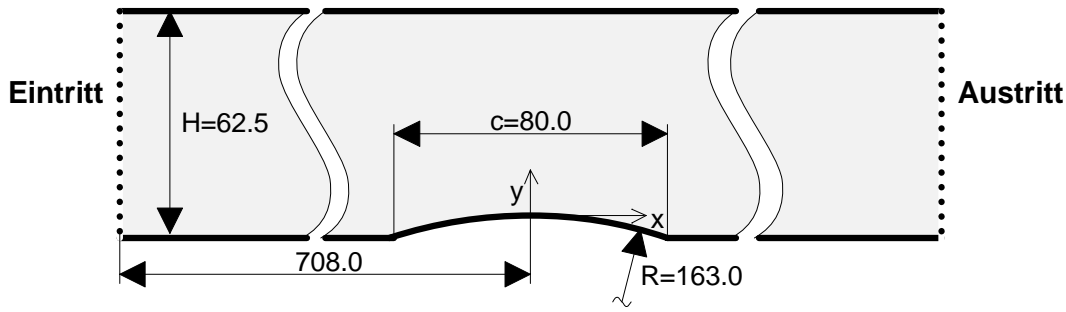
extremer Geschwindigkeitsgradienten verhindert werden muß. Zu diesem Zweck wurde bei der Dämpfung der Druckvariablen der in Kapitel 6.2 erläuterte, modifizierte Relaxationsparameter  $\alpha(p)^n$  eingeführt, der starke Schwankungen von Druck- und Geschwindigkeitslösung zu Iterationsbeginn unterbindet. Der Residuenverlauf der neuen DISC/Upwind-Rechnung weist zunächst ein Plateau auf, das jedoch endet, sobald der Wert der Relaxation  $\alpha(p)^n$  steigt. Das schon beschriebene Verhalten der Variablen  $\epsilon$  sorgt dann zunächst für einen Anstieg der Residuen, bevor sich das Verfahren dank der geänderten Relaxationsstrategie stabilisiert. Im Anschluß fällt der Fehlerindikator relativ steil und monoton um nahezu fünf Größenordnungen, bis nach 1021 Blockiterationen das Abbruchkriterium erreicht ist. Ausgehend von dieser Lösung wird auf dem adaptierten Rechennetz nach lediglich 290 weiteren Iterationen erneut das Referenzresiduum unterschritten.

Das Konvergenzverhalten mit DISC/DISC-Interpolation auf dem Basisgitter ist dem vorher beobachteten Verlauf ähnlich. Die Abbruchbedingung wird hier nach 943 Blockiterationen erfüllt. Dabei ist zu beachten daß, um diesen stabilen, nach Überwinden eines Maximums fast monotonen Abfall der Residuen zu erreichen, eine besondere Behandlung der Quellterme  $S_{HOS}$  erforderlich war, die in Kapitel 5.2.1 beschrieben wurde.

Die Bearbeitung des vorliegenden Strömungsproblems hat gezeigt, daß mit der beschriebenen Implementierung des Standard- $k, \epsilon$ -Modells turbulente Strömungen auf unstrukturierten Gittern schnell und numerisch stabil analysiert werden können. Die Genauigkeit der berechneten Lösungen ist insgesamt gut, wird aber insbesondere für die turbulente kinetische Energie  $k$  durch die spezifischen Eigenschaften des Turbulenzmodells limitiert. Die Resultate der durchgeführten Rechnungen decken sich im wesentlichen mit veröffentlichten Ergebnissen von Simulationen auf strukturierten Gittern (Thangam und Speziale (1992), Lai (1995)).

## 7.5 Transsonische Kanalströmung ( $Ma = 1.27$ )

Nach der erfolgreichen Validierung für laminare und turbulente isotherme Strömungen, sollte das vorgestellte Verfahren auch für nichtisotherme, kompressible Strömungen überprüft werden. Dabei kommt neben der Transportgleichung für die Enthalpie,



**Abb. 7.23:** Geometrie des Meßkanals mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ )

die zur Temperatur- und Dichtebestimmung gelöst werden muß, die Erweiterung der Druckkorrekturgleichung für kompressible Medien zur Anwendung. Außerdem ist am Eintritt ins Rechengebiet anstelle des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{w}$  der Totaldruck  $p_{tot}$  und die Strömungsrichtung  $\alpha$  vorzugeben.

Für diesen Test wurde eine transsonische Strömung über ein Kreisbogenprofil am Boden eines Kanals ausgewählt. Den zugehörigen experimentellen Hintergrund liefert eine Arbeit von Liu und Squire (1988), wobei Wanddruckverteilungen aufgenommen sowie Ölanstrichbilder und Interferogramme erstellt wurden. Die Meßergebnisse sind in einem AGARD-Berichtsband (Reshotko (1989)) ausführlich dokumentiert.

Die Abmessungen des verwendeten Versuchskanals können der Abbildung 7.23 entnommen werden, die einen Längsschnitt der Anordnung wiedergibt. Das Kreisbogenprofil im Kanalboden, der mit einer Neigung von  $0.3^\circ$  abfällt, hat einen Radius von 163 mm. Wie die Ölanstrichtechnik belegt, ist die Strömung in der Mittelebene des Kanals in guter Näherung als zweidimensional zu betrachten.

Infolge der Kanalverengung, die sich durch das Kreisbogenprofil ergibt, wird die Strömung über die Schallgeschwindigkeit hinaus beschleunigt, so daß stromab des engsten Querschnitts ein Verdichtungsstoß auftritt. Unmittelbar vor diesem Stoß erreicht die isentrope Machzahl  $Ma$ , die anhand der am Kanalboden gemessenen Drücke ermittelt wurde, ihren Maximalwert von 1.27. Der Testfall erlaubt es somit, sowohl das Verhalten des numerischen Verfahrens im Überschall als auch eine Stoßadaption des Rechnetzes zu untersuchen.

Zur numerischen Bearbeitung des Problems wurden Totaldruck  $p_{t,ein}$ , Strömungswinkel  $\alpha_{ein}$  relativ zur  $x$ -Achse und Temperatur  $T_{ein}$  am Eintritt ins Strömungsgebiet sowie der Druck  $p_{aus}$  am Austritt entsprechend den Messungen vorgegeben. Die Druckvorgabe am Austritt ist erforderlich, um das Strömungsfeld stromab des Schalldurchgangs eindeutig

$Ma_{p,max} = 1.27$	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [ $^\circ$ ]	$Tu_{ein}$ [%]
	290.0	145 000	-0.15	2.0
$l_{\epsilon,ein}$ [m]	$p_{aus}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]	$c_p$ [J/(kg K)]
0.0025	96 000	$16.5 \cdot 10^{-6}$	287.0	1006.6

**Tab. 7.6:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Ma = 1.27$ )

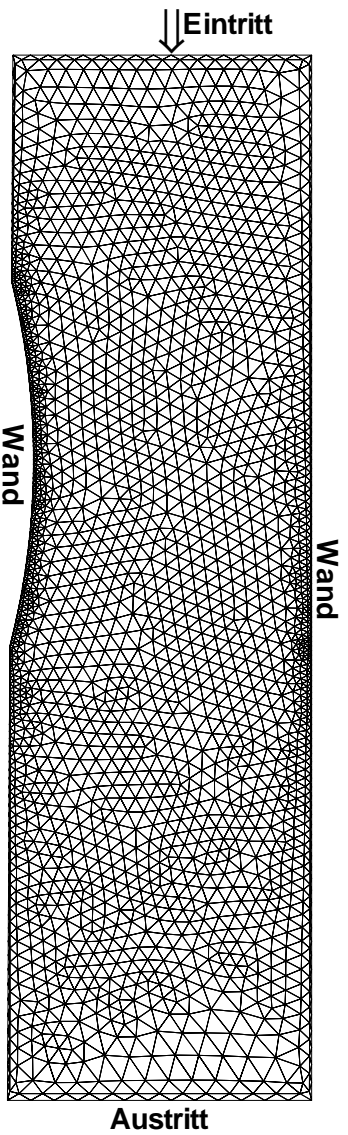


Abb. 7.24: Basisgitter für Kanal mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ )

festzulegen. Mit Hilfe der genannten Zustandsgrößen lassen sich die gleichfalls notwendigen Stoffwerte ermitteln. Da Turbulenzgrößen nicht dokumentiert waren, mußten sie auf der Grundlage von Angaben für ähnliche Kanalströmungen angesetzt werden. Alle Eingabedaten der numerischen Simulation sind in Tabelle 7.6 gesammelt. Das genaue Geschwindigkeitsprofil am Eintrittstrand wird in jeder Blockiteration aus konstantem Totaldruck  $p_{t, \text{ein}}$  und aktuell extrapoliertem statischem Druck neu berechnet.

Das Rechengebiet beginnt 50 mm stromauf des Kreisbogenprofils. Die räumliche Diskretisierung erstreckt sich bis 100 mm hinter das Profil. Das Ausgangsgitter der Simulation weist insgesamt 2459 Stützstellen auf. Auf der Grundlage einer Vorauslegung wurde der Abstand zwischen wandnächsten Gitterknoten und Kanalwand auf Werte zwischen 0.1 und 0.5 mm festgesetzt. Die geringsten Distanzen liegen im Bereich des Profils an Kanalboden und -decke vor. Das vollständige Basisgitter ist in Abbildung 7.24 wiedergegeben.

Bei der Berechnung der vorgestellten numerischen Lösungen erfolgte die Diskretisierung der konvektiven Transportterme in Impuls- und Enthalpiegleichungen mit der DISC-Interpolation, während im Turbulenzmodell der Upwind-Ansatz verwendet wurde. Kanalboden und -decke waren als adiabate Wände vereinbart.

Die Verfeinerung des Rechnernetzes wurde, jeweils an der zuvor berechneten Strömungslösung orientiert, in mehreren Schritten vorgenommen. Dabei kamen sowohl der in Kapitel 5.5 ausführlich erläuterte, aus Druck- und Geschwindigkeitsgradienten gebildete kombinierte Fehlerparameter  $P(p) \cdot P(u, v)$  als auch das Flächenkriterium zum Einsatz.

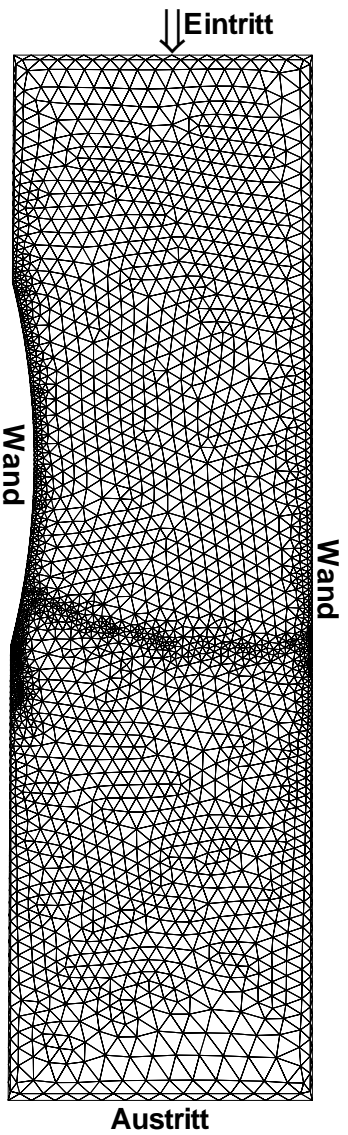
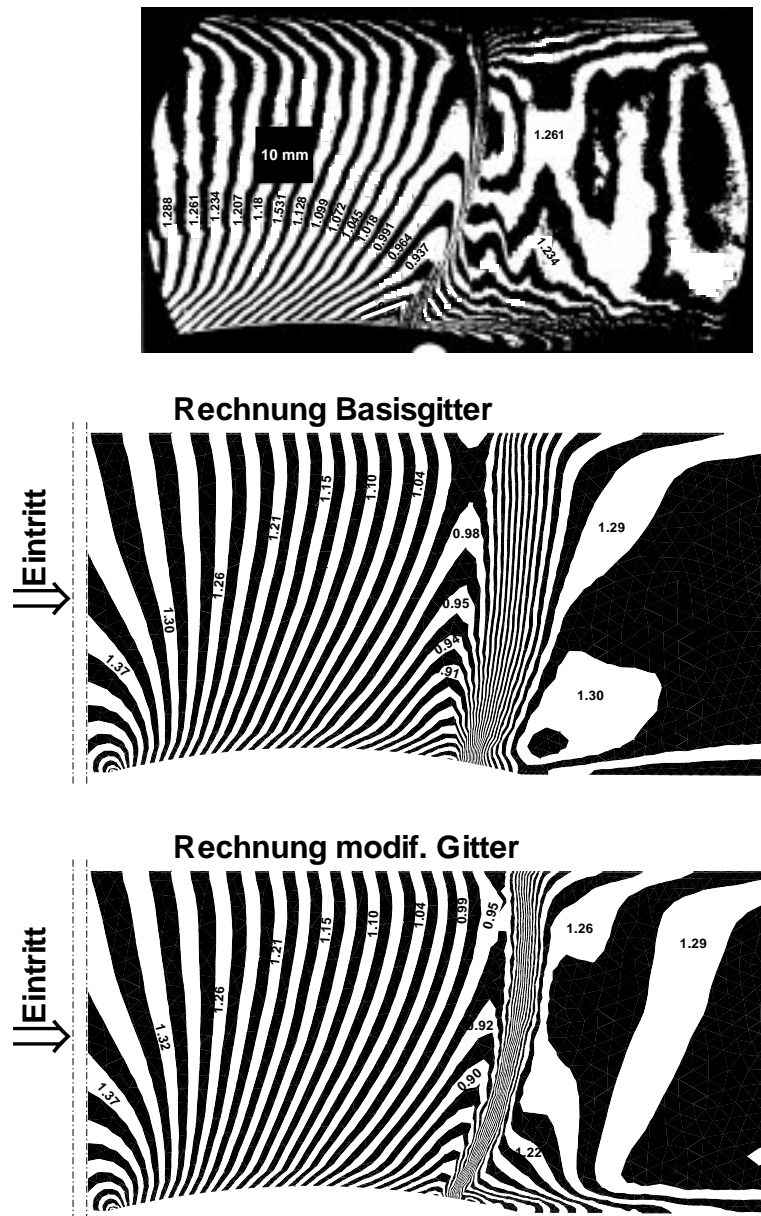


Abb. 7.25: Modifiziertes Gitter für Kanal mit Kreisbogenprofil ( $Ma = 1.27$ )



**Abb. 7.26:** Dichteverteilung aus Experiment und Simulation ( $Ma = 1.27$ )

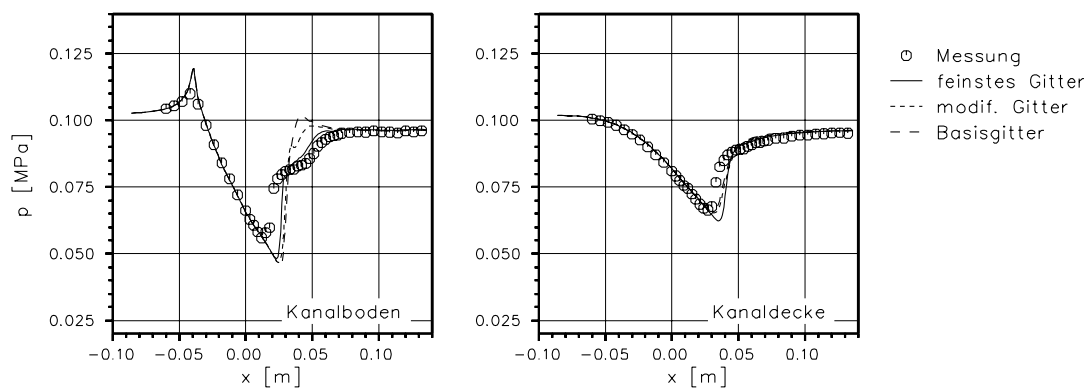
Das nach der abschließenden Modifikation vorliegende Gitter besitzt 2854 Knoten. Es ist in Abbildung 7.25 gezeigt. Eine erkennbare Netzadaption hat in der Umgebung des berechneten Verdichtungsstoßes über dem hinteren Drittel des Profils sowie in der Zone der stoßinduzierten Strömungsablösung in dessen Nachlauf stattgefunden.

Der Einfluß der Adaption auf das Simulationsergebnis läßt sich anhand der Gegenüberstellung von auf größtem und feinstem Netz berechneten Isochoren in Abbildung 7.26 bewerten. In die Darstellung integriert sind die jeweils den Isoflächen zugeordneten Werte der Dichte  $\rho$  in der Einheit  $kg/m^3$ . Das während der Versuche aufgenommene Interferogramm erlaubt einen qualitativen Vergleich mit dem Experiment.

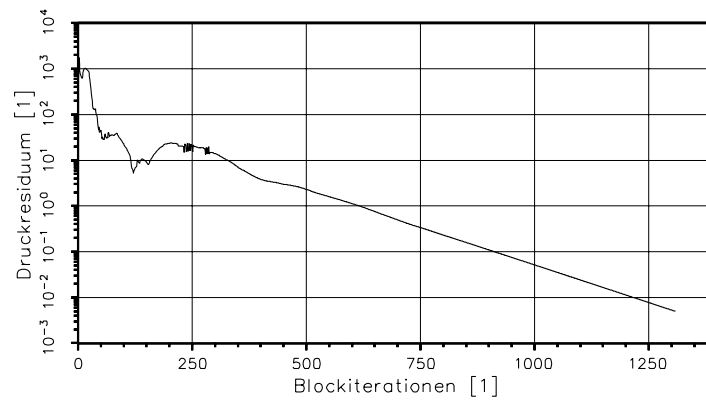
Der optische Eindruck, den die simulierten Dichteverteilungen vermitteln, stimmt für beide Ergebnisse in wesentlichen Zügen mit dem Interferogramm überein. Die Stoßkrümmung und auch die maximale Machzahl von 1.3 unmittelbar vor dem Stoßfuß, die separat überprüft wurde, sind korrekt erfaßt. Der gesamte Stoß ist jedoch, verglichen mit dem Versuch, in Richtung Profildende abgewandert. Dadurch sinkt die stromauf berechnete Dichte des Fluids stärker ab, als es in der Realität der Fall ist. Unterschiede hinsichtlich der Isoflächenkrümmung in Simulation und Experiment, die in der Wandgrenzschicht auftreten, sind sehr wahrscheinlich auf den Seitenwandeinfluß im Meßkanal zurückzuführen. Die fehlergesteuerte Adaption des Netzes verbessert die räumliche Diskretisierung gezielt in Stoßnähe und sorgt für eine verglichen mit der Grobgitterlösung deutlich schärfer begrenzte Rekompresseion. Am Kanalboden hinter dem Profil macht sich auf dem adaptierten Rechennetz ein starkes Anwachsen der Grenzschicht bemerkbar. Ursache dafür ist eine stoßinduzierte Strömungsablösung, die bei der untersuchten Konfiguration ab einer erreichten Machzahl von 1.3 auftritt und im Versuch ebenfalls beobachtet wurde. Auf dem groben Basisgitter wird dieses Rezirkulationsgebiet nicht erfaßt.

Eine quantitative Beurteilung der numerischen Resultate ist durch einen direkten Vergleich der entlang oberer und unterer Kanalwand gemessenen und berechneten Druckprofile möglich. Diese Gegenüberstellung wird in Abbildung 7.27 vorgenommen. Bis in unmittelbare Nähe stromauf des Stoßes stimmen die in verschiedenen Stadien der Adaption simulierten Druckverläufe sowohl untereinander als auch mit den Meßwerten überein. Die berechnete Rekompresseion tritt an Boden und Decke etwas später auf als gemessen, wobei die Gitterverfeinerung die Position des Stoßfußes verbessert. Eine Stromaufwirkung der veränderten Stoßlage ist nicht erkennbar. Auf den groben Netzen wird stromab des Stoßes der reale Druckverlauf am Kanalboden nicht korrekt wiedergegeben, da in den entsprechenden numerischen Lösungen die Rückströmzone entweder gänzlich fehlt oder aber zu schwach ausgebildet ist. Mit fortschreitender Gitteroptimierung konnte die gemessene Druckkurve zunehmend besser wiedergegeben werden.

Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften des numerischen Verfahrens lassen sich für dieses nichtisotherme, transsonische Strömungsproblem abermals anhand des Druckresiduums in Abhängigkeit der durchlaufenen äußeren Iterationen veranschaulichen. Das entsprechende Diagramm für die Berechnung auf dem Ausgangsnetz ist in Abbil-



**Abb. 7.27:** Messung und Rechnung auf verschiedenen Gittern ( $Ma = 1.27$ )



**Abb. 7.28:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Ma = 1.27$ )

dung 7.28 zu finden. Als Abbruchschranke war ein Referenzresiduum  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  vorgegeben.

Es zeigt sich das charakteristische Verhalten der Methode mit Anfangsreduktion des Fehlers, kurzem Plateau, weiterer Reduktion, Überwinden eines lokalen Maximums und anschließender nahezu monotoner Konvergenz. Bemerkenswert ist der in diesem Fall im Unterschied zur turbulenten Stufenströmung (vgl. Kapitel 7.4) über weite Strecken extrem glatte Kurvenverlauf. Die Ursache dafür liegt sehr wahrscheinlich im bereichsweise hyperbolischen Charakter der Strömung. Das Abbruchkriterium wird nach einer Verringerung des Fehlers um mehr als 5 Größenordnungen bei 1308 Blockiterationen erreicht. Die erzielte Konvergenzrate beträgt, wie bei der turbulenten Stufenströmung, etwa 250 Iterationen pro Fehlerdekade. Bis zur Konvergenz der Lösung auf dem Basisgitter waren mit einem SUN Sparc 10-TGX4 Arbeitsplatzrechner 44.3 Minuten Prozessorzeit notwendig.

Die gelungene Behandlung einer transsonischen Profilüberströmung weist nach, daß die vorliegende numerische Methode geeignet ist, auch stoßbehaftete Strömungsprobleme bei kompressiblen Medien effizient zu bearbeiten. Dabei wurde eine spezielle Erweiterung der Druckkorrekturgleichung erfolgreich eingesetzt. Das kombinierte Fehlerkriterium erlaubt anhand der berechneten Lösung eine Stoßadaption des Rechennetzes. Auf dem entsprechend modifizierten Gitter werden, wie Dichteverteilung und Wanddruckverlauf belegen, die experimentellen Phänomene mit guter Genauigkeit numerisch reproduziert. Ein Beispiel dafür ist die stoßinduzierte Strömungsablösung an der Rückseite des Profils. Hohe Konvergenzgeschwindigkeit und gute numerische Stabilität des Verfahrens bleiben auch nach Aufnahme der Enthalpiegleichung in den Lösungsalgorithmus erhalten.

Mit Abschluß dieses letzten Validierungsproblems wurde die Eignung des neu entwickelten Navier-Stokes-Lösers für die Simulation turbulenter, nichtisothermer, kompressibler Strömungsfälle bestätigt. Damit steht ein kritisch validiertes, leistungsstarkes und einheitliches Verfahren zur numerischen Berechnung allgemeiner zweidimensionaler Strömungsprobleme auf adaptiven unstrukturierten Netzen bis in den transsonischen Geschwindigkeitsbereich zur Verfügung.

## 8 Behandlung praxisrelevanter Probleme

Nach umfassender und kritischer aber erfolgreicher Validierung anhand anspruchsvoller Testfälle, muß sich das neue numerische Verfahren auch an praxisrelevanten Strömungsproblemen bewähren. Auf diese Weise soll das Erreichen des übergeordneten Entwicklungszieles, nämlich eine geometrisch flexible, genaue und effiziente Berechnungsmethode zur Analyse von turbomaschinentypischen Konfigurationen bereitzustellen, abschließend dokumentiert werden.

Bei den zwei ausgewählten Anwendungen, einem Leit- und einem Laufradgitter für Gasturbinen, liegt jeweils eine turbulente, nichtisotherme, komplex berandete Strömung eines kompressiblen Fluides vor, so daß die Leistungsfähigkeit der neuentwickelten Algorithmen in vollem Umfang gefordert wird. Konkret handelt es sich zunächst um das Strömungsfeld in einem hochbelasteten Turbinenleitgitter mit starker Umlenkung und Beschleunigung sowie nachfolgend um die Durchströmung eines filmgekühlten Turbinenlaufgitters. Eine erhebliche Belastung des numerischen Verfahrens ergibt sich im ersten Fall durch die extreme Änderung der Strömungsgrößen über eine vergleichsweise kurze Lauflänge. Beim zweiten Problem sind sowohl der Schaufelkanal als auch die Kühlluftschlitze und das Plenum im Schaufelinneren diskretisiert. Die einzelnen Gleichungsböcke werden hier implizit im gesamten Rechengebiet ausgewertet.

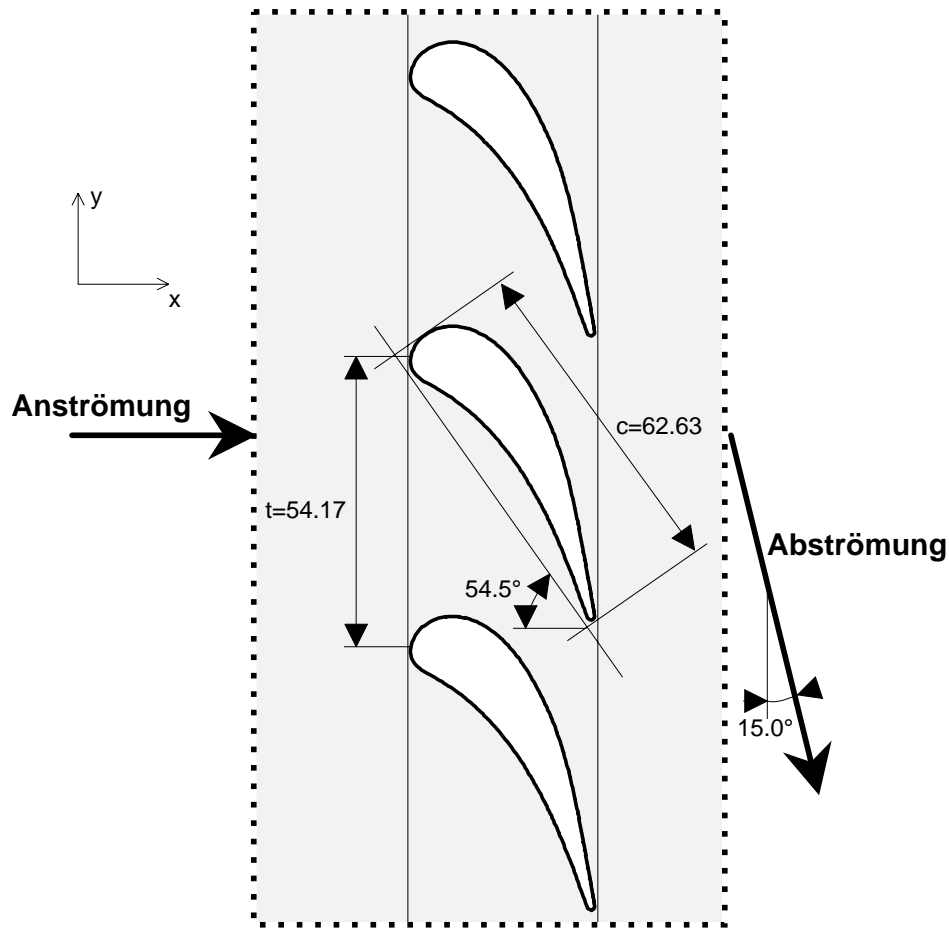
### 8.1 Hochbelastetes Leitgitter einer Gasturbine

In der einführenden Praxisanwendung des neuen numerischen Berechnungsverfahrens wurde die Strömung im Leitgitter der ersten Stufe einer Gasturbine simuliert. Die aerodynamische und thermische Auslegung der konvektionsgekühlten Turbinenschaufeln erfolgte in Zusammenarbeit mit Industriepartnern am Institut für Thermische Strömungsmaschinen (ITS). Experimentelle Untersuchungen des aerothermischen Verhaltens wurden für den Prototypen des Gitters in einem Heißgaskanal ebenfalls am ITS durchgeführt (Schiele et al. (1994)). Bei diesen Messungen wurden die Drücke am Schaufelprofil über Druckanbohrungen und entsprechende Aufnehmer, die Strömungsgeschwindigkeiten anhand der Laser-Doppler Technik erfaßt.

Die Formgebung der Schaufeln des Leitgitters, von dem ein Segment in Abbildung 8.1 dargestellt ist, wurde in einem iterativen Optimierungsprozeß mit Hilfe eines Euler-Codes und eines Grenzschichtrechenverfahrens auf numerischem Weg ermittelt. Als Randbedingung dieser Optimierung waren für gegebene Umlenkung und Arbeitsumsatz die Druckverluste und der übertragene Wärmestrom zu minimieren. Dazu mußte durch geeignete Gestaltung des Schaufelprofils der Druckgradient und damit der Geschwindigkeitsverlauf entlang der Schaufeloberfläche so eingestellt werden, daß sich eine möglichst günstige Entwicklung der Strömungsgrenzschicht ergab (Schiele et al. (1994)).

Für die aus der Auslegung resultierende Schaufelkontur mit einer Umlenkung von  $75^\circ$  ist die Entwicklung der Geschwindigkeit entlang von Druck- und Saugseite in dimensionsloser Form in Abbildung 8.2 angegeben. Auf der Saugseite wird die Strömung über einen weiten Bereich beschleunigt, so daß ein Geschwindigkeitsmaximum erst nach etwa 70% der auf die Sehnenlänge  $c$  bezogenen Lauflänge erreicht ist. Entlang der Druckseite

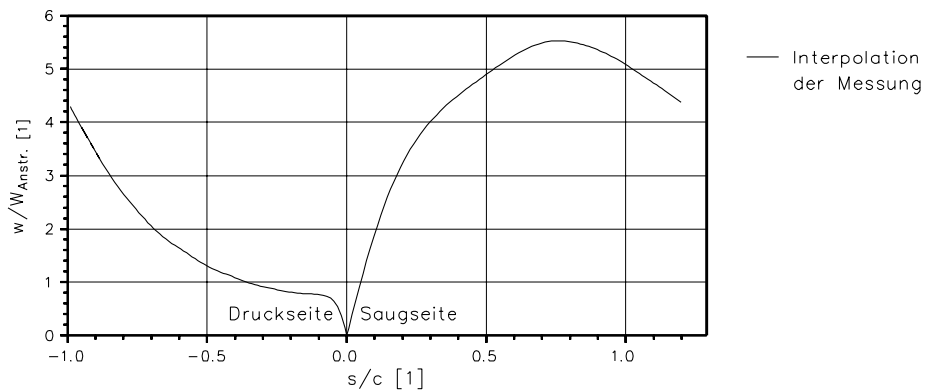




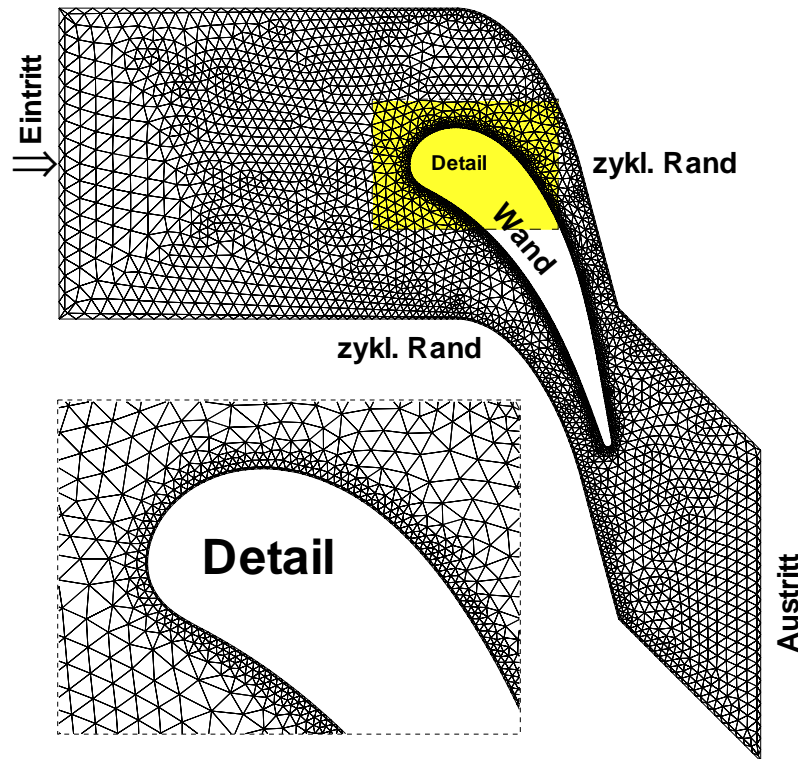
**Abb. 8.1:** Geometrie des hochbelasteten Leitgitters

findet bis zur Hinterkante eine Beschleunigung statt. Die gleichmäßig hohe Beschleunigung der Strömung, die für den überwiegenden Teil der Lauflänge realisiert werden konnte, vermeidet Ablösungen. Gleichzeitig führt die hohe Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Druck- und Saugseite zu maximalem Arbeitsumsatz.

Im beschriebene Schaufelgitter wurden Strömungsfelder bei Reynoldszahlen  $Re_c$  von



**Abb. 8.2:** Gemessener Geschwindigkeitsverlauf an der hochbelasteten Schaufel



**Abb. 8.3:** Basisgitter für hochbelastete Schaufel

87 000 und 224 000 berechnet. Geometrische Bezugsgröße dieser Kennzahlen ist die Sehnenlänge  $c$  der Schaufel von 62.62 mm. Infolge der starken Beschleunigung der Strömung ist der Schaufelkanal bei niedrigeren Reynoldszahlen nahezu frei von Sekundärströmungen. Bei höherer Geschwindigkeit der Anströmung treten schwache dreidimensionale Effekte auf, die jedoch im Zuge der zweidimensionalen Diskretisierung in einem ebenen Mittelschnitt des Kanals nicht berücksichtigt werden.

Das zur räumlichen Diskretisierung der Konfiguration herangezogene Basisgitter mit insgesamt 3839 Stützstellen zeigt Abbildung 8.3. Diskretisiert ist die Umgebung einer einzelnen Schaufel mit einer Quererstreckung von 54.17 mm entsprechend der Teilung  $t$  des Schaufelgitters. Das Rechengebiet beginnt ca. eine Sehnenlänge  $c$  stromauf der Schaufelvorderkante. Mit zunehmender Umlenkung und Strömungsgeschwindigkeit nimmt der freie Querschnitt des Schaufelkanals stark ab. Um Schwierigkeiten, die sich aus derart beengten Verhältnissen mit spitzem Eckwinkel für die Netztopologie am Austritt ergeben, zu umgehen, wurde das Gitter im Nachlauf des Schaufelkörpers gegenüber der Abströmrichtung um  $30^\circ$  nach oben geklappt. Der Einfluß der Nachbarschaufeln auf das Strömungsfeld ist durch zyklische Verknüpfung von unterem und oberem Gitterrand berücksichtigt. Der Abstand des wandnächsten Gitterknotens zur Schaufeloberfläche beträgt 0.15 mm. Er ergab sich anhand einer Vorauslegung, die sicherstellen sollte, daß der Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes nicht verlassen wird (vgl. Kapitel 6.3.3). Die Schaufelkontur wird durch 280 Stützstellen beschrieben.

Als Randbedingung für die numerische Behandlung der Schaufelumströmung wurden

auf der Grundlage der entsprechenden Meßwerte Totaldruck  $p_{t, \text{ein}}$ , Strömungswinkel  $\alpha_{\text{ein}}$  relativ zur  $x$ -Achse und Temperatur  $T_{\text{ein}}$  am Eintritt ins Rechengebiet sowie der Druck  $p_{\text{aus}}$  am Austrittsrand gesetzt. Turbulenzgrad  $Tu_{\text{ein}}$  und turbulentes Längenmaß  $l_{\epsilon, \text{ein}}$  der Anströmung ergaben sich ebenfalls aus den Messungen bzw. aus Korrelationen für die verwendeten Turbulenzgitter (Baines und Peterson (1950), Roach (1987)). Die zusätzlich benötigten Stoffwerte wurden mit Hilfe der genannten Zustandsgrößen bestimmt.

Bei beiden Anströms Reynoldszahlen wurden Rechnungen auf dem Basisgitter und einem lösungsadaptiv modifizierten Netz durchgeführt. Als Adaptionskriterium wurde eine Abschätzung der Diskretisierungsfehler auf der Grundlage eines dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten  $P(u, v)$  herangezogen. Zur Beschreibung des konvektiven Transportes kam für Impuls- und Enthalpiegleichungen die DISC-Interpolation, beim Turbulenzmodell der Upwind-Ansatz zur Anwendung. Die Entscheidung zugunsten des Upwind-Verfahrens fiel im Hinblick auf den erwarteten numerischen Aufwand, nachdem im Zuge der Validierung mit DISC- und Upwind-Diskretisierung für die Turbulenzgrößen nach Gitteradaption gleichwertige Resultate erzielt worden waren (vgl. Kapitel 6.3.2 und 7.4).

### 8.1.1 Niedrige Anströmgeschwindigkeit ( $Re = 87\,000$ )

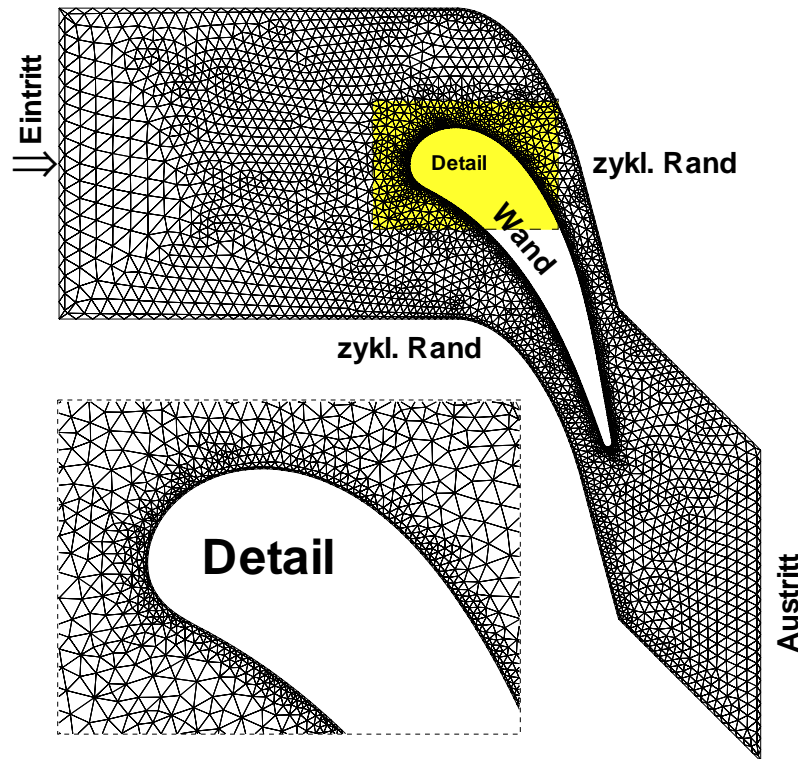
Alle Eingabedaten, die für eine Simulation der Strömung bei der niedrigen Reynoldszahl  $Re_c$  von 87 000 Verwendung fanden, sind in Tabelle 8.1 aufgeführt. Die Machzahl  $Ma_{\text{ein}}$  der Anströmung beträgt unter diesen Bedingungen 0.07.

Nach Erreichen des Konvergenzkriteriums  $Res_{\text{ref}}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  auf dem Basisgitter wurde eine lösungsadaptive Gitterverfeinerung vorgenommen, woraus ein lokal verfeinertes Gitter mit 4174 Rechenknoten resultierte. Das modifizierte Netz ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Anhand eines Vergleiches mit dem Ausgangsgitter ist leicht zu erkennen, daß eine Verfeinerung im wesentlichen an der Schaufelvorderkante und in geringerem Umfang im Schaufelkanal sowie im Hinterkantenbereich stattgefunden hat.

Das Konvergenz- und Stabilitätsverhalten des numerischen Algorithmus auf dem Basisgitter und nach Neustart auf dem lösungsangepaßten Rechnetz ist in Abbildung 8.5 wiedergegeben. Dazu ist die Entwicklung des Druckresiduums über der Anzahl der durchgeführten Blockiterationen aufgetragen. Nach einer Einschwingphase mit Durchlaufen eines Fehlermaximums konvergiert die Rechnung auf dem Ausgangsgitter sehr schnell. Die Konvergenzrate übersteigt teilweise 3 Fehlerdekaden je 500 Iterationen, so daß nach 1212 äußeren Iterationen das Referenzresiduum unterschritten wird. Der

	$T_{\text{ein}}$ [K]	$p_{t, \text{ein}}$ [Pa]	$\alpha_{\text{ein}}$ [°]	$Tu_{\text{ein}}$ [%]
$Re_c = 87\,000$	330.49	108 062	0.0	1.5
	$p_{\text{aus}}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]	$c_p$ [J/(kg K)]
$l_{\epsilon, \text{ein}}$ [m]	102 323	$19.87 \cdot 10^{-6}$	287.0	1008.3

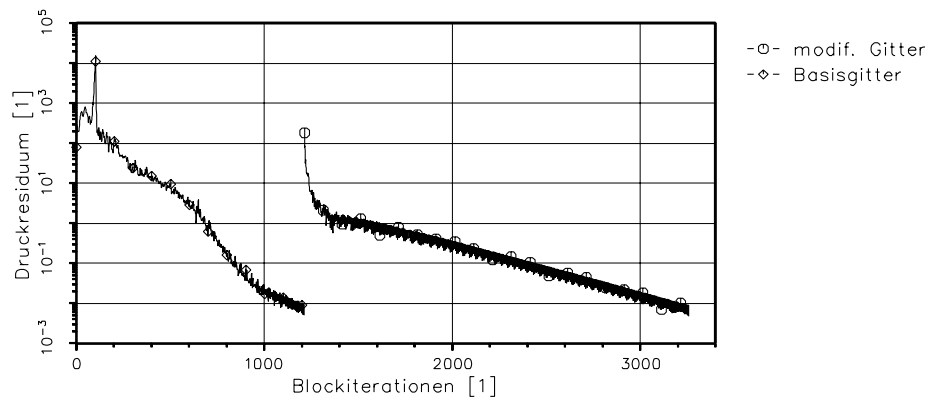
**Tab. 8.1:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 87\,000$ )



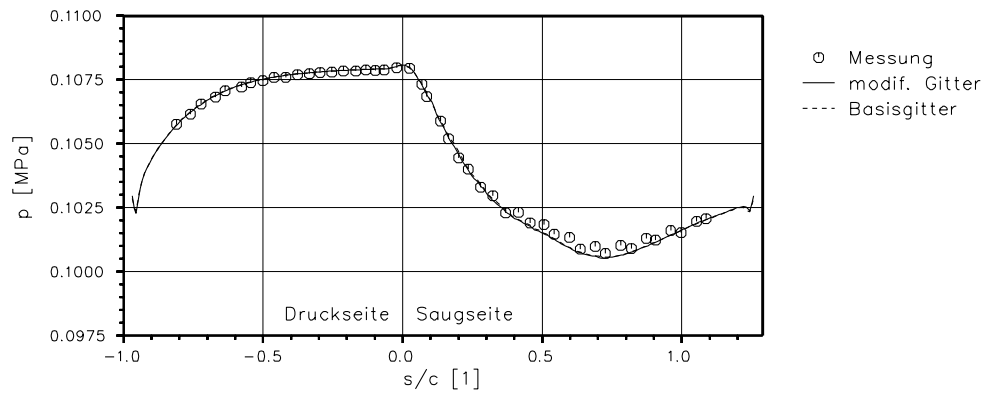
**Abb. 8.4:** Modifiziertes Gitter für hochbelastete Schaufel ( $Re = 87\,000$ )

Bedarf an Prozessorzeit beträgt 93.3 Minuten auf einem SUN Sparc 10-TGX4 Arbeitsplatzrechner. Auf dem verfeinerten Gitter reduziert sich die Konvergenzgeschwindigkeit innerhalb weniger Blockiterationen erheblich. Eine konvergente Lösung ist nach weiteren 151 Minuten bzw. 2046 äußeren Iterationen erreicht. Für beide Rechnungen wird ein sehr stabiles, nahezu monotonen Konvergenzverhalten beobachtet.

Ein Vergleich zwischen Resultaten der numerischen Untersuchung und Meßergebnissen ist anhand des Druckverlaufes an der Schaufeloberfläche vorgenommen. Wie Abbil-



**Abb. 8.5:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 87\,000$ )



**Abb. 8.6:** Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 87\,000$ )

dung 8.6 belegt, erfaßt bereits die auf dem Basisgitter berechnete numerische Lösung nahezu abweichungsfrei die experimentellen Druckdaten. Die Fortsetzung des Rechenganges mit lokal verbesserter räumlicher Diskretisierung führt nicht zu erkennbaren Änderungen im Druckprofil. Daraus läßt sich schließen, daß eine im wesentlichen gitterunabhängige Lösung vorliegt.

### 8.1.2 Hohe Anströmgeschwindigkeit ( $Re = 224\,000$ )

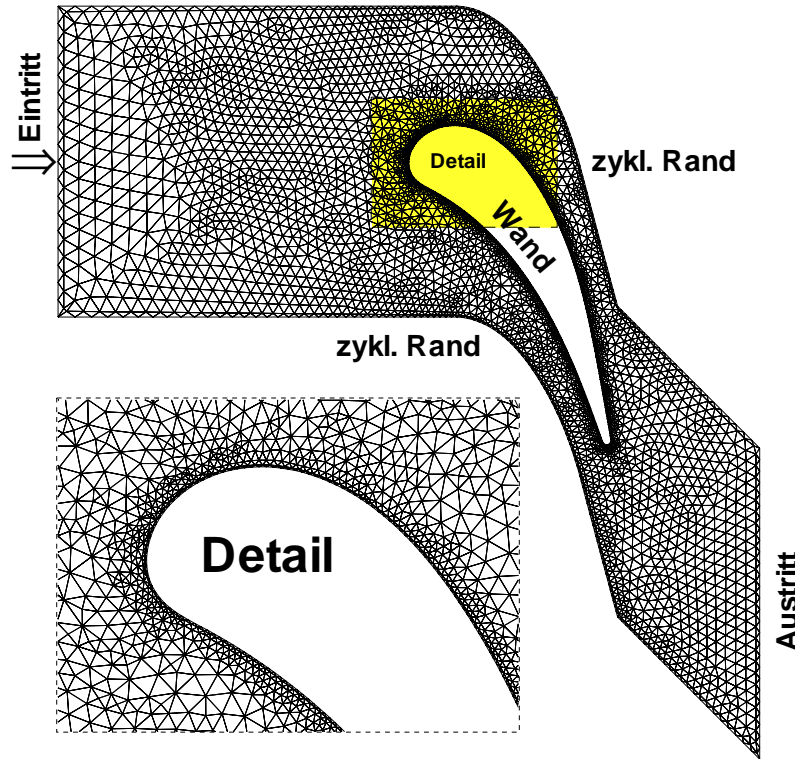
Eine weitere numerische Analyse der Schaufelumströmung erfolgte bei einer Reynoldszahl  $Re_c$  der Anströmung von 224 000, die der vorgesehenen Auslegung des Turbinengitters entspricht. Die Eingabedaten der Simulation sind in Tabelle 8.2 gesammelt. Stromauf des Schaufelgitters liegt eine Anströmmachzahl  $Ma_{ein}$  von knapp 0.14 vor.

Nach Erreichen einer konvergenten Lösung auf dem Ausgangsgitter, d.h. nach Unterschreiten eines Referenzresiduums  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$ , wurde die Rechnung abermals auf einem adaptierten Gitter mit jetzt 4169 Stützstellen fortgesetzt. Abbildung 8.7 zeigt das modifizierte Rechennetz. Wie schon bei geringer Anströmungsgeschwindigkeit wurde die räumliche Diskretisierung an der Schaufelvorderkante und bereichsweise im Schaufelkanal und an der Hinterkante verfeinert.

Der Konvergenzverlauf der Rechnungen auf beiden Gittern ist in Form des Druckresiduums über der Anzahl der äußeren Iterationen in Abbildung 8.8 wiedergegeben. Abermals wird auf dem Grundgitter eine hohe Konvergenzrate erzielt, wodurch die Ausgangslösung nach 1285 Blockiterationen bzw. 100.5 Minuten Prozessorzeit vorliegt. Die hohe Konvergenzgeschwindigkeit bleibt jetzt im Unterschied zum Fall mit niedriger Reynoldszahl auch nach Wiederaufnahme des Rechengangs auf dem adaptierten Netz

$Re_c = 224\,000$	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]
	329.95	140 562	0.0	1.5
	$l_{\epsilon,ein}$ [m]	$p_{aus}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]
	0.0025	104 302	$19.84 \cdot 10^{-6}$	287.0
				$c_p$ [J/(kg K)]
				1008.7

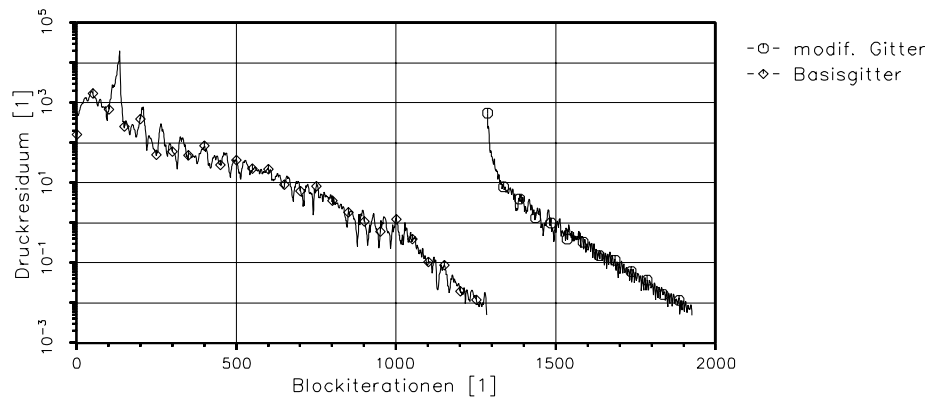
**Tab. 8.2:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $Re = 224\,000$ )



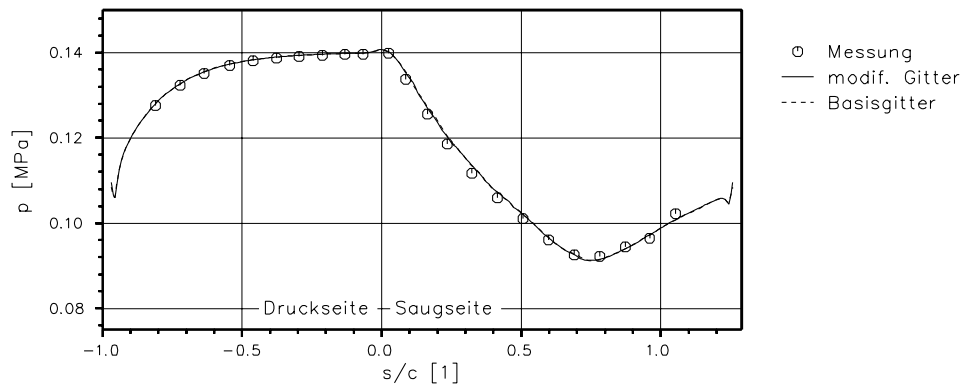
**Abb. 8.7:** Modifiziertes Gitter für hochbelastete Schaufel ( $Re = 224\,000$ )

erhalten. Das Referenzresiduum ist nach nur 48.6 Minuten und 641 Iterationen erneut erreicht. Der Residuenverlauf ist gewohnt stabil und annähernd monoton.

Die Ursache der Abweichungen von Iterationsaufwand und Rechenzeit auf den beiden lösungsangepaßten Netzen liegt sehr wahrscheinlich in der ungünstigen Form einzelner Bilanzelemente. Besonders kritisch ist hier der Bereich der Strömungsgrenzschicht unmittelbar an der Schaufel, wo die Gitteradaption überwiegend stattfindet. Treten in dieser Grenzschicht nach der Verfeinerung wenige stark verzerrte Kontrollvolumina auf, verlangsamt sich die Konvergenz unter Umständen merklich.



**Abb. 8.8:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $Re = 224\,000$ )



**Abb. 8.9:** Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $Re = 224000$ )

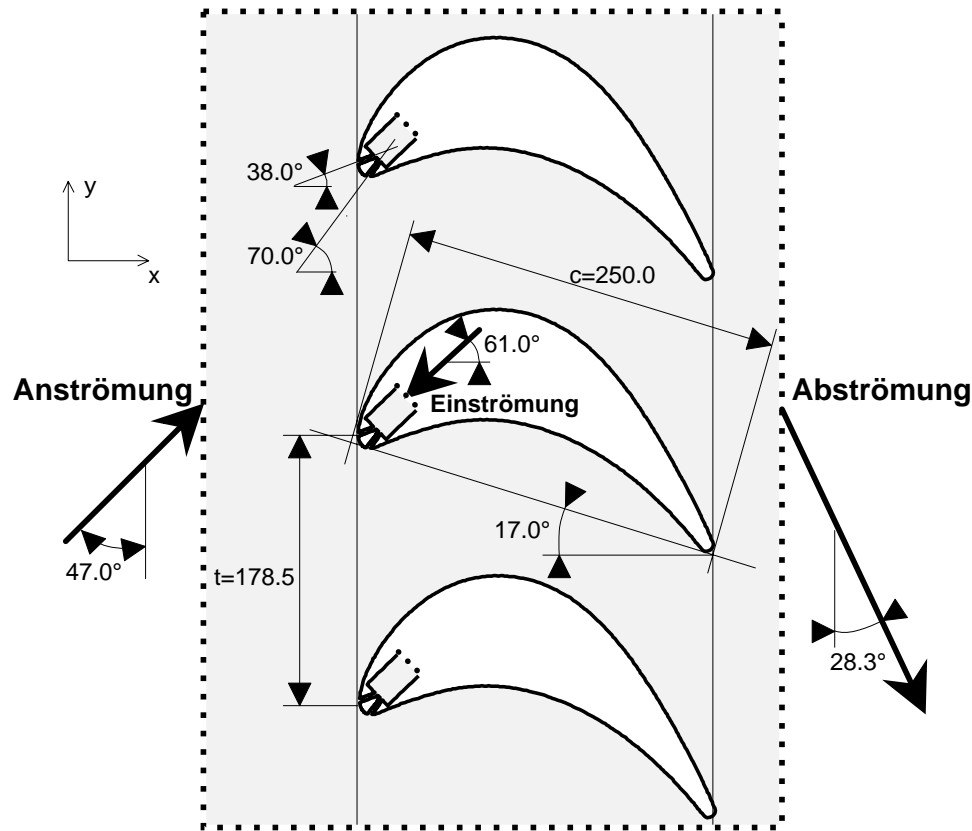
Um die numerischen Resultate quantitativ zu überprüfen, dient nochmals ein Vergleich mit dem experimentell ermittelten Profildruckverlauf. Diese Gegenüberstellung ist in Abbildung 8.9 vorgenommen. Wie im ersten Fall liefern beide Rechnungen nahezu identische Druckkurven, die den gemessenen Druckwerten entsprechen.

Nach der problemlosen numerischen Simulation der Strömung in einem hochbelasteten Turbinenleitgitter steht die Eignung der vorgestellten neuen Berechnungsmethode auf unstrukturierten Gittern für praxisrelevante Strömungsprobleme fest. Im behandelten Fall variieren die Werte der Transportvariablen im Strömungsfeld, infolge einer Beschleunigung des Fluids auf mehr als fünffache Anströmungsgeschwindigkeit, extrem stark. Dennoch wird sowohl auf dem groben Grundgitter als auch nach einer automatischen fehlergesteuerten Netzadaption jeweils rasche und stabile Konvergenz erzielt. Die Genauigkeit der berechneten Ergebnisse gibt, wie der Vergleich mit den Druckmessungen bestätigt, keinen Anlaß zu Beanstandungen. Die vorgenommene Variation der Anströmbedingungen macht deutlich, daß die vorgelegten qualitativ guten numerischen Lösungen nicht das zufällige Produkt einer problemspezifischen Anpassung bestimmter Randbedingungen sind, sondern durch Diskretisierungstechnik und numerische Methode reproduzierbar erbracht werden. Beim behandelten Strömungsproblem dient die lösungsadaptive Gitterverfeinerung zum einen dazu, die Diskretisierungsgenauigkeit an kritischen Stellen im Strömungsfeld zu erhöhen, zum anderen um die Gitterunabhängigkeit des berechneten Strömungsfeldes auf einfache Weise zu überprüfen.

## 8.2 Filmgekühltes Laufgitter einer Gasturbine

In einem weiteren Anwendungsfall aus der Praxis kam das neue Finite-Volumen Verfahren zur Berechnung der Strömung in einem Turbinenlaufgitter mit filmgekühlten Schaufeln zum Einsatz.

Bei Gasturbinen dienen Kühlluftfilme entlang der Oberflächen von Bauteilen dazu, den Werkstoff durch eine Schicht kalten Fluids vor der direkten Einwirkung der Heißgase zu schützen und Wärme konvektiv abzuleiten. Turbinenschaufeln wird zu diesem Zweck über einen internen Hohlraum, das sogenannte Plenum, Anzapfluft aus dem Hochdruckteil des Verdichters zugeführt und durch Öffnungen an der Schaufeloberfläche ausgeblasen. Dabei ist es wichtig, den Austrittsimpuls der Kühlluftstrahlen so zu bemessen,



**Abb. 8.10:** Geometrie des filmgekühlten Turbinenlaufgitters

daß einerseits ein hinreichend starker Film gelegt wird, andererseits kein Ablösen des eingebrachten kalten Luftstroms auftritt. Die Interaktion zwischen Kühlluft  $c$  und Hauptströmung  $\infty$  und damit die Effektivität der Kühlung wird ganz wesentlich von der Ausblaserate  $M$  bestimmt, die die Massenstromdichten  $\rho|\vec{w}|$  der beiden Teilströme ins Verhältnis setzt (Bittlinger et al. (1994), Bittlinger (1995)).

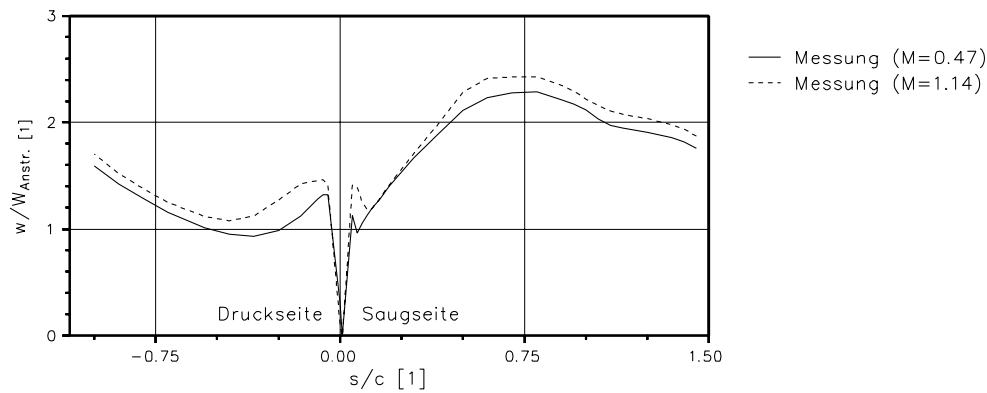
$$M = \frac{\rho_c |\vec{w}_c|}{\rho_\infty |\vec{w}_\infty|} \quad (8.1)$$

Die hier untersuchten Schaufelprofile wurden für den Rotor einer Hochdruckturbinen entwickelt. Messungen der Strömungsgrößen in der gekühlten Konfiguration wurden bei abgesenktem Druck an einem maßstabsgetreuen Modell des Gitters unter Einhaltung der Mach- und Reynolds-Ähnlichkeit von Beeck (1992) durchgeführt.

Die Geometrie des verwendeten Modells und die Anordnung der Kühlluftschnitte an der Schaufelvorderkante sind in Abbildung 8.10 gezeigt. Die Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit erfolgte mit Laser-2-Fokus- und Fünflochsonden-Meßtechnik, für Druckmessungen wurden ebenfalls Sonden sowie Wandanbohrungen verwendet.

Das Strömungsfeld im Schaufelgitter und speziell die Verhältnisse in der Umgebung der Kühlluftschnitte an der Schaufelvorderkante wurden experimentell bei Ausblaseraten  $M$  von 0.47, 0.76 und 1.14 untersucht. Die Reynoldszahl  $Re_c$  der Anströmung, gebildet mit der Sehnenlänge  $c$  des Profils von 250 mm, betrug jeweils etwa 370 000. Die Versuchsbedingungen in diesen drei Fällen waren die Grundlage für die hier vorgestellten





**Abb. 8.11:** Gemessene Geschwindigkeitsverläufe an der filmgekühlten Schaufel

numerischen Untersuchungen. Durch die Schlitzausblasung sind außerhalb der Grenzschichten an oberer und unterer Seitenwand des Schaufelkanals in guter Näherung ebene Strömungsverhältnisse realisiert, so daß die numerische Simulation im Mittelschnitt des Gitters zweidimensional erfolgen kann.

Die im Experiment an Saug- und Druckseite der Schaufel gemessenen Geschwindigkeitsverläufe sind für Ausblaseraten  $M$  von 0.47 und 1.14 in Abbildung 8.11 abhängig von der normierten Lauflänge  $s/c$  dimensionslos aufgetragen. Der Staupunkt an der Vorderkante des Profils ist gegenüber der Auslegung minimal zur Saugseite hin verschoben. Entlang dieser Seite führt austretende Kühlluft zu einer lokalen Geschwindigkeitsüberhöhung, bevor die Strömung bis zum Dickenmaximum gleichmäßig beschleunigt wird. Danach findet in Richtung Hinterkante erst starke, dann mäßige Verzögerung statt. Auf der Druckseite wird das Fluid vom zweiten eingeblasenen Luftstrahl zunächst gleichfalls beschleunigt, um sich kurz darauf wieder zu verlangsamen. Nach Passieren des Geschwindigkeitsminimums durchläuft die Strömung bis zur Schaufelhinterkante eine Zone gleichmäßiger Beschleunigung. Mit steigender Ausblaserate  $M$  erhöht sich stromab der Kühlluftschlitze das Geschwindigkeitsniveau, da der Strahlimpuls gewachsen und bei konstanten Querschnitten ein größerer Massenstrom zu bewältigen ist.

Hinsichtlich der räumlichen Diskretisierung der Konfiguration haben Benz und Wittig (1992) in einer wegweisenden Arbeit festgestellt, daß zu einer korrekten Erfassung des Strömungsfeldes die beiden Kühlluftkanäle Bestandteil des Rechengebietes sein müssen. Die zugehörigen numerischen Untersuchungen wurden auf konturangepaßten, blockstrukturierten Netzen unter Anwendung der Mehrgebietstechnik vorgenommen.

Das unstrukturierte Basisgitter, von dem ausgehend die im folgenden vorgestellten Resultate berechnet wurden, besitzt 5787 Gitterknoten und ist in Abbildung 8.12 dargestellt. Da der Einfluß benachbarter Schaufeln mittels zyklischer Randbedingungen erfaßt wird, genügt die Diskretisierung nur eines Schaufelkanals. Die Quererstreckung des Rechengebietes entspricht der Teilung  $t$  des Turbinengitters von 178.5 mm. Der Eintrittsrand liegt etwa eine Sehnenlänge  $c$  stromauf der Schaufelvorderkante. Nach einer Umlenkung von  $104.7^\circ$  endet das Rechengebiet wiederum eine Sehnenlänge hinter der Schaufel. Die geometrischen Verhältnisse im Schaufelkanal erlauben es, im Nachlaufbereich stromab der Profilhinterkante auf eine Faltung des Rechennetzes zu verzichten. Im Unterschied zur Arbeit von Benz (1992) wurden hier nicht nur beide Ausblaseschlitze,

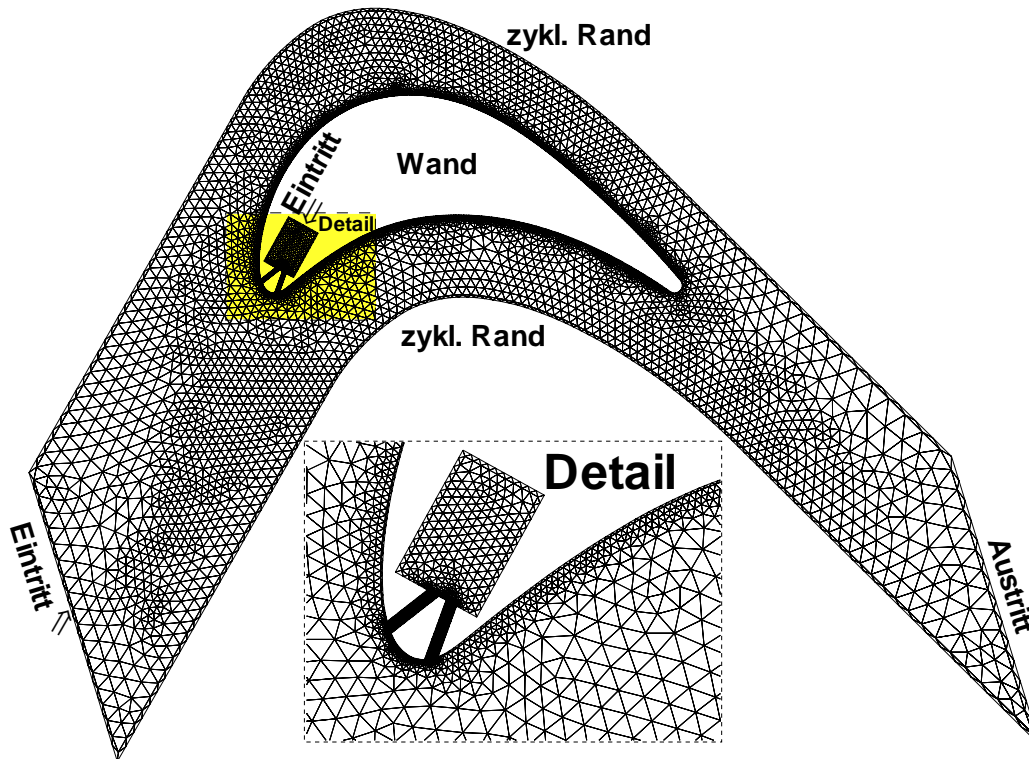


Abb. 8.12: Basisgitter für filmgekühlte Schaufel

sondern auch das Plenum der Schaufel diskretisiert. Dadurch ergibt sich im Verlauf der Rechnung der Strömungszustand am Eintritt in diese Schlitze aus den Verhältnissen im Plenum selbst und muß nicht über wenig gesicherte Randbedingungen gesondert spezifiziert werden.

Um den Abstand zwischen Schaufeloberfläche und wandnächstem Rechenpunkt entsprechend dem Geltungsbereich des universellen Wandgesetzes zu bestimmen, wurde eine Vorauslegung durchgeführt (vgl. Kapitel 6.3.3). Die auf dieser Basis festgelegten Wandabstände betragen im Plenum 1.0 mm und in den Kühlkanälen 0.2 mm. Entlang der Schaufelvorderkante steigt dieser Wert, an den Ausblaseöffnungen beginnend, sehr rasch von 0.2 auf 0.5 mm an. Die Schaufelkontur wird durch insgesamt 623 Stützstellen beschrieben.

Anders als alle bisher behandelten Strömungsprobleme weist das Rechengebiet für das gekühlte Turbinengitter neben dem Eintritt der Hauptströmung einen zweiten Eintrittsrand für die Kühlluft im Plenum der Schaufel auf. An beiden Eintrittten werden gemäß der experimentellen Werte Totaldruck  $p_{t, ein}$ , Strömungswinkel  $\alpha_{ein}$  relativ zur  $x$ -Achse, Temperatur  $T_{ein}$  und Turbulenzgrad  $Tu_{ein}$  vorgeschrieben. Zusätzlich wird der Druck  $p_{aus}$  in einer Gitterzelle nahe der Austrittsebene festgelegt. Ein turbulentes Längenmaß  $l_{\epsilon, ein}$  am Hauptströmungseintritt läßt sich über Korrelationen aus den Daten des verwendeten Turbulenzgitters gewinnen (Baines und Peterson (1950), Roach (1987)). Für das Plenum wird ein Längenmaß  $l_{\epsilon, ein}$  von 4% der Breite des Hohlraumes angenommen. Alle notwendigen Stoffwerte ergeben sich eindeutig aus den bekannten Zustandsgrößen.

Um die Konvergenz der numerischen Rechnung zu gewährleisten, müssen im Schaufelplenum die aus der Differenz von statischem Druck und Totaldruck berechneten Eintrittsgeschwindigkeiten begrenzt werden. Da beim Neustart des numerischen Verfahrens noch keinerlei Informationen über den statischen Druck vorliegen, wären andernfalls unrealistisch hohe Geschwindigkeitswerte die Folge. Ein oberes Limit für diese Geschwindigkeiten ist so zu wählen, daß es einerseits die erwartete Lösung sicher übertrifft, andererseits jedoch ein Schalldurchgang in den Kühlluftschlitzen ausgeschlossen ist.

### 8.2.1 Niedrige Ausblaserate ( $M = 0.47$ )

Zur numerischen Untersuchung des Strömungsfeldes bei einer relativ niedrigen Ausblaserate  $M$  von 0.47 wurden die in Tabelle 8.3 aufgelisteten Eingabedaten verwendet. Für das Plenum im Inneren der Schaufel werden hier ebenfalls Eintrittswerte benötigt. Die Machzahl  $Ma$  der Strömung vor dem Schaufelgitter beträgt 0.381.

Nachdem auf dem Ausgangsnetz eine konvergente Lösung berechnet worden war, wurde wiederholt eine fehlergesteuerte Adaption der räumlichen Diskretisierung durchgeführt. Anschließend wurde die Rechnung mit der interpolierten Grobgitterlösung als Startbelegung jeweils auf modifizierten Netzen mit 6259 und 7327 Gitterknoten wiederaufgenommen. Eine Darstellung des feinsten Rechennetzes ist in Abbildung 8.13 zu finden. Gegenüber dem Basisgitter ist eine Verdichtung der Stützstellen an der Schaufelvorderkante im Bereich von Staupunkt und Kühlluftschlitzen erkennbar. Die sehr starke Verfeinerung stromab der druckseitigen Filmausblasung rührt von einem in Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten berechneten Rezirkulationsgebiet her. Weiterhin fand, wenn auch in geringerem Ausmaß, entlang der Wandgrenzschicht im gesamten Schaufelkanal und im Nachlauf des Profils eine Netzadaption statt.

Für die Rechnungen auf dem Basisgitter und den beiden adaptierten Netzen ist der Verlauf des Druckresiduums abhängig von der Anzahl der äußeren Iterationen in Abbildung 8.14 dargestellt. Nach dem Start des Verfahrens werden bis zum Erreichen des Abbruchresiduums  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  724 Blockiterationen in 83.9 Minuten Prozessorzeit durchlaufen. Im Anschluß an die erste Gitteradaption sind für eine konvergente Lösung 255 Iterationen mit 28.5 Minuten Zeitbedarf erforderlich. Schließlich werden nach der zweiten Adaption nochmals 349 äußere Iterationen und 48.2 Minuten Rechenzeit bis zur Konvergenz benötigt. Wie schon bei der ungekühlten Schaufel zeigt das

	$p_{aus}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]	$c_p$ [J/(kg K)]	
$M = 0.47$	14 740	$18.66 \cdot 10^{-6}$	287.0	1004.0	
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Kanal	304.2	20 170	60.0	5.8	0.005
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Plenum	310.9	20 540	241.0	5.8	0.0008

**Tab. 8.3:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 0.47$ )

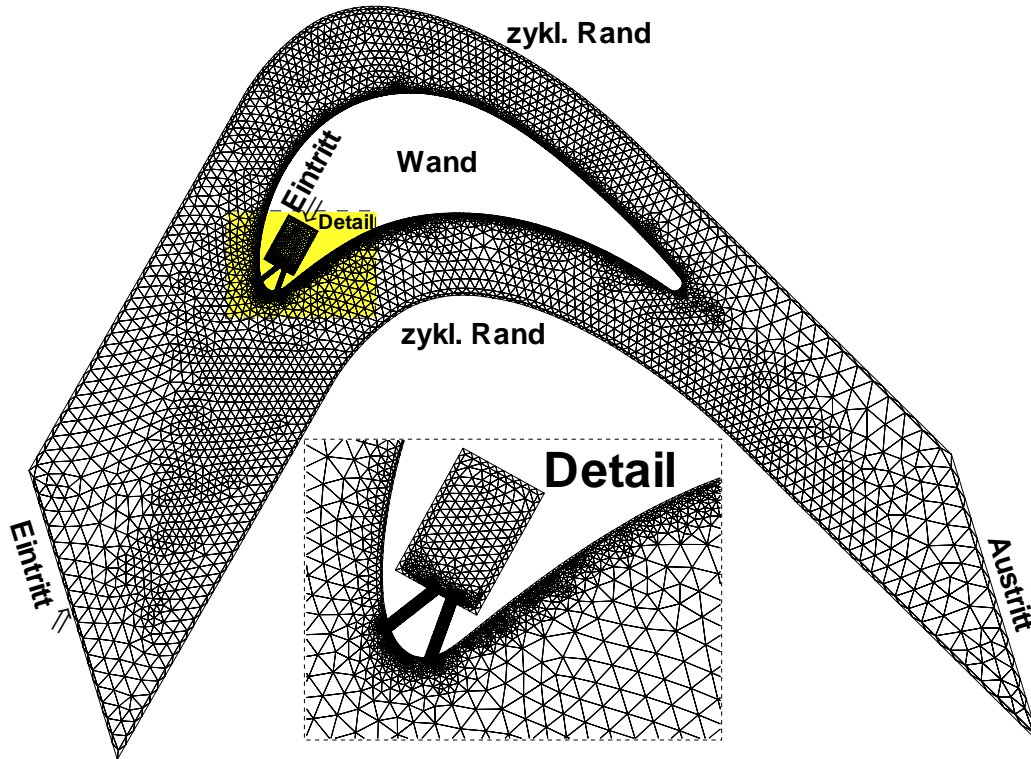


Abb. 8.13: Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 0.47$ )

numerische Verfahren stabiles und annähernd monotonies Konvergenzverhalten, ohne daß eine Anpassung der Relaxationsstrategie notwendig wäre. Die Konvergenzrate erhöht sich mit jedem Adaptionsschritt.

Beim Vergleich des numerischen Aufwandes für hochbelastetes Leitgitter (vgl. Kapitel 8.1) und filmgekühltes Laufgitter fällt auf, daß im Fall der gekühlten Schaufel deutlich geringere Rechenzeiten mit nahezu halbiertem Anzahl an Blockiterationen realisiert werden, obwohl jeweils etwa 50 % mehr Gitterknoten zu bewältigen sind. Der physikalische Vorgang extremer Beschleunigung am ungekühlten Profil belastet den

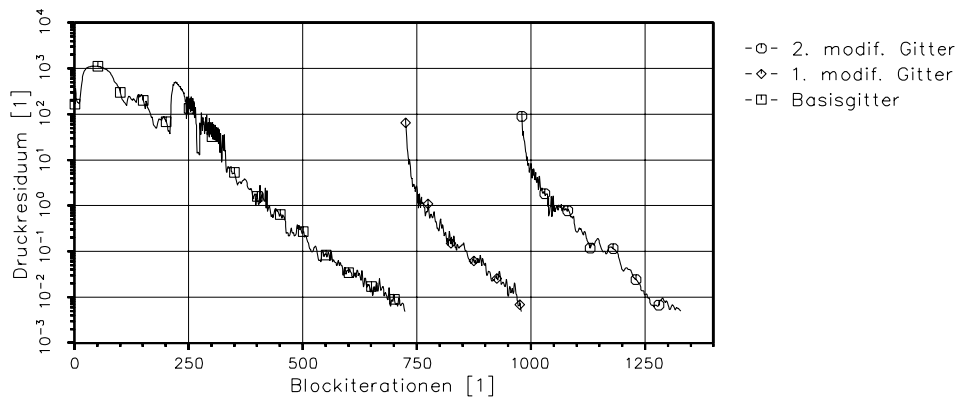
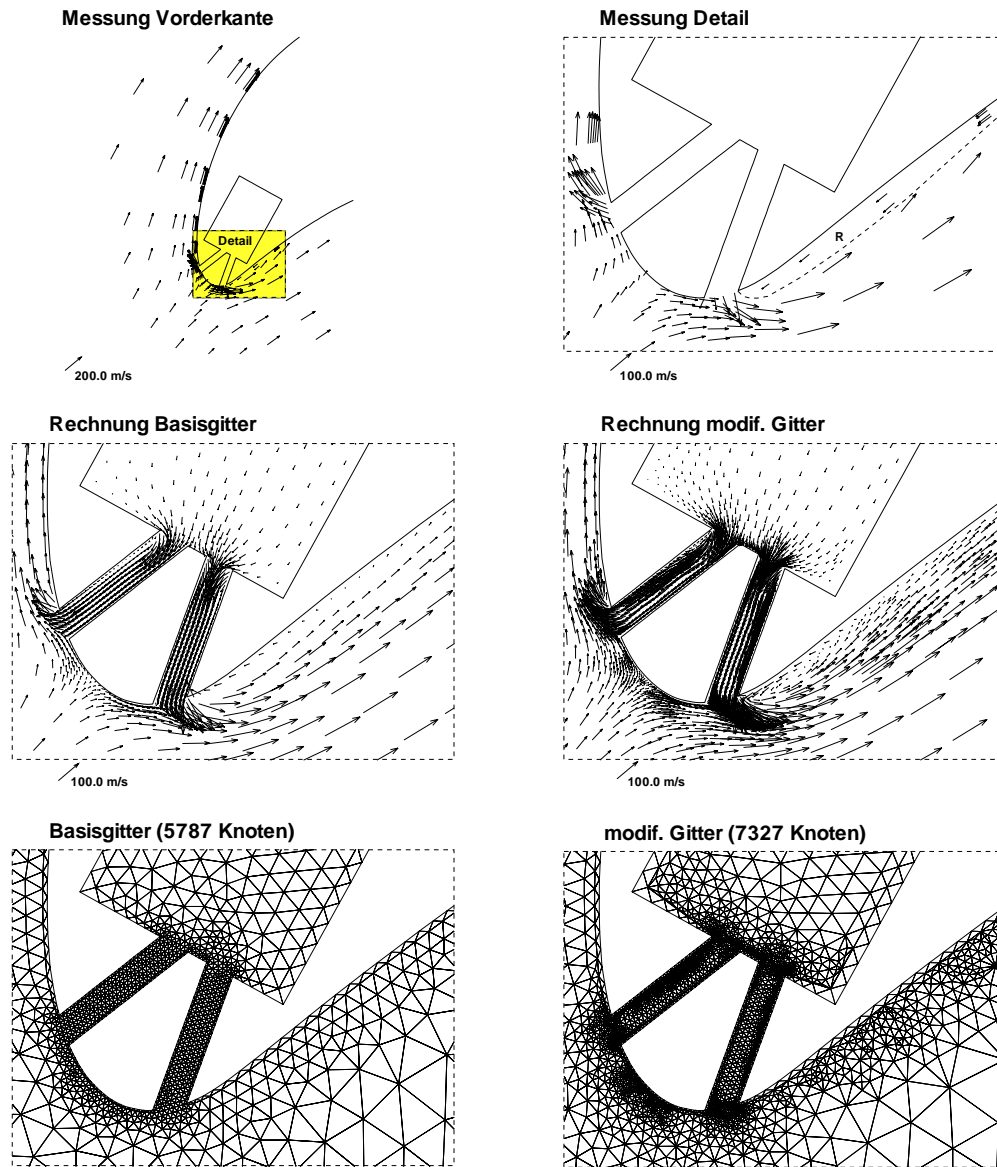


Abb. 8.14: Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 0.47$ )



**Abb. 8.15:** Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 0.47$ )

Lösungsalgorithmus demnach wesentlich stärker, als die geometrisch komplizierte Kopplung der Rechengebiete bei der Filmkühlung.

Eine direkte Gegenüberstellung von Resultaten aus Versuch und numerischer Berechnung wird zunächst anhand des Geschwindigkeitsfeldes im Bereich der Schaufelvorderkante in unmittelbarer Umgebung der Kühlluftaustritte vorgenommen. Dazu ist das Ergebnis der Geschwindigkeitsmessung sowohl vollständig als auch im Detail vergrößert in Form einer Vektordarstellung in Abbildung 8.15 gezeigt. Passend zur Detailvergrößerung sind Ausschnitte aus grobem und feinstem Netz sowie die darauf berechneten Geschwindigkeiten dargestellt.

Die Messung macht deutlich, daß sich der Staupunkt nicht genau in der Mitte zwischen

den Auslaßschlitzen der Kühlluft befindet, sondern leicht zur Saugseite hin verschoben ist. Trotz niedriger Ausblaserate und geringer Eindringtiefe der Luftstrahlen kommt es stromab des druckseitigen Kühlluftstrahls bereits zu einer Strömungsablösung. Diese Information hat entscheidenden Einfluß auf die endgültige Auslegung der Turbinenschaufel.

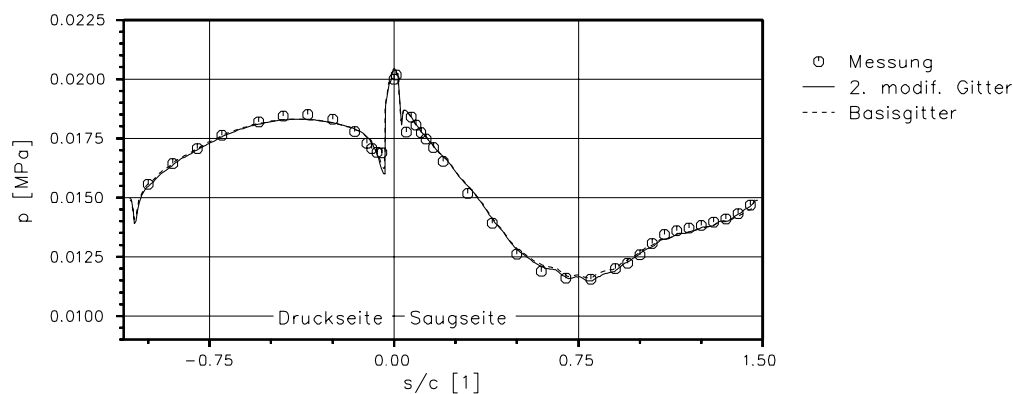
Geschwindigkeit und Richtung der Strömung werden dank angepaßter räumlicher Diskretisierung an der Schaufelspitze, die mit unstrukturierten Netzen problemlos zu realisieren ist, bereits auf dem Basisgitter in guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen berechnet. Die Position des Staupunktes und der Ablösewirbel sind ebenfalls korrekt erfaßt, wobei die Länge des simulierten Rückströmgebietes gegenüber dem Experiment zurückbleibt.

Ein Blick auf Ausgangsgitter und doppelt modifiziertes Netz führt nochmals vor Augen, wo der verwendete Adaptionparameter  $P(u, v)$  kritische Strömungsverhältnisse bzw. hohe Diskretisierungsfehler detektiert. Entsprechend wurden an Ein- und Ausritten der Kühlkanäle, in den Schlitzen selbst, vor dem Staupunkt und im Bereich der Ablösezone neue Stützstellen eingefügt. Um die Anwendbarkeit der logarithmischen Wandfunktion sicherzustellen, wurde auf eine Verringerung des Wandabstandes verzichtet.

Details im Strömungsverlauf wie Staupunkt und druckseitige Rezirkulation treten nach zweimaliger Gitterverfeinerung deutlicher hervor, unterscheiden sich jedoch nicht wesentlich von der Grobgitterlösung. Auch ein zweites Ablösegebiet hinter der Einströmkannte im saugseitigen Luftkanal ist bereits auf dem groben Netz zu erkennen.

Eine quantitative Bewertung der Güte der numerischen Lösung wird anhand des Druckverlaufes entlang der Schaufeloberfläche vorgenommen. Gemessene Druckwerte sowie auf grobem und feinstem Rechengitter vorhergesagte Druckverläufe sind für Druck- und Saugseite der gekühlten Schaufel in Abbildung 8.16 wiedergegeben. Wie bereits die Geschwindigkeitsfelder andeuteten, treten zwischen Meß- und Rechenwerten nur minimale Abweichungen auf. So liegt der berechnete Staupunkt jeweils exakt auf der im Versuch bestimmten Position. Auch der zugehörige Staudruck entspricht der Messung.

Auf der Druckseite der Schaufel folgt knapp hinter dem Staupunkt ein lokales Druckminimum, das von einer Beschleunigung durch den austretenden Luftstrahl herrührt.



**Abb. 8.16:** Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 0.47$ )

Anschließend steigt der Druck bis zum Dickenmaximum der Schaufel an, um danach in Richtung Hinterkante wieder abzusinken. Die auf beiden Netzen berechneten Druckprofile entsprechen dabei sehr genau den Messungen und weisen auch untereinander keine nennenswerten Differenzen auf.

An der Saugseite des Profils wird infolge der Kühlluftausblasung ebenfalls ein lokales Druckminimum beobachtet. Danach steigen die Meßwerte kurz an, um sofort anschließend bis zum Dickenmaximum zu fallen. Hinter diesem absoluten Minimum nimmt der Druck bis zur Hinterkante stetig zu. Wie schon auf der Druckseite stimmen die simulierten Profile sehr gut mit dem Resultat des Experimentes überein. Zwischen Grob- und Feingitterlösung treten im Bereich des Dickenmaximums leichte Unterschiede zutage, wobei auf dem adaptierten Netz geringfügig bessere Ergebnisse erzielt werden.

### 8.2.2 Mittlere Ausblaserate ( $M = 0.76$ )

Eine weitere numerische Berechnung der Strömung im filmgekühlten Schaufelgitter wurde mit gesteigerter Ausblaserate  $M$  von 0.76 durchgeführt. Die zugehörigen Eingabewerte sind in Tabelle 8.4 gesammelt. Vor der Schaufelvorderkante erreicht die Strömung eine Machzahl  $Ma$  von 0.378.

Wie schon bei der niedrigen Ausblaserate wurde eine numerische Lösung zunächst auf dem Basisgitter ermittelt. Sie diene als Basis für die weiterführenden Rechnungen auf jeweils lösungsadaptiv modifizierten Netzen mit 7418 und 7860 Knoten. Das feinste modifizierte Gitter ist in Abbildung 8.17 dargestellt.

Die höhere Anzahl an Gitterknoten läßt bereits erkennen, daß im Vergleich zum Strömungsfall mit niedriger Ausblaserate, trotz identischer Adaptionstrategie, eine stärkere Gitterverfeinerung vorgenommen wurde. Bis zum Dickenmaximum der Schaufel ist die Ausdehnung der verdichteten Gitterbereiche in Richtung Kanalmittellinie gewachsen. Auch im Vorder- und Hinterkantenbereich liegt jetzt eine feinere räumliche Diskretisierung vor.

Das auf den drei Rechennetzen jeweils erzielte Konvergenz- und Stabilitätsverhalten kann dem Diagramm in Abbildung 8.18 entnommen werden. Aufgetragen ist die maximale normierte Druckänderung im Rechenfeld über der Anzahl der durchgeführten Iterationen. Für die Lösung des Strömungsproblems auf dem Ausgangsgitter wurden bis zum Unterschreiten des Referenzresiduums  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  insgesamt 674 äußere Ite-

	$p_{aus}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]	$c_p$ [J/(kg K)]	
$M = 0.76$	14 540	$18.66 \cdot 10^{-6}$	287.0	1004.0	
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Kanal	304.3	20 140	60.0	5.9	0.005
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Plenum	307.8	21 340	241.0	5.9	0.0008

**Tab. 8.4:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 0.76$ )

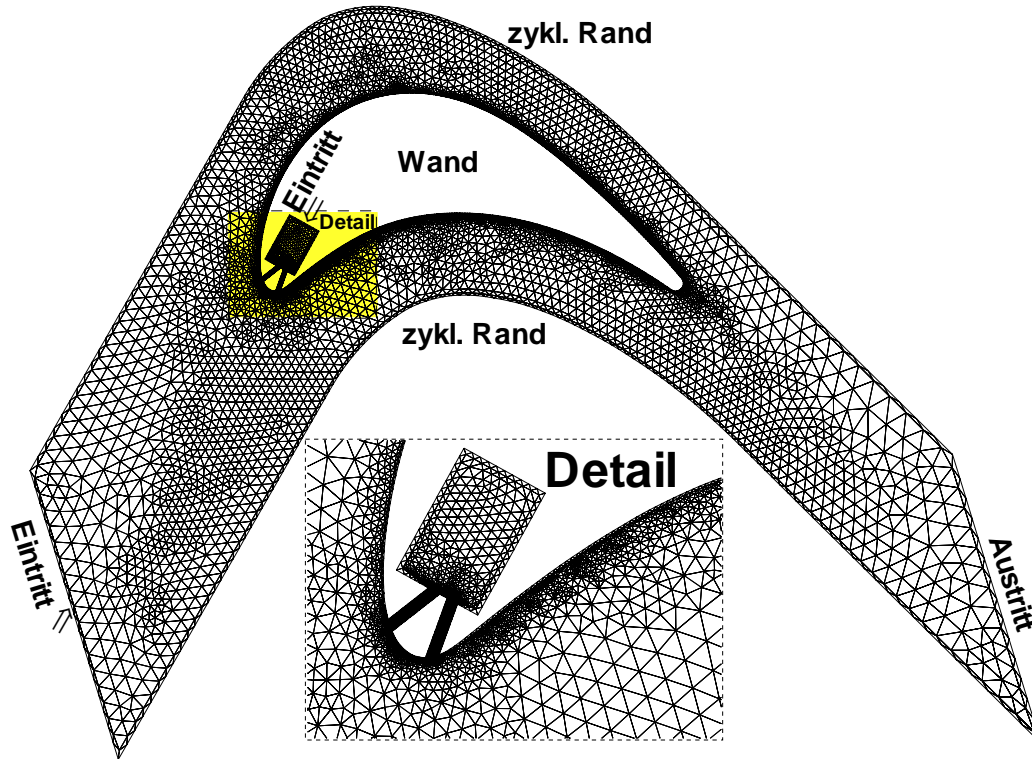


Abb. 8.17: Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 0.76$ )

rationen in 79.5 Minuten Prozessorzeit durchgeführt. Der numerische Aufwand auf dem ersten adaptierten Netz betrug 370 Blockiterationen bei einer Rechenzeit von 52.5 Minuten. Nach nochmaliger Adaption wurden schließlich auf dem feinsten verwendeten Gitter 274 Iterationen und 41.1 Minuten Rechenzeit benötigt.

Bei allen Rechnungen ist stabile und gleichmäßige Konvergenz zu beobachten, wobei stets mit Standardwerten der Relaxationsfaktoren  $\alpha$  gearbeitet wurde. Die Konvergenzrate steigt von etwa vier Dekaden Fehlerreduktion je 500 Iterationen beim Basisgitter auf über fünf Dekaden nach der zweiten Netzverfeinerung.

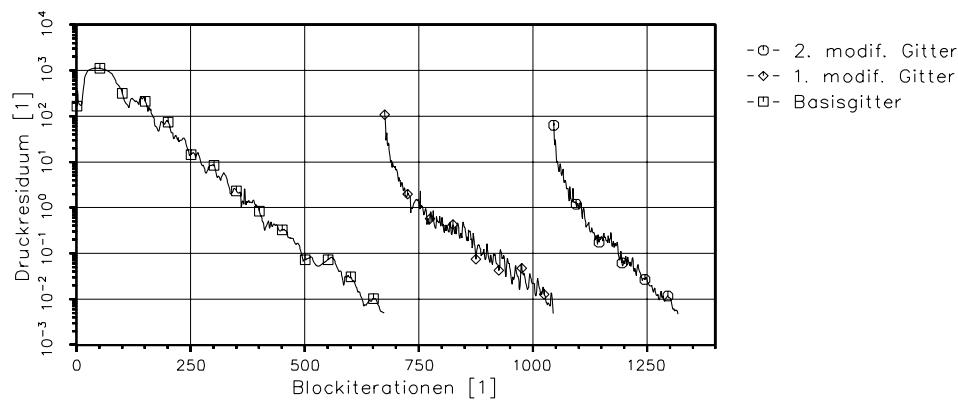
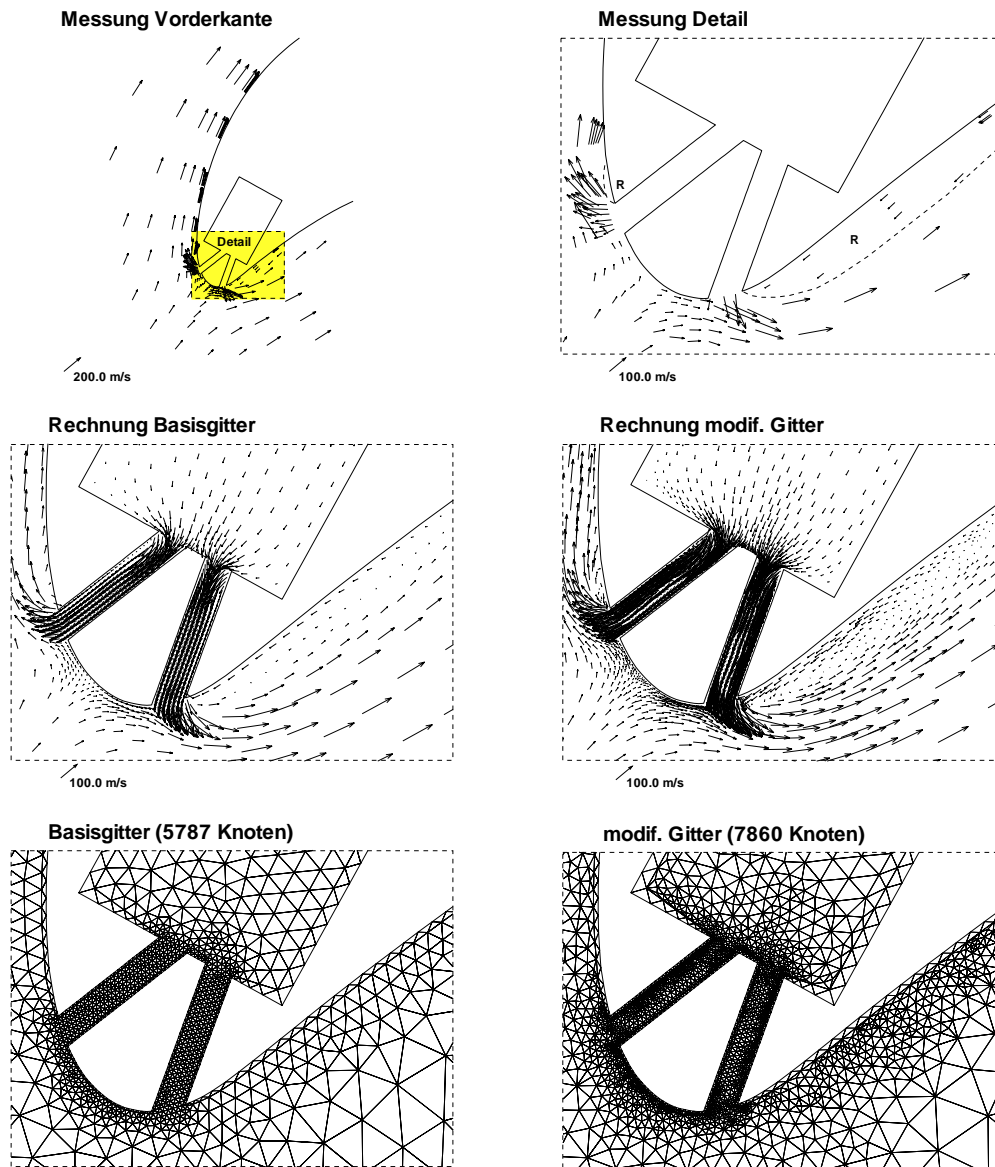


Abb. 8.18: Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 0.76$ )

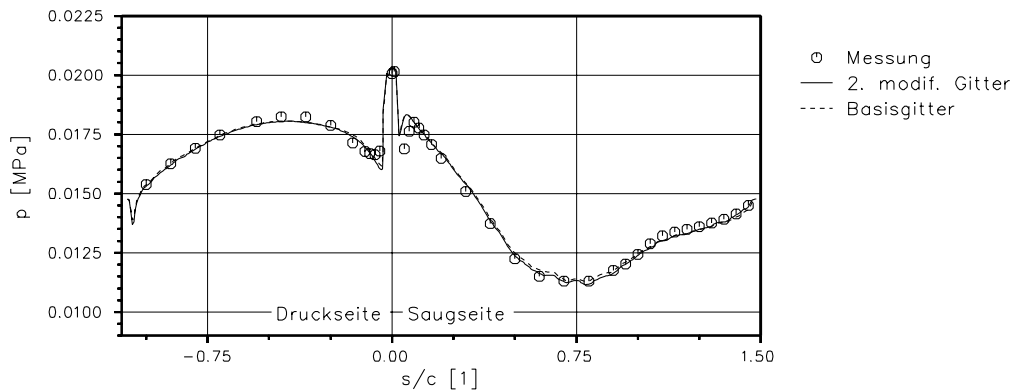




**Abb. 8.19:** Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 0.76$ )

Das Strömungsgeschehen in der Umgebung der Schaufelvorderkante, wie es zum einen im Versuch, zum anderen durch numerische Simulation auf grobem Gitter und dichtestem verfügbarem Netz bestimmt wurde, ist in Abbildung 8.19 wiedergegeben. Neben drei Detaildarstellungen des Geschwindigkeitsfeldes aus Experiment und Rechnung, sind die gemessenen Geschwindigkeitsvektoren im gesamten vorderen Bereich der Schaufel sowie die zugehörige räumliche Diskretisierung abgebildet.

Das Betrachten der Meßergebnisse im Detail zeigt, daß die Kühlluftstrahlen durch ihren gestiegenen Impuls weiter in die Hauptströmung eindringen, als bei der niedrigen Ausblaserate von 0.47. Aus diesem Grund vergrößert sich der Ablösewirbel hinter der druckseitigen Ausblasung erheblich, was in der Simulation schon auf dem Basisgitter deutlich wird. Stromab des saugseitigen Kühlluftaustritts besteht jetzt ebenfalls



**Abb. 8.20:** Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 0.76$ )

Ablösegefahr. Konkret wird eine solche Ablösung im vorliegenden Meßdatensatz nicht erfaßt, ist jedoch in der Originalarbeit erwähnt (Beeck (1992)). Sie deutet sich ebenfalls bereits in der Grobgitterlösung an. Die Position des Staupunktes bleibt von der Ausblaserate weitgehend unbeeinflußt und entspricht auf beiden gezeigten Netzen dem Versuchsergebnis.

Wie bei der Simulation mit geringem Kühlluftmassenstrom wurden im Zuge der lösungsadaptiven Verfeinerung Gitterbereiche in und um die Kühlkanäle, am Staupunkt und in druck- und saugseitiger Ablösezone verdichtet. Parallel zum druckseitigen Rezirkulationsgebiet dehnt sich der verfeinerte Gitterbereich relativ weit in Strömungsrichtung aus. Infolge der Netzmodifikation wachsen die beiden berechneten kühlfluftinduzierten Strömungsablösungen an. Auf der Druckseite entspricht auch die neu berechnete Ablöselänge noch nicht ganz der gemessenen Ausdehnung.

Die Genauigkeit der auf dem Ausgangsnetz und nach zweimaliger Adaption numerisch berechneten Lösungen wird quantitativ anhand einer Gegenüberstellung von gemessenem und berechnetem Druckverlauf an der Schaufeloberfläche beurteilt. Das entsprechende Diagramm mit Meß- und Rechenwerten entlang von Druck- und Saugseite des Schaufelprofils findet sich in Abbildung 8.20.

Staupunkt und Staudruck werden, wie bei niedriger Ausblaserate, in völliger Übereinstimmung mit dem Experiment ermittelt. Entlang der Druckseite der Schaufel bestehen zwischen Grob- und Feingitterlösung allenfalls geringfügige Unterschiede. Die Meßwerte stehen mit dem berechneten Druckverlauf sehr gut in Einklang. Auch an der Saugseite des Profils geben die Rechnungen die gemessenen Drücke genau wieder. In der Umgebung des Minimaldrucks und im Hinterkantenbereich kann die Feingittersimulation leichte Vorteile verbuchen.

### 8.2.3 Hohe Ausblaserate ( $M = 1.14$ )

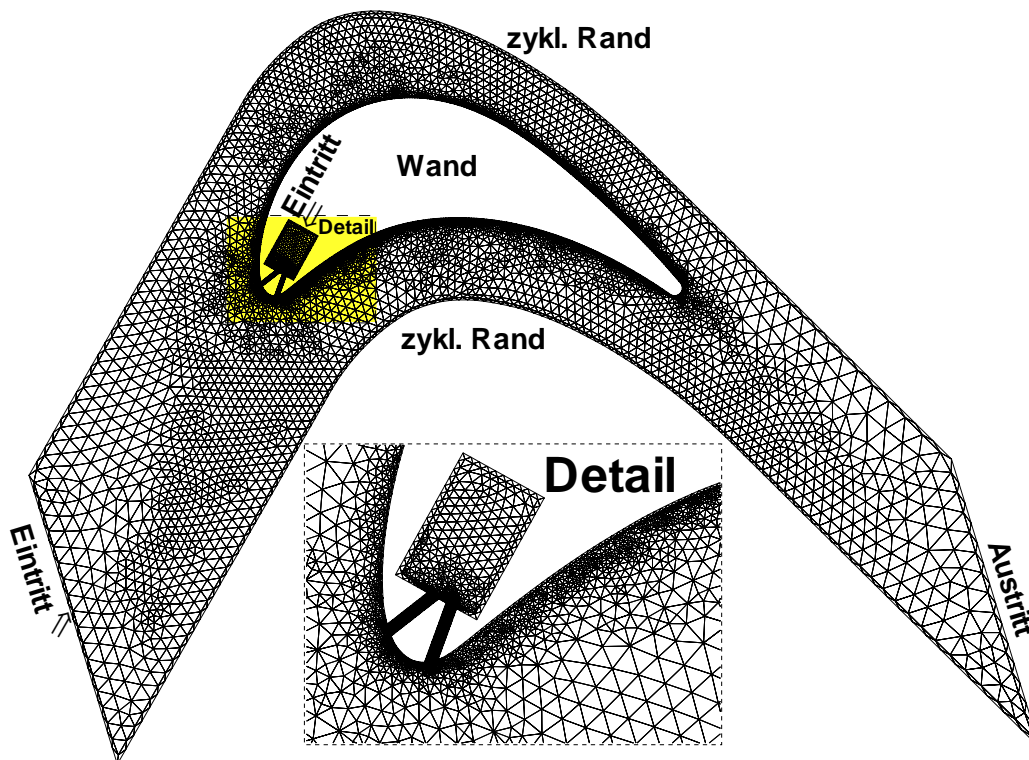
Die abschließende dritte numerische Untersuchung der filmgekühlten Turbinenschaufel wurde bei der höchsten experimentell realisierten Ausblaserate  $M$  von 1.14 vorgenommen. Die zu diesen Rechnungen verwendeten Eintritts- und Stoffdaten enthält Tabelle 8.5.

	$p_{aus}$ [Pa]	$\mu_l$ [Pa s]	$R$ [J/(kg K)]	$c_p$ [J/(kg K)]	
$M = 1.14$	14 100	$18.66 \cdot 10^{-6}$	287.0	1004.0	
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Kanal	304.2	20 170	60.0	5.8	0.005
	$T_{ein}$ [K]	$p_{t,ein}$ [Pa]	$\alpha_{ein}$ [°]	$Tu_{ein}$ [%]	$l_{\epsilon,ein}$ [m]
Plenum	295.6	22 900	241.0	5.8	0.0008

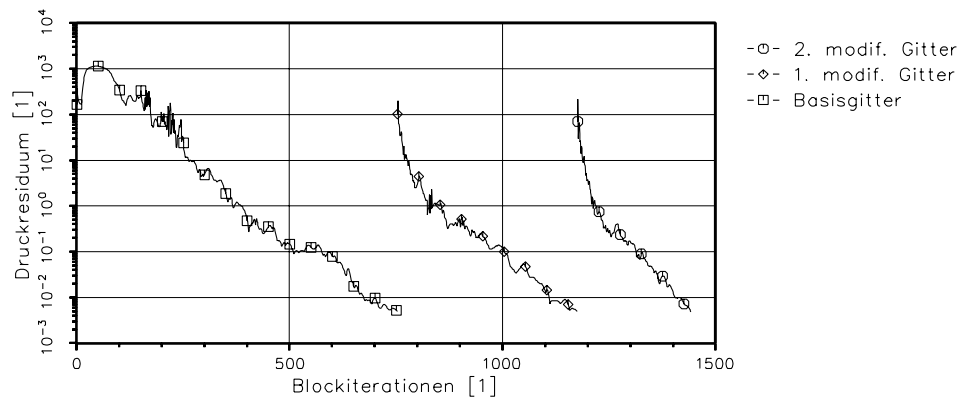
**Tab. 8.5:** Zustands-, Turbulenz- und Stoffdaten ( $M = 1.14$ )

Das Schaufelgitter wird mit einer Machzahl  $Ma$  von 0.379 angeströmt. Eine numerische Simulation der Strömung wurde abermals auf dem Basisgitter sowie auf anhand einer Analyse des dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten  $P(u, v)$  adaptierten Netzen mit 7607 und 8049 Knoten durchgeführt. Abbildung 8.21 zeigt das Rechengitter nach der zweiten Modifikation in der Gesamtansicht und detailliert im vorderen Bereich der Schaufel.

Mit der Ausblaserate haben die Knotenanzahl im feinsten Netz und damit die Fläche der räumlich dichter diskretisierten Gitterbereiche nochmals zugenommen. Insbesondere stromab der druckseitigen Kühlluftausblaseung ist die Grenze der adaptierten Zone noch weiter in Richtung Kanalmitte vorgerückt.



**Abb. 8.21:** Modifiziertes Gitter für filmgekühlte Schaufel ( $M = 1.14$ )



**Abb. 8.22:** Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung ( $M = 1.14$ )

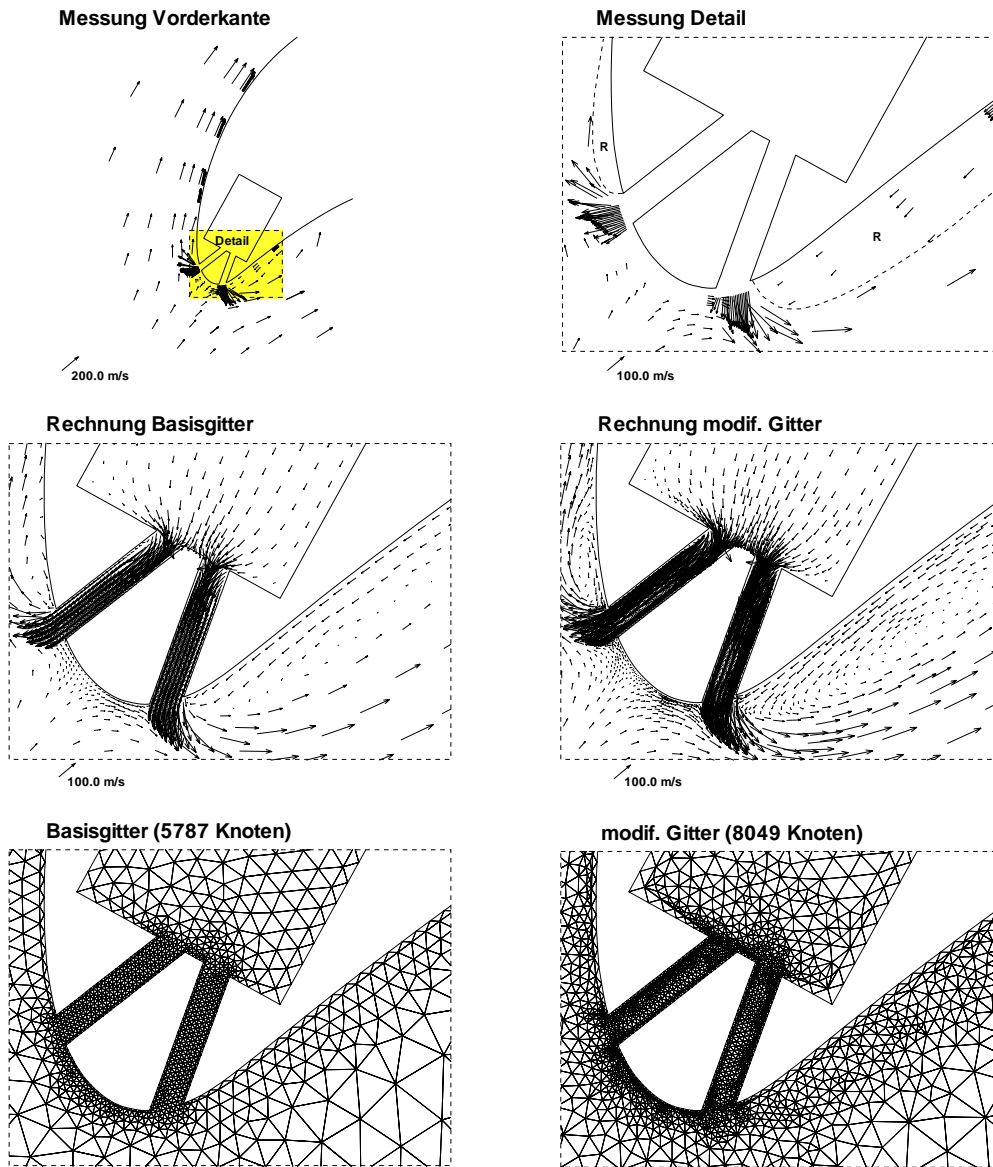
Der Konvergenzverlauf für die Rechnungen bei hoher Ausblaserate ist in Form der maximalen normierten Druckkorrektur im Feld über den durchlaufenen äußeren Iterationen in Abbildung 8.22 wiedergegeben. Die erste numerische Lösung des Strömungsproblems auf dem größten Rechennetz nimmt bis zum Erreichen des Abbruchresiduums  $Res_{ref}$  von  $5 \cdot 10^{-3}$  für 753 Blockiterationen 87.6 Minuten Prozessorzeit in Anspruch. Nach der ersten Adaption wurden bis zur erneuten Konvergenz 422 weitere Iterationen in 63.3 Minuten durchlaufen. Schließlich ist die auf dem dichtesten Gitter nochmals gestartete Rechnung nach 267 äußeren Iterationen und 41.8 Minuten Rechenzeit beendet.

Die Fehlerreduktion auf den drei Gittern verläuft, wie für die zwei vorher untersuchten niedrigeren Ausblaseraten  $M$ , stabil und nahezu monoton. Mit jeder Gitterverfeinerung steigt die Konvergenzrate und überschreitet auf dem feinsten Netz fünf Dekaden pro 500 Blockiterationen.

In Abbildung 8.23 werden zunächst gemessener und berechneter Strömungsverlauf in der Nähe der Schaufelvorderkante einander gegenübergestellt. Gezeigt sind die im Versuch aufgenommenen Geschwindigkeitsvektoren und ein entsprechender Detailvergleich mit numerischen Ergebnissen von Ausgangsgitter und feinstem Netz. Ebenfalls dargestellt ist jeweils der zugehörige Ausschnitt des Rechengitters.

Die nochmalige Steigerung des Impulses der Kühlluft führt auf der Druckseite der Schaufel stromab der Ausblaseöffnung zu einer weiteren Vergrößerung des Rezirkulationsgebietes. Diese Kräftigung des Ablösewirbels tritt bei der numerischen Berechnung auf dem grobem Gitter bereits deutlich zutage, was ein Vergleich mit dem Simulationsergebnis für die mittlere Ausblaserate  $M$  von 0.76 belegt. Die Intensität der berechneten saugseitigen Strömungsablösung hat ebenfalls zugenommen. Beek (1992) hat diese Rezirkulation experimentell nachgewiesen, genaue Meßdaten stehen jedoch nicht zur Verfügung.

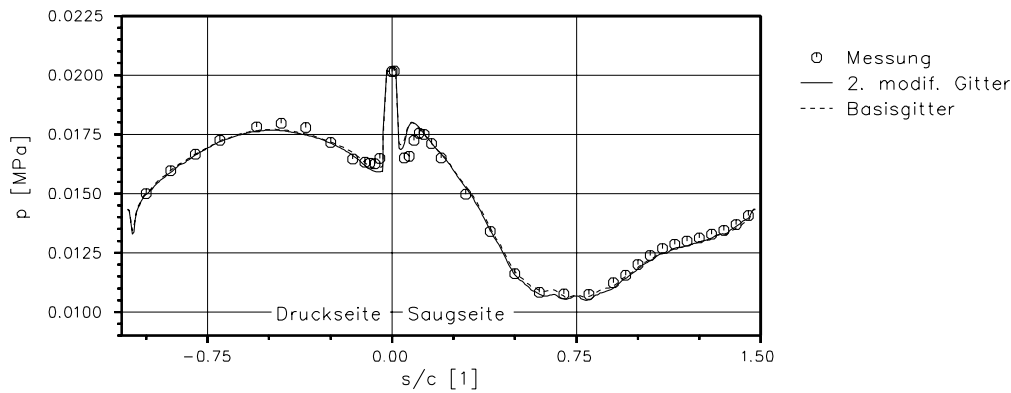
Die automatische Adaption der Rechennetze hat wie in den vorangegangenen Fällen am Staupunkt, in den Kühlluftkanälen und im Bereich der beiden Rückströmgebiete zu einer Anpassung der räumlichen Diskretisierung geführt. Während die Staupunktlage davon unbeeinflusst bleibt, nimmt die Ausdehnung der beiden Strömungswirbel zu. Der auf dem feinsten Gitter berechnete Strömungsverlauf entspricht damit in allen wesentlichen Punkten dem Ergebnis der Messung.



**Abb. 8.23:** Vorderkantenströmung aus Experiment und Simulation ( $M = 1.14$ )

Um die Güte der numerischen Lösungen auch hier quantitativ zu überprüfen, werden nochmals experimentell und numerisch ermittelte Druckverteilungen entlang von Druck- und Saugseite der Schaufel verglichen. Dieser Vergleich ist in Abbildung 8.24 vorgenommen. Die auf dem Basisgitter und nach zweimaliger Adaption erhaltenen Druckprofile entsprechen in Form und Betrag sehr gut dem gemessenen Druckverlauf. Wie bei den zwei vorher untersuchten Ausblaseraten  $M$  differieren Grob- und Feingitterlösung nur wenig. Die geringen Unterschiede machen sich hauptsächlich in der Umgebung des saugseitigen Druckminimums bemerkbar.

Nach Auswertung der Simulationsergebnisse für drei unterschiedliche Ausblaseraten  $M$  von 0.47, 0.76 und 1.14 ist auch die numerische Untersuchung des zweiten Strömungsfalles aus der Praxis der Thermischen Turbomaschinen erfolgreich abgeschlossen. Die



**Abb. 8.24:** Messung und Rechnung auf Basisgitter und modif. Netz ( $M = 1.14$ )

behandelte filmgekühlte Turbinenschaufel stellt in mehrfacher Hinsicht hohe Anforderungen an das neuentwickelte Berechnungsverfahren. Wie bei der ungekühlten Schaufel liegt eine kompressible Strömung mit lokal hohen Gradienten der Strömungsgrößen vor. Die Transportgleichungen der gesuchten Variablen in Schaufelkanal, Kühlluftschlitze und Plenum der Schaufel werden, ungeachtet der schwachen räumlichen Koppelung dieser Gebiete, zusammen in jeweils einem linearen Gleichungssystem implizit gelöst. Trotz dieser potentiellen Probleme wurde im Rahmen der vorgenommenen Berechnungen, unabhängig von Ausblaserate und Grad der Gitterverfeinerung, rasche, stabile und annähernd monotone Konvergenz des Lösungsalgorithmus beobachtet. Im direkten Vergleich mit Meßergebnissen erwies sich ausnahmslos eine sehr gute Qualität der numerischen Lösungen. Die Gitterunabhängigkeit der Resultate konnte anhand mehrfach vorgenommener, lösungsadaptiver Modifikation der Netze nachgewiesen werden. Damit steht fest, daß die vorgestellte Methode der numerischen Strömungsberechnung auf adaptiven, unstrukturierten Gittern auch für die Durchführung von Parameterstudien zu praxisrelevanten Fragestellungen unter anspruchsvollen physikalischen und geometrischen Bedingungen hervorragend geeignet ist.

## 9 Zusammenfassung

Leistung und Effizienz moderner Turbomaschinen sind in hohem Maße von komplexen Wechselwirkungen zwischen Strömungsmedium und funktionstragenden Komponenten bestimmt. Bei der fluiddynamischen Auslegung und Optimierung dieser Bauteile verspricht ein verstärkter Einsatz numerischer Werkzeuge beträchtliche Kosten- und Zeitersparnis. Um das Strömungsverhalten in den überwiegend kompliziert geformten Geometrien auf numerischem Wege erfolgreich zu analysieren, muß eine geeignete räumliche Diskretisierung verwendet werden. Im Vergleich zu herkömmlichen strukturierten Rechnernetzen weisen unstrukturierte Gitter in dieser Hinsicht ein enormes Potential auf. So lassen sich beliebige Strömungsgebiete in einem einzigen Block verzerrungsfrei und gleichmäßig vernetzen, wobei die Möglichkeit einer weitgehenden Automatisierung besteht. Vorhandene Gitter können durch einfaches Hinzufügen oder Löschen von Stützstellen vom Benutzer flexibel an das simulierte Strömungsgeschehen angepaßt werden.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit am Institut für Thermische Strömungsmaschinen (ITS) der Universität Karlsruhe entwickelte numerische Verfahren nutzt die Vorteile unstrukturierter Netze für die Berechnung ebener Strömungen. Die Methode arbeitet mit Finiten-Volumen nach einem erweiterten SIMPLE(C)-Druckkorrekturalgorithmus und profitiert dadurch in erheblichem Umfang vom Erfahrungsschatz, der am ITS mit strukturierter räumlicher Diskretisierung gesammelt wurde.

Die gesuchten Strömungsgrößen werden auf einem dualen Gitter bilanziert, das im Unterschied zu Dreieckselementen eine enge Koppelung der Zustände in benachbarten Kontrollvolumina sicherstellt und eine schnörkellose Formulierung der Randbedingungen erlaubt. Eine elementorientierte, hierarchische Organisation aller Daten minimiert die Anzahl an logischen Abfragen und Programmverzweigungen, so daß die erforderliche indirekte Adressierung der Gitterelemente weitgehend aufwandsneutral erfolgt.

Zu den spezifischen Problemen unstrukturierter Netze zählen hohe Diskretisierungsfehler, die durch Streuung der konvektiv transportierten Information in den polygonalen Bilanzelementen auftreten können. Diese sogenannte 'Numerische Diffusion' wird durch eine eigens entwickelte Technik zur Interpolation der Konvektionsterme wirkungsvoll unterdrückt. Der neue DISC-Ansatz ('Derivative based Interpolation Scheme for Convection') basiert auf einem bekannten Stabilitätskriterium und der Auswertung der im Kontrollvolumen aktuellen partiellen Ableitungen der Strömungsgrößen. Er vereint hohe Genauigkeit mit numerischer Stabilität und geringem Rechenaufwand.

Die angestrebte enge Koppelung der Transportvariablen in benachbarten Bilanzvolumina führt in Verbindung mit der nicht systematisierbaren Indexierung der Elemente zu großen linearisierten Gleichungssystemen (LGS) mit regellos besetzter Koeffizientenmatrix. Die Berechnung dieser Systeme stellt extreme Anforderungen an die eingesetzten Lösungsverfahren, so daß träge Konvergenz, Instabilität der Blockiteration und unverhältnismäßig hohe Rechenzeiten drohen. Ein optimal angepaßter Gleichungslöser wurde nach eingehenden Tests mehrerer impliziter, iterativer Conjugate-Gradient- und Conjugate-Residual-Algorithmen sowie diverser Präkonditionierungstechniken erstellt und abgestimmt. Die neue Lösung für ein LGS mit mehreren tausend Unbekannten liegt damit in der Regel nach Überlagerung von höchstens zwei Basisvektoren vor.

Eine häufige Ursache für Stabilitäts- und Konvergenzprobleme auf unstrukturierten wie strukturierten Netzen sind starke Oszillationen im berechneten Druckfeld. Die Beseitigung dieser Probleme gelingt mit Hilfe einer neuen massenstromgesteuerten Relaxationsstrategie für den Druck. Ebenfalls neu ist eine bei der Berechnung der Dissipation  $\epsilon$  der turbulenten kinetischen Energie im Turbulenzmodell optional einsetzbare Lösungstechnik, die sich deutlich stabilitätsfördernd auswirkt.

Ein entscheidender Vorteil, den unstrukturierte Gitter gegenüber strukturierten Ansätzen bieten, ist die einfache nachträgliche Modifizierbarkeit der räumlichen Diskretisierung. Um diese Flexibilität so profitabel wie möglich zu nutzen, wurden spezielle fehlersensitive Adaptionskriterien hergeleitet. Diese Parameter ziehen dimensionslose Gradienten der Transportgrößen als Indikatoren für Problemzonen im berechneten Strömungsfeld heran. Staupunkte, Wandgrenzschichten, Ablösegebiete und Verdichtungsstöße werden auf diese Weise automatisch erkannt und durch Einfügen zusätzlicher Stützstellen im Detail aufgelöst. Andererseits läßt sich der numerische Aufwand durch Löschen überschüssiger Knoten in Zonen geringer Dynamik der Strömungsgrößen erheblich verringern. Nach einer derartigen Modifikation ist kein vollständiger Neustart des Rechengangs erforderlich. Vielmehr dient die bereits bekannte Grobgitterlösung als Startbelegung für das optimierte Netz. Dadurch reduziert sich in der Regel mit jedem Adaptionsschritt die Anzahl der bis zur erneuten Konvergenz benötigten Blockiterationen bei gleichzeitig steigender Konvergenzrate.

Betriebsverhalten und Funktionssicherheit des fertigen Navier-Stokes-Lösers und der nachgeschalteten strömungsadaptiven Netzoptimierung wurden anhand laminarer, turbulenter und transsonischer Testfälle in einfachen Geometrien mit dennoch komplexem Strömungsgeschehen kritisch überprüft. Dabei konnten sehr gute Genauigkeit, schnelle und stabile Konvergenz sowie hoher Gebrauchswert der automatischen Gitteradaption eindrucksvoll dokumentiert werden.

Nach diesen ermutigenden Ergebnissen erfolgte abschließend der Schritt hin zu praxisrelevanten Strömungsproblemen. Im ersten Anwendungsfall wurde ein am ITS ausgelegtes, hochbelastetes Turbinenleitgitter bei zwei unterschiedlichen Anströmgeschwindigkeiten simuliert. Das Fluid erfährt dort auf einer Strecke von weniger als 50 mm eine Beschleunigung um mehr als das Fünffache. Die zweite Praxisanwendung behandelt das filmgekühlte Laufgitter einer Turbine für drei verschiedene Ausblaseraten der Kühlluft. In diesem Fall umfaßt das Rechenggebiet sowohl den Schaufelkanal, als auch das Schaufelinnere und die beiden Kühlluftschlitze, die inneres und äußeres Strömungsfeld verbinden.

Für die gewählten realitätsnahen Anwendungen aus dem Bereich der thermischen Strömungsmaschinen belegen direkte Vergleiche zwischen Meßwerten und Ergebnissen der numerischen Berechnungen die Praxistauglichkeit des neuen Verfahrens. Bemerkenswert ist neben der erreichten Vorhersagegenauigkeit die in allen Fällen rasche und problemlose Konvergenz der Methode. Damit steht für turbomaschinentypische Strömungskonfigurationen ein neuer leistungsfähiger und anwendungsfreundlicher numerischer Lösungsalgorithmus zur Verfügung, der sich die räumliche Flexibilität adaptiver unstrukturierter Gitter zunutze macht.



## Literatur

- Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. und Schönung, B. (1983). Experimental and theoretical investigations of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, S. 473–496.
- ASC (1994). TASCflow Theory Documentation. Users guide, Advanced Scientific Computing Ltd., Waterloo, Ontario, Canada.
- Baines, W. D. und Peterson, E. G. (1950). An investigation of flow through screens. *ASME-Paper 50-A-23*.
- Baliga, B. R. und Patankar, S. V. (1983). A control volume Finite-Element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 6, S. 245–261.
- Bauer, H.-J. (1989). *Überprüfung numerischer Ansätze zur Beschreibung turbulenter elliptischer Strömungen in komplexen Geometrien mit Hilfe konturangepaßter Koordinaten*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Becker, B., Schulenberg, T. und Termuehlen, H. (1995). The ‘3A-Series’ gas turbines with HBR combustors. *ASME Paper 95-GT-458*.
- Beeck, A. (1992). *Strömungsfelduntersuchungen zum aerodynamischen Verhalten eines hochbelasteten Turbinengitters mit Kühlluftausblasung an der Vorderkante*. Dissertation, Universität der Bundeswehr, München.
- Beeck, A., Fottner, L., Benz, E. und Wittig, S. (1992). The aerodynamic effect of coolant ejection in the leading edge region of a film-cooled turbine blade. In: *Proceedings of 80th. Int. Symp. Heat Transfer and Cooling in Gas Turbines*, Antalya, Turkey.
- Benz, E. (1994). *Entwicklung und Erweiterung grundlegender Ansätze zur numerischen Berechnung turbulenter Unter- und Überschallströmungen in Gasturbinen*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Benz, E. und Wittig, S. (1992). Prediction of the interaction of coolant ejection with the mainstream at the leading edge of a turbine blade: Attached grid application. In: *Proceedings of Int. Symp. Heat Transfer in Turbomachinery*, Athens, Greece.
- Bittlinger, G. (1995). *Filmkühlung mit tangentialer Spaltausblasung: Experimentelle und numerische Ansätze zur Optimierung des Brennkammer-Kühlluftbedarfs*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Bittlinger, G., Schulz, A. und Wittig, S. (1994). Film cooling effectiveness and heat transfer coefficients for slot injection at high blowing ratios. *ASME Paper 94-GT-182*.
- Breuer, M. (1994). Finite-Volumen-Verfahren für inkompressible Strömungen. Vorlesungen des Hochschulkurses ‘Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung und Praxis’, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe.

- Breuer, M. (1996). Grundlagen der Large-Eddy-Simulation. Vorlesungen des Kurzlehrganges 'NUMET '96: Numerische Methoden zur Berechnung von Strömungs- und Wärmeübergangsproblemen', Lehrstuhl für Strömungsmechanik/FORTWIHR, Universität Erlangen-Nürnberg.
- Bronstein, I. N und Semendjajew, K. A. (1985). *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt (Main): Verlag Harri Deutsch.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. und Zang, T. A. (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Verlag.
- Caretto, L. S., Gosman, A. D., Patankar, S. V. und Spalding, D. B. (1972). Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. In: *Proceedings of Third Int. Conf. Numer. Methods Fluid. Dyn.*, Paris.
- Carvalho, M. G., Durst, F. und Pereira, J. C. F. (1987). Predictions and measurements of laminar flow over two-dimensional obstacles. *Applied Mathematic Modelling* 11(2), S. 23–34.
- Cebeci, T. und Bradshaw, P. (1984). *Physical and computational aspects of convective heat transfer*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer Verlag.
- Chan, T. F., Gallopoulos, E., Simoncini, V., Szeto, T. und Tong, C. H. (1994). A quasi-minimal residual variant of the Bi-CGSTAB algorithm for nonsymmetric systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 15(2), S. 338–347.
- Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, S. 12–26.
- Chung, T. J. (1983). *Finite Elemente in der Strömungsmechanik*. München: Carl Hanser Verlag.
- Dawes, W. N. (1991). The simulation of threedimensional viscous flow in turbomachinery geometries using a solution-adaptive unstructured mesh methodology. *ASME Paper 91-GT-124*.
- Deitz, D. (1996). Designing with CFD. *Mechanical Engineering* 118(3), S. 90–94.
- Demirdžić, I., Lilek, Ž. und Perić, M. (1993). A collocated Finite Volume method for predicting flows at all speeds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, S. 1029–1050.
- Domke, W. (1993). *Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung*. Düsseldorf: Girardet.
- Driver, D. M. und Seegmiller, H. L. (1985). Features of reattaching turbulent shear layer in a divergent channel flow. *AIAA Journal* 23(2), S. 163–171.
- Duff, I. S. und Meurant, G. A. (1989). The effect of ordering on preconditioned Conjugate Gradients. *BIT* 29(4), S. 635–657.
- Eaton, J. K., Adams, E. W. und Vogel, J. C. (1982). Measurements in backward-facing step flow using laser Doppler and pulsed wire anemometry. In: *Proceedings of International Symposium on Applications of Laser-Doppler Anemometry to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal.

- Eaton, J. K. und Johnston, J. P. (1980). Turbulent flow reattachment: An experimental study of the flow and structure behind a backward facing step. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report MD-39.
- Elbahar, O. (1982). *Zum Einfluss von Kühlluftstrahlen und Mischzonengeometrie auf die Temperaturprofilentwicklung in Gasturbinen-Brennkammern*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Elman, H. C. (1982). *Iterative methods for large, sparse, nonsymmetric systems of linear equations*. Ph. d. thesis, Yale University.
- Engeln-Müllges, G. und Reutter, F. (1993). *Numerik-Algorithmen mit FORTRAN 77-Programmen*. BI Wissenschaftsverlag.
- Ferziger, J. H. und Perić, M. (1996). *Computational methods for fluid dynamics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
- Freitas, C. J. (1995). Perspektive: Selected benchmarks from commercial CFD codes. *ASME-Journal of Fluids Engineering* 117(2), S. 208–218.
- Freund, R. W. (1993). A transpose-free Quasi-Minimal Residual algorithm for Non-Hermitian linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 14(2), S. 470–482.
- Freund, R. W., Golub, G. H. und Nachtigal, N. M (1992). Iterative solution of linear systems. *Acta Numerica*, S. 57–100.
- Freund, R. W., Gutknecht, M. H. und Nachtigal, N. M (1991). An Implementation of the Look-Ahead Lanczos algorithm for Non-Hermitian matrices. Technical Report, RIACS, NASA Ames Research Center, Moffett Field.
- Freund, R. W. und Nachtigal, N. M. (1994). An implementation of the QMR method based on coupled two-term recurrences. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 15(2), S. 313–337.
- Gaskell, P. H. und Lau, A. K. C. (1988). Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, S. 617–641.
- Gehle, M., Hänel, D. und Vilsmeier, R. (1993). Adaptive grid methods for viscous flow. In: *Proceedings of Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics*, Volume 1, Sendai, S. 247–252.
- Ghia, K. N., Hankey, W. L. und Hodge, J. K. (1979). Use of primitive variables in the solution of incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal* 17(3), S. 298–301.
- Ghia, U., Ghia, K. N. und Shin, C. T. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, S. 387–411.
- Giebert, D., Hürst, C., Kurreck, M., Rexroth, C.-H. und Wittig, S. (1995). Einsatz effizienter Methoden und Höchstleistungsrechner zur Strömungssimulation in Turbomaschinen. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrt-Kongress 1995, DGLR-Jahrestagung, Jahrbuch 1995*, Bonn, S. 941–950.

- Gottwald, S., Kästner, H. und Rudolph, H. (Hrsg.) (1995). *Meyers kleine Enzyklopädie der Mathematik*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Meyers Lexikonverlag.
- Guevremont, G., Habashi, W. G. und Hafez, M. M. (1990). Finite Element solution of the Navier-Stokes equations by a velocity-vorticity method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, S. 661–675.
- Hackbusch, W. (1993). *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Stuttgart: Teubner.
- Hammond, S. W. und Barth, T. J. (1992). Efficient massively parallel Euler solver for two-dimensional unstructured grids. *AIAA Journal* 30(4), S. 947–952.
- Harlow, F. H. und Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids* 8(12), S. 2182–2189.
- Haroutunian, V. und Engelman, M. S. (1993). Two-equation simulations of turbulent flows: A commentary on physical and numerical results. In: *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting*, New Orleans, Louisiana.
- Herng Lin, Yang, D. Y. und Ching-Chang Chieng (1995). Variants of Biconjugate Gradient method for compressible Navier-Stokes solver. *AIAA Journal* 33(7), S. 1177–1184.
- Hsu, C. (1981). *A curvilinear-coordinate method for momentum, heat and mass transfer in domains of irregular geometry*. Ph. d. thesis, University of Minnesota.
- Huang, P. G. und Bradshaw, P. (1995). Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients. *AIAA Journal* 33(4), S. 624–632.
- Hwang, C. J. und Yang, S. Y. (1993). Locally implicit total variation diminishing schemes on mixed quadrilateral-triangular meshes. *AIAA Journal* 31(11), S. 2008–2015.
- Irmisch, S. (1995). Simulation of film-cooling aerodynamics with a 2D Navier-Stokes solver using unstructured meshes. *ASME Paper 95-GT-024*.
- Issa, R. I. (1985). Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, Vol. 62, S. 40–65.
- Jameson, A. und Mavriplis, D. (1985). Finite Volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh. *AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, AIAA-85-0435*.
- Jameson, A. und Mavriplis, D. (1987). Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes. *AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, AIAA-87-0353*.
- Jayatilke, C. L. V. (1969). The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer. In: Grigull, U. und Hahne, E. (Hrsg.), *Progress in Heat and Mass Transfer, Vol.1*, S. 193–329. Oxford, New York: Pergamon Press.

- Jeffs, E. (1994). ABB's new gas turbines decouple efficiency and temperature. *Turbomachinery International* 35(1), S. 20–24.
- Jischa, M. (1982). *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Jovic, S. und Driver, D. (1995). Reynolds number effect on the skin friction in separated flows behind a backward facing step. *Experiments in Fluids* 18(6), S. 464–467.
- Kallinderis, Y. (1992). Algebraic turbulence modeling for adaptive unstructured grids. *AIAA Journal* 30(3), S. 631–639.
- Kallinderis, Y. und Baron, J. R. (1989). Adaptive methods for a new Navier-Stokes algorithm. *AIAA Journal* 27(1), S. 37–43.
- Karki, K. C. und Patankar, S. V. (1989). Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA Journal* 27(9), S. 1167–1174.
- Khosla, P. K. und Rubin, S. G. (1974). A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers and Fluids*, Vol. 2, S. 207–209.
- Kokoschinski, H. (1995). Take-off ins Jahr 2015. *CHIP* 18(8), S. 60–64.
- Kurreck, M. (1995). *Entwicklung grundlegender numerischer Ansätze zur Berechnung gasturbinentypischer Strömungen mit Parallelrechnern*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Kurreck, M. und Wittig, S. (1994). Numerical simulation of combustor flows on parallel computers: Potential limitations and practical experience. *ASME Paper 94-GT-404*.
- Lai, Y. G. (1995). Computational method of second-moment turbulence closures in complex geometries. *AIAA Journal* 33(8), S. 1426–1432.
- Launder, B. E. und Spalding, D. B. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, S. 269–289.
- Leonard, B. P. (1979). A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, S. 59–98.
- Lien, F. S. und Leschziner, M. A. (1994a). A general non-orthogonal collocated Finite Volume algorithm for turbulent flow at all speed incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, S. 123–148.
- Lien, F. S. und Leschziner, M. A. (1994b). A general non-orthogonal collocated Finite Volume algorithm for turbulent flow at all speed incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 2: Application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, S. 149–167.
- Liu, X. und Squire, L. C. (1988). An investigation of shock/boundary-layer interactions on curved surfaces at transonic speeds. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 187, S. 467–486.

- Majumdar, S., Rodi, W. und Vanka, S. P. (1987). On the use of non-staggered pressure-velocity arrangement for numerical solution of incompressible flows. In: *SFB-Bericht 210 / T / 35*.
- Marvin, J. G. (1983). Turbulence modelling for computational aerodynamics. *AIAA Journal* 21(7), S. 941–955.
- Mavriplis, D. J. (1990). Algebraic turbulence modeling for unstructured and adaptive meshes. *AIAA Journal* 29(12), S. 2086–2093.
- McGuirk, J. J. und Palma, J. M. L. M. (1993). The efficiency of alternative pressure-correction formulations for incompressible turbulent flow problems. *Computers and Fluids* 22(1), S. 77–87.
- Meijerink, J. A. und Van der Vorst, H. A. (1981). Guidelines for the usage of incomplete decompositions in solving sets of linear equations as they occur in practical problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 44, S. 134–155.
- Michelassi, V., Papanicolaou, E. L. und Theodoridis, G. S. (1995). A comparison of time marching and pressure-correction algorithms for transonic turbine blades. In: *Computational Fluid Dynamics in Aeropropulsion ASME 1995, AD-Vol. 49*, San Francisco, California, S. 115–126.
- Michelassi, V., Theodoridis, G. S. und Papanicolaou, E. L. (1995). Low-speed turbine computation by pressure-correction and time marching methods. In: *Computational Fluid Dynamics in Aeropropulsion ASME 1995, AD-Vol. 49*, San Francisco, California, S. 127–138.
- Nachtigal, N. M., Reddy, S. C. und Trefethen, L. N. (1992). How fast are nonsymmetric matrix iterations? *SIAM Journal on matrix analysis and applications* 13(3), S. 778–795.
- Noll, B. (1992). Evaluation of a bounded high-resolution scheme for combustor flow computations. *AIAA Journal* 30(1), S. 64–69.
- Noll, B. (1993). *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
- Noll, B. E. (1986). *Numerische Berechnung Brennkammertypischer Ein- und Zweiphasenströmungen*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Noll, B. E. (1992). *Möglichkeiten und Grenzen der numerischen Beschreibung von Strömungen in hochbelasteten Brennräumen*. Habilitationsschrift, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Noll, B. E. und Wittig, S. (1991). A generalized conjugate gradient method for the efficient solution of three-dimensional fluid flow problems. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 20, S. 207–221.
- Noll, B. E., Wittig, S. und Steinebrunner, K. (1987). Numerical analysis of the flame stabilizing flow in the primary zone of a combustor. In: *Proceedings of the 2nd ASME/JSME Thermal Engineering Joint Conference*, Honolulu, Hawaii.
- Okabe, A., Boots, B. und Sugihara, K. (1992). *Voronoi diagrams*. New York: John Wiley and Sons.

- Papadrakakis, M. und Bitoulas, N. (1993). Accuracy and effectiveness of preconditioned conjugate gradient algorithms for large and ill-conditioned problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 109, S. 219–232.
- Parthasarathy, V. und Kallinderis, Y. (1994). New multigrid approach for three-dimensional unstructured, adaptive grids. *AIAA Journal* 32(5), S. 956–963.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Patankar, S. V. (1981). A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, S. 409–425.
- Patankar, S. V. und Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, S. 1787–1806.
- PATRAN. PATRAN User Manual, PDA Engineering, PATRAN Division, California.
- Pun, W. M. und Spalding, D. B. (1977). A general computer program for two-dimensional elliptic flows.
- Reshotko, E. (Hrsg.) (1989). *A survey of measurements and measuring techniques in rapidly distorted compressible boundary layers, AGARD-AG-315*. Neuilly sur Seine, France: AGARD, Advisory Group for Aerospace Research and Development.
- Rexroth, C.-H., Kurreck, M. und Wittig, S. (1994). Numerische Strömungsberechnung mit unstrukturierten Gittern nach der Methode der Finiten Volumen. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrt-Kongreß 1994, DGLR-Jahrestagung, Jahrbuch 1994*, Erlangen, S. 437–446.
- Rhie, C. M. (1981). *A numerical study of the flow past an isolated airfoil with separation*. Ph. d. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Rhie, C. M. und Chow, W. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* 21(11), S. 1525–1532.
- Roach, P. E. (1987). The generation of nearly isotropic turbulence by means of grid. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 8(2), S. 88–92.
- Rodi, W. (1978). *Turbulenzmodelle und ihre Anwendung auf Probleme des Wasserbaus*. Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe (TH).
- Rogallo, R. S. und Moin, P. (1984). Numerical simulation of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 16, S. 99–137.
- Rotta, J. C. (1991). Über die Entwicklung der Berechnungsmethoden für turbulente Strömungen. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, Vol. 15, S. 275–284.
- Saad, Y. und Schultz, M. H. (1986). GMRES: A generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7(3), S. 856–869.

- Schäfer, M. und Turek, S. (1996). Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. In: E. H. Hirschel (Hrsg.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics: Flow Simulation with High-Performance Computers II*. Vieweg Verlag.
- Scheurlen, M., Noll, B. E., Elbahar, O. und Wittig, S. (1990). Probability density distribution functions for the numerical simulation of a  $H_2/CO/N_2$  diffusion flame. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Mechanical Power Engineering*, MENOUFIA-University, Cairo.
- Schiele, R., Sieger, K., Schulz, A. und Wittig, S. (1994). Vorhaben 1.2.1.1, Einfluß der Aerodynamik auf die Wärmeaufnahme konvektionsgekühlter Turbinenschaufeln. In: *4. Statusseminar der Arbeitsgemeinschaft Hochtemperatur-Gasturbine*, Köln-Porz.
- Schiele, R., Sieger, K., Schulz, A. und Wittig, S. (1995). Heat transfer investigations on a highly loaded, aerothermally designed turbine cascade. In: F. S. Billig (Hrsg.), *12th. International Symposium on Air Breathing engines*, Melbourne, Australia, S. 1091–1101.
- Schönauer, W. (1987). *Scientific computing on vector computers*. Amsterdam, New York, Holland, Tokyo: North-Holland.
- Sieger, K. (1993). *Vergleich der Leistungsfähigkeit erweiterter  $k, \epsilon$ -Turbulenzmodelle bei der Berechnung transitionaler Grenzschichten an Gasturbinenschaufeln*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Simoneau, J. und Pollard, A. (1994). Finite Volume methods for laminar and turbulent flows using a Penalty function approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, S. 733–746.
- Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference methods*. Oxford: Clarendon Press.
- Sonneveld, P., Wesseling, P. und de Zeeuw, P. M. (1985). Multigrid and Conjugate Gradient methods as convergence acceleration techniques. In: Paddon, D. S. und Holstein, H. (Hrsg.), *Multigrid Methods for Integral and Differential Equations*, Oxford, S. 117–167. Clarandan Press.
- Taniguchi, M., Arakawa, C. und Kobayashi, T. (1991). Construction of a flow-simulating method with Finite Volume based on a Voronoi diagram. *JSME-International Journal of the Japanese Society of Metal Engineers* 34(1), S. 18–23.
- Taniguchi, N. und Kobayashi, T. (1991). Finite Volume method on the unstructured grid system. *Computers and Fluids* 19(3/4), S. 287–295.
- Taniguchi, N. und Oshima, M. (1995). High-order accuracy schemes for incompressible flow simulation based on FVM on unstructured grids. In: *Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Volume 3*, Lake Tahoe, Nevada, S. 1249–1254.
- Tennekes, H. und Lumley, J. L. (1994). *A first course in turbulence*. Cambridge, Massachusetts, London: The MIT Press.



- Thangam, S. und Speziale, C. G. (1992). Turbulent flow past a backward-facing step: A critical evaluation of two-equation models. *AIAA Journal* 30(5), S. 1314–1320.
- Thomadakis, M. und Leschziner, M. (1995). A pressure-correction method for the solution of incompressible viscous flows on unstructured grids. In: *Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Volume 3*, Lake Tahoe, Nevada, S. 1270–1275.
- Van der Vorst, H. A. (1992). Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 13(2), S. 631–644.
- Van Doormaal, J. P. und Raithby, G. D. (1984). Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, S. 147–163.
- Wittig, S., Hallmann, M., Scheurlen, M. und Schmehl, R. (1993). A new Eulerian model for turbulent evaporating sprays in recirculating flows. *AGARD-CP-536*.
- Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski, T. B. und Speziale, C. G. (1992). Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics in Fluids A* 4(7), S. 1510–1520.
- Ye, X. (1993). *Untersuchungen zum Einsatz des algebraischen Spannungsmodells im wandnahen Bereich filmgekühlter Oberflächen*. Dissertation, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH).
- Zierep, J. (1982). *Grundzüge der Strömungslehre*. Karlsruhe: G. Braun.

## Lebenslauf

Name	Carl-Henning Rexroth
Geburtsdatum	1. Dezember 1965
Geburtsort	Mannheim
Familienstand	ledig
1972 – 1976	Grundschule
1976 – 1985	Karl-Friedrich-Gymnasium in Mannheim
1985 – 1986	Grundwehrdienst
1986 – 1992	Studium des Allgemeinen Maschinenbau an der Universität Karlsruhe (TH)
16.6.1992	Diplom-Hauptprüfung
ab 1.11.1992	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermische Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH) im Rahmen des Graduiertenkollegs 'Energie- und Umwelttechnik'