

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5810

**Analyse von
Fluid-Struktur-Systemen
unter Verwendung eines
dreieckigen Boundary
Elements mit linearem
Ansatz und vollständiger
analytischer Lösung**

A. Hopf

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

August 1996



FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5810

**Analyse von Fluid-Struktur-Systemen
unter Verwendung eines
dreieckigen Boundary Elements mit linearem Ansatz
und vollständiger analytischer Lösung**

Anselm Hopf

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1996**

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Anselm Hopf:

Analyse von Fluid-Struktur-Systemen unter Verwendung eines dreieckigen Boundary Elements mit linearem Ansatz und vollständiger analytischer Lösung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Analyse von Fluid-Struktur-Problemen, die u.a. bei Störfallanalysen in der Reaktortechnik auftreten. Auslösende Ereignisse sind beispielsweise stoßartige Kräfte oder plötzlich versagende Strukturen. Dabei wird die Flüssigkeit sehr stark beschleunigt. Je nach den Gegebenheiten treten an den Fluidrändern erhebliche dynamische Druckbelastungen auf, die kritische Strukturverformungen verursachen können.

Zur Berechnung dieser fluid-strukturdynamischen Vorgänge wird im Fluidteil die Boundary-Element-Methode (BEM) eingesetzt. Die Struktur wird mit finiten Elementen (FEM) modelliert. Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Kopplungsverfahren basiert auf dem "added-mass"-Konzept und der klassischen Modalanalyse.

Für die Randintegralformulierung wurde Ende der siebziger Jahre der 3D-Code SING entwickelt, bei dem Rechteckpanels mit konstanter Dipol-Verteilung verwendet werden. Für eine bessere Beschreibung beliebiger Geometrien sollen kontinuierliche Dreieckselemente mit linearen Ansatzfunktionen eingesetzt werden. Um hypersinguläre Integrale an Ecken und Kanten zu vermeiden, wird statt der bisher verwendeten indirekten Methode eine direkte BE-Formulierung eingeführt.

Das hierfür entwickelte dreieckige Boundary Element mit linearen Ansatzfunktionen ist ein Basisbaustein des Kopplungsverfahrens und daher auch ein wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Es war möglich, die in den Element-Einflußkoeffizienten auftretenden Integrale mit regulären und singulären Integranden vollständig analytisch zu lösen. Der Lösungsweg der analytischen Integrationen für das lineare Dreieckselement ist ausführlich dokumentiert. Die resultierenden Lösungsfunktionen konnten kompakt und übersichtlich formuliert werden, was auch zu einer effektiven Implementierung beigetragen hat. Insbesondere wurden die Integrallösungen ausführlich getestet und sowohl analytisch als auch numerisch überprüft. Durch die Wahl der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Elementansätze konnte über die redundante Beziehung $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ ein zweiter Integrationsweg zur Überprüfung der analytischen Lösung durchlaufen werden. Weiterhin ist das gesamte Quell-Code-Listing in ANSI FORTRAN 77 verfügbar. Damit steht auch die analytische Elementlösung des linearen Dreieckselements als Werkzeug für die Überprüfung numerischer Integrationsalgorithmen zur Verfügung.

Das vorgestellte Dreieckselement wurde in das BE-Programm SING eingebaut. Anhand von verschiedenen Beispielrechnungen wird sowohl die Lösung mehrerer Dreieckselemente im Verbund überprüft als auch die praktische Einsatzfähigkeit des Verfahrens bei geometrisch komplexen dreidimensionalen Problemen demonstriert.

Abstract

Anselm Hopf:

Analysis of fluid-structure interaction problems using a triangular boundary element with linear shape functions and a complete analytical solution

The topic of this thesis is the analysis of fluid-structure interaction problems occurring e.g. in safety investigations for nuclear plants. Initiating events are impulsive loads or postulated failures of structures causing strong accelerations of the fluid. As a consequence, high transient pressures occurring at the fluid boundaries may lead to critical deformations of the structures.

For such fluid-structure interaction problems, the boundary element method (BEM) is used to describe the fluid dynamics while finite elements (FEM) have been applied to model the structure. The coupling procedure proposed in this report is based on the "added mass" concept and the classical modal analysis.

In the Seventies the BE problem was solved by the new developed three-dimensional code SING using rectangular boundary element with uniform dipole distributions. For a better representation of complex geometries continuous triangular elements with linear shape functions should now be used. To avoid hypersingular integrals in corners and on edges the direct BE method was introduced instead of the former used indirect method.

For the direct BEM a triangular boundary element with linear shape functions was developed. The element is a basic component of the coupling procedure and therefore an important topic of this thesis. It was possible to carry out the integrations of the influence coefficients with regular and singular integrands analytically. The solution scheme of the analytical integrations for the linear triangular element is documented in detail. The final solution functions could be formulated in a compact and clear way also resulting in an effective implementation. Especially the solution was checked in detail with analytical and numerical tools. With the usage of the homogeneous triangular coordinates ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 as shape functions, a second integration scheme via the redundant equation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ could be applied to check the analytical solution. Furthermore the complete source listing in ANSI FORTRAN 77 is available. With this program the analytical solution of the linear triangular element can be used as a good tool to verify numerical integration algorithms.

The triangular element presented in this report was implemented in the BE code SING. Different test examples are used to validate the solution of several triangular elements in a cluster. Also the usability of the method will be demonstrated in complex three-dimensional applications.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
1 Einleitung	3
1.1 Fluid-Struktur-Systeme	3
1.2 Lösung des Fluidteils mit der direkten BEM	5
1.3 Fluid-Struktur-Kopplung (BEM/FEM)	10
1.4 Umfang der vorliegenden Arbeit	12
2 Elemententwicklung – Theorie	13
2.1 Geometrische Beschreibung des Dreieckselements TRIA3	13
2.2 Ansatz für die Potential- und Normalgradientenverteilung im TRIA3-Element . .	17
2.3 Analytische Integration der Element-Einflußkoeffizienten	20
2.3.1 Fall a) Aufpunkt liegt in einem Elementknotenpunkt	23
2.3.2 Fall b) Aufpunkt liegt innerhalb der Elementebene	28
2.3.3 Fall c) Aufpunkt liegt außerhalb der Elementebene	36
3 Implementierung des Dreieckselements TRIA3	49
3.1 Elementkonzept und Algorithmus	49
3.2 Numerische Analyse der Integrationsformeln	55
3.2.1 Zahlenarithmetik in Computern	55
3.2.2 Numerik bei der Akkumulation der 3 Teilintegrale	61
3.2.3 Numerik bei der Berechnung der Integrationsformeln	63
4 Untersuchung der TRIA3-Elementlösung	69
4.1 Linearer und konstanter Anteil der Elementlösung	69
4.2 Diskussion der Lösungsfunktionen	75
4.2.1 Funktion $h\Phi$ der Elementlösung	75
4.2.2 Funktion gq der Elementlösung	83

5	Element-Tests	89
5.1	Beispiel 1 (Dreieck / Aufpunkte senkrecht über dem Schwerpunkt)	90
5.2	Beispiel 2 (Dreieck / Aufpunkte senkrecht über einer Elementecke)	92
5.3	Beispiel 3 (Dreieck / Aufpunkte längs einer Winkelhalbierenden)	93
5.4	Beispiel 4 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über dem Schwerpunkt)	95
5.5	Beispiel 5 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über einer Vierecksecke)	97
5.6	Beispiel 6 (Viereck / Aufpunkte längs einer Diagonalen)	99
6	Anwendungen	101
6.1	Wärmeleitungsproblem in einem Quader	102
6.2	Blowdown-Belastung der Steuerstabführungsrohre in einem Reaktordruckbehälter	104
A	Ebene Trigonometrie	109
A.1	Zur Geometrie des Dreiecks	109
A.2	Transformation zwischen zwei Dreieckskoordinatensystemen	112
B	Ausführliche analytische Integration	115
B.1	Integrale für Aufpunkte in Dreiecksknoten	115
B.2	Integrale für Aufpunkte senkrecht über einem Dreiecksknoten	121
C	Programmlisting	153
	Verzeichnis der verwendeten Symbole	185
	Abbildungsverzeichnis	189
	Tabellenverzeichnis	192
	Literaturverzeichnis	193

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Analyse von Fluid-Struktur-Problemen, die u.a. bei Störfallanalysen in der Reaktortechnik auftreten. Auslösende Ereignisse sind beispielsweise stoßartige Kräfte oder plötzlich versagende Strukturen. Dabei wird die Flüssigkeit sehr stark beschleunigt. Je nach den Gegebenheiten treten an den Fluidrändern erhebliche dynamische Druckbelastungen auf, die kritische Strukturverformungen verursachen können.

Zur Berechnung dieser fluid-strukturdynamischen Vorgänge wird im Fluidteil die Boundary-Element-Methode (BEM) eingesetzt. Die Struktur wird mit finiten Elementen (FEM) modelliert. Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Kopplungsverfahren basiert auf dem "added-mass"-Konzept und der klassischen Modalanalyse.

Für die Randintegralformulierung wurde Ende der siebziger Jahre der 3D-Code SING entwickelt, bei dem Rechteckpanels mit konstanter Dipol-Verteilung verwendet werden. Für eine bessere Beschreibung beliebiger Geometrien sollen kontinuierliche Dreieckselemente mit linearen Ansatzfunktionen eingesetzt werden. Um hypersinguläre Integrale an Ecken und Kanten zu vermeiden, wird statt der bisher verwendeten indirekten Methode eine direkte BE-Formulierung eingeführt.

Das hierfür entwickelte dreieckige Boundary Element mit linearen Ansatzfunktionen ist ein Basisbaustein des Kopplungsverfahrens und daher auch ein wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Es war möglich, die in den Element-Einflußkoeffizienten auftretenden Integrale mit regulären und singulären Integranden vollständig analytisch zu lösen. Der Lösungsweg der analytischen Integrationen für das lineare Dreieckselement ist ausführlich dokumentiert. Die resultierenden Lösungsfunktionen konnten kompakt und übersichtlich formuliert werden, was auch zu einer effektiven Implementierung beigetragen hat. Insbesondere wurden die Integrallösungen ausführlich getestet und sowohl analytisch als auch numerisch überprüft. Durch die Wahl der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Elementansätze konnte über die redundante Beziehung $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ ein zweiter Integrationsweg zur Überprüfung der analytischen Lösung durchlaufen werden. Weiterhin ist das gesamte Quell-Code-Listing in ANSI FORTRAN 77 verfügbar. Damit steht auch die analytische Elementlösung des linearen Dreieckselements als Werkzeug für die Überprüfung numerischer Integrationsalgorithmen zur Verfügung.

Das vorgestellte Dreieckselement wurde in das BE-Programm SING eingebaut. Anhand von verschiedenen Beispielrechnungen wird sowohl die Lösung mehrerer Dreieckselemente im Verbund überprüft als auch die praktische Einsatzfähigkeit des Verfahrens bei geometrisch komplexen dreidimensionalen Problemen demonstriert.

Abstract

The topic of this thesis is the analysis of fluid-structure interaction problems occurring e.g. in safety investigations for nuclear plants. Initiating events are impulsive loads or postulated failures of structures causing strong accelerations of the fluid. As a consequence, high transient pressures occurring at the fluid boundaries may lead to critical deformations of the structures.

For such fluid-structure interaction problems, the boundary element method (BEM) is used to describe the fluid dynamics while finite elements (FEM) have been applied to model the structure. The coupling procedure proposed in this report is based on the "added mass" concept and the classical modal analysis.

In the Seventies the BE problem was solved by the new developed three-dimensional code SING using rectangular boundary element with uniform dipole distributions. For a better representation of complex geometries continuous triangular elements with linear shape functions should now be used. To avoid hypersingular integrals in corners and on edges the direct BE method was introduced instead of the former used indirect method.

For the direct BEM a triangular boundary element with linear shape functions was developed. The element is a basic component of the coupling procedure and therefore an important topic of this thesis. It was possible to carry out the integrations of the influence coefficients with regular and singular integrands analytically. The solution scheme of the analytical integrations for the linear triangular element is documented in detail. The final solution functions could be formulated in a compact and clear way also resulting in an effective implementation. Especially the solution was checked in detail with analytical and numerical tools. With the usage of the homogeneous triangular coordinates ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 as shape functions, a second integration scheme via the redundant equation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ could be applied to check the analytical solution. Furthermore the complete source listing in ANSI FORTRAN 77 is available. With this program the analytical solution of the linear triangular element can be used as a good tool to verify numerical integration algorithms.

The triangular element presented in this report was implemented in the BE code SING. Different test examples are used to validate the solution of several triangular elements in a cluster. Also the usability of the method will be demonstrated in complex three-dimensional applications.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Fluid-Struktur-Systeme

Seit vielen Jahren werden am Institut für Reaktorsicherheit (IRS) des Forschungszentrums Karlsruhe Störfallanalysen durchgeführt. Die teils selbstentwickelten Berechnungsverfahren sind nicht nur für Probleme der Reaktorsicherheit geeignet, sondern auch auf wichtigen Gebieten der Verfahrenstechnik, der Meerestechnik, der Luft- und Raumfahrttechnik, bei der Lagerung gefährlicher Güter in Großtanks, etc. einsetzbar. In vielen Fällen sind Strukturen, z.B. Schalen und Balken, von Flüssigkeiten umgeben. Bei Störfällen, ausgelöst durch Rohrbrüche, Explosionen,

Erdbeben, schweren Seegang usw., werden diese Flüssigkeiten häufig sehr stark beschleunigt. Je nach den Gegebenheiten treten dabei erhebliche dynamische Druckbelastungen auf, die kritische Strukturverformungen verursachen können.

Zur Berechnung dieser fluid-strukturdynamischen Vorgänge wird am IRS im Fluidteil u.a. die Boundary-Element-Methode (BEM) eingesetzt (siehe Abbildung 1.1). Gegebenenfalls erfolgt eine Ankopplung an die mit der Finite-Element-Methode (FEM) modellierte Struktur, wobei hier in der Regel kommerziell verfügbare Programme benutzt werden.

Für das BE-Verfahren wurde am IRS Ende der siebziger Jahre das Programmsystem SING [35, 36] entwickelt. Es eignet sich zur Beschreibung stark transienter 3-dimensionaler Strömungsprobleme, bei denen die Kompressibilität und Fluidviskosität keine Rolle spielt. Dies ist der Fall, wenn die Strömungsbewegungen durch schwingende

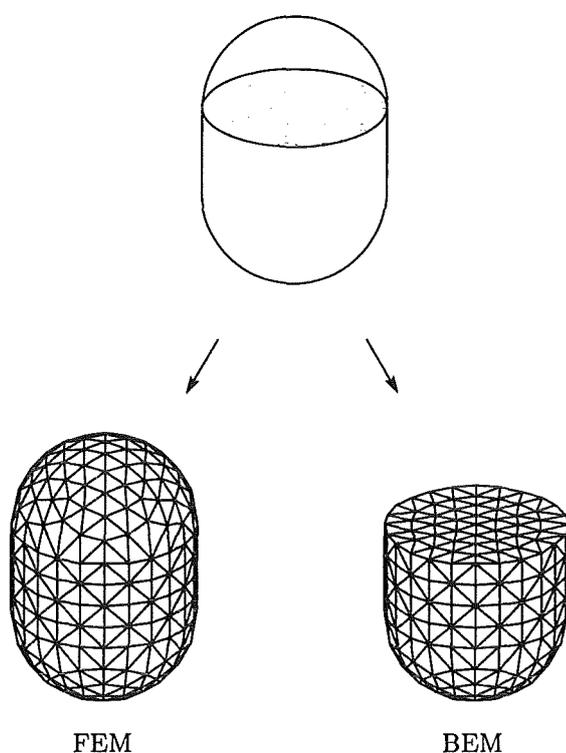


Abb. 1.1: Fluid-strukturdynamische Berechnung eines flüssigkeitsgefüllten Tanks mit BEM/ FEM

Strukturen aufgeprägt werden (Fluid-Struktur-Wechselwirkung) oder bei anlaufenden Strömungen (große Beschleunigungen, kleine Geschwindigkeiten).

Ein typisches Beispiel mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung ist in Abbildung 1.1 zu sehen. Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines flüssigkeitsgefüllten Tanks wurde die Schalenstruktur mit finiten Elementen und die Flüssigkeit mit Boundary Elementen diskretisiert. Der Vorteil dieser Diskretisierung ist, daß die Boundary Elemente, quasi als Randbedingung, direkt an die FE-Tankstruktur gekoppelt werden können. Es müssen keine zusätzlichen Knotenpunkte im Flüssigkeitsvolumen berücksichtigt werden, d.h. es ist keine komplexe Volumendiskretisierung des Fluids notwendig. Denn eigentlich sind primär die geänderten Eigenfrequenzen der Tankstruktur von Interesse.

Ein großer Vorteil der BEM ist also die Problemreduktion um eine Dimension von einem 3D-Problem auf ein 2D-Problem. Direkt damit verbunden ist ein wesentlich geringerer Diskretisierungsaufwand im Vergleich zur FEM, da nur noch die Oberfläche des untersuchten Gebiets diskretisiert werden muß. Ebenso sinkt die Fehlermöglichkeit bei der Netzgenerierung. Ein weiterer Vorteil der BEM ist, daß sie sich auch auf Probleme mit unendlich ausgedehnten Raumgebieten anwenden läßt. Im folgenden werden jedoch nur geschlossene, interne Fluidbereiche behandelt, wie sie vorwiegend bei der Fluid-Struktur-Kopplung von Tankstrukturen vorliegen.

Frühe Untersuchungen zur Kopplung der BEM und FEM sind in [8] und [74] zu finden. Die ersten dreidimensionalen Anwendungen dieser Kopplungstechnik auf Fluid-Struktur-Systeme basieren auf indirekten BE-Formulierungen [14, 29, 31, 50, 51], wobei vorwiegend Einschichtpotentiale eingesetzt worden sind. Während bei der indirekten Methode zunächst in einem Zwischenschritt Hilfsbelegungsfunktionen längs des Randes ermittelt werden müssen, um dann die eigentlichen physikalischen Größen zu erhalten, gehen bei der sogenannten direkten Methode direkt die physikalisch interessierenden Größen als Verfahrensvariablen ein. Die direkte BEM kommt daher bei der BE/FE-Analyse von Fluid-Struktur-Systemen immer mehr zum Einsatz [32, 64, 65]. Der Vollständigkeit halber seien noch die drei grundlegenden Publikationen zur Fluid-Struktur-Kopplung [69, 75] und [76] genannt, die sich mit der klassischen Staudamberechnung unter Erdbebenanregung befassen. Eine umfangreiche Literaturübersicht zum Thema Fluid-Struktur-Kopplung, insbesondere von 3D-Problemen, ist in [66] zu finden.

Bei der bisher am IRS eingesetzten BE-Formulierung werden im wesentlichen rechteckige Dipol-Elemente mit konstanter Dipolintensität benutzt [35]. Von Vorteil ist der relativ einfache Aufbau dieses Verfahrens. Von Nachteil ist, daß Rechteckselemente zur Modellierung beliebig gekrümmter Randflächen nur wenig geeignet sind. Außerdem treten bei aneinanderstoßenden Elementen Singularitäten auf, die an diesen Stellen eine Auswertung sehr erschweren.

Um diese Mängel zu beseitigen, sollen in Zukunft dreieckige Boundary Elemente mit linearen Ansatzfunktionen eingesetzt werden und andererseits eine neue BE-Formulierung eingeführt werden, um schwierig zu handhabende hypersinguläre Integrale an Ecken und Kanten zu vermeiden. Die vorliegende Arbeit soll hierzu einen Beitrag leisten.

1.2 Lösung des Fluidteils mit der direkten BEM

Bei den hier besprochenen Fluid-Struktur-Problemen handelt es sich um ruhende, gekoppelte Systeme, die sich im Gleichgewicht befinden und plötzlich einer Störung unterzogen werden. Die Bewegungsgleichungen des Fluids können daher mit Hilfe der klassischen Hydrodynamik mit Stördruckansatz beschrieben werden [41, 59].

Das Verhalten einer durch Strukturen begrenzten Flüssigkeit mit niederfrequenter Anregung ist durch die Eigenschaften Inkompressibilität, Inviskosität und Wirbelfreiheit charakterisiert. Weiterhin werden kleine Änderungen (\rightarrow lineare Theorie) und Quelfreiheit im Innern angenommen. Diese Voraussetzungen sind für Fluid-Struktur-Probleme gerechtfertigt, bei denen die charakteristischen Struktureigenfrequenzen im niedrigen Frequenzbereich liegen, d.h. falls $\lambda_{st}^2 \ll \lambda_{ac}^2$ [14]. Hier entspricht $\lambda_{ac} = c/f$ der akustischen Wellenlänge der im Fluid mit der Frequenz f schwingenden Struktur, c der Fluid-Schallgeschwindigkeit und λ_{st} der charakteristischen Strukturwellenlänge.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Bei der verwendeten EULERSchen Formulierung [63] entspricht \mathbf{x} dem Ortsvektor einer gekennzeichneten Stelle im Fluidraum zum Zeitpunkt t . Weiterhin vereinfacht sich der Impulserhaltungssatz zu den EULERSchen Bewegungsgleichungen

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla v^2 = -\nabla p \quad (1.2)$$

wobei $p = p(\mathbf{x}, t)$ dem hydrodynamischen Druck, ρ der Dichte und $\frac{D}{Dt}$ der substantiellen Ableitung entspricht [17, 63]. Bei kleinen Störungen, wie sie häufig bei Fluid-Struktur-Systemen auftreten, kann der konvektive Term $1/2 \rho v^2$ vernachlässigt werden [59]. Dies führt auf die linearisierte Impulsgleichung

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.3)$$

die auch linearisierte BERNOULLI-Gleichung genannt wird. Hier ist zu erkennen, daß der Stördruck p ein Potential für das Beschleunigungsfeld $\dot{\mathbf{v}}$ darstellt. Dem hydrodynamischen Druck p können zusätzlich der hydrostatische Druck sowie Druckänderungen durch Schwappbewegungen an freien Oberflächen überlagert werden, die in dieser Arbeit jedoch nicht analysiert werden. Untersuchungen hierzu sind z.B. in [65, 66] zu finden.

Wird die Divergenz der linearisierten Impulsgleichung (1.3) gebildet und die Kontinuitätsgleichung (1.1) berücksichtigt, erhält man die LAPLACE-Gleichung für den hydrodynamischen Druck p im Fluidbereich Ω [35, 54]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla^2 p = 0 \quad (1.4)$$

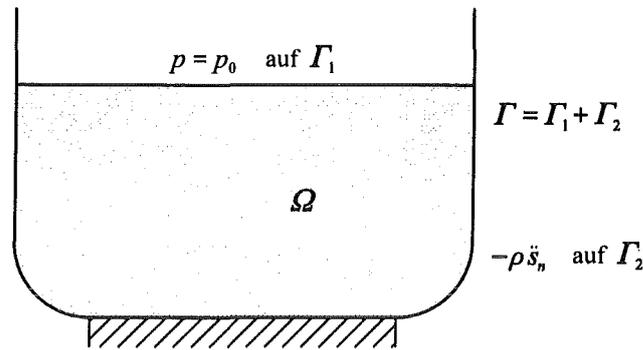


Abbildung 1.2: Beschreibung des fluiddynamischen Problems

Auf dem Rand der Flüssigkeit gelten die Randbedingungen

$$p = p_0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \dot{v}_n = -\rho \ddot{s}_n \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (1.6)$$

wobei sich der Rand des Gebiets Ω aus den Rändern $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ zusammensetzt (siehe Abbildung 1.2). Vorgegebene Drücke p_0 sind typischerweise an freien Oberflächen oder an Strömungsquerschnitten zu finden. An den fluidbenetzten Wänden entsprechen die Normalbeschleunigungen \dot{v}_n des Fluids den Normalbeschleunigungen \ddot{s}_n der Struktur, wobei die Normalenrichtung vom Fluid zur Struktur definiert ist.

Im Gegensatz zur klassischen Potentialströmung treten bei dem hier zu behandelnden transienten fluiddynamischen Problem der Druck p und die Normalbeschleunigung \ddot{s}_n als charakteristische Lösungsvariablen auf.

Da die Formulierung im Prinzip auf das klassische Potentialproblem führt, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die üblichen Variablen, das Potential Φ und dessen Normalgradient q , verwendet. Der Druck p entspricht dem Potential Φ und die Normalbeschleunigung \ddot{s}_n ist proportional dem Normalgradienten q .

Damit lautet die LAPLACE-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.7)$$

mit den klassischen, linearen Randbedingungen

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (\text{DIRICHLET}) \quad (1.8)$$

$$q = q_0 \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (\text{NEUMANN}) \quad (1.9)$$

D.h. auf dem Randstück Γ_1 sind die Potentiale Φ_0 vorgegebenen. Sie werden DIRICHLET- bzw. wesentliche Randbedingungen genannt, da Φ die Unbekannte in der LAPLACE-Gleichung ist. Auf dem restlichen Rand Γ_2 sind die Normalgradienten q_0 vorgeschrieben, die auch NEUMANN- oder natürliche Randbedingungen genannt werden. An Ecken und Kanten können u.U. sowohl DIRICHLET- als auch NEUMANN-Randbedingungen vorliegen. In diesem Fall spricht man von gemischten oder CAUCHY-Randbedingungen. Zusätzlich können noch sogenannte ROBIN-Randbedingungen auftreten, die einen Zusammenhang meist in Form einer linearen

Funktion zwischen dem Potential Φ und dem Normalgradienten q auf dem Rand beschreiben [5, 62].

Im Ingenieurwesen und in der angewandten Mathematik gibt es eine große Anzahl analoger Feldprobleme, die ebenfalls auf die Lösung der LAPLACE-Gleichung führen. Neben dem hier besprochenen transienten fluiddynamischen Problem und dem klassischen Potentialströmungsproblem sind weitere Anwendungsgebiete in Tabelle 1.1 zusammengestellt. In dieser Arbeit werden stellvertretend als Synonyme für die Variablen das Potential Φ und dessen Normalgradient q verwendet.

Anwendungsgebiet	Potential Φ	Normalgradient q
transiente Fluidprobleme (z.B. bei Fluid-Struktur-Kopplung)	p (Druck)	$\ddot{s}_n \sim \frac{\partial p}{\partial n}$ (Beschleunigung)
Potentialströmung	Φ (Potentialfunktion)	$v_n \sim \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (Geschwindigkeit)
Wärmeleitung	T (Temperatur)	$\dot{q}_n \sim \frac{\partial T}{\partial n}$ (Wärmefluß)
elektrische Leitung	V (el. Spannung)	$i_n \sim \frac{\partial V}{\partial n}$ (Stromdichte)
Torsion von zylindrischen Stäben	Φ (mech. Spannungsfunktion)	$\theta \sim \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (Drillwinkel)
⋮	⋮	⋮

Tabelle 1.1: Analogie zwischen bekannten Potentialproblemen (LAPLACE-Gleichung)

Da es sich bei der LAPLACE-Gleichung um eine partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typ handelt, liegt eine klassische Randwertaufgabe vor. Zur Lösung muß daher nicht unbedingt ein Verfahren eingesetzt werden, bei dem über das gesamte Volumen integriert werden muß, wie z.B. bei der bekannten Finite-Element-Methode [2, 4, 73] oder dem Finite-Differenzen-Verfahren.

Statt dessen kann auch die Boundary-Element-Methode [9, 27, 30] eingesetzt werden, bei der das 3-dimensionale Problem auf die Lösung einer 2-dimensionalen Integralgleichung auf der Randfläche zurückgeführt wird. In der Literatur spricht man auch vom Panelverfahren oder von der Singularitätenmethode.

Unter der Voraussetzung eines homogenen Gebiets Ω und einer geschlossenen Oberfläche auf dem Rand Γ können mit Hilfe des GAUSSSchen Integralsatzes Volumenintegrale in Oberflächenintegrale überführt werden [10]

$$\iiint_V \dots dV \quad \rightarrow \quad \iint_S \dots dS$$

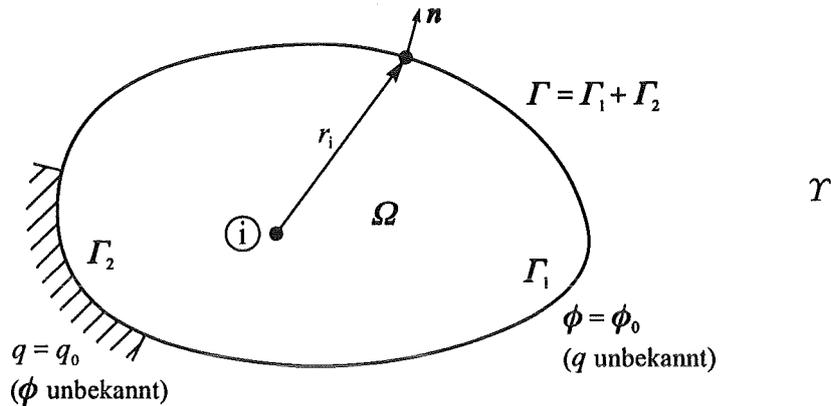


Abbildung 1.3: Zur geometrischen Beschreibung der Randintegralgleichung

Beispielsweise kann die 3-dimensionale Potentialgleichung bzw. LAPLACE-Gleichung unter Anwendung des 2. GREENSchen Theorems in die 2-dimensionale Randintegralgleichung

$$c_i \Phi_i = - \int_{\Gamma} \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad c_i = \begin{cases} 4\pi & \textcircled{i} \in \Omega \\ \Theta & \textcircled{i} \in \Gamma \\ 0 & \textcircled{i} \in \mathcal{T} \end{cases} \quad (1.10)$$

überführt werden [7, 9], die in der englisch-sprachigen Literatur auch mit "GREEN's formula" bzw. "Boundary Integral Equation (BIE)" bezeichnet wird. Hierbei wird das zu lösende Problem um eine Dimension verringert! Auf die umfangreiche mathematische Herleitung dieser Randintegralgleichung wird hier verzichtet. Eine umfassende Darstellung ist z.B. in [5, 9, 62] zu finden.

Mit der Randintegralgleichung (1.10) wird das Potential Φ_i eines beliebigen Punktes \textcircled{i} im Raum in Abhängigkeit der kompletten Lösung auf dem Rand beschrieben, die rechts vom Gleichheitszeichen steht. Φ ist die Potentialverteilung auf dem Rand Γ und q die Gradientenverteilung auf dem Rand Γ in Richtung des Oberflächennormalenvektors \mathbf{n} , der stets vom Gebiet Ω wegzeigt (siehe Abbildung 1.3). Der Gradient der Potentialverteilung in Normalenrichtung \mathbf{n} wird Normalgradient oder Fluß genannt

$$q_{(1 \times 1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } \Phi = \mathbf{n} \nabla \Phi \quad (1.11)$$

$r_i = |\mathbf{r}_i|$ ist der Abstand vom jeweiligen Randpunkt zum Punkt \textcircled{i} , der auch Aufpunkt genannt wird. Der Faktor c_i ist der Raumwinkel Θ um den Aufpunkt \textcircled{i} und entspricht einem Oberflächenanteil einer Kugel mit dem Radius 1. Für Aufpunkte innerhalb des Gebiets Ω gilt $c_i = 4\pi$. Auf dem Rand Γ ist c_i bei einer glatten Oberfläche nur noch halb so groß, also 2π . Und in einer Ecke eines Quaders beträgt c_i nur noch ein Achtel, also $\frac{\pi}{2}$. Diese c_i -Werte gelten für Innenraumprobleme (interior problems). Bei Außenraumproblemen (exterior problems) müssen gewisse Modifikationen durchgeführt werden [7].

Ein wesentlicher Charakter der Randintegralgleichung ist, daß das Potential Φ_i des Aufpunktes \textcircled{i} nicht nur über die Potentialverteilung Φ auf dem Rand bestimmt wird, sondern zusätzlich deren Ableitungen bzw. Gradienten als Variablen miteingehen. Dies ist ein wichtiger Grund für die hohe Verfahrensgenauigkeit des Randintegralverfahrens [5, 9, 24].

Die Randintegralgleichung ist der Ausgangspunkt für die Boundary-Element-Methode. Der Rand wird nun mit m Boundary Elementen diskretisiert. Dadurch wird das Integral über den gesamten Rand Γ in eine Summe von Teilintegralen überführt. Wie oben angekündigt werden in dieser Arbeit lineare Dreieckselemente verwendet.

Analog zu den finiten Elementen werden nun elementspezifische Ansätze für die Potentialverteilung Φ und die Normalgradientenverteilung q der Boundary Elemente eingeführt. Die Ansätze setzen sich aus einer elementcharakteristischen Interpolationsmatrix N und den Stützpunktwerten an den Elementknotenpunkten zusammen.

$$\Phi(x, y) = N_\Phi(x, y) \Phi_I \quad (1.12)$$

$$q(x, y) = N_q(x, y) q_I \quad (1.13)$$

Die diskretisierte Randintegralgleichung lautet damit

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} N_\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{h_{ie}} \Phi_{Ie} \right) = \sum_{e=1}^m \left(\underbrace{\int_{\Gamma_e} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{g_{ie}} q_{Ie} \right) \quad (1.14)$$

bzw.

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m h_{ie} \Phi_{Ie} = \sum_{e=1}^m g_{ie} q_{Ie} \quad (1.15)$$

Die beiden Integrale h_{ie} und g_{ie} sind die sogenannten Element-Einflußkoeffizienten und sind vergleichbar mit den Elementsteifigkeiten bei der FEM. Die eigentlichen Unbekannten sind die Potentiale Φ auf dem Randstück Γ_2 , auf dem die NEUMANN-Randbedingungen q_0 vorgegeben sind, und die Normalgradienten q auf dem restlichen Rand Γ_1 , auf dem die DIRICHLET-Randbedingungen Φ_0 vorliegen.

Die Randintegralgleichung wird nun nicht für einen Punkt im Innern des Gebiets Ω angesetzt, sondern für die Knotenpunkte der Boundary Elemente auf dem Rand. Damit existiert für jeden Randknotenpunkt jeweils eine Randintegralgleichung. Werden alle diese Randintegralgleichungen zu einem Gleichungssystem geformt und nach den Variablen Φ und q geordnet, erhält man die Gleichung

$$(C + H) \Phi = G q \quad (1.16)$$

wobei hier die integrierten Element-Einflußkoeffizienten wie bei der FEM in Hypermatrizen zusammengefaßt sind. Die Diagonalmatrix C beinhaltet die Raumwinkel c_i .

Jetzt werden die Randbedingungen Φ_0 und q_0 berücksichtigt. Sie werden praktischerweise alle auf der rechten Seite angeordnet:

$$\begin{bmatrix} C + H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_u \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u \\ q_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$A x = b \quad (1.19)$$

Schließlich erhält man ein lineares Gleichungssystem, bei dem der Rechthandvektor \mathbf{b} durch Ausmultiplizieren der bekannten rechten Seite entstanden ist und die verbleibenden Unbekannten Φ_u und q_u in dem Lösungsvektor \mathbf{x} zusammengefaßt sind. Die Systemmatrix \mathbf{A} ist im Gegensatz zur FEM voll besetzt und unsymmetrisch. Diese numerischen Nachteile werden aber in aller Regel durch eine geringere Anzahl von Unbekannten als bei der FEM kompensiert.

Nach der Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist die vollständige Lösung auf dem Rand Γ bekannt und somit auch über die Randintegralgleichung (1.14) die komplette Lösung im gesamten Gebiet Ω .

1.3 Fluid-Struktur-Kopplung (BEM/FEM)

Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der elastischen Struktur wird die Methode der finiten Elemente eingesetzt. Da dieses bekannte Berechnungsverfahren weit verbreitet ist und hierzu gute Lehrbücher [2, 4, 73] vorhanden sind, werden nur die für diese Arbeit wichtigsten Sachverhalte kurz dargestellt. Ausgehend von den elementaren Gleichgewichtsbeziehungen sowie dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen können die klassischen Differentialgleichungen für die Dynamik eines Kontinuums hergeleitet werden [2]. Das zeitabhängige Problem kann nun mit einer Halbdiskretisierung im Raum beschrieben werden, bei der der Ansatz aus einem Produkt zweier Funktionen gebildet wird. Hierbei ist die eine Funktion allein vom Ort \mathbf{x} abhängig und die andere allein von der Zeit t . Dieser sogenannte KANTOROVICH-Ansatz lautet beispielsweise für die Druckverteilung

$$p(\mathbf{x}, t) = N_p(\mathbf{x}) \mathbf{p}_1(t) \quad (1.20)$$

wobei die Matrix N_p die Ansatzfunktionen beinhaltet und im Vektor \mathbf{p}_1 die zeitabhängigen Stützpunktwerte der Druckverteilung zusammengefaßt sind (siehe auch Kapitel 2.1 ff.). Dieser Ansatz überführt die partiellen Differentialgleichungen in Raum und Zeit in gewöhnliche Differentialgleichungen der Zeit allein. Darauf basierend läßt sich für eine Struktur mit einem linearem Struktur- und Materialverhalten die bekannte diskretisierte Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{s}(t) = \mathbf{f}_p(t) + \mathbf{f}(t) \quad (1.21)$$

herleiten [2, 73]. Sie läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Trägheitskräfte aus der Strukturmasse \mathbf{M} mal den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{s}}$ plus den elastischen Kräften aus der Struktursteifigkeit \mathbf{K} mal den Verschiebungen \mathbf{s} stehen im Gleichgewicht mit den äußeren fremderregten Kräften. Dabei sind die Druckkräfte \mathbf{f}_p des Fluids auf die benetzte Strukturoberfläche separat berücksichtigt. Gleichung (1.21) stellt die Bewegungsgleichung des ungedämpften Struktur-systems dar. Die Berücksichtigung einer Strukturdämpfung, z.B. über die modale Dämpfung, ist jedoch jederzeit möglich.

Nach Einführung der hergeleiteten Randintegralgleichung des Fluids (1.16) erhält man die diskretisierten Bewegungsgleichungen des gekoppelten Systems

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{s}(t) = \mathbf{f}_p(t) + \mathbf{f}(t) \quad (\text{Struktur / FE}) \quad (1.22)$$

$$\left(\mathbf{C} + \mathbf{H} \right) \mathbf{p}(t) = -\rho \mathbf{G} \ddot{\mathbf{s}}_n(t) \quad (\text{Fluid / BE}) \quad (1.23)$$

Die Kopplung zwischen dem Fluid und der Struktur erfolgt über die identischen Drücke (Gleichgewichtskopplung) und den identischen Normalbeschleunigungen an den benetzten Flächen Γ_2 (kinematische Kopplung)

$$p_{\text{Fluid}} = p_{\text{Struktur}} \quad (1.24)$$

$$\ddot{s}_{n \text{ Fluid}} = \ddot{s}_{n \text{ Struktur}} \quad (1.25)$$

Diese Kopplungsbedingungen können am einfachsten für Boundary Elemente und finite Elemente mit denselben Ansatzfunktionen für Druck und Beschleunigung erfüllt werden. Durch die einheitliche Wahl der Richtung des Normalenvektors, der stets vom Fluid zur Struktur zeigt, kann in der Praxis z.B. für eine FE-Schalenstruktur dasselbe Netz mit derselben Topologie der BE-Diskretisierung des Fluids verwendet werden.

Anhand der Druckverteilung aus Gleichung (1.23) können nun die Knotenlasten des Fluids auf die Struktur ermittelt werden. Unter Berücksichtigung der DIRICHLET-Randbedingungen (1.5) ist die Hypermatrix $(\mathbf{C} + \mathbf{H})$ regulär und kann invertiert werden. Somit gilt

$$\mathbf{p} = -\rho (\mathbf{C} + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G} \ddot{\mathbf{s}}_n \quad (1.26)$$

Dabei können die Normalbeschleunigungen $\ddot{\mathbf{s}}_n$ über die Beziehung

$$\ddot{\mathbf{s}}_n = \mathbf{L} \ddot{\mathbf{s}} \quad (1.27)$$

auf die globalen (kartesischen) Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{s}}$ transformiert werden. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit werden die kinematisch äquivalenten Knotenlasten \mathbf{f}_p aus der Druckverteilung p berechnet [2, 73]. Diese lauten für ein finites Element

$$\mathbf{f}_{pe} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} p \, d\Gamma \quad (1.28)$$

Mit dem gewählten KANTOROVICH-Ansatz für die Druckverteilung in einem Element folgt

$$\mathbf{f}_{pe} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \mathbf{p}_{1e} \quad (1.29)$$

Werden alle so ermittelten Knotenlasten der Elemente akkumuliert, erhält man schließlich auf Systemebene die Beziehung

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{B} \mathbf{p} \quad (1.30)$$

bzw. mit den Gleichungen (1.26) und (1.27)

$$\mathbf{f}_p = -\rho \mathbf{B} (\mathbf{C} + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{L} \ddot{\mathbf{s}} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{f}_p = -\mathbf{M}_{\text{Fluid}} \ddot{\mathbf{s}} \quad (1.32)$$

Dabei entspricht $\mathbf{M}_{\text{Fluid}} = \rho \mathbf{B} (\mathbf{C} + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{L}$ der hydrodynamischen Massenmatrix. Nach Einsetzen der Beziehung (1.32) in Gleichung (1.22) reduziert sich das System der gekoppelten Bewegungsgleichungen (1.22) ff. zur Systemgleichung

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{Fluid}}) \ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{s}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.33)$$

Zur Strukturmasse \mathbf{M} muß nun zusätzlich die hydrodynamische Masse $\mathbf{M}_{\text{Fluid}}$ addiert werden, die die Trägheitskräfte des Fluids mitberücksichtigt. Daher wird $\mathbf{M}_{\text{Fluid}}$ auch als "added mass" bezeichnet. Diese zusätzliche Masse bewirkt u.a. eine Senkung der Eigenfrequenzen gegenüber der trockenen Struktur. Die hergeleitete Systemgleichung (1.33) kann schließlich mit Hilfe der klassischen Modalanalyse über das Eigenwertproblem gelöst werden [1, 2, 6], was quasi in jedem kommerziellen FE-Programmsystem implementiert ist.

1.4 Umfang der vorliegenden Arbeit

Zur Analyse von gekoppelten Fluid-Struktur-Systemen wird ein Lösungsverfahren vorgeschlagen, bei dem die Struktur mit finiten Elementen und das Fluid mit Boundary Elementen diskretisiert wird. Damit die Kopplung des Randintegralverfahrens an die FE-Struktur gezielt untersucht werden kann, sollen Boundary Elemente mit einer analytischen Lösung eingesetzt werden, da dann zumindest die Elementlösungen im gesamten Verfahren fehlerfrei sind.

Die wesentliche mathematische Arbeit bei der Anwendung der Boundary-Element-Methode ist die Ermittlung der Element-Einflußkoeffizienten h_{ie} und g_{ie}

$$h_{ie} = \int_{\Gamma_e} N_\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (1.34)$$

$$g_{ie} = \int_{\Gamma_e} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (1.35)$$

Bei der Integration dieser Koeffizienten entstehen u.a. singuläre Integrale, wenn der Aufpunkt ① auf dem Element liegt, über das integriert wird. Der Abstand r_i geht dann gegen Null und der Integrand wächst über alle Grenzen. Durch die Wahl einer direkten BE-Formulierung müssen bei den Element-Einflußkoeffizienten nur reguläre, schwach singuläre und CAUCHY Hauptwert-Integrale ermittelt werden, bei denen stets eine Lösung existiert. Im Gegensatz hierzu treten bei der bisher am IRS verwendeten indirekten Methode mit Dipol-Ansätzen [35] sogenannte hyper-singuläre Integrale [20, 37, 60] auf, für deren Lösung verschärfte Voraussetzungen (C_1 -Stetigkeit) erfüllt sein müssen. Diese Integrale sind daher insbesondere an nicht-glatten Flächen mit Ecken und Kanten schwer zu handhaben.

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung der Element-Einflußkoeffizienten h_{ie} und g_{ie} für das ebene Dreieckselement mit linearen Ansatzfunktionen, wobei die Stützpunktwerte in den 3 Elementknotenpunkten liegen sollen (kontinuierliches Element).

In der Literatur sind viele numerische Verfahren zu finden, die bei größerer Entfernung des Aufpunkts ① vom Element mit guter Genauigkeit und effektiv arbeiten [9, 25, 40, 42, 52]. Allerdings treten bei diesen numerischen Verfahren große Probleme auf, sobald sich der Aufpunkt ① im Element oder im Nahbereich des Elements befindet. Wie oben beschrieben, treten dann singuläre bzw. quasi-singuläre Integrale auf, bei deren Lösung die meist adaptiven Quadraturverfahren für eine gute Genauigkeit eine hohe Anzahl von GAUSS-Punkten verwenden müssen.

Es wird deswegen versucht, möglichst Boundary Elemente mit einer analytischen Lösung einzusetzen. In der Literatur sind hierzu halbanalytische Verfahren [57] sowie analytische Teillösungen zu finden [13, 46, 49]. Allerdings sind die angegebenen Lösungsfunktionen teils fehlerhaft dokumentiert und durch eine ungünstige Wahl der geometrischen Beschreibung sehr umfangreich.

In dieser Arbeit werden die Element-Einflußkoeffizienten für das lineare Dreieckselement ausführlich analytisch hergeleitet. Die resultierenden Lösungsfunktionen konnten wesentlich einfacher, kompakter und übersichtlicher zusammengefaßt werden als in [13]. Insbesondere werden die Integrallösungen ausführlich getestet sowie analytisch, graphisch und numerisch überprüft. Hierzu wurden auch numerische Ergebnisse aus der Literatur herangezogen. Damit die vollständig hergeleitete analytische Elementlösung auch zukünftig zur Überprüfung von numerischen Integrationsalgorithmen effektiv eingesetzt werden kann, ist das gesamte Quell-Code-Listing in ANSI FORTRAN 77 verfügbar.

Kapitel 2

Elemententwicklung – Theorie

2.1 Geometrische Beschreibung des Dreieckselements TRIA3

Es soll ein ebenes Dreieck mit geraden Kanten und beliebiger Lage im dreidimensionalen kartesischen Raum verwendet werden. Seine drei Eckpunkte, die Elementknotenpunkte ①, ② und ③, sind durch die drei Ortsvektoren

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 1 \dots 3 \quad (2.1)$$

(3×1)

mit den kartesischen Koordinaten x_i , y_i und z_i bestimmt. Für eine einfache Notation in Matrixschreibweise werden die drei Ortsvektoren in einem Hyperspaltvektor

$$\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(9×1)

zusammengefaßt [2, 73]. Damit sind alle charakteristischen Größen des Dreiecks, und zwar die in Abbildung 2.1 dargestellten Seitenlängen a , b , c , Dreiecksfläche A , Eckwinkel α , β , ψ und Dreieckshöhen h_a , h_b , h_c bestimmt. Die Ermittlung dieser geometrischen Größen ist im Anhang A.1 beschrieben.

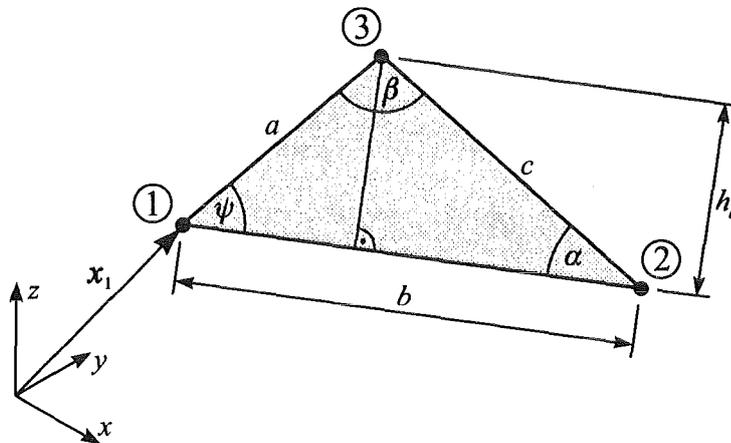


Abbildung 2.1: Geometrie des Dreieckselements TRIA3

Eine wichtige Voraussetzung bei jeder Art von Darstellung mit Boundary Elementen oder finiten Elementen ist die Beschreibung einer Funktion an einer beliebigen Stelle innerhalb des Elements in Abhängigkeit der Funktionswerte an den Elementknotenpunkten. Bei der geometrischen Beschreibung der Fläche sollen die Koordinaten eines beliebigen Punktes in der Fläche in Abhängigkeit der Elementknotenpunktskoordinaten dargestellt werden.

Für die geometrische Beschreibung eines beliebigen Punktes in der Dreiecksfläche werden die natürlichen dimensionslosen Normalkoordinaten ξ_i , auch "homogene Dreieckskoordinaten" oder "baryzentrische Koordinaten" genannt, eingesetzt. Ein Punkt in einem Dreieck kann durch die Abstände l_1, l_2, l_3 von den Dreiecksseiten beschrieben werden (siehe Abbildung 2.2). Normiert man diese Abstände mit den entsprechenden Dreieckshöhen, so erhält man die Liniendefinition für die Dreieckskoordinaten

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{l_1}{h_c} \\ \xi_2 &= \frac{l_2}{h_a} \\ \xi_3 &= \frac{l_3}{h_b} \end{aligned} \quad \text{mit } 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad \text{für } i = 1 \dots 3 \quad (2.3)$$

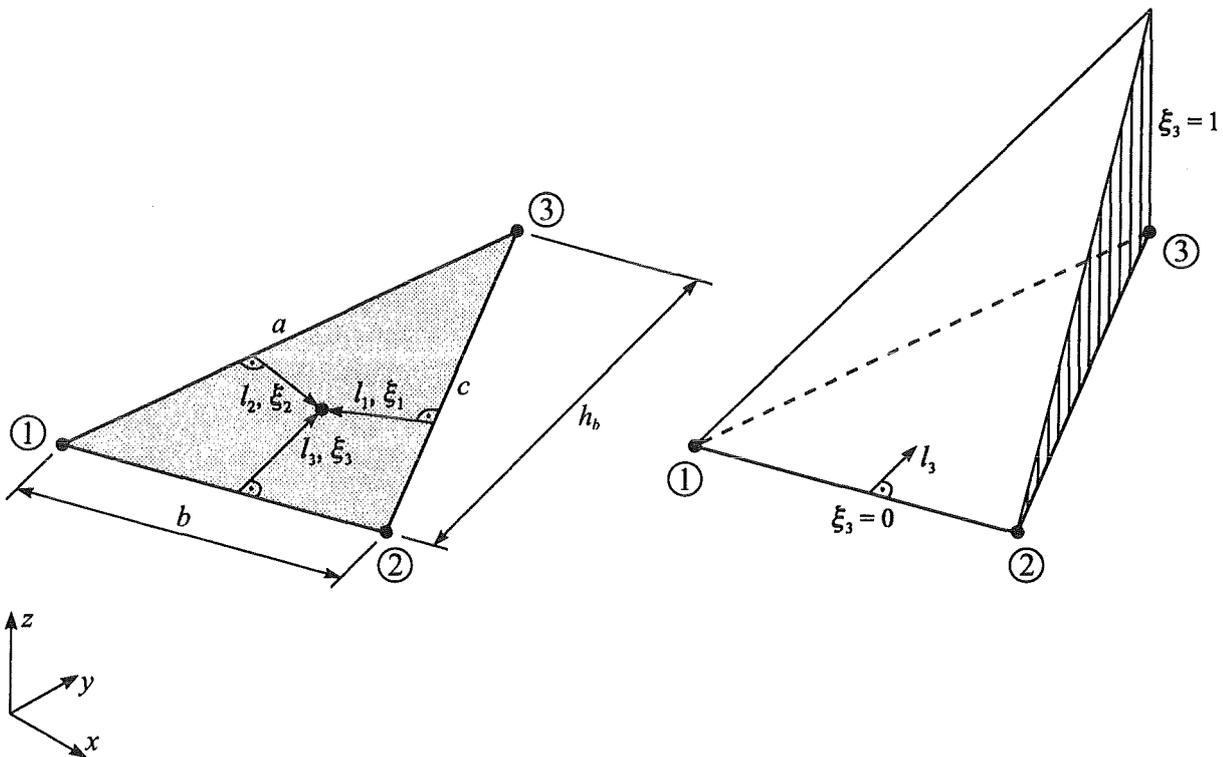


Abbildung 2.2: Definition der homogenen Dreieckskoordinaten

Für den Dreiecksschwerpunkt gilt beispielsweise $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{3}$.

Die natürlichen Koordinaten erweisen sich bei einer Interpolation im Dreiecksbereich als äußerst praktisch. Sieht man die Dreiecksordinate ξ_i als Funktion an, so stellt ξ_i ein lineares Gebirge dar, das am Knoten ① den Wert 1 und an den beiden anderen Knoten den Wert 0 besitzt (siehe Abbildung 2.2).

Da in einer Ebene ein Punkt durch 2 unabhängige Koordinaten eindeutig beschrieben werden kann, müssen die 3 homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2 und ξ_3 voneinander abhängig sein. Diese Beziehung kann über eine alternative Definition der homogenen Dreieckskoordinaten durch die Flächenverhältnisse analog Abbildung 2.3 hergeleitet werden, woher auch die Bezeichnung "Flächenkoordinaten" ξ_1, ξ_2, ξ_3 ihren Ursprung hat.

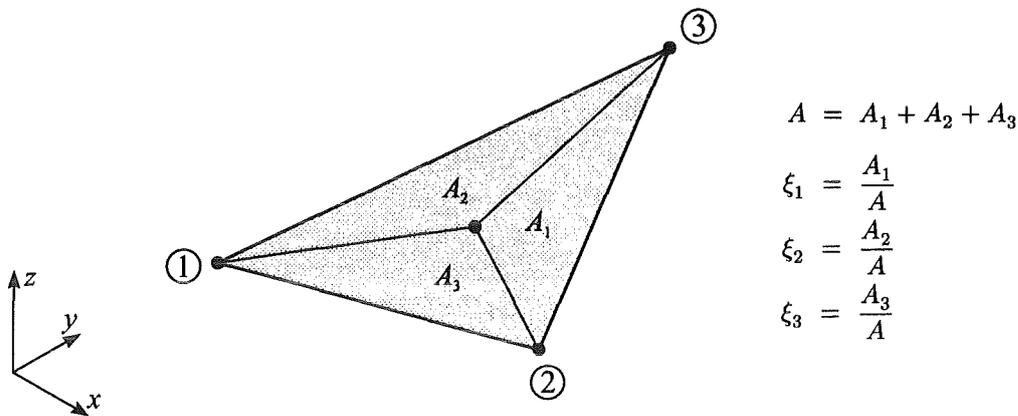


Abbildung 2.3: Alternative Definition der homogenen Dreieckskoordinaten über die Flächenverhältnisse

Mit

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad \text{bzw.} \quad \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \quad (2.4)$$

und den Definitionen (2.3) ergibt sich

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (2.5)$$

Diese zusätzliche Beziehung bringt, wie sich später zeigen wird, durch ihre Redundanz erhebliche Vorteile bei der Überprüfung der analytischen Lösungen der Integrale.

Der lineare Geometrieansatz kann mit den homogenen Dreieckskoordinaten ξ_i und den Stützpunktkoordinaten x_i der drei Elementknoten folgendermaßen definiert werden (siehe Abbildung 2.4)

$$\underset{(3 \times 1)}{x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \quad (2.6)$$

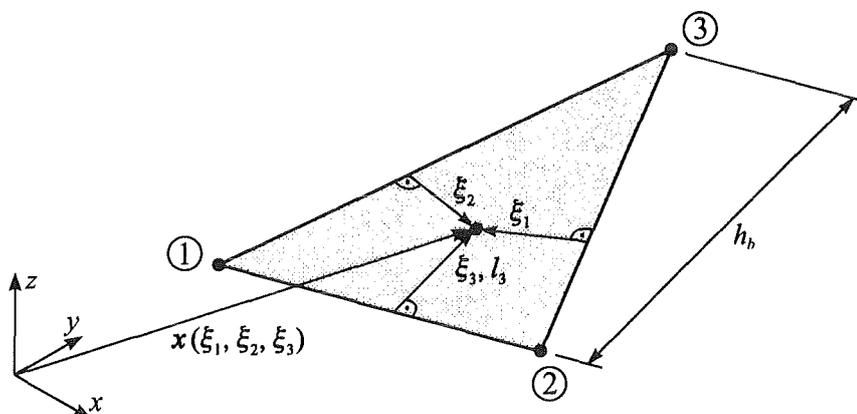


Abbildung 2.4: Homogene Dreieckskoordinaten für einen Punkt im Dreieckselement

Formuliert man Gleichung (2.6) in der kompakten Matrixschreibweise

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{N}_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{x}_1 \quad (2.7)$$

$$= [\xi_1 \mathbf{I}_3 \quad \xi_2 \mathbf{I}_3 \quad \xi_3 \mathbf{I}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

wird der klassische Ansatz mit der strikten Trennung zwischen den konstanten Stützpunktkoordinaten \mathbf{x}_1 und der variablenabhängigen Interpolationsmatrix $\mathbf{N}_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ erreicht [2]. \mathbf{I}_3 stellt dabei die Einheitsmatrix der Dimension 3 dar.

Von Bedeutung ist, daß die homogenen Dreieckskoordinaten nur in der elementcharakteristischen Interpolationsmatrix

$$\mathbf{N}_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\xi_1 \mathbf{I}_3 \quad \xi_2 \mathbf{I}_3 \quad \xi_3 \mathbf{I}_3] \quad (2.9)$$

aufzutreten – und das auch in sehr einfacher Form. Der Vektor \mathbf{x}_1 ist dagegen für ein Element konstant.

Bei der Boundary-Element-Formulierung (1.10) treten die Normalenvektoren an der Oberfläche auf. Für das Dreieckselement muß deswegen der Normalenvektor \mathbf{n} bestimmt werden. Die Orientierung des Elementnormalenvektor \mathbf{n} wird durch die Numerierungsreihenfolge der Knotenpunkte ①, ②, ③ mit der Daumenregel der rechten Hand gemäß Abbildung 2.5 definiert.

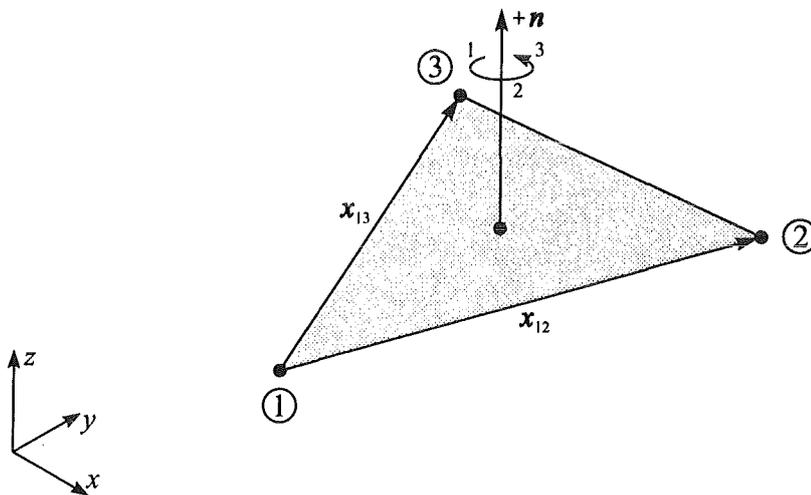


Abbildung 2.5: Definition des Normalenvektors

Die Komponenten des Normalenvektors werden in bekannter Weise über das Kreuzprodukt (vektorielle Produkt) der Seitenvektoren des Dreiecks \mathbf{x}_{12} , \mathbf{x}_{13} , \mathbf{x}_{23} , z.B. mit $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_{13} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ bestimmt

$$\mathbf{n}_{(3 \times 1)} = \frac{\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}}{|\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}|} \quad (2.10)$$

2.2 Ansatz für die Potential- und Normalgradientenverteilung im TRIA3-Element

Neben der geometrischen Beschreibung der Boundary Elemente müssen auch die Ansätze für die Potential- und Normalgradientenverteilung festgelegt werden. Sie sind für den jeweiligen Elementtyp charakteristisch und haben großen Einfluß auf die erzielte Genauigkeit der Lösung. Allerdings haben die Ansatzfunktionen auch einen großen Einfluß auf die Rechenzeit insbesondere bei der BEM, bei der die Ermittlung der Element-Einflußkoeffizienten dem "Power-Step" entspricht.

Der Ansatz für die Potentialverteilung $\Phi(x, y)$ auf einer Fläche wird aus einer elementcharakteristischen Interpolationsmatrix $N_\Phi(x, y)$ und Stützpunktwerten Φ_I an den Elementknotenpunkten gewonnen

$$\underset{(1 \times 1)}{\Phi(x, y)} = \underset{(1 \times n)}{N_\Phi(x, y)} \underset{(n \times 1)}{\Phi_I} \quad (2.11)$$

wobei die Dimension n der Anzahl der Stützpunktwerte des gewählten Elementtyps entspricht.

Für die Richtungsableitung bzw. den Gradienten des Potentials in Normalenrichtung, der sogenannten Normalgradientenverteilung, $q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y) = \mathbf{n} \mathbf{grad} \Phi(x, y) = \mathbf{n} \nabla \Phi(x, y)$ kann bei der BEM derselbe Ansatz wie bei den Potentialen verwendet werden

$$\underset{(1 \times 1)}{q(x, y)} = \underset{(1 \times n)}{N_q(x, y)} \underset{(n \times 1)}{q_I} \quad (2.12)$$

Im Gegensatz hierzu besitzen die Ableitungen bzw. Derivate von finiten Elementen [2, 73] i.a. stets um einen Grad kleinere Verteilungsfunktionen bzw. Ansatzpolynome. Beispielsweise hat in der Strukturmechanik eine lineare Verschiebungsverteilung eine konstante Dehnungs- und Spannungsverteilung zur Folge. Diese strenge Vorschrift muß bei der BE-Lösung nicht eingehalten werden [7, 24].

Da das Dreieckselement noch analytisch integrierbar sein soll, werden im folgenden für die Verteilungsfunktionen lineare Ansätze gewählt. Es werden die in Kapitel 2.1 eingeführten homogenen Dreieckskoordinaten verwendet. Für die eindeutige Bestimmung eines linearen Ansatzes einer Dreiecks Umgebung sind 3 Stützwerte erforderlich. Daraus folgt für die Potentialverteilung $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in kompakter Matrixschreibweise

$$\underset{(1 \times 1)}{\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \underset{(1 \times 3)}{N_\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \underset{(3 \times 1)}{\Phi_I} \quad (2.13)$$

und für die Normalgradientenverteilung $q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,

$$\underset{(1 \times 1)}{q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \underset{(1 \times 3)}{N_q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \underset{(3 \times 1)}{q_I} \quad (2.14)$$

Für die Ansätze der Verteilungsfunktionen ist weiterhin zu klären, an welchem Ort des Boundary Elements die Stützpunktwerte Φ_I und q_I gelten.

Beim Dreieckselement TRIA3 wurde eine konforme Elementformulierung gewählt*, d.h. die Stützwerte Φ_I und q_I beziehen sich auf die jeweiligen Elementeckpunkte ①, ②, ③. Damit ist auch eine direkte Kopplung mit gewöhnlichen finiten Elementen möglich, da deren Stützwerte ebenfalls in den Elementknotenpunkten angegeben werden.

Für die Potentialverteilung werden also als Stützpunktwerte Φ_I die drei Potentiale Φ_1, Φ_2, Φ_3 an den Elementeckpunkten ①, ②, ③ festgelegt

$$\underset{(3 \times 1)}{\Phi_I} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Analog wird bei den Stützpunktwerten q_I der Normalgradientenverteilung vorgegangen

$$\underset{(3 \times 1)}{q_I} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_1 \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_2 \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Die Verwendung der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 als lineare Ansatzfunktionen analog Kapitel 2.1 führt zu einem sehr einfachen Aufbau der Interpolationsmatrizen

$$\underset{(1 \times 3)}{N_\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \underset{(1 \times 3)}{N_q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] \quad (2.17)$$

Der resultierende Aufbau der linearen Ansätze der Potential- und Normalgradientenverteilung

$$\underset{(1 \times 1)}{\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \xi_1 \Phi_1 + \xi_2 \Phi_2 + \xi_3 \Phi_3 \quad \text{und} \quad (2.18)$$

$$\underset{(1 \times 1)}{q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 + \xi_3 q_3 \quad \left(= \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right) \quad (2.19)$$

ist nochmals anschaulich in Abbildung 2.6 wiedergegeben.

*Im Gegensatz zur FEM, bei der sich aus Gründen der kinematischen Verträglichkeit die Stützwerte stets auf die Eckknotenpunkte und Elementkanten beziehen, sind bei der BEM auch sogenannte nichtkonforme Elementtypen zugelassen. Bei nichtkonformen Elementen liegen die Aufpunkte (Kollokationspunkte) innerhalb der Elemente in gewisser Entfernung von den Elementecken und -kanten. Dadurch wird erreicht, daß im Bereich der Aufpunkte sowohl stetig differenzierbare Ansatzfunktionen als auch eine glatte Fläche vorliegt. Z.B. werden Gleichungen mit (hyper-) singulären Integralen in [38, 71] mit nichtkonformen 8-Knoten-Viereckselementen und in [12, 71, 72] mit nichtkonformen Dreieckselementen gelöst. Nachteil dieses Verfahrens ist die erheblich höhere Anzahl an Freiheitsgraden, da benachbarte Elemente getrennte bzw. keine gemeinsame Aufpunkte besitzen.

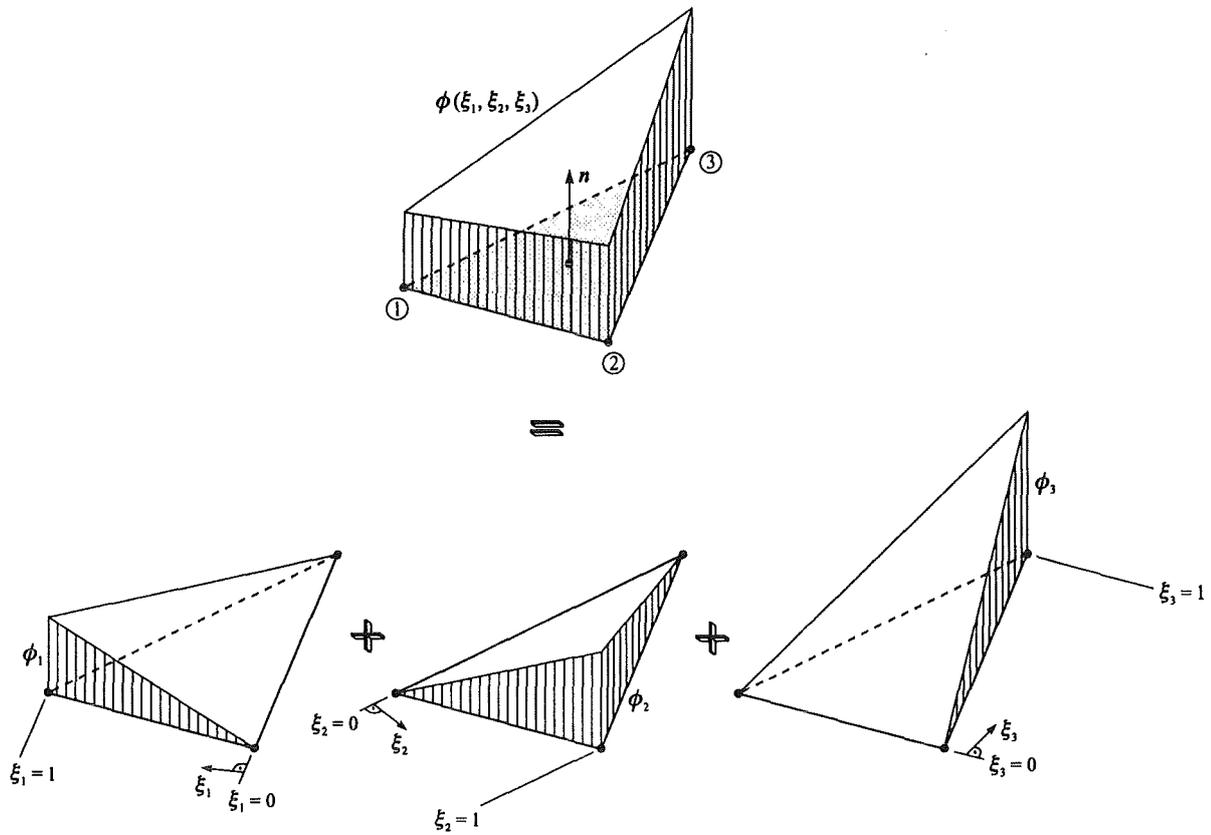


Abbildung 2.6: Aufbau der linearen Verteilungsfunktionen mit Hilfe der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3

2.3 Analytische Integration der Element-Einflußkoeffizienten

Zur Lösung der diskretisierten Randintegralgleichung (1.14)

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Gamma_e} N_\Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \Phi_{Ie} \right) = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Gamma_e} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \mathbf{q}_{Ie} \right)$$

werden jetzt die im Abschnitt 2.2 hergeleiteten Ansätze eingeführt und somit der Einfluß jedes einzelnen Boundary Elements auf den Aufpunkt ① bestimmt. Auf Elementebene müssen nun die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} N_\Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \Phi_I &= \mathbf{h}_i \Phi_I & (2.20) \\ & \underset{(1 \times n) \ (n \times 1)}{\phantom{\mathbf{h}_i \Phi_I}} & \\ &= h_{i1} \Phi_1 + h_{i2} \Phi_2 + h_{i3} \Phi_3 & \text{für das Dreieckselement TRIA3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \mathbf{q}_I &= \mathbf{g}_i \mathbf{q}_I & (2.21) \\ & \underset{(1 \times n) \ (n \times 1)}{\phantom{\mathbf{g}_i \mathbf{q}_I}} & \\ &= g_{i1} q_1 + g_{i2} q_2 + g_{i3} q_3 & \text{für das Dreieckselement TRIA3} \end{aligned}$$

bzgl. eines beliebigen Aufpunktes ① ermittelt werden. Die resultierenden Element-Einflußkoeffizienten \mathbf{h}_i und \mathbf{g}_i für jedes Dreieckselement Δ

$$\mathbf{h}_i \underset{(1 \times 3)}{\phantom{\mathbf{h}_i}} = \int_{\Delta} N_\Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.22)$$

$$\mathbf{g}_i \underset{(1 \times 3)}{\phantom{\mathbf{g}_i}} = \int_{\Delta} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.23)$$

werden dann später über alle Elemente zu den Systemmatrizen \mathbf{H} und \mathbf{G} akkumuliert.

Für die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_i} \right)$ in den \mathbf{h}_i -Einflußkoeffizienten gilt nach der Vektoranalysis [10, 56]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_i} \right) = \frac{-r_i \mathbf{n}}{r_i^3} \quad (2.24)$$

so daß man folgende Gleichungen für jedes Element erhält

$$\mathbf{h}_i = \int_{\Delta} N_\Phi \left(\frac{-r_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad (2.25)$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Delta} N_q \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.26)$$

Mit den Ansatzfunktionen für das lineare Dreieckselement (2.18) und (2.19) gehen die Gleichungen (2.25) und (2.26) über in

$$\mathbf{h}_i = \left[\int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (2.27)$$

$$= [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] \quad (2.28)$$

und

$$\mathbf{g}_i = \left[\int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \right] \quad (2.29)$$

$$= [g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i3}] \quad (2.30)$$

mit den einzelnen Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} und g_{ij} bzgl. des Aufpunkts ①

$$h_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{mit } j = 1 \dots 3 \quad (2.31)$$

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \text{mit } j = 1 \dots 3 \quad (2.32)$$

Es muß also jeweils über die gesamte Elementdreiecksfläche integriert werden. Falls sich der Aufpunkt ① im Integrationsgebiet Δ bzw. im Boundary Element befindet, tritt während der Integration der Fall

$$r_i \rightarrow 0 \quad \text{mit } r_i = |\mathbf{r}_i| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$$

auf.

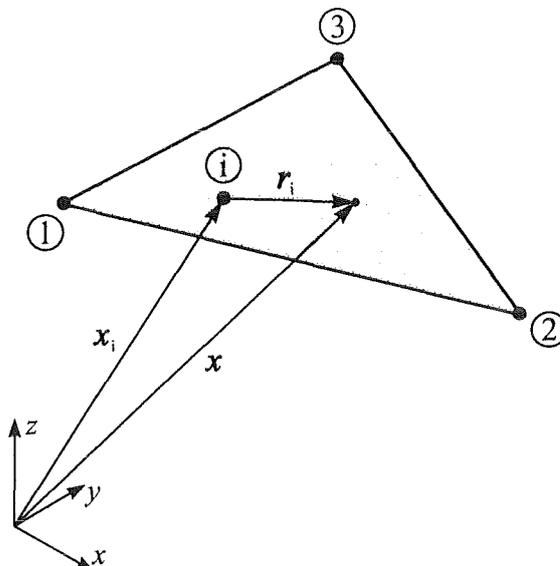


Abbildung 2.7: Entstehung singulärer Integrale für Aufpunkte ① im Boundary Element ($r_i \rightarrow 0$)

D.h. auch die Nenner der Integranden in (2.31) und (2.32) gehen gegen Null und die Integranden wachsen über alle Grenzen. Es entstehen in diesem Fall sogenannte singuläre Integrale*.

Für die analytische Lösung der Integrale (2.31) und (2.32) kommt folgende Lösungsstrategie zum Einsatz:

Durch geeignete Transformationen lassen sich alle zu lösende Integrale auf eine Integration über eine Dreiecksfläche zurückführen, wobei sich der Aufpunkt \textcircled{i} stets in einem Eckpunkt oder senkrecht darüber befindet (siehe Abbildung 2.8). Dies erleichtert die Lösung der Integrale erheblich.

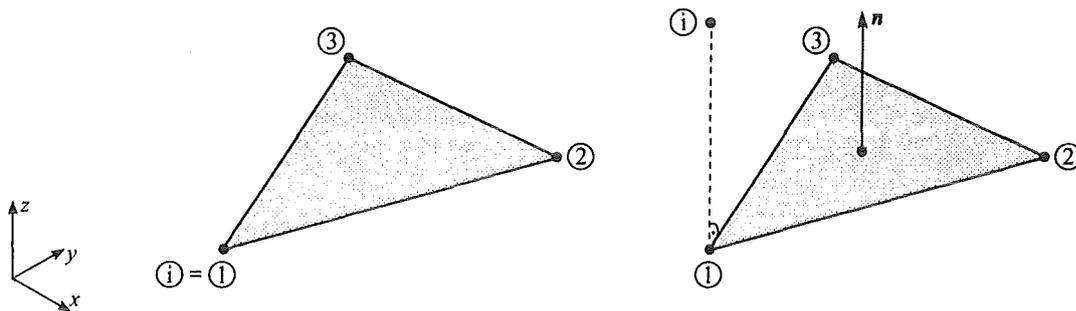


Abbildung 2.8: Reduktion der analytischen Integration auf zwei Standardgeometrien

*Prinzipiell lassen sich singuläre Integrale bzw. uneigentliche Integrale mit singulärem Integranden in drei verschiedene Gruppen einteilen (f ist eine beliebige von r unabhängige Funktion):

1) **Schwach singuläre Integrale** vom Typ

$$\int_{\Gamma} f \frac{1}{r} d\Gamma$$

Die Lösung erfolgt i.a. durch eine Transformation (z.B. auf Polarkoordinaten), mit der schwach singuläre Integrale in reguläre Integrale überführt werden können.

2) **Stark singuläre Integrale** vom Typ

$$\int_{\Gamma} f \frac{1}{r^2} d\Gamma$$

die nur im Sinne des CAUCHYSchen Hauptwerts [10, 47] gelöst werden können.

3) **Hypersinguläre Integrale**

$$\int_{\Gamma} f \frac{1}{r^3} d\Gamma \quad \text{bzw.} \quad \int_{\Gamma} f \frac{1}{r^{(3+n)}} d\Gamma$$

die u.U. nur noch im Sinne der "HADAMARD Finite Part" (HFP)-Integration lösbar sind [21, 43]. Die HFP-Lösung eines hypersingulären Integrals stellt die Verallgemeinerung des Konzepts des CAUCHYSchen Hauptwerts dar. Im Gegensatz zu den schwach und stark singulären Integralen sind hypersinguläre Flächenintegrale in ihrer ursprünglichen Form i.a. nicht mehr numerisch lösbar. Die Integrale müssen explizit analytisch behandelt werden. Nach einer Überführung durch die HFP-Integration können dann die entstandenen Integrale mit Hilfe des CAUCHYSchen Hauptwerts z.B. numerisch integriert werden. Allerdings müssen nun verschärfte Voraussetzungen (C_1 -Stetigkeit) erfüllt sein, damit die Lösung des hypersingulären Integrals konvergiert bzw. existiert [20, 37, 60]. Diese Voraussetzungen schränken die möglichen Aufgabentypen ein bzw. erschweren deren Lösungsweg extrem, insbesondere die Integration nicht-glatte Flächen mit Ecken und Kanten.

Da die Integrale (2.31) und (2.32) für einen *beliebigen* Aufpunkt ① im Raum analytisch gelöst werden sollen, bietet es sich an, das Problem in drei verschiedene Fälle zu unterteilen:

- Fall a) Aufpunkt ① liegt in einem Elementknotenpunkt (→ singuläre Integrale)
- Fall b) Aufpunkt ① liegt innerhalb der Elementebene (→ singuläre und reguläre Integrale)
- Fall c) Aufpunkt ① liegt außerhalb der Elementebene (→ reguläre Integrale)

2.3.1 Fall a) Aufpunkt liegt in einem Elementknotenpunkt

Wenn sich der Aufpunkt ① in einem der drei Elementknotenpunkte des Dreiecks befindet, entsteht bei der Integration der Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} und g_{ij} eine kritische Situation. Während der Integration geht

$$r_i \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad r_i = |\mathbf{r}_i|$$

(siehe Abbildung 2.9). Damit gehen auch die Nenner der zu lösenden Integrale (2.31) und (2.32) gegen Null. Es entstehen stark singuläre Integrale, die auch CAUCHY Hauptwert-Integrale genannt werden

$$h_{ij}^{(1 \times 1)} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{mit} \quad j = 1 \dots 3 \quad (2.33)$$

und singuläre Integrale

$$g_{ij}^{(1 \times 1)} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \text{mit} \quad j = 1 \dots 3 \quad (2.34)$$

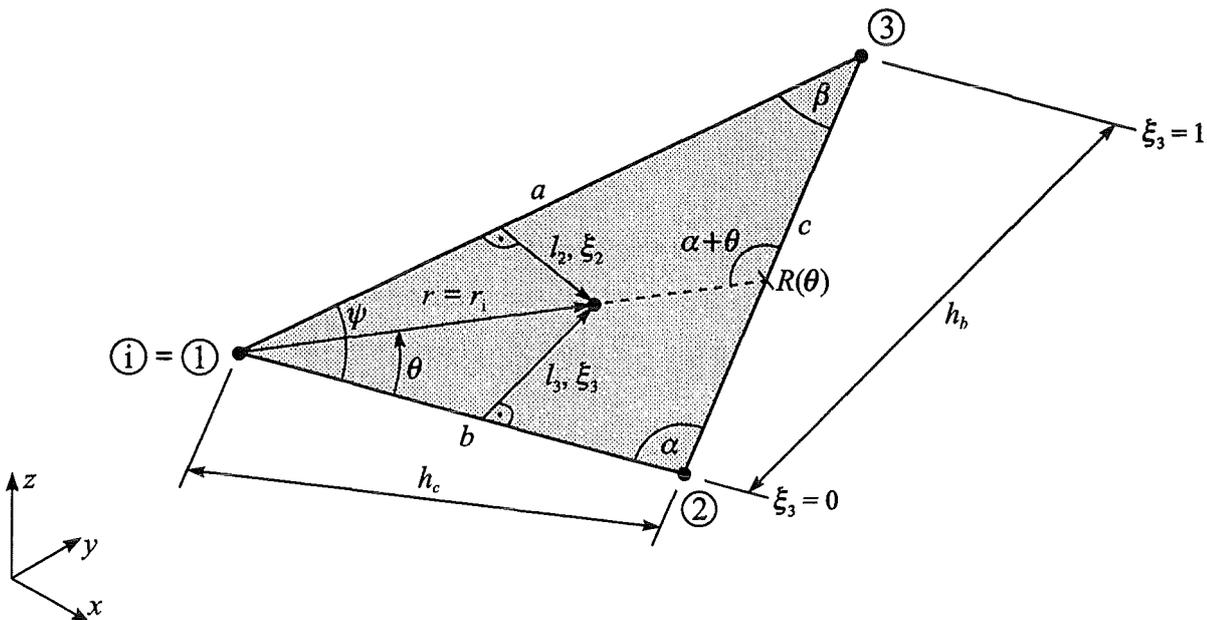


Abbildung 2.9: TRIA3-Element mit Aufpunkt im Elementknotenpunkt

Durch eine Transformation auf die Polarkoordinaten [10] $r = r_i$ und θ mit dem Aufpunkt ① als Ursprung kann durch die zu bildende Funktionaldeterminante (JACOBISCHE Determinante) $|\mathbf{J}| = \frac{\partial(\Gamma)}{\partial(r, \theta)} = r$ und dem neuen Oberflächenelement $d\Gamma = r dr d\theta$ der Grad der Singularität der Integrale (2.33) und (2.34) jeweils um 1 erniedrigt werden. D.h. durch Kürzen von r gehen die stark singulären Integrale (2.33) in schwach singuläre Integrale über und aus den schwach singulären Integralen (2.34) entstehen reguläre Integrale.

Es wird zunächst angenommen, daß der Aufpunkt ① im Elementknotenpunkt ① liegt (siehe Abbildung 2.9). Daraus resultiert für den Wertebereich der Polarkoordinaten $r = r_i$ und θ :

$$0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.35)$$

$$0 \leq r = r_i \leq R(\theta) \quad (2.36)$$

mit der äußeren von θ abhängigen Integrationsgrenze

$$R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{ab \sin \psi}{c \sin(\alpha + \theta)} \quad (2.37)$$

und dem Oberflächenelement

$$d\Gamma = r dr d\theta \quad (2.38)$$

Die homogenen Dreieckskoordinaten ξ_j lassen sich wie folgt in den neuen Variablen r und θ ausdrücken (vgl. auch Abbildung 2.9):

$$\xi_1 = \frac{l_1}{h_c} = \frac{R(\theta) - r}{R(\theta)} = 1 - \frac{r}{R(\theta)} \quad (2.39)$$

$$\xi_2 = \frac{l_2}{h_a} = \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a} \quad (2.40)$$

$$\xi_3 = \frac{l_3}{h_b} = \frac{r \sin \theta}{h_b} \quad (2.41)$$

Mit diesen Beziehungen kann nun über die gesamte Elementdreiecksfläche integriert werden.

Da der Radiusvektor \mathbf{r} analog Abbildung 2.10 stets senkrecht zum Elementnormalenvektor \mathbf{n} steht, ist das Skalarprodukt $\mathbf{r} \mathbf{n} = 0$ und damit auch die Integrale

$$\begin{aligned} h_{11} &= \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \xi_1 \left(\frac{-\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} \right) r dr d\theta = 0 \\ h_{12} &= \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \xi_2 \left(\frac{-\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} \right) r dr d\theta = 0 \\ h_{13} &= \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \xi_3 \left(\frac{-\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} \right) r dr d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dieser Sachverhalt gilt generell bei allen Elementtypen mit ebener Elementgeometrie. D.h. bei ebenen Boundary Elementen verschwinden die Integrale h_{ij} für alle Aufpunkte, die innerhalb der Elementebene liegen.

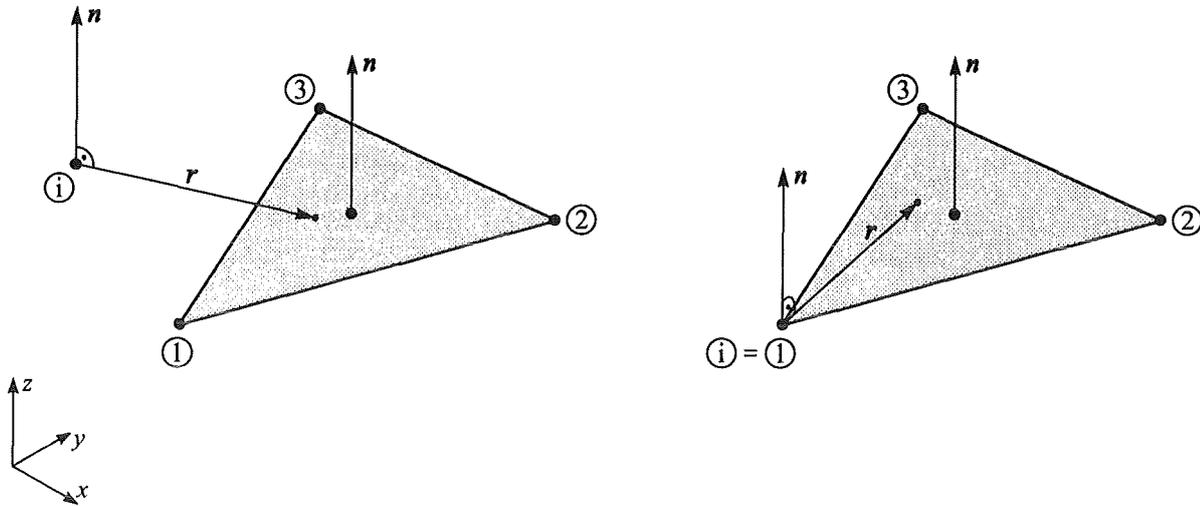


Abbildung 2.10: Verschwindendes Skalarprodukt $r \cdot n$ für Aufpunkte innerhalb der Elementebene bei ebenen Elementen wegen $r \perp n$

Die singulären Integrale der Element-Einflußkoeffizienten g_{ij} werden durch die Transformation auf Polarkoordinaten durch den r -Term (JACOBIsche Determinante) regularisiert, und können problemlos über r integriert werden:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \left(1 - \frac{r}{R(\theta)} \right) \overbrace{\left(\frac{1}{r} \right)}^{\text{Regularisierung!}} r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R(\theta)}{2} d\theta \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{12} &= \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a} \left(\frac{1}{r} \right) r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R^2(\theta) \sin(\psi - \theta)}{2 h_a} d\theta \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{13} &= \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r \sin \theta}{h_b} \left(\frac{1}{r} \right) r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R^2(\theta) \sin \theta}{2 h_b} d\theta \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrationen über die θ -Koordinate benötigen mehrere Rechenschritte und sind ausführlich im Anhang B.1 auf Seite 115 ff. zusammengestellt. Die Endergebnisse dieser Integrationen lauten mit der Bezeichnung A als Elementdreiecksfläche

$$g_{11} = \int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{A}{c} \ln \left(\frac{a+b+c}{a+b-c} \right) \quad (2.46)$$

$$g_{12} = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2} g_{11} + \frac{A}{c^2} (b-a) \quad (2.47)$$

$$g_{13} = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2} g_{11} - \frac{A}{c^2} (b-a) \quad (2.48)$$

Wie erwartet, sind sie für jedes gewöhnliche (nicht-degenerierte) Dreieck regulär. Da stets $a+b > c$ gilt, sind sowohl der Nenner als auch der Zähler in der Logarithmusfunktion aus (2.46) stets größer Null.

Wie schon in Kapitel 2.1 erwähnt, ist eine zusätzliche Überprüfung der Integration durch die redundante Beziehung (2.5)

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad (2.49)$$

der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_j möglich:

$$\begin{aligned} g_{13} &= \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} (1 - \xi_1 - \xi_2) \left(\frac{1}{r} \right) r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.50)$$

Mit Gleichung (2.39) $\xi_1 = 1 - \frac{r}{R(\theta)}$ und (2.43) folgt

$$\begin{aligned} g_{13} &= \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \left(\frac{r}{R(\theta)} - \xi_2 \right) dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R(\theta)}{2} d\theta - \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \xi_2 dr d\theta \\ g_{13} &= g_{11} - g_{12} \end{aligned} \quad (2.51)$$

was durch einsetzen der Gleichungen (2.46) und (2.47) leicht überprüft werden kann. Analoge Überlegungen zur Überprüfung der Integration können auch für $g_{12} = g_{11} - g_{13}$ durchgeführt werden.

Alle bisherigen Lösungen sind für den Fall hergeleitet worden, daß der Aufpunkt $\textcircled{1}$ im Elementknotenpunkt $\textcircled{1}$ liegt. Falls der Aufpunkt mit einem der beiden anderen Elementknotenpunkte zusammenfällt, können die dazugehörigen Element-Einflußkoeffizienten durch entsprechendes zyklisches Vertauschen der Dreiecksseiten a, b, c in Gleichungen (2.46), (2.47) und (2.48) ermittelt werden.

Eine weitere Überprüfung der Integrationsergebnisse von g_{12} und g_{13} basiert auf folgender Untersuchung:

Da z.B. eine Spiegelung des Dreiecks gemäß Abbildung 2.11 eine äquivalente Integrationsgeometrie zur Folge hat, kann nach der Berechnung des Integrals (2.47)

$$g_{12} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2} g_{11} + \frac{A}{c^2} (b - a)$$

durch Vertauschen der Dreiecksseiten a und b die Lösung für g_{13} direkt angegeben werden

$$g_{13} = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c^2} g_{11} + \frac{A}{c^2} (a - b)$$

die wieder der Gleichung (2.48) entspricht.

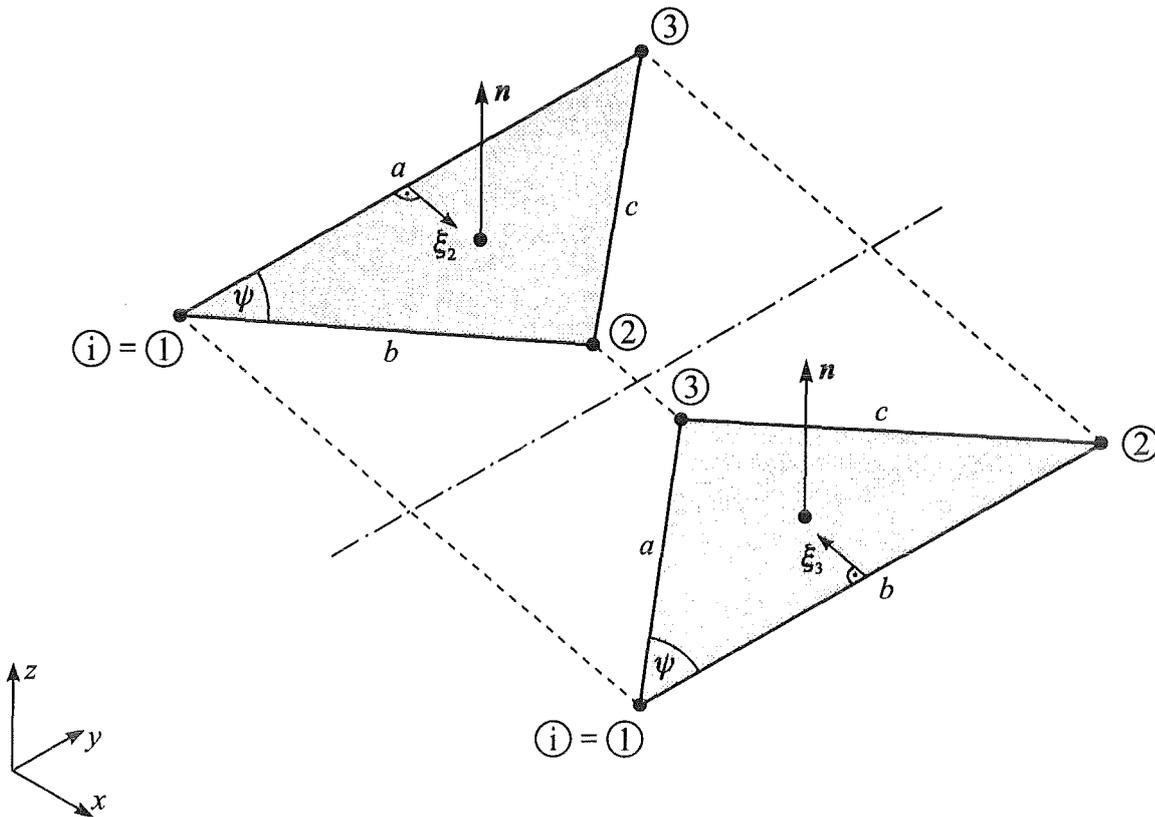


Abbildung 2.11: Plausibilitätsuntersuchungen zu den Integrationen g_{12} und g_{13}

2.3.2 Fall b) Aufpunkt liegt innerhalb der Elementebene

Für den Fall, daß sich der Aufpunkt \textcircled{i} innerhalb der Elementebene befindet, können sowohl singuläre als auch reguläre Integrale in den Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} und g_{ij} auftreten. Entscheidend ist, ob der Aufpunkt im Boundary Element oder außerhalb liegt (siehe Abbildung 2.12). Für die h_{ij} -Koeffizienten gilt in beiden Fällen analog dem vorherigen Kapitel

$$\begin{aligned} h_{i1} &= \int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma = 0 \\ h_{i2} &= \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma = 0 \\ h_{i3} &= \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{-\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Auch hier verschwindet wieder im gesamten Integrationsgebiet Δ das Skalarprodukt $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n} = 0$, da bei ebenen Boundary Elementen der Elementnormalenvektor \mathbf{n} stets senkrecht zum Radiusvektor \mathbf{r}_i orientiert ist (vgl. Abbildung 2.10).

Die jetzt noch zu lösenden Integrale der g_{ij} -Koeffizienten

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \text{mit } j = 1 \dots 3 \quad (2.53)$$

können, wie schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben, durch eine Transformation auf Polarkoordinaten mit dem Aufpunkt \textcircled{i} als Ursprung stets regulärisiert werden. Da nun der Aufpunkt \textcircled{i} *beliebig* in der Elementebene liegen kann, erhöht sich der Aufwand für die Integration gegenüber dem Fall a), bei dem sich ja der Aufpunkt in einem Elementknotenpunkt befindet, erheblich.

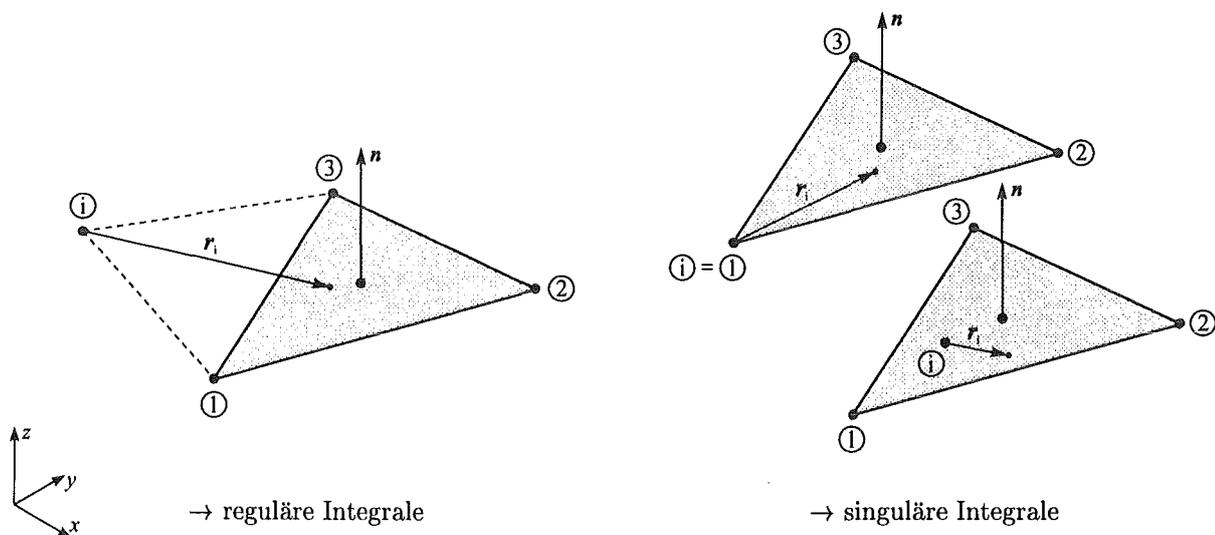


Abbildung 2.12: Aufpunkte innerhalb der Elementebene
mit $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{n}$

Um den Integrationsaufwand und die möglichen Fehlerquellen so gering wie möglich zu halten, wurde folgende Lösungsstrategie gewählt:

Das zu lösende Integral über die Elementdreiecksfläche wird in eine Summe von 3 Teilintegralen analog Abbildung 2.13 zerlegt. Dabei wird jedes einzelne Teilintegral über eine Dreiecksfläche gebildet, bei der der Aufpunkt \textcircled{i} dem Eckknoten \textcircled{i} entspricht. Nach einer geeigneten Transformation auf die homogenen Dreieckskoordinaten ξ'_j der neuen Integrationsdreiecksflächen lassen sich die Teilintegrale mit den schon bekannten Lösungsformeln aus Fall a) berechnen.

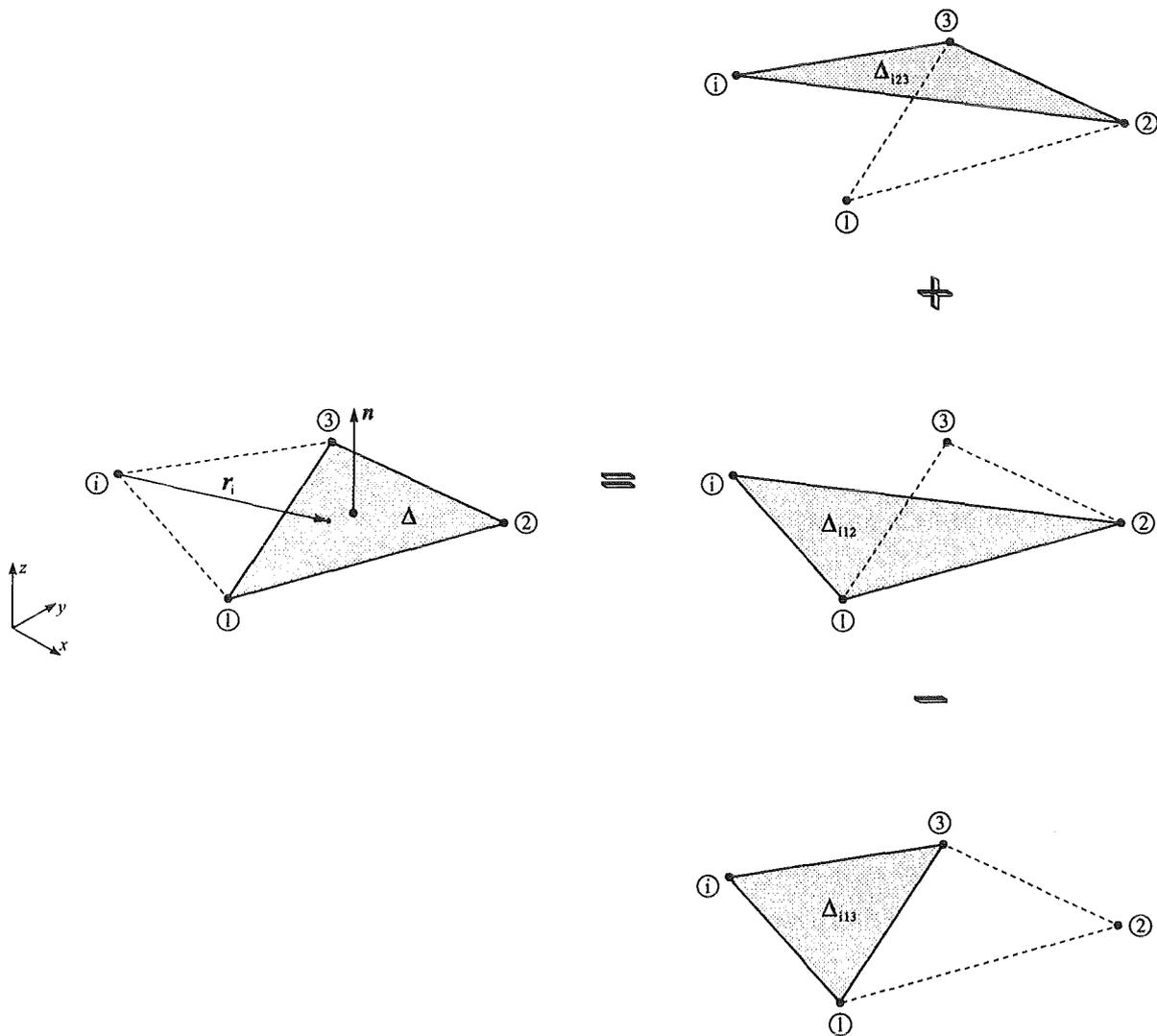


Abbildung 2.13: Lösungsstrategie für die analytische Integration bei Aufpunkten \textcircled{i} innerhalb der Elementebene

Zunächst muß noch für die Integration die geometrische Lage des Aufpunkts ① bzgl. des Dreieckselements beschrieben werden. Da sich der Aufpunkt in der Elementebene befindet, wird wieder der geometrische Ansatz in Abhängigkeit der homogenen Dreieckskoordinaten gemäß Gleichung (2.6) $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \mathbf{x}_1 + \xi_2 \mathbf{x}_2 + \xi_3 \mathbf{x}_3$ herangezogen. Die homogenen Dreieckskoordinaten des Aufpunkts ① werden anlehnd an das schiefwinklige Koordinatensystem u, v gemäß Abbildung 2.14 mit U_i, V_i, W_i bezeichnet.

$$U_i = \frac{l_2}{h_a} = \frac{u}{b} = \frac{r_{i1} \sin(\psi - \psi_i)}{b \sin \psi} \quad (2.54)$$

$$V_i = \frac{l_3}{h_b} = \frac{v}{a} = \frac{r_{i1} \sin \psi_i}{a \sin \psi} \quad (2.55)$$

$$W_i = \frac{l_1}{h_c} = 1 - U_i - V_i \quad (2.56)$$

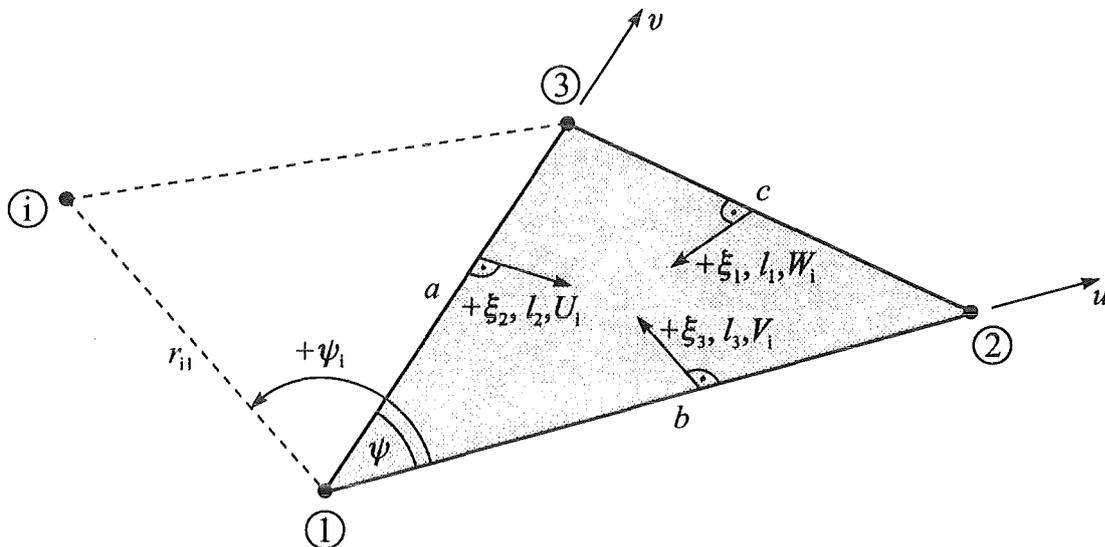


Abbildung 2.14: Geometrische Beschreibung des Aufpunkts innerhalb der Elementebene

Durch die Wahl des schiefwinkligen Koordinatensystems u, v im Hinblick auf eine einfachere Herleitung der Transformation im Anhang A.2 entsteht folgende Gleichung für die geometrische Lage des Aufpunkts ①

$$\mathbf{x}_i \begin{matrix} (U_i, V_i, W_i) \\ (3 \times 1) \end{matrix} = U_i \mathbf{x}_2 + V_i \mathbf{x}_3 + W_i \mathbf{x}_1 \quad (2.57)$$

Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 können die normierten Koordinaten U_i, V_i, W_i beliebige Werte annehmen (siehe Kapitel 3.1), d.h. sie können auch negativ oder größer 1 werden, wie z.B. $U_i < 0$ in Abbildung 2.14. Für den singulären Fall, daß sich der Aufpunkt im Boundary Element befindet, gilt für den Wertebereich von U_i, V_i, W_i stets $0 \leq U_i, V_i, W_i \leq +1$. Auch zwischen den Dreieckskoordinaten U_i, V_i, W_i existiert die bekannte Beziehung

$$U_i + V_i + W_i = 1 \quad (2.58)$$

Die Zerlegung der zu lösenden Integrale (2.53) in eine Summe von Teilintegralen über die drei Dreiecksflächen $\Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12}$ läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren [39, 44]

$$\int_{\Delta} \dots d\Gamma = n_1 \int_{\Delta_{i23}} \dots d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{i13}} \dots d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{i12}} \dots d\Gamma \quad (2.59)$$

bzw.

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = n_1 \int_{\Delta_{i23}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{i13}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{i12}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma$$

mit $j = 1 \dots 3$ (2.60)

Hierbei wurde berücksichtigt, daß je nach Lage des Aufpunkts ① bzgl. des Dreieckselements die einzelnen Teilintegrale addiert oder subtrahiert werden müssen (vgl. Abbildung 2.13). Dies wird über die Vorzeichenfunktionen n_1, n_2, n_3 geregelt. Sie sind in Abhängigkeit der homogenen Dreieckskoordinaten U_i, V_i, W_i des Aufpunkts ① definiert

$$\begin{aligned} n_1 &= \operatorname{sgn}(W_i) \\ n_2 &= \operatorname{sgn}(U_i) \\ n_3 &= \operatorname{sgn}(V_i) \end{aligned} \quad (2.61)$$

mit der Signumfunktion

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Sonderfälle wie z.B. der Fall a), bei dem der Aufpunkt ① im Elementknotenpunkt ① liegt ($\Rightarrow U_i = 0 = n_2, V_i = 0 = n_3, W_i = 1 = n_1$), werden mit Gleichung (2.60) ebenfalls abgedeckt.

Nach der Zerlegung folgt nun die Integration über die 3 neuen Dreiecksflächen $\Delta_{i23}, \Delta_{i13}$ und Δ_{i12} . Es entstehen Integrale der Form

$$\int_{\Delta'} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad \begin{array}{l} \text{für } \Delta' = \Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12} \\ \text{und } j = 1 \dots 3 \end{array} \quad (2.63)$$

Die Addition der Teilintegrale nach Gleichung (2.60) verlangt jedoch Integrale, bei denen die Variablen der Integranden im gleichen Koordinatensystem definiert sind. Da nun das vorhandene Dreieckskoordinatensystem ξ_1, ξ_2, ξ_3 sich auf das Dreieckselement und nicht auf die neue Dreiecksfläche Δ' bezieht, entstehen an den Integrationsgrenzen sehr komplizierte geometrische Funktionen. Es ist daher günstiger eine Transformation auf die lokalen homogenen Dreieckskoordinaten ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ' bzw. $\Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12}$ durchzuführen, wobei der neue Dreiecksknoten ② stets im Aufpunkt ① liegt (vgl. Abbildung 2.15). Diese Transformation von einem nicht-orthogonalen Koordinatensystem auf ein verschobenes und gedrehtes nicht-orthogonales Koordinatensystem ist ausführlich im Anhang A.2 auf Seite 112 ff. beschrieben. Alle geometrische Größen bzgl. des neuen Dreieckssystems sind mit einem Strich (') gekennzeichnet.

Die Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_3 lassen sich durch die neuen Variablen wie folgt ausdrücken (siehe Anhang A.2)

$$\xi_2 = U_i + \frac{\alpha_{11} b'}{b} \xi'_2 + \frac{\alpha_{21} a'}{b} \xi'_3 \quad (2.64)$$

$$\xi_3 = V_i + \frac{\alpha_{12} b'}{a} \xi'_2 + \frac{\alpha_{22} a'}{a} \xi'_3 \quad (2.65)$$

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3 \quad (2.66)$$

Dabei beschreiben die homogenen Dreieckskoordinaten des Aufpunkts U_i, V_i die Verschiebung des Koordinatenursprungs und die Variablen $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ u.a. die Verdrehung beider Koordinatensysteme gegeneinander.

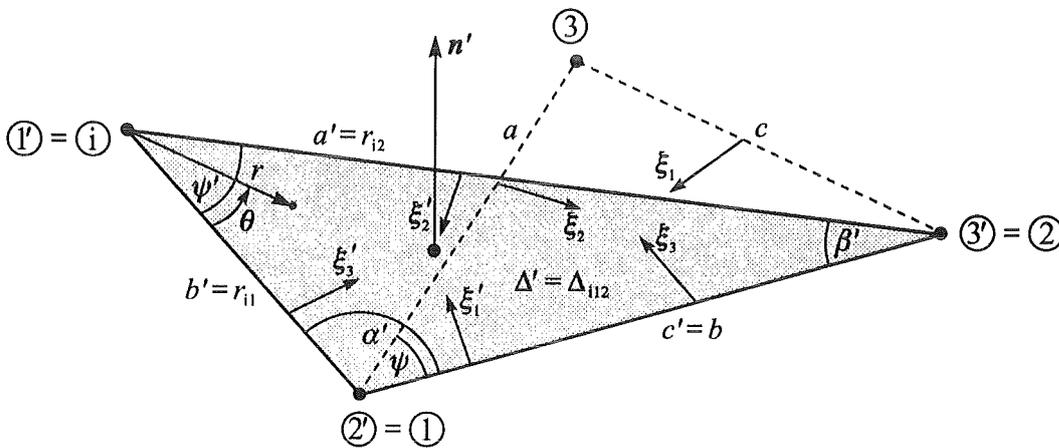


Abbildung 2.15: Geometrie im transformierten Koordinatensystem ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ' (hier: $\Delta' = \Delta_{i12}$)

Werden nun Gleichungen (2.64), (2.65) und (2.66) in die zu lösenden Integrale (2.63) eingesetzt, folgt beispielsweise für ξ_2

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma &= U_i \int_{\Delta'} \frac{1}{r} d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{11} b'}{b} \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{21} a'}{b} \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.67)$$

mit $r = r_i$. Da durch die Wahl des Dreiecks Δ' der Aufpunkt \textcircled{i} stets dem Dreiecksknoten \textcircled{v} entspricht, können bei der Lösung der verbleibenden Integrale in Gleichung (2.67) direkt die Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel verwendet werden. Führt man die drei Funktionen

$$g_{i1'}(a', b', c', A') = \frac{A'}{c'} \ln \left(\frac{a' + b' + c'}{a' + b' - c'} \right) \quad (2.68)$$

$$g_{i2'}(a', b', c', A') = \frac{a'^2 - b'^2 + c'^2}{2c'^2} g_{i1'} + \frac{A'}{c'^2} (b' - a') \quad \text{bzw.} \quad (2.69)$$

$$= g_{i1'}(a', b', c', A') - g_{i3'}(a', b', c', A') \quad \text{analog Kapitel 2.3.1} \quad (2.70)$$

$$g_{i3'}(a', b', c', A') = \frac{-a'^2 + b'^2 + c'^2}{2c'^2} g_{i1'} - \frac{A'}{c'^2} (b' - a') \quad \text{bzw.} \quad (2.71)$$

$$= g_{i1'}(a', b', c', A') - g_{i2'}(a', b', c', A') \quad \text{analog Kapitel 2.3.1} \quad (2.72)$$

ein, lassen sich die einzelnen Integrale aus Gleichung (2.67) sofort angeben

$$\int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = g_{i2'}(a', b', c', A') \quad (2.73)$$

$$\int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = g_{i3'}(a', b', c', A') \quad (2.74)$$

$$\int_{\Delta'} \frac{1}{r} d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{1}{r} r dr d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\psi'} \frac{R'(\theta)}{2} d\theta \stackrel{(2.43)}{=} 2 g_{i1'}(a', b', c', A') \quad (2.75)$$

Hier wurden wieder die Polarkoordinaten $r = r_i$ und θ mit dem Ursprung im Aufpunkt \textcircled{i} bzw. im Dreiecksknoten \textcircled{v} verwendet

$$0 \leq \theta \leq \psi' \quad (2.76)$$

$$0 \leq r = r_i \leq R'(\theta) \quad (2.77)$$

Mit der äußeren Integrationsgrenze $R'(\theta) = \frac{h'_c}{\sin(\alpha'+\theta)} = \frac{a' b' \sin \psi'}{c' \sin(\alpha'+\theta)}$ und dem Oberflächenelement $d\Gamma = r dr d\theta$ wurden auch die neuen homogenen Dreieckskoordinaten

$$\xi'_1 = 1 - \frac{r}{R'(\theta)} \quad (2.78)$$

$$\xi'_2 = \frac{r \sin(\psi' - \theta)}{h'_a} \quad (2.79)$$

$$\xi'_3 = \frac{r \sin \theta}{h'_b} \quad (2.80)$$

substituiert.

Die Gesamtlösung der analytischen Integration für die Dreiecksfläche Δ' bzw. $\Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12}$ lautet nun

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma &= 2 U_i g_{i1'}(a', b', c', A') \\ &+ \frac{\alpha_{11} b'}{b} g_{i2'}(a', b', c', A') \\ &+ \frac{\alpha_{21} a'}{b} g_{i3'}(a', b', c', A') \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma &= 2 V_i g_{i1'}(a', b', c', A') \\ &+ \frac{\alpha_{12} b'}{a} g_{i2'}(a', b', c', A') \\ &+ \frac{\alpha_{22} a'}{a} g_{i3'}(a', b', c', A') \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\int_{\Delta'} \xi'_1 \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = 2 g_{i1'}(a', b', c', A') - \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma - \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma \quad (2.83)$$

mit $\xi'_1 = 1 - \xi'_2 - \xi'_3$.

Für die endgültige Lösung der Integration über die 3 Dreiecksflächen muß jetzt nur noch die Zuordnung der geometrischen Variablen für jede Dreiecksfläche durchgeführt werden (vgl. Abbildung 2.16)

$$\begin{aligned} \Delta_{i23} : \quad & a' = r_{i3} & \alpha_{11} &= f_{\alpha}(e_{i2}, e_{12}, e_{13}) \\ & b' = r_{i2} & \alpha_{12} &= f_{\alpha}(e_{i2}, e_{13}, e_{12}) \\ & c' = c & \alpha_{21} &= f_{\alpha}(e_{i3}, e_{12}, e_{13}) \\ & A' = A_{i23} & \alpha_{22} &= f_{\alpha}(e_{i3}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i12} : \quad & a' = r_{i2} & \alpha_{11} &= f_{\alpha}(e_{i1}, e_{12}, e_{13}) \\ & b' = r_{i1} & \alpha_{12} &= f_{\alpha}(e_{i1}, e_{13}, e_{12}) \\ & c' = b & \alpha_{21} &= f_{\alpha}(e_{i2}, e_{12}, e_{13}) \\ & A' = A_{i12} & \alpha_{22} &= f_{\alpha}(e_{i2}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i13} : \quad & a' = r_{i3} & \alpha_{11} &= f_{\alpha}(e_{i1}, e_{12}, e_{13}) \\ & b' = r_{i1} & \alpha_{12} &= f_{\alpha}(e_{i1}, e_{13}, e_{12}) \\ & c' = a & \alpha_{21} &= f_{\alpha}(e_{i3}, e_{12}, e_{13}) \\ & A' = A_{i13} & \alpha_{22} &= f_{\alpha}(e_{i3}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.86)$$

mit

$$f_{\alpha}(e', e_1, e_2) = \frac{e'e_1 - e'e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad \text{und} \quad \cos \psi = e_1 e_2 \quad (2.87)$$

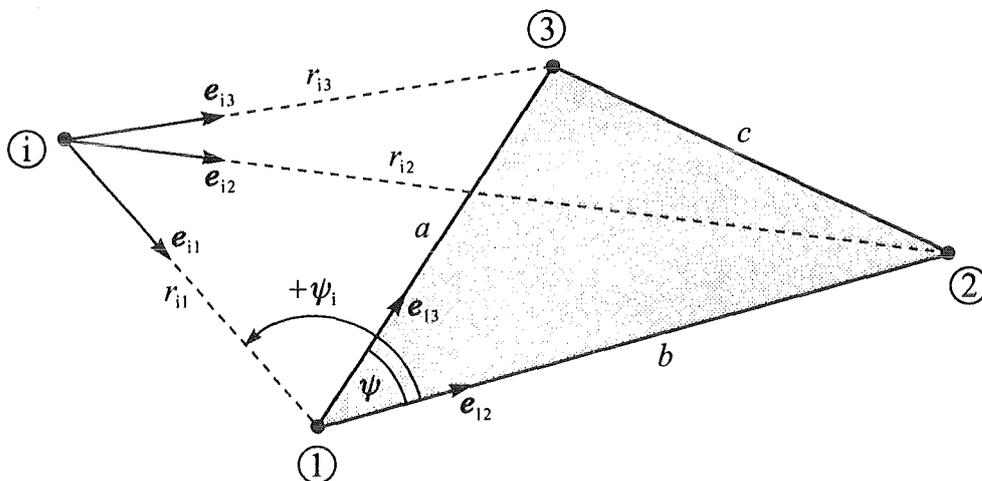


Abbildung 2.16: Geometrie bei der Integralzerlegung in die drei Dreiecksflächen Δ_{i23} , Δ_{i13} , Δ_{i12}

Danach erfolgt die Addition der Teilintegrale nach Gleichung (2.60).

2.3.3 Fall c) Aufpunkt liegt außerhalb der Elementebene

Der letzte noch zu behandelnde Fall, bei dem sich der Aufpunkt \textcircled{i} außerhalb der Elementebene befindet (siehe Abbildung 2.17), ist eigentlich ein klassisches Anwendungsgebiet für die numerische Integration, da nur noch reguläre Integrale auftreten. Viele Autoren verwenden zur Lösung der Integrale in den Boundary-Element-Einflußkoeffizienten die bekannte GAUSS-Quadratur. Noch bessere Ergebnisse liefern spezielle Quadraturverfahren, die die $1/r_i$ - und $1/r_i^2$ -Integranden besonders berücksichtigen [11, 25, 40, 52, 57, 61]. Allerdings macht die numerische Integration Schwierigkeiten, falls die Aufpunkte im Nahbereich des Boundary Elements liegen. Dabei können so kleine Abstände r_i auftreten, daß sich die ursprünglich regulären Integrale fast wie singuläre Integrale verhalten. Man spricht dann von quasi-singulären Integralen. In diesem Fall liefern nur noch spezielle adaptive Quadraturverfahren [25, 61] Ergebnisse mit hinreichender Genauigkeit, allerdings auf Kosten höherer Rechenzeiten.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg eingeschlagen:

Auch die regulären Integrale werden für das lineare Dreieckselement vollständig analytisch gelöst. Damit ist stets eine exakte Lösung vorhanden auch für den quasi-singulären Fall. Selbstverständlich bietet sich die analytische Lösung auch als Referenz zur Überprüfung neuer numerischer Verfahren an, die bei weit entfernten Aufpunkten mit ausreichender Genauigkeit wesentlich schneller arbeiten können.

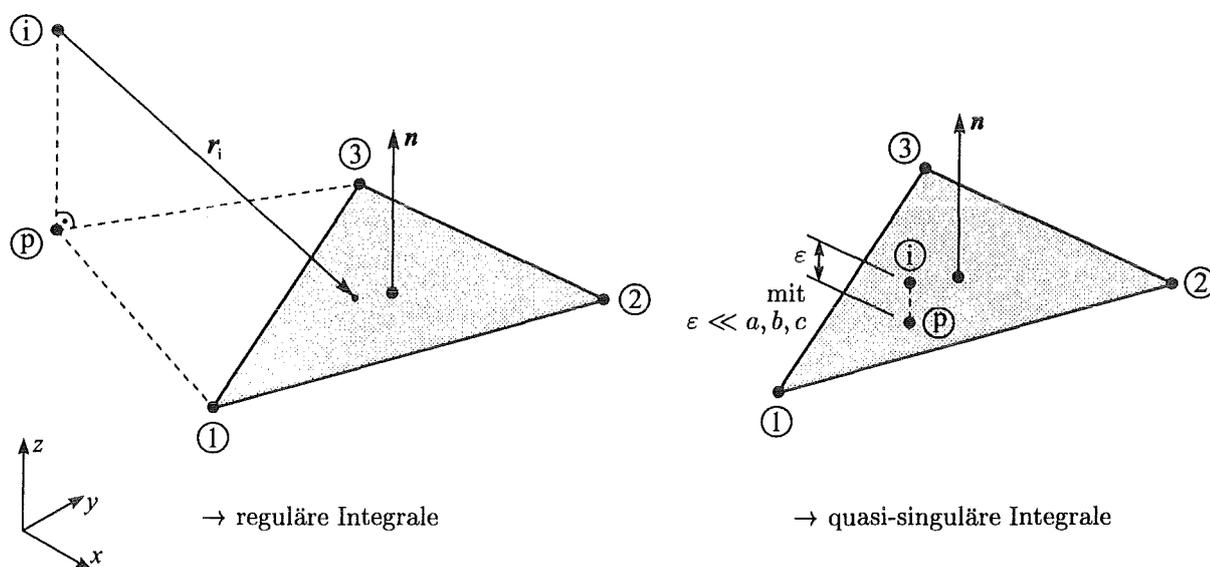


Abbildung 2.17: Aufpunkte außerhalb der Elementebene
mit $r_i \neq 0$ während der gesamten Integration

Im Gegensatz zum Fall a) und b) verschwindet das Skalarprodukt $\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ nicht, so daß auch für die h_{ij} -Koeffizienten

$$h_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{mit } j = 1 \dots 3 \quad (2.88)$$

Integrale bestimmt werden müssen. Außerdem ist der Term $\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ vorzeichenbehaftet. Liegt der Aufpunkt ① oberhalb der Elementebene, d.h. in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} , so ist dieser Term positiv, liegt er unterhalb der Elementebene, so ist er negativ. Für einen bestimmten Aufpunkt ist der Term $-\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ konstant, so daß er vor das Integral gezogen werden kann. Dieser Sachverhalt ist im Kapitel 3.1 näher beschrieben.

Für Aufpunkte außerhalb der Elementebene müssen also für das lineare Dreieckselement die Integrale

$$h_{ij} = -\mathbf{r}_i \mathbf{n} \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{und} \quad (2.89)$$

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.90)$$

mit $j = 1 \dots 3$ gelöst werden.

Zur Minimierung des Integrationsaufwands und der möglichen Fehlerquellen wird im Prinzip die gleiche Lösungsstrategie wie im Fall b) gewählt:

Zunächst wird die senkrechte (orthogonale) Projektion bzw. die Normalprojektion des Aufpunkts \textcircled{i} auf die Elementebene ermittelt, was auf den Fußpunkt des Lotes bzw. den Projektionspunkt \textcircled{P} führt. Das zu lösende Integral über die Elementdreiecksfläche wird in eine Summe von 3 Teilintegralen analog Abbildung 2.18 zerlegt. Dabei wird jedes einzelne Teilintegral über eine Dreiecksfläche gebildet, bei der der Projektionspunkt \textcircled{P} stets mit dem Eckknoten $\textcircled{1}$ zusammenfällt. Nach einer geeigneten Transformation auf die homogenen Dreieckskoordinaten ξ_j der neuen Integrationsdreiecksflächen entstehen Integrale, die relativ leicht zu lösen sind. Das Integrationsproblem wird also auf den Sonderfall reduziert, bei dem sich der Aufpunkt \textcircled{i} senkrecht über dem neuen Dreiecksknoten $\textcircled{1}$ befindet.

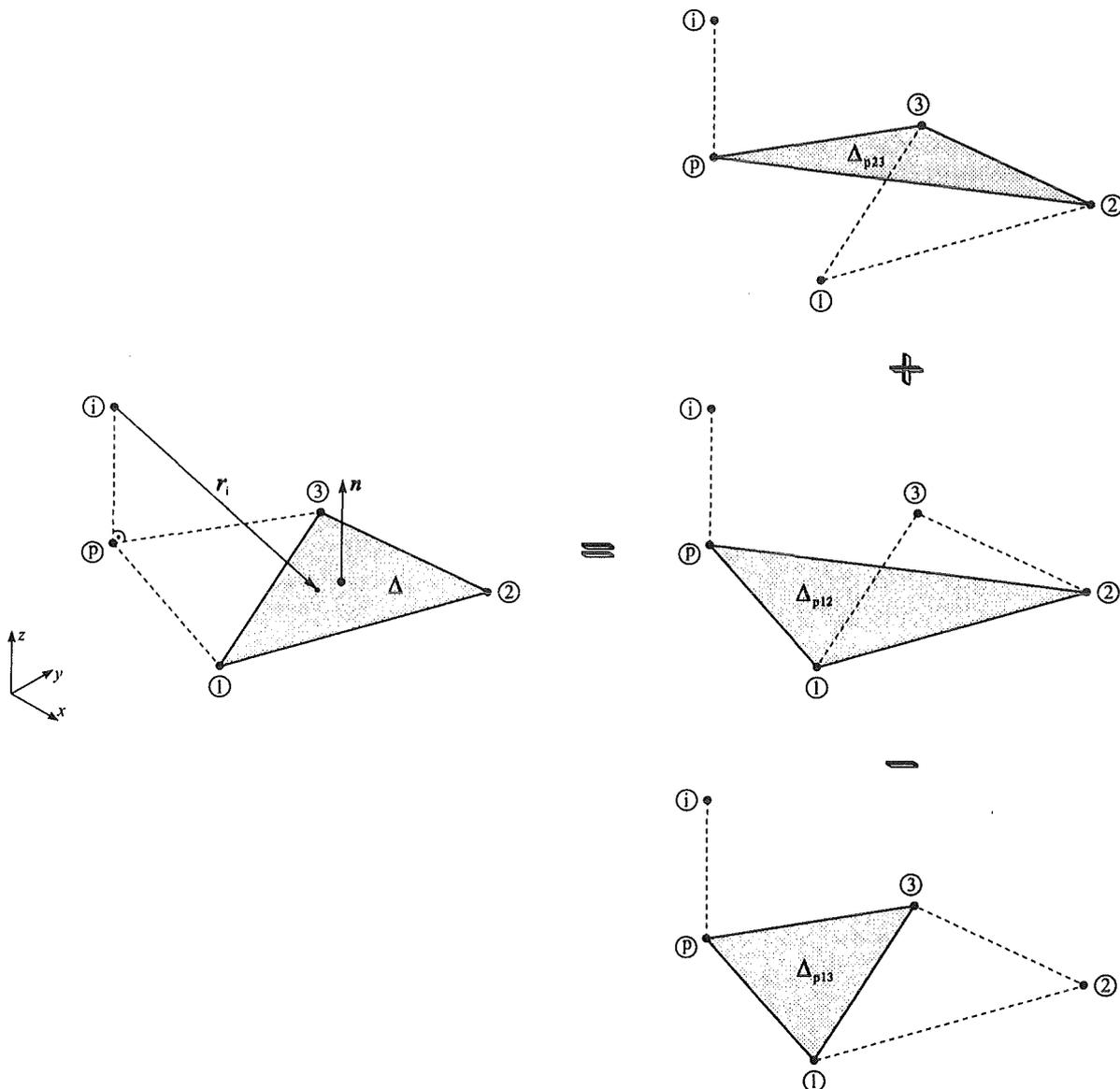


Abbildung 2.18: Lösungsstrategie für die analytische Integration bei Aufpunkten \textcircled{i} außerhalb der Elementebene

Nach der Ermittlung des Projektionspunkts \textcircled{P} werden die zu lösenden Integrale h_{ij} und g_{ij} nach der schon vorgestellten Methode (2.59) in eine Summe von Teilintegralen über die 3 Dreiecksflächen $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ zerlegt (vgl. Abbildung 2.18)

$$h_{ij} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (2.91)$$

$$g_{ij} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.92)$$

mit $j = 1 \dots 3$. Dabei sind ganz analog dem vorherigen Kapitel die Vorzeichenfunktionen

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{sgn}(W_p) \\ n_2 &= \text{sgn}(U_p) \\ n_3 &= \text{sgn}(V_p) \end{aligned} \quad (2.93)$$

definiert, nun aber bezogen auf den Projektionspunkt \textcircled{P} .

Die homogenen Dreieckskoordinaten U_p, V_p, W_p des Projektionspunkts \textcircled{P} lauten bzgl. des Dreieckselements gemäß Gleichungen (2.54) ff.

$$U_p = \frac{l_2}{h_a} = \frac{r_{p1} \sin(\psi - \psi_p)}{b \sin \psi} \quad (2.94)$$

$$V_p = \frac{l_3}{h_b} = \frac{r_{p1} \sin \psi_p}{a \sin \psi} \quad (2.95)$$

$$W_p = \frac{l_1}{h_c} = 1 - U_p - V_p \quad (2.96)$$

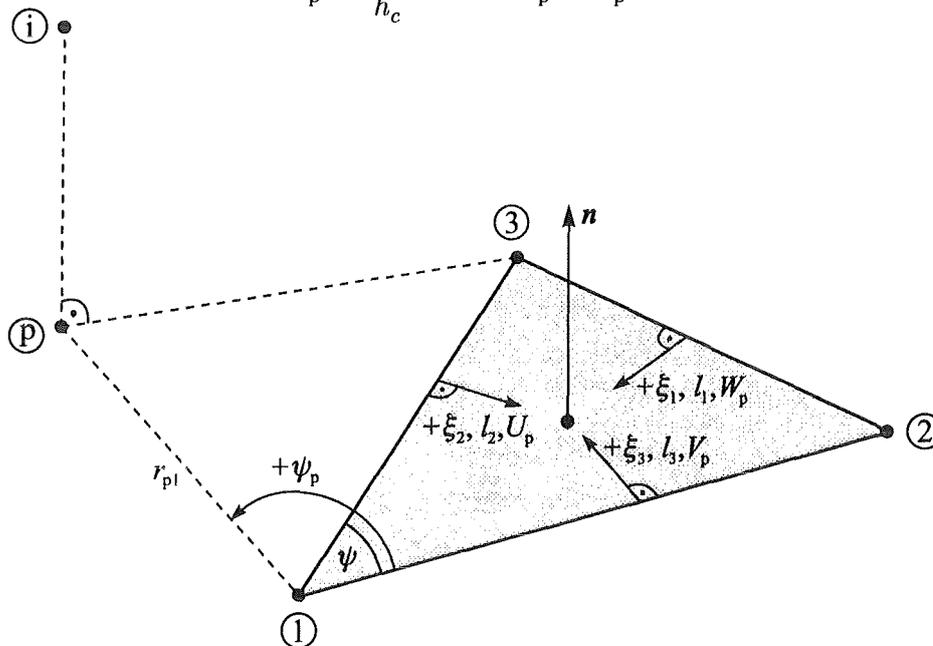


Abbildung 2.19: Geometrische Beschreibung des Projektionspunkts \textcircled{P} bzgl. des Dreieckselements

Nach der Zerlegung folgt nun die Integration über die 3 neuen Dreiecksflächen Δ_{p23} , Δ_{p13} und Δ_{p12} . Es entstehen Integrale der Form

$$\int_{\Delta'} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad (2.97)$$

und für $\Delta' = \Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ und $j = 1 \dots 3$

$$\int_{\Delta'} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (2.98)$$

Auch hier ist es wieder günstig, eine Transformation auf die lokalen homogenen Dreieckskoordinaten ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ' bzw. $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ durchzuführen, wobei der neue Dreiecksknoten \textcircled{P} stets dem Projektionspunkt \textcircled{P} entspricht (siehe Abbildung 2.20).

Analog dem Fall b) lassen sich die Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch die neuen lokalen Variablen, die wieder mit dem Strich (') gekennzeichnet sind, wie folgt ausdrücken

$$\xi_2 = U_p + \frac{\alpha_{11} b'}{b} \xi'_2 + \frac{\alpha_{21} a'}{b} \xi'_3 \quad (2.99)$$

$$\xi_3 = V_p + \frac{\alpha_{12} b'}{a} \xi'_2 + \frac{\alpha_{22} a'}{a} \xi'_3 \quad (2.100)$$

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3 \quad (2.101)$$

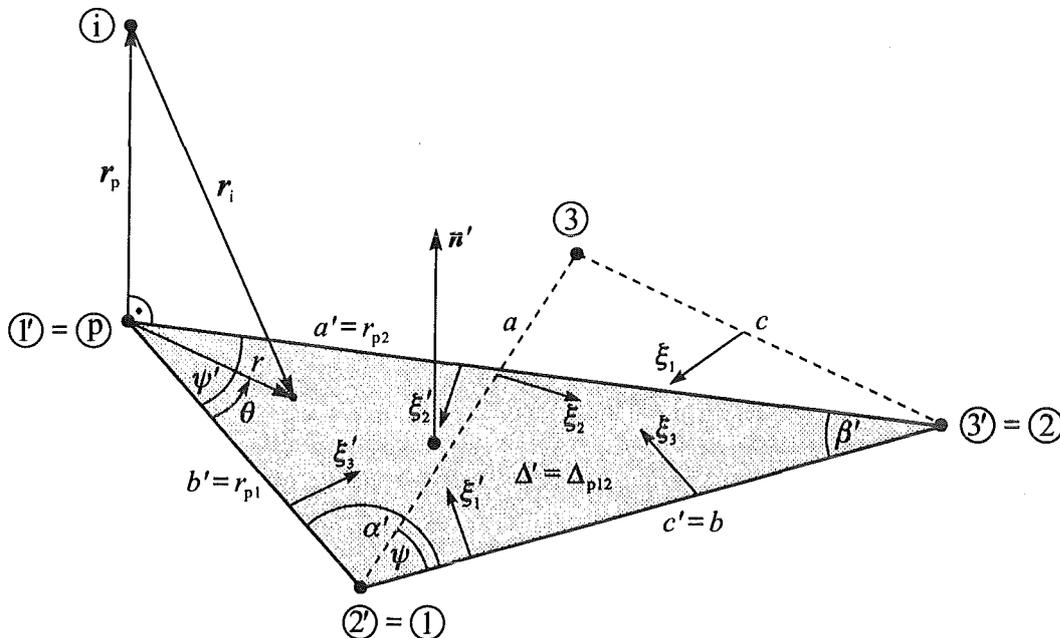


Abbildung 2.20: Geometrie im transformierten Koordinatensystem

ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ' (hier: $\Delta' = \Delta_{p12}$)

Werden nun ξ_1, ξ_2, ξ_3 in die zu lösenden Integrale (2.97) und (2.98) eingesetzt, folgt beispielsweise für ξ_2

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= U_p \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{11} b'}{b} \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{21} a'}{b} \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{und} \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= U_p \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{11} b'}{b} \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\ &+ \frac{\alpha_{21} a'}{b} \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.103)$$

Die nun noch verbleibenden Integrale

$$\int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma, \quad \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma, \quad \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma$$

und

$$\int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma, \quad \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma, \quad \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma$$

korrespondieren zum denkbar einfachsten Fall, bei dem sich der Aufpunkt \textcircled{i} senkrecht über dem Dreiecksknoten \textcircled{v} befindet.

Zur Lösung dieser Integrale wird wieder die Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ

$$0 \leq \theta \leq \psi' \quad (2.104)$$

$$0 \leq r \leq R'(\theta) \quad (2.105)$$

herangezogen, wobei der Koordinatenursprung im Eckknoten \textcircled{v} liegt, der ja dem Projektionspunkt \textcircled{p} entspricht. Die neuen homogenen Dreieckskoordinaten ξ_j' lassen sich dann wie folgt in den neuen Variablen r und θ ausdrücken

$$\xi_1' = \frac{l_1'}{h_c'} = 1 - \frac{r}{R'(\theta)} \quad (2.106)$$

$$\xi_2' = \frac{l_2'}{h_a'} = \frac{r \sin(\psi' - \theta)}{h_a'} \quad (2.107)$$

$$\xi_3' = \frac{l_3'}{h_b'} = \frac{r \sin \theta}{h_b'} \quad (2.108)$$

Mit der äußeren von θ abhängigen Integrationsgrenze

$$R'(\theta) = \frac{h'_c}{\sin(\alpha' + \theta)} = \frac{a' b' \sin \psi'}{c' \sin(\alpha' + \theta)} \quad (2.109)$$

und dem neuen Oberflächenelement

$$d\Gamma = r \, dr \, d\theta \quad (2.110)$$

sowie der Längenbeziehung

$$r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2} \quad (2.111)$$

lauten jetzt die zu lösenden Integrale

$$\int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{r}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr \, d\theta \quad (2.112)$$

$$\int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{\sin(\psi' - \theta)}{h'_a} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr \, d\theta \quad (2.113)$$

$$\int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{\sin \theta}{h'_b} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr \, d\theta \quad (2.114)$$

$$\int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr \, d\theta \quad (2.115)$$

$$\int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{\sin(\psi' - \theta)}{h'_a} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr \, d\theta \quad (2.116)$$

$$\int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi'} \int_{r=0}^{R'(\theta)} \frac{\sin \theta}{h'_b} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr \, d\theta \quad (2.117)$$

Für die verbleibenden Integrationen sind mehrere Rechenschritte notwendig. Sie sind ausführlich im Anhang B.2 auf Seite 121 ff. zusammengestellt. Die Endergebnisse dieser Integrationen lauten

$$\begin{aligned}
 h_1^*(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \\
 &= \frac{1}{r_p} \left[\psi' - \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta'}{\sqrt{h_c'^2 + r_p^2}} \right) + \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha'}{\sqrt{h_c'^2 + r_p^2}} \right) \right] \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\
 &= \frac{1}{h_a'} \left[\ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi' \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos \beta'}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \right] \quad (2.119)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_3(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\
 &= \frac{1}{h_b'} \left[\ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi' \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos \alpha'}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \right] \quad (2.120)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1^*(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma \\
 &= \frac{h_c'}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\
 &\quad - r_p \left[\psi' - \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta'}{\sqrt{h_c'^2 + r_p^2}} \right) + \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha'}{\sqrt{h_c'^2 + r_p^2}} \right) \right] \quad (2.121)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \xi_2' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\
 &= \frac{h_c'^2}{4} \frac{\cos \beta'}{h_a'} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\
 &\quad + \frac{h_c'}{2c'} \left(\sqrt{b'^2 + r_p^2} - \sqrt{a'^2 + r_p^2} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_2(a', b', c', r_p) \quad (2.122)
 \end{aligned}$$

*Für die Wahl der Bezeichnungen h_1 und g_1 siehe Fußnote Seite 122

$$\begin{aligned}
g_3(a', b', c', r_p) &:= \int_{\Delta'} \xi_3' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\
&= \frac{h_c'^2 \cos \alpha'}{4 h_b'} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\
&\quad + \frac{h_c'}{2c'} \left(\sqrt{a'^2 + r_p^2} - \sqrt{b'^2 + r_p^2} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_3(a', b', c', r_p)
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Die Gesamtlösung der analytischen Integration für die Dreiecksfläche Δ' bzw. $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ lautet damit

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= U_p h_1(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{11} b'}{b} h_2(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{21} a'}{b} h_3(a', b', c', r_p)
\end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta'} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= V_p h_1(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{12} b'}{a} h_2(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{22} a'}{a} h_3(a', b', c', r_p)
\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\int_{\Delta'} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = h_1(a', b', c', r_p) - \int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma - \int_{\Delta'} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \tag{2.126}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= U_p g_1(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{11} b'}{b} g_2(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{21} a'}{b} g_3(a', b', c', r_p)
\end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta'} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= V_p g_1(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{12} b'}{a} g_2(a', b', c', r_p) \\
&\quad + \frac{\alpha_{22} a'}{a} g_3(a', b', c', r_p)
\end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\int_{\Delta'} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = g_1(a', b', c', r_p) - \int_{\Delta'} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma - \int_{\Delta'} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \tag{2.129}$$

mit $\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3$.

Für die endgültige Lösung der Integration über die 3 Dreiecksflächen muß jetzt noch die Zuordnung der geometrischen Variablen für jede Dreiecksfläche durchgeführt werden (vgl. Abbildung 2.21). Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Dreieckshöhen h'_a, h'_b, h'_c und die Winkel α', β', ψ' aus den Dreiecksseiten a', b', c' gemäß Anhang A.1 eindeutig berechnet werden können.

$$\begin{aligned} \Delta_{p23} : \quad a' &= r_{p3} & \alpha_{11} &= f_\alpha(e_{p2}, e_{12}, e_{13}) \\ b' &= r_{p2} & \alpha_{12} &= f_\alpha(e_{p2}, e_{13}, e_{12}) \\ c' &= c & \alpha_{21} &= f_\alpha(e_{p3}, e_{12}, e_{13}) \\ & & \alpha_{22} &= f_\alpha(e_{p3}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p12} : \quad a' &= r_{p2} & \alpha_{11} &= f_\alpha(e_{p1}, e_{12}, e_{13}) \\ b' &= r_{p1} & \alpha_{12} &= f_\alpha(e_{p1}, e_{13}, e_{12}) \\ c' &= b & \alpha_{21} &= f_\alpha(e_{p2}, e_{12}, e_{13}) \\ & & \alpha_{22} &= f_\alpha(e_{p2}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p13} : \quad a' &= r_{p3} & \alpha_{11} &= f_\alpha(e_{p1}, e_{12}, e_{13}) \\ b' &= r_{p1} & \alpha_{12} &= f_\alpha(e_{p1}, e_{13}, e_{12}) \\ c' &= a & \alpha_{21} &= f_\alpha(e_{p3}, e_{12}, e_{13}) \\ & & \alpha_{22} &= f_\alpha(e_{p3}, e_{13}, e_{12}) \end{aligned} \quad (2.132)$$

mit

$$f_\alpha(e', e_1, e_2) = \frac{e'e_1 - e'e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad \text{und} \quad \cos \psi = e_1 e_2 \quad (2.133)$$

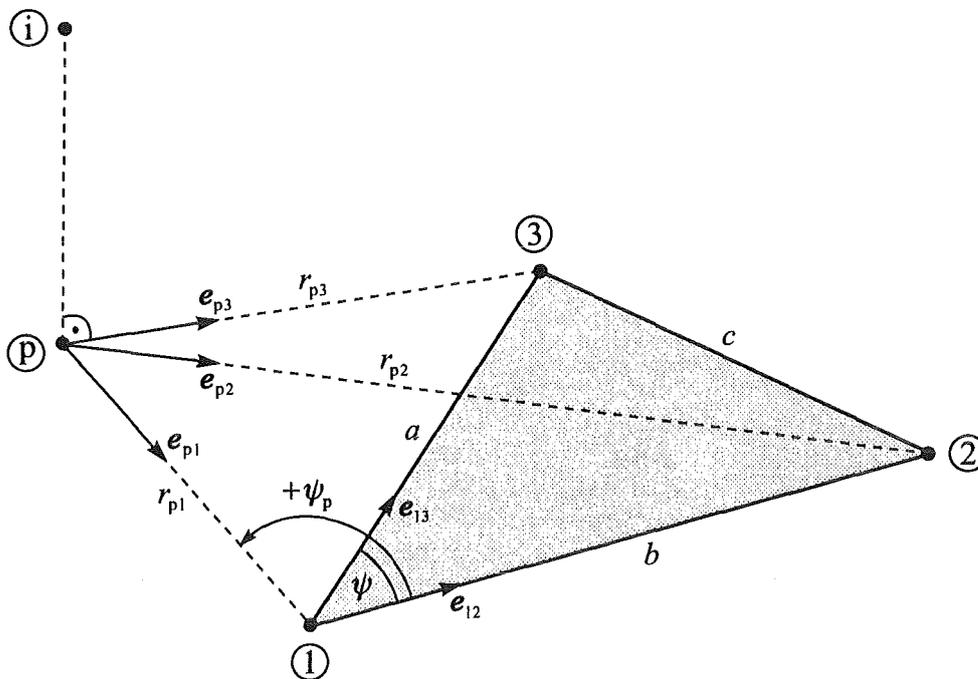


Abbildung 2.21: Geometrie bei der Integralzerlegung in die drei Dreiecksflächen $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$

Abschließend müssen nur noch die Teilintegrale nach Gleichungen (2.91) und (2.92) akkumuliert werden.

Da man bei den umfangreichen Integrationen der Element-Einflußkoeffizienten nie vor Fehlern sicher ist, sollten möglichst mehrere Lösungswege sowie Plausibilitätsuntersuchungen zur Überprüfung herangezogen werden. So haben sich in [13] bei der Lösung der Integrale Fehler eingeschlichen, die nicht entdeckt wurden. Eine analytische Überprüfung der Gleichungen fand nicht statt. Ferner sind die in [13] angegebenen Integrallösungen für den Fall "Aufpunkte außerhalb der Elementebene" sehr unzuweckmäßig dargestellt. Tatsächlich können die Integrationen, wie im Anhang B.2 beschrieben, wesentlich einfacher und kompakter hergeleitet und formuliert werden.

Für die Überprüfung der Integrationen h_2, h_3 und g_2, g_3 bietet sich wieder die Verwendung der redundanten Beziehung (2.5)

$$\xi'_1 = 1 - \xi'_2 - \xi'_3 \quad (2.134)$$

an. Mit der Gleichung $\xi'_1 = 1 - \frac{r}{R'(\theta)}$ folgt

$$\xi'_3 = \frac{r}{R'(\theta)} - \xi'_2 \quad \text{bzw.} \quad \xi'_2 = \frac{r}{R'(\theta)} - \xi'_3 \quad (2.135)$$

Diese Beziehung kann nun in h_3 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Delta'} \frac{r}{R'(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma - \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\ h_3 &= \int_{\Delta'} \frac{r}{R'(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma - h_2 \end{aligned} \quad (2.136)$$

Die verbleibende Integration ist ausführlich im Anhang B.2 beschrieben. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{1}{h'_c} \left[\cos \alpha' \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) + \cos \beta' \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2h'_c} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) - h_2 \end{aligned} \quad (2.137)$$

Damit ist eine Beziehung vorhanden, die zur Kontrolle von h_2 und h_3 verwendet werden kann. Setzt man die Lösung für h_2 bzw. h_3 ein, so bestätigt man, daß die Beziehung (2.137) erfüllt ist. Wäre das nicht der Fall, so müßte mindestens eine der Lösungen oder die Beziehung (2.137) fehlerhaft sein.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf den Koeffizienten g_3 liefert mit $\xi'_3 = \frac{r}{R'(\theta)} - \xi'_2$

$$\begin{aligned}
 g_3 &= \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\
 &= \int_{\Delta'} \frac{r}{R'(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma - \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\
 g_3 &= \int_{\Delta'} \frac{r}{R'(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma - g_2
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

Die analytische Integration des letzten Integrals ist wieder im Anhang B.2 zu finden. Daraus folgt die Beziehung

$$\begin{aligned}
 g_3 &= \frac{-r_p^2}{2h'_c} \left[\cos \alpha' \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) + \cos \beta' \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{h'_c}{4} + \frac{r_p^2}{4h'_c} \right) \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) - g_2
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

Weiterhin kann wieder die Plausibilitätsuntersuchung für die Integrationen h_2 und h_3 analog Kapitel 2.3.1 auf Seite 27 angewendet werden. Wegen der äquivalenten Integrationsgeometrien erhält man z.B. nach der Berechnung von h_3 durch Vertauschen der Dreiecksseiten a und b sowie der dazugehörigen Dreieckshöhen und -winkel direkt die Lösung für h_2 , die wieder der Gleichung (2.119) entspricht. Gleiche Überlegungen gelten für g_2 und g_3 .

Die Koeffizienten g_1 und h_1 , die quasi der Lösung des Dreieckselements mit *konstantem* Ansatz entsprechen (siehe Kapitel 4.1), können u.a. mit Lösungen aus der Literatur verglichen werden. In [25] und in [18, 48] ist die analytische Lösung für *konstante* Dreieckselemente angegeben, die ebenfalls auf der vorgestellten Integralzerlegung (2.91) und (2.92) aufbaut.

Kapitel 3

Implementierung des Dreieckselements TRIA3

Da die Elementlösung in vollständiger analytischer Form vorliegt, kann sie generell in einem Computeralgebraprogramm [45, 58] implementiert und *beliebig genau* ausgewertet werden. Dies ist z.B. bei der Überprüfung von numerischen Integrationsverfahren neuer Boundary Elemente wünschenswert, bei der eine exakte Referenzlösung benötigt wird.

Für den praktischen Einsatz in einem Boundary-Element-System ist jedoch eine algorithmische Implementierung der Elementlösung notwendig, die im folgenden Abschnitt beschrieben ist. Darauf basierend wurde das Dreieckselement TRIA3 für einen modularen Programmaufbau als Unterprogramm in ANSI FORTRAN 77 codiert. Das Quell-Code-Listing befindet sich im Anhang C.

3.1 Elementkonzept und Algorithmus

Das Elementkonzept des Dreieckselements TRIA3 ist in Abbildung 3.1 tabellarisch zusammengestellt.

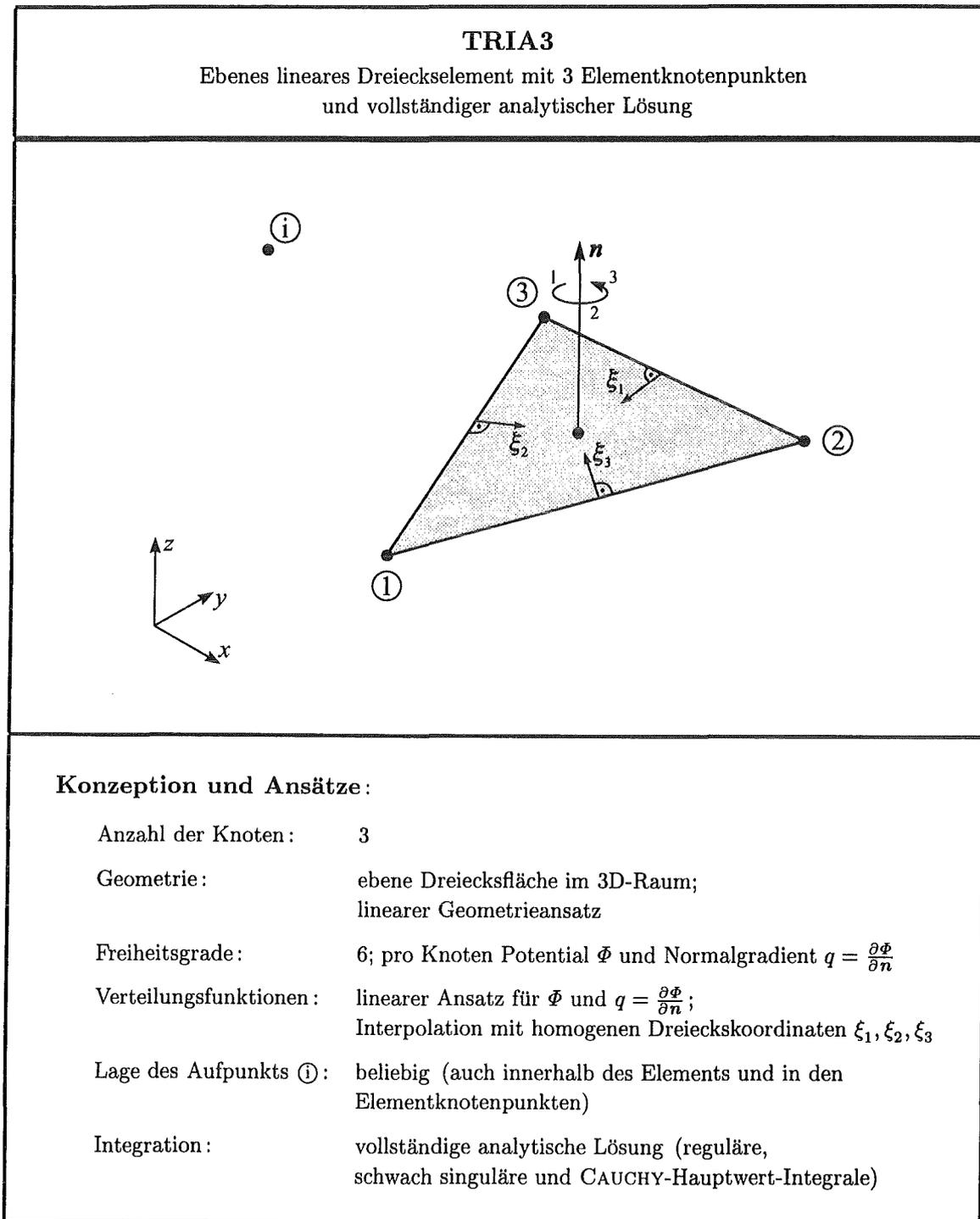


Abbildung 3.1: Elementkonzept des Dreieckselements TRIA3

Im Algorithmus muß zunächst untersucht werden, ob der Aufpunkt \textcircled{i} innerhalb oder außerhalb der Elementebene liegt. Hierzu wird der Projektionspunkt \textcircled{p} bestimmt, der der senkrechten Projektion des Aufpunkts auf die Elementebene entspricht.

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i - \mathbf{r}_p \quad (3.1)$$

(3×1)

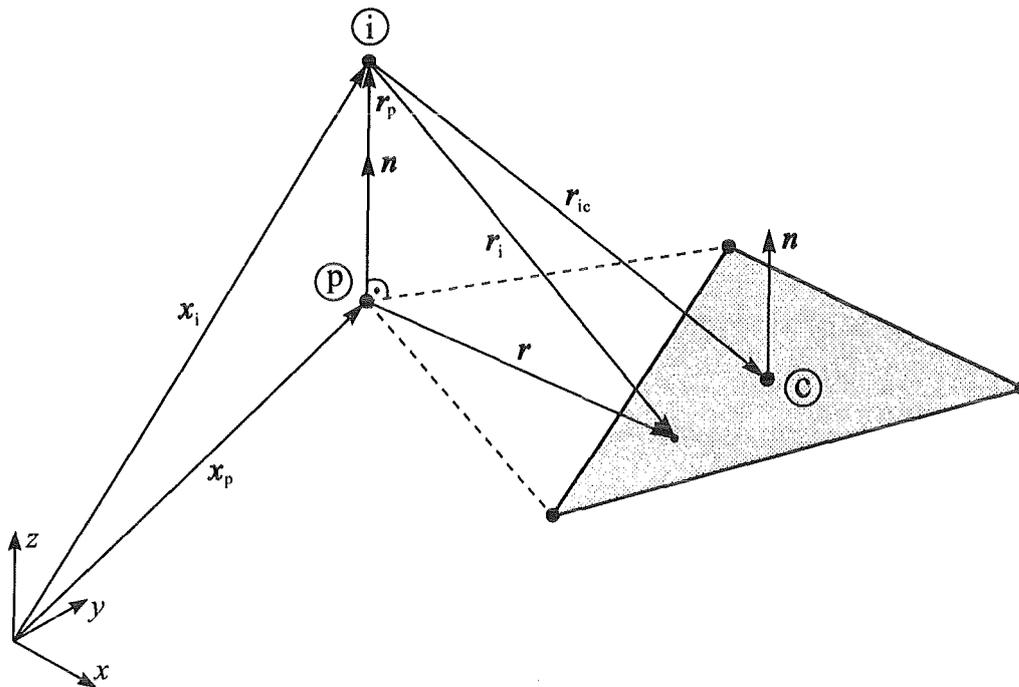


Abbildung 3.2: Ermittlung des Projektionspunkts \textcircled{p}

Der Vektor \mathbf{r}_p zwischen dem Projektionspunkt \textcircled{p} und dem Aufpunkt \textcircled{i} kann in Abhängigkeit des Elementnormalenvektors \mathbf{n} formuliert werden

$$\mathbf{r}_p = (\mathbf{r}_p \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.2)$$

(3×1)

Das Skalarprodukt $\mathbf{r}_p \mathbf{n}$ wird über

$$\mathbf{r}_p \mathbf{n} = -\mathbf{r}_i \mathbf{n} = -\mathbf{r}_{ic} \mathbf{n} \quad (3.3)$$

ermittelt, wobei $\mathbf{r}_{ic} = \mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i$ dem Vektor zwischen dem Aufpunkt \textcircled{i} und dem Elementschwerpunkt \textcircled{c} entspricht (siehe Abbildung 3.2). Die Skalarprodukte $\mathbf{r}_p \mathbf{n}$, $\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ und $\mathbf{r}_{ic} \mathbf{n}$ sind für einen Aufpunkt stets konstant. Ebenso sind sie je nach Lage des Aufpunkts \textcircled{i} vorzeichenbehaftet, ob dieser sich oberhalb oder unterhalb der Elementebene befindet.

Aus den Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) können nun die Koordinaten des Projektionspunkts \textcircled{p} bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p &= \mathbf{x}_i + (\mathbf{r}_i \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &= \mathbf{x}_i + (\mathbf{r}_{ic} \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bei der Berechnung der regulären Integrale (siehe Kapitel 2.3.3) wird häufig der Abstand r_p benötigt, der leicht über die Beziehungen (3.2) und (3.3) berechnet werden kann

$$r_p = |r_p| = |r_i \mathbf{n}| = |r_{ic} \mathbf{n}| \quad (3.5)$$

(1×1)

Mit diesen Daten kann nun der prinzipielle Element-Algorithmus formuliert werden, der in Abbildung 3.3 dargestellt ist.

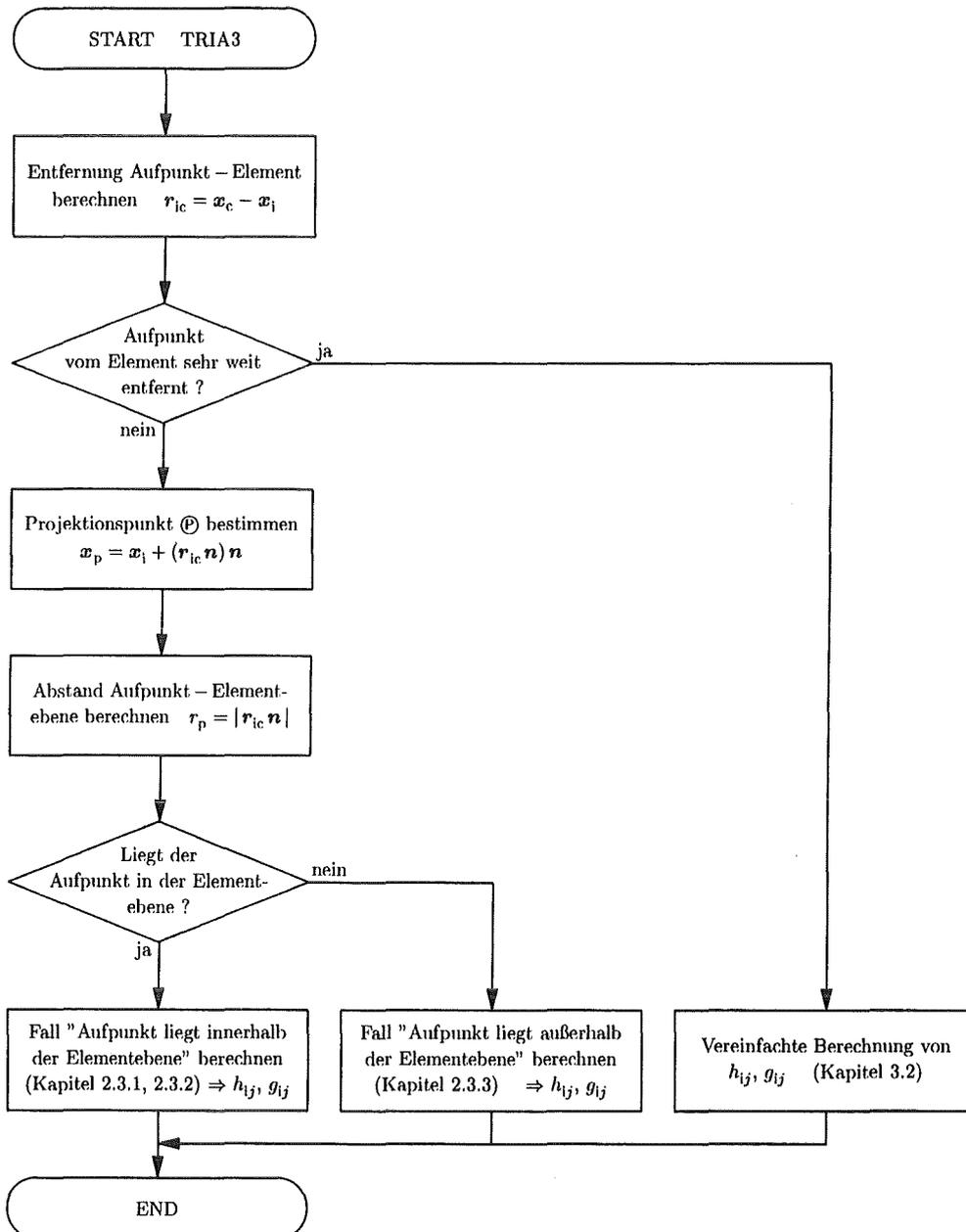


Abbildung 3.3: Prinzipieller Element-Algorithmus

Die eigentliche Berechnung der Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} und g_{ij} erfolgt in Abhängigkeit der Lage des Aufpunkts \textcircled{i} bzgl. der Elementebene. Zunächst wird die Implementierung für

den Fall c) diskutiert, bei dem sich der Aufpunkt außerhalb der Elementebene befindet. Der Algorithmus hierfür ist in Abbildung 3.4 skizziert.

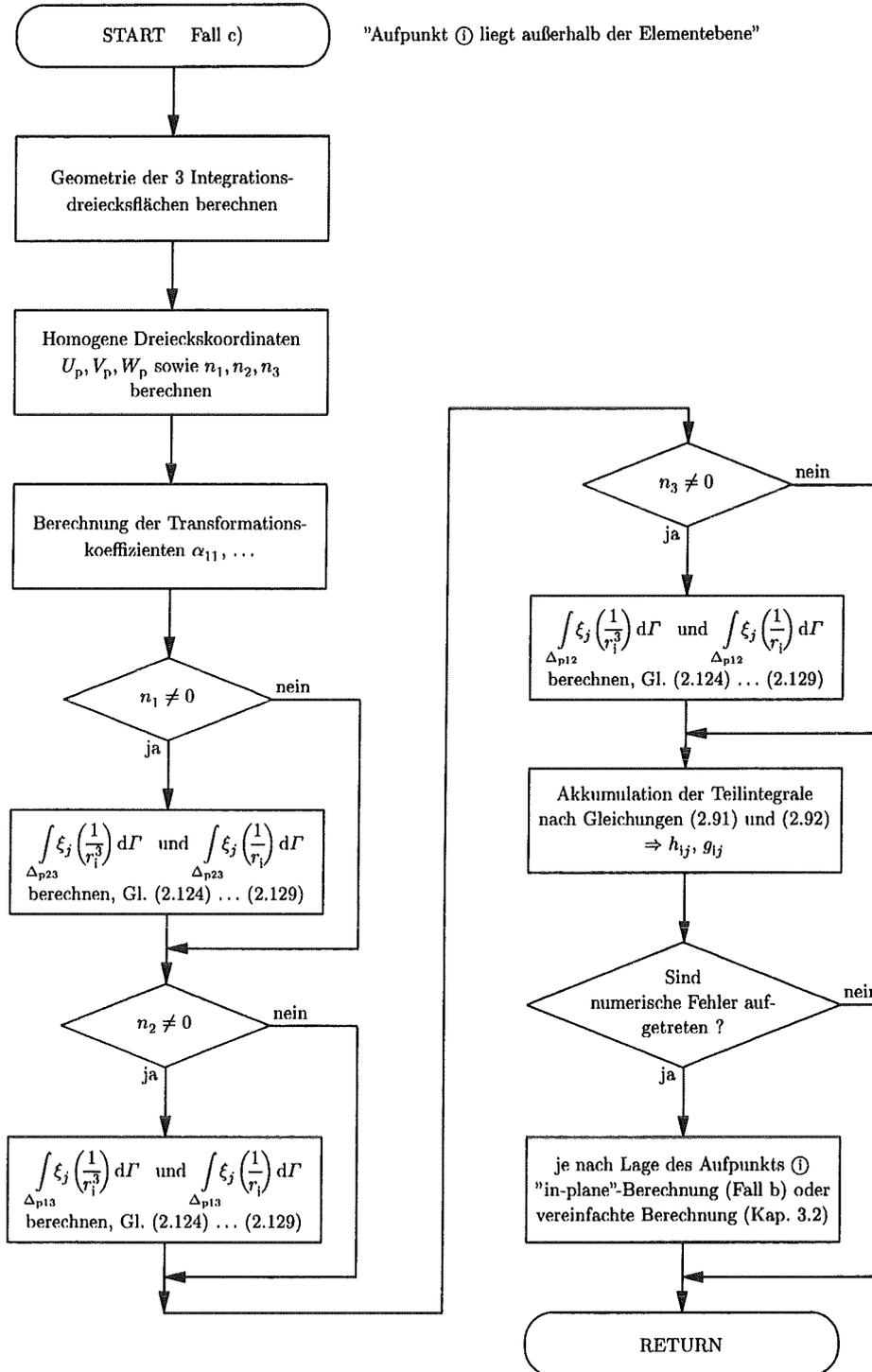


Abbildung 3.4: Algorithmus zur Berechnung des Falls "Aufpunkt i liegt außerhalb der Elementebene"

Nach der Integralzerlegung in die drei Integrationsdreiecksflächen $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ (siehe Kapitel 2.3.3) müssen die drei homogenen Dreieckskoordinaten U_p, V_p, W_p für den Projektionspunkt \textcircled{P} bzgl. dem Dreieckselement ermittelt werden.

$$U_p = \frac{l_2}{h_a} \quad (3.6)$$

$$V_p = \frac{l_3}{h_b} \quad (3.7)$$

$$W_p = \frac{l_1}{h_c} = 1 - U_p - V_p \quad (3.8)$$

Da der Projektionspunkt \textcircled{P} auch außerhalb des Dreieckselement liegen kann, können die Abstände l_1, l_2, l_3 und damit auch U_p, V_p, W_p negative Werte annehmen. Beispielsweise gilt für l_3

$$l_3 = r_{p1} \sin \psi_p \quad (3.9)$$

Dabei ist der Term $\sin \psi_p$ für das Vorzeichen verantwortlich und kann über das Spatprodukt

$$\sin \psi_p = (\mathbf{e}_{p1} \times \mathbf{e}_{12}) \mathbf{n} \quad (3.10)$$

aus den drei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{n}$ ermittelt werden (siehe Abbildung 2.21). Für l_2 gilt analog

$$l_2 = r_{p1} \sin(\psi - \psi_p) \quad (3.11)$$

mit

$$\sin(\psi - \psi_p) = (\mathbf{e}_{13} \times \mathbf{e}_{p1}) \mathbf{n} \quad (3.12)$$

Die drei Dreieckshöhen h_a, h_b, h_c können schließlich über die Gleichungen (A.14) bestimmt werden.

Bei der Berechnung der Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ für die Dreieckstransformationen (siehe Gleichungen (2.130) ff.) müssen effektiv nur 6 Kombinationen

$$\begin{array}{ll} f_\alpha(\mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}) & f_\alpha(\mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}) \\ f_\alpha(\mathbf{e}_{p2}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}) & f_\alpha(\mathbf{e}_{p2}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}) \\ f_\alpha(\mathbf{e}_{p3}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}) & f_\alpha(\mathbf{e}_{p3}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}) \end{array}$$

mit

$$f_\alpha(\mathbf{e}', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}'\mathbf{e}_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad \text{und} \quad \cos \psi = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$$

berücksichtigt werden. Auch in diesen 6 Funktionstermen treten gleiche Skalarprodukte auf, die bei einer Implementierung nur einmal berechnet werden müssen.

Für nicht verschwindende Dreiecksflächen $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ können dann die Integrale (2.124) ff. ausgewertet werden. Dabei treten in den Formeln (2.118) ff. einige Terme mehrmals auf, die bei einer Implementierung jedoch nur einmal berechnet werden müssen. Bei der Herleitung dieser Integrationsformeln im Anhang B wurde insbesondere berücksichtigt, daß keine dimensionsbehafteten Argumente in den Logarithmusfunktionen auftreten (z.B. $\ln r_p$), sondern nur dimensionslose Längenverhältnisse [24]. Dies erleichtert ebenso die anschließende Untersuchung auf numerische Fehler bei der Formelauswertung und bei der Akkumulation der Teilintegrale (siehe Kapitel 3.2).

Die Implementierung für den Fall, daß sich der Aufpunkt $\textcircled{1}$ innerhalb der Elementebene befindet, ist im Aufbau weitgehend identisch und wird daher nicht weiter diskutiert.

3.2 Numerische Analyse der Integrationsformeln

In Kapitel 2 ist die vollständige analytische Lösung für das lineare Dreieckselement hergeleitet worden.

Trotz analytischer Lösung können bei der numerischen Auswertung der Integrationsformeln in Computern Fehler auftreten, deren Ursache in der internen Zahldarstellung mit einer endlichen Anzahl an Ziffern liegt. Beispielsweise treten in den Integrationsformeln u.a. logarithmische und trigonometrische Funktionen mit $\frac{1}{r}$ -Termen auf, die für beliebige Abstände r einen großen Wertebereich abdecken und daher empfindlich auf numerische Fehler z.B. durch Subtraktionsauslöschung reagieren können.

In diesem Kapitel werden die Integrationsformeln im Hinblick auf die Codierung näher analysiert. Zusätzlich werden Kriterien hergeleitet, um die zu erwartenden numerischen Fehler abschätzen zu können und ggfs. eine günstigere Auswertung auszuführen. Bei der Fehlerrechnung wird auf die bekannte Technik der Rückwärtsuntersuchung (posteriori bounds) [70] zurückgegriffen, die u.a. auch in kommerziellen FE-Systemen [3] erfolgreich eingesetzt wird.

Zunächst folgt eine kurze Beschreibung der gängigen Zahldarstellungen in Computern sowie deren Darstellungsfehler incl. der wesentlichen Effekte bei der Subtraktionsauslöschung.

3.2.1 Zahlenarithmetik in Computern

In den heutigen Rechenanlagen werden im wesentlichen zwei Verfahren eingesetzt, um Zahlen intern darzustellen [68, 70]

- Festpunktdarstellung
- Gleitpunktdarstellung

Die Festpunktdarstellung kommt in der Praxis vorwiegend bei der INTEGER-Arithmetik und in kaufmännischen Programmen zum Einsatz. Bei den im technisch-wissenschaftlichen Bereich interessierenden REAL-Zahlen wird sie sehr selten verwendet und wird daher hier nicht näher diskutiert.

Bei der weit verbreiteten Gleitpunktschreibweise wird eine Zahl x durch eine Ziffernfolge fester Länge, der Mantisse m , einer weiteren Ziffernfolge, dem Exponenten e , und einer Vorzeichenstelle gespeichert, so daß die darzustellende Zahl die Form

$$x = \pm m B^e \tag{3.13}$$

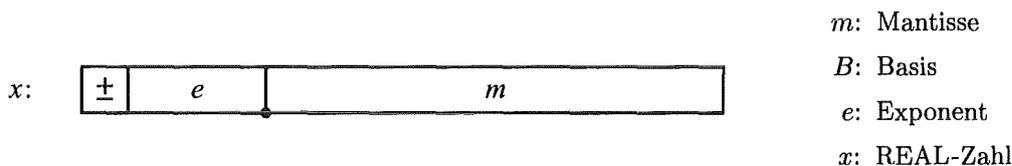


Abbildung 3.5: Zahldarstellung in Gleitpunktschreibweise

hat.

B ist die Basis der Gleitpunktdarstellung. Die meisten Computersysteme bzw. Compiler arbeiten im Binär- ($B = 2$) oder Hexadezimalsystem ($B = 16$).

Der Exponent e ist eine positive oder negative ganze Zahl und bestimmt in Kombination mit der Basis B die Größenordnung der Gleitpunktzahl (\rightarrow Zahlbereich bzw. Exponentenbereich).

Mit der Mantisse m werden die eigentlichen Ziffern der Gleitkommazahl dargestellt. Sie ist daher in Verbindung mit der Basis B für die Genauigkeit der Zahldarstellung verantwortlich. Fast bei allen heutigen Computersystemen befindet sich der (fiktive) Dezimalpunkt bzw. Radixpunkt vor der führenden Mantissenstelle, so daß m stets kleiner 1 ist. Um eine eindeutige Zahldarstellung und eine optimale Darstellungsgenauigkeit zu erreichen, wird die Mantisse immer normalisiert, d.h. führende Nullen werden durch Shiften des Exponenten e vermieden. Dadurch nimmt die Mantisse m stets Werte zwischen $\frac{1}{B} \leq |m| < 1$ ein.

Auf weitere Themen wie z.B. Vorzeichendarstellung (Einser-, Zweierkomplement), Exponentendarstellung (Charakteristik), Darstellung der absoluten Null, abschneidende oder rundende Arithmetik wird hier nicht weiter eingegangen. Eine ausführliche Darstellung darüber ist in den Standardwerken [68, 70] zu finden.

3.2.1.1 Darstellungsfehler bei Gleitpunktzahlen

Durch die endliche Anzahl an Ziffern können in einem Computer nur endlich viele verschiedene Zahlen dargestellt werden. Die reelle Zahlen zwischen zwei benachbarten Computerzahlen kann ein Rechner nicht exakt darstellen, sondern nur approximieren. Darstellungsfehler sind daher unumgänglich.

Bei der heute üblichen rundenden Arithmetik (im Gegensatz zur abschneidenden Arithmetik) hat man folgenden Darstellungsfehler

$$x = x_{\text{gerundet}} = x_{\text{exakt}} \pm \Delta_x \quad \text{mit } \Delta_x \geq 0 \quad (3.14)$$

$$= x_{\text{exakt}} (1 \pm \delta_x) \quad \text{mit } \delta_x \geq 0 \quad (3.15)$$

mit

x :	Gleitpunktzahl
x_{exakt} :	reelle darzustellende Zahl
Δ_x :	absoluter Darstellungsfehler
δ_x :	relativer bzw. normierter Darstellungsfehler ($= \Delta_x / x_{\text{exakt}} $)

Die obere Schranke für den normierten Darstellungsfehler δ_x beträgt bei rundender Arithmetik $\frac{1}{2} B^{1-t_{\text{max}}}$, wobei t_{max} die maximale Anzahl der Mantissenstellen ist [70]. Der Wertebereich des normierten Darstellungsfehler δ_x lautet damit

$$0 \leq \delta_x \leq UR = \frac{1}{2} B^{1-t_{\text{max}}} \quad (\text{rundende Arithmetik}) \quad (3.16)$$

$$0 \leq \delta_x \leq UR = B^{1-t_{\text{max}}} \quad (\text{abschneidende Arithmetik}) \quad (3.17)$$

Diese obere Schranke wird auch Einheitsrundungsfehler UR (engl.: unit roundoff) genannt und stellt die kleinste positive Gleitpunktzahl mit $1.0 + UR > 1.0$ dar. Der Einheitsrundungsfehler ist also ein Maß für die Darstellungsgenauigkeit der Gleitpunktarithmetik und wird häufig zur Prüfung auf numerische Fehler herangezogen. UR hängt vom Computertyp und von der Zahldarstellung des Compilers ab. UR und weitere computerspezifische Gleitpunktdaten können beispielsweise mit dem Programm MACHAR aus [53] oder über die LINPACK-/EISPACK-Funktionen D1MACH bzw. R1MACH ermittelt werden. Einige dieser Daten sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt.

Computersystem	Basis B	Mantissenlänge t_{\max}	unit roundoff UR	kleinste positive Zahl	größte positive Zahl
VAX/VMS	single	24	5.96E-08	2.94E-39 (2^{-128})	1.70E+38 (2^{127})
	double	53	1.11E-16	5.56E-309 (2^{-1024})	8.99E+307 (2^{1023})
IBM/MVS	single	6	9.54E-07	5.40E-79 (16^{-65})	7.24E+75 (16^{63})
	double	14	2.22E-16	5.40E-79 (16^{-65})	7.24E+75 (16^{63})
IEEE-Standard (AIX, HP-UX, ...)	single	24	1.19E-07	1.18E-38 (2^{-126})	3.40E+38 (2^{128})
	double	53	2.22E-16	2.23E-308 (2^{-1022})	1.80E+308 (2^{1024})

Tabelle 3.1: Gleitpunktarithmetik-Daten einiger Computersysteme

3.2.1.2 Numerische Fehler bei der Addition

Bei der Addition von Gleitpunktzahlen mit demselben Vorzeichen werden die Operationen

- Exponenten angleichen: Der kleinere Exponent beider Summanden wird dem größeren Exponenten angeglichen, indem seine Mantisse um die entsprechende Anzahl an Stellen nach rechts geschiftet wird (Verlust an Stellen)
- Mantissen addieren
- Ergebnis normalisieren
- u.U. überzählige Stellen abwerfen

durchgeführt, die in Abbildung 3.6 für das Beispiel $S = x + y$ mit $x > y > 0$ dargestellt sind. Fehler können in Form des Exponentenüberlaufs und bei der Exponentenangleichung des kleineren Summanden auftreten. Dieser Genauigkeitsverlust wirkt sich jedoch erst bei einer großen Anzahl an Summationen von kleinen Zahlen aus.

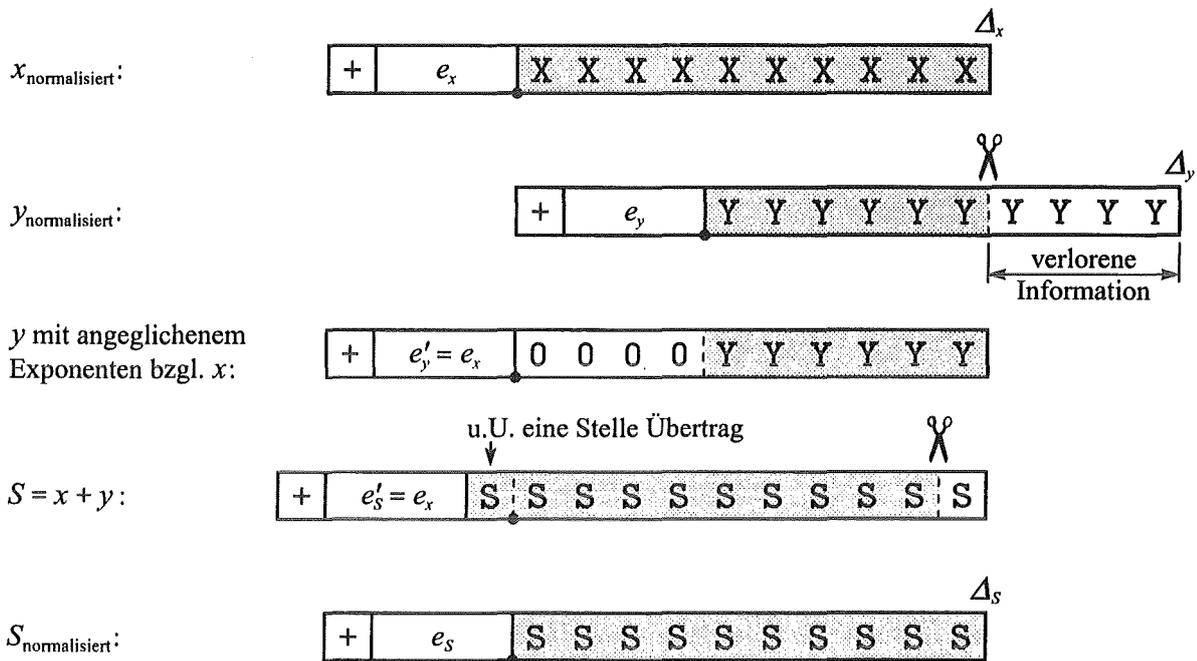


Abbildung 3.6: Operationen bei der Addition von Gleitpunktzahlen (hier: $S = x + y$ mit $x > y > 0$)

Im Gegensatz zur Subtraktion hängt bei der Addition die Genauigkeit des Endergebnis primär von der Darstellungsgenauigkeit der Summanden x und y ab. Für die Summe S gilt [70]

$$S = x + y = (x_{\text{exakt}} + y_{\text{exakt}}) \pm \Delta_S \tag{3.18}$$

mit

$$0 \leq \Delta_S \leq \max(\Delta_x, \Delta_y) \quad \text{bzw.} \tag{3.19}$$

$$0 \leq \delta_S \leq \frac{\max(\Delta_x, \Delta_y)}{|x_{\text{exakt}} + y_{\text{exakt}}|} \tag{3.20}$$

Diese Beziehung gilt auch für den Fall, daß die Summanden x und y eventuell schon durch vorherige Rechenoperationen fehlerbehaftet sind. Aus (3.19) ist ersichtlich, daß die maximalen absoluten Fehler der Summanden direkten Einfluß auf die Genauigkeit des Gesamtergebnis haben.

Falls die Summanden x und y reine Eingabegrößen sind, d.h. sie liegen mit voller Darstellungsgenauigkeit vor, lautet ihr absoluter Darstellungsfehler nach Gleichungen (3.14) und (3.15) $\Delta_x = |x_{\text{exakt}}| \delta_x$ und $\Delta_y = |y_{\text{exakt}}| \delta_y$. Für das Endergebnis S kann dann unter Berücksichtigung der guten Näherungen $|x_{\text{exakt}}| \delta_x \approx |x| \delta_x \leq |x| UR$ und $|y_{\text{exakt}}| \delta_y \approx |y| \delta_y \leq |y| UR$ die obere Fehlerschranke

$$0 \leq \Delta_S \leq \max(|x|, |y|) UR \quad \text{bzw.} \tag{3.21}$$

$$0 \leq \delta_S \leq \frac{\max(|x|, |y|) UR}{|x_{\text{exakt}} + y_{\text{exakt}}|} \tag{3.22}$$

angegeben werden. Das Gleitpunktergebnis S besitzt bei einer Addition reiner Eingabegrößen quasi die maximal mögliche Darstellungsgenauigkeit $\delta_S \leq UR$ (siehe auch Abbildung 3.6).

3.2.1.3 Numerische Fehler bei der Subtraktion

Werden zwei Gleitpunktzahlen voneinander subtrahiert, werden folgende Computerschritte durchlaufen:

- Exponenten angleichen: Der kleinere Exponent wird dem größeren angeglichen, indem seine Mantisse um die entsprechende Anzahl an Stellen nach rechts geschiftet wird (Verlust an Stellen)
- Mantissen subtrahieren
- Ergebnis normalisieren
- u.U. Rest (unterzählige Stellen) mit Nullen füllen

Dabei besitzen beide Operanden dasselbe Vorzeichen. Neben dem unbedeutenden Fehler des Exponentenunterlaufs kann bei der Subtraktion von nahezu gleich großen Zahlen die sogenannte Subtraktionsauslöschung auftreten (siehe Abbildung 3.7). Sie zählt in der Praxis zu den gefährlichsten numerischen Fehlern, da u.U. ein Programm mit irgendwelchen Zahlen weiterrechnet, die mit der eigentlichen Lösung nichts mehr zu tun haben.

Für das Gleitpunktergebnis S gilt [70]

$$S = x - y = (x_{\text{exakt}} - y_{\text{exakt}}) \pm \Delta_S \tag{3.23}$$

mit

$$0 \leq \Delta_S \leq \max(\Delta_x, \Delta_y) \quad \text{bzw.} \tag{3.24}$$

$$0 \leq \delta_S \leq \frac{\max(\Delta_x, \Delta_y)}{|x_{\text{exakt}} - y_{\text{exakt}}|} \tag{3.25}$$

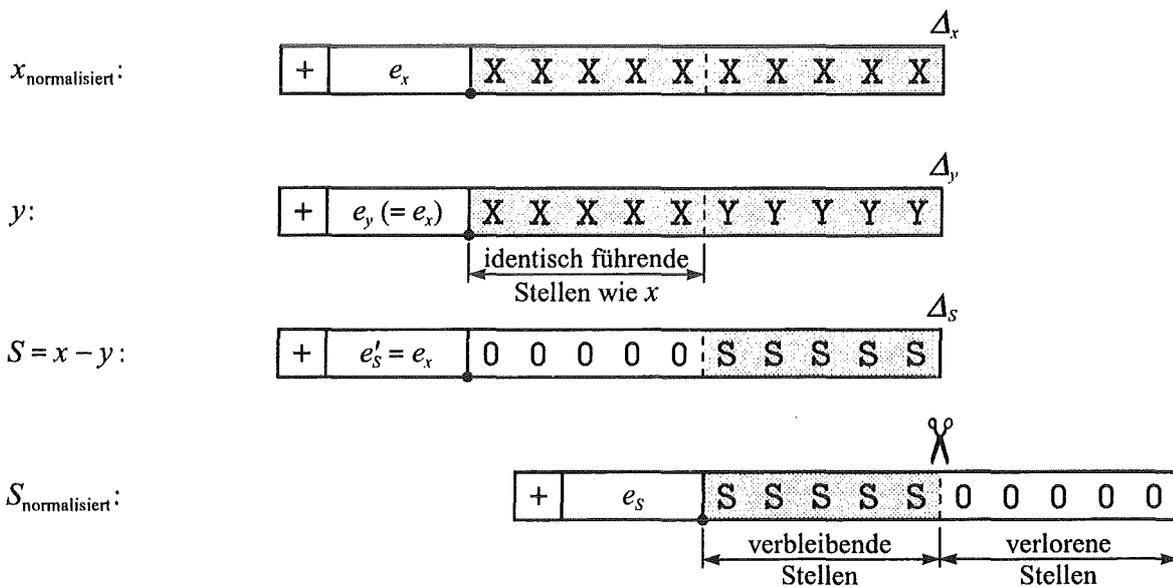


Abbildung 3.7: Subtraktionsauslöschung bei Gleitpunktzahlen (hier: $S = x - y$ mit $x \approx y$)

Die relative Genauigkeit des Ergebnisses hängt also nicht nur von der Darstellungsgenauigkeit der Operanden x und y ab, sondern insbesondere auch von der Größenordnung des Endergebnisses S (siehe Gleichung (3.25)). Falls x und y nahezu identisch sind, wird das Subtraktionsergebnis S und dessen Anzahl an gültigen Mantissenstellen sehr klein, was u.U. zu einem total unbrauchbaren Ergebnis führen kann.

Um diesen numerischen Fehler abfangen zu können, wird für die Subtraktion $S = x - y$ folgendes Testkriterium herangezogen:

Das numerische Ergebnis S sollte prinzipiell nicht kleiner als sein möglicher absoluter Fehler Δ_S sein. Vielmehr sollte durch das Testkriterium eine gewisse Genauigkeit bzw. eine bestimmte Anzahl genauer Mantissenstellen garantiert werden. Dies wird durch einen Shiftfaktor bzw. Verstärkungsfaktor erreicht, der den möglichen absoluten Fehler Δ_S um die geforderte Genauigkeit vergrößert. Um bei einem Wechsel der Genauigkeit der Gleitkommaarithmetik (z.B. Computerwechsel oder REAL-DOUBLE-PRECISION-Wechsel) die relative Rechengenauigkeit proportional zu ändern, sollten keine konstanten Shiftfaktoren verwendet werden. Es ist sinnvoller, den Shiftfaktor relativ zur Mantissenlänge in Abhängigkeit des Einheitsrundungsfehlers UR zu wählen. Falls nun

$$|S| \leq \Delta_S \cdot \text{Shiftfaktor} = \Delta_S UR^{-\kappa} = \max(\Delta_x, \Delta_y) UR^{-\kappa} \quad (3.26)$$

mit $0 \leq \kappa \leq 1$ erfüllt ist, besitzt das Ergebnis S weniger als $\kappa\%$ (garantiert) genaue Mantissenstellen (siehe Abbildung 3.8). Z.B. wären für $\kappa = 0.2$ weniger als 20% der möglichen Mantissenstellen genau gültig, was in der Praxis zu wenig ist. Dieses Testkriterium gilt auch für solche Operanden x und y , die eventuell schon durch vorherige Rechenoperationen fehlerbehaftet sind.

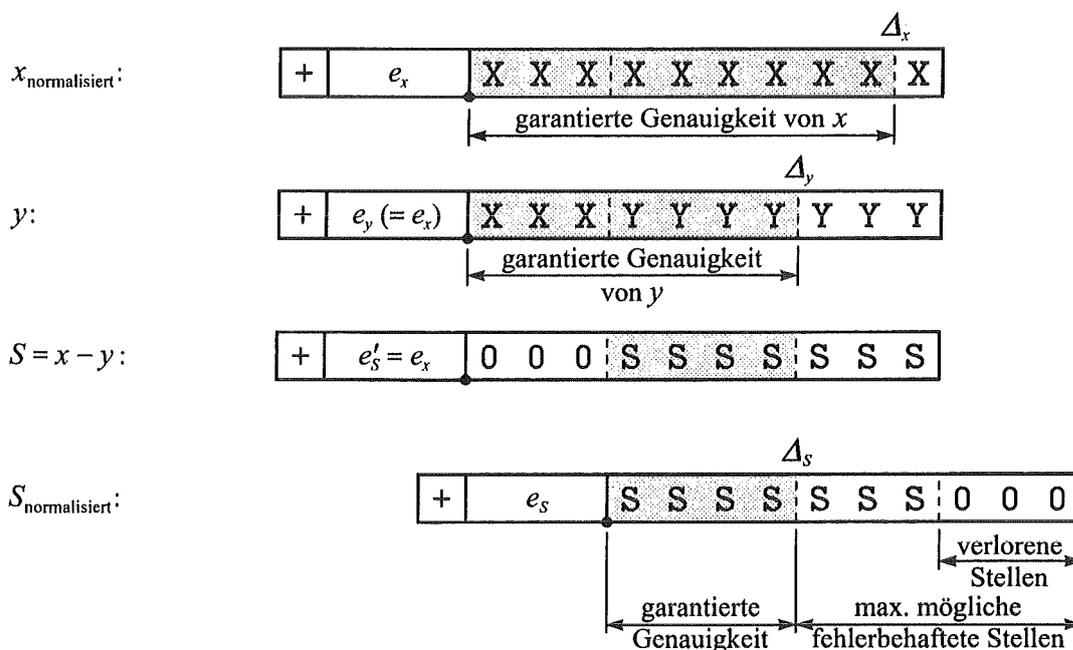


Abbildung 3.8: Subtraktion von Gleitpunktzahlen bei verminderter Anfangsgenauigkeit (hier: $S = x - y$ mit $x \approx y$)

Falls die Operanden x und y reine Eingabegrößen sind, d.h. sie liegen mit voller Darstellungsgenauigkeit vor, lautet ihr absoluter Darstellungsfehler nach Gleichungen (3.14) und (3.15) $\Delta_x = |x_{\text{exakt}}| \delta_x$ und $\Delta_y = |y_{\text{exakt}}| \delta_y$. Für das Endergebnis S kann dann unter Berücksichtigung der guten Näherungen $|x_{\text{exakt}}| \delta_x \approx |x| \delta_x \leq |x| UR$ und $|y_{\text{exakt}}| \delta_y \approx |y| \delta_y \leq |y| UR$ die obere Fehlerschranke

$$0 \leq \Delta_S \leq \max(|x|, |y|) UR \quad (3.27)$$

angegeben werden. Das Testkriterium für S lautet in diesem Fall

$$|S| \leq \max(|x|, |y|) UR UR^{-\kappa} = \max(|x|, |y|) UR^\nu \quad (3.28)$$

mit $0 \leq \nu \leq 1$, wobei dann bei S möglicherweise mehr als $\nu\%$ aller Mantissenstellen fehlerbehaftet sind. Ein typisches Beispiel für den Einsatz dieses Kriteriums ist der Test, ob der Vektor $r = x - y$ zwischen den beiden Ortsvektoren x und y dem Nullvektor entspricht. Dabei wird der Betrag des Vektors r nach Gleichung (3.28) untersucht, ob mehr als $\nu\%$ der gültigen Mantissenstellen verloren sind und somit r quasi Null ist.

3.2.2 Numerik bei der Akkumulation der 3 Teilintegrale

Prinzipiell nehmen die Integrale

$$\int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \stackrel{\text{stets}}{>} 0 \quad \text{mit } j = 1 \dots 3 \quad (3.29)$$

$$\int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \stackrel{\text{stets}}{>} 0 \quad (3.30)$$

der Element-Einflußkoeffizienten $h_{ij} = -r_i \mathbf{n} \int_{\Delta} \xi_j / r_i^3 d\Gamma$ und $g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j / r_i d\Gamma$ stets positive Werte an, da immer $r_i \geq 0$ ist und auch die Integration über die Dreiecksfläche Δ mit $0 \leq \xi_j \leq 1$ immer positiv ausfällt.

Allerdings können bei der Integralzerlegung gemäß Gleichungen (2.60), (2.91) und (2.92)

$$\underbrace{\int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{\stackrel{\text{stets}}{>} 0} = n_1 \underbrace{\int_{\Delta_{i23}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{\leq 0} + n_2 \underbrace{\int_{\Delta_{i13}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{\leq 0} + n_3 \underbrace{\int_{\Delta_{i12}} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma}_{\leq 0} \quad (3.31)$$

die Teilintegrale $\int_{\Delta_{i23}}, \int_{\Delta_{i13}}, \int_{\Delta_{i12}}$ bzw. $\int_{\Delta_{p23}}, \int_{\Delta_{p13}}, \int_{\Delta_{p12}}$ auch negative Werte annehmen. Ursache hierfür ist die Integration über die homogenen Koordinaten ξ_1, ξ_2 und ξ_3 , die für einen beliebigen Aufpunkt \textcircled{i} auch negativ sein können (siehe Abbildung 2.14). Erst nach der Akkumulation der drei Teilintegrale verschwinden die Vorzeichen wieder.

Treten in den Summen dennoch negative Werte auf, so liegt ein numerischer Fehler durch Subtraktionsauslöschung großer Zahlenwerte vor. Dieser Fehler kommt aber erst bei großen Abständen r_i zum Tragen. Mit zunehmenden Abstand r_i wachsen die Werte der Teilintegrale stark an. Andererseits werden deren Summe und somit die Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} und g_{ij} immer kleiner.

Dieses recht konservative Testkriterium kann noch weiter verbessert werden:

Ein numerischer Fehler durch Subtraktionsauslöschung zweier großer Zahlen x und y kann nach der Beziehung (3.28)

$$|x - y| \leq \max(|x|, |y|) UR^\nu$$

abgefangen werden. Andererseits kann auch die Größe der Zahlen x und y abgetestet werden, ab der ein großer numerischer Fehler durch Subtraktionsauslöschung zu erwarten ist, falls die Größenordnung der Differenz $|x - y|$ bekannt ist. Kritisch wird es z.B. für etwa gleich große x und y , falls

$$|x| > \frac{|x - y|}{UR^\nu} \quad (3.32)$$

Bei der oben beschriebenen Integralzerlegung ist für weit entfernte Aufpunkte vom Element das Akkumulationsergebnis, nämlich die Element-Einflußkoeffizienten h_i und g_i , in erster Näherung bekannt:

$$h_{ij} = -r_i \mathbf{n} \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{mit } j = 1 \dots 3$$

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma$$

Für große r_i sind die r_i -Terme vom Integrationsweg unabhängig und können als Konstanten vor das Integral gezogen werden. Mit der Integrationsformel für homogene Dreieckskoordinaten [16]

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = 2A \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} \quad (3.33)$$

folgt für große r_i

$$h_{ij}: \quad \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \approx \frac{1}{r_i^3} \int_{\Delta} \xi_j d\Gamma = \frac{A}{3r_i^3} \quad (3.34)$$

$$g_{ij}: \quad \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \approx \frac{1}{r_i} \int_{\Delta} \xi_j d\Gamma = \frac{A}{3r_i} \quad (3.35)$$

mit der Elementdreiecksfläche A . Dabei kann für große r_i z.B. der Abstand r_{ic} zwischen dem Aufpunkt \textcircled{i} und dem Elementschwerpunkt \textcircled{c} verwendet werden (siehe Seite 51).

Große numerische Fehler durch Subtraktionsauslöschung bei der Akkumulation der Einflußkoeffizienten h_i und g_i können nun folgendermaßen abgefangen werden. Falls die Teilintegrale über $\Delta' = \Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12}$ bzw. $\Delta' = \Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$ und $j = 1 \dots 3$

$$\left| \int_{\Delta'} \xi_j \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right| > \frac{A}{3r_{ic}^3 UR^\nu} \quad (3.36)$$

$$\left| \int_{\Delta'} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \right| > \frac{A}{3r_{ic} UR^\nu} \quad (3.37)$$

sind, gehen bei der Akkumulation möglicherweise mehr als $\nu\%$ aller Mantissenstellen verloren. Bei diesem Testkriterium wurde berücksichtigt, daß für große r_i die Teilintegrale betragsmäßig dieselbe Größenordnung besitzen.

Falls mit diesem Testkriterium ein großer numerischer Fehler durch Subtraktionsauslöschung vorhergesagt wird, existieren für den Fall großer Entfernungen des Aufpunkts ① vom Element mehrere Lösungsmöglichkeiten:

- Rechnung mit einer längeren Mantisse (z.B. auch mit Computeralgebrasoftware [45, 58])
- Einsatz eines einfachen Quadraturverfahrens
- Verwendung der guten Näherungen

$$h_{ij} \approx -r_i \mathbf{n} \frac{A}{3r_{ic}^3} \quad \text{für } j = 1 \dots 3 \quad (3.38)$$

$$g_{ij} \approx \frac{A}{3r_{ic}} \quad (3.39)$$

3.2.3 Numerik bei der Berechnung der Integrationsformeln

Auch bei der numerischen Auswertung der analytischen Integrationsformeln $h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3$ gemäß Gleichungen (2.118) ff. können große numerische Fehler durch Subtraktionsauslöschung entstehen. Sie treten bei großen Entfernungen r_i des Aufpunkts ① vom Element auf. Ebenso können sehr kleine Abstände r_p des Aufpunkts von der Elementebene bei der numerischen Auswertung Probleme bereiten.

Analog Gleichungen (3.29) und (3.30) nehmen die sechs Integrale

$$\int_{\Delta'} \xi_j' \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \stackrel{\text{stets}}{>} 0 \quad \text{mit } j = 1 \dots 3$$

$$\int_{\Delta'} \xi_j' \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \stackrel{\text{stets}}{>} 0 \quad \text{und } \Delta' = \Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$$

bzw.
$$h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3 \stackrel{\text{stets}}{>} 0 \quad (3.40)$$

stets positive Werte an, da immer $r_i \geq 0$ ist und auch die Integration über die drei Dreiecksflächen Δ' mit $0 \leq \xi_j' \leq 1$ immer positiv ausfällt. Falls die Numerik für die oben genannten Integrale negative Werte liefert, liegt prinzipiell ein numerischer Fehler vor. Diese Aussage ist jedoch sehr konservativ, da auch sehr kleine positive Werte fehlerbehaftet sein können. Daher folgt nun eine detailliertere Untersuchung der Integrationsformeln hinsichtlich numerischer Fehler.

Beim Integral

$$h_1 = \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma = \frac{1}{r_p} (\psi' - d)$$

mit

$$d = \arccos \left(\frac{-\cos \beta'}{\sqrt{\left(\frac{h_c'}{r_p}\right)^2 + 1}} \right) - \arccos \left(\frac{\cos \alpha'}{\sqrt{\left(\frac{h_c'}{r_p}\right)^2 + 1}} \right)$$

gemäß Gleichung (2.118) tritt Subtraktionsauslöschung bei großen Abständen r_p auf.

Für

$$\begin{aligned}
 r_p \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h'_p}{r_p}\right)^2 + 1}} \rightarrow 1 \\
 &\Rightarrow d \rightarrow \arccos(-\cos \beta') - \arccos(\cos \alpha') = \pi - \beta' - \alpha' = \psi' \\
 &\Rightarrow \psi' - d \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

D.h. für große r_p geht der Wert von d gegen ψ' und es erfolgt eine Subtraktionsauslöschung. Dieser numerische Fehler kann bei der Berechnung des Integrals h_1 mit

$$\psi' - d \leq \psi' UR^\nu \quad (3.41)$$

abgefangen werden. Für $\nu = 0.6$ wären dann möglicherweise mehr als 60% aller Mantissenstellen fehlerbehaftet. Für kleine Abstände r_p des Aufpunkts ① zur Elementebene geht $d \rightarrow 0$ und somit $\psi' - d \rightarrow \psi'$, wobei keine kritische numerische Fehler auftreten.

Bei der numerischen Auswertung der Integrationsformeln (2.119) und (2.120)

$$\begin{aligned}
 h_2 &= \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\
 &= \frac{1}{h'_a} \left[\ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi' \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos \beta'}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_3 &= \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\
 &= \frac{1}{h'_b} \left[\ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi' \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos \alpha'}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \right]
 \end{aligned}$$

können ebenfalls numerische Fehler durch Subtraktionsauslöschung entstehen. Da sich die numerischen Untersuchungen der beiden Integrale h_2 und h_3 im Prinzip gleichen, wird im folgenden stellvertretend das Integral h_2 betrachtet.

Der Funktionswert $h_2 h_a'$ wird aus den drei Operanden

$$\begin{aligned} x &:= \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p}\right)^2 + 1} \right) \\ y &:= -\cos \psi' \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p}\right)^2 + 1} \right) \\ z &:= -\frac{\cos \beta'}{2} \ln \left(\frac{\left[1 + \frac{a' \cos \beta'}{\sqrt{a'^2 + r_p^2}}\right] \left[1 + \frac{b' \cos \alpha'}{\sqrt{b'^2 + r_p^2}}\right]}{\left[1 - \frac{a' \cos \beta'}{\sqrt{a'^2 + r_p^2}}\right] \left[1 - \frac{b' \cos \alpha'}{\sqrt{b'^2 + r_p^2}}\right]} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

gebildet, die je nach Größe der Dreieckswinkel ψ' und β' miteinander addiert oder subtrahiert werden. Da wegen der Dreiecksbeziehung $\alpha' + \beta' + \psi' = 180^\circ$ mindestens einer der beiden Winkel ψ' oder β' kleiner als 90° ist, tritt in jedem Fall eine Subtraktion bei der Berechnung von h_2 auf, bei der die gefährliche Stellenauslöschung untersucht werden muß.

Analog den beschriebenen Gleitpunktoperationen Addition und Subtraktion mit zwei Operanden (siehe Kapitel 3.2.1.2 und 3.2.1.3) kann für eine Summe S

$$\begin{aligned} S &= x \pm y \pm z \\ &= S_{\text{exakt}} \pm \Delta_S \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit den drei Summanden x, y, z folgendes Testkriterium angewendet werden:

Falls

$$|S| \leq \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) UR^{-\kappa} \quad (3.44)$$

mit $0 \leq \kappa \leq 1$ erfüllt ist, besitzt das Ergebnis S weniger als $\kappa\%$ (garantiert) genaue Mantissenstellen. Auch hier ist wieder der maximal mögliche Fehler Δ_S mit einem Shiftfaktor $UR^{-\kappa}$ vergrößert worden, damit für die Rechenoperation $S = x \pm y \pm z$ bestimmte Anzahl genauer Mantissenstellen garantiert werden kann.

Für sehr kleine Abstände r_p nehmen die Argumente in den Logarithmusfunktionen (3.42) stark zu, so daß die Logarithmen in den Operanden x, y, z deutlich größer Null sind. In diesem Fall können als obere Fehlerschranken die Näherungen

$$\begin{aligned} \Delta_x &= |x_{\text{exakt}}| \delta_x \approx |x| \delta_x \leq |x| UR \\ \Delta_y &= |y_{\text{exakt}}| \delta_y \approx |y| \delta_y \leq |y| UR \\ \Delta_z &= |z_{\text{exakt}}| \delta_z \approx |z| \delta_z \leq |z| UR \end{aligned} \quad \text{für sehr kleine } r_p \quad (3.45)$$

verwendet werden.

Beim Testkriterium (3.44) wurde direkt berücksichtigt, daß die Operanden x, y, z eventuell schon durch vorherige Rechenoperationen fehlerbehaftet sind. Bei den hier untersuchten Integrationsformeln besitzen die Operanden (3.42) bei großen Abständen r_p eine verminderte Anfangsgenauigkeit, so daß *nicht* mehr $|x_{\text{exakt}}| \delta_x \approx |x| \delta_x$ gilt.

Die Ursache für diese Ungenauigkeiten liegt in der numerisch fehlerbehafteten Ermittlung der Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{a'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a'}{r_p}\right)^2 + 1} \right) \\ & \ln \left(\frac{b'}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b'}{r_p}\right)^2 + 1} \right) \\ & \ln \left(\frac{\left[1 + \frac{a' \cos \beta'}{\sqrt{a'^2 + r_p^2}} \right] \left[1 + \frac{b' \cos \alpha'}{\sqrt{b'^2 + r_p^2}} \right]}{\left[1 - \frac{a' \cos \beta'}{\sqrt{a'^2 + r_p^2}} \right] \left[1 - \frac{b' \cos \alpha'}{\sqrt{b'^2 + r_p^2}} \right]} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Falls r_p sehr große Werte annimmt, gehen die Argumente der Logarithmusfunktionen gegen 1 und der resultierende Funktionswert gegen 0. Im Gegensatz zur Analytik sind bei der Gleitpunktarithmetik sogar Werte identisch 0 möglich. Die drei Logarithmusfunktionen (3.46) verhalten sich für große r_p ähnlich der Funktion

$$\ln(1 + \varepsilon) \quad \text{mit } \varepsilon \ll 1 \quad \text{und } \varepsilon > 0 \quad (3.47)$$

- d.h. je größer r_p → desto kleiner ε
 → desto größer der Stellenverlust durch Exponentenangleichung bei der Addition $1 + \varepsilon$
 → desto größer der Informationsverlust
 → desto ungenauer das Funktionsergebnis $\ln(1 + \varepsilon)$
 → desto geringer die Anfangsgenauigkeit des Operanden

Bei immer kleiner werdenden ε tritt bei der Bildung der Summe $1 + \varepsilon$ ein immer größer werdender Stellenverlust ein. Dies macht sich insbesondere bei der Ermittlung des Logarithmus $\ln(1 + \varepsilon)$ stark bemerkbar, da nun die führende 1 entfällt. Für kleine $\varepsilon \ll 1$ ist $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$. Auch der absolute Fehler $\Delta_{\ln(1+\varepsilon)}$ entspricht dann etwa dem absoluten Fehler des Arguments des Logarithmus

$$\Delta_{\ln(1+\varepsilon)} \approx \Delta_{1+\varepsilon} \leq \max(\Delta_{1.0}, \Delta_\varepsilon) = \Delta_{1.0} = UR \quad \text{für } \varepsilon \ll 1 \quad (3.48)$$

Für große Abstände r_p können die absoluten Fehler der drei Operanden (3.42) nun wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \Delta_x & \leq UR \\ \Delta_y & \leq |\cos \psi'| UR \quad \text{für große } r_p \\ \Delta_z & \leq \frac{|\cos \beta'|}{2} UR \end{aligned} \quad (3.49)$$

Eine Kombination beider Fehlerkriterien (3.45) und (3.49) für beliebige Abstände r_p führt zu folgendem numerischen Test für die Summe S und somit für das Integral h_2

$$(h_2 h'_a =) \quad |S| \leq \max(|x|, |y|, |z|, 1.0) UR^\nu \quad (3.50)$$

mit $UR^\nu = UR^{1-\kappa}$ und $0 \leq \nu \leq 1$.

Analog den bisherigen Untersuchungen kann beim Integral (2.121)

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma \\ &= \frac{h'_c}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) - r_p (\psi' - d) \end{aligned}$$

mit den drei Operanden

$$\begin{aligned} x &:= \frac{h'_c}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\ y &:= -r_p \psi' \\ z &:= r_p d \end{aligned} \quad (3.51)$$

folgendes Testkriterium hergeleitet werden. Falls

$$g_1 \leq \max(|x|, |y|, |z|, 1.0) UR^\nu \quad (3.52)$$

erfüllt ist, sind möglicherweise mehr als $\nu\%$ aller Mantissenstellen des Integralwerts g_1 fehlerbehaftet.

Bei der numerischen Untersuchung der beiden Integrale (2.122) und (2.123)

$$\begin{aligned} g_2 &= \int_{\Delta'} \xi'_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\ &= \frac{h_c'^2}{4} \frac{\cos \beta'}{h'_a} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\ &\quad + \frac{h'_c}{2c'} \left(\sqrt{b'^2 + r_p^2} - \sqrt{a'^2 + r_p^2} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_2 \\ g_3 &= \int_{\Delta'} \xi'_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\ &= \frac{h_c'^2}{4} \frac{\cos \alpha'}{h'_b} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\ &\quad + \frac{h'_c}{2c'} \left(\sqrt{a'^2 + r_p^2} - \sqrt{b'^2 + r_p^2} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_3 \end{aligned}$$

wird stellvertretend das Integral g_2 betrachtet. g_2 wird aus den vier Operanden

$$\begin{aligned}
 w &:= \frac{h_c'^2 \cos \beta'}{4 h_a'} \ln \left(\frac{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} + a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} + b' \cos \alpha']}{[\sqrt{a'^2 + r_p^2} - a' \cos \beta'] [\sqrt{b'^2 + r_p^2} - b' \cos \alpha']} \right) \\
 x &:= \frac{h_c'}{2 c'} \sqrt{b'^2 + r_p^2} \\
 y &:= -\frac{h_c'}{2 c'} \sqrt{a'^2 + r_p^2} \\
 z &:= -\frac{r_p^2}{2} h_2
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

gebildet. Dabei sind für große Abstände r_p die beiden Terme $\sqrt{b'^2 + r_p^2}$ und $\sqrt{a'^2 + r_p^2}$ dominierend, so daß eine Untersuchung mit einer verminderten Anfangsgenauigkeit der Operanden gemäß Gleichung (3.48) entfallen kann.

Analog den bisherigen Überlegungen kann ein Testkriterium für den Integralwert g_2 direkt angegeben werden. Für

$$g_2 \leq \max(|w|, |x|, |y|, |z|) UR^\nu \tag{3.54}$$

sind möglicherweise mehr als $\nu\%$ aller Mantissenstellen fehlerbehaftet.

Sollte bei einer Rechnung ein Verdacht auf einen großen numerischen Fehler vorliegen, d.h. eines der hergeleiteten Testkriterien erfüllt sein, muß generell zwischen zwei Lösungsstrategien unterschieden werden:

- Sind numerische Fehler bei sehr kleinen Abständen r_p des Aufpunkts zur Elementebene zu erwarten, kann eine "in-plane"-Berechnung (Fall b) nach Kapitel 2.3.2 mit $r_p = 0$ durchgeführt werden.
- Bei großen Entfernungen des Aufpunkts vom Element können bei numerischen Fehlern die schon im vorherigen Kapitel beschriebenen Lösungsmöglichkeiten angewendet werden.

Kapitel 4

Untersuchung der TRIA3- Elementlösung

4.1 Linearer und konstanter Anteil der Elementlösung

Für die Interpretation der Elementlösung des linearen Dreieckselements TRIA3 können mehrere Lösungsvarianten herangezogen werden.

Ausgangspunkt ist die diskretisierte Randintegralgleichung (1.14) bzgl. des Aufpunkts \textcircled{i} für m Boundary Elemente

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m h_{ie} \Phi_{ie} = \sum_{e=1}^m g_{ie} q_{ie} \quad (4.1)$$

Der Einfluß der Potentialverteilung eines einzelnen Dreieckselements TRIA3 wird mit

$$\underset{(1 \times 3)}{h_i} \underset{(3 \times 1)}{\Phi_1} = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$= h_{i1} \Phi_1 + h_{i2} \Phi_2 + h_{i3} \Phi_3 \quad (4.3)$$

und

$$h_{i1} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (4.4)$$

$$h_{i2} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (4.5)$$

$$h_{i3} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (4.6)$$

beschrieben (siehe Kapitel 2.3). D.h. die Elementlösung des $\mathbf{h}\Phi$ -Terms wird durch eine Überlagerung (Superposition) aus 3 Anteilen gewonnen. Jeder der 3 Anteile ist einer linearen Potentialverteilung Φ_j zugeordnet, bei der in einem der 3 Elementknotenpunkte der Stützpunktwert Φ_j vorliegt und in den beiden anderen Knoten die Potentiale verschwinden (siehe Abbildung 4.1).

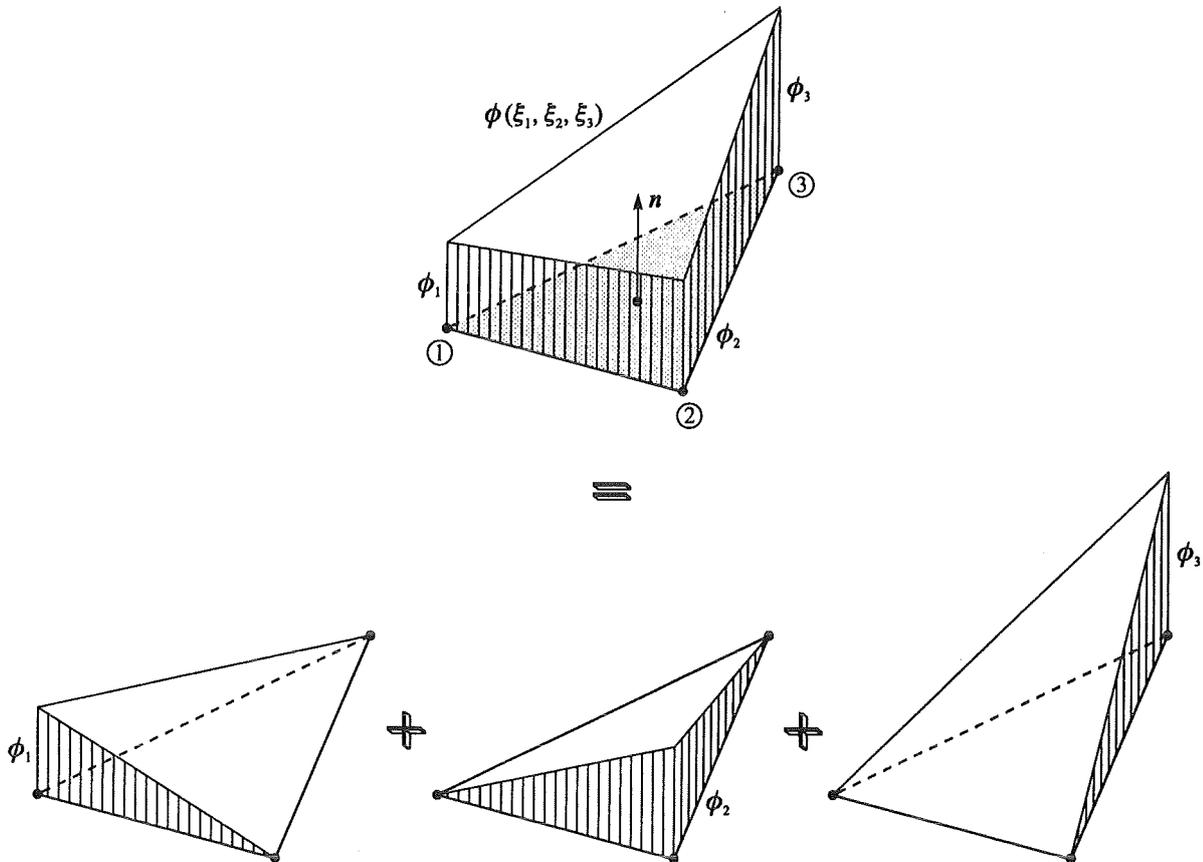


Abbildung 4.1: Zerlegung einer linearen Potentialverteilung des Dreieckselements TRIA3 in 3 lineare Anteile

Bei der vorliegenden Formulierung der Ansatzfunktionen mit homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 (siehe Kapitel 2) kann eine weitere anschauliche Variante der Elementlösung hergeleitet werden.

Wird die redundante Beziehung (2.5)

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3 \quad (4.7)$$

in die Gleichung für einen der 3 Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} eingesetzt, so erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned}
 h_{i1} = -r_i \mathbf{n} & \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right. \\
 & + n_2 \int_{\Delta_{p13}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \\
 & \left. + n_3 \int_{\Delta_{p12}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{i1} = & -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \right] \\
 & + r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right] \\
 & + r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

In den zwei letzten langen Termen tauchen wieder die beiden anderen Element-Einflußkoeffizienten h_{i2} und h_{i3} auf. Somit gilt

$$h_{i1} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \right] - h_{i2} - h_{i3} \tag{4.10}$$

Eingesetzt in Gleichung (4.3) samt den Beziehungen (4.5) und (4.6) erhält man für den $h \Phi$ -Term der Elementlösung

$$\begin{aligned}
 h_i \Phi_1 = & -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \right] \Phi_1 \\
 & + h_{i2} (\Phi_2 - \Phi_1) + h_{i3} (\Phi_3 - \Phi_1)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

bzw.

$$h_i \Phi_1 = \underbrace{(h_{i1} + h_{i2} + h_{i3}) \Phi_1}_{\text{konstanter Anteil}} + \underbrace{h_{i2} (\Phi_2 - \Phi_1) + h_{i3} (\Phi_3 - \Phi_1)}_{\text{linearer Anteil}} \tag{4.12}$$

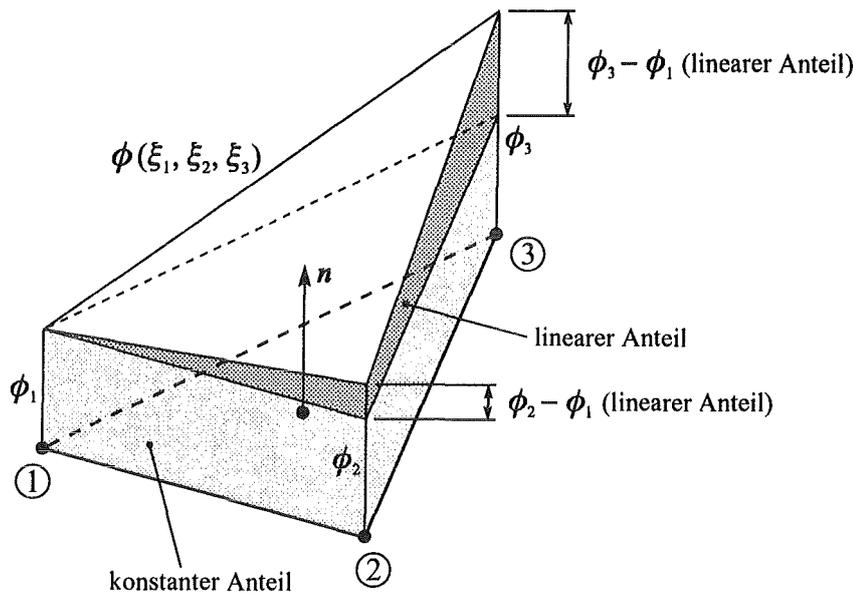


Abbildung 4.2: Zerlegung einer linearen Potentialverteilung des Dreieckselements TRIA3 in konstante und lineare Anteile

Die beiden letzten Terme beinhalten die Differenzen zwischen den 3 Stützpunktwerten der Potentialverteilung und stellen somit den linear variierenden Anteil der Elementlösung dar. Daher läßt sich die in Abbildung 4.1 vorgestellte lineare Potentialverteilung auch gemäß Abbildung 4.2 interpretieren.

Bei einer konstanten Potentialverteilung mit $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_j = \text{const.}$ verschwinden die beiden linearen Terme. In diesem Fall trägt allein der Term $(h_{i1} + h_{i2} + h_{i3}) \Phi_j$ zur Lösung bei. Damit erhält man "kostenlos" die analytische Lösung eines Dreieckselements mit konstantem Ansatz. Der Element-Einflußkoeffizient $h_{i \text{ const.}}$ für ein Dreieckselement mit konstanter Potentialverteilung lautet daher

$$h_{i \text{ const.}} = h_{i1} + h_{i2} + h_{i3} = -r_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \right] \quad (4.13)$$

$$= -r_i \mathbf{n} \left[n_1 h_1(\Delta_{p23}) + n_2 h_1(\Delta_{p13}) + n_3 h_1(\Delta_{p12}) \right] \quad (4.14)$$

bzw. $h_{i \text{ const.}} = 0$, falls der Aufpunkt ① innerhalb der Elementebene liegt (siehe Kapitel 2.3). Das Integral $\int_{\Delta} 1/r_i^3 d\Gamma$ wurde schon analytisch gelöst und entspricht der Lösungsfunktion h_1 (vgl. Kapitel 2.3.3). Bei einer konstanten Potentialverteilung trägt also nur die Funktion $h_1 = \int_{\Delta} 1/r_i^3 d\Gamma$ zur Lösung bei. Die beiden anderen Lösungsfunktionen h_2 und h_3 kommen erst bei einer linearen Potentialverteilung im Element zum Einsatz. Dieser Sachverhalt muß insbesondere bei der Überprüfung der analytischen Integrationsformeln und bei den Elementtests berücksichtigt werden!

Ähnliche Überlegungen können für den zweiten Term der Elementlösung $\mathbf{g} \mathbf{q}$ durchgeführt werden

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m h_{ie} \Phi_{ie} = \sum_{e=1}^m \boxed{\mathbf{g}_{ie} \mathbf{q}_{ie}} \quad (4.15)$$

Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, gilt für den Einfluß der Normalgradientenverteilung eines einzelnen Dreieckselements TRIA3

$$\underset{(1 \times 3)}{\mathbf{g}_i} \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$= g_{i1} q_1 + g_{i2} q_2 + g_{i3} q_3 \quad (4.17)$$

und

$$g_{i1} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_1 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (4.18)$$

$$g_{i2} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (4.19)$$

$$g_{i3} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (4.20)$$

Auch hier wird die Elementlösung des $\mathbf{g} \mathbf{q}$ -Terms durch eine Überlagerung aus 3 Anteilen gewonnen. Für die jeweils dazugehörige lineare Normalgradientenverteilung q_j gelten die gleichen qualitativen Aussagen wie in Abbildung 4.1. Analog zum $\mathbf{h} \Phi$ -Term kann nun mit der redundanten Beziehung (2.5) $\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3$ einer der 3 Element-Einflußkoeffizienten g_{ij} umgewandelt werden. Z.B. gilt für g_{i1}

$$\begin{aligned} g_{i1} = & n_1 \int_{\Delta_{p23}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma & (4.21) \\ & + n_2 \int_{\Delta_{p13}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \\ & + n_3 \int_{\Delta_{p12}} (1 - \xi_2 - \xi_3) \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{i1} = & n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i} d\Gamma & (4.22) \\ & - \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \right] \\ & - \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \right] \end{aligned}$$

Auch in dieser Gleichung treten wieder die beiden Element-Einflußkoeffizienten g_{i2} und g_{i3} auf und es gilt

$$g_{i1} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i} d\Gamma - g_{i2} - g_{i3} \quad (4.23)$$

Mit Gleichungen (4.19) und (4.20) in die Ausgangsgleichung (4.17) eingesetzt, folgt für den $\mathbf{g} \mathbf{q}$ -Term der Elementlösung

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \mathbf{q}_I = & \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i} d\Gamma \right] q_1 & (4.24) \\ & + g_{i2} (q_2 - q_1) + g_{i3} (q_3 - q_1) \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{g}_i \mathbf{q}_I = \underbrace{(g_{i1} + g_{i2} + g_{i3})}_{\text{konstanter Anteil}} q_1 + \underbrace{g_{i2} (q_2 - q_1) + g_{i3} (q_3 - q_1)}_{\text{linearer Anteil}} \quad (4.25)$$

Auch hier gelten qualitativ die gleichen Aussagen wie in Abbildung 4.2.

Bei einer konstanten Verteilung $q_1 = q_2 = q_3 = q_j = \text{const.}$ verschwinden wieder die beiden linearen Terme aus Gleichung (4.25) mit den Differenzen zwischen den 3 Stützpunktwerten der Normalgradientenverteilung. Somit lautet der Element-Einflußkoeffizient $g_{i \text{ const.}}$ für ein Dreieckselement mit konstantem Ansatz

$$g_{i \text{ const.}} = g_{i1} + g_{i2} + g_{i3} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i} d\Gamma \quad (4.26)$$

Das Integral $\int_{\Delta} 1/r_i d\Gamma$ wurde schon analytisch gelöst und entspricht je nach Lage des Aufpunkts ① der Lösungsfunktion g_1 bzw. $2g_{i1'}$ (vgl. Kapitel 2.3). Bei einer konstanten Potentialverteilung trägt also nur die Funktion g_1 bzw. $g_{i1'}$ zur Lösung bei. Die anderen Lösungsfunktionen $g_2, g_3, g_{i2'}$ und $g_{i3'}$ kommen erst bei einer linearen Potentialverteilung im Element zum Einsatz. Dieser Sachverhalt muß wieder bei der Überprüfung der analytischen Integrationsformeln und bei den Elementtests berücksichtigt werden!

4.2 Diskussion der Lösungsfunktionen

Die Diskussion der Elementlösung ist bei Boundary Elementen nicht so einfach wie bei den finiten Elementen. Mit der Lösung eines *einzelnen* finiten Elements kann ein komplettes physikalisches Problem untersucht werden, wie z.B. die Balkenbiegung mit einem Balkenelement. Die FE-Lösung kann dann mit den bekannten analytischen Lösungen aus der Literatur verglichen und überprüft werden.

Bei der direkten BEM müssen jedoch für ein physikalisches Problem *alle* Elementlösungen gleichzeitig und in der Summe berücksichtigt werden.

Dennoch werden nachfolgend anhand von Zahlenbeispielen die Lösungen der beiden Terme $\mathbf{h}\Phi$ und $\mathbf{g}\mathbf{q}$ eines einzelnen Dreieckselements TRIA3 untersucht.

4.2.1 Funktion $\mathbf{h}\Phi$ der Elementlösung

Zunächst wird die Lösung für den $\mathbf{h}\Phi$ -Term untersucht

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m \boxed{h_{ie} \Phi_{Ie}} = \sum_{e=1}^m g_{ie} q_{Ie} \quad (4.27)$$

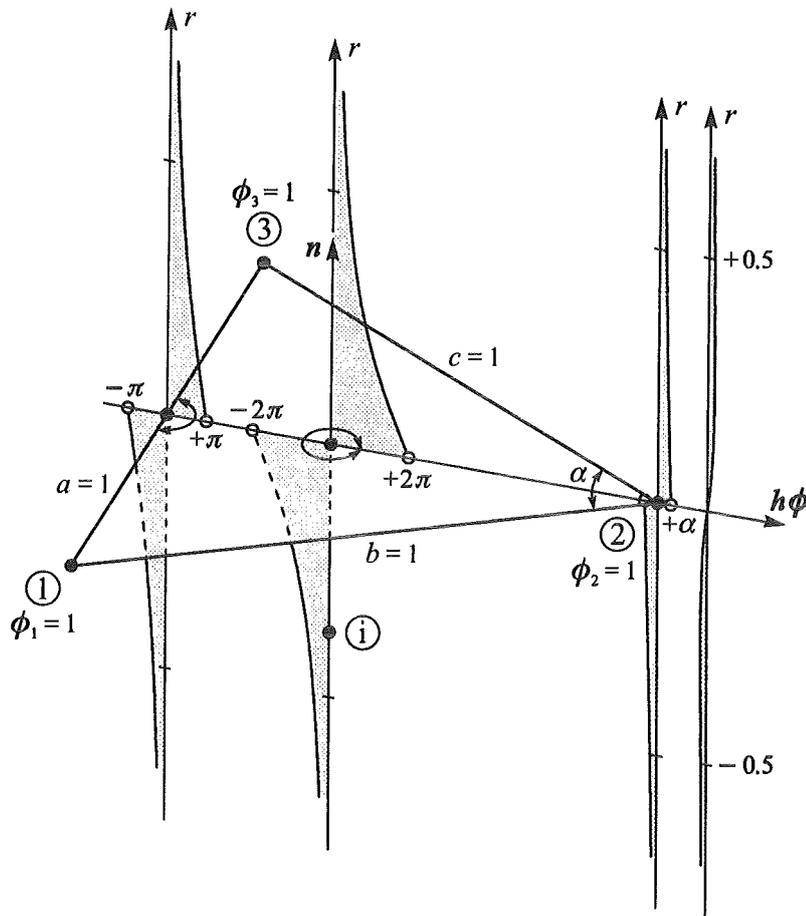
Zuerst werden für ein Dreieckselement Einheitspotentiale, also $\Phi = 1$, in den 3 Elementknotenpunkten vorgegeben.

$$\underset{(1 \times 3)}{\mathbf{h}} \underset{(3 \times 1)}{\Phi} = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_{i1} + h_{i2} + h_{i3} \quad (= h_{i \text{ const.}}) \quad (4.28)$$

Es wird ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 betrachtet. In Abbildung 4.3 ist die Lösung für einen Aufpunkt \textcircled{i} aufgetragen, der sich auf einer Achse r bewegen kann, die senkrecht auf der Elementebene steht. Es sind mehrere Funktionsverläufe an verschiedenen Positionen dargestellt, wobei die Funktionswerte $\mathbf{h}\Phi$ für die jeweilige Lage des Aufpunkts \textcircled{i} senkrecht zur r -Achse aufgetragen sind.

Für Aufpunkte innerhalb der gesamten Elementebene ist der $\mathbf{h}\Phi$ -Term 0, da ja die Vektoren \mathbf{r}_i und \mathbf{n} zueinander senkrecht stehen und somit deren Skalarprodukt verschwindet (vgl. Kapitel 2).

Im Element verläuft die Lösungsfunktion $\mathbf{h}\Phi$ als punktsymmetrische HEAVYSIDE'sche Funktion und hat den typischen Charakter des sogenannten Doppelschichtpotentials (engl.: double-layer potential, siehe u.a. [24, 27, 67]). Für die Punktsymmetrie ist der Term $-\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ in den h -Einflußkoeffizienten verantwortlich. Nähert sich der Aufpunkt \textcircled{i} von $-\infty$ der Dreiecksfläche, nimmt seine $\mathbf{h}\Phi$ -Lösung von 0 auf -2π ab, hat in der Elementebene den Wert 0 und nimmt von $+2\pi$ wieder auf 0 ab, wenn er gegen $+\infty$ läuft. D.h. oberhalb der Elementebene mit positiven Normalenvektor sind die $\mathbf{h}\Phi$ -Funktionswerte stets positiv und unterhalb der Elementebene stets negativ. Im gesamten Element ist der Sprung $-2\pi/0/+2\pi$ zu beobachten, was direkt mit dem Raumwinkel von 2π eines Aufpunkts auf einer glatten Fläche zusammenhängt (siehe Kapitel 1).

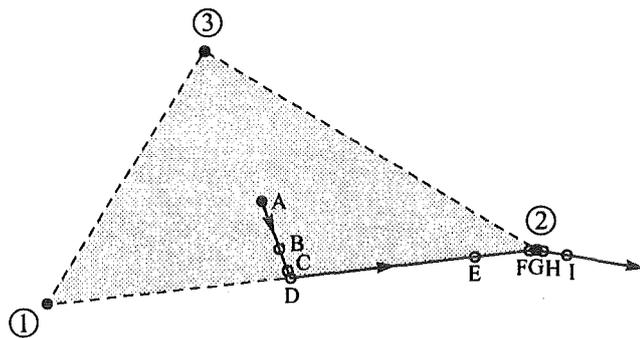
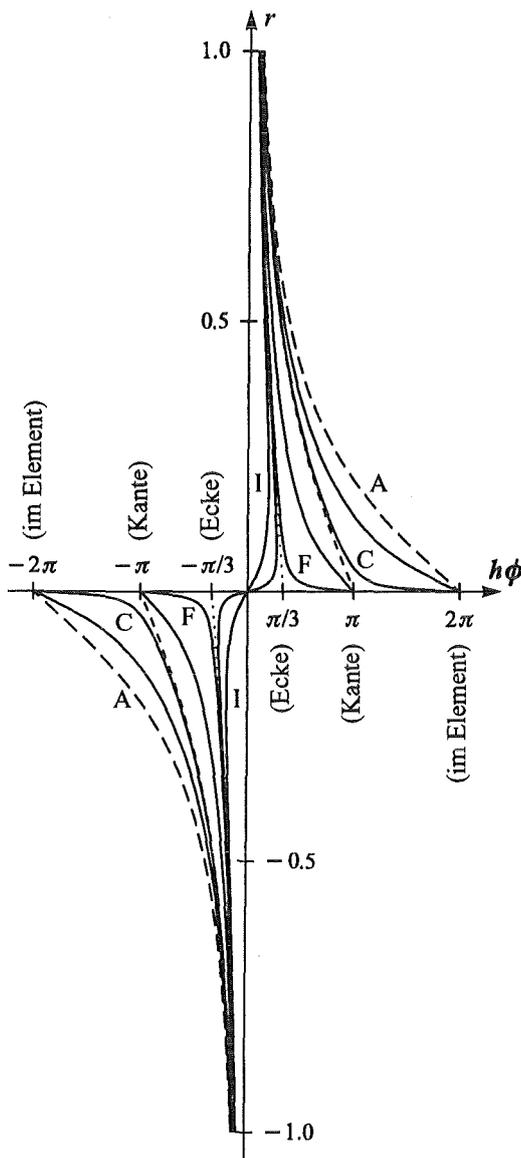
Abbildung 4.3: Funktion $h\Phi$ der Elementlösung ("konstantes" Beispiel)

Auf den Kanten ist der Sprung nur noch halb so groß, da nur der halbe Winkelbereich im Element liegt. Denn bei benachbarten Elementen müssen auf der gemeinsamen Kante die Lösungen addiert werden, was bei einer glatten Fläche wieder den Sprung $-2\pi/0/+2\pi$ liefert.

Ganz analoge Überlegungen gelten in den Elementecken. Der Funktionswert $h\Phi$ springt beim Durchdringen der Elementebene von $-\alpha$ nach 0 und dann nach $+\alpha$, wobei α dem jeweiligen Eckwinkel entspricht. Bei dem betrachteten gleichseitigen Dreieck mit seinen Eckwinkeln $\alpha = \frac{\pi}{3}$ erhält man daher den Sprung $-\frac{\pi}{3}/0/+\frac{\pi}{3}$.

Außerhalb des Elements existieren bei der Lösungsfunktion $h\Phi$ keine Sprünge. Die Nulldurchgänge in der Elementebene sind stetig.

Weiterhin ist die Form der Funktionsverläufe interessant. Da der Elementeinfluß auf einen Aufpunkt im Bereich des Elementschwerpunkts am größten ist, gehen hier die Funktionen mit zunehmender Entfernung vom Element am langsamsten gegen Null. Die Funktionsverläufe nehmen um so schneller ab, je weiter die r -Achse vom Element entfernt ist. In Abbildung 4.4 sind die Funktionsverläufe für den $h\Phi$ -Term für verschiedene Positionen der r -Achsen im selben Diagramm zusammengestellt.



Die einzelnen Positionen sind mit A, B, C, ... bezeichnet und wurden entsprechend dem dargestellten Pfad in obiger Skizze gewählt. Die $h\Phi$ -Funktionen im Element verlaufen stets von $\pm 2\pi$ nach 0. Allerdings werden die Funktionsverläufe vom Elementschwerpunkt (Position A) in Richtung der Kanten (Position B, C) und Ecken immer flacher.

Interessant sind die Funktionsverläufe für die Position C nahe der Kante und für die Position D direkt an der Kante. Im ersten Fall erfolgt der Sprung in der Elementebene von -2π auf $+2\pi$, im zweiten Fall nur von $-\pi$ auf $+\pi$. Trotzdem liegen die Funktionsverläufe ober- und unterhalb der Elementebene nahe beieinander.

Abb. 4.4: Verläufe der Funktion $h\Phi$ ("konstantes" Beispiel)

Ein ähnliches Verhalten ist im Bereich der Elementecken (Position F und G) zu beobachten.

Eine etwas anschaulichere Darstellung dieser Ergebnisse erhält man, wenn die Lösung für eine Ebene in einem gewissen Abstand *parallel* zum Element betrachtet wird.

Als erstes wurde eine Ebene unmittelbar über dem Dreieck gewählt, um die 2π -Werte sowie die Unstetigkeiten zu veranschaulichen. Die repräsentativen Aufpunkte dieser Ebene liegen in den Kreismittelpunkten auf den Zylinderunterseiten im Abstand ε , hier numerisch 10^{-9} , über der Elementebene. Die Höhe der Zylinder entspricht dem Funktionswert des Terms $h\Phi$.

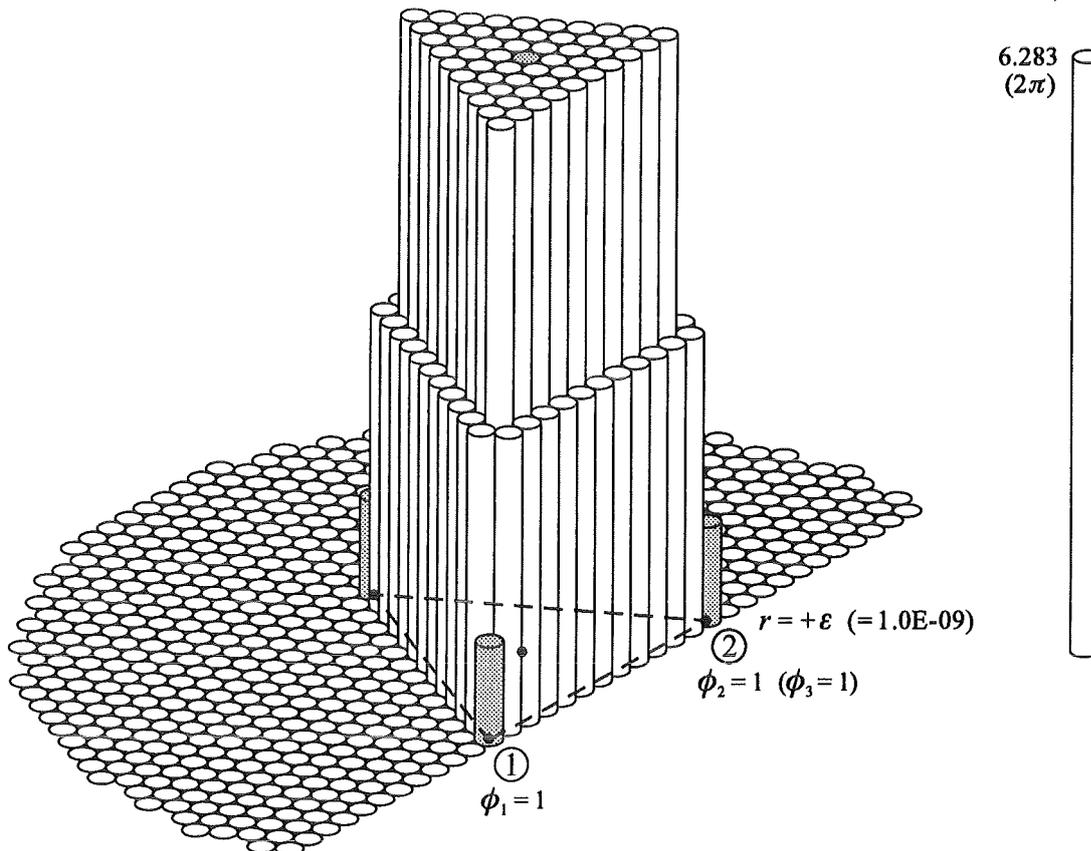


Abbildung 4.5: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = +\varepsilon (= 10^{-9})$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)

Außerhalb des Elements sind die Werte quasi 0 (siehe Abbildung 4.5). Im Element erreichen sie das Maximum von knapp 2π . Auf den Kanten liegen die Funktionswerte sehr nahe bei π und in den Elementecken bei $\frac{\pi}{3}$. Im analytischen Sinne gesehen, beschränken sich diese Sprünge nur auf die Linien der Elementkanten und die Punkte der Elementknoten. Strenggenommen müßten bei der Zylinder-Plot-Darstellung unendlich dünne Zylinder verwendet werden. Die Funktionswerte gelten also nur an den Zylinderachsen!

Zur besseren Visualisierung wurden die Zylinder über dem Dreiecksschwerpunkt und den Elementecken schattiert.

In Abbildung 4.6 sind die Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand von $r = 0.05$ über dem Dreieckselement aufgetragen. Dieser "schöne Wolkenkratzer" zeigt, daß die Unstetigkeiten an den Elementecken und -kanten schon deutlich abgeschliffen sind.

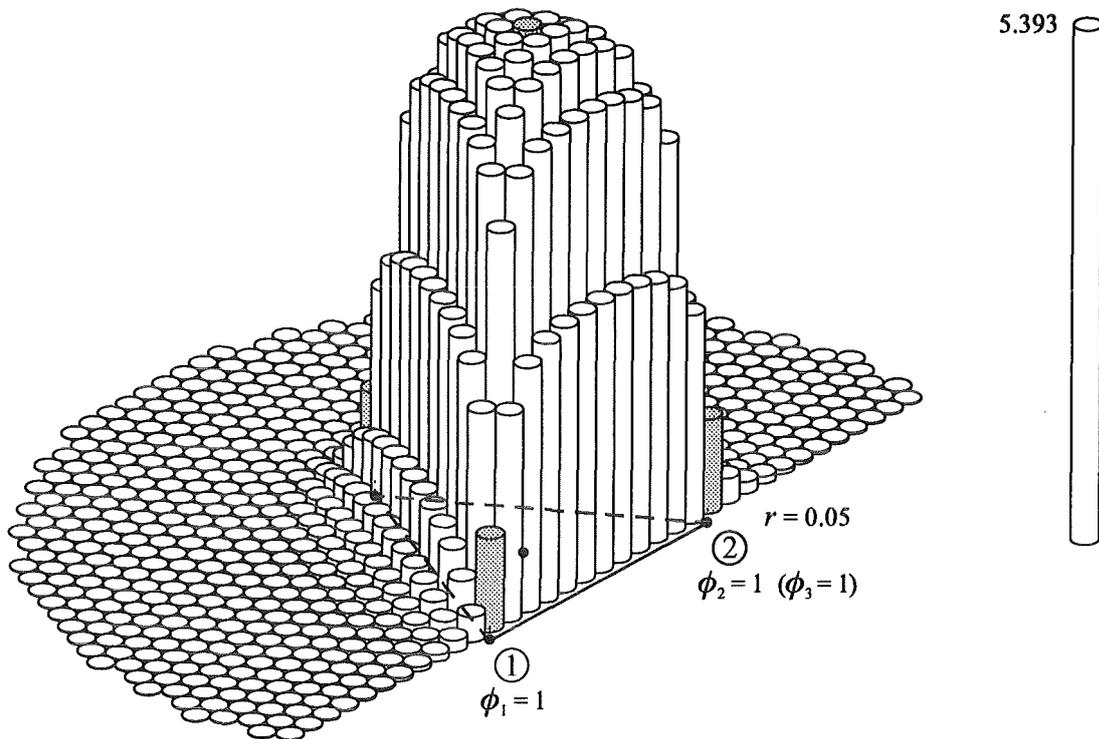


Abbildung 4.6: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.05$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)

Für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ (halbe Seitenlänge) ist der Verlauf schon weitgehend geglättet (siehe Abbildung 4.7).

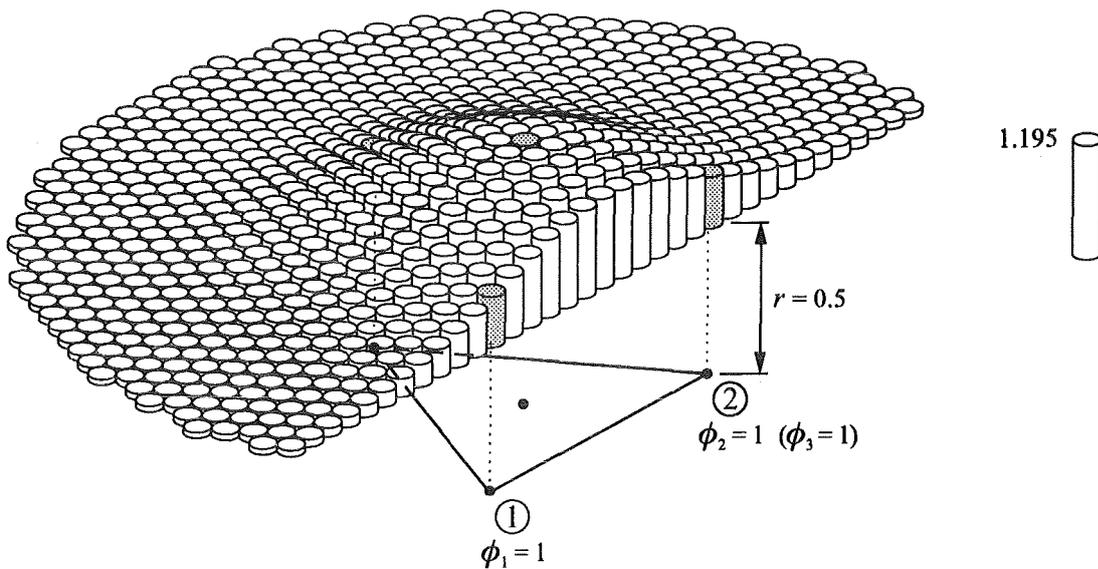


Abbildung 4.7: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)

Da in allen drei Elementknotenpunkten derselbe Potentialwert $\Phi = 1 = \text{const.}$ vorlag, wurde bisher nur der konstante Anteil der Elementlösung untersucht. Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, trägt bei einer konstanten Stützpunktverteilung nur der Term $h_1 = \int_{\Delta} 1/r_1^3 d\Gamma$ zur Lösung bei. D.h. nur die Funktion h_1 ist bis jetzt untersucht worden und somit quasi auch nur die Lösung eines Dreieckselements mit konstantem Ansatz. Die beiden anderen Lösungsfunktionen h_2 und h_3 kommen erst bei einer linearen Potentialverteilung im Element zum Tragen (siehe Kapitel 4.1).

Daher wird im nächsten Beispiel eine lineare Potentialverteilung vorgegeben. Im Elementknotenpunkt ② wird $\Phi_2 = 1$ gesetzt und an den beiden anderen Knotenpunkten $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$.

$$\underset{(1 \times 3)}{\mathbf{h}} \underset{(3 \times 1)}{\Phi} = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = h_{i2} \quad (4.29)$$

Es wird wieder das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 betrachtet. In Abbildung 4.8 sind mehrere Funktionsverläufe des $\mathbf{h}\Phi$ -Term an verschiedenen Positionen dargestellt.

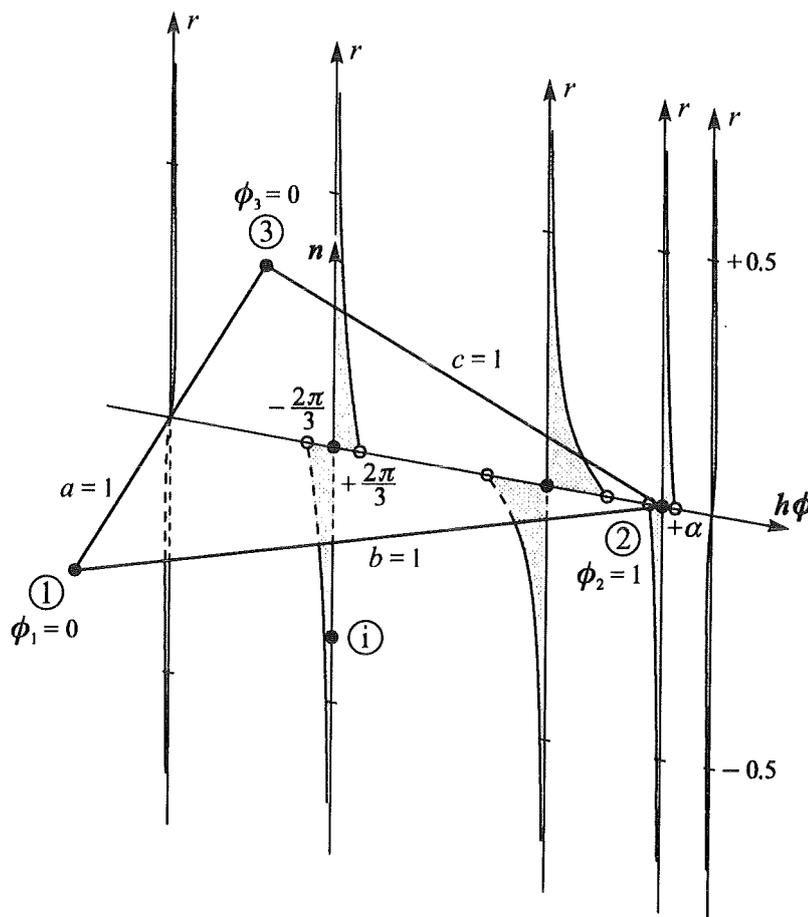


Abbildung 4.8: Funktion $\mathbf{h}\Phi$ der Elementlösung ("lineares" Beispiel)

Im Elementknotenpunkt ②, in dem das Potential $\Phi_2 = 1$ vorgegeben ist, ist weiterhin der Sprung $-\alpha/0/+ \alpha$ mit dem Eckwinkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ vorhanden.

An der gegenüberliegenden Kante a existiert jedoch kein Sprung mehr. Hier verschwindet der $h\Phi$ -Einfluß. Von der Kante a zum Knotenpunkt ② nimmt der Sprung linear zu. Im Elementschwerpunkt beträgt er ein Drittel der "konstanten" Lösung, also $-\frac{2\pi}{3}/0/+ \frac{2\pi}{3}$. Direkt vor dem Elementknotenpunkt ② erreicht der Sprung sein Maximum von $-2\pi/0/+2\pi$.

Wie beim letzten Beispiel sind außerhalb des Elements keine Sprünge mehr vorhanden, sondern ein gewöhnlicher Nulldurchgang in der Elementebene. Gegenüber dem letzten Beispiel nehmen alle Funktionsverläufe mit zunehmenden Abstand des Aufpunkts ① von der Elementebene schneller ab, da jetzt nur an einem Elementknotenpunkt ein Einheitspotential vorgegeben ist. Der Elementeinfluß auf den Aufpunkt ① ist jetzt geringer.

Diese Effekte können anhand von Zylinder-Plots wesentlich anschaulicher dargestellt werden.

Für Aufpunkte in einer Ebene unmittelbar über dem Dreieckselement erhält man einen $h\Phi$ -Funktionsverlauf gemäß Abbildung 4.9.

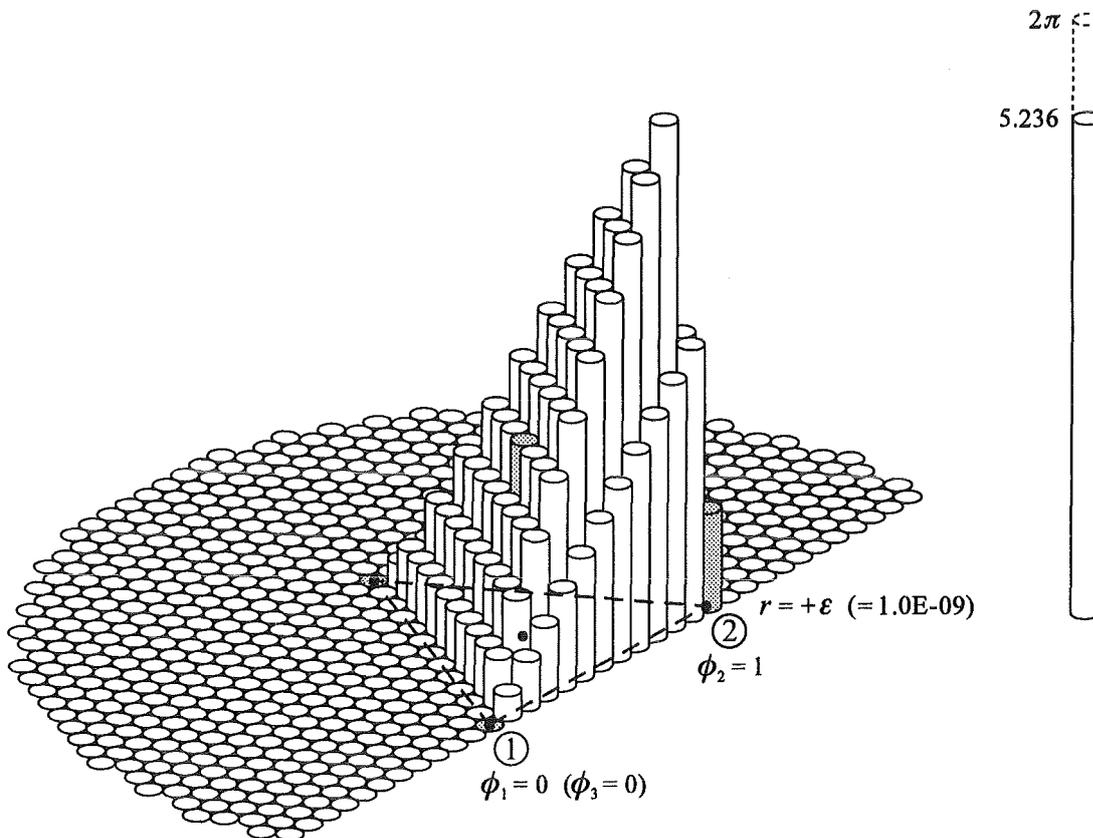


Abbildung 4.9: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = +\epsilon (= 10^{-9})$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)

Der oben erwähnte lineare Anstieg von der Dreiecksseite a bis zum Elementknotenpunkt ② ist deutlich zu erkennen. Der Anstieg über den Kanten b und c ist nur noch halb so groß.

Das Maximum von 2π tritt bei der r -Achse innerhalb des Elements direkt neben dem Elementknotenpunkt ② auf. Der höchste Zylinder in Abbildung 4.9 erreicht nur den $h\Phi$ -Wert von 5.236, da seine Zylinderachse noch relativ weit vom Elementknoten ② entfernt ist.

Es sei daran erinnert: Eine Überlagerung von drei Graphen mit Einheitspotentialen jeweils in den Elementknotenpunkten führt direkt wieder auf die vorgestellte Lösung des "konstanten" Beispiels zu Beginn dieses Kapitels.

Für Aufpunkte im Abstand $r = 0.05$ über der Elementebene sind die $h\Phi$ -Werte in Abbildung 4.10 aufgetragen. Außerhalb des Elements nehmen die Funktionswerte in Richtung Element wieder zu. Innerhalb des Elements nehmen sie zu den Kanten hin ab. Über der Elementkante a zwischen den Elementknoten ① und ③ sind die $h\Phi$ -Werte nun von Null verschieden.

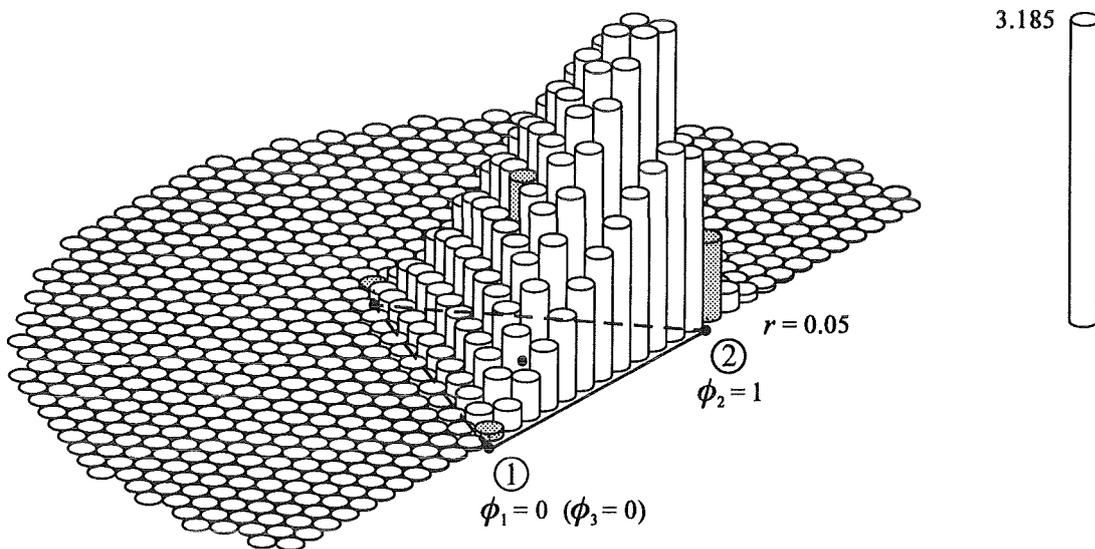


Abbildung 4.10: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.05$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)

Im Abstand der halben Seitenlänge ist der Verlauf wieder weitgehend geglättet (siehe Abbildung 4.11). Die Kanten des Dreiecks sind anhand der $h\Phi$ -Verteilung nicht mehr zu erkennen. Die größten $h\Phi$ -Werte dieser Ebene treten über dem Element zwischen dem Elementschwerpunkt und dem Knotenpunkt ② auf.

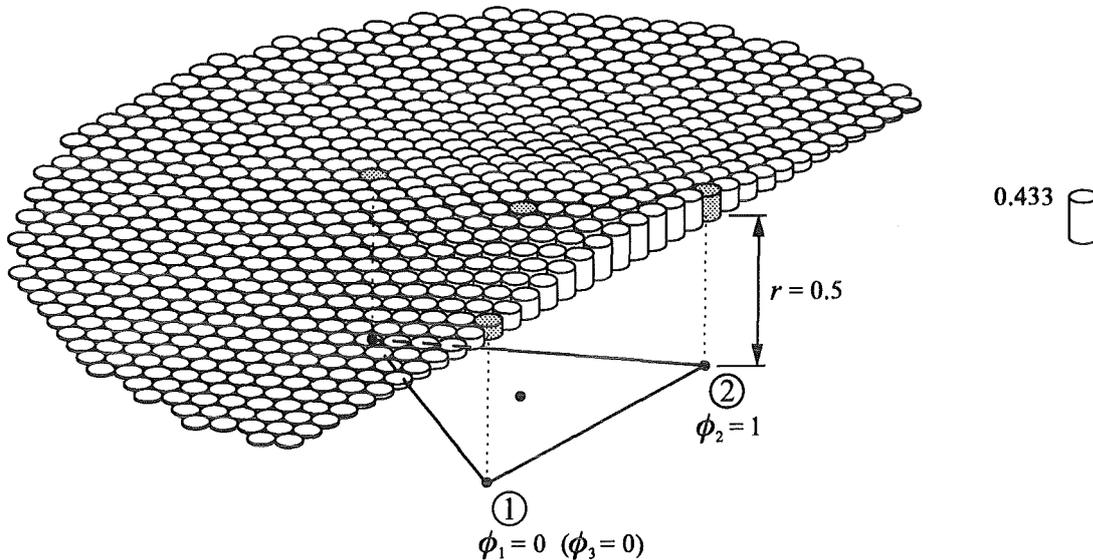


Abbildung 4.11: Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)

4.2.2 Funktion gq der Elementlösung

Nun folgt die Untersuchung des zweiten Terms der Elementlösung gq , der den Einfluß der Normalgradientenverteilung beschreibt

$$c_i \Phi_i + \sum_{e=1}^m h_{ie} \Phi_{ie} = \sum_{e=1}^m \boxed{g_{ie} q_{ie}} \tag{4.30}$$

Es werden für ein gleichseitiges Dreieckselement mit der Seitenlänge 1 Einheitswerte für die Normalgradienten q in den 3 Elementknotenpunkten vorgegeben. Man hat es also zunächst wieder mit einer konstanten q -Verteilung über dem Dreieckselement zu tun.

$$\underset{(1 \times 3)}{\mathbf{g}} \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{q}} = [g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i3}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = g_{i1} + g_{i2} + g_{i3} \quad (= g_i \text{ const.}) \tag{4.31}$$

In Abbildung 4.12 ist die Lösung für einen Aufpunkt ① aufgetragen, der sich wieder auf einer Achse r bewegen kann, die senkrecht auf der Elementebene steht.

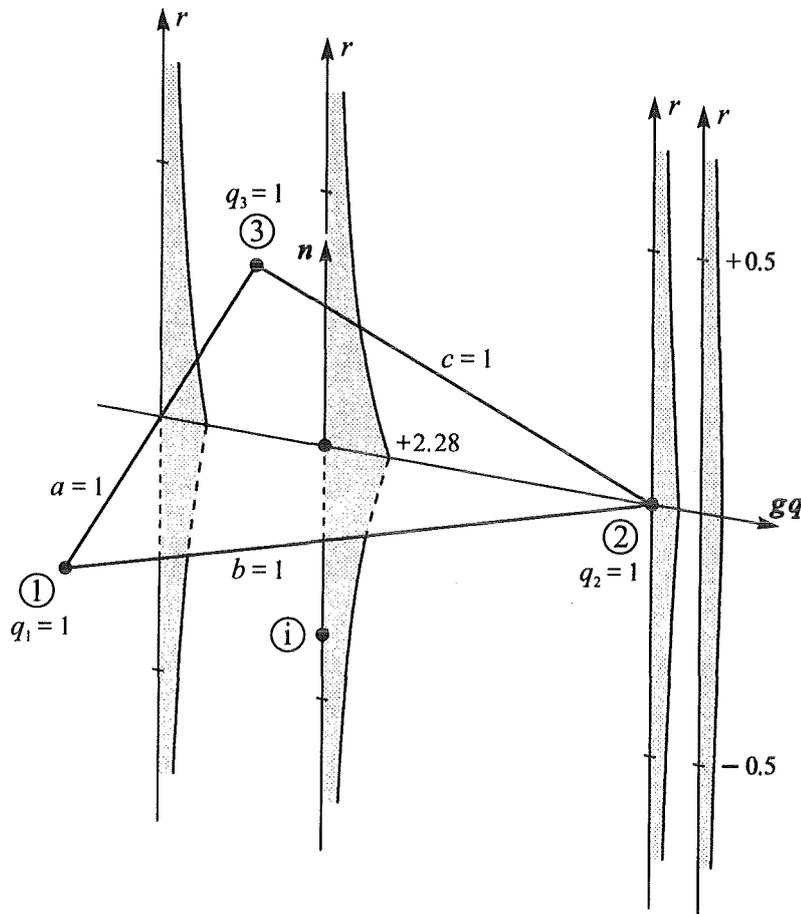


Abbildung 4.12: Funktion gq der Elementlösung ("konstantes" Beispiel)

Die Funktion gq ist stets positiv. Sie verläuft symmetrisch zur Elementebene und hat ihr Maximum stets in der Elementebene. Dort ist ein Knick vorhanden. Somit ist die Ableitung der Funktion gq in diesem Punkt unstetig. Der Knick existiert für alle r -Achsen innerhalb des Elements sowie in den Ecken und Kanten. Dies sind typische Charaktermerkmale des sogenannten Einschichtpotentials (engl.: single-layer potential, siehe u.a. [24, 27, 67]). Bei der vorliegenden konstanten Normalgradientenverteilung über dem Dreieckselement besitzt die gq -Funktion im Elementschwerpunkt ihr Maximum von 2.28 und nimmt kontinuierlich ab, je weiter der Aufpunkt \textcircled{i} vom Element entfernt liegt.

Im Gegensatz zum $h\Phi$ -Term der Elementlösung besitzt die Funktion gq keine Unstetigkeiten bzw. Sprünge in den Ecken und auf den Kanten (vgl. Kapitel 4.2.1).

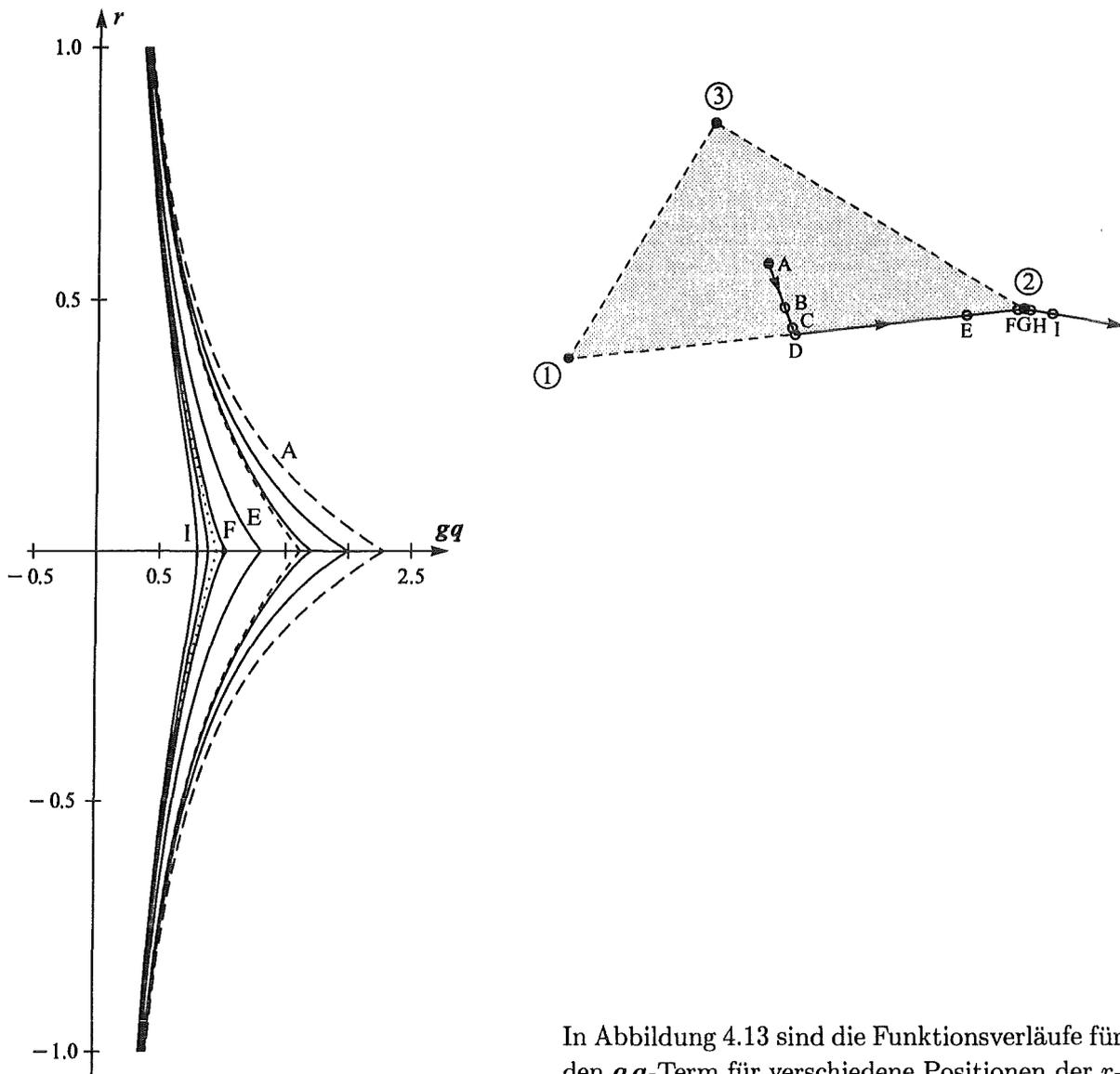


Abb. 4.13: Verläufe der Funktion gq ("konstantes" Beispiel)

In Abbildung 4.13 sind die Funktionsverläufe für den gq -Term für verschiedene Positionen der r -Achsen (A, B, C, ...) aufgetragen. Im Gegensatz zu den $h\Phi$ -Funktionen ändern sich die Formen der gq -Verläufe wenig.

Das Verhalten des gq -Terms läßt sich wieder besser anhand der Zylinder-Plot-Darstellung veranschaulichen.

Für Aufpunkte in der Elementebene erhält man einen gq -Funktionsverlauf gemäß Abbildung 4.14. Das kontinuierliche Gebirge wirkt nur wegen der Darstellung durch Zylinder mit endlichen Durchmessern treppenförmig. Auch hier gelten, wie bereits im vorherigen Kapitel erwähnt, die Funktionswerte nur an den Zylinderachsen. Interessanterweise sind die Funktionswerte außerhalb des Elements deutlich von Null verschieden. Die Lösungen von benachbarten Elementen haben daher einen großen Einfluß.

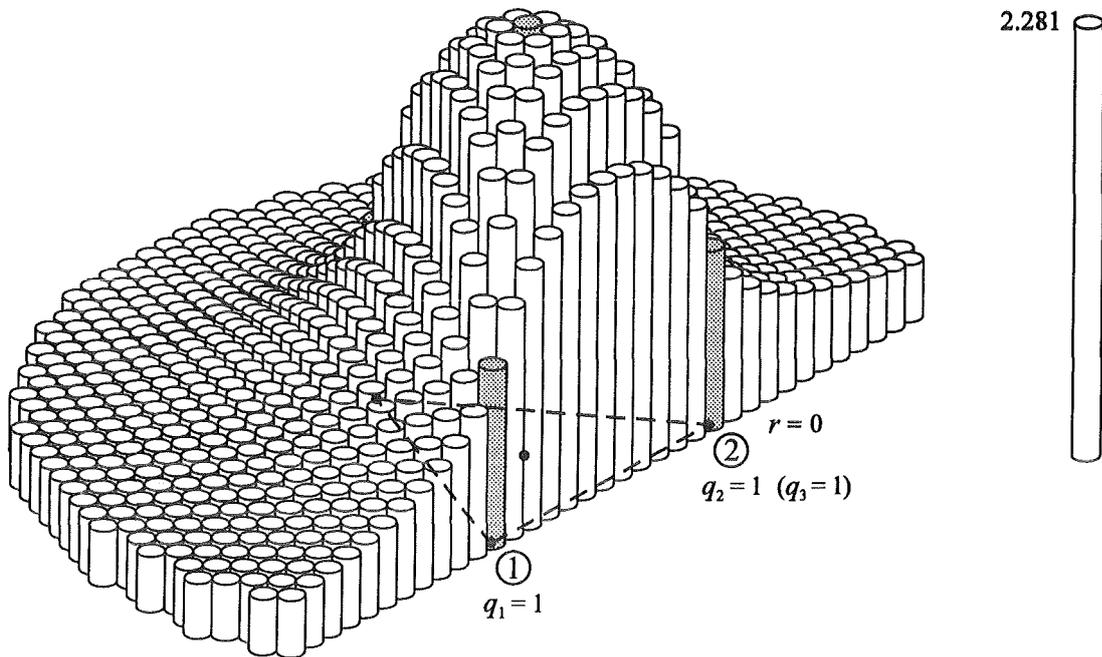


Abbildung 4.14: Funktionswerte gq für Aufpunkte innerhalb der Elementebene $r=0$ ("konstantes" Beispiel)

Für Aufpunkte im Abstand $r=0.5$ (halbe Seitenlänge) über der Elementebene ist der Verlauf noch stärker geglättet (siehe Abbildung 4.15).

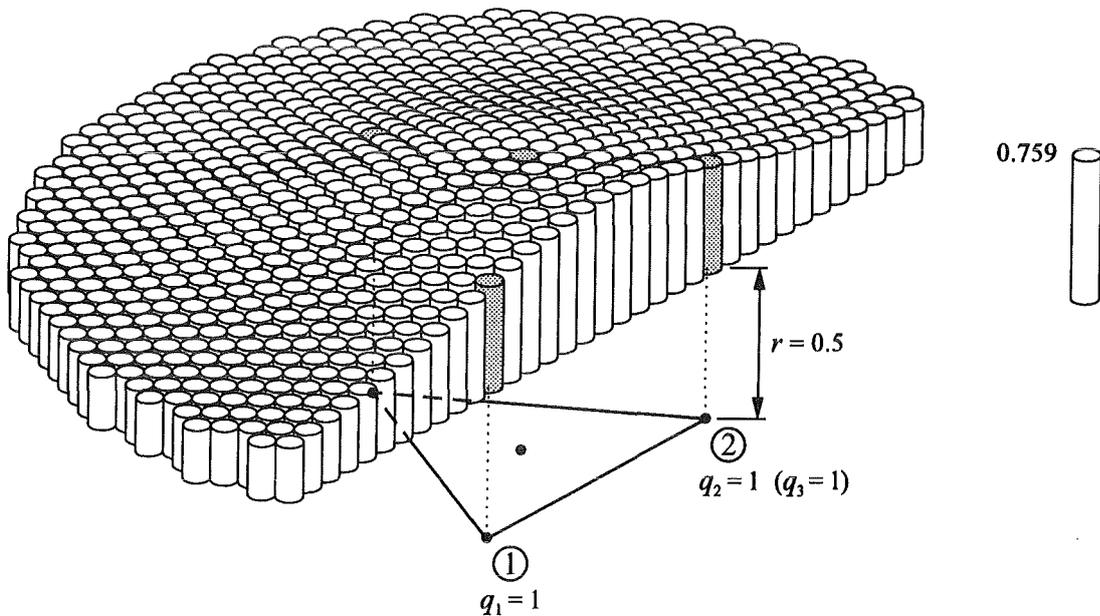


Abbildung 4.15: Funktionswerte gq für Aufpunkte im Abstand $r=0.5$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)

Analog Kapitel 4.1 trägt bei einer konstanten q -Verteilung nur der Term $g_1 = \int_{\Delta} 1/r_i d\Gamma$ zur Lösung bei. D.h. nur die Funktion g_1 ist bis jetzt untersucht worden. Die beiden anderen Lösungsfunktionen g_2 und g_3 kommen erst bei einer linearen Normalgradientenverteilung im Element zum Tragen (siehe Kapitel 4.1).

Daher wird im nächsten Beispiel eine lineare Normalgradientenverteilung vorgegeben. Im Elementknotenpunkt ② wird $q_2 = 1$ gesetzt und an den beiden anderen Knotenpunkten $q_1 = q_3 = 0$.

$$\underset{(1 \times 3)}{\mathbf{g}} \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{q}} = [g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i3}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = g_{i2} \quad (4.32)$$

Es wird wieder das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 betrachtet. In Abbildung 4.16 sind mehrere Funktionsverläufe des gq -Term an verschiedenen Positionen dargestellt.

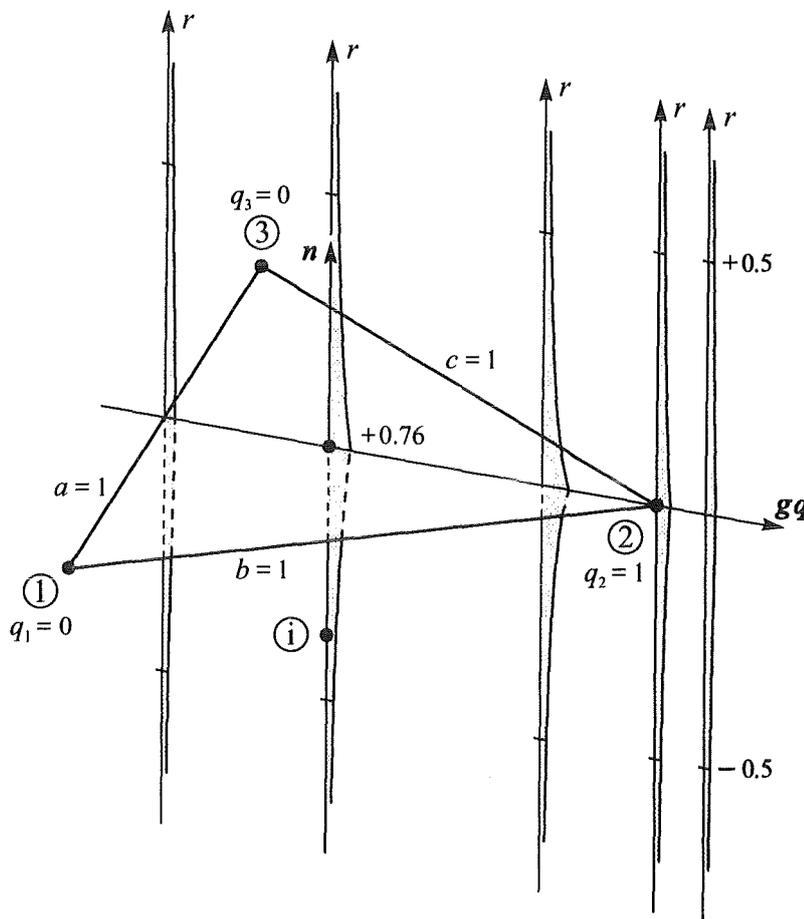


Abbildung 4.16: Funktion gq der Elementlösung ("lineares" Beispiel)

Im Elementschwerpunkt beträgt der gq -Wert 0.76, also nur noch ein Drittel der "konstanten" Lösung. Im Elementknotenpunkt ②, an dem der Normalgradient $q_2 = 1$ vorgegeben ist, sind die gq -Werte *nicht* identisch mit der "konstanten" Lösung (vgl. Abbildung 4.12) sondern fallen geringer aus. Auf der gegenüberliegenden Kante a sind die gq -Werte *nicht* Null, obwohl die Normalgradienten entlang dieser Kante verschwinden.

Diese Eigenschaften können anhand der Zylinder-Plots wesentlich anschaulicher dargestellt werden. Für Aufpunkte in der Elementebene erhält man einen gq -Funktionsverlauf gemäß Abbildung 4.17. Es erfolgt ein glockenähnlicher Anstieg der gq -Funktion bis zum Maximum, das zwischen dem Elementschwerpunkt und dem Elementknotenpunkt ② liegt.

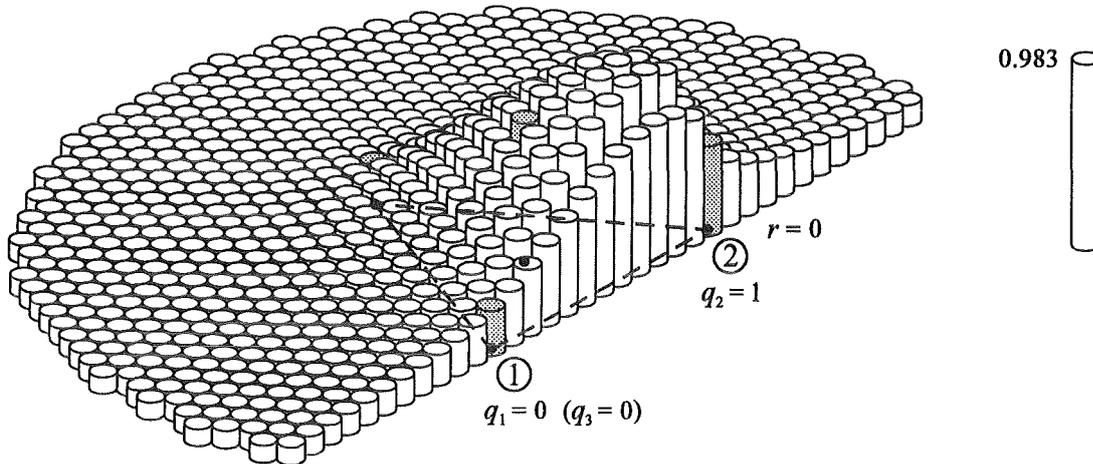


Abbildung 4.17: Funktionswerte gq für Aufpunkte innerhalb der Elementebene $r=0$ ("lineares" Beispiel)

Für Aufpunkte im Abstand $r=0.5$ über der Elementebene sind die gq -Werte in Abbildung 4.18 aufgetragen. Der Verlauf ist wieder weitgehend geglättet.

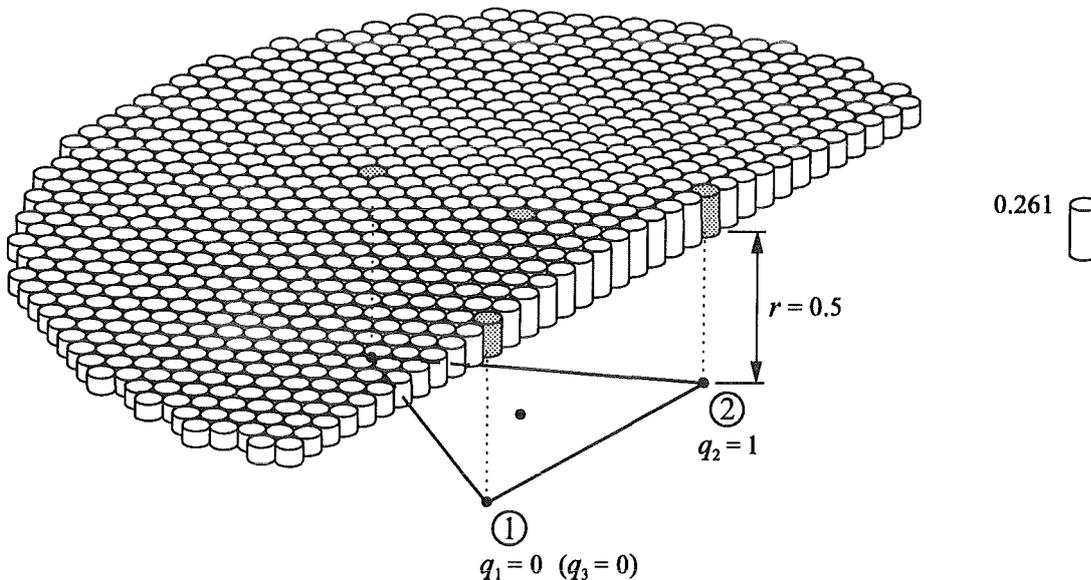


Abbildung 4.18: Funktionswerte gq für Aufpunkte im Abstand $r=0.5$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)

Kapitel 5

Element-Tests

In diesem Kapitel wird das vorgestellte lineare Dreieckselement TRIA3 numerischen Tests unterzogen, zu denen in der Literatur Lösungen zu finden sind. Oftmals sind aber dort nur die Ergebnisse für konstante Elemente angegeben. Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, können anhand dieser Ergebnisse nur bestimmte Anteile der Elementlösung überprüft werden. Um diese Beispiele jedoch auch als Referenzlösung für numerische Integrationsalgorithmen bei linearen Boundary Elementen einsetzen zu können, werden stets alle 6 Element-Einflußkoeffizienten h_{i1} , h_{i2} , h_{i3} , g_{i1} , g_{i2} , g_{i3} des Dreieckselements TRIA3 angegeben. Somit können auch die linearen Terme überprüft werden.

Alle Rechnungen wurden in DOUBLE PRECISION mit einer 52-Bit-Mantisse durchgeführt. Die numerischen Endergebnisse wurden auf die letzte dargestellte Dezimalstelle gerundet.

In den ersten drei Beispielen wird das schon bekannte gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 untersucht (vgl. Kapitel 4.2.1 ff.). Danach wird in drei weiteren Beispielen die Elementlösung anhand eines Rechteckselements analysiert.

5.1 Beispiel 1

(Dreieck / Aufpunkte senkrecht über dem Schwerpunkt)

Als Erstes wird die Elementlösung eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1 vorgestellt. Die Aufpunkte liegen auf einer Achse r , die senkrecht zur Elementebene durch den Elementschwerpunkt verläuft (siehe Abbildung 5.1).

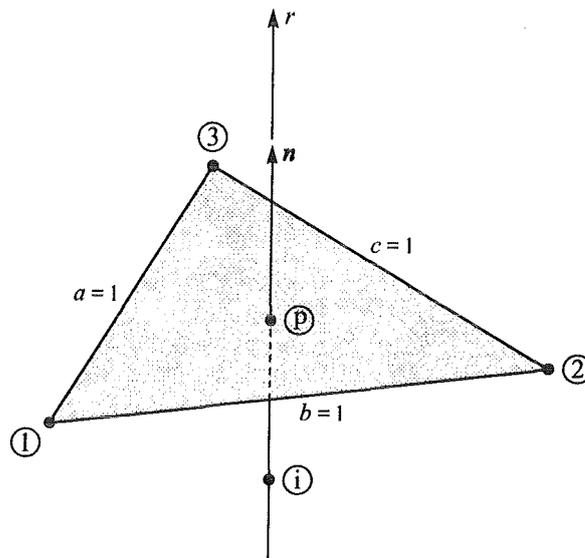


Abbildung 5.1: Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 1

Beispiel 1 (Dreieck / Aufpunkte senkrecht über dem Schwerpunkt)				
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten			
	$h_{i1} = h_{i2} = h_{i3}$	$h_{i \text{ const.}} = \sum_{j=1}^3 h_{ij}$	$g_{i1} = g_{i2} = g_{i3}$	$g_{i \text{ const.}} = \sum_{j=1}^3 g_{ij}$
100.0	0.144336E-04	0.433007E-04	0.144337E-02	0.433011E-02
50.0	0.577321E-04	0.173196E-03	0.288670E-02	0.866011E-02
10.0	0.144157E-02	0.432472E-02	0.144277E-01	0.432832E-01
5.0	0.574483E-02	0.172345E-01	0.288196E-01	0.864588E-01
1.0	0.128808	0.386423	0.138851	0.416554
0.5	0.398271	1.194813	0.253161	0.759482
0.1	1.519567	4.558701	0.580263	1.740788
0.05	1.797709	5.393128	0.663085	1.989254
0.01	2.034422	6.103266	0.739702	2.219106
0.005	2.064398	6.193195	0.749949	2.249847
0.001	2.088395	6.265185	0.758255	2.274764
1.0E-09	2.094395	6.283185	0.760346	2.281038
0	0	0	0.760346	2.281038
-1.0E-09	-2.094395	-6.283185	0.760346	2.281038
-0.001	-2.088395	-6.265185	0.758255	2.274764

Tabelle 5.1: Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte senkrecht über dem Elementschwerpunkt eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1

In Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse für verschiedene Abstände des Aufpunkts ① vom Schwerpunkt dargestellt. Zunächst ist wieder die Symmetrie der g_{ij} -Koeffizienten bzgl. der Elementebene zu erkennen. Wie schon in Kapitel 4.2.1 beschrieben, ist für die Punktsymmetrie der h_{ij} -Einflußkoeffizienten der Term $-\mathbf{r}_i \mathbf{n}$ verantwortlich. Beim Durchgang des Aufpunkts senkrecht durch die Elementebene wechselt somit nur das Vorzeichen bei den h_{ij} -Einflußkoeffizienten.

In diesem Beispiel sind alle Element-Einflußkoeffizienten g_{ij} bzw. h_{ij} des gleichseitigen Dreieckselements identisch, da die zu lösenden Integrale

$$h_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{-\mathbf{r}_i \mathbf{n}}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$g_{ij} = \int_{\Delta} \xi_j \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (5.2)$$

die gleichen Integranden und Integrationsbereiche besitzen; also $h_{i1} = h_{i2} = h_{i3} = h_{ij}$ und $g_{i1} = g_{i2} = g_{i3} = g_{ij}$. Mit Gleichung (4.10)

$$h_{i1} = -\mathbf{r}_i \mathbf{n} \left[n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \right] - h_{i2} - h_{i3}$$

folgt für $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ und wegen der identischen Geometrien der Dreiecke $\Delta_{p23} = \Delta_{p13} = \Delta_{p12} = \Delta'$

$$h_{ij} = \frac{1}{3} 3 (-\mathbf{r}_i \mathbf{n}) \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \quad (5.3)$$

$$h_{ij} = \begin{cases} (-\mathbf{r}_i \mathbf{n}) h_1 & \text{für } r \neq 0 \text{ mit } h_1 = h_1(\Delta_{p23}) = h_1(\Delta_{p13}) = h_1(\Delta_{p12}) \\ 0 & \text{für } r = 0 \text{ da } \mathbf{r}_i \perp \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.4)$$

Analog gilt mit Gleichung (4.23)

$$g_{i1} = n_1 \int_{\Delta_{p23}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_2 \int_{\Delta_{p13}} \frac{1}{r_i} d\Gamma + n_3 \int_{\Delta_{p12}} \frac{1}{r_i} d\Gamma - g_{i2} - g_{i3}$$

$$g_{ij} = \frac{1}{3} 3 \int_{\Delta'} \frac{1}{r_i} d\Gamma \quad (5.5)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} g_1 & \text{für } r \neq 0 \text{ mit } g_1 = g_1(\Delta_{p23}) = g_1(\Delta_{p13}) = g_1(\Delta_{p12}) \\ 2 g_{i1'} & \text{für } r = 0 \text{ mit } g_{i1'} = g_{i1'}(\Delta_{i23}) = g_{i1'}(\Delta_{i13}) = g_{i1'}(\Delta_{i12}) \end{cases} \quad (5.6)$$

D.h. in diesem Beispiel werden strenggenommen nur die Funktionen h_1 , g_1 und $g_{i1'}$ der Elementlösung getestet. Ein Teil der aufgelisteten Ergebnisse ist in [13] zu finden. In Tabelle 5.1 ist auch die Lösung für ein Dreieckselement mit konstanten Ansatzfunktionen angegeben, die ja jeweils der Summe $h_{i \text{ const.}} = h_{i1} + h_{i2} + h_{i3}$ und $g_{i \text{ const.}} = g_{i1} + g_{i2} + g_{i3}$ entspricht (vgl. Kapitel 4.1).

Der Verlauf der Funktion $h_{i \text{ const.}}(r)$ ist in Abbildung 4.4 und der Verlauf der Funktion $g_{i \text{ const.}}(r)$ in Abbildung 4.13 dargestellt.

5.2 Beispiel 2

(Dreieck / Aufpunkte senkrecht über einer Elementecke)

In diesem Beispiel wird die schon in Kapitel 4.2.1 ff. vorgestellte lineare Elementlösung untersucht. Es wird die Lösung für ein gleichseitiges Dreieckselement mit der Seitenlänge 1 betrachtet, bei dem sich der Aufpunkt ① senkrecht über einer Elementecke befindet, hier z.B. über dem Elementknotenpunkt ② (siehe Abbildung 5.2).

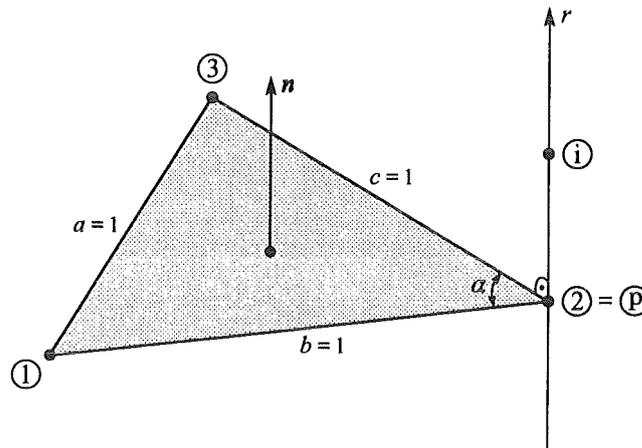


Abbildung 5.2: Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 2

Beispiel 2 (Dreieck / Aufpunkte senkrecht über einer Elementecke)						
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten					
	h_{i2}	$h_{i1} = h_{i3}$	$h_{i \text{ const.}} = \sum_{j=1}^3 h_{ij}$	g_{i2}	$g_{i1} = g_{i3}$	$g_{i \text{ const.}} = \sum_{j=1}^3 g_{ij}$
100.0	0.144332E-04	0.144327E-04	0.432986E-04	0.144336E-02	0.144334E-02	0.433004E-02
50.0	0.577264E-04	0.577177E-04	0.173162E-03	0.288661E-02	0.288646E-02	0.865953E-02
10.0	0.143799E-02	0.143263E-02	0.430325E-02	0.144158E-01	0.143978E-01	0.432114E-01
5.0	0.568859E-02	0.560534E-02	0.168993E-01	0.287249E-01	0.285839E-01	0.858927E-01
1.0	0.107603	0.822006E-01	0.272004	0.130192	0.118897	0.367987
0.5	0.264009	0.138914	0.541837	0.215280	0.173642	0.562565
0.1	0.712316	0.110055	0.932427	0.390615	0.230923	0.852462
0.05	0.839869	0.748406E-01	0.989551	0.429258	0.235626	0.900509
0.01	0.987156	0.242475E-01	1.035651	0.465570	0.237721	0.941012
0.005	1.013175	0.141245E-01	1.041424	0.470569	0.237818	0.946205
0.001	1.038535	0.375410E-02	1.046043	0.474670	0.237855	0.950380
1.0E-09	1.047198	0.117305E-07	1.047198	0.475713	0.237857	0.951426
0	0	0	0	0.475713	0.237857	0.951426
-1.0E-09	-1.047198	-0.117305E-07	-1.047198	0.475713	0.237857	0.951426
-0.001	-1.038535	-0.375410E-02	-1.046043	0.474670	0.237855	0.950380

Tabelle 5.2: Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte senkrecht über einer Elementecke eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1

Aus Symmetriegründen sind die Element-Einflußkoeffizienten der Elementknotenpunkte ① und ③ identisch. Da der Aufpunkt ① von allen 3 Elementknotenpunkten dem Knoten ② stets am nächsten liegt, ist der Koeffizient h_{i2} stets größer als $h_{i1} = h_{i3}$ bzw. g_{i2} stets größer als $g_{i1} = g_{i3}$ (siehe Tabelle 5.2). Beim Durchgang des Aufpunkts ① durch die Elementebene ist bei dem Koeffizienten h_{i2} der Sprung $-\alpha/0/+\alpha$ mit dem Eckwinkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ zu beobachten (siehe auch S. 80 ff.).

In diesem Beispiel kommen nun alle Lösungsfunktionen h_1, h_2, h_3 und g_1, g_2, g_3 der Elementlösung zum Einsatz.

Einige Werte der Koeffizienten $h_{i1} = h_{i3}$ sind auch in [13] dokumentiert. Dieses Paper ist bisher eines der wenigen, in dem numerische Ergebnisse für lineare 3D-Elementansätze angegeben sind.

5.3 Beispiel 3 (Dreieck / Aufpunkte längs einer Winkelhalbierenden)

Für das gleichseitige Dreieckselement mit der Seitenlänge 1 werden die Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte in der Elementebene längs einer Winkelhalbierenden berechnet (siehe Abbildung 5.3). Die Aufpunkte befinden sich auf einer Achse r , die längs der Winkelhalbierenden durch dem Elementknotenpunkt ② verläuft. Die Achse r wird positiv von ihrem Ursprung im Elementschwerpunkt in Richtung Knotenpunkt ② gerechnet.

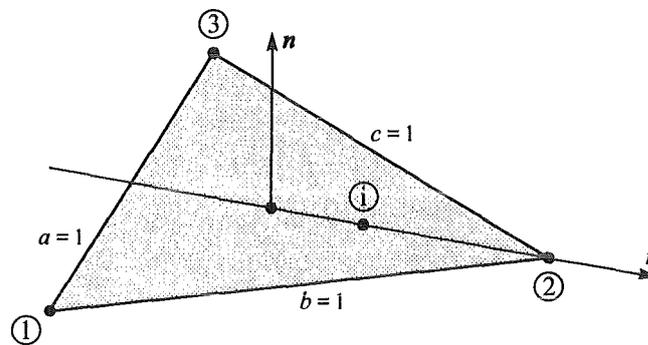


Abbildung 5.3: Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 3

Beispiel 3 (Dreieck / Aufpunkte längs einer Winkelhalbierenden)				
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten			
	$h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i\text{const.}}$	g_{i2}	$g_{i1} = g_{i3}$	$g_{i\text{const.}} = \sum_{j=1}^3 g_{ij}$
100.0		0.144547E-02	0.144234E-02	0.433014E-02
50.0		0.289514E-02	0.288259E-02	0.866033E-02
10.0		0.146490E-01	0.143309E-01	0.433108E-01
5.0		0.297586E-01	0.284624E-01	0.866833E-01
1.0		0.176362	0.136240	0.448842
0.578350		0.469828	0.237360	0.944548
0.577350 (Ecke)		0.475713	0.237857	0.951426
0.576350		0.484218	0.238361	0.960940
0.3	⋮	0.982246	0.478369	1.938985
0 (Schwerpunkt)	0 (da $r_i \perp n$)	0.760346	0.760346	2.281038
-0.15	⋮	0.546403	0.807360	2.161123
-0.287675	⋮	0.361565	0.634309	1.630182
-0.288675 (Kante)		0.360523	0.627855	1.616232
-0.289675		0.359497	0.621393	1.602283
-1.0		0.128074	0.154643	0.437361
-5.0		0.280830E-01	0.292918E-01	0.866666E-01
-10.0		0.142318E-01	0.145390E-01	0.433098E-01
-50.0		0.287847E-02	0.289093E-02	0.866033E-02
-100.0		0.144130E-02	0.144442E-02	0.433014E-02

Tabelle 5.3: Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte längs einer Winkelhalbierenden eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1

Die Ergebnisse für verschiedene Positionen des Aufpunkts ① sind in Tabelle 5.3 zusammengefaßt. Alle Element-Einflußkoeffizienten h_{ij} sind 0, da für Aufpunkte ① innerhalb der Elementebene stets das Skalarprodukt $r_i n$ verschwindet (siehe Kapitel 2.3). Aus Symmetriegründen sind wieder die Element-Einflußkoeffizienten der Elementknotenpunkte ① und ③ identisch.

5.4 Beispiel 4 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über dem Schwerpunkt)

Für numerische Boundary-Element-Tests wird in der Literatur sehr oft das rechtwinklige Viereckselement mit konstanten Ansatzfunktionen herangezogen. Daher wird nun ein quadratisches Viereckselement mit der Seitenlänge 2 untersucht, bei dem die Aufpunkte auf einer Achse r liegen, die senkrecht zur Elementebene durch den Vierecksschwerpunkt verläuft. Gemäß Abbildung 5.4 wird nun die Vierecksfläche mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert.

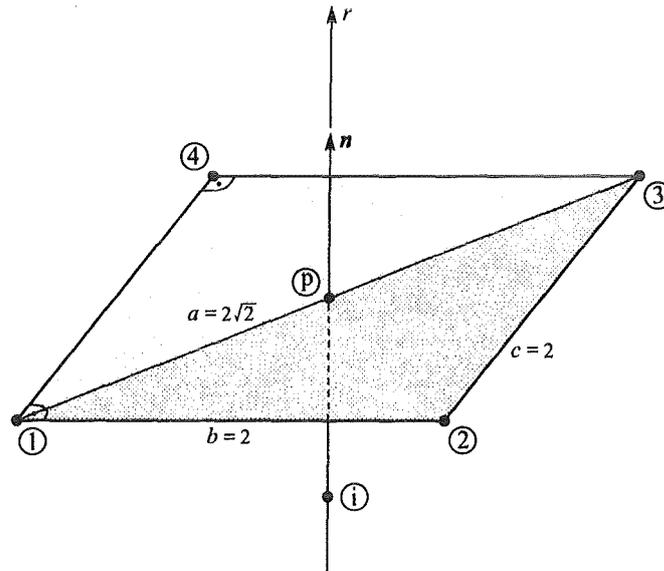


Abbildung 5.4: Geometrie des Viereckselements im Beispiel 4

Beispiel 4 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über dem Vierecksschwerpunkt)				
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Dreieck Δ_{123})			
	$h_{i1}^{\Delta} = h_{i3}^{\Delta}$	h_{i2}^{Δ}	$g_{i1}^{\Delta} = g_{i3}^{\Delta}$	g_{i2}^{Δ}
100.0	0.666607E-04	0.666587E-04	0.666647E-02	0.666640E-02
50.0	0.266571E-03	0.266539E-03	0.133317E-01	0.133312E-01
10.0	0.660733E-02	0.658765E-02	0.664680E-01	0.664020E-01
5.0	0.257473E-01	0.254474E-01	0.131775	0.131262
1.0	0.371581	0.304036	0.540129	0.506461
0.5	0.706429	0.441732	0.798647	0.694286
0.1	1.281322	0.297278	1.181226	0.862996
0.05	1.401498	0.197323	1.248195	0.875558
0.01	1.525553	0.622042E-01	1.306596	0.881027
0.005	1.545724	0.360031E-01	1.314273	0.881275
0.001	1.564644	0.947668E-02	1.320493	0.881368
1.0E-09	1.570796	0.290148E-07	1.322060	0.881374
0	0	0	1.322060	0.881374
-1.0E-09	-1.570796	-0.290148E-07	1.322060	0.881374
-0.001	-1.564644	-0.947668E-02	1.320493	0.881368

Tabelle 5.4: Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 4

Da die Diagonale zwischen den Knotenpunkten ① und ③ auch die Symmetrieachse bzgl. der beiden Dreieckselemente ist, genügt es, allein die Lösung des Dreiecks Δ_{123} mit den Elementknotenpunkten ①, ② und ③ zu untersuchen (siehe hierzu auch S. 27). In Tabelle 5.4 sind die Ergebnisse des Dreieckselements Δ_{123} für verschiedene Abstände des Aufpunkts ① vom Vierecksschwerpunkt dargestellt. Aus dieser Dreieckslösung kann jetzt die Lösung für die Vierecksfläche zusammengesetzt werden:

$$h_{i1}^{\square} = 2 h_{i1}^{\Delta} \quad (5.7)$$

$$h_{i2}^{\square} = h_{i2}^{\Delta} \quad (5.8)$$

$$h_{i3}^{\square} = 2 h_{i3}^{\Delta} \quad (5.9)$$

$$h_{i4}^{\square} = h_{i2}^{\Delta} \quad (5.10)$$

$$g_{i1}^{\square} = 2 g_{i1}^{\Delta} \quad (5.11)$$

$$g_{i2}^{\square} = g_{i2}^{\Delta} \quad (5.12)$$

$$g_{i3}^{\square} = 2 g_{i3}^{\Delta} \quad (5.13)$$

$$g_{i4}^{\square} = g_{i2}^{\Delta} \quad (5.14)$$

Mit dieser zusammengesetzten Lösung kann nun jede konstante oder unidirektionale, lineare Elementlösung des Viereckselements berechnet werden.

In Tabelle 5.5 ist die Lösung für das Viereckselement mit konstanten Ansatzfunktionen angegeben, die jeweils der Summe $h_{i\text{const.}}^{\square} = \sum_{j=1}^4 h_{ij}^{\square} \stackrel{\text{bzw.}}{=} 2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{\Delta}$ und $g_{i\text{const.}}^{\square} = \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{\square} \stackrel{\text{bzw.}}{=} 2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{\Delta}$ entspricht. Auch bei diesem Rechteckselement ist bei dem konstanten Element-Einflußkoeffizienten $h_{i\text{const.}}^{\square}$ der Sprung $-2\pi/0/+2\pi$ innerhalb des gesamten Elements zu beobachten, wenn der Aufpunkt ① senkrecht durch die Elementebene dringt. Einige Werte der Koeffizienten $h_{i\text{const.}}^{\square}$ und $g_{i\text{const.}}^{\square}$ der Vierecksgeometrie sind auch in [57] dokumentiert.

Beispiel 4 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über dem Vierecksschwerpunkt)		
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Viereck \square_{1234})	
	$h_{i\text{const.}}^{\square} = 2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{\Delta}$	$g_{i\text{const.}}^{\square} = 2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{\Delta}$
100.0	0.399960E-03	0.399987E-01
50.0	0.159936E-02	0.799893E-01
10.0	0.396046E-01	0.398676
5.0	0.153884	0.789621
1.0	2.094395	3.173436
0.5	3.709181	4.583161
0.1	5.719842	6.450896
0.05	6.000637	6.743897
0.01	6.226619	6.988440
0.005	6.254901	7.019643
0.001	6.277528	7.044708
1.0E-09	6.283185	7.050989
0	0	7.050989
-1.0E-09	-6.283185	7.050989
-0.001	-6.277528	7.044708

Tabelle 5.5: Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 4, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist

5.5 Beispiel 5 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über einer Vierecksecke)

In diesem Beispiel wird ein quadratisches Viereckselement mit der Seitenlänge 2 betrachtet, bei dem sich der Aufpunkt \textcircled{i} senkrecht über einer Vierecksecke befindet, hier z.B. über dem Knotenpunkt $\textcircled{3}$ (siehe Abbildung 5.5). Die Vierecksfläche wird wieder mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert.

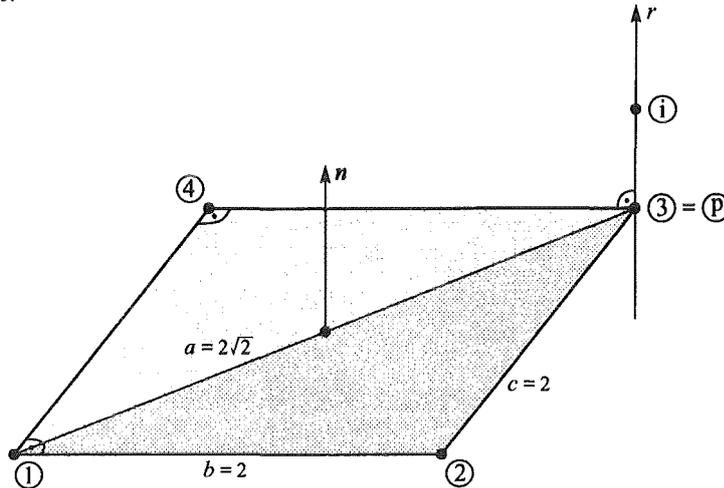


Abbildung 5.5: Geometrie des Viereckselements im Beispiel 5

Da auch hier die Diagonale zwischen den Knotenpunkten $\textcircled{1}$ und $\textcircled{3}$ die Symmetrieachse bzgl. der beiden Dreieckselemente ist, genügt es, allein die Lösung des Dreiecks Δ_{123} mit den Elementknotenpunkten $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ zu untersuchen.

Beispiel 5 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über einer Vierecksecke)						
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Dreieck Δ_{123})					
	h_{i1}^{Δ}	h_{i2}^{Δ}	h_{i3}^{Δ}	g_{i1}^{Δ}	g_{i2}^{Δ}	g_{i3}^{Δ}
100.0	0.666307E-04	0.666387E-04	0.666507E-04	0.666547E-02	0.666573E-02	0.666613E-02
50.0	0.266092E-03	0.266219E-03	0.266411E-03	0.133237E-01	0.133259E-01	0.133291E-01
10.0	0.632557E-02	0.639815E-02	0.651180E-02	0.655051E-01	0.657566E-01	0.661437E-01
5.0	0.219461E-01	0.228383E-01	0.244017E-01	0.124834	0.126548	0.129374
1.0	0.985925E-01	0.122273	0.242782	0.332670	0.361616	0.451504
0.5	0.934500E-01	0.121752	0.397845	0.382002	0.424300	0.607380
0.1	0.417893E-01	0.568720E-01	0.651418	0.411758	0.463800	0.810416
0.05	0.259626E-01	0.356006E-01	0.706162	0.413473	0.466141	0.844306
0.01	0.754899E-02	0.104525E-01	0.763861	0.414172	0.467103	0.873636
0.005	0.428203E-02	0.594404E-02	0.773404	0.414202	0.467144	0.877479
0.001	0.109210E-02	0.152213E-02	0.782430	0.414213	0.467159	0.880590
1.0E-09	0.311534E-08	0.438342E-08	0.785398	0.414214	0.467160	0.881374
0	0	0	0	0.414214	0.467160	0.881374
-1.0E-09	-0.311534E-08	-0.438342E-08	-0.785398	0.414214	0.467160	0.881374
-0.001	-0.109210E-02	-0.152213E-02	-0.782430	0.414213	0.467159	0.880590

Tabelle 5.6: Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 5

In Tabelle 5.6 sind die Ergebnisse des Dreieckselements Δ_{123} für verschiedene Abstände des Aufpunkts ① vom Knotenpunkt ③ zusammengefaßt. Da der Aufpunkt ① von allen 3 Elementknotenpunkten dem Knoten ③ stets am nächsten liegt, ist der Koeffizient h_{i3} stets größer als h_{i1} oder h_{i2} bzw. g_{i3} stets größer als g_{i1} oder g_{i2} . Die Lösung für die Vierecksfläche setzt sich analog dem letzten Beispiel aus den beiden Dreieckselementen zusammen (siehe Gleichungen (5.7) bis (5.14)).

In Tabelle 5.7 ist wieder die Lösung für das Viereckselement mit konstanten Ansatzfunktionen angegeben, die jeweils der Summe $h_{i\text{const.}}^{\square} = \sum_{j=1}^4 h_{ij}^{\square}$ bzw. $2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{\Delta}$ und $g_{i\text{const.}}^{\square} = \sum_{j=1}^4 g_{ij}^{\square}$ bzw. $2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{\Delta}$ entspricht.

Beispiel 5 (Viereck / Aufpunkte senkrecht über einer Vierecksecke)		
Abstand des Aufpunkts r	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Viereck \square_{1234})	
	$h_{i\text{const.}}^{\square} = 2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^{\Delta}$	$g_{i\text{const.}}^{\square} = 2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^{\Delta}$
100.0	0.399840E-03	0.399947E-01
50.0	0.159744E-02	0.799574E-01
10.0	0.384710E-01	0.394811
5.0	0.138372	0.761511
1.0	0.927295	2.291581
0.5	1.226095	2.827364
0.1	1.500159	3.371948
0.05	1.535450	3.447838
0.01	1.563725	3.509822
0.005	1.567261	3.517649
0.001	1.570089	3.523924
1.0E-09	1.570796	3.525494
0	0	3.525494
-1.0E-09	-1.570796	3.525494
-0.001	-1.570089	3.523924

Tabelle 5.7: Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 5, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist

Beim Durchgang des Aufpunkts ① durch die Elementebene ist bei dem Koeffizienten $h_{i\text{const.}}^{\square}$ der Sprung $-\frac{\pi}{2}/0/+\frac{\pi}{2}$ wegen dem Eckwinkel $\frac{\pi}{2}$ des Rechteckselements zu beobachten.

5.6 Beispiel 6 (Viereck / Aufpunkte längs einer Diagonalen)

Für das quadratische Viereckselement mit der Seitenlänge 2 werden die Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte in der Elementebene längs einer Diagonalen berechnet. Die Aufpunkte befinden sich auf einer Achse r , die längs der Diagonalen durch die Knotenpunkte ① und ③ verläuft. Die Achse r wird positiv von ihrem Ursprung im Vierecksschwerpunkt in Richtung Knotenpunkt ③ gerechnet. Gemäß Abbildung 5.6 wird die Vierecksfläche mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert.

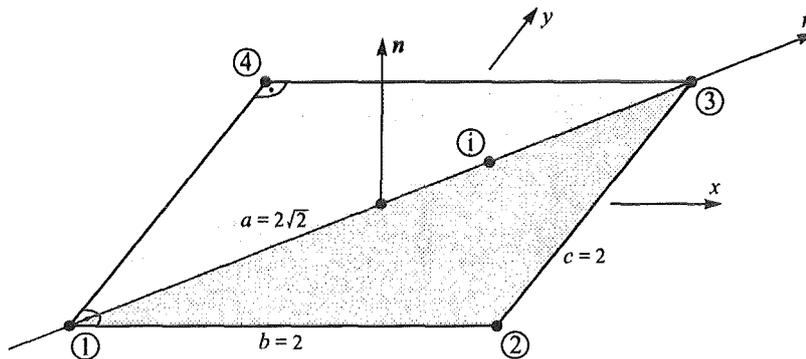


Abbildung 5.6: Geometrie des Viereckselements im Beispiel 6

Da die r -Achse auch die Symmetrieachse bzgl. der beiden Dreieckselemente ist, genügt es, allein die Lösung des Dreiecks Δ_{123} mit den Elementknotenpunkten ①, ② und ③ zu untersuchen.

Beispiel 6 (Viereck / Aufpunkte längs einer Diagonalen)				
Abstand des Aufpunkts $x = y$	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Dreieck Δ_{123})			
	$h_{i1}^{\Delta}, h_{i2}^{\Delta}, h_{i3}^{\Delta}$	g_{i1}^{Δ}	g_{i2}^{Δ}	g_{i3}^{Δ}
100.0		0.470233E-02	0.471402E-02	0.472590E-02
50.0		0.938151E-02	0.942790E-02	0.947580E-02
10.0		0.460294E-01	0.471171E-01	0.483936E-01
5.0		0.900851E-01	0.940982E-01	0.996290E-01
1.02	⋮	0.405328	0.456984	0.809525
1.004	⋮	0.412370	0.465054	0.860735
1.0 (Ecke)	0 (da $r_i \perp n$)	0.414214	0.467160	0.881374
0.996	⋮	0.416114	0.469313	0.908943
0.98	⋮	0.424189	0.478189	0.986134
0.5		0.824616	0.755388	1.583142
0 (Schwerpunkt)		1.322060	0.881374	1.322060
-0.5		1.583142	0.755388	0.824616
-0.98		0.986134	0.478189	0.424189

Tabelle 5.8: Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 6

In Tabelle 5.8 sind die Ergebnisse des Dreieckselements Δ_{123} für verschiedene Abstände des Aufpunkts \textcircled{i} vom Vierecksschwerpunkt dargestellt. Hier sind alle Element-Einflußkoeffizienten $h_{ij}^\Delta = 0$, da für Aufpunkte \textcircled{i} innerhalb der Elementebene stets das Skalarprodukt $r_i \cdot n$ verschwindet (siehe Kapitel 2.3).

Aus dieser Dreieckslösung kann jetzt die Lösung für die Vierecksfläche zusammengesetzt werden:

$$h_{ij}^\square = 0 \quad \text{für } j = 1 \dots 4, \quad \text{da } r_i \perp n \quad (5.15)$$

$$g_{i1}^\square = 2 g_{i1}^\Delta \quad (5.16)$$

$$g_{i2}^\square = g_{i2}^\Delta \quad (5.17)$$

$$g_{i3}^\square = 2 g_{i3}^\Delta \quad (5.18)$$

$$g_{i4}^\square = g_{i2}^\Delta \quad (5.19)$$

Mit dieser zusammengesetzten Lösung kann nun jede konstante oder unidirektionale, lineare Elementlösung des Viereckselements berechnet werden.

In Tabelle 5.9 ist die Lösung für das Viereckselement mit konstanten Ansatzfunktionen angegeben, die jeweils der Summe $h_{i \text{const.}}^\square = \sum_{j=1}^4 h_{ij}^\square \stackrel{\text{bzw.}}{=} 2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^\Delta$ und $g_{i \text{const.}}^\square = \sum_{j=1}^4 g_{ij}^\square \stackrel{\text{bzw.}}{=} 2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^\Delta$ entspricht. Einige Werte der Koeffizienten $g_{i \text{const.}}^\square$ der Vierecksgeometrie sind auch in [28], [57] und [61] dokumentiert.

Beispiel 6 (Viereck / Aufpunkte längs einer Diagonalen)		
Abstand des Aufpunkts $x = y$	analytische Element-Einflußkoeffizienten (Viereck \square_{1234})	
	$h_{i \text{const.}}^\square = 2 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^\Delta$	$g_{i \text{const.}}^\square = 2 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^\Delta$
100.0		0.282845E-01
50.0		0.565704E-01
10.0		0.283080
5.0		0.567625
1.02		3.343673
1.004	⋮	3.476318
1.0 (Ecke)	0 (da $r_i \perp n$)	3.525494
0.996	⋮	3.588740
0.98	⋮	3.777025
0.5		6.326291
0 (Schwerpunkt)		7.050989
-0.5		6.326291
-0.98		3.777025

Tabelle 5.9: Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 6, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist

Weitere numerische Beispiele für konstante Viereckselemente sind u.a. in [25] zu finden.

Kapitel 6

Anwendungen

Im Institut für Reaktorsicherheit (IRS) wird das Randintegralverfahren vorwiegend für die Berechnung von

- gekoppelten fluid-strukturdynamischen Vorgängen und von
- Anlaufströmungen

in komplexen dreidimensionalen Geometrien eingesetzt. Typische Anwendungen sind u.a. in [22, 23, 33, 34, 35] dokumentiert.

Zur Lösung dieser Probleme wurde am IRS das BE-Programm SING [35, 36] entwickelt. Das Softwarepaket ist seit 1978 im Einsatz und hat sich auch bei Anwendungsrechnungen für die Industrie und Genehmigungsbehörden bewährt.

Das in dieser Arbeit vorgestellte lineare Dreieckselement TRIA3 wurde in den SING-FORTRAN-Code implementiert. Im folgenden werden einige Anwendungen diskutiert, die mit SING und dem neuen Dreieckselement analysiert worden sind.

6.1 Wärmeleitungsproblem in einem Quader

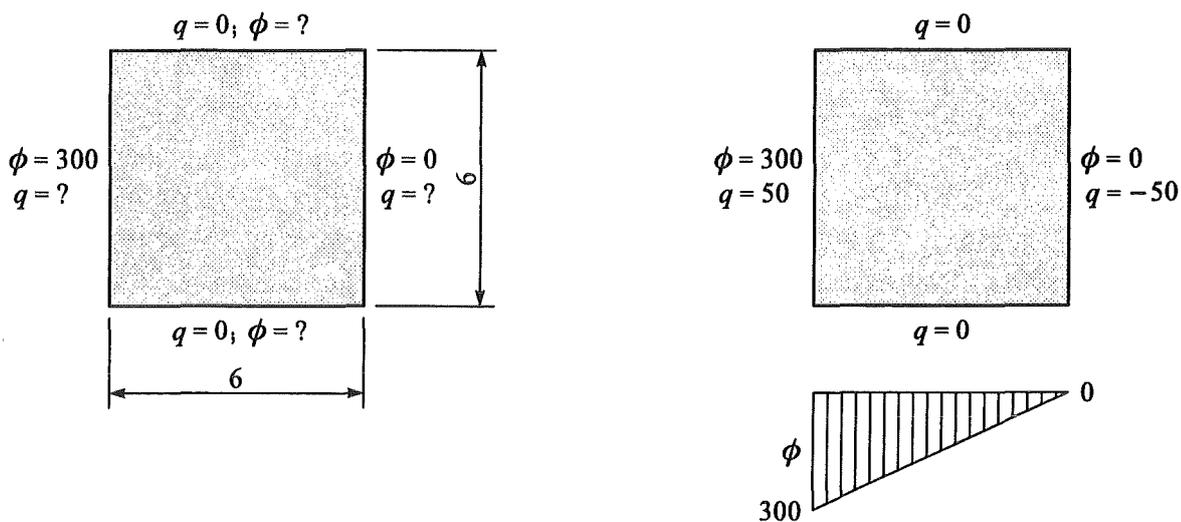
Als Erstes wird ein klassisches Beispiel eines Potentialproblems behandelt, anhand dessen die Lösung mehrerer Dreieckselemente im Verbund überprüft werden kann.

Es ist das triviale Wärmeleitungsproblem, bei dem ein Quader der Seitenlänge 6 auf einer Seite eine konstante Temperatur von 300°C besitzt und auf der gegenüberliegenden Seite die Temperatur 0°C . Die vier restlichen Wände sind voll isoliert, d.h. dort liegt ein adiabater Zustand mit der Wärmeflußdichte $\dot{q}_n = 0\text{ W/m}^2$ vor (siehe Abbildung 6.1 links). Wie schon in Kapitel 1 beschrieben, entspricht beim Wärmeleitungsproblem die Temperatur T dem Potential Φ und die Wärmeflußdichte \dot{q}_n ist proportional dem Normalgradienten q

$$T = \Phi \quad (6.1)$$

$$\dot{q}_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\lambda q \quad (6.2)$$

Dabei entspricht die Konstante λ der Wärmeleitfähigkeit mit der Einheit $[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{mK}}$.



Aufgabe

Lösung

Abbildung 6.1: Wärmeleitungsproblem in einem Quader

Die Lösung dieses einfachen Beispiels ist ein linearer Temperaturverlauf von der kalten zur warmen Seite bei einem konstanten Wärmefluß (siehe Abbildung 6.1 rechts).

Der Quader wurde gemäß Abbildung 6.2 mit 4 Dreieckselementen pro Seite diskretisiert. Das BE-Modell besitzt somit 24 Elemente und 14 Knotenpunkte.

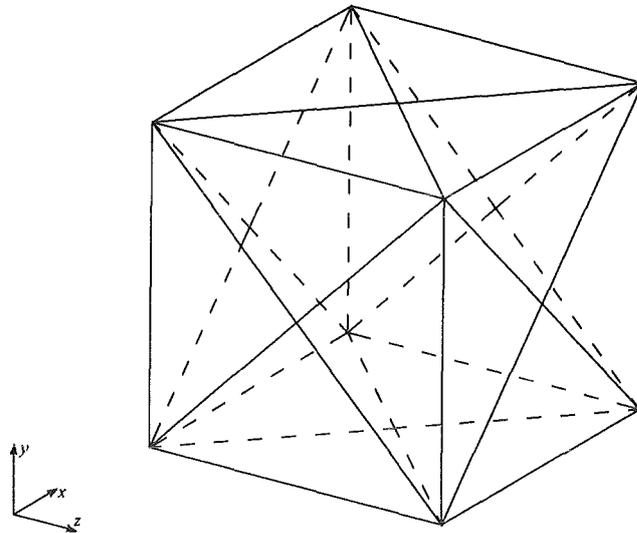


Abbildung 6.2: Idealisierung des Quaders

Da die Feldlösung bzw. die Temperaturverteilung linear ist, müssen die neuentwickelten Dreieckselemente mit ihren linearen Ansatzfunktionen die Lösung exakt wiedergeben, was in Abbildung 6.3 zu sehen ist. Der lineare Verlauf ist sowohl über eine Elementkante als auch über zwei Elemente in der Seitenmitte zu erkennen. Die Vektoren in Abbildung 6.3 entsprechen der Normalgradientenlösung q_n .

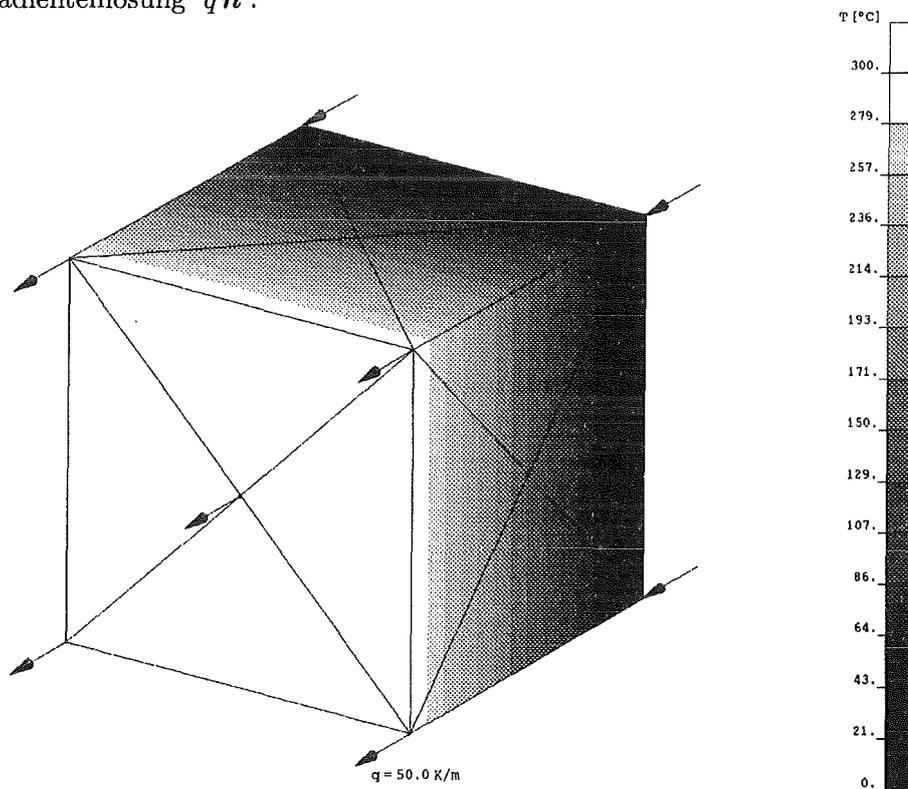


Abbildung 6.3: Berechnete Temperaturverteilung des Wärmeleitungsproblems

6.2 Blowdown-Belastung der Steuerstabführungsrohre in einem Reaktordruckbehälter

Ein wichtiger angenommener Störfall im Genehmigungsverfahren von Druckwasserreaktoren ist der Blowdown-Vorgang im Reaktordruckbehälter, d.h. der Ausströmvorgang bei einem plötzlichen Rohrbruch im primären Kühlkreislauf (siehe Abbildung 6.4).

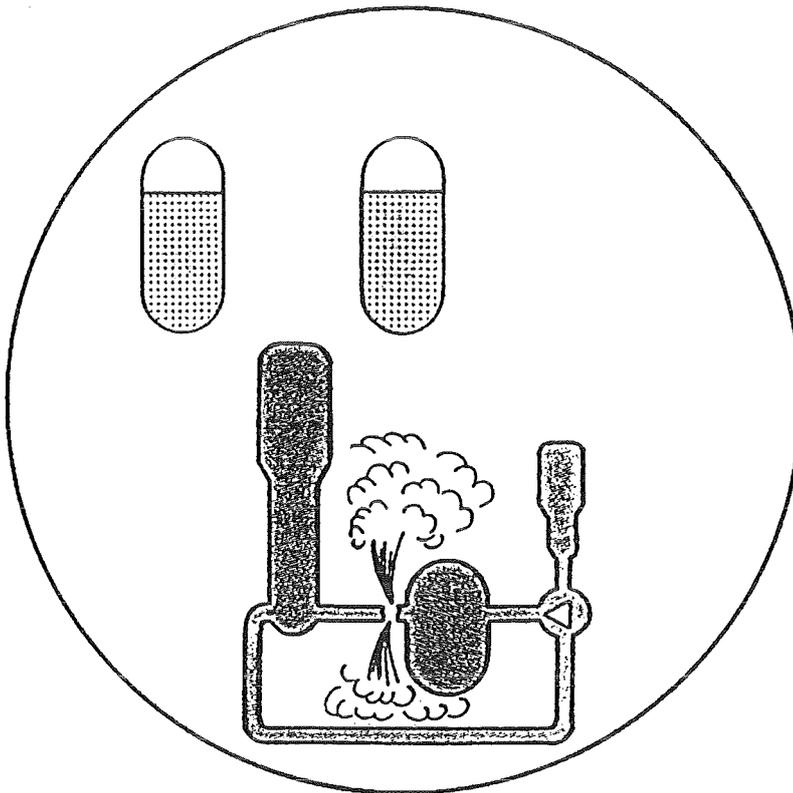


Abbildung 6.4: Blowdown-Vorgang in einem Druckwasserreaktor

In Abbildung 6.5 sind die wesentlichen Einbauten des Reaktordruckbehälters dargestellt. Im unteren Teil des Behälters findet die Kernreaktion statt, deren Nutzenergie an einen Wasserkreislauf abgegeben wird. Über dem Reaktorkern befinden sich u.a. die sogenannten Steuerstabführungsrohre, in denen die Steuerstäbe zur Kontrolle der Kernreaktion auf und ab bewegt werden.

Bei dem angenommenen Rohrbruch am Auslaßstutzen fällt der Kühlmitteldruck schlagartig nach Bruchbeginn um 40 bar auf den Sättigungsdruck ab. Dadurch wird das Kühlmittel im oberen Teil des Reaktordruckbehälters in Richtung Leck sehr stark beschleunigt. Durch die plötzliche Umströmung der Steuerstabführungsrohre entstehen an deren Oberflächen Druckdifferenzen, die Biegebelastungen an diesen Strukturelementen erzeugen. Laut Genehmigungsvorschriften dürfen bei einem plötzlichen Rohrbruch keine überhöhten Biegeverformungen dieser Steuerstabführungsrohre auftreten, damit auch während des Störfalls eine freie Steuerstabführung gewährleistet ist.

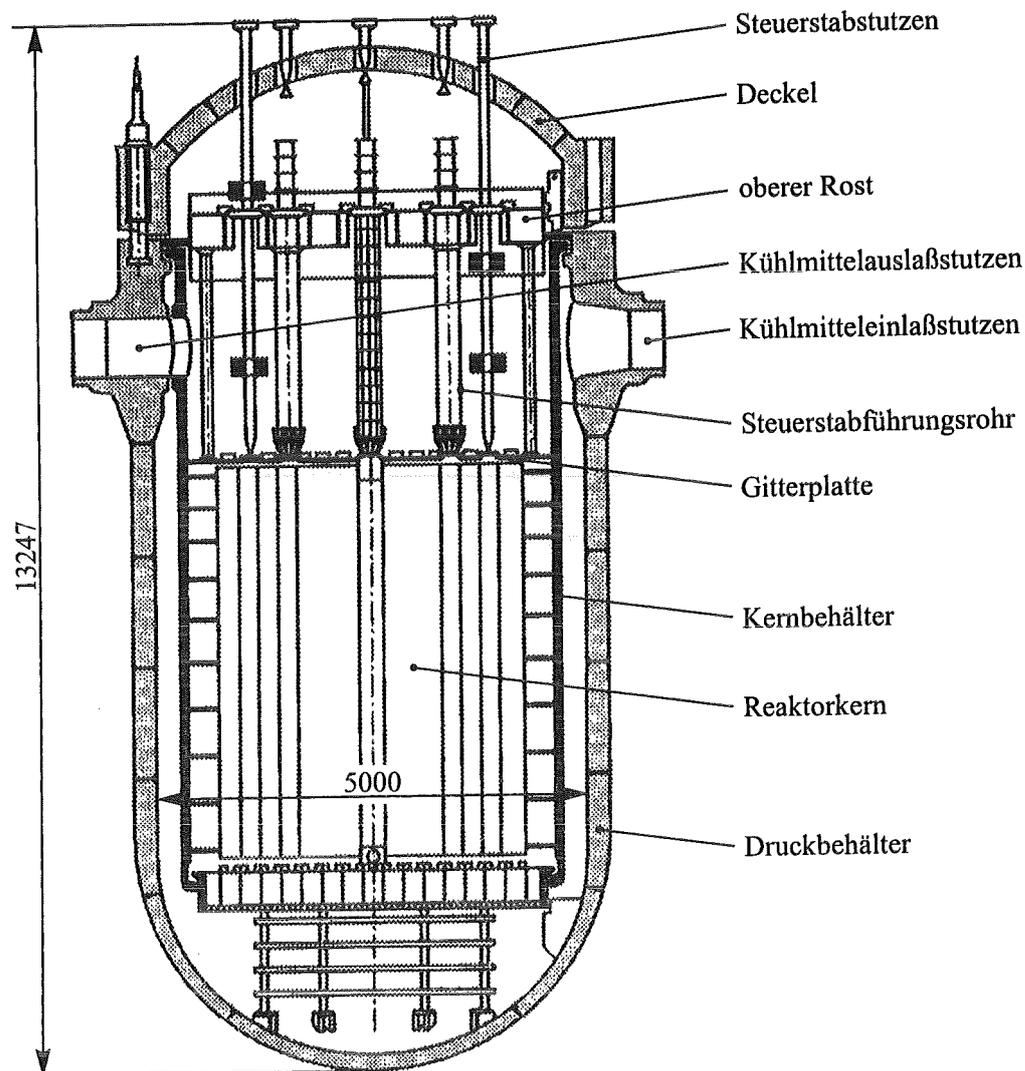


Abbildung 6.5: Aufbau eines Reaktordruckbehälters
(Maße in [mm])

Bei dem in Rede stehenden Problem wird die Flüssigkeit aus der Ruhe beschleunigt. Zu Beginn des Strömungsvorgangs werden daher die Druckkräfte primär durch die Fluidbeschleunigungen verursacht. Währenddessen sind die Fluidgeschwindigkeiten und die dazugehörigen Viskositäts-effekte noch vernachlässigbar klein.

Der Startvorgang dieser hochtransienten Strömung kann analog dem in Kapitel 1 vorgestellten Potentialproblem gelöst werden. Allerdings ist der Einsatz dieses Verfahrens für spätere Zeitpunkte nicht mehr sinnvoll, da dann größere Reibungseffekte auftreten. Wie umfangreiche Analysen gezeigt haben [33] liegt die Zeitgrenze etwa bei der zweifachen Periodendauer der 1. charakteristischen Struktureigenform. Weiterhin muß berücksichtigt werden, daß das verwendete fluiddynamische Modell eine inkompressible Flüssigkeit voraussetzt; diese Einschränkung ist bei Blowdown-Strömungen in Druckwasserreaktoren näherungsweise erfüllt [33].

Die Geometrie des zu untersuchenden Raums über dem Reaktorkern ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Dieser Raum wird in der Reaktortechnik "oberes Plenum" genannt.

Für eine Analyse mit dem neuentwickelten Dreieckselement TRIA3 wurde das obere Plenum mit 37 Steuerstabführungsrohren untersucht. Aus Symmetriegründen mußte nur ein Viertel der Struktur diskretisiert werden. In Abbildung 6.6 ist die Idealisierung dargestellt, wobei in der oberen Abbildung die äußere Umrandung und in der unteren Abbildung nur die Symmetrieebenen und die Steuerstabführungsrohre geplottet sind.

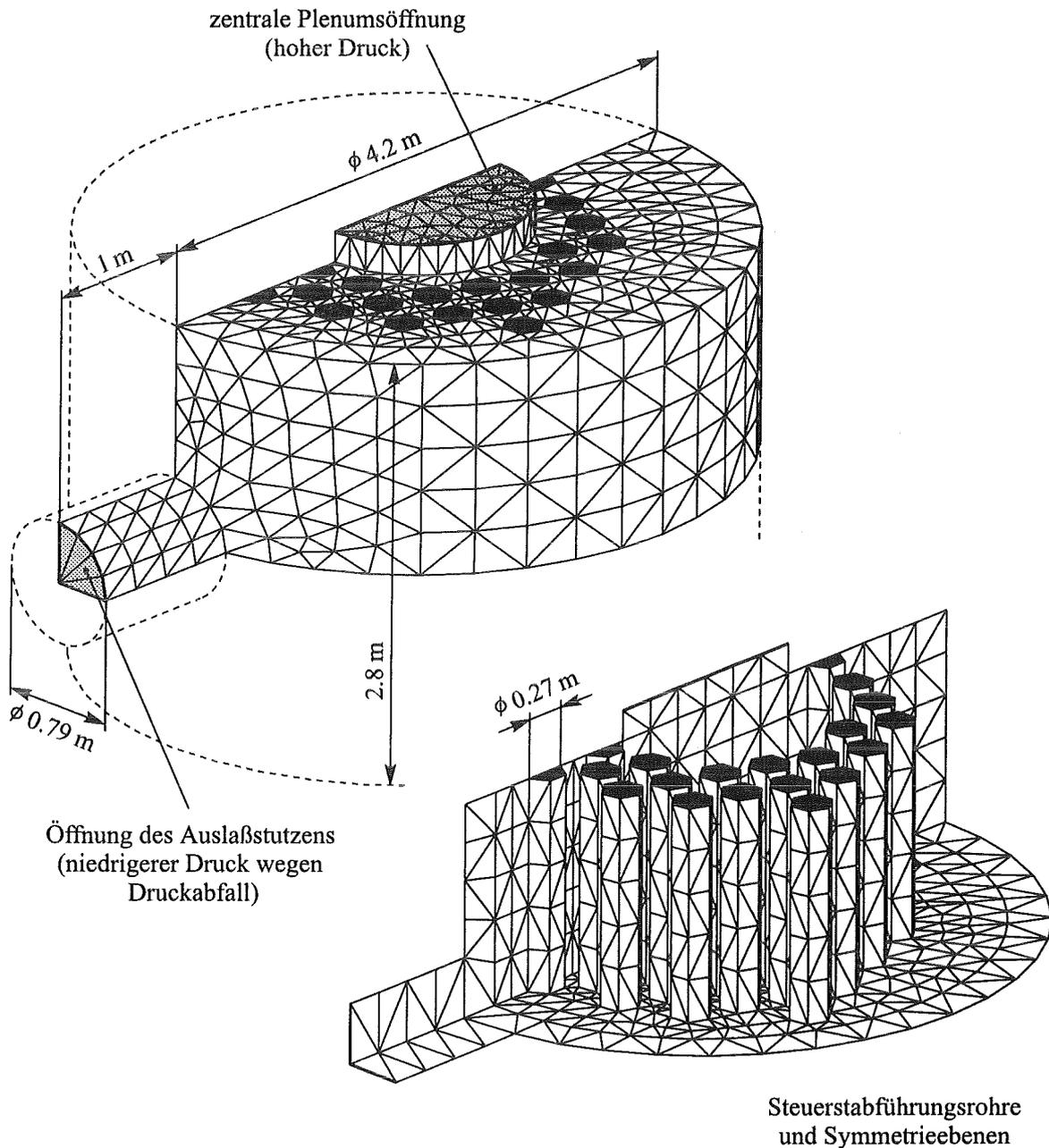


Abbildung 6.6: Idealisierung für die Blowdown-Analyse

Insgesamt wurden 2594 Dreieckselemente eingesetzt. Davon entfallen 60 Elemente auf die Idealisierung eines Steuerstabführungsrohrs. Mit 1265 Knotenpunkten besitzt das BE-Modell ebenso viele Freiheitsgrade.

Zum Test des Fluidmodells wird als Lastfall der zuvor beschriebene stufenförmige Druckabfall von 40 bar betrachtet. Für die Fluidberechnung wurden die dicken Druckbehälterwände, der massive Auslaßstutzen und die Steuerstabführungsrohre als starr angenommen. Unter diesen Bedingungen haben auch die zeitlichen Verläufe der Druckverteilung einen stufenförmigen Charakter. Weiterhin wurden an den Knotenpunkten der Symmetrieebenen NEUMANN-Randbedingungen mit Normalbeschleunigungen gleich Null vorgegeben.

An den großen zentralen Plenumsöffnungen wurde der Betriebsdruck von 200 bar als konstant vorgegeben. In Wirklichkeit nimmt dieser Druck ab, sobald die Strömung vom Reaktorkern in das obere Plenum zunimmt. Allerdings ist in den ersten Millisekunden nach Beginn der Anlaufströmung dieser Druckverlust an den zentralen Öffnungen vernachlässigbar gering [33]. Das Leck wird über die gesamte Öffnung des Auslaßstutzens simuliert, an der der Druckabfall von 40 bar auf den Sättigungsdruck von 160 bar vorgegeben wird. Für die Dichte des Kühlmittels unter Betriebsbedingungen wurde $\rho = 665 \text{ kg/m}^3$ verwendet.

Die berechnete Druckverteilung für den stufenförmigen Druckabfall ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Dreiviertel des gesamten Druckabfalls von 40 bar wird innerhalb des Auslaßstutzens abgebaut. Die restlichen 10 bar verteilen sich auf das obere Plenum. Die größten Beschleunigungen von 4172 m/s^2 treten an der Öffnung des Auslaßstutzens auf.

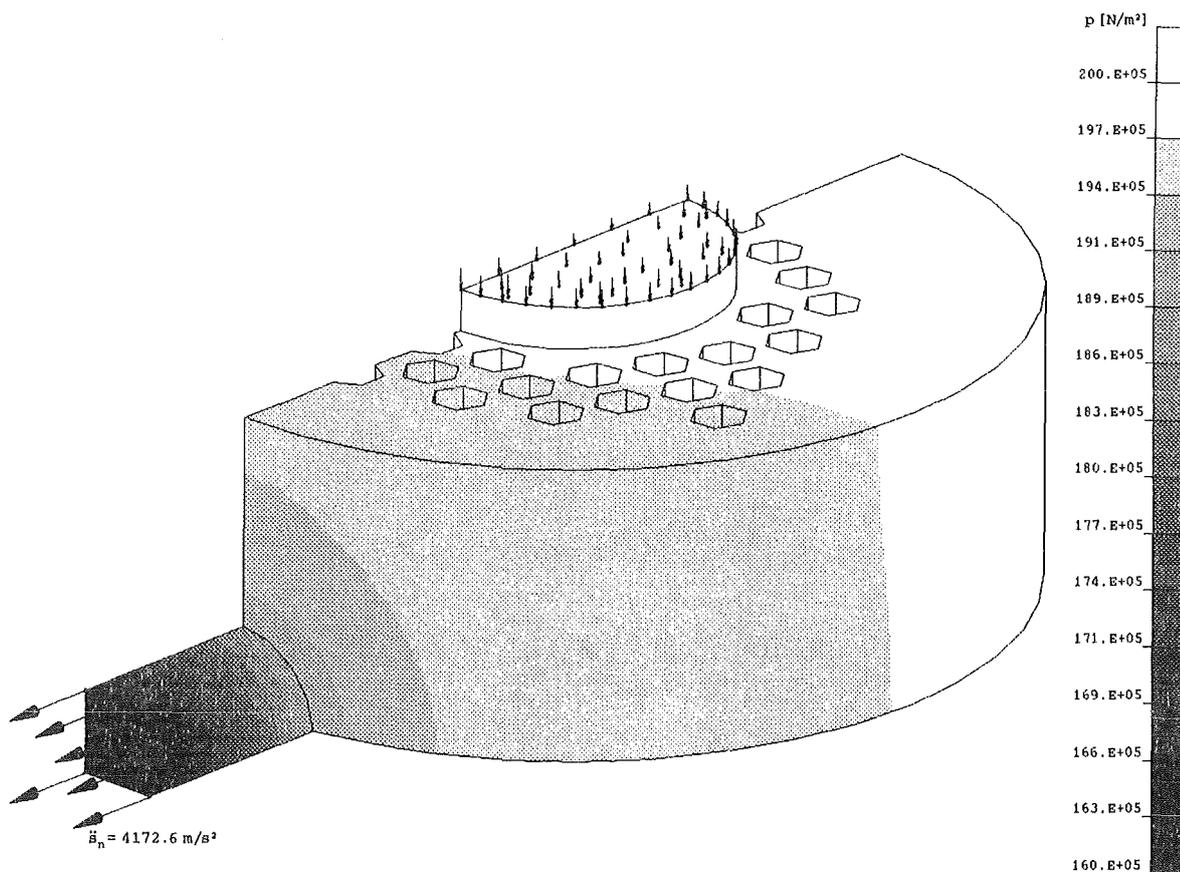


Abbildung 6.7: Berechnete Druckverteilung der Blowdown-Strömung

In Abbildung 6.8 ist die berechnete Druckverteilung in den Symmetrieebenen und an den Oberflächen der Steuerstabführungsrohre zu sehen. An den Steuerstabführungsrohren in der Nähe des Auslaßstutzens entstehen Druckdifferenzen von über 1 bar, die hohe aber noch tolerable Biegequerkräfte erzeugen.

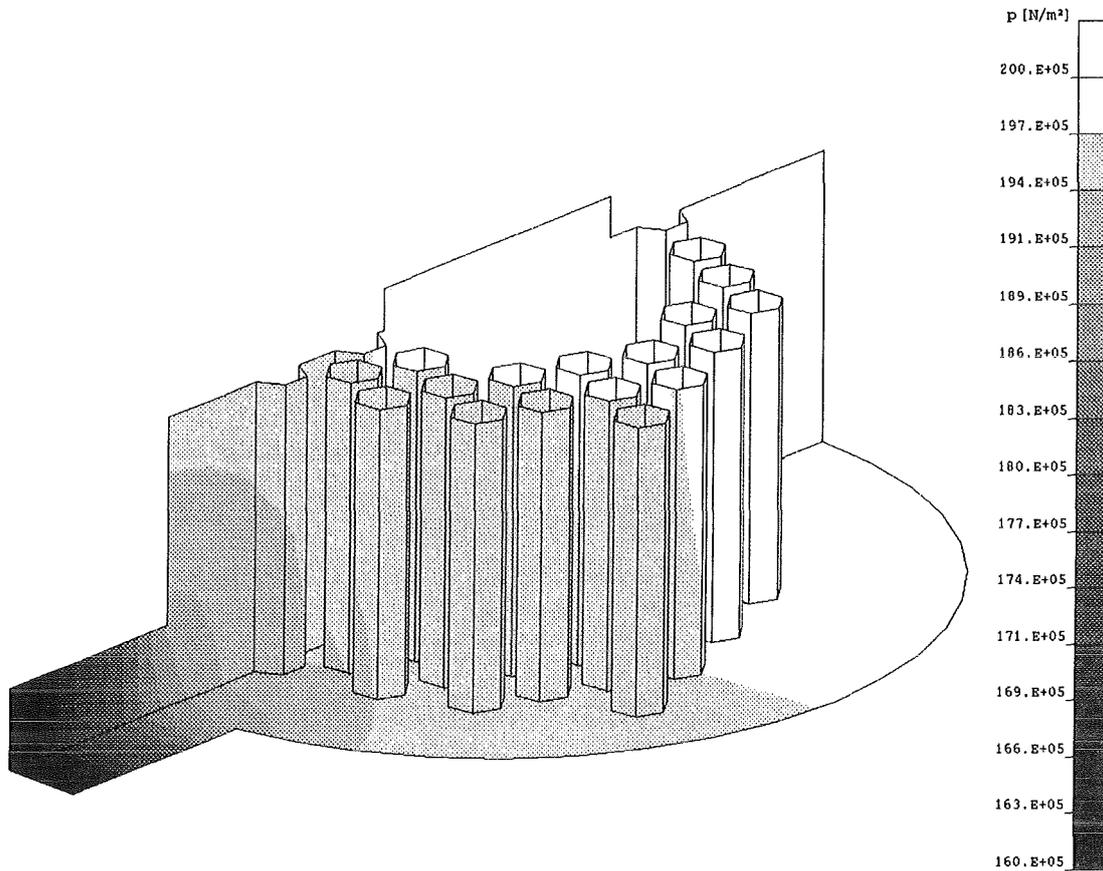


Abbildung 6.8: Berechnete Druckverteilung in den Symmetrieebenen und an den Oberflächen der Steuerstabführungsrohre

Anhang A

Ebene Trigonometrie

A.1 Zur Geometrie des Dreiecks

Der Vollständigkeit halber werden in diesem Kapitel die wichtigsten geometrischen Beziehungen am Dreieck angegeben.

Die drei Seitenlängen a, b, c entsprechen den Beträgen der Seitenvektoren zwischen den Elementknotenpunkten ①, ②, ③

$$a = |\mathbf{x}_{13}| \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{13} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 \quad (\text{A.1})$$

$$b = |\mathbf{x}_{12}| \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad (\text{A.2})$$

$$c = |\mathbf{x}_{23}| \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{23} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 \quad (\text{A.3})$$

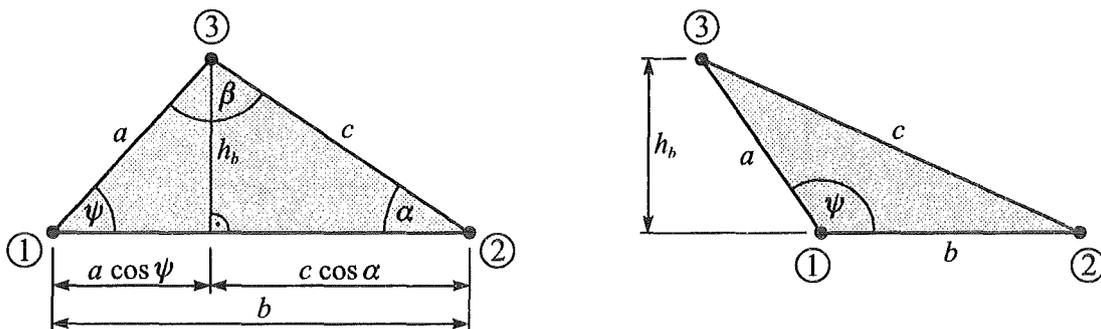


Abbildung A.1: Geometrische Größen am Dreieck

Der Eckwinkel ψ wird für ein beliebiges geradliniges Dreieck über den Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi \quad \text{bzw.} \quad (\text{A.4})$$

$$\psi = \arccos \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \quad (\text{A.5})$$

bestimmt. Analoges gilt für die anderen beiden Eckwinkel α und β .

Bei der Ermittlung der Eckwinkel ist jedoch größte Vorsicht geboten. Die Arcusfunktionen sind sowohl in der Mathematik als auch bei Compilerimplementierungen in einem bestimmten Zahlenintervall bzgl. dem Hauptwert definiert [10]. Für den Arcuscosinus gilt z.B.

$$x = \arccos y \quad \text{mit} \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ \quad \text{für} \quad -1 \leq y \leq +1 \quad (\text{A.6})$$

Der so ermittelte Winkel kann also Werte zwischen 0 und 180° annehmen und deckt damit den gesamten Wertebereich für Winkel eines beliebigen Dreiecks mit $\alpha + \beta + \psi = 180^\circ$ ab.

Fehler können dagegen beim Arcussinus auftreten. Hier gilt

$$x = \arcsin y \quad \text{mit} \quad -90^\circ \leq x \leq +90^\circ \quad \text{für} \quad -1 \leq y \leq +1 \quad (\text{A.7})$$

Der Winkel kann bei diesem Standardalgorithmus nur noch maximal +90° betragen. Der Bereich über 90° bis 180° wird über die Beziehung (A.7) nie erreicht. Die Berechnung des Eckwinkels ψ über die Gleichung $A = \frac{1}{2} ab \sin \psi$ bzw. $\psi = \arcsin \left(\frac{2A}{ab} \right)$ gilt nur für Winkel $\psi \leq 90^\circ$. Somit ist für ein allgemeines Dreieck die Winkelermittlung über die Arcussinusfunktion (A.7) nicht gültig. Daher sollten Dreieckswinkel stets nur über die Arcuscosinusfunktion (A.6) berechnet werden.

Falls $\cos \psi$ über Gleichung (A.4) berechnet worden ist, lassen sich $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ für ein beliebiges Dreieck effektiver über $c \cos \alpha = b - a \cos \psi$ bzw.

$$\cos \alpha = \frac{b - a \cos \psi}{c} \quad (\text{A.8})$$

$$\cos \beta = \frac{a - b \cos \psi}{c} \quad (\text{A.9})$$

bestimmen (vgl. Abbildung A.1).

Für die Ermittlung der Dreiecksfläche A bieten sich mehrere Verfahren an.

Vektoriell erhält man die Fläche über das Kreuzprodukt (vektorielle Produkt) zweier Seitenvektoren des Dreiecks, z.B. $\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}$. Der Betrag des resultierenden Vektors, der senkrecht zur Dreiecksfläche steht, entspricht dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Die Dreiecksfläche entspricht genau der Hälfte dieser Vierecksfläche.

$$A_{(1 \times 1)} = \frac{1}{2} |\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}| \quad (\text{A.10})$$

Durch Normierung des Vektors $\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}$ erhält man gleich den Normalenvektor des Dreieckselements (siehe Abbildung 2.5).

$$\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}}{|\mathbf{x}_{12} \times \mathbf{x}_{13}|} \quad (\text{A.11})$$

Durch eine weitere skalare Auswertung der Gleichung (A.10) kann die Dreiecksfläche A z.B. auch über

$$A = \frac{1}{2} a b \sin \psi = \frac{1}{2} |\mathbf{x}_{12}| |\mathbf{x}_{13}| \sin \psi \quad (\text{A.12})$$

ermittelt werden.

Ein numerisch günstiges Verfahren für die Berechnung der Dreiecksfläche A aus den drei vorhandenen Seitenlängen a, b, c stellt die sogenannte "homogene Flächenformel" bzw. die "HERONISCHE Formel" [10]

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (\text{A.13})$$

dar. Hier werden alle Längenmaße gleichwertig einbezogen.

Die Dreieckshöhen h_a, h_b, h_c werden ohne großen numerischen Aufwand am einfachsten über

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{2A}{a} && \left(= b \sin \psi = \dots \right) \\ h_b &= \frac{2A}{b} && \left(= a \sin \psi = \dots \right) \\ h_c &= \frac{2A}{c} && \left(= \frac{ab \sin \psi}{c} = b \sin \alpha = \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

bestimmt, da ansonsten die Ermittlung der trigonometrischen Funktionen im Computer sehr viel Rechenaufwand benötigt.

Für die Beurteilung der geometrischen Verzerrung des Dreiecks und für numerische Vergleichszwecke sind neben der mittleren Seitenlänge \bar{l}

$$\bar{l} = \frac{1}{3}(a+b+c) \quad (\text{A.15})$$

auch der Radius des Innenkreises r_{\min} , kurz Inkreisradius genannt,

$$r_{\min} = \frac{A}{s} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (\text{A.16})$$

und der Radius des Umkreises r_{\max} , der sogenannte Umkreisradius [10],

$$r_{\max} = \frac{abc}{4A} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \psi} \quad (\text{A.17})$$

von Nutzen (siehe Abbildung A.2).

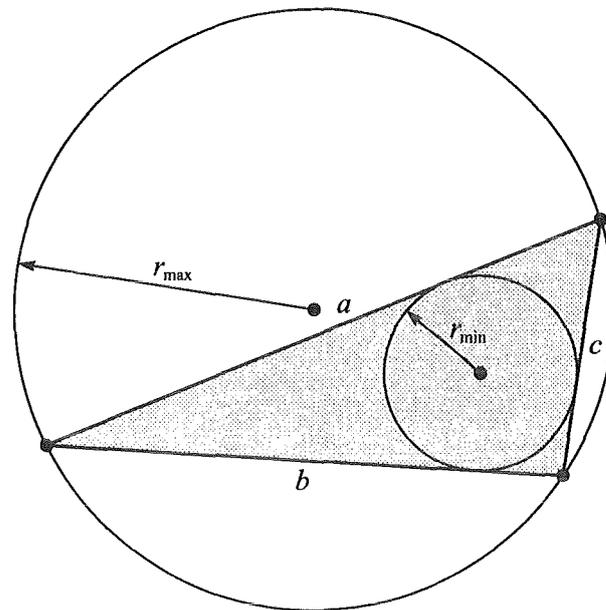


Abbildung A.2: Inkreis und Umkreis eines Dreiecks

A.2 Transformation zwischen zwei Dreieckskoordinatensystemen

Die analytischen Integrationen der Element-Einflußkoeffizienten lassen sich wesentlich vereinfachen, falls der Aufpunkt \textcircled{i} in einem Dreiecksknoten oder senkrecht darüber liegt. Für einen beliebigen Aufpunkt \textcircled{i} muß dann i.a. über drei Dreiecksflächen integriert werden. Hierfür ist jedoch notwendig, die Koordinaten des Dreieckselements in den lokalen Koordinaten der neuen Dreiecksflächen auszudrücken.

Zunächst wird die Transformation von einem nicht-orthogonalen (schiefwinkligen) Koordinatensystem auf ein im Ursprung gedrehtes nicht-orthogonales Koordinatensystem in einer Ebene untersucht. Dabei können die Winkel zwischen den jeweiligen Basisvektoren beliebig verschieden sein. Es wird ein beliebiger Ortsvektor \mathbf{r} mit der Länge r betrachtet. Er läßt sich in beiden Koordinatensystemen durch eine Linearkombination aus den zwei linear unabhängigen Einheitsvektoren (Basisvektoren) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bzw. $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ wie folgt darstellen:

$$\mathbf{r} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 \quad \text{im } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\text{-Koordinatensystem} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{r} = u' \mathbf{e}'_1 + v' \mathbf{e}'_2 \quad \text{im } \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\text{-Koordinatensystem} \quad (\text{A.19})$$

Da es sich beidemal um denselben Vektor \mathbf{r} handelt, können die zwei Gleichungen gleichgesetzt werden

$$u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 = u' \mathbf{e}'_1 + v' \mathbf{e}'_2 \quad (\text{A.20})$$

Um eine einfache Beziehung zwischen den Koordinaten u, v und u', v' zu erhalten, wird Gleichung (A.20) jeweils mit dem Einheitsvektor e_1 und e_2 durchmultipliziert. Es entstehen die beiden skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} u e_1 e_1 + v e_2 e_1 &= u' e'_1 e_1 + v' e'_2 e_1 \\ u + v \cos \psi &= u' e'_1 e_1 + v' e'_2 e_1 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

und

$$\begin{aligned} u e_1 e_2 + v e_2 e_2 &= u' e'_1 e_2 + v' e'_2 e_2 \\ u \cos \psi + v &= u' e'_1 e_2 + v' e'_2 e_2 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

wobei die kommutativen Skalarprodukte der normierten Basisvektoren $e_1 e_1 = 1 = e_2 e_2$ und $e_1 e_2 = \cos \psi = e_2 e_1$ liefern. Das Auflösen der beiden Gleichungen (A.21) und (A.22) nach u und v ergibt

$$u = \frac{e'_1 e_1 - e'_1 e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} u' + \frac{e'_2 e_1 - e'_2 e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} v' \quad (\text{A.23})$$

$$v = \frac{e'_1 e_2 - e'_1 e_1 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} u' + \frac{e'_2 e_2 - e'_2 e_1 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} v' \quad (\text{A.24})$$

Mit der Einführung der Abkürzungen

$$\alpha_{11} = \frac{e'_1 e_1 - e'_1 e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad (\text{A.25})$$

$$\alpha_{21} = \frac{e'_2 e_1 - e'_2 e_2 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad (\text{A.26})$$

$$\alpha_{12} = \frac{e'_1 e_2 - e'_1 e_1 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha_{22} = \frac{e'_2 e_2 - e'_2 e_1 \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} \quad (\text{A.28})$$

die nur für linear unabhängige Basisvektoren e_1, e_2 mit $\cos \psi \neq \pm 1$ existieren, folgt

$$u = \alpha_{11} u' + \alpha_{21} v' \quad (\text{A.29})$$

$$v = \alpha_{12} u' + \alpha_{22} v' \quad (\text{A.30})$$

bzw. in der kompakten Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T} \boldsymbol{r}' \quad (\text{A.32})$$

D.h. ein beliebiger Vektor \boldsymbol{r}' mit den Koordinaten u', v' im gestrichenen Koordinatensystem e'_1, e'_2 kann durch obige Transformationsvorschrift bzw. durch die Rotation \boldsymbol{T} im ungestrichenen Koordinatensystem e_1, e_2 als Vektor \boldsymbol{r} mit den Koordinaten u, v ausgedrückt werden. Dies gilt natürlich auch für die beiden Basisvektoren e'_1 und e'_2 .

Wenn die beiden nicht-orthogonalen Koordinatensysteme keinen gemeinsamen Ursprung haben, muß bei der Transformation noch zusätzlich eine Verschiebung berücksichtigt werden. Dies geschieht einfach über eine Vektoraddition des Offsetvektors r_0 . Die allgemeine Transformationsvorschrift lautet dann

$$r = r_0 + T r' \quad (\text{A.33})$$

Wird nun diese Transformation auf zwei gegeneinander verschobene und verdrehte Dreieckssysteme angewandt, wobei der Ursprung des gestrichenen Systems dem Punkt \textcircled{i} entspricht, erhält man

$$u = u_i + \alpha_{11} u' + \alpha_{21} v' \quad (\text{A.34})$$

$$v = v_i + \alpha_{12} u' + \alpha_{22} v' \quad (\text{A.35})$$

Mit $\xi'_2 = \frac{u'}{b'}$ und $\xi'_3 = \frac{v'}{a'}$ sowie $\xi_2 = \frac{u}{b}$, $\xi_3 = \frac{v}{a}$ und $U_i = \frac{u_i}{b}$, $V_i = \frac{v_i}{a}$ lautet schließlich die Transformationsvorschrift in den homogenen Dreieckskoordinaten

$$\xi_2 = \frac{u}{b} = U_i + \frac{\alpha_{11} b'}{b} \xi'_2 + \frac{\alpha_{21} a'}{b} \xi'_3 \quad (\text{A.36})$$

$$\xi_3 = \frac{v}{a} = V_i + \frac{\alpha_{12} b'}{a} \xi'_2 + \frac{\alpha_{22} a'}{a} \xi'_3 \quad (\text{A.37})$$

$$\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3 \quad (\text{A.38})$$

mit den schon bekannten Koeffizienten α_{11} , α_{21} , α_{12} , α_{22} aus Gleichungen (A.25) ff.

Anhang B

Ausführliche analytische Integration

Da bei einigen zu lösenden Integralen die zur Zeit aktuellen Versionen der Computeralgebraprogramme MAPLE [45], MATHEMATICA [58] und REDUCE [55] keine analytische Lösung finden können, werden alle Integrallösungen hergeleitet und teilweise Ergebnisse aus mathematischen Formelwerken [10, 15, 19] herangezogen. In allen aufgeführten Standardintegralen bzw. Integrationsformeln wird die Integrationskonstante stets weggelassen. Die Variablenbezeichnungen in den Integrationsformeln sind als lokal anzusehen, d.h. sie haben keinen direkten Bezug zur laufenden Rechnung.

B.1 Integrale für Aufpunkte in Dreiecksknoten

Zunächst wird das Integral

$$g_{11} = \int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (\text{B.1})$$

bzgl. dem Aufpunkt \textcircled{i} , der im Dreiecksknoten $\textcircled{1}$ liegt, für die Elementdreiecksfläche Δ gelöst. Mit der in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ und den Beziehungen (2.39) $\xi_1 = 1 - \frac{r}{R(\theta)}$ und (2.38) $d\Gamma = r dr d\theta$ ergibt sich

$$g_{11} = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \left(1 - \frac{r}{R(\theta)} \right) dr d\theta \quad (\text{B.2})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R(\theta)}{2} d\theta \quad (\text{B.3})$$

Für die Integration über die θ -Variable wird die äußere von θ abhängige Integrationsgrenze (2.37) $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{ab \sin \psi}{c \sin(\alpha+\theta)}$ eingesetzt

$$g_{11} = \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{ab \sin \psi}{2c \sin(\alpha+\theta)} d\theta \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{A}{c} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha+\theta)} d\theta \quad (\text{B.5})$$

und die Integrationsformel [10, 15]

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| \quad (\text{B.6})$$

herangezogen

$$g_{11} = \frac{A}{c} \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\alpha + \theta}{2} \right) \right| \right]_{\theta=0}^{\psi} \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{A}{c} \ln \left(\frac{\left| \tan \left(\frac{\alpha + \psi}{2} \right) \right|}{\left| \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right|} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{A}{c} \ln \left(\frac{\left| \frac{\sin(\alpha + \psi)}{1 + \cos(\alpha + \psi)} \right|}{\left| \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right|} \right) \quad (\text{B.9})$$

mit $\tan \left(\frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta}$. Da für ein gewöhnliches Dreieck die Größen

$$1 + \cos \vartheta \geq 0 \quad \text{für alle } \vartheta$$

$$\sin \vartheta \geq 0 \quad \text{für } 0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$$

$$0^\circ < (\alpha + \psi) < 180^\circ \quad \text{wegen } \alpha + \beta + \psi = 180^\circ \quad \text{und } 0^\circ < \alpha, \beta, \psi < 180^\circ$$

nie negativ werden, können die Betragstriche in Gleichung (B.9) wegfallen. Mit der Dreiecksformel

$$\alpha + \beta + \psi = 180^\circ \quad (\text{B.10})$$

vereinfacht sich die Gleichung

$$g_{11} = \frac{A}{c} \ln \left(\frac{\sin(\alpha + \psi) [1 + \cos \alpha]}{[1 + \cos(\alpha + \psi)] \sin \alpha} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{A}{c} \ln \left(\frac{\sin(180^\circ - \beta) [1 + \cos \alpha]}{[1 + \cos(180^\circ - \beta)] \sin \alpha} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{A}{c} \ln \left(\frac{\sin \beta [1 + \cos \alpha]}{[1 - \cos \beta] \sin \alpha} \right) \quad (\text{B.13})$$

Mit der Dreiecksbeziehung (Sinussatz)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \psi} \quad (\text{B.14})$$

folgt

$$g_{11} = \frac{A}{c} \ln \left(\frac{b [1 + \cos \alpha]}{a [1 - \cos \beta]} \right) \quad (\text{B.15})$$

Da die Ermittlung von trigonometrischen Funktionen im Computer sehr viel Rechenaufwand benötigt, wird Gleichung (B.15) mit dem Cosinussatz für ein beliebiges Dreieck

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{bzw.} \quad (\text{B.16})$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{B.17})$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (\text{B.18})$$

weiter vereinfacht

$$g_{11} = \frac{A}{c} \ln \left(\frac{b \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right]}{a \left[1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right]} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{A}{c} \ln \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2ac - a^2 - c^2 + b^2} \right) \quad (\text{B.20})$$

Nach einer Produktzerlegung und kürzen des Terms $(-a + b + c)$ erhält man die gesuchte Lösung

$$g_{11} = \int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{A}{c} \ln \left(\frac{a + b + c}{a + b - c} \right) \quad (\text{B.21})$$

Für das Integral

$$g_{12} = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (\text{B.22})$$

ergibt die innere Integration über r mit $\xi_2 = \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a}$ und $d\Gamma = r dr d\theta$

$$g_{12} = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a} dr d\theta \quad (\text{B.23})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R^2(\theta) \sin(\psi - \theta)}{2h_a} d\theta \quad (\text{B.24})$$

Mit $R(\theta) = \frac{ab \sin \psi}{c \sin(\alpha + \theta)}$ und $h_a = b \sin \psi$ entsteht das Integral

$$g_{12} = \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{a^2 b^2 \sin^2 \psi \sin(\psi - \theta)}{c^2 \sin^2(\alpha + \theta) 2b \sin \psi} d\theta \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{Aa}{c^2} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin^2(\alpha + \theta)} d\theta \quad (\text{B.26})$$

das mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen auf

$$g_{12} = \frac{Aa}{c^2} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta}{(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)^2} d\theta \quad (\text{B.27})$$

erweitert werden kann.

Da bei diesem nicht-trivialen Integral die zur Zeit aktuellen Versionen der Computeralgebraprogramme MAPLE [45], MATHEMATICA [58] und REDUCE [55] keine analytische Lösung finden können, wird auf die in der Praxis sehr nützlichen Integraltafeln von W. GRÖBNER & N. HOFREITER [19] zurückgegriffen. Dort sind im Gegensatz zu vielen anderen Integralformelwerken die Lösungsansätze für die jeweiligen Integralfamilien stets angegeben. Damit ist eine Überprüfung und Erweiterung der Integralformeln jederzeit möglich.

Mit [19]

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^n} dx = \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2 - c^2)} \left[\frac{(\beta c - \gamma b) + (\alpha c - \gamma a) \cos x - (\alpha b - \beta a) \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^{n-1}} \right. \\ \left. + \int \frac{(n-1)(\alpha a - \beta b - \gamma c) - (n-2)(\alpha b - \beta a) \cos x - (n-2)(\alpha c - \gamma a) \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^{n-1}} dx \right] \quad (\text{B.28})$$

für $n > 1$ und $a^2 \neq b^2 + c^2$

geht Gleichung (B.27) über in

$$g_{12} = \frac{Aa}{c^2} \left\{ \left[\frac{-\cos \psi \sin \alpha - \sin \psi \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta} \right]_{\theta=0}^{\psi} \right. \quad (\text{B.29})$$

$$\left. + (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta} d\theta \right\}$$

$$= \frac{Aa}{c^2} \left\{ \left[\frac{-\sin(\alpha + \psi)}{\sin(\alpha + \theta)} \right]_{\theta=0}^{\psi} - \cos(\alpha + \psi) \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{Aa}{c^2} \left\{ \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin \alpha} - 1 - \cos(\alpha + \psi) \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.31})$$

Mit der Dreiecksbeziehung $\alpha + \beta + \psi = 180^\circ$ und dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ kann die Lösung weiter vereinfacht werden.

$$g_{12} = \frac{Aa}{c^2} \left\{ \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin \alpha} - 1 - \cos(180^\circ - \beta) \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{Aa}{c^2} \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - 1 \right) + \frac{Aa}{c^2} \cos \beta \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \quad (\text{B.33})$$

$$= \frac{A}{c^2} (b - a) + \frac{a \cos \beta}{c} \underbrace{\frac{A}{c} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta}_{g_{11}} \quad (\text{B.34})$$

Das verbleibende Integral ist schon beim Einflußkoeffizienten g_{11} gelöst worden, so daß mit Gleichung (B.5) folgendermaßen substituiert werden kann.

$$g_{12} = \frac{A}{c^2} (b - a) + \frac{a \cos \beta}{c} \underbrace{\int_{\Delta} \xi_1 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma}_{g_{11}} \quad (\text{B.35})$$

Zur Vermeidung von trigonometrischen Funktionen wird wieder der Cosinussatz (B.18) $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ angewendet. Die Lösung lautet dann

$$g_{12} = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2} \left[\frac{A}{c} \ln \left(\frac{a + b + c}{a + b - c} \right) \right] + \frac{A}{c^2} (b - a) \quad (\text{B.36})$$

$$= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2} g_{11} + \frac{A}{c^2} (b - a) \quad (\text{B.37})$$

Das dritte zu lösende Integral

$$g_{13} = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (\text{B.38})$$

geht mit $\xi_3 = \frac{r \sin \theta}{h_b}$ und $d\Gamma = r dr d\theta$ nach Integration über die r -Koordinate

$$g_{13} = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r \sin \theta}{h_b} dr d\theta \quad (\text{B.39})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R^2(\theta) \sin \theta}{2h_b} d\theta \quad (\text{B.40})$$

und der Variablensubstitution $R(\theta) = \frac{ab \sin \psi}{c \sin(\alpha + \theta)}$ und $h_b = a \sin \psi$ in den schon bekannten Integraltyp

$$g_{13} = \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{a^2 b^2 \sin^2 \psi \sin \theta}{c^2 \sin^2(\alpha + \theta) 2a \sin \psi} d\theta \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{Ab}{c^2} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{\sin^2(\alpha + \theta)} d\theta \quad (\text{B.42})$$

bzw.

$$g_{13} = \frac{Ab}{c^2} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)^2} d\theta \quad (\text{B.43})$$

über. Dieses Integral läßt sich wieder mit dem Standardintegral aus [19]

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^n} dx = \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2 - c^2)} \left[\frac{(\beta c - \gamma b) + (\alpha c - \gamma a) \cos x - (\alpha b - \beta a) \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^{n-1}} \right. \\ \left. + \int \frac{(n-1)(\alpha a - \beta b - \gamma c) - (n-2)(\alpha b - \beta a) \cos x - (n-2)(\alpha c - \gamma a) \sin x}{(a + b \cos x + c \sin x)^{n-1}} dx \right] \\ \text{für } n > 1 \text{ und } a^2 \neq b^2 + c^2 \quad (\text{B.44})$$

lösen.

$$g_{13} = \frac{Ab}{c^2} \left\{ \left[\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta} \right]_{\theta=0}^{\psi} + \cos \alpha \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta} d\theta \right\} \quad (\text{B.45})$$

$$= \frac{Ab}{c^2} \left\{ \left[\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} \right]_{\theta=0}^{\psi} + \cos \alpha \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{Ab}{c^2} \left\{ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \psi)} - 1 + \cos \alpha \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.47})$$

Gleichung (B.47) kann wiederum mit der Dreiecksbeziehung $\alpha + \beta + \psi = 180^\circ$ und dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ vereinfacht werden.

$$g_{13} = \frac{Ab}{c^2} \left\{ \frac{\sin \alpha}{\sin(180^\circ - \beta)} - 1 + \cos \alpha \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \right\} \quad (\text{B.48})$$

$$= \frac{Ab}{c^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - 1 \right) + \frac{Ab}{c^2} \cos \alpha \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta \quad (\text{B.49})$$

$$= \frac{A}{c^2} (a - b) + \frac{b \cos \alpha}{c} \underbrace{\frac{A}{c} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{\sin(\alpha + \theta)} d\theta}_{g_{11}} \quad (\text{B.50})$$

Mit dem Cosinussatz (B.17) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ erhält man die Lösung

$$g_{13} = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2} \left[\frac{A}{c} \ln \left(\frac{a+b+c}{a+b-c} \right) \right] - \frac{A}{c^2} (b-a) \quad (\text{B.51})$$

$$= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2} g_{11} - \frac{A}{c^2} (b-a) \quad (\text{B.52})$$

B.2 Integrale für Aufpunkte senkrecht über einem Dreiecksknoten

In diesem Abschnitt wird die vollständige analytische Lösung der regulären Integrale für die Einflußkoeffizienten aus Kapitel 2.3.3 hergeleitet. Dabei befindet sich der Aufpunkt \textcircled{i} stets senkrecht über dem Dreiecksknoten $\textcircled{1}$, der gleichzeitig dem Fußpunkt des Lotes bzw. dem Projektionspunkt \textcircled{p} entspricht (siehe Abbildung B.1). Der singuläre Fall, wenn der Aufpunkt \textcircled{i} im Dreiecksknoten $\textcircled{1}$ liegt, ist im vorherigen Abschnitt B.1 analytisch gelöst worden.

Die Integrationen beziehen sich auf das Referenzdreieck gemäß Abbildung B.1, das dem Dreieck Δ' im Kapitel 2.3.3 entspricht. Um die Notation übersichtlich zu halten, wird in diesem Abschnitt der Strich ($'$) bei den Variablen weggelassen.

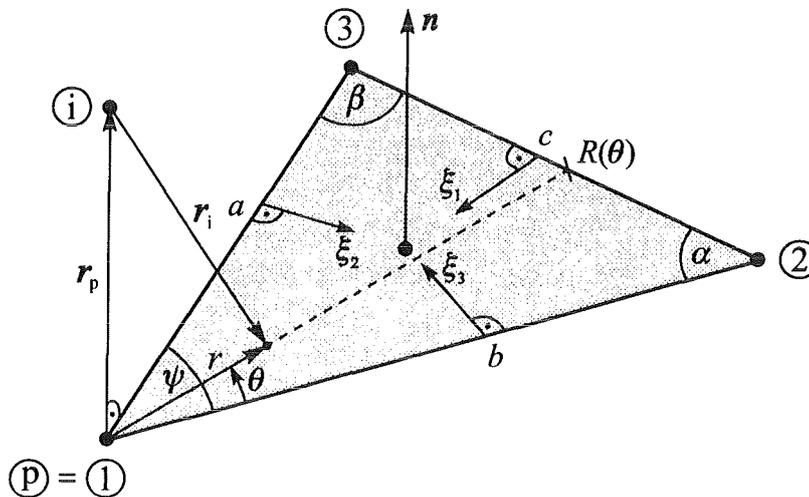


Abbildung B.1: Geometrie bei der Integration für Aufpunkte \textcircled{i} senkrecht über dem Dreiecksknoten $\textcircled{1}$

Aus didaktischen Gründen werden die Integrale der Einflußkoeffizienten in der Reihenfolge

- 1) $h_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma$
- 2) $g_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i} d\Gamma$
- 3) $h_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma$
- 4) $h_2 = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma$
- 5) $g_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma$
- 6) $g_2 = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma$

gelöst, weil teilweise Einzelergebnisse von vorherigen Lösungen verwendet werden können. Am Ende des Kapitels folgen die Integrationen für die redundanten Beziehungen (2.136) und (2.138).

Das erste Integral

$$h_1^* = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma \quad (\text{B.53})$$

wird für die Integration über die Dreiecksfläche Δ mit Gleichung (2.111) $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ erweitert und anschließend auf die Polarkoordinaten r und θ mit $d\Gamma = r dr d\theta$ gemäß Kapitel 2.3.3 transformiert

$$h_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta \quad (\text{B.54})$$

Die innere Integration über die r -Koordinate wird mit dem Standardintegral [10, 15]

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (\text{B.55})$$

durchgeführt

$$h_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \quad (\text{B.56})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} + \frac{1}{r_p} \right) d\theta \quad (\text{B.57})$$

Für die verbleibende Integration über die θ -Variable wird die äußere von θ abhängige Integrationsgrenze (2.109) $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta)}$ eingesetzt

$$h_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{1}{\sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha+\theta)} + r_p^2}} d\theta + \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{r_p} d\theta \quad (\text{B.58})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{-\sin(\alpha+\theta)}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2 \sin^2(\alpha+\theta)}} d\theta + \frac{1}{r_p} \psi \quad (\text{B.59})$$

*Mit h_1 müßte strenggenommen das Integral $\int_{\Delta} \xi_1/r_i^3 d\Gamma$ bezeichnet werden. Da aber wegen $\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3$ und $\int_{\Delta} \xi_1/r_i^3 d\Gamma = \int_{\Delta} 1/r_i^3 d\Gamma - h_2 - h_3$ nur noch das Integral $\int_{\Delta} 1/r_i^3 d\Gamma$ zu lösen ist, wird diesem der Name h_1 gegeben. Gleiches gilt für die Bezeichnung g_1 . Falls die Einflußkoeffizienten h_{ij} für das Referenzdreieck gemäß Abbildung B.1 von Interesse sind, muß nach den Integrationen noch der Term $(-r_i n)$ berücksichtigt werden, also $h_{i1} = (-r_i n) h_1 - h_{i2} - h_{i3}$, $h_{i2} = (-r_i n) h_2$, $h_{i3} = (-r_i n) h_3$. Für die g_{ij} -Koeffizienten gilt analog $g_{i1} = g_1 - g_{i2} - g_{i3}$, $g_{i2} = g_2$, $g_{i3} = g_3$. Für den Fall, daß sich der Aufpunkt über einem der beiden anderen Elementknotenpunkte befindet, können die dazugehörigen Element-Einflußkoeffizienten für das Referenzdreieck durch entsprechendes zyklisches Vertauschen der Dreiecksseiten und -winkel ermittelt werden.

Die Lösung erhält man mit der Variablensubstitution

$$\begin{aligned}
 t &= \cos(\alpha + \theta) \\
 dt &= -\sin(\alpha + \theta) d\theta \\
 \sin^2(\alpha + \theta) &= 1 - \cos^2(\alpha + \theta) = 1 - t^2 \\
 t_1 &= t(\theta = 0) = \cos \alpha \\
 t_2 &= t(\theta = \psi) = \cos(\alpha + \psi) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta
 \end{aligned} \tag{B.60}$$

mit $\alpha + \beta + \psi = 180^\circ$. An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß bei einer Variablensubstitution die Eindeutigkeit im Integrationsbereich gewährleistet bleiben muß. Beispielsweise besteht bei der Substitution $t = \sin(\alpha + \theta)$ keine Eindeutigkeit mehr im interessierenden Intervall $0^\circ < (\alpha + \psi) < 180^\circ$. Einem t -Wert können zwei Winkel $\alpha + \psi$ zugeordnet werden. Im Gegensatz hierzu ist die Substitution $t = \cos(\alpha + \theta)$ im Intervall $0^\circ < (\alpha + \psi) < 180^\circ$ stets eindeutig.

Mit der oben beschriebenen Variablensubstitution geht Gleichung (B.59) über in

$$h_1 = \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2(1-t^2)}} dt + \frac{1}{r_p} \psi \tag{B.61}$$

$$= \frac{1}{r_p} \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{h_c^2 + r_p^2}{r_p^2} - t^2}} dt + \frac{1}{r_p} \psi \tag{B.62}$$

Dieses Integral läßt sich nun mit der Standardformel [10]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \quad \text{mit} \quad \arcsin y = -\arccos y + \frac{\pi}{2} \tag{B.63}$$

lösen

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{r_p} \left[-\arccos\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{h_c^2 + r_p^2}{r_p^2}}}\right) \right]_{t=t_1=\cos \alpha}^{t_2=-\cos \beta} + \frac{1}{r_p} \psi \\
 &= \frac{1}{r_p} \left[-\arccos\left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) + \arccos\left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) \right] + \frac{1}{r_p} \psi \\
 &= \frac{1}{r_p} \left[\psi - \arccos\left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) + \arccos\left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.64}$$

Mit der Abkürzung

$$d = \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \quad (\text{B.65})$$

erhält man das Endergebnis

$$h_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i^3} d\Gamma = \frac{1}{r_p} \left[\psi - \underbrace{\left\{ \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \right\}} \right] \quad (\text{B.66})$$

$$= \frac{1}{r_p} \left[\psi - d \right] \quad (\text{B.67})$$

Bei Bedarf kann die arccos-Funktion durch $-\arcsin$ ersetzt werden, da $\arccos y = -\arcsin y + \frac{\pi}{2}$.

Das erste zu lösende Integral für die Element-Einflußkoeffizienten g_{ij}

$$g_1^* = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i} d\Gamma \quad (\text{B.68})$$

geht mit $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ und der Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ mit $d\Gamma = r dr d\theta$ über in

$$g_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta \quad (\text{B.69})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \left[\sqrt{r^2 + r_p^2} \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \quad (\text{B.70})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \left(\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} - r_p \right) d\theta \quad (\text{B.71})$$

Mit $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)}$ erhält man die Gleichung

$$g_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha + \theta)} + r_p^2} d\theta - \int_{\theta=0}^{\psi} r_p d\theta \quad (\text{B.72})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sqrt{h_c^2 + r_p^2 \sin^2(\alpha + \theta)}}{\sin^2(\alpha + \theta)} \sin(\alpha + \theta) d\theta - r_p \psi \quad (\text{B.73})$$

*Für die Wahl der Bezeichnung g_1 siehe Fußnote Seite 122

Die Anwendung der schon auf Seite 123 vorgeschlagenen Variablensubstitution

$$\begin{aligned}
 t &= \cos(\alpha + \theta) \\
 dt &= -\sin(\alpha + \theta) d\theta \\
 \sin^2(\alpha + \theta) &= 1 - \cos^2(\alpha + \theta) = 1 - t^2 \\
 t_1 &= t(\theta = 0) = \cos \alpha \\
 t_2 &= t(\theta = \psi) = \cos(\alpha + \psi) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta
 \end{aligned}
 \tag{B.74}$$

führt auf

$$g_1 = \int_{t=t_1}^{t_2} -\frac{\sqrt{h_c^2 + r_p^2(1-t^2)}}{1-t^2} dt - r_p \psi
 \tag{B.75}$$

$$= r_p \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\frac{h_c^2 + r_p^2}{r_p^2} - t^2}}{t^2 - 1} dt - r_p \psi
 \tag{B.76}$$

Da für den Integraltyp

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2 - 1} dx = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - 1}} - x}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - 1}} + x} \right| + \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{für } a > 1
 \tag{B.77}$$

in den Formelwerken [10, 15, 19] kein Standardintegral zu finden ist, wird diese hier hergeleitet:

Nach einer Partialbruchzerlegung in

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(x-1)(x+1)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x-1} dx - \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x+1} dx \right)
 \end{aligned}
 \tag{B.78}$$

läßt sich nun das erste neuentstandene Integral $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x-1} dx$ mit der Standardformel [19]

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x-\alpha} dx = \sqrt{X} + (\tilde{a}\alpha + \tilde{b}) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + (\tilde{a}\alpha^2 + 2\tilde{b}\alpha + c) \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}
 \tag{B.79}$$

$$\text{mit } X = \tilde{a}x^2 + 2\tilde{b}x + \tilde{c}$$

überführen in

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x-1} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + (a^2 - 1) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{a^2 - x^2}}
 \tag{B.80}$$

Die verbleibenden Integrale können in Standardwerken nachgeschlagen werden. Mit dem schon bekannten Integraltyp aus [10]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \quad \text{wegen } \arcsin y = -\arccos y + \frac{\pi}{2}
 \tag{B.81}$$

und der Integralformel aus [19]

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{-\alpha x + a^2 + \sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - x^2)}}{x - \alpha} \right| \quad \text{für } |\alpha| < a
 \tag{B.82}$$

erhält man die Lösung für das erste Integral

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-1} dx = \sqrt{a^2-x^2} + \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-1} \ln \left| \frac{a^2-x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}}{x-1} \right| \quad (\text{B.83})$$

für $a > 1$

Das zweite Integral $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x+1} dx$ kann analog mit den obigen Gleichungen (B.79), (B.81) und (B.82) gelöst werden

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x+1} dx = \sqrt{a^2-x^2} - \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-1} \ln \left| \frac{a^2+x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}}{x+1} \right| \quad (\text{B.84})$$

für $a > 1$

Nach Einsetzen der gefundenen Lösungen (B.83) und (B.84) in die Ausgangsgleichung (B.78) findet man schließlich die Gesamtlösung

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-1} dx - \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x+1} dx \right) \\ &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{2} \ln \left| \frac{[a^2+x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}](1-x)}{[a^2-x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}](1+x)} \right| + \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{B.85}) \end{aligned}$$

für $a > 1$

Das Argument in der Logarithmusfunktion kann weiter vereinfacht werden, da bekanntlich $\frac{e}{f} = \frac{e+g}{f+h}$ für $\frac{h}{f} = \frac{g}{e}$ auch für $g \neq 0$ und $h \neq 0$. D.h. falls das Verhältnis $eh = fg$ erfüllt ist, kann der Ausdruck $\frac{e+g}{f+h}$ durch $\frac{e}{f}$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} &\frac{[a^2+x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}](1-x)}{[a^2-x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}](1+x)} \\ &= \frac{a^2+x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}-a^2x-x^2-x\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}}{a^2-x+\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}+a^2x-x^2+x\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}} \\ &= \frac{[\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}-a^2x+x] + [a^2-x^2-x\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}]}{[\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}+a^2x-x] + [a^2-x^2+x\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}]} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}-a^2x+x}{\sqrt{(a^2-1)(a^2-x^2)}+a^2x-x} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}}-x}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}}+x} \quad (\text{B.86}) \end{aligned}$$

Damit erhält man das Endergebnis

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-1} dx = \frac{\sqrt{a^2-1}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}}-x}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}}+x} \right| + \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{für } a > 1 \quad (\text{B.87})$$

Auch hier kann wieder bei Bedarf die arccos-Funktion durch $-\arcsin$ ersetzt werden, weil $\arccos y = -\arcsin y + \frac{\pi}{2}$

Da für $h_c, r_p \neq 0$, $\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2}} = \sqrt{\frac{h_c^2}{r_p^2} + 1}$ stets größer 1 ist, kann nun die eben hergeleitete Integralformel ohne Einschränkungen auf das zu lösende Integral (B.76) angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 g_1 &= r_p \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2}}{t^2-1} dt - r_p \psi \\
 &= r_p \left[\frac{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - 1}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2} - t}{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2} + t} \right| + \arccos \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2}}} \right) \right]_{t=t_1}^{t_2} - r_p \psi \quad (\text{B.88})
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{h_c}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{h_c^2} (1-t^2)} - t}{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{h_c^2} (1-t^2)} + t} \right| + r_p \arccos \left(\frac{r_p t}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \right]_{t=t_1=\cos \alpha}^{t_2=-\cos \beta} - r_p \psi \quad (\text{B.89})$$

Mit der Dreieckshöhe $h_c = \frac{ab \sin \psi}{c}$ und dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \psi}$ führt das Einsetzen der Integrationsgrenzen auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{h_c}{2} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{a^2} + \cos \beta}}{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{a^2} - \cos \beta}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{b^2} - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \frac{r_p^2}{b^2} + \cos \alpha}} \right| \right] \\
 &\quad + r_p \left[\arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \right] - r_p \psi \quad (\text{B.90})
 \end{aligned}$$

Die Betragstriche in den Logarithmusfunktionen können entfallen, da die Argumente stets größer 0 sind wegen

$$\left. \begin{aligned}
 \sqrt{1 + \frac{r_p^2}{a^2}} &\stackrel{\text{stets}}{>} +1 \\
 \sqrt{1 + \frac{r_p^2}{b^2}} &\stackrel{\text{stets}}{>} +1
 \end{aligned} \right\} \text{für } a, b, r_p > 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 -1 &< \cos \beta < +1 \\
 -1 &< \cos \alpha < +1
 \end{aligned} \right\} \text{für } 0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{h_c}{2} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta}{\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha}{\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha} \right) \right] \\
 &\quad - r_p \left[\psi - \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) + \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \right] \quad (\text{B.91})
 \end{aligned}$$

Mit der schon eingeführten Abkürzung (B.65) $d = \arccos\left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) - \arccos\left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right)$ vereinfacht sich das Endergebnis zu

$$g_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{r_i} d\Gamma = \frac{h_c}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) - r_p \left[\psi - \left\{ \arccos\left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) - \arccos\left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) \right\} \right] \quad (\text{B.92})$$

$$= \frac{h_c}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) - r_p (\psi - d) \quad (\text{B.93})$$

Auch hier kann wieder bei Bedarf die arccos-Funktion durch $-\arcsin$ ersetzt werden, da $\arccos y = -\arcsin y + \frac{\pi}{2}$.

Als nächstes Integral wird

$$h_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad (\text{B.94})$$

gelöst. Mit $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ und der Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ sowie $d\Gamma = r dr d\theta$ und $\xi_3 = \frac{r \sin \theta}{h_b}$ kann die Ausgangsgleichung in

$$h_3 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta \quad (\text{B.95})$$

überführt werden. Die innere Integration über die r -Variable erfolgt mit der Integralformel aus [15]

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad (\text{B.96})$$

Es entsteht

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \left[-\frac{r}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} + \ln \left(r + \sqrt{r^2 + r_p^2} \right) \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} + \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) - \ln r_p \right] d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{\sin \theta}{h_b} \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta + \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad - \frac{1 - \cos \psi}{h_b} \ln r_p \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

Da die äußere Integrationsgrenze $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta)}$ eine trigonometrische Funktion in Abhängigkeit von $(\alpha + \theta)$ besitzt, ist es für die Lösung der beiden verbleibenden Integrale günstiger, den Term $\sin \theta$ als Funktion von $(\alpha + \theta)$ auszudrücken

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin [(\alpha + \theta) - \alpha] \\ &= \sin(\alpha + \theta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \theta) \sin \alpha\end{aligned}\quad (\text{B.98})$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}h_3 &= \underbrace{\frac{\cos \alpha}{h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha + \theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta}_{I_1} \\ &+ \underbrace{\frac{\sin \alpha}{h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} \cos(\alpha + \theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta}_{I_2} \\ &+ \underbrace{\frac{\cos \alpha}{h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3} \\ &+ \underbrace{\frac{\sin \alpha}{h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_4} \\ &- \frac{1 - \cos \psi}{h_b} \ln r_p\end{aligned}\quad (\text{B.99})$$

$$h_3 = \frac{\cos \alpha}{h_b} I_1 + \frac{\sin \alpha}{h_b} I_2 + \frac{\cos \alpha}{h_b} I_3 + \frac{\sin \alpha}{h_b} I_4 - \frac{1 - \cos \psi}{h_b} \ln r_p \quad (\text{B.100})$$

Nach dieser Unterteilung werden nun die vier Einzelintegrale der Reihe nach gelöst.

Das erste Integral I_1 geht mit $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta)}$ über in

$$I_1 = \int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha+\theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta \quad (\text{B.101})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha+\theta) \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta) \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha+\theta)} + r_p^2}} d\theta \quad (\text{B.102})$$

$$= h_c \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{-\sin(\alpha+\theta)}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2 \sin^2(\alpha+\theta)}} d\theta \quad (\text{B.103})$$

und ist identisch mit dem schon gelösten Integraltyp (B.59) von h_1 . Die Lösung kann daher direkt angegeben werden

$$I_1 = h_c \frac{1}{r_p} \left[-\arccos\left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) + \arccos\left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}}\right) \right] \quad (\text{B.104})$$

$$= \frac{h_c}{r_p} (-d) \quad (\text{B.105})$$

Das Integral

$$I_2 = \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} \cos(\alpha+\theta) d\theta \quad (\text{B.106})$$

verwandelt sich durch die Variablensubstitution

$$\begin{aligned} R &= \frac{h_c}{\sin(\alpha+\theta)} \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{-h_c \cos(\alpha+\theta)}{\sin^2(\alpha+\theta)} = \frac{-R^2 \cos(\alpha+\theta)}{h_c} \\ \cos(\alpha+\theta) d\theta &= \frac{-h_c}{R^2} dR \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

$$R_1 = R(\theta=0) = \frac{h_c}{\sin \alpha} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \alpha} = \frac{a b c}{c a} = b$$

$$R_2 = R(\theta=\psi) = \frac{h_c}{\sin(\alpha+\psi)} = \frac{h_c}{\sin \beta} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \beta} = \frac{a b c}{c b} = a$$

in

$$I_2 = -h_c \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{1}{R \sqrt{R^2 + r_p^2}} dR \quad (\text{B.108})$$

Mit dem Standardintegral [10, 15]

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right| \quad (\text{B.109})$$

erhält man die Lösung (ohne Betragstriche, da stets $a, b, r_p > 0$)

$$I_2 = -h_c \left[-\frac{1}{r_p} \ln \left(\frac{r_p + \sqrt{R^2 + r_p^2}}{R} \right) \right]_{R=R_1=b}^{R_2=a}$$

$$I_2 = \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b [r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2}]}{a [r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2}]} \right) \quad (\text{B.110})$$

Beim Integral

$$I_3 = \int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \quad (\text{B.111})$$

$$= \int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(\frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} + \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha + \theta)} + r_p^2} \right) d\theta \quad (\text{B.112})$$

mit $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)}$ wird zunächst eine partielle Integration [10]

$$\int_{x=a}^b u'v dx = [uv]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b u v' dx \quad (\text{B.113})$$

mit

$$u' = \sin(\alpha + \theta) \quad v = \ln \left(\frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} + \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha + \theta)} + r_p^2} \right) \quad (\text{B.114})$$

$$u = -\cos(\alpha + \theta) \quad v' = \frac{dv}{d\theta} = \frac{-h_c \cos(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \theta) \sqrt{h_c^2 + r_p^2 \sin^2(\alpha + \theta)}}$$

durchgeführt. Daraus entsteht die Gleichung

$$I_3 = \left[-\cos(\alpha + \theta) \ln \left(\frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} + \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha + \theta)} + r_p^2} \right) \right]_{\theta=0}^{\psi}$$

$$- \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{h_c \cos^2(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \theta) \sqrt{h_c^2 + r_p^2 \sin^2(\alpha + \theta)}} d\theta \quad (\text{B.115})$$

Mit $\cos(\alpha + \psi) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ und $\sin(\alpha + \psi) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$ sowie dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \psi}$ läßt sich die Rechnung weiter vereinfachen

$$I_3 = \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) + \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.116})$$

$$+ \frac{h_c}{r_p} \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{-\cos^2(\alpha + \theta)}{\sin^2(\alpha + \theta) \sqrt{\frac{h_c^2}{r_p^2} + \sin^2(\alpha + \theta)}} \sin(\alpha + \theta) d\theta$$

Bei dem verbleibenden Integral kann wieder die bekannte Variablensubstitution

$$t = \cos(\alpha + \theta)$$

$$dt = -\sin(\alpha + \theta) d\theta$$

$$\sin^2(\alpha + \theta) = 1 - \cos^2(\alpha + \theta) = 1 - t^2 \quad (\text{B.117})$$

$$t_1 = t(\theta = 0) = \cos \alpha$$

$$t_2 = t(\theta = \psi) = \cos(\alpha + \psi) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

angewendet werden

$$I_3 = \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right)$$

$$+ \frac{h_c}{r_p} \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{t^2}{(1-t^2) \sqrt{\frac{h_c^2}{r_p^2} - t^2}} dt \quad (\text{B.118})$$

Die Lösung des Integrals

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}} + x}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}} - x} \right| + \arccos \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{für } a^2 > 1 \quad (\text{B.119})$$

muß explizit hergeleitet werden, da in den Formelwerken [10, 15, 19] keine Standardformel zu finden ist:

Mit der Variablensubstitution

$$z = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^3+z}{x} \quad (\text{B.120})$$

$$\frac{x}{1-x^2} dx = \frac{a^2}{a^2-1} \frac{z}{\left(\frac{1}{a^2-1} - z^2\right)(z^2+1)} dz$$

geht das Integral über in

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a^2}{a^2-1} \frac{z^2}{\left(\frac{1}{a^2-1} - z^2\right)(z^2+1)} dz \quad (\text{B.121})$$

und nach einer Partialbruchzerlegung in

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a^2-1} \int \frac{dz}{\left(\frac{1}{a^2-1} - z^2\right)} - \int \frac{dz}{z^2+1} \quad (\text{B.122})$$

Mit den Standardintegralen aus [15]

$$\int \frac{dx}{b^2 - x^2} = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{b+x}{b-x} \right| \quad (\text{B.123})$$

und

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C_1 = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + C_2 = -\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + C_3 \quad (\text{B.124})$$

$$\text{wegen} \quad \arctan x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + \frac{\pi}{2}$$

ergibt sich

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a^2-1} \left[\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} + z}{\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} - z} \right| \right] + \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \right) \quad (\text{B.125})$$

für $a^2 > 1$

Nach vollzogener Rücksubstitution mit $z = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ lautet nun das Endergebnis für die Integralformel

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}} + x}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-1}} - x} \right| + \arccos \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{für } a^2 > 1 \quad (\text{B.126})$$

Da die Bedingung $\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} = \frac{h_c^2}{r_p^2} + 1$ für $h_c, r_p \neq 0$ stets größer 1 ist, kann die eben hergeleitete Lösung auf das Integral (B.118) angewendet werden

$$I_3 = \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.127})$$

$$+ \frac{h_c}{r_p} \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{t^2}{(1-t^2)\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2}} dt$$

$$= \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right)$$

$$+ \frac{h_c}{r_p} \left[\frac{-1}{2\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2}{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - 1}} - t}{\sqrt{\frac{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - t^2}{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2} - 1}} + t} \right| + \arccos \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{h_c^2+r_p^2}{r_p^2}}} \right) \right]_{t=t_1=\cos \alpha}^{t_2=-\cos \beta} \quad (\text{B.128})$$

Das Einsetzen der Integrationsgrenzen und die Auswertung der Argumente in den ln- und arccos-Funktionen ist identisch mit dem Vorgehen in Gleichungen (B.88), (B.89) und (B.90). Die Gesamtlösung wird daher direkt angegeben:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
&\quad + \frac{h_c}{r_p} \left[\arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.129}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) + \frac{h_c}{r_p} d
\end{aligned} \tag{B.130}$$

falls wieder die Abkürzung (B.65) $d = \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right)$ verwendet wird.

Für das Integral

$$I_4 = \int_{\theta=0}^{\psi} -\ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) \cos(\alpha + \theta) d\theta \tag{B.131}$$

wird dieselbe Lösungsstrategie wie beim Integral I_2 angewendet. Mit der Variablensubstitution

$$\begin{aligned}
R &= \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} \\
\frac{dR}{d\theta} &= \frac{-h_c \cos(\alpha + \theta)}{\sin^2(\alpha + \theta)} = \frac{-R^2 \cos(\alpha + \theta)}{h_c} \\
\cos(\alpha + \theta) d\theta &= \frac{-h_c}{R^2} dR
\end{aligned} \tag{B.132}$$

$$R_1 = R(\theta = 0) = \frac{h_c}{\sin \alpha} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \alpha} = \frac{a b c}{c a} = b$$

$$R_2 = R(\theta = \psi) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \psi)} = \frac{h_c}{\sin \beta} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \beta} = \frac{a b c}{c b} = a$$

geht Gleichung (B.131) über in

$$I_4 = h_c \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{\ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right)}{R^2} dR \tag{B.133}$$

In den Integraltafeln von W. GRÖBNER & N. HOFREITER [19] ist die Lösung dieses Integraltyps zu finden

$$\int \frac{\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|}{x^2} dx = \frac{-\ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|}{x} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| \tag{B.134}$$

Somit lautet das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 I_4 &= h_c \left[\frac{-\ln \left| R + \sqrt{R^2 + r_p^2} \right|}{R} - \frac{1}{r_p} \ln \left| \frac{r_p + \sqrt{R^2 + r_p^2}}{R} \right| \right]_{R=R_1=b}^{R_2=a} \\
 I_4 &= -\frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right) \\
 &\quad + h_c \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.135}$$

Die Betragstriche in den Logarithmusfunktionen konnten entfallen, da stets $a, b, r_p > 0$.

Nach der Lösung des letzten Teilintegrals können nun alle vier Einzellösungen (B.105), (B.110), (B.130) und (B.135) in die Ausgangsgleichung (B.100) eingesetzt werden

$$\begin{aligned}
 h_3 &= \frac{\cos \alpha}{h_b} I_1 + \frac{\sin \alpha}{h_b} I_2 + \frac{\cos \alpha}{h_b} I_3 + \frac{\sin \alpha}{h_b} I_4 - \frac{1 - \cos \psi}{h_b} \ln r_p \\
 h_3 &= -\frac{\cos \alpha}{h_b} \frac{h_c}{r_p} d \\
 &\quad + \frac{\sin \alpha}{h_b} \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right) \\
 &\quad + \frac{\cos \alpha}{h_b} \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\cos \alpha}{2h_b} \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right) \\
 &\quad + \frac{\cos \alpha}{h_b} \frac{h_c}{r_p} d \\
 &\quad - \frac{\sin \alpha}{h_b} \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right) \\
 &\quad + \frac{\sin \alpha}{h_b} h_c \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1 - \cos \psi}{h_b} \ln r_p
 \end{aligned} \tag{B.136}$$

Nach Kürzen und Zusammenfassen erhält man

$$\begin{aligned}
 h_3 = \frac{1}{h_b} & \left\{ h_c \sin \alpha \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \right. \\
 & + \cos \alpha \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \frac{\cos \alpha}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & \left. - (1 - \cos \psi) \ln r_p \right\} \quad (\text{B.137})
 \end{aligned}$$

Die Lösung kann noch weiter vereinfacht werden, wenn die Dreieckshöhe $h_c = \frac{ab \sin \psi}{c}$ und der Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \psi}$ eingesetzt werden. Mit

$$\begin{aligned}
 h_c \sin \alpha \frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos^2 \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\
 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\
 = \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.138})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 -h_c \sin \alpha \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) + \cos \alpha \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\
 = (-\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\
 = \cos(\alpha + \beta) \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \quad \text{mit } \alpha + \beta + \psi = 180^\circ \\
 = -\cos \psi \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.139})
 \end{aligned}$$

schmälert sich die Gleichung auf

$$\begin{aligned}
 h_3 = \frac{1}{h_b} & \left[\ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \cos \psi \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right. \\
 & - \frac{\cos \alpha}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & \left. - (1 - \cos \psi) \ln r_p \right] \quad (\text{B.140})
 \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der restlichen Logarithmusfunktionen liefert schließlich das Endergebnis mit $h_b = a \sin \psi$

$$h_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \frac{1}{a \sin \psi} \left[\ln \left(\frac{b}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi \ln \left(\frac{a}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \frac{\cos \alpha}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \right] \quad (\text{B.141})$$

Der Lösungsweg vom Integral

$$h_2 = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad (\text{B.142})$$

basiert quasi voll auf der vorangegangenen Lösung von h_3 . Mit $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$, $d\Gamma = r dr d\theta$ und $\xi_2 = \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a}$ entsteht die Gleichung

$$h_2 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin(\psi - \theta)}{h_a} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta \quad (\text{B.143})$$

Nach der trigonometrischen Zerlegung

$$\sin(\psi - \theta) = \sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta \quad (\text{B.144})$$

erhält man

$$h_2 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta - \underbrace{\frac{\cos \psi h_b}{h_a} \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta}_{h_3} \quad (\text{B.145})$$

wobei das zweite Integral dem schon gelösten Koeffizienten h_3 gemäß Gleichung (B.95) entspricht. Die Lösung der inneren Integration über r beim ersten Integral ist identisch mit der von h_3 (Seite 128) und kann sofort hingeschrieben werden:

$$\begin{aligned} h_2 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} + \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) - \ln r_p \right] d\theta \\ &\quad - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} h_3 \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta + \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad - \frac{\sin^2 \psi}{h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} h_3 \end{aligned} \quad (\text{B.146})$$

Für die verbleibenden Integrationen ist es wieder günstig, den Term $\cos \theta$ als Funktion von $(\alpha + \theta)$ auszudrücken

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos [(\alpha + \theta) - \alpha] \\ &= \sin(\alpha + \theta) \sin \alpha + \cos(\alpha + \theta) \cos \alpha\end{aligned}\quad (\text{B.147})$$

Es entsteht

$$h_2 = \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha + \theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta}_{I_1} \quad (\text{B.148})$$

$$- \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \cos(\alpha + \theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta}_{I_2}$$

$$+ \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3}$$

$$- \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_4}$$

$$- \frac{\sin^2 \psi}{h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} h_3$$

$$h_2 = \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} I_1 - \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} I_2 + \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} I_3 - \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} I_4 \quad (\text{B.149})$$

$$- \frac{\sin^2 \psi}{h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} h_3$$

Die Lösung der vier Einzelintegrale I_1, I_2, I_3, I_4 ist schon bekannt und kann den Gleichungen (B.105), (B.110), (B.130) und (B.135) entnommen werden

$$h_2 = - \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} \frac{h_c}{r_p} d \quad (\text{B.150})$$

$$- \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right)$$

$$+ \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right]$$

$$- \frac{\sin \psi \sin \alpha}{2 h_a} \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sin \psi \sin \alpha}{h_a} \frac{h_c}{r_p} d \\
 & + \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right) \\
 & - \frac{\sin \psi \cos \alpha}{h_a} h_c \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \frac{\sin^2 \psi}{h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} h_3
 \end{aligned}$$

Wird h_3 durch Gleichung (B.137) ersetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 h_2 = \frac{1}{h_a} \left\{ & - h_c \sin \psi \cos \alpha \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \quad (\text{B.151}) \right. \\
 & + \sin \psi \sin \alpha \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \frac{\sin \psi \sin \alpha}{2} \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right) \\
 & - \sin^2 \psi \ln r_p \\
 & - h_c \cos \psi \sin \alpha \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \cos \psi \cos \alpha \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & + \frac{\cos \psi \cos \alpha}{2} \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right) \\
 & \left. + \cos \psi (1 - \cos \psi) \ln r_p \right\}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 h_2 = \frac{1}{h_a} \left\{ & - h_c (\sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha) \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \right. \\
 & + (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \frac{1}{2} (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right) \\
 & \left. - (\sin^2 \psi - \cos \psi + \cos^2 \psi) \ln r_p \right\} \quad (\text{B.152})
 \end{aligned}$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha &= \sin(\psi + \alpha) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \\ \sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha &= -\cos(\psi + \alpha) = -\cos(180^\circ - \beta) = \cos \beta \\ \sin^2 \psi + \cos^2 \psi &= 1\end{aligned}\quad (\text{B.153})$$

geht Gleichung (B.152) über in

$$\begin{aligned}h_2 &= \frac{1}{h_a} \left\{ -h_c \sin \beta \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \right. \\ &\quad + \cos \beta \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\cos \beta}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\ &\quad \left. - (1 - \cos \psi) \ln r_p \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.154})$$

Analog dem Vorgehen bei h_3 kann mit Hilfe der Dreieckshöhe $h_c = \frac{ab \sin \psi}{c}$ und dem Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \psi}$ obige Gleichung weiter vereinfacht werden, wobei die Umformungen

$$\begin{aligned}-h_c \sin \beta \frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \alpha \cos \beta \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\ &= (-\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\ &= \cos(\alpha + \beta) \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \quad \text{mit } \alpha + \beta + \psi = 180^\circ \\ &= -\cos \psi \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.155})$$

und

$$\begin{aligned}h_c \sin \beta \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) + \cos^2 \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\ &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \\ &= \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.156})$$

gelten. Das Endergebnis lautet schließlich mit $h_a = b \sin \psi$ und den zusammengefaßten Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned}h_2 &= \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \frac{1}{b \sin \psi} \left[\ln \left(\frac{a}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a}{r_p} \right)^2 + 1} \right) - \cos \psi \ln \left(\frac{b}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \beta}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{B.157})$$

Das Integral

$$g_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (\text{B.158})$$

geht nach der Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ mit $d\Gamma = r dr d\theta$, $\xi_3 = \frac{r \sin \theta}{h_b}$ und $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ über in

$$g_3 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta \quad (\text{B.159})$$

Für die innere Integration über die r -Variable findet man in [15] die Integralformel

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad (\text{B.160})$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} g_3 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \left[\frac{r \sqrt{r^2 + r_p^2}}{2} - \frac{r_p^2}{2} \ln \left(r + \sqrt{r^2 + r_p^2} \right) \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \left[\frac{R(\theta)}{2} \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} - \frac{r_p^2}{2} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) + \frac{r_p^2}{2} \ln r_p \right] d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{R(\theta)}{2} \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta - \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{r_p^2}{2} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad + \frac{r_p^2 (1 - \cos \psi)}{2 h_b} \ln r_p \end{aligned} \quad (\text{B.161})$$

Der Term $\sin \theta$ wird nun wieder durch

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin [(\alpha + \theta) - \alpha] \\ &= \sin(\alpha + \theta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \theta) \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{B.162})$$

ersetzt:

$$\begin{aligned}
g_3 = & \underbrace{\frac{\cos \alpha}{2h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta}_{I_5} & (B.163) \\
& + \underbrace{\frac{\sin \alpha}{2h_b} \int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta}_{I_6} \\
& - \frac{r_p^2 \cos \alpha}{2h_b} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3} \\
& - \frac{r_p^2 \sin \alpha}{2h_b} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_4} \\
& + \frac{r_p^2 (1 - \cos \psi)}{2h_b} \ln r_p
\end{aligned}$$

$$g_3 = \frac{\cos \alpha}{2h_b} I_5 + \frac{\sin \alpha}{2h_b} I_6 - \frac{r_p^2 \cos \alpha}{2h_b} I_3 - \frac{r_p^2 \sin \alpha}{2h_b} I_4 + \frac{r_p^2 (1 - \cos \psi)}{2h_b} \ln r_p \quad (B.164)$$

Die Ergebnisse der Integrale I_3 und I_4 wurden schon hergeleitet und können den Gleichungen (B.130) und (B.135) entnommen werden.

Beim verbleibenden Integral

$$I_5 = \int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta \quad (B.165)$$

entsteht mit $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)}$ der schon bekannte Integraltyp von g_1 analog Gleichung (B.72)

$$I_5 = h_c \int_{\theta=0}^{\psi} \sqrt{\frac{h_c^2}{\sin^2(\alpha + \theta)} + r_p^2} d\theta \quad (B.166)$$

Die Lösung kann daher direkt notiert werden

$$I_5 = \frac{h_c^2}{2} \ln \left(\frac{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha \right]}{\left[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta \right] \left[\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha \right]} \right) + h_c r_p d \quad (B.167)$$

wobei wieder die Abkürzung (B.65) $d = \arccos \left(\frac{-r_p \cos \beta}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right) - \arccos \left(\frac{r_p \cos \alpha}{\sqrt{h_c^2 + r_p^2}} \right)$ verwendet worden ist.

Für die Integration von

$$I_6 = \int_{\theta=0}^{\psi} -R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \cos(\alpha + \theta) d\theta \quad (\text{B.168})$$

bietet sich die bekannte Variablensubstitution

$$\begin{aligned} R &= \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)} \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{-h_c \cos(\alpha + \theta)}{\sin^2(\alpha + \theta)} = \frac{-R^2 \cos(\alpha + \theta)}{h_c} \\ -\cos(\alpha + \theta) d\theta &= \frac{h_c}{R^2} dR \\ R_1 = R(\theta = 0) &= \frac{h_c}{\sin \alpha} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \alpha} = \frac{a b c}{c a} = b \\ R_2 = R(\theta = \psi) &= \frac{h_c}{\sin(\alpha + \psi)} = \frac{h_c}{\sin \beta} = \frac{a b \sin \psi}{c \sin \beta} = \frac{a b c}{c b} = a \end{aligned} \quad (\text{B.169})$$

an. Damit gilt

$$I_6 = h_c \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{R^2 + r_p^2}}{R} dR \quad (\text{B.170})$$

Mit dem Standardintegral aus [10]

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| \quad (\text{B.171})$$

folgt die Lösung

$$\begin{aligned} I_6 &= h_c \left[\sqrt{R^2 + r_p^2} - r_p \ln \left| \frac{r_p + \sqrt{R^2 + r_p^2}}{R} \right| \right]_{R=R_1=b}^{R_2=a} \\ I_6 &= h_c \left(\sqrt{a^2 + r_p^2} - \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - h_c r_p \ln \left(\frac{b \left[r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right]}{a \left[r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right]} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.172})$$

wobei die Betragstriche wieder wegfallen können, da stets $a, b, r_p > 0$.

Die Resultate (B.130), (B.135), (B.167), (B.172) der vier Teilintegrationen I_3, I_4, I_5, I_6 können nun in die Ausgangsgleichung (B.164) eingesetzt werden

$$g_3 = \frac{\cos \alpha}{2 h_b} I_5 + \frac{\sin \alpha}{2 h_b} I_6 - \frac{r_p^2 \cos \alpha}{2 h_b} I_3 - \frac{r_p^2 \sin \alpha}{2 h_b} I_4 + \frac{r_p^2 (1 - \cos \psi)}{2 h_b} \ln r_p$$

$$\begin{aligned}
g_3 = & \frac{\cos \alpha}{2 h_b} \frac{h_c^2}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
& + \frac{\cos \alpha}{2 h_b} h_c r_p d \\
& + \frac{\sin \alpha}{2 h_b} h_c \left(\sqrt{a^2 + r_p^2} - \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\
& - \frac{\sin \alpha}{2 h_b} h_c r_p \ln \left(\frac{b [r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2}]}{a [r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2}]} \right) \\
& - \frac{r_p^2 \cos \alpha}{2 h_b} \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
& + \frac{r_p^2 \cos \alpha}{4 h_b} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
& - \frac{r_p^2 \cos \alpha}{2 h_b} \frac{h_c}{r_p} d \\
& + \frac{r_p^2 \sin \alpha}{2 h_b} \frac{h_c}{r_p} \ln \left(\frac{b [r_p + \sqrt{a^2 + r_p^2}]}{a [r_p + \sqrt{b^2 + r_p^2}]} \right) \\
& - \frac{r_p^2 \sin \alpha}{2 h_b} h_c \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
& + \frac{r_p^2 (1 - \cos \psi)}{2 h_b} \ln r_p
\end{aligned} \tag{B.173}$$

Kürzen und Zusammenfassen führt zu

$$\begin{aligned}
g_3 = & \frac{h_c \sin \alpha}{2 h_b} \left(\sqrt{a^2 + r_p^2} - \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \\
& + \frac{h_c^2 \cos \alpha}{4 h_b} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
& - \frac{r_p^2}{2} \frac{1}{h_b} \left\{ h_c \sin \alpha \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \right. \\
& \quad + \cos \alpha \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
& \quad - \frac{\cos \alpha}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
& \quad \left. - (1 - \cos \psi) \ln r_p \right\}
\end{aligned} \tag{B.174}$$

wobei im Summand mit der geschweiften Klammer der schon bekannte Koeffizient h_3 aus Gleichung (B.137) auftaucht. Mit $h_b = a \sin \psi$ und $\frac{\sin \alpha}{h_b} = \frac{\sin \alpha}{a \sin \psi} = \frac{1}{c}$ erhält man das Endergebnis

$$g_3 = \int_{\Delta} \xi_3 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = \frac{h_c}{2c} \left(\sqrt{a^2 + r_p^2} - \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \frac{h_c^2}{4} \frac{\cos \alpha}{a \sin \psi} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta] [\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta] [\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_3 \quad (\text{B.175})$$

Auch die Lösung des letzten Koeffizienten

$$g_2 = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (\text{B.176})$$

verhält sich relativ einfach, da sie auf die eben hergeleiteten Ergebnisse von g_3 aufbaut. Mit $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$, $d\Gamma = r dr d\theta$ und $\xi_2 = \frac{r \sin(\psi - \theta)}{h_a}$ geht das Integral über in

$$g_2 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin(\psi - \theta)}{h_a} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta \quad (\text{B.177})$$

Die trigonometrische Zerlegung

$$\sin(\psi - \theta) = \sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta \quad (\text{B.178})$$

führt zu

$$g_2 = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta - \underbrace{\frac{\cos \psi h_b}{h_a} \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{\sin \theta}{h_b} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta}_{g_3} \quad (\text{B.179})$$

mit dem schon gelösten Koeffizienten g_3 aus Gleichung (B.159). Die Integration über die r -Variable entspricht exakt dem Vorgehen auf Seite 141. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} g_2 &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \left[\frac{R(\theta)}{2} \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} - \frac{r_p^2}{2} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) + \frac{r_p^2}{2} \ln r_p \right] d\theta \\ &\quad - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} g_3 \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \frac{R(\theta)}{2} \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta - \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{\sin \psi \cos \theta}{h_a} \frac{r_p^2}{2} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad + \frac{r_p^2 \sin^2 \psi}{2 h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} g_3 \end{aligned} \quad (\text{B.180})$$

Die trigonometrische Erweiterung

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos [(\alpha + \theta) - \alpha] \\ &= \sin(\alpha + \theta) \sin \alpha + \cos(\alpha + \theta) \cos \alpha\end{aligned}\quad (\text{B.181})$$

vereinfacht die nachfolgenden Integrationen zu

$$\begin{aligned}g_2 &= \frac{\sin \psi \sin \alpha}{2 h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta}_{I_5} \\ &\quad - \frac{\sin \psi \cos \alpha}{2 h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta}_{I_6} \\ &\quad - \frac{r_p^2 \sin \psi \sin \alpha}{2 h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3} \\ &\quad + \frac{r_p^2 \sin \psi \cos \alpha}{2 h_a} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\cos(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_4} \\ &\quad + \frac{r_p^2 \sin^2 \psi}{2 h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} g_3\end{aligned}\quad (\text{B.182})$$

$$\begin{aligned}g_2 &= \frac{\sin \psi \sin \alpha}{2 h_a} I_5 - \frac{\sin \psi \cos \alpha}{2 h_a} I_6 - \frac{r_p^2 \sin \psi \sin \alpha}{2 h_a} I_3 + \frac{r_p^2 \sin \psi \cos \alpha}{2 h_a} I_4 \\ &\quad + \frac{r_p^2 \sin^2 \psi}{2 h_a} \ln r_p - \frac{\cos \psi h_b}{h_a} g_3\end{aligned}\quad (\text{B.183})$$

Die vier Einzelintegrale I_3, I_4, I_5, I_6 wurden schon gelöst. Die Resultate können den Gleichungen (B.130), (B.135), (B.167) und (B.172) entnommen werden.

Mit der Substitution von g_3 durch Gleichung (B.174) entsteht nun die schon etwas zusammengefaßte Formel

$$\begin{aligned}
 g_2 = & -\frac{h_c}{2h_a} (\sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha) \left(\sqrt{a^2 + r_p^2} - \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.184}) \\
 & + \frac{h_c^2}{4h_a} (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & + \frac{r_p^2}{2h_a} h_c (\sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha) \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & - \frac{r_p^2}{2h_a} (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & + \frac{r_p^2}{4h_a} (\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha) \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & + \frac{r_p^2}{2h_a} (\sin^2 \psi - \cos \psi + \cos^2 \psi) \ln r_p
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha &= \sin(\psi + \alpha) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \\
 \sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha &= -\cos(\psi + \alpha) = -\cos(180^\circ - \beta) = \cos \beta \quad (\text{B.185}) \\
 \sin^2 \psi + \cos^2 \psi &= 1
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 g_2 = & \frac{h_c \sin \beta}{2h_a} \left(\sqrt{b^2 + r_p^2} - \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.186}) \\
 & + \frac{h_c^2 \cos \beta}{4h_a} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & - \frac{r_p^2}{2} \frac{1}{h_a} \left\{ -h_c \sin \beta \left[\frac{1}{b} \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) - \frac{1}{a} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \right. \\
 & \quad + \cos \beta \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & \quad - \frac{\cos \beta}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & \quad \left. - (1 - \cos \psi) \ln r_p \right\}
 \end{aligned}$$

Im Summanden mit der geschweiften Klammer ist wieder der Koeffizient h_2 gemäß Gleichung (B.154) zu finden. Mit $h_a = b \sin \psi$ und $\frac{\sin \beta}{h_a} = \frac{\sin \beta}{b \sin \psi} = \frac{1}{c}$ lautet nun die endgültige Lösung

$$\begin{aligned}
 g_2 = \int_{\Delta} \xi_2 \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= \frac{h_c}{2c} \left(\sqrt{b^2 + r_p^2} - \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \quad (\text{B.187}) \\
 & + \frac{h_c^2}{4} \frac{\cos \beta}{b \sin \psi} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) - \frac{r_p^2}{2} h_2
 \end{aligned}$$

Für die redundante Berechnung des Koeffizienten h_2 bzw. h_3 gemäß Gleichung (2.136) muß noch das verbleibende Integral

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma \quad (\text{B.188})$$

ermittelt werden. Die Transformation auf die Polarkoordinaten r und θ mit $d\Gamma = r dr d\theta$ und die Beziehung $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ führen zu

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{1}{R(\theta)} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + r_p^2})^3} dr d\theta \quad (\text{B.189})$$

Für die innere Integration über r wird die schon bekannte Integralformel aus [15]

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad (\text{B.190})$$

herangezogen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{R(\theta)} \left[-\frac{r}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} + \ln \left(r + \sqrt{r^2 + r_p^2} \right) \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta + \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{R(\theta)} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad + \int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{1}{R(\theta)} \ln r_p d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.191})$$

Mit der äußeren Integrationsgrenze $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= \frac{1}{h_c} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha + \theta) \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + r_p^2}} d\theta}_{I_1} \\ &\quad + \frac{1}{h_c} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{\sin(\alpha + \theta)}{h_c} \ln r_p d\theta}_{I_7} \end{aligned} \quad (\text{B.192})$$

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma = \frac{1}{h_c} I_1 + \frac{1}{h_c} I_3 + I_7 \quad (\text{B.193})$$

Die Lösungen der beiden Integrale I_1 und I_3 sind bekannt und können den Gleichungen (B.105) und (B.130) entnommen werden. Das verbleibende Integral I_7 lautet mit der Dreiecksbeziehung $\cos(\alpha + \psi) = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$

$$I_7 = \int_{\theta=0}^{\psi} -\sin(\alpha + \theta) \frac{\ln r_p}{h_c} d\theta \quad (\text{B.194})$$

$$I_7 = -(\cos \alpha + \cos \beta) \frac{\ln r_p}{h_c} \quad (\text{B.195})$$

Das Einsetzen der Einzellösungen der drei Teilintegrale I_1 , I_3 und I_7 in Gleichung (B.193) ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= -\frac{1}{h_c} \frac{h_c}{r_p} d \quad (\text{B.196}) \\ &+ \frac{1}{h_c} \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\ &- \frac{1}{2h_c} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\ &+ \frac{1}{h_c} \frac{h_c}{r_p} d \\ &- (\cos \alpha + \cos \beta) \frac{\ln r_p}{h_c} \end{aligned}$$

Nach Kürzen sowie Zusammenfassen der restlichen Logarithmusfunktionen erhält man schließlich das Endergebnis

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i^3} \right) d\Gamma &= \frac{1}{h_c} \left[\cos \alpha \ln \left(\frac{b}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b}{r_p} \right)^2 + 1} \right) + \cos \beta \ln \left(\frac{a}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right] \\ &- \frac{1}{2h_c} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \quad (\text{B.197}) \end{aligned}$$

Das letzte noch zu lösende Integral

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma \quad (\text{B.198})$$

tritt bei der redundanten Ermittlung des Koeffizienten g_2 bzw. g_3 in Gleichung (2.138) auf. Mit den Polarkoordinaten r und θ sowie $d\Gamma = r dr d\theta$ und $r_i = \sqrt{r^2 + r_p^2}$ folgt

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = \int_{\theta=0}^{\psi} \int_{r=0}^{R(\theta)} \frac{1}{R(\theta)} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r_p^2}} dr d\theta \quad (\text{B.199})$$

Die innere Integration über die r -Koordinate führt mit dem Standardintegral aus [15]

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad (\text{B.200})$$

zu

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{R(\theta)} \left[\frac{r \sqrt{r^2 + r_p^2}}{2} - \frac{r_p^2}{2} \ln \left(r + \sqrt{r^2 + r_p^2} \right) \right]_{r=0}^{R(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{1}{2} \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta - \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{r_p^2}{2R(\theta)} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta \\ &\quad + \int_{\theta=0}^{\psi} \frac{r_p^2}{2R(\theta)} \ln r_p d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.201})$$

Mit $R(\theta) = \frac{h_c}{\sin(\alpha + \theta)}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma &= \frac{1}{2h_c} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) R(\theta) \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} d\theta}_{I_5} \\ &\quad - \frac{r_p^2}{2h_c} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} \sin(\alpha + \theta) \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + r_p^2} \right) d\theta}_{I_3} \\ &\quad - \frac{r_p^2}{2} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\psi} -\frac{\sin(\alpha + \theta)}{h_c} \ln r_p d\theta}_{I_7} \end{aligned} \quad (\text{B.202})$$

$$\int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = \frac{1}{2h_c} I_5 - \frac{r_p^2}{2h_c} I_3 - \frac{r_p^2}{2} I_7 \quad (\text{B.203})$$

Die drei Einzelintegrale I_3, I_5, I_7 wurden schon gelöst. Mit den Resultaten (B.130), (B.167) und (B.195) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = & \frac{1}{2h_c} h_c r_p d & (B.204) \\
 & + \frac{1}{2h_c} \frac{h_c^2}{2} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & - \frac{r_p^2}{2h_c} \left[\cos \alpha \ln \left(b + \sqrt{b^2 + r_p^2} \right) + \cos \beta \ln \left(a + \sqrt{a^2 + r_p^2} \right) \right] \\
 & + \frac{r_p^2}{4h_c} \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) \\
 & - \frac{r_p^2}{2h_c} \frac{h_c}{r_p} d \\
 & + \frac{r_p^2}{2h_c} (\cos \alpha + \cos \beta) \ln r_p
 \end{aligned}$$

und schließlich die komprimierte Lösung

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta} \frac{r}{R(\theta)} \left(\frac{1}{r_i} \right) d\Gamma = & \frac{-r_p^2}{2h_c} \left[\cos \alpha \ln \left(\frac{b}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{b}{r_p} \right)^2 + 1} \right) + \cos \beta \ln \left(\frac{a}{r_p} + \sqrt{\left(\frac{a}{r_p} \right)^2 + 1} \right) \right] \\
 & + \left(\frac{h_c}{4} + \frac{r_p^2}{4h_c} \right) \ln \left(\frac{[\sqrt{a^2 + r_p^2} + a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} + b \cos \alpha]}{[\sqrt{a^2 + r_p^2} - a \cos \beta][\sqrt{b^2 + r_p^2} - b \cos \alpha]} \right) & (B.205)
 \end{aligned}$$


```

RETURN                                000168
END                                    000169
                                        000170
                                        000171
                                        000172
C* ($) SGHT30                          000173
C....SGHT30.....SGHT30.....SGHT30.....SGHT30.....SGHT30..... 000174
                                        000175
      SUBROUTINE SGHT30 (RIN, RP, RIC, XP, X1, X2, X3, E12, E13, ELNV, 000176
+                                     A, B, C, AE, ASILEN, SGI, SHI) 000177
                                        000178
C*****                                000179
C*                                     * 000180
C* PROGRAMMBESCHREIBUNG:                * 000181
C* =====                            * 000182
C*   SGHT30 = CALCULATION OF THE ELEMENT INFLUENCE COEFFICIENTS * 000183
C*           (S)MALL (G) AND SMALL (H) OF THE (T)RIA(3)-BOUNDARY * 000184
C*           ELEMENT ON A COLLOCATION POINT (O)UTSIDE THE          * 000185
C*           ELEMENT PLANE                                       * 000186
C*                                     * 000187
C*   DIESES UNTERPROGRAMM ERMITTELT DIE ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIEN- * 000188
C*   TEN G UND H EINES TRIA3-BOUNDARY ELEMENTS (LINEARES DREIECKS- * 000189
C*   ELEMENT MIT GERADEN KANTEN) AUF EINEN AUFPUNKT I AUSSERHALB * 000190
C*   DER ELEMENTEBENE.                                          * 000191
C*                                     * 000192
C* HINWEISE:                            * 000193
C* =====                            * 000194
C*   * DER TEST, OB DER AUFPUNKT I AUSSERHALB DER ELEMENTEBENE LIEGT * 000195
C*   MUSS VOR DER AUSFUEHRUNG DIESES UNTERPROGRAMMS ERFOLGEN.   * 000196
C*   (D.H. RP IST STETS UNGLEICH 0.0)                            * 000197
C*   * DIE FUNCTION ACCURY MUSS DEM JEWEILIGEN COMPUTERTYP      * 000198
C*   ANGEPASST WERDEN. NAEHERE EINZELHEITEN SIND IN DER FUNCTION * 000199
C*   BESCHRIEBEN.                                              * 000200
C*                                     * 000201
C* LITERATUR:                            * 000202
C* =====                            * 000203
C*   (1) HOPF, A.                                               * 000204
C*       ANALYSE VON FLUID-STRUKTUR-SYSTEMEN UNTER VERWENDUNG * 000205
C*       EINES DREIECKIGEN BOUNDARY ELEMENTS MIT LINEAREM      * 000206
C*       ANSATZ UND VOLLSTAENDIGER ANALYTISCHER LOESUNG.      * 000207
C*       DISSERTATION, UNIVERSITAET KARLSRUHE (1995)           * 000208
C*                                     * 000209
C* EINGABE-/AUSGABE-PARAMETER:          * 000210
C* =====                            * 000211
C*   A      = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 3 * 000212
C*   AE     = FLAECHE DES DREIECKSELEMENTS                      * 000213
C*   ASILEN = MITTLERE SEITENLAENGE DES DREIECKSELEMENTS      * 000214
C*   B      = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 2 * 000215
C*   C      = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 2 UND 3 * 000216
C*   ELNV   = ELEMENT-NORMALENVEKTOR N DES DREIECKSELEMENTS   * 000217
C*   E12    = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 2 * 000218
C*   E13    = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 3 * 000219
C*   RIC    = ABSTAND VOM AUFPUNKT I ZUM FLAECHENSCHWERPUNKT C DES * 000220
C*           DREIECKSELEMENTS                                   * 000221
C*   RIN    = VORZEICHENBEHAFTETES SKALARPRODUKT RIN = XIC * N * 000222
C*   RP     = ABSTAND VOM AUFPUNKT I SENKRECHT ZUR ELEMENTEBENE * 000223
C*   SGI    = ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN G EINES TRIA3-BOUNDARY * 000224
C*           ELEMENTS BZGL. DES AUFPUNKTS I                     * 000225
C*   SHI    = ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN H EINES TRIA3-BOUNDARY * 000226
C*           ELEMENTS BZGL. DES AUFPUNKTS I                     * 000227
C*   XP     = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES PROJEKTIONSPUNKTS P * 000228
C*   X1     = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 1 * 000229
C*   X2     = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 2 * 000230
C*   X3     = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 3 * 000231
C*                                     * 000232
C*****                                000233
C*                                     * 000234

```



```

IF (N(2) .NE. 0)                                000302
+   CALL SGKT30 (RP, RP3, RP1, A, AP13, ALPHA(1), ALPHA(2), 000303
+               ALPHA(5), ALPHA(6), UP, VP, A, B,          000304
+               SGJK(1,2), SHJK(1,2), ERROR)              000305
+                                                       000306
C**** DREIECK P-1-2 (K=3):                        000307
+                                                       000308
IF (N(3) .NE. 0)                                000309
+   CALL SGKT30 (RP, RP2, RP1, B, AP12, ALPHA(1), ALPHA(2), 000310
+               ALPHA(3), ALPHA(4), UP, VP, A, B,          000311
+               SGJK(1,3), SHJK(1,3), ERROR)              000312
+                                                       000313
C**** AKKUMULATION ALLER EINFLUSSKOEFFIZIENTEN HJK ZU DEN 000314
C**** ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN H UND ALLER EINFLUSS- 000315
C**** KOEFFIZIENTEN GJK ZU DEN ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN G 000316
C**** EINES TRIA3-BOUNDARY ELEMENTS BZGL. DES AUFPUNKTS I: 000317
+                                                       000318
CALL SUMCJK (N, SHJK,  SHI, ERROR)              000319
CALL SUMCJK (N, SGJK,  SGI, ERROR)              000320
+                                                       000321
C**** TEST AUF NUMERISCHE FEHLER DURCH SUBTRAKTIONSAUSLOESCHUNG 000322
C**** (SIEHE AUCH LITERATURANGABE (1)):            000323
+                                                       000324
IF (RIC .GT. (3.0DO * ASILEN)) THEN              000325
+                                                       000326
C**** TEST FUER EINEN WEIT ENTFERNTEN AUFPUNKT VOM ELEMENT: 000327
+                                                       000328
SHRBIG = (AE / 3.0DO / RIC) / RIC / RIC          000329
SGRBIG = (AE / 3.0DO / RIC)                     000330
+                                                       000331
CALL CHNERR (SHRBIG, N, SHJK, SHI, ACCURY(50),  ERROR) 000332
CALL CHNERR (SGRBIG, N, SGJK, SGI, ACCURY(40),  ERROR) 000333
+                                                       000334
IF (ERROR) THEN                                  000335
+                                                       000336
IF (RP .GT. ASILEN) THEN                         000337
+                                                       000338
C**** GROSSER NUMERISCHER FEHLER DURCH SUBTRAKTIONSAUS- 000339
C**** LOESCHUNG, DER AUFTRITT, WENN DER AUFPUNKT I VOM 000340
C**** ELEMENT SEHR WEIT ENTFERNT IST. DABEI STIMMEN DIE ZU 000341
C**** ERWARTENDEN INTEGRALWERTE MIT DER NAEHERUNG SGRBIG 000342
C**** UND SHRBIG SEHR GUT UEBEREIN (SIEHE AUCH 000343
C**** LITERATURANGABE (1)):                        000344
+                                                       000345
SHI(1) = SHRBIG                                  000346
SHI(2) = SHRBIG                                  000347
SHI(3) = SHRBIG                                  000348
+                                                       000349
SGI(1) = SGRBIG                                  000350
SGI(2) = SGRBIG                                  000351
SGI(3) = SGRBIG                                  000352
+                                                       000353
PRINT * , ' *** WARNING      (SGHT30) ***',      000354
+           ' NUMERICAL ERROR EXPECTED.'         000355
+                                                       000356
ELSE                                              000357
+                                                       000358
C**** LIEGT DER WEIT ENTFERNTE AUFPUNKT I SEHR NAH AN DER 000359
C**** ELEMENTEBENE, WIRD EINE 'IN-PLANE'-BERECHNUNG MIT 000360
C**** RP=0 DURCHGEFUEHRT:                         000361
+                                                       000362
CALL SGHT3I (RIC, XP, X1, X2, X3, E12, E13, ELNV, 000363
+           A, B, C, AE, ASILEN,  SGI, SHI)      000364
+                                                       000365
END IF                                           000366
+                                                       000367
END IF                                           000368

```



```

        GOTO 999                                000503
    END IF                                      000504
                                                000505
C**** ENTSPRICHT DER AUFPUNKT I DEM ELEMENTKNOTENPUNKT 2: 000506
                                                000507
        IF ((N(1) .EQ. 0) .AND. (N(3) .EQ. 0)) THEN 000508
C**** SONDERFALL: AUFPUNKT I = ELEMENTKNOTENPUNKT 2 000509
C**** (EINFACHERE BERECHNUNG DER EINFLUSSKOEFFIZIENTEN) 000510
        CALL SGHT3N (B, C, A, AE, SGI(2), SGI(3), SGI(1), 000511
+           SHI(2), SHI(3), SHI(1)) 000512
        GOTO 999                                000513
    END IF                                      000514
                                                000515
C**** ENTSPRICHT DER AUFPUNKT I DEM ELEMENTKNOTENPUNKT 3: 000516
                                                000517
        IF ((N(1) .EQ. 0) .AND. (N(2) .EQ. 0)) THEN 000518
C**** SONDERFALL: AUFPUNKT I = ELEMENTKNOTENPUNKT 3 000519
C**** (EINFACHERE BERECHNUNG DER EINFLUSSKOEFFIZIENTEN) 000520
        CALL SGHT3N (C, A, B, AE, SGI(3), SGI(1), SGI(2), 000521
+           SHI(3), SHI(1), SHI(2)) 000522
        GOTO 999                                000523
    END IF                                      000524
                                                000525
C**** TRANSFORMATIONSKOEFFIZIENTEN ALPHA(1) BIS ALPHA(6) BERECHNEN 000526
C**** (SIEHE LITERATURANGABE (1)): 000527
                                                000528
        CALL ALPHA1 (EI1, EI2, EI3, E12, E13, ALPHA) 000529
                                                000530
C**** BERECHNUNG DER ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN G EINES TRIA3- 000531
C**** BOUNDARY ELEMENTS AUF EINEN AUFPUNKT I INNERHALB DER ELEMENTEBENE: 000532
                                                000533
C**** AUFTEILUNG DER FLAECHE ZWISCHEN DEM AUFPUNKT I UND DEN 3 000534
C**** ELEMENTKNOTENPUNKTEN IN 3 DREIECKE. BEI NICHTVERSCHWINDENDEN 000535
C**** FLAECHEN ERFOLGT DIE BERECHNUNG DER G-KOEFFIZIENTEN DES JE- 000536
C**** WEILIGEN DREIECKS (SIEHE AUCH LITERATURANGABE (1)): 000537
                                                000538
        CALL NULL (SGJK(1,1), 9) 000539
        ERROR = .FALSE. 000540
                                                000541
C**** DREIECK I-2-3 (K=1): 000542
                                                000543
        IF (N(1) .NE. 0) 000544
+           CALL SGKT3I (RI3, RI2, C, AI23, ALPHA(3), ALPHA(4), 000545
+           ALPHA(5), ALPHA(6), UI, VI, A, B, 000546
+           SGJK(1,1), ERROR) 000547
                                                000548
C**** DREIECK I-1-3 (K=2): 000549
                                                000550
        IF (N(2) .NE. 0) 000551
+           CALL SGKT3I (RI3, RI1, A, AI13, ALPHA(1), ALPHA(2), 000552
+           ALPHA(5), ALPHA(6), UI, VI, A, B, 000553
+           SGJK(1,2), ERROR) 000554
                                                000555
C**** DREIECK I-1-2 (K=3): 000556
                                                000557
        IF (N(3) .NE. 0) 000558
+           CALL SGT3I (RI2, RI1, B, AI12, ALPHA(1), ALPHA(2), 000559
+           ALPHA(3), ALPHA(4), UI, VI, A, B, 000560
+           SGJK(1,3), ERROR) 000561
                                                000562
C**** AKKUMULATION ALLER EINFLUSSKOEFFIZIENTEN GJK ZU DEN 000563
C**** ELEMENT-EINFLUSSKOEFFIZIENTEN G EINES TRIA3-BOUNDARY 000564
C**** ELEMENTS BZGL. DES AUFPUNKTS I: 000565
                                                000566
        CALL SUMCJK (N, SGJK, SGI, ERROR) 000567
                                                000568
C**** TEST AUF NUMERISCHE FEHLER DURCH SUBTRAKTIONSAUSLOESCHUNG 000569

```



```

+ (H1 .LE. 0.0D0) .OR. 001039
+ (H2 .LE. 0.0D0) .OR. 001040
+ (H3 .LE. 0.0D0) THEN 001041
  ERROR = .TRUE. 001042
  GOTO 999 001043
END IF 001044
001045
C**** TEST DER TEILINTEGRALE AUF GROSSE NUMERISCHE FEHLER DURCH 001046
C**** SUBTRAKTIONSAUSLOESCHUNG, INSBESONDERE BEI WEIT ENTFERNTEN 001047
C**** AUFPUNKTEN (SIEHE LITERATURANGABE (1)): 001048
C**** (TEST, OB DAS NUMERISCHE ERGEBNIS MEHR ALS 60 PROZENT DER 001049
C**** MOEGELICHEN GENAUEN MANTISSENSTELLEN VERLOREN HAT. 001050
C**** GENAUIGKEIT SO EINSTELLEN, DASS DER ECKPUNKT, DER DEM AUFPUNKT 001051
C**** AM NAECHSTEN LIEGT, DEN GROESSTEN KOEFFIZIENTENWERT VON ALLEN 001052
C**** DREI ECKPUNKTEN BESITZT.) 001053
001054
C**** H1: 001055
001056
  REFVAL = PHI * ACCURY (60) 001057
  IF ((PHI - D) .LE. REFVAL) THEN 001058
    ERROR = .TRUE. 001059
    GOTO 999 001060
  END IF 001061
001062
C**** H2: 001063
001064
  REFVAL = MAX (MAX (MAX (F11, 001065
+ ABS (COSPHI * F12)), 001066
+ ABS (COSBET * F10)), 001067
+ 1.0D0) * ACCURY (60) 001068
  IF ((H2 * HA) .LE. REFVAL) THEN 001069
    ERROR = .TRUE. 001070
    GOTO 999 001071
  END IF 001072
001073
C**** H3: 001074
001075
  REFVAL = MAX (MAX (MAX (F12, 001076
+ ABS (COSPHI * F11)), 001077
+ ABS (COSALP * F10)), 001078
+ 1.0D0) * ACCURY (60) 001079
  IF ((H3 * HB) .LE. REFVAL) THEN 001080
    ERROR = .TRUE. 001081
    GOTO 999 001082
  END IF 001083
001084
C**** G1: 001085
001086
  REFVAL = MAX (MAX ((HC * F10), 001087
+ RP * PHI), 001088
+ 1.0D0) * ACCURY (60) 001089
  IF (G1 .LE. REFVAL) THEN 001090
    ERROR = .TRUE. 001091
    GOTO 999 001092
  END IF 001093
001094
C**** G2 UND G3: 001095
001096
  F13MAX = (0.5D0 * HC) * (RP / CPR) * MAX (SQRTAR, SQRTBR) 001097
  REFVAL = MAX (MAX (F13MAX, 001098
+ ABS (F14 * COSBET / HA)), 001099
+ (F15 * H2)) * ACCURY (60) 001100
  IF (G2 .LE. REFVAL) THEN 001101
    ERROR = .TRUE. 001102
    GOTO 999 001103
  END IF 001104
  REFVAL = MAX (MAX (F13MAX, 001105

```



```

C*   HOMOCO = CALCULATE (H)(O)(M)(O)GENEOUS TRIANGULAR          * 001508
C*           (C)(O)ORDINATES OF POINT I                          * 001509
C*                                                    * 001510
C*   DIESES UNTERPROGRAMM ERMITTELT DIE HOMOGENEN DREIECKS-      * 001511
C*   KOORDINATEN (BARYZENTRISCHE KOORDINATEN) UI, VI UND WI DES * 001512
C*   PUNKTS I BZGL. EINES DREIECKS MIT GERADEN KANTEN.         * 001513
C*                                                    * 001514
C* LITERATUR:                                                  * 001515
C* =====                                                    * 001516
C*   (1) HOPF, A.                                               * 001517
C*       ANALYSE VON FLUID-STRUKTUR-SYSTEMEN UNTER VERWENDUNG * 001518
C*       EINES DREIECKIGEN BOUNDARY ELEMENTS MIT LINEAREM      * 001519
C*       ANSATZ UND VOLLSTAENDIGER ANALYTISCHER LOESUNG.      * 001520
C*       DISSERTATION, UNIVERSITAET KARLSRUHE (1995)          * 001521
C*                                                    * 001522
C* EINGABE-/AUSGABE-PARAMETER:                                * 001523
C* =====                                                    * 001524
C*   A = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 3     * 001525
C*   AE = FLAECHE DES DREIECKSELEMENTS                          * 001526
C*   AI12 = DREIECKSFLAECHE ZWISCHEN DEN PUNKTEN I, 1 UND 2   * 001527
C*   AI13 = DREIECKSFLAECHE ZWISCHEN DEN PUNKTEN I, 1 UND 3   * 001528
C*   AI23 = DREIECKSFLAECHE ZWISCHEN DEN PUNKTEN I, 2 UND 3   * 001529
C*   B = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 2     * 001530
C*   C = DREIECKSSEITE ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 2 UND 3     * 001531
C*   EI1 = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN PUNKT I UND KNOTENPUNKT 1   * 001532
C*   EI2 = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN PUNKT I UND KNOTENPUNKT 2   * 001533
C*   EI3 = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN PUNKT I UND KNOTENPUNKT 3   * 001534
C*   ELNV = ELEMENT-NORMALENVEKTOR DES DREIECKS                * 001535
C*   E12 = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 2 * 001536
C*   E13 = EINHEITSVEKTOR ZWISCHEN ELEMENTKNOTENPUNKT 1 UND 3 * 001537
C*   N = SGN-VARIABLE N BZGL. UI, VI UND WI                    * 001538
C*   REFVAL = 'KANTENKRITERIUM', BEZUGSGROESSE FUER VERGLEICHSTESTS * 001539
C*           VON REAL-ZAHLEN (COMPUTERTYPABHAENGIG)             * 001540
C*   RI1 = ABSTAND VOM PUNKT I ZUM DREIECKSKNOTENPUNKT 1       * 001541
C*   RI2 = ABSTAND VOM PUNKT I ZUM DREIECKSKNOTENPUNKT 2       * 001542
C*   RI3 = ABSTAND VOM PUNKT I ZUM DREIECKSKNOTENPUNKT 3       * 001543
C*   UI, VI, = HOMOGENE DREIECKSKOORDINATEN (BARYZENTRISCHE    * 001544
C*   WI      KOORDINATEN) DES PUNKTS I BZGL. EINES DREIECKS    * 001545
C*           MIT GERADEN KANTEN                                  * 001546
C*   XI = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES PUNKTS I                 * 001547
C*   X1 = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 1   * 001548
C*   X2 = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 2   * 001549
C*   X3 = KOORDINATEN (ORTSVEKTOR) DES ELEMENTKNOTENPUNKTS 3   * 001550
C*                                                    * 001551
C*****                                                    001552
C*                                                    * 001553
C* AUTOR      : A. HOPF  IRS, FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE      * 001554
C* DATUM      : 09.02.1993                                     * 001555
C* REVISION   : 11.01.1995                                     * 001556
C* QUELLCODE  : FORTRAN 77                                     * 001557
C*                                                    * 001558
C*****                                                    001559
C*****                                                    001560
C**** SYNTAX-FEHLER IN VARIABLENNAMEN VERMEIDEN:             001561
C*****                                                    001562
C***** IMPLICIT CHARACTER (A-Z)                               001563
C*****                                                    001564
C***** INTEGER N(1:3)                                         001565
C***** DOUBLE PRECISION EI1(1:3), EI2(1:3), EI3(1:3), ELNV(1:3), 001566
C***** + E12(1:3), E13(1:3), XI(1:3), X1(1:3), X2(1:3),      001567
C***** + X3(1:3)                                               001568
C***** DOUBLE PRECISION A, AE, AI12, AI13, AI23, B, C, REFVAL, RI1, 001569
C***** + RI2, RI3, UI, VI, WI                                  001570
C*****                                                    001571
C***** INTEGER I                                              001572
C***** DOUBLE PRECISION VHELP(1:3), XICORR(1:3)              001573
C***** DOUBLE PRECISION HL1, HL2, HL3, SINI12, SINI13, SUM, U, V, W 001574

```



```

C* ===== * 001977
C* ACC = BERECHNETE GENAUIGKEITSPARAMETER * 001978
C* ACC(ISHIFT/10) = UR ** REAL (ISHIFT/100) * 001979
C* MIT ISHIFT VON 0 BIS 100 (PROZENT) * 001980
C* UR = UNIT ROUNDOFF (ENTSPRICHT DER RECHENGENAUIGKEIT BZW. * 001981
C* DEM EINHEITSRUNDUNGSFEHLER) * 001982
C* * 001983
C***** 001984
C* * 001985
C* AUTOR : A. HOPF IRS, FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE * 001986
C* DATUM : 09.02.1993 * 001987
C* REVISION : 20.12.1994 * 001988
C* QUELLCODE : FORTRAN 77 * 001989
C* * 001990
C***** 001991
C**** SYNTAX-FEHLER IN VARIABLENNAMEN VERMEIDEN: 001992
001994
IMPLICIT CHARACTER (A-Z) 001995
001996
INTEGER ISHIFT 001997
DOUBLE PRECISION ACCURY 001998
001999
DOUBLE PRECISION ACC(0:10), UR 002000
002001
002002
C**** EINHEITSRUNDUNGSFEHLER (UNIT ROUNDOFF), SINGLE PRECISION: 002003
CHP-APOLLO-9000/720.....HP-APOLLO-9000/720.....HP-APOLLO-9000/720.... 002004
CRISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000..... 002005
CVAX/780.....VAX/780.....VAX/780.....VAX/780.....VAX/780.....VAX/780.... 002006
C PARAMETER (UR = 2.0EO ** (-23)) 002007
C DATA ACC( 0) / 1.00000000E+00 /, 002008
C + ACC( 1) / 2.03063099E-01 /, 002009
C + ACC( 2) / 4.12346222E-02 /, 002010
C + ACC( 3) / 8.37323018E-03 /, 002011
C + ACC( 4) / 1.70029407E-03 /, 002012
C + ACC( 5) / 3.45266983E-04 /, 002013
C + ACC( 6) / 7.01109836E-05 /, 002014
C + ACC( 7) / 1.42369536E-05 /, 002015
C + ACC( 8) / 2.89099992E-06 /, 002016
C + ACC( 9) / 5.87055403E-07 /, 002017
C + ACC(10) / UR / 002018
002019
C**** EINHEITSRUNDUNGSFEHLER (UNIT ROUNDOFF), SINGLE PRECISION: 002020
CIBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090..... 002021
C PARAMETER (UR = 16.0EO ** (-5)) 002022
C DATA ACC( 0) / 1.00000000E+00 /, 002023
C + ACC( 1) / 2.50000000E-01 /, 002024
C + ACC( 2) / 6.25000000E-02 /, 002025
C + ACC( 3) / 1.56250000E-02 /, 002026
C + ACC( 4) / 3.90625000E-03 /, 002027
C + ACC( 5) / 9.76562500E-04 /, 002028
C + ACC( 6) / 2.44140625E-04 /, 002029
C + ACC( 7) / 6.10351563E-05 /, 002030
C + ACC( 8) / 1.52587891E-05 /, 002031
C + ACC( 9) / 3.81469727E-06 /, 002032
C + ACC(10) / UR / 002033
002034
C**** EINHEITSRUNDUNGSFEHLER (UNIT ROUNDOFF), DOUBLE PRECISION: 002035
CHP-APOLLO-9000/720.....HP-APOLLO-9000/720.....HP-APOLLO-9000/720.... 002036
CIBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090.....IBM/3090..... 002037
CIBM/3090 PARAMETER (UR = 16.0DO ** (-13)) 002038
CRISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000.....RISC/6000..... 002039
PARAMETER (UR = 2.0DO ** (-52)) 002040
C DATA ACC( 0) / 1.00000000000000D+00 /, 002041
+ ACC( 1) / 2.72047051030039D-02 /, 002042
+ ACC( 2) / 7.40095979741405D-04 /, 002043

```


Verzeichnis der verwendeten Symbole

Alle Matrizen und Vektoren werden durch Fettdruck kenntlich gemacht. Eine Matrix \mathbf{A} der Dimension $n \times m$ (n Reihen und m Spalten) wird u.a. mit $\underset{(n \times m)}{\mathbf{A}}$ notiert. Mit \mathbf{A}^T wird die Transponierte von \mathbf{A} bezeichnet.

Alle geometrische Größen, die mit einem Strich (') gekennzeichnet sind, beziehen sich auf ein transformiertes Dreieckskoordinatensystem.

a, b, c	Dreiecksseitenlängen
A	Dreiecksfläche
B	Basis einer Gleitpunktzahl
c_i	Raumwinkel
\mathbf{C}	Diagonalmatrix der Raumwinkel c_i
e_{12}, \dots	Einheitsvektor zwischen Knotenpunkt ① und Knotenpunkt ②
e	Exponent einer Gleitpunktzahl
f	äußere Lasten
f_p	Drucklasten
g_i	Vektor der Einflußkoeffizienten g eines Elements
g_{ij}	g Element-Einflußkoeffizienten bzgl. des Aufpunkts ①
\mathbf{G}	Systemmatrix der akkumulierten g Element-Einflußkoeffizienten
h_i	Vektor der Einflußkoeffizienten h eines Elements
h_a, h_b, h_c	Dreieckshöhen
h_{ij}	h Element-Einflußkoeffizienten bzgl. des Aufpunkts ①
\mathbf{H}	Systemmatrix der akkumulierten h Element-Einflußkoeffizienten
\mathbf{I}_3	Einheitsmatrix der Dimension 3
\mathbf{K}	Struktursteifigkeitsmatrix
m	Mantisse
\mathbf{M}	Strukturmassenmatrix
$\mathbf{M}_{\text{Fluid}}$	hydrodynamische Massenmatrix ("added mass")

\mathbf{n}	Normalenvektor
n_1, n_2, n_3	Signum-Variablen
$\mathbf{N}_p(x, y)$	Interpolationsmatrix mit den Ansatzfunktionen für die Druckverteilung p
$\mathbf{N}_q(x, y)$	Interpolationsmatrix mit den Ansatzfunktionen für den Normalgradienten q
$\mathbf{N}_s(x, y)$	Interpolationsmatrix mit den Ansatzfunktionen für die Verschiebung s
$\mathbf{N}_x(x, y)$	Interpolationsmatrix mit den Ansatzfunktionen für den geometrischen Ort \mathbf{x}
$\mathbf{N}_\Phi(x, y)$	Interpolationsmatrix mit den Ansatzfunktionen für die Potentialverteilung Φ
\mathbf{p}_1	Vektor der Druckstützpunktwerte eines Elements
p	Druck
p_1, p_2, p_3	Stützpunktwerte der Druckverteilung p
\mathbf{q}_1	Vektor der Normalgradientenstützpunktwerte eines Elements
q	Normalgradient des Potentials Φ
\dot{q}_n	Wärmeflußdichte
q_1, q_2, q_3	Stützpunktwerte der Normalgradientenverteilung q
\mathbf{r}_i	Vektor vom Aufpunkt \textcircled{i} zu einem Randpunkt
\mathbf{r}_p	Vektor vom Projektionspunkt \textcircled{p} zum Aufpunkt \textcircled{i}
r	Radius-Polarkoordinate
r_i	Abstand vom Aufpunkt \textcircled{i} zu einem Randpunkt
r_p	Abstand vom Projektionspunkt \textcircled{p} zum Aufpunkt \textcircled{i}
$R(\theta)$	äußere von θ abhängige Integrationsgrenze bzgl. r
\mathbf{s}	Verschiebungsvektor
$\ddot{\mathbf{s}}$	Beschleunigungsvektor
\ddot{s}_n	Normalbeschleunigung
\bar{s}	mittlere Seitenlänge
t	Zeit
T	Temperatur
U_i, V_i, W_i	homogene Dreieckskoordinaten bzgl. des Aufpunkts \textcircled{i}
U_p, V_p, W_p	homogene Dreieckskoordinaten bzgl. des Projektionspunkts \textcircled{p}
UR	Einheitsrundungsfehler (unit roundoff)
v	Fluidgeschwindigkeit
v_n	Normalgeschwindigkeit
\mathbf{x}	Ortsvektor
\mathbf{x}_c	Ortsvektor des Elementschwerpunkts \textcircled{c}
\mathbf{x}_i	Ortsvektor des Aufpunkts \textcircled{i}
\mathbf{x}_p	Ortsvektor des Projektionspunkts \textcircled{p}

\mathbf{x}_1	Vektor der Stützpunktkoordinaten eines Elements
\mathbf{x}_1, \dots	Ortsvektor des Elementknotenpunkts ①
$\mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}, \mathbf{x}_{23}$	Seitenvektoren des Dreiecks
x, y, z	kartesische Koordinaten des Ortsvektors \mathbf{x}
α, β, ψ	Dreieckswinkel
$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$	Transformationskoeffizienten
Γ	Rand
δ_x	relativer Darstellungsfehler der Gleitpunktzahl x
Δ	Dreiecksbereich
Δ_x	absoluter Darstellungsfehler der Gleitpunktzahl x
ε	sehr kleiner Abstand bzw. sehr kleine Größe
θ	Winkel-Polarkoordinate
κ	Exponent zur Beurteilung der Genauigkeit einer Gleitpunktzahl
ν	Exponent zur Beurteilung des Fehlers einer Gleitpunktzahl
ξ_1, ξ_2, ξ_3	homogene Dreieckskoordinaten
ρ	Dichte
Υ	Außenbereich
Φ_1	Vektor der Potentialstützpunktwerte eines Elements
Φ	Potential
Φ_1, Φ_2, Φ_3	Stützpunktwerte der Potentialverteilung Φ
Ω	(Innen-) Bereich

Abbildungsverzeichnis

1.1	Fluid-strukturdynamische Berechnung eines flüssigkeitsgefüllten Tanks mit BEM/ FEM	3
1.2	Beschreibung des fluiddynamischen Problems	6
1.3	Zur geometrischen Beschreibung der Randintegralgleichung	8
2.1	Geometrie des Dreieckselements TRIA3	13
2.2	Definition der homogenen Dreieckskoordinaten	14
2.3	Alternative Definition der homogenen Dreieckskoordinaten über die Flächenverhältnisse	15
2.4	Homogene Dreieckskoordinaten für einen Punkt im Dreieckselement	15
2.5	Definition des Normalenvektors	16
2.6	Aufbau der linearen Verteilungsfunktionen mit Hilfe der homogenen Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3	19
2.7	Entstehung singulärer Integrale für Aufpunkte i im Boundary Element ($r_i \rightarrow 0$)	21
2.8	Reduktion der analytischen Integration auf zwei Standardgeometrien	22
2.9	TRIA3-Element mit Aufpunkt im Elementknotenpunkt	23
2.10	Verschwindendes Skalarprodukt $\mathbf{r} \mathbf{n}$ für Aufpunkte innerhalb der Elementebene bei ebenen Elementen wegen $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$	25
2.11	Plausibilitätsuntersuchungen zu den Integrationen g_{12} und g_{13}	27
2.12	Aufpunkte innerhalb der Elementebene mit $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{n}$	28
2.13	Lösungsstrategie für die analytische Integration bei Aufpunkten i innerhalb der Elementebene	29
2.14	Geometrische Beschreibung des Aufpunkts innerhalb der Elementebene	30
2.15	Geometrie im transformierten Koordinatensystem ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ'	32
2.16	Geometrie bei der Integralzerlegung in die drei Dreiecksflächen $\Delta_{i23}, \Delta_{i13}, \Delta_{i12}$	35
2.17	Aufpunkte außerhalb der Elementebene mit $\mathbf{r}_i \neq 0$ während der gesamten Integration	36
2.18	Lösungsstrategie für die analytische Integration bei Aufpunkten i außerhalb der Elementebene	38
2.19	Geometrische Beschreibung des Projektionspunkts P bzgl. des Dreieckselements	39

2.20	Geometrie im transformierten Koordinatensystem ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 der Dreiecksfläche Δ'	40
2.21	Geometrie bei der Integralzerlegung in die drei Dreiecksflächen $\Delta_{p23}, \Delta_{p13}, \Delta_{p12}$	45
3.1	Elementkonzept des Dreieckselements TRIA3	50
3.2	Ermittlung des Projektionspunkts	51
3.3	Prinzipieller Element-Algorithmus	52
3.4	Algorithmus zur Berechnung des Falls "Aufpunkt i liegt außerhalb der Elementebene"	53
3.5	Zahldarstellung in Gleitpunktschreibweise	55
3.6	Operationen bei der Addition von Gleitpunktzahlen	58
3.7	Subtraktionsauslöschung bei Gleitpunktzahlen	59
3.8	Subtraktion von Gleitpunktzahlen bei verminderter Anfangsgenauigkeit	60
4.1	Zerlegung einer linearen Potentialverteilung des Dreieckselements TRIA3 in 3 lineare Anteile	70
4.2	Zerlegung einer linearen Potentialverteilung des Dreieckselements TRIA3 in konstante und lineare Anteile	71
4.3	Funktion $h\Phi$ der Elementlösung ("konstantes" Beispiel)	76
4.4	Verläufe der Funktion $h\Phi$ ("konstantes" Beispiel)	77
4.5	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = +\varepsilon (= 10^{-9})$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)	78
4.6	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.05$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)	79
4.7	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)	79
4.8	Funktion $h\Phi$ der Elementlösung ("lineares" Beispiel)	80
4.9	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = +\varepsilon (= 10^{-9})$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)	81
4.10	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.05$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)	82
4.11	Funktionswerte $h\Phi$ für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)	83
4.12	Funktion gq der Elementlösung ("konstantes" Beispiel)	84
4.13	Verläufe der Funktion gq ("konstantes" Beispiel)	85
4.14	Funktionswerte gq für Aufpunkte innerhalb der Elementebene $r = 0$ ("konstantes" Beispiel)	86
4.15	Funktionswerte gq für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("konstantes" Beispiel)	86
4.16	Funktion gq der Elementlösung ("lineares" Beispiel)	87

4.17 Funktionswerte gq für Aufpunkte innerhalb der Elementebene $r = 0$ ("lineares" Beispiel)	88
4.18 Funktionswerte gq für Aufpunkte im Abstand $r = 0.5$ über der Elementebene ("lineares" Beispiel)	88
5.1 Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 1	90
5.2 Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 2	92
5.3 Geometrie des Dreieckselements im Beispiel 3	93
5.4 Geometrie des Viereckselements im Beispiel 4	95
5.5 Geometrie des Viereckselements im Beispiel 5	97
5.6 Geometrie des Viereckselements im Beispiel 6	99
6.1 Wärmeleitungsproblem in einem Quader	102
6.2 Idealisierung des Quaders	103
6.3 Berechnete Temperaturverteilung des Wärmeleitungsproblems	103
6.4 Blowdown-Vorgang in einem Druckwasserreaktor	104
6.5 Aufbau eines Reaktordruckbehälters	105
6.6 Idealisierung für die Blowdown-Analyse	106
6.7 Berechnete Druckverteilung der Blowdown-Strömung	107
6.8 Berechnete Druckverteilung in den Symmetrieebenen und an den Oberflächen der Steuerstabführungsrohre	108
A.1 Geometrische Größen am Dreieck	109
A.2 Inkreis und Umkreis eines Dreiecks	112
B.1 Geometrie bei der Integration für Aufpunkte senkrecht über dem Dreiecks- knoten 1	121

Tabellenverzeichnis

1.1	Analogie zwischen bekannten Potentialproblemen (LAPLACE-Gleichung)	7
3.1	Gleitpunktarithmetik-Daten einiger Computersysteme	57
5.1	Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte senkrecht über dem Elementschwerpunkt eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1	90
5.2	Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte senkrecht über einer Elementecke eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1	92
5.3	Element-Einflußkoeffizienten für Aufpunkte längs einer Winkelhalbierenden eines gleichseitigen Dreieckselements mit der Seitenlänge 1	94
5.4	Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 4	95
5.5	Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 4, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist	96
5.6	Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 5	97
5.7	Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 5, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist	98
5.8	Element-Einflußkoeffizienten des Dreiecks Δ_{123} beim Beispiel 6	99
5.9	Element-Einflußkoeffizienten des konstanten Viereckselements \square_{1234} beim Beispiel 6, das mit zwei Dreieckselementen TRIA3 diskretisiert worden ist	100

Literaturverzeichnis

- [1] ARGYRIS, J. / BRAUN, K. A. / HOPF, A.
Dynamische Analyse der UNIWEX-Versuchswindturbine mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (ASKA). ICA-Bericht Nr. 33, Universität Stuttgart (1992)
- [2] ARGYRIS, J. / MLEJNEK, H. - P.
Die Methode der finiten Elemente. Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden (1986)
- [3] ASKA SAAB-SCANIA/IKOSS – user's manual.
Volume 1-7, Stuttgart / Linköping (1986)
- [4] BATHE, K. J.
Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York / Tokyo (1986)
- [5] BAUSINGER, R. / KUHN, G. et al.
Die Boundary-Element-Methode. expert-Verlag, Ehningen (1987)
- [6] BRAUN, K. A. / FINKEL, A. / HOPF, A. / SØDERBERG, M.
Two Computer Codes for Aeroelastic Analysis of HAWT's, Comparison with Experiments. European Wind Energy Conference, Amsterdam, EWEC '91 Conference Proceedings, 562 – 566 (1991)
- [7] BREBBIA, C. A. / DOMINGUEZ, J.
Boundary Elements: An Introductory Course. Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston (1989, 1992)
- [8] BREBBIA, C. A. / GEORGIU, P.
Combination of boundary and finite elements for elastostatics. Appl. Math. Modelling 3, 212 – 220 (1979)
- [9] BREBBIA, C. A. / TELLES, J. C. F. / WROBEL, L. C.
Boundary Element Techniques. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York / Tokyo (1984)
- [10] BRONSTEIN, I. N. / SEMENDJAJEW, K. A.
Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt / Main (1957, 1981)
- [11] CRISTESCU, M. / LOUBIGNAC, G.
Gaussian quadrature formulas for functions with singularities in $1/r$ over triangles and quadrangles. Recent Advances in Boundary Element Methods, C. A. BREBBIA (Ed.), Pentech Press, London, 375 – 390 (1978)

- [12] CRUSE, T. A. / NOVATI, G.
Traction Boundary Integral Equation (BIE) Formulations and Applications to Nonplanar and Multiple Cracks. Fracture mechanics: 22nd Symposium, S. N. ATLURI et al. (Eds.), ASTM, Philadelphia, 314 – 332 (1992)
- [13] DAVEY, K. / HINDUJA, S.
Analytical integration of linear three-dimensional triangular elements in BEM. Appl. Math. Modelling 13, 450 – 461 (1989)
- [14] DERUNTZ, J. A. / GEERS, T. L.
Added mass computation by the boundary integral method. Int. J. Numer. Methods Engng. 12, 531 – 549 (1978)
- [15] DWIGHT, H. B.
Tables of integrals and other mathematical data. Macmillan Publishing Co., New York (1934, 1961)
- [16] EISENBERG, M. A. / MALVERN, L. E.
On finite element integration in natural co-ordinates. Int. J. Numer. Methods Engng. 7, 574 – 575 (1973)
- [17] EPPLER, R.
Strömungsmechanik. Akad. Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1975)
- [18] FUKUI, T. / FUKUHARA, T. / FURUICHI, T.
Three-dimensional Analysis of a Fresh Water Lens in an Island. Boundary Element Methods in Applied Mechanics, M. TANAKA et al. (Eds.), Pergamon Press, Oxford, 285 – 294 (1988)
- [19] GRÖBNER, W. / HOFREITER, N.
Integraltafel. Springer-Verlag, Wien / New York (1949, 1975)
- [20] GUIGGIANI, M. / KRISHNASAMY, G. / RIZZO, F. J. / RUDOLPHI, T. J.
Hypersingular Boundary Integral Equations: A New Approach to Their Numerical Treatment. Boundary Integral Methods, L. MORINO et al. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York / Tokyo (1991)
- [21] HADAMARD, J.
Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Dover Publications, New York (1923, 1952)
- [22] HAILFINGER, G. / KRIEG, R.
Fluid-Struktur-Schwingungen eines kugelförmigen Siedewasserreaktor-Containments mit Druckunterdrückungssystem. Rechnungen mit SING-S für einen 120-Grad-Ausschnitt bei vorgegebenen Dampfblasenkollapsen. KfK-Bericht 2779 B (1979)
- [23] HAILFINGER, G. / KRIEG, R. / GEHRMANN, R. / HEBERLEIN, J.
Blowdown Loading of the Control Rods and the Core Support Columns in the Upper Plenum of a PWR. SMIRT 11 Transactions Vol. B, Tokyo, 329 – 334 (1991)

- [24] HARTMANN, F.
Introduction to Boundary Elements. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1989), german edition (1987)
- [25] HAYAMI, K.
A Projection Transformation Method for Nearly Singular Surface Boundary Element Integrals. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1992)
- [26] HESS, J.L. / SMITH, A.M.O.
Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies. Progress in Aeronautical Sciences 8, D. KUCHEMANN (Ed.), Pergamon Press, London, 1 – 138 (1967)
- [27] JASWON, M.A. / SYMM G.T.
Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. Academic Press, London / New York (1977)
- [28] JUN, L. / BEER, G. / MEEK, J.L.
Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature. Engr. Anal. 2, 118 – 123 (1985)
- [29] KHABBAZ, G.R.
Dynamic Behavior of Liquids in Elastic Tanks. AIAA Journal 9, 1985 – 1990 (1971)
- [30] KELLOGG, O.D.
Foundations of potential theory. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1929, 1967)
- [31] KOMATSU, T.
Fluid-structure interaction. Progress in Boundary Element Methods, Vol. 2, C. A. BREBBIA (Ed.), Pentech Press, London, 182 – 199 (1982)
- [32] KREIS, A. / KLEIN, M.
Incompressible Fluid Boundary Elements in ASKA. Proceedings of the 18. International Finite Element Congress, Baden-Baden, 36 – 49 (1989)
- [33] KRIEG, R. / DOLENSKY, B. / EBERLE, F. / GRANDA, A. / HAILFINGER, G.
Core support columns in the upper plenum of a pressurized water reactor under blowdown loading. Part I and II. Nucl. Engng. Design 73, 23 – 44 (1982)
- [34] KRIEG, R. / DOLENSKY, B. / GÖLLER, B. / HAILFINGER, G.
A boundary integral method for highly transient internal flow problems coupled with structural dynamics. Innovative numerical analysis for the engineering sciences, R.P. SHAW et al. (Eds.), Univ. Press of Virginia, Charlottesville (1980)
- [35] KRIEG, R. / HAILFINGER, G.
Transient, Three-Dimensional Potential Flow Problems and Dynamic Response of the Surrounding Structures. Part I: Description of the Fluid Dynamics by a Singularity Method (Computer Code SING). J. Comput. Physics 34, 139 – 163 (1980)
- [36] KRIEG, R. / GÖLLER, B. / HAILFINGER, G.
Transient, Three-Dimensional Potential Flow Problems and Dynamic Response of the Surrounding Structures. Part II: Simultaneous Coupling between Fluid and Structural Dynamics (Computer Code SING-S). J. Comput. Physics 34, 164 – 183 (1980)

- [37] KRISHNASAMY, G. / RIZZO, F. J. / RUDOLPHI, T. J.
Hypersingular Boundary Integral Equations: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation. Developments in Boundary Element Methods – 7, P. K. BANERJEE et al. (Eds.), Elsevier Applied Science, London / New York (1992)
- [38] KRISHNASAMY, G. / SCHMERR, L. W. / RUDOLPHI, T. J. / RIZZO, F. J.
Hypersingular Boundary Integral Equations: Some Applications in Acoustic and Elastic Wave Scattering. Journal of Applied Mechanics 57, 404 – 414 (1990)
- [39] KUHN, G. / LÖBEL, G. / SICHERT, W.
Erstellung des Programms BETTI zur Berechnung der stationären und instationären Wärmeleitung mittels BEM. Forschungsbericht des Forschungskuratoriums Maschinenbau (FKM), Frankfurt (1987)
- [40] KUTT, H. R.
The Numerical Evaluation of Principal Value Integrals by Finite-Part Integration. Numerische Mathematik 24, 205 – 210 (1975)
- [41] LAMB, H.
Hydrodynamics. Dover Publications, New York (1932, 1945)
- [42] LIGGETT, J. A. / LIU, P. L-F.
The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow. George Allen & Unwin, London (1983)
- [43] LUTZ, E. / GRAY, L. J. / INGRAFFEA, A. R.
An Overview of Integration Methods for Hypersingular Boundary Integrals. Boundary Elements XIII, C. A. BREBBIA et al. (Eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston (1991)
- [44] MANSUR, W. J. / BREBBIA, C. A.
Further Developments on the Solution of the Transient Scalar Wave Equation. Topics in Boundary Element Research, Volume 2: Time-dependent and Vibration Problems C. A. BREBBIA (Ed.), Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 87 – 123 (1985)
- [45] MAPLE V – *Language Reference Manual*.
B. W. CHAR et al. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1991)
- [46] MEDINA, D. E. / LIGGETT, J. A.
Three-dimensional boundary-element computation of potential flow in fractured rock. Int. J. Numer. Methods Engng. 26, 2319 – 2330 (1988)
- [47] MIKHLIN, S. G.
Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations. Pergamon Press, Oxford (1965)
- [48] NIWA, Y. / KOBAYASHI, S. / FUKUI, T.
Application of integral equation method to the determination of three dimensional stresses around a cavity. Proc. Japan Soc. Civil Eng. 266, 25 – 37 (1977)

- [49] OKON, E. E. / HARRINGTON, R. F.
The potential integral for a linear distribution over a triangular domain. Int. J. Numer. Methods Engng. 18, 1821 – 1828 (1982)
- [50] OUSSET, Y. / SAYHI, M. N.
Added mass computations by integral equation methods. Int. J. Numer. Methods Engng. 19, 1355 – 1373 (1983)
- [51] PAPANIKOLAOU, A.
On integral-equation-methods for the evaluation of motions and loads of arbitrary bodies in waves. Ingenieur-Archiv 55, 17 – 29 (1985)
- [52] PINA, H. L. G. / FERNANDES, J. L. M. / BREBBIA, C. A.
Some Numerical Integration Formulae over Triangles and Squares with a $1/R$ Singularity. Appl. Math. Modelling 5, 209 – 211 (1981)
- [53] PRESS, W. H. / TEUKOLSKY, S. A. / VETTERLING, W. T. / FLANNERY, B. P.
Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing. Cambridge University Press (1986, 1992)
- [54] RANGETTE, A.
A boundary element method to calculate the fluid hydrodynamic mass matrix in structural analysis including free surface waves. Eng. Comput. 7, 210 – 216 (1990)
- [55] REDUCE – User's Manual. Version 3.4,
A. C. HEARN (Ed.), RAND Publication CP78, Santa Monica, CA (1991)
- [56] SPIEGEL, M. R.
Schaum's outline of theory and problems of vector analysis and an introduction to tensor analysis. McGraw-Hill, New York (1959), german edition (1977)
- [57] SRIVASTAVA, R. / CONTRACTOR, D. N.
Efficient evaluation of integrals in three-dimensional boundary element method using linear shape functions over plane triangular elements. Appl. Math. Modelling 16, 282 – 290 (1992)
- [58] STEPHEN, W.
MATHEMATICA: A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley, Redwood City (1991), german edition (1992)
- [59] STOKER, J. J.
Water Waves. Interscience Publishers, New York (1957)
- [60] TANAKA, M. / SLADEK, V. / SLADEK, J.
Regularization techniques applied to boundary element methods. Appl. Mech. Rev. 47, 457 – 499 (1994)
- [61] TELLES, J. C. F.
A Self-adaptive Co-ordinate Transformation for efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals. Int. J. Numer. Methods Engng. 24, 959 – 973 (1987)
- [62] TREVELYAN, J.
Boundary Elements for Engineers. Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston (1994)

- [63] TRUCKENBRODT, E.
Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik. Springer-Verlag, Berlin / New York (1988)
- [64] TSAI, C.-S. / LEE, G.C.
Arch dam-fluid interactions: by FEM-BEM and substructure concept. Int. J. Numer. Methods Engng. 24, 2367 – 2388 (1987)
- [65] WALKER, S.
Boundary elements in fluid-structure interaction problems rotational shells. Appl. Math. Modelling 4, 345 – 350 (1980)
- [66] WANDINGER, H.
Paralleliterationsverfahren zur Modalanalyse gekoppelter Fluid-Struktur-Systeme. Dissertation, Universität Stuttgart (1991)
- [67] WENDLAND, W.
Die Behandlung von Randwertaufgaben im R_3 mit Hilfe von Einfach- und Doppelschicht-potentialen. Numerische Mathematik 11, 380 – 404 (1968)
- [68] WERNER, H.
Praktische Mathematik I. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1975)
- [69] WESTERGAARD, H. M.
Water pressures on dams during earthquakes. Trans. ASCE 98, 418 – 433 (1933)
- [70] WILKINSON, J. H.
Rounding errors in algebraic processes. Prentice-Hall, Englewood Cliffs / New York (1963), german edition: Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York (1969)
- [71] WU, T. W. / SEYBERT, A. F. / WAN, G. C.
Numerical Implementation of a Normal Derivative Integral Equation in Acoustics. Boundary Elements XIII, C. A. BREBBIA et al. (Eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston (1991)
- [72] WU, T. W. / SEYBERT, A. F. / WAN, G. C.
On the numerical implementation of a Cauchy principal value integral insure a unique solution for acoustic radiation and scattering. J. Acoust. Soc. Am. 90, 554 – 560 (1991)
- [73] ZIENKIEWICZ, O. C.
The finite element method. McGraw-Hill, London (1977), german edition: Carl Hanser Verlag, München / Wien (1984)
- [74] ZIENKIEWICZ, O. C. / KELLY, D. W. / BETTESS, P.
The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. Int. J. Numer. Methods Engng. 11, 355 – 375 (1977)
- [75] ZIENKIEWICZ, O. C. / NATH, B.
Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams – an electric analogue solution. Proc. Inst. Civ. Eng. 25, 165 – 176 (1963)
- [76] ZIENKIEWICZ, O. C. / NEWTON, R. E.
Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart (1969)