

---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 6417

# **Spannungsanalyse und Spannungsbewertung in Verbunden mit Gradientenwerkstoffen**

**W. Schaller**

**Institut für Materialforschung**

**Februar 2000**

---



**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6417

**Spannungsanalyse und  
Spannungsbewertung in Verbunden mit  
Gradientenwerkstoffen**

W. Schaller

Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte  
Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
2000

**Als Manuskript gedruckt**  
**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**  
**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH**  
**Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**  
**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft**  
**Deutscher Forschungszentren (HGF)**  
**ISSN 0947-8620**

## Kurzfassung

Der vorliegende Bericht befaßt sich mit der Analyse und Bewertung thermischer Spannungen in gradierten Mehrschichtverbunden. In einem Verbund mehrerer Schichten, die aus verschiedenen Materialien gefertigt werden, ergeben sich nach dem Fügen der Schichten im allgemeinen thermische Spannungen. Bedingt sind diese Spannungen durch die unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten der Materialien der verschiedenen Schichten. Es wird untersucht, welche Möglichkeiten es gibt diese thermischen Spannungen durch Einführung einer Gradientenschicht zu beeinflussen und im besonderen zu minimieren.

Ein Gradientenmaterial ist ein Werkstoff, dessen Materialeigenschaften, z.B. der Elastizitätsmodul, sich ortsabhängig kontinuierlich verändern, also einen Gradienten aufweisen. Im speziellen wird hier der Fall einer gradierten Übergangsschicht untersucht. Dabei dient der Gradientenwerkstoff dazu, den Sprung der Materialeigenschaften in einem mehrschichtigen Werkstoffverbund abzubauen. Die gradierte Schicht wird bei der Herstellung des Schichtverbundes zwischen zwei Schichten aus unterschiedlichen Materialien eingebracht. Die gradierte Schicht besteht dabei aus einem Werkstoffgemisch, das an der einen Grenzfläche vollständig aus dem Material der anliegenden Schicht besteht, an der anderen Grenzfläche aus dem Material der anderen Schicht. Innerhalb der gradierten Schicht kann der Verlauf des Mischungsverhältnisses im allgemeinen beliebig eingestellt werden. Der Verlauf folgt der sogenannten Gradierungsfunktion.

Die thermischen Spannungen im Mehrschichtverbund können durch den Verlauf der Gradierungsfunktion und der Dicke der gradierten Schicht beeinflußt werden. Es werden verschiedene Möglichkeiten gezeigt eine optimale Funktion zu finden. Die Optimierung bezieht sich nicht allein auf die Spannungen sondern auch alle von den Spannungen im Bauteil abgeleiteten Größen, wie den Spannungsintensitätsfaktor bei Rissen und die Ausfallwahrscheinlichkeit eines keramischen Bauteils.

Die optimale Funktion für eine dieser Anforderungen kann entweder durch Auswahl einer geeigneten Funktion aus einer Anzahl von vorgegebenen Funktionen gefunden werden, oder durch numerische Verfahren. Es werden zwei Verfahren vorgestellt, das Gradientenverfahren und die Methode der Schwarmuche.

Im weiteren wird das Verhalten von Rissen in Gradientenwerkstoffen untersucht, ferner die Auswirkung einer Gradierung auf plastische Verformungen.

# Abstract

## Stress Analysis and Stress Evaluation in Joints with Functionally Graded Materials

This report deals with the analysis and valuation of thermal stresses in graded multi-layer joints. In a joint of several layers, each of which consists of different materials, thermal stresses occur after the joining of the layers due to the different thermal expansion coefficients of the different materials. The possibilities to influence and especially to minimize these stresses by introducing a graded layer will be investigated.

In a functionally graded material the material parameters, e.g. the Young's modulus, differ locally, i.e. they show a gradient in the material parameters. Here, the case of a graded interlayer will be investigated. In this connection the functionally graded material is used to avoid the jump of the materials data between the layers.

When producing the joint the graded layer is placed between two layers consisting of different materials. The graded layer consists of a mixture of the materials of the two layers. At one interface the graded material completely consists of the material of the layer next to this interface, at the other interface it completely consists of the other material. Inside the graded layer the distribution of the mixing ratio follows a so-called transition function.

The thermal stresses in the multi-layer joint can be influenced by the transition function and the thickness of the graded layer.

Different possibilities of finding an optimum function are presented. It is not only possible to optimize stresses, but also any values derived from the stresses, e.g. a stress intensity factor of a crack or the failure probability of a ceramic component.

The optimum transition function for one of these requirements can be found either by choosing a suitable function from a number of default functions or by using numerical methods. Two methods are introduced, the gradient algorithm and the method of swarm search.

In addition, the behavior of cracks in functionally graded materials is examined, in comparison with the effect of a graded layer on plastic deformations.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kenntnisstand</b>	<b>3</b>
2.1	Definition des Gradientenwerkstoffes . . . . .	3
2.2	Herstellungsverfahren . . . . .	5
2.2.1	EB-PVD-Verfahren . . . . .	5
2.2.2	Elektrodenabtragung . . . . .	6
2.2.3	Druckschlickergießen mit Porositätsgradienten . . . . .	7
2.3	Charakterisierung des Gradientenwerkstoffes . . . . .	9
2.3.1	Berechnung des Elastizitätsmoduls nach Tuchinskii . . . . .	10
2.3.2	Berechnung des Wärmeausdehnungskoeffizienten nach Hoffmann und Stroppe . . . . .	10
2.3.3	Die lineare Mischungsregel . . . . .	11
2.4	Spannungsanalyse in Gradientenwerkstoffen . . . . .	12
2.4.1	Die thermische Belastung . . . . .	12
2.4.2	Berechnung der Spannungen in gradierten Mehrschichtverbunden . . . . .	14
2.4.3	Klassifizierung der Spannungen in Mehrstoffverbunden . . . . .	14
2.5	Anwendungsbeispiele für Gradientenwerkstoffe . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Analytische Berechnung der Spannungen in Gradientenwerkstoffen</b>	<b>18</b>
3.1	Theorie der Spannungsberechnung im ebenen Mehrschichtverbund	18
3.2	Grenzen der Anwendung von Gradientenwerkstoffen . . . . .	22
3.3	Anwendungsbeispiel der Theorie . . . . .	27

<b>4</b>	<b>Spannungsoptimierung in Verbunden mit Gradientenwerkstoffen</b>	<b>32</b>
4.1	Optimierung durch Auswahl aus vorgegebenen Übergangsfunktionen	33
4.1.1	Einführung . . . . .	33
4.1.2	Variation von Schichtdicken und Übergangsfunktionen in einem Dreischichtverbund . . . . .	33
4.1.3	Beispiel für die Bestimmung einer Optimalfunktion in einem Verbund mit Porositätsgradienten . . . . .	40
4.2	Optimierung mit Hilfe des Schwarmsuch- und Gradientenverfahrens	48
4.2.1	Anwendung von numerischen Optimierungsverfahren bei Gradientenwerkstoffen . . . . .	48
4.2.2	Das Gradientenverfahren . . . . .	49
4.2.3	Das Schwarmsuchverfahren . . . . .	50
4.2.4	Anwendungsbeispiele für das Gradientenverfahren . . . . .	50
4.2.5	Anwendungsbeispiele für das Schwarmsuchverfahren . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Spannungsintensitätsfaktoren bei Rissen in gradierten Verbunden</b>	<b>75</b>
5.1	Risse senkrecht zur Grenzfläche in nicht gradierten Zweischichtverbunden . . . . .	77
5.2	Risse senkrecht zur Grenzfläche in gradierten Verbunden . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Plastische Verformungen in Gradientenwerkstoffen</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Materialparameter</b>	<b>104</b>
A.1	Temperaturabhängige Kennwerte des Wärmedämmschichtsystems in Kapitel 3.3 . . . . .	104
A.2	Die Materialkombination 1 . . . . .	105
A.3	Temperaturabhängigkeit der Materialparameter in Kapitel 4.1.3 . . . . .	106
A.3.1	Wärmekapazität . . . . .	106
A.3.2	Dichte . . . . .	106
A.3.3	Wärmeleitfähigkeit . . . . .	106
A.3.4	Elastizitätsmodul . . . . .	107
A.3.5	Wärmeausdehnungskoeffizient . . . . .	107

# Kapitel 1

## Einleitung

In der Technik ist es in vielen Fällen nötig einen Kompromiß zwischen verschiedenen Eigenschaften eines Bauteils zu finden. So wird die Forderung nach einer hohen Oberflächenhärte oder einer korrosionsfesten Oberfläche verbunden mit der Forderung nach einer hohen Festigkeit des gesamten Bauteils. Im allgemeinen werden, um diese Forderungen zu erfüllen, Werkstoffverbunde eingesetzt. Ein solcher Verbund kann ortsabhängig die gewünschten Eigenschaften aufweisen. Beispiele für solche Verbunde sind korrosionsverhindernde Beschichtungen auf stählernen Bauteilen. Des weiteren werden Keramikoberflächen auf metallischen Bauteilen aufgebracht, die in thermischen Maschinen als Wärmedämmschichten dienen, oder als Schutz gegen abrasive Medien, wie bei modernen Fahrradfelgen. Ein Verbund aus zwei oder mehreren verschiedenen Werkstoffen bringt immer das Problem der Schichtablösung mit sich. Um das Problem des Sprunges der Materialeigenschaften zu vermindern und außerdem eine noch freiere Wahl bei der Anpassung der Werkstoffeigenschaften an die ortsabhängige Belastung zu ermöglichen, wurden die Gradientenwerkstoffe entwickelt.

Das Konzept der Gradientenwerkstoffe (Englisch : 'Functionally Graded Materials', FGM) wurde Mitte der achtziger Jahre in Japan entwickelt [1]. Dabei wurde ursprünglich an eine Verwendung in der Luft- und Raumfahrttechnik gedacht. Inzwischen hat sich allerdings gezeigt, daß das Einsatzgebiet dieser Werkstoffe fast unbegrenzt ist.

In einem Gradientenwerkstoff werden Werkstoffeigenschaften zweier verschiedener Materialien in einem Mehrstoffverbund kontinuierlich ineinander überführt. Innerhalb dieser gradierten Schicht folgen die Materialeigenschaften einer Gra-

dierungsfunktion. Diese gradierte Schicht kann nach verschiedenen Verfahren hergestellt werden. Je nach Herstellungsverfahren ist es entweder möglich eine bestimmte Gradierungsfunktion entsprechend den Erfordernissen einzustellen, oder es entsteht bei dem Verfahren ein Verlauf der Werkstoffeigenschaften, der nicht oder nur wenig beeinflusst werden kann.

Bedingt durch die unterschiedlichen Werkstoffeigenschaften, im wesentlichen die Wärmeausdehnungskoeffizienten der verschiedenen Materialien, entstehen in einem Mehrstoffverbund im allgemeinen thermische Eigenspannungen. Diese Spannungen können in hohem Maße durch die gradierte Schicht und insbesondere durch den Verlauf der Gradierungsfunktion beeinflusst werden.

Die Analyse der Spannungen in Mehrschichtverbunden und die Möglichkeiten, die der Einsatz von Gradientenwerkstoffen bei der Beeinflussung von thermischen Spannungen in Mehrstoffverbunden bietet, ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

# Kapitel 2

## Kenntnisstand

### 2.1 Definition des Gradientenwerkstoffes

Gradientenwerkstoffe sind Werkstoffe deren Materialeigenschaften vom Ort abhängig sind. Diese Abhängigkeit kann unbeabsichtigt bei der Verarbeitung eines Materials entstehen oder beabsichtigter Teil des Herstellungsprozesses sein. Wenn z.B. ein Herstellungsverfahren die Diffusion eines Stoffes in einen anderen vorsieht stellt sich im allgemeinen ein Gradient der Konzentration des Stoffes ein, der in das andere Material hineindiffundiert. Dieser Gradient entsteht zufällig und wird nicht für die Funktion des Bauteils genutzt.

Im Gegensatz zu diesem natürlichen Gradienten sollen hier Werkstoffe untersucht werden, bei denen der Gradient der Werkstoffeigenschaften die Funktion des Bauteils unterstützt oder bestimmt. Die Erzeugung dieses Gradienten ist dabei ein wesentlicher Teil des Herstellungsverfahrens.

In der vorliegenden Arbeit werden Gradientenwerkstoffe nur in der Form einer gradierten Zwischenschicht in einem Mehrstoffverbund untersucht. Die gradierte Schicht erlaubt dabei den kontinuierlichen Übergang der Materialeigenschaften der beiden angrenzenden Schichten. Innerhalb der gradierten Schicht befindet sich demzufolge eine Mischung der Materialien der angrenzenden Schichten. Den einfachsten Fall eines gradierten Schichtverbundes zeigt Abbildung 2.1. Die Abbildung zeigt den kontinuierlichen Verlauf der Materialeigenschaften innerhalb des Verbundes.

Zur Berechnung der Spannungen in einem Mehrschichtverbund müssen alle Materialparameter als Funktion der Zusammensetzung bekannt sein, die einen

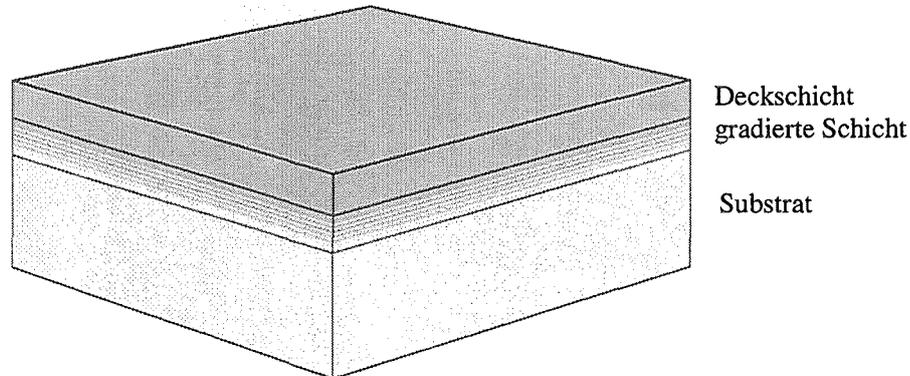


Abbildung 2.1: Gradiertes Mehrschichtverbund.

Einfluß auf die Spannungen im Bauteil besitzen.

Zur Analyse der mechanischen und thermischen Spannungen benötigt man die Materialparameter:

- Elastizitätsmodul  $E$ ,
- Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$ ,
- Querkontraktionszahl  $\nu$ .

Thermische Spannungen werden durch Temperaturänderungen im Bauteil verursacht. Damit werden zur Spannungsberechnung auch die Parameter benötigt, die das thermische Verhalten des Werkstoffes beschreiben:

- Dichte  $\rho$ ,
- Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ,
- Wärmekapazität  $c_m$ .

Bei der Herstellung eines Gradientenwerkstoffes wird das Mischungsverhältnis der beteiligten Stoffe an jedem Ort innerhalb der gradierten Schicht vorgegeben. Der Verlauf dieses Mischungsverhältnisses folgt der Gradierungsfunktion. Die Abbildung 2.2 zeigt dies für eine lineare Gradierungsfunktion.

Aus dem Verlauf des Mischungsverhältnisses beider Stoffe und dem Wert jedes Materialparameters werden die Materialdaten des Gradientenwerkstoffes bestimmt. Dies kann anhand von theoretisch hergeleiteten Mischungsregeln geschehen oder anhand von Werten, die getrennt für verschiedene Mischungsverhältnis ermittelt werden (Details siehe Abschnitt 2.3).

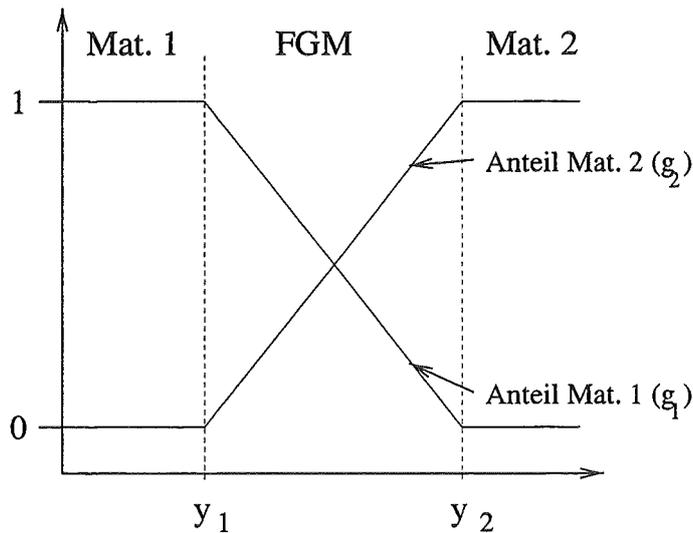


Abbildung 2.2: Verlauf des Mischungsverhältnisses zweier Stoffe in einer gradierten Schicht.

## 2.2 Herstellungsverfahren

Es gibt die verschiedensten Verfahren zur Herstellung von Gradientenwerkstoffen. Eine Übersicht bietet z.B. [1], [2] oder [3]. Es sollen hier exemplarisch drei Verfahren vorgestellt werden.

### 2.2.1 EB-PVD-Verfahren

EB-PVD steht für Electron Beam-Physical Vapor Deposition. Bei diesem Verfahren, wie es im Institut für Werkstoff-Forschung am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) verwendet wird, wird das aufzubringende Material mit Hilfe eines Elektronenstrahls verdampft und kondensiert anschließend auf der Probe [4]. Mit diesem Verfahren werden Wärmedämmschichten auf thermisch hochbelasteten Bauteilen, insbesondere in Gasturbinen, hergestellt. Prinzipiell

besteht ein solches Wärmedämmschichtsystem aus einer Nickelsuperlegierung als Substrat, und der Wärmedämmschicht. Diese wird hier aus Zirkondioxid hergestellt. Um die Haftung der Wärmedämmschicht zu verbessern, wird zwischen den beiden Schichten eine 100  $\mu\text{m}$  dicke Haftvermittlerschicht aus *NiCoCrAlY* aufgebracht. Diese Schicht ist Aluminiumhaltig. Da die Wärmedämmschicht sauerstoffdurchlässig ist, bildet sich im Betrieb des Bauteils an der Oberfläche der Haftvermittlerschicht eine Schicht aus Aluminiumoxid von 2-5  $\mu\text{m}$  Dicke. Im hier vorgestellten Verfahren wird diese Schicht bereits bei der Herstellung aufgebracht, um eine Gradierung von Aluminiumoxid auf das Zirkondioxid der Wärmedämmschicht zu ermöglichen.

Die Probe wird horizontal über zwei Tiegel mit Aluminiumoxid und Zirkondioxid angebracht (Abb. 2.3). Ein einzelner schnell wechselnder Elektronenstrahl bewirkt die Verdampfung der beiden Stoffe. Das unterschiedliche Mischungsverhältnis der beiden Stoffe wird durch die unterschiedliche Intensität der Einstrahlung auf die Tiegel erreicht. Durch dieses Verfahren entwickelt sich in der Zirkondioxidschicht eine kolumnare Struktur, d.h. diese Schicht besteht aus einzelnen eng nebeneinander stehenden Säulen ohne feste Verbindung. Dadurch ergibt sich für diese Schicht ein sehr geringer effektiver Elastizitätsmodul, der nur ca. ein Zehntel des Elastizitätsmoduls des massiven Materials erreicht. Durch das Kondensieren des verdampften Materials erhitzt sich das Substrat auf Temperaturen von ca. 1000°C. Beim Abkühlen auf Raumtemperatur entstehen dadurch starke Eigenspannungen. Spannungsberechnungen zu einem Verbund der nach diesem Verfahren hergestellt wurde, befinden sich in Kapitel 3.3.

## 2.2.2 Elektrodenabtragung

Als Ausgangsmaterial wird ein offen poröser und elektrisch leitfähiger Werkstoff verwendet. Dieses Material läßt sich pulvermetallurgisch herstellen. Das Rohbauteil wird in einer Elektrolysezelle als Elektrode benutzt (Abb. 2.4). Im Laufe des Herstellungsprozesses wird das Material elektrochemisch abgetragen. Durch den Stromfluß in der Elektrode entstehen Potentialunterschiede, die zu einer lokal unterschiedlichen Abtragung des Materials führen. Durch geeignete Prozeßführung ist es möglich, damit einen Porositätsgradienten einzustellen. Das Bauteil mit dem Porositätsgradienten kann anschließend, z.B. mit einem anderen Metall, ausgegossen werden, so daß sich ein gradierter Übergang zwischen den beiden Materialien einstellt. Die Fügtemperatur des Verbundes entspricht

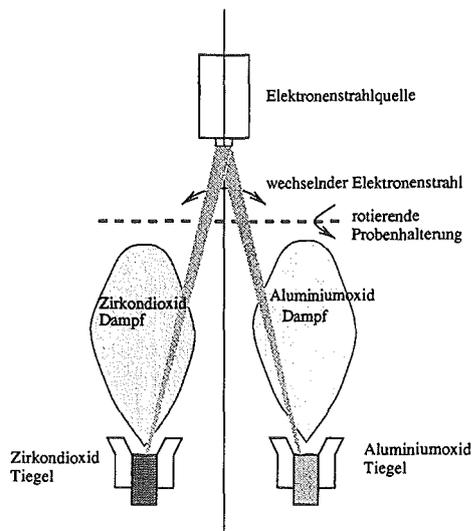


Abbildung 2.3: Das EB-PVD-Verfahren (nach [4]).

der Schmelztemperatur des Materials, mit dem die Form ausgegossen wird. Eine ausführliche Darstellung des Verfahrens findet sich in [5].

Eine Anwendung dieses Verfahrens findet sich in der Elektrotechnik. Beim Schalten sehr hoher Ströme werden Kontaktstücke verwendet, die aus einem Wolfram-Kupfer-Verbund bestehen. Der Wolframgehalt eines solchen Bauteils ist etwa 80 %. Diese Mischung ist sehr resistent gegen den Abbrand der durch Lichtbögen beim Schaltvorgang entsteht. An den Wolfram-Kupfer-Verbund schließt sich homogenes Kupfer an, um den elektrischen Widerstand zu verringern [6]. Dabei entstehen an der Grenzschicht zwischen dem Wolfram-Kupfer-Verbund und der reinen Kupferschicht Spannungsüberhöhungen, ferner thermische Eigenspannungen im ganzen Verbund. Diese sollen durch Einführung der Gradierung verringert werden. Berechnungen dazu finden sich in Kapitel 6.

### 2.2.3 Druckschlickergießen mit Porositätsgradienten

Gradientenwerkstoffe können auch mit einem Porositätsgradienten hergestellt werden. Bei dem in [7] beschriebenen Verfahren wird kontinuierliches Druckfiltern eines wässrigen Schlickers angewandt, der Keramik- und Wachspartikel enthält. Die Wachspartikel dienen als Platzhalter für die Poren, die durch Ausbrennen des Wachses vor dem Sintern erzeugt werden.

Durch Kontrolle und Einstellung des Filterdruckes und der Konzentration der Wachspartikel im Schlicker kann ein definierter Gradient des Wachsanteils im

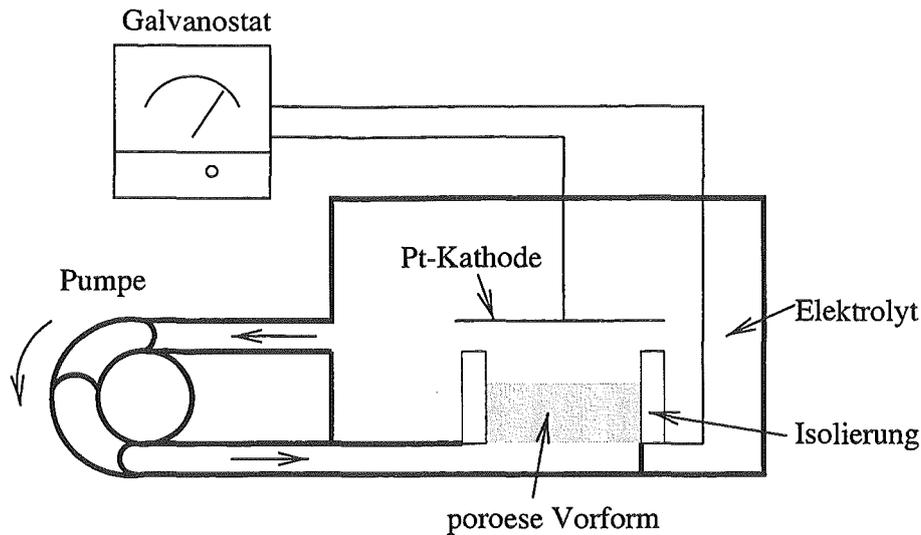


Abbildung 2.4: Das Verfahren der Elektrodenabtragung (nach [5]).

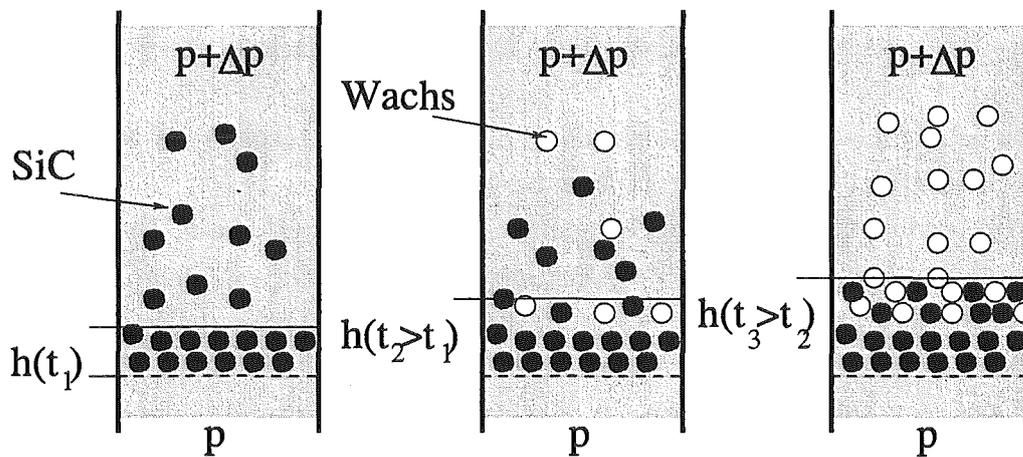


Abbildung 2.5: Das Druckschlickergießen mit Porositätsgradienten (nach [7]).

Filterkuchen erzeugt werden (Abb. 2.5). Die lokale Porosität und die Porengröße ist abhängig von der Wachskonzentration und der Größe der Wachspartikel. Da hier nach dem Ausbrennen nur ein Werkstoff mit konstanten Wärmeausdehnungskoeffizient vorliegt, ist das Bauteil bei Raumtemperatur spannungsfrei. Thermospannungen können nur durch einen Temperaturgradienten während des Betriebes des Bauteils entstehen. Eine Darstellung dieser Spannungen findet sich in Kapitel 4.1.3. Dort wird auch auf die Verwendung eingegangen.

## 2.3 Charakterisierung des Gradientenwerkstoffes

Im allgemeinen kann bei einem Gradientenwerkstoff der Verlauf des Konzentrationsverhältnisses der beiden beteiligten Werkstoffe eingestellt werden. Zur Berechnung von thermischen Spannungen, Eigenspannungen und mechanischen Spannungen ist es nötig die Materialdaten, wie in Abschnitt 2.1 aufgelistet (z.B. Elastizitätsmodul oder Wärmeausdehnungskoeffizient), zu kennen. Diese Materialdaten müssen für jeden Ort im gradierten Werkstoff, und damit für jedes Mischungsverhältnis bekannt sein.

Eine Methode diese Werte zu erhalten, ist es, die Materialdaten für verschiedene Mischungsverhältnisse experimentell zu bestimmen und die Zwischenwerte zu interpolieren (siehe [8], hier angewandt in Abschnitt 4.1.3). Diese Methode ist für alle Materialkombinationen und Materialparameter anwendbar, erfordert aber umfangreiche experimentelle Untersuchungen. Bei Stoffverbunden, bei denen die beteiligten Stoffe eine chemische Verbindung oder eine Legierung bilden, ist dies die einzig mögliche Methode. Bei Stoffen, die sich nicht vermischen, können die mechanischen Daten aus kontinuumsmechanischen Überlegungen hergeleitet werden.

Solche Stoffe bilden mikroskopisch einen heterogenen Werkstoff, in dem die beiden Materialien in getrennten Phasen vorliegen. Zur Berechnung des effektiven makroskopischen Verhaltens eines solchen Werkstoffes gibt es verschiedene Ansätze [9]-[16].

Häufig wird davon ausgegangen, daß sich Material  $M_1$  als kugelförmiger Einschuß in einer Matrix aus dem Material  $M_2$  befindet. Da die beiden Materialien bei dieser Betrachtung gegenseitig vertauscht werden können, ergeben sich im allgemeinen zwei Werte, eine obere und eine untere Grenze für den gesuchten Materialparameter.

Es gibt erweiterte Ansätze um die Mikrostruktur der Bauteile besser zu beschreiben. Ein Gradientenwerkstoff, bei dem unterschiedliche Metallanteile in den Keramikgrünkörper eingefügt werden, kann durch dieses Modell von sphärischen Einflüssen relativ gut beschrieben werden. Bei dem oben angesprochenen Wolfram-Kupfer Gradientenwerkstoff handelt es sich allerdings um eine Wolframmatrix, die mit Kupfer ausgegossen wird. Damit ergibt sich eine Skelettstruktur, bei der die beiden Werkstoffe ineinander greifen. Eine Beschreibung eines solchen

Verfahrens findet sich bei [14].

Für die zwei wichtigsten Materialparameter zur Spannungsberechnung, den Elastizitätsmodul und den Wärmeausdehnungskoeffizient, sind hier exemplarisch jeweils eine Mischungsregel dargestellt.

### 2.3.1 Berechnung des Elastizitätsmoduls nach Tuchinskii

Als Mischungsregel für den Elastizitätsmodul wird hier die Regel von Tuchinskii [14] vorgestellt. Es wird von einer skelettartigen Struktur ausgegangen. Durch diese Skelettstruktur ergibt sich keine Bevorzugung eines Materials, d.h. Material 1 und Material 2 sind vertauschbar. Die obere und untere Grenze bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls ergibt sich bei der Herleitung durch unterschiedliche Aufteilung der Skelettstruktur. Als obere Grenze ergibt sich:

$$E^+ = E_2 \left[ \frac{(1-a)}{(1-a^2) + (E_1/E_2)a^2} + \frac{a}{(1-a)^2 + (E_1/E_2)(2-a)a} \right]^{-1}. \quad (2.1)$$

Die untere Grenze ist:

$$E^- = E_2 \left[ (1-a)^2 + \frac{E_1}{E_2}a^2 + \frac{2(E_1/E_2)a(1-a)}{a + (E_1/E_2)(1-a)} \right], \quad (2.2)$$

mit:

$$a = \cos\left(\frac{1}{3}\arccos(1-2c) + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2},$$

und:

$E_1$  = Elastizitätsmodul des Materials 1,

$E_2$  = Elastizitätsmodul des Materials 2,

$c$  = Volumenkonzentration des Materials 1.

### 2.3.2 Berechnung des Wärmeausdehnungskoeffizienten nach Hoffmann und Stroppe

Die Berechnung des Wärmeausdehnungskoeffizienten wird hier nach dem in [12] vorgestellten Verfahren gezeigt:

$$\alpha = \frac{K_2(4G_2 + 3K_1)\alpha_2 + c[4G_2(\alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2) + 3K_1 K_2(\alpha_1 - \alpha_2)]}{K_2(4G_2 + 3K_1) + 4G_2(K_1 - K_2)c} \quad (2.3)$$

Die Größen  $G_1, K_1, \alpha_1$  stehen dabei für die in diesem Modell eingeschlossene Größe,  $c$  ist hier die Konzentration dieser Komponente.  $G$  ist der Schubmodul

und  $K$  der Kompressionsmodul der Materialien. Durch Einsetzen beider Materialien als eingeschlossene bzw. umhüllende Größe ergibt sich eine obere und untere Grenze.

### 2.3.3 Die lineare Mischungsregel

Für den Werkstoffverbund Wolfram-Kupfer wurden Elastizitätsmodul und Wärmeausdehnungskoeffizient nach den obigen Gleichungen berechnet. Abbildung 2.6 zeigt für beide Werkstoffparameter die obere und untere Grenze in Abhängigkeit von der Konzentration des Kupfers im Vergleich mit einer linearen Mischungsregel. Es ist zu erkennen, daß der Unterschied zwischen der linearen Mischungsregel und den spezielleren Mischungsregeln bei 10 % liegt. Für theoretische Untersuchungen ist die lineare Mischungsregel genügend. In den meisten Betrachtungen der vorliegenden Arbeit wurde demzufolge die lineare Mischungsregel verwendet. Man geht davon aus, daß sich die Werkstoffparameter proportional zum Mischungsverhältnis der Stoffe verhalten. Der Elastizitätsmodul wird dabei nach der Formel:

$$E = c_1 E_1 + c_2 E_2, \quad (2.4)$$

der Wärmeausdehnungskoeffizient nach

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \quad (2.5)$$

berechnet.  $c$  ist dabei die Konzentration eines Werkstoffes. Nach [11] entspricht die lineare Mischungsregel für den Elastizitätsmodul einer Obergrenze für den Elastizitätsmodul des Mischwerkstoffes, wenn die Querkontraktionszahl in den beiden Werkstoffen konstant ist. Diese Voraussetzung wird in der vorliegenden Arbeit oft getroffen.

Bei Anwendung der linearen Mischungsregel für die verschiedenen Materialparameter ergibt sich eine einfache Formulierung der Gradierungsfunktion. Mit der Beziehung

$$c_1 = 1 - c_2$$

ergibt sich

$$M = M_1 + (M_2 - M_1)c_2. \quad (2.6)$$

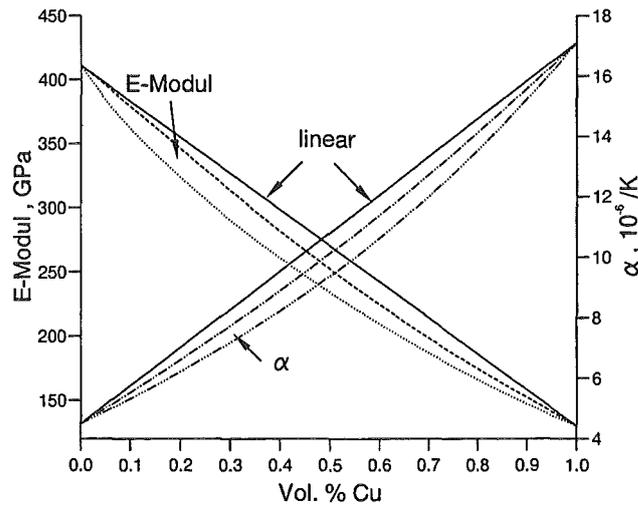


Abbildung 2.6: Die Materialparameter  $E$  und  $\alpha$  in Abhängigkeit der Kupferkonzentration im Werkstoff, berechnet nach verschiedenen Mischungsregeln.

wobei für  $M$  der entsprechende zu gradierende Materialparameter eingesetzt wird. Der Verlauf der Konzentration  $c_2$  kann mit einer Funktion der Koordinate in Gradierungsrichtung beschrieben werden, also:

$$c_2 = f(\hat{y})$$

wobei  $\hat{y}$  eine normierte Koordinate ist, die am Beginn der gradierten Schicht den Wert 0 annimmt, am Ende der gradierten Schicht den Wert 1, ferner gilt:  $f(0) = 0, f(1) = 1$ .

Es ergibt sich also für die Gradierungsfunktion unter Anwendung einer linearen Mischungsregel:

$$M(y) = M_1 + (M_2 - M_1)f(\hat{y}). \quad (2.7)$$

## 2.4 Spannungsanalyse in Gradientenwerkstoffen

### 2.4.1 Die thermische Belastung

Gradientenwerkstoffe werden im wesentlichen im Hinblick auf Bauteile mit thermischen Spannungen eingesetzt. Die Auswirkungen mechanischer Lasten werden hier nicht behandelt.

Thermische Spannungen entstehen zum einen durch unterschiedliche Wärmeausdehnungskoeffizienten im Bauteil, zum anderen durch Temperaturgradienten. Auslöser der Thermospannung ist immer die Ausdehnung des Werkstoffes, bedingt durch eine Temperaturänderung relativ zu einer Referenztemperatur, bei der das Bauteil spannungsfrei ist. Bei einem Verbund wird diese spannungsfreie Referenztemperatur im allgemeinen die Temperatur sein, bei der der Verbund gefügt wurde. Man kann drei Fälle für thermische Spannungen unterscheiden:

- Im ganzen Bauteil findet eine homogene Temperaturänderung statt. Dies ist z. B. der Fall, wenn der Verbund bei relativ hohen Temperaturen gefügt und auf Raumtemperatur abgekühlt wird. Thermische Spannungen können nur entstehen, wenn der Verbund aus Materialien mit unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten besteht. Für die Temperaturdifferenz im Bauteil gilt  $\Delta T = \text{const}$ . Wenn das Bauteil bei hohen Temperaturen gefügt wird (z.B. Löten eines Keramik-Metall-Verbundes bei  $1200^\circ\text{C}$ ) entstehen auch hohe Spannungen im Bauteil.
- Im Bauteil findet sich ein stationärer Temperaturgradient. Ein solcher Gradient kann sich im stationären Betrieb einstellen, wenn z.B. eine keramische Wärmedämmschicht durch heiße Brenngase aufgeheizt wird, während das metallische Substrat gekühlt wird. Die Temperaturdifferenz im Bauteil ist damit ortsabhängig, aber stationär:  $\Delta T = f(y)$ . Da die Verbunde meist bei hohen Temperaturen gefügt werden und der Betrieb bei Temperaturen stattfindet, die etwas unter der spannungsfreien Fügetemperatur liegen, sind die entstehenden Spannungen oft gering. Die Temperaturverteilung kann analytisch berechnet werden. Es wird der Fall eines eindimensionalen Temperaturgradienten vorausgesetzt. Im stationären Fall muß die Wärmestromdichte an jedem Ort konstant sein:

$$\dot{q}(y) = \lambda(y) \frac{dT}{dy} = \text{const}$$

wobei  $\lambda(y)$  die ortsabhängige Wärmeleitfähigkeit ist. Durch Integrieren dieser Beziehung über die Dicke des Verbundes in y-Richtung kann das Temperaturprofil berechnet werden.

- Das Bauteil wird einer instationären Temperaturänderung unterworfen. Dabei wird eine Oberfläche des Bauteils entweder sehr schnell erhitzt oder

abgekühlt. Die Temperaturdifferenz im Bauteil ist damit orts- und zeitabhängig:  $\Delta T = f(y, t)$ . Beim Abkühlen der Oberfläche können sich sehr hohe Zugspannungen an der Oberfläche ergeben. Dieser Thermoschock ist die gefährlichste Art von thermischen Spannungen für ein Bauteil. Die Temperaturverteilung muß im allgemeinen numerisch berechnet werden.

#### **2.4.2 Berechnung der Spannungen in gradierten Mehrschichtverbunden**

Wenn in einem gradierten Mehrschichtverbund der Verlauf der Materialparameter, die Geometrie und die thermische Belastung festgelegt sind, können die im Bauteil auftretenden Spannungen berechnet werden.

Die Berechnung kann dabei numerisch, mit Hilfe der Finiten-Element-Methode, oder analytisch erfolgen. Die analytische Spannungsberechnung ist nur bei vereinfachten Fällen anwendbar, insbesondere bei unendlich ausgedehnten Verbunden, deren spannungserzeugende Temperaturänderung stationär oder homogen ist. Die dabei verwendeten Gleichungen sind von der Plattentheorie abgeleitet (siehe z.B. [17]).

Bei der Betrachtung von instationären Temperaturänderungen oder bei der Berechnung der Spannungen im Bereich des Randes eines Bauteils ist es notwendig, die Finite-Element-Methode anzuwenden. Da die wenigsten FEM-Programme die Möglichkeit bieten, ortsabhängige Materialdaten anzuwenden, wird es meist notwendig sein, diese Möglichkeit selbst zu schaffen. Dazu wurde bei dem hier verwendeten Programm 'ABAQUS' das Materialverhalten in einem speziellen Unterprogramm 'UMAT' vom Anwender selbst beschrieben [18].

#### **2.4.3 Klassifizierung der Spannungen in Mehrstoffverbunden**

Bei den Verbunden, die hier betrachtet werden sollen, handelt es sich im allgemeinen um Bauteile, die senkrecht zur Gradierungsrichtung weit ausgedehnt sind. Es ergeben sich somit Bereiche am Rand des Bauteils und Bereiche im Bauteil, die hinreichend weit von den Rändern entfernt sind und keinem Randeffect unterliegen. Ferner wird die Auswirkung von Rissen in den Schichten untersucht. In Abbildung 2.7 sind diese drei Bereiche im Bauteil dargestellt.

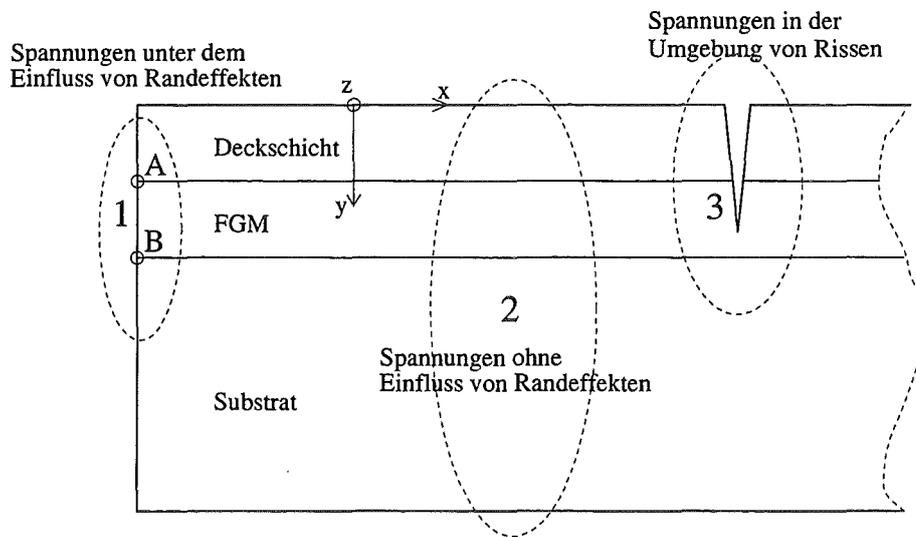


Abbildung 2.7: Die verschiedenen Bereiche des Bauteils.

Für die Spannungen am Schnittpunkt zwischen den Grenzflächen der einzelnen Schichten und dem freien Rand ergibt sich für die gradierten Werkstoffe ein großer Vorteil. Bei einem nicht gradierten Übergang ergeben sich an dieser Stelle singuläre Spannungen, die bei Anwendung eines gradierten Überganges verschwinden [19]. In Abbildung 2.8a sind die Verläufe der Spannung in y-Richtung für einen nicht gradierten Verbund (d.h. die Materialdaten in der gradierten Schicht entsprechen denen der ersten Schicht) und einem gradierten Verbund mit linearer Gradierungsfunktion dargestellt. Der singuläre Verlauf der Spannungen für den nicht gradierten Fall ist deutlich zu erkennen.

Singularitäten am freien Rand werden hier nicht im einzelnen behandelt. Die Theorie dazu ist z.B. in [20] und [21] aufgeführt.

Die Abbildung 2.8b zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  in einem Verbund, der in x- und z-Richtung unendlich ausgedehnt ist. In diesem Fall kann die Spannung analytisch berechnet werden (Details siehe Kap. 3). Auch hier wird der Vergleich zwischen einem nicht gradierten Verbund und einem linear gradierten Verbund gezeigt. Es ist zu erkennen, daß der nicht gradierte Verbund an der Grenzfläche einen Spannungssprung aufweist, der beim gradierten Verbund nicht auftritt. Diese Vermeidung des Spannungssprunges wird oft als Vorteil der Gradientenwerkstoffe genannt [1], [22], was aber so nicht zutrifft. Bei einer ungestörten

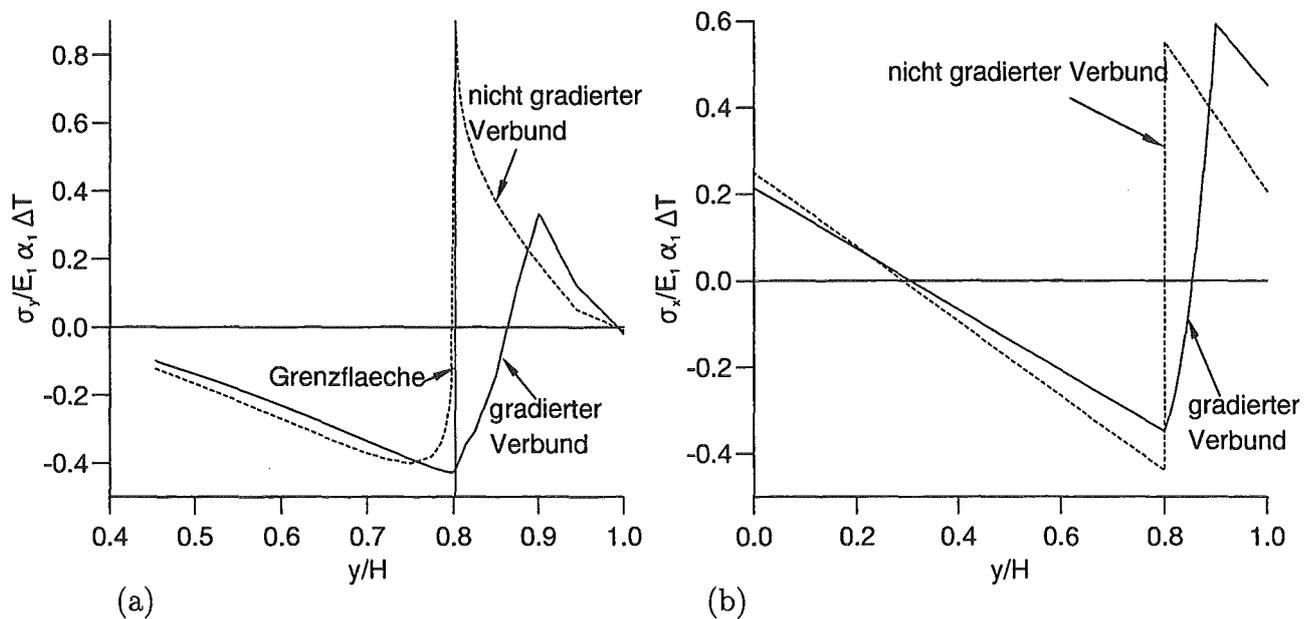


Abbildung 2.8: Spannungen (a) entlang des freien Randes des Bauteils, (b) weit entfernt vom Rand.

Grenzfläche hat der Spannungssprung keinen Einfluß. Treten auf der Grenzfläche allerdings Poren oder Einschlüsse auf, kann der Sprung zu Spannungsüberhöhungen führen (siehe [23]).

In der gradierten Schicht zeigt sich ein Spannungsverlauf, der sich wesentlich vom Verlauf der Spannung im entsprechenden Bereich des nicht gradierten Verbundes unterscheidet. In den anderen Schichten sind diese Unterschiede geringer. Das Ausmaß des Einflusses der gradierten Schicht ist im wesentlichen von der Dicke dieser Schicht abhängig (Siehe Abschnitt 3.2).

## 2.5 Anwendungsbeispiele für Gradientenwerkstoffe

Bei den Gradientenwerkstoffen handelt es sich um ein Konzept, das prinzipiell auf jede Beanspruchung eines Werkstoffes angewandt werden kann. So ist nicht nur eine Gradierung der mechanischen Materialparameter möglich, sondern ebenso z. B. der elektrischen (siehe [24]) oder akustischen (siehe [25]) Eigenschaften.

In der vorliegenden Arbeit sollen allerdings nur Gradientenwerkstoffe betrachtet

werden, in denen eine Gradierung der mechanischen Werkstoffparameter vorliegt. Anwendungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht wurden, werden in den Abschnitten 3.3 und 4.1.3 vorgestellt. Bei beiden Fällen handelt es sich um Verbunde mit keramischen Werkstoffen. In Abschnitt 3.3 wird eine keramische Wärmedämmschicht auf metallischen Gasturbinenbauteilen untersucht. In Abschnitt 4.1.3 wird eine poröse Brennkammerwand vorgestellt, die eine bessere Verdampfung von Brennstoff ermöglicht.

Der Einsatz von Gradientenwerkstoffen kann allerdings auch bei Verbunden aus zwei verschiedenen Metallen sinnvoll sein. In einem Projekt der TH Darmstadt wird ein Verbund aus Wolfram und Kupfer untersucht. Der Einsatzbereich dieses Verbundes entstammt der Elektrotechnik. Bei Hochstromschaltern wird der Strom im Kontaktstück durch Kupfer übertragen. Die Oberfläche dieses Kontaktstückes wird aus Wolfram angefertigt, um den Abbrand bei Lichtbogenbildung zu vermindern (siehe [6]). Die Wolframoberfläche besteht dabei aus einer porösen Vorform, die mit Kupfer ausgegossen wird. Es ergibt sich somit ein Wolframgehalt von ca. 80 % an der Oberfläche. Dieser Verbund unterliegt bei der Herstellung und im Betrieb durch die Lichtbogenbildung einer starken thermischen Belastung. Nach dem in Abschnitt 2.2.2 gezeigten Verfahren wird ein Gradient zwischen dem Kupfer und dem Wolfram hergestellt (siehe auch [26]). Ergebnisse der Spannungsberechnung werden in Kapitel 6 dargestellt.

# Kapitel 3

## Analytische Berechnung der Spannungen in Gradientenwerkstoffen

### 3.1 Theorie der Spannungsberechnung im ebenen Mehrschichtverbund

Wie in Abschnitt 2.4.2 erwähnt, ist es unter Anwendung der Plattentheorie möglich, die Spannungen in einem gradierten Verbund analytisch zu berechnen. Dabei können allerdings nur unendlich ausgedehnte Verbunde betrachtet werden. Die Grundgleichungen der Plattentheorie finden sich z.B. in [17]. Die Herleitung der Gleichungen für thermische Spannungen in gradierten Werkstoffen werden z.B. in [27] und [28] gezeigt. Zur Berechnung der Spannungen in einem Mehrschichtverbund werden die folgenden Annahmen gemacht:

- Perfekte Bindung zwischen den Schichten,
- Temperaturunabhängige Materialparameter,

Die Spannungen werden für eine in  $x$ - und  $z$ - Richtung unendlich ausgedehnte Platte berechnet, was den Spannungen im Inneren eines endlichen Verbundes entspricht. Die Dicke der Platte ist  $H$ . Die Abbildung 3.1 zeigt die Geometrie und das Koordinatensystem eines dreischichtigen Verbundes.

Für eine unendlich ausgedehnte Platte gilt:  $\sigma_y = 0$ . Das Problem ist in  $x$ - und  $z$ - Richtung symmetrisch, so daß gilt:  $\sigma_x = \sigma_z$  und  $\varepsilon_x = \varepsilon_z$ . Der Körper besitzt

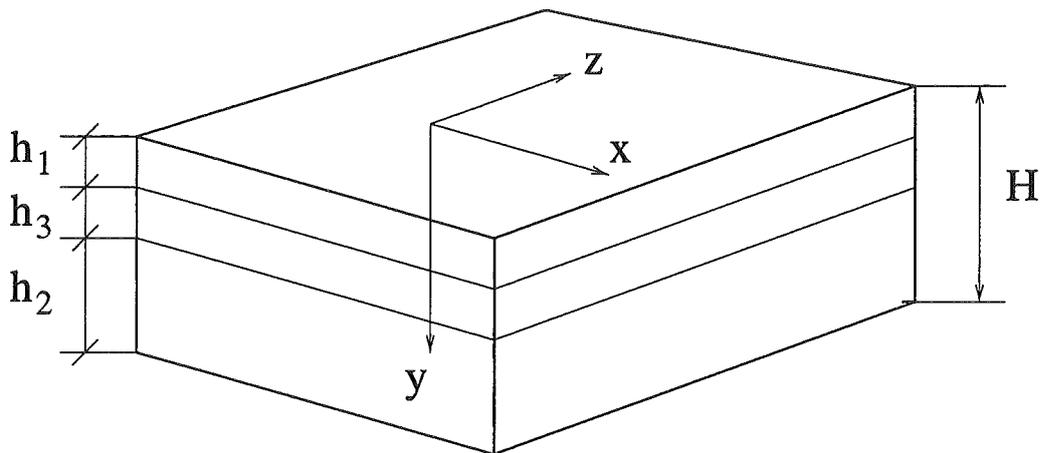


Abbildung 3.1: Geometrie und Koordinatensystem eines dreischichtigen Verbundes.

an der Stelle  $y = 0$  eine Dehnung  $\varepsilon_0$  und einen Krümmungsradius  $R$ . An einer beliebigen Stelle  $y$  ergibt sich durch die Krümmung der Platte eine zusätzliche Dehnung (siehe Abb. 3.2):

$$\Delta s = ds' - ds,$$

mit

$$ds = R d\theta.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_0 + \frac{ds' - ds}{ds},$$

oder

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_0 + \frac{y}{R}. \quad (3.1)$$

Entsprechend dem Hooke'schen Gesetz, der Symmetrie in x- und z-Richtung und Gl.(3.1) ergibt sich:

$$\sigma_x = \frac{E(y)}{1 - \nu(y)} \left( \left( \varepsilon_0 + \frac{y}{R} \right) - \alpha(y) \Delta T(y) \right), \quad (3.2)$$

$\Delta T(y)$  ist die Temperaturänderung relativ zu einer Referenztemperatur  $T_0$ , für die alle Spannungen gleich Null sind.

Um die unbekannt Parameter  $R$  und  $\varepsilon_0$  in Gl.(3.2) zu bestimmen, werden die Gleichgewichtsbedingungen für das System verwendet. Im vorliegenden Fall gibt es keine äußeren Kräfte und keine Behinderung der Verformung des Verbundes.

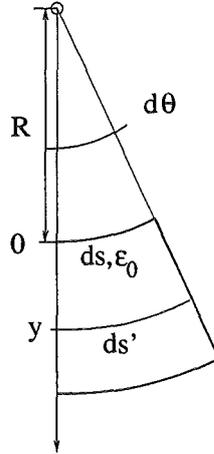


Abbildung 3.2: Bezeichnungen zur Herleitung der Dehnungen  $\varepsilon_x(y)$ .

Somit ergibt sich für das Gleichgewicht der Kräfte und Momente entlang der Ebene  $x = \text{const}$ :

$$\int_0^H \sigma_x(y) dy = 0, \quad (3.3)$$

$$\int_0^H \sigma_x(y) y dy = 0, \quad (3.4)$$

wobei  $H = h_1 + h_2 + h_3$ . Einsetzen der Gl.(3.2) in die Gleichungen (3.3) und (3.4) ergibt:

$$\int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu(y)} \left( \left( \varepsilon_0 + \frac{y}{R} \right) - \alpha(y) \Delta T(y) \right) dy = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu(y)} \left( \left( \varepsilon_0 + \frac{y}{R} \right) - \alpha(y) \Delta T(y) \right) y dy = 0. \quad (3.6)$$

Dies sind zwei Gleichungen für  $R$  und  $\varepsilon_0$ . Wenn  $\varepsilon_0$  aus diesen beiden Gleichungen eliminiert wird, ergibt sich:

$$R = \frac{\left( \int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu} y dy \right)^2 - \int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu} y^2 dy \int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu} dy}{\int_0^H \frac{E(y) \alpha(y) \Delta T(y) dy}{1-\nu} \int_0^H \frac{E(y) y dy}{1-\nu} - \int_0^H \frac{E(y) \alpha(y) \Delta T(y) y dy}{1-\nu} \int_0^H \frac{E(y) dy}{1-\nu}}. \quad (3.7)$$

Mit dieser Beziehung für  $R$  kann  $\varepsilon_0$  nach :

$$\varepsilon_0 = \frac{\int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu(y)} \left[ \alpha(y)\Delta T(y) - \frac{y}{R} \right] dy}{\int_0^H \frac{E(y)}{1-\nu(y)} dy}. \quad (3.8)$$

bestimmt werden.

Die Spannung in den Bereichen weit entfernt vom Rand kann nun anhand der Gleichungen (3.2), (3.7) und (3.8) berechnet werden. Gleichung (3.2) gilt für einen symmetrischen Spannungszustand (z.B. den rotationssymmetrische Spannungszustand). Für den ebenen Dehnungszustand muß Gl.(3.2) durch:

$$\sigma_x = \frac{E(y)}{1-\nu(y)^2} \left( \left( \varepsilon_0 + \frac{y}{R} \right) - \alpha(y)\Delta T(y)(1+\nu(y)) \right), \quad (3.9)$$

ersetzt werden. Die restliche Vorgehensweise erfolgt analog. Alle folgenden analytischen Rechnungen wurden mit dem symmetrischen Spannungszustand durchgeführt.

Bei einem gradierten Dreischichtverbund können einige Regeln zum Einfluß der Materialparameter gewonnen werden. Die Spannungsverläufe im Bauteil werden wesentlich vom Verhältnis der Materialparameter der beiden Schichten bestimmt. Wird das Verhältnis der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_1/\alpha_2$  konstant gehalten, aber die Beträge verändert, geht diese Änderung linear in den Betrag der Spannungen ein. Wird das Verhältnis der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_1/\alpha_2$  umgekehrt, bleiben die Beträge der Spannungen gleich, aber das Vorzeichen der Spannungen wird umgekehrt. Eine Umkehrung des Verhältnisses der Elastizitätsmoduli ändert nur den Betrag der Spannung. Eine Veränderung der Beträge der Elastizitätsmoduli bei gleichbleibendem Verhältnis geht linear in die Beträge der Spannungen ein.

Für Spannungen im Randbereich oder in der Umgebung von Rissen müssen die Spannungen im allgemeinen mit Hilfe der Finiten-Element-Methode berechnet werden. In Abbildung 3.3 ist der Spannungsverlauf in einem nicht gradierten Zweischichtverbund für die analytische Rechnung und eine FE-Rechnung dargestellt. Für die Ergebnisse der FE-Rechnung sind zwei Verläufe dargestellt. Wird der Spannungsverlauf in einem Abstand  $d$  vom Rand berechnet, der der fünffachen Höhe des Bauteils entspricht ( $d = 5H$ ) ist kein Unterschied zwischen analytischer Rechnung und FE-Rechnung erkennbar. Bei einem Abstand  $d = 0.8H$  ist der Einfluß des Randeffectes deutlich zu erkennen, allerdings liegen die Abweichungen bei 5 %.

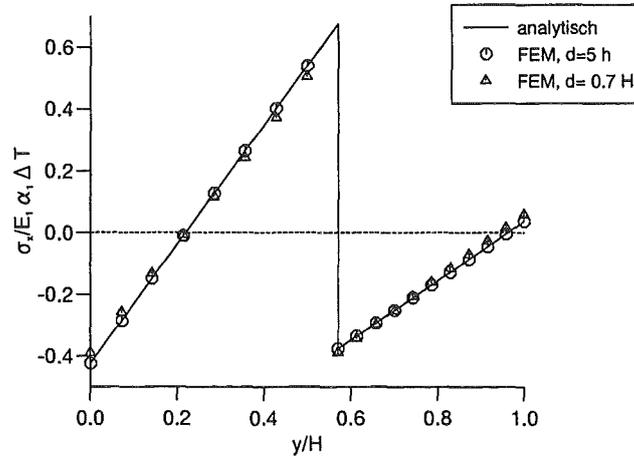


Abbildung 3.3: Vergleich des Spannungsverlaufes in einem Zweischichtverbund berechnet mit dem analytischen Verfahren und der Methode der finiten Elemente.

## 3.2 Grenzen der Anwendung von Gradientenwerkstoffen

Ursprünglich wurden Gradientenwerkstoffe entwickelt, um in Mehrstoffverbunden den Unterschied der thermischen Ausdehnungskoeffizienten auszugleichen und damit Spannungen in diesem Verbund zu verringern [29]. Der Schwerpunkt liegt dabei bei relativ dünnen Deck- und gradierten Schichten. Anhand der Gleichungen (3.2), (3.3) und (3.4) läßt sich erkennen, daß die Spannung in der Oberflächenschicht von der Dehnung  $\varepsilon_0$  und der Krümmung des Verbundes (beschrieben mit dem Krümmungsradius  $R$ ) bestimmt wird. Das Integral zur Berechnung des Kräfte- und Momentengleichgewichts wird über die Dicke des Verbundes gebildet. Es kann in Integrale für die einzelnen Schichten aufgeteilt werden (hier nur für das Kräftegleichgewicht):

$$\int_0^{h_1} \sigma_x(y) dy + \int_{h_1}^{h_1+h_3} \sigma_x(y) dy + \int_{h_1+h_3}^H \sigma_x(y) dy = 0 \quad (3.10)$$

Es ist zu erkennen, daß der Einfluß der gradierten Schicht im Kräftegleichgewicht von der Dicke der Schicht  $h_3$  und der Spannung  $\sigma_x$  in der Schicht abhängt. Ist die Dicke gering im Vergleich zur Gesamtdicke des Verbundes, ist auch der Einfluß gering. Der Einfluß der gradierten Schicht könnte durch sehr hohe Spannungen in dieser Schicht vergrößert werden, z.B. durch Einführung eines sehr ho-

hen Elastizitätsmoduls. Dies ist aber ausgeschlossen. In der gradierten Schicht befindet sich eine Mischung aus den beiden umgebenden Stoffen, so daß die Werkstoffparameter in der gradierten Schicht von den Parametern der umgebenden Schichten begrenzt werden. Damit kann gesagt werden, daß sich bei dünnen gradierten Schichten keine Vorteile für die Spannungen in einem weit ausgedehnten Verbund ergeben werden.

Auch der Verlauf der Gradierungsfunktion hat einen Einfluß auf die Spannungen im Gesamtverbund. Die wesentliche Einflußgröße ist dabei allerdings der Anteil der beiden Materialien in der Schicht, weniger der Verlauf der Gradierungsfunktion. Als Beispiel zeigt Abbildung 3.4 den Verlauf des Elastizitätsmoduls (a) und der Spannung (b) für einen Verbund mit  $h_1/H = h_3/H = 0.1$  bei homogener Temperaturänderung im Vergleich für einen Dreischichtverbund und einen linear gradierten Verbund. Die gradierte Schicht kann auch durch eine homogene Schicht ersetzt werden, deren Materialparameter im Mittel einer gradierten Schicht entsprechen. Bei einer linearen Gradierung beträgt der Anteil beider Materialien 50 %, so daß sich für die Materialeigenschaften der Zwischenschicht genau der Mittelwert der umgebenden Schichten ergibt. Der Einfluß der Zwischenschicht im Kräftegleichgewicht ist in beiden Fällen gleich, nur der Einfluß im Momentengleichgewicht wird geändert. Der Unterschied der Spannung an der Oberfläche liegt bei 6.5 %

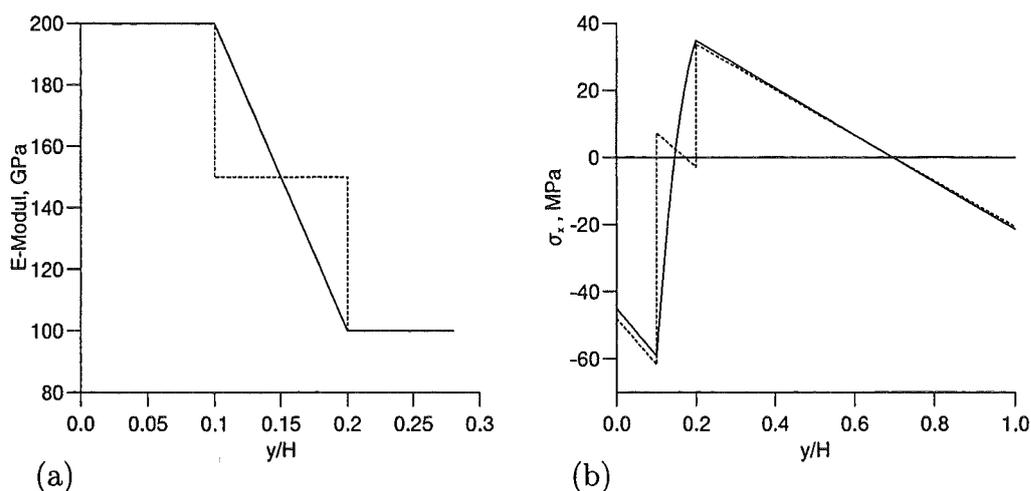


Abbildung 3.4: Verlauf des Elastizitätsmoduls (a) und der Spannung (b) für einen Verbund mit  $h_1/H = h_3/H = 0.1$ .

Ist die Schichtdicke der gradierten Schicht groß, im Vergleich zur Gesamtdicke, ergeben sich mehr Möglichkeiten für den Einsatz des Gradientenwerkstoffes. In Abbildung 3.5 wird das Verhältnis der Spannungen an der Oberfläche ( $y = 0$ ) zwischen einem nicht gradierten Verbund und einem linear gradierten Verbund über der relativen Schichtdicke dargestellt. Bei dem nicht gradierten Verbund besitzt das Material der gradierten Schicht die gleichen Eigenschaften wie die erste Schicht mit Material 1. Es ist zu erkennen, daß die Möglichkeit die Spannungen zu verändern mit zunehmender Dicke der gradierten Schicht zunimmt

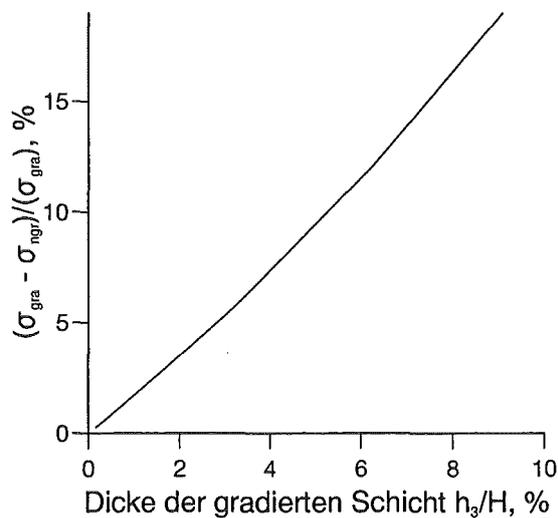


Abbildung 3.5: Verhältnis der Spannungen an der Oberfläche zwischen einem nicht gradierten Verbund und einem linear gradierten Verbund über der relativen Schichtdicke.

Ein interessanter Sonderfall für thermische Spannungen in einem gradierten Verbund ist die durchgängig lineare Gradierung. Dies ergibt einen Verbund, dessen Oberflächen aus verschiedenen Werkstoffen bestehen, während zwischen den beiden Oberflächen ein linearer Übergang der Werkstoffeigenschaften besteht. Der Einfluß der Querkontraktionszahl auf die Spannungen ist relativ gering (siehe [30], [31]). Wenn wir annehmen, daß gilt:  $\nu = const$ , kann die Gl.(3.7) vereinfacht

werden:

$$R = \frac{\left( \int_0^H E(y)ydy \right)^2 - \int_0^H E(y)y^2dy \int_0^H E(y)dy}{\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta Tdy \int_0^H E(y)ydy - \int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta Tydy \int_0^H E(y)dy} \quad (3.11)$$

Für eine lineare Gradierung durch den ganzen Verbund (für  $0 \leq y \leq H$ ), kann  $E(y)$  und  $\alpha(y)\Delta T$  wie folgt beschrieben werden:

$$E(y) = ay + b, \quad (3.12)$$

$$\alpha(y)\Delta T = cy + d. \quad (3.13)$$

Mit den Gleichungen (3.12) und (3.13), ergeben sich die Integrale aus Gl.(3.11) zu:

$$\int_0^H E(y)dy = \frac{a}{2}H^2 + bH, \quad (3.14)$$

$$\int_0^H E(y)ydy = \frac{a}{3}H^3 + \frac{b}{2}H^2, \quad (3.15)$$

$$\int_0^H E(y)y^2dy = \frac{a}{4}H^4 + \frac{b}{3}H^3, \quad (3.16)$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta Tdy = \frac{ac}{3}H^3 + \frac{ad+bc}{2}H^2 + bdH, \quad (3.17)$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta Tydy = \frac{ac}{4}H^4 + \frac{ad+bc}{3}H^3 + \frac{bd}{2}H^2. \quad (3.18)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.14) - (3.18) in Gl.(3.11) ergibt:

$$R = \left\{ \left( \frac{a}{3}H^3 + \frac{b}{2}H^2 \right)^2 - \left( \frac{a}{4}H^4 + \frac{b}{3}H^3 \right) \left( \frac{a}{2}H^2 + bH \right) \right\} / \left\{ \left( \frac{ac}{3}H^3 + \frac{ad+bc}{2}H^2 + bdH \right) \left( \frac{a}{3}H^3 + \frac{b}{2}H^2 \right) - \left( \frac{ac}{4}H^4 + \frac{ad+bc}{3}H^3 + \frac{bd}{2}H^2 \right) \left( \frac{a}{2}H^2 + bH \right) \right\}. \quad (3.19)$$

Durch Vereinfachung von Gl.(3.19) ergibt sich:

$$R = \frac{1}{c}. \quad (3.20)$$

Aus den Gleichungen (3.20) und (3.8) folgt:

$$\varepsilon_0 = d \quad (3.21)$$

Mit  $R$  und  $\varepsilon_0$ , folgt aus Gl.(3.2):

$$\sigma_x = \frac{E(y)}{1-\nu} ((d+cy) - (cy+d)) \equiv 0. \quad (3.22)$$

Diese bedeutet, daß in einem linear gradierten Werkstoffverbund, der nur aus einer Schicht besteht, die Spannung für eine lineare Temperaturänderung gleich Null ist. Man kann des weiteren zeigen, daß nur der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  der linearen Gradierungsfunktion folgen muß und die Verteilung des Elastizitätsmoduls beliebig sein kann. Das Einsetzen einer beliebigen Funktion für den Elastizitätsmoduls und einer linearen Funktion für  $\alpha$  in Gl.(3.11) ergibt:

$$\int_0^H E(y)dy = A, \quad (3.23)$$

$$\int_0^H E(y)ydy = B, \quad (3.24)$$

$$\int_0^H E(y)y^2dy = C, \quad (3.25)$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta Tdy = cB + dA, \quad (3.26)$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta T y dy = cC + dB. \quad (3.27)$$

Einsetzen der Gleichungen(3.23) - (3.27) in Gl.(3.11) ergibt:

$$R = \frac{B^2 - CA}{(cB + dA)B - (cC + dB)A}. \quad (3.28)$$

Dies führt ebenfalls zu:

$$R = \frac{1}{c},$$

$$\varepsilon_0 = d,$$

und

$$\sigma_x \equiv 0.$$

Das Verschwinden der Spannung im ganzen Verbund gilt für den Spezialfall einer durchgehenden Gradiierung, bei der nur die Oberflächen genau die Werkstoffparameter der zu gradierenden Verbundpartner annehmen. Näherungsweise gilt diese Beziehung auch für dünne Oberflächenschichten. Werden in einem Bauteil aus technischen Gründen auf beiden Seiten verschiedene Oberflächen gefordert, ergibt sich hier eine interessante Anwendung. In Abbildung 3.6 wird ein Vergleich zwischen einem zweischichtigen, nicht gradierten und einem gleich dicken gradierten Verbund gezeigt. Der nicht gradierte Verbund besteht aus zwei 5mm dicken Schichten, der gradierte Verbund aus zwei 1mm dicken Oberflächen und einer 8mm dicken, linear gradierten Schicht. Für die Werkstoffe wurde ein Verbund aus Aluminiumoxid und Zirkondioxid angenommen ( $E_{Al_2O_3} = 350GPa$ ,  $\alpha_{Al_2O_3} = 6 * 10^{-6}K^{-1}$ ,  $E_{ZrO_2} = 125GPa$ ,  $\alpha_{ZrO_2} = 9 * 10^{-6}K^{-1}$ ). Es ist zu erkennen, daß die Spannungen im gradierten Verbund wesentlich niedriger sind.

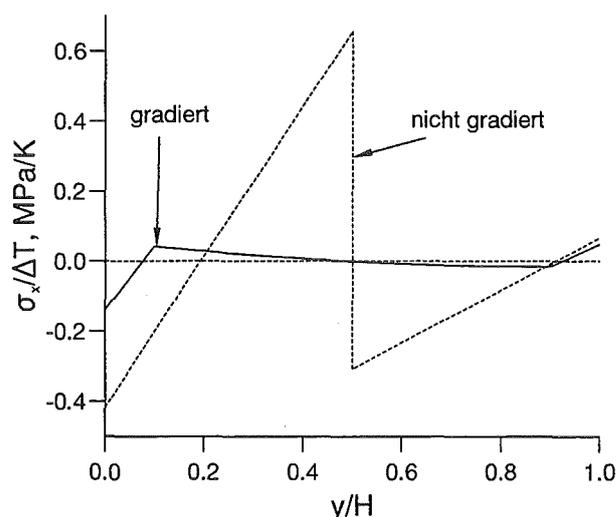


Abbildung 3.6: Vergleich des Spannungsverlaufes zwischen einem gradierten und einem nicht gradierten Verbund.

### 3.3 Anwendungsbeispiel der Theorie

Bei der Entwicklung der Gradientenwerkstoffe wurde von Anfang an die Verwendung als Übergangsschicht in einem Wärmedämmschichtsystem geplant. Grundsätzlich wird in einem solchen Wärmedämmschichtsystem eine keramische Wärmedämmschicht auf ein metallisches Bauteil aufgebracht. Mit dieser Keramikschicht

soll es, bei gleichzeitiger Kühlung, möglich sein, die Bauteile bei bis zu 1400°C zu betreiben. Durch den großen Unterschied des Wärmeausdehnungskoeffizienten von Keramik und Metall treten starke thermische Spannungen auf, die zu Schichtabplatzungen führen können. Diese Schädigungen des Verbundes sollen durch den Einsatz eines gradierten Verbundes verhindert werden.

Ein Einsatzgebiet solcher Verbunde sind Wärmeschutzplatten bei der Verkleidung von Raumfahrzeugen (siehe [29]), ein anderes großes Gebiet stellen Turbinenbauteile dar. Im folgenden wird ein Wärmedämmschichtsystem vorgestellt, dessen praktische Anwendung bei dem DLR, Institut für Werkstoff-Forschung, Köln untersucht wird.

Zur Erhöhung der Hochtemperaturfestigkeit von metallischen Bauteilen in Gasturbinen werden keramische Wärmedämmschichten aufgebracht, wozu üblicherweise Zirkondioxid verwendet wird. Da das Zirkondioxid nur geringen Schutz gegen das Eindringen von Sauerstoff bietet, der zur Oxidation der Basis führt, wird zwischen Substrat und Wärmedämmschicht eine weitere metallische Schicht eingeführt. Diese Schicht dient gleichzeitig als Haftvermittler. Der eigentliche Oxidationsschutz wird dabei durch eine Aluminiumoxidschicht erreicht, die sich im Betrieb aus dem Aluminium der Haftvermittlungsschicht bildet.

Der Aufbau des gradierten Verbundes wird in Abb. 3.7 gezeigt.

- Als Substrat wird die Nickel- Superlegierung IN100 verwendet. Die Dicke der Schicht ist 2 mm.
- Die Haftvermittlungsschicht besteht aus einer NiCoCrAlY- Legierung. Die Dicke der Schicht ist 0.1 mm.
- Es folgt eine Aluminiumoxidschicht mit einer Dicke von 5  $\mu\text{m}$ .
- In der Gradierungsschicht folgen die Werkstoffeigenschaften Elastizitätsmodul  $E$ , Poissonzahl  $\nu$ , Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  und andere Materialparameter einer Gradierungsfunktion. Die Dicke der Schicht ist 50  $\mu\text{m}$ .
- Wärmedämmschicht (WDS) aus Zirkondioxid mit 7%  $\text{Y}_2\text{O}_3$  zur Stabilisierung. Die Dicke ist 200 - 250  $\mu\text{m}$ .

In diesem Verbund erfolgt die Gradierung zwischen der Wärmedämmschicht aus Zirkondioxid und der Aluminiumoxidschicht, da sich hier ein besonders großer Sprung im Verlauf des Elastizitätsmoduls ergibt ( $E_{\text{ZrO}_2} = 13\text{GPa}$ ,  $E_{\text{Al}_2\text{O}_3} =$

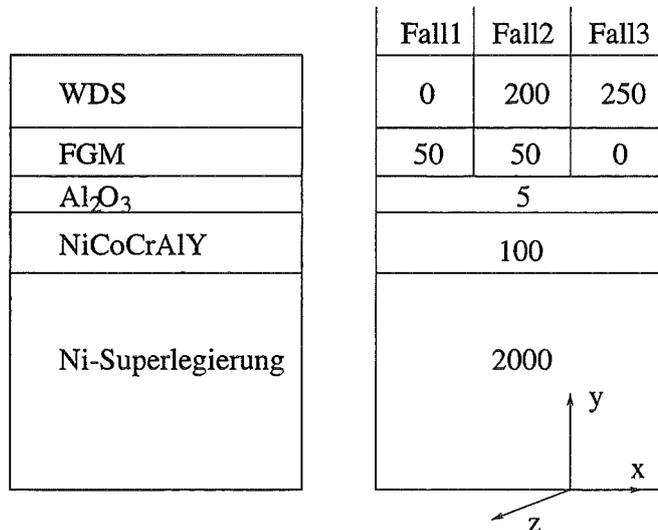


Abbildung 3.7: Ein gradiertes Wärmedämmschichtsystem.

350GPa). Der geringe Elastizitätsmodul der Zirkondioxids ergibt sich aus der kolumnaren Struktur des Werkstoffs (siehe Kap. 2.2.1). Die Werkstoffdaten werden temperaturabhängig angenommen. Bei der Berechnung der Spannungen wird jeweils der Elastizitätsmodul bei Raumtemperatur und der mittlere Wärmeausdehnungskoeffizient bei zwischen Raumtemperatur und 1000 °C verwendet. Eine Aufstellung der Materialdaten findet sich im Anhang A.1. Es werden folgende Fälle für den Schichtaufbau unterschieden (siehe Abbildung 3.7):

- Fall 1: Der Verbund enthält eine gradierte Schicht, aber keine Wärmedämmschicht. Die Dicke der gradierten Schicht beträgt dabei 50  $\mu m$ .
- Fall 2: Der Verbund enthält eine gradierte Schicht von 50  $\mu m$  Dicke und eine WDS von 200  $\mu m$  Dicke.
- Fall 3: Der Verbund enthält keine gradierte Schicht und eine WDS von 250  $\mu m$  Dicke.

Die Temperaturänderung durch das Abkühlen nach der Herstellung beträgt im Fall 1 -950 K, im Fall 2 und 3 -845 K. Diese unterschiedlichen Temperaturänderungen werden durch prozeßbedingt unterschiedliche Substrattemperaturen verursacht.

Nach Angaben des DLR versagt der Schichtverbund für den Fall 2 teilweise nach der Herstellung, während die anderen Fälle zuverlässig sind. Die Schädigung geht von der Aluminiumoxidschicht aus. Es ist nicht festzustellen ob die Schädigung vom Inneren des Bauteils oder von dessen freien Rändern ausgeht, da die Schichten nach der Herstellung schlagartig abspringen. Im folgenden soll untersucht werden, ob das Versagensverhalten des Verbundes durch eine Berechnung der auftretenden Eigenspannungen erklärt werden kann.

Bei der idealisierten Berechnung der Spannung, in einem unendlich weit ausgedehnten Verbundmaterial, treten nur Spannungen parallel zu den Grenzflächen auf, wobei gilt  $\sigma_x = \sigma_z$ . Demzufolge wird nur eine Spannungskomponente dargestellt. Diese Rechnungen gelten näherungsweise auch für einen endlichen Körper, in einem Bereich der weit vom Rand des Bauteils entfernt ist. Abbildung 3.8 zeigt die Spannungen in x-Richtung für die drei Fälle. Abbildung 3.8a zeigt den gesamten Bereich des Verbundes, Abbildung 3.8b zeigt einen Ausschnitt von  $y = 2.05$  mm bis  $y = 2.2$  mm, der Ausschnitt beginnt also kurz vor der Aluminiumoxidschicht und endet kurz dahinter.

Es bestehen experimentelle Hinweise, daß die Schädigung vom Inneren des Bauteils ausgeht [32]. Eine Versagensursache könnten hohe Druckspannungen im Körperinneren sein, wie sie hier in allen Fällen auftreten. Wie in Abbildung 3.8b zu erkennen ist, erreichen die Spannungen Beträge bis ca. 4000 MPa, allerdings sind die Spannungen für den weniger zuverlässigen Verbund (Fall 2) im Bereich der  $Al_2O_3$  - Schicht am geringsten, so daß diese Ursache hier ausgeschlossen werden kann. Es ist nicht möglich, anhand der Spannungen, die mit Hilfe der Plattentheorie berechnet werden können, die Ursache des Versagens zu klären. Erst Berechnungen der Spannungen am Rand (mit Hilfe der FEM) zeigen, daß sich für den Fall 2 höhere Zugspannungen im Bereich des Schnittpunktes zwischen der Aluminiumoxidschicht und der freien Oberfläche ergeben. Abb. 3.9 zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  am freien Rand des Bauteils. Es ist zu erkennen, daß der Fall 2 die höchsten Zugspannungen im Bereich der Grenzfläche ergibt. Der ungradierte Fall weist, abgesehen vom Bereich der Singularität, hier niedrigere Spannungen auf, so daß in diesem Beispiel kein Vorteil der Gradierung erkennbar ist.

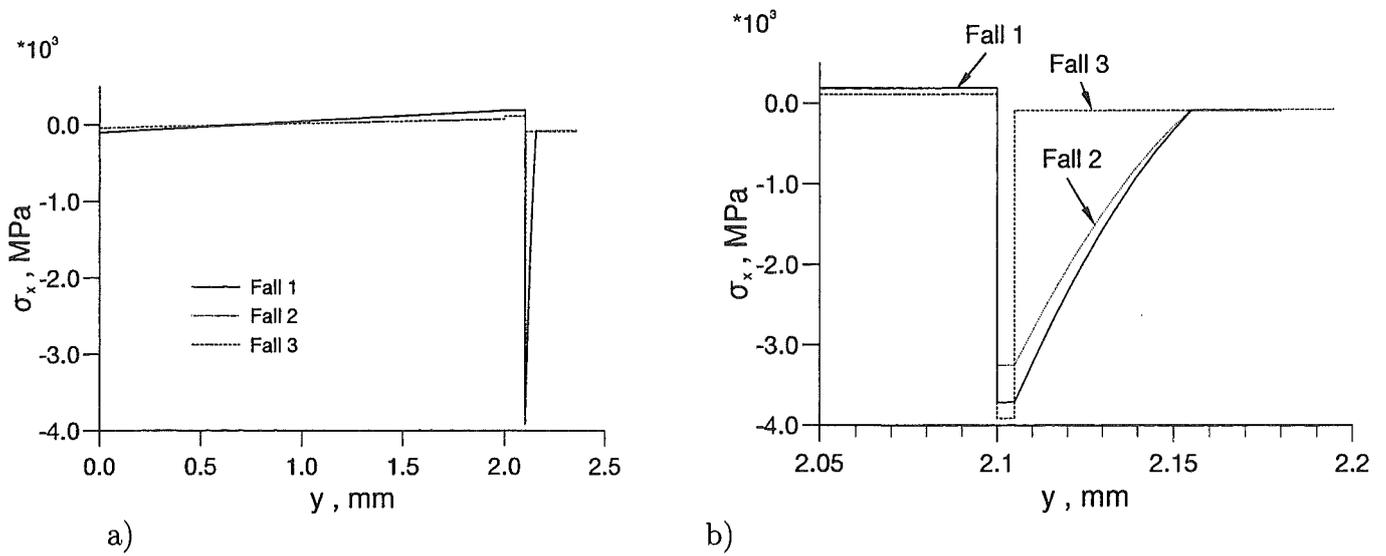


Abbildung 3.8: Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  in einem unendlich ausgedehnten Körper entlang der Dickenrichtung, (a) für den gesamten Verbund, (b) für  $y = 2.05$  mm bis  $y = 2.2$  mm.

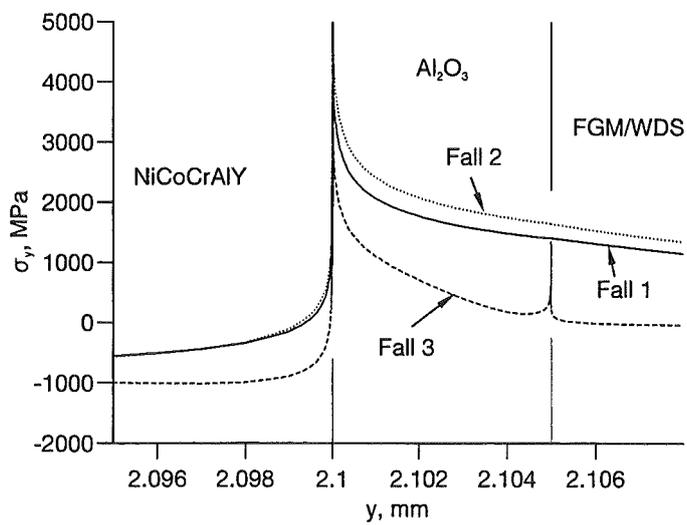


Abbildung 3.9: Spannung  $\sigma_y$  am freien Rand im Bereich der Aluminiumoxid-schicht.

# Kapitel 4

## Spannungsoptimierung in Verbunden mit Gradientenwerkstoffen

In der vorliegenden Arbeit wird die Eignung der Gradientenwerkstoffe zur Verringerung von Spannungen untersucht. Neben der Tatsache, daß überhaupt ein Gradientenwerkstoff verwendet werden soll, ist es für diese Aufgabe von großer Wichtigkeit, eine für den Anwendungszweck optimale Gradierungsfunktion zu finden. Es handelt sich hierbei also um ein Optimierungsproblem.

Das Auffinden einer geeigneten Funktion kann auf zwei Weisen geschehen:

- Aus einer Reihe vorhandener Funktionen wird die Günstigste ausgesucht. Diese Methode ist einfach und kann schnell sein, es wird aber im allgemeinen nicht die optimale Funktion gefunden.
- Die optimale Funktion wird mit Hilfe numerischer Optimierungsverfahren bestimmt. Hierbei wird die optimale Funktion gefunden, allerdings sind die Suchverfahren sehr rechenzeitintensiv.

Gradientenwerkstoffe können für viele Zwecke eingesetzt werden, wodurch auch viele Arten von Effekten optimiert werden können. In dieser Arbeit erfolgt eine Beschränkung auf thermische Spannungen in Mehrschichtverbunden und von ihnen abgeleitete Größen. Diese abgeleiteten Größen können z.B. die Versagenswahrscheinlichkeit eines Bauteils sein, oder Spannungsintensitätsfaktoren bei Rissen.

## 4.1 Optimierung durch Auswahl aus vorgegebenen Übergangsfunktionen

### 4.1.1 Einführung

In vielen Fällen wird eine für den Einsatzzweck günstige Funktion aus einer Reihe von Funktionen ausgesucht. In der vorliegenden Arbeit, aber auch anderen wie [29], [33] und [34] wird eine Funktion in folgender Form verwendet:

$$M(y) = M_1 + (M_2 - M_1)\hat{y}^m. \quad (4.1)$$

$\hat{y}$  ist dabei die Koordinate in Gradierungsrichtung, die so normiert werden muß, daß sie am Beginn der gradierten Schicht den Wert 0 und am Ende den Wert 1 annimmt. Damit ergibt sich:

$$M(0) = M_1,$$

$$M(1) = M_2.$$

$M(\hat{y})$  ist der zu gradierende Materialparameter, wie z.B. der Elastizitätsmodul. Im Prinzip muß für jeden Materialparameter eine separate Gradierungsfunktion verwendet werden. Bei den folgenden Berechnungen wird für den Elastizitätsmodul und den Wärmeausdehnungskoeffizient die gleiche Funktion verwendet. Dies bedeutet, daß die lineare Mischungsregel angewendet wird (siehe Abschn. 2.3.3). Der Parameter  $m$  erlaubt eine Variation der Kurvenform. Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf der Kurve für  $m = 0.5$ , 1, und 2. Diese Gleichung erlaubt keine Kurven mit Wendepunkt. Durch den Parameter  $m$  kann auf einfache Weise eine Vielzahl von Kurvenformen erzeugt werden, aus denen eine günstige Form ausgesucht wird. Dieses Verfahren kann, bei einiger Erfahrung, sehr schnell sein, man wird allerdings nicht die Optimalfunktion finden.

### 4.1.2 Variation von Schichtdicken und Übergangsfunktionen in einem Dreischichtverbund

Im folgenden soll untersucht werden, welchen Einfluß die Dicken der verschiedenen Schichten und die Gradierungsfunktion auf die Spannungen im Bauteil haben. Es wird ein Dreischichtverbund untersucht, dessen Schichtaufbau und Koordinatensystem in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

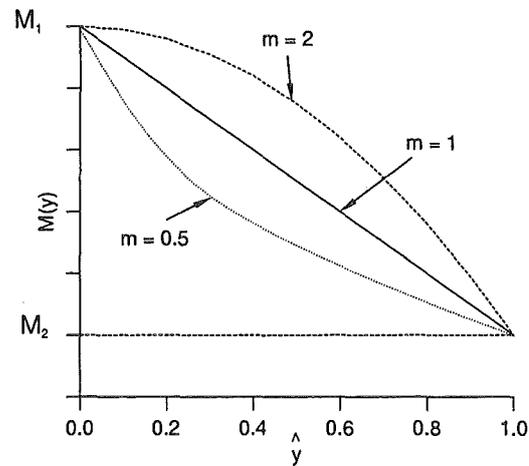


Abbildung 4.1: Verlauf der Gradierungsfunktionen für verschiedene  $m$ .

Die oberste Schicht mit Dicke  $h_1$  besteht aus dem Material  $M_1$ . Es folgt die gradierte Schicht mit der Dicke  $h_3$ . Das Substrat hat die Dicke  $h_2$ , mit dem Material  $M_2$ . Die Materialdaten finden sich im Anhang A.2. Die Materialdaten sind willkürlich gewählt, aber an einen Metall-Keramik Verbund angelehnt. Der Verbund wird einer homogenen Temperaturänderung von 100 K unterworfen. Als Gradierungsfunktion werden Funktionen entsprechend Gl.(4.1) verwendet, wobei für Funktion 3 eine abweichende Formulierung angewendet wird:

$$\text{Fkt. 1 : } M(\hat{y}) = M_1 \quad (\text{Zweistoffverbund}),$$

$$\text{Fkt. 2 : } M(\hat{y}) = M_1 + (M_2 - M_1)\hat{y},$$

$$\text{Fkt. 3 : } M(\hat{y}) = M_2 - (M_2 - M_1)(1 - \hat{y})^2,$$

$$\text{Fkt. 4 : } M(\hat{y}) = M_1 + (M_2 - M_1)\hat{y}^2,$$

mit:

$M(\hat{y})$  : gradiertes Materialparameter, Elastizitätsmodul oder thermischer Ausdehnungskoeffizient,

$M_1$  : Materialparameter des Materials in Schicht 1,

$M_2$  : Materialparameter des Materials in Schicht 2.

Funktion 1 stellt den nicht gradierten Fall dar, der hier zum Vergleich mit den

anderen Funktionen mit herangezogen wird. In Abbildung 4.2 wird der Verlauf des Elastizitätsmoduls und des Wärmeausdehnungskoeffizienten für diese vier Funktionen dargestellt.

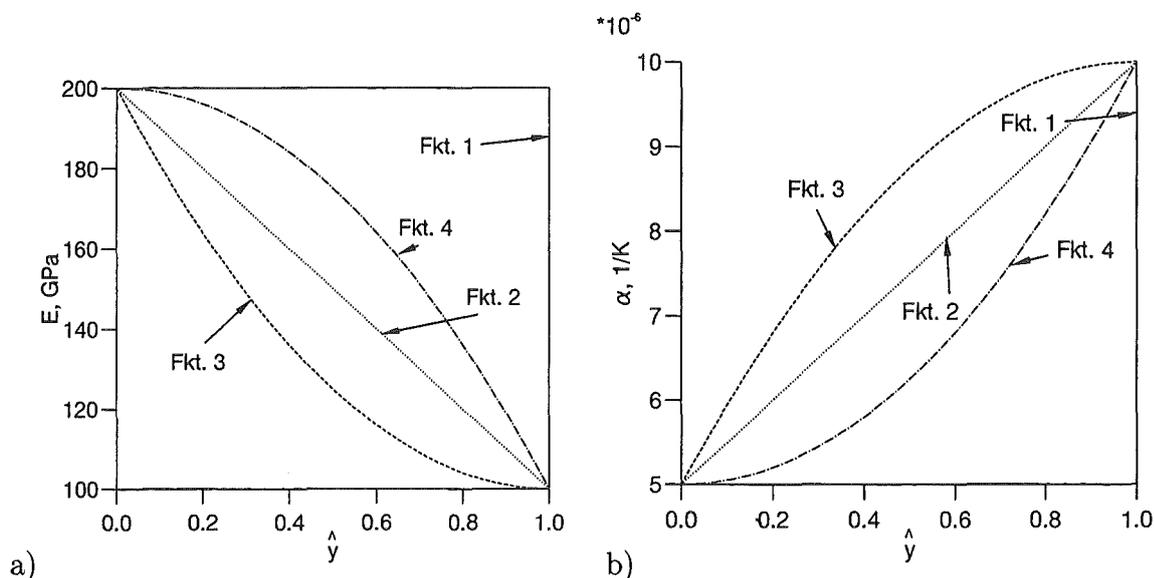


Abbildung 4.2: Verlauf des Elastizitätsmoduls (a) und des Wärmeausdehnungskoeffizienten (b) für die vier Funktionen.

Abbildung (4.3) zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  entlang der  $y$ -Koordinate für  $h_1/H = h_3/H = 0.1$  im Vergleich der verschiedenen Funktionen. Der nicht gradierte Verbund besitzt die niedrigsten Spannungen an der Oberfläche. An der Stelle  $y = h_1$  (wo sich beim nicht gradierten Verbund keine Grenzfläche befindet) ist die Spannung ebenfalls niedriger. Die gradierten Funktionen beseitigen den Spannungssprung an der zweiten Grenzfläche und weisen dort niedrigere Spannungsbeträge auf. Der mögliche positive Effekt der Vermeidung des Spannungssprungs wird in [23] erklärt.

In Hinsicht auf Thermospannungen kann eine Gradierungsfunktion nur ausgewählt werden, wenn die Geometrie des Bauteils, die Materialeigenschaften und die Belastung bekannt sind. Können einzelne Schichtdicken variiert werden, kann anhand der Abbildungen (4.4) - (4.6) eine für den vorliegenden Belastungsfall besonders günstige Kombination aus Geometrie und Gradierungsfunktion gewählt werden.

Die Abbildungen 4.4 - 4.6 zeigen Variationen der Größen  $h_1$  und  $h_2$  in einer Dreiecksdarstellung. Die beiden Achsen bilden  $h_1/H$  und  $h_2/H$ . Auf der Geraden vom Punkt  $h_1/H = 1$  zum Punkt  $h_2/H = 1$  gilt also  $h_3 = 0$ . Aufgetragen sind

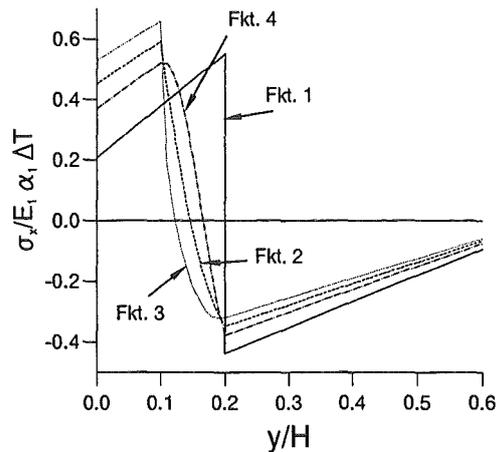


Abbildung 4.3:  $\sigma_x$  für Funktion 1 - 4.

in Form von Isolinien die Spannungen an der Stelle  $y = 0$ ,  $y = h_1$  und  $y = h_1 + h_3$  für die Funktionen 2, 3, 4. Funktion 1 wird nicht dargestellt, da dies einem Zweischichtsystem entspricht und die hier gewählte Darstellungsart für diesen Fall nicht sinnvoll ist.

Es bestehe zum Beispiel die Forderung nach Druckspannungen an der Oberfläche des Bauteils. Aus Abbildung 4.4a kann abgelesen werden, daß sich für die Funktion 2 mit  $h_2/H < 0.3$  und einem beliebigen  $h_1$  oder  $h_1/H > 0.3$  und einem beliebigen  $h_2$  an der Oberfläche Druckspannungen ergeben. Für Funktion 3 (siehe Abb. 4.4b) ergeben sich mit  $h_1/H > 0.25$  und einem beliebigen  $h_2$  Druckspannungen an der Oberfläche, für Funktion 4 (siehe Abb. 4.4c) ergeben sich mit  $h_2/H < 0.5$  und einem beliebigen  $h_1$  oder mit  $h_1/H > 0.25$  und einem beliebigen  $h_2$  Druckspannungen an der Oberfläche.

Die Bereiche von  $h_1$  und  $h_2$ , in denen die Spannung an der Oberfläche in den Druckbereich kommt hängen von der Materialkombination und der Gradierungsfunktion ab. Für dieses Kriterium ist Funktion 4 am besten geeignet, da diese Funktion den größten Bereich für  $h_1$  und  $h_2$  anbietet.

Ein andere Forderung könnte sein, daß der Betrag der Spannungen an der Grenzfläche klein sein sollte. Für diesen Zweck können die Abbildungen 4.5 und 4.6 herangezogen werden. Für die Grenzfläche  $y = h_1$  ist Fkt. 2 am besten geeignet, für die Grenzfläche  $y = h_1 + h_3$  hängt das Ergebnis vom Verhältnis  $h_1/H$  und  $h_2/H$  ab.

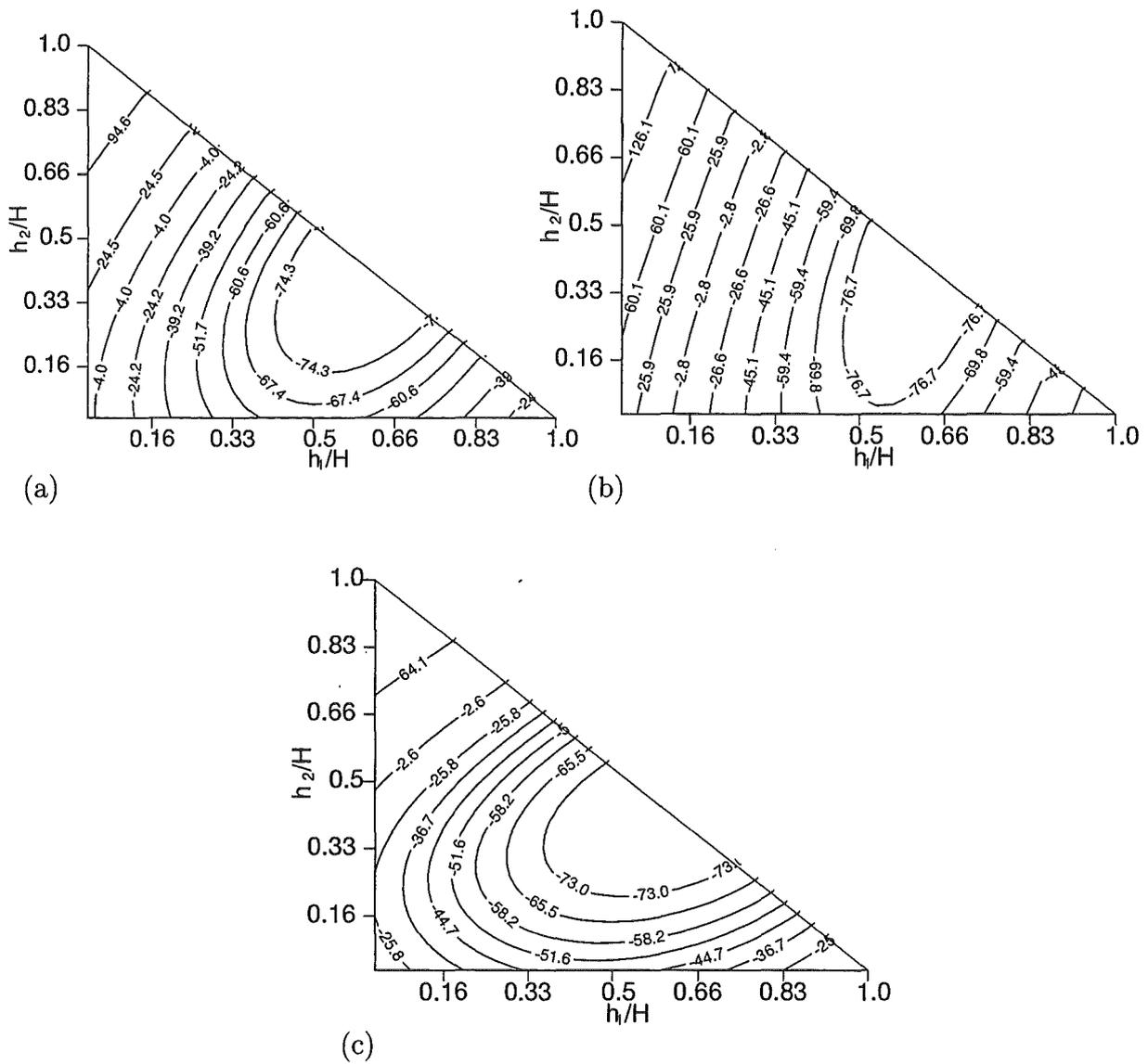


Abbildung 4.4:  $\sigma_x$  an der Oberfläche ( $y=0$ ) für (a) Funktion 2, (b) Funktion 3, (c) Funktion 4.

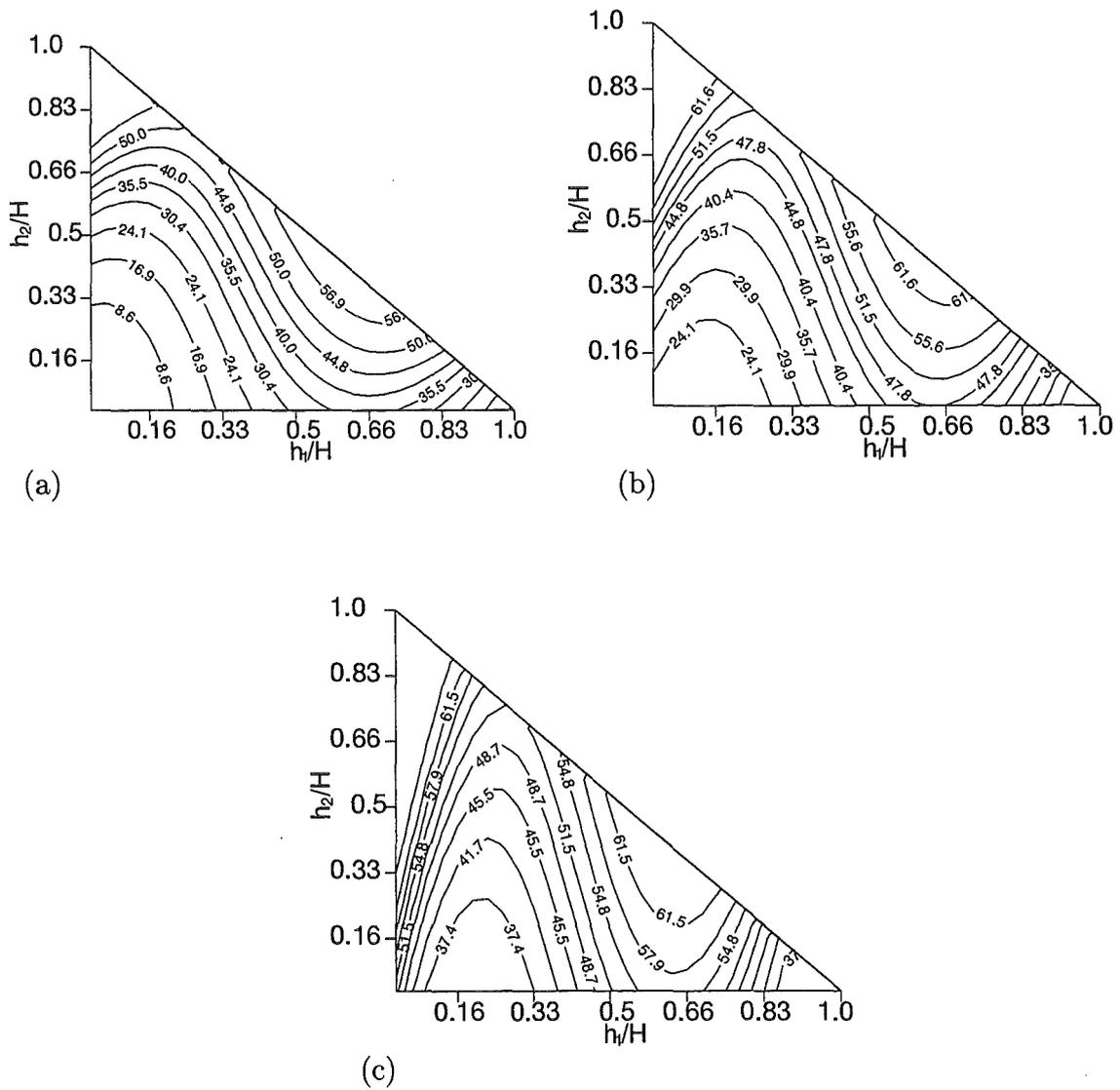


Abbildung 4.5:  $\sigma_x$  an der ersten Grenzfläche ( $y=h_1$ ) für (a) Funktion 2, (b) Funktion 3, (c) Funktion 4.

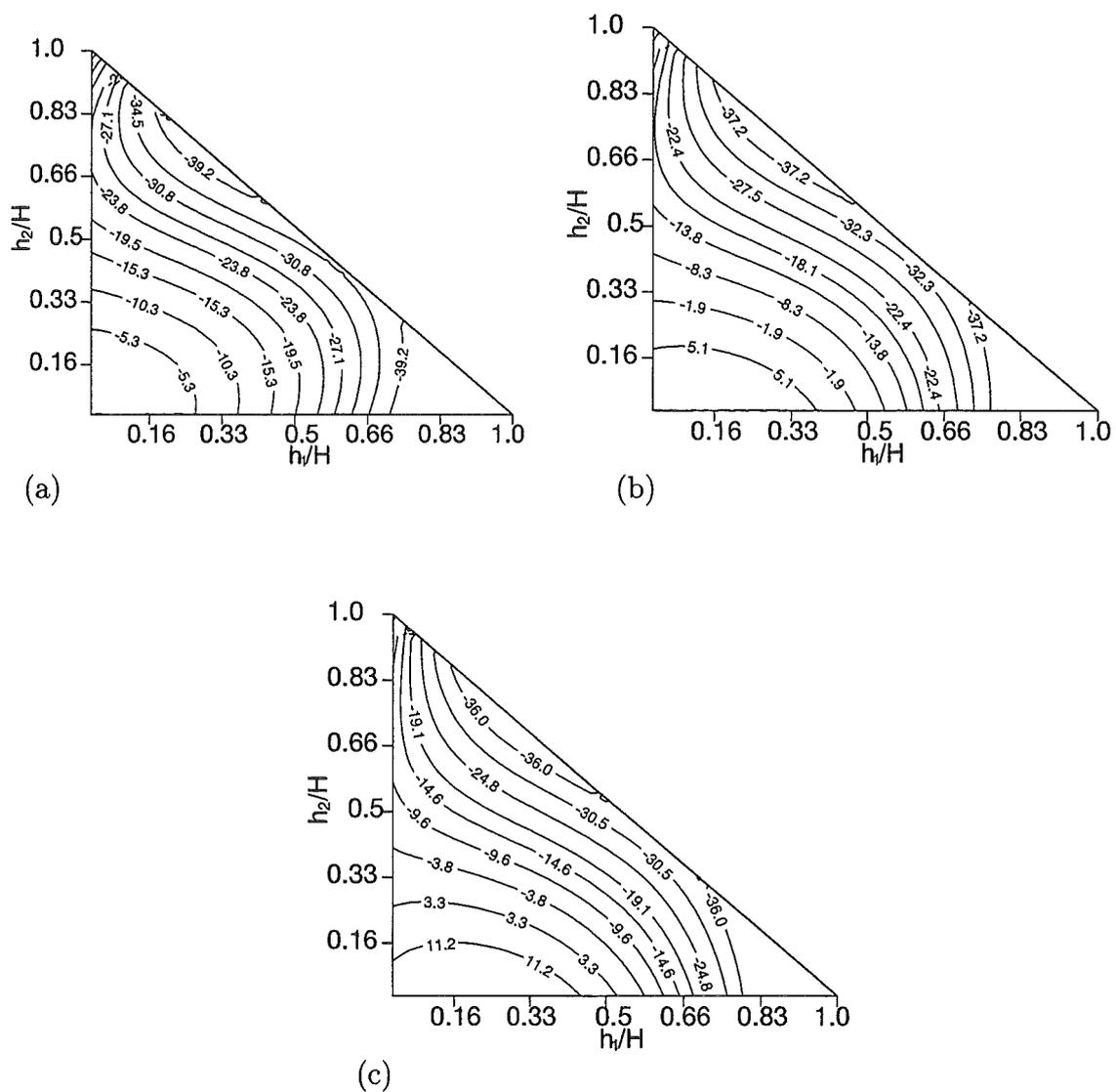


Abbildung 4.6:  $\sigma_x$  an der zweiten Grenzfläche ( $y=h_1 + h_3$ ) für (a) Funktion 2, (b) Funktion 3, (c) Funktion 4.

### 4.1.3 Beispiel für die Bestimmung einer Optimalfunktion in einem Verbund mit Porositätsgradienten

Bisher wurden Mischungen von zwei verschiedenen Stoffen als Gradientenwerkstoffe betrachtet. In Zusammenarbeit mit dem Zentrallabor des Institutes für Keramik im Maschinenbau der Universität Karlsruhe wurde ein Bauteil mit einem Porositätsgradienten untersucht. Auch hierbei soll die günstigste Funktion für den Verlauf des Porositätsgradienten bestimmt werden. Das Optimierungskriterium ist allerdings nicht direkt die im Bauteil auftretende Spannung, sondern die Versagenswahrscheinlichkeit des Bauteils.

Bei dem betrachteten Bauteil handelt es sich um eine Brennkammerwand in einer Gasturbinenbrennkammer. Der Werkstoff wird zur Verdampfung des Brennstoffs eingesetzt. Der Brennstoff wird dabei auf die durch die Brennkammer beheizte Keramik aufgespritzt und verdampft (siehe Abb. 4.7). Die Porosität des Materials erlaubt eine Dampfabfuhr in den Poren der Brennkammerwand, wodurch der Bereich des Filmsiedens in höhere Temperaturregionen verlegt werden kann [8]. Filmsieden bedeutet, daß sich unter dem aufgespritzten Kraftstoff ein geschlossener Dampffilm ausbildet. Dieser besitzt eine hohe Isolierwirkung gegen Wärmedurchgang und behindert damit die Verdunstung des Kraftstoffes. Die Porosität des Werkstoffes ermöglicht ein wesentlich grösseres Temperaturfenster, in dem die Verdampfung des Kraftstoffes effektiv betrieben werden kann. Dies bringt verschiedene Vorteile für die Verbrennung und den Abgasaustoss der Turbine. Durch die Porosität sinkt allerdings die Festigkeit des Materials. Durch Anwendung eines Porositätsgradienten soll ein besserer Kompromiß zwischen Festigkeit und Porosität möglich werden, insbesondere soll eine optimale Gradierungsfunktion gefunden werden.

Das Bauteil besteht an der Innenseite aus einer dichten Siliziumkarbidschicht von 2 mm Dicke, an die sich eine poröse Schicht aus dem gleichen Material mit variabler Dicke (3 - 14 mm) anschließt (siehe Abb. 4.8).

Die Dicke dieser in der Porosität gradierten Schicht ist von der gewählten Gradierungsfunktion abhängig. Dabei schränken folgende Voraussetzungen die Auswahl der Gradierungsfunktion ein:

- Die offene Porosität an der Oberfläche muß 50 % betragen,
- Das gradierte Bauteil muß die gleiche Durchströmbarkeit wie das nicht gra-

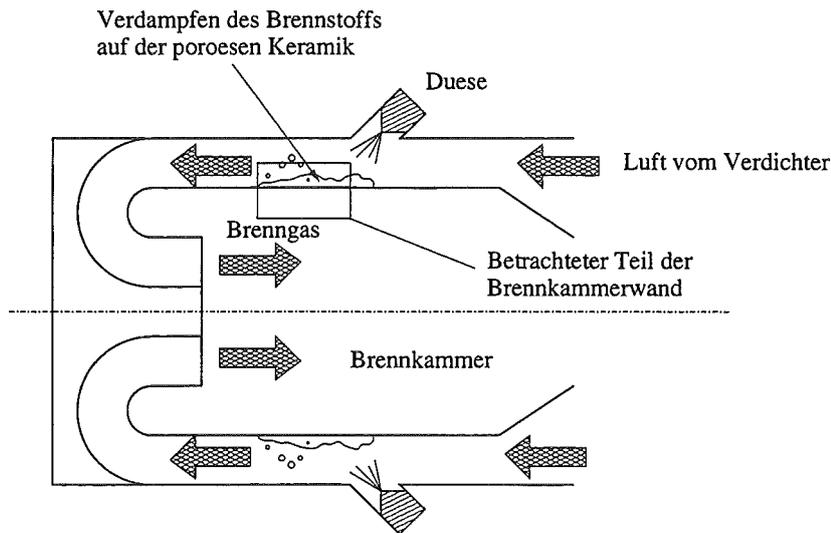


Abbildung 4.7: Die Brennkammer.

dierte Bauteil aufweisen. Die Durchströmbarkeit wird durch die von der offenen Porosität abhängigen Permeabilität beschrieben. Das Integral über die Permeabilität in der gradierten Schicht muß der gesamten Permeabilität einer 3mm dicken, nicht gradierten Schicht mit 50 % offener Porosität entsprechen. Dadurch erfordern verschiedene Porositätsgradienten unterschiedliche Schichtdicken.

Die Durchströmbarkeit der Schicht wird durch das Integral der Permeabilität  $D_s$  über die durchströmte Fläche bestimmt. Es ergibt sich somit für die ortsabhängige Permeabilität  $D_s$ :

$$\int_A D_s(r) dA = D_{s.n.gr.} (r_{a.n.gr.}^2 - r_i^2) \pi, \quad (4.2)$$

mit:

$D_{s.n.gr.}$  = Permeabilität des nicht gradierten Systems,

$r_{a.n.gr.}$  = Außendurchmesser des nicht gradierten Systems,

$r_i$  = Innenradius, identisch für nicht gradierte und gradierte Systeme.

Die Permeabilität ergibt sich aus der offenen Porosität nach [8]:

$$D_s = a \bar{P}^{2.246}, \quad (4.3)$$

mit:

$D_s$  = Permeabilität,

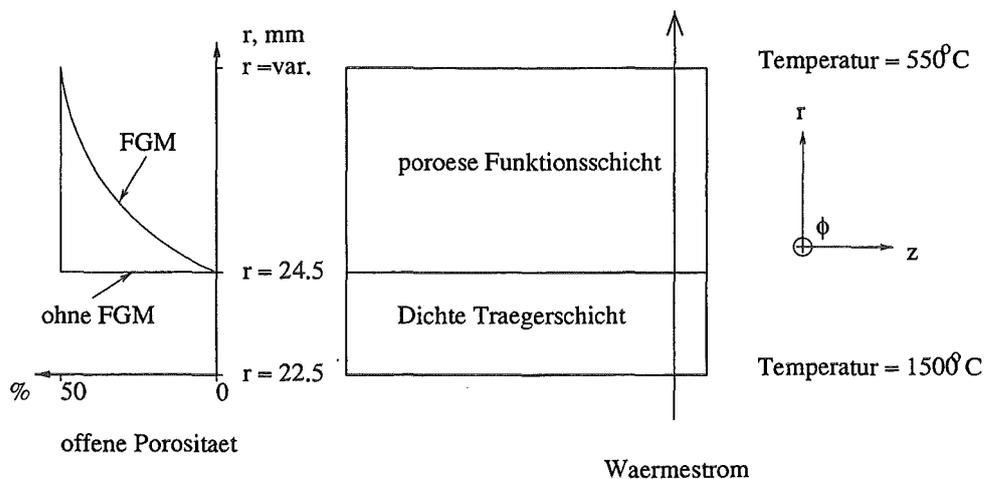


Abbildung 4.8: Der Aufbau des Schichtverbundes.

$$a = 6.0 * 10^{-12} m^2,$$

$\bar{P}$  = offene Porosität.

Der Zusammenhang zwischen Porosität  $P$  und offener Porosität  $\bar{P}$  ist durch [8]:

$$\bar{P} = -0.099 + 1.191P \quad (4.4)$$

gegeben. Dabei ist zu beachten, daß für  $P < 0.084$  gilt:  $\bar{P} = 0$ . An der Verdampferoberfläche soll die offene Porosität 50 % betragen. Damit ergibt sich für die Porosität ein Wert von  $P_0 = 0.503$ . Die verwendeten Gradierungsfunktionen haben die Form:

$$P(r) = P_0 \left( \frac{r - r_i}{r_{a.gr.} - r_i} \right)^n \quad (4.5)$$

Mit Hilfe von Gl.(4.4) kann damit die offene Porosität  $\bar{P}$  berechnet werden und daraus mit Hilfe von Gl.(4.3) die Permeabilität  $D_s$ . Diese wird in Gl.(4.2) eingesetzt. Damit ergibt sich:

$$a \bar{P}_{n.gr.}^b (r_{a.n.gr.}^2 - r_i^2) \pi = a \int_{r_i}^{r_{a.gr.}} \left( c_1 + c_2 P_0 \left( \frac{r - r_i}{r_{a.gr.} - r_i} \right)^n \right)^b 2r \pi dr. \quad (4.6)$$

$r_{a.gr.}$  kann aus Gl.(4.6) numerisch bestimmt werden.

Mit  $n = 1$  ergibt sich die lineare Gradierungsfunktion (Fkt. 1). Hier werden noch  $n = 0.5$  (Fkt. 2) und  $n = 2$  (Fkt. 3) untersucht.

Mit Funktion 1 ergibt sich eine Dicke der gradierten Schicht von 7.8 mm ( $r_a = 32.3$  mm), mit Funktion 2 ergibt sich eine Dicke der gradierten Schicht von 6.5 mm

( $r_a = 31$  mm), für Funktion 3 ist die Dicke 14.3 mm ( $r_a = 38.8$  mm). Abbildung 4.9 zeigt den Verlauf der Porosität bei den verschiedenen Gradierungsfunktionen.

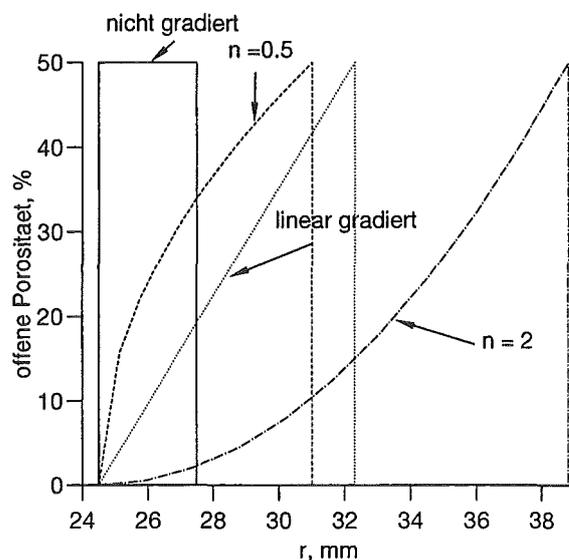


Abbildung 4.9: Der Verlauf der Porosität bei den verschiedenen Gradierungsfunktionen.

Das Bauteil ist nach der Herstellung, bedingt durch den ortsunabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten, spannungsfrei. Betrachtet wird ein rotations-symmetrisches und in  $z$ -Richtung unendlich langes Bauteil, d.h. Randeﬀekte werden nicht untersucht. Das Bauteil kann sich in allen Richtungen frei ausdehnen.

Die Materialdaten wurden in [8] in Abhängigkeit von der Temperatur und der Porosität bestimmt. Benötigt werden zur Berechnung des Temperaturverlaufs während der instationären Aufheizung die Wärmekapazität, die Dichte, und die Wärmeleitfähigkeit. Die Abhängigkeit der verschiedenen Materialparameter von der Temperatur wird in Anhang A.3 gezeigt.

Die Wärmekapazität bei 300 K ist  $c_p = 0.69 J/gK$ . Dieser Wert ist von der Porosität unabhängig, da der Einfluß der Porosität über die Dichte in die Rechnung eingebracht wird. Die Dichte ist  $\rho = 3.21 g/cm^3$  bei 0% Porosität. Die Dichte hängt linear von der Porosität ab und ist unabhängig von der Temperatur. Die Wärmeleitfähigkeit ist von Porosität und Temperatur abhängig. Die Werte für die Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Porosität bei 300 K sind in Abbildung 4.10a dargestellt. Bei den Daten zur Spannungsberechnung ergibt sich nur

für den Elastizitätsmodul  $E$  eine Abhängigkeit von der Porosität. Der Verlauf von  $E$  bei 300 K ist in Abbildung 4.10b dargestellt. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ist von der Porosität unabhängig. Bei einer Temperatur von 300K ist  $\alpha = 3.64 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ . Bei der Querkontraktionszahl konnte keine Abhängigkeit von der Porosität oder Temperatur festgestellt werden. Es ergab sich  $\nu = 0.159$ .

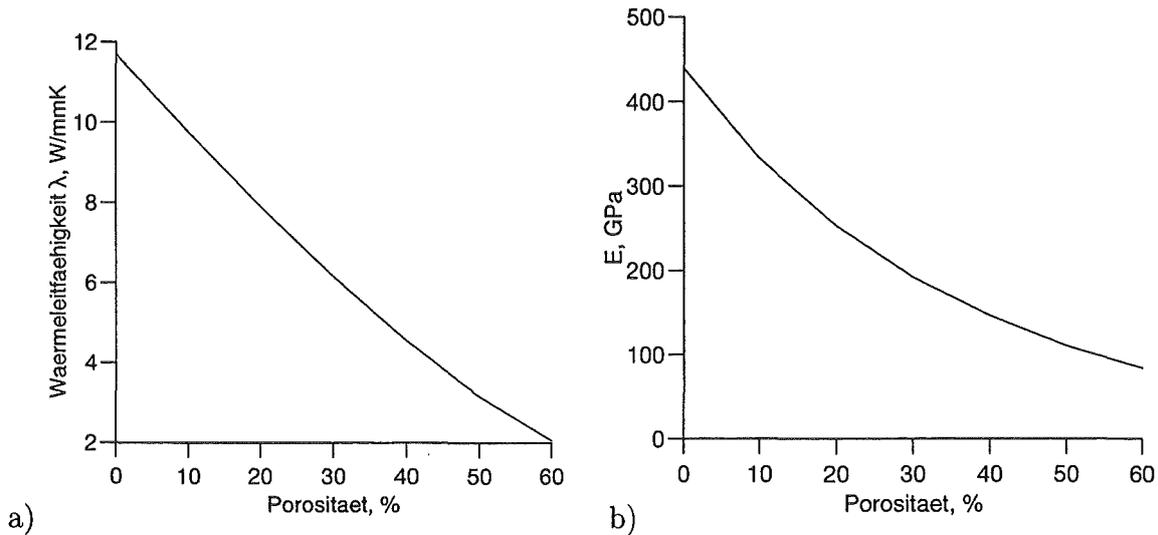


Abbildung 4.10: Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit (a) und des Elastizitätsmoduls (b) von der Porosität bei 300 K.

Zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit (zur Theorie siehe Abschnitt 4.2.5) werden die Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  benötigt. Diese Weibullparameter werden in [8] mit Hilfe des Doppelringversuches bestimmt. Der Radius des inneren Ringes ist  $R_1 = 6mm$ , der Radius des äusseren Ringes ist  $R_2 = 12mm$ . Die Proben besitzen einen Radius von 17.2 bis 20.8 mm und eine Dicke von 3.45-3.65 mm. Die Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  werden mit der Maximum-Likelihood-Methode nach DIN 511103 bestimmt.

$m = 8.5$ , unabhängig von Porosität und Temperatur. Die Abhängigkeit des Parameters  $\sigma_0$  von der Porosität ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Eine Temperaturabhängigkeit wurde hier nicht untersucht. Zur Berechnung der Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$ , die zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit notwendig ist (siehe Abschnitt 4.2.5), wird hier ein Normalspannungskriterium verwendet, bei dem Schub- und Druckspannungen nicht berücksichtigt werden.

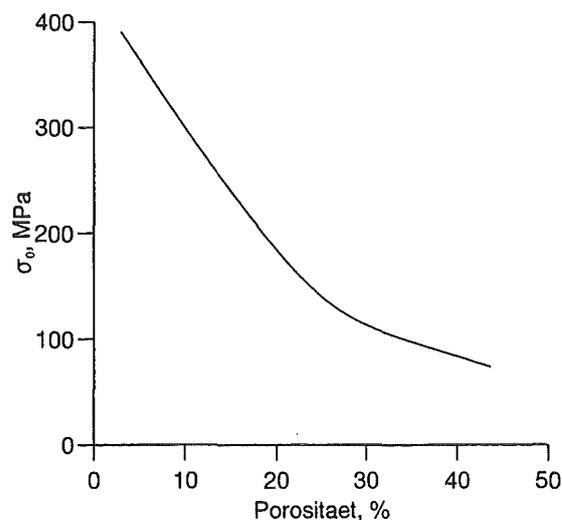


Abbildung 4.11: Abhängigkeit des Parameters  $\sigma_0$  von der Porosität.

Im vorliegenden Bauteil ist der Wärmeausdehnungskoeffizient vom Ort unabhängig. Thermospannungen entstehen also nur durch eine inhomogene Temperaturverteilung, die durch eine instationäre Aufheizung des Bauteils verursacht wird. Es wird davon ausgegangen, daß das Bauteil eine Anfangstemperatur von  $150^\circ\text{C}$  besitzt (Temperatur der vom Verdichter kommenden Luft). Beim Starten der Brennkammer ergibt sich eine instationäre Aufheizung der Wände. Beim Beginn der instationären Aufheizung wird die Temperatur der Außenseite des Bauteils auf  $550^\circ\text{C}$  gesetzt, die Temperatur der Innenseite auf  $1500^\circ\text{C}$ .

Unter den gegebenen Voraussetzungen ergibt sich eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1 für das Bauteil, unabhängig von der verwendeten Gradierungsfunktion. Es werden zwei Maßnahmen ergriffen um die Ausfallwahrscheinlichkeit zu verringern: Durch die Annahme der Verwendung eines festeren Materials wird der Parameter  $\sigma_0$  um den Faktor 1.8 erhöht. Die Belastung durch die instationäre Aufheizung wird durch eine dickere dichte Schicht (4 mm anstatt 2mm) verringert.

Bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich für den nicht gradierten Verbund eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_f = 0.156$ , für die Funktion 2 ergibt sich  $P_f = 6.29 \cdot 10^{-4}$ , für die Funktion 1  $P_f = 4.39 \cdot 10^{-6}$  und für die Funktion 3 ergibt sich eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_f = 1.80 \cdot 10^{-7}$ . (siehe Abb. 4.12)

In diesem Fall wird die günstige Ausfallwahrscheinlichkeit der Fkt. 3 nicht

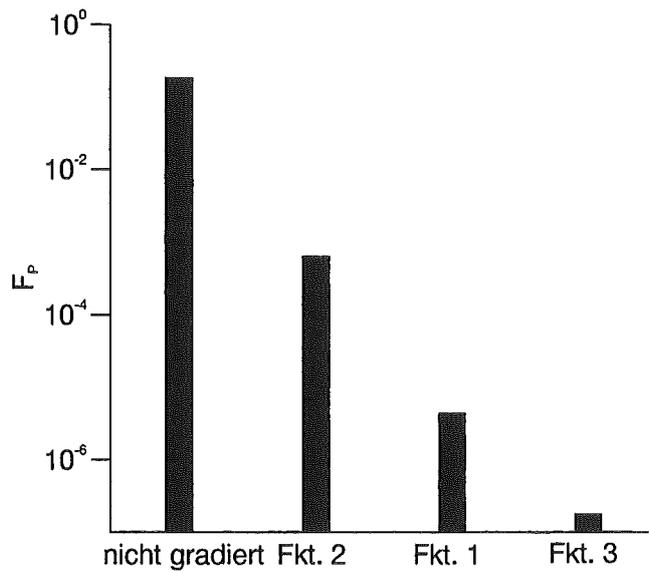
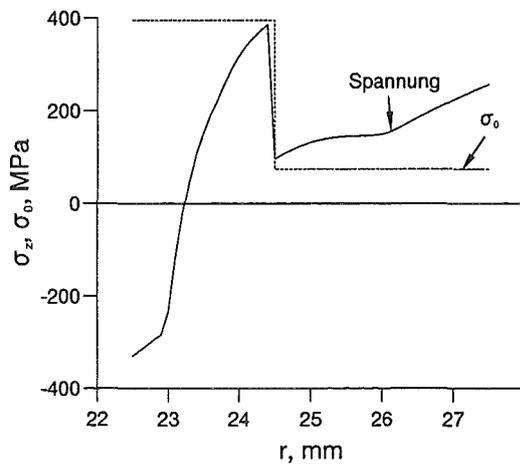
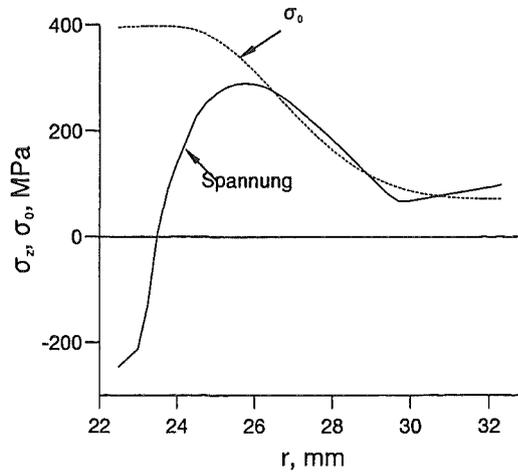


Abbildung 4.12: Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeit für verschiedene Porositätsgradienten.

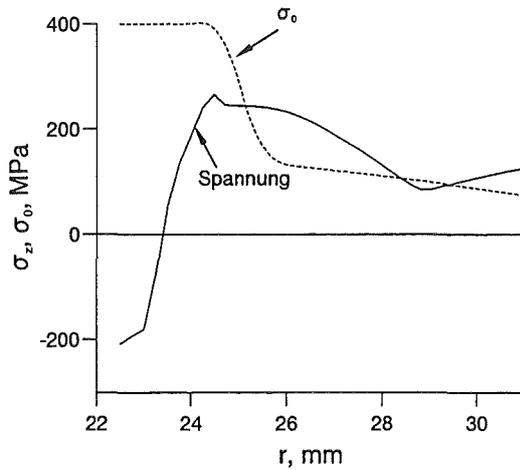
durch niedrigere Spannung, sondern durch eine gute Anpassung des Spannungsverlaufs an den Festigkeitsverlauf im Bauteil erreicht. Die Abbildung 4.13 zeigt einen Vergleich zwischen der mittleren Festigkeit des Materials (entsprechend der Porosität) und der maximal während des Aufheizvorganges auftretenden Spannung. In diesen Abbildungen werden die originalen Werte für Festigkeit und thermische Last verwendet. Man erkennt, daß, obwohl die Spannung für die Funktion 3 höher als für die anderen Funktionen ist, der Verlauf der Festigkeit den Spannungen optimal angepaßt ist. Daraus ergibt sich die geringere Ausfallwahrscheinlichkeit des Verbundes mit der Gradierungsfunktion Nr. 3, sie stellt die optimale Gradierungsfunktion dar.



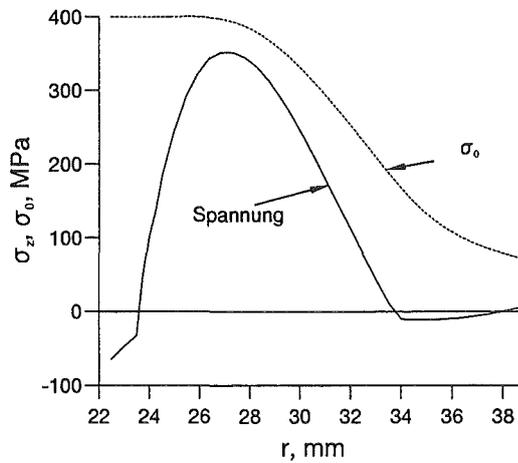
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 4.13: Vergleich von maximal auftretender Spannung und mittlerer Festigkeit für (a) das nicht gradierte Bauteil, (b) Fkt. 1, (c) Fkt. 2, (d) Fkt. 3.

## 4.2 Optimierung mit Hilfe des Schwarm- und Gradientenverfahrens

### 4.2.1 Anwendung von numerischen Optimierungsverfahren bei Gradientenwerkstoffen

In den vorher gezeigten Fällen wurde die günstigste Gradierungsfunktion aus mehreren verschiedenen Funktionen, anhand des besten Ergebnisses, ausgewählt. Um nach diesem Verfahren zu Ergebnissen zu kommen, ist eine ausreichend große Anzahl an verwendbaren Funktionen und eine gewisse Erfahrung bei ihrer Auswahl nötig. Mathematisch gesehen ist diese Methode sehr einfach.

Im folgenden werden zwei numerische Optimierungsverfahren beschrieben mit deren Hilfe eine Optimalfunktion für eine beliebige Anforderung gefunden werden kann.

Ein numerisches Optimierungsverfahren wird im allgemeinen angewendet, um für eine Funktion ein Minimum zu finden, deren Lösung nicht oder nur mit großem Aufwand analytisch gefunden werden kann. Die Funktion kann eine oder mehrere Variablen besitzen.

Mit der Zunahme der Anzahl von Variablen steigen die Freiheitsgrade der Funktion und damit die Möglichkeit dem Optimum nahe zu kommen, allerdings steigt auch die benötigte Rechenzeit, so daß hier ein Kompromiß gefunden werden muß. Ein Beispiel für eine einparametrische Funktion ist:

$$M(y) = M_2 - (M_2 - M_1) \left( \frac{h_1 + h_3 - y}{h_3} \right)^n, \quad (4.7)$$

wobei  $n$  als Optimierungsparameter verwendet wird. Zur Anwendung dieser Funktion siehe Abschnitt 4.2.4. Wird als Gradierungsfunktion eine mehrparametrische Funktion ausgewählt, kann ein Polynom verwendet werden:

$$M(y) = M_1 - (M_1 - M_2) \sum_{i=1}^n a_i y^i. \quad (4.8)$$

In diesem Fall sind die Parameter  $a_i$  des Polynoms die Optimierungsparameter. Eine weitere Möglichkeit ist, den Verlauf der Werkstoffeigenschaften durch eine Anzahl von Stützpunkten zu beschreiben. Zwischen den Stützpunkten wird linear interpoliert.

Wenn in einem mehrschichtigen Werkstoffverbund die Dicken der einzelnen Schich-

ten, die Materialdaten der nicht gradierten Schichten und die thermische Last festgelegt sind, ist die Spannung in dem Verbund nur noch von der Verteilung des Materials in der gradierten Schicht abhängig. Diese wird wiederum durch die Parameter beschrieben, so daß die Spannung in einem bestimmten Punkt des Verbundes eine Funktion der Optimierungsparameter ist. Für diese Funktion wird ein Minimum gesucht. Im folgenden werden dazu zwei Methoden vorgestellt.

## 4.2.2 Das Gradientenverfahren

Das Gradientenverfahren [35] ist ein iteratives, numerisches Verfahren zur Suche von Minima oder Maxima einer Funktion, die von mehreren Variablen abhängig ist. Wir betrachten eine Fläche im Raum, die durch:

$$z = F(y_1, y_2). \quad (4.9)$$

beschrieben werden kann. Die Beschränkung auf zwei Koordinaten wird hier nur wegen der einfacheren Darstellung gewählt, das Verfahren ist für eine beliebige Anzahl von Koordinaten durchführbar. Es wird weiter davon ausgegangen, daß für die Funktion  $F(y_1, y_2)$  die notwendigen Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Aufgabe des Gradientenverfahrens ist es nun, den tiefsten Punkt der Fläche, die durch Gl.(4.9) beschrieben wird, zu finden (das Verfahren ist selbstverständlich auch für die Maximumssuche geeignet). Begonnen wird mit einem beliebig wählbaren Startpunkt  $P(y_1^0, y_2^0)$ . Für diesen Startpunkt wird der Gradient

$$\text{grad}F = \left( \frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2} \right) \quad (4.10)$$

berechnet. Dieser Gradient zeigt in Richtung der stärksten Änderung von  $F$ . Es wird nun vom Startpunkt  $P(y_1^0, y_2^0)$  um ein Stück  $\Delta s$  fortgeschritten, um den nächsten Punkt zu bestimmen, d.h.:

$$y_i^{(p+1)} = y_i^p \pm \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{y_i^p} \Delta s \quad (4.11)$$

Die Schrittlänge  $\Delta s$  kann beliebig gewählt werden, wird aber im allgemeinen während der Iteration verringert, was eine Annäherung an das Minimum ermöglicht. Bei festem  $\Delta s$  würde das Verfahren das genaue Minimum nie erreichen. Ist das Minimum erreicht, muß das Verfahren abgebrochen werden. Abbildung 4.14 zeigt den Verlauf des Iterationsweges.

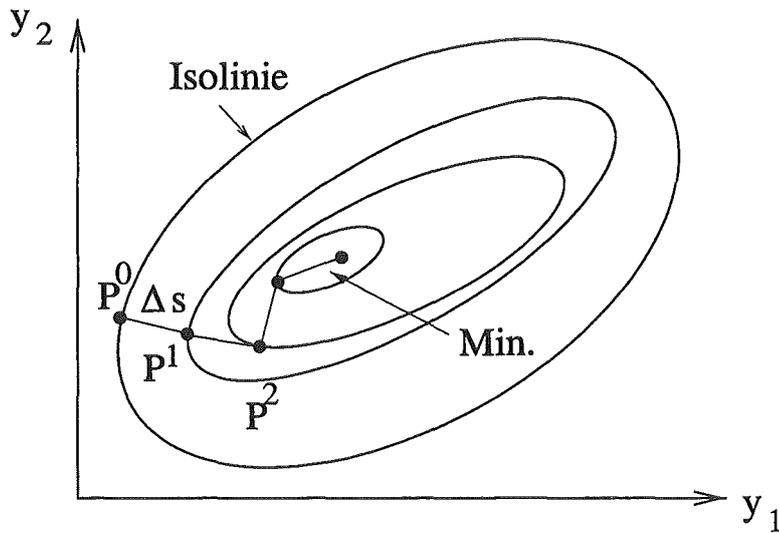


Abbildung 4.14: Der Verlauf des Iterationsweges beim Gradientenverfahren.

### 4.2.3 Das Schwarmsuchverfahren

Das Schwarmsuchverfahren ist ein genetischer Algorithmus (siehe [36]). Bei diesem Verfahren wird der Raum der Optimierungsparameter mit einer Anzahl von Gruppen der Variablen, den sogenannten Individuen, untersucht. Die Individuen ergeben zusammen die Population. Jedes Individuum beginnt beim Schwarmsuchverfahren seine Suche nach dem Minimum einer Funktion  $F(y_1, y_2, \dots)$  von einem gemeinsamen Startpunkt  $Y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots)$ . Von diesem Startpunkt aus wird für jedes Individuum ein neuer Suchpunkt definiert:

$$I_n = (y_{01} + \Delta s_{n1}, y_{02} + \Delta s_{n2}, \dots).$$

Die Länge der Schritte  $\Delta s_{ni}$  ist zufällig, aber beschränkt. Auch hier wird die Schrittlänge bei jedem Iterationsschritt verringert. Für jedes Individuum wird das Ergebnis bestimmt. Das beste Ergebnis ergibt den neuen Startpunkt  $Y_1$ . Von diesem Punkt aus wird der Algorithmus wiederholt, bis das Optimum erreicht ist (siehe Abb. 4.15).

### 4.2.4 Anwendungsbeispiele für das Gradientenverfahren

Betrachtet wird ein dreischichtiger Materialverbund entsprechend Abbildung 3.1. Die Materialdaten sind in Anhang A.2 verzeichnet. Der Verbund wird homogen abgekühlt. Die Berechnung der Spannung erfolgt analytisch nach dem in Abschnitt 3.2 gezeigten Verfahren. Es soll untersucht werden, in welchen Bereichen

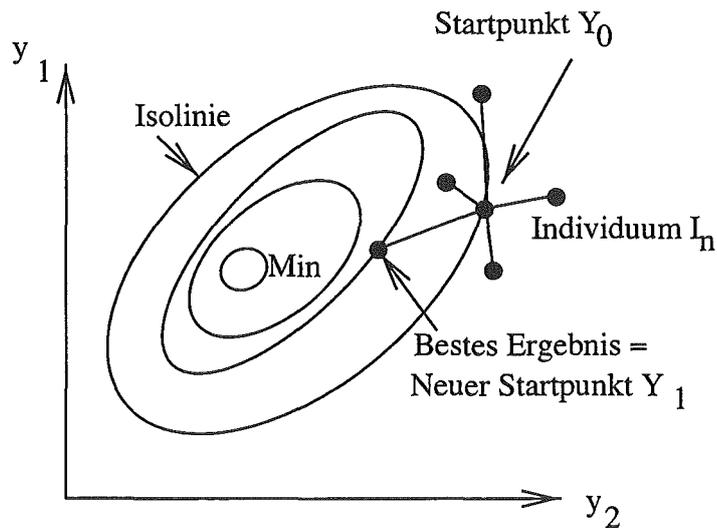


Abbildung 4.15: Der Verlauf des Iterationsweges beim Schwarmverfahren.

der Schichtdicken  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  es möglich ist, die Spannungen an bestimmten Punkten im Verbund zu Null zu bringen, und welcher Verlauf der Gradierung dabei notwendig ist. Verwendet wird dabei die einparametrische Funktion nach Gleichung(4.7).

Der optimale Parameter  $n$  wird mit dem Gradientenverfahren bestimmt. Die Abbildung 4.16 zeigt den Verlauf des Elastizitätsmoduls für verschiedene  $n$ . Die Ergebnisse werden in einer Dreiecksdarstellung gezeigt. Die beiden Achsen repräsentieren die Schichtdicken  $h_1/H$  und  $h_2/H$ . Die Schichtdicke  $h_3$  ergibt sich additiv aus den beiden anderen, d.h.  $h_3/H = 1 - h_1/H - h_2/H$ . Auf der Diagonale gilt  $h_3 = 0$ . Abbildung 4.17a zeigt die Werte von  $n$ , für die es möglich ist, eine Nullspannung an der Oberfläche zu erreichen. An den Isolinien ist der zugehörige Wert von  $n$  abzulesen. Es ist zu erkennen, daß im Ursprung des Koordinatensystems (dort gilt  $h_1 = h_2 = 0$ , also nur Gradientenmaterial)  $n = 1$  ist. Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt, ist für diesen Fall, lineare Gradierung in einem Verbund der nur aus der gradierten Schicht besteht, die Spannung überall Null.

In der Abbildung 4.17b werden die Werte von  $n$  gezeigt, für die die Spannung an der ersten Grenzfläche ( $y = h_1$ ) verschwindet, 4.18a zeigt die entsprechenden Werte für die zweite Grenzfläche ( $y = h_1 + h_3$ ) und Abbildung 4.18b zeigt die Werte für die zweite Oberfläche ( $y = H$ ). Im folgenden wird eine zweite Materialkombination untersucht. Die erste Schicht (mit der Höhe  $h_1$ ) besitzt einen Elastizitätsmodul von  $E_1 = 1000GPa$  und einen Ausdehnungskoeffizienten

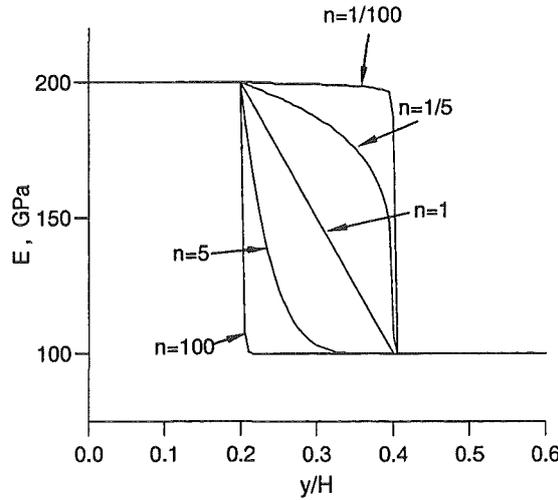


Abbildung 4.16: Der Verlauf des Elastizitätsmoduls für verschiedene  $n$  in Gl.(4.7).

effizient von  $\alpha_1 = 1 * 10^{-6}K^{-1}$ , die zweite Schicht (mit der Höhe  $h_2$ ) besitzt einen Elastizitätsmodul von  $E_2 = 200GPa$  und ein Ausdehnungskoeffizient von  $\alpha_2 = 10 * 10^{-6}K^{-1}$ . Die Materialparameter dieser Kombination entsprechen etwa einem Verbund aus Diamant in der ersten Schicht und Stahl in der zweiten Schicht. Die Abbildungen 4.19 und 4.20 zeigen die Werte von  $n$ , für die an den verschiedenen Positionen im Verbund die Spannung verschwindet. Interessanterweise hat nur das Verhältnis der Elastizitätsmoduli Einfluß auf die Gebiete, in denen ein Verschwinden der Spannung erreicht werden kann, ebenso wie auf die entsprechenden Werte von  $n$ . Das Verhältnis der Wärmeausdehnungskoeffizienten hat keinen Einfluß. Dies wird im folgenden gezeigt. Als Gradierungsfunktion für  $\alpha$  wird:

$$\alpha(y) = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)f(y) \quad (4.12)$$

mit:

$$f(y) = \left( \frac{h_1 + h_3 - y}{h_3} \right)^n \quad (4.13)$$

verwendet (siehe Gl.(4.7)). Gl.(4.12) wird in Gl.(3.11) eingesetzt. Für die in Gl.(3.11) angegebenen Integrale werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\int_0^H E(y)dy = A, \quad (4.14)$$

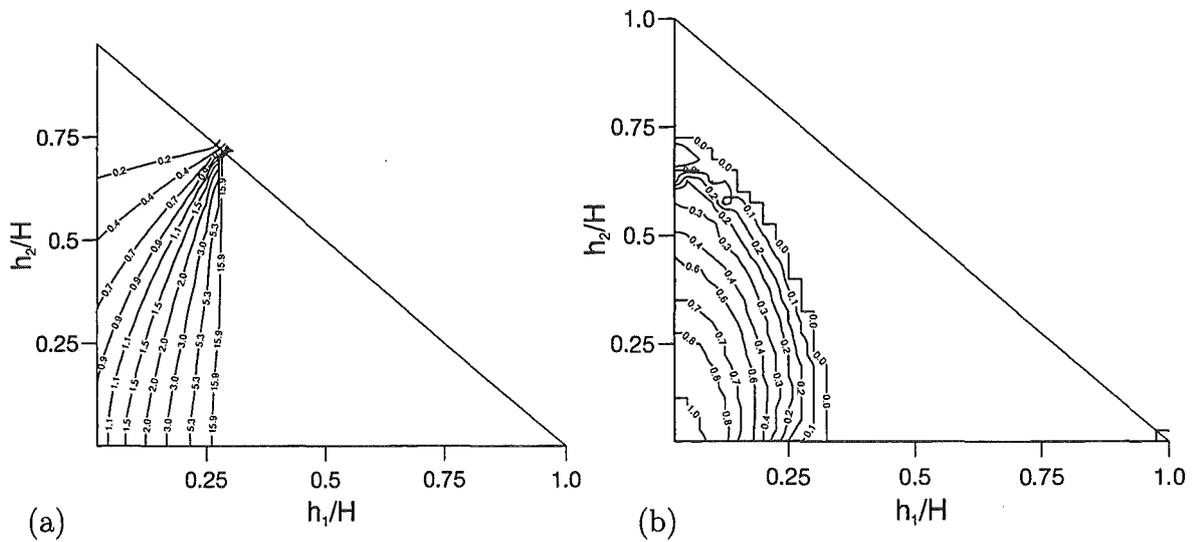


Abbildung 4.17: Exponent  $n$  für (a)  $\sigma_x(y = 0) = 0$  und (b)  $\sigma_x(y = h_1) = 0$ .

$$\int_0^H E(y)y dy = B, \quad (4.15)$$

$$\int_0^H E(y)y^2 dy = C, \quad (4.16)$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta T dy = \alpha_1\Delta TA - (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta TF, \quad (4.17)$$

mit:

$$F = \int_0^H E(y)f(y)dy,$$

$$\int_0^H E(y)\alpha(y)\Delta T y dy = \alpha_1\Delta TB - (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta TG, \quad (4.18)$$

mit:

$$G = \int_0^H E(y)f(y)y dy.$$

Einsetzen der Gleichungen (4.14) - (4.18) in Gl.(3.11) ergibt:

$$R = \frac{1}{\Delta T(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{B^2 - CA}{AG - FB} = \frac{1}{\Delta T(\alpha_1 - \alpha_2)} R', \quad (4.19)$$

mit:

$$R' = \frac{B^2 - CA}{AG - FB}.$$

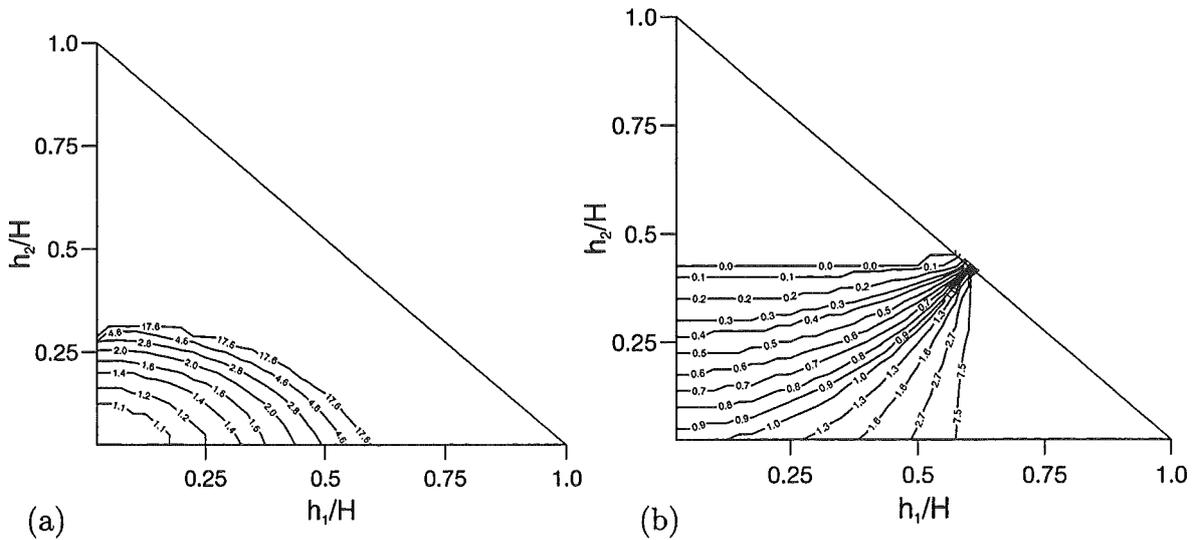


Abbildung 4.18: Exponent  $n$  für (a)  $\sigma_x(y = h_1 + h_3) = 0$  und (b)  $\sigma_x(y = H) = 0$ .

Aus den Gleichungen (4.19) und (3.8) folgt:

$$\varepsilon_0 = \alpha_1 \Delta T - (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T \left( \frac{F}{A} + \frac{B}{AR'} \right). \quad (4.20)$$

Aus den Gleichungen (3.2), (4.19) und (4.20) kann die Spannung an jedem Punkt  $y$  berechnet werden mit:

$$\sigma_x = \frac{E(y)}{1 - \nu(y)} \left( \frac{G(-B + Ay) + F(C - By)}{B^2 - CA} + f(y) \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T. \quad (4.21)$$

Wird angenommen, daß  $\sigma(y) = 0$  ist an einem beliebigen Punkt  $y = \tilde{y}$ , ergibt sich aus Gl.(4.21):

$$-\frac{F(C - B\tilde{y}) + G(-B + A\tilde{y})}{B^2 - CA} = f(\tilde{y}). \quad (4.22)$$

Da die durch  $A, B, C, F$  und  $G$  repräsentierten Integrale (Gl. (4.14) - (4.18)) unabhängig von  $\alpha$  sind, bedeutet dies, daß die gesuchte Funktion  $f(y)$  ebenfalls unabhängig von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ist. Dies ist auch anschaulich verständlich.

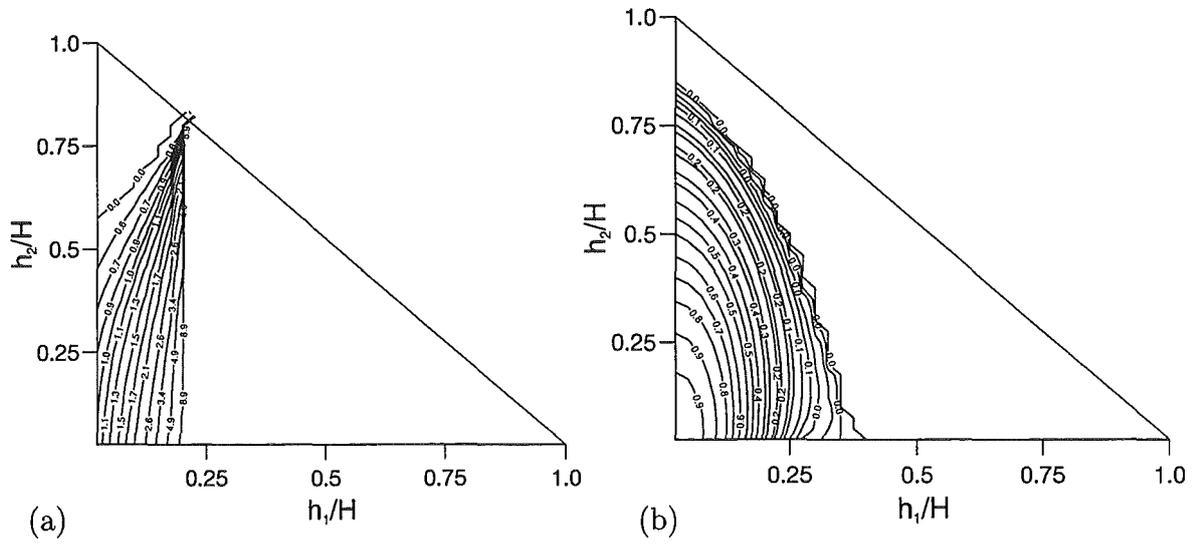


Abbildung 4.19: Exponent  $n$  für (a)  $\sigma_x(y = 0) = 0$  und (b)  $\sigma_x(y = h_1) = 0$  (zweite Materialkombination).

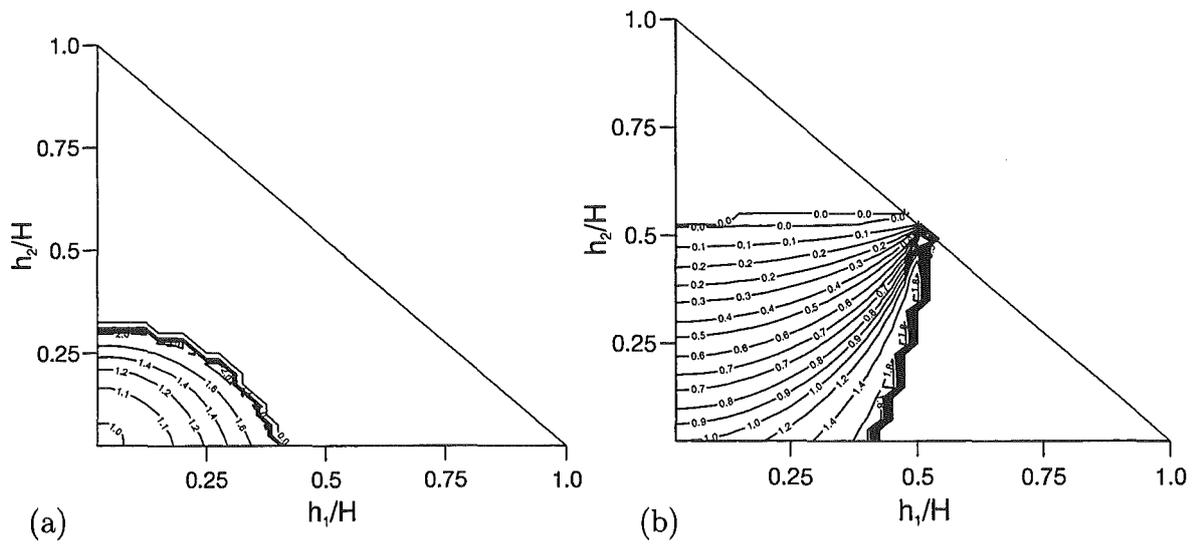


Abbildung 4.20: Exponent  $n$  für (a)  $\sigma_x(y = h_1 + h_3) = 0$  und (b)  $\sigma_x(y = H) = 0$  (zweite Materialkombination).

## 4.2.5 Anwendungsbeispiele für das Schwarmsuchverfahren

Bei den Beispielen zur Optimierung mit dem Schwarmsuchverfahren werden komplexere Anwendungsgebiete untersucht, die im allgemeinen eine Berechnung der Spannungen mit Hilfe der FE-Methode erfordern. Dadurch ergeben sich für Untersuchungen mit Iterationsverfahren sehr lange Rechenzeiten.

Beim Schwarmsuchverfahren kann der Startpunkt der Suche willkürlich gewählt werden. In den folgenden Beispielen wurde der Startpunkt, d.h. die Parameter der Gradierungsfunktion, immer so gewählt, daß sich eine lineare Gradierung als Ausgangspunkt der Minimumssuche ergibt.

### Spannungen an der Oberfläche eines Verbundes

Als erstes Beispiel wird die Spannung an der Oberfläche eines Dreischichtverbundes minimiert. Der Aufbau des Verbundes entspricht Abbildung 3.1. Die Materialparameter sind in Anhang A.2 verzeichnet. Die erste und die gradierte Schicht besitzen eine Dicke von  $h_1/H = h_3/H = 0.1$ .

Da die Temperaturänderung homogen ist und Bereiche weit entfernt vom Rand des Bauteils betrachtet werden, kann auch in diesem Fall die Spannung analytisch gerechnet werden.

Wie in Abschnitt 3.2 erwähnt, ist für diesen Fall nur eine geringe Änderung der Spannung für verschiedene Gradierungsfunktionen zu erwarten. Überraschend ist jedoch, daß sich die geringsten Spannungen für den nicht gradierten Verbund ergeben. Die Abbildung 4.21 zeigt den Spannungsverlauf im Verbund. Die hier verwendete Gradierungsfunktion, in Form eines Polynoms, erlaubt nicht die exakte Nachformung des Verlaufs der Materialdaten im nicht gradierten Fall, allerdings ist bei Ablauf der Optimierungsroutine deutlich zu erkennen, daß der nicht gradierte Verlauf angestrebt wird.

Der Grund für die geringere Spannung im Falle des nicht gradierten Verbundes liegt im Kräftegleichgewicht. Bei den hier verwendeten Materialdaten ist die thermische Ausdehnung der ersten Schicht geringer als die der zweiten Schicht. Minimale Spannungen ergeben sich damit bei möglichst geringer mechanischer Dehnung des Gesamtverbundes. Diese kann durch einen möglichst hohen Anteil des Materials mit geringer Ausdehnung erreicht werden. Die geringe Dehnung der gradierten Schicht kann verstärkt wirken, wenn die Steifigkeit dieser Schicht

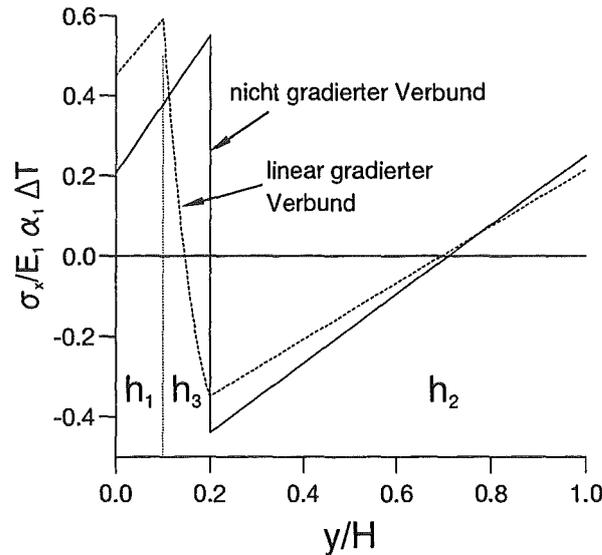


Abbildung 4.21: Spannungsverlauf für eine Optimierung der Spannung an der Oberfläche.

und damit ihr Elastizitätsmodul möglichst hoch ist. Beide Faktoren verlangen, daß die gradierte Schicht aus dem Material der ersten Schicht, die einen geringeren Wärmeausdehnungskoeffizienten und einen höheren Elastizitätsmodul als die zweite besitzt, besteht. Somit ergeben sich für einen nicht gradierten Verbund geringere Spannungen an der Oberfläche.

### Optimierung eines Spannungsintegrals

Im allgemeinen wird man bei einer Spannungsoptimierung eine möglichst niedrige Spannung an der Oberfläche des Verbundes anstreben, da die meisten Schäden von der Oberfläche ausgehen. Dies kann, wie vorher gezeigt, durch einen nicht gradierten Verbund erreicht werden. In diesem Fall ergeben sich allerdings höhere Spannungen in anderen Bereichen des Verbundes. In Abbildung 4.21 ist dies im Bereich der gradierten Schicht ( $0.1 < y/H < 0.2$ ) zu erkennen. Wird gefordert die Spannung z.B. in der ersten und der gradierten Schicht insgesamt gering zu halten, ergibt sich ein Vorteil für den gradierten Verbund. Es wird das Integral über die Spannungen in den ersten beiden Schichten gebildet:

$$\bar{\sigma} = \int_{y=0}^{y=h_1+h_3} \sigma(y) dy. \quad (4.23)$$

Der Wert dieses Integrals  $\bar{\sigma}$  soll minimiert werden. Betrachtet wird die Geometrie aus dem vorigen Kapitel mit  $h_1/H = 0.1$ ,  $h_2/H = 0.8$  und  $h_3/H = 0.1$ .

Die Materialdaten sind in Anhang A.2 verzeichnet. Der Verbund wird homogen abgekühlt. Das Integral wird über die beiden ersten Schichten ( $0 \leq y \leq h_1 + h_3$ ) gebildet. Abbildung 4.22 zeigt die Verläufe von Spannung und Elastizitätsmodul für den nicht gradierten Fall, eine lineare Gradierung und die optimierte Gradierung. Setzt man den Wert des Integrals für den nicht gradierten Fall gleich 1, ergibt sich für die lineare Gradierung ein Wert von 0.85. Da auch in diesem Fall die lineare Gradierung als Startpunkt der Optimumssuche dient, ist die Aufgabe der Optimierungsroutine, diesen Wert zu verringern. Die Optimumssuche ergibt für diesen Fall keine Verbesserung des Ergebnisses gegenüber der linearen Gradierung, woraus zu folgern ist, daß ein linearer Verlauf der Materialeigenschaften das Optimum bei der vorliegenden Aufgabe ist. In Abbildung 4.22a ist zu erkennen, daß der Elastizitätsmodul für die linear gradierte und die optimierte Funktion einen leicht unterschiedlichen Verlauf aufweist. Hier zeigt sich der Nachteil der numerischen Minimumssuche. Es ist hier nicht möglich das absolute Minimum zu finden, sondern man kann sich ihm nur annähern. Der lineare und der vom Optimierungsverfahren gefundene Verläufe sind im Rahmen der Rechengenauigkeit gleich günstig, woraus sich auch ergibt, daß sie beide das gleiche Ergebnis aufweisen.

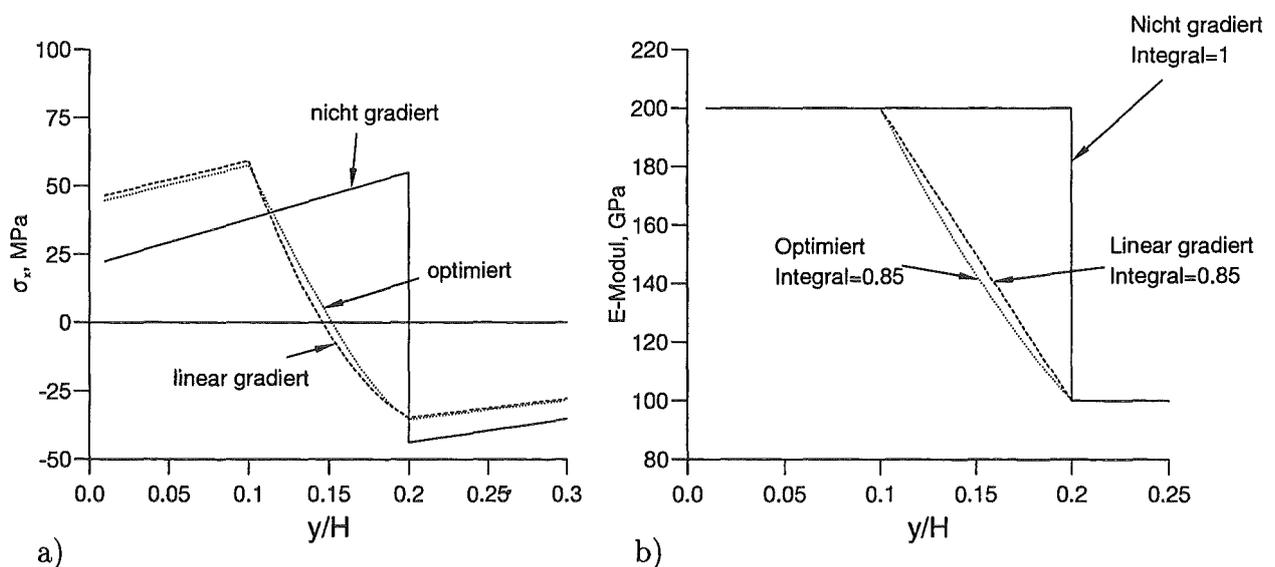


Abbildung 4.22: Verlauf der Spannung (a) und des E-Moduls (b) für den nicht gradierten Fall, eine lineare Gradierung und die optimierte Gradierung.

## Spannungen bei inhomogener thermischer Belastung

Bei den bisherigen Berechnungen wurde von einer homogenen Temperaturänderung im Bauteil ausgegangen. Im folgenden soll die Auswirkung von inhomogenen Temperaturverteilungen untersucht werden. Die Schichtdicken des Verbundes sind  $h_1/H = 0.1$ ,  $h_2/H = 0.8$  und  $h_3/H = 0.1$ . Der Verlauf der Temperatur wird dabei willkürlich vorgegeben.

Im ersten Fall folgt die Temperaturverteilung einer e-Funktion nach:

$$\Delta T(y) = -0.05e^{10(1-y/H)}. \quad (4.24)$$

Abbildung 4.23 zeigt den Temperaturverlauf. Der Verlauf ist angelehnt an den Temperaturverlauf einer instationären Abkühlung der Oberfläche des Bauteils. Optimierungskriterium ist eine minimale Spannung an der Oberfläche ( $y = 0$ ).

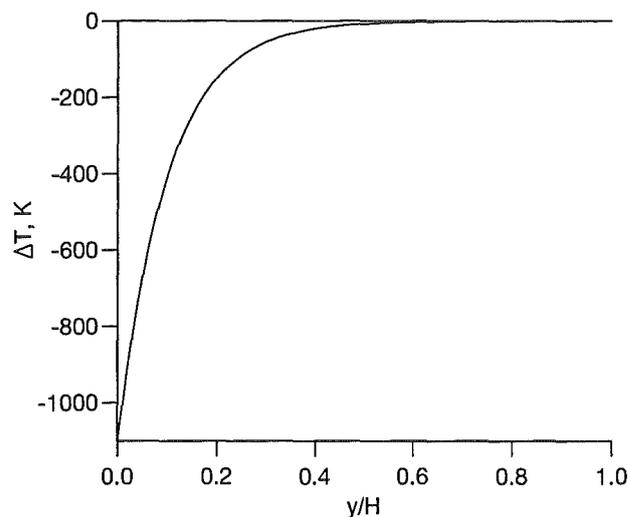


Abbildung 4.23: Inhomogener Temperaturverlauf im Bauteil.

Abbildung 4.24 zeigt die zugehörigen Spannungsverläufe. Es ist zu erkennen, daß für diesen Fall der optimale Schichtaufbau einem Zweischichtsystem entspricht, bei dem die gradierte Schicht aus dem Material 2 besteht.

Als weiteres Beispiel wird ein Verbund aus drei gleich dicken Schichten betrachtet ( $h_1 = h_2 = h_3 = H/3$ ), wobei ein linearer Temperaturgradient innerhalb des Verbundes angenommen wird. Ein solcher Temperaturverlauf würde sich einstellen, wenn die beiden Oberflächen des Verbundes mit unterschiedlichen

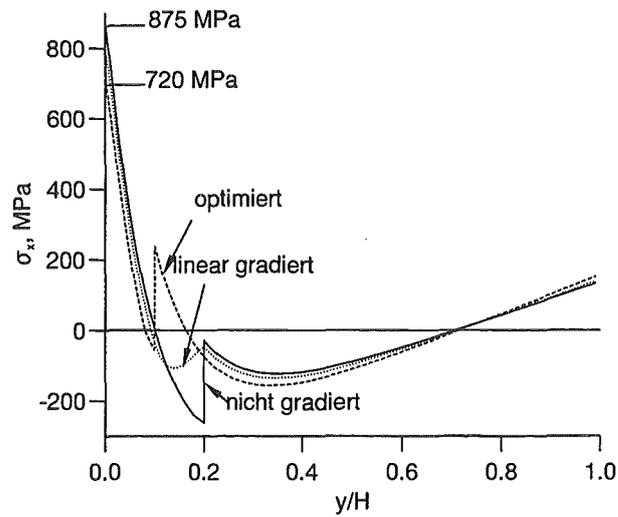


Abbildung 4.24: Spannungsverlauf im nicht gradierten Bauteil, bei linearer Gradiierung und bei optimalem Verlauf der Gradiierungsfunktion.

Temperaturen beaufschlagt werden und die Wärmeleitfähigkeit der drei Schichten gleich ist. Die Spannung an der Oberfläche der ersten Schicht soll minimiert werden. Der Verlauf des E-Moduls im nicht gradierten und optimierten Fall und der Verlauf der Spannung werden in Abbildung 4.25 und 4.26 gezeigt. Die Spannung an der Oberfläche ändert sich von -6 MPa auf nahezu Null.

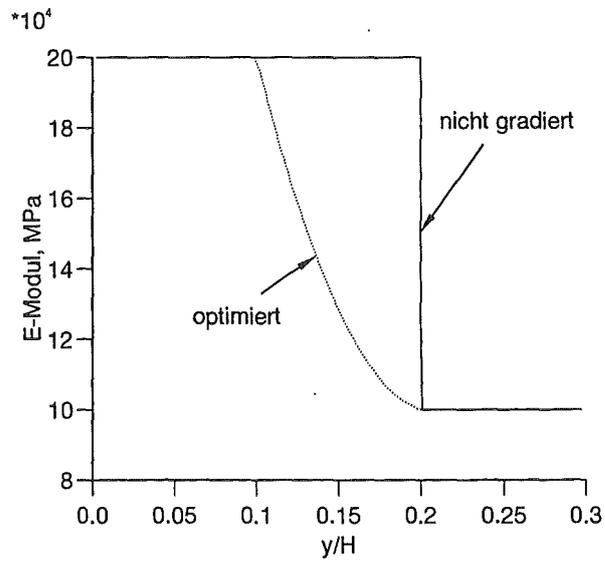


Abbildung 4.25: Verlauf des E-Moduls im nicht gradierten Bauteil und bei optimalem Verlauf der Gradierungsfunktion ( $h_1 = h_2 = h_3 = H/3$ ).

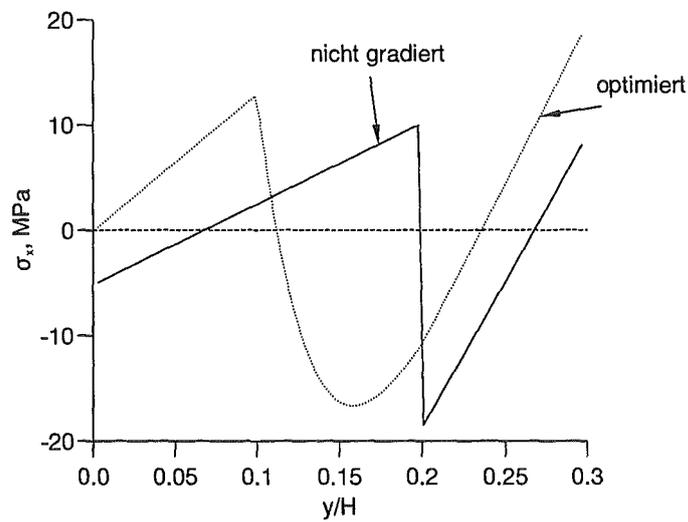


Abbildung 4.26: Spannungsverlauf im nicht gradierten Bauteil und bei optimalem Verlauf der Gradierungsfunktion ( $h_1 = h_2 = h_3 = H/3$ ).

## Spannungsminimierung an der freien Oberfläche

Wie in Abschnitt 2.4.3 erwähnt, ergeben sich am Schnittpunkt der freien Oberfläche mit der Grenzfläche zwischen den Materialien eines nicht gradierten Verbunden Singularitäten (Bereich 1, Punkt B in Abbildung 2.7). Diese Singularitäten verschwinden bei Anwendung eines Gradientenwerkstoffes, allerdings treten immer noch Spannungsüberhöhungen auf. Die maximale Spannung tritt generell entlang der freien Oberfläche auf. Diese Spannung soll minimiert werden. Die Berechnung der Spannungen erfolgt mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Als Ausgangspunkt der Minimumssuche dient wieder die lineare Funktion. Der Aufbau des Verbundes entspricht Abbildung 3.1. Die Materialdaten sind in Anhang A.2 verzeichnet. Die erste und die gradierte Schicht besitzen eine Dicke von  $h_1/H = h_3/H = 0.1$ . Der Verbund wird einer Abkühlung von  $1000K$  unterworfen, was der Abkühlung nach einem realen Produktionsprozeß entspricht. Die Abbildung 4.27 zeigt eine Vergleich zwischen den Spannungen in einem linear gradierten Verbund und dem optimierten Verbund. Es ist möglich die maximale Spannung um ca. 15 % zu reduzieren. Abbildung 4.28 zeigt den Verlauf des Elastizitätsmoduls für die optimierte Funktion.

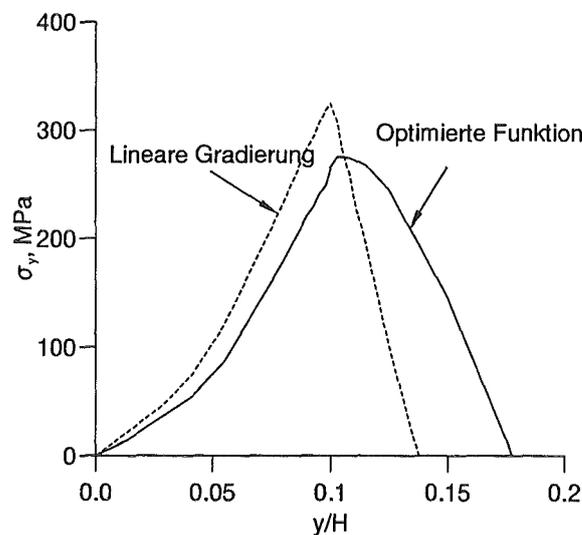


Abbildung 4.27: Spannungsverlauf im linear gradierten Bauteil und bei optimalem Verlauf der Gradierungsfunktion für ein minimales Spannungsmaximum an der freien Oberfläche.

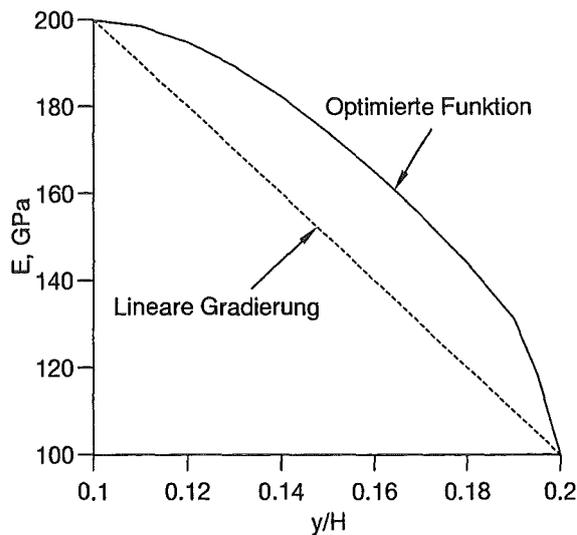


Abbildung 4.28: Verlauf des Elastizitätsmoduls im linear gradierten Bauteil und bei optimalem Verlauf der Gradierungsfunktion für ein minimales Spannungsmaximum an der freien Oberfläche.

### Optimierung eines Spannungsintensitätsfaktors

Mit dem hier vorgestellten Optimierungsverfahren ist es möglich jede Art von Ergebnis, das sich aus einer FEM-Berechnung und dem zugehörigen Postprocessing ergibt zu optimieren. Im Vorgriff auf das Kapitel 5 soll ein Spannungsintensitätsfaktor bei einem Riß minimiert werden. Der Riß steht senkrecht zur Oberfläche des Bauteils (siehe Abbildung 2.7, Bereich 3). Die Länge des Risses ist so gewählt, das er in der Mitte der gradierten Schicht endet. Der Aufbau des Verbundes und die Materialdaten entsprechen den vorherigen Abschnitten. Es wird eine Temperaturerhöhung von 100K aufgebracht. Es wird angenommen, daß die Ausdehnung des Verbundes in  $x$  und  $z$  Richtung groß, im Verhältnis zur Dicke  $H$ , sei. Der Riß befindet sich in der Mitte des Verbundes. Durch die Symmetrie des Problems tritt nur eine Modus-I-Beanspruchung auf.

Für den nicht gradierten Verbund (d.h. die Materialdaten der gradierten Schicht entsprechen denen der ersten Schicht) ergibt sich ein normierter Spannungsintensitätsfaktor von  $K_I/(\Delta T \alpha_1 E_1 \sqrt{H}) = 0.123$ . Für einen linear gradierten Verbund ist  $K_I/(\Delta T \alpha_1 E_1 \sqrt{H}) = 0.00402$ , während bei der optimierten Funktion (siehe Abb. 4.29) der Spannungsintensitätsfaktor zu Null reduziert werden kann. Der Verlauf des Elastizitätsmoduls für die Optimalfunktion ist in Abbildung 4.29 dargestellt. Die Reduktion des Spannungsintensitätsfaktor zu Null mit Hilfe der

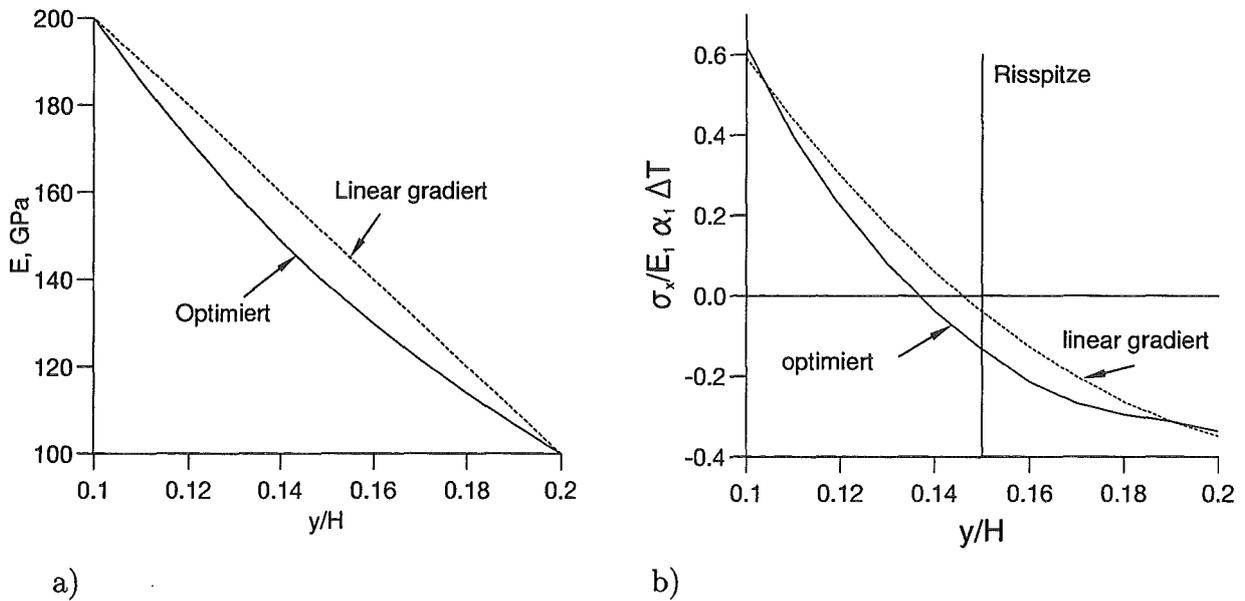


Abbildung 4.29: Verlauf des Elastizitätsmoduls (a) und der Spannung im Bereich der Rißspitze (b) im linear gradierten Bauteil und bei optimalem Verlauf der Gradierungsfunktion für einen minimalen Spannungsintensitätsfaktor.

optimierten Funktion kann anhand der Theorie der Gewichtsfunktionen erklärt werden. Die Methode der Gewichtsfunktionen wurde von Bückner [37] entwickelt. Sie ist ein effektives Verfahren zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren. Ist die Gewichtsfunktion für eine bestimmte Riß- und Bauteilgeometrie bekannt, kann der Spannungsintensitätsfaktor durch Multiplikation der Spannung in der ungerissenen Struktur mit der Gewichtsfunktion und Integration entlang der Rißlänge berechnet werden. Da die Gewichtsfunktion selbst unabhängig von der Belastung ist, muß die Gewichtsfunktion nur einmal bestimmt werden, um die Spannungsintensitätsfaktoren eines Risses in beliebigen Spannungsfeldern zu berechnen. Der hier betrachtete Riß steht senkrecht zur Oberfläche und ist einer Modus-I-Belastung unterworfen. Der Spannungsintensitätsfaktor eines Risses kann mit Hilfe der Gleichung:

$$K_I = \int_0^a h(y, a) \sigma(y) dy \quad (4.25)$$

berechnet werden.  $h(y, a)$  ist dabei die Gewichtsfunktion,  $\sigma(y)$  die Spannung in der ungerissenen Struktur. Für Spezialfälle läßt sich eine analytische Lösung für die Gewichtsfunktionen finden. Für den vorliegenden Fall eines senkrechten

Oberflächenrisses läßt sich die Gewichtsfunktion als Potenzreihe darstellen [38]:

$$h(y, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - y/a}} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n (1 - y/a)^{n-1/2} \right] \quad (4.26)$$

Durch Abbrechen bei z.B.  $n = 3$  erhält man eine Polynomdarstellung. Die Koeffizienten  $D_n$  können über Referenzlastfälle bestimmt werden, d.h. durch Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren für drei ausgewählte Lastfälle.

Von Bedeutung für den vorliegenden Fall ist, daß die Gewichtsfunktion für  $y \rightarrow a$  singularär ist. Damit sind bei der Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors die Spannungen im Bereich der Rißspitze von besonderer Bedeutung für den Betrag von  $K_I$ . Betrachtet man nun den Spannungsverlauf im ungerissenen Bauteil für einen gradierten und einen nicht gradierten Verbund (siehe Abb 4.21), läßt sich erkennen, daß im Bereich der Rißspitze, an der Stelle  $y/H = 0.15$  die Spannung beim nicht gradierten Verbund sehr hoch ist, beim gradierten Verbund hingegen einen Vorzeichenwechsel macht. In Abbildung 4.29b ist der Spannungsverlauf für den linear gradierten und den optimierten Verbund dargestellt. Es ist zu erkennen, daß bei der optimalen Gradierung der Anteil negativer Spannungen etwas höher ist, als bei der linearen Gradierung. Damit ist es möglich, den Spannungsintensitätsfaktor ganz zu Null zu bekommen.

### Optimierung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Bei einer Kopplung zwischen FEM-Rechnung und Optimierungsalgorithmus kann auch eine Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit eingefügt werden. Mit Hilfe des am Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau (Universität Karlsruhe) entwickelten Programms STAU (STatistische AUswertung) ist es möglich die Volumen- und Oberflächenausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils zu berechnen (siehe auch [39]).

Zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Weibulltheorie wird ein vereinfachtes Modell eines Bauteils, in dem Spannungen wirken, betrachtet:

- das Material ist von einer großen Anzahl von Fehlern durchsetzt, die eine unterschiedliche Fehlergröße  $a$  besitzen,
- die Fehler sind homogen verteilt, haben die gleiche Orientierung und beeinflussen sich nicht gegenseitig,
- das Spannungsfeld im Bauteil ist homogen,

- das Versagen geht vom größten Fehler im Bauteil aus.

Die Versagenswahrscheinlichkeit eines Bauteils wird damit von der Verteilung der Fehlergröße bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler kleiner ist als eine kritische Fehlergröße  $a_c$  entspricht der normierten Verteilungsfunktion  $F_a(a_c)$ :

$$F_a(a_c) = \int_0^{a_c} f_a(a) da, \quad (4.27)$$

mit:

$f_a(a)$  : Verteilungsdichte der Fehlergröße  $a$ .

Ein Fehler der Größe  $a$  führt nicht zum Versagen, wenn er kleiner ist als der kritische Wert  $a_c$ . Die Überlebenswahrscheinlichkeit  $P_s$  eines Bauteils mit genau einem Fehler lautet dann:

$$P_s^{(1)} = F_a(a_c) = \int_0^{a_c} f_a(a) da. \quad (4.28)$$

Bei  $n$  Fehlern im Bauteil berechnet sich die Überlebenswahrscheinlichkeit zu:

$$P_s^{(n)} = (P_s^{(1)})^n. \quad (4.29)$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils mit einem Fehler gilt:

$$P_f^{(1)} = 1 - P_s^{(1)} = \int_{a_c}^{\infty} f_a(a) da. \quad (4.30)$$

In einem Bauteil des Volumens  $V$  sind im Mittel  $Z$  Fehler enthalten. Die wirkliche Anzahl der Fehler in einem Bauteil ist aber statistisch verteilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei der mittleren Fehleranzahl  $Z$  gerade  $n$  Fehler vorhanden sind, ist durch die Poissonverteilung gegeben:

$$P_n = \frac{e^{-z} Z^n}{n!}. \quad (4.31)$$

Somit berechnet sich die Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Bauteil, mit im Mittel  $Z$  Fehlern, aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, daß  $n$  Fehler vorhanden sind und daß alle Fehler kleiner als  $a_c$  sind. Dabei wird über alle möglichen Fehlerzahlen  $n$  summiert:

$$P_s = \sum_{n=0}^{\infty} P_s^{(n)} P_n. \quad (4.32)$$

Durch Umformen und Einsetzen der Gl.(4.31) ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Bauteils:

$$P_s = \exp \left[ -zV(P_f^{(1)}) \right], \quad (4.33)$$

mit :

$z$  : Anzahl der Fehler in der Volumeneinheit  $V_0$ .

Die Ausfallwahrscheinlichkeit für ein Bauteil berechnet sich dann aus Gl.(4.33) und Gl.(4.30) zu:

$$P_f = 1 - \exp \left[ -zV \int_{a_c}^{\infty} f_a(a) da \right] \quad (4.34)$$

Es wird angenommen, daß der Verlauf von  $f(a)$  näherungsweise durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann:

$$f(a) \sim \frac{1}{a^r}. \quad (4.35)$$

Aus Normierungsgründen muß gelten:

$$F(a) = 1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{r-1} \quad \text{für } a > a_0. \quad (4.36)$$

Das Integral aus Gl.(4.30) ergibt sich dann zu:

$$\int_{a_c}^{\infty} f_a(a) da = \left( \frac{a_0}{a_c} \right)^{r-1}. \quad (4.37)$$

Aus der Bruchmechanik erhält man eine Beziehung zwischen der Spannung  $\sigma_0$  und der kritischen Fehlergröße  $a_c$  eines Bauteils in Modus I Belastung. Damit kann man die Ausfallwahrscheinlichkeit auf die im Bauteil herrschenden Spannungen beziehen:

$$a_c = \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_c Y_I} \right)^2, \quad (4.38)$$

mit:

$K_{IC}$ : Spannungsintensitätsfaktor,

$Y_I$ : Geometriefaktor.

Somit ergibt sich aus Gl.(4.34) mit Gl.(4.37) und Gl.(4.38):

$$P_f = 1 - \exp \left[ -zV \left( \frac{a_0 \sigma_c^2 Y_I^2}{K_{IC}^2} \right)^{r-1} \right] \quad (4.39)$$

Dies ist eine Weibullverteilung:

$$P_f = F(\sigma_c) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right], \quad (4.40)$$

mit den beiden Weibullparametern:

$$m = 2(r - 1), \quad (4.41)$$

und

$$\sigma_0 = \frac{K_{IC}}{Y_I \sqrt{a_0} (zV)^{1/m}} \quad (4.42)$$

Zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit eines realen Bauteils muß die Beschränkung auf eine Gleichorientierung der Fehler und einen homogenen, einachsigen Spannungszustand aufgegeben werden.

Der mehrachsige Spannungszustand wird durch Einführung einer Äquivalentspannung berücksichtigt:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1(x, y, z), \sigma_2(x, y, z), \sigma_3(x, y, z)). \quad (4.43)$$

Dabei sind  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\sigma_3$  die Hauptspannungen,  $x, y, z$  die Raumkoordinaten. Im vorliegenden Fall wird das Normalspannungskriterium verwendet. Dieses Kriterium ist nicht schubspannungsempfindlich und berücksichtigt nur die Spannung normal zur Rißebeine. Das verwendete Programm STAU läßt allerdings auch andere Kriterien zu.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils mit einem beliebig orientierten Riß berechnet sich aus dem Produkt dreier Wahrscheinlichkeiten: der Wahrscheinlichkeit, daß der Riß größer als die kritische Rißgröße ist, das der Riß eine bestimmte Stelle im Bauteil einnimmt ( $f_V$ ) und daß er eine bestimmte Orientierung im Bauteil besitzt ( $f_\Omega$ ).  $\Omega$  steht dabei für die Oberfläche der Einheitskugel, die alle Orientierungen der Rißnormalen enthält. Gl.(4.30) wird somit erweitert:

$$P_f^{(1)} = \int_\Omega \int_V \int_{a_c}^\infty f_a(a) f_V f_\Omega da d\Omega dV. \quad (4.44)$$

Unter der Voraussetzung das die Risse gleichmäßig über das Volumen verteilt sind wird

$$f_V = \frac{1}{V}. \quad (4.45)$$

Es wird weiter vorausgesetzt, daß die Risse gleichmäßig im Raum orientiert sind, was für die Wahrscheinlichkeit der Orientierung:

$$f_\Omega = \frac{1}{4\pi} \quad (4.46)$$

ergibt. Durch Einsetzen von Gl.(4.45) und Gl.(4.46) in Gl.(4.44) ergibt sich:

$$P_f^{(1)} = \frac{1}{V} \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \int_V \int_{a_c}^\infty f_a(a) da d\Omega dV. \quad (4.47)$$

Mit dieser Beziehung kann die Rechnung analog zu Gl.(4.30) - Gl.(4.39) durchgeführt werden und ergibt:

$$P_f = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_V \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{IO}} \right)^m d\Omega dV \right], \quad (4.48)$$

mit den Weibullparametern:

$$m = 2(r - 1), \quad (4.49)$$

und

$$\sigma_{IO} = \frac{K_{IC}}{Y_I \sqrt{a_0} (zV_0)^{1/m}}. \quad (4.50)$$

Ein großes  $m$  steht für eine geringe Streuung der Fehlergrößen und damit der Streuung des Versagens einer Reihe von Bauteilen.

Zur Bestimmung der Weibullparameter wird im allgemeinen eine 4-Punkt-Biegeprobe oder ein Doppelringversuch verwendet. Die Gl.(4.48) wird in die Form:

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (4.51)$$

gebracht.  $\sigma^*$  ist eine geeignete Bezugsspannung, z.B. die Randfaserspannung in der 4-Punkt-Biegeprobe. Für die Äquivalentspannung gilt dann:

$$\sigma_{eq}(x, y, z) = \sigma^* g(x, y, z) \quad (4.52)$$

Aus Gl.(4.51) kann mit geeigneten Methoden (siehe [40]) aus den Ergebnissen der Biegeversuche  $m$  und  $b$  gewonnen werden. Während  $m$  ein echter Materialparameter ist, ist  $\sigma_0$  vom Volumen und dem Spannungszustand in der Probe abhängig. Der Weibullparameter  $\sigma_{IO}$  muß aus  $\sigma_0$  berechnet werden:

$$\sigma_{IO} = \sigma_0 \left( \frac{V_{eff}}{V_0} \right)^{1/m}, \quad (4.53)$$

mit dem effektiven Volumen:

$$V_{eff} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_V g(x, y, z)^m d\Omega dV. \quad (4.54)$$

Für einfache Geometrien und Spannungszustände ist die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit analytisch möglich. Bei komplexeren Beispielen kann die Ausfallwahrscheinlichkeit mit dem Programm STAU berechnet werden. Dieses Programm liest die Ergebnisse der FEM-Rechnungen an den Integrationspunkten ein. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird für jedes Element berechnet. Die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich durch Summation der Elementausfallwahrscheinlichkeiten. Das Programm erlaubt auch eine graphische Darstellung der lokalen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit muß zwischen Versagen durch Oberflächenfehler und durch Volumenfehler unterschieden werden. In STAU werden für beide Versagensfälle getrennte Werte errechnet. Im folgenden werden nur Volumenfehler als Versagensursache untersucht.

Das hier betrachtete Bauteil ist ein gradierter Dreischichtverbund. Der Aufbau entspricht Abbildung 3.1. Die Dicke der ersten und der gradierten Schicht ist  $h_1 = h_3 = 0.125H$ . Die Abmessung in x-Richtung ist  $1.8H$ . Es wird in z-Richtung der ebene Dehnungszustand angenommen. Der Verbund besitzt eine freie Oberfläche, an der bei einem nicht gradierten Verbund Singularitäten auftreten. Da diese im allgemeinen zum Versagen des Bauteils führen, wird hier nur der Vergleich zwischen einem linear gradierten Verbund und einem optimierten Verbund angestellt. Der Verbund wird einer homogenen Aufheizung von 100K unterworfen. Die Materialparameter sind in Anhang A.2 verzeichnet. Bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit werden nur die erste Schicht und die gradierte Schicht betrachtet. Unter der Annahme eines metallischen Substrates ist eine Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit für die zweite Schicht nicht sinnvoll.

Als Gradierungsfunktion wird in diesem Fall keine mathematische Funktion verwendet sondern 4 Stützpunkte für die Materialparameter, zwischen denen die Materialeigenschaften linear interpoliert werden. Diese Stützpunkte werden als Parameter für die Optimierung verwendet.

Von großer Bedeutung bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit sind die Weibullparameter. Im ersten Beispiel werden beide Parameter  $m$  und  $\sigma_0$  für beide Schichten konstant gehalten, mit  $m = 8$  und  $\sigma_0 = 150MPa$ . Für den linear gradierten Verbund ergibt sich eine Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_f = 6.3 \cdot 10^{-8}$ . Nach Optimierung kann dieser Wert auf  $P_f = 2.45 \cdot 10^{-8}$  gesenkt werden. Abbildung 4.30a zeigt den optimierten Verlauf des Elastizitätsmoduls. Die graphische Auswertung der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt, daß der Bereich mit der lokal höchsten Ausfallwahrscheinlichkeit der Schnittpunkt zwischen der Grenzfläche gradierte Schicht/Substrat und der freien Oberfläche ist (siehe Abb.4.31, Bereich 1).

Die Abbildung 4.30b zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  an der freien Oberfläche in y-Richtung. Man erkennt, daß sich der Spannungsverlauf zwischen dem linear

gradierten und dem optimierten Verbund nur im Bereich der Grenzfläche deutlich unterscheidet. Hier zeigt sich ein starker Abfall der Spannungen im optimierten Verbund im Bereich der maximalen lokalen Ausfallwahrscheinlichkeit ( $y/h_3 = 2$ ). Dieser starke Abfall führt zu der verringerten Ausfallwahrscheinlichkeit. Abbildung 4.30a zeigt einen steilen Abfall des Elastizitätsmoduls an der Grenzfläche. Da das Verhalten der Spannungen im Randbereich nicht analytisch berechenbar und auch mit Erfahrung nur schwer zu beurteilen ist, kann hier ein Optimierungsverfahren Gradierungsfunktionen aufzeigen, deren Verwendung sonst nicht naheliegend ist. Hier zeigt sich besonders deutlich der Vorteil des automatisierten Verfahrens zur Suche einer Optimalfunktion.

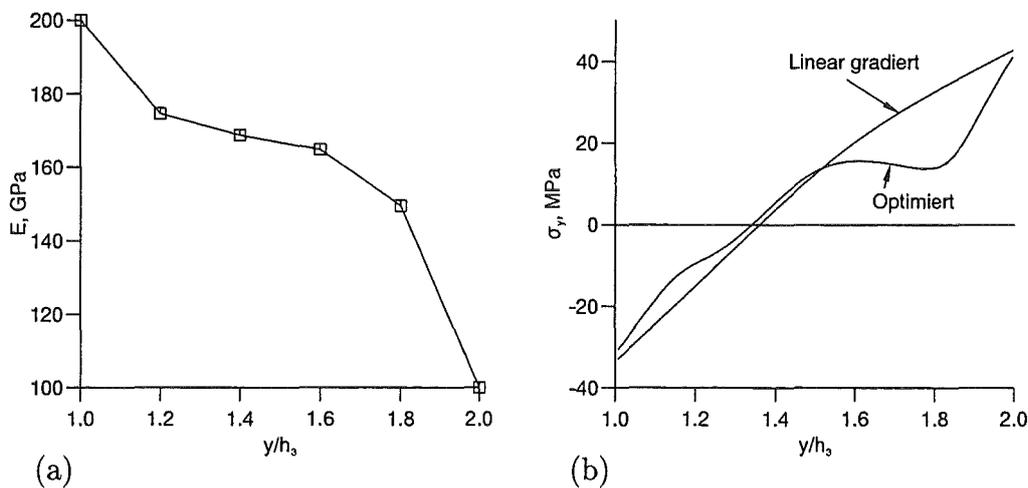


Abbildung 4.30: Optimierter Verlauf des Elastizitätsmoduls für konstantes  $\sigma_0$  (a) und zugehöriger Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  an der Oberfläche (b).

Im allgemeinen wird der Weibullparameter  $\sigma_0$  für die beiden Materialien unterschiedlich sein. Im folgenden wird für das Substratmaterial ein  $\sigma_0 = 500 \text{ MPa}$  angenommen. Die mittlere Festigkeit des Substratmaterials ist also höher als die der Deckschicht, wie dies bei einem Keramik-Metall-Verbund anzunehmen ist. Dem metallischen Substrat werden hier Weibullparameter zugeordnet, um eine Gradierung dieser Parameter zu ermöglichen. Da eine statistische Auswertung des Versagensverhaltens bei Metallen nicht sinnvoll ist, wird das Substrat in der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit hier nicht berücksichtigt. Die mittlere Festigkeit im gradierten Material wird anhand der linearen Mischungsregel berechnet. Für den linear gradierten Verbund ergibt sich eine Ausfallwahr-

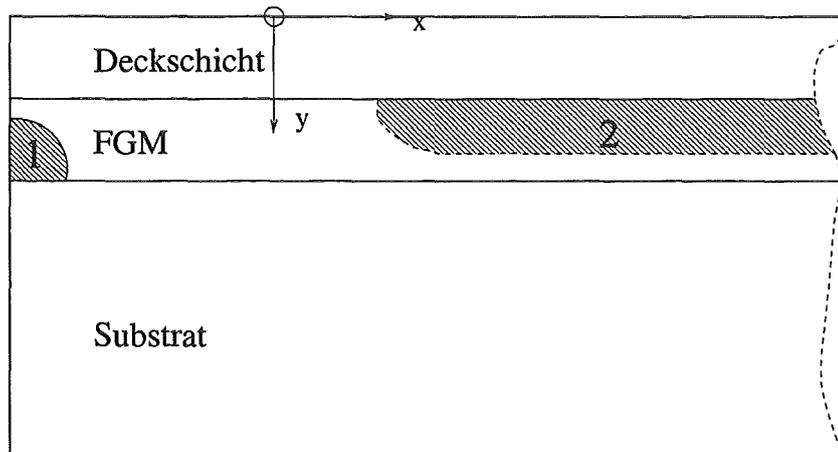


Abbildung 4.31: Bereiche maximaler lokaler Ausfallwahrscheinlichkeit.

scheinlichkeit von  $P_f = 1.21 \cdot 10^{-9}$ . Nach Optimierung kann dieser Wert auf  $P_f = 4.0 \cdot 10^{-10}$  gesenkt werden. Abbildung 4.32a zeigt den optimierten Verlauf des Elastizitätsmoduls.

In diesem Fall liegt die maximale lokale Ausfallwahrscheinlichkeit im Bereich entfernt vom Rand, in der gradierten Schicht nahe der Grenzfläche zur obersten Schicht (siehe 4.31, Bereich 2). In Abbildung 4.32b wird die mittlere Festigkeit und die Spannung  $\sigma_x$  für den linear gradierten und den optimierten Verbund dargestellt. Für den vorliegenden Fall ist die Spannung  $\sigma_x$  entscheidend für die Ausfallwahrscheinlichkeit des Verbundes. Die Spannung  $\sigma_y$  ist abseits vom Rand sehr gering, die Spannung  $\sigma_z$  weist hier nur Druckspannungen auf, die nicht zum Versagen beitragen. Zur besseren Darstellung werden die Beträge der Spannungen  $\sigma_x$  verzehnfacht. Der Bereich der maximalen lokalen Ausfallwahrscheinlichkeit liegt bei ca.  $y/h_3 = 1.0 - 1.25$ . In diesem Bereich zeigt die optimierte Funktion zwei Vorteile gegenüber der linear gradierten Funktion: Zum einen ist die Spannung an der gefährdeten Stelle etwas geringer, zum anderen wurde die lokale mittlere Festigkeit angehoben. Beide Effekte zusammen ergeben die geringere Ausfallwahrscheinlichkeit des optimierten Verbundes.

### Optimierung der Krümmung eines Verbundes

Neben den Spannungen kann auch die Verformung eines Bauteils Gegenstand einer Optimierung sein. Ebenso wie die Spannung wird auch die Krümmung des Bauteils, beschrieben durch den Krümmungsradius (Gl.(3.7)) durch den Verlauf

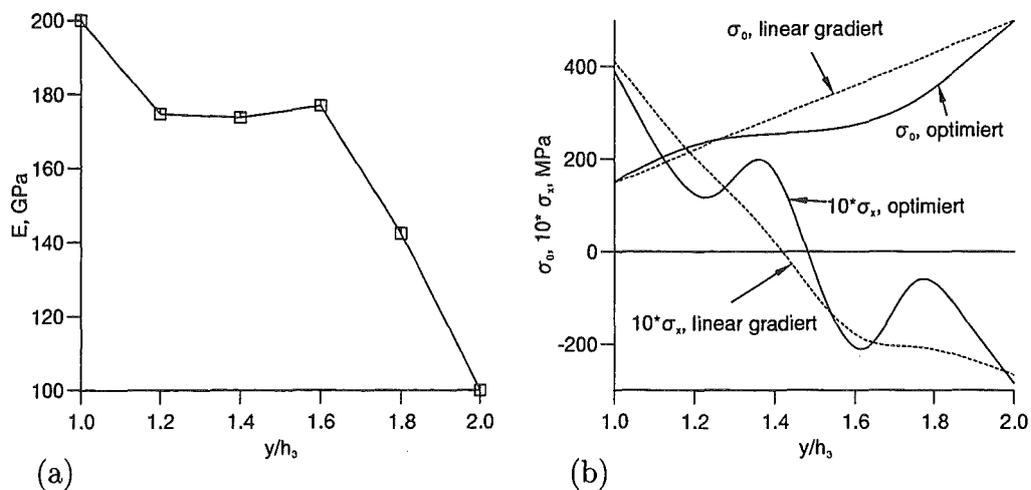


Abbildung 4.32: Optimierter Verlauf des Elastizitätsmoduls für gradiertes  $\sigma_0$  (a), Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  und des Weibullparameters  $\sigma_0$  für den linear gradierten und den optimierten Verbund im Inneren des Bauteils(b).

der Gradierungsfunktion beeinflusst.

Im allgemeinen wird man anstreben, die Verformung des Bauteils möglichst gering zu halten, in diesem Fall ohne die Spannungen zu beachten. Eine andere Möglichkeit wäre eine möglichst starke Krümmung zu erreichen, was z.B. bei Anwendungen als Bi-Metall für Aktuatoren von Interesse wäre.

Beide Fälle sollen hier betrachtet werden.

Eine relevante Krümmung tritt im allgemeinen nur bei einem ausgedehnten Bauteil auf. Deswegen wird die Krümmung anhand der Plattentheorie berechnet. Als Gradierungsfunktion wird eine Beschreibung des Verlaufs der Materialdaten mit 7 Stützpunkten gewählt, zwischen denen der Verlauf linear interpoliert wird (siehe Abschnitt 4.2.1).

Beim betrachteten Bauteil wird angenommen, daß beide Oberflächen aus verschiedenen Materialien bestehen sollen. Die Materialdaten sind in Anhang A.2 verzeichnet. Die Dicke der Oberflächenschichten ist  $h_1 = h_2 = 0.1H$ , die Dicke der gradierten Schicht ist demnach  $h_3 = 0.8H$ .  $H$  ist die Gesamtdicke des Verbundes.

Die Suche nach dem Optimum minimaler oder maximaler Krümmung wird für beide Fälle mit einem Zweischichtverbund gestartet. Beide Schichten sind gleich dick mit:  $h_1 = h_2 = 0.5H$ . Es ergibt sich ein Krümmungsradius von  $R =$

1300H. Abbildung 4.33a zeigt den Verlauf des Elastizitätsmoduls für eine minimale Krümmung des Verbundes. Der minimale Krümmungsradius beträgt  $R = 4.55 * 10^7 H$ . Es ist zu erkennen daß das Optimum ein symmetrischer Vierschichtverbund ist. Im Idealfall sollte die Krümmung völlig zum Verschwinden gebracht werden können, was hier durch die nicht ideale Nachformung eines Verbundes aus homogenen Schichten durch die stetige Gradierungsfunktion verhindert wird.

Die Abbildung 4.33b zeigt den Verlauf des Elastizitätsmoduls für maximale Krümmung. Hier zeigt sich, daß der Zweischichtverbund aus zwei gleich dicken Schichten schon das Optimum ist.

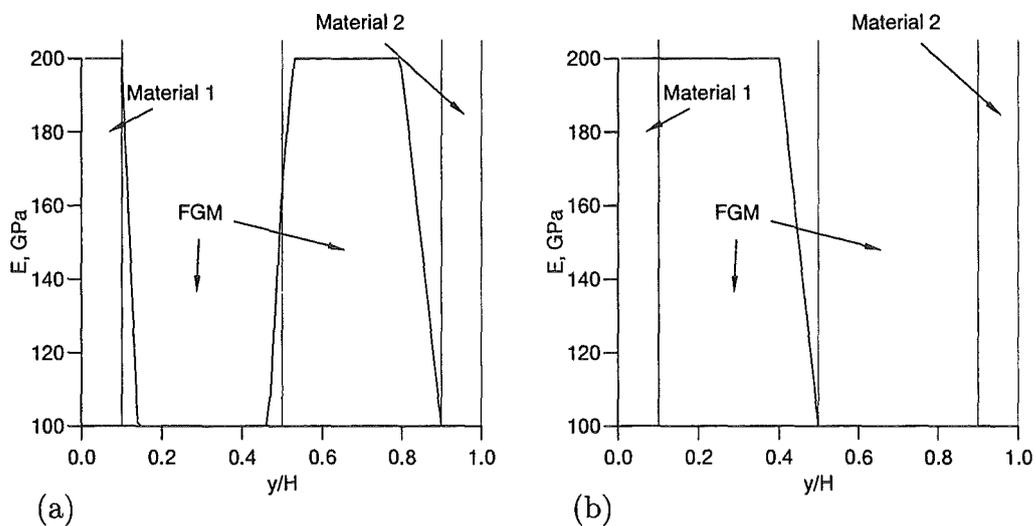


Abbildung 4.33: Verlauf des Elastizitätsmoduls für minimale Krümmung (a) und maximale Krümmung(b).

In beiden Fällen hat sich ein Verbund aus mehreren homogenen Schichten als das Optimum für die gestellte Aufgabe erwiesen. Es hat sich allerdings gezeigt, daß ein Optimierungsprogramm, beruhend auf der Beschreibung des Materialverlaufs mit einer Gradierungsfunktion auch sehr gut geeignet ist, optimale Schichtdicken eines homogenen Mehrschichtverbundes zu bestimmen.

# Kapitel 5

## Spannungsintensitätsfaktoren bei Rissen in gradierten Verbunden

Schädigungen in einem Verbund, besonders Schichtablösungen, können von einem Riß ausgehen. Bei Rissen in Verbunden ist die Lage des Risses von besonderer Bedeutung. Der Riß kann sich innerhalb einer Schicht befinden oder die Oberfläche erreichen, seine Orientierung kann senkrecht zur Grenzfläche oder parallel dazu sein. Risse, die senkrecht zur Grenzfläche stehen, können sich innerhalb einer Schicht befinden oder eine Grenzfläche schneiden (siehe Abb. 5.1).

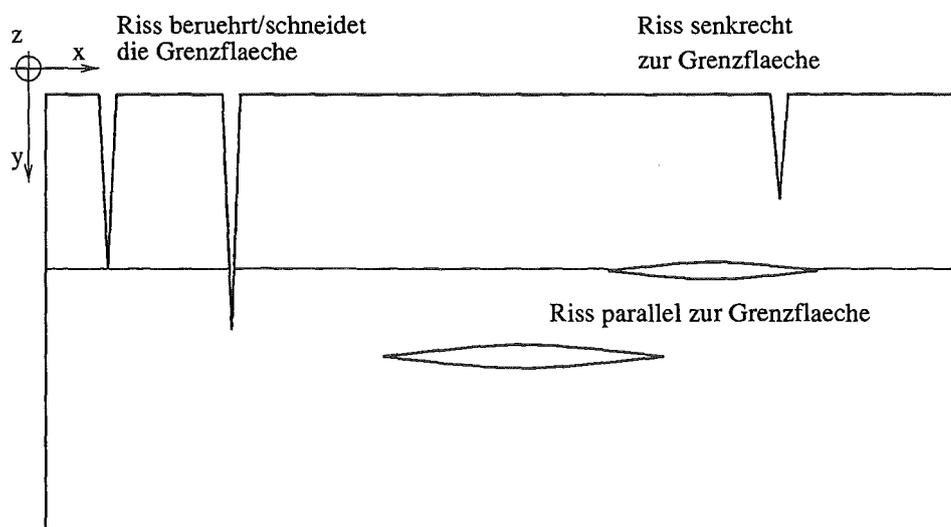


Abbildung 5.1: Mögliche Positionen eines Risses im Mehrschichtverbund.

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß der Verbund in x- und z-Richtung weit ausgedehnt ist und keine Temperaturgradienten in dieser Richtung auftreten.

ten. Damit treten nur die Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  auf, die an Rissen, die parallel zur Grenzfläche liegen, keine Spannungsüberhöhungen verursachen. Diese Risse werden somit hier nicht behandelt.

Bei den Rissen, die beliebig zur Grenzfläche orientiert sind, ist der Sonderfall des senkrechten Risses besonders gefährlich. Hier werden nur Oberflächenrisse behandelt, da diese der häufigste Fall sind.

Ein senkrecht zur Oberfläche stehender Riß ist bei der vorliegenden Belastung ein Mode-I-Riß, weswegen nur der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  auftritt.

Zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors wird eine FE-Rechnung durchgeführt. Aus den dabei erhaltenen Spannungen wird der Spannungsintensitätsfaktor nach der Doppelt-Logarithmischen Methode berechnet. Werden nur die Spannungen im Nahfeld der Rißspitze betrachtet, gilt die folgende Beziehung zwischen Spannungsintensitätsfaktor und Spannung:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{(2\pi r)^\omega} f_{ij}(\theta) + \sigma_{ij0}(\theta). \quad (5.1)$$

$r$  ist der Abstand des betrachteten Punktes von der Rißspitze,  $\theta$  der zugehörige Winkel im polaren Koordinatensystem (siehe Abb. 5.2).  $f_{ij}(\theta)$  sind Geometriefunktionen,  $\omega$  der Spannungsexponent.  $\sigma_{ij0}(\theta)$  ist ein von  $r$  unabhängiger, konstanter Spannungsterm, der sogenannte T-Term. Unter der vorliegenden Beanspruchung kann er gegenüber dem singulären Term vernachlässigt werden. Durch logarithmieren der Gleichung erhält man:

$$\log_{10} \frac{\sigma_{ij}(r, \theta)}{f_{ij}(\theta)} = \log_{10} K_I - \omega \log_{10}(2\pi r). \quad (5.2)$$

In einem Diagramm mit den Achsen  $\log_{10} \frac{\sigma_{ij}}{f_{ij}(\theta)}$  und  $\log_{10}(2\pi r)$  ergibt diese Gleichung eine Gerade der Steigung  $-\omega$ . Der Spannungsintensitätsfaktor kann mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden, wenn die Spannungen aus einer FE-Rechnung bekannt sind. Die Berechnung des Exponenten  $\omega$  ist hier von Bedeutung, da  $\omega$ , wenn sich die Rißspitze auf der Grenzfläche befindet, von 0.5 unterscheidet.

Im folgenden Kapitel wird die Auswirkung von Gradientenwerkstoffen auf den Spannungsintensitätsfaktor, insbesondere bei Rifortschreitung untersucht.

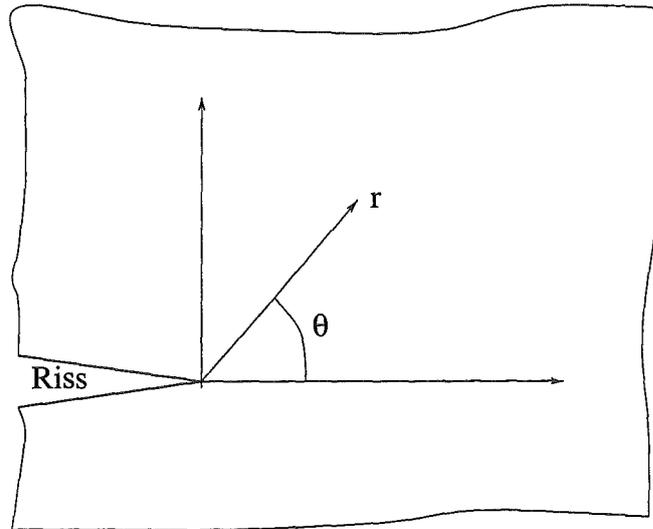


Abbildung 5.2: Koordinatensystem zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors.

## 5.1 Risse senkrecht zur Grenzfläche in nicht gradierten Zweischichtverbunden

Es wird ein zweischichtiger nicht gradiertes Verbund betrachtet. Der Riß mit der Länge  $a$  (siehe Abb 5.3) steht senkrecht zur Oberfläche des Verbundes. Die Dicke der ersten Schicht ist  $h_1$ , die Dicke der zweiten Schicht ist  $h_2$ . Der Verbund wird einer homogenen Temperaturänderung ausgesetzt. Bei den Materialdaten wird ein Verhältnis  $\alpha_1/\alpha_2 = 0.5$  gewählt, die Poissonzahl ist in beiden Schichten konstant  $\nu = 0.3$ . Das Verhältnis der Elastizitätsmoduli ist variabel.

Befindet sich die Rißspitze innerhalb der ersten oder zweiten Schicht, kann die Singularität wie in einem homogenen Werkstoff behandelt werden [41]. Wenn die Rißspitze die Grenzfläche zwischen den beiden Schichten berührt, ergibt sich allerdings ein von 0.5 abweichender Wert für den Singularitätsexponenten (siehe [42] - [44]).

Unter der Annahme, das sich der Riß hinreichend weit entfernt von den Rändern des Verbundes befindet, verschwinden alle Spannungen im Verbund, außer den Spannungen parallel zur x-z-Ebene. Die Verteilung dieser Spannung wird in Abbildung 5.4 dargestellt. Es sind verschiedene Verhältnisse der Elastizitätsmoduli dargestellt, wobei immer gilt  $E_1/E_2 > 1$ . Es ergibt sich eine lineare Spannungsverteilung mit einem Sprung an der Grenzfläche. Für kleine Werte von

$E_1/E_2$  ergeben sich Zugspannungen an der Oberfläche, für größere Verhältnisse von  $E_1/E_2$  Druckspannungen.

Für sehr kleine Rißlängen ( $a \ll h_1$ ) kann der Spannungsintensitätsfaktor nach:

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.3)$$

berechnet werden [45].  $\sigma$  ist dabei die Spannung an der Oberfläche des Verbundes. Für größere Rißlängen werden die Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe der FE-Methode berechnet. Dabei wird der verallgemeinerte ebene Dehnungszustand angenommen. Der Spannungsintensitätsfaktor wird mit dem Wert  $\alpha_1 E_1 \sqrt{H \Delta T}$  normiert.

In Abbildung 5.5 wird der Spannungsintensitätsfaktor über der relativen Rißlänge  $a/H$  aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß  $K$ , bei Annäherung des Risses an die Grenzfläche, stark ansteigt. Überschreitet der Riß die Grenzfläche, fällt der Wert von  $K$  sprunghaft ab. Es gibt zwei Gründe für die Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors von  $a/H$ . Einer ist die Verteilung der Spannungen im ungerissenen Verbund, der andere beruht auf der Differenz zwischen  $E_1$  und  $E_2$ . Diese Effekte können mit Hilfe der Gewichtsfunktion

$$K_I = \int_0^a h(y, a) \sigma(y) dy \quad (5.4)$$

getrennt werden.  $\sigma(y)$  ist die Verteilung der Spannungen im ungerissenen Verbund.  $h(y, a)$  ist die Gewichtsfunktion, die von der Rißlänge und dem Verhältnis  $E_1/E_2$  abhängig ist. In [38] wird eine Methode zur Berechnung der Gewichtsfunktionen vorgestellt. Die Ergebnisse aus [38] zeigen, daß die Gewichtsfunktion ansteigt, wenn sich der Riß an die Grenzfläche annähert.

In Abbildung 5.6a werden in einem halblogarithmischen Diagramm die Spannungsintensitätsfaktoren in Abhängigkeit des Abstandes  $d$  der Rißspitze von der Grenzfläche ( $d = h_1 - a$ ) dargestellt. Dabei sind verschiedene Verhältnisse  $E_1/E_2$  aufgetragen. In einem Vergleich dieser Abbildung mit den zugehörigen Spannungsverläufen (Abb. 5.4), kann die unterschiedliche Wirkung von Spannungsverteilung und Gewichtsfunktion erkannt werden.

Während die Spannungen in der ersten Schicht mit zunehmenden  $E_1/E_2$  abnehmen, ist der Einfluß des Verhältnisses der Elastizitätsmoduli auf  $K_I$  komplizierter. Das Ansteigen des Spannungsintensitätsfaktors bei Annäherung der Rißspitze an die Grenzfläche wurde zum ersten Mal von Cook und Erdogan [44] beobachtet. Eine weitere Untersuchung dieses Effektes erfolgte später von verschiedenen Au-

toren ([46] - [50]). Der Spannungsintensitätsfaktor kann mit der Funktion:

$$K_I = f(\alpha, \beta)d^{0.5-\omega} \quad (5.5)$$

berechnet werden.  $d$  ist dabei der Abstand der Rißspitze von der Grenzfläche,  $\alpha$  und  $\beta$  sind die Dundurs Parameter [51].  $\omega$  ist der Spannungsexponent, der entsteht, wenn der Riß die Grenzfläche berührt ( $0 < \omega < 1$ ). In Abbildung 5.6b ist der Spannungsintensitätsfaktor doppellogarithmisch über dem Abstand  $d$  aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß sich für kleine  $d$  eine Gerade ergibt, deren Steigung  $0.5 - \omega$  ist. In Tabelle 5.1 sind die Werte für  $\omega$  angegeben, die sich aus der Auswertung der Grafik und aus den analytischen Beziehungen in [42] - [43] ergeben.

$E_1/E_2$	$\omega$ aus K-d	$\omega$ analytisch
2	0.578	0.574
10	0.768	0.753
50	0.919	0.881

Tabelle 5.1: Spannungsexponenten für Risse, die die Grenzfläche berühren.

Für große  $\omega$  ergibt sich eine Abweichung, die wahrscheinlich in Ungenauigkeiten der FE-Rechnungen begründet sind. Die Genauigkeit dieser Rechnungen sinkt bei einem großen Verhältnis  $E_1/E_2$ .

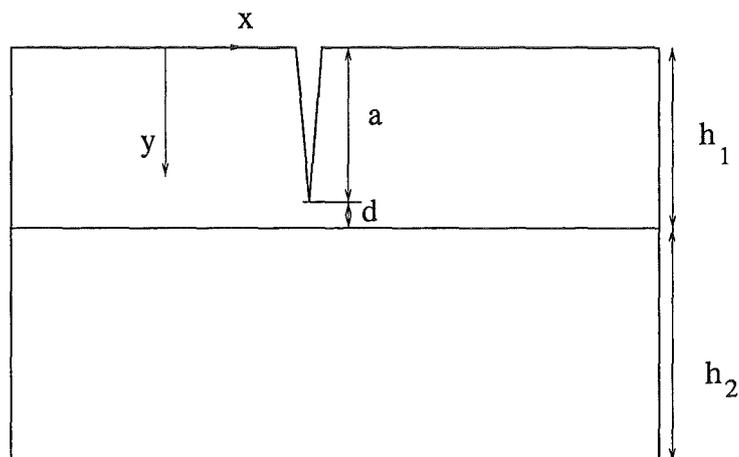


Abbildung 5.3: Geometrie des Risses im nicht gradierten Zweischichtsystem.

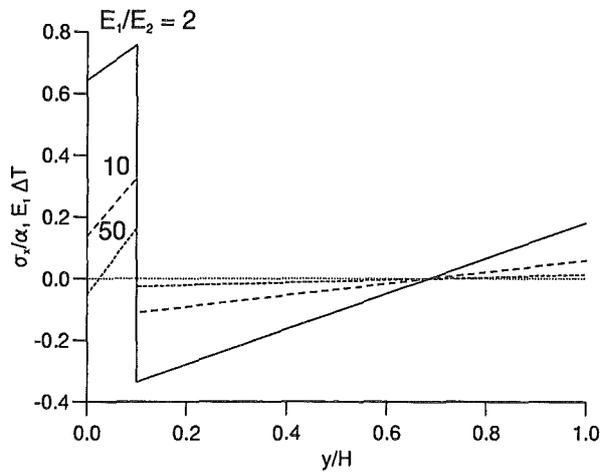


Abbildung 5.4: Normierte Spannung  $\sigma_x$  (parallel zur Grenzfläche) für verschiedenen Verhältnisse von  $E_1/E_2$ .

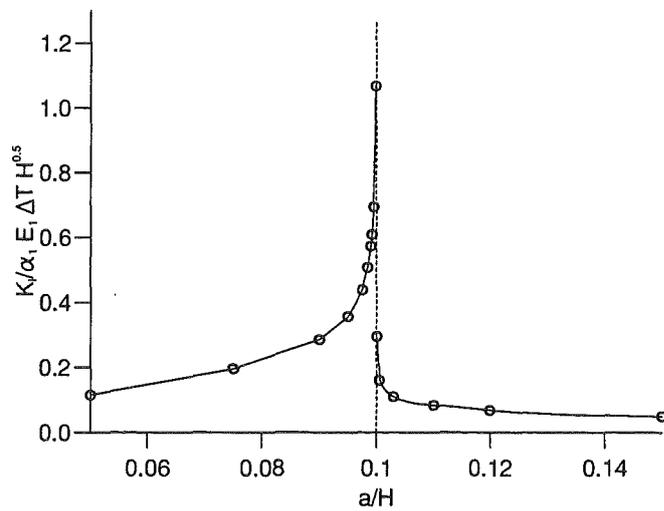
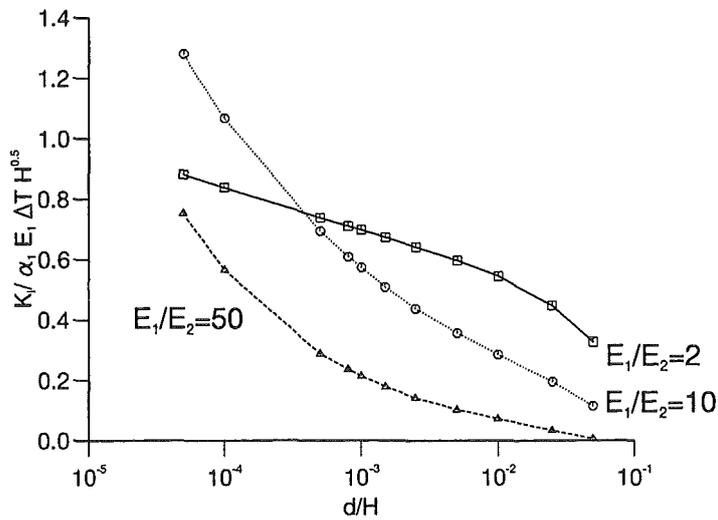
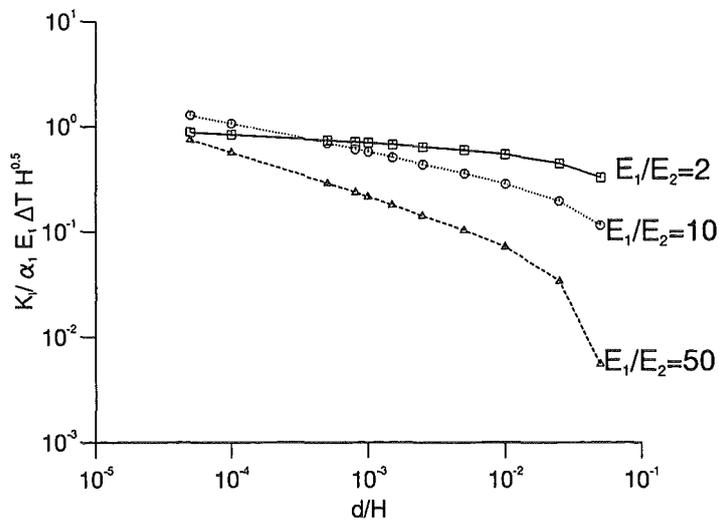


Abbildung 5.5: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren für einen Zweischichtverbund mit  $E_1/E_2 = 10$ .



a)



b)

Abbildung 5.6: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren als Funktion des Abstandes der Rißspitze von der Grenzfläche für verschiedene  $E_1/E_2$ , a) lineare K-Achse, b) logarithmische K-Achse.

## 5.2 Risse senkrecht zur Grenzfläche in gradierten Verbunden

Im folgenden wird ein Verbund betrachtet, der eine gradierte Zwischenschicht der Dicke  $h_3$  besitzt (siehe Abb. 5.7). Es wird eine lineare Mischungsregel angewandt, d.h. der Elastizitätsmodul und der Wärmeausdehnungskoeffizient folgen der gleichen Gradierungsfunktion. Die Querkontraktionszahl wird als konstant angenommen (siehe [30], [31]). Drei verschiedene Funktionen werden untersucht:

$$M(y) = M_2 - (M_2 - M_1) \frac{h_3 - y}{h_3}, \quad (5.6)$$

$$M(y) = M_2 - (M_2 - M_1) \left( \frac{h_3 - y}{h_3} \right)^2, \quad (5.7)$$

$$M(y) = M_1 - (M_1 - M_2) \left( \frac{h_3 - y}{h_3} \right)^{1/2}, \quad (5.8)$$

mit:

$M(y)$  : gradiertes Materialparameter Elastizitätsmodul oder thermischer Ausdehnungskoeffizient,

$M_1$  : Materialparameter des Materials in Schicht 1,

$M_2$  : Materialparameter des Materials in Schicht 2.

Der Verlauf der Funktionen wird in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Materialdaten sind in Anhang A.2 verzeichnet. Die Dicke der gradierten Schicht ist  $h_3/H = 0.05$ . Die Dicke der ersten Schicht wird variiert. Es wird eine Dicke der Schicht von  $h_1/H = 0.05, 0.125, 0.25, 0.5$  untersucht. Die Spannungen im ungerissenen Bauteil werden in Abbildung 5.9 dargestellt. Dabei wird der Spannungsverlauf für die drei gradierten Verbunde und den nicht gradierten Verbund gezeigt. Es ist zu erkennen, daß die Spannung in der ersten Schicht im nicht gradierten Verbund geringer als bei den gradierten Verbunden ist.

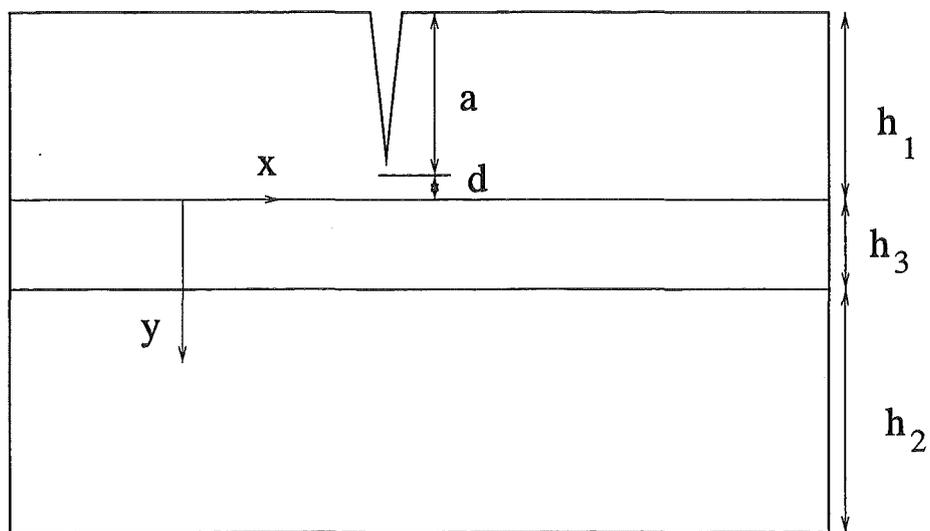


Abbildung 5.7: Geometrie des Risses im gradierten Dreischichtsystem.

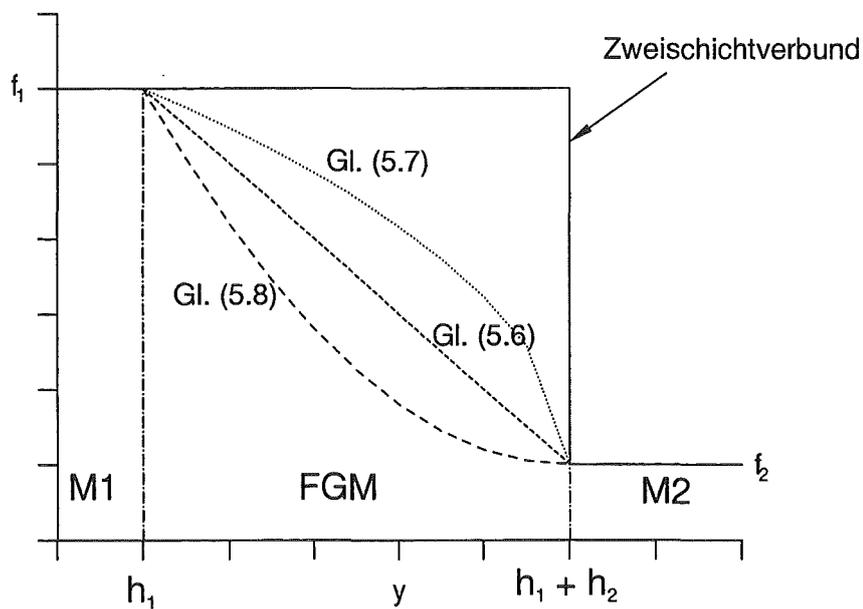


Abbildung 5.8: Die Gradierungsfunktionen  $f(y)$  in der Zwischenschicht.

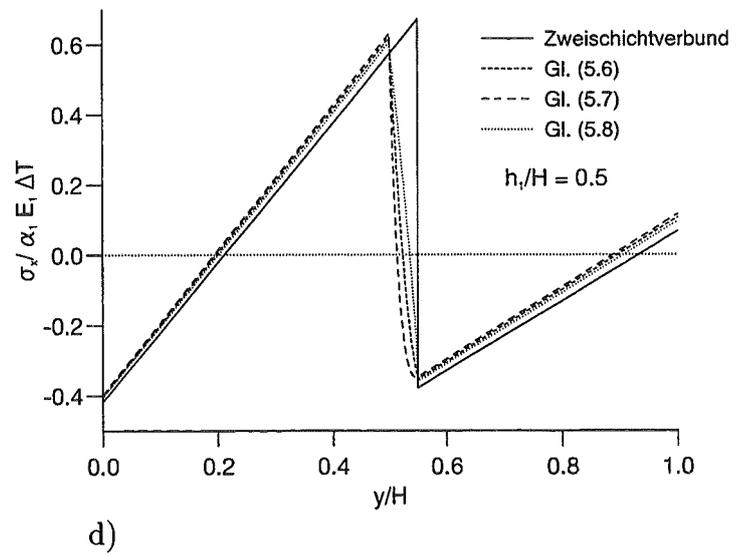
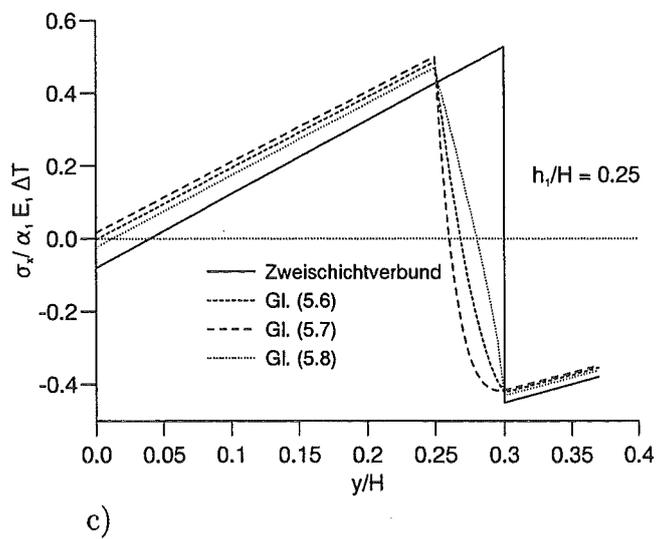
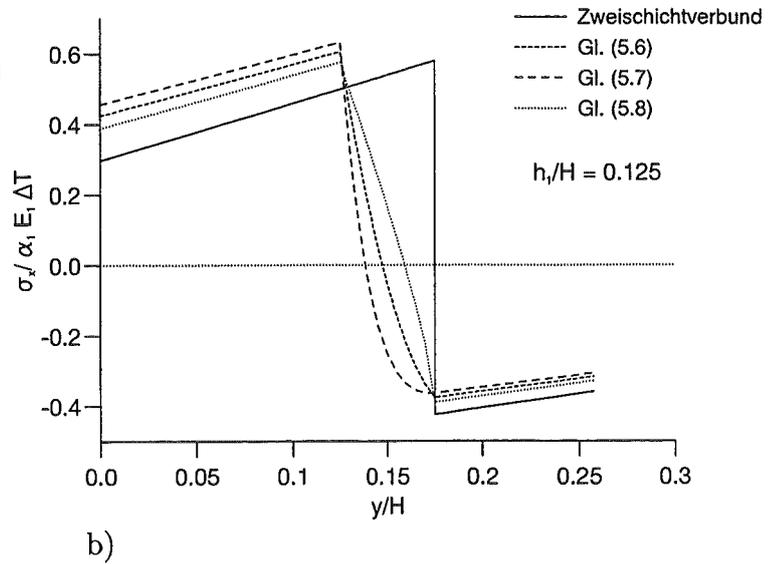
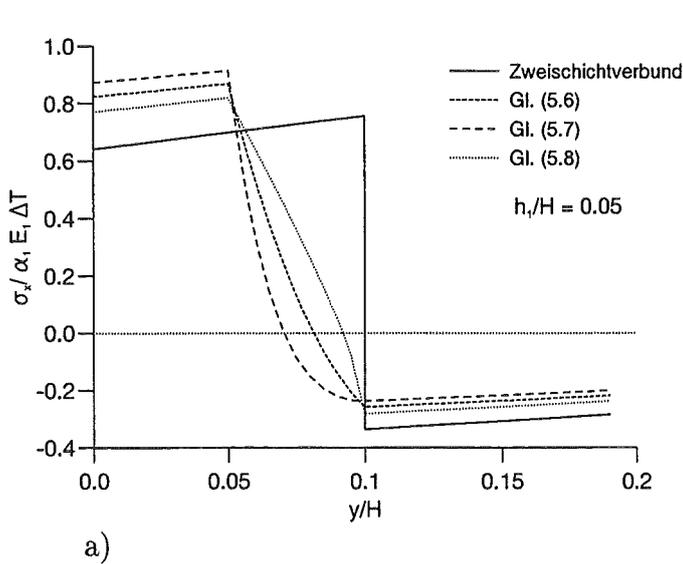


Abbildung 5.9: Normierte Spannungsverteilung im ungerissenen gradierten Verbund für verschiedene Verhältnisse von  $h_1/H$ , a)  $h_1/H = 0.05$ , b)  $h_1/H = 0.125$ , c)  $h_1/H = 0.25$ , d)  $h_1/H = 0.5$ .

Die normierten Spannungsintensitätsfaktoren für Risse  $a < h_1 + h_3$  (also Risse, die nicht in die zweite Schicht eindringen) werden in Abbildung 5.10 gezeigt. Bedingt durch die höhere Spannung in der ersten Schicht ergeben sich für kurze Risse bei den gradierten Verbunden höhere Werte für die Spannungsintensitätsfaktoren. Wenn der Riß in die gradierte Schicht eindringt, sinken die Werte für die Spannungsintensitätsfaktoren ab. Für den Verbund mit  $h_1/H = 0.25$  und  $0.5$  ist der Spannungsintensitätsfaktor für kleine Risse negativ. Er hat damit nur bei negativem Vorzeichen der Temperaturänderung eine Wirkung auf eine Rißverlängerung. Er wechselt bei Rißverlängerung ins Positive und fällt in der gradierten Schicht ab. Es ist zu beachten, daß alle Spannungen und Spannungsintensitätsfaktoren für ein Verhältnis der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_1 > \alpha_2$  berechnet werden, ferner werden die Werte mit einem positiven  $\Delta T$  normiert. Das Vorzeichen der Spannungen und Spannungsintensitätsfaktoren kehrt sich um, wenn ein  $\alpha_1 < \alpha_2$  oder ein  $\Delta T < 0$  verwendet wird.

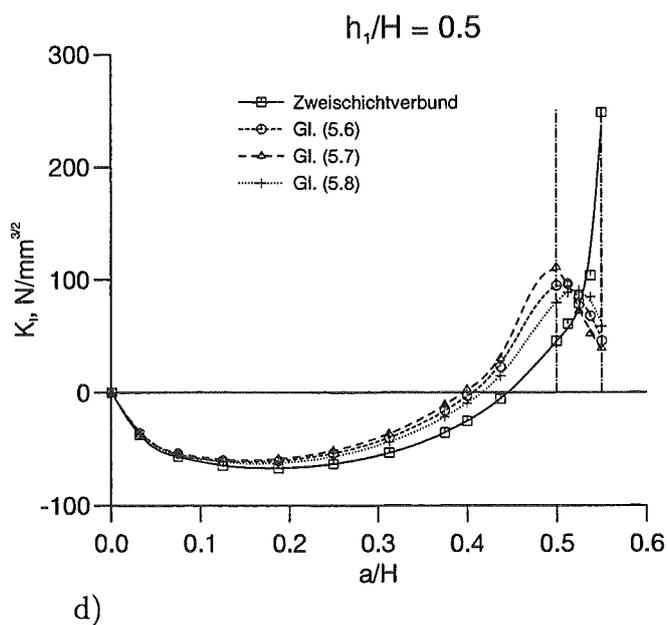
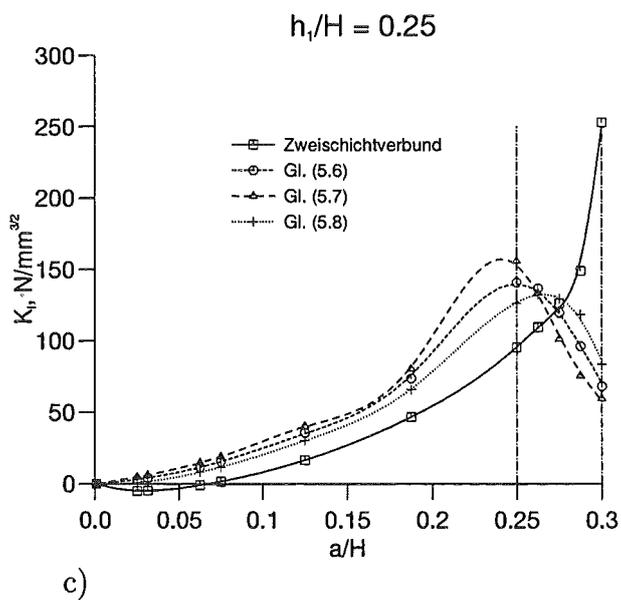
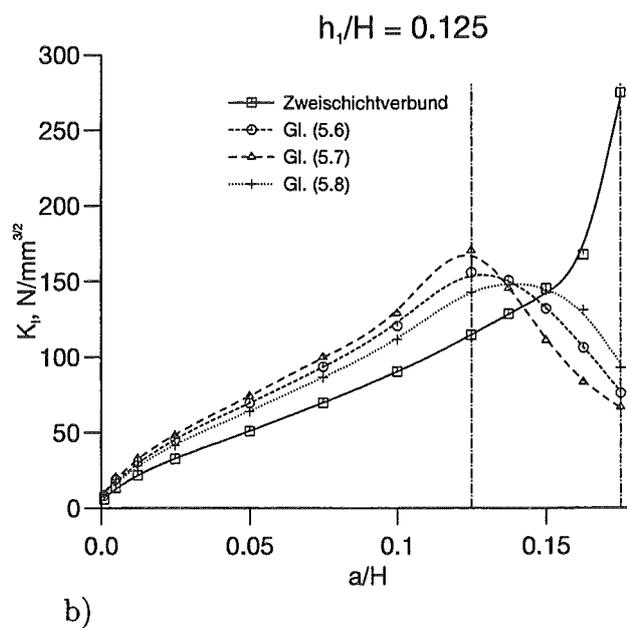
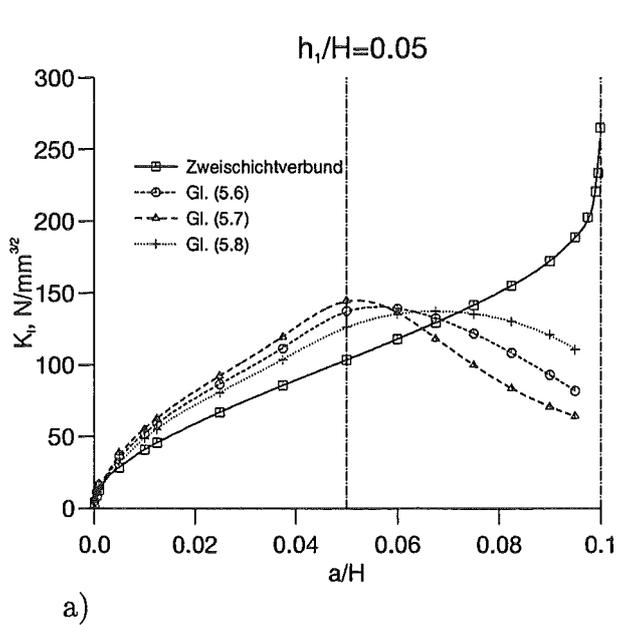


Abbildung 5.10: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren für gradierte Verbunde, a)  $h_1/H = 0.05$ , b)  $h_1/H = 0.125$ , c)  $h_1/H = 0.25$ , d)  $h_1/H = 0.5$ .

In Abbildung 5.11 werden die normierten Spannungsintensitätsfaktoren für drei verschiedene Verbunde verglichen:

1. Zweischichtverbund mit  $h_1/H = 0.05$ ,
2. gradierter Verbund mit  $h_3/H = h_1/H = 0.05$ . Als Gradierungsfunktion wird eine lineare Funktion (Gl.(5.6)) verwendet.
3. Zweischichtverbund mit  $h_1/H = 0.1$ .

Das Anwachsen des Spannungsintensitätsfaktors bei Annäherung des Risses an die Grenzfläche im Zweistoffverbund kann bei den Verbunden 1 und 3 beobachtet werden. Bei dem gradierten Verbund ändert sich der Spannungsintensitätsfaktor kontinuierlich. Vergleicht man den Verbund 1 und 2 kann man erkennen, daß im Material 1 der Wert von  $K$  durch Einführung einer gradierten Zwischenschicht verringert wird. Innerhalb der gradierten Schicht ist der Wert von  $K$  allerdings höher. Vergleicht man die Verbunde 2 und 3, ist zu erkennen, daß sich diese Tendenz umkehrt.

Bisher wurde ein Verbund betrachtet, dessen Werkstoffdaten willkürlich ausgewählt wurden. Im folgenden sollen einige reale Materialkombinationen untersucht werden. Die Kombinationen sind in Tabelle 5.2 verzeichnet. Das Material der ersten Schicht ist Keramik, die zweite Schicht besteht aus Metall. Die Werte für den Elastizitätsmodul  $E$ , die Querkontraktionszahl  $\nu$  und den Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Für alle Kombinationen gilt  $E_1 > E_2$ . Für die Kombinationen 1 und 2 gilt  $\alpha_1 > \alpha_2$ , für die Kombinationen 3 und 4 gilt  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Die relativen Dicken der Schichten sind  $h_1/H = 0.125$  und  $h_3/H = 0.05$ . Der Verlauf der normierten Spannungsintensitätsfaktoren über der Rißlänge ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Abbildung 5.12a zeigt einen Zweistoffverbund, Abbildung 5.12b einen linear gradierten Verbund. Für die Kombinationen 3 und 4 ergeben sich aufgrund des Verhältnisses der Wärmeausdehnungskoeffizienten negative Werte für  $K$ . In der Abbildung sind die Beträge dargestellt. Es ist auch hier zu erkennen, daß die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren, bei Annäherung des Risses an die Grenzfläche, durch die Gradierung verringert werden können.

Zusammenfassend läßt sich bei Rissen senkrecht zur Grenzfläche ein deutlich positiver Effekt der gradierten Schicht erkennen. Bei einem nicht gradierten Verbund geht der Spannungsintensitätsfaktor bei Annäherung an die Grenzfläche gegen unendlich. Ein Riß in Material 1 wird instabil, wenn der Spannungsintensitätsfaktor den kritischen Wert  $K_{IC}$  erreicht. Beim nicht gradierten Verbund wird in diesem Fall der Riß bis zur Grenzfläche weiterwandern und eventuell in die zweite Schicht eindringen. Sollte der Riß an der Grenzfläche stoppen, kann durch die auftretenden, sehr hohen Spannungen eine Schichtablösung bewirkt werden. Die Gradierung bewirkt ein Abfallen des Spannungsintensitätsfaktors innerhalb der gradierten Schicht, was eine Weiterwachsen des Risses oder eine Schichtablösung unter günstigen Umständen verhindern kann.

An der Oberfläche des Verbundes weisen die nicht gradierten Verbunde niedrigere Spannungsintensitätsfaktoren auf als die gradierten Verbunde. Innerhalb der gradierten Schicht sind die Spannungsintensitätsfaktoren für die gradierte Schicht niedriger. Der Verlauf von Elastizitätsmodul und Wärmeausdehnungskoeffizient innerhalb der gradierten Schicht ist verantwortlich für das Verhältnis zwischen Spannungsintensitätsfaktor und Rigre. Es treten hier zwei unterschiedliche Effekte auf. Zum einen ist der Verlauf der Spannungen im ungeschädigten Verbund von Bedeutung, der vom Verlauf des Elastizitätsmoduls und des Wärmeausdehnungskoeffizient beeinflt wird. Zum anderen ist bei einer gegebenen Spannung  $\sigma(y)$  der Spannungsintensitätsfaktor vom Verlauf des Elastizitätsmoduls abhängig. Diese zwei Effekte finden ihren Ausdruck in der Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors nach der Methode der Gewichtsfunktionen (siehe Gl. 5.4). Die Spannung  $\sigma(y)$  ist von  $E(y)$  und  $\alpha(y)$  abhängig, die Gewichtsfunktion  $h(y, a)$  wird vom Elastizitätsmodul beeinflt. Für kurze Risse in Material 1 dominiert der Einfluß von  $\sigma(y)$ , was bei einem Vergleich der Abbildungen 5.9 und 5.10 erkennbar ist. Der kontinuierliche Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors innerhalb der gradierten Schicht wird durch den Einfluß des kontinuierlichen Verlaufs des Elastizitätsmoduls auf die Gewichtsfunktion erreicht.

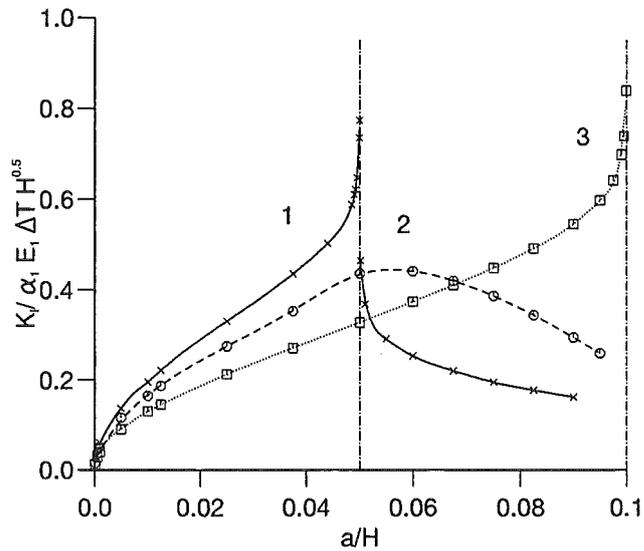


Abbildung 5.11: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren für drei Verbunde.

Kombination	Material 1	Material 2	$\alpha_2/\alpha_1$	$E_1/E_2$
1	$Al_2O_3$	$Ti6Al4V$	0.71	3.41
2	$ZrO_2$	$Ti6Al4V$	0.53	2.18
3	$Si_3N_4$	$Ti6Al4V$	2.15	2.85
4	$Al_2O_3$	Al-Legierung	2.74	5.28

Tabelle 5.2: Materialkombinationen.

	E [GPa]	$\alpha[10^{-6}]K^{-1}$	$\nu$
$Al_2O_3$	375	8.2	0.27
$ZrO_2$	240	11	0.30
$Si_3N_4$	314	2.7	0.28
$Ti6Al4V$	110	5.8	0.31
Al-Legierung	71	22.5	0.33

Tabelle 5.3: Materialeigenschaften.

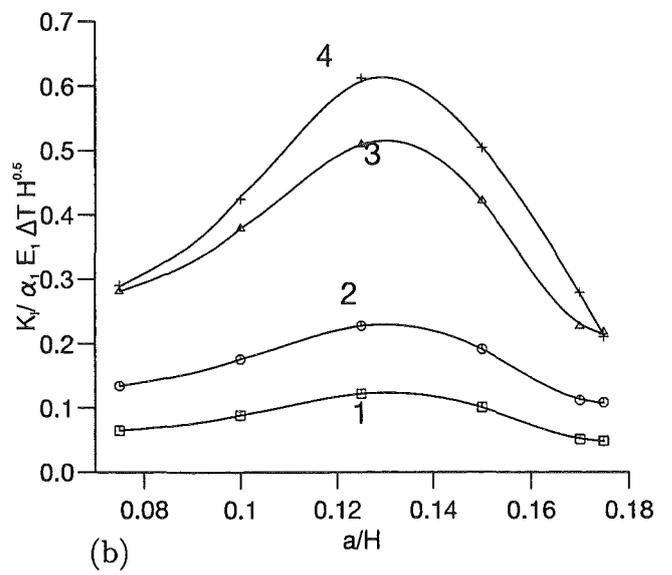
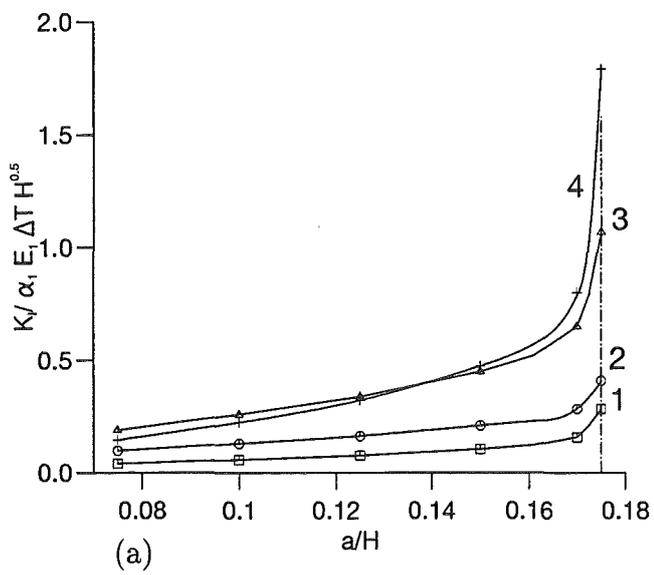


Abbildung 5.12: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren für die 4 Materialkombinationen in Tabelle 5.2, a) Zweischichtverbund, b) gradierte Verbunde.

# Kapitel 6

## Plastische Verformungen in Gradientenwerkstoffen

In allen bisher behandelten Fällen wurde nur eine elastische Verformung der Werkstoffe betrachtet. Bei den meist verwandten keramischen Werkstoffen ist dies auch sinnvoll. Bei dem in den Kapiteln 2.3 und 2.5 erwähnten Verbund aus Kupfer und Wolfram ist die plastische Verformung insbesondere des Kupferanteils nicht zu vernachlässigen.

Zur Spannungsberechnung in einem Verbund metallischer Werkstoffe unter Berücksichtigung plastischer Verformung ist es nötig, die Verfestigungskurven der Werkstoffe zu kennen. Bei Gradientenwerkstoffen muß die Verfestigungskurve in Abhängigkeit des Mischungsverhältnis der beteiligten Werkstoffe bekannt sein. Dieser Werkstoffdatensatz ist aus Messungen bisher nicht zu erhalten. Allerdings gibt es in [16] eine theoretische Herleitung der Werkstoffdaten für einen Wolfram-Kupfer Mischwerkstoff. Zur Herleitung dieser Daten wurde ein Einschlußmodell analog zu den Darstellungen in Kapitel 2.3 verwendet. Verfestigungskurven verschiedener Mischungen zeigt die Abbildung 6.1.

Aus diesen Daten ergibt sich eine starke Nichtlinearität der Mischungsregel zwischen Wolfram und Kupfer bei den plastischen Werkstoffdaten. Bis zu einem Kupferanteil von 40 % wird die Streckgrenze des Mischmaterials nicht wesentlich abgesenkt. Durch die hohe Streckgrenze des Wolfram-Kupfer-Verbundes kann bis in diesen Bereich elastisch gerechnet werden. Ab 50 % Anteil des Kupfers wird eine Verfestigung des Materials entsprechend der Graphik verwendet. Die Materialdaten Elastizitätsmodul und Wärmeausdehnungskoeffizient können anhand der Beziehungen in Kapitel 2.3 bestimmt werden.

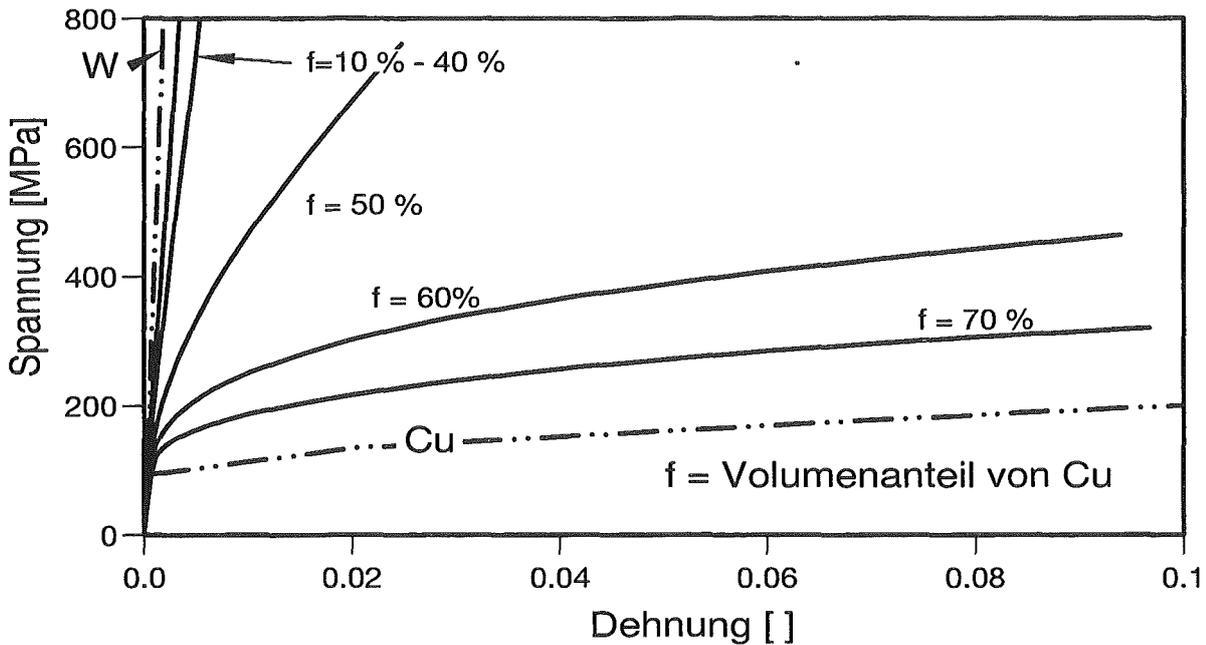


Abbildung 6.1: Verfestigungskurven verschiedener Wo-Cu Mischungen [16].

Das untersuchte Bauteil ist eine Platte. Die Abmessung in x-Richtung ist 25 mm, in z-Richtung wird der ebene Dehnungszustand angenommen. Die Dicke der gradierten Schicht ist 6 mm, die Dicke der Kupferschicht 5 mm (siehe Abb. 6.2)

Das Bauteil wird aus einer porösen Wolframvorform hergestellt, die mit Kupfer ausgegossen wird. Die thermische Last des Verbundes ist damit die Abkühlung von der Fügtemperatur ( $1083^{\circ}\text{C}$ ) auf Raumtemperatur.

Als Gradierungsfunktion wird ein Verlauf der Volumenkonzentration von Wolfram entsprechend Abbildung 6.3 untersucht. In diesem Fall wird der Verlauf der Funktion durch den Verlauf der Wolframkonzentration in einer realen Probe vorgegeben. Der Wolframanteil an der Oberfläche beträgt 75 %. Dies entspricht der Porosität der Wolframvorform vor der Bearbeitung. An der Grenzfläche ergibt sich ein Wolframgehalt von 20% und damit ein Sprung in den Werkstoffeigenschaften. Das verwendete Herstellungsverfahren erlaubt keine Gradierung auf einen Wolframgehalt von 0 %, da immer eine Wolframmatrix vorhanden sein muß.

In den folgenden Abbildungen wird ein Vergleich zwischen elastischer und elastisch-plastischer Rechnung gezeigt. Die Abbildung 6.4a zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  entlang der Außenseite des Verbundes ( $x = 12.5\text{mm}$ ). An der Stelle

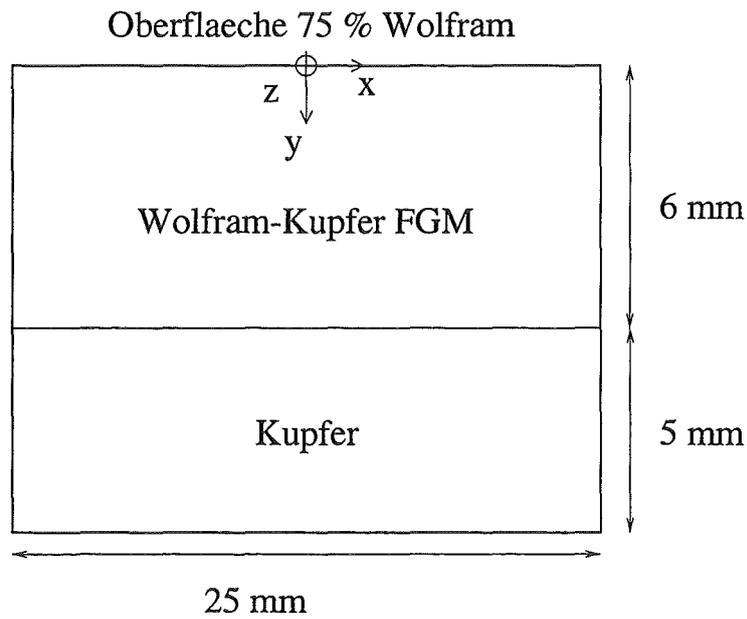


Abbildung 6.2: Geometrie des Wolfram-Kupfer Verbundes.

$y = 6\text{mm}$  ergibt sich bei dem Verlauf der Spannung aus der elastischen Rechnung eine Singularität. Dies ist im Sprung der Materialdaten an dieser Stelle (von 0% Wolfram auf 20% Wolfram, siehe Abb.6.3) begründet. Interessanterweise wird die Wirkung dieses Sprunges durch die danach folgende Gradierung geschwächt. Abbildung 6.4b zeigt einen Vergleich zwischen dem gradierten Verbund und einem nicht gradierten Verbund. Bei diesem nicht gradierten Verbund besteht die erste Schicht wieder aus Kupfer, die zweite Schicht aus einem homogenen Werkstoff mit 20% Wolfram. Dies ergibt einen Sprung der Werkstoffeigenschaften, der dem

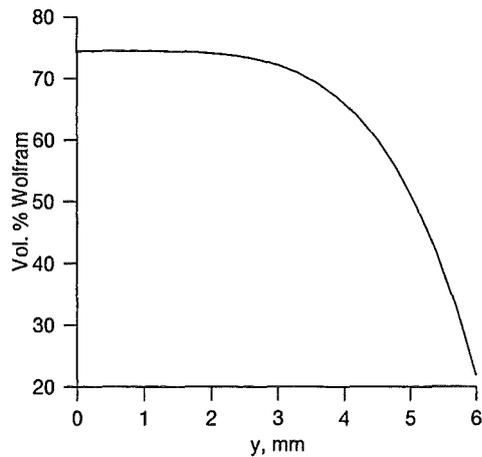


Abbildung 6.3: Verlauf der Volumenkonzentration von Wolfram.

des gradierten Verbundes an dieser Stelle entspricht. Die Spannungen innerhalb der Schichten sind im nicht gradierten Verbund zwar geringer, allerdings ergeben sich im Bereich der Grenzfläche wesentlich stärkere Spannungserhöhungen. Diese können anscheinend durch die Gradierung hier verringert werden. Die Abbildung 6.5 zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  entlang der Symmetrieebene des Verbundes ( $x = 0\text{mm}$ ). Es ist zu erkennen, daß ein starker Spannungsabbau

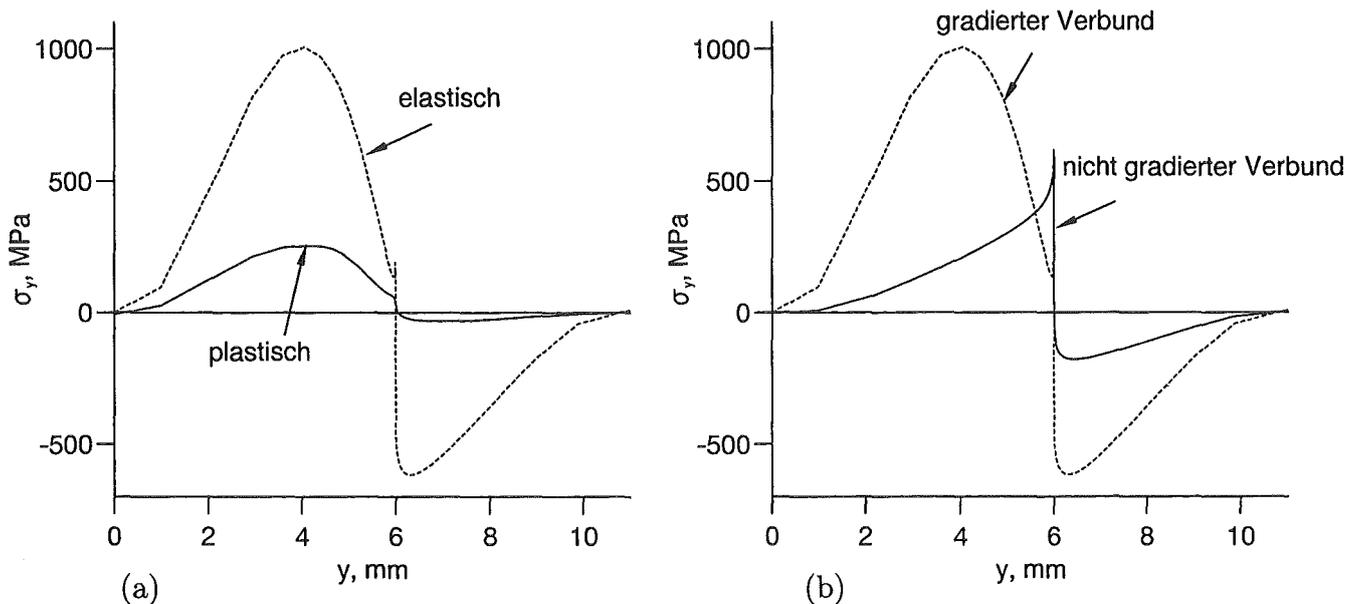


Abbildung 6.4: Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  entlang der Außenseite des Verbundes ( $x = 12.5\text{mm}$ ) beim gradierten Verbund (a) und ein Vergleich zwischen einem nicht gradierten und einem gradierten Verbund mit identischem Sprung der Materialeigenschaften (b).

durch die plastische Verformung im Verbund eintritt. Abbildung 6.6 zeigt den Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  entlang der Grenzfläche zwischen Kupfer und der gradierten Schicht. Bei der elastischen Rechnung zeigt sich ein singulärer Anstieg der Spannungen zur Oberfläche hin (bedingt durch den Sprung der Materialeigenschaften an der Grenzfläche) Unter Berücksichtigung der plastischen Verformung verschwindet diese Spannungserhöhung fast vollständig.

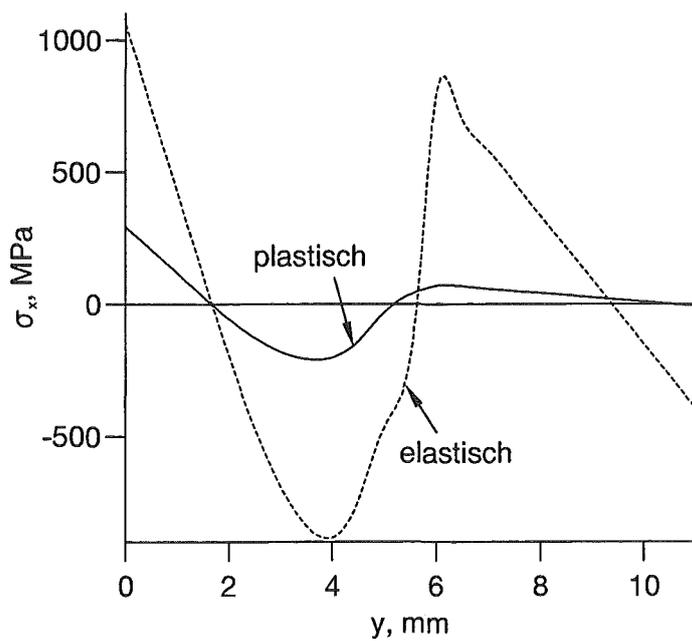


Abbildung 6.5: Verlauf der Spannung  $\sigma_x$  entlang der Symmetrieebene des Verbundes ( $x = 0\text{mm}$ ).

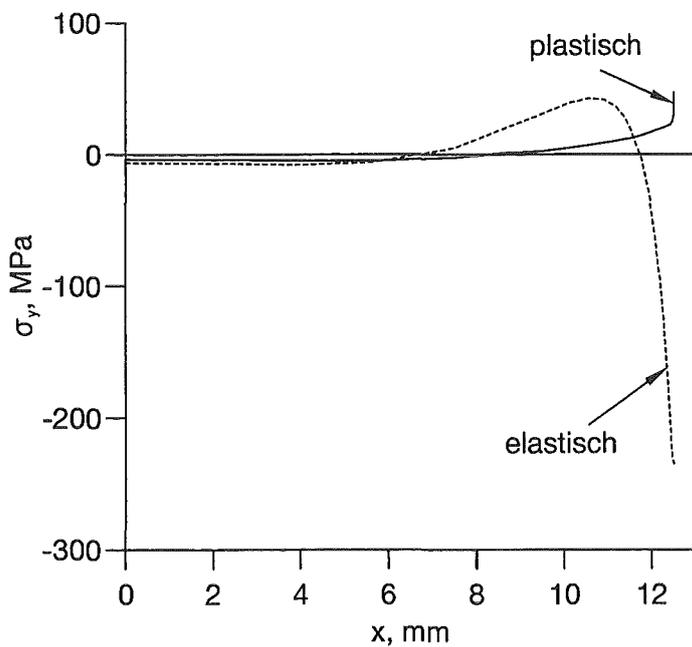


Abbildung 6.6: Verlauf der Spannung  $\sigma_y$  entlang der Grenzfläche des Verbundes.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Es besteht immer noch häufig ein Mißverständnis über die Einsatzmöglichkeiten von Gradientenwerkstoffen. Die Gradientenwerkstoffe wurden primär entwickelt um die Zuverlässigkeit von Mehrschichtverbunden gegen die Belastung durch Thermospannungen zu verbessern. Dieser Effekt tritt nicht in jedem Fall ein. Insbesondere tritt nicht ohne weiteres eine Verringerung von Spannungen an der Oberfläche bei Mehrschichtverbunden ein, z.B. beim häufigen Fall einer dünnen Beschichtung auf einem relativ dickem Substrat. Die Gründe für dieses Verhalten konnten aufgezeigt werden.

In vielen Fällen ist es allerdings möglich einen Gradientenwerkstoff zur Verringerung von thermischen Spannungen einzusetzen. In jedem Einzelfall muß untersucht werden, ob ein vielversprechendes Einsatzgebiet für Gradientenwerkstoffe vorliegt. Um dies zu beurteilen, ist eine Analyse der auftretenden Spannungen, insbesondere im Vergleich eines gradierten und eines nicht gradierten Verbundes nötig, ferner muß ein geeigneter Verlauf der Materialdaten im gradierten Verbund gefunden werden.

Es wurde hier gezeigt, daß es in ausgedehnten Verbunden möglich ist, die Spannungen analytisch zu berechnen. Für Sonderfälle wie Randbereiche oder in der Umgebung von Rissen sind numerische Verfahren, wie die Finite Element Methode, notwendig.

Zur Auffindung einer geeigneten Gradierungsfunktion wurden hier verschiedene Methoden gezeigt. In den meisten Fällen wird man aus der Erfahrung heraus

eine günstige Funktion auswählen. Insbesondere hat sich bei einigen Beispielen gezeigt, daß die einfache lineare Gradierung annähernd das Optimum darstellt.

Soll die Optimalfunktion bestimmt werden, wurde hier ein Weg aufgezeigt, der die Bestimmung dieser Funktion durch numerische Methoden erlaubt. Damit ist, im Vergleich zur Suche aus vorgegeben Funktionen, eine wesentlich größere Flexibilität bei der Suche gegeben, verbunden allerdings mit einem höheren Aufwand an Rechenzeit. Besonders bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit von keramischen Werkstoffen konnten Optimalfunktionen gefunden werden, die in ihrem Verlauf deutlich von den üblicherweise untersuchten Funktionen abweicht. Hier konnte der große Vorteil des Optimierungsverfahrens gegenüber der üblichen Suche nach einer günstigen Funktion gezeigt werden.

Erfolgreiche Einsatzgebiete der Gradientenwerkstoffe fanden sich bei:

- Zweistoffverbunden mit relativ dicker gradiertem Schicht,
- der Ausfallwahrscheinlichkeit von keramischen Bauteilen,
- Rissen in Mehrschichtverbunden,
- Mehrschichtverbunden am Schnittpunkt zwischen Grenzfläche und freier Oberfläche.

Es ist natürlich nicht möglich alle Einsatzgebiete der Gradientenwerkstoffe zu untersuchen und auf ihre Eignung zu prüfen. Wenn in einem Verbundwerkstoff Versagen aufgrund thermischer oder eventuell auch anderer Spannungen auftritt, kann der Einsatz von Gradientenwerkstoffen erwogen werden. Es ist immer eine Prüfung des Einzelfalles nötig.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Mortensen, S. Suresh  
Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1. Processing, International Materials Reviews, 40, pp 239-265, 1995
- [2] W. A. Kaysser, B. Ilschner  
FGM research activities in Europe, MRS Bull., 20, pp 32-36, 1995
- [3] A. Neubrand, J. Rödel  
Gradient Materials: An Overview of a Novel Concept, Z. Metallkd. 88, pp 357-371, 1997
- [4] T. Krell, U. Schulz, M. Peters, W. A. Kaysser  
Graded EB-PVD alumina-zirconia thermal barrier coatings - an experimental approach, Proceedings of the 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 26-29, pp 296-401, 1998
- [5] R. Jedamzik  
Herstellung von Gradientenwerkstoffen durch elektrochemische Modifikation poröser Vorformen, Dissertation Universität Darmstadt, GCA-Verlag, 1999
- [6] A. Keil, W. A. Merl, E. Vinaricky (Hsg.)  
Elektrische Kontakte und ihre Werkstoffe, Springer Verlag, Berlin, 1984
- [7] M. Dröschel, R. Oberacker, M. J. Hoffmann  
Simulation of Pressure Filtrating Process for Making Porosity Graded Silicon Carbide Evaporator Tubes, Proceedings of the 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 26-29, pp 814-819, 1998
- [8] M. Dröschel  
Grundlegende Untersuchung zur Eignung poröser Keramiken als Verdamp-

ferbauteile, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), Schriftenreihe des Instituts für Keramik im Maschinenbau, IKM022, 1998

- [9] J. G. Oldroyd  
The effect of small viscous inclusions on the mechanical properties of an elastic solid, in: R. Grammel, *Verformung und Fließen des Festkörpers*, IUTAM Colloquium, Madrid, pp 304, Springer Verlag, 1956
- [10] Z. Hashin, S. Shtrikman  
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp 127-140, 1963
- [11] R. Hill  
Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, pp 357-372, 1963.
- [12] H. Hoffmann, H. Stroppe  
Elastisches Verhalten und thermische Ausdehnung gesinterter Zweiphasenstoffe, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg*, 14 Heft 1, pp. 85-90, 1970.
- [13] W. Pompe, H.-A. Bahr, G. Gille, W. Kreher, B. Schultrich, H.-J. Weiss  
Mechanical properties of brittle materials, modern theories and experimental evidence, *Current Topics in Materials Science*, Vol. 12, pp. 207-277, 1985
- [14] L. I. Tuchinskii  
Elastic constants of pseudoalloys with a skeletal structure, *Soviet powder metallurgy and metal ceramics* 247, 85 , pp. 588-595, 1983
- [15] M. Gasik, K. Lilius  
Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model, *Computational Materials Science*, Vol. 3, pp 41-49, 1994
- [16] M. Dong, P. Leßle, U. Weber, S. Schmauder  
Mesomechanical Modelling of Composites Containing FGM Related Interpenetrating Microstructures Based on Micromechanical Matricity Models, *Materials Science Forum Vols. 308-311, Functionally Graded Materials 1998*, pp. 1000-1005, 1995

- [17] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger  
Theory of plates and shells, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1959
- [18] Hibbit, Karlsson, Sorensen  
ABAQUS/Standard User's Manual, HKS Inc. Providence R.J. 1995
- [19] Y. Y. Yang  
Stress analysis in a joint with a functionally graded material under thermal loading by using the Mellin transformation, International Journal of Solids and Structure, 35, pp 1261-1287, 1998
- [20] D. B. Bogy  
Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech. 38, pp 377-386, 1971
- [21] Y. Y. Yang  
Spannungssingularitäten in Zweistoffverbunden bei mechanischer und thermischer Belastung, Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 18, Nr. 113, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1992
- [22] A. E. Giannakopoulos, S. Suresh, M. Finot, M. Olsson  
Elastoplastic analysis of thermal cycling: Layered Materials with compositional gradients, Acta metall. mater. Vol. 43, No. 4, pp. 1335-1354, 1995
- [23] Y. Y. Yang, D. Munz, W. Schaller  
Effect of the Stress Jump at the Interface of a Joint on the Failure Behaviour, Int. J. Fracture, Vol. 87, pp 113-118, 1997.
- [24] K. Yamada, J. Sakamura, K. Nakamura  
Broadband Ultrasound Transducers Using Piezoelectrically Graded Materials, Proceedings of the 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 26-29, pp 527-532, 1998.
- [25] G. Zimmermann. A. Schievenbusch  
Materials with an Acoustic Impedance Gradient, Proceedings of the 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 26-29, pp 533-538, 1998.

- [26] R. Jedamzik, A. Neubrand, J. Rödel  
Electrochemical processing and characterisation of graded tungsten/copper composites, Proceedings of the 14th International Plansee Seminar, Eds.: G. Kneringer, P. Rödhammer, P. Wilhartitz, Plansee AG, Reutte, Vol. 1, pp 1-15, 1997
- [27] F. Kroupa, Z. Knesl, J. Valach  
Residual stresses in graded thick coatings, Acta Techn., CSAV 38, pp 29-74, 1993
- [28] M. Finot, S. Suresh, C. Bull, S. Sampath  
Curvature changes during thermal cycling of a compositionally graded  $Ni - Al_2O_3$  multi-layered material, Materials Science and Engineering, A205, pp 59-71, 1996
- [29] N. Noda  
Thermal stresses in Functionally Graded Materials, Journal of Thermal Stresses, Vol. 22, pp. 477-512, 1999
- [30] J. W. Eischen  
Fracture of nonhomogeneous materials, Int. J. Fracture, Vol. 34, pp. 3-22, 1987.
- [31] W. Schaller, Y.Y. Yang  
Thermal Stresses in a Graded Multi-Layered Joint, Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte FZKA 6107, 1998
- [32] persönliche Mitteilungen von Dr. Uwe Schulz, Institut für Werkstoff-Forschung, DLR, Köln
- [33] Y. Y. Yang, D. Munz  
Reduction of the stresses in a joint of dissimilar materials using graded materials as interlayer, Fracture Mechanics, 26th Volume, ASTM STP 1256, pp 572-586, 1995.
- [34] Y. Itoh, M. Takahashi, H. Takano  
Design of tungsten/copper graded composite for high heat flux components, Fusion Engineering and Design, 31, pp 279-289, 1996

- [35] H. Tolle  
Optimierungsverfahren, Springer Verlag, 1971
- [36] A. J. Skinner, J. Q. Broughton  
Neural networks in computational materials science: training algorithms,  
Modelling Simul. Mater. Eng. 3, pp 371-390, 1995
- [37] H. Bückner  
A novel principle for the computation of stress intensity factors, ZAMM 50,  
pp 529-546, 1970
- [38] T. Fett, E. Diegele, D. Munz, G. Rizzi  
Weight functions for edge cracks in thin surface layers, Int. J. Fracture, Vol.  
81, pp 205-215, 1996
- [39] A. Heger  
Bewertung der Zuverlässigkeit mehrachsiger belasteter keramischer Bauteile,  
Fortschr.-Ber. VDI-Reihe 18, Nr. 132, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1993
- [40] D. Munz, T. Fett  
Mechanisches Verhalten keramischer Werkstoffe, Springer Verlag, Berlin,  
1989
- [41] O. Bleeck, D. Munz, W. Schaller, Y. Y. Yang  
Effect of a graded interlayer on the stress intensity factor of cracks in a joint  
under thermal loading, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 60, pp 623-631,  
1998
- [42] A. R. Zak, M. L. Williams  
Crack point stress singularities at a bimaterial interface, J. Appl. Mech., Vol.  
30, pp 142-143, 1963
- [43] D. B. Bogy  
On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material  
interface, J. Appl. Mech., Vol. 38, pp 911-918, 1971
- [44] T. S. Cook, F. Erdogan  
Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, Int.  
J. Engng. Sci., Vol. 10, pp 677-697, 1972

- [45] H. Tada, P. Paris, G. Irwin  
The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, St. Louis, Missouri, 1985
- [46] F. Erdogan, V. Biricikoglu  
Two bonded half planes with a crack going through the interface, Int. J. Engng. Sci., Vol. 11, pp 745-766, 1973
- [47] C. Atkinson  
On the stress intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media, Int. J. Engng. Sci., Vol. 13, pp 489-504, 1975
- [48] A. A. Rizk, F. Erdogan  
Cracking of coated materials under transient thermal stresses. J. Therm. Stresses, Vol. 12, pp 125-168, 1989
- [49] C. R. Chiang  
On the stress intensity factors of cracks near an interface between two media, Int. J. Fracture, Vol. 47, pp R55-R58, 1991
- [50] A. Romeo, R. Ballarini  
A crack very close to a bimaterial interface, J. Appl. Mech. Vol. 62, pp 614-619, 1995
- [51] J. Dundurs  
Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation, J. Comp. Mat., Vol. 1, pp 310-322, 1967

# Anhang A

## Materialparameter

### A.1 Temperaturabhängige Kennwerte des Wärmedämmschichtsystems in Kapitel 3.3

Die Materialwerte entstammen Angaben des DLR.

Material : IN100

Zustand : gerichtet erstarrt

Temperatur $^{\circ}C$	Wärmeausdehnung $\alpha[10^{-6}K^{-1}]$	Wärmeleitfähigkeit $\lambda[W/mK]$	E-Modul $E[GPa]$	Dichte $\rho[g/cm^3]$	Wärmekapazität $c_p[J/kgK]$	Poissonzahl $\nu$
20	11.5	15	215	7.75	430	0.3
400	12.40	16.7	195		480	
1000	16.28	30	148		880	

Material : NiCoCrAlY

Zustand : EB-PVD, verdichtet und gegläht (rekristallisiert)

Temperatur $^{\circ}C$	Wärmeausdehnung $\alpha[10^{-6}K^{-1}]$	Wärmeleitfähigkeit $\lambda[W/mK]$	E-Modul $E[GPa]$	Dichte $\rho[g/cm^3]$	Wärmekapazität $c_p[J/kgK]$	Poissonzahl $\nu$
20	8.56	8.7	140	7.8	390	0.3
400	11.81	17.2	138	7.70	520	
1000	16.6	27.5	70	7.48	700	

Material :  $Al_2O_3$

Zustand : thermisch gewachsene Schicht

Temperatur $^{\circ}C$	Wärme- ausdehnung $\alpha[10^{-6}K^{-1}]$	Wärme- leitfähigkeit $\lambda[W/mK]$	E-Modul $E[GPa]$	Dichte $\rho[g/cm^3]$	Wärme- kapazität $c_p[J/kgK]$	Poissonzahl $\nu$
20	6.0	23	360	4	770	0.24
400	6.8	9	344			
1000	8.0	6	319		1260	

Material :  $ZrO_2 - 7Gew.\%Y_2O_3$

Zustand : EB-PVD Wärmedämmschicht

Temperatur $^{\circ}C$	Wärme- ausdehnung $\alpha[10^{-6}K^{-1}]$	Wärme- leitfähigkeit $\lambda[W/mK]$	E-Modul $E[GPa]$	Dichte $\rho[g/cm^3]$	Wärme- kapazität $c_p[J/kgK]$	Poissonzahl $\nu$
20	9	1.4	13	5	500	0.225
400	10.1		13	4.94	580	0.177
1000	10.8		16	4.84	630	0.286

## A.2 Die Materialkombination 1

	Elastizitätsmodul $E[GPa]$	Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha[10^{-6}K^{-1}]$	Querkontraktionszahl $\nu$
Material 1	200	5	0.3
Material 2	100	10	0.3

## A.3 Temperaturabhängigkeit der Materialparameter in Kapitel 4.1.3

Die Daten entstammen [8].

### A.3.1 Wärmekapazität

$$c_m(T) = c_0 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4 + c_5T^5 \quad (\text{A.1})$$

mit:

$$c_0 = -0.26596 J/(gK)$$

$$c_1 = 5.0197 * 10^{-3} J/(gK)$$

$$c_2 = -7.7423 * 10^{-6} J/(gK^3)$$

$$c_3 = 6.448 * 10^{-9} J/(gK^4)$$

$$c_4 = -2.676 * 10^{-12} J/(gK^5)$$

$$c_5 = 4.33 * 10^{-16} J/(gK^6)$$

### A.3.2 Dichte

Die Dichte ist von der Temperatur unabhängig

### A.3.3 Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_{(P=0\%)}(T) = 100 [c_0 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4 + c_5T^5] \quad (\text{A.2})$$

mit:

$$c_0 = 1.729 W/(mK)$$

$$c_1 = -1.982 * 10^{-3} W/(mK^2)$$

$$c_2 = 1.146 * 10^{-7} W/(mK^3)$$

$$c_3 = 1.13 * 10^{-9} W/(mK^4)$$

$$c_4 = -6.875 * 10^{-13} W/(mK^5)$$

$$c_5 = 1.252 * 10^{-16} W/(mK^6)$$

### A.3.4 Elastizitätsmodul

$$E(T) = E_{T=20^\circ\text{C}}(1 + dT), \quad (\text{A.3})$$

mit:

$$E_{T=20^\circ\text{C}} = E(P),$$

$$d = -7 * 10^{-5} 1/K.$$

### A.3.5 Wärmeausdehnungskoeffizient

$$\alpha(T) = c_1 + c_2T + c_3T^2 \quad (\text{A.4})$$

mit:

$$c_1 = 3.59 * 10^{-6} 1/K$$

$$c_2 = 1.588 * 10^{-10} 1/K^2$$

$$c_3 = 4.44 * 10^{-15} 1/K^3$$