Der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus

Uwe Schäfer

Diese Arbeit ist Prof. Dr. Götz Alefeld anlässlich seines 60. Geburtstages gewidmet.

Zusammenfassung

Der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus ist im Wesentlichen der Gauss'sche Algorithmus angewandt auf Blockmatrizen mit Intervallen als Koeffizienten. Er wurde von Prof. Jürgen Garloff eingeführt in seinem Artikel [9]. Wir wollen diesen Artikel fortführen, indem wir den Algorithmus expliziter ausformulieren; d.h. wir werden lineare Gleichungssysteme auflösen und nicht reguläre Matrizen invertieren. Der Algorithmus (in dieser Form) bleibt durchführbar für H-Matrizen. Des Weiteren stellen wir eine neue Klasse von Intervallmatrizen vor, für die der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus durchführbar ist.

1 Vorarbeiten

In der Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen betrachten wir abgeschlossene, beschränkte Intervalle $[a] := [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbf{R} : \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$. Die Gesamtheit dieser Intervalle bezeichnen wir mit $\mathbf{IR}$. Reelle Zahlen a sind spezielle Elemente von $\mathbf{IR}$ mit $[a] := [a, a]$. Wir schreiben dafür auch einfach a.
Bezeichnet $*$ eine der vier Verknüpfungen $+, -, \times, /$ für reelle Zahlen, so definiert man für zwei Elemente $[a]$ und $[b]$ in $\mathbf{IR}$ die entsprechenden Operationen durch

$$[a] * [b] := \{a * b : a \in [a],\, b \in [b]\}.$$

Bei der Division ist dabei $0 \notin [b]$ vorauszusetzen. Da die Funktion $f(a, b) = a * b$, $a \in [a]$, $b \in [b]$, $* \in \{+, -, \times, /\}$ stetig ist, ist $[a] * [b]$ wieder ein Element von $\mathbf{IR}$. Üblicherweise wird das $\times$-Zeichen durch einen Punkt ersetzt und dieser gewöhnlich weggelassen. Eine elementare Diskussion ergibt die folgenden Rechenregeln (siehe etwa [2]):

$$
\begin{aligned}
[a] + [b] &= [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\
[a] - [b] &= [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\
[a] \times [b] &= [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}], \\
[a]/[b] &= [\underline{a}\overline{a}] \times [\tfrac{1}{\overline{b}}, \tfrac{1}{\underline{b}}].
\end{aligned}
$$

Eine wichtige Eigenschaft ist die so genannte Inklusionsmonotonie, d.h.:

$$[a] \subseteq [\tilde{a}],\ [b] \subseteq [\tilde{b}] \Rightarrow [a] * [b] \subseteq [\tilde{a}] * [\tilde{b}], \quad * \in \{+, -, \times, /\}.$$

Der Betrag $|[a]|$ ist definiert durch

$$|[a]| := \max\{|a| : a \in [a]\} = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}.$$

Mit einer Intervallmatrix $[A]$ bezeichnen wir eine Matrix, deren Elemente Intervalle $[a_{ij}] \in \mathbf{IR}$ sind. Wir schreiben dafür $[A] = ([a_{ij}])$. Hat eine Intervallmatrix m Zeilen und n Spalten, so schreiben wir $[A] \in \mathbf{IR}^{m\times n}$. Des Weiteren wollen wir $\mathbf{IR}^{n\times 1}$ mit $\mathbf{IR}^n$ identifizieren.

Reelle Matrizen A sind spezielle Elemente von $\mathbf{IR}^{m\times n}$ mit $[a_{ij}] := [a_{ij}, a_{ij}]$. Wir schreiben dafür auch einfach A und nennen A eine Punktmatrix. Beispiele sind die Einheitsmatrix I und die Nullmatrix O bzw. der Nullvektor o.

Intervallvektoren bzw. Verknüpfungen sind wie für reelle Matrizen und/oder Vektoren definiert:

$$
\begin{aligned}
[A] \pm [B] &= ([a_{ij}] \pm [b_{ij}]), \\
[A][B] &= \left(\sum_{k=1}^{n} [a_{ik}][b_{kj}]\right), \\
[A][x] &= \left(\sum_{k=1}^{n} [a_{ik}][x_k]\right),
\end{aligned}
$$

vorausgesetzt, die Dimensionen sind so, dass man die Verknüpfungen wie im Reellen durchführen kann.

Die Teilmengenbeziehung zweier Intervallmatrizen sind über die Elemente bzw. Komponenten definiert:

$$[A] \subseteq [B] \Leftrightarrow [a_{ij}] \subseteq [b_{ij}].$$

Es gilt i. Allg. nicht das Distributivgesetz, sondern die als Subdistributivität bezeichnete Eigenschaft

$$[A]([B] + [C]) \subseteq [A][B] + [A][C].$$

Für die Multiplikation von Intervallmatrizen (und/oder Intervallvektoren) gilt i. Allg. nicht das Assoziativgesetz. Ein Gegenbeispiel findet man z.B. in [2]. Es gilt jedoch das folgende

Lemma 1.1 *Sei e^i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt für $[A], [B] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$*

$$[A]([B]e^i) = ([A][B])e^i.$$

Einen Beweis findet man in [3].

Der Betrag von Intervallmatrizen und Intervallvektoren ist über die Elemente bzw. Komponenten definiert:

$$|[A]| := (|[a_{ij}]|),$$

Der Betrag ist also eine reelle Matrix bzw. ein reller Vektor. Ungleichungen zwischen reellen Matrizen bzw. reellen Vektoren sind elementweise bzw. komponentenweise zu verstehen. Für zwei reelle n-dimensionale Vektoren $x = (x_i)$ und $y = (y_i)$ gilt also

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i = 1(1)n.$$

Als nächstes definieren wir den Ostrowski-Operator für quadratische Intervallmatrizen. Sei dazu $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$. Dann setzen wir $\left\langle [A] \right\rangle = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} := \begin{cases} -|[a_{ij}]| & \text{für} \quad i \neq j, \\ \left\langle [a_{ij}] \right\rangle & \text{für} \quad i = j. \end{cases}$$

$\left\langle [A] \right\rangle$ wird auch oft Vergleichsmatrix von $[A]$ genannt. Sie wird bei den so genannten H-Matrizen wichtig werden.

Lemma 1.2 *Ist $[A] \in \mathbf{IR}^{m\times n}$ und $[B] \in \mathbf{IR}^{n\times l}$, dann gilt $|[A] \cdot [B]| \leq |[A]| \cdot |[B]|$.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Proposition 3.1.10 in [15].

Definition 1.1 *Eine Intervallmatrix* $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ *nennt man regulär, falls jedes* $A \in [A]$ *regulär ist.*

Lemma 1.3 *Seien* $[A]$, $[B] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. $[B] \subseteq [A] \Rightarrow \left\langle [A] \right\rangle \leq \left\langle [B] \right\rangle$.

2. $\left\langle [A] \pm [B] \right\rangle \geq \left\langle [A] \right\rangle - |[B]|$.

Für einen Beweis verweisen wir auf Proposition 3.7.1 in [15].

1.1 Monotone Normen

Unter einer monotonen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbf{R}^n$ versteht man eine Abbildung von $\mathbf{R}^n$ nach $\mathbf{R}$, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\,|x|\,\| > 0, \text{ falls } x \neq o, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \cdot \|x\|, \\ \|x \pm y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

für alle x, $y \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Für die dazugehörige Matrixnorm

$$\|A\| := \left\| \sup_{\|x\|=1} |Ax| \right\| \qquad A \in \mathbf{R}^{m\times n}$$

gilt

$$\|A\| = \|\,|A|\,\|, \; \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Man kann nun monotone Normen auf Intervallmatrizen und Intervallvektoren ausdehnen, indem man

$$\begin{aligned} \|[x]\| &:= \|\,|[x]|\,\| \\ \|[A]\| &:= \|\,|[A]|\,\| \end{aligned} \tag{1}$$

für alle $[x] \in \mathbf{IR}^n$ und $[A] \in \mathbf{IR}^{m\times n}$ setzt. Für Details siehe [16].

2 Lineare Intervallgleichungssysteme

Lineare Intervallgleichungssysteme entstehen z.B. dann, wenn man ein lineares Gleichungssystem

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \quad \tilde{A} \in \mathbf{R}^{m\times n},\, \tilde{b} \in \mathbf{R}^m, \tag{2}$$

zu lösen hat, wobei man aber für $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$ lediglich untere und obere Schranken kennt.

Gegeben sind dann eine Intervallmatrix $[A] \in \mathbf{IR}^{m\times n}$ und ein Intervallvektor $[b] \in \mathbf{IR}^m$, und wir betrachten eine Menge von linearen Gleichungssystemen

$$Ax = b, \quad A \in [A],\, b \in [b]. \tag{3}$$

Die Gleichungen (3) werden als ein lineares Intervallgleichungssystem bezeichnet. I. Allg. ist es schwierig die Menge

$$\Sigma([A],[b]) := \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b,\, A \in [A],\, b \in [b]\}$$

zu bestimmen (siehe etwa [4]). Daher begnügt man sich, falls $\Sigma([A],[b])$ beschränkt ist, einen Intervallvektor zu finden, der $\Sigma([A],[b])$ enthält. Denn dann kann man folgern:

Ist $\tilde{x}$ eine Lösung von (2), so gilt
$$\tilde{x} \in \Sigma([A],[b]) \subseteq [x].$$

Zur Warnung sei bemerkt, dass ein Intervallvektor $[x]$, der der Gleichung $[A][x] = [b]$ genügt, $\Sigma([A],[b])$ i. Allg. nicht enthält. Dies zeigt das einfache

Beispiel 2.1 *Gegeben sei die lineare Gleichung*

$$\frac{4}{3}x = \frac{9}{7}. \tag{4}$$

Mit

$$\frac{4}{3} \in [1, \frac{16}{10}] =: [A] \in \mathbf{IR}^{1\times 1} \quad \textit{und} \quad \frac{9}{7} \in [1,2] =: [b] \in \mathbf{IR}^1$$

erfüllt dann zwar $[x] = [1, \frac{5}{4}]$ *die Gleichung* $[A][x] = [b]$, *aber die Lösung* $\tilde{x} = \frac{27}{28}$ *von (4) liegt nicht in* $[x]$.

Eine Art, wie man eine Intervall-Inklusion von $\Sigma([A],[b])$ erhält, behandelt der nächste Abschnitt.

3 Der Intervall-Gauss-Algorithmus I.G.A.

Unter dem Intervall-Gauss-Algorithmus (I.G.A.) versteht man die direkte Übertragung des in der Linearen Algebra wohlbekannten Gauss-Algorithmus auf die Intervallrechnung. Es seien also $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, $[b] \in \mathbf{IR}^n$.

Ist $0 \in [a_{11}]$, so sucht man eine Komponente $[a_{ij}]$ mit $0 \notin [a_{ij}]$. Diesen Vorgang nennt man wie im Reellen Pivotsuche.

Falls kein solches Element in der Intervallmatrix vorhanden ist, so ist der I.G.A. nicht durchführbar. Falls doch, so vertauscht man die erste Zeile mit der i -ten Zeile und die erste Spalte mit der j-ten Spalte. $[a_{ij}]$ nennt man das Pivotelement.

Das Pivotelement ist i. Allg. nicht eindeutig. Das Auswahlkriterium zur Bestimmung des Pivotelements nennt man Strategie der Pivotsuche.

Gilt also nach eventueller Vertauschung von Spalten und/oder Zeilen $0 \notin [a_{11}]$, dann versteht man unter dem ersten Intervall-Gauss-Schritt:

$$\begin{array}{rcll} [a'_{1j}] & := & [a_{1j}], & j = 1(1)n, \\ [a'_{ij}] & := & [a_{ij}] - [a_{i1}][a_{1j}]/[a_{11}], & i,j = 2(1)n, \\ [b'_i] & := & [b_i] - [a_{i1}][b_1]/[a_{11}], & i = 2(1)n, \\ [a'_{i1}] & := & 0, & i = 2(1)n. \end{array}$$

Besitzt die Matrix $([a'_{ij}])$, $2 \le i,j \le n$, mindestens einen Koeffizienten, der die 0 nicht enthält, so ist nach eventueller Vertauschung von Spalten und/oder Zeilen ein weiterer Intervall-Gauss-Schritt anwendbar.

Der I.G.A. ist genau dann durchführbar, wenn $n-1$ Intervall-Gauss-Schritte durchführbar sind und $0 \notin [a'_{nn}]$ gilt. Insbesondere folgt, dass die Durchführbarkeit nicht von der rechten Seite $[b]$ abhängt.

Im Folgenden wollen wir keine Pivotsuche zulassen. Dann kann man den I.G.A. mit $[a^{(1)}_{ij}] := [a_{ij}]$, $1 \le i,j \le n$, und $[b^{(1)}_i] := [b_i]$, $1 \le i \le n$, wie folgt implementieren:

for $k := 1$ **to** $n-1$ **do**
begin
    for $i := k+1$ **to** n **do**
    begin
        for $j := k+1$ **to** n **do**

$$[a_{ij}^{(k+1)}] := [a_{ij}^{(k)}] - [a_{ik}^{(k)}]\frac{[a_{kj}^{(k)}]}{[a_{kk}^{(k)}]};$$

$$[b_i^{(k+1)}] := [b_i^{(k)}] - [a_{ik}^{(k)}]\frac{[b_k^{(k)}]}{[a_{kk}^{(k)}]};$$

end;
for $l := 1$ **to** k **do**
begin
for $j := l$ **to** n **do**
$[a_{lj}^{(k+1)}] := [a_{lj}^{(k)}]$;
$[b_l^{(k+1)}] := [b_l^{(k)}]$;
end;
end;

$$[x_n] := \frac{[b_n^{(n)}]}{[a_{nn}^{(n)}]};$$

for $i := n-1$ **downto** 1 **do**

$$[x_i] := \left([b_i^{(n)}] - \sum_{j=i+1}^{n} [a_{ij}^{(n)}][x_j]\right) / [a_{ii}^{(n)}].$$

Dabei bezeichnen wir dann $IGA([A],[b]) := [x]$.

Aus dem Reellen wissen wir, dass durch den Gauss'schen Algorithmus angewandt auf A eine Dreieckszerlegung generiert wird, d.h. man erhält eine linke untere Dreiecksmatrix L und eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit $A = LR$. Um das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, löst man dann zunächst $Ly = b$ (Vorwärtssubstitution) und danach $Rx = y$ (Rückwärtssubstitution).

Der Vorteil der Dreieckszerlegung ist offensichtlich. Hat man einmal die Dreieckszerlegung durchgeführt und ist z.B. öfters ein lineares Intervallgleichungssystem mit derselben Intervallmatrix aber mit verschiedenen rechten Seiten zu lösen (man denke z.B. an Iterationsverfahren), so kann man sich auf die Ausführung der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution beschränken.

Ist der I.G.A. durchführbar für $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, so führt die Übertragung der Dreieckszerlegung auf Intervallmatrizen auf eine linke untere Intervalldreiecksmatrix $[L]$ und auf eine rechte obere Intervalldreiecksmatrix $[R]$ mit

$[A] \subseteq [L][R]$ (siehe etwa [15]):

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ [l_{21}] & 1 & \cdots & & 0 \\ \cdot & [l_{32}] & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ [l_{n1}] & [l_{n2}] & \cdots & [l_{nn-1}] & 1 \end{pmatrix}, \; [R] = \begin{pmatrix} [r_{11}] & [r_{12}] & \cdots & [r_{1n}] \\ 0 & [r_{21}] & \cdots & [r_{2n}] \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & [r_{nn}] \end{pmatrix}.$$

Man erhält den I.G.A. mit Dreieckszerlegung:

{Dreieckszerlegung}

for $k := 1$ **to** $n-1$ **do**
begin
  for $i := k+1$ **to** n **do**
  begin
    $[l_{ik}] := [a_{ik}^{(k)}]/[a_{kk}^{(k)}]$;
    for $j := k+1$ **to** n **do**
    $[a_{ij}^{(k+1)}] := [a_{ij}^{(k)}] - [l_{ik}][a_{kj}^{(k)}]$;
  end;
  for $l := 1$ **to** k **do**
  for $j := l$ **to** n **do**
    $[a_{lj}^{(k+1)}] := [a_{lj}^{(k)}]$;
end;

{ Vorwärtssubstitution }

for $i := 1$ **to** n **do**
$[y_i] := [b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [l_{ij}][y_j]$;

{ Rückwärtssubstitution }

for $i := n$ **downto** 1 **do**
$$[x_i] := \left([y_i] - \sum_{j=i+1}^{n} [a_{ij}^{(n)}][x_j] \right) / [a_{ii}^{(n)}].$$

Durch Induktion kann man zeigen, dass $[y_i] = [b_i^{(i)}] \equiv [b_i^{(n)}]$ für alle $i = 1(1)n$ gilt. Der I.G.A. und der I.G.A. mit Dreieckszerlegung liefern also das gleiche

Ergebnis.

Definiert man $[C^{(k)}]$, $[T^{(k)}]$ und $[D^{(k)}]$ durch

$$[c_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -[a_{ik}^{(k)}]/[a_{kk}^{(k)}] & \text{falls}\, j = k < i, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$[t_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -[a_{kj}^{(n)}] & \text{falls}\, i = k < j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$[d_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j \neq k, \\ 1/[a_{kk}^{(n)}] & \text{falls}\, i = j = k, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

so gilt

$$[x] = [D^{(1)}]([T^{(1)}] \cdots ([D^{(n-1)}]([T^{(n-1)}]([D^{(n)}]([C^{(n-1)}](\cdots [C^{(1)}][b]) \cdots).$$

Diese Darstellung wurde von Prof. Hartmut Schwandt [20] angegeben. Dabei dürfen aufgrund der nicht gegebenen Assoziativität der Intervallmatrizenmultiplikation die Klammern nicht weggelassen werden.

Es gilt der grundlegende

Satz 3.1 *Es seien $[A] \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ und $[b] \in \mathbf{IR}^n$. Ist der I.G.A. durchführbar für $[A]$, so gilt*

$$\Sigma([A], [b]) \subseteq IGA([A], [b]).$$

Den Beweis findet man in [2].

Die Intervall-Gauss-Inverse von $[A]$ bezeichnen wir mit $IGA([A])$, und sie ist definiert durch

$$IGA([A]) := [D^{(1)}]([T^{(1)}] \cdots ([D^{(n-1)}]([T^{(n-1)}]([D^{(n)}]([C^{(n-1)}](\cdots [C^{(1)}]) \cdots).$$

Es gilt das

Lemma 3.1 *Es sei $[A] \in \mathbf{IR}^{n \times n}$, und es sei e^i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt*

$$IGA([A], e^i) = IGA([A])e^i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Die Behauptung folgt aufgrund der obigen Darstellung für $IGA([A], e^i)$ sofort aus Lemma 1.1.

Um die Intervall-Gauss-Inverse $IGA([A])$ zu erhalten, braucht man also die Matrizen $[C^{(k)}]$, $[T^{(k)}]$ und $[D^{(k)}]$ nicht explizit auszurechnen. Man erhält $IGA([A])$, indem man mit Hilfe des Intervall-Gauss-Algorithmus formal die Intervallmatrix $[A]$ invertiert.

4 Durchführbarkeit des Intervall-Gauss-Algorithmus

Aufgrund von Satz 3.1 ist es wichtig, Kriterien zu finden, die zu einer Intervallmatrix Auskunft über die Durchführbarkeit des I.G.A. geben. Zum jetzigen Zeitpunkt ist es noch nicht gelungen, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür zu finden. Man kann aber Klassen von Intervallmatrizen angeben, für die der I.G.A. durchführbar ist.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass der Gauss-Algorithmus (eventuell mit Pivotsuche) für $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ genau dann durchführbar ist, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Für $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ ist die Sachlage anders. Aufgrund der Inklusionsmonotonie gilt für jeden Intervall-Gauss-Schritt:

$$[C] \subseteq [A] \Rightarrow [C^{(i)}] \subseteq [A^{(i)}] \tag{5}$$

für $i = 1(1)n$. Ist der I.G.A. also für $[A]$ durchführbar, so ist der I.G.A. auch durchführbar für jede Intervallmatrix $[C] \subseteq [A]$. (Lässt man Pivotsuche zu, dann gilt die Bemerkung i. Allg. nur bei der gleichen Strategie der Pivotsuche.)

Man bekommt mit der Definition

$$\det[A] := \{\det A : A \in [A]\}$$

sofort als notwendige Bedingung für die Durchführbarkeit des I.G.A.:

$$0 \notin \det[A], \tag{6}$$

denn wäre $0 \in \det[A]$, so gäbe es ein $A \in [A]$, für welches der reelle Gauss-Algorithmus bei jeder Strategie der Pivotsuche nicht durchführbar wäre.

Wegen (5) ist dann der I.G.A. nicht durchführbar für $[A]$.

In [18] wurde allerdings gezeigt, dass die Bedingung (6) nicht hinreichend ist für die Durchführbarkeit des I.G.A. Als Gegenbeispiel genügte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, \frac{2}{3}] & [0, \frac{2}{3}] \\ [0, \frac{2}{3}] & 1 & [0, \frac{2}{3}] \\ [0, \frac{2}{3}] & [0, \frac{2}{3}] & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir geben nun einige Klassen von Intervallmatrizen an, für die der I.G.A. durchführbar ist.

Definition 4.1 *1. Die Menge $Z^{n\times n}$ ist definiert als die Menge aller Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, für die gilt*

$$a_{ij} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

2. Die Matrix $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ nennt man M-Matrix, falls

$$A \in Z^{n\times n}$$

gilt und zudem die Inverse A^{-1} existiert mit

$$A^{-1} \geq O.$$

3. Eine Intervallmatrix $[A]$ nennt man M-Matrix, wenn jede reelle Punktmatrix $A \in [A]$ eine M-Matrix ist.

4. Eine Intervallmatrix $[A]$ nennt man H-Matrix, wenn $\big\langle [A] \big\rangle$ eine M-Matrix ist.

Satz 4.1 *Es seien $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ und $[b] \in \mathbf{IR}^n$. Ist $[A]$ eine H-Matrix, dann ist der I.G.A. ohne Pivotsuche durchführbar.*

Dieser Satz wurde bereits 1977 von Prof. Götz Alefeld bewiesen ([1]). Als wesentliches Hilfsmittel wurde dabei folgendes Lemma benutzt.

Lemma 4.1 *Es sei $A \in Z^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. A^{-1} existiert und $A^{-1} \geq O$.

2. *Es existiert ein Vektor $u \in \mathbf{R}^n$, $u > o$, mit $Au > o$.*

Einen Beweis findet man in [6]. Aus diesem Lemma ergeben sich zwei einfache Folgerungen.

Lemma 4.2 1. *Die Diagonalelemente einer M-Matrix sind positiv.*

2. *Ist A eine M-Matrix und $B \in Z^{n\times n}$ mit $A \leq B$, dann ist auch B eine M-Matrix, und es gilt $B^{-1} \leq A^{-1}$.*

Lemma 4.3 *Es sei $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Ist $[A]$ eine M-Matrix, so ist $[A]$ insbesondere eine H-Matrix.*

2. *Ist $\left\langle [A] \right\rangle$ streng diagonal dominant, d.h.*

$$\min\{|a_{ii}| : a_{ii} \in [a_{ii}]\} > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |[a_{ij}]|, \quad i = 1(1)n,$$

dann ist $[A]$ eine H-Matrix.

Die Beweise findet man z.B. in [11], wo noch mehr Klassen von Matrizen als H-Matrizen erkannt werden.

Wir wollen im Hinblick auf das nächste Lemma Satz 4.1 noch etwas weiter fassen.

Satz 4.1' *Es sei $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ eine H-Matrix. Lässt man keine Pivotsuche zu, so sind die Punktmatrizen*

$$\left(\left\langle [A] \right\rangle_{ij}^{(k)}\right)_{k\leq i,j\leq n}, \quad k = 2(1)n,$$

allesamt M-Matrizen und es gilt

$$\left(\left\langle [A] \right\rangle_{ij}^{(k)}\right)_{k\leq i,j\leq n} \leq \left(\left\langle [A^{(k)}] \right\rangle_{ij}\right)_{k\leq i,j\leq n}, \quad k = 2(1)n. \tag{7}$$

Alle

$$\left([a_{ij}^{(k)}]\right)_{k\leq i,j\leq n}, \quad k = 2(1)n,$$

sind also wiederum H-Matrizen.

Beweis: Ist $A^{(1)} := A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ eine M-Matrix, so ist nach einem Gauss-Schritt die Matrix

$$\left(a_{ij}^{(2)}\right)_{2\le i,j\le n} \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

wieder eine M-Matrix. Den Beweis findet man in [22].

Den Beweis für die Beziehung (7) findet man in Proposition 6 in [16]. Der Beweis an sich folgt dann durch Induktion. $\square$

Lemma 4.4 *Es seien $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ eine H-Matrix und $[b] \in \mathbf{IR}^n$. Dann gilt*

$$|IGA([A],[b])| \le \left\langle [A] \right\rangle^{-1} |[b]|.$$

Beweis: Aufgrund von Satz 4.1 ist der I.G.A. durchführbar für jedes $[b] \in \mathbf{IR}^n$ und es gilt mit der Darstellung von Prof. Hartmut Schwandt [20]

$$\begin{aligned}&IGA([A],[b]) = \\ &[D^{(1)}]([T^{(1)}]\cdots([D^{(n-1)}]([T^{(n-1)}]([D^{(n)}]([C^{(n-1)}](\cdots[C^{(1)}][b])\cdots)\end{aligned}$$

mit

$$[c_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -[a_{ik}^{(k)}]/[a_{kk}^{(k)}] & \text{falls}\, j = k < i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$[t_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -[a_{kj}^{(n)}] & \text{falls}\, i = k < j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$[d_{ij}^{(k)}] := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j \ne k, \\ 1/[a_{kk}^{(n)}] & \text{falls}\, i = j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Lemma 1.2 erhalten wir dann sukzessiv

$$\begin{aligned}&|IGA([A],[b])| \le \\ &|[D^{(1)}]|\cdot|[T^{(1)}]|\cdots|[D^{(n-1)}]|\cdot|[T^{(n-1)}]|\cdot|[D^{(n)}]|\cdot|[C^{(n-1)}]|\cdots|[C^{(1)}]|\cdot|[b]|.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\left.\begin{aligned}&|[D^{(1)}]|\cdot|[T^{(1)}]|\cdots|[D^{(n-1)}]|\cdot|[T^{(n-1)}]|\cdot|[D^{(n)}]|\cdot|[C^{(n-1)}]|\cdots|[C^{(1)}]| \\ &\le \left\langle [A] \right\rangle^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Es seien dazu $i \in \{1, ..., n\}$ und e^i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt aufgrund der Formeln des Gauss-Algorithmus

$$\left\langle [A] \right\rangle^{-1} e^i = \hat{D}^{(1)} \cdot \hat{T}^{(1)} \cdots \hat{D}^{(n-1)} \hat{T}^{(n-1)} \cdot \hat{D}^{(n)} \cdot \hat{C}^{(n-1)} \cdots \hat{C}^{(1)} e^i$$

mit

$$\left\langle [A] \right\rangle^{(k)} =: (\hat{a}_{ij}^{(k)}), \quad k = 1(1)n,$$

und

$$\hat{c}_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -\hat{a}_{ik}^{(k)} / \hat{a}_{kk}^{(k)} & \text{falls}\, j = k < i, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\hat{t}_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j, \\ -\hat{a}_{kj}^{(n)} & \text{falls}\, i = k < j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\hat{d}_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{falls}\, i = j \neq k, \\ 1/\hat{a}_{kk}^{(n)} & \text{falls}\, i = j = k, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Nun gilt aufgrund von Satz 4.1'

$$\left| \frac{1}{[a_{kk}^{(n)}]} \right| = \frac{1}{\left\langle [a_{kk}^{(n)}] \right\rangle} \leq \frac{1}{\hat{a}_{kk}^{(n)}},$$

sowie

$$|-[a_{kj}^{(n)}]| = |[a_{kj}^{(n)}]| \leq |\hat{a}_{kj}^{(n)}| = -\hat{a}_{kj}^{(n)}$$

und

$$\left| -\frac{[a_{ik}^{(k)}]}{[a_{kk}^{(k)}]} \right| = \frac{|[a_{ik}^{(k)}]|}{\left\langle [a_{kk}^{(k)}] \right\rangle} \leq \frac{|\hat{a}_{ik}^{(k)}|}{\hat{a}_{kk}^{(k)}} = \frac{-\hat{a}_{ik}^{(k)}}{\hat{a}_{kk}^{(k)}}.$$

Es folgt also $|[C^{(k)}]| \leq \hat{C}^{(k)}$, $|[T^{(k)}]| \leq \hat{T}^{(k)}$ für $k = 1(1)n-1$ und $|[D^{(k)}]| \leq \hat{D}^{(k)}$ f"ur $k = 1(1)n$, woraus dann (8) folgt. □

Satz 4.2 *Es sei $[A]$ eine $n \times n$ Intervalltridiagonalmatrix. Dann ist der I.G.A. genau dann ohne Pivotsuche durchführbar, wenn für*

$$[A_k] := \begin{pmatrix} [a_1] & [b_1] & \dots & 0 & 0 \\ [c_1] & [a_2] & [b_2] & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & [c_{k-2}] & [a_{k-1}] & [b_{k-1}] \\ 0 & \dots & \dots & [c_{k-1}] & [a_k] \end{pmatrix}$$

gilt:

$$0 \notin \det[A_k], k = 1(1)n.$$

Den Beweis findet man in [18].
Bemerkung: In [11] findet man für Satz 4.2 eine andere Formulierung:

Satz 4.2' *Der I.G.A. ohne Pivotsuche ist für eine Intervalltridiagonalmatrix $[A]$ genau dann durchführbar, wenn der reelle Gauss-Algorithmus ohne Pivotsuche für jedes $A \in [A]$ durchführbar ist.*

Satz 4.3 *Es sei $[A]$ eine reguläre $n \times n$ Intervallpfeilmatrix:*

$$[A] = \begin{pmatrix} [a_1] & 0 & \dots & 0 & [b_1] \\ 0 & [a_2] & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & [a_{n-1}] & [b_{n-1}] \\ [c_1] & \dots & \dots & [c_{n-1}] & [a_n] \end{pmatrix}.$$

Dann ist der I.G.A. ohne Pivotsuche genau dann durchführbar, wenn gilt:

$$0 \notin [a_i], i = 1(1)n-1.$$

Den Beweis findet man in [19].

Beispiel 4.1 *Wir betrachten folgende reguläre 3×3 Intervallpfeilmatrix*

$$[A] = \begin{pmatrix} [1,2] & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ [0,1] & 1 & [-4,1] \end{pmatrix}.$$

Der I.G.A. ohne Pivotsuche angewandt auf $[A]$ ist durchführbar nach Satz 4.3. Bringt man $[A]$ durch zweite und dritte Zeilen- und Spaltenvertauschung auf Tridiagonalgestalt,

$$[\tilde{A}] = \begin{pmatrix} [1,2] & 2 & 0 \\ [0,1] & [-4,1] & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

so bricht der I.G.A. ohne Pivotsuche angewandt auf $[\tilde{A}]$ im zweiten Schritt ab, da

$$[\tilde{a}_2^{(2)}] = [-4,1] - \frac{[0,1] \cdot 2}{[1,2]} = [-6,1]$$

gilt. Dasselbe Phänomen, nur umgekehrt, ergibt sich bei

$$[B] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & [2,3] \\ 0 & [-1,1] & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass der zweite Intervall-Gauss-Schritt nicht durchführbar ist. Bringt man $[B]$ allerdings durch zweite und dritte Zeilen- und Spaltenvertauschung auf Tridiagonalgestalt,

$$[\tilde{B}] = \begin{pmatrix} 2 & [2,3] & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & [-1,1] \end{pmatrix},$$

so ist der I.G.A. ohne Pivotsuche angewandt auf $[\tilde{B}]$ duchführbar.

Prof. Andreas Frommer fand eine neue Klasse von Intervallmatrizen, für die der I.G.A. ohne Pivotsuche durchführbar ist (siehe [7]). Diese Klasse beinhaltet die Klasse der Intervalltridiagonalmatrizen und die der Intervallpfeilmatrizen. Weitere neuere Klassen von Intervallmatrizen, für die der I.G.A. durchführbar ist, findet man in [8], [12] und [13].

5 Der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus

Definition 5.1 *Ist P eine nichtleere, beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^{m\times n}$, so bezeichnen wir mit*

$$[]P := [\inf P, \sup P]$$

die Intervall-Hülle von P.

Definition 5.2 *Sei nun $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ regulär, dann setzen wir*

$$[A]^{-1} := []\{A^{-1} : A \in [A]\}.$$

Lemma 5.1 *Es sei $[A] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$. Sind $\underline{A}$, $\overline{A}$ regulär und $\underline{A}^{-1}, \overline{A}^{-1} \geq O$, dann ist $[A]$ regulär und es gilt*

$$[A]^{-1} = [\overline{A}^{-1}, \underline{A}^{-1}].$$

Die Voraussetzungen sind also insbesondere erfüllt, falls $[A]$ eine M-Matrix ist.

Einen Beweis findet man in Proposition 3.6.6 in [15].

Wir betrachten im folgenden Partitionen einer Matrix $[\mathbf{A}] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \ldots [A_{1k}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & \ldots [A_{2k}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [A_{k1}] & [A_{k2}] & \ldots [A_{kk}] \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit $[A_{ij}] \in \mathbf{IR}^{n_i\times n_j}$ und $n_1 + \ldots + n_k = n$. Insbesondere sind alle Diagonalblöcke quadratisch. Es gilt

$$\left\langle [\mathbf{A}] \right\rangle = \begin{pmatrix} \left\langle [A_{11}] \right\rangle & -|[A_{12}]| & \ldots - |[A_{1k}]| \\ -|[A_{21}]| & \left\langle [A_{22}] \right\rangle & \ldots - |[A_{2k}]| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -|[A_{k1}]| & -|[A_{k2}]| & \ldots \left\langle [A_{kk}] \right\rangle \end{pmatrix}.$$

Sei nun eine Partition gegeben und $[A_{11}]$ regulär. Wir setzen $[\mathbf{A}^{(1)}] := [\mathbf{A}]$. Dann wird der erste (theoretische) Block-Intervall-Gauss-Schritt mit den folgenden Formeln beschrieben:

$$\begin{aligned} [A_{1j}^{(2)}] &:= [A_{1j}], & j &= 1(1)k, \\ [A_{ij}^{(2)}] &:= [A_{ij}] - [A_{i1}][A_{11}]^{-1}[A_{1j}], & i,j &= 2(1)k, \\ [A_{i1}^{(2)}] &:= O, & i &= 2(1)k. \end{aligned} \tag{10}$$

Ist nun $[A_{22}^{(2)}]$ regulär, so kann man den Prozess wiederholen. Sind alle $[A_{vv}^{(v)}]$ regulär f"ur $v = 1(1)k$, so sagt man, dass der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus durchführbar ist.

Die Formeln (10) wurden zum ersten Mal in [9] angegeben, worin allerdings keine Aussage gemacht wird, wie $[A_{11}]^{-1}$ praktisch berechnet werden soll und in welcher Reihenfolge $[A_{i1}][A_{11}]^{-1}[A_{1j}]$ auszuwerten ist. (Man beachte, dass die Intervallmatrizenmultiplikation nicht assoziativ ist.)

Wir geben nun einen Algorithmus an, der diese Lücke berücksichtigt. Dabei bezeichnet $([B])_{.i}$ die i-te Spalte der Intervallmatrix $[B]$.

{ Block-Intervall-Gauss-Algorithmus }
{ Block-Dreieckszerlegung }

for $v := 1$ **to** $k-1$ **do**
begin
for $i := v+1$ **to** k **do**
begin $\{*\}$
$[L_{iv}] := \Big(IGA([A_{vv}^{(v)}]^{\mathrm{T}}, ([A_{iv}^{(v)}]^{\mathrm{T}})_{.1}), \cdots, IGA([A_{vv}^{(v)}]^{\mathrm{T}}, ([A_{iv}^{(v)}]^{\mathrm{T}})_{.n_i})\Big)^{\mathrm{T}}$;
for $j := v+1$ **to** k **do**
$[A_{ij}^{(v+1)}] := [A_{ij}^{(v)}] - [L_{iv}][A_{vj}^{(v)}]$;
end;
for $l := 1$ **to** v **do**
for $j := l$ **to** k **do**
$[A_{lj}^{(v+1)}] := [A_{lj}^{(v)}]$;
end;
{ Block-Vorwärtssubstitution }
for $i := 1$ **to** k **do**
$[Y_i] := [B_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [L_{ij}][Y_j]$;
{ Block-Rückwärtssubstitution }
for $i := k$ **downto** 1 **do**
$[X_i] := IGA\left([A_{ii}^{(k)}], [Y_i] - \sum_{j=i+1}^{k} [A_{ij}^{(k)}][X_j]\right)$.

Wir bezeichnen dann $BlockIGA([\mathbf{A}], [\mathbf{B}]) := [\mathbf{X}]$. In der Praxis wird an der Stelle $\{*\}$ die Dreieckszerlegung von $[A_{vv}^{(v)}]^{\mathrm{T}}$ berechnet und später sowohl bei der Berechnung von $[L_{iv}]$ als auch von $[X_i]$ verwendet. Man muss dabei

$$[B]^{\mathrm{T}} \subseteq [L][R] \Rightarrow [B] \subseteq [R]^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}}$$

beachten und dies bei der Vorwärts- Rückwärtssubstitution für die Berechnung von $[X_i]$ dementsprechend berücksichtigen. Es gilt der folgende

Satz 5.1 *Ist die Intervallmatrix* $[\mathbf{A}]$ *eine H-Matrix, so ist der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus durchführbar für jede beliebige Partition.*

Beweis[1]*:* Mit $\left\langle[\mathbf{A}]\right\rangle$ ist auch $\left\langle[A_{11}]\right\rangle$ eine M-Matrix. Dann ist aufgrund der Definition

$$\left\langle[A_{11}]^{\mathrm{T}}\right\rangle = \left\langle[A_{11}]\right\rangle^{\mathrm{T}}, \quad i,j = 1(1)k,$$

[1] Der Beweis geht im Wesentlichen zurück auf [9].

eine M-Matrix, und der I.G.A. ist durchführbar für $[A_{11}]^{\mathrm{T}}$ bei beliebiger rechter Seite nach Satz 4.1.

Der erste Schritt des Block-Intervall-Gauss-Algorithmus ist also durchführbar, und wir erhalten $[\mathbf{A}^{(2)}]$.

Wir zeigen nun

$$\Big\langle[\mathbf{A}]\Big\rangle^{(2)} \leq \Big\langle[\mathbf{A}^{(2)}]\Big\rangle, \tag{11}$$

wobei

$$\begin{aligned}\Big\langle[\mathbf{A}]\Big\rangle^{(2)} \quad := \quad & \begin{pmatrix} \Big\langle[A_{22}]\Big\rangle & -|[A_{23}]| & \ldots - |[A_{2k}]| \\ -|[A_{32}]| & \Big\langle[A_{33}]\Big\rangle & \ldots - |[A_{3k}]| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -|[A_{k2}]| & -|[A_{k3}]| & \ldots \Big\langle[A_{kk}]\Big\rangle \end{pmatrix} \\ - \quad & \begin{pmatrix} -|[A_{21}]| \\ \vdots \\ -|[A_{k1}]| \end{pmatrix} \Big\langle[A_{11}]\Big\rangle^{-1} \Big(- |[A_{12}]| \ldots - |[A_{1k}]| \Big).\end{aligned}$$

$\Big\langle[\mathbf{A}]\Big\rangle^{(2)}$ bezeichnet das Ergebnis des ersten Schritts des reellen Block-Gauss-Algorithmus angewandt auf $\langle[\mathbf{A}]\rangle$.

$\Big\langle[\mathbf{A}]\Big\rangle^{(2)}$ ist eine M-Matrix, denn es gilt:

1. Die Matrix $\Big\langle[\mathbf{A}]\Big\rangle^{(2)}$ erhält man auch durch n_1 gewöhnliche Gauss-Eliminations-Schritte (siehe z.B. [17]).

2. Wird eine Gauss-Elimination auf eine M-Matrix angewandt, so bleibt die Matrix eine M-Matrix (siehe z.B. [22]).

Nach Lemma 4.2 würde demnach mit (11) folgen, dass $\Big\langle[\mathbf{A}^{(2)}]\Big\rangle$ eine M-Matrix und $[\mathbf{A}^{(2)}]$ eine H-Matrix ist. Dann wäre ein weiterer Schritt des Block-Intervall-Gauss-Algorithmus anwendbar. Die Behauptung des Satzes folgt dann letztendlich durch Induktion.

Um (11) zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $i \neq j$. Mit $\varepsilon = [-1, 1]$ und $[A] \subseteq \varepsilon|[A]|$ folgt mit der Inklusions-

monotonie

$$\begin{aligned} [A_{ij}^{(2)}] &= [A_{ij}] - [L_{i1}][A_{1j}] \\ &\subseteq \varepsilon|[A_{ij}]| - \varepsilon|[L_{i1}]||[A_{1j}]| \\ &= \varepsilon(|[A_{ij}]| + |[L_{i1}]||[A_{1j}]|). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |[L_{i1}]| &= \left|\left(IGA([A_{11}]^{\mathrm{T}}, ([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.1}), \cdots, IGA([A_{11}]^{\ \mathrm{T}}, ([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.n_i})\right)^{\mathrm{T}}\right| \\ &= \left(|IGA([A_{11}]^{\mathrm{T}}, ([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.1})|, \cdots, |IGA([A_{11}]^{\ \mathrm{T}}, ([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.n_i})|\right)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.4 kann man dann

$$\begin{aligned} |[L_{i1}]| &\leq \left(\left\langle [A_{11}]^{\mathrm{T}} \right\rangle^{-1} |([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.1})|, \cdots, \left\langle [A_{11}]^{\mathrm{T}} \right\rangle^{-1} |([A_{i1}]^{\mathrm{T}})_{.n_i})|\right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\left\langle [A_{11}]^{\mathrm{T}} \right\rangle^{-1} \cdot |[A_{i1}]^{\mathrm{T}}|\right)^{\mathrm{T}} = \left(\left(\left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \cdot |[A_{i1}]^{\mathrm{T}}|\right)^{\mathrm{T}} \\ &= |[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} \end{aligned}$$

folgern und erhält insgesamt

$$[A_{ij}^{(2)}] \subseteq \varepsilon(|[A_{ij}]| + |[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} |[A_{1j}]|).$$

Somit

$$\begin{aligned} \left(\left\langle [\mathbf{A}] \right\rangle^{(2)}\right)_{ij} &= -|[A_{ij}]| - |[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} |[A_{1j}]| \\ &\leq -|[A_{ij}^{(2)}]| = \left(\left\langle [\mathbf{A}^{(2)}] \right\rangle\right)_{ij}. \end{aligned}$$

2. Fall: $i = j$. Es gilt

$$[A_{ii}^{(2)}] \subseteq [A_{ii}] - \varepsilon|[L_{i1}]||[A_{1i}]|.$$

Wie im 1. Fall bekommt man

$$[A_{ii}^{(2)}] \subseteq [A_{ii}] - \varepsilon|[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} |[A_{1i}]|.$$

Mit Lemma 1.3 folgt

$$\left\langle [A_{ii}] - \varepsilon|[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} |[A_{1i}]| \right\rangle \leq \left\langle [A_{ii}^{(2)}] \right\rangle$$

und

$$\left\langle [A_{ii}] \right\rangle - |[A_{i1}]| \left\langle [A_{11}] \right\rangle^{-1} |[A_{1i}]| \leq \left\langle [A_{ii}^{(2)}] \right\rangle.$$

Daraus folgt

$$\left(\left\langle [\mathbf{A}] \right\rangle^{(2)}\right)_{ii} \leq \left(\left\langle [\mathbf{A}^{(2)}] \right\rangle\right)_{ii}.$$

Insgesamt also (11). □

Satz 5.2 *Es sei* $[\mathbf{A}] \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ *partitioniert wie in (9). Weiter sei für jedes Paar* $(i,j), i,j = 1(1)k$*, eine monotone Norm auf* $\mathbf{R}^{n_i \times n_j}$ *gegeben mit der folgenden Verträglichkeitseigenschaft*

$$\|CD\|_{ij} \leq \|C\|_{il}\|D\|_{lj}, \quad i,j,l = 1(1)k, \tag{12}$$

für $C \in \mathbf{R}^{n_i \times n_l}$ *und* $D \in \mathbf{R}^{n_l \times n_j}$*. Es seien alle Diagonalblöcke* $[A_{ii}]$ *regulär. Ist nun eine der drei Matrizen* $D_1([\mathbf{A}])$*,* $D_2([\mathbf{A}])$*,* $D_2([\mathbf{A}])$ *definiert durch*

$$(D_1([\mathbf{A}]))_{ij} \quad := \quad \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j, \\ -\|[A_{ii}]^{-1}[A_{ij}]\,\|_{ij} & \textit{falls } i \neq j, \end{cases}$$

$$(D_2([\mathbf{A}]))_{ij} \quad := \quad \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j, \\ -\|[A_{ij}][A_{jj}]^{-1}\|_{ij} & \textit{falls } i \neq j, \end{cases}$$

$$(D_3([\mathbf{A}]))_{ij} \quad := \quad \begin{cases} \|[A_{ii}]^{-1}\|_{ii}^{-1} & \textit{falls } i = j, \\ -\|[A_{ij}]\|_{ij} & \textit{falls } i \neq j, \end{cases}$$

eine M-Matrix, so ist der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus durchführbar.

Den Beweis findet man in [9].

5.1 Durchführbarkeit bei Blockintervallpfeilmatrizen mit 2×2 Diagonalblöcken

Wir stellen nun eine neue Klasse von Intervallmatrizen vor, für die der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus durchführbar ist. Die Klasse ist nicht enthalten in den Klassen von Intervallmatrizen, die durch Satz 5.1 und Satz 5.2 abgedeckt sind, wie das darauf folgende Beispiel zeigen wird.

Satz 5.3 *Es sei folgende reguläre Blockintervallpfeilmatrix gegeben:*

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [A_1] & O & \dots & O & [B_1] \\ O & [A_2] & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O & \vdots \\ O & \dots & O & [A_p] & [B_p] \\ [C_1] & \dots & \dots & [C_p] & [a_s] \end{pmatrix},$$

wobei für $i = 1(1)p$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} [A_i] & \in & \mathbf{IR}^{2\times 2} & , & [a_s] & \in & \mathbf{IR}, \\ [C_i] & \in & \mathbf{IR}^{1\times 2} & , & [B_i] & \in & \mathbf{IR}^{2\times 1}. \end{array}$$

Weiter seien die $[A_i]$ regulär und für $i = 1(1)p$ gelte mit

$$[A_i] = \begin{pmatrix} [a_{11}^{(i)}] & [a_{12}^{(i)}] \\ [a_{21}^{(i)}] & [a_{22}^{(i)}] \end{pmatrix}$$

$0 \notin [a_{kl}^{(i)}], k, l = 1, 2$ *und*

$$\begin{array}{llll} [B_i] & = ([b_i]\, 0)^T & \textit{oder} & (0\, [b_i])^T, \\ [C_i] & = ([c_i]\, 0) & \textit{oder} & (0\, [c_i]) \end{array}$$

mit $[b_i], [c_i] \in \mathbf{IR}$. Dann ist der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus mit

$$[A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{[a_{11}^{(i)}] - \frac{[a_{12}^{(i)}][a_{21}^{(i)}]}{[a_{22}^{(i)}]}} & \frac{1}{[a_{21}^{(i)}] - \frac{[a_{22}^{(i)}][a_{11}^{(i)}]}{[a_{12}^{(i)}]}} \\ \frac{1}{[a_{12}^{(i)}] - \frac{[a_{22}^{(i)}][a_{11}^{(i)}]}{[a_{21}^{(i)}]}} & \frac{1}{[a_{22}^{(i)}] - \frac{[a_{12}^{(i)}][a_{21}^{(i)}]}{[a_{11}^{(i)}]}} \end{pmatrix}$$

durchführbar.

Beweis: Mit den Formeln (10) erhält man nach p Block-Intervall-Gauss-Schritten:

$$[a_s^{(p+1)}] = [a_s] - \sum_{i=1}^{p} \left([C_i][A_i]^{-1}\right)[B_i].$$

Berechnet man nun $([C_i][A_i]^{-1})\,[B_i]$ f'ur $i = 1(1)p$, so erhält man vier Fälle.
1. Fall:

$$\left.\begin{array}{lcl} [C_i] & = & ([c_i]\, 0) \\ [B_i] & = & ([b_i]\, 0)^T \end{array}\right\} \Rightarrow \left([C_i][A_i]^{-1}\right)[B_i] = \frac{[c_i][b_i]}{[a_{11}^{(i)}] - \frac{[a_{12}^{(i)}][a_{21}^{(i)}]}{[a_{22}^{(i)}]}}.$$

2. Fall:

$$\left.\begin{array}{lcl} [C_i] & = & (0\, [c_i]) \\ [B_i] & = & ([b_i]\, 0)^T \end{array}\right\} \Rightarrow \left([C_i][A_i]^{-1}\right)[B_i] = \frac{[c_i][b_i]}{[a_{12}^{(i)}] - \frac{[a_{22}^{(i)}][a_{11}^{(i)}]}{[a_{21}^{(i)}]}}.$$

3. Fall:

$$\left.\begin{array}{rcl}[C_i] & = & ([c_i]\,0) \\ [B_i] & = & (0\,[b_i])^T\end{array}\right\} \Rightarrow \left([C_i][A_i]^{-1}\right)[B_i] = \frac{[c_i][b_i]}{[a_{21}^{(i)}] - \frac{[a_{22}^{(i)}][a_{11}^{(i)}]}{[a_{12}^{(i)}]}}.$$

4. Fall:

$$\left.\begin{array}{rcl}[C_i] & = & (0\,[c_i]) \\ [B_i] & = & (0\,[b_i])^T\end{array}\right\} \Rightarrow \left([C_i][A_i]^{-1}\right)[B_i] = \frac{[c_i][b_i]}{[a_{22}^{(i)}] - \frac{[a_{12}^{(i)}][a_{21}^{(i)}]}{[a_{11}^{(i)}]}}.$$

Dies bedeutet, dass in jedem Fall in dem Ausdruck für $[a_s^{(p+1)}]$ jedes Intervall $([a_{11}^{(i)}], [a_{12}^{(i)}], [a_{21}^{(i)}], [a_{22}^{(i)}], [c_i], [b_i], i = 1(1)p, [a_s])$ genau einmal vorkommt. Nach [14] ist $[a_s^{(p+1)}]$ also gleich dem Wertebereich W_f der Funktion:

$$f : [A_1] \times ... \times [A_p] \times [a_s] \times [B_1] \times ... \times [B_p] \times [C_1] \times ... \times [C_p] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$(A_1, ..., A_p, a, B_1, ..., B_p, C_1, ..., C_p) \mapsto a - \sum_{i=1}^{p} C_i A_i^{-1} B_i.$$

Angenommen der Block-Intervall-Gauss-Algorithmus bricht zusammen. Dann folgt

$$0 \in [a_s^{(p+1)}] = W_f.$$

Das würde aber bedeuten, dass es in $[\mathbf{A}]$ eine reelle Punktmatrix A gibt, die sich nach Anwendung des reellen Gauss-Algorithmus als singulär herausstellen würde, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. $\square$

Beispiel 5.1

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [2,5] & [2,3] & [2,3] \\ [-3,-1] & 2 & 0 \\ [-5,1] & 0 & [2,3] \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$[A_1] = \begin{pmatrix} [2,5] & [2,3] \\ [-3,-1] & 2 \end{pmatrix}, \quad [B_1] = \begin{pmatrix} [2,3] \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[C_1] = ([-5,1]\ 0) \quad \textit{und} \quad [a_s] = [2,3].$$

und behaupten, dass $[\mathbf{A}]$ *und* $[A_1]$ *regulär sind.*
Beweis:

$$\begin{aligned} det[\mathbf{A}] &\subseteq [2,5][4,6]-[-5,1][4,6]+[1,3][4,9] \\ &= [8,30]-[-30,6]+[4,27] \\ &= [6,87] \end{aligned}$$

und

$$det[A_1] = [4,10]+[2,9] = [6,19].$$

Also gilt: $0 \notin \det[\mathbf{A}]$ *und* $0 \notin \det[A_1]$*. Satz 5.3 ist somit anwendbar. Man erhält*

$$[A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} [\frac{2}{19},\frac{1}{3}] & [-\frac{3}{7},-\frac{1}{8}] \\ [\frac{1}{13},\frac{3}{10}] & [\frac{2}{13},\frac{5}{12}] \end{pmatrix}$$

und

$$[a_s^{(2)}] = [1,8].$$

Es gilt aber $[a_{33}^{(3)}] = [-\frac{651}{48},\frac{639}{48}]$*; d.h. der I.G.A. ohne Pivotsuche ist nicht durchführbar.* $[\mathbf{A}]$ *kann somit keine H-Matrix sein.*

Wir zeigen nun, dass auch Satz 5.2 nicht hinreicht, um die Durchführbarkeit des Block-Intervall-Gauss-Algorithmus für $[\mathbf{A}]$ *zu garantieren. Dazu zeigen wir, dass für jede monotone und (12) genügende Normen* $\|\cdot\|_{11}$, $\|\cdot\|_{12}$, $\|\cdot\|_{21}$ *und* $\|\cdot\|_{22}$ *weder* $D_1([\mathbf{A}])$ *noch* $D_2([\mathbf{A}])$ *noch* $D_3([\mathbf{A}])$ *aus Satz 5.2 eine M-Matrix ist. Wir benutzen folgende Schlussfolgerung: Sind* $a,b,c,d \geq 0$ *und*

$$D := \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

regulär, dann gilt

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

D.h. ist $\det D < 0$*, so ist* D *keine M-Matrix.*

Wir werden nun zeigen, dass für jede monotone und (12) genügende Normen $\|\cdot\|_{11}$, $\|\cdot\|_{12}$, $\|\cdot\|_{21}$ *und* $\|\cdot\|_{22}$ *gilt:*

$$\det D_i([\mathbf{A}]) < 0, \quad i = 1,2,3.$$

Wir beginnen mit

$$D_1([\mathbf{A}]) = \begin{pmatrix} 1 & -\|[A_1]^{-1}[B_1]\|_{12} \\ -\|[a_s]^{-1}[C_1]\|_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\left\| \begin{pmatrix} [\frac{4}{19}, 1] \\ [\frac{2}{13}, \frac{9}{10}] \end{pmatrix} \right\|_{12} \\ -\|([-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]\ 0)\|_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit (1) und (12) erhalten wir dann

$$\det D_1([\mathbf{A}]) = 1 - \left\| \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\|_{21} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} \right\|_{12} \leq 1 - \left\| \frac{5}{2} \right\|_{22}.$$

Mit (12) folgt aus

$$0 < \|1\|_{22} = \|1 \cdot 1\|_{22} \leq \|1\|_{22} \cdot \|1\|_{22}$$

die Ungleichung

$$1 \leq \|1\|_{22}. \tag{13}$$

Also

$$\det D_1([\mathbf{A}]) \leq 1 - \frac{5}{2}\|1\|_{22} \leq -\frac{3}{2} < 0.$$

Genauso bekommt man für

$$D_2([\mathbf{A}]) = \begin{pmatrix} 1 & -\|[B_1][a_s]^{-1}\|_{12} \\ -\|[C_1][A_1]^{-1}\|_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\left\| \begin{pmatrix} [\frac{2}{3}, \frac{3}{2}] \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{12} \\ -\|([-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}]\ [-\frac{3}{7}, \frac{15}{7}])\|_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

die Ungleichungskette

$$\det D_2([\mathbf{A}]) = 1 - \left\| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{15}{7} \end{pmatrix} \right\|_{21} \cdot \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{12} \leq 1 - \frac{5}{2} < 0.$$

Zuletzt betrachten wir dann noch

$$\det D_3([\mathbf{A}]) = \|[A_1]^{-1}\|_{11}^{-1} \cdot \|[a_s]^{-1}\|_{22}^{-1} - \|[C_1]\|_{21} \cdot \|[B_1]\|_{12}.$$

Mit (13), (1) und (12) bekommt man zunächst

$$-\|[C_1]\|_{21} \cdot \|[B_1]\|_{12} \leq -15.$$

Dann gilt mit (13) und (1)

$$\|[a_s]^{-1}\|_{22}^{-1} = \left\|\frac{1}{2}\right\|_{22}^{-1} \leq 2.$$

Etwas schwieriger wird nun die Abschätzung für $\|[A_1]^{-1}\|_{11}^{-1}$. *Es gilt wegen (1)*

$$\|[A_1]^{-1}\|_{11} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \right\|_{11} =: \|P\|_{11}.$$

Nach dem Satz von Perron-Frobenius (siehe etwa [5]) existiert nun ein positiver Vektor x *mit* $Px = \rho(P)x$. *Dabei bezeichnet* $\rho(P)$ *den Spektralradius von* P. *Wir bekommen mit (12)*

$$\rho(P)\|x\|_{12} = \|\rho(P)x\|_{12} = \|Px\|_{12} \leq \|P\|_{11} \cdot \|x\|_{12}.$$

Also

$$\rho(P) \leq \|P\|_{11} = \|[A_1]^{-1}\|_{11},$$

bzw.

$$\|[A_1]^{-1}\|_{11}^{-1} \leq (\rho(P))^{-1}.$$

Um nun $\rho(P)$ *zu bestimmen, betrachten wir die Nullstellen von*

$$\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{5}{12} - \lambda\right) - \frac{9}{70} = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{13}{1260}.$$

Man erhält

$$\rho(P) = \frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{13}{1260}}.$$

Insgesamt

$$\det D_3([\mathbf{A}]) \leq \frac{1}{\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{13}{1260}}} \cdot 2 - 15 = -11.0420... < 0.$$

References

[1] Götz Alefeld, *Über die Durchführbarkeit des Gauss'schen Algorithmus bei Gleichungen mit Intervallen als Koeffizienten*, Computing Suppl., 1 (1977), pp. 15-19.

[2] Götz Alefeld und Jürgen Herzberger, *Introduction to interval computations*, Academic Press, (1983).

[3] Götz Alefeld, *Inclusion methods for systems of nonlinear equations - the interval Newton method and modifications.* In: Topics in Validated Computations. Jürgen Herzberger (Editor). Elsevier Science B. V. (1994), pp. 7-26.

[4] Götz Alefeld, Vladik Kreinovich und Günter Mayer, *The shape of the solution set for systems of interval linear equations with dependent coefficients*, Math. Nachr., 192 (1998), pp. 23-36.

[5] Abraham Berman und Robert J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Academic Press, New York, 1979.

[6] Ky Fan, *Topological proof for certain theorems on matrices with non-negative elements*, Monatsh. Math., 62 (1958), pp. 219-237.

[7] Andreas Frommer, *A feasibility result for interval Gaussian elimination relying on graph structure.* In: Symbolic algebraic methods and verification methods. Götz Alefeld, Jiri Rohn, Siegfried M. Rump, Tetsuro Yamamoto (Editors), Springer-Verlag, Wien, (2001), pp. 79-86.

[8] Andreas Frommer und Günter Mayer, *A new criterion to guarantee the feasibility of the interval Gaussian algorithm*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14 (1993), pp. 408-419.

[9] Jürgen Garloff, *Block methods for the solution of linear interval equations*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11 (1990), pp. 89-106.

[10] Günter Mayer, *Enclosing the solution set of linear systems with inaccurate data by iterative methods based on incomplete LU-decomposition*, Computing, 35 (1985), pp. 189- 206.

[11] Günter Mayer, *Old and new aspects for the interval Gaussian algorithm.* In: Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling. Edgar Kaucher, Svetoslav M. Markov, Günter Mayer (Editoren), J.C. Baltzer AG, Basel, (1991), pp. 329-349.

[12] Günter Mayer und Lars Pieper, *A necessary and sufficient criterion to guarantee the feasibility of the interval Gaussian algorithm for a class of matrices*, Appl. Math., 38 (1993), pp. 205-220.

[13] Günter Mayer und Jiri Rohn, *On the applicability of the interval Gaussian algorithm*, Reliable Computing, 4 (1998), pp. 205-222.

[14] Ramon Moore, *Intervallanalyse*, Oldenbourg Verlag, (1969).

[15] Arnold Neumaier, *Interval methods for systems of equations*, Cambridge University Press, (1990).

[16] Arnold Neumaier, *New techniques for the analysis of linear interval equations*, Linear Algebra Appl. 58 (1984), pp. 273-325.

[17] Michael Neumann, *On the Schur complement and the LU-factorization of a matrix*, Linear and Multilinear Algebra, 9 (1981), pp. 241-254.

[18] Karl Reichmann, *Abbruch beim Intervall-Gauss-Algorithmus*, Computing, 22 (1979), pp. 355-361.

[19] Uwe Schäfer, *The feasibility of the interval Gaussian algorithm for arrowhead matrices*, Reliable Computing, 7 (2001), pp. 59-62.

[20] Hartmut Schwandt, *Schnelle fast global konvergente Verfahren für die Fünf-Punkt-Diskretisierung der Poissongleichung mit Dirichletschen Randbedingungen auf Rechteckgebieten*, Dissertation, Techn. Univ. Berlin (1981).

[21] Richard S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, (1962).

[22] Richard S. Varga und Do-Yong Cai, *On the LU-factorization of M-matrices*, Numer. Math., 38 (1981), pp. 179-192.