



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5867

**Numerische Simulation von
Plasma-Zusammenbrüchen
für die Berechnung der
Strukturbelastung in
Tokamak-Fusionsreaktoren**

D. Schneider

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Kernfusion

Februar 1997

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5867

**Numerische Simulation von Plasma-Zusammenbrüchen
für die Berechnung der Strukturbelastung in
Tokamak-Fusionsreaktoren**

Detlef Schneider*

Institut für Reaktorsicherheit

Projekt Kernfusion

*Institut für Kerntechnik und Reaktorsicherheit, Universität Karlsruhe (TH)

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1997

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode vorgestellt, mit der Plasmadisruptionen in Tokamak-Fusionsreaktoren numerisch simuliert werden können. Die mit dieser Methode erhaltene Beschreibung der zweiten Phase der Plasmadisruption, des sogenannten „current-quench“, ermöglicht erstmals eine realistische Berechnung der durch die Disruption hervorgerufenen Strukturbelastungen.

Bisher wurden bei der Strukturanalyse fest vorgegebene Plasmaszenarien angenommen. Da aber der Verlauf der Plasmadisruption im wesentlichen von den elektrischen Eigenschaften der strukturellen Berandung gesteuert wird, entstand die Notwendigkeit, insbesondere die Wechselwirkungen von Plasma und Struktur genauer zu beschreiben. Dazu wurde ein geeignetes dynamisches Modell des Plasmas entwickelt, das genau diese Wechselwirkungen beschreibt. Dieses Modell wurde in das dreidimensionale Finite-Elemente-Wirbelstromprogramm CARIDDI integriert. Damit ist diese Methode zwischen rein plasmaphysikalischen Rechenverfahren, bei denen die berandende Struktur nur auf sehr einfache Weise zweidimensional modelliert werden kann, und bisherigen Wirbelstromanalysen, bei denen das Ort-Zeitverhalten des Plasmas fest vorgeschrieben wird, anzusiedeln.

Das Plasma wird mit Hilfe vereinfachter Gleichungen der Magnetohydrodynamik beschrieben. Die Elektrodynamik und die Plasmabewegung werden im Zeitbereich getrennt voneinander gelöst. Für die Elektrodynamik wurde eine Finite-Elemente-Methode entwickelt, die eine vollständige elektromagnetische Kopplung von zweidimensionalem Plasma und dreidimensionaler Struktur erlaubt. Die Bewegung des Plasmas wird mit Hilfe eines Starrkörperansatzes beschrieben. Dazu werden die das Plasma beschleunigenden Kräfte um das Plasmagleichgewicht linearisiert. Für die Beschreibung der freien Plasma-Vakuum-Oberfläche wird eine „Volume-of-Fluid“-Methode verwendet. Diese Methode ermöglicht eine schnelle und genaue Beschreibung des Plasma-Randes während der Disruption. Für die Abschälung des Randplasmas beim Kontakt mit der Struktur wurden Modellansätze verwendet. Da aufgrund methodischer Einschränkungen nur der toroidale Anteil der „halo“-Ströme berechnet werden kann, wurde der poloidale Anteil mit einem empirischen Modell berücksichtigt.

Die Methode wurde anhand des ASDEX-Upgrade Experiments validiert. Dieses Experiment wurde aus zwei Gründen gewählt. Einerseits ist hier die induktive Kopplung zwischen Plasma und Struktur aufgrund der passiven Stabilisierungs-Loops sehr groß, andererseits existieren für dieses Experiment gut dokumentierte Nachrechnungen mit dem plasmaphysikalischen Programm TSC. Die Nachrechnung mit der hier entwickelten Methode zeigt, daß sie die wesentlichen Vorgänge während der Disruption gut wiedergibt.

Um einen Vergleich der bisher üblichen Rechenmethode mit der neuen anzustellen, wurden Nachrechnungen mit einem Modell des ITER-Reaktors mit beiden Methoden durchgeführt. Hierbei zeigten sich deutliche qualitative wie auch quantitative Unterschiede in den berechneten Strukturverformungen. Mit der hier entwickelten Methode ist beispielsweise die maximale Radialverformung der Rückwand das zweifache der bisherigen Methode. Dies unterstreicht die Notwendigkeit der genauen Beschreibung der Disruption.

Um den Einfluß von verschiedenen Design-Varianten auf die Plasmadisruption zu zeigen, wird eine vereinfachte Geometrie des DEMO-Reaktors gewählt. Dazu wird die toroidale elektrische Leitfähigkeit der Ersten Wand in weiten Bereichen variiert. Die für diesen Reaktor gefundene Abhängigkeit des Plasmastrom-Zeitverhaltens von den toroidalen elektrischen Eigenschaften der berandenden Struktur hat entscheidende Auswirkungen auf die Strukturbelastung.

Numerical Simulation of Plasma Disruptions for the Calculation of the Structural Loads in Tokamak Fusion Devices

Abstract

In this report, a method is developed for the numerical simulation of plasma disruptions in tokamak fusion devices. The simulation of the second phase of the disruption, namely the current quench, allows for the first time a realistic analysis of the loads in the structure caused by disruptions.

Up to now, the plasma behavior was prescribed in the input of codes used to analyse the structural loads. Because of the fact that the time dependent behavior of the disruption strongly depends on the electrical properties of the surrounding structure, the computational method has to take into account these mutual coupling effects of plasma and structure. To solve this problem, a dynamic plasma model was developed. This model has been integrated in the three dimensional finite element eddy-current code CARIDDI. Therefore, the new method finds a niche between codes that are developed to simulate only the plasma in great detail, and the currently used eddy current codes, where the plasma behavior is given as an input.

The plasma is represented by reduced magnetohydrodynamic equations. The equations of electrodynamics and of plasma movement are solved separately in time. For the electrodynamics, a finite element approach has been developed that easily allows the inductive coupling of the two dimensional plasma and the three dimensional structure. The vertical movement of the plasma is solved by a rigid body approach, in which the accelerating forces on the plasma are linearized around the equilibrium. For the prescription of the free plasma-vacuum interface, a "Volume-Of-Fluid" method was applied. This method allows a fast and exact detection of the moving plasma boundary during disruption. To simulate the plasma scraping off when contacting the first wall, a special model has been developed. Due to methodical limits, only the toroidal component of the halo current can be considered. However, the poloidal component has been taken into account using an empirical approach.

The new method has been verified by the ASDEX-Upgrade experiment. This experiment was chosen for two reasons. First, the mutual inductance between plasma and structure is very strong due to the passive stabilization loops. The second reason is that well documented computations with the tokamak simulating code (TSC) are available. The presented simulation shows that the important events during disruption are reproduced in good agreement with the experiment.

To show the differences between the usually applied eddy current codes and the presented method, analyses of the ITER device with both methods are compared. As a result, one can see large differences in both the qualitative and the quantitative loads of the structure. For example the new method yields radial displacements of the backwall twice as large as that of the old method. These results emphasize the necessity of a realistic simulation of the plasma disruption.

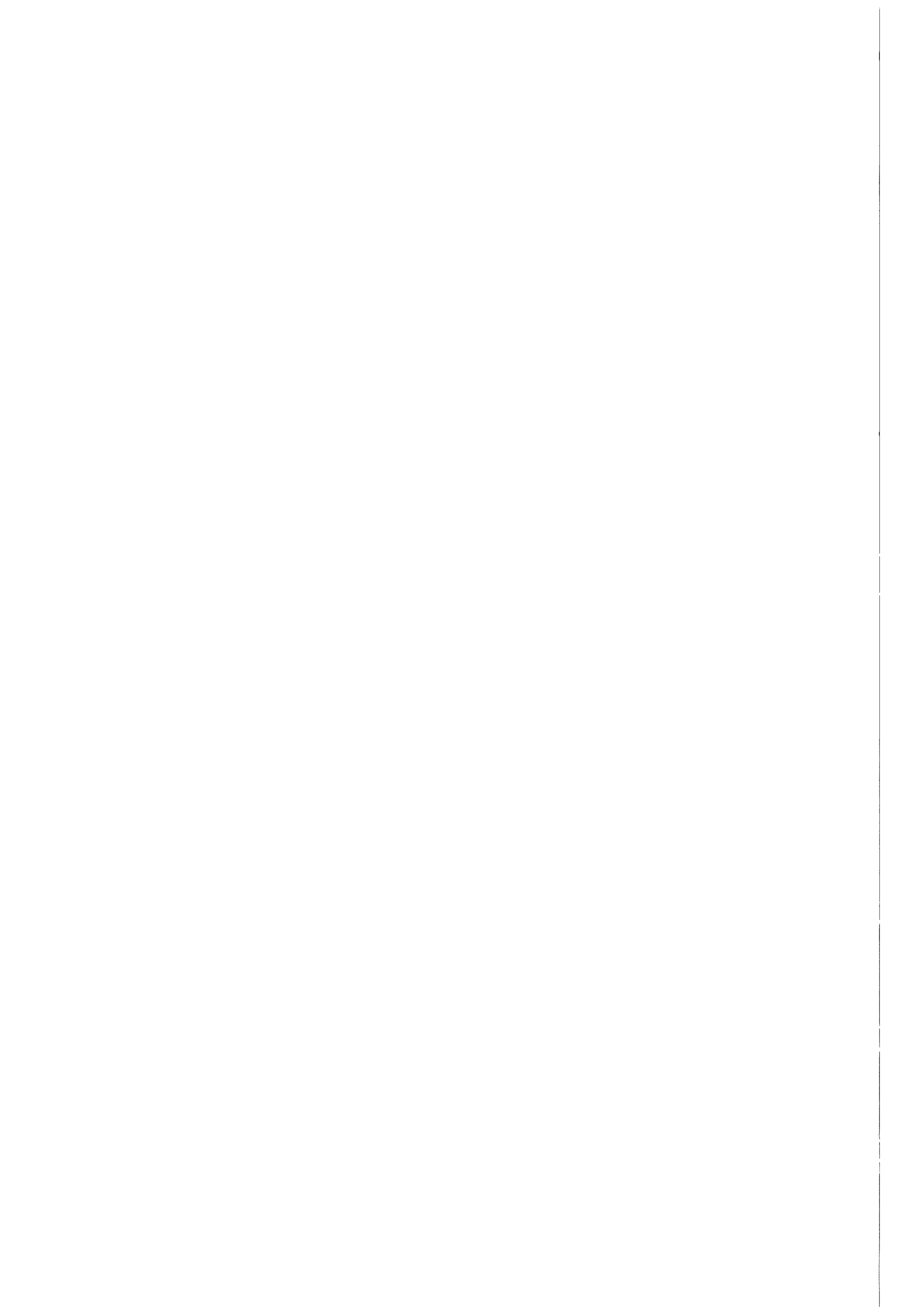
Finally, the influence of different design options on the plasma disruption is shown using a simplified geometry of the DEMO reactor. The toroidal conductivity of the first wall was varied in a wide range. The resulting influence of this design option on the plasma disruption retroacts crucially on the loading of the structure.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Allgemeines zur Kernfusion	1
1.2	Stand der Forschung zum Plasmastromabriß	5
1.2.1	Aktive und passive Kontrolle und Stabilisierung	5
1.2.2	Numerische Simulation von Plasmadisruptionen	6
1.2.3	Auswirkungen von Disruptionen	6
1.2.4	Experimentelle Datenbasis	8
1.3	Motivation und Vorgehensweise	9
2	Das Tokamak-Plasma	10
2.1	Plasma-Instabilitäten	11
2.2	Ursachen für Plasmadisruptionen	13
2.3	Ablauf einer zentrierten Plasmadisruption	14
2.4	Ablauf eines VDE	14
3	Physikalische Beschreibung des Fusionsplasmas	17
3.1	Teilchenmodell versus Kontinuumsmodell	17
3.2	Grundgleichungen der MHD	20
3.3	Konvektions-Diffusions-Gleichung für den magnetischen Fluß	22
3.4	Kennzahlen der MHD	23
3.5	Reduzierte MHD-Gleichungen	25
3.6	Das Plasmagleichgewicht	28
3.7	Energetische Betrachtungen	30
4	Lösung der Gleichungen für das Plasma	32
4.1	Das Rechnernetz für das Plasma	33
4.2	Auswahl der Methode zur Plasma-Rand Beschreibung	34
4.2.1	Die Methode FLAIR	36
4.2.2	Korrektur des Fluidflusses bei der radialen Bewegung	39
4.3	Lösung der elektromagnetischen Gleichungen	40
4.4	Berechnung der Matrizen	43
4.4.1	Berechnung der Induktivitätsmatrix und deren räumliche Ableitungen	43
4.4.2	Berechnung der Widerstandsmatrix	49
4.5	Berechnung der konstanten magnetischen Induktion	51

4.6	Berechnung der magnetischen Achse und des X-Punktes	54
4.7	Berechnung des Sicherheitsfaktors	55
4.8	Lösung der Fluidodynamik des Plasmas	57
4.8.1	Berechnung der auf das Plasma wirkenden Kräfte	57
4.8.2	Passive Stabilisierung	60
4.8.3	Lösung der Plasmabewegung	61
5	Kopplung von Plasma und Struktur	62
5.1	Integration des Plasmamodells in CARIDDI	62
5.1.1	Grundgleichungen der Wirbelstromanalyse	64
5.1.2	Berechnung der Kopplungsmatrix	65
5.1.3	Berechnung der sekundären magnetischen Induktion	67
5.1.4	Gekoppeltes Wirbelstromproblem	68
5.2	Randbedingungen Plasma - Struktur	68
5.2.1	Abschälung des Randplasmas	70
5.2.2	Modellierung von „halo-currents“	71
6	Zeitintegration	73
6.1	Kopplung von Elektrodynamik und Fluidodynamik	73
6.2	Integration der Impulsgleichung	75
6.3	Integration der Elektrodynamik des Plasmas	75
6.4	Integration der Elektrodynamik der Struktur	76
6.5	Konvektion der Plasmatemperatur	77
6.6	Die Zeitschrittweite	78
7	Beispielrechnungen	80
7.1	Ergebnisse für das ASDEX-Upgrade Experiment	81
7.1.1	Eingabedaten	81
7.1.2	Vergleich mit experimentellen Daten	83
7.1.3	Vergleich mit dem Rechenprogramm TSC	89
7.1.4	Zusammenfassung der ASDEX-Upgrade Ergebnisse	89
7.2	Ergebnisse für den ITER-Reaktor	90
7.2.1	Eingabedaten	90
7.2.2	Vergleich: Vorgegebenes - dynamisches Plasmaverhalten	91
7.3	Ergebnisse für den DEMO-Reaktor	100
7.3.1	Eingabedaten	100
7.3.2	Beispielrechnungen: Variation der Ersten Wand	103
8	Schlußfolgerung und Ausblick	109
	Literaturverzeichnis	111
	Anhang	111
A	Nachrechnung einer einfachen analytischen Lösung	121

B Die Methode FLAIR	123
B.1 Bestimmung des Fluidflusses für die Fälle 9(b)-(d)	123
B.2 Typerkennung für Fall 9(b)-(d)	124
B.3 Die Fälle 1 bis 8	125
C Lokale Lösung der Geschwindigkeiten und Kräfte	131
C.1 Das Druckkorrekturverfahren von Chorin	131
C.2 Lösung der Poisson-Gleichung	132



Liste der verwendeten Symbole

Lateinische Buchstaben:

\vec{A}	Vektorpotential
A	Fläche
\mathbf{A}	Systemmatrix
A, B, C, D, E	Konstanten
B	Magnetische Induktion
\mathbf{B}	Matrix der rechten Seite
C	Courant-Zahl
\vec{E}	Elektrische Feldstärke
E	Vollständiges elliptisches Integral 2. Art
\vec{F}	Kraft
F_{halo}	„halo“-Funktion
$FFAC$	Enhancement Faktor
G	Geometriefunktion
\vec{H}	Magnetisches Feld
I, J	Elektrischer Strom
K	Vollständiges elliptisches Integral 1. Art
L	Induktivität
M	Hartmann-Zahl
Ma	Mach-Zahl
N	Formfunktion
N	Interaktionszahl
$NELE$	Anzahl der finiten Elemente
NI	Anzahl der horizontalen Gitterpunkte
NJ	Anzahl der vertikalen Gitterpunkte
NPF	Anzahl der Poloidalfeldspulen
P	Leistung
Q	Wärmemenge
R	radiale Koordinate (großer Torusradius)
R	Elektrischer Widerstand
R_M	Magnetische Reynolds-Zahl
T	Temperatur
U	Elektrische Spannung
V	Volumen
Z	Dimensionslose Funktion
Z_{eff}	Effektive Kernladungszahl
a	Beschleunigung
c	Schallgeschwindigkeit
\vec{e}_\ominus	Einheitsvektor in toroidaler Richtung
f	Füllfraktion

f	Toroidalfeldfunktion
h	Gitterweite
\vec{j}	Stromdichte
k	Boltzmann-Konstante
l	Länge
l_i	Interne Induktivität
n	Teilchendichte
m	Masse
p	Druck
q	Sicherheitsfaktor
r	Radiale Koordinate (kleiner Torusradius)
\vec{r}	Ortsvektor
s	Wegelement
s	Dimensionslose Geschwindigkeit
t	Zeit
t	Wegelement
u	Radiale Komponente der Geschwindigkeit
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
v_a	Alfvén-Geschwindigkeit
w	Vertikale Komponente der Geschwindigkeit
z	Vertikale Koordinate

Griechische Buchstaben:

Γ	Geometriefunktion
Θ	Toroidale Koordinate
Ω	Integrations-Volumen
Φ	Skalares elektrisches Potential
Ψ	Magnetischer Fluß
α, α'	Geometriegröße
α_{halo}	relative „halo“-Weite
β_p	Poloidales Beta (relativer Druck)
δ_{SOL}	Wichtungparameter für „Scrape-Off-Layer“
ϵ_0	Elektrische Feldkonstante (Dielektrizität)
ϵ	Inverses Aspektenratio
κ	Elongation
μ_0	Magnetische Feldkonstante (Permeabilität)
μ	Relative Permeabilität
$\ln \Lambda$	Coulomb-Logarithmus
η	Spezifischer Widerstand
η_i	Reduzierte Gitterweite
ν_*	Elektronenkollisionsparameter
ν	kinematische Viskosität
τ_{ee}	Einschlußzeit

ω_c	Zyklotronfrequenz
ω_a	Alfvén-Frequenz
ω	Crank-Nicolson-Parameter
ω_{halo}	„halo“-Parameter
ρ	Dichte
λ_D	Debeye-Länge
λ	Eigenwert
φ, ϕ, θ	Winkel
φ	Spannung
π	Kreiszahl

Tiefgestellte Indizes:

R	Radial
P	Plasma
S	Struktur
SOL	„Scrape-Off-Layer“
SP	Struktur-Plasma
PS	Plasma-Struktur
X	X-Punkt
e	Elektron
eV	In der Einheit eV
ϕ, pol	Poloidale Umfangsrichtung
Θ, tor	Toroidale Umfangsrichtung
i, j, k	Elemente von Matrizen
i	Ion
m	magnetische Achse
max	Maximum
min	Minimum
n	Gitterpunkte
tot	Über das Volumen integriert
z	Vertikal

Hochgestellte Indizes:

T	Transponiert
F^*	Kraftdichte
pol	Aus poloidalen Anteilen
tor	Aus toroidalen Anteilen
aux	Aus Hilfsfeldern
ext	Aus externen Feldern
int	Aus internen Feldern
sec	Aus sekundären Feldern
n	Zeitschritt

Symbole:

Δ	Laplace-Operator
Δ	Differenz
∇	Nabla-Operator
\vec{v}	Vektor
\mathbf{A}	Matrix
$\{U\}$	Spaltenmatrix
$\langle R \rangle$	Über das Volumen gemittelt

Physikalische Konstanten:

k	$= 1,380658 \cdot 10^{-23} \frac{kg m^2}{s^2 K}$	Boltzmann-Konstante
e	$= 1,60217733 \cdot 10^{-19} C$	Elektrische Elementarladung
ϵ_0	$= 8,854187812 \cdot 10^{-12} \frac{s^4 A^2}{kg m^3}$	Elektrische Feldkonstante
c_0	$= 2,99792458 \cdot 10^8 m/s$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$	Magnetische Feldkonstante
g	$= 9,80665 m/s^2$	Normfallbeschleunigung
m_e	$= 9,1093897 \cdot 10^{-31} kg$	Ruhemasse des Elektrons
m_n	$= 1,6749286 \cdot 10^{-27} kg$	Ruhemasse des Neutrons
m_p	$= 1,6726231 \cdot 10^{-27} kg$	Ruhemasse des Protons

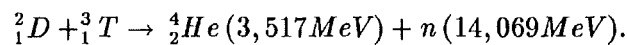
Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeines zur Kernfusion

Eine wirtschaftliche, sichere und umweltverträgliche Energieversorgung gehört zu den Kernproblemen, die die Menschheit heute und für die Zukunft zu bewältigen hat. Dazu muß das ganze Spektrum der möglichen Energiequellen hinsichtlich seiner Nutzung erforscht werden. Die Kernfusion in Plasmen ist der Hauptenergielieferant unendlich vieler Prozesse im Weltall und steckt somit indirekt hinter fast allen Energiequellen, die der Mensch gegenwärtig nutzt. Sie könnte einen wesentlichen Beitrag zur Lösung der zu erwartenden Energieprobleme liefern. Vor allem aufgrund ihrer deutlich günstigeren Sicherheits- und Umweltperspektiven gegenüber den heute genutzten Kernspaltungsreaktoren und fossil befeuerten Kraftwerken ist die Kernfusion eine vielversprechende Alternative zu diesen Energiequellen.

Bei der Kernfusion verschmelzen die Atomkerne leichter Elemente, wie z.B. die Isotope des Wasserstoffs, zu schwereren, z.B. Helium. Da die Bindungsenergie der Ausgangsstoffe niedriger ist als die der Endprodukte, wird beim Fusionsprozeß Energie freigesetzt. Zur Fusion kommt es aber nur, wenn es gelingt, die elektrischen Kräfte, mit denen sich die Kerne abstoßen (Coulomb-Wall), durch Kräfte aus der thermischen Bewegung zu überwinden. Dazu sind bei der am leichtesten zu erreichenden Fusionsreaktion, die von Deuterium und Tritium zu Helium ($D - T$ -Reaktion), Temperaturen im Bereich von 10^8 Kelvin notwendig. Bei diesen Bedingungen liegen die Kernbrennstoffe in vollständig ionisierter Form als Plasma vor. Die Reaktionsgleichung der $D - T$ -Reaktion lautet



Die Energie der schnellen Neutronen ist am einfachsten zu nutzen, da die Neutronen das Fusionsplasma nahezu ungebremst verlassen. Außerhalb des Plasmas werden sie gezielt in sogenannten Blankets abgebremst. Somit wird ihre kinetische Energie in konventioneller Weise in nutzbare Wärme umgewandelt.

Das Plasma muß einerseits vor Verunreinigungen (z.B. Luft) geschützt werden, um eine zu große Auskühlung durch Wärmeabstrahlung zu verhindern, und andererseits von den Bauteilen des Reaktors ferngehalten werden. Darum ist es von einem Vakuum umgeben und wird in Reaktoren vom Typ Spiegelmaschine, Stellarator oder Tokamak¹ durch magnetische Kräfte eingeschlossen. Für den magnetischen Einschluß wird die sehr gute elektrische Leitfähigkeit des Plasmas ausgenutzt.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen beziehen sich auf die Verhältnisse in einem Tokamak, der derzeit als aussichtsreichster Reaktortyp mit magnetischem Einschluß des Plasmas

¹Russisches Akronym aus „toroidal“, „Kammer“, „magnetisch“ und „Spule“

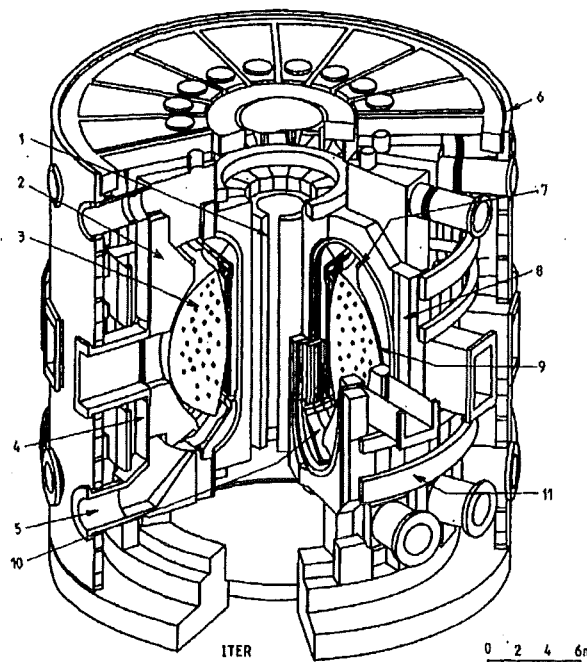


Abbildung 1.1: Der ITER-Reaktor: 1-Transformator; 2-Blanket; 3-Plasma; 4-Vakuumgefäß; 5-Asche-Abzug; 6-Kryostat; 7-Kontrollspulen; 8-Toroidalfeldspulen; 9-Erste Wand; 10-Divertor; 11-Poloidalfeldspulen

gilt. Ausführliche Informationen zu Tokamaks sind unter anderem bei Wesson [1], Schumacher [2] oder Raeder et al. [3] zu finden. In Abbildung 1.1 ist der geplante ITER²-Reaktor (aus Kadomtsev [4]) dargestellt. Die Hauptaufgabe des ITER ist es, die physikalische und technologische Realisierbarkeit eines Fusionsreaktors zu demonstrieren. Die Eckdaten von ITER (Stand Juni 1995, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching [5]) sind in Tabelle 1.1 angegeben. Im Tokamak bildet das Plasma einen Torus, der zusammen mit den innenliegenden Transformatorspulen einen Transformator bildet (vgl. Abbildung 1.2). Fließt durch die Transformatorspulen ein zeitlich veränderter Strom, so wird im Plasma ein ringförmiger Strom, der Plasmastrom, induziert. Das diesen Strom begleitende Magnetfeld hält das Plasma zusammen. Dabei wird es von zusätzlichen Poloidal- und Toroidalspulen unterstützt. Als toroidale Richtung wird der lange Weg um den Torus bezeichnet, als poloidale Richtung der kurze. Die Überlagerung dieser drei Magnetfelder führt zu magnetischen Feldlinien im Plasma, die sich schraubenförmig um das Plasma winden. Entlang dieser Feldlinien bewegen sich die Teilchen (Ionen und Elektronen) des Plasmas.

Probleme beim magnetischen Einschluß des Plasmas bilden Instabilitäten (vgl. z.B. Kadomtsev [6]). Diese Instabilitäten können zu sogenannten Disruptionen (Zusammenbrüchen) des Plasmas führen, deren Ursachen und genauen Abläufe bis heute noch nicht vollständig geklärt sind. Bei einer Disruption wird 50-90 % des thermischen Energieinhalts des Plasmas innerhalb weniger Millisekunden abgestrahlt („energy-quench“). Dadurch erhöht sich der elektrische Widerstand im Plasma, was zu einem rapiden Abfall des Plasmastroms im Zeitraum von typischerweise 10-100 Millisekunden führt („current-quench“) (vgl. Stott [7]). Der Abfall des Plasmastroms führt zu einer zeitlichen Änderung des Magnetfelds in den benachbarten, elektrisch leitenden Strukturen, wodurch dort

²International Thermonuclear Experimental Reactor

Gesamtradius (über alles)	18m
Höhe (über alles)	36m
Plasmaradius	8.14m
Plasmahöhe	9.4m
Plasmabreite	5.6m
Elongation	1.68
Plasmavolumen	2000m ³
Plasmadichte	10 ²¹ $\frac{\text{Teilchen}}{\text{m}^3}$
	1,679 × 10 ⁻⁶ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Plasmatemperatur	≈ 20 × 10 ⁶ K
Plasmastrom	21 × 10 ⁶ A
toroidales Magnetfeld	5.72T
Heizleistung und Stromtrieb	100MW
Wandbelastung durch Neutronen	≈ 1MW/m ²
Fusionsleistung	1500MW
Brenndauer	≥ 1000s

Tabelle 1.1: Parameter des geplanten ITER-Reaktors (Stand Juni 1995)

Wirbelströme induziert werden. Diese Ströme zusammen mit den noch vorhandenen Magnetfeldern erzeugen Lorentz-Kräfte, die die Struktur erheblich belasten. Durch die zeitlich veränderlichen Wirbelströme in der Struktur werden rückwirkend transiente Magnetfelder im Plasma induziert, die ihrerseits wiederum den Verlauf der Plasmadisruption beeinflussen (Abbildung 1.3). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung dieser Belastungen vor allem in den um das Plasma

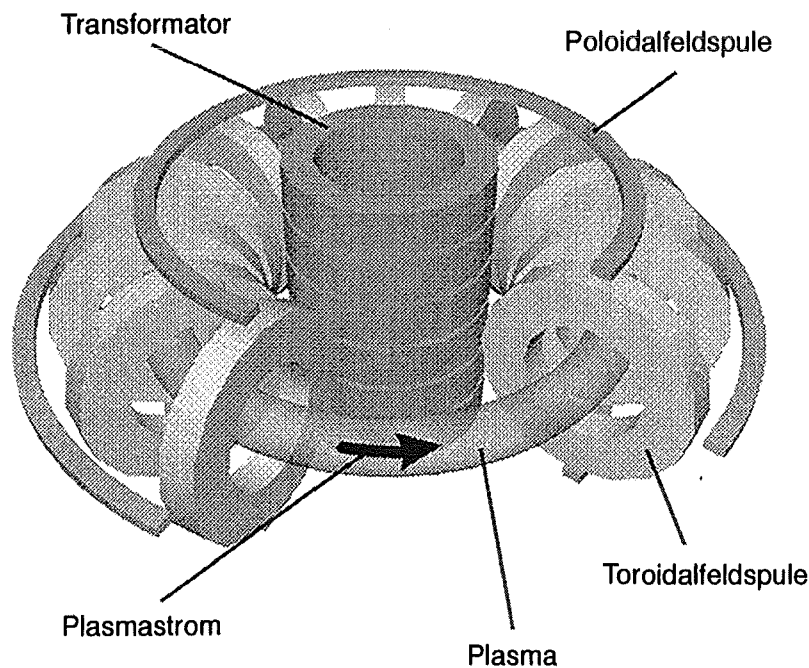


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Tokamaks

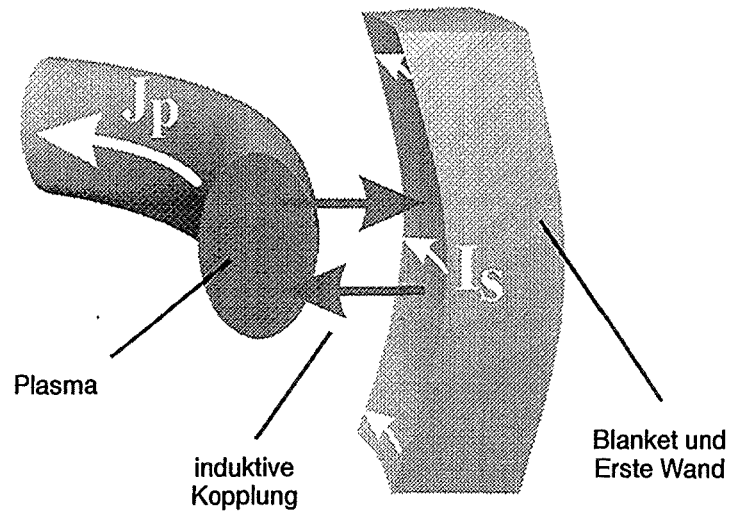


Abbildung 1.3: Wechselwirkung von Plasma und Struktur; Plasmastrom (J_p) und Wirbelströme in der Struktur (I_s)

angeordneten Blankets. Die Blankets haben im wesentlichen drei Aufgaben. Zum einen dienen sie als Wärmetauscher. In ihnen werden - wie oben beschrieben - die bei der Fusionsreaktion erzeugten Neutronen abgebremst und somit die Bewegungsenergie in thermische Energie umgewandelt. Die Wärme wird mit einem Kühlmittel abgeführt und in einen Dampferzeuger geleitet. Danach schließt sich ein konventioneller Dampfturbinenprozeß an, mit dem schließlich elektrische Energie erzeugt wird. Je nach Konzept unterscheiden sich die Kühlmittel der Blankets. Mögliche Kühlmittel sind Wasser, Helium oder Flüssigmetalle. Die zweite Aufgabe der Blankets ist die Erbrütung des bei der $D - T$ -Reaktion benötigten Tritiums. Dieses wird mittels einer Brutreaktion basierend auf Lithium erzeugt. Da Tritium radioaktiv (Betastrahler, Halbwertszeit ca. 12 Jahre) und toxisch ist, kommt der mechanischen Integrität der Blankets eine besondere sicherheitstechnische Bedeutung zu. So ist die Bestimmung der durch Störfälle, z.B. durch eine Plasmadisruption hervorgerufenen mechanischen Spannungen in den Blankets Gegenstand vieler Sicherheitsuntersuchungen. Die dritte Aufgabe der Blankets ist die Abschirmung der außenliegenden Strukturen wie z.B. der supraleitenden Toroidalfeldspulen vor Neutronen- und Wärmestrahlung.

Zwischen dem Plasma und den Blankets befindet sich die Erste Wand des Reaktors. Da sie direkt dem heißen Plasma ausgesetzt ist, muß sie entsprechend gekühlt werden. Dies geschieht in den favorisierten Konzepten mit Helium. Das Strukturmaterial der Ersten Wand muß so gewählt werden, daß möglichst wenig Verunreinigungen in das Plasma gelangen. Treten trotzdem Atome der Ersten Wand in das Plasma ein, hat dies zur Folge, daß die Wärmeabstrahlung des Plasmas wegen der relativ hohen Kernladungszahl dieser Verunreinigungen stark zunimmt. Die Folge kann eine Plasmainstabilität sein, die unter Umständen zu einer Plasmadisruption führt. Um dies zu verhindern, werden zwei Wege bei der Materialauswahl eingeschlagen: Der erste ist die Verwendung von niedrig-Z Materialien, also Materialien mit einer niedrigen Kernladungszahl. Hier bieten sich insbesondere Kohlenstoff oder Beryllium an. Der zweite ist die Wahl eines Materials, das weitgehend resistent gegen die Wärme- und Neutronenbelastung ist, so daß eine Verunreinigung des Plasmas

nur in geringem Maße auftritt. Ein Beispiel hierfür ist Wolfram.

Der elektrischen Auslegung der Ersten Wand kommt eine weitere, wichtige Bedeutung zu: Ist sie in toroidaler Richtung elektrisch leitend, kann in ihr während einer Plasmadisruption ein elektrischer Strom induziert werden. Dieser Strom kann die Größenordnung des Plasmastroms erreichen. Die elektromagnetischen Zerfallszeiten des Systems Plasma - Erste Wand - Blankets werden durch die toroidale Leitfähigkeit vergrößert und die Belastung der Strukturen dadurch verändert. Die Variation dieser Größe hat aber auch noch auf andere Weise Einfluß auf die Belastung. So wirkt z.B. eine toroidal leitende Erste Wand wie ein Schild, das die Blankets gegen die vom Plasmastrom verursachten starken Magnetfeldänderungen abschirmt. Somit können mit einer geeigneten Wahl der Leitfähigkeit der Ersten Wand die Ströme und Belastungen in den Blankets reduziert werden. Weitere Aspekte, die bei der elektrischen Auslegung der Ersten Wand beachtet werden müssen, sind die magnetische Durchsichtigkeit, die zur Positionskontrolle des Plasmas nötig ist, sowie die Möglichkeit der Montage bzw. Demontage von einzelnen Modulen.

Am Forschungszentrum Karlsruhe (FZK) wurde bisher zur Berechnung der Strukturbelastungen in Folge von Plasmadisruptionen das Finite-Elemente-Programm CARIDDI eingesetzt. CARIDDI wurde im Rahmen einer Kooperation der Universität Salerno, Italien, und des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik, Garching bei München, entwickelt. Vor etwa 8 Jahren wurde es vom FZK übernommen.

1.2 Stand der Forschung zum Plasmastromabriß

Aufgrund der Komplexität einer Plasmadisruption gibt es sehr viele Arbeiten, die sich mit den unterschiedlichsten Fragestellungen beschäftigen. In diesem Kapitel wird eine Literaturübersicht über die wichtigsten Arbeiten zu Plasmadisruptionen gegeben. Dazu wurden die Arbeiten in vier Themenbereiche aufgeteilt.

1.2.1 Aktive und passive Kontrolle und Stabilisierung

Das Plasma in einem Tokamak liegt in einem labilen Gleichgewichtszustand vor. Um kleine Störungen der Plasmaposition sowie der Plasmaform zu kontrollieren, müssen Regelungsmechanismen entwickelt werden, die auf der sehr kleinen Zeitskala der Störungen aktiv das Plasma regeln. Zu dieser Thematik wurden viele Arbeiten veröffentlicht; hier sollen dazu nur das Filament-Modell von Lazarus, Lister und Neilson [8], das MHD-konsistente Modell von Dong et al. [9] und das fluß-konsistente Modell von Humphreys und Hutchinson [10] erwähnt werden. Der beste und zugleich günstigste Regelmechanismus ist jedoch die passive Positionskontrolle des Plasmas aufgrund der induktiven Wechselwirkung mit der das Plasma umgebenden Struktur. Ist die passive Stabilisierung des Plasmas aufgrund der Wechselwirkung mit der Struktur hoch, wird die Plasmabewegung von der sehr schnellen Alfvén-Zeitskala auf die sehr viel langsamere, resistive Zeitskala der Struktur gebremst. Auch diese Thematik wurde genau untersucht. Bei den Arbeiten von Albanese, Coccoresse und Rubinacci [11] und Bobbio et al. [12] werden dazu Plasmagleichgewichts-Programme verwendet. Die Arbeiten von Haney und Freidberg [13] und Lehnert [14] benutzen dazu Energiebetrachtungen. In der Arbeit von Jardin et al. [15] werden zur Untersuchung der passiven Stabilisierung die Gleichungen der Magnetohydrodynamik mit Hilfe des Programmes TSC³ gelöst. Diese Untersuchungen beschränken sich aber alle auf den Zeitbereich bis zur Entstehung einer Plasmainstabilität.

³Tokamak Simulating Code, Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton, NJ, USA

1.2.2 Numerische Simulation von Plasmadisruptionen

Zur Simulation von Plasmainstabilitäten und Plasmadisruptionen gibt es verschiedene Rechenprogramme. Das am weitesten verbreitete Programm ist das oben erwähnte Programm TSC. Dieser transiente, zweidimensionale Code wurde von Jardin et al. [16] in Princeton, USA entwickelt und ist mittlerweile weit verbreitet. Entsprechend wurden viele Arbeiten vor allem über Nachrechnungen von Experimenten veröffentlicht. In TSC werden relativ wenig Vereinfachungen vorgenommen. Dadurch werden die Plasmaanalysen zwar sehr detailliert, aber was die Rechenzeit und die Modellierung betrifft auch sehr aufwendig. Die Diskretisierung der Gleichungen erfolgt bei TSC auf einem kartesischen Rechnernetz mittels finiten Differenzen. Die Lösungsgröße der Elektrodynamik ist der magnetische Fluß. Erwähnenswert sind die Nachrechnungen des TFTR Experiments von Jardin, Bell und Pomphrey [17], die Rechnungen für das ASDEX⁴-Upgrade Experiment von Pautasso [18, 19], die Nachrechnungen für DIII-D von Sayer et al. [20] oder auch die Nachrechnungen für JT60-U von Nakamura et al. [21]. Bei den neueren Arbeiten wurden bereits die sogenannten poloidalen „halo-currents“ (poloidale Ströme, die vom Plasma direkt in die Struktur und von dort wieder zurück in das Plasma fließen) berücksichtigt. Bei TSC wird die das Plasma berandende Struktur zweidimensional in Form konzentrischer Leiterschleifen modelliert. Dies ist für Experimente, die elektromagnetisch gesehen im wesentlichen aus einem Vakuumgefäß und sehr einfachen toroidalen Strukturen bestehen, akzeptabel. Bei zukünftigen Reaktoren, bei denen die Struktur einen stark dreidimensionalen Charakter aufweist, ist diese Art der Modellierung aber nicht mehr ausreichend.

Neben TSC existieren noch andere Codes zur Plasmaanalyse. Von Merrill und Jardin [22] wurde DSTAR entwickelt, das auf TSC aufbaut. Darin wurden auch Effekte wie das Aufschmelzen der Struktur beim Kontakt mit dem Plasma und Nichtgleichgewichts-Ionisation berücksichtigt. Rechnungen für TFTR wurden mit diesem Code von Merrill et al. [23] vorgestellt. Mit dem Code EFIT von Lao und Jensen [24] wurden Rechnungen für DIII-D durchgeführt, bei denen speziell die poloidalen „halo-currents“ untersucht wurden. Der Code DINA wurde von Khayrutdinov und Lukash [25] entwickelt. Bei diesem Code wird das Plasmagleichgewicht zu jedem Zeitpunkt erfüllt. Von Lukash und Khayrutdinov [26] wurden Rechnungen mit diesem Code für ITER veröffentlicht, bei denen auch die poloidalen „halo-currents“ berücksichtigt wurden. Bei allen vorgestellten Codes wird das Hauptaugenmerk auf die Plasmadynamik gelegt. Die Struktur wird, wie bereits angedeutet, immer nur als konzentrische Leiterschleifen, also rotationssymmetrisch modelliert. Ein Programm, das die echte, dreidimensionale Struktur mit den darin induzierten, dreidimensionalen Wirbelströmen berücksichtigt, existiert nach der Kenntnis des Autors noch nicht.

1.2.3 Auswirkungen von Disruptionen

Die wesentlichen Auswirkungen von Disruptionen sind das Aufschmelzen der Struktur bei Plasma-Wand-Kontakt sowie die Induktion von Wirbelströmen in den berandenden Strukturen und die sich dadurch ergebende Belastung der Strukturen. Zur Berechnung dieser Belastungen durch Wirbelströme werden weltweit verschiedene Finite-Element-Programme eingesetzt. Zu den wichtigsten im Bereich der Fusions-Reaktoranalysen gehört der japanische Code EDDYCUFF (Kameari [27]). Rechnungen für den ITER-Reaktor wurden damit z.B. von Koganezawa et al. [28] durchgeführt. Der französische Code TRIFOU wurden von Bossavit und V´erit´e [29] entwickelt. Rechnungen, z.B.

⁴Axial Symmetric Divertor Experiment, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

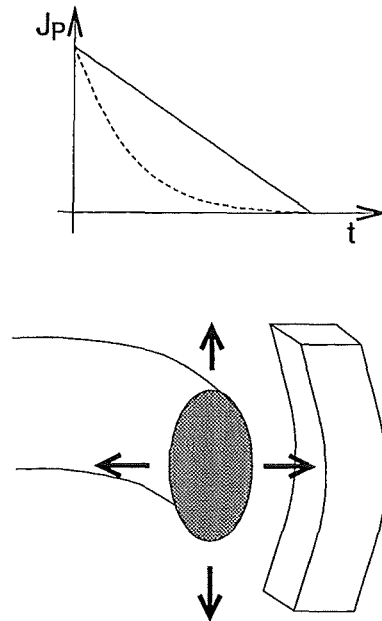


Abbildung 1.4: Bisheriges Konzept: Vorgabe des Plasmastroms (J_P) und der Plasmaposition über der Zeit (t)

für die Erste Wand des NET⁵-Designs wurden von Chaussecourte et al. [30] vorgestellt.

Speziell für das NET-Team wurde der Code CARIDDI von Albanese und Rubinacci [31] entwickelt. Dieser Code wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. Mit CARIDDI wurden sehr viele Analysen von Reaktorkomponenten veröffentlicht. So wurden von Miya et al. [32] Rechnungen für die Erste Wand des NET-Designs durchgeführt. Boccaccini und Dalle Donne [33] stellten Rechnungen für das keramische Brutblanket des DEMO⁶-Reaktors vor. Weitere Rechnungen für NET/ITER-Testmodule und für das DEMO-Feststoffblanket wurden von Boccaccini [34, 35] veröffentlicht. Albanese et al. [36] führten Rechnungen für das NET-Vakuumgefäß durch. Schließlich wurde von Jordan [37] eine Erweiterung von CARIDDI veröffentlicht, mit der der Einfluß der Wirbelstromdämpfung in den Strukturteilen untersucht werden kann.

Alle die vorgestellten Rechenprogramme schreiben das zeitliche Verhalten des Plasmas vor. Dies bedeutet, daß sowohl der zeitliche Verlauf des Plasmastroms als auch die Position des Plasmas fest vorgegeben werden muß (vgl. Abbildung 1.4).

Um eine genauere Beschreibung der Strukturbelastung zu erhalten, wurde das Plasmaverhalten mit Gleichgewichtscodes (MAXFEA (Barabaschi [38]) oder PROTEUS (de Barbieri [39])) nachgebildet und die so erhaltenen Stromdaten als Eingabe für die Wirbelstromberechnung benutzt. Dieser Weg wurde z.B. von Barabaschi et al. [40, 41] zur Analyse des ITER-Abschirmblankets oder von Fantechi [42] gewählt. In anderen Arbeiten wurden aus Experimenten gewonnene Daten für den Verlauf der Disruption als Eingabe für die Wirbelstromanalyse genommen. So wurden von Albanese et al. [43] zur Validierung von CARIDDI die experimentellen Ergebnisse einer ASDEX-Upgrade Entladung als Eingabewerte für die Wirbelstromanalyse verwendet. Aber auch bei diesen Analysen wurde die Struktur nur zweidimensional modelliert. Komplizierte dreidimensionale Wirbelströme in der Struktur konnten also nicht berücksichtigt werden.

⁵Next European Torus, ein Design, das in das gemeinsame NET/ITER-Design überging

⁶DEMONstration Reaktor

1.2.4 Experimentelle Datenbasis

Dieser Abschnitt stellt eine Literaturübersicht zu den experimentellen Daten der wichtigsten bisherigen Fusionsexperimente vom Typ Tokamak dar. Da die Experimente zumeist das Ziel haben, hohe Einschlußzeiten, hohe Temperaturen und/oder hohe Drücke bzw. hohe Dichten des Plasmas zu erreichen, sind auch die Daten, die dabei gewonnen werden, an diesen Parametern orientiert. Spezielle Untersuchungen zu Disruptionen wurden zwar teilweise durchgeführt, allerdings ist die Meßtechnik dafür nicht speziell ausgelegt (Ward und Wesson [44]). Somit ist es in keinem Fall möglich, Meßwerte bis zum Ende der Disruption aufzunehmen. Außerdem kommt hinzu, daß es außerordentlich schwierig ist, lokale Plasmaparameter zu messen. Dies gilt insbesondere für Strom- und Temperaturprofile und auch für lokale, effektive Kernladungszahlen. Im allgemeinen werden nur integrale Größen angegeben. Aus diesem Grund sind experimentelle Daten über den eigentlichen Disruptionsverlauf nur in geringem Maße verfügbar. Für das ASDEX Experiment wurden sehr detaillierte Untersuchungen von Stäbler et al. [45] über Dichte-Limit Disruptionen veröffentlicht. Von Zohm, Lackner und Ludescher [46] wurde eine statistische Auswertung der Disruptionen in dem selben Experiment durchgeführt. Pautasso et al. [47] veröffentlichten eine ähnliche Charakterisierung der Disruptionen in dem Nachfolgeexperiment ASDEX-Upgrade. In den Veröffentlichungen von Gruber et al. [48, 49] werden ausführlich die vertikalen Instabilitäten im ASDEX-Upgrade Experiment beschrieben. Eine Arbeit über die Belastungen des Vakuumgefäßes während vertikalen Instabilitäten wurde von Streibl et al. [50] veröffentlicht. Grundlegendes über MHD-Instabilitäten und Disruptionen im ASDEX-Upgrade Experiment wurde schließlich von Zohm et al. [51] vorgestellt.

Für das größte europäische Fusionsexperiment JET⁷ wurden naturgemäß sehr viel Artikel veröffentlicht. Eine sehr ausführliche Veröffentlichung über Disruptionen in JET wurde von Wesson et al. [52] verfaßt. In JET wurden auch intensiv die Belastungen der Struktur aufgrund von Disruptionen untersucht. So wurde von Noll et al. [53] eine Arbeit über die Belastungen im JET-Vakuumgefäß veröffentlicht. In den Arbeiten von Barabaschi und Noll [54] und Noll et al. [55] werden die Belastungen der inneren Strukturen bei vertikalen Instabilitäten aufgezeigt.

In der Arbeit von Janos et al. [56] werden die Disruptionen in dem amerikanischen Großexperiment TFTR untersucht. Hierin wird versucht, die verschiedenen Arten von Disruptionen zu klassifizieren. Merrill und Jardin [23] versuchten, nicht oder nur ungenau messbare Plasmaparameter während der Disruption im TFTR mittels Nachrechnungen zu rekonstruieren.

Beim zweiten amerikanischen Großexperiment DIII-D ist aufgrund des stark elongierten Plasmas die vertikale Instabilität und die damit verbundenen „halo-currents“ das Hauptproblem. So wurden unter anderem Arbeiten von Kellman et al. [57], Lister et al. [58] und Strait et al. [59] zu dieser Thematik veröffentlicht.

Beim japanischen Großexperiment JT-60U tritt ebenfalls aufgrund der starken Plasmaelongation das Problem der vertikalen Instabilitäten und der „halo-currents“ auf. Wichtige Arbeiten dazu sind die von Yoshino et al. [60] und von Nakamura et al. [21]. In der Arbeit von Matsukawa et al. [61] werden die toroidalen Ströme und die Belastungen im Vakuumgefäß des Experimentes abgeschätzt und mit den experimentellen Befunden verglichen.

⁷Joint European Torus, Culham, England

1.3 Motivation und Vorgehensweise

Bei früheren Untersuchungen hat sich gezeigt, daß die Belastung der Blankets stark von der Vorgabe des Plasmastrom-Zeitverhaltens und von der Position des Plasmas während der Disruption abhängt. Da das Zeitverhalten des Stroms und die Bewegung des Plasmas im wesentlichen von den elektrischen Eigenschaften der berandenden Struktur abhängen, erscheint die feste Vorgabe dieser Größen zur Untersuchung unterschiedlicher Strukturen wenig sinnvoll und letztlich ungeeignet. Daraus entstand die Notwendigkeit, das dynamische Plasmaverhalten in solchen Untersuchungen mitzusimulieren. Hierbei soll vor allem auch die vollständige induktive Kopplung von Plasma und Struktur berücksichtigt werden. Die Rückwirkung der in der Struktur induzierten Wirbelströme auf das Plasmaverhalten ist dann besonders groß, wenn die Struktur, insbesondere die Erste Wand, eine gute toroidale elektrische Leitfähigkeit besitzt, also eine Leitfähigkeit parallel zum Plasmastrom. Dann kann - wie beschrieben - in der Ersten Wand ein Strom in der Größenordnung des Plasmastroms induziert werden, und die Belastung der Strukturen ändert sich auf komplizierte Weise. Das bedeutet, für eine Auslegungsrechnung der Ersten Wand muß das Wirbelstromprogramm die erwähnten Wechselwirkungen berücksichtigen. Das kann jedoch weder CARIDDI in der ursprünglichen Form noch irgend ein anderes gängiges Rechenverfahren zur Wirbelstromanalyse.

Anders ist dies bei den plasmaphysikalischen Rechenprogrammen. Die können zwar derartige Effekte berücksichtigen, sind jedoch nicht in der Lage, komplizierte dreidimensional leitende Randstrukturen nachzubilden. Aufgrund des eigentlichen Ziels dieser Programme, das Plasmaverhalten im Detail zu beschreiben, werden dort nur wenige Vereinfachungen in den Grundgleichungen vorgenommen. Zudem besitzen diese Programme eine Vielzahl von frei wählbaren Parametern, deren Wahl und Anpassung viel Aufwand bedeutet, die letztlich aber nur für die Konvergenz des Programmes und für untergeordnete physikalische Effekte relevant sind. Die globalen Vorgänge im Plasma während der Disruption werden dadurch aber kaum beeinflusst.

In dieser Arbeit wird deswegen ein Modell entwickelt, das es erlaubt, das globale Plasmaverhalten mit der vollständigen induktiven Kopplung zur Struktur numerisch zu simulieren. Dieses Modell wurde in das vorhandene, dreidimensionale Finite-Elemente Wirbelstromprogramm CARIDDI implementiert. Da das Modell für Blanket-Analysen der Struktur eingesetzt werden soll, darf die Handhabung relativ wenig Aufwand erfordern, d.h. die Zahl der frei wählbaren Parameter soll auf ein Minimum reduziert werden. Der zusätzliche Rechenaufwand soll auf ein vernünftiges Maß beschränkt bleiben.

Zuerst werden in der vorliegenden Arbeit die plasmaphysikalischen Vorgänge untersucht. Dabei wird ein besonderes Augenmerk auf Vereinfachungen gelegt. Aus diesen Betrachtungen resultiert ein System von reduzierten Gleichungen der Magnetohydrodynamik, die in einen elektromagnetischen und einen fluiddynamischen Teil aufgespaltet werden. Die Elektrodynamik wird mit einem Finite-Elemente-Ansatz gelöst, der die vollständige induktive Kopplung von Plasma und Struktur erlaubt. Die Beschreibung des freien Plasmarandes erfolgt mit einer „Volume-Of-Fluid“ Methode. Für die Plasmabewegung im Eulerschen Koordinatensystem wird ein Starrkörperansatz verwendet. Die das Plasma beschleunigenden Kräfte werden jeweils um den Gleichgewichtszustand linearisiert. Somit erspart man sich eine explizite Berechnung des Gleichgewichts. Für die Beschreibung des Plasma-Wand Kontakts werden verschiedene empirische Modellannahmen vorgestellt. Zur Verifikation des entwickelten Modells wird eine Entladung des ASDEX-Upgrade Experiments nachgerechnet. Zum Schluß werden noch Analysen mit der Geometrie von ITER und die Auswirkungen von Design-Variationen beim DEMO-Reaktor auf das Plasmaverhalten gezeigt.

Kapitel 2

Das Tokamak-Plasma

Das Gemisch aus Deuterium und Tritium im Tokamak liegt in voll ionisierter Form, also als Plasma, vor. Aufgrund der Umfangsspannung bewegen sich die Elektronen und Ionen toroidal in entgegengesetzter Richtung um den Torus. Die Magnetfeldlinien stellen das Führungszentrum der Teilchenbewegung dar. Dieser Bewegung überlagert ist eine Gyrationbewegung um die Magnetfeldlinien. Die Summe der Magnetfeldlinien bildet ineinandergeschachtelte, torusförmige Oberflächen, die sogenannten magnetischen Oberflächen. Aufgrund der starken Bindung der Teilchen an die magnetischen Oberflächen ist der Impulsaustausch senkrecht zu diesen Oberflächen nur gering. Dies bedeutet, daß die Wärmeleitfähigkeit im Torus in radialer Richtung viel kleiner ist als die in toroidaler Richtung. Dieser Effekt wurde von Artsimovich [62] beschrieben. Diese Anisotropie spiegelt sich in vielen anderen Kenndaten des Tokamak-Plasmas wider. Grundsätzlich kann ein Tokamak-Plasma in zwei verschiedene Bereiche eingeteilt werden: Das Randplasma und das Kernplasma. Das Randplasma befindet sich an der Grenze zwischen Plasma und Vakuum. Es zeichnet sich durch eine sehr geringe Dichte (Übergang ins Vakuum), eine niedrige Temperatur (Abstrahlung) und einen geringen toroidalen Plasmastrom aus. Aufgrund der niedrigen Dichte und der niedrigen Temperatur ist der elektrische Widerstand relativ hoch, so daß während des Plasmastromzusammenbruchs nur geringe Ströme im Randplasma induziert werden.

Das Kernplasma dagegen, das sich innerhalb der letzten geschlossenen Magnetfeldlinien, der sogenannten Separatrix, befindet, weist ein relativ konstantes Dichteprofil auf (vgl. Rebut [63]). In Abbildung 2.1 ist ein gemessenes Dichteprofil vom ASDEX-Upgrade Experiment kurz vor dem Einsetzen der Disruption dargestellt. Auch hier erkennt man das relativ konstante Profil über weite Bereiche des Plasmaquerschnitts. Der elektrische Widerstand ist im Vergleich zum Randplasma aufgrund der höheren Elektronentemperatur wesentlich geringer. Für die vorliegende Aufgabe der Simulation von Plasmadisruptionen zur Berechnung der dabei auftretenden Strukturbelastungen genügt es, das Kernplasma zu betrachten.

Der magnetische Einschluß des Plasmas ist a priori nicht stabil; es müssen aktive und passive Kontrollmechanismen gewählt werden um ein Anwachsen von Störungen zu vermeiden. Trotz intensiver Bemühungen gelingt dies bis zur Zeit nicht vollständig.

Im den folgenden Kapiteln wird zuerst ein Überblick über die wichtigsten Plasmainstabilitäten gegeben. Danach werden die verschiedenen Disruptions-Szenarien vorgestellt.

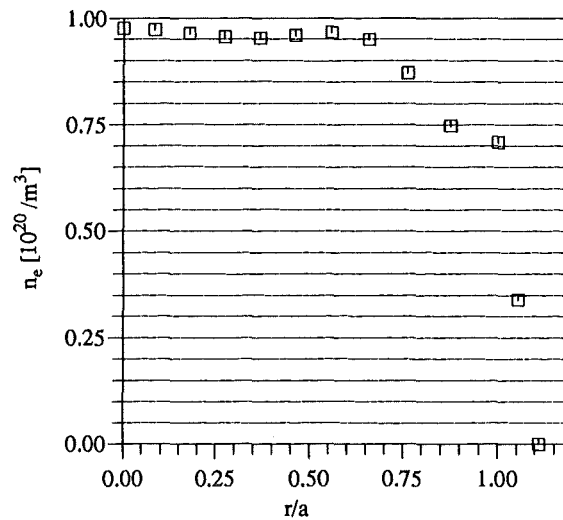


Abbildung 2.1: Gemessenes Dichteprofil im ASDEX-Upgrade (#8152)
(nach Pautasso [64])

2.1 Plasma-Instabilitäten

Die Instabilitäten eines Tokamak-Plasmas lassen sich in **ideale Instabilitäten** und **resistive Instabilitäten** einteilen. Die beiden Instabilitätstypen besitzen nach Waddell et al. [65] ein unendliches Spektrum möglicher Modi. Da sich die vorliegende Arbeit mit den Vorgängen nach einer Plasmaintabilität und nicht mit den Instabilitäten selbst beschäftigt, werden im folgenden nur die wichtigsten Instabilitäten kurz erläutert. Für weiterführende Informationen gibt es ausführliche Bücher wie z.B. über ideale MHD-Instabilitäten von Bateman [66] oder über Mikroinstabilitäten von Manheimer und Lashmore-Davies [67]. Außerdem existieren eine Vielzahl von Veröffentlichungen, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll.

Ideale Instabilitäten (MHD-Instabilitäten)

Die zwei wichtigsten idealen Instabilitäten sind die Pinch- und die Knick-Instabilität. Diese Instabilitäten betreffen die globale Form des Plasmatorus. Bei den Knick-Instabilitäten wird die Plasmasäule (Torus) geknickt, d.h. ein Teil des Plasmas weicht aus. Die Isolinien des azimuthalen Magnetfeldes werden an der Innenseite des Knicks zusammengedrückt und an der Außenseite auseinandergezogen, wodurch eine resultierende Kraft in Richtung des Knicks wirkt, die diesen verstärkt und somit das Plasma instabil werden läßt. Dieser Vorgang ist in Abbildung 2.2(a) skizziert. Bei der Pinch-Instabilität wird das Plasma durch eine Störung der Feldlinien an einer Stelle in toroidaler Richtung eingeschnürt. Durch die Verdichtung des azimuthalen Magnetfeldes in radialer Richtung verstärkt sich (wie bei der Knick-Instabilität) der Druck auf das Plasma und die Einschnürung wird weitergetrieben. Der Plasmastrom reißt ab. Dies ist in Abbildung 2.2(b) dargestellt.

Resistive Instabilitäten

Die wichtigste resistive Instabilität ist der sogenannte „tearing-mode“ oder die Zerreiinstabilität (siehe Abbildung 2.3). Zur Erklärung dieser Instabilität wird oft das folgende Modell verwen-

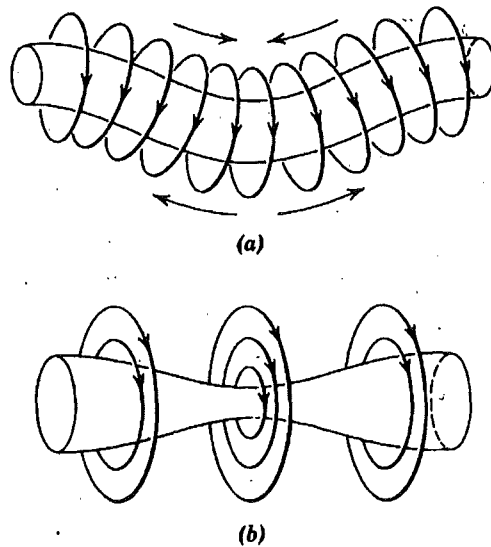


Abbildung 2.2: Knick-Instabilität (a), Pinch-Instabilität (b)
(aus Jackson [68])

det: Ausgangsbedingung ist ein Plasmastrom, der über den Querschnitt in die gleiche Richtung fließt und somit ineinander geschachtelte Fluß-Oberflächen hat. Ströme, die in die gleiche Richtung fließen, ziehen sich gegenseitig an (vgl. parallele Leiter), so daß eine komprimierende Kraft entsteht. Nimmt man aber ein reales Plasma an, kann die Stromverteilung nicht auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Das Plasma tendiert eher dazu, in verschiedene Bereiche auseinanderzubrechen, die zusammen eine geringere magnetische Energie besitzen. Durch dieses Auseinanderbrechen entstehen kleinere Strukturen in der Topologie des magnetischen Flusses, sogenannte magnetische Inseln. Diese sind unabhängige Gebiete mit dem gleichen Wert des skalaren magnetischen Flusses. Zum Verständnis dieser Instabilitäten muß noch der Begriff der rationalen Oberflächen erklärt werden. Die Feldlinien, die sich nach einer bestimmten Anzahl an toroidalen Umläufen wieder treffen, bilden sogenannte rationale Oberflächen. Die Mode-Nummer m/n gibt an, daß eine Feldlinie m mal toroidal umläuft, während sie n mal poloidal umläuft, bevor sie wieder auf ihren Ausgangspunkt stößt. Teilchen, die sich entlang dieser rationalen Oberflächen bewegen, können durch Störungen resonant angeregt werden. Dies erklärt, warum diese Instabilitäten gerade an den rationalen Oberflächen entstehen.

In jedem Plasma gibt es Inselbildungen, die in einem stabilen Plasma bei einer bestimmten Größe der Insel stoppt, da die magnetische Energie, die den Mode weiter treibt, nicht mehr groß genug ist. Je kleiner die Mode-Nummer, desto instabiler ist der Mode, d.h. desto größer ist das Wachstum der Instabilität. Typische Disruptionen beginnen mit Instabilitäten an den $2/1$ und $3/2$ Oberflächen. Das Wachstum von Inseln kann durch die Größe Δ'_{mn} beschrieben werden, die die Diskontinuität der örtlichen Ableitung des magnetischen Flusses Ψ darstellt:

$$\Delta'_{mn} = \frac{\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\left. \frac{d\Psi_{mn}}{dr} \right|_{r_+} - \left. \frac{d\Psi_{mn}}{dr} \right|_{r_-} \right)}{\Psi_{mn}(r_{mn})}$$

r_{mn} ist darin die radiale Position der Oberfläche mit m/n und $r_{\pm} = r_{mn} \pm \delta$. „Tearing“-Instabilitäten können also nur bei resistiven Plasmen auftreten, da hier die Flußerhaltung aufgehoben ist, so daß ein Zerreißen und Schließen der Feldlinien nicht mehr ausgeschlossen ist. Strauß et al. [69], Bondeson

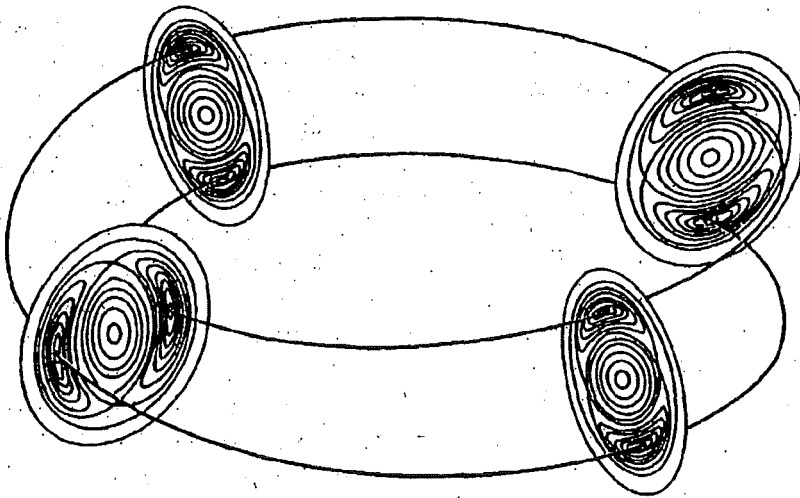


Abbildung 2.3: 'tearing'-Instabilität, $m = 2$
(aus Schumacher [2])

[70] und Bondeson und Park [71] haben sich ausgiebig mit den „tearing-modes“ beschäftigt und diese auch numerisch simuliert.

2.2 Ursachen für Plasmadisruptionen

Die Auslösung von Plasmadisruptionen kann verschiedene Ursachen haben. Im folgenden sind die wichtigsten aufgeführt.

- Versagen der aktiven Kontrollmechanismen:
Dies bedeutet, daß eine Störung der Plasmaposition nicht mehr aktiv ausgeglet werden kann. Die Folge ist, daß vor allem elongierte Plasmen im allgemeinen nach oben oder unten ausweichen.
- Versagen eines oder mehrerer Magnete:
Dadurch ändert sich das Magnetfeld des Gleichgewichtszustandes und die aktiven Kontrollmechanismen können diese im allgemeinen großen Störung nicht mehr ausgleichen.
- Instabiles Wachstum von internen Plasmastörungen („tearing-modes“):
Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, können die resistiven Instabilitäten zu einer Zerstörung der ineinandergeschachtelten magnetischen Oberflächen führen. Die Folge ist eine erheblich größere Wärmeleitfähigkeit des Plasmas in radialer Richtung und somit ein starkes Auskühlen, was einen Anstieg des elektrischen Plasmawiderstandes und somit einen Abfall des Plasmastroms zur Folge hat.
- Verschmutzung des Plasmas mit Partikeln hoher Kernladungszahl durch die erste Wand:
Dies führt zu einer erhöhten thermischen Abstrahlung des Plasmas und damit zu einer Erhöhung des elektrischen Plasmawiderstandes und schließlich zum Stromabfall.

- Über- bzw. Unterschreiten von bestimmten physikalischen Grenzwerten:
Die wichtigsten physikalischen Grenzwerte sind das q -Limit, das Dichte-Limit und das β -Limit. q ist der sogenannte Sicherheitsfaktor. Dieser ergibt sich im wesentlichen aus dem Verhältnis von toroidalen und poloidalen Magnetfeldern. Unterschreitet q den Wert 2 am Plasmarand, so führt das im allgemeinen zu einem instabilen Anwachsen von Plasmastörungen. Arbeiten hierzu wurden unter anderem von Bondeson und Persson [72] oder Waidmann [73] durchgeführt. Das Dichte-Limit besagt, daß ein Plasma mit einem bestimmten Plasmastrom eine bestimmte Dichte nicht überschreiten darf. Ansonsten wachsen auch hier kleine Störungen instabil an. Zum Dichte-Limit wurden sehr viele Untersuchungen für die unterschiedlichsten Plasmaparameter durchgeführt. Hier soll nur die Arbeit von Stott [7] und die von Stähler et al. [45] erwähnt werden. Einen ähnlichen Effekt gibt es beim β -Limit. Dieses beschreibt das maximale Verhältnis vom thermodynamischen Druck zum magnetischen Druck. Arbeiten hierzu wurden z.B. von Turnbull et al. [74] oder von Fredrickson et al. [75] durchgeführt.

2.3 Ablauf einer zentrierten Plasmadisruption

Unter einer zentrierten Plasmadisruption versteht man den unkontrollierten Verlust des magnetischen Einschlusses. Der Ablauf einer zentrierten Disruption läßt sich phänomenologisch folgendermaßen beschreiben (vgl. auch Schüller [76]): Im stabilen Zustand bilden die magnetischen Oberflächen im Plasma ineinandergeschachtelte Tori. Werden nun die rationalen Oberflächen durch die zuvor beschriebenen Störungen in ihren Resonanzfrequenzen zu Schwingungen angeregt, kommt es zu einer Zerstörung dieser Oberflächenanordnung, wie dies schon in Kapitel 2.1 beschrieben wurde. Dadurch wird die Temperaturleitfähigkeit im Plasma in der Richtung senkrecht zu den Magnetfeldlinien schlagartig sehr viel größer als im ungestörten Zustand, was zu einer Auskühlung des Plasmas führt. Die Temperatur des Plasmas kann bis auf etwa 10eV absinken. Messungen, die dies belegen, wurden von Wesson et al. [52] und Ward und Wesson [44] in JET durchgeführt. Bei sinkender Plasmatemperatur nimmt der elektrische Plasmawiderstand zu, so daß sich das Plasma nun stark resistiv verhält. Der toroidale Plasmastrom kann nicht mehr aufrecht erhalten werden und bricht induktiv-resistiv zusammen.

2.4 Ablauf eines VDE

Neben der zentrierten Disruption wird oft auch ein Auswandern des Plasmas aus seiner mittleren vertikalen Position beobachtet. Dies wird als „vertical displacement event“ (VDE) oder oft auch als $m = 0$ MHD-Instabilität bezeichnet. Die vertikale Richtung des Auswanderns ist dabei eher zufällig. Ein VDE endet im allgemeinen mit einer Disruption, also einem Stromzusammenbruch, wenn das q -Limit im Plasma unterschritten wird oder das Plasma die Struktur berührt, was starke Verunreinigungen zur Folge hat.

Erste Arbeiten zu VDEs wurden von Lackner und McMahon [77], Rebhan [78] und Haas [79] durchgeführt. VDEs treten speziell bei nicht kreisförmigen, vertikal elongierten Plasmen auf, da bei solchen Plasmen eine labile Gleichgewichtslage vorliegt. D.h. kleine Störungen des Plasmas in vertikaler Richtung können sich verstärken und beim Versagen der aktiven Kontrollmechanismen instabil anwachsen. Dieser Effekt ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Die außen angeordneten Leiter repräsentieren die Poloidalenspulen, die die Elongation des Plasmas bewirken. In der Mitte ist ein

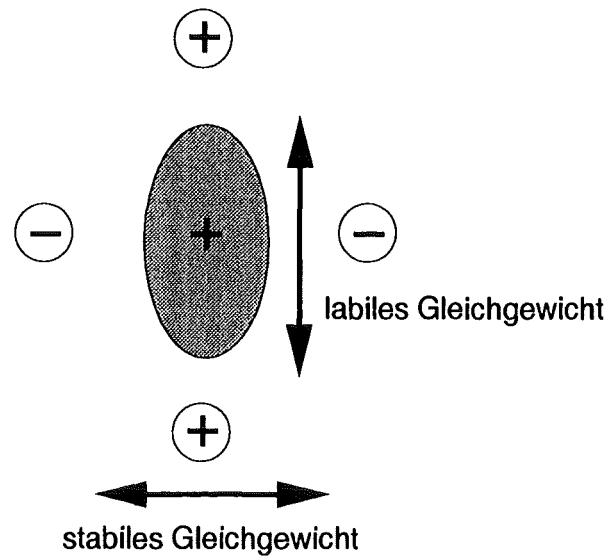


Abbildung 2.4: Prinzip eines „vertical displacement events“

Plasma dargestellt, dessen Strom die gleiche Richtung aufweist wie die oben und unten angeordneten Poloidalwindspulen. Die Überlagerung der Magnetfelder ergibt dann entsprechend elongierte magnetische Oberflächen, innerhalb derer sich das Plasma befindet. Bildlich gesprochen ziehen also bei dieser Konfiguration die Magnetfelder der Poloidalwindspulen das Plasma in vertikaler Richtung an und stauchen es in horizontaler Richtung. Wird das Plasma durch eine kleine Störung z.B. nach oben ausgelenkt, verkürzt sich dessen Abstand zur oberen Feldspule und die anziehende Kraft verstärkt sich. Die anfängliche Störung wird also weiter getrieben, das Plasma wird instabil. Die Gleichgewichtslage ist also zunächst labil, kann jedoch mit aktiven Regelströmen stabilisiert werden. Die Instabilität wird zudem durch Wechselwirkungen mit der Struktur gedämpft, da bei einer Bewegung des Plasmas in der Struktur Wirbelströme induziert werden, die wiederum rückstellende Kräfte auf das Plasma zur Folge haben. Ohne die Regelung und die Dämpfung würde das Plasma in seiner Vertikalbewegung Alfvén-Geschwindigkeit erreichen (vgl. Gruber [49]).

In Abbildung 2.5 sind die beiden beschriebenen Disruptions-Szenarien nochmals schematisch dargestellt. Der linke Pfad stellt die zentrierte Disruption dar, der rechte Pfad den VDE. Man erkennt, daß beide Pfade auf das selbe EndszENARIO führen. Lediglich die Einleitung der Disruption ist unterschiedlich. Für die hier durchzuführenden Blanketanalysen ist die Phase des „current-quench“ die entscheidende. Dies bedeutet, daß für die Annahme einer zentrierten Disruption die Plasmasimulation mit dem ausgekühlten Plasma, also nach dem „energy-quench“ beginnen kann. Da die Plasmalage aber auch einen entscheidenden Einfluß auf die Blanketbeanspruchungen besitzt, muß für eine VDE der komplette rechte Pfad von Abbildung 2.5 simuliert werden.

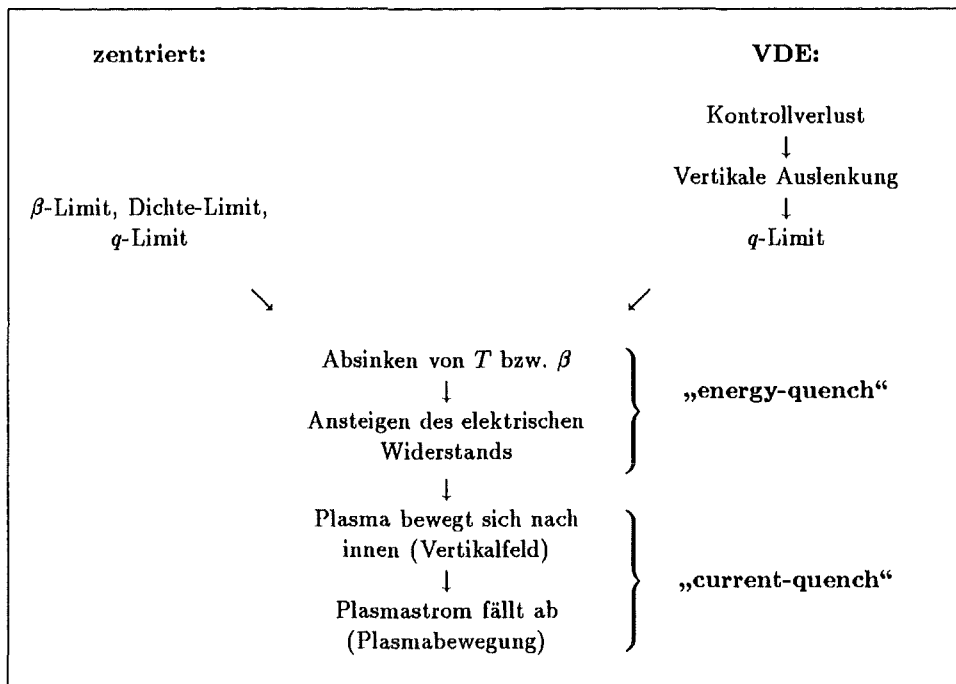


Abbildung 2.5: Szenarien einer Plasmadisruption: zentrierte Disruption und VDE

Kapitel 3

Physikalische Beschreibung des Fusionsplasmas

In diesem Kapitel wird eine vereinfachte physikalische Beschreibung des Plasmas hergeleitet. Dazu werden zuerst die verschiedenen physikalischen Modelle für das Plasma charakterisiert. Anschließend erfolgt eine allgemeine Beschreibung von Plasmen mit Hilfe der Magnetohydrodynamik, wobei mittels dimensionsloser Kennzahlen entsprechende Vereinfachungen für den vorliegenden Fall des Fusionsplasmas eingeführt werden. Aus den vereinfachten Gleichungen wird die Gleichung für das Plasmagleichgewicht hergeleitet. Abschließend folgt eine energetische Betrachtung der Plasmadisruption.

3.1 Teilchenmodell versus Kontinuumsmodell

Ein Plasma besteht aus einer bestimmten Anzahl von elektrisch geladenen Teilchen, die durch elektrische und magnetische Felder miteinander gekoppelt sind. Diese Felder werden im wesentlichen aus den Plasmateilchen selbst erzeugt. Soll ein Plasma exakt quantenmechanisch mit Hilfe der Schrödingergleichung beschrieben werden, steht man praktisch vor einer unlösbaren Aufgabe. Aus diesem Grund geht man schrittweise von einem Teilchenmodell auf ein Kontinuumsmodell, und von der quantenmechanischen Beschreibung auf eine klassische über. Die verschiedenen physikalischen Modelle sollen im folgenden charakterisiert werden (vgl. auch Chen [80] oder Schumacher [2]).

Teilchenmodell

Im klassischen Fall erlaubt eine statistische Behandlung, das Plasma mit Hilfe der Liouville-Gleichungen als Flüssigkeit im $6N$ -dimensionalen Phasenraum darzustellen. N steht dabei für die Anzahl der Teilchen. Durch einen Übergang vom $6N$ -dimensionalen Phasenraum zum 6-dimensionalen Phasenraum erhält man für den stoßfreien Fall die Vlasov-Gleichung und für den stoßbehafteten Fall die Boltzmann- oder die Fokker-Planck-Gleichungen. Die sechs Dimensionen entsprechen den drei Orts- und drei Geschwindigkeitskoordinaten. Das Teilchenmodell entspricht Bedingungen, die durch geringe Wechselwirkungen der Teilchen im Plasma gekennzeichnet sind.

Kontinuumsmodell

Wird ein weiterer Übergang vom 6-dimensionalen Phasenraum des Teilchenmodells auf einen 3-dimensionalen Ortsraum vollzogen, erhält man das Kontinuumsmodell (Fluidmodell) für alle Teilchensorten des Plasmas. Die dabei auftretenden dissipativen Terme ergeben sich aus der 6-dimensionalen Betrachtung. Beim 3-Strom-Modell werden die Fluidgleichungen für alle im Plasma befindlichen Teilchensorten aufgestellt (Elektronen, Ionen, Neutralteilchen). Für ein voll ionisiertes Wasserstoffplasma entfallen die Gleichungen für die Neutralteilchen. Werden die Freiheitsgrade verschiedener Teilchensorten vernachlässigt, erhält man die Einflüssigkeitstheorie oder Magneto-hydrodynamik.

Die Magneto-hydrodynamik (MHD) besteht aus einer Kombination von Grundgleichungen der Fluid-dynamik, Thermodynamik und Elektrodynamik. Im Gegensatz zur Plasmadynamik wird hier nicht die Einzelteilchenbewegung betrachtet, sondern eine globale Fluidbewegung, die sich aus der Summengeschwindigkeit der Einzelteilchen ergibt. Aus der Differenzgeschwindigkeit der Einzelteilchen läßt sich der elektrische Strom bilden. Das MHD-Modell geht also von einem strömenden kompressiblen, elektrisch leitenden Plasma aus, in dem elektrische und magnetische Felder vorherrschen. Die räumliche und zeitliche Änderung der MHD-Grundgrößen werden bei Vorgabe der Rand- und Anfangsbedingungen durch die Basisgleichungen der MHD beschrieben.

Im Falle der **idealen MHD** besitzt das Plasma keine innere Reibung, die elektrische Leitfähigkeit ist unendlich groß und die Wärmeleitung verschwindet. Thermodynamisch bedeutet dies, daß alle Prozesse im Plasma reversibel ablaufen. Der magnetische Fluß der durch eine Fläche geht, bleibt im Rahmen der idealen MHD zeitlich konstant. Daraus folgt, daß das Medium sein umschlossenes Magnetfeld mit sich führt. Dies wird auch als „Theorie des eingefrorenen Magnetfeldes“ bezeichnet.

Das Plasma in einem Tokamak hat mit $\approx 10^{20} \frac{\text{Teilchen}}{\text{m}^3}$ eine relativ große Dichte im Vergleich zu anderen, insbesondere stellaren Plasmen. Im Vergleich zu Luft ist diese Dichte allerdings immer noch gering. Für diese relativ dichten Plasmen gilt die Kontinuumstheorie, im speziellen die MHD, bei der die Wechselwirkung der Einzelteilchen eine erhebliche Rolle spielt. Die Störungsausbreitung in Plasmen mit starken Magnetfeldern erfolgt mit der Alfvén-Geschwindigkeit \vec{v}_A .

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (3.1)$$

Dies ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elastischen Querschwingungen der magnetischen Kraftlinien: Die Frequenz der Alfvén-Wellen ergibt sich aus

$$\omega_a = \frac{|\vec{B}|}{l \sqrt{\mu_0 \rho}}.$$

Hierin ist \vec{B} die magnetische Induktion, μ_0 die Permeabilität, ρ die Dichte des Plasmas und l eine charakteristische Länge. Im Tokamak gilt

$$|\vec{v}_A| \approx 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eine weitere notwendige Voraussetzung für die Annahme der MHD ist nach Chen [80] neben der hohen Dichte jedoch, daß die Zyklotron-Frequenz ω_c der Ionen, also die Frequenz, mit der die Ionen um die magnetischen Feldlinien gyrieren, viel größer ist als die Frequenz der Alfvén-Wellen

ω_a , da nur so keine Resonanzeffekte zwischen Gyration der Ionen und Alfvén-Wellen auftreten. Die Zyklotron-Frequenz berechnet sich aus

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{q_i |\vec{B}|}{m_i} \quad (3.2)$$

mit q_i als elektrische Ladung der Ionen und m_i als deren Masse. Mit den für einen Tokamak relevanten Daten erhält man für die Zyklotronfrequenz

$$\omega_c \approx 10^9 \frac{1}{s}$$

und für die charakteristische Frequenz der Alfvén-Wellen

$$\omega_a \approx 10^7 \frac{1}{s},$$

womit die Voraussetzung $\omega_c \gg \omega_a$ erfüllt ist. Ein Nebeneffekt der Gyrationbewegung ist, daß das von der Elektronen- und Ionenbewegung erzeugte Magnetfeld dem von außen angelegten entgegenwirkt. Diese Eigenschaft erklärt das diamagnetische Verhalten des Plasmas.

Plasmatemperatur

Ein Plasma im thermischen Gleichgewicht enthält Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeitsverteilung unterliegt der Maxwell'schen Verteilung. Bei einer eindimensionalen Betrachtung lautet diese

$$f(u) = A \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right).$$

Dabei ist zu beachten, daß Elektronen und Ionen unterschiedliche Verteilungen haben können. $f(u)du$ bedeutet die Anzahl der Teilchen pro m^3 , die eine Geschwindigkeit zwischen u und $u + du$ besitzen. $\frac{1}{2}mu^2$ ist die kinetische Energie und k die Boltzmann-Konstante. A ist eine von der Dichte n abhängende Konstante:

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}.$$

Mit der Bildung einer mittleren kinetischen Energie

$$E_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}mu^2 f(u)du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du} = \frac{1}{2}kT$$

und mit einer dreidimensionalen Betrachtung erhält man

$$E_{av} = \frac{3}{2}kT.$$

Zur Vermeidung von hohen Potenzen wird die Temperatur nicht in K angegeben, sondern in eV . Die Umrechnung ergibt sich dann folgendermaßen:

$$T[K] = \frac{e}{k} \cdot T_{eV} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} K}{1,38 \cdot 10^{-23} eV} \cdot T_{eV} = 11604,5 \frac{K}{eV} \cdot T_{eV}$$

$$\boxed{1eV \hat{=} 11604,5K}$$

3.2 Grundgleichungen der MHD

Zur Beschreibung des Plasmas mit Hilfe der MHD sind nach Cap [81] folgende Grundgrößen zu vereinbaren:

- elektrische Feldstärke \vec{E} , magnetische Feldstärke \vec{H} , magnetische Induktion \vec{B} , elektrische Stromdichte \vec{j} (12)
- Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} , Massendichte ρ , Druck p (5)

Zur Bestimmung dieser Größen werden 17 skalare Basisgleichungen benötigt:

- Kontinuitätsgleichung und Impulsbilanz (4)
- Maxwell'sche Gleichungen (Ampèresches Gesetz, Faradaysches Gesetz, Divergenzfreiheit der magnetischen Induktion) in quasistationärer Näherung (7)
- Ohmsches Gesetz (3)
- Lineares magnetisches Verhalten der Werkstoffe (3)

Die quasistationäre Näherung der Maxwell-Gleichungen kann gewählt werden, da der Zeitmaßstab der zu erwartenden Phänomene erheblich größer ist als der, der über die charakteristische Länge ($\sim 1m$) und die Lichtgeschwindigkeit festgelegt ist. Die Näherung impliziert, daß die elektromagnetische Abstrahlung über den Zeitraum des induktiv-resistiven Zerfalls des Plasmastroms keinen Einfluß auf die betrachteten Vorgänge hat. Formelmäßig stellen sich die Basisgleichungen der MHD folgendermaßen dar (Cap [81]):

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.3)$$

Impulsbilanz:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} + \boxed{\vec{j} \times \vec{B}} \quad (3.4)$$

Quasistationäre Maxwell-Gleichungen

Divergenzfreiheit der magnetischen Induktion:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.5)$$

Ampèresches Gesetz (Durchflutungsgesetz):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3.6)$$

Faradaysches Gesetz (Induktionsgesetz):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (3.7)$$

Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}^{int} + \vec{E}^{ext} + \boxed{\vec{v} \times \vec{B}} = \eta \cdot \vec{j} \quad (3.8)$$

Lineares magnetische Materialverhalten:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.9)$$

Die umrahmten Terme in den Gleichungen (3.4) und (3.8) stellen die Kopplung zwischen der Fluid-dynamik und der Elektrodynamik dar. In der Impulsgleichung sind dies die Lorentz-Kräfte und im Ohmschen Gesetz die Bewegungsinduktivität. Für eine toroidale Anordnung wie im Tokamak, also in den Zylinderkoordinaten (R, Θ, z) gilt für den Drucktensor \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Dies folgt der anisotropen Temperatur, die ein Plasma in der Gegenwart eines Magnetfeldes besitzt. Die Temperaturen und Drücke parallel - Index \parallel - und senkrecht - Index \perp - zu den magnetischen Oberflächen sind somit ebenfalls unterschiedlich. Für die Zustandsgleichung, die einen Zusammenhang zwischen thermodynamischem Druck, der Dichte und der Temperatur herstellt, gilt nach Cap [81]:

$$p = nkT \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{24\pi n \lambda_D^3} \right) \quad (3.10)$$

Dies ist eine Zustandsgleichung für ein ideales Gas, die um den Einfluß der Coulomb-Kräfte korrigiert ist. Hierin ist λ_D die Debye-Länge oder Abschirmlänge:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{nq_e}}.$$

Dies ist der Abstand von einem geladenen Teilchen, bei dem die Energie des elektrischen Feldes gleich der Energie der thermischen Bewegung ist. Man kann nur dann von einem Plasma sprechen, wenn λ_D viel kleiner ist als eine charakteristische Abmessung l des Systems. Ist dies nicht der Fall, kann das Plasma nach Birzvalks [82] auch nicht quasineutral sein. Für ein ideales Plasma gilt

$$n\lambda_D^3 \gg 1,$$

so daß hierfür die Zustandsgleichung des Plasmas in die Zustandsgleichung des idealen Gases übergeht. Für das ausgekühlte Fusionsplasma erhält man dagegen für den Korrekturfaktor

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{24\pi n \lambda_D^3} \right) \approx 0.99.$$

Für die Matrix des spezifischen elektrischen Widerstands gilt aufgrund der anisotropen Temperatur:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\perp} \end{bmatrix}$$

3.3 Konvektions-Diffusions-Gleichung für den magnetischen Fluß

Die Maxwell-Gleichungen (3.6) - (3.7), das Ohmsche Gesetz (3.8) und die Gleichung für das lineare magnetische Materialverhalten (3.9) lassen sich in einer Gleichung für den magnetischen Fluß zusammenfassen. Diese Herleitung soll im folgenden gezeigt werden. Da für jeden beliebigen Vektor \vec{a}

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) \equiv 0$$

gilt, kann man für die magnetische Induktion \vec{B} ein magnetisches Vektorpotential \vec{A} definieren

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B},$$

mit dem die Divergenzfreiheit von \vec{B} (Gleichung (3.5)) implizit erfüllt ist. Mit dem Ampèreschen Gesetz (Gleichung (3.6)) und dem linearen magnetischen Materialverhalten (Gleichung (3.9)) erhält man

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}.$$

Dies läßt sich auch schreiben als

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.11)$$

mit dem Laplace-Operator Δ . Da das Feld \vec{B} durch unendlich viele Potentiale \vec{A} darstellbar ist, hat man die Freiheit, eine Eichtransformation durchzuführen. Das Feld \vec{B} ist dabei eichinvariant. Nach Lehner [83] ist eine geeignete Eichung für das vorliegende Problem die sogenannte Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Damit erhält man aus Gleichung (3.11) eine Poisson-Gleichung für das magnetische Vektorpotential

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (3.12)$$

Mit dem Faradayschen und dem Ohmschen Gesetz (Gleichungen (3.7) und (3.8)) erhält man unter Verwendung von Gleichung (3.3)

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \vec{A} \right] = \vec{0}$$

und daraus schließlich eine Konvektions-Diffusions-Gleichung für das magnetische Vektorpotential

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \vec{A} = \nabla \phi. \quad (3.13)$$

Darin ist der Gradient des elektrischen Potentials ϕ enthalten, der in der MHD aber nur bei von außen angelegten Spannungen zum tragen kommt.

Alternativ zu Gleichung (3.13) läßt sich durch Kombination der Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.8) eine Konvektions-Diffusions-Gleichung für die magnetische Induktion \vec{B} herleiten. Diese beinhaltet jedoch nicht die Divergenzfreiheit der magnetischen Induktion. Erst mit der Einführung eines Vektorpotentials wird die Divergenzfreiheit implizit gewährleistet. Die damit erhaltene Formulierung ist jedoch identisch mit Gleichung (3.13).

3.4 Kennzahlen der MHD

In der MHD werden wie in der klassischen Fluidodynamik dimensionslose Kennzahlen zur Klassifizierung verschiedener Einflüsse verwendet. Die Größenordnungen der im folgenden vorgestellten Kennzahlen sind für ein ausgekühltes Fusionsplasma, also nach Verlust der thermischen Energie, näherungsweise angegeben. Dazu müssen zunächst charakteristische Größen festgelegt werden. Die hier verwendete charakteristische Länge beträgt $1m$, die charakteristische magnetische Induktion $B = 5T$, die charakteristische Dichte $\rho = 10^{-6} kg/m^3$ bzw. $n = 10^{20} \frac{1}{m^3}$ und der charakteristische elektrische Widerstand $\eta = 2.5 \cdot 10^{-5} \Omega m$ bei einer Elektronentemperatur von $10eV$ (vgl. Kapitel 4.4.2). Die charakteristische kinematische Viskosität eines voll ionisierten Plasmas berechnet sich nach Simon [84] und nach Longmire und Rosenbluth [85] zu

$$\nu = \frac{0.406 \cdot \sqrt{m_p} (kT)^{\frac{5}{2}}}{n \cdot Z_{eff}^4 e^4 \cdot \ln \Lambda} \approx 10^{-7} \frac{m^2}{s}.$$

In dieser Gleichung bedeutet Z_{eff} die effektive Kernladungszahl und $(\ln \Lambda)$ der Coulomb-Logarithmus. (vgl. Kapitel 4.4.2). Für die Abschätzung der kinematischen Viskosität wurde für Z_{eff} der Wert 4 und für $(\ln \Lambda)$ der Wert 15 gewählt. Für die Festlegung der charakteristischen Geschwindigkeit wird das Szenario eines VDE verwendet. Im ITER-Reaktor wird das Plasma dabei typischerweise in $10ms$ einen Weg von $4m$ zurücklegen. Daraus ergibt sich eine charakteristische Geschwindigkeit von

$$v = \frac{4 m}{10^{-2} s} = 400 \frac{m}{s}.$$

Im folgenden werden die Kennzahlen als Verhältnis wichtiger Transportgrößen oder Kräfte erklärt:

- magnetische Reynoldszahl:

$$R_M = \frac{\text{konvektiver Transport des Magnetfeldes}}{\text{Magnetfelddiffusion}} = \frac{\mu_0 v l}{\eta} = \frac{l v}{D}$$

Für ein sehr gut leitendes Material (z.B. das heiße Fusionsplasma) geht die magnetische Reynoldszahl gegen unendlich. Dies bedeutet, daß ein äußeres Magnetfeld bei einer Bewegung der Materie nicht in die Materie eindringt, bzw. daß das eigene Magnetfeld konvektiv mittransportiert wird (eingefrorenes Magnetfeld (vgl. Kapitel 3.1)). Im Gegensatz dazu ist für ein schlecht leitendes Material die magnetische Reynoldszahl wesentlich kleiner. Ein äußeres Magnetfeld kann das Material also relativ schnell durchdringen. Für die Tokamak-relevanten Parameter erhält man im heißen Zustand

$$R_M \approx 5 \cdot 10^4 \quad (T_{eV} = 5000eV)$$

und im ausgekühlten Zustand

$$R_M \approx 1 \quad (T_{eV} = 10eV).$$

Das bedeutet, daß im ausgekühlten Fall beide Vorgänge, die Konvektion und die Diffusion des Magnetfeldes, einen gleich großen Einfluß haben.

- Interaktionszahl:

$$N = \frac{\text{elektromagnetische Kräfte}}{\text{konvektive Trägheitskräfte}} = \frac{lB^2}{\mu\rho v}$$

In einem Tokamak erhält man

$$N \approx 4 \cdot 10^{10}.$$

Daraus folgt, daß die konvektiven Trägheitskräfte nur eine untergeordnete Rolle spielen, also vernachlässigbar sind.

- Hartmannzahl:

$$M = \frac{\text{elektromagnetische Kräfte}}{\text{Reibungskräfte}} = \frac{lB}{\sqrt{\eta\rho v}}$$

Im Tokamak beträgt die Hartmannzahl ungefähr

$$M \approx 10^9,$$

die Reibungseffekte sind demnach ebenfalls vernachlässigbar.

- Mach-Zahl

$$Ma = \frac{\text{Fluidgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} = \frac{v}{c}$$

Die Schallgeschwindigkeit eines Wasserstoff-Plasmas kann nach Chen [80] mit

$$c_{Plasma} = \left(\frac{kT_e}{m_i} \right) \approx 10^4 \cdot (T_{eV})^{1/2} \frac{m}{s}$$

berechnet werden. Für ein ausgekühltes Plasma läßt sich daraus eine Schallgeschwindigkeit von

$$c_{plasma} \approx 22\,000 \frac{m}{s}$$

herleiten. Die Mach-Zahl für die vertikale Auslenkung während einem VDE beträgt somit

$$Ma \approx 0.017 \ll 0.1.$$

Die Mach-Zahl gibt üblicherweise Auskunft über den Einfluß der Kompressibilität. Beim Fusionsplasma spielt der Einfluß der Kompressibilität bei der horizontalen und der vertikalen globalen Plasmabewegung eine unterschiedliche Rolle. Der Grund dafür ist, daß durch eine radiale Bewegung des Plasmas im toroidalen Magnetfeld nach innen poloidale Spannungen induziert werden. Diese haben poloidale Ströme zur Folge, die das Plasma wegen der Forderung nach Erhaltung des magnetischen Flusses Ψ^{tor} adiabatisch komprimieren, bis wieder ein Gleichgewicht hergestellt ist. Eine der ersten Arbeiten zur adiabatischen Kompression von Plasmen in Tokamaks stammt von Furth und Yoshikawa [86]. Für die Flußerhaltung gilt

$$\Psi^{tor} \propto B_{tor} \cdot a^2 = \text{const}$$

Mit einem Toroidalfeld, das sich proportional zu $\frac{1}{R}$ verhält, erhält man

$$a^2 \propto R.$$

Würde man das Plasma dagegen als inkompressibel betrachten, würde mit Hilfe der Volumenkonstanz die Beziehung

$$a^2 \propto \frac{1}{R}$$

gelten. Bei einer Vertikalbewegung des Plasmas tritt dieser komprimierende Effekt nicht auf, da in dieser Richtung das toroidale Magnetfeld homogen ist. Dies bedeutet, daß das Plasma in vertikaler Richtung als inkompressibel betrachtet werden kann. In radialer Richtung muß eine Korrektur gemäß der obigen Beziehung eingeführt werden (vgl. auch Hutchinson [87]).

3.5 Reduzierte MHD-Gleichungen

Aus der Größe der Kennzahlen und den vorgestellten Überlegungen ergeben sich schließlich die folgenden Vereinfachungen:

- (1) Aufgrund experimenteller Beobachtungen des Stromprofils kann angenommen werden, daß das Plasma während der Disruption rotationssymmetrisch bleibt. Für die zweidimensionale Modellierung der Plasmadisruption spricht zudem der ansonsten untragbare Rechenaufwand. Die Lösungsgrößen für das Plasma müssen somit nur noch in der $R - z$ -Ebene bestimmt werden. Das ursprüngliche dreidimensionale magnetische Vektorpotential reduziert sich auf den skalaren magnetischen Fluß:

$$\vec{A} = (0, \Psi, 0)^T = \Psi \cdot \vec{e}_\phi$$

Darin ist \vec{e}_ϕ der Einheitsvektor in toroidaler Richtung. Für die Plasmageschwindigkeit gilt bei der zweidimensionalen Formulierung

$$\vec{v} = (u, 0, w)^T,$$

und für den Gradienten des elektrischen Potentials

$$\nabla\phi = (0, \varphi, 0)^T.$$

- (2) Konvektive Trägheitskräfte sind aufgrund der hohen Interaktionszahl in der Impulsbilanz des Fluids vernachlässigbar.
- (3) Das Plasma wird aufgrund der kleinen Mach-Zahl bei einer Vertikalbewegung als inkompressibel angenommen. Bei einer radialen Plasmabewegung muß eine Korrektur eingeführt werden, die die oben beschriebene adiabatische Kompression berücksichtigt.
- (4) Da die Verformung des Plasmas für die hier angestrebten Untersuchungen nur eine untergeordnete Rolle spielt, wird für die Plasmabewegung ein Starrkörperansatz verwendet.
- (5) Durch die sehr große Hartmannzahl kann das Plasma als reibungsfrei betrachtet werden.
- (6) Der poloidale Anteil des Plasmastroms hat wenig Einfluß auf die Elektrodynamik in der Struktur. Dies kommt daher, daß diese Ströme über dem Plasmaquerschnitt ihr Vorzeichen ändern. Die integrale induktive Wechselwirkung mit der Struktur geht damit gegen Null. Die betragsmäßige Größe der poloidalen Ströme ist zudem wesentlich geringer als die des toroidalen Stroms. Die poloidalen Ströme beim Plasma-Wand-Kontakt, sogenannte „halocurrents“, werden hier ebenfalls nicht explizit berücksichtigt. In Kapitel 5.2.2 wird jedoch eine Modellannahme für den Einfluß dieser Ströme auf die Plasmabewegung vorgestellt.

Die oben genannten Vereinfachungen führen unter Verwendung eines Zylinderkoordinatensystems (R, Θ, z) auf die folgenden reduzierten MHD-Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung für das inkompressible Plasma:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(Ru)}{\partial R} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

Reibungsfreie **Impulsgleichung** ohne konvektive Trägheitsterme in Zylinderkoordinaten:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(Rp)}{\partial R} = F_R^* \quad (3.15)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = F_z^* \quad (3.16)$$

Da ein Starrkörperansatz für das Plasma gewählt wird (vgl. Kapitel 4.8.3), reduzieren sich die Impulsgleichungen auf

$$\rho \frac{du}{dt} = F_R^* \quad (3.17)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = F_z^* \quad (3.18)$$

Hierin bedeuten F_R^* bzw. F_z^* die radialen bzw. vertikalen Lorentz-Kraftdichten. Die Berechnung dieser Kraftdichten wird im Kapitel 4.8.1 vorgestellt. Dieser Ansatz, durch den sich der Rechenaufwand erheblich reduziert, beinhaltet, daß sich die Oberfläche des Plasmas während der Disruption nicht ändert.

Konvektions-Diffusions-Gleichung für den magnetischen Fluß

Der Übergang vom dreidimensionalen magnetischen Vektorpotential \vec{A} auf eine Gleichung für den skalaren Fluß Ψ wird im folgenden vorgeführt. Gleichung (3.13) lautet

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \vec{A} = \nabla \phi.$$

Der Laplace-Operator Δ hat in Zylinderkoordinaten die folgende Form:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Der konvektive Term $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})$ kann umgeschrieben werden zu

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (3.19)$$

Für den rotationssymmetrischen, zweidimensionalen Fall verschwinden der erste, dritte und vierte Term der rechten Seite von Gleichung (3.19). Es folgt somit die Beziehung

$$\vec{v} \times (\nabla \times \Psi \vec{e}_\Theta) = -\vec{v} (\nabla \Psi) \cdot \vec{e}_\Theta. \quad (3.20)$$

Damit und mit

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

erhält man schließlich die Konvektions-Diffusions-Gleichung für den toroidalen magnetischen Fluß Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \Psi) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \Psi = \varphi \quad (3.21)$$

Um die Gleichung (3.21) für ein definiertes Problem lösen zu können, müssen passende Anfangsbedingungen vorgeschrieben werden. Als Randbedingung für das Problem wird vorgeschrieben, daß über die Berandung des Plasmas zum Vakuum kein Strom fließt.

Anfangsbedingungen

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Plasma in Ruhe. Die globale Plasmabewegung ist also Null.

$$\vec{v}(\vec{r}, t = t_0) = 0$$

mit

$$\vec{r} = (R, 0, z)^T$$

Der Plasmastrom bzw. dessen räumliche Verteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ muß aus experimentellen Daten gewonnen werden (hier aus Pautasso [64]) oder aber aus Rechnungen, mit denen ein Plasmagleichgewicht bestimmt wird (hier: Zohm [88] und Portone [89]). Das Profil der toroidalen Stromdichte über dem poloidalen Querschnitt A_P läßt sich schreiben als

$$j(\vec{r}, t = t_0) = j_0 \cdot Z_j(\vec{r})$$

mit

$$\int_{A_P} Z_j(\vec{r}) dA_P = 1; \quad Z_j(\vec{r} = \vec{r}|_B) = 0.$$

Dabei ist $Z_j(\vec{r})$ eine beliebige Formfunktion für die Stromverteilung. Die Formfunktion $Z_j(\vec{r})$ wird mittels eines Produktansatzes in zwei Formfunktionen für die Koordinatenrichtungen R und z aufgespalten:

$$Z_j(\vec{r}) = [f_R(R) \cdot f_z(z)]^\lambda. \quad (3.22)$$

Für die Funktionen $f_R(R)$ und $f_z(z)$ werden harmonische Ansätze

$$f_R(R) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{R - R_1}{R_2 - R_1} \right)^{\lambda_R} \right] \right\}$$

$$f_z(z) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^{\lambda_z} \right] \right\}$$

gewählt. (R_1, z_1) bzw. (R_2, z_2) sind darin die Koordinaten des Plasmarandes bei einem horizontalen oder vertikalen Schnitt durch das Plasma. Mit dem Parameter λ wird die Steilheit bzw. Abflachung des Profils vorgegeben, die Parameter λ_R und λ_z dienen zur Festlegung der Position des Maximums (R_{max} bzw. z_{max}), also letztlich zur Festlegung der magnetischen Achse (vgl. Kapitel 4.6):

$$\lambda_R = \frac{-\log(2)}{\log \left[\frac{R_{max} - R_1}{R_2 - R_1} \right]}$$

$$\lambda_z = \frac{-\log(2)}{\log \left[\frac{z_{max} - z_1}{z_2 - z_1} \right]}$$

Diese Parameter - insbesondere λ - müssen so bestimmt werden, daß die anfängliche interne Induktivität des Plasmas l_i mit der von Experimenten oder Vorgaben übereinstimmt. Damit ist gewährleistet, daß das Stromprofil und der magnetische Energieinhalt mit den Größen des realen Plasmas übereinstimmt.

Die interne Induktivität des Plasmas liefert eine Aussage über das Stromprofil im Plasma. Für ein flaches Profil ist der Wert klein (≈ 0.5) und wird größer, je spitzer das Profil ist. Die Berechnung der internen Induktivität pro Einheitslänge erfolgt nach Shafranov [90] oder Blum [91] über die magnetische Energie im Plasma:

$$l_i = \frac{2}{\langle R \rangle \cdot \mu_0^2 I_P^2} \int_{V_P} B_P^2 dV_P$$

und nach Integration um den Umfang

$$l_i = \frac{4\pi}{\langle R \rangle \cdot \mu_0^2 I_P^2} \int_{A_P} B_P^2 R dA_P. \quad (3.23)$$

$\langle R \rangle$ ist darin der über das Plasmavolumen gemittelte Hauptradius

$$\langle R \rangle = \frac{1}{V_P} \int_{V_P} R dV_P,$$

I_P der integrale toroidale Plasmastrom und B_P die poloidale magnetische Induktion aufgrund des Plasmastroms. V_P bzw. A_P sind das Plasmavolumen bzw. dessen poloidale Querschnittsfläche.

Im folgenden Kapitel wird vorgestellt, wie ein Gleichgewicht des Plasmas rechnerisch bestimmt werden kann. Dieses Gleichgewicht kann dann als Grundlage zur Bestimmung der Formfunktionen und der entsprechenden Exponenten benutzt werden.

3.6 Das Plasmagleichgewicht

Für die Gleichgewichtsrechnung wird von einem ruhenden Plasma ausgegangen. Aus der Impulsbilanz erhält man ein Gleichgewicht aus Lorentzkraft und Druckgradient (vgl. Schumacher [2]):

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} j_R \\ j_{tor} \\ j_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_R \\ B_{tor} \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Der Zusammenhang zwischen magnetischem Fluß und magnetischer Induktion für den dreidimensionalen Fall lautet

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\vec{B} = \frac{1}{R} \nabla \Psi \times \vec{e}_\phi + \frac{f}{R} \vec{e}_\phi,$$

worin

$$f = RB_{tor}$$

bedeutet. Mit dem Ampèreschen Gesetz (Gleichung (3.6)) läßt sich folgender Ausdruck für die Stromdichte herleiten:

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{tor}}{\partial z} \vec{e}_R + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) \vec{e}_\Theta + \frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_{tor}) \vec{e}_z$$

und daraus

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_R + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) \right] \vec{e}_\Theta + \frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial f}{\partial R} \vec{e}_z.$$

Mit dem elliptischen Operator Δ^*

$$\begin{aligned} \Delta^* &= -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \cdot}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \cdot}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial^2 \cdot}{\partial R^2} - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial R} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

vereinfacht sich die Schreibweise zu

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 R} \nabla f \times \vec{e}_\Theta + \Delta^* \Psi \vec{e}_\Theta.$$

In der Impulsgleichung (3.24) werden die Ausdrücke für \vec{B} und \vec{j} ersetzt und man erhält

$$\nabla p = \frac{\Delta^* \Psi}{R} \nabla \Psi - \frac{f}{\mu_0 R^2} \nabla f.$$

Mit den Notationen

$$\frac{\nabla p}{\nabla \Psi} = \frac{\partial p}{\partial \Psi}$$

und

$$\frac{\nabla f}{\nabla \Psi} = \frac{\partial f}{\partial \Psi}$$

folgt schließlich die Grad-Shafranov-Gleichung für das Plasma Gleichgewicht:

$$\Delta^* \Psi = R \frac{\partial p}{\partial \Psi} + \frac{1}{\mu_0 R} f \frac{\partial f}{\partial \Psi}. \quad (3.25)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich aufgrund von Vorgaben, wie z.B. der externen magnetischen Felder, die Plasmaform und die Stromverteilung im Plasma für einen Gleichgewichtszustand ermitteln. So ein berechnetes Gleichgewicht kann als initiales Plasma für den hier betrachteten Vorgang der Disruption dienen.

3.7 Energetische Betrachtungen

Die Energiebilanz für ein Fusionsplasma kann nach Nishikawa und Wakatani [92] allgemein getrennt für Elektronen und Ionen geschrieben werden:

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} (n_e T_e) = P_{Ohm} + P_A^e + \frac{1}{4} n_i^2 \langle \sigma v \rangle U_{\alpha e} - Q_{ie} - P_{rad} - \frac{3}{2} \frac{n_e T_e}{\tau_E^e} \quad (3.26)$$

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} (n_i T_i) = P_A^i + Q_{ie} + \frac{1}{4} n_i^2 \langle \sigma v \rangle U_{\alpha i} - \frac{3}{2} \frac{n_i T_i}{\tau_E^i} \quad (3.27)$$

Hierin bedeuten P_{Ohm} die Ohmsche Verlustleistung, P_{rad} die Strahlungsverluste (nur wichtig für die Elektronen), Q_{ie} die Stoßverluste zwischen Elektronen und Ionen, P_A die extern eingetragene Energie der Plasmaheizung, $\frac{1}{4} n_i^2 \langle \sigma v \rangle U_{\alpha}$ die eingetragene Energie durch Fusionsreaktionen, $\langle \sigma v \rangle$ die Fusionsreaktionsrate und $\frac{3}{2} \frac{nT}{\tau_E}$ die energetischen Verluste durch die beschränkte Einschlußzeit, d.h. die thermischen Verluste des Plasmas. Einem gezündeten Plasma wird keine Energie mehr von außen zugeführt. Nach einem „energy-quench“ finden außerdem keine Fusionsreaktionen mehr statt, so daß der Energiebeitrag aus der Fusionsreaktion entfällt. Übrig bleiben also noch die ohmsche Dissipation, Strahlungsverluste, Stoßverluste und Verluste bedingt durch die beschränkte Einschlußzeit. Geht man von einer gleichen Anzahl und einer gleichen Temperatur der Elektronen und Ionen aus, können die Gleichungen (3.26) und (3.27) addiert werden. Die Verluste durch elastische Stöße Q_{ie} zwischen Elektronen und Ionen heben sich gegenseitig auf. Nimmt man noch eine relativ lange Einschlußzeit des Plasmas an, was für zukünftige Reaktoren eine Voraussetzung ist, erhält man schließlich die folgende vereinfachte Energiegleichung:

$$3 \frac{d}{dt} (nT) = P_{Ohm} - P_{rad} = P_{quench} \quad (3.28)$$

Während der ersten Phase der Disruption, dem „energy-quench“, nimmt die Plasmatemperatur sehr stark ab. Die Temperaturverteilung über dem Plasmaquerschnitt vergleichmäßig sich (Pautasso et al. [93]). Nach der TFR-Group [94], Yamazaki und Schmidt [95] oder Janos et al. [56] steht die ohmsche Dissipation während des „current-quench“ jedoch weitgehend im Gleichgewicht mit der abgestrahlten Leistung, so daß P_{quench} relativ klein und im allgemeinen negativ ist. Während des „current-quench“ nimmt die Temperatur also nur noch sehr langsam ab. Die durch ohmsche Dissipation eingebrachte Energie und die restliche innere Energie werden über den Plasmarand abgestrahlt. Um ein konsistentes Temperatur- und damit Widerstandsverhalten des Plasmas über die Disruption zu erhalten, müßte Gleichung (3.28) simultan mit den elektromagnetischen Gleichungen und der Impulsgleichung gelöst werden. Da die zeitabhängigen Verlustterme jedoch nur durch empirische, relativ willkürliche Annahmen beschrieben werden können, wird hier auf die Lösung der Energiegleichung verzichtet und das Temperaturverhalten der Plasmas vorgegeben. Mit der Annahme einer konstanten Teilchendichte über dem Querschnitt des Kernplasmas und mit dem Gleichgewicht von erzeugter Leistung und abgestrahlter Leistung folgt ein isothermes Plasma. Gleichung (3.28) läßt sich damit vereinfacht in zylindrischen Koordinaten darstellen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{1}{R} \frac{\partial (RT)}{\partial R} + w \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

Anfangsbedingungen für die Plasmatemperatur

Für die Temperaturverteilung im heißen Plasma wird die folgende Verteilungsfunktion verwendet:

$$T(\vec{r}, t = t_0) = T_{min} + (T_{max} - T_{min}) \cdot Z_T(\vec{r})$$

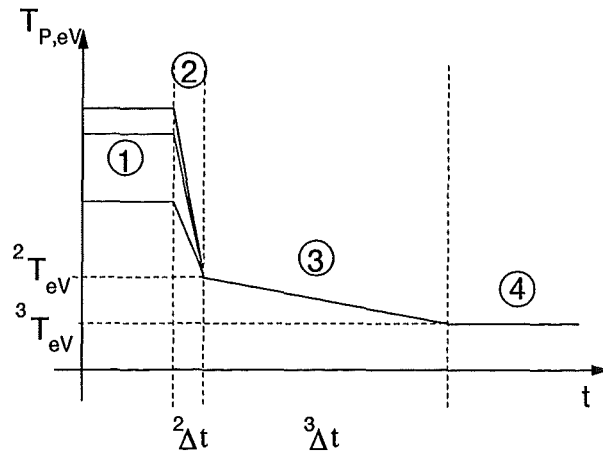


Abbildung 3.1: Zeitverlauf der Plasmatemperatur

mit

$$\int_{A_P} Z_T(\vec{r}) dA_P = 1; \quad Z_T(\vec{r} = \vec{r}|_B) = 0$$

$Z_T(\vec{r})$ ist eine Formfunktion für die zweidimensionale Verteilung der Plasmaelektronentemperatur. Diese wird analog zu der Formfunktion für die Stromverteilung im Plasma (Gleichung 3.22) berechnet.

Zeitverlauf der Plasmatemperatur

Die isotherme Eigenschaft des Plasmas wäre näherungsweise nur für die Phase des „current-quench“ gültig. Da für die meisten Analysen jedoch der „energy-quench“ mit beschrieben werden muß, wurde für das Orts-Zeitverhalten der Plasmatemperatur die folgende Annahme getroffen: Der Temperaturverlauf wird in 4 Phasen eingeteilt. Während der Phase ① besitzt das Plasma ein Temperaturprofil. Die Randzonen sind relativ kalt gegenüber dem Kernplasma. Während dieser Phase wird das Temperaturprofil konvektiv mit dem Plasma mitbewegt. Tritt der „energy-quench“ ein, fällt die Plasmatemperatur in der Zeit ${}^2\Delta t$ auf einen konstante Verteilung mit der Temperatur ${}^2T_{eV}$ ab (Phase ②). P_{quench} ist während ${}^2\Delta t$ also relativ groß. Daran schließt sich die Phase ③ an. Hier findet der eigentliche „current-quench“ statt. P_{quench} ist jetzt klein, so daß die Plasmatemperatur langsam in der Zeit ${}^3\Delta t$ auf ${}^3T_{eV}$ abnimmt. Nach dieser Phase wird die Plasmatemperatur konstant auf dem Wert ${}^3T_{eV}$ gehalten (Phase ④).

Kapitel 4

Lösung der Gleichungen für das Plasma

Die Gleichungen der Plasmabewegung (3.17) und (3.18), die Konvektionsgleichung der Plasmatemperatur (3.29) und die Gleichung der Elektrodynamik (3.21) werden im folgenden zu jedem Zeitpunkt getrennt voneinander gelöst. Dabei wird für die Plasmabewegung eine Leapfrog-Zeitintegration und für die Elektrodynamik ein Finite-Elemente-Verfahren eingesetzt. Die Kopplung der beiden Gleichungen erfolgt über den Term der Lorentz-Kraft $\vec{j} \times \vec{B}$ in der Impulsgleichung sowie über die Bewegungsinduktivität $\vec{v} \times \vec{B}$ in der Konvektions-Diffusions-Gleichung des magnetischen Flusses. Die Beschreibung des freien Plasmarandes erfolgt mit einer VOF¹-Methode.

Vorteile:

- Die FEM erlaubt eine einfache und vollständige induktive Kopplung von Plasma und Struktur. Des weiteren werden bei dieser Methode die Gleichungen nur im interessierenden Plasmagebiet, nicht jedoch im Vakuum gelöst (vgl. Kapitel 4.3 und Kapitel 5.1).
- Die anfallende Induktivitätsmatrix und deren räumliche Ableitungen müssen nur einmal berechnet werden, da mit dem Eulerschen Koordinatensystem das Rechnetz für das Plasma trotz dessen Bewegung ortsfest ist.
- Das VOF-Verfahren für die Beschreibung des Plasma-Vakuum Randes führt zu einer sehr guten und schnellen Reproduktion (vgl. Kapitel 4.2.1).

Nachteile:

- Die Berechnung der Induktivitätsmatrix und deren räumliche Ableitungen bedeutet ein relativ hoher Rechenaufwand und Speicherplatzbedarf.
- Aufgrund des festen, nicht mitbewegten Rechengitters muß die Widerstandsmatrix zu jedem Zeitschritt neu berechnet werden. Dies bedeutet, daß die Systemmatrix zeitabhängig ist und somit zu jedem Zeitpunkt neu bestimmt werden muß.

¹Volume-Of-Fluid

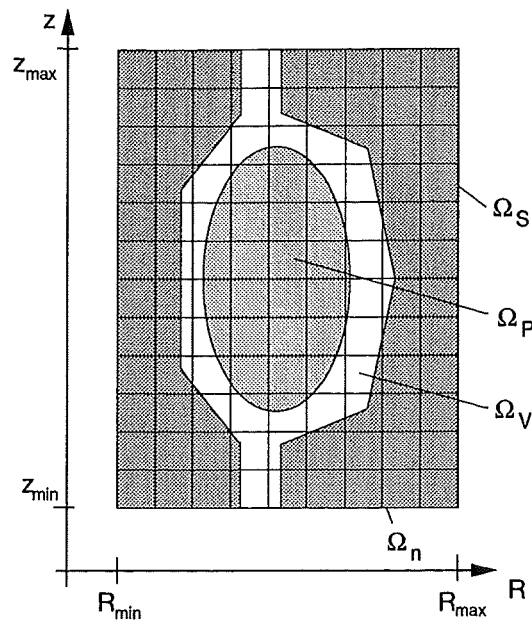


Abbildung 4.1: Aufteilung der verschiedenen Gebiete

4.1 Das Rechengetz für das Plasma

Der Bereich des Reaktors, in dem sich das Plasma befindet, wird hier mit einem kartesischen Gitter diskretisiert. Da es keine ausgezeichneten Regionen gibt, in denen eine besonders feine Diskretisierung von Nöten ist, wird das Rechengitter äquidistant gewählt. Das FE-Modell der äußeren Strukturen ist aber krummlinig, so daß es Bereiche gibt, in denen sich das Rechengitter des Plasmas und die finiten Elemente der Struktur überschneiden. Diese Regionen müssen vor allem beim Kontakt von Plasma und Struktur besonders berücksichtigt werden.

Das gesamte zweidimensionale Rechengebiet wird als Ω bezeichnet. Ω wird durch (R_{min}, z_{min}) und (R_{max}, z_{max}) begrenzt und besteht aus den Teilgebieten Ω_n , den einzelnen Gitterzellen.

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{(NI \cdot NJ)} \Omega_n$$

NI und NJ sind die Anzahl der Gitterpunkte in radialer bzw. vertikaler Richtung. Ω wird in drei physikalische Gebiete unterteilt (vgl. Abbildung 4.1): $\Omega_P(t)$ ist das Gebiet, das vom poloidal-radialen Plasmaquerschnitt eingenommen wird, $\Omega_V(t)$ das Vakuumgebiet und Ω_S das Strukturgebiet. Die Zeitabhängigkeit von Ω_P und Ω_V ist in der Bewegung des Plasmas begründet. Es gilt:

$$\Omega = \Omega_P(t) \cup \Omega_V(t) \cup \Omega_S.$$

Der Flächeninhalt A eines Gebiets Ω wird definiert als

$$A = |\Omega|$$

und der Struktur-Füllgrad f_S einer Zelle Ω_n als

$$f_{S,n} = \frac{|\Omega_S \cap \Omega_n|}{|\Omega_n|}$$

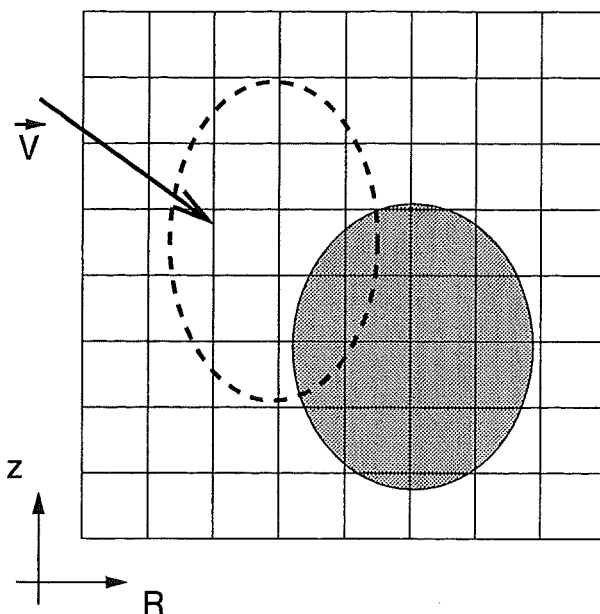


Abbildung 4.2: Bewegung des Plasmas auf einem kartesischen Gitter

bzw. der Plasma-Füllgrad f einer Zelle Ω_n als

$$f_n(t) = \frac{|\Omega_P(t) \cap \Omega_n|}{|\Omega_n|}$$

Die zentrale Schwierigkeit bei der Beschreibung der Plasmabewegung ist, daß das Plasma eine freie Oberfläche besitzt und sich über ein ortsfestes Gitter bewegt (vgl. Abbildung 4.2). So wird es notwendig, die Lage des Plasmas bzw. dessen Rand mit zu berechnen. Bewegte Oberflächen treten bei einer Vielzahl von physikalischen und technischen Problemstellungen auf, und entsprechend groß ist die Anzahl der Lösungsansätze hierfür. Im folgenden Kapitel werden einige dieser Ansätze kurz vorgestellt und der für die Plasmabewegung am besten geeignete ausgewählt.

4.2 Auswahl der Methode zur Plasma-Rand Beschreibung

Eine Methode zur Beschreibung von freien Rändern ist die sogenannte „boundary-integral technique“, wie sie unter anderem von Geller, Lee und Leal [96] verwendet wird. Bei dieser Methode werden Größen wie Ausdehnung und Druck des Fluids an der Oberfläche bestimmt. Diese Methode eignet sich für Probleme, bei denen die physikalischen Größen im Innern des untersuchten Gebiets nicht von Interesse sind, wie z.B. bei der Umströmung eines Schiffsrumpfes in wellenbewegtem Wasser. Hier sind lediglich der Druck an der Oberfläche, die Höhe der Wellen und die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zur Wasseroberfläche von Bedeutung, der Druck in einer gewissen Tiefe interessiert jedoch nicht.

Andere Methoden zur Beschreibung freier Oberflächen benutzen Finite-Elemente-Methoden (Bonnerot und Jamet [97] oder Lynch [98]), den Oberflächen angepaßte, orthogonale Koordinaten wie z.B. bei Ryskin und Leal [99] oder Kang und Leal [100] sowie Lagrange-Methoden (Fritts und Boris [101]). Diese Methoden eignen sich aber nicht zur Beschreibung von Faltungen sowie zum Verschmelzen der Oberfläche, und ihre Anwendbarkeit auf sehr stark verformte Oberflächen muß noch gezeigt werden.

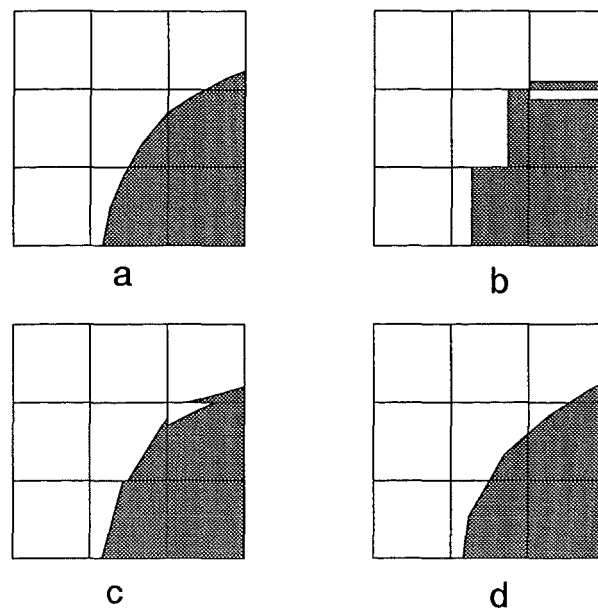


Abbildung 4.3: Vergleich der Randdarstellung verschiedener VOF-Methoden
(a: exakt; b: Hirt und Nichols; c: Youngs; d: FLAIR)

Eine ganz andere Kategorie von numerischen Methoden, die auch sehr starke Verformungen der Oberfläche sowie deren Verschmelzung und Faltung handhaben können, sind Volumen-behandelnde Methoden. Diese Methoden nutzen eine volumetrische Prozess-Variable wie z.B. massenlose Markierungspartikel in der MAC²-Methode von Harlow und Welch [102], und die Fluidfraktion der Zellen in den VOF-Methoden von Hirt und Nichols [103], Noh [104] oder Ashgriz und Poo [105], für den lagrangeschen Transport der Oberfläche. Bei den MAC-Methoden werden hierzu die Navier-Stokes bzw. bei Vernachlässigung der Viskosität die Euler-Gleichungen gelöst. Die Geschwindigkeit eines Markers wird dann aus dem Durchschnitt der Eulerschen Geschwindigkeiten in seiner Nachbarschaft ermittelt. Die Markierungspartikeldichte in den einzelnen Zellen kann hierbei willkürlich gewählt werden, was jedoch entscheidend für die Genauigkeit und für den Rechenaufwand ist.

Die VOF-Methoden sind im Gegensatz zur MAC-Methode einfacher in ihrer Anwendung und weniger rechenaufwendig. Bei der Repräsentierung der Oberfläche durch einen volumetrischen Parameter treten zwei generelle Schwierigkeiten auf. Die eine besteht in der exakten Lokalisierung und die andere in der Bewegung der Oberfläche. Für die Bewegung des Zell-Volumens wurden mehrere Möglichkeiten erarbeitet. Eine bewährte Methode ist die sogenannte „donor-acceptor“ Methode von Hirt und Nichols [103] oder Noh [104]. Hierbei wird die Orientierung der Oberfläche, die entweder als horizontal oder vertikal ausgerichtet angenommen wird, mit Hilfe der benachbarten Zellen ermittelt und dann die Oberfläche mit der Geschwindigkeit senkrecht zu ihrer Ausrichtung bewegt. Leider legt die „donor-acceptor“ Methode mehr Wert auf die Ausbreitung der Oberfläche als auf die Kontrolle des Volumens in einer Zelle. Deshalb müssen Methoden entwickelt werden, die diese Fehler unmittelbar wieder ausgleichen. Zum Beispiel muß bei Zellen, die nach der Bewegung Fluid-Fractionen von weniger als 0 oder mehr als 1 aufweisen, der Zellinhalt mit Hilfe einer Umverteilung zwischen den benachbarten Zellen wieder korrigiert werden.

Es wurden auch andere Methoden entwickelt, bei denen es gelang, die Genauigkeit der

²Marker-And-Cell

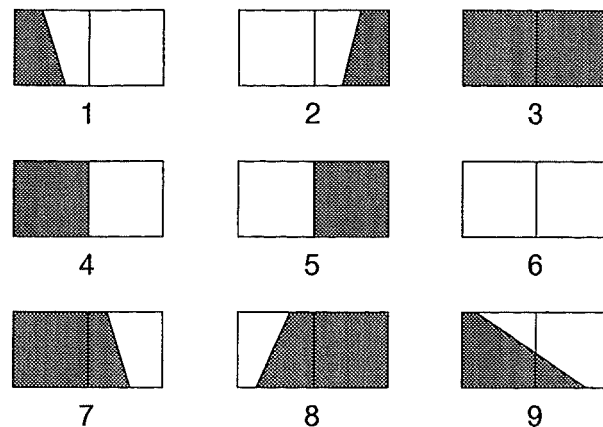


Abbildung 4.4: Mögliche Beziehungen zweier benachbarter Zellen

Oberflächendarstellung und ihrer Bewegung zu verbessern. Youngs [106] benutzt im Unterschied zur „donor-acceptor“ Methode geneigte Liniensegmente in jeder Zelle. Die Steigung der einzelnen Geraden in den Zellen wird mit Hilfe der Fluidanteile in den benachbarten Zellen ermittelt. Dann wird die angenäherte Oberfläche mit den lokalen Geschwindigkeiten in der Zelle bewegt.

Es ist offensichtlich, daß die Genauigkeit der Beschreibung eines bewegten Randes mit VOF-Methoden entscheidend von der exakten Ermittlung des Verlaufs der Oberfläche abhängt. Ashgriz und Poo [105] haben die Methode FLAIR³ vorgestellt, die die Steigung der Oberfläche immer an der Grenze zwischen zwei Zellen eines äquidistanten Gitters nur mit Hilfe der Fluidfraktionen in diesen Zellen ermittelt. Die Bewegung des Fluids wird dann durch Integration des bewegten Gebietes unter der Oberfläche berechnet. Bei dieser Methode wird also eine Finite-Volumen-Beschreibung der Füllfraktionen der einzelnen Gitterzellen verwendet. Die Kontinuität für die Füllfraktion f

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_n} f dA_n + \oint_{S_n} (\vec{v} \cdot \vec{f}) dS_n = 0$$

muß also für jede Zelle erfüllt werden. S_n ist der Rand einer Zelle.

Abbildung 4.3 zeigt die Ermittlung der Oberfläche durch verschiedene VOF-Methoden im Vergleich. Abbildung 4.3b zeigt die „donor-acceptor“ Methode von Hirt und Nichols [103], bei der die Orientierung der Oberfläche der Randzellen entweder horizontal oder vertikal ist. Bei Youngs [106] Methode (Abbildung 4.3c) hat jedes Randliniensegment eine Steigung, diese wird in jeder Zelle separat ermittelt. In der Methode von Ashgriz und Poo [105] schließlich (Abbildung 4.3d) wird der Oberflächenverlauf an der Grenze von zwei Zellen ermittelt. Aufgrund der genauen Beschreibung des Randes wurde die Methode von Ashgriz und Poo für das hier zu behandelnde Problem der Beschreibung der Plasmaoberfläche ausgewählt. Diese Methode soll im nächsten Kapitel genauer vorgestellt werden.

4.2.1 Die Methode FLAIR

Betrachtet man zwei benachbarte Zellen in Abbildung 4.2, so kann dem Zellpaar einer der in Abbildung 4.4 dargestellten Fälle zugeordnet werden. Wenn man nun die Füllmenge der linken Zelle als f_a und die Füllmenge der rechten Zelle als f_b bezeichnet, so gilt z.B. bei Fall 1: $0 < f_a < 1$ und $f_b = 0$, während z.B. bei Fall 9: $0 < f_a < 1$ und $0 < f_b < 1$ zutrifft. Da die anderen Fälle trivial

³FLAIR: Flux Line-segment model for Advection and Interface Reconstuction

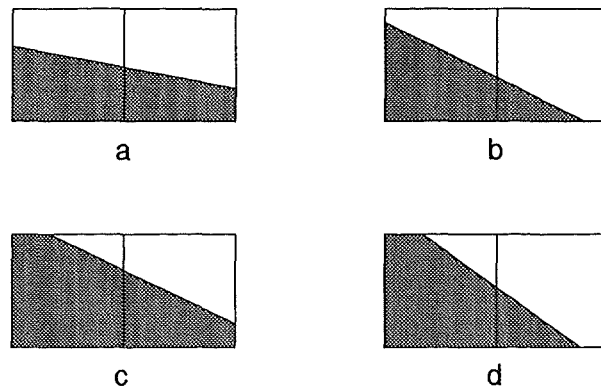


Abbildung 4.5: Mögliche Oberflächenverläufe für Fall 9

oder auf Fall 9 zurückzuführen sind, wird hier der Fall 9 als einziger betrachtet. Die Behandlung der anderen Fälle wird im Anhang B ausführlich dargestellt.

Man kann nun zwei Zellen immer so zueinander orientieren, daß $f_a \geq f_b$ ist. Unter dieser Voraussetzung können die in Abbildung 4.5 gezeigten vier Unterfälle für Fall 9 identifiziert werden. Hier verläuft bei Fall *a* die Oberflächenlinie von der linken Seitenwand zur rechten Seitenwand, bei Fall *b* von der linken Seitenwand zum Boden, bei Fall *c* von der oberen Wand zur rechten Seitenwand und schließlich bei Fall *d* von der linken oberen Wand zum Boden. Der Oberflächenverlauf läßt sich durch die lineare Funktion

$$y = ax + b \quad (4.1)$$

beschreiben, wobei der Ursprung des Koordinatensystems in der unteren linken Ecke der linken Zelle liegt. Die Konstanten a und b können nun wie folgt aus den bekannten Flächenfraktionen f_a und f_b ermittelt werden. Die Fläche unter der Linie berechnet sich allgemein aus

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1}{2}a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1). \quad (4.2)$$

Die hierbei auftretenden Integrationsgrenzen x_1 und x_2 müssen für die vier Unterfälle jeweils unterschiedlich gewählt werden.

Unterfall (a)

Bei einer Zellgröße von $h \times h$ ergibt sich für f_a mit den Integrationsgrenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = h$

$$f_a h^2 = \frac{1}{2}ah^2 + bh$$

und für f_b mit den Grenzen $x_1 = h$ und $x_2 = 2h$

$$f_b h^2 = \frac{3}{2}ah^2 + bh.$$

Löst man diese nach a und b auf, dann folgt

$$a = f_b - f_a \quad (4.3)$$

$$b^* = \frac{b}{h} = \frac{1}{2}(3f_a - f_b). \quad (4.4)$$

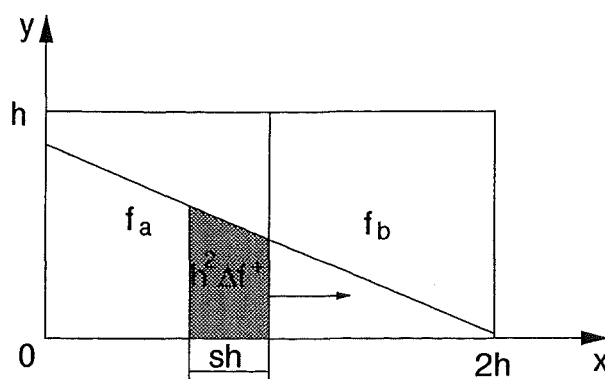


Abbildung 4.6: Fluidfluß zwischen zwei benachbarten Zellen

Nachdem nun die Oberfläche rekonstruiert ist, kann man das Fluidvolumen, welches von einer Zelle zur nächsten fließt, durch Integration unter der Linie bestimmen. Wenn man die dimensionslose Länge

$$s = u \frac{\Delta t}{h}$$

definiert, wobei Δt der Zeitschritt in der Rechnung und u die Geschwindigkeit in x -Richtung ist, so gelten für die Integrationsgrenzen für den Fluidfluß in positiver x -Richtung (siehe Abbildung 4.6)

$$\begin{aligned} x_1 &= h - s \cdot h \\ x_2 &= h. \end{aligned}$$

Damit berechnet sich der Fluidfluß über die Zellgrenze zu

$$\Delta f^+ = s \left(a + b^* - \frac{as}{2} \right). \quad (4.5)$$

Für den Fluß in die negative x -Richtung gilt analog

$$\Delta f^- = s \left(a + b^* + \frac{as}{2} \right). \quad (4.6)$$

Diese Rechnung läßt sich für die anderen Unterfälle (b), (c) und (d) von Fall 9 auf ähnliche Weise herleiten. Dies ist ebenfalls im Anhang B dargestellt.

Zur Berechnung des Fluidflusses für den Fall 9 wurde vorausgesetzt, daß $f_a > f_b$ ist. Um dies zu gewährleisten, müssen die Zellen paarweise daraufhin untersucht und gegebenenfalls für die Rechnung umbenannt werden. Die Gleichungen für den Fluidfluß in positive und negative x -Richtung müssen dann ebenfalls vertauscht werden. Somit ist eine Methode zur Beschreibung des Fluidflusses für den Fall 9 verfügbar, jedoch ist noch unbekannt, welchem der Unterfälle von Abbildung 4.5 das Zellpaar angehört. Dazu wird von Ashgriz und Poo [105] eine Methode vorgestellt, die wie die Flußberechnung nur auf den bekannten Volumenfraktionen f_a und f_b basiert.

Typidentifikation:

Am Beispiel des Unterfalls (a) aus Abbildung 4.5 wird die Typerkennung für den Fall 9 verdeutlicht. Aufbauend auf den Gleichungen (4.1), (4.3) und (4.4) läßt sich die Oberflächenlinie von Unterfall (a) als

$$y = (f_a - f_b)x + \frac{h}{2}(3f_a - f_b)$$

darstellen. Aus Abbildung 4.5a erkennt man, daß

$$h \geq y(0) = \frac{h}{2}(3f_a - f_b) \geq 0$$

gilt. Daraus folgt

$$2 \geq 3f_a - f_b \quad (4.7)$$

$$3f_a - f_b \geq 0 \quad (4.8)$$

Weiterhin folgt aus Abbildung 4.5a

$$h \geq y(2h) = (f_b - f_a)2h + \frac{h}{2}(3f_a - f_b) \geq 0.$$

Dies führt zu den folgenden Ungleichungen:

$$2 \geq 3f_b - f_a \quad (4.9)$$

$$3f_b - f_a \geq 0. \quad (4.10)$$

Da nun aufgrund der oben getroffenen Vereinbarung f_a größer ist als f_b , ist die Ungleichung (4.7) strenger als die Ungleichung (4.9). Gleiches gilt für die Ungleichung (4.10) und (4.8). Damit kommt man auf die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} 3f_b &\geq f_a \\ 2 &\geq 3f_a - f_b, \end{aligned}$$

die den Unterfall (a) identifizieren. Die gleiche Betrachtung kann man auch für die drei anderen Unterfälle von Abbildung 4.5 anstellen und kommt dann auf eindeutige Beziehungen zwischen den Volumenfraktionen der Zellen und ihrer Typzugehörigkeit. Dieses ist wiederum im Anhang B zu finden.

Mit diesen und den im Anhang B gezeigten Gleichungen hat man nun eine Methode, die die Beschreibung der Bewegung des Plasmarandes über das ortsfeste Rechnetz erlaubt.

4.2.2 Korrektur des Fluidflusses bei der radialen Bewegung

Wie in Kapitel 3.4 gezeigt wurde, kann das Plasma bei einer radialen Bewegung aufgrund der adiabatischen Kompression durch das Toroidalfeld nicht mehr als inkompressibel angenommen werden. Die Plasmaquerschnittsfläche verändert sich mit dem großen Torusradius R , d.h. das Plasmavolumen verhält sich proportional zu R^2 . Dieser Effekt kann bei der oben vorgestellten VOF-Methode leicht berücksichtigt werden. Bewegt sich das Plasma in radialer Richtung, dann müssen sich die Flüsse von der einen Zelle in ihre Nachbarzelle gemäß der oben genannten Proportionalitätsbeziehung verhalten. Für die Gleichungen (4.5) und (4.6) muß entsprechend ein Korrekturfaktor eingeführt werden. Für den korrigierten Fluß bei einer Radialbewegung in positiver Richtung gilt dann

$$\Delta f^+(R, z) = \left(s(a + b^* - \frac{as}{2}) \right) \frac{R + h}{R} \quad (4.11)$$

bzw. in negativer Richtung

$$\Delta f^-(R, z) = \left(s(a + b^* + \frac{as}{2}) \right) \frac{R}{R + h} \quad (4.12)$$

Für alle anderen Fälle gilt diese Korrektur analog. Mit dieser einfachen Methode ist die adiabatische Kompression des Plasmas also implizit berücksichtigt, ohne daß diese explizit durch eine aufwendige Bestimmung der induzierten poloidalen Spannungen berechnet werden muß.

4.3 Lösung der elektromagnetischen Gleichungen

Im folgenden Kapitel wird die Lösung der elektromagnetischen Gleichungen des Plasmas dargestellt. Dazu wird die Konvektions-Diffusions-Gleichung des magnetischen Flusses (3.21) mit einem Finite-Elemente-Ansatz diskretisiert. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß das Plasma, wie in Kapitel 5.1.4 gezeigt wird, sich damit vollständig induktiv an die Struktur koppeln läßt, d.h. die Rückwirkung der Wirbelströme in der Struktur auf das Plasma kann berücksichtigt werden.

Die Elektrodynamik des Plasmas wurde in einer Konvektions-Diffusions-Gleichung für den magnetischen Fluß (vgl. Gleichung (3.21)) zusammengefaßt:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \Psi) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \Psi = \varphi.$$

Der poloidale magnetische Fluß im Plasma Ψ setzt sich zusammen aus dem internen magnetischen Fluß $\Psi^{int}(\vec{r}, t)$, also dem Fluß aufgrund des Plasmastroms, und dem externen magnetischen Fluß $\Psi^{ext}(\vec{r}, t)$, der von außen dem Plasma aufgeprägt wird. Es gilt also

$$\frac{\partial(\Psi^{int} + \Psi^{ext})}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla(\Psi^{int} + \Psi^{ext})) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \Psi^{int} = \varphi.$$

Der diffusive Term $\frac{\eta}{\mu_0} \Delta \Psi^{ext}$ entfällt, da die hier betrachtete Lösungsgröße der interne Fluß ist, und der externe magnetische Fluß als feste Größe von außen vorgegeben wird. Dieser externe Fluß kann nochmals in verschiedene Anteile aufgespalten werden

$$\Psi^{ext}(t) = \Psi^{aux}(\vec{r}) + \Psi^{sec}(\vec{r}, t).$$

Darin ist $\Psi^{aux}(\vec{r})$ der zeitlich konstante Fluß der Poloidalfeldspulen und $\Psi^{sec}(\vec{r}, t)$ der sekundäre Fluß, der von den Wirbelströmen in der Struktur erzeugt wird. Mit dem Ampèreschen Gesetz und der Definition der magnetischen Induktion als Rotation des magnetischen Flusses ($\vec{B} = \nabla \times (\Psi \cdot \vec{e}_\Theta)$) erhält man eine Poisson-Gleichung für den internen magnetischen Fluß

$$\Delta \Psi^{int} = -\mu_0 j_{tor}$$

worin j_{tor} die toroidale Komponente des Plasmastroms repräsentiert. Mit dem Coulomb-Potential (vgl. Bronstein et al. [107]) erhält man eine allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$\Psi^{int} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_0 j_{tor}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_\Theta \cdot \vec{e}_{\Theta'} dV.$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\Theta'}$ ist im mitbewegten Koordinatensystem definiert. Damit läßt sich Gleichung (3.21) in einer Form schreiben, die die toroidale Stromdichte als Lösungsgröße besitzt:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial j_{tor}(\vec{r}', t)}{\partial t} \vec{e}_\Theta \cdot \vec{e}_{\Theta'} dV + \vec{v} \cdot \nabla \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_{tor}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_\Theta \cdot \vec{e}_{\Theta'} dV + \eta j_{tor}(\vec{r}, t) = \\ = -\frac{\partial \Psi^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla \Psi^{ext}(\vec{r}, t) + \varphi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zur Diskretisierung dieser Integro-Differentialgleichung (4.13) werden zweidimensionale finite Elemente eingeführt. Sie verfügen pro Element über nur einen Freiheitsgrad J_P in der Elementmitte, der den Plasmastrom in toroidaler Richtung repräsentiert (vgl. Abbildung 4.7). Für die räumliche

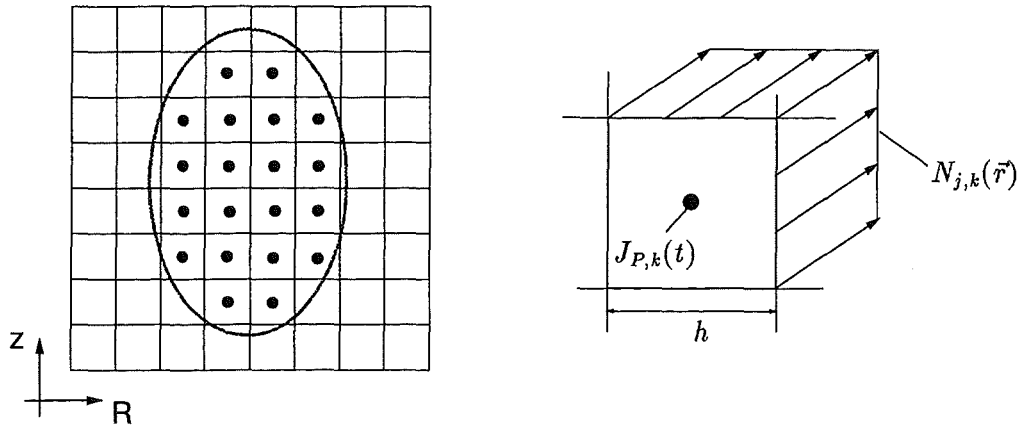


Abbildung 4.7: Diskretisierung des poloidal-radialen Plasmaquerschnitts, Formfunktion und Freiheitsgrad

Verteilung der Stromdichte über das Element wird eine konstante Formfunktion N_j verwendet. Der Ansatz für die toroidale Stromdichte lautet

$$j_{tor}(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{NELE_P} N_{j,k}(\vec{r}) J_{P,k}(t)$$

mit der Formfunktion $N_{j,k}(\vec{r})$ als

$$N_{j,k}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{A_k} & \text{für } \vec{r} \text{ innerhalb des } k\text{-ten Elements} \\ 0 & \text{für } \vec{r} \text{ außerhalb des } k\text{-ten Elements} \end{cases}$$

$A_k = h^2$ ist die Querschnittsfläche des Elements. Diese Diskretisierung läßt sich auch als Filamentmodell für das Plasma bezeichnen. $NELE_P$ ist die Anzahl der finiten Elemente im Plasmagebiet. Da sich das Plasma über das ortsfeste Rechengitter bewegt, gilt

$$NELE_P = f(t).$$

Die Raumintegration in Gleichung (4.13) wird nun unter der Annahme der toroidalen Symmetrie des Plasmas in eine Flächenintegration und ein Linienintegral entlang des Torusumfangs zerlegt:

$$\int_V \cdot dV \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \Theta} = 0} \int_A \oint_C \cdot ds dA.$$

Sind zudem die Elementabmessungen klein gegenüber dem Torusradius, d.h. es gilt

$$\sqrt{A_k} = h < r_k, \quad (4.14)$$

mit h als Kantenlänge der quadratischen Elemente, kann der Integrand bezüglich der Flächenintegration als konstant angesehen werden ($\int_A \oint_C \cdot ds dA \rightarrow A \oint_C \cdot ds$). Aus Gleichung (4.13) wird schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{NELE_P} \left(\oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta'k}}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \frac{dJ_{P,k}(t)}{dt} \vec{e}_{\Theta} \cdot ds_k \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{NELE_P} \left(\vec{v} \cdot \nabla \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta'k}}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} J_{P,k}(t) \cdot \vec{e}_{\Theta} \cdot ds_k \right) + \\ + \eta \sum_{k=1}^{NELE_P} \frac{J_{P,k}(t)}{A_k} = -\frac{\partial \Psi^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla \Psi^{ext}(\vec{r}, t) + \varphi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mit einer Galerkin-Wichtung, d.h. einer Multiplikation der Gleichung mit der Formfunktion und einer anschließenden Integration über den Lösungsbereich erhält man die schwache Formulierung von Gleichung (4.15):

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{NELE_P} \left(\oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta i} \cdot \vec{e}_{\Theta' k}}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_k|} ds_k ds_i \frac{dJ_{P,k}(t)}{dt} \right) + \\
& + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{NELE_P} \left(\vec{v} \cdot \nabla \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta i} \cdot \vec{e}_{\Theta' k}}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_k|} ds_k ds_i J_{P,k}(t) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^{NELE_P} \oint_{C_i} \frac{\eta_k}{A_k} ds_i J_{P,k}(t) = \\
& = - \left(\oint_{C_i} \frac{\partial \Psi^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} ds_i + \oint_{C_i} \vec{v} \cdot \nabla \Psi^{ext}(\vec{r}, t) ds_i \right) \quad i = 1..NELE_P
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Da über ein geschlossenes Volumen integriert wird, entfällt hier der Beitrag aus dem elektrischen Potential $\varphi(\vec{r}, t)$. Für die externe magnetische Induktion \vec{B}^{ext} gilt

$$\begin{aligned}
\vec{B}^{ext}(\vec{r}, t) &= \nabla \times (\Psi^{ext} \cdot \vec{e}_{\Theta}) = \nabla \times [(\Psi^{aux}(\vec{r}) + \Psi^{sec}(\vec{r}, t)) \cdot \vec{e}_{\Theta}] \\
&= \vec{B}^{aux}(\vec{r}) + \vec{B}^{sec}(\vec{r}, t).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Damit und mit der Vektorbeziehung (3.20) läßt sich der konvektive Term des externen Flusses in Gleichung (4.16) umschreiben zu

$$\vec{v} \cdot \nabla \Psi^{ext}(\vec{r}, t) = - (\vec{v} \times \vec{B}^{ext}) \cdot \vec{e}_{\Theta},$$

und mit der Matrixschreibweise für das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B} = \mathbf{B} \cdot \vec{v}$ mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_{tor} \\ -B_z & 0 & B_r \\ B_{tor} & -B_r & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man schließlich ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten für den zeitlichen Verlauf des toroidalen Stroms $J_P(t)$ in den einzelnen Plasmaelementen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_P \frac{d}{dt} \{J_P(t)\} + \left(\mathbf{R}_P(t) + \vec{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_P}{\partial \vec{r}} \right) \{J_P(t)\} = \\
= \{U_P(t)\} + \oint_{C_i} \{ \mathbf{B}^{ext}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{e}_{\Theta} \} ds_i
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Hierbei wurden die Abkürzungen \mathbf{L}_P , $\frac{\partial \mathbf{L}_P}{\partial \vec{r}}$, \mathbf{R}_P und $\{U_P(t)\}$ für die Induktivitätsmatrix, die räumliche Ableitung der Induktivitätsmatrix, die Widerstandsmatrix und die Spaltenmatrix der induktiven Kopplung verwendet. Die einzelnen Elemente der Matrizen in Gleichung (4.18) berechnen sich folgendermaßen:

$$L_{P,ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta_i} \vec{e}_{\Theta_k}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} ds_k ds_i \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta_i} \vec{e}_{\Theta_k}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} ds_k ds_i \quad (4.20)$$

$$R_{P,ii} = \oint_{C_i} \frac{\eta_i}{A_i} ds_i \quad (4.21)$$

$$U_{P,i}(t) = - \oint_{C_i} \frac{\partial \Psi^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} ds_i. \quad (4.22)$$

Die um die Bewegungsinduktivität modifizierte Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_P^*(t) = \mathbf{R}_P(t) + \vec{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_P}{\partial \vec{r}}$ mit $\vec{v} = (u, w)^T$ setzt sich wie folgt zusammen

$$\mathbf{R}_P^*(t) = \begin{pmatrix} R_{P,11} & u_1 \frac{\partial L_{P,21}}{\partial R} + w_1 \frac{\partial L_{P,21}}{\partial z} & \dots \\ u_2 \frac{\partial L_{P,12}}{\partial R} + w_2 \frac{\partial L_{P,12}}{\partial z} & R_{P,22} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & R_{P,NELE_P NELE_P} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix \mathbf{R}_P^* ist also voll besetzt und besitzt keine Symmetrie. Auch die positive Definitheit der Matrix \mathbf{R}_P^* ist, bedingt durch das im allgemeinen beliebige Geschwindigkeitsfeld, nicht gegeben.

4.4 Berechnung der Matrizen

Im folgenden Kapitel wird die Berechnung der Systemmatrizen, wie sie in den Gleichungen (4.19) bis (4.22) kurz vorgestellt wurden, detailliert beschrieben. Dazu werden auch analytische Lösungen hergeleitet.

4.4.1 Berechnung der Induktivitätsmatrix und deren räumliche Ableitungen

Die Berechnung der einzelnen Komponenten der Induktivitätsmatrix \mathbf{L}_P und deren räumlichen Ableitungen in radialer und vertikaler Richtung kann analytisch erfolgen. Diese Matrizen bleiben während der Zeitintegration von Gleichung (4.18) konstant, so daß die Berechnung nur einmal vor der transienten Analyse notwendig ist. Mit dem Finite-Element-Ansatz ergeben sich die Koeffizienten der Induktivitätsmatrix wie bereits in Gleichung (4.19) gezeigt zu

$$L_{P,ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\vec{e}_{\Theta_i} ds_i \cdot \vec{e}_{\Theta_k} ds_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

Will man dieses Doppelintegral lösen, müssen die beiden Fälle für $i \neq k$ und $i = k$ unterschieden werden, da der Integrand für $i = k$ singularär wird.

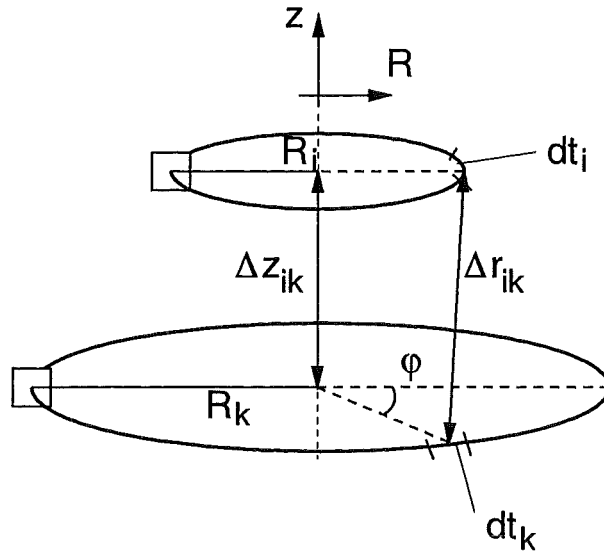


Abbildung 4.8: Zwei konzentrische Plasmaelemente

Wechselinduktivität ($i \neq k$)

Die Integration über die zwei konzentrischen Kreislinien läßt sich auf eine Integration über eine Linie und eine Winkeldifferenz zwischen den Wegelementen transformieren.

$$\vec{e}_{\Theta_i} ds_i \cdot \vec{e}_{\Theta_k} ds_k = dt_i \cdot \cos \varphi d\varphi.$$

Für den Abstand der Aufpunkte von zwei Elementen Δr_{ik} (vgl. Abbildung 4.8) erhält man

$$\Delta r_{ik} = |\vec{r}_i - \vec{r}_k| = \sqrt{R_i^2 + R_k^2 + (\Delta z_{ik})^2 - 2R_i R_k \cos \varphi}$$

und damit nach einer Umformung für Gleichung (4.19)

$$L_{P,ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{R_i R_k}}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} dt_i \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\alpha' - \cos \varphi}} \cdot d\varphi \quad \text{für } i \neq k$$

mit der Geometriegröße

$$\alpha'(t) \equiv \frac{R_i^2 + R_k^2 + (\Delta z_{ik})^2}{2R_i R_k}.$$

Integriert man über das Element i ergibt sich

$$L_{P,ik} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{R_i R_k}}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\alpha' - \cos \varphi}} \cdot d\varphi \quad \text{für } i \neq k. \quad (4.23)$$

Mit der Substitution für den Winkel φ

$$\varphi = \pi - 2\theta$$

bzw. der sich daraus ergebenden Beziehung für die Winkelfunktionen

$$\cos \varphi = -\cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta - 1$$

läßt sich Gleichung (4.23) umformen zu

$$L_{P,ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{R_i R_k}}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} \cdot d\theta \quad \text{für } i \neq k. \quad (4.24)$$

Hierin ist die Geometriegröße α folgendermaßen definiert:

$$\alpha^2 = \frac{2}{\alpha' + 1} = \frac{4R_i R_k}{(R_i + R_k)^2 + (\Delta z_{ik})^2}.$$

Der Integrand von Gleichung (4.24) läßt sich in zwei Summanden zerlegen,

$$\frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{2 - \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} - 2\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \right\}$$

womit sich das Integral in Gleichung (4.24) nach Greiner [108] mit Hilfe der vollständigen elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Ordnung lösen läßt. Danach ergibt sich

$$L_{P,ik} = \mu_0 \sqrt{R_i R_k} \left\{ \left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) K(\alpha) - \frac{2E(\alpha)}{\alpha} \right\} \quad \text{für } i \neq k \quad (4.25)$$

mit

$$K(\alpha) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}$$

$$E(\alpha) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

Aus Symmetriegründen gilt weiterhin:

$$L_{P,ik} = L_{P,ki}.$$

Ist der Abstand der beiden Elemente sehr klein, läßt sich die Formel für die Wechselinduktivität (Gleichung (4.25)) vereinfachen. Mit den Annahmen

$$|R_i - R_k| \ll R_i$$

$$\Delta z \ll R_i$$

folgt nach Greiner [108]

$$L_{P,ik} = \mu_0 \bar{R} \left(\ln \frac{8\bar{R}}{a} - 2 \right). \quad (4.26)$$

Darin wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\bar{R} = \frac{R_i + R_k}{2}$$

$$a = \sqrt{(R_i - R_k)^2 + \Delta z^2}$$

Eigeninduktivität ($i = k$)

Für diesen Fall tritt im Integral von Gleichung (4.19) eine Singularität auf. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wird die Eigeninduktivität hier alternativ über die im toroidalen Strom eines Elements gespeicherte magnetische Energie bestimmt. Dabei wird immer noch von einer kleinen Querschnittsfläche gegenüber dem Hauptradius ausgegangen. Die Eigeninduktivität kann in zwei Anteile zerlegt werden, in einen inneren und einen äußeren.

$$L_{P,ii} = L_{P,ii}^{out} + L_{P,ii}^{in}$$

Für den äußeren Anteil $L_{P,ii}^{out}$ kann Gleichung (4.26) angewandt werden, wenn man $L_{P,ii}$ als Wechselinduktivität von zwei Leitern mit den Radien R_i und $R_i + a$ betrachtet:

$$L_{P,ii}^{out} = \mu_0 R_i \left(\ln \frac{8R_i}{a} - 2 \right).$$

Der innere Anteil $L_{P,ii}^{in}$ kann nun mit Hilfe der magnetischen Energie berechnet werden. Für diese gilt:

$$W_{m,i} = \frac{1}{2} L_{P,ii}^{in} I_i^2. \quad (4.27)$$

Weiterhin gilt für die magnetische Induktion \vec{B} eines langen geraden Leiters

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} R^{in}. \quad (4.28)$$

R^{in} ist der Abstand von der Drahtmittelachse zum Aufpunkt im Drahtquerschnitt:

$$0 \leq R^{in} \leq a.$$

Die magnetische Feldenergie pro Längeneinheit W^* des Leiters kann über

$$W^* = \frac{1}{2} \int_A \vec{H} \cdot \vec{B} dA$$

bzw. für ein nichtmagnetisches Materialverhalten über

$$W^* = \frac{1}{2\mu_0} \int_A \vec{B}^2 dA$$

berechnet werden. Für einen Kreisleiter mit dem Radius R_i gilt $W_{m,i} = 2\pi R_i W^*$. Mit den Gleichungen (4.28) und (4.27) erhält man schließlich für $L_{P,ii}^{in}$:

$$L_{P,ii}^{in} = \frac{1}{4} \mu_0 \mu R_i.$$

Die gesamte Eigeninduktivität für einen Kreisleiter ergibt sich damit zu

$$L_{P,ii} = \mu_0 R_i \left\{ \ln \frac{8R_i}{a} - 2 + \frac{\mu}{4} \right\},$$

worin a der mittlere Radius der Kreisquerschnittsfläche ist. Nimmt man eine gleiche Querschnittsfläche für den Kreisquerschnitt und für den vorliegenden quadratischen Querschnitt an,

$$h^2 = a^2 \pi$$

dann erhält man für den effektiven Radius

$$a = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

und somit

$$L_{P,ii} = \mu_0 R_i \left\{ \ln \frac{8\sqrt{\pi} R_i}{h} - 2 + \frac{\mu}{4} \right\}. \quad (4.29)$$

Räumliche Ableitungen der Induktivitätsmatrix

Für die Ableitungen in radialer Richtung von Gleichung (4.23), also der Wechselinduktivität von zwei Plasmaelementen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{P,ik}(R, \Delta z)}{\partial R_i} &= \frac{\mu_0}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R_k}{R_i}} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\alpha' - \cos \varphi}} \cdot d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{R_i}{R_k} - \alpha' \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{(\alpha' - \cos \varphi)^{(3/2)}} \cdot d\varphi \right] \quad \text{für } i \neq k \end{aligned}$$

und in vertikaler Richtung

$$\frac{\partial L_{P,ik}(R, \Delta z)}{\partial (\Delta z_{ik})} = -\frac{\mu_0}{4} \cdot \frac{\Delta z_{ik}}{\sqrt{2R_i R_k}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{(\alpha'(t) - \cos \varphi)^{(3/2)}} \cdot d\varphi \quad \text{für } i \neq k.$$

In dieser Form muß man für die räumlichen Ableitungen die Integrale auf der rechten Seite numerisch berechnen. Mittels der vorher eingeführten vollständigen elliptischen Integrale können diese aber auch analytisch bestimmt werden. Für die Ableitung von Gleichung (4.25) in radialer Richtung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{P,ik}}{\partial R_i} &= \mu_0 \mu \sqrt{R_i R_k} \left\{ \frac{1}{2R_i} \left(\left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) K(\alpha) - \frac{2E(\alpha)}{\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha}{\partial R_i} \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) K(\alpha) - \left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) \frac{dK(\alpha)}{d\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} E(\alpha) + \frac{2}{\alpha} \frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \right] \right\} \quad \text{für } i \neq k \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial R_i} = \frac{\sqrt{R_k}}{\sqrt{R_i} \sqrt{(R_i + R_k)^2 + (\Delta z_{ik})^2}} - \frac{2\sqrt{R_i R_k} (R_i + R_k)}{((R_i + R_k)^2 + (\Delta z_{ik})^2)^{3/2}}$$

und in vertikaler Richtung

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial(\Delta z_{ik})} = \mu_0 \mu \frac{\Delta z \cdot \alpha^3}{4\sqrt{R_i R_k}} \left\{ \left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right) K(\alpha) - \left(\frac{2}{\alpha} - \alpha\right) \frac{dK(\alpha)}{d\alpha} \right. \\ \left. - \frac{2}{\alpha^2} E(\alpha) + \frac{2}{\alpha} \frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \right\} \quad \text{für } i \neq k.$$

Für die radiale Ableitung der Eigeninduktivität eines Plasmaelements (Gleichung (4.29)) erhält man

$$\frac{\partial L_{P,ii}(R, \Delta z)}{\partial R_i} = \mu_0 \left\{ \ln \frac{8\sqrt{\pi} R_i}{h} - 1 + \frac{\mu}{4} \right\} \quad (4.30)$$

und in vertikaler Richtung

$$\frac{\partial L_{P,ii}(R, \Delta z)}{\partial(\Delta z_{ii})} = 0. \quad (4.31)$$

Die Ableitung der vollständigen elliptischen Integrale können nach Dwight [109] durch sich selbst ausgedrückt werden:

$$\frac{dK(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} - K(\alpha) \right) \\ \frac{dE(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} (E(\alpha) - K(\alpha)).$$

Damit lassen sich die obigen Ausdrücke für $i \neq k$ weiter vereinfachen zu

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial R_i} = \mu_0 \sqrt{R_i R_k} \left\{ \frac{1}{2R_i} \left(\left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) K(\alpha) - \frac{2E(\alpha)}{\alpha} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial \alpha}{\partial R_i} \left[\frac{2}{\alpha^2} K(\alpha) + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) \frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} \right] \right\} \quad \text{für } i \neq k \quad (4.32)$$

für die radiale Ableitung bzw. zu

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial(\Delta z_{ik})} = \mu_0 \frac{\Delta z_{ik} \cdot \alpha^3}{4\sqrt{R_i R_k}} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha^2} K(\alpha) + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) \frac{E(\alpha)}{1 - \alpha^2} \right] \right\} \quad \text{für } i \neq k \quad (4.33)$$

für die vertikale Ableitung der Wechselinduktivität. Aus Symmetriegründen gilt außerdem für die vertikale Ableitung:

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial(\Delta z_{ik})} = -\frac{\partial L_{P,ki}}{\partial(\Delta z_{ki})}.$$

Für die radiale Ableitung besteht keine Symmetrie. Auch für die räumlichen Ableitungen gelten wie für die Induktivitätsmatrix selbst (Gleichung (4.26)) für kleine Abstände der Elemente die vereinfachten Beziehungen und damit

$$\frac{\partial L_{P,ik}}{\partial R_i} = \frac{1}{2} \mu_0 \left[\ln \frac{8\bar{R}}{a} - 1 - \frac{2\bar{R}(R_i - R_k)}{a^2} \right] \\ \frac{\partial L_{P,ik}}{\partial(\Delta z_{ik})} = -\mu_0 \frac{\bar{R} \Delta z_{ik}}{a^2}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{R_i + R_k}{2} \\ a &= \sqrt{(R_i - R_k)^2 + \Delta z^2}.\end{aligned}$$

4.4.2 Berechnung der Widerstandsmatrix

Die Widerstandsmatrix \mathbf{R}_p ist nur diagonal besetzt. Die einzelnen Elemente werden entsprechend Kapitel 4.3 berechnet zu:

$$R_{P,ii}(t) = \oint_{C_i} \frac{\eta_i(t)}{A_i} ds_i = \frac{2\pi R_i \eta_i(t)}{A_i} = \frac{2\pi R_i \eta_i(t)}{h^2}. \quad (4.34)$$

Der spezifische Widerstand η eines Plasmas in toroidaler Richtung ist im vorliegenden Fall eine Funktion der Zeit. Diese Abhängigkeit folgt einerseits aus der Wahl des numerischen Verfahrens, bei dem sich das Plasma über ein ortsfestes Gitter bewegt, so daß sich auch das Temperaturprofil bezüglich des Gitters verschiebt, andererseits aber auch aus der Abhängigkeit des Widerstands von der zeitabhängigen Plasmatemperatur. Der spezifische Widerstand wird mit der klassischen Formulierung von Spitzer [110] oder mit einer neoklassischen Korrektur nach Hirshman, Hawryluk und Bridge [111] berechnet. Die Querschnittsfläche des Elements wird durch den entsprechenden Volumenanteil der VOF-Methode (vgl. Kapitel 4.2.1) ersetzt:

$$A_k = f_k \cdot h^2.$$

Der spezifische elektrische Widerstand des Plasmas

Wie die Wärmeleitfähigkeit weist auch der spezifische Plasmawiderstand eine starke Anisotropie auf. Bei der elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas spielen wie bei der kinematischen Viskosität (vgl. Kap. 3.4) die Coulomb-Stöße eine entscheidende Rolle. Liegt an einem Plasma ein elektrisches Feld \vec{E} parallel zu einem \vec{B} -Feld an, dann geben die Elektronen im Gleichgewicht die durch das elektrische Feld aufgenommene kinetische Energie durch Coulomb-Stöße an die Ionen wieder ab. Dies macht sich durch einen spezifischen elektrischen Widerstand bemerkbar. Eine erste Abschätzung erhält man, indem man die Impulszunahme pro Zeit- und Volumeneinheit im elektrischen Feld mit der Impulsabnahme pro Zeit- und Volumeneinheit durch Stöße gleichsetzt (vgl. Schumacher [2]). Danach ergibt sich der spezifische Widerstand in Richtung des Magnetfeldes zu

$$\eta_{\parallel}(T) = \frac{m_e^{1/2} \cdot Z_{eff} \cdot e^2 \cdot \ln \Lambda}{3 \cdot (2\pi)^{3/2} \cdot \epsilon_0 \cdot T_{eV}^{3/2}}.$$

In dieser Formulierung ist Z_{eff} die effektive Kernladungszahl

$$Z_{eff} = \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{\sum_i n_i Z_i}, \quad (4.35)$$

e die Elementarladung, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante und $(\ln \Lambda)$ der sogenannte Coulomb-Logarithmus (siehe unten). In Gleichung (4.35) wird über die einzelnen Teilchensorten im Plasma summiert. Einen genauen Wert hat Spitzer [112] aus der Lösung der stoßkinetischen Gleichungen für die Elektronenverteilungsfunktion gefunden. Dieser ist etwa halb so groß wie die oben angegebene erste Näherung.

Klassische Theorie von Spitzer

Nach der klassischen Theorie von Spitzer kann der spezifische elektrische Widerstand in magnetisierten Plasmen parallel zu den Magnetfeldlinien folgendermaßen beschrieben werden:

$$\eta_{\parallel}(T) = \frac{5.2 \cdot 10^{-5} \cdot Z_{eff} \cdot \ln \Lambda}{T_{eV}^{\frac{3}{2}}} \quad (4.36)$$

und senkrecht dazu

$$\eta_{\perp} = 2.0 \cdot \eta_{\parallel}.$$

Darin gilt für den Coulomb-Logarithmus

$$\ln \Lambda = \ln(12\pi n \lambda_{D,e}^3).$$

Die Debye-Länge $\lambda_{D,e}$ wird bestimmt aus

$$\lambda_{D,e} = \left(\frac{\varepsilon_0 k T_e}{n e^2} \right)^{1/2} = 7432,5 \left(\frac{T_{eV}}{n} \right)^{1/2} m.$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \Lambda &= 12 \pi \left(\frac{\varepsilon_0}{e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{eV}^{\frac{3}{2}} \\ &= 1.5488 \cdot 10^{13} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{eV}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Die wichtigsten Abhängigkeiten des spezifischen Plasmawiderstandes in der klassischen Formulierung sind damit:

Elektronentemperatur:

$$\eta_{\parallel} \propto \frac{(\text{const} + \ln(T_{eV}))}{(T_{eV})^{3/2}}$$

Effektive Kernladungszahl:

$$\eta_{\parallel} \propto Z_{eff}$$

Teilchendichte:

$$\eta_{\parallel} \propto (\text{const} - \ln(n))$$

In Abbildung 4.9 (links) ist der Verlauf des klassischen Plasmawiderstandes über der Plasmaelektronentemperatur doppeltlogarithmisch aufgetragen. Dabei wurde die Elektronendichte von $n_e = 10^{17}$ bis $n_e = 10^{21}$ variiert. Man erkennt die starke Abhängigkeit des Widerstands von der Temperatur. Wegen der starken Abnahme des elektrischen Widerstands bei steigender Temperatur ist die Anwendung einer ohmschen Heizung für das Plasma auf die unteren Temperaturbereiche beschränkt. Beispiel:

$$\eta_{\parallel}(100eV) = 7,81 \cdot 10^{-7} \Omega m$$

$$\eta_{\parallel}(10eV) = 2,47 \cdot 10^{-5} \Omega m$$

$$\frac{\eta_{\parallel}(10eV)}{\eta_{\parallel}(100eV)} \approx 32$$

Neoklassische Theorie des Plasmawiderstands

Eine neoklassische Formulierung für den Plasmawiderstand wurde von Hirshman, Hawryluk und Bridge [111] hergeleitet. Mit dieser Formulierung kann ein Korrekturfaktor für den klassischen Widerstand wie folgt berechnet werden:

$$\frac{\eta_{cl}}{\eta_{neo}} = (1 - F) \cdot \left(1 - F \cdot \frac{0,58}{Z_{eff}} \cdot \frac{3 - Z_{eff}}{3 + Z_{eff}} \right) \quad (4.37)$$

mit

$$\begin{aligned} F &= \frac{f_{tr}}{1 + \nu_* (0,56 + 0,20 \cdot Z_{eff})} \\ f_{tr} &= 1 - \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + 1,46 \cdot \varepsilon^{1/2})(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \\ \varepsilon &= \frac{r}{R} \\ \nu_* &= \frac{\sqrt{2} R q}{\varepsilon^{3/2} v_{the} \tau_{ee}} \approx 7 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{n_e [m^{-3}] R [m] q \ln \Lambda}{\varepsilon^{3/2} (T_e V)^2}. \end{aligned}$$

Darin sind f_{tr} der Anteil der in magnetischen Inseln eingeschlossenen Elektronen, ε das inverse Aspektenverhältnis, ν_* ein Elektronenkollisionsparameter, v_{the} die thermische Geschwindigkeit der Teilchen, q der Sicherheitsfaktor (vgl. Kapitel 4.7), τ_{ee} die Einschlußzeit, r der kleine und R der große Radius des Torus. Zur Überprüfung der Notwendigkeit der neoklassischen Formulierung im vorliegenden Fall wurden die verschiedenen Einflußgrößen n_e , q , Z_{eff} und ε in den relevanten Bereichen variiert (Abbildung 4.10 und Abbildung 4.11). Da das Plasma nach dem „energy-quench“ nur noch eine niedrige Elektronentemperatur besitzt ($T_e \ll 100eV$), trifft nur bei der Variation der Dichte ein entscheidender Unterschied zwischen klassischer und neoklassischer Theorie auf. Für die Simulation des „current-quench“ bei Fusionsplasmen mit einer Dichte größer als $10^{19} \frac{\text{Teilchen}}{m^3}$ läßt sich zeigen, daß der klassische Widerstand ungefähr gleich dem neoklassischen Widerstand ist:

$$\frac{\eta_{cl}}{\eta_{neo}} \approx 1 \quad \text{für } T_e < 100eV.$$

4.5 Berechnung der konstanten magnetischen Induktion

Die konstante magnetische Induktion setzt sich zusammen aus dem konstanten Hintergrundfeld, dem Poloidalfeld, das durch die Poloidalfeldspulen erzeugt wird, und dem Toroidalfeld. Obwohl während einer Disruption zusätzliche Ströme in den Poloidalfeldspulen induziert werden, können diese insgesamt als zeitlich konstant angesehen werden. In Abbildung 4.12 ist ein Stromverlauf in den ITER-Spulen über der Zeit exemplarisch dargestellt⁴. Hierbei ist zu erkennen, daß die zeitliche Konstanz in guter Näherung gilt.

Die einzelnen Komponenten der konstanten magnetischen Induktion setzen sich, wie bereits erwähnt, folgendermaßen zusammen:

$$\vec{B}^{aux} = \vec{B}^0 + \vec{B}^{PF} + \vec{B}^{tor}$$

⁴Daten von einer TSC-Rechnung des Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton, NJ, USA

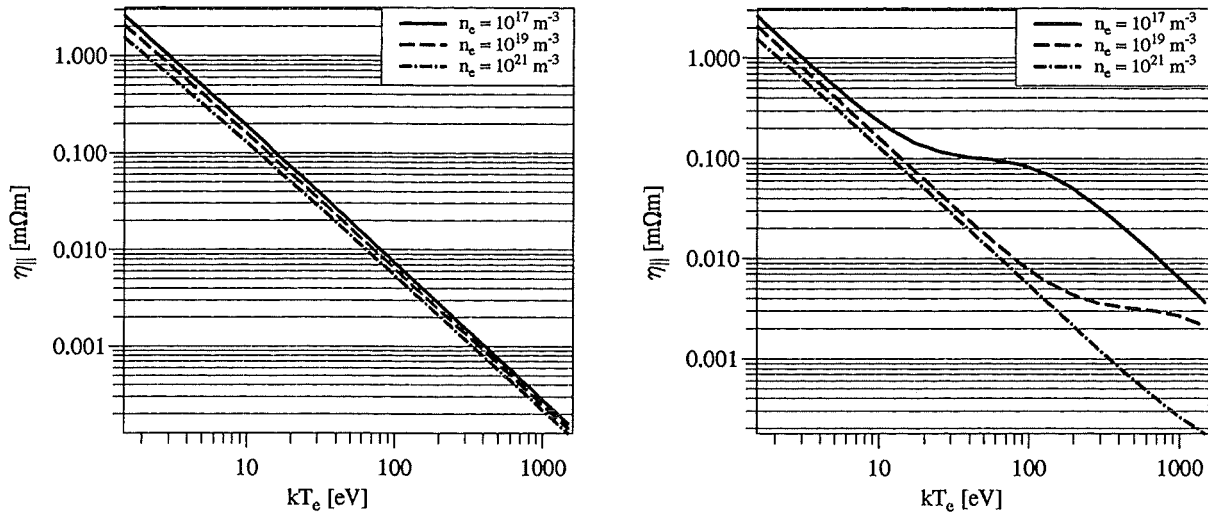


Abbildung 4.9: Verlauf des spezifischen Widerstands über der Plasmatemperatur: klassische Theorie (links), neoklassische Theorie (rechts)

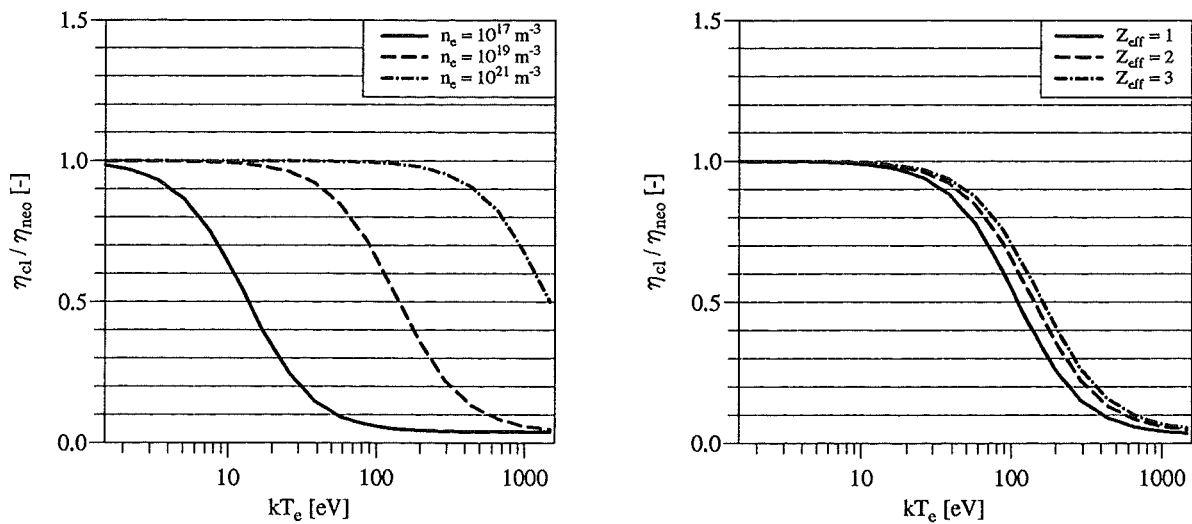


Abbildung 4.10: Verhältnis von η_{cl} zu η_{neo} für verschiedene Elektronendichten n_e (links) bzw. verschiedene effektive Kernladungszahlen Z_{eff} (rechts)

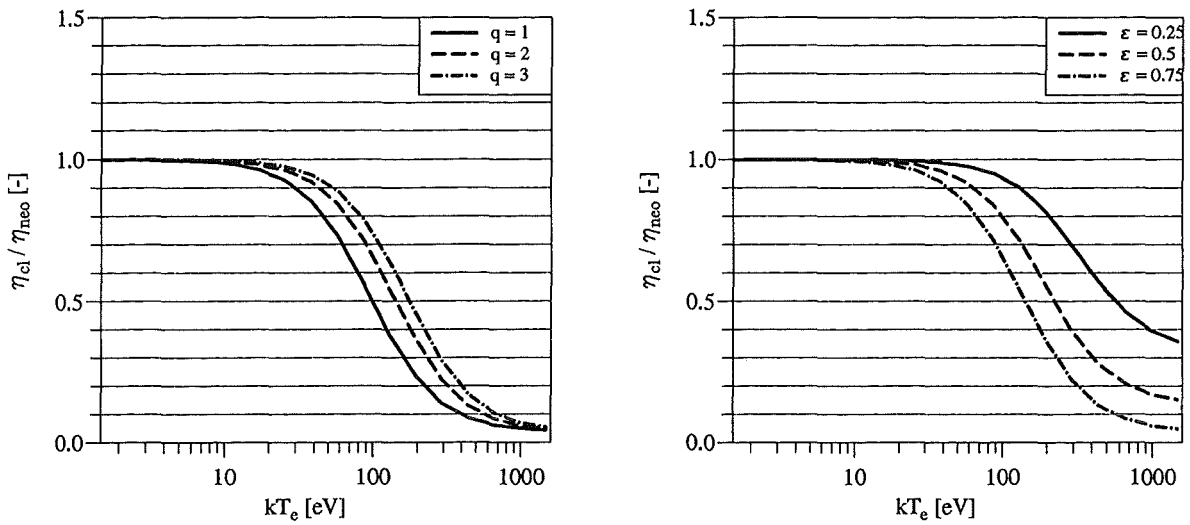


Abbildung 4.11: Verhältnis von η_{cl} zu η_{neo} für verschiedene Sicherheitsfaktoren q (links) bzw. inverse Aspektenverhältnisse ε (rechts)

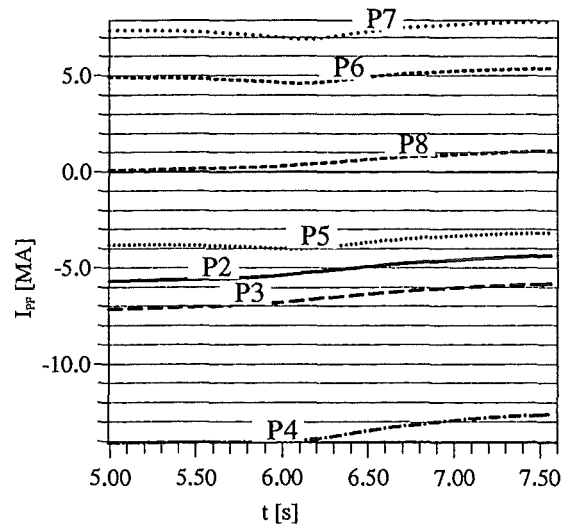


Abbildung 4.12: Berechneter Verlauf der Ströme in den Poloidalfeldspulen von ITER während einer Disruption

mit

$$\vec{B}^0 = (B_R^0, B_{tor}^0(\vec{r}), B_z^0)^T.$$

Der Strom der Feldspulen muß mittels einer Gleichgewichtsrechnung für das Plasma festgelegt werden (siehe Kapitel 3.6). Die Poloidal­feldspulen werden als konzentrische Leiter mit konstanten Strömen modelliert. Der magnetische Fluß der Poloidal­feldspulen im Plasmagebiet (Plasmaelement i) ergibt sich aus

$$\Psi_{3D,i}^{aux} = \sum_{k=1}^{NPF} L_{ik}^{aux} \cdot J_k^{aux}.$$

J_k^{aux} ist dabei der Strom in der k -ten Poloidal­feldspule. Die Wechselinduktivität L_{ik}^{aux} gilt zwischen der k -ten Poloidal­feldspule und dem i -ten Element des Plasmas, und NPF ist die Anzahl der Poloidal­feldspulen. Der Übergang des magnetischen Flusses von der dreidimensionalen Struktur auf den entsprechenden Wert im zweidimensionalen Plasma ergibt sich mittels einer Division durch den Umfang des jeweiligen Elements. Die gesamte konstante magnetische Induktion im Plasmagebiet berechnet sich also aus

$$\vec{B}_i^{aux}(\vec{r}) = \vec{B}^0 + \frac{1}{2\pi R_i} \sum_{k=1}^{NPF} \nabla \times (L_{ik}^{aux} \cdot \vec{e}_\Theta) \cdot J_k^{aux} \quad (4.38)$$

oder komponentenweise

$$\begin{pmatrix} B_{i,R}^{aux}(\vec{r}) \\ B_{i,tor}^{aux}(\vec{r}) \\ B_{i,z}^{aux}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r^0 + \frac{1}{2\pi R_i} \sum_{k=1}^{NPF} \frac{\partial L_{ik}^{aux}}{\partial z_i} \cdot J_k^{aux} \\ B_{tor}^0(\vec{r}) \\ B_z^0 + \frac{1}{2\pi R_i} \sum_{k=1}^{NPF} \frac{\partial L_{ik}^{aux}}{\partial R_i} \cdot J_k^{aux} \end{pmatrix}.$$

Die räumlichen Ableitungen der Wechselinduktivitäten lassen sich mit den schon bekannten Gleichungen (4.32) und (4.33) berechnen.

4.6 Berechnung der magnetischen Achse und des X-Punktes

Die magnetische Achse des Plasmas ist definiert als der Punkt in der radial-poloidalen Ebene, an dem der magnetische Fluß im eingeschlossenen Plasma maximal wird. Der X-Punkt bei Divertoranlagen ist der Punkt, bei dem sich die letzte geschlossene Feldlinie des Plasmas kreuzt. Der X-Punkt liegt also auf der Separatrix. Zur genaueren Lokalisierung dieser Punkte werden die diskreten Ergebniswerte für den magnetischen Fluß mit einem zweidimensionalen quadratischen Polynomansatz in jeder Gitterzelle interpoliert. Exemplarisch gilt für die magnetische Achse die Interpolation

$$\Psi(R_m, z_m) = A \cdot (R - R_m)^2 + B \cdot (z - z_m)^2 + C \cdot (R - R_m) + D \cdot (z - z_m) + E \quad (4.39)$$

mit den Koeffizienten

$$A = \frac{\Psi(R - h, z) + \Psi(R + h, z) - 2\Psi(R, z)}{2h^2}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\Psi(R, z+h) + \Psi(R, z-h) - 2\Psi(R, z)}{2h^2} \\
C &= \frac{\Psi(R+h, z) - \Psi(R-h, z)}{2h} \\
D &= \frac{\Psi(R, z+h) - \Psi(R, z-h)}{2h} \\
E &= \Psi(R, z).
\end{aligned}$$

Die magnetische Achse liegt nun dort, wo Gleichung (4.39) in radialer und in vertikaler Richtung einen Maximalwert liefert, der innerhalb der betrachteten Gitterzelle liegt. Es müssen also die folgenden Beziehungen gelten:

$$A < 0, \quad B < 0$$

$$\begin{aligned}
R - \frac{h}{2} &\leq R_m \leq R + \frac{h}{2} \\
z - \frac{h}{2} &\leq z_m \leq z + \frac{h}{2}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
R_m &= R - \frac{C}{2A} \\
z_m &= z - \frac{D}{2B}
\end{aligned}$$

Die Lage des X-Punktes wird analog ermittelt. Hier muß jedoch ein Sattelpunkt des magnetischen Flusses vorliegen. Es muß also im Unterschied zur magnetischen Achse

$$A < 0, \quad B > 0.$$

gelten.

4.7 Berechnung des Sicherheitsfaktors

Über den Sicherheitsfaktor q_{eff} am Plasmarand kann das Einsetzen des „energy-quenches“ bei einem VDE definiert werden. Wird der Sicherheitsfaktor unterschritten, so können Plasmaintabilitäten auftreten, die zum Verlust des thermischen Energieinhaltes des Plasmas führen. Der Sicherheitsfaktor ist an einer beliebigen magnetischen Oberfläche im Plasmagebiet definiert als

$$q(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r B^{tor}(r, \Theta)}{R(r, \Theta) B^{pol}(r, t, \Theta)} d\Theta \propto \frac{1}{I_P}.$$

Für die Rotationssymmetrie in toroidaler Richtung gilt

$$q(r, t) = \frac{r B^{tor}(r)}{R(r) B^{pol}(r, t)}.$$

B^{tor} bzw. B^{pol} sind das toroidale bzw. poloidale Magnetfeld. Um einen Wert für den Sicherheitsfaktor am Plasmarand, also an der Separatrix⁵ zu erhalten, wird dieser über die Flußfläche gemittelt

⁵letzte geschlossene Magnetfeldlinie

(Flußflächenmittel). Dazu ist aber der Verlauf der Separatrix genau zu bestimmen. Ein effektiver Sicherheitsfaktor kann nach Yoshino, Nakamura und Neyatani [60] mit Hilfe eines kreisförmigen Querschnitts und eines Korrekturterms für einen nicht kreisförmigen Querschnitt bestimmt werden:

$$q_{eff}(t) = q_{cyl}(t) \cdot \frac{(1 + \kappa(t)^2)}{2} \cdot \left[1 + \varepsilon(t)^2 \left(1 + \frac{(\beta_p(t) + \frac{l_i(t)}{2})^2}{2} \right) \right] \quad (4.40)$$

Darin gilt für den Sicherheitsfaktor einer zylindrischen Geometrie

$$q_{cyl}(t) = \frac{a(t) \cdot B^{tor}}{R_m(t) \cdot B^{pol}(t)}$$

und dem Poloidalfeld aufgrund des Plasmastroms am Plasmarand ($r = a$)

$$B^{pol}(t) = \frac{\mu_0 \cdot I_P(t)}{2\pi a(t)}.$$

Weiterhin gelten für die kleinen Radien des elongierten Plasmas

$$a(t) = \frac{R_{max} - R_{min}}{2}$$

$$b(t) = \frac{z_{max} - z_{min}}{2}$$

und damit für die Elongation

$$\kappa(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

und für das inverse Aspektenverhältnis

$$\varepsilon(t) = \frac{a(t)}{R_m(t)}.$$

Zur Berechnung des effektiven Sicherheitsfaktors müssen noch die geometrischen Größen a (Plasmabreite) und b (Plasmahöhe) bestimmt werden. Diese ergeben sich aus der maximalen Breite bzw. der maximalen Höhe der Separatrix bzw. der letzten Feldlinie, die die Struktur nicht berührt (Ψ_{SOL} , vgl. Kapitel 5.2). Da der X-Punkt ein Punkt der Separatrix ist (vgl. Kapitel 4.6), kann diese anhand des magnetischen Flusses im X-Punkt identifiziert werden. Die in Gleichung (4.40) vorkommenden Größen β_p und l_i sind das poloidale Beta und die interne Induktivität (vgl. Gleichung (3.23)) des Plasmas. Das poloidale Beta kann als relativer Plasmadruck interpretiert werden. Für den Spezialfall der Magnetostatik ($\vec{v} = 0$) folgt für ein homogenes Magnetfeld aus der Impulsbilanz und dem Induktionsgesetz:

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.}$$

Der Ausdruck $B^2/2\mu_0 = p_m$ wird als magnetischer Druck bezeichnet. Das Verhältnis von Plasmadruck p zu magnetischem Druck p_m wird schließlich als poloidales Beta β_p bezeichnet:

$$\beta_p = \frac{p}{p_m}.$$

Es kann auch interpretiert werden als Verhältnis von thermischer Energie im Plasma zu dessen magnetischer Energie. Die Berechnung von β_p kann nach Shafranov [90] mittels

$$\beta_p = \frac{4}{\langle R \rangle \cdot \mu_0 I_p^2} \int_{V_P} p dV_P$$

erfolgen. Der thermodynamische Druck des Plasmas ist nach der Zustandsgleichung für Plasmen (Gleichung (3.10)) proportional zur Temperatur. Dies bedeutet, daß β_p umso größer ist, je heißer das Plasma ist. Fällt nach dem „energy-quench“ die Plasmatemperatur ab, dann sinkt im gleichen Maße auch der Wert von β_p .

4.8 Lösung der Fluidodynamik des Plasmas

Zur Lösung der Plasmabewegung werden in der Literatur zwei unterschiedliche Konzepte verfolgt. Beim ersten Konzept wird die Plasmabewegung als eine Folge von Gleichgewichten betrachtet. Dazu wird zu jedem Zeitpunkt die Grad-Shafranov-Gleichung des Plasmagleichgewichts gelöst (vgl. Kapitel 3.6). Beim zweiten Konzept werden die Gleichgewichtszustände vorausgesetzt. Obwohl die Trägheitsterme, wie in Kapitel 3.4 gezeigt wurde, eigentlich zu vernachlässigen sind, werden diese dann berücksichtigt und künstlich verstärkt. Die Berücksichtigung der Trägheit des Plasma bewirkt aber, daß bei der Zeitintegration ein Überschwingen der Plasmalage auftritt. Aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung des Plasmas mit der Struktur und entgegen der Tatsache, daß das Plasma permanent im Gleichgewicht mit den äußeren magnetischen Feldern steht, treten bei dieser Betrachtungsweise unphysikalische, hochfrequente Schwingungen auf der Alfvén-Zeitskala auf. Soll die Zeitintegration trotzdem stabil bleiben, muß entweder der Zeitschritt so klein gewählt werden, daß diese Schwingungen numerisch aufgelöst werden, oder die Plasmadichte muß künstlich erhöht werden, was einer Vergrößerung der Alfvén-Zeit entspricht, d.h. die hochfrequenten Schwingungen werden unterdrückt. Letzteres ist die elegantere und vor allem, was die Rechenzeit angeht, schnellere Methode. Es kann gezeigt werden, daß die Plasmadichte in der Impulsgleichung in einem großen Bereich variiert werden kann ohne daß sich die globale Plasmabewegung entscheidend ändert. Dieses zweite Konzept wird unter anderem von Jardin et al. im Code TSC [16] und in der vorliegenden Arbeit verwendet. Das Konzept verlangt also, daß die beschleunigenden Kräfte auf das Plasma ermittelt werden. Durch diese Kräfte wird das Plasma dann von einem Gleichgewicht in ein anderes bewegt.

4.8.1 Berechnung der auf das Plasma wirkenden Kräfte

Die von außen auf das Plasma wirkenden Kräfte sind hauptsächlich die elektromagnetischen Kräfte (Lorentz-Kräfte), die sich aus dem Kreuzprodukt von Plasmastrom und magnetischer Induktion ergeben. Die Schwerkraft ist sehr viel kleiner als die Lorentz-Kräfte und kann somit vernachlässigt werden. Im Plasma wirkt der thermodynamische Druck. Dieser hat eine radiale Kraft zur Folge, die den Torus radial auseinanderzieht. Diese Kraft wird im allgemeinen als Reifenkraft („hoop-force“) bezeichnet (vgl. auch Zohm, Lackner und Ludescher [46]). Um das Plasma im Gleichgewicht zu halten, wird ein Magnetfeld benötigt, das mit seiner vertikalen Komponente und dem toroidalen Plasmastrom eine Kraft entgegen der Reifenkraft erzeugt. Die gesamte magnetische Induktion setzt sich aus den poloidalen und toroidalen Anteilen (vgl. Gleichung (4.17))

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{B}^{aux} + \vec{B}^{sec} + \vec{B}^{int}}_{\text{poloidal}} + \underbrace{\vec{B}^{tor}}_{\text{toroidal}} = \vec{B}^{pol} + \vec{B}^{tor}$$

oder

$$\begin{pmatrix} B_R \\ B_{tor} \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_R^{aux} + B_R^{sec} + B_R^{int} \\ B_{tor}^{aux} + B_{tor}^{sec} \\ B_z^{aux} + B_z^{sec} + B_z^{int} \end{pmatrix}$$

zusammen. Allgemein ergeben sich die gesamten, auf das Plasma wirkenden Kräfte zu

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} = \vec{F}^{aux} + \vec{F}^{sec} + \vec{F}^{int} + F^{hoop} + \vec{F}^{tor} = \vec{F}^{pol} + \vec{F}^{tor}.$$

Eine Kraftkomponente auf das Plasma aufgrund der toroidalen magnetischen Induktion kann nur zusammen mit einem poloidalen Strom entstehen. Diese Kraft hat aber keine Resultierende und bewirkt nur, daß das Plasma komprimiert wird. Integral gesehen verschwindet diese Komponente, so daß dadurch keine resultierende Beschleunigung auf das Plasma wirkt. Bei einer vertikalen Bewegung des Plasmas durch das Toroidalfeld werden aufgrund der in dieser Richtung konstanten toroidalen magnetischen Induktion keine zusätzlichen poloidalen Ströme induziert. Bei einer radialen Bewegung wird das Plasma dagegen wegen der induzierten poloidalen Spannungen bzw. wegen der Forderung der Erhaltung des toroidalen Flusses adiabatisch komprimiert (vgl. Kapitel 3.4 und Kapitel 4.2.2).

Eine beschleunigende Kraft auf ein sich im Gleichgewicht befindliches Plasma wirkt nur dann, wenn entweder die Gleichgewichtslage gestört wird, d.h. wenn z.B. eine kleine Verschiebung von außen aufgebracht wird, wenn sich die äußeren magnetischen Felder ändern, oder wenn der Plasmastrom aufgrund einer Instabilität zusammenbricht und dadurch zeitlich veränderliche, sekundäre magnetische Felder entstehen. Die poloidale magnetische Induktion im Plasmagebiet kann in einer Reihenentwicklung um die Gleichgewichtslage beschrieben werden. Für kleine Störungen um das Gleichgewicht kann diese Beziehung linearisiert werden:

$$\vec{B}^{pol} = \vec{B}^{pol} |_{\vec{r}_0, t_0} + \left(\frac{\partial \vec{B}^{pol}}{\partial \vec{r}} \right) \Big|_{\vec{r}_0} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}(\Delta \vec{r})^2 + \left(\frac{\partial \vec{B}^{pol}}{\partial t} \right) \Big|_{t_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^2.$$

Für die Komponenten der gesamten magnetischen Induktion gilt dann:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{aux} &= \vec{B}^{aux} |_{\vec{r}_0} + \left(\frac{\partial \vec{B}^{aux}}{\partial \vec{r}} \right) \Big|_{\vec{r}_0} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}(\Delta \vec{r})^2 \\ \vec{B}^{sec}(t) &= \vec{B}^{sec} |_{\vec{r}_0, t_0} + \left(\frac{\partial \vec{B}^{sec}}{\partial \vec{r}} \right) \Big|_{\vec{r}_0} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}(\Delta \vec{r})^2 + \left(\frac{\partial \vec{B}^{sec}(t)}{\partial t} \right) \Big|_{t_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \\ \vec{B}^{int} &= \vec{B}^{int} |_{\vec{r}_0} + \left(\frac{\partial \vec{B}^{int}}{\partial \vec{r}} \right) \Big|_{\vec{r}_0} \Delta \vec{r} + \mathcal{O}(\Delta \vec{r})^2. \end{aligned}$$

Das Eigenmagnetfeld B^{int} des Plasmas wird mit dem Strom konvektiv mittransportiert. Es erzeugt im wesentlichen die dem thermodynamischen Druck entgegengerichteten Kraftkomponenten. Diese sind radial auf die magnetische Achse gerichtet und liefern wie die Kombination von Toroidalfeld und poloidalen Strömen oben integral gesehen keine resultierende Komponente und somit keinen Beitrag zur Beschleunigung. Es gilt z.B. nach Dong et al. [113] oder Gruber et al. [49]:

$$\left(\frac{\partial \vec{B}^{int}}{\partial \vec{r}} \right) \Big|_{\vec{r}_0} \Delta \vec{r} = 0$$

mit der Verschiebung

$$\Delta \vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t.$$

Die Impulsbilanz für jedes Plasmateilchen lautet dann um den Punkt (\vec{r}_0, t_0) linearisiert

$$\vec{F}^*(\vec{r}, t) \simeq \vec{F}^*(\vec{r}_0, t_0) + \Delta \vec{F}^*(\vec{r}_0, t_0) = \rho \cdot \vec{a}.$$

Die Änderung der Lorentz-Kraftdichte $\Delta \vec{F}^*$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}^*(\vec{r}_0, t_0) &= \vec{j}(\vec{r}, t) \times (\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{B}(\vec{r}_0, t)) \\ &+ \vec{j}(\vec{r}, t) \times (\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{B}(\vec{r}, t_0)) \\ &+ (\vec{j}(\vec{r}, t) - \vec{j}(\vec{r}, t_0)) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &+ (\vec{j}(\vec{r}, t) - \vec{j}(\vec{r}_0, t)) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

mit

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = (0, j_{tor}, 0)^T.$$

Mit der Änderung des mit dem Plasma materiell mittransportierten Stroms ändert sich zwar der Gleichgewichtszustand im Plasma, eine resultierende Kraft auf das Plasma, die dieses verschiebt, wird dadurch aber nicht erzeugt. Die resultierenden Kräfte, die eine Bewegung verursachen, entstehen nur aus der Änderung der äußeren magnetischen Induktion. Ändert sich diese im Plasmagebiet, wird das Plasma von dem gestörten Gleichgewicht zum Zeitpunkt t in ein neues zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ verschoben. Der Weg den das Plasma im Zeitintervall Δt zurücklegt ist durch die integrale Beschleunigung bestimmt, die im wesentlichen durch die elektromagnetische Wechselwirkung von Plasma und Struktur abhängt (vgl. Kapitel 6.6). Da hier nur die globale Plasmabewegung von Interesse ist, kann somit die Änderung der Stromdichte in Gleichung (4.41) vernachlässigt werden (Lackner [114]). Gleichung (4.41) vereinfacht sich damit zu

$$\Delta \vec{F}^*(\vec{r}_0, t_0) = \vec{j}(\vec{r}, t) \times (\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{B}(\vec{r}_0, t)) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times (\vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{B}(\vec{r}, t_0)).$$

Schließlich ergibt sich die resultierende beschleunigende Kraftdichte auf das Plasma aus

$$\vec{F}^* = \vec{F}^*(\vec{r}_0, t_0) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \left[\left(\frac{\partial \vec{B}^{aux}}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{B}^{sec}}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{B}^{sec}}{\partial t} \right] \Bigg|_{\vec{r}_0, t_0} \Delta t$$

mit $\Delta \vec{F}^*$ in komponentenweiser Darstellung als

$$\begin{pmatrix} \Delta F_R^* \\ \Delta F_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{tor}(t) \cdot \left[\left(\frac{\partial B_z^{aux}}{\partial R} + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial R} \right) \cdot u + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial t} \right] \Bigg|_{\vec{r}_0, t_0} \Delta t \\ -j_{tor}(t) \cdot \left[\left(\frac{\partial B_R^{aux}}{\partial z} + \frac{\partial B_R^{sec}}{\partial z} \right) \cdot w + \frac{\partial B_R^{sec}}{\partial t} \right] \Bigg|_{\vec{r}_0, t_0} \Delta t \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Die räumlichen Ableitungen der magnetischen Induktion können entweder analytisch berechnet werden, oder weniger speicherplatzaufwendig numerisch mittels zentraler Differenzen.

Die zur Kompensation der Reifenkraft benötigte vertikale magnetische Induktion läßt sich nach Schumacher [2] zu

$$B_v(t) = \frac{\mu_0 I_P(t)}{4\pi R_m(t)} \left[\ln \left(\frac{8R_m(t)}{a(t)} \right) + \beta_p(t) + \frac{(l_i(t) - 3)}{2} \right]$$

berechnen. Man erhält daraus die dem thermodynamischen Druck entgegengesetzte radiale Kraft

$$F_R^{hoop} = 2\pi R_m \cdot I_P \cdot B_v.$$

bzw. eine Kraftdichte

$$F_R^{*,hoop} = \frac{F_R^{hoop}}{V_P} = \frac{I_P \cdot B_v}{A_P}.$$

Sinkt nun beim „energy-quench“ die Plasmatemperatur ab, sinkt auch der thermodynamische Druck und damit β_p . Daraus resultiert eine nach innen gerichtete, radiale Kraft, die das Plasma nach innen bewegt. Diese ergibt sich aus der Differenz der Reifenkräfte zu zwei Zeitpunkten:

$$\Delta F_R^{*,hoop} = F_R^{*,hoop}(t + \Delta t) - F_R^{*,hoop}(t)$$

oder

$$\begin{aligned} \Delta F_R^{*,hoop} &= \frac{\mu_0}{2} \left\{ \frac{I_P^2(t + \Delta t)}{V_P(t + \Delta t)} \left[\ln \left(\frac{8R_m(t + \Delta t)}{a(t + \Delta t)} \right) + \beta_p(t + \Delta t) + \frac{(l_i(t + \Delta t) - 3)}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_P^2(t)}{V_P(t)} \left[\ln \left(\frac{8R_m(t)}{a(t)} \right) + \beta_p(t) + \frac{(l_i(t) - 3)}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mit dieser zusätzlichen Kraft ergeben sich die gesamten beschleunigten Kraftdichten auf das Plasma als

$$\Delta \vec{F}^* = \Delta \vec{F}^* + \Delta \vec{F}_R^{*,hoop}$$

oder komponentenweise

$$\begin{pmatrix} \Delta F_R^* \\ \Delta F_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{tor} \cdot \left[\left(\frac{\partial B_R^{aux}}{\partial R} + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial R} \right) \cdot u + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial t} \right] \Big|_{\vec{r}_0} \Delta t + \Delta F_R^{*,hoop} \\ -j_{tor} \cdot \left[\left(\frac{\partial B_R^{aux}}{\partial z} + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial z} \right) \cdot w + \frac{\partial B_z^{sec}}{\partial t} \right] \Big|_{\vec{r}_0} \Delta t \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Da j_{tor} selbst von der Bewegung abhängig ist, was am Ohmschen Gesetz für bewegte Leiter, d.h. an den bewegungsinduzierten Strömen erkennbar ist, verhalten sich die Kräfte bezüglich der Geschwindigkeit nichtlinear.

4.8.2 Passive Stabilisierung

Unter passiver Stabilisierung versteht man die Stabilisierung des Plasmas durch Wirbelströme, die in der leitenden Struktur aufgrund der Plasmabewegung induziert werden. Hierbei werden kleine Störungen in vertikaler Richtung betrachtet, die aufgrund der labilen Gleichgewichtslage des Plasmas zu einem VDE führen können. Die stabilisierenden Kräfte kommen dabei aus der sekundären magnetischen Induktion, die destabilisierenden aus dem konstanten Hintergrundfeld:

$$\begin{aligned} F_{z,stab}^* &= -j_{tor} \cdot \left[\frac{\partial B_R^{sec}}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial B_R^{sec}}{\partial t} \right] \Big|_{\vec{r}_0} \Delta t \\ F_{z,destab}^* &= -j_{tor} \cdot \left[\frac{\partial B_R^{aux}}{\partial z} \cdot w \right] \Big|_{\vec{r}_0} \Delta t \end{aligned}$$

Bildet man das Verhältnis von beiden Kräften, erhält man eine Aussage über die vertikale Stabilität des Plasmas

$$f_z = \frac{F_{z,stab}^*}{F_{z,destab}^*}.$$

Ist dieser Quotient größer als 1, wird das Plasma passiv stabilisiert. Ist er kleiner als 1, verhält sich das Plasma instabil.

4.8.3 Lösung der Plasmabewegung

Zur Lösung der Impulsgleichungen (3.17) und (3.18) wird ein Starrkörperansatz verwendet. Dieser ist für die relevanten Vorgänge, wie z.B. den VDE geeignet. Im Anhang C ist eine Methode dargestellt, bei dem die Kontinuitäts- und Impulsgleichung über ein Druckkorrekturverfahren im Plasmagebiet berechnet werden. Diese Methode erlaubt zwar die Verformung des Plasmaquerschnitts während der vertikalen Auslenkung, sie ist allerdings sehr aufwendig. Aufgrund der physikalischen Instabilität des Plasmarandes muß das Plasma sehr fein diskretisiert werden, damit numerische Fehler nicht sofort zu einer physikalischen Pinch-Instabilität führen (vgl. Kapitel 2.1). Eine derart feine Diskretisierung ist aber im Hinblick auf die Blanketanalyse nicht sinnvoll. Der Rechenaufwand wird mit solch einem Verfahren viel zu groß.

Beim Starrkörperansatz wird das Plasma als fester Körper angesehen. Die auf das Plasma wirkenden äußeren Kraftdichten werden über das Plasmavolumen integriert. Damit erhält man die Gesamtkraft, die auf das starre Plasma wirkt:

$$\vec{F}_{tot}(t) = \int_{V_P} \vec{F}^*(\vec{r}, t) dV_P$$

oder in diskreter Schreibweise

$$\vec{F}_{tot}(t) = \sum_{k=1}^{NELE_P} \vec{F}_k^*(\vec{r}, t) \cdot f_k \cdot h^2.$$

Die Beschleunigung des gesamten Plasmas ergibt sich dann aus

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_{tot}}{V_P \rho}. \quad (4.44)$$

Die Integration dieser Gleichung wird mit einem Euler-Leapfrog-Verfahren (vgl. Hockney und Eastwood [115]) durchgeführt. Dieses Verfahren wird im Kapitel 6.2 gezeigt.

Kapitel 5

Kopplung von Plasma und Struktur

Im folgenden Kapitel wird die vollständige induktive Kopplung von Plasma und Struktur vorgestellt. Dazu werden nach einem kurzen Überblick über die einzelnen Module von CARIDDI die Gleichungen gezeigt, die in CARIDDI für die Wirbelstromanalyse in der dreidimensionalen Struktur gelöst werden. Obwohl dort andere finite Elemente als für das zweidimensionale Plasma verwendet werden und auch die Lösungsgröße eine andere ist, ist der Typ des schließlich zu lösenden Differentialgleichungssystems ähnlich dem des Plasmas. Dies erlaubt eine einfache, induktive Kopplung. Im weiteren wird der Kontakt von Plasma und Struktur behandelt. Dabei werden die äußeren Flußflächen, die durch die Struktur unterbrochen werden, abgeschält. Abschließend wird ein Modell hergeleitet, das den Einfluß der poloidalen „halo-currents“ auf die Plasmabewegung berücksichtigt.

5.1 Integration des Plasmamodells in CARIDDI

Das FE-Wirbelstromprogramm CARIDDI besteht aus fünf Programmteilen (siehe Abbildung 5.1): In `car0` wird das elektromagnetische Preprocessing der Struktur und des Plasmas vollzogen, d.h. es können z.B. besondere Oberflächen definiert und Materialeigenschaften zugeordnet werden. Der darauffolgende Teil `car1` führt die eigentliche Wirbelstromanalyse in der Struktur durch. Dazu wurden ursprünglich die Widerstands- und Induktivitätsmatrix und die zeitliche Integration des daraus resultierenden Differentialgleichungssystems berechnet. In diesem Teil muß auch die Plasmaberechnung stattfinden, da die Plasmadynamik mit den Wirbelströmen in der Struktur gekoppelt ist. Im Programmteil `car2` werden die Lorentz-Kräfte als Kreuzprodukt der Wirbelströme und der verschiedenen Komponenten der magnetischen Induktion in der Struktur berechnet. Das Postprocessing wird schließlich in `car3` vorgenommen. Die Schnittstelle von CARIDDI zu den strukturmechanischen FE-Programmen ABAQUS [116] bzw. ADINA [117] stellt der Programmteil `cara` dar.

Die Plasmadynamik muß aus erwähntem Grund im Programmteil `car1` integriert werden. Da sich durch das dynamische Plasmaverhalten teilweise auch Änderungen in den anderen Programmteilen ergaben, wurde für das Programmsystem mit dem modifizierten `car1` der neue Name CARIDDI-P eingeführt. Das Postprocessing der Plasmadaten geschieht mit eigens dafür erstellten Graphik- und Auswertungsprogrammen [118]; die elektromagnetischen und strukturmechanischen Ergebnisdaten werden wie im ursprünglichen CARIDDI mit dem kommerziellen Programm FemView [119] ausgewertet.

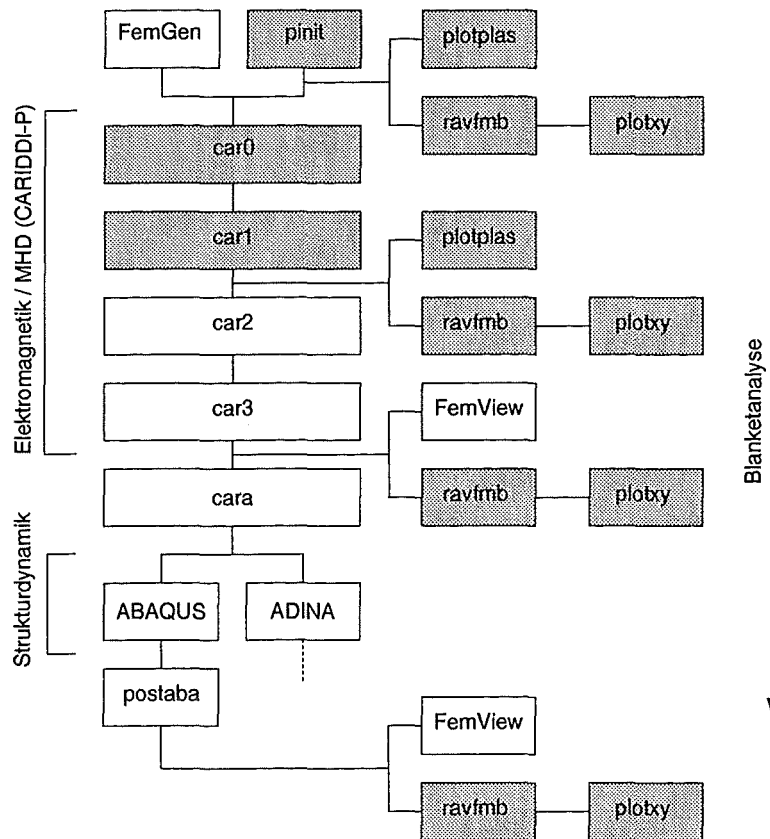


Abbildung 5.1: Schematischer Ablaufplan einer Blanketberechnung; Die neuen bzw. stark modifizierten Module sind grau hinterlegt dargestellt.

5.1.1 Grundgleichungen der Wirbelstromanalyse

Das Wirbelstrom-Programm CARIDDI berechnet die durch zeitveränderliche Ströme induzierten Wirbelströme und ist speziell auf die dreidimensionale poloidale/toroidale Geometrie des Tokamaks ausgelegt. Die Maxwell'schen Gleichungen lassen sich in der quasistationären Näherung in einer integralen Form zusammenfassen, in der nicht mehr die Stromdichte, sondern das Stromvektorpotential als Lösungsgröße auftritt. Dies hat den entscheidenden Vorteil, daß nur die elektrisch leitenden Bereiche diskretisiert werden müssen und nicht zusätzlich die nicht leitende Umgebung. Auf eine ausführliche Herleitung dieser Gleichung wird hier verzichtet, da dies nicht Bestandteil der vorliegenden Arbeit war (siehe dazu Albanese und Rubinacci [31]). Man geht zunächst von

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{j}_S(\vec{r}', t)}{\partial t} dV' + \boldsymbol{\eta}_S \vec{j}_S(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\vec{r}, t). \quad (5.1)$$

aus. Darin ist j_S die Stromdichte in der Struktur, \vec{A}^{ext} das externe magnetische Vektorpotential und $\nabla \phi(\vec{r}, t)$ die von außen angelegte, elektrische Spannung. $\boldsymbol{\eta}_S$ ist die Matrix des spezifischen Widerstands, der in der Struktur auch anisotrope Eigenschaften aufweisen kann. Mit dem Produktansatz bestehend aus einer Formfunktion \vec{N}_j und dem an diskreten Stellen zu bestimmenden Stromvektorpotential I_S

$$\vec{j}_S(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{NELES} \vec{N}_{J,k}(\vec{r}) I_{S,k}(t)$$

und der Galerkin-Formulierung erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{L}_S \frac{d}{dt} \{I_S(t)\} + \mathbf{R}_S \{I_S(t)\} = \{U_S(t)\} = \mathbf{L}_{PS} \frac{d}{dt} \{J_P(t)\} \quad (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} L_{S,ik} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_k} \int_{V_i} \frac{\vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \vec{N}_{J,k}(\vec{r})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} dV_i dV_k \\ R_{S,ik} &= \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \boldsymbol{\eta}_S \vec{N}_{J,k}(\vec{r}) dV_i \\ U_{S,i} &= - \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \frac{\partial \vec{A}_i^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} dV_i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

\mathbf{L}_S ist darin die Induktivitätsmatrix der Struktur, \mathbf{R}_S deren Widerstandsmatrix und \mathbf{L}_{PS} die Kopplungsmatrix, die die induktive Kopplung vom Plasma auf die Struktur beschreibt. Die einzelnen Komponenten des externen magnetischen Flusses $\vec{A}^{ext}(\vec{r}, t)$ auf der rechten Seite von Gleichung (5.1) können an einer beliebigen Stelle pro Umfanglänge zu

$$\begin{aligned} A_R^{ext}(\vec{r}_i, t) &= \frac{\mu_0 \cdot J_P(t)}{2\pi R_P} \sqrt{R_P R_i} \cdot G(\alpha) \cdot \cos \varphi = \Gamma_R(\vec{r}_i) \cdot J_P(t) \\ A_\ominus^{ext}(\vec{r}_i, t) &= 0 \\ A_z^{ext}(\vec{r}_i, t) &= \frac{\mu_0 \cdot J_P(t)}{2\pi R_P} \sqrt{R_P R_i} \cdot G(\alpha) \cdot \sin \varphi = \Gamma_z(\vec{r}_i) \cdot J_P(t) \end{aligned}$$

berechnet werden, mit der Geometriefunktion

$$G(\alpha) = \left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) K(\alpha) - \frac{2 \cdot E(\alpha)}{\alpha}$$

und

$$\alpha^2 = \frac{4R_P R_i}{(R_P + R_i)^2 + (z_P - z_i)^2}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{z_P - z_i}{R_P - R_i} \right).$$

R_P ist der große Plasmaradius, z_P die vertikale Plasmalage und $K(\alpha)$ und $E(\alpha)$ die vollständigen elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Art (vgl. Kapitel 4.4.1). Wird das Plasma wie bei der hier vorgestellten Methode durch mehrere Elemente diskretisiert, muß R_P und z_P durch R_m bzw. z_m ersetzt werden. m ist jetzt der Index des jeweiligen Plasmaelements. Um die gesamte, vom Plasma im Strukturelement i induzierte Spannung $U_{S,i}$ zu erhalten, muß über alle Plasmaelemente summiert werden. Mit dieser Nomenklatur läßt sich Gleichung (5.3) auch schreiben als

$$U_{S,i} = - \sum_{m=1}^{NELE_P} \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \cdot \vec{\Gamma}_m(\vec{r}) \cdot dV_i \cdot \frac{dJ_{P,m}(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{NELE_P} L_{PS,im} \cdot \frac{dJ_{P,m}(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

Die einzelnen Komponenten der Matrix L_{PS} berechnen sich somit zu

$$L_{PS,im} = - \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \cdot \vec{\Gamma}_m(\vec{r}) \cdot dV_i.$$

Im Gegensatz zu den in der Strukturmechanik üblichen Elementen, bei denen die Freiheitsgrade - dort die Verschiebungen - an den Elementknoten definiert sind, werden in CARIDDI sogenannte Whitney-Elemente verwendet, bei denen die Freiheitsgrade in den Elementkanten lokalisiert sind. Dieser Typ von finiten Elementen wurde von Welij [120] vorgestellt. Die Formfunktion beschreibt für diesen Fall einen Einheits-Stromwirbel um die betreffende Elementkante. Der Vorteil in der Verwendung des Stromvektorpotentials und der Whitney-Elemente liegt in ihrer impliziten Gewährleistung der Divergenzfreiheit des Wirbelstroms.

5.1.2 Berechnung der Kopplungsmatrix

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der induktiven Kopplung von der Struktur auf das Plasma gezeigt. Die einzelnen Elemente von $\{U_P(t)\}$ berechnen sich nach Gleichung (4.22) zu

$$U_{P,m} = - \oint_{C_m} \frac{\partial \Psi_{3D}^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t} ds_m.$$

$\Psi_{3D}^{ext}(\vec{r}, t)$ ist der externe magnetische Fluß, der von der dreidimensionalen Struktur auf das Plasma wirkt. Da nur der sekundäre magnetische Fluß eine Funktion der Zeit ist, kann $\frac{\partial \Psi_{3D}^{ext}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ ersetzt werden durch $\frac{\partial \Psi_{3D}^{sec}(\vec{r}, t)}{\partial t}$. Für $\Psi_{3D}^{sec}(\vec{r}, t)$ gilt allgemein das Coulomb-Potential (vgl. Kapitel 4.3)

$$\Psi_{3D}^{sec}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{V_i} \frac{\vec{j}_S(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_{\Theta_i} dV_i$$

und mit dem FE-Ansatz für die Ströme in der Struktur

$$\Psi_{3D}^{sec}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{V_i} \frac{\sum_{i=1}^{NELEs} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) I_{S,i}(t)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_m|} \vec{e}_{\Theta_i} dV_i.$$

Somit läßt sich Gleichung (4.22) auch schreiben als

$$U_{P,m} = - \sum_{i=1}^{NELEs} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_m} \int_{V_i} \frac{\vec{N}_{J,i}(\vec{r})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_m|} dV_i \vec{e}_{\Theta_i} ds_m \cdot \frac{dI_{S,i}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{NELEs} L_{SP,mi} \cdot \frac{dI_{S,i}(t)}{dt}.$$

$L_{SP,mi}$ sind die einzelnen Elemente einer Kopplungsmatrix \mathbf{L}_{SP} , die die induktive Kopplung von der Struktur auf das Plasma beschreibt. Die Integrationen lassen sich vertauschen, so daß man für diese Elemente folgendes erhält:

$$L_{SP,mi} = - \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \oint_{C_m} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{e}_{\Theta_i} ds_m}{|\vec{r}_i - \vec{r}_m|} dV_i. \quad (5.5)$$

Die innere Integration läßt sich analog zu Kapitel 4.4.1 berechnen. Unter Benutzung der elliptischen Integrale 1. und 2. Art erhält man

$$\oint_{C_m} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{e}_{\Theta_i} ds_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|} = \frac{\mu_0 \sqrt{R_m R_i}}{2\pi R_m} \left[\left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) K(\alpha) - \frac{2 \cdot E(\alpha)}{\alpha} \right] \vec{e}_{\Theta_i} = \vec{\Gamma}_m(\vec{r})$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{4R_i R_m}{(R_i + R_m)^2 + (z_i - z_m)^2}.$$

Somit läßt sich Gleichung (5.5) abgekürzt auch schreiben als

$$L_{SP,mi} = - \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \cdot \vec{\Gamma}_m(\vec{r}) \cdot dV_i$$

und damit

$$U_{P,m} = - \sum_{i=1}^{NELEs} \int_{V_i} \vec{N}_{J,i}(\vec{r}) \cdot \vec{\Gamma}_m(\vec{r}) \cdot dV_i \cdot \frac{dI_{S,i}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{NELEs} L_{SP,mi} \cdot \frac{dI_{S,i}(t)}{dt} \quad (5.6)$$

bzw.

$$\{U_P(t)\} = \mathbf{L}_{SP} \cdot \frac{d}{dt} \{I_S(t)\}.$$

Vergleicht man Gleichung (5.6) mit Gleichung (5.4), erkennt man an den vertauschten Indizes, daß folgende Symmetrie gilt:

$$\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{L}_{PS}^T$$

Diese Symmetrie muß schon deswegen gelten, da die Induktivitätsmatrix des Gesamtsystems bestehend aus Plasma und Struktur, also

$$\mathbf{L}_{gesamt} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_{PS} \\ \mathbf{L}_{SP} & \mathbf{L}_P \end{bmatrix},$$

wegen der physikalischen Symmetrie der Induktivität auch symmetrisch sein muß. Es gilt also

$$\mathbf{L}_{gesamt} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_{PS} \\ \mathbf{L}_{PS}^T & \mathbf{L}_P \end{bmatrix}.$$

Für den sekundären magnetischen Fluß, induziert von den dreidimensionalen Strömen in der Struktur an dem Plasmaelement m , erhält man schließlich

$$\Psi_m^{sec}(t) = \sum_{i=1}^{NELEs} L_{SP,mi} \cdot I_{S,i}(t)$$

oder für alle Plasmaelemente

$$\{\Psi^{sec}(t)\} = \mathbf{L}_{SP} \cdot \{I_S(t)\}.$$

5.1.3 Berechnung der sekundären magnetischen Induktion

Als sekundäre magnetische Induktion wird das magnetische Feld bezeichnet, das durch die Wirbelströme in der Struktur erzeugt wird. Dieses Feld kann aus dem sekundären magnetischen Fluß berechnet werden. Dabei ist aber zu beachten, daß hier ein Übergang von der dreidimensionalen Struktur auf das zweidimensionale Plasma mit den entsprechend unterschiedlichen Lösungsgrößen und deren Darstellung stattfindet. Der magnetische Fluß, der von den Wirbelströmen in der Struktur im Plasma induziert wird, berechnet sich nach Kapitel 5.1.2 folgendermaßen:

$$\{\Psi^{sec}\} = \mathbf{L}_{PS}^T \cdot \{I_S(t)\}.$$

Da aber in die zweidimensionale Plasmaberechnung der Fluß als Fluß pro Umfangslänge definiert ist, gilt

$$\Psi_{3D}^{sec} = \oint_C \Psi_{2D}^{sec} ds = 2\pi R \Psi_{2D}^{sec}.$$

Daraus erhält man für den Fluß am Plasmaelement m

$$\Psi_m^{sec} = \frac{1}{2\pi R_m} \sum_{i=1}^{NELEs} L_{PS,mi} \cdot I_{S,i}(t).$$

Damit läßt sich analog zu Gleichung (4.17) die sekundäre magnetische Induktion im Plasma berechnen:

$$\vec{B}^{sec}(\vec{r}, t) = \nabla \times (\mathbf{N}_\Psi(\vec{r}) \cdot \{\Psi^{sec}(t)\}) = \nabla \times \left(\frac{1}{2\pi R} \cdot \mathbf{N}_\Psi(\vec{r}) \cdot \mathbf{L}_{PS}^T \cdot \{I_S(t)\} \right)$$

oder in komponentenweiser Darstellung

$$\begin{pmatrix} \{B_R^{sec}\} \\ \{B_z^{sec}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{N}_\Psi(\vec{r}) \cdot \mathbf{L}_{PS}^T \cdot \{I_S(t)\}) \\ \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{N}_\Psi(\vec{r}) \cdot \mathbf{L}_{PS}^T \cdot \{I_S(t)\}) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{N}_\Psi(\vec{r})$ ist die Matrix der Formfunktionen, die die diskreten Werte von $\Psi^{sec}(t)$ auf das Plasmagebiet verteilt, so daß daraus eine kontinuierliche magnetische Induktion berechnet werden kann. Da

die Rotation von $(\mathbf{N}_\Psi(\vec{r}) \cdot \mathbf{L}_{PS}^T \cdot \{I_S(t)\})$ im Plasmagebiet numerisch berechnet wird, müssen die Ableitungen der Formfunktionen durch die entsprechende Finite-Differenzen-Formulierung ersetzt werden. Zur numerischen Lösung werden zentrale Differenzen verwendet. Die Randwerte werden linear aus dem Rechengebiet heraus extrapoliert. So erhält man also für die Berechnung der sekundären magnetischen Induktion im Plasmagebiet

$$\begin{pmatrix} B_R^{sec}(R, z) \\ B_z^{sec}(R, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Psi^{sec}(R, z+h) - \Psi^{sec}(R, z-h)}{2h} \\ - \left(\frac{\Psi^{sec}(R+h, z) - \Psi^{sec}(R-h, z)}{2h} + \frac{\Psi^{sec}(R, z)}{R} \right) \end{pmatrix}.$$

5.1.4 Gekoppeltes Wirbelstromproblem

Das vollständig induktiv gekoppelte Wirbelstromproblem, das die Elektrodynamik in der Struktur und im Plasmabereich bestimmt, kann zusammengefaßt folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_{PS} \\ \mathbf{L}_{PS}^T & \mathbf{L}_P \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \{I_S(t)\} \\ \{J_P(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S & \mathbf{0} \\ \vec{v}(t) \times \nabla \times (\mathbf{N}_\Psi \cdot \mathbf{L}_{PS}^T) & \mathbf{R}_P(t) + \vec{v}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_P}{\partial \vec{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{I_S(t)\} \\ \{J_P(t)\} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \int_0^{2\pi R} \{ \mathbf{B}^{aux} \cdot \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_\Theta \} d\Theta \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

In der oberen Zeile ist das Differentialgleichungssystem für die Wirbelströme in der Struktur zu erkennen. Diese ist mit der unteren Zeile, den Differentialgleichungen für die Elektrodynamik des Plasmas vollständig über die außerdiagonalen Terme der Matrizen gekoppelt. Die geschwindigkeitsabhängigen Terme in diesem Gleichungssystem werden im folgenden nochmals erläutert:

- $\vec{v}(t) \times \nabla \times (\mathbf{N}_\Psi \cdot \mathbf{L}_{PS}^T)$:
Aufgrund der Plasmabewegung im sekundären Magnetfeld induzierte Spannungen im Plasma: Wird das Plasma senkrecht zu dem von den Wirbelströmen der Struktur induzierten Magnetfeld bewegt, werden Spannungen und schließlich toroidale Ströme im Plasma induziert. Diese haben wiederum Kräfte zur Folge, die der Bewegung entgegengesetzt sind.
- $\vec{v}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_P}{\partial \vec{r}}$:
Konvektiver Transport des Plasmastroms
- $\int_0^{2\pi R} \{ \mathbf{B}^{aux} \cdot \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_\Theta \} d\Theta$:
Bewegungsinduktivität aufgrund der Bewegung des Plasmas durch das zeitlich konstante Hintergrundfeld

5.2 Randbedingungen Plasma - Struktur

Beim Kontakt des Plasmas mit der Struktur werden die Flußflächen des Plasmas, die von der Struktur unterbrochen werden, abgeschält (vgl. Abbildung 5.2). Dieses äußere Plasmagebiet kann ähnlich wie beim Kontakt mit einem Limiter als „scrape off layer“ (SOL) bezeichnet werden. In diesem SOL wird das Plasma aufgrund von gelösten Strukturatomen sehr stark verunreinigt. Dadurch steigt die Energieabstrahlung über den Plasmarand stark an, so daß dort das Plasma abkühlt und schließlich

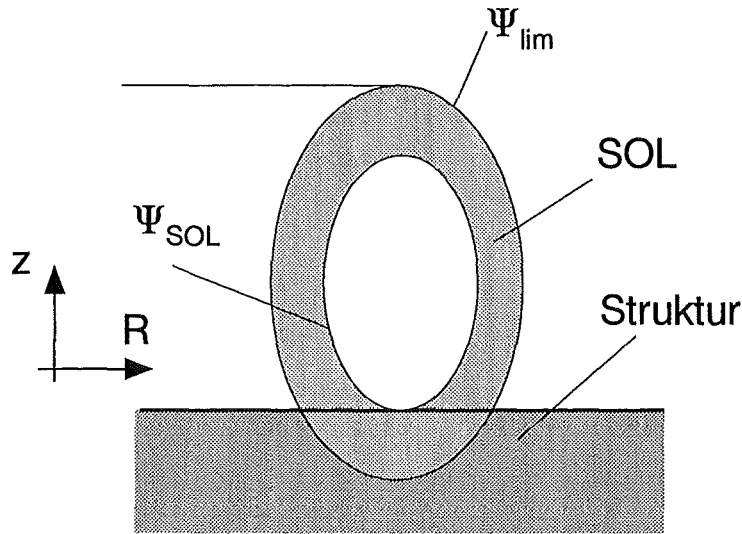


Abbildung 5.2: Abschälung der äußeren Flußflächen

rekombiniert (vgl. Klingelhöfer [121]). Der Fluß der letzten, nicht abgeschälten Flußfläche wird hier mit Ψ_{SOL} bezeichnet. Die erste Flußfläche (kleinster Wert des magnetischen Flusses) im Plasmagebiet, die mit der Struktur in Kontakt tritt, wird mit Ψ_{lim} bezeichnet. Das Plasmagebiet zwischen Ψ_{lim} und Ψ_{SOL} ist die sogenannte „halo“-Region.

Im folgenden wird die Berechnung der beiden Flußflächen mit $\Psi = \Psi_{SOL}$ bzw. mit $\Psi = \Psi_{lim}$ exemplarisch für die Fläche mit Ψ_{SOL} vorgeführt. Die Berechnung für Ψ_{lim} verläuft analog. Die Bestimmung der Flußfläche, die gerade mit der Struktur in Kontakt steht, erfolgt über die Füllfraktionen der Struktur f_S im Plasmarechennetz (vgl. Kapitel 4.1). Dazu werden für die radiale Position die Füllfraktionen der beiden Nachbarzellen in horizontaler und für die vertikale Position die Füllfraktionen der Nachbarzellen in vertikaler Richtung herangezogen.

$$R_{SOL} = R + f_S(R+h, z) \cdot \left(\frac{f_S(R+h, z)}{2} - f_S(R, z) \right) \cdot h - f_S(R-h, z) \cdot \left(\frac{f_S(R-h, z)}{2} - f_S(R, z) \right) \cdot h$$

$$z_{SOL} = z + f_S(R, z+h) \cdot \left(\frac{f_S(R, z+h)}{2} - f_S(R, z) \right) \cdot h - f_S(R, z-h) \cdot \left(\frac{f_S(R, z-h)}{2} - f_S(R, z) \right) \cdot h$$

Der genaue Fluß an der Kontaktstelle ergibt sich ähnlich wie bei der Bestimmung der magnetischen Achse oder des X-Punktes in Kapitel 4.6 über eine quadratische Interpolation aus den Nachbarzellen:

$$\Psi_{SOL} = A \cdot (R_{SOL} - R)^2 + B \cdot (z_{SOL} - z)^2 + C \cdot (R_{SOL} - R) + D \cdot (z_{SOL} - z) + E$$

mit

$$A = \frac{\Psi(R-h, z) + \Psi(R+h, z) - 2\Psi(R, z)}{2h^2}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\Psi(R, z+h) + \Psi(R, z-h) - 2\Psi(R, z)}{2h^2} \\
C &= \frac{\Psi(R+h, z) - \Psi(R-h, z)}{2h} \\
D &= \frac{\Psi(R, z+h) - \Psi(R, z-h)}{2h} \\
E &= \Psi(R, z).
\end{aligned}$$

Mit den gewonnenen Werten kann eine relative „halo“-Weite definiert werden als (vgl. auch Lao und Jensen [24])

$$\alpha_{halo} = \frac{\Psi_{lim} - \Psi_{SOL}}{\Psi_{lim} - \Psi_m}.$$

Ψ_m ist der Fluß auf der magnetischen Achse. Hat das Plasma keinen Kontakt mit der Struktur, gilt $\Psi_{SOL} = \Psi_{lim}$ und damit $\alpha_{halo} = 0$. Tritt das Plasma mit der Wand in Kontakt, steigt die effektive Kernladungszahl Z_{eff} aufgrund der aus der Wand herausgerissenen Atome stark an. Ist die Erste Wand des Reaktors z.B. mit Kohlenstoff beschichtet, bedeutet dies, daß für ein Kohlenstoff-Atom, das in das Plasma gelangt, entsprechend der unterschiedlichen Massenzahlen der Elemente 12 Wasserstoff-Atome ersetzt werden. Der elektrische Widerstand des Plasmas steigt proportional zur effektiven Kernladungszahl an (vgl. Kapitel 4.4.2). Die Modellierung des Anstiegs der effektiven Kernladungszahl wird mit Hilfe der relativen Weite der „halo“-Region α_{halo} nach der folgenden Gewichtsbeziehung vorgenommen:

$$Z_{eff} = \alpha_{halo} \cdot Z_{eff}^{imp} + (1 - \alpha_{halo}) \cdot Z_{eff}^0.$$

Hierin ist Z_{eff}^0 die effektive Kernladungszahl des Plasmas, wenn dieses noch nicht mit der Struktur in Kontakt getreten ist (z.B. bei ASDEX-Upgrade ≈ 1.3) und Z_{eff}^{imp} die effektive Kernladungszahl eines maximal verschmutzten Plasmas. Dieser Wert muß empirisch angenommen werden.

5.2.1 Abschälung des Randplasmas

Beim Kontakt des Plasmas mit der Struktur sind aufgrund des verschränkten Magnetfeldes alle Teilchen des Plasmas, die in der selben Flußfläche wie die Kontaktstelle liegen, von dem Kontakt betroffen, d.h., jede Flußfläche, die von der Struktur unterbrochen wird, wird unmittelbar abgeschält. Die letzte Flußfläche, die abgeschält wird, ist diejenige mit der Wert Ψ_{SOL} . Dies bedeutet für die numerische Simulation, daß für alle Bereiche des Plasmas, für die

$$\Psi \leq \Psi_{SOL}$$

gilt, die Temperatur auf Vakuumtemperatur abgesenkt werden muß. Verläuft die Flußfläche mit Ψ_{SOL} durch eine Zelle des Rechnernetzes, wird die Temperatur in dieser Zelle entsprechend gewichtet abgesenkt. Dazu werden die Flußwerte an den Ecken der entsprechenden Zellen nach den folgenden Gleichungen ermittelt (vgl. Abbildung 5.3):

$$\begin{aligned}
\Psi_{SW} &= \Psi\left(R - \frac{h}{2}, z - \frac{h}{2}\right) = \frac{\Psi(R-h, z) + \Psi(R, z-h)}{2} \\
\Psi_{SO} &= \Psi\left(R + \frac{h}{2}, z - \frac{h}{2}\right) = \frac{\Psi(R, z-h) + \Psi(R+h, z)}{2} \\
\Psi_{NO} &= \Psi\left(R + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}\right) = \frac{\Psi(R+h, z) + \Psi(R, z+h)}{2}
\end{aligned}$$

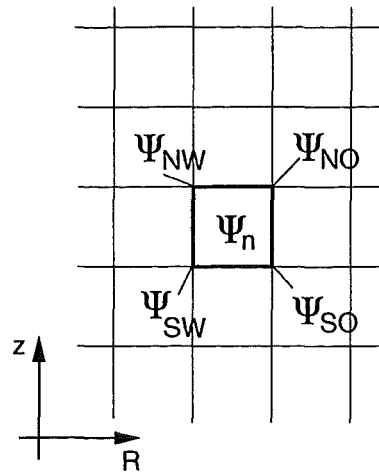


Abbildung 5.3: Interpolierte Eckwerte des Flusses in der Zelle n

$$\Psi_{NW} = \Psi\left(R - \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}\right) = \frac{\Psi(R, z + h) + \Psi(R - h, z)}{2}$$

Die Extremwerte der Flüsse an den Ecken ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}\Psi_{min} &= \min(\Psi_{SW}, \Psi_{SO}, \Psi_{NO}, \Psi_{NW}) \\ \Psi_{max} &= \max(\Psi_{SW}, \Psi_{SO}, \Psi_{NO}, \Psi_{NW}).\end{aligned}$$

Mit diesen Extremwerten kann ein Wichtungsparemeter δ_{SOL} bestimmt werden, der näherungsweise beschreibt, welcher Anteil der Zelle einen Wert des magnetischen Flusses größer als Ψ_{SOL} besitzt.

$$\delta_{SOL}(R, z) = \frac{\Psi_{SOL} - \Psi_{min}(R, z)}{\Psi_{max}(R, z) - \Psi_{min}(R, z)}$$

Damit berechnet sich die Plasmatemperatur dieser Zelle zu

$$T_{eV;SOL}(R, z) = \delta_{SOL} \cdot T_{eV}(R, z) + (1 - \delta_{SOL}(R, z)) \cdot T_{eV;V},$$

wobei $T_{eV;V}$ die Temperatur des Vakuums bedeutet.

5.2.2 Modellierung von „halo-currents“

In der oben beschriebenen „halo“-Region werden aufgrund der Bewegung des Plasmas durch das Toroidalfeld poloidale Spannungen induziert. Diese führen im Gegensatz zu den Bereichen des Plasmas mit geschlossenen Flußflächen zu poloidalen Strömen, den sogenannten „halo-currents“. Arbeiten dazu wurden unter anderem von Neyatani, Yoshino und Ando [122], Streibl et al. [50], Strait et al. [59] oder Gruber et al. [123] veröffentlicht. In der letzten Zeit wurden auch verschiedene Fortschritte bei der numerischen Simulation von „halo-currents“ gemacht. Dabei sind die Arbeiten von Sayer et al. [20] und Lukash und Khairutdinov [26] zu erwähnen. In all diesen Arbeiten wird gezeigt, daß die „halo-currents“ über die Kontaktflächen von Plasma und Struktur in die Struktur eingeleitet und an einer anderen Stelle wieder in das Plasma ausgeleitet werden können (vgl. Abbildung 5.4). Für die Plasmabewegung bedeutet dies, daß die poloidalen Ströme in der Struktur

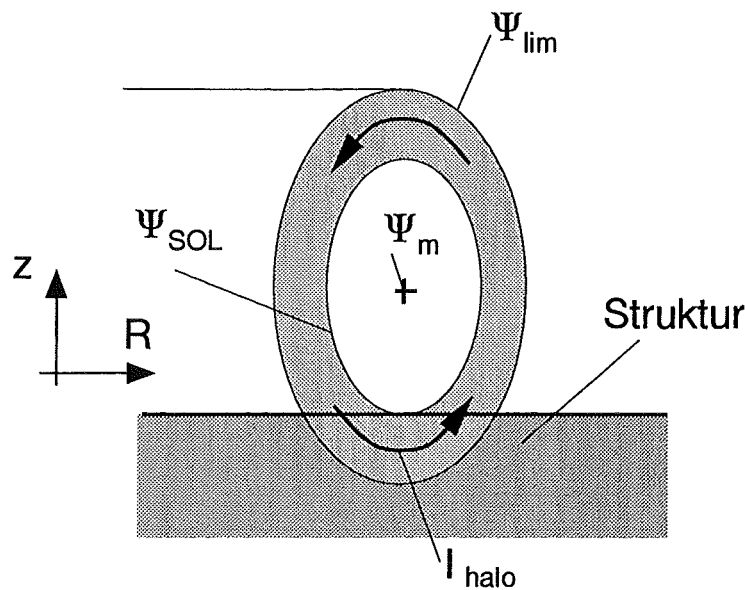


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung der poloidalen „halo-currents“

zusammen mit den in entgegengesetzter Richtung fließenden poloidalen Strömen im Plasma eine abstoßende Kraft bewirken, so daß das Plasma in seiner Bewegung verlangsamt wird (vgl. Gruber et al. [49]). Der wesentlich kleinere, toroidale Anteil der „halo-currents“ dagegen beschleunigt die Plasmabewegung, da dieser in die gleiche Richtung fließt wie der Plasmastrom. Für die bremsende Wirkung der poloidalen Komponente muß eine zusätzliche Bedingung eingeführt werden. Da die Größe und Erscheinungsform der „halo-currents“ ein aktuelles Forschungsthema der Plasmaphysik ist und die Vorgänge noch nicht im Detail verstanden sind, wird hier ein empirisches Modell entwickelt. Das Modell gibt die verlangsamenenden Auswirkungen der poloidalen „halo-currents“ auf die Plasmabewegung tendenziell mittels korrigierten Geschwindigkeiten wieder. Die quantitativen Ergebnisse dieses Modells haben eine für die hier verfolgten Ziele genügende Genauigkeit. Die Modellannahme für die Plasmageschwindigkeit lautet folgendermaßen:

$$\vec{v}^* = \vec{v} \cdot F_{halo}(\omega_{halo}, \alpha_{halo}, \kappa)$$

mit

$$F_{halo}(\omega_{halo}, \alpha_{halo}, \kappa) = \left(1 - \omega_{halo} \cdot \alpha_{halo}^{\frac{1}{\kappa}}\right). \quad (5.8)$$

Ohne Plasma-Wand-Kontakt erhält man $\alpha_{halo} = 0$ bzw. $F_{halo}(\omega_{halo}, \alpha_{halo}, \kappa) = 1$. Die Plasmabewegung wird also nicht beeinträchtigt. Der Term $\alpha_{halo}^{\frac{1}{\kappa}}$ in Gleichung (5.8) berücksichtigt die Elongation des Plasmas. Für ein vertikal elongiertes Plasma ($\kappa > 1$) ist die radiale Komponente der „halo-currents“ kleiner als die vertikale, das Plasma wird also weniger stark verzögert. Der Parameter ω_{halo} gibt schließlich an, wie stark das Plasma abgebremst wird. Ist $\omega_{halo} = 1$, dann kommt das Plasma zur Ruhe wenn die magnetische Achse die Struktur berührt. Das „Plasma“ besteht dann nur noch aus der „halo“-Region. Ist $\omega_{halo} < 1$ wird das Plasma über diesen Punkt hinaus weiterbewegt. Mit ω_{halo} kann also der quantitative Einfluß der „halo-currents“ je nach Reaktorkonzept eingestellt werden. Dies bedeutet, daß für eine Anlage, die z.B. im Bereich des Divertors eine sehr gute poloidale elektrische Leitfähigkeit besitzt, ω_{halo} etwa als 1 gewählt werden sollte, wogegen bei einer schlechten poloidalen Leitfähigkeit ω_{halo} gegen Null geht.

Kapitel 6

Zeitintegration

In diesem Kapitel wird die Lösung der transienten Gleichungen im Zeitbereich dargestellt. Dazu wird zuerst die chronologische Reihenfolge der verschiedenen Integrationen beschrieben. Anschließend folgt die Lösung des Differentialgleichungssystems der Elektrodynamik mit einem teilweise impliziten Verfahren und die Lösung der Konvektionsgleichung der Plasmatemperatur. Das Kapitel schließt mit einigen Bemerkungen zur Wahl des numerischen Zeitschrittes ab.

6.1 Kopplung von Elektrodynamik und Fluidodynamik

Die Kopplung von Elektrodynamik und Fluidodynamik erfolgt über die elektromagnetischen Kräfte auf der Seite der Fluidodynamik und die Bewegungsinduktivität im Ohmschen Gesetz bzw. den davon abgeleiteten konvektiven Termen in der Konvektions-Diffusions-Gleichung des magnetischen Flusses (Gleichung 3.21). Die Kräfte, die Geschwindigkeiten, die toroidale Stromdichte sowie die Temperatur des Plasmas sind jeweils im Mittelpunkt der Gitterzellen definiert. Für alle Gleichungen des Plasmas, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden, wird das gleiche Rechnernetz verwendet. Dadurch kann die Kopplung der einzelnen Lösungsgrößen im Plasmagebiet relativ leicht durchgeführt werden. Die zeitliche Abfolge der Lösung der einzelnen Gleichungen ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Name des Unterprogramms in CARIDDI-P zur Lösung der transienten Vorgänge lautet `transp`. Darin wird zuerst das Plasma initialisiert, d.h. den einzelnen Gitterpunkten werden die Werte des Gleichgewichts bzw. die Werte des ausgekühlten Plasmas zugeordnet. Danach erfolgt die Berechnung der Induktivitätsmatrix, deren räumliche Ableitungen, der Widerstandsmatrix und der externen magnetischen Induktionen im Plasmagebiet. Die Bestimmung der Kopplungsmatrix $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{L}_{PS}^T$ erfolgt bereits vorher in dem Programmteil von CARIDDI-P, in dem auch die Systemmatrizen der Struktur bestimmt werden. Anschließend erfolgt die transiente Rechnung. Zur Lösung im Zeitbereich wird zuerst die sekundäre magnetische Induktion im Plasmagebiet bestimmt. Danach folgt die Berechnung der Plasmabewegung. Dafür werden zuerst die um den Gleichgewichtszustand linearisierten Kräfte ermittelt. Mit diesen beschleunigenden Kräften wird die Bewegungsgleichung des Plasmas integriert und somit die Plasmageschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt bestimmt. Mit dieser Geschwindigkeit wird das Plasma mit dem VOF-Verfahren über das Rechnernetz bewegt. Schließlich wird für den Fall, daß der „energy-quench“ noch nicht stattgefunden hat, das Temperaturprofil des Plasmas konvektiv mit dem Plasma mittransportiert.

Mit den erhaltenen Plasmageschwindigkeiten wird die Differentialgleichung der Elektrodynamik des Plasmas implizit gelöst. Danach ist der wesentliche Teil eines Zeitschritts abgeschlossen. Mit dem ermittelten toroidalen Plasmastrom und dessen räumlicher Verteilung im Rechnernetz wird die

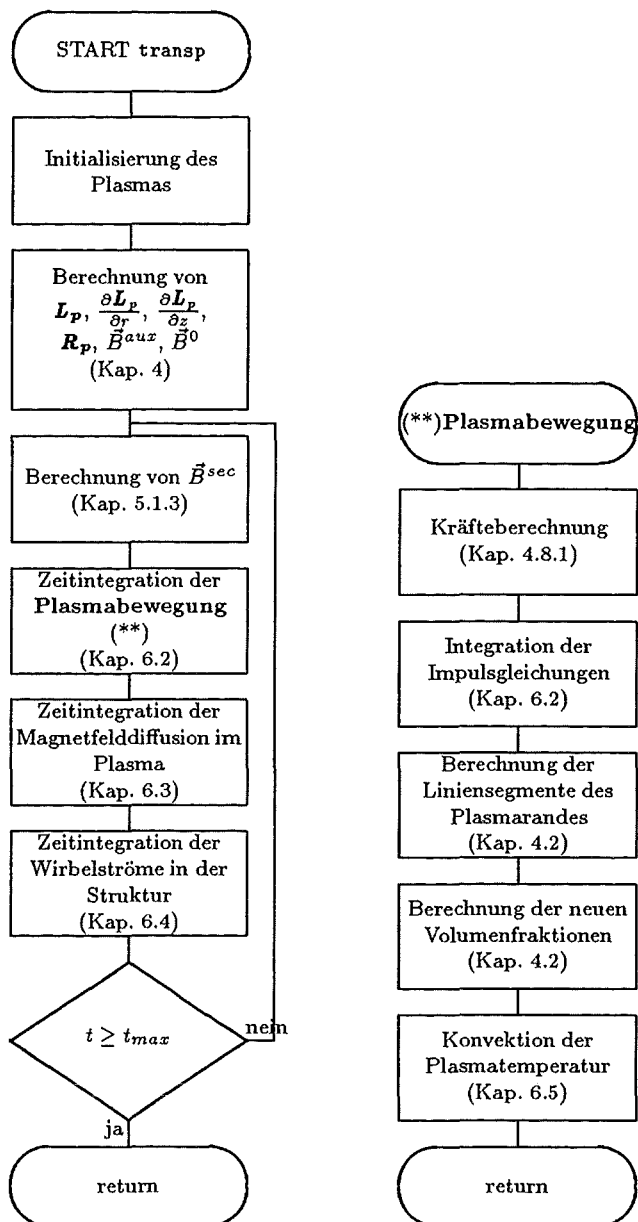


Abbildung 6.1: Zeitlicher Ablauf der Berechnung der einzelnen Lösungsgrößen

Wirbelstromanalyse der Struktur durchgeführt, woraus sich wiederum die sekundären magnetischen Induktionen für den nächsten Zeitschritt im Plasma ergeben.

Prinzipiell kann das gesamte gekoppelte Wirbelstromproblem (Gleichung 5.7) auch implizit gelöst werden. Für eine schnellere Berechnung empfiehlt es sich aber, die Struktur und das Plasma getrennt voneinander zu behandeln. Da die Induktivitäts- und die Resistivitätsmatrix der Struktur zeitlich konstant bleiben, muß die daraus entstehende Systemmatrix nur einmal präkonditioniert werden. Das System ist außerdem symmetrisch und positiv definit, so daß ein effektiver Gleichungslöser dafür eingesetzt werden kann. Die Systemmatrix des Plasmas ist zeitlich nicht konstant (Zeitabhängigkeit der Resistivität) und außerdem nicht symmetrisch. Das hat zur Folge, daß der eingesetzte Löser für allgemeine Matrizen geeignet sein muß und daher nicht so effizient ist.

6.2 Integration der Impulsgleichung

Die Zeitintegration der Impulsgleichung (4.44) der Plasmabewegung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_{tot}}{V_P \rho}$$

wird mit einem Euler-Leapfrog Verfahren (vgl. Günther [124]) durchgeführt. Dieses Verfahren beginnt mit einem expliziten Euler-Schritt, da noch keine Information zum Zeitpunkt $n - 1$ vorliegt. Danach folgen mehrere Leapfrog-Schritte. Da diese in der 2. Ordnung genauen Schritte aber zu numerischen Schwingungen neigen, muß nach jedem Zyklus jeweils ein gemischter Schritt durchgeführt werden. Die Anzahl der Leapfrog-Schritte in einem Zyklus wird von der Gutmütigkeit des zu simulierenden Systems bestimmt. Formelmäßig lassen sich also die verschiedenen Schritte folgendermaßen schreiben:

Euler-Schritt (1. Ordnung):

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^n + \Delta t \frac{\vec{F}_{tot}^n}{V_P \rho}$$

Leapfrog-Schritt (2. Ordnung):

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^{n-1} + 2\Delta t \frac{\vec{F}_{tot}^n}{V_P \rho}$$

Gemischter Euler-Leapfrog-Schritt (1. Ordnung):

$$\vec{v}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\vec{v}^n + \vec{v}^{n-1} + 3\Delta t \frac{\vec{F}_{tot}^n}{V_P \rho} \right]$$

Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Analysen werden aus Stabilitätsgründen zunächst ca. vier Leapfrog-Schritte durchgeführt, bevor ein 1. Ordnung genauer gemischter Schritt folgt.

6.3 Integration der Elektrodynamik des Plasmas

In Kapitel 4.3 wurde das lineare Differentialgleichungssystem (4.18) hergeleitet, das die Elektrodynamik des Plasmas während der Disruption beschreibt. Die Integration dieses Systems soll im folgenden vorgestellt werden. Dazu wird dieses System für die Zeitpunkte t und $t + \Delta t$ formuliert:

$$\mathbf{L}_P \frac{d}{dt} \{J_P(t)\} + \mathbf{R}_P^*(t) \cdot \{J_P(t)\} = \{U_P^*(t)\} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{L}_P \frac{d}{dt} \{J_P(t + \Delta t)\} + \mathbf{R}_P^*(t + \Delta t) \cdot \{J_P(t + \Delta t)\} = \{U_P^*(t + \Delta t)\} \quad (6.2)$$

mit

$$\{\vec{U}_P^*(t)\} = \mathbf{L}_{SP} \frac{d}{dt} \{\vec{I}_S(t)\} + \oint_C \{\mathbf{B}^{ext}(t) \cdot \vec{v}(t)\} ds.$$

Multipliziert man Gleichung (6.1) mit $(1 - \omega)$ und Gleichung (6.2) mit ω , wobei ω ein Parameter zwischen 0 und 1 ist, addiert beide Gleichungen und setzt folgendes ein:

$$\begin{aligned} (1 - \omega) \left\{ \frac{dJ_P(t)}{dt} \right\} + \omega \left\{ \frac{dJ_P(t + \Delta t)}{dt} \right\} &= \left\{ \frac{dJ_P(t)}{dt} \right\} + \omega \left(\left\{ \frac{dJ_P(t + \Delta t)}{dt} \right\} - \left\{ \frac{dJ_P(t)}{dt} \right\} \right) \\ &= \left\{ \frac{J_P(t + \Delta t) - J_P(t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

mit

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{explizite Eulersche Vorwärtsmethode} \\ 0.5 & \text{Crank-Nicolson (implizite Trapezregel)} \\ 1 & \text{implizite Eulersche Rückwärtsmethode} \end{cases}$$

So erhält man folgendes lineares Gleichungssystem für den Plasmastrom $J_P(t + \Delta t)$:

$$\mathbf{A}_P \{J_P(t + \Delta t)\} = \mathbf{B}_P \{J_P(t)\} + \{K_{SP}\}. \quad (6.3)$$

Die darin vorkommenden Größen bedeuten

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P &= \mathbf{L}_P + \Delta t \cdot \omega \cdot \mathbf{R}_P^*(t + \Delta t) \\ \mathbf{B}_P &= \mathbf{L}_P + \Delta t \cdot (\omega - 1) \cdot \mathbf{R}_P^*(t) \\ \{K_{SP}\} &= \mathbf{L}_{SP} (\{I_S(t + \Delta t)\} - \{I_S(t)\}) \\ &\quad + \omega \cdot \oint_C \{\mathbf{B}^{ext}(t + \Delta t) \cdot \vec{v}(t + \Delta t)\} ds \cdot \Delta t \\ &\quad + (1 - \omega) \cdot \oint_C \{\mathbf{B}^{ext}(t) \cdot \vec{v}(t)\} ds \cdot \Delta t \end{aligned}$$

wobei für $\omega \geq 0.5$ dieses Verfahren unbedingt stabil ist (vgl. Bathe [125]). Das Gleichungssystem (6.3) läßt sich zu jedem Zeitschritt lösen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß aufgrund der Zeitabhängigkeit der Matrix \mathbf{R}_P^* die Systemmatrix \mathbf{A}_P sowie die Matrix \mathbf{B}_P der rechten Seite nicht konstant sind. Zur Lösung dieses Systems wird in CARIDDI-P das Gauß-Jordan Verfahren [126] eingesetzt. Da die hier vorkommenden Matrizen einen erheblichen Speicherplatz beanspruchen, wird in CARIDDI-P die Widerstandsmatrix der rechten Seite voll implizit behandelt. Dies bedeutet, daß sich die Matrix der rechten Seite vereinfacht aus

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{L}_P + \Delta t(\omega - 1)\mathbf{R}_P^*(t + \Delta t)$$

berechnet. Des weiteren ist aufgrund der expliziten Kopplung von Plasma und Struktur die externe magnetische Induktion $\mathbf{B}^{ext}(t + \Delta t)$ bei der Plasmaberechnung noch nicht vorhanden. Deswegen wird dieser Term vollständig explizit behandelt. Die Spaltenmatrix $\{K_{SP}\}$ berechnet sich dann aus

$$\{K_{SP}\} = \mathbf{L}_{SP} (\{I_S(t + \Delta t)\} - \{I_S(t)\}) + \oint_C \{\mathbf{B}^{ext}(t) \cdot \vec{v}(t)\} ds \cdot \Delta t.$$

6.4 Integration der Elektrodynamik der Struktur

Für die Integration der Differentialgleichung für die Wirbelströme in der Struktur (Gleichung (5.2)) wird die gleiche Methode verwendet wie für das Plasma. Das zu lösende Gleichungssystem für die

Lösungsgröße $I_S(t + \Delta t)$ kann analog zu Kapitel 6.3 hergeleitet werden. Man erhält somit das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_S \{I_S(t + \Delta t)\} = \mathbf{B}_S \{I_S(t)\} + \{K_{PS}\}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_S &= \mathbf{L}_S + \Delta t \cdot \omega \cdot \mathbf{R}_S(t + \Delta t) \\ \mathbf{B}_S &= \mathbf{L}_S + \Delta t \cdot (\omega - 1) \cdot \mathbf{R}_P^*(t) \\ \{K_{PS}\} &= \mathbf{L}_{PS} (\{J_P(t + \Delta t)\} - \{J_P(t)\}).\end{aligned}$$

Für die Lösung dieses Gleichungssystems wird aufgrund der positiven Definitheit und der Symmetrie ein Cholesky-Verfahren [126] eingesetzt.

6.5 Konvektion der Plasmatemperatur

Ist die Plasmatemperatur über den Querschnitt nicht konstant, wie dies vor dem „energy-quench“ der Fall ist, muß bei einer Plasmabewegung zusätzlich die Konvektionsgleichung (3.29) für die Plasmatemperatur gelöst werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial (RT)}{\partial R} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Mit dieser Gleichung wird das Temperaturprofil des heißen Plasmas mit dem Plasma mitbewegt. Zur Diskretisierung des poloidalen Plasmaquerschnitts wird das selbe Rechnetz verwendet wie für die Diskretisierung der Elektrodynamik (vgl. Kapitel 4.1). Als Randbedingungen für die Temperatur wird die Vakuumtemperatur am Plasmarand eingesetzt. Mit einer „upwind“-Diskretisierung nach Günther [124] und einer expliziten Zeitintegration mit Vorwärtsdifferenzen erhält man als diskretisierte Konvektionsgleichung

$$T^{n+1}(R, z) = T^n(R, z) - C_R \cdot \frac{1}{R} \Delta (RT_R^n(R, z)) - C_z \cdot \Delta T_z^n(R, z).$$

Darin wurden die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwendet. Für die finiten Differenzen in radialer Richtung gilt

$$\begin{aligned}\Delta (RT_R^n) &= R \cdot T^n(R, z) - (R - h) \cdot T^n(R - h, z) && \text{für } u(R, z) > 0 \\ \Delta (RT_R^n) &= (R + h) \cdot T^n(R + h, z) - R \cdot T^n(R, z) && \text{für } u(R, z) \leq 0\end{aligned}$$

und in vertikaler Richtung

$$\begin{aligned}\Delta T_z^n &= T^n(R, z) - T^n(R, z - h) && \text{für } w(R, z) > 0 \\ \Delta T_z^n &= T^n(R, z + h) - T^n(R, z) && \text{für } w(R, z) \leq 0.\end{aligned}$$

Die Courant-Zahlen in beide Richtungen sind definiert als

$$\begin{aligned}C_R &= \frac{u(R, z) \cdot \Delta t}{\Delta R} = \frac{u(R, z) \cdot \Delta t}{h} \\ C_z &= \frac{w(R, z) \cdot \Delta t}{\Delta z} = \frac{w(R, z) \cdot \Delta t}{h}.\end{aligned}$$

Für die Stabilität des Verfahrens gilt das Courant-Kriterium für ein zweidimensionales Gebiet (vgl. Günther [124]). Die Stabilität der Lösung dieser Gleichung ist aber bei dem hier zu behandelnden Problem nicht relevant, da der numerische Zeitschritt, wie in Kap. 6.6 gezeigt wird, aus elektromagnetischen Gründen sehr viel kleiner gewählt werden muß als der für die Konvektion der Plasmatemperatur kritische Zeitschritt.

6.6 Die Zeitschrittweite

Da die Elektrodynamik und die Fluidodynamik miteinander gekoppelt sind, muß für jeden Zeitschritt eine Lösung für beide Teilbereiche gefunden werden. Die jeweilige Zeitschrittweite richtet sich nach den schnellsten Vorgängen, die numerisch aufgelöst werden müssen, bzw. nach den Stabilitätsgrenzen der einzelnen numerischen Verfahren. Im hier vorliegenden Fall sind die Zeitschritte, um die Stabilitätsgrenzen einzuhalten, viel größer als die charakteristische physikalische Zeit der elektromagnetischen Wechselwirkung von Plasma und Struktur. Dies bedeutet, daß sich der numerische Zeitschritt nach den physikalischen Vorgängen richtet. Die Wahl des numerischen Zeitschrittes hängt also von der Ausbreitungsgeschwindigkeit von kleinen elektromagnetischen Störungen ab. In einem magnetisierten Plasma breiten sich elastische Wellen der Magnetfeldlinien mit der Alfvén-Geschwindigkeit aus. Diese kann mit Gleichung (3.1)

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

ermittelt werden. Für einen Tokamak ergibt sich

$$|\vec{v}_A| \approx 10^6 \frac{m}{s}$$

und mit einer charakteristischen Länge von $0.1 m$ eine charakteristische Zeit von

$$\tau_A \approx 10^{-7} s.$$

Will man diese Wellen numerisch auflösen, ist ein Zeitschritt erforderlich, der um mindestens eine Größenordnung kleiner ist als diese charakteristische Zeit. Die notwendige Zeitschrittweite läßt sich auch mit einer alternativen Überlegung abschätzen: Wird das Plasma mit einer bestimmten Geschwindigkeit senkrecht zu einem Magnetfeld bewegt, so werden darin Ströme induziert, die wiederum eine Kraft zur Folge haben, die der Bewegung entgegengesetzt ist (Lenzsche Regel). Diese rückstellende Kraft kann je nach Phasenlage das Plasma zu einer Schwingung anregen. Im folgenden wird die Zeitkonstante für diesen Effekt abgeschätzt. Dazu wird die von außen am Plasma angreifende beschleunigende Kraft der rückstellenden Kraft gleichgesetzt:

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = F_R.$$

Die rückstellende Kraft F_R kann als

$$F_R \approx j \cdot B$$

beschrieben werden, wobei j der durch die Bewegung induzierte Strom ist, der aus dem Ohmschen Gesetz bestimmt werden kann:

$$j \approx \frac{1}{\eta} (v \cdot B).$$

Mit einem komplexen Proportionalitätsfaktor k , der die Vorgänge des Stroms gegenüber den bewegungsinduzierten Spannungen berücksichtigt, erhält man

$$F_R = \frac{k}{\eta} \cdot v \cdot B^2$$

und schließlich die Differentialgleichung für die Bewegung

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{kB^2}{\eta} \cdot v = 0.$$

Diese besitzt den Eigenwert

$$\lambda = \frac{kB^2}{\rho\eta}$$

bzw. die Eigenzeit

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho\eta}{|k| B^2}.$$

Nimmt man Tokamak-relevante Daten, erhält man

$$\tau \approx 10^{-8} \text{ s.}$$

Um diese Zeitskala numerisch aufzulösen, ist eine äußerst kleine Zeitschrittweite nötig. Dies ist bezüglich des Rechenaufwands nicht praktikabel, insbesondere wenn man beabsichtigt, die Elektrodynamik der Struktur mit der gleichen zeitlichen Auflösung zu berechnen. Die Wahl von verschiedenen Zeitschritten für die Elektrodynamik der Struktur und des Plasmas ist nicht sinnvoll, da die Alfvén-Wellen auch stark von den elektromagnetischen Eigenschaften der Struktur beeinflusst werden. Andererseits sind die Alfvén-Wellen aufgrund ihrer sehr kleinen Zeitskala für die mechanische Strukturbelastung irrelevant. Das bedeutet, daß es letztlich nicht notwendig ist, diese hochfrequenten Störungen bzw. die zuvor beschriebenen Schwingungen aufzulösen. Lediglich die globale Plasmabewegung muß korrekt nachgebildet werden. Eine Möglichkeit, dieses zu erreichen ist die Einführung einer artifiziellen Dichte ρ^* , die um einen „enhancement factor“ $(FFAC)^2$ größer ist als die reale Dichte ρ . Dieser „Trick“ wurde auch von Jardin, Pomphrey und DeLucia [16] und Nakamura et al. [21] verwendet:

$$\rho^* = (FFAC)^2 \cdot \rho.$$

Daraus folgt dann für die Impulsgleichung

$$\rho^* \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = (FFAC)^2 \cdot \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = F_{\text{Beschleunigung}} - F_{\text{Rückstellung}}. \quad (6.4)$$

Dabei muß $FFAC$ einerseits so groß gewählt werden, daß die Zeitintegration mit angemessenem Aufwand möglich wird, andererseits aber noch so klein, daß die beschleunigende und rückstellende Kraft immer noch groß gegenüber der Trägheitskraft ist. Die erhöhte Dichte bringt den Vorteil, daß die hochfrequenten Alfvén-Wellen ausgeblendet werden. Dabei ist bei jeder Rechnung zu zeigen, daß die globale Plasmabewegung im wesentlichen unabhängig von $FFAC$ ist, daß also die Konvergenz des globalen Ergebnisses von $FFAC \rightarrow 1$ existiert (vgl. Kapitel 7.2.2).

Kapitel 7

Beispielrechnungen

Für eine erste Überprüfung der Implementierung, insbesondere der induktiven Kopplung, wurden einfache Testfälle mit ortsfesten, konzentrischen Leiterschleifen nachgerechnet. Die innere Leiterschleife stellt das Plasma dar, die äußere eine toroidal leitende Struktur. Für den Stromverlauf in beiden Leitern kann eine analytische Lösung angegeben werden. Diese ist im Anhang A dargestellt. Die Übereinstimmung der CARIDDI-P-Ergebnisse mit dieser einfachen, analytisch lösba- ren Problemstellung ist erwartungsgemäß sehr gut (vgl. Anhang A). Allein die Hinzunahme der freien Verschiebbarkeit der inneren Leiterschleife macht weitere analytische Lösungen im allge- meinen unmöglich, so daß sich die Überprüfung der weiteren Rechenergebnisse teilweise auf Plausibi- litätsüberlegungen oder auf experimentelle Befunde beziehen muß. Hierbei ist die Nachrechnung einer Entladung im ASDEX-Upgrade Experiment (Pautasso [64]) hervorzuheben. Diese Entladung ist ausführlich dokumentiert und es existieren bereits andere Nachrechnungen mit dem Code TSC (vgl. Gruber et al. [49], Pautasso [18] oder Pautasso et al. [19, 93]). Anhand dieser Analysen wurde folgendes deutlich: Die erzielten Rechenergebnisse, also auch die Strukturbelastungen, hängen un- ter Umständen stark von der Wahl der Eingabegrößen für das Plasma und dessen struktureller Berandung ab. Die Parameter werden in vier Klassen unterteilt:

- (1) Einfach zu bestimmende Parameter, deren Einfluß auf das Ergebnis nicht groß ist:
Hierzu gehören z.B. die Geometrie der Struktur oder die Plasmadichte.
- (2) Schwierig zu bestimmende Parameter, deren Einfluß auf das Ergebnis nicht groß ist:
Zu dieser Kategorie gehört das ω_{halo} aus Gleichung (5.8).
- (3) Einfach zu bestimmende Parameter, deren Einfluß auf das Ergebnis sehr groß ist:
Hierzu werden das Ausgangsform des Plasmas (Strom, innere Induktivität, Geometrie) und die elektrischen Eigenschaften der Struktur gezählt.
- (4) Schwierig zu bestimmende Parameter, deren Einfluß auf das Ergebnis sehr groß ist:
Zu dieser Klasse gehört vor allem die Plasmatemperatur und die effektive Kernladungszahl während der Disruption.

Unter Berücksichtigung insbesondere der zu der Klasse (3) gehörenden dieser Einflußgrößen wurde schließlich versucht, möglichst realistische, initiale Plasmakonfigurationen für die ITER- und DEMO-Nachrechnungen zu entwickeln. Im weiteren wird mit Hilfe eines vereinfachten ITER- Modells ein Vergleich zwischen alter Analyse- methode und der hier entwickelten Methode durch- geführt werden. Die DEMO-Nachrechnungen sollen den Einfluß von verschiedenen Design-Varianten auf den Verlauf der Disruption zeigen.

Die Auslösung einer Disruption kann in CARIDDI-P auf unterschiedliche Arten erfolgen. Zur Simulation einer zentrierten Disruption wird der „energy-quench“ von Beginn an ausgelöst. Das Plasma kühlt dann nach einer vorgegebenen stückweise linearen Zeitfunktion aus (vgl. Kapitel 3.7). Zur Simulation von vertikalen Disruptionen wird eine kleine Verschiebung der vertikalen Plasmalage vorgegeben. Das Plasma ist damit aus seinem labilen Gleichgewicht ausgelenkt und verhält sich, wenn die passive Stabilisierung genügend klein ist, instabil.

Der Beginn des „energy-quench“ während der Vertikalbewegung wird durch zwei Größen festgelegt. Zum einen durch das Unterschreiten des kritischen effektiven Sicherheitsfaktors am Plasmarand q_{eff} , zum anderen durch den Wandkontakt. Dabei wird der „energy-quench“ dann ausgelöst, wenn die Funktion F_{halo} (Gleichung (5.8)) den Wert 1 unterschreitet, also wenn Ψ_{halo} größer ist als Ψ_{lim} . Dies bedeutet, daß eine magnetische Oberfläche des eingeschlossenen Plasmas von der Struktur unterbrochen wird. Auch bei diesem Szenario kühlt das Plasma nach dem „energy-quench“ gemäß einer vorgegebenden stückweise linearen Zeitfunktion aus.

7.1 Ergebnisse für das ASDEX-Upgrade Experiment

In diesem Kapitel wird die vorgestellte Rechenmethode CARIDDI-P für das ASDEX-Upgrade Experiment validiert. Für dieses Experiment liegen detaillierte Ergebnisse sowohl von Messungen (Gruber et al. [49], Zohm [88] oder Pautasso [64]) als auch TSC-Rechnungen (vgl. Kapitel 1.2.3) von Pautasso [18, 47] vor. Die Konfiguration bei der ausgewählten Entladung (#1500) ist eine „single null“, d.h. die Separatrix hat nur einen Kreuzungspunkt, und der anfängliche integrale Plasmastrom beträgt 0.6 MA . Der „energy-quench“ tritt aufgrund des Erreichens des q -Limits am Plasmarand auf, nachdem die Kontrollspulen für die vertikale Kontrolle des Plasmas absichtlich abgeschaltet wurden.

7.1.1 Eingabedaten

In Tabelle 7.1 sind einige signifikante Daten des ASDEX-Upgrade Experiments wiedergegeben. Das Experiment ist relativ klein, aber aufgrund der Plasmaparameter und der Anordnung der Magnetfeldspulen eignet es sich sehr gut zur Extrapolation der Ergebnisse auf ITER-Verhältnisse.

Gesamthöhe des Experimentes	7 Meter
großer Plasmaradius	1.625 Meter
kleine Plasmaradien	0.5 Meter / 0.8 Meter
max. toroidales Magnetfeld	3.9 Tesla
Plasmastrom	2 Millionen Ampère
Pulsdauer	10 Sekunden
Plasmaheizung	12 Megawatt
Plasmamenge	3 Milligramm
Plasmatemperatur	50 Millionen Grad
	$\approx 4\ 300\ \text{eV}$

Tabelle 7.1: Eckwerte des ASDEX-Upgrade Experiments

Spule	R [mm]	z [mm]	ΔR [mm]	Δz [mm]	Strom [kAt]
OH1	372.5	0.0	270.0	3160.0	0.0
OH2	661.0	± 2032.0	400.0	485.0	0.0
V1Ao	1285.9	2358.2	439.5	364.1	496.0
V1Bo	1957.2	2358.2	190.4	364.1	248.0
V1Au	1285.9	-2358.2	439.5	364.1	1426.7
V1Bu	1957.2	-2358.2	190.4	364.1	713.3
V2o	3133.0	1707.1	447.0	514.2	-163.0
V2u	3133.0	-1707.1	447.0	514.2	-765.0
V3o	3599.0	649.4	261.7	198.9	-199.0
V3u	3599.0	-649.4	261.7	198.9	-378.0

Tabelle 7.2: Positionen und Ströme der Poloidalfeldspulen (#1500)

Poloidalfeld

Die Position der Poloidalfeldspulen und deren Strom ist in Tabelle 7.2 dargestellt. Das Plasmagleichgewicht wurde von Zohm [88] mit dem Gleichgewichtscode DIVA berechnet. Es entspricht dem Gleichgewicht, das bei der Entladung #1500 im Experiment erzeugt wurde. Der OH-Strom (Transformator-Strom) ist im Experiment ungleich Null - er wird von negativen auf positive Werte durchgeföhren -, die Geometrie der OH-Spulen ist aber so, daß das Streufeld im Zentrum des Gefäßes klein gegen die von den PF-Spulen erzeugten Felder ist, so daß man den poloidalen Anteil des OH-Feldes in erster Näherung vernachlässigen kann. Ein experimenteller Hinweis, daß der OH-Strom von untergeordneter Bedeutung ist, kommt nach Zohm [88] daher, daß man keine Variation der Gleichgewichtsströme in den PF-Spulen während des Flattops erkennen kann obwohl der OH-Strom da bis zum maximalen Wert angehoben wird. Das für die Entladung #1500 berechnete Plasmagleichgewicht wird in Abbildung 7.2 zusammenfassend dargestellt.

Toroidalfeld

Das Toroidalfeld in der magnetischen Achse des Plasmas ($R_m = 1.65m$) beträgt $B_{tor}^{axis} = -1.48 T$. Der Verlauf in radialer Richtung wird mit folgender Abhängigkeit beschrieben:

$$B_{tor}(R) = B_{tor}^{axis} \frac{R_m}{R}.$$

FE-Modell der ASDEX-Upgrade-Strukturen

Das Modell zur Beschreibung der Elektrodynamik des ASDEX-Upgrade Experiments besteht im wesentlichen aus dem Vakuumgefäß und dem sich darin befindlichen passiven Stabilisierungs Loop (PSL). Das Vakuumgefäß besitzt außerdem an der Hinterseite sogenannte Ports, die hier aber nicht mitmodelliert werden, da sie für die induktive Wechselwirkung mit dem Plasma vernachlässigbar sind. Das Vakuumgefäß ist in toroidaler Richtung aus unterschiedlichen Materialien hergestellt. Ein wichtiges Teil des Vakuumgefäßes ist der sogenannte „Bellow“. Dies ist ein schmaler, poloidaler Gürtel, mit dem die elektrische Leitfähigkeit des Vakuumgefäßes in toroidaler Richtung eingestellt wird. Durch den relativ hohen elektrischen Widerstand, den das Vakuumgefäß durch die Bellows in

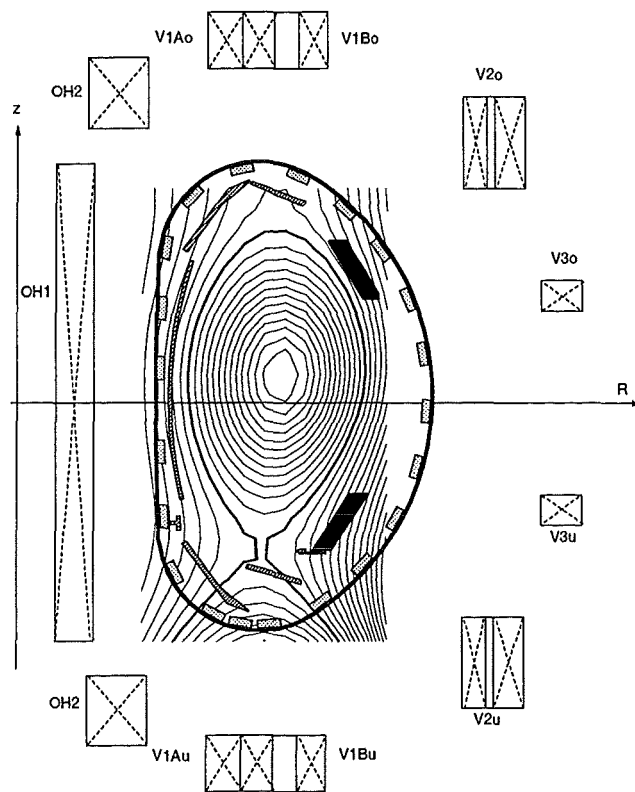


Abbildung 7.1: Position der Poloidalfeldspulen und Plasmagleichgewicht

toroidaler Richtung erhält, können kaum toroidale Ströme fließen, und die induktive Wechselwirkung des Plasmas findet im wesentlichen mit dem PSL statt. Dieser PSL ist über kreuz geschaltet, so daß in ihm bei einer zentrierten Disruption kein Nettostrom induziert wird. Bei einer Vertikal auslenkung des Plasmas werden aber Ströme induziert, die die vertikale Bewegung dämpfen und das Plasma somit stabilisieren. Die elektrische Schaltung des PSL ist in Abbildung 7.3 skizziert. Da für die Nachrechnung nur ein 45° Sektor des Experiments modelliert wird, mußte die Verschaltung des PSL innerhalb dieses Sektors so nachgebildet werden, daß sein elektrisches Verhalten dem des realen Experiments entspricht. In Abbildung 7.4 ist das FE-Modell für die Struktur dynamik dargestellt. Für die elektromagnetische Rechnung wird die toroidale Symmetrie des Modells weitergehend genutzt, so daß dort nur ein 22.5° -Ausschnitt berechnet wird. Dies ist möglich, da die von außen angelegten Felder und somit die Wirbelströme in der Struktur auch diese Symmetrieeigenschaft besitzen. Die elektrischen Materialdaten der Struktur sind in Tabelle 7.3 aufgelistet.

7.1.2 Vergleich mit experimentellen Daten

In den Abbildungen 7.5 und 7.6 werden die Ergebnisse der CARIDDI-P Rechnung mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Neben den initialen Parametern des Plasmas sind in Tabelle 7.4 auch die für die numerische Simulation verwendeten Parameter wiedergegeben. Ein direkter Vergleich der Ergebnisse der Simulation mit dem Experiment ist anhand der Zeitverläufe des toroidalen Plasmatstroms I_P und der radialen sowie vertikalen Position der magnetischen Achse möglich. Für β_p liegen für die Entladung #1500 keine Messungen vor. In Abbildung 7.6 erkennt man die vertikale Driftbewegung des Plasmas. In der numerischen Simulation wird der Driftvorgang durch einen Puls

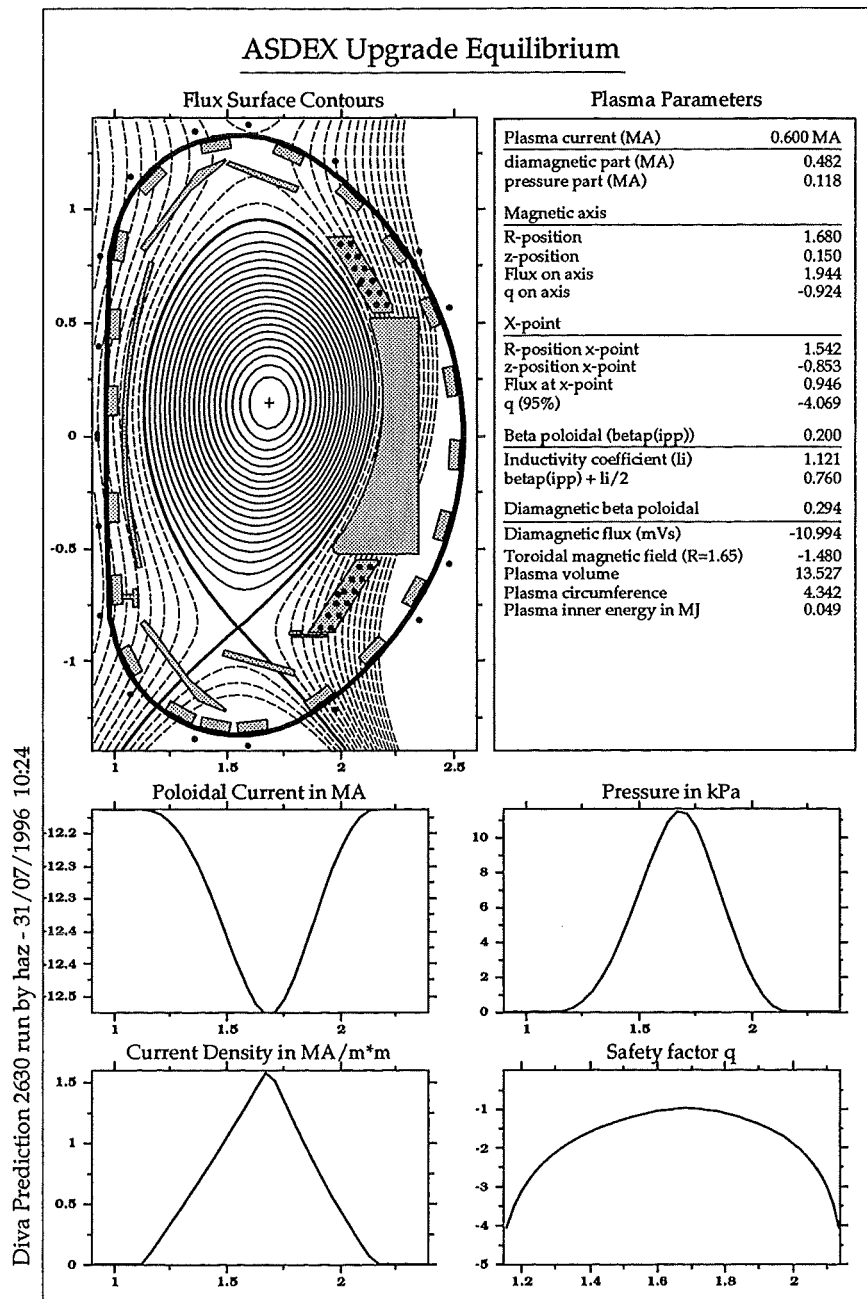


Abbildung 7.2: Berechnetes Gleichgewicht des ASDEX-Upgrade für die Entladung #1500
(Ergebnis nach Zohm [88])

elektrische Leitfähigkeit [Ωm]	
Vakuummessel	
Bellow (poloidal)	$0.116 \cdot 10^{-6}$
Bellow (toroidal)	$0.023 \cdot 10^{-3}$
Mittelteil	$0.723 \cdot 10^{-6}$
Seitenteil	$0.219 \cdot 10^{-6}$
PSL	$0.246 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 7.3: Elektrische Leitfähigkeit der Strukturen in ASDEX-Upgrade

innerer Radius	R_1	4.476 m
äußerer Radius	R_2	8.124 m
Radius mit maximale Plasmahöhe	R_{max}	5.206 m
magnetische Achse	R_m	1.697 m
magnetische Achse	z_m	0.120 m
X-Punkt	R_X	1.541 m
X-Punkt	z_X	-0.482 m
maximale Plasmahöhe	h	3.958 m
toroidaler Plasmastrom	I_P	0.60 MA
innere Plasmainduktivität	l_i	1.272
Elektronendichte	n	$0.8 \cdot 10^{19} \text{m}^{-3}$
min. effektive Kernladungszahl	Z_{eff}^0	1.3
max. effektive Kernladungszahl	Z_{eff}^{imp}	10
Temperatur des heißen Plasmas:		
Plasmarand	kT_{edge}	1keV
Plasamitte	kT_{axis}	5keV
Umgebungstemperatur	kT_u	0.1eV
zeitlicher Temperaturverlauf:		
0.5ms	${}^1T_{eV}$	25eV
4.5ms ($\Delta^2t = 4ms$)	${}^2T_{eV}$	3eV
Simulationsparameter:		
„enhancement factor“	$FFAC$	200
„halo“-Parameter	ω_{halo}	0.5
numerischer Zeitschritt	Δt	$1 \cdot 10^{-5} \text{s}$

Tabelle 7.4: Parameter des initialen Plasmas und der numerischen Simulation

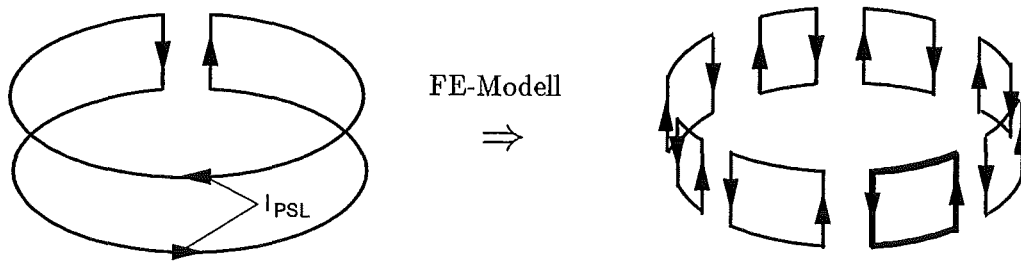


Abbildung 7.3: Elektrische Schaltung der PSL

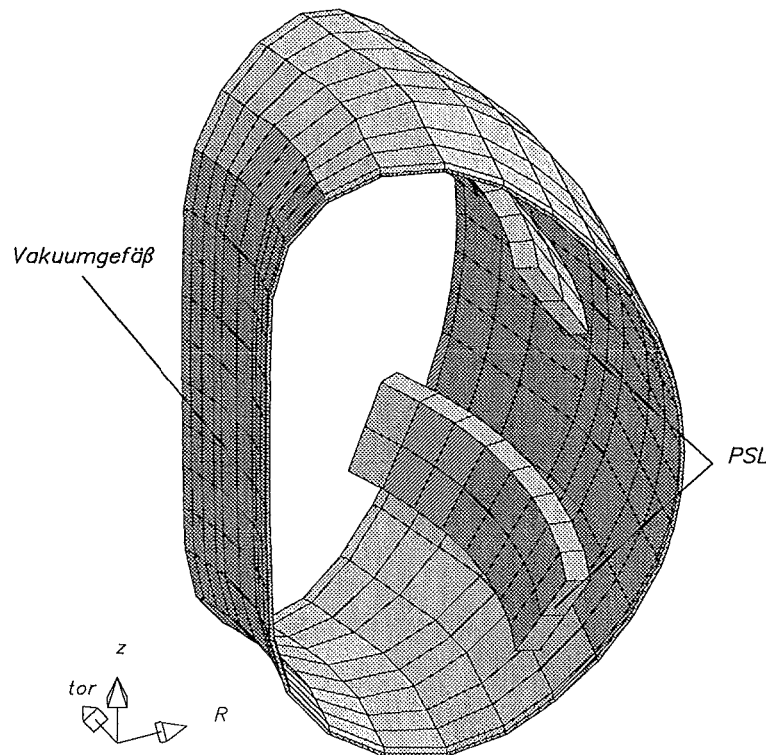


Abbildung 7.4: Modell des ASDEX-Upgrade für die Strukturdynamik. Für die Elektrodynamik genügt das in toroidaler Richtung halbierte Modell

auf das Plasma nach unten beschleunigt, damit nicht die gesamte Entladungsdauer von ca. 1.6s simuliert werden muß. Nach ca. 1.57s berührt das Plasma die unteren Divertorplatten. Durch den dadurch abgeschalteten „scrape-off layer“ sinkt β_p langsam ab. Nach Erreichen des vorgegebenen q -Limits von $q_{eff}^c = 3$ findet dann der „energy-quench“ statt. β_p fällt innerhalb von 0.5ms auf nahezu Null ab. Aufgrund des thermodynamischen Druckverlustes bewegt sich das Plasma in radialer Richtung nach innen. Durch die erzwungene magnetische Flußerhaltung und durch das Abflachen des Stromprofils (Absinken der inneren Induktivität) steigt der Plasmastrom kurzzeitig an (vgl.

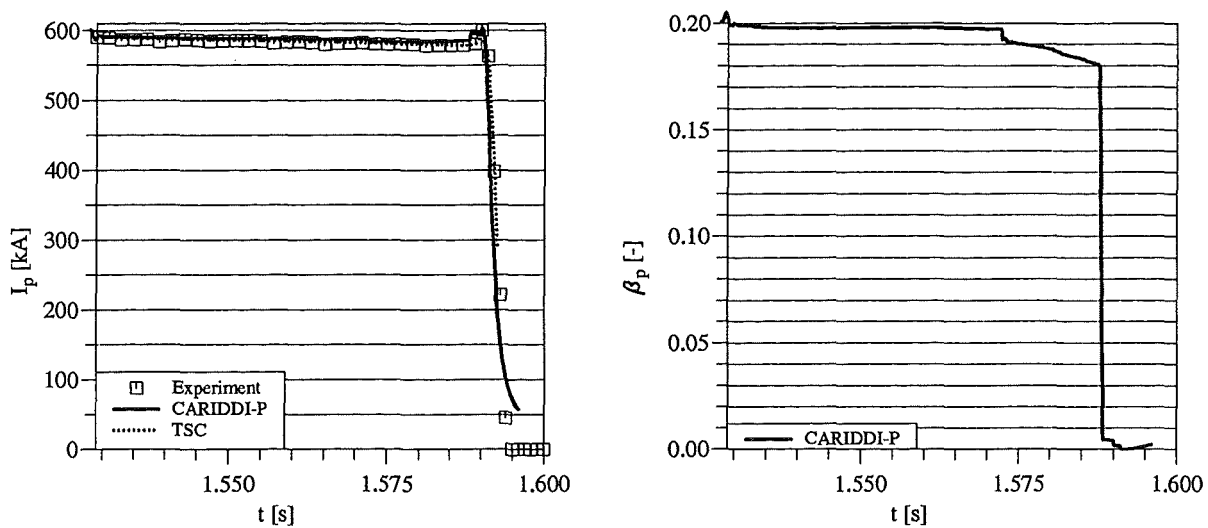
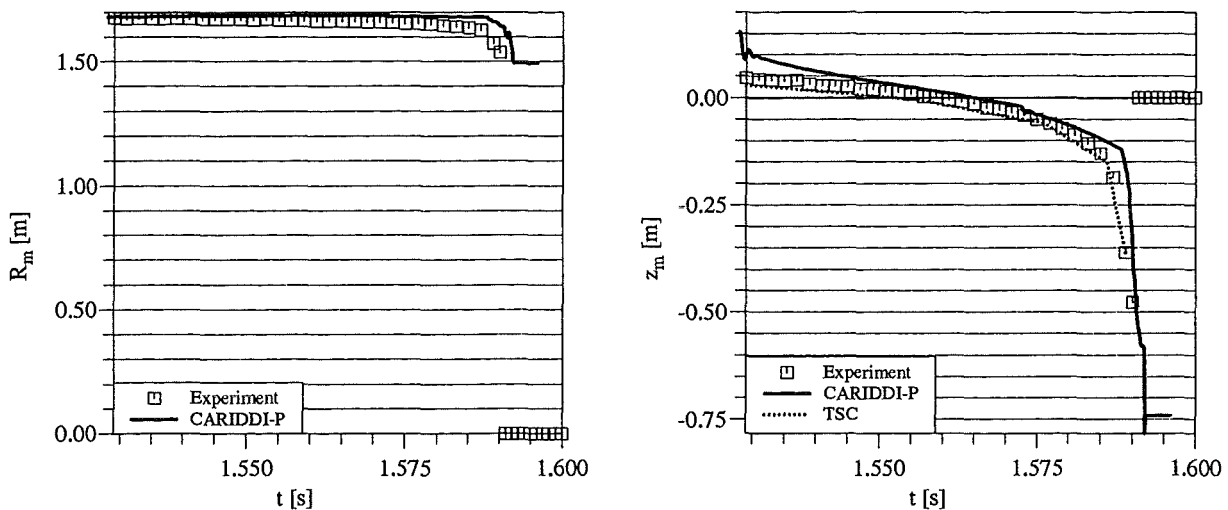
Abbildung 7.5: Integraler Plasmastrom (I_P) und poloidales Beta (β_p)Abbildung 7.6: Radiale (R_m) und vertikale (z_m) Position der magnetischen Achse

Abbildung 7.5 links). Aufgrund der gleichzeitigen Vertikalbewegung wird immer mehr Randplasma abgeschält, so daß dadurch und gleichzeitig durch den induktiv-resistiven Zerfall der Plasmastrom innerhalb von ca. 3ms auf Null absinkt.

Die Ergebnisse zeigen, daß die hier vorgestellte Methode den Stromzerfall und die Plasmaposition sowohl während der Driftbewegung als auch während des „current-quench“ in guter Übereinstimmung mit dem Experiment wiedergibt. In Abbildung 7.7 sind die Isolinien des magnetischen Flusses vor und nach dem „energy-quench“ dargestellt. Man erkennt den Einfluß des PSL an der Verzerrung der Isolinien. In Abbildung 7.8 wird der toroidale Strom in dem PSL dargestellt. Der Vergleich von Experiment und CARIDDI-P zeigt auch hier sowohl qualitativ als auch quantitativ eine gute Übereinstimmung. Man erkennt im zeitlichen Verlauf, wie bei der Driftbewegung im oberen Teil des PSL ein positiver Strom induziert wird, der eine Kraft auf das Plasma entgegen der Driftbewegung ausübt. Während des „current-quench“ wird dann aufgrund der Nähe des Plas-

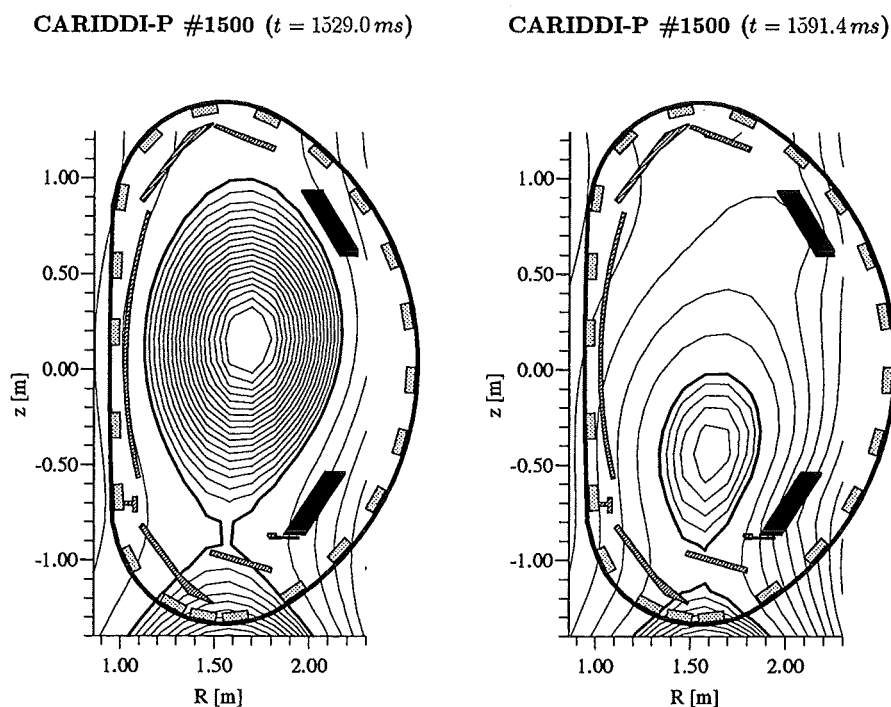


Abbildung 7.7: Magnetischer Fluß vor (links) und nach (rechts) dem „energy-quench“

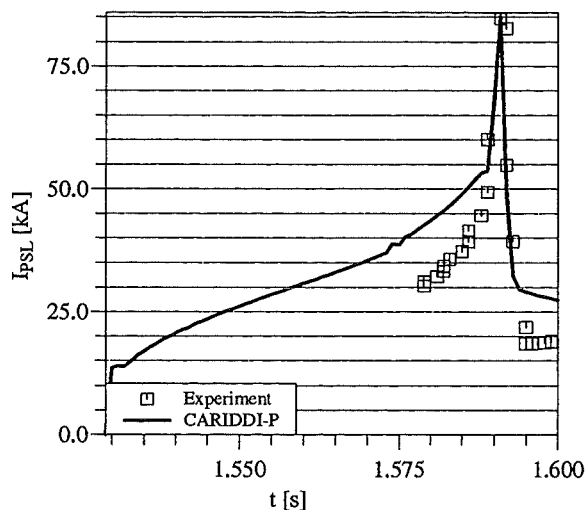


Abbildung 7.8: Toroidaler Strom im PSL (I_{PSL})

mas zum unteren Teil des PSL dort eine positive Spannung induziert. Dies bedeutet aber wegen der speziellen elektrischen Verschaltung des PSL eine negative Spannung im oberen Teil, also eine Abschwächung des Stroms. Nach dem „current-quench“ zerfällt der Strom im PSL dann im wesentlichen resistiv. Die Abweichungen werden im unterschiedlichen Leitwert des PSL unter den betrieblichen Bedingungen vermutet.

7.1.3 Vergleich mit dem Rechenprogramm TSC

In Abbildung 7.5 und Abbildung 7.6 sind zusätzlich der integrale Plasmastrom sowie die vertikale Position der magnetischen Achse aus einer TSC-Simulation dargestellt. Die Ergebnisse stammen aus Veröffentlichungen von Pautasso et al. [18, 19, 47]. Diese Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung sowohl mit den experimentellen Daten als auch mit den hier errechneten CARIDDI-P Ergebnissen. Aufgrund der Komplexität des Programmes TSC ergab sich für die hier vorgestellte Simulation eine Antwortzeit von über einer Woche (Pautasso [64]) auf dem CRAY Großrechner des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik, Garching bei München. Aufgrund der vielen freien Parameter in TSC können die Ergebnisse sehr gut an das Experiment angepaßt werden. Diese Vorgehensweise ist dann von Nutzen, wenn andere Plasmaparameter, die meßtechnisch nicht erfaßt werden können, untersucht werden sollen. Für die Simulation der Plasmadisruption zur besseren Berechnung der Strukturbelastungen ist TSC allerdings zu aufwendig. Außerdem ist TSC im Gegensatz zu der hier vorgestellten Methode nicht in der Lage, komplizierte dreidimensionale Strukturen nachzubilden. Da die Struktur des ASDEX-Upgrade Experiments für die elektromagnetischen Effekte als zweidimensional betrachtet werden kann, reicht die einfache zweidimensionale Modellierung der Struktur in TSC für diesen Fall aber aus.

7.1.4 Zusammenfassung der ASDEX-Upgrade Ergebnisse

Insgesamt kann man aus den hier gezeigten Ergebnissen folgern, daß die in dieser Arbeit vorgestellte Methode sowohl die Plasmabewegung als auch den Plasmastrom während der Disruption in für die Strukturanalyse ausreichender Genauigkeit wiedergibt. Ein Vergleich der hier erzielten Ergebnisse mit den Simulationsrechnungen mit dem Code TSC zeigt zudem eine gute Übereinstimmung. Bei der hier verwendeten Methode gibt es allerdings im Vergleich zu TSC nur wenige Parameter, die eingestellt werden müssen und die benötigten Rechenzeiten sind erheblich kürzer. Dies erleichtert die Handhabung beim Einsatz dieser Methode für Blanketanalysen wesentlich.

Die für die Plasmasimulation benötigte CPU-Zeit auf einer HP-9000/720 Workstation betrug ungefähr 2 Stunden. Für die Diskretisierung des Plasmas wurde dabei ein Rechnernetz mit 13×23 Gitterpunkten verwendet.

7.2 Ergebnisse für den ITER-Reaktor

Das Plasma im ITER-Reaktor hat wie das Plasma des ASDEX-Upgrade Experiments eine „single null“ Konfiguration. Der X-Punkt liegt wieder unten. Anhand dieser Geometrie sollen insbesondere die Auswirkungen des neuen Plasmamodells auf die Belastung der Struktur gezeigt werden. Dazu werden zwei Rechnungen vorgestellt. Die erste wird, wie früher üblich, mit einem vorgegebenen Plasmastrom-Zeitverlauf erstellt, die zweite mit der neuen Methode, d.h. mit einem dynamischen Plasmamodell. Die Disruption wird durch ein globales Auskühlen des Plasmas eingeleitet. Andere, der ersten Nachrechnung vergleichbare Arbeiten zu Strukturbelastungen im ITER-Reaktor sind z.B. bei Ferrari, Pellegrino und Simbolotti [127] zu finden.

7.2.1 Eingabedaten

Externe Magnetfelder

Die Position der Poloidalfeldspulen und deren Strom ist in Abbildung 7.9 bzw. in Tabelle 7.5 dargestellt (vgl. Rebut [128]). Die Ströme der Spulen sind gemäß eines ITER-Szenarios gewählt (Portone [89] und Boccaccini [129]). Als Startpunkt für die hier durchgeführte Analyse wird der Zeitpunkt des Szenarios gewählt, bei dem das Plasma seinen maximalen Strom von 21 MA erreicht.

Das Toroidalfeld in der magnetischen Achse des Plasmas ($R_m = 8.2\text{ m}$) beträgt $B_{tor}^{axis} = 5.7\text{ T}$. Der Verlauf in radialer Richtung ist über

$$B_{tor}(R) = B_{tor}^{axis} \frac{R_m}{R}$$

festgelegt.

FE-Modell des ITER-Reaktors

In Abbildung 7.10 ist das FE-Modell des ITER-Reaktors dargestellt. Von innen nach außen erkennt man die Blanketmodule, die auf einer massiven Rückwand montiert sind. Das Vakuumgefäß schließt das Plasma, die Inboard- und Outboardblankets, die Rückwand sowie den Divertor (hier nicht dargestellt) ein. Die Lagerung der Rückwand im Vakuumgefäß erfolgt über zwei Stützen. Um die

Spule	R [mm]	z [mm]	ΔR [mm]	Δz [mm]	Strom [MA]
CS Modul 1	2038.0	0.0	224.0	12071.0	-37.55
CS Modul 2	2263.5	0.0	205.0	12071.0	-40.33
CS Modul 3	2531.1	0.0	308.0	12071.0	-61.20
PF-2	5859.0	9981.0	1553.0	1528.0	-5.76
PF-3	12892.0	7389.0	657.0	1186.0	-7.05
PF-4	15364.0	-2090.0	587.0	2222.0	-13.1
PF-5	13198.0	-7943.0	1236.0	1743.0	-4.55
PF-6	9703.0	-9583.0	1035.0	1385.0	4.47
PF-7	5859.0	-9981.0	1553.0	1528.0	8.68
PF-8	15175.0	3691.0	273.0	556.0	0.0

Tabelle 7.5: Positionen und Ströme der Poloidalfeldspulen

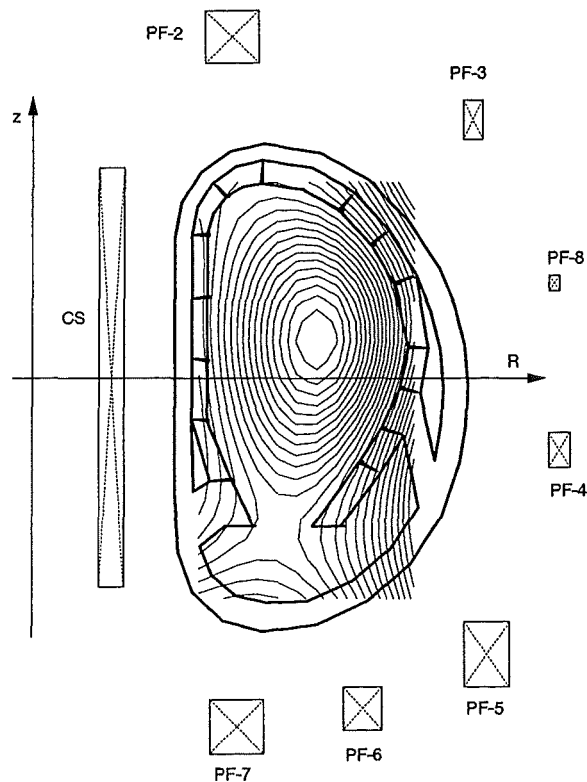


Abbildung 7.9: ITER: Plasma-Gleichgewicht und PF-coils

Öffnungen (Ports) des Vakuumgefäßes im elektromagnetischen Modell zu berücksichtigen, werden diese Stellen mit einem höheren elektrischen Widerstand modelliert. Für die elektromagnetischen Rechnungen wird wieder nur eine toroidale Symmetriehälfte verwendet (Schnitt in (R, z) -Ebene). Die strukturdynamischen Berechnungen werden mit dem gesamten dargestellten Modell durchgeführt, da die Lorentz-Kräfte im Gegensatz zu den Wirbelströmen asymmetrisch sind. Um den gesamten Umfang sind 20 dieser Segmente angeordnet. Diese werden in der elektromagnetischen Modellierung in der Induktivitätsmatrix berücksichtigt. Die Materialdaten der Struktur sind in Tabelle 7.6 aufgelistet. Diese Materialdaten werden entsprechend dem Rechengitter homogenisiert.

Die Randbedingungen für die Strukturanalyse werden folgendermaßen gewählt: Das Vakuumgefäß stützt sich an der Innenseite des Torus an dem zentralen Solenoid ab. Dies wird durch ein Sperren der Freiheitsgrade an den betreffenden Knoten erreicht. Die Toroidalsymmetrie wird bei der Strukturdynamik mittels periodischer Randbedingungen für die Rückwand und das Vakuumgefäß berücksichtigt. Für die Elektrodynamik wird sowohl die Rückwand als auch das Vakuumgefäß als toroidal leitend angenommen. Die Abmessungen des Plasmas und weitere Parameter des verwendeten Gleichgewichts sind in Tabelle 7.7 zusammengefaßt.

7.2.2 Vergleich: Vorgegebenes - dynamisches Plasmaverhalten

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen vorgestellt. Dazu werden zuerst die wichtigsten Ergebnisse für das Plasma diskutiert. Anschließend wird dargestellt, inwiefern die Hinzunahme des dynamischen Plasmamodells die berechneten Strukturbelastungen beeinflusst.

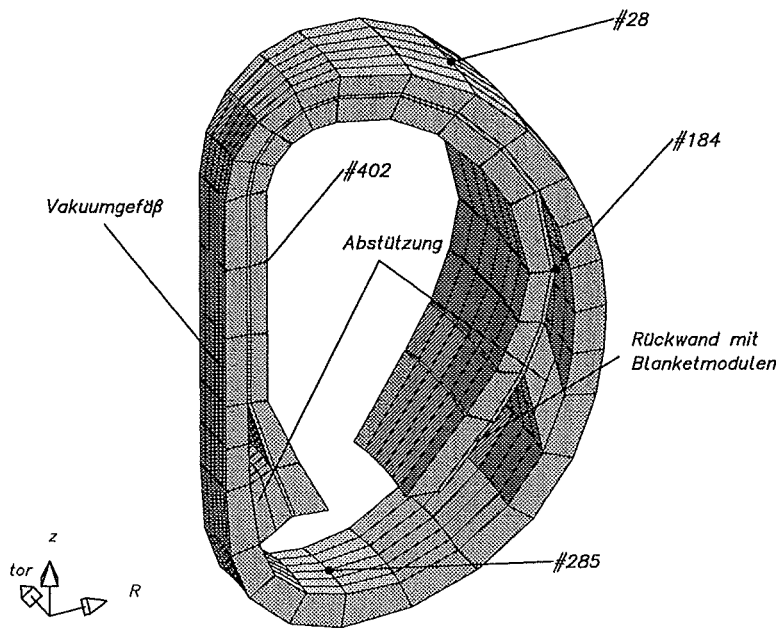


Abbildung 7.10: ITER-Modell: Blanketmodule und Rückwand

elektrische Leitfähigkeit	
Rückwand	$1 \cdot 10^{-6} \Omega m$
Blanket-Module	$1 \cdot 10^{-3} \Omega m$
Vakuumkessel (ohne Ports)	$1 \cdot 10^{-6} \Omega m$
Vakuumkessel (mit Ports)	$1 \cdot 10^{-3} \Omega m$
Abstützung Innen	$1 \cdot 10^{-2} \Omega m$
Abstützung Außen	$1 \cdot 10^{-2} \Omega m$
Dichte	
Rückwand	7700 kg/m^3
Blanket	2719 kg/m^3
Vakuumkessel (ohne Ports)	7700 kg/m^3
Vakuumkessel (mit Ports)	3850 kg/m^3
Abstützung Innen	1000 kg/m^3
Abstützung Außen	1000 kg/m^3
E-Modul	
Rückwand	$170\,000 \text{ MPa}$
Blanket	$17\,000 \text{ MPa}$
Vakuumkessel (ohne Ports)	$170\,000 \text{ MPa}$
Vakuumkessel (mit Ports)	$85\,000 \text{ MPa}$
Abstützung Innen	$2\,000 \text{ MPa}$
Abstützung Außen	$2\,000 \text{ MPa}$
Querkontraktion	0.3

Tabelle 7.6: Materialdaten der Struktur

innerer Radius	R_1	5.8 m
äußerer Radius	R_2	10.8 m
Radius mit maximale Plasmahöhe	R_{max}	7.1 m
magnetische Achse	R_m	8.22 m
magnetische Achse	z_m	1.39 m
maximale Plasmahöhe	h	7.7 m
toroidaler Plasmastrom		
	I_P	21.0 MA
β poloidal	β_p	0.75
interne Plasmainduktivität	l_i	0.9
zeitlicher Temperaturverlauf:		
1ms	${}^1T_{eV}$	20eV
5ms ($\Delta^2t = 4ms$)	${}^2T_{eV}$	3eV
Simulationsparameter:		
„enhancement factor“	$FFAC$	10 – 100
„halo“-Parameter	ω_{halo}	0.1
numerischer Zeitschritt	Δt	$1 \cdot 10^{-6}s - 1 \cdot 10^{-5}s$

Tabelle 7.7: Parameter für das ITER-Plasma im Gleichgewicht und der numerischen Simulation

Ergebnisse für das Plasma

In Abbildung 7.12 ist der Zeitverlauf des integralen, toroidalen Plasmastroms und der internen Induktivität für das Szenario einer zentrierten Disruption in ITER dargestellt. Für die Disruption wird vorausgesetzt, daß eine Plasmainstabilität aufgrund des Erreichens z.B. eines Dichtelimits soweit angewachsen ist, daß der „energy-quench“ einsetzt. Nach diesem „energy-quench“ beginnt die Simulation, d.h. das Plasma ist von Anfang an ausgekühlt. Abbildung 7.13 zeigt die radiale und vertikale Plasmalage während des „current-quench“. Die verschiedenen Ergebnisse für die einzelnen Lösungsgrößen sind aus Rechnungen mit unterschiedlichen „enhancement“ Faktoren ($FFAC$, vgl. Gleichung (6.4)) für die Plasmadichte hervorgegangen. Dieser Faktor wurde zwischen 10 und 100 variiert. Dabei mußte für eine stabile Lösung mit $FFAC = 10$ ein numerischer Zeitschritt von $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}s$ verwendet werden, wogegen mit $FFAC = 100$ ein zehnmal größerer Zeitschritt, also $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}s$ ausreichte. Die Rechenzeit kann durch diese Maßnahme also um einen Faktor 10 verkürzt werden. Wie man in den Abbildungen 7.12 und 7.13 erkennen kann, werden die Ergebnisse dabei kaum beeinflusst. Da die einzelnen Blanketmodule in poloidaler Richtung elektrisch isoliert sind, wird der Einfluß der „halo-currents“ auf die Plasmabewegung bei einem Plasma-Wand-Kontakt im oberen Teil des Reaktors als weniger stark eingeschätzt. Entsprechend wird für die Simulation der Parameter ω_{halo} auf den Wert 0.1 gesetzt.

In Abbildung 7.12 ist zum Vergleich zusätzlich der vorgegebene Plasmastromverlauf gezeigt. Das Plasma wird für diesen Fall mit einem Leiter modelliert. Der Einzelleiter befindet sich an der Position der magnetischen Achse, also bei $R = 8.22m$ und $z = 1.39m$. Der Verlauf des Plasmastroms wird von 21MA in 20ms linear auf Null abfallend vorgegeben. Die Disruption wird bei $t = 10ms$ eingeleitet. Dieser Zeitverzug erleichtert später den Vergleich der Auswirkungen der beiden Plasmamodelle, da die in der Struktur auftretenden Schwingungen so in der gleichen Phasenlage auftreten. Man erkennt, daß beim dynamischen Plasmamodell der Plasmastrom nach dem „energy-quench“

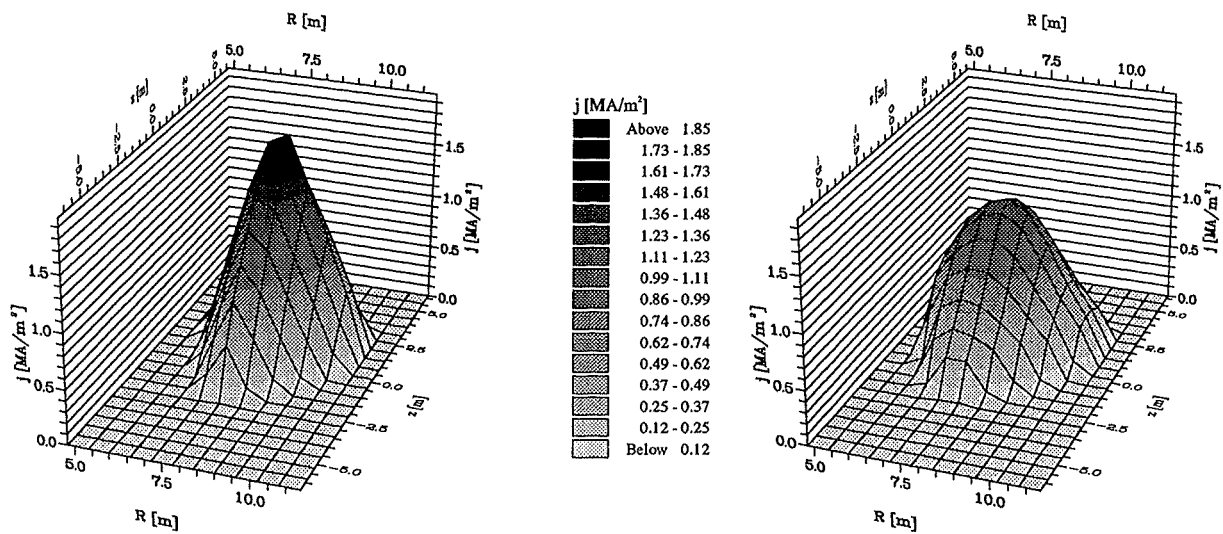


Abbildung 7.11: Stromdichteprofil über dem Plasmaquerschnitt; links: $t = 0\text{ms}$, rechts: $t = 8\text{ms}$

zuerst deutlich ansteigt. Dieser Anstieg ist auf die schnelle Umverteilung des Stroms innerhalb des Plasmas zurückzuführen. Durch diese Umverteilung wird in den Randbereichen des Plasmas ein relativ großer Strom induziert (vgl. auch Aydemir et al. [130]), was sich auch im Abfall der internen Induktivität äußert. Ein zweiter Grund für den Stromanstieg ist die sehr schnelle radiale Bewegung des Plasmas durch das Poloidalfeld nach innen (vgl. Abbildung 7.13). Diese kommt durch den thermodynamischen Druckverlust in Verbindung mit dem noch vorhandenen Vertikalfeld zustande. Durch diese Radialbewegung werden zusätzlich toroidale Ströme im Plasma induziert. In Abbildung 7.11 ist die Stromdichte im Plasma zu den Zeitpunkten $t = 0\text{ms}$ und $t = 8\text{ms}$ dargestellt. Der integrale Plasmastrom beträgt zu beiden Zeitpunkten ca. 21MA . Nach 8ms hat sich das Stromdichteprofil deutlich abgeflacht, die interne Induktivität ist also niedriger.

Nach dem Stromanstieg folgt der induktiv-resistive Zerfall des Plasmastroms und bei gleichzeitiger vertikaler Drift ein Abschälen der oberen Plasmarandbereiche. Die Bewegung nach oben resultiert aus den in der Struktur induzierten Wirbelströmen. Im oberen Teil des Reaktors befinden sich wesentlich mehr toroidal leitende Bereiche als im unteren Teil, so daß oben auch größere toroidale Wirbelströme in der Struktur induziert werden. Da diese in die gleiche Richtung fließen wie der Plasmastrom, wird das Plasma zu diesen oberen Bereichen hin bewegt. Dieses Verhalten wurde auch bei den Simulationsrechnungen von Lukash und Khayrutdinov [26] festgestellt. Dort fällt allerdings der Anstieg des Plasmastroms nicht so deutlich aus wie bei der hier gezeigten Rechnung. Dies liegt vermutlich daran, daß das dort verwendete initiale Stromprofil deutlich flacher war ($l_i = 0.6$). Die Instabilität wurde dort außerdem beim Erreichen des $q = 2$ -Limits eingeleitet, nachdem das Plasma nach oben gedriftet ist. Dadurch fällt dort β_p vergleichsweise langsam ab. Auch dies kann eine Erklärung für den geringeren Anstieg des Plasmastroms sein. Bei einer Simulation eines VDE im ITER von Barabaschi et al. [40] kann dagegen wie bei der hier gezeigten Rechnung ein deutlicher Anstieg des Plasmastroms festgestellt werden.

Die passive Stabilisierung der Struktur bewirkt, daß sich das Plasma deutlich langsamer als mit Alfvén-Geschwindigkeit bewegt. Nach ca. 40ms ist der Plasmastrom so weit zerfallen, daß keine magnetische Achse mehr existiert. In Abbildung 7.14 ist der zeitliche Verlauf der Isolinien des magnetischen Flusses dargestellt. Man erkennt hier die vertikale Bewegung nach oben und die

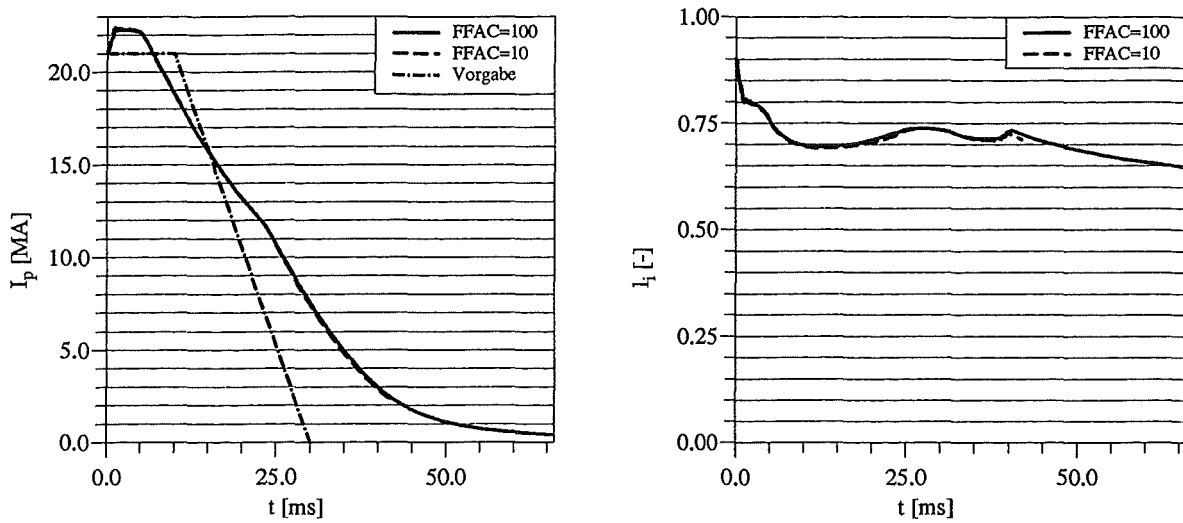


Abbildung 7.12: Integraler Plasmastrom (I_p) und interne Induktivität (l_i)

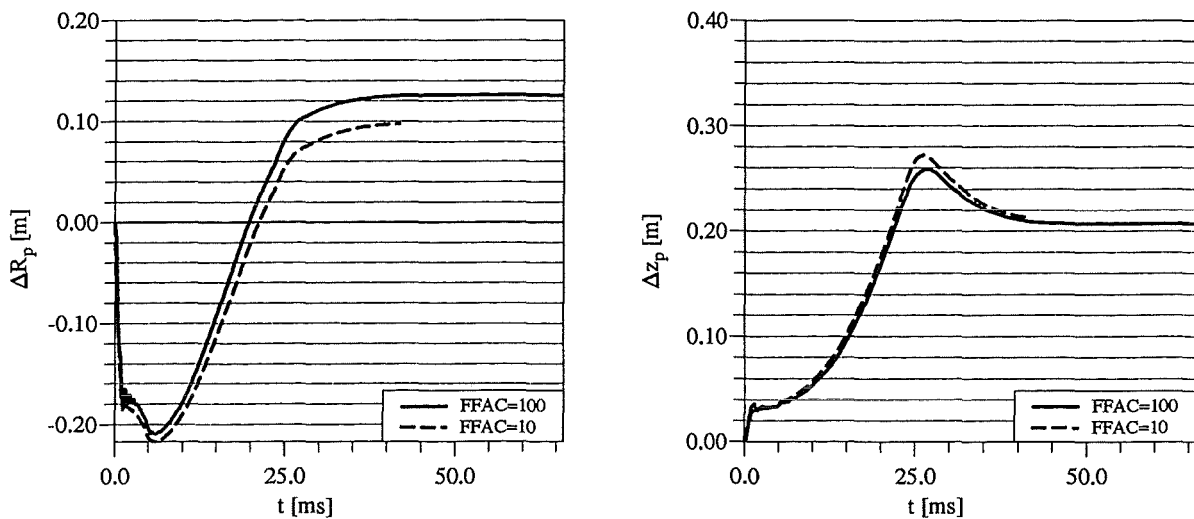


Abbildung 7.13: Radiale (ΔR_p) und vertikale (Δz_p) Änderung der Plasmalage

radiale Einwärtsbewegung des Plasmas. Der Zeitschritt zwischen den einzelnen Bildern beträgt $4ms$.

Die CPU-Zeit für die Plasmasimulation betrug auf einer HP-9000/720 Workstation bei der Rechnung mit $FFAC = 100$ ungefähr 2 Stunden, bei der Rechnung mit $FFAC = 10$ aufgrund des zehnmal kleineren Zeitschritts entsprechend zehnmal länger, also ungefähr 20 Stunden. Das Plasmagebiet war bei allen CARIDDI-P Analysen für ITER in 12×22 Gitterpunkte unterteilt.

Strukturbelastung

Abbildung 7.15 zeigt die Wirbelstromdichten in toroidaler Richtung im Vergleich. Aufgrund des unterschiedlichen Plasmastromverhaltens zeigen die Wirbelströme sowohl in der Rückwand (Knoten #184) als auch im Vakuumgefäß (Knoten #285) einen deutlich unterschiedlichen Zeitverlauf.

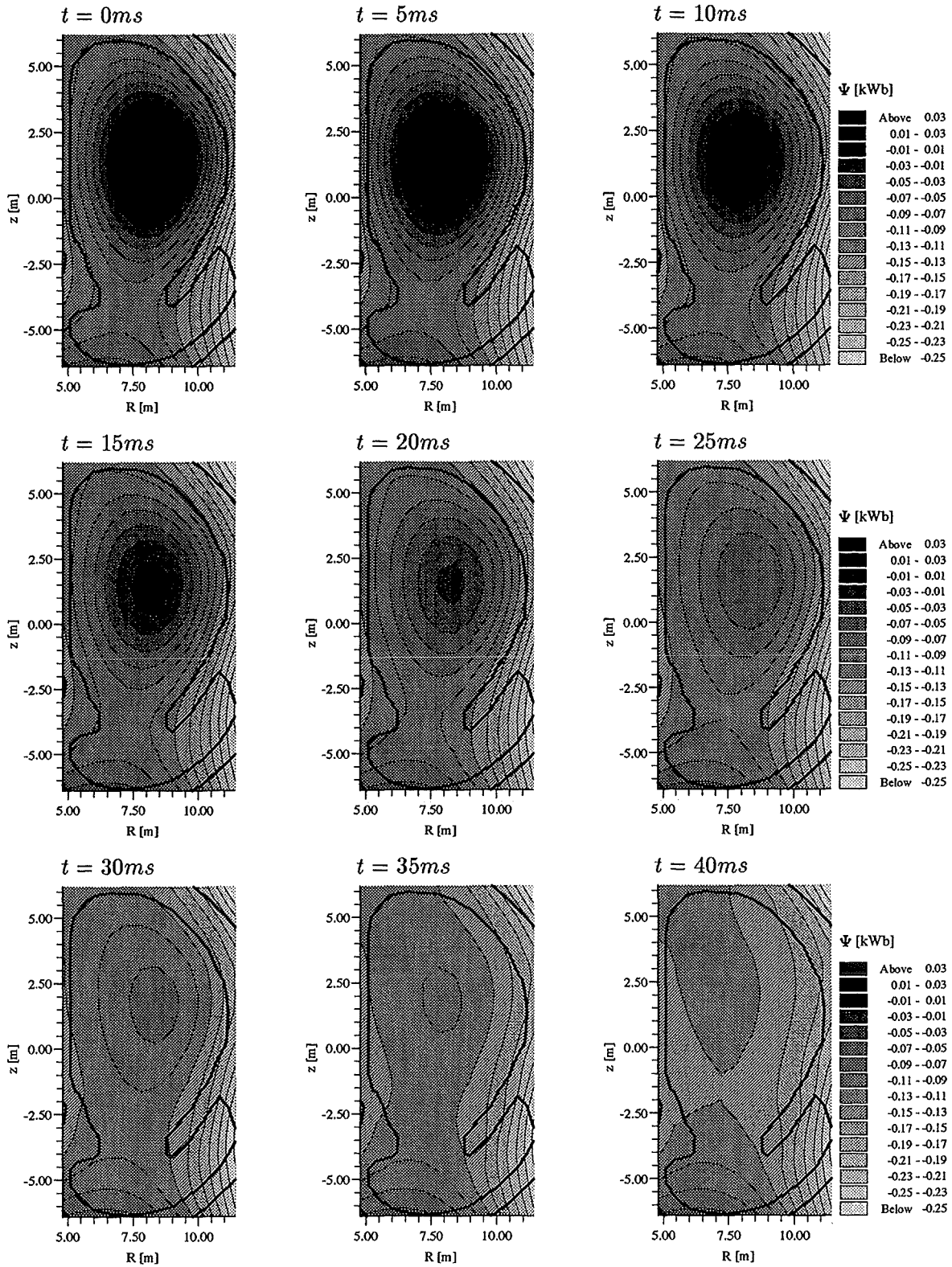


Abbildung 7.14: Isolinien des toroidalen magnetischen Flusses während der Disruption; $\Delta\Psi = 20\text{Wb}$

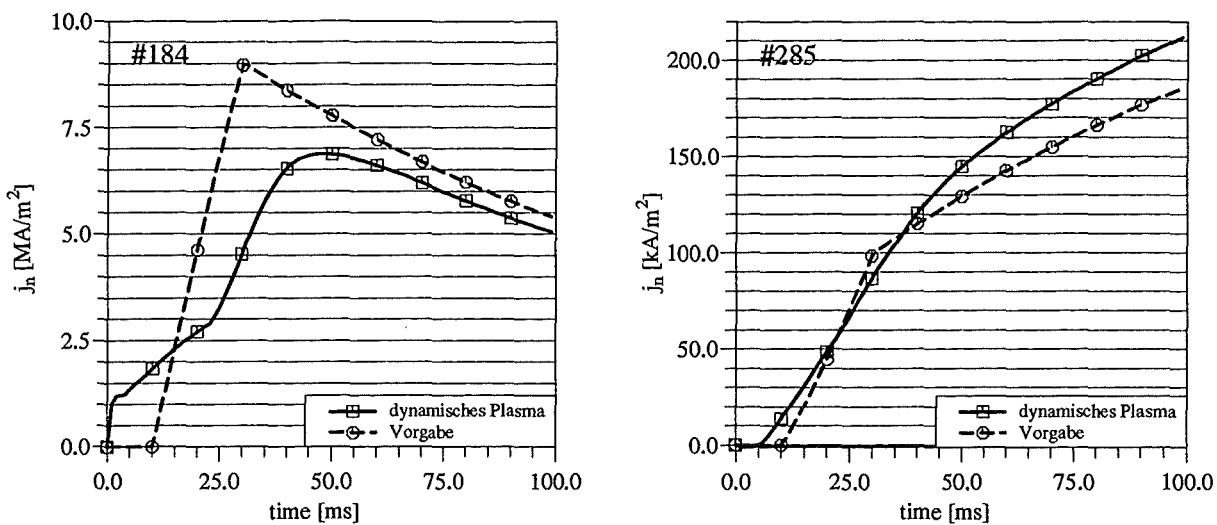


Abbildung 7.15: Vergleich von dynamischem Plasma und Vorgabe; links: Stromdichte (j_n) in toroidaler Richtung in der Rückwand (Knoten #184), rechts: Stromdichte (j_n) in toroidaler Richtung im Vakuumgefäß (Knoten #28)

Die Position der Knoten ist aus Abbildung 7.10 ersichtlich. In Abbildung 7.16 ist weiterhin die Verformung der Rückwand in radialer Richtung am Knoten #184 bzw. die vertikale Verformung des Vakuumgefäßes am Knoten #285 dargestellt. Bei diesem Vergleich wird der Einfluß des dynamischen Plasmas sehr deutlich. Sowohl der qualitative zeitliche Verlauf der Knoten-Verschiebung, als auch die Höhe der Deformationen zeigen wesentliche Unterschiede. Um dies zu unterstreichen, sind in Abbildung 7.17 noch weitere Knotenverschiebungen aufgetragen. Auch an den inneren Blanketmodulen (Knoten #402) und an der Oberseite des Vakuumgefäßes sind die Unterschiede in den Ergebnissen der beiden Analysemethoden erkennbar. Der Unterschied bei den Verformungen liegt unter anderem daran, daß zu Beginn der Disruption der Plasmastrom beim dynamischen Plasmamodell zuerst ansteigt und somit der induktiv-resistive Zerfall von einem höheren Ausgangsstrom startet. Aufgrund der durch die Elektrodynamik der Struktur gesteuerten Bewegung des Plasmas findet der Stromzerfall beim dynamischen Plasmamodell auch nicht mehr zentral im Reaktor statt, sondern näher bei den oberen Strukturteilen. Die maximalen Verformungen sind somit beim dynamischen Plasmamodell im Vakuumgefäß, in der Rückwand und in den Blanketmodulen deutlich größer als bei der Vergleichsrechnung.

Schließlich sind in Abbildung 7.18 die von-Mises-Vergleichsspannungen im ITER-Reaktor für das dynamische Plasmaverhalten sowie für den vorgegebenen Plasmastrom-Zeitverlauf dargestellt. Für die Darstellung der mechanischen Spannungen wird der Zeitpunkt ausgewählt, an dem die Belastung der Struktur maximal wird. Dies ist bei $t = 40\text{ms}$ der Fall. Die Bilder zeigen, daß die Deformation und somit auch die Belastung der Struktur wiederum deutlich unterschiedlich ausfallen.

Zusammenfassung der ITER Ergebnisse

Die Vergleichsrechnungen zeigen deutlich, daß eine sehr starke Abhängigkeit der Strukturbelastung von dem Verlauf der Plasmadisruption existiert. Die Abweichungen von der Strukturbelastung ist zum einen auf das höhere Ausgangsniveau des Plasmastroms vor dem induktiv-resistiven Zerfall

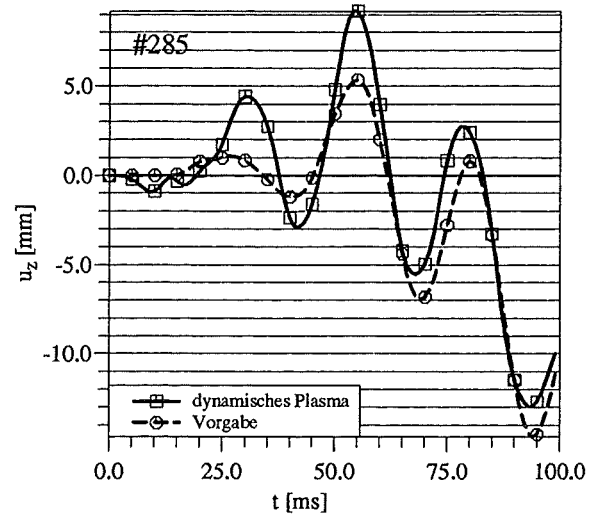
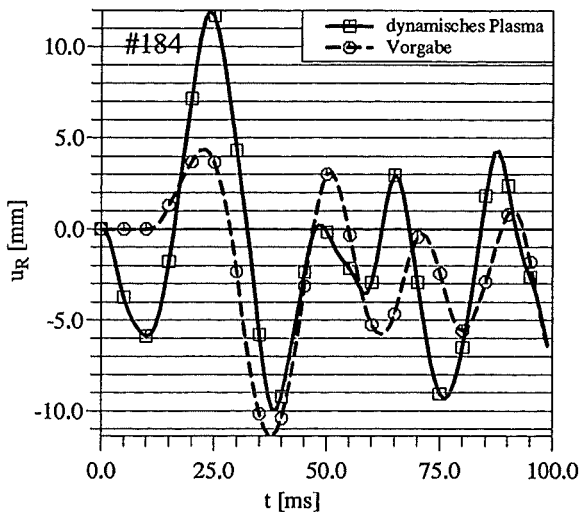


Abbildung 7.16: Vergleich von dynamischem Plasma und Vorgabe; links: radiale Verformung (u_R) an der Rückwand (Knoten #184), rechts: vertikale Verformung (u_z) am Vakuumgefäß (Knoten #285)

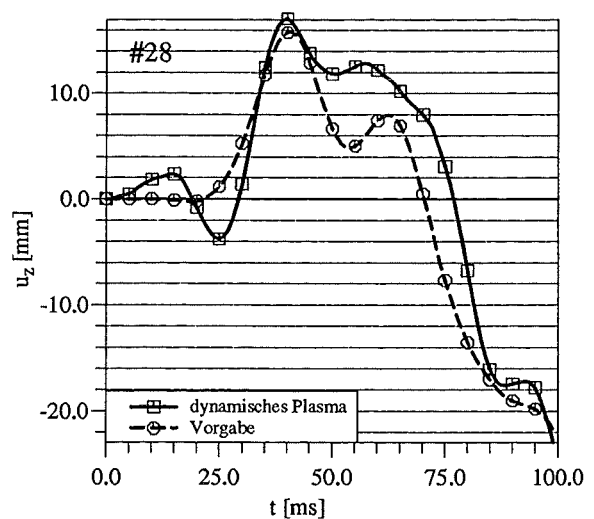
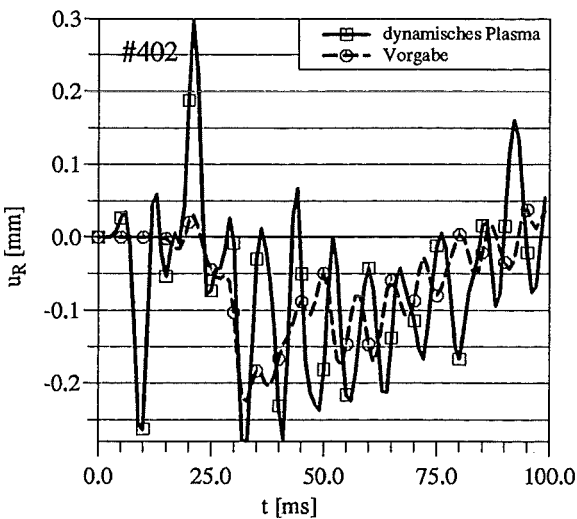


Abbildung 7.17: Vergleich von dynamischem Plasma und Vorgabe; links: radiale Verformung (u_R) am Inboard Blanket (Knoten #402), rechts: vertikale Verformung (u_z) am Vakuumgefäß (Knoten #28)

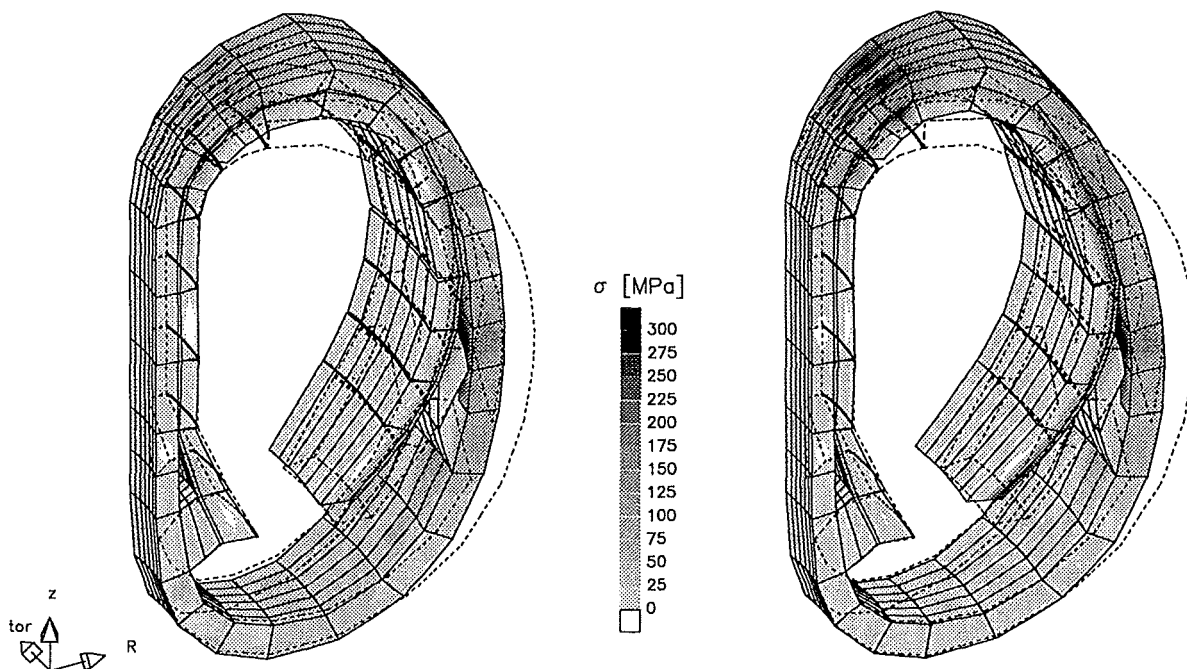


Abbildung 7.18: Von-Mises-Spannungen bei $t = 40\text{ms}$; links: dynamisches Plasmamodell, rechts: feste Vorgabe; Die gleichzeitig dargestellten Verformungen sind mit einem Faktor 50 überhöht.

zurückzuführen. Die quantitativen Unterschiede in den Strukturbelastungen sind jedoch größer, als daß sie nur von diesem höheren Ausgangsniveau her rühren können. Dies bedeutet, daß die Position des Plasmas und die Umverteilung des Plasmastroms über dem Querschnitt auch einen wesentlichen Einfluß auf die Strukturbelastung besitzen.

Für eine genaue Analyse von Reaktorkomponenten ist es also unbedingt notwendig, die Plasmadisruption physikalisch besser zu beschreiben, als dies bisher mit einer starren Vorgabe des Plasmastrom-Zeitverlaufs geschehen ist. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode hat sich als hierfür geeignet erwiesen.

7.3 Ergebnisse für den DEMO-Reaktor

Im folgenden werden CARIDDI-P Ergebnisse für den DEMO-Reaktor vorgestellt. Allgemeine Informationen über den DEMO-Reaktor sind z.B. bei Sokolov und Shatalov [131] oder, was die Blankets betrifft, bei Dalle Donne [132] zu finden. Mit diesen Rechnungen soll vor allem der Einfluß der Struktur, insbesondere der Einfluß der elektrischen Auslegung der Ersten Wand auf das Plasmaverhalten gezeigt werden. Frühere Berechnungen zu den elektromagnetischen Belastungen des DEMO-Blankets wurden z.B. von Boccaccini [34, 35] oder von Jordan und Schneider [133, 134] durchgeführt.

7.3.1 Eingabedaten

Externe Magnetfelder

Die Position der Poloidalfeldspulen und deren Strom im Gleichgewicht ist in Tabelle 7.8 und in Abbildung 7.19 dargestellt (Portone [89] und Boccaccini [129]). Die Anordnung entspricht einem symmetrischen „double null“ Plasma, das in einem DEMO-Reaktor erzeugt werden soll. Das Toroidalfeld in der magnetischen Achse des Plasmas ($R_m = 5.18m$) beträgt $B_{tor}^{axis} = 6T$. Der Verlauf in radialer Richtung wird zu

$$B_{tor}(r) = B_{tor}^{axis} \frac{R_m}{R}$$

angenommen.

FE-Modell des DEMO-Reaktors

In Abbildung 7.20 ist das Modell des DEMO-Reaktors dargestellt. Für die Berechnungen der Elektrodynamik wird nur eine Symmetriehälfte benötigt, da die induzierten Wirbelströme antisymmetrisch sind. Die entsprechende Symmetrieebene liegt in der (R, z) -Ebene durch die Blanketmitte. Die Berechnungen der Strukturmechanik werden dagegen mit dem kompletten Modell durchgeführt, da die Lorentz-Kräfte wie auch schon in Kapitel 7.1 und Kapitel 7.2 asymmetrisch sind. Um den gesamten Umfang sind 48 solcher Blanketsegmente angeordnet. Diese werden in der Induktionsmatrix berücksichtigt. Als mechanische Randbedingungen wird eine feste Einspannung des Vakuumpfäßes an der Innenseite (Abstützung gegen den Solenoid) und am Oberteil der Außenseite gewählt. Für die Erste Wand, die Rückwand sowie das Vakuumpfäß werden in toroidaler Richtung periodische Randbedingungen angenommen. Dies simuliert eine gegenseitige toroidale Abstützung der Bauteile.

Spule	R [mm]	z [mm]	ΔR [mm]	Δz [mm]	Strom [MA]
P1A	1845.0	± 1600.0	600.0	3200.0	- 34.032
P1B	1845.0	± 4000.0	600.0	1600.0	- 2.106
P1C	1845.0	± 6400.0	600.0	3200.0	+ 9.429
P2	4300.0	± 8650.0	1000.0	1000.0	+ 15.256
P3	12250.0	± 600.0	500.0	1000.0	- 7.884
P4	12250.0	± 300.0	500.0	1000.0	- 5.914

Tabelle 7.8: Positionen und Ströme der Poloidalfeldspulen im Gleichgewicht

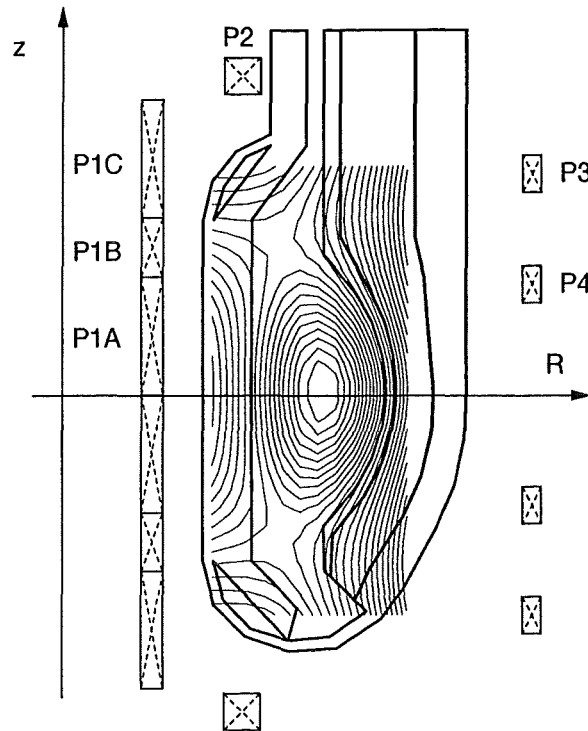


Abbildung 7.19: DEMO-Reaktor: Blankets mit Poloidalfeldspulen und Isolinien des magnetischen Flusses des Plasmagleichgewichts

	red. Dichte [kg/m^3]	red. E-Modul [GPa]
Erste Wand	3234.0	17.0
Inboard Blanket	3992.0	37.0
Outboard Blanket	2719.0	17.0
Rückwand	7700.0	170.0
Vakuummessel	7700.0	170.0

Tabelle 7.9: Aus der Homogenisierung gewonnene, reduzierte Materialdaten der Struktur

Die Materialdaten der Struktur sind in Tabelle 7.9 angegeben. Bei der Homogenisierung der Materialkennwerte für die finiten Elemente werden die Volumenanteile von Stahl, Brutmaterial, Beryllium, Helium und Leerraum für die verschiedenen Komponenten berücksichtigt (vgl. Küchle [135]). Für die elektromagnetischen Rechnungen wird das Vakuumgefäß, die Rückwand sowie die Erste Wand als toroidal leitend angenommen. Die Leitfähigkeit der Ersten Wand wird bei den verschiedenen Rechnungen variiert um den Einfluß dieser Größe auf die Plasmadisruption zu untersuchen. Die verwendeten spezifischen elektrischen Widerstände sind in Tabelle 7.10 angegeben. Die bei allen Rechnungen verwendeten initialen Plasmaparameter sind schließlich in Tabelle 7.11 dargestellt.

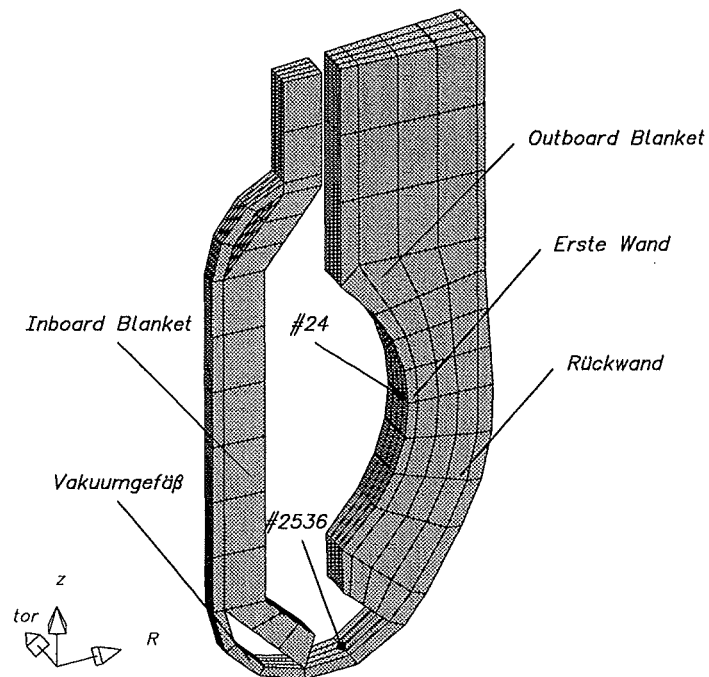


Abbildung 7.20: DEMO-Blanketmodell, Rückwand und Vakuumgefäß

	spez. elektrischer Widerstand [Ω m]
Erste Wand	$1 \cdot 10^{-0} \dots 1 \cdot 10^{-7}$
Outboard Blanket	$1 \cdot 10^{-6}$
Rückwand	$1 \cdot 10^{-6}$
Inboard Blanket	$1 \cdot 10^{-6}$
Vakuumkessel	$1 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 7.10: Elektrische Materialdaten der Struktur

innerer Radius	R_1	4.476 m
äußerer Radius	R_2	8.124 m
Radius mit maximaler Plasmahöhe	R_{max}	5.206 m
magnetische Achse	R_m	6.300 m
magnetische Achse	z_m	0.0 m
maximale Plasmahöhe	h	3.958 m
<hr/>		
toroidaler Plasmastrom	I_P	19.80 MA
β poloidal	β_p	1.0
innere Plasmainduktivität	l_i	0.7
<hr/>		
zeitlicher Temperaturverlauf:		
1ms	1T_P	30eV
6ms ($\Delta^2t = 5ms$)	2T_P	5eV
<hr/>		
Simulationsparameter:		
„enhancement factor“	$FFAC$	100
„halo“-Parameter	ω_{halo}	0.2
numerischer Zeitschritt	Δt	$1 \cdot 10^{-5} s$

Tabelle 7.11: Parameter des initialen Plasmas und der numerischen Simulation

7.3.2 Beispielrechnungen: Variation der Ersten Wand

Bei den im folgenden vorgestellten Beispielrechnungen wird eine vertikale Disruption zugrunde gelegt. Diese wird durch eine kleine, vertikale Verschiebung des Plasmas nach unten eingeleitet. Dieses Szenario simuliert ein Versagen der aktiven Positionsregelung des Plasmas mittels der Kontrollspulen. Berührt das Plasma die Struktur, findet der „energy-quench“ statt. Für die unten vorgestellte Design-Option 3 mußte der Auslöser, d.h. die kleine vertikale Auslenkung des Plasmas im Gegensatz zu den anderen beiden Optionen verstärkt werden, da ansonsten das Plasma, aufgrund der bei dieser Option sehr guten passiven Stabilisierung durch die Struktur, zurück in die Gleichgewichtslage gebracht wird. Der Einfluß der „halo-currents“ auf die Plasmabewegung wird mit dem Parameter $\omega_{halo} = 0.2$ berücksichtigt. Dies bedeutet, daß im Bereich des Divertors in poloidaler Richtung im Vergleich zu z.B. ASDEX-Upgrade nur kleine poloidale „halo-currents“ entstehen.

Wie schon mit einem sehr einfachen Leiterschleifenmodell gezeigt werden kann (Jordan und Schneider [133]), sind der Verlauf des Plasmastroms und die induzierten Wirbelströme bzw. die daraus resultierenden Kräfte in der Struktur sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr stark von den toroidalen elektrischen Eigenschaften der Ersten Wand abhängig. Die auftretenden Belastungen der Blanktes sind entsprechend unterschiedlich. Um diesen Effekt in realistischeren Strukturen zu untersuchen, wird im folgenden eine Parametervariation der toroidalen Leitfähigkeit der Ersten Wand durchgeführt. Dabei werden die folgenden drei Optionen untersucht:

- Option 1: $\eta_{FW} = 10^{-0} \Omega m$ ($R_{FW} \approx 25 \Omega$)
- Option 2: $\eta_{FW} = 10^{-4} \Omega m$ ($R_{FW} \approx 2.5 m\Omega$)
- Option 3: $\eta_{FW} = 10^{-7} \Omega m$ ($R_{FW} \approx 2.5 \mu\Omega$)

Der absolute toroidale Widerstand $R_{FW} \approx \eta_{FW} \frac{l_{FW}^{red}}{A_{FW}^{red}}$ ergibt sich aus einer Abschätzung der Quer-

Eigenzeit [ms]	Option 1	Option 2	Option 3
τ_1	120	123	13590
τ_2	110	111	7065
τ_3	109	109	4700

Tabelle 7.12: Elektrische Eigenzeiten der 3 Optionen

schnittsfläche der Ersten Wand unter Berücksichtigung der Kühlkanäle ($A_{FW}^{cd} \approx 2m^2$) und einer mittleren Umfangslänge ($l_{FW}^{cd} \approx 50m$). Option 1 entspricht einer sehr schlecht leitenden bzw. einer segmentierten Ersten Wand, bei Option 2 entspricht die Leitfähigkeit des Werkstoffes der Leitfähigkeit von MANET¹ (vgl. Kühle [135]) und bei Option 3 ist die Leitfähigkeit von Kupfer angenommen worden. Der toroidale elektrische Widerstand des Vakuumgefäßes beträgt ungefähr $20 \mu\Omega$. Anhand der elektromagnetischen Eigenzeiten der Struktur, die aus einer Eigenwertanalyse der Systemmatrix \mathbf{A}_S stammen, kann man den Einfluß dieser Größen auf die elektromagnetische Charakteristik der Struktur erkennen. In Tabelle 7.12 sind die drei größten Eigenzeiten für die drei Design-Optionen dargestellt. Darin erkennt man, daß zwischen Option 1 und Option 2 kein großer Unterschied besteht. Die toroidale Leitfähigkeit ist bei Option 2 noch zu gering, als daß sich ein signifikanter Mode in den Wirbelströmen in toroidaler Richtung einstellen könnte. Die Eigenzeiten von Option 3 unterscheiden sich dagegen stark von den anderen beiden Optionen. Die elektromagnetische Charakteristik dieser Option ist also deutlich verschieden.

Ergebnisse für das Plasma

In Abbildung 7.21 ist der integrale Plasmastrom I_P und das poloidale Beta β_p für die drei Design-Optionen dargestellt. Weiterhin sind in Abbildung 7.22 die radiale und die vertikale Verschiebung der magnetischen Achse während der Disruption gezeigt. Man erkennt bei Option 1, daß sich das Plasma schon kurz nach Beginn der Rechnung sehr schnell nach unten bewegt und somit die Wand berührt, so daß der „energy-quench“ stattfindet. Das Plasma verliert dann seinen thermischen Energieinhalt, d.h. β_p sinkt ab. Die vertikale Richtung der Bewegung ist bei einem symmetrischen Plasma zufällig. Sie hängt von der Art des Versagens der Kontrollspulen ab. Hier wird durch die initiale Auslenkung des Plasmas nach unten die Richtung der Instabilität vorgegeben. Die kleine vorgegebene Vertikalverschiebung wird bei Option 1 also nicht oder nur sehr gering durch die passive Stabilisierung der Struktur abgefangen. Durch die Abflachung des Stromprofils im Plasma steigt der integrale Plasmastrom erst an, bis er dann aufgrund des induktiv-resistiven Zerfalls und des Wandkontakts (Abschälung des Randplasmas) abfällt.

Bei Option 2 wird die anfängliche Vertikalauslenkung aufgrund der jetzt besseren passiven Stabilisierungswirkung der Struktur abgebremst. Das Plasma driftet jedoch, wenn auch langsamer als bei Option 1 nach unten, bis es schließlich die Struktur berührt und der „energy-quench“ stattfindet. Dieser äußert sich durch eine starke radiale Einwärtsbewegung, da nun der thermodynamische Plasmadruck und damit die Reifenkraft („hopp-force“) gegen Null geht, die vertikal nach innen gerichtete Kraft aufgrund der vertikalen magnetischen Induktion aber bestehen bleibt. Der induktiv-resistive Zerfall des Plasmastroms ist bei dieser Option schneller als bei Option 1, da die magnetische Energie des Plasmas induktiv auf die Erste Wand übergeht und somit aus dem Plasma

¹MARTensitic steel for NET

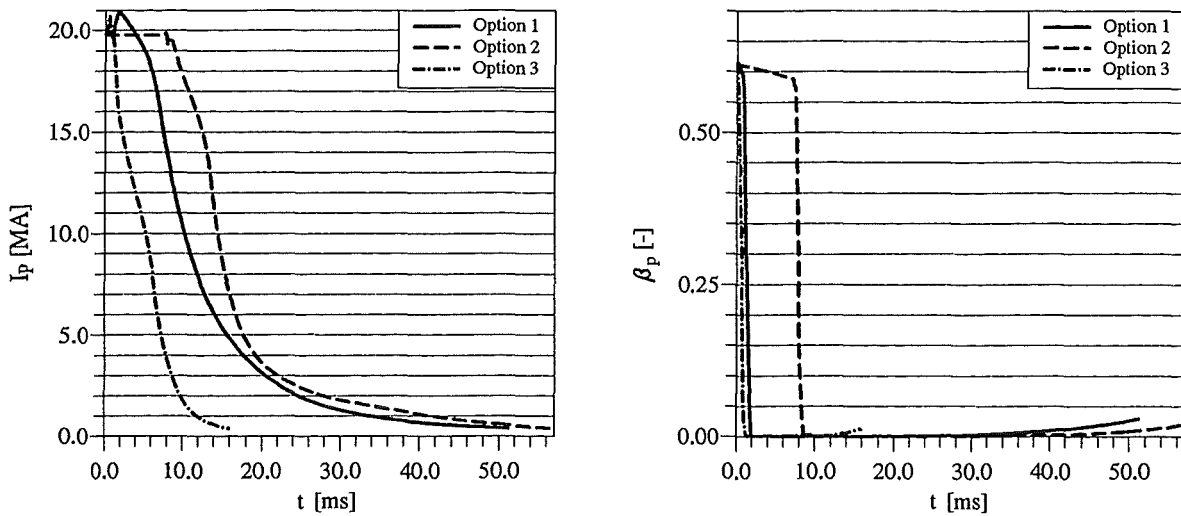


Abbildung 7.21: Integraler Plasmastrom (I_P) und poloidales Beta (β_p)

auf die toroidalen Ströme in der Ersten Wand übertragen wird.

Bei Option 3 ist zu erkennen, daß der „energy-quench“ wie bei Option 1 gleich nach dem Beginn der Rechnung einsetzt. Dies liegt aber nur daran, daß für diese Rechnung, wie oben angesprochen, eine wesentlich größere anfängliche Auslenkung für das Auslösen der vertikalen Instabilität verwendet werden mußte. Der zeitliche Verlauf der Plasmalage gleicht dem von Option 2. Der Plasmastrom nimmt noch schneller ab, da sich ein noch größerer, toroidaler Strom in der Ersten Wand aufbaut. Auch bei diesem Szenario erkennt man, daß sich das Plasma nach dem „energy-quench“ sehr stark radial nach innen bewegt.

Die Ergebnisse für die Position der magnetischen Achse bei allen drei Optionen nach dem Zeitpunkt, an dem der Strom auf etwa 10% seines Anfangswertes gefallen ist, sind nicht mehr von Bedeutung, da zu diesen Zeitpunkten eigentlich keine magnetische Achse mehr vorhanden ist.

Für den DEMO-Reaktor existieren nach dem Kenntnisstand des Autors keine Simulationsrechnungen für das Plasma. Somit können die hier erhaltenen Ergebnisse nicht verglichen werden. Diese Ergebnisse stellen damit die ersten Plasmaanalysen für den DEMO-Reaktor dar.

Die CPU-Zeit der Plasmaberechnung auf der HP-9000/7200 Workstation betrug bei Option 1 und Option 2 ca. 1,6 Stunden und bei Option 3 aufgrund des schnelleren Verlaufs der Disruption nur 25 Minuten. Das Rechenetz für das Plasma hatte 12×29 Gitterpunkte. Der bei den Simulationen verwendete Zeitschritt betrug $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-5}$ s, der „enhancement“-Faktor $FFAC$ wurde auf 100 gesetzt.

Strukturbelastung

In Abbildung 7.23 ist die toroidale Stromdichte in der Ersten Wand (Knoten #24) dargestellt. Man erkennt die erwartungsgemäß deutlichen Unterschiede zwischen den drei Optionen. Die Abbildung zeigt aber auch, daß der toroidale Strom in der Ersten Wand bei Option 3 durchaus die Größenordnung des Plasmastroms erreichen kann, was sich auch auf die Belastung der Ersten Wand auswirkt. In Abbildung 7.24 sind Knotenverschiebungen für die drei Optionen über der Zeit dargestellt. Bei der radialen Verschiebung des Knotens #24 (Erste Wand, vgl. Abbildung 7.20) erkennt man, daß die Verformung der Ersten Wand bei zunehmender toroidaler Leitfähigkeit erhöht wird. Dieser Effekt

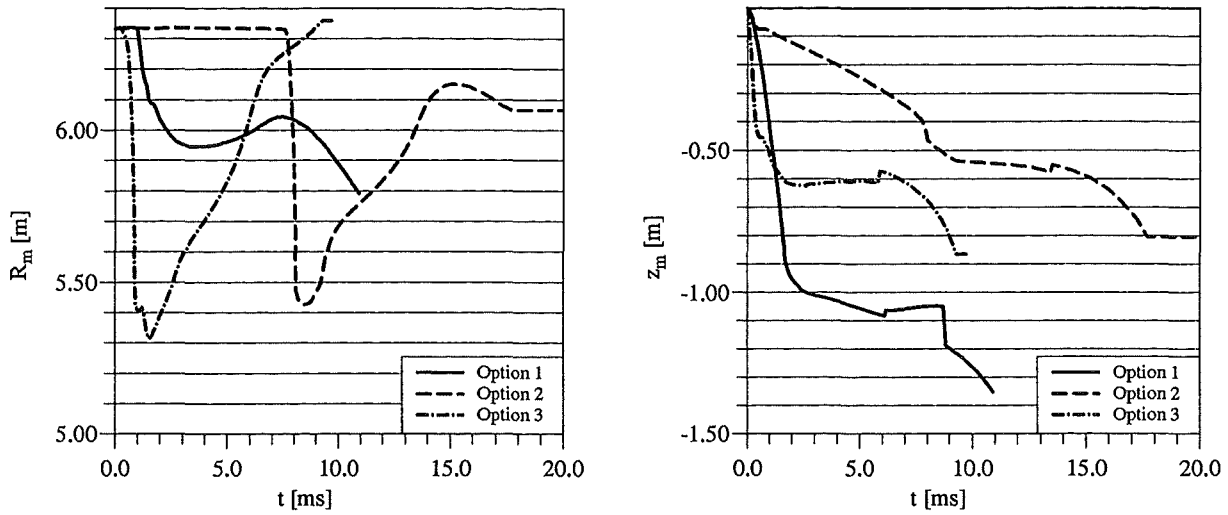


Abbildung 7.22: Radiale (R_m) und vertikale (z_m) Position der magnetischen Achse

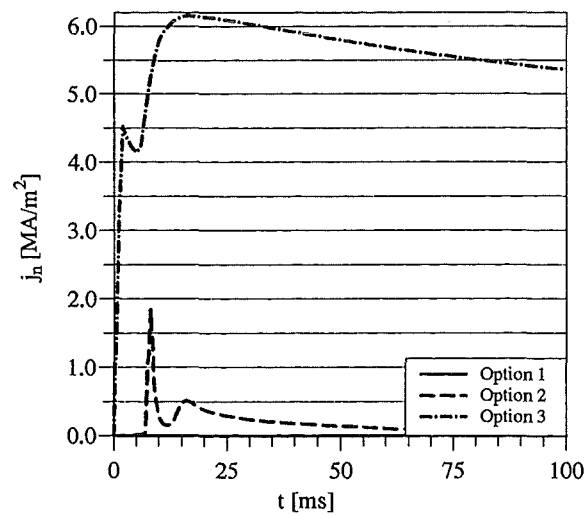


Abbildung 7.23: Toroidaler Strom in der Ersten Wand (Knoten #24))

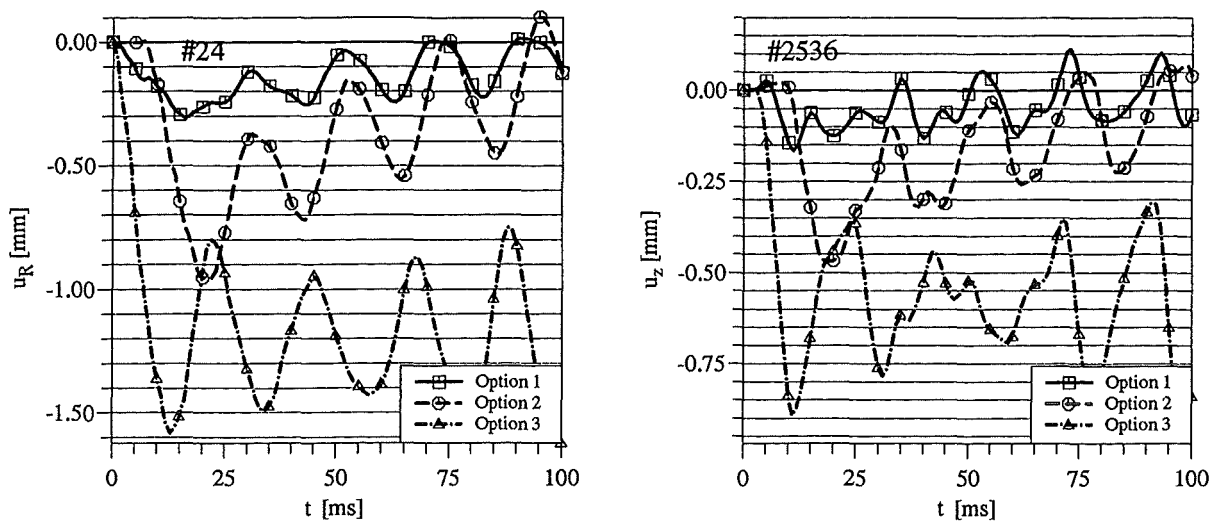


Abbildung 7.24: links: radiale Verschiebung (u_R) der Ersten Wand (Knoten #24); rechts: vertikale Verschiebung (u_z) des Vakuumgefäßes (Knoten #2536)

ist bei der Vertikalverschiebung des unteren Teils des Vakuumgefäßes (Knoten #2536) noch ausgeprägter. Es zeigt sich also, daß sich bei der Verwendung eines dynamischen Plasmaverhaltens eine Erhöhung der Strukturbelastungen aufgrund einer erhöhten Leitfähigkeit der Ersten Wand ergibt. In Abbildung 7.25 sind die von-Mises-Vergleichsspannungen zum Zeitpunkt 20ms für die Option 1 und Option 2 bzw. zum Zeitpunkt 10ms für die Option 3 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß die Hauptbelastung der Struktur am unteren Teil des Inboard Blankets auftritt. Weiterhin erkennt man die schon zuvor beschriebene Tendenz, daß bei dem hier gewählten, vereinfachten Blanket-Design eine sehr gut leitende Ersten Wand die Blanketbeanspruchungen deutlich erhöht.

Die deutlich höheren Belastungen des unteren Teils des Inboard-Blankets bei den Optionen 2 und 3 sind auf verschiedene Ursachen zurückzuführen. Wie in Abbildung 7.22 zu erkennen ist, findet bei diesen Optionen eine starke Radialbewegung des Plasmas nach innen statt. Dadurch zerfällt der Plasmastrom näher am Inboard-Blanket als bei Option 1. Außerdem werden aufgrund dieser Bewegung dort auch Bereiche des Plasmas abgeschält, die noch einen relativ hohen Strom tragen, so daß dieser in Form von toroidalen „halo-currents“ in die Struktur übergeht. Bei Option 1 werden dagegen aufgrund der geringen Radialverschiebung des Plasmas nur Bereiche abgeschält, die ohnehin keinen hohen Strom mehr tragen. Dadurch ist bei dieser Option die Belastung der Inboard-Blankets deutlich geringer.

Zusammenfassung der DEMO Ergebnisse

Die hier vorgestellten Rechnungen haben gezeigt, daß der Verlauf der Plasmadisruption sehr stark von der elektrischen Auslegung der berandenden Struktur abhängt. Dies gilt sowohl für die Plasmabewegung, als auch für das Zeitverhalten des Plasmastroms. Die Konsequenz daraus ist, daß für Vergleichsrechnungen von verschiedenen Konzepten entweder für jedes Konzept ein Szenario der Plasmadisruption verwendet werden muß, das mit den entsprechenden elektrischen Eigenschaften der Struktur berechnet wird, oder ein um ein dynamisches Plasmamodell erweitertes Verfahren eingesetzt werden muß.

Die vergleichenden Rechnungen mit den unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Ersten Wand ha-

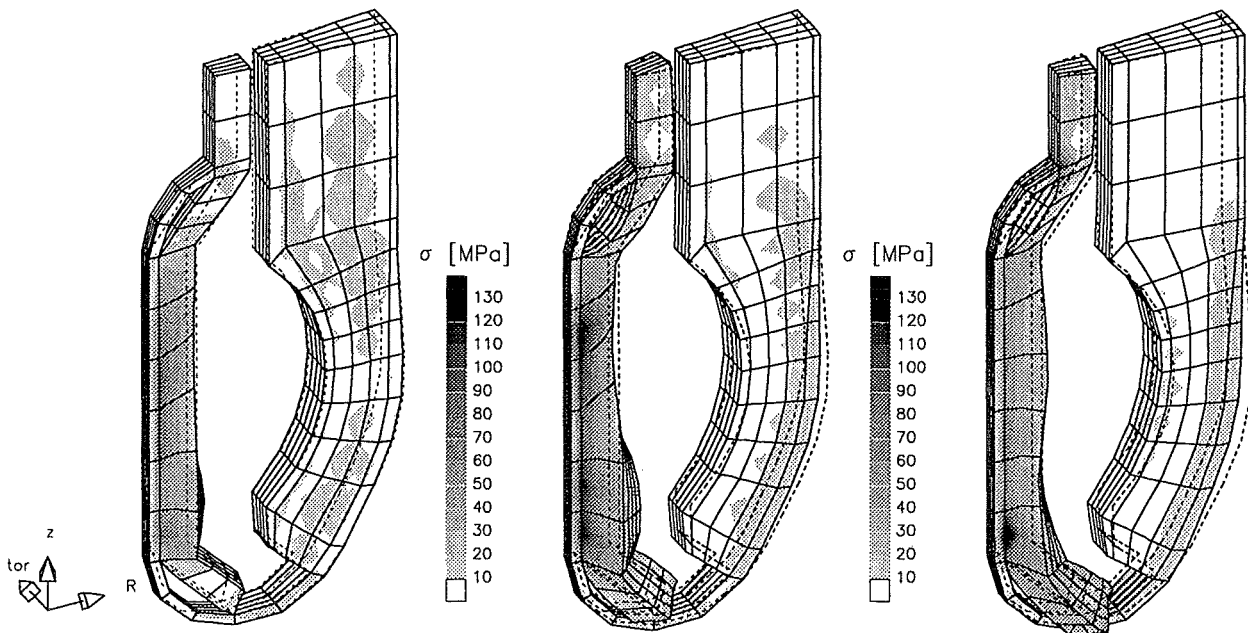


Abbildung 7.25: Von-Mises-Spannungen; links: Option 1 bei 20ms, Mitte: Option 2 bei 20ms, rechts: Option 3 bei 10ms; Die Verformungen sind mit einem Faktor 250 überhöht dargestellt.

ben zudem folgendes gezeigt: Die passive Stabilisierung der Struktur bei einer leitenden Ersten Wand ist erheblich größer als wenn die Wand toroidal isoliert ist. Dies bedeutet, daß eine vertikale Instabilität bei einer leitenden Ersten Wand eher durch passive Stabilisierung abgefangen wird als bei einem isolierten Konzept. Hierbei ist jedoch anzumerken, daß technologisch realisierbare Blanketkonzepte im Falle einer isolierten Ersten Wand die passive Stabilisierung des Plasmas mit zusätzlichen „saddle loops“ gewährleisten (vgl. Dalle Donne [136], Boccaccini [129] und ASDEX-Upgrade in Kapitel 7.1). Tritt die vertikale Instabilität bei der hier gewählten Option 3 trotzdem auf, sind die daraus resultierenden Belastungen der Struktur wesentlich größer. Ein weiterer Aspekt für die elektromagnetische Auslegung der Ersten Wand ist die Erfordernis für eine aktive Positionskontrolle des Plasmas. Da sich die Kontrollspulen außerhalb der Plasmakammer befinden, wird eine gewisse magnetische Durchsichtigkeit von der Struktur verlangt. Dies kann nur dann gewährleistet werden, wenn die Erste Wand weniger gut leitet. Ebenso darf für den Anfahrvorgang des Plasmas, also die induktive Einkopplung des Plasmastroms, die Erste Wand nur eine beschränkte Leitfähigkeit besitzen, da ansonsten der Strom in die Wand und nicht in das Plasma eingekoppelt wird. Für ITER z.B. darf aus diesem Grund der toroidale Widerstand der gesamten Struktur $4 \mu\Omega$ nicht überschreiten. Die Optionen 1 und 3 müssen unter diesen Gesichtspunkten als technisch nicht machbar eingestuft werden. Zur prinzipiellen Untersuchung des Einflusses der Struktur auf das Plasmaverhalten sind diese Optionen jedoch geeignet, da das Plasmaverhalten so nur von genau einem Parameter, nämlich der Leitfähigkeit der Ersten Wand abhängt.

Insgesamt treten die größten Belastungen der hier gewählten Struktur aus den oben erwähnten Gründen am Inboard-Blanket auf. Diese Bauteile müssen in weiteren Sicherheitsanalysen näher untersucht werden.

Kapitel 8

Schlußfolgerung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, Plasmadisruptionen in einem Tokamak-Fusionsreaktor rechnerisch zu simulieren. Eine möglichst genaue Beschreibung der Vorgänge der zweiten Phase der Disruption, des sogenannten „current-quench“ ist notwendig, da die Beanspruchung der elektrisch leitenden Strukturen des Reaktors stark von dem Zeitverlauf dieser Phase abhängt. Um dies zu erreichen, wird im Gegensatz zu anderen Rechenverfahren bei der hier beschriebenen Methode das Zeitverhalten des Plasmas nicht mehr vorgeschrieben, sondern mittels eines zweidimensionalen Modells berechnet. Im Vergleich mit rein plasmaphysikalischen Codes liefert das entwickelte Rechenverfahren eine gleichwertige Genauigkeit in den für die Strukturbelastung wichtigen Plasmagrößen, benötigt jedoch erheblich weniger Rechenzeit und Speicherkapazität. Der wesentliche Fortschritt dieser für die Störfallanalyse neuen Methode besteht vor allem darin, daß die das Plasma berandende Struktur dreidimensional berücksichtigt wird. Dies ist insbesondere deshalb von Bedeutung, da der Ablauf der Plasmadisruption im wesentlichen durch die elektrischen Eigenschaften der Berandung bestimmt wird, und diese bei den zukünftigen Reaktorkonzepten einen stark dreidimensionalen Charakter im Bezug auf induzierte Wirbelströme besitzt.

Die Nachrechnungen des gut dokumentierten ASDEX-Upgrade Experiments belegt die Leistungsfähigkeit der hier entwickelten Methode. Der Vergleich mit dem zweidimensionalen Rechenprogramm TSC zeigt weiterhin, daß die neue Methode vor allem den Vorteil der wesentlich kürzeren Rechenzeit und der einfacheren Handhabbarkeit gegenüber TSC besitzt. Die Ergebnisse der für die Blanketanalyse wichtigen Plasmaparameter sind dabei vergleichbar.

Besonders bei der Optimierung der elektrischen Leitfähigkeit der Ersten Wand der DEMO-Reaktors wäre die Nutzung dieser Methode sinnvoll. Die Rückwirkung dieses Designdetails auf das Plasmaverhalten kann mit den sonst verfügbaren Codes schon vom Prinzip her nicht berücksichtigt werden. Es hat sich gezeigt, daß die Rückwirkung der Ströme in der Struktur besonders für die Plasmabewegung von Bedeutung ist. Da bei den zukünftigen Reaktoren der Abstand von Plasma und Struktur gering sein wird, tritt das Plasma schon bei einer geringen Positionsänderung mit der Ersten Wand in Kontakt und wird abgeschält. Dieser Vorgang hat aber wiederum einen entscheidenden Einfluß auf die Wirbelströme in der Struktur, so daß es für eine Strukturanalyse notwendig ist, den Abschälvorgang, wie in dieser Arbeit geschehen, zu berücksichtigen. Die hier gezeigten Rechnungen für den DEMO-Reaktor ergaben, daß dadurch eine erhebliche Belastung der Inboard-Blankets auftritt.

Berührt das Plasma die Struktur, können poloidale „halo-currents“ in die Struktur geleitet werden. Der Plasmastrom findet einen alternativen Pfad. Die Berücksichtigung dieser Ströme würde

die Aussagen zur Strukturbelastung weiter verbessern. Um dies zu erreichen, müssen die poloidalen Spannungen in der sogenannten „halo“-Region des Plasmas entweder explizit berechnet werden, oder, was für die praktische Anwendung des Programmsystems besser scheint, über eine Modellannahme, ähnlich der für die Verzögerung des Plasmas durch „halo-currents“, ermittelt werden. Diese Ströme müßten dann an den entsprechenden Kontaktstellen über eine externe elektrische Spannung in die Struktur eingeleitet werden. Um den Übergang des Plasmastroms auf die Struktur genauer zu beschreiben, müßte zusätzlich eine Aussage über die Rekombination und die damit verbundene Gasschicht zwischen Plasma und Struktur gemacht werden.

Eine weitere Aufgabe wäre die Untersuchung von dreidimensionalen Effekten im Plasma während der Disruption. Ansätze hierzu könnten harmonische Funktionen in toroidaler Richtung, oder auch die Verwendung einer sogenannten Hyperresistivität darstellen (vgl. Merrill et al. [23] oder Boozer [137]). Eine vollständige dreidimensionale Modellierung des Plasmas wird auch weiterhin aus Kapazitätsgründen nicht möglich sein. Darüberhinaus ist fraglich, ob sie für die hier betrachtete Aufgabe, der Analyse der Strukturbelastung, Sinn macht.

Schließlich mangelt es immer noch an einer breiten Datenbasis zur Validierung von Programmen. Experimente im kleinen Maßstab sind nur bedingt geeignet, da eine geometrisch ähnliche Verkleinerung eines Tokamaks eine Verstärkung der magnetischen Induktion zur Folge haben müßte. Modellexperimente kommen also nur für bestimmte Detailuntersuchungen in Betracht. Beispielsweise könnte eine Untersuchung von Strukturbelastungen aufgrund von vertikalen Instabilitäten mit einer harmonischen Bewegung eines elektrischen Leiters, der das Plasma darstellen soll, in einer Modellstruktur durchgeführt werden. Dazu könnte auch die Topologie der externen Magnetfelder nachgebildet werden, ohne daß diese eine maßstabsgetreue Feldstärke aufweisen müssen.

Zur Erweiterung der experimentellen Datenbasis müßte eine intensive Zusammenarbeit mit den Großexperimenten stattfinden. Außerdem wären weitere Vergleiche mit anderen plasmaphysikalischen Codes sinnvoll, die die Vorgänge im Plasma genauer beschreiben können.

Mit den in dieser Arbeit bereitgestellten Methoden können auch Untersuchungen zur Dämpfung von vertikalen MHD-Instabilitäten durchgeführt werden. Ansatzweise wurde dies schon für den DEMO-Reaktor gezeigt (vgl. Kapitel 7.3). Es könnten weitere Untersuchungen zur passiven Stabilisierung für reale Geometrien hinzukommen. Im Gegensatz zu dem heute noch üblichen Vorgehen, bei dem durchweg mit sehr einfachen Berandungen gerechnet wird, könnten die Regelungen für das Plasma unter Beachtung einer realistischeren Berandung ausgelegt werden. Dazu müßte ein Regelungsmodell in CARIDDI-P implementiert werden, das die aktive Regelung der vertikalen Plasmalage nachbilden kann.

Literaturverzeichnis

- [1] J.A. Wesson. *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [2] U. Schumacher. *Fusionsforschung -Eine Einführung-*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993.
- [3] J. Raeder et al. *Kontrollierte Kernfusion*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1981.
- [4] B.B. Kadomtsev. *Tokamak Plasma: A complex physical system*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1992.
- [5] Broschüre des Max-Planck-Institutes für Plasmaphysik. Kernfusion - Berichte aus der Forschung, 1996.
- [6] B.B. Kadomtsev. Disruptive instabilities in tokamaks. *Soviet Journal of Plasma Physics*, 1(5):389–391, 1975.
- [7] P.E. Stott. Density limits and disruptions in plasmas. *Nuclear Fusion*, 28(8):1469–1473, 1988. Report on IAEA Tech. Comm. Meeting bei JET, 26. - 28. Januar, 1988.
- [8] E.A. Lazarus, J.B. Lister, G.H. Neilson. Control of the vertical instability in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 30(1):111–141, 1990.
- [9] J.Q. Dong, E. Montalvo, R. Carrera, M.N. Rosenbluth. Passive plasma vertical stabilization in a single-turn tokamak configuration. *Fusion Technology*, 19:1290–1295, 1991.
- [10] D.A. Humphreys, I.H. Hutchinson. Axisymmetric magnetic control design in tokamaks using perturbed equilibrium plasma response modeling. *Fusion Technology*, 23:167–184, 1993.
- [11] R. Albanese, E. Coccolese, G. Rubinacci. Plasma modelling for the control of vertical instabilities in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 29(6):1013–1023, 1989.
- [12] S. Bobbio, E. Coccolese, G. Fabricatore, R. Martone, G. Rubinacci. Passive control of the vertical instability in INTOR. *Fusion Technology*, 7:345–360, 1985.
- [13] S.W. Haney, J.P. Freidberg. Variational methods for studying tokamak instability in the presence of a thin resistive wall. *Physics of Fluids B*, 1(8):1637–1645, 1989.
- [14] B. Lehnert. Vertical displacements and position control in tokamaks. *Fusion Technology*, 26:234–243, 1994.
- [15] S.C. Jardin, M.G. Bell, J.L. Johnson, S.M. Kaye, C. Kessel, R. Lahaye, J. Manickam, R. Pillsbury, N. Pomphrey, A. Reiman, R.O. Sayer, D.J. Struckler. Magnetohydrodynamic equilibrium and stability. *Fusion Technology*, 21:1123–1213, 1992.

- [16] S.C. Jardin, N. Pomphrey, J. DeLucia. Dynamic modeling of transport and positional control of tokamaks. *Journal of Computational Physics*, 66:481–507, 1986.
- [17] S.C. Jardin, M.G. Bell, N. Pomphrey. TSC simulation of ohmic discharge in TFTR. *Nuclear Fusion*, 33(3):371–382, 1993.
- [18] G. Pautasso. Simulation of vertical displacement events with the tokamak simulating code. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 66–80.
- [19] G. Pautasso, O. Gruber, F. Mast, K. Büchl, C.J. Fuchs, C. Garcia-Rosales, A. Herrmann, K. Lackner, J. Neuhauser, W. Schneider, ASDEX-Upgrade Team. A study toward self-consistent modelling of current quench. In *21st European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Montpellier, Frankreich, 27. Juni - 1. July 1994. European Physical Society, 1994, Seite 8–11.
- [20] R.O. Sayer, Y.-K.M. Peng, S.C. Jardin, A.G. Kellman, J.C. Wesley. TSC plasma halo simulation of a DIII-D vertical displacement episode. *Nuclear Fusion*, 33(7):969–978, 1993.
- [21] Y. Nakamura, R. Yoshino, Y. Neyatani, N. Pomphrey, S.C. Jardin. Mechanism of vertical displacement events in JT-60U disruptive discharges. *Nuclear Fusion*, 36(5):643–656, 1996.
- [22] B.J. Merrill, S.C. Jardin. DSTAR: A comprehensive tokamak resistive disruption model for vacuum vessel components. *Fusion Engineering and Design*, 5:235–249, 1987.
- [23] B.J. Merrill, S.C. Jardin, M. Ulrickson, M. Bell. Dynamics and energy flow in a disrupting tokamak plasma. *Fusion Engineering and Design*, 15:163–180, 1991.
- [24] L.L. Lao, T.H. Jensen. Magnetohydrodynamic equilibria of attached plasmas after loss of vertical stability in elongated tokamaks. *Nuclear Fusion*, 31(10):1909–1922, 1991.
- [25] R.R. Khayrutdinov, V.E. Lukash. Studies of plasma equilibrium and transport in a tokamak fusion device with the inverse-variable technique. *Journal of Computational Physics*, 109:193–201, 1993.
- [26] V.E. Lukash, R.R. Khairutdinov. Numerical simulation of halo currents in tokamaks. *Plasma Physics Reports*, 22(2):99–104, 1995.
- [27] A. Kameari. Transient eddy current analysis on thin conductors with arbitrary connections and shapes. *Journal of Computational Physics*, 42:124–140, 1981.
- [28] K. Koganezawa, M. Kushiyama, S. Niikura, F. Kodough, M. Onozuka, K. Koizumi. Transient electromagnetic and dynamic structural analyses of a blanket structure with coupling effects. In *Proceedings of the 18th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, Karlsruhe, 22. - 26. Aug. 1994, Seite 1161–1164.
- [29] A. Bossavit, J.C. Verite. The TRIFOU code: solving the 3D eddy current problem by using h as state variable. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19:2465–2470, 1983.
- [30] P. Chaussecourte, A. Bossavit, J.C. Verite, Y.R. Crutzen. Electromagnetic transients induced in the tokamak first wall by a plasma disruption using "TRIFOU". *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):101–105, 1990.

- [31] R. Albanese, G. Rubinacci. Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements. *IEEE Proceedings*, 135(7):457–462, 1988.
- [32] K. Miya, Y.R. Crutzen, T. Takagi, L.V. Boccaccini, L. Bottura. Electromagnetic effects on first wall and structural components. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Fusion Nuclear Technology, Fusion Engineering and Design 16 (1991)*, Karlsruhe, 2.-7. Juni 1991. Seite 217–227.
- [33] L.V. Boccaccini, M. Dalle Donne. Electromagnetic forces and stresses in ceramic breeder blankets caused by disruptions. In *Proceedings of the 16th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, London, GB, 3. - 7. September 1990. Seite 792–796.
- [34] L.V. Boccaccini. Electromagnetic forces caused by disruptions in the Karlsruhe DEMO solid breeder blanket and in the test module for NET/ITER. *Fusion Engineering and Design*, 17:153–159, 1991.
- [35] L.V. Boccaccini. Calculation of electromagnetic forces and stresses caused by a major plasma disruption in the Karlsruhe solid breeder blanket design for the DEMO reactor. In *Proceedings of the 17th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, Rom, Italien, 14. - 18. September. 1992, Seite 1291–1295.
- [36] R. Albanese, L. Bottura, E. Coccoresse, R. Martone, G. Rubinacci. Electromagnetic effects induced by plasma disruptions in the NET vacuum vessel. *Fusion Engineering and Design*, 15(3):201–221, 1992.
- [37] T. Jordan. *Kopplung der elektromagnetischen und strukturdynamischen Probleme beim Fusionsreaktorblanket*. Dissertation, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1993. KfK 5236.
- [38] P. Barabaschi. *private Mitteilung*. ITER San Diego, USA, 1994.
- [39] O. de Barbieri, R. Albanese, J. Blum, F. Bourbon, P.J. Lalouis. PROTEUS. ITER technical meeting on plasma equilibrium and control, 1993.
- [40] P. Barabaschi, P.H. Rebut, A. Cardella, Y. Gohar, R. Parker. Electromagnetic and structural analysis of the ITER shielding blanket. In *Proceedings of the 18th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, Karlsruhe, 22. - 26. Aug. 1994, Seite 1149–1152.
- [41] P. Barabaschi, S. Chiochio. Disruptions, VDE's, and halo current: Scenarios and electromagnetic analyses in ITER. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Capri, Italien, 29. - 30. Aug. 1994, Seite 117–123.
- [42] S. Fantechi. Plasma vertical displacement events in next tokamaks. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Capri, Italien, 29. - 30. Aug. 1994, Seite 109–116.
- [43] R. Albanese, L. Bottura, S. Chiochio, E. Coccoresse, R. Fresa, R. Martone, A. Portone, G. Rubinacci. Experimental validation of numerical procedures for tokamak devices. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 124–157.

- [44] D.J. Ward, J.A. Wesson. Impurity influx model of fast tokamak disruptions. *Nuclear Fusion*, 32(7):1117–1123, 1992.
- [45] A. Stäbler, K. McCormick, V. Mertens, E.R. Müller, J. Neuhauser, H. Niedermeyer, K.H. Steuer, H. Zohm, F. Dollinger, A. Eberhagen, G. Fussmann, O. Gehre, J. Gernhardt, T. Hartinger, J.V. Hofmann, E. Kakoulidis, M. Kaufmann, G. Kyriakakis, R.S. Lang, H.D. Murmann, W. Poschenrieder, F. Ryter, W. Sandmann, U. Schneider, G. Siller, F.X. Soldner, N. Tsois, O. Vollmer, F. Wagner. Density limit investigations on ASDEX. *Nuclear Fusion*, 32(9):1557–1583, 1992.
- [46] H. Zohm, K. Lackner, C. Ludescher. Statistical analysis of disruptions in ASDEX. *Nuclear Fusion*, 33(4):655–662, 1993.
- [47] G. Pautasso, O. Gruber, J.C. Fuchs, A. Herrmann, K. Lackner, P. Lang, F. Mast, W. Schneider, U. Seidel, B. Streibl, M. Ulrich, ASDEX-Upgrade Team, ICRH, NBI Groups. Characteristics of disruptions in ASDEX-Upgrade and their physical interpretation. In *22nd European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, 4. Band, Bournemouth, England, 3.-7. Juli 1995. European Physical Society, 1995, Seite 37–40.
- [48] O. Gruber, ASDEX-Upgrade Team. Overview on vertical displacement investigations in ASDEX-Upgrade. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 30–43.
- [49] O. Gruber, K. Lackner, G. Pautasso, U. Seidel, B. Streibl. Vertical displacement events and halo currents. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 35:B191–B204, 1993.
- [50] B. Streibl, H. Schneider, U. Seidl, H. Vernickel. Vessel forces due to vertical disruptions in ASDEX-Upgrade. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 44–65.
- [51] H. Zohm, M. Marashek, G. Pautasso, M. Schittenhelm, S. Sesnic, M. Sokoll, W. Suttrop, M. Alexander, M. Bessenrodt-Weberpals, A. Boozer, H.J. de Blank, J.C. Fuchs, J. Gernhardt, O. Gruber, T. Kass, M. Kaufmann, P.T. Lang, K. Lackner, H. Meister, V. Mertens, R. Neu, F. Wöflf, ASDEX-Upgrade ECRH ICRH NBI-Team. MHD stability and disruption physics in ASDEX-Upgrade. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 37:A313–A324, 1995.
- [52] J.A. Wesson, R.D. Gill, M. Hugon, F.C. Schüller, J.A. Snipes, D.J. Ward, D.V. Bartlett, D.J. Campbell, P.A. Duperrex, A.W. Edwards, R.S. Granetz, N.A.O. Gottardi, T.C. Hender, E. Lazzaro, P.J. Lomas, N. Lopes Cardozo, K.F. Mast, M.F.F. Nave, N.A. Salmon, P. Smeulders, P.R. Thomas, B.J.D. Tubbing, M.F. Turner, A. Weller. Disruptions in JET. *Nuclear Fusion*, 29(4):641–666, 1989.
- [53] P. Noll, L. Sonnerup, C. Froger, M. Huguet, J. Last. Forces on the JET vacuum vessel during disruptions and consequent operational limits. *Fusion Technology*, 15(2):259–266, 1989.
- [54] P. Barabaschi, P. Noll. Effects of vertical displacements and disruptions on internal structures in JET. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 1–29.

- [55] P. Noll, P. Andrew, P. Barabaschi, M. Garribba, P. Miele, G. Sannazzano, C. Sborchia, M. Verrecchia. Experience of electromagnetic forces during JET divertor operation. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Capri, Italien, 29. - 30. Aug. 1994, Seite 11–27.
- [56] A.C. Janos, E. Fredrickson, M. Corneliusen, K.M. McGuire, M. Bell, A. Cavallo, Y. Nagayama, D.K. Owens, M. Ulrickson. Disruptions in TFTR. *Journal of Nuclear Materials*, 176 and 177:773–778, 1990.
- [57] A. Kellman, J.R. Ferron, T.H. Jensen, L.L. Lao, E.A. Lazarus, J.B. Lister, J.L. Luxon, D.G. Skinner, E.J. Strait, E. Reis, T.S. Taylor, A.D. Turnbull. Vertical stability, high elongation, and the consequences of loss of vertical control in DIII-D. In *Proceedings of the 17th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, Rom, Italien, 14. - 18. September. 1990, Seite 1045–1049.
- [58] J.B. Lister, E.A. Lazarus, A.G. Kellman, J.-M. Moret, J.R. Ferron, F.J. Helton, L.L. Lao, J.A. Leuer, E.J. Strait, T.S. Taylor, A.D. Turnbull. Experimental study of the vertical stability of high decay index plasma in the DIII-D tokamak. *Nuclear Fusion*, 30(11):2349–2366, 1990.
- [59] E.J. Strait, L.L. Lao, J.L. Luxon, E.E. Reis. Observation of poloidal current flow to the vacuum vessel wall during vertical instabilities in DIII-D tokamak. *Nuclear Fusion*, 31(3):527–534, 1991.
- [60] R. Yoshino, Y. Nakamura, Y. Neyatani. Avoidance of VDEs during plasma current quench in JT-60U. *Nuclear Fusion*, 36:295–307, 1996.
- [61] M. Matsukawa, K. Ushigusa, Y. Neyatani, R. Yoshino, H. Ninomiya. Estimation of the JT-60U vessel current by a magnetic fitting code. *Fusion Engineering and Design*, 23:341–349, 1993.
- [62] L.A. Artsimovich. Tokamak devices. *Nuclear Fusion*, 12:215–252, 1972.
- [63] P.H. Rebut, P.P. Lallia. JET results and the prospects for fusion. *Fusion Engineering and Design*, 11:1–21, 1989.
- [64] G. Pautasso. *private Mitteilung*. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München, 1996.
- [65] B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes, D.K. Lee. Mechanism for major disruptions in tokamaks. *Physical Review Letters*, 41(20):1386–1389, 1978.
- [66] G. Bateman. *MHD Instabilities*. The MIT Press, Cambridge, London, 1978.
- [67] W.M. Manheimer, C.N. Lashmore-Davies. *MHD and microinstabilities in confined plasma*. Adam Hilger, Bristol and New York, 1989.
- [68] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics 2nd Ed.* John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [69] H.R. Strauss. Nonlinear, three dimensional magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks. *The Physics of Fluids*, 19(1):134–140, 1976.

- [70] A. Bondeson. Simulation of tokamak disruptions including self-consistent temperature evolution. *Nuclear Fusion*, 26(7):929–940, 1986.
- [71] A. Bondeson, R.D. Parker, M. Hugon, P. Smeulders. MHD modelling of density limit disruptions in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 31(9):1695–1716, 1991.
- [72] A. Bondeson, M. Persson. Stabilization by resistive walls and q-limit disruptions in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 28(10):1887–1891, 1988.
- [73] G. Waidmann. Operational limits in tokamak machines. *Fusion Technology*, 25(2, Teil 2):45–50, 1994.
- [74] A.D. Turnbull, F. Troyon, F. Yasseen, S. Nicli, W.A. Cooper, A. Roy, O. Sauter. Low-n ideal MHD stability of tokamaks - current and beta limits. *Nuclear Fusion*, 29(4):629–639, 1989.
- [75] E. D. Fredrickson, J. Manickam, K. M. McGuire, D. Monticello, Y. Nagayama, W. Park, G. Taylor, J. F. Drake, R. G. Kleva. The high density and high β_{pol} disruption mechanism on TFTR. In *19th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Innsbruck, Austria. European Physical Society, 1993, Seite 541–544.
- [76] F.C. Schüller. Disruptions in tokamaks. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 37:A135–A162, 1995.
- [77] K. Lackner, A.B. McMahon. Numerical study of displacement instability in elongated tokamak. *Nuclear Fusion*, 14:575–577, 1974.
- [78] E. Rebhan. Stability boundaries of tokamaks with respect to rigid displacements. *Nuclear Fusion*, 15:277–285, 1975.
- [79] F.A. Haas. Stability of a high- β tokamak to uniform vertical displacements. *Nuclear Fusion*, 15:407–413, 1975.
- [80] F.F. Chen. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1. Band. Plenum Press, New York and London, 1984.
- [81] F. Cap. *Lehrbuch der Plasmaphysik und der Magnetohydrodynamik*. Springer Verlag, Wien, New York, 1994.
- [82] J. Birzvalks. *Streifzug durch die Magnetohydrodynamik*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1985.
- [83] G. Lehner. *Feldtheorie*. Springer-Lehrbuch, Berlin, 1990.
- [84] A. Simon. Diffusion of like particles across a magnetic field. *Physical Review Letters*, 100:1557–1559, 1955.
- [85] C. Longmire, M. Rosenbluth. Diffusion of charged particles across a magnetic field. *Physical Review Letters*, 103:507–510, 1956.
- [86] H.P. Furth, S. Yoshikawa. Adiabatic compression of tokamak discharges. *Physics of Fluids*, 13:2593–2596, 1970.

- [87] I.H. Hutchinson. Simplified models of axisymmetric magnetohydrodynamic instabilities. *Nuclear Fusion*, 29(12):2107–2113, 1989.
- [88] H. Zohm. *private Mitteilung*. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München, 1996.
- [89] A. Portone. *private Mitteilung*. ITER Naka, Japan, 1996.
- [90] V.D. Shafranov. Determination of the parameters β_I and l_i in a tokamak for arbitrary shape of plasma pinch cross-section. *Plasma Physics*, 13:757–762, 1971.
- [91] J. Blum. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics - With Application to Tokamaks -*. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.
- [92] K. Nishikawa, M. Wakatani. *Plasma Physics*. Springer Verlag, Berlin, New York, London, 1994.
- [93] G. Pautasso, A. Herrmann, K. Lackner, ASDEX-Upgrade Team. Energy balance during disruption associated with vertical displacement events. *Nuclear Fusion*, 34:455–458, 1994.
- [94] TFR Group. Study of post-disruptive plasma in TFR Tokamak. *Nuclear Fusion*, 25:919–930, 1985.
- [95] K. Yamazaki, G. L. Schmidt. Dissipation of magnetic energy during disruptive current termination. *Nuclear Fusion*, 24(4):467–472, 1984.
- [96] A. S. Geller, S. H. Lee, L. G. Leal. The creeping motion of a spherical particle normal to a deformable interface. *Journal of Fluid Mechanics*, 169:27–69, 1986.
- [97] R. Bonnerot, P. Jamet. Numerical Computation of the Free Boundary for the Two-Dimensional Stefan Problem by Space-Time Finite Elements. *Journal of Computational Physics*, 25:163–181, 1977.
- [98] D. R. Lynch. Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems. *Journal of Computational Physics*, 47:387–411, 1982.
- [99] G. Ryskin, L. G. Leal. Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. *Journal of Fluid Mechanics*, 148:1–17, 1984.
- [100] I. S. Kang, L. G. Leal. Numerical solution of axisymmetric, unsteady free-boundary problems at finite Reynolds number. *Physics of Fluids*, 30:1929–1940, 1987.
- [101] M. J. Fritts, J. B. Boris. The Lagrangian Solution of Transient Problems in Hydrodynamics using a Triangular Mesh. *Journal of Computational Physics*, 31:173–215, 1979.
- [102] F. H. Harlow, J. F. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [103] C. W. Hirt, B. D. Nichols. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.
- [104] W. F. Noh. *Methods in Computational Physics*, 3:117–179, 1964.

- [105] N. Ashgriz, J.Y. Poo. FLAIR: Flux Line-segment model for Advection and Interface Reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 93:449–468, 1991.
- [106] D.L. Youngs. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. In *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Reading, U.K. 1982, Seite 273–285.
- [107] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1993.
- [108] W. Greiner. *Theoretische Physik, Bnd. 3: Klassische Elektrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1957.
- [109] H. B. Dwight. *Tables of integrals and other mathematical data, Fourth Ed.* The Macmillan Company, New York, 1957.
- [110] L. Spitzer, R. Härm. Transport phenomena in a completely ionized gas. *Physical Review Letters*, 89:997–981, 1953.
- [111] S.P. Hirshman, R.J. Hawryluk, B. Bridge. Neoclassical conductivity of a tokamak plasma. *Nuclear Fusion*, 17(3):611–614, 1977.
- [112] L. Spitzer Jr. *Physics of Fully Ionized Gases*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 2 Auflage, 1965.
- [113] J.Q. Dong, E. Montalvo, R. Carrera, R. Khayrutinov. Study of plasma disruption during the ignited phase in a single-turn tokamak fusion experiment. *Fusion Technology*, 19:1290–1295, 1991.
- [114] K. Lackner. *private Mitteilung*. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München, 1996.
- [115] R.W. Hockney, J.W. Eastwood. *Computer simulation using particles*. McGraw-Hill, New York, 1981.
- [116] Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., Providence R.I. USA. *ABAQUS - A General Purpose Linear and Nonlinear Finite Element Code, Rev. 5.4*, 1994.
- [117] ADINA R & D Inc. *ADINA User Manual Version 6.0*, 1996.
- [118] D. Schneider. Manual für die Programme plotxy, plotplas, ravfmb, rdata, fcopy. nicht veröffentlicht, 1996.
- [119] Femsys Limited, IKOSS GmbH. *FemGen/FemView Version 2.3, Release 11, User Manual, A General Finite Element Pre- and Postprocessor*, 1996.
- [120] J.S. van Welij. Calculation of eddy currents in terms of h on hexahedra. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6):2239–2241, 1989.
- [121] R. Klingelhöfer. unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1992.
- [122] Y. Neyatani, R. Yoshino, T. Ando. Effects of halo current and its toroidal asymmetry during disruptions in JT-60U. *Fusion Technology*, 28:1634–1643, 1995.

- [123] O. Gruber, G. Pautasso, U. Seidel, K. Lackner, F. Mast, M. Schittenhelm, B. Streibl, W. Sutrop, M. Ulrich. Disruptions in vertically elongated ASDEX-Upgrade plasmas. In *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1994*, 1. Band, Sevilla. IAEA, 1994, Seite 675–684.
- [124] C. Günther. Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung. KfK 4697, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1992.
- [125] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1986.
- [126] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1992.
- [127] M. Ferrari, L. Pellegrino, G. Simbolotti. Electromagnetic forces on ITER first wall and blanket. In *Workshop on Electromagnetic Forces and Related Effects on Blankets and other Structures Surrounding the Plasma Torus*, Karlsruhe, 20. - 21. Okt. 1992, Seite 174–223.
- [128] P.H. Rebut (for the ITER Joint Central Team). ITER: the first experimental fusion reactor. *Fusion Engineering and Design*, 30:85–118, 1995.
- [129] L.V. Boccaccini. *private Mitteilung*. Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Forschungszentrum Karlsruhe, 1996.
- [130] A. Y. Aydemir, R. D. Hazeltine, M. Kotschenreuther, J. D. Meiss, P. J. Morrison, D. W. Ross, F. L. Waelbroeck, J. C. Wiley, R. E. Denton, J. F. Drake, R. G. Kleva. Non-linear MHD studies in toroidal geometry - disruptive phenomena in tokamak plasmas. In *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1988*, 2. Band, Nizza, Frankreich, 12.-19. Okt. 1988. IAEA, 1988, Seite 131–144.
- [131] Y.A. Sokolov, G.E. Shatalov. On the conceptual design of DEMO reactor. *Plasma Devices and Operations*, 3:23–20, 1994.
- [132] M. Dalle Donne et al. European DEMO BOT solid breeder blanket. KfK 5429, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1994.
- [133] T. Jordan, D. Schneider. Effects of an electrically conducting first wall on the blankets loading during a tokamak plasma disruption. *Fusion Engineering and Design*, 31:313–321, 1996.
- [134] T. Jordan, D. Schneider. Minimizing the first wall and blanket loading caused by plasma disruptions by tuning first wall's resistivity. In *Proceedings of the 19th Symposium on Fusion Technology, Fusion Technology*, Lissabon, Portugal, 16. - 20. Sept. 1996. wird veröffentlicht.
- [135] M. Küchle. *Material Data Base for the NET Test Blanket Design Studies*. Kernforschungszentrum Karlsruhe, Test Blanket Advisory Group, 1990.
- [136] M. Dalle Donne. *private Mitteilung*. Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Forschungszentrum Karlsruhe, 1996.
- [137] A. H. Boozer. Ohm's law for mean magnetic fields. *Journal of Plasma Physics*, 35(1):133–139, 1986.

- [138] A.J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 26:745–762, 1967.
- [139] M. DiStasio, W.C. McHarris. Electrostatic problems? Relax! *American Journal of Physics*, 45(2):440–444, 1979.
- [140] C.-Y. Chow. *An Introduction to Computational Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1979.

Anhang A

Nachrechnung einer einfachen analytischen Lösung

Zur Überprüfung der Implementierung der Wechselinduktivität in CARIDDI-P wird im folgenden ein einfaches Rechenbeispiel vorgestellt. Für dieses Beispiel ist eine analytische Lösung herleitbar, die einen Vergleich mit den numerischen Ergebnissen erlaubt. Das Beispiel besteht aus zwei konzentrischen Leiterschleifen, wobei die innere Schleife das Plasma und die äußere die toroidal leitende Struktur repräsentiert. Die das Problem beschreibende Differentialgleichung für den Stromverlauf in den beiden Schleifen lautet

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{dI(t)}{dt} \right\} + \mathbf{R} \{ I(t) \} = \{ 0 \} \quad (\text{A.1})$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Die analytische Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{C_1}{R_1 - L_{11}\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{C_2}{L_{12}\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2 t} \\ I_2(t) &= \frac{C_1}{L_{12}\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{C_2}{R_2 - L_{22}\lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2 t} \end{aligned}$$

mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(L_{11}R_2 + L_{22}R_1) - \sqrt{(L_{11}R_2 - L_{22}R_1)^2 + 4L_{12}^2R_1R_2}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)} \\ \lambda_2 &= \frac{(L_{11}R_2 + L_{22}R_1) + \sqrt{(L_{11}R_2 - L_{22}R_1)^2 + 4L_{12}^2R_1R_2}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}. \end{aligned}$$

Wählt man als Anfangsbedingungen

$$I_1(0) = I_0; \quad I_2(0) = 0 \quad (\text{A.3})$$

lassen sich die Konstanten C_1 und C_2 zu

$$C_1 = \frac{I_0}{\left[\frac{-L_{12}\lambda_1}{(R_1 - L_{11}\lambda_1)(R_2 - L_{22}\lambda_2)} + \frac{1}{L_{12}\lambda_2} \right]} \cdot \frac{-L_{12}\lambda_1}{R_2 - L_{22}\lambda_2}$$

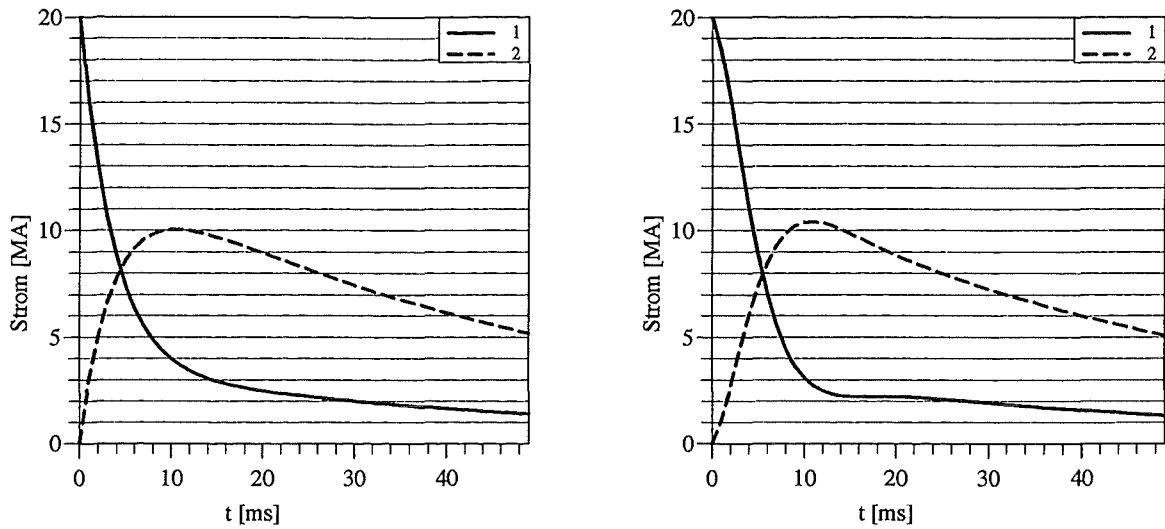


Abbildung A.1: Stromverlauf im „Plasma“ (1) und in der „Struktur“ (2); Analytische Lösung (links), CARIDDI-P (rechts)

$$C_2 = \frac{I_0}{\left[\frac{-L_{12}\lambda_1}{(R_1 - L_{11}\lambda_1)(R_2 - L_{22}\lambda_2)} + \frac{1}{L_{12}\lambda_2} \right]}$$

bestimmen. Für das hier vorgestellte Beispiel wurden die folgenden Geometriedaten verwendet: Plasmaradius $R_m = 9.2m$, mittlerer Radius der Struktur $R_s = 10m$, Querschnittsfläche des Plasmas $A_p = 1m^2$ und Fläche des quadratischen Querschnitts der Struktur $A_s = 0.64m^2$. Die Daten sind so gewählt, daß die induktive Kopplung zwischen Plasma und Struktur besonders groß ist. Somit läßt sich dieser Wechselwirkungseffekt besser überprüfen. Aus den Geometriegrößen ergeben sich nach den Gleichungen (4.25) und (4.29) die folgenden Werte für die Induktivitäten:

$$L_{11} = 3.611 \cdot 10^{-5} H; \quad L_{22} = 4.309 \cdot 10^{-5} H; \quad L_{12} = L_{21} = 3.163 \cdot 10^{-5} H.$$

Der spezifische Widerstand des Plasmas wurde entsprechend einer Elektronentemperatur von $5eV$ gesetzt. Für die Struktur wurde $\eta_s = 1 \cdot 10^{-5} \Omega m$ gewählt, so daß sich schließlich folgende Widerstandswerte ergeben:

$$R_{11} = 2.933 \cdot 10^{-3} \Omega m; \quad R_{22} = 9.817 \cdot 10^{-4} \Omega m.$$

Die mit diesen Werten berechneten Zeitverläufe für den „Plasmastrom“ und den toroidalen Strom in der „Struktur“ sind in Abbildung A.1 dargestellt. Man erkennt, daß auch bei dieser starken induktiven Kopplung von „Plasma“ und „Struktur“ die analytischen Ergebnisse (links) sehr gut mit denen von CARIDDI-P übereinstimmen. Daraus und mit weiteren, hier nicht gezeigten Geometrievariationen läßt sich schließen, daß die induktive Kopplung physikalisch richtig in CARIDDI-P implementiert wurde.

Anhang B

Die Methode FLAIR

In Kapitel 4.2.1 wurde die Methode FLAIR vorgestellt. Dabei wurde exemplarisch nur der Fall 9(a) behandelt. Die Gleichungen zur Bestimmung der Randsteigungen sowie die Berechnung des Fluidflusses der verbleibenden Fälle werden in diesem Kapitel gezeigt.

B.1 Bestimmung des Fluidflusses für die Fälle 9(b)-(d)

Die Fluidflüsse von einer Zelle in ihre Nachbarzelle für die Fälle 9(b)-(d) können analog zu dem in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Fall 9(a) berechnet werden. Lediglich die Integrationsgrenzen von Gleichung (4.2) müssen entsprechend angepaßt werden. Damit ergeben sich für die Fälle 9(b)-(d) die folgenden Beziehungen für den Fluidfluß über eine Zellwand:

Unterfall (b)

$$\begin{aligned}0 &= ax_b^* + b^* \\ f_a &= \frac{a}{2} + b^* \\ f_b &= \frac{a}{2}(x_b^{*2} - 1) + b^*(x_b^* - 1)\end{aligned}$$

Hierin ist $x_b^* = x_b/h$ und x_b die Koordinate des Durchstoßpunktes von der Oberflächenlinie durch den Boden der Zelle. Mit diesen Gleichungen nach a und b^* aufgelöst erhält man:

$$\begin{aligned}a &= 2(f_a - b^*) \\ b^* &= 2 \left[(f_a + f_b) - \sqrt{f_a f_b + f_b^2} \right].\end{aligned}$$

Dieses ergibt für den Austausch zwischen den Zellen

$$\Delta f^+ = s \left(a + b^* - \frac{as}{2} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\Delta f^- = \begin{cases} f_b & \text{für } s+1 \geq x_b^* \\ s \left(a + b^* + \frac{as}{2} \right) & \text{für } s+1 < x_b^* \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Unterfall (c)

$$a = 2 \left[f_a + f_b - 3 + 2\sqrt{(1-f_a)(2-f_a-f_b)} \right]$$

$$b^* = 3 \left[3 - 2f_a - \frac{2}{3}f_b - 2\sqrt{(1-f_a)(2-f_a-f_b)} \right]$$

und

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s(a + b^* - \frac{as}{2}) & \text{für } s \leq 1 - x_a^* \\ s + f_a - 1 & \text{für } s > 1 - x_a^* \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\Delta f^- = s(a + b^* + \frac{as}{2}), \quad (\text{B.4})$$

wobei $x_a^* = x_a/h$ und x_a der Durchstoßpunkt am oberen Rand der Zelle ist.

Unterfall (d)

$$a = \frac{1}{x_a^* - x_b^*}$$

$$b^* = \frac{x_b^*}{x_b^* - x_a^*}$$

wobei für die normierten Durchstoßpunkte x_a^* und x_b^* folgt:

$$x_a^* = 1 - \frac{2(1-f_a)l}{l}$$

$$x_b^* = 1 + \frac{2f_b}{1-l}$$

$$l = \left(\sqrt{\frac{f_b}{1-f_a}} + 1 \right)^{-1}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s(a + b^* - \frac{as}{2}) & \text{für } s \leq 1 - x_a^* \\ s + f_a - 1 & \text{für } s > 1 - x_a^* \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta f^- = \begin{cases} f_b & \text{für } s + 1 \geq x_b^* \\ s(a + b^* + \frac{as}{2}) & \text{für } s + 1 < x_b^* \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

B.2 Typerkennung für Fall 9(b)-(d)

Zur Identifikation des Typs von zwei Nachbarzellen können analog zum Fall 9(a) in Kapitel 4.2.1 auch die Gleichungen für die Fälle 9(b)-(d) hergeleitet werden. Die entsprechenden Lösungen sind im folgenden dargestellt:

Unterfall (b)

$$\frac{3f_b}{f_a + f_b - \sqrt{f_a f_b + f_b^2}} \leq \frac{f_a}{0} \quad (\text{B.7})$$

Unterfall (c)

$$\frac{f_a + f_b + \sqrt{(1-f_a)(2-f_a-f_b)}}{f_a + \frac{f_b}{3i} + \sqrt{(1-f_a)(2-f_a-f_b)}} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{B.8})$$

$$\leq \frac{4}{3}$$

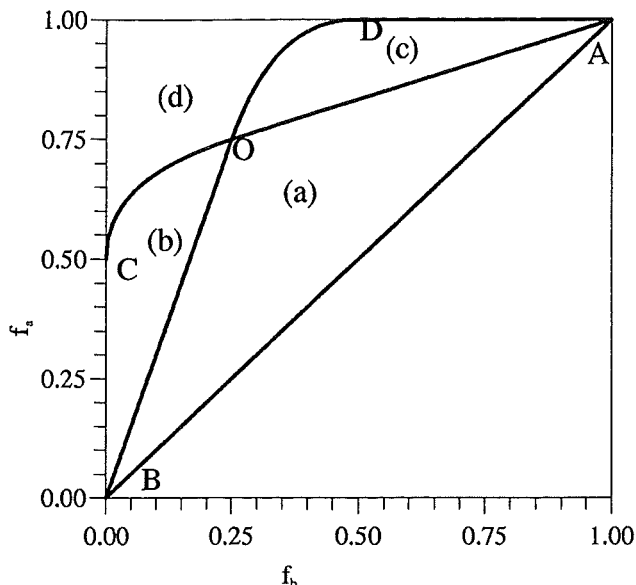


Abbildung B.1: Typerkennungsdiagramm für den Fall 9

Unterfall (d)

$$\begin{aligned} f_a - \sqrt{f_b(1-f_a)} &\geq 0.5 \\ f_b \left[1 + \sqrt{\frac{(1-f_a)}{f_b}} \right] &\geq 0.5 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Diese Zusammenhänge lassen sich in einem Typerkennungsdiagramm veranschaulichen. Abbildung B.1 zeigt ein solches Diagramm für den Fall 9, wobei die verschiedenen Gebiete durch folgende Funktionen voneinander getrennt sind:

$$\begin{aligned} \text{OA:} & \quad 3f_a - f_b = 2 \\ \text{OB:} & \quad f_a - 3f_b = 0 \\ \text{OC:} & \quad f_a - \sqrt{f_b(1-f_a)} = 0.5 \\ \text{OD:} & \quad f_b + \sqrt{f_b(1-f_a)} = 0.5 \end{aligned}$$

Damit lassen sich alle Unterfälle des Falls 9 identifizieren und die Änderung der Füllgrade in den betreffenden Nachbarzellen berechnen. Für die übrigen acht Fälle muß noch der Fluidaustausch bestimmt werden.

B.3 Die Fälle 1 bis 8

Bei den Fällen 3, 4, 5 und 6 fällt die Typerkennung und die anschließende Berechnung des Fluidflusses leicht, denn die Zellen sind entweder voll oder leer, und die Steigung an der Wand zwischen beiden Zellen ist unendlich groß. Deshalb berechnet sich der Fluß durch die Zellwand mit

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s & \text{für } f_a = 1, \quad s > 0 \\ s & \text{für } f_b = 1, \quad s < 0 \\ 0 & \text{für } f_a = f_b = 0 \end{cases} .$$

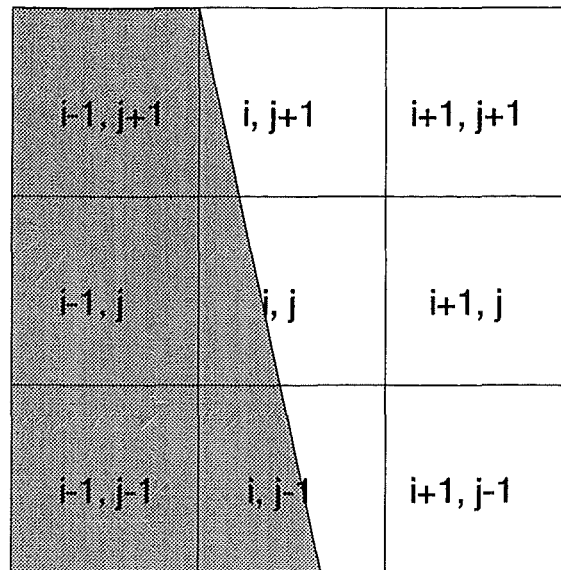


Abbildung B.2: Oberflächendarstellung für Fall 1; Zelle (i, j) und ihre Nachbarzellen

Schwieriger gestaltet sich die Flußberechnung bei den Fällen 1, 2, 7 und 8, denn hier findet man in der horizontalen Richtung keine benachbarte Zelle, mit deren Hilfe man wie in Fall 9 die Steigung ermitteln könnte. Somit muß man auf die Vertikale ausweichen. Abbildung B.2 zeigt eine 3×3 Zellmatrix, in der das Zellpaar (i, j) und $(i + 1, j)$ den Fall 1 von Abbildung 4.4 repräsentiert. Die Steigung β durch die Zelle (i, j) kann man nun durch Kehrwertbildung der Mittelwerte der Steigungen einerseits zwischen den Zellen $(i, j + 1)$ und (i, j) und andererseits zwischen den Zellen (i, j) und $(i, j - 1)$ berechnen. Dazu wird die selbe Methode wie bei Fall 9 verwendet. Es gilt also

$$a = \beta^{-1}$$

Ist die Steigung berechnet, so wird das folgende Kriterium zur Identifizierung des Typs einer einzelnen, teilweise gefüllten Zelle benutzt. Wie man in Abbildung B.3 sieht, kann man vier verschiedene Typen von einzelnen Zellen unterscheiden. Ist die Steigung β der Zelle bekannt, so kann für eine Kombination von f_a und β eine der vier in Abbildung B.3 gezeigten Typen identifiziert werden; Abbildung B.4 zeigt das Typerkennungsdiagramm für eine solche Randzelle. Die Funktionen, die die einzelnen Regionen trennen, lauten wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \text{OA:} & f_a = 1 - \frac{1}{2\beta} \\ \text{OB:} & f_a = \frac{1}{2\beta} \\ \text{OC:} & f_a = \frac{\beta}{2} \\ \text{OD:} & f_a = 1 - \frac{\beta}{2} \end{array}$$

An dieser Stelle muß angemerkt werden, daß die Ermittlung der Steigung β mit der von Ashgriz und Poo [105] beschriebenen Methode nicht ausreichend ist. Wie man in Abbildung B.5 sieht, kann β bei einem solchen Oberflächenverlauf nicht wie oben angegeben berechnet werden. Bei Ermittlung der Steigung zwischen den Zellen $(i, j + 1)$ und (i, j) ergibt sich ein unendlich großes a und somit

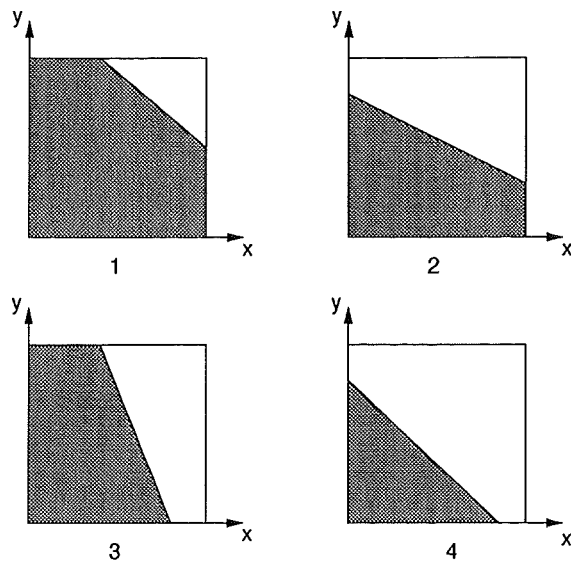


Abbildung B.3: Mögliche Oberflächenverläufe durch eine einzelne, teilweise gefüllte Zelle

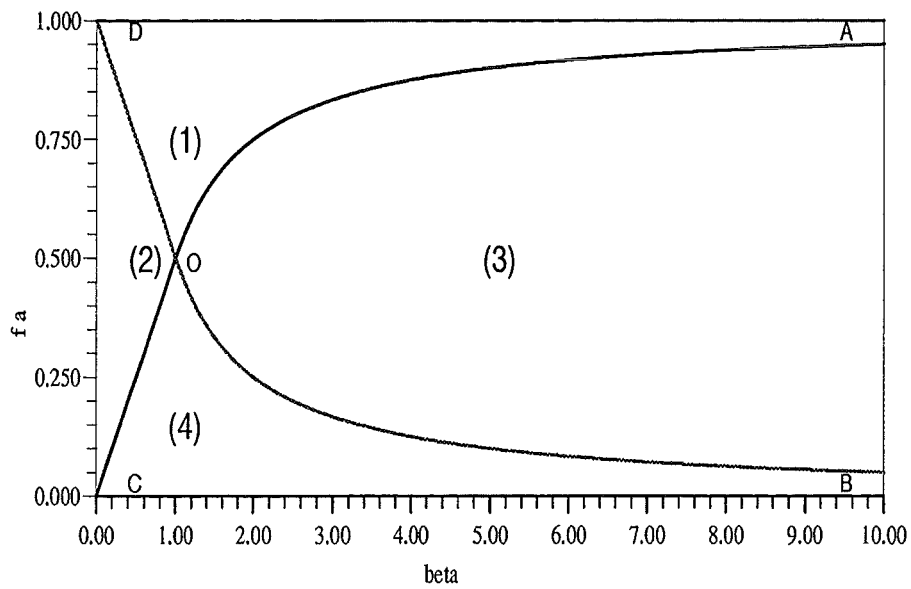


Abbildung B.4: Typerkennungsdiagramm für eine einzelne Zelle

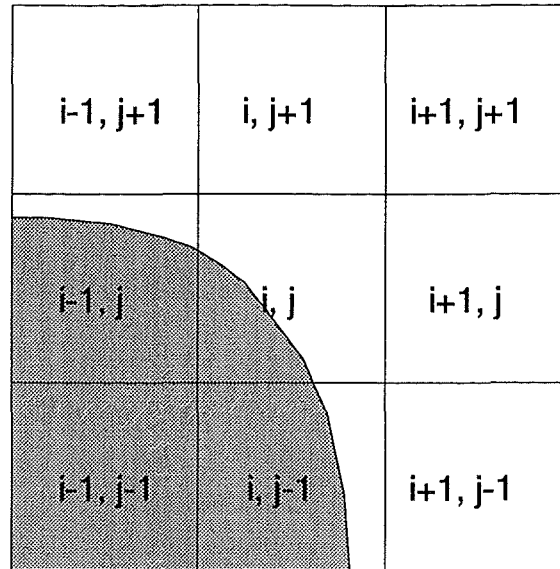


Abbildung B.5: Oberflächenverlauf durch eine Eckzelle (i, j)

wird $\beta = 0$. Darum müssen für solche „Eckfälle“ die Steigungen zwischen den Zellen ermittelt werden, durch die die Oberflächenlinie tatsächlich hindurchführt. Das Zellpaar (i, j) und $(i + 1, j)$ in Abbildung B.5 stellt wiederum den Fall 1 dar, diesmal ermittelt man β jedoch aus dem Mittelwert der Steigung zwischen $(i - 1, j)$ und (i, j) einerseits und dem Kehrwert der Steigung zwischen (i, j) und $(i, j - 1)$ andererseits. Die Bestimmung des Typs aus Abbildung B.3 erfolgt dann wie oben angegeben.

Zur Berechnung des Fluidflusses bei den Zellpaaren der Fälle 1, 2, 7, 8 werden von Ashgriz und Poo [105] keine expliziten Formeln angegeben, sie werden daher im folgenden hergeleitet. Dazu wird wie in den Gleichungen (4.3) bis (4.6) bzw. (B.1) bis (B.6) für die Steigung der Oberflächenlinie der Buchstabe a verwendet. Für den **Fall 1** und den **Typ (1)** aus Abbildung B.3 ergibt sich aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) bei negativer Steigung a :

$$f_a h^2 = x_a h + \frac{1}{2} a (h^2 - x_a^2) + b (h - x_a)$$

nach b^* aufgelöst

$$b^* = \frac{b}{h} = \frac{f_a - x_a^*}{1 - x_a^*} - \frac{1}{2} a (1 + x_a^*)$$

Daraus folgt mit Gleichung (4.1) für den normierten Durchstoßpunkt der Oberflächenlinie durch die obere Zellwand x_a^* :

$$y(x_a^*) = a x_a^* + b^* = 1$$

$$x_a^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{a} (f_a - 1)}$$

Da nur bei positivem u ein Fluidfluß zwischen beiden Zellen erfolgt, ergibt sich für Δf^+ abhängig von s :

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s(1 - \frac{s}{2} a + a - a x_a^*) & \text{für } s \leq (1 - x_a^*) \\ s - \frac{a}{2} x_a^* (1 - x_a^*) & \text{für } s > (1 - x_a^*) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Für den **Typ (2)** ergibt sich

$$b^* = f_a - \frac{a}{2}$$

$$\Delta f^+ = s(a + b^* - \frac{as}{2}) \quad (\text{B.11})$$

und für **Typ (3)**:

$$\begin{aligned} x_a^* &= f + \frac{1}{2a} \\ x_b^* &= f - \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq 1 - x_b^* \\ -\frac{a}{2}(x_b^* - (1-s))^2 & \text{für } s \leq 1 - x_a^* \\ f_a + s - 1 & \text{für } s > 1 - x_a^* \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

mit x_a^* als normiertem Durchstoßpunkt durch die obere Zellwand und x_b^* als Schnittpunkt mit dem Zellboden.

Typ (4):

$$x_b^* = \sqrt{-\frac{2f_a}{a}}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq 1 - x_b^* \\ -\frac{a}{2}(x_b^* - (1-s))^2 & \text{für } s > 1 - x_b^* \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Fall 2 ist äquivalent zu Fall 1 bis auf den Unterschied, daß ein Fluidfluß nur bei negativem u stattfindet; somit berechnet man Δf^- mit den Formeln für Fall 1, wobei die Zellinhalte f_a und f_b vertauscht werden müssen.

Bei **Fall 8** ist Δf^- leicht aus s zu bestimmen; für den Fluß in positive u -Richtung ergibt sich

Typ (1):

$$x_a^* = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot (1 - f_a)}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s & \text{für } s \leq 1 - x_a^* \\ s - \frac{a}{2}(x_a^* - (1-s))^2 & \text{für } s > 1 - x_a^* \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Typ (2):

$$\Delta f^+ = s(f_a - \frac{a}{2} + \frac{as}{2}) \quad (\text{B.15})$$

Typ (3):

$$\begin{aligned}x_a^* &= 1 - f_a + \frac{1}{2a} \\x_b^* &= 1 - f_a - \frac{1}{2a}\end{aligned}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} s & \text{für } s \leq 1 - x_a^* \\ s - \frac{a}{2} (x_a^* - (1 - s))^2 & \text{für } s \leq 1 - x_b^* \\ f_a & \text{für } s \geq 1 - x_b^* \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Typ (4):

$$x_b^* = 1 - \sqrt{\frac{2f_a}{a}}$$

$$\Delta f^+ = \begin{cases} as \left(1 - \frac{s}{2} - x_b^*\right) & \text{für } s \leq 1 - x_b^* \\ f_a & \text{für } s > 1 - x_b^* \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Für **Fall 7** findet ein Austausch zwischen den Zellen nur bei negativem u statt, zur Berechnung von Δf^- verwendet man die Formeln von Fall 8 und vertauscht wieder f_a und f_b .

Anhang C

Lokale Lösung der Geschwindigkeiten und Kräfte

Alternativ zu dem im Kapitel 4.8.3 vorgestellten Starrkörperansatz kann für die Fluidodynamik auch ein Verfahren verwendet werden, das die lokalen Kräfte und Geschwindigkeiten im Plasma berechnet. Damit könnte sich das Plasma auch während der Vertikalbewegung und beim Wandkontakt verformen. Dieses Verfahren ist allerdings für die hier betrachtete Aufgabe, nämlich der Strukturanalyse während Plasmadisruptionen zu aufwendig. Die zu lösenden Impulsgleichungen (3.15) und (3.16) lauten

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(Rp)}{\partial R} &= F_R^* \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} &= F_z^*\end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden mit dem Druckkorrekturverfahren von Chorin [138] und die dabei anfallende Poisson-Gleichung für den thermodynamischen Druck p mit einem SOR^1 -Verfahren (vgl. DiStasio und McHarris [139]) gelöst. Um die unregelmäßigen Plasmaränder zu diskretisieren, wird ein „irregular star“ Verfahren (vgl. Chow [140]) eingesetzt.

C.1 Das Druckkorrekturverfahren von Chorin

Die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen für das deformierbare Plasma werden mit dem Druckkorrekturverfahren von Chorin [138] gelöst. Dazu wird zunächst eine Näherungslösung für das Geschwindigkeitsfeld unter Vernachlässigung des Druckterms gesucht. Mit einem Euler-Vorwärts-Differenzenverfahren werden die Impulsgleichungen diskretisiert:

$$\rho \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{F_R(u^n)}{V} \quad (\text{C.1})$$

$$\rho \frac{w^* - w^n}{\Delta t} = \frac{F_z(w^n)}{V} \quad (\text{C.2})$$

Die Korrekturgleichungen lauten:

$$\rho \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial R} - \frac{p^{n+1}}{R} \quad (\text{C.3})$$

¹Successive-Over-Relaxation

$$\rho \frac{w^{n+1} - w^*}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} \quad (\text{C.4})$$

Wendet man den Divergenzoperator in toroidalen Koordinaten auf die Gleichungen (C.3) und (C.4) an

$$\nabla = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot), \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

und addiert die differenzierten Gleichungen, erhält man unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung für den Zeitschritt $n + 1$ eine Poisson-Gleichung für den Plasmadruck zum Zeitschritt $n + 1$:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{u^*}{R} + \frac{\partial u^*}{\partial R} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right] \quad (\text{C.5})$$

mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Das Lösungsschema läßt sich nun folgendermaßen zusammenfassen:

1. Aus den Gleichungen (C.1) und (C.2) das geschätzte Geschwindigkeitsfeld \vec{v}^* berechnen
2. Damit die Poisson-Gleichung (C.5) lösen
3. Mit dem erhaltenen Druck p^{n+1} den Korrekturschritt (Gleichungen (C.3) und (C.4)) ausführen

C.2 Lösung der Poisson-Gleichung

Die Lösung der Poisson-Gleichung (C.5) kann mit Hilfe einer SOR-Methode erfolgen. Unvollständig gefüllte Randfelder können aber mit einer herkömmlichen Finite-Differenzen Diskretisierung nicht adäquat gewichtet werden. Mit der Einführung sogenannter „irregular stars“ können die Differenzen so gebildet werden, daß nicht der Wert im Mittelpunkt einer Zelle verwendet wird, sondern der durch eine Druckrandbedingung vorgegebene Randwert (vgl. Abbildung C.1). In Abbildung C.1 sind $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ die Längen der vier reduzierten Gitterweiten und p_1, p_2, p_3, p_4 die bekannten Werte für den Druck an den entsprechenden Stellen. Mit einer Taylor-Entwicklung ergibt sich für die Drücke

$$p_1 = p_{i,j} + \eta_1 \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right)_{i,j} + \frac{\eta_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} \right)_{i,j} + \mathcal{O}(\eta_1^3) \quad (\text{C.6})$$

$$p_3 = p_{i,j} - \eta_3 \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right)_{i,j} + \frac{\eta_3^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} \right)_{i,j} + \mathcal{O}(\eta_3^3) \quad (\text{C.7})$$

$$p_2 = p_{i,j} + \eta_2 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{i,j} + \frac{\eta_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r z y^2} \right)_{i,j} + \mathcal{O}(\eta_2^3) \quad (\text{C.8})$$

$$p_4 = p_{i,j} - \eta_4 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{i,j} + \frac{\eta_4^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)_{i,j} + \mathcal{O}(\eta_4^3). \quad (\text{C.9})$$

Im folgenden werden Terme der Ordnung η^3 oder höher vernachlässigt. Durch Elimination von $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} \right)_{i,j}$ mit den Gleichungen (C.6) und (C.7) und $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)_{i,j}$ mit den Gleichungen (C.8) und (C.9) und mit der Poisson-Gleichung (C.5) in der Form

$$\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -Res \quad (\text{C.10})$$

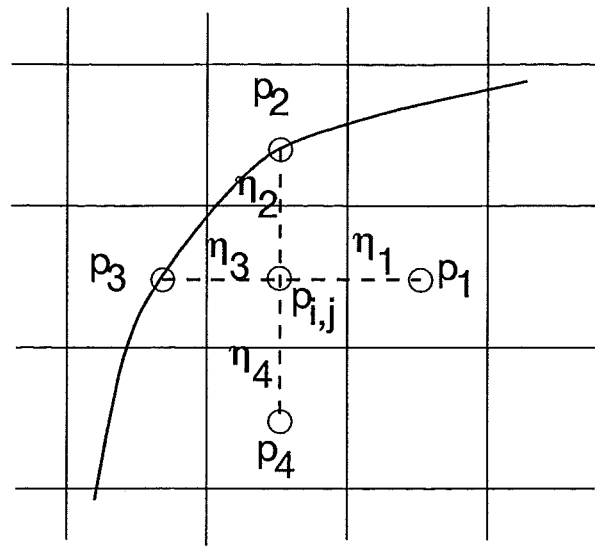


Abbildung C.1: „Irregular star“ bei einer gekrümmten Oberfläche

mit

$$-Res = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial p_{i,j}}{\partial R} + \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{u^*}{R} + \frac{\partial u^*}{\partial R} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right]$$

erhält man unter Verwendung der SOR-Methode eine Gleichung für den Druck p zum Zeitpunkt $n+1$.

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \omega \cdot \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4}{2(\eta_2 \eta_4 + \eta_1 \eta_3)} \left[\frac{\eta_3 p_1^n + \eta_1 p_3^{n+1}}{\eta_1 \eta_3 \left(\frac{\eta_1 + \eta_3}{2} \right)} + \frac{\eta_4 p_2^n + \eta_2 p_4^{n+1}}{\eta_2 \eta_4 \left(\frac{\eta_2 + \eta_4}{2} \right)} + Res_{i,j}^n \right]. \quad (C.11)$$

Hierin ist ω der sogenannte Relaxationsparameter, mit dem die Konvergenz bzw. die Stabilität der Lösung gesteuert wird. Die Längen der reduzierten Gitterweiten η_1 bis η_4 lassen sich einzeln berechnen: Eine einfache Formulierung anhand des Füllgrads der Zellen ergibt:

$$\eta_1 = h \frac{f_{i,j} + f_{i+1,j}}{2} \quad (C.12)$$

$$\eta_2 = h \frac{f_{i,j} + f_{i,j+1}}{2} \quad (C.13)$$

$$\eta_3 = h \frac{f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2} \quad (C.14)$$

$$\eta_4 = h \frac{f_{i,j} + f_{i,j-1}}{2} \quad (C.15)$$

Eine genauere Formulierung η_i kann direkt aus den Achsenabschnitten und Steigungen der Randelemente (vgl. Kapitel 4.2.1) oder aber aus einer Formulierung analog derjenigen in Kapitel 5.2.1 gefunden werden. Die Gradienten der Geschwindigkeiten am Rand können analog zum Druck mittels reduzierten Gitterweiten diskretisiert werden.

