

**Topologische Beziehungen
in
Geo-Informationssystemen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

**Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)**

vorgelegte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Ing. Norbert Rösch
aus München**

Tag der mündlichen Prüfung: 12.2.1998

Hauptreferent: Prof. Ir. J. van Mierlo

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. R. Bill

Karlsruhe 1998

Kurzfassung

Zur Datenmodellierung in Geo-Informationssystemen (GIS) sind neben geometrischen und semantischen Gesichtspunkten auch topologische Aspekte zu berücksichtigen. Während die topologischen Beziehungen, die sich auf graphentheoretische Ansätze zurückführen lassen, schon sehr gut erforscht sind, stellt sich die Situation bei zwei- bzw. dreidimensionalen Relationen etwas anders dar.

In der vorliegenden Arbeit werden topologische Beziehungen und deren Rolle in GIS erörtert. Darauf aufbauend wird ein Konzept zur Abbildung und Verwaltung dieser Beziehungen vorgestellt, das auf dem Modell der Quasi-Zellenzerlegung (kurz q-Zellenzerlegung) basiert. Diese Zerlegung ist das Ergebnis einer Anpassung der aus der algebraischen Topologie bekannten Zellenzerlegung an die Anforderungen in GIS. Das Modell berücksichtigt die wesentlichen topologischen Invarianten, so daß der Raum mit Hilfe der Beziehungen zwischen den Elementen der q-Zellenzerlegung, den q-Zellen, hinreichend beschrieben ist. Die Zerlegung des Raumes in Verbindung mit der Abbildung der topologischen Relationen seiner Elemente ermöglicht die *Analyse* ebenso wie die Prüfung auf *Konsistenz* und *Plausibilität* dieser Beziehungen.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die q-Zellenzerlegung im Unterraum \mathbb{R}^p durchgeführt wird und lediglich strukturelle Beziehungen der q-Zellen untereinander abgebildet werden. Damit kann beispielsweise eine zielgerichtete Analyse der topologischen Beziehungen nur unter Hinzuziehung der Semantik erfolgen. Dies macht deutlich, daß die q-Zellenzerlegung auf einem relativ hohen Abstraktionsniveau stattfindet. Die Gesamtzahl der strukturellen Beziehungen bleibt dadurch verhältnismäßig gering.

In diesem Modell können alle topologischen Relationen als Mengenbeziehungen betrachtet werden. Damit kann beispielsweise auch die Plausibilitätsprüfung auf Mengenoperationen zurückgeführt werden. Da die moderne Informatik diese Sicht mit der Einführung von entsprechenden Mengendatentypen unterstützt, kann die Bearbeitung des q-Zellenkomplexes über geeignete Mengenoperatoren erfolgen.

Aufbauend auf dem oben angedachten mathematischen Modell wird ein auf der Basis der *Object Modeling Technique* erstellter Implementierungsentwurf für den \mathbb{R}^2 und den \mathbb{R}^3 unterbreitet. Die Verallgemeinerung für den \mathbb{R}^n ist formal durchgeführt, bedarf aber für $n > 3$ noch der Interpretation.

Abstract

In addition to geometric and thematic aspects, the topologic model is one of the three main topics of data-modeling in GIS. This thesis suggests a generalized kind of cell decomposition which is called q-cell decomposition to map the topological relations between n-dimensional objects. The object itself is regarded to be an aggregation of the above mentioned geometric, thematic and topologic properties, whereas the topology of an object is build up by q-cells which are the elements of the q-cell decomposition. The different q-cells are not unique, because they are situated in a topologic space where the Hausdorff-criterion is not fulfilled. Nevertheless the whole decomposition gets its meaning by the thematic informations of the objects. So a topologic query with respect to an object would analyse its topologic properties. This means that the topologic relations between the q-cells the object consists of are examined.

To manage the various relations between the elements of the q-cell decomposition, a suitable data structure is presented. Based on this data structure the topologic relations are stored in such a way that the space is described by its topologic invariants. This includes incidence and adjacency for example. Although the data structure is independent of an implementation, an object orientated implementation is recommended. Furthermore the model considers arbitrary dimensions, but only the 2D and 3D could be interpreted reasonably at present.

The main obstacle of this topologic model is the formation of the q-cell decomposition. As a consequence appropriate algorithms must be found.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
1.1	Allgemeines zur Topologie	8
1.2	Die Bedeutung der Topologie für Geo-Informationssysteme	8
1.3	Zielsetzung der Arbeit	10
2	Mathematische Grundlagen	12
2.1	Metrische Räume	12
2.2	Der allgemeine topologische Raum	13
2.3	Topologische Abbildungen	15
2.4	Der Vergleich von Topologien	16
2.5	Homotopien	17
2.6	Topologische Beziehungen im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3	17
2.7	Teilräume	19
2.8	Simplexe und Simplicialkomplexe	19
2.9	Zellenkomplexe	21
2.10	Quasi-Zellenkomplexe	22
2.11	Überlagerungen	23
2.12	Graphentheorie	24
2.13	Ordnungen	25
3	Grundlagen zur Datenverwaltung in GI-Systemen	27
3.1	Datenbankmodelle	27
3.1.1	Das Netzwerkmodell	27
3.1.2	Das relationale Modell	28
3.1.3	Das objektorientierte Modell	29
3.2	Geometriedaten	30
3.2.1	Rasterdaten	30
3.2.2	Vektordaten	30
3.2.3	Hybride Datenformate	31
3.3	Datenstrukturen	31
3.3.1	Listen	31
3.3.2	Hashing	32
3.3.3	Bäume	33
3.3.4	Spezielle Datenstrukturen für GIS	35

4	Modellierungs- bzw. Entwurfsmethoden	38
4.1	Modellierungsaspekte in GIS	38
4.1.1	Implementierungsunabhängige Darstellung der Objekte und deren Wechselwirkung	39
4.1.2	Die Implementierung von konzeptuellen Entwürfen	40
4.2	Die Object-Modelling-Technique	40
4.2.1	Die Darstellung von Klassen und Instanzen	41
4.2.2	Relationen zwischen Objekten	41
4.2.3	Vererbung	43
4.2.4	Aggregation	44
5	Die Verknüpfung von Topologie und GIS	46
5.1	Datenstrukturen und topologische Räume	46
5.1.1	Die n-Tupel aufgefaßt als topologische Punktmenge	46
5.1.2	Datenbankobjekte aufgefaßt als topologische Punktmenge	47
5.1.3	Record-basierte Strukturen aufgefaßt als topologische Punktmenge	48
5.1.4	Record-basierte Strukturen ohne Schlüssel	48
5.1.5	Strukturen ohne feste Länge	49
5.1.6	Zusammenfassung	49
5.2	Topologie und Zeit	50
5.3	Topologische Beziehungen zwischen zwei Flächen im \mathbb{R}^2	51
5.4	Normen, die topologische Aspekte enthalten	53
5.4.1	Der Knoten	53
5.4.2	Die Kante	54
5.4.3	Die Masche	55
5.5	Die Abbildung topologischer Zusammenhänge in Datenstrukturen	55
5.5.1	Die Entkoppelung von Geometrie und Topologie	58
5.5.2	Prüfverfahren basierend auf topologischen Beziehungen	60
5.5.3	Die Analyse von topologischen Beziehungen	62
5.6	Topologische Beziehungen und Generalisierung	62
5.7	Die Unsicherheit topologischer Beziehungen	63
6	Von der Topologie des \mathbb{R}^2 zur Topologie des \mathbb{R}^3	64
6.1	Allgemeine topologische Beziehungen im \mathbb{R}^2	64
6.1.1	Die Beziehungen der 0-Zelle	65
6.1.2	Die Beziehungen der 1-Zelle	66
6.1.3	Die Beziehungen der 2-Zelle	66
6.2	Allgemeine topologische Beziehungen im \mathbb{R}^3	67
6.2.1	Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle zur 3-Zelle	68
6.2.2	Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle zur 3-Zelle	68

6.2.3	Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle zur 3-Zelle	69
6.2.4	Die topologischen Beziehungen der 3-Zelle zur 3-Zelle	70
7	Entwurf eines Modells zur Integration topologischer Strukturen	71
7.1	Vorüberlegungen	71
7.1.1	Zielvorgaben	71
7.1.2	Das Objekt und seine topologischen Eigenschaften	71
7.1.3	Welche topologischen Beziehungen werden abgebildet?	73
7.2	Der Entwurf von Klassen für den \mathbb{R}^2	75
7.2.1	Der Entwurf topologischer Objektklassen für 0-Zellen	75
7.2.2	Die Modellierung von 1-Zellen	77
7.2.3	Die Modellierung von 2-Zellen	77
7.3	Der Entwurf von Klassen für den \mathbb{R}^3	79
7.3.1	Die Modellierung von 0-Zellen	79
7.3.2	Die Modellierung von 1-Zellen	79
7.3.3	Die Modellierung von 2-Zellen	80
7.3.4	Die Modellierung von 3-Zellen	81
7.4	Allgemeine Implementierungsaspekte	81
7.5	Aufbau der Struktur	82
7.6	Beispiel	83
8	Zusammenfassung und Ausblick	86
	Symbolverzeichnis	87
	Abkürzungen	88
	Literatur	89
	Lebenslauf	95

Abbildungsverzeichnis

1	Das DLM-Datenmodell (nach [AdV/ATKIS,1989])	9
2	Der Hamming-Abstand am Beispiel des ASCII-Codes	13
3	Das Intervall $]a - k, a + k[$	14
4	Die Umgebung von a	14
5	Der topologische Raum T als Obermenge zum metrischen Raum M	14
6	Die Abbildung des Würfels auf seine Diagonale und die des Kreises auf den Würfel . .	16
7	Beispiel zur Homotopie	17
8	Beispiele für ein 0-,1-,2-Simplex und einen simplizialen Komplex im \mathbb{R}^2	20
9	Eine simpliziale Abbildung und zwei isomorphe simpliziale Komplexe	20
10	Ein Gegenbeispiel für einen Simplizialkomplex	21
11	Beispiele für zulässige und unzulässige Zellenzerlegungen im \mathbb{R}^2	22
12	Der Raum X und seine Überlagerung	24
13	Beispiele für Graphen	25
14	Strukturierung im Netzwerkmodell	28
15	Die einfach verkettete Liste	32
16	Hash-Tabelle mit Verkettung bei Kollision	33
17	Beispiele für Bäume	34
18	Beispiel für einen Heap und seine Implementierung als Feld	35
19	Die Abbildung der Realität als Graph	35
20	Die DIME-Struktur an einem Beispiel	36
21	Die topologischen Beziehungen der TIGER-Datenstruktur	36
22	Beispiele für Klassen und Instanzen	41
23	Das Beispiel aus Abbildung 22 erweitert um einige Attribute	42
24	Das Beispiel aus Abbildung 23 erweitert um einige Methoden	42
25	Die Darstellung von Assoziationen zwischen Klassen bzw. Instanzen	43
26	Verknüpfungsattribute am Beispiel zweier Klassen	43
27	Die Assoziation einer Klasse auf sich selbst	43
28	Ein Beispiel für Mehrfachvererbung	44
29	Vererbung über mehrere Ebenen	44
30	Ein Beispiel für Aggregation	45
31	Die Zuordnung zwischen Objekt-ID und den zugehörigen Attributen	48
32	Die Veränderung in Abhängigkeit von der Zeit am Beispiel von vier Objekten im zeitlichen Intervall $[a,b]$. Beginn oder Ende einer Gerade kennzeichnet jeweils den Aufgang oder den Untergang eines Objekts (nach [LANGRAN 1993, S.51]).	50
33	Ein Objekt und seine topologischen Verknüpfungen unter Berücksichtigung der Zeit .	51
34	Die topologischen Beziehungen zwischen zwei Gebieten im \mathbb{R}^2 (nach [EGENHOFER/Franzosa, 1995 S. 136])	52
35	In beiden Fällen ergibt sich als das gleiche Muster $(1,1,1,1)$	52

36	Drei 2-Zellen, die sich überlappen	54
37	Prinzipieller Aufbau der Datenstruktur	56
38	Struktureller Aufbau der Typklassen 2 und 3	56
39	Drei über Verbindungsmuffen verbundene Kabel	57
40	Die Datenstruktur zu Abbildung 39	57
41	Die Verbindungsmuffen aus Abbildung 39 sind durch Schalter ersetzt	57
42	Die Datenstruktur zu Abbildung 41	58
43	Gegenüberstellung Topologie \leftrightarrow Geometrie	59
44	Zwei Leitungen und ihre zugehörige Datenstruktur als Beispiel zur Trennung von Topologie und Geometrie	59
45	Darstellung der Baublöcke in der DIME-Struktur (nach [U.S. BUREAU OF CENSUS 1990,S. 101])	60
46	Beispiel zur Änderung der topologischen Beziehungen unter dem Einfluß der Generalisierung	62
47	Topologische Beziehungen von Objekten (nach [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985, S. 36])	64
48	Die topologischen Relationen der 3-Zelle im \mathbb{R}^3	67
49	Die Berührung der 2-Zelle A mit der 3-Zelle B	70
50	Das Objekt als Aggregat verschiedener Eigenschaften	72
51	Die topologische Modellierung des Objekts	73
52	Beispiele zur <i>Schnittpunktstreue</i> und zur <i>Nachbarschaft</i>	73
53	Beispiele zur Beziehung <i>innen/außen</i>	74
54	Exemplarische Darstellung der Beziehung 0-Zelle zur 1- bzw. 2-Zelle	76
55	Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle	76
56	Exemplarische Darstellung der Beziehungen 1-Zelle zur 0-, 1-, 2-Zelle	77
57	Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle	78
58	Die 0-Zelle als Ergebnis einer q-Zellenzerlegung	78
59	Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle im \mathbb{R}^2	78
60	Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle im \mathbb{R}^3	79
61	Eine 1-Zelle <i>durchdringt</i> eine 3-Zelle	80
62	Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle im \mathbb{R}^3	80
63	Beispiel einer q-Zellenzerlegung im \mathbb{R}^3	81
64	Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle im \mathbb{R}^3	81
65	Zwei Objekte modelliert als 3-Zellen im \mathbb{R}^3	82
66	Die topologischen Beziehungen der 3-Zelle im \mathbb{R}^3	82
67	Die Erzeugung topologischer Beziehungen bei der Erfassung	83
68	Ein Beispiel	84
69	Die Zellenzerlegung zu Abbildung 68	84

Tabellenverzeichnis

1	Die Relation 'Rohrleitung' mit einigen Tupel	28
2	Das Tupel aus Abschnitt 3.1.2 in 'binärer' Schreibweise	47
3	Matrix der Verbindungsarten bezogen auf den absoluten Punkt (k: kann; m: muß; n: darf nicht)	61
4	Tabelle der ungeordneten Segmente	61
5	Tabelle der geordneten Segmente	61

1 Einleitung

1.1 Allgemeines zur Topologie

Die *Topologie* ist ein verhältnismäßig junger Zweig der Mathematik. Erste Arbeiten gehen auf *Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)* zurück, der nach einem Kalkül suchte, mit Hilfe dessen er unabhängig von Maßverhältnissen geometrische Beziehungen ausdrücken konnte. Der damals von Leibniz verwendete Begriff für diese Methoden war *Analysis Situs*. Im weiteren ist in diesem Zusammenhang auch das im Jahre 1736 von *Leonhard Euler (1707-1783)* formulierte Brückenproblem zu nennen. Ebenso wie der Polyedersatz werden diese Fragestellungen nach heutiger Auffassung einem Teilgebiet der Topologie, der sogenannten Graphentheorie, zugeordnet. Auch *Carl Friedrich Gauß (1777-1855)* hat auf dem Feld der Topologie richtungweisende Beiträge geleistet, die zum Teil erst mit der Veröffentlichung seines Nachlasses bekannt wurden. In seinen Aufzeichnungen verwendete Gauß noch den Begriff *Geometria Situs* anstelle von Topologie [Gauß, Bd. 8]. Im Jahre 1847 wurde von *Johann Benedikt Listing (1808-1882)* der neue bis heute gebräuchliche Begriff Topologie eingeführt.

Durch die Arbeiten von *Georg Cantor (1845-1918)* wurde die Topologie entscheidend beeinflusst, und es entwickelte sich unter diesem Eindruck die sogenannte *mengentheoretische Topologie*. Es war *Felix Hausdorff (1868-1942)*, der hierzu die entsprechenden Definitionen formulierte. Nach diesem Mathematiker ist auch ein für diese Arbeit sehr wichtiges Trennungsaxiom benannt. Neben der mengentheoretischen Topologie hat sich in jüngster Zeit noch der Zweig der *algebraischen Topologie* entwickelt. Er hat seinen Ursprung in der Theorie der Simplexe. Mit Hilfe der Topologie kann man viele z.T. abstrakte Zusammenhänge im gewöhnlichen Raum darstellen, um dadurch eine bessere Vorstellung von ihnen zu bekommen.

Zur Lösung naturwissenschaftlich-technischer Probleme wurde schon sehr früh von topologischen Beziehungen Gebrauch gemacht. Bereits *Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)* verzichtete nicht zuletzt aufgrund der besseren Übersicht auf die lagerichtige Darstellung elektrischer Netze und beschränkte sich dabei auf die Wiedergabe des Netzes als Graph in Form einer Knoten/Kantenstruktur [Kirchhoff, 1847]. Diese Vorgehensweise wird in der Elektrotechnik auch heute noch zur Visualisierung umfangreicher Schaltungen angewandt und findet deshalb auch in GIS-Anwendungen der Versorgungswirtschaft ihren Niederschlag (z. B. [BERNHARDT 1994],[SCHILCHER/KALTENBACH/ROSCHLAUB 1996, S. 369f], [CHWILKOWSKI 1994, S.15]). In der Chemie wurde zur Darstellung von Isomeren bereits von *Arthur Cayley (1821-1895)* und *James Josef Sylvester (1814-1879)* auf graphentheoretische Strukturen zurückgegriffen. J. Sylvester verwendete erstmalig den Begriff *Graph* im heutigen Sinne.

Was den rein anschaulichen Teil der Topologie betrifft, wird dieser häufig auch etwas salopp als die *Geometrie auf der Gummihaut* bezeichnet. Mit dieser Bezeichnung soll das Augenmerk vor allem auf die sogenannten topologischen Invarianten gelenkt werden wie beispielsweise die Nachbarschafts- oder die Schnittpunkttreue. Wollte man weniger salopp, aber trotzdem ohne größeren Formalismus, den Sachverhalt aus dem ersten Satz dieses Absatzes ausdrücken, so könnte man auch ganz allgemein von *stetigen Abbildungen* sprechen und zur Veranschaulichung der betrachteten Beziehungen das Rechteck und den Kreis heranziehen. Denn diese beiden Gebilde haben ganz offensichtlich gemeinsame Eigenschaften, die unabhängig von der Metrik sind.

1.2 Die Bedeutung der Topologie für Geo-Informationssysteme

Mittlerweile umfaßt der Begriff Geo-Informationssysteme (GIS) eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Anwendungen, die sich sowohl im Maßstab als auch in der Thematik stark unterscheiden. Dementsprechend variieren auch die Anforderungen an die Topologie. Diese reichen von relativ einfachen Fragestellungen zur Netzverfolgung, wie sie beispielsweise in *Netzinformationssystemen (NIS)* gefordert werden, bis hin zu komplexen dreidimensionalen Beziehungen, wie sie in *Gebäudeinformationssysteme-*

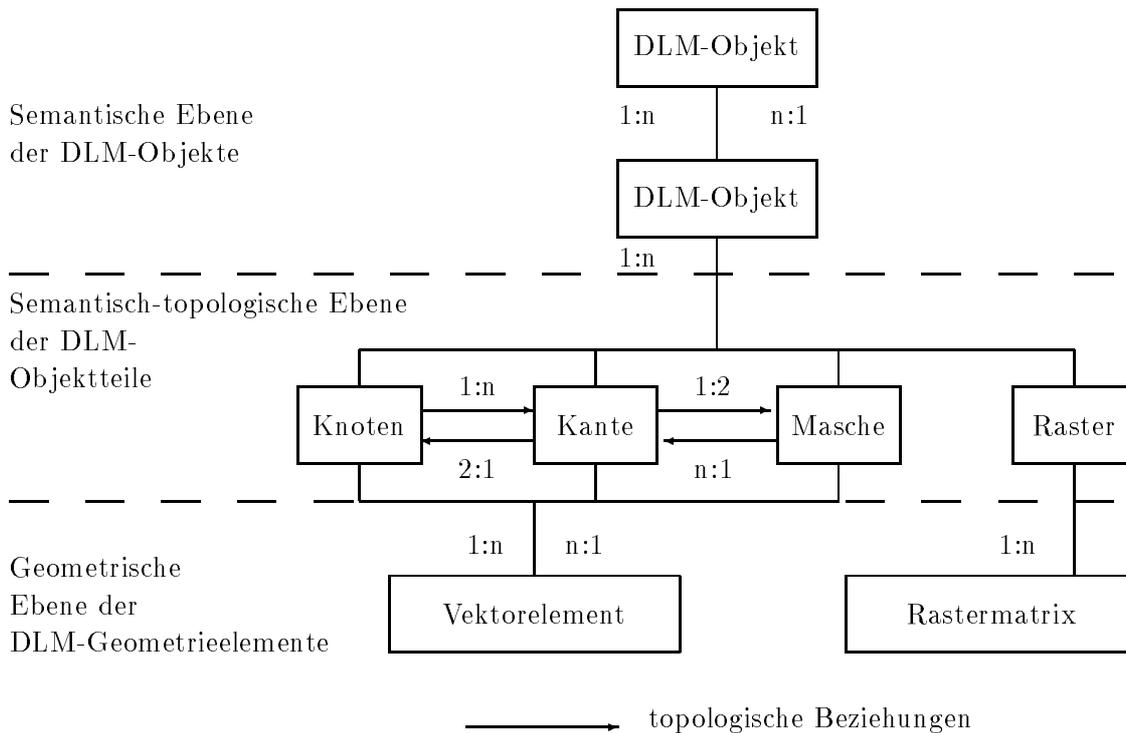


Abbildung 1: Das DLM-Datenmodell (nach [AdV/ATKIS,1989])

men (*GebIS*) vorkommen¹. Diese Vielfalt ist neben anderen ein weiteres Argument, das gegen das *general purpose* GIS spricht [SCHILCHER/KALTENBACH/ROSCHLAUB 1996, S. 365].

Die Relevanz dieses Wissensgebiets für das Geo-Informationswesen ist offenkundig. Nach allgemein anerkannter Auffassung gehört neben der Geometrie und der Semantik auch die Topologie als eigenständiger Teil zur Modellbildung in GIS. In diesem Zusammenhang ist es interessant, die Definition der Topologie, wie sie einem Lehrbuch zu GIS entnommen werden kann, näher zu betrachten. Nach [BILL/FRITSCH 1991] beschäftigt sich die Topologie

“ ...mit den nichtmetrischen räumlichen und strukturellen Beziehungen beliebiger Elemente in abstrakten Räumen.“

Diese Definition macht deutlich, daß dem Raumverständnis der Topologie nicht notwendigerweise ein euklidischer Raum zugrunde liegen muß. Bereits im Konzept zum *Amtlichen Topographisch-Kartographischen Informationssystem (ATKIS)* wird deutlich zwischen einer rein topologischen und einer rein geometrischen Ebene unterschieden (Abbildung 1).

Dieser Entwurf bildet die topologischen Zusammenhänge als Knoten/Kantenstruktur ab. Die klare Trennung zwischen Geometrie im engeren Sinne und der Topologie erlaubt im allgemeinen (dies wird an späterer Stelle noch belegt) eine bessere Überprüfung des Datenbestandes und nach der Bereinigung der topologischen Fehler auch dessen Analyse.

Vor allem der zweite Aspekt spielt bei *Energieversorgungsunternehmen (EVU)* eine besondere Rolle ([BERNHARDT 1994, z. B. S. 33], [GREPEL/SCHÜLLER 1992]). In einem Bereich, in dem die Netztopolo-

¹In [ULMER/SESTER/FRITSCH 1997, S. 20] werden Gebäudeinformationssysteme als echte Untermenge von GIS betrachtet.

gie von herausragender Bedeutung ist, sollen bereits beim Erfassen der Daten² die korrekte Topologie geprüft und auf Inkonsistenzen untersucht werden. Diese Forderung wird verständlich, wenn man sich vor Augen führt, daß die galvanische Verknüpfung einer 100kV-Freileitung mit einem gewöhnlichen Hausanschluß keinen Sinn macht. Dieses Beispiel zeigt gleichzeitig auf anschauliche Weise, wie topologische Beziehungen im Analysebereich eingesetzt werden können, denn wenn der Datenbestand netzlogisch widerspruchsfrei erfaßt ist, kann anschließend relativ einfach auch eine Netzverfolgung durchgeführt werden.

Wenn in obigem Abschnitt vor allem auf Anwendungen im Versorgungsbereich abgehoben wird, so soll das nicht heißen, daß beispielsweise im reinen Liegenschaftskataster topologische Fragestellungen keine Rolle spielen. Als Beispiel sei hier die Überlappung zweier Flurstücke genannt, die im Normalfall nicht vorkommen kann. Auch hier sind geeignete Werkzeuge zu entwickeln, die u. U. auf topologischen Beziehungen aufbauen, um derartige Fälle aufzudecken [RATH/AUERBACH 1996].

Ausgehend von der Definition eines GIS³, das die

... Erfassung, Verwaltung, Analyse und Präsentation von Informationen mit Raumbezug...

zum Ziel hat, gilt es natürlich zu berücksichtigen, daß die Topologie in jedem der Teilbereiche ihre Spuren hinterläßt. D.h. topologische Beziehungen müssen erfaßt und gespeichert werden, damit man sie später auch analysieren kann. Ob topologische Beziehungen auch präsentiert werden müssen, hängt von der Anwendung ab. Am Beispiel des Energieversorgers aus dem vorangegangenen Absatz ist diese Frage sicher zu bejahen, da es für ein Unternehmen dieser Sparte von erheblicher Relevanz ist, wie die Verknüpfungen im Netz vorliegen. Das Ergebnis dieser Visualisierung könnte beispielsweise ein Graph sein, der die verschiedenen Knoten (z. B. Schieber, Schalter, Ventile usw.) und die sie verbindenden Kanten (z. B. Haltungen, Leitungen usw.) als sogenannten Schemaplan wiedergibt. Im Gegensatz dazu mag es fraglich sein, ob die Präsentation der Topologie bei einer reinen Katasteranwendung sinnvoll ist.⁴

1.3 Zielsetzung der Arbeit

In dieser Arbeit wird der Frage nachgegangen, welche Bedeutung die verschiedenen in der Topologie definierten Räume für GIS haben. Dabei soll vor allem erörtert werden, inwieweit die allgemeinere Deutung des Begriffs Raum aus der Topologie Vorteile für GIS bringt. Bei diesen Untersuchungen soll in erster Linie der mengentheoretische Gesichtspunkt topologischer Beziehungen in GIS beleuchtet werden. Unter diesem Aspekt wird auch die Datenbank bzw., um etwas präziser zu sein, die dort abgelegte Information betrachtet. Die Analysen sollen dann in einem Implementierungsvorschlag für topologische Strukturen gipfeln, der möglichst vielseitig einsetzbar sein soll. Es wird dabei ein Ansatz angestrebt, der es erlaubt, sämtliche Fragestellungen im Zusammenhang mit topologischen Problemen durch reine Mengenoperationen zu lösen.

Im folgenden werden Inhalt und Aufbau der Arbeit kurz skizziert. Nach der Einführung werden zunächst in Kapitel 2 die mathematischen und daran anschließend einige Grundlagen aus der Informatik, sofern sie diese Arbeit berühren, aufgeführt. Daran anschließend werden einige Methoden zur Modellierung von Daten dargestellt, auf die in Kapitel 7 zurückgegriffen wird. Der nächste Themenkreis behandelt dann einige Gesichtspunkte aus dem Bereich GIS und Topologie. Es wird dabei sowohl theoretischen als auch praktischen Gesichtspunkten nachgegangen. In Kapitel 6 werden anschließend einige topologische Fragestellungen des \mathbb{R}^2 näher erörtert, um daraus Folgerungen für den

²Gemeint sind die Betriebsmittel.

³In Abhängigkeit der Ziele, die mit einem GIS verfolgt werden sollen, setzen die verschiedenen Autoren voneinander abweichende Schwerpunkte (z. B. [BURROUGH 1986], [BILL/FRITSCH 1991], [MAGUIRE/GOODCHILD/RHIND 1991] oder [BARTELME 1995]) und gewichten die oben genannten Teilaspekte unterschiedlich.

⁴Davon bleibt die Analyse topologischer Beziehungen natürlich unberührt. Denn zweifellos ist die Frage nach Nachbarflurstücken zu einem gegebenen Flurstück sinnvoll (siehe auch [AL-TAHA/FRANK 1993]).

\mathbb{R}^3 abzuleiten. Darauf aufbauend werden dann Vorschläge zur Implementierung von zwei- und dreidimensionalen Datenstrukturen mit topologischem Hintergrund unterbreitet. Zusammenfassung und Ausblick bilden den Abschluß der Arbeit und stellen nochmals die wichtigsten Ergebnisse heraus bzw. zeigen weitere Perspektiven.

2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die darauf folgenden Ausführungen vorgestellt. Die mathematischen Darstellungen beruhen im wesentlichen auf [JÄNISCH 1980], [KUHN 1990], [LIPSCHUTZ 1977], [MESCHKOWSKI 1972], [OSSA 1992], sofern es um die allgemeine Topologie geht. Die Topologie des \mathbb{R}^2 sowie die Ausführungen zu den Simplizial- und Zellenkomplexen stützen sich auf [ALEXANDROFF 1961], [KERÉKJÁRTÓ 1923], [SCHUBERT 1975] und [NEWMAN 1961]. Die Ausführungen zur Graphentheorie gehen auf [VOLKMANN 1996] zurück. Die hier genannten Werke werden im Text als Quelle nicht gesondert nachgewiesen. Probleme aus Randgebieten oder Fragestellungen, die für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sind, werden selbstverständlich separat angegeben.

2.1 Metrische Räume

Da der metrische Raum unserer Anschauung am nächsten liegt, soll er als erster vorgestellt werden.

Eine Funktion heißt Metrik (Distanzfunktion), wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} M_1: & \quad d(a, b) \geq 0 \text{ und } d(a, a) = 0. \\ M_2: & \quad d(a, b) = d(b, a). \\ M_3: & \quad d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \text{ (Dreiecksungleichung)}. \\ M_4: & \quad \text{Aus } a \neq b \text{ folgt } d(a, b) > 0. \end{aligned} \tag{2-1}$$

d wird dabei als der Abstand von a und b bezeichnet. Aus dem oben Gesagten ergibt sich für das 2-Tupel aus dem \mathbb{R}^2 mit $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ durch

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \tag{2-2}$$

die sogenannte natürliche oder auch euklidische Metrik. Die euklidische Metrik läßt sich dabei auch auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Daß neben der euklidischen noch unzählige weitere Metriken denkbar sind, verdeutlicht die sogenannte diskrete oder auch triviale Metrik, die wie folgt definiert ist:

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \neq b \\ 0 & \text{falls } a = b \end{cases} \tag{2-3}$$

In diesem Zusammenhang wird später auch der Abstand zweier Mengen von Bedeutung sein. Legt man dabei die Beziehung 2-3 zugrunde, dann ist der Abstand zweier Mengen A und B in einem gegebenen metrischen Raum durch

$$d(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{falls } A \cap B \neq \emptyset \end{cases} \tag{2-4}$$

definiert. Die gleiche Beziehung gilt auch, wenn eine der Mengen nur aus einem einzigen Punkt besteht.

Ein weiteres Beispiel für eine Distanzfunktion ist der sogenannte Hamming-Abstand. Dieser Begriff stammt aus der Codierungstheorie und bezeichnet ein Maß, das die Fehlerkorrektur von Codes charakterisiert [ROHLING 1995]. In diesem Zusammenhang soll der Hamming-Abstand, ausgehend von seiner Definition, einen anderen Akzent bekommen.

Nimmt man zwei gleichlange Worte eines Codes und vergleicht sie Stelle für Stelle, so nennt man die Anzahl der verschiedenen Stellen den Hamming-Abstand d dieser beiden Worte. Am Beispiel der

$$\begin{array}{r}
 \text{A: 01000001} \\
 \text{C: 01000011} \\
 \hline
 00000010 \Rightarrow d = 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{A: 01000001} \\
 \text{B: 01000010} \\
 \hline
 00000011 \Rightarrow d = 2
 \end{array}$$

Abbildung 2: Der Hamming-Abstand am Beispiel des ASCII-Codes

Buchstaben A und C des ASCII-Codes (siehe Abbildung 2) sieht man sofort, daß diese beiden Wörter nach obiger Definition den Abstand $d = 1$ haben.

Verallgemeinert man obige Definition und wendet sie auf einen ganzen Code an, so ist der Hamming-Abstand des gesamten Codes gerade dem Minimum des Hamming-Abstands unterschiedlicher Code-Wörter von gleicher Länge. Daraus ergibt sich für den ASCII-Code ein Hamming-Abstand d von 1. Formal läßt sich der Hamming-Abstand zweier Wörter folgendermaßen ausdrücken:

$$d = \sum_{i=1}^n d_i(s_i, t_i), \quad \text{mit} \quad d_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } s_i = t_i \\ 1 & \text{falls } s_i \neq t_i \end{cases} \quad (2-5)$$

Dabei bezeichnen i die i -te Stelle im Wort s bzw. t und n die Länge des Wortes. Man beachte, daß durch diese Distanzfunktion eine Metrik auf einem Code definiert wird [Heuser, 1992 S. 58].

2.2 Der allgemeine topologische Raum

In diesem Abschnitt soll die vorangegangene Definition eines Raumes verallgemeinert werden. Als erstes wird geklärt, was unter einem topologischen Raum zu verstehen ist. Eine Menge T heißt ein topologischer Raum, wenn zu jedem $a \in T$ mindestens eine (Umgebung genannte) Teilmenge $U(a) \subset T$ existiert, die folgende Eigenschaften hat:

T_1 : Jedes Element a ist in jeder seiner Umgebungen $U(a)$ als Element enthalten: $a \in U(a)$.

T_2 : Zu zwei Umgebungen $U_1(a)$ und $U_2(a)$ gibt es stets eine Umgebung $V(a)$, die im Durchschnitt von $U_1(a)$ und $U_2(a)$ enthalten ist: $V(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.

T_3 : Ist b ein Element aus einer Umgebung $U(a)$, so gibt es mindestens eine Umgebung $U(b)$, die in $U(a)$ enthalten ist: $U(b) \subset U(a)$.

T_4 : Jede Obermenge einer Umgebung von a ist Umgebung von a .

Die Elemente eines solchen topologischen Raums heißen Punkte. Die Axiome T_1 , T_2 und T_3 definieren dabei eine sogenannte Umgebungsbasis von a .

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es sich beim topologischen Raum tatsächlich, wie oben behauptet, um eine Verallgemeinerung des metrischen Raums handelt. Ausgehend von einem metrischen Raum M und dem Mengensystem

$$U(a) = \{x | x \in M \wedge d(x, a) < k\} \quad (2-6)$$

wird für jedes $k > 0$ eine Umgebungsbasis von a gebildet. Im eindimensionalen Raum (d. h. der Menge der reellen Zahlen) ist dies das Intervall $]a - k, a + k[$ (siehe Abbildung 3), in der Ebene sind es alle Punkte innerhalb eines Kreises (siehe Abbildung 4) und im \mathbb{R}^3 ist es die offene Vollkugel. Mit 2-6 ist gleichzeitig auch die Bedingung T_4 erfüllt, es verbleiben die Punkte $T_1 - T_3$. Mit $d(a, a) =$

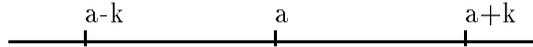


Abbildung 3: Das Intervall $]a - k, a + k[$

$0 < k$, für alle $k > 0$ ist bereits T_1 gezeigt. Definiert man mit $U_1(a) < k_1$ und mit $U_2(a) < k_2$ zwei Umgebungen von a , wobei k_1 und k_2 zwei positive Zahlen sind und $k_1 < k_2$, dann gilt $U_1(a) \subset U_2(a)$ und $U_1(a) \cap U_2(a) = U_1(a)$, womit durch $V(a) = U_1(a)$ die Bedingung T_2 erfüllt ist. T_3 kann über die Dreiecksungleichung abgeleitet werden. Gegeben ist $U(a)$ mit $d(a, x) < k$ und $b \in U(a)$, also $d(a, b) = k_1 < k$. Ferner sei $U(b)$ gegeben durch $d(b, y) < k_2$, wobei $k_1 + k_2 < k$ ($k_1, k_2 > 0$). Dann ist $d(a, y) \leq d(a, b) + d(b, y) = k_1 + k_2 < k$ und somit $U(b) \subset U(a)$, was wiederum T_3 erfüllt.

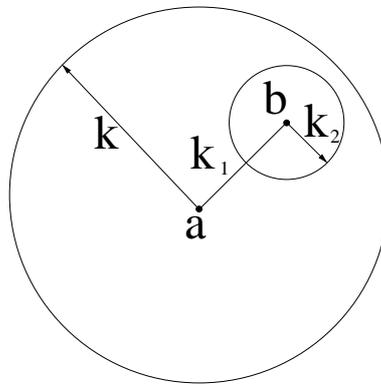


Abbildung 4: Die Umgebung von a

Damit ist gezeigt, daß jeder metrische Raum als topologischer Raum aufgefaßt werden kann. Damit läßt sich der topologische Raum T als echte Obermenge des metrischen Raumes M auffassen (siehe Abbildung 5).

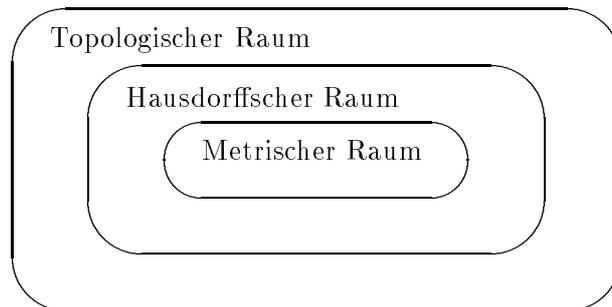


Abbildung 5: Der topologische Raum T als Obermenge zum metrischen Raum M

Im Abschnitt 2.1 wurde bereits gezeigt, daß der Hamming-Abstand eine Metrik auf einen Code definiert. Verallgemeinert kann nun mit der oben gemachten Aussage festgestellt werden, daß jeder Code, für den ein Hamming-Abstand angegeben werden kann, gleichzeitig auch einen topologischen Raum darstellt. Der ASCII-Code wäre demnach z.B. auch ein topologischer Raum.

Es folgt eine Erweiterung der Axiome $T_1 - T_4$. Ein topologischer Raum heißt separiert, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

T_5 : Zu zwei beliebigen aber verschiedenen Punkten a und b des Raumes T gibt es stets Umgebungen $U(a)$ und $U(b)$, deren Durchschnitt leer ist: $U(a) \cap U(b) = \emptyset$.

Ein topologischer Raum, der zusätzlich zu den Eigenschaften $T_1 - T_4$ auch noch die Eigenschaft T_5 erfüllt, wird auch Hausdorffscher, separierter oder T_2 Raum genannt. Die Bedingung T_5 allein bezeichnet man als das Hausdorffkriterium. Neben dem Hausdorffkriterium sind in der Mathematik noch weitere Trennungsaxiome, die weitere topologische Räume charakterisieren, üblich. Da sie für diese Arbeit von untergeordneter Bedeutung sind, wird an dieser Stelle nicht näher auf sie eingegangen.

Im weiteren wird der Zusammenhang zwischen einem metrischen und einem T_2 -Raum näher betrachtet. Ausgangspunkt sei die Behauptung, jeder metrische Raum ist auch ein T_2 -Raum. Gegeben seien zwei Punkte $a, b \in X$, wobei $a \neq b$. Nach M_4 ist dann $d(a, b) > \epsilon$. Die beiden offenen, i.a. n -dimensionalen offenen Kugeln G und H haben den Radius $r = \frac{1}{\epsilon}$ mit den Mittelpunkten a bzw. b . Es wird nun behauptet, daß die beiden Kugeln nicht disjunkt sind (der Beweis wird über einen Widerspruch erbracht). Dann gibt es einen Punkt p mit $d(a, p) < \frac{1}{\epsilon}$ und $d(b, p) < \frac{1}{\epsilon}$. Mit M_3 ist dann $d(a, b) < \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}\epsilon$. Dies steht aber im Widerspruch zur Ausgangsannahme, daß $d(a, b) = \epsilon$. Folglich sind G und H disjunkte offene Kugeln bzw. Mengen und damit ist X ein Hausdorffscher Raum, womit die Ausgangsbehauptung bewiesen wäre.

Neben den mit $T_1 - T_4$ gegebenen Definitionen kann ein topologischer Raum auch auf eine zweite Art definiert werden.

Ausgehend von einer nichtleeren Menge X und einem System von Teilmengen T von X wird eine Topologie auf X durch die folgenden Axiome definiert:

A_1 : X und \emptyset gehören zu T .

A_2 : Die Vereinigung beliebiger Mengen von T gehört zu T .

A_3 : Der Durchschnitt endlich vieler Mengen von T gehört zu T .

Die Mengen von T heißen offene Mengen und das Paar (X, T) heißt ein topologischer Raum. Wenn in den folgenden Ausführungen auf die Definitionen eines topologischen Raumes Bezug genommen wird, sind, sofern nicht ausdrücklich ausgeschlossen, immer die oben aufgeführten Axiome $A_1 - A_3$ gemeint.

Neben den bisher genannten Definitionen sind noch weitere denkbar. Insbesondere seien in diesem Zusammenhang die Kuratowski'schen Hüll- bzw. Kernaxiome genannt, die ebenfalls eine Topologie charakterisieren [Kuhn 1990, S. 31ff]. Da diese Darstellung für die vorliegende Arbeit aber keinen neuen Gesichtspunkt bringt, soll auf diese Axiome nicht näher eingegangen werden.

2.3 Topologische Abbildungen

Ein weiterer wichtiger Aspekt topologischer Räume ist deren Stetigkeit, die wie folgt definiert ist.

X und Y seien topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von X in Y . f heißt stetig in $t \in X$, wenn es zu jeder Umgebung von $f(t)$ $U(f(t))$ eine Umgebung $U_1(t)$ gibt, mit der Eigenschaft $f(U_1(t)) \subset U(f(t))$. Ist f in jedem Punkt stetig, dann ist f global stetig.

Eine bijektive Abbildung f eines topologischen Raums X in einen topologischen Raum Y heißt eine topologische Abbildung, wenn die Funktionen f und f^{-1} stetig sind. Topologische Abbildungen werden auch als homöomorphe Abbildungen bezeichnet. Die beiden Räume X und Y heißen dann topologisch äquivalent.

Da diese Gruppe von Abbildungen im folgenden noch eine größere Rolle spielen wird, soll an dieser Stelle etwas ausführlicher auf sie eingegangen werden. Geometrisch läßt sich das oben Gesagte sehr leicht vergegenwärtigen, wie die beiden Fälle in Abbildung 6 deutlich machen. Demnach erfüllt die Abbildung eines Kreises auf einen Würfel offensichtlich alle Bedingungen, die an eine homöomorphe Abbildung gestellt werden, während die Abbildung eines Würfels auf seine Diagonale dies nicht tut. Die Begründung dafür ist relativ einfach, da die Forderung nach Umkehrbarkeit der Abbildung nicht gegeben ist. Jedem Punkt der Diagonale müssen zwei Punkte des Würfels zugeordnet werden, die Abbildung ist somit nicht bijektiv.

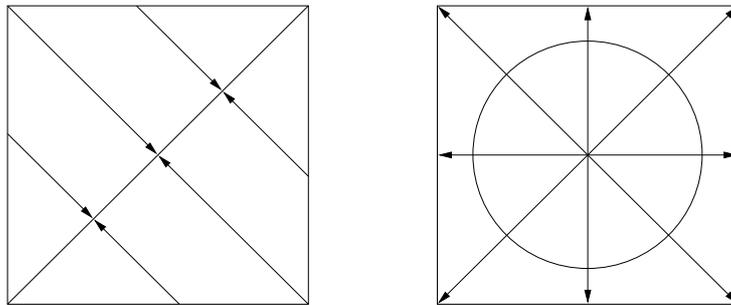


Abbildung 6: Die Abbildung des Würfels auf seine Diagonale und die des Kreises auf den Würfel

Der in Abbildung 6 dargestellte Sachverhalt ist genau betrachtet lediglich ein Sonderfall eines allgemeineren Zusammenhangs, der in der einschlägigen mathematischen Literatur als der *Brouwer'sche Satz* über die Invarianz der Dimensionszahl bekannt ist. Dieser Satz besagt, daß es keine homöomorphe Abbildung zwischen den Punkten eines n -dimensionalen und eines $(n + m)$ -dimensionalen ($m > 0$) Raumes geben kann. Der Beweis kann zumindest für das in Abbildung 6 gegebene Beispiel relativ einfach erfolgen.

Sei k der Umfang eines Kreises im \mathbb{R}^2 , der mittels einer Abbildung auf ein zunächst beliebiges Intervall $I]a, b]$ abgebildet wird. Wenn diese Abbildung eine topologische ist, muß sie stetig sein, wie zuvor bereits ausgeführt wurde. Dann muß aber die Umgebung eines beliebigen Punktes $U(x)$ nach $(\tilde{U})(\tilde{x})$ abgebildet werden, was nichts anderes heißt, als daß die Umgebung des Originals im Bild wieder eine Umgebung zu x ist. Dies kann aber nicht für alle Punkte und für beliebige Umgebungen gegeben sein, denn offensichtlich muß der Kreis an irgendeiner Stelle aufgetrennt werden, damit die Punkte auf das Intervall I abgebildet werden können. Aber genau für diese Stelle ist die oben geforderte Bedingung nach Stetigkeit nicht erfüllt, da zwei benachbarte Punkte an ganz verschiedenen Stellen, nämlich einmal nach a und zum anderen nach b , abgebildet werden. Die Abbildung kann somit keine topologische sein.

Der vorangegangene Satz von Brouwer ist im Grunde nichts anderes als eine Folgerung aus dem *Jordan'schen Kurvensatz*, der wegen seiner Bedeutung für GIS und seiner Anschaulichkeit in Abschnitt 2.6 gesondert vorgestellt wird. Letztlich bauen alle anschaulichen Beweise für den Satz von Brouwer im \mathbb{R}^1 und \mathbb{R}^2 auf dem Theorem von Jordan auf.

2.4 Der Vergleich von Topologien

Oftmals gilt es zwei Topologien zu einem gegebenen topologischen Raum miteinander zu vergleichen. Das Maß dafür bildet die *Feinheit*. Die Feinheit wird dabei über die folgende Festlegung beschrieben: Seien T_1 und T_2 zwei Topologien in X und sei weiterhin $T_1 \subset T_2$, dann nennt man T_2 feiner als T_1 oder T_1 gröber als T_2 .

Nach dieser Definition enthält damit die feinere Topologie mehr Elemente als die grobe. Weiterhin kann eine gröbste und eine feinste Topologie angegeben werden. Die gröbste Topologie auf X besteht

aus X selbst und der leeren Menge. Diese Topologie wird auch als die triviale oder die indiskrete Topologie bezeichnet. Demgegenüber wird die feinste Topologie durch das System aller offenen Teilmengen beschrieben. Diese Topologie ist auch unter dem Namen diskrete Topologie bekannt.

Die bisher gemachten Ausführungen machen deutlich, daß verschiedene Topologien auf X definiert werden können. Es gibt feinere und gröbere Topologien, die allerdings nicht unbedingt einer strengen Ordnung unterliegen. Es sind auch Topologien denkbar, die nicht miteinander vergleichbar sind.

Ein kleines Beispiel soll diese Ausführungen verdeutlichen. Gegeben sei $X = \{a, b, c\}$ sowie $T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $T_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}$ und $T_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Es gilt nun ganz offensichtlich $T_1 \prec T_3$ und auch $T_2 \prec T_3$, d.h. T_1 und T_2 sind gröber als T_3 . T_1 und T_2 sind demgegenüber nicht miteinander vergleichbar. T_3 bildet für das gegebene Beispiel die feinste, also diskrete Topologie, da sie die Menge aller Teilmengen von X darstellt. $T_4 = \{\emptyset, X\}$ wäre im Gegensatz dazu die indiskrete Topologie.

2.5 Homotopien

Existieren zwischen topologischen Räumen zwei stetige Abbildungen f und g mit $f, g : X \rightarrow Y$, dann heißen diese homotop ($f \simeq g$), wenn es eine dritte stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, so daß gilt: $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Die Abbildung h wird Homotopie genannt, wobei sie mitunter auch als *stetige Deformation von f in g* bezeichnet wird. Diese sehr allgemeine Definition spielt im Rahmen dieser Arbeit nur insofern eine Rolle, als sie die Voraussetzung für eine auf sie aufbauende Definition liefert. Es handelt sich dabei um die Homotopie von Wegen. Gegeben seien zwei feste Punkte p und $q \in Y$, wobei $Y \subset \mathbb{C}$ und $X = [0, 1]$. h muß nun noch den folgenden Bedingungen genügen: $h_t(0) = p$, und $h_t(1) = q$ für alle t . Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 7 wiedergegeben.

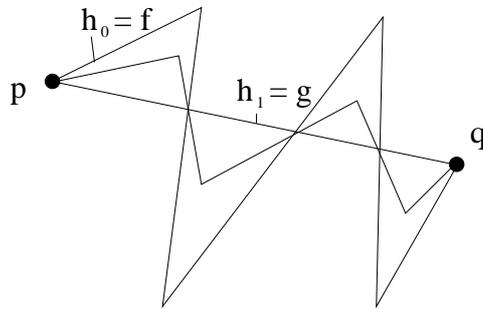


Abbildung 7: Beispiel zur Homotopie

2.6 Topologische Beziehungen im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3

Wegen ihrer Anschaulichkeit und auch ihrer Bedeutung für GIS wird den topologischen Beziehungen im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 ein gesonderter Abschnitt gewidmet. Um einige der nachstehenden Begriffe zu klären, folgen zunächst verschiedene allgemeine Definitionen.

Eine geordnete Menge \mathbb{M} heißt beschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke hat. Die Menge ist darüber hinaus auch noch zusammenhängend, wenn es keine Partitionen in \mathbb{M} gibt. Eine Partition in \mathbb{M} ist genau dann gegeben, wenn \mathbb{M} in ein System $\mathbb{I}P = \{\mathbb{I}D, \mathbb{I}B\}$ zerlegt werden kann, wobei $\mathbb{I}D$ und $\mathbb{I}B$ jeweils offene Mengen sind. Eine Zerlegung von \mathbb{M} liegt dann vor, wenn es sich bei $\mathbb{I}D$ und $\mathbb{I}B$ jeweils um nichtleere, disjunkte Mengen handelt, deren Vereinigung gerade \mathbb{M} ergibt.

Gegeben sei eine Menge \mathbb{M} . Dann ist $p \in \mathbb{M}$ genau dann ein *innerer Punkt* von \mathbb{M} , wenn es eine Umgebung $U(p)$ von p gibt, die vollständig zu \mathbb{M} gehört. Ein Gebiet G , das Teilmenge von \mathbb{M} ist,

liegt genau dann vor, wenn je zwei innere Punkte von G durch einen Weg, der vollständig in G liegt, verbunden werden können. Die Grenzpunkte, die nicht zum Gebiet gehören, werden *Rand \dot{s}* von G genannt. Daraus folgt, daß jede Umgebung des Randes $U(\dot{s})$ sowohl Punkte enthält, die zum Gebiet gehören als auch solche, die nicht zum Gebiet gehören.

Diese wenigen einführenden Worte genügen, um einen der zentralen Sätze, um die sich diese Arbeit drehen wird, zu formulieren. *Eine einfach geschlossene Kurve bestimmt in der Ebene genau zwei Gebiete und ist mit dem Rand dieser beiden Gebiete identisch.* Aus diesem nach *Jordan* benannten Satz ergeben sich mehrere Schlußfolgerungen, wovon eine bereits in Abschnitt 2.2 vorweggenommen wurde. Eine weitere Aussage, die besonders für die Beweisführung gern herangezogen wird, ist die folgende: *Jeder Punkt einer einfach geschlossenen Kurve ist sowohl im Innern als auch im Äußeren der Kurve erreichbar.* Speziell für diese Arbeit ist die nachfolgend getroffene Beziehung von fundamentaler Bedeutung: *Das topologische Bild eines Gebiets in der Ebene ist wieder ein Gebiet.*

Nachdem der *Jordan'sche Kurvensatz* mit seinen Folgerungen vorgestellt wurde, wird im folgenden auch auf seine Umkehrung hingewiesen, die von nicht minderer Bedeutung ist. *Eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, die in der Ebene zwei Gebiete bestimmt, und deren Punkte in beiden Gebieten erreichbar sind, ist eine einfach geschlossene Kurve, d. h. sie läßt sich topologisch auf den Kreis abbilden.* Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß beispielsweise alle geschlossenen Kurven im \mathbb{R}^2 zum Kreis homöomorph sind und somit alle topologischen Aussagen, die für den Kreis gemacht werden können, auch für diese Kurven Gültigkeit haben. Aufgrund dieses Satzes werden an den verschiedensten Stellen im nachfolgenden Text die Beweise nur für eine bestimmte geschlossene Kurve ausgeführt und anschließend verallgemeinert.

Mit dem *Jordan'schen Kurvensatz* hat man jetzt ein elegantes Hilfsmittel, um den Satz über die Invarianz der Dimensionszahl (siehe S. 16) auch auf andere Art beweisen zu können. Dies soll nochmals am Beispiel des Kreises und der Menge der reellen Zahlen aufgezeigt werden. Die Ausgangsvoraussetzungen lauten jetzt: Der Kreis als geschlossenes Polygon teilt die Ebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet. Da der Kreis in der Ebene eine beschränkte Menge darstellt, muß er als topologisches Abbild wieder eine beschränkte Menge erzeugen. Auf der Zahlengerade sei dies das halboffene Intervall $[a, b[$. Das äußere Gebiet ist offensichtlich unbeschränkt, woraus zu schließen ist, daß es aus dieser unbeschränkten Menge einen Punkt x geben muß, für den nach der Abbildung $x < a$ gilt. Aus der gleichen Menge muß es aber auch einen anderen Punkt y geben, für den $y > b$ gilt. Nachdem nun diese Punkte in der Ebene über irgendeinen Weg erreichbar sind, ist dies im Bild nach oben getroffener Feststellung nicht mehr möglich. D. h. die Abbildung ist nicht stetig, was sie aber sein müßte, wenn es sich um eine topologische handeln sollte. Der Beweis über den Wegzusammenhang kann für beliebige Dimensionen nicht durch eine Verallgemeinerung der oben gewonnen Einsichten erbracht werden.

Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich die häufig verwendeten topologischen Invarianten wie etwa *Nachbarschaftstreue*, *Schnittpunkttreue* und *Geschlossenheit* ableiten. Über die Definition des Gebietes ist auch die Beziehung *innen* und *außen* ebenso wie die Eigenschaft *Randpunkt* festgelegt.

[NEWMAN 1961, S.128ff] gibt einen allgemeingültigen Beweis des *Jordan'schen Kurvensatzes* für beliebige Dimensionen. Für den \mathbb{R}^3 ergeben sich dabei einige wichtige Zusammenhänge. Als Verallgemeinerung zu dem \mathbb{R}^2 bildet im \mathbb{R}^3 die 2-Zelle den Rand \dot{s} eines Gebietes G und trennt G von G^c , dem zu G komplementären Gebiet. Anschaulich gesprochen bezeichnet \dot{s} ein inneres und ein äußeres Gebiet. Allgemein läßt sich zeigen, daß eine $(p - 1)$ -Sphäre ($p = 1, 2, 3 \dots n$) zwei Gebiete im \mathbb{R}^p bestimmt. Die Sphäre selbst bildet dabei den Rand dieser Gebiete. Dies gilt nebenbei bemerkt auch für den \mathbb{R}^1 , denn der Punkt, also die 0-Sphäre, teilt den Zahlenstrahl ebenfalls in zwei disjunkte Gebiete.

Zuletzt wird für den \mathbb{R}^2 noch der Begriff des Umlaufsinnns eingeführt. Da in der Ebene alle geschlossenen Gebiete homöomorph zum Kreis sind, erfolgt die Definition am Beispiel des Kreises. Dem Umlaufsinn des Kreises entspricht eine zyklische Ordnung von drei vom Mittelpunkt ausgehenden Strahlen. Dem anderen Umlaufsinn entspricht die entgegengesetzte zyklische Ordnung. Auf ein Dreieck übertragen ist die Indikatrix eines Dreiecks, d. h. die zyklische Ordnung seiner Eckpunkte, dem Umlaufsinn des Kreises äquivalent.

2.7 Teilräume

Gegeben sei ein topologischer Raum X und eine nichtleere Teilmenge T von X . Es existiert nun eine Abbildung f , die jedem Element der Menge T ein Element aus X zuordnet. f ist darüber hinaus im allgemeinen injektiv. Es gilt also $f : T \rightarrow X$. Die Abbildung f wird *Inklusion* oder *Injektion* von T in X genannt. T selbst wird als *Teil-* oder *Unterraum* bezeichnet.

Eine andere Darstellung, die allerdings im Kontext dieser Arbeit aussagekräftiger ist, kann durch die folgende Definition gegeben werden:

Gegeben sei der topologische Raum (X, \mathcal{H}) . Weiterhin sei T eine nichtleere Teilmenge von X . Dann ergibt sich mit \mathcal{H}' aus $H \cap T \subseteq \mathcal{P}(T)$, wobei $H \in \mathcal{H}$, eine Topologie auf T . $\mathcal{P}(T)$ bezeichnet dabei die Potenzmenge von T . Das Paar (T, \mathcal{H}') heißt Unter- oder Teilraum von (X, \mathcal{H}) .

Folgendes Beispiel soll die Ausführungen verdeutlichen:

Sei $X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ und $T = \mathbb{R}$, dann bildet das Paar (T, \mathcal{H}') mit $\mathcal{H}' = \mathcal{R}$ einen Unterraum.

2.8 Simplexe und Simplizialkomplexe

Die Punkte $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ (insgesamt $p+1$ Punkte) sind in allgemeiner Lage, wenn die Vektoren

$$x^{(1)} - x^{(0)}, x^{(2)} - x^{(0)}, x^{(2)} - x^{(1)}, \dots, x^{(p)} - x^{(0)} \tag{2-7}$$

linear unabhängig sind. Die Punkte $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ stehen dabei für $x^{(j)} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 0, 1, 2 \dots, n$. Ist 2-7 erfüllt, dann sind auch

$$x^{(i)} - x^{(j)}, \dots, \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots, p \text{ und } j \text{ fest mit } i \neq j$$

linear unabhängig. Sind die Punkte in allgemeiner Lage, dann hat die von ihnen aufgespannte Hyperebene L die Dimension p und besteht aus den Punkten

$$x = \sum_{j=0}^p \lambda_j x^{(j)}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^p \lambda_j = 1.$$

Die λ_j heißen baryzentrische Koordinaten von x . Ist $w \notin L$, dann sind die $p+2$ Punkte $w, x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(p)}$ ebenfalls in allgemeiner Lage.

Sind die Punkte $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^m$ in allgemeiner Lage, dann wird die Menge

$$s = s_p = \left\{ \sum_{j=0}^p \lambda_j x^{(j)} \mid \sum_{j=0}^p \lambda_j = 1, \text{ und } \lambda_j \geq 0 \text{ für } j = 0, 1, 2, \dots, p \right\} \tag{2-8}$$

als *Simplex* bezeichnet. Man sagt auch s_p wird von den Ecken $x^{(j)}$ aufgespannt.

Die oben getroffene Festlegung kann sehr kompakt in folgender Definition ausgedrückt werden: Ein p -dimensionales Simplex (p -Simplex) im $\mathbb{R}^m (m \geq p)$ ist die konvexe Hülle von $p + 1$ Punkten in allgemeiner Lage.

Betrachtet man die Punktmenge $x^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, p$, aus denen sich das Simplex zusammensetzt als Punkte eines topologischen Raumes, dann sind zwei Simplexe s_p und s'_p zueinander homöomorph. Diese topologische Abbildung entspricht einer bijektiven Zuordnung der Ecken von s_p zu denen von s'_p . Demnach gibt es nach den Regeln der Kombinatorik $(p + 1)!$ verschiedene Abbildungen von s_p nach s'_p . Um hier Eindeutigkeit zu erzielen, definiert man geordnete Simplexe. Dies geschieht durch

die vollständige Durchnummerierung der Ecken, womit eine Reihenfolge festgelegt ist. Sind die beiden Simplexe s_p und s'_p in dieser Weise geordnet, dann gibt es nur noch genau eine Abbildung, die die Eckenordnung erhält.

Jede nichtleere Teilmenge der Menge aller Ecken eines Simplex s_p befindet sich wieder in allgemeiner Lage und spannt somit ebenfalls ein Simplex auf. Jedes dieser resultierenden Simplexe heißt *Seite* von s_p . Bezeichnet man eine solche Teilmenge von q Elementen ($q < p$) von s_p mit s_q und die verbleibende Menge mit s_r , so sagt man, s_r ist die s_q gegenüberliegende Seite. Damit liegt jeder Ecke von s_p eine $p - 1$ - dimensionale Seite gegenüber. Die Vereinigung aller Seiten von s_p heißt *geometrischer Rand* von s_p und wird mit \dot{s}_p bezeichnet. Aus dieser Festlegung ergibt sich ein Problem für das 0-Simplex, das durch die folgende Definition beseitigt wird: Für das 0-Simplex ist der geometrische Rand leer.

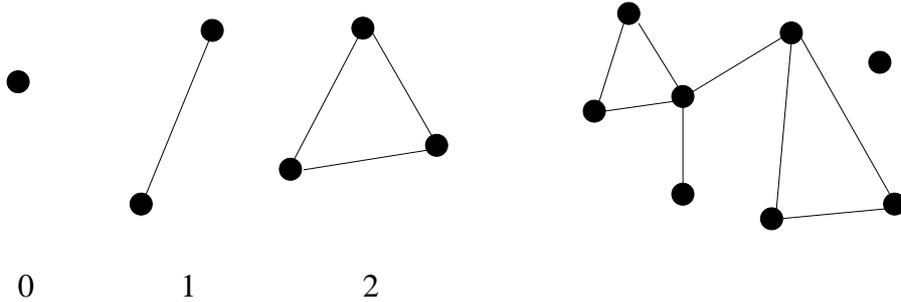
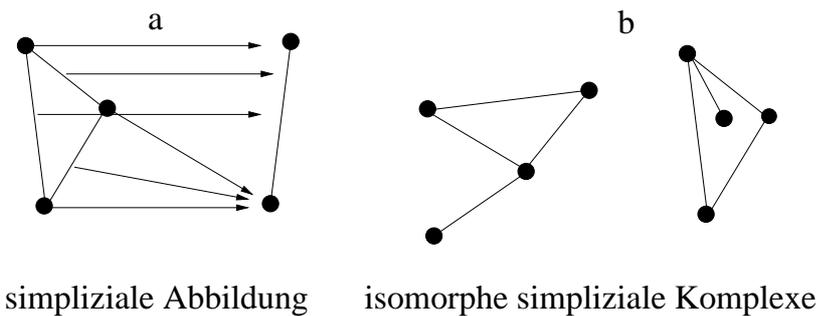


Abbildung 8: Beispiele für ein 0-,1-,2-Simplex und einen simplizialen Komplex im \mathbb{R}^2

Eine Menge von Simplexen wird simplizialer Komplex genannt, wenn er den beiden folgenden Bedingungen genügt:

S_1 : Gehört das Simplex s_p zu S, dann gehört auch jede Seite von s_p zu S.

S_2 : Für je zwei Simplexe aus S ist der Durchschnitt entweder leer oder eine gemeinsame Seite.



simpliziale Abbildung isomorphe simpliziale Komplexe

Abbildung 9: Eine simpliziale Abbildung und zwei isomorphe simpliziale Komplexe

Die Abbildung v eines Simplizialkomplexes K_s auf einen Simplizialkomplex L_s heißt simplizial, wenn sie jedes Simplex von K affin auf L abbildet. Die Abbildung v ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv (siehe Abbildung 9a). Eine simpliziale Abbildung ist bereits durch die Einschränkung auf die Abbildung der Ecken von K_s und L_s festgelegt. Einen Sonderfall bilden dabei zwei Simplizialkomplexe, für die eine simpliziale Abbildung existiert, die sowohl injektiv als auch surjektiv und damit bijektiv ist. Die beiden Simplizialkomplexe werden dann als isomorph bezeichnet. Gemäß den in Abschnitt 2.2 getroffenen Definitionen kann diese spezielle Abbildung auch als homöomorph bezeichnet werden.

Aus den bisher getroffenen Aussagen müssen nachfolgend noch einige wichtige Schlußfolgerungen gezogen werden. Danach können Simplicialkomplexe nicht beliebig angeordnet sein, ihr Aufbau muß gewissen Regeln genügen. So ist beispielweise die Figur in Abbildung 10 kein simplicialer Komplex, da laut Definition ein Simplex eine konvexe Hülle bezeichnet und ein Simplicialkomplex aus Simplexen bestehen muß, die allenfalls eine gemeinsame Seite haben dürfen. Diese Regel ist in Abbildung 10 gleich für mehrere Simplexe verletzt.

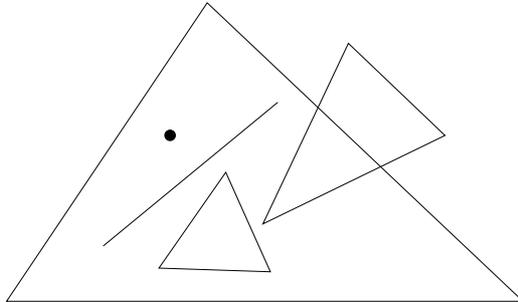


Abbildung 10: Ein Gegenbeispiel für einen Simplicialkomplex

2.9 Zellenkomplexe

Die Verallgemeinerung der simplicialen Komplexe stellen die sogenannten Zellenkomplexe dar, die im folgenden näher beschrieben werden. Vor der Definition der Zellenkomplexe gilt es aber noch einige Begriffe zu klären. Es ist $E^p = \sum_{i=1}^p x_i^2 \leq 1, p > 0$, die abgeschlossene Einheitskugel des \mathbb{R}^p und $S^{p-1} = \sum_{i=1}^p x_i^2 = 1, p > 0$, die $p-1$ -dimensionale Sphäre des \mathbb{R}^p . Hier stellt sich das Problem, wie die 0-dimensionale abgeschlossene und offene Einheitskugel zu behandeln ist. Für den Fall $p = 0$ definiert man deshalb die abgeschlossene 0-dimensionale Einheitskugel E^0 und die entsprechende offene Sphäre $S^{-1} = \emptyset$.

Mit Hilfe dieser Festlegungen kann ein Zellenkomplex Z in einem separierten topologischen Raum, der in Zellen aufgeteilt ist, wie folgt beschrieben werden:

Z_1 : Jede Zelle enthält genau einen Punkt von Z .

Z_2 : Zu jeder p -dimensionalen Zelle z^p von Z gibt es eine stetige Abbildung f , die E^p in Z derart abbildet, daß $E^p - S^{p-1}$ homöomorph auf z^p abgebildet wird und $f(S^{p-1})$ für $p > 0$ in der Vereinigung endlich vieler Zellen von Z mit kleinerer Dimension als p enthalten ist ($p \in \mathbb{N}, p < p_{max}$).

Z_3 : Eine Teilmenge von Z ist abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle einer jeden Zelle jeweils abgeschlossen ist.

Die Bedingung Z_1 stellt sicher, daß der Raum in Zellen aufgeteilt ist. Aufgrund dieser Eigenschaft spricht man auch von einer *Zellenzerlegung*. Z_1 in Verbindung mit Z_2 besagt weiterhin, daß der Aufbau von Z rekursiv beschrieben werden kann. Danach ergibt sich Z^{q+1} aus Z^q durch Hinzufügen der $(q+1)$ -Zellen. Die Grundbausteine liefern die 0-Zellen.

Nach den obigen Ausführungen sind demnach die Beispiele b und c aus Abbildung 11 zulässige Zellenkomplexe, während das Beispiel a gegen die Bedingung Z_1 verstößt. Das vierte Beispiel (d) ist ebenfalls keine zulässige Zellenzerlegung, da diese Figur nicht homöomorph zur offenen Einheitskugel ist. Im Gegensatz dazu stellt das letzte Beispiel wieder einen gültigen Zellenkomplex dar, da die beiden offenen 2-Zellen jeweils topologisch auf $E^2 \setminus S^1$ abgebildet werden können.

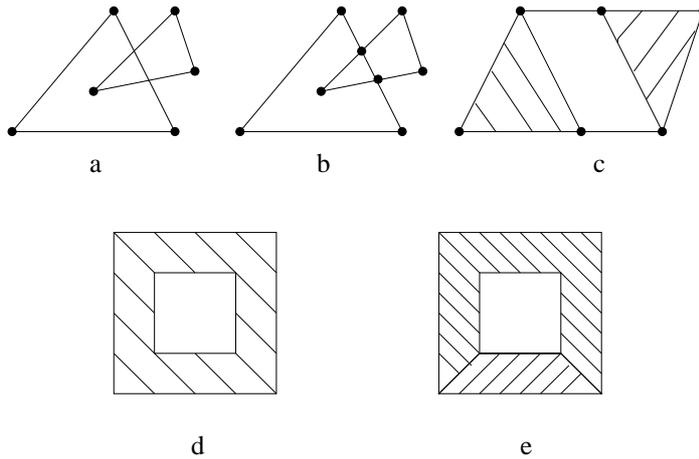


Abbildung 11: Beispiele für zulässige und unzulässige Zellenzerlegungen im \mathbb{R}^2

An dieser Stelle muß auf einen wichtigen Unterschied der Zellenkomplexe zu den Simplicialkomplexen aufmerksam gemacht werden. Die Forderung Z_2 umfaßt im wesentlichen die Existenz einer topologischen Abbildung der offenen p -Zelle auf die offene p -Einheitskugel ($E^p \setminus S^{p-1}$). Es wird somit keine konvexe Menge mehr vorausgesetzt. Insofern sind die Bedingungen, die man an einen Zellenkomplex stellt, schwächer als diejenigen, die an einen Simplicialkomplex gestellt werden.

Darüber hinaus umfaßt die Bedingung Z_2 auch die Forderung nach einer endlichen Hülle für jede n -Zelle. Aus diesem Grund wird diese Eigenschaft auch als *Hüllenendlichkeit* bezeichnet. Dies wird für die späteren Ausführungen noch von Bedeutung sein.

Die Definition Z_3 wiederum bezieht sich auf unendliche Zellenkomplexe und hat die Aufgabe, Sonderfälle aufzufangen. Von daher hat sie für diese Arbeit nicht die gleiche Bedeutung wie die beiden anderen. Dabei spielen ausschließlich praktische Gründe eine Rolle, da unendliche Zellenkomplexe in GIS nicht abgebildet werden können.

2.10 Quasi-Zellenkomplexe

In diesem Abschnitt erfährt die in Abschnitt 2.9 getroffene Definition eines Zellenkomplexes Z eine weitere Verallgemeinerung. Die Motivation, die sich hinter dieser Erweiterung verbirgt, wird an späterer Stelle in Kapitel 7 gegeben.

Einleitend soll noch nachstehende Bezeichnungsweise eingeführt werden. Es sei $\mathbb{ID}_1 \times \mathbb{ID}_2 \times \dots \times \mathbb{ID}_q$ das kartesische Produkt der paarweise zueinander disjunkten Menge von Attributen. \mathbb{ID}^q steht dabei für die Menge aller q -Tupel.

Eine Quasi-Zellenzerlegung setzt einen topologischen Raum $\mathbb{R}^p \times \mathbb{ID}^q$ voraus, in dem alle Punkte das Hausdorffkriterium erfüllen. Die Zerlegung erfolgt dabei im Unterraum \mathbb{R}^p und muß den nachstehenden Bedingungen genügen:

Q_1 : Eine Quasi- oder q -Zelle z^p hat einen äußeren Rand z_a^p und für $p > 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots, m$) innere Ränder z_i^p . Es gilt: $z_j^p \cap z_k^p = \emptyset$ für $j \neq k$, wobei k, j die Menge der Ränder durchlaufen. Die q -1-Zelle ist homöomorph zu $]0, 1[$. Die Menge aller q -Zellen wird als Quasi-Zellenkomplex oder als q -Zellenkomplex Q bezeichnet.

Q_2 : Für die randbildenden z^{p-1} -Zellen muß gelten, daß jeweils die endliche Vereinigungsmenge eines Teils der z^{p-1} homöomorph zu $E^{p-1} \setminus S^{p-2}$ ist.

Q_3 : Es gilt $z_i^p \cap z_j^q = \emptyset$ für $p = q$ und $z_i^p \cap z_j^q = \emptyset$ oder $z_i^p \cap z_j^q = z_i^p \vee z_j^q$ für $p \neq q$.

Q_4 : Es sind nur endliche q -Zellenkomplexe zugelassen.

Das Bedingung Q_1 in Verbindung mit Q_2 fordert sowohl von den inneren als auch vom äußeren Rand von z^p , daß sie homöomorph zur offenen Einheitskugel sind. Die Ränder dürfen sich dabei nicht schneiden. Für den Sonderfall der $q = 0$ -Zelle wird ebenso verfahren wie in Abschnitt 2.9, d.h. für $p \leq 0$ gilt $E^p = 0$ und $S^{p-1} = \emptyset$.

Während Z_1 im Zusammenhang mit den Zellenkomplexen den Schnitt von Zellen vermeiden soll, ist dieser Fall durch Q_3 explizit zugelassen. Aus Q_1 in Verbindung mit Q_2 kann für diesen Fall dann die Forderung abgeleitet werden, daß zwei Zellen z^q und z^p gemeinsame innere oder äußere Randpunkte haben müssen.

Die beiden Bedingungen Q_2 und Q_4 sind vor allem praktischer Natur. Sie dienen letztlich nur dazu, unangenehme Ausnahmefälle zu vermeiden. Q_2 sichert daher die Existenz eines endlichen Randes, während Q_4 die Zahl der Zellen begrenzen soll. Beide Definitionen berühren in gewisser Weise Implementierungsaspekte in GIS, deren Sinn in Kapitel 7 näher erläutert wird.

Wie aus den vorangegangenen Ausführungen ersichtlich ist, handelt es sich bei ID^q um einen Raum, der durch die Attribute aufgespannt wird. Dies können beispielsweise Farbe, Strichstärke oder Lini-entart ebenso aber auch Sachdaten wie z.B. Objektschlüssel, Straßenbreite oder Temperatur sein. ID^q beschreibt somit als Raum den Bereich der semantischen Objektmodellierung. Diese sehr allgemeine Auffassung macht es allerdings notwendig, den Begriff *Identität* in bezug auf Zellen neu zu fassen. Die Quasi-Identität ist wie folgt definiert: *Zwei Zellen sind quasi-identisch oder q -identisch, wenn sie nur im Unterraum ID^q voneinander unterschieden werden können.* Dies bedeutet umgekehrt, daß zwei geometrisch und topologisch identische Elemente über ihre Semantik, also im Raum ID^q , dennoch zu unterscheiden sind.

Nach dieser Definition unterscheiden sich die q -identischen Zellen folglich im \mathbb{R}^p nicht. Dieser Sachverhalt ist für GIS von herausragender Bedeutung, da es hier sehr häufig vorkommt, daß Objekte in ihrer graphischen Ausprägung rein geometrisch gleich sind, aber aufgrund ihrer Attribute durchaus unterschieden werden können. Die vollständige Identität zweier q -Zellen soll allerdings nach Voraussetzung (wegen Hausdorffkriterium) nicht zugelassen sein.

Mit der Einführung obiger Definition geht eine für die Zellenkomplexe sehr wesentliche Eigenschaft verloren. Denn ein so zusammengesetzter Quasi-Zellenkomplex kann nicht mehr als Gerüst aufgefaßt werden (vgl. dazu [SCHUBERT 1975, S. 175]). Der Verlust dieser Eigenschaft muß aber in Kauf genommen werden, damit zumindest ein Teil der Theorie aus dem Bereich der algebraischen Topologie angewendet werden kann. Die q -Zellen haben von daher die Eigenschaften eines Gebietes, wie es begrifflich in Abschnitt 2.6 eingeführt wurde.

Der Einfachheit halber wird für die folgenden Abschnitte nachstehende Konvention getroffen:

- Wenn von 0-,1-,2-...- p -Zellen die Rede ist, dann sind sie immer als das Ergebnis einer Quasi-Zellenzerlegung zu sehen und folglich als q -0-, q -1-, q -2-...- q - p -Zelle zu interpretieren. Sind dagegen Zellen im Sinne der Axiome $Z_1 - Z_3$ gemeint, dann wird dies ausdrücklich erwähnt.

Diese Festlegung hat weiter keinen tieferliegenden Sinn, sie soll lediglich Schreibarbeit ersparen.

2.11 Überlagerungen

Eine Überlagerung zu einem topologischen Raum X liegt dann vor, wenn es einen Raum \tilde{X} und eine surjektive Abbildung $f : \tilde{X} \rightarrow X$ gibt, wobei jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$ hat, die die folgende Eigenschaft besitzt: Das Urbild $f^{-1}(U(x))$ ist die Vereinigung von disjunkten offenen Mengen $\tilde{U}(x)_\lambda$ (mit $\lambda \in \text{Indexmenge } \Lambda$) aus \tilde{X} , wobei f_λ eine homöomorphe Abbildung von $\tilde{U}(x)_\lambda$ auf $U(x)$ darstellt.

Der Raum X heißt dann der überlagerte Raum, der Raum \tilde{X} der überlagernde Raum. Abbildung 12 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Das Bild der Umgebung $U(x)$ wird dabei als Faser bezeichnet, die Umgebung $\tilde{U}(x)_\lambda$ liegt dabei auf dem Blatt B_λ . Die Mächtigkeit der Faser über X wird als Blätterzahl bezeichnet. Aus der oben beschriebenen Eigenschaft folgt, daß die Abbildung $f : \tilde{X} \rightarrow X$ immer zumindest lokal homöomorph ist. Im Zusammenhang mit dieser Arbeit werden keine weiteren Überlagerungen benötigt, insbesondere wird auf die Einführung der *verzweigten Überlagerung* vollständig verzichtet.

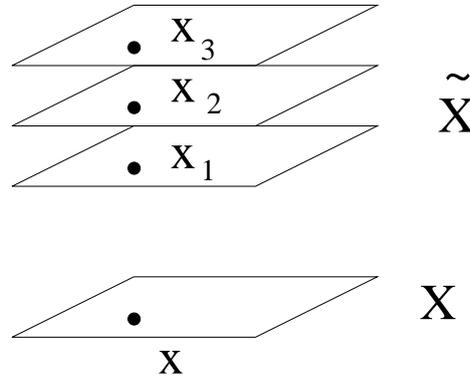


Abbildung 12: Der Raum X und seine Überlagerung

2.12 Graphentheorie

Grundsätzlich bestünde an dieser Stelle die Möglichkeit, Graphen auf zwei verschiedene Arten einzuführen. Zum einen könnte man den geometrischen Weg über die Definition im euklidischen Raum beschreiten, zum anderen kann als Alternative dazu der Graph auch auf abstrakte Art eingeführt werden. In dieser Arbeit wird von der zweiten Möglichkeit Gebrauch gemacht, da diese Anschauung dem behandelten Stoff näher liegt und damit auch auf die Einführung einer Metrik verzichtet werden kann.

Ausgehend vom kartesischen Produkt, das eine Menge S durch Multiplikation mit sich selbst (also $S \times S$) in die Menge der geordneten Paare (s, t) , mit $s, t \in S$ überführt, bilden (s, t) und (t, s) verschiedene Elementpaare. Das Produkt besteht somit aus k^2 *geordneten Paaren*. Als *ungeordnet* bezeichnet man die Paare dann, wenn (s, t) und (t, s) nicht unterschieden werden. Das Produkt wird dann mit $S \& S$ bezeichnet. Es umfaßt $k(k+1)/2$ voneinander verschiedene Elemente. Auf der Grundlage dieser Definition betrachten wir nun zwei Mengen N mit den Elementen (n_1, n_2, \dots) und E mit den Elementen (e_1, e_2, e_3, \dots) , die zueinander elementfremd sind. Dann erzeugt die Abbildung ϕ von E in $N \& N$ einen Graphen. ϕ wird als die dem Graphen zugeordnete Inzidenzabbildung bezeichnet. Die Elemente von E werden *Kanten*, die von N *Knoten* genannt. Alle Algorithmen im Umfeld der Graphentheorie verwenden direkt oder indirekt die zuvor beschriebene Inzidenzabbildung.

Im folgenden sollen noch einige allgemeine Begriffe im Zusammenhang mit Graphen behandelt werden. Zwei Graphen $G = (N, E)$ und $G' = (N', E')$ heißen isomorph, wenn zwischen ihren Mengen E und E' sowie N und N' eindeutige Zuordnungen bestehen. Beispiel *a* und *b* in Abbildung 13 sind zueinander isomorph. Ein Graph heißt plättbar oder planar, wenn sich seine Kanten nicht schneiden bzw. wenn er keine geometrische Realisierung im \mathbb{R}^2 hat. Beispiel *b* in Abbildung 13 ist offensichtlich planar, aber auch Graph *a* in derselben Abbildung ist es, da er zu Graph *b* isomorph ist. Graph *c* hingegen ist nicht planar, da sich die Kanten e_5 und e_6 schneiden, ohne an der Stelle einen Knoten zu haben.

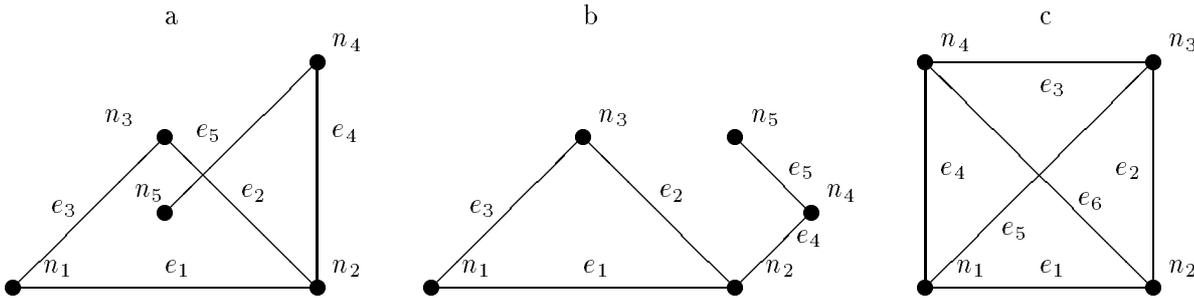


Abbildung 13: Beispiele für Graphen

Führt man neben den Begriffen Knoten und Kanten noch die Masche als Element ein, die die von Kanten umschlossene Fläche bezeichnen soll, so ergibt sich daraus die bereits von *L. Euler* gefundene Beziehung für planare Graphen: $C = n - e + f = 2$, wobei C die sogenannte Charakteristik und n, e, f die Knoten, Kanten bzw. Maschen darstellen. Bei dieser Formel ist zu berücksichtigen, daß der Außenraum ebenfalls eine Masche darstellt. Im Beispiel von Abbildung 13 hat der Graph *b* offensichtlich fünf Punkte, fünf Kanten und zwei Maschen, was mit $5 - 5 + 2 = 2$ zum richtigen Ergebnis führt. Die strenge Beziehung für planare Graphen ebenso wie die allgemeinere Beziehung $n - e + f \leq 2$ für nichtplanare Graphen, wird in GIS häufig zur Konsistenzprüfung eingesetzt.

Kanten von Graphen können bestimmte Eigenschaften haben, die den gesamten Graphen charakterisieren. So können beispielsweise Kanten gerichtet sein, so daß sie nur in bestimmten Richtungen durchlaufen werden können. Man spricht dann von einem gerichteten Graphen. Des weiteren kann eine Kante gewichtet sein, was zum Begriff des gewichteten Graphen führt. Erreicht man einen beliebigen Knoten eines Graphen auf zwei unterschiedlichen Wegen, so enthält er Zyklen. Die drei Graphen aus Abbildung 13 gehören dieser Gruppe an.

Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Elementen des Graphen (Knoten, Kanten und Maschen) werden mit den Begriffen Inzidenz und Adjazenz zum Ausdruck gebracht. Für den Graphen als Gesamtheit kann dies auch mit Hilfe der Matrixschreibweise in Form der Inzidenzmatrix **I** bzw. Adjazenzmatrix **A** geschehen. Dabei gelten die folgenden grundlegenden Beziehungen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}^T \mathbf{I} \tag{2-9}$$

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit sind noch einige weitere Begriffe aus dem Bereich der Graphentheorie einzuführen. Zunächst ist dies der Begriff des zusammenhängenden Graphen, der aus dem Blickwinkel der Geometrie wie folgt definiert ist: *Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu jeweils zwei verschiedenen Kanten mindestens einen Weg gibt.* Diese Bedingung ist Voraussetzung für die Definition des Baumes, die besagt: *Ein zusammenhängender Graph, der keine geschlossenen Kantenzüge (Zyklen) enthält, heißt Baum.* Mehrere Bäume bilden einen Wald. Im Abschnitt 3.3.3 wird dieser Sachverhalt noch weiter ausgebaut.

2.13 Ordnungen

Im Zusammenhang mit topologischen Punktmenge wird besonders in Kapitel 5 der Begriff der Ordnung eine bedeutende Rolle spielen. An dieser Stelle soll der Begriff Ordnung wie folgt definiert werden: Eine Menge O mit den Elementen a, b, c besitzt eine Relation \preceq , die eine Ordnung(-srelation) auf O definiert, wenn die drei folgenden Voraussetzungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} O_1 & a \preceq a, \\ O_2 & \text{falls } a \preceq b \text{ und } b \preceq a, \text{ dann ist } a = b, \\ O_3 & \text{falls } a \preceq b \text{ und } b \preceq c, \text{ dann ist } a \preceq c. \end{aligned} \tag{2-10}$$

Das Paar (O, \preceq) heißt dann eine geordnete Menge. Die Ordnung kann auch auf Mengen von Mengen erweitert werden.

Erfüllt eine Relation die unter O_1 genannte Bedingung, so wird sie als reflexiv bezeichnet. Ist dagegen O_2 erfüllt, wird sie als antisymmetrisch bezeichnet. Gilt demgegenüber O_3 , so ist die Relation transitiv. Damit eine Ordnung auf einer Menge definiert ist, muß folglich eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf dieser Menge gegeben sein.

Bei einigen Betrachtungen bezüglich topologischer Punktfolgen wird auch der Zermelo'sche Wohlordnungssatz gebraucht werden. Dieser Satz besagt, daß sich jede Menge wohlordnen läßt. Es bleibt zu klären, was unter Wohlordnung zu verstehen ist. Die Definition dazu lautet: Eine Menge O heißt wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge von O ein erstes Element hat.

3 Grundlagen zur Datenverwaltung in GI-Systemen

Entsprechend der Definition auf Seite 10 ist nach allgemein anerkannter Auffassung die Langzeitspeicherung von Daten eine der zentralen Anforderungen, die an ein GIS gestellt wird. In diesem Kapitel werden daher die verschiedenen Möglichkeiten der Langzeitspeicherung, soweit sie die hier behandelte Problematik berührt, erörtert. Die Speicherung von Daten in Datei-Systemen wird dabei von vornherein ausgeklammert, da sie nicht mehr zeitgemäß und im übrigen mit großen Nachteilen verbunden ist. Im Vordergrund des Interesses stehen vor allem die Charakteristika der verschiedenen Ansätze, weniger z. B. die Algebra, die darauf aufbaut.

Die wesentliche Motivation zu den folgenden Ausführungen ist in Kapitel 5 gegeben. Dort werden die hier vorgestellten Strukturen als die Träger der Semantik betrachtet. Anschließend gilt es nachzuweisen, daß diese Strukturen auch als topologische Punktmenge aufgefaßt werden können, die darüber hinaus auch noch das Hausdorffkriterium erfüllen. Dies wiederum ist Voraussetzung für die Zulässigkeit der in Kapitel 7 durchgeführte q -Zellenzerlegung, für deren Elemente Klassen abgeleitet werden.

3.1 Datenbankmodelle

In den folgenden Abschnitten werden die derzeit aktuellen Datenbankmodelle vorgestellt. Es sind dies der Reihe nach das *Netzwerkmodell*, das *relationale Modell* und das *objektorientierte Modell*. Nicht erörtert wird dagegen das hierarchische Modell, weil es heute nahezu keine Rolle mehr spielt. Darüber hinaus ergibt sich in GIS, im Gegensatz zu vielen anderen Anwendungen, noch das Problem, daß sich die hier auftretenden Fälle oftmals nicht in eine hierarchische Struktur pressen lassen, die vor allem Beziehungen der Art $1 : m$ voraussetzt.

Ebenso wie das hierarchische Modell gewissermaßen unter den Tisch fällt, werden auch die verschiedenen Sichten der Anwender, die des Datenbankadministrators und die des Systemmanagers, die zu den *Datenbankschemata* führen, nicht näher ausgeführt. Gleiches gilt für den Vergleich der verschiedenen Modelle untereinander, da es in dieser Arbeit nicht darum geht, die Vorteile des einen den Nachteilen des anderen Modells gegenüberzustellen. Alle Ausführungen zum Thema Datenbanken stützen sich auf [VOSSEN/WITT 1988], [LANG/LOCKEMANN 1995], [GABRIEL/RÖHRS 1995] und [VOSSEN 1994].

3.1.1 Das Netzwerkmodell

Von den hier behandelten Datenbankmodellen ist das Netzwerkmodell das älteste. Es basiert auf den Arbeiten der Data Base Task Group (DBTG) des CODASYL (COference on DAta SYstem Language)-Komitees und wird daher häufig auch als das CODASYL-Modell bezeichnet. Nach einem ersten Vorschlag von 1971 lag schließlich 1981 ein international anerkannter Quasi-Standard vor.

Die erste Strukturierungsregel dieses Modells sieht als Informationsträger einen Satz (*record*) vor, der wiederum aus verschiedenen atomaren Standardtypen (z. B. Zeichen, ganze Zahl usw.) besteht. Als nächst höhere Strukturierungsmöglichkeit ist die Zusammenfassung zusammengehöriger Records mittels Verkettung zu einem Set vorgesehen. Records können aber nicht nur innerhalb eines Sets miteinander verbunden werden, es ist auch eine Verkettung von Records über die Setgrenzen hinweg zugelassen. Dieses Charakteristikum hat dem Modell letztlich den Namen gegeben. In Abbildung 14 ist das Netzwerkmodell in seiner einfachsten Variante wiedergegeben.

Da dieses Datenbankmodell in neueren GIS-Anwendungen nicht mehr zum Einsatz kommt, soll es an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden, zumal das für diese Arbeit Notwendige mit der Abbildung 14 bereits zum Ausdruck gebracht wurde. Zusammenfassend soll an dieser Stelle lediglich nochmals auf die zentrale Bedeutung des Records hingewiesen werden, auf die an späterer Stelle noch zurückgekommen wird.



Abbildung 14: Strukturierung im Netzwerkmodell

3.1.2 Das relationale Modell

Dieses Datenbankmodell, das auf [CODD 1970] zurückgeht, ist das derzeit am häufigsten eingesetzte. Auch in GIS hat es sich einen wichtigen Platz erobert und wird nach wie vor in Theorie und Praxis eingehend diskutiert (siehe z.B. [PECHER 1991], [SINGER 1993], [BRÜCK 1994], [POWITZ/RIEMER 1995] oder [FRITSCH 1995, S. 182]). Kennzeichnend für dieses Modell ist die Aggregation von Datensätzen, die sich wie im Netzwerkmodell ebenfalls aus atomaren Komponenten⁵ zusammensetzen, zu sogenannten Relationen.

Im folgenden soll der im vorangegangenen Absatz erörterte Sachverhalt etwas formaler dargestellt werden:

Seien A_1, A_2, \dots, A_n paarweise verschiedene Attributnamen und $ID_1, ID_2 \dots ID_n$ die jeweils zugehörigen Mengen (Domänen), dann heißt jede Teilmenge \mathcal{R} aus dem kartesischen Produkt $ID_1 \times ID_2 \times \dots \times ID_n$ eine n -stellige Relation über $ID_1, ID_2 \dots ID_n$. Sie besteht somit aus einer zeitlich veränderlichen Menge von Tupeln. Die Domänen selbst bestehen wiederum aus den schon in Abschnitt 3.1.1 angesprochenen atomaren Datentypen. Es besteht dabei aufgrund des Bildungsgesetzes keine Ordnung innerhalb der Menge der n -Tupel (siehe [LANGRAN 1993, S. 61]).

Die Menge aller Tupel läßt sich sehr einfach in Form von Tabellen darstellen (siehe Tab. 1). Nicht zuletzt wegen dieser eingängigen Darstellung in Verbindung mit der daraus resultierenden leichten Erlernbarkeit der Abfragesprache hat das relationale Modell eine derartige Verbreitung gefunden.

Leistungsnummer	Leistungsart	Material	Verlegedatum
1	HW	Sb	1.1.1910
2	ZW	GG	2.1.1910
...
...
12345	VW	PVC	2.1.1989

Tabelle 1: Die Relation 'Rohrleitung' mit einigen Tupel

Auf der Basis obiger Definitionen sind zahlreiche Operationen denkbar, deren mathematischer Ansatz auf der sogenannten relationalen Algebra fußt. Es handelt sich dabei im wesentlichen um ein Abfragemodell, das auf Mengenoperationen basiert. Für diese Arbeit sind nun weniger die Operationen selbst, als vielmehr die Voraussetzungen, die an den Abfragemechanismus gestellt werden, von besonderer Bedeutung. Dieser Sachverhalt führt unmittelbar zur sogenannten Schlüsselbedingung. Letztlich besagt diese Bedingung nichts anderes, als daß zu jedem beliebigen Zeitpunkt t jedes Tupel einer Relation \mathcal{R} über ein oder mehrere Attribute A_i eindeutig zu identifizieren ist. Das Attribut, das die Identifizierung des Tupel ermöglicht, nennt man den *Schlüssel*. Wird die Eindeutigkeit erst über mehrere Attribute erreicht, so spricht man von einem *zusammengesetzten Schlüssel*. Die Schlüsseleigenschaft und die

⁵Wie später noch gezeigt wird, spielen die Anzahl und die Art der Datentypen für diese Arbeit keine Rolle, weshalb an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen wird.

Konsequenz, die sich daraus für die verschiedenen Operationen auf Relationen ergibt, brauchen in diesem Zusammenhang nicht weiter vertieft zu werden. Wichtig ist einzig die Tatsache, daß sich jedes Tupel durch eine wie auch immer geartete Kombination der atomaren Komponenten identifiziert.

Da die Operatoren *Vereinigung*, *Differenz*, *Projektion* und *Selektion* jeweils nur auf eine Relation wirken, ist es leicht einzusehen, daß die Schlüsseleigenschaft, auf die es im folgenden vor allem ankommt, davon unberührt bleibt. Sie bleibt auch dann erhalten, wenn eine Vereinigung (*join*) einer Relation \mathcal{R} mit einer anderen Relation \mathcal{S} zu einer Ergebnisrelation \mathcal{E} erzeugt wird. Denn letztlich läßt sich jeder Join auf ein kartesisches Produkt zurückführen, wo jedes Tupel seine Schlüsseleigenschaft aus der Ursprungsrelation in die Ergebnisrelation mitnimmt und dadurch diese Eigenschaft in gewisser Weise erbt.

3.1.3 Das objektorientierte Modell

Obwohl es für objektorientierte Datenbanksysteme noch keine verbindliche internationale Norm⁶ gibt, wie das etwa beim relationalen Modell der Fall ist, muß dieser Ansatz aufgrund seiner zunehmenden Bedeutung mit in die Betrachtungen aufgenommen werden. Besonders im Bereich der GI-Systeme ist das babylonische Sprachgewirr, was die Terminologie angeht, besonders groß. [Fritsch/Anders, 1996] versuchen in ihrer Veröffentlichung etwas Licht ins Dunkel dieser Materie zu bringen. Neben einer feinen Differenzierung der Begriffe strukturell objektorientiert und verhaltensmäßig objektorientiert, die beide mehr die Sicht des Anwenders widerspiegeln, steht in dieser Arbeit eher der dritte Begriff der vollen Objektorientierung im Mittelpunkt. Ausführlich ist dieses Konzept z. B. in [LANG/LOCKEMANN 1995] oder auch [HEUER 1997] beschrieben, spezieller im Zusammenhang mit GIS auch in [BILL 1996]. [Benning/Berzen, 1995] erläutern den objektorientierten Ansatz am Beispiel eines Gebäudeinformationssystems.

Für diese Arbeit ist der Begriff der Objektidentität von besonderer Bedeutung. Deshalb wird dieser Gesichtspunkt im folgenden näher beleuchtet. Dies erfordert zunächst eine weitergehende Definition des Begriffs Objekt. Während das Objekt bisher mehr aus fachlicher Sicht betrachtet wurde, z. B. die Rohrleitung mit ihren verschiedenen Attributen (siehe Tab. 1), so erfährt nun der Begriff Objekt eine neue Bedeutung. Als *Objekt* soll in diesem Zusammenhang die Gesamtheit von Datenspeicher und Verhaltensregeln in Verbindung mit der Objektidentität verstanden werden. Jedes Objekt besitzt verschiedene Attribute, die sich wiederum aus den bereits angesprochenen atomaren Datentypen zusammensetzen. Daneben sind aber auch Referenzen auf andere Objekte zugelassen, was beispielsweise im relationalen Datenmodell nicht möglich ist. Die Identität eines Objekts ist jetzt an einen sogenannten Objekt-Identifizierer gebunden, der im Idealfall auch nach dem Untergang des Objekts nicht mehr vergeben wird. Die Identität des Objekts ist damit nicht mehr an die Attribute geknüpft, wie das beim relationalen Modell der Fall ist.

Hinsichtlich der Attribute kennt der objektorientierte Ansatz eine Besonderheit, die kurz erläutert werden soll.

Typisierung: Grundsätzlich sind drei verschiedene Arten der Typisierung zu unterscheiden. Als erstes wäre dabei die sogenannte *schwache Typisierung* zu nennen, die die zeitabhängige Zugehörigkeit eines Attributs oder einer Variablen zu einem bestimmten Datentyp vorsieht. Dies hat zur Folge, daß der Typ erst zur Laufzeit festgestellt werden kann. Als zweites kann davon die *strenge Typisierung* unterschieden werden, die ebenfalls für gleiche Attribute und Variablen unterschiedliche Datentypen zuläßt. Im Unterschied zur ersten Variante besteht hier allerdings die klare Forderung der eindeutigen Typzugehörigkeit zur Übersetzungszeit. Als letztes ist dann noch die *strikte Typisierung* zu erwähnen, die nur noch Attribute und Variablen kennt, deren Typ bereits bei der Vereinbarung feststeht. Alle drei Arten der Typisierung, mit all ihren Vor- und Nachteilen, sind gängig.

⁶Der ODMG-97-Standard ist zwar ein De-facto-Standard, hat aber beispielsweise nicht den Rang einer ISO-Norm.

Diese besondere Ausprägung des Attributs wird an späterer Stelle noch speziell zu behandeln sein.

3.2 Geometriedaten

Im Rahmen einer umfassenden Behandlung des Themas Topologie in Verbindung mit GIS ist die Diskussion der Graphik unabdingbar, zumal sie aus Sicht der Nutzer die offensichtlichste Schnittstelle zum Menschen ist. Obwohl heutige GI-Systeme im allgemeinen die hybride Darstellung von graphischen Informationen unterstützen, wird hier zunächst die klassische Darstellung in der Einteilung von Raster- und Vektordaten beibehalten, da auf diese Weise auch gezieltere Rückverweise gegeben werden können.

3.2.1 Rasterdaten

Die kleinste Einheit der Rastergraphik ist die sogenannte Rastermasche oder Rasterzelle, die - im zweidimensionalen Fall in Anlehnung an die Bildverarbeitung - auch als *Pixel* bezeichnet wird. Im dreidimensionalen Raum spricht man dann vom *Voxel*. Die einzelne Zelle ist dabei zumeist rechteckig, es sind aber auch Dreieck- oder Sechseckstrukturen möglich. Dem von einer Zelle überdeckten Gebiet wird eine bestimmte Information, auch Attribut oder Grauwert genannt, zugeordnet. Die Bit-Tiefe, d.h. die Länge des einer Zelle zugeordneten Speicherplatzes, beträgt in der Regel zwischen 1 (Bitmap) und 32 (CMYK) Bit. Diese Einteilung suggeriert zwar, daß das Attribut immer eine Farbe sein muß, in der Realität ist dies aber in den wenigsten Fällen gegeben. Die Art der Information kann von einer Höhenangabe (z. B. digitales Geländemodell) über Angaben zur Hangneigung oder Bevölkerungsdichte bis zur Darstellung von Niederschlagsmengen nahezu jede thematische Information enthalten. Der Attributwert kann aber auch Schlüssel für ganz andere Informationen sein. Theoretisch ist es auch denkbar, daß ein Pixel mehrere Attribute bzw. Informationen enthält, in der Praxis macht man davon allerdings selten Gebrauch, da dadurch die algorithmisch relativ einfachen Basisoperationen wieder komplizierter würden.

Das Rasterbild als Ganzes kann als Matrix aufgefaßt werden, auf die ohne große Schwierigkeit zahlreiche Operationen ausgeführt werden können. Die wichtigste davon ist die Verschneidung, wobei die Matrixelemente zweier Bilder jeweils über logische Operatoren (*logisches UND*, *logisches ODER*, *logisches NICHT*) miteinander verglichen werden, um daraus weitere Informationen abzuleiten. Ein Beispiel dafür wäre die Verschneidung eines Bildes, dessen Attribute aus Hangneigungen bestehen, mit einem Bild, dessen Attribute Aufschluß über die Niederschlagsmenge geben, woraus etwa erosionsgefährdete Gebiete abgeleitet werden könnten.

Die topologischen Beziehungen der einzelnen Rasterzellen zueinander sind in [MOLENAAR/FRITSCH 1991, S. 27f] ausführlich beschrieben. Diese Relationen beschränken sich im wesentlichen auf Nachbarschaftsbeziehungen.

3.2.2 Vektordaten

In der Welt der Vektoren wird jegliche Geometrie durch den Punkt ausgedrückt (vgl. [Frank, 1983 S. 36]). Im zweidimensionalen Raum wird beispielsweise die Gerade durch zwei Punkte und die Fläche durch einen geschlossenen Polygonzug, dessen Ecken auch wieder Punkte sind, dargestellt.

Auf der Basis dieser Vorgaben sind natürlich zahlreiche Datenstrukturen denkbar. Dabei können im wesentlichen zwei Arten von Vektordatenmodellen unterschieden werden [Findeisen, 1990, S. 61ff]. Es sind dies:

- geometrische und
- topologische

Vektormodelle. Beide Gruppen kennen eine Vielzahl von Implementierungen, wobei aber der zweiten Gruppe im Bereich GIS die größere Bedeutung zukommt. Aus diesem Grund werden diese Datenstrukturen in Abschnitt 3.3.4 gesondert vertieft.

3.2.3 Hybride Datenformate

Als hybrides Datenformat bezeichnet man die Überlagerung von Vektor- und Rasterdaten. Während in den meisten Anwendungen vor einigen Jahren noch die strikte Trennung von Raster- und Vektorformaten vorherrschte, erlauben moderne GIS-Anwendungen zumeist deren Überlagerung (siehe dazu eine Trendanalyse von [BILL 1990] ebenso [JÄGER 1993] oder aus Anwendersicht [JÄGER 1994], [STAHL 1995, S. 45], [KLINGENBERG/SIEVERS/JOURDAN 1996], [PETERSEN/MAUSS 1996, S. 6] oder [RICHTER 1997]). Der Vorteil für den Nutzer ist vor allem in der Unterstützung der anstehenden Arbeiten zu sehen. So erleichtern beispielsweise Hintergrundbilder die Digitalisierarbeit sehr; On-screen-digitizing ist ohne diese Überlagerung gar nicht denkbar.

Die Überführung der Formate in das jeweils andere kann für die Richtung Vektor/Raster als weitestgehend gelöst betrachtet werden, während der umgekehrte Weg, die Konvertierung von Rasterdaten ins Vektorformat, noch mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist (siehe z.B. [KÖLBL u. a. 1992], [STENGLE/NEBIKER/ZANINI 1995], [SPIESS/BRANDENBERGER 1995] oder [KIND/OECHSLE/BAUER 1997]). Aber auch hier können, zumindest was die topologischen Beziehungen angeht, die wesentlichen Aspekte als gelöst betrachtet werden.

3.3 Datenstrukturen

3.3.1 Listen

In der elektronischen Datenverarbeitung spielt diese Datenstruktur wegen ihrer Flexibilität eine ganz entscheidende Rolle. *Listen* (*engl. lists*) (siehe beispielsweise [MEHLHORN 1986, S. 23ff] oder [ZIETLOW 1993]) verknüpfen eine nichtleere Menge von Datenelementen, von denen jedes Element mit Ausnahme des letzten einen Nachfolger und mit Ausnahme des ersten einen Vorgänger hat. Nach dieser Definition hat jedes der einzelnen Elemente eine feste Position innerhalb der Kette, und damit besteht zwischen den Elementen eine Ordnungsrelation. Auf Listen werden normalerweise folgende grundlegende Operationen angewandt:

1. Füge Elemente ein (u.U. nach bestimmten Kriterien).
2. Suche Elemente.
3. Entferne Elemente.

Ausgehend von der oben genannten Definition einer Liste sind zahlreiche Implementierungen denkbar. Die naheliegendste davon ist die *einfach verkettete Liste* (*engl. singly-linked list*), d.h. jedem Datenelement wird ein Zeiger auf die Adresse des Nachfolgers mitgegeben, der im Fall des letzten Elements auch leer sein kann, da dieses Element keinen Nachfolger hat (siehe Abbildung 15). Hat im Gegensatz dazu jedes Element auch noch einen Zeiger auf seinen Vorgänger, dann spricht man von einer *doppelt verketteten linearen Liste* (*engl. doubly-linked list*). In diesem Fall hat natürlich das letzte Element keinen Zeiger auf seinen Nachfolger und das erste Element keinen auf seinen Vorgänger.

Verallgemeinert man die oben getroffene Definition einer Liste und gibt jeweils dem letzten Element die Adresse des ersten mit, so entsteht eine Ringstruktur. Diese Ringstrukturen, wie die einfachen Listen auch, können mehrfach ineinander verschachtelt sein, wodurch wiederum komplexere Strukturen (Vielfachringe) entstehen. Diese Strukturen sind in [Findeisen, 1990, S. 58f] sehr anschaulich beschrieben.



Abbildung 15: Die einfach verkettete Liste

In Abhängigkeit der Operationen, die auf eine Liste zugelassen sind, werden weitere Sonderformen unterschieden. Als erstes ist hier der *Keller* (*engl. stack*) zu nennen. Hierbei handelt es sich um eine Liste, deren Elemente immer am Anfang eingefügt werden. Dabei rutschen die nachfolgenden Elemente weiter nach unten (in den Keller). Entnommen werden die Elemente ebenfalls nur vom Anfang der Liste (last in - first out). In Anlehnung an die englischsprachige Beschreibung dieses Vorgangs wird diese Liste auch als LIFO-Liste bezeichnet.

Eine weitere Liste, auf die nur bestimmte Operationen ausgeführt werden dürfen, ist die sogenannte *Schlange* (*engl. queue*). Im Gegensatz zum Keller wird die Schlange immer am Ende erweitert. Entnommen werden aber die Elemente wie beim Keller nur vom Anfang. Aus der Reihenfolge der Bearbeitung der Elemente ergibt sich das Prinzip: zuerst rein - zuerst raus (*engl. first in - first out*). Davon leitet sich, ebenfalls in Anlehnung an die englische Bezeichnung, das Akronym FIFO-Liste, das alternativ zum Begriff Schlange üblich ist, ab.

Weitere Listenformen, die in Sonderfällen zur Anwendung kommen können, sind die Skip-Liste, Bags und Sets. Skip-Listen werden vor allem zur Implementierung von Wörterbüchern herangezogen und sollen vor allem die Suche nach Einträgen verkürzen [Ottmann/Widmayer, 1993]. Ihr Organisationsprinzip ist dem der Hash-Tabelle mit Verkettung sehr ähnlich (siehe Abbildung 16). Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die Skip-Liste keine Hash-Funktion verwendet, sondern dem Listenprinzip entsprechend sequentiell arbeitet.

Der oben bereits erwähnte Bag hat demgegenüber die Eigenschaft, daß er Datenelemente ungeordnet, einzig in der Reihenfolge ihres Auftretens aufnimmt. Dabei wird keine Rücksicht darauf genommen, ob Datenelemente mehrfach vorkommen. Sinnbildlich wird das durch einen Sack veranschaulicht, in den man die Dinge einfach der Reihe nach einpackt. Der Bag hat folglich im allgemeinen kein a priori festgelegtes Ordnungskriterium, so daß man nicht sagen könnte, ein Element sei größer oder kleiner als ein anderes.

Im Gegensatz dazu läßt der Set, eine weitere Realisierung einer linearen Liste, diese Eigenschaft nicht zu. Ein Set verknüpft nur Datenelemente, die voneinander verschieden sind.

3.3.2 Hashing

Eine weitere, sehr effektive Art der Speicherung von Datensätzen ist die sogenannte *gestreute Speicherung*, für die in der Literatur häufig der englische Begriff *hashing* verwendet wird (siehe [MEHLHORN 1986, S. 110] oder auch [SEGEWICK 1992, S. 274ff]). Grundidee dieses Verfahrens ist die Zuordnung von einer Menge K , bestehend aus q Datensätzen, die ihrem Aufbau nach nicht notwendigerweise gleich sein müssen, zu einer Menge A von insgesamt p unterschiedlichen Adressen. Die Zuordnung selbst geschieht über die Hash-Funktion $h : K \rightarrow A$, die aus der Menge der Datensätze die Zuordnung zur Menge der Adressen definiert. Dabei werden zwei Dinge stillschweigend vorausgesetzt. Erstens, es existiert zu jedem Element von K ein Schlüssel, der es ermöglicht, die einzelnen Elemente zu unterscheiden. Zweitens wird davon ausgegangen, daß es eine Funktion h gibt, mit deren Hilfe die Zuordnung durchgeführt werden kann. Die erste Bedingung der beiden oben genannten Bedingungen ist leicht zu erfüllen, zumal der Schlüssel, wie später noch gezeigt werden wird, nicht unbedingt eindeutig sein muß. Probleme bereiten dann nur Datensätze, die identisch sind. Hier stellt sich aber die Frage nach dem Sinn, n gleiche Datensätze abspeichern zu wollen. Schwieriger als die Suche nach dem zweckmäßigen Schlüssel k ist die nach einer geeigneten Hash-Funktion h . Gängige Verfahren dazu sind

das sogenannte *Divisionsrest-* und das *Faltungsverfahren*. Ist k numerisch, so läßt sich im allgemeinen mit $k = \text{mod } p$, mit p als höchstem zu vergebenden Adressenindex aus A , leicht eine brauchbare Funktion angeben. Ist k dagegen alphanumerisch, so führt eher das *Faltungsverfahren* zum Ziel. Das Prinzip dieses Verfahrens beruht auf dem Grundgedanken, daß sich jeder komplexe Schlüssel in einen einfacheren Schlüssel numerischer Art überführen läßt. In Abbildung 16 ist am Beispiel der Schlüssel $S = \{2, 8, 12, 14, 22, 26, 54, 59, 73\}$ das Divisionsrestverfahren mit der Hash-Funktion $h(x) = x \text{ mod } 7$ mit Verkettung im Fall der Kollision näher dargestellt. Die Hash-Tabelle hat in diesem Beispiel insgesamt sieben Zellen.

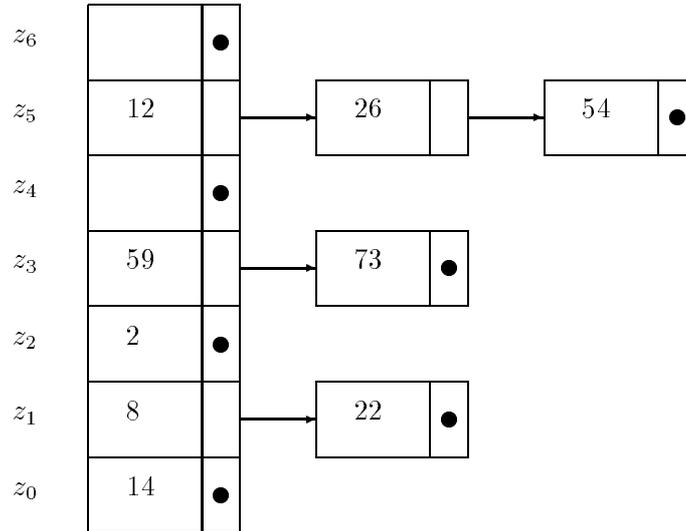


Abbildung 16: Hash-Tabelle mit Verkettung bei Kollision

Da der Schlüssel, wie oben bereits erwähnt, nicht über die gesamte Grundmenge K eindeutig sein muß, stellt sich sofort die Frage, wie in den Fällen zu verfahren ist, in denen die Hash-Funktion für unterschiedliche Datensätze die gleiche Adresse liefert. Für diesen Kollisionsfall sind verschiedene Lösungsansätze denkbar. Ein Weg besteht darin, Datensätze, für die die gleiche Adresse berechnet wird, nach dem Muster der linearen Liste miteinander zu verketteten. Eine andere Möglichkeit zur Behandlung von Kollisionen besteht darin, für entsprechende Schlüssel nach einem festgelegten Verfahren neue Adressen zu suchen. Gängige Verfahren dazu sind die *lineare* und die *quadratische Verschiebung*. Erhält man nach der Auswertung von $h(k)$ den Wert einer bereits belegten Adresse, so untersuche man die Adresse, die sich aus $h(k) + i * c$ ergibt, wobei c eine Konstante, die möglichst teilerfremd zu p sein sollte, und i eine natürliche Zahl ist. i beginnt dabei mit 1 und wird bei jeder weiteren Kollision für den gleichen Datensatz einfach um 1 erhöht. Die quadratische Verschiebung verwendet im Gegensatz dazu als Zuschlag nicht eine Konstante c , sondern das Quadrat der natürlichen Zahlen beginnend bei 1. Die allgemeine Hash-Funktion ergibt sich damit zu $h(k) + i^2$.

3.3.3 Bäume

Nach dem Verständnis der Graphentheorie sind Bäume nichts anderes als Graphen, die keine Zyklen enthalten (siehe Abbildung 17). Ein Baum besteht prinzipiell nur aus Knoten (*engl. nodes*), die über Kanten (*engl. branches*) miteinander verbunden sind. Die Bezeichnungen der Strukturelemente eines Baums sind zum Teil der Natur entlehnt, zum anderen sind sie der Nomenklatur der Familienstammbäume entnommen. Im folgenden soll der allgemeine Aufbau eines Baumes und einige seiner wichtigsten Ausprägungen beschrieben werden. Die Ausführungen beruhen im wesentlichen auf [MEHLHORN 1986], [SEGEWICK 1992, S. 57ff] und [ZIETLOW 1993].

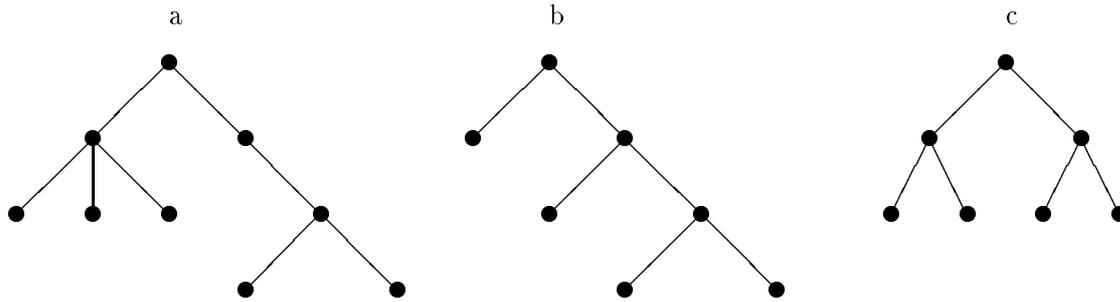


Abbildung 17: Beispiele für Bäume

Das wichtigste Strukturelement eines Baumes bildet der Knoten. Er hat im allgemeinen mindestens einen Nachfolger (*engl. child*), zu dem er wiederum Vorgänger (*engl. parent*) ist. Die Zahl der Nachfolger, die jeder Knoten haben kann, legt dessen Rang oder Ordnung fest. Vor allem zur Unterstützung rekursiver Algorithmen fordert man, daß jeder Knoten eines Baumes die gleiche Ordnung d hat. Diese Forderung impliziert aber nicht die Existenz der Nachfolger. Ein Knoten kann von daher auch leere Nachfolger haben, d. h. es sind auch nicht-existierende Nachfolger zugelassen. Ein Knoten der untersten Stufe wird auch als Blatt (*engl. leave*) bezeichnet. Dieser Knoten hat dann keinen Nachfolger bzw. nur leere Nachfolger. Der Knoten, der keinen Vorgänger hat, wird Wurzel (*engl. root*) genannt. Ausgehend von diesen Definitionen kann jeder Knoten, sofern er nicht Blatt oder Wurzel ist, als Wurzel eines Teilbaumes (*engl. subtree*) betrachtet werden. Die Menge der Knoten, die nicht gleichzeitig Blätter sind, werden als innere Knoten bezeichnet.

Ein weiteres wichtiges Charakteristikum eines Baumes ist seine Höhe, die über den maximalen Abstand eines Blatts zu seiner Wurzel definiert ist. Ausgehend von diesem Abstandsbegriff kann jedem Knoten ein Abstand zur Wurzel zugeordnet werden. Danach können verschiedene Knoten den gleichen Abstand zur Wurzel haben. Diese Knoten werden zu Ebenen oder Niveaus zusammengefaßt, die wiederum ausgehend von der Wurzel, die den Abstand 0 zu sich selbst hat, von 1 beginnend ganzzahlig bis zum entferntesten Blatt bzw. Knoten durchnummeriert werden.

Bisher wurden lediglich strukturelle Eigenschaften von Bäumen beschrieben und diskutiert. Nun ist aber ein Baum, jedenfalls in diesem Zusammenhang, kein Selbstzweck, sondern er dient vornehmlich dem Speichern und Suchen von Informationen. Wie schon in den vorangegangenen Abschnitten spielt dabei der Schlüssel eines Datensatzes eine ganz entscheidende Rolle, denn nach diesem Kriterium wird die Information im Baum gespeichert. In GIS kommt vor allem Bäumen, die eine Speicherung von Daten aus dem \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 unterstützen, eine besondere Bedeutung zu. Vertreter dieser Gruppe sind der KD-Baum, der Quadtree und der Oktogonbaum.

Eine andere Klasse von Bäumen mit besonderen Eigenschaften sind die höhenbalancierten Bäume. Mit Hilfe dieser Konstrukte ist es möglich, die Zeit, die man zur Suche eines bestimmten Knotens braucht, zu vermindern. Als Beispiel dafür können die Bäume b und c aus Abbildung 17 herangezogen werden. Offensichtlich ist die Anzahl der Knoten und damit der Schlüssel bei beiden Bäumen gleich, wobei aber die Zahl der Ebenen bei b um eins größer ist. Dadurch erhöht sich die Zeit, in der man einen bestimmten Knoten erreichen kann. Im ungünstigsten Fall kann ein Baum zur verketteten Liste entarten (siehe Abschnitt 3.3.1), wodurch sich die mittlere Pfadlänge von $\log(n) - 1$ auf $n/2$ verändert (vorausgesetzt alle Schlüssel sind gleich wahrscheinlich). Unter den höhenbalancierten Bäumen nehmen die sogenannten AVL-Bäume, benannt nach ihren Entwicklern Adelson-Velskii und Landis, wegen ihrer verhältnismäßig einfachen Handhabbarkeit (siehe z. B. [Hermainski, 1992]) eine besondere Stellung ein. Diese Lösung bildet einen Kompromiß zwischen Laufzeitverhalten und Aufwand beim Aufbau des Baumes.

Als letzter interessanter Vertreter aus der Gruppe der Bäume soll noch der *Heap* erwähnt werden. Nach der Definition ist ein Heap ein binärer Baum, der folgenden Eigenschaften genügt:

- Der Schlüssel in jedem Knoten soll größer oder gleich seinen beiden Nachfolgern sein.

Aus dieser Bedingung folgt, daß der größte Schlüssel in der Wurzel zu finden ist. Am Beispiel des Heaps kann sehr schön gezeigt werden, daß die Implementierung des Heaps nicht notwendigerweise in Anlehnung an die Strukturierung als Baum, die eine Verzeigerung nahelegen würde, erfolgen muß. Die Realisierung kann ebenso über ein Feld erfolgen, wie in Abbildung 18 zu sehen ist. Es ergibt sich damit jeder Nachfolger zu einem gegebenen Knoten mit dem Index j zu $2j$ bzw. $2j + 1$.

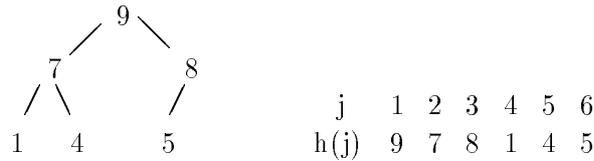


Abbildung 18: Beispiel für einen Heap und seine Implementierung als Feld

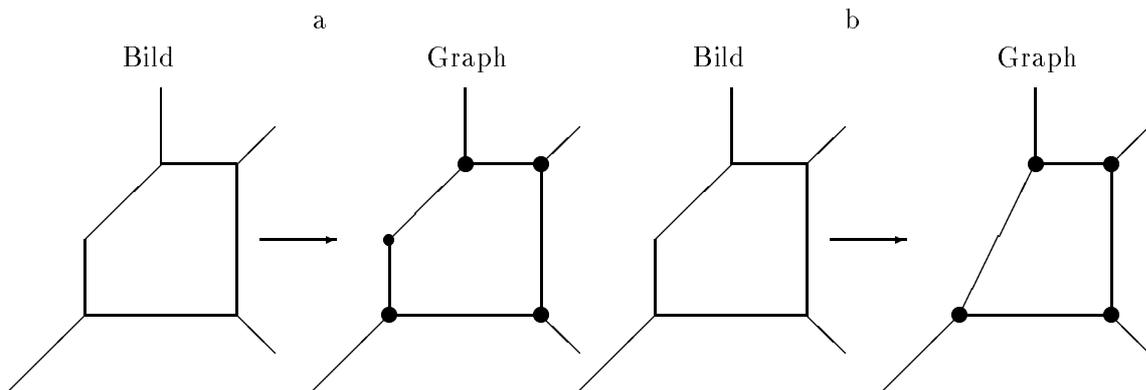


Abbildung 19: Die Abbildung der Realität als Graph

3.3.4 Spezielle Datenstrukturen für GIS

Viele der oben genannten *klassischen* Datenstrukturen sind im Zusammenhang mit GIS verallgemeinert worden. Dies war nötig, weil sie in ihrer originären Form oftmals nur für eindimensionale Probleme geeignet waren (siehe beispielsweise das Hash-Verfahren). Einige dieser Verallgemeinerungen sind beispielsweise der KD-Baum, das n-dimensionale Hash-Verfahren und der Quadtree. Details zu diesen Strukturen sind in [Neureither 1992, S. 52ff] zu finden. Da die genannten Formen der Datenorganisation für diese Arbeit eine eher untergeordnete Rolle spielen, wird auf eine ausführliche Darstellung verzichtet.

Neben den oben aufgezählten Datenstrukturen, die nicht nur im GIS-Umfeld zum Einsatz kommen, gibt es auch solche, die speziell für Anwendungen mit Raumbezug entwickelt wurden. Der bekannteste Vertreter dieser Gruppe dürfte die sogenannte DIME-Struktur (Dual Independent Map Encoding) sein. Diese Datenstruktur wurde Anfang der 70er Jahre vom amerikanischen *Bureau of Census* eingesetzt [Peucker/Chrisman, 1975]. Obwohl sie damit schon recht alt ist, kann ihr Aufbau für die Klasse der topologisch orientierten Datenstrukturen als richtungweisend bezeichnet werden.

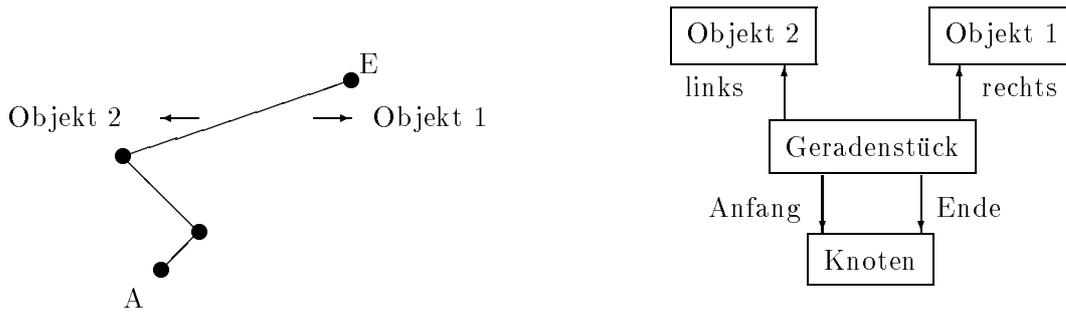


Abbildung 20: Die DIME-Struktur an einem Beispiel

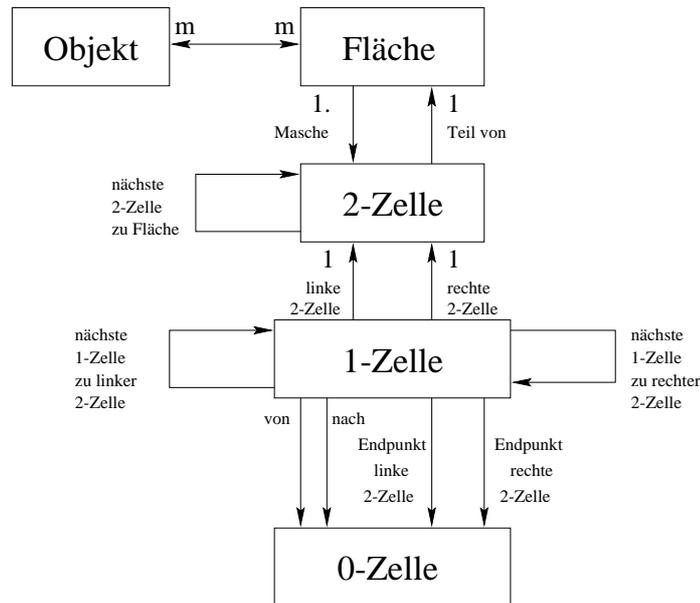


Abbildung 21: Die topologischen Beziehungen der TIGER-Datenstruktur

Kern der DIME-Datenstruktur bildet das Geradenstück, dessen Anfangs- und Endpunkt als Knoten bezeichnet werden (siehe Abbildung 20). Durch die Festlegung von Anfang und Ende erfährt die Gerade eine Orientierung, wodurch die Bezeichnung von linkem und rechtem Nachbarn bezüglich der Gerade eindeutig wird.

Es ist offensichtlich, daß diese Struktur nicht alle topologischen Beziehungen berücksichtigt. Z. B. ist es nicht möglich, mit obiger Struktur zu klären, ob sich zwei Flächen überlappen, beziehungsweise dieser Fall ist in dieser Struktur nicht vorgesehen. Des weiteren sind Knoten, wie sie in diesem Zusammenhang eingesetzt werden, nicht immer echte Knoten, im Sinne der Graphentheorie. Die Kante könnte ebenso ohne Informationsverlust von A nach B gehen, womit zusätzlich zur Vereinfachung des Graphen auch noch Speicherplatz gespart werden würde. Tatsächlich wurde diese Verbesserung auch vorgeschlagen und in der Datenstruktur mit dem Namen POLYVRT (Polygon-Converter) auch realisiert [Peucker/Chrisman, 1975].

An dieser Stelle darf eine spezielle Datenstruktur nicht fehlen. Es handelt sich dabei um das sogenannte TIGER-System (Topologically Integrated Geographic Encoding and Reference file), das seit einiger Zeit die Basis der Datenstruktur des U.S. Bureau of Census bildet (siehe [MARX 1990] und [SOBEL 1990] oder auch [Findeisen, 1990]). Die wesentlichen topologischen Aspekte, unter Aussparung vieler anderer Informationen, sind in Abbildung 21 wiedergegeben. Diese schon allein unter topologi-

schen Gesichtspunkten sehr komplexe Struktur ist das Ergebnis der konsequenten Weiterentwicklung der oben genannten DIME-Struktur über die POLYVRT-(Polygon-Converter) und die GEOGRAF-Datenstruktur. Sie enthält vielfältige topologische Beziehungen, auf die an späterer Stelle noch Bezug genommen wird.

Neben diesen sehr bekannten Datenstrukturen werden in der Forschung eine Vielzahl weiterer Ansätze diskutiert. Beispielhaft dafür seien [Laurini/Thompson, 1993, S. 340] und [WALTER/FRITSCH 1994, S. 113] genannt.

4 Modellierungs- bzw. Entwurfsmethoden

4.1 Modellierungsaspekte in GIS

Beim Entwurf von GIS-Anwendungen ergibt sich zunächst das Problem, welche Objekte⁷ für das anstehende Projekt von Bedeutung sind und in welcher Wechselwirkung sie zueinander stehen. Die Datenmodellierung besteht nun darin, den genannten Sachverhalt zu klären, d.h. die relevanten Objekte zu definieren und deren gegenseitige Einflußnahme zu modellieren. Die gängigste Einteilung des Modellierungsprozesses gibt [BILL/FRITSCH 1991] mit der Einteilung in

- geometrische,
- topologische,
- und semantische bzw. thematische

Datenmodellierung. Dieser Modellierungsansatz läßt alle Implementierungsfragen außen vor, was aus Anwendersicht sicher vernünftig ist. [BEHR 1998] unterteilt etwas feiner in die Schritte

- konzeptueller und
- geometrisch-graphischer Entwurf sowie
- Verhalten und Funktion
- und Metainformation.

[KALTENBACH 1995] und [SCHEURING 1995, S. 66f] dagegen zählen in ihrer Einteilung auch Implementierungsaspekte auf und kommen damit zur Einteilung in

- konzeptionelles,
- logisches
- und physikalisches Modell.

Die Unterschiede sowie die Vor- und Nachteile, die die verschiedenen Vorgehensweisen haben, brauchen an dieser Stelle nicht weiter vertieft zu werden. Dagegen muß das Gemeinsame der Ansätze noch etwas hervorgehoben werden.

Alle Vorschläge zur Datenmodellierung stellen die Objekte, die den Anwendungen zugrunde liegen, in den Mittelpunkt des Interesses. In diesem Zusammenhang steht zunächst der Betrachter/Anwender mit seiner ausschließlich von fachlichen Belangen geprägten Sicht im Vordergrund. Der Anwender legt zunächst alle Objekte mit ihren spezifischen Attributen und allen übrigen Charakteristika fest, wobei hierzu auch die geometrischen und die topologischen zu zählen sind. Alle übrigen Schritte sind dann nicht mehr Sache des Anwenders, denn es geht dann nur noch darum, das festgelegte Konzept zu implementieren.

Da das konzeptuelle Modell letztlich immer das Abbild der Realwelt darstellt, sollten generell einige Entwurfsvorgaben beherzigt werden (siehe dazu [BEHR 1998]). Das Modell sollte demnach

- relevant,
- einfach,

⁷In diesem Zusammenhang ist der Begriff Objekt immer im Sinne von fachlichem Objekt zu sehen. Er unterscheidet sich damit im allgemeinen vom Objektbegriff, wie er in der Informatik verwendet wird.

- ähnlich und
- klar

sein. Aus den bisher getroffenen Ausführungen wird deutlich, daß die Erstellung des Konzepts den weiteren Verlauf maßgebend bestimmt, denn dieser Schritt legt sowohl Komplexität als auch Umfang der Anwendung fest. Entsprechend viel Sorgfalt muß bei diesem Schritt aufgewendet werden, damit im nachhinein keine Entwurflücken auftreten.

4.1.1 Implementierungsunabhängige Darstellung der Objekte und deren Wechselwirkung

Nach dem bisher Gesagten bleibt die Frage nach einer formalen Darstellung der Objekte und ihrer Wechselwirkungen noch unbeantwortet. Eine Entwurfsmethode, die speziell für die Belange eines GIS entwickelt wurde, existiert derzeit noch nicht. Es kann darüber hinaus dahingestellt bleiben, ob eine derart spezielle Entwurfstechnik überhaupt sinnvoll ist. Im Software-Engineering haben sich aber einige allgemeingültige Methoden durchgesetzt, die im folgenden näher beleuchtet werden.

In der Vergangenheit hat sich das sogenannte *Entity-Relation-Modell (ERM)* bzw. das *Entity-Relation-Diagramm (ERD)* als sehr brauchbar erwiesen. Obwohl diese Darstellungsweise grundsätzlich implementierungsunabhängig ist, wird sie sehr häufig im Zusammenhang mit dem relationalen Datenbankmodell genannt. Diese Methode ist dazu geeignet sowohl die Objekte als auch deren Wechselwirkung graphisch darzustellen. Auch für den Laien ist sie relativ leicht zu erlernen und zu interpretieren. Sie stellt somit eine 'benutzerfreundliche Schnittstelle' zwischen der Anwender- und der Implementierungsseite dar [VOSSEN/WITT 1988]. Nachteil dieser Entwurfsmethode ist, daß sie lediglich die statischen Beziehungen der Objekte untereinander abbildet und darüber hinaus keine funktionalen und dynamischen Aspekte berücksichtigt [LANG/LOCKEMANN 1995, S. 359].

Die Entwurfssprache *TROLL* versucht das Modellierungsproblem mittels sprachlicher Konstrukte zu lösen (siehe [SAAKE 1993] oder [JUNGCLAUS U.A. 1991]). Es werden sowohl Objekttypen als auch deren Verhalten beim Eintritt bestimmter Ereignisse (*events*) ebenso wie das Verhalten gegenüber anderen Objekten quasi-sprachlich beschrieben. Das geschieht nach bestimmten formalen Vorgaben, so daß dieser Entwurf mit Hilfe eines Konverters fast vollständig ins Zielsystem übertragen, d.h. implementiert, werden kann. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt auf der Hand. Der Zeitraum von der konzeptuellen Phase bis zur endgültigen Implementierung wird dadurch enorm verkürzt. Diese Ersparnis wird allerdings durch eine wesentlich komplexere und damit zeitaufwendigere Entwurfsphase erkauft. Ein weiterer Nachteil dieses Lösungsansatzes ist seine Unübersichtlichkeit. Während es dem Experten sicherlich keine Schwierigkeiten bereitet, den seitenlangen Pseudo-Code zu verstehen, tut sich der Laie damit eher schwer. In der Praxis ist es aber gerade in der konzeptuellen Phase von großer Bedeutung, daß sich der Anwender mit seinen Ideen und Vorstellungen wiederfindet.

Die *OMT (Object Modelling Technique)* vermeidet die Nachteile der beiden letztgenannten Entwurfsmethoden. Sie baut im wesentlichen auf graphische Entwurfs-elemente und ist somit sehr anschaulich. Daneben enthält sie auch Konstrukte, die es erlauben, funktionale und dynamische Abhängigkeiten darzustellen. Weiter soll an dieser Stelle nicht auf die OMT eingegangen werden, da sie an späterer Stelle (siehe Abschnitt 4.2) noch detailliert vorgestellt wird.

Neben den bisher genannten Methoden gibt es noch weitere, deren Bedeutung allerdings bei weitem nicht so groß ist wie die der oben aufgezählten Entwurfswerkzeuge. [KALTENBACH 1995] erwähnt in diesem Zusammenhang unter anderem auch die Ebenentechnik, die Objektklassentechnik, topologische Datenstrukturen und CAD-Datenstrukturen. Daneben gibt es weitere Methoden, die sich in einzelnen Firmen als Standard etabliert haben.

An dieser Stelle sollte auch das *rapid-prototyping* genannt werden, weil diese Entwurfsmethode vor allem in der Praxis häufig erwähnt wird. Dazu muß aber gesagt werden, daß es sich hierbei nicht um eine

Entwurfsmethode im eigentlichen Sinne handelt, sondern vielmehr um eine Vorgehensweise, bei der es darum geht, von der konzeptuellen Phase möglichst schnell zu einer prototypischen Implementierung zu gelangen.

4.1.2 Die Implementierung von konzeptuellen Entwürfen

In diesem Abschnitt werden die beiden Entwurfsschritte logischer Entwurf und Implementierungsentwurf dargestellt. Beide haben die Eigenschaft, nicht mehr systemunabhängig zu sein.

Das logische Konzept⁸ hat zum Ziel, den in der konzeptuellen Phase entwickelten Entwurf auf ein Daten(bank)modell (siehe Abschnitt 3.1) zu übertragen. Hier sind in der Praxis oftmals bestimmte Vorgaben einzuhalten, da neue Anwendungen häufig in bestehende GI-Systemumgebungen integriert werden und diesen ein bestimmtes Datenmodell zugrunde liegt. Am Beispiel eines relationalen Modells wird dieser Schritt noch etwas weiter ausgearbeitet (siehe dazu [BEHR 1998]). Objekte bzw. Objektklassen werden in diesem Modell im allgemeinen als Relation abgebildet, Beziehungen der Objekte untereinander können als Fremdschlüssel realisiert werden und für die Attribute müssen geeignete Datentypen aus dem zur Verfügung stehenden Umfang von atomaren Typen gefunden werden. In dieser Phase gilt es auch zu prüfen, ob die verschiedenen Normalformen eingehalten sind, da während der konzeptuellen Phase größtenteils intuitiv gearbeitet wird und zunächst nur die Belange des Anwenders zum Tragen kommen. Dadurch kann es durchaus vorkommen, daß der logische Entwurf nicht ohne größere Probleme erstellt werden kann und eventuell mehrere Iterationen durchlaufen muß.

Nach Abschluß des logischen Entwurfs kann dann die eigentliche Implementierungsphase beginnen. Hier gilt es nun den im vorangegangenen Schritt erarbeiteten Entwurf möglichst optimal zu implementieren. Optimal heißt in diesem Zusammenhang beispielsweise, daß Datenzugriffe im relationalen Modell durch die Vergabe von Indizes verbessert werden können. Generell sollten die Transaktionszeiten möglichst kurz gehalten werden. Ein weiterer Gesichtspunkt dieses Schritts sind die Sichten und Berechtigungen der Nutzer. Hierzu zählen auch die Belange des Datenschutzes ebenso wie in dieser Phase eventuell betriebsinterne Vereinbarungen zwischen der Betriebsleitung und dem Personalrat zu berücksichtigen sind. Die letztgenannten Aspekte können allerdings auch schon beim logischen Entwurf zum Tragen kommen.

4.2 Die Object-Modelling-Technique

Die OMT ist eine Methode des Software-Engineerings, die den objektorientierten Ansatz konsequent in allen Phasen des Softwareentwurfs unterstützt. Sie wird vor allem in Kapitel 7 zur Anwendung kommen, wo sie zum Entwurf von Klassen zur Speicherung topologischer Informationen herangezogen wird. In diesem Abschnitt kann natürlich nur eine sehr komprimierte Zusammenfassung dieser Methode gegeben werden, die nicht annähernd den Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Eine sehr ausführliche Darstellung ist in [RUMBAUGH u. a., 1993] zu finden. Dennoch ist von Anfang an auf eine wichtige Einschränkung hinzuweisen, die sich in gewisser Weise auch auf den Entwurf durchpaust. Es wird nämlich von vornherein eine objektorientierte Implementierung angestrebt. Dies wird vor allem deshalb betont, da die OMT grundsätzlich für jede Implementierung, sei es als Datenbankanwendung, sei es als reine Programmlösung, geeignet ist.

In diesem Sinne stellt die OMT wichtige Hilfsmittel zur Verfügung, um die in Kapitel 7 zu definierenden Klassen zu strukturieren. Von den im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Modellierungsaspekten ist für diese Arbeit aber lediglich der topologische von Bedeutung. Da viele Aspekte der Objektmodellierung bereits in Abschnitt 3.1.3 behandelt wurden, werden die folgenden Ausführungen zu Klassen und Instanzen sehr knapp gehalten. Im Prinzip wird lediglich die OMT-Syntax vorgestellt, die für die Behandlung des vorgestellten Problems von Bedeutung ist.

⁸Die Begriffe Entwurf und Konzept werden hier als Synonyme betrachtet.

4.2.1 Die Darstellung von Klassen und Instanzen

Objektklassen (Klassen) werden nach der OMT-Syntax als Rechteck dargestellt, wobei der Name der Klasse in fetter Schrift in die Klassenbox geschrieben wird. Instanzen zu einer Klasse werden dagegen durch ein abgerundetes Rechteck visualisiert, wobei der Klassenname, von dem die Instanz abgeleitet ist, ebenfalls in fetter Schrift und in Klammern eingeschlossen dargestellt wird. Der Instanzname selbst wird in normaler Schrift geschrieben. Abbildung 22 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

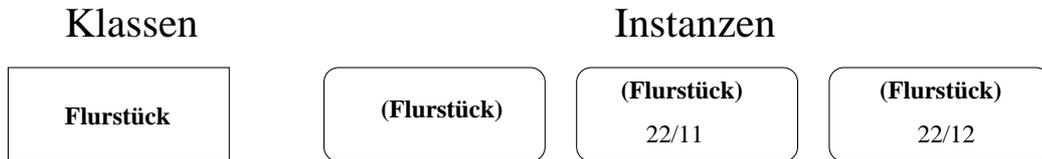


Abbildung 22: Beispiele für Klassen und Instanzen

Attribute, die definitionsgemäß innerhalb einer Klasse eindeutig sein müssen, folgen im nächsten Teil der Klassenbox und werden vom Klassennamen durch einen Strich getrennt. Neben dem Namen des Attributs können weitere Angaben aufgeführt werden. Dies kann z. B. der Datentyp, der Wertebereich o. ä. sein. Bei der Darstellung von Instanzen werden im zweiten Teil der Box ebenfalls die Attribute angegeben, wobei man hier die konkreten Werte aufführt. Der Name des Attributs entfällt an dieser Stelle, da er einerseits die Übersicht stört und andererseits aus der Klasse, dem die Instanz zugeordnet ist, jederzeit abzuleiten ist. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 23 verdeutlicht.

Methoden werden im dritten Teil der Klassenbox angegeben, der ebenfalls durch einen Strich vom übrigen Teil abgetrennt wird. Die Methoden erscheinen ebenso wie die Attribute mit ihrem Namen, wobei hier ebenfalls zusätzliche Einzelheiten angegeben werden können. Dies können beispielsweise die Argumentenliste mit ihren Datentypen und die Rückgabewerte sein. Für Instanzen entfällt diese Darstellung, da sie als reale Objekte die Methoden tatsächlich direkt aus der Klassenzugehörigkeit ableiten (siehe Abbildung 24).

4.2.2 Relationen zwischen Objekten

Relationen zwischen Objekten beschreiben Verknüpfungen, die häufig auch als Assoziationen bezeichnet werden⁹. Mit diesen Verknüpfungen wird die konzeptuelle oder die physikalische Verbindung zwischen Klassen zum Ausdruck gebracht. Das Vorhandensein von Verknüpfungen zwischen Objektklassen wird durch eine Verbindungslinie zwischen den beteiligten Klassen zum Ausdruck gebracht. Die Assoziation selbst erhält oft einen Namen, um die Art der Beziehung zu verdeutlichen. Aus dieser Beziehung ergeben sich u. U. Rollen, die als zusätzliche Kennzeichnung ebenfalls an die Klassenbox geschrieben werden. Dadurch wird der Entwurf klarer und leichter lesbar. Abbildung 25 gibt für das bisher Gesagte ein Beispiel. Das Schaubild macht gleichzeitig auch deutlich, daß die Notation für Klassen und Instanzen bis auf die bekannten Unterschiede identisch ist. In den weiteren Beispielen werden daher nur noch die Klassen aufgeführt.

Einer Verknüpfung können, wie einer Klasse selbst, auch Attribute mitgegeben werden. Diese Attribute werden dann folgerichtig als Verknüpfungsattribute bezeichnet. Durch die Hinzunahme solcher Attribute wird der Entwurf flexibler und damit wartungsfreundlicher. Die OMT-Syntax unterstützt diese Vorgehensweise und modelliert Verknüpfungsattribute, wie in Abbildung 26 dargestellt. Dabei ist zwischen der einfachen Modellierung als Attribut (Abbildung 26a) und der Modellierung als eigene Klasse (Abbildung 26b) zu unterscheiden.

⁹Dadurch sollen u. a. auch Verwechslungen mit dem Relationenmodell vermieden werden.

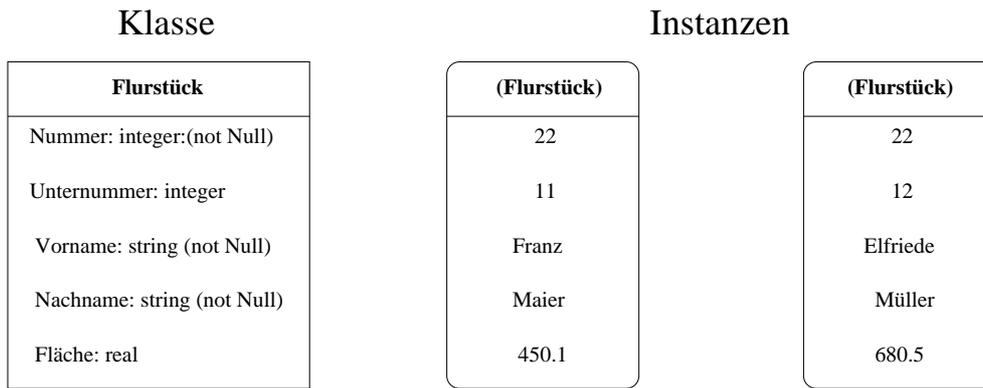


Abbildung 23: Das Beispiel aus Abbildung 22 erweitert um einige Attribute

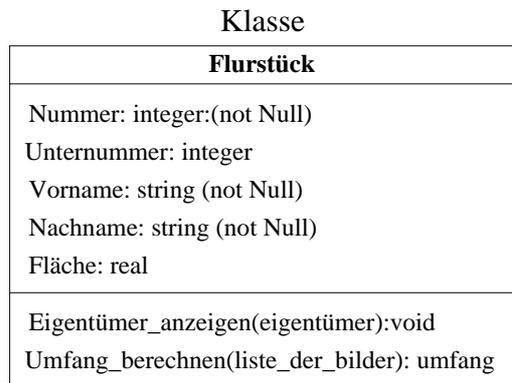
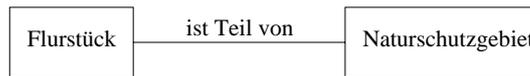


Abbildung 24: Das Beispiel aus Abbildung 23 erweitert um einige Methoden

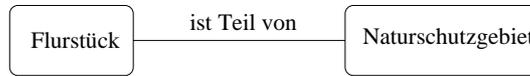
Sofern nur eine Nutzungsart und ein Flurstück betrachtet wird, sind die Beispiele in Abbildung 26 wenig überzeugend. Berücksichtigt man allerdings den Umstand, daß eine Nutzungsart mehrere Flurstücke überdecken kann und ein Flurstück von mehreren Nutzungsarten überdeckt sein kann, ergibt sich eine $m : m$ (*many to many*)-Beziehung zwischen den beiden Klassen, die den Einsatz von Verknüpfungsattributen schon einsichtiger macht. Für diese *Multiplizität* der Assoziation wird die in Abbildung 26a aufgeführte Schreibweise verwendet. Die Beziehung $m : m$ wird dabei mit jeweils einem schwarzen Punkt an beiden Enden der die Assoziation ausdrückenden Linie kenntlich gemacht. Besteht dagegen nur eine $1 : m$ -Multiplizität, dann wird der schwarze Punkt nur an derjenigen Klasse aufgeführt, die mehrfach vorkommen kann. Neben dieser Schreibweise besteht nach dem OMT-Syntaxregelwerk auch noch die Möglichkeit, die Multiplizität explizit anzuschreiben. Abbildung 26b macht von dieser Notation Gebrauch (es besteht die Multiplizität 0 oder mehr), ohne daß allerdings dadurch die Bedeutung verändert würde.

Bisher wurden in diesem Abschnitt lediglich Beziehungen zwischen jeweils zwei Instanzen bzw. Objektklassen betrachtet. Diese Art der Beziehung wird als *binäre Assoziation* bezeichnet. Darüber hinaus sind aber auch Beziehungen denkbar, die drei oder noch mehr Objektklassen betreffen. Diese werden dann als *ternäre* bzw. *n-äre Assoziationen* bezeichnet. Diese Unterscheidung braucht hier nicht weiter vertieft zu werden, da es sich zeigen wird, daß alle im Zusammenhang mit dieser Arbeit auftauchenden Assoziationen auf binäre zurückgeführt werden können.

Selbstverständlich kann eine Klasse auch eine Assoziation auf sich selbst besitzen. Dies kommt in Abbildung 27 zum Ausdruck. Die hier dargestellte Beziehung hat jeweils Vertreter der eigenen Klasse zum Gegenstand. Es besteht allerdings eine Beschränkung, die darin zum Ausdruck kommt, daß nur Assoziationen zwischen verschiedenen Instanzen zugelassen sind. Tatsächlich würde eine Assoziation einer Instanz mit sich selbst einer Tautologie entsprechen, die bei bestimmten Implementierungen



Klassendiagramm



Instanzendiagramm

Abbildung 25: Die Darstellung von Assoziationen zwischen Klassen bzw. Instanzen

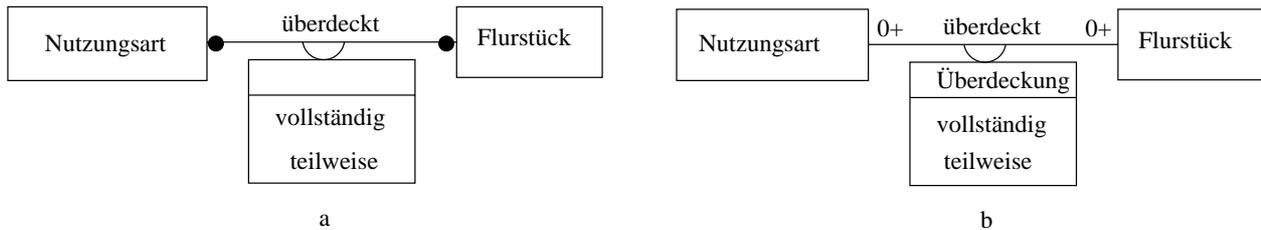


Abbildung 26: Verknüpfungsattribute am Beispiel zweier Klassen

Klasse

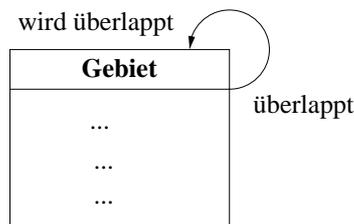


Abbildung 27: Die Assoziation einer Klasse auf sich selbst

u.U. eine Rekursion ohne Abbruchkriterium zur Folge hätte. Am Beispiel der Flächen macht diese Assoziation aber durchaus Sinn, sofern die Flächen keine ebene Pflasterung darstellen.

4.2.3 Vererbung

Vererbung wird in der OMT-Notation durch ein Dreieck dargestellt, wobei die Spitze des Dreiecks mit der Oberklasse verbunden wird. Die Schachteltiefe bzw. die Zahl der Generalisierungsebenen, die jeweils eine Beziehung Vorfahre und Nachfahre bezeichnen, sollten nach den allgemein geltenden Regeln des Software-Engineerings vier Stufen nicht überschreiten, da ansonsten die Übersichtlichkeit des Entwurfs abnimmt. Die Darstellung der Vererbung ist in Abbildung 29 an einem Beispiel aufgezeigt.

Erbt eine Klasse von mehreren Oberklassen Attribute oder Methoden, so spricht man von Mehrfachvererbung. Dieses Konstrukt erlaubt das Design von sehr flexiblen Entwürfen. In bezug auf Mehrfachvererbung unterscheidet die OMT-Syntax zwischen solchen Unterklassen, die disjunkt zueinander sind, und solchen, die sich überlappen. Sind die Klassen disjunkt, dann wird die Darstellungsweise aus Abbildung 29 verwendet. Überlappen sich die Unterklassen, so wird die Dreiecksfläche gefüllt dargestellt. Ein Beispiel für Mehrfachvererbung gibt Abbildung 28.

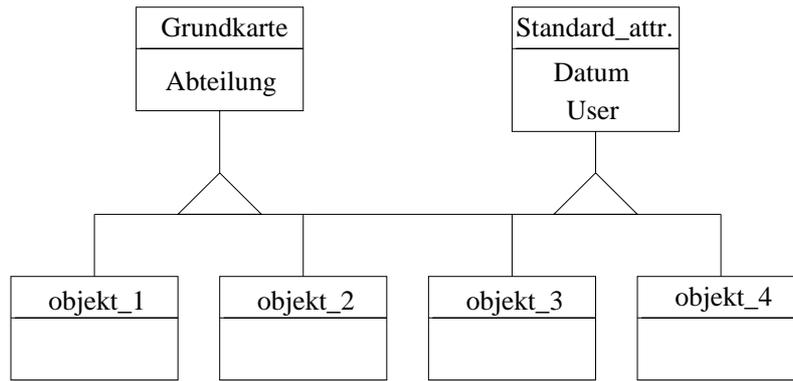


Abbildung 28: Ein Beispiel für Mehrfachvererbung

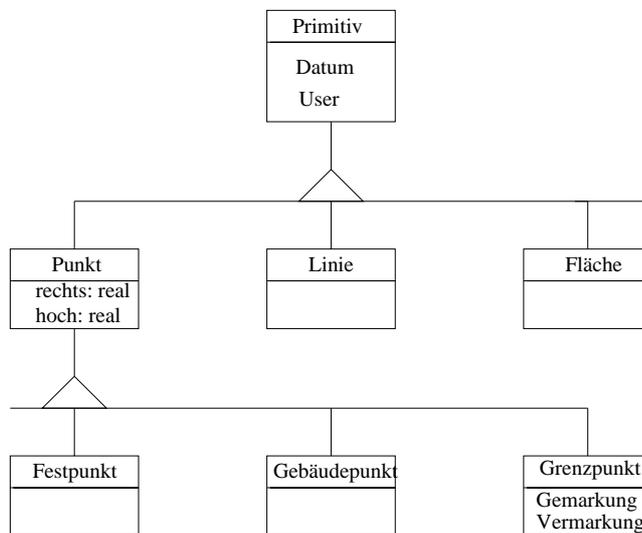


Abbildung 29: Vererbung über mehrere Ebenen

Beim Aufbau von Klassenhierarchien sollte man den folgenden Grundsatz einhalten: In der Vererbungshierarchie sollten nur echte *is-a*-Beziehungen verwendet werden. Abbildung 28 liefert dazu ein einfaches Beispiel. Die Mehrfachvererbung könnte in diesem Fall dadurch vermieden werden, daß man die Klasse der 'Standardattribute' auf die höchste Hierarchieebene stellt. Damit würden alle Anwendungsschalen (von denen es neben der Grundkarte noch weitere geben kann) diese Attribute erben. Dies hätte aber zwei Nachteile zur Folge:

- Es besteht hier keine echte *is-a*-Beziehung.
- Die Schachtelungstiefe würde allein aufgrund der Standardattribute um eins vergrößert werden.

4.2.4 Aggregation

Aggregation bezeichnet die Beziehung *ist-Teil-von* zwischen zwei Objektklassen. Sie ist somit von der Vererbung, die für die Relation *ist-ein* steht, deutlich zu unterscheiden. Dennoch haben sie viele Gemeinsamkeiten, denn sowohl die Vererbung als auch die Aggregation lassen sich sehr anschaulich durch eine Baumstruktur darstellen. Im Fall der Aggregation führt das immer dann zu einem übersichtlichen Entwurf, wenn eine Beziehung 1 : *m* (*one-to-many*) vorliegt und sich die Aggregation über mehrere

Ebenen erstreckt. Im Prinzip kann die Aggregation als eine Sonderform der Assoziation aufgefaßt werden, bei der zum einen die Beziehung $1 : m$ gilt und die Verknüpfungsattribute als eigene Klasse modelliert werden. Syntaktisch wird die Aggregation in der OMT-Notation durch eine kleine Raute zum Ausdruck gebracht. Abbildung 30 zeigt dies an einem Beispiel.



Abbildung 30: Ein Beispiel für Aggregation

Je nach Anwendung ließe sich die Hierarchie in diesem Beispiel nach oben z.B. über Kreis, Regierungsbezirk, Bundesland und Bundesrepublik noch weiter fortschreiben. Das Beispiel macht nochmals den Unterschied zur Vererbung deutlich, denn ganz offensichtlich ist ein Flurstück keine Flur und schon gar keine Gemeinde und dennoch stehen alle drei in einer direkten hierarchischen Beziehung.

5 Die Verknüpfung von Topologie und GIS

5.1 Datenstrukturen und topologische Räume

In den folgenden Abschnitten gilt es nachzuweisen, daß die in Kapitel 3 vorgestellten Datenstrukturen einen separierten topologischen Raum aufspannen. Es wird sich dann zeigen, daß das vorgestellte Modell nur dann gilt, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist. Dabei wird davon ausgegangen, daß wie zuvor schon angedeutet, diese Strukturen die Träger der Objektsemantik sind.

5.1.1 Die n -Tupel aufgefaßt als topologische Punktmenge

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob die Inhalte der verschiedenen Relationen einer relationalen Datenbank auch als Punkte im Sinne der Topologie aufgefaßt werden können. Dabei muß zunächst festgestellt werden, daß die n -Tupel untereinander in keiner Ordnungsrelation stehen, so daß man die Beziehung größer oder kleiner auf die einzelnen n -Tupel nicht anwenden kann (siehe Abschnitt 3.1.2). In der Praxis kann das durchaus anders aussehen und ist im Grunde eine Implementierungsfrage des Relationen-Modells. Hier soll allerdings der Allgemeinfall erörtert werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist dabei das Codewort oder einfach das Wort im Sinne der Codierungstheorie, wie es bereits im Zusammenhang mit dem Hamming-Abstand eingeführt wurde (siehe Seite 13). Die einzelnen n -Tupel einer Relation werden nun einfach als jeweils ein Wort betrachtet, wobei die Wörter jeweils die gleiche Länge haben. Diese Aussage stützt sich auf den Aufbau der Tupel, die alle die gleiche Zahl an Attributen besitzen, die ihrerseits wiederum einem bestimmten Datentyp angehören. An früherer Stelle wurde bereits gezeigt, daß zumindest einige der Attribute auch tatsächlich vorhanden sind. Es sind dies die Schlüsselattribute. Andere dagegen können durchaus undefiniert bleiben.

Nachdem dieser Sachverhalt herausgearbeitet ist, wird als nächstes untersucht, ob auf diese n -Tupel die Topologieaxiome, wie sie in Abschnitt 2.2 beschrieben wurden, angewendet werden können. Im folgenden wird nun eine Menge X betrachtet, die sich wie folgt zusammensetzt: $X = \{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_m\}$, wobei jedes $x_i \in \{0, 1\}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Länge des n -Tupels in Bit bezeichnet. Die einzelnen x_i stehen dabei für die einzelnen Bits des n -Tupels. m kann dabei aus der Anzahl und den Datentypen der einzelnen Domänen abgeleitet werden. Bildet man die zu X gehörige Potenzmenge \mathcal{G} , dann hat man mit (X, \mathcal{G}) die feinste Topologie gefunden. Diese Topologie kann als Obermenge aller weiteren Topologien betrachtet werden, die alle gröber sind als die angegebene. Aufgrund der Definition des relationalen Modells (siehe Abschnitt 3.1.2) erfüllt diese Topologie auch die Anforderungen, die an die triviale Metrik gestellt werden (siehe Seite 12), da der Abstand zwischen zwei Punkten immer mindestens 1 ist.

Am Beispiel der Relation 'Rohrleitung' aus Abschnitt 3.1.2 soll der Sachverhalt verdeutlicht werden. Dabei werden zur Vereinfachung einige Einschränkungen vorausgesetzt. Die Leitungsnummer sei numerisch, wobei die ganze Zahl durch zwei Byte dargestellt wird. Darüber hinaus sei die Leitungsnummer gleichzeitig auch das Schlüsselattribut. Des weiteren sei die Leitungsart mit dem Datentyp 'Charakter' und der Länge zwei Zeichen vereinbart. Alle übrigen Attribute sollen keine Rolle spielen bzw. sind nicht vorhanden. Danach sähen die Tupel wie in Tabelle 2 dargestellt aus.

Analog dazu kann auf einem etwas höheren Abstraktionsniveau auch der Weg über die Domänen eingeschlagen werden. Nach Abschnitt 3.1.2 sind die Attribute einer Domäne paarweise orthogonal zueinander. Das kartesische Produkt $\mathbb{ID}_1 \times \mathbb{ID}_2 \times \dots \times \mathbb{ID}_n$ führt damit ebenfalls zur feinsten Topologie, sofern man sämtliche Attribute jeder Domäne in Betracht zieht. Unter Berücksichtigung der Schlüssel-eigenschaft bzw. der Definition des kartesischen Produkts ist der Abstand zweier beliebiger Tupel immer mindestens 1 und die Punktmenge erfüllt damit die Voraussetzungen einer trivialen Metrik.

Ergänzend zu den bisherigen Ausführungen kann der Nachweis, daß die n -Tupel einen topologischen Raum aufspannen, auch auf andere Art erbracht werden. Wie die obigen Ausführungen deutlich ge-

Leistungsnummer		Leistungsart	
00000000	00000001	01001000	01010111
00000000	00000010	01011010	01010111
...
...
00110000	00111001	01010110	01010111

Tabelle 2: Das Tupel aus Abschnitt 3.1.2 in 'binärer' Schreibweise

macht haben, besitzen alle n -Tupel einer Relation die gleiche Länge und können danach als ein Wort (siehe Hamming-Abstand in Abschnitt 2.1) aufgefaßt werden. Demnach kann man für die n -Tupel eine Distanzfunktion, nämlich den Hamming-Abstand, angeben und erhält damit einen metrischen Raum (X, d) . Der Hamming-Abstand d ist dabei immer mindestens 1. Diese Eigenschaft wird durch den eindeutigen Schlüssel, den jedes n -Tupel haben muß, gesichert. Wenn aber die Tupel einen metrischen Raum bilden, sind immer auch die Topologieaxiome erfüllt. Darüber hinaus ist gleichzeitig auch das Hausdorffkriterium nachgewiesen.

5.1.2 Datenbankobjekte aufgefaßt als topologische Punktmenge

Läßt man im objektorientierten Modell, wie es in Abschnitt 3.1.3 beschrieben ist, die sogenannte schwache Typisierung zu, dann kann das Objekt nicht mehr als Record mit fester Satzlänge betrachtet werden, weil die Attribute sowohl hinsichtlich ihrer Anzahl als auch hinsichtlich ihres Datentyps unterschiedlich sein können. Eine Möglichkeit zu zeigen, daß die Objekte einer objektorientierten Datenbank dennoch als topologische Punktmenge aufgefaßt werden können, könnte über die Axiome $A_1 - A_3$ erfolgen. Stattdessen wird hier aber ein Umweg vorgeschlagen, der den Nachweis auf sehr einfache Weise ermöglicht.

Betrachtet man das Objekt O_G ganz allgemein als einen Satz von zunächst unbestimmter Länge, so kann man sich diesen aus seiner Objekt-ID O_i und der Menge seiner Attribute A_i zusammengesetzt denken. Die Menge aller Identifier (Bezeichnung in Anlehnung an die gebräuchlichere engl. Schreibweise) soll dabei mit $\mathbb{M}_i = \sum_{j=1}^n O_i$ bezeichnet werden. Diese Anschauung folgt im wesentlichen den Ausführungen von [MAYR/DITTRICH/LOCKEMANN 1987, S. 504ff], die im dortigen Zusammenhang auf die Zuordnung von Attributen und/oder Objekten eingehen. Nach dieser Auffassung kann diese Zuordnung auch als Assoziation aufgefaßt werden (siehe Abschnitt 4.2.2 und Abbildung 31a). Die Zuordnung ist dabei eindeutig und umkehrbar, mithin bijektiv, was in der Mengenschreibweise in Abbildung 31b zum Ausdruck kommt.

Betrachtet man die Menge \mathbb{M}_i gesondert, dann ist aufgrund der Definition eines Identifiers klar, daß je zwei Elemente dieser Menge den Hamming-Abstand $d \geq 1$ haben und somit die Axiome $M_1 - M_4$, die eine Metrik definieren, erfüllt sind. Es spielt dabei keine Rolle, wie O_i letztlich festgelegt wird. Es kann dies z. B. numerisch oder alphanumerisch geschehen. Aus der Sicht der Codierungstheorie genügt es, daß der Code, der die verschiedenen Objekte identifiziert, für jedes Objekt gleich lang ist. Dies ist sicher immer der Fall, da über die Länge dieses Codes der Adreßraum festgelegt wird und dieser für jedes Objekt gleich sein muß. Demnach erfüllen die Objekt-IDs die Anforderungen, die an eine Metrik gestellt werden, und damit nach Abbildung 5 auch die, die von einem topologischen Raum gefordert werden.

Der Raum X ergibt sich analog zu Abschnitt 5.1.1 mit $X = \{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_m \times a_r\}$, wobei $x_i \in \{0, 1\}$ und m die Anzahl der Bits ist, die den Adreßraum festlegen. a_r steht dabei als Platzhalter für die Attribute und kann als Konstante betrachtet werden. Der so definierte Raum (X, d) ist ein metrischer Raum und damit ein Sonderfall des topologischen, der darüber hinaus auch das Hausdorffkriterium erfüllt.

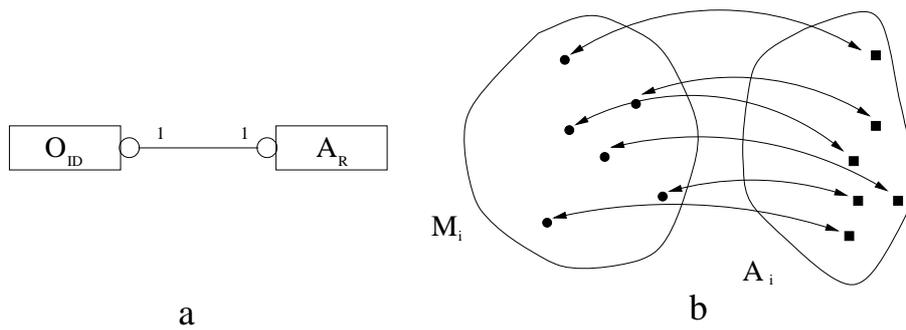


Abbildung 31: Die Zuordnung zwischen Objekt-ID und den zugehörigen Attributen

5.1.3 Record-basierte Strukturen aufgefaßt als topologische Punktmenge

In diesem Abschnitt wird das oben Behandelte verallgemeinert und auf alle record-basierten Datenstrukturen ausgeweitet. Prinzipiell gilt es hier vier verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. Sätze mit fixer Länge und einem eindeutigen Schlüssel.
2. Sätze mit fixer Länge ohne eindeutigen Schlüssel.
3. Sätze mit variabler Länge und einem eindeutigen Schlüssel.
4. Sätze mit variabler Länge ohne eindeutigen Schlüssel.

Fall eins und Fall drei sind im Grunde genommen in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 bereits behandelt. Jeder Satz, der sich aus atomaren Datentypen zusammensetzt und eine fixe Länge hat, entspricht einem n -Tupel, wie es im relationalen Fall oben bereits behandelt wurde. Ebenso entspricht ein Record mit variabler Länge, aber einem festem Schlüssel, einem Objekt, das wie oben gezeigt in einen Schlüsselanteil und einen Attributanteil zerlegt werden kann. Für diesen Fall wurde ebenfalls gezeigt, daß er den Bedingungen einer topologischen Punktmenge genügt. Es verbleiben damit die Fälle zwei und vier.

5.1.4 Record-basierte Strukturen ohne Schlüssel

Zunächst wird Punkt zwei aus obengezeigter Fallunterscheidung näher behandelt. Als Beispiel soll zunächst der in Abschnitt 3.3.1 aufgeführte Bag herangezogen werden. Diese Struktur zeichnet sich durch eine feste Satzlänge aus, die Sätze können jedoch mehrfach vorkommen. Da der Bag aber eine Sonderform der Liste ist, handelt es sich folglich um eine geordnete Menge. Dies zeigt sich beispielsweise schon an der Definition der Sätze, die im allgemeinen einen Verweis auf zumindest den Nachfolger haben, der üblicherweise auch mit *nachfolger* bezeichnet wird. Es kann also für je zwei beliebige Sätze S_i und $S_j (i \neq j)$ aus einer gegebenen Menge \mathbb{M}_G von Sätzen die Beziehung $S_i < S_j$ oder $S_j < S_i$ angegeben werden. Gilt diese Aussage für ein beliebiges Paar, dann gilt sie auch für jede beliebige Teilmenge $\mathbb{M}_K = \{S_k | S_k \in \mathbb{M}_G, k = 1, 2 \dots\}$. Die Menge \mathbb{M}_G genügt demnach den Bedingungen $O_1 - O_3$ aus Abschnitt 2.13 und darüber hinaus noch den Bedingungen, die an eine Wohlordnung gestellt werden. Die Menge ist folglich wohlgeordnet. Damit kann eine Abbildung f dieser Menge auf die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} angegeben werden. \mathbb{N} wiederum kann als separierter topologischer Raum gedeutet werden. Da f bijektiv ist, sind die beiden Räume topologisch äquivalent. Damit ist gezeigt, daß auch der Bag den Bedingungen $T_1 - T_5$ genügt.

Neben dem Bag ist auch der Record, wie er im Netzwerkmodell zur Anwendung kommt (siehe Abschnitt 3.1.1), ein weiterer wichtiger Vertreter dieser Gruppe. Denn auch im Netzwerkmodell ist hinsichtlich des Satzinhalts keine Restriktion vorhanden, d.h. es kann durchaus mehrere Sätze mit gleichem Inhalt geben. Aber auch diese Sätze unterliegen den gleichen Bedingungen, wie sie für den Bag gelten. Dies kommt in Abbildung 14 deutlich zum Ausdruck.

Die gleiche Beweisführung kann z.B. auch für das Hashing mit Verkettung herangezogen werden. Hier kann die Abbildung allerdings nicht auf die Menge \mathbb{N} beschränkt bleiben. Es gilt vielmehr eine Funktion f zu suchen, die die Elemente e_i der Hash-Tabelle auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (jetzt aufgefaßt als topologischer Raum) abbildet. f weist dem 2-Tupel als ersten Wert den Index aus der Hash-Tabelle zu, der zweite ergibt sich aus der Ordnungszahl innerhalb der Kette. $f(e_i) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist somit gefunden. Diese Abbildung ist bijektiv, woraus wiederum folgt, daß die beiden Räume topologisch äquivalent sind. Damit können die Elemente einer Hash-Tabelle ebenfalls als topologische Punktmenge aufgefaßt werden.

Diese Beweisführung kann für beliebige Dimensionen erweitert werden. Wobei jetzt eine Funktion der Art $f(e_i) \rightarrow \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \times \dots \times \mathbb{N}_n$ anzugeben ist. Eine derartige Funktion kann aber über die Indizes der Hash-Tabelle und die Ordnungszahlen innerhalb der Ketten immer angegeben werden, so daß die im vorangegangenen Absatz aufgeführte Beweisführung analog angewendet werden kann.

5.1.5 Strukturen ohne feste Länge

Zuletzt muß noch der Beweis erbracht werden, daß auch Strukturen mit variabler Länge ebenfalls als topologische Punktmenge aufgefaßt werden können. In diesen Fällen kann nicht mehr der relativ einfache Weg über den Hamming-Abstand eingeschlagen werden, da dieser eine feste Wortlänge voraussetzt. Es gilt folglich eine andere Lösung zu suchen.

Gegeben sei die Menge \mathbb{L} , die aus den beiden Elementen 0 und 1 besteht, also: $\mathbb{L}_i = \{0, 1\}$. X sei die Menge bestehend aus $\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2 \times \mathbb{L}_3 \times \dots \times \mathbb{L}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und endlich sein soll¹⁰. Weiterhin sei die Menge \mathcal{F} bestehend aus dem System aller Teilmengen von X gegeben. Diese sogenannte diskrete Topologie ist die feinste, die angegeben werden kann. Im Raum (X, \mathcal{F}) kann somit jede beliebige Bitfolge, deren Semantik zunächst unbestimmt ist, abgebildet werden.

Jeweils ganz bestimmte Teile dieser Bitfolge sind dabei die Träger der Semantik, die zu einer bestimmten Zeit t eindeutig sein muß. Daraus folgt, daß sich diese Teilmengen zum Untersuchungszeitpunkt t nicht überlappen dürfen, da ansonsten deren Semantik nicht eindeutig wäre. Die Menge ist folglich trennbar und damit Hausdorffsch.

5.1.6 Zusammenfassung

In den Abschnitten 5.1.1 bis 5.1.5 wurde gezeigt, daß alle gängigen Datenstrukturen als topologische Punktmenge gedeutet werden können, die darüber hinaus das Hausdorffkriterium erfüllen. Dies wird in Kapitel 6 im Zusammenhang mit der Quasi-Zellenzerlegung und der q-Identität von Bedeutung sein.

Prinzipiell hätte der Nachweis über das Vorliegen eines separierten topologischen Raumes auch über den Adreßraum bzw. den physikalischen Speicher geführt werden können. Dies stünde aber im Widerspruch zur Vorgehensweise in der Informatik, die generell bestrebt ist, abstrakte Modelle zu entwickeln (siehe dazu z.B. [HEUER 1997]).

Verallgemeinert man den Gedanken aus 5.1.5, dann gilt mit $\mathcal{G} = \{\mathcal{X}, \emptyset\}$ als der indiskreten Topologie die folgende Beziehung für jede weitere Topologie \mathcal{U} :

$$\mathcal{G} \preceq \mathcal{U} \preceq \mathcal{F}.$$

¹⁰Die Forderung nach Endlichkeit hat rein praktische Gründe.

Es sind somit noch viele weitere Topologien denkbar, die aber alle als Untermenge von \mathcal{F} betrachtet werden können. Jede dieser Topologien bildet ihrerseits wieder einen topologischen Raum. Damit ist gezeigt, daß auch beliebige binäre Strukturen mit unterschiedlicher Länge die Bedingungen, die an eine Topologie gestellt werden, erfüllen. Da diese Strukturen zu einem beliebigen Zeitpunkt t jeweils semantische Einheiten bilden, sind diese Punkte trennbar, der Raum ist somit separiert. Interpretiert man X als den Adreßraum, dann ist man mit dieser Darstellung schon sehr nahe am physikalischen Speicher.

5.2 Topologie und Zeit

Unter den zahlreichen Veröffentlichungen zum Thema Topologie in GIS wirken die Beiträge, die den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Topologie behandeln, auf den ersten Blick etwas befremdlich. Dies hängt vor allem damit zusammen, daß die meisten Autoren das Thema Topologie eher statisch betrachten und damit im allgemeinen Zustände, die zeitlich konstant sind.

Eine sehr ausführliche Darstellung des Themenkomplexes GIS und Zeit gibt [LANGRAN 1993] (wesentlich kompakter, dafür aktueller auch in [BILL 1997]). In [LANGRAN 1993] wird zunächst allgemein über die Problematik Zeit und ihre Abbildung in GIS diskutiert. Dabei wird vor allem auf die unterschiedlichen Zeitskalen aufmerksam gemacht (siehe S.34). Des weiteren weist der Autor auf die Schwierigkeit hinsichtlich der Objektidentität hin, die sich bei zeitlichen Änderungen des Objekts ergeben. So ist z. B. zu fragen, ob ein Flurstück nach einer Teilung als Objekt noch weiter existiert, eventuell in einem der neu entstandenen Flurstücke, oder ob etwa ein Gebäude, das abgerissen und an der gleichen Stelle wieder aufgebaut wird, noch dasselbe Gebäude ist. Bejaht man diese Frage, so bleibt zu klären, ob dies immer noch zutrifft, wenn das Gebäude 5 m versetzt wieder aufgebaut wird usw. Wie aus diesen wenigen Beispielen deutlich wird, ist es sehr schwierig, hier allgemeingültige Kriterien zu finden, die diese Fragen eindeutig klären.

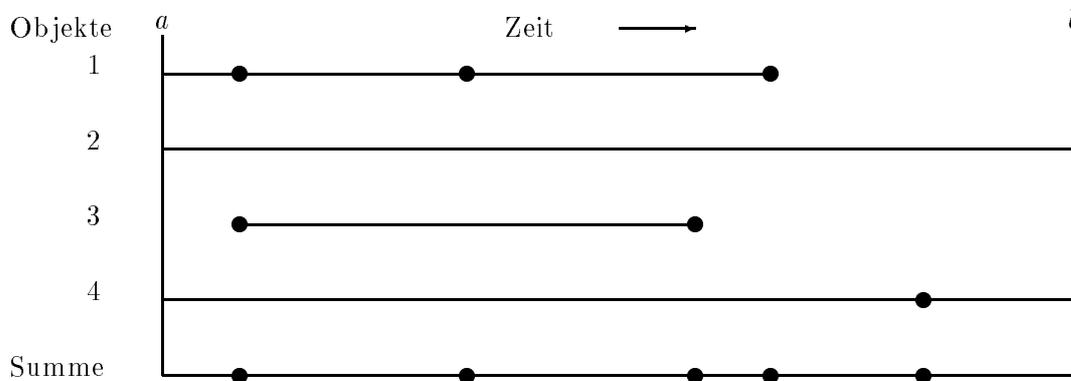


Abbildung 32: Die Veränderung in Abhängigkeit von der Zeit am Beispiel von vier Objekten im zeitlichen Intervall $[a, b]$. Beginn oder Ende einer Gerade kennzeichnet jeweils den Aufstieg oder den Untergang eines Objekts (nach [LANGRAN 1993, S.51]).

Trifft man für diese Fälle eine Entscheidung, so kann der Zeitraum zwischen zwei Veränderungen eines Objekts als Kante und der Zeitpunkt der Veränderung selbst als Knoten aufgefaßt werden, und man ist wieder bei topologischen Beziehungen angelangt (siehe [RAAFAT/YANG/GAUTHIER 1994]). Graphisch ist dieser Sachverhalt in Abbildung 32 wiedergegeben. Neben diesen topologischen Beziehungen, die das Objekt gewissermaßen zu sich selbst hat, gibt es auch bei zeitlicher Modellierung nach wie vor die topologischen Beziehungen zu anderen Objekten, die natürlich ebenfalls einer zeitlichen Veränderung unterliegen. Beispielsweise ändern sich die Nachbarschaftsverhältnisse zwischen den Flurstücken nach einer Grundstücksteilung auch dann, wenn man die im vorangegangenen Absatz angesprochene Objektidentität zweifelsfrei geklärt hat. Vor allem in Netzanwendungen lassen sich noch zahlreiche

weitere Beispiele finden. Besonders Objekte, deren Sinn gerade darin liegt, topologische Beziehungen herzustellen oder aber auch zu unterdrücken, sind hervorragend dazu geeignet, als konkrete Anwendung zeitlich variabler Topologien zu dienen. Schalter, Schienen (in Stromanwendungen), Schieber, Ventile usw. gehören dieser Kategorie an. Hinsichtlich der Trennbarkeit ergeben sich im Zusammenhang mit der Zeit Schwierigkeiten (siehe [LANGRAN 1993, S. 55ff]), wie an einem Beispiel gezeigt wird.

Es sei eine Relation mit dem Namen 'Flurstück' gegeben, die als Schlüsselattribut die Flurstücksnummer hat. Neben einigen weiteren Attributen sei auch ein Attribut Nutzungsart gegeben, das zum Zeitpunkt t_0 den Wert a habe. Zum Zeitpunkt t_1 soll dieses Attribut den Wert b erhalten, aber nach geraumer Zeit (t_2) wieder auf a zurückgesetzt werden. Topologisch gesehen bilden die jeweiligen Veränderungszeitpunkte die Knoten, die allerdings in diesem konkreten Beispiel nicht voneinander trennbar wären, da die beiden Tupel zum Zeitpunkt t_0 und zum Zeitpunkt t_2 vollkommen gleich sind und eine Trennbarkeit über eine Ordnungsrelation, wie sie in Abschnitt 2.13 dargestellt und in Abschnitt 3.1.2 näher beschrieben wurde, nicht möglich ist. Darüber hinaus wäre bereits zum Zeitpunkt t_1 die Schlüsselbedingung verletzt, da die Veränderung ein weiteres Tupel mit dem gleichen Schlüssel erzeugen würde.

Lösungen liegen bereits seit langem in den verschiedensten Varianten vor (z.B. [SNODGRASS/AHN 1985], [ARIAV 1986], [CLIFFORD/TANSEL 1985], [GADIA 1986]). Sie lassen sich im wesentlichen in drei Kategorien einteilen: Vorschläge, die auf der Tabellen-Ebene ansetzen, solche, die auf der Tupel-Ebene wirksam werden und solche, die auf Attribut-Ebene aufsetzen. [GRIEFAHN 1997] gibt eine sehr ausführliche Übersicht zu dieser Thematik und stellt die neueren Entwicklungen im Zusammenhang mit den relationalen Datenbanken und der Zeit vor.

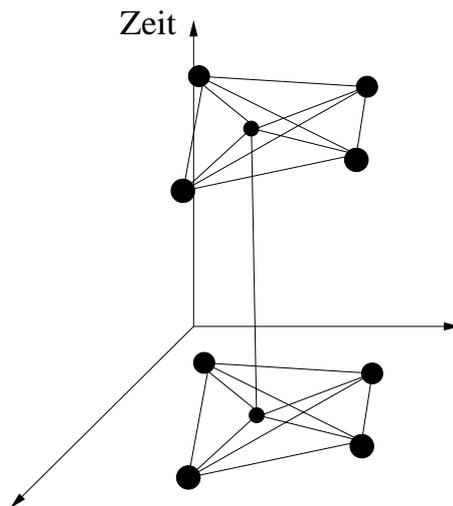


Abbildung 33: Ein Objekt und seine topologischen Verknüpfungen unter Berücksichtigung der Zeit

Abbildung 33 verdeutlicht diesen Sachverhalt in graphischer Form. Die Objekte sind dabei als Punkte wiedergegeben, wobei die topologischen Beziehungen als Kanten dargestellt sind. Die Beziehungen, die ein Objekt zum Zeitpunkt t_i zu anderen Objekten hat, sind hier in der Ebene als Graph dargestellt. Dieser Graph ist im allgemeinen nicht mehr planar.

5.3 Topologische Beziehungen zwischen zwei Flächen im \mathbb{R}^2

Ein sehr interessanter Lösungsvorschlag zur Beschreibung topologischer Beziehungen im \mathbb{R}^2 ist in den Veröffentlichungen von [EGENHOFER/Franzosa, 1991], [EGENHOFER, CLEMENTI, FELICE, 1994] und [EGENHOFER/ Franzosa, 1995]¹¹ zu finden. Als Idee liegt diesen Arbeiten das 4-Intersektion-Modell

¹¹Die Liste der Arbeiten zu dem hier behandelten Lösungsansatz ist bei weitem nicht vollständig.

(4-intersection-model) zugrunde, mit Hilfe dessen topologische Beziehungen beschrieben werden. Damit man die vier Schnittmengen bilden kann, wird ein Gebiet G , entsprechend der topologischen Sichtweise in die offene Menge aller inneren Punkte G° und den geschlossenen Rand ∂G zerlegt. Die Beziehung von zwei Gebieten G_1 und G_2 wird nun durch die Bildung der vier Schnittmengen $(\partial G_1 \cap \partial G_2, G_1^\circ \cap G_2^\circ, \partial G_1 \cap G_2^\circ, G_1^\circ \cap \partial G_2)$ beschrieben, wobei jede Schnittmenge nur den Wert \emptyset oder $\neg\emptyset$ bzw. 0 oder 1 annehmen kann. Aus der Menge aller möglichen Kombinationen dieses 4-Tupels kristallisieren sich acht Elemente heraus, denen eine topologische Bedeutung beigemessen werden kann. Diese acht Beziehungen sind in Abbildung 34 dargestellt.

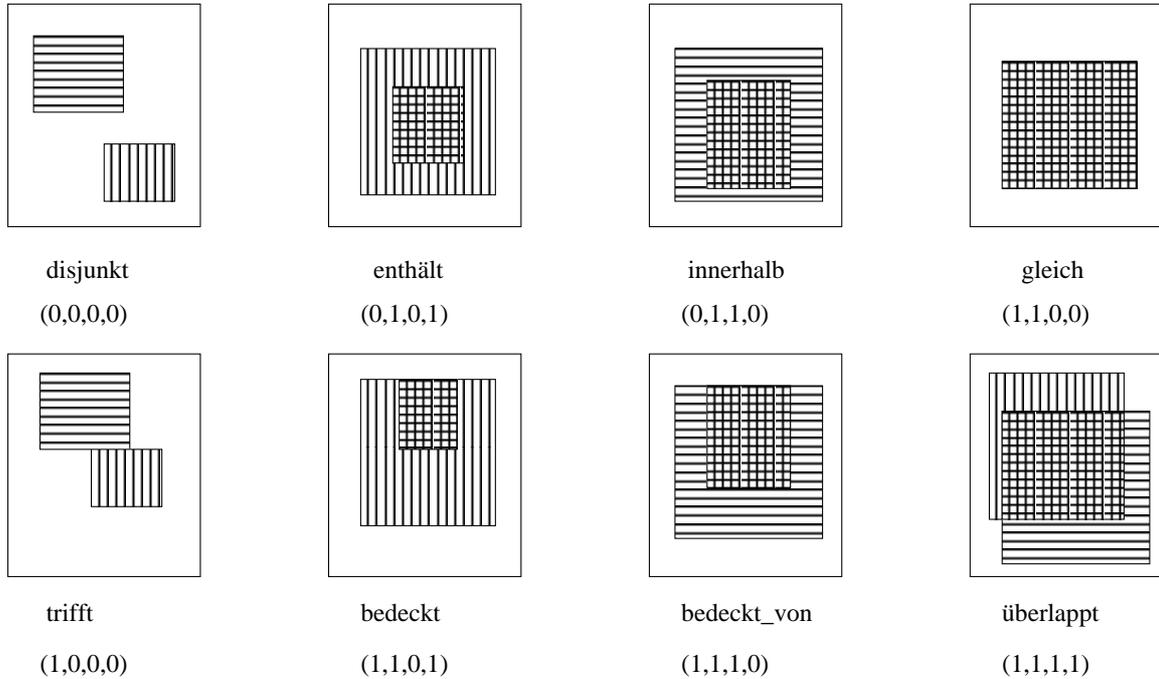


Abbildung 34: Die topologischen Beziehungen zwischen zwei Gebieten im \mathbb{R}^2 (nach [EGENHOFER/Franzosa, 1995 S. 136])

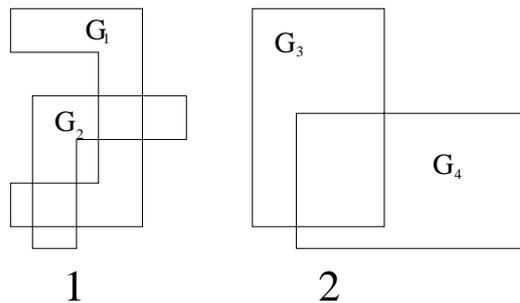


Abbildung 35: In beiden Fällen ergibt sich als das gleiche Muster (1,1,1,1)

Betrachtet man nun zwei Paare von Gebieten $G_i (i = 1, 2)$ und $G_j (j = 3, 4)$ in einem beliebigen topologischen Raum X und bildet für beide dieser Gebiete das binäre Muster der 4-Tupel nach dem oben dargestellten Modell, dann zeigt sich, daß Gebiete mit gleichen topologischen Beziehungen auch gleiche Muster bilden. Die Umkehrung dieser Beziehung gilt allerdings nicht. So ist das binäre Muster keine hinreichende Bedingung dafür, daß auch gleiche topologische Beziehungen vorliegen. Abbildung 35 macht dies deutlich. Das 4-Tupel für beide Muster ist (1,1,1,1), obwohl die beiden Figuren nicht zueinander homöomorph sind. Beispielsweise ist ganz offensichtlich die Kardinalität der Schnittpunkte, eine der topologischen Invarianten, nicht erfüllt. Zur weiteren Differenzierung sind folglich noch

andere Kriterien heranzuziehen. In Abbildung 35 kann dies dadurch geschehen, daß die Schnitte der beiden Ränder durchnummeriert werden, wobei hier von einem vorgegebenen Umlaufsinn auszugehen ist. [EGENHOFER/Franzosa 1995] zeigen damit, daß auch solche topologischen Beziehungen zu unterscheiden sind, die mit der oben gezeigten Vorgehensweise nicht zu lösen waren.

Neben diesem Modell existiert noch ein zweites, das als 9-Intersektion in der Literatur bekannt ist (siehe z.B. [EGENHOFER/Franzosa 1991], [WINTER 1996b] oder auch [EGENHOFER/Mark 1995]). Beide Modelle brauchen in diesem Zusammenhang nicht weiter vertieft zu werden, da in dieser Arbeit ein anderer Weg zur Beschreibung der topologischen Beziehungen eingeschlagen wird.

5.4 Normen, die topologische Aspekte enthalten

Topologische Aspekte sind auch Gegenstand einiger Normen. In diesem Zusammenhang interessieren die für GIS bedeutsamen Normen [ISO 8211] (als Grundlage von DIGEST), [ISO 10303] und die daraus abgeleitete europäische Norm, die derzeit in der vorläufigen Fassung [PRENV 12160], [PRENV 12009] und [PRENV 287011] als Vornorm zur Verfügung steht. Damit liegen zwei unabhängige Normen vor, die auf Inhalte topologischer Art untersucht werden können. Die zuvor genannten Normen definieren sogenannte Datenbeschreibungssprachen (engl. *Data Description Language DDL*), wobei die aus der [ISO 10303-41] abgeleitete Sprache auch mit dem Namen *EXPRESS* bezeichnet wird. Von diesen beiden Normen enthält aber nur die europäische Vornorm ([PRENV 12160 S. 23ff]) Informationen hinsichtlich topologischer Modellbildung. Derzeit beschreibt sie lediglich topologische Beziehungen im \mathbb{R}^2 (ebd. S. 6). In den folgenden Abschnitten wird diese Norm hinsichtlich der Abbildung von topologischen Beziehungen untersucht.

5.4.1 Der Knoten

Gemäß dem europäischen Normvorschlag (siehe [PRENV 12160, S. 23ff]) sind zwei Ausprägungen von Knoten¹² vorgesehen: *verbundene* und *unverbundene* bzw. *isolierte* Knoten. Für einen isolierten Knoten k_i^0 wird lediglich die Beziehung

- liegt in Masche

festgehalten. Der verbundene Knoten k_v^0 kennt dagegen zwei Formen, zum einen den Knoten k_a^0 , der gleichzeitig Anfangs- oder Endpunkt einer Kante ist, und den Knoten k_e^0 , der lediglich Element einer Kante k^1 ist. Daraus ergeben sich für k_a^0 die topologischen Beziehungen

- ist Anfangspunkt für n Kanten und
- ist Endpunkt für n Kanten.

Für k_e^0 existiert demgegenüber nur die Aussage

- ist Element von n Kanten.

Aus topologischer Sicht wird hier vor allem von der Randpunkteigenschaft des Knotens und der Beziehung innen und außen Gebrauch gemacht. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang noch die Tatsache, daß dieser Entwurf eine *Identität*, wie sie in [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985] (siehe Abbildung 47) angegeben ist, nicht vorsieht.

Darüber hinaus muß noch auf den Sachverhalt Knoten k_e^0 ist *Element* einer Kante hingewiesen werden. Dieser Knoten ist für Berechnungen in Graphen nicht verwertbar. Der Grund dafür kann aus der in Abschnitt 2.12 beschriebenen Inzidenzabbildung hergeleitet werden. Danach kann k_e^0 zwar Element der Menge N der Knoten sein, allerdings wird keine der Kanten aus E auf ihn abgebildet. Folglich kann nur die Aussage *es gibt keinen Weg zu k_e^0* aus diesem Sachverhalt gewonnen werden. Er nimmt damit die gleiche Rolle wie der unverbundene Knoten ein.

¹²Es werden die in der Norm verwendeten Begriffe beibehalten.

5.4.2 Die Kante

Die Kante ist verglichen mit dem Knoten in ihrem Aufbau etwas komplizierter. Sie zeichnet sich durch insgesamt acht topologische Beziehungen aus, die im folgenden kurz skizziert werden:

- Sie beginnt an einem Knoten und
- endet an einem Knoten.
- Die Kante ist orientiert und hat linksliegend 1 bis n Maschen ebenso
- hat sie rechtsliegend 1 bis n Maschen.
- Am Endpunkt zeigt sie auf die nächstliegende rechte Kante,
- am Endpunkt zeigt sie auf die nächstliegende linke Kante.
- Am Anfangspunkt zeigt sie auf die nächstliegende rechte Kante,
- am Anfangspunkt zeigt sie auf die nächstliegende linke Kante.

Darüber hinaus sind noch einige Eigenschaften festgehalten, die sich aus der Umkehrbeziehung ergeben, dies sind

- die 1 bis n Knoten, die Element der Kante sind und
- die 1 bis n geschlossenen Umringe, zu denen die Kante gehört.

An dieser Stelle lohnt es sich, das Konzept dieses topologischen Entwurfs etwas näher zu beleuchten. Dabei fällt auf, daß jede Kante bis zu n Maschen als Nachbarn haben kann¹³. Dies ist aber, legt man die Theorie streng aus, zunächst ein Widerspruch zu den Folgerungen, die sich aus dem Jordan'schen Theorem ergeben. Danach trennt ein Strahl die Ebene in genau zwei Halbebenen, wonach dann jede Kante genau einen rechten und genau einen linken Nachbarn haben muß.

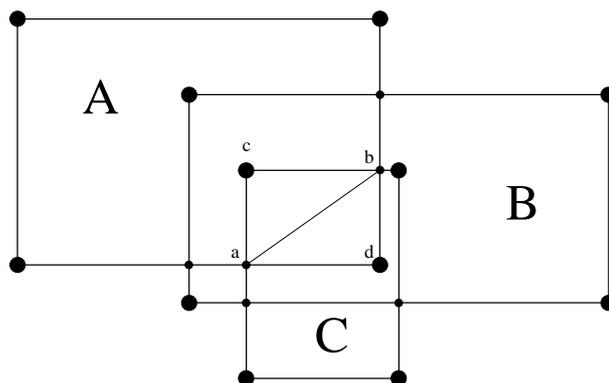


Abbildung 36: Drei 2-Zellen, die sich überlappen

Diesem theoretischen Ansatz steht eine etwas andere Sicht der GIS-Praxis gegenüber. Wie Abbildung 36 deutlich macht, liegen in GIS Kanten oftmals als Teile von komplexeren Gebilden (z.B. Flächen) vor. Die Abbildung zeigt drei Flächen, die sich gegenseitig überlappen. Bezeichnet man nun die Kante, die sich aus der Verbindung vom Knoten a nach d ergibt, mit k , dann hat k drei linke, dies sind die Flächen A , B und C , und zwei rechte, nämlich B und C , benachbarte Flächen. Ganz offensichtlich

¹³Der Außenraum zählt ebenfalls als Masche, weshalb immer mindestens eine Masche vorhanden sein muß.

ist die im vorangegangenen Absatz getroffene Annahme nur dann richtig, wenn der Überlappungsfall ausgeschlossen wird. Dies kann durch die Zerlegung der Ebene in kleinste Flächeneinheiten erreicht werden.

Will man aus den topologischen Beziehungen den größtmöglichen Nutzen ziehen, dann ist es unumgänglich, strenge Maßstäbe an die Abbildung dieser Relationen anzulegen. Dies wird von der vorliegenden Norm nicht unterstützt. In der Konsequenz führt dies dazu, daß Systeme mit einer schwachen Topologie bevorzugt werden. Denn beim Austausch von Daten zwischen den Systemen muß u. U. die komplexe topologische Struktur beim Datenaustausch erst aufgebaut werden. Sinnvoll wäre dagegen der umgekehrte Weg. Topologisch schwache Systeme sollten beim Datenexport veranlaßt werden, eine „saubere“ Struktur zu erzeugen.

5.4.3 Die Masche

Die Masche hat die folgenden Charakteristika:

- Sie hat einen äußeren Umring und
- sie enthält keinen oder mehrere innere geschlossenen Polygone.
- Sie enthält 0 bis n isolierte Knoten und
- sie liegt links von 0 bis n Kanten ebenso wie
- sie rechts von 0 bis n Kanten liegt.

Es fällt zunächst auf, daß die Masche verhältnismäßig einfach aufgebaut ist und daß ganz zentrale topologische Beziehungen, wie beispielsweise die Nachbarschaft, nicht geführt werden. Diese Relationen sind zwar nicht explizit, sehr wohl aber implizit enthalten. Die Nachbarn zu einer gegebenen Masche können, um beim obigen Beispiel zu bleiben, über ihren Umring gefunden werden. Dieser setzt sich aus mindestens einer Kante zusammen, die ihrerseits Informationen über die linken und rechten Maschen enthält.

5.5 Die Abbildung topologischer Zusammenhänge in Datenstrukturen

Die Wechselwirkung zwischen der Topologie von Objekten im \mathbb{R}^2 und ihrer Abbildung als Datenstruktur soll am Beispiel des *Graphischen-Programm-Generators (GPG)*, der von der Firma IBM im Rahmen des GTIS-Projekts entwickelt wurde, dargestellt werden. GPG bezeichnet eine Makrosprache, die speziell auf den Bereich GIS zugeschnitten ist. Diese Sprache erlaubt die Abbildung topologischer Beziehungen direkt in der Datenstruktur, wobei dazu ein bemerkenswerter Lösungsansatz gewählt wurde. Da diese Struktur noch nicht sehr bekannt ist, wird sie im folgenden etwas detaillierter vorgestellt.

GPG kennt im wesentlichen fünf verschiedene sogenannte Typklassen von Objekten, deren struktureller Aufbau fest vorgegeben ist. Aus den Typklassen können dann beliebige weitere Objektklassen¹⁴ abgeleitet werden. Für diese Arbeit ist besonders der strukturelle Aufbau von drei dieser Typklassen von Bedeutung, die im weiteren kurz vorgestellt werden.

Die erste Typklasse, das sogenannte Typ-1-Objekt zeichnet sich durch folgenden strukturellen Aufbau, den man durchaus als Hierarchie ansehen kann, aus:

- Alle Objekte gehören einer bestimmten Anwendungsebene (Layer) an.

¹⁴Der Begriff „Klasse“ darf in diesem Zusammenhang nicht mit dem heute üblichen verwechselt werden. Die Unterschiede spielen allerdings für diese Arbeit keine Rolle und brauchen daher nicht näher ausgeführt zu werden.

- Sie bilden mindestens einen aber höchstens zwei sogenannte absolute Punkte (A.P.).
- Jedes Objekt hat mindestens einen und höchstens zwei sogenannte Punktverbinder (P.V.).
- Es folgt auf der nächsten Stufe das eigentliche Objekt mit 0-n Attributen.
- Auf der untersten Hierarchiestufe sind die Bilder angesiedelt, wovon i. a. mindestens eines vorhanden sein muß.

Schematisch ist dieser Aufbau wie in Abbildung 37 wiedergegeben.

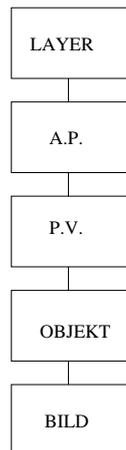


Abbildung 37: Prinzipieller Aufbau der Datenstruktur

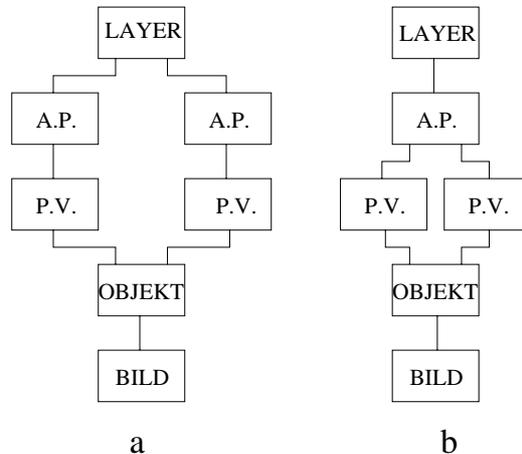


Abbildung 38: Struktureller Aufbau der Typklassen 2 und 3

Ergänzend zu Abbildung 38 muß noch erwähnt werden, daß an jedem absoluten Punkt n Punktverbinder vorhanden sein können und an jedem Punktverbinder wiederum m Objekte zusammenlaufen können. Netzlogisch, d.h. beispielsweise galvanisch oder hydraulisch verknüpft sind die Objekte aber nur, wenn sie sich einen Punktverbinder teilen. Durch diesen strukturellen Aufbau wird festgelegt, in welchen Fällen *Fluß* möglich ist. Daraus ergeben sich vielfältige Analysemethoden, auf die später noch eingegangen wird.

Objekte, die der Typklasse 1 angehören, haben genau den Aufbau, wie er in Abbildung 38 dargestellt ist. Am Beispiel der nächsten Typklasse wird der Unterschied bzw. die Bedeutung der einzelnen Komponenten sehr schnell deutlich (siehe Abbildung 38a). Sie haben die folgende Ausprägung:

- Sie gehören einer bestimmten Anwendungsebene (z.B. Grundkarte) an.
- Sie bilden genau zwei absolute Punkte.
- Sie haben zwei Punktverbinder und zwar an jedem absoluten Punkt einen.
- Es sind 0-n Attribute zugelassen (in der Abbildung auf der Objektebene angesiedelt),
- und sie können 1 – n Bilder haben.



Abbildung 39: Drei über Verbindungsmuffen verbundene Kabel

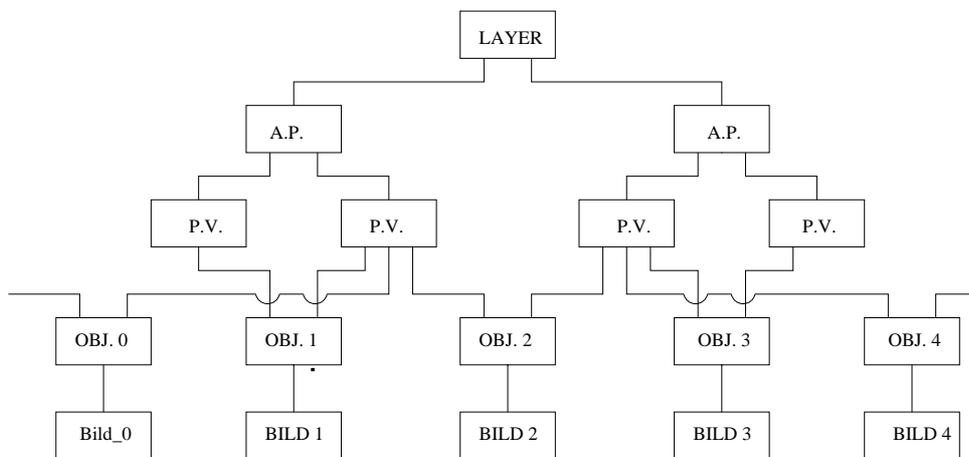


Abbildung 40: Die Datenstruktur zu Abbildung 39



Abbildung 41: Die Verbindungsmuffen aus Abbildung 39 sind durch Schalter ersetzt

Der schematische Aufbau dieser Objekte ist in Abbildung 38a wiedergegeben. Die letzte Gruppe von Objekten, sie gehören der Typklasse 3 an, zeichnen sich dadurch aus, daß sie lediglich einen absoluten Punkt, aber zwei Punktverbinder haben (siehe Abbildung 38b). Die verbleibenden Typklassen (vier und fünf) bieten lediglich zusätzliche Ausgestaltungsmöglichkeiten zu den bereits aufgezählten und bringen von daher für die Thematik dieser Arbeit keine neuen Gesichtspunkte.

Betrachtet man die vorgestellten Typklassen aus dem Blickwinkel der Graphentheorie, dann sieht man, daß die einzelnen Typklassen eine direkte Entsprechung in dieser Terminologie haben. Die Elemente der Typklasse 1 und 3 stellen dabei Punkte dar, wobei das verbleibende Element (Typklasse 2) die Kante repräsentiert. Allerdings stellt erst der P.V. einen Knoten im Sinne der Graphentheorie dar, wie später noch gezeigt wird. Die strukturelle Abbildung der Beziehung zwischen Maschen ist in diesem Modell nicht vorgesehen. Bei der Implementierung von GIS-Anwendungen wird nun versucht, die auftretenden Problemstellungen mit Hilfe der oben dargelegten Bausteine zu lösen. Am Beispiel von drei Stromleitungen, die über Muffen miteinander verknüpft sind, soll dies kurz erläutert werden. Abbildung 39 zeigt dabei die Situation im Grundriß, während Bild 40 die zugehörige Datenstruktur

darstellt. Dem Beispiel liegt dabei die Annahme zugrunde, daß es sich bei den Kabeln um physisch getrennte Objekte handelt, die über die Muffen (Verbindungs-muffen) galvanisch miteinander verbunden werden sollen.

Verfolgt man in Abbildung 40 ausgehend vom Objekt den jeweiligen Aufbau der Struktur, so erkennt man, daß die Objekte 'Muffen' der Typklasse 3 angehören und alle Eigenschaften erfüllen, die an ein derartiges Objekt gestellt werden. Die Leitungen folgen in ihrem strukturellen Aufbau der zweiten Typklasse. Jeweils zwei Objekte der Typklasse 2 teilen sich einen Punktverbinder eines Objekts der Typklasse 3 (zum einen OBJ.0 mit OBJ.2 und OBJ.2 mit OBJ.4). Dies bringt den Sachverhalt *Objekte sind miteinander verbunden* zum Ausdruck, d. h. im genannten Beispiel ist *Fluß* möglich, die Leitungen sind also galvanisch verknüpft. Das folgende Beispiel, das auf diesem direkt aufbaut, soll dieser eher statischen Sichtweise eines Teil-Netzes eine dynamische Komponente geben.

Das Beispiel (Abbildung 41) zeigt wiederum ein Teil-Netz einer Stromanwendung, wobei diesmal die Muffen durch Schalter ersetzt sind. Diese Situation ist natürlich aus Benutzersicht grundverschieden vom vorangegangenen Beispiel. Hier soll aber nicht die Nutzersicht im Vordergrund stehen, sondern der topologische Aspekt dieser Schaltung. Die Gemeinsamkeit, die dieses Beispiel mit dem vorangegangenen hat, wird vor allem an der Datenstruktur deutlich (siehe Abbildung 42).

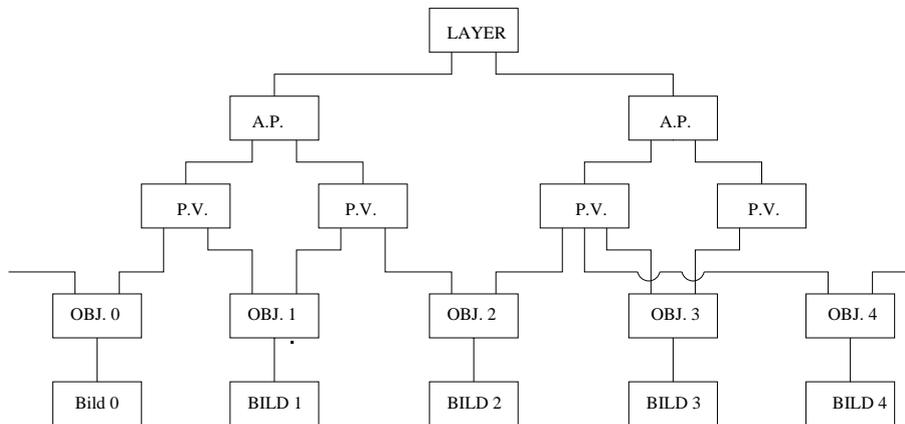


Abbildung 42: Die Datenstruktur zu Abbildung 41

In diesem Beispiel teilen sich nur noch zwei Objekte der Typklasse 2 einen gemeinsamen P.V. (nämlich OBJ.2 und OBJ.4). Die anderen beiden Objekte sind zwar mit dem gleichen Objekt wie vorher verbunden, aber nicht mehr mit dem gleichen Punktverbinder. Nach Definition ist damit kein *Fluß* mehr möglich, die Objekte sind also nicht mehr galvanisch verbunden. Das Beispiel macht deutlich, daß nicht der A.P. sondern der P.V. die Funktion eines Knotens übernimmt. Diese Modellierung macht es möglich, durch relativ geringe Eingriffe die Netzlogik vollständig zu ändern.

5.5.1 Die Entkopplung von Geometrie und Topologie

Die spezielle Datenstruktur des GPG wird vor allem deshalb so detailliert ausgeführt, weil bei diesem Konzept die vollständige Trennung von Geometrie und Topologie realisiert ist. Dies mag im allgemeinen wenig sinnvoll erscheinen, erlaubt aber in Sonderfällen sehr effektive Lösungen. Dies soll an einem Beispiel belegt werden.

Abbildung 43 zeigt eine Sammelschiene, an die zwei Kabel angeschlossen sind. Es werden dabei zwei Fälle unterschieden:

- Der Schalter auf der Schiene ist geschlossen und,

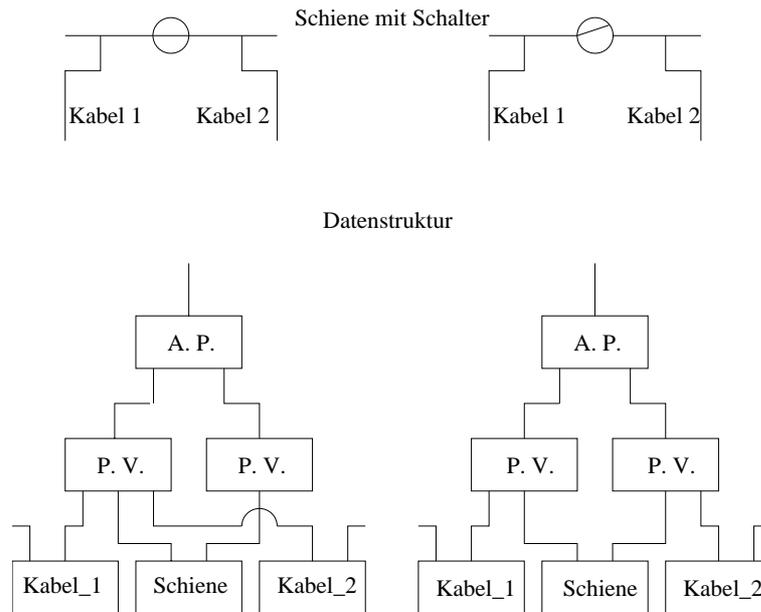


Abbildung 43: Gegenüberstellung Topologie ↔ Geometrie

Realität

Datenstruktur

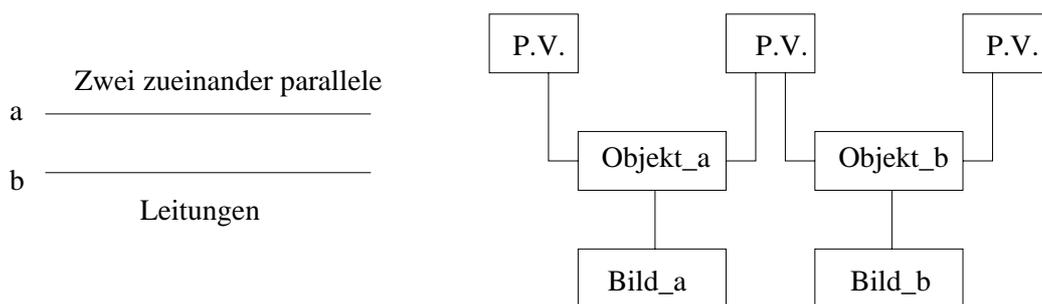


Abbildung 44: Zwei Leitungen und ihre zugehörige Datenstruktur als Beispiel zur Trennung von Topologie und Geometrie

- der Schalter auf der Schiene ist offen.

Für beide Schaltungen ist jeweils die daraus entstehende Datenstruktur wiedergegeben.

Aus der Abbildung ist sofort ersichtlich, daß die geometrische Ausprägung der beteiligten Objekte nicht durch eine homöomorphe Abbildung in die der Datenstruktur zugrunde liegende Form des Knoten-Kanten-Modells überführt werden kann. Die beiden Kabel kommen in der Graphik nie miteinander in Berührung, obwohl sie im Fall des geschlossenen Schalters galvanisch verbunden sind. Das Argument, die Kabel seien über die Schiene verbunden, die ihrerseits die Funktion einer Kante im Sinne der Graphentheorie übernimmt, kann entkräftet werden, indem man sich klar macht, daß eine ähnliche Struktur auch dann entstehen kann, wenn gar keine Schiene vorhanden ist. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 44 verdeutlicht¹⁵.

¹⁵Um die Abbildungen auf das Wesentliche zu beschränken, wurden in Abbildung 43 die Layer-Ebene und in Abbildung 44 die Layer- und die A.P.-Ebene weggelassen.

5.5.2 Prüfverfahren basierend auf topologischen Beziehungen

Die oben vorgestellte Datenstruktur läßt, gewissermaßen im Post-processing, eine Vielzahl von Prüfungen zu, die alle ausschließlich auf topologischen Beziehungen beruhen. Selbstverständlich sollte bereits beim Erfassen auf die korrekte Struktur geachtet werden, d.h. die Erfassungssoftware sollte bereits dafür sorgen, daß kein inkonsistenter Datenbestand entsteht. In der Praxis ist dies aber nicht immer möglich. Z.T. sind hier die Ursachen in fehlerhafter Software (Software-Bugs) zu suchen, in anderen Fällen kann es aber auch an den Datenquellen liegen, weil beispielsweise versucht wird, zwei unterschiedliche Datenstrukturen ineinander zu überführen, was in den wenigsten Fällen vollständig gelingen kann.

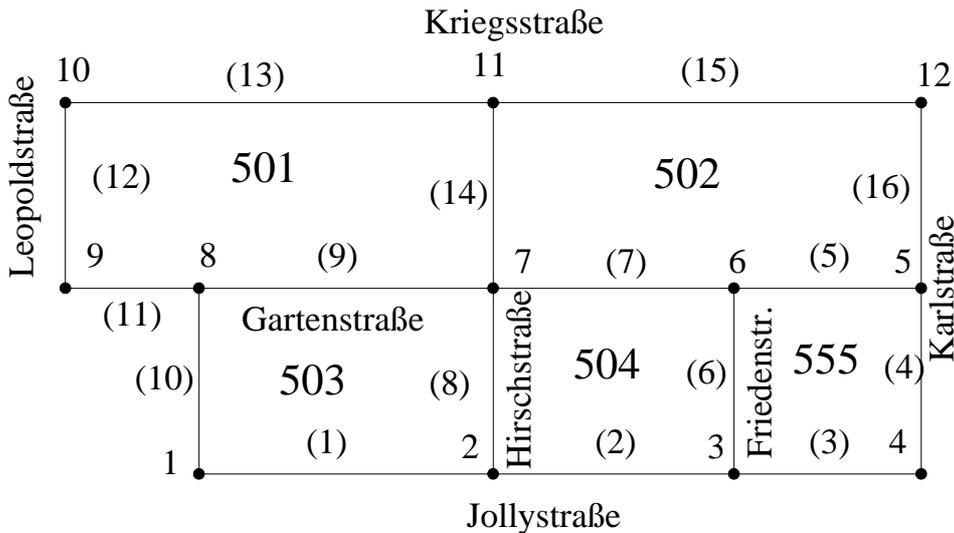


Abbildung 45: Darstellung der Baublöcke in der DIME-Struktur (nach [U.S. BUREAU OF CENSUS 1990,S. 101])

Die Prüfung, die beispielsweise speziell in der Struktur des GPG durchgeführt werden kann, soll im folgenden skizzenhaft umrissen werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß alle Objektklassen, die in diesem Abschnitt als Beispiele herangezogen werden, auch tatsächlich existieren, d.h. im Design der Anwendung als solche definiert sind und auch die entsprechenden Instanzen bestehen. Dies vorausgesetzt lassen sich die folgenden zwei großen Kategorien unterscheiden.

- Prüfung von Verbindungen, die erwünscht sind bzw. vorhanden sein müssen. Beispielsweise wäre die Verbindung einer Flurstücksgrenze mit einem Grenzpunkt am Anfangs- und Endpunkt eine solche Bedingung. Ebenso wie ein Grenzpunkt, der mit keiner Flurstücksgrenze verbunden ist, auch eine Verletzung dieser Forderung wäre.
- Prüfung auf Verbindungen, die nicht erwünscht sind. Dies betrifft beispielsweise die Verbindung zweier Rohre, die unterschiedlichen Objektklassen angehören, weil ihre Durchmesser unterschiedlich sind.

Konzeptionell kann diese Prüfung über eine 'Konsistenzmatrix' erfolgen, wobei die Verbindungsarten in 3 Klassen nämlich 'muß', 'kann' oder 'darf nicht' eingeteilt werden könnten. Für eine Anwendung im Grundkartenbereich besteht dann die Entwurfsmöglichkeit, wie sie in Tabelle 3 dargestellt ist. Da die Matrix symmetrisch ist, genügt die Kenntnis der oberen Dreiecksmatrix.

Auch auf der Basis der DIME-Datenstruktur sind Prüfungen topologischer Art denkbar und werden auch eingesetzt [U.S. BUREAU OF CENSUS 1990]. Ein Beispiel zu einem Test der Knoten und Kanten

	Flurstücksgrenze	Grenzpunkt	Gebäudegrenze	Gebäudeeckpunkt	...
Flurstücksgrenze	k	m	k	n	...
Grenzpunkt	...	n	k	n	...
Gebäudegrenze	k	m	...
Gebäudeeckpunkt	n	...
...

Tabelle 3: Matrix der Verbindungsarten bezogen auf den absoluten Punkt (k: kann; m: muß; n: darf nicht)

(der Originalliteratur folgend als Segmente bezeichnet) wird im folgenden kurz ausgeführt. Abbildung 45 verdeutlicht dies graphisch, wobei die Segmentnummer aus Gründen der Übersichtlichkeit in Klammern gesetzt ist.

Segmentnr.	von Knoten	nach Knoten	linker Nachbar	rechter Nachbar
...
10	1	8	...	503
8	2	7	503	504
7	7	6	502	504
9	7	8	503	501
14	11	7	502	501
15	12	11	502	...
...

Tabelle 4: Tabelle der ungeordneten Segmente

Segmentnr.	von Knoten	nach Knoten	linker Nachbar	rechter Nachbar
8	2	7	503	504
7	6	7	504	502
14	11	7	502	501
9	8	7	501	503

Tabelle 5: Tabelle der geordneten Segmente

Soll nun beispielsweise ein Knoten überprüft werden, ist folgende Vorgehensweise denkbar:

- Suche alle von einem Knoten zu- oder abgehenden Segmente.
- Ordne im nächsten Schritt die Segmente derart, daß alle Segmente am gleichen Knoten enden. Ist diese Bedingung für ein Segment nicht erfüllt, dann werden Anfangs- und Endpunkt vertauscht, was die Vertauschung des linken und des rechten Nachbarn nach sich zieht.
- Danach wird zum ersten Element der Liste das Segment gesucht, dessen linker Nachbar gleich dem rechten des ersten ist. Auf diese Art werden alle Segmente geordnet (siehe Tab. 5).

Der Knoten gilt als korrekt, wenn der linke Nachbar des ersten Segments und der rechte Nachbar des letzten Segments gleich sind. Das Verfahren basiert auf der Ordnung der Segmente im Gegenuhrzeigersinn. Es ist ebenso einfach wie durchschlagend, wenn es darum geht, Inkonsistenzen im Datenbestand aufzudecken. Neben dieser Prüfung sind weitere im Einsatz, wie z.B. die Prüfung der Baublöcke und der Test für bestimmte Segmente. Allen Verfahren ist gemeinsam, daß sie algorithmisch sehr einfach zu implementieren sind, da die Idee, auf denen der Test beruht, zumeist ebenfalls sehr einfach ist.

[KUFONIYI/MOLENAAR/BOULOUCOS 1995] gehen hier noch einen Schritt weiter und abstrahieren von einer vorgegebenen Datenstruktur. Mit Hilfe der 9-Intersektion (siehe Abschnitt 5.3) werden allgemeine topologische Prüfungsansätze vorgestellt, die für alle vektororientierten Daten geeignet sind. [SEILER/VONDER MÜHLL 1995] zeigen auf, daß topologische Prüfungen auch auf den Schnittstellenformaten durchgeführt werden können.

5.5.3 Die Analyse von topologischen Beziehungen

Eng verknüpft mit dem vorigen Abschnitt, wenn auch mit ganz anderer Zielsetzung, ist die Analyse topologischer Strukturen. Stand bisher die Frage im Vordergrund: Wie sind die Daten beschaffen bzw. sind sie konsistent, vollständig und plausibel, so kann der Kernsatz dieses Abschnitts wie folgt formuliert werden: Was kann aus den vorhandenen Daten abgeleitet werden? Diese allgemeine Frage stellt sich im entsprechenden Kontext jeweils anders. Das EVU beispielsweise will wissen, ob sich im Störfall eventuell auch alternative Versorgungswege finden lassen (siehe [GREPEL/SCHÜLLER 1992]). Im Bereich der Fahrzeugnavigation ergeben sich dazu parallele Problemstellungen (z.B. [ZFV SONDERHEFT 1990/4], [CLAUSSEN 1996] oder [RÖDER 1997]). Während die letztgenannten Beispiele zur Analyse topologischer Beziehungen auf der Basis einer Knoten/Kanten-Struktur beruhen, erfordert beispielweise die Analyse epidemiologischer Phänomene, auch was deren Topologie angeht, erheblich komplexere Modelle. Hier muß neben dem Raum auch noch die Zeit mitgeführt werden (siehe [BERG/AHÉ, 1997]).

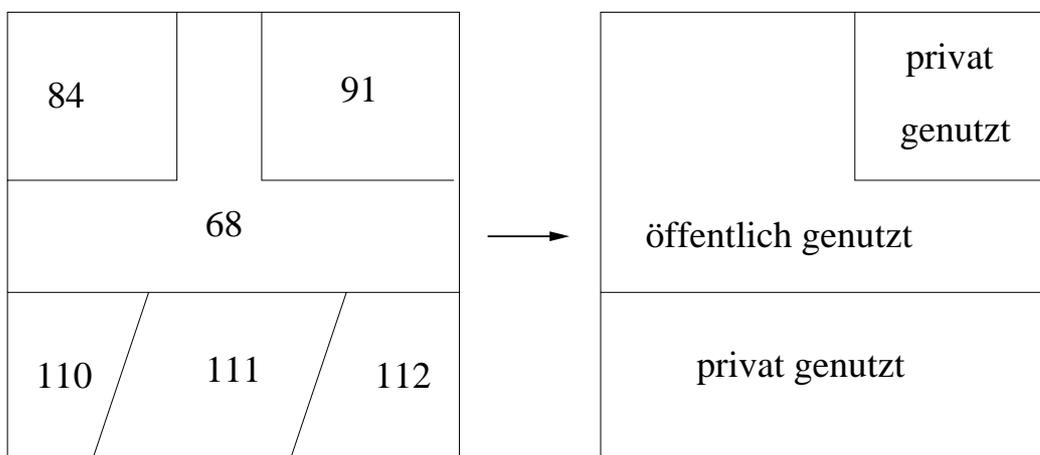


Abbildung 46: Beispiel zur Änderung der topologischen Beziehungen unter dem Einfluß der Generalisierung

5.6 Topologische Beziehungen und Generalisierung

In der klassischen Kartographie umfaßt die Generalisierung drei Hauptaspekte. Es sind dies im Einzelnen *die Geometrie*, *die Semantik* und *die Zeit*. Jeder dieser Aspekte unterliegt wiederum den sieben elementaren Vorgängen wie *Vereinfachen*, *Vergrößern*, *Verdrängen*, *Zusammenfassen*, *Auswählen*,

Klassifizieren und Bewerten (z. B. [HAKE/GRÜNREICH 1994, S. 110ff]). Jeder dieser Punkte kann seinerseits wieder Auswirkungen auf bestehende topologische Beziehungen haben. Zu diesem Thema hat vor allem Molenaar (in [MOLENAAR 1996], [MOLENAAR 1994] und [MOLENAAR 1993]) wesentliche Beiträge geleistet, auf die im folgenden Bezug genommen wird.

Der Einstieg in die Problematik kann am einfachsten über ein Beispiel gegeben werden. Abbildung 46 soll den Ausschnitt eines Datenbestandes darstellen, der ausschließlich Flurstücke enthalten soll. Die Darstellung erfolgt dabei parzellenscharf. Beim Übergang vom Maßstab m_1 auf den Maßstab m_2 , wobei $m_1 > m_2$ sei, wird jetzt nur noch zwischen öffentlich und privat genutzten Flurstücken unterschieden. Dieser Übergang im Maßstab hat tiefgreifende Auswirkungen. Es entsteht ein Objekt, das sich aus vielen Einzelobjekten zusammensetzt (*Aggregation*), wodurch völlig neue topologische Beziehungen entstehen¹⁶. Das Flurstück 111 hört beispielsweise auf als solches zu existieren und gibt seine Nachbarschaftsbeziehungen an ein übergeordnetes ab. Dabei gehen offensichtlich all jene Nachbarschaftsbeziehungen verloren, die Objekte mit jeweils dem gleichen Merkmal (nämlich Privatgrundstück oder Grundstück der öffentlichen Hand zu sein) zueinander haben. So verlieren beispielsweise die Grenzen des Flurstücks mit der Nummer 111 zu denen mit der Nummer 110 und 112 ihre Bedeutung, wodurch auch die Nachbarschaftsbeziehungen verlorengehen. Die Beziehung zum Grundstück mit der Nummer 68 ist die einzige, die bestehen bleibt, wobei auch sie ihre Qualität ändert, da in diesem Bestand lediglich noch Nachbarschaften zu öffentlich genutzten Flächen geführt werden.

Die Analyse der Nachbarschaftsbeziehungen fallen aber in den beiden Maßstäben durchaus unterschiedlich aus. Auf die Frage, wie viele privat genutzte Flächen an öffentlich genutzte Flächen grenzen, erhält man einmal die Antwort vier, im anderen Fall sind es lediglich zwei. Diese Problematik ist auch in ATKIS von Bedeutung, wie Beines in [BEINES 1993] und [BEINES 1994] aufzeigt. Der Artikel gipfelt ganz klar in der Aussage, daß grundsätzlich eine klare Trennung zwischen dicht besiedelten und weniger dicht besiedelten Gebieten bezüglich der Definition von 'Kleingebieten' getroffen werden muß, da ansonsten, aufgrund von Flächenverschmelzungen und -vereinigungen, zuviel Information verloren geht.

5.7 Die Unsicherheit topologischer Beziehungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde bisher immer von eindeutigen topologischen Beziehungen ausgegangen. Diese Annahme beruhte auf einer idealisierten Modellvorstellung, die in der Realität in den seltensten Fällen tatsächlich erreicht wird. [WINTER 1996a]¹⁷ weist in seiner Dissertation auf diesen Punkt hin und zeigt, daß aufgrund der begrenzten Meßgenauigkeit auch die daraus abgeleiteten topologischen Beziehungen einer gewissen Unsicherheit unterliegen. Obwohl sich die Arbeit, wie der Titel schon zum Ausdruck bringt, auf topologische Beziehungen zweier Flächen bezieht, sind damit implizit auch andere Beziehungen, wie z. B. die Beziehung *berührt* zwischen zwei Linien, betroffen.

Die endgültige Klärung der Beziehung zwischen zwei Flächen kann dabei nicht mehr auf der Basis rein topologischer Aussagen erfolgen. [WINTER 1996a] bedient sich dazu statistischer Methoden, die nicht ohne den Abstands begriff, also ein metrisches Maß, auskommen. Dies ist weiter nicht verwunderlich, da die Topologie mit ihrem wesentlich größeren Umgebungsbegriff nicht die geeigneten Werkzeuge zur Verfügung stellt, um dieser Problematik gerecht werden zu können.

¹⁶Die übrigen Änderungen werden an dieser Stelle nicht erörtert.

¹⁷Kompakter auch in [WINTER 1996b] wiedergegeben.

6 Von der Topologie des \mathbb{R}^2 zur Topologie des \mathbb{R}^3

6.1 Allgemeine topologische Beziehungen im \mathbb{R}^2

[BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985, S. 36]¹⁸ geben eine allgemeine Übersicht zu den topologischen Beziehungen in der Ebene (siehe Abbildung 47). Sieht man sich diese Zusammenstellung genauer an, dann fällt auf, daß zwar die Identität 0-Zelle zu 0-Zelle ebenso wie die von 1-Zelle zu 1-Zelle aufgeführt ist, nicht aber die von 2-Zelle zu 2-Zelle. Bei näherer Betrachtung stellt sich dann aber heraus, daß die Einbeziehung der Identität, gleichgültig auf welcher Ebene, Probleme mit sich bringt. Dies soll im folgenden erörtert werden.

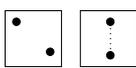
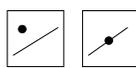
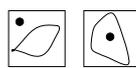
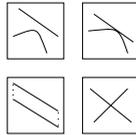
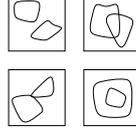
	0-Zelle	1-Zelle	2-Zelle
0-Zelle			
1-Zelle			
2-Zelle			

Abbildung 47: Topologische Beziehungen von Objekten (nach [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985, S. 36])

Gesetzt den Fall, die Identität der 1-Zelle sei zugelassen. Dann hat die 1-Zelle z_i die Umgebung $U(z_i)$ und eine zweite 1-Zelle z_j die Umgebung $U(z_j)$. Nach Voraussetzung kann jetzt nicht mehr in jedem Fall für $U(z_i)$ und $U(z_j)$ eine Umgebung gefunden werden, für die gilt: $U(z_i) \cap U(z_j) = \emptyset$, da z_i und z_j gleich sein können. Damit ist auch das Hausdorffkriterium nicht mehr erfüllt, die Punkte sind folglich nicht mehr in jedem Fall trennbar. Daran knüpft sich unmittelbar die Frage, welchen Nutzen eine derartige Vorgehensweise für GIS haben kann, denn offenbar sind derartige Objekte nicht voneinander zu unterscheiden und infolgedessen ebensowenig zu analysieren.

Obige Aufzählung von topologischen Beziehungen kann folglich nur für Objekte im fachlichen Sinne, also unter Hinzunahme der semantischen Information aus der Datenbank, gelten. Für diesen Fall wurde bereits in Abschnitt 5.1.1ff gezeigt, daß diese Objekte, sofern der Anwendung eine Datenbank zugrunde liegt, in jedem Fall trennbar sind. Damit verliert aber der Begriff *Identität* seine Bedeutung und kann allenfalls in bezug auf die graphische Ausgestaltung des Objekts angewendet werden (siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 2.10).

Die praktische Relevanz dieser Aussagen läßt sich an einem Beispiel leicht nachweisen. Gegeben sei ein zu 100% überbautes Grundstück, was in Innenstädten eher die Regel als die Ausnahme ist. Dann liegen die 0-Zellen Grenzpunkt und die 0-Zellen Gebäudeeckpunkt graphisch (bzw. geometrisch) übereinander, obgleich es ganz offensichtlich unterschiedliche Objekte sind. Das gleiche gilt für die 1-Zellen Gebäude- und Flurstücksgrenzen ebenso wie für das Gebäude in seiner Gesamtheit und das Flurstück

¹⁸In der Veröffentlichung werden die Begriffe *Punkt*, *Linie* und *Fläche* verwendet. Im Gegensatz dazu werden hier alle Elemente als Zellen gedeutet.

als Vertreter der 2-Zellen. Die Geometrie ist somit gleich, während die Semantik jeweils eine andere ist. Um hier Eindeutigkeit zu erzielen, wird im folgenden auf die Definition der q -Zellen zurückgegriffen. D.h. jede x -Zelle (mit $x = 0, 1, 2$) ist als *quasi* – x -Zelle im Sinne der Definition von Abschnitt 2.10 zu deuten. Das gleiche trifft auch auf Abbildung 47 zu.

Nachdem dieser Sachverhalt geklärt ist, bleibt festzustellen, daß die Beziehung 2-Zelle zu 2-Zelle tatsächlich fehlt. Darüber hinaus führen [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985] lediglich vier (mit der Identität fünf) Relationen zwischen zwei 2-Zellen auf. Vergleicht man diesen Entwurf mit dem aus Abschnitt 5.3, dann fehlen in Abbildung 47 mindestens noch drei weitere Beziehungen. Es ist dies beispielsweise die Unterscheidung zwischen *enthält* und die dazu inverse Beziehung *wird enthalten*. Da in der obengenannten Darstellung auf die Bezeichnung der Gebiete verzichtet wird, spielt demnach die inverse Relation keine Rolle, es verbleiben also noch zwei topologische Eigenschaften, die nicht aufgeführt sind. Es handelt sich dabei um die beiden Beziehungen *bedeckt* und *wird bedeckt*. Sie unterscheiden sich von der Relation *innerhalb* dadurch, daß sie mit dem Rand des Gebietes, das sie bedecken, eine gemeinsame 1-Zelle haben. Damit sind die beiden Entwürfe miteinander verglichen und die Unterschiede dargestellt. Trotz der etwas gröberen Einteilung von [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985] wird dieses Modell als Grundlage der Modellierung der Beziehungen von 2-Zellen herangezogen, da sich herausstellen wird, daß die etwas feinere Darstellung aus Abschnitt 5.3 auch auf andere Art erreicht werden kann. Ausgangspunkt der Überlegungen bleibt daher Abbildung 47.

Im folgenden soll anhand der Aufzählung der topologischen Verhältnisse in der Ebene geklärt werden, ob tatsächlich alle Beziehungen geführt werden müssen oder ob einige davon entbehrlich sind. Dies führt letztlich zu der Fragestellung, welche Invarianten genügen, um die topologischen Beziehungen vollständig wiederzugeben. Ergänzend sei an dieser Stelle nochmals daran erinnert, daß die Beziehung *berührt* im Fall einer q -Zellenzerlegung immer eine Grenzwertbetrachtung ist, da alle Mengen grundsätzlich offen sind.

6.1.1 Die Beziehungen der 0-Zelle

Die erste Beziehung, die entbehrlich zu sein scheint, ist die Beziehung 0-Zelle *liegt nicht über* anderer 0-Zelle z_i^0 . Die Begründung dazu lautet folgendermaßen. Definiert man die beiden Mengen \mathbb{M} und \mathbb{M}^c , wobei \mathbb{M} die Menge von 0-Zellen z_i^0 bezeichnet, die die Beziehung *liegt über* für eine ganz bestimmte 0-Zelle z_1^0 teilen und die Menge \mathbb{M}^c als die Menge von 0-Zellen z_j^0 , die diese Beziehung nicht teilen, dann genügt die Kenntnis einer Menge, um die andere zu bestimmen. Es reicht somit aus, ein Mengensystem \mathcal{M} bestehend aus Teilmengen \mathbb{M}_i , die jeweils für ein bestimmtes z_i^0 die Beziehung *liegt über* wiedergeben, zu kennen. Daraus kann nach obiger Feststellung ohne Problem auch das dazu disjunkte Mengensystem \mathcal{M}^c abgeleitet werden. Für praktische Zwecke genügt es daher, lediglich eine von beiden Beziehungen abzubilden. Zur Implementierung entscheidet man sich sinnvollerweise für das Mengensystem \mathcal{M} , da es im allgemeinen kleiner ist als die zugehörige Komplementärmenge \mathcal{M}^c .

Ganz analog zum vorangegangenen Fall verhält es sich mit den Beziehungen in Spalte drei und vier der ersten Zeile aus Abbildung 47. Auch hier kann ein Mengensystem \mathcal{M} angegeben werden, das aus den Teilmengen \mathbb{M}_j ¹⁹ besteht, die aber nunmehr die Beziehung $z_i^0 \in z_j^1$ wiedergeben. Auch in diesem Fall ist es sinnvoll, das Mengensystem, das die Beziehung explizit ausdrückt, abzubilden.

Die letzte Beziehung der ersten Zeile betrifft das Verhältnis der 0-Zelle zur 2-Zelle. Der Fall 0-Zelle z_i^0 *innerhalb* bzw. *außerhalb* einer gegebenen Zelle z_1^2 kann völlig analog zum Fall 0-Zelle \in 1-Zelle behandelt werden.

Etwas anders gelagert ist dagegen der Fall 0-Zelle z_i^0 ist Element des Randes \dot{s}_k^2 der 2-Zelle z_k^2 . \dot{s}_k^2 besteht nach den Ausführungen aus Kapitel 2 aus $(p - 1)$ -Zellen, im vorliegenden Fall also aus 1-Zellen. Formal kann dies als $\dot{s}_k^2 = \sum_{j=1}^n z_j^1$, mit j als Index für die beteiligten 1-Zellen, geschrieben

¹⁹Man beachte, daß sich das Mengensystem \mathcal{M} ebenso wie die Teilmengen \mathbb{M}_j von denen des vorigen Absatzes unterscheiden. Die Bezeichnung wurde dennoch beibehalten, da eine Verwechslung nicht möglich ist, weil jeweils die beteiligten Elemente z entsprechend ihrer Dimension indiziert sind.

werden. Geht man jetzt davon aus, daß dieser Rand für alle 2-Zellen z_k^2 bekannt ist, dann erhält man daraus mit $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^n \dot{s}_k^2$ das Mengensystem aller Ränder von allen 2-Zellen, wobei der Index k für die k -te 2-Zelle steht. Einige Sätze weiter oben wurde bereits die Beziehung zwischen der 0-Zelle und der 1-Zelle behandelt. Diese Überlegung führte zu dem Ergebnis, daß es genügt, die Beziehung $z_i^0 \in z_j^1$ abzubilden. Setzt man dies als gegeben voraus, dann ist mit der Kenntnis des Mengensystems \mathcal{R} diese Beziehung ebenfalls bekannt. Folglich reduziert sich das Abbilden der Beziehung 0-Zelle und 2-Zelle auf die Fälle: 0-Zelle *innerhalb* von 2-Zelle und die Kenntnis des Mengensystems \mathcal{R} .

6.1.2 Die Beziehungen der 1-Zelle

Von den vier Fällen, die zwei 1-Zellen in Abbildung 47 betreffen, können zwei in einem Satz abgehandelt werden. Es sind dies die Fälle 1-Zelle z_i^1 *liegt über* 1-Zelle z_j^1 und der dazu komplementäre Fall 1-Zelle z_i^1 *liegt nicht über* 1-Zelle z_j^1 . Es genügt dabei, wie oben schon festgestellt, lediglich die Beziehung *liegt über* abzubilden, um beide Fälle exakt wiederzugeben. Die beiden anderen Fälle, die die 1-Zelle betreffen: *berührt* und *schneidet*, müssen demgegenüber noch etwas näher betrachtet werden. Geht man genau von den in der Graphik gegebenen Voraussetzungen aus, dann kann man feststellen, daß diese beiden Fälle mittels einer homöomorphen Abbildung ineinander überführt werden können. Sie sind von daher als topologisch äquivalent anzusehen und bedürfen keiner Unterscheidung. Dies gilt allerdings nur solange, als keine der beteiligten 1-Zellen gleichzeitig auch Rand einer 2-Zelle ist. Dieser Zusammenhang wird weiter unten noch behandelt. Bezüglich zweier 1-Zellen genügt es also, die Beziehungen *berührt* und *liegt über* abzubilden. Legt man den Überlegungen eine q -Zellenzerlegung zugrunde, dann muß lediglich der Fall *liegt über* abgebildet werden.

Die restlichen vier Beziehungen betreffen die Relation 1-Zelle zu 2-Zelle. Auch hier kann, mit der gleichen Argumentation, wie sie bereits bei der 0-Zelle angewendet wurde, auf die Abbildung der 1-Zelle *außerhalb* der 2-Zelle verzichtet werden.

Es verbleiben die Fälle 1-Zelle z_j^1 *schneidet* und *berührt* 2-Zelle z_k^2 . Beiden Beziehungen ist gemeinsam, daß die Schnittmenge zwischen \dot{s}_k^2 und z_j^1 zumindest einen Punkt enthält. Im Fall der Berührung ist dies ein gemeinsamer Punkt, im anderen Fall können es sowohl ein als auch zwei Punkte sein. *Berührt* die 1-Zelle z_j^1 den Rand \dot{s}_k^2 , dann braucht dies nicht abgebildet zu werden, da, vorausgesetzt \dot{s}_k^2 ist bekannt, dieser Fall dem der Berührung zweier 1-Zellen entspricht. Dieser ist aber bereits behandelt. Auch hier werden die Beziehungen durch die q -Zellenzerlegung wesentlich vereinfacht. Denn beide Fälle können über die Existenz gemeinsamer Randpunkte beschrieben werden.

Hat z_j^1 einen gemeinsamen Berührungspunkt mit \dot{s}_k^2 und es liegt nicht die Beziehung *berührt* vor, dann muß ein Randpunkt von z_j^1 *innerhalb* von z_k^2 liegen. Diese Beziehung ist aber auch schon abgebildet. Denn der Rand von z_j^1 ist eine 0-Zelle und die Relation 0-Zelle *innerhalb* 2-Zelle wird nach obigen Ausführungen abgespeichert. Falls zwei gemeinsame Punkte zwischen \dot{s}_k^2 und z_j^1 vorliegen, dann kann dies auf die zweimalige Berührung von z_j^1 mit \dot{s}_k^2 zurückgeführt werden. Diese Beziehung ist folglich äquivalent zur zweimaligen Berührung und braucht trotz unterschiedlicher Bedeutung nicht abgebildet zu werden. In diesem Absatz gilt, wie bereits in den beiden vorangegangenen, daß die Einführung der q -Zellenzerlegung die Beziehungen vereinfacht. Die Beziehung *innerhalb* muß zwar geführt werden, die *Berührung* demgegenüber nicht.

6.1.3 Die Beziehungen der 2-Zelle

Die Beziehung zwischen der 2-Zelle z_i^2 und z_j^2 ist Gegenstand der letzten Erörterung zu Abbildung 47. Auch hier braucht lediglich die Beziehung *innerhalb* abgebildet zu werden, da man die dazu komplementäre daraus ableiten kann.

Die Relation z_i^2 *berührt* z_j^2 kann über den Rand geklärt werden. Da die Ränder \dot{s}_i^2 und \dot{s}_j^2 aus 1-Zellen bestehen, führt dies zu einer Beziehung von 1-Zelle zu 1-Zelle und ist damit bereits mehrfach

diskutiert worden. Der verbleibende Fall, der mit *überlappt* zu bezeichnen ist, wird in Abschnitt 7.1.3 näher diskutiert.

6.2 Allgemeine topologische Beziehungen im \mathbb{R}^3

In diesem Abschnitt geht es darum, die von [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985] erarbeitete Graphik (siehe Abbildung 47) um die Beziehungen der 3-Zelle zu erweitern. Faßt man diese Graphik als Matrix auf, dann ergibt sich die 3-Zelle mit ihren topologischen Relationen zu den anderen x -Zellen ($x = 0,1,2,3$) durch einfache *Ränderung* der bestehenden Relationen. Es genügt dabei, lediglich die letzte Spalte zu betrachten, da sich die topologischen Verhältnisse symmetrisch zueinander verhalten. Abbildung 48 gibt eine Zusammenfassung dieser Beziehungen.

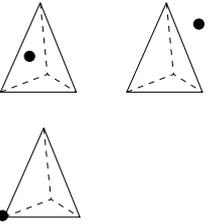
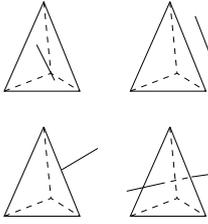
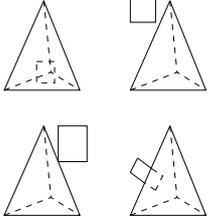
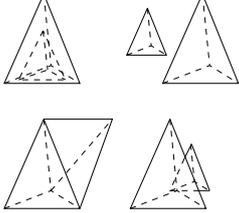
	3-Zelle (graphisch)	3-Zelle (alphanumerisch)
0-Zelle		innerhalb außerhalb berührt
1-Zelle		innerhalb außerhalb berührt durchdringt
2-Zelle		innerhalb außerhalb berührt durchdringt
3-Zelle		enthält wird enthalten disjunkt berührt durchdringt

Abbildung 48: Die topologischen Relationen der 3-Zelle im \mathbb{R}^3

Bevor die einzelnen Relationen im Detail erörtert werden, gilt es, vorweg die verschiedenen Begriffe aus der letzten Spalte von Abbildung 48 näher zu erläutern. Die beiden einfachsten der aufgeführten Beziehungen, die Relation *innerhalb* und *außerhalb*, sind selbsterklärend und bedürfen von daher keiner weiteren Erläuterung. Aus diesem Grund wird in der folgenden detaillierten Untersuchung auch

nicht gesondert auf sie eingegangen. Ähnlich verhält es sich mit der Beziehung *durchdringt*, obwohl hier bereits verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. So ist es beispielsweise durchaus etwas anderes, ob eine 1-Zelle ein Gebiet in dem Sinne kreuzt, daß Anfangs- und Endpunkt außerhalb liegen, oder ob einer der beiden Punkte innerhalb liegt. Diese Fragen werden im Detail weiter unten diskutiert. Als sehr komplex kann sich die Relation *berührt* erweisen. Im Falle der Berührung einer 2-Zelle mit einer 3-Zelle können dabei beispielsweise drei verschiedene Beziehungen gemeint sein: die Berührung in einem gemeinsamen Punkt, die Berührung in einer gemeinsamen Linie oder die Berührung der 2-Zelle als Ganzes, wodurch die 2-Zelle zum Rand \dot{s} der 3-Zelle würde. Jede der drei aufgeführten Beziehungen bezeichnet etwas völlig anderes, auch sie werden weiter unten näher diskutiert. Darüber hinaus sei an dieser Stelle noch auf die Identität zweier z^p -Zellen hingewiesen. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 7.1.3 behandelt.

In den folgenden Absätzen sollen, analog zu den Ausführungen im \mathbb{R}^2 , die einzelnen Beziehungen näher betrachtet werden. Es geht dabei vor allem darum, eine möglichst zeit- und ressourcenschonende Lösung zur Abbildung dieser Relationen in ein GIS zu finden.

6.2.1 Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle zur 3-Zelle

Von oben beginnend steht als erste Relation die der 0-Zelle zur 3-Zelle. Diese Abbildung kann in Anlehnung an die im vorangegangenen Abschnitt getroffenen Feststellungen erfolgen. Die Menge \mathbb{M} bezeichne dabei die Menge aller 0-Zellen z_i^0 , die innerhalb einer 3-Zelle z_i^3 liegt. Ist diese Menge bekannt, dann ist auch deren Komplement \mathbb{M}^c bekannt, das die Menge aller *außerhalb* liegenden Punkte bezeichnet. Daraus läßt sich weiterhin das Mengensystem $\mathcal{M}_i = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{M}_i$ für alle Punkte, die *innerhalb* von 3-Zellen z_i liegen, angeben. Unter normalen Umständen ist die Menge \mathbb{M} der Punkte, die *innerhalb* einer 3-Zelle liegen, aber kleiner²⁰ als deren Komplement. Es macht damit also Sinn, die Menge \mathbb{M} abzubilden.

Die Beziehung *berührt* braucht nicht abgebildet zu werden, wie die folgenden Zeilen beweisen werden. Ist der Rand \dot{s}_i^3 der 3-Zelle bekannt, und das soll im folgenden zunächst ohne Angabe der Absicht als gegeben vorausgesetzt werden, dann sind alle 2-Zellen z_k^2 bekannt, die diesen bilden. Die Menge dieser 2-Zellen wird mit \mathbb{M}^2 bezeichnet. Jede 2-Zelle wiederum bildet die Relation Punkt *innerhalb* ab. Darüber hinaus wird die Information über den Rand der 2-Zelle ebenfalls bei diesen geführt (siehe Abschnitt 6.1). Damit kann ein berührender Punkt auch dann gefunden werden, wenn er Teil des Randes \dot{s}_k^2 der 2-Zelle ist. Diese Überlegung kann vollkommen analog auf den Rand der 1-Zelle weitergeführt werden. Der Zusammenhang läßt sich formal wie folgt ausdrücken: $z_i^0 \in \dot{s}_i^3$ der 3-Zelle z_i^3 kann zurückgeführt werden auf den Fall $z_i^0 \in \mathbb{M}^2$ oder $z_i^0 \in \mathbb{M}^1$ oder $z_i^0 \in \mathbb{M}^0$, wobei \mathbb{M}^1 die Menge der Ränder der Elemente von \mathbb{M}^2 bezeichnet und \mathbb{M}^0 die der Ränder von \mathbb{M}^1 . Dies gilt nur unter der Voraussetzung, daß der Rand jeder p -Zelle, der aus $p - 1$ -Zellen besteht, bekannt ist. Unter dieser Annahme ist es folglich überflüssig, die Beziehung $z_i^0 \in \dot{s}_i^3$ explizit abzubilden.

6.2.2 Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle zur 3-Zelle

Neben den Beziehungen *innerhalb* und *außerhalb*, auf die in diesem Abschnitt nicht mehr eingegangen wird, ist in diesem Zusammenhang vor allem der Fall *berührt* als interessant anzusehen. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, daß man hinsichtlich der Beziehung *berührt* eine Fallunterscheidung treffen muß. Es sind hier zunächst die Fälle *berührt* in einem Punkt und *berührt* als Ganzes bzw. ist Teil des Randes voneinander zu trennen. Wobei der erste Fall nochmals bezüglich der Berührung mit einer 2-Zelle, einer 1-Zelle oder einer 0-Zelle zu unterscheiden ist ebenso wie der zweite Fall hinsichtlich der Beziehung *innerhalb* einer 2-Zelle und *liegt über* 1-Zelle zu differenzieren ist. Es gilt somit fünf unterschiedliche Arten der Berührung einer 1-Zelle mit einer 3-Zelle zu erörtern.

²⁰Siehe Abschnitt 6.1.1.

Als erstes wird die Berührung der 1-Zelle mit der 3-Zelle in einem Punkt diskutiert. Wie oben bereits festgestellt, muß dieser Punkt auf dem Rand \dot{s}_l^3 der 1-ten 3-Zelle liegen. Dieser setzt sich aber aus n 2-Zellen zusammen. Der Punkt kann also Element einer dieser 2-Zellen sein. Trifft das zu, dann ist dies mit der Beziehung 2-Zelle *enthält* 0-Zelle aufgefangen (siehe Abschnitt 6.1). Mithin kann es aber sein, daß die Berührung nicht an der 2-Zelle stattfindet, sondern an deren Rand \dot{s}_k^2 , der von 1-Zellen gebildet wird. Aber auch dieser Fall wurde in Abschnitt 6.1 bereits behandelt, denn dort wurde die Relation 1-Zelle z_j^1 *enthält* 0-Zelle z_i^0 schon berücksichtigt bzw. ist u. U. aufgrund der q-Zellenzerlegung gar nicht möglich. Die 1-Zelle kann zuletzt auch noch Element des Randes \dot{s}_j^1 der 1-Zelle sein. Nach Voraussetzung wird dieser aber bei der betroffenen 1-Zelle abgebildet. D.h. auch diese Beziehung braucht nicht bei der 3-Zelle geführt zu werden. Zusammenfassend kann also gesagt werden: ist der Rand \dot{s}_l^3 einer 3-Zelle z_l^3 bekannt, dann ist mit den vorangegangenen Ausführungen gezeigt, daß die Abbildung *berührt* in einem Punkt nicht bei der betroffenen 3-Zelle geführt werden muß.

Im folgenden wird die Berührung der 1-Zelle z_j^1 mit der 3-Zelle z_l^3 diskutiert, wobei jetzt angenommen wird, daß die 1-Zelle vollständig *innerhalb* einer randbildenden 2-Zelle z_j^2 liegt²¹. Wenn nun, wie oben bereits vorausgesetzt, der Rand \dot{s}_l^3 der Zelle z_l^3 bekannt ist, dann reduziert sich das gesamte Problem auf den Fall: $z_j^1 \in z_k^2$, der bereits in Abschnitt 6.1 ausführlich diskutiert wurde.

Der letzte Fall, den es zu erörtern gilt, betrifft die Relation 1-Zelle z_j^1 *liegt über* 1-Zelle z_m^1 , die zum Rand \dot{s}_l^3 von z_l^3 gehört, vor dem Hintergrund der Fragestellung bzw. des Sachverhalts, daß die 1-Zelle z_j^1 die 3-Zelle z_l^3 vollständig berührt. Dieser Fragestellung wird in Abschnitt 7.1.3 näher nachgegangen.

6.2.3 Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle zur 3-Zelle

Bei der Betrachtung der in diesem Abschnitt behandelten Beziehungen werden die topologische Eigenschaften *innerhalb* und *außerhalb* ebenfalls nicht mehr behandelt, da sie bereits weiter oben ausführlich dargestellt wurden und sich in diesem Zusammenhang kein neuer Gesichtspunkt ergibt. Statt dessen wird gleich auf die wesentlichen Aspekte eingegangen. Es wird von vornherein eine q-Zellenzerlegung vorausgesetzt, wodurch die *Durchdringung* ausgeschlossen ist.

Zunächst gehört die Relation *berührt* dazu. Auch hier gilt es, wie dies schon in anderen Abschnitten nötig war, mehrere Fälle voneinander zu unterscheiden:

- *berührt* in einem Punkt,
- *berührt* mit einer Kante und
- *berührt* vollständig, d. h. ist Teil des Randes der betrachteten 3-Zelle.

Die Berührung in einem Punkt ist wiederum in die Fälle

- Punkt \in 0-Zelle,
- Punkt \in 1-Zelle und
- Punkt \in 2-Zelle

zu zerlegen. Ebenso ist der Fall *berührt* mit einer Seite in

- Seite *liegt innerhalb* einer 2-Zelle und
- Seite ist Teil des Randes einer 2-Zelle

²¹Diese Forderung wird später nochmals genauer diskutiert.

aufzuteilen.

Als erstes wird der Fall *berührt* in einem Punkt behandelt. Da der Berührungspunkt z_i^0 Element des Randes \dot{s}_i^3 der 3-Zelle z_i^3 ist, ist er damit zwangsläufig auch Element des Randes \dot{s}_i^3 , der sich wie folgt zusammensetzt: $\dot{s}_i^3 = \bigcup_{k=1}^n z_k^2$. Diese Problemstellung wurde aber bereits im vorangegangenen Abschnitt diskutiert.

Die Fragestellung, ob eine 2-Zelle eine 3-Zelle mit einer Seite berührt, kann über einen Analogieschluß ebenfalls auf das Problem 1-Zelle $z_j^1 \in z_k^2$ zurückgeführt werden. Auch dies wurde bereits in Abschnitt 6.2.2 geklärt.

Als letzter Punkt bleibt die Frage nach der vollständigen Berührung der betrachteten 2-Zelle z_k^2 mit der 3-Zelle z_l^3 . Dies kann nur bedeuten, daß z_k^2 vollständig zum Rand \dot{s}_l^3 von z_l^3 gehört. Die Kenntnis dieses Randes wird aber als bekannt vorausgesetzt, womit auch diese Beziehung geklärt wäre. Dies gilt auch für den Sonderfall, der in Abbildung 49 dargestellt ist. Es handelt sich dabei um eine 2-Zelle $z_{k_1}^2$, die vollständig Teil des Randes \dot{s}_l^3 von z_l^3 ist. Gleichzeitig liegt sie aber auch vollständig *innerhalb* einer randbildenden 2-Zelle z_k^2 von \dot{s}_l^3 . Soll die Modellierung in Übereinstimmung mit den Ausführungen auf Seite 19 erfolgen, dann muß $z_{k_1}^2$ als eigene q-Zelle abgebildet werden. Diesem Sachverhalt wird in Abschnitt 7.1.3 noch weiter nachgegangen.

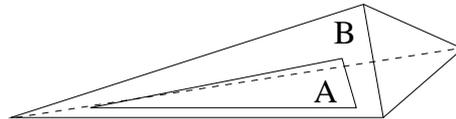


Abbildung 49: Die Berührung der 2-Zelle A mit der 3-Zelle B

6.2.4 Die topologischen Beziehungen der 3-Zelle zur 3-Zelle

Als letzte Beziehung wird die Relation zweier Körper untereinander betrachtet. Diese Beziehung läßt sich nach Abbildung 48 in die folgenden Relationen einteilen:

- Körper A enthält Körper B.
- Die dazu inverse Beziehung, Körper B ist in Körper A enthalten.
- Die beiden Körper haben keine gemeinsamen Elemente, sind also disjunkt.
- Die beiden Körper berühren sich, wobei die Art der Berührung in die Fälle, mit einem Punkt, mit mit einer Linie und mit einer Fläche zu unterscheiden ist.
- Die letzte Relation behandelt schließlich die gegenseitige Durchdringung der beiden Körper.

Die ersten vier der insgesamt fünf aufgeführten Punkte wurden in analoger Weise bereits in den früheren Abschnitten behandelt. Lediglich der letzte, der Fall des gegenseitigen Durchdringens, wirft neue Gesichtspunkte auf. Da die Erörterung dieser Beziehung ohne die Quasi-Zellenzerlegung nicht auskommt, sei auf den Abschnitt 7.1.3 hingewiesen, wo auf die spezielle Fragestellung näher eingegangen wird.

7 Entwurf eines Modells zur Integration topologischer Strukturen

7.1 Vorüberlegungen

7.1.1 Zielvorgaben

In diesem Kapitel wird ein Modell zur Integration topologischer Eigenschaften vorgestellt. Sämtliche Ausführungen gründen auf den bisher gemachten Überlegungen. Zuvor gilt es allerdings die Zielvorgaben klar zu definieren.

Um die Vorteile einer topologisch ausgereiften Datenstruktur nutzen zu können, sind deren besondere Erfordernisse im Zusammenhang mit GIS zu erörtern. Eine einfache Knoten- und Kantenstruktur wird dabei den heutigen Anforderungen sicherlich nicht mehr gerecht, vielmehr müssen ebenso die vielfältigen Beziehungen, die beispielsweise Flächen untereinander haben, abgebildet werden. Im Hinblick auf die 3-D-Funktionalität moderner GIS (siehe dazu auch [ULMER/SESTER/FRITSCH 1997]) sind dahingehend ebenfalls die entsprechenden topologischen Beziehungen zu berücksichtigen.

Geht man davon aus, daß topologische Strukturen vor allem dazu dienen, einen Datenbestand auf *Vollständigkeit* und *Plausibilität* hin zu überprüfen, um anschließend die zugrundeliegenden topologischen Beziehungen zu *analysieren*, dann ergeben sich damit die folgenden allgemeinen Forderungen:

- Die Struktur muß das Knoten/Kantenmodell und
- sie muß die vielfältigen Beziehungen zwischen Flächen (im \mathbb{R}^2) und Körpern (zusätzlich im \mathbb{R}^3) unterstützen.

Zur Lösung der Anforderungen stehen prinzipiell zwei verschiedene Ansätze zur Auswahl. Der erste verknüpft topologische und geometrische²² Eigenschaften bzw. leitet topologische Verhältnisse aus geometrischen ab (die Geometrie als Träger der Topologie), der andere trennt klar zwischen Topologie und Geometrie. Als Vertreter der ersten Gruppe kann beispielsweise die DIME-Struktur herangezogen werden, da hier die Knoten keine Knoten im Sinne der Graphentheorie sind, sondern vielmehr Knickpunkte von Polygonen, deren Existenz von der Geometrie herrührt (siehe Abbildung 20). Ein Gegenbeispiel dazu wäre die ATKIS-Struktur, die zumindest im Entwurf klar zwischen topologischen und geometrischen Elementen unterscheidet (siehe Abbildung 1).

7.1.2 Das Objekt und seine topologischen Eigenschaften

Wie in der Einleitung in Abschnitt 1.3 bereits angedeutet wurde, geht es in diesem Kapitel um den Entwurf eines Modells zur Abbildung topologischer Beziehungen in GIS. Die Darstellung wird dabei auf der Grundlage der OMT-Syntax erfolgen und soweit ausgearbeitet, daß eine Implementierung direkt daraus abgeleitet werden kann. Der Entwurf wird auf der Basis der in dieser Arbeit aufgeführten mathematischen Grundlagen erfolgen, insbesondere wird er sich an die in Abschnitt 2.10 getroffenen Ausführungen anlehnen. Es wird dabei versucht, möglichst allgemein zu bleiben, was dazu führt, daß einige Ausführungen sehr komplex werden. Dies erweckt beim Leser unter Umständen den Eindruck, derartige Strukturen seien zu kompliziert und damit unhandlich. Dem ist aber nicht so, vielmehr sind die hier unterbreiteten Vorschläge als eine Art Obermenge aller topologischen Fragestellungen zu sehen, von denen im Einzelfall immer nur eine Untermenge tatsächlich implementiert wird, da viele der erarbeiteten Beziehungen nicht benötigt werden. Die Implementierung ist damit direkt mit der Problemstellung korreliert, die mit dem GIS gelöst werden soll. Die Veröffentlichungen von [PETERSEN/MAUS 1996], wo es u. a. um Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Flächen geht, und die von [BARTELME 1991], [CLAUSSEN 1996] oder auch [TIMPF/EGENHOFER 1997], wo es vornehmlich um Verkehrswege

²²Hier ist die Geometrie im engeren Sinne gemeint.

und Routenplanung geht, verdeutlichen den Unterschied der topologischen Fragestellungen, die den verschiedenen Anwendungen innewohnt.

Generell umfaßt das Datenmodell nicht nur den statischen Teil der Fragestellung, sondern behandelt auch die dynamische Seite [BRODIE/MYLOPOULOS/SCHMIDT 1984, S. 19ff]. Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß die Relationen der Objekte untereinander mit modelliert und diskutiert werden. Alle Details zur Implementierung bleiben aber ausgeklammert und werden damit nicht behandelt.

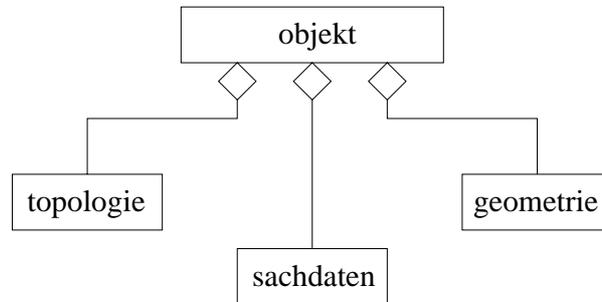


Abbildung 50: Das Objekt als Aggregat verschiedener Eigenschaften

Geht man von dieser Prämisse aus, dann bietet sich eine Modellierung topologischer Beziehungen über die Vererbung an. An einem Beispiel soll dies kurz diskutiert werden. Ausgehend vom *fachlichen Objekt*, das kann beispielsweise ein Flurstück sein, können die topologischen Strukturen gewissermaßen über die Absicht, die mit ihrer Hilfe verfolgt wird, vererbt werden. Dies scheint auf den ersten Blick offensichtlich, kann aber im Einzelfall zu durchaus unterschiedlichen Implementierungen führen. Am Beispiel der Flurstücke kann dies näher verdeutlicht werden. Die geometrische Struktur des Flurstücks legt zunächst eine Modellierung als Fläche bzw. als geschlossenes Polygon nahe. Diese Vorgehensweise ist aber dann unzweckmäßig, wenn lediglich Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Flurstücken untereinander betrachtet werden sollen. Da es sich bei Flurstücken um eine ebene Pflasterung handelt, ist die Überlappung zweier Flurstücke ausgeschlossen. Ebenso läßt ihre Berührung auf eine direkte Nachbarschaftsbeziehung schließen (dies entspricht dem Fall *trifft* in Abbildung 34). Demnach genügt es in diesem speziellen Fall das Flurstück als Punkt (also als 0-Zelle) und alle Beziehungen zu Nachbarflurstücken als Kanten zu modellieren, was schließlich dem Modell eines sogar planaren ungerichteten Graphen entspricht²³. An diesem Beispiel zeigt sich deutlich, daß zumindest bei diesem Beispiel die topologische Sicht des Graphen der geometrischen überlegen ist.

Da nach dem Satz von Brouwer (siehe S. 16) keine topologischen Abbildungen von der Dimension n in die Dimension $n - 1$ möglich sind, müssen topologische Beziehungen für jede Dimension gesondert beschrieben werden. In den folgenden Abschnitten wird daher die Dimension der Objekte eine wichtige Rolle spielen.

Bevor mit der eigentlichen Entwurfsarbeit begonnen wird, muß noch auf einen Punkt besonders hingewiesen werden. Wenn in den nachstehenden Abschnitten beispielsweise von 0-Zellen-Objekten die Rede ist, dann sind, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, immer Objekte mit der Eigenschaft einer 0-Zelle gemeint. Das bedeutet aber im Umkehrschluß nicht, daß das Objekt damit zwangsläufig punktförmig ist, wie weiter oben bereits gezeigt wurde. Die Idee, die den folgenden Ausführungen zugrunde liegt, fußt auf der Vererbung der topologischen Eigenschaften oder Beziehungen der Objekte, d. h. ein bestimmtes Objekt wird als topologische 0- bis 3-Zelle modelliert unabhängig von den übrigen Daten (siehe Abbildung 50) und der fachlichen Bedeutung. Die Zellen selbst sind in diesem Kapitel aber immer als Elemente einer q-Zellenzerlegung zu sehen.

Quasisprachlich kann der Zusammenhang auch als *objekt is a X-cell* (wobei $X \in \{0,1,2,3\}$) ausgedrückt werden. Das Objekt erhält damit neben den Sachdaten und der Geometrie (siehe Abbildung 50)

²³Der umgekehrte Fall, die Modellierung einer t -Zelle als $(t + 1)$ -Zelle, macht keinen Sinn.

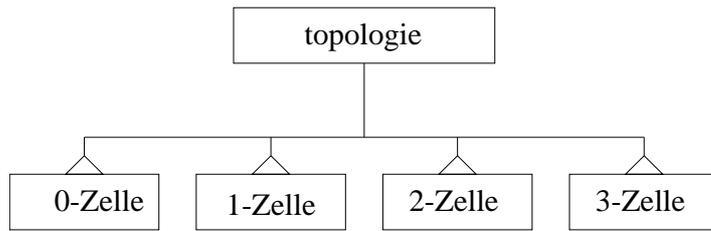


Abbildung 51: Die topologische Modellierung des Objekts

zusätzlich noch topologische Beziehungen (siehe Abbildung 51) Die topologischen Beziehungen der einzelnen Zellen müssen dabei noch geklärt werden. Dies ist Gegenstand der nachstehenden Abschnitte.

7.1.3 Welche topologischen Beziehungen werden abgebildet?

Die Idee, die dem Konzept der hier vorgestellten Arbeit zugrunde liegt, basiert auf einer Mischung von topologischen Invarianten und der Theorie der Zellenkomplexe. Es wird dabei ausschließlich auf die Verallgemeinerung der Quasi-Zellenkomplexe (siehe Abschnitt 2.10) zurückgegriffen. Die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1ff fließen hier mit ein, zum Teil werden sie aber auch aus einem etwas anderen Blickwinkel neu gedeutet. Darüber hinaus tritt erstmals das eigentliche Objekt, um dessen topologische Beziehung es letztlich geht, in den Vordergrund. In diesem Zusammenhang muß nochmals an die Definition einer Quasi-Zellenzerlegung erinnert werden. Dort wird explizit darauf abgehoben, daß die Zerlegung im Unterraum \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 vorgenommen wird, d.h. die verschiedenen Zellen z_i^t sind im Unterraum u. U. nicht zu unterscheiden (womöglich noch nicht einmal unter Hinzuziehung der Geometrie), dennoch sind sie einem Objekt zugeordnet und damit über die Sachdaten eindeutig identifizierbar (siehe dazu die Ausführungen der Abschnitte 5.1.3ff).

Wie in Kapitel 2 bereits erörtert, besteht der Rand einer p -Zelle aus $(p - 1)$ -Zellen. Ist der Rand jeder p -Zelle bekannt, so kann daraus die Nachbarschaft zweier p -Zellen abgeleitet werden. Diese Nachbarschaftsbeziehung kann ausgehend von der Dimension p bis zur Dimension 0 der 0-Zelle erfolgen, deren Rand nach Definition \emptyset ist. Man kann also von einem rekursiven Aufbau der Nachbarschaftsbeziehung sprechen, wobei das Abbruchkriterium die 0-Zelle ist. Demnach ist die Kenntnis des Randes jeder p -Zelle von Vorteil, da damit zum einen die Nachbarschaft und zum anderen die Randpunkteigenschaft abgebildet wird. Zieht man die Bedingung Q_3 aus Abschnitt 2.10 hinzu, dann kann damit auch die *Schnittpunktstreue* erfaßt werden.

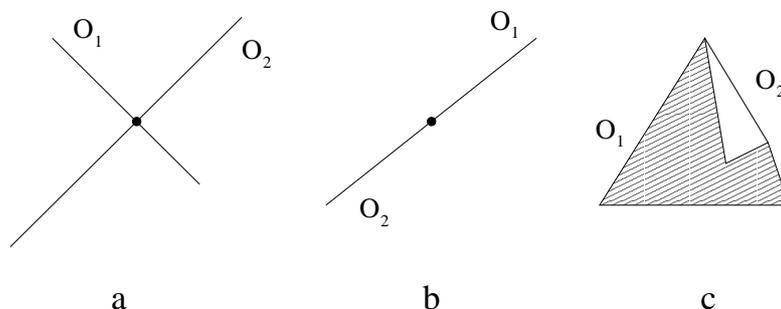


Abbildung 52: Beispiele zur *Schnittpunktstreue* und zur *Nachbarschaft*

Die drei Beispiele in Abbildung 52 machen die verschiedenen Arten von *Nachbarschaft* deutlich. Fall (a) zeigt die einfache Kreuzung, die daran zu erkennen ist, daß zwei Objekte bestehend aus mehreren

1-Zellen einen gemeinsamen Randpunkt haben. Das nächste Beispiel (b) zeigt die reine *Nachbarschaft*, die durch den gemeinsamen Rand zweier 1-Zellen, die jeweils zu verschiedenen Objekten gehören, zum Ausdruck kommt. Der letzte Fall macht die *Nachbarschaft* zweier 2-Zellen deutlich. Dieser Fall ist von der *Inklusion* deutlich zu unterscheiden, da im vorliegenden Fall nicht der gesamte Rand von O_2 auch zu O_1 gehört.

Ein weiterer Punkt, der vorab geklärt werden kann, betrifft die Existenz bzw. die Nichtexistenz bestimmter Relationen. Beide Beziehungen sind wichtig und aussagekräftig, es muß aber nur eine von beiden abgebildet werden, da sich die andere über das Komplement ergibt. So ist beispielsweise die Beziehung 0-Zelle z_i^0 liegt *innerhalb* 2-Zelle z_j^2 (zugelassen nach Axiom Q_3 aus Abschnitt 2.10) und die dazu disjunkte Beziehung z_i^0 liegt *außerhalb* 2-Zelle z_j^2 durch die Abbildung einer Beziehung vollständig beschrieben. Dies gilt ebenso für die Menge \mathbb{M}_0 aller 0-Zellen, die *innerhalb* und die Menge \mathbb{M}_0^c aller 0-Zellen, die *außerhalb* einer bestimmten 2-Zelle z_i^j liegen. Die nächste Verallgemeinerung das Mengensystem \mathcal{M}_0 aller 0-Zellen betreffend, die *innerhalb* der Menge aller 2-Zellen liegen und die Menge aller 0-Zellen betreffend, die *außerhalb* der Menge aller 2-Zellen liegen, gilt ebenfalls. Da nun die Menge \mathbb{M}_0 im allgemeinen kleiner sein wird als die Menge \mathbb{M}_0^c , ist es sinnvoll, lediglich \mathbb{M}_0 abzubilden und \mathbb{M}_0^c daraus abzuleiten. Diese Ausführungen gelten für alle Beziehungen zwischen r -Zellen, die *innerhalb/außerhalb* von s -Zellen liegen, wobei $r < s$ sein muß. Für den Fall $r \geq s$ sind die genannten Relationen nicht definiert bzw. widersprechen den Forderungen $Q_1 - Q_4$.

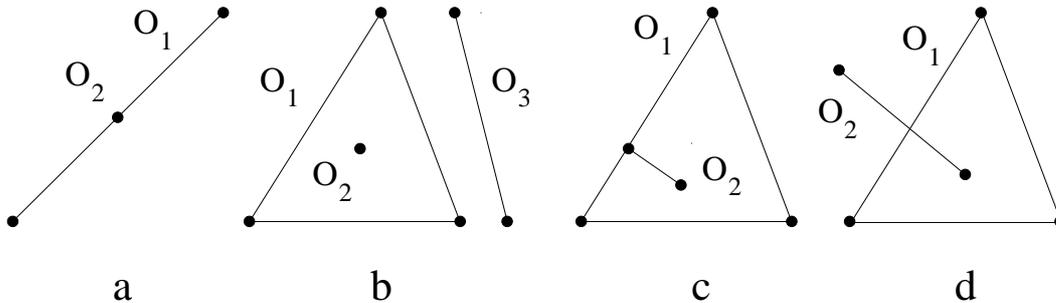


Abbildung 53: Beispiele zur Beziehung *innen/außen*

Abbildung 53 verdeutlicht die Ausführungen an einigen Beispielen. So ist unter (a) der Fall 0-Zelle O_2 liegt *innerhalb* von O_1 . Die Tatsache, daß die 1-Zelle homöomorph zum offenen Intervall $]0, 1[$ ist und die 0-Zelle dem Schaubild zufolge innerhalb dieses Intervalls liegen muß, macht dieses Beispiel besonders anschaulich. Unter (b) wird die Situation O_2 *innerhalb* und O_3 *außerhalb* beschrieben, wobei O_2 eine 0-Zelle und O_3 eine 1-Zelle ist. Fall (c) demonstriert die Situation O_2 *innerhalb* O_1 , wobei O_1 und O_2 einen gemeinsamen Randpunkt haben.

Das letzte der vier Beispiele zeigt eine unzulässige Quasi-Zellenzerlegung, da sich der Rand von O_1 , der aus 1-Zellen besteht, und O_2 schneiden. Dies ist ein Verstoß gegen Forderung Q_3 aus Abschnitt 2.10, wonach der Schnitt zwischen Zellen gleicher Dimension entweder leer oder eine der beteiligten Zellen sein muß.

Das bisher Gesagte läßt sich auch als Beziehung der t -Zelle z_i^t zu den Mengen \mathbb{M}^s , bestehend aus s -Zellen, ausdrücken (mit $0 \leq s, t \leq p$, wobei $p = 2, 3$ je nach der Dimension des Raumes, in dem man sich bewegt)²⁴, wobei z_i^t zu jeweils einer Teilmenge von \mathbb{M}^s für festes s in einer bestimmten topologischen Beziehung steht. Diese Beziehungen können systematisiert werden und für t gelten folgende Feststellungen:

- Die Beziehung *q-identisch* kommt im \mathbb{R}^p für jede t -Zelle als Mengenbeziehung genau einmal vor (z. B. 0-Zelle ist *q-identisch* zu n weiteren 0-Zellen).

²⁴Die maximale Dimension des zu betrachtenden Raumes kann sich dabei noch ändern (siehe dazu Kapitel 8).

- *Rand von* kommt für $t < p$ ebenfalls für jede t -Zelle höchstens einmal vor.
- *Hat Rand*, taucht als Mengenbeziehung für alle t -Zellen genau einmal auf.
- Die Relation t -Zelle *enthält* s -Zelle ($s < t, t > 0$) kommt für die t -Zelle t -mal vor.
- Die Beziehung *innerhalb* dagegen kommt $(p - t)$ -mal vor.

Aus der obigen Zusammenfassung kann folgende Formel für den Allgemeinfall abgeleitet werden:

$$b = 3 + t + p - t = 3 + p \tag{7-11}$$

An dieser Formel ist bemerkenswert, daß sie unabhängig von der Dimension der betrachteten Zelle z_i^p ist. Die Beziehungen sind allein abhängig von der Dimension des Raumes. Damit lassen sich beispielweise für $p = 2$ insgesamt 5 Mengenbeziehungen finden, die es abzubilden gilt. Auf dieser Basis können die topologischen Beziehungen auf beliebige Dimensionen erweitert werden, wobei es noch zu klären gilt, ob dies für $p > 3$ Sinn macht.

Ein interessanter Gesichtspunkt zu dieser Thematik ergibt sich aus der Fragestellung, ob ein Objekt unterschiedliche topologische Eigenschaften haben kann. Dies würde bedeuten, daß ein Objekt gleichzeitig als r -Zelle und als $(r + s)$ -Zelle ($0 \leq r, s \leq p$) modelliert sein kann. Dies ist grundsätzlich zu bejahen, wobei dahingestellt bleibt, in welchen Fällen dies sinnvoll ist. Allerdings ist es durchaus einzusehen, daß ein Objekt in verschiedenen Kontexten unterschiedliche topologische Beziehungen besitzt. Auch dazu kann das schon etwas strapazierte Beispiel des Flurstücks mit seinen Modellierungsmöglichkeiten herangezogen werden. Wie schon an früherer Stelle ausgeführt, gibt es Fälle, in denen es sinnvoll ist, das Flurstück als 0-Zelle zu modellieren. Dies ist beispielsweise dann interessant, wenn es nur darum geht, die Nachbarschaftsbeziehungen abzubilden (vollkommen analog dazu ist auch die Modellierung eines Siedlungsgebietes einmal als Fläche und als Verkehrsknoten). Wesentlich komplexer sind demgegenüber die topologischen Beziehungen bei der Modellierung als 2-Zelle, die die Obermenge zum ersten Modellansatz darstellt. Durch die unterschiedliche Modellierung wird die Art der Analyse nachhaltig beeinflusst, denn ein einfacheres Modell bringt völlig andere Analysemöglichkeiten mit sich. Aber genau dieser Effekt kann u. U. erwünscht sein.

7.2 Der Entwurf von Klassen für den \mathbb{R}^2

7.2.1 Der Entwurf topologischer Objektklassen für 0-Zellen

Für 0-Zellen, es handelt sich dabei zumeist um punktförmige Objekte, wie beispielsweise Polygonpunkte, Hydranten, Verkehrsknoten aber unter Umständen auch um Flächen, die lediglich als Punkt modelliert werden, wie z. B. Siedlungsgebiete, sind folgende topologische Beziehungen von besonderer Bedeutung (siehe Abbildung 54):

- Die 0-Zelle ist q -identisch zu n anderen 0-Zellen.
- Sie ist Anfangs- oder Endpunkt einer 1-Zelle.
- Darüber hinaus kann sie sich innerhalb einer 1- oder einer 2-Zelle befinden.

Bei sämtlichen Beziehungen wird von einer $1 : m$ -Beziehung ausgegangen, d. h. ein Punkt kann gleichzeitig auf mehreren Geraden liegen oder er kann Anfangspunkt mehrerer Geraden sein usw. In diesem Zusammenhang gilt es, auch die Bedeutung der Punkte zu klären, die Element einer 1-Zelle sind, zumal die Punktmengen, die die 1-Zelle ausmachen, laut Definition unendlich ist. In Abbildung 55 sind sie als 0-Zellen, die sich *innerhalb* einer 1-Zelle befinden, dargestellt, wobei der Terminus *innerhalb* als Ersatz für die Bezeichnung *ist Element von* gewählt wurde. Gemeint sind hier aber tatsächlich nur solche

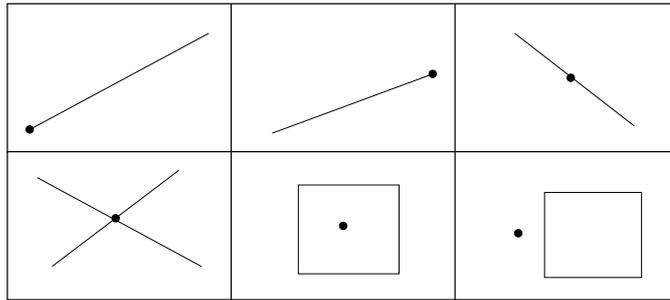


Abbildung 54: Exemparische Darstellung der Beziehung 0-Zelle zur 1- bzw. 2-Zelle

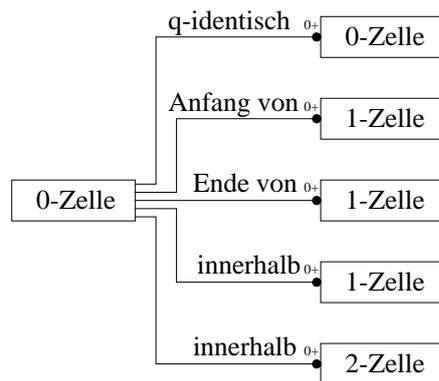


Abbildung 55: Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle

Punkte, denen von der Anwendungsseite her besondere Bedeutung zukommt. Als Beispiel dafür kann der topographische Punkt genannt werden, der weder Anfangs- noch Endpunkt einer Bruchkante ist, und dem somit nur interpolierende Bedeutung zukommt. Dennoch hat der Anwender im allgemeinen aus den verschiedensten Gründen ein starkes Interesse, derartige Punkte festzuhalten. Es bleibt zu klären, wie diese Beziehungen modelliert werden können. Dies soll in den folgenden Graphiken mit Hilfe der OMT erläutert werden (Abbildung 55).

Nach 7-11 müssen hier fünf Beziehungen stehen, was auf den ersten Blick auch so zu sein scheint. Sieht man sich die Beziehungen etwas genauer an, dann erkennt man, daß die Relation *hat Rand* nicht auftaucht. Dies hängt mit den in Abschnitt 2.9 getroffenen Definitionen zusammen. Danach ist der Rand einer 0-Zelle leer und braucht somit nicht abgebildet zu werden. Damit hat man aber eine Beziehung zuviel. Dies hängt mit einer weiteren Besonderheit der 0-Zelle zusammen, die ihre Randeigenschaft betrifft. Prinzipiell müßte zwischen der Eigenschaft *Anfang von* und *Ende von* (siehe Abbildung 55) nicht unterschieden werden, da die 0-Zelle in beiden Fällen als Rand betrachtet werden kann. Folglich liegt die Relation *ist Rand von* (siehe beispielsweise Abbildung 57) auf der Hand. Von dieser Modellierung wurde aus mehreren Gründen abgesehen. Der Hauptgrund betrifft das Knoten-/Kantenmodell. Denn in der Praxis treten häufig sogenannte gerichtete Graphen auf (z. B. in Anwendungen, die im Zusammenhang mit Verkehr stehen). Derartige Graphen können aber nur modelliert werden, wenn ein Umlauf definiert ist, der wiederum von der Numerierung der Knoten (bzw. der q -Ketten) abhängt. Dies wird dadurch erreicht, daß nach diesem Ansatz zwischen Anfangs- und Endknoten unterschieden wird. Ist auf dieser Ebene ein Umlauf definiert, hat auch die daraus abgeleitete 1-Zelle einen entsprechenden Umlaufsinn. Dieser Modellierungsansatz weicht beispielsweise von dem der 2-Zelle ab, wo lediglich die reine Randpunkteigenschaft festgehalten wird.

Faßt man die bisherigen Überlegungen zusammen, dann stellt man fest, daß auf eine Beziehung verzichtet wird, da sie keine verwertbare Information speichern würde und dafür eine zweite in zwei

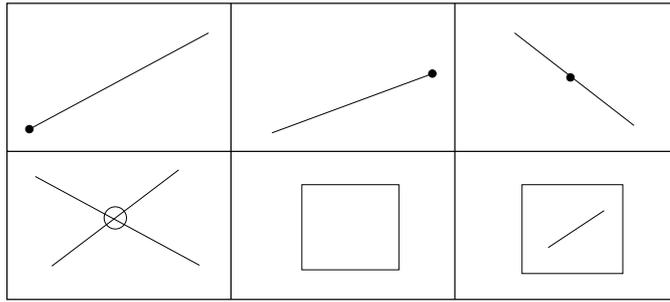


Abbildung 56: Exemplarische Darstellung der Beziehungen 1-Zelle zur 0-, 1-, 2-Zelle

Relationen zerlegt wurde. In der Summe kommt man damit auf die in 7-11 geforderte Anzahl von Beziehungen.

7.2.2 Die Modellierung von 1-Zellen

Typische Vertreter dieser Gruppe sind 1-dimensionale Objekte wie beispielsweise Flurstücksgrenzen, Straßen, Fluglinien oder Leitungen. All diese Objekte legen eine Modellierung als 1-Zelle nahe. Einige charakteristische Beziehungen sind in Abbildung 56 wiedergegeben. In dieser Graphik soll besonders auf die Situation in der ersten Spalte und der zweiten Zeile aufmerksam gemacht werden. Dort kreuzen sich zwei 1-Zellen, was aber in dieser Form eine Verletzung von Q_3 zur Folge hätte, da $z_i^1 \cap z_j^1 \neq \emptyset$. Am Schnittpunkt muß sich folglich eine 0-Zelle befinden (durch einen Kreis dargestellt), die Rand s von insgesamt vier 1-Zellen ist. Als Rand gehört die 0-Zelle keiner der 1-Zellen an, womit Q_3 erfüllt ist. Diese Zerlegung muß gegebenenfalls beim Erfassen der Objekte durchgeführt werden.

Die 1-Zelle hat folgende topologische Eigenschaften:

- Die 1-Zelle ist q-identisch zu n 1-Zellen.
- Sie beginnt und endet an genau einer 0-Zelle. Durch diesen Umstand ist gleichzeitig auch eine Orientierung definiert.
- Die 1-Zelle enthält n 0-Zellen und
- sie kann *innerhalb* von n 2-Zellen liegen.
- Die 1-Zelle kann Rand von n 2-Zellen sein. Durch die Orientierung der 1-Zellen ist damit auch die Beziehung innen und außen, bzw. links- oder rechtsliegend definiert.

Mit Hilfe der OMT können diese Beziehungen wie in Abbildung 57 dargestellt werden. Hinsichtlich des Schnitts zweier 1-Zellen sei auf die Ausführungen im vorangegangenen Absatz hingewiesen. Insbesondere ist zu bemerken, daß auch Situationen, wie sie in Abbildung 58 wiedergegeben sind, unterschieden werden können. Während sich in Abbildung 58a jeweils vier 1-Zellen einen gemeinsamen Randpunkt teilen, sind es in Abbildung 58b aufgrund der Zellenzerlegung sechs.

7.2.3 Die Modellierung von 2-Zellen

2-dimensionale Objekte wie Gebäude, Siedlungsgebiete oder ganze Länder legen eine Modellierung als 2-Zelle nahe. Obwohl nach 7-11 auch für die 2-Zelle fünf topologische Beziehungen zu erwarten sind, gibt es tatsächlich nur vier, da die 2-Zelle im \mathbb{R}^2 nicht Rand einer Zelle noch höherer Dimension sein kann. Für die 2-Zelle sind die folgenden topologischen Beziehungen charakteristisch:

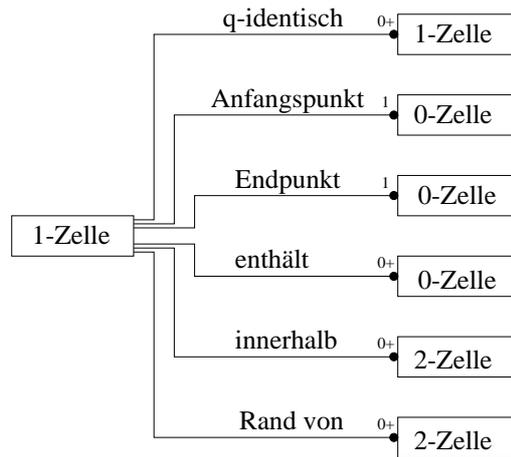


Abbildung 57: Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle

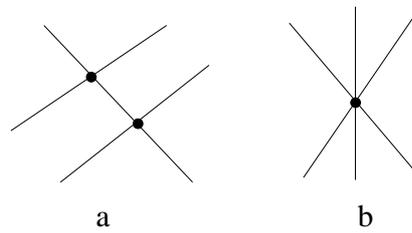


Abbildung 58: Die 0-Zelle als Ergebnis einer q-Zellenzerlegung

- Die 2-Zelle ist q-identisch zu n 2-Zellen.
- Die 2-Zelle enthält n 0- und 1-Zellen und
- als Rand hat die 2-Zelle n 1-Zellen.

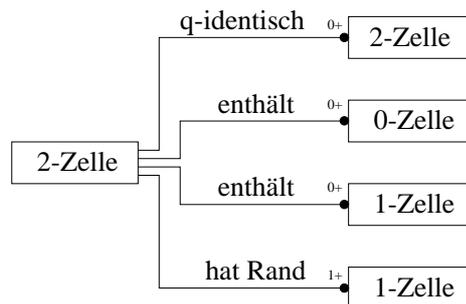


Abbildung 59: Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle im \mathbb{R}^2

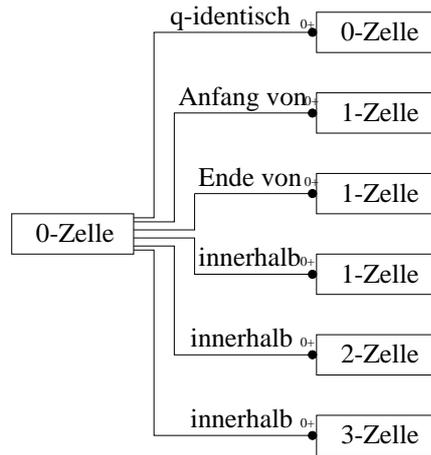


Abbildung 60: Die topologischen Beziehungen der 0-Zelle im \mathbb{R}^3

7.3 Der Entwurf von Klassen für den \mathbb{R}^3

Der hier angestrebte Entwurf, und das war letztendlich der Grund für die ausführliche Behandlung der Simplicial- und der Zellenkomplexe, geht vom schritt- sprich dimensionsweisen Aufbau der topologischen Beziehungen aus. Demnach besitzen alle p -Zellen ($p \in \{0, 1, 2, 3\}$) des \mathbb{R}^3 die topologischen Eigenschaften des \mathbb{R}^2 erweitert um die der p -Zelle zur 3-Zelle. Diese Idee war die Motivation zur Einführung der Quasi-Zellenkomplexe, da sie den Anforderungen zur Abbildung topologischer Beziehungen in GIS am ehesten genügen. Gemäß 7-11 sind im \mathbb{R}^3 sechs unterschiedliche Beziehungen der t -Zelle zur s -Zelle zu erwarten. Diese Relationen werden in den nachstehenden Abschnitten dargestellt.

7.3.1 Die Modellierung von 0-Zellen

Die Modellierung der topologischen Beziehungen des Punktes kann im Prinzip aus Abschnitt 7.2.1 übernommen werden. Das Modell ist allerdings entsprechend zu erweitern. Dies kann anhand der in Abbildung 48 gegebenen Darstellung erfolgen. Danach besitzt der Punkt im \mathbb{R}^3 alle topologischen Eigenschaften, die er auch im \mathbb{R}^2 hat, ergänzt um die Beziehungen zum Körper. Es sind dies die Invarianten *innerhalb*, *außerhalb* und *berührt*. Gemäß den bisherigen Ausführungen genügt es allerdings, lediglich die Beziehung *innerhalb* zu führen, da sich die übrigen aus anderen Beziehungen ableiten lassen bzw. anderweitig abgebildet werden.

7.3.2 Die Modellierung von 1-Zellen

Da es in diesem Abschnitt wenig Neues auszuführen gilt, soll in diesem Zusammenhang die Gelegenheit genutzt werden, um im \mathbb{R}^3 nochmals auf die q-Zellenzerlegung einzugehen (siehe Abbildung 61). Trifft ein Objekt, das als 1-Zelle modelliert ist, auf den Rand \dot{s}_i^3 einer 3-Zelle z_i^3 , dann ist nach Q_3 (siehe Abschnitt 2.10) die Existenz einer gemeinsamen Zelle gefordert, da sich \dot{s}_i^3 aus 2-Zellen zusammensetzt und der Schnitt zweier Zellen ungleicher Dimension entweder leer oder eine der beteiligten Zellen ergeben muß. Dies hat zur Folge, daß die 1-Zelle aufzuteilen ist. Am Schnittpunkt entsteht eine 0-Zelle, die den Rand der 1-Zelle bildet. Damit ist die Schnittmenge zwischen \dot{s}_i^3 und der betrachteten 1-Zelle leer. Innerhalb von z_i^3 sind alle Bedingungen, die an eine q-Zellenzerlegung gestellt werden, erfüllt, da der Schnitt zwischen der 1-Zelle und z_i^3 gerade die 1-Zelle selbst ergibt. Endet das Objekt *innerhalb* des Körpers, dann liegt somit eine gültige q-Zellenzerlegung vor (siehe Abbildung 61a). Tritt es dagegen wieder aus (siehe Abbildung 61b), dann muß auch an der Austrittsstelle so verfahren werden wie an der Eintrittsstelle. Ist dies geschehen, dann liegt wieder eine gültige q-Zellenzerlegung vor. Man

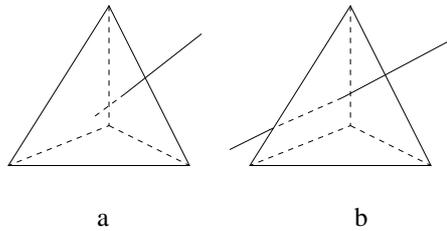


Abbildung 61: Eine 1-Zelle *durchdringt* eine 3-Zelle

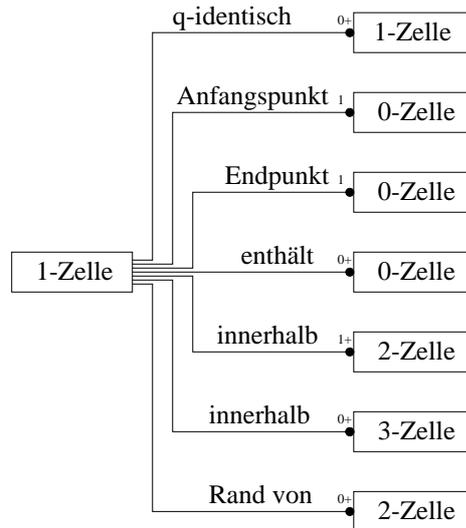


Abbildung 62: Die topologischen Beziehungen der 1-Zelle im \mathbb{R}^3

beachte, daß das Objekt selbst, das nach Voraussetzung als 1-Zelle modelliert wurde, jetzt mindestens zwei 1-Zellen umfaßt. Der Rand s_j^1 der 1-Zellen gehört natürlich ebenfalls zum Objekt.

7.3.3 Die Modellierung von 2-Zellen

Da auch in diesem Abschnitt keine Besonderheit zu erwarten ist, wird für diese Relation nochmals ein Beispiel zur q-Zellenzerlegung eingeflochten. Abbildung 63 zeigt ein Objekt in Form eines Würfels, das von einem anderen Objekt in Form eines Quadrats durchdrungen wird. Das erste Objekt ist dabei als 3-Zelle modelliert, während das zweite als 2-Zelle dargestellt ist. Geht man die Voraussetzungen der Reihe nach durch, dann ist gemäß der Forderung Q_1 zunächst festzustellen, daß sowohl der Würfel z_l^3 als auch das Quadrat z_k^2 einen äußeren Rand s_a^3 bzw. s_a^2 haben, während für den inneren Rand (zu untersuchen, da $p = 2$ bzw. $p = 3$) gilt: $s_i^3 \wedge s_i^2 = \emptyset$. Es gilt daher: $s_a^3 \cap s_i^3 = \emptyset \wedge s_a^2 \cap s_i^2 = \emptyset$. Damit sind die von Q_1 geforderten Voraussetzungen erfüllt. Beide Zellen sind auch hüllenendlich, womit Q_2 ebenfalls erfüllt ist. Nach Q_3 muß $z_l^3 \cap z_k^2$ entweder leer oder eine der beteiligten Zellen sein, da die beiden Zellen unterschiedliche Dimensionen haben. Dies ist genau dann erfüllt, wenn das Quadrat in zwei Flächen $z_{k_1}^2$ und $z_{k_2}^2$ zerlegt wird, wovon die eine vollständig außerhalb und damit $z_l^3 \cap z_{k_1}^2 = \emptyset$ und die andere vollständig innerhalb liegt, wobei dann gilt: $z_l^3 \cap z_{k_2}^2 = z_{k_2}^2$. Damit ist auch Q_3 erfüllt. Dadurch ist aber zwangsläufig $s_l^3 \cap s_k^2 \neq \emptyset$, und es entstehen weitere topologische Beziehungen. Q_4 ist im gegebenen Beispiel ganz offensichtlich erfüllt und braucht von daher nicht näher untersucht werden.

Im Ergebnis führt also die q-Zellenzerlegung dazu, daß in diesem speziellen Beispiel ein Objekt zwar als 2-Zelle modelliert ist, tatsächlich aber zwei 2-Zellen umfaßt, nämlich zum einen die innere 2-Zelle (in Abbildung 63 gepunktet dargestellt) und zum anderen die äußere 2-Zelle (die durchgezogenen Linien).

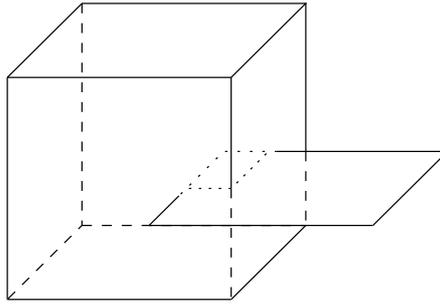


Abbildung 63: Beispiel einer q-Zellenzerlegung im \mathbb{R}^3

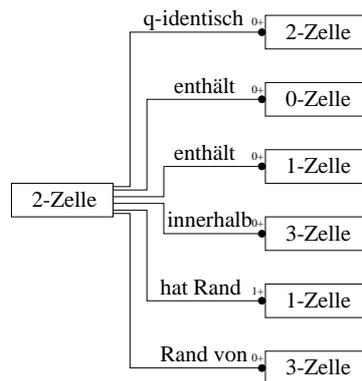


Abbildung 64: Die topologischen Beziehungen der 2-Zelle im \mathbb{R}^3

7.3.4 Die Modellierung von 3-Zellen

Da die 3-Zelle in diesem Zusammenhang zum erstenmal auftaucht, müssen einige Worte hinsichtlich ihrer Modellierung gesagt werden. Auch hier liegt es nahe, 3-dimensionale Objekte wie z. B. Räume, geologische Schichten oder ganze Fabrikhallen als 3-Zellen zu modellieren. Die Beziehungen, denen die 3-Zelle unterliegt, folgen ihrem Aufbau nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten, wie sie im \mathbb{R}^2 auch gegeben sind. Nach 7-11 sind für die 3-Zelle im \mathbb{R}^3 insgesamt sechs topologische Beziehungen von Bedeutung, abzüglich der Relation *Rand von*, womit fünf übrig bleiben.

Die 3-Zelle ist im \mathbb{R}^3 das komplexeste Gebilde. Aus diesem Grund wird auch für diese Zelle eine Zellenzerlegung exemplarisch dargestellt. Ausgangspunkt sind zwei Objekte in Form von Würfeln, die als 3-Zellen modelliert sind (siehe Abbildung 65). Damit die Durchdringung eine zulässige q-Zellenzerlegung darstellt, müssen $Q_1 - Q_4$ erfüllt sein. Mit $\dot{z}_{a_1}^3 = \sum_{k=1}^6 z_{k_1}^2$ und $\dot{z}_{a_2}^3 = \sum_{k=1}^6 z_{k_2}^2$ und $\dot{z}_{i_1}^3 \wedge \dot{z}_{i_2}^3 = \emptyset$ sind die Bedingungen Q_1 und Q_2 für jede einzelne 3-Zelle erfüllt. Es folgt daraus weiter, daß jede der 3-Zellen durch ihre äußere Hülle beschrieben ist.

Nach Q_3 muß für zwei 3-Zellen gleicher Dimension $z_1^3 \cap z_2^3 = \emptyset$ gelten. Dies kann nur erfüllt werden, wenn der Durchdringungsbereich (gestrichelt dargestellt) als eigene 3-Zelle modelliert wird, so daß jedes der beiden Objekte aus zwei 3-Zellen besteht. Hinsichtlich der Endlichkeit des resultierenden Zellenkomplexes besteht im gegebenen Beispiel kein Zweifel. Es kann sich damit unter Berücksichtigung obiger Ausführungen bei Abbildung 65 um einen gültigen q-Zellenkomplex handeln.

7.4 Allgemeine Implementierungsaspekte

Nachdem nun die verschiedenen Klassen vorgestellt wurden, muß konsequenterweise noch ein Wort zur Implementierung gesagt werden. Da sämtliche topologischen Beziehungen in Form von Mengen

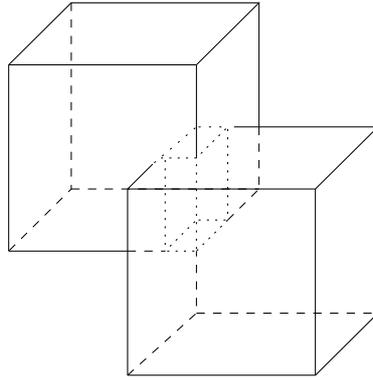


Abbildung 65: Zwei Objekte modelliert als 3-Zellen im \mathbb{R}^3

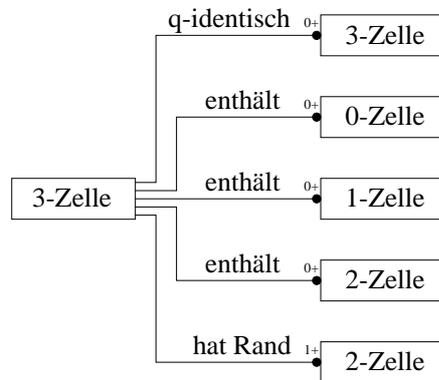


Abbildung 66: Die topologischen Beziehungen der 3-Zelle im \mathbb{R}^3

bzw. Mengenbeziehungen vorliegen, sollte die Implementierung diesen Aspekt natürlich berücksichtigen. Dem kommen die neueren Entwicklungen der modernen Programmiersprachen sehr entgegen. So unterstützt beispielsweise die *Standard Template Library*, wie sie für *C++* demnächst als Norm verabschiedet wird (nach [BREYMAN 1996] oder auch [JOSUTTIS 1996]), mit dem Datentyp *Set* bzw. *Map* (siehe Seite 32) genau die hier geforderten Operationen.

Damit kann überall dort, wo mit Hilfe der OMT-Syntax eine multiple topologische Beziehung zwischen zwei Zellen aufgebaut wurde, der Datentyp *Set* bzw. *Map* eingesetzt werden, um diese Relation abzubilden. Dazu ist natürlich ein eindeutiger Schlüssel nötig, denn die abzulegenden Objekte müssen nach Voraussetzung eindeutig identifizierbar sein. Dies kann beispielsweise im Relationen-Modell über den Schlüssel und im objektorientierten Modell über die Objektidentität (zumindest theoretisch), die laut Definition eindeutig sein muß, realisiert werden.

7.5 Aufbau der Struktur

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Wechselwirkung der verschiedenen Objekte untereinander diskutiert wurde, stellt sich im Anschluß daran unmittelbar die Frage, wie der Aufbau dieser Struktur bewerkstelligt werden kann. Dieses Problem ist natürlich nicht isoliert zu sehen, sondern muß im Zusammenhang mit der Erfassung der Daten bzw. deren Herkunft betrachtet werden.

Werden die Daten digitalisiert (es spielt dabei keine Rolle ob am Digitalisiertisch oder am Bildschirm), muß für jedes Objekt, das erfaßt wird, vor seinem Einbringen in die Datenbasis eine Sequenz von Analysen durchlaufen werden. Diese Sequenz ist davon abhängig, wie das entsprechende Objekt modelliert

wurde. Mit Hilfe von Abbildung 67 soll dies näher erläutert werden.

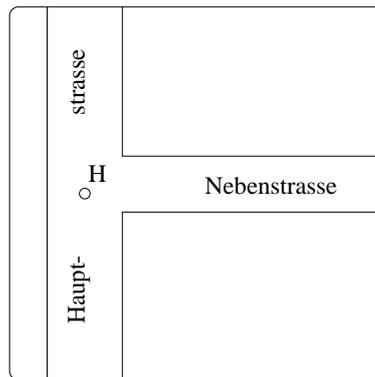


Abbildung 67: Die Erzeugung topologischer Beziehungen bei der Erfassung

Es wird dabei davon ausgegangen, daß der Punkt H soeben neu erfaßt wurde und nun in die Datenbasis übernommen werden soll. Folgende Voraussetzungen seien gegeben: Es existieren bereits zwei Instanzen der Klasse *Straße*, die topologisch betrachtet als 2-Zellen implementiert sind. H gehöre demgegenüber der Objektklasse *Hydrant* an und sei als 0-Zelle modelliert. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß die Anwendung die Abbildung topologischer Beziehungen zwischen *Straße* und *Hydrant* erforderlich macht.

Bei der Übernahme in die Datenbasis muß jetzt folgende Prüfung durchgeführt werden:

- Liegt der *Hydrant* innerhalb einer Straße oder
- ist er *Rand von* einer Straße.

Im vorgestellten Beispiel ist die erste Frage bereits mit 'ja' zu beantworten, wodurch klar ist, daß die Beziehung *Hydrant* innerhalb *Straße* sowie *Straße* enthält *Hydrant* abzulegen ist. Es sind dies also die in Abbildung 55 aufgeführte Beziehung der 0-Zelle zur 2-Zelle und die in Abbildung 59 dargestellte Relation der 2-Zelle zur 0-Zelle.

Im oben ausgeführten Beispiel könnte noch die Beziehung *Straße* zu *Straße* von Interesse sein. Geht man von Abbildung 67 aus, dann treffen Haupt- und Nebenstraße direkt aufeinander. Nach Q_3 muß ihre Schnittmenge leer sein, was im vorliegenden Fall gegeben ist, da der Rand der 2-Zelle nicht zur Menge selbst gehört. Allerdings kann dadurch ihre Nachbarschaft festgestellt werden. Diese sehr einfache Modellierung der Klasse *Straße* erlaubt noch nicht das Navigieren, wie es beispielsweise eine Anwendung zur Fahrzeugnavigation vorsieht. Dies könnte erst durch die etwas komplexere Modellierung von Fahrbahnen erreicht werden.

7.6 Beispiel

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel vorgestellt, um den bisher eher theoretischen Betrachtungen etwas Praxisbezug zu geben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränkt sich die Darstellung auf den \mathbb{R}^2 . Bei den in Abbildung 68 dargestellten Objekten soll es sich um zwei Flurstücke F_1 und F_2 handeln, durch die zwei Leitungen L_1 und L_2 von nicht näher spezifizierter Art verlaufen. Die beiden Leitungen seien am Punkt M miteinander verbunden (z.B. durch eine Muffe, falls man die Leitungen als Stromleitungen interpretiert). Das Objekt P sei ein Sendemast.

Die Tatsache, daß es sich bei den Flurstücken um 2-dimensionale Gebilde handelt, legt eine Implementierung als 2-Zelle nahe. Analoges trifft auf die Leitungen und den Sendemast zu, die als 1- bzw.

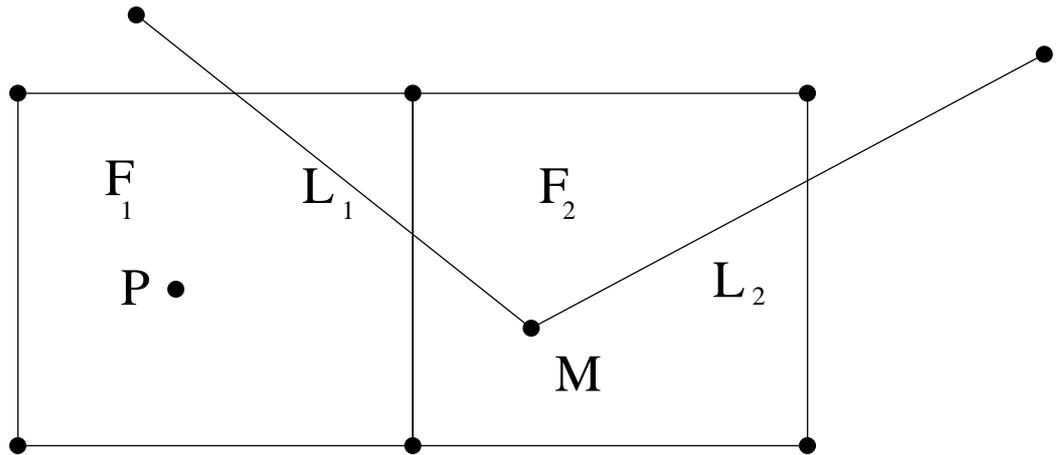


Abbildung 68: Ein Beispiel

als 0-Zelle modelliert werden. Die q -Zellenzerlegung sieht dann wie in Abbildung 69 dargestellt aus. Zur besseren Übersicht sind die 0-Zellen mit kleinen und die 1-Zellen mit etwas größeren Zahlen wiedergegeben. Die 2-Zellen sind mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

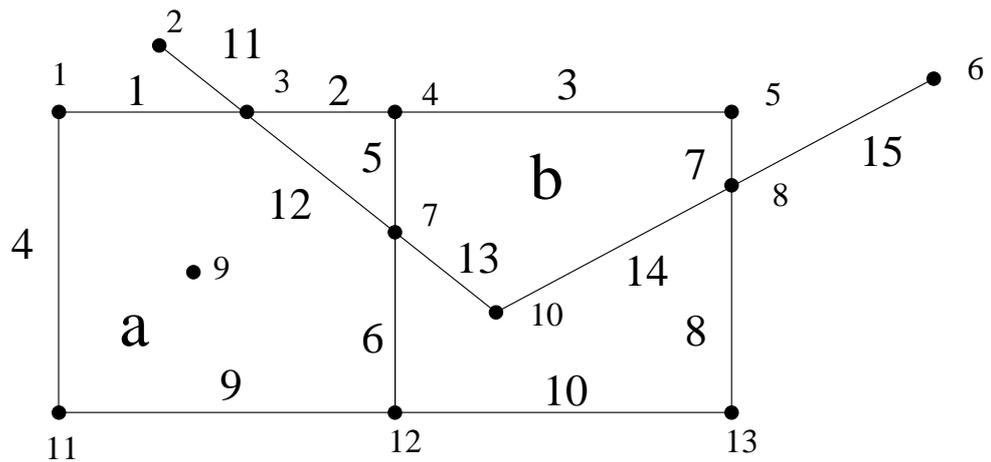


Abbildung 69: Die Zellenzerlegung zu Abbildung 68

Auf diesen Datenbestand sollen die folgenden Analysen und Plausibilitätskontrollen durchgeführt werden:

1. Welche Leitungen sind mit Leitung L_1 verbunden?
2. Auf welchem Flurstück befindet sich der Sendemast?
3. Welche Grundstücke werden von Leitung L_1 und L_2 durchquert?
4. Welche Objekte kommen in M zusammen?
5. Wie viele und welche Flurstücke grenzen an das Flurstück F_2 ?
6. Gibt es Leitungen, die kein Grundstück durchqueren?

1. Das Objekt L_1 besteht topologisch gesehen aus der Menge $\mathbb{M}_{L_1} = \{11, 12, 13\}$ von 1-Zellen, deren Rand \dot{s}^1 aus der Menge $\mathbb{M}_{\dot{s}^1} = \{2, 3, 7, 10\}$ von 0-Zellen besteht. Diese wiederum enthalten die Information, von welchen 1-Zellen sie den Rand bilden (siehe Abbildung 55). Diese Menge besteht aus den Elementen $\mathbb{M}_{z^1} = \{11, 12, 13, 14\}$. Die Lösung besteht aus der Menge $\mathbb{M} = (\mathbb{M}_{L_1} \cap \mathbb{M}_{z^1})^c = \{14\}$. D.h. L_1 ist mit dem Objekt verbunden, zu dem die 1-Zelle mit der Nummer 14 gehört. Dies ist laut Graphik das Objekt L_2 . Damit ist der erste Punkt bereits geklärt.
2. Die Frage, auf welchem Grundstück sich der Sendemast befindet, kann direkt aus der Beziehung 0-Zelle *innerhalb* 2-Zelle abgelesen werden (siehe Abbildung 55). Diese Beziehung wird explizit abgebildet und bereitet von daher keine Schwierigkeiten. Im Beispiel ist es das Objekt, dem die 2-Zelle a zugeordnet ist.
3. Durch die Beziehung 1-Zelle *innerhalb* 2-Zelle kann geklärt werden, welche Grundstücke von den Leitungen L_1 und L_2 durchquert werden. Die Menge der 1-Zellen $\mathbb{M}_{L_1}^1 = \{11, 12, 13\}$ hat dabei die beiden 2-Zellen $\mathbb{M}_{L_1}^2 = \{a, b\}$ zum Ergebnis. Für L_2 erhält man $\mathbb{M}_{L_2}^2 = \{b\}$. Die Vereinigungsmenge $\mathbb{M}_{L_1}^2 \cup \mathbb{M}_{L_2}^2 = \mathbb{M}_v^2 = \{a, b\}$ ergibt die Menge aller 2-Zellen, die von Leitungen durchquert werden. Darüber hinaus könnte auch ermittelt werden, ob beispielsweise L_1 vollständig *innerhalb* eines Grundstücks verläuft. Danach müßte gelten: $\mathbb{M}_{L_1}^1$ *innerhalb* $a \vee \mathbb{M}_{L_1}^1$ *innerhalb* b , was aber nicht zutrifft.
4. Die Suche nach Objekten, die bei Objekt M zusammentreffen, kann wie die vorletzte Frage ebenfalls ohne Umwege aus der Struktur der 0-Zellen abgelesen werden. Es genügt, dabei zu prüfen, für welche 1-Zellen die 0-Zelle Rand (also Anfangs- oder Endpunkt) ist. Man erhält dann die Menge $\mathbb{M}_M = \{13, 14\}$. Die zugehörigen Objekte sind die Gesuchten.
5. Das Flurstück F_2 enthält über die zugeordneten 2-Zellen Informationen über seinen Rand (siehe Abbildung 59). Dieser ist gegeben mit $\dot{s} = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$. Die 1-Zelle wiederum bildet die Relation *Rand von* ab , die als Menge betrachtet für dieses Beispiel $\mathbb{M}_z^2 = \{a, b\}$ ergibt. Es sei dabei dahingestellt, ob eine p -Zelle zu sich selbst Nachbar ist. Die zugehörigen Objekte sind die gesuchten Nachbarn.
6. Die letzte Frage ist eine Plausibilitätsprüfung und kommt im Bereich der Analyse sicher nur in konstruierten Beispielen wie dem vorliegenden zum Tragen. Topologisch kann der Fall auf die Prüfung *Welche 1-Zelle, die einem Objekt Leitung zugeordnet ist, liegt in keiner 2-Zelle, die einem Flurstück zugeordnet ist* zurückgeführt werden. Dies muß natürlich ebenfalls für mindestens einen weiteren Randpunkt zutreffen. Formal ist also die Menge $\mathbb{M}_{L_1, L_2}^1 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ zu untersuchen. Die Analyse zeigt, daß dies für die 1-Zellen 11 und 15 zutrifft. Entsprechendes trifft auch auf jeweils einen Randpunkt zu, nämlich die beiden 0-Zellen 2 und 6.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden die Probleme topologischer Fragestellungen in GIS erörtert. Des weiteren wird eine Methode zur Modellierung topologischer Information in GIS vorgestellt. Die Grundlage dazu bildet die Theorie der Quasi-Zellenkomplexe, die als Weiterentwicklung der Zellenkomplexe verstanden wird. Die Quasi-Zellenkomplexe vereinigen sowohl Eigenschaften der algebraischen als auch solche der mengentheoretischen Topologie in sich. Die Elemente einer Quasi-Zellenzerlegung heißen q -Zellen.

Das vorgeschlagene Bildungsgesetz dieser Zerlegung wird für den \mathbb{R}^p angegeben und ist somit auf beliebige Dimensionen erweiterbar. Für die in GIS interessierenden Fälle des \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 werden topologische Beziehungen zwischen den q -Zellen abgeleitet, die direkt implementiert werden können. Es wird weiterhin vorgeschlagen, den verschiedenen Objekten in GIS Eigenschaften dieser q -Zellen zu geben, die damit topologische Attribute bekommen. Durch diese Vorgehensweise beschränkt sich die Analyse, ebenso wie die Prüfung topologischer Beziehungen auf reine Mengenoperationen.

Bisher wurde noch kein Versuch unternommen, das Modell in eine Anwendung zu implementieren. Dies kann ausgehend von der Modellierung der 1-Zelle und ihren Beziehungen zur 0-Zelle und zu Zellen gleicher Dimension Schritt für Schritt erfolgen. Das Problem bei der Implementierung wird die q -Zellenzerlegung selbst sein. Hier gilt es leistungsfähige Algorithmen zu finden, die die geforderte Struktur aufbauen und verwalten können.

Da ein objektorientierter Ansatz zur Durchführung der Zellenzerlegung naheliegt, wird, aufgrund der engen Verknüpfung zwischen den Objekten und den Methoden, den Algorithmen eine zentrale Bedeutung zukommen. Dabei sind auch die räumlichen Zugriffsmechanismen mitentscheidend für die Praxistauglichkeit des vorgestellten Verfahrens. Dies gilt allerdings nur für den Teil der topologischen Beziehungen, der direkt aus der Geometrie abgeleitet werden können, was nach den bisherigen Ausführungen nicht auf alle Relationen zutrifft.

Auf der theoretischen Seite ist darüber hinaus noch zu prüfen, ob eine Erweiterung auf den \mathbb{R}^4 , wobei die vierte Dimension als Zeit zu deuten wäre, durchgeführt werden kann. Die Schwierigkeit wird dabei vor allem in der Interpretation der Beziehungen liegen. Hier könnten u. U. die neueren Forschungen im Bereich der Datenbanken bezüglich der Granularität der Zeit interessante Impulse geben.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. van Mierlo und bei Herrn Prof. Bill recht herzlich für die Übernahme des Haupt- und des Korreferats bedanken. Die gezielten Hinweise der beiden Referenten haben sehr zur Klarheit der Arbeit beigetragen. Auch dafür möchte ich danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Lebensgefährtin Frau Monika Antoni, die mir besonders in der *heißen Phase* der Arbeit den nötigen Rückhalt gegeben hat. Mit viel Geduld und Ausdauer hat sie mich durch einige Durststrecken begleitet.

Frau Regina Graf danke ich für das gewissenhafte Korrekturlesen. Sie hat so manchen versteckten Fehler ausfindig gemacht.

Symbolverzeichnis

\mathbb{M}	bezeichnet eine Menge von Elementen. Im Text können Mengen zweifach indiziert vorkommen, wobei der hochgestellte Index die Dimension der betrachteten Elemente angibt und der tiefgestellte Index der Unterscheidung von Mengen mit Elementen gleicher Dimension dient.
\mathbb{M}^c	das hochgestellte c steht für die komplementäre Menge.
\mathcal{M}, \mathcal{R}	kalligraphische Buchstaben stehen für Mengensysteme. Falls Verwechslungen möglich sind, erhält das Mengensystem zusätzlich einen Index.
s^3	ein Punkt über einem Buchstaben steht für den Rand einer p -Zelle. Ein hochgestellter Index gibt die Dimension der Zelle an (nicht die des Randes!). Ein tiefgestellter Index unterscheidet verschiedene Ränder von Zellen gleicher Dimension. Tiefgestellte Indizes für Ränder werden allerdings nur in Ausnahmefällen verwendet.
\emptyset	leere Menge.
\cup	symbolisiert die Vereinigungsmenge.
\cap	symbolisiert die Schnittmenge.
\neg	logische Negation
\wedge	logisches <i>und</i>
\vee	logisches <i>oder</i>
z^p	steht für eine Zelle der Dimension p .

Abkürzungen

AdV	Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland
Am. Cart.	American Cartographer, Falls Church, Va./USA
ATKIS	Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystem
DGK	Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München
DIGEST	Digital Geographic Information Exchange Standard
DVW	Deutscher Verein für Vermessungswesen e. V.
EVU	Energieversorgungsunternehmen
GebIS	Gebäudeinformationssystem
GIS	Geo-Informationssystem
GPG	Graphics Program Generator; Makrosprache entwickelt von der Firma IBM. In der AIX-Umgebung (UNIX-Version der Fa. IBM) auch unter dem Namen geoGPG bekannt.
IJGIS	International Journal of Geographical Information Systems, Taylor and Francis
<i>iX</i>	Magazin für professionelle Informationstechnik
KN	Kartographische Nachrichten. Organ der Deutschen Gesellschaft für Kartographie e.V., der Schweizerischen Gesellschaft für Kartographie und der Österreichischen Kartographischen Kommission in der Österreichischen Geographischen Gesellschaft, Kirschbaum Verlag GmbH Bonn.
NaKaVerm	Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen.
NIS	Netzinformationssystem
VWEW	Verlags- und Wirtschaftsgesellschaft der Elektrizitätswerke mbH
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen, Verlag Konrad Wittwer GmbH

Literatur

- [ADV/ATKIS 1989] Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystem (ATKIS). Hrsg.: Adv. Druck und Vertrieb: Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen, Bonn.
- [ALEXANDROFF 1961] Alexandroff P.: Elementary Concepts of Topology. Dover Publications, Inc. New York.
- [AL-TAHA/FRANK 1993] Al-Taha K., Frank A.: What a temporal GIS can do for Cadastral Systems. In GISA '93 in Sharjah, UAE, Feb. 8-10.
- [ARIAV 1986] Ariav G.: A temporally orientated data model. ACM Transactions on Database Systems. 11(4), S. 499-527.
- [BARTELME 1993] Bartelme N.: Datenmodelle für Netzwerk-Applikationen in GIS. In: Wiener Schriften zur Geographie und Kartographie, Wiener Symposium 1991, Band 6, 1993.
- [BARTELME 1995] Bartelme N.: Geoinformatik. Modelle, Strukturen, Funktionen. Springer-Verlag.
- [BEHR 1998] Behr F.-J.: Strategisches GIS-Management - Grundlagen und Schritte zur System Einführung, Wichmann, in Druck.
- [BEINES 1993] Beines M.: Flächengeneralisierung bei der DKM - Ableitung in ATKIS. In: Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe I, Heft Nr. 110, S. 17 - 30.
- [BEINES 1994] Beines M.: Untersuchungen zur automationsgestützten Generalisierung von Flächen. KN 4/94, S. 143 - 150.
- [BENNING/BERZEN 1995] Benning W., Berzen N.: Objektbanken als integrale Bestandteile von Gebäudeinformationssystemen, DVW Schriftenreihe 19, Verlag Konrad Wittwer.
- [BERG/AHÉ, 1997] von Berg N., von der Ahé K.-R.: Geoinformationssysteme in der Epidemiologie, KN 2, S. 52 - 59.
- [BERNHARDT 1994] Bernhardt U.: Geo-Informationssysteme in EVU. VWEW.
- [BERZEN/BENNING 1997] Berzen N., Benning W.: Objekte und Datenbanken. ZfV, Heft 6.
- [BILL 1990] Bill R.: GIS - quo vadis? GIS Heft 3, S. 26-33.
- [BILL/FRITSCH 1991] Bill R., Fritsch D.: Grundlagen der Geo-Informationssysteme. Hardware, Software und Daten. Bd. 1, Wichmann.
- [BILL 1996] Bill R.: Grundlagen der Geo-Informationssysteme. Analysen, Anwendungen und neue Entwicklungen. Bd. 2, Wichmann.
- [BILL 1997] Bill R.: Zeit in Geo-Informationssystemen - eine Einführung. In: Tagungsband zum Workshop vom 29. bis 30.9.97 an der Universität Rostock.
- [BOLLMANN/GRUGELKE/LUX 1985] Bollmann J., Grugelke G., Lux E.: Geowissenschaftliche Anforderungen an eine graphische Datenbank. NaKaVerm, Reihe I, Heft 95, S. 29-42.
- [BREYMAN 1996] Breyman U.: Die C++ Standard Template Library. Addison-Wesley.
- [BRODIE/MYLOPOULOS/SCHMIDT 1984] Brodie M., Mylopoulos J., Schmidt J.: On Conceptual Modelling. Springer-Verlag.
- [BRÜCK 1994] Brück A.: Der Einsatz von relationalen Datenbanksystemen zu Realisierung eines Abwasserkatasters. Mitteilungsblatt des DVW Landesverein Rheinland-Pfalz e.V. Heft 1, S. 32-45.

- [CAR/FRANK 1997] Car A., Frank A.: Formalisierung konzeptioneller Modelle für GIS - Methode und Werkzeug. ZfV S. 99ff.
- [CHWILKOWSKI 1994] Chwilkowski D.: Generierung von Leitungsplänen aus geografischen Datenbanken. GIS 6/1994, S. 14-18.
- [CLAUSSEN 1996] Claussen H.: Qualitätsbeurteilung digitaler Karten für Fahrzeug-Navigationssysteme. GIS Heft 5 S. 23-29.
- [CLIFFORD/TANSEL] Clifford J. und Tansel A. U.: On an algebra for historical relational databases. In Proceedings of the SIGMOD '85 Conference (New York: ACM), S. 247-265.
- [CODD 1970] Codd E. F.: A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Communications of the ACM 13, 377-387.
- [DIN2425] DIN 2424 Teil 1, Hrsg.: Deutsches Institut für Normung, Fassung vom August 1975.
- [EGENHOFER U.A. 1995] Egenhofer M. J., Clementi E., Felice P.: Topological relations between regions with holes. IJGIS, Vol. 9 No. 2, S. 133-152.
- [EGENHOFER/FRANZOSA 1995] Egenhofer M. J., Franzosa R. D.: On the equivalence of topological relations. IJGIS, Vol. 9 No. 2, S. 133-152.
- [EGENHOFER/FRANZOSA 1991] Egenhofer M. J., Franzosa R. D.: Point- set topological spatial relations. IJGIS, Vol. 5 No. 2, S. 161-174.
- [EGENHOFER/MARK 1995] Egenhofer M. J., Mark D. M.: Modelling conceptual neighbourhoods of topological line-region relations. IJGIS, Vol. 9 No. 5, S. 555-565.
- [FINDEISEN 1990] Findeisen D.: Datenstruktur und Abfragesprachen für raumbezogene Informationen. Kirschbaum Verlag Bonn.
- [FISCHER 1992] Fischer K.-L.: Anforderungen an Basisinformationssysteme aus der Sicht eines Versorgungsunternehmens. In: Gewinnung von Basisdaten für Geoinformationssysteme. DVW-Schriftenreihe Heft 4.
- [FRANK 1983] Frank A.: Datenstrukturen für Landinformationssysteme – semantische, topologische und räumliche Beziehungen in Daten der Geo-Wissenschaften. Mitteilungen Nr. 34 des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich.
- [FRIEDRICH 1995] Friedrich J.: Eine Einführung in Prinzipien und Werkzeuge der objektorientierten Programmierung mit einem C++ Programmbeispiel für ein digitales Geländemodell. ZfV S. 143ff.
- [FRITSCH 1991] Fritsch D.: Raumbezogene Informationssysteme und digitale Geländemodelle. DGK, Reihe C, Heft Nr. 369, München.
- [FRITSCH 1995] Fritsch D.: Geo-Informationssysteme im Spannungsfeld von Theorie und Praxis. Geowissenschaften, Heft 5-6, S. 181-184.
- [FRITSCH/ANDERS 1996] Fritsch D., Anders K.-H.: Objektorientierte Konzepte in Geo-Informationssystemen, GIS, Jahrgang 9, Heft 2, S. 2 ff.
- [GABRIEL/RÖHRS 1995] Gabriel R., Röhrs H.-P.: Datenbanksysteme, Springer-Verlag, 2. Auflage.
- [GADIA 1986] Gadia S. K.: Towards a multihomogenous model for a temporal database. In Proceedings of the International Conference on Data Engineering. (New York: IEEE), S. 390-397.
- [GAUSS] Gauß C. F.: Werke. Hrsg.: Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 Bde. (1863-1933, Nachdr. 1973).

- [GÖPFERT 1991] Göpfert W.: Raumbezogene Informationssysteme: Grundlagen der integrierten Verarbeitung von Punkt-, Vektor- und Rasterdaten. 2. Auflage, Herbert Wichmann Verlag.
- [GREPEL/SCHÜLLER 1992] Grepel U., Schüller K.: Rechnergestützte Analyse topologischer Netzwerkarchitekturen - RATNA. GIS-Sonderheft Netzinformationssysteme, S. 2-6.
- [GRIEFAHN 1997] Griefahn B.: Temporale Datenbasis und TSQL2. In: Zeit als weitere Dimension in Geo-Informationssystemen. Tagungsband zum Workshop vom 29. bis 30.9.97 an der Universität Rostock.
- [HAKE/GRÜNREICH 1994] Hake G., Grünreich D.: Kartographie. de Gruyter, 7. Auflage.
- [HERMAINSKI 1992] Hermainski H.: Bäume in Balance. c't 1992, Heft 1.
- [HEUER 1997] Heuer A.: Objektorientierte Datenbanken. Konzepte, Modelle, Standards und Systeme. Addison-Wesley-Longman.
- [HEUSER 1992] Heuser H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Stuttgart.
- [IFD 1996] Interface Format Definition. IBM Corporation, GIS Development, Department 44GA/P356, Poughkeepsie NY, USA 12401.
- [ISO/IEC 8211] Hrsg.: International Organization for Standardization und International Electrotechnical Commission, 1994.
- [JÄGER 1994] Jäger E.: Einsatz moderner Verfahren der hybriden Datenverarbeitung in der amtlichen Kartographie. KN, Heft 4, S. 129-137.
- [JÄNISCH 1980] Jänisch K.: Topologie. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [JOSUTTIS 1996] Josuttis N.: Die C++-Standardbibliothek: eine detaillierte Einführung in die vollständige ANSI/ISO-Schnittstelle. Addison-Wesley.
- [JUNCLAUS u.a. 1991] Jungclaus R., Hartmann T., Saake G., und Seranades C.: Introduction to TROLL - A Language for Object-Orientated Specification of Information Systems - Correctness and Reusability. Informatik - Bericht 91-03, Technische Universität Braunschweig.
- [KALTENBACH 1995] Kaltenbach H.: Datenmodellierung in GIS - Stand der Entwicklung. Neunte Informationsveranstaltung der Bayrischen Vermessungsverwaltungen über die graphische Datenverarbeitung, München. S. 7 - 18.
- [KERÉKJÁRTÓ 1923] v. Keréjártó B.: Vorlesungen über Topologie I. Berlin, Verlag Julius Springer.
- [KLINGENBERG/SIEVERS/JOURDAN 1996] Klingenberg F., Sievers B., Jourdan R.: Thesen zum Einsatz der kombinierten Vektor- und Rastertechnik in der amtlichen Vermessung. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft 1, S. 12-13.
- [KÖLBL u.a. 1992] Kölbl O., Cogan L., Bach U., Gasior D., de Laporte K.: Multi Templet-Matching für die automatisierte Bildauswertung. GIS Heft 1, S. 2-11.
- [KIND/OECHSLE/BAUER 1997] Kind O., Oechsler F., Bauer G.: Texterkennung auf Leitungsplänen der Telekommunikation und Energieversorgung. GIS, Heft 4.
- [KIRCHHOFF 1847] Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Annalen der Physik und Chemie (1847) = Gesammelte Abhandlungen Leipzig (1882).
- [KUFONIYI/MOLENAAR/BOULOUCOS 1995] Kufoniyi L., Molenaar M., Bouloucos T.: Topologic Consistency Operations in Vector Maps. GIS, Heft 4, S. 7-13.

- [KUHNS 1990] Kuhn H.: Einführung in die Topologie. Vorlesungsskript.
- [LANG/LOCKEMANN 1995] Lang S., Lockemann P.: Datenbankeinsatz. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [LANGRAN 1993] Langran G.: Time in Geographic Information Systems. Taylor & Francis.
- [LIPSCHUTZ 1977] Lipschutz S.: Allgemeine Topologie. Theorie und Anwendung. McGraw-Hill Book Company GmbH.
- [MAGUIRE/GOODCHILD/RHIND 1991] Maguire D. J., Goodchild M. F., Rhind D.: Geographical Information Systems. Vol. 1 Principles, Longman Scientific and Technical.
- [MARX 1990] Marx R.: The TIGER system - automating the geographic structure of the United States Census. In: Introductory readings in GIS. Peuquet D.J. und Marble D.F. (Hrsg.), Taylor & Francis, London New York Philadelphia, S. 120ff.
- [MAYER/HEIPKE/EBNER 1995] Mayer H., Heipke Chr., Ebner H.: Wissensbasierte Bildanalyse zur Extraktion von topographischen Objekten - Grundlagen und Interpretation von Katasterkarten. ZfV S. 285 - 298.
- [MEHLHORN 1986] Mehlhorn K.: Datenstrukturen und effiziente Algorithmen. Bd. 1, B.G. Teubner Stuttgart.
- [MESCHKOWSKI 1972] Meschkowski H. in: Meyers Handbuch über die Mathematik. Hrsg. H. Meschkowski in Zusammenarbeit mit P. Laugwitz, Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich.
- [MOLENAAR/FRITSCH 1991] Molenaar M., Fritsch D.: Combined data structures for vector and raster representations in Geographic Information Systems, GIS, Heft 3, S. 26-32.
- [MÜLLER 1997] Müller J.-C.: GIS, Multimedia und die Zukunft der Kartographie. KN, Heft 2.
- [NEUREITHER 1992] Neureither M.: Modellierung geometrisch-topologischer Daten zur Beschreibung und Berechnung netzartiger und flächenhafter Strukturen. DGK, Reihe C, Heft Nr. 387, München.
- [NEWMAN 1961] Newman M.: Elements of the Topology of Plane Sets of Points. Cambridge At The University Press.
- [OSSA 1992] Ossa E.: Topologie. Vieweg.
- [OTTMANN/WIDMAYER 1993] Ottmann T., Widmayer P.: Algorithmen und Datenstrukturen. 2. vollst. überarb. und erw. Auflage, Mannheim Leipzig Wien Zürich, BI-Wissenschaftsverlag.
- [PECHER 1991] Pecher R.: Anwendungsmöglichkeiten von Datenbanken in Kanalkataster. GIS Sonderheft Kanalinformationssysteme, S. 2-8.
- [PETERSEN/MAUS 1996] Petersen K., Maus O.: Geo-Daten und Analyseinstrumente im Geomarketing. GIS Heft 5 S. 2-9.
- [PEUCKER/CHRISMAN 1975] Peucker T., Chrisman N.: Cartographic Data Structures. Am. Cart., S. 55 - 69.
- [POWITZ/RIEMER 1995] Powitz B., Riemer H.-G.: Das kommunale Geo-Informationssystem DAVID als Integrationsbasis im technischen Rathaus. AVN, Heft 6, S. 232-240.
- [PRENV 12009] European Prestandard: Geographic Information - Reference Model, final draft, AFNOR, Paris, 1996.
- [PRENV 12160] European Prestandard: Geographic Information - Data Discription - Spatial schema, final draft, AFNOR, Paris, 1996.
- [PREN 287011] Report: Geographic Information - Referencing, AFNOR, Paris, 1996.

- [RAAFAT/YANG/GAUTHIER 1994] Raafat H., Yang Z., Gauthier D.: Relational spatial topologies for historical geographical information, IJGIS, Vol. 8, No. 2, S. 163-173.
- [RATH/AUERBACH 1996] Rath C., Auerbach C.: Prüfung digitaler Grundrißdaten der ALK. Forum 1/1996.
- [RICHTER 1997] Richter W.: Hybride Datenverarbeitung in der Vermessungs- und Katasterverwaltung Rheinland-Pfalz. Nachrichtenblatt der Vermessungs- und Katasterverwaltung Rheinland-Pfalz, Heft 3, S. 199-218.
- [RIKKERS/MOLENAAR/STUIVER 1994] Rikkers R., Molenaar M., Stuiver J.: A query oriented implementation of a topologic data structure for 3-dimensional vector maps. IJGIS, Vol. 8, No. 3.
- [RÖDER 1997] Röder, R.: Zur Analyse um Optimierung von Transportnetzen. DGK Reihe C, Heft Nr. 484, München.
- [ROHLING 1995] Rohling, H.: Einführung in die Informations- und Codierungstheorie. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [SAAKE 1993] Saake G.: Objektorientierte Spezifikationen von Informationssystemen. Teubner-Texte zur Informatik, Band 6.
- [SCHEURING 1995] Scheuring R.: Zur Qualität der Basisdaten von Landinformationssystemen. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 49.
- [SCHILCHER/KALTENBACH/ROSCHLAUB 1996] Schilcher M., Kaltenbach H., Roschlaub R.: Geoinformationssysteme - Zwischenbilanz einer stürmischen Entwicklung. ZfV Heft 8.
- [SCHUBERT 1975] Schubert H.: Topologie. B. G. Teubner Stuttgart.
- [SEDEGWICK 1992] Sedgewick A.: Algorithmen in C. Addison-Weseley.
- [SEILER/VONDER MÜHLL 1995] Seiler Ch., Vonder Mühl N.: Qualitätssicherung von DXF-Daten. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft 12, S. 713-715.
- [SINGER 1993] Singer CH.: Relationale Datenbanken als Basis Geographischer Datenbanken. GIS Heft 6, S. 9-16.
- [SNODGRASS/AHN 1985] Snodgrass R., Ahn I.: A taxonomy of time in databases. In Proceedings of the SIGMOD '85 Conference (New York: ACM), S. 236-245.
- [SOBEL 1990] Sobel J.: Principal components of the Census Bureau's TIGER File. In: Introductory Readings in GIS. Peuquet D.J. und Marble D.F. (Hrsg.), Taylor & Francis, London New York Philadelphia, S. 120ff.
- [SPIESS/BRANDENBERGER 1995] Spiess E., Brandenberger Ch.: Übersichtsplan, aus dem digitalen Grunddatensatz abgeleitet. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft 4, S. 272-277.
- [STAHL 1995] Stahl R.: Moderne Landkarten. *iX*, Heft 9, S. 42-49.
- [STENGLE/NEBIKER/ZANINI 1995] Stengele R., Nebiker S., Zanini M.: Vom Pixel zum Objekt. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft 4.
- [TIMPF/EGENHOFER 1997] Timpf S., Egenhofer M.: Ein konzeptionelles Modell für Navigation in Fernstrassennetzen. ZfV S.55 ff.
- [ULMER/SESTER/FRITSCH 1997] Ulmer F., Sester M., Fritsch D.: Design und Implementierung eines Gebäudeinformationssystems, GIS Heft 4, S. 19- 26.

- [U.S. BUREAU OF CENSUS 1990] U.S. Bureau of Census: Technical Discription of the DIME System. In: Introductory readings in GIS. Peuquet D.J. und Marble D.F. (Hrsg.), Taylor & Francis, London New York Philadelphia.
- [VOLKMANN 1996] Volkmann L.: Fundamente der Graphentheorie. Springer Lehrbuch der Mathematik, Springer-Verlag Wien New York.
- [VOSSEN 1994] Vossen G.: Datenmodelle, Datenbanksprachen und Datenbank-Mangement-Systeme. Addison Wesley.
- [VOSSEN/WITT 1988] Vossen G., Witt K.-U.: Das SQL/DS-Handbuch. Addison-Wesley.
- [WALTER/FRITSCH 1994] Walter V., Fritsch D.: Modelling And Storage Of Road Network Data. In: Advanced Geographic Data Modelling. Hrsg.: M. Molenaar, Sylvia de Hoop. Netherlands Geodetic Commission, Nr. 40, S. 109-120.
- [WINTER 1996a] Winter S.: Unsichere topologische Beziehungen zwischen ungenauen Flächen. DGK Reihe C, Heft Nr. 465, München.
- [WINTER 1996b] Winter S.: Beobachtungsunsicherheit und topologische Relationen. In: Datenqualität und Metainformation in Geo-Informationssystemen, Tagungsband zum Workshop, 7. bis 8. Oktober 1996 in Rostock.
- [WORBOYS 1995] Worboys M. F.: GIS - A Computing Perspective. Taylor & Francis.
- [ZfV SONDERHEFT 1990] Digitale Leitungsdokumentation. Redaktion Schrader B., Heft 4.
- [ZIETLOW 1993] Zietlow M.: Bäume und Schlangen im PC-Paradies. PC-Professionell, April 1993.

Lebenslauf

Daten zur Person

Name: Norbert Rösch
Geburtsdatum: 14.2.1958
Geburtsort: München
Familienstand: nicht verheiratet, ein Kind
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulbildung

1965-1968 Grundschole Oberkirch
1968-1970 Realschule Oberkirch
1970-1974 Gymnasium Oberkirch
1974-1978 Gymnasium Sasbach (Heimschule Lender)
1978 Abitur

Tätigkeit vor dem Studium

1978-1980 Zivildienst beim Arbeiter-Samariter-Bund in Achern
1982 Vorpraktikum beim Vermessungsbüro Seitz in Offenburg (ÖbVI)

Studium

1980-1981 Studium der Rechtswissenschaften an der Universität Tübingen
1981 Wechsel nach Freiburg und Abbruch des Studiums nach der Zwischenprüfung
1982-1988 Studium der Geodäsie an der Universität Karlsruhe
1988 Zeugnis über die Diplomhauptprüfung

Berufliche Tätigkeit

1981-1982 Bauarbeiter bei der Fa. Rendler in Oberkirch (Hoch- und Tiefbau)
1988-1989 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Erdmessung der Universität Hannover
1989-1993 Systemanalytiker, beratender Ingenieur und Instruktor für Schulungen bei der Fa. Graphservice GmbH Karlsruhe
seit WS 1993 Wissenschaftlicher Angestellter am Geodätischen Institut in Karlsruhe