Wachstumsabschätzungen für die Fouriertransformierte vektorwertiger Funktionen und deren Anwendung auf c_0-Halbgruppen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Volker Goersmeyer
aus Vaihingen/Enz

Tag der mündlichen Prüfung: 16.7.2003
Referent: Prof. Dr. Lutz Weis
Korreferent: HDoz. Dr. Peer Kunstmann

Karlsruhe
2003

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe. Mein herzlicher Dank geht an Herrn Prof. Dr. Lutz Weis für die Betreuung der Arbeit. Er hat das Thema angeregt und war immer erster Ansprechpartner für wissenschaftlichen Rat und Diskussion.

Ferner danke ich Herrn Dr. Peer Kunstmann für seine hilfreichen Ideen, die mich aus einigen gedanklichen Sackgassen führten und für die Übernahme des Korreferats.

Schließlich danke ich meinen Eltern, auf deren Unterstützung ich auf meinem ganzen bisherigen Lebensweg zählen konnte.

Karlsruhe, im Juli 2003 — Volker Goersmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Betrachten wir in einem Banachraum X das abstrakte Cauchyproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei A der Erzeuger einer c_0-Halbgruppe $T(t)$ ist, dessen Resolvente an der Stelle is wir mit $R(is, A)$ bezeichnen, so gilt für alle $x \in X$ die Formel

$$R(is, A)x = \int_0^\infty e^{-ist} T(t)x \, dt,$$

falls $\|T(t)\|$ für $t \to \infty$ gegen 0 strebt. Das bedeutet, daß die Funktion $s \mapsto R(is, A)x$ unter dieser Voraussetzung die Fouriertransformierte der Abbilung $t \mapsto \chi_{[0,\infty)}(t)T(t)x$ ist.

Erfüllt umgekehrt die Resolventenfunktion eine Abschätzung der Form

$$\|R(is, A)x\| \leq \frac{C}{|s|},$$

so stellen sich die Fragen, ob $T(t)x$ in einem geeigneten Sinn als inverse Fouriertransformierte von $s \mapsto R(is, A)x$ interpretiert werden kann und welche Wachstumseigenschaften diese inverse Fouriertransformierte - und damit das Halbgruppenorbit - besitzt.

Diese Dissertation beschäftigt sich speziell mit diesen und der allgemeineren Frage nach der Fouriertransformierten vektorwertiger Funktionen g, für die die Abbildungen $t \mapsto tg(t)$ beschränkt sind und deren Eigenschaften. Insbesondere sind wir an Wachstumsabschätzungen für diese Fouriertransformierten interessiert.

Bereits aus Ergebnissen von Zygmund ([Zy]) - formuliert in der Sprache der Besovräume - folgt, daß die Fouriertransformierte einer solchen Funktion im Raum $B_\infty^{0,\infty}$ liegt. Für skalarwertige Funktionen liegt die Fouriertransformierte sogar in BMO, dem Raum der Funktionen mit beschränkter mittlerer

Oszillation. Genauer gesagt ist die Fouriertransformation eine stetige lineare Abbildung vom Raum der Funktionen g mit $\sup_{t\in\mathbb{R}} |tg(t)| < \infty$ in den Raum BMO. Dieses Ergebnis geht zurück auf C. Fefferman. Der Schlüssel zu diesem Ergebnis ist die Hardyungleichung

$$\int \frac{|\hat{f}(t)|}{|t|}\, dt \leq C\, \|f\|_1 \quad (f \in L^1 \,\text{mit}\, \hat{f}(t) = 0 \,\text{für}\, t\ \leq 0),$$

aus der man das gewünschte Resultat durch "Dualisieren" gewinnen kann. Dabei macht man sich zunutze, daß der Dualraum des Hardyraums H^1 gerade mit dem Raum BMO identifiziert werden kann. Letzteres ist ein berühmter Satz von C. Fefferman ([Fe]).

Will man dieses Vorgehen nun auf den Fall vektorwertiger Funktionen übertragen, stößt man auf erhebliche Schwierigkeiten. Die beginnen damit, daß die Hardyungleichung im allgemeinen nicht mehr richtig ist, sondern nur in Banachräumen, die einen *nichttrivialen Fouriertyp* besitzen. Was darunter zu verstehen ist, wird in Abschnitt 1.6 erklärt.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daß verschiedene Definitionen des Hardyraums H^1, die im skalarwertigen Fall zusammenfallen, im vektorwertigen Fall zu unterschiedlichen Räumen führen. Der für das "Dualisieren" am besten geeignete ist der über atomare Zerlegungen definierte Raum. Mit der Definition dieses Raumes und einfachen Eigenschaften desselbigen beschäftigen wir uns in den ersten beiden Abschnitten von Kapitel 2. Dennoch kann der Dualraum dieses Hardyraums im vektorwertigen Fall nicht mit dem Raum der Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation identifiziert werden. Die Voraussetzung die das erst garantiert, ist die *Radon-Nikodym-Eigenschaft* des Dualraums des zugrundeliegenden Banachraums. Diese Feststellung ist O. Blasco ([Bl2]) zu verdanken. Blasco hat dabei die entsprechenden Funktionenräume auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$ betrachtet. Nachdem wir in den Abschnitten 2.3-2.5 den Raum der vektorwertigen Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation definiert und die vektorwertigen Fassungen wichtiger seiner Eigenschaften, inklusive der zentralen Ungleichungen von John und Nirenberg, vorgestellt haben, bringen wir in Abschnitt 2.6 die auf $\mathbb{R}$ übertragene Version des Satzes von Blasco.

Da man beim "Dualisieren" also auf das Problem stößt, daß der Dualraum von H^1_{at} im allgemeinen nicht mehr der Raum BMO ist, sondern nur noch ein Raum von Maßen, setzen wir in Abschnitt 2.8 explizit voraus, daß die Fouriertransformierte als Funktion existiert. Falls der zugrundeliegende Banachraum einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt, können wir mit Hilfe der

Hardyungleichung aus Abschnitt 2.7 beweisen, daß die Fouriertransformierte dann von beschränkter mittlerer Oszillation ist und ihre BMO-Norm nach oben durch $C\|t \mapsto tg(t)\|_\infty$ abgeschätzt werden kann.

Setzen wir nicht mehr voraus, daß der zugrundeliegende Banachraum einen nichttrivialen Fouriertyp hat, steht uns die Hardyungleichung nicht mehr zur Verfügung. Selbst wenn wir voraussetzen, daß die Fouriertransformierte durch eine Funktion darstellbar ist, können wir nur noch davon ausgehen, daß wir eine Abschätzung in der Norm des Besovraums $B_\infty^{0,\infty}$ bekommen. Wir werden in Abschnitt 3.3 eine nützliche Zerlegung von beschränkten Funktionen kennenlernen, von der ein Teil in $B_\infty^{0,\infty}$ liegt. Dieser Teil wird im letzten Kapitel gerade die Fouriertransformierte einer Funktion g mit $\|t \mapsto tg(t)\|_\infty < \infty$ sein. Zuerst werden aber im Abschnitt 3.1 der Raum $B_\infty^{0,\infty}$ und sein Partner $B_1^{0,1}$, der in gewissem Sinne in die Rolle schlüpfen wird, die in Kapitel 2 der Raum H_{at}^1 gespielt hat, eingeführt. Den Part der Atome übernehmen für $B_1^{0,1}$ die *speziellen Atome*. Genaueres hierzu ist in Abschnitt 3.2 zu erfahren.

Im letzten Kapitel werden wir die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte auf Betrachtungen zur Asymptotik von c_0-Halbgruppen und damit auf das asymptotische Verhalten von Lösungen des abstrakten Cauchyproblems (1) im Banachraum anwenden. Klassische Lösungen gibt es hier gerade dann, wenn die Anfangswerte x im Definitionsbereich des Halbgruppenerzeugers A liegen. Deren Verhalten für $t \to \infty$ ist unsere besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Nach einer kurzen Einführung zu c_0-Halbgruppen und deren wichtigsten Eigenschaften in Abschnitt 4.1 werden wir uns in den Abschnitten 4.2 und 4.3 mit Aussagen über das asymptotische Verhalten von Halbgruppenorbits unter der Voraussetzung befassen, daß diese von beschränkter mittlerer Oszillation sind. Man kann dies in Analogie zu einem wichtigen Resultat, das auf Datko und Pazy zurückgeht, sehen, das besagt, daß Orbits, die in einem Raum $L^p((0,\infty), X)$ liegen, für $t \to \infty$ gegen 0 konvergieren und daß eine c_0-Halbgruppe exponentiell stabil ist, wenn dies für alle Orbits gilt.

Von großer Bedeutung sind in der Theorie der c_0-Halbgruppen immer Sätze, die es erlauben, von Eigenschaften des Erzeugers einer Halbgruppe oder dessen Resolvente auf Eigenschaften der Halbgruppe oder deren Orbits zu schließen. Beispielsweise ist beim abstrakten Cauchyproblem ja der Operator A gegeben und die Lösung, also die Halbgruppe, und deren Eigenschaften sind das, worüber man gerne etwas wüßte.

Die Frage, ob aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolventenabbildung auf der rechten Halbebene die Stabilität der klassischen Lösungen des abstrakten Cauchyproblems folgt, war einige Jahre Gegenstand der Forschung. Zunächst wurden Lösungen unter verschiedenen Einschränkungen an den zugrundeliegenden Banachraum gefunden, bis schließlich L. Weis und V. Wrobel ([WeWr]) die Frage ganz allgemein positiv beantworten konnten.

Nun ist es so, daß aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolvente auf der rechten Halbebene folgt, daß $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|tR(it, A)x\| < \infty$ für alle x aus dem Definitionsbereich von A gilt. Die Fouriertransformierte der Abbildung $s \mapsto R(-is, A)x$ ist dann bis auf einen konstanten Faktor der Halbgruppenorbit $T(t)x$. Wir werden die abstrakten Ergebnisse aus Kapitel 2 und 3 auf diese Situation anwenden, womit sich ein neuer Zugang zum Beweis des Satzes von Weis und Wrobel eröffnen wird.

Dabei wird aus unserer Arbeit in Abschnitt 4.5 mit den Resultaten aus Kapitel 2 leicht das zunächst von Wrobel veröffentlichte Teilergebnis für Banachräume mit nichttrivialem Fouriertyp abfallen. In Abschnitt 4.6 stellen wir dann mit Hilfe der Aussagen aus Kapitel 3 einen neuen Beweis des Satzes von Weis und Wrobel dar. Unsere Herangehensweise ermöglicht uns darüberhinaus noch Aussagen für einzelne Orbits im Grenzfall $s_0(A) = 0$ zu machen, wobei $s_0(A)$ die Abszisse der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolvente des Erzeugers der Halbgruppe bedeuten soll.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Bezeichnungen und Konventionen

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien in dieser Arbeit die auftretenden Vektorräume stets Räume über $\mathbb{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen. Außerdem wollen wir - um etwaigen trivialen Sonderbetrachtungen aus dem Weg zu gehen - stillschweigend davon ausgehen, daß der jeweilige Vektorraum nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Ist X ein normierter Raum, so bezeichnen wir seine Norm mit $\|\cdot\|_X$ oder - wenn nicht von einer Verwechslungsgefahr auszugehen ist - schlicht mit $\|\cdot\|$. Den (topologischen) Dualraum eines topologischen Vektorraums X bezeichnen wir mit X^*. Ist $x \in X$ und $\varphi \in X^*$, so setzen wir

$$< x, \varphi > := < \varphi, x > := \varphi(x).$$

Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und X ein Banachraum, so verstehen wir unter $L^p(\Omega, \mu, X)$ für $1 \leq p \leq \infty$ den jeweiligen Bochnerraum. Integrale über Funktionen mit Werten in Banachräumen sind demnach als Bochnerintegrale aufzufassen (siehe hierzu [DiUh] für Definitionen und Eigenschaften). Ist μ das Lebesguemaß, so schreiben wir kurz $L^p(\Omega, X)$ für $L^p(\Omega, \mu, X)$. Im Fall $X = \mathbb{C}$ schreiben wir auch $L^p(\Omega)$ für $L^p(\Omega, X)$.

Für eine lebesguemeßbare Teilmenge M von $\mathbb{R}$ verstehen wir unter $|M|$ deren (Lebesgue-)Maß. Die *charakteristische Funktion* von M sei definiert durch

$$\chi_M(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad t \in M, \\ 0 & \text{falls} \quad t \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$$

Mit $C^\infty(\mathbb{R}, X)$ bezeichnen wir den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit Werten im Banachraum X. Mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$ bezeichnen wir den

Raum der Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}, X)$, die einen kompakten Träger haben. Für den Träger einer stetigen Funktion f schreiben wir auch kurz *supp* f. Im Spezialfall $X = \mathbb{C}$ setzen wir wiederum $C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, X)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$.

Definition 1.1.1 *Der Raum der schnell fallenden Funktionen, der auch als* ***Schwartzraum*** *bezeichnet wird, ist definiert durch*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}, X) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, X) \ : \ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|t^k f^{(n)}(t)\| < \infty \text{ für alle } n, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Im Fall $X = \mathbb{C}$ schreiben wir auch $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ statt $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Der Unterraum $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}, X)$ des Schwartzraums sei definiert durch

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}, X) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \ : \ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 0\}.$$

Auch hier schreiben wir im Fall $X = \mathbb{C}$ kurz $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ statt $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ein einfaches Lemma, das wir später benötigen werden, lautet:

Lemma 1.1.2 *Es sei $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $F(t) := \int_{-\infty}^t f(s)\, ds$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist auch F eine schnell fallende Funktion.*

Beweis. Aus der Definition von F folgt

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds - \int_t^\infty f(s)\, ds = 0 - \int_t^\infty f(s)\, ds$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Sei im weiteren $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest gewählt. Da f eine Schwartzfunktion ist, existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$|f(s)| \leq \frac{C}{|s|^{k+2}}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt. Damit haben wir für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq C \int_t^\infty \frac{1}{s^{k+2}}\, ds \\ &= \frac{C}{k+1} \left[-\frac{1}{s^{k+1}} \right]_t^\infty \\ &= \frac{D}{t^{k+1}} \end{aligned}$$

mit $D := C/(k+1)$. Für alle $t < 0$ gilt

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq (-1)^k C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s^{k+2}}\, ds \\ &= \frac{(-1)^k C}{k+1} \left[-\frac{1}{s^{k+1}} \right]_{-\infty}^{t} \\ &= \frac{D}{|t|^{k+1}}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{|t|\to\infty} |t^k F(t)| = 0,$$

und das bedeutet, daß F eine schnell fallende Funktion ist. □

Im letzten Kapitel werden (abgeschlossene) lineare Operatoren $A : X \supset D(A) \to X$ (X ein Banachraum) auftreten. Unter der *Resolventenmenge* eines solchen Operators verstehen wir die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $z - A$ den Raum $D(A)$ bijektiv nach X abbildet und die Inverse $R(z, A) := (z - A)^{-1}$ als Operator von X nach X stetig ist. Das Komplement der Resolventenmenge in $\mathbb{C}$ heißt *Spektrum* von A.

1.2 Reihen in Banachräumen

Absolut konvergente Reihen in einem Banachraum konvergieren bekanntlich unbedingt und der Wert von Doppelreihen ist der Wert der iterierten Summation, falls absolute Konvergenz dieser vorliegt. Etwas allgemeiner kann man auch sagen:

Satz 1.2.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$ seien $x_{j_1,...,j_n}$ Elemente des Banachraums X, und es gelte*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \|x_{j_1,\ldots,j_n}\| \right) \cdots \right) \right) < \infty.$$

Dann gelten für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{\varphi(k)}\| < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1,\ldots,j_n} \right) \cdots \right) \right).$$

Reihen von diesem Typ werden uns später im Zusammenhang mit dem atomaren Hardyraum H^1 begegnen. Der Satz, den wir dabei benötigen, folgt leicht aus obiger Aussage und lautet:

Satz 1.2.2 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$ seien $f_{j_1,...,j_n}$ Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}, X)$, und es gelte*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(... \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \|f_{j_1,...,j_n}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \right) ... \right) \right) < \infty.$$

Dann gelten für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{\varphi(k)}(t)\| < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\varphi(k)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(... \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} f_{j_1,...,j_n}(t) \right) ... \right) \right).$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$

Beweis. Wir setzen

$$g(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(... \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \|f_{j_1,...,j_n}(t)\| \right) ... \right) \right)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Beppo-Levi haben wir

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)| \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(... \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \|f_{j_1,...,j_n}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \right) ... \right) \right) < \infty.$$

Das bedeutet, daß g im Raum $L^1(\mathbb{R})$ liegt, und damit insbesondere $g(t) < \infty$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Aus Satz 1.2.1 folgen nun leicht die behaupteten Zusammenhänge. □

1.3 Die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

In diesem Abschnitt wollen wir ein paar Dinge zur Hardy-Littlewood-Maximalfunktion angeben. Die hier aufgeführten vektorwertigen Resultate folgen entweder aus den skalarwertigen Versionen oder können analog wie diese bewiesen werden, d.h. im wesentlichen durch Ersetzen von Betragsstrichen durch Normstriche. Die Beweise der skalarwertigen Versionen findet man in Büchern zur harmonischen Analysis wie [GaRu] (Abschnitt II.1) und [St] (Abschnitt I.3).

Definition 1.3.1 (Hardy-Littlewood-Maximalfunktion) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ sei lokal-integrierbar. Dann heißt die durch*

$$Mf(t) := \sup \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I \|f(s)\| \, ds \; : \; t \in I, \; I \text{ Intervall} \right\}$$

*für $t \in \mathbb{R}$ definierte Funktion Mf die **(Hardy-Littlewood-)Maximalfunktion** von f.*

*Den Operator $M : f \mapsto Mf$ nennen wir den **(Hardy-Littlewood-)Maximaloperator**.*

Die Funktion Mf ist stets nach unten halbstetig, so daß Mengen der Form $E_\alpha = \{t \in \mathbb{R} \; : \; Mf(t) > \alpha\}$ für $\alpha > 0$ offen sind. Die Zusammhangskomponenten offener Mengen sind in $\mathbb{R}$ natürlich Intervalle.

Mit Hilfe der Maximalfunktion kann man integrierbare Funktionen in einen beschränkten Teil und in einen Teil mit kleinem Mittel zerlegen.

Satz 1.3.2 *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ und $\alpha > 0$. Dann gilt für jede Zusammenhangskomponente I von $E_\alpha = \{t \in \mathbb{R} \; : \; Mf(t) > \alpha\}$ die Abschätzung*

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{|I|} \int_I \|f(t)\| \, dt \leq \alpha$$

Folglich gilt auch

$$|E_\alpha| \leq \frac{2}{\alpha} \int_{E_\alpha} \|f(t)\| \, dt.$$

Die Beschränktheit der Funktion auf $\mathbb{R} \backslash E_\alpha$ folgt dabei aus der Tatsache, daß die Maximalfunktion einer lokal-integrierbaren Funktion die Funktion majorisiert.

Satz 1.3.3 *Es sei $f : \mathbb{R} \to X$ eine lokal-integrierbare Funktion. Dann gelten für fast alle $t \in \mathbb{R}$*

a) $\displaystyle \frac{1}{2r} \int_{[t-r, t+r]} \|f(s) - f(t)\| \, ds \to 0$ *für* $r \to 0^+$;

b) $\displaystyle f(t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{[t-r, t+r]} f(s) \, ds$;

c) $\|f(t)\| \leq Mf(t)$.

1.4 Vektorwertige Distributionen

Wir geben in diesem Abschnitt die Definitionen und einige Eigenschaften von vektorwertigen Distributionen und temperierten Distributionen an. Die Beweise können jeweils analog zum skalaren Fall erbracht werden. Darstellungen zu Distributionen und temperierten Distributionen im skalarwertigen Fall findet man etwa in [Hö], [Pet], [Ho] und [Sch]. Kollektionen der Definitionen und Resultate ohne Beweise für den vektorwertigen Fall kann man [ABHN] (Anhang E) und [Am1] (Abschnitt III.4) entnehmen. Aus diesen Abschnitten der beiden letzten Büchern ist auch dieser Abschnitt zusammengestellt.

Die beiden Räume $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ seien mit ihren üblichen Topologien versehen. Ist X ein Banachraum, so besteht der Raum der vektorwertigen *Distributionen* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ aus den stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nach X. Der Raum der vektorwertigen *temperierten Distributionen* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ sei der Raum der stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach X. Eine temperierte Distribution ist immer auch eine Distribution. Wir setzen für eine Distribution bzw. temperierte Distribution f

$$< \varphi, f > := f(\varphi)$$

für φ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ bzw. aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Lokal-integrierbare Funktionen werden mit der durch

$$< \varphi, T_f > = \int \varphi(t) f(t)\, dt$$

definierten Distribution T_f identifiziert.

Liegt ϕ in $C^\infty(\mathbb{R})$ so ist das *Produkt* von ϕ und einer Distribution f erklärt durch

$$< \varphi, \phi \cdot f > = < \varphi \cdot \phi, f > \tag{1.1}$$

für φ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ϕf ist damit wieder eine Distribution. Ist ϕ zudem noch *langsam wachsend*, d.h., daß zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine Zahl $C_n > 0$ und eine Zahl $m_n \in \mathbb{N}$ existieren, so daß

$$\left| \frac{d\phi}{dt^n}(t) \right| \leq C_n (1 + |t|)^{m_n} \tag{1.2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, und ist f sogar eine temperierte Distribution, so wird durch die entsprechende Multiplikation (d.h. in (1.1) φ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) eine temperierte Distribution definiert.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die *n-te Ableitung* einer Distribution bzw. temperierten Distribution f, definiert durch

$$\left\langle \varphi, \frac{d^n f}{dt^n} \right\rangle = (-1)^n \left\langle \frac{d^n \varphi}{dt^n}, f \right\rangle,$$

wieder eine Distribution bzw. temperierte Distribution.

Die Faltung $g * f$ einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ ist definiert durch

$$g * f(t) := \int g(t-s) f(s)\, ds,$$

sofern das Integral existiert. Ist φ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, so setzen wir $\varphi_-(t) := \varphi(-t)$ und

$$\tau_s \varphi(t) := \varphi(t-s).$$

Die *Faltung* von φ mit einer temperierten Distribution f sei dann die Funktion

$$t \mapsto \varphi * f(s) :=< \tau_s(\varphi_-), f > .$$

$t \mapsto \varphi * f(s)$ ist unendlich oft differenzierbar und langsam wachsend im Sinne von (1.2), wobei der Betrag durch die Norm ersetzt wird. Damit ist $\varphi * f(s)$ auch eine temperierte Distribution.

Die so für Distributionen bzw. temperierte Distributionen definierten Operationen Multiplikation, Ableitung und Faltung sind mit den herkömmlichen konsistent, wenn Funktionen als Distributionen in obigem Sinne aufgefaßt werden.

1.5 Die Fouriertransformation

Die vektorwertige *Fouriertransformation* $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(s) := \hat{f}(s) := \int e^{-ist} f(t)\, dt \tag{1.3}$$

für $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Die *inverse Fouriertransformation* $\mathcal{F}^{-1}$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(s) := \check{f}(s) := \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}f)(-s)$$

für $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$.

Bezeichnet $C_0(\mathbb{R}, X)$ den Raum der stetigen Funktionen f von $\mathbb{R}$ in den Banachraum X mit

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0,$$

versehen mit der Supremumsnorm, so gilt:

Satz 1.5.1 (Riemann-Lebesgue) *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist eine stetige lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R}, X)$ nach $C_0(\mathbb{R}, X)$.*

Außerdem ist die Fouriertransformation eine bijektive, stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sich. Die Inverse dieser Abbildung ist gerade die oben definierte inverse Fouriertransformation auf diesem Raum. Somit können wir die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ definieren durch

$$< \varphi, \mathcal{F}f > := < \varphi, \hat{f} > := < \mathcal{F}\varphi, f >$$

für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Verstehen wir für $n \in \mathbb{N}_0$ unter s^n die langsam wachsende Funktion $s \mapsto s^n$, so gelten für die Fouriertransformierten der Ableitungen einer temperierten Distribution

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f}{ds^n}\right) = i^n s^n \mathcal{F}f$$

und für die Ableitungen der Fouriertransformierten einer temperierten Distribution

$$\frac{d^n \mathcal{F}f}{ds^n} = (-i)^n \mathcal{F}(s^n f)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so gilt für die Fouriertransformierte der Faltung

$$\mathcal{F}(\varphi * f) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(f).$$

Als Referenz für die in diesem Abschnitt aufgeführten Resultate sei auf die zu Beginn des vorigen Abschnitts angeführten Bücher für den skalar- und vektorwertigen Fall verwiesen.

1.6 Der Fouriertyp eines Banachraums

Versehen wir für eine Zahl $1 \leq p \leq 2$ den Raum $L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, X)$ mit der Norm von $L^p(\mathbb{R}, X)$, so liegt dieser dicht im Raum $L^p(\mathbb{R}, X)$. Für $X = \mathbb{C}$ ist die durch (1.3) definierte Fouriertransformation dann eine stetige lineare

Abbildung von $L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, X)$ in den Raum $L^q(\mathbb{R}, X)$, wobei q durch die Gleichung

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

definiert sein soll. Für beliebige Banachräume gilt dies zwar nach dem Satz von Riemann-Lebesgue immer noch im Fall $p = 1$, ist aber für $p > 1$ in der Regel falsch. Peetre ([Pe1]) führte deshalb den Begriff des *Fouriertyps* eines Banachraums ein.

Definition 1.6.1 *Der Banachraum X hat den* ***Fouriertyp*** $p \in [1, 2]$*, wenn eine Zahl $C_p > 0$ existiert, so daß für alle $f \in L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, X)$*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbb{R},X)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R},X)}$$

gilt. Dabei ist q definiert durch die Gleichung $1/q + 1/p = 1$.

Jeder Banachraum hat - es wurde bereits erwähnt - den Fouriertyp 1. Deshalb sprechen wir davon, daß ein Banachraum einen *nichttrivialen Fouriertyp* besitzt, wenn er einen Fouriertyp echt größer als 1 hat.

Definiert man den Fouriertyp eines Banachraums in analoger Weise für Fourierreihen von Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, dann hat ein Banachraum den Fouriertyp p in diesem Sinn genau dann, wenn er den Fouriertyp p in dem von uns definierten Sinn besitzt. Einen Beweis dieses Zusammenhangs findet man in [Kö].

Hat ein Banachraum den Fouriertyp p, so hat er auch jeden Fouriertyp $\tilde{p} \in [1, p]$. Hilberträume haben den Fouriertyp 2, denn hier gilt die *Plancherel-Gleichung* analog zum skalarwertigen Fall. Umgekehrt gilt: Hat ein Banachraum den Fouriertyp 2, so ist er isomorph zu einem Hilbertraum (Kwapień [Kw]). Von Bourgain wurde bewiesen, daß die Räume mit nichttrivialem Fouriertyp gerade die *B-konvexen* Räume sind ([Bo1], [Bo2]). Dabei gilt:

Definition 1.6.2 *Der Banachraum X ist* ***B-konvex*** *genau dann, wenn eine Zahl $p \in (1, 2]$ und eine Zahl $C > 0$ existieren, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_0, ..., x_n \in X$ die Ungleichung*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} r_k x_k \right\|_{L^2((0,1),X)} \leq C \left(\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

erfüllt ist. Dabei ist (r_k) die Folge der Rademacherfunktionen, d.h. $r_k(t) :=$ $\operatorname{sign}(\sin(2^k \pi t))$.

Hat X den Fouriertyp $p > 1$, so schreiben wir für die Fortsetzung der Fouriertransformation auf $L^p(\mathbb{R}, X)$ ebenfalls $\mathcal{F}$. Die Definition der Fouriertransformierten in diesem Sinne ist wiederum konsistent mit der Definition der Fouriertransformierten im Sinne temperierter Distributionen.

Eine gute Übersicht zum Thema Fouriertyp findet man im Artikel [GKKT].

Kapitel 2

Abschätzungen in $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ und $BMO(\mathbb{R}, X)$

Die Theorie der klassischen Hardyräume als Räume holomorpher Funktionen auf der Kreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wurde weitgehend in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts entwickelt. Ein wesentlicher Aspekt dieser Theorie ist die Charakterisierung von Eigenschaften der Funktionen durch Eigenschaften ihrer "Randfunktionen", insbesondere auch durch die zur Randfunktion gehörende Fourierreihe. Die Charakterisierung über bestimmte Eigenschaften der Randfunktionen rechtfertigen es, die Räume dieser auf $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ definierten Funktionen ebenfalls als Hardyräume zu bezeichnen. Einen guten Überblick zu diesem Themenkreis bietet das Buch von Duren ([Du]).

Analog dazu kann man Hardyräume von holomorphen Funktionen auf dem Halbraum $\{s+it : t > 0,\, s \in \mathbb{R}\}$ und die zugehörigen Hardyräume der Randfunktionen auf $\mathbb{R}$ betrachten. Burkholder, Gundy und Silverstein gelang es in [BuGuSi] die Hardyräume auf dem Halbraum als Räume harmonischer Funktionen zu charakterisieren. Sie ebneten so den Weg weg von den Methoden der komplexen Analysis hin zu Methoden der reellen Analysis. Einen weiteren Meilenstein zu setzen, gelang Fefferman mit der Identifzierung des Dualraums von H^1 mit dem Raum der Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation *BMO* auf $\mathbb{R}$ ([Fe], [FeSt]). Mit Hilfe dieser Charakterisierung des Dualraums erhält man leicht die sogenannte atomare Zerlegung von H^1-Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Möglichkeit der atomaren Zerlegung formulierte explizit Coifman in [Co] und gab einen konstruktiven Beweis dafür an.

Die erwähnte Burkholder-Gundy-Silverstein-Charakteriserung der Hardyräume holomorpher Funktionen, bzw. - was äquivalent dazu ist - harmonischer

Funktionen, deren jeweilige konjugierte Funktion bestimmte Eigenschaften erfüllt, durch Räume harmonischer Funktionen, deren sogenannte nichttangentiale Maximalfunktion in L^p liegt, bzw. deren Randfunktionen, gilt im allgemeinen nicht, wenn man Funktionen mit Werten in Banachräumen betrachtet. Siehe hierzu [Bl] für den Fall der Randfunktionen auf der Kreislinie $\mathbb{T}$.

Wir werden in diesem Kapitel den Hardyraum H^1 direkt als Raum von L^1-Funktionen, die eine atomare Zerlegung besitzen, definieren, was sich für unsere Zwecke als der nützlichste Zugang herausstellen wird.

2.1 Der Raum $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$

In diesem Abschnitt werden wir den atomaren Hardyraum $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ definieren und einige seiner Grundeigenschaften angeben. Die Definition der Atome erfolgt analog zum skalarwertigen Fall. Siehe dazu etwa die entsprechenden Abschnitten der Bücher [GaRu] und [St].

Definition 2.1.1 *a) Es sei $1 \le p < \infty$. Eine stark meßbare Funktion $a : \mathbb{R} \to X$ heißt **(p)-Atom**, falls es ein beschränktes Intervall I gibt, so daß gilt:*

(i) $\mathrm{supp}\ a \subset I$,

(ii) $\displaystyle \left(\frac{1}{|I|} \int_I \|a(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{|I|},$

(iii) $\displaystyle \int_I a(t)\, dt = 0.$

*b) Eine stark meßbare Funktion $a : \mathbb{R} \to X$ heißt **(∞)-Atom**, falls es ein beschränktes Intervall I gibt, so daß gilt:*

(i) $\mathrm{supp}\ a \subset I$,

(ii) $\displaystyle \|a\| \le \frac{1}{|I|},$

(iii) $\displaystyle \int_I a(t)\, dt = 0.$

Mit Hilfe der Definition der (∞)-Atome werden wir nun den Hardyraum $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ definieren. Im nächsten Abschnitt werden wir dann exemplarisch im Fall $p = 2$ zeigen, wie (p)-Atome in (∞)-Atome zerlegt werden können.

Definition 2.1.2 *Eine stark meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ liegt genau dann im **Hardyraum** $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$, wenn eine Folge komplexer Zahlen $(c_k)_{k=1}^\infty$ und eine Folge von (∞)-Atomen $(a_k)_{k=1}^\infty$ existieren, so daß*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty$ *und*

(ii) $\displaystyle f = \sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ *im Raum* $L^1(\mathbb{R}, X)$

gelten.

Wir schreiben auch H^1_{at} statt $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$, wenn keine Verwechslungsgefahr hinsichtlich des zugrundeliegenden Banachraums besteht.

Wir definieren die Norm im Raum $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ durch

$$\|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)} := \inf\left\{ \sum_{k=1}^\infty |c_k| \;:\; (c_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C},\ a_k\ (\infty)\text{−Atom für } k \in \mathbb{N} \text{ und } f = \sum_{k=1}^\infty c_k a_k \text{ in } L^1(\mathbb{R}, X) \right\}$$

Wir schreiben auch $\|\cdot\|_{H^1_{at}}$ statt $\|\cdot\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)}$, wenn keine Verwechslungsgefahr hinsichtlich des zugrundeliegenden Banachraums besteht.

Ist $(c_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty$ und $(a_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge von (∞)-Atomen, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ wegen

$$\|a_k\|_{L^1(\mathbb{R},X)} = \int_I \|a_k(t)\|\, dt \le |I| \cdot \frac{1}{|I|} = 1$$

offenbar stets absolut in $L^1(\mathbb{R}, X)$. Dabei ist in obiger Abschätzung I ein Intervall, das bezüglich a_k die Eigenschaften aus Definition 2.1.1 erfüllt. Darüberhinaus konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ auch punktweise fast überall im Raum X, denn es gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^\infty \|c_k a_k(t)\|\, dt = \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} \|c_k a_k(t)\|\, dt \le \sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty,$$

und so liegt die Funktion $t \mapsto \sum_{k=1}^\infty \|c_k a_k(t)\|$ in $L^1(\mathbb{R})$ und erfüllt damit insbesondere $\sum_{k=1}^\infty \|c_k a_k(t)\| < \infty$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Wir können also festhalten:

Bemerkung 2.1.3 *Ist* $(c_k)_{k=1}^\infty$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $\sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty$*,* $(a_k)_{k=1}^\infty$ *eine Folge von* (∞)*-Atomen und* $f : \mathbb{R} \to X$*, so sind*

(i) $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ *im Raum* $L^1(\mathbb{R}, X)$ *und*

(ii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ *punktweise fast überall.*

äquivalent. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty c_k a_k$ *konvergiert stets absolut im Raum* $L^1(\mathbb{R}, X)$ *und punktweise fast überall absolut im Raum* X*.*

Mit der üblichen Identifizierung von Funktionen, die fast überall übereinstimmen, stellt man unschwer fest, daß $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ ein Banachraum ist.

2.2 Zerlegung von (2)-Atomen in (∞)-Atome

Es ist leicht einzusehen, daß jedes (∞)-Atom für jedes $p \geq 1$ auch ein (p)-Atom ist. Andererseits liegen für jedes $p > 1$ alle (p)-Atome in H^1_{at}. Der folgende Satz beinhaltet diese Aussage im Fall $p = 2$. Er gilt entsprechend auch für andere $p > 1$. Wir benötigen im weiteren jedoch nur die Aussage für den Fall $p = 2$, und so wollen wir mit der Beschränkung auf diesen Fall den Aufwand für den ohnehin langen Beweis ein wenig eindämmen.

Der Beweis ist eine Anpassung des Beweises für den skalaren Fall aus [GaRu] (III.3.12).

Satz 2.2.1 *Es gibt eine Zahl* $C > 0$*, so daß für jedes* (2)*-Atom* a *eine Folge komplexer Zahlen* $(c_k)_{k=1}^\infty$ *und eine Folge von* (∞)*-Atomen* $(a_k)_{k=1}^\infty$ *mit*

(i) $a = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ *in* $L^1(\mathbb{R}, X)$ *und*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq C$

existieren.

Beweis. Es seien $a \neq 0$ ein beliebiges (2)-Atom und I das kleinste kompakte Intervall mit

(i) $\operatorname{supp} a \subset I$

(ii) $\left(\frac{1}{|I|}\int_I \|a(t)\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{|I|}$

(iii) $\int_I a(t)\, dt = 0$

Setzen wir $b(t) := |I|\, a(t)$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\|b\|^2_{L^2(\mathbb{R},X)} = |I|^2\, \|a\|^2_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq |I|^2 \frac{1}{|I|} = |I| \tag{2.1}$$

Den Mittelpunkt eines kompakten Intervalls J bezeichnen wir im weiteren mit m_J und setzen

$$J^2 := [m_J - |J|, m_J + |J|].$$

Für $\alpha > 0$ definieren wir

$$U_\alpha := \{t \in \mathbb{R} \;:\; M[\|b(\cdot)\|^2](t) > \alpha^2\}.$$

Dabei sei M der Maximaloperator aus Abschnitt 1.3. Mit Hilfe der Abschätzung (2.1) und der Definition des Maximaloperators ist leicht einzusehen, daß für alle $\alpha \geq \sqrt{2}$ die Mengeninklusion

$$U_\alpha \subset I^2 \tag{2.2}$$

gilt. Wir setzen im weiteren zunächst $\alpha \geq \sqrt{2}$ voraus. Es sei $\{I_j\}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten der offenen Menge U_α. Nach Satz 1.3.2 gilt

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \|b(t)\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha. \tag{2.3}$$

Wir setzen

$$g_0(t) := \begin{cases} b(t)\,, & t \notin U_\alpha; \\ \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} b(s)\, ds\,, & t \in I_j \end{cases}$$

und

$$h_j(t) := \begin{cases} b(t) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} b(s)\, ds\,, & t \in I_j \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten $b(t) = g_0(t) + \sum_j h_j(t)$ und

$$\|g_0(t)\| \leq \alpha \tag{2.4}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Abschätzung (2.4) folgt dabei für $t \notin U_\alpha$ aus Satz 1.3.3 c) und für $t \in I_j$ aus der Jensenschen Ungleichung (siehe z.B. [El] VI.1.3) und Abschätzung (2.3).

g_0 erfüllt damit

(i) supp $g_0 \subset I^2$ wegen $U_\alpha \subset I^2$ und supp $b \subset I \subset I^2$;

(ii) $\|g_0\|_\infty \leq \alpha$ wegen (2.4);

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_0(t)\,dt = 0$ wegen $U_\alpha = \sum I_j$.

Deshalb ist die Funktion a_0, definiert durch

$$a_0(t) := \frac{1}{2\alpha|I|} g_0(t) = \frac{1}{\alpha|I^2|} g_0(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

ein (∞)-Atom.

Mit (2.3) und (2.4) können wir desweiteren wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \|h_j(t)\|\,dt &\leq \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \|h_j(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \|b(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \|g_0(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \alpha + \alpha = 2\alpha. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wir setzen nun $b_j(t) = \dfrac{1}{2\alpha} h_j(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Die so definierte Funktion hat die Eigenschaften

(i) supp $b_j \subset I_j$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} b_j(t)\,dt = 0$;

(iii) $\|b_j\|^2_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq |I_j|$ wegen (2.6).

Diese - und nur diese - Eigenschaften der Funktion b haben wir aber gerade benutzt, um die Intervalle I_j und die Funktionen a_0, g_0 und h_j mit ihren entsprechenden Eigenschaften zu konstruieren.

Wenn wir $b_{()} := b$ und $I_{()} := I$ für das leere Indextupel () setzen, können wir für $n \in \mathbb{N}_0$ also induktiv folgende Definitionen machen:

(i) $U_\alpha(j_0,...,j_{n-1}) := \{t \in \mathbb{R} \;:\; M[\|b_{j_0,\dots,j_{n-1}}\|^2](t) > \alpha^2\}$.

(ii) $I_{j_0,\dots,j_n}$ seien die Zusammenhangskomponenten von $U_\alpha(j_0,...,j_{n-1})$.

(iii) $$g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t) := \begin{cases} b_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t), & t \notin U_\alpha(j_0,...,j_{n-1}); \\ \dfrac{1}{|I_{j_0,\dots,j_n}|}\displaystyle\int_{I_{j_0,\dots,j_n}} b_{j_0,\dots,j_{n-1}}(s)\,ds, & t \in I_{j_0,\dots,j_n}. \end{cases}$$

(iv) $$h_{j_0,\dots,j_n}(t) := \begin{cases} b_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t) - g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t)\ , & t \in I_{j_0,\dots,j_n}; \\ 0\ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

(v) $$a_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t) := \frac{1}{2\alpha|I_{j_0,\dots,j_{n-1}}|} g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t) = \frac{1}{\alpha|I^2_{j_0,\dots,j_{n-1}}|} g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t).$$

(vi) $$b_{j_0,\dots,j_n}(t) := \frac{1}{2\alpha} h_{j_0,\dots,j_n}(t).$$

Die Indizes j_k sind dabei Elemente einer geeignente Indexmenge $\subset \mathbb{N}$. $g_{()}$ entspricht dem bisherigen g_0, $a_{()}$ dem bisherigen a_0 und der Index j_0 entspricht dem bisher verwendeten j.

Die so definierten Intervalle $I_{j_0,j_1,\dots,j_n}$ und Funktionen $a_{j_0,\dots,j_{n-1}}$, $g_{j_0,\dots,j_{n-1}}$, $h_{j_0,j_1,\dots,j_n}$ und $b_{j_0,j_1,\dots,j_n}$ besitzen Eigenschaften analog zu $I_{j_0}, a_0, g_0, h_{j_0}$ und b_{j_0}.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} b(t) &= g_0(t) + \sum_{j_0} h_{j_0}(t) \\ &= g_0(t) + 2\alpha \sum_{j_0} \left(g_{j_0}(t) + \sum_{j_1} h_{j_0,j_1}(t) \right) \\ &= \dots \qquad\qquad (2.7) \\ &= g_0(t) + 2\alpha \sum_{j_0} \left(g_{j_0}(t) + 2\alpha \sum_{j_1} \left(g_{j_0,j_1}(t) + 2\alpha \sum_{j_2} \left(g_{j_0,j_1,j_2}(t) + \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. \dots +\ 2\alpha \sum_{j_{n-1}} \left(g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t) + \sum_{j_n} h_{j_0,\dots,j_n}(t) \right) \dots \right) \right) \right) . \end{aligned}$$

Es gilt die Ungleichung (vgl. (2.3))

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \le \left(\frac{1}{|I_{j_0,\dots,j_n}|} \int_{I_{j_0,\dots,j_n}} \|b_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t)\|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \alpha \qquad (2.8)$$

woraus insbesondere

$$|U_\alpha(j_0,...,j_{n-1})| \leq \frac{2}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}} \|b_{j_0,...,j_{n-1}}(t)\|^2\,dt \tag{2.9}$$

folgt. Desweiteren haben wir (vgl. (2.6) und beachte supp $h_{j_0,...,j_n} \subset I_{j_0,...,j_n}$)

$$\int_{\mathbb{R}} \|h_{j_0,...,j_n}(t)\|\,dt \leq 2\alpha\cdot|I_{j_0,...,j_n}|. \tag{2.10}$$

Nun können wir wie folgt abschätzen

$$(2\alpha)^n \sum_{j_0,...,j_n}\int_{\mathbb{R}} \|h_{j_0,...,j_n}(t)\|\,dt$$

$$\overset{(2.10)}{\leq} (2\alpha)^{n+1}\sum_{j_0,...,j_n}|I_{j_0,...,j_n}| \tag{2.11}$$

$$= (2\alpha)^{n+1}\sum_{j_0,...,j_{n-1}}|U_\alpha(j_0,...,j_{n-1})|$$

($I_{j_0,...,j_n}$ sind die Zusammenhangskomponenten von $U_\alpha(j_0,...,j_{n-1})$)

$$\overset{(2.9)}{\leq} (2\alpha)^{n+1}\cdot\frac{2}{\alpha^2}\cdot\sum_{j_0,...,j_{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\|b_{j_0,...,j_{n-1}}(t)\|^2\,dt$$

$$\leq (2\alpha)^{n+1}\cdot\frac{2}{\alpha^2}\cdot\sum_{j_0,...,j_{n-1}}|I_{j_0,...,j_{n-1}}| \tag{2.12}$$

(Definition von $b_{j_0,...,j_{n-1}}$)

$$\overset{(2.11)\to(2.12)}{\leq} (2\alpha)^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^2\sum_{j_0,...,j_{n-2}}|I_{j_0,...,j_{n-2}}|$$

$$\overset{(2.11)\to(2.12)}{\leq} ...$$

$$\overset{(2.11)\to(2.12)}{\leq} (2\alpha)^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^n\cdot\sum_{j_0}|I_{j_0}|$$

$$\overset{(2.11)\to(2.12)}{\leq} (2\alpha)^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^{n+1}\cdot|I|$$

$$= \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{n+1}\cdot|I|. \tag{2.13}$$

Wir haben also

$$(2\alpha)^n \sum_{j_0,\dots,j_n} \int_{\mathbb{R}} \|h_{j_0,\dots,j_n}(t)\|\, dt \le \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{n+1} |I|. \tag{2.14}$$

Beachtet man, daß nach der Definition von $g_{j_0,\dots,j_{n-1}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} g_{j_0,\dots,j_{n-1}} &\subset (\operatorname{supp}(b_{j_0,\dots,j_{n-1}}) \backslash U_\alpha(j_0,\dots,j_{n-1})) \cup U_\alpha(j_0,\dots,j_{n-1}) \\ &\subset I^2_{j_0,\dots,j_{n-1}} \end{aligned}$$

wegen

$$\operatorname{supp} b_{j_0,\dots,j_{n-1}} \subset I_{j_0,\dots,j_{n-1}}$$

und

$$U_\alpha(j_0,\dots,j_{n-1}) \subset I^2_{j_0,\dots,j_{n-1}} \quad \text{vgl. (2.2)}$$

gilt und daß außerdem

$$\|g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t)\| \le \alpha \quad \text{vgl. (2.4)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, dann sieht man

$$\|g_{j_0,\dots,j_{n-1}}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} = \int_{I^2_{j_0,\dots,j_{n-1}}} \|g_{j_0,\dots,j_{n-1}}(t)\|\, dt \le 2\alpha |I_{j_0,\dots,j_{n-1}}| \tag{2.15}$$

ein.

Mit einer solchen Eigenschaft von $h_{j_0,\dots,j_n}$ (vgl. (2.10)) ist es uns gelungen (2.14), zu beweisen. Wir erhalten demnach analog die Abschätzung

$$(2\alpha)^n \sum_{j_0,\dots,j_{n-1}} \|g_{j_0,\dots,j_{n-1}}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \le 2\alpha \cdot \left(\frac{4}{\alpha}\right)^n |I|. \tag{2.16}$$

Mit (2.14) und (2.16) folgt aus (2.7)

$$\begin{aligned} b &= g_0 + 2\alpha \sum_{j_0} g_{j_0} + \dots + (2\alpha)^n \sum_{j_0,\dots,j_{n-1}} g_{j_0,\dots,j_{n-1}} \\ &\quad + (2\alpha)^n \sum_{j_0,\dots,j_n} h_{j_0,\dots,j_n} \end{aligned} \tag{2.17}$$

mit absoluter Konvergenz der Reihen in $L^1(\mathbb{R}, X)$ (Man beachte Satz 1.2.1).

Bisher hatten wir an α allein die Anforderung $\alpha \ge \sqrt{2}$ gestellt. Für $\alpha > 4$ erhalten wir aus (2.14) und (2.17)

$$b = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((2\alpha)^n \sum_{j_0,\dots,j_{n-1}} g_{j_0,\dots,j_{n-1}} \right) \tag{2.18}$$

in $L^1(\mathbb{R}, X)$. Wir setzen nun

$$c_{j_0,\dots,j_{n-1}} := 2\alpha \cdot (2\alpha)^n \cdot |I_{j_0,\dots,j_{n-1}}| \cdot \frac{1}{|I|}$$

und $c_0 := c_{()} = 2\alpha$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_0,\dots,j_{n-1}} |c_{j_0,\dots,j_{n-1}}| \right) &\overset{(2.11)\to(2.13)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\alpha \cdot (2\alpha)^n \cdot \left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^n \cdot |I| \cdot \frac{1}{|I|} \right) \\ &= 2\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\alpha}\right)^n < \infty \qquad (2.19)\end{aligned}$$

für $\alpha > 4$. Wir erinnern uns an die Definition der (∞)-Atome $a_{j_0,\dots,j_{n-1}}$ und erhalten aus (2.18)

$$a = \frac{1}{|I|} \cdot b = c_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j_0,\dots,j_{n-1}} c_{j_0,\dots,j_{n-1}} a_{j_0,\dots,j_{n-1}} \right) \qquad (2.20)$$

Beachtet man nun noch, daß die Norm eines (∞)-Atoms in $L^1(\mathbb{R}, X)$ stets kleiner oder gleich 1 ist, so ist der Beweis wegen (2.19) und Satz 1.2.1 komplett. □

2.3 Der Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$

Der Begriff einer Funktion von beschränkter mittlerer Oszillation geht zurück auf John und Nirenberg ([JoNi]). Bestimmte singuläre Integraloperatoren bilden zwar nicht L^∞ nach L^∞ ab, aber Funktionen aus L^∞ auf Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Den Bogen zum Hardyraum H^1 schlug Fefferman ([Fe], [FeSt]), der den Raum der Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation im skalarwertigen Fall als Dualraum von H^1 identifizieren konnte.

Definition 2.3.1 *a) Für ein beschränktes Intervall I und eine Abbildung $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ setzen wir $f_I := \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt$.*

b) Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ setzen wir

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} := \sup_{I \text{ Intervall}} \frac{1}{|I|} \int_I \|f(t) - f_I\|\, dt.$$

c) $\mathcal{BMO}(\mathbb{R}, X) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X) \ : \ \|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} < \infty \right\}$

d) $BMO(\mathbb{R}, X) := (\mathcal{BMO}(\mathbb{R}, X)/_{\|\cdot\|_{BMO(\mathbb{R},X)}=0})$.

Man sieht leicht ein, daß die Funktionen mit

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} = 0$$

gerade die Funktionen sind, die fast überall konstant sind. Elemente von $BMO(\mathbb{R}, X)$ werden wir künftig auch als Funktionen auffassen, indem wir stillschweigend einen Vertreter herausnehmen und uns im Klaren darüber sind, daß die Differenz zweier Vertreter derselben Äquivalenzklasse fast überall gleich einer Konstanten ist.

Wie im skalarwertigen Fall beweist man nachstehende Charakterisierung von Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Siehe etwa [CoWe] (Beweis zu Lemma 3.14).

Satz 2.3.2 *Es seien $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ und $C > 0$. Existiert zu jedem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ein Element $x_I \in X$ mit*

$$\frac{1}{|I|} \int_I \|f(t) - x_I\| \, dt \leq C,$$

so liegt f in $BMO(\mathbb{R}, X)$, und es gilt

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq 2C.$$

Ist f aus $BMO(\mathbb{R}, X)$, so folgt aus der Ungleichung

$$|\, \|f(t)\| - \|f_I\| \,| \leq \|f(t) - f_I\|$$

für jedes beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und jedes $t \in I$ und aus Satz 2.3.2 sofort, daß die Funktion $t \mapsto \|f(t)\|$ in $BMO(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt.

2.4 Wachstum der Mittel von BMO-Funktionen

Beschränkte Funktionen sind offenbar von beschränkter mittlerer Oszillation. Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Das klassische Beispiel für eine unbeschränkte BMO-Funktion ist im skalarwertigen Fall die Abbildung $t \mapsto \log |t|$ (Siehe etwa [GaRu] (Cor. II.3.5)). Beim Betrachten des folgenden Satzes behalten wir dieses Beispiel im Hinterkopf.

Satz 2.4.1 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle Funktionen $f \in BMO(\mathbb{R},X)$ und alle $t > 0$ die Ungleichung*

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\left\|f(s)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)\,du\right\|ds \leq C(1+|\log t|)\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \tag{2.21}$$

erfüllt ist.

Insbesondere gilt für alle $f \in BMO(\mathbb{R},X)$

$$\sup_{t>0} t^{-1}(1+|\log t|)^{-1}\int_{-t}^{t}\|f(s)\|\,ds < \infty. \tag{2.22}$$

Beweis. Für $t > 0$ sei $K = K(t)$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $|\log t| + 1$. Außerdem setzen wir $a = a(t) := e^{(\log t)/K}$. Dann gelten $a^K = t$ und

$$-1 = \frac{-|\log t|}{|\log t|} \leq \frac{-|\log t|}{K} \leq \frac{\log t}{K} \leq \frac{|\log t|}{K} \leq 1.$$

Folglich haben wir $e^{-1} \leq a \leq e$. Für $f \in BMO(\mathbb{R},X)$ setzen wir

$$f_k := \frac{1}{2a^k}\int_{-a^k}^{a^k} f(s)\,ds$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $a \geq 1$ können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|f_{k+1}-f_k\| &= \frac{1}{2a^k}\left\|\int_{-a^k}^{a^k} f(s)-f_{k+1}\,ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{2a^k}\int_{-a^k}^{a^k}\|f(s)-f_{k+1}\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2a^k}\int_{-a^{k+1}}^{a^{k+1}}\|f(s)-f_{k+1}\|\,ds \\
&\leq a\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq e\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}.
\end{aligned}$$

Falls $a < 1$ ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\|f_{k+1}-f_k\| &= \frac{1}{2a^{k+1}}\left\|\int_{-a^{k+1}}^{a^{k+1}} f(s)-f_k\,ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{2a^{k+1}}\int_{-a^{k+1}}^{a^{k+1}}\|f(s)-f_k\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2a^{k+1}}\int_{-a^k}^{a^k}\|f(s)-f_k\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{a}\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq e\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}.
\end{aligned}$$

In jedem Fall gilt demnach

$$\|f_{k+1} - f_k\| \le e\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}. \tag{2.23}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Außerdem haben wir noch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s) - f_0\|\,ds &= \frac{1}{2a^K}\int_{-a^K}^{a^K} \|f(s) - f_0\|\,ds \\ &\le \frac{1}{2a^K}\int_{-a^K}^{a^K} \|f(s) - f_K\|\,ds + \|f_K - f_0\|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Schließlich gilt zum einen

$$\frac{1}{2a^K}\int_{-a^K}^{a^K} \|f(s) - f_K\|\,ds \le \|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \tag{2.25}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \|f_K - f_0\| &\le \sum_{k=0}^{K-1} \|f_{k+1} - f_k\| \\ &\overset{(2.23)}{\le} Ke\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Mit (2.25) und (2.26) erhalten wir aus (2.24) die Abschätzung

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s) - f_0\|\,ds \le (Ke + 1)\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}.$$

Aufgrund der Definition von K gilt demnach

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s) - f_0\|\,ds \le (e|\log t| + e + 1)\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}.$$

Damit ist (2.21) bewiesen. (2.22) gewinnt man aus (2.21) mit der Dreiecksungleichung. □

Der Beweis von Satz 2.4.1 ist inspiriert durch den Beweis in [FeSt] dafür, daß für eine Funktion $f \in BMO(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty$$

gilt. Mit Hilfe von Satz 2.4.1 läßt sich diese Aussage folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 2.4.2 *Ist $f \in BMO(\mathbb{R}, X)$ und $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k 2^k g(2^k) < \infty,$$

dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\| g(|t|)\, dt < \infty. \tag{2.27}$$

Beweis. Es gilt

$$\int_{|t|\geq 1} \|f(t)\| g(|t|)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \leq |t| \leq 2^{k+1}} \|f(t)\| g(|t|)\, dt. \tag{2.28}$$

Aus Satz 2.4.1 und der Monotonie von g ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{2^k \leq |t| \leq 2^{k+1}} \|f(t)\| g(|t|)\, dt &\leq g(2^k) \int_{|t| \leq 2^{k+1}} \|f(t)\|\, dt \\ &\leq C g(2^k) 2^{k+1} (1 + (k+1) \log 2). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Mit der Voraussetzung $\sum_{k=0}^{\infty} k 2^k g(2^k) < \infty$ folgt aus (2.28) und (2.29) die Endlichkeit des Integrals (2.27). □

Wie für den Fall $p = 2$ bereits angedeutet, wird durch $g(t) := 1/(1 + t^p)$ für $p > 1$ eine Funktion definiert, die den Voraussetzungen von Satz 2.4.2 genügt.

2.5 Die Ungleichungen von John und Nirenberg

Zu den wichtigsten Sätzen in der Theorie der Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation gehören zweifellos die von John und Nirenberg in [JoNi] erstmals vorgestellten Resultate, denen wir in diesem Abschnitt in ihren vektorwertigen Fassungen begegnen werden. Sowohl zu Satz 2.5.1 als auch zu Korollar 2.5.2 wird in der Literatur als *John-Nirenberg-Ungleichung* referenziert. Die Beweise in diesem Abschnitt stammen aus [GaRu] (Theorem II.3.8 und Corollary II.3.10) und wurden für den von uns betrachteten vektorwertigen Fall angepaßt.

Satz 2.5.1 *Es existieren Zahlen $C_1, C_2 > 0$, so daß für alle $f \in BMO(\mathbb{R}, X)$, alle beschränkten Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ und alle $s > 0$*

$$|\{t \in I \;:\; \|f(t) - f_I\| > s\}| \leq C_1 e^{-(C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})s} \cdot |I| \tag{2.30}$$

gilt.

Beweis. Offenbar können wir uns auf den Fall $\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} = 1$ beschränken. Sei $I = (a,b]$ mit beliebigen reellen Zahlen $a < b$ und α eine feste Zahl echt größer als 1. Dann gilt

$$\frac{1}{|I|}\int_I \|f(t) - f_I\|\,dt \le 1 < \alpha. \tag{2.31}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0, ..., 2^n - 1$ sei

$$I_{n,k} := (a + (b-a)k2^{-n}, a + (b-a)(k+1)2^{-n}].$$

$\mathcal{I}_n$ sei die Familie dieser dyadischen Teilintervalle von $(a,b]$ der Länge $2^{-n}(b-a)$, also

$$\mathcal{I}_n := \{I_{n,k} \,:\, k = 0, ..., 2^n - 1\}.$$

Mit $\mathcal{I}$ bezeichnen wir die Familie all dieser dyadischen Teilintervalle von $(a,b]$, also

$$\mathcal{I} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{I}_n.$$

$\mathcal{J}_1$ sei die Familie aller $J \in \mathcal{I}$ mit der Eigenschaft:

$$\frac{1}{|J|}\int_J \|f(t) - f_I\|\,dt > \alpha, \tag{2.32}$$

und es existiert kein Intervall in $\mathcal{I}$, das J als echte Teilmenge enthält und (2.32) erfüllt. Die höchstens abzählbar vielen Elemente von $\mathcal{J}_1$ bezeichnen wir auch mit $J_{1,l}$ und unterscheiden sie durch den Index l.

Jedes J aus $\mathcal{J}_1$ hat aufgrund der Definition und wegen (2.31) die Länge $(b-a)2^{-n}$ mit geeignetem $n \ge 1$. Ist nun $\tilde{J}$ das (eindeutig bestimmte) Element von $\mathcal{I}_{n-1}$, das J enthält, so gilt aufgrund der Definition von $\mathcal{J}_1$

$$\frac{1}{|J|}\int_J \|f(t) - f_I\|\,dt \le \frac{2}{|\tilde{J}|}\int_{\tilde{J}} \|f(t) - f_I\|\,dt \le 2\alpha.$$

Mit (2.32) haben wir also

$$\alpha < \frac{1}{|J|}\int_J \|f(t) - f_I\|\,dt \le 2\alpha \tag{2.33}$$

für alle $J \in \mathcal{J}_1$. Aus Satz 1.3.3 b) erhält man leicht

$$\|f(t) - f_I\| \le \alpha \tag{2.34}$$

für fast alle $t \in I \backslash \bigcup_{J\in\mathcal{J}_1} J$. Aus (2.33) folgt überdies sofort

$$\|f_J - f_I\| \le 2\alpha \tag{2.35}$$

für alle $J \in \mathcal{J}_1$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\sum_{J\in\mathcal{J}_1} |J| &\overset{(2.33)}{\leq} \frac{1}{\alpha}\sum_{J\in\mathcal{J}_1}\int_J \|f(t)-f_I\|\,dt \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\int_I \|f(t)-f_I\|\,dt\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{J\in\mathcal{J}_1} |J| \leq \frac{1}{\alpha}|I|. \tag{2.36}$$

Machen wir nun die gerade für I durchgeführte Zerlegung genauso für jedes feste $J_{1,l}$ aus $\mathcal{J}_1$, so erhalten wir eine Familie $\mathcal{J}_{1,l}$ dyadischer Teilintervalle von $J_{1,l}$ mit

$$\|f_J - f_{J_{1,l}}\| \leq 2\alpha \tag{2.37}$$

für alle $J \in \mathcal{J}_{1,l}$,

$$\|f(t) - f_{J_{1,l}}\| \leq \alpha \tag{2.38}$$

für fast alle $t \in J_{1,l}\backslash\bigcup_{J\in\mathcal{J}_{1,l}} J$ und

$$\sum_{J\in\mathcal{J}_{1,l}} |J| \leq \frac{1}{\alpha}|J_{1,l}|. \tag{2.39}$$

Mit $\mathcal{J}_2$ bezeichnen wir die Vereinigung der $\mathcal{J}_{1,l}$. Die höchstens abzählbar vielen Elemente von $\mathcal{J}_2$ unterscheiden wir wieder mit einem Index und bezeichnen sie mit $J_{2,l}$. Für fast alle $t \in I\backslash\bigcup_{J\in\mathcal{J}_2} J$ gilt

$$\begin{aligned}\|f(t)-f_I\| &\leq \|f(t)-f_{J_{1,l}}\| + \|f_{J_{1,l}} - f_I\| \\ &\overset{(2.38),(2.35)}{\leq} \alpha + 2\alpha,\end{aligned}$$

also insbesondere

$$\|f(t) - f_I\| \leq 2\cdot 2\alpha. \tag{2.40}$$

Aus (2.39) und (2.36) folgt überdies

$$\sum_l |J_{2,l}| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 |I|. \tag{2.41}$$

Induktiv erhalten wir auf diese Weise zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Familie $\mathcal{J}_m$ paarweise disjunkter Intervalle $J_{m,l}$ mit

$$\|f(t) - f_I\| \leq m\cdot 2\alpha. \tag{2.42}$$

für fast alle $t \in I \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{J}_m} J$ und

$$\sum_l |J_{m,l}| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m |I|. \tag{2.43}$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Zahl s mit

$$m \cdot 2 \cdot \alpha \leq s < (m+1) \cdot 2 \cdot \alpha$$

gilt damit

$$\begin{aligned} |\{t \in I \,:\, \|f(t) - f_I\| > s\}| &\overset{(2.42)}{\leq} \sum_l |J_{m,l}| \\ &\overset{(2.43)}{\leq} \alpha^{-m}|I| \\ &= e^{-m \log \alpha}|I|. \end{aligned}$$

Wegen $s < (m+1) \cdot 2 \cdot \alpha \leq 4 \cdot m \cdot \alpha$ haben wir aber

$$-m \log \alpha \leq -s \cdot \frac{\log \alpha}{4\alpha},$$

und mit der Festsetzung

$$C_2 := \frac{\log \alpha}{4\alpha}$$

ist

$$|\{t \in I \,:\, \|f(t) - f_I\| > s\}| \leq e^{-C_2 s}|I|$$

gezeigt.

Falls $s < 2\alpha$ ist, gilt

$$C_2 \cdot s < \frac{\log \alpha}{2}$$

und damit trivialerweise

$$|\{t \in I \,:\, \|f(t) - f_I\| > s\}| \leq |I| < e^{(\log(\alpha)/2) - C_2 s}|I|.$$

Setzen wir noch $C_1 := \sqrt{\alpha}$, so ist (2.30) bewiesen. $\square$

Ist $f : \mathbb{R} \to X$ eine lokal-integrierbare Funktion und $p > 1$ mit

$$\sup_{I \text{ beschr. Intervall}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \|f(t) - f_I\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

so folgt aus der Jensenschen Ungleichung, daß f in $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegt. Aus dem vorangegangenen Satz folgt, daß auch die Umkehrung gilt.

Korollar 2.5.2 *a) Zu jedem $p \in (0,\infty)$ existiert eine Zahl $C_p > 0$ mit*

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,BMO(\mathbb{R},X)} &:= \sup_{I \text{ beschr. Intervall}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \|f(t) - f_I\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_p \|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \end{aligned}$$

für alle $f \in BMO(\mathbb{R},X)$. Das heißt insbesondere, daß die Normen $\|\cdot\|_{p,BMO(\mathbb{R},X)}$ und $\|\cdot\|_{BMO(\mathbb{R},X)}$ für jedes $p \in (1,\infty)$ äquivalent sind.

b) Es existiert eine Zahl $C > 0$, so daß für alle $f \in BMO(\mathbb{R},X)$ und für alle $s \in (0, C/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})$

$$\sup_{I \text{ beschr. Intervall}} \frac{1}{|I|} \int_I e^{s\|f(t)-f_I\|} \, dt < \infty$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten jeweils nur den nichttrivialen Fall $\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} > 0$. I sei ein beliebiges beschränktes Teilintervall von $\mathbb{R}$. Wir setzen $g(t) := \|f(t) - f_I\|$ für $t \in \mathbb{R}$ und

$$h(s,t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } g(t) > s; \\ 0, & \text{falls } g(t) \leq s. \end{cases}$$

Zu a): Es gilt

$$\begin{aligned} \int_I (g(t))^p \, dt &= \int_I \int_0^{g(t)} p s^{p-1} \, ds \, dt \\ &= \int_I \int_0^{\infty} p s^{p-1} h(s,t) \, ds \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_I p s^{p-1} h(s,t) \, dt \, ds \\ &= \int_0^{\infty} p s^{p-1} |\{t \in I \; : \; g(t) > s\}| \, ds. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.5.1 existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so daß

$$\int_I (g(t))^p \, dt \leq C_1 \int_0^{\infty} p s^{p-1} e^{-(C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})s} \, ds \cdot |I|$$

gilt. Dies führt mit Hilfe einer einfachen Substitution auf

$$\frac{1}{|I|} \int_I (g(t))^p \, dt \leq C_1 \cdot p \cdot (\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}/C_2)^p \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} \, du.$$

Damit ist die Ungleichung in a) bewiesen. Die Normäquivalenz folgt aus dieser Ungleichung und - wir haben es bereits erwähnt - aus der Jensenschen Ungleichung.

Zu b): Analog wie im Beweis zu a) erhält man

$$\int_I e^{sg(t)}\,dt = \int_0^\infty s e^{su} |\{t \in I \ : \ g(t) > u\}|\,du$$

und mit Satz 2.5.1 wiederum

$$\begin{aligned}
\int_I e^{sg(t)}\,dt &\leq \int_0^\infty s e^{su} C_1 e^{-(C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})u}\,du \cdot |I| \\
&\leq C_1 s \int_0^\infty e^{[s-(C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})]u}\,du \cdot |I| \\
&= C_1 s [(C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}) - s]^{-1} \cdot |I|
\end{aligned}$$

für alle Zahlen s mit $0 < s < (C_2/\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)})$. $\square$

2.6 Der Dualraum von $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, ist das Resultat von Fefferman ([Fe],[FeSt]) für skalarwertige Funktionen in den vektorwertigen Fall nicht in der Form übertragbar, daß $BMO(\mathbb{R}, X^*)$ stets isomorph zum Dualraum von $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ wäre. Letzteres stimmt jedoch, wenn X^* die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt.

Definition 2.6.1 *Der Banachraum X hat die **Radon-Nikodym-Eigenschaft bezüglich des endlichen Maßraums** (Ω, Σ, μ) genau dann, wenn zu jedem Vektormaß $G : \Sigma \to X$ von beschränkter Variation eine Abbildung $g \in L^1(\Omega, \mu, X)$ existiert, so daß*

$$G(E) = \int_E g\,d\mu$$

für alle $E \in \Sigma$ gilt.

*X hat die **Radon-Nikodym-Eigenschaft** genau dann, wenn X die Radon-Nikodym-Eigenschaft bezüglich jedes endlichen Maßraums (Ω, Σ, μ) besitzt.*

Für Definition und Eigenschaften von Vektormaßen sei auf [DiUh] verwiesen. Dort wird auch die Radon-Nikodym-Eigenschaft ausgiebig behandelt. Die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzen beispielweise reflexive Räume, separable Dualräume und auch die Räume $L^p(\Omega, \mu, X)$ für $1 < p < \infty$ falls

(Ω, μ, Σ) ein nichtatomarer endlicher Maßraum ist und X selbst die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt. Beispiele für Räume, die die Radon-Nikodym-Eigenschaft nicht besitzen sind $L^1([0,1])$, c_0 und $L^\infty([0,1])$.

Wir benötigen im weiteren lediglich folgende Charakterisierung der Radon-Nikodym-Eigenschaft für Dualräume (vgl. Theorem IV.1.1 [DiUh]):

Satz 2.6.2 *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Dann hat der Dualraum X^* von X bezüglich des endlichen Maßraums (Ω, Σ, μ) die Radon-Nikodym-Eigenschaft genau dann, wenn $(L^p(\Omega, \mu, X))^* = L^q(\Omega, \mu, X^*)$ gilt.*

Zum Beweis des zentralen Satzes dieses Kapitels benötigen wir noch ein einfaches Lemma.

Lemma 2.6.3 *Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $P_n : X \to X$ definiert durch*

$$P_n : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } \|x\| \leq n; \\ \dfrac{n}{\|x\|} \cdot x, & \text{falls } \|x\| > n. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|P_n x - P_n y\| \leq 2 \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in X$.

Beweis. Im Fall $\|x\|, \|y\| \leq n$ ist nichts zu zeigen. Falls $\|x\|$ und $\|y\|$ größer als n sind, haben wir

$$\begin{aligned} \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} &= \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|}(x\|y\| - y\|x\|) \\ &= \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|}((x-y)\|y\| - y(\|x\| - \|y\|)) \end{aligned}$$

und somit

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{1}{\|x\|}(\|x - y\| + |\, \|x\| - \|y\| \,|) \leq \frac{2}{\|x\|}\|x - y\|.$$

Also gilt

$$\|P_n x - P_n y\| \leq \frac{2n}{\|x\|}\|x - y\| \leq 2\|x - y\|.$$

Falls $\|x\|$ kleiner oder gleich n ist und $\|y\|$ größer als n ist, haben wir

$$x - \frac{ny}{\|y\|} = \frac{1}{\|y\|}((x - y)\|y\| + (\|y\| - n)y)$$

und damit

$$\|P_n x - P_n y\| \le \|x-y\| + \|y\| - n \le \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \le 2\,\|x-y\|.$$

Somit ist alles gezeigt. □

Nun wollen wir zeigen, daß der Dualraum von $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ isomorph zum Raum der X^*-wertigen Funktionen mit beschränkter mittlerer Oszillation ist, wenn X^* die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt. Das entsprechende Resultat für die Kreislinie $\mathbb{T}$ dieses Analogons zu Feffermans Satz wurde zuerst von Blasco in [Bl2] bewiesen. Von Blasco stammen auch noch Verallgemeinerungen für allgemeine Banachräume ([Bl], [Bl3]). Allerdings bestehen dann die *BMO*-Räume nicht mehr aus Funktionen sondern aus Vektormaßen. Das nachstehende Resultat steckt im wesentlichen implizit auch in [Bl3]. Der Beweis des ersten Teils beruht auf dem skalarwertigen Beweis in [CoWe], der zweite Teil auf einer Anpassung von [Bl2].

Satz 2.6.4 *Hat X^* die Radon-Nikodym-Eigenschaft, so gilt $(H^1_{at}(\mathbb{R}, X))^* \cong BMO(\mathbb{R}, X^*)$.*

Beweis. "$\supset$": Es sei g zunächst aus $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$ und f aus $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ mit atomarer Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k.$$

Dann gilt wegen $\int_{I_k} a_k(s)\,ds = 0$

$$\begin{aligned}\left| \int \left\langle g(t), \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k(t) \right\rangle\, dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{I_k} \langle g(t)\ ,\ a_k(t)\rangle\ dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{I_k} \langle g(t) - g_{I_k}\ ,\ a_k(t)\rangle\ dt \right|,\end{aligned}$$

wobei g_{I_k} wie bisher durch

$$g_{I_k} = \frac{1}{|I_k|} \int g(s)\,ds$$

definiert ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\left| \int \left\langle g(t), \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k(t) \right\rangle\, dt \right| &\le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \int_{I_k} |< g(t) - g_{I_k}, a_k(t) >|\ dt \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} \|g(t) - g_{I_k}\|\, dt.\end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß

$$\left| \int \left\langle g(t), \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k(t) \right\rangle dt \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)}$$

gilt. Da die atomare Darstellung von f beliebig gewählt war, folgt daraus

$$\left| \int \langle g(t), f(t) \rangle \, dt \right| \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \cdot \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)}. \tag{2.44}$$

Somit wird durch

$$T_g(f) := \int < g(t), f(t) > \, dt$$

ein stetiges Funktional $T_g : H^1_{at}(\mathbb{R},X) \to \mathbb{C}$ mit

$$\|T_g\| \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \tag{2.45}$$

definiert. Für $g \in BMO(\mathbb{R},X^*)$ existiert das Integral

$$T_g(f) := \int < g(t), f(t) > \, dt$$

zumindest dann, wenn $f \in H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ eine endliche atomare Darstellung hat, d.h.

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k a_k.$$

Sei also nun f von dieser Gestalt. Wir setzen $g_n = P_n g$ für $n \in \mathbb{N}$. Dabei sei P_n die in Lemma 2.6.3 definierte Abbildung. Die Abbildungen g_n liegen in $L^\infty(\mathbb{R},X)$, und nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue strebt $T_{g_n}(f)$ für $n \to \infty$ gegen $T_g(f)$. Für ein beliebiges beschränktes Intervall I gilt nach Lemma 2.6.3

$$\int_I \|g_n(t) - P_n g_I\| \, dt \leq 2 \int_I \|g(t) - g_I\| \, dt \leq 2|I| \, \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)}.$$

Daraus folgt nach Satz 2.3.2

$$\|g_n\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \leq 4 \, \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Zuhilfenahme von (2.45) ergibt sich

$$|T_{g_n}(f)| \leq \|g_n\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \, \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)} \leq 4 \, \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)}.$$

Also haben wir insgesamt

$$|T_g(f)| \leq 4\, \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)} \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)}.$$

Die Funktionen mit endlicher atomarer Darstellung liegen dicht in $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$. Deshalb können wir T_g in eindeutiger Weise zu einem stetigen linearen Funktional - ebenfalls T_g genannt - auf ganz $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ fortsetzen, und es gilt

$$\|T_g\| \leq 4\, \|g\|_{BMO(\mathbb{R},X^*)}.$$

"$\subset$": Es sei $T : H^1_{at}(\mathbb{R}, X) \to \mathbb{C}$ ein stetiges Funktional. Es sei $K > 0$ und $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [-K, K]$. Darüberhinaus gelte

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = 0.$$

Ist $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},X)} > 0$ so ist

$$\tilde{\varphi} := \frac{\varphi}{\sqrt{2K}\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},X)}}$$

wegen

$$\left(\frac{1}{2K} \int_{-K}^{K} \|\tilde{\varphi}(t)\|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2K}$$

ein (2)-Atom. Nach Satz 2.2.1 folgt

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)} \leq C$$

mit einer von $\tilde{\varphi}$ unabhängigen Konstanten C und damit

$$\|\varphi\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)} \leq \sqrt{2K}\, C\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},X)}. \tag{2.46}$$

Somit ist T für jedes $K > 0$ ein stetiges Funktional auf

$$Y_K := \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}, X) :\ \operatorname{supp} \varphi \subset [-K, K],\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = 0 \right\}$$

versehen mit der Norm $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R},X)}$. Da X^* die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, gilt nach Satz 2.6.2 für jedes $K > 0$

$$(L^2([-K, K], X))^* \hat{=} L^2([-K, K], X^*).$$

Fassen wir fortan Y_K als (abgeschlossenen) Unterraum von $L^2([-K, K], X)$ auf, so existieren nach dem Satz von Hahn-Banach $g_1 \in L^2([-1, 1], X^*)$ mit

$$T(\varphi) = \int_{-1}^{1} < g_1(t), \varphi(t) > \, dt$$

für alle $\varphi \in Y_1$ und für alle $K \in \mathbb{N}$ Funktionen $g_{K+1} \in L^2([-K-1, K+1], X^*)$ mit

$$T(\varphi) = \int_{-K-1}^{K+1} < g_{K+1}(t), \varphi(t) > \, dt \tag{2.47}$$

für alle $\varphi \in Y_{K+1}$ und

$$\int_{-K}^{K} g_{K+1}(t)\, dt = \int_{-K}^{K} g_K(t)\, dt. \tag{2.48}$$

Aus (2.47) und (2.48) folgt $g_{K+1}|_{[-K,K]} = g_K$. Durch die Festsetzung $g(t) := g_K(t)$ für $t \in [-K, K]$ erhalten wir also eine wohldefinierte Funktion $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, X^*)$ mit

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} < g(t), \varphi(t) > \, dt$$

für alle $\varphi \in \bigcup_{K=1}^{\infty} Y_K$.

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges beschränktes Intervall. Analog zur Herleitung von (2.46) erhält man für ein beliebiges $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset I$ und $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq 1$ die Abschätzung

$$\|\varphi - \chi_I \varphi_I\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)} \leq \sqrt{|I|}\, C\, \|\varphi - \chi_I \varphi_I\|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq 2\sqrt{|I|} \cdot C. \tag{2.49}$$

Nun gilt

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \|g(t) - g_I\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|\varphi\|_{L^2(I,X)} \leq 1} \left| \int_I \left\langle \frac{g(t) - g_I}{\sqrt{|I|}} \, , \, \varphi(t) \right\rangle dt \right| .$$

Mit dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \|g(t) - g_I\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|\varphi\|_{L^2(I,X)} \leq 1} \left| \int_I \left\langle g(t) \, , \, \frac{\varphi(t) - \varphi_I}{\sqrt{|I|}} \right\rangle dt \right| .$$

Folglich haben wir

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \|g(t) - g_I\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \sup_{\|\varphi\|_{L^2(I,X)} \leq 1} \left| T \left(\frac{\varphi(t) - \varphi_I}{2\sqrt{|I|}} \chi_I \right) \right| .$$

Aus (2.49) folgt damit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \|g(t) - g_I\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \sup_{\|\varphi\|_{H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R},X)} \leq C} |T(\varphi)| \\ &\leq 2\, C\, \|T\|. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Jensenschen Ungleichung komplettiert den Beweis. □

2.7 Die Hardyungleichung

Im skalarwertigen Fall gilt die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1} \leq C \, \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \tag{2.50}$$

für alle

$$f \in H^1 = \{g \in L^1(\mathbb{T}) \, : \, \hat{g}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}.$$

Sie geht zurück auf Hardy und ist unter seinem Namen wohlbekannt (siehe z.B. [Du]).

In H^1 ist die Norm $\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{T})}$ äquivalent zur Norm in $H^1_{at}(\mathbb{T})$, dem analog zu $H^1_{at}(\mathbb{R})$ definierten atomaren Hardyraum von auf der Kreislinie definierten Funktionen, wobei $a(t) = 1/(2\pi)$ noch als Atom hinzukommt. Auch im vektorwertigen Fall hat nach einem Satz von Bourgain ([Bo3]) jede Funktion aus

$$H^1(X) = \{g \in L^1(\mathbb{T}, X) \, : \, \hat{g}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}$$

eine atomare Zerlegung (wobei $a(t) = (1/(2\pi))x$, $\|x\| \leq 1$ wiederum zu den Atomen gezählt wird), und es gilt in $H^1(X)$ die Äquivalenz der Normen $\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{T},X)}$ und $\| \cdot \|_{H^1_{at}(\mathbb{T},X)}$. In [Bo2] beweist Bourgain die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1} \leq C \, \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{T},X)} \tag{2.51}$$

für vektorwertige Funktionen, falls X einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt. Insgesamt hat Bourgain damit also (2.50) im vektorwertigen Fall bewiesen, falls der zugrundeliegenden Banachraum X einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt.

Die Gültigkeit von (2.51) für alle $f \in H^1_{at}(\mathbb{T}, X)$ in einem Banachraum X ist nach einem Satz von Blasco und Pelczynski ([BlPe]) sogar äquivalent dazu, daß X einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt. Die Arbeit bietet noch einige andere Ergebnisse im Zusammenhang mit der Gültigkeit von aus dem skalaren bekannten Ungleichungen und Eigenschaften von Banachräumen. Weitere Resultate zu Verwandten der Hardyungleichung findet man in [Bl4].

Wir betrachten im folgenden die kontinuierliche Version von (2.51). Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Ungleichung für Atome. Der Beweis verläuft dabei analog zum Beweis von (2.51) in [Bo2] für auf der Kreislinie $\mathbb{T}$ definierte Funktionen.

Lemma 2.7.1 *Der Fouriertyp des Banachraums X sei größer 1. Dann existiert eine Zahl $C > 0$, so daß*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{a}(s)\|}{|s|}\, ds \leq C \tag{2.52}$$

für alle (∞)-Atome a gilt.

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir $a_\alpha(t) := a(t+\alpha)$. Offenbar gilt

$$\|\widehat{a_\alpha}(s)\| = \|e^{i\alpha s}\hat{a}(s)\| = \|\hat{a}(s)\|.$$

Folglich genügt es, wenn wir uns auf den Fall beschränken, daß das Intervall I, das bezüglich a die in Definition 2.1.1 angegebenen Eigenschaften besitzt, von der Form $[-K, K]$ mit einer positiven Zahl K ist. In diesem Fall haben wir die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\int_{-1/K}^{1/K} \frac{\|\hat{a}(s)\|}{|s|}\, ds &= \int_{-1/K}^{1/K} \frac{\|\hat{a}(s) - \hat{a}(0)\|}{|s|}\, ds \\
&\quad \left(\text{wegen } \hat{a}(0) = \int_{\mathbb{R}} a(t)\, dt = 0\right) \\
&\leq \int_{-1/K}^{1/K} \left(\int_{-K}^{K} \frac{|e^{-ist} - 1|}{|s|} \|a(t)\|\, dt \right) ds \qquad (2.53) \\
&\quad (\text{Dreiecksungleichung und Definition von } \hat{a}) \\
&\leq \frac{C_1}{K} \int_{-1/K}^{1/K} \left(\int_{-K}^{K} |t|\, dt \right) ds \\
&\quad (\ |e^{-ist} - 1|/|s| \leq \text{Konst. } |t| \text{ und } \|a(t)\| \leq 1/(2K)\ ) \\
&= \frac{C_2}{K^2} K^2 \\
&= C_2
\end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen C_1 und C_2 geeignete, von a und K unabhängige Konstanten.

X habe den Fouriertyp $p > 1$. Sei nun $q > 1$ die zu p konjugierte Zahl im

Sinne von $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{|s|>1/K} \frac{\|\hat{a}(s)\|}{|s|}\, ds \;&\leq\; \left(\int_{\mathbb{R}} \|\hat{a}(s)\|^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|s|>1/K} \frac{1}{|s|^p}\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\text{(Höldersche Ungleichung)} \\
&\leq\; C_3 \left(\int_{\mathbb{R}} \|a(t)\|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(-\left[s^{1-p}\right]_{1/K}^{\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\text{(X hat Fouriertyp p)} \\
&\leq\; C_4 \left(\int_I \frac{1}{K^p}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} K^{1-\frac{1}{p}} \qquad (2.54) \\
&\quad\text{($\|a(t)\| \leq 1/(2K)$)} \\
&=\; C_5 K^{\frac{1}{p}-1} K^{1-\frac{1}{p}} \\
&=\; C_5
\end{aligned}$$

Wiederum bezeichnen C_3, C_4 und C_5 geeignete, von a und K unabhängige positive Zahlen.

Fassen wir nun (2.53) und (2.54) zusammen, so ergibt sich insgesamt die gewünschte Abschätzung (2.52) mit einer von a und K unabhängigen Konstanten $C > 0$. □

Wir werden die Hardyungleichung als eine Stetigkeitsaussage über die Fouriertransformation auf $H^1_{at}(\mathbb{R}, X)$ formulieren. Dazu definieren wir zunächst einmal den Bildraum.

Definition 2.7.2 *Für einen Banachraum X sei*

$$L^1(\mathbb{R}, dt/t, X) := \{f : \mathbb{R} \to X \;\;:\; t \mapsto \frac{1}{t} f(t) \in L^1(\mathbb{R}, X)\}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}, dt/t, X)$ sei

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}, dt/t, X)} := \|t \mapsto \frac{1}{t} f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}, X)}.$$

Mit dieser Definition des mit $1/t$ gewichteten Raumes L^1 lautet die Hardyungleichung:

Satz 2.7.3 *Der Fouriertyp des Banachraums X sei größer* 1. *Dann ist die Fouriertransformation eine stetige lineare Abbildung von $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ nach $L^1(\mathbb{R},dt/t,X)$.*

Beweis. Für $f \in H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ mit der atomaren Darstellung $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ gilt nach Lemma 2.7.1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{f}(t)\|}{|t|}\,dt &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{a_k}(t)\|}{|t|}\,dt \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten C. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{F}(f)\|_{L^1(\mathbb{R},dt/t,X)} \\ &\quad \leq C \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| :\ f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \text{ mit } c_k \in \mathbb{C} \text{ und } a_k \text{ Atom}\right\} \\ &\quad = C \cdot \|f\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X)}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $\mathcal{F}$ stetig von $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ nach $L^1(\mathbb{R},dt/t,X)$ abbildet. □

2.8 Die schwache Fouriertransformation

Die Formulierung der Hardyungleichung im vorangegangen Abschnitt als Stetigkeit der Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : H^1_{at}(\mathbb{R},X) \to L^1(\mathbb{R},dt/t,X) \tag{2.55}$$

und die Betrachtungen zum Dualraum von $H^1_{at}(\mathbb{R},X)$ (falls X^* die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt) legen die Frage nahe, ob nicht auch eine "dualisierte" Form von (2.55) existiert, d.h. ob nicht die Fouriertransformation einen geeigneten Raum "$\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)$" stetig nach $BMO(\mathbb{R},X)$ abbildet.

Tatsächlich werden wir in diesem Abschnitt einen derartigen Satz beweisen (ohne auf Voraussetzungen bezüglich einer Radon-Nikodym-Eigenschaft angewiesen zu sein; stattdessen wird ein nichttrivialer Fouriertyp vorausgesetzt). Jedoch müssen wir dazu die Definition der Fouriertransformation in einer für unsere Zwecke geeigneten Form erweitern.

Definition 2.8.1 *a)* $\mathcal{D}_0 := \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \;:\; \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 0\}$

b) $\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X) := \{f : \mathbb{R} \to X \;\;:\;\; t \mapsto tf(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, X)\}$

Für $f \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$ *sei* $\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)} := \|t \mapsto tf(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)}$.

Der Raum $\mathcal{D}_0$ wird der Raum der Testfunktionen sein, und für Funktionen aus $\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$ wüßten wir gerne etwas über deren Fouriertransformierte.

Wir machen es uns im folgenden einfach und fordern zur Definition der Fouriertransformierten schon die Existenz einer entsprechenden Funktion.

Definition 2.8.2 *Der Fouriertyp des Banachraums X sei größer* 1*, und f sei aus $\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$. Dann heißt eine Funktion $F \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, X)$* ***schwache Fouriertransformierte*** *von f genau dann, wenn*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)f(t)\,dt$$

für alle $g \in \mathcal{D}_0$ gilt.

Wir schreiben dann $F = \mathcal{F}(f)$.

Bemerkung 2.8.3 *Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)f(t)\,dt$ existiert für alle $g \in \mathcal{D}_0$ und alle $f \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$, denn offensichtlich ist $\mathcal{D}_0 \subset H^1_{at}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und damit nach Satz 2.7.3 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}, dt/t, \mathbb{C})$, woraus sofort folgt, daß $\hat{g} \cdot f$ ein Element von $L^1(\mathbb{R}, X)$ ist.*

Schwache Fouriertransformierte in obigem Sinne sind nicht eindeutig, denn mit F ist offenbar auch $F + x_0$ eine schwache Fouriertransformierte von f. Allerdings erhält man auf diese Weise alle schwachen Fouriertransformierten von f in folgendem Sinne: Sind F und $\tilde{F}$ schwache Fouriertransformierten von f, so existiert $x_0 \in X$ mit $F(t) - \tilde{F}(t) = x_0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Dies werden wir mit Hilfe des folgenden Lemmas zeigen.

Lemma 2.8.4 *Der Fouriertyp des Banachraums X sei größer* 1*, f sei aus $\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$ und $F = \mathcal{F}(f)$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} < g(t), F(t) > \,dt = \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{g}(t), f(t) > \,dt$$

für alle $g \in L^2(\mathbb{R}, X^*)$, deren Träger supp *g beschränkt ist und die*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 0$$

erfüllen.

Beweis. Es sei g eine beliebige Funktion aus $L^2(\mathbb{R}, X^*)$, deren Träger *supp* g beschränkt ist und die

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 0$$

erfüllt. I sei ein beschränktes Intervall mit *supp* $g \subset I$. Dann existieren Funktionen $\widetilde{g_n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X^*)$ der Form

$$\widetilde{g_n} = \sum_{k=1}^{m_n} \widetilde{\varphi_{k,n}} x^*_{k,n},$$

wobei die Funktionen $\widetilde{\varphi_{k,n}}$ Elemente des Raumes $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sind, deren Träger *supp* $\widetilde{\varphi_{k,n}}$ Teilmengen von I sind, und $x^*_{k,n}$ Elemente aus dem Dualraum X^* von X mit $\|x^*_{k,n}\| \leq 1$ sind, so daß die Folge $(\widetilde{g_n})$ in $L^2(\mathbb{R}, X^*)$ gegen g konvergiert. Offenbar gilt dann auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g_n}(s)\,ds = \int_I \widetilde{g_n}(s)\,ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I g(s)\,ds = 0.$$

Es sei nun ψ ein Element des Raumes $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dessen Träger *supp* ψ eine Teilmenge von I ist und das

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds = 1$$

erfüllt. Wir setzen

$$\varphi_{k,n}(s) := \widetilde{\varphi_{k,n}}(s) - \psi(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi_{k,n}}(t)\,dt$$

und erhalten so Elemente $\varphi_{k,n}$ des Raumes $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, deren Träger *supp* $\varphi_{k,n}$ Teilmengen von I sind und die die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{k,n}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi_{k,n}}(s)\,ds - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi_{k,n}}(t)\,dt = 0$$

besitzen. Das bedeutet, daß die Funktionen $\varphi_{k,n}$ Elemente des Raumes $\mathcal{D}_0$ sind. Definieren wir nun

$$g_n(s) := \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{k,n}(s) x^*_{k,n},$$

so gilt

$$g_n(s) = \widetilde{g_n}(s) - \psi(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g_n}(t)\,dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(s)$$

im Raum $L^2(\mathbb{R}, X^*)$, denn wir haben

$$\left\| \psi \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g_n}(t)\, dt \right\|_{L^2(\mathbb{R},X^*)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g_n}(t)\, dt \right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Somit haben wir eine Folge (g_n) von Elementen des Raumes $\mathcal{D}(\mathbb{R}, X^*)$ gefunden, deren Träger *supp* g_n Teilmengen von I sind und die

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\, dt = 0$$

erfüllen, die im Raum $L^2(\mathbb{R}, X^*)$ gegen g konvergiert.

Die Folge (g_n) konvergiert auch im Raum $H^1_{at}(\mathbb{R}, X^*)$ gegen g. Um das einzusehen, geben wir uns eine beliebige Funktion h aus dem Raum $L^2(\mathbb{R}, X^*)$ vor, deren Norm in diesem Raum nicht 0 ist, deren Träger *supp* h Teilmenge eines beschränkten Intervalls J ist und die

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\, ds = 0$$

erfüllt. Die Funktion

$$\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{|J|}\|h\|_{L^2(\mathbb{R},X^*)}} \cdot h$$

ist dann ein (2)-Atom. Nach Satz 2.2.1 liegt $\tilde{h}$ im Raum $H^1_{at}(\mathbb{R}, X^*)$ und es gilt mit einer von h und J unabhängigen Konstanten C die Ungleichung

$$\|\tilde{h}\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X^*)} \leq C,$$

woraus die Abschätzung

$$\|h\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X^*)} \leq C \cdot \sqrt{|J|} \cdot \|h\|_{L^2(\mathbb{R},X^*)}$$

folgt.

g und g_n erfüllen gerade die Voraussetzungen, die wir an h gestellt haben. Demnach sind g und g_n Elemente von $H^1_{at}(\mathbb{R}, X^*)$, und es gilt

$$g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$$

im Raum $H^1_{at}(\mathbb{R}, X^*)$. Nach Satz 2.7.3 folgt daraus, daß die Funktionen $\hat{g}$ und $\widehat{g_n}$ im Raum $L^1(\mathbb{R}, dt/t, X^*)$ liegen. Damit existieren die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} < \hat{g}(t), f(t) > \, dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{g_n}(t), f(t) > \, dt,$$

und wir haben darüberhinaus

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{g}(t), f(t) > \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{g_n}(t), f(t) > \, dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left\langle \frac{\hat{g}(t) - \hat{g_n}(t)}{t}, t f(t) \right\rangle \right| \, dt \\
&\leq \|\hat{g} - \hat{g_n}\|_{L^1(\mathbb{R}, dt/t, X^*)} \cdot \|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)} \\
&\leq C \cdot \|g - g_n\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X^*)} \cdot \|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Folge (g_n) gegen g in $L^2(\mathbb{R}, X^*)$ und der Tatsache, daß die Träger all dieser Funktionen Teilmengen des beschränkten Intervalls I sind, gilt offenbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} < g_n(t), F(t) > \, dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} < g(t), F(t) > \, dt$$

für $n \to \infty$. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} < g_n(t), F(t) > \, dt &= \sum_{k=1}^{m_n} \int_{-\infty}^{\infty} < \varphi_{k,n}(t) x^*_{k,n}, F(t) > \, dt \\
&= \sum_{k=1}^{m_n} \left\langle x^*_{k,n}, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{k,n}(t) F(t) \, dt \right\rangle \\
&\stackrel{Def.}{=} \sum_{k=1}^{m_n} \left\langle x^*_{k,n}, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_{k,n}}(t) f(t) \, dt \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} < \widehat{g_n}(t), f(t) > \, dt
\end{aligned}$$

folgt damit durch Grenzübergang die Behauptung. □

Das Bild der schwachen Fouriertransformation soll ja im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegen. Funktionen, die sich nur durch eine Konstante unterscheiden, identifizieren wir in diesem Raum. Dem sollte unsere Definition der schwachen Fouriertransformierten Rechnung tragen.

Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas können wir nun einen Satz beweisen, der genau dies tut.

Satz 2.8.5 *Der Banachraum X habe einen Fouriertyp größer als 1, f sei aus $\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}, X)$ und F und G seien schwache Fouriertransformierte von f. Dann existiert $x_0 \in X$ mit*

$$F(t) = G(t) + x_0$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei I ein beliebiges, beschränktes Teilintervall von $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$x_0 := \frac{1}{|I|} \int_I F(t) - G(t)\, dt$$

und $H(t) := F(t) - G(t) - x_0$ für alle $t \in I$. Dann gilt

$$\int_I H(t)\, dt = \int_I F(t) - G(t)\, dt - |I| \cdot x_0 = 0. \tag{2.56}$$

Da $L^2(I, X^*)$ normierend für $L^2(I, X)$ ist, gilt

$$\|H\|_{L^2(I,X)} = \sup_{\|g\|_{L^2(I,X^*)} \leq 1} \left| \int_I < g(t), H(t) > \, dt \right|. \tag{2.57}$$

Setzen wir nun für $g \in L^2(I, X^*)$ $x_0^* := (1/|I|) \int_I g(t)\, dt$ und

$$\tilde{g}(t) := \begin{cases} g(t) - x_0^* & , \quad t \in I, \\ 0 & , \quad t \in \mathbb{R} \backslash I, \end{cases}$$

dann ist $\tilde{g}$ ein Element von $L^2(I, X^*)$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t)\, dt = \int_I g(t)\, dt - |I| \cdot x_0^* = 0. \tag{2.58}$$

Nach Lemma 2.8.4 gilt deshalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} < \tilde{g}(t), F(t) - G(t) > \, dt = 0. \tag{2.59}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \int_I < g(t), H(t) > \, dt &= \int_I < \tilde{g}(t) + x_0^*, H(t) > \, dt \\ &= \int_I < \tilde{g}(t), H(t) > \, dt + \left\langle x_0^*, \int_I H(t)\, dt \right\rangle \\ &\overset{(2.59),(2.56)}{=} -\left\langle \int_I \tilde{g}(t)\, dt, x_0 \right\rangle + 0 \\ &\overset{(2.58)}{=} 0 \end{aligned}$$

und somit wegen (2.57)

$$\|H\|_{L^2(I,X)} = 0.$$

Das bedeutet, daß $H(t) = 0$ für fast alle $t \in I$ gilt. Aus der Definition von H folgt nun unmittelbar $F(t) = G(t) + x_0$ für fast alle $t \in I$. Da das Intervall I beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Mit diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, eine Abschätzung der BMO-Norm der Fouriertransformierten anzugeben, die sich im letzten Kapitel als sehr nützlich erweisen wird. Eine ähnliche Aussage für den Fall der Kreislinie $\mathbb{T}$ findet man in [Bl5].

Satz 2.8.6 *Der Banachraum X habe einen Fouriertyp größer als 1. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $f \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)$, deren schwache Fouriertransformierte existieren, gilt: Die schwache Fouriertransformierte $F = \mathcal{F}(f)$ liegt im Raum $BMO(\mathbb{R},X)$, und es gilt die Abschätzung*

$$\|F\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \le C\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)}.$$

Beweis. Für jedes beschränkte Intervall I ist $L^2(I,X^*)$ normierend für den Raum $L^2(I,X)$. Demnach gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I|}\int_I \left\| F(t) - \frac{1}{|I|}\int_I F(s)\,ds\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2(I,X^*)}\le 1} \left| \int_I \left\langle \varphi(t), \frac{F(t)-F_I}{|I|^{\frac{1}{2}}}\right\rangle dt\right| \qquad (2.60)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sup_{\|\varphi\|_{L^2(I,X^*)}\le 1} \left| \int_I \left\langle \frac{\varphi(t)-\varphi_I}{|I|^{\frac{1}{2}}}, F(t)\right\rangle dt\right| .
\end{aligned}$$

Setzen wir die Funktion $(1/\sqrt{|I|})(\varphi(t)-\varphi_I)$ auf $\mathbb{R}$ fort, indem wir ihr für $t \in \mathbb{R}\backslash I$ den Wert 0 zuweisen, so ist sie ein Element von $L^2(\mathbb{R},X^*)$. Ihr Träger ist eine Teilmenge von I, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi_I}{\sqrt{|I|}}\,dt = 0.$$

Nach Lemma 2.8.4 folgt aus (2.60)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I|}\int_I \left\| F(t) - \frac{1}{|I|}\int_I F(s)\,ds\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},X^*)}\le 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\widehat{\varphi(\cdot)-\varphi_I}}{|I|^{\frac{1}{2}}}(t), f(t)\right\rangle dt\right| . \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

Nach der Jensenschen Ungleichung gilt

$$\|\varphi_I\|_{L^2(I,X^*)} = \sqrt{|I|} \cdot \|\varphi_I\| \leq \|\varphi\|_{L^2(I,X^*)}.$$

Deshalb gilt

$$\|\varphi - \varphi_I\|_{L^2(I,X^*)} \leq 2\|\varphi\|_{L^2(I,X^*)} \leq 2.$$

Also ist die Funktion $t \mapsto (1/(2\sqrt{|I|}))(\varphi(t) - \varphi_I)$ ein (2)-Atom. Aus (2.61) folgt demnach

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I|}\int_I \left\|F(t) - \frac{1}{|I|}\int_I F(s)\,ds\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad 2 \sup_{\phi\ (2)-\mathrm{Atom}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} < \hat{\phi}(t), f(t) > \, dt\right| \\
&\leq \quad 2\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)} \sup_{\phi\ (2)-\mathrm{Atom}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\|\frac{\hat{\phi}(t)}{t}\right\| dt \\
&\overset{\text{Satz 2.7.3}}{\leq} \quad \tilde{C}\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)} \sup_{\phi\ (2)-\mathrm{Atom}} \|\phi\|_{H^1_{at}(\mathbb{R},X^*)} \\
&\leq \quad C\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)}
\end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $C, \tilde{C} > 0$. Dabei wurden Satz 2.2.1 und die Tatsache ausgenutzt, daß mit X auch X^* einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt. Mit der Jensenschen Ungleichung folgt nun die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Abschätzungen im Besovraum $B^{0,\infty}_{\infty}$

In diesem Kapitel werden wir uns den beiden vektorwertigen Besovräumen $B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)$ und $B^{0,1}_{1}(\mathbb{R},X)$ widmen. Die verschiedenen skalarwertigen Besovräume werden ausführlich in den Büchern von Triebel ([Tr1], [Tr2]) und im Buch von Peetre ([Pe2]) behandelt.

Wir werden uns mit den sogenannten *homogenen* Besovräumen befassen. Eine gute Übersicht über die vektorwertigen inhomogenen Besovräume bieten die Arbeiten von Amann ([Am2]) und Schmeisser ([Sc]).

Wir werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels die Besovräume $B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)$ und $B^{0,1}_{1}(\mathbb{R},X)$ mit Hilfe einer geeigneten Folge von Zerlegungsfunktionen definieren. Dann werden wir zeigen, daß eine Klasse von recht einfach aufgebauten Funktionen - die sogenannten *speziellen Atome* - im Raum $B^{0,1}_{1}(\mathbb{R},X)$ liegt. Damit wird es uns gelingen, eine Wachstumsabschätzung anzugeben, die uns im letzten Kapitel enorme Dienste erweisen wird.

3.1 Die Räume $B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)$ und $B^{0,1}_{1}(\mathbb{R},X)$

In diesem und in den anderen Abschnitten dieses Kapitels sei φ ein festes Element aus dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, dem Raum der schnell fallenden Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\hat{\varphi}(s) \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\hat{\varphi}(s) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| \in (2^{-1}, 2)$.

(ii) $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset \{\xi \;:\; 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$.

(iii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(2^{-k}s) = 1$ für alle $s \neq 0$.

Wir setzen $\varphi_{2^k}(t) := 2^{-k}\varphi(2^{-k}t)$ für $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ und erhalten so eine Folge von Zerlegungsfunktionen, mit deren Hilfe wir nun die Besovräume definieren können.

Definition 3.1.1 *Für eine temperierte Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ sei*

$$\|f\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * f\|_{L^1(\mathbb{R},X)}$$

und

$$\|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\varphi_{2^k} * f\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)}.$$

$\|f\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)}$ und $\|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)}$ definieren keine Normen, denn für Polynome der Form $f(t) = \sum_{k=0}^m t^k x_k$ sind diese Größen 0. Wenn wir allerdings die Distributionen modulo dieser Polynome betrachten, werden die beiden Abbildungen $\|f\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)}$ und $\|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)}$ zu Normen auf den nachstehend definierten Besovräumen.

Die Nachweise für diesen Sachverhalt können wie im skalarwertigen Fall durchgeführt werden. Siehe dazu das 3. Kapitel im Buch von Peetre ([Pe2]).

Definition 3.1.2 *Die **Besovräume** $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ und $B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X)$ seien definiert durch*

$$B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X) \ : \ \|f\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)} < \infty\}$$

und

$$B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X) \ : \ \|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)} < \infty\},$$

versehen mit der entsprechenden Halbnorm. Identifizieren wir temperierte Distributionen, die sich lediglich durch eine Polynomfunktion unterscheiden, so werden die Räume zu Banachräumen.

Ist f aus $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ oder aus $B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X)$, so konvergiert für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$s_m = \sum_{k=-\infty}^{m} \varphi_{2^k} * f$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. Für f aus $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ konvergiert die Folge (s_m) für $m \to \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. Für f aus aus $B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X)$ existiert eine Folge (c_m) in X, so daß die Folge $(s_m + c_m)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ konvergiert. Falls nichts anderes gesagt wird, meinen wir mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k} * f$$

im Zusammenhang mit diesen Besovräumen jeweils diese Konvergenz. Für f aus $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ oder aus $B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X)$ gilt also stets

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k} * f \quad + \quad \text{Polynom.}$$

Die Beweise für diese Tatsachen laufen analog zu den skalarwertigen Beweisen, die man in [Pe2] (Kapitel 3) findet.

3.2 Spezielle Atome in $B_1^{0,1}$

Wir wollen nun eine Klasse einfach gebauter Funktionen angeben, die Teil des Besovraums $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ ist. Diese *speziellen Atome* sind tatsächlich auch Atome im Sinne des vorangegangen Kapitels.

Definition 3.2.1 *Eine Funktion $a : \mathbb{R} \to X$ der Form*

$$a(t) = \frac{1}{2h}(\chi_{[t_0-h,t_0]}(t) - \chi_{[t_0,t_0+h]}(t))x$$

mit $h > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ heißt ***spezielles Atom****.*

Bevor wir beweisen, daß spezielle Atome in $B_1^{0,1}(\mathbb{R}, X)$ liegen und in der Norm gleichmäßig beschränkt sind, wollen wir noch eine für das Weitere nützliche Anmerkung machen.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zahl $\alpha > 0$ sei die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_\alpha(t) = (1/\alpha) f(t/\alpha)$ für $t \in \mathbb{R}$. Diese Definition ist konsistent mit der Definition der Funktionen φ_{2^k}.

Ist $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\alpha > 0$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\alpha(s)|\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\, ds \tag{3.1}$$

Die für diesen Abschnitt fortan feste Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\phi(t) := \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds$$

für $t \in \mathbb{R}$. Da $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds = \hat{\varphi}(0) = 0$ gilt, ist nach Lemma 1.1.2 ϕ eine Schwartzfunktion.

Mit der Substitution $u = s/2^k$ erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} \varphi_{2^k}(s)\,ds &= \int_{-\infty}^{t} 2^{-k}\varphi(2^{-k}s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{2^{-k}t} \varphi(u)\,du \qquad (3.2) \\ &= \phi(2^{-k}t) = 2^k \phi_{2^k}(t) \end{aligned}$$

Nun sind wir in der Lage, den angekündigten Satz zu formulieren und zu beweisen. Für den skalaren Fall findet man den Beweis in [FrJaWe]. Mit den entsprechenden Anpassungen stammen auch Teile unseres Beweises von dort. In [Me] (S. 192 ff) wird im skalaren Fall der Raum $B^{0,1}_1(\mathbb{R}, X)$ über die speziellen Atome definiert.

Satz 3.2.2 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$\|a\|_{B^{0,1}_1(\mathbb{R},X)} \leq C$$

für alle speziellen Atome a gilt. Überdies konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k} * a$$

absolut in $L^1(\mathbb{R}, X)$ gegen a.

Beweis. Ist a ein spezielles Atom, so gilt für die Funktion b definiert durch $b(t) := a(t - t_0)$ mit einer beliebigen Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{2^k} * b\|_{L^1(\mathbb{R},X)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k}(s-t)a(t-t_0)\,dt \right\| ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k}(s-t_0-u)a(u)\,du \right\| ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k}(v-u)a(u)\,du \right\| dv \\ &= \|\varphi_{2^k} * a\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, daß $\|b\|_{B^{0,1}_1(\mathbb{R},X)} = \|a\|_{B^{0,1}_1(\mathbb{R},X)}$ gilt. Somit genügt es, wenn wir uns auf spezielle Atome der Form

$$a(t) = \frac{1}{2h}(\chi_{[-h,0]}(t) - \chi_{[0,h]}(t))x$$

mit $h > 0$ beschränken. Desweiteren wollen wir zunächst $h \in [1, 2]$ voraussetzen.

Der Fall $k < 0$:

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir mit der Substitution $u = t - s$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2^k} * a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k}(t-s)a(s)\,ds \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{0} \varphi_{2^k}(t-s)\,ds - \int_{0}^{h} \varphi_{2^k}(t-s)\,ds\right)x \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_{t}^{t+h} \varphi_{2^k}(u)\,du - \int_{t-h}^{t} \varphi_{2^k}(u)\,du\right)x.
\end{aligned}$$

Beachtet man Gleichung (3.2), so erhält man

$$\varphi_{2^k} * a(t) = \frac{2^k}{2h}(\phi_{2^k}(t+h) - 2\phi_{2^k}(t) + \phi_{2^k}(t-h))x.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{2^k} * a\|_{L^1(\mathbb{R},X)} &\leq 4 \cdot \frac{2^k}{2h}\|\phi_{2^k}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\overset{(3.1)}{\leq} 2^{k+1}\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$. Folglich gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \|\varphi_{2^k} * a\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \leq 2\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty. \tag{3.3}$$

Der Fall $k \geq 0$:

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned}
\varphi_{2^k} * a(t) &= \frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{0} \varphi_{2^k}(t-s)\,ds - \int_{0}^{h} \varphi_{2^k}(t-s)\,ds\right)x \\
&= \frac{1}{2h}\left(\int_{0}^{h} \varphi_{2^k}(t-s+h) - \varphi_{2^k}(t-s)\,ds\right)x,
\end{aligned}$$

woraus

$$\|\varphi_{2^k} * a(t)\| \leq \frac{1}{2h}\int_0^h |\varphi_{2^k}(t-s+h) - \varphi_{2^k}(t-s)|\,ds \tag{3.4}$$

folgt.

Für $s \in [0,h]$ gilt wegen $h \in [1,2]$ offenbar $-s, h-s \in [-2,2]$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung können wir deshalb nun folgendermaßen weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{2^k} * a(t)\| &\leq \frac{1}{2h}\int_0^h \sup_{\mu\in[t-2,t+2]} |(\varphi_{2^k})'(\mu)| h\, ds \\ &\overset{h\leq 2}{\leq} \sup_{\mu\in[t-2,t+2]} |(\varphi_{2^k})'(\mu)| \end{aligned} \tag{3.5}$$

Beachten wir nun noch, daß $(\varphi_{2^k})'(\mu) = 4^{-k}\varphi'(2^{-k}\mu)$ gilt und berücksichtigen, daß φ eine schnell fallende Funktion ist, für die eine Zahl $C_1 > 0$ existiert, so daß

$$|\varphi'(2^{-k}\mu)| \leq \frac{C_1}{1+(2^{-k}\mu)^2}$$

für alle $\mu \in [t-2, t+2]$ gilt, so erhalten wir aus (3.5)

$$\|\varphi_{2^k} * a(t)\| \leq \frac{C_1 4^{-k}}{1+(2^{-k}(t+2))^2} \tag{3.6}$$

für alle $t \leq -2$ und

$$\|\varphi_{2^k} * a(t)\| \leq \frac{C_1 4^{-k}}{1+(2^{-k}(t-2))^2} \tag{3.7}$$

für alle $t \geq 2$. Wir können nun weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * a(t)\|\, dt &\overset{(3.6),(3.7),(3.5)}{\leq} 4^{-k}C_1 \Bigg(\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+(2^{-k}(t+2))^2}\, dt \\ &\quad + \int_2^{\infty} \frac{1}{1+(2^{-k}(t-2))^2}\, dt \\ &\quad + \frac{1}{C_1}\int_{-2}^{2} \sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\varphi'(\mu)|\, dt\Bigg) \\ &\leq 4^{-k}C_1 \Big(\left[2^k \arctan(2^{-k}(t+2))\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \left[2^k \arctan(2^{-k}(t-2))\right]_{-\infty}^{\infty} + C_2\Big) \\ &\leq \frac{C_3}{2^k}. \end{aligned}$$

Dabei sind C_2 und C_3 geeignete, von k unabhängige positive Zahlen. Die letzte Abschätzung liefert uns

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * a\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \le 2C_3. \tag{3.8}$$

(3.3) und (3.8) zusammengefaßt bedeuten

$$\|a\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)} \le C \tag{3.9}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ für jedes spezielle Atom a mit $h \in [1,2]$.

Im letzten Schritt des Beweises werden wir nun zeigen, daß (3.9) für jedes spezielle Atom a mit beliebigem $h > 0$ gilt. Sie also nun $h > 0$ beliebig gewählt. Wir wählen uns $j \in \mathbb{Z}$, so daß $2^j h$ im Intervall $[1,2]$ liegt. Mit Hilfe der Substitution $u = 2^j s$ ergibt sich für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2^k} * a(t) &= \frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{0} \varphi_{2^k}(t-s)\,ds - \int_0^h \varphi_{2^k}(t-s)\,ds\right)x \\
&= \frac{1}{2(2^j h)}\left(\int_{-2^j h}^{0} \varphi_{2^k}(t-2^{-j}u)\,du - \int_0^{2^j h} \varphi_{2^k}(t-2^{-j}u)\,du\right)x \\
&= \frac{2^j}{2(2^j h)}\left(\int_{-2^j h}^{0} \varphi_{2^{k+j}}(2^j t-u)\,du - \int_0^{2^j h} \varphi_{2^{k+j}}(2^j t-u)\,du\right)x \\
&= 2^j \varphi_{2^{k+j}} * a_{2^j}(2^j t).
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * a(t)\|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^{k+j}} * a_{2^j}(s)\|\,ds, \tag{3.10}$$

wenn man $s = 2^j t$ substituiert und

$$a_{2^j}(t) = \frac{1}{2^j} a(2^{-j}t) = \frac{1}{2\cdot 2^j h}(\chi_{[-2^j h,0]}(t) - \chi_{[0,2^j h]}(t))x$$

beachtet. Die letzte Gleichungskette zeigt auch, daß a_{2^j} ein spezielles Atom ist, für das wegen $2^j h \in [1,2]$ die Abschätzung (3.9) gilt.

Gleichung (3.10) führt uns nun schließlich zur gewünschten Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|a\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * a\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \\
&\overset{(3.10)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^{k+j}} * a_{2^j}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\varphi_{2^k} * a_{2^j}\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \\
&= \|a_{2^j}\|_{B_1^{0,1}(\mathbb{R},X)} \overset{(3.9)}{\leq} C.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Gültigkeit von (3.9) für spezielle Atome mit beliebigem $h > 0$ gezeigt.

Die Grenzfunktion der in $L^1(\mathbb{R}, X)$ absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{2^k} * a$$

und die $L^1(\mathbb{R}, X)$-Funktion a können sich nicht um ein Polynom $\neq 0$ unterscheiden und müssen daher gleich sein. □

Funktionen aus $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ liegen offenbar in $B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Zwischen diesen Funktionen und den speziellen Atomen besteht folgende Dualitätsbeziehung:

Korollar 3.2.3 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$\left\| \int a(t) f(t)\, dt \right\| \leq C \|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)} \tag{3.11}$$

für alle $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ und alle speziellen Atome $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Weil nach Satz 3.2.2 die Reihe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{2^j} * a$$

absolut in $L^1(\mathbb{R})$ gegen a konvergiert, hat man

$$\int a(t) f(t)\, dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int (\varphi_{2^j} * a(t)) f(t)\, dt. \tag{3.12}$$

Für ein Polynom $p(t) = \sum_{l=0}^{m} t^l x_l$ gilt

$$\int (\varphi_{2^j} * a(t))p(t)\,dt = \sum_{l=0}^{m} (-i)^l x_l \frac{d^l}{dt^l}\mathcal{F}(\varphi_{2^j} * a)(0).$$

Wegen $\mathcal{F}(\varphi_{2^j} * a) = \widehat{\varphi_{2^j}}\hat{a}$ und

$$\frac{d^l}{dt^l}\widehat{\varphi_{2^j}}(0) = 0$$

ergibt sich

$$\int (\varphi_{2^j} * a(t))p(t)\,dt = 0.$$

Da $\varphi_{2^j} * a(t)$ eine Schwartzfunktion ist, gilt

$$\int (\varphi_{2^j} * a(t))f(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int (\varphi_{2^j} * a(t))(\varphi_{2^k} * f(t))\,dt. \tag{3.13}$$

Faßt man $\varphi_{2^k} * f$ als temperierte Distribution auf, so hat man überdies

$$\begin{aligned} \int (\varphi_{2^j} * a(t))(\varphi_{2^k} * f(t))\,dt &= [\varphi_{2^k} * f](\varphi_{2^j} * a) \\ &= [\mathcal{F}(\varphi_{2^k} * f)](\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{2^j} * a)) \end{aligned}$$

und damit also

$$\begin{aligned} \int (\varphi_{2^j} * a(t))(\varphi_{2^k} * f(t))\,dt &= 2\pi\,[\widehat{\varphi_{2^k}}\hat{f}](\check{\varphi_{2^j}}\check{a}) \\ &= 2\pi\,[\hat{f}](\widehat{\varphi_{2^k}}\check{\varphi_{2^j}}\check{a}). \end{aligned}$$

Da *supp* $\widehat{\varphi_{2^k}} \cap$ *supp* $\check{\varphi_{2^j}} = \emptyset$ für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ mit $|j-k| > 1$ gilt, ergibt sich

$$\int (\varphi_{2^j} * a(t))(\varphi_{2^k} * f(t))\,dt = 0$$

für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ mit $|j-k| > 1$. Aus (3.13) folgt damit

$$\int (\varphi_{2^j} * a(t))f(t)\,dt = \sum_{k=j-1}^{j+1} \int (\varphi_{2^j} * a(t))(\varphi_{2^k} * f(t))\,dt.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int (\varphi_{2^j} * a(t))f(t)\,dt \right\| &\leq \sum_{k=j-1}^{j+1} \int |\varphi_{2^j} * a(t)|\,\|\varphi_{2^k} * f(t)\|\,dt \\ &\leq 3\,\|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)}\,\|\varphi_{2^j} * a\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Aus (3.12) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\left\|\int a(t)f(t)\,dt\right\| &\leq 3\,\|f\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|\varphi_{2^j}*a\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &= 3\,\|f\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)}\,\|a\|_{B^{0,1}_{1}(\mathbb{R},\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Aus Satz 3.2.2 folgt damit (3.11). □

3.3 Zwei nützliche Abschätzungen

Die Bedeutung des folgenden Satzes liegt darin, daß auf der rechten Seite von (3.14) die Norm im Besovraum steht. Diese läßt sich nach oben durch die Norm in $L^\infty(\mathbb{R},X)$ abschätzen. Für Letztere wäre die Ungleichung (3.14) trivial. Mit der Norm im Besovraum wird sie uns jedoch im letzten Kapitel von großem Nutzen sein.

Satz 3.3.1 *Es existiert eine Zahl $C>0$, so daß für alle $f\in L^\infty(\mathbb{R},X)$, alle $h>0$, alle $N\in\mathbb{N}_0$ und alle $t\in\mathbb{R}$*

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2^Nh}\int_t^{t+2^Nh}f(s)\,ds\right\|\leq CN\|f\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)} \tag{3.14}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2^Nh}\int_t^{t+2^Nh}f(s)\,ds=\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}a_k(s)f(s)\,ds \tag{3.15}$$

für alle $h>0$, alle $N\in\mathbb{N}$ und alle $t\in\mathbb{R}$, wobei a_k durch

$$a_k(s):=\frac{1}{2^kh}(\chi_{[t,t+2^{k-1}h]}(s)-\chi_{[t+2^{k-1}h,t+2^kh]}(s))$$

definiert ist. Wir führen eine vollständige Induktion durch. Sei also für den Anfang $N=1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}a_1(s)f(s)\,ds &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2h}(\chi_{[t,t+h]}(s)-\chi_{[t+h,t+2h]}(s))f(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2h}\int_{t+h}^{t+2h}f(s)\,ds\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2h}\int_{t+h}^{t+2h}f(s)\,ds\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(s)\,ds-\frac{1}{2h}\int_t^{t+2h}f(s)\,ds\end{aligned}$$

für alle $h > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist (3.15) für den Fall $N = 1$ gezeigt.

Um den Induktionsschritt zu vollziehen, setzen wir nun voraus das (3.15) für ein beliebiges, festes $N \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen, daß die Gleichung dann auch für $N+1$ erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s) f(s)\, ds \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s) f(s)\, ds + \int_{-\infty}^{\infty} a_{N+1}(s) f(s)\, ds \\
&\quad \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds - \frac{1}{2^N h} \int_t^{t+2^N h} f(s)\, ds + \int_{-\infty}^{\infty} a_{N+1}(s) f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_{N+1}(s) f(s)\, ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N h} \int_t^{t+2^N h} f(s)\, ds - \frac{1}{2^{N+1} h} \int_{t+2^N h}^{t+2^{N+1} h} f(s)\, ds.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s) f(s)\, ds \\
&\quad = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^N h} \int_t^{t+2^N h} f(s)\, ds - \frac{1}{2^{N+1} h} \int_{t+2^N h}^{t+2^{N+1} h} f(s)\, ds \\
&\quad = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds - \frac{1}{2^{N+1} h} \int_t^{t+2^{N+1} h} f(s)\, ds
\end{aligned}$$

für alle $h > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen.

Mit Hilfe von (3.15) ergibt sich

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds - \frac{1}{2^N h} \int_t^{t+2^N h} f(s)\, ds \right\| \leq \sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s) f(s)\, ds \right\| \tag{3.16}$$

für alle $h > 0$, alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $a_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind spezielle Atome. Nach Korollar 3.2.3 existiert deshalb eine Zahl $C > 0$ (unabhängig von k und N) derart, daß

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s) f(s)\, ds \right\| \leq C \|f\|_{B_\infty^{0,\infty}(\mathbb{R},X)}$$

für alle $k = 1, ..., N$ gilt. Damit können wir schließlich aus (3.16)

$$\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds - \frac{1}{2^N h}\int_t^{t+2^N h} f(s)\,ds \right\| \leq C \cdot N \cdot \|f\|_{B^{0;\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)}$$

für alle $h > 0$, alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ folgern. □

Während wir es bei lokal-integrierbaren Funktionen normalerweise strenggenommen mit Funktionsklassen zu tun haben, machen wir im folgenden Korollar eine Aussage über eine konkrete Funktion. Das bedeutet, daß in der Ungleichung auf beiden Seiten wirklich dieselbe Funktion steht und nicht in Wirklichkeit verschiedene Funktionen, die nur fast überall gleich sind.

Korollar 3.3.2 *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$, alle $h > 0$, alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \|f(t)\| \;&\leq\; \frac{1}{2^N h}\left\| \int_t^{t+2^N h} f(s)\,ds \right\| + \frac{1}{h}\left\| \int_t^{t+h} (f(t) - f(s))\,ds \right\| \\ &\quad + C \cdot N \cdot \|f\|_{B^{0;\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)} \end{aligned}$$

gilt.

Beweis. Für eine beliebige reelle Zahl t und eine beliebige positive Zahl h können wir $f(t)$ auf folgende Weise darstellen:

$$f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f(t) - f(s))\,ds.$$

Die Aussage des Korollars folgt dann aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und Satz 3.3.1 □

Das letzte Korollar kann Ausgangspunkt für weitere Abschätzungen sein. In der folgenden Bemerkung wollen wir in Abhängigkeit von bestimmten Eigenschaften der Funktion f einige Möglichkeiten aufzeigen.

Bemerkung 3.3.3 *a) Für*

$$C_t := \frac{1}{h}\left\| \int_t^{t+h} (f(t) - f(s))\,ds \right\|$$

kommen als Abschätzungen beispielsweise in Frage:

(i) Falls die Funktion f differenzierbar ist, gilt

$$C_t \leq \frac{h}{2} \sup_{s\in[t,t+h]} \|f'(s)\|.$$

(ii) Falls die Funktion f $\alpha-$hölderstetig ist, gilt

$$\begin{aligned} C_t &\leq \frac{1}{h} \sup_{s\in[t,t+h]} \left(\frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^\alpha} \int_t^{t+h} (u-t)^\alpha \, du \right) \\ &= \frac{h^\alpha}{1+\alpha} \sup_{s\in[t,t+h]} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^\alpha}. \end{aligned}$$

(iii) Existieren eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Zahl $C > 0$, so daß $\|f(t)-f(s)\| \leq C \cdot 2^{\alpha s}$ für alle $s \in [t, t+1]$ gilt, so ist mit einer geeigneten Konstanten $D = D(\alpha) > 0$ die Abschätzung

$$C_t \leq \frac{D}{h} \cdot 2^{\alpha t}$$

für alle $h \in (0, 1]$ möglich.

b) Existiert eine Zahl $C > 0$ mit der Eigenschaft, daß

$$\left\| \int_0^u f(s) \, ds \right\| \leq C$$

für alle $u > 0$ gilt, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^N h} \left\| \int_t^{t+2^N h} f(s) \, ds \right\| &\leq \frac{1}{2^N h} \left(\left\| \int_0^{t+2^N h} f(s) \, ds \right\| + \left\| \int_0^t f(s) \, ds \right\| \right) \\ &\leq \frac{C}{2^{N-1} h}. \end{aligned}$$

Wir werden von diesen Abschätzungen im letzten Kapitel profitieren.

Kapitel 4

Anwendungen auf Halbgruppenstabilität

Ist A eine $n \times n$-Matrix komplexer Zahlen und x ein Element von $\mathbb{C}^n$, so hat das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= x \end{aligned} \tag{4.1}$$

gerade die Lösung $e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty}(t^k/k!)A^k x$. Die Lösung $u(t)$ ist nach dem Satz von Liapunov genau dann exponentiell stabil (Das soll hier bedeuten: $\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\epsilon t}\|x\|$ für eine Zahl $\epsilon > 0$ und für alle x), wenn alle Eigenwerte der Matrix A einen negativen Realteil haben und stabil (Das soll hier bedeuten: $\|e^{tA}x\| \leq C\|x\|$ für alle $t \geq 0$ und alle x), genau dann, wenn alle Eigenwerte von A einen Realteil ≤ 0 und die Eigenwerte mit verschwindendem Realteil halbeinfach sind. Siehe hierzu etwa Abschnitt 17 in [Wa].

Betrachtet man (4.1) nun in einem Banachraum X mit einem linearen und dicht definierten Operator $A : X \supset D(A) \to X$, dessen Resolventenmenge nicht leer ist und Anfangswerte x aus X, so stellt der folgende Satz von Hille-Phillips (zu finden etwa in [Pa]) die Verbindung zu c_0-Halbgruppen her:

Satz 4.1 *(4.1) besitzt genau dann für jedes $x \in D(A)$ genau eine auf $[0, \infty)$ stetig differenzierbare Lösung $u(t)$, wenn A der Erzeuger einer c_0-Halbgruppe $T(t)$ stetiger linearer Operatoren ist.*

Anwendung findet die Theorie des abstrakten Cauchyproblems (4.1) unter ebengenannten Voraussetzungen beispielsweise bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen. Es liegt nun auf der Hand zu fragen, welche Möglichkeiten bestehen, das Wachstumsverhalten der Lösungen von (4.1) -

oder eben das Wachstumsverhalten von Orbits $T(t)x$ einer c_0-Halbgruppe - zu charakterisieren. Der erwähnte Satz von Liapunov im Raum $\mathbb{C}^n$ läßt sich dabei nicht auf allgemeine Banachräume übertragen. Selbst dann nicht, wenn man die Menge der Eigenwerte durch das Spektrum des Operators ersetzt. Insofern sind andere Bedingungen vonnöten, die das Wachstumsverhalten von Halbgruppenorbits $T(t)x$ charakterisieren.

In den ersten Abschnitten dieses Kapitels wenden wir uns - nach Angabe einiger grundlegender Definitionen und Sätze zu c_0-Halbgruppen - der Fragestellung zu, wann Orbits von Halbgruppen beschränkt sind und welche Zusammenhänge zwischen dem Wachstum von Orbits $t \mapsto T(t)x$ und der Eigenschaft, daß diese im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegen, bestehen.

Natürlich ist man in den Anwendungen besonders daran interessiert, zu wissen, welche Eigenschaften des Erzeugers A oder seiner Resolvente das Wachstum der Lösung des Cauchyproblems bestimmen. Zu diesem Themenkreis werden wir in den Abschnitten des zweiten Teils dieses Kapitels einige Ergebnisse erarbeiten.

4.1 c_0-Halbgruppen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Definitionen und Zusammenhänge über c_0-Halbgruppen angeben. Ausführlich wird die Theorie der c_0-Halbgruppen in den Büchern [EnNa], [Pa], [Na], [Go] und [Da] abgehandelt. Dort findet man auch die Beweise für die in diesem Abschnitt aufgelisteten grundlegenden Aussagen.

Definition 4.1.1 *Es sei X ein Banachraum. Eine Familie $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, von stetigen linearen Operatoren von X nach X mit*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ *für alle* $s, t \geq 0$,

(iii) $\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x$ *für alle* $x \in X$,

heißt c_0***-Halbgruppe stetiger linearer Operatoren auf*** X. *Wir werden auch kurz von einer c_0-Halbgruppe $T(t)$ sprechen.*

Mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit läßt sich leicht zeigen, daß für jede c_0-Halbgruppe $T(t)$ stets Zahlen $M > 0$ und $w \in \mathbb{R}$ existieren, so daß

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \tag{4.2}$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Die *gleichmäßige Wachstumsschranke* $\omega_0(T)$ der c_0-Halbgruppe $T(t)$ sei definiert durch

$$\omega_0(T) := \inf \left\{ w \in \mathbb{R} \, : \, \sup_{t \geq 0} e^{-wt} \|T(t)\| < \infty \right\}. \tag{4.3}$$

Der *Erzeuger* oder *Generator* A einer c_0-Halbgruppe $T(t)$ wird folgendermaßen definiert: Zunächst sei

$$D(A) := \left\{ x \in X \, : \, \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}.$$

Dann ist der Erzeuger von $T(t)$, der lineare Operator $A : D(A) \to X$, definiert durch

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

für $x \in D(A)$. Der Erzeuger einer c_0-Halbgruppe ist stets ein abgeschlossener Operator, dessen Definitionsbereich dicht in X liegt.

Sind M und w Zahlen derart, daß (4.2) gilt, so liegen alle komplexen Zahlen λ mit $\operatorname{Re} \lambda > w$ in der Resolventenmenge von A, und für die Resolvente von A hat man in diesem Fall die Darstellung

$$R(\lambda, A)x = (\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \tag{4.4}$$

für alle $x \in X$.

Bezeichnet nun $s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda \, : \, \lambda \in \text{Spektrum}(A)\}$ die *Spektralschranke* von A, so gilt also stets

$$s(A) \leq \omega_0(T).$$

4.2 Beschränkte Orbits

Wie bereits erwähnt wurde, wächst für eine c_0-Halbgruppe die Norm der Operatoren $T(t)$ höchstens exponentiell, d.h. geeignete Zahlen $M, w > 0$, so daß die Voraussetzungen des nachstehenden Lemmas für eine c_0-Halbgruppe erfüllt sind, existieren immer.

Lemma 4.2.1 *Es seien $M, w > 0$ und $T(t)$ eine c_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X mit $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt für alle $x \in X$, alle $t \geq 1/w$ mit $\|T(t)x\| > 0$ und alle Zahlen $s \in (t - 1/w, t]$*

$$\|T(s)x\| > \frac{\|T(t)x\|}{Me}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|T(s)x\| &\geq \frac{\|T(t-s)\|}{Me^{w(t-s)}}\,\|T(s)x\| \\ &> \frac{\|T(t-s)\|}{Me}\,\|T(s)x\| \\ &\geq \frac{\|T(t)x\|}{Me}\end{aligned}$$

falls die auftretenden Größen die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen. □

Eine für unsere Zwecke nützliche Charakterisierung der Beschränktheit eines Orbits $T(t)x$ einer c_0-Halbgruppe wird durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 4.2.2 *$T(t)$ sei eine c_0-Halbgruppe auf X. Dann sind für jedes $x \in X$ äquivalent:*

(i) Für alle $K > 0$ ist

$$\sup\left\{\int_I \|T(t)x\|\,dt \;:\; I \text{ Teilintervall von } [0,\infty) \text{ mit } |I| \leq K\right\}$$

endlich.

(ii) Es existiert eine Zahl $K > 0$, so daß

$$\sup\left\{\int_I \|T(t)x\|\,dt \;:\; I \text{ Teilintervall von } [0,\infty) \text{ mit } |I| \leq K\right\}$$

endlich ist.

(iii) $t \mapsto \|T(t)x\|$ ist beschränkt.

Beweis. (ii) ⇒ (iii). Sei K eine positive Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft. Es existieren Zahlen $M, w > 0$ mit $1/w < K$ und $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ für alle $t \geq 0$. Wäre $t \mapsto \|T(t)x\|$ unbeschränkt, so existierte zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $t_n > 1/w$ mit

$$\|T(t_n)x\| \geq n. \tag{4.5}$$

Dann wäre aber doch für alle $t \in [t_n - 1/w, t_n]$ nach Lemma 4.2.1

$$\|T(t)x\| \geq \frac{\|T(t_n)x\|}{Me} \overset{(4.5)}{\geq} \frac{n}{Me}. \tag{4.6}$$

Somit bestünde die Ungleichung

$$\int_{t_n-1/w}^{t_n} \|T(t)x\|\,dt \geq \frac{n}{Mwe}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das widerspräche aber der Voraussetzung.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ist $\|T(t)x\| \leq C$ für alle $t \geq 0$, so gilt

$$\int_I \|T(t)x\|\, dt \leq C \cdot |I|$$

für jedes beschränkte Intervall $I \subset [0, \infty)$. Deshalb gilt in diesem Fall (i). $\square$

Aus Lemma 4.2.2 folgt mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, daß $\sup_{t\geq 0} \|T(t)\| < \infty$ ist, falls $t \mapsto T(t)x$ für alle $x \in X$ in $L^p([0, \infty), X)$ für eine feste Zahl $1 \leq p < \infty$ liegt. In diesem Fall gilt sogar $\omega_0(T) < 0$. Diese Beobachtung geht im Fall $p = 2$ zurück auf Datko ([Da]). Von Pazy ([Pa] Theorem 4.4.1) stammt die Verallgemeinerung für alle $1 \leq p < \infty$. Aus dem Beweis Letzterer wurde auch der Beweis von Lemma 4.2.2 extrahiert. Die Tatsache, daß aus der Zugehörigkeit von $T(t)x$ zu $L^p([0, \infty), X)$ für jedes $x \in X$ die exponentielle Stabilität (d.h. $\omega_0(T) < 0$) der c_0-Halbgruppe folgt, ist deshalb gemeinhin unter dem Namen Datko-Pazy-Lemma bekannt. Eine quantitative Version des Datko-Pazy-Lemmas findet man in [Ne] (Theorem 3.1.8).

4.3 Orbits in $BMO(\mathbb{R}, X)$

In einer gewissen Analogie zum Datko-Pazy-Lemma wollen wir in diesem Abschnitt untersuchen, was man über das Wachstumsverhalten eines Orbits $T(t)x$ einer c_0-Halbgruppe sagen kann, wenn man weiß, daß dieser im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegt.

Satz 4.3.1 *$T(t)$ sei eine c_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Für ein Element x aus X sei*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Dann sind äquivalent:

(i) f liegt im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$ und es existiert eine Zahl $K > 0$, so daß

$$C := \sup \left\{ \left\| \int_I T(t)x\, dt \right\| \; : \; I \text{ Teilintervall von } [0, \infty) \text{ mit } |I| \leq K \right\}$$

endlich ist.

(ii) $\sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| < \infty$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Für alle $\beta > \alpha \geq 0$ mit $\beta - \alpha \leq K$ und alle $t > 0$ gilt

$$T(t)x = f(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(s)\,ds + \left(f(t) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(s)\,ds\right).$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \|T(t)x\|\,dt &\leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \left\|\int_\alpha^\beta f(s)\,ds\right\| dt \\ &\quad + \int_\alpha^\beta \left\|f(t) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(s)\,ds\right\| dt \\ &\leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta C\,dt + (\beta-\alpha)\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \\ &= C + (\beta-\alpha)\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)}\end{aligned}$$

für alle $\beta > \alpha \geq 0$ mit $\beta - \alpha \leq K$. Die Beschränktheit von $t \mapsto \|T(t)x\|$ folgt nun aus Lemma 4.2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Beschränkte Funktionen liegen immer auch in $BMO(\mathbb{R}, X)$. Mit der Dreiecksungleichung und Lemma 4.2.2 folgt sofort die Existenz der Konstanten $K > 0$. $\square$

Man kann auch eine Aussage über das Wachstum eines Orbits machen, wenn man lediglich weiß, daß dieser in $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegt. Um den entsprechenden Satz zu beweisen, benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 4.3.2 *Es seien $M, w > 0$ und $T(t)$ eine c_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X mit $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ für alle $t \geq 0$. Dann existiert zu jedem $x \in X$, für das*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

in $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegt, eine Zahl $C > 0$ mit

$$\|T(t)x\| \leq C\left(1 + \left\|\int_{t-1/w}^t T(s)x\,ds\right\|\right) \tag{4.7}$$

für alle $t \geq 1/w$.

Beweis. Ist $t \geq 1/w$, so gilt nach Lemma 4.2.1 für alle $r \in (t - 1/w, t]$ die Ungleichung

$$\left\|T(r)x - w\int_{t-1/w}^t T(s)x\,ds\right\| > \frac{\|T(t)x\|}{Me} - \left\|w\int_{t-1/w}^t T(s)x\,ds\right\|.$$

Nach Satz 2.5.1 (John-Nirenberg-Ungleichung) folgt

$$\frac{1}{w} \leq \frac{C_1}{w} \exp\left(-C_2\left(\frac{\|T(t)x\|}{Me} - \left\|w\int_{t-1/w}^{t} T(s)x\,ds\right\|\right)\right) \tag{4.8}$$

für alle $t \geq 1/w$ mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Also gilt doch

$$\sup_{t\geq 1/w}\left(\frac{\|T(t)x\|}{Me} - \left\|w\int_{t-1/w}^{t} T(s)x\,ds\right\|\right) < \infty.$$

Das beweist (4.7). $\square$

Der angekündigte Satz über das Wachstum von Orbits in $BMO(\mathbb{R}, X)$ lautet nun:

Satz 4.3.3 *Ist $T(t)$ eine c_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X und liegt für ein Element x aus X die Abbildung*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$, so existiert eine Zahl $C > 0$ mit

$$\|T(t)x\| \leq C(1 + t|\log t|)$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 4.3.2 und Satz 2.4.1. $\square$

4.4 Beschränktheit der Resolvente

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt Zusammenhänge zwischen verschiedenen Eigenschaften von Orbits von c_0-Halbgruppen untersucht haben, wollen wir in diesem Abschnitt Verbindungen zwischen der Asymptotik dieser und Eigenschaften der Resolvente des Erzeugers A der c_0-Halbgruppe herstellen. Zunächst wollen wir jedoch noch ein paar Definitionen und Resultate angeben, die uns eine Einordnung der späteren Ergebnisse erlauben werden.

Wie schon im ersten Abschnitt erwähnt wurde, ist die gleichmäßige Wachstumsschranke einer c_0-Halbgruppe $T(t)$ stets größer oder gleich der Spektralschranke ihres Erzeugers, das heißt, es gilt $s(A) \leq \omega_0(T)$. Gleichheit gilt jedoch nur in besonderen Fällen, zum Beispiel dann, wenn der Erzeuger ein beschränkter Operator ist, oder - was eine Verallgemeinerung ist - wenn die c_0-Halbgruppe für $t \geq t_0 > 0$ stetig in der Operatornorm ist. Dies folgt aus dem Spektralabbildungssatz $\sigma(T(t))\backslash\{0\} = e^{t\sigma(A)}$ für diese Halbgruppen, der zuerst in [HiPh] gezeigt wurde. Eine noch allgemeinere Klasse bilden die c_0-Halbgruppen, die in "unendlich gleichmäßig stetig" sind. Diese Klasse wurde von Martinez und Mazon in [MaMa] eingeführt, und ebenda wird auch die Gleichheit von Spektralschranke und gleichmäßiger Wachstumsschranke für Halbgruppen dieser Klasse bewiesen.

Eine weitere Klasse von c_0-Halbgruppen, für die die gleichmäßige Wachstumsschranke mit der Spektralschranke des Erzeugers übereinstimmt, bilden die c_0-Halbgruppen positiver Operatoren auf den Räumen $L^p(\Omega, \mu)$, wobei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum ist. Für den Fall $p = 1$ wurde das zuerst von Derndinger ([De]) bewiesen. Der Fall $p = 2$ ist Greiner und Nagel zu verdanken ([GrNa]). Für allgemeines $p \geq 1$ erbrachte schließlich Weis ([We1]) den Nachweis. Desweiteren stimmt für c_0-Halbgruppen positiver Operatoren auf Räumen $C(K)$ (siehe [De]) , wobei K ein kompakter Hausdorffraum ist, und auf Räumen $C_0(\Omega)$ (siehe [BaDa]), wobei Ω ein lokal-kompakter Hausdorffraum ist, die gleichmäßige Wachstumsschranke der Halbgruppe mit der Spektralschranke ihres Erzeugers überein.

Nun mag man vielleicht hoffen, daß im allgemeinen zumindest das Wachstum der klassischen Lösungen des Cauchyproblems (4.1) durch die Spektralschranke von A bestimmt wird, daß also zumindest die *Wachstumsschranke*

$$\omega_1(T) := \inf \left\{ w \in \mathbb{R} \,:\, \sup_{t \geq 0} e^{-wt} \|T(t)x\| < \infty \text{ für alle } x \in D(A) \right\} \qquad (4.9)$$

der c_0-Halbgruppe $T(t)$ stets gleich der Spektralschranke des Erzeugers dieser Halbgruppe ist. Tatsächlich gilt stets $s(A) \leq \omega_1(T)$. Gleichheit gilt beispielsweise für c_0-Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden (siehe [Neu]). Im allgemeinen stimmen Wachstumsschranke und Spektralschranke jedoch nicht überein. Ein Beispiel hierfür - sogar im Falle, daß ein Hilbertraum zugrundeliegt - gab Zabczyk in [Za] an.

Das Spektrum des Erzeugers allein bestimmt also nicht das Wachstum einer c_0-Halbgruppe. Auf der Suche nach anderen Größen, die mit Hilfe des Erzeugers oder dessen Resolvente angegeben werden können und die Aussagen über das Wachstum der Halbgruppe erlauben, stieß man schließlich auf die *Abszisse der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolvente* $s_0(A)$. Diese ist definiert durch

$$s_0(A) := \inf \left\{ \beta > s(A) \,:\, \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq \beta} \|R(\lambda, A)\| < \infty \right\}.$$

Aus (4.4) folgt unmittelbar, daß $s_0(A)$ stets kleiner oder gleich der gleichmäßigen Wachstumsschranke der Halbgruppe ist. Falls der zugrundeliegende Banachraum X ein Hilbertraum ist, gilt sogar Gleichheit. Dies wurde für Kontraktionshalbgruppen zuerst von Gearhart in [Ge] bewiesen und dann von Prüss in [Pr] bzw. Greiner in [Na], A-III.7, für den allgemeinen Fall gezeigt. Für c_0-Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden wiederum gilt stets

$$s(A) = s_0(A) = \omega_1(T).$$

Siehe hierzu [Na].

In diesem und in den beiden folgenden Abschnitten werden wir nun weitere Kriterien an die Resolvente des Erzeugers einer c_0-Halbgruppe erarbeiten, die das Wachstum von Orbits der Halbgruppe bestimmen. Mit Korollar 4.6.2 werden wir schließlich beweisen, daß stets

$$\omega_1(T) \leq s_0(A)$$

gilt. Das bedeutet, daß die Abszisse der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolvente das Wachstum der klassischen Lösungen des abstrakten Cauchyproblems (4.1) beschränkt. Ob dies gilt, war lange Zeit eine offene Frage, die schließlich von Weis und Wrobel in [WeWr] beantwortet werden konnte.

Hilfsweise wollen wir noch eine weitere Wachstumsschranke einführen:

$$\omega_2(T) := \inf\left\{ w \in \mathbb{R} \,:\, \sup_{t\geq 0} e^{-wt}\|T(t)x\| < \infty \text{ für alle } x \in D(A^2)\right\}. \quad (4.10)$$

Dabei ist $D(A^2)$ der Raum aller $x \in D(A)$ mit $Ax \in D(A)$, also der Definitionsbereich des Operators A^2. Slemrod zeigte in [Sl] die Ungleichung

$$\omega_2(T) \leq s_0(A).$$

Das folgende Lemma basiert im wesentlichen auf dem dortigen Beweis.

Lemma 4.4.1 *A sei der Erzeuger der c_0-Halbgruppe $T(t)$ auf dem Banachraum X. Gilt $s_0(A) < 0$, so gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{i\nu s} T(s)x\, ds = R(-i\nu, A)x$$

für alle $\nu \in \mathbb{R}$ und alle $x \in D(A)$. Außerdem ist

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R},\, t>0} \left\| \int_0^t e^{-i\nu s} T(s)x\, ds \right\| < \infty$$

für alle $x \in D(A)$.

Überdies existiert zu jeder Zahl $\mu > s_0(A)$ und jedem $x \in D(A)$ eine Konstante $C = C(\mu, x)$, so daß

$$\|T(t)A^{-1}x\| \leq Ce^{\mu t}$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Insbesondere ist also $\omega_2(T) \leq s_0(A)$ erfüllt.

Beweis. Falls $\omega_0(T) < 0$ gilt, ist die Aussage trivial. Wir können uns also auf den Fall $\omega_0(T) \geq 0$ beschränken. Es seien γ eine beliebige Zahl, die größer als $\omega_0(T)$ ist, μ eine beliebige Zahl aus dem offenen Intervall $(s_0(A), 0)$ und α eine beliebige positive Zahl. x sei ein beliebiges Element aus $D(A)$. Der Weg

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma_1(\alpha) \cup \Gamma_2(\alpha) \cup \Gamma_3(\alpha) \cup \Gamma_4(\alpha)$$

sei positiv orientiert. Die Teilwege Γ_j seien dabei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(\alpha) &= \{\gamma + is \;:\; -\alpha \leq s \leq \alpha\} \\
\Gamma_2(\alpha) &= \{-s + i\alpha \;:\; -\gamma \leq s \leq -\mu\} \\
\Gamma_3(\alpha) &= \{\mu - is \;:\; -\alpha \leq s \leq \alpha\} \\
\Gamma_4(\alpha) &= \{s + i\alpha \;:\; \mu \leq s \leq \gamma\}
\end{aligned}$$

Wir wenden die Cauchysche Integralformel an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda = R(0, A)x \tag{4.11}$$

für alle $t \geq 0$. In [Pa] Theorem 1.7.4 finden wir die Beziehung

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda = \int_0^t T(s)x\, ds. \tag{4.12}$$

Parametrisieren wir den Weg $\Gamma_3(\alpha)$ in geeigneter Weise, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{(\mu+is)t} \cdot \frac{R(\mu + is, A)x}{\mu + is}\, ds \\
&= -\frac{1}{2\pi} e^{\mu t}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ist} \cdot \frac{R(\mu + is, A)x}{\mu + is}\, ds
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Da

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A)x &= \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)((\lambda - A) + A)x \\
&= \frac{1}{\lambda}(x + R(\lambda, A)Ax)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

für alle Zahlen λ aus der Resolventenmenge von A gilt, ist die Funktion

$$s \mapsto \frac{R(\mu + is, A)x}{\mu + is}$$

ein Element von $L^1(\mathbb{R}, X)$. Deshalb haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} -e^{\mu t} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right)(t) \tag{4.14}$$

für alle $t \geq 0$. Für den Teilweg $\Gamma_2(\alpha)$ machen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Gamma_2(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda \right\| &\leq (\gamma - \mu) \cdot \sup_{\mu \leq s \leq \gamma} \left\| \frac{e^{(s+i\alpha)t} R(s + i\alpha, A)x}{s + i\alpha} \right\| \\ &\leq \frac{\gamma - \mu}{\alpha} \cdot e^{\gamma t} \cdot \sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq \mu} \|R(\lambda, A)\|\, \|x\| \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Da $\sup_{\operatorname{Re}\lambda\geq\mu} \|R(\lambda, A)\|$ wegen $\mu > s_0(A)$ endlich ist, folgt

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda = 0 \tag{4.15}$$

für alle $t \geq 0$. Analog zu (4.15) zeigt man

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_4(\alpha)} e^{\lambda t} \cdot \frac{R(\lambda, A)x}{\lambda}\, d\lambda = 0 \tag{4.16}$$

für alle $t \geq 0$. Fassen wir (4.11), (4.12), (4.14), (4.15) und (4.16) zusammen, so ergibt sich

$$R(0, A)x = \int_0^t T(s)x\, ds - e^{\mu t} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right)(t) \tag{4.17}$$

für alle $t \geq 0$.

Sei nun ν eine beliebige reelle Zahl. Setzen wir

$$\tilde{T}(t) := e^{i\nu t} T(t)$$

für $t \geq 0$, so ist $\tilde{T}(t)$ eine c_0-Halbgruppe. Der Erzeuger $\tilde{A}$ dieser Halbgruppe ist gerade $i\nu + A$ mit dem Definitionsbereich $D(\tilde{A}) = D(A)$. Für die Resolvente gilt demnach die Beziehung $R(\lambda, \tilde{A}) = R(\lambda - i\nu, A)$ für alle Zahlen λ, für die $\lambda - i\nu$ in der Resolventenmenge von A liegt. Damit besteht offenbar die Gleichung $s_0(A) = s_0(\tilde{A})$. Somit ist die eben hergeleitete Gleichung (4.17) auch für $\tilde{T}(t)$ statt $T(t)$ gültig. Es gilt folglich

$$\begin{aligned} R(-i\nu, A)x &= R(0, \tilde{A})x \\ &\overset{(4.17)}{=} \int_0^t \tilde{T}(s)x\,ds - e^{\mu t} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu + i\cdot, \tilde{A})x}{\mu + i\cdot}\right)(t) \qquad (4.18) \\ &= \int_0^t e^{i\nu s}T(s)x\,ds - e^{\mu t} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu - i\nu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right)(t) \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Wir werden nun die Fouriertransformierte gleichmäßig abschätzen. Es gilt

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu - i\nu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right)(t)\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{R(\mu - i\nu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \qquad (4.19)$$

für alle $t \geq 0$. Wir benutzen erneut Gleichung (4.13) und erhalten

$$\begin{aligned} \left\|\frac{R(\mu - i\nu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right\|_{L^1(\mathbb{R},X)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{R(\mu - i\nu + is, A)x}{\mu + is}\right\| ds \qquad (4.20) \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s - \nu))|}&(\|x\| + \|R(\mu + i(s - \nu), A)Ax\|)\,ds. \end{aligned}$$

Da μ größer als $s_0(A)$ ist, gilt

$$\|R(\mu + i(s - \nu), A)Ax\|) \leq \sup_{\operatorname{Re}\tau \geq \mu} \|R(\tau, A)\|\,\|Ax\| < \infty. \qquad (4.21)$$

Es bleibt also noch das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s - \nu))|}\,ds \quad &= \qquad (4.22) \\ \int_{|s| \geq 2|\nu|} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s - \nu))|}\,ds \quad &+ \quad \int_{|s| < 2|\nu|} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s - \nu))|}\,ds \end{aligned}$$

abzuschätzen. Wir halten zunächst

$$|(\mu + is)(\mu + i(s - \nu))| = \sqrt{\mu^2 + s^2} \cdot \sqrt{\mu^2 + (s - \nu)^2} \qquad (4.23)$$

fest. Für $|s| \geq 2|\nu|$ gilt

$$|s - \nu| \geq |s| - |\nu| \geq |s| - \frac{1}{2}|s| = \frac{1}{2}|s|$$

und damit

$$|(\mu + is)(\mu + i(s-\nu))| \overset{(4.23)}{\geq} \sqrt{\mu^2 + s^2} \cdot \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}s^2}. \tag{4.24}$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{|s|\geq 2|\nu|} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s-\nu))|}\, ds &\overset{(4.24)}{\leq} \int_{|s|\geq 2|\nu|} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + s^2} \cdot \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}s^2}}\, ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + s^2} \cdot \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}s^2}}\, ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{4}s^2}\, ds \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Nun widmen wir uns dem zweiten Integral. Beachtet man

$$\begin{aligned} s^2 + (s-\nu)^2 &= 2s^2 - 2s\nu + \nu^2 \\ &= \left(\sqrt{2}s - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\nu^2}{2} \\ &\geq \frac{\nu^2}{2}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} |(\mu + is)(\mu + i(s-\nu))| &\overset{(4.23)}{=} \sqrt{(\mu^2 + s^2)(\mu^2 + (s-\nu)^2)} \\ &= \sqrt{\mu^4 + \mu^2(s^2 + (s-\nu)^2) + s^2(s-\nu)^2} \\ &\geq \sqrt{\mu^2(s^2 + (s-\nu)^2)} \\ &= |\mu| \cdot \sqrt{s^2 + (s-\nu)^2} \\ &\overset{(4.26)}{\geq} \frac{|\mu|}{\sqrt{2}} \cdot |\nu| \end{aligned}$$

und damit für $\nu \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{|s|<2|\nu|} \frac{1}{|(\mu + is)(\mu + i(s-\nu))|}\, ds &\leq \int_{|s|<2|\nu|} \frac{\sqrt{2}}{|\mu| \cdot |\nu|}\, ds \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{|\mu|}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Aus (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.25) und (4.27) ergibt sich

$$\sup_{t\geq 0,\, \nu\in\mathbb{R}} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{R(\mu - i\nu + i\cdot, A)x}{\mu + i\cdot}\right)(t)\right\| < \infty. \tag{4.28}$$

Da μ und $s_0(A)$ negative Zahlen sind, folgen wegen Gleichung (4.18)

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{i\nu s} T(s)x\, ds = R(-i\nu, A)x$$

für alle $\nu \in \mathbb{R}$ und

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R},\, t>0} \left\| \int_0^t e^{-i\nu s} T(s)x\, ds \right\| < \infty.$$

Die Existenz der Konstanten $C = C(\mu, x)$ folgt aus (4.28), der Beziehung

$$T(t)A^{-1}x = \int_0^t T(s)x\, ds + A^{-1}x = \int_0^t T(s)x\, ds - R(0, A)x$$

und Gleichung (4.17). $\Box$

4.5 Der Fall: X hat Fouriertyp > 1

Daß $\omega_1(T) \leq s_0(A)$ für B-konvexe Räume gilt, hatte Wrobel in [Wr] festgestellt. Die B-konvexen Räume sind aber genau die Räume, die einen nichttrivialen Fouriertyp besitzen. Daß jeder B-konvexe Raum einen nichttrivialen Fouriertyp hat, wurde von Bourgain in [Bo2] bewiesen. Einen Beweis dafür, daß jeder Raum, der einen nichttrivialen Fouriertyp besitzt auch B-konvex ist, findet man beispielsweise in [BlPe] (S. 354). In Verbindung mit Satz 4.3.1 und Lemma 4.4.1 folgt das Ergebnis von Wrobel leicht aus unserem nächsten Satz. Wir bedienen uns dabei den Grundlagen, die wir in Kapitel 2 gelegt haben.

Satz 4.5.1 *Der Banachraum X habe einen nichttrivialen Fouriertyp. Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle c_0-Halbgruppen $T(t)$ mit $s_0(A) < 0$ die Abbildung*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

für jedes $x \in D(A)$ in $BMO(\mathbb{R}, X)$ liegt und

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq C \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|\beta R(i\beta, A)x\|$$

erfüllt.

Beweis. Sei $T(t)$ eine c_0-Halbgruppe mit $s_0(A) < 0$ und x ein beliebiges Element von $D(A)$. Wir wollen Satz 2.8.6 anwenden. Sei also φ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{D}_0$. Dann gilt nach Lemma 4.4.1

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) R(-i\beta, A)x \, d\beta &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) \lim_{s\to\infty} \int_0^s e^{i\beta t} T(t)x \, dt \, d\beta \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) \int_0^s e^{i\beta t} T(t)x \, dt \, d\beta \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{s\to\infty} \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} \hat{\varphi}(\beta) \, d\beta \, T(t)x \, dt \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \varphi(t) T(t)x \, dt.
\end{aligned}$$

Damit ist die schwache Fouriertransformierte der Abbildung $t \mapsto R(-it, A)x$ gerade $2\pi f$. Nach Satz 2.8.6 liegt f damit in $BMO(\mathbb{R}, X)$, und es gilt

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq C \|R(-i\cdot, A)x\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R},X)}.$$

Damit folgt das Behauptete. □

Nun wollen wir uns noch dem Grenzfall $s_0(A) = 0$ widmen. Er fällt als Korollar ab.

Korollar 4.5.2 *Der Banachraum X habe einen nichttrivialen Fouriertyp. A sei der Erzeuger der c_0-Halbgruppe $T(t)$. Es gelte $s_0(A) \leq 0$, und x sei ein Element von $D(A)$. Ist dann $\lambda \mapsto \lambda R(\lambda, A)x$ auf $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ beschränkt, so liegt*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

in $BMO(\mathbb{R}, X)$, und es gilt

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq C \sup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \|\lambda R(\lambda, A)x\|.$$

Dabei hängt $C > 0$ nur vom Banachraum X ab.

Beweis. Für $\epsilon > 0$ sei f_ϵ durch $f_\epsilon(t) := e^{-\epsilon t} f(t)$ definiert. Die Halbgruppe $e^{-\epsilon t} T(t)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.5.1. Deshalb gilt

$$\|f_\epsilon\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \leq C \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|\beta R(i\beta + \epsilon, A)x\|. \tag{4.29}$$

Nun gilt aber wegen

$$\beta R(i\beta + \epsilon, A)x = \frac{\beta}{i\beta + \epsilon} \cdot (i\beta + \epsilon) R(i\beta + \epsilon, A)x$$

und

$$\left|\frac{\beta}{i\beta+\epsilon}\right| \leq 1$$

offenbar

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|\beta R(i\beta+\epsilon, A)x\| \leq \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda R(\lambda, A)x\| \tag{4.30}$$

für alle $\epsilon > 0$. Ist nun I ein beliebiges beschränktes Teilintervall von $\mathbb{R}$, so folgt aus (4.29) und (4.30)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|I|}\int_I \left\| f(t) - \frac{1}{|I|}\int_I f(s)\,ds \right\| dt \\
&\quad = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{|I|}\int_I \left\| f_\epsilon(t) - \frac{1}{|I|}\int_I f_\epsilon(s)\,ds \right\| dt \\
&\quad \leq \sup_{\epsilon>0} \|f_\epsilon\|_{BMO(\mathbb{R},X)} \\
&\quad \overset{(4.29),(4.30)}{\leq} C \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda R(\lambda, A)x\|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $f \in BMO(\mathbb{R}, X)$ mit der gewünschten Ungleichung. $\square$

4.6 Der allgemeine Fall

Wir lassen nun die Voraussetzung fallen, daß der zugrundeliegende Raum einen nichttrivialen Fouriertyp hat. Statt der bisherigen Abschätzung in der Norm im Raum $BMO(\mathbb{R}, X)$ bekommen wir dann allerdings nur noch eine Abschätzung in der Norm im Raum $\mathrm{B}^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Satz 4.6.1 *Sei X ein Banachraum. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle c_0-Halbgruppen $T(t)$ mit $s_0(A) < 0$ die Abbildung*

$$f : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

für jedes $x \in D(A)$ in $B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R}, X)$ liegt und

$$\|f\|_{B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R},X)} \leq C \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|\beta R(i\beta, A)x\|$$

erfüllt.

Beweis. A sei der Erzeuger einer beliebigen c_0-Halbgruppe $T(t)$ auf X mit $s_0(A) < 0$. x sei ein beliebiges Element von $D(A)$. Dann kann

$$g : \beta \mapsto R(-i\beta, A)x$$

als temperierte Distribution aufgefaßt werden. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\begin{aligned}
< g, \hat{\varphi} > &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) g(\beta)\, d\beta \\
&\overset{\text{Lemma 4.4.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{i\beta t} T(t)x\, dt\, d\beta \\
&\overset{\text{Lemma 4.4.1}}{=} \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\beta) \int_0^T e^{i\beta t} T(t)x\, dt\, d\beta \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{T\to\infty} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} \hat{\varphi}(\beta)\, d\beta\; T(t)x\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T 2\pi \varphi(t) T(t)x\, dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Da die Fouriertransformierte der temperierten Distribution g wieder eine temperierte Distribution ist und $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eingebettet ist, können wir $2\pi f$ mit $\hat{g}$ identifizieren.

Im weiteren sei φ nun die für die Definition von $B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}, X)$ gewählte Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es gilt für jede ganze Zahl k

$$\begin{aligned}
2\pi \|\varphi_{2^k} * f\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)} &= \|\widehat{\widehat{\varphi_{2^k} * f}}\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)} \\
&= \|\widehat{\widehat{\varphi_{2^k}} \hat{f}}\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{2^k} * f\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)} &\leq \|\widehat{\varphi_{2^k}} R(i\cdot, A)x\|_{L^1(\mathbb{R},X)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{\varphi_{2^k}}(\beta) R(i\beta, A)x\|\, d\beta. \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi_{2^k}}(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta t} \varphi_{2^k}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta t} \varphi(2^{-k} t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta 2^k s} \varphi(s)\, ds \\
&= \hat{\varphi}(2^k \beta).
\end{aligned}$$

Deshalb folgt aus (4.31)

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{2^k} * f\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\varphi}(2^k\beta)R(i\beta,A)x\|\,d\beta \\
&= \int_{2^{-k-1}\leq|\beta|\leq 2^{-k+1}} |\hat{\varphi}(2^k\beta)|\,\|R(i\beta,A)x\|\,d\beta \\
&\leq 2^{k+1}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|sR(is,A)x\|\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(2^k\beta)|\,d\beta \\
&= 2\sup_{s\in\mathbb{R}}\|sR(is,A)x\|\|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R},X)}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. □

Wie bereits angedeutet, war der Weg zum Beweis von

$$\omega_1(T) \leq s_0(A)$$

lang. Neben den angesprochenen Teilergebnissen von Slemrod ([Sl]), d.h. $\omega_2(T) \leq s_0(A)$, von Wrobel ([Wr]) falls eine B-konvexer Raum zugrundeliegt und von Gearhart und Prüss, falls ein Hilbertraum zugrundeliegt, sei hier noch ein Ergebnis von van Neerven, Straub und Weis ([NeStWe]) erwähnt. In der Arbeit wurde gezeigt, daß stets

$$\omega_\alpha(T) \leq s_0(A)$$

für alle $\alpha > 1$ gilt. Dabei ist $\omega_\alpha(T)$ definiert durch

$$\omega_\alpha(T) := \inf\left\{\omega\in\mathbb{R} : \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)x\| < \infty \,\text{für alle}\, x\in D((w-A)^\alpha)\right\},$$

wobei w eine Zahl größer als die gleichmäßige Wachstumsschranke von $T(t)$ ist und $D((w-A)^\alpha)$ der Definitionsbereich des Operators $(w-A)^\alpha$, der gebrochenen α-ten Potenz des Operators $w - A$.

Die von Weis und Wrobel ([WeWr]) schließlich bewiesene Tatsache, daß die Wachstumsschranke $\omega_1(T)$ einer c_0-Halbgruppe in jedem Banachraum stets kleiner oder gleich der Abszisse der gleichmäßigen Beschränktheit der Resolvente des Erzeugers der Halbgruppe ist, wollen wir nun auf eine neue Weise mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 beweisen. Ein weiterer Beweis stammt von van Neerven ([Ne2]).

Satz 4.6.2 *$T(t)$ sei eine c_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Ist A der Erzeuger von $T(t)$, so gilt $\omega_1(T) \leq s_0(A)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für alle c_0-Halbgruppen $T(t)$ mit $s_0(A) < 0$ stets $\omega_1(T) \leq 0$ gilt, denn es gilt allgemein: Ist A der Erzeuger der c_0-Halbgruppe $T(t)$ und ist α eine reelle Zahl, dann ist $\alpha + A$ der Erzeuger der c_0-Halbgruppe $e^{\alpha t}T(t)$, und es gelten $s_0(\alpha+A) = \alpha+s_0(A)$ und $\omega_1(e^{\alpha t}T(t)) = \alpha + \omega_1(T)$.

Es sei also $s_0(A) < 0$. Für $x \in D(A)$ defineren wir

$$f_x : t \mapsto \begin{cases} T(t)x & , \quad t \geq 0; \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

Nach Satz 4.6.1 liegt f_x stets in $B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}, X)$, und es gilt

$$\|f_x\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)} \leq C_1 \sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|\beta R(i\beta, A)x\|.$$

Wegen

$$i\beta R(i\beta, A)x = x + R(i\beta, A)Ax$$

und $s_0(A) < 0$ folgt

$$\|f_x\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)} \leq C_2(\|x\| + \|Ax\|). \tag{4.32}$$

Nach Lemma 4.4.1 ist für $x \in D(A^2)$ die Abbildung f_x beschränkt. Nach Korollar 3.3.2 existiert somit eine Konstante $C_3 > 0$, so daß für alle $h > 0$, alle $x \in D(A^2)$, alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \|f_x(t)\| \\ &\leq \frac{1}{2^N h}\left\| \int_t^{t+2^N h} f_x(s)\, ds \right\| \\ &\quad + \frac{1}{h}\left\| \int_t^{t+h} (f_x(t) - f_x(s))\, ds \right\| \\ &\quad + C_3 N \|f_x\|_{B^{0,\infty}_{\infty}(\mathbb{R},X)} \end{aligned}$$

gilt. Mit (4.32) ergibt sich nun

$$\|T(t)x\| \leq \frac{1}{2^N h}\left\| \int_t^{t+2^N h} T(s)x\, ds \right\| \tag{4.33}$$

$$\quad + \frac{1}{h}\left\| \int_t^{t+h} (T(t)x - T(s)x)\, ds \right\| \tag{4.34}$$

$$\quad + NC_4(\|x\| + \|Ax\|) \tag{4.35}$$

für alle $h > 0$, alle $x \in D(A^2)$, alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \geq 0$. Da zu jedem $x \in D(A)$ eine Folge $(x_n) \subset D(A^2)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to Ax$ für $n \to \infty$ existiert, gilt diese Abschätzung sogar für alle $x \in D(A)$.

Im weiteren werden manche der auftretenden Konstanten von $x \in D(A)$ abhängen. Mit Hilfe von Bemerkung 3.3.3 b) und Lemma 4.4.1 erhalten wir

$$\frac{1}{2^N h}\left\|\int_t^{t+2^N h} T(s)x\,ds\right\| \leq \frac{C_5}{2^{N-1}h}. \tag{4.36}$$

Sind C_6 und $w > 0$ so gewählt, daß $\|T(t)\| \leq C_6 2^{wt}$ für alle $t \geq 0$ gilt und beachtet man, daß für $t > 0$

$$(T(t)x)' = T(t)Ax$$

gilt, so folgt aus Bemerkung 3.3.3 a) (i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left\|\int_t^{t+h}(T(t)x - T(s)x)\,ds\right\| &\leq \frac{h}{2}\sup_{s\in[t,t+h]} C_6 2^{ws}\|Ax\| \\ &\leq C_7 h 2^{wt}\|Ax\| \end{aligned} \tag{4.37}$$

für alle $t \geq 0$ und alle $h \in (0,1]$. Für $t \geq 0$ setzen wir nun $h := 2^{-wt} \in (0,1]$, und N sei die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich wt ist. Schätzen wir jetzt noch den Ausdruck (4.33) mit Hilfe von (4.36) und den Ausdruck (4.34) mit Hilfe von (4.37) ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &\leq \frac{C_5}{2^{N-1}2^{-wt}} + C_7 2^{-wt}2^{wt}\|Ax\| + C_4 N(\|x\| + \|Ax\|) \\ &\leq 4C_5 + C_7\|Ax\| + C_4 wt(\|x\| + \|Ax\|). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß für alle $x \in D(A)$

$$(1+t)^{-1}\|T(t)x\|$$

beschränkt ist. Das bedeutet doch aber, daß $\omega_1(T)$ kleiner oder gleich 0 ist. Mehr war nach der Bemerkung am Anfang des Beweises nicht zu zeigen. □

Abschließend wollen wir nun wiederum den Grenzfall $s_0(A) = 0$ betrachten.

Satz 4.6.3 *A sei der Erzeuger der c_0-Halbgruppe $T(t)$ auf dem Banachraum X, und es sei $s_0(A) \leq 0$. Ist dann x ein Element von $D(A)$, für das*

(i) $\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda R(\lambda, A)x\| < \infty$ *und*

(ii) $\sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t T(s)x\,ds \right\| < \infty$

gelten, so gilt

$$\sup_{t\geq 0}(1+t)^{-1}\|T(t)x\| < \infty.$$

Beweis. Für $\epsilon > 0$ defineren wir

$$f_\epsilon : t \mapsto \begin{cases} e^{-\epsilon t}T(t)x & , \quad t \geq 0; \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

Nach Satz 4.6.1 liegt f_ϵ in $B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R}, X)$, und es gilt

$$\|f_\epsilon\|_{B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R},X)} \leq C_1 \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|\beta R(i\beta+\epsilon, A)x\| \tag{4.38}$$

für alle $\epsilon > 0$. Da man für alle $\beta \in \mathbb{R}$

$$\beta R(i\beta+\epsilon, A)x = \frac{\beta}{i\beta+\epsilon}(i\beta+\epsilon)R(i\beta+\epsilon, A)x$$

hat, gilt

$$\begin{aligned} \|\beta R(i\beta+\epsilon, A)x\| &\leq \frac{|\beta|}{|i\beta+\epsilon|} \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda R(\lambda, A)x\| \\ &\leq \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda R(\lambda, A)x\| \end{aligned}$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$. Aus (4.38) und Voraussetzung (i) folgt daher

$$C_2 := \sup_{\epsilon>0} \|f_\epsilon\|_{B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R},X)} < \infty. \tag{4.39}$$

Aus Satz 4.6.2 wissen wir, daß f_ϵ eine Funktion aus $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ ist. Nach Korollar 3.3.2 wissen wir deshalb um die Existenz einer Konstanten $C_3 > 0$, so daß für alle $h, \epsilon > 0$, alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|e^{-\epsilon t}T(t)x\| &= \|f_\epsilon(t)\| \\ &\leq \frac{1}{2^N h}\left\| \int_t^{t+2^N h} f_\epsilon(s)\,ds \right\| \\ &\quad + \frac{1}{h}\left\| \int_t^{t+h} (f_\epsilon(t) - f_\epsilon(s))\,ds \right\| \\ &\quad + C_3 N \|f_\epsilon\|_{B^{0,\infty}_\infty(\mathbb{R},X)} \end{aligned}$$

gilt. Unter Berücksichtigung von (4.39) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\|T(t)x\| &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \|f_\epsilon\| \\
&\leq \frac{1}{2^N h} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\| \int_t^{t+2^N h} f_\epsilon(s)\, ds \right\| \\
&\quad + \frac{1}{h} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\| \int_t^{t+h} (f_\epsilon(t) - f_\epsilon(s))\, ds \right\| \\
&\quad + N C_2 C_3 \\
&= \frac{1}{2^N h} \left\| \int_t^{t+2^N h} T(s)x\, ds \right\| && (4.40) \\
&\quad + \frac{1}{h} \left\| \int_t^{t+h} (T(t)x - T(s)x)\, ds \right\| && (4.41) \\
&\quad + N C_4 && (4.42)
\end{aligned}$$

für alle $h > 0$, alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \geq 0$. Die einzelnen Summanden werden nun wie im Beweis von Satz 4.6.2 abgeschätzt. Der Vollständigkeit halber geben wir die einzelnen Schritte an.

Mit Hilfe von Bemerkung 3.3.3 b) und Voraussetzung (ii) schätzen wir

$$\frac{1}{2^N h} \left\| \int_t^{t+2^N h} T(s)x\, ds \right\| \leq \frac{C_5}{2^{N-1} h} \tag{4.43}$$

ab. Sind C_6 und $w > 0$ so gewählt, daß $\|T(t))\| \leq C_6 2^{wt}$ für alle $t \geq 0$ gilt und beachtet man, daß für $t > 0$

$$(T(t)x)' = T(t)Ax$$

gilt, so folgt aus Bemerkung 3.3.3 a) (i)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \left\| \int_t^{t+h} (T(t)x - T(s)x)\, ds \right\| &\leq \frac{h}{2} \sup_{s\in[t,t+h]} C_6 2^{ws} \|Ax\| \\
&\leq C_7 h 2^{wt} \|Ax\| && (4.44)
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ und alle $h \in (0, 1]$. Für $t \geq 0$ setzen wir nun $h := 2^{-wt} \in (0, 1]$, und N sei die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich wt ist. Schätzen wir jetzt noch den Ausdruck (4.40) mit Hilfe von (4.43) und den Ausdruck (4.41) mit Hilfe von (4.44) ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T(t)x\| &\leq \frac{C_5}{2^{N-1}2^{-wt}} + C_7 2^{-wt}2^{wt}\|Ax\| + C_4 N \\ &\leq 4C_5 + C_7\|Ax\| + C_4 wt.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun unmittelbar das Behauptete. □

Literaturverzeichnis

[ABHN] Arendt, W.; Batty, C.J.K.; Hieber, M.; Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* (Monographs in mathematics; vol. 96), Birkhäuser-Verlag; Basel; 2001

[Am1] Amann, H.: *Linear and Quasilinear Parabolic Problems (Volume I: Abstract Linear Theory).* Birkhäuser-Verlag; Basel; 1995.

[Am2] Amann, H.: *Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications.* Math. Nachr. **186** (1997), 5-56.

[BaDa] Batty, C.J.K.; Davies, E.B.: *Positive semigroups and resolvents.* J. Operator Theory **10** (1982), 357-363.

[Bl] Blasco, O.: *Hardy spaces of vector-valued functions: Duality.* Trans. Am. Math. Soc. **308** (1988), No. 2, 495-507.

[Bl2] Blasco, O.: *On the dual space of* $H_B^{1,\infty}$. Colloquium Math. **55** (1988), 253-259.

[Bl3] Blasco, O.: *Vector valued measures of bounded mean oscillation.* Publicacions Matemàtiques **35** (1991), 119-130.

[Bl4] Blasco, O.: *Vector-valued Hardy inequalities and B-convexity.* Ark. Mat. **38** (2000), No. 1, 21-36.

[Bl5] Blasco, O.: *Vector-valued analytic functions of bounded mean oscillation and geometry of Banach spaces.* Ill. J. Math. **41** (1997), No. 4, 532-558.

[BlPe] Blasco, O.; Pelczynski, A.: *Theorems of Hardy and Paley for vector-valued analytic functions and related classes of Banach spaces.* Trans. Am. Math. Soc. **323** (1991), 335-367.

[Bo1] Bourgain, J.: *A Hausdorff-Young inequality for B-convex Banach spaces.* Pacific. J. Math. **101** (1982), 255-262.

[Bo2] Bourgain, J.: *Vector-valued Hausdorff-Young inequalities and applications.* Lecture Notes in Math. 1317, Springer-Verlag (1988), 239-249.

[Bo3] Bourgain, J.: *Vector-valued singular integrals and the H^1-BMO-Duality.* In "Probability Theory and Harmonic Analysis", ed. Chao/Woyczynski, Marcel Dekker, 1985, 1-19.

[BuGuSi] Burkholder, D.L.; Gundy, R.F.; Silverstein, M.L.: *A maximal function characterization of the class H^p.* Trans. Am. Math. Soc. **157** (1971), 137-153.

[Co] Coifman, R.R.: *A real-variable characterization of H^p.* Studia Math. **51** (1974), 269-274.

[CoWe] Coifman, R.R.; Weiss, G.: *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis.* Bull. Amer. Soc. **83** (1977), 569-645.

[Da] Davies, E.B.: *One Parameter Semigroups.* Academic Press; 1980.

[Dat] Datko, R.: *Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert Space.* J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610-616.

[De] Derndinger, R.: *Über das Spektrum positiver Generatoren.* Math. Z. **172** (1980), 281-293.

[DiUh] Diestel, J.; Uhl, J.J.: *Vector Measures.* (Math. Surveys; 15) Amer. Math. Soc.; Providence, Ri.I.; 1977.

[Du] Duren, P.L.: *Theory of H^p-spaces.* Academic Press; New York; 1970.

[El] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg; 1996.

[EnNa] Engel, K-J.; Nagel, R.: *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* (Graduate texts in mathematics; 194), Springer-Verlag; New York; 2000.

[Fe] Fefferman, C.: *Characterizations of bounded mean oscillation.* Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 587-588.

[FeSt] Fefferman, C.; Stein, E.M.: *H^p-spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[FrJaWe] Frazier, M.; Jawerth, B.; Weiss, G.: *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces.* (Conference Board of the Mathematical Sciences regional conference series in mathematics; 79), American Mathematical Society; Providence; 1991.

[GaRu] Garcia-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J.L.: *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.*(Notas de Matemática,104; North-Holland Mathematics Studies; 116), Elsevier Science Pub.; Amsterdam; 1985.

[GKKT] Garcia-Cuerva, J.; Kazarian, K.S.; Kolyada, V.I.; Torrea, J.L.: *Vector-valued Hausdorff-Young inequality and applications.* Russian Math. Surveys **53** (1998), 435-513. (Übersetzung aus dem Russischen von: Uspekhi Mat. Nauk **53:3** (1998), 3-84.

[Ge] Gearhart, L.: *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 385-394.

[Go] Goldstein, J.A.: *Semigroups of Operators and Applications.* Oxford University Press; 1985.

[GrNa] Greiner, G.; Nagel, R.: *On the stability of strongly continuous semigroups of positive operators on $L^2(\mu)$.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **10** (1983), 257-262.

[HiPh] Hille, E.; Phillips, R.S.: *Functional Analysis and Semigroups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.**31**, rev. ed., Providence, R.I. (1957).

[Ho] Horváth, J.: *Topological Vector Spaces and Distributions.* Vol. I.; Addison-Wesley; Reading, Mass.; 1966.

[Hö] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag; Berlin; 1983.

[JoNi] John, F.; Nirenberg, N.: *On functions of bounded mean oscillation.* Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 416-426.

[Kö] König, H.: *On the Fourier-coefficients of vector-valued functions.* Math. Nachr. **152** (1991), 215-227.

[Kw] Kwapién, S.: *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients.* Stud. Math. **44** (1972), 583-595.

[Me] Meyer, Y.: *Wavelets and operators.* (Cambridge studies in advanced mathematics; 37), Cambridge Univ. Press; Cambridge; 1992.

[MaMa] Martinez, J.; Mazon, J.: *C_0-Semigroups norm continuous at infinity.* Semigroup Forum **52** (1996), 213-224.

[Na] Nagel, R. (Ed.): *One-parameter Semigroups of Positive Operators.* (Lecture Notes in Mathematics; 1184), Springer-Verlag; 1986.

[Ne] Neerven, J.v.: *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators.* (Operator theory; 88), Birkhäuser Verlag; Basel; 1996.

[Ne2] Neerven, J.v.: *Individual stability of C_0-semigroups with uniformly bounded local resolvent.* Semigroup Forum **53** (1996), 155-161.

[NeStWe] Neerven, J.v.; Straub, B.; Weis, L.: *On the asymptotic behaviour of a semigroup of linear operators.* Indag. Math., N.S. **6** (1995), 453-476.

[Neu] Neubrander, F.: *Laplace transform and asymptotic behaviour of strongly continuous semigroups.* Houston J. Math. **12** (1986), 549-561.

[Pa] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* (Applied mathematical sciences; v.44), Springer-Verlag; New York; 1983.

[Pe1] Peetre, J.: *Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles.* Rend. Sem. Mat. Padova **42** (1969), 15-26.

[Pe2] Peetre, J.: *New thoughts on Besov spaces.* Duke Univ. Math. Series, no. 1; Duke University; Durham, N.C.; 1976.

[Pet] Petersen, P.E.: *Introduction to the Fourier Transform and Pseudo-Differential Operators.* Pitman; Boston; 1983.

[Pr] Prüss, J.: *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 847-857.

[Sc] Schmeisser, H. J.: *Vector-valued Sobolev and Besov spaces.* in Seminar Analysis of the Karl-Weierstraß-Institute 1985/86; ed. Schulze, B.-W.; Triebel, H. (Teubner-Texte zur Mathematik; 96); BSB Teubner; Leipzig; 1987; 4-44.

[Sch] Schwartz, L.: *Théorie des Distributions.* Hermann; Paris; 1966.

[Sl] Slemrod, M.: *Asymptotic behaviour of C_0-semigroups as determined by the spectrum of the generator.* Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 783-792.

[St] Stein, E.M.: *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and oscillatory Integrals.* (Princeton mathematical series; 43), Princeton University Press; Princeton; 1993.

[Tr1] Triebel, H.: *Theory of function spaces.* Birkhäuser; Basel; 1983.

[Tr2] Triebel, H.: *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* (2. ed.) Barth; Heidelberg, Leipzig; 1995.

[Wa] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* (6. Auflage) Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York; 1996.

[We1] Weis, L.: *The stability of positive semigroups on L_p spaces.* Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), 3089-3094.

[WeWr] Weis, L.; Wrobel, V.: *Asymptotic behaviour of C_0-semigroups in Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 3663-3671.

[Wr] Wrobel, V.: *Asymptotic behaviour of C_0-semigroups in B-convex spaces.* Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 101-114.

[Za] Zabczyk, A.: *A note on C_0-semigroups.* Bull. Acad. Polon. Sci. **23** (1975), 895-898.

[Zy] Zygmund, A.: *Trigonometric Series (Volumes I and II combined).* Second Edition; Cambridge University Press; Cambridge; 1959.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Familienname:	Goersmeyer
Vorname:	Volker
geboren:	am 2. Mai 1972 in Vaihingen/Enz
Staatsan- gehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig, keine Kinder
Eltern:	Annemarie und Edgar Goersmeyer

Bildungsweg

1992-1998	Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Karlsruhe. Abschluß: Diplom. Thema der Diplomarbeit: *Normstetigkeit von C_0-Halbgruppen.* Betreuer der Arbeit war Prof. Dr. Lutz Weis.
1989-1992	Besuch des Wirtschaftsgymnasiums Bietigheim/Bissingen mit dem Abschluß Abitur.
1983-1989	Besuch der Realschule Illingen/Württ. Abschluß: Mittlere Reife
1979-1983	Besuch der Grundschule Illingen/Württ

Berufstätigkeit

seit 10/1998	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe.
10/1994-9/1998	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe.