

Isoperimetrische Ungleichungen in symmetrischen Räumen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Thorsten Thies
aus Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung:

17. Juli 2002

Referent:

Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Korreferent:

HDoz. Dr. Patrick Ghanaat

Karlsruhe
2002

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe. Ich möchte an dieser Stelle all jenen danken, die zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Enrico Leuzinger, der mir das interessante Thema stellte und mir in angeregten Gesprächen wertvolle Hinweise und Ratschläge gab. Herrn HDoz. Dr. Patrick Ghanaat danke ich herzlich für zahlreiche Tipps und weiterführende Bemerkungen, sowie für die Übernahme des Korreferats.

Ich bin ebenfalls dankbar dafür, dass ich durch Spezialvorlesungen und die Vorträge in der *Arbeitsgemeinschaft Geometrie* mehr über Differentialgeometrie und ihre Bezüge zu anderen Gebieten lernen konnte.

Desweiteren möchte ich allen Kollegen danken, die mir bei Fragen in anderen Teilgebieten der Mathematik weitergeholfen haben. Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. Erich Martensen für das Gegenbeispiel auf Seite 53.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am Mathematischen Institut II möchte ich für die angenehme und kooperative Atmosphäre danken, deren Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit nicht unterschätzt werden kann.

Karlsruhe, im August 2002

Thorsten Thies

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Hintergrund	7
1.2	Thema der vorliegenden Arbeit	9
1.3	Symmetrische Rang-1-Räume	11
1.4	Isoperimetrische Probleme	12
2	Ansätze über den Divergenzatz	17
2.1	Radiale Vektorfelder konstanter Divergenz	17
2.2	Anwendung auf isoperimetrische Probleme	21
3	Integralgeometrische Ansätze	27
3.1	Eine Formel von L.A. Santaló	27
3.2	Charakterisierung von Bällen	32
3.3	Anwendung auf isoperimetrische Probleme	41
3.3.1	Die Höldersche Ungleichung und Vermutung 1.8	41
3.3.2	Abschätzungen für symmetrische Rang-1-Räume	47
3.3.3	Eine potentialtheoretische Anwendung	51
4	Ansätze über die Riccatigleichung	55
4.1	Charakterisierung von Sphären	55
4.2	Eine scharfe isoperimetrische Ungleichung	58
4.2.1	Beweis der Ungleichung	62
4.2.2	Gleichheitsdiskussion	65

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Hintergrund

Ein zentrales Problem im Bereich der isoperimetrischen Ungleichungen ist das folgende: *Für eine gegebene vollständige und zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M bestimme man die minimale Oberfläche eines kompakten, regulären Bereiches mit vorgegebenem Volumen.*

Präzise formuliert ist das die Frage nach dem **isoperimetrischen Profil** φ_M von M , das folgendermaßen definiert ist:

$$\varphi_M : (0, \text{Vol } M) \rightarrow (0, \infty), \quad v \mapsto \inf \{ \text{Area}(\partial\Omega) \mid \text{Vol}(\Omega) = v \},$$

dabei wird das Infimum über alle kompakten, regulären Bereiche Ω (mit festem Volumen v) gebildet. “Regulär” soll dabei bedeuten, dass der Rand $\partial\Omega$ von Ω eine C^∞ -Hyperfläche in M ist.

Eine weitere interessante Frage ist, welche kompakten Bereiche von vorgegebenem Volumen $v \in (0, \text{Vol } M)$ die minimale Oberfläche $\varphi_M(v)$ besitzen, falls solche Bereiche überhaupt existieren.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten und homogene Räume ist die Existenz solcher Bereiche, d.h. der **Lösungen des isoperimetrischen Problems** gesichert: aus der geometrischen Maßtheorie folgt, dass für jedes Volumen v ein kompakter Bereich Ω mit $\text{Vol}(\Omega) = v$ und minimaler Oberfläche existiert. Siehe dazu die Bemerkung auf Seite 13.

Auch wenn die Existenz von Lösungen des isoperimetrischen Problems in relativ allgemeiner Form gesichert ist, sind weder die Lösungen noch das isoperimetrische Profil im allgemeinen Fall bestimmbar. Man kann das isoperimetrische Profil von M höchstens durch geometrische Größen von M abschätzen.

Eine Abschätzung des Profils nach oben erhält man trivialerweise, wenn man für jedes Volumen $v \in (0, \text{Vol } M)$ die Oberfläche eines beliebigen kompakten, regulären Bereiches mit Volumen v bestimmt, beispielsweise eines geodätischen Balles. Schwieriger ist eine Abschätzung des Profils nach unten. Ohne Zusatzinformationen über die Geometrie von M lässt sich das Profil nur trivial durch die Nullfunktion nach unten abschätzen.

Für die Räume konstanter Schnittkrümmung, d.h. den euklidischen Raum \mathbb{R}^m , den reell-hyperbolischen Raum $\mathbb{R}H^m$ und die Sphäre S^m ist das isoperimetrische Profil bekannt. Es gilt sogar noch mehr: für einen kompakten regulären Bereich Ω gilt

$$\text{Vol}(\Omega) = v \text{ und } \text{Area}(\partial\Omega) = \text{minimal} \implies \Omega \text{ geodätischer Ball.}$$

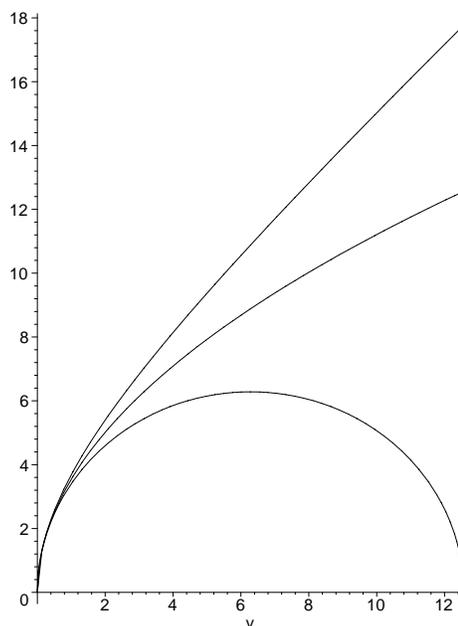
Erste strikte Beweisansätze für die euklidische Ebene finden sich bei J. Steiner und H.A. Schwarz Mitte des 19. Jahrhunderts. Eine Darstellung dieser Ansätze findet man beispielsweise in [Bla]. Die Verallgemeinerung auf den n -dimensionalen euklidischen Raum wurde zuerst von E. Schmidt (1939) in [Sc1] bewiesen. Die isoperimetrische Ungleichung der Sphäre S^n und des reell-hyperbolischen Raumes $\mathbb{R}H^n$ wurde ebenfalls von E. Schmidt in [Sc2] gezeigt.

Zentral im Beweis ist dabei die Methode der Symmetrisierung, mit der man zeigt, dass ein Bereich mit minimaler Oberfläche invariant unter der Isotropiegruppe $O(m)$ des zugrundeliegenden Raumes in einem bestimmten Punkt ist. Daraus ergibt sich, dass die geodätischen Bälle als “symmetrischste Objekte” in M das isoperimetrische Problem lösen. Man erhält daher sowohl das isoperimetrische Profil als Funktion der Balloberflächen als auch eine Charakterisierung von geodätischen Bällen durch diese Extremaleigenschaft. Das isoperimetrische Profil einer einfach zusammenhängenden, vollständigen Fläche mit konstanter Schnittkrümmung K ist gegeben durch

$$\varphi(v) = \sqrt{v(4\pi - Kv)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 1.1 zeigt dieses isoperimetrische Profil für die Fälle $K = -1, 0, 1$.

Abbildung 1.1: Das isoperimetrische Profil von $M = \mathbb{R}H^2, \mathbb{R}^2, S^2$



Für Mannigfaltigkeiten mit variabler Schnittkrümmung ist das isoperimetrische Profil erst in wenigen Fällen bekannt. Selbst für das Rotationsparaboloid in \mathbb{R}^3 wurde es erst

1996 in [BC] bestimmt. Weitere Ergebnisse über das isoperimetrische Profil von Flächen finden sich [HHM] und in [Pan]. Zum Thema der isoperimetrischen Probleme im allgemeinen Kontext verweise ich auf [BZ] und [Oss].

Die Schwierigkeit im Fall der variablen Schnittkrümmung ist, dass zum einen die Methode der Symmetrisierung im Allgemeinen nicht mehr möglich ist, zum anderen, dass die anderen Beweismethoden gewöhnlich keine *scharfen* Abschätzungen der Oberfläche durch das Volumen zulassen, selbst wenn man noch weitere geometrische Größen wie mittlere Krümmung oder Laplace-Eigenwerte mit einbezieht, siehe beispielsweise [BBG] oder [Ch2].

Die Methode der Symmetrisierung lässt sich in gewissem Rahmen auf Produkte von euklidischen und hyperbolischen Räumen übertragen. Damit konnten W.Y. Hsiang und W.T. Hsiang in [HH], Theorem 1 zeigen, dass die Lösungen des isoperimetrischen Problems, also die Bereiche mit minimaler Oberfläche, in derartigen Produkten die Symmetrie des unterliegenden Raumes besitzen. Dies bestärkt die Vermutung, dass die Lösungen des isoperimetrischen Problems in beliebigen symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ diese Eigenschaft haben.

In demselben Artikel finden sich auch Aussagen zur Regularität und Konvexität der Bereiche mit minimaler Oberfläche in derartigen Produkträumen.

Weitere Ergebnisse zum isoperimetrischen Problem in symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ finden sich in [Hs2]. Dort wird insbesondere gezeigt, dass das isoperimetrische Profil eines symmetrischen Raumes vom nichtkompakten Typ asymptotisch linear ist. Diese und einige weitere Ergebnisse werden in Proposition 1.5 zusammengefasst.

1.2 Thema der vorliegenden Arbeit

Die Zwei-Punkt-Homogenen Räume bilden eine Klasse von natürlichen Verallgemeinerungen der Räume konstanter Krümmung mit folgender charakteristischen Eigenschaft: *M ist homogen und die Isotropiegruppe $Iso(M, p)$ operiert in jedem Punkt $p \in M$ transitiv auf den geodätischen Sphären um p .*

Man kann also sagen, dass die geodätischen Bälle wieder die “symmetrischsten Objekte” in M sind. Man vermutet daher, dass sie –wie im Fall konstanter Krümmung– das isoperimetrische Problem lösen, zumindest im Fall der symmetrischen Rang-1-Räume vom nichtkompakten Typ. (Siehe Vermutung 1.7.) Dies ist eine Umformulierung der Vermutung, dass die Lösungen des isoperimetrischen Problems in symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ die Symmetrie des unterliegenden Raumes haben, für Räume vom Rang 1.

Eine weitere Klasse von natürlichen Verallgemeinerungen des euklidischen Raumes erhält man, indem man auf die symmetrische Struktur verzichtet und beliebige Schnittkrümmungen $K \leq 0$ zulässt: die Klasse der Hadamard-Mannigfaltigkeiten, also der einfach zusammenhängenden, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $K \leq 0$. Eine n -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n und hat in mancher Hinsicht ähnliche Geometrie wie der euklidische Raum. Eine interes-

sante Frage ist nun, wie das isoperimetrische Profil einer n -dimensionalen Hadamard-Mannigfaltigkeit mit dem isoperimetrischen Profil von \mathbb{R}^n zusammenhängt.

Man vermutet, dass das isoperimetrische Profil φ_M einer beliebigen, n -dimensionalen Hadamard-Mannigfaltigkeit größer oder gleich demjenigen von \mathbb{R}^n ist:

$$\varphi_M(v) \geq \varphi_{\mathbb{R}^n}(v), \quad v > 0,$$

und weiter, dass ein kompakter, regulärer Bereich $\Omega \subset M$ von Volumen v genau dann die minimale Oberfläche $\varphi_M(v) = \varphi_{\mathbb{R}^n}(v)$ hat, wenn er isometrisch zu einem flachen, geodätischen Ball ist. Das ist der Inhalt von Vermutung 1.8.

In dieser Arbeit werden Beweismethoden entwickelt bzw. weiterentwickelt, die *ohne* die Existenz von total geodätischen Hyperflächen auskommen und auf diese Weise geometrische Ungleichungen für symmetrische Rang-1-Räume und Hadamard-Mannigfaltigkeiten ermöglichen. Besonderes Interesse gilt dabei solchen Ungleichungen, für die eine Gleichheitsdiskussion möglich ist, die also *scharf* sind. Dadurch wird es möglich, geodätische Bälle über geometrische Extremaleigenschaften zu charakterisieren.

Die entwickelten Beweismethoden lassen sich grob dadurch ordnen, welche Methode verwendet wird, um die Oberfläche eines kompakten, regulären Bereiches mit seinem Volumen in Beziehung zu setzen. Dementsprechend ist die Arbeit gegliedert.

- Im zweiten Kapitel werden zunächst spezielle radiale Vektorfelder konstruiert, mit deren Hilfe man über den Divergenzansatz (Satz von Stokes) scharfe Ungleichungen zwischen der Oberfläche, dem Volumen und dem Umkugelradius erhält (Sätze 2.6 und 2.7).
- Im dritten Kapitel bildet eine integralgeometrische Formel von L.A. Santaló das Bindeglied zwischen der Oberfläche und dem Volumen. Daraus ergeben sich zwei verschiedene Charakterisierungen von Bällen in euklidischen und symmetrischen Rang-1-Räumen vom nichtkompakten Typ als Folgerungen der Sinus- und Cosinussätze (Folgerung 3.7 und Satz 3.8).

Das isoperimetrische Profil einer Hadamard-Mannigfaltigkeit und das isoperimetrische Profil eines symmetrischen Rang-1-Raums vom nichtkompakten Typ werden über eine Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung (Proposition 3.17) nach unten abgeschätzt (Sätze 3.19 und 3.20). Durch diese Methode ergibt sich ein weiterer, besonders einfacher Beweis für Vermutung 1.8 in Dimension 2 und ein neuer Ansatz für höhere Dimensionen.

Über die Youngsche Ungleichung erhält man eine scharfe geometrische Abschätzung des Standardpotentials in \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ und einen neuen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung in \mathbb{R}^2 (Satz 3.23).

- Das vierte Kapitel beginnt mit einer Charakterisierung von Sphären in symmetrischen Rang-1-Räumen über eine Extremaleigenschaft ihrer zweiten Fundamentalform (Proposition 4.3). Die Riccati-Gleichung wird im Folgenden dazu verwendet, eine Beziehung zwischen den Oberflächenelementen von Parallellflächen zu finden

und damit eine scharfe isoperimetrische Ungleichung zu beweisen. Neben Oberfläche und Volumen eines kompakten, regulären Bereiches geht auch eine Art Mittelwert der mittleren Krümmung in die Ungleichung ein (Satz 4.6).

1.3 Symmetrische Rang-1-Räume

Ein irreduzibler symmetrischer Raum von Rang 1 wird **symmetrischer Rang-1-Raum** genannt. Zusammen mit den euklidischen Räumen bilden die symmetrischen Rang-1-Räume gerade die Klasse der **Zwei-Punkt-Homogenen Räume**, d.h. die Klasse der zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten X mit der Eigenschaft, dass es zu je zwei Punktepaaren (x_1, x_2) und (y_1, y_2) aus X mit $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$ eine Isometrie Φ von X gibt mit $\Phi(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2$.

Die symmetrischen Rang-1-Räume vom nichtkompakten Typ sind

$$\begin{aligned}\mathbb{R}H^m &= \mathrm{SO}(m, 1)/\mathrm{SO}(m), \\ \mathbb{C}H^m &= \mathrm{SU}(m, 1)/\mathrm{U}(m), \\ \mathbb{H}H^m &= \mathrm{Sp}(m, 1)/(\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1)) \quad \text{und} \\ \mathbb{O}H^2 &= \mathrm{F}_4^*/\mathrm{Spin}(9),\end{aligned}$$

d.h. die reell-, komplex-, quaternionisch-hyperbolischen Räume und die hyperbolische Cayley-Ebene. Die symmetrischen Rang-1-Räume vom kompakten Typ sind

$$\begin{aligned}S^m &= \mathrm{SO}(m + 1)/\mathrm{SO}(m), \\ \mathbb{R}P^m &= \mathrm{SO}(m + 1)/\mathrm{O}(m), \\ \mathbb{C}P^m &= \mathrm{SU}(m + 1)/\mathrm{U}(m), \\ \mathbb{H}P^m &= \mathrm{Sp}(m + 1)/(\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1)) \quad \text{und} \\ \mathbb{O}P^2 &= \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9),\end{aligned}$$

d.h. die Sphäre, die reell-, komplex-, quaternionisch-projektiven Räume und die projektive Cayley-Ebene. Diese Liste erhält man aus der Klassifikation der einfachen Liegruppen (siehe z.B. [Wol] oder [Bes]).

Für symmetrische Rang-1-Räume X sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ die zugrundeliegende reelle Divisionsalgebra der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen, der Hamilton-Quaternionen bzw. der Cayley-Oktaven, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ ihre reelle Dimension und $m \geq 2$ die \mathbb{K} -Dimension von X .

Die reelle Dimension von X wird mit $n = dm$ bezeichnet und das Vorzeichen der Schnittkrümmung mit ϵ . Für die Räume vom kompakten Typ ist also $\epsilon = 1$ und für diejenigen vom nichtkompakten Typ ist $\epsilon = -1$. Die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X sei derart skaliert, dass die Räume konstanter Schnittkrümmung gerade Schnittkrümmung ϵ haben und die Schnittkrümmung der anderen Rang-1-Räume zwischen ϵ und 4ϵ liegt.

J_1, \dots, J_{d-1} bezeichnen parallele, orthogonale Endomorphismen auf TX mit $J_k^2 = -\mathrm{id}$, $k = 1, \dots, d - 1$, die von der Multiplikation mit den Elementen $\neq e$ der natürlichen Basis e, j_1, \dots, j_{d-1} der zugrundeliegenden reellen Divisionsalgebra \mathbb{K} erzeugt werden.

Definition 1.1 Mit ω_n bzw. c_{n-1} wird das **Volumen des Einheitsballes** in \mathbb{R}^n bzw. das induzierte $(n-1)$ -dimensionale **Volumen der Einheitskugel** in \mathbb{R}^n bezeichnet, es gilt also

$$c_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{und} \quad \omega_n = \frac{c_{n-1}}{n}.$$

Sei X ein n -dimensionaler symmetrischer Rang-1-Raum oder \mathbb{R}^n . Dann bezeichnet $A(r)$ das induzierte **Volumen der geodätischen Hypersphäre von Radius r** und $B(r) = \int_0^r A(t) dt$ das **Volumen eines geodätischen Balles von Radius $r > 0$** . (Für $\epsilon = 1$ sei dabei $r < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt).

Zur Vereinheitlichung des kompakten und nichtkompakten Falls werden folgende Schreibweisen für die **Winkelfunktionen** gebraucht: \sin_ϵ steht für \sin im Fall $\epsilon = 1$ und für \sinh im Fall $\epsilon = -1$, entsprechend sind \cos_ϵ , \tan_ϵ und \cot_ϵ definiert.

Für explizite Berechnungen von Sphären- und Ballvolumen beachte man $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Für $X = \mathbb{R}^n$ erhält man $A(r) = c_{n-1}r^{n-1}$ und für symmetrische Rang-1-Räume gilt

$$A(r) = c_{dm-1} \sin_\epsilon^{d(m-1)}(r) \frac{1}{2^{d-1}} \sin_\epsilon^{d-1}(2r).$$

Definition 1.2 Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann bezeichnet $S_p M = \{v \in T_p M \mid |v| = 1\}$ die Menge der **Einheitstangentialvektoren** in p . Sei $\eta \in S_p M$. Dann bezeichnet $\gamma_\eta : \mathbb{R} \rightarrow M$ die Geodätische mit $\gamma'_\eta(0) = \eta$. Sei M eine Hadamard-Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Dann ist $p\bar{q} \in S_p M$ der (eindeutig bestimmte) **Einheits-Tangentialvektor** mit $\gamma_{p\bar{q}}(d(p, q)) = q$.

1.4 Isoperimetrische Probleme

Definition 1.3 Ein **Bereich** Ω in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist der Abschluss einer nichtleeren, offenen und zusammenhängenden Teilmenge von M . Ein Bereich heißt **regulär**, wenn der topologische Rand $\partial\Omega$ eine C^∞ -Hyperfläche von M ist.

Definition 1.4 Das **isoperimetrische Profil** einer vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist die Funktion

$$\varphi_M : (0, \text{Vol } M) \rightarrow (0, \infty), \quad v \mapsto \inf \{ \text{Area}(\partial\Omega) \mid \text{Vol}(\Omega) = v \}.$$

Dabei wird das Infimum über alle kompakten, regulären Bereiche $\Omega \subset M$ (mit festem Volumen v) gebildet.

Das **isoperimetrische Problem** einer gegebenen m -dimensionalen vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M lässt sich folgendermaßen formulieren: Zu jeder Zahl $v \in (0, \text{Vol } M)$ bestimme man diejenigen kompakten Bereiche Ω_v mit $\text{Vol}(\Omega) = v$ und $\varphi_M(v) = \text{Area}(\partial\Omega_v)$, falls sie existieren.

Ein solcher Bereich Ω_v heißt Lösung des isoperimetrischen Problems oder kurz **isoperimetrische Lösung**.

Eine **isoperimetrische Ungleichung** für M oder **geometrische Ungleichung** für M ist im weiteren Sinn eine Ungleichung, die geometrische Größen von kompakten Bereichen in M über eine Ungleichung in Beziehung setzt. Eine isoperimetrische Ungleichung im engeren Sinn ist eine Ungleichung, die die Oberfläche eines kompakten Bereichs $\Omega \subset M$ nach unten durch eine positive Funktion des Volumens $\text{Vol}(\Omega)$ abschätzt und so eine Abschätzung des isoperimetrischen Profils nach unten liefert. Eine isoperimetrische Ungleichung heißt **scharf**, wenn es kompakte Bereiche gibt, die die Ungleichung mit Gleichheit erfüllen.

Bemerkung. Ein Ergebnis der geometrischen Maßtheorie ist, dass es zu jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit M , für die der Quotient M/Γ von M nach ihrer Isometriegruppe Γ kompakt ist und jedem $v \in (0, \text{Vol}(M))$ eine relativ kompakte, offene Teilmenge $\Omega_v \subset M$ von Volumen v gibt, deren Rand $\partial\Omega_v$ unter allen derartigen Mengen minimales $(n - 1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß hat. (Siehe [Mor], 13.4. und die Bemerkung auf Seite 131.)

Im Allgemeinen ist dieser Rand jedoch keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sondern nur ein rektifizierbarer Strom (*engl.*: rectifiable current, siehe [Fed], S.355), mit folgender Eigenschaft:

Ist $p \in \partial\Omega_v$ ein Randpunkt, dessen Tangentialkegel in einem Halbraum von T_pM enthalten ist, dann gibt es eine Umgebung U von p in M , sodass $\partial\Omega_v \cap U$ eine C^∞ -Hyperfläche von U ist.

Es gilt sogar, dass die Menge der regulären Punkte (solche, deren Tangentialkegel in einem Halbraum enthalten ist) eine zusammenhängende C^∞ -Hyperfläche konstanter mittlerer Krümmung ist und dass die Menge der singulären Punkte Hausdorff-Dimension $\leq n - 8$ hat. Zum Beweis siehe [Alm]. Vergleiche auch [Bus], 2.1. und 3.3.

Es wird jedoch vermutet, dass für symmetrische Räume vom nichtkompakten Typ isoperimetrische Lösungen stets regulär sind, vgl. [Hs2], S. 153. Ein entsprechender Regularitätssatz liegt jedoch noch nicht vor.

Folgende Eigenschaften des isoperimetrischen Profils wurden allgemein für symmetrische Räume vom nichtkompakten Typ in [Hs2] gezeigt. Da sich die Beweise für symmetrische Rang-1-Räume etwas vereinfachen, wird auch ein Beweis angegeben.

Proposition 1.5 *Sei X ein n -dimensionaler symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und φ_X das isoperimetrische Profil von X . Dann gilt:*

- (a) *Sei $v > 0$ eine Stelle, an der φ_X differenzierbar ist, Ω^* eine isoperimetrische Lösung mit $\text{Vol}(\Omega^*) = v$ und $H_v = \frac{\text{Spur}(-\nabla N)}{n-1}$ die mittlere Krümmung des regulären Teils von $\partial\Omega^*$ bezüglich der inneren Normale N . Dann gilt*

$$\varphi'_X(v) = (n - 1)H.$$

- (b) *φ_X ist eine streng monoton wachsende, fast überall differenzierbare Funktion.*

(c) Für alle $v > 0$ gilt

$$\varphi_X(v) > (dm + d - 2) \cdot v.$$

Beweis. Es gelten folgende Variationsformeln für eine differenzierbare Schar von kompakten Bereichen $t \mapsto \Omega_t$ mit $\Omega_0 = \Omega^*$ und Variationsfeld V auf dem regulären Teil von $\partial\Omega^*$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Vol}(\Omega_t) = - \int_{\partial\Omega^*} \langle N_v, V \rangle dA \quad \text{und} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Area}(\partial\Omega_t) = - \int_{\partial\Omega^*} (n-1)H_v \langle N, V \rangle dA.$$

Sei Ω_t eine Variation von Ω^* mit $\text{Vol}(\Omega_t) =: v(t)$ und $v'(0) \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi'_X(v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_X(v + \epsilon) - \varphi_X(v)}{\epsilon} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_X(v(t)) - \varphi_X(v(0))}{v(t) - v(0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_X(v(t)) - \varphi_X(v)}{t} \cdot \frac{t}{v(t) - v} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{Area}(\Omega_t) - \text{Area}(\Omega_0)}{t} \cdot \frac{t}{\text{Vol}(\Omega_t) - \text{Vol}(\Omega_0)} \\ &= \frac{\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Area}(\Omega_t)}{\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Vol}(\Omega_t)} \\ &= (n-1)H_v. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun eine Variation Ω_t von Ω^* mit $v'(0) < 0$, so erhält man in analoger Weise $\varphi'_X(v) \leq (n-1)H_v$. Es folgt a).

Sei $K \supset \Omega^*$ der kleinste Ball, der Ω^* enthält. Dann berührt der Rand von K den Rand von Ω^* in mindestens einem Punkt p . Dieser Punkt kann nur regulär sein, da sein Tangentialkegel in dem Halbraum von $T_p X$ enthalten ist, in dem auch der Tangentialkegel von K enthalten ist. Die konstante mittlere Krümmung H_v des regulären Teils von $\partial\Omega^*$ bezüglich der inneren Normale N ist nicht kleiner als die von ∂K in p . Das folgt aus Lemma 1.6. Ist R der Radius von K , so lässt sich die Spur der Weingarten-Abbildung von ∂K als logarithmische Ableitung des Sphärenvolumens berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \ln A(R) &= 2(d-1) \coth(2R) + d(m-1) \coth(R) \\ &> 2(d-1) + d(m-1) \\ &= dm + d - 2. \end{aligned}$$

Also folgt $H_v > \frac{dm+d-2}{n-1} = \frac{dm+d-2}{dm-1} > 0$. Da $(n-1)H_v$ die logarithmische Ableitung des Volumens von $\partial\Omega^*$ in Richtung der äußeren Normale ist, folgt, dass eine genügend kleine Deformation von Ω^* in Richtung der inneren Normale sowohl das Volumen von Ω^* als auch die Oberfläche von $\partial\Omega^*$ verkleinert. Für jedes $\tilde{v} < v$ in einer genügend kleinen Umgebung von v gilt demnach

$$\varphi_X(\tilde{v}) < \varphi_X(v).$$

Also ist φ_X streng monoton wachsend und also nach einem Satz von Lebesgue fast überall differenzierbar. Es ergibt sich demnach b).

Wegen

$$\varphi_X(v) = \int_0^v (n-1)H_v dv > \int_0^v (dm+d-2) dv = (dm+d-2)v$$

folgt nun auch c). □

Lemma 1.6 *Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M_1, M_2 \subset X$ zwei orientierbare Hyperflächen mit Normalen N_1, N_2 , die sich in einem Punkt $p \in X$ berühren. Dabei gelte $N_1(p) = N_2(p)$ und für eine Umgebung U von p in X , dass $U \setminus M_1$ in genau zwei Komponenten zerfällt und $M_2 \cap U$ ganz in derjenigen abgeschlossenen Komponente liegt, in die die Normale N_1 weist. Dann gilt für jeden Vektor $v \in T_p M_1 = T_p M_2$:*

$$\langle \nabla_v N_1, v \rangle \geq \langle \nabla_v N_2, v \rangle.$$

Beweis. Betrachte eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass für die erste Komponente $x_1(M_1 \cap U) = \{0\}$ gilt und $N_1(p) = N_2(p) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_p$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $x_1(M_2 \cap U) \geq 0$. Seien $\sigma_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$ zwei Kurven mit

$$\sigma_1'(0) = \sigma_2'(0) = v.$$

Durch die Betrachtung der entsprechenden Kurven $x \circ \sigma_i$ in \mathbb{R}^n erhält man

$$\langle \sigma_1''(0), N_1(p) \rangle \leq \langle \sigma_2''(0), N_2(p) \rangle.$$

Mit

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v N_i, v \rangle &= \langle \nabla_t N_i|_{\sigma_i}, \sigma_i'(0) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \langle N_i|_{\sigma_i}, \sigma_i' \rangle - \langle N_i(p), \sigma_i''(0) \rangle \\ &= -\langle N_i(p), \sigma_i''(0) \rangle \end{aligned}$$

für $i = 1, 2$ folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung. Das isoperimetrische Profil einer vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M lässt sich trivialerweise nach oben abschätzen: Zu jedem $v \in (0, \text{Vol } M)$ sei Ω_v ein kompakter, regulärer Bereich mit $\text{Vol}(\Omega) = v$ und $\text{Area}(\partial\Omega) =: a(v)$. Dann gilt $\varphi_M(v) \leq a(v)$. Für einen symmetrischen Rang-1-Raum X vom nichtkompakten Typ erhält man also insbesondere

$$\varphi_X(v) \leq A(B^{-1}(v)), \quad v > 0.$$

Vermutung 1.7 *Für einen symmetrischen Rang-1-Raum X vom nichtkompakten Typ ist das isoperimetrische Profil durch $\varphi_X(v) = A(B^{-1}(v))$ gegeben und die geodätischen Bälle sind die einzigen (regulären) Lösungen des isoperimetrischen Problems.*

Für die vollständigen, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung, also für die Sphären S^n , die euklidischen Räume \mathbb{R}^n und die reell-hyperbolischen Räume $\mathbb{R}H^n$ ist dies seit den 1940er Jahren bewiesen, siehe [DS], [Sc2]. Für die symmetrischen Rang-1-Räume vom nichtkompakten Typ mit nichtkonstanter Schnittkrümmung ist diese Vermutung jedoch noch offen.

Für den reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^3$ ist diese Vermutung falsch: für bestimmte Werte v des Volumens von Ω haben Tuben um projektive Geraden kleinere Oberfläche als geodätische Bälle desselben Volumens. Das wurde 1992 von Ritoré und Ros in [RR] bewiesen. In demselben Artikel wird auch das isoperimetrische Profil von $\mathbb{R}P^3$ bestimmt. Für die anderen symmetrischen Rang-1-Räume vom kompakten Typ ist das isoperimetrische Profil jedoch unbekannt.

Vermutung 1.8 *Sei Ω ein kompakter, regulärer Bereich in einer n -dimensionalen Hadamard-Mannigfaltigkeit M . Dann gilt*

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq n^{\frac{n-1}{n}} (c_{n-1})^{\frac{1}{n}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω isometrisch zu einem flachen Ball ist.

Diese Vermutung wurde für $n = 2$ in [Wei], für $n = 3$ in [Kle] und für $n = 4$ in [Cro] bewiesen. Für die anderen Dimensionen ist diese Vermutung bis jetzt offen.

Kapitel 2

Ansätze über den Divergenzsatz

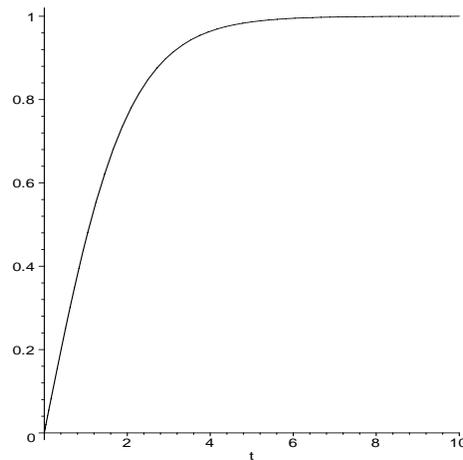
2.1 Radiale Vektorfelder konstanter Divergenz

Proposition 2.1 Sei X ein n -dimensionaler euklidischer oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ. Sei $o \in X$ ein fester Punkt und $r : X \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto d(o, p)$ der Abstand zu o . Dann ist V_o mit $V_o(o) = 0$ und

$$V_o(p) := \frac{B(r(p))}{A(r(p))}(\text{grad } r)(p), \quad p \neq o$$

ein C^1 -Vektorfeld auf X mit $\text{div } V_o = 1$.

Abbildung 2.1: Die Funktion $\frac{B(r)}{A(r)}$ für den Fall $X = \mathbb{R}H^2$



Beweis. Um zu zeigen, dass V_o ein C^1 -Vektorfeld auf X ist, betrachte Normalkoordinaten x_1, \dots, x_n um o bezüglich einer beliebigen Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n . Dann hat V_o bezüglich der Koordinatenfelder

$$E_i(p) = (d \exp_o)_{u_p} e_i, \quad u_p := \exp_o^{-1}(p), \quad (i = 1, \dots, n)$$

die Darstellung

$$V_o(p) = \frac{B(r(p))}{A(r(p))} \sum_{i=1}^n \frac{x_i(p)}{r(p)} E_i(p), \quad r(p) := \|u_p\|.$$

V_o ist stetig in o , denn für jede Nullfolge $(x_1^\nu, \dots, x_n^\nu)$ mit $r_\nu := \sqrt{(x_1^\nu)^2 + \dots + (x_n^\nu)^2}$ gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{B(r_\nu) x_i^\nu}{A(r_\nu) r_\nu} \right| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{\int_0^{r_\nu} A(t) dt x_i^\nu}{A(r_\nu) r_\nu} \right| \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{A(r_\nu) r_\nu x_i^\nu}{A(r_\nu) r_\nu} \right| = 0.$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{B(r)}{A(r)} \frac{x_i}{r} \right), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

existiert in $(0, \dots, 0)$ und ist dort stetig für alle $i, k = 1, \dots, n$. Für $i \neq k$ ist die partielle Ableitung in 0 offensichtlich $= 0$ und ist dort auch stetig. Sei also $i = k$ und h_ν eine reelle Nullfolge für $\nu \rightarrow \infty$. Dann erhält man als partielle Ableitung in 0 :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{B(r)}{A(r)} \frac{x_k}{r} \right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{B(|h_\nu|)h_\nu}{A(|h_\nu|)|h_\nu|} - 0}{h_\nu}.$$

A ist eine analytische Funktion. Sei $A^{(l)}(0)$ die erste Ableitung von A in 0 die nicht verschwindet. Wegen $B(0) = A(0) = \dots A^{(l-1)}(0) = 0$ erhält man nach der Taylorentwicklung um 0 also weiter

$$\begin{aligned} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(l+1)!} A^{(l)}(0) |h_\nu|^{l+1} + O(|h_\nu|^{l+2})}{\frac{1}{l!} A^{(l)}(0) |h_\nu|^{l+1} + O(|h_\nu|^{l+2})} \\ &= \frac{1}{l+1}. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob diese partielle Ableitung in 0 stetig ist, setze $x_j = 0$ für $j \neq k$ und betrachte die partielle Ableitung in $(0, \dots, x_k, \dots, 0)$. Dann ist $r = |x_k|$ und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{B(r) x_k}{A(r) r} \right) &= \frac{A^2 x_k^2 + r A B - B A' x_k^2 - A B \frac{x_k^2}{r}}{A^2 r^2} \\ &= 1 - \frac{B(|x_k|) A'(|x_k|)}{A^2(|x_k|)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{(l+1)!} \frac{1}{(l-1)!} (A^{(l)}(0))^2 + O(|x_k|)}{\left(\frac{1}{l!}\right)^2 (A^{(l)}(0))^2 + O(|x_k|)} \end{aligned}$$

Das strebt für $x_k \rightarrow 0$ tatsächlich gegen $\frac{1}{l+1}$. Damit ist gezeigt, dass V_o ein C^1 -Vektorfeld ist.

Es gilt $V_o = \text{grad}(f \circ r)$ für $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(t) = \int_0^t \frac{B(s)}{A(s)} ds$. Der radiale Teil des Laplace-Operators div grad bezüglich geodätischer Polarkoordinaten um o hat nach [He2], Proposition II.5.26 die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{A'(r)}{A(r)} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Damit ergibt sich auf $X \setminus \{o\}$

$$\begin{aligned} \text{div } V_o &= \text{div grad}(f \circ r) \\ &= f''(r) + \frac{A'(r)}{A(r)} f'(r) \\ &= \frac{A^2(r) - B(r)A'(r)}{A^2(r)} + \frac{A'(r)B(r)}{A(r)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt auch $(\text{div } V_o)(o) = 1$. □

Bemerkung. Durch Mittelung von Vektorfeldern V_o aus Proposition 2.1 über beliebigen Teilmengen von X (mit entsprechendem Maß) erhält man weitere Vektorfelder konstanter Divergenz 1, z.B. V_Ω und $V_{\partial\Omega}$ mit

$$V_\Omega(p) := \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_\Omega V_q(p) dV(q) \quad \text{und} \quad V_{\partial\Omega}(p) := \frac{1}{\text{Area}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} V_q(p) dA(q).$$

Weitere Vektorfelder konstanter Divergenz erhält man natürlich, indem man Gradientenfelder harmonischer Funktionen zu einem Vektorfeld konstanter Divergenz hinzuaddiert.

Mit einer ähnlichen Methode wie in Proposition 2.1 erhält man ein weiteres radiales Vektorfeld W_o berechenbarer Divergenz, wie im folgenden Korollar gezeigt wird. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ gilt gerade $W_o = nV_o$.

Korollar 2.2 *Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ oder \mathbb{R}^n und $o \in X$ ein fester Punkt. Dann ist das Vektorfeld W_o mit $W_o(o) = 0$ und*

$$W_o(q) = r(q)(\text{grad } r)(q), \quad q \neq o, \quad r(q) = d(o, q)$$

ein C^1 -Vektorfeld mit konstanter Divergenz $\text{div } W_o = n$ für $X = \mathbb{R}^n$ und mit Divergenz $(\text{div } W_o)(q) = 1 + d(m-1)r(q) \coth(r(q)) + 2(d-1)r(q) \coth(2r(q))$ für die hyperbolischen Räume $X = \mathbb{K}H^m$ mit $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$.

Beweis. W_o ist stetig differenzierbar wegen $W_o = \text{grad} \left(\frac{r^2}{2} \right)$. Es gilt für $q \neq o$

$$\begin{aligned} \text{div } W_o &= \text{div grad} \left(\frac{r^2}{2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} \right) + \frac{A'(r)}{A(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{A'(r)}{A(r)} r \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $\operatorname{div} W_o = n$ für $X = \mathbb{R}^n$ und

$$\operatorname{div} W_o = 1 + d(m-1)r(\coth(r)) + 2(d-1) + 2(d-1)\coth(2r)$$

für symmetrische Rang-1-Räume. □

Bemerkung. Es gibt folgende Beziehung zwischen der mittleren Krümmung und Vektorfeldern konstanter Divergenz:

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine orientierbare Hyperfläche mit Normale N und zugehöriger Weingarten-Abbildung $A : T_p M \rightarrow T_p M$, $v \mapsto -\nabla_v N$. In einer Umgebung von M sei V ein differenzierbares Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass V auf M ein negatives Vielfaches der Normale ist. Dann gilt

$$\operatorname{Spur} A = \frac{1}{\|V\|} \operatorname{div} V + V \left(\frac{1}{\|V\|} \right).$$

Beweis. Sei E_1, \dots, E_n ein lokales orthonormales n -Bein. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur} A &= - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \frac{V}{\|V\|}, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\|V\|} \langle \nabla_{E_i} V, E_i \rangle + E_i \left(\frac{1}{\|V\|} \right) \langle V, E_i \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\|V\|} \operatorname{div} V + V \left(\frac{1}{\|V\|} \right). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3 *Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ. Dann ist das Gradientenvektorfeld $V = \operatorname{grad} f_v$ einer beliebigen Busemann-Funktion*

$$f_v : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} d(q, \gamma_v(t)) - t, \quad (v \in SX \text{ fest})$$

ein C^1 -Vektorfeld mit $\|V\| = 1$ und $\operatorname{div} V = dm + d - 2$. Dabei sind $m = \dim_{\mathbb{K}} X$ und $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, vergleiche Seite 11.

Beweis. Zunächst ergibt sich $\|\operatorname{grad} f_v\| = 1$ wegen $\|\operatorname{grad} d(q, \cdot)\| = 1$. Es gilt also auch $\nabla_V V = 0$.

Nach [HH], Proposition 3.1. ist jede Busemannfunktion in einer Hadamard-Mannigfaltigkeit eine C^2 -Funktion und es gilt $(\nabla_u V)(q) = -J'_u(0)$ für jedes $u \in T_q X$ mit $u \perp V$. Dabei ist $J_u(t)$ das stabile Jacobifeld längs $\gamma_{-V(q)}(t)$ mit $J_u(0) = u$.

Falls $K[u, V] = -\lambda^2$ ist, folgt $J_u(t) = (\cosh(\lambda t) - \sinh(\lambda t))U(t)$ für das Parallelfeld U mit $U(0) = u$. Sei E_1, \dots, E_{dm} eine Orthonormalbasis in q mit $E_{dm} = V$ und so, dass $K[E_i, V] = -1$ für $i = 1, \dots, d(m-1)$ gilt. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div} V)(q) &= \sum_{i=1}^{dm} \langle \nabla_{E_i} V, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{dm-1} -\langle J'_{E_i}(0), E_i \rangle \\
 &= d(m-1) \cdot 1 + (d-1) \cdot 2 \\
 &= dm + d - 2
 \end{aligned}$$

□

2.2 Anwendung auf isoperimetrische Probleme

Proposition 2.4 *Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ. Dann gilt für jeden kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset X$*

$$\operatorname{Area}(\partial\Omega) > (dm + d - 2) \cdot \operatorname{Vol}(\Omega).$$

Beweis. Die Aussage folgt natürlich aus Proposition 1.5. Ein direkter Beweis ohne die Verwendung der Regularität und Existenz von Lösungen des isoperimetrischen Problems ist der folgende.

Sei $\Omega \subset X$ ein beliebiger kompakter, regulärer Bereich mit äußerer Normale \tilde{N} auf $\partial\Omega$ und V das Gradientenfeld einer beliebigen Busemannfunktion. Dann folgt aus Proposition 2.3 und dem Divergenzsatz

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{dm + d - 2} \int_{\Omega} \operatorname{div} V \, dV \\
 &= \frac{1}{dm + d - 2} \int_{\partial\Omega} \langle V, \tilde{N} \rangle \, dA \\
 &\leq \frac{1}{dm + d - 2} \operatorname{Area}(\partial\Omega)
 \end{aligned}$$

Andererseits gibt es keinen kompakten, regulären Bereich Ω , der diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt, denn der Rand $\partial\Omega$ müsste wegen $V = \tilde{N}$ Niveaumenge einer Busemannfunktion sein, also eine Horosphäre. Wegen der Kompaktheit ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt stets die strikte Ungleichung. □

Folgendes technisches Lemma ist an mehreren Stellen der vorliegenden Arbeit wichtig.

Lemma 2.5 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ. Dann ist die Funktion $B(r)/A(r)$ für $r > 0$ streng monoton wachsend und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{A(r)} = \frac{1}{dm + d - 2}.$$

Beweis.

- Sei zunächst X ein reell-hyperbolischer Raum, d.h. es gilt $d = 1$ und $n = m$. Durch partielle Integration erhält man zunächst folgende Rekursionsformel für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \int_0^r \sinh(t)^{n-1} dt &= \sinh(r)^{n-2} \cosh(r) - (n-2) \int_0^r \sinh(t)^{n-3} \cosh(t)^2 dt \\ \Rightarrow \int_0^r \sinh(t)^{n-1} dt &= \frac{1}{n-1} \left(\cosh(r) \sinh(r)^{n-2} - (n-2) \int_0^r \sinh(t)^{n-3} dt \right) \end{aligned}$$

Für $n = 2$ gilt $A(r) = c_1 \sinh(r)$ und $B(r) = c_1(\cosh(r) - 1)$, also folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{A(r)} = 1 = \frac{1}{dm + d - 1}.$$

Für $n \geq 3$ gilt $A(r) = c_{n-1} \sinh(r)^{n-1}$ und $B(r) = c_{n-1} \int_0^r \sinh(t)^{n-1} dt$. Also ergibt sich mit der Rekursionsformel

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{A(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \left(\coth(r) - (n-2) \frac{\int_0^r \sinh(t)^{n-3} dt}{\sinh(r)^{n-1}} \right) = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{dm + d - 2}$$

Um zu zeigen, dass $B(r)/A(r)$ für $r > 0$ streng monoton wachsend ist, reicht zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{A} \right)' &= \frac{A^2 - BA'}{A^2} > 0 \\ \Leftrightarrow B &< \frac{A^2}{A'} \\ \Leftrightarrow \int_0^r \sinh(t)^{n-1} dt &< \frac{\sinh^{2n-2}(r)}{(n-1) \sinh(r)^{n-2} \cosh(r)} = \frac{\sinh(r)^n}{(n-1) \cosh(r)} \end{aligned}$$

für alle $r > 0$ gilt. Da beide Seiten der zu zeigenden Ungleichung für $r = 0$ verschwinden, folgt die Behauptung, wenn die Ungleichung für die Ableitungen der beiden Seiten entsprechend gilt. Das ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \sinh(r)^{n-1} &< \frac{n(n-1) \sinh(r)^{n-1} \cosh(r)^2 - (n-1) \sinh(r)^{n+1}}{(n-1)^2 \cosh(r)^2} \\ \Leftrightarrow (n-1) \cosh(r)^2 \sinh(r)^{n-1} &< n \cosh(r)^2 \sinh(r)^{n-1} - \sinh(r)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \sinh(r)^{n+1} &< \sinh(r)^{n-1} \cosh(r)^2 \end{aligned}$$

für alle $r > 0$.

- Für $d \geq 2$ lassen sich sogar relativ übersichtliche geschlossene Formeln für $B(r)$ und $B(r)/A(r)$ angeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
B(r) &= c_{n-1} \int_0^r \sinh(t)^{d(m-1)} \left(\frac{\sinh(2t)}{2} \right)^{d-1} dt \\
&= c_{n-1} \int_0^r \sinh(t)^{dm-1} \cosh(t)^{d-1} dt \\
&= c_{n-1} \int_0^r \sinh(t)^{dm-1} (\sinh(t)^2 + 1)^{\frac{d-2}{2}} \cosh(t) dt \\
&= c_{n-1} \int_0^{\sinh(r)} x^{dm-1} (x^2 + 1)^{\frac{d-2}{2}} dx \\
&= \begin{cases} c_{2m-1} \frac{\sinh(r)^{2m}}{2m} & , \quad d = 2 \\ c_{4m-1} \left(\frac{\sinh(r)^{4m+2}}{4m+2} + \frac{\sinh(r)^{4m}}{4m} \right) & , \quad d = 4 \\ c_{15} \left(\frac{\sinh(r)^{22}}{22} + \frac{3 \sinh(r)^{20}}{20} + \frac{3 \sinh(r)^{18}}{18} + \frac{\sinh(r)^{16}}{16} \right) & , \quad d = 8 \quad (m = 2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Als Quotienten ergeben sich demnach

$$\frac{B(r)}{A(r)} = \begin{cases} \frac{\tanh(r)}{2m} & , \quad d = 2 \\ \frac{\tanh(r)^3}{4m+2} + \frac{\tanh(r)}{4m \cosh(r)^2} & , \quad d = 4 \\ \frac{\tanh(r)^7}{22} + \frac{3 \tanh(r)^5}{20 \cosh(r)^2} + \frac{3 \tanh(r)^3}{18 \cosh(r)^4} + \frac{\tanh(r)}{16 \cosh(r)^6} & , \quad d = 8 \quad (m = 2) \end{cases}$$

Daraus erhält man sofort

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B(r)}{A(r)} = \frac{1}{dm + d - 2}.$$

Die strenge Monotonie für $r > 0$ erhält man durch Berechnen der Ableitung. Nach längerer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}
\left(\frac{B}{A} \right)'(r) &= \begin{cases} \frac{1}{2m \cosh(r)^2} & , \quad d = 2 \\ \frac{4(m-1) \sinh(r)^2 + 4m+2}{(4m+2)4m \cosh(r)^4} & , \quad d = 4 \\ \frac{1368 \sinh(r)^6 + 1540 \sinh(r)^4 + 330 \sinh(r)^2 + 165}{5280 \cosh(r)^8} & , \quad d = 8 \quad (m = 2) \end{cases} \\
&> 0
\end{aligned}$$

□

Satz 2.6 Sei $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich in einem euklidischen oder symmetrischen Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ. Sei $K \supset \Omega$ der kleinste Ball, der Ω enthält, mit Mittelpunkt o und Radius R . Dann gilt

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{A(R)}{B(R)} \text{Vol}(\Omega)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω ein Ball ist.

Beweis. Das Vektorfeld V_o aus Proposition 2.1 hat konstante Divergenz 1 und

$$\|V_o\| = \left| \frac{B(r)}{A(r)} \right|$$

wächst nach Lemma 2.5 streng monoton in $r = d(o, \cdot)$. Wegen $\Omega \subset K$ gilt für jedes $p \in \partial\Omega$, dass $r(p) \leq R$ ist und daher $\frac{B(r(p))}{A(r(p))} \leq \frac{B(R)}{A(R)}$ gilt. Sei \tilde{N} die äußere Normale auf $\partial\Omega$. Mit dem Divergenzsatz und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man also

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega} \text{div } V_o \, dV \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle V_o, \tilde{N} \rangle \, dA \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \|V_o\| \, dA \\ &\leq \frac{B(R)}{A(R)} \text{Area}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Es gelte nun Gleichheit. Dann folgt, dass V_o auf $\partial\Omega$ ein Vielfaches der Normale \tilde{N} ist und dass für jeden Randpunkt $p \in \partial\Omega$ der Abstand $d(p, o) = R$ ist. Also ist Ω der Ball um o von Radius R . \square

Satz 2.7 *Sei M eine n -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein kompakter, regulärer Bereich. K sei ein geodätischer Ball mit minimalem Radius R , der Ω enthält. Dann gilt*

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{n}{R} \text{Vol}(\Omega)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω ein flacher Ball ist.

Beweis. Sei o der Mittelpunkt von K . Zeige zunächst, dass das Vektorfeld

$$W_o = \text{grad} \left(\frac{r^2}{2} \right), \quad r(q) = d(o, q)$$

Divergenz $\text{div } W_o \geq n$ hat. Sei dazu $q \neq o$ und e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_q M$ mit $e_n = \gamma'_{\partial\tilde{q}}(r(q))$. Seien $E_n(t) = \gamma'_{\partial\tilde{q}}(t)$ und $E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)$ die Jacobifelder längs $\gamma_{\partial\tilde{q}}(t)$ mit $E_i(0) = 0$ und $E'_i(r(q)) = \nabla_{E_n} E_i(r(q)) = e_i$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wegen $K \leq 0$ gilt für $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \langle E'_i(r(q)), E_i(r(q)) \rangle &= \int_0^{r(q)} \langle E'_i(s), E_i(s) \rangle + \langle E''_i(s), E_i(s) \rangle \, ds \\ &= \int_0^{r(q)} \|E'_i(s)\|^2 - \langle R(E_n, E_i)E_n, E_i \rangle \, ds \\ &\geq \int_0^{r(q)} \|E'_i(s)\|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Für Vergleichs-Vektorfelder $\tilde{E}_1(t), \dots, \tilde{E}_n(t)$ längs einer Geodätischen $\tilde{\gamma}(t)$ in \mathbb{R}^n mit $\tilde{E}_i(0) = 0$, $\tilde{E}_n(t) = \tilde{\gamma}'(t)$ und $\tilde{E}_i'(r(q)) = \tilde{e}_i$, ($i = 1, \dots, n$) für eine Orthonormalbasis $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ von $T_{\tilde{\gamma}(r(q))}\mathbb{R}^n$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \langle E_i'(r(q)), E_i(r(q)) \rangle &= \int_0^{r(q)} \|\tilde{E}_i'(s)\|^2 ds \\ &= \langle \tilde{E}_i'(r(q)), \tilde{E}_i(r(q)) \rangle \\ &= \frac{1}{r(q)}, \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\langle E_i'(r(q)), E_i(r(q)) \rangle \geq \frac{1}{r(q)}, \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Es gilt $[E_i, E_n] = 0$, da E_1, \dots, E_n mit Hilfe der Exponentialabbildung zu Koordinatenvektorfeldern fortgesetzt werden können. Also folgt

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} W_o)(q) &= \operatorname{Spur}(\nabla W_o)(q) \\ &= \operatorname{Spur}(\nabla(r \operatorname{grad} r))(q) \\ &= \operatorname{Spur}(\nabla(r \gamma'_{\partial \tilde{q}}))(q) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(r E_n), E_i \rangle_q \\ &= E_n(r)(q) + r(q) \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_n} E_i, E_i \rangle_q \\ &\geq 1 + r(q) \frac{n-1}{r(q)} \\ &= n. \end{aligned}$$

Also folgt mit dem Divergenzsatz

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\Omega) &\leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \operatorname{div} W_o dV \\ &= \frac{1}{n} \int_{\partial \Omega} \langle W_o, \tilde{N} \rangle dA \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\partial \Omega} \|W_o\| dA \\ &\leq \frac{R}{n} \operatorname{Area}(\Omega). \end{aligned}$$

Es gelte nun Gleichheit. Dann gilt $d(o, p) = R$ für jedes $p \in \partial \Omega$. Also ist Ω ein R -Ball um o mit

$$\frac{\operatorname{Vol}(\Omega)}{\operatorname{Area}(\partial \Omega)} = \frac{R}{n} = \frac{\omega_n R^n}{c_{n-1} R^{n-1}}.$$

Außerdem müssen die Schnittkrümmungen der 2-Ebenen, die $E_n = \text{grad } r$ für $0 < r \leq R$ enthalten, alle verschwinden. Daraus folgt, dass die Schnittkrümmung von Ω verschwindet. Also ist Ω isometrisch zu einem R -Ball in \mathbb{R}^n . \square

Bemerkung. Satz 2.6 und 2.7 schätzen die Oberfläche eines Bereiches über den Radius R der Umkugel ab. Ersetzt man R durch den Radius des Balles mit demselben Volumen wie Ω , so hätte man gerade die Vermutungen 1.7 und 1.8 bewiesen. Möglicherweise lässt sich dies durch geschickte Wahl des Vektorfeldes in den Beweisen zeigen.

Im Spezialfall des euklidischen Raumes ist M. Gromov ein Beweis der isoperimetrischen Ungleichung über den Divergenzsatz gelungen. Dabei wird ein Vektorfeld über eine spezielle Vergleichsabbildung konstruiert, siehe [Ber], Band II, Seite 71-73.

Kapitel 3

Integralgeometrische Ansätze

3.1 Eine Formel von L.A. Santaló

Sei M eine n -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein kompakter, regulärer Bereich mit innerer Normale N . Mit $\Omega^0 := \text{int } \Omega$ werde das Innere von Ω bezeichnet.

Das Einheitstangentenbündel SM von M werde mit dem **Liouvillemass** (der kinematischen Dichte) versehen, für eine Definition siehe [Ch1], Kapitel 5. Einheitsvektoren aus $S\Omega^0$ werden (meistens) mit dem Buchstaben η bezeichnet und das Liouvillemass symbolisch mit $d\eta$ bezeichnet. Die Einschränkung des Liouvillemasses auf eine Einheitskugel $S_q\Omega^0$ ist gerade das kanonische Sphärenmass und wird mit $d\eta_q$ (oder ebenfalls mit $d\eta$) bezeichnet. $d\eta$ lässt sich lokal als Produkt des Riemannschen Volumenmasses dV und des kanonischen Sphärenmasses auffassen.

Die Menge der nach innen gerichteten Einheitsvektoren auf $\partial\Omega$

$$S^+\partial\Omega := \{ \xi \in SM \mid \pi(\xi) \in \partial\Omega \text{ und } \langle N, \xi \rangle > 0 \}$$

ist eine $(2n - 2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von SM , die mit dem induzierten Mass versehen wird. Da Elemente von $S^+\partial\Omega$ stets mit ξ bezeichnet werden, wird das Mass mit $d\xi$ bezeichnet. Es lässt sich lokal als Produkt des Oberflächenmasses dA von $\partial\Omega$ und dem kanonischen Sphärenmass auffassen. Die Einschränkung von $d\xi$ auf eine Hemisphäre $S_p^+\partial\Omega$ in $p \in \partial\Omega$ wird mit $d\xi_p$ oder wieder mit $d\xi$ bezeichnet.

Definition 3.1 Für $\xi \in S^+\partial\Omega$ seien

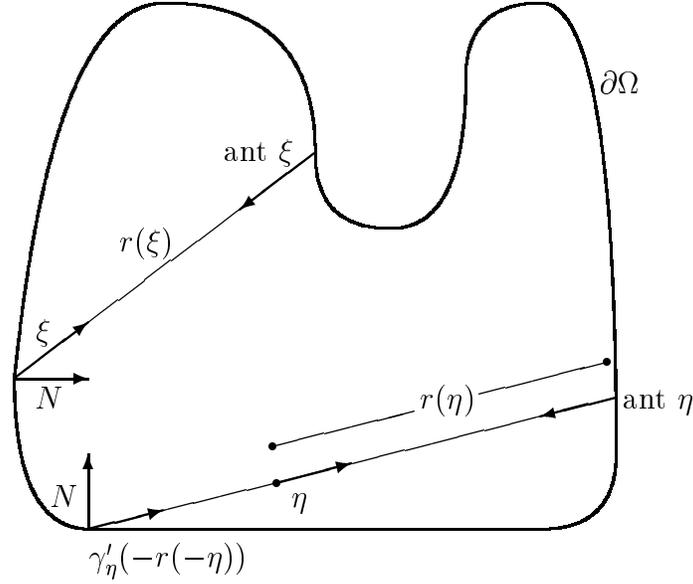
$$\cos \xi := \langle \xi, N \rangle \quad \text{und} \quad r(\xi) := \max\{ t \geq 0 \mid \gamma_\xi([0, t]) \subset \Omega \}$$

definiert. Der **Antipodenvektor** von ξ sei $\text{ant } \xi := -\gamma'_\xi(r(\xi)) \in S^+\partial\Omega$. Diese Definition lässt sich auf Einheits-Tangentenvektoren von $S\Omega^0$ fortsetzen: Für $\eta \in S\Omega^0$ seien

$$r(\eta) := \max\{ t \geq 0 \mid \gamma_\eta([0, t]) \subset \Omega \} \quad \text{und} \quad \cos \eta := \langle \gamma'_\eta(-r(-\eta)), N \rangle$$

sowie $\text{ant } \eta := -\gamma'_\eta(r(\eta)) \in S^+\partial\Omega$ definiert, vergleiche Abbildung 3.1.

Abbildung 3.1: Skizze zu Definition 3.1



Proposition 3.2 (Santalós Formel) Sei M eine Hadamard-Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein kompakter, regulärer Bereich mit innerer Normale N . Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : S\Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{S\Omega^0} f(\eta) d\eta = \int_{S^+\partial\Omega} \left(\int_0^{r(\xi)} f(\gamma'_\xi(t)) dt \right) \cos \xi d\xi \quad (3.1)$$

Beweis. ([San], S. 336-338. Siehe auch [Ch1], S. 231-233.) Betrachte die Menge

$$Q := \{ (\xi, t) \in S^+\partial\Omega \times \mathbb{R} \mid 0 < t < r(\xi) \}$$

und die Einschränkung des geodätischen Flusses Φ_t auf Q :

$$\Phi : Q \rightarrow S\Omega^0, \quad (\xi, t) \mapsto \gamma'_\xi(t) = \Phi_t(\xi).$$

Dann ist $\Phi : Q \rightarrow S\Omega^0$ ein Diffeomorphismus: Φ ist injektiv weil jede Geodätische durch einen ihrer Tangentialvektoren eindeutig bestimmt ist. Φ ist surjektiv, weil die Exponentialabbildung $\exp_q : T_qM \rightarrow M$ für jedes $q \in S\Omega^0$ ein Diffeomorphismus ist. Für jedes $\eta \in S_q\Omega^0$ gibt es deswegen nämlich ein minimales $t_0 \in (0, \infty)$ mit $\gamma_\eta(-t_0) \in \partial\Omega$. Es gilt dann $\Phi(-\gamma'_\eta(-t_0), t_0) = \eta$.

Nach Konstruktion ist das Liouvillemaß invariant unter dem geodätischen Fluss Φ_t . Auf $\partial\Omega$ lässt sich das Volumenmaß dV als Produktmaß des Oberflächenmaßes dA und des Längenmaßes ds auffassen, wenn s den Abstand zu $\partial\Omega$ angibt. Deswegen gilt für $\xi \in S_p^+\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} d\eta(\Phi_t(\xi)) &= (\Phi_t)_* d\eta(\xi) \\ &= (\Phi_t)_* d\eta_p dV(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\Phi_t)_* d\eta_p ds(p) dA(p) \\
&= (\Phi_t)_* \frac{ds}{dt}(\xi) dt d\xi \\
&= (\Phi_t)_* \langle \xi, N \rangle dt d\xi \\
&= \cos \xi (\Phi_t)_* dt d\xi \\
&= \cos \xi dt d\xi.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich Formel (3.1). □

Folgerung 3.3 *Sei M eine n -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein kompakter, regulärer Bereich in M . Dann gilt*

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S+\partial\Omega} r(\xi) \cos \xi d\xi.$$

Beweis. Setze $f \equiv 1$. □

Die Formel aus Folgerung 3.3 lässt sich für konvexe, kompakte, reguläre Bereiche in euklidischen oder symmetrischen Rang-1-Räumen X vom nichtkompakten Typ auch über den Divergenzsatz beweisen.

Alternativer Beweis von Folgerung 3.3. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger, die auf Ω den konstanten Wert 1 hat. Nach Theorem II.5.27 in [He2] ist die Funktion $u_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u_f(p) = \int_X \left(\int_1^{d(p,q)} \frac{1}{A(r)} dr \right) f(q) dV(q), \quad p \in X$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung $\text{div grad } u_f = f$. Mit der Bezeichnung $\rho_q(p) := d(p, q)$ für $p, q \in X$ gilt

$$(\text{grad } u_f)(p) = \int_X \frac{(\text{grad } \rho_q)(p)}{A(\rho_q(p))} f(q) dV(q).$$

Das Vektorfeld $V_f := \text{grad } u_f$ auf X hat also konstante Divergenz 1 auf Ω . Nach dem Divergenzsatz gilt

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Omega) &= \int_\Omega (\text{div } V_f)(q) dV(q) \\
&= - \int_{\partial\Omega} \langle V_f, N \rangle_p dA(p) \\
&= - \int_{\partial\Omega} \left(\int_X \frac{\langle \text{grad } \rho_q, N \rangle_p}{A(\rho_q(p))} f(q) dV(q) \right) dA(p) \\
&= - \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega \frac{\langle \text{grad } \rho_q, N \rangle_p}{A(\rho_q(p))} dV(q) \right) dA(p) \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \left(\int_{X \setminus \Omega} \frac{\langle \text{grad } \rho_q, N \rangle_p}{A(\rho_q(p))} f(q) dV(q) \right) dA(p).
\end{aligned}$$

Betrachte jetzt eine Folge von C^∞ -Funktionen $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit kompaktem Träger, die auf Ω den Wert 1 haben und die charakteristische Funktion von Ω in der C^∞ -Topologie approximieren. Für jede dieser Funktionen kann $\text{Vol}(\Omega)$ in dieser Weise angegeben werden. Der zweite Summand kann also weggelassen werden.

Durch Einführen von geodätischen Polarkoordinaten $(t, \xi) \in (0, \infty) \times S_p^+ \partial\Omega$ und unter Benutzung der Konvexität erhält man

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= - \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{\langle \text{grad } \rho_q, N \rangle_p}{A(\rho_q(p))} dV(q) \right) dA(p) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\int_{S_p^+ \partial\Omega} \int_0^{r(\xi)} \frac{\langle \xi, N \rangle_p}{A(t)} \frac{A(t)}{c_{n-1}} dt d\xi_p \right) dA(p) \\ &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial\Omega} r(\xi) \cos \xi d\xi. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4 *Sei X ein n -dimensionaler euklidischer oder symmetrischer Rang-1-Raum vom nicht-kompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich in X .*

(a) *Es gilt*

$$\text{Area}(\partial\Omega)^2 \geq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial\Omega} \frac{A(r(\xi))}{\cos(\text{ant } \xi)} d\xi, \quad (3.2)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω konvex ist.

(b) *Es gilt*

$$\text{Vol}(\Omega) \text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial\Omega} B(r(\xi)) d\xi \quad (3.3)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω konvex ist.

(c) *Auf $S^+ \partial\Omega$ sei die integrierbare Funktion $g : S^+ \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt*

$$\int_{S^+ \partial\Omega} g(\xi) \cos \xi d\xi = \int_{S^+ \partial\Omega} g(\text{ant } \xi) \cos \xi d\xi. \quad (3.4)$$

Beweis.

(a) Das Volumenelement in Polarkoordinaten um $p \in \partial\Omega$ lautet

$$dV = \frac{A(t)}{c_{n-1}} dt d\xi, \quad \xi \in S_p X, t \in (0, \infty).$$

Im Folgenden bezeichne

$$A_p := \{ \exp_p(r(\xi)\xi) \mid \xi \in S_p^+ \partial\Omega \}$$

die Menge der “von p erreichbaren Randpunkte von $\partial\Omega$ ”. Dann ist das Volumenelement dV auf $A_p \subset \partial\Omega$ in Polarkoordinaten um $p \in \partial\Omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} dV &= \frac{A(r(\xi))}{c_{n-1}} d\xi \wedge dr \\ &= \frac{A(r(\xi))}{c_{n-1} \langle N, \frac{\partial}{\partial r} \rangle} d\xi \wedge (\langle N, \frac{\partial}{\partial r} \rangle dr) \\ &= -\frac{A(r(\xi))}{c_{n-1} \langle N, \frac{\partial}{\partial r} \rangle} d\xi \wedge dn, \end{aligned}$$

wobei n die Fermi-Koordinate von $\partial\Omega$ mit $\frac{\partial}{\partial n} = N$ ist. Als Oberflächenelement dA von A_p ergibt sich also

$$\begin{aligned} dA &= -\frac{A(r(\xi))}{c_{n-1} \langle N_{\gamma_\xi(r(\xi))}, \gamma'_\xi(r(\xi)) \rangle} d\xi \\ &= \frac{A(r(\xi))}{c_{n-1} \cos(\text{ant } \xi)} d\xi \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \text{Area}(A_p) = \int_{S_p^+ \partial\Omega} \frac{A(r(\xi))}{c_{n-1} \cos(\text{ant } \xi)} d\xi$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $A_p = \partial\Omega \setminus \{p\}$ ist. Nach Integration über $\partial\Omega$ erhält man (3.2). Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\partial\Omega \setminus \{p\} = A_p$ ist für alle $p \in \partial\Omega$. Das ist aber nach Definition genau dann der Fall, wenn jede Geodätische, die zwei verschiedene Punkte auf $\partial\Omega$ verbindet bis auf die Endpunkte ganz im Inneren von Ω liegt, das heißt, wenn Ω strikt konvex ist.

- (b) Ungleichung (3.3) erhält man ebenfalls durch die Verwendung von Polarkoordinaten um $p \in \partial\Omega$ und Integration in radialer Richtung

$$\text{Vol}(\Omega) \geq \int_{S_p^+ \partial\Omega} \int_0^{r(\xi)} \frac{A(t)}{c_{n-1}} dt d\xi = \int_{S_p^+ \partial\Omega} \frac{B(r(\xi))}{c_{n-1}} d\xi$$

und anschließender Integration über $\partial\Omega$. Gleichheit gilt genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$ und jeden Punkt $q \in \Omega$ ein verbindendes geodätisches Segment gibt, das bis auf die Endpunkte ganz im Inneren von Ω verläuft, das heißt, für strikt konvexe Ω .

- (c) Gleichung (3.4) lässt sich folgendermaßen beweisen (siehe [Cro]): Die Formel von Santaló (3.1) zeigt, dass der geodätische Fluss Φ eine maßerhaltende Abbildung von

$$Q := \{ (\xi, t) \mid \xi \in S^+ \partial\Omega, 0 < t < r(\xi) \}$$

nach $S\Omega^0$ ist, wenn man Q mit dem Maß $\cos(\xi) dt d\xi$ versieht. ($\Omega^0 := \text{int } \Omega$). Also ist auch die Inverse

$$\Phi^{-1} : S\Omega^0 \rightarrow Q, \quad \xi \mapsto (-\gamma'_{-\xi}(r(-\xi)), r(-\xi))$$

maßerhaltend. Die Abbildung $i : S\Omega^0 \rightarrow S\Omega^0$, $\eta \mapsto -\eta$ ist ebenfalls maßerhaltend und somit auch

$$\Phi^{-1} \circ i \circ \Phi : Q \rightarrow Q, \quad (\xi, t) \mapsto (\text{ant } \xi, r(\xi) - t).$$

Für jede integrierbare Funktion $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man also

$$\int_{S+\partial\Omega} \int_0^{r(\xi)} G(\xi, t) \cos(\xi) dt d\xi = \int_{S+\partial\Omega} \int_0^{r(\xi)} G(\text{ant } \xi, r(\xi) - t) \cos \xi dt d\xi.$$

Setze jetzt $G(\xi, t) := \frac{g(\xi)}{r(\xi)}$ und erhalte mit $r(\xi) = r(\text{ant } \xi)$ die behauptete Gleichung. □

3.2 Charakterisierung von Bällen

Definition 3.5 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum, $p \in X$ und $u, v \in T_p X$ zwei Einheitsvektoren. Dann sind die **Winkel** $\lambda(u, v) \in [0, \pi]$ und $\theta(u, v), \mu(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \cos \lambda(u, v) &= \langle u, v \rangle \\ \cos^2 \theta(u, v) &= \sum_{k=1}^{d-1} \langle u, J_k v \rangle^2 \\ \cos^2 \mu(u, v) &= 1 - \cos^2 \lambda(u, v) - \cos^2 \theta(u, v). \end{aligned}$$

In einem geodätischen Dreieck mit den Ecken A, B, C werden die zugehörigen Innenwinkel entsprechend mit $\lambda(A), \theta(A), \mu(A)$ usw. bezeichnet.

Für die symmetrischen Rang-1-Räume konstanter Schnittkrümmung gilt stets $\cos \theta = 0$ und die Lage zweier Einheitsvektoren in einem Punkt lässt sich bis auf Isometrie durch den Riemannschen Winkel λ beschreiben. Für symmetrische Rang-1-Räume lässt sich die Lage zweier Einheitsvektoren $u, v \in T_p X$ zueinander durch die beiden Winkel $\lambda(u, v)$ und $\theta(u, v)$ eindeutig bis auf Isometrie beschreiben (siehe [Hs1]).

Satz 3.6 (Sinus- und Cosinussätze) (a) Sei X ein euklidischer Raum und $\Delta \subset X$ ein geodätisches Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Dann gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (3.5)$$

(b) Sei X ein hyperbolischer Raum der Schnittkrümmung -1 und $\Delta \subset X$ ein geodätisches Dreieck mit Seitenlängen $a, b, c < \infty$ und gegenüberliegenden Winkeln $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Dann gilt

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma. \quad (3.6)$$

- (c) Sei X ein symmetrischer Raum von Rang 1 mit nichtkonstanter Schnittkrümmung zwischen -1 und -4 und $\Delta \subset X$ ein geodätisches Dreieck mit Seitenlängen $a, b, c < \infty$ und Ecken A, B, C . Dann gelten:

$$\frac{\cos \mu(A)}{\sinh a} = \frac{\cos \mu(B)}{\sinh b} = \frac{\cos \mu(C)}{\sinh c}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\cos \theta(A)}{\sinh 2a} = \frac{\cos \theta(B)}{\sinh 2b} = \frac{\cos \theta(C)}{\sinh 2c} \quad (3.8)$$

und

$$\cosh^2 c = (\cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \lambda(C))^2 + (\sinh a \sinh b \cos \theta(C))^2. \quad (3.9)$$

Beweis. Für (a) siehe z.B. [Ber], für (b) siehe z.B. [Bea] und für (c) siehe [AL]. \square

Folgerung 3.7 (a) Sei X ein euklidischer Raum und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich. Dann ist Ω genau dann ein Ball, wenn es ein $p \in \partial\Omega$ und ein $R > 0$ gibt mit

$$2R \cos \xi = r(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in S_p^+ \partial\Omega.$$

R ist in diesem Fall der Radius des Balles.

- (b) Sei X ein hyperbolischer Raum mit Schnittkrümmung -1 und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich. Dann ist Ω genau dann ein Ball, wenn es ein $p \in \partial\Omega$ und ein $R > 0$ gibt mit

$$\tanh R \cos \xi = \frac{\cosh r(\xi) - 1}{\sinh r(\xi)} \quad \text{für alle } \xi \in S^+ \partial\Omega.$$

R ist in diesem Fall der Radius des Balles.

- (c) Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich. Dann ist Ω genau dann ein Ball, wenn es ein $p \in \partial\Omega$ und ein $R > 0$ gibt mit

$$\coth r(\xi) = \frac{\coth R + \tanh R(\cos^2 \xi + \cos^2 \theta(\xi))}{2 \cos \xi} \quad \text{für alle } \xi \in S_p^+ \partial\Omega.$$

Dabei ist $\theta(\xi) := \theta(N, \xi)$. Die Zahl R ist in diesem Fall der Radius des Balles.

Beweis.

- (a) Für Bälle gilt

$$\forall p \in \partial\Omega \quad \forall \xi \in S_p^+ \partial\Omega : \quad 2R \cos \xi = r(\xi)$$

nach Satz 3.6 (a): Sei o der Mittelpunkt des Balles Ω und p ein beliebiger Randpunkt. Zu $\xi \in S_p^+ \partial\Omega$ betrachte das geodätische Dreieck mit den Ecken o, p und $\gamma_\xi(r(\xi))$. Dann gilt nach dem Cosinussatz

$$R^2 = R^2 + r(\xi)^2 - 2Rr(\xi) \cos \xi \implies 2R \cos \xi = r(\xi).$$

Umgekehrt sei nun Ω ein kompakter, regulärer Bereich mit der Eigenschaft

$$\exists p \in \partial\Omega \exists R > 0 \forall \xi \in S_p^+ \partial\Omega : 2R \cos \xi = r(\xi).$$

Es bezeichne wieder

$$A_p := \{\exp_p(r(\xi)\xi) \mid \xi \in S_p^+ \partial\Omega\}$$

die Menge der “von p erreichbaren Randpunkte von $\partial\Omega$ ”. Dann folgt zunächst, dass $A_p = \partial\Omega \setminus \{p\}$ ist, weil die Funktion r auf $S_p^+ \partial\Omega$ sonst nicht stetig sein könnte ($\partial\Omega$ ist nach Voraussetzung eine differenzierbare, eingebettete $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit!).

Also ist jeder Punkt $q \in \Omega$ mit p durch genau ein geodätisches Segment verbunden, das bis auf die Endpunkte ganz im Inneren von Ω liegt und das durch den Anfangstangentenvektor ξ in p und seine Länge $r(\xi)$ eindeutig bestimmt ist. Ω ist also durch die Werte von r auf $S_p^+ \partial\Omega$ eindeutig bestimmt. Also ist Ω ein Ball von Radius R .

(b) Für reell-hyperbolische Bälle gilt

$$\forall p \in \partial\Omega \forall \xi \in S_p^+ \partial\Omega : 2R \cos \xi = r(\xi)$$

nach Satz 3.6 (b): Sei o der Mittelpunkt des Balles Ω und p ein beliebiger Randpunkt. Zu $\xi \in S_p^+ \partial\Omega$ betrachte das geodätische Dreieck mit den Ecken o, p und $\gamma_\xi(r(\xi))$. Dann gilt nach dem Cosinussatz

$$\cosh R = \cosh R \cosh r(\xi) - \cos \xi \sinh R \sinh r(\xi) \implies \tanh R \cos \xi = \frac{\cosh r(\xi) - 1}{\sinh r(\xi)}.$$

Die umgekehrte Richtung folgt wie in (a).

(c) Der Cosinussatz in den Rang-1-Räumen vom nichtkompakten Typ liefert für Bälle vom Radius R für Dreiecke $o, p, \gamma_\xi(r(\xi))$ entsprechend

$$\cosh^2 R = (\cosh r(\xi) \cosh R - \sinh r(\xi) \sinh R \cos \xi)^2 + (\sinh r(\xi) \sinh R \cos \theta(\xi))^2.$$

Nach Division durch $\cosh^2 R$ und Ausmultiplizieren erhält man

$$1 = \cosh^2 r(\xi) - 2 \tanh R \sinh r(\xi) \cosh r(\xi) \cos \xi + \tanh^2 R \sinh^2 r(\xi) \cos^2 \xi + \sinh^2 r(\xi) \tanh^2 R \cos^2 \theta(\xi).$$

Das ist wegen $\cosh^2 r(\xi) = 1 + \sinh^2 r(\xi)$ äquivalent zu

$$0 = \sinh^2 r(\xi) (1 - 2 \tanh R \coth r(\xi) \cos \xi + \tanh^2 R \cos^2 \xi + \tanh^2 R \cos^2 \theta(\xi)).$$

Also gilt entweder $r(\xi) = 0$ (das kann aber nur für $\cos \xi = 0$ auftreten) oder

$$\coth r(\xi) = \frac{\coth R + \tanh R (\cos^2 \xi + \cos^2 \theta(\xi))}{2 \cos \xi}.$$

Die Umkehrung ergibt sich wieder wie in (a). □

Der folgende Satz charakterisiert geodätische Bälle nur über gewisse Winkel.

Satz 3.8 *Sei X ein euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nicht-kompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. Dann ist Ω genau dann ein Ball, wenn es einen Punkt $p \in \partial\Omega$ gibt mit*

$$\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi) \quad \text{für alle } \xi \in S_p^+ \partial\Omega.$$

Beweis. Sei Ω ein Ball vom Radius $R > 0$ um den Mittelpunkt o und $p \in \partial\Omega$ ein beliebiger Randpunkt. Betrachte zu $\xi \in S_p^+ \partial\Omega$ das geodätische Dreieck bestehend aus dem geodätischen Segment mit Anfangs-Tangente ξ , Länge $r(\xi)$ und Endpunkt p' sowie den beiden geodätischen Segmenten, die die Endpunkte p und p' mit dem Mittelpunkt o verbinden. Dann fallen die Anfangs-Tangenten dieser beiden "radialen" Segmente mit der (inneren) Normale N zusammen, da $\partial\Omega$ eine geodätische Sphäre ist (Gauss-Lemma), man erhält also

$$\cos \sphericalangle opp' = \cos \xi \quad \text{und} \quad \cos \sphericalangle pp'o = \cos(\text{ant } \xi).$$

Die Länge der Segmente po und $p'o$ ist jeweils R . Für euklidische und hyperbolische Räume folgt nun aus dem Sinussatz (3.5) bzw. (3.6) $\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi)$. Für die Rang-1-Räume nichtkonstanter Krümmung folgt aus (3.7) und (3.8) zunächst $\cos \mu(p) = \cos \mu(p')$ und $\cos \theta(p) = \cos \theta(p')$ und also nach Definition 3.5

$$\cos \xi = \cos \lambda(p) = \cos \lambda(p') = \cos(\text{ant } \xi).$$

Sei jetzt umgekehrt Ω ein kompakter, konvexer, regulärer Bereich und $p \in \partial\Omega$ ein Punkt mit $\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi)$ für alle $\xi \in S_p^+ \partial\Omega$.

Annahme: Ω ist kein Ball. Dann gibt es keinen Punkt in X , von dem alle Punkte von $\partial\Omega$ konstanten Abstand haben. Betrachte jetzt die Punkte auf der Geodätischen γ mit Anfangs-Tangente $N(p)$. Zu $0 < t < r(N(p))$ sei

$$P(t) := \{q \in \partial\Omega \mid q \text{ ist Minimal- oder Maximalstelle von } d(\gamma(t), \cdot) \text{ auf } \partial\Omega \}.$$

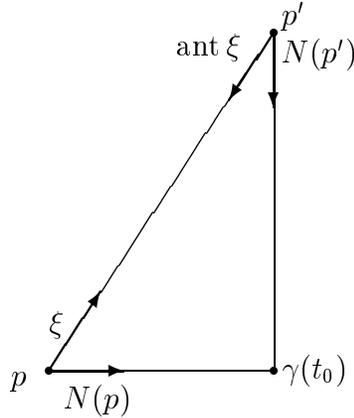
Für alle Punkte $q \in P(t)$ gilt nach der ersten Variationsformel, dass die geodätische Verbindung von q nach $\gamma(t)$ Anfangstangente $N(q)$ hat.

Behauptung es gibt ein $t_0 \in (0, r(N(p)))$ und einen Punkt $p' \in P(t) \setminus \gamma$, sodass $d(p', \gamma(t_0)) \neq d(p, \gamma(t_0))$ gilt.

Beweis der Behauptung Wäre die Behauptung falsch, so wäre für jede Zahl $t \in (0, r(N(p)))$ und jeden Punkt $q \in P(t) \setminus \gamma$ die Bedingung $d(q, \gamma(t)) = d(p, \gamma(t)) = t$ erfüllt. Für $t_0 := \frac{r(N(p))}{2}$ hieße das speziell, dass der Abstand von $\gamma(t_0)$ zu einem beliebigen Punkt auf $\partial\Omega$ konstant = t_0 ist. Dann müsste Ω aber ein Ball sein. Also ist die Behauptung richtig.

Aus der Behauptung erhält man nun das geodätische Dreieck mit den Ecken p , $\gamma(t_0)$ und p' , das folgende Eigenschaft hat: Die Anfangs-Tangente $\xi \in S_p^+ \partial\Omega$ des geodätischen Segmentes von p nach p' erfüllt

Abbildung 3.2: Skizze zum Beweis von Satz 3.8



- $\cos \xi = \cos(\sphericalangle \gamma(t_0)pp') \neq 1$,
- $\cos(\text{ant } \xi) = \cos(\sphericalangle pp'\gamma(t_0)) \neq 1$ und
- $d(p, \gamma(t_0)) \neq d(p', \gamma(t_0))$.

Nach Voraussetzung des Satzes gilt nun aber $\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi)$ und daher

$$0 \neq \sphericalangle \gamma(t_0)pp' = \sphericalangle pp'\gamma(t_0).$$

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d(p, \gamma(t_0)) < d(p', \gamma(t_0))$ gilt. Im euklidischen und reell-hyperbolischen Fall ergibt sich mit den Sinussätzen sofort der Widerspruch. Für die symmetrischen Rang-1-Räume nichtkonstanter Krümmung erhält man zunächst

$$\cos \mu(p) < \cos \mu(p'), \quad \cos \theta(p) < \cos \theta(p')$$

und damit $\cos \xi > \cos \text{ant } \xi$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch und Ω ein Ball. \square

Bemerkungen.

- Die Regularitätsvoraussetzung an Ω kann abgeschwächt werden. Im allgemeinen Fall ist $\partial\Omega$ ein rektifizierbarer Strom (vgl. Bemerkung auf Seite 13). Die Regularität des Randes muss nur in p gefordert werden. Darüber hinaus wird die Regularität nur in den Punkten von $P(t)$ benötigt (vgl. Beweis).

Dieses folgt aber aus der Eigenschaft, dass ein Punkt $q \in P(t)$ den Abstand d von $\gamma(t)$ zu $\partial\Omega$ maximiert (beziehungsweise minimiert). Daraus folgt, dass $\partial\Omega$ ganz im Ball um $\gamma(t)$ mit Radius d enthalten ist (beziehungsweise ganz außerhalb des offenen Balles um $\gamma(t)$ mit Radius d liegt). Daher muss der Tangentialkegel von $\partial\Omega$ in q in einem Halbraum enthalten sein. Also ist q ein regulärer Punkt.

- Der Satz lässt sich nicht in entsprechender Weise auf Punkte im Inneren von Ω verallgemeinern, d.h. es gilt für einen konvexen, kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset X$:

$$\exists q \in \text{int } \Omega \quad \forall \eta \in S_q \Omega : \cos \eta = \cos(\text{ant } \eta) \quad \not\Rightarrow \quad \Omega \text{ ist ein Ball}$$

Betrachte dazu eine Ellipse $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und ihren Schwerpunkt q . Dann ist für alle $\eta \in S_q \Omega$ die Bedingung $\cos \eta = \cos(\text{ant } \eta)$ erfüllt.

Eine Charakterisierung von Bällen über *alle* Einheitstangentialsphären von $\text{int } \Omega$ ist jedoch möglich, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.9 *Sei X ein euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. Dann gilt für alle $q \in \text{int } \Omega$*

$$\int_{S_q \Omega} \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta \geq c_{n-1}.$$

Ω ist genau dann ein Ball, wenn für alle $q \in \text{int } \Omega$ Gleichheit in dieser Ungleichung gilt.

Beweis. Sei $q \in \text{int } \Omega$ beliebig und $H \subset S_q \Omega$ eine beliebige Hemisphäre. Dann gilt nach Definition 3.1

$$\begin{aligned} \int_{S_q \Omega} \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta &= \int_H \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta + \int_H \frac{\cos(\text{ant } (-\eta))}{\cos(-\eta)} d\eta \\ &= \int_H \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} + \frac{\cos \eta}{\cos(\text{ant } \eta)} d\eta. \end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ hat für $x \geq 0$ das absolute Minimum 2 bei $x = 1$. Es folgt also

$$\int_{S_q \Omega} \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta \geq \int_H 2 d\eta = c_{n-1}.$$

Falls Ω ein Ball ist, gilt für jedes $\xi \in S^+ \partial \Omega$ und damit auch für jedes $\eta \in S \Omega$ die Gleichung $\cos \eta = \cos(\text{ant } \eta)$. Daher gilt für jedes $q \in \text{int } \Omega$ Gleichheit in der Ungleichung. Umgekehrt sei Gleichheit für jedes $q \in \text{int } \Omega$ gegeben. Dann folgt $\cos \eta = \cos(\text{ant } \eta)$ für $\eta \in S_q \Omega$ und $q \in \text{int } \Omega$. Daraus folgt aber $\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi)$ für alle $\xi \in S^+ \partial \Omega$. Also ist Ω nach Satz 3.8 ein Ball. \square

Lemma 3.10 *Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt:*

$$c_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin^{n-2} \alpha d\alpha = \frac{c_{n-1}}{2n}.$$

Beweis. Für eine m -dimensionale Hemisphäre H gilt:

$$\text{Vol}(H) = \frac{c_m}{2} = c_{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} \alpha d\alpha.$$

Wegen $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
c_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin^{n-2} \alpha d\alpha &= c_{n-2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \alpha d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha d\alpha \right) \\
&= \frac{c_{n-1}}{2} - \frac{c_{n-2}}{c_n} c_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \left(c_{n-1} - \frac{c_{n-2} c_{n+1}}{c_n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} - \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) 2\pi^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) 2\pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} - \frac{4\pi^{\frac{2n+1}{2}} \frac{n-1}{2} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) 2\pi^{\frac{n+1}{2}} \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} \right) \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2n\Gamma(\frac{n}{2})} \\
&= \frac{c_{n-1}}{2n}
\end{aligned}$$

□

Satz 3.11 Sei X ein euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. Dann gilt

$$\text{Area}(\partial\Omega) \leq \frac{2n}{c_{n-1}} \int_{S+\partial\Omega} \cos^2(\text{ant } \xi) d\xi,$$

mit Gleichheit genau für Bälle.

Beweis. Aus Gleichung (3.4) in Proposition 3.4 mit $g(\xi) = \cos \xi$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{S+\partial\Omega} \cos^2 \xi d\xi \right)^2 &= \left(\int_{S+\partial\Omega} \cos \xi \cos(\text{ant } \xi) d\xi \right)^2 \\
&\leq \int_{S+\partial\Omega} \cos^2 \xi d\xi \cdot \int_{S+\partial\Omega} \cos^2(\text{ant } \xi) d\xi
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{S+\partial\Omega} \cos^2 \xi d\xi \leq \int_{S+\partial\Omega} \cos^2(\text{ant } \xi) d\xi.$$

Weiter gilt für einen beliebigen Punkt $p \in \partial\Omega$ nach Lemma 3.10

$$\int_{S_p^+\partial\Omega} \cos^2 \xi d\xi = c_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin^{n-2} \alpha d\alpha = \frac{c_{n-1}}{2n}. \quad (3.10)$$

Also folgt

$$\text{Area}(\partial\Omega) \leq \frac{2n}{c_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \cos^2(\text{ant } \xi) d\xi.$$

Es gelte nun Gleichheit in der eben bewiesenen Ungleichung. Dann folgt, dass $\cos \xi = C \cdot \cos(\text{ant } \xi)$ für eine Konstante C auf $S^+\partial\Omega$ gilt. Da sowohl $\cos \xi$ als auch $\cos(\text{ant } \xi)$ für geeignete $\xi \in S^+\partial\Omega$ den Wert 1 annehmen und wegen der Konvexität von Ω nur Werte im Intervall $[0, 1]$ haben, ergibt sich $C = 1$ und demnach

$$\cos \xi = \cos(\text{ant } \xi), \quad \xi \in S^+\partial\Omega.$$

Aus Satz 3.8 folgt schließlich, dass Ω ein Ball ist. \square

Proposition 3.12 *Sei X ein euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. $H : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit eindeutigem positivem Maximum in 0. Dann gilt*

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{2}{H(0)c_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} H(\cos \xi - \cos(\text{ant } \xi)) d\xi.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Ω ein Ball ist.

Beweis. Nach Voraussetzung an H gilt trivialerweise

$$\int_{S^+\partial\Omega} H(\cos \xi - \cos(\text{ant } \xi)) d\xi \leq \frac{c_{n-1}}{2} H(0) \text{Area}(\partial\Omega).$$

Nach Satz 3.8 gilt Gleichheit genau für Bälle. \square

Proposition 3.13 *Sei X ein euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. Dann gilt*

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} r(\xi) \cos(\text{ant } \xi) d\xi.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Ω ein Ball ist.

Beweis. Nach Lemma 3.9 und Santalós Formel (3.1) gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S\Omega} d\eta \\ &\leq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S\Omega} \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta \\ &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} \int_0^{r(\xi)} \frac{\cos(\text{ant } \xi)}{\cos \xi} \cos \xi dt d\xi \\ &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+\partial\Omega} r(\xi) \cos(\text{ant } \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Es gelte nun Gleichheit in der Abschätzung. Dann folgt für alle $q \in \text{int } \Omega$

$$\int_{S_q \Omega} \frac{\cos(\text{ant } \eta)}{\cos \eta} d\eta = c_{n-1}$$

und nach Lemma 3.9, dass Ω ein Ball ist. \square

Ein weiteres Kriterium für Bälle erhält man über die Jensensche Ungleichung.

Proposition 3.14 (Jensensche Ungleichung) *Sei E ein Maßraum mit Wahrscheinlichkeitsmaß μ und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\phi'' > 0$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\phi \left(\int_E f(x) d\mu \right) \leq \int_E \phi(f(x)) d\mu,$$

wenn beide Integrale existieren. Gleichheit gilt genau dann, wenn f auf einer Menge vom Maß 1 konstant ist.

Beweis. (Nach [HLP].) Sei $f_0 := \int_E f(x) d\mu$. Dann gilt mit einer gewissen Funktion θ auf E

$$\phi(f(x)) = \phi(f_0) + \phi'(f_0)(f(x) - f_0) + \frac{1}{2}\phi''(\theta(x))(f(x) - f_0)^2, \quad x \in E.$$

Nach Integration über E erhält man

$$\begin{aligned} \int_E \phi(f(x)) d\mu &= \phi(f_0) \cdot 1 + \phi'(f_0) \cdot 0 + \frac{1}{2}\phi''(f_0) \int_E (f(x) - f_0)^2 d\mu \\ &\geq \phi(f_0) \\ &= \phi \left(\int_E f(x) d\mu \right). \end{aligned}$$

Es gelte nun Gleichheit. Dann folgt wegen $\phi'' > 0$, dass $f(x) = f_0$ für μ -fast alle $x \in E$ gilt. \square

Satz 3.15 *Sei X ein n -dimensionaler euklidischer Raum oder ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein konvexer, kompakter, regulärer Bereich. R sei der Radius des Balles mit demselben Volumen wie Ω . Dann gilt für alle $q \in \text{int } \Omega$ im Inneren von Ω*

$$\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q \Omega} \tilde{r}(\eta) d\eta \leq R,$$

wobei $\tilde{r}(\eta) := \min\{t > 0 \mid \gamma_\eta(t) \in \partial\Omega\}$ den Abstand von q zum Rand in Richtung η bezeichnet. Ω ist genau dann ein Ball, wenn es ein $q \in \text{int } \Omega$ gibt mit

$$\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q \Omega} \tilde{r}(\eta) d\eta = R.$$

R ist in diesem Fall der Radius des Balles und q sein Mittelpunkt.

Beweis. Wegen der Konvexität ist Ω insbesondere sternförmig bezüglich q . Aus der Darstellung des Volumenelements in Polarkoordinaten um q erhält man daher

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\Omega) &= \int_{S_q\Omega} \int_0^{\tilde{r}(\xi)} \frac{A(t)}{c_{n-1}} dt d\xi_q \\ &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q\Omega} B(\tilde{r}(\eta)) d\eta.\end{aligned}$$

B ist eine konvexe Funktion (wegen $B''(t) = A'(t) > 0$), also gilt nach der Jensenschen Ungleichung

$$\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q\Omega} B(\tilde{r}(\eta)) d\eta \geq B\left(\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q\Omega} \tilde{r}(\eta) d\eta\right).$$

Da B streng monoton wachsend ist, existiert B^{-1} und ist ebenfalls streng monoton wachsend. Also gilt

$$\begin{aligned}R &= B^{-1}(\text{Vol}(\Omega)) \\ &= B^{-1}\left(\frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q\Omega} B(\tilde{r}(\eta)) d\eta\right) \\ &\geq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_q\Omega} \tilde{r}(\eta) d\eta.\end{aligned}$$

Aus Gleichheit in der eben bewiesenen Ungleichung folgt Gleichheit in der Jensenschen Ungleichung. Also muss \tilde{r} auf $S_q\Omega$ konstant sein. Daraus folgt, dass Ω ein Ball ist. \square

3.3 Anwendung auf isoperimetrische Probleme

3.3.1 Die Höldersche Ungleichung und Vermutung 1.8

Die folgende Anwendung von Folgerung 3.3 und Proposition 3.7 liefert einen weiteren, besonders einfachen Beweis für Vermutung 1.8 in Dimension 2.

Proposition 3.16 *Sei Ω ein kompakter, regulärer Bereich in einer n -dimensionalen Hadamard-Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{c_{n-1}}{n^{\frac{1}{n}} C(n)} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}, \quad C(n) := \left(c_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{n-1}}(\alpha) \sin^{n-2}(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Für $n = 2$ gilt Gleichheit genau dann, wenn Ω eine flache Kreisscheibe ist. Für $n > 2$ gilt niemals Gleichheit.

Beweis. Nach Folgerung 3.3 und der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} r(\xi) \cos(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{1}{c_{n-1}} \left(\int_{S^+ \partial \Omega} r^n(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{S^+ \partial \Omega} \cos^{\frac{n}{n-1}}(\xi) d\xi \right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Das zweite Integral lässt sich durch Einführen von Polarkoordinaten auf den Hemisphären $S_p^+ \partial \Omega$ vereinfachen: die Funktion $\cos^{\frac{n}{n-1}}(\xi)$ hängt nur von dem Winkel α ab, den ξ mit der inneren Normalen N einschließt. α lässt sich als radialer Abstand von ξ zum Mittelpunkt N der Hemisphäre auffassen. Das Volumenelement der Hemisphäre in Polarkoordinaten lautet damit gerade $\sin^{n-2} \alpha d\alpha d\theta$, wobei θ die $(n-2)$ -Sphäre S^{n-2} parametrisiert. Es gilt also

$$\int_{S_p^+ \partial \Omega} \cos^{\frac{n}{n-1}}(\xi) d\xi = c_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{n-1}}(\alpha) \sin^{n-2}(\alpha) d\alpha.$$

Damit ergibt sich

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{c_{n-1}} \left(\int_{S^+ \partial \Omega} r(\xi)^n d\xi \right)^{\frac{1}{n}} C(n) \text{Area}(\partial \Omega)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Das erste Integral lässt sich folgendermaßen umschreiben:

$$\int_{S^+ \partial \Omega} r^n(\xi) d\xi = \int_{S^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} n t^{n-1} dt d\xi.$$

Sei $F_p(\xi, t)$ das Volumenelement in Polarkoordinaten um $p \in \partial \Omega$, das heißt $dV = F_p(\xi, t) dt d\xi$ mit $t = d(p, \cdot)$ und $\xi \in S_p^+ \partial \Omega$. Dann gilt

$$\text{Vol}(\Omega) \geq \int_{S_p^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} F_p(\xi, t) dt d\xi$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $A_p = \{\exp_p(r(\xi)\xi) \mid \xi \in S_p^+ \partial \Omega\} = \partial \Omega$. Außerdem gilt $F_p(\xi, t) \geq t^{n-1}$ für $K \leq 0$ nach dem Rauchschen Vergleichssatz. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{S^+ \partial \Omega} r^n(\xi) d\xi &= \int_{S^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} n t^{n-1} dt d\xi \\ &\leq \int_{\partial \Omega} \int_{S_p^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} n F_p(\xi, t) dt d\xi dA(p) \\ &\leq n \text{Area}(\partial \Omega) \text{Vol}(\Omega). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{n^{\frac{1}{n}}}{c_{n-1}} \text{Area}(\partial \Omega)^{\frac{1}{n}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}} C(n) \text{Area}(\partial \Omega)^{\frac{n-1}{n}}$$

Das ist äquivalent zu

$$\text{Area}(\partial \Omega) \geq \frac{c_{n-1}}{n^{\frac{1}{n}} C(n)} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Es gilt $C(2) = \sqrt{\frac{e\Gamma}{4}}$ nach Lemma 3.10. Damit ergibt sich für $n = 2$

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq 2\sqrt{\pi}\text{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Gleichheitsdiskussion. Sei $n = 2$ und Ω ein kompakter, regulärer Bereich, der die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt. Dann folgt, dass $A_p = \partial\Omega$ und $F_p(\xi, t) = t$ für alle $p \in \partial\Omega$, alle $\xi \in S_p^+\partial\Omega$ und alle $t \in [0, r(\xi)]$ gilt. Nach der Starrheitsaussage im Rauchschen Vergleichssatz kann $F_p(\xi, t) = t$ nur dann gelten, wenn die Schnittkrümmung in $\gamma_\xi(t)$ verschwindet, also muss die Schnittkrümmung auf Ω überall verschwinden. Ω ist demnach flach, und wegen $A_p = \partial\Omega \forall p$, auch konvex. Aus der Gleichheitsdiskussion der Hölderschen Ungleichung folgt, dass die Funktionen $\cos \xi$ und $r(\xi)$ auf ganz $S^+\partial\Omega$ linear abhängig sind. Nach Folgerung 3.7 ist Ω also ein flacher Ball.

Sei nun $n > 2$. Dann kann es keinen Bereich $\Omega \subset M$ geben, für den Gleichheit in der Ungleichung gilt. Einerseits kann Ω wegen Folgerung 3.7 kein Ball sein, da Ω flach ist, und für einen flachen Ball von Radius R für jedes $\xi \in S^+\partial\Omega$ die Gleichung $r(\xi) = 2R \cos \xi$ gelten müsste. Für einen kompakten, regulären Bereich Ω , der die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt, ist aber notwendig $\cos \xi$ proportional zu $r(\xi)^{n-1}$ nach der Gleichheitsdiskussion der Hölderschen Ungleichung.

Andererseits muss Ω wegen seiner Flachheit die isoperimetrische Ungleichung in \mathbb{R}^n erfüllen. Diese sagt aber aus, dass der geodätische Ball mit demselben Volumen wie Ω kleinere Oberfläche hat. Das ist ein Widerspruch zur eben bewiesenen Ungleichung. Also gilt für $n \geq 3$ stets die strikte Ungleichung. \square

Proposition 3.17 (Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung) *Sei E ein Maßraum mit Wahrscheinlichkeitsmaß μ und $f, g : E \rightarrow (0, \infty)$ integrierbare Funktionen auf E . Weiter seien $F, G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ zwei streng monoton wachsende C^2 -Funktionen mit der Eigenschaft, dass*

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad (a, b) \mapsto F^{-1}(a) G^{-1}(b)$$

konkav ist. Dann gilt, falls alle Integrale existieren,

$$\int_E f(x) g(x) d\mu \leq F^{-1} \left(\int_E F(f(x)) d\mu \right) G^{-1} \left(\int_E G(g(x)) d\mu \right).$$

Beweis. (Nach [HLP], Seite 81f.) Seien $F_0 := \int_E F(f(x)) d\mu$ und $G_0 := \int_E G(g(x)) d\mu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_E f(x) g(x) d\mu &= \int_E \Phi(F(f(x)), G(g(x))) d\mu \\ &= \int_E \Phi(F_0, G_0) d\mu + \int_E \Phi'(F_0, G_0) \cdot \begin{pmatrix} F(f(x)) - F_0 \\ G(g(x)) - G_0 \end{pmatrix} d\mu \\ &+ \int_E \frac{1}{2} (F(f(x)) - F_0, G(g(x)) - G_0) \cdot \Phi''(F_1, G_1) \cdot \begin{pmatrix} F(f(x)) - F_0 \\ G(g(x)) - G_0 \end{pmatrix} d\mu, \end{aligned}$$

wobei $F_1 = F_1(x)$ im Intervall zwischen $F(f(x))$ und F_0 liegt und $G_1 = G_1(x)$ im Intervall zwischen $G(g(x))$ und G_0 liegt. Φ'' ist nach Voraussetzung negativ semidefinit, also gilt

$$\begin{aligned} \int_E f(x)g(x) d\mu &\leq \Phi(F_0, G_0) \int_E d\mu + \Phi'(F_0, G_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \\ &= \Phi(F_0, G_0) \\ &= F^{-1} \left(\int_E F(f(x)) d\mu \right) G^{-1} \left(\int_E G(g(x)) d\mu \right). \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.18 Sei E ein Maßraum mit Wahrscheinlichkeitsmaß μ und $f, g : E \rightarrow (0, \infty)$ integrierbare Funktionen auf E . Weiter sei $n \geq 2$ und $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine invertierbare C^2 -Funktion mit Umkehrfunktion $G^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ und der Eigenschaft

$$\left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' \geq 0, \quad (z > 0) \quad (3.11)$$

Dann gilt, falls alle Integrale existieren,

$$\int_E f(x)g(x) d\mu \leq \left(\int_E f(x)^n d\mu \right)^{\frac{1}{n}} G^{-1} \left(\int_E G(g(x)) d\mu \right). \quad (3.12)$$

Wenn für alle $z > 0$ in 3.11 die strikte Ungleichung gilt, dann gilt in Ungleichung 3.12 die Gleichheit nur für Funktionen f, g , die auf einer Menge von Maß 1 konstant sind.

Beweis. Für den Beweis der Ungleichung bleibt zu zeigen, dass die Funktion

$$\Phi(a, b) = a^{\frac{1}{n}} G^{-1}(b), \quad a, b > 0$$

konkav ist. Zunächst ist festzuhalten, dass $G'(z) \neq 0$ in jedem Punkt $z := G^{-1}(b)$ mit $b > 0$ gilt. Man berechnet

$$\begin{aligned} \Phi'(a, b) &= \left(\frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} z, a^{\frac{1}{n}} \frac{1}{G'(z)} \right) \\ \Phi''(a, b) &= \begin{pmatrix} \frac{1-n}{n^2} a^{\frac{1}{n}-2} z & \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} \frac{1}{G'(z)} \\ \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} \frac{1}{G'(z)} & -a^{\frac{1}{n}} \frac{G''(z)}{G'(z)^3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Φ ist konkav, wenn Φ'' negativ semidefinit ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $a, b > 0$ gilt: $z = G^{-1}(b) > 0$ und

$$\det \Phi''(a, b) = \frac{n-1}{n^2} a^{\frac{2}{n}-2} \left(\frac{G''(z)z}{G'(z)^3} - \frac{1}{(n-1)G'(z)^2} \right) \geq 0.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $a, b > 0$ gilt $z = G^{-1}(b) > 0$ und

$$\frac{G''(z)}{G'(z)} \geq \frac{1}{(n-1)z}.$$

Die zweite Bedingung ist aber äquivalent zu

$$\begin{aligned} (\ln |G'(z)|)' &\geq \left(\frac{1}{n-1} \ln z \right)' \\ \Leftrightarrow \left(\ln \frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' &\geq 0. \end{aligned}$$

Wenn in Ungleichung 3.11 stets die strikte Ungleichung gilt, dann hat Φ'' nirgends den Eigenwert 0. Aus dem Beweis von Proposition 3.17 folgt, dass Gleichheit dann in 3.12 nur gelten kann, wenn fast überall $(f(x))^{\frac{1}{n}} = F_0$ und $G(g(x)) = G_0$ gilt. Also müssen f, g konstant sein auf einer Menge vom Maß 1. \square

Bemerkung. Die Funktionen $G(z) = z^\epsilon$ erfüllen die geforderten Bedingungen an G in Folgerung 3.18 genau für $\epsilon \geq \frac{n}{n-1}$. Es gilt nämlich

$$\left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' = \left(|\epsilon| z^{\epsilon-1-\frac{1}{n-1}} \right)' = |\epsilon| \left(\epsilon - \frac{n}{n-1} \right) z^{\epsilon-\frac{2n-1}{n-1}}.$$

Für den Fall $\epsilon = \frac{n}{n-1}$ entspricht Folgerung 3.18 gerade der klassischen Hölderschen Ungleichung. Für $\epsilon > \frac{n}{n-1}$ gilt in Ungleichung 3.12 Gleichheit nur für Funktionen f, g , die auf einer Menge vom Maß 1 konstant sind.

Satz 3.19 *Sei M eine n -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit und \mathcal{G} die Menge aller C^2 -Funktionen $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) G hat eine Umkehrfunktion $G^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$.
- (2) Für alle $z > 0$ gilt

$$\left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' \geq 0.$$

Die Konstante $K(n)$ sei gegeben durch

$$K(n) := \sup_{G \in \mathcal{G}} \frac{2^{\frac{n-1}{n}} (\omega_n)^{\frac{1}{n}}}{G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha \, d\alpha \right)}$$

Dann gilt für jeden kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset M$

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq K(n) \cdot \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3.13)$$

Beweis. Der Beweis entsteht aus demjenigen von Proposition 3.16 durch Ersetzen der klassischen Hölderschen Ungleichung durch die Ungleichung aus Folgerung 3.18.

Sei $G \in \mathcal{G}$. Für jeden kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset M$ und jedes $G \in \mathcal{G}$ gilt nach Folgerung 3.18 mit Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu(\xi) := \frac{2 d\xi}{c_{n-1} \text{Area}(\partial\Omega)}$ auf $S^+ \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial\Omega} r(\xi) \cos(\xi) d\xi \\
&= \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} \int_{S^+ \partial\Omega} r(\xi) \cos(\xi) d\mu(\xi) \\
&\leq \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} \left(\int_{S^+ \partial\Omega} r(\xi)^n d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{n}} G^{-1} \left(\int_{S^+ \partial\Omega} G(\cos \xi) d\mu(\xi) \right) \\
&\leq \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} \frac{2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}}{(c_{n-1})^{\frac{1}{n}}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}} \cdot G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha \right).
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq \frac{2^{\frac{n-1}{n}} (c_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}} G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha \right)} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Diese Ungleichung gilt für jedes $G \in \mathcal{G}$. Wegen $\omega_n = \frac{c_{n-1}}{n}$ folgt also

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq K(n) \cdot \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}.$$

□

Bemerkungen.

- Für den Beweis von Vermutung 1.8 bliebe also noch zu zeigen, dass die Konstante $K(n)$ aus der Ungleichung 3.13 mit der Konstanten $n^{\frac{n-1}{n}} (c_{n-1})^{\frac{1}{n}}$ aus der isoperimetrischen Ungleichung von \mathbb{R}^n übereinstimmt (vgl. Vermutung 1.8). Das heißt, es müsste gelten

$$\begin{aligned}
n^{\frac{n-1}{n}} (c_{n-1})^{\frac{1}{n}} &= \sup_{G \in \mathcal{G}} \frac{2^{\frac{n-1}{n}} (\omega_n)^{\frac{1}{n}}}{G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha \right)} \\
&\Leftrightarrow \inf_{G \in \mathcal{G}} G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha \right) = \frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n}
\end{aligned}$$

Es ist also eine C^2 -Funktion $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit folgenden drei Eigenschaften gesucht:

- (1) G hat eine Umkehrfunktion $G^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$.
- (2) Für alle $z > 0$ gilt

$$\left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' \geq 0.$$

$$(3) \quad G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha \, d\alpha \right) = \frac{2}{n} \frac{n-1}{n}$$

Die Gleichheitsdiskussion liefert nämlich, dass jedes Ω , das die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt, flach sein muss (vgl. Beweis von Proposition 3.16). Also folgt aus der Gleichheitsdiskussion der isoperimetrischen Ungleichung in \mathbb{R}^n , dass Ω ein geodätischer Ball sein muss.

- Die Funktionen $G(z) = z^{\frac{n}{n-1}}$ liefern für $n \geq 3$ nach der Gleichheitsdiskussion von Proposition 3.16 keine Lösung des Problems: sie erfüllen zwar die Eigenschaften (1) und (2), aber nicht Eigenschaft (3).
- Die Funktionen $G(z) = z^\epsilon$ mit $\epsilon > \frac{n}{n-1}$ liefern ebenfalls keine Lösung des Problems. Das sieht man so: gäbe es ein $\epsilon > \frac{n}{n-1}$ mit der Eigenschaft, dass $G(z) = z^\epsilon$ alle drei Eigenschaften (1), (2), (3) erfüllt, dann müsste für einen flachen geodätischen Ball Gleichheit in Ungleichung 3.13 gelten. Aus dem Beweis von Satz 3.19 folgt, dass dann Gleichheit in der Verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung aus Folgerung 3.18 gelten muss. Das kann aber nicht sein, da für alle $z > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|G'(z)|}{z^{\frac{1}{n-1}}} \right)' &= \left(\epsilon z^{\epsilon-1-\frac{1}{n-1}} \right)' \\ &= \left(\epsilon z^{\epsilon-\frac{n}{n-1}} \right)' > 0 \end{aligned}$$

gilt und Φ'' negativ definit wäre. Bei Gleichheit in der Verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung müsste Φ'' aber den Eigenwert 0 haben.

3.3.2 Abschätzungen für symmetrische Rang-1-Räume

Satz 3.20 Sei X ein n -dimensionaler symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und \mathcal{V} die Menge aller streng monoton wachsenden C^2 -Funktionen $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit der Eigenschaft, dass $\Phi : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $(x_1, x_2) \mapsto B^{-1}(x_1)G^{-1}(x_2)$ konkav ist (mit B gemäß Definition 1.1), sowie

$$C_X := \sup_{G \in \mathcal{V}} \frac{2}{G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha \, d\alpha \right)}.$$

Dann gilt für das isoperimetrische Profil $\varphi_X : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ von X

$$\varphi_X(v) \geq \frac{C_X v}{B^{-1}(2v)}.$$

Beweis. Nach Folgerung 3.3, Proposition 3.17 (mit $F = B$) und Proposition 3.4 gilt für jedes $G \in \mathcal{V}$:

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^{+\partial\Omega}} r(\xi) \cos \xi \, d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} \int_{S+\partial\Omega} r(\xi) \cos(\xi) \frac{2}{c_{n-1} \text{Area}(\partial\Omega)} d\xi \\
&\leq \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} B^{-1} \left(\frac{2}{c_{n-1} \text{Area}(\partial\Omega)} \int_{S+\partial\Omega} B(r(\xi)) d\xi \right) \\
&\quad G^{-1} \left(\frac{2}{c_{n-1} \text{Area}(\partial\Omega)} \int_{S+\partial\Omega} G(\cos \xi) d\xi \right) \\
&\leq \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{2} B^{-1}(2\text{Vol}(\Omega)) \cdot G^{-1} \left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt für jeden kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset X$

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq C_X \cdot \frac{\text{Vol}(\Omega)}{B^{-1}(2\text{Vol}(\Omega))}$$

und also die Abschätzung des isoperimetrischen Profils von X . \square

Bemerkung. Eine konkrete Abschätzung für C_X erhält man, wenn man für G die Funktion B einsetzt, d.h. es gilt $B \in \mathcal{V}$ und damit

$$C_X \geq \frac{2}{B^{-1}\left(\frac{2c_{n-2}}{c_{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} B(\cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha\right)} =: \tilde{C}_X.$$

Das folgt aus

Lemma 3.21 *Für symmetrische Rang-1-Räume vom nichtkompakten Typ ist die Funktion*

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad (x_1, x_2) \mapsto B^{-1}(x_1) B^{-1}(x_2)$$

konkav.

Beweis. Für symmetrische Rang-1-Räume X gilt

$$A(r) = c_{dm-1} \sinh^{(d-1)m}(r) \frac{\sinh^{d-1}(2r)}{2^{d-1}}$$

und folglich

$$\frac{A'(r)}{A(r)} = d(m-1) \coth(r) + 2(d-1) \coth(2r) \geq \frac{1}{r}.$$

Also folgt $rA'(r) \geq A(r)$ für alle $r > 0$. Wegen $B'(r) = A(r)$ gilt

$$\Phi'(x_1, x_2) = \left(\frac{B^{-1}(x_2)}{A(B^{-1}(x_1))}, \frac{B^{-1}(x_1)}{A(B^{-1}(x_2))} \right) = \left(\frac{r_2}{A(r_1)}, \frac{r_1}{A(r_2)} \right),$$

wobei $r_i := B^{-1}(x_i)$ für $i = 1, 2$ gesetzt wurde. Damit gilt $\frac{d}{dx_i} r_i = \frac{1}{A(r_i)}$ und

$$\Phi''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-r_2 A'(r_1)}{A(r_1)^3} & \frac{1}{A(r_1)A(r_2)} \\ \frac{1}{A(r_1)A(r_2)} & \frac{-r_1 A'(r_2)}{A(r_2)^3} \end{pmatrix}.$$

Abbildung 3.3: Das Volumen von Sphären, die lineare Abschätzung $(dm + d - 2) \cdot v$ und die Abschätzung $\frac{\tilde{C}_{(\mathbb{R}H^2)} \cdot v}{B^{-1}(2v)}$ für $X = \mathbb{R}H^2$ in Abhängigkeit des Volumens v

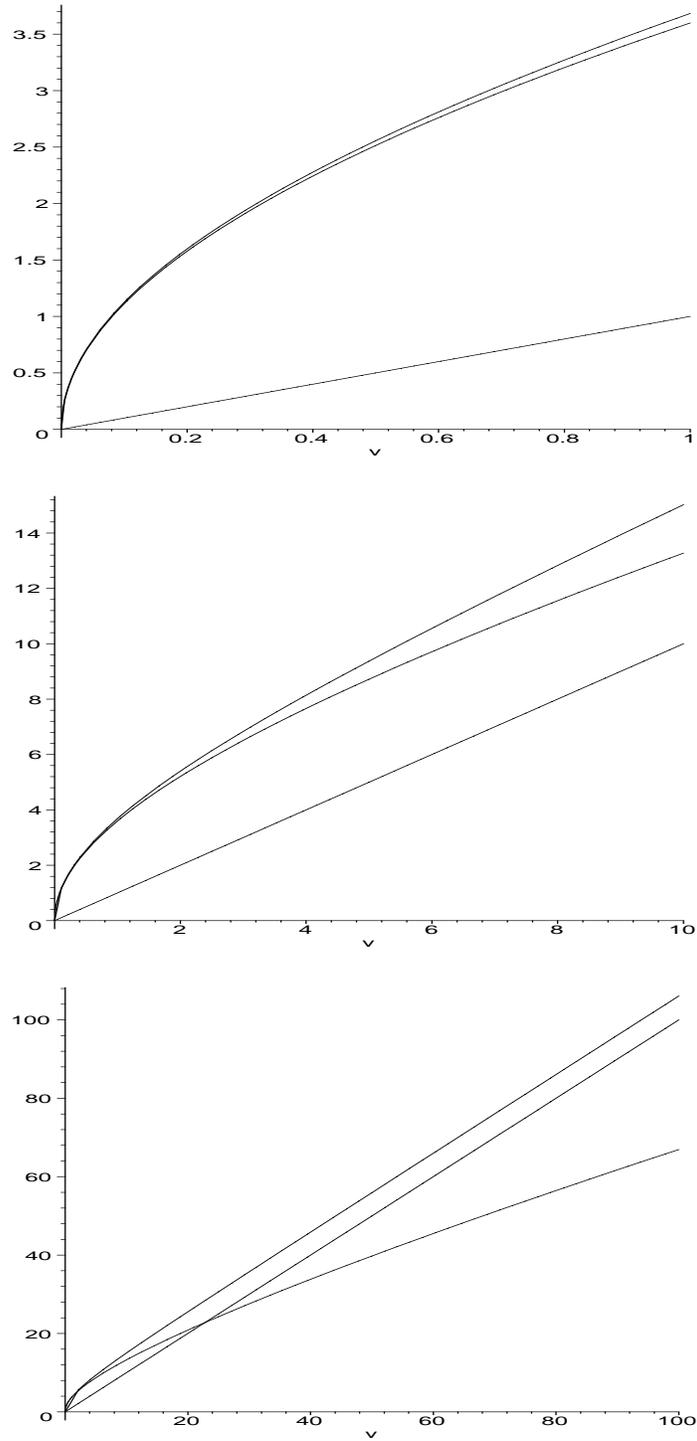
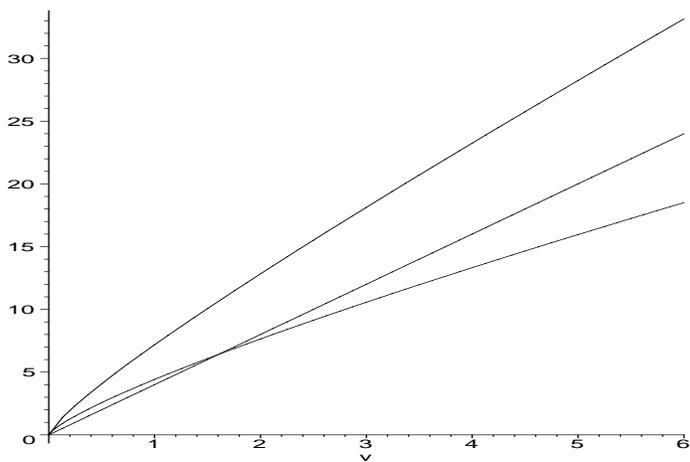
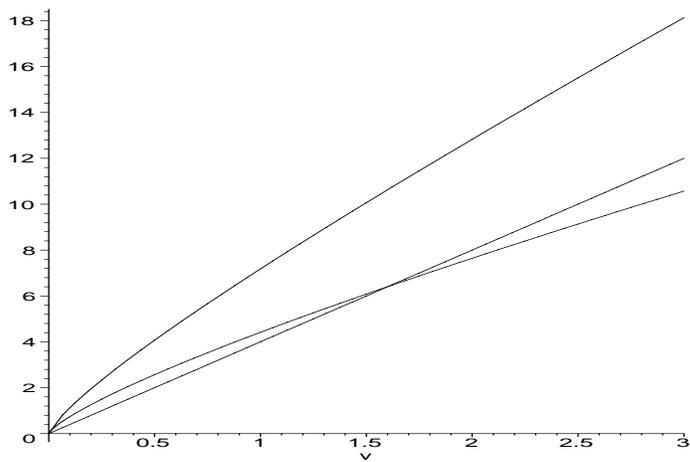
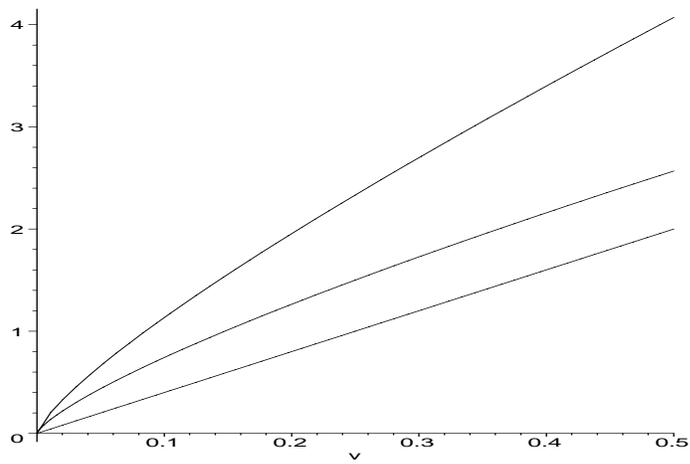


Abbildung 3.4: Das Volumen von Sphären, die lineare Abschätzung $(dm + d - 2) \cdot v$ und die Abschätzung $\frac{\tilde{C}_{(CH^2)} \cdot v}{B^{-1}(2v)}$ für $X = \mathbb{C}H^2$ in Abhängigkeit des Volumens v



Es gilt $\frac{-r_2 A'(r_1)}{A(r_1)^3} \leq 0$, weil $A' \geq 0$ ist, und wegen $rA'(r) \geq A(r)$ gilt auch

$$\det \Phi'' = \frac{r_1 r_2 A'(r_1) A'(r_2) - A(r_1) A(r_2)}{A(r_1)^3 A(r_2)^3} \geq 0.$$

Also ist Φ'' negativ semidefinit und damit Φ eine konkave Funktion. \square

3.3.3 Eine potentialtheoretische Anwendung

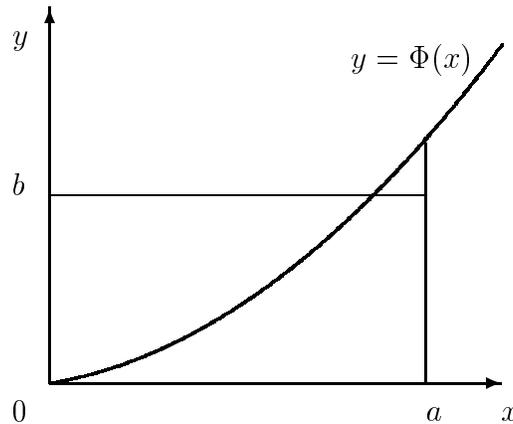
Mit Hilfe der folgenden Ungleichung und der Formel von Santaló erhält man einen weiteren Beweis für die isoperimetrische Ungleichung in \mathbb{R}^2 und eine Abschätzung für das Standard-Potential in \mathbb{R}^n für $n \geq 3$.

Proposition 3.22 (Youngsche Ungleichung) Sei $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $\Phi(0) = 0$. Dann gilt für $a, b \geq 0$

$$ab \leq \int_0^a \Phi(x) dx + \int_0^b \Phi^{-1}(y) dy.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $b = \Phi(a)$ gilt.

Abbildung 3.5: Skizze zur Youngschen Ungleichung



Beweis. Der Zusammenhang wird klar, wenn man die Integrale als Flächeninhalte interpretiert, siehe Abbildung 3.5. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn (a, b) auf dem Graph von Φ liegt, d.h. genau für $b = \Phi(a)$. \square

Satz 3.23 Für kompakte, reguläre Bereiche Ω in \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ gilt

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|p-q|^{n-2}} dV(q) dA(p) \geq \frac{\text{Vol}(\Omega)^{\frac{2}{n}}}{(\omega_n)^{\frac{1}{n}}} \left(2c_{n-1} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} - (\omega_n)^{\frac{n-1}{n}} \text{Area}(\partial\Omega) \right)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω ein Ball ist. Im Gleichheitsfall lautet die rechte Seite $n(\omega_n)^{\frac{n-1}{n}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n+1}{n}}$. Für $n = 2$ ergibt sich gerade die isoperimetrische Ungleichung.

Beweis. Sei $R := \left(\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ der Radius des Balles in \mathbb{R}^n mit demselben Volumen wie Ω . Nach Folgerung 3.3 und der Youngschen Ungleichung mit $\phi(t) := 2Rt$ und $a = \cos \xi$ sowie $b = r(\xi)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} r(\xi) \cos \xi \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} \left(\int_0^{\cos \xi} 2Rt \, dt + \int_0^{r(\xi)} \frac{s}{2R} \, ds \right) d\xi \\ &= \frac{R}{c_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} \cos^2 \xi \, d\xi + \frac{1}{2Rc_{n-1}} \int_{S^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} s \, ds \, d\xi. \end{aligned}$$

Führe jetzt Polarkoordinaten auf den Hemisphären $S_p^+ \partial \Omega$ mit Mittelpunkt N ein. (N ist die innere Normale auf $\partial \Omega$.) α sei dabei gerade der sphärische Abstand von N zu ξ . Man erhält weiter

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{Rc_{n-2}}{c_{n-1}} \text{Area}(\partial \Omega) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin^{n-2} \alpha \, d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2Rc_{n-1}} \int_{\partial \Omega} \left(\int_{S_p^+ \partial \Omega} \int_0^{r(\xi)} \frac{s^{n-1}}{s^{n-2}} \, ds \, d\xi \right) dA(p). \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.10 erhält man den Wert des ersten Integrals. Stelle nun das Volumenelement in Polarkoordinaten um $p \in \partial \Omega$ dar:

$$dV = s^{n-1} \, ds \, d\xi, \quad s = d(p, \cdot), \quad \xi \in S_p^+ \partial \Omega.$$

Damit erhält man eine Abschätzung des zweiten Integrals nach oben. Insgesamt folgt

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{R}{2n} \text{Area}(\partial \Omega) + \frac{1}{2Rc_{n-1}} \int_{\partial \Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|p-q|^{n-2}} dV(q) \right) dA(p).$$

Nach Definition von $r(\xi)$ ist die letzte Ungleichung genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn Ω bezüglich jedes $p \in \partial \Omega$ strikt sternförmig ist, d.h. genau dann, wenn Ω strikt konvex ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|p-q|^{n-2}} dV(q) \, dA(p) &\geq 2Rc_{n-1} \left(\text{Vol}(\Omega) - \frac{R}{2n} \text{Area}(\partial \Omega) \right) \\ &= \frac{\text{Vol}(\Omega)^{\frac{2}{n}}}{(\omega_n)^{\frac{1}{n}}} \left(2c_{n-1} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} - (\omega_n)^{\frac{n-1}{n}} \text{Area}(\partial \Omega) \right). \end{aligned}$$

Für $n = 2$ ist das gerade äquivalent zur isoperimetrischen Ungleichung $\text{Area}(\partial \Omega) \geq 2\sqrt{\pi} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{2}}$.

Es gelte nun Gleichheit. Dann folgt aus der Gleichheit in der Youngschen Ungleichung die Beziehung $r(\xi) = 2R \cos \xi$ für alle $\xi \in S^+ \partial\Omega$. Nach Folgerung 3.7 muss Ω also ein Ball sein.

Für $n = 2$ ergibt sich die isoperimetrische Ungleichung, da Gleichheit genau für Bälle gilt und die Abstände $|p - q|$ für $p \in \partial\Omega$ bzw. $q \in \Omega$ in der Ungleichung nicht auftauchen. \square

Bemerkung. Für $n \geq 3$ folgt daraus *nicht* die isoperimetrische Ungleichung, denn dann müsste für jeden kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|p - q|^{n-2}} dV(q) dA(p) \leq c_{n-1} R \text{Vol}(\Omega) = n(\omega_n)^{\frac{n-1}{n}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{n+1}{n}}$$

gelten. Dass dies im Allgemeinen falsch ist, kann man an folgendem Gegenbeispiel von E. Martensen sehen.

Betrachte den Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dessen Rand ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a , $b = a$ und $c = (1 - \alpha)a$ und kleiner „Abplattung“ $0 < \alpha \ll 1$ ist. $\partial\Omega$ wird also parametrisiert durch

$$x(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ (1 - \alpha)a \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit Flächenelement

$$dA = a^2 |\sin \theta| (1 - \alpha \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + O(\alpha^3)) d\theta d\varphi.$$

Nach [Kel], S. 194 erhält man für einen Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ in Ω folgendes Potential

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x - y|} dV(y) = -Ax_1^2 - Bx_2^2 - Cx_3^2 + D$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} A = B &= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{2}{5}\alpha - \frac{9}{35}\alpha^2 + \dots \right) \\ C &= \frac{2\pi}{3} \left(1 + \frac{4}{5}\alpha + \frac{18}{35}\alpha^2 + \dots \right) \\ D &= 2\pi a^2 \left(1 - \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{5}\alpha^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Nach weiteren Rechnungen erhält man

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - y|} dV(y) dA(x) = \frac{16\pi^2}{3} a^4 \left(1 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{26}{75}\alpha^2 + \dots \right),$$

was *größer* ist als die rechte Seite

$$3(\omega_3)^{\frac{2}{3}} \text{Vol}(\Omega)^{\frac{4}{3}} = \frac{16\pi^2}{3} (abc)^{\frac{4}{3}} = \frac{16\pi^2}{3} a^4 \left(1 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{2}{9}\alpha^2 + \dots \right).$$

Kapitel 4

Ansätze über die Riccatigleichung

In diesem Kapitel ist X stets ein symmetrischer Rang-1-Raum. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln kann X also sowohl vom kompakten als auch vom nichtkompakten Typ sein. $\epsilon \in \{1, -1\}$ bezeichnet dabei das Vorzeichen der Schnittkrümmung von X , d.h. die Schnittkrümmung ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gerade ϵ und liegt für $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ stets zwischen ϵ und 4ϵ .

Zur Vereinfachung der Notation werden die Bezeichnungen \sin_ϵ für \sin im Fall $\epsilon = 1$ und für \sinh im Fall $\epsilon = -1$ verwendet. Analog sind $\cos_\epsilon, \tan_\epsilon, \dots$ definiert.

Wie in den anderen Kapiteln bezeichne d die reelle Dimension der zugrundeliegenden reellen Divisionsalgebra $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ und $m \geq 2$ die \mathbb{K} -Dimension des symmetrischen Raumes. J_1, \dots, J_{d-1} bezeichnen parallele, orthogonale Endomorphismen auf TX mit $J_k^2 = -\text{id}$, $k = 1, \dots, d-1$, die von der Multiplikation mit den Elementen $\neq e$ der natürlichen Basis e, j_1, \dots, j_{d-1} von \mathbb{K} erzeugt werden.

4.1 Charakterisierung von Sphären

Folgendes Lemma charakterisiert die Hauptkrümmungen von geodätischen Hypersphären in symmetrischen Rang-1-Räumen über einen rein algebraischen Zusammenhang.

Lemma 4.1 *Gegeben seien zwei natürliche Zahlen $d, m \geq 2$ und $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Gegeben seien weiter $a_1, \dots, a_{dm-1} \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$|h_2| := \left| \frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k} \right| > -2\epsilon.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{dm-1} a_i^2 \geq \left| \sum_{i=1}^{dm-1} a_i \right| \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} - (dm - 2d + 1)h_2^2 - \frac{dm + d - 2}{2} |h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} - d(m-1)\epsilon \right)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn es ein $r > 0$ gibt mit

$$a_1 = \dots = a_d(m-1) = \cot_\epsilon r, \quad a_{d(m-1)+1} = \dots = a_{dm-1} = 2 \cot_\epsilon 2r.$$

Beweis. Sei $h_1 := \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i$ und $h_2 = \frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k}$. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$4h_1^2 \leq \frac{4}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i^2, \quad \frac{4(d-1)}{d(m-1)} h_2^2 \leq \frac{4}{d(m-1)} \sum_{k=1}^{d-1} (a_{d(m-1)+k})^2, \quad (4.1)$$

und aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|h_1| \geq \left| h_1 + \frac{d-1}{d(m-1)} h_2 \right| - \left| \frac{d-1}{d(m-1)} h_2 \right| = \left| \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{dm-1} a_i \right| - \left| \frac{d-1}{d(m-1)} h_2 \right|. \quad (4.2)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(2|h_1| - |h_2| - \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right)^2 \\ &= 4h_1^2 + 2h_2^2 + 4\epsilon - 4|h_1| \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right) + 2|h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \\ &\stackrel{(4.1)}{\leq} \frac{4}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i^2 + \left(\frac{4(d-1)}{d(m-1)} + \frac{2dm-6d+4}{d(m-1)} \right) h_2^2 + 4\epsilon \\ &\quad - 4|h_1| \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right) + 2|h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \\ &\stackrel{(4.1)}{\leq} \frac{4}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{dm-1} a_i^2 + \frac{2dm-6d+4}{d(m-1)} h_2^2 + 4\epsilon \\ &\quad - 4|h_1| \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right) + 2|h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \\ &\stackrel{(4.2)}{\leq} \frac{4}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{dm-1} a_i^2 + \frac{2dm-6d+4}{d(m-1)} h_2^2 + 4\epsilon \\ &\quad - 4 \left(\left| \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{dm-1} a_i \right| - \left| \frac{d-1}{d(m-1)} h_2 \right| \right) \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right) + 2|h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{dm-1} a_i^2 \geq \left| \sum_{i=1}^{dm-1} a_i \right| \left(|h_2| + \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} \right) - (dm-2d+1)h_2^2 - \frac{dm+d-2}{2} |h_2| \sqrt{h_2^2 + 4\epsilon} - d(m-1)\epsilon.$$

Angenommen, es gilt Gleichheit. Dann folgt $a_1 = \dots = a_{d(m-1)}$ und $a_{d(m-1)+1} = \dots = a_{dm-1}$ aus (4.1). Wegen Gleichheit in (4.2) müssen h_1 und h_2 dasselbe Vorzeichen haben,

also muss das auch für a_1 und a_{dm-1} zutreffen. Aus der Gleichheit in der anfänglichen Ungleichung folgt also

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_{dm-1} &= \sqrt{a_{dm-1}^2 + 4\epsilon} \Rightarrow 4a_1^2 + a_{dm-1}^2 - 4a_1a_{dm-1} = a_{dm-1}^2 + 4\epsilon \\ &\Leftrightarrow a_{dm-1} = a_1 - \frac{\epsilon}{a_1}. \end{aligned}$$

Sei $a_1 = \cot_\epsilon r$ für ein gewisses $r > 0$. Dann erhält man

$$2 \cot_\epsilon 2r = \frac{2(\cos_\epsilon^2 r - \epsilon \sin_\epsilon^2 r)}{2 \cos_\epsilon r \sin_\epsilon r} = \cot_\epsilon r - \epsilon \tan_\epsilon r = a_{dm-1}.$$

□

Definition 4.2 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum und $M \subset X$ eine orientierbare reelle Hyperfläche mit Normale N und zugehöriger Weingarten-Abbildung $A_p = -(\nabla N)(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ bei $p \in M$. Dann werden die Größen H_1 und H_2 auf M folgendermaßen definiert:

$$H_2 := \frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} \langle A J_k N, J_k N \rangle \quad \text{und} \quad H_1 := \frac{1}{d(m-1)} (\text{Spur } A - (d-1)H_2).$$

Eine Anwendung des Lemmas liefert

Proposition 4.3 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum und $M \subset X$ eine orientierbare, zusammenhängende, vollständige reelle Hyperfläche mit Normale N und zugehöriger Weingarten-Abbildung A .

(a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt $\text{Spur}(A^2) \geq \frac{1}{m-1}(\text{Spur } A)^2$. Falls $\epsilon = 1$ ist, gilt dabei Gleichheit genau dann, wenn M eine geodätische Hypersphäre ist. Falls $\epsilon = -1$ ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn M eine total geodätische Hyperebene, eine Horosphäre, eine äquidistante Hyperfläche oder eine geodätische Hypersphäre ist.

(b) Im Fall $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ und $|H_2| > -2\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}(A^2) &\geq |\text{Spur } A| \left(|H_2| + \sqrt{H_2^2 + 4\epsilon} \right) - (dm - 2d + 1)H_2^2 \\ &\quad - \frac{dm + d - 2}{2} |H_2| \sqrt{H_2^2 + 4\epsilon} - d(m-1)\epsilon, \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn M eine geodätische Hypersphäre ist.

Beweis.

- (a) Seien $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ die Eigenwerte von A . Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\text{Spur } A^2 = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i^2 \geq \frac{1}{m-1} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i \cdot 1 \right)^2 = \frac{1}{m-1} (\text{Spur } A)^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\kappa_1 = \dots = \kappa_{m-1}$ auf M gilt. Die Behauptung folgt jetzt aus der Klassifikation der Nabelflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung, siehe z.B. [Spi], Band 4, S.112, 114.

- (b) Sei N ein lokales Normalenfeld und E_1, \dots, E_{dm-1} ein lokales orthonormales $(dm-1)$ -Bein auf M mit

$$E_{d(m-1)+k} = J_k N, \quad k = 1, \dots, d-1.$$

Über die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \text{Spur } A^2 &= \sum_{i=1}^{dm-1} \langle A^2 E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{dm-1} \langle A E_i, A E_i \rangle \langle E_i, E_i \rangle \\ &\geq \sum_{i=1}^{dm-1} \langle A E_i, E_i \rangle^2. \end{aligned}$$

Setze $a_i := \langle A E_i, E_i \rangle$. Dann folgt die Ungleichung aus Lemma 4.1.

Für $\epsilon = -1$ folgt aus der Gleichheit, dass alle E_i Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $a_1 = \dots a_{d(m-1)} = \coth r$ und $a_{d(m-1)+1} = \dots = a_{dm-1} = 2 \coth 2r$ für gewisses $r \neq 0$ sind. Jetzt kann man entweder die Klassifikationssätze für reelle Hyperflächen mit genau zwei verschiedenen Hauptkrümmungen in [MR] für $\mathbb{C}H^m$ und in [OP] für $\mathbb{H}H^m$ verwenden oder so schließen wie in der Gleichheitsdiskussion im Beweis von Satz 4.6 (geht für alle $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$). Für $\mathbb{O}H^2$ liegt ein entsprechender Klassifikationssatz (noch) nicht vor.

Für $\epsilon = 1$ gilt dasselbe in analoger Weise. Die Klassifikationssätze findet man im Fall $X = \mathbb{C}P^m$ in [Oku] und für $X = \mathbb{H}P^m$ in [MP].

□

4.2 Eine scharfe isoperimetrische Ungleichung

Durch die Methode der Parallellflächen bekommt man eine scharfe isoperimetrische Ungleichung zwischen dem Volumen, der Oberfläche und der Krümmung des Randes eines kompakten, regulären Bereiches Ω in einem symmetrischen Rang-1-Raum X . Die

Krümmung von $\partial\Omega$ geht dabei in Form des verallgemeinerten Krümmungsradius r von Ω ein (siehe Definition 4.4), einer aus den Größen H_1 und H_2 aus Definition 4.2 abgeleiteten Größe. Dabei ist N wie bisher die innere Normale von $\partial\Omega$.

Je nach zugrundeliegendem Raum werden im Weiteren folgende Einschränkungen an H_1 und H_2 nötig.

Definition 4.4 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich. Ω hat **Eigenschaft (K)** genau dann, wenn gilt:

- Falls $X = \mathbb{R}H^m$, so gilt $H_1 > 1$ auf $\partial\Omega$.
- Falls $X \in \{\mathbb{C}H^m, \mathbb{H}H^m, \mathbb{O}H^2\}$, so gilt $H_1 > 1$ und $H_2 > 2$ auf $\partial\Omega$.

Für einen kompakten, regulären Bereich $\Omega \subset X$ mit Eigenschaft (K) ist der **verallgemeinerte Krümmungsradius** r gegeben durch die Funktion

$$r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad r = \begin{cases} \operatorname{arccot}_\epsilon(H_1) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \max \left\{ \operatorname{arccot}_\epsilon(H_1), \frac{1}{2} \operatorname{arccot}_\epsilon\left(\frac{H_2}{2}\right) \right\} & \text{falls } \mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\} \end{cases}$$

Lemma 4.5 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich. Dann hat Ω Eigenschaft (K), falls Ω in folgendem Sinne strikt konvex ist:

Für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$ gibt es einen geodätischen Ball, der Ω enthält und dessen Randsphäre den Rand $\partial\Omega$ in p berührt.

Beweis. Falls $X = \mathbb{R}H^n$ ist, hat eine geodätische Hypersphäre die $(n-1)$ -fache Hauptkrümmung $\coth R$. Nach Lemma 1.6 hat der Rand $\partial\Omega$ in jedem Punkt $p \in \partial\Omega$ höchstens größere Normalkrümmungen. Die mittlere Krümmung H_1 von $\partial\Omega$ ist also ebenfalls mindestens $\coth R > 1$.

Falls $X \in \{\mathbb{C}H^m, \mathbb{H}H^m, \mathbb{O}H^2\}$, so hat eine geodätische Hypersphäre von Radius R in X die $d(m-1)$ -fache Hauptkrümmung $\coth R$ und die $(d-1)$ -fache Hauptkrümmung $2 \coth 2R$. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen E spannen mit der inneren Normale N der Sphäre Ebenen mit Schnittkrümmung -1 bzw. -4 auf. Es ergibt sich mit Lemma 1.6 für die Größen H_1, H_2 auf $\partial\Omega$

$$H_1 \geq \coth R > 1 \quad \text{und} \quad H_2 \geq 2 \coth 2R > 2.$$

□

Satz 4.6 Sei X ein symmetrischer Rang-1-Raum und $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich mit Eigenschaft (K) und verallgemeinertem Krümmungsradius $r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktionen A, B sind gemäß Definition 1.1 gegeben. Dann gilt

$$\operatorname{Vol}(\Omega) \leq \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA \tag{4.3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Ω ein geodätischer Ball ist. r ist in diesem Fall der Radius des Balles.

Bemerkungen.

- Für den Fall, dass X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ ist, beachte man, dass die Funktion $\frac{B(r)}{A(r)}$ für $r \rightarrow \infty$ sehr „schnell“ gegen den Wert $\frac{1}{dm+d-2}$ strebt. Siehe Lemma 2.5 und dessen Beweis.
- Für die euklidischen Räume $X = \mathbb{R}^n$ gilt ein entsprechender Satz, der vollkommen analog bewiesen werden kann. Ein kompakter regulärer Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat dabei die Eigenschaft (K), wenn die mittlere Krümmung $H = \frac{\text{Spur}(A)}{n-1}$ auf $\partial\Omega$ positiv ist: $H > 0$. Die Funktion r ist gegeben durch $r = \frac{1}{H}$. Wegen $B(r) = \frac{r}{n}A(r)$ hat die Ungleichung folgende einfache Form:

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{H(p)} dA(p).$$

- Der Beweis von Satz 4.6 greift eine Methode auf, die bereits in [GM] für Volumenabschätzungen in Kähler-Mannigfaltigkeiten mit positiver unterer Krümmungsschranke verwendet wurde.

Durch Ausnutzen der speziellen Geometrie von Hyperflächen in symmetrischen Rang-1-Räumen lässt sich die explizite Beschränkung von H_1 und H_2 in [GM], Theorem 5.1. vermeiden. Stattdessen geht die Krümmung des Randes $\partial\Omega$ nur noch über den gewichteten Mittelwert des verallgemeinerten Krümmungsradiuses ein.

Korollar 4.7 *Seien X ein symmetrischer Rang-1-Raum vom nichtkompakten Typ und $a > dm + d - 2$ eine reelle Konstante. Weiter sei $\Omega \subset X$ ein kompakter regulärer Bereich mit Eigenschaft (K) und verallgemeinertem Krümmungsradius $r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte*

$$\frac{1}{\text{Area}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA \leq \frac{1}{a}.$$

Dann gilt

$$\text{Area}(\partial\Omega) \geq a \text{Vol}(\Omega).$$

Gleichheit gilt in dieser Ungleichung genau dann, wenn Ω ein geodätischer Ball von Radius ρ mit $A(\rho) = a B(\rho)$ ist.

Beweis. Sei $\Omega \subset X$ ein kompakter, regulärer Bereich mit Eigenschaft (K) und

$$\frac{1}{\text{Area}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA \leq \frac{1}{a}.$$

Dann folgt nach Satz 4.6

$$\begin{aligned} a \text{Vol}(\Omega) &\leq a \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA(p) \\ &\leq \text{Area}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Es gelte nun $\text{Area}(\partial\Omega) = a \text{Vol}(\Omega)$. Daraus folgt einerseits

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA$$

und damit nach Satz 4.6, dass Ω ein geodätischer Ball ist. Andererseits folgt aus $a \text{Vol}(\Omega) = \text{Area}(\partial\Omega)$ für den Radius ρ des Balles $A(\rho) = a B(\rho)$. \square

Für den Beweis von Satz 4.6 wird folgendes Lemma benötigt. Durch Setzen von $\epsilon = a = 0$ und $\sin_0(t) = t$ sowie $\cos_0(t) = 1$ erhält man gerade die entsprechende Version für den Beweis im euklidischen Fall.

Lemma 4.8 *Zu $H_0, t \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ und $a > 0$ sei*

$$\zeta_a(H_0, t) := \cos_\epsilon(at) - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon(at)$$

definiert. Sei $H : [0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(0, t_0)$ differenzierbar ist und

$$H'(t) \geq H^2(t) + \epsilon a^2, \quad t \in (0, t_0), \quad H(0) = H_0$$

erfüllt. Dann gilt $\zeta_a(H_0, t) > 0$ und

$$H(t) \geq -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(H_0, t), \quad \text{für alle } t \in [0, t_0).$$

Beweis.(Nach [Gra].) Betrachte die Funktion

$$g(t) = \left\{ \left(\cos_\epsilon at - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon at \right) H(t) - H_0 \cos_\epsilon at - \epsilon a \sin_\epsilon at \right\} \cdot \exp \left(- \int_0^t H(u) du \right).$$

Sei t_1 die erste positive Nullstelle von $\cos_\epsilon(at) - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon(at)$ (möglicherweise ∞). Für $t \geq 0$ mit $t < t_0$ und $t \leq t_1$ gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \{(-\epsilon a \sin_\epsilon(at) - H_0 \cos_\epsilon(at)) H(t) + \left(\cos_\epsilon(at) - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon(at) \right) H'(t) \\ &\quad + \epsilon a H_0 \sin_\epsilon(at) - \epsilon a^2 \cos_\epsilon(at) - H^2(t) \left(\cos_\epsilon at - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon at \right) \\ &\quad + (H_0 \cos_\epsilon(at) + \epsilon a \sin_\epsilon(at)) H(t)\} \cdot \exp \left(- \int_0^t H(u) du \right) \\ &= \left(\cos_\epsilon at - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon at \right) (H'(t) - \epsilon a^2 - H^2(t)) \cdot \exp \left(- \int_0^t H(u) du \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt $g(0) = 0$ wegen $H(0) = H_0$. Daraus folgt

$$H(t) \geq \frac{H_0 \cos_\epsilon(at) + \epsilon a \sin_\epsilon(at)}{\cos_\epsilon(at) - \frac{H_0}{a} \sin_\epsilon(at)} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(H_0, t) \quad (4.4)$$

für $0 \leq t < \min\{t_0, t_1\}$. Da aber H nach Voraussetzung stetig auf $[0, t_0)$ ist und $-\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(H_0, t)$ für $t \rightarrow t_1$ gegen ∞ strebt, muss $t_0 \leq t_1$ gelten. Daraus folgt die Behauptung. \square

4.2.1 Beweis der Ungleichung

Bezeichnungen. In $p \in \partial\Omega$ sei $R(p)$ der Abstand von p zum ersten Brennpunkt von $\partial\Omega$ längs $\gamma_{N(p)}$. Dann ist für $0 \leq t < R$ die Parallelfläche

$$M_t := \{\gamma_{N(p)}(t) \mid p \in \partial\Omega, R(p) > t\}$$

von $M := \partial\Omega$ im Abstand t eine lokal wohldefinierte reelle Hyperfläche mit Normale $N_t := \gamma'_{N'}(t)$ und zugehöriger Weingarten-Abbildung $A(t)$. Sei $E_1(t), \dots, E_{dm-1}(t)$ ein orthonormales $(dm-1)$ -Bein auf M_t mit

$$E_{d(m-1)+k}(t) = J_k N_t, \quad (k = 1, \dots, d-1)$$

und $\nabla_{N_t} E_i = 0$ für $i = 1, \dots, dm-1$. Das ist möglich wegen $\nabla J_k = 0$ für $k = 1, \dots, d-1$.

Setze $a_i(t) := \langle A(t)E_i(t), E_i(t) \rangle$ für $i = 1, \dots, dm-1$. Dann sind

$$H_1(t) := \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i(t) \quad \text{und} \quad H_2(t) := \frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k}(t)$$

gerade die Größen H_1, H_2 von M_t bezüglich der Normalen N_t nach Definition 4.2 und es gilt $H_1(0) = H_1, H_2(0) = H_2$.

Der Beweis gliedert sich nun in drei Schritte.

Erster Schritt. In einem ersten Schritt werden die Krümmungen $H_1(t), H_2(t)$ der Parallelfläche M_t im Punkt $\gamma_{N(p)}(t)$ mit den Hauptkrümmungen einer geodätischen Sphäre $\tilde{S}(t)$ von Radius $r(p) - t$ verglichen.

Sind $u, v \in T_p X$ linear unabhängig, so bezeichnet $K[u, v]$ die Schnittkrümmung der von u und v aufgespannten 2-Ebene.

Aus der Riccati-Gleichung $A'(t) = A^2(t) + R(N_t, \cdot)N_t$ (siehe z.B. [Gra]) folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgende Abschätzung für die Normalkrümmungen $a_i(t)$:

$$\begin{aligned} a'_i &= \langle A'E_i, E_i \rangle \\ &= \langle A^2 E_i, E_i \rangle + \langle R(N_t, E_i)N_t, E_i \rangle \\ &= \langle AE_i, AE_i \rangle + K[N_t, E_i] \\ &\geq \langle AE_i, E_i \rangle^2 + K[N_t, E_i] \\ &= \begin{cases} a_i^2 + \epsilon & , \quad i = 1, \dots, d(m-1) \\ a_i^2 + 4\epsilon & , \quad i = d(m-1) + 1, \dots, dm-1 \text{ und } \mathbb{K} \neq \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Wieder mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man weiter

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i \right)' &\geq \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i^2 + \epsilon \\ &\geq \left(\frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i \right)^2 + \epsilon \end{aligned}$$

und (falls $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$)

$$\left(\frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k} \right)' \geq \left(\frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k} \right)^2 + 4\epsilon.$$

Aus dieser Differential-Ungleichung erhält man mit Lemma 4.8

$$H_1(t) = \frac{1}{d(m-1)} \sum_{i=1}^{d(m-1)} a_i(t) \geq -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_1(H_1, t) \quad (4.5)$$

und (falls $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$)

$$H_2(t) = \frac{1}{d-1} \sum_{k=1}^{d-1} a_{d(m-1)+k}(t) \geq -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_2(H_2, t), \quad (4.6)$$

für $0 \leq t < R$. Die rechten Seiten von (4.5) und (4.6) lassen sich weiter nach unten durch eine Funktion von r abschätzen. Nach Definition von r gilt nämlich gerade $H_a \geq a \cot_\epsilon(a r)$ für $a = 1, 2$. Daher folgen aus

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial H} \frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(H, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{1}{a} \sin_\epsilon(at)}{\zeta_a(H, t)} \right) \\ &= \frac{\cos_\epsilon^2(at) + \epsilon \sin_\epsilon^2(at)}{\zeta_a(H, t)^2} > 0 \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$-\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(H_a(p), t) \geq -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(a \cot_\epsilon(ar(p)), t), \quad a = 1, 2. \quad (4.7)$$

Die rechte Seite von (4.7) lässt sich nun als Krümmung einer geodätischen Sphäre von Radius $r(p) - t$ interpretieren:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_a(a \cot_\epsilon(ar(p)), t) &= \frac{-\frac{\partial}{\partial t}(\cos_\epsilon(at) - \cot_\epsilon(ar(p)) \sin_\epsilon(at))}{\cos_\epsilon(at) - \cot_\epsilon(ar(p)) \sin_\epsilon(at)} \\ &= \frac{a\epsilon \sin_\epsilon(at) + a \cot_\epsilon(ar(p)) \cos_\epsilon(at)}{\cos_\epsilon(at) - \cot_\epsilon(ar(p)) \sin_\epsilon(at)} \\ &= \frac{a\epsilon \sin_\epsilon(at) \sin_\epsilon(ar(p)) + a \cos_\epsilon(at) \cos_\epsilon(ar(p))}{\cos_\epsilon(at) \sin_\epsilon(ar(p)) - \sin_\epsilon(at) \cos_\epsilon(ar(p))} \\ &= \frac{a \cos_\epsilon(ar(p) - at)}{\sin_\epsilon(ar(p) - at)} \\ &= a \cot_\epsilon(ar(p) - at). \end{aligned}$$

Es ergibt sich daher

$$H_1(t) \geq \cot_\epsilon(r - t) \quad \text{und} \quad H_2(t) \geq 2 \cot_\epsilon(2r - 2t) \quad (4.8)$$

Die Krümmungen $H_1(t)$ und $H_2(t)$ der Parallellfläche M_t werden also nach unten durch die Hauptkrümmungen einer geodätischen Sphäre von Radius $r - t$ abgeschätzt.

Zweiter Schritt. Mit Hilfe der Abschätzungen aus dem ersten Schritt wird nun das Volumenelement von Ω nach oben abgeschätzt.

Zu $p \in \partial\Omega$ und $0 \leq t < R(p)$ sei $\theta_p(t)$ mit

$$dV_{\gamma_N(t)} = \theta_p(t) \cdot dt \wedge dA_p$$

die Darstellung des Volumenelements auf dem Normalenbündel von $\partial\Omega$. Die Funktion $\theta_p(t)$ gibt dabei anschaulich die ‐Dichte der Parallellfläche M_t bei $\gamma_{N(p)}(t)$ relativ zu $\partial\Omega$ in p ‐ an. $\theta_p(t)$ hat nach [Gra], S. 216 folgende Beziehung zu Spur $A_p(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta_p(t) = -\text{Spur } A_p(t).$$

Aus den Ungleichungen (4.5), (4.6) und (4.7) erhält man daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta_p(t) &= -\text{Spur } A_p(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{d-1} \langle A_p(t) E_i(t), E_i(t) \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{d-1} a_i(t) \\ &= -d(m-1)H_1(t) - (d-1)H_2(t) \\ &\leq d(m-1) \frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_1(\cot_\epsilon(r(p)), t) + (d-1) \frac{\partial}{\partial t} \ln \zeta_2(2 \cot_\epsilon(2r(p)), t). \end{aligned}$$

Definiere

$$\tilde{\theta}_p(t) := \zeta_1(\cot_\epsilon(r(p)), t)^{d(m-1)} \cdot \zeta_2(2 \cot_\epsilon(2r(p)), t)^{d-1}.$$

Dann gibt $\tilde{\theta}_p(t)$ anschaulich gerade die ‐Dichte der Sphäre $\tilde{S}(t)$ mit Radius $r(p) - t$ relativ zu Dichte der Sphäre $\tilde{S}(0)$ von Radius $r(p)$ ‐ an. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\theta_p(t)}{\tilde{\theta}_p(t)} \right) \leq 0,$$

und wegen $\theta(0) = \tilde{\theta}(0) = 1$ erhält man für alle $p \in \partial\Omega$ und alle $t \in [0, R(p))$

$$\theta_p(t) \leq \tilde{\theta}_p(t). \tag{4.9}$$

Dritter Schritt. Die Abschätzung des Volumenelements wird dazu verwendet, das Volumen von Ω nach oben abzuschätzen.

Zu $p \in \partial\Omega$ bezeichne

$$R_c(p) := \sup\{t > 0 \mid \text{dist}(\partial\Omega, \gamma_{N(p)}(t)) = t\}$$

den Abstand von p zum ersten Schnittpunkt von $\partial\Omega$. Dann gilt $R_c(p) \leq R(p) \leq r(p)$ und $\text{Vol}(\{\gamma_{N(p)}(R_c(p)) \mid p \in \partial\Omega\}) = 0$. Weil $r(p)$ die erste Nullstelle von $\tilde{\theta}_p(t)$ ist, bekommen wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} \int_0^{R_c(p)} \theta_p(t) dt dA(p) \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \int_0^{R_c(p)} \tilde{\theta}_p(t) dt dA(p) \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \int_0^{r(p)} \tilde{\theta}_p(t) dt dA(p) \end{aligned}$$

Nach den Additionstheoremen für \sin und \sinh gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_p(t) &= \left(\cos_\epsilon(t) - \frac{\cot_\epsilon(r(p))}{1} \sin_\epsilon(t) \right)^{d(m-1)} \left(\cos_\epsilon(2t) - \frac{2 \cot_\epsilon(2r(p))}{2} \sin_\epsilon(2t) \right)^{d-1} \\ &= \left(\frac{\sin_\epsilon(r(p) - t)}{\sin_\epsilon(r(p))} \right)^{d(m-1)} \left(\frac{\sin_\epsilon(2r(p) - 2t)}{\sin_\epsilon(2r(p))} \right)^{d-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Parametertransformation $t \mapsto r(p) - t$

$$\begin{aligned} \int_0^{r(p)} \tilde{\theta}_p(t) dt &= \frac{\int_0^{r(p)} \sin_\epsilon(t)^{d(m-1)} \sin_\epsilon(2t)^{d-1} dt}{\sin_\epsilon(r(p))^{d(m-1)} \sin_\epsilon(2r(p))^{d-1}} \\ &= \frac{B(r(p))}{A(r(p))}. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$\text{Vol}(\Omega) \leq \int_{\partial\Omega} \frac{B(r)}{A(r)} dA(p).$$

4.2.2 Gleichheitsdiskussion

Die Gleichheitsdiskussion gliedert sich ebenfalls in drei Teile. Sei Ω ein kompakter, regulärer Bereich mit Eigenschaft (K), (vgl. Definition 4.4), der die Ungleichung in Satz 4.6 mit Gleichheit erfüllt. Dann sind alle auftretenden Ungleichungen in den drei Beweisschritten Gleichungen.

- Aus der Gleichheit in der Abschätzung im dritten Schritt folgt zunächst

$$R_c(p) = R(p) = r(p) \quad \text{für alle } p \in \partial\Omega.$$

Außerdem muss Gleichheit in (4.9) gelten und damit ebenfalls in (4.5), (4.6) und (4.7) im ersten Schritt des Beweises. Nach dem Gleichheitsfall in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sind $E_1(t), \dots, E_{d(m-1)}(t)$ Eigenvektoren von $A(t)$ mit zugehörigen Eigenwerten

$$a_1(t) = \dots = a_{d(m-1)}(t) = \cot_\epsilon(r-t), \quad a_{d(m-1)+1}(t) = \dots = a_{dm-1}(t) = 2 \cot_\epsilon(2(r-t))$$

mit den Vielfachheiten $d(m-1)$ und $d-1$.

- Nun wird die Codazzi-Gleichung ausgenutzt, um zu zeigen, dass die Funktion r auf Ω konstant ist.

Der Krümmungstensor von X kann mit Hilfe der Endomorphismen J_1, \dots, J_{d-1} folgendermaßen geschrieben werden:

$$R(U, V)W = \epsilon \left\{ \langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U + \left(\sum_{k=1}^{d-1} \langle J_k U, W \rangle J_k V - \langle J_k V, W \rangle J_k U + 2 \langle J_k U, V \rangle J_k W \right) \right\}$$

für $U, V, W \in TX$, und die Codazzi-Gleichung von $M_0 = \partial\Omega$ ist gegeben durch

$$(R(U, V)N)^T = \{(\nabla_U A)V - (\nabla_V A)U\}^T$$

für Vektorfelder X, Y , die tangential an M_0 sind. (W^T bezeichnet dabei die Orthogonale Projektion von $W \in T_p X$ nach $T_p \partial\Omega$.) Beachte: r ist genau dann auf $\partial\Omega$ konstant, wenn $\text{grad } r \perp \partial\Omega$ auf ganz $\partial\Omega$ gilt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt $(R(U, V)N)^T = 0$ für U, V , die tangential an $\partial\Omega$ sind. Aus der Codazzi-Gleichung erhält man also für U, V , die tangential an $\partial\Omega$ sind mit $[U, V] = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_U(AV) - A(\nabla_U V) - \nabla_V(AU) + A(\nabla_V U))^T \\ &= U(\cot_\epsilon r)V - V(\cot_\epsilon r)U \\ &= \frac{1}{\sin_\epsilon^2 r} (\langle \text{grad } r, V \rangle U - \langle \text{grad } r, U \rangle V). \end{aligned}$$

Durch Betrachtung beliebiger, linear unabhängiger Vektorfelder U, V erhält man nun $\text{grad } r \perp \partial\Omega$ und damit, dass r auf $\partial\Omega$ konstant ist.

Betrachte nun den Fall $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$. Wähle $i_0 \in \{1, \dots, d(m-1)\}$ und $k_0 \in \{1, \dots, d-1\}$ beliebig und setze $U = E_{i_0}$ sowie $V = E_{d(m-1)+k_0} = J_{k_0}N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (R(U, V)N)^T &= \epsilon \left(0 + \sum_{k=1}^{d-1} \langle J_k U, N \rangle J_k V - \langle J_k V, N \rangle J_k U + 2 \langle J_k U, V \rangle J_k N \right) \\ &= \epsilon \left(\sum_{k=1}^{d-1} -\langle J_k J_{k_0} N, N \rangle (J_k U)^T \right) \\ &= \epsilon J_{k_0} U. \end{aligned}$$

Aus der Codazzi-Gleichung und $\nabla_U V = \nabla_V U$ folgt

$$\begin{aligned} \epsilon J_{k_0} U &= (\nabla_U(AV) - A(\nabla_U V) - \nabla_V(AU) + A(\nabla_V U))^T \\ &= U(2 \cot_\epsilon 2r)V - V(\cot_\epsilon r)U + (2 \cot_\epsilon 2r - \cot_\epsilon r)(\nabla_U V)^T. \end{aligned}$$

J_{k_0} ist parallel, also gilt $\nabla_U V = \nabla_U(J_{k_0}N) = J_{k_0} \nabla_U N = -(\cot_\epsilon r)J_{k_0}U$. Wegen $2 \cot_\epsilon(2r) - \cot_\epsilon r = -\epsilon \tan_\epsilon r$ erhält man weiter

$$\epsilon J_{k_0} U = -\frac{4}{\sin_\epsilon^2(2r)} \langle \text{grad } r, U \rangle J_{k_0} N + \frac{1}{\sin_\epsilon^2(r)} \langle \text{grad } r, J_{k_0} N \rangle U + (-\epsilon \tan_\epsilon r)(-\cot_\epsilon r)J_{k_0} U.$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{4}{\sin_\epsilon^2(2r)} \langle \text{grad } r, U \rangle J_{k_0} N = \frac{1}{\sin_\epsilon^2(r)} \langle \text{grad } r, J_{k_0} N \rangle U.$$

Weil i_0 und k_0 beliebig waren, gilt also $\text{grad } r \perp E_1, \dots, E_{dm-1}$ und es folgt, dass r konstant auf $\partial\Omega$ ist.

- Schließlich erhält man durch die Betrachtung der Menge der Brennpunkte von $\partial\Omega$, dass Ω ein Ball ist.

Betrachte dazu die Abbildung

$$\Phi : \partial\Omega \rightarrow X, \quad p \mapsto \gamma_{N(p)}(r).$$

Dann ist $d\Phi = 0$. Es gilt nämlich $d\Phi_p E_i(0) = J_i(t)$, wobei $J_i(t)$ das transversale Jacobifeld längs $\gamma_{N(p)}(t)$ mit Anfangswerten $J_i(0) = E_i(0)$ und $J_i'(0) = AE_i(0)$ ist.

$$J_i(t) = \begin{cases} (\cos_\epsilon(t) - \cot_\epsilon(r) \sin_\epsilon(t)) E_i(t) & , \quad i = 1, \dots, d(m-1) \\ (\cos_\epsilon(2t) - \cot_\epsilon(2r) \sin_\epsilon(2t)) E_i(t) & , \quad i = d(m-1) + 1, \dots, dm-1 \end{cases}$$

hat aber gerade $t = r$ als erste Nullstelle. Also besteht $\Phi(\partial\Omega)$ aus genau einem Punkt $q \in X$ und wegen $R_c = R = r$ hat jeder Punkt $p \in \partial\Omega$ gerade Abstand r zu q . Demnach ist $\partial\Omega$ eine Abstandssphäre um q von Radius r . \square

Literaturverzeichnis

- [Alm] F. Almgren: *Existence and Regularity Almost Everywhere of Solutions to Elliptic Variational Problems with Constraints*, Mem. Amer. Math. Soc., Bd. 4, No. 165 (1976)
- [AL] C.S. Aravinda, E. Leuzinger: *Bounded geodesics in rank-1 locally symmetric spaces*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **15** (1995), S.813-820
- [BBG] P. Bérard, G. Besson, S. Gallot: *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. **80** (1985), 295-308
- [Bea] A. F. Beardon: *The Geometry of Discrete Groups*, 2.Auflage, Springer (1995)
- [BC] I. Benjamini, J. Cão: *A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature*, Duke Math. J. **85** No.2 (1996), S. 359-396
- [Ber] M. Berger: *Geometry I,II*, Springer (1987)
- [Bes] A. L. Besse: *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer (1978)
- [Bla] W. Blaschke: *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit & Co, Leipzig (1916)
- [Bus] P. Buser: *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., ser.4, t. 15 (1982), S. 213-230
- [BZ] Y.D. Burago, V.A. Zalgaller: *Geometric Inequalities*, Springer (1988)
- [Ch1] I. Chavel; *Riemannian geometry: A modern introduction*, Cambridge University Press (1993)
- [Ch2] I. Chavel: *On A. Hurwitz' method in isoperimetric inequalities*, Proc. AMS **71**, 2 (1978), 275-279
- [Cro] C. B. Croke: *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), S.187-192
- [DS] A. Dinghas, E. Schmidt: *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n -dimensionalen euklidischen Raum*, Abh. Preuss.. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 7, (1944), S. 1-18
- [Fed] H. Federer: *Geometric Measure Theory*, Springer (1969)

- [GM] F. Giménez, V. Miquel: *Volume estimates for real hypersurfaces of a Kaehler manifold with strictly positive holomorphic sectional and antiholomorphic Ricci curvatures*, Pacific J. Math. **142** (1990), S. 23-39
- [Gra] A. Gray: *Comparison theorems for the volumes of tubes as generalizations of the Weyl tube formula*, Topology **21** (1982), S. 201-228
- [HHM] H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan: *The isoperimetric problem on surfaces*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), S. 430-439
- [HLP] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge University Press (1952)
- [HH] E. Heintze, H.-C. Im Hof: *Geometry of Horospheres*, J. Diff. Geom. **12** (1977) S. 481-491
- [He1] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press (1978)
- [He2] S. Helgason: *Groups and geometric analysis*, Academic Press (1984)
- [Hs1] W.-Y. Hsiang: *On the Laws of Trigonometries of Two-Point Homogeneous Spaces*, Ann. Global Anal. Geom. **7**, No.1 (1989), S. 29-45
- [Hs2] W.-Y. Hsiang: *On soap bubbles and isoperimetric regions in non-compact symmetric spaces, I*, Tohoku Math. J. **44** (1992), S. 151-175
- [HH] W. T. Hsiang, W.Y. Hsiang: *On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in non-compact symmetric spaces, I*, Invent. Math. **98** (1989), S. 39-58
- [Kel] O.D. Kellogg: *Foundations of potential theory*, Springer (1967)
- [Kle] B. Kleiner: *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** (1992), S. 37-47
- [Kni] G. Knieper: *On the asymptotic geometry of nonpositively curved manifolds* Geom. funct. anal. **7** (1997), S. 755-782
- [Mor] F. Morgan: *Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide*, Academic Press (1995)
- [MP] A. Martinez, J.D. Perez: *Real hypersurfaces in quaternionic projective space*, Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV **145** (1986), S. 355-384
- [MR] S. Montiel, A. Romero: *On some real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, Geometriae Dedicata **20** (1986), S. 245-261
- [Oku] M. Okumura: *On some real hypersurfaces of a complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), S. 355-364

- [OP] M. Ortega, J.D. Perez: *On the Ricci tensor of a real hypersurface of quaternionic hyperbolic space*, Manuscr. Math. **93** (1997), S. 49-57
- [Oss] R. Osserman: *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84**, No. 6 (1978), S. 1182-1238
- [Pan] P. Pansu: *Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **48**,1 (1998), S. 247-264
- [RR] M. Ritoré, A. Ros: *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms*, Comment. Math. Helv. **67** (1992) S. 293-305
- [San] L. A. Santaló: *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley (1976)
- [Sc1] E. Schmidt: *Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen*, Math. Z. **44** (1939) S. 689-788
- [Sc2] E. Schmidt: *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl*, Math. Z. **49** (1943/44) S. 1-109
- [Spi] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry*, 5 Bände, Publish or Perish (1999)
- [Wei] A. Weil: *Sur les surfaces à courbure négative*, C. R. Acad. Sci. **182** (1926), S. 1069-1071
- [Wol] J.A. Wolf: *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill (1967)

Lebenslauf

Thorsten Thies

30. April 1973 Geboren in Heidelberg

Schulbildung

1979-1983 Sankt-Wolfgang-Grundschule Regensburg
1983-1987 Von-Müller-Gymnasium Regensburg
1987-1992 Immanuel-Kant-Gymnasium Dortmund
Juni 1992 Abitur

Zivildienst

1993-1994 Individuelle Schwerstbehinderten-
Betreuung Karlsruhe

Studium

1992-1993 Technomathematik-Studium
an der Universität Karlsruhe
1994-1999 Studium der Mathematik
mit Nebenfach Informatik
an der Universität Karlsruhe
März 1999 Diplom

Berufstätigkeit

seit April 1999 Wissenschaftlicher Angestellter
am Mathematischen Institut II
der Universität Karlsruhe