

Quantitative Delaminationsbestimmung an geschichteten Verbundwerkstoffen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Phys. Wolfgang Stephan Weigl
aus Passau

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 2001

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Schnack

Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. P. Gumbsch

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe.

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckart Schnack für die Anregung zu der untersuchten Thematik und den großzügigen Gestaltungsspielraum bei der Bearbeitung danken. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Peter Gumbsch gilt mein Dank für sein Interesse an meiner Arbeit und die freundliche Übernahme des Korreferats. Dem Prüfungsvorsitzenden zum Abschluss des Promotionsverfahrens, Herrn Prof. Dr.-Ing. Detlef Löhe, sei ebenfalls gedankt.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut danke ich für die vielfältigen Diskussionen sowie die konstruktive Arbeitsatmosphäre. Insbesondere Herr Dr. habil. Heiko Andrä und Herr Dr. Slav Dimitrov waren stets kompetente Ansprechpartner in mathematischen Detailfragen.

Frau Prof. Dr. Amel Ben Abda von der ENIT Tunis bin ich dankbar für die interessanten Diskussionen zu ihrem RG-Konzept, die wir während ihrer mehrmaligen Gastaufenthalte in Karlsruhe führen konnten.

Herrn Gerhard Mayer und Herrn Rolf Stober sowie den Auszubildenden der Institutswerkstatt gebührt schließlich mein Dank für ihre Unterstützung bei den Umbauten des Messaufbaus und der Probenherstellung.

Karlsruhe, im Dezember 2001

Wolfgang Weikl

Abstract

Delamination, i.e. the debonding of adjacent layers, is usually the dominant and most critical type of damage in layered composites, e.g. laminates from carbon-fibre reinforced plastic (CFRP). Especially the size, shape and location of delaminations are decisive for the remaining strength of a component and the choice of suitable repair strategies. Therefore, the main goal of this work is the non-destructive quantification of such internal damages from easily accessible measurements on the outer surface.

Specific CFRP samples are investigated under tensile load where predefined damage domains are incorporated in the prepreg layering with Teflon foils. Digital phase-shifting shearography is used for a fast and accurate experimental determination of the surface deformation under the given test load. Additional application of a postprocessing algorithm allows for the calculation of the displacement field.

The problem of determining internal damages from outer measurement data is an inverse problem, i.e. in general ill-posed. As the reconstruction methods in the literature are mainly concerned with simple crack cases in homogeneous bodies, at first a simplified model problem is defined. In this case, the reciprocity gap concept of Andrieux and Ben Abda can only be successfully extended to the case of curved cracks lying on an a priori known internal surface in a homogeneous anisotropic body.

Therefore, in the following the newly developed reconstruction algorithm AICRA (Alternating Iterative Crack Reconstruction Algorithm) is proposed which offers several advantages in comparison to other algorithms, e.g. the usual optimization approaches. Favourable convergence and regularizing properties of this new method are proved theoretically and demonstrated with several numerical investigations using both the boundary element method as well as the finite element method.

In the last chapter, AICRA is extended for the case of delaminations in layered composites. Again fast reconstruction results are achieved for delaminations in the middle interface of symmetric laminates using both experimental and numerical boundary data. Besides, the experimental results are in good agreement with the FEM simulations of the laminate deformation behaviour. As the resolution of AICRA proves to be higher than the experimental positioning accuracy of the Teflon foils, only numerical reconstruction tests are carried out with thicker and asymmetric laminates. Again, fast and precise quantification results are achieved, which are promising for further extensions of AICRA, e.g. to the case of several delaminations in different interfaces.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung Verbundwerkstoffe	1
1.2	Schädigungsverhalten	3
1.3	Nachweismethoden	5
1.4	Aufgabenstellung	7
2	Laminataufbau und -verhalten	9
2.1	Materialauswahl und Herstellung der Proben	9
2.2	Mechanisches Verhalten einer Laminatschicht	11
2.3	Dreidimensionale Laminatberechnung	16
3	Digitale Shearografie	21
3.1	Grundlagen	21
3.2	Phasenschiebetechnik	23
3.3	Filterung	25
3.4	Demodulation	26
3.5	Auswertung des Shearogramms	28
3.6	Algorithmus zur Verschiebungsfeldbestimmung	31
4	Versuchsbeschreibung	33
4.1	Beschreibung des Messaufbaus	33
4.2	Beschreibung der Ansteuerungs- und Auswertungssoftware	36
4.3	Kalibrierung des Shearografie-Systems	37
4.4	Bestimmung des Verschiebungsfeldes	39
4.5	Vergleich mit numerischer Simulation	40
5	Das inverse Problem	45
5.1	Einführung	45
5.2	Mathematische Grundlagen	46
5.3	Problemstellung	49
5.3.1	Delaminationsaufgabe	49
5.3.2	Vereinfachtes Modellproblem	50
5.4	Stand der Forschung	51

6	Rekonstruktionsverfahren	55
6.1	Übersicht	55
6.2	Erweitertes Reciprocity-Gap-Konzept	56
6.3	Alternierend iteratives Verfahren AICRA	59
6.3.1	Zwei-Rand-Variante von AICRA	60
6.3.2	Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften	62
6.3.3	Wahl einer geeigneten Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}$	63
6.3.4	Wahl einer geeigneten Fehlerschranke ε	64
6.3.5	Drei-Rand-Variante von AICRA	66
6.3.6	Vorteile des neuen Rissdetektionsverfahrens AICRA	67
7	Numerische Implementierung und Testrechnungen mit AICRA	69
7.1	Implementierung mit der Randelementmethode	69
7.2	Implementierung mit der Finite-Elemente-Methode	73
7.2.1	Ausgewählte Modellprobe	73
7.2.2	Erzeugung der Referenzergebnisse	74
7.2.3	Zwei-Rand-Variante von AICRA	76
7.2.4	Drei-Rand-Variante von AICRA	78
7.2.5	Vergleich und Bewertung	80
8	Quantitative Delaminationsbestimmung mit AICRA	83
8.1	Anpassung des Verfahrens AICRA	83
8.2	Ergebnisse an ausgewählten Schichtfolgen	86
8.2.1	Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$	87
8.2.2	Schichtfolge $[90, \pm 45, 0, T]_S$	91
8.2.3	Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T, 90, 0, \mp 30]$	93
8.3	Erweiterungsmöglichkeiten von AICRA	95
9	Zusammenfassung	99
A	Notation	101

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung Verbundwerkstoffe

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich im Ingenieurbereich eine neue, vielversprechende Klasse von Konstruktionswerkstoffen etabliert, die als Verbundwerkstoffe bezeichnet werden, da sie aus mehreren Materialien mit unterschiedlichen Funktionen und Eigenschaften bestehen. Wurden Verbundwerkstoffe in der Anfangszeit ihrer Entwicklung noch nahezu ausschließlich für aufwändige Spezialanwendungen, v.a. in der Luft- und Raumfahrttechnik, eingesetzt, so haben sich in den letzten Jahren verstärkt auch neue Einsatzfelder in den klassischen Ingenieurbereichen (z.B. Maschinen- und Fahrzeugbau) erschlossen. Hintergrund dieser Entwicklung sind zum einen die generell gestiegenen Anforderungen an Effizienz und optimalen Materialeinsatz, insbesondere im Hinblick auf Gewichtsreduzierung. Andererseits konnte durch jahrzehntelange Forschung ein tieferes Verständnis der zugrundeliegenden Materialeigenschaften entwickelt werden, die sich zudem nun auch in Computersimulationen erfassen lassen.

	Stahl (ferr.)	CFK (0°)	GFK (0°)
Elastizitätsmodul [GPa]	160	173	28
Zugfestigkeit [MPa]	685	655	200
Dichte [g/cm ³]	7,9	1,6	1,5
rel. Zugfestigkeit [MPa cm ³ /g]	87	409	133

Tabelle 1.1: Vergleich typischer Materialkonstanten von Konstruktionswerkstoffen (Mittelwerte aus [32])

Eine Unterart stellen die Faserverbundwerkstoffe dar, bei denen üblicherweise hochfeste Carbon- oder Glasfasern unidirektional in eine Epoxidharz-Matrix eingebettet sind, um in dieser Synthese die Erzeugung einer in Faserrichtung hochfesten, formstabilen

Struktur bei zugleich geringer Dichte zu ermöglichen. Die wesentlichen Vorzüge von Faserverbundwerkstoffen können leicht aus dem in Tabelle 1.1 aufgeführten Vergleich typischer Materialkonstanten entnommen werden. Die Überlegenheit der carbonfaserverstärkten (CFK) bzw. der glasfaserverstärkten Kunststoffe (GFK) wird insbesondere bei der durch die Dichte normierten relativen Zugfestigkeit in Faserrichtung (0°) deutlich. Die mechanischen Eigenschaften dieser Faserverbundwerkstoffe sind jedoch stark richtungsabhängig, wie Abbildung 1.1 veranschaulicht.

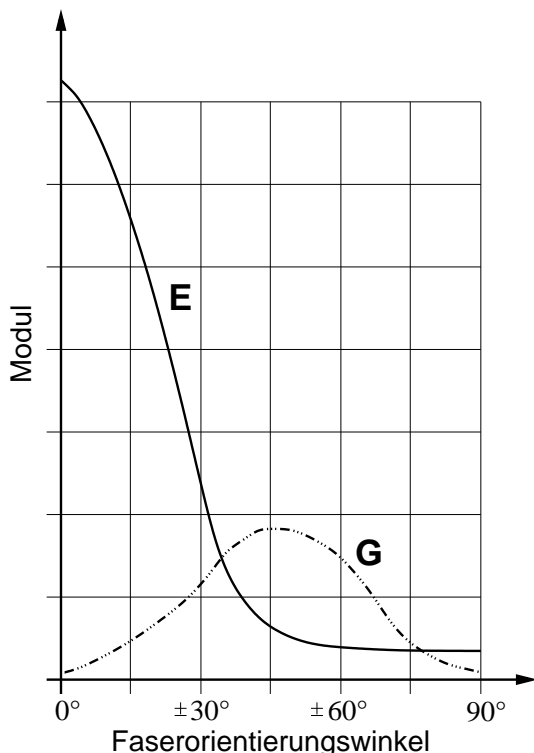


Abbildung 1.1: Richtungsabhängigkeit des Zug- und Schubmoduls bei CFK (nach [50])

Tritt in der vorgesehenen Anwendung nur eine einzige Belastungsrichtung auf, so kann diese Anisotropie auch gezielt bei der Konstruktion ausgenutzt werden. Im Allgemeinen liegt jedoch ein komplexerer Belastungszustand vor, so dass üblicherweise geschichtete Faserverbundwerkstoffe („Laminate“) aus mehreren Einzellagen („Laminae“) mit unterschiedlicher Faserorientierung verwendet werden. Aus dieser verschiedenen Anisotropie der Einzelschichten können aber auch spezielle Schädigungsformen resultieren, wie sie bei isotropen metallischen Werkstoffen nicht auftreten. Eine sehr wichtige derartige Schädigungsform stellt die Delamination dar, bei der sich im Laminat zwei benachbarte Schichtlagen voneinander ablösen, wodurch die Festigkeit des Gesamtlaminats wegen des Wegfalls von Zwangsbedingungen geschwächt wird [88]. Die Delaminationsentstehung selbst stellt zwar meist keinen fatalen Versagensvorgang dar, leitet aber in der Regel durch die erhebliche Schwächung des Gesamtlaminats erst die zum Versagen des Bauteils führenden Schadensmoden ein [92].

Auch bei einer Vielzahl von industriellen Anwendungen löst die Delamination — wegen des mit ihr einhergehenden Verlusts von Steifigkeit und einer reduzierten Verbindungsmaterialdicke — den entscheidenden Versagensmechanismus aus [26, 103]. Einer BOEING-Studie zufolge stellen Delaminationsschäden ca. 60% aller bei der Inspektion von Verkehrsflugzeugen in Faserverbundbauteilen gefundenen Schäden dar [84]. Delaminationsartige Schädigungsformen können zudem in vielfältiger Weise auftreten, z.B. schon beim Fertigungsprozess oder auch erst in der Nutzungsphase durch Einschlag [60] oder kritische Belastung [88]. Die Detektion und Charakterisierung von Delaminationen besitzt somit eine immense Bedeutung in der Qualitätssicherung oder bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen von Bauteilen aus geschichteten Verbundwerkstoffen. Insbesondere die genaue Größe und (Schicht-)Tiefe der Delamination spielen dabei eine entscheidende Rolle zur Bestimmung der verbleibenden Bauteilbelastbarkeit und einer geeigneten Reparaturstrategie [102].

Die vorliegende Arbeit widmet sich darum der *quantitativen* Bestimmung derartiger flächenhafter Schädigungen im Interface von geschichteten Faserverbundwerkstoffen. Ausgangspunkt des in dieser Arbeit neu entwickelten Verfahrens sind hierbei kohärent-optische Messungen der Oberflächendeformation, die zerstörungsfrei bei geringer Zugbelastung $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xx}^{\text{krit}}$, d.h. ohne weitere Schädigung oder gar Zerstörung des Prüfobjekts, gewonnen werden.

1.2 Schädigungsverhalten

Die bei dem in der vorliegenden Arbeit betrachteten ebenen Zugversuch auftretenden Schädigungsmechanismen lassen sich phänomenologisch nach ihrem Einsetzen bei zunehmender Längsdehnung in 5 Schadensstufen klassifizieren [66]:

1. Schadensstufe: Entstehung von Matrixrissen in den Schichten mit der Faserorientierung $\alpha \neq 0^\circ$;†
2. Schadensstufe: Kopplung der Matrixrisse von verschiedenen Schichten;
3. Schadensstufe: Bildung von Delaminationen;
4. Schadensstufe: Anriss der Schichten mit Faserorientierung $\alpha = 0^\circ$;
5. Schadensstufe: Totalversagen der Probe.

Wie bereits im voranstehenden Abschnitt beschrieben, führen insbesondere die in der 3. Schadensstufe auftretenden Delaminationen zu einer deutlichen Schwächung des Gesamtlaminats und leiten damit den fatalen Abriss der Fasern in Zugrichtung ein. Um die

† α ist der Faserorientierungswinkel relativ zur äußeren Zugbelastung (vgl. Abbildung 2.3)

Delaminationen selbst weitgehend störungsfrei, d.h. ohne Wechselwirkung mit Matrixrissen, bestimmen zu können, wurden in der vorliegenden Arbeit ausschließlich eigens präparierte Proben verwendet, bei denen Delaminationen künstlich vorgegeben waren.

Entscheidend für das Auftreten der in dieser Arbeit hauptsächlich untersuchten Randdelaminationen ist die Querkontraktionszahldifferenz der einzelnen Schichten des Laminats. Aus ihr kann sich auch beim ebenen Zugversuch an symmetrischen Laminaten zum seitlichen Probenrand hin eine hohe, aus der Laminebene heraus (*out-of-plane*) gerichtete Schälspannung ergeben, die zum Ablösen benachbarter Schichten führt und sich z.B. über röntgenografische Messungen an einlamierten kristallinen Partikeln auch direkt nachweisen lässt [83, 96, 120]. Theoretische Untersuchungen und numerische Simulationen zu diesem sogenannten *Free-Edge*-Effekt finden sich z.B. in [52, 91, 92].

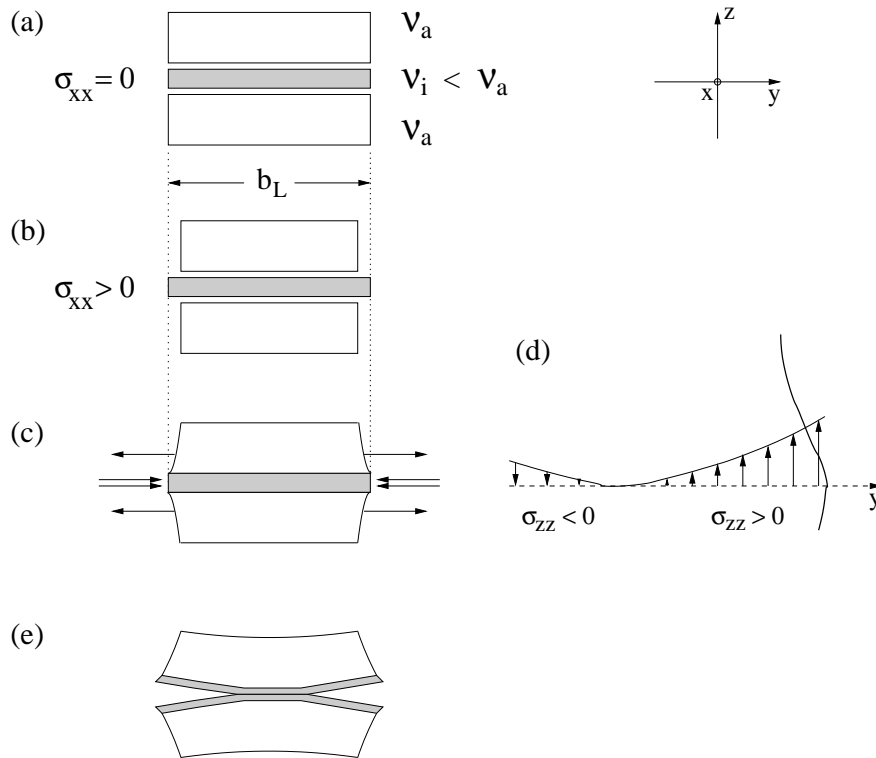


Abbildung 1.2: Einfaches Modell zur Entstehung von Randdelaminationen unter Zugbelastung (nach [66])

Zur anschaulichen Erklärung der Entstehung von Randdelaminationen über die Querkontraktionszahldifferenz der Laminae kann ein einfaches symmetrisches Modell [66] dienen, das in Abbildung 1.2 dargestellt ist. Hierbei sei angenommen, dass ohne Zugbelastung ($\sigma_{xx} = 0$) die Breite aller Teillaminae identisch gleich b_L sei (Abbildung 1.2(a)). Kontrahieren die äußeren Schichten unter Zug stärker als die inneren ($\nu_a > \nu_i$), so ergeben sich in der Freikörperdarstellung von Abbildung 1.2(b) unterschiedliche Querschnittsbreiten unter Zugbelastung. Da jedoch die skizzierten Schichten zunächst fest verbunden sind, müssen sich die Querdehnungen angleichen, wodurch der in Abbildung 1.2(c) skizzierte

Spannungszustand in Querrichtung entsteht, bei dem in den äußeren Schichten Querkzug und innen Querdruck herrscht. Dies lässt sich auch durch interlaminare Spannungsfelder beschreiben, bei denen in der Mittelebene des Laminats eine in Randnähe positive und zur Mitte hin negativ werdende Normalspannung σ_{zz} in z -Richtung wirkt (Abbildung 1.2(d)). Für diese Normalspannung in der Mittelebene des Laminats gilt [120]:

$$\int_0^{b_L/2} \sigma_{zz} dy = 0, \quad \int_0^{b_L/2} \sigma_{zz} y dy \neq 0, \quad (1.1)$$

wobei das Moment um die x -Achse gerade die Krümmungstendenz der asymmetrischen Laminathälften kompensiert, so dass das symmetrische Gesamtlaminat ohne Delamination eben bleibt. Überschreitet σ_{zz} jedoch die interlaminare Zugfestigkeit, so spaltet sich das Laminat in der Mittelebene auf und die beiden Teilhälften krümmen sich nach Wegfall der Zwangsbedingungen um die x -Achse (s. Abbildung 1.2(e)).

Zur Entstehung und Ausbreitung von Delaminationen lässt sich in der Literatur eine Vielzahl von Modellen finden, wobei sich für die Beschreibung des Delaminationswachstums insbesondere das auf der linear-elastischen Bruchmechanik beruhende Konzept der Energiefreisetzungsraten bewährt hat [31, 57, 90, 94, 106]. Da sich die vorliegende Arbeit ausschließlich mit dem *zerstörungsfreien* Schädigungsnachweis ohne weitere Schädigung der Probe beschäftigt, wird auf diese Modelle jedoch im Folgenden nicht näher eingegangen.

1.3 Nachweismethoden

Für einen zerstörungsfreien quantitativen Nachweis von flächenhaften inneren Schädigungen werden derzeit vorwiegend Ultraschallverfahren verwendet [20]. Hierzu werden Signal-Reflexionen an den Rissebenen ausgenutzt, aus denen sich näherungsweise die Lage und Größe der Risse bestimmen lassen. Als weniger verbreitete Verfahren sind daneben auch die Röntgenografie, Thermografie und Wirbelstrommethode zu nennen [44, 83, 97].

Ultraschallverfahren besitzen jedoch die folgenden, zum Großteil methodeninhärenten Nachteile:

- Eine starke Abhängigkeit von den akustischen Reflexionseigenschaften der Rissfläche, wobei insbesondere Probleme bei schrägen Rissflächen und durch Doppelreflexionen des Signals entstehen können.
- Das Auftreten von Messproblemen bei anisotropen Materialien, da dort Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Allgemeinen nicht mehr identisch sind [80].

- Eine generell mangelnde Zuverlässigkeit infolge möglicher Signalfehlinterpretationen. Quantitative Messungen erfordern somit stets die Anwesenheit eines erfahrenen Systembedieners, zumal automatische Mustererkennungsmethoden noch nicht Stand der Technik sind [79].

Als relativ junge kohärent-optische Methode hat sich die *Shearografie* in den letzten Jahren zu einem vielversprechenden, da ebenso robusten wie präzisen Messverfahren zur Oberflächenverformung entwickelt [10, 56, 66, 101, 105, 112, 113, 121]. Der Normenausschuss Materialprüfung im Deutschen Institut für Normung hat diese Bedeutung durch die 1997 erschienene DIN-Norm „54180: Shearografie“ unterstrichen [34]. Insbesondere die digitale Shearografie mit Phasenschiebetechnik (s. Kapitel 3) ermöglicht die Bestimmung von Oberflächendeformationen in hoher Ortsauflösung und in nahezu Echtzeit. Als wichtige Vorteile gegenüber den oben genannten alternativen Messmethoden sind zu nennen:

- Der miniaturisierbare, relativ unkomplizierte und damit leicht transportable Aufbau [40];
- Die Fähigkeit, dadurch direkt vor Ort auch großräumige Bauteile im Einsatz zu untersuchen [114];
- Die deutlich bessere Sensitivität für den Nachweis von Einschlag-Schäden mit geringer Schädigungsenergie [44];
- Die Unempfindlichkeit gegenüber elektromagnetischen oder akustischen Störsignalen.

Im Vergleich mit der schon früher zur qualitativen Schädigungsuntersuchung eingesetzten Holografie [45, 68, 111] und ihrer modernen Variante ESPI[‡] weist die digitale Shearografie folgende Vorzüge auf [66, 73, 113, 117]:

- Eine wesentlich geringere Störanfälligkeit des gesamten Aufbaus, z.B. gegenüber Vibrationen, da ohne Einsatz einer Referenzwelle zwei Bilder desselben Objekts interferierend überlagert werden;
- Die Fähigkeit, irrelevante Starrkörperbewegungen des Objekts in den Messdaten zu unterdrücken, da in erster Näherung eine Ableitungsinformation erhalten wird;
- Die Möglichkeit zur Einstellung der absoluten Empfindlichkeit des Verfahrens auf die erwartete Größenordnung der Deformation, wodurch sich die Interferenzmuster besser digital verarbeiten lassen;
- Die direkte Erfassung von Störungen im Deformationsfeld, wodurch sich in der Regel das Vorhandensein von inneren Schädigungen deutlicher erkennen lässt.

[‡]*Electronic Speckle Pattern Interferometry*

Zur einfachen qualitativen Erfassung des Schädigungsbildes werden bisher überwiegend thermische Belastungen eingesetzt, die oft schon ein messbares Aufbeulen der Oberfläche hervorrufen. Da sich jedoch die Temperaturverteilung im anisotropen, geschädigten Laminat sowie das dadurch hervorgerufene mechanische Verhalten nur sehr aufwändig berechnen lassen, werden in der vorliegenden Arbeit ausschließlich Zugversuche bei Raumtemperatur durchgeführt. Prinzipiell sind aber auch andere definierte Belastungen zur Schädigungsdetektion möglich, z.B. die Prüfung mittels eines lokalen Vakuumsystems [41]. Derartige, rein experimentelle Untersuchungen ermöglichen in der Regel nur qualitative Aussagen über das Vorhandensein einer Delamination, sie vermögen jedoch im Allgemeinen keine quantitative Bestimmung der Lage, Form und Größe dieser inneren Schädigung. Hierzu muss das zugehörige inverse Problem gelöst werden, das einen Zusammenhang zwischen den äußeren Messdaten und den Geometrieparametern der Schädigung herstellt.

1.4 Aufgabenstellung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit, mittels zerstörungsfreier kohärent-optischer Deformationsmessung am leicht zugänglichen äußeren Rand durch Lösung des zugehörigen inversen Problems eine quantitative Bestimmung von flächenhaften inneren Schädigungen zu erhalten, umfasst mehrere Teildisziplinen: von der praktischen Anwendung kohärent-optischer Messmethoden über die kontinuumsmechanische Beschreibung von Verbundwerkstoffen und ihre numerische Implementierung mittels rechnergestützter Mechanik bis hin zum mathematischen Gebiet der inversen Probleme. Aufgegliedert in einzelne Teilaufgaben kann das Gesamtprojekt wie folgt dargestellt werden:

- Erweiterung des vorhandenen kohärent-optischen Messaufbaus zur digitalen Phasenschiebe-Shearografie mit computergestützter Auswertung;
- Probenherstellung von für den Zugversuch geeigneten, definiert vorgeschädigten Laminaten;
- Kontinuumsmechanische Modellierung des Verhaltens von CFK-Laminaten und numerische Simulation;
- Theoretische Untersuchungen zu den Eigenschaften des zu lösenden inversen Problems;
- Überprüfung bisheriger Lösungsansätze auf ihre Eignung und gegebenenfalls Entwicklung eines eigenen Rekonstruktionsalgorithmus;
- Numerische Implementierung und Testrechnungen mit simulierten Daten, um die Eigenschaften der neu entwickelten Lösungsmethode zu verifizieren;
- Quantitative Delaminationsbestimmung unter Verwendung von simulierten und experimentellen Daten im Rekonstruktionsalgorithmus.

Kapitel 2

Laminataufbau und -verhalten

2.1 Materialauswahl und Herstellung der Proben

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Proben wurden ausschließlich aus dem CFK-Prepreg-Material *Fibredux 913C-HTA(12K)-5-35%* der Firma HEXCEL COMPOSITES[†] gefertigt. Es besteht aus unidirektional vorgerichteten, hochdehnbaren Carbonfasern des Typs *Tenax HTA 5131* (Firma TENAX FIBERS) mit einem Durchmesser von $7\ \mu\text{m}$, die in Epoxidharz 913 mit einem Harz-Volumenanteil von 35% eingebettet sind. Die Materialdaten der beiden Komponenten sowie des Gesamtlaminats sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Identisches CFK-Material wird auch in aktuellen Flugzeugtypen der Firma AIRBUS eingesetzt, was die Praxisrelevanz des untersuchten Probenmaterials unterstreicht.

	Laminat	Faser HTA 5131	Harz 913
Elastizitätsmodul [GPa]	137	238	3,39
Zugfestigkeit [MPa]	1988	3950	65,5
Dichte [g/cm^3]	1,56	1,77	1,23
Thermischer Ausdehnungskoeffizient bei 20°C [10^{-6}K^{-1}]	0,0	-0,10	60

Tabelle 2.1: Materialdaten des verwendeten Prepreg-Materials (Quelle: [50, 83, 107])

Bei der Probenherstellung werden quadratische Platten der Größe $30\times 30\text{cm}^2$ in den gewünschten Winkellagen der Faserorientierung sukzessive unter Vermeidung von Luft-einschlüssen übereinandergeschichtet. Zur künstlichen Vorgabe von definierten Delaminationen werden in der gewünschten Zwischenschichtlage entsprechend zugeschnittene

[†]Der Autor dankt der Firma HEXCEL COMPOSITES für die freundliche Bereitstellung des Prepreg-Materials

Teflonfolien der Dicke $70 \mu\text{m}$ vor dem Aufbringen der Folgeschicht eingefügt. Damit wird verhindert, dass sich beim anschließenden Aushärten die benachbarten Schichten in diesem Bereich verbinden, wodurch das Vorhandensein einer entsprechend geformten Delamination simuliert wird. Die künstliche „Vorschädigung“ durch Einlaminierung einer Teflonfolie ist nötig, da gerade die in dieser Arbeit untersuchten Schichtfolgen mit starker Dehnungs-Krümmungskopplung bei Überschreiten einer kritischen Dehnung $\varepsilon_{xx}^{\text{krit}}$ schlagartig ausgedehnte Randdelaminationen ausbilden und sich deshalb keine definiert berandeten Schädigungen einstellen lassen [66].

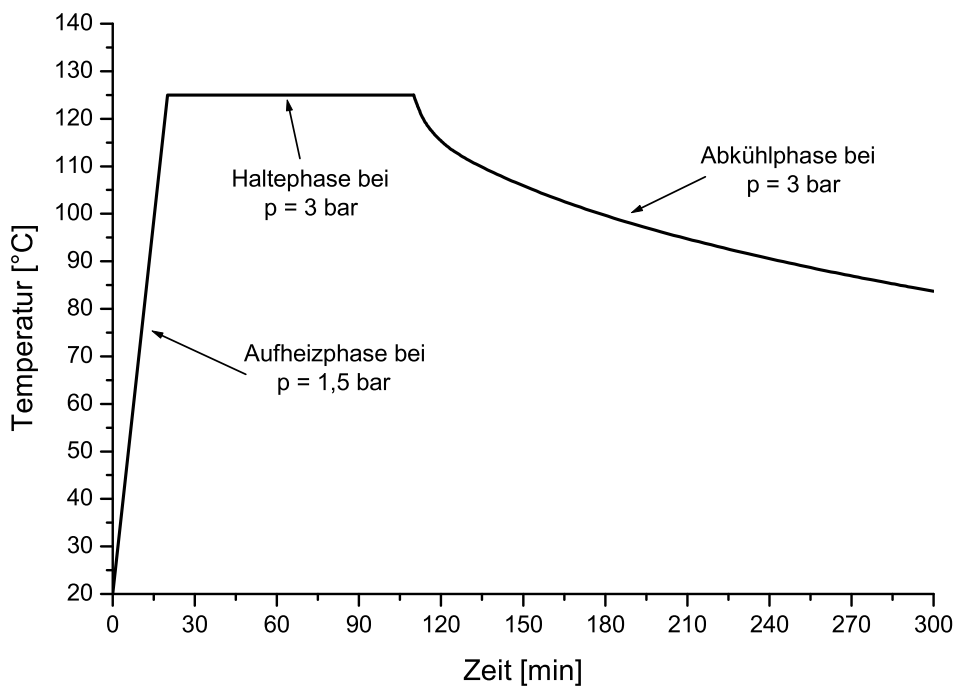


Abbildung 2.1: Autoklavzyklus zur Aushärtung des Prepreg-Materials (nach [83])

Die geschichtete Prepreg-Platte wird anschließend in einem Autoklaven bei einer maximalen Temperatur von 125°C und 3 bar Druck ausgehärtet (vgl. Abbildung 2.1). Zusätzlich ist eine Vakuumpumpe angeschlossen, um das Entweichen von entstehenden Gasen und eingeschlossener Luft zu fördern.

Aus der ausgehärteten Laminatplatte werden die gewünschten Proben der Dimension $200 \times 20 \text{ mm}^2$ ausgesägt (vgl. Abbildung 2.2). Zur besseren Probeneinspannung werden an den Probenenden jeweils Aluminiumendstücke mittels eines warmhärtenden Zweikomponenten-Klebstoffs aufgebracht, die sich hierfür insbesondere wegen der guten E-Modul-Anpassung eignen [30]. Die Bohrungen dienen zur Einleitung der Zugkraft über die Passstifte der Zugprüfmaschine, wobei zugleich die Endstücke in den Spannbacken der Zugprüfmaschine fest eingeklemmt werden, um ein Absplittern an der Kerbe zu verhindern und eine möglichst starre Probenführung zu erzielen.

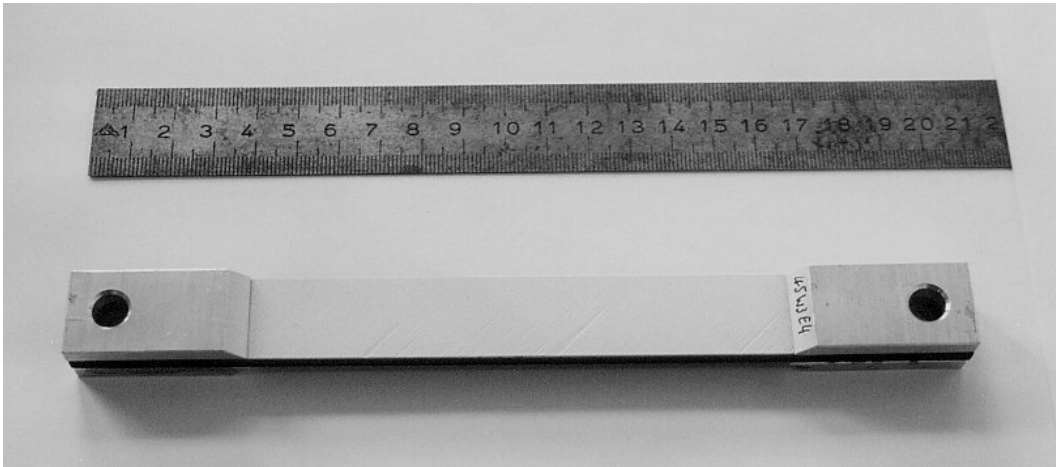


Abbildung 2.2: Beispiel einer präparierten Zugprobe

Zuletzt wird die im Originalzustand schwarze Probenoberfläche mit einem Lackspray matt-weiß lackiert, um eine geeignete Reflektivität für das kohärent-optische Messverfahren zu erhalten. Eine derartig präparierte Zugprobe ist in Abbildung 2.2 exemplarisch abgebildet.

2.2 Mechanisches Verhalten einer Laminatschicht

Bei der makroskopischen Betrachtung des mechanischen Verhaltens einer einzelnen Laminatschicht wird meist ein Homogenisierungsansatz verwendet, bei dem der Faser-Matrix-Verbund als homogener Körper mit richtungsabhängigen Materialeigenschaften beschrieben wird. Eine derartige Vereinfachung ist aufgrund der Unterschiede in den Größenordnungen der mikroskopischen Komponenten (Faserdurchmesser $7\ \mu\text{m}$) und der typischen makroskopischen Schichtdicke einer einzelnen Lamina von ca. $0,14\ \text{mm}$ sinnvoll, sofern keine mikroskopischen Schädigungseffekte untersucht werden sollen. Da sich die vorliegende Arbeit ausschließlich mit dem zerstörungsfreien (und somit nicht weiter schädigenden) Nachweis von makroskopischen Defekten beschäftigt, wird im Folgenden stets dieser homogenisierte Ansatz weiterverfolgt.

Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustands in einem beliebigen Punkt eines Festkörpers werden bei Annahme kleiner Deformationen und Verzerrungen üblicherweise der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ verwendet, die beide symmetrische Tensoren 2. Stufe sind. Ersterer gehört mit dem Vektor der im Körper angreifenden Volumenkräfte \boldsymbol{f} zur sogenannten statischen Gruppe, für welche die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

gilt. Der Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ und der Verschiebungsvektor \mathbf{u} sind beide der kinematischen Gruppe zugeordnet und über folgende Beziehung miteinander verknüpft:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) . \quad (2.2)$$

Bei Annahme linear-elastischen Materialverhaltens lässt sich die konstitutive Beziehung zwischen diesen beiden Gruppen mit Hilfe des Elastizitätstensors 4. Stufe \mathbf{D} als verallgemeinertes Hookesches Gesetz wie folgt beschreiben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (2.3)$$

Durch Einführung des allgemeinen linearen Elastizitätsoperators \mathcal{A} kann die Gleichgewichtsbedingung (2.1) in expliziter Abhängigkeit von den Verschiebungen \mathbf{u} dargestellt werden als:

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{D} : \nabla^s \mathbf{u}) = -\mathbf{f} . \quad (2.4)$$

Zur eindeutigen Lösbarkeit einer elastostatischen Aufgabenstellung sind auf dem Rand $\partial\Omega$ des vom betrachteten Körper eingenommenen Gebiets Ω die Verschiebungen \mathbf{u}^* oder die Randspannungen \mathbf{t}^* als Randbedingungen vorzugeben. Hierfür wird der Rand $\partial\Omega$ unterteilt in einen kinematischen Rand Γ_K und einen statischen Rand Γ_S , mit

$$\partial\Omega = \Gamma_K \cup \Gamma_S , \quad \Gamma_K \cap \Gamma_S = \emptyset . \quad (2.5)$$

Zusammen mit der beschreibenden Differentialgleichung (2.4) im Gebietsinneren ergibt sich hieraus das Randwertproblem (RWP):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u} &= -\mathbf{f} && \text{in } \Omega , \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_K , \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u} &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_S . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Der hierbei auftretende Randspannungsoperator

$$\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} : \nabla^s \mathbf{u}) \quad (2.7)$$

bildet die Verschiebungen \mathbf{u} auf die zugehörigen Randspannungen am Rand mit äußerem Normalenvektor \mathbf{n} ab.

Aus der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor und der Existenz einer Verzerrungsenergiedichtefunktion ergeben sich die folgenden Symmetriebeziehungen für den Elastizitätstensor 4. Stufe \mathbf{D} bei Darstellung in Indexschreibweise im kartesischen Koordinatensystem (1, 2, 3):

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} . \quad (2.8)$$

Von den 81 Tensorelementen des Elastizitätstensors \mathbf{D} sind wegen der Symmetrieeigenschaften (2.8) somit nur 21 voneinander unabhängig. Aus diesem Grund hat sich im

Ingenieurbereich die folgende verkürzte Matrizenschreibweise für die Tensorgleichung (2.3) etabliert:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

wobei auf der rechten Seite die Ingenieurgleitungen $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$) verwendet werden, um eine symmetrische Elastizitätsmatrix \tilde{C} zu erhalten, deren Elemente C_{pq} sich wie folgt aus den Komponenten des Elastizitätstensors \mathbf{D} ergeben [9]:

$$C_{pq} = D_{\widehat{(pp)}\widehat{(qq)}}. \quad (2.10)$$

Für die Indizes p und q der Elastizitätsmatrix (mit $1 \leq p, q \leq 6$) gilt hierbei jeweils die folgende Abbildungsvorschrift auf die im Elastizitätstensor \mathbf{D} auftretenden Indexpaare:

$$\widehat{(pp)} = \begin{cases} (pp) & , \quad p \leq 3, \\ 23 & , \quad p = 4, \\ 31 & , \quad p = 5, \\ 12 & , \quad p = 6. \end{cases} \quad (2.11)$$

In der Praxis eingesetzte Werkstoffe zeigen oft ein elastisches Materialverhalten, das drei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenen besitzt und als *orthotrop* bezeichnet wird. Durch den elementweisen Vergleich entsprechend transformierter Elastizitätsmatrizen kann gezeigt werden [9], dass in diesem Fall nur noch 9 unabhängige elastische Materialkennwerte in \tilde{C} vorhanden sind:

$$C_{pq}^{\text{orthotrop}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Die hier betrachteten CFK-Laminae weisen ebenfalls drei senkrecht stehende Material-Symmetrieachsen auf. Durch die unidirektional in das isotrope Epoxidharz einlaminierten Carbonfasern verhält sich das Material zudem in der Ebene senkrecht zur Faserichtung in guter Näherung isotrop, d.h. ohne Richtungsabhängigkeit. Ein derartiges Materialverhalten wird als *transversal-isotrop* bezeichnet und lässt sich bei Faserorien-

tierung in 1-Richtung wie folgt darstellen [9]:

$$C_{pq}^{\text{transv.-isotrop}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Über experimentell direkt messbare Ingenieurkonstanten (Elastizitätsmoduli E_1 und E_2 , Schubmodul G_{12} sowie Querkontraktionszahlen ν_{12} und ν_{23}) können die fünf unabhängigen Elemente der transversal-isotropen Elastizitätsmatrix bei transversaler Isotropie in der 2-3-Ebene bestimmt werden:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{(1 - \nu_{23}^2) E_1}{\Theta}, & C_{12} &= \frac{(1 + \nu_{23}) \nu_{12} E_2}{\Theta}, \\ C_{22} &= \frac{\left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}\right) E_2}{\Theta}, & C_{23} &= \frac{\left(\nu_{23} + \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}\right) E_2}{\Theta}, \\ C_{66} &= G_{12}, & \text{mit: } \Theta &= (1 + \nu_{23}) \left(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Für das verwendete Material *Fibredux-913C* wurden diese Ingenieurkonstanten von MESKE [83] an identisch präparierten Zugproben mittels DMS gemessen und unter Verwendung der klassischen Laminattheorie ausgewertet. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle 2.2 angegeben, wobei die bei diesen ebenen Messungen fehlende Querkontraktionszahl mit dem reinen Epoxidharz-Wert zu $\nu_{23} = 0,33$ abgeschätzt wurde [32].

$E_1 = 113,972$ GPa
$E_2 = 8,133$ GPa
$G_{12} = 3,892$ GPa
$\nu_{12} = 0,315$
$\nu_{23} = 0,33$

Tabelle 2.2: Ingenieurkonstanten im lokalen Koordinatensystem (1, 2, 3) der Einzelschicht für das verwendete Material *Fibredux 913C-HTA(12K)-5-35%* (aus [32, 83])

Da bei Laminaten in der Regel von Schicht zu Schicht unterschiedliche Faserorientierungen verwendet werden, müssen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.9) aus dem lokalen Material-Hauptachsensystem (1, 2, 3) in das globale Probenkoordinatensystem (x, y, z) transformiert werden. Bei den in der vorliegenden Arbeit ausschließlich verwendeten quaderförmigen Laminatproben sind diese beiden Koordinatensysteme in Abbildung 2.3 veranschaulicht.

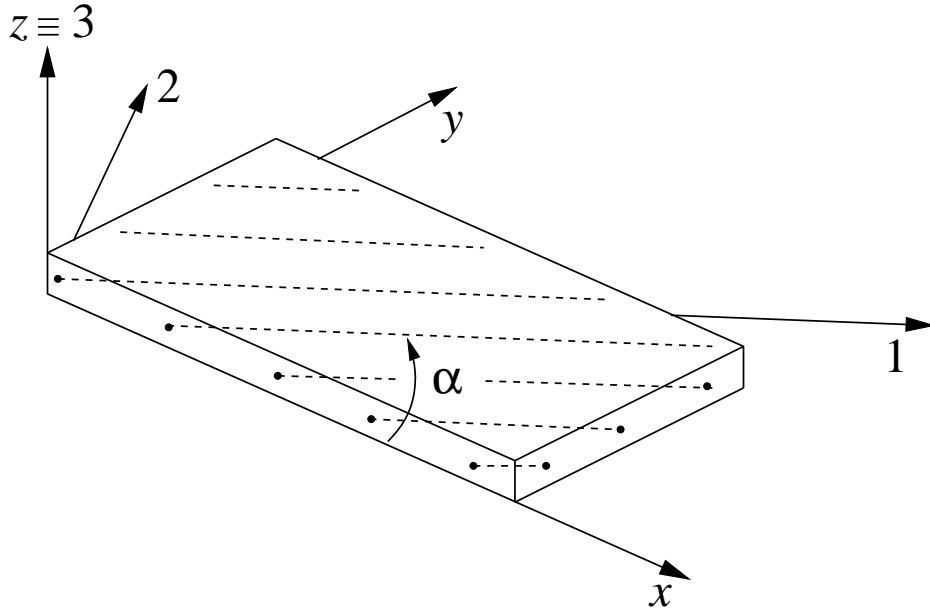


Abbildung 2.3: Globales (x, y, z) -Koordinatensystem des Laminats und lokales $(1, 2, 3)$ -Material-Hauptachsensystem einer einzelnen Lamina

Allgemein lässt sich das Transformationsverhalten des Elastizitätstensors \mathbf{D} in kartesischen Koordinaten beschreiben als:

$$D_{\lambda\mu\xi\eta} = c_{\lambda i} c_{\mu j} c_{\xi k} c_{\eta l} D_{ijkl} , \quad (2.15)$$

mit der Transformationsmatrix $c_{\lambda i} = \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_i$ und den zwei Indexgruppen $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ und $\lambda, \mu, \xi, \eta \in \{x, y, z\}$. Da bei den hier betrachteten Laminaten das lokale Koordinatensystem $(1, 2, 3)$ aus dem globalen Koordinatensystem (x, y, z) lediglich durch Drehung um die gemeinsame Achse $z \equiv 3$ hervorgeht (vgl. Abbildung 2.3), hängt die Transformationsmatrix rein von diesem Drehwinkel α ab:

$$c_{\lambda i} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (2.16)$$

mit $c = \cos \alpha$ und $s = \sin \alpha$. Zur Bestimmung der in Ingenieurschreibweise verwendeten Elastizitätsmatrix $\tilde{\mathbf{C}}_{(x,y,z)}$ im (x, y, z) -System kann in diesem Fall das folgende Transformationsgesetz in Matrixschreibweise angegeben werden [9, 98]:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{(x,y,z)} = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{C}}_{(1,2,3)} \tilde{\mathbf{T}}^T , \quad (2.17)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} . \quad (2.18)$$

Die linear-elastische Beschreibung des Materialverhaltens ist bei CFK-Laminae streng genommen nur in Faserrichtung in guter Näherung erfüllt, da dann die linear-elastischen Carbonfasern deutlich dominieren. Bei Schubbelastung oder Beanspruchung quer zur Faserrichtung spielen jedoch die nichtlinearen und viskoelastischen Eigenschaften des Epoxidharz-Matrixmaterials eine nicht mehr zu vernachlässigende Rolle. Da in der Praxis jedoch meist Laminat mit unterschiedlich orientierten Einzelschichten verwendet werden, tragen auch hier weitestgehend Laminae mit annähernd in Lastrichtung orientierten Fasern die Hauptbeanspruchung, so dass für derartige Schichtverbunde weiterhin in guter Näherung ein linear-elastisches Materialverhalten angenommen werden kann.

2.3 Dreidimensionale Laminatberechnung

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines aus unterschiedlich orientierten Einzellaminae bestehenden Gesamtlaminats werden oft vereinfachende Plattentheorien verwendet, da bei Laminaten die Schichtdicken in der Regel wesentlich dünner als die Längen- und Breitenabmessungen der Probe sind. Bei der klassischen Laminattheorie (CLT) wird entsprechend der Kirchhoff-Hypothese ein ebener Spannungs- und Verzerrungszustand in der Laminatenebene angenommen. Im globalen Koordinatensystem von Abbildung 2.3 werden somit sämtliche Spannungs- und Verzerrungskomponenten mit Indizes in z -Richtung vernachlässigt. Trotz dieser vereinfachenden Annahmen wird die CLT in vielen Fällen zur Beurteilung der Scheiben-, Platten- und Koppelverformung erfolgreich eingesetzt [8]. Eine ausführliche Darstellung der klassischen Laminattheorie findet sich z.B. in [59]. Um bei zunehmender Laminatdicke oder schubweichen Matrixwerkstoffen den signifikant höheren Einfluss der Gleitungen γ_{zx} und γ_{yz} berücksichtigen zu können, sind zudem auch verfeinerte Laminattheorien entwickelt worden, die im Allgemeinen auf Verschiebungsansätzen höherer Ordnung beruhen [9, 98].

Insbesondere im Bereich von Störungen wie Krafteinleitungen oder Delaminationsfronten liefern derartige zweidimensionale Modelle mit a priori festgelegten Ansatzfunktionen in Dickenrichtung jedoch meist nur ungenügende Näherungslösungen [99]. Gerade bei den in dieser Arbeit untersuchten Laminatproben, die unter ebener Zugbelastung ein Delaminationsverhalten durch hohe Schälspannungen in z -Richtung zeigen, liefert eine dreidimensionale Beschreibung genauere Ergebnisse des lokalen Verformungsverhaltens in der Nähe des Delaminationsgebietes. Eine möglichst präzise Auflösung dieses äußeren Verschiebungsfeldes ist für die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit entscheidend, da hieraus über ein Rekonstruktionsverfahren Aussagen zur quantitativen Identifikation innerer Schädigungsflächen gewonnen werden sollen. Aus den genannten Gründen wurden im Rahmen dieser Arbeit dreidimensionale Finite-Elemente-Berechnungen zur Simulation des mechanischen Verhaltens der untersuchten Laminatproben durchgeführt.

Als Ausgangspunkt der Finite-Elemente-Methode (FEM) in der Elastostatik wird das Randwertproblem (2.6) in schwacher Formulierung aufgestellt. Hierzu werden Testfunk-

tionen \mathbf{v} in einem geeigneten Funktionenraum V wie folgt eingeführt:

$$V = \{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_K \} . \quad (2.19)$$

Für eine Definition der hierbei auftretenden Sobolev-Räume $H^1(\Omega)$ sei auf den Abschnitt 5.2 verwiesen. Eine schwache Lösung

$$\mathbf{u} \in U = \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{auf } \Gamma_K \} \quad (2.20)$$

des Randwertproblems (2.6) kann aus der folgenden schwachen Formulierung bestimmt werden:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.21)$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (2.22)$$

und der Linearform

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_S} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma . \quad (2.23)$$

Die Bilinearform $B(\cdot, \cdot)$ ist V -elliptisch, d.h. es existiert eine Konstante $\beta > 0$, so dass:

$$\beta \|\mathbf{v}\|^2 \leq B(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V . \quad (2.24)$$

Über diese Eigenschaft kann gezeigt werden, dass eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in U$ für das Problem (2.21) existiert [27]. Bei der Galerkin-Formulierung der Finite-Elemente-Approximation werden entsprechend der verwendeten Diskretisierung endlich-dimensionale Unterräume $U_h \subset U$ und $V_h \subset V$ der Ansatz- bzw. Testfunktionen eingeführt. In dieser diskreten Problemformulierung sind nun Näherungslösungen $\mathbf{u}_h \in U_h$ des schwachen Problems (2.21) gesucht, so dass:

$$B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h . \quad (2.25)$$

Durch Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram kann gezeigt werden, dass auch das diskrete Problem (2.25) eine eindeutige Lösung \mathbf{u}_h besitzt [27], die im Folgenden stets als *diskrete* oder *numerische* Lösung bezeichnet wird. Für detailliertere Ausführungen zur FEM sei auf die vielfältig vorhandenen Lehrbücher (z.B. [22, 27, 122]) verwiesen.

Bei kommerziellen FEM-Programmpaketen wird üblicherweise zunächst im *Preprozessor* das betrachtete Körpergebiet Ω in eine endliche Anzahl von Finiten Elementen mit polynomialem Verschiebungsansatz unterteilt. Nach Eingabe der Materialeigenschaften und Randbedingungen wird ein lineares Gleichungssystem erzeugt, das anschließend mittels einer *Solver*-Routine gelöst wird. Mit Hilfe des *Postprozessors* lassen sich schließlich die erhaltenen Näherungslösungen noch aufbereiten und grafisch veranschaulichen.

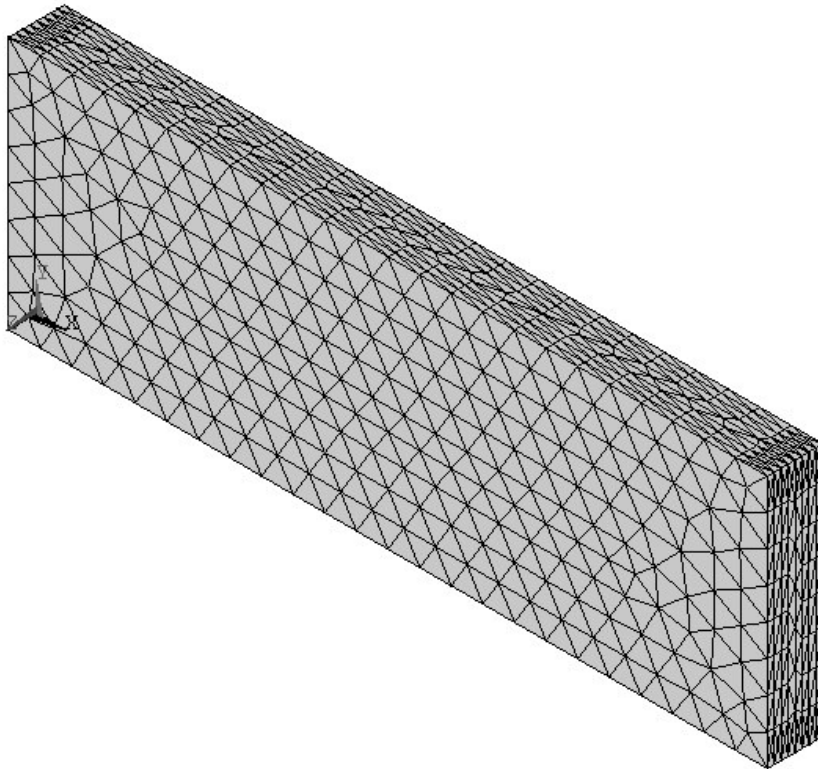


Abbildung 2.4: Typische 3D-Vernetzung eines 8-schichtigen Laminats

In der vorliegenden Arbeit wurde das FEM-Programmpaket ANSYS 5.6 benutzt, das eine dreidimensionale Berechnung von geschichteten, orthotropen Materialien ermöglicht. Das Gebietsinnere wurde schichtweise mittels tetraedischer 3D-Elemente (SOLID92) diskretisiert, bei denen quadratische Ansatzfunktionen für die Verschiebungen verwendet wurden. Ein typisches Vernetzungsbeispiel ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

Als Materialdaten fanden stets die in Tabelle 2.2 angegebenen Ingenieurkonstanten Verwendung. Zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Faserorientierungen wurden in jeder Schicht lokale, um die ($z \equiv 3$)-Achse gedrehte Koordinatensysteme eingeführt, die dem jeweiligen Materialhauptachsensystem entsprechen (vgl. Abbildung 2.3). Bei der Bestimmung des linearen Gesamtgleichungssystems werden diese programmseitig in das globale (x, y, z)-Koordinatensystem transformiert. Zur mechanischen Kopplung der modellierten Laminatschichten wurden in ungeschädigten Bereichen sogenannte Verschmelzungsoperationen zwischen benachbarten Teilflächen durchgeführt.

Um geeignete, künstlich durch die Einlaminierung von Teflonfolien vorzugebende Delaminationsorte und -formen zu bestimmen, die unter ebener Zugbelastung eine identifizierende Öffnung der Delaminationsflächen zeigen (vgl. Gleichung (6.18)), wurde zunächst das Öffnungsverhalten in diversen Interfacelagen von unterschiedlichen Schichtfolgen untersucht. Hierfür wurden bei der Laminatdiskretisierung in einem streifenförmigen Ge-

biet des untersuchten Interfaces ebene Kontaktelemente (CONTAC49) eingeführt, die eine Öffnung, aber kein gegenseitiges Durchdringen gegenüberliegender Randknoten ermöglichen. Unter vorgegebener Zugbelastung wurden schließlich diejenigen Teilbereiche des Kontaktgebiets als für den Delaminationsnachweis geeignet bestimmt, bei denen ein normaler Verschiebungssprung auftritt.

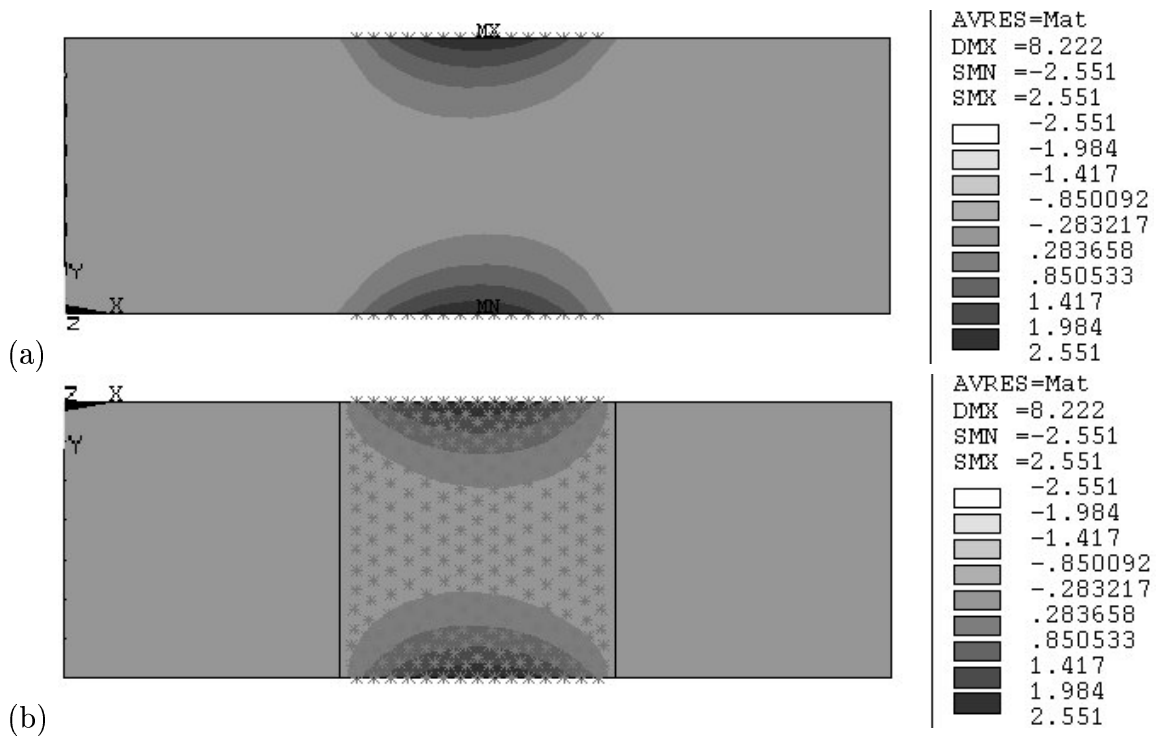


Abbildung 2.5: FEM-Simulation eines quadratischen Delaminationsgebiets in der Symmetrieebene eines $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ -Laminats bei $\sigma_{xx} = 5,68$ MPa : (a) Verschiebungsfeld $[\mu\text{m}]$ an der Deckfläche, (b) Verschiebungsfeld $[\mu\text{m}]$ im Bereich der Kontaktelemente

Die Ergebnisse einer derartigen FEM-Simulation mit einer quadratischen Kontaktfläche der Dimension $20 \times 20 \text{ mm}^2$ in der Mittellage der Schichtfolge[‡] $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Das äußere Verschiebungsfeld u_z in Abbildung 2.5(a) stimmt auch quantitativ gut überein mit den shearografisch gemessenen *Out-of-plane*-Verschiebungen an entsprechend präparierten Proben mit quadratischer Teflonfolie. Weitergehende vergleichende Auswertungen zwischen experimentellen und simulierten Verschiebungsdaten finden sich im Abschnitt 4.5. Abbildung 2.5(b) zeigt einen Schnitt durch die Mittelschicht des Laminats. Der quadratische Bereich der Teflonfolie ist durch schwarze Linien gekennzeichnet. Aus der Verschiebungslösung in Teilbild (b) wird deutlich, dass im Inneren der Probe sich nur zwei näherungsweise halbellenförmige Bereiche öffnen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wurden darum zur Erzeugung definierter Randdelaminationsbereiche bei derartig konkav krümmenden Laminaten ausschließlich halbellenförmige Teflon-

[‡]Angegeben sind die Faserorientierungswinkel der Einzelschichten in $^\circ$ bezüglich der äußeren Zugrichtung. T markiert die Lage der Teflonfolie, der Index S kennzeichnet Symmetrie (vgl. Anhang A).

streifen am Rand der Probe verwendet, da sich diese im gesamten Schädigungsgebiet unter Zugbelastung öffnen.

Analog wurden auch konvex krümmende Lamine untersucht, bei denen sich eine deutlich schwächer ausgeprägte innere Öffnung bei zentrisch gelegenen Vollellipsen ergibt (vgl. Unterabschnitt 8.2.2). Da im Rahmen dieser Arbeit eine quantitative Bestimmung innerer Schädigungen ausgehend von gemessenen Deformationen der äußeren Oberfläche erfolgen soll, ist unmittelbar einsichtig, dass ein möglichst großer relativer Krümmungseffekt der sich abspaltenden Laminathälften auch die angestrebte Defektquantifizierung erleichtert.

Kapitel 3

Digitale Shearografie

3.1 Grundlagen

Die Shearografie, auch *Image-Shearing-Speckle-Pattern-Interferometrie* genannt, ist ein kohärent-optisches Messverfahren zur Bestimmung von Oberflächendeformationen. Sie wurde erstmals 1973 von LEENDERTZ und BUTTERS [76] sowie von HUNG und TAYLOR [56] zur direkten Messung von Ableitungen der Oberflächenverschiebung propagiert und ist seitdem vielfältig weiterentwickelt worden [53, 55, 62, 67, 86, 105].

Die Oberflächeninformation ist in Form eines Speckle[†]-Musters kodiert, das an optisch rauhen Oberflächen, die mit kohärentem Licht beleuchtet werden, durch die Überlagerung einer Vielzahl von diffus gestreuten Wavelets mit statistisch verteilter Phase entsteht. Wird das Speckle-Muster mit einem Kamerasystem abgebildet, so hängt der statistisch definierte Durchmesser d_{sp} dieser sogenannten subjektiven Speckles von der effektiven Blendenzahl B_e der Abbildungsoptik und der Wellenlänge λ des beleuchtenden Laserlichts wie folgt ab [110]:

$$d_{\text{sp}} = 1,22 \lambda B_e . \quad (3.1)$$

Im Gegensatz zur holografischen Speckle-Interferometrie wird bei der Shearografie kein Referenzstrahl verwendet, sondern die Objektinformation mit sich selbst überlagert, weshalb die Methode auch als selbst-referenzierend (*self-referencing*) bezeichnet wird. Es werden im Folgenden zwei Koordinatensysteme benutzt:

- Das Objekt-Koordinatensystem (x, y, z) , bei dem die z -Achse senkrecht zur diffus reflektierenden Objektoberfläche liegt (vgl. Abbildung 2.3).
- Das Bild-Koordinatensystem $(\xi, \eta) = (x \cdot m_x, y \cdot m_y)$ mit Ursprung in der linken unteren Ecke des Bildes, wobei m_x und m_y den Maßstab der Abbildungsoptik in x - bzw. y -Richtung angeben.

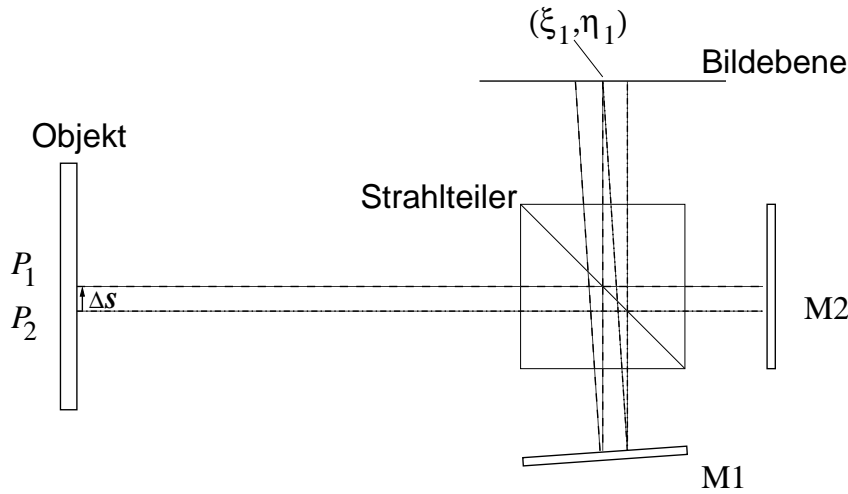


Abbildung 3.1: Prinzipskizze der Shearografie mit Michelson-Interferometer

Durch ein sogenanntes Scherelement im Beobachtungsteil des Strahlengangs entstehen in der Bildebene zwei versetzte Speckle-Bilder des kohärent beleuchteten Prüfobjekts (siehe Abbildung 3.1). Das diffus rückreflektierte Licht von jeweils zwei im Scherabstand $|\Delta \mathbf{s}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ in Richtung des Schervektors $\Delta \mathbf{s} = (\Delta x, \Delta y)^T$ voneinander entfernt liegenden Objektpunkten überlagert sich somit interferometrisch in einem Bildpunkt. In Abbildung 3.1 sei dies anhand der beiden exemplarisch ausgewählten Objektpunkte P_1 und P_2 veranschaulicht, die auf den gemeinsamen Bildpunkt (ξ_1, η_1) abgebildet werden. Die von den Objektpunkten P_1 und P_2 reflektierten Teilwellen Ψ_1 und Ψ_2 lassen sich in diesem *Referenzzustand* des Objekts darstellen als

$$\Psi_j = A_j e^{i\theta_j}, \quad \text{mit } j = 1, 2, \quad (3.2)$$

wobei A_j die entsprechende Amplitude und θ_j die Phasenlage der jeweiligen Teilwelle im Referenzzustand bezeichnet. Durch interferometrische Überlagerung dieser beiden Teilwellen entsteht im Bildpunkt (ξ_1, η_1) ein stationäres Intensitätsfeld I :

$$\begin{aligned} I &= |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + e^{-i(\theta_2 - \theta_1)}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &=: I_0 (1 + \gamma \cos \phi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} I_0 = A_1^2 + A_2^2 &: \text{Mittelwert der Gesamt-Intensität (Hintergrundhelligkeit);} \\ \gamma = \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} &: \text{Modulation des Interferenzterms (Kontrast);} \\ \phi = \theta_2 - \theta_1 &: \text{Zufällige relative Phasenlage.} \end{aligned}$$

[†] *speckle* (engl.) = Fleckchen

Tritt nun eine relative Oberflächen deformation des Prüfkörpers, z.B. durch äußere Belastung, auf, so ergibt sich im Allgemeinen ein verändertes Speckle-Muster. Die neue Intensität I' des Interferenzfeldes im Bildpunkt (ξ_1, η_1) kann für diesen *deformierten Zustand* analog abgeleitet werden zu:

$$I' = I'_0 (1 + \gamma' \cos \phi') \quad (3.4)$$

$$= I'_0 (1 + \gamma' \cos(\phi + \Delta\phi)) , \quad (3.5)$$

wobei mit gestrichenen Symbolen die entsprechenden Interferenzparameter des deformierten Zustands bezeichnet werden und $\Delta\phi = \phi' - \phi$ die durch die Oberflächen deformation der Punkte P_1 und P_2 hervorgerufene relative Phasendifferenz angibt.

Die digitale Phasenschiebe-Shearografie ermöglicht die quantitative Bestimmung der relativen Phasendifferenz zwischen dem Referenz- und deformierten Zustand des Prüfobjekts für jeden Bildpunkt, woraus sich auch die relative Oberflächenverschiebung selbst bzw. in erster Näherung ihre Ableitung in Scherrichtung ermitteln lassen (vgl. Abschnitt 3.5). Im Unterschied zur fotografischen Shearografie wird bei der digitalen Shearografie die Intensitätsverteilung in der Bildebene nicht mehr über fotochemisches Filmmaterial, sondern per CCD[†]-Chip aufgezeichnet, wodurch die Informationen nahezu in Echtzeit dargestellt und weiterverarbeitet werden können.

3.2 Phasenschiebetechnik

Zur quantitativen Bestimmung der relativen Phasendifferenz $\Delta\phi$ in Gleichung (3.5) können hauptsächlich 3 Verfahren unterschieden werden, die als *zeitliche*, *räumliche* und *dynamische* Phasenschiebetechnik bezeichnet werden [113]. Für die in dieser Arbeit durchgeführten quasi-statischen Belastungsuntersuchungen wurde ausschließlich die zeitliche Phasenschiebetechnik verwendet, da sie eine höhere Genauigkeit gegenüber der räumlichen Phasenschiebetechnik bietet [93] und im Vergleich zur dynamischen Phasenschiebetechnik deutlich einfacher zu implementieren ist. Darum wird im Folgenden ausschließlich die zeitliche Phasenschiebetechnik erläutert und verkürzend als Phasenschiebetechnik bezeichnet.

Grundidee der Phasenschiebetechnik ist die Bestimmung der jeweils 3 Unbekannten (I_0 , γ und ϕ bzw. I'_0 , γ' und ϕ') in den Gleichungen (3.3) und (3.4) durch mehrere, zeitlich sequentiell durchgeführte Intensitätsmessungen, bei denen ein zusätzlicher Phasenunterschied, die sogenannte *Phasenschiebung*, zwischen den beiden Teilwellen eingeführt wird. Aus der Kenntnis der beiden relativen Phasenlagen ϕ und ϕ' lässt sich dann direkt die deformationsinduzierte relative Phasendifferenz $\Delta\phi$ ermitteln.

[†]Charge-Coupled Device

Während zur Realisierung der Bild-Verscherung bei der fotografischen Shearografie zunächst Glaskeile oder Doppelaperturen verwendet wurden [67], hat sich bei der digitalen Shearografie das Michelson-Interferometer als Scherelement etabliert (vgl. Abbildung 3.1). Durch Verkippung des Spiegels M1 lässt sich der Scherabstand beliebig in zwei Richtungen einstellen. Mittels Linearverschiebung des auf einem Piezoversteller befestigten Spiegels M2 können für jeden Belastungszustand mehrere Intensitätsaufnahmen mit unterschiedlicher relativer Phasenlage innerhalb weniger Millisekunden nacheinander durchgeführt werden.

Um eine zügig auswertbare Berechnungsformel für die 3 Unbekannten in Gl. (3.3) zu erhalten, werden üblicherweise 4 Teilmessungen durchgeführt, zwischen denen die relative Phasenlage mittels des Piezoverstellers jeweils um $\pi/2$ vergrößert wird:

$$\begin{aligned} I_a &= I_0 + I_0\gamma \cos(\phi) , \\ I_b &= I_0 + I_0\gamma \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) , \\ I_c &= I_0 + I_0\gamma \cos(\phi + \pi) , \\ I_d &= I_0 + I_0\gamma \cos\left(\phi + \frac{3\pi}{2}\right) . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wie durch trigonometrische Umformungen leicht gezeigt werden kann, lässt sich aus diesen 4 Intensitätsverteilungen die relative Phasenlage ϕ bestimmen als

$$\phi = \arctan \frac{I_d - I_b}{I_a - I_c} , \tag{3.7}$$

wobei durch getrennte Auswertung der Vorzeichen in Zähler und Nenner eine eindeutige Zuordnung auf den Wertebereich $[0, 2\pi[$ erzielt werden kann [121]. Analog werden auch im deformierten Zustand 4 Teilmessungen (I'_a bis I'_d) durchgeführt, die entsprechend die Bestimmung von ϕ' ermöglichen. Die deformationsinduzierte relative Phasendifferenz $\Delta\phi$ modulo 2π kann nun ermittelt werden zu:

$$\Delta\phi = \begin{cases} \phi' - \phi & , \text{ für } \phi' \geq \phi \\ \phi' - \phi + 2\pi & , \text{ für } \phi' < \phi \end{cases} . \tag{3.8}$$

Bei der digitalen Shearografie wird diese Auswertung für jedes Pixel[§] des CCD-Chips in der Bildebene durchgeführt, wodurch sich ein diskretes Phasendifferenzbild der abgebildeten Oberfläche ergibt. Üblicherweise wird die Phaseninformation in 8-Bit-Auflösung kodiert, so dass der Phasenwertebereich von 0 bis 2π durch $2^8 = 256$ Graustufen von 0 (= Schwarz) bis 255 (= Weiß) dargestellt werden kann. Da die relative Phasendifferenz modulo 2π bestimmt wird, ergibt sich typischerweise ein Interferenzstreifenmuster, dessen Linien im Gegensatz zur fotografischen Shearografie einen sägezahnartig scharfen Übergang von Weiß nach Schwarz aufweisen.

[§]Pixel = picture element

3.3 Filterung

Die shearografisch erhaltenen Phasendifferenzbilder, die im Folgenden stets als *Shearogramme* bezeichnet werden, weisen aufgrund des optischen und elektronischen Rauschens üblicherweise eine Vielzahl von Störungen auf [29, 89]. Für eine quantitative Auswertung der Phasendifferenz $\Delta\phi$ müssen die störungsüberlagerten shearografischen Rohdaten somit zunächst bildtechnisch aufbereitet werden, um schließlich über Phasentfaltungsalgorithmen den Absolutwert der relativen Phasenänderung bestimmen zu können.

(a)	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	(b)	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	2	3	2	1																																	
2	3	4	3	2																																	
3	2	1	1	1																																	
1	1	1	1	1																																	
1	1	1	1	1																																	
2	2	2																																			
2	1	1																																			
1	1	1																																			

Abbildung 3.2: Spezielle Phasenfilterkerne: (a) Phasenfilter 1 (5×5), (b) Phasenfilter 2 (3×3)

Klassische Filtermethoden, bei denen die Bildpunkte direkt von den Grauwerten der benachbarten Pixel, z.B. über Mittelwert- oder Medianbildung, beeinflusst werden, eignen sich nicht für Sägezahn-Phasenbilder, da durch die starke direkte Glättung neben dem Rauschen auch die eigentliche Messinformation am scharfkantigen Weiß-Schwarz-Übergang zu sehr geglättet wird. Darum wird üblicherweise bei der Filterung von Phasenschiebe-Shearogrammen zunächst die sägezahnartig modulierte Phasendifferenz-Verteilung in Sinus- und Cosinus-Verteilungsbilder transformiert. Diese stetigen Sinus- und Cosinus-Verteilungen werden sodann jeweils separat mittels einer speziellen Mittelwertfilterung geglättet und anschließend wieder in eine gemeinsame Sägezahnverteilung rücktransformiert. Hierzu werden meist modifizierte Mittelwertbildungen verwendet, bei denen das Filterresultat direkt in das Ausgangsbild übernommen und durch eine gewichtete Operatormatrix die bereits gefilterten Nachbar-Pixel mit höheren Faktoren gewichtet werden [121]. Zwei Beispiele für solche speziellen Filterkerne, die auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzt wurden, sind in Abbildung 3.2 angegeben[¶]. Durch derartige Filteralgorithmen lassen sich typische Störungen in den gemessenen Shearogrammen effizient beseitigen, ohne dass ein hoher Phaseninformationsverlust wie bei der klassischen Mittelwert- oder Medianfilterung auftritt [95]. Typische Filterergebnisse mit diesem Verfahren sind in Abbildung 3.3 exemplarisch anhand des Shearogramms einer zugbelasteten CFK-Probe mit zwei Randdelaminationen dargestellt.

[¶]In der dritten Zeile des Phasenfilters 1 (5×5) liegt ein Programmierfehler im verwendeten Programm SHEARWIN vor; die Gewichtung müsste in korrekter Weise $|3|4|1|1|1|$ lauten.

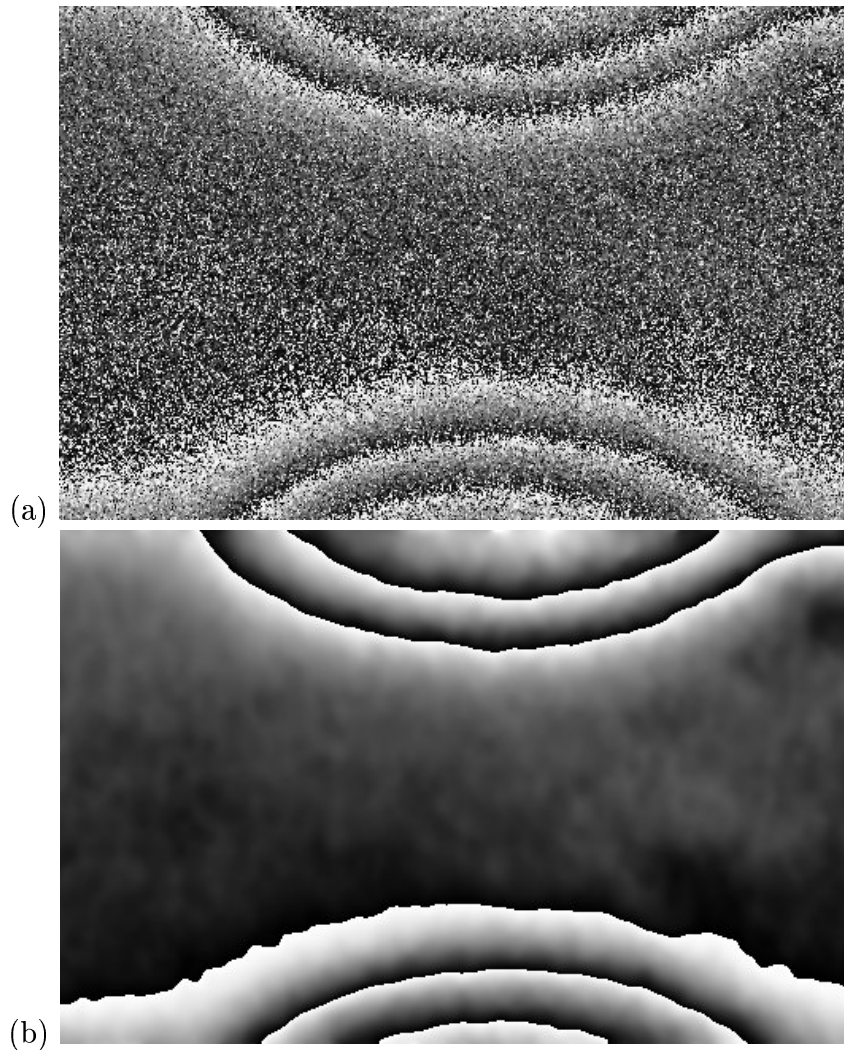


Abbildung 3.3: Verwendetes Sinus-Cosinus-Filterverfahren: (a) Ungefiltertes Shearogramm, (b) Shearogramm nach zweimaliger (3x3)-Phasenfilterung 2 und dreimaliger (5x5)-Phasenfilterung 1

3.4 Demodulation

Ziel der Demodulation, die auch als Phasenfaltung bezeichnet wird, ist die Bestimmung der unmodulierten Phasendifferenz-Verteilung durch Beseitigung der 2π -Diskontinuitäten in der interferometrisch erhaltenen (modulo 2π)-Information. Zur Ermittlung der absoluten Interferenzordnung der einzelnen Interferenzlinien sind stets zusätzliche Annahmen und Randbedingungen nötig, da im Phasenschiebe-Shearogramm lediglich relative Phasendifferenzwerte vorliegen. So wird üblicherweise angenommen, dass die Phasenänderung über den Messbereich hinweg stetig erfolgt, so dass Sprünge in den Helligkeitswerten als sicheres Indiz zur Änderung der Interferenzordnung verwendet werden können.

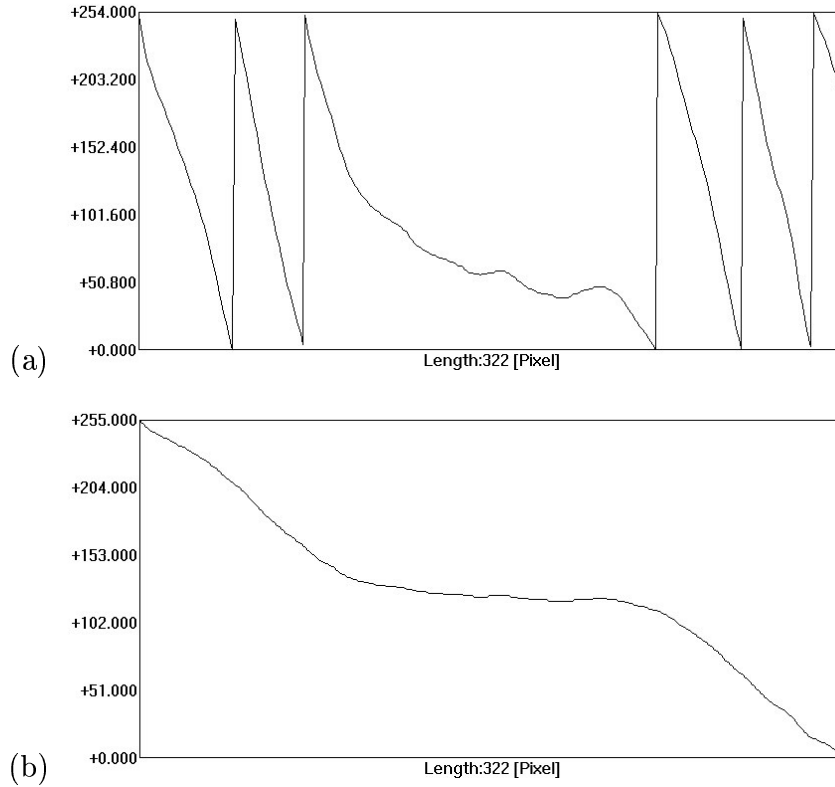


Abbildung 3.4: Prinzip des Demodulationsalgorithmus: (a) Intensitätswerte vor Demodulation, (b) Intensitätswerte nach Demodulation

Die demodulierte Verteilung der relativen Phasendifferenz $\Delta\phi$ in einem beliebigen Bildpunkt (ξ_i, η_i) kann allgemein wie folgt ausgedrückt werden [121]:

$$\Delta\phi(\xi_i, \eta_i) = 2\pi n(\xi_i, \eta_i) + \frac{2\pi}{255}g(\xi_i, \eta_i) = N(\xi_i, \eta_i)2\pi, \quad (3.9)$$

wobei $n(\xi_i, \eta_i)$ den ganzzahligen Anteil der reellen Interferenzordnung $N(\xi_i, \eta_i)$ im Bildpunkt (ξ_i, η_i) und $g(\xi_i, \eta_i)$ den Grauwert des Bildpunktes (ξ_i, η_i) im gefilterten Shearogramm bezeichnet. Entscheidend für die Qualität der Phasenfaltung ist demnach die Bestimmung des ganzzahligen Anteils $n(\xi_i, \eta_i)$ der Interferenzordnung. Beim verwendeten Verfahren werden ausgehend von einem frei wählbaren Startpunkt jeweils vorgegebene Pixel-Pfade $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})_{k \geq 1}$ in radialer Richtung durchlaufen und die ganzzahlige Interferenzordnung $n(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ durch Auswertung der Grauwert-Differenz zum Vorgängerpunkt $(\xi^{(k-1)}, \eta^{(k-1)})$,

$$\Delta g = g(\xi^{(k)}, \eta^{(k)}) - g(\xi^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), \quad (3.10)$$

wie folgt bestimmt:

$$n(\xi^{(k)}, \eta^{(k)}) = \begin{cases} n(\xi^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}) + 1, & \text{falls: } \Delta g > \Delta g^{\text{krit}} \\ n(\xi^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}) - 1, & \text{falls: } \Delta g < -\Delta g^{\text{krit}} \\ n(\xi^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Abbildung 3.4 demonstriert den oben beschriebenen Demodulationsalgorithmus mit $\Delta g^{\text{krit}} = 192$ ($\hat{=} 75\%$ der max. Helligkeitsdifferenz) exemplarisch entlang der vertikalen Schnittlinie an der maximalen Aufwölbungsstelle des gefilterten Sägezahn-Phasendifferenzbildes aus Abbildung 3.3(b). Ohne Vorhandensein von größeren Störeinflüssen



Abbildung 3.5: Demoduliertes Phasenbild zum gefilterten Shearogramm aus Abb. 3.3(b)

lässt sich mit diesem einfachen Entfaltungsverfahren in jedem Bildpunkt (ξ_i, η_i) die demodulierte relative Phasendifferenz erhalten, deren ganzzahliger Interferenzordnungsanteil jedoch noch vom gewählten Startpunkt abhängt. Um daraus letztlich absolute Phasendifferenzwerte abzuleiten, muss an einem frei wählbaren Normierungspunkt innerhalb des Bildbereichs der dort gültige ganzzahlige Anteil der Interferenzordnung als zusätzliche Randbedingung vorgegeben werden.

Das demodulierte Phasendifferenzbild zum Shearogramm in Abbildung 3.3(b) ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Sämtliche Bildpunkte wurden hierbei durch Subtraktion mit der geringsten reellen Interferenzordnung N_{\min} und anschließende Division durch die maximale Interferenzordnungsdifferenz

$$\Delta N = N_{\max} - N_{\min} \quad (3.12)$$

skaliert, um alle Pixel im verfügbaren Grauwertebereich $[0, 255]$ darstellen zu können.

3.5 Auswertung des Shearogramms

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der relativen Phasendifferenz $\Delta\phi$ und der zugrundeliegenden mechanischen Relativdeformation der untersuchten Objekt Oberfläche bei Beleuchtung mit einer ebenen Welle abgeleitet. Hierbei sei vereinfachend angenommen, dass das Objektbild in der x - y -Ebene um den konstanten Schervektor $\Delta\mathbf{s}$

verschert ist und zwei im Referenzzustand auf einen gemeinsamen Bildpunkt (ξ_1, η_1) abgebildete Objektpunkte auch nach der Belastung noch auf denselben Bildpunkt abgebildet werden. Zudem werden nicht alle in diesem Speckle überlagerten Wavelets in die Betrachtung einbezogen, sondern es sei zur Vereinfachung eine punktweise Interferenz zweier Streuzentren angenommen [113].

In Abbildung 3.6(a) ist eine Ausschnittsvergrößerung der Objektoberfläche im Referenzzustand skizziert. Durch Auswertung der Differenz der optischen Lichtwege von der

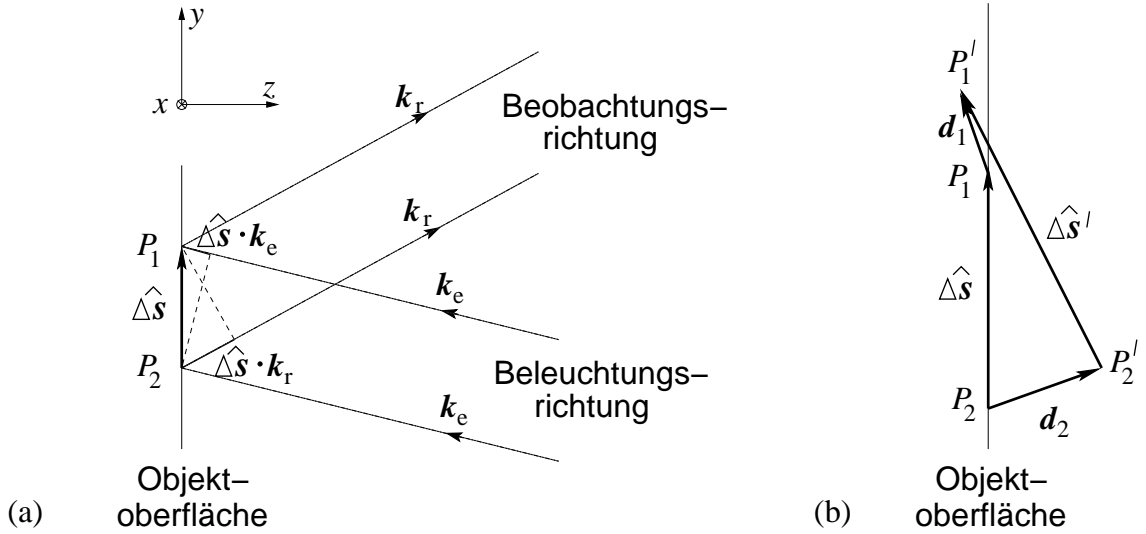


Abbildung 3.6: Objektoberfläche: (a) im Referenzzustand, (b) im deformierten Zustand

Lichtquelle über die Punkte P_1 und P_2 zur Bildebene ergibt sich die folgende relative Referenz-Phasenlage ϕ im gemeinsamen Bildpunkt (ξ_1, η_1) (vgl. auch Abbildung 3.1):

$$\phi = \Delta \hat{s} \cdot \mathbf{k}_r - \Delta \hat{s} \cdot \mathbf{k}_e = \Delta \hat{s} \cdot (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e), \quad (3.13)$$

wobei $\Delta \hat{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ den dreidimensionalen Differenzvektor der betrachteten Punkte, \mathbf{k}_e den Wellenvektor des einfallenden Beleuchtungsstrahls und \mathbf{k}_r den Wellenvektor des reflektierten Beobachtungsstrahls bezeichnet, mit:

$$|\mathbf{k}_e| = |\mathbf{k}_r| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.14)$$

Wird die Objektoberfläche nun durch äußere Belastung deformiert, so verschieben sich der Oberflächenpunkt P_1 um den Verschiebungsvektor \mathbf{d}_1 und der Punkt P_2 um \mathbf{d}_2 in die neuen Positionen P_1' bzw. P_2' (siehe Abbildung 3.6(b)). Der im Allgemeinen veränderte Abstandsvektor $\Delta \hat{s}'$ zwischen diesen beiden deformierten Positionen ergibt sich nun zu

$$\Delta \hat{s}' = \Delta \hat{s} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2. \quad (3.15)$$

Ist die Verschiebung in der x - y -Ebene klein, so werden die beiden deformierten Punkte P'_1 und P'_2 auch nach der Verformung auf denselben Bildpunkt (ξ_1, η_1) abgebildet, wie eingangs als Voraussetzung angenommen wurde. Die relative Phasenlage ϕ' im deformierten Oberflächenzustand kann demnach analog zu Gleichung (3.13) abgeleitet werden als:

$$\phi' = \Delta \hat{\mathbf{s}}' \cdot \mathbf{k}_r - \Delta \hat{\mathbf{s}}' \cdot \mathbf{k}_e = \Delta \hat{\mathbf{s}}' \cdot (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e) . \quad (3.16)$$

Für die deformationsinduzierte relative Phasendifferenz $\Delta\phi$ zwischen dem Referenz- und dem deformierten Zustand ergibt sich folglich:

$$\Delta\phi = \phi' - \phi = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \cdot (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e) . \quad (3.17)$$

Nach Einführung des Sensitivitätsvektors

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e = (k_x, k_y, k_z)^T \quad (3.18)$$

und des Verschiebungsdifferenzvektors

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 \quad (3.19)$$

lässt sich Gleichung (3.17) schreiben als

$$\Delta\phi = \mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{d} . \quad (3.20)$$

Liegt nun z.B. eine Bildscherung rein in y -Koordinatenrichtung vor ($\Delta\mathbf{s} = \Delta y \mathbf{e}_y$), so ergibt sich durch Darstellung der Verschiebungsdifferenz $\Delta\mathbf{d}$ über die Taylor-Entwicklung in Scherrichtung y der Verschiebung um den Punkt P_1 und bei Vernachlässigung der nichtlinearen Terme die typische Auswertungsgleichung für die Shearografie (mit $\mathbf{d}_1 =: \mathbf{d} = (u, v, w)^T$):

$$\Delta\phi \approx \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial y} \Delta y = \left(k_x \frac{\partial u}{\partial y} + k_y \frac{\partial v}{\partial y} + k_z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Delta y . \quad (3.21)$$

In der Literatur findet sich hierzu meist die Aussage, dass mit der Shearografie die erste Ableitung in Scherrichtung y der Oberflächenverschiebung in Richtung des Sensitivitätsvektors direkt gemessen werden kann. Für eine gute Annäherung der Taylorentwicklung an die erste Ableitung muss jedoch der Scherabstand Δy möglichst klein gewählt werden. Dadurch verkleinert sich aber auch die absolute Phasendifferenz, weshalb somit das Auflösungsvermögen der Methode und die Anzahl der gemessenen Interferenzringe ebenfalls sinken. Bei direkter Verwendung von Gleichung (3.21) zur Auswertung von Shearogrammen wird deshalb der Scherabstand üblicherweise als wenige Prozent der Bildbreite gewählt.

3.6 Algorithmus zur Verschiebungsfeldbestimmung

Da in der vorliegenden Arbeit als Randbedingungen Verschiebungsdaten an der äußeren Oberfläche benötigt werden, wird im Folgenden eine Methode beschrieben, die die Bestimmung des Verschiebungsfeldes aus den shearografischen Rohdaten bei gleichzeitiger Entfernung der Bildverdopplung ermöglicht. Dieses Verfahren wurde 1996 von WALDNER [112] publiziert und in ersten Versuchen validiert, die zugrundeliegende Idee findet sich jedoch auch schon in [85].

Es seien weiterhin die zwei im Abschnitt 3.1 definierten Bild- und Objekt-Koordinatensysteme benutzt. Bei Scherung rein in y -Richtung ($\Delta \mathbf{s} = \Delta y \mathbf{e}_y$) tragen die Verschiebungen der Objektoberflächenpunkte P_1 an der Stelle (x_1, y_1) und P_2 an der Position $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \Delta y)$ gemäß Gleichung (3.20) zur Phasendifferenz im Bildpunkt (ξ_1, η_1) bei:

$$\Delta\phi(\xi_1, \eta_1) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{d}(x_1, y_1) - \mathbf{d}(x_1, y_1 - \Delta y)] . \quad (3.22)$$

Im Bildpunkt $(\xi_1, \eta_1 - \Delta\eta)$, mit $\Delta\eta = \Delta y m_y$, beträgt die Phasendifferenz analog:

$$\Delta\phi(\xi_1, \eta_1 - \Delta\eta) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{d}(x_1, y_1 - \Delta y) - \mathbf{d}(x_1, y_1 - 2\Delta y)] . \quad (3.23)$$

Durch Addition von (3.22) und (3.23) kürzen sich die zwei Terme mit Δy heraus:

$$\Delta\phi(\xi_1, \eta_1) + \Delta\phi(\xi_1, \eta_1 - \Delta\eta) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{d}(x_1, y_1) - \mathbf{d}(x_1, y_1 - 2\Delta y)] . \quad (3.24)$$

Mittels Addition der Phasenwerte von n Bildpunkten, die um ganzzahlige Vielfache von $\Delta\eta$ in negativer η -Richtung von (ξ_1, η_1) entfernt liegen, ergibt sich:

$$\sum_{j=0}^n \Delta\phi(\xi_1, \eta_1 - j\Delta\eta) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{d}(x_1, y_1) - \mathbf{d}(x_1, y_1 - (n+1)\Delta y)] . \quad (3.25)$$

Um das Ergebnis noch weiter zu vereinfachen, sei im Folgenden der Verschiebungswert $\mathbf{d}(x_1, y_1 - (n+1)\Delta y)$ als bekannt vorausgesetzt:

$$\mathbf{d}(x_1, y_1 - (n+1)\Delta y) =: \mathbf{d}_0 = (u_0, v_0, w_0)^T . \quad (3.26)$$

Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, dass die Probe in diesem Bereich fest eingespannt wird oder der vorliegende Deformationszustand sich durch einfache Querkontraktionsberechnungen bestimmen lässt.

Unter dieser Annahme vereinfacht sich dann Gl. (3.25) zu:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{sum}}(\xi_1, \eta_1) &= \sum_{j=0}^n \Delta\phi(\xi_1, \eta_1 - j\Delta\eta) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{d}(x_1, y_1) - \mathbf{d}_0] \\ &= k_x(u(x_1, y_1) - u_0) + k_y(v(x_1, y_1) - v_0) + k_z(w(x_1, y_1) - w_0) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Offensichtlich enthält also das Ergebnis der obigen Summation $\Delta\phi_{\text{sum}}(\xi_1, \eta_1)$ die Komponenten des Verschiebungsvektors relativ zu dem bekannten Referenzwert \mathbf{d}_0 . Die erhaltene Verschiebung ist zudem unabhängig vom Scherabstand. Durch Anwendung derartiger Summationen für jeden Bildpunkt (ξ_1, η_1) kann das gesamte Verschiebungsfeld bestimmt werden. Bei digital abgespeicherten, demodulierten Shearogrammen werden hierfür der Schervektor $\Delta\mathbf{s}$, die Bildmaßstäbe m_x und m_y sowie die Relation zwischen den Phasenwerten und Graustufen benötigt.

Kapitel 4

Versuchsbeschreibung

4.1 Beschreibung des Messaufbaus

Der in dieser Arbeit verwendete Aufbau zur zerstörungsfreien Bestimmung der Oberflächendeformation geht in seinen Grundzügen auf die Arbeit von KLUMPP [66] zurück, der 1987 die fotografische Shearografie am Institut einführte. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der Versuchsaufbau auf digitale Phasenschiebe-Shearografie in Echtzeit mit dem kommerziellen Programm SHEARWIN 2.4[†] umgerüstet, wobei neben aktualisierter Aufnahme- und Auswertungssoftware sowie zugehöriger Hardware auch ein neues Scherelement eingesetzt wurde. Zudem wurde im Rahmen dieser Arbeit ein eigenes Programm mit grafischer Benutzeroberfläche zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes bei delaminierten Zugproben entwickelt. Im Folgenden sei zunächst der optische Teil des Versuchsaufbaus beschrieben, der in seiner aktuellen Ausgestaltung in Abbildung 4.1 skizziert ist.

Das kohärent-optische Licht eines HeNe-Lasers mit 25 mW Leistung und der Wellenlänge $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ fällt über eine Aufweitungsoptik senkrecht auf die Probenoberfläche. Der kreisförmige variable Strahlteiler ist unterschiedlich dick mit Aluminium bedampft und ermöglicht somit eine einfache Einstellung der Beleuchtungsintensität. Die aufweitende Beleuchtungsoptik besteht aus einem Mikroskopobjektiv (Brennweite $f = 4,0 \text{ mm}$) und einer Kollimatorlinse ($f = 370 \text{ mm}$) mit 65 mm Durchmesser, zwischen denen eine Lochblende mit $20 \mu\text{m}$ Durchmesser jeweils im Abstand ihrer Brennweiten im Fokuspunkt positioniert ist. Dadurch wird das einfallende ebene Laserlicht von einem Ausgangsdurchmesser von ca. 1 mm auf eine ebene Welle mit etwa 60 mm Durchmesser aufgeweitet, wobei die Lochblende als Raumfilter wirkt, das störende Nebenbeugungsordnungen entfernt. Über den teildurchlässigen Spiegel der Größe $85 \times 85 \text{ mm}^2$ wird anschließend etwa die Hälfte der Lichtintensität senkrecht auf die Probe projiziert. Von der üblicherweise hell matt lackierten Probenoberfläche wird das einfallende Licht dann

[†]Software der Firma isi-sys, Kassel & LSHS, Universität Kassel

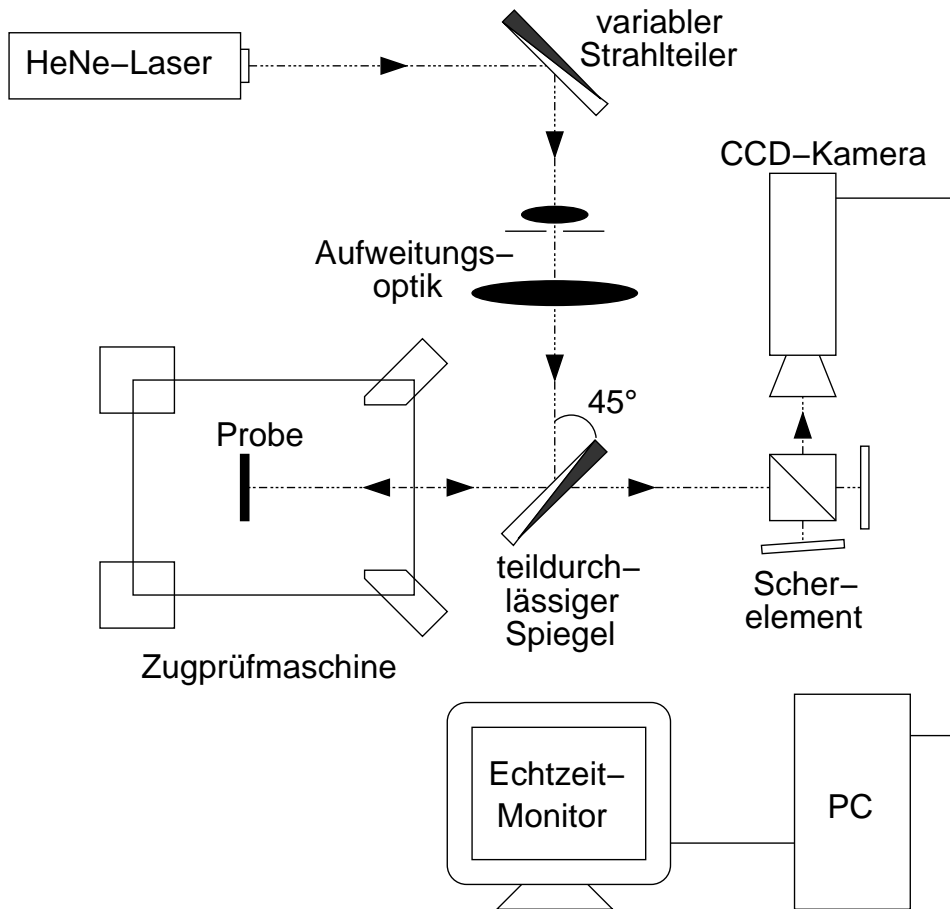


Abbildung 4.1: Prinzipskizze des verwendeten Shearografie-Aufbaus

diffus rückreflektiert. Durch denselben teildurchlässigen Spiegel gelangt abermals etwa die Hälfte der reflektierten Intensität über das Scherelement in die Abbildungsoptik der CCD-Kamera. Als Scherelement und zur Phasenschiebung dient ein leicht verkipptes Michelson-Interferometer (vgl. Abschnitt 3.2). Zur Aufnahme des Specklemusters in der Bildebene wird die monochrome CCD-Kamera SONY SSC-M370CE verwendet, deren CCD-Array aus 752×582 Pixeln besteht. Die Kamera-Daten werden zeilenweise über eine MATROX-PULSAR-Framegrabberkarte in den Ansteuerungs- und Auswertungsrechner eingelesen. Dieser besitzt als zentrale CPU einen AMD K6/2-Chip mit einer Taktfrequenz von 450 MHz sowie einen Hauptspeicher von 64 MB RAM und wird unter WINDOWS 3.11 betrieben. Zur softwareregelmäßigten Ansteuerung des Piezoverstellers für die Phasenschiebetechnik ist zudem eine Spannungsverstärkerkarte mit einem maximalen Ausgangswert von 150 Volt eingebaut.

Die Verwendung einer aufgeweiteten ebenen Laserlichtwelle sorgt dafür, dass im gesamten beleuchteten Probenbereich der Sensitivitätsvektor $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_e$ (vgl. Gleichung (3.18)) konstant bleibt, wodurch die Auswertung deutlich vereinfacht wird. Durch die senkrechte Beleuchtungs- und Beobachtungsrichtung (in $\pm z$ -Richtung des Proben-

koordinatensystems) verkürzen sich zudem die Gleichungen (3.18) und (3.21) zu:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T = \frac{4\pi}{\lambda} (0, 0, 1)^T, \quad (4.1)$$

$$\Delta\phi \approx \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial y} \Delta y = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y. \quad (4.2)$$

Bei senkrechter Beleuchtung geht demnach nur die *Out-of-plane*-Komponente w der Oberflächenverschiebung in die Berechnungsformel ein, so dass sich mit dem beschriebenen Aufbau die Relativdeformation rein in z -Richtung bestimmen lässt.

Zur definierten mechanischen Zugbelastung der Probe wurde die von KLUMPP [66] entwickelte und erprobte 10 kN-Zugprüfmaschine verwendet, die neben der Unterdrückung von parasitären Deformationen (Biegung, Torsion) eine präzise Belastungseinstellung sowie gute Beleuchtungs- und Betrachtungsmöglichkeiten bietet. Sie besteht aus einer verwindungsarmen Schweißkonstruktion aus Baustahl, bei der die Probe über Passstifte und die Einklemmung der Aluminiumstücke (vgl. Abschnitt 2.1) fest in zwei Spannbacken eingespannt wird, von denen der obere über einen Werkzeugmaschinenschlitten mit Kreuzrollenlagerung in x -Richtung verschiebbar ist. Über einen Ringkraftmesser lässt sich die auf die Probe ausgeübte Zugkraft bestimmen. Weitere Details zur Ausführung der Zugprüfmaschine finden sich in [66].

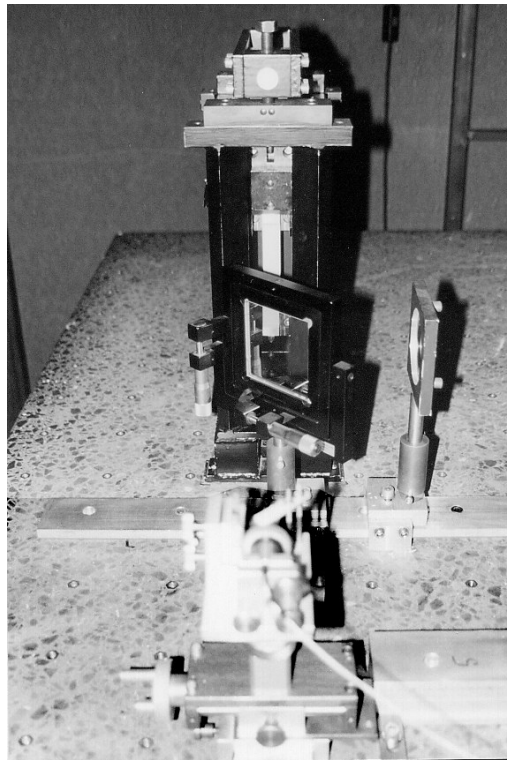


Abbildung 4.2: Verwendete Zugprüfmaschine mit Abbildungsoptik und Scherelement

Alle optischen Komponenten und die Zugprüfmaschine sind über Gewindebohrungen auf einer planpolierten Kunststeinplatte der Fläche $180 \times 120 \text{ cm}^2$ befestigt, die über drei Pressluftzylinder luftgelagert werden kann. Durch die selbst-referenzierende Eigenschaft der Shearografie konnte bei den Versuchen jedoch auf eine derartige Schwingungsisolierung verzichtet werden. Abbildung 4.2 zeigt die verwendete Zugprüfmaschine und die Abbildungsoptik mit Scherelement.

4.2 Beschreibung der Ansteuerungs- und Auswertungssoftware

Mit dem zu Beginn der Arbeit vorhandenen einfachen Digital-Aufbau ohne Phasenschiebetechnik konnten durch direkte pixelweise Subtraktion der beiden Speckle-Muster im Referenz- und deformierten Zustand lediglich qualitative Subtraktions-shearogramme gemessen werden, bei denen die eigentliche Phaseninformation noch durch eine Cosinus-Funktion überlagert ist [48]. Da erst nach der Aufnahme beider Deformationszustände die zwei Specklebilder über ein Auswertungsmakro in OPTIMAS 5.1[†] subtrahiert werden konnten, wofür einige Sekunden Rechenzeit benötigt wurden, war es zudem nicht möglich, die Shearogramme in Echtzeit auf dem Monitor darzustellen.

Zur halbquantitativen Auswertung dieser Subtraktions-shearogramme stand ein eigens am Institut entwickeltes Auswertungsprogramm [21] zur Verfügung, das über die Bestimmung der Interferenzmaxima und -minima mit anschließender linearer Interpolation zwischen diesen Linienmitten eine näherungsweise Bestimmung der Verschiebungsableitung in Scherrichtung entlang frei wählbarer Auswertungslinien ermöglichte. Zu Beginn der vorliegenden Arbeit wurde dieses Programm um einen einfachen Demodulationsalgorithmus erweitert und zusätzlich der in Abschnitt 3.6 beschriebene Algorithmus implementiert, womit erste quantitative Aussagen zum Verschiebungsfeld der Oberfläche erzielt werden konnten. Durch die Interpolation zwischen den Linienmitten ließ sich jedoch keine befriedigende Genauigkeit der Verschiebungsinformation erreichen, wobei zudem auch die Qualität der einfachen digitalen Subtraktions-shearogramme selbst nach mehrmaliger Filterung für die automatisierte quantitative Auswertung nicht geeignet war.

Aus den vorgenannten Gründen wurde im weiteren Verlauf dieser Arbeit das kommerzielle Programm SHEARWIN 2.4 zur automatisierten shearografischen Messung installiert und zugleich die Ansteuerungshardware entsprechend erweitert. Die in der vorliegenden Arbeit abgebildeten Shearogramme sind alle mit diesem Phasenschiebe-Shearografie-System aufgenommen worden und demonstrieren exemplarisch die guten Auflösungseigenschaften des neuen Systems. Das Programm SHEARWIN 2.4 läuft unter WINDOWS 3.X und kontrolliert neben der Bildauslesung auch die synchronisierte Ansteuerung des

[†]Software der Firma MEDIA CYBERNETICS (www.optimas.com)

Piezoverstellers für die Phasenschiebung. Nach Einstellung des Referenzzustands und Start der Shearografie-Messroutine „Auto-measuring out-of-plane“ werden zunächst 4 Specklebilder mit jeweils um $\pi/2$ verschobener Relativphase im Abstand von je 10 ms eingelesen. Anschließend wird auf dem Monitor stets die pixelweise Differenz des aktuellen Speckle-Musters von dem ersten Teilbild des Referenzzustands dargestellt, so dass bereits während der Belastungseinstellung ein einfaches Subtraktionshearogramm des aktuell deformierten Zustands vom Referenzzustand nahezu in Echtzeit beobachtet werden kann. Nach Einstellung des gewünschten Deformationszustands lässt sich das Messprogramm durch Tastendruck fortsetzen, woraufhin auch im deformierten Zustand 4 Specklebilder mit jeweils um $\pi/2$ verschobener Relativphase ausgelesen werden. Anschließend wird aus den 8 Teilmessungen über den im Abschnitt 3.2 beschriebenen Auswertungsalgorithmus pixelweise die Phasendifferenz $\Delta\phi$ modulo 2π berechnet.

Durch Anwahl des Filtermenues können die bereits im Abschnitt 3.3 vorgestellten, inhomogenen Sinus-Cosinus-Phasenfilterroutinen mit einer wählbaren Kernel-Größe zwischen 3×3 und 13×13 auch mehrmals hintereinander durchgeführt werden. Sind die Phasendifferenzbilder ausreichend geglättet, kann zuletzt auch das in Kapitel 3.4 beschriebene Demodulationsverfahren angewendet werden, um die stetige Phasendifferenzverteilung zu rekonstruieren. Hierbei sind im Programm auch diverse Maskierungsformen eingerichtet, die das Ausgrenzen von gestörten oder fehlerhaften Bildbereichen für den Demodulationsprozess ermöglichen. Die erhaltenen Original- und weiterverarbeiteten Shearogramme lassen sich auch jeweils als 2D-Schnittbilder entlang vorgegebener Geraden oder in 3D-Darstellung veranschaulichen und abspeichern. Bedauerlicherweise können die mittels SHEARWIN demodulierten Phasendifferenz-Daten jedoch nicht als reelle Zahlenwerte weiterverarbeitet werden, sondern sind lediglich mit den 256 Grauwerten der 8-Bit-Kodierung als ganzzahlige Werte abzuspeichern. Der hierbei verwendete Skalierungsfaktor ΔN (s. Gleichung (3.12)) lässt sich zur Weiterverarbeitung der Daten als Fließkommazahl bei den Bildeigenschaften entnehmen.

4.3 Kalibrierung des Shearografie-Systems

Um die gemessenen Phasenshearogramme auch quantitativ auswerten zu können, müssen die Messparameter Scherabstand und Phasenschiebung präzise einstellbar sein. Darum seien im Folgenden die verwendeten Verfahren zur Kalibrierung des Phasenschiebe-Shearografie-Systems kurz vorgestellt.

Scherabstand

Zu Beginn der Arbeit wurden wie bei den Vorgängerarbeiten am Institut schwarze Kreuze auf die weiß lackierte Probenoberfläche aufgetragen, über die sich durch die Bildverdopplung der Schervektor $(\Delta\xi, \Delta\eta)^T = (\Delta x m_x, \Delta y m_y)^T$ im Bildsystem (ξ, η) direkt als

Pixelwert entnehmen ließ. Da jedoch im Bereich der Markierungskreuze durch den ungenügenden Kontrast keine quantitative Phasenbestimmung möglich war, ergaben sich dort auch Probleme bei der Demodulation und dem Algorithmus zur Verschiebungsfeldbestimmung.

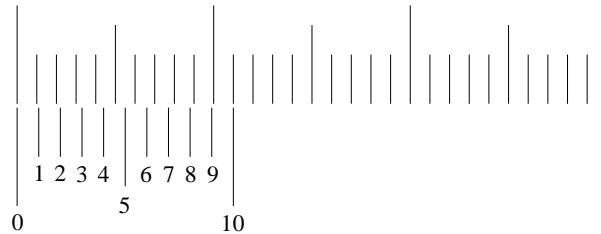


Abbildung 4.3: Nonius zur präzisen Einstellung des Scherabstands

Zur Bestimmung des Schervektors wurde darum im weiteren Verlauf der Arbeit der in Abbildung 4.3 dargestellte Nonius verwendet, der die direkte Einstellung des Schervektors $(\Delta x, \Delta y)^T$ in der Probenebene mit einer Genauigkeit von 0,1 mm ermöglicht. Dies entspricht 0,5% der typischerweise ausgewerteten Probenbreite von 20 mm. Der Nonius wird vor der eigentlichen Messung direkt auf der Probe oder in der Probenebene befestigt und mit inkohärentem Weißlicht beleuchtet, um kein störendes Specklemuster zu erhalten. Über die Verstellerschrauben am Spiegel M1 des Michelson-Interferometers (vgl. Abbildung 3.1) kann dann der gewünschte Scherabstand eingestellt und bei gleichzeitiger Beobachtung über den Kameramonitor direkt abgelesen werden.

Phasenschiebung

Durch die verwendete Phasenschiebetechnik werden im Referenz- und deformierten Zustand des Prüfobjekts jeweils 4 Specklemuster aufgenommen, zwischen denen die Relativphase der verscherten Teilbilder zusätzlich um $\pi/2$ vergrößert wird (vgl. Abschnitt 3.2). Bei der Beleuchtung mit einem HeNe-Laser (Wellenlänge $\lambda = 632,8$ nm) entspricht eine Relativphasenänderung um $\pi/2$ einer Verschiebeweglänge des Spiegels M2 des Michelson-Interferometers (vgl. Abbildung 3.1) von $\lambda/8 = 79,1$ nm, da die Wegstrecke vor dem Spiegel von der abbildenden Teilwelle zweimal (vor der Reflektion und danach) durchlaufen wird. Als maximale Verschiebeweglänge werden somit $3\lambda/8 = 237,3$ nm benötigt, was bei einer gewählten Vorspannung von 50 Volt im linearen Antwortbereich des verwendeten Piezoverstellers liegt.

Da im Programm SHEARWIN 2.4 die Ansteuerungswerte des Piezoreglers für eine Laserwellenlänge von 688 nm voreingestellt waren, mussten diese zunächst an die verwendete HeNe-Wellenlänge angepasst werden. Zur Überprüfung der gewählten linearen Anpassung wurden bei einem festen Deformationszustand 4 Specklemuster mit jeweils um $\pi/2$ erhöhter Phasenschiebung aufgenommen. Anschließend wurde jeweils die pixelweise Differenz der beiden Specklemuster mit Phasenschiebung 0 und π bzw. der zwei Bilder

mit Phasenschiebungen von $\pi/2$ und $3\pi/2$ gebildet. Da in beiden Fällen die Grauwerte der erhaltenen Differenzbilder nach dreimaliger Filterung mit dem 3x3-Phasenfilter 2 lediglich geringfügig (um maximal 15 Graustufen) um die theoretisch erwartete Schwarz-Weiß-Grenze schwankten, konnte auch experimentell gezeigt werden, dass die Ansteuerungswerte für den Piezoversteller korrekt auf die HeNe-Wellenlänge eingestellt waren.

Fehlerabschätzung

Die Hauptfehlerquellen bei der shearografischen Messung selbst resultieren aus der Kraftmessung, der Scherabstands- und Maßstabsermittlung sowie der Phasenschiebung. Da der Sensitivitätsvektor unter Verwendung einer ebenen Beleuchtungswelle rein in *Out-of-plane*-Richtung eingestellt wurde, $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$ (vgl. Gleichung (4.1)), und die vermessene Proben dimension klein im Verhältnis zum Abstand von Objekt zu Kamera ist, können die somit äußerst geringen Abweichungen von \mathbf{k} über die Probenfläche hinweg vernachlässigt werden [54]. Ebenso kann auch die bei Verwendung eines Michelson-Interferometers als Scherelement auftretende geringe Änderung des Scherabstands über die Bildbreite vernachlässigt werden [2]. Da sämtliche Weiterverarbeitungen der shearografischen Rohdaten mit Fließkommagenauigkeit durchgeführt wurden, trat nach der in SHEARWIN erfolgten 8-Bit-Diskretisierung kein weiterer zu berücksichtigender Diskretisierungsfehler mehr auf.

Aus den obigen Gründen wurde der Gesamtfehler der optischen Messungen mit ca. 5% abgeschätzt, wie dies auch schon in der grundlegenden Arbeit von KLUMPP [66] erfolgte. Auf komplexere optische Eichversuche wurde verzichtet, zumal auch die experimentellen Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen zeigten, wobei der weitaus größte Fehler aus der manuellen Positionierung der Teflonfolie resultierte (vgl. Abschnitt 4.5).

4.4 Bestimmung des Verschiebungsfeldes

Um aus den shearografischen Rohdaten Verschiebungsinformationen in *Out-of-Plane*-Richtung zu erhalten, wurde der im Abschnitt 3.6 beschriebene Algorithmus in einem eigenen Auswerteprogramm implementiert. Bei der zumeist in y -Richtung gewählten Scherung wird nach Einlesen der shearografischen Bilddaten zunächst über eine Referenzlänge der Bildmaßstab m_y ermittelt, wobei für das verwendete Abbildungssystem in guter Näherung $m_x = m_y$ gilt. Nach Eingabe von Scherabstand Δy , Laserwellenlänge λ und Skalierungsfaktor ΔN der Demodulation (vgl. Gleichung (3.12)) muss zunächst eine Referenz-Gerade senkrecht zur Scherrichtung gewählt werden, entlang derer die relative Verschiebungskomponente w_0 in z -Richtung als konstant und bekannt angenommen werden kann (vgl. Abschnitt 3.6). Durch diese Referenz-Gerade wird das Shearogramm in zwei Teile unterteilt, die sodann jeweils separat zur Referenz-Linie hin ausgewertet werden.

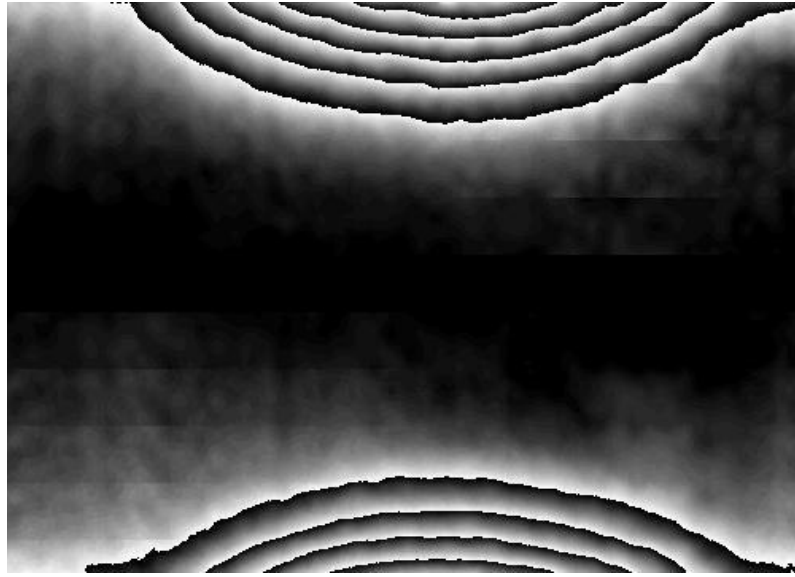


Abbildung 4.4: *Out-of-plane*-Verschiebungsfeld zum demodulierten Shearogramm in Abbildung 3.5

Bei Scherung in y -Richtung treten bei CFK-Zugproben mit Randdelaminationen im oberen Bildteil positive und im unteren Bildteil negative Interferenzordnungen bezüglich der Referenzlinie auf. Da bei der in SHEARWIN 2.4 implementierten Demodulationsroutine die Grauwerte im demodulierten Shearogramm zwischen der minimalen und maximalen Interferenzordnung auf Werte zwischen 0 und 255 skaliert werden, wurde darum im oberen und unteren Probenteil jeweils der Absolutwert der Differenz zum mittleren Grauwert entlang der Referenzgeraden ausgewertet. Weil am Rand des Prüfobjekts aufgrund der Bildverdopplung keine interferometrische Überlagerung mit Nachbarorten der Probe stattfindet, ist das auswertbare Bild zudem in Scherrichtung um den Scherabstand Δy gestaucht. Dies wird bei dem eigens entwickelten Programm dadurch kompensiert, dass auf Höhe der Referenz-Gerade ein Streifen der Breite des Scherabstands angefügt wird, dessen Verschiebungswert zu w_0 gesetzt wird.

Abbildung 4.4 demonstriert die Ergebnisse dieses Verfahrens exemplarisch anhand des demodulierten Shearogramms aus Abbildung 3.5. Das Verschiebungsfeld ist hierbei als Modulo-256-Grauwertbild in Pseudo-ESPI-Darstellung veranschaulicht, d.h. durch Verwendung entsprechender Skalierungsfaktoren entspricht jeder Weiß-Schwarz-Übergang in Abbildung 4.4 einer zusätzlichen Verschiebung um $\lambda/2 = 316,4$ nm.

4.5 Vergleich mit numerischer Simulation

Wie bereits in Abschnitt 2.3 ausgeführt, wurde parallel zu den experimentellen Untersuchungen auch ein FEM-Modell zur Simulation des mechanischen Laminatverhaltens ent-

wickelt. Bei der Simulation der im Experiment untersuchten 8- bzw. 10-schichtigen Laminat traten numerische Vernetzungsprobleme durch die stark unterschiedlichen Raumdimensionen der Laminat auf. Da eine einzelne Laminatschicht des Prepreg-Materials im ausgehärteten Zustand lediglich die Dicke $d_1 = 0,138$ mm aufweist, ergibt sich bei einer Probenbreite von 20 mm ein Breite-Dicke-Verhältnis von ca. 145. Um bei der Ver-

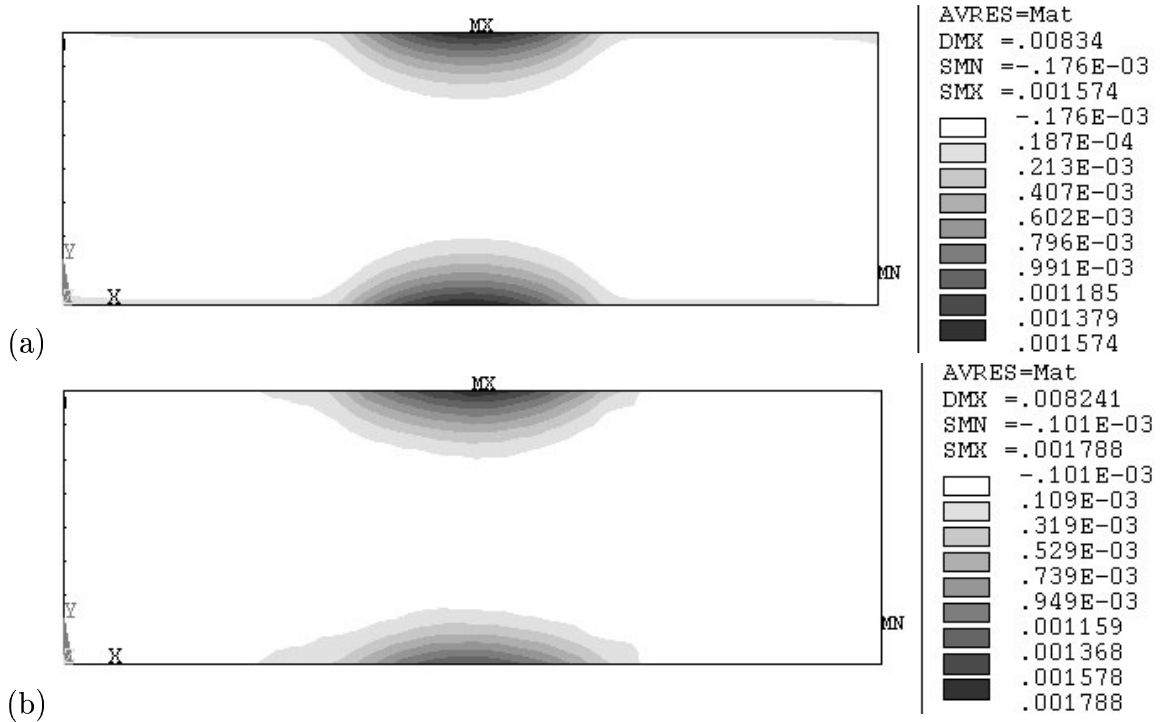


Abbildung 4.5: Vergleich des Verformungsfeldes an Proben der Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ mit vierfacher Einzelschichtdicke: (a) Simuliertes Verschiebungsfeld [mm] an der Oberfläche, (b) Shearografisch gemessene Verschiebungsdaten [mm]

netzung jedoch eine im Hinblick auf die Rechenkapazität der verwendeten Workstation ausreichend kleine Anzahl von regulären Elementen zu erhalten, wurden FEM-Modelle mit mindestens vierfacher Einzelschichtdicke erstellt, wodurch das Breite-Dicke-Verhältnis auf Werte ≤ 36 absinkt. Für einen direkten Vergleich zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen wurden auch Proben der Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ mit bis zu vierfacher Einzelschichtdicke durch jeweils mehrmaliges Übereinanderschichten von identisch orientierten Prepreg-Laminae hergestellt. Als definiert vorgegebene Randdelaminationen werden zwei Halbellipsen mit den Halbachsen $a = 10$ mm und $b = 5$ mm jeweils in der horizontalen Probenmitte durch Einführung von randspannungsfreien Teilgebieten bzw. Einlaminierung entsprechend zugeschnittener Teflonfolien vorgegeben.

Abbildung 4.5 zeigt die experimentell und numerisch erhaltenen Verschiebungsfelder an der äußeren Oberfläche $z = 2,2$ mm bei Proben mit vierfacher Einzelschichtdicke unter der unidirektionalen Zugbelastung $\Delta F_x = 500$ N, entsprechend $\sigma_{xx} = 5,68$ MPa. Die shearografischen Rohdaten wurden hierbei mit dem im voranstehenden Abschnitt

beschriebenen Auswerteprogramm weiterverarbeitet und in das FEM-Modell als Randverschiebungen eingegeben, wobei entlang der horizontalen Mittellinie die numerisch erhaltene Querkontraktion in z -Richtung als Referenzverschiebung w_0 gesetzt wurde. Ein Vergleich der Abbildungen 4.5(a) und (b) zeigt qualitativ eine gute Übereinstimmung in den Isolinien der Verschiebung. Das experimentell erhaltene Verschiebungsfeld weist jedoch im oberen Delaminationsbereich einen um ca. 13% gegenüber der numerischen Simulation erhöhten Maximalwert auf, wohingegen am unteren Rand die Maximalverschiebung um ca. 11% zu gering ausfällt. Da zudem auch die Isolinien der Verschiebung um ca. 0,7 mm in negative y -Richtung verschoben sind, lässt sich dieses Verhalten durch eine beim Aussägen der Probe entstandene Fehlpositionierung der Teflonfolie im Probenstreifen erklären. Auch die zugehörigen Rekonstruktionsergebnisse im Unterabschnitt 8.2.1 zeigen eine derartige Relativverschiebung in negative y -Richtung um ebenfalls ca. 0,7 mm.

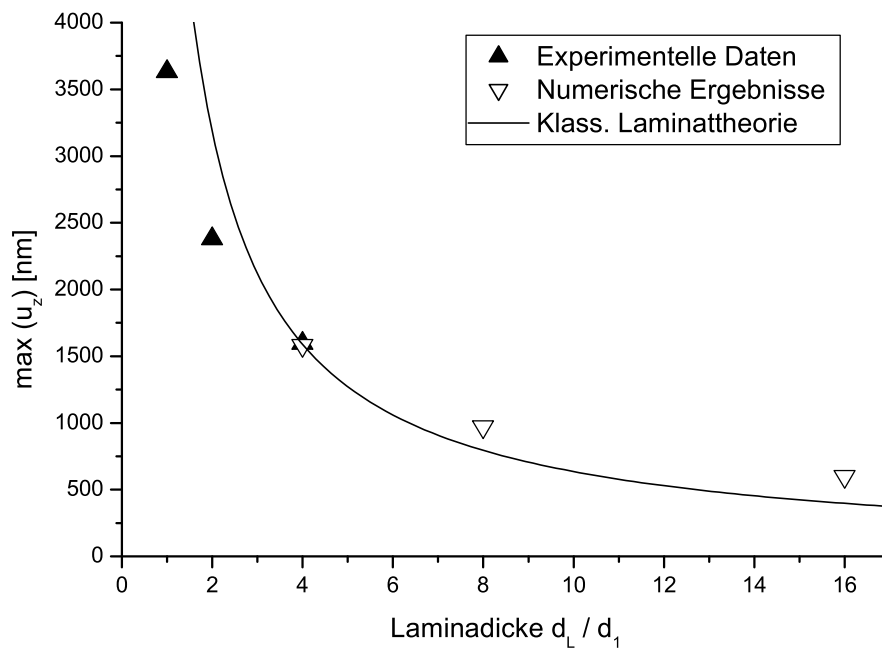


Abbildung 4.6: Dickenabhängigkeit des maximalen Verschiebungswertes an der äußeren Oberfläche bei Proben der Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ unter $\sigma_{xx} = 5,68$ MPa

Um auch Ergebnisse unterschiedlicher Einzelschichtdicke miteinander vergleichen zu können, wurde dieselbe Schichtfolge mit mehreren verschiedenen Laminadicken unter identischer Spannungsbelastung σ_{xx} in x -Richtung untersucht.

In Abbildung 4.6 sind die jeweiligen Maximalverschiebungen am äußeren Rand in Abhängigkeit von der Einzelschichtdicke aufgetragen. Für $d_L < 4d_1$ wurden wegen des

hohen Breite-Dicke-Verhältnisses nur experimentelle Untersuchungen durchgeführt, wohingegen für $d_L > 4d_1$ ausschließlich numerische Simulationsergebnisse erzielt werden konnten, da der verwendete Autoklav keine Herstellung von Laminaten mit mehr als 32 Einzelschichten ermöglichte. Aus den bereits erwähnten Positionierungsproblemen der Teflonfolien durch das Zusägen der Proben ist bei den experimentellen Ergebnissen jeweils der Mittelwert zwischen der oberen und unteren Maximalverschiebung aufgetragen.

Aus der klassischen Laminattheorie (CLT) lässt sich für dünne Laminat unendlicher Länge die folgende Abhängigkeit der Querkrümmung κ_y von der Einzelschichtdicke d_L und der Längsdehnung ε_x^0 in der Mittelebene des Laminats ableiten [59]:

$$\frac{\kappa_y d_L}{\varepsilon_x^0} = const_1 . \quad (4.3)$$

Da in den hier durchgeführten Untersuchungen unter identischer Spannungsbelastung auch ε_x^0 konstant bleibt und für den Krümmungsradius $R_y = 1/\kappa_y$ bei geringer Prüfbelastung gilt:

$$R_y \gg b_L , \quad (4.4)$$

mit Probenbreite b_L , sollte gemäß CLT für die maximale Oberflächenaufwölbung am äußeren Probenrand $y = b_L/2$ gelten:

$$u_{z,\max} d_L = const_2 . \quad (4.5)$$

Diese CLT-Abschätzung ist in Abbildung 4.6 bezüglich des Mittelwertes der erhaltenen Ergebnisse bei $d_L = 4d_1$ dargestellt. Für die erkennbare, deutliche Abweichung von diesem vereinfachten Modellverhalten können mehrere Gründe angegeben werden. Einerseits ist wegen der relativ kleinen Delaminationsgröße die CLT-Annahme eines unendlich langen, gleichartigen Spaltlaminats nicht erfüllt. Sämtliche FEM-Simulationen hingegen wurden mit orthotropen 3D-Elementen durchgeführt, um eine akurate Erfassung der Kopplungseffekte auch in z -Richtung zu ermöglichen. Andererseits resultieren bei den dünnen experimentellen Proben stärkere Abweichungen aus der endlichen Dicke der Teflonfolie, die genau genommen eine zusätzliche Schicht im Laminat darstellt. Zudem tritt mit zunehmender Dicke der Laminat auch eine nicht mehr zu vernachlässigende Querkontraktion in z -Richtung auf.

Die in den Kapiteln 3 und 4 behandelten, rein optischen Verfahren, die innere Schädigungen aufgrund markanter Verformungs- oder Verzerrungsmuster an der Probenoberfläche bei aufgebrachtter Belastung detektieren, eignen sich lediglich zur rein qualitativen Detektion von oberflächennahen Schäden in einfachen Fällen. Da jedoch gerade die quantitative Bestimmung von Größe und Lage einer Schädigung essentiell für Qualitäts- oder Haltbarkeitsaussagen ist, muss das zugehörige inverse Problem gelöst werden. Die hierfür benötigten mathematischen Grundlagen und Methoden werden in den folgenden Kapiteln ausführlich beschrieben werden.

Kapitel 5

Das inverse Problem

5.1 Einführung

Da die *direkte* Messung der inneren Schädigung nicht möglich ist, sondern von einer *indirekten* Beobachtung auf diese Größe zurückgeschlossen werden muss, spricht man mathematisch von einem *inversen Problem* oder auch einem *Identifizierungsproblem*. Ein derartiges inverses Problem sei in Operatorschreibweise dargestellt als [58, 78]:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} , \tag{5.1}$$

wobei $A : X \rightarrow Y$ ein (nicht notwendigerweise linearer) stetiger Operator ist, der das direkte Problem beschreibt, mit offenen Teilmengen $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ von normierten Räumen X, Y .

Aus der Kenntnis des Operators A lässt sich beim direkten Problem unmittelbar die Lösung \mathbf{y} berechnen, wohingegen beim inversen Problem aus der Kenntnis der Daten \mathbf{y} das Urbild \mathbf{x} zu rekonstruieren ist. Eine einfache Lösung des inversen Problems ergibt sich, wenn A bijektiv und A^{-1} stetig bezüglich geeigneter Topologien in X und Y ist. Durch derartige Eigenschaften wird sowohl die eindeutige Lösbarkeit als auch die Stabilität des Problems gewährleistet.

Kennzeichnend für inverse Probleme ist jedoch, dass sie in der Regel *schlecht gestellt* im Sinne von HADAMARD sind, der folgende Begriffsbildung eingeführt hat [46, 47]:

Definition 1 *Das Problem (A, U, V) wird als gut gestellt bezeichnet, wenn:*

1. zu jedem $\mathbf{y} \in V$ ein $\mathbf{x} \in U$ existiert, mit $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. zu jedem $\mathbf{y} \in V$ höchstens eine Lösung $\mathbf{x} \in U$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ existiert;

3. jede Folge $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq U$ mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} A\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x}$ zur Lösung \mathbf{x} konvergiert.

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so wird das Problem als schlecht gestellt bezeichnet.

Zur Erfüllung der ersten Bedingung wird oft angenommen, dass die Daten \mathbf{y} aus dem zugehörigen direkten Problem messbar sind. Um die Eindeutigkeit der Lösung (zweite Bedingung) zu gewährleisten, können zusätzliche Informationen über die Lösungsmenge U oder beschränkende Randbedingungen hilfreich sein [49]. Die dritte Bedingung zur Stabilität der Lösung spielt hinsichtlich der numerischen Implementierung des Problems eine sehr wichtige Rolle, denn im Allgemeinen liegen aus Messungen nur fehlerbehaftete äußere Daten \mathbf{y}^δ vor, mit

$$\|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|_Y \leq \delta. \quad (5.2)$$

Zudem wird die Lösungsgewinnung auch durch die Diskretisierung und unvermeidliche numerische Fehler gestört. Darum kommt der sogenannten Regularisierung, d.h. der Konstruktion einer stabilen Näherungslösung, bei inversen Problemen eine entscheidende Bedeutung zu.

Definition 2 Sei $A : U \rightarrow A(U)$ stetig und injektiv und $V \subseteq Y$ offen, mit $A(U) \subseteq V$. Eine Familie $R_\alpha : V \rightarrow X$ von stetigen Operatoren heißt Regularisierungsschema, falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

für alle $\mathbf{x} \in U$. Der positive Parameter α wird Regularisierungsparameter genannt.

Für eine vertiefte Darstellung der allgemeinen Theorie der inversen Probleme mit Regularisierungsstrategien und Beispielen sei auf entsprechende Lehrbücher [39, 58, 64] verwiesen.

5.2 Mathematische Grundlagen

Im Folgenden werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen in knapper Form zusammengestellt, die zur Beschreibung und Analyse der in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen benötigt werden. Eine ausführliche Darstellung der eingeführten Begriffe findet sich beispielsweise in [1, 119].

Zunächst wird gemäß der Schwartzschen Schreibweise für Ableitungen ein Multiindex $s = (s_1, \dots, s_n)$ eingeführt, mit $s_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, mit dessen Hilfe sich verallgemeinerte partielle Ableitungen darstellen lassen als:

$$D^s = \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_n}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, \quad \text{mit: } |s| = s_1 + \dots + s_n. \quad (5.3)$$

Es sei nachfolgend stets ein offenes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Der Raum $C^l(\Omega)$ umfasst alle Funktionen $\varphi(\mathbf{x})$, mit $\mathbf{x} \in \Omega$, die auf Ω stetige und beschränkte Ableitungen $D^s\varphi(\mathbf{x})$, mit $|s| \leq l$ (d.h. bis zur Ordnung l) besitzen.

Definition 3 Eine Funktion φ wird als λ -hölderstetig auf Ω bezeichnet, falls gilt:

$$\frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \leq C < \infty, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega. \quad (5.4)$$

Hierbei sei $0 < \lambda \leq 1$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Funktionen, die λ -hölderstetig mit $\lambda = 1$ sind, werden auch als *lipschitzstetig* bezeichnet.

Der Raum $C^{l,\lambda}(\Omega)$ bezeichnet die Gesamtheit aller auf Ω l -mal stetig (in verallgemeinerter Weise) differenzierbaren Funktionen φ , deren l -te Ableitungen λ -hölderstetig sind. Es wird zudem der Raum $L_p(\Omega)$ der lebesguemessbaren Funktionen φ eingeführt als:

$$L_p := \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \left(\int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad \text{mit} \quad 1 \leq p < \infty. \quad (5.5)$$

Zur Definition der „Glattheit“ eines Gebiets sei auch die $N^{k,\kappa}$ -Eigenschaft angegeben, mit $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\kappa \in [0, 1]$.

Definition 4 Das Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega$ besitzt die $N^{k,\kappa}$ -Eigenschaft, wenn reelle Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ existieren, so dass für alle $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ das kartesische Koordinatensystem derart gedreht und in \mathbf{x}_0 verschoben werden kann, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Auf dem $(n - 1)$ -dimensionalen offenen Einheitswürfel

$$K^{n-1} = \{\mathbf{x} : |x_i| < \alpha, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - 1\}$$

existiert eine lipschitzstetige Funktion $\psi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in C^{k,\kappa}(K^{n-1})$, für die gilt

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega.$$

2. Alle Punkte $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ mit $\mathbf{x}' \in K^{n-1}$ und $\psi(\mathbf{x}') < x_n < \psi(\mathbf{x}') + \beta$ liegen innerhalb von Ω und alle Punkte $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ mit $\mathbf{x}' \in K^{n-1}$ und $\psi(\mathbf{x}') - \beta < x_n < \psi(\mathbf{x}')$ liegen außerhalb von $\bar{\Omega}$.

Definition 5 Ein Gebiet Ω mit der $N^{0,1}$ -Eigenschaft heißt Gebiet mit einem Lipschitz-Rand oder kurz Lipschitz-Gebiet.

Im Folgenden seien noch die speziellen Hilbert-Räume H^l definiert, die für ganzzahlige l von Sobolev und für nicht ganzzahlige l von Slobodeckij eingeführt wurden.

Definition 6 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ und l zunächst ganzzahlig, d.h. $l \in \mathbb{N}_0$.

Der Sobolev-Raum $H^l(\Omega)$ wird als Menge aller Funktionen $\varphi \in L_2(\Omega)$ definiert, für welche die verallgemeinerten Ableitungen $D^s(\varphi)$ für $|s| \leq l$ wieder Elemente von L_2 sind:

$$H^l(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : D^s \varphi \in L_2(\Omega), \text{ für } |s| \leq l\}. \quad (5.6)$$

Sei nun l nicht mehr ganzzahlig, d.h. $l = [l] + \lambda \in \mathbb{R}_+$, mit $0 < \lambda < 1$.

Der Sobolev-Raum wird in diesem Fall definiert als:

$$H^l(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : D^s \varphi \in L_2(\Omega), \text{ für } |s| \leq [l] \text{ und } I_\lambda(D^s \varphi) < \infty\}, \quad (5.7)$$

mit

$$I_\lambda(\varphi) := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\lambda}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

$H^l(\Omega)$ besteht für nicht ganzzahliges l demnach aus den Funktionen φ aus $H^{[l]}(\Omega)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $I_\lambda(D^s \varphi) < \infty$, $|s| \leq [l]$. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in der vorliegenden Arbeit der Sobolev-Raum der Ordnung m auch für vektorwertige Funktionen in drei Dimensionen als $H^m(\Omega)$ anstelle von $[H^m(\Omega)]^3$ bezeichnet. $H^{-l}(\Omega)$ stellt den Dualraum zu $H^l(\Omega)$ dar.

Die zugehörigen Sobolev-Normen lassen sich angeben als:

$$\|\varphi\|_{H^l(\Omega)}^2 := \begin{cases} \sum_{|s| \leq l} \int_{\Omega} |D^s \varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, & \text{für } l \in \mathbb{N}_0, \\ \|\varphi\|_{H^{[l]}(\Omega)}^2 + \sum_{|s| \leq [l]} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^s \varphi(\mathbf{x}) - D^s \varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2(l-[l])}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}, & \text{für } l \notin \mathbb{N}_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Schließlich wird noch der Spuroperator γ_0 eingeführt, der einer auf Ω gegebenen Funktion φ eine auf dem Rand $\partial\Omega$ definierte Funktion $\gamma_0 \varphi$ zuordnet.

Satz 1 (Spursatz) Sei Ω ein beschränktes, (k, κ) -glattes Gebiet und $\frac{1}{2} < l \leq k + \kappa$, wobei für ganzzahlige l auch $k = l - 1$, $\kappa = 1$ zugelassen ist. Es existiert ein linearer, stetiger Spuroperator

$$\gamma_0 : H^l(\Omega) \rightarrow H^{l-1/2}(\partial\Omega),$$

mit der Eigenschaft

$$\gamma_0 \varphi = \varphi|_{\partial\Omega}, \quad \text{für } \varphi \in C^l(\Omega)$$

(bzw. $\varphi \in C^{[l]+1}(\bar{\Omega})$, für l nicht ganzzahlig).

Damit sind nun die wichtigsten Begriffe eingeführt und definiert, die bei der mathematischen Beschreibung der in dieser Arbeit betrachteten inversen Problemstellung auftreten.

5.3 Problemstellung

Im allgemeinsten Fall können beliebig viele Delaminationsgebiete zwischen unterschiedlichen Schichten des Laminats vorhanden sein, deren Lage, Form und Größe aus einer einzigen geeigneten Messung zu bestimmen ist. Da für dieses allgemeine Delaminationsproblem schon die Eindeutigkeit der Lösung nicht mehr gezeigt werden kann, müssen zunächst einschränkende Annahmen zur Lage der Delaminationen getroffen werden. So sei im Weiteren stets angenommen, dass eine oder mehrere Delaminationen nur in *einer* Zwischenfläche enthalten sind, deren Lage a priori bekannt ist. Für diesen Fall können analytische und numerische Untersuchungen zur Eindeutigkeit, Konvergenz und Robustheit der Rissbestimmung durchgeführt werden.

5.3.1 Delaminationsaufgabe

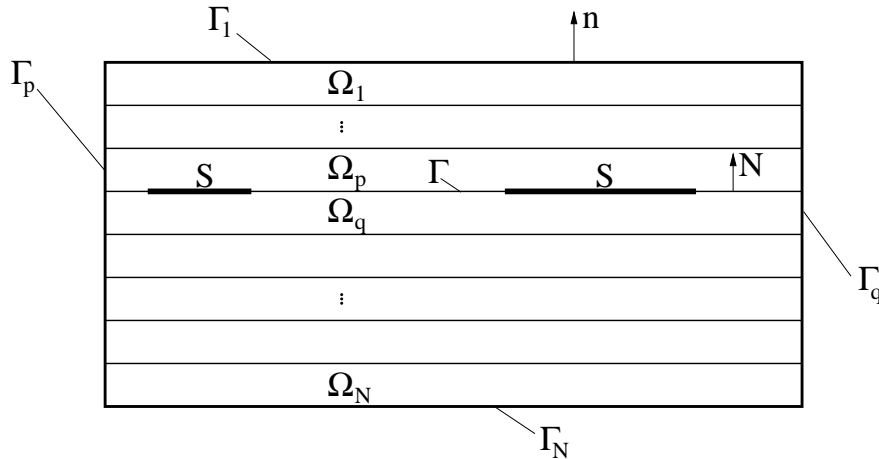
Die Aufgabenstellung der Bestimmung von inneren Delaminationen in einer vorgegebenen Zwischenfläche eines geschichteten Laminats aus überbestimmten äußeren Randdaten kann mathematisch wie folgt beschrieben werden:

Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit äußerem Rand $\partial\Omega$, das aus N Lipschitz-Teilgebieten (entsprechend den Laminatschichten) besteht, die ein jeweils unterschiedlich anisotropes, linear-elastisches Materialverhalten aufweisen: $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. Die äußeren Ränder dieser Teilgebiete seien mit Γ_i , die Zwischenränder mit $\Gamma_{ij} := \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ bezeichnet. Dasjenige Lipschitz-glatte Interface, in dem eine oder mehrere Delaminationen (flächenhafte Risse) S vermutet werden, sei mit Γ bezeichnet und liege zwischen den a priori bekannten Teilgebieten Ω_p und Ω_q (vgl. Abbildung 5.1).

Auf dem äußeren Rand $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ seien Verschiebungen \mathbf{u}^* (durch Belastung oder shearografische Messungen) sowie Randspannungen \mathbf{t}^* (durch Belastungsbedingungen) bekannt.

Gesucht sind die Delaminationsgebiete S auf Γ (bei Vernachlässigung der Volumenkräfte) aus:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_i \mathbf{u}_i &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
 \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
 \mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_i &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
 \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
 \mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
 \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma \setminus S, \\
 \mathcal{T}_p(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_p - \mathcal{T}_q(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_q &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma \setminus S, \\
 \mathcal{T}_p(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_p = \mathcal{T}_q(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_q &= \mathbf{0} && \text{auf } S,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Abbildung 5.1: Delaminationsproblem mit vorgegebenem Interface Γ

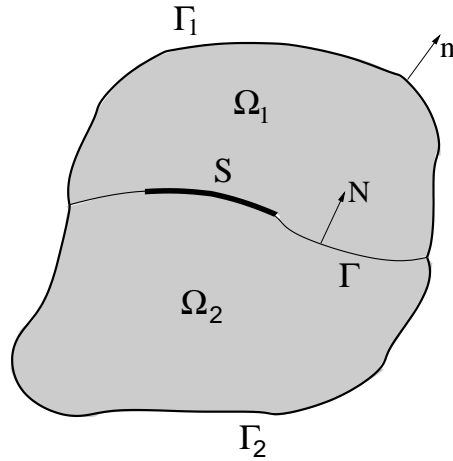
mit $i = 1, \dots, N$ und $j = i + 1 \leq N$. Die Verschiebungslösung des Teilgebiets Ω_i wird hierbei mit \mathbf{u}_i bezeichnet. Aufgrund des schichtweise unterschiedlich anisotropen Materialverhaltens müssen auch die bereits im Abschnitt 2.2 eingeführten Operatoren \mathcal{A} und \mathcal{T} durch Indizierung lokal für jedes Teilgebiet definiert werden.

Da sich in der Literatur zu diesem inversen Delaminationsproblem keinerlei mathematische Analysen und Aussagen finden ließen, wurde im Rahmen dieser Arbeit zunächst das folgende vereinfachte Modellproblem betrachtet, zu dem schon erste Analysen publiziert waren.

5.3.2 Vereinfachtes Modellproblem

Es werde wieder ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ betrachtet. Das gesamte Gebiet sei nun jedoch mit einem homogenen, linear-elastischen Medium ausgefüllt, das auch anisotrop sein kann. Das Gebiet Ω enthalte einen (oder mehrere) Lipschitz-glatte Risse S , die auf einer inneren Zwischenfläche Γ liegen, deren Lage und Topologie a priori bekannt sei. Es sei im Folgenden angenommen, dass die Zwischenfläche Γ den Körper Ω in zwei Teile Ω_1 und Ω_2 unterteilt mit den äußeren Rändern Γ_1 und Γ_2 (s. Abbildung 5.2). Auf dem gesamten äußeren Rand $\partial\Omega$ seien als überbestimmte Randdaten sowohl die Verschiebungen \mathbf{u}^* als auch die Randspannungen \mathbf{t}^* durch die äußere Belastung bzw. entsprechende Messungen verfügbar.

Die geschädigten Gebiete S auf der bekannten Zwischenfläche Γ sollen nun aus dem folgenden elastostatischen Randwertproblem (RWP) erhalten werden:

Abbildung 5.2: Gebiet mit Riss(en) S auf der Zwischenfläche Γ

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}u_i &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_i, \quad i \in \{1, 2\} \\
\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma \setminus S, \\
\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_1 - \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma \setminus S, \\
\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_1 = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} && \text{auf } S.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Mit \mathbf{u}_i wird wie zuvor die Verschiebungslösung des Teilgebiets Ω_i bezeichnet. Wegen der Homogenität des Gebiets Ω können nun jedoch im gesamten Gebiet dieselben Operatoren \mathcal{A} und \mathcal{T} verwendet werden. Aufgrund der an der Rissfront auftretenden Singularität gilt bei entsprechender Regularität der äußeren Randdaten [43]:

$$\mathbf{u}_i \in H^{3/2-\delta}(\Omega_i). \tag{5.11}$$

Es sei betont, dass die geschädigte Zwischenfläche Γ für die im Folgenden aufgestellten Betrachtungen nicht notwendigerweise eben sein muss. Neben einer Hinführung auf die Delaminationsthematik besitzt dieses Modellproblem zudem auch eine unmittelbare Relevanz für Anwendungsfälle, in denen die Lage und Topologie von Γ durch ein natürliches Interface-Gebiet ebenfalls a priori bekannt ist, z.B. bei der zerstörungsfreien Prüfung an Adhäsionsfilmen oder Klebeverbindungen.

5.4 Stand der Forschung

Zur Bestimmung der Lage und Topologie von Delaminationen aus Oberflächenverschiebungen konnten in der Literatur keine entsprechenden Forschungsergebnisse gefunden

werden. Auch für das vereinfachte Modellproblem der Rissbestimmung in homogenen elastischen Körpern liegen erst seit kurzem Lösungsansätze vor [15]. Hingegen sind im vergangenen Jahrzehnt auf dem Gebiet der Elektrostatik zahlreiche mathematische Veröffentlichungen zur Bestimmung von Rissgeometrien in leitenden Körpern erschienen. Hierbei werden Risse in leitenden Körpern mit Hilfe von elektrischen Potentialmessungen bei gegebenem Stromfluss über Elektroden an der äußeren Oberfläche bestimmt. Auf diesem Gebiet sind insbesondere auch erste analytische Ergebnisse zur Eindeutigkeit und Stabilität der Rißbestimmung vorhanden. Da beide Fragestellungen zur Klasse der elliptischen Randwertprobleme gehören, können jedoch meist die Aussagen der elektrostatischen Arbeiten auf die in der vorliegenden Arbeit betrachtete lineare Elastizität übertragen werden. Darum werden im Folgenden auch Aussagen zu dieser verwandten Problemstellung angeführt.

Die theoretischen Untersuchungen zur Rissidentifikation im Körperinneren aus Messungen am äußeren Rand wurden 1989 initiiert durch die Arbeit von FRIEDMAN und VOGELIUS [42], die erste Eindeutigkeits- und Stabilitätsaussagen für den Fall eines eindimensionalen (1D) Risses in einem zweidimensionalen (2D) Körper enthielt. Hierin wurde gezeigt, dass ein innerer, isolierender 1D-Riss in einem leitfähigen 2D-Körper durch zwei unterschiedliche elektrostatische Messungen am äußeren Rand eindeutig identifiziert werden kann. Wie in Abbildung 5.3 dargestellt ist, liegt nämlich im ungünstigsten Fall (a)

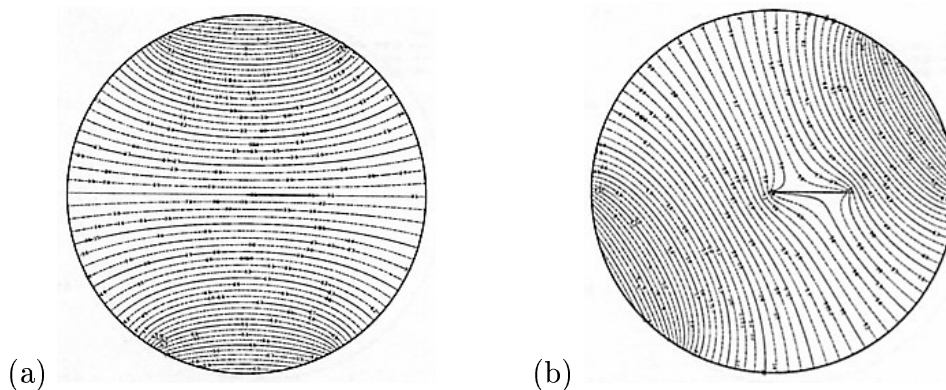


Abbildung 5.3: Zur Eindeutigkeit der Rissbestimmung: (a) nicht-identifizierende Belastung; (b) identifizierende Belastung (aus [19])

der Riss parallel zu den lokalen Äquipotentiallinien im Körperinneren und ruft somit keine signifikanten Änderungen in den Messdaten am äußeren Rand hervor. In einem beliebigen anderen Fall (b) wird die Potentialverteilung jedoch durch das Vorhandensein des Risses gestört, so dass auch veränderte Daten am äußeren Rand gemessen werden können. Übertragen auf den elastostatischen Fall bedeutet dies, dass sich die Rissflächen unter der identifizierenden Last gegeneinander verschieben müssen.

BRYAN und VOGELIUS [24] bewiesen 1992 die eindeutige Identifizierbarkeit von mehreren 1D-Rissen in einem 2D-Körper aus einer endlichen Anzahl von Randmessungen.

ALESSANDRINI [3] zeigte 1993 für den Fall eines isolierenden 1D-Risses in einem 2D-Körper, dass die Stabilität der Rissbestimmung mit einem logarithmischen Verhalten abgeschätzt werden kann. In der Folgezeit wurden diverse verfeinerte Aussagen zur Eindeutigkeit und Stabilität der Bestimmung von einem oder mehreren Rissen mit speziellen Eigenschaften, innerhalb eines 2D-Körpers oder am Rand liegend, veröffentlicht [4, 6, 7, 37, 63].

Hinsichtlich Eindeutigkeits- und Stabilitätsaussagen für den dreidimensionalen (3D) Fall sind insbesondere die Arbeiten von KUBO [71], ELLER [38] sowie ALESSANDRINI und DI BENEDETTO [5] zu erwähnen. Für den speziellen Fall von coplanaren Rissen in einem homogenen 3D-Körper erzielten ANDRIEUX und BEN ABDA [14] ein erstes Ergebnis zur eindeutigen Identifizierbarkeit, das für allgemeine elliptische Differentialoperatoren gilt, und von ANDRIEUX et al. [15] zu einem konstruktiven Ergebnis für den elastostatischen Fall erweitert wurde. Angewandt auf das vereinfachte Modellproblem aus Unterabschnitt 5.3.2 ergibt sich die folgende Identifizierbarkeitsaussage:

Es sei das Problem (5.10) betrachtet, bei dem nun ein oder mehrere Risse S in einer ebenen Zwischenfläche Γ vorliegen sollen. Sind auf dem gesamten äußeren Rand zu einem geeigneten Belastungszustand sowohl die Verschiebungen \mathbf{u}^* als auch die Randspannungen \mathbf{t}^* durch entsprechende Messungen bzw. aus der Kenntnis der Belastung verfügbar, so gilt gemäß [15] der folgende Satz:

Satz 2 Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glattes, offenes Gebiet ist, das einen ebenen oder mehrere coplanare Risse enthält, und die äußere Belastung \mathbf{t}^* derart gewählt wird, dass

$$\int_S [u_N] ds := \int_S [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{N} ds \neq 0, \quad (5.12)$$

dann gilt:

$$S = \text{supp} [u_N] \quad (5.13)$$

und S ist eindeutig bestimmt durch die Randdaten

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \partial\Omega, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u} &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{N} den in Richtung Ω_1 gerichteten Normalenvektor auf der ebenen Zwischenfläche Γ und $[\mathbf{u}] := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ den Sprung der Verschiebungslösung über Γ bezeichnet.

Demnach lässt sich durch die Bestimmung des Trägers des senkrechten Verschiebungssprungs über die Zwischenfläche Γ die Form und Lage derartiger Risse eindeutig identifizieren. Dieser konstruktive Ansatz von ANDRIEUX et al. wurde in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen und erweitert für den Fall von Rissen in bekannten Zwischenflächen von anisotropen 3D-Körpern (vgl. Abschnitt 6.2).

Kapitel 6

Rekonstruktionsverfahren

6.1 Übersicht

Dem Stand der Forschung (vgl. Abschnitt 5.4) entsprechend musste auch bei der Suche nach geeigneten Rekonstruktionsverfahren weitgehend auf Arbeiten zum verwandten elektrostatischen Rissdetektionsproblem zurückgegriffen werden, da in der Literatur nur äußerst wenige Verfahren für den elastostatischen Fall veröffentlicht waren. Analog zu den Untersuchungen hinsichtlich Eindeutigkeit und Stabilität der Rissrekonstruktion haben sich auch die bisherigen numerischen Arbeiten vorwiegend mit Rissrekonstruktionsalgorithmen für den 2D-Fall beschäftigt.

In [100] präsentierten SANTOSA und VOGELIUS eine Abwandlung des klassischen Newton-Verfahrens zur Rekonstruktion eines geraden Risses in einem homogenen 2D-Körper. Dieser Algorithmus wurde von BRYAN und VOGELIUS [25] erweitert für den 2D-Fall von mehreren geraden Rissen. NISHIMURA und KOBAYASHI [87] schlugen einen recht aufwändigen Algorithmus zur Rekonstruktion eines geraden 2D- oder eines ebenen 3D-Risses vor, der mehrere Messungen am äußeren Rand und eine a priori vorzugebende Parametrisierung der Rissform benötigt. Ein iterativer Algorithmus zur Bestimmung eines polygonalen Oberflächenrisses in einem 2D-Körper wurde von ELCRAT et al. [37] entwickelt. Zur Bestimmung von Rissen in der Grenzfläche zwischen verschiedenartigen 2D-Körpern stellten KUBO et al. [72] ein Identifizierungsschema für die Elektropotential-CT-Methode auf. TRENDAFILOVA et al. [109] schlugen ein hierarchisches Detektionsschema mit drei aufeinander aufbauenden Stufen zur Abschätzung der Größe und Lage eines parametrisierten 2D-Risses in einem 3D-Körper vor. Eine Übersicht über diverse Lösungsverfahren, in denen die Randlelementmethode mit Optimierungsalgorithmen gekoppelt wird, findet sich z.B. in [104]. BRÜHL et al. [23] sowie KIRSCH [65] haben jüngst die von Ihnen entwickelte *Linear-Sampling*-Methode auch auf die Rekonstruktion von Rissen angewendet. ANDERSEN et al. [11] stellten kürzlich auch eine Erweiterung des Algorithmus von BRYAN und VOGELIUS vor, bei der statistische Verfahren zu einer Verbesserung der Effizienz führen.

Das konstruktive Identifizierbarkeitsergebnis von ANDRIEUX et al. [14, 15] führt zu einem semi-expliziten Verfahren, dem sogenannten *Reciprocity-Gap*-Konzept, dessen Eigenschaften von BANNOUR et al. [17] auch numerisch für den elektrostatischen Fall untersucht wurden. Mit ihm lassen sich ein gerader Riss in einem 2D-Körper bzw. ein ebener oder mehrere coplanare Risse in einem homogen isotropen 3D-Körper aus einer einzigen geeigneten Messung bestimmen.

All diese Algorithmen sind jedoch entweder nur für den 2D-Fall geeignet oder lediglich auf wenige Spezialfälle bei 3D-Körpern anwendbar. So werden u.a. die Homogenität des Körpers, ebene bzw. einfach geformte Risse oder vollständige Daten auf dem äußeren Rand und/oder mehrere Messungen am äußeren Rand zwingend vorausgesetzt. Aus diesem Grund ist keines der genannten Verfahren unmittelbar zum angestrebten Delaminationsnachweis in geschichteten Verbundwerkstoffen geeignet.

Im Folgenden wird zunächst eine im Rahmen dieser Arbeit entstandene Erweiterung des Reciprocity-Gap-Konzepts auf gekrümmte Risse in homogenen, *anisotropen* Körpern beschrieben. Anschließend wird das vom Autor neu entwickelte, alternierend iterative Rekonstruktionsverfahren AICRA vorgestellt, das eine Vielzahl der oben genannten Einschränkungen überwindet.

6.2 Erweitertes Reciprocity-Gap-Konzept

Es sei das vereinfachte Modellproblem aus Abschnitt 5.3.2 betrachtet, bei dem ein oder mehrere Risse nun in einer *ebenen* Zwischenfläche Γ vorliegen sollen. Das gesamte Gebiet Ω sei mit einem isotropen, linear-elastischen Material ausgefüllt. Wird nun die Menge V_r der regulären Lösungsfelder für das ganze Gebiet Ω ohne Vorhandensein eines Risses auf Γ eingeführt als

$$V_r = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega \} , \quad (6.1)$$

so ist das Reciprocity-Gap-Funktional $RG(\mathbf{v})$ auf V wie folgt definiert [15]:

$$\begin{aligned} RG(\mathbf{v}) &:= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left[\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u}^* \cdot \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{v} \right] ds \\ &= \int_{\Gamma} [\mathbf{u}] \cdot \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{v} ds , \quad \forall \mathbf{v} \in V_r . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Gemäß Satz 2 in Abschnitt 5.4 können ein ebener Riss oder mehrere coplanare Rissgebiete S auf der ebenen Zwischenfläche Γ über den Träger des Verschiebungssprunges $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ eindeutig bestimmt werden. Nach [15] wird hierzu ein neues kartesisches Koordinatensystem $(O', \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$ mit Ursprung O' in der Zwischenebene Γ gewählt und ein Index $\boldsymbol{\xi}' := (\xi_1, \xi_2, 0)^T$ sowie zwei Familien von Vektorfeldern im komplexen Raum $\mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3$ werden eingeführt als:

$$\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'} = (\boldsymbol{\xi}' + i|\boldsymbol{\xi}'|\mathbf{N}), \quad \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'}^* = (\boldsymbol{\xi}' - i|\boldsymbol{\xi}'|\mathbf{N}) . \quad (6.3)$$

Damit können nun 2 Familien von Vektorfeldern definiert werden als:

$$\mathbf{w}^+(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}') = \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'} \cdot \mathbf{X}) + \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'}^* \cdot \mathbf{X}), \quad (6.4)$$

$$\mathbf{w}^-(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}') = \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'} \cdot \mathbf{X}) - \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\xi}'}^* \cdot \mathbf{X}), \quad (6.5)$$

die jeweils zum Lösungsraum V_r gehören. Durch Anwendung von Gleichung (6.2) und einer Umformung ergeben sich die folgenden Beziehungen [15]:

$$[\hat{u}_N] = \frac{(1 + \nu)}{2E|\boldsymbol{\xi}'|^2} RG(\mathbf{w}^+(\boldsymbol{\xi}')), \quad (6.6)$$

$$|\boldsymbol{\xi}'| \boldsymbol{\xi}' \cdot [\hat{\mathbf{u}}_t](\boldsymbol{\xi}') = \frac{(1 + \nu)}{2iE} RG(\mathbf{w}^-(\boldsymbol{\xi}')), \quad (6.7)$$

wobei mit $[\hat{u}_N]$ die Fouriertransformierte von $[u_N]$ bezeichnet wird, und E bzw. ν den E-Modul sowie die Querkontraktionszahl des isotrop elastischen Materials angeben. Über das RG-Konzept können somit die Fouriertransformierten des normalen und tangentialen Verschiebungssprungs bestimmt werden. Durch Rücktransformation lässt sich daraus prinzipiell auch der Verschiebungssprung selbst rekonstruieren, was jedoch mit erheblichen numerischen Schwierigkeiten verbunden ist. Zudem ist das von ANDRIEUX et al. in [15] vorgeschlagene Verfahren nur für den Fall von ebenen coplanaren Rissen in einem isotropen Festkörper anwendbar.

Wegen dieser Einschränkungen wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit Erweiterungsmöglichkeiten des RG-Konzepts untersucht, die im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen. Ein entscheidender Schritt zur Verallgemeinerung des RG-Konzepts war hierbei die Idee, Fundamentallösungen als Lösung des ungestörten Problems zu verwenden [13]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \quad (6.8)$$

Bei elliptischen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten existiert stets eine globale Fundamentallösung [35]. Diese kann im allgemeinen Fall linear-elastischer Anisotropie als Lösung der folgenden Gleichung definiert werden [51]:

$$\mathcal{A}\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{I}\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (6.9)$$

mit der Diracschen Delta-Distribution $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

Für allgemein anisotrope Materialien lässt sich jedoch die Fundamentallösung nicht explizit angeben, sondern muss in der Regel durch numerische Auswertung von Integralausdrücken berechnet werden [70]. Im isotropen Fall vereinfacht sich der allgemeine lineare Elastizitätsoperator \mathcal{A} zum Navier-Operator Δ^* und es ergeben sich die Navierschen Differentialgleichungen als:

$$\Delta^* \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (6.10)$$

mit den beiden Laméschen Konstanten $\mu > 0$ und $\lambda > -2/3\mu$. Die Fundamentallösung kann in diesem isotropen Fall nun explizit dargestellt werden als [12, 74]:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)r} [(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}], \quad (6.11)$$

mit

$$r_i = y_i - x_i, \quad r = \sqrt{r_i r_i}, \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{r_i}{r}. \quad (6.12)$$

Numerische Berechnungsvorschriften für Fundamentallösungen bei transversal-isotropem Materialverhalten finden sich z.B. in [18, 118]. Für eine vertiefende Darstellung zu Fundamentallösungen in der dreidimensionalen Elastizitätstheorie sei auf [12] verwiesen.

Der Fundamentallösungsansatz aus Gleichung (6.8) kann nun wegen $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \in V_r$ in die Definitionsgleichung (6.2) des RG-Konzepts eingesetzt werden, woraus sich die folgende Integralgleichung für $[\mathbf{u}]|_\Gamma$ ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \left\{ \mathcal{T}(\partial_y, \mathbf{N}(\mathbf{y})) \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \right\}^T [\mathbf{u}] ds_y = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left\{ \left\{ \mathcal{T}(\partial_y, \mathbf{n}(\mathbf{y})) \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \right\}^T \mathbf{u}^*(\mathbf{y}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{t}^*(\mathbf{y}) \right\} ds_y. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Bei Verwendung entsprechender Randintegraloperatoren (für detaillierte Ausführungen hierzu sei auf [12] verweisen),

$$V_{ij} \varphi_i := 2 \gamma_{0,x}^j \int_{\Gamma_i} \gamma_{0,y}^j \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (6.14)$$

$$K_{ij} \varphi_i := 2 v.p. \gamma_{0,x}^j \int_{\Gamma_i} \gamma_{0,y}^j \mathcal{T} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (6.15)$$

lässt sich das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung des Verschiebungssprungs $[\mathbf{u}]$ über die Zwischenfläche Γ angeben:

$$\mathbf{K}_0[\mathbf{u}] = - \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_{12} \right) \mathbf{u}^* + \mathbf{V}_{12} \mathbf{t}^*. \quad (6.16)$$

Das von ANDRIEUX und BEN ABDA entwickelte RG-Konzept konnte somit im Rahmen dieser Arbeit auch auf den Fall von Rissen in gekrümmten Zwischenflächen von anisotropen elastischen Körpern erweitert werden. Es ergibt sich jedoch aus numerischer Sicht abermals ein schlecht lösbares Gleichungssystem mit glatten Integrkernen, da der Singulärpunkt \mathbf{x} nicht auf Γ gewählt werden kann. Die numerischen Schwierigkeiten erhöhen sich mit zunehmender Dicke der beiden Teilkörper Ω_1 und Ω_2 , worin sich auch die Schlecht-Gestellttheit des betrachteten Problems widerspiegelt. Aus den genannten Gründen wurde das erweiterte RG-Verfahren nicht numerisch implementiert, sondern ein neuer Lösungsansatz entwickelt, der in den nachfolgenden Abschnitten ausführlich erläutert wird.

6.3 Alternierend iteratives Verfahren AICRA

Im Folgenden wird ein im Rahmen der vorliegenden Arbeit neu entwickeltes Rissrekonstruktionsverfahren beschrieben und analysiert, für das die Kurzbezeichnung „AICRA“ (*Alternating Iterative Crack Reconstruction Algorithm*) eingeführt wurde[†].

Es sei wiederum das bereits im Unterabschnitt 5.3.2 beschriebene Modellproblem betrachtet, bei dem die Form und Lage der Rissfläche(n) S auf der a priori bekannten, nicht notwendigerweise ebenen Zwischenfläche Γ in dem in Abbildung 5.2 dargestellten Gebiet $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ über das Randwertproblem (5.10) zu bestimmen ist. Das gesamte Gebiet sei hierbei mit einem homogenen, linear-elastischen Medium ausgefüllt, das auch anisotrop sein kann.

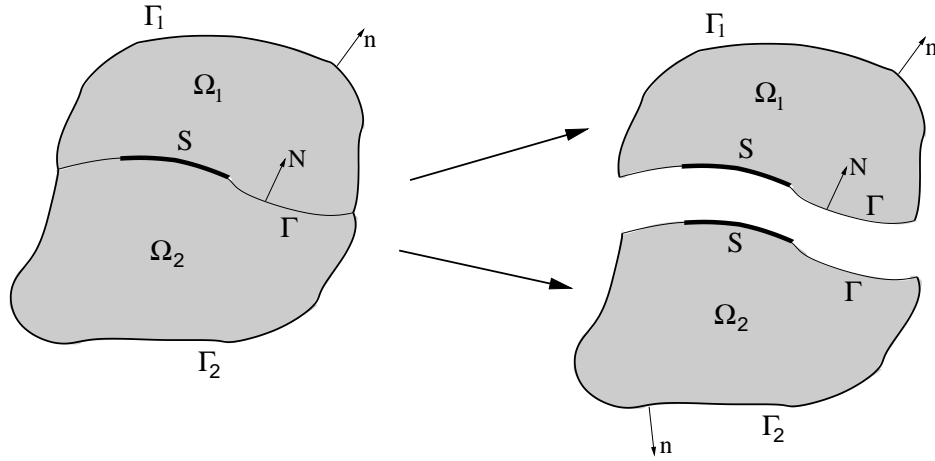


Abbildung 6.1: Dekomposition des ursprünglichen Gebiets (vgl. Abb. 5.2) in zwei Teilgebiete mit jeweils äußerem Rand $\Gamma_i \cup \Gamma$

Das beschreibende lineare Gleichungssystem (5.10) kann nicht direkt gelöst werden, da die inneren randspannungsfreien Gebiete S nicht bekannt, sondern aus den überbestimmten Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ am äußeren Rand erst noch zu bestimmen sind. In Analogie zu dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen RG-Konzept erfolgt auch bei dem neu entwickelten Verfahren AICRA die Identifikation der Rissfläche(n) S mit Hilfe des normalen Sprungs der Verschiebungslösung über die Zwischenfläche Γ :

$$S = \text{supp } [u_N]_{|\Gamma} := \text{supp } \{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{N}_{|\Gamma}\}. \quad (6.17)$$

Da nun auch Risse in gekrümmten Zwischenflächen Γ betrachtet werden, sei in Erweiterung der ursprünglichen Forderung in Gleichung (5.12) angenommen, dass sich die Risse unter der gewählten Prüfbelastung vollständig in Normalenrichtung öffnen, d.h.:

$$[u_N(\mathbf{x})] := (\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S. \quad (6.18)$$

[†]Die Ausführungen und Ergebnisse in den folgenden Unterabschnitten sowie im Unterkapitel 7.2 sind weitgehend auch im eigenen Journal-Artikel [116] veröffentlicht.

Grundlegende Idee des neuen Verfahrens AICRA ist die Dekomposition des ursprünglichen Problems (5.10) in zwei Cauchy-Probleme für den oberen und unteren Teilkörper (vgl. Abbildung 6.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_1 &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_1, \\ u_1 &= \mathbf{u}_1^* && \text{auf } \Gamma_1, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})u_1 &= \mathbf{t}_1^* && \text{auf } \Gamma_1, \end{aligned} \tag{6.19}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_2 &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_2, \\ u_2 &= \mathbf{u}_2^* && \text{auf } \Gamma_2, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})u_2 &= \mathbf{t}_2^* && \text{auf } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Bei diesen Cauchy-Problemen sind jeweils an einem Teil Γ_i des äußeren Randes sowohl die Verschiebungen \mathbf{u}^* als auch die Randspannungen \mathbf{t}^* gegeben, wohingegen am übrigen Teilrand Γ jeweils keinerlei Informationen vorhanden sind. Da es sich bei dem hier zugrundeliegenden Problem jedoch um ein Rissproblem handelt, können für iterative Lösungsverfahren besonders geeignete Anfangslösungen am Rand Γ leicht angegeben werden, wodurch die Konvergenz des Verfahrens entscheidend beschleunigt wird (vgl. Unterabschnitt 6.3.3).

Zur numerischen Lösung der Cauchy-Probleme (6.19) und (6.20) wird das von KOZLOV et al. [69] publizierte, alternierend iterative Verfahren benutzt, da es sich bei beliebigen elliptischen Differentialoperatoren einsetzen lässt und neben guten Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften (vgl. Unterabschnitt 6.3.2) auch eine günstige Implementierbarkeit bietet. Bei diesem alternierend iterativen Algorithmus zerfällt das ursprüngliche Problem letztlich in zwei Folgen von gut gestellten, gemischten Randwertproblemen, die jeweils direkt gelöst werden können. Das neue Verfahren AICRA wurde im Rahmen dieser Arbeit in zwei unterschiedlichen Varianten entwickelt und numerisch implementiert, die sich durch die Menge der am äußeren Rand benötigten Randdaten unterscheiden. Bei der im folgenden Unterabschnitt beschriebenen „Zwei-Rand-Variante“ müssen am gesamten äußeren Rand $\partial\Omega$ die vollständigen Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ gegeben sein. Bei der „Drei-Rand-Variante“ (vgl. Unterabschnitt 6.3.5) werden hingegen nur an einem Teil des äußeren Randes vollständige Cauchy-Daten benötigt. Am restlichen äußeren Rand genügt jedoch die Kenntnis von nur einer Gruppe von Randdaten.

6.3.1 Zwei-Rand-Variante von AICRA

Im Folgenden sei zunächst angenommen, dass die vollständigen Cauchy-Daten $(\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^*$ und $\mathbf{t}|_{\partial\Omega} = \mathbf{t}^*)$ am *gesamten* äußeren Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ gegeben sind. Unter dieser Voraussetzung lässt sich die sogenannte Zwei-Rand-Variante des neu entwickelten Rekonstruktionsalgorithmus AICRA in dem folgenden iterativen Schema darstellen:

- (1) Wahl einer geeigneten Anfangslösung $\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}$ auf Γ .
- (2) Beginnend mit $k = 1$, Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{u}_i^{(2k-2)} \quad \text{auf } \Gamma, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{t}^* \quad \text{auf } \Gamma_i, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_i^{(2k-1)}$ in Ω_i und $\mathbf{t}_i^{(2k-1)} = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k-1)}|_{\Gamma}$.

- (3) Nach Erhalten der Approximation $\mathbf{u}_i^{(2k-1)}$ Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{u}^* \quad \text{auf } \Gamma_i, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{t}_i^{(2k-1)} \quad \text{auf } \Gamma, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_i^{(2k)}$ in Ω_i und $\mathbf{t}_i^{(2k)} = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k)}|_{\Gamma}$.

- (4) Berechnung des approximierten Verschiebungssprungs $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{\Gamma} = \mathbf{u}_1^{(2k)}|_{\Gamma} - \mathbf{u}_2^{(2k)}|_{\Gamma}$ über die Zwischenfläche Γ unter Verwendung der Näherungslösungen $\mathbf{u}_i^{(2k)}$.
- (5) Definition der approximierten Rissflächen $S_{\varepsilon}^{(2k)} \subset \Gamma$ durch Einführung eines kleinen Parameters $\varepsilon^{(2k)}$ und Setzen von:

$$S_{\varepsilon}^{(2k)} = \{ \mathbf{x} \in \Gamma : [\mathbf{u}^{(2k)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N} > \varepsilon^{(2k)} \}. \quad (6.23)$$

- (6) Wiederholung der Schritte (2) bis (5) für $k \geq 2$, bis ein gegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Beginnend mit einer geeigneten Anfangslösung im Schritt (1) werden in den Schritten (2) und (3) unter Einbeziehung der Lösung des Vorgängerschritts jeweils gut gestellte, gemischte Randwertprobleme aus den Cauchy-Problemen (6.19) und (6.20) gebildet und gelöst. Hierbei liegen auf Γ_i und Γ stets unterschiedliche Randbedingungen vor, wobei zwischen den einzelnen Iterationen jeweils die Art der Randbedingung an den äußeren Teilrändern Γ_i und Γ zwischen kinematischem und statischem Typ alterniert. Nach jedem geraden Iterationsschritt $2k$ kann aus den im Schritt (3) erhaltenen Teillösungen $\mathbf{u}_1^{(2k)}|_{\Gamma}$ und $\mathbf{u}_2^{(2k)}|_{\Gamma}$ im Schritt (4) der Verschiebungssprung $[\mathbf{u}]^{(2k)}|_{\Gamma}$ über das Interface Γ näherungsweise berechnet werden. Um im Schritt (5) den Träger dieses Verschiebungssprunges zu approximieren, muss eine geeignete kleine Schranke $\varepsilon^{(2k)} > 0$ eingeführt werden (vgl. Unterabschnitt 6.3.4), da aus den gemischten Randwertproblemen nur fehlerbehaftete Näherungslösungen erhalten werden können. Mit dieser Fehlerschranke lässt

sich schließlich eine Näherungslösung $S_\varepsilon^{(2k)} \subset \Gamma$ für das gesuchte wahre Rissgebiet S angeben. Die iterativen Teilschritte (2) bis (5) werden solange wiederholt, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erfüllt ist, z.B. ein vorgegebener Hausdorff-Abstand d^{krit} zwischen dem angenäherten Rissgebiet $S_\varepsilon^{(2k)}$ und der Vorgängerlösung $S_\varepsilon^{(2k-2)}$ unterschritten wird:

$$d(S_\varepsilon^{(2k)}, S_\varepsilon^{(2k-2)}) < d^{\text{krit}}, \quad \text{mit } d^{\text{krit}} > 0. \quad (6.24)$$

Im Folgenden werden die Eigenschaften dieses neu entwickelten Rekonstruktionsverfahrens detailliert untersucht und beschrieben.

6.3.2 Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften

Die Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften von AICRA werden entscheidend durch die Eigenschaften des alternierend iterativen Algorithmus im Kern des Verfahrens bestimmt. Es sei im Folgenden stets angenommen, dass $\mathbf{u}_i^* \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $\mathbf{t}_i^* \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$ und $\mathbf{u}^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann ist jedes der gemischten Randwertprobleme (6.21) und (6.22) gut gestellt und eindeutig lösbar in $H^1(\Omega_i)$ [69]. In jedem Iterationsschritt k wird durch die im vorangehenden Unterabschnitt 6.3.1 beschriebene Zwei-Rand-Variante von AICRA ein stetiger, linearer Operator \mathcal{M}_i^k definiert, der die vektorwertige Funktion $\mathbf{u}_i^{(2k)} = \mathcal{M}_i^k(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{t}_i^*, \mathbf{u}^{(0)}) \in H^1(\Omega_i)$ zu jedem $(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{t}_i^*, \mathbf{u}^{(0)}) \in H^{1/2}(\Gamma_i) \times H^{-1/2}(\Gamma_i) \times H^{1/2}(\Gamma)$ zuweist.

Mit diesen Bezeichnungen können unter den getroffenen Annahmen die folgenden zwei Sätze zur Konvergenz und zu den Regularisierungseigenschaften des Verfahrens AICRA gezeigt werden [69]:

Satz 3 *Sei $\mathbf{u}_i^* \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $\mathbf{t}_i^* \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$, und jede Lösung \mathbf{u}_i der zwei RWPe (6.19) und (6.20) liege in $H^1(\Omega_i)$. Dann konvergiert für jedes $\mathbf{u}^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma)$ die Folge von Näherungslösungen $\{\mathbf{u}_i^{(2k)}\}_{k \geq 1} = \{\mathcal{M}_i^k(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{t}_i^*, \mathbf{u}^{(0)})\}_{k \geq 1}$ zu \mathbf{u}_i in $H^1(\Omega_i)$.*

Satz 4 *Sei $\mathbf{u}^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann regularisiert die Familie von Operatoren $\mathcal{M}_i^k(\cdot, \cdot, \mathbf{u}^{(0)})$ das Problem (6.19) bzw. (6.20) zur exakten Lösung \mathbf{u}_i .*

Hierbei wird als Erweiterung der im Abschnitt 5.1 gegebenen Definition 2 eine regularisierende Operatorenfamilie gemäß TIKHONOV [108] definiert als:

Definition 7 *Es seien approximierte kinematische und statische Daten auf Γ_i mit \mathbf{U}_i^* bzw. \mathbf{T}_i^* bezeichnet. Eine Familie von Operatoren $\mathcal{F}_i^k(\cdot, \cdot, \mathbf{u}^{(0)}) : H^{(1/2)}(\Gamma_i) \times H^{-1/2}(\Gamma_i) \times H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_i)$, mit $k = 1, 2, 3, \dots$, regularisiert das Problem (6.19) bzw. (6.20) zur exakten Lösung \mathbf{u}_i , falls eine reelle Zahl $\delta_0 > 0$ und Funktionen $k(\delta)$ und $\varepsilon(\delta)$, definiert auf $(0, \delta_0)$, existieren, so dass $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$, wenn $\delta \rightarrow 0$, und die Ungleichung*

$$\|\mathbf{u}_i^* - \mathbf{U}_i^*\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)} + \|\mathbf{t}_i^* - \mathbf{T}_i^*\|_{H^{-1/2}(\Gamma_i)} \leq \delta$$

die Abschätzung

$$\|\mathcal{F}_i^{k(\delta)}(\mathbf{U}^*, \mathbf{T}^*, \mathbf{u}^{(0)}) - \mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \varepsilon(\delta) \quad (6.26)$$

impliziert.

Die Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma)$ stellt demzufolge den Regularisierungsparameter der durch den iterativen Algorithmus definierten Operatorenfamilie dar und wird im folgenden Unterabschnitt näher untersucht.

Aus den zwei gemäß Satz 3 konvergierenden Folgen $\{\mathbf{u}_1^{(2k)}\}_{k \geq 1}$ und $\{\mathbf{u}_2^{(2k)}\}_{k \geq 1}$ lässt sich direkt die iterative Näherungslösung des Verschiebungssprung $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{|\Gamma} = \mathbf{u}_1^{(2k)}|_{\Gamma} - \mathbf{u}_2^{(2k)}|_{\Gamma}$ über das zu untersuchende Interface Γ ermitteln. Somit ist auch die Konvergenz des genäherten Verschiebungssprung $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{|\Gamma}$ selbst gegen den wahren Sprung $[\mathbf{u}]_{|\Gamma}$ gezeigt. Die Wahl einer geeigneten Fehlerschranke $\varepsilon^{(2k)}$ zur Bestimmung des gesuchten Rissgebiets wird in Unterabschnitt 6.3.4 beschrieben.

In einigen aktuellen Veröffentlichungen zum elektrostatischen Cauchy-Problem [61, 77, 81] wurden bereits die Konvergenzeigenschaften des ursprünglichen Kozlov-Algorithmus an numerischen Beispielen unter Verwendung der Randelementmethode demonstriert. Numerische Konvergenz- und Regularisierungsergebnisse zum neuen Verfahren AICRA finden sich in den Kapiteln 7 und 8 der vorliegenden Arbeit.

6.3.3 Wahl einer geeigneten Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}$

Da die Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}$ als Regularisierungsparameter des Rekonstruktionsalgorithmus wirkt, ist ihre Wahl entscheidend für das Regularisierungsverhalten und die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens. Obwohl gemäß Theorem 3 der alternierende Algorithmus für jede beliebige Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma)$ konvergiert, kann bei derartigen iterativen Verfahren die absolute Konvergenz deutlich beschleunigt werden, je näher diese Startlösung schon an der wahren Lösung liegt. Für das ursprüngliche Cauchy-Problem ist üblicherweise keinerlei Information auf dem Teilrand Γ gegeben, so dass meist $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ als Startlösung angesetzt wird. Da bei dem neu entwickelten Verfahren jedoch der alternierend iterative Algorithmus im Kontext der Rissidentifikation verwendet wird, können durch die Lösung der zwei nachfolgenden RWPe auf einfache Art und Weise zusätzliche Informationen für eine geeignetere Startlösung $\mathbf{u}^{(0)}$ auf dem Interface Γ erhalten werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_i^{(0)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^{(0)} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_K, \quad i \in \{1, 2\} \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i^{(0)} &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_S, \\ \mathbf{u}_1^{(0)} - \mathbf{u}_2^{(0)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_1^{(0)} - \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_2^{(0)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Hierbei wurde der äußere Rand $\partial\Omega$ in zwei disjunkte Teile Γ_K und Γ_S , entsprechend den kinematischen und statischen Randbedingungsangaben der äußeren Prüfbelastung, unterteilt:

$$\partial\Omega = \Gamma_K \cup \Gamma_S \quad \text{und} \quad \Gamma_K \cap \Gamma_S = \emptyset. \quad (6.28)$$

Die Lösung dieses gut gestellten, gemischten RWP's entspricht der Lösung eines identischen (mit gleicher Geometrie und Materialeigenschaften), aber *ungeschädigten* Referenzkörpers (*ohne* Rissgebiete S auf Γ) unter der gleichen äußeren Prüfbelastung. Die erhaltene Verschiebungslösung $\mathbf{u}^{(0)}$ auf dem Interface Γ unterscheidet sich bis auf die Rissgebiete S und ihre nähere Umgebung in der Regel nur wenig von der gesuchten Verschiebungslösung im geschädigten Interface. Sie lässt sich somit unmittelbar als eine gut geeignete Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}$ auf dem Interface Γ für beide Teile Ω_1 und Ω_2 verwenden:

$$\mathbf{u}^{(0)}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_1^{(0)}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_2^{(0)}|_{\Gamma}. \quad (6.29)$$

Die aus dieser Wahl der Anfangslösung resultierende schnellere Konvergenz des iterativen Verfahrens wurde auch in sämtlichen numerischen Testrechnungen dieser Arbeit bestätigt, bei denen stets schon nach wenigen Iterationen eine gute Näherungslösung $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{\Gamma}$ für den Verschiebungssprung erhalten wurde (s. Kapitel 7 und 8).

Zudem weist das Verfahren AICRA auch eine gute Approximation des Verschiebungssprungs selbst auf, die jedoch kaum genutzt wird, da ja lediglich eine Näherung für den Träger des normalen Verschiebungssprungs $[u_N]_{\Gamma}$ zur Bestimmung der Rissgebiete $S_{\varepsilon}^{(2k)}$ benötigt wird. Wegen der beobachteten raschen Konvergenz von AICRA wurden bisher auch keine tiefer gehenden Untersuchungen bezüglich a priori geeigneter Abbruchkriterien durchgeführt. Für den ursprünglichen Kozlov-Algorithmus beim elektrostatischen Cauchy-Problem werden Abbruchkriterien z.B. in [61, 82] diskutiert.

6.3.4 Wahl einer geeigneten Fehlerschranke ε

Die Wahl eines geeigneten Identifikationsparameters $\varepsilon^{(2k)}$ ist ebenfalls von entscheidender Bedeutung für die korrekte Rekonstruktion der Rissfläche(n) S . Sie hängt offensichtlich von der absoluten Konvergenz des approximierten Sprungs der Verschiebungslösung $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{\Gamma}$ zum wahren Verschiebungssprung $[\mathbf{u}]_{\Gamma}$ ab. Da die Verschiebungslösung auf dem Interface Γ mit einem konvergenten Algorithmus berechnet wird, bei dem wiederum jeder Teilschritt mit einem numerischen Verfahren gelöst wird, muss die Superposition dieser beiden Konvergenzeigenschaften betrachtet werden. In der Literatur wurde bisher noch keine quantitative Konvergenzbeschreibung gegeben. Numerische Konvergenzdiagramme für einige Testbeispiele des klassischen elektrostatischen Cauchy-Problems können in [77, 82] gefunden werden.

Unter der Annahme, dass eine exakte Lösung $\mathbf{u}_i (i = 1, 2)$ für jedes Cauchy-Teilproblem (Gleichung (6.19) bzw. (6.20)) erhältlich sei, kann jedoch eine Verknüpfung zwischen

der Identifizierungsschranke ε und dem Netzgrößenparameter h der numerischen Diskretisierung angegeben werden. Hierfür wird zunächst die Abhängigkeit des Fehlers der numerischen Verschiebungslösung $(\mathbf{u}_h)_i$ von dem Diskretisierungsparameter h betrachtet, die sich bei Verwendung der Finite-Elemente-Methode als numerisches Lösungsverfahren wie folgt beschreiben lässt [22]:

$$\|(\mathbf{u}_h)_i - \mathbf{u}_i\|_{H^{1/2}(\Omega_i)} \leq C_1 h^{1-\delta} \|\mathbf{u}_i\|_{H^{3/2-\delta}(\Omega_i)}, \quad \forall \delta > 0, i \in \{1, 2\}. \quad (6.30)$$

Anwendung des Spursatzes liefert [16]:

$$\|(\mathbf{u}_h)_i - \mathbf{u}_i\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_2 h^{1-\delta} \|\mathbf{u}_i\|_{H^{3/2-\delta}(\Omega_i)}, \quad \forall \delta > 0, i \in \{1, 2\}. \quad (6.31)$$

Da bei der betrachteten Problemstellung der singuläre Teil des normalen Verschiebungssprungs $[u_N]^S$ vom Abstand r zur Rissfront abhängt wie [36, 43]:

$$[u_N]^S \propto r^{1/2}, \quad (6.32)$$

kann der folgende Satz abgeleitet werden [75]:

Satz 5 *Wird die Rissidentifizierungsschranke ε in Abhängigkeit vom Vernetzungsparameter h gewählt als*

$$\varepsilon(h) = 0,5 h^{1-\delta-\alpha}, \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1 - \delta, \quad (6.33)$$

dann gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(S_{\varepsilon(h)}; S) = 0, \quad (6.34)$$

wobei d den Hausdorff-Abstand zweier Mengen bezeichnet.

Somit konvergiert die Menge $S_{\varepsilon(h)} = \{\mathbf{x} \in \Gamma : [\mathbf{u}_h(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N} > \varepsilon(h)\}$ zum wahren Rissgebiet S , wenn die Netzgröße h gegen Null geht.

Falls zudem angenommen wird, dass das Konvergenzergbnis aus Satz 3 auch für die diskrete Lösung $(\mathbf{u}_h^{(2k)})_i$ jedes iterativen Teilschritts $(2k)$ gilt, lässt sich durch eine Verknüpfung der Konvergenzaussagen in den Sätzen 3 und 5 das folgende totale Konvergenzresultat ableiten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} d(S_{\varepsilon(h)}^{(2k)}; S) = \lim_{h \rightarrow 0} d(S_{\varepsilon(h)}; S) = 0, \quad (6.35)$$

wobei wiederum d den Hausdorff-Abstand zweier Mengen bezeichnet. Eine rigorose Übertragung des Konvergenzbeweises aus [69] steht für die diskrete Lösung jedoch noch aus.

Da letztlich keine absolute Konvergenzrate des Gesamtverfahrens angegeben werden kann, ist auch die A-priori-Wahl eines optimalen Identifikationsparameters $\varepsilon^{(2k)}$ aktuell noch ungelöst. Wie aus den obigen Ausführungen hervorgeht, sollte die Fehlerschranke möglichst in starker Korrelation zum absoluten Fehler der Näherungslösung des Verschiebungssprungs gewählt werden. Da sich dieser Absolutfehler jedoch nicht direkt aus den Berechnungsergebnissen entnehmen lässt, wurden bei den numerischen Implementierungen des Verfahrens heuristische Berechnungsmethoden für $\varepsilon^{(2k)}$ entwickelt, die sich in den durchgeführten Testrechnungen jeweils als gut geeignet herausstellten (vgl. die Gleichungen (7.2) und (7.6)).

6.3.5 Drei-Rand-Variante von AICRA

Im Folgenden wird die Drei-Rand-Variante des neu entwickelten Algorithmus AICRA beschrieben, die sich dadurch auszeichnet, dass nun nur noch auf einem echten Teilgebiet F des gesamten äußeren Randes $\partial\Omega$ die Kenntnis beider Cauchy-Daten nötig ist. Der äußere Rand wird demnach aufgeteilt in zwei disjunkte Teile F und P (s. Abbildung 6.2):

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = F \cup P, \quad \text{mit} \quad F, P \neq \emptyset, \quad F \cap P = \emptyset. \quad (6.36)$$

Auf dem Teilrand F seien wie zuvor die vollständigen Cauchy-Daten ($\mathbf{u}_i|_F = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{t}_i|_F = \mathbf{t}^*$) durch Messung oder Belastungsbedingungen bekannt, wohingegen auf dem übrigen Rand P nur partielle Daten (z.B. statischen Typs: $\mathbf{t}_i|_P = \mathbf{t}^{**}$) durch die Belastung gegeben sind. Weiterhin wird eine Approximation der Rissgebiete S auf der Zwischenfläche Γ über den Träger des normalen Verschiebungssprungs $[u_N]|_\Gamma$ gesucht.

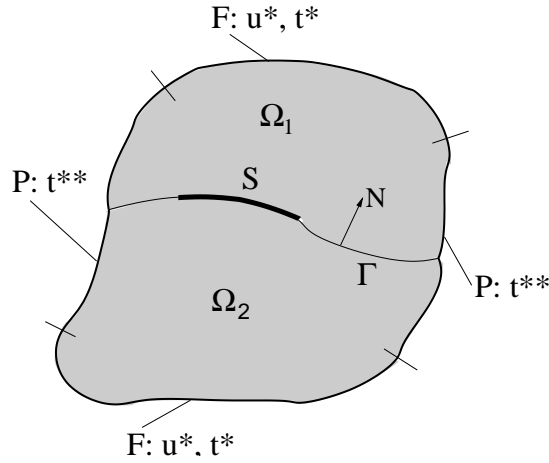


Abbildung 6.2: Modellgebiet mit drei Teilrändern

Der alternierend iterative Algorithmus AICRA lässt sich in der Drei-Rand-Variante wie folgt beschreiben:

- (1) Wahl einer geeigneten Anfangslösung $\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}$ auf Γ . Auch hier wird wieder die Lösung des ungeschädigten Modellkörpers unter der gleichen äußeren Prüfbelastung gewählt (vgl. Unterabschnitt 6.3.3).
- (2) Beginnend mit $k = 1$, Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{u}_i^{(2k-2)} \quad \text{auf } \Gamma, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{t}^* \quad \text{auf } F, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{t}^{**} \quad \text{auf } P, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_i^{(2k-1)}$ in Ω_i und $\mathbf{t}_i^{(2k-1)} = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k-1)}|_\Gamma$.

- (3) Nach Erhalten der Approximation $\mathbf{u}_i^{(2k-1)}$ Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } F, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{t}_i^{(2k-1)} && \text{auf } \Gamma, \\ \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{t}^{**} && \text{auf } P, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_i^{(2k)}$ in Ω_i und $\mathbf{t}_i^{(2k)} = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{N})\mathbf{u}_i^{(2k)}|_{\Gamma}$.

- (4) Berechnung des approximierten Verschiebungssprungs $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{\Gamma} = \mathbf{u}_1^{(2k)}|_{\Gamma} - \mathbf{u}_2^{(2k)}|_{\Gamma}$ über die Zwischenfläche Γ unter Verwendung der Näherungslösungen $\mathbf{u}_i^{(2k)}$.
- (5) Definition der approximierten Rissflächen $S_{\varepsilon}^{(2k)} \subset \Gamma$ durch Einführung eines kleinen Parameters $\varepsilon^{(2k)} > 0$ und Setzen von:

$$S_{\varepsilon}^{(2k)} = \{ \mathbf{x} \in \Gamma : [\mathbf{u}^{(2k)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N} > \varepsilon^{(2k)} \}. \quad (6.39)$$

- (6) Wiederholung der Schritte (2) bis (5) für $k \geq 2$, bis ein gegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Der Typ der Randbedingungen auf den Teilrändern F und Γ alterniert demzufolge wie zuvor bei der Zwei-Rand-Variante. Neu ist nun aber, dass auf dem Teilrand P stets Randbedingungen vom selben Typ verwendet werden. Diese Modifikation erscheint besonders im Hinblick auf praktische Anwendungen sehr vielversprechend, da nun nicht mehr auf dem gesamten äußeren Rand die vollständigen Cauchy-Randdaten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ bestimmt werden müssen. Die in den Sätzen 3 und 4 angegebenen Aussagen zu den Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften von AICRA lassen sich ganz analog auch auf die Drei-Rand-Variante übertragen [69]. Ebenso sind auch die obigen Ausführungen zur Wahl eines geeigneten Anfangswerts $\mathbf{u}^{(0)}$ und des Identifikationsparameters $\varepsilon^{(2k)}$ weiterhin gültig.

6.3.6 Vorteile des neuen Rissdetektionsverfahrens AICRA

Zusammenfassend lassen sich für den im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelten Detektionsalgorithmus AICRA die folgenden Vorteile im Vergleich mit Alternativverfahren angeben:

1. Es sind keinerlei A-priori-Annahmen hinsichtlich der Anzahl und Geometrie der zu detektierenden Rissgebiete nötig. Diese Eigenschaft des neu entwickelten Verfahrens ist ein entscheidender Vorteil v.a. gegenüber den üblichen Optimierungsansätzen (siehe z.B. [104]), bei denen durch die Vorgabe von Riss-Parametern der Lösungsraum meist stark eingeschränkt wird.

2. AICRA besitzt gute Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften, wobei durch die besonders geeignete Wahl der Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}|_{\Gamma}$ als Lösung des ungeschädigten Körpers sogar eine deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit und Regularisierungsfähigkeit im Vergleich zum ursprünglichen Cauchy-Problem erzielt werden kann.
3. Bei Verwendung der Drei-Rand-Variante von AICRA ist die Kenntnis vollständiger Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ nurmehr auf einem echten Teilgebiet des gesamten äußeren Randes nötig. Dies stellt insbesondere für praxisrelevante Problemstellungen einen entscheidenden Vorteil dar, da hier die Ermittlung beider Randdaten aus messtechnischen Gründen oft nicht auf dem gesamten äußeren Rand möglich ist.
4. Der gesamte numerische Aufwand ist als eher gering einzuschätzen, da in jedem iterativen Teilschritt gut gestellte Randwertprobleme mit lediglich veränderten Randbedingungen zu lösen sind. Bei der BEM-Implementierung kann somit stets eine identische Systemmatrix verwendet werden. Auch die FEM-Berechnungen ermöglichen, z.B. durch Benutzung identischer Hauptmatrizen, Einsparungen der Gesamt-rechenzeit.
5. Der allgemeine Charakter von AICRA bietet sehr gute Erweiterungsmöglichkeiten auch auf andere elliptische Differentialoperatoren. Hierbei lassen sich prinzipiell beliebige numerische Verfahren zur Lösung jedes iterativen Teilschritts einsetzen. Zudem kann das Verfahren auch zur Untersuchung von Interface-Rissen zwischen unterschiedlichen Materialien und zur quantitativen Delaminationsbestimmung in geschichteten Verbundwerkstoffen verwendet werden (vgl. Kapitel 8).

Kapitel 7

Numerische Implementierung und Testrechnungen mit AICRA

Das neu entwickelte Verfahren AICRA wurde im Rahmen dieser Arbeit sowohl mit der Randelementmethode (BEM) als auch mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) implementiert. Zur numerischen Verifikation der im vorangegangenen Kapitel abgeleiteten Eigenschaften wurden zunächst eingehende Testrechnungen an isotropen Körpern mit ausschließlich numerisch erhaltenen Referenzranddaten am äußeren Rand durchgeführt.

7.1 Implementierung mit der Randelementmethode

Bei den in der Literatur vorhandenen numerischen Untersuchungen zur Lösung des elektrostatischen Cauchy-Problems mittels des alternierend iterativen Verfahrens von KOZLOV et al. [69] wurde bisher ausschließlich die Randelementmethode eingesetzt [61, 77, 81], die sich insbesondere durch eine gute Auflösung der Spannungsfelder auszeichnet. Zudem ist dieses Randintegral-Verfahren in natürlicher Weise besonders geeignet für die effiziente Berechnung einer Folge von Randwertproblemen mit lediglich unterschiedlichen Randdaten.

Aus den genannten Gründen wurde auch in der vorliegenden Arbeit zunächst eine Implementierung der Zwei-Rand-Variante von AICRA mit der Randelementmethode entwickelt, zumal am Institut bereits das 3D-Galerkin-BEM-Programm BEM90 für isotrope lineare Elastizität auch als Quelltext in FORTRAN90 vorhanden war [12]. Dieses Programm wurde derart erweitert, dass die Ergebnisse der vorherigen Lösung sowohl für kinematische als auch statische Randbedingungen alternierend am Zwischenrand eingesetzt werden können. Da das Programm BEM90 jedoch keine Kompatibilitätsrandbedingungen zwischen zwei unterschiedlichen Teilgebieten ermöglicht, konnte bei dieser BEM-Implementierung nur der Fall von Rissen in der Symmetrieebene eines homogenen Körpers behandelt werden.

In Abbildung 7.1(a) ist eine der untersuchten Modellproben mit den entsprechenden Randbedingungen dargestellt. Es handelt sich um einen Quader mit den Abmessungen $3 \times 5 \times 4 \text{ cm}^3$, der an den Flächen A_1 und A_2 jeweils in äußerer Normalenrichtung mit der konstanten Randspannung $|t_z| = 1 \text{ kPa}$ nach außen unter Zug belastet wird. Der Quader ist homogen mit isotrop elastischem Material ausgefüllt, wobei als Materialparameter $E = 21 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,3$ verwendet wurden. Als rissbehaftete Zwischenfläche wird die Symmetrieebene bei $z = 0 \text{ cm}$ angenommen, die einen elliptischen Riss mit Mittelpunkt $(1,2 | 3,0)$ und den Halbachsen $a = 1,0 \text{ cm}$ und $b = 1,5 \text{ cm}$ in x - bzw. y -Richtung besitzt. Aus den erwähnten Symmetriegründen wurde nur die obere Hälfte der Probengeometrie mit 209 Knotenpunkten und 414 triangularen Randelementen diskretisiert, wobei jeweils ein linearer Verschiebungsansatz und konstanter Randspannungsansatz gewählt wurde. Zum Einbau der elliptischen Schädigungsfläche wurden die Knoten in der Symmetrieffläche über ein eigens geschriebenes Programm entsprechend verschoben und die resultierende Netzverzerrung anschließend ausgeglichen.

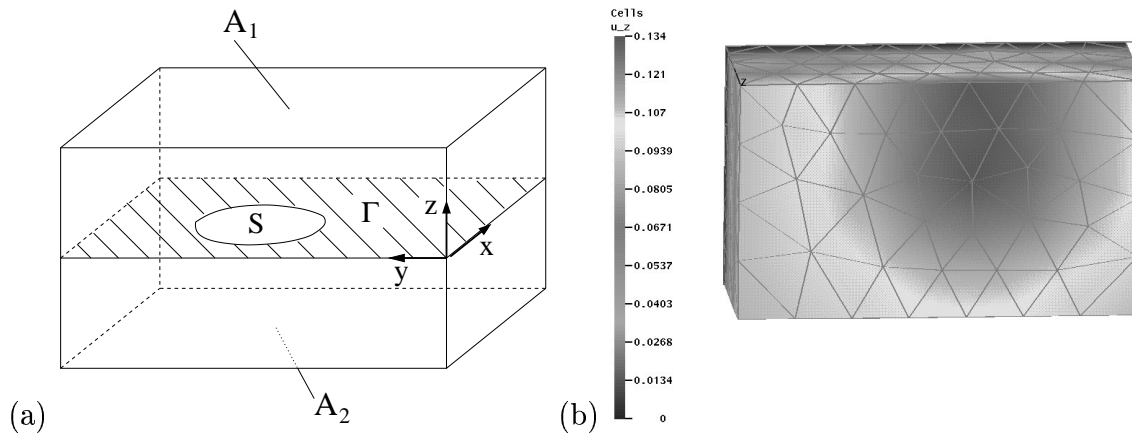


Abbildung 7.1: Modellprobe für die BEM-Implementierung: (a) Geometrie der Probe mit Randbedingungen, (b) Referenzlösung u_z am oberen Rand A_1

Unter Vorgabe der wahren Risslage wurde zunächst das zugehörige Verschiebungs- und Randspannungsfeld an der äußeren Oberfläche ebenfalls mit Hilfe von BEM90 berechnet. Hierbei wird das innere Rissgebiet S als randspannungsfreier Rand angesetzt, wohingegen am restlichen Zwischenrand $\Gamma \setminus S$ die üblichen Symmetrierandbedingungen für die Randspannungen und Verschiebungen angenommen werden. Die aus dieser Vorberechnung erhaltene numerische Lösung wird im Folgenden als Referenzlösung bezeichnet und diene als Ersatz für die an der Oberfläche zu messenden Randdaten. Abbildung 7.1(b) zeigt beispielhaft die u_z -Verschiebungskomponente dieser Referenzlösung. Anschließend musste auch die Anfangslösung $\mathbf{u}^{(0)}|_{\Gamma}$ berechnet werden, wofür entsprechend den Ausführungen im Unterabschnitt 6.3.3 die Verschiebungslösung des ungeschädigten Körpers in der Zwischenfläche Γ zu bestimmen ist. Hierzu wurde dieselbe Diskretisierung verwendet, bei der nun auf der gesamten Zwischenfläche Γ Kompatibilitätsrandbedingungen vorgegeben waren.

Abbildung 7.2 zeigt die mittels der BEM-Implementierung der Zwei-Rand-Variante von

AICRA erhaltenen Rekonstruktionsergebnisse der Verschiebungslösung u_z und der Randspannungslösung t_z in der rissbehafteten Symmetrieebene. Schon nach nur 2 Iterationen heben sich die Knotenpunkte der Rissfläche und des Rissrandes bei der normal gerichteten Verschiebungslösung $u_z^{(2)}$ signifikant von den restlichen Knoten der Symmetrieffläche ab, deren Verschiebungswerte in z -Richtung weiterhin nahe an der Startlösung $u_z^{(0)} = 0$ verharren. Mit zunehmender Iterationszahl wird nun auch der Absolutwert des Verschiebungssprunges selbst immer besser approximiert, der sich wegen der Symmetriebedingungen hier unmittelbar errechnet zu:

$$[u_N^{(2k)}] = 2 u_z^{(2k)} . \quad (7.1)$$

Das Rissgebiet lässt sich somit schon nach den ersten Iterationen in guter Näherung direkt aus der in Abbildung 7.2 gezeigten Grauwertdarstellung der Verschiebungskomponente in z -Richtung entnehmen. Lediglich die Verschiebungslösung der auf dem Rissrand liegenden Knoten weicht wegen des dort vorliegenden Rissöffnungsverhaltens (vgl. Gleichung (6.32)) merklich von dem bei korrekter Detektion geforderten Wert nahe Null ab. Die mit dem Abstand r von der Rissfront proportional zu $r^{1/2}$ steil ansteigende Rissöffnung kann von dem regularisierend wirkenden Verfahren bei der Rekonstruktion somit nur ungenügend angenähert werden. Da nur der Träger von $[u_N]_{\Gamma}$ zur Rissbestimmung benutzt wird, können jedoch durch einfache Wahl der Fehlerschranke

$$\varepsilon^{(2k)} = p \cdot [u_N^{(2k)}]_{\max} , \quad (7.2)$$

mit

$$p = 0,4 \quad \text{und} \quad [u_N^{(2k)}]_{\max} := \max_{\mathbf{x}_i \in \Gamma} [u_N^{(2k)}(\mathbf{x}_i)] , \quad (7.3)$$

alle innerhalb und außerhalb des wahren Rissgebiets liegenden Knotenpunkte \mathbf{x}_i schon ab der 2. Iteration korrekt erfasst werden. Die teilweise fehlerhafte Detektion der auf dem Rissrand liegenden Knoten kann zudem durch Netzverfeinerung oder zusätzliche Postprozessing-Routinen verbessert werden.

Eine Rekonstruktion des Rissgebiets lässt sich durch leichte Abwandlung des Verfahrens AICRA prinzipiell auch über die Auswertung der normal wirkenden Randspannungskomponente (hier: $t_N = t_z$) im Interface erzielen. Ein Vergleich der Abbildungen 7.2(e) und (f) zeigt jedoch ein deutlich schlechteres Rekonstruktionsergebnis, da hierbei wegen der am Rissrand mit $r^{-1/2}$ singular werdenden Normalspannungen zusätzliche Probleme auftauchen. Im weiteren Verlauf wurde darum diese Randspannungsvariante des neu entwickelten Verfahrens nicht weiter untersucht, wengleich sich für spezielle Fälle durchaus sinnvolle Zusatzinformationen ergeben können.

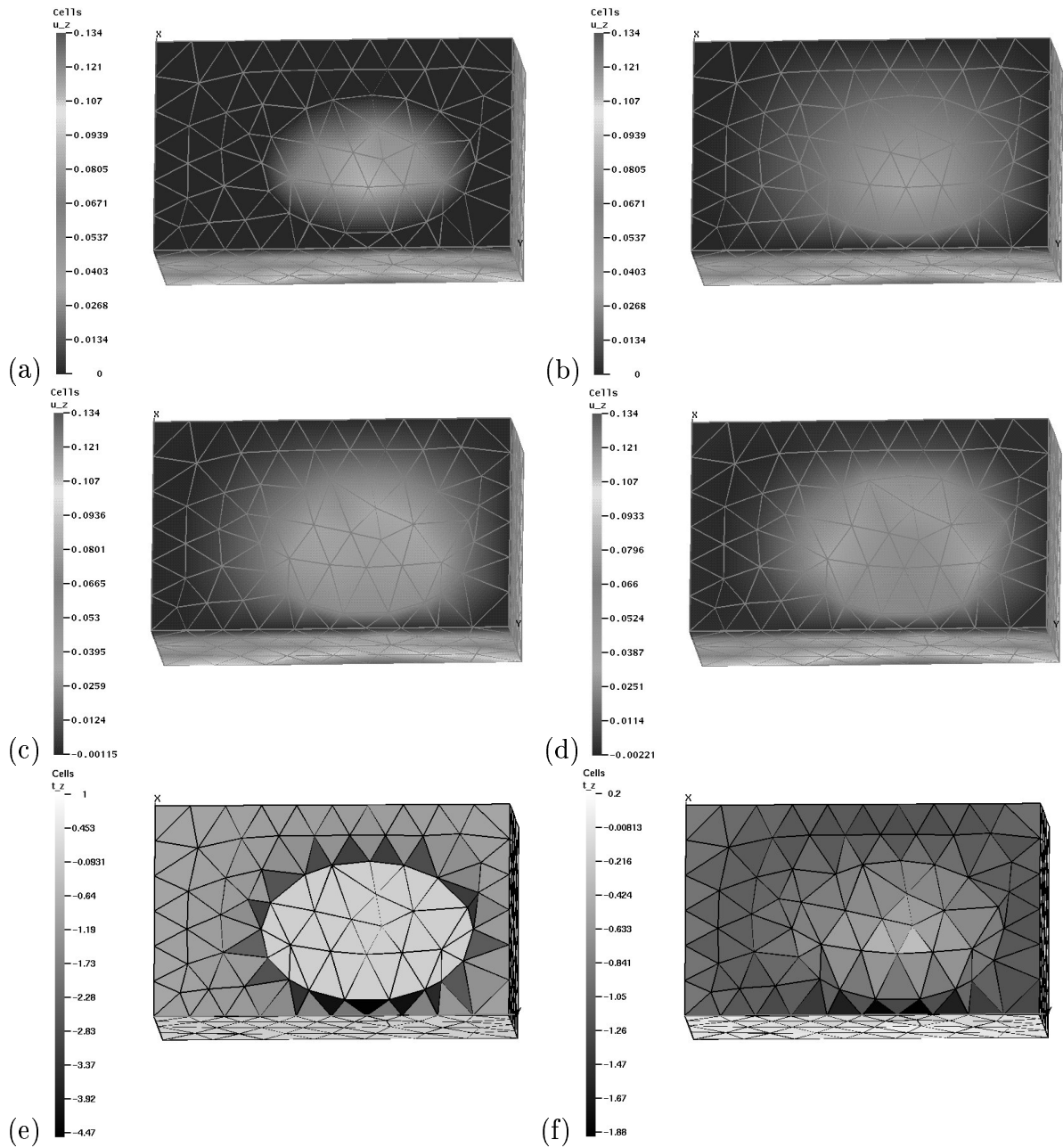


Abbildung 7.2: Rekonstruktion der Verschiebungslösung u_z und Randspannungslösung t_z im Interface Γ mittels BEM-Implementierung von AICRA : (a) Referenzlösung u_z , (b) Rekonstruierte Lösung u_z nach 2 Iterationen, (c) nach 4 Iterationen, (d) nach 10 Iterationen, (e) Referenzlösung t_z , (f) Rekonstruierte Lösung t_z nach 10 Iterationen

7.2 Implementierung mit der Finite-Elemente-Methode

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene AICRA-Implementierung mittels BEM ließ sich nicht ohne grundlegende Neugestaltung des kompletten Programm-Codes für den Fall von unterschiedlich anisotropen Materialien erweitern. Zudem hätte die nötige numerische Bestimmung der zugehörigen Fundamentallösungen einen hohen zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet, wobei die Anwendung der BEM auf dünne Schichtungen überdies mit erheblichen Rechenungenauigkeiten verbunden ist. Um die genannten Probleme und Einschränkungen zu überwinden, wurde im weiteren Verlauf der Arbeit auch eine FEM-Implementierung von AICRA für beide Varianten entwickelt. Hiermit lassen sich nun auch Risse zwischen beliebigen orthotropen Körpern und sogar in Interfaces von geschichteten Festkörpern bestimmen. Die Verwendung des kommerziellen FEM-Programmpakets ANSYS 5.6 unterstreicht zudem auch die gute Praxistauglichkeit des neuen Verfahrens. Zunächst wurden abermals diverse Testrechnungen an isotropen Körpern durchgeführt, um die Eigenschaften des Verfahrens AICRA auch für die FEM-Implementierung zu untersuchen.

7.2.1 Ausgewählte Modellprobe

Es wird im Folgenden weiterhin das Modellproblem aus Unterabschnitt 5.3.2 betrachtet, bei dem auf beiden Seiten des rissbehafteten Interfaces ein identisches, nun homogenes isotropes Material angenommen wird.

Wurden zunächst wie bei der BEM-Implementierung Symmetriefälle untersucht, diente im weiteren Verlauf als Modellprobe mit einfacher Geometrie, aber nicht-trivialer Risslage und Belastung schließlich der in Abbildung 7.3 skizzierte Körper. Er besteht aus

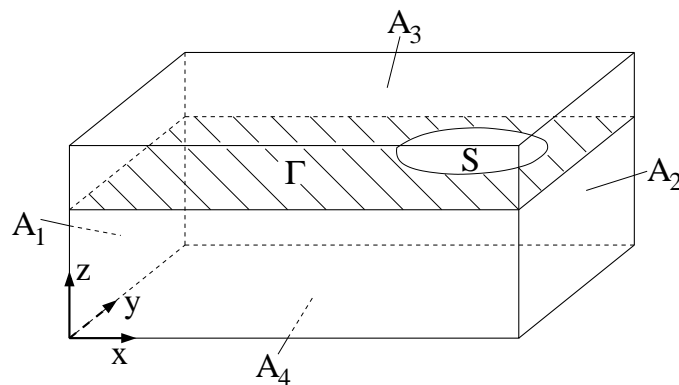


Abbildung 7.3: Untersuchte Modellprobe für FEM

einem Quader mit den Abmessungen $70 \times 25 \times 15 \text{ cm}^3$, der vollständig mit einem homogenen, isotrop elastischen Material ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$) ausgefüllt ist. Ein elliptischer Riss S mit den Hauptachsen $a = 13 \text{ cm}$ und $b = 5 \text{ cm}$, die parallel zur x -

bzw. y -Richtung orientiert sind, wird durch Spline-Funktionen approximiert, die durch die 4 Hauptachsen-Schnittpunkte gelegt werden. Das Zentrum des elliptischen Risses S befindet sich an der Position $x = 45$ cm, $y = 15$ cm in der inneren Zwischenfläche $\Gamma = \{(x, y, z)^T \in \Omega : z = 10 \text{ cm}\}$ (vgl. Abbildung 7.3). Als äußere Prüfbelastung wurden folgende Verschiebungen und Randspannungen vorgegeben:

$$\mathbf{u}^* = \begin{cases} (0, 0, 0)^T & \text{auf } A_1 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : x = 0\} \\ (\cdot, 0, 0)^T & \text{auf } A_2 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : x = 70 \text{ cm}\} , \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{t}^* = \begin{cases} t_0 (1, 0, 1)^T \text{ kPa} & \text{auf } A_3 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : z = 15 \text{ cm}\} \\ t_0 (-1, 0, -1)^T \text{ kPa} & \text{auf } A_4 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : z = 0\} . \end{cases} \quad (7.5)$$

D.h. der Prüfkörper ist an der linken Seitenfläche fest eingespannt, wohingegen auf der rechten Seite nur die y - und z -Richtung fixiert wird. Als nicht-triviale Belastung werden auf die gesamte Deck- und Bodenfläche jeweils konstante Randspannungen in Höhe von $\sqrt{2} t_0 = \sqrt{2}$ kPa aufgebracht, die unter $\pm 45^\circ$ in der x - z -Ebene wirken. Auf der vorderen und hinteren Seitenfläche wurde ein randspannungsfreier Zustand angenommen. Die in den weiteren Unterabschnitten beschriebenen Ergebnisse beziehen sich stets auf diese Modellprobe.

7.2.2 Erzeugung der Referenzergebnisse

Der gesamte Probenkörper wurde mit dem kommerziellen Programm ANSYS 5.6 vernetzt, wobei quadratische 3D-Elemente (SOLID 92) mit drei Freiheitsgraden verwendet wurden. Das resultierende Netz besteht aus 7667 Elementen und 11989 Knoten. Die innere Zwischenfläche Γ wird in Abbildung 7.4 gezeigt, in der das Gebiet des wahren Risses dunkler dargestellt ist.

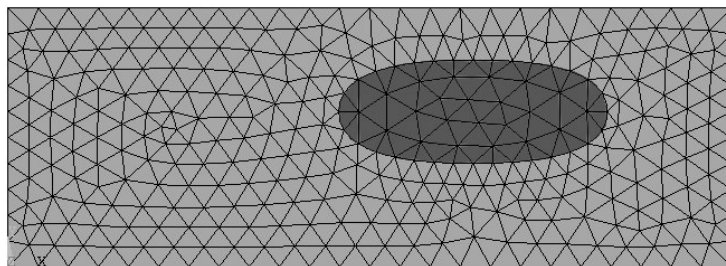


Abbildung 7.4: Oberflächennetz in der rissbehafteten Zwischenfläche $z = 10$ cm

Da zur Rekonstruktion des inneren Rissgebiets am gesamten äußeren Rand $\partial\Omega$ bzw. nur an Teilen davon die vollständigen Cauchy-Daten (d.h. Verschiebungen \mathbf{u}^* und Randspannungen \mathbf{t}^*) benötigt werden, musste zunächst eine numerische Referenzlösung berechnet werden. Hierfür wurde in derselben Diskretisierung das zu identifizierende Rissgebiet S als randspannungsfreier innerer Rand vorgegeben, während am restlichen Teil der Zwischenfläche $\Gamma \setminus S$ Kompatibilitätsbedingungen für die Randspannungen und Verschiebungen angesetzt wurden. Am äußeren Rand wurde die in den Gleichungen (7.4) und (7.5)

gegebene äußere Belastung vorgegeben und mittels ANSYS 5.6 die FEM-Referenzlösung berechnet. Bei allen im Folgenden ausgeführten Rekonstruktionen mit beiden Varianten von AICRA wird stets diese numerische Referenzlösung als Randdaten (\mathbf{u}^* , \mathbf{t}^*) an der äußeren Oberfläche verwendet. Anhand dieser numerischen Referenzergebnisse konnte auch gezeigt werden, dass die gewählte Prüfbelastung die Identifizierbarkeitsvoraussetzung aus Gleichung (6.18) erfüllt.

Zur Ermittlung der Startlösung $\mathbf{u}^{(0)}$ auf der inneren Fläche Γ wurde in einem weiteren vorbereitenden Schritt die Lösung für einen identischen, aber ungeschädigten Körper unter derselben äußeren Belastung numerisch berechnet. Abermals wurde dieselbe Diskretisierung verwendet, wobei aber nun auf der gesamten inneren Fläche Γ (einschließlich des Rissgebietes S) Kompatibilitätsrandbedingungen vorgegeben wurden.

Die durch die Anwesenheit des elliptischen inneren Risses an der äußeren Oberfläche hervorgerufene Veränderung des Verschiebungsfeldes ist in der Abbildung 7.5 dargestellt, in der die Ergebnisse der beiden vorbereitenden FEM-Rechnungen zum Vergleich abgebildet sind. In Abbildung 7.5(a) wird die numerische Lösung der Verschiebungskomponente u_z des geschädigten Körpers und in (b) die Lösung des ungeschädigten Körpers veranschaulicht. Aufgrund der asymmetrischen Lage der Zwischenfläche Γ wirkt sich das Vor-

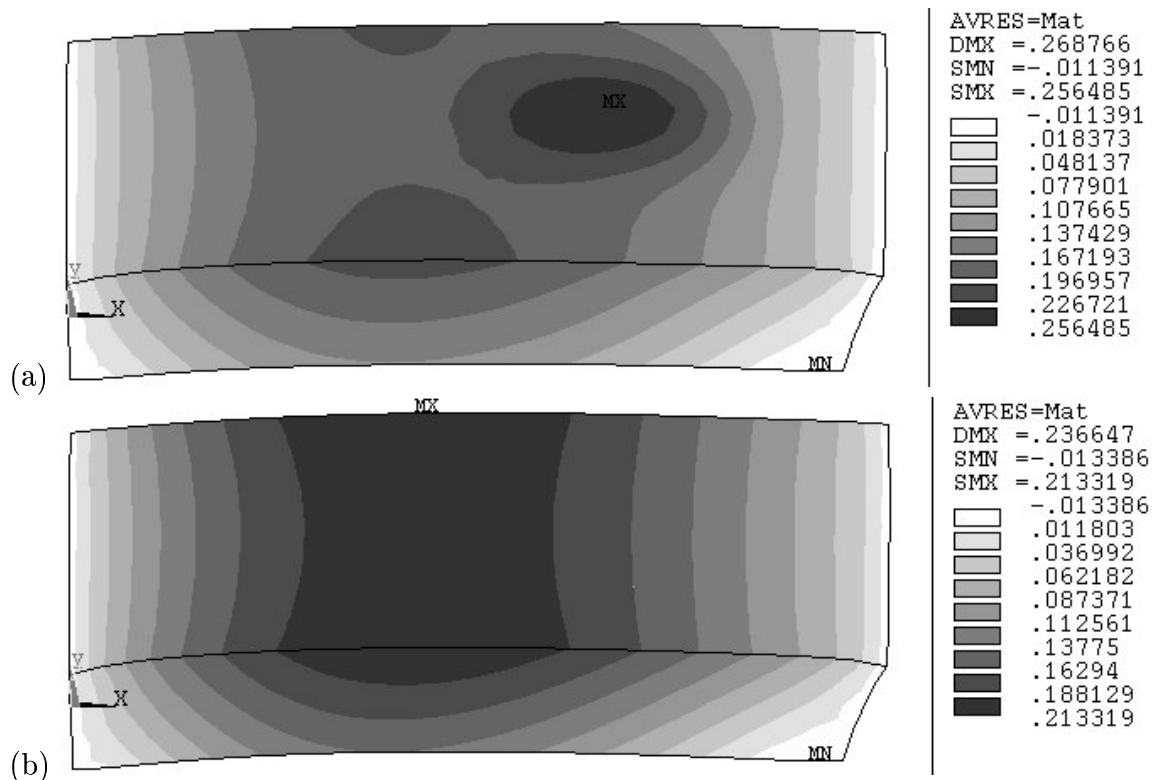


Abbildung 7.5: Verschiebungskomponente u_z an der äußeren Oberfläche unter derselben Belastung: (a) mit innerem Riss; (b) ohne inneren Riss

handensein des inneren Risses wesentlich geringer auf die äußere Verschiebungslösung

des unteren Teilkörpers Ω_2 aus, da dieser doppelt so dick wie Ω_1 ist. Auch die zwei Verschiebungsfelder $\mathbf{u}_1^{(\text{ref})}$ und $\mathbf{u}_2^{(\text{ref})}$ der Referenzlösung auf Γ differieren unterschiedlich stark von der gemeinsamen Startlösung, d.h. der Riss öffnet sich stärker in Richtung der dünneren, oberen als in Richtung der dickeren, unteren Hälfte. Hieraus ergeben sich auch bei der Rekonstruktion des Verschiebungssprungs deutlich höhere Relativfehler bei der Berechnung der Teillösung des unteren Körpers.

Es wurden mit beiden Varianten von AICRA Rekonstruktionen an dem im vorangehenden Unterabschnitt beschriebenen Modellkörper durchgeführt, die im Folgenden detailliert erläutert und diskutiert werden.

7.2.3 Zwei-Rand-Variante von AICRA

Hier werden nun auf dem gesamten äußeren Rand $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ die vollständigen Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ der numerischen Referenzlösung verwendet. Wie bereits im Unterabschnitt 6.3.4 ausgeführt, ist die A-priori-Wahl eines optimalen Identifizierungsparameters $\varepsilon^{(2k)}$ ungelöst. Da der absolute Konvergenzfehler des normalen Verschiebungssprungs $[u_N^{(2k)}]$ nicht direkt aus den Ergebnisdaten entnommen werden konnte, wurde das folgende einfache Hilfsmaß entwickelt, das sich für das betrachtete Modellproblem als gut geeignet herausstellte:

$$\varepsilon^{(2k)} = \begin{cases} p_1 [u_N^{(2k)}]_{\max} & , \quad k = 1 , \\ \varepsilon^{(2k-2)} - p_2 \left([u_N^{(2k)}]_{\max} - [u_N^{(2k-2)}]_{\max} \right) & , \quad k > 1 , \end{cases} \quad (7.6)$$

mit

$$[u_N^{(2k)}]_{\max} := \max_{\mathbf{x}_i \in \Gamma} [u_N^{(2k)}(\mathbf{x}_i)] . \quad (7.7)$$

Es wurde somit lediglich der maximale normale Verschiebungssprung aller Knoten \mathbf{x}_i auf der Zwischenfläche Γ in Verknüpfung mit zwei heuristischen Skalarparametern ausgewertet. Im Falle der Zwei-Rand-Variante wurden diese beiden Parameter als

$$p_1 = 0,4 \quad \text{und} \quad p_2 = 0,3 \quad (7.8)$$

gewählt. Abbildung 7.6 zeigt die mit der obigen Wahl von $\varepsilon^{(2k)}$ in der Zwischenfläche Γ als geschädigt identifizierten Knotenpunkte nach jeweils 2, 6, 10 und 30 Iterationen. Die ausgefüllten Symbole stellen hierbei jeweils Knotenpunkte dar, die innerhalb des detektierten Rissgebiets liegen, d.h. einen normalen Verschiebungssprung $[u_N] > \varepsilon^{(2k)}$ besitzen. Die Lage des wahren Risses lässt sich leicht über die kreisförmigen Symbole ($\circ \bullet$) an den Knotenpunkten des Rissrands erkennen. Aus dieser knotenweisen Darstellung kann unmittelbar entnommen werden, dass sich das geschädigte Gebiet S nach nur 6 Iterationen bereits in guter Näherung detektieren lässt, was den geringen numerischen Aufwand des Verfahrens unterstreicht. Die auftretenden Identifizierungsprobleme auf der linken Seite sind auf die suboptimal gewählte, schräg zur Zwischenfläche wirkende Prüfbelastung zurückzuführen, unter der sich am linken Rand eine geringere normale Öffnung als am rechten Rand einstellt. Durch Wahl einer senkrechten Spannungsbelastung,

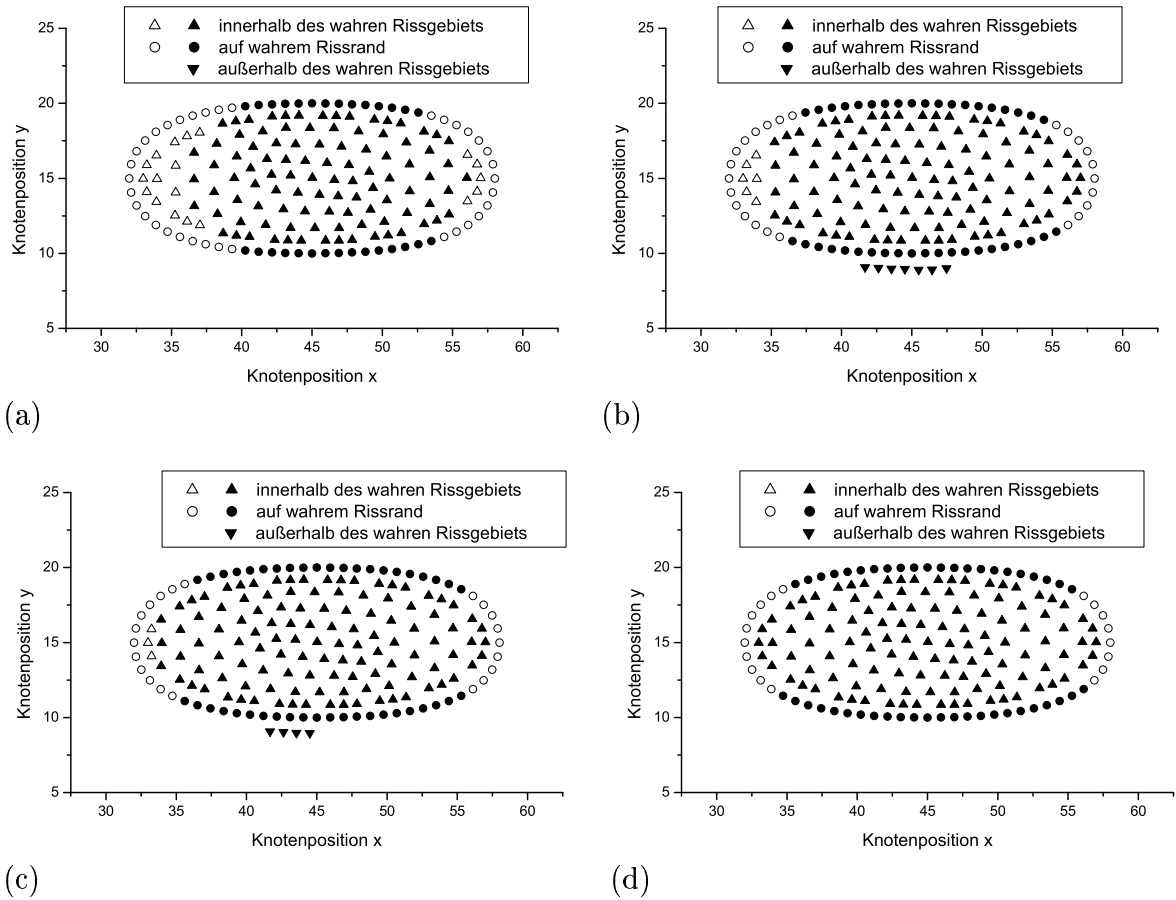


Abbildung 7.6: Bestimmung der Rissknotenpunkte auf Γ mittels der Zwei-Rand-Variante von AICRA : (a) nach 2, (b) nach 6, (c) nach 10 und (d) nach 30 Iterationen

rein in z -Richtung, konnte dieser Effekt vermieden werden. Auch eine Verfeinerung des verwendeten Diskretisierungsnetzes, insbesondere entlang des detektierten Rissrandes, liefert gemäß Gleichung (6.34) eine Erhöhung der Auflösungsgenauigkeit.

Zur Überprüfung der Regularisierungseigenschaften von AICRA (vgl. Satz 4) wurden auch Rekonstruktionen mit fehlerbehafteten Cauchy-Daten durchgeführt. Hierzu wurden die numerischen Referenzdaten (sowohl die Knotenverschiebungen \mathbf{u}^* als auch die elementweise konstanten Randspannungen \mathbf{t}^*) mit bis zu 10% bzw. 20% synthetisch erzeugtem Rauschen überlagert, das durch Multiplikation mit geeignet skalierten Zufallszahlen simuliert wurde. In beiden Fällen wurden abermals 30 Iterationen mit der Zwei-Rand-Variante von AICRA unter Verwendung von identischen Identifizierungsparametern $p_1 = 0,4$ und $p_2 = 0,3$ ausgeführt. Die Anzahl der falsch detektierten Knoten innerhalb des wahren Risses (von insgesamt 117 in S) und außerhalb (von insgesamt 1132 auf $\Gamma \setminus \bar{S}$) ist in Abbildung 7.7 in Abhängigkeit von der Iterationszahl $2k$ aufgetragen. In beiden Fällen mit fehlerbehafteten Daten ließ sich abermals eine gute Näherung des Rissgebiets $S_\varepsilon^{(2k)}$ bereits nach 6 Iterationen erreichen, wobei nun jedoch durch das Rau-

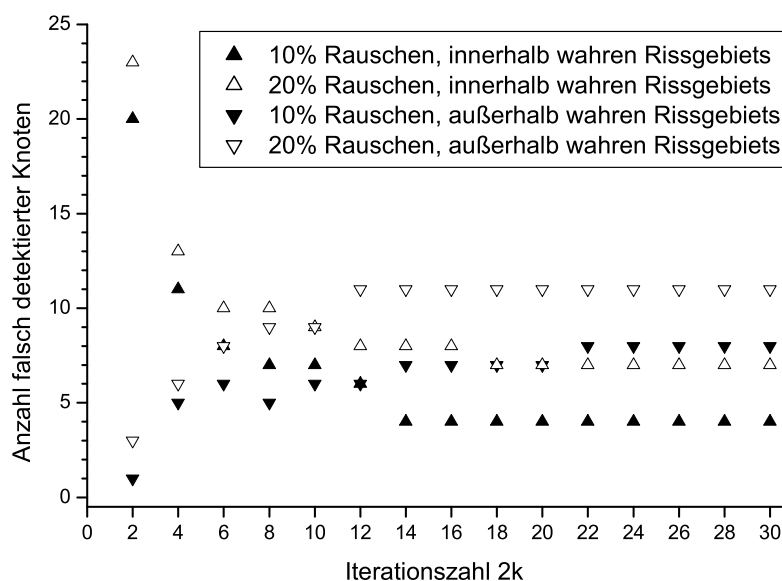


Abbildung 7.7: Anzahl der falsch detektierten Knotenpunkte bei künstlich aufgebrachtem Rauschen in den Cauchy-Daten

sehen in den Randdaten auch nach 30 Iterationen keine erhebliche Verbesserung mehr erreicht werden konnte. Die erhaltenen Ergebnisse demonstrieren jedoch deutlich die sehr guten Regularisierungseigenschaften von AICRA.

7.2.4 Drei-Rand-Variante von AICRA

Im betrachteten Fall wird nun angenommen, dass vollständige Cauchy-Daten nurmehr auf Deck- und Bodenfläche des untersuchten Quaders vorliegen, wohingegen auf den vier Seitenflächen lediglich der als bekannt vorgegebene Randspannungszustand \mathbf{t}^{**} im nicht-alternierenden Teil des Algorithmus verwendet wird. Bei der betrachteten Modellprobe liegen somit nur an ca. 55% der gesamten äußeren Oberfläche vollständige Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ vor. Abermals wurden diese Randdaten direkt aus der im Unterabschnitt 7.2.2 beschriebenen numerischen Referenzlösung entnommen. Die Identifizierungsparameter wurden ebenfalls gemäß Gleichung (7.6) bestimmt, wobei aufgrund der geringeren Informationsmenge am äußeren Rand nun jedoch der Parameter p_2 leicht verkleinert wurde:

$$p_1 = 0,4 \quad \text{und} \quad p_2 = 0,25. \quad (7.9)$$

In Abbildung 7.8 sind die mit der obigen Wahl von $\varepsilon^{(2k)}$ als geschädigt identifizierten Knotenpunkte in der Zwischenfläche Γ nach jeweils 2, 6, 10 und 30 Iterationen dargestellt. Die ausgefüllten Symbole stellen abermals diejenigen Knotenpunkte dar, die

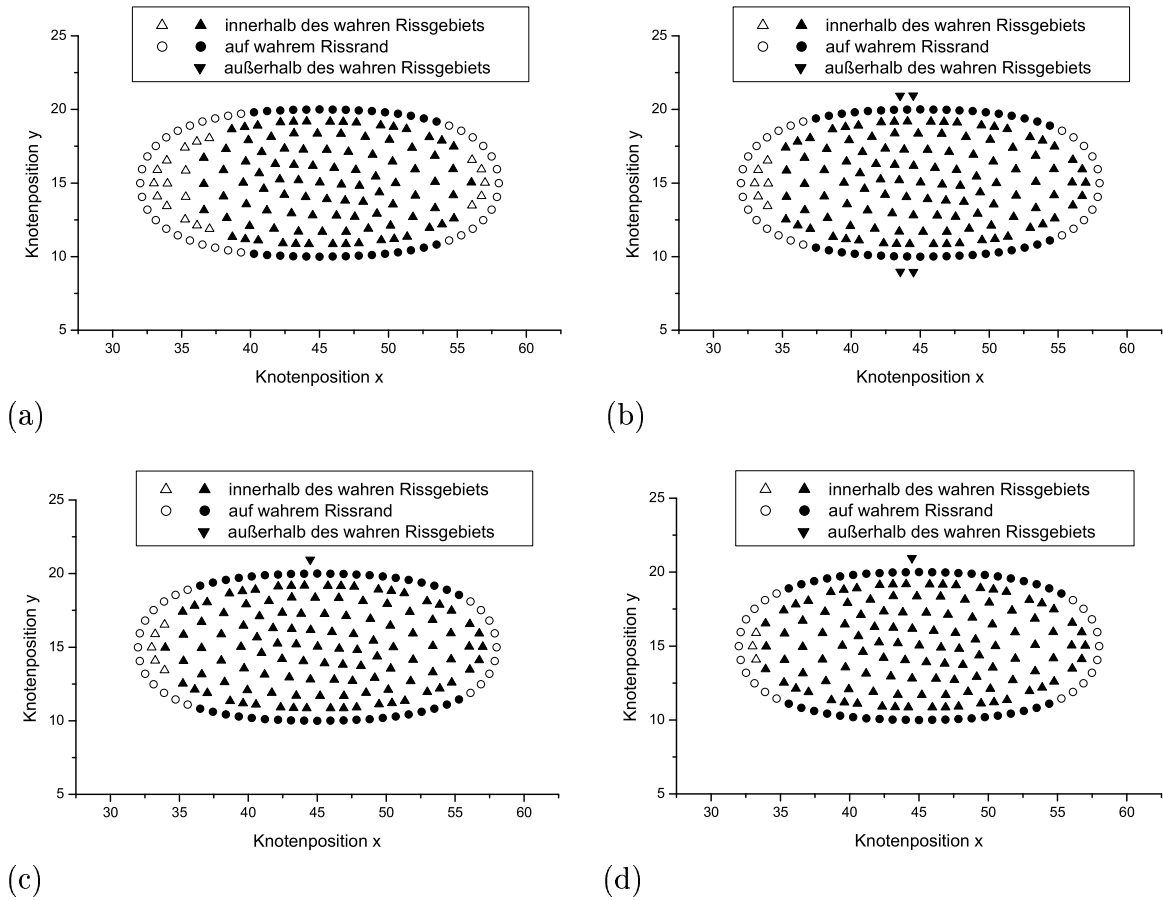


Abbildung 7.8: Bestimmung der Rissknotenpunkte auf Γ mittels der Drei-Rand-Variante von AICRA : (a) nach 2, (b) nach 6, (c) nach 10 und (d) nach 30 Iterationen.

innerhalb des detektierten Rissgebiets liegen, d.h. einen normalen Verschiebungssprung $[u_N] > \varepsilon^{(2k)}$ besitzen. Auch im Falle der Drei-Rand-Variante lässt sich das Rissgebiet bereits nach 6 Iterationen in guter Näherung identifizieren, so dass der numerische Gesamtaufwand weiterhin gering bleibt. Im Unterschied zu den Ergebnissen der Zwei-Rand-Variante werden nun jedoch auch nach 30 Iterationen noch wenige Knoten innerhalb und außerhalb des wahren Rissgebiets fehlerhaft detektiert. Die geringere Informationsmenge am äußeren Rand führt somit wie erwartet zu einer niedrigeren Auflösungsgenauigkeit.

Die Unterschiede in den Ergebnissen der beiden verwendeten Varianten von AICRA werden im folgenden Unterabschnitt noch etwas detaillierter analysiert.

7.2.5 Vergleich und Bewertung

Die Ergebnisse mit beiden Varianten des im Rahmen der vorliegenden Arbeit neu entwickelten Verfahrens AICRA zeigen konvergente Folgen $\{[\mathbf{u}^{(2k)}]\}_{k \geq 1}$ von approximierten Verschiebungssprüngen, wie dies bereits im Unterabschnitt 6.3.4 postuliert wurde. Zur Demonstration des Gesamtkonvergenzverhaltens der verwendeten FEM-Implementierung wurde das gemittelte Fehlerquadrat des normalen Verschiebungssprungs jeder geraden Iterationslösung bezüglich der numerischen Referenzlösung berechnet als:

$$\overline{\Delta[u_N]^2} = \frac{1}{A_\Gamma} \int_\Gamma ([u_N^{(2k)}] - [u_N^{(\text{ref})}])^2 dA \quad , \quad (7.10)$$

wobei A_Γ den Flächeninhalt der Zwischenfläche Γ und $[u_N^{(\text{ref})}]$ den normalen Verschiebungssprung der Referenzlösung bezeichnen.

In Abbildung 7.9 sind die erhaltenen Fehlerwerte in Abhängigkeit von der Iterationszahl $2k$ aufgetragen. Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass aufgrund der größeren Infor-

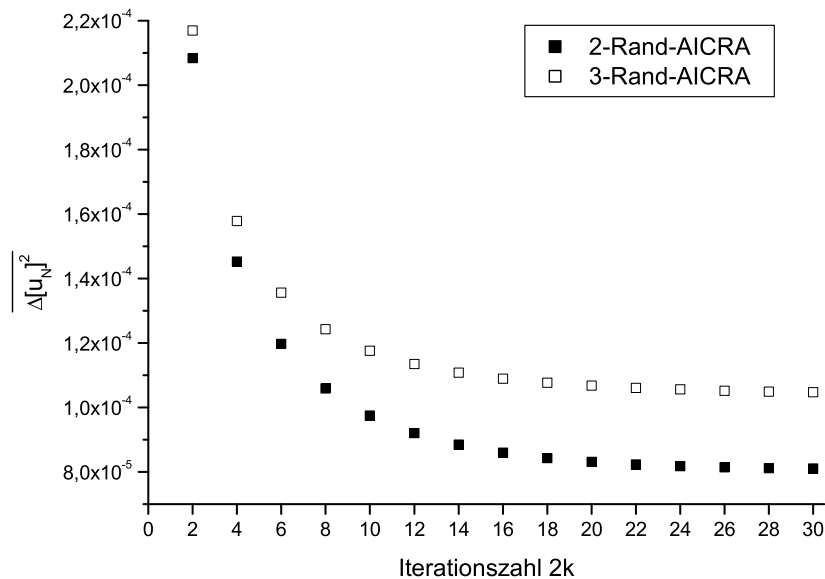


Abbildung 7.9: Gemitteltes Fehlerquadrat $\overline{\Delta[u_N]^2}$ auf der Zwischenfläche Γ

mationsmenge am äußeren Rand der Absolutwert des gemittelten Fehlerquadrats bei Verwendung der Zwei-Rand-Variante von AICRA stets geringer als bei der Drei-Rand-Variante ausfällt. Selbst nach 30 Iterationen liegt der Fehler der Drei-Rand-Variante höher als der entsprechende Wert nach nur 10 Iterationen der Zwei-Rand-Variante. Aus der Abbildung 7.9 kann zudem entnommen werden, dass ab etwa $2k = 20$ nurmehr eine recht geringe absolute Verkleinerung des Konvergenzfehlers bei den nachfolgenden

Iterationen auftritt. Wie bereits in den vorherigen Unterabschnitten erwähnt wurde, sollten somit zunächst nur wenige Iterationen auf einem groben Anfangsnetz erfolgen, um anschließend mit einer entlang der grob detektierten Rissränder verfeinerten Diskretisierung nähere Details des Rissrandes aufzulösen.

Die höhere Absolutkonvergenz der Zwei-Rand-Variante zeigt sich auch bei einer Auftragung der zur Identifikation der Rissgebiete gewählten Fehlerschranke $\varepsilon^{(2k)}$ in Abhängigkeit von der Iterationszahl $2k$ (vgl. Abbildung 7.10). Da die Rissknoten über den norma-

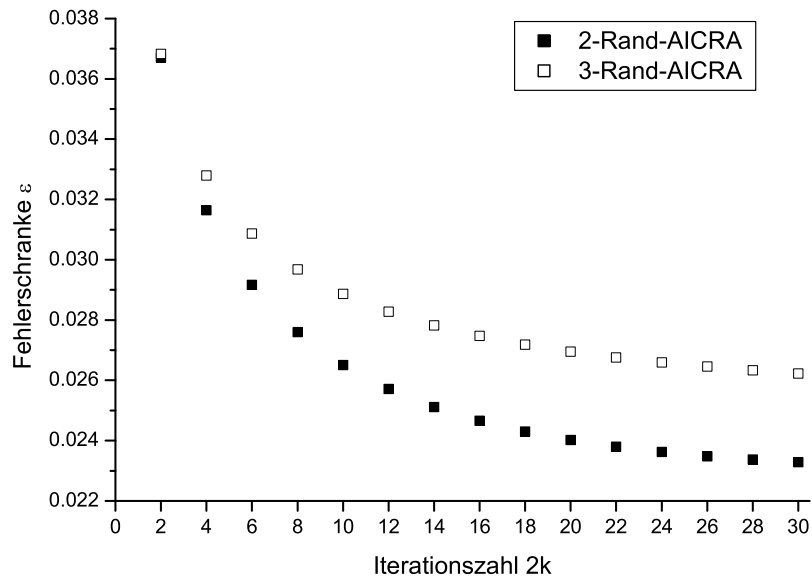
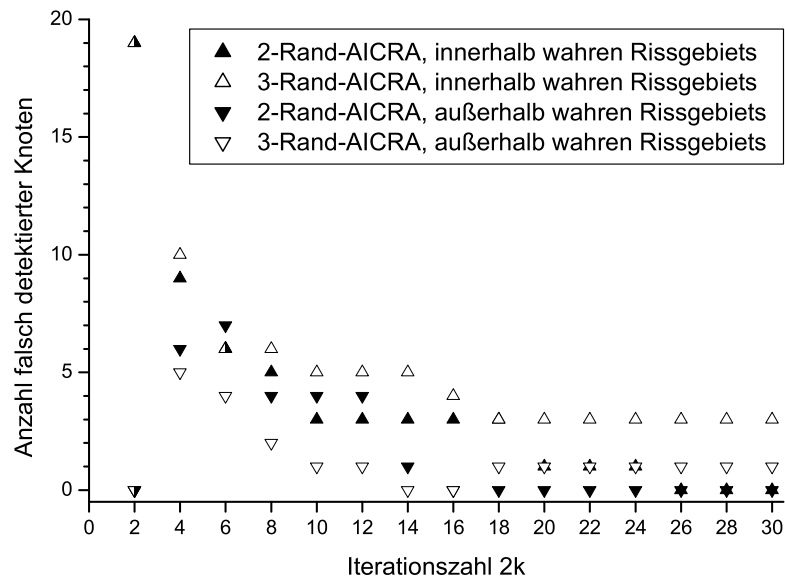


Abbildung 7.10: Gewählte Fehlerschranke $\varepsilon^{(2k)}$

len Verschiebungssprung auf der Zwischenfläche Γ identifiziert werden, lässt sich auch die Fehlerschranke $\varepsilon^{(2k)}$ mit abnehmendem Absolutfehler der Verschiebungslösung auf Γ kleiner wählen. Somit können bei der Zwei-Rand-Variante stets niedrigere Werte für $\varepsilon^{(2k)}$ verwendet werden, wodurch sich schließlich auch eine schnellere Identifikation des korrekten Rissgebiets ergibt.

Abbildung 7.11 stellt das Identifikationsverhalten der beiden Varianten von AICRA mittels der Anzahl der falsch detektierten Knoten innerhalb und außerhalb des wahren Rissgebiets in Abhängigkeit von der Iterationszahl $2k$ dar. Für eine bessere Aussagekraft der angegebenen Absolutwerte sei abermals darauf hingewiesen, dass auf der gesamten Zwischenfläche Γ 1313 Knotenpunkte vorhanden sind, von denen 117 innerhalb des wahren Rissgebiets S und 64 auf dem wahren elliptischen Rissrand liegen. Nach 24 Iterationen mit der Zwei-Rand-Variante werden alle inneren und äußeren Knotenpunkte korrekt detektiert, wohingegen bei der Drei-Rand-Variante auch nach 30 Iterationen noch 4 fehlerhaft detektierte Knoten vorliegen (vgl. auch Abbildung 7.8(d)). Aufgrund

Abbildung 7.11: Anzahl der fehlerhaft detektierten Knotenpunkte auf Γ

des gemäß Gleichung (6.32) steil ansteigenden Rissöffnungsverhaltens bleibt bei beiden Varianten die Anzahl der falsch detektierten Knoten auf dem wahren Rissrand relativ hoch. Durch geeignete Postprozessing-Routinen zur Bestimmung von Risselementen, die aus einer Mindestanzahl an detektierten Rissknoten bestehen, lässt sich dieses Problem jedoch umgehen, weshalb es in der vorliegenden Arbeit nicht weiter berücksichtigt wurde. Zudem kann auch hier durch eine lokale Netzverfeinerung eine höhere Auflösungsgenauigkeit am Rissrand erzielt werden.

Kapitel 8

Quantitative Delaminationsbestimmung mit AICRA

Motiviert durch die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Resultate an homogenen, isotropen Körpern wurde das neu entwickelte Verfahren AICRA schließlich auch zur quantitativen Delaminationsbestimmung an geschichteten Laminaten eingesetzt. Die in den Testrechnungen zunächst verwendete BEM ermöglicht zwar eine bessere Approximation der Randspannungen, eignet sich im Unterschied zur FEM jedoch deutlich schlechter für komplexere Material- und Geometriefälle wie Anisotropie, Inhomogenität oder dünne Schichtungen. Aus diesem Grund wird im Folgenden ausschließlich eine erweiterte FEM-Implementierung mit dem kommerziellen Programm ANSYS 5.6 benutzt. Es wird stets die Delaminationsaufgabe aus Unterabschnitt 5.3.1 betrachtet, bei der ein oder mehrere Delaminationsgebiete S in einer a priori bekannten Zwischenfläche Γ eines geschichteten Laminats vorhanden sind.

8.1 Anpassung des Verfahrens AICRA

In Abschnitt 6.3 wurde das neue Verfahren AICRA bereits für das Modellproblem aus Unterabschnitt 5.3.2 beschrieben. Da bei der Anwendung zur Delaminationsbestimmung in geschichteten Verbundwerkstoffen die beiden Teilgebiete oberhalb und unterhalb des geschädigten Interfaces nun nurmehr schichtweise homogen und zudem unterschiedlich anisotrop sind, musste das Verfahren jedoch entsprechend modifiziert werden. Das angepasste iterative Schema der Zwei-Rand-Variante von AICRA ergibt sich dadurch wie folgt:

- (1) Wahl einer geeigneten Anfangslösung $\mathbf{u}_p^{(0)} = \mathbf{u}_q^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}$ auf Γ . Hier wird in Analogie zu Unterabschnitt 6.3.3 ebenfalls die Lösung des ungeschädigten Laminats unter der gleichen äußeren Prüfbelastung gewählt.

- (2) Beginnend mit $k = 1$, Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i^{(2k-1)} - \mathbf{u}_j^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i^{(2k-1)} - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathbf{u}_p^{(2k-1)} &= \mathbf{u}_p^{(2k-2)} && \text{auf } \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_i, \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, p\},
\end{aligned} \tag{8.1}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i^{(2k-1)} - \mathbf{u}_j^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i^{(2k-1)} - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j^{(2k-1)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathbf{u}_q^{(2k-1)} &= \mathbf{u}_q^{(2k-2)} && \text{auf } \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_i^{(2k-1)} &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_i, \quad \text{mit } i \in \{q, \dots, N\},
\end{aligned} \tag{8.2}$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_p^{(2k-1)}$ und $\mathbf{u}_q^{(2k-1)}$ sowie von $\mathbf{t}_p^{(2k-1)} = \mathcal{T}_p(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_p^{(2k-1)}|_{\Gamma}$ und $\mathbf{t}_q^{(2k-1)} = \mathcal{T}_q(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_q^{(2k-1)}|_{\Gamma}$.

- (3) Nach Erhalten der Approximationen $\mathbf{u}_p^{(2k-1)}$ und $\mathbf{u}_q^{(2k-1)}$ Lösung der zwei gemischten, gut gestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i \mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i^{(2k)} - \mathbf{u}_j^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i^{(2k)} - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
\mathcal{T}_p(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_p^{(2k)} &= \mathbf{t}_p^{(2k-1)} && \text{auf } \Gamma, \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, p\},
\end{aligned} \tag{8.3}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i \mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i^{(2k)} - \mathbf{u}_j^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i^{(2k)} - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j^{(2k)} &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij} \setminus \Gamma, \\
\mathbf{u}_i^{(2k)} &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
\mathcal{T}_q(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_q^{(2k)} &= \mathbf{t}_q^{(2k-1)} && \text{auf } \Gamma, \quad \text{mit } i \in \{q, \dots, N\},
\end{aligned} \tag{8.4}$$

zur Berechnung von $\mathbf{u}_p^{(2k)}$ und $\mathbf{u}_q^{(2k)}$ sowie von $\mathbf{t}_p^{(2k)} = \mathcal{T}_p(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_p^{(2k)}|_{\Gamma}$ und $\mathbf{t}_q^{(2k)} = \mathcal{T}_q(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_q^{(2k)}|_{\Gamma}$.

- (4) Berechnung des approximierten Verschiebungssprungs $[\mathbf{u}^{(2k)}]_{\Gamma} = \mathbf{u}_p^{(2k)}|_{\Gamma} - \mathbf{u}_q^{(2k)}|_{\Gamma}$ über das Interface Γ unter Verwendung der Näherungslösungen $\mathbf{u}_p^{(2k)}$ und $\mathbf{u}_q^{(2k)}$.
- (5) Definition der approximierten Rissflächen $S_{\varepsilon}^{(2k)} \subset \Gamma$ durch Einführung eines kleinen Parameters $\varepsilon^{(2k)} > 0$ und Setzen von:

$$S_{\varepsilon}^{(2k)} = \{ \mathbf{x} \in \Gamma : [\mathbf{u}^{(2k)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N} > \varepsilon^{(2k)} \} . \quad (8.5)$$

- (6) Wiederholung der Schritte (2) bis (5) für $k \geq 2$, bis ein gegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Hierbei wurden jeweils die Bezeichnungen aus dem in Unterabschnitt 5.3.1 definierten Delaminationsproblem verwendet. In weitestgehender Analogie wurde auch die Drei-Rand-Variante von AICRA an diese Delaminationsaufgabe angepasst.

Die in Unterabschnitt 6.3.2 für das Modellproblem aus Unterabschnitt 5.3.2 erhaltenen Konvergenz- und Regularisierungseigenschaften sind für das Delaminationsproblem neu zu zeigen, da nun im Allgemeinen auf beiden Seiten des Interfaces nicht mehr ein gleichartig homogenes Material vorliegt. Die in [69] hierzu ausgeführten Beweisführungen sind für den betrachteten Fall von schichtweise homogenen, aber unterschiedlich anisotropen Gebieten noch zu übertragen. Hierbei sind jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten zu erwarten, da die geforderten Voraussetzungen für die äußeren Randdaten ($\mathbf{u}^* \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $\mathbf{t}^* \in H^{-1/2}(\Gamma_i)$) weiterhin als erfüllt angenommen werden können und somit auch die Lösung des geschichtet anisotropen Falles \mathbf{u}_i in $H^1(\Omega_i)$ liegt. Durch Anwendung des Spursatzes gilt für die Lösung am Rand Γ somit abermals $\mathbf{u}_i|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Da zudem weiterhin die Lage des geschädigten Interfaces Γ als a priori bekannt vorausgesetzt wird, lässt sich auch die Delaminationsaufgabe in zwei separate Cauchy-Probleme für die beiden Teilkörper oberhalb und unterhalb von Γ aufteilen. Wird wiederum angenommen, dass sich alle im betrachteten Interface Γ (mit Normalenvektor \mathbf{N}) enthaltenen Delaminationen unter der äußeren Prüflast vollständig in Normalenrichtung öffnen,

$$[u_N(\mathbf{x})] := (\mathbf{u}_p(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_q(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad (8.6)$$

so lassen sich die Delaminationsgebiete dann offensichtlich ebenfalls durch die Bestimmung des Trägers des normalen Verschiebungssprungs über das Interface hinweg eindeutig ermitteln (vgl. Gleichung (6.17)).

Bei unterschiedlich anisotropem Materialverhalten in den beiden rissnahen Laminatschichten Ω_p und Ω_q (vgl. Abbildung 5.1) treten in dem verwendeten, rein linear-elastischen Modell mit randspannungs- und reibungsfreien Delaminationsflächen oszillierende Verschiebungslösungen in der Nähe der Delaminationsfront auf [28, 36]. Da es sich hierbei jedoch um rein mathematische Artefakte handelt, die sich aus der vereinfachten Modellierung ergeben, seien diese im Rahmen der vorliegenden Arbeit vernachlässigt, zumal ihr Einfluss auf die Delaminationsdetektion selbst als gering abzuschätzen ist. Es

wird also im Folgenden stets nur der Realteil des Singulärexponenten betrachtet, wobei für den Singulärteil $[u_N]^S$ des normalen Verschiebungssprungs im Abstand r von der Delaminationsfront weiterhin angenommen wird [36]:

$$[u_N]^S \propto r^\beta \quad \text{mit:} \quad \Re(\beta) = 1/2 . \quad (8.7)$$

Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen von DIMITROV [33], der durch numerische Berechnung der Singulärexponenten bei Rissen zwischen unterschiedlich orthotropen Schichten zeigen konnte, dass am Rissrand von real gewachsenen Rissen stets ein Singulärexponent mit Realteil $1/2$ vorliegt. Unter diesen Annahmen lassen sich somit die Sätze und Beweisführungen aus Abschnitt 6.3 übertragen. Hierzu sind jedoch noch rigore mathematische Ableitungen nötig, die Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein werden.

Im Folgenden ist eine Auswahl typischer Rekonstruktionsergebnisse mit dem angepassten Verfahren AICRA an Proben mit Rand- oder inneren Delaminationen in symmetrischen und asymmetrischen Schichtfolgen dargestellt.

8.2 Ergebnisse an ausgewählten Schichtfolgen

Zunächst wurde der Fall von Delaminationen in der Mittellage von symmetrisch geschichteten Laminaten untersucht. Eine skizzenhafte Darstellung der verwendeten 8-schichtigen Modellproben zeigt Abbildung 8.1, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur das geschädigte Interface Γ eingezeichnet ist.

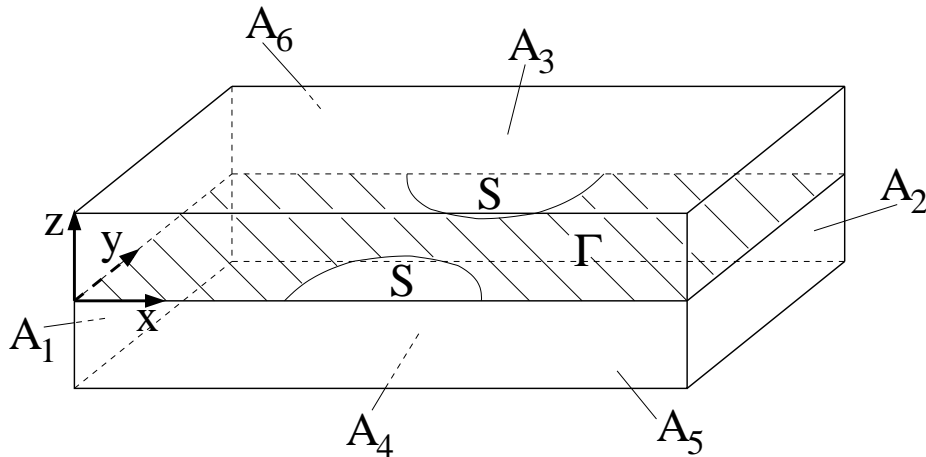


Abbildung 8.1: Geometrie der verwendeten Modellprobe zur quantitativen Delaminationsbestimmung

Die ebene Zugbelastung wurde in den FEM-Berechnungen durch folgende Randbedingungen approximiert:

$$\mathbf{u}^* = (0, 0, 0)^T \text{ auf } A_1 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : x = 0\} , \quad (8.8)$$

$$\mathbf{t}^* = (5,68, 0, 0)^T \text{MPa auf } A_2 = \{(x, y, z)^T \in \partial\Omega : x = 60 \text{ mm}\} . \quad (8.9)$$

Durch diese ebenfalls symmetrische Zugbelastung vereinfacht sich die konkrete Rekonstruktionsberechnung durch Ausnutzung von Symmetrierandbedingungen, so dass gilt:

$$[u_N^{(2k)}] = 2\mathbf{u}_p^{(2k)} \cdot \mathbf{e}_z . \quad (8.10)$$

Es liegt hier auch experimentell ein besonders günstiger Fall vor, da sich bei dünnen derartigen Laminaten aus Symmetriegründen nur in der Umgebung von delaminierten Gebieten eine Aufwölbung der Probenoberfläche ergibt (vgl. Abschnitt 1.2).

Zunächst wurden die Rekonstruktionen mit numerisch erhaltenen Referenzdaten durchgeführt, wobei für die Simulation des Laminatverhaltens das im Abschnitt 2.3 beschriebene FEM-Modell mit den Materialdaten aus Tabelle 2.2 verwendet wurde. Da das Verfahren AICRA auch bei künstlich aufgebrauchten Fehlerwerten ein weiterhin sehr gutes Konvergenzverhalten zeigte, wurden daneben auch shearografisch gemessene Oberflächendaten eingesetzt, die mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Versuchsaufbau und Auswertungsalgorithmus erzielt wurden.

8.2.1 Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$

Die Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ gehört zur Gruppe der quasiisotropen Lamine, die auch in der Praxis sehr häufig Verwendung finden. Es wird der Fall zweier halbelliptischer Delaminationsgebiete, mit den Halbachsen $a = 10$ mm und $b = 5$ mm, in der Symmetrieebene am oberen und unteren Probenrand betrachtet (vgl. Abbildung 8.1). Als Referenzdaten an der äußeren Oberfläche wurden zunächst numerische Simulationsdaten verwendet, bei denen der Delaminationsbereich als randspannungsfreier Rand vorgegeben war (vgl. auch Abschnitt 4.5). Um die Praxistauglichkeit des Rekonstruktionsverfahrens zu demonstrieren, wurde vorwiegend die Drei-Rand-Variante von AICRA eingesetzt, bei der nur an den Teilflächen A_1 bis A_4 (vgl. Abbildung 8.1) vollständige Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ durch Einspannungsrandbedingungen bzw. shearografische Messungen der Oberflächendeformation vorgegeben wurden. Zunächst wurden simulierte Messdaten verwendet, bei denen die Verschiebungsranddaten der numerischen Referenzlösung an den Oberflächen A_3 und A_4 durch Multiplikation mit geeignet skalierten Zufallszahlen mit einem künstlichen Rauschen von jeweils 5% versehen wurden. Das zugehörige Rekonstruktionsergebnis nach zwei Iterationen ist in Abbildung 8.2(c) gezeigt. Wird als identifizierende Fehlerschranke

$$\varepsilon^{(2k)} = p[u_N^{(2k)}]_{\max} , \quad (8.11)$$

mit

$$p = 0,07 \quad \text{und} \quad [u_N^{(2k)}]_{\max} := \max_{\mathbf{x}_i \in \Gamma} [u_N^{(2k)}(\mathbf{x}_i)] , \quad (8.12)$$

gewählt, so lassen sich alle innerhalb und außerhalb des wahren Rissgebiets liegenden Knotenpunkte \mathbf{x}_i korrekt detektieren.

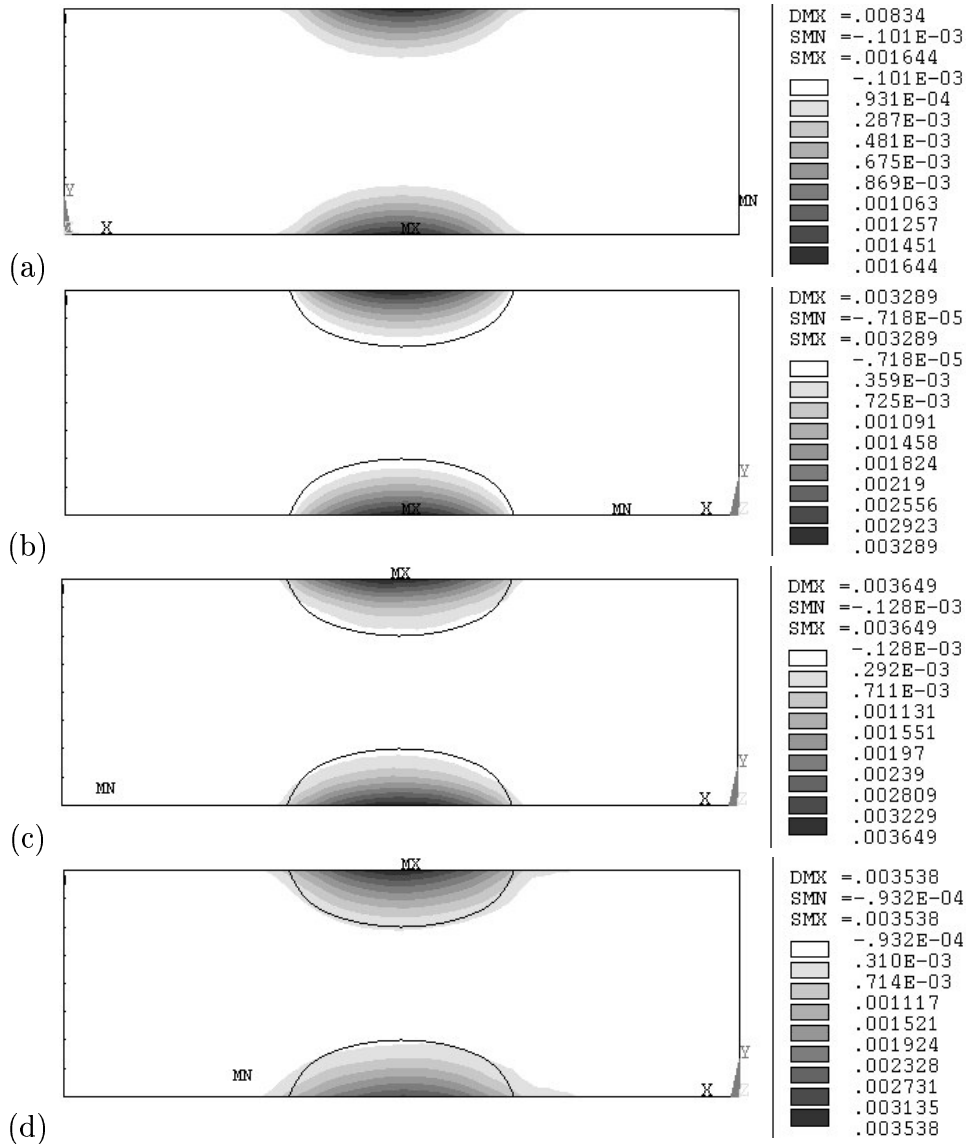


Abbildung 8.2: Rekonstruktion des Verschiebungssprungs $[u_N]_{\Gamma}$ mittels FEM-Implementierung von AICRA: (a) Referenzlösung u_z an äußerer Oberfläche, (b) Referenzsprung $[u_N^{(ref)}]$ im Interface Γ , (c) Rekonstruierter Sprung $[u_N^{(2)}]$ aus Drei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen), (d) $[u_N^{(4)}]$ aus Drei-Rand-AICRA mit experimentellen Daten

Aufgrund der ausgezeichneten Rekonstruktionsergebnisse nach nur zwei Iterationen wurden zudem auch shearografisch gemessene Daten für die *Out-of-plane*-Verschiebung u_z als Randbedingungen an der Deckfläche vorgegeben. Wegen der bereits in Abschnitt 4.5 gezeigten guten Übereinstimmung zwischen den experimentellen und numerischen Verschiebungsdaten konnten hierbei die experimentellen Daten ohne Skalierungsfaktoren direkt übernommen werden, da an Proben mit ebenfalls vierfacher Einzelschichtdicke $d_L = 4d_1$ gemessen wurde. Ein Vergleich der Normalverschiebungsfelder an der Deckfläche zwischen Simulation und Experiment ist bereits in Abbildung 4.5 veranschaulicht.

Innerhalb des shearografischen Messbereichs, der ca. die mittleren 60% des abgebildeten Oberflächenausschnitts umfasst, wurde ausschließlich die experimentell gemessene *Out-of-plane*-Komponente u_z als Verschiebungsrinddaten vorgegeben. Außerhalb dieses Messbereichs wurden an der Deckfläche die simulierten Daten der delaminationsfreien Nulllösung mit abermals 5% synthetischem Rauschen verwendet.

Das mit der Drei-Rand-Variante von AICRA erhaltene Rekonstruktionsergebnis im Interface Γ nach vier Iterationen ist in Abbildung 8.2(d) dargestellt. Die Ergebnisse in beiden Delaminationsbereichen zeigen in guter Näherung Halbellipsen mit den korrekten Halbachsenwerten, die jedoch jeweils um ca. 0,7 mm in negative y -Richtung verschoben sind. Dadurch wird das obere Delaminationsgebiet zu groß und das untere Delaminationsgebiet entsprechend zu klein detektiert. Diese Abweichungen der Delaminationsgebiete sind jedoch mit hoher Wahrscheinlichkeit auf herstellungsbedingte Fehler zurückzuführen, da erst beim Aussägen der Zugprobe aus der Laminatplatte zwei vollelliptische Teflonfolien in die beiden Halbellipsen am Rand unterteilt werden. Die Positionierungsgenauigkeit ließ sich bei dieser Art der Probenherstellung jedoch nicht auf Toleranzen von unter 1 mm senken. Im Rahmen der Herstellungsfehler ergibt sich somit ebenfalls eine gute Rekonstruktion der Delaminationsgebiete auch bei Verwendung von rein experimentellen Verschiebungsdaten in z -Richtung.

Um die Eignung des Rekonstruktionsalgorithmus auch für dickere Lamine zu demonstrieren, wurden zudem auch numerische Modelle mit $d_L = 16d_1$ untersucht. Wie bereits im Abschnitt 4.5 erwähnt, ließen sich in der am Institut vorhandenen Autoklav-Pressen jedoch keine derartigen Lamine mit insgesamt 128 Einzelschichten herstellen. Wegen der oben erwähnten Positionierungsprobleme der Teflonfolie eignen sich numerische Simulationsdaten zudem deutlich besser für die Untersuchung der Auflösungs-genauigkeit des Verfahrens AICRA. Um typische experimentelle Fehler zu simulieren, wurde auf die numerischen Referenzdaten wieder ein synthetisches Rauschen von 5% aufgebracht. Die erhaltenen Rekonstruktionsergebnisse sind in Abbildung 8.3 dargestellt. Anhand der Referenzlösung am äußeren Rand ist gut zu erkennen, dass wegen der erhöhten Einzelschichtdicke auch die signifikante Aufwölbung am äußeren Rand flacher und breiter wird, so dass nicht mehr direkt auf die darunter liegende Delaminationsform rückgeschlossen werden kann. Bei dieser Dicke kommt nun auch die Leistungsfähigkeit des Verfahrens AICRA deutlicher zum Vorschein, da trotz des synthetischen Rauschens am äußeren Rand und sogar unter Verwendung der Drei-Rand-Variante, d.h. ohne vollständige Kenntnis der überbestimmten Randdaten \mathbf{u}^* und \mathbf{t}^* am gesamten äußeren Rand, ein sehr gutes Rekonstruktionsergebnis weiterhin schon nach wenigen Iterationen erzielt wurde.

Zur besseren Vergleichbarkeit der drei Teiluntersuchungen an der symmetrischen Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ sind in Abbildung 8.4 die über das gesamte Delaminationsinterface Γ (mit Flächeninhalt A_Γ) gemittelten quadratischen Fehlerabweichungen des rekonstruierten Verschiebungssprungs zur numerischen Referenzlösung aufgetragen:

$$\overline{\Delta[u_N]^2} = \frac{1}{A_\Gamma} \int_{\Gamma} ([u_N^{(2k)}] - [u_N^{(\text{ref})}])^2 dA \quad . \quad (8.13)$$

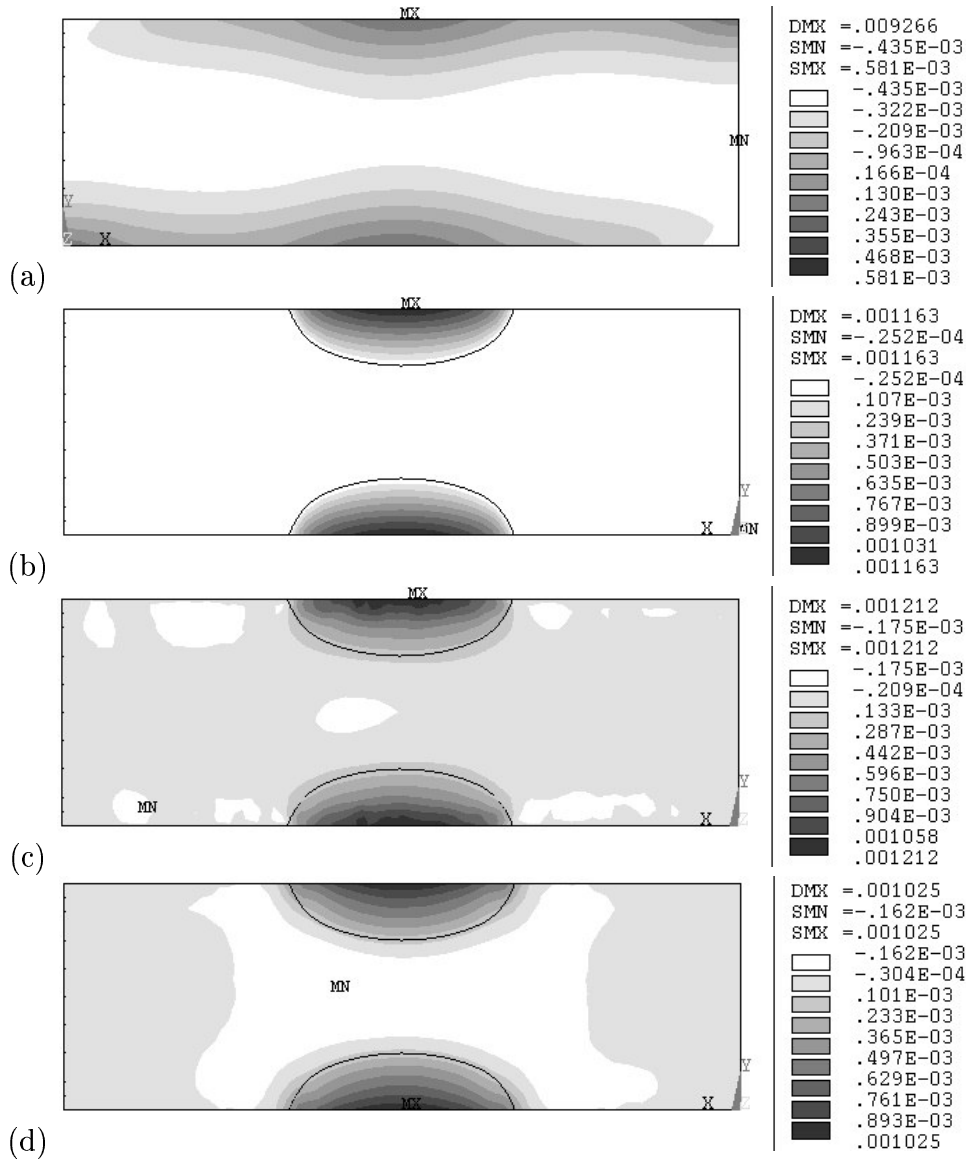


Abbildung 8.3: Rekonstruktion des Verschiebungssprungs $[u_N]_\Gamma$ am Laminat $[\pm 45, 0, 90, T]_S$ mit $d_L = 16d_1$: (a) Referenzlösung u_z an äußerer Oberfläche, (b) Referenzsprung $[u_N^{(\text{ref})}]$ im Interface Γ , (c) Rekonstruierter Sprung $[u_N^{(4)}]$ aus Zwei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen), (d) $[u_N^{(4)}]$ aus Drei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen)

Hierin zeigt sich, dass bei zunehmender Einzelschichtdicke auch der Rekonstruktionsfehler des Verschiebungssprungs zunimmt, was durch den entsprechend höheren Informationsverlust, vom inneren Schaden zur äußeren Randverschiebung hin, erklärt werden kann. Die deutlich stärkeren Fehler bei den experimentellen Daten sind jedoch vorwiegend auf die oben beschriebenen Herstellungsfehler zurückzuführen, da die Referenzlösung $[u_N^{(\text{ref})}]$ ja für den theoretisch vorgegebenen Fall zweier identischer Halbellipsen bestimmt wurde.

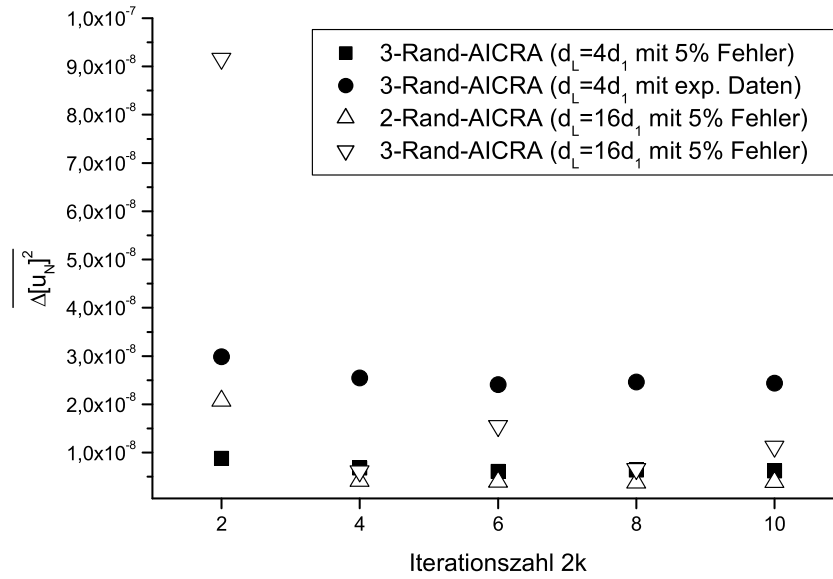


Abbildung 8.4: Gemittelttes Fehlerquadrat $\overline{\Delta[u_N]^2}$ der Rekonstruktionslösung $[u_N^{(2k)}]$ auf dem Interface Γ bei der Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T]_S$

Da die Positionierungsgenauigkeit der vorgegebenen Schädigung bei der Herstellung der experimentellen Proben sich als deutlich schlechter im Vergleich zur Auflösungsgenauigkeit des neu entwickelten Verfahrens AICRA herausstellte, werden im Folgenden ausschließlich simulierte Messdaten als äußere Randdaten verwendet, die aus der numerischen Referenzlösung durch die Addition synthetischer Fehlerwerte erhalten wurden. Erst mit diesen Randwerten lassen sich präzise Güteaussagen über die Rekonstruktionseigenschaften von AICRA gewinnen, wobei durch die im Abschnitt 4.5 gezeigte gute Übereinstimmung zwischen den experimentell und numerisch erhaltenen Verschiebungsfeldern ein derartiges Vorgehen zudem als zulässig erscheint.

8.2.2 Schichtfolge $[90, \pm 45, 0, T]_S$

Neben den schon in der Arbeit von KLUMPP [66] ausführlich behandelten Randdelaminationen wurden auch Laminatschichtungen untersucht, die unter ebener Zugbelastung die Öffnung von inneren Delaminationsgebieten ermöglichen. Über das in Abschnitt 1.2 beschriebene einfache Querkontraktionsmodell wurde die Schichtfolge $[90, \pm 45, 0, T]_S$ als geeignet ausgewählt, die auch bei numerischen Testrechnungen eine Öffnung von inneren elliptischen Delaminationsgebieten aufzeigte.

Da derartige innere Schädigungen jedoch im Gegensatz zu den vorher betrachteten Randdelaminationen wegen der konvexen Oberflächenkrümmung geringere Schälspannungs-

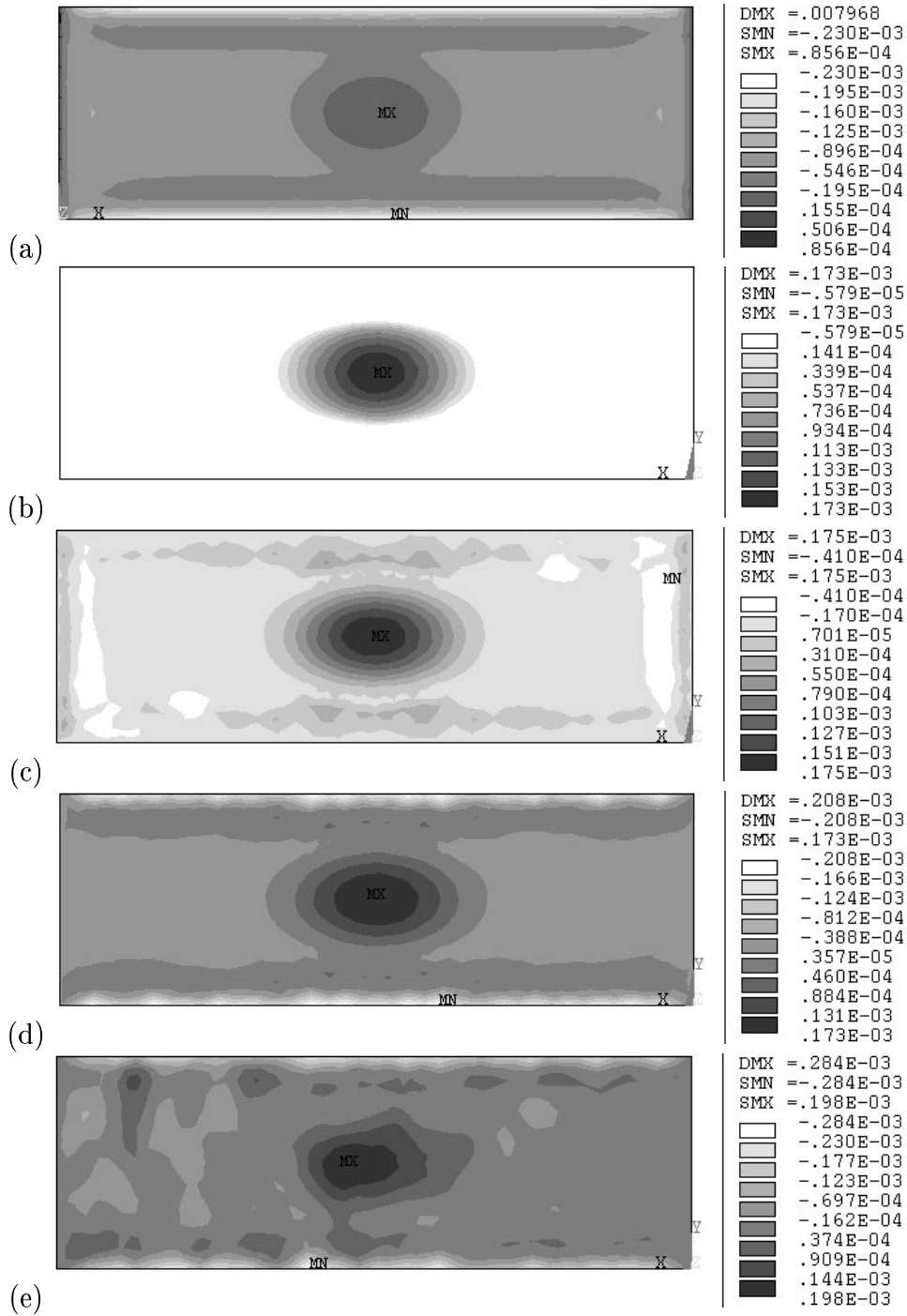


Abbildung 8.5: Rekonstruktion des Verschiebungssprungs $[u_N]_{\Gamma}$: (a) Referenzlösung u_z an äußerer Oberfläche, (b) Referenzsprung $[u_N^{(\text{ref})}]$ im Interface Γ , (c) Rekonstruierter Sprung $[u_N^{(4)}]$ aus Zwei-Rand-AICRA (mit 0% Rauschen), (d) $[u_N^{(4)}]$ aus Drei-Rand-AICRA (mit 0% Rauschen), (e) $[u_N^{(4)}]$ aus Drei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen)

werte in z -Richtung aufweisen, fielen auch die Absolutwerte der Rissöffnung bei identischer Zugbelastung $\sigma_{xx} = 5,68$ MPa um mehr als eine Größenordnung geringer aus. Bei den experimentellen Untersuchungen an definiert vorgeschädigten Laminaten konnte keine relevante Oberflächenverschiebung in *Out-of-plane*-Richtung gemessen werden. Auch bei erhöhter Prüfbelastung, vergrößertem Scherabstand oder Scherung in x -Richtung ließen sich keine geeigneten Deformationsdaten bestimmen. Dieses unerwartete Verhalten ist wohl hauptsächlich auf die endliche Dicke der zur Schädigungsvorgabe einlaminierten Teflonfolie zurückzuführen, die bei der deutlich reduzierten Größenordnung des Öffnungseffekts einen stärkeren Einfluss besitzt. Derartige Proben erscheinen somit für die zur Prüfung gewählte ebene Zugbelastung als weniger geeignet, wurden aber dennoch numerisch ausgewertet, um das Verhalten von AICRA in kritischen Detektionsfällen zu untersuchen.

Wie den Ergebnissen in Abbildung 8.5 entnommen werden kann, lieferten beide Varianten von AICRA mit reinen synthetischen Randdaten gute Rekonstruktionsergebnisse (vgl. Teilbilder (c) und (d)). Wegen der geringen Öffnung des Delaminationsgebiets zeigten sich bei diesen inneren Delaminationen nun auch erstmals signifikante Abweichungen bei den mit 5% zusätzlichem Rauschen gestörten Rekonstruktionen der Drei-Rand-Variante (vgl. Teilbild 8.5(e)). Angesichts der Tatsache, dass sich an Proben dieser Schichtfolgen unter der gewählten ebenen Zugbelastung experimentell keinerlei Messdaten erzielen ließen, kann die mittels AICRA erreichte Auflösung jedoch weiterhin als gut bezeichnet werden.

8.2.3 Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T, 90, 0, \mp 30]$

Um die Eignung des Verfahrens AICRA für allgemeinere Laminatschichtungen zu verifizieren, wurden schließlich auch Delaminationen in asymmetrischen Schichtfolgen untersucht. Aufgrund der bei den zuvor betrachteten symmetrischen Laminaten aufgetretenen Positionierungsprobleme der künstlichen Schädigung wurde bei diesen Beispielen auf die experimentelle Realisierung verzichtet. Somit wurden hier ausschließlich numerische Referenzergebnisse als äußere Randdaten verwendet, die wie zuvor mittels FEM-Simulation erhalten wurden. Da weiterhin möglichst praxisnahe Prüfbedingungen angestrebt waren, wurden sämtliche Rekonstruktionen an einem Modell mit achtfacher Einzelschichtdicke $d_L = 8d_1$ durchgeführt. Als prüfende Zugbelastung wurde $\sigma_{xx} = 5,68$ MPa verwendet.

Analog zu den Versuchen an symmetrischen Schichtfolgen wurden auch hier bei der Drei-Rand-Variante von AICRA die vollständigen Cauchy-Daten $(\mathbf{u}^*, \mathbf{t}^*)$ nur an den äußeren Teilflächen A_1 bis A_4 (vgl. Abbildung 8.1) vorgegeben. Zudem wurden die Verschiebungsdaten an den auch shearografisch leicht zugänglichen Rändern A_3 und A_4 stets mit 5% synthetischem Rauschen überlagert.

In Abbildung 8.6 sind die Ergebnisse an der Schichtfolge $[\pm 45, 0, 90, T, 90, 0, \mp 30]$ dargestellt. Abermals lässt sich das gute Konvergenzverhalten des Verfahrens AICRA un-

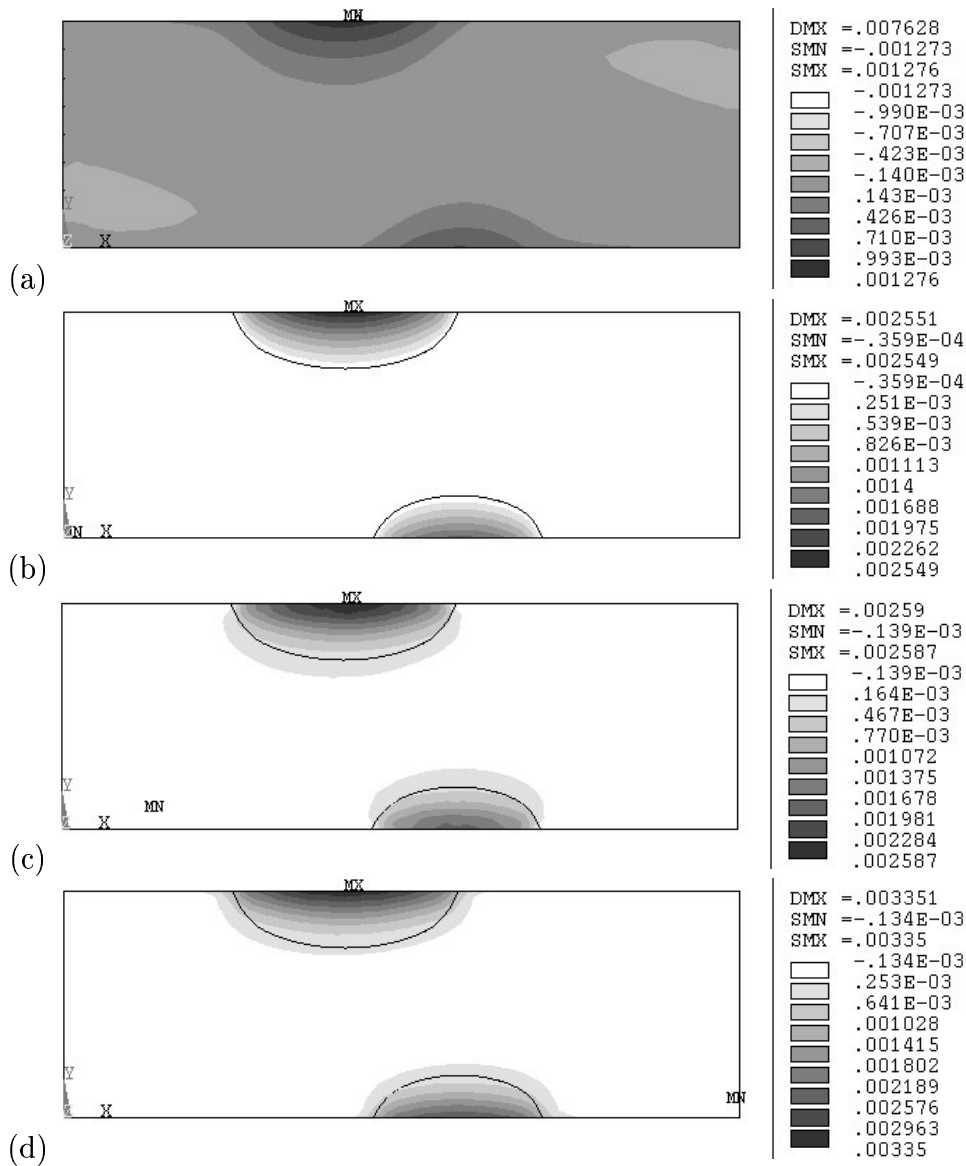


Abbildung 8.6: Rekonstruktion des Verschiebungssprungs $[u_N]|_{\Gamma}$ am asymmetrischen Laminat $[\pm 45, 0, 90, T, 90, 0, \mp 30]$ mit jeweils 8-facher Einzelschichtdicke: (a) Referenzlösung u_z an äußerer Oberfläche, (b) Referenzsprung $[u_N^{(ref)}]$ im Interface Γ , (c) Rekonstruierter Sprung $[u_N^{(2)}]$ aus Zwei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen), (d) $[u_N^{(2)}]$ aus Drei-Rand-AICRA (mit 5% Rauschen)

mittelbar aus den gezeigten Grauwertdarstellungen entnehmen. Die asymmetrisch gelegenen und unterschiedlich großen Randdelaminationsgebiete werden beide in sehr guter Näherung bereits nach zwei Iterationen erfasst. Somit konnte auch für den Fall einer asymmetrischen Laminatschichtung die Eignung des propagierten Verfahrens AICRA exemplarisch gezeigt werden.

8.3 Erweiterungsmöglichkeiten von AICRA

Bei allen in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Riss- und Delaminationsbestimmungen wurde stets die Lage des geschädigten Interfaces Γ als a priori bekannt vorausgesetzt, da andernfalls die erforderlichen Eindeutigkeits- und Regularitätseigenschaften nicht gezeigt werden konnten (vgl. Unterabschnitt 6.3.2). Wird die Kenntnis der Interfacelage nicht mehr als bekannt vorausgesetzt, ergeben sich zusätzliche Probleme hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösung. So ist es etwa denkbar, dass ein oberflächennaher, kleinerer Riss ähnliche Auswirkungen an der äußeren Oberfläche verursacht wie ein größerer, tiefer liegender Riss. Einen geeigneten Ausweg bieten zusätzliche Messungen unter unterschiedlich gerichteter äußerer Belastung, die eine Unterscheidung der beiden Risslokalisationen ermöglichen können. Für beliebig geartete Rekonstruktionsverfahren gilt jedoch grundsätzlich, dass nur solche Risse eindeutig aus einer begrenzten Anzahl an Messungen bestimmt werden können, die unter den zugehörigen Belastungen ein eindeutiges Verformungsfeld an der äußeren Oberfläche hervorrufen. Hierzu müssen in zukünftigen Forschungsarbeiten detaillierte mathematische Untersuchungen angestellt werden.

Als eine naheliegende Erweiterungsmöglichkeit des neuen Verfahrens AICRA soll der folgende, verallgemeinerte Delaminationsfall betrachtet werden, bei dem a priori die Lage von *mehreren* Interfaces bekannt ist, in denen Delaminationen vermutet werden. Dieser allgemeinere Fall lässt sich mathematisch wie folgt beschreiben:

Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (s. Abbildung 8.7) mit äußerem Rand $\partial\Omega$, das aus N Lipschitz-Teilgebieten (entsprechend den Laminatschichten) besteht, die jeweils ein unterschiedlich anisotropes, linear-elastisches Materialverhalten aufweisen: $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. Die äußeren Ränder dieser Teilgebiete seien wie in Unterabschnitt 5.3.1 mit Γ_i und die Zwischenränder mit $\Gamma_{ij} := \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ bezeichnet. Mehrere dieser interlaminaren Zwischenflächen seien nun jedoch als möglicherweise geschädigte Interfaces Γ_{ij}^D a priori bekannt, in denen jeweils ein oder mehrere Delaminationsgebiete S_{ij} vorhanden sein können. Auf dem äußeren Rand $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ seien weiterhin Verschiebungen \mathbf{u}^* (durch Belastung oder shearografische Messungen) sowie Randspannungen \mathbf{t}^* (durch Belastungsbedingungen) bekannt.

Gesucht sind nun sämtliche Delaminationsgebiete S_{ij} auf den geschädigten Interfaces Γ_{ij}^D aus:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_i \mathbf{u}_i &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega_i, \\
 \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
 \mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_i &= \mathbf{t}^* && \text{auf } \Gamma_i, \\
 \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij}^{(D)} \setminus S_{ij}, \\
 \mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i - \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_{ij}^{(D)} \setminus S_{ij}, \\
 \mathcal{T}_i(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_i = \mathcal{T}_j(\nabla, \mathbf{N}) \mathbf{u}_j &= \mathbf{0} && \text{auf } S_{ij},
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

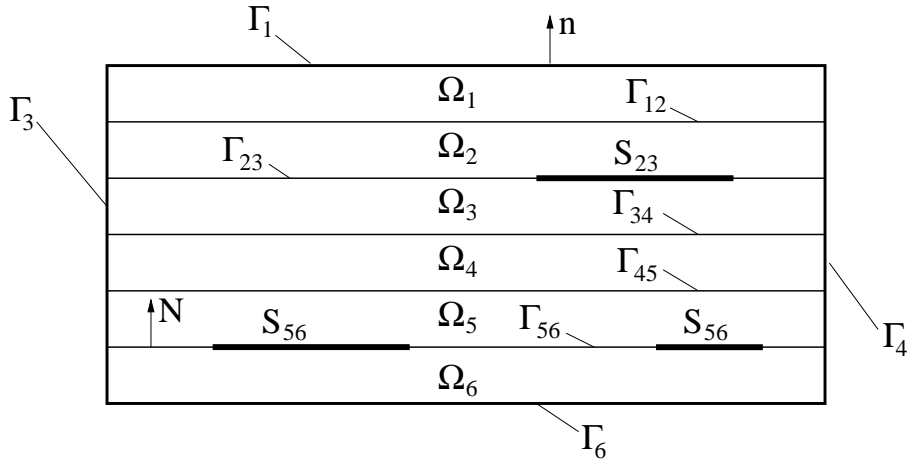


Abbildung 8.7: Allgemeineres Delaminationsproblem mit 6 Schichten

mit $i = 1, \dots, N$ und $j = i + 1 \leq N$. Für eine Erklärung der verwendeten Symbole sei auf den Abschnitt 2.2 verwiesen.

Im Fall von mehreren Delaminationen in unterschiedlichen, a priori bekannten Zwischenflächen kann das Problem nun nicht mehr wie im Abschnitt 6.3 in nur zwei separat zu lösende Cauchy-Teilprobleme unterteilt werden. Denn in mindestens einem dieser beiden Teilkörper wären dann weitere, noch unbekannte innere Delaminationsgebiete S_{ij} vorhanden, weshalb das zugehörige Teilproblem dann nicht mehr als reines Cauchy-Problem behandelt werden kann. Somit lässt sich zudem nicht mehr einfach die Differenz der beiden Lösungen für den oberen und unteren Teilkörper am gemeinsamen Interface zur näherungsweise Bestimmung des Trägers der Verschiebungssprünge verwenden.

Für diesen allgemeineren Fall wird die folgende Lösungsstrategie vorgeschlagen:

Der Prüfkörper wird schichtweise von außen nach innen durchgescannt, wobei jeweils nur *ein* Cauchy-Problem für den äußeren Teilkörper bis zum ersten geschädigten Interface Γ_{ij}^D

gelöst wird. Eine angenäherte Verschiebungslösung $\mathbf{u}_a^{(2k)}$ dieses Teilkörpers $\Omega_a = \bigcup_{m=1}^i \Omega_m$

am Rand Γ_{ij}^D kann durch den alternierend iterativen Algorithmus in AICRA leicht errechnet werden. Als Verschiebungssprung wird mangels gegenüberliegender Teillösung nun jedoch die doppelte Differenz zur Referenzlösung $\mathbf{u}_a^{(0)}$ des ungeschädigten Körpers an demselben Interface berechnet zu:

$$[u_N^{(2k)}]_{\Gamma_{ij}^D} \approx 2 (\mathbf{u}_a^{(2k)} - \mathbf{u}_a^{(0)})|_{\Gamma_{ij}^D} \cdot \mathbf{N}. \quad (8.15)$$

Sind durch eine geeignete Fehlerschranke $\varepsilon^{(2k)}$ daraus dann die Delaminationsgebiete $S_{ij}^{(2k)}$ in dieser Zwischenfläche bestimmt, lassen sich diese Risse als nunmehr bekannte innere randspannungsfreie Oberflächen in das Cauchy-Problem des nächsten, etwas tiefer reichenden Teilkörpers einbauen. Sukzessive können so vom äußeren Rand nach innen alle verdächtigen Zwischenflächen Γ_{ij}^D untersucht werden. Der Rekonstruktionsalgorithmus AICRA bedarf hierzu nur weniger, leicht implementierbarer Modifikationen.

Analog lässt sich das neue Verfahren AICRA auch zur Rissbestimmung in bekannten Grenzflächen bei Beschichtungen, Klebeverbindungen und ähnlichen Fragestellungen mit a priori bekannter Interfacelage einsetzen [115]. Gerade bei dünnen Beschichtungen müssen hierzu lediglich überbestimmte Daten von der äußeren Beschichtungsfläche gewonnen werden, die wie oben beschrieben als Differenz zur Referenzlösung ohne Riss eine gute Näherung für den Verschiebungssprung darstellen. Als geeignete Prüfbelastung zur Öffnung der Rissfläche gemäß Gleichung (6.18) kann z.B. auch ein lokales Vakuumsystem verwendet werden [41].

Kapitel 9

Zusammenfassung

Aufgrund der zunehmenden Verwendung von geschichteten Verbundwerkstoffen in vielfältigen Einsatzfeldern auch des klassischen Ingenieurbereichs kommt der zerstörungsfreien Detektion von Delaminationen eine steigende Bedeutung — sowohl im Rahmen der Qualitätssicherung als auch bei Service und Wartung — zu, da diese meist den entscheidenden Versagensmechanismus einleiten. Erst eine präzise Auflösung von Schädigungs-ort, -form und -größe bietet die Möglichkeit, fundierte Aussagen über die verbleibende Bauteilfestigkeit oder geeignete Reparaturstrategien zu erzielen.

Hauptziel der vorliegenden Arbeit war daher die Entwicklung eines Verfahrens zur *quantitativen* Bestimmung von flächenhaften inneren Schädigungen aus zerstörungsfrei und schnell zu messenden mechanischen Oberflächendaten. Ausgangspunkt des Verfahrens sind kohärent-optische Deformationsmessungen an der äußeren Oberfläche unter definierter mechanischer Prüfbelastung.

Zur berührungslosen, flächenhaften Ermittlung der Deformationsdaten wurde die Shearografie verwendet, die sich schon in den grundlegenden Untersuchungen von KLUMPP als vorteilhaft gegenüber den optischen Alternativverfahren herausgestellt hatte. Der aus Vorgängerarbeiten vorhandene kohärent-optische Messaufbau wurde auf digitale Phasenschiebe-Shearografie umgerüstet und erweitert, um eine hochauflösende Datenerfassung in nahezu Echtzeit zu erreichen. Eine eigens implementierte Datenaufbereitung ermöglichte zudem die rasche Berechnung der *Out-of-plane*-Verschiebungskomponente aus den shearografischen Rohdaten.

Das Verhalten von Laminaten unter ebener Zugbelastung wurde mittels dreidimensionaler Finite-Elemente-Berechnungen unter Verwendung von ANSYS 5.6 simuliert. Bei grundlegenden Versuchen an definiert vorgeschädigten Laminatschichtungen konnte eine sehr gute quantitative Übereinstimmung zwischen den Verschiebungsergebnissen aus Experiment und Simulation erzielt werden.

Die Identifikation innerer Schädigungen aus derartig überbestimmten Oberflächendaten stellt ein inverses Problem dar, so dass zunächst die grundlegenden Eindeutigkeits- und

Stabilitätseigenschaften untersucht werden mussten. Wegen der Komplexität der konkreten Problemstellung wurde zunächst ein vereinfachtes Modellproblem definiert, für welches aktuelle mathematische Forschungsergebnisse angewendet und übertragen werden konnten. Das von ANDRIEUX und BEN ABDA entwickelte Reciprocity-Gap(RG)-Konzept erwies sich unter den in der Literatur vorhandenen Algorithmen zur Rissrekonstruktion als besonders vorteilhaft und konnte durch Verwendung von Fundamentallösungen auch für den Fall von gekrümmten rissbehafteten Zwischenflächen in homogenen, anisotropen Materialien entscheidend erweitert werden. Aus methodeninhärenten Gründen lässt es sich jedoch nicht auf den Fall von geschichteten Verbundwerkstoffen mit unterschiedlich anisotropen Teilschichten anwenden.

Der im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Rekonstruktionsalgorithmus AICRA bietet gegenüber dem erweiterten RG-Konzept und anderen Alternativverfahren entscheidende Vorteile bei der quantitativen Bestimmung von Rissen in einer a priori bekannten Zwischenfläche. Sein Konvergenz- und Regularisierungsverhalten konnte für das Modellproblem rigoros abgeleitet werden und wurde bei den zunächst an homogen isotropen 3D-Körpern durchgeführten Testrechnungen, sowohl bei Verwendung einer BEM- als auch einer FEM-Implementierung, eindrucksvoll bestätigt. Die gezeigte rasche Konvergenz, die sehr guten Regularisierungseigenschaften bei fehlerbehafteten Messdaten, die deutlich geringeren Messdatenerfordernisse in der Drei-Rand-Variante und nicht zuletzt die günstige Implementierbarkeit lassen das neu entwickelte Verfahren auch für vielfältige praktische Einsatzfelder als äußerst vielversprechend erscheinen.

Wegen seines generellen Charakters kann das neue Verfahren AICRA zudem leicht auf andere Problemstellungen übertragen werden und wurde schließlich auch erfolgreich zur quantitativen Bestimmung von Delaminationen in einer a priori bekannten Interfacelage eingesetzt. Hierfür wurden Lamine mit vorgegebenen, (halb-)elliptischen Delaminationsgebieten untersucht, wobei diverse Schichtfolgen numerisch modelliert und auch zugehörige experimentelle Proben mit einlamierten Teflonfolien hergestellt wurden. Ein zunächst durchgeführter Vergleich der shearografischen Verschiebungsdaten mit den Simulationsergebnissen zeigte eine hohe Übereinstimmung der *Out-of-plane*-Werte. Bei den anfangs untersuchten symmetrischen Laminen ließen sich somit auch mit realen Messdaten und ohne Verwendung von Skalierungsparametern gute Rekonstruktionsergebnisse der vorgegebenen Rissflächen mittels einer FEM-Implementierung erzielen. Da sich die Auflösungsgenauigkeit von AICRA jedoch als deutlich besser im Vergleich zur experimentellen Positionierungsgenauigkeit der vorgegebenen Schädigungsflächen herausstellte, wurden bei den zuletzt untersuchten asymmetrischen Schichtfolgen ausschließlich simulierte Randdaten mit synthetisch aufgebrachtem Rauschen eingesetzt, die abermals gute Rekonstruktionsergebnisse lieferten.

Auch für eine Erweiterung des Verfahrens zur Bestimmung von mehreren Delaminationen in unterschiedlichen Tiefenlagen wurden konkrete Vorschläge ausgearbeitet, die Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein können. Als Anwendungsgebiete des neuen Verfahrens AICRA erscheinen zudem Defektbestimmungen bei Beschichtungen, Klebeverbindungen u.ä. Fragestellungen mit bekannter Zwischenfläche vielversprechend.

Anhang A

Notation

Tensorielle Größen werden durch **Fettdruck** gekennzeichnet, wobei für ihre Verknüpfung die folgende, vom verwendeten Koordinatensystem unabhängige Schreibweise benutzt wird:

$\mathbf{a} \mathbf{b}$	tensorielles Produkt
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	einfache Überschiebung
$\mathbf{a} : \mathbf{b}$	doppelte Überschiebung

<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
$(1, 2, 3)$	lokales Material-Hauptachsensystem
a, b	Ellipsen-Halbachsen
b_L	Breite des Laminats
\tilde{c}	Transformationsmatrix
d_1	Dicke einer Prepreglage
d_L	Einzelschichtdicke des Laminats
d_{Sp}	Speckle-Durchmesser
$d(\cdot, \cdot)$	Hausdorff-Abstand
\mathbf{d}	Oberflächenverschiebungsvektor
$\Delta \mathbf{d}$	Oberflächenverschiebungsdifferenzvektor

<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
f	Brennweite
\mathbf{f}	Volumenkraftvektor
$g(\xi_i, \eta_i)$	Grauwert im Bildpunkt (ξ_i, η_i)
Δg	Grauwertdifferenz
h	Vernetzungsparameter
k	Iterationsparameter
$\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$	einfallender bzw. reflektierter Wellenvektor
\mathbf{k}	Sensitivitätsvektor
m_x, m_y	Bildmaßstab in x - bzw. y -Richtung
\mathbf{n}	äußerer Normalenvektor
p, p_1, p_2	heuristische Parameter
r	Abstand vom Rissrand
$\Delta \mathbf{s} = (\Delta x, \Delta y)^T$	Schervektor im Probenkoordinatensystem
\mathbf{t}	Randspannungsvektor
$\mathbf{t}^*, \mathbf{t}^{**}$	Randspannungsdaten am äußeren Rand
$\mathbf{u} = (u, v, w)^T$	Verschiebungsvektor
\mathbf{u}^*	Verschiebungsdaten am äußeren Rand
$\mathbf{u}^{(0)}$	Startlösung von AICRA
$\mathbf{u}^{(k)}$	k -te Näherungslösung für \mathbf{u}
\mathbf{u}_h	diskrete Lösung
$[\mathbf{u}]$	Verschiebungssprung über Γ
\mathbf{v}	Testfunktion
w_0	Out-of-plane-Referenzverschiebung
(x, y, z)	globales Probenkoordinatensystem
A	Amplitude
A_i	Teilrand der Probe
A_Γ	Flächeninhalt von Γ
\mathcal{A}	linearer Elastizitätsoperator
$B(\cdot, \cdot)$	Bilinearform
B_e	effektive Blendenzahl
$\tilde{\mathbf{C}}$	Elastizitätsmatrix
D^s	verallgemeinerte partielle Ableitung mit Multiindex s
\mathbf{D}	Elastizitätstensor
E	Elastizitätsmodul
F	Teilrand von $\partial\Omega$ mit vollständigen Cauchy-Daten
ΔF_x	äußere relative Zugbelastung in x -Richtung
G	Schubmodul
$H^l(\Omega)$	Sobolev-Raum der Ordnung l
I	Intensität
$L(\cdot)$	Linearform

<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
$N(\xi_i, \eta_i)$	reelle Interferenzordnung im Bildpunkt (ξ_i, η_i)
ΔN	maximale reelle Interferenzordnungsdifferenz
\mathbf{N}	Normalenvektor auf Γ
P	Teilrand von $\partial\Omega$ mit nur partiellen Cauchy-Daten
P_i	Oberflächenpunkt
R_y	Querkrümmungsradius
S	Delaminationsgebiet(e)
$S_\varepsilon^{(2k)}$	approximierte(s) Delaminationsgebiet(e)
\tilde{T}	Transformationsmatrix
$\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n})$	Randspannungsoperator
U	Lösungsraum
$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$	Fundamentallösung
V	Testfunktionenraum
α	Faserorientierungswinkel bzgl. Zugrichtung
$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$	Schichtfolge eines Laminats (α_i jeweils in $^\circ$ angegeben)
$[\alpha_1, \dots, \alpha_n]_S$	symmetrische Schichtfolge, d.h.: $[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_n, \dots, \alpha_1]$
$[\dots, T, \dots]$	Tefloneinlage als vordefinierte Delamination
γ	Kontrast
γ_{ij}	Ingenieurgleitung
$\varepsilon^{(2k)}$	Fehlerschranke
ε	Verzerrungstensor
(ξ, η)	ebenes Bildkoordinatensystem
$(\Delta\xi, \Delta\eta)^T$	Schervektor im Bildkoordinatensystem
θ	Phasenlage
κ_y	Querkrümmung
λ	Laserwellenlänge
ν	Querkontraktionszahl
σ	Spannungstensor
ϕ	relative Phasenlage
$\Delta\phi$	relative Phasendifferenz
φ, ψ	Beispielfunktionen
Γ	geschädigtes Interface
Γ_i	äußerer Rand des Teilgebiets Ω_i
Γ_{ij}	Zwischenrand im Laminat
Γ_K	kinematischer Rand
Γ_S	statischer Rand
Ψ	Lichtwelle
Ω	Gesamtgebiet
Ω_i	Teilgebiet
$\partial\Omega$	äußerer Rand des Gesamtgebiets

Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H.A. Aebischer and P. Rechsteiner. Theoretical prediction of the effect of shear distortion in the Michelson interferometer. *Pure and Applied Optics*, 6:303–308, 1997.
- [3] G. Alessandrini. Stable determination of a crack from boundary measurements. *Proc. Royal Soc. Edinburgh, A* 123(3):497–516, 1993.
- [4] G. Alessandrini, E. Beretta, and S. Vessella. Determining linear cracks by boundary measurements – lipschitz stability. *SIAM J. Math. Anal.*, 27:361–375, 1996.
- [5] G. Alessandrini and E. Di Benedetto. *Determining 2-dimensional cracks in 3-dimensional bodies: uniqueness and stability*. Problemi non ben posti ed inversi. Pubblicazioni dell’istituto di analisi globale ed applicazioni, Firenze, 1996.
- [6] G. Alessandrini and L. Rondi. Stable determination of a crack in a planar inhomogeneous conductor. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(2):326–340, 1998.
- [7] G. Alessandrini and A.D. Valenzuela. Unique determination of multiple cracks by two measurements. *SIAM J. Control and Optimization*, 34:913–921, 1996.
- [8] H. Altenbach, J. Altenbach, and K. Naumenko. *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [9] H. Altenbach, J. Altenbach, and R. Rikards. *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Dt. Verl. für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.
- [10] R.F. Anastasi, S.M. Serabian, R.J. Shuford, and D.K. Das-Gupta. Nondestructive detection of simulated delaminations in composite laminates by laser-speckle shearography. *Experimental Techniques*, 11(6):28–31, 1987.
- [11] K.E. Andersen, S.P. Brooks, and M.B. Hansen. A Bayesian approach to crack detection in electrically conducting media. *Inverse Problems*, 17:121–136, 2001.

- [12] H. Andrä. *Die Galerkin-Randelementmethode für dreidimensionale Elastizitätsprobleme*. Habilitation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [13] H. Andrä, K. Singh, and W. Weigl. Application of the Galerkin-type boundary element method for the reconstruction of interface cracks in composite materials. In *Second UK Conference on Boundary Integral Methods, Brunel University, 13.-14. Sept. 1999*, 1999.
- [14] S. Andrieux and A. Ben Abda. Identification de fissures planes par une donnée de bord unique: une procédé direct de localisation et d'identification. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 315:1323–1328, 1992.
- [15] S. Andrieux, A. Ben Abda, and H.D. Bui. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 324:1431–1438, 1997.
- [16] I. Babuska. On Besov and Sobolev spaces of fractional order. In *TICAM Forum Notes No. 1*. University of Texas at Austin, 1996.
- [17] T. Bannour, A. Ben Abda, and M. Jaoua. A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3d planar cracks. *Inverse Problems*, 13:899–917, 1997.
- [18] D.M. Barnett. The precise evaluation of derivatives of the anisotropic elastic Green's functions. *Physica Status Solidi B*, 49:741–748, 1972.
- [19] A. Ben Abda and M. Kallel. Two fast algorithms to recover line segment cracks by overspecified boundary data. *Preprint, ENIT-LAMSIN, Tunis*, 2001.
- [20] A. Boström and H. Wirdelius. Ultrasonic probe modeling and nondestructive crack detection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(5):2836–2848, 1995.
- [21] D. Breithaupt. *Realisierung eines digitalen Auswerteverfahrens für Interferogramme und kohärentoptische Verformungsmessungen an CFK-Proben*. Diplomarbeit, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 1996.
- [22] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer, New York, 1994.
- [23] M. Brühl, M. Hanke, and M. Pidcock. Crack detection using electrostatic measurements. *Preprint, Math. Dept., Johannes Gutenberg University Mainz*, 14, 2000.
- [24] K. Bryan and M. Vogelius. A uniqueness result concerning the identification of a collection of cracks from finitely many electrostatic boundary measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, 23:950–958, 1992.
- [25] K. Bryan and M. Vogelius. A computational algorithm to determine crack location from electrostatic boundary measurements. The case of multiple cracks. *Int. J. Engng. Sci.*, 32(4):579–603, 1994.

- [26] W.J. Cantwell and J. Morton. The significance of damage and defects and their detection in composite materials: A review. *J. of Strain Analysis*, 27:29–42, 1992.
- [27] P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors. *Handbook of numerical analysis, vol 2.: Finite element methods*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [28] M. Comninou. The interface crack. *J. Appl. Mech.*, 44:631–636, 1977.
- [29] K. Creath. Phase-shifting speckle interferometry. *Applied Optics*, 24(18):3053–3058, 1985.
- [30] M.E. Cunningham, S.V. Schoultz, and J.M. Toth jr. Effect of end-tab design on tension specimen stress concentrations. In J.R. Vinson and M. Taya, editors, *Recent Advances in Composites in the United States and Japan, ASTM-STP 864*, pages 253–262. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985.
- [31] R. Cuntze et al. *Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung — Modellbildung und Experimente*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [32] H. Czichos, editor. *Hütte: die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [33] A. Dimitrov. Persönliche Mitteilung unveröffentlichter Forschungsergebnisse.
- [34] *DIN 54180 "Zerstörungsfreie Prüfung – Shearografie"*.
- [35] A. Douglis and L. Nirenberg. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 8:503–538, 1955.
- [36] R. Duduchava, A.-M. Sändig, and W.L. Wendland. Interface cracks in anisotropic composites. *Mathem. Meth. Appl. Sci.*, 22:1413–1446, 1999.
- [37] A.R. Elcrat, V. Isakov, and O. Neculoiu. On finding a surface crack from boundary measurements. *Inverse Problems*, 11:343–351, 1995.
- [38] M. Eller. Identification of cracks in three-dimensional bodies by many boundary measurements. *Inverse Problems*, 12:395–408, 1996.
- [39] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [40] A. Ettetmeyer. Schnelle und sichere Werkstoff- und Bauteilentwicklung mit modernen Laser-Speckle-Messtechniken. *LaserOpto*, 32(5):62–66, 2000.
- [41] Ettetmeyer AG, Neu-Ulm. *Wissen ist dreidimensional*. <http://www.ettmeyer.de>.
- [42] A. Friedman and M. Vogelius. Determining cracks by boundary measurements. *Indiana University Mathematics Journal*, 38:527–56, 1989.

- [43] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Masson, Springer-Verlag, 1992.
- [44] X.E. Gros, K. Takahashi, and M.-A. De Smet. On the efficiency of current NDT methods for impact damage detection and quantification in thermoplastic toughened CFRP materials. *NDT.net*, 4(3), 1999.
- [45] K. Grünewald, W. Fritzsich, and H. Wachutka. Quantitative Prüfungen an faserverstärkten Kunststoffbauteilen aus der Raumfahrttechnik. *Zeitschrift f. Werkstofftechnik*, 6:153–156, 1975.
- [46] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. of Princeton*, pages 49–52, 1902.
- [47] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [48] O. Hesebeck and E. Schnack. Detektion von Delaminationen mittels Shearografie. In *GMA-Bericht 29, GESA '96, Experimentelle Beanspruchungsanalyse – neue Entwicklungen und Anwendungen.*, pages 299–300. VDI/VDE Gesellschaft für Meß- und Automatisierungstechnik, 1996.
- [49] F. Hettlich. *The domain derivatives in inverse obstacle problems*. Habilitationsschrift, Universität Erlangen, 1999.
- [50] Hexcel-Composites, Cambridge, UK. *Datenblätter zum Prepregmaterial Fibredux 913*. <http://www.hexcel.com>.
- [51] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators*, volume 1. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [52] P.W. Hsu and C.T. Herakovich. Edge effects in angle-ply composite laminates. *J. Composite Materials*, 11:422–428, 1977.
- [53] Y.Y. Hung. Shearography: A new optical method for strain measurement and nondestructive testing. *Optical Engineering*, 21(3):391–395, 1982.
- [54] Y.Y. Hung and C.Y. Liang. Image-shearing camera for direct measurements of surface strains. *Applied Optics*, 18:1046–1051, 1979.
- [55] Y.Y. Hung, S. Tang, and J.D. Hovanesian. Real-time shearography for measuring time-dependent displacement derivatives. *Experimental Mechanics*, 34:89–92, 1994.
- [56] Y.Y. Hung and C.E. Taylor. Speckle-shearing interferometric camera - a tool for measurement of derivatives of surface displacements. In *Proceedings of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, volume 41, pages 169–175, 1973.

- [57] C. Hwu, C.J. Kao, and L.E. Chang. Delamination fracture criteria for composite laminates. *J. Composite Materials*, 29(15):1962–1987, 1995.
- [58] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*. Applied mathematical sciences, 127. Springer-Verlag, 1998.
- [59] R.M. Jones. *Mechanics of composite materials*. Hemisphere Publ. Corp., New York, 1975.
- [60] S.P. Joshi and C.T. Sun. Impact induced fracture in a laminated composite. *J. Composite Materials*, 19:51–66, 1985.
- [61] M. Jourhmane and A. Nachaoui. An alternating method for an inverse Cauchy problem. *Numerical Algorithms*, 21:247–260, 1999.
- [62] H. Kadono, S. Toyooka, and Y. Iwasaki. Speckle-shearing interferometry using a liquid-crystal cell as a phase modulator. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(12), 1991.
- [63] H. Kim and J. Seo. Unique determination of a collection of a finite number of cracks from two boundary measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, 27:1336–1340, 1996.
- [64] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Applied Mathematical Sciences, 120. Springer-Verlag New York, 1996.
- [65] A. Kirsch. The detection of holes by elasto-static measurements. *Preprint 01/10, Fakultät für Mathematik, Universität Karlsruhe*, 2001.
- [66] P.A. Klumpp. *Delaminationsuntersuchungen an Carbonfaser/Epoxid-Verbunden mit kohärentoptischen Verfahren*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1989.
- [67] P.A. Klumpp and E. Schnack. Shearograms with variable measurement sensitivity. *Experimental Techniques*, 14:42–44, 1990.
- [68] H. Kohler. Anwendung der holografischen Interferometrie in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung. *Zeitschrift f. Werkstofftechnik*, 5:128–133, 1974.
- [69] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, and A.V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Comput. Maths. Math. Phys.*, 31(1):45–52, 1991.
- [70] E. Kröner. Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichung. *Zeitschrift für Physik*, 136:402–410, 1953.
- [71] S. Kubo. Requirements for uniqueness of crack identification from potential distributions. In M. Yamaguti et al., editor, *Inverse Problems in Engineering Sciences*, pages 52–58. Springer, Tokyo, 1991.

- [72] S. Kubo, J. Sarasinpitak, and K. Ohji. Identification of an interface crack in bonded dissimilar materials from potential distribution. *Materials Science Research International*, 2(1):26–32, 1996.
- [73] G. Kupfer, M. Schuth, W. Steinchen, and L.X. Yang. Shearografie - für die QS besser als Hologramm-Interferometrie? *Qualität und Zuverlässigkeit*, 40:71–75, 1995.
- [74] V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Bashaileshvili, and T.V. Burchuladze. *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland series in applied mathematics and mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [75] T. Ledermann. *Zur Rekonstruktion von Rissen aus gemessenen, elasto-statischen Oberflächendaten*. Diplomarbeit, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 1999.
- [76] J.A. Leendertz and J.N. Butters. An image-shearing speckle-pattern interferometer for measuring bending moments. *Journal of physics E: Scientific instruments*, 6:1107–1110, 1973.
- [77] D. Lesnic, L. Elliott, and D.B. Ingham. An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 20(2):123–133, 1997.
- [78] A.K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [79] F.W. Margrave, K. Rigas, D.A. Bradley, and P. Barrowcliffe. The use of neural networks in ultrasonic flaw detection. *Measurement*, 25:143–154, 1999.
- [80] J. Mattsson, A.J. Niklasson, and A. Eriksson. Three-dimensional ultrasonic crack detection in anisotropic materials. *Res. Nondestr. Eval.*, 9:59–79, 1997.
- [81] N.S. Mera, L. Elliott, D.B. Ingham, and D. Lesnic. The boundary element solution of the Cauchy steady heat conduction problem in an anisotropic medium. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 49:481–499, 2000.
- [82] N.S. Mera, D. Lesnic, L. Elliott, and D.B. Ingham. The boundary element solution of the Cauchy steady state heat conduction problem. In L.C. Wrobel and S.N. Chandler-Wilde, editors, *Second UK Conference on Boundary Integral Methods*, pages 39–50. Brunel University Press, 1999.
- [83] R. Meske. *Röntgenographische Spannungsermittlung an Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.

- [84] A.G. Miller, D.T. Lovell, and J.C. Seferis. The evolution of an aerospace material: Influence of design, manufacturing and in-service performance. *Composite Structures*, 27:193–206, 1994.
- [85] S. Nakadate and H. Saito. Fringe scanning speckle-pattern interferometry. *Applied Optics*, 24(14):2172–2180, 1985.
- [86] S. Nakadate, T. Yatagai, and H. Saito. Digital speckle-pattern shearing interferometry. *Applied Optics*, 19(24):4241–4246, 1980.
- [87] N. Nishimura and S. Kobayashi. A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 32:1371–1387, 1990.
- [88] T.K. O'Brien. Characterization of delamination onset and growth in a composite laminate. *ASTM-STP*, 775:140–167, 1982.
- [89] W. Osten. *Digitale Verarbeitung und Auswertung von Interferenzbildern*, chapter 6: Digitale Auswertung von Interferogrammen nach der Phasen-Schiebe-Methode. Akademie Verlag, Berlin, 1991.
- [90] Y. Ousset. Numerical simulation of delamination growth in layered composite plates. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 18:291–312, 1999.
- [91] N.J. Pagano. On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate. *J. Composite Materials*, 8:65–81, 1974.
- [92] N.J. Pagano, editor. *Interlaminar response of composite materials*, volume 5 of *Composite Materials Series*. Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [93] G. Pedrini, B. Pfister, and H. Tiziani. Double pulse-electronic speckle pattern interferometry. *Journal of Modern Optics*, 40(1):89–96, 1993.
- [94] Z. Petrossian and M.R. Wisnom. Prediction of delamination initiation and growth from discontinuous plies using interface elements. *Composites Part A*, 29:503–515, 1998.
- [95] B. Pfister. *Speckleinterferometrie zur Defektanalyse mit neuen Phasenschiebemethoden*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1993.
- [96] B. Prinz and E. Schnack. Determination of stress gradients in fibrous composites by x-ray diffraction from fillers. *J. Composite Materials*, 31(9):852–873, 1997.
- [97] J. Rantala, D. Wu, and G. Busse. Amplitude modulated lock-in vibrothermography for NDE of polymers and composites. *Res. Nondestr. Eval.*, 7:215–228, 1996.
- [98] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates: Theory and analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1996.

- [99] K. Rohwer. *Modelle und Methoden zur Berechnung von Laminaten aus unidirektionalen Faserverbunden*. Fortschrittberichte VDI. VDI Verlag, 1996.
- [100] F. Santosa and M. Vogelius. A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *Int. J. Engng. Sci.*, 29:917–937, 1991.
- [101] M. Schuth. *Aufbau und Anwendung der Shearografie als praxisgerechtes, optisches Prüf- und Meßverfahren zur Dehnungsanalyse, Qualitätssicherung und Bauteiloptimierung*. Fortschrittberichte VDI. VDI Verlag, 1996.
- [102] R.A. Smith. Ultrasonic defect sizing in carbon-fibre composites – an initial study. *Insight*, 36(8):595–605, 1994.
- [103] R.A. Smith, A.B. Marriott, and L.D. Jones. Delamination sizing in fibre-reinforced plastics using pulse-echo amplitude. *Insight*, 39(5):330–336, 1997.
- [104] G.E. Stavroulakis. *Inverse and crack identification problems in engineering mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [105] W. Steinchen, L. Yang, and G. Kupfer. Digitale Shearografie. *Materialprüfung*, 38:316–318, 1996.
- [106] N. Takeda and S. Ogiwara. Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in CFRP cross-ply laminates. *Composites Sci. Tec.*, 52:309–318, 1994.
- [107] Tenax Fibers, Wuppertal. *Technische Datenblätter Tenax*. <http://www.tenax-fibers.com>.
- [108] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Methods for solving ill-posed problems*. Nauka, Moscow, 1986.
- [109] I.N. Trendafilova, S. Kubo, and T. Sakagami. Hierarchical crack identification from electric potential measurements using pattern recognition approach and optimization technique. *Inverse Problems in Engineering*, 7:43–63, 1999.
- [110] C.M. Vest. *Holographic interferometry*. Wiley & Sons, NewYork, 1979.
- [111] C.M. Vest. Status and future of holographic nondestructive evaluation. *Proc. SPIE*, 349:186–198, 1982.
- [112] S. Waldner. Removing the image-doubling in shearography by reconstruction of the displacement field. *Optics Communications*, 127:117–126, 1996.
- [113] S. Waldner. *Quantitative strain analysis with image shearing speckle pattern interferometry (shearography)*. Dissertation, ETH Zürich, 2000.

- [114] T. Walz and A. Ettemeyer. Automatic shearography inspection system for helicopter rotor blades. Dr. Ettemeyer Application Report No. 03-97, <http://www.ettemeyer.de>.
- [115] W. Weikl, H. Andrä, and E. Schnack. Zerstörungsfreies Detektionsverfahren für Risse in Festkörpern. Deutsche Patentanmeldung, DE 100 19 176 A1, vom 17. April 2000.
- [116] W. Weikl, H. Andrä, and E. Schnack. An alternating iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional solid body. *Inverse Problems*, 17(6):1957–1975, 2001.
- [117] W. Weikl, D. Findeis, E. Schnack, and J. Gryzagoridis. Comparing optical interference techniques for the non destructive detection of delaminations in layered composites. In *Proceedings of The Seventh Annual International Conference on Composites Engineering (ICCE7), Denver Colorado, July 2-8, 2000*, pages 921–922, 2000.
- [118] R.B. Wilson and T.A. Cruse. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12:1383–1397, 1978.
- [119] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Teubner, Stuttgart, 1982.
- [120] M. Wörtler. *Interlaminare Spannungskonzentrationen in Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1988.
- [121] L. Yang. *Grundlagen und Anwendungen der Phasenschiebe-Shearografie zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, Dehnungsmessung und Schwingungsanalyse*. Fortschrittberichte VDI. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [122] O.C. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente, 2. Aufl.* Hanser, München, 1984.

