



**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 6116

**Experimentelle Untersuchung  
der turbulenten Nachlauf-  
strömung über einer beheizten  
Kugel in vertikaler Anströmung**

**C. Hoelle**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

**August 1998**



**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6116

**Experimentelle Untersuchung  
der turbulenten Nachlaufströmung  
über einer beheizten Kugel  
in vertikaler Anströmung\***

**C. Hoelle**

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

\*Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte Dissertation

---

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1998

**Als Manuskript gedruckt**  
**Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**  
**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH**  
**Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**  
**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft**  
**Deutscher Forschungszentren (HGF)**

**ISSN 0947-8620**

## Zusammenfassung

Die Entwicklung von erweiterten Turbulenzmodellen zur Berechnung von turbulenten Strömungen mit Auftriebseinfluß erfordert zur Validierung experimentelle Daten. In dieser Arbeit wird als Beispiel für eine typische Mischkonvektion der turbulente, achsensymmetrische Nachlauf über einer vertikalen, beheizten Kugel experimentell untersucht. Nach einer Beschreibung der zeitgemittelten Grundgleichungen für turbulente Strömungen werden das k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell und eine Erweiterung dieses Modells zur Berechnung von Auftriebsströmungen, das sogenannte algebraische Spannungs-/Flußmodell beschrieben. Die wichtigsten für die Turbulenzmodellierung experimentell zu ermittelnden turbulenten Korrelationen werden identifiziert. Für diese Korrelationen existieren bei Auftriebseinfluß zwei verschiedene Produktionsmechanismen. Anhand dieser Produktionsmechanismen werden in der Folge signifikante Unterschiede zwischen den radialen Profilen der Strömungsgrößen für Zwangskonvektion und Mischkonvektion erläutert. Durch Einführung von Form- und Amplitudenfunktionen werden sodann die Entwicklung der charakteristischen Profilparameter aller gemessenen Hauptströmungsgrößen und turbulenten Korrelationen mit wachsendem Abstand von der Kugel quantitativ erfaßt. Nach Zerlegung der Radialprofile in einen Nachlauf- und einen Auftriebsanteil kann die Entwicklung aller auftretenden Profilparameter mit Potenzfunktionen in moderaten Abständen von der Kugel beschrieben werden.

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des Forschungsvorhabens "Thermo- und fluiddynamische Übertragbarkeit Wasser/Natrium" erstellt. Am Schluß der Arbeit wird gezeigt, daß eine direkte Übertragung der Ergebnisse dieser Arbeit von der Wasserströmung auf eine geometrisch ähnliche Natriumströmung nicht möglich ist.

# **Experimental investigation of the turbulent wake above a heated sphere in vertical mean flow**

## **Abstract**

Experimental data are needed for the validation of advanced turbulence models in turbulent buoyant flows. In this work, the turbulent, axisymmetric wake above a heated sphere is investigated experimentally. After discussing the time-averaged basic equations for turbulent flow, the  $k$ - $\epsilon$  turbulence model and the algebraic stress/flux model are described. The most important turbulence correlations are identified which need to be determined in the experiment to form a database for turbulence modelling. In the presence of buoyancy there are two different mechanisms of production for these correlations. Based on the production terms the differences between the radial flow profiles for forced and mixed convection are explained. By introducing form and amplitude functions we find quantitative relations for the development of all measured profiles of mean velocities, mean temperature and second order correlations downstream of the sphere. The splitting of radial profiles into wake and plume contribution allows to describe the development of all profile parameters by power laws based on the distance to the sphere.

This work was performed within the research project "Thermo- and fluiddynamic transferability for water/sodium flow". It is shown that a direct transfer of the experimental results for water flow to a geometrically similar sodium flow is not possible in the given parameter range.

1.	Einleitung .....	1
1.1.	Motivation.....	1
1.3.	Die untersuchte Strömung .....	4
1.4.	Literaturübersicht .....	5
1.4.1.	Literatur zum Auftriebsstrahl.....	6
1.4.2.	Literatur zum Nachlauf .....	7
1.4.3.	Literatur zum auftriebsbehafteten Nachlauf.....	8
2.	Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen.....	10
2.1.	Statistische Betrachtung der Turbulenz .....	10
2.2.	Zeitlich gemittelte Grundgleichungen in Grenzschichtform .....	11
2.3.	Diffusion durch turbulente Schwankungen .....	13
2.4.	Turbulenzmodellierung .....	16
2.4.1.	Das k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell .....	16
2.4.2.	Das Algebraische Spannungs-Fluß-Modell (ASM).....	19
2.4.3.	Das k- $\epsilon$ - $\overline{T}^2$ -Modell und weitere Turbulenzmodelle .....	22
2.5.	Dimensionslose Kennzahlen .....	23
2.6.	Experimentell zu bestimmende Größen .....	27
3.	Das Experiment .....	30
3.1.	Die Versuchsanlage FLUTMIK .....	30
3.1.1.	Aufbau der Anlage .....	30
3.1.2.	Verwendete Meßtechnik .....	31
3.1.3.	Die Teststrecke .....	35
3.2.	Untersuchter Parameterbereich .....	39
4.	Meßergebnisse.....	43
4.1.	Diskussion der gemessenen Radialprofile .....	43
4.1.1.	Zwangskonvektion.....	44
4.1.2.	Mischkonvektion.....	50

4.2.	Bestimmung von Gesetzmäßigkeiten für die Zustandsgrößen .....	58
4.2.1.	Einführung von Formfunktionen und Amplitudenfunktionen.....	58
4.2.2.	Diskussion der Ergebnisse für Zwangskonvektion .....	61
4.2.2.1.	Axialgeschwindigkeit .....	61
4.2.2.2.	Turbulente Schubspannung .....	64
4.2.2.3.	Turbulente Normalspannungen.....	66
4.2.3.	Diskussion der Ergebnisse für Mischkonvektion.....	69
4.2.3.1.	Axialgeschwindigkeit .....	70
4.2.3.2.	Turbulente Schubspannung .....	73
4.2.3.3.	Turbulente Normalspannungen.....	75
4.2.3.4.	Temperatur und RMS-Wert der Temperatur .....	77
4.2.3.5.	Turbulente Wärmeströme.....	78
5.	Übertragbarkeit Wasser-Natrium .....	81
6.	Zusammenfassung .....	84
7.	Literaturverzeichnis .....	86



# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

In der Reaktorsicherheit, beispielsweise bei Untersuchungen zur sicheren Nachzerfalls-wärmeabfuhr nach dem Ausfall von aktiven Kühlkomponenten, ist die Berechnung von auftriebsbehafteten Strömungen ein zentrales Thema. Wegen der großen Längenskalen und der zur Wärmeabfuhr notwendigen, großen Volumenströme sind diese Strömungen in der Regel turbulent.

Turbulente Strömungen sind als dreidimensionale, instationäre Wirbelfelder aufzufassen. Durch die Hauptströmung werden großskalige Wirbel erzeugt, aus denen wiederum immer kleinere Wirbel entstehen, die durch molekularen Einfluß zerstört werden, wenn sie eine bestimmte Größe unterschreiten. Die direkte numerische Berechnung dieser Strömungen ist aufwendig und nur für einfache Geometrien mit vertretbarem Rechenaufwand durchzuführen. Die bei turbulenten Strömungen auftretenden zeitlichen Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeiten und der Temperatur bewirken innerhalb der Strömung einen zusätzlichen Impuls- und Wärmeaustausch, der bei der Berechnung ingenieurtechnischer Probleme gegenüber dem molekularen Austausch in den Vordergrund tritt.

Durch Einführung einer statistischen Betrachtungsweise für die turbulente Strömung wird das Problem auf wenige statistische Kenngrößen wie Mittelwerte, Standardabweichungen und Kreuzkorrelationen der Strömungsgrößen reduziert. Dies führt zu einer Beschreibung der zeitlich gemittelten Strömung (Hauptströmung), deren Kenntnis bei ingenieurtechnischen Problemen in der Regel ausreichend ist. Das beschreibende System von Differentialgleichungen ist jedoch im Gegensatz zum laminaren Fall nicht mehr geschlossen. Es treten zusätzliche Terme auf, die den Einfluß des Turbulenzfelds auf die Hauptströmung beschreiben. Zur Lösung werden Schließungsansätze erforderlich. Durch einfache mathematische Operationen werden aus den strömungsmechanischen Grundgleichungen Transport-Differentialgleichungen für die zusätzlichen Terme abgeleitet. Die resultierenden Gleichungen enthalten eine Vielzahl von Turbulenzkorrelationen höherer Ordnung, die mit Hilfe von empirischen Ansätzen modelliert werden müssen. In der Vergangenheit wurden verschiedene Turbulenzmodelle zur Berechnung der statistisch gemittelten Strömung eingesetzt. Die meisten dieser Modelle wurden für Strömungen entwickelt, bei denen der Einfluß des Temperaturfelds auf die Strömung vernachlässigbar ist. Die Berechnung von auftriebsbehafteten Strömungen ist mit diesen Modellen nicht in befriedigendem Maße möglich. Eine Erweiterung der existierenden Modelle ist deshalb notwendig.

Am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF) des Forschungszentrums Karlsruhe werden hierzu verschiedene Grundlagenexperimente zu turbulenter Konvektion durchgeführt. Die aus diesen Versuchen gewonnenen Daten können zur Weiterentwicklung und zur Validierung von Turbulenzmodellen für Strömungen mit Wärmetransport herangezogen werden. Nach erfolgter Verifikation lassen sich turbulente Strömungen von ähnlichem Typus mit guter Genauigkeit berechnen.

Der ursprüngliche Anlaß für diese Serie von Experimenten liegt in den Forschungsarbeiten zum Schnellen Brutreaktor begründet. Die Geschichte des Projekts wird von Marth (1992) zusammengefaßt. In diesem Konzept für einen Kernreaktor ist als Kühlmittel im primären Kühlkreislauf flüssiges Natrium vorgesehen, welches sich durch hervorragende Wärmeleitfähigkeit auszeichnet. Experimentelle Untersuchungen in Natrium sind auf Grund seiner Reaktivität mit Sauerstoff sehr aufwendig und in komplexer Modellgeometrie kaum durchzuführen. Das Fluid Wasser ist dagegen durch einfache Handhabbarkeit und optische Transparenz hervorragend für strömungsmechanische Untersuchungen geeignet. Auf Grund der stark unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen der beiden Fluide ist bei laminaren Strömungen mit Wärmetransport die Übertragung experimenteller Ergebnisse von Wasser auf Natrium nicht ohne weiteres möglich. Die molekulare Prandtl-Zahl hat bei turbulenter Strömung aber wenig Einfluß, da der Austausch durch die turbulenten Schwankungen dominiert. Für turbulente Strömung ist eine Übertragung also unter Umständen möglich. Zur Untersuchung der Übertragbarkeit wurden am IATF geometrisch ähnliche Teststrecken für Wasser- und Natriumströmungen aufgebaut.

Krebs (1979) untersucht in dem achsensymmetrischen Wasserkanal TEFLU-1 die turbulente Strömung hinter einem Düsenblock, dessen zentraler Kanal gegenüber der übrigen Strömung unterschiedliche Temperatur und Geschwindigkeit besitzt. In der geometrisch ähnlichen Natrium-Teststrecke TEFLU-2 untersuchen Bremhorst und Krebs (1992) die entsprechende Natriumströmung. Sie ermitteln Gesetzmäßigkeiten zur Übertragung von Ergebnissen der Wasser- auf die Natriumströmung. In den beiden genannten Untersuchungen sind die Temperaturunterschiede so gering, daß von einer auftriebsfreien Strömung ausgegangen werden kann. Knebel (1993) erweitert in der gleichen Natrium-Teststrecke die Messungen von Bremhorst & Krebs auf Strömungen mit Auftriebseinfluß.

Suckow (1993) untersucht in der Wasser-Teststrecke FLUTMIK die Strömung hinter einer vertikal angeströmten, beheizten Kugel. Seine Messungen sind geprägt durch starke Unsymmetrie in den gemessenen Strömungsprofilen, die eine weiterführende Verwendung der Daten erschwert. Der Bau der entsprechenden Natrium-Teststrecke wurde eingestellt als Folge der Entscheidung der deutschen Bundesregierung, die Entwicklung des Schnellen

Brutreaktors nicht mehr weiter zu verfolgen. Die Übertragbarkeit ist für diese Strömung also nicht experimentell überprüfbar.

Die hier vorliegende Arbeit soll nach Optimierung der von Suckow verwendeten Teststrecke gesicherte experimentelle Daten zum gleichen Strömungsproblem, der Nachlaufströmung hinter einer beheizten Kugel in vertikaler Anströmung, liefern. Neben den mittleren Geschwindigkeiten und der mittleren Temperatur werden die turbulenten Wärmeströme, Normal- und Schubspannungen für den beheizten und unbeheizten Fall experimentell bestimmt. Zur Beseitigung der leichten, noch immer vorhandenen Unsymmetrie der Messungen wird eine Umrechnungsmethode auf Basis der Superposition der Effekte von Nachlauf und Auftriebsstrahl mit Hilfe von Form- und Amplitudenfunktionen vorgeschlagen. Die Methode ermöglicht die Beschreibung einer zweidimensional-achsensymmetrischen Strömung und erlaubt damit eine weiterführende Verwendung der Daten. Zum Schluß der Arbeit wird die Übertragbarkeit der Wassermessungen auf die Natrium-Strömung kritisch beurteilt.

### 1.3. Die untersuchte Strömung

Eine Kugel wird von unten mit konstanter Geschwindigkeit in einer vertikalen, turbulenten Strömung angeströmt. Auf Grund des Strömungswiderstands der Kugel ist die Geschwindigkeit hinter der Kugel geringer als im Außenfeld. Es bildet sich über der Kugel eine Nachlaufzone aus. Die Geschwindigkeitsunterschiede in dieser Strömung induzieren eine Schubspannung im Fluid. Auf Grund dieser Schubspannung breitet sich die Nachlaufzone mit wachsendem vertikalem Abstand  $x$  von der Kugel in radialer Richtung  $r$  aus bei gleichzeitiger Abnahme des Geschwindigkeitsdefizits. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich in der Mitte der Kugel. Das Geschwindigkeitsdefizit im Innern des Nachlaufs nimmt mit wachsendem horizontalem ( $r$ ) und vertikalem Abstand ( $x$ ) von der Kugel ab, die Geschwindigkeit nähert sich damit der Außengeschwindigkeit an.

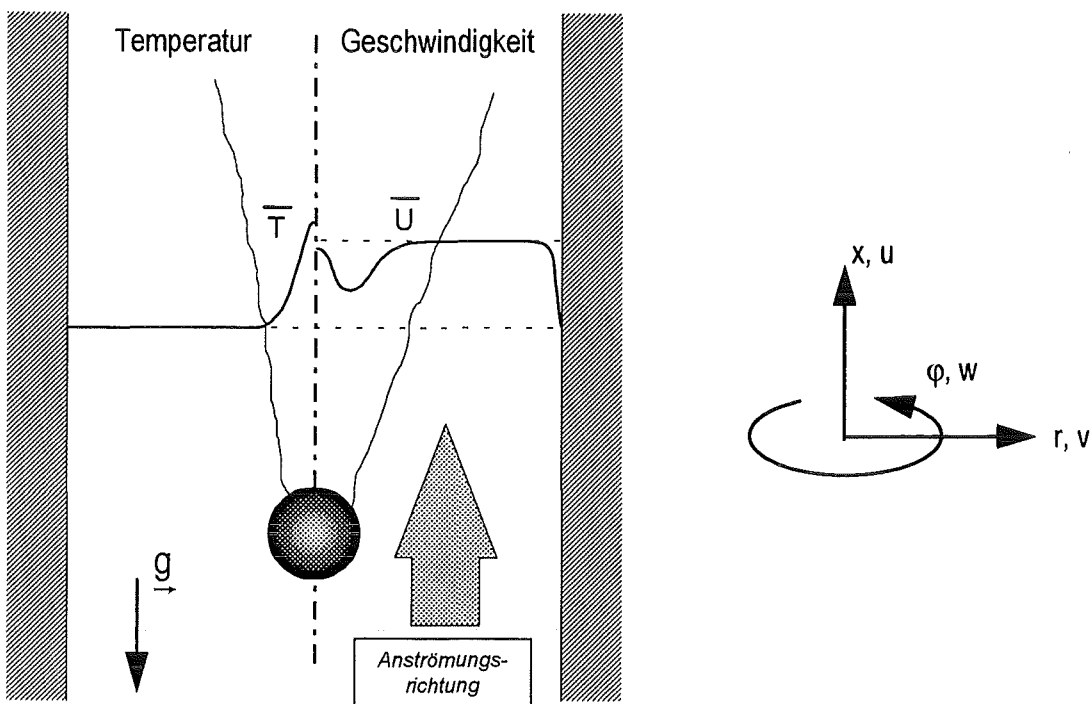


Bild 1: Nachlauf über der beheizten Kugel

Die Kugel wird außerdem beheizt. Durch den Temperatur- und damit Dichteunterschied wird das Fluid oberhalb der Kugel gegenüber der Außenströmung beschleunigt. Im Innern des Nachlaufs entsteht so ein Auftriebsstrahl und man erhält das in Bild 1 dargestellte Geschwindigkeitsprofil. Der Auftriebsstrahl breitet sich wie der Nachlauf mit wachsendem Kugelabstand  $x$  radial aus.

Nachlaufströmung und Auftriebsstrahl besitzen radiale Geschwindigkeitsgradienten mit unterschiedlichen Vorzeichen. Die maximalen Geschwindigkeitsgradienten in der Strömung

werden deshalb bei einer Überlagerung reduziert. Die radiale Ausbreitung quer zur Hauptströmung erfolgt im wesentlichen durch Diffusionsvorgänge, die von den Geschwindigkeitsgradienten in dieser Richtung verursacht werden. Das Ausbreitungsverhalten der Strömungsgrößen wird sich deshalb gegenüber der reinen Nachlauf- und gegenüber der reinen Auftriebsströmung verändern.

Die Untersuchungen werden in einem Wasserkanal durchgeführt. Der Kugel- ist gegenüber dem Kanaldurchmesser klein, deshalb können Wandeffekte bei der Auswertung der Messungen unberücksichtigt bleiben. Die Strömung ist in guter Näherung drallfrei, so daß das Problem als achsensymmetrisch in den Koordinaten  $(r,x)$  gelten kann. Die Änderung der Strömungsgrößen in der Umfangsrichtung  $\varphi$  wird deshalb nicht berücksichtigt. Von Interesse ist für diese Arbeit nicht die Strömung in unmittelbarer Nähe der Kugel, sondern der sogenannte "ferne" Nachlauf, in dem die Strömung als freie Scherströmung betrachtet werden kann. In diesem Bereich ist es unter Umständen möglich, das Verhalten der Strömungsgrößen durch einfache Form- und Amplitudenfunktionen zu beschreiben.

#### 1.4. Literaturübersicht

Im vorliegenden Experiment werden eine Nachlaufströmung und ein Auftriebsstrahl überlagert. Zunächst wird in diesem Abschnitt ein Überblick zur Literatur zum Auftriebsstrahl, danach zum Nachlauf und zuletzt zum überlagerten Problem gegeben. Die Übersicht wird auf turbulente achsensymmetrische Strömungen beschränkt.

Einige der weiter unten genannten Autoren beschreiben den Auftriebsstrahl in Zusammenhang mit einem Freistrahle. Der Freistrahle ist nicht Gegenstand dieser Arbeit und wird deshalb nicht weiter betrachtet, der grundlegende Unterschied zwischen Frei- und Auftriebsstrahl wird aber vor der Literaturübersicht kurz erläutert:

- Der reine Freistrahle wird definiert als eine (bei inkompressiblem Fluid) isotherme Strömung mit maximaler Geschwindigkeit in der Mitte und asymptotischem Abfall der Geschwindigkeit im Außenfeld auf Null. Der Freistrahle besitzt ein quellenfreies Impulsfeld. Infolgedessen stellt sich mit wachsendem Abstand vom Ursprung das Geschwindigkeitsfeld so ein, daß der Gesamtimpuls im Freistrahle konstant bleibt.
- Der reine Auftriebsstrahl besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit, aber eine gegenüber der Umgebung erhöhte Temperatur in der Mitte. Das Impulsfeld dieser Strömung ist nicht quellenfrei, denn aufgrund der relativ zur Umgebung niedrigeren Dichte im Innern des Auftriebsstrahls erfährt das Fluid eine Beschleunigung. Im Gegensatz zum Freistrahle erhöht sich deshalb der Gesamtimpuls bei einem Auftriebsstrahl mit wachsendem

Abstand vom Ursprung. Thermodynamisch wird hier innere Energie des Fluids in kinetische Energie überführt. Die Gesamtenthalpie im Strahl bleibt dabei konstant.

Die Überlagerung eines vertikalen Frei- und eines Auftriebsstrahls, also ein vertikaler Freistrahls mit Temperaturüberhöhung in der Mitte, wird im Folgenden als auftriebsbehafteter Freistrahls bezeichnet.

#### **1.4.1. Literatur zum Auftriebsstrahl**

Erste Untersuchungen zu turbulenten Auftriebsstrahlen wurden von Zel'dovich (1937) und Schmidt (1941) durchgeführt. Sie führen Experimente und Rechnungen unter Verwendung des Mischungswegansatzes von Prandtl durch. Sie behandeln den turbulenten ebenen und achsensymmetrischen Auftriebsstrahl. Batchelor (1954) findet mit Hilfe der Grenzschichtgleichungen Ähnlichkeitslösungen für ebene und achsensymmetrische Auftriebsstrahlen in neutraler Umgebung und einer Umgebung mit nach oben abnehmender Dichte, wie sie zum Beispiel die Erdatmosphäre darstellt. Morton (1959) beschreibt die Entwicklung eines Auftriebsstrahls aus einer Impuls- und gleichzeitigen Wärmequelle, also einem auftriebsbehafteten Freistrahls. Zunächst verhält sich die Strömung wie ein reiner Freistrahls. Die Strömung entwickelt dann mit wachsendem Abstand von der Impuls- und Wärmequelle den Charakter eines Auftriebsstrahls. Der für diese Entwicklung benötigte Abstand von der Quelle wird von Morton als Funktion der äußeren Parameter bestimmt.

George et al. (1977) bestimmen in ihrem Luftexperiment die zeitlichen Mittel- und RMS-Werte von Axialgeschwindigkeit und Temperatur sowie die Korrelation aus den Schwankungen dieser beiden gemessenen Größen in einem achsensymmetrischen Auftriebsstrahl. Tamanini (1977) führt zu diesem Problem numerische Rechnungen mit einem auftriebs-erweiterten Turbulenzmodell durch. Nakagome & Hirata (1976) führen zur gleichen Zeit ein ähnliches Experiment durch in dem die gleichen Größen gemessen werden, sie ermitteln aber niedrigere Werte für die RMS-Werte von Temperatur und Geschwindigkeit als George et al.. Papanicolaou & List (1988) vermessen ebenfalls in einem auftriebsbehafteten Freistrahls einen großen Parameterbereich vom schwach auftriebsbehafteten Freistrahls bis zum starken Auftriebsstrahl. Sie messen die zeitlichen Mittel- und RMS-Werte von Axial- und Radialgeschwindigkeit sowie der Konzentration eines hinzugegebenen Farbstoffs. Zusätzlich werden Korrelationen aus den gemessenen Größen gebildet.

Die Existenz von charakteristischen Exponenten in den Potenzgesetzen zur Beschreibung der axialen Entwicklung der Strömungsgrößen wird mit obigen Experimenten bestätigt, die von den einzelnen Autoren ermittelten Ausbreitungsverhalten der Strömungsgrößen weichen aber stark voneinander ab. Aus diesem Grund greifen Shabbir & George (1994)

das Experiment von George et al. noch einmal auf. In den neuen Messungen wird besonderen Wert auf eine neutrale Umgebung und perfekte Randbedingungen gelegt, die von den Autoren als der Hauptgrund für die genannten Widersprüche angesehen werden. Außerdem werden nun zur Bestimmung von Korrelationen im Turbulenzfeld neben der Temperatur zwei Geschwindigkeitskomponenten gemessen. Durch einen Vergleich der Terme in den das Strömungsproblem beschreibenden Differentialgleichungen wird der Einfluß des Auftriebs auf das Turbulenzfeld diskutiert. Hierzu werden zuvor die Turbulenzkorrelationen durch gebrochen-rationale Funktionen approximiert. Es zeigt sich, daß der Einfluß des Auftriebs auf das Turbulenzfeld vorwiegend indirekt über die auftriebsbedingt höheren Geschwindigkeitsgradienten erfolgt. Diese Geschwindigkeitsgradienten führen zu einer erhöhten Produktion turbulenter Schubspannungen. Die direkte Produktion turbulenter Schubspannungen durch den Auftrieb ist dagegen in der untersuchten Strömung schwach.

#### **1.4.2. Literatur zum Nachlauf**

Im Gegensatz zu den oben diskutierten Arbeiten wird im hier vorliegenden Experiment keine Wärmequelle in ruhender Umgebung, sondern eine beheizte Kugel in vertikaler Anströmung verwendet. Der endliche Durchmesser dieser Kugel bedingt einen großen Strömungswiderstand, der zu einer Reduktion der Strömungsgeschwindigkeit hinter der Kugel und damit zu einem Nachlauf führt.

Prandtl (1927) berechnet für große Abstände hinter der unbeheizten Kugel das Geschwindigkeitsfeld auf Basis der Grenzschichtgleichungen und unter Einbeziehung seines Mischungswegsansatzes. Dieser Ansatz wird von ihm aufgrund der offensichtlichen Unvollkommenheit als "grobe Näherung" eingestuft, denn die mit diesem Ansatz ermittelte Lösung des Problems hat "etwas ungewöhnliche", die Physik der Strömung nicht richtig beschreibende Eigenschaften. Sie ist außerdem nur innerhalb des Nachlaufs gültig. Prandtl gesteht Abweichungen zu parallel durchgeführten Experimenten ein und vermutet die Ursache in der im Experiment zu niedrig gewählten Reynolds-Zahl. Swain (1929) erweitert die Lösung von Prandtl um ein Korrekturglied für kleine Abstände von der Kugel, durch welches der gegenüber der Lösung von Prandtl in diesem Bereich breitere experimentell bestimmte Nachlauf besser beschrieben wird.

Hall & Hislop (1938) ermitteln experimentell die achsensymmetrischen Geschwindigkeits- und Temperaturfelder hinter einem vertikal angeordneten, schwach beheizten Kreiszyylinder, dessen Achse die Symmetrieachse des Systems darstellt. Die erzeugten Temperaturdifferenzen sind so klein, daß praktisch kein Auftriebseffekt auftritt. Reichardt

& Ermshaus (1962) erweitern diese Versuche durch Variation des Verhältnisses von Durchmesser zu Länge eines solchen Zylinders. Es zeigt sich, daß im Gegensatz zum ebenen Strömungsproblem, ein starker Einfluß der Art dieser Anfangsstörung, also der Form des Körpers, auf das Ausbreitungsverhalten existiert. Ermshaus (1970) und Bevilacqua & Lykoudis (1978) bestätigen dieses Ergebnis für den gänzlich unbeheizten Fall. Uberoi & Freymuth (1970) und Riddhagni et al. (1971) untersuchen experimentell das Ähnlichkeitsverhalten der Geschwindigkeit im turbulenten Nachlauf hinter einer Kugel, Cannon & Champagne (1991) führen ähnliche Untersuchungen mit Scheiben und Sieben durch. Weitere Untersuchungen existieren von Hwang & Baldwin (1966) und Carmody (1964). Rodi (1975) stellt experimentelle Daten für freie Grenzschichtströmungen zusammen. Darin ist auch der achsensymmetrische Nachlauf enthalten.

In allen vorgenannten Arbeiten zum Nachlauf werden keine turbulenten Temperaturschwankungen bestimmt. Gibson et al. (1968) untersuchen in einem horizontalen Wasserkanal die Strömung hinter einer Kugel, die von der Einspritzung heißen Wassers durch ein Loch in der Rückseite der Kugel überlagert ist. Bei hohen Reynolds-Zahlen werden die Dissipationsraten der kinetischen Energie der Turbulenz und der Varianz der Temperatur bestimmt. Außerdem werden Potenzgesetze für die Entwicklung von Geschwindigkeit, Temperatur, deren RMS-Werten und Dissipationsraten für wachsenden Abstand vom Ursprung ermittelt. Freymuth und Uberoi (1973) verwenden in einem horizontalen Windkanal eine strahlungsoptisch beheizte Kugel und bestimmen für große Abstände von der Kugel Potenzgesetze als Ähnlichkeitslösungen für die charakteristische Länge, Temperatur und Geschwindigkeit. Außerdem vergleichen sie die einzelnen Terme der Differentialgleichungen der Turbulenzgrößen miteinander und bestimmen die Dissipationsrate der Temperaturschwankungen. Freymuth (1975) versucht, experimentell in dieser Strömung das endgültige Abklingen der Turbulenz für große Abstände von der Kugel zu bestimmen, kommt aber zu dem Schluß, daß dies unter Laborbedingungen nicht zu realisieren ist. Auch die in den drei letztgenannten Experimenten auftretenden Temperaturdifferenzen sind so klein, daß in diesen Strömungen der Auftriebseinfluß keine Rolle spielt.

### **1.4.3. Literatur zum auftriebsbehafteten Nachlauf**

Kirk & Johnson (1986) untersuchen mit einfacher Meßtechnik in einem Windkanal den Wärmetransport in der Mischkonvektion um eine beheizte Kugel. Durch Messung der Wandtemperaturen wird der Wärmeverlust in Querrichtung und damit der gegenüber der reinen Zwangsströmung veränderte Wärmeübergang für verschiedenen Volumenströme und Heizleistungen bestimmt. Außerdem wird der Anstellwinkel des Kanals gegenüber der Vertikalen variiert. Für Zwangsströmung und reine Naturkonvektion wird die Abhängigkeit



des Wärmeübergangs von Reynolds- und Grashof-Zahl in Form von Potenzgesetzen angegeben, die in guter Übereinstimmung sind mit früheren Arbeiten, z.B. den Büchern von Gebhart (1960) und Kreith (1963). Bei Mischkonvektion existiert eine Abhängigkeit des Wärmeübergangs vom Winkel zwischen der Zwangsströmung und der immer in vertikaler Richtung orientierten Auftriebsströmung. Der Wärmeübergang ist bei gekreuzter Strömung, also horizontaler Zwangsströmungsrichtung, besser als bei der gleichgerichteten Strömung. Die entgegengerichtete Strömung liefert den schlechtesten Wärmeübergang. Im Gegensatz zu den beiden anderen Typen ist hier eine quantitative Beschreibung kaum möglich. Die Definition eines effektiven Durchmessers, der im Fall gleichgerichteter Vertikalströmung für die Zwangskonvektion dem Kugeldurchmesser, für die Auftriebsströmung aber nur dem halben Kugeldurchmesser entspricht, erlaubt die skalare Addition einer effektiven Reynolds-Zahl für die Zwangsströmung und einer effektiven Reynolds-Zahl für die Auftriebsströmung. Die resultierende Reynolds-Zahl ermöglicht sodann die Bestimmung des Wärmeübergangs aus der für die Zwangskonvektion zuvor bestimmten Potenzfunktion. Der Wärmeübergang wird mit dieser Vorgehensweise besser wiedergegeben als durch vektorielle Addition der Reynolds-Zahl für die Zwangsströmung und einer effektiven Reynolds-Zahl für die Auftriebsströmung. In einer weiteren Arbeit bestätigen Tang & Johnson (1990) diese eher hypothetischen Betrachtungen durch ein Visualisierungsexperiment. Suckow (1993) untersucht die Strömung hinter einer beheizten Kugel in einem vertikalen Wasserkanal. Die Beheizung ist so stark, daß deutliche Auftriebseffekte vorhanden sind. Neben den mittleren Strömungsgrößen und deren RMS-Werten ermittelt er die turbulenten Schubspannungen und Wärmeströme. Seine Messungen sind geprägt von starken Unsymmetrien in allen Profilen der ermittelten Strömungsgrößen. Die von ihm ermittelte Entwicklung der Strömungsgrößen mit wachsendem Abstand von der Kugel ist unsicher. Die vorliegende Arbeit soll in der gleichen, jetzt optimierten Teststrecke vertrauenswürdige Daten liefern, für die eine Auswertung besser möglich ist.

Zum Schluß sei noch die Arbeit von Higuchi & Kubota (1990) genannt. Sie untersuchen in einem Windkanal den achsensymmetrischen Nachlauf hinter einem schlanken Körper, in dessen Mitte zusätzlich ein Freistrahler erzeugt wird, der den Impulsverlust durch den Nachlauf des Körpers teilweise oder vollständig ausgleicht. Die Geschwindigkeitsprofile erhalten dadurch eine gleichartige Form wie die Profile des auftriebsbehafteten Kugelnachlaufs. Für vollständigen Impulsausgleich finden Higuchi & Kubota eine Ähnlichkeitslösung. Außerdem wird der Einfluß der Wandrauigkeit des umströmten Körpers auf die Länge des Formierungsbereichs, also bis zum Erreichen der Ähnlichkeitslösung ermittelt. Stumpfe Körper mit rauher Oberfläche erreichen wegen der durch sie erzeugten, höheren Turbulenzintensität diesen Bereich schneller. Ein Vergleich mit numerischen Rechnungen zeigt, daß diese Strömung nicht mit einem einfachen Turbulenzmodell berechnet werden kann.

## 2. Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

In diesem Kapitel wird die technisch relevante statistische Betrachtungsweise der Turbulenz erläutert. Im Anschluß soll an Hand der Beschreibung einfacher Turbulenzmodelle der Grundgedanke der Turbulenzmodellierung vermittelt werden. Auf weiterführende Probleme wie den Einfluß von Wänden oder niedriger Reynolds-Zahl auf die turbulente Strömung wird in diesem Zusammenhang verzichtet.

### 2.1. Statistische Betrachtung der Turbulenz

Turbulente Strömungen bestehen aus einem meist dreidimensionalen, zeitabhängigen Wirbelfeld. Die geometrische Abmessung dieser Wirbel kann in einem Strömungsfeld Unterschiede von drei und mehr Größenordnungen aufweisen. Die numerische Berechnung dieser Strömungen erfordert deshalb einen sehr hohen Aufwand an Rechnerleistung und Rechenzeit, weshalb die Berechnung von turbulenten Strömungen in technischen Geometrien in der Regel auf Basis einer statistischen Betrachtungsweise erfolgen muß.

Zunächst erfolgt hierzu die von Reynolds (1883) eingeführte Zerlegung der turbulenten Strömung in eine zeitlich gemittelte Grundströmung und eine zeitabhängige Schwankungsbewegung. Versieht man für eine allgemeine Strömungsgröße  $\Phi$  - dies kann Geschwindigkeit, Temperatur, Dichte oder Druck sein - den Anteil der zeitlich gemittelten Grundströmung mit einem Mittelungsstrich und den der Schwankungsbewegung mit einem Apostroph, so erhält man den folgenden Ansatz von Reynolds

$$\Phi(x, y, z, t) = \overline{\Phi}(x, y, z) + \Phi'(x, y, z, t). \quad (2.1)$$

Der zeitliche Mittelwert der Strömungsgröße wird dann nach der Vorschrift

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t=t_0}^{t_1} \Phi dt \quad (2.2)$$

gebildet. Der zeitliche Mittelwert der Schwankungsgröße verschwindet gemäß

$$\overline{\Phi'} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t=t_0}^{t_1} (\Phi - \overline{\Phi}) dt = 0. \quad (2.3)$$

Das zeitlich gemittelte Produkt aus zwei (drei) Schwankungsgrößen wird als Kreuz- (Tripel-) korrelation bezeichnet und verschwindet in der Regel nicht, d.h.

$$\overline{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t=t_0}^{t_1} (\Phi_1 - \overline{\Phi_1})(\Phi_2 - \overline{\Phi_2}) dt \neq 0, \quad (2.4)$$

weil die Schwankungsgrößen in einer Strömung allgemein nicht statistisch unabhängig sind.

Das zeitlich gemittelte Quadrat einer Schwankungsgröße heißt Varianz oder Autokorrelation, d.h.

$$\overline{\Phi^2} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t=t_0}^{t_1} (\Phi - \overline{\Phi})^2 dt. \quad (2.5)$$

Die Wurzel aus der Varianz wird als Standardabweichung oder RMS-Wert bezeichnet, d.h.

$$\Phi_{\text{RMS}} = \sqrt{\overline{\Phi^2}} = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t=t_0}^{t_1} (\Phi - \overline{\Phi})^2 dt} \quad (2.6)$$

Die Mittelungszeit ( $t_1 - t_0$ ) ist so groß zu wählen, daß die oben eingeführten statistischen Größen sich für längere Mittelungszeiten nicht mehr ändern. Durch Wahl der Mittelungszeit wird es aber auch möglich, niedrigfrequente, instationäre Strömungsphänomene zu erfassen, solange diese langsam gegenüber den turbulenten Schwankungen sind. Hierbei muß die Mittelungszeit zur Erfassung dieser Phänomene klein genug sein, andererseits auch groß genug, um die Schwankungsbewegung statistisch richtig zu erfassen. Anwendung findet dieses Verfahren unter anderem in der Meteorologie und Ozeanografie, aber auch bei technischen Fragestellungen wie der Strömung in Verbrennungsmotoren.

## 2.2. Zeitlich gemittelte Grundgleichungen in Grenzschichtform

Die zu untersuchende zeitlich gemittelte Grundströmung sei achsensymmetrisch, d.h. zweidimensional. Die Strömung ist außerdem im zeitlichen Mittel praktisch drallfrei. Die Umfangskomponente der Strömungsgeschwindigkeit und die Variation der zeitgemittelten Strömungsgrößen in Umfangsrichtung verschwinden somit, d.h.

$$\overline{w} = 0, \quad \overline{\frac{\partial}{\partial \varphi}} = 0. \quad (2.7)$$

Die Strömung wird als freie Scherschichtströmung betrachtet und kann durch die Grenzschichtgleichungen beschrieben werden. Diese parabolische Differentialgleichungen gelten für Strömungen, bei denen die Dicke  $\delta$  der Scherschicht viel kleiner ist als deren Länge  $L$ , d.h. es gilt

$$\delta \ll L. \quad (2.8)$$

Dies hat zur Folge, daß die Änderung einer Größe in Hauptströmungsrichtung  $x$  gegenüber der Änderung dieser Größe in Querrichtung  $r$  klein ist. Es gilt demnach

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \ll \frac{1}{\delta} \sim \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.9)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt zwingend, daß die mittlere Quergeschwindigkeit  $\bar{v}$  sich zur mittleren Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung  $\bar{u}$  verhält wie die Längenmaßstäbe. Es gilt also

$$\frac{\bar{v}}{\delta} \sim \frac{\bar{u}}{L} \Rightarrow \bar{v} \ll \bar{u}. \quad (2.10)$$

Für das verwendete Gleichungssystem hat dies zur Folge:

- Nur die Impulsgleichung in Hauptströmungsrichtung wird gelöst, die Quergeschwindigkeit wird aus der Kontinuitätsgleichung ermittelt.
- Die Diffusion quer zur Hauptströmungsrichtung ist dominant und die Diffusion längs der Hauptströmungsrichtung wird dagegen vernachlässigt, d.h.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (2.11)$$

Mit diesen Annahmen und nach Zerlegung der auftretenden Größen in Mittel- und Schwankungswert läßt sich das Gleichungssystem für zweidimensionale, achsensymmetrische, turbulente Scherschichtströmungen aufstellen. Nach zeitlicher Mittelung dieser Gleichungen unter Vernachlässigung der turbulenten Dichteschwankungen erhält man die Reynolds-Gleichungen. Bei stark kompressibler Strömung sind die turbulenten Dichteschwankungen nicht vernachlässigbar. Favre (1969) führt deshalb eine dichtegewichtete Mittelung ein. Für die untersuchten Auftriebsströmungen bei kleinen Dichteunterschieden führt dieses aufwendige Vorgehen nach Aussage von Tureaud (1988) zu keiner signifikanten Verbesserung. Dieses Verfahren wird deshalb nicht angewandt und soll auch hier nicht weiter erläutert werden.

Die Massenerhaltung wird gewährleistet mit der Kontinuitätsgleichung gemäß

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}) = 0. \quad (2.12)$$

Im Rahmen der Boussinesq-Approximation wird in der vertikalen Impulsgleichung bei der Berechnung von Strömungen mit Auftrieb im Auftriebsterm zunächst eine temperaturabhängige Dichte  $\rho(T)$  eingeführt. Es gilt demnach

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\rho_0 \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \overline{u'v'} \right) - \frac{\bar{\rho}(\bar{T}) - \rho_0}{\rho_0} g. \quad (2.13)$$

Für kleine Abweichungen von der Bezugstemperatur ist nach dieser Approximation eine Linearisierung der Dichte-Temperatur-Beziehung zulässig. Die Impulsgleichung lautet dann

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\rho_0 \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \overline{u'v'} \right) + \alpha g (\bar{T} - T_0) \quad (2.14)$$

Die Berechnung von Strömungen mit Wärmetransport erfordert eine Energiegleichung, welche beim Fehlen innerer Wärmequellen die Form

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - r \overline{v'T'} \right) \quad (2.15)$$

hat. Das Gleichungssystem aus 3 Gleichungen ist durch die unbekanntenen Korrelationen  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{v'T'}$  sowie die unbekanntenen Strömungsgrößen  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{T}$  nicht geschlossen. Um die unbekanntenen Korrelationen zu bestimmen, werden Differentialgleichungen hergeleitet, die den Transport dieser Größen beschreiben.

### 2.3. Diffusion durch turbulente Schwankungen

Bei laminaren Strömungen beschreibt  $\mu \partial u / \partial r$  eine Schubspannung, die den Impulstransport durch Diffusion erzeugt. In den Reynolds-Gleichungen erhalten wir nach Multiplikation aller Terme mit der Dichte  $\rho$  neben  $\mu \partial \bar{u} / \partial r$  den Term  $-\rho \overline{u'v'}$ . Die Korrelation  $-\rho \overline{u'v'}$  beschreibt somit den zusätzlichen Impulstransport durch die turbulenten Schwankungen, die wie eine Schubspannung auf das strömende Medium wirken. Der Ausdruck wird deshalb als scheinbare Schubspannung, turbulente Schubspannung oder Reynolds-Schubspannung bezeichnet. Zur Bestimmung der Verteilung von  $\overline{u'v'}$  kann aus den zeitabhängigen und den zeitlich gemittelten Impulsgleichungen auf einfache Weise eine Transport-Differentialgleichung (kurz: Transportgleichung) für  $\overline{u'v'}$  abgeleitet werden mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{v} \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial r} - r \overline{u'v'^2} - \frac{\bar{u}'p'}{\rho_0} \right) \\ &\quad - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \alpha g \overline{v'T'} + \frac{p'}{\rho_0} \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \right) - \epsilon_{\bar{u}'v'} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Ausdrücke  $\epsilon_\Phi$  stehen für die Dissipationsraten der entsprechenden Größe  $\Phi$ . Diese setzen sich aus zeitlich gemittelten Summen von Kreuzkorrelationen zwischen Gradienten der Schwankungen zusammen und sind als unbekannte Korrelationen zu verstehen. Auf Grund der Komplexität dieser Ausdrücke wird auf die exakte Formulierung der Dissipationsraten verzichtet.

Analog zur Impulsgleichung enthält auch die Energiegleichung einen zusätzlichen Diffusionsterm. Der Ausdruck  $-\rho c_p \overline{v'T'}$  wird als radialer turbulenter Wärmestrom bezeichnet. Die Transportgleichung für  $\overline{v'T'}$  erhält man gemäß

$$\bar{u} \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial r} - r \overline{v'^2 T'} \right) - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{p'}{\rho_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \epsilon_{\overline{v'T'}}. \quad (2.17)$$

Dies sind nun die Transportgleichungen für die Korrelationen, welche in den ursprünglichen Erhaltungsgleichungen auftreten. In der Tat finden sich weitere Korrelationen in diesen Transportgleichungen, für welche gleichfalls Transportgleichungen abzuleiten sind. Man erhält für den axialen turbulenten Wärmestrom  $-\rho c_p \overline{u'T'}$  die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial r} - r \overline{u'v'T'} \right) \\ &\quad - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \alpha g \overline{T'^2} + \frac{p'}{\rho_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \epsilon_{\overline{u'T'}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Durch Multiplikation der Dichte des strömenden Mediums mit den Varianzen von Axial- und Radialgeschwindigkeit erhält man die durch das Turbulenzfeld erzeugten, zusätzlich auf das Fluid wirkenden Normalspannungen  $\rho \overline{u'^2}$ ,  $\rho \overline{v'^2}$ . Die zugehörigen Transportgleichungen sind

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{v} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial r} - r \overline{u'^2 v'} + 2r \frac{\bar{u}'p'}{\rho_0} \right) \\ &\quad - 2\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + 2\alpha g \overline{u'T'} + 2 \frac{p'}{\rho_0} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} - \epsilon_{\overline{u'^2}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial r} - r \bar{v}^3 - 2 \frac{\bar{v}' p'}{\rho_0} \right) + 2 \frac{\bar{p}' \partial \bar{v}'}{\rho_0 \partial r} - \varepsilon_{\bar{v}^2} \quad (2.20)$$

Die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  ist definiert als die Summe der Varianzen der drei Geschwindigkeitskomponenten, also

$$k = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2). \quad (2.21)$$

Eine exakte Transportgleichung für  $k$  erhält man durch Summation der Transportgleichungen für die turbulenten Normalspannungen,

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial k}{\partial r} - r v' \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2} + \frac{\bar{p}'}{\rho_0} \right) - \underbrace{\bar{u}' v'}_P \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \underbrace{\alpha g \bar{u}' T'}_G - \varepsilon, \quad (2.22)$$

wobei

$$\varepsilon = \overline{v \left( \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial r} \right)^2 \right)} + \overline{v \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 v' \frac{\partial w'}{\partial \varphi} - 2 w' \frac{\partial v'}{\partial \varphi} + w'^2 + v'^2 \right)}. \quad (2.23)$$

Die viskose Vernichtungsrate von  $k$  wird als Dissipationsrate  $\varepsilon$  definiert. Für sie kann ebenfalls eine Transportgleichung abgeleitet werden, die wegen ihrer komplizierten Form in Tensornotation angegeben wird,

$$\bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v u_k' \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \frac{v}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \right) - 2 v \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} - 2 \left( v \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad (2.24)$$

Für die Varianz der Temperatur  $\bar{T}^2$  wird schließlich die Transportgleichung

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \kappa \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial r} - r \frac{\partial \bar{v}' T'^2}{\partial r} \right) - 2 \bar{v}' T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \varepsilon_T. \quad (2.25)$$

abgeleitet. Die bisher angegebenen Gleichungen sind sämtlich exakt, in dem Sinne, daß lediglich die Grenzschicht- und die Boussinesq-Approximation zur Herleitung Verwendung findet. Turbulenzmodelle sind bisher nicht eingeflossen.

## 2.4. Turbulenzmodellierung

Die exakten Transportgleichungen enthalten eine große Anzahl unbekannter Korrelationen. Durch Herleitung weiterer Transportgleichungen für diese Größen kann keine Schließung des Gleichungssystems erreicht werden, da immer neue Unbekannte auftauchen. Bei der Modellierung beschränken wir uns deshalb auf die Verwendung der Größen  $\overline{u}$ ,  $\overline{v}$ ,  $\overline{T}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{u'T'}$ ,  $\overline{v'T'}$ ,  $\overline{T'^2}$ ,  $k$  und  $\epsilon$ . Für diese Größen sind bereits Transportgleichungen aufgestellt worden.

Um die Zahl der zu lösenden Differentialgleichungen klein zu halten, werden im k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell und den darauf basierenden Erweiterungen für die turbulenten Spannungen und Wärmeströme keine Transportgleichungen gelöst. Viel mehr werden algebraische Ansätze verwendet, die eine Verknüpfung mit der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$  herstellen.  $\sqrt{k}$  kann als Geschwindigkeitsmaßstab im Turbulenzfeld aufgefaßt werden. Die Einführung einer vom Turbulenzfeld abhängigen Wirbelviskosität erfordert aus Dimensionsgründen die Hinzunahme einer weiteren Größe. Hierfür wird im k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell und seinen Erweiterungen die Dissipationsrate  $\epsilon$  benutzt.

Das k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell ist auf Grund der verwendeten Schließungsansätze nicht in der Lage, Auftriebsströmungen korrekt zu berechnen. In den folgenden Abschnitten werden deshalb neben dem Standard-k- $\epsilon$ -Modell Erweiterungen beschrieben, die den Auftriebs- einfluß besser wiedergeben. Diese Auflistung muß naturgemäß unvollständig bleiben, sie soll aber die Grundgedanken der Turbulenzmodellierung sowie die Grenzen und Nachteile der wichtigsten Turbulenzmodelle aufzeigen.

### 2.4.1. Das k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell

Beim Standard-k- $\epsilon$ -Modell werden die in den Reynolds-Gleichungen auftretenden Korrelationen durch Gradientenansätze modelliert. Die Korrelation aus den Schwankungen der Geschwindigkeit in zwei Richtungen, also die Reynolds-Schubspannung, wird proportional zum Gradienten der mittleren Geschwindigkeit gesetzt. Dieses Vorgehen ist völlig analog zum Newtonschen Schubspannungsansatz. Es wird deshalb auch als Boussinesq'scher Schubspannungsansatz bezeichnet,

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \quad (2.26)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\nu_t$  wird als Wirbelviskosität bezeichnet. Die Wirbelviskosität ist im Gegensatz zur molekularen Viskosität keine Stoffgröße, sondern eine Funktion des



Turbulenzfelds. Die Wirbelviskosität wird nach Harlow & Nakayama (1967) im k-ε-Turbulenzmodell als

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.27)$$

aus der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$  und ihrer Dissipationsrate  $\varepsilon$  modelliert.  $C_\mu$  ist im Standard-k-ε-Modell eine empirisch zu bestimmende Konstante.

Analog zu obigem Ansatz werden die turbulenten Wärmeströme proportional dem Gradienten der mittleren Temperatur gesetzt, d.h. es gilt

$$\overline{u'T'} = -\kappa_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \quad \overline{v'T'} = -\kappa_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (2.28), (2.29)$$

Die Wirbeldiffusivität  $\kappa_t$  ist ebenfalls keine Stoffgröße. Sie wird im k-ε-Modell über die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  zur Wirbelviskosität in Beziehung gesetzt. Die turbulente Prandtl-Zahl ist im Standard-k-ε-Modell ebenfalls eine empirische Konstante und gemäß

$$\sigma_t = \frac{v_t}{\kappa_t} \quad (2.30)$$

definiert.

Mit Hilfe des Prinzips der Wirbelviskosität/-diffusivität werden die in den Reynolds-Gleichungen auftretenden zusätzlichen Unbekannten mit den Hauptströmungsgrößen verknüpft, für die bereits Transportgleichungen bestehen. Nach einigen noch zu beschreibenden Modellannahmen in den Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und deren Dissipationsrate kann das Gleichungssystem gelöst werden.

In der k-Gleichung wird mit einem Gradientenansatz für den Diffusionsfluß von  $k$  eine Diffusivität für  $k$  eingeführt, die wie die Wirbeldiffusivität als Quotient aus der Wirbelviskosität und einer turbulenten Prandtl-Zahl für  $k$ ,  $\sigma_k$ , gebildet wird. Diese ist wie die turbulente Prandtl-Zahl im Standard-k-ε-Modell eine empirisch zu bestimmende Konstante. Man erhält die modellierte k-Gleichung zu

$$\overline{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \overline{v} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) \underbrace{- \overline{u'v'}}_P \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \underbrace{\alpha g \overline{u'T'}}_G - \varepsilon. \quad (2.31)$$

Die in der Gleichung auftretenden Terme Konvektion, Diffusion, Produktion durch Schubspannungen und Produktion durch Auftrieb werden zur Herleitung weiterer Beziehungen im folgenden mit "Konv.<sub>k</sub>", "Diff.<sub>k</sub>", "P" und "G" bezeichnet, es gilt also

$$\text{Konv.}_k = \text{Diff.}_k + P + G - \varepsilon. \quad (2.32)$$

Die dem axialen turbulenten Wärmestrom proportionale Korrelation in der Transportgleichung für k verschwindet mit dem gewählten Modellierungsansatz (2.28) auf Grund der Grenzschichtapproximation. Die Transportgleichung für k besitzt im Standard-k-ε-Modell also kein Glied, das die Produktion durch Auftrieb beschreibt.

Die modellierte Transportgleichung für die Dissipationsrate gültig für vertikale Strömungen ist dann

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon^2}{k} \left( C_{\varepsilon 1} \frac{P+G}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right). \quad (2.33)$$

Diese Gleichung enthält analog zur k-Gleichung eine Diffusivität für ε, die ebenfalls mit einer turbulenten Prandtl-Zahl für ε, σ<sub>ε</sub>, modelliert wird.

Launder & Spalding (1974) schlagen für die sechs Modellkonstanten empirische Standardwerte vor. Tabelle 1 zeigt, daß für Wand- und freie Strömungen unterschiedliche turbulente Prandtl-Zahlen σ<sub>t</sub> Verwendung finden.

C <sub>μ</sub>	C <sub>ε1</sub>	C <sub>ε2</sub>	σ <sub>k</sub>	σ <sub>ε</sub>	σ <sub>t</sub>	
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0.6	freie Strömungen
					0.9	Wandströmungen

Tabelle 1: Standardwerte für empirische Konstanten nach Launder & Spalding

Die Berechnung eines achsensymmetrischen Freistrahls mit dem Modell liefert eine zu starke radiale Ausbreitung des Strahls. Pope (1978) erklärt dies durch die falsch modellierte Dissipationsrate ε. El Baz et al. (1993) macht dafür die zu einer parabolischen Form vereinfachten Grenzschichtgleichungen verantwortlich. Für den achsensymmetrischen Freistrahл müssen die obigen Konstanten deshalb modifiziert werden. Es existieren verschiedene Korrekturvorschläge, wovon hier exemplarisch der von Rodi (1985) vorgestellt wird. Die Konstanten C<sub>μ,korrigiert</sub> und C<sub>ε2,korrigiert</sub> sind demnach gemäß

$$C_{\mu, \text{korrigiert}} = \frac{0.09 - 0.04\gamma}{0.09} C_{\mu}, \quad C_{\varepsilon 2, \text{korrigiert}} = 1.92 - 0.067\gamma \quad (2.34), (2.35)$$

$$\text{mit } \gamma = \left| \frac{\Delta y}{2(\bar{u}(r=0) - \bar{u}_\infty)} \left[ \frac{d\bar{u}(r=0)}{dx} - \left| \frac{d\bar{u}(r=0)}{dx} \right| \right] \right|^{0.2} \quad (2.36)$$

zu bilden. Mit den Standardkonstanten aus Tabelle 1 bzw. mit den Modifikationen nach Rodi ist das Gleichungssystem geschlossen und nach Definition der Randbedingungen lösbar. Unter Zuhilfenahme der Korrekturfunktionen (2.34), (2.35), (2.36) kann eine Vielzahl turbulenter Strömungen mit zufriedenstellendem Ergebnis berechnet werden. Hossain (1980) verwendet für die Berechnung von Auftriebsströmungen ein Standard-k-ε-Modell mit geänderten Konstanten. Dieser Satz von Konstanten ist in Tabelle 2 gegeben. Er liefert in diesem Fall die besten Ergebnisse.

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\sigma_t$
0.109	1.44	1.92	0.85	1.36	0.614

Tabelle 2: Empirische Konstanten nach Hossain

#### 2.4.2. Das Algebraische Spannungs-Fluß-Modell (ASM)

Hossain (1980) beschreibt die Grenzschichtform einer Erweiterung des k-ε-Turbulenzmodells für die Berechnung von Auftriebsströmungen, bei der aus den allgemeinen Transportgleichungen für die Reynolds-Spannungen und für die turbulenten Wärmeströme algebraische Beziehungen hergeleitet werden. Dieses Modell wird als Algebraisches Spannungs-Fluß-Modell (ASM) bezeichnet. Es berücksichtigt neben den bisher genannten Turbulenzgrößen zusätzlich den Einfluß der turbulenten Temperaturschwankungen.

Die Transportgleichungen der Turbulenzkorrelationen enthalten Konvektions- und Diffusionsterme und stellen zunächst Differentialgleichungen dar. Um algebraische Beziehungen zu erhalten, müssen differentielle Terme durch algebraische Approximationen ausgedrückt werden. Hossain verwendet unter anderem die folgenden Ansätze:

- Die Differentialgleichungen für die Reynolds-Spannungen und für die kinetische Energie der Turbulenz sind nicht nur vom gleichen Typ, sondern die einzelnen Terme sind zudem von gleicher Größenordnung. Die Differenz aus Konvektions- und Diffusionsgliedern in der Gleichung für die turbulenten Spannungen verhält sich zu der entsprechenden Differenz in der Transportgleichung für k demnach gemäß

$$\frac{(\text{Konv.} - \text{Diff.})_{u_i' u_j'}}{(\text{Konv.} - \text{Diff.})_k} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \quad (2.37)$$

Da die Transportgleichung für  $k$  keine Druck-Scher-Korrelation enthält, läßt sich dort die Differenz der Konvektions- und Diffusionsterme durch die Quell- und Senkenterme ausdrücken, d.h. es ist

$$(\text{Konv.} - \text{Diff.})_{u_i' u_j'} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} (P + G - \varepsilon). \quad (2.38)$$

- In den Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeströme werden Ansätze gleicher Art eingeführt. Die resultierenden Beziehungen sind gleichfalls algebraische Ausdrücke. Für die zu modellierenden Terme werden Gradientenansätze verwendet.
- Eine zusätzliche Vereinfachung ist die vollständige Vernachlässigung der Konvektions- und Diffusionsterme in den Transportgleichungen für die Reynolds-Spannungen und für die turbulenten Wärmeströme. Dies entspricht mit dem Modellansatz (2.38) in der Transportgleichung für  $k$  einem Gleichgewicht zwischen den Produktions- und Vernichtungsgliedern. Es ist dann

$$P + G = \varepsilon. \quad (2.39)$$

Für die Wärmeströme wird ein ähnlicher Ansatz verwendet.

- In der Transportgleichung von  $\overline{T'^2}$  werden ebenfalls Konvektion und Diffusion vernachlässigt, so daß unter Verwendung des Modellansatzes

$$\varepsilon_T = \frac{1}{C_T} \frac{\overline{T'^2}}{k} \varepsilon \quad (2.40)$$

für die Dissipationsrate von  $\overline{T'^2}$  die Transportgleichung in eine algebraische Beziehung übergeht.

In dem algebraischen Modell kommen neben den Hauptströmungsgrößen  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$  die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\varepsilon$  vor. Für diese werden wie im Standardmodell Transportgleichungen gelöst. Zusammen ergibt sich ein Zwei-Gleichungs-Modell, mit dem die einzelnen Komponenten der Reynolds-Spannungen und turbulenten Wärmeströme berechnet werden und bei dem durch Auftriebsglieder in den algebraischen Beziehungen und auch in den Gleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  Auftriebseffekte berücksichtigt werden. Die hier beschriebene Form des Modells gilt nur für freie Strömungen ohne Wandeinfluß. Eine Erweiterung für diese Strömungen wird von Hossain (1980) vorgeschlagen. Sie führt jedoch zu wesentlich komplizierteren Ausdrücken.

Für den Fall einer vertikalen Scherschichtströmung reduzieren sich die algebraischen Beziehungen auf ein System von explizit nacheinander lösbaren Gleichungen.

Die Reynolds-Spannung und der Wärmestrom quer zur Hauptströmungsrichtung ergeben sich wie im Standard k-ε-Modell zu

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad \text{und} \quad -\overline{v'T'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (2.26), (2.29)$$

Die Wirbelviskosität wird ebenfalls wie im Standard-k-ε-Modell gebildet, die empirische Konstante  $C_\mu$  wird jedoch durch eine Korrekturfunktion

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = \left( \omega_v \frac{\overline{v'^2}}{k} \right) \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2.41)$$

ersetzt. Für die turbulente Prandtl-Zahl und die Prandtl-Zahl für k und ε gilt nach Einführung von zusätzlichen empirischen Konstanten

$$\sigma_t = \omega_v C_{1T}, \quad \sigma_k = \frac{\omega_v}{C_s} \quad \text{und} \quad \sigma_\varepsilon = \frac{\omega_v}{C_\varepsilon}, \quad (2.42), (2.43), (2.44)$$

wobei mit der Größe

$$\omega_v = \frac{1-C_2}{C_1} \left( 1 + \frac{(1-C_3)}{(1-C_2)} \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \alpha g \frac{\partial \bar{T} / \partial r}{\partial \bar{u} / \partial r} \right) \quad (2.45)$$

der Auftriebseinfluß berücksichtigt wird.

Das Verhältnis

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1-C_2}{C_1} \right) \quad (2.46)$$

ist im ASM für eine vertikale Strömung konstant.

Der axiale Wärmestrom ergibt sich schließlich zu

$$-\overline{u'T'} = \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + (1-C_{2T}) \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - (1-C_{3T}) \alpha g \overline{T'^2} \right). \quad (2.47)$$

Die algebraische Beziehung für die Varianz der Temperatur wird

$$-\overline{T'^2} = C'_T \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (2.48)$$

Im Standard-k-ε-Modell treten eine Reihe von empirischen turbulenten Prandtl-Zahlen und die Konstante  $C_\mu$  auf. Diese Größen werden im ASM durch Funktionen ersetzt, die andere empirische Konstanten enthalten. Tabelle 3 enthält die empirischen Konstanten des ASM.

$C_s$	$C_\epsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_{1T}$	$C_{2T}$	$C_{3T}$	$C'_T$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0.24	0.15	2.2	0.55	0.55	3.0	0.5	0.5	1.6	1.44	1.92

Tabelle 3: Empirische Konstanten des ASM für freie vertikale Scherschichtströmungen

Wie im Standard-k-ε-Modell müssen zur Berechnung eines achsensymmetrischen Freistrahls die Korrekturfunktionen von Rodi (2.34), (2.35), (2.36) verwendet werden.

### 2.4.3. Das k-ε-T<sup>2</sup>-Modell und weitere Turbulenzmodelle

Das ASM ist die höchstmögliche Entwicklungsstufe für ein Zwei-Gleichungs-Modell. Alle Versuche, das Turbulenzfeld mit statistischen Modellen besser zu beschreiben, führen zur Lösung weiterer Transportgleichungen.

Die Varianz der Temperatur wird im ASM durch eine algebraische Beziehung ausgedrückt, die zwangsläufig zu einem Verschwinden der Varianz der Temperatur auf der Symmetrielinie führt. Dies bedingt oft unphysikalisches Verhalten der Modellaussagen im Vergleich zu Experimenten. Die algebraische Beziehung kann nach Einführung einer Prandtl-Zahl für die Varianz der Temperatur

$$\sigma_{T^2} = \frac{\omega_v \overline{v'^2}}{C_{TT} k} \quad (2.49)$$

durch eine Transportgleichung für  $\overline{T'^2}$  ersetzt werden, d.h.

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \kappa + \frac{v_t}{\sigma_{T^2}} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial r} \right) - 2 \overline{v' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - \underbrace{\frac{2}{C'_T} \frac{\overline{T'^2}}{k}}_{\epsilon_T} \epsilon. \quad (2.50)$$

Die empirischen Konstanten im Modell,  $C_{TT}$  und  $C'_T$ , erhalten die Werte  $C_{TT} = 0.13$  bzw.  $C'_T = 1.6$ . Der Wert von  $C'_T$  ist nach Aussage der Autoren Tamanini (1977) und Bunk et al. (1995) nicht universell. Tamanini (1977) schlägt vor, ihn für Auftriebsstrahlen zu vergrößern.

Lumley & Khajeh-Nouri (1974) verwenden auch für die Dissipationsrate der Varianz der Temperatur  $\epsilon_T$  eine Transportgleichung. Bei der Modellierung dieser Gleichung entstehen

weitere Konstanten. Die Modellierung wird außerdem erschwert durch die Tatsache, daß keiner der zu modellierenden Terme der Transportgleichung in genügender Genauigkeit experimentell zugänglich ist.

Carteciano (1996) verwendet in seinem TMBF (Turbulence Model for Buoyant Flows) durch Einschränkung des Anwendungsgebiets auf den Bereich auftriebsbehafteter Strömungen zusätzlich eine Transportgleichung für die Varianz der Temperatur, eine Transportgleichung für deren Dissipationsrate sowie Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeströme. Die Komponenten des turbulenten Schubspannungstensors werden mit algebraischen Beziehungen erfaßt.

Die nächste Entwicklungsstufe führt unmittelbar zu den Turbulenzmodellen zweiter Ordnung, die für alle Turbulenzkorrelationen Transportgleichungen lösen.

## 2.5. Dimensionslose Kennzahlen

Durch Entdimensionierung des Problems und anschließendes Zusammenfassen der einfließenden Größen zu dimensionslosen Kennzahlen erweist sich das Problem als durch drei Kennzahlen bestimmt. Es wird hierzu eine geometrisch ähnliche Skalierung verwendet. Dabei werden alle Längen mit einer später noch festzulegenden, zunächst beliebigen Länge  $L_0$ , alle Geschwindigkeiten mit einer beliebigen Geschwindigkeit  $U_0$ , die Temperaturdifferenz zur Umgebung mit einer beliebigen Temperaturdifferenz  $\Delta T$  sowie der Druck mit einem beliebigen Druck  $P_0$  normiert. Die normierten Größen sind mit einer Tilde gekennzeichnet. Es gilt deshalb

$$\begin{aligned}(x, r, \varphi) &= (L_0 \tilde{x}, L_0 \tilde{r}, \tilde{\varphi}), \\ (u, v, w) &= U_0 (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \\ T - T_\infty &= \Delta T \tilde{T}, \\ p &= P_0 \tilde{p}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Aus Dimensionsgründen erhält man für die kinetische Energie der Turbulenz und die Dissipationsrate die Entdimensionierung

$$\begin{aligned}k &= U_0^2 \tilde{k}, \\ \varepsilon &= \frac{U_0^3}{L_0} \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Nach Skalierung ergibt sich das folgende System dimensionsloser Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{v}) = 0, \quad (2.53)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\frac{P_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{v + v_t}{U_0 L_0} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\alpha g \Delta T L_0}{U_0^2} \bar{T}, \quad (2.54)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{\kappa + v_t / \sigma_t}{U_0 L_0} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right), \quad (2.55)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{v + v_t / \sigma_k}{U_0 L_0} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} \right) - \underbrace{\bar{u}' \bar{v}'}_{\bar{P}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \underbrace{\frac{\alpha g L_0 \Delta T}{U_0^2} \bar{u}' \bar{T}'}_{\bar{G}} - \bar{\epsilon}, \quad (2.56)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{v + v_t / \sigma_\epsilon}{U_0 L_0} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \left( C_{\epsilon 1} \frac{\bar{P} + \bar{G}}{\bar{\epsilon}} - C_{\epsilon 2} \right), \quad (2.57)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}'^2}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}'^2}{\partial \bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{\kappa + v_t / \sigma_{T^2}}{U_0 L_0} \right) \frac{\partial \bar{T}'^2}{\partial \bar{r}} \right) - 2 \bar{v}' \bar{T}' \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} - \frac{2}{C_T} \frac{\bar{T}'^2}{\bar{k}} \bar{\epsilon} \quad (2.58)$$

Nun sind die vier Bezugsgrößen  $L_0$ ,  $U_0$ ,  $T_0$  und  $P_0$  festzulegen. Die Skalierung des Drucks mit einem Staudruck

$$P_0 = \rho_0 U_0^2 \quad (2.59)$$

erscheint physikalisch sinnvoll und führt zum Verschwinden des Vorfaktors im Druckterm der Impulsgleichung. Die drei restlichen Bezugsgrößen werden durch die Eigenschaften des Systems festgelegt. Als Länge bietet sich der Kugeldurchmesser  $d$  an. Es ist also

$$L_0 = d. \quad (2.60)$$

Diese Länge ist nicht charakteristisch für die lokalen Verhältnisse in der Scherschicht weit stromab. Sie ist aber das einzig feste Längenmaß im System, also eine sinnvolle Skalierungsgröße. Als Bezugsgeschwindigkeit bietet sich die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit an, welche im folgenden als Bulk-Geschwindigkeit bezeichnet wird. Es gilt

$$U_0 = u_{\text{Bulk}} = \frac{\dot{V}}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}. \quad (2.61)$$



Der Temperaturmaßstab  $\Delta T$  wird im folgenden als System-Temperaturdifferenz bezeichnet. Diese wird wie bei Suckow (1993) nach Abwandlung des Vorschlags von Fujii (1963), der für seinen Temperaturmaßstab statt des Kugeldurchmessers  $d$  den Abstand von der Kugel  $x$  verwendet, aus der Heizleistung der Kugel gemäß

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}}{2\pi\rho_0 c_p v d} \quad (2.62)$$

berechnet. Setzt man obige Größen in die Gleichungen (2.53) - (2.58) ein, so erscheinen lediglich drei dimensionslosen Kennzahlen.

Mit der Bulk-Geschwindigkeit, dem Kugeldurchmesser und der kinematischen Viskosität wird die Reynolds-Zahl festgelegt, die das Verhältnis von mittleren Impulskräften zu viskosen Reibungskräften beschreibt. Es gilt

$$Re_d = \frac{u_{\text{Bulk}} d}{\nu} \quad (2.63)$$

Die Reynolds-Zahl tritt in den molekularen Diffusionstermen der Gleichungen (2.54) - (2.58) auf. Die durch das Turbulenzfeld erzeugten, zusätzlichen Reibungskräfte können durch Einführung einer "effektiven Reynolds-Zahl" berücksichtigt werden,

$$Re_{\text{eff}} = \frac{Re}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}} \quad (2.64)$$

die im weiteren jedoch nicht verwendet wird.

Die Transportgleichungen (2.55), (2.58) enthalten die Temperaturleitfähigkeit, die durch Einführung der Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.65)$$

zusammen mit der Reynolds-Zahl auftritt. Physikalisch entspricht die Prandtl-Zahl dem Verhältnis von molekularem Impuls- und Wärmetransportvermögen im Fluid. Das Produkt aus Prandtl- und Reynolds-Zahl wird oft als Peclet-Zahl bezeichnet, im folgenden wird jedoch die Darstellung mit Hilfe der Prandtl-Zahl bevorzugt.

Zur Charakterisierung von Auftriebsströmungen wird häufig die Grashof-Zahl eingeführt. Sie tritt in den Gleichungen (2.53) - (2.58) nicht direkt auf. Die Grashof-Zahl ist als Verhältnis aus dem Produkt von Impuls- und Auftriebskräften zum Quadrat der viskosen

Reibungskräfte definiert. Die für den Auftrieb maßgebliche Dichtedifferenz wird bei Verwendung der Boussinesq-Approximation durch die System-Temperaturdifferenz ersetzt. Es ist demnach

$$\text{Gr} = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu^2} = \frac{\alpha g \dot{Q} d^2}{2\pi \rho_0 c_p \nu^3}. \quad (2.66)$$

Zur Beschreibung der Mischkonvektion wird von Afzal (1983) ein Mischkonvektionsparameter als das Verhältnis der Grashof- zum Quadrat der Reynolds-Zahl verwendet. Dieser Mischkonvektionsparameter tritt auch hier in den Auftriebstermen der Gleichungen (2.54), (2.56) auf. Er entspricht einem Verhältnis von Auftriebs- und Trägheitskräften, d.h.

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} = \frac{\alpha g \dot{Q}}{2\pi \rho_0 c_p \nu u_{\text{Bulk}}^2}. \quad (2.67)$$

Als Längenmaßstab wird häufig, vgl. Fujii (1963) und Afzal (1983), auch der Abstand  $x$  verwendet. Reynolds- und Grashof-Zahl beschreiben dann die lokalen Verhältnisse der Nachlauf- bzw. Auftriebsströmung. Der Mischkonvektionsparameter enthält keinen Längenmaßstab und beschreibt somit die Mischkonvektion im gesamten Strömungsbereich.

Das System von Differentialgleichungen zur dimensionslosen Beschreibung des Strömungsproblems lautet unter Verwendung der eingeführten Kennzahlen

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \bar{T}, \quad (2.68)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{1}{\text{RePr}} \left( 1 + \frac{\nu_t/\sigma_t}{\kappa} \right) \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right), \quad (2.69)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{\nu_t/\sigma_k}{\nu} \right) \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} \right) - \underbrace{\bar{u}' \bar{v}'}_{\bar{p}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \underbrace{\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \bar{u}' \bar{T}'}_{\bar{G}} - \bar{\epsilon}, \quad (2.70)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{1}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{\nu_t/\sigma_\epsilon}{\nu} \right) \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \left( C_{e1} \frac{\bar{P} + \bar{G}}{\bar{\epsilon}} - C_{e2} \right), \quad (2.71)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \overline{\bar{T}^2}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \overline{\bar{T}^2}}{\partial \bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \left( \frac{1}{\text{RePr}} \left( 1 + \frac{\nu_t/\sigma_{T^2}}{\kappa} \right) \right) \frac{\partial \overline{\bar{T}^2}}{\partial \bar{r}} \right) - 2 \bar{v}' \bar{T}' \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} - \frac{2}{C_T} \frac{\overline{\bar{T}^2}}{\bar{k}} \bar{\epsilon}. \quad (2.72)$$

All diese Gleichungen enthalten im Diffusionsglied einen Korrekturterm, der die Kombination von molekularer und turbulenter Diffusion, wie vor Gleichung (2.64) beschrieben, erlaubt. Diese Korrekturterme sind aber nicht als Kennzahlen zu verstehen, da die Größe  $\nu_t$  nicht konstant ist.

## 2.6. Experimentell zu bestimmende Größen

Die Strömung wird im zeitlichen Mittel als zweidimensional und achsensymmetrisch betrachtet. Die zu messenden Hauptströmungsgrößen reduzieren sich damit auf die Axialgeschwindigkeit  $\bar{u}$ , die Radialgeschwindigkeit  $\bar{v}$  und die Temperatur  $\bar{T}$ . Die Transportgleichungen der Turbulenzgrößen sind über ihre Produktionsterme miteinander gekoppelt. Bild 2 zeigt, daß die Kopplung über Gradienten der Hauptströmungsgrößen sowie über den Auftrieb erfolgt. Die in den Reynolds-Gleichungen auftretenden Korrelationen sind durch hinterlegte Schatten hervorgehoben.

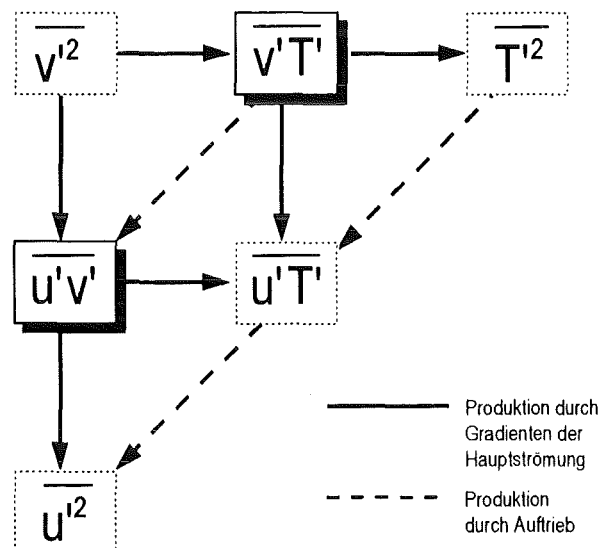


Bild 2: Kopplung zwischen den Transportgleichungen der Turbulenzgrößen nach Hossain (1980)

Die experimentelle Bestimmung aller Korrelationen in Bild 2 ist als Datenbasis für Turbulenzmodellierung erforderlich. Neben den Größen in Bild 2 werden die wichtigsten Hauptströmungsgrößen, also die zeitlich gemittelte Axialgeschwindigkeit und die zeitlich gemittelte Temperatur experimentell bestimmt. Die zeitlich gemittelten Radial- und Umfangsgeschwindigkeiten werden zwar gemessen, auf Grund ihrer geringen Bedeutung und der schlechten Qualität der Meßwerte aber nicht dargestellt. In den Transportgleichungen treten noch weitere Größen auf, die mit dem vorliegenden Experiment nicht gemessen oder nicht ausgewertet worden sind:

- Die Dissipationsraten setzen sich zusammen aus (Zeit-) Korrelationen von räumlichen Gradienten der zeitlichen Schwankungen von Strömungsgrößen. Zur meßtechnischen Bestimmung der Dissipationsraten sind somit gleichzeitige Messungen an mindestens zwei sehr dicht beieinander liegenden Punkten notwendig. Verfahren zur indirekten Bestimmung der Dissipationsraten gelten in der Regel nur für hohe Reynolds-Zahlen und können im vorliegenden Experiment nicht verwendet werden.
- Die mit den Druckschwankungen gekoppelten Größen erfordern die räumlich und zeitlich hochaufgelöste Messung des Drucks. Dies ist in ausreichender Genauigkeit zur Zeit technisch noch nicht möglich.
- Die in den Transportgleichungen auftretenden Tripelkorrelationen sind zwar zum Teil meßbar, auf eine Auswertung wird jedoch wegen des hohen Meßfehlers verzichtet. Einige ausgewählte Profile sind aber im Anhang dargestellt.

Die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  taucht in Bild 2 nicht auf, wird als wesentliche Größe im  $k$ - $\varepsilon$ -Turbulenzmodell aber benötigt. Sie wird prinzipiell aus

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}). \quad (2.21)$$

berechnet. Zur Bestimmung von  $k$  wird also die Varianz der Geschwindigkeit in allen drei Raumrichtungen benötigt. Mit einem Vergleich von gemessenen Werten in Radial- und Umfangsrichtung wird in dem Kapitel 4. "Meßergebnisse" gezeigt, daß für die Bestimmung von  $k$  die Varianz der Umfangsgeschwindigkeit  $w^2$  durch die Varianz der Radialgeschwindigkeit  $v^2$  ersetzt werden kann.

In Tabelle 4 sind alle in dem Gleichungssystem auftretenden Größen aufgelistet. Die nicht meßbaren Dissipationsraten, Druckkorrelationen usw. sind dabei unter "sonstiges" zusammengefaßt.

Die verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:

- gemessen und ausgewertet,
- × teilweise gemessen, nicht ausgewertet, aber durch andere Größen beschreibbar,
- # teilweise gemessen, nicht ausgewertet und
- sonstige, nicht meßbare Größen.

		Transportgleichung											
		Kontinuität	$\bar{u}$	$\bar{T}$	k	$\varepsilon$	$\overline{u'v'}$	$\overline{u'^2}$	$\overline{v'^2}$	$\overline{u'T'}$	$\overline{v'T'}$	$\overline{T'^2}$	
in Transport- gleichung auftretende Größe	Haupt- strömung	$\bar{u}$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
		$\bar{v}$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
		$\bar{T}$		•	•					•	•	•	
	Zweifach- Korre- lationen	$\overline{u'v'}$		•		•		•	•		•		
		$\overline{u'^2}$				•			•				
		$\overline{v'^2}$				•		•			•		
		$\overline{w'^2}$				×							
		$\overline{u'T'}$				•			•		•		
		$\overline{v'T'}$			•			•			•	•	•
		$\overline{T'^2}$								•		•	
	Tripel- Korre- lationen	$\overline{u'v'^2}$						#					
		$\overline{u'^2v'}$				#			#				
		$\overline{v'^3}$				#				#			
		$\overline{u'v'T'}$									#		
		$\overline{v'^2T'}$										#	
		$\overline{v'T'^2}$											#
	sonstige					□	□	□	□	□	□	□	□

Tabelle 4: Zusammenstellung der in den Transportgleichungen auftretenden Größen

### 3. Das Experiment

Mit dem FLUTMIK-Experiment (Fluktuationen in turbulenter Mischkonvektion) wird in einem vertikalen Wasserkanal der turbulente Nachlauf über einer beheizten Kugel untersucht. Es werden neben den zeitlichen Mittelwerten von Temperatur, Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit, eine große Zahl von Korrelationen aus Temperatur- und Geschwindigkeitsschwankungen gemessen.

#### 3.1. Die Versuchsanlage FLUTMIK

Das Experiment und die verwendete Meßtechnik werden von Suckow (1993) detailliert beschrieben. Das folgende Kapitel faßt diese Informationen zusammen und beschreibt die an der Teststrecke durchgeführten Modifikationen.

##### 3.1.1. Aufbau der Anlage

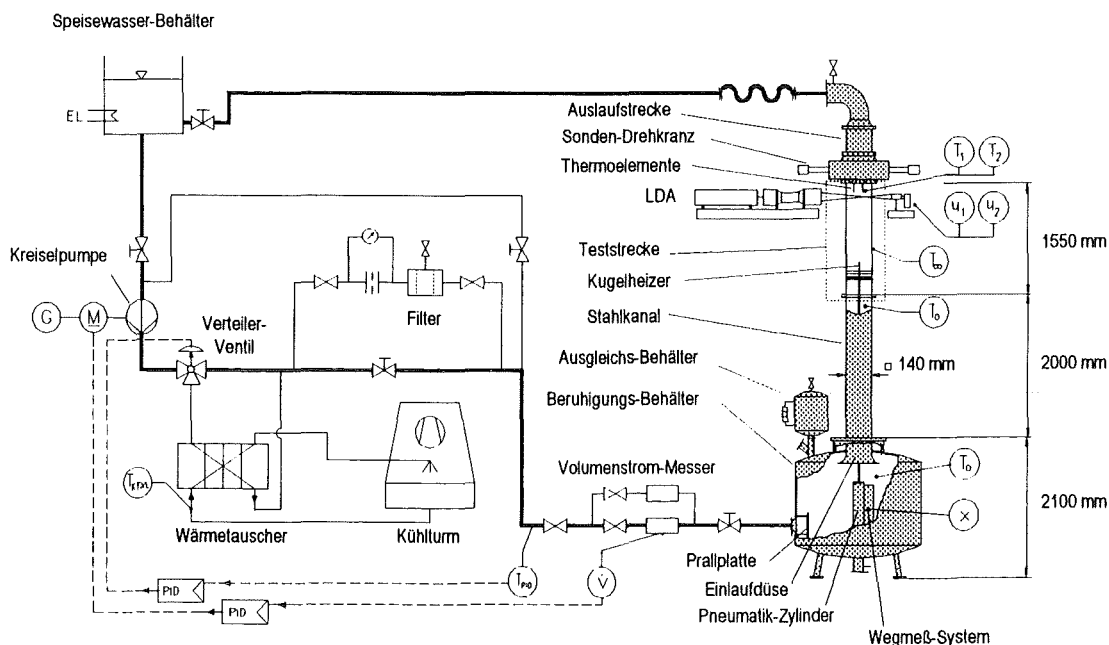


Bild 3: Schema des FLUTMIK-Wasserkreislaufs nach (1993)

Bild 3 zeigt das Anlagenschema des Wasserkreislaufs. Ein Speisewasserbehälter mit freier Oberfläche und einem Volumen von 2 m<sup>3</sup> speist eine Kreislaspumpe über eine Zulaufhöhe von 5 m. Zur Temperaturregelung des Kreislaufs steuert ein PID-Regler ein pneumatisches Verteilerventil; dieses leitet einen Teilvolumenstrom über einen Wärmetauscher, dessen

Sekundärseite mit einem Naßkühlturm verbunden ist. Nach Durchströmen eines Durchflußmessers gelangt das Fluid in einen Beruhigungsbehälter mit  $2.8 \text{ m}^3$  Volumen, der der Vergleichmäßigung von Strömung und Temperatur dient. Oberhalb des Beruhigungsbehälters befindet sich zunächst ein Kanalstück mit quadratischem Querschnitt (innere Kantenlänge  $140 \text{ mm}$ ) und einer Länge von  $2 \text{ m}$ . Auf diesem quadratischen Stahlkanal befindet sich absatzlos ein ebenfalls quadratischer Glaskanal mit identischem Querschnitt und einer Länge von  $1.55 \text{ m}$ . Der Glaskanal enthält die unten beschriebene Teststrecke. Oberhalb des Glaskanals befindet sich absatzlos eine Auslaufstrecke mit quadratischem Querschnitt und der Länge  $0.7 \text{ m}$ , die am Ende in einen runden Querschnitt übergeht. Der dort angebrachte Kunststoffschlauch verbindet die Auslaufstrecke mit dem Speisewasserbehälter.

### 3.1.2. Verwendete Meßtechnik

Die Geschwindigkeitsmessungen werden mit Hilfe der Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) durchgeführt. Das Prinzip dieses optischen Meßverfahrens wird kurz erläutert. Ausführliche Beschreibungen des Verfahrens und seiner Anwendungsmöglichkeiten sind bei Durst et al. (1987) und Ruck (1987) zu finden.

Auf Grund der endlichen Ausdehnung von Laserstrahlen und der in der Regel gaußförmigen Intensitätsverteilung des Laserlichts im Strahl erhält man durch Kreuzung zweier Laserstrahlen ein Rotationsellipsoid das Meßvolumen MV, wie die Prinzipskizze in Bild 4 zeigt. Ist das Licht der Strahlen in der Strahlebene polarisiert, so entstehen im Meßvolumen Interferenzstreifen.

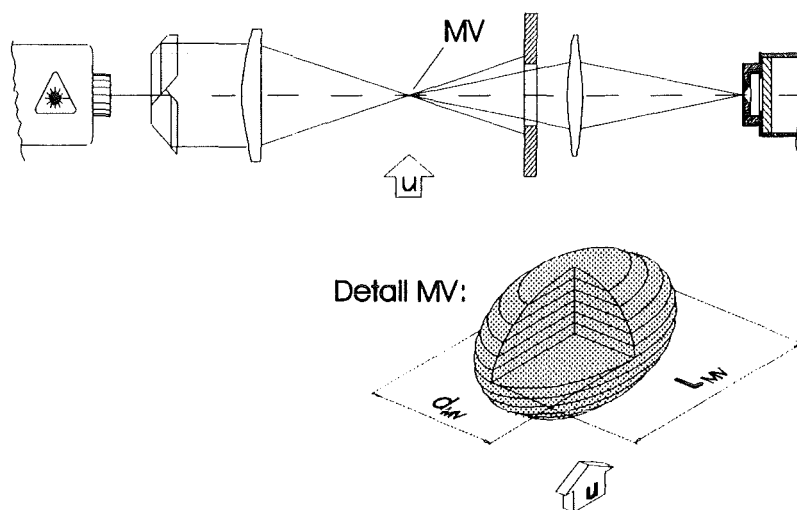


Bild 4: LDA-Prinzip: Strahlengang (oben) und Meßvolumen (unten, Quelle: Fa. TSI)

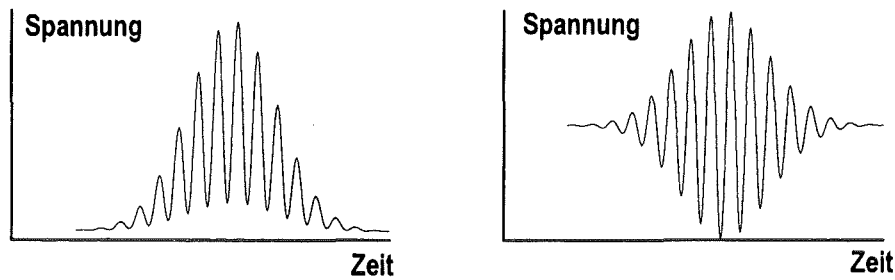


Bild 5: LDA-Signal vor (links) und nach (rechts) Hochpaß-Filterung

Durchquert ein mit der Strömung bewegtes, kleines Partikel diese Interferenzstreifen, so erzeugt das an dem Partikel gestreute Licht ein moduliertes Signal, wie es in Bild 5 links dargestellt ist. Die Geschwindigkeitsinformation ist hierbei in der (hochfrequenten) Modulationsfrequenz enthalten. In einer auf das Meßvolumen fokussierten Empfangsoptik wird dieses Lichtsignal in eine elektrische Spannung umgewandelt. Zur Detektion negativer Geschwindigkeiten wird das Signal in zwei Schritten optisch und elektronisch um eine bekannte Frequenz verschoben. Diese Frequenz wird so groß gewählt, daß für alle auftretenden Partikelgeschwindigkeiten eine genügend große Modulationsfrequenz auftritt. Die Frequenz des LDA-Signals minus der Shiftfrequenz wird als Dopplerfrequenz bezeichnet. Sie ist der Geschwindigkeit senkrecht zur Symmetrielinie der Strahlen innerhalb der Strahlenebene proportional. Durch Hochpaß-Filterung wird in Folge der Gauß-Verteilung der niedrigfrequente Anteil des Signals entfernt und man erhält ein zur Nulllinie symmetrisches Signal, wie es ebenfalls in Bild 5 rechts dargestellt ist. Zur Bestimmung der Dopplerfrequenz aus diesem Signal existieren verschiedene Möglichkeiten. Die Frequenzbestimmung erfolgt in der vorliegenden Arbeit durch Zählen der Nulldurchgänge des symmetrischen Signals in sogenannten Counter-Prozessoren bei mitlaufender Systemuhr.

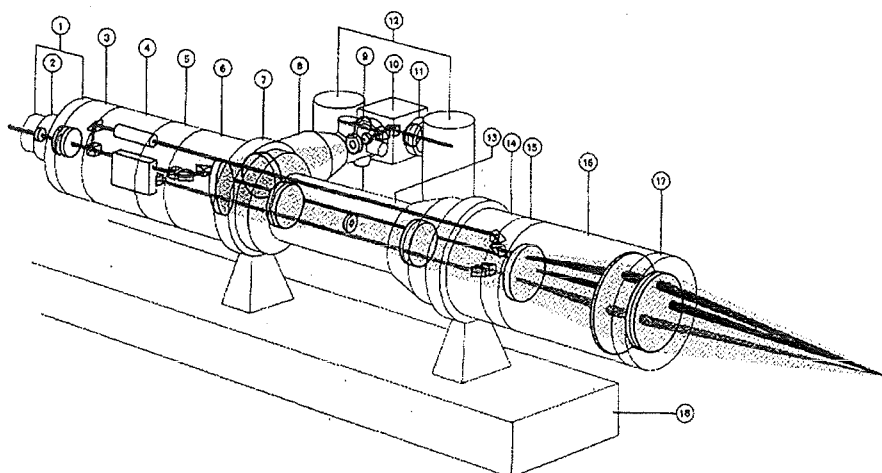


Bild 6: LDA-System mit drei Strahlen zur Messung von zwei Geschwindigkeitskomponenten, Rückwärtsstreu-Anordnung (Quelle: Fa. DANTEC)



Durch Überlagerung von zwei  $90^\circ$  zueinander verdrehten Strahlenpaaren ist es möglich, gleichzeitig zwei Geschwindigkeitskomponenten im gleichen Meßvolumen zu messen, um im Anschluß beispielsweise Kreuzkorrelationen zu bilden. In dem hier beschriebenen Experiment wird eine Drei-Strahl-Konfiguration verwendet. Einer der Strahlen wird für beide Geschwindigkeiten verwendet. Zur Unterscheidung der Signale werden in dem verwendeten System Strahlpaare mit unterschiedlichen Wellenlängen (Farben) eingesetzt, die Signaltrennung erfolgt dann über Farbfilter. Abweichend von Bild 6 werden die Messungen in Vorwärtsstreuung durchgeführt, wobei die Empfangsoptik der Sendeoptik gegenüberliegt. Vorteil dieser Anordnung ist eine um bis zu drei Größenordnungen höhere Streulichtintensität. Nachteil ist der höhere experimentelle Aufwand, da die Empfangsoptik bei Verfahren des Meßvolumens exakt mit diesem bewegt werden muß.

Das Meßvolumen (MV) des LDA-Systems kann in den zwei horizontalen Richtungen verfahren werden. Durchmesser und Länge des Meßvolumens werden aus Durchmesser und Schnittwinkel der Laserstrahlen bestimmt. Der Durchmesser beträgt 0.08 mm, die Länge 1.5 mm. Die effektive Länge ist jedoch deutlich kleiner. Sie ist durch die Tiefenschärfe der Empfangsoptik bestimmt, die auf das Meßvolumen fokussiert wird.

Das Meßverfahren liefert in zufälligen Zeitabständen diskrete Geschwindigkeitsinformationen. Zum einen wird für die oben beschriebene Signalauswertung ein bestimmter Zeitraum benötigt, zum anderen befindet sich nicht zu jedem Zeitpunkt ein Partikel im Meßvolumen. Mit Hilfe eines Halteglieds wird deshalb der zuletzt gemessene Wert bis zum Auftreten eines neuen Wertes im Speicher gehalten und dadurch ein quasikontinuierliches Signal beider Geschwindigkeiten erzeugt.

Bei der Berechnung von Korrelationen zwischen den beiden Geschwindigkeitssignalen ist zu beachten, daß nicht immer in beiden Kanälen gleichzeitig ein neues Signal ansteht. Die Korrelation wird jedoch genau dann maximal, wenn beide Signale gleichzeitig anstehen. Häufig wird deshalb ein Koinzidenzzeit-Fenster verwendet. Dabei wird ein Signalpaar nur akzeptiert, wenn in beiden Kanälen die neuen Signale innerhalb dieses Zeitintervalls auftreten. In den Experimenten zeigt sich aber, daß bei Verwendung einer zeitlich äquidistanten Abtastung mit  $f=100$  Hz die Kreuzkorrelationen kaum von den Messungen mit einem Koinzidenzzeitfenster von  $\Delta t=40 \mu s$  abweichen. Eine zeitlich äquidistante Abtastung erleichtert die weitere Signalauswertung, deshalb sind alle hier gezeigten Messungen auf diese Weise durchgeführt.

Zur Temperaturmessung ist ca. 1 mm oberhalb des LDA-MV ein Nickel-Chrom-Nickel-Thermoelement mit 0.25 mm Durchmesser angebracht, welches analog zum Meßvolumen in einer horizontalen Ebene verfahren werden kann. Das Thermoelement ist in Differenz zu einem Thermoelement mit 2 mm Durchmesser geschaltet, welches sich ortsfest in der Ein-

laufstrecke befindet. Der große Durchmesser dieses Referenzthermoelements stellt seine stark integrierende Charakteristik sicher. Dies führt zu einer Tiefpaßfilterung des Temperatursignals aus der Einlaufstrecke, so daß die gemessenen Temperaturschwankungen ausschließlich durch Schwankungen am Meßort verursacht sind.

Das Temperatursignal ist kontinuierlicher Natur, so existiert zum Zeitpunkt eines neuen Geschwindigkeitssignals stets ein aktuelles Temperatursignal. Die Bildung von Korrelationen aus Geschwindigkeiten und Temperatur ist deshalb problemlos möglich.

Unter der Annahme achsensymmetrischer Strömung werden die Messungen auf radiale Profile beschränkt. In jedem Meßpunkt werden zwischen 5120 und 15360 Werte aufgenommen. In der Praxis entspricht dies Mittelungszeiten von bis zu 6 Minuten. Auf das Ausmessen des gesamten Querschnitts wird verzichtet, da für eine ausreichend genaue Beschreibung des Felds eine sehr große Anzahl von Meßpunkten notwendig ist.

Die tatsächlich gemessene horizontale Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung. Abhängig von der Traverse entspricht diese Geschwindigkeit der Radialgeschwindigkeit  $v$  ( $\varphi=0^\circ$ ) oder der Umfangsgeschwindigkeit  $w$  ( $\varphi=90^\circ$ ). Es ist zu beachten, daß im Falle  $\varphi=0^\circ$  die gemessene horizontale Geschwindigkeit für  $y<0$  der negativen, für  $y>0$  der positiven Radialgeschwindigkeit entspricht. Im Falle  $\varphi=90^\circ$  entspricht die gemessene horizontale Geschwindigkeit für  $z<0$  der positiven, für  $z>0$  der negativen Umfangsgeschwindigkeit.

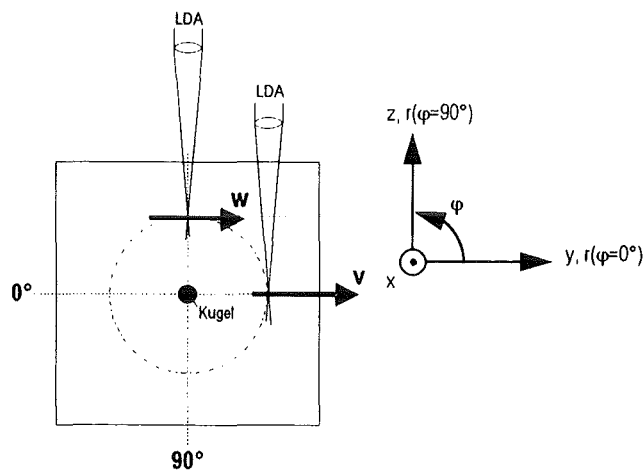


Bild 7: Messung von Radial- ( $v$ ) oder Umfangsgeschwindigkeit ( $w$ ) durch Wahl der Traverse

Die Verfäher-Einrichtung der Meßtechnik erlaubt nur das Anfahren von Punkten in einer horizontalen Ebene, d.h. für konstante Höhe  $x$ . Zur Messung von Profilen in verschiedenen vertikalen Abständen von der Kugel ist in dem Glaskanal ein pneumatisch verschiebbarer Kanaleinsatz angebracht, welcher die Kugel relativ zur Meßebeue verschiebt und somit unterschiedliche  $x$  realisiert

### 3.1.3. Die Teststrecke

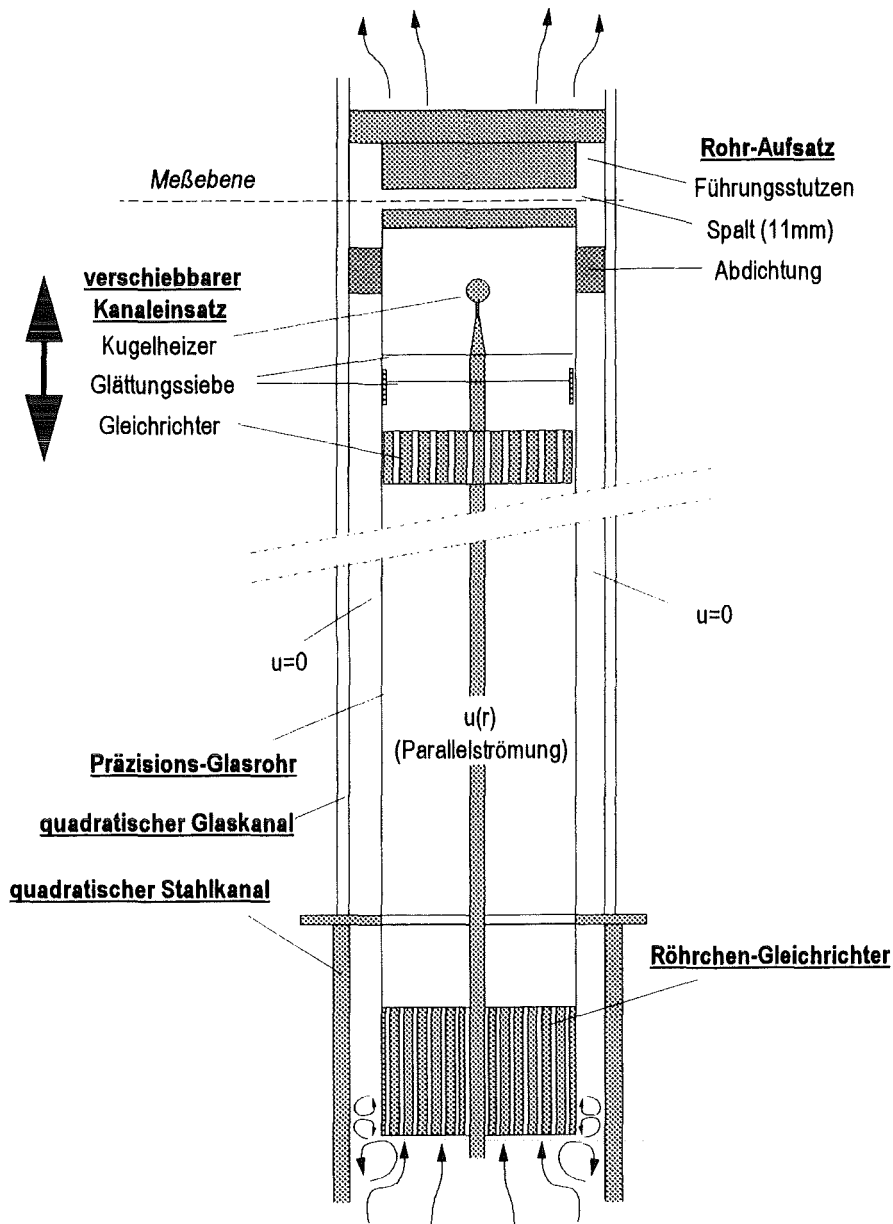


Bild 8: Teststrecke mit Glasrohr-Einsatz

Für den Einsatz des LDA sind transparente, ebene Kanalberandungen von deutlichem Vorteil. So kann am einfachsten zu jeder Zeit für beide Geschwindigkeiten am gleichen Ort ein Meßvolumen erzeugt werden. Die Teststrecke befindet sich deshalb innerhalb eines Glaskanals mit quadratischem Querschnitt und 140 mm Kantenlänge. In den quadratischen Glaskanal ist ein rundes Präzisionsglasrohr mit dem Innendurchmesser

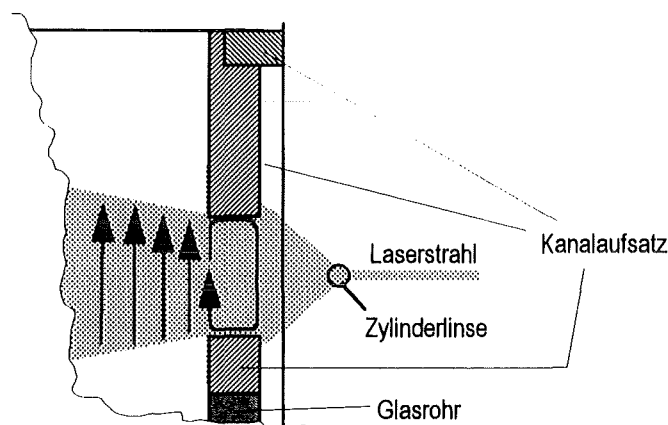
$$D = 120 \text{ mm} \quad (3.1)$$

eingesetzt. Als Werkstoff ist Glas wegen seiner optischen Transparenz gewählt, da frühere Messungen gezeigt haben, daß eine optische Kontrollmöglichkeit der Strömung zu jeder

Zeit möglich sein muß. Das Auftreten von Gasblasen auf Grund von Siedevorgängen an der Kugel oder Undichtigkeiten der Pneumatik sowie die grobe Verunreinigung der Siebe oder Gleichrichter ist somit erkennbar und die Beseitigung möglich.

Der Raum zwischen dem Glasrohr und dem rechteckigen Kanal ist von allen Seiten abgedichtet, das darin enthaltene Wasser hat keinen Kontakt mit dem Strömungskreislauf und befindet sich in Ruhe. Bei der un stetigen Querschnittsverengung vom quadratischen Stahlkanal zum runden Glasrohr entsteht zwangsläufig ein Einlaufwirbel. In der Teststrecke wird nicht der übliche Weg gewählt, diesen Wirbel durch Schaffen eines möglichst kontinuierlichen Übergangs zwischen den Querschnitten zu vermeiden. Vielmehr wird am Eintritt in das Glasrohr ein Gleichrichter eingesetzt, der aus 92 miteinander verklebten Stahlröhrchen (Durchmesser 6 mm, Wandstärke 1 mm, Länge 100 mm) in hexagonaler Anordnung besteht. Die große Länge dieses Röhrchen-Gleichrichters verhindert nahezu jeden Transport großräumiger Wirbel in die Teststrecke und erzeugt so auch das nahezu drallfreie Geschwindigkeitsprofil der Anströmung.

Das Glasrohr endet ca. 1 cm unterhalb der Meße ebene. Auf dem Glasrohr ist ein Stahleinsatz mit Innendurchmesser  $D$  montiert, der durch einen 11 mm breiten Spalt den LDA-Strahlen Zugang zur Meße ebene durch ebene Gläser ermöglicht. Der Stahleinsatz dient der Verlängerung der zylindrischen Rohrstrecke nach oben. Er endet ca. 6.5 cm oberhalb der Meße ebene mit einer quadratischen Platte, die den Außenbereich des Kanals abdichtet. Die Expansion von Rohr- zu Kanalquerschnitt erfolgt damit erst deutlich oberhalb der Meße ebene. Weiterhin wird die Störung durch den Meße spalt auf ein Minimum reduziert, hier wird die Haftbedingung auf der Länge von 11 mm nicht eingehalten.



*Bild 9: Lichtschnittbeobachtung der Strömung am Meße spalt (qualitativ)*

Die Visualisierung der Strömung im Meße spalt mit einem Laserlichtschnittverfahren zeigt einen stationären Wirbel, der bis zur Innenkante des Stahleinsatzes reicht. Bild 10 zeigt qualitativ die beobachtete Strömung im Meße spalt. Die Strömung im Rohr wird auf Grund

des großen Verhältnisses von Axial- zu Radialgeschwindigkeit durch den Wirbel im Meßspalt praktisch nicht gestört.

Der Kanaleinsatz beinhaltet auch die Kupferkugel mit dem Durchmesser

$$d = 10 \text{ mm} \quad (3.2)$$

Die Kugel enthält im Innern einen spiralförmig gewickelten Heizleiter und ein Thermoelement. Sie ist auf einem Rohr mit dem Durchmesser 3 mm befestigt, durch welches die elektrischen Zuleitungen geführt werden. Am unteren Ende des Rohrs erweitert ein Kegel mit dem Winkel  $6.8^\circ$  auf einen Querschnitt von 13 mm.

An der folgenden Hülse sind im Abstand von 5 cm zwei Siebe und 10 cm darunter ein Düsenblock zur Vergleichmäßigung der Strömung, zur Reduktion eventuell auftretenden Dralls und zur Führung des Kanaleinsatzes befestigt.

Gegenüber der von Suckow (1993) verwendeten Teststrecke ergeben sich die folgenden Veränderungen: Suckow führt seine Versuche direkt in dem quadratischen Glaskanal durch. Die Fertigungsqualität dieses Kanals -der Innendurchmesser schwankt um mehr als 1 mm- macht ein großes Einbauspiel des verschiebbaren Kanaleinsatzes erforderlich. Dies führt zur Schiefstellung und Fehlpositionierung des Kanaleinsatzes und in der Folge zu unkontrollierten Veränderungen der Strömung. Aus der Literatur ist bekannt, daß in rechteckigen Kanälen Rückströmgebiete in Form von Eckenwinkeln auftreten, die die Strömung in der Mitte des Kanals beeinflussen. Prandtl (1927) beschreibt die Existenz von Wirbelpaaren in nicht kreisförmigen Rohren, deren Strömung in der Mitte zur Kanalecke hin gerichtet ist.

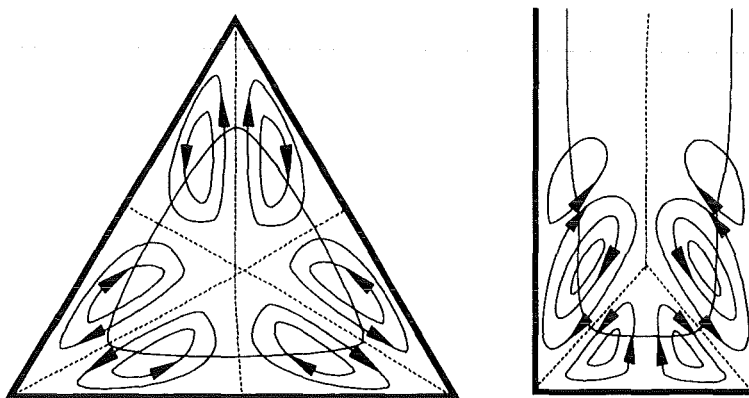


Bild 10: Eckenströmung in nicht kreisförmigen Rohren nach Prandtl

Mit Verwendung des Präzisionsglasrohrs entsteht ein runder Kanalquerschnitt, in dem keine Eckenwirbel mehr auftreten können. Durch die vom Hersteller des Rohrs garantierte

Toleranz des Innendurchmessers von 0.04 mm kann das Laufspiel des Kanaleinsatzes auf ein Minimum reduziert werden.

Als weiterer Unterschied zu Suckow wird in der aktuellen Konfiguration ein vollständig neu konstruierter Strömungseinsatz verwendet. Der ursprüngliche Einsatz erzeugte auf Grund seiner Massivität eine sehr starke Wandgrenzschicht, so daß nicht mehr von einer freien Strömung gesprochen werden konnte. Zusätzlich war die Fertigungsqualität des Einsatzes nicht befriedigend und die Anströmungsgeschwindigkeit dadurch mit starken Störungen behaftet. Der Strömungseinsatz der aktuellen Konfiguration ist deshalb deutlich filigraner gestaltet. Alle Bauteile werden ausschließlich in der Mitte fixiert, um den Strömungswiderstand an der Kanalwand zu minimieren. Das untere der beiden Glättungssiebe besitzt im Gegensatz zum oberen zusätzlich einen dünnen Außenring (Länge 40 mm, Wandstärke 0.5 mm). Über diesen Außenring und den darunterliegenden Edelstahl-Düsenblock wird der Strömungseinsatz im Glasrohr geführt. Mit dem neuen Strömungseinsatz wird auf die Abdichtung des Spalts zwischen Einsatz und Rohr verzichtet zugunsten eines neuen Konzepts der gewollten Leckage: Zwischen Außenkante des Siebs und der Rohrwand bildet sich ein Wandstrahl aus, der zwar zu einer Überhöhung der Strömungsgeschwindigkeit in dieser Zone führt, aber gleichzeitig auch die Entwicklung der Wandgrenzschicht verlangsamt. Die verwendete Konfiguration -oberes Sieb ohne, unteres Sieb mit Außenring- wurde nach Austesten verschiedener Anordnungen als Optimum gefunden und für die in dieser Arbeit gezeigten Experimente verwendet.

Als letzte Modifikation wird ein gegenüber Suckow veränderter Kugelheizer eingesetzt. Suckow verwendete eine in Kupfer eingegossene Heizwendel mit wenigen Windungen, die nahe dem Kugel-Außendurchmesser verlegt war. Die Unsymmetrie der Messungen von Suckow wird zum Teil dieser Konstruktion zugeschrieben. Der neue Kugelheizer besteht aus einer hohlgebohrten Kupferkugel, in deren Bohrung eine Heizwendel mit vielen Windungen eingeschoben ist. Die Bohrung ist lunkerfrei mit Silberlot ausgegossen. Im Experiment zeigt sich, daß auf Grund von Gasblasenbildung mit der neuen Kugel nicht die von Suckow verwendete Heizleistung erreicht werden kann. Als Ursache hierfür ist die höhere Heizleistung pro Fläche zu sehen, die besonders im Bereich der Stauströmung unmittelbar vor der Kugel in der Nähe der Heizwendel zu einer lokalen Temperaturüberhöhung und damit zur Blasenbildung führen kann.

Die Hülse befindet sich am oberen Ende einer Kolbenstange, die im Innern des Beruhigungsbehälters in einem Pneumatikzylinder endet, der die vertikale Verschiebbarkeit des Kanaleinsatzes gewährleistet. Die vertikale Position der Kugel wurde zu Anfang wie bei Suckow mit einem induktiven Wegmeßsystem ermittelt, auf Grund der Unzuverlässigkeit

des Systems wird jetzt die Position auf herkömmliche Weise optisch mittels eines Maßstabs bestimmt.

### 3.2. Untersucher Parameterbereich

Auf Messungen unmittelbar hinter der Kugel wird verzichtet. In diesem Bereich erzeugt im Fall der Mischkonvektion das schwankende Temperaturfeld ein instationäres Feld des Brechungsindices, durch dessen Gradienten das Meßvolumen des LDA verschoben und die Strahlwinkel verändert werden. Somit ist keine zuverlässige Geschwindigkeitsmessung mehr möglich. Gegenstand der Untersuchungen ist vielmehr das Verhalten des fernen Nachlaufs. Die Messungen werden ab einem dimensionslosen Abstand von ca.  $(x/d)=10$  hinter der Kugel durchgeführt. Der maximal in der Teststrecke einstellbare Abstand ist  $(x/d)=100$ . Für diesen Abstand ist jedoch ein deutlicher Einfluß der anwachsenden Wandgrenzschicht zu erkennen. Deshalb können nicht bei allen Meßreihen die Messungen für  $(x/d)=100$  ausgewertet werden.

Alle Messungen werden bei einem Volumenstrom von

$$\dot{V} = 2.89 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \quad (3.3)$$

durchgeführt. Die zur Definition der Reynolds-Zahl im vorigen Kapitel eingeführte Bulk-Geschwindigkeit beträgt damit

$$u_{\text{Bulk}} = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D^2} = 0.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.4)$$

Experimente mit niedrigeren Volumenströmen erweisen sich als nicht sinnvoll, da bereits bei dem gewählten Volumenstrom der Einfluß molekularer Diffusion auf die turbulente Strömung deutlich erkennbar ist. Größere Volumenströme können mit der verwendeten Konfiguration nicht untersucht werden, da dann bereits vor der Kugel, am größten Durchmesser des Übergangskonus, die Strömung ablöst und der Kugelnachlauf sich dann nicht mehr in einer gleichförmigen Grundströmung, sondern in der Nachlaufströmung des Übergangskonus entwickelt.

Die maximal zulässige Heizleistung im Experiment ist erreicht, wenn die Temperatur der Kugeloberfläche die Siedetemperatur des Wassers erreicht. In der Folge entsteht durch ablösende Wasserdampf-Blasen eine Zweiphasenströmung, die nicht Gegenstand der Untersuchungen ist. Schon vor Erreichen der maximal zulässigen Heizleistung kann Blasenbildung an der Kugeloberfläche beobachtet werden. Diese Blasen werden im

Gegensatz zu den Wasserdampf-Blasen mit der Strömung aus dem einsehbaren Kanalbereich abtransportiert, während die Wasserdampf-Blasen auf Grund der stromab stark abfallenden Temperatur des Wassers schnell wieder verschwinden. Es handelt sich also um Gasblasen, die auf Grund der mit steigender Temperatur abnehmenden Löslichkeit der Luftgase in Wasser ausgasen. Auch durch wiederholtes sorgfältiges Entgasen des im Kreislauf verwendeten Wassers kann dieser Effekt ab einer Heizleistung von ca. 70 W nicht über die gesamte Meßzeit vermieden werden. Die Luftgase können z.B. über die in dem Speisewasserbehälter vorhandene freie Oberfläche in das Wasser diffundieren. Ein weiterer Luftkontakt ist möglich über Undichtigkeiten im Bereich des Pneumatikzylinders.

Bild 11 zeigt die Temperaturdifferenz zwischen dem Thermoelement im Innern der Kugel und der Umgebungstemperatur in Abhängigkeit von der Heizleistung. Es sind zwei Kurven als offene Symbole dargestellt, die im Rahmen von Eichmessungen durch langsames Steigern der Heizleistung (ca. 5 W/min.) ermittelt wurden. Die Eichmessungen wurden bei der gleichen Reynolds-Zahl wie die im nächsten Kapitel ausgewerteten Messungen durchgeführt.

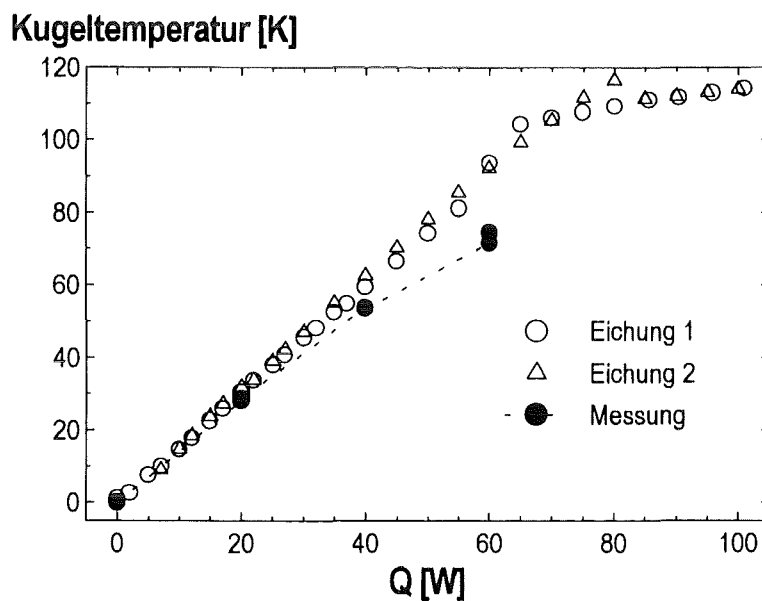


Bild 11: Temperatur im Innern des Kugelheizers

Deutlich ist das Abknicken der Kurven bei ca. 70 W zu erkennen. Dies läßt auf einen durch Blasensieden verbesserten Wärmeübergang schließen. In dem Bild sind zusätzlich die Temperaturen im Innern der Kugel für einige der im nächsten Kapitel ausgewerteten Messungen als geschlossene Symbole dargestellt. Diese sind im Gegensatz zu den Eichmessungen als Mittelwerte über die gesamte, mehrstündige Meßzeit zu verstehen. Die Rechtskrümmung der Kurve zeigt, daß sich für wachsende Heizleistung der



Wärmeübergang auf Grund des Auftriebseffekts an der Kugel bei ausgebildeter Strömung verbessert. Im Experiment wird stets als maximale Heizleistung 60 W gewählt.

Die temperaturabhängigen Stoffdaten von Wasser werden aus einer Datenbank von Hall et al. (1980) übernommen. Alle Messungen werden bei der konstanten Kreislauftemperatur von

$$\overline{T}_{\text{bulk}} = 18^\circ\text{C} = 291.15\text{K} \quad (3.5)$$

durchgeführt. Für diese Temperatur erhält man die folgenden Stoffeigenschaften und Kennzahlen:

Dichte: 
$$\rho = 998.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (3.6)$$

kinematische Viskosität: 
$$\nu = 1.061 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}, \quad (3.7)$$

Wärmekapazität: 
$$c_p = 4164 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}, \quad (3.8)$$

Wärmeleitfähigkeit: 
$$\lambda = 0.6045 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \quad (3.9)$$

thermischer Ausdehnungskoeffizient: 
$$\alpha = 0.0001979 \frac{1}{\text{K}}. \quad (3.10)$$

Die Prandtl-Zahl beträgt damit:

$$\text{Pr} = 7.30. \quad (3.11)$$

Die Reynolds-Zahl hat für die gewählte Anströmung (3.4) den Wert

$$\text{Re} = 669. \quad (3.12)$$

Bildet man die Reynolds-Zahl statt mit dem Kugel- mit dem Kanaldurchmesser, so erhält man für die Kanal-Reynolds-Zahl den Wert

$$\text{Re} = \frac{u_{\text{Bulk}} D}{\nu} = 8028. \quad (3.13)$$

Diese Kennzahl beschreibt die Charakteristik der ungestörten Strömung.

Für die vier untersuchten Heizleistungen erhält man die System-Temperaturdifferenzen, vgl. (2.62)

$$\Delta T(0W, 20W, 40W, 60W) = 0K, 7.22K, 14.44K, 21.67K. \quad (3.14)$$

Damit erhält man die Grashof-Zahlen gemäß (2.66) zu

$$Gr_{dQ}(0W, 20W, 40W, 60W) = 0, 1.25 \cdot 10^5, 2.5 \cdot 10^5, 3.75 \cdot 10^5, \quad (3.15)$$

beziehungsweise die Mischkonvektionsparameter:

$$\frac{Gr}{Re^2}(0W, 20W, 40W, 60W) = 0, 0.279, 0.557, 0.836. \quad (3.16)$$

Aus dem Mischkonvektionsparameter  $Gr/Re^2$  wird deutlich, daß die Auftriebskräfte die gleiche Größenordnung wie die Trägheitskräfte besitzen. Somit ist ein deutlicher Auftriebseffekt bei der Heizleistung von 60 W zu erwarten.

## 4. Meßergebnisse

Die Messungen werden für verschiedene dimensionslose Abstände ( $x/d$ ) und verschiedene Heizleistungen durchgeführt. Auf eine Variation der Reynolds-Zahl wird verzichtet. Die folgende Tabelle enthält die ausgewerteten Messungen, für welche jeweils ein Satz von Radialprofilen ermittelt worden ist:

( $x/d$ )	$\dot{Q} = 0W$	$\dot{Q} = 20W$	$\dot{Q} = 40W$	$\dot{Q} = 60W$
5		713	700	705
9.5	766			
10		712	683	704
15		717	699	709
20	767	714	698	706
30		716	701	708
32.6	768			
40		711	703	710
54.9	769			
60		734	733	732
70		737		735
71.25	770			
80			685	729
92	774			
100				730

Tabelle 5: Versuchsnummern der ausgewerteten Messungen

Da alle Meßreihen mit beheizter Kugel den gleichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten folgen, wird die Auswertung der Meßreihen 20 W und 40 W auf die unkommentierte Darstellung der Diagramme für die Meßreihe 40 W beschränkt. Diese sind im Anhang in den Bildern A2-A5 zu finden.

### 4.1. Diskussion der gemessenen Radialprofile

An Hand einer Auswahl von gemessenen Radialprofilen in verschiedenen Abständen über der Kugel werden die auftretenden Phänomene diskutiert. Die Darstellung der Radialprofile beschränkt sich auf die Messungen bei Zwangskonvektion ( $Q = 0W$ ) und prototypisch bei der maximalen Heizleistung von  $Q = 60W$ . In den Diagrammen sind als Symbole die Meßdaten und als Kurven Approximationsfunktionen eingezeichnet, die im nächsten Kapitel

ausführlich beschrieben werden. Diese Approximationsfunktionen ermöglichen die Rekonstruktion einer symmetrischen Strömung, die für die weitere Auswertung verwendet werden kann. Die Radialprofile werden über den ganzen Querschnitt dargestellt, um die in der Strömung vorhandenen Unsymmetrien zu zeigen. Da negative Radialkoordinaten  $r$  nicht definiert sind, wird als Abszisse in den Diagrammen die Horizontalkordinate  $y$  eingesetzt. Auch in den in diesem Kapitel verwendeten Gleichungen wird im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln die Horizontalkordinate  $y$  statt der Radialkoordinate  $r$  verwendet.

Im Folgenden wird versucht, die Form der Radialprofile der einzelnen Größen soweit wie möglich an Hand der Produktionsterme der jeweiligen Transportgleichung zu erklären. Die Produktionsterme werden in den Transportgleichungen nicht modelliert und können exakt aus den Meßwerten berechnet werden. Auch die typischen Merkmale der Profile werden somit durch mathematisch exakte Größen ohne Modellierungsansatz beschrieben. Selbstverständlich ist die Form dieser Profile auch durch die anderen Terme der Transportgleichung beeinflusst. Diese Einflüsse sollen kurz diskutiert werden. Durch Konvektion wird eine Größe mit der Strömungsgeschwindigkeit transportiert. In Bereichen mit großer Strömungsgeschwindigkeit findet deshalb mehr Konvektion statt als in stagnierenden Bereichen. Das Radialprofil wird dadurch verzerrt. Durch Diffusion wird eine Größe innerhalb der Strömung umverteilt. Das Profil gleicht sich aus. Die in den Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen und der turbulenten Wärmeströme auftretenden Korrelationen aus Druckschwankungen und Schwankungen der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturgradienten gleichen die Komponenten der turbulenten Normalspannung bzw. des turbulenten Wärmestroms einander an. Die Dissipation wirkt als Senkterme und reduziert somit die betrachtete Größe. Die Produktionsterme sind als Quellterme verantwortlich für die Entstehung von Maxima im Profil.

Diese Überlegungen werden kurz zusammengefaßt: Wo eine Strömungsgröße erzeugt wird, entsteht in deren Radialprofil eine Überhöhung. Dieses Profil wird durch Konvektion verzerrt, durch Diffusion geglättet, enthält durch die Korrelation der Schwankungen von Druck- und Gradienten von Geschwindigkeit und Temperatur Informationen der anderen Komponenten und wird durch Dissipation abgebaut.

#### **4.1.1. Zwangskonvektion**

Zunächst wird die bereits von verschiedenen Autoren untersuchte Zwangskonvektion beschrieben. Sie dient dem Vergleich zur Mischkonvektion. Außerdem sind an den einfacheren Profilen der Zwangskonvektion einzelne Phänomene leichter zu erklären als bei der Mischkonvektion. Die Messungen der Zwangskonvektion werden mit der für die

Mischkonvektion optimierten Ausrichtung durchgeführt. Diese Ausrichtung ist für den Fall der Zwangskonvektion nicht optimal, die Profile sind aus diesem Grund leicht unsymmetrisch.

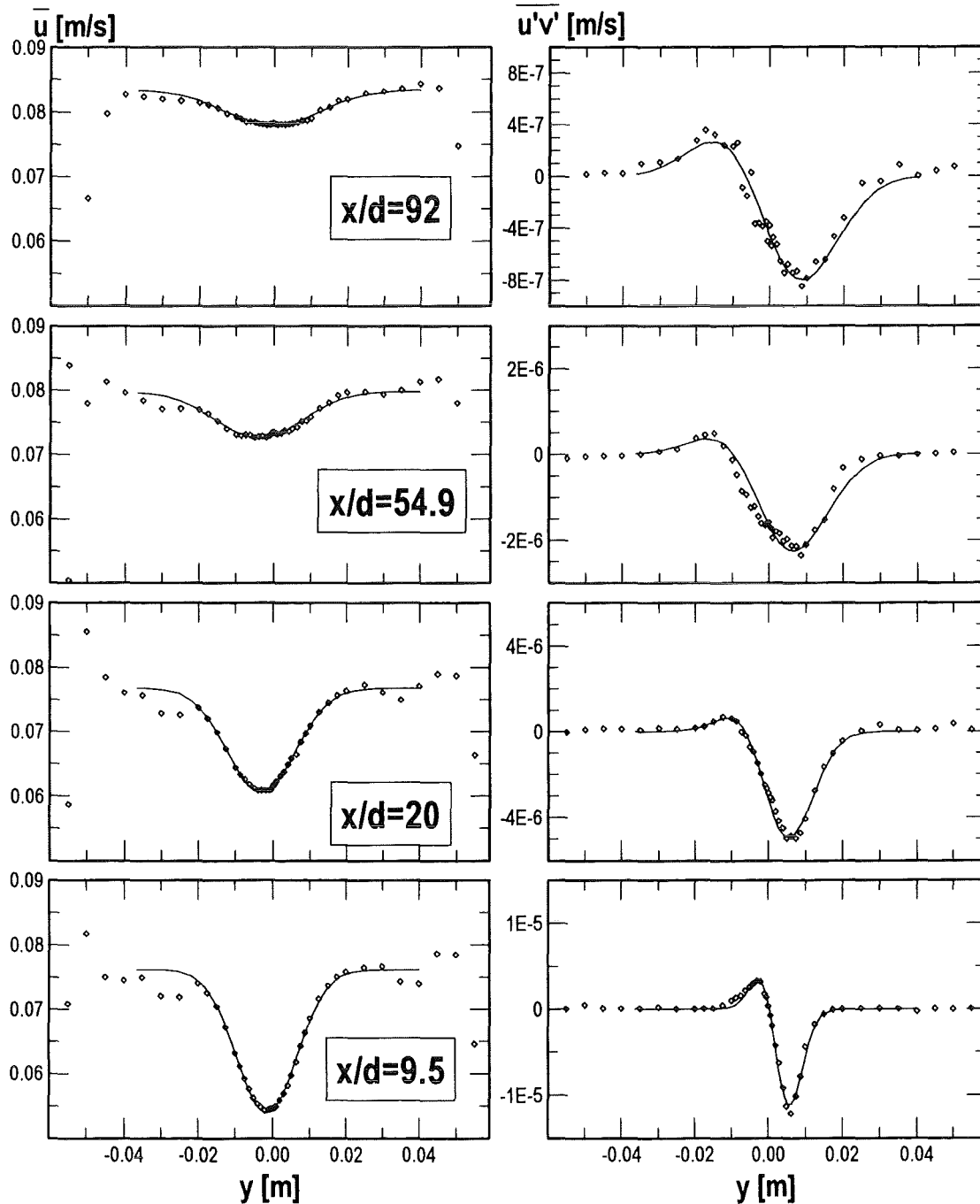


Bild 12: Axialgeschwindigkeit (links) und turbulente Schubspannung (rechts) bei Zwangskonvektion

In der linken Hälfte von Bild 12 ist die zeitlich gemittelte Axialgeschwindigkeit dargestellt. Diese wird im folgenden kurz mit Axialgeschwindigkeit bezeichnet. Ebenso wird mit der zeitlich gemittelten Radial- und der zeitlich gemittelten Umfangsgeschwindigkeit sowie der zeitlich gemittelten Temperatur verfahren. Das Profil besitzt in der Mitte eine ausgeprägte

Nachlaufdüse, die sich mit wachsendem Abstand von der Kugel auffüllt und gleichzeitig in radialer Richtung ausbreitet. Am linken und rechten Rand des Profils sind für kleine Abstände ( $x/d$ ) Überhöhungen der Geschwindigkeit zu erkennen. Diese werden durch den Spalt an der Außenseite des oberen Siebs hervorgerufen. Der entstehende Wandstrahl verhindert einerseits ein zu starkes Anwachsen der Wandgrenzschicht, führt jedoch andererseits zur beschriebenen Überhöhung der Geschwindigkeit. Mit der verwendeten Konfiguration (oberes Sieb ohne, unteres Sieb mit Außenring) wird der Wandeinfluß minimiert. Am linken Rand der Nachlaufdüse ist eine Störung zu erkennen, die durch eine Unebenheit im Gleichrichtersieb verursacht wird.

In der rechten Hälfte von Bild 12 ist die als turbulente Schubspannung wirkende Kreuzkorrelation aus Axial- und Horizontalgeschwindigkeit dargestellt. Sie ist in der linken Hälfte des Kanals positiv, in der rechten Hälfte negativ. Trotz der deutlichen Unsymmetrie der Profile ist die bei optimalen Strömungsverhältnissen vorhandene Punktsymmetrie zur Kanalmitte erkennbar. Ersetzt man, wie im Kapitel 3.1.2. "Verwendete Meßtechnik" beschrieben, die Horizontal- durch die Radialgeschwindigkeit, so werden alle Werte negativ und die Profile werden im Idealfall achsensymmetrisch zur Kanalmitte.

Die Produktion der turbulenten Schubspannung erfolgt im wesentlichen in Bereichen mit hohen Gradienten der zeitlich gemittelten Axialgeschwindigkeit,

$$P_{\bar{u}\bar{v}} = -\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Folglich besitzt die turbulente Schubspannung in diesen Bereichen jeweils einen Extremwert. Bei genauer Betrachtung der Profile der Axialgeschwindigkeit ist rechts von der Kanalmitte ein etwas größerer Geschwindigkeitsgradient vorhanden als links. In der Folge ist auch der Betrag der turbulenten Schubspannung rechts der Kanalmitte größer als links.

Die Meßwerte für die zeitlich gemittelte Radialgeschwindigkeit  $\bar{v}$  sind durch starke Streuung fehlerbehaftet. Dies liegt an dem sehr großen Verhältnis von Axial- zu Radialgeschwindigkeit. Bei der verwendeten Laser-Doppler-Meßtechnik muß ein Partikel, welches Träger der Geschwindigkeitsinformation ist, eine Mindestanzahl von Interferenzstreifen durchqueren, um ein gültiges Signal zu liefern. Die große Axialgeschwindigkeit ermöglicht zwar im zugehörigen Streifensystem genügend Durchquerungen, erlaubt aber andererseits in der horizontalen Richtung nur wenige Durchquerungen. Dies führt zur recht ungenauen Frequenzbestimmung und als Folge zur Streuung beim horizontalen Signal. Zudem wird schon bei leichter Fehljustierung ein merklicher Anteil der viel größeren Axialgeschwindigkeit in die horizontale Geschwindigkeit eingestreut. So reicht zum Beispiel bei einem Geschwindigkeitsverhältnis von 100:1 bereits eine Fehljustierung der

Meßapparatur von  $0.1^\circ$  aus, um einen systematischen Fehler von 17% zu erzeugen. Die Beziehung

$$u \sin 0.1^\circ + \frac{u}{100} \cos 0.1^\circ \approx 1.17u \quad (4.2)$$

macht dies deutlich. Die Radialgeschwindigkeit ist auch aus der Kontinuitätsgleichung bei bekannter Axialgeschwindigkeit bestimmbar. Auf die Auswertung der Radialgeschwindigkeit wird deshalb verzichtet, die Profile sind für Zwangs- und Mischkonvektion im Anhang, Bild A6, dargestellt..

Die turbulenten Schwankungen der Geschwindigkeit in den beiden Richtungen sind im Gegensatz zu den zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten von gleicher Größenordnung, so daß sich hier der Winkelfehler deutlich weniger bemerkbar macht. Die RMS-Werte der Axial- und Radialgeschwindigkeit sind in Bild 13 dargestellt. Alle Profile besitzen eine M-Form unterschiedlich starker Ausprägung. Es findet sich in der Mitte ein lokales Minimum, etwas außerhalb der Mitte, in dem Bereich des größten Geschwindigkeitsgradienten, ein Maximum und im Außenbereich ein Abfall auf einen konstanten Wert. Der konstante Wert im Außenbereich ändert sich mit  $(x/d)$  nicht. Für nachfolgende Untersuchungen darf er jedoch nicht vernachlässigt werden, da die Überhöhung in der Mitte mit wachsendem  $(x/d)$  abnimmt und für große  $(x/d)$  die gleiche Größenordnung für die Überhöhung in der Mitte und für den konstanten Wert im Außenbereich auftritt. Es ist deutlich zu erkennen, daß der RMS-Wert der Axialgeschwindigkeit stets etwas größer ist als der RMS-Wert der Radialgeschwindigkeit.

Die Produktion der Varianz  $\overline{u'^2}$ , also des Quadrats des in Bild 13 dargestellten RMS-Werts, erfolgt gemäß

$$P_{\overline{u'^2}} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (4.3)$$

Betrachtet man (4.3) zusammen mit den Profilen von Axialgeschwindigkeit und turbulenter Schubspannung in Bild 12, so erwartet man eine prinzipielle Symmetrie des Produktionsterms bezüglich der Mittellinie. Die Transportgleichung der Varianz der Radialgeschwindigkeit enthält kein Produktionsglied. Für die Form des Profils ist deshalb der Umverteilungsmechanismus der Druck-Scher-Korrelation verantwortlich. Damit wird die Form des Profils der Varianz der Axialgeschwindigkeit der Varianz der Horizontalgeschwindigkeit aufgeprägt. Sowohl die in den Profilen der RMS-Werte vorhandenen Unsymmetrien als auch die leichten Unterschiede zwischen der Form der Profile links und rechts in Bild 13 müssen als meßtechnische Unsicherheiten gewertet werden.

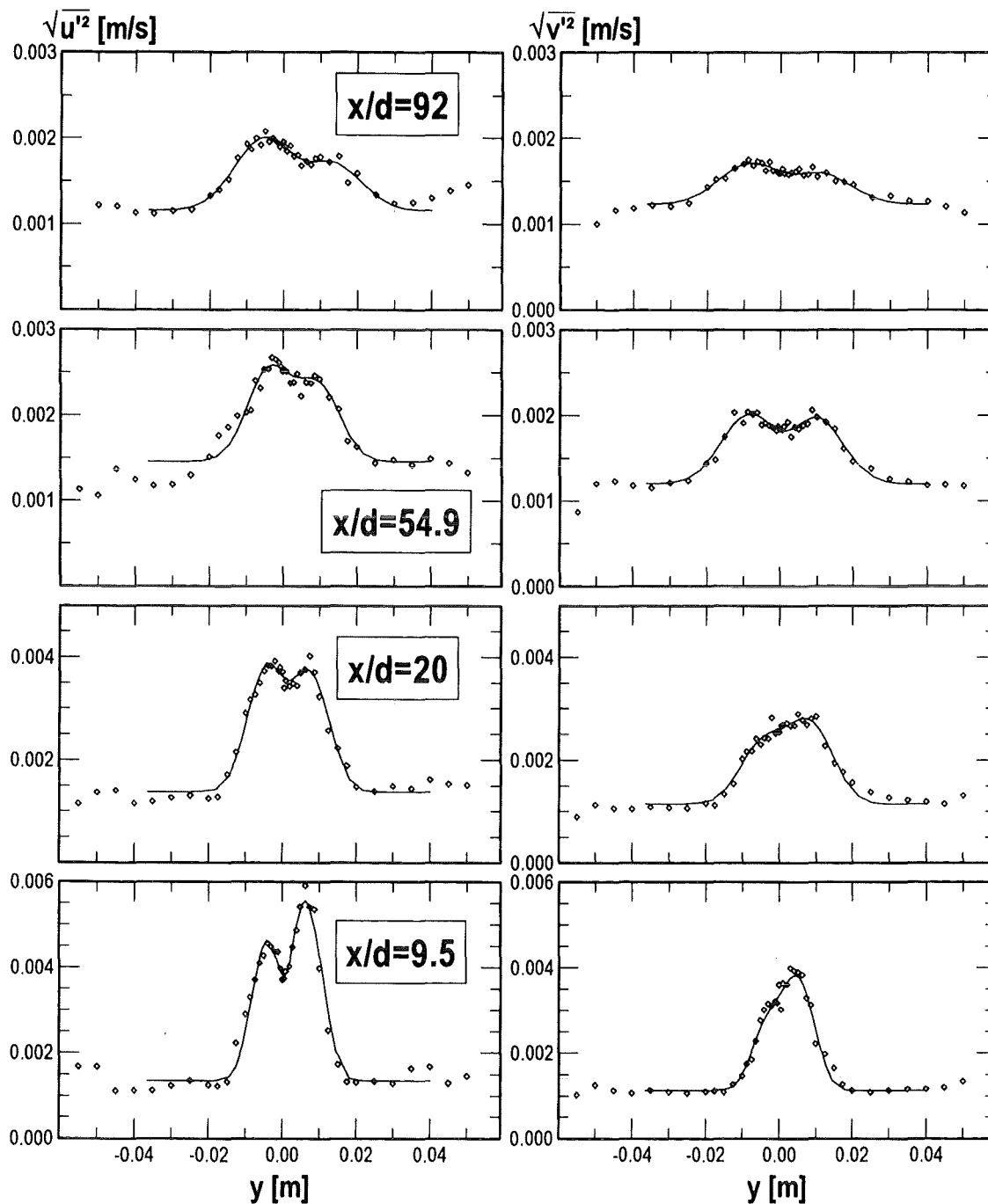


Bild 13: RMS-Werte von Axial- (links) und Radialgeschwindigkeit (rechts) bei Zwangskonvektion

Die zur Turbulenzmodellierung benötigte kinetische Energie der Turbulenz  $k$  ist die halbe Summe der drei Normalspannungen. Zur Bestimmung von  $k$  ist deshalb auch die Messung der Umfangsgeschwindigkeit notwendig. Die Messung der Radial- und der Umfangskomponente der Geschwindigkeit kann im bestehenden Versuchsaufbau nicht gleichzeitig durchgeführt werden. Eine zeitlich nachfolgende Messung der Umfangskomponente würde eine Verdopplung des Meßaufwands bedeuten. Bild 14 zeigt das Ergebnis von Messungen der Umfangskomponente an einigen Stellen für zwei



verschiedene ( $x/d$ ) im Vergleich mit Messungen der Radialgeschwindigkeit. Aufgetragen sind jeweils mit der Außengeschwindigkeit normierte Meßwerte.

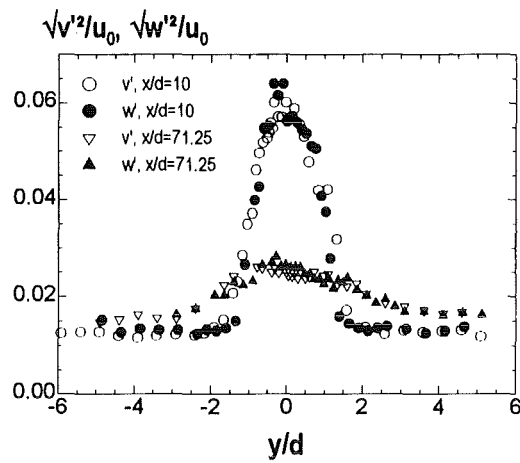


Bild 14: Radialprofile der RMS-Werte von Radial- (offene Symbole) und Umfangsgeschwindigkeit (geschlossene Symbole) bei Zwangskonvektion

Aus den Messungen kann in guter Näherung

$$\overline{w'^2} \approx \overline{v'^2} \tag{4.4}$$

gefolgert werden. Die Berechnung von  $k$  kann damit nach der Vorschrift

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + 2\overline{v'^2}) \tag{4.5}$$

erfolgen. Im weiteren wird das Verhalten von  $k$  nicht separat beschrieben. Die Gesetze für  $k$  können aus den Gesetzen der RMS-Werte von Axial- und Radialgeschwindigkeit unmittelbar abgeleitet werden.

#### 4.1.2. Mischkonvektion

Die Profile bei Mischkonvektion werden auf die gleiche Weise dargestellt wie bei Zwangskonvektion. Bei Mischkonvektion werden die Turbulenzgrößen, außer durch Gradienten von Axialgeschwindigkeit und Temperatur, auch durch Auftriebseinfluß produziert. Als erstes werden deshalb die Temperatur und die mit der Temperatur gebildeten Korrelationen diskutiert.

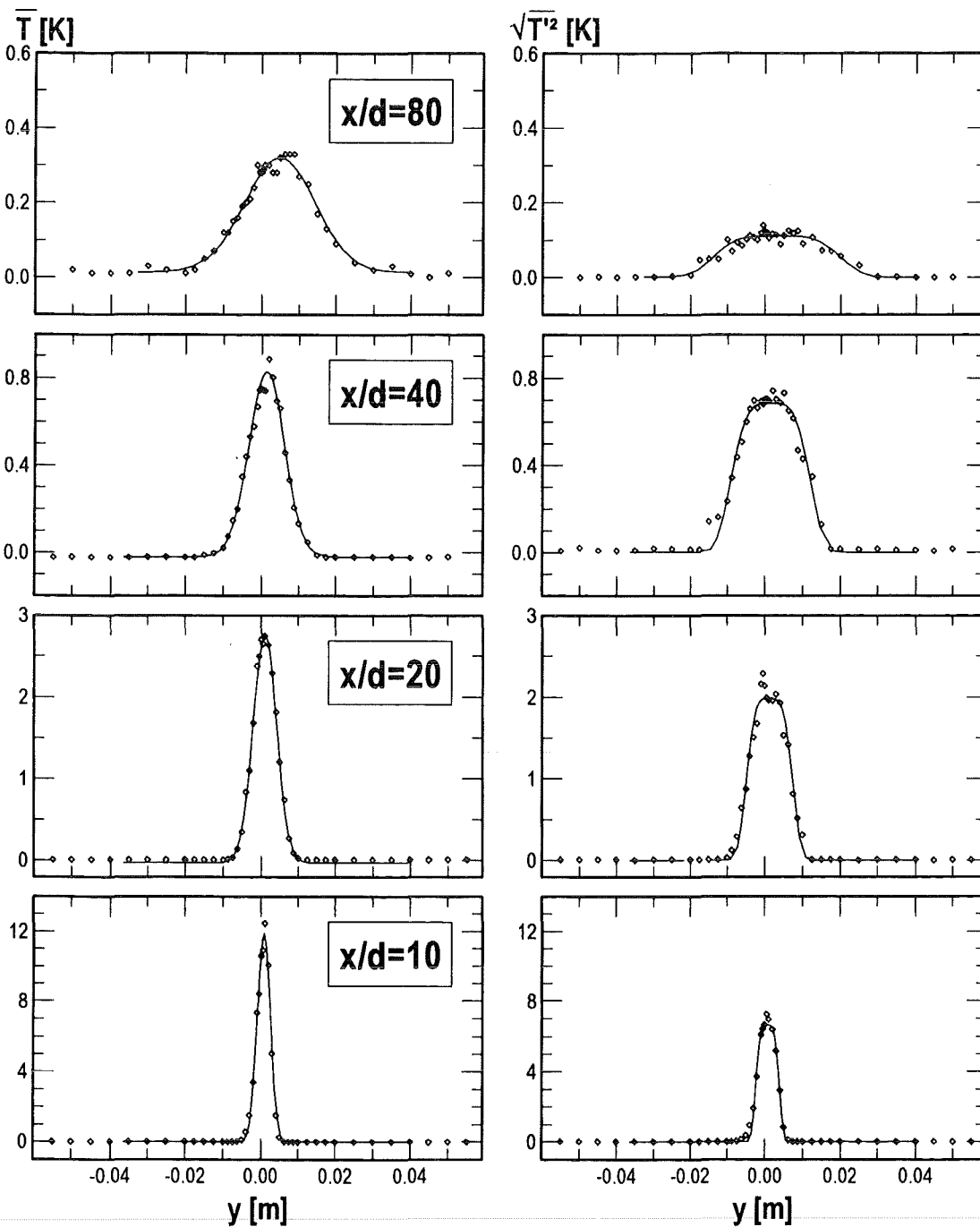


Bild 15: Temperatur (links) und RMS-Wert der Temperatur (rechts) bei Mischkonvektion

Bild 15 zeigt links die Temperatur und rechts den RMS-Wert der Temperatur. Das Temperaturprofil kann offensichtlich in guter Näherung durch eine Glockenkurve nach Gauß angenähert werden. In der Mitte des Kanals hat das Profil einen Maximalwert, es fällt dann in radialer Richtung ( $x/d$ ) sehr schnell auf den Wert Null ab. Der Maximalwert der Temperatur nimmt in axialer Richtung schnell ab. In radialer Richtung verbreitert sich das Profil für wachsende ( $x/d$ ) deutlich schneller als die Geschwindigkeit. Das gleiche Verhalten findet man für den RMS-Wert der Temperatur. Hier erscheint jedoch das Profil im Bereich des Maximums flacher als das Temperaturprofil. Der Maximalwert des RMS-Wert-Profiles ist stets kleiner als der Maximalwert des Temperaturprofils.

Die Varianz der Temperatur und somit auch deren RMS-Wert wird ausschließlich durch den Temperaturgradienten produziert. Es gilt hierfür

$$P_{T^2} = -2\overline{v'T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}. \quad (4.6)$$

Eine Produktion durch Auftrieb existiert hier nicht. Die Varianz der Temperatur wird also dort am stärksten produziert, wo der größte Temperaturgradient oder wo ein Extremum des radialen Wärmestroms vorliegt. Ein M-förmiges Profil, ähnlich dem bei der Zwangskonvektion gezeigten, ist deshalb zu erwarten. In der Literatur wird der RMS-Wert der Temperatur bei Auftriebsstrahlen oft mit Kurven approximiert, die eine schwache M-Form, also mit nur leichter Absenkung in der Mitte, besitzen. Die Profile in Bild 15 zeigen dieses Verhalten nur in Form eines deutlich abgeflachten Maximums. Dafür verantwortlich sind die Schlankheit des Temperaturprofils und der Einfluß der molekularen Diffusion infolge der kleinen Reynolds-Zahl. Beide Umstände führen zu einer Glättung des Profils im mittleren Bereich.

Bild 16 zeigt links den axialen ( $\overline{u'T'}$ ), rechts den radialen ( $\overline{v'T'}$ ) turbulenten Wärmestrom. Der axiale Wärmestrom ist in der Mitte, dem Ort größten Auftriebs, maximal und fällt nach außen steil ab. Für kleine ( $x/d$ ) findet sich ein schwaches Minimum beidseitig des Abfalls mit negativen Werten. Dieser Bereich mit negativen axialen Wärmeströmen ist bei den Messungen mit  $Q=60$  W schwach ausgeprägt und wird bei der weiteren Auswertung nicht berücksichtigt. Bei den im Anhang gezeigten Messungen für niedrige Heizleistung ist die Zone mit negativem axialem Wärmestrom hingegen deutlicher erkennbar.

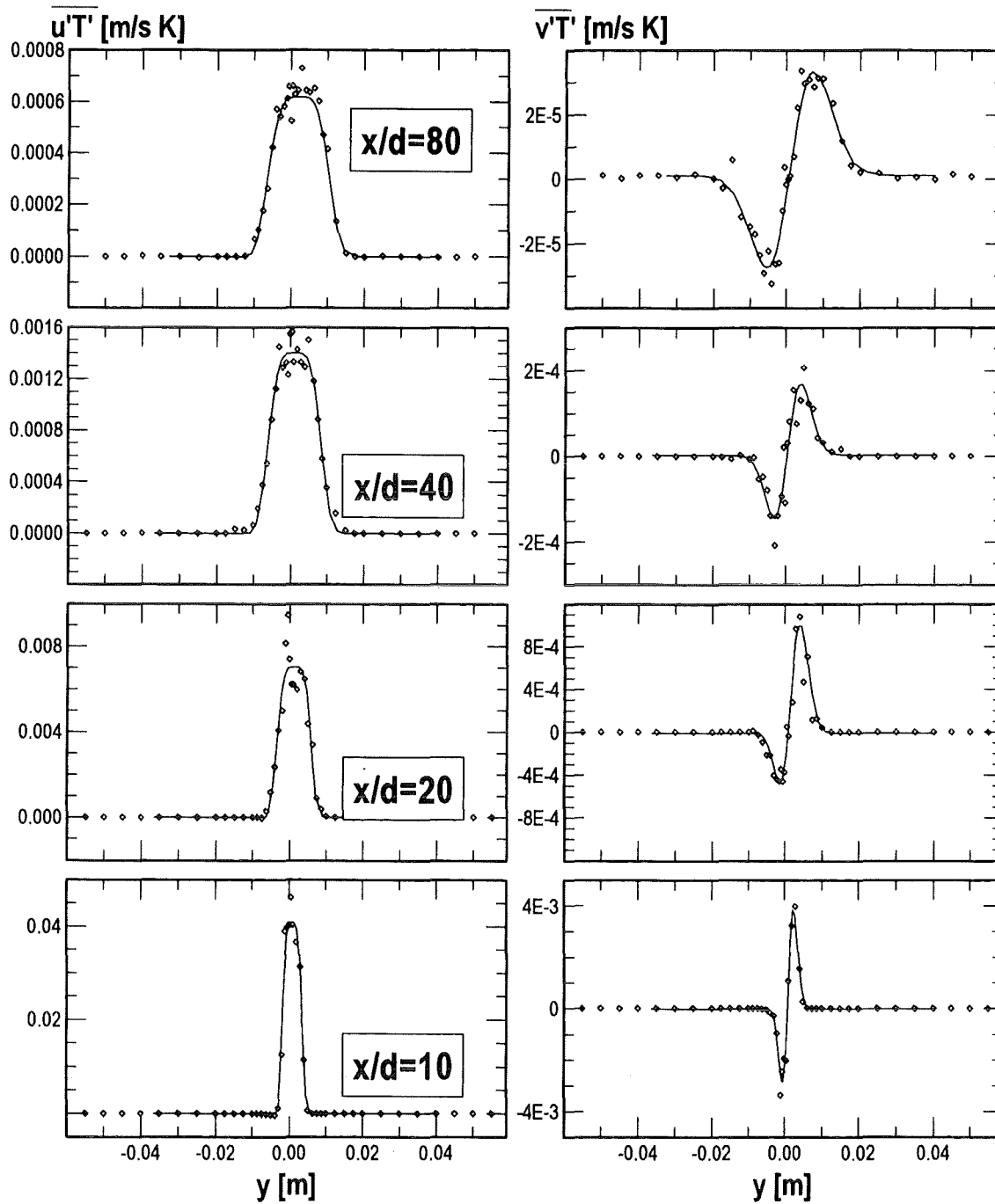


Bild 16: Axialer (links) und radialer (rechts) turbulenter Wärmestrom bei Mischkonvektion

Die Produktion von  $\overline{u'T'}$  erfolgt zum einen durch Gradienten der Hauptströmung und zum anderen durch den Auftrieb. Die Terme sind durch

$$P_{\overline{u'T'}} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - \overline{v'T'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \quad (4.7)$$

$$G_{\overline{u'T'}} = \alpha g \overline{T}^2.$$

gegeben. Auf Grund des komplexen Aufbaus der Produktionsglieder sind beide Ausdrücke beispielhaft für  $(x/d)=20$  in Bild 17 dargestellt. Deutlich sind die unterschiedlichen Profilformen der beiden Produktionsterme zu erkennen. Die Produktion durch Auftrieb überwiegt offensichtlich und ist deshalb verantwortlich für die Form des Profils des axialen Wärmestroms  $\overline{u'T'}$ .

Der radiale Wärmestrom  $\overline{v'T'}$  in Bild 16 verschwindet in der Mitte, steigt mit wachsendem Radius beidseitig auf einen Maximalwert an und fällt im Außenbereich wieder auf null ab. Er folgt also dem negativen Gradienten der Temperatur, wie es das Produktionsglied in Gleichung (2.17)

$$P_{v'T'} = -\overline{v'^2} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}, \quad (4.8)$$

erwarten läßt. Der Maximalwert von  $\overline{u'T'}$  ist um etwa eine Größenordnung größer als der Maximalwert von  $\overline{v'T'}$ . Die klassische Turbulenzmodellierung mit dem Gradientenansatz (2.28), der  $\overline{u'T'}$  mit dem (kleinen) axialen Temperaturgradienten in Relation setzt, unterschätzt also den axialen Wärmestrom. Für die untersuchte Strömung führt dies zu groben Fehlern bei der Berechnung von  $\overline{u'T'}$ . Stattdessen ist zur Modellierung von  $\overline{u'T'}$  ein Ansatz in der Art zu wählen, wie er vom ASM in Gleichung (2.47) verwendet wird.

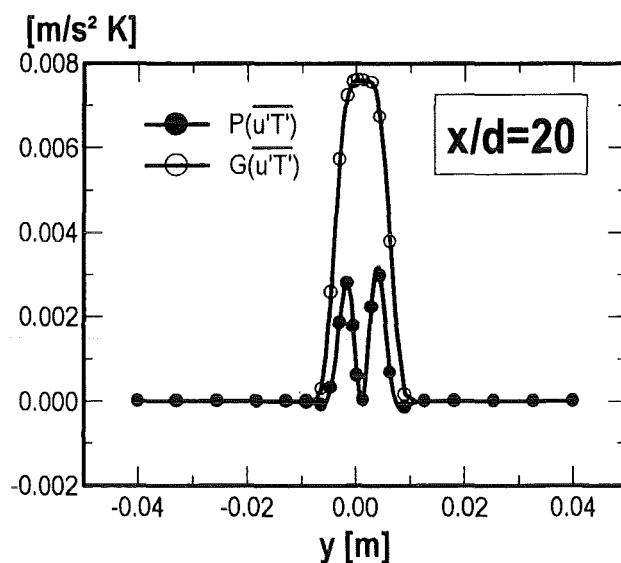


Bild 17: Produktionsglieder des axialen Wärmestroms im Vergleich: Produktion durch turbulente Schubspannungen  $P$ , Produktion durch Auftrieb  $G$

In Bild 18 ist die Axialgeschwindigkeit  $\overline{u}$  und die turbulente Schubspannung  $\overline{u'v'}$  dargestellt. Wie bei der Zwangskonvektion ist die sich ausbreitende Nachlauf-delle im Profil der Axialgeschwindigkeit  $\overline{u}$  zu erkennen. Innerhalb der Nachlauf-delle bildet sich zusätzlich ein schmaler Auftriebsstrahl aus. Der Auftriebsstrahl hat bereits für kleine  $(x/d)$  seine

maximale Geschwindigkeitsamplitude erreicht, so daß im Meßbereich  $10 \leq (x/d) \leq 80$  der Abfall der Geschwindigkeitsamplitude des Auftriebsstrahls erkennbar ist.

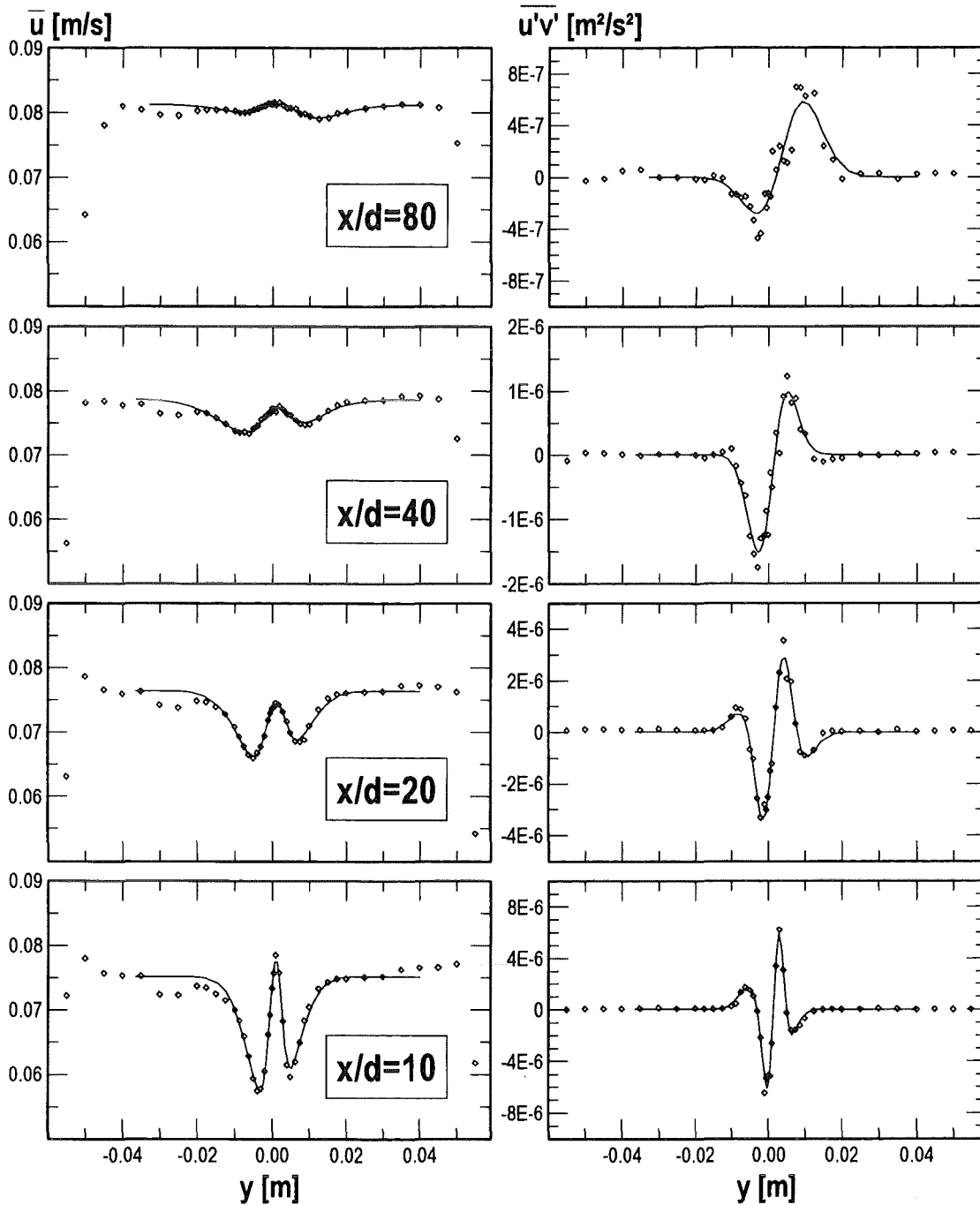


Bild 18: Axialgeschwindigkeit (links) und turbulente Schubspannung (rechts) bei Mischkonvektion

Darüber hinaus zeigt Bild 18 und noch deutlicher die quantitative Untersuchung des Ausbreitungsverhaltens im nächsten Kapitel, daß sich der Auftriebsstrahl stärker in radialer Richtung ausbreitet als der Nachlauf. Der Auftriebsstrahl wird durch das Temperaturfeld erzeugt. Die Breite des Temperaturprofils kann auch als thermische Grenzschichtbreite interpretiert werden. Ein Vergleich des Temperaturprofils in Bild 15 mit dem  $\bar{u}$ -Profil in

Bild 18 zeigt, daß das Temperaturprofil für alle  $(x/d)$  ungefähr die gleiche Breite besitzt wie der durch den Auftriebseffekt erzeugte innere Bereich des Profils der Axialgeschwindigkeit. Damit hat also dieser Auftriebsbereich in etwa die Breite der thermischen Grenzschicht. Das Profil der Axialgeschwindigkeit des reinen Nachlaufs hingegen hat ausschließlich kinematische Ursachen und kann in seiner Breite als kinematische Grenzschicht interpretiert werden.

In einer laminaren Strömung läßt sich mit Hilfe der Prandtl-Zahl das Verhältnis von kinematischer zu thermischer Grenzschicht gemäß

$$\frac{\delta}{\delta_{\text{thermisch}}} = \sqrt{\text{Pr}} \quad (4.9)$$

abschätzen. Die im Experiment vorliegende Prandtl-Zahl von Wasser ist  $\text{Pr}=7.3$  und erklärt somit die im Vergleich zur Nachlaufzone deutlich schmalere Auftriebszone. Die Strömung ist also offensichtlich durch die recht kleine Reynolds-Zahl noch deutlich von molekulare Austauschvorgängen geprägt. Die turbulente Prandtl-Zahl hingegen liegt etwa bei eins, so daß turbulente Austauschprozesse für diese unterschiedliche Breite nicht verantwortlich sein können.

Auch bei dieser Meßreihe ist im Übrigen für große  $(x/d)$  der beschriebene Wandeinfluß zu erkennen, sowie die ebenfalls beschriebene Störung am linken Rand des Nachlaufs.

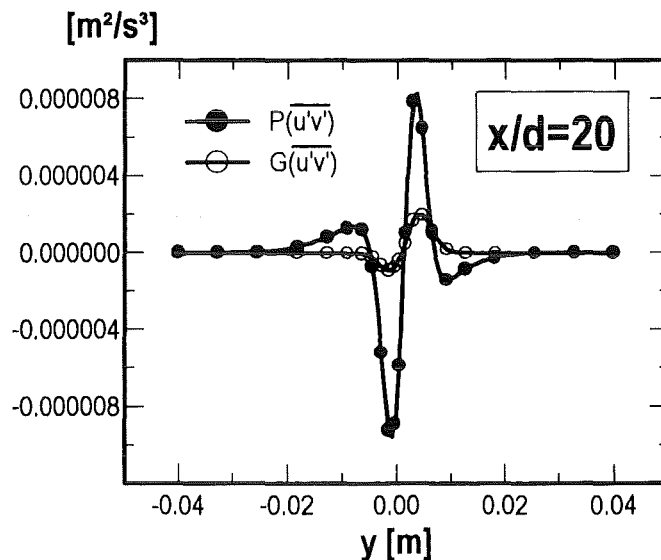


Bild 19: Produktionsglieder der turbulenten Schubspannung im Vergleich: Produktion durch turbulente Schubspannungen  $P$ , Produktion durch Auftrieb  $G$

Die turbulente Schubspannung wird produziert durch den Gradienten der Axialgeschwindigkeit sowie durch den Auftriebseinfluß des horizontalen Wärmestroms. Die entsprechenden Produktionsterme sind durch

$$P_{u'v'} = -\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (4.10)$$

$$G_{u'v'} = \alpha g \overline{v' T}$$

gegeben. Auch für die turbulente Schubspannung  $\overline{u'v'}$  sind die Produktionsglieder beispielhaft für  $(x/d)=20$  in Bild 19 dargestellt.

Das Profil der turbulenten Schubspannung folgt für kleine  $(x/d)$  im wesentlichen dem Gradienten des durch das Auftreten des Auftriebsstrahls gegenüber der Zwangskonvektion deutlich veränderten Geschwindigkeitsprofils  $\bar{u}(y)$  und enthält deshalb zwei zusätzliche Extremwerte. Die äußeren Extremwerte werden hierbei durch den Nachlauf, die inneren Extremwerte werden durch den Auftriebsstrahl erzeugt. Die inneren Extremwerte sind deutlich größer, was dem größeren radialen Geschwindigkeitsgradienten im Auftriebsstrahl und auch dem überlagerten Auftriebseinfluß des horizontalen Wärmestroms zuzuschreiben ist, vgl. Bild 19. Für große  $(x/d)$  tritt der Nachlaufanteil zunehmend in den Hintergrund, so daß die äußeren Extrema verschwinden. Somit verbleiben nur zwei Extrema, welche durch den Auftriebsstrahl bedingt sind. Für große  $(x/d)$  erfolgt die Produktion größtenteils durch Auftrieb, da das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{u}(y)$  nahezu ausgeglichen ist und der horizontale Wärmestrom  $\overline{v' T}$  noch ein ausgeprägtes Profil besitzt. Der zur Turbulenzmodellierung in der Regel verwendete Gradientenansatz nach (2.26) darf also auch hier nicht verwendet werden.

In Bild 20 sind die gemessenen Profile der RMS-Werte der Geschwindigkeit gezeigt. Die radialen Profile der RMS-Werte zeigen bei Auftriebseinfluß starke Veränderungen gegenüber der Zwangskonvektion (vgl. Bild 13). Für kleine  $(x/d)$  ist besonders bei dem RMS-Wert der Axialgeschwindigkeit noch die ursprüngliche Form des reinen Nachlaufs zu erkennen, in dessen Mitte sich jedoch ein ausgeprägtes Maximum als Folge des Auftriebsstrahls ausbildet. Dieses Maximum breitet sich in Radialrichtung für wachsendes  $(x/d)$  schneller aus als der Nachlauf. Somit verschwinden die beiden Seitenmaxima, welche im reinen Nachlaufprofil präsent sind.

Die Produktionsterme der Varianz der Axialgeschwindigkeit sind durch

$$P_{u'^2} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (4.11)$$

$$G_{u'^2} = 2\alpha g \overline{u' T}$$

gegeben. Sie sind in Bild 21 exemplarisch für  $(x/d)=20$  dargestellt. Wie beim axialen Wärmestrom erweist sich die auftriebsbedingte Produktion als dominant.



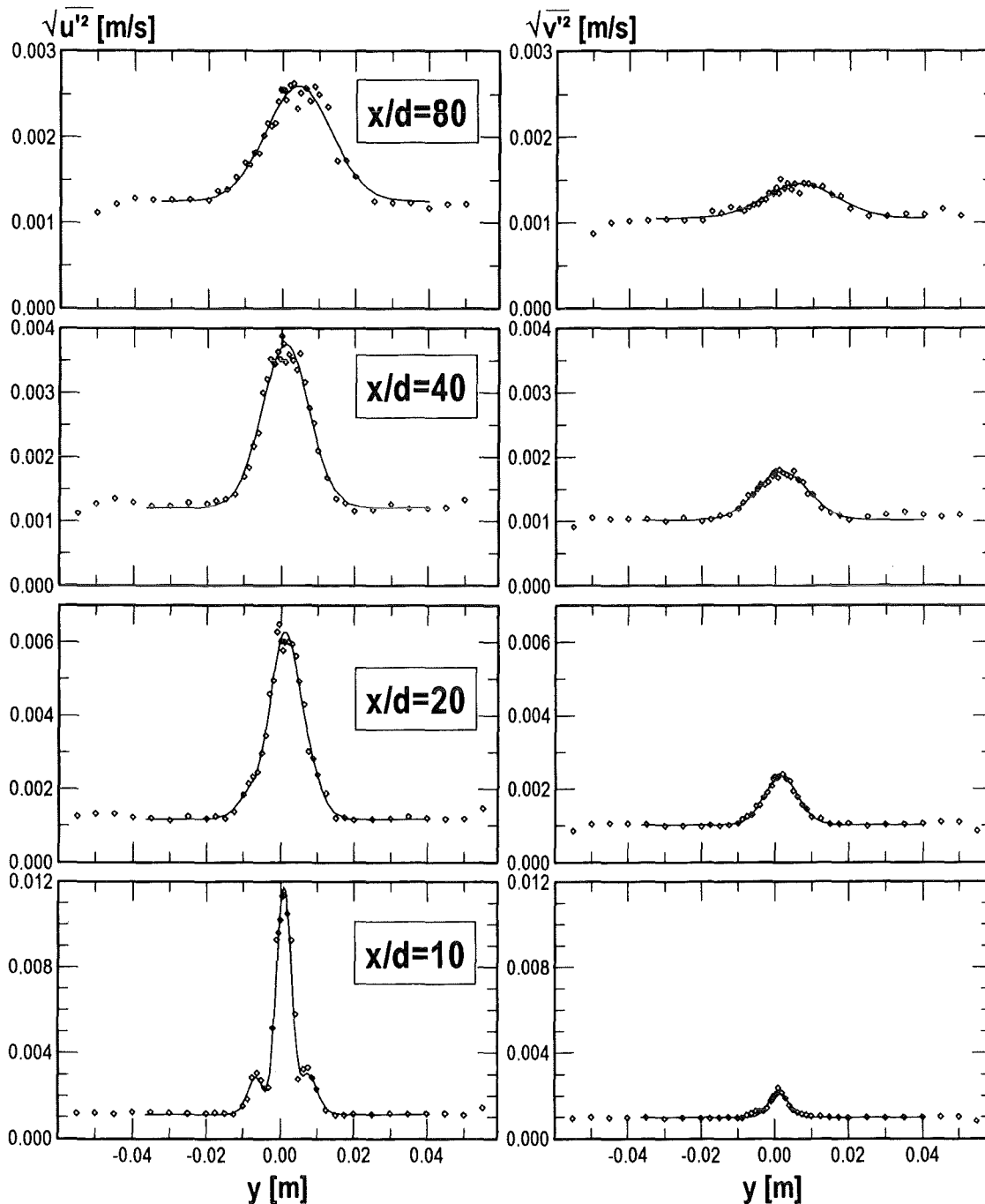


Bild 20: RMS-Wert von Axial- (links) und Radialgeschwindigkeit (rechts) bei Mischkonvektion

Die Varianz der Radialgeschwindigkeit besitzt auch im Fall der Mischkonvektion keinen Produktionsterm und ist immer etwas kleiner als im Fall der Zwangskonvektion. Die Schwankungen der Radialgeschwindigkeit werden bei Auftriebseinfluß zugunsten der Schwankungen der Axialgeschwindigkeit abgebaut. Mit wachsendem  $(x/d)$  und sinkender Auftriebsproduktion durch die abnehmende Temperaturdifferenz zur Umgebung nähern sich die Amplituden der Profile der RMS-Werte von Radial- und Axialgeschwindigkeit einander wieder an.

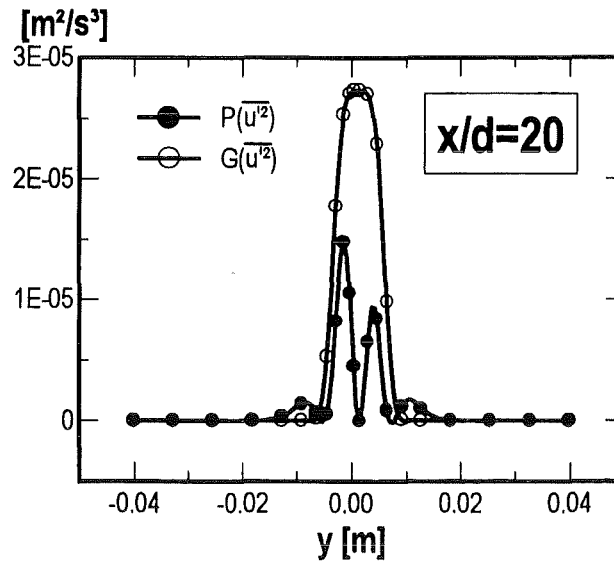


Bild 21: Produktionsglieder der Varianz der Axialgeschwindigkeit im Vergleich: Produktion durch turbulente Schubspannungen  $P$ , Produktion durch Auftrieb  $G$

Beide RMS-Werte verschwinden im Außenbereich nicht, sondern fallen im ganzen  $(x/d)$ -Bereich auf den gleichen konstanten Wert ab, wie schon bei reiner Zwangskonvektion beobachtet. Diese Außenturbulenz besitzt für große Abstände und abnehmende Profilamplituden einen deutlichen Einfluß.

## 4.2. Bestimmung von Gesetzmäßigkeiten für die Zustandsgrößen

Nach der qualitativen Beschreibung der wesentlichen Phänomene in den gemessenen Profilen beschreibt das folgende Kapitel quantitativ die Entwicklung aller gemessenen Strömungsgrößen mit wachsendem Abstand von der Kugel.

### 4.2.1. Einführung von Formfunktionen und Amplitudenfunktionen

Auf Grund der großen Anzahl an gemessenen Größen wird bei der Auswertung der Messungen jede relevante Strömungsgröße durch eine möglichst einfache Funktion approximiert. Dies erfolgt formal durch die Anwendung von Regressionsanalysen. Für die lineare Regressionsanalyse wird als Ansatzfunktion eine Geradengleichung (Regressionsgerade) verwendet, während für die nichtlineare Regressionsanalyse im Prinzip jede beliebige Ansatzfunktion verwendet werden kann. Durch den Einsatz von Koordinatentransformationen kann die lineare Regressionsanalyse auch zur approximativen Bestimmung von nichtlinearen Zusammenhängen eingesetzt werden. Zum Beispiel entsteht nach Logarithmierung des Potenzgesetzes

$$y = c_1 x^{c_2} \quad (4.12)$$

eine lineare Beziehung,

$$y^* = \ln y = \ln c_1 + c_2 \ln x = c_1^* + c_2^* x^* \quad (4.13)$$

Die Änderungen der Strömungsgrößen in axialer Richtung sind im Vergleich zu den Änderungen sehr langsam. Dies hat seine Ursache im Grenzschichtcharakter der untersuchten Strömung. Eine Regressionsanalyse in gleichzeitig radialer und axialer Richtung ist deshalb nicht erforderlich. Stattdessen werden zunächst mit Hilfe einer nichtlinearen Regressionsanalyse die gemessenen Radialprofile der einzelnen Strömungsgrößen durch eine Formfunktion approximiert. Im Anschluß daran wird die Änderung der in den Formfunktionen enthaltenen charakteristischen Parameter in axialer Richtung nach einer linearen Regressionsanalyse durch Potenzgesetze erfaßt. Diese Potenzgesetze können als Amplitudenfunktionen aufgefaßt werden. Mit dieser Vorgehensweise wird nach Ermittlung der Amplituden- und Formfunktionen die Bestimmung jeder relevanten Strömungsgröße an jedem Ort möglich.

Die gemessenen Profile legen nahe, zur Beschreibung der Radialprofile der primären Strömungsgrößen Formfunktionen nach Art der Glockenkurven von Gauß zu verwenden. Diese sind durch Amplituden und Halbwertsradien charakterisiert, d.h. es gilt

$$\text{Formfunktion}(x, y) = \text{Amplitude}(x) e^{-\ln 2 \left( \frac{y}{\text{Halbwertsradius}(x)} \right)^2} \quad (4.14)$$

Gegenüber Polynomen oder gebrochen-rationalen Funktionen, die zum Beispiel von Shabbir & George (1994) zur Approximation der gemessenen Profile turbulenter Korrelationen verwendet werden, bietet diese Klasse von Funktionen den Vorteil, daß die Werte für große Argumente  $y$  im Außenfeld verschwinden.

Die turbulente Schubspannung und der radiale turbulente Wärmestrom folgen in erster Näherung den radialen Gradienten von mittlerer Geschwindigkeit und mittlerer Temperatur. Da diese Größen mit Glockenkurven approximiert sind, werden konsistenterweise Schubspannung und Wärmestrom mit Formfunktionen in Form der ersten Ableitung einer Glockenkurve approximiert. Mit ähnlichen Überlegungen können auch die übrigen Turbulenzkorrelationen bezüglich ihrer Formfunktionen festgelegt werden. Diese Ansätze sind im Hinblick auf möglichst gute Approximation der Meßdaten und auf die Einfachheit der Formfunktion gewählt. Jede Regressionsanalyse ist nur für Formfunktionen mit einer beschränkten Anzahl von Parametern sinnvoll. Die Grenzen werden inhärent durch die endliche Anzahl von gemessenen Profilmittelpunkten vorgegeben.

Die Formfunktionen sind in Tabelle 6 für alle relevanten Strömungsgrößen dargestellt. Als Horizontalkoordinate wird hier  $y$  verwendet, da die Regression über den ganzen Querschnitt durchgeführt wird, negative Radialkoordinaten  $r$  aber nicht definiert sind. Die in den Profilen auftretenden Unsymmetrien werden in den zugehörigen Formfunktionen durch die Verschiebeparameter  $y_{0i}$  berücksichtigt. Zur Generierung von achsensymmetrischen Profilen sind deshalb lediglich die Verschiebeparameter  $y_{0i}$  in den Formfunktionen zu null zu setzen. Die in den Formfunktionen der Turbulenzkorrelationen auftretenden Parameter beschreiben zum Teil nur indirekt charakteristische Eigenschaften des Profils. Zur Darstellung der axialen und radialen Entwicklung der Korrelationen werden deshalb Umrechnungen notwendig, welche einen Zusammenhang zwischen Parameter und Charakteristiken herstellen. Als Charakteristiken werden insbesondere Extremwerte, radiale Positionen der Extremwerte und Halbwertsradien betrachtet. Unter einem Halbwertsradius wird der Wert  $y$  verstanden, bei dem der Betrag einer Größe auf den halben Wert ihres Extremwerts abgefallen ist.

$\bar{u}$	$u_0 - u_N e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0N}}{r_{0.5N}} \right)^2} + u_A e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0A}}{r_{0.5A}} \right)^2}$
$\bar{T}$	$T_{\max} e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0T}}{r_{0.5T}} \right)^2}$
$\overline{u'v'}$	$-uv_N (y - y_{01uvN}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02uvN}}{r_{0.5uvN}} \right)^2} + uv_A (y - y_{01uvA}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02uvA}}{r_{0.5uvA}} \right)^2}$
$\overline{v'T'}$	$vT_1 (y - y_{01vT}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02vT}}{r_{0.5vT}} \right)^2}$
$\overline{u'T'}$	$uT_1 (y - y_{01uT})^2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02uT}}{r_{0.5uT}} \right)^2} + uT_2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0uT2}}{r_{0.5uT2}} \right)^4}$
$\sqrt{u'^2}$	$urms_0 + urms_1 \left( (y - y_{01urms})^2 + C_{urms} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02urms}}{r_{0.5urms}} \right)^2} + urms_2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{03urms}}{r_{0.5urms}} \right)^2}$
$\sqrt{v'^2}$	$vrms_0 + vrms_1 \left( (y - y_{01vrms})^2 + C_{vrms} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{02vrms}}{r_{0.5vrms}} \right)^2} + vrms_2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{03vrms}}{r_{0.5vrms}} \right)^2}$
$\sqrt{T'^2}$	$Trms_{\max} e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0Trms}}{r_{0.5Trms}} \right)^4}$

Tabelle 6: Zur Approximation der Meßwerte verwendete Formfunktionen

Die in Tabelle 6 verwendeten Bezeichnungen der Parameter in den Formfunktionen sind grundsätzlich willkürlich definiert. Dies bedeutet, daß z.B. für die einfacheren Formfunktionen von  $\bar{T}$  oder  $\bar{u}$  der verwendete Index 0.5 sehr wohl einen Halbwertsradius bezeichnet, während z.B. in der Formfunktion der turbulenten Schubspannung  $\overline{u'v'}$  der

Index 0.5 nur verwendet wird, um diese und alle anderen Formfunktionen in eine ähnliche Darstellung zu bringen.

In den nächsten Kapiteln werden vor der Diskussion der Entwicklung der einzelnen Strömungsgrößen die jeweils dazu herangezogenen Parameter oder Charakteristiken durch Skizzen beschrieben.

#### 4.2.2. Diskussion der Ergebnisse für Zwangskonvektion

Im Fall der unbeheizten Kugel treten im System keine Temperaturunterschiede auf. Die Strömungsgrößen reduzieren sich somit auf die Geschwindigkeit und die turbulenten Schub- und Normalspannungen. Die Messungen für Zwangskonvektion werden im Bereich

$$\frac{x}{d} \in [9.5, 92] \quad (4.15)$$

durchgeführt. Sie sind somit auf relativ große Abstände von der Kugel beschränkt. In kleinem Abstand von der Kugel findet sich ein Formierungsbereich mit Rezirkulationszonen, in dem komplizierte Strömungsformen auftreten. Es ist nicht zu erwarten, daß das Abklingverhalten dieses Nahbereichs in axialer Richtung mit einem einfachen Potenzgesetz beschrieben werden kann.

##### 4.2.2.1. Axialgeschwindigkeit

Die Axialgeschwindigkeit hinter der unbeheizten Kugel ist auf Grund des Strömungswiderstands gegenüber der Außenströmung reduziert. Das maximale Geschwindigkeitsdefizit  $u_N$  stellt sich im achsensymmetrischen Nachlauf auf der Symmetrieachse ein. Mit wachsendem Abstand von der Kugel ( $x/d$ ) nimmt  $u_N$  zugunsten einer Verbreiterung des Nachlaufs ab. In der Literatur werden die Meßwerte der Axialgeschwindigkeit im Nachlauf hinter Rotationskörpern meistens durch Glockenkurven angenähert. Beispiele finden sich bei Spedding et al. (1996) für einen schlanken Körper, bei Chevray (1968) für ein 6:1-Ellipsoid und bei Suckow (1993) für eine Kugel. Auch in dieser Arbeit legen die Meßwerte für die Axialgeschwindigkeit eine Glockenkurve als Formfunktion nahe. Mit der gewählten Formfunktion

$$\bar{u}(y) = u_0 - u_N e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0N}}{r_{0.5N}} \right)^2} \quad (4.16)$$

wird die Axialgeschwindigkeit durch die Parameter  $u_0$ ,  $u_N$  und  $r_{0.5N}$  beschrieben, wobei

$$u_0, u_N, r_{0.5N}, y_{0N} = f\left(\frac{x}{d}\right). \quad (4.17)$$

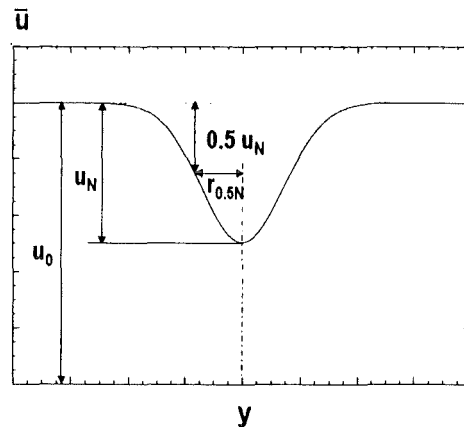


Bild 22: Parameter der Formfunktion der Axialgeschwindigkeit bei Zwangskonvektion

Der Verschiebeparameter  $y_{0N}$  erweist sich als stochastisch verteilter Meßfehler und wird deshalb nicht weiter betrachtet. Bild 22 zeigt die zur Darstellung der Entwicklung des Nachlaufs mit wachsendem  $(x/d)$  verwendeten Parameter.

Der Einfluß der wachsenden Wandgrenzschicht auf die Form des Nachlaufprofils wird in der Formfunktion nicht berücksichtigt. Bei den gemessenen Turbulenzkorrelationen ist in der Tat kaum ein Einfluß dieses Effekts zu erkennen. Der Parameter  $u_0$  berücksichtigt ein Anwachsen der Außengeschwindigkeit. Dieses Anwachsen der Außengeschwindigkeit ist durch die Verdrängungswirkung der beiden auftretenden Grenzschichten bedingt. An der Kanalwand ist auf Grund der Haftbedingung die Geschwindigkeit null. Die in der Wandgrenzschicht auftretende Geschwindigkeitsdifferenz entspricht damit der Außengeschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsdifferenz im Nachlauf ist schon in geringen Abstand von der Kugel deutlich kleiner. Die Wandgrenzschicht erstreckt sich zudem entlang des ganzen Rohrumfangs, während der Nachlauf auf den inneren Kanalbereich beschränkt ist. Das Anwachsen der Außengeschwindigkeit ist also hauptsächlich von der Wandgrenzschicht verursacht.

Für die Regressionsanalyse sind die wandnahen Meßpunkte der Profile, wo die abnehmende Geschwindigkeit die beginnende Wandgrenzschicht signalisiert, generell nicht verwendet worden. Bild 23 zeigt das Anwachsen der mit der Bulk-Geschwindigkeit normierten Außengeschwindigkeit. Der Anstieg der Außengeschwindigkeit  $u_0$  im gemessenen Bereich beträgt ca. 10% und erfolgt näherungsweise linear in  $(x/d)$ .

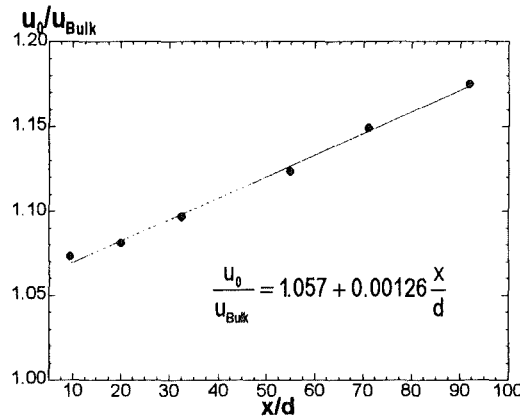


Bild 23: Axialgeschwindigkeit außerhalb des Nachlaufs bei Zwangskonvektion

In Bild 24 ist das Abklingverhalten des Kugelnachlaufs gezeigt. Das Geschwindigkeitsdefizit  $u_N$  ist hierbei mit der lokalen Außengeschwindigkeit  $u_0$ , der Halbwertsradius  $r_{0,5N}$  mit dem Kugeldurchmesser  $d$  normiert. Das maximale Geschwindigkeitsdefizit nimmt bereits für  $(x/d) \geq 10$  in guter Näherung nach einem Potenzgesetz mit  $(x/d)^{-0.68}$  ab. Dies ist in guter Übereinstimmung mit verschiedenen anderen Autoren, die für große  $(x/d)$  im turbulenten, achsensymmetrischen Nachlauf ein Potenzgesetz mit  $(x/d)^{-2/3}$  sowohl theoretisch, vgl. Prandtl (1927), wie experimentell, vgl. Spedding et al. (1996), Freymuth & Uberoi (1973), Higuchi & Kubota (1990), ermitteln.

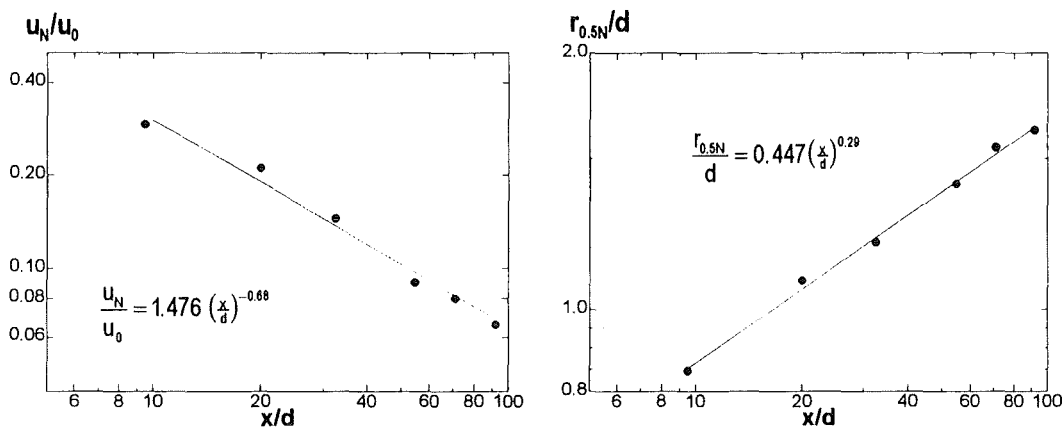


Bild 24: Geschwindigkeitsdefizit (links) und Halbwertsradius (rechts) der Axialgeschwindigkeit bei Zwangskonvektion

Die Entwicklung des Halbwertsradius wird in guter Näherung durch ein Potenzgesetz mit  $(x/d)^{0.29}$  beschrieben. Die oben genannten Literaturstellen finden für den fernen Nachlauf ein geringfügig schnelleres Anwachsen mit  $(x/d)^{1/3}$ . Die theoretische Lösung von Prandtl (1927) stellt eine asymptotische Entwicklung für große  $(x/d)$  als Entwicklungsparameter dar. Der Exponent  $1/3$  ist also genau genommen nur für  $(x/d) \rightarrow \infty$  gültig. Konsistenterweise findet Prandtl (1927) im Bereich kleiner  $(x/d)$  auch Abweichungen zwischen seiner Theorie und Experimenten. Der Nachlauf ist in seinem Experiment für kleine  $(x/d)$  deutlich breiter als es die Theorie vorhersagt. Swain (1929) nimmt in der

asymptotischen Entwicklung ein zusätzliches Glied mit und erreicht dadurch, daß der Gültigkeitsbereich ihrer Theorie bereits bei kleineren  $(x/d)$  beginnt. Dementsprechend zeigt ihre Theorie bessere Übereinstimmung mit den Experimenten, insbesondere für kleinere  $(x/d)$ . Swain ermittelt eine Lösung der Form

$$\frac{r_{0.5N}}{d} = \alpha \left( \frac{x}{d} \right)^{\frac{1}{3}} + \beta \left( \frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (4.18)$$

Für kleine  $(x/d)$  ist der von ihr berechnete Nachlauf breiter als nach der Theorie von Prandtl und hat damit eine bessere Übereinstimmung mit seinem Experiment. In unseren Messungen ist das Ergebnis mit dem Exponenten 0.29 (vgl. Bild 24) in der Tat erhalten durch Regression aller Meßpunkte. Betrachtet man hingegen nur die Meßpunkte für sehr große  $(x/d)$ , so ist ein größerer Exponent offensichtlich. damit ist in diesem Bereich eine gute Übereinstimmung zu anderen Arbeiten festzustellen.

Bild 25 zeigt alle gemessenen Nachlaufprofile in normierter Darstellung. Das Geschwindigkeitsdefizit  $\bar{u} - u_0$  ist hierbei mit dem Maximalwert auf der Achse  $u_N$  normiert und die horizontale Koordinate mit dem Halbwertsradius  $r_{0.5N}$ . Das Zusammenfallen aller Profile zeigt, daß die gewählte Formfunktion in guter Näherung eine ähnliche Darstellung zuläßt.

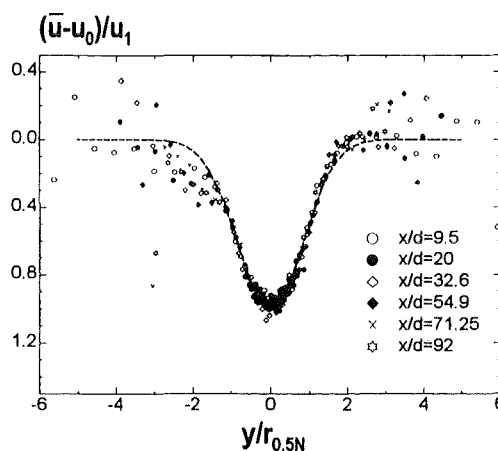


Bild 25: Normierte Axialgeschwindigkeit des Nachlaufs bei Zwangskonvektion

#### 4.2.2.2. Turbulente Schubspannung

Die turbulente Schubspannung folgt im wesentlichen dem radialen Gradienten der Axialgeschwindigkeit. Als Formfunktion wird deshalb die erste Ableitung einer Glockenkurve verwendet. Im Fall der Zwangsströmung erhält man hierfür

$$\overline{u'v'}(y) = -u v_N (y - y_{01uvN}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02uvN}}{r_{0.5uvN}} \right)^2} \quad (4.18)$$



Durch Einsatz der Formfunktionen können die in den gemessenen Profilen enthaltenen Unsymmetrien bereinigt werden. Dies erfolgt durch Eliminieren der Verschiebeparameter  $y_{0i}$  in den Formfunktionen. Gegenüber herkömmlichen Verfahren wie arithmetischer Mittelung von linker und rechter Seite stellt diese Vorgehensweise zur Symmetrisierung ein objektives, statistisches Kriterium zur Verfügung, welches auch beim Auftreten verschiedener Längenskalen anwendbar ist. Das Ergebnis sind symmetrische Funktionen. In Bild 26 ist der Vorgang an einem sehr unsymmetrischen Profil beispielhaft dargestellt.

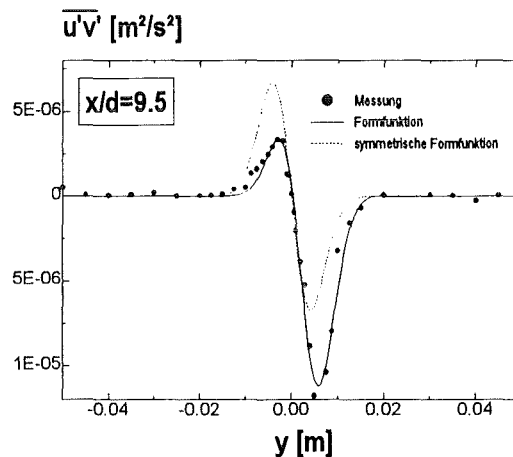


Bild 26: Beispiel für Symmetrisierung der Profile: turbulente Schubspannung bei Zwangskonvektion

Die in der Formfunktion verwendeten Parameter beschreiben keine ausgezeichneten Punkte im Profil der turbulenten Schubspannung. Bei Zwangskonvektion können als ausgezeichnete Punkte etwa die symmetrischen Extremwerte verwendet werden. Die Amplituden und die Lage dieser Extremwerte (vgl. Bild 22) sind gemäß

$$r(\overline{u'v'_{\max}}) = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2}} r_{0,5uvN} \quad (4.19), (4.20)$$

$$\overline{u'v'_{\max}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2 \ln 2}} uv_N r_{0,5uvN}$$

mit den Parametern verknüpft. Bild 22 zeigt, daß das Profil der turbulenten Schubspannung durch diese Größen eindeutig beschrieben ist.

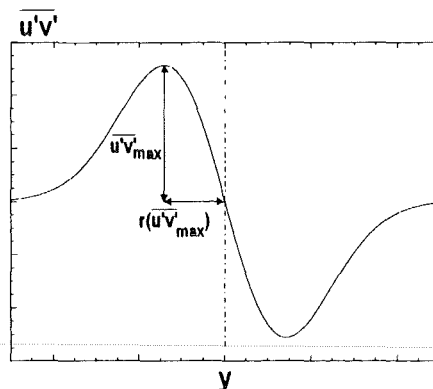


Bild 27: Extremwerte der turbulenten Schubspannung bei Zwangskonvektion

Bild 28 zeigt das Verhalten der Extremwerte der turbulenten Schubspannung als Funktion von  $(x/d)$ . Die Ordinate ist mit dem Quadrat der Außengeschwindigkeit  $u_0$  normiert.

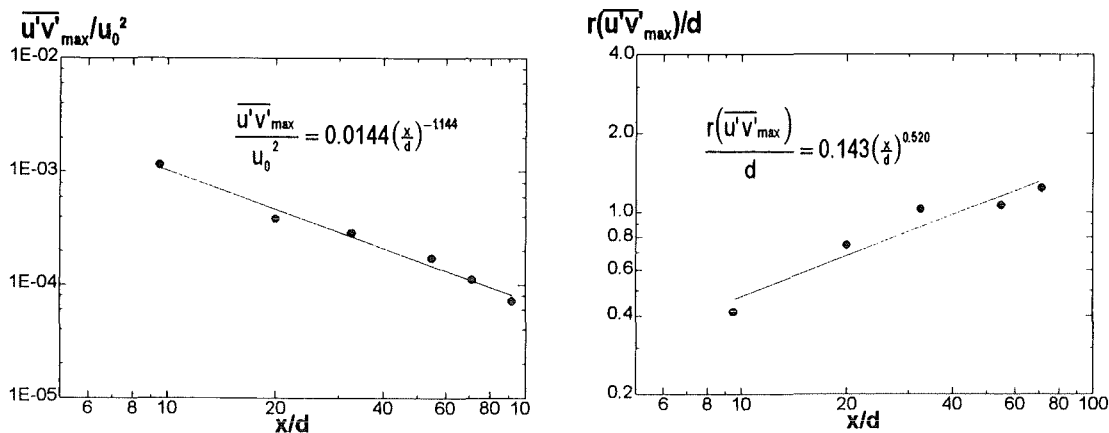


Bild 28: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Lage (rechts) der Extremwerte der turbulenten Schubspannung bei Zwangskonvektion

Die Amplitude des Extremwerts nimmt mit  $(x/d)^{-1.144}$  ab, dies entspricht in guter Näherung der von Suckow ermittelten Abhängigkeit von  $(x/d)^{-1.19}$ . Die Lage des Extremwerts und damit die radiale Ausbreitung der turbulenten Schubspannung folgt der Abhängigkeit  $(x/d)^{0.52}$ . Die Schubspannung breitet sich also offensichtlich schneller aus als die Axialgeschwindigkeit, die sich, wie bereits gezeigt, mit  $(x/d)^{1/3}$  ausbreitet. In den Arbeiten von Prandtl (1927) und Swain (1929) wird die Entwicklung der turbulenten Schubspannung nicht diskutiert. Eine Ableitung von Gesetzmäßigkeiten für die turbulente Schubspannung ist nicht möglich, da in beiden Arbeiten einige zur Bestimmung der Extremwerte der turbulenten Schubspannung notwendige Angaben nicht aufgeführt sind.

#### 4.2.2.3. Turbulente Normalspannungen

In der Literatur wird die Entwicklung der turbulenten Normalspannung in  $(x/d)$  in der Regel in Form einer Entwicklung für die RMS-Werte der Geschwindigkeiten angegeben, siehe z.B. Chevray (1968), Groth & Johansson (1988). Der mit einer charakteristischen Geschwindigkeit normierte RMS-Wert wird auch als Turbulenzgrad, vgl. Kotsovinos & List (1975), oder Turbulenzintensität, vgl. Higuchi & Kubota (1990) bezeichnet. Für die Turbulenzmodellierung sind die Varianzen der Geschwindigkeiten von Interesse, also das Quadrat der RMS-Werte. Die Formfunktionen und Gesetzmäßigkeiten sind für diesen Zweck entsprechend umzurechnen. Im Fall der Zwangskonvektion werden für die RMS-Werte von Axial- und Horizontalgeschwindigkeit die Formfunktionen

$$\sqrt{u'^2}(y) = \text{urms}_0 + \text{urms}_1 \left( (y - y_{01\text{urms}})^2 + C_{\text{urms}} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02\text{urms}}}{\Gamma_{0.5\text{urms}}} \right)^2}, \quad (4.21)$$

$$\sqrt{v'^2}(y) = vrms_0 + vrms_1 \left( (y - y_{01vrms})^2 + C_{vrms} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02vrms}}{r_{0.5vrms}} \right)^2}, \quad (4.22)$$

verwendet. Auf Grund der komplizierten Form des Profils und der steigenden Zahl von Parametern sind im folgenden nicht alle Parameter der Formfunktion einzeln diskutiert. Die Darstellung muß sich zwangsläufig auf wichtige Parameter wie die Turbulenz der Außenströmung  $urms_0$  bzw.  $vrms_0$  und die um die Turbulenz der Außenströmung reduzierten Maximalamplituden

$$\sqrt{u'^2}_{\max} = urms_1 \frac{r_{0.5urms}^2}{\ln 2} e^{-\left( r_{0.5urms}^2 - \ln 2 C_{urms} \right)}, \quad (4.23)$$

$$\sqrt{v'^2}_{\max} = vrms_1 \frac{r_{0.5vrms}^2}{\ln 2} e^{-\left( r_{0.5vrms}^2 - \ln 2 C_{vrms} \right)} \quad (4.24)$$

beschränken. Weiterhin ist es sinnvoll, auch hier einen Halbwertsradius zu definieren. Der Halbwertsradius  $r_{0.5}$  beschreibt den Ort, an dem die Amplitude des RMS-Werts auf den halben Wert abgefallen ist. Es ist hierbei zu beachten, daß sich im Fall der Zwangskonvektion der maximale RMS-Wert nicht auf der Symmetrieachse befindet (vgl. Bild 29). Die wichtigsten Parameter sind in Bild 29 verdeutlicht.

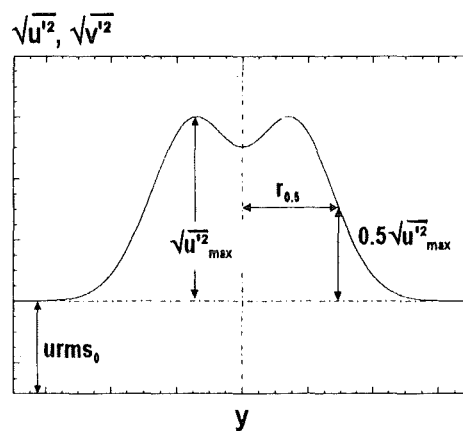


Bild 29: Parameter der RMS-Werte der Geschwindigkeit bei Zwangskonvektion am Beispiel von  $\sqrt{u'^2}$

Für die Außenströmung bietet sich eine Charakterisierung mit Hilfe des Turbulenzgrads  $Tu$  an. Definiert auf Basis der Schwankungen  $u'$  und  $v'$  gilt

$$Tu(u) = \frac{\sqrt{u'^2}}{u_0}, \quad Tu(v) = \frac{\sqrt{v'^2}}{v_0}. \quad (4.25)$$

Bild 30 zeigt den Turbulenzgrad der Außenströmung, berechnet aus den Meßwerten nach Gleichung (4.25). Der Turbulenzgrad berechnet auf Basis der Axialgeschwindigkeit ist mit ca. 1.7% etwas größer als der Turbulenzgrad auf Basis der Radialgeschwindigkeit (1.5%).

Beide Werte fallen über den gesamten Meßbereich praktisch nicht ab, so daß der Turbulenzgrad der Außenströmung in guter Näherung als konstant betrachtet werden kann.

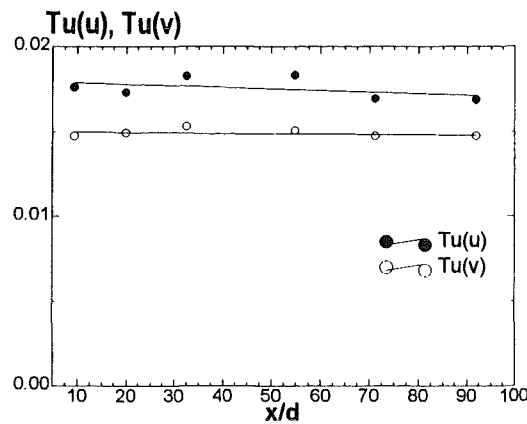


Bild 30: Turbulenzgrad der Außenströmung bei Zwangskonvektion: Axial- (●) und Radialgeschwindigkeit (○)

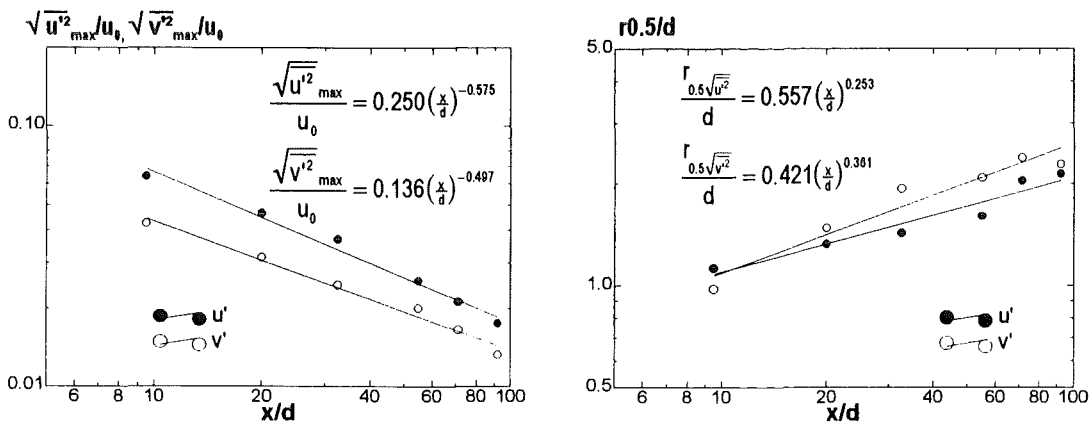


Bild 31: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Halbwertsradius (rechts) des RMS-Werts der Axial- (●) und der Radialgeschwindigkeit (○) entlang der Kanalachse bei Zwangskonvektion

Bild 31 zeigt die wesentlichen Parameter der RMS-Werte beider Geschwindigkeiten. Die Maximalamplitude des RMS-Werts der Axialgeschwindigkeit fällt mit  $(x/d)^{-0.575}$  etwas stärker ab als die Maximalamplitude des RMS-Werts der Radialgeschwindigkeit mit  $(x/d)^{-0.497}$ . Dies ist zu erwarten, da durch den Druck-Scher-Mechanismus Energie von der betragsmäßig größeren axialen Komponente an die kleinere radiale Komponente übertragen wird. Die Breiten beider Profile entwickeln sich mit den Abhängigkeiten  $(x/d)^{0.253}$  bzw.  $(x/d)^{0.361}$  ähnlich. Die unterschiedlichen Gesetze rühren offensichtlich von den deutlich streuenden Meßwerten her. Dadurch stellen die Potenzgesetze auch keine perfekte Beschreibung der Meßdaten dar. Die Ausbreitung erfolgt aber in etwa mit der gleichen Abhängigkeit wie bei der Axialgeschwindigkeit, welche die Abhängigkeit  $(x/d)^{1/3}$  besitzt. Gibson et al. (1968) finden für den RMS-Wert der Axialgeschwindigkeit einen etwas stärkeren Abfall mit  $(x/d)^{-0.85}$ . Sie normieren den RMS-Wert jedoch mit der Axialgeschwindigkeit auf der Achse, also  $u_0 - u_N$ . Da die Geschwindigkeit auf der Achse wegen der Abnahme von  $u_N$  und dem schwachen Ansteigen von  $u_0$  mit wachsendem  $(x/d)$

ansteigt, nähert sich der resultierende Exponent dem hier ermittelten Exponenten wieder etwas an. In den theoretischen Abhandlungen von Prandtl (1927) und Swain (1929) wird die Entwicklung der turbulenten Normalspannungen nicht behandelt, so daß hier ein Vergleich nicht möglich ist.

### 4.2.3. Diskussion der Ergebnisse für Mischkonvektion

Die Messungen für Mischkonvektion sind im Bereich

$$\frac{x}{d} \in [5, 100] \quad (4.26)$$

durchgeführt. Messungen in kleinem Abstand hinter der Kugel werden auch hier wegen der komplexen Strömungsform nicht durchgeführt. Erschwerend führen die starken Temperaturgradienten nahe der beheizten Kugel zu zeitlich schwankenden Gradienten des Brechungsindex des Wassers. Dies führt zu einer sichtbaren Ablenkung der Laserstrahlen und deshalb zu deutlichen Fehlern bei der Geschwindigkeitsmessung. In kleinem Abstand hinter der Kugel tritt auch für Mischkonvektion ein Formierungsbereich auf, in dem die Größen nicht mit einfachen Potenzgesetzen zu beschreiben sind. Potenzgesetze können deshalb erst ab  $(x/d)=10$ , zum Teil sogar erst ab  $(x/d)=20$  sinnvoll verwendet werden.

Für den maximalen gemessenen Abstand von  $(x/d)=100$  führen Störungen durch Imperfektionen des Gleichrichtersiebs sowie die angewachsene Wandgrenzschicht zu einer auffälligen Verbreiterung des Profils der Axialgeschwindigkeit. Die Parameter der zugehörigen Formfunktionen weichen als Folge deutlich von den ansonsten ermittelten Potenzgesetzen ab. Aus diesem Grund erweist es sich als sinnvoll, solche Daten bei der Regressionsanalyse nicht zu berücksichtigen. Für die anderen, mit dem Temperaturfeld gekoppelten Größen können die Messungen bei  $(x/d)=100$  jedoch verwendet werden. Die Messungen für Mischkonvektion sind generell nur für die Heizleistung 60 W dargestellt.

Zum Vergleich mit der Literatur wird die Arbeit von Shabbir & George (1994) herangezogen. Sie untersuchen einen reinen, hochturbulenten Auftriebsstrahl in Luft. Die Radialprofile aller von ihnen gemessenen zeitgemittelten Strömungsgrößen und Turbulenzkorrelationen breiten sich linear mit  $(x/d)$  aus. Die im Kapitel "Literaturübersicht" beschriebenen Arbeiten zu Nachlaufströmungen, bei denen aufgrund sehr schwacher Beheizung der Auftriebseffekt vernachlässigbar ist, werden nicht zur Diskussion verwendet. Im Kapitel "Diskussion der gemessenen Radialprofile" ist bereits gezeigt worden, daß die Turbulenzkorrelationen vorwiegend durch Auftriebseffekt produziert werden, der in den

genannten Arbeiten nicht existiert. Der Vergleich mit einem Auftriebsstrahl erscheint deshalb weitaus sinnvoller.

#### 4.2.3.1. Axialgeschwindigkeit

Im Fall der beheizten Kugel wächst im Nachlauf ein schmalerer Auftriebstrahl. Für reine Zwangskonvektion wird der Nachlauf durch eine Glockenkurve beschrieben. Shabbir & George (1994) beschreiben in ihren Messungen die mittleren Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in einem turbulenten achsensymmetrischen Auftriebsstrahl ebenfalls mit Glockenkurven. Es ist deshalb naheliegend, die für Mischkonvektion erhaltenen Profile durch Überlagerung von zwei unabhängigen Glockenkurven nach Gauß zu approximieren.

Aus der Literatur, siehe z.B. Prandtl (1927) im Vergleich mit Shabbir & George (1994), ist bekannt, daß sich Nachlaufströmungen nach anderen Gesetzen ausbreiten als Auftriebsstrahlen. Zur Beschreibung der Strömung wird als Formfunktion die additive Überlagerung einer Glockenkurve mit negativem Vorzeichen und einer Glockenkurve mit positivem Vorzeichen verwendet. Die Formfunktion wird zur Diskussion dann in einen Nachlauf- und einen Auftriebsanteil aufgeteilt. Die Abhängigkeiten der jeweiligen Parameter werden dann separat untersucht. Dies ist nicht gleichbedeutend mit einer Entkopplung der Phänomene des Nachlaufs und des Auftriebsstrahls. Die Kopplung der Effekte ist natürlich im realen System stets vorhanden. Es ist deshalb zu erwarten, daß, verglichen mit den reinen Strömungen von Nachlauf und Auftriebsstrahl, veränderte Potenzgesetze für die Parameter auftreten.

Zunächst ist die Formfunktion für die Axialgeschwindigkeit zu diskutieren. Wie bei der Zwangskonvektion wird der Einfluß der wachsenden Wandgrenzschicht auf das Profil vernachlässigt, da in den Turbulenzkorrelationen praktisch kein Einfluß zu erkennen ist. Der Parameter  $u_0$  berücksichtigt auch hier ein durch die Wandgrenzschicht bedingtes Anwachsen der Außengeschwindigkeit. Die verwendete Formfunktion für die Mischkonvektion lautet nach Tabelle 6

$$\bar{u}(y) = u_0 - u_N e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0N}}{r_{0.5N}} \right)^2} + u_A e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0A}}{r_{0.5A}} \right)^2} \quad (4.27)$$

Die Parameter mit dem Index "N" betreffen den Nachlaufanteil, die Parameter mit dem Index "A" den Auftriebsanteil. Es werden unterschiedliche Verschiebeparameter  $y_{0i}$  zugelassen. So können leicht unsymmetrische Anteile im Auftriebs- oder Nachlaufanteil berücksichtigt werden und eine objektive Symmetrisierung wird möglich durch Setzen von

$y_{oi}=0$ . Die charakteristischen Parameter der Axialgeschwindigkeit und ihrer Anteile sind in Bild 32 skizziert.

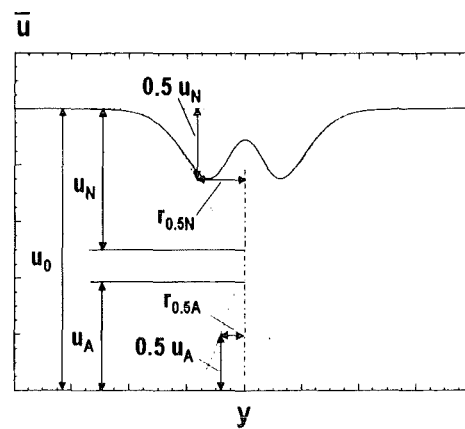


Bild 32: Parameter der Axialgeschwindigkeit bei Mischkonvektion

Bild 33 zeigt das Anwachsen der Außengeschwindigkeit, normiert mit der Bulk-Geschwindigkeit. Dies zeigt wie im unbeheizten Fall einen leichten, linearen Anstieg. Da der Auftrieb nur in einem kleinen Querschnitt in der Mitte des Kanals auftritt, ist der Einfluß des Auftriebs auf das Anwachsen der Außengeschwindigkeit im Vergleich zum Einfluß der viel größeren Querschnittsfläche der Wandgrenzschicht vernachlässigbar.

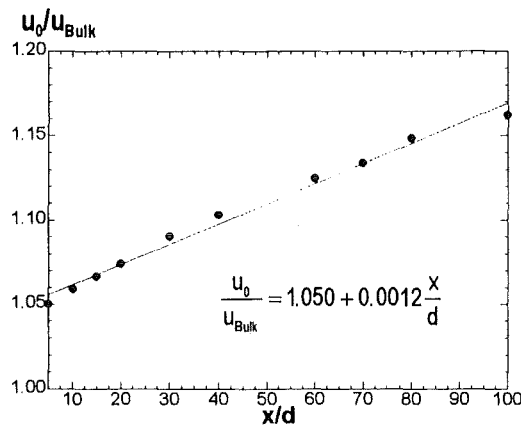


Bild 33: Anwachsen der Axialgeschwindigkeit im Außenfeld für Mischkonvektion

Bild 34 zeigt in zwei Diagrammen die Entwicklung der Parameter der beiden Anteile der Axialgeschwindigkeit. Die Amplituden beider Anteile nehmen im gesamten Meßbereich stetig ab. Die Auftriebsgeschwindigkeit erreicht demnach ihr Maximum schon kurz oberhalb der Kugel im nicht vermessenen Bereich. Die Auftriebsgeschwindigkeit nimmt mit einem größeren Exponenten ab als das Geschwindigkeitsdefizit im Nachlauf. Der Mischkonvektionsnachlauf wird also auch in großem Abstand über der Kugel nicht durch den Auftriebsstrahl soweit aufgefüllt, daß eine Übergeschwindigkeit relativ zur Außenströmung entsteht.

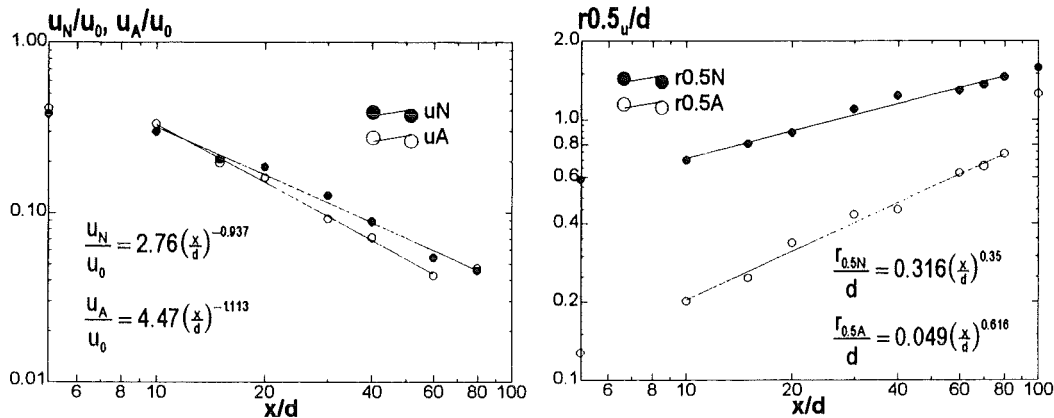


Bild 34: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Halbwertsradius (rechts) des Geschwindigkeitsdefizits im Nachlauf (●) und der Auftriebsgeschwindigkeit (○) entlang der Kanalachse

Sowohl das Geschwindigkeitsdefizit im Nachlauf mit  $(x/d)^{-0.937}$  als auch die Auftriebsgeschwindigkeit mit  $(x/d)^{-1.113}$  nehmen stärker ab als der unbeheizte Nachlauf mit  $(x/d)^{-2/3}$  bzw. der reine Auftriebsstrahl mit  $(x/d)^{-1/3}$ . Die Ergebnisse für den reinen Nachlauf finden sich bei Prandtl (1927), die Ergebnisse für den Auftriebsstrahl z.B. bei Shabbir & George (1994). Der Auftriebsstrahl füllt das Geschwindigkeitsdefizit des Nachlaufs also schneller auf als die Summation der ungekoppelten Grundlösungen ergibt. Die radiale Ausbreitung des Geschwindigkeitsdefizits im Nachlauf erfolgt mit einem ähnlichem Exponenten  $(x/d)^{0.35}$  wie beim reinen Nachlauf mit  $(x/d)^{1/3}$ . Der Auftriebsstrahl breitet sich radial deutlich schneller aus als der Nachlauf, bleibt aber im gesamten Meßbereich schmaler als der Nachlauf. Die im äußeren, nicht vom Auftrieb beeinflussten Bereich der Strömung nach außen ansteigende Geschwindigkeit ist unmittelbar verbunden mit einer Vorzeichenumkehr der turbulenten Schubspannung. Dies behindert offensichtlich die Ausbreitung des Auftriebsstrahls in radialer Richtung, denn während von Shabbir & George (1994) ein linearer Anstieg des Halbwertsradius für den reinen Auftriebsstrahl gefunden wird, ergibt sich hier ein langsames Anwachsen mit  $(x/d)^{0.616}$ .

Bild 36 zeigt den normierten Auftriebsanteil der Axialgeschwindigkeit. Dazu wird von dem Meßwert die Geschwindigkeit der Außenströmung und der Nachlaufanteil nach

$$u_{A,\text{norm}}(y - y_{0A}(x)) = \frac{\bar{u}_{\text{Meßwert}} - \left( u_0(x) - u_N(x) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{0N}(x)}{r_{0.5N}(x)} \right)^2} \right)}{u_A(x)} \quad (4.28)$$

abgezogen. Das resultierende Profil wird danach mit dem Maximalwert des Auftriebsanteils normiert und zuletzt durch den Verschiebeparameter  $y_{0A}$  in ein symmetrisches Profil überführt. Die gemessenen Auftriebsanteile in den Profilen fallen in der normierten Darstellung sehr gut zusammen.



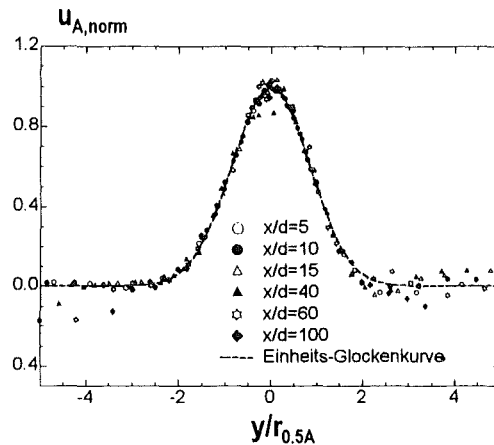


Bild 35: Normierter Auftriebsanteil der Axialgeschwindigkeit

Die Normierung des Nachlaufanteils der Axialgeschwindigkeit führt gleichfalls zu übereinanderliegenden Meßkurven, wie in Bild 36 zu sehen ist. Die additive Überlagerung zweier Formfunktionen zur Beschreibung der Axialgeschwindigkeit bei Mischkonvektion erweist sich demnach als geeignet zur Approximation.

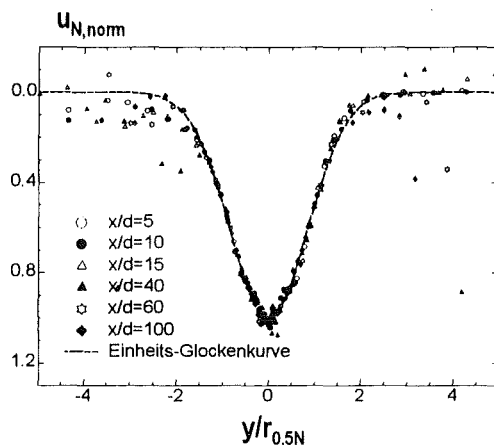


Bild 36: Normierter Nachlaufanteil der Axialgeschwindigkeit

#### 4.2.3.2. Turbulente Schubspannung

Das Profil der turbulenten Schubspannung wird zur Darstellung der Entwicklung in  $(x/d)$  mit Hilfe der Formfunktion

$$\overline{u'v'}(y) = -uv_N (y - y_{01N}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02N}}{r_{05N}} \right)^2} + uv_A (y - y_{01A}) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02A}}{r_{05A}} \right)^2} \quad (4.29)$$

wie die Axialgeschwindigkeit in einen Nachlauf- und einen Auftriebsanteil zerlegt. In der linken Hälfte von Bild 37 sind die beiden Teilfunktionen mit den für die Entwicklung der turbulenten Schubspannung in  $(x/d)$  verwendeten Charakteristiken dargestellt, die rechte Hälfte zeigt das vollständige, gekoppelte Profil der Formfunktion. Analog zur Darstellung

der turbulenten Schubspannung bei Zwangskonvektion wird die Entwicklung in  $(x/d)$  an Hand der Amplituden der Extremwerte und der radialen Position der Extremwerte der beiden Teilfunktionen dargestellt.

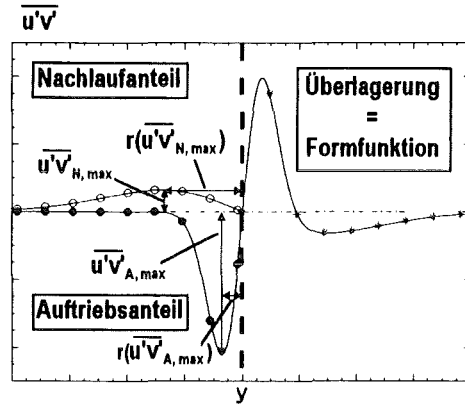


Bild 37: Parameter der turbulenten Schubspannung bei Mischkonvektion nach Zerlegung der Formfunktion (\*) in Nachlaufanteil (O) und Auftriebsanteil (●)

Bild 38 zeigt die Amplitude der Extremwerte der Teilfunktionen zusammen mit ihrer radialen Position. Die Amplitude des Auftriebsanteils steigt zwischen den ersten beiden Meßpunkten noch an, so daß eine Potenzfunktion erst für  $(x/d) \geq 20$  angegeben werden kann. Die Amplitude des Auftriebsanteils ist im gesamten Meßbereich  $10 \leq (x/d) \leq 80$  größer als die Amplitude des Nachlaufanteils. Dies rührt von dem im Vergleich zum entsprechenden Gradienten im Nachlauf steileren Gradienten der Axialgeschwindigkeit im Auftriebsstrahl her sowie von dem im vorigen Kapitel beschriebenen Auftriebseinfluß des horizontalen turbulenten Wärmestroms. Die Position des Extremwerts des Auftriebsanteils befindet sich stets innerhalb des Nachlaufanteils. Für  $(x/d) > 30$  ist in den gemessenen Profilen kein äußeres Maximum mehr erkennbar. Für die Auswertung von Profilen bei größeren  $(x/d)$  werden deshalb die Parameter des Nachlaufanteils innerhalb der Formfunktion bei der Regressionsanalyse zu null gesetzt.

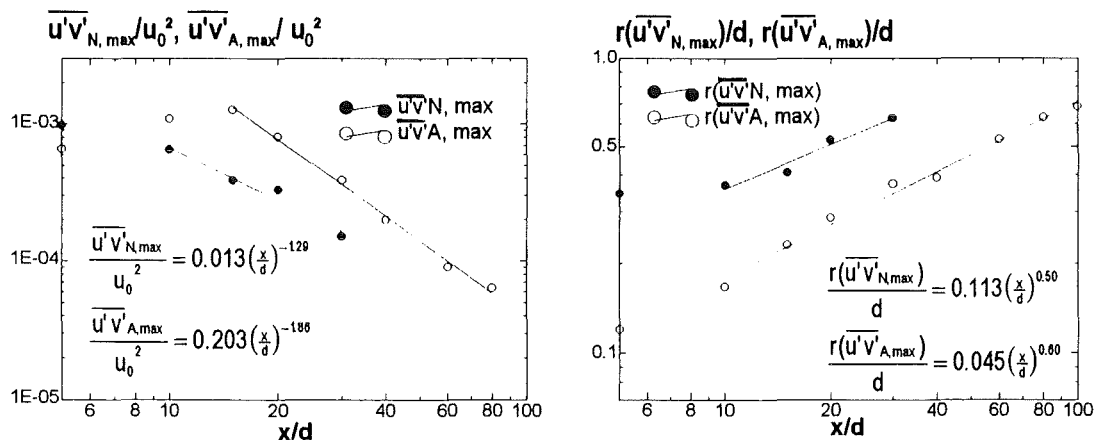


Bild 38: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Lage (rechts) des Nachlauf- (●) und Auftriebsanteils (○) der turbulenten Schubspannung bei Mischkonvektion

Die Amplitude des Nachlaufanteils nimmt mit  $(x/d)^{-1.29}$  etwas stärker ab als im Fall des reinen Nachlaufs, für den die Abhängigkeit  $(x/d)^{-1.144}$  ermittelt worden ist. Die Amplitude des Auftriebsanteils nimmt mit  $(x/d)^{-1.86}$  ab. Dieser Abfall ist deutlich stärker als der von Shabbir & George (1994) ermittelte Abfall mit  $(x/d)^{-2/3}$ . Auch hier ist also, wie bereits bei der Axialgeschwindigkeit festgestellt, ein stärkeres Abnehmen der turbulenten Schubspannung zu erkennen als die additive Überlagerung der Grundlösungen vermuten läßt. Die Ausbreitung erfolgt beim Nachlaufanteil ähnlich wie beim reinen Nachlauf mit  $(x/d)^{0.50}$ , beim Auftriebsanteil mit  $(x/d)^{0.60}$ . Der Auftriebsanteil breitet sich also etwa gleich schnell aus wie die Auftriebsgeschwindigkeit und somit wieder deutlich langsamer als die turbulente Schubspannung bei dem sich linear ausbreitenden reinen Auftriebsstrahl.

#### 4.2.3.3. Turbulente Normalspannungen

Bei Mischkonvektion enthalten die RMS-Werte der Geschwindigkeiten gegenüber der reinen Zwangskonvektion eine zusätzliche starke Überhöhung in der Mitte. Dadurch tritt das ursprüngliche M-Profil in den Hintergrund und verschwindet für größere  $(x/d)$  gänzlich, wie bereits durch die Darstellung der Profile in Bild 20 gezeigt worden ist. Der Einsatz der vollständigen Formfunktionen für die RMS-Werte von Axial- und Radialgeschwindigkeit

$$\sqrt{u'^2}(y) = \text{urms}_0 + \text{urms}_1 \left( (y - y_{01\text{urms}})^2 + C_{\text{urms}} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02\text{urms}}}{r_{0.5\text{urms}1}} \right)^2} + \text{urms}_2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{03\text{urms}}}{r_{0.5\text{urms}2}} \right)^2}, \quad (4.30)$$

$$\sqrt{v'^2}(y) = \text{vrms}_0 + \text{vrms}_1 \left( (y - y_{01\text{vrms}})^2 + C_{\text{vrms}} \right) e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{02\text{vrms}}}{r_{0.5\text{vrms}1}} \right)^2} + \text{vrms}_2 e^{-\ln 2 \left( \frac{y - y_{03\text{vrms}}}{r_{0.5\text{vrms}2}} \right)^2}. \quad (4.31)$$

ist also nur für kleine  $(x/d)$  sinnvoll. Für größere  $(x/d)$  wird der mittlere Term in der Formfunktion, der sonst das M-Profil beschreibt, zu null gesetzt.

In Bild 39 ist die typische Formfunktion zusammen mit den zur grafischen Darstellung verwendeten Parametern skizziert. In den gemessenen Profilen erweist sich bereits bei  $(x/d)=20$  die starke Überhöhung in der Mitte als so stark verbreitert, daß von den Seitenmaxima nichts mehr zu erkennen ist, siehe auch Bild 20. In dem kleinen  $(x/d)$ -Intervall, in dem die Seitenmaxima auftreten, ist die Bestimmung eines Potenzgesetzes für die Entwicklung in  $(x/d)$  ebensowenig möglich wie sinnvoll, die Seitenmaxima werden deshalb vernachlässigt. Das Profil ist somit nur durch den Maximalwert in der Mitte und durch den dazugehörigen Halbwertsradius charakterisiert. Dieser Halbwertsradius ist eindeutig bestimmbar, da er auch bei Profilen mit Seitenmaxima im inneren Bereich der

Profile liegt, wie auch aus der normierten Darstellung der Profile im Anhang, Bild A1, deutlich wird.

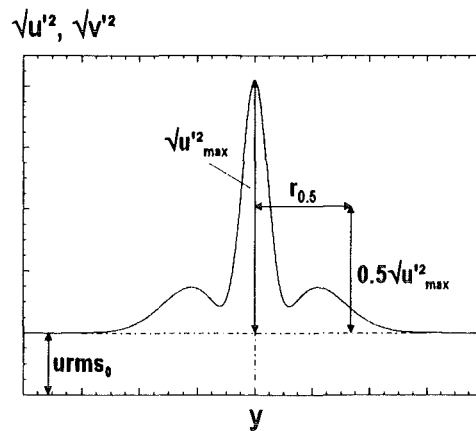


Bild 39: Parameter der RMS-Werte der Geschwindigkeiten bei Mischkonvektion

Bild 40 zeigt, daß der maximale RMS-Wert der Axialgeschwindigkeit, anders als bei der Zwangskonvektion, immer deutlich größer ist als der maximale RMS-Wert der Radialgeschwindigkeit. Beide klingen mit ähnlichen Potenzgesetzen ab, der RMS-Wert der Axialgeschwindigkeit mit  $(x/d)^{-1.02}$ , der RMS-Wert der Radialgeschwindigkeit mit  $(x/d)^{-0.91}$ . Shabbir & George (1994) finden für beide RMS-Werte ein Abnehmen mit  $(x/d)^{-2/3}$ . Auch die RMS-Werte der Geschwindigkeiten werden, genauso wie die Axialgeschwindigkeit, also im Vergleich zum reinen Auftriebsstrahl stärker abgebaut. Die Ausbreitung erfolgt bei beiden RMS-Werten etwa gleich schnell. Der Halbwertsradius des RMS-Werts der Axialgeschwindigkeit wächst mit  $(x/d)^{0.608}$ , der RMS-Wert der Radialgeschwindigkeit mit  $(x/d)^{0.705}$ . Wie schon bei der Zwangskonvektion beschrieben, ist auch im Fall der Mischkonvektion in Bild 40 eine Streuung der gemessenen Halbwertsradien erkennbar. Die Profile beider RMS-Werte breiten sich jedoch etwa gleich schnell aus wie das Profil der Auftriebsgeschwindigkeit.

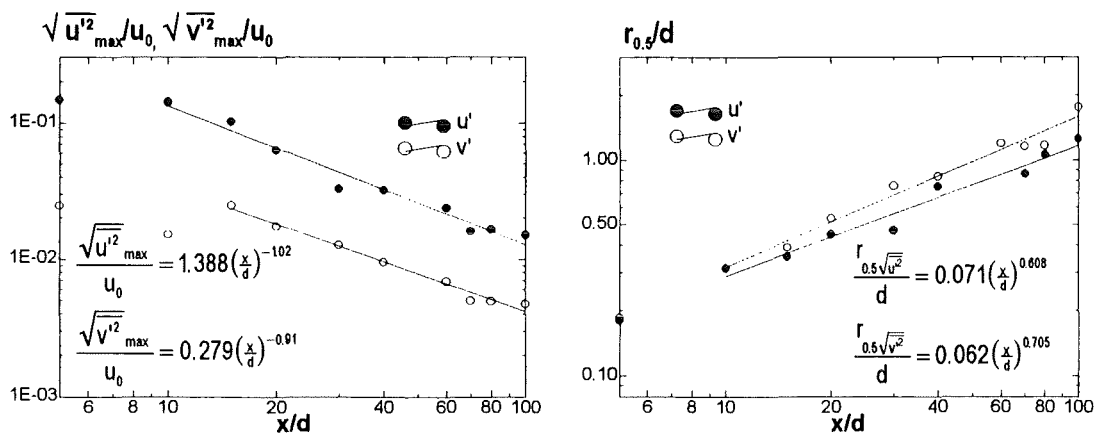


Bild 40: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Halbwertsradius (rechts) des RMS-Werts der Axial-(●) und der Radialgeschwindigkeit (○) entlang der Kanalachse bei Mischkonvektion

#### 4.2.3.4. Temperatur und RMS-Wert der Temperatur

Die Formfunktion der Temperatur entspricht einer Glockenkurve nach Gauß, welche durch

$$\bar{T}(y) = T_{\max} e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0T}}{r_{0.5T}} \right)^2} \quad (4.32)$$

gegeben ist. Für den RMS-Wert der Temperatur wird eine abgewandelte Glockenkurve als Approximation verwendet. Die Formfunktion des RMS-Werts ist durch

$$\sqrt{\bar{T}^2}(y) = T_{\text{rms}_{\max}} e^{-\ln 2 \left( \frac{y-y_{0T_{\text{rms}}}}{r_{0.5T_{\text{rms}}}} \right)^4} \quad (4.33)$$

gegeben. Das Profil des RMS-Werts besitzt somit gegenüber der Glockenkurve nach Gauß eine flachere Kuppe. Dies ist auch in Bild 41 zu erkennen, wo die zur Beschreibung der beiden Profile verwendeten Maximalwerte und Halbwertsradien skizziert sind.

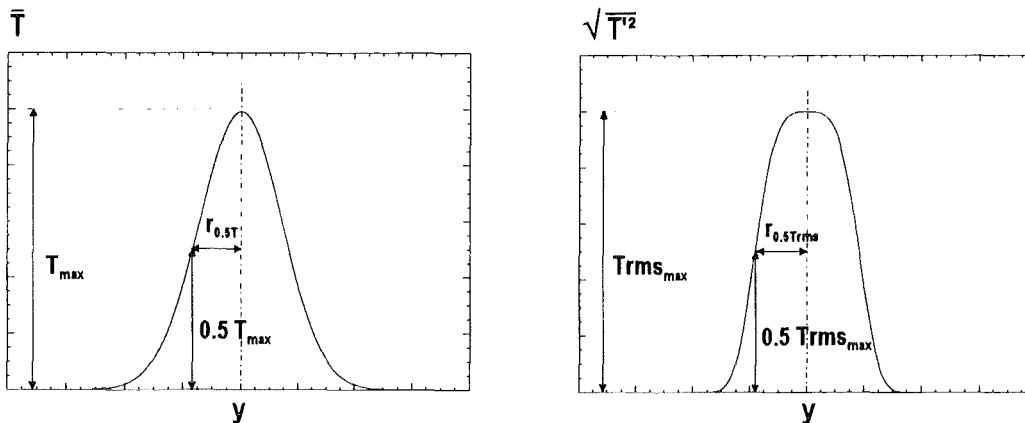


Bild 41: Parameter der Temperatur (links) und des RMS-Werts der Temperatur (rechts)

Die normierten Profile sind im Anhang, Bild A1 dargestellt. In Bild 42 sind die Ergebnisse für die Temperaturprofile und die Profile des RMS-Werts der Temperatur zusammengefaßt. Die Temperatur fällt mit  $(x/d)^{-1.74}$  geringfügig schneller ab als dies im Falle des reinen Auftriebsstrahls von Shabbir & George (1994) beobachtet wird, die einen axialen Abfall mit  $(x/d)^{-5/3}$  ermitteln. Die radiale Ausbreitung hingegen erfolgt mit  $(x/d)^{0.77}$  langsamer als beim reinen Auftriebsstrahl, der sich mit  $(x/d)^1$  ausbreitet. Die radiale Ausbreitung der Temperatur wird im wesentlichen durch den radialen turbulenten Wärmestrom gesteuert. Dieser ist bei genauerer Betrachtung der Ausführungen in Kapitel 4.1.2. über mehrere andere Größen mit der Axialgeschwindigkeit und der turbulenten Schubspannung gekoppelt. Auch hier behindert also die Nachlaufdüse mit der nach außen ansteigenden Axialgeschwindigkeit die radiale Ausbreitung der Temperatur.

Im Vergleich zur Auftriebsgeschwindigkeit, siehe Bild 34, fällt die Temperatur schneller ab und breitet sich in radialer Richtung schneller aus im Vergleich zur Auftriebsgeschwindigkeit, die sich mit  $(x/d)^{0.616}$  ausbreitet. Dies ist nicht verwunderlich, da die Auftriebsgeschwindigkeit durch das Temperaturprofil erzeugt wird und diesem nur zeitverzögert folgen kann.

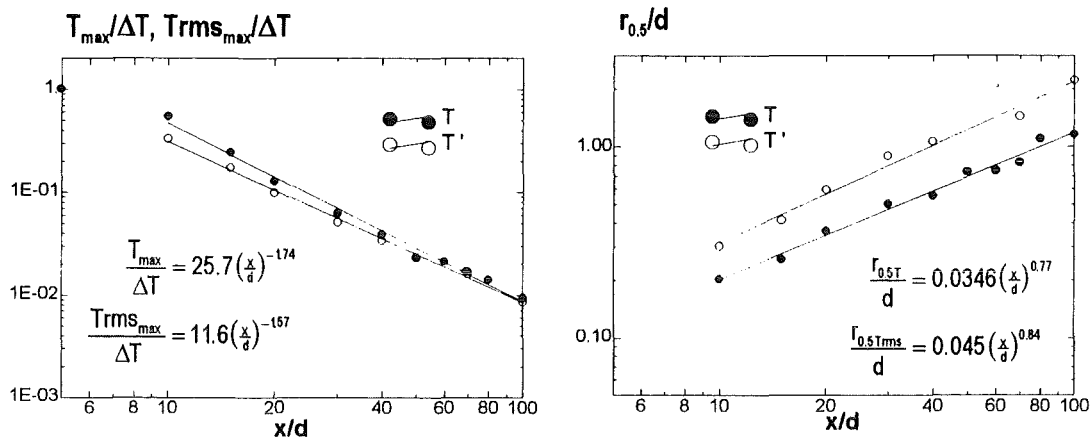


Bild 42: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Halbwertsradius (rechts) der Temperatur (●) und des RMS-Werts der Temperatur (○) entlang der Kanalachse

Das Verhalten der Profile des RMS-Werts der Temperatur ist sehr ähnlich zu dem der Temperatur. Es zeigt sich mit  $(x/d)^{-1.57}$  ein etwas langsames Abklingen bezüglich des Maximalwerts und eine mit  $(x/d)^{0.84}$  geringfügig schnellere Ausbreitung in radialer Richtung im Vergleich zur Temperatur. Der Abfall ist geringfügig schwächer als der für den reinen Auftriebsstrahl durch Shabbir & George (1994) ermittelte Wert von  $(x/d)^{-5/3}$ , die Ausbreitung erfolgt wie bei allen anderen Strömungsgrößen langsamer. Die Breite der Profile des RMS-Werts der Temperatur ist generell größer als die Breite der Temperaturprofile. Dies ist leicht durch die Tatsache zu erklären, daß der RMS-Wert der Temperatur durch den radialen Gradienten der Temperatur produziert wird und deshalb im Gegensatz zur monoton nach außen abfallenden Temperatur ein Maximum außerhalb der Mitte besitzt.

#### 4.2.3.5. Turbulente Wärmeströme

Die turbulenten Wärmeströme sind durch die Formfunktionen

$$\overline{v'T'}(y) = vT_1(y - y_{01}) e^{-\ln 2 \left(\frac{y - y_{02}}{r_{0.5vT}}\right)^2}, \quad (4.34)$$

$$\overline{u'T'}(y) = uT_1(y - y_{01})^2 e^{-\ln 2 \left(\frac{y - y_{02}}{r_{0.5uT1}}\right)^2} + uT_2 e^{-\ln 2 \left(\frac{y - y_{03}}{r_{0.5uT2}}\right)^4} \quad (4.35)$$

approximiert. Im Fall des axialen Wärmestroms  $\overline{u'T'}$  verschwindet der erste Summand in den Messungen bereits für kleine Kugelabstände ( $x/d$ ). Bild 43 zeigt die zur Darstellung der Entwicklung der Profile in ( $x/d$ ) verwendeten Parameter.

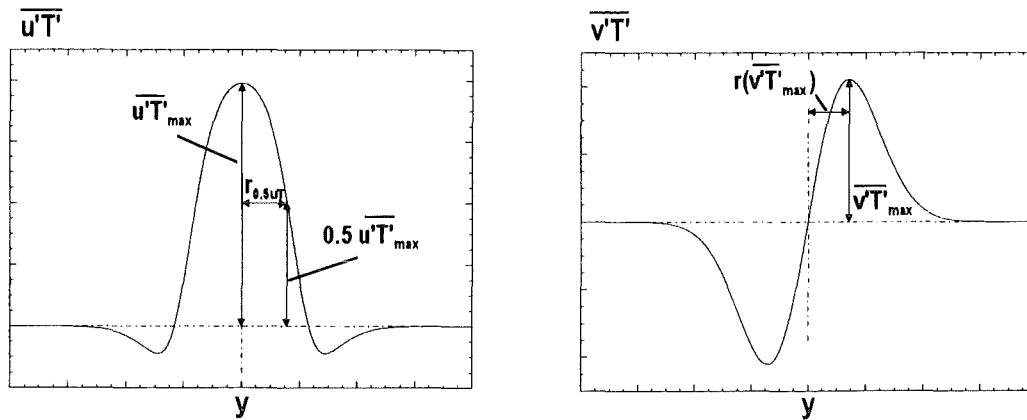


Bild 43: Parameter des axialen (links) und radialen (rechts) turbulenten Wärmestroms

Eine Darstellung der normierten und im Fall des radialen Wärmestroms symmetrisierten Profile ist im Anhang, Bild A1, zu finden. Das Verhalten von axialem und radialem turbulenten Wärmestrom als Funktion von ( $x/d$ ) ist in Bild 44 dargestellt. Der Halbwertsradius des axialen Wärmestroms wird der Lage des Maximums des horizontalen Wärmestroms gegenübergestellt. Dies ist zulässig, da bereits gezeigt wurde, daß die in den Profilen auftretenden Längenmaßstäbe proportional zueinander sind.

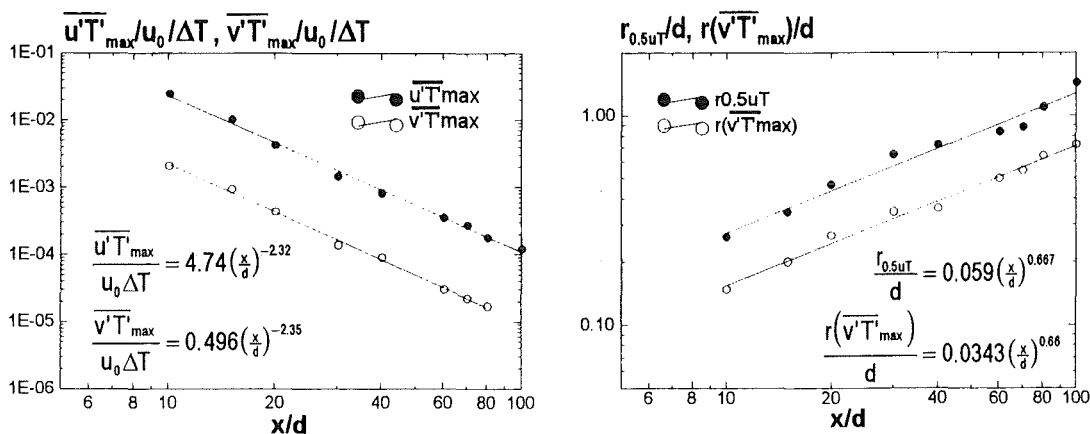


Bild 44: Axiale Entwicklung von Amplitude (links) und Breite (rechts) des axialen (●) und radialen turbulenten Wärmestroms (○) entlang der Kanalachse

Die Amplituden der Extremwerte von axialem und radialem turbulenten Wärmestrom klingen mit praktisch identischen Exponenten nach  $(x/d)^{-2.32}$  bzw.  $(x/d)^{-2.35}$  ab. Shabbir & George (1994) finden einen etwas schwächeren Abfall mit  $(x/d)^{-2}$ . Die Ausbreitung in radialer Richtung erfolgt ebenfalls für beide Wärmeströme mit dem gleichen Exponenten nach  $(x/d)^{2/3}$ . Dieser Exponent liegt zwischen den Exponenten der Ausbreitung der Auftriebsgeschwindigkeit und der Temperatur.

Faßt man die Entwicklung der charakteristischen Parameter aller Strömungsgrößen in  $(x/d)$  bei Mischkonvektion zusammen, so ergeben sich aus den Potenzgesetzen folgende Kernaussagen: Die Amplituden des Nachlauf- und Auftriebsanteils von Axialgeschwindigkeit und turbulenter Schubspannung werden, wie auch die Amplituden der RMS-Werte der Axial- und Radialgeschwindigkeit, im Vergleich zu den ungekoppelten Strömungen deutlich schneller abgebaut. Die Amplituden der Temperatur, des RMS-Werts der Temperatur und der turbulenten Wärmeströme fallen geringfügig schneller ab als im Fall des reinen Auftriebsstrahls. Alle mit dem Temperaturfeld und dem Auftriebstrahl gekoppelten Größen breiten sich mit Exponenten von 0.6 bis 0.8 deutlich langsamer aus als die sich linear mit  $(x/d)$  ausbreitenden Größen des reinen Auftriebsstrahls. Die Ausbreitung der Nachlaufanteile von Axialgeschwindigkeit und turbulenter Schubspannung unterscheidet sich hingegen wenig vom reinen Nachlauf. Eine Erklärung hierfür findet sich in dem Anstieg der Axialgeschwindigkeit im Nachlauf nach außen und der damit verbundenen Vorzeichenumkehr der turbulenten Schubspannung, die die Ausbreitung des Auftriebsstrahls behindert.



## 5. Übertragbarkeit Wasser-Natrium

Ein Parallelexperiment in Natrium als Vergleich zu dem in dieser Arbeit durchgeführten Wasserexperiment steht zur Zeit nicht zur Verfügung. Zum Abschluß der Arbeit wird trotzdem versucht, eine Aussage zur Übertragbarkeit der untersuchten Wasserströmung auf Natrium zu treffen.

In einer hochturbulenten Strömung erfolgen Impuls- und Wärmeaustausch praktisch ausschließlich durch die turbulenten Schwankungsbewegungen. Die Strömung ist dann unabhängig von molekularen Austauschkoefizienten und eine Übertragbarkeit ist unter Umständen möglich. Knebel (1993) findet bereits eine Einschränkung: Für den von ihm bei hohen Reynolds-Zahlen untersuchten auftriebsbehafteten Freistrahler ist die Übertragung des Geschwindigkeitsfelds möglich, aber nicht des Temperaturfelds. Die mittlere Temperatur auf der Kanalachse nimmt bei der Natriumströmung deutlich stärker ab als in der zum Vergleich herangezogenen Wasserströmung. Hierfür macht Knebel den im Natrium-Experiment immer noch vorhandenen Einfluß der molekularen Prandtl-Zahl verantwortlich.

Auf Grund der niedrigen Reynolds-Zahl im FLUTMIK-Experiment ist der Anteil des molekularen Impuls- und Wärmeaustauschs in der untersuchten Wasserströmung nicht zu vernachlässigen. Besonders deutlich wird dies in dem gemessenen Radialprofil der Axialgeschwindigkeit: Die molekulare Prandtl-Zahl von Wasser ist deutlich größer als eins, somit ist der molekulare Impulsaustausch größer als der molekulare Wärmeaustausch. Als Folge ist die kinematische Grenzschicht, die durch den Nachlauf-Anteil der Axialgeschwindigkeit beschrieben werden kann, deutlich breiter als die thermische Grenzschicht, d.h. das Temperaturprofil (und näherungsweise auch der Auftriebsanteil der Axialgeschwindigkeit). Im Kapitel 4 "Meßergebnisse" wurde gezeigt, daß mit wachsendem Abstand von der Kugel die Breite der thermischen Grenzschicht schneller anwächst als die der kinematischen Grenzschicht, ohne jedoch deren Breite in der untersuchten Zone zu erreichen oder zu überschreiten.

Da bei der in den Experimenten gewählten Reynolds-Zahl eine Abhängigkeit der Strömung von der Reynolds-Zahl außer Frage steht, muß das Natrium-Experiment bei der gleichen Reynolds-Zahl durchgeführt werden. Als Folge der niedrigen Prandtl-Zahl von Natrium ist das Temperaturfeld bei dieser Reynolds-Zahl noch weitaus stärker von molekularen Einflüssen geprägt als das Geschwindigkeitsfeld. In jedem Fall wird, im Gegensatz zur Wasserströmung, die thermische Grenzschicht deutlich breiter sein als die kinematische Grenzschicht. Da ein Anwachsen der thermischen Grenzschicht bei konstanter Grashof-Zahl unmittelbar mit einer starken Abnahme des Maximalwerts der Temperatur verbunden ist, ist

der Auftriebseinfluß lokal deutlich schwächer, wirkt aber über einen weit größeren Querschnitt. Es ist zu erwarten, daß das Profil der Axialgeschwindigkeit in der Natriumströmung eine völlig andere Form annimmt als in der Wasserströmung. Bild 45 zeigt qualitativ den Unterschied zwischen den Radialprofilen von Geschwindigkeit und Temperatur in der Wasserströmung und den postulierten Profilen in der Natriumströmung. Die Turbulenzkorrelationen werden durch ihre Kopplung mit dem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld ebenfalls deutlich veränderte Radialprofile besitzen.

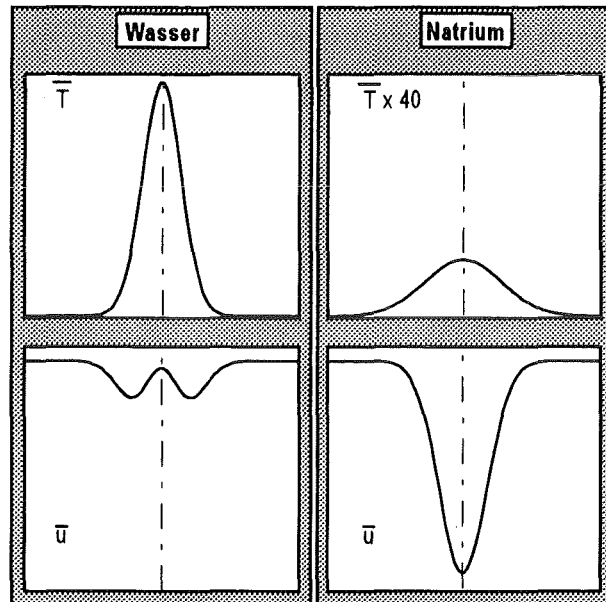


Bild 45: Schematische Darstellung der Radialprofile von Temperatur (oben) und Axialgeschwindigkeit (unten) in Wasser (links) und Natrium (rechts) bei gleicher Reynolds- und Grashof-Zahl

Eine weitere Überlegung, die einer Übertragbarkeit zwischen Messungen in zwei Fluiden mit stark unterschiedlichen Prandtl-Zahlen entgegenspricht, bezieht sich auf die Dissipation der turbulenten Schwankungen. Die Dissipationsraten von Temperatur und Geschwindigkeit, hier in Tensornotation dargestellt,

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_T = 2\kappa \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}}, \quad (5.2)$$

sind dem jeweiligen molekularen Austauschkoefizienten proportional. In einem Fluid mit niedriger molekularer Prandtl-Zahl werden demnach Temperaturschwankungen weitaus stärker dissipativ vernichtet als Geschwindigkeitsschwankungen. Entsprechend sind die mit den Temperaturschwankungen gebildeten Korrelationen  $\overline{u'T'}$ ,  $\overline{v'T'}$  und  $\overline{T'^2}$ , mit den

zeitlichen Mittelwerten von Temperatur und Geschwindigkeit normiert, bei niedriger Prandtl-Zahl kleiner als bei hoher Prandtl-Zahl. Der von diesen Turbulenzgrößen geprägte turbulente Austausch der Hauptströmungsgrößen wird deshalb reduziert.

Bei niedriger Prandtl-Zahl ist der Einfluß des molekularen Wärmeaustauschkoeffizienten also aus zwei Gründen stark: Einerseits ist die molekulare Diffusion groß, andererseits werden die turbulenten Temperaturschwankungen durch deren große Dissipationsrate  $\varepsilon_T$  stark abgebaut und damit die turbulente Diffusion reduziert. Die Folge ist ein verändertes Temperaturfeld, was durch den Auftriebseffekt auch zu einem veränderten Geschwindigkeitsfeld führt.

Die Übertragung der mit dieser Arbeit ermittelten Ergebnisse für die Wasserströmung auf eine Strömung mit dem Fluid Natrium ist somit nicht nur, wie bei Knebel für das Temperaturfeld, sondern aufgrund des auftriebsbedingt starken Einflusses dieses Temperaturfelds auf das Geschwindigkeitsfeld unmöglich.

## 6. Zusammenfassung

Für die Berechnung von turbulenten Strömungen mit Wärmetransport werden Turbulenzmodelle benötigt. Die Entwicklung erweiterter Turbulenzmodelle erfordert experimentelle Daten zur Validierung, die mit dieser Arbeit bereitgestellt werden. Exemplarisch für eine turbulente Mischkonvektionsströmung wird die Überlagerung einer Zwangsströmung und einer Naturkonvektionsströmung betrachtet. Die Zwangsströmung rührt hierbei vom Nachlauf hinter einer angeströmten Kugel her, der Auftriebseffekt wird durch die Beheizung der Kugel eingebracht.

Aus den Produktionstermen der Transportgleichungen für die zeitlich gemittelten Strömungsgrößen sowie die turbulenten Spannungen und Wärmeströme ergeben sich die wichtigsten zu messenden Größen. Mit der vorliegenden Arbeit ist für eine achsensymmetrische turbulente Grenzschichtströmung neben den Hauptströmungsgrößen  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$  der vollständige Satz Korrelationen erster Ordnung, bestehend aus  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{T'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$ ,  $\overline{u'T'}$  und  $\overline{v'T'}$ , experimentell als zweidimensionales Datenfeld ermittelt worden. Damit ist die Möglichkeit der Validierung von Turbulenzmodellen an Hand der untersuchten Strömung geschaffen.

Die Form der Radialprofile der gemessenen Strömungsgrößen bei Zwangs- und Mischkonvektion wird ohne Verwendung von Modellansätzen an Hand der Produktionsterme, welche in den jeweiligen Transportgleichungen auftreten, beschrieben. Im Fall der Mischkonvektion existieren für alle mit der Axialgeschwindigkeit verknüpften Größen zwei Produktionsmechanismen. Die Messungen zeigen deutlich, daß diese Produktion in der untersuchten Strömung mit Ausnahme der turbulenten Schubspannung hauptsächlich durch Auftriebseinfluß und weitaus weniger durch die Gradienten des Hauptströmungsfelds erfolgt. Auf die turbulente Schubspannung haben beide Produktionsmechanismen etwa gleich starken Einfluß. Für die Turbulenzmodellierung bedeutet dies, daß die vorliegende turbulente Mischkonvektionsströmung nicht durch Anwendung von Gradientenansätzen beschrieben werden kann. Stattdessen müssen erweiterte Modellansätze verwendet werden. Ein Beispiel für solche Modellansätze ist der Ansatz für den turbulenten axialen Wärmestrom  $\overline{u'T'}$  von Hossain (1980) nach Gleichung (2.72), der im letzten Term den Auftriebseffekt berücksichtigt.

Die Profile der RMS-Werte der Geschwindigkeit in Axial- und Horizontalrichtung haben bei Zwangskonvektion annähernd gleiche Form und Betrag. Bei Mischkonvektion unterscheiden sich diese Profile hingegen stark. Durch den Auftriebseffekt entsteht hier also eine markante Anisotropie des Geschwindigkeitsfelds.

Im allgemeinen ist die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  als wichtige Modellierungsgröße dreidimensionaler Natur, da sie sich aus den RMS-Werten der Geschwindigkeiten in Axial-, Radial- und Umfangsrichtung berechnet. Die Messungen zeigen, daß die Profile der Schwankungen von Radial- und Umfangsgeschwindigkeit annähernd identisch sind. Somit kann die kinetische Energie der Turbulenz in der untersuchten Strömung mit einer zweidimensionalen, achsensymmetrischen Messung bestimmt werden.

Zur Ermittlung von Gesetzmäßigkeiten für die Entwicklung der Strömungsgrößen mit wachsendem Abstand von der Kugel werden die gemessenen Profile durch einfache Formfunktionen approximiert. Der Einsatz dieser Formfunktionen ermöglicht die objektive Symmetrisierung der Profile und das Kompensieren von Meßungenauigkeiten. Die Darstellung der Entwicklung der Profile mit wachsendem Abstand von der Kugel kann dann mit wenigen Parametern beschrieben werden. Die Formfunktionen der Axialgeschwindigkeit  $\bar{u}$  und der turbulenten Schubspannung  $\overline{u'v'}$  ermöglichen bei Mischkonvektion ein Zerlegen der Profile in einen Nachlauf- und einen Auftriebsanteil. Für die charakteristischen Parameter der jeweiligen Teilfunktionen werden Potenzfunktionen ermittelt, die von den aus der Literatur bekannten Ähnlichkeitslösungen für den reinen Nachlauf und den reinen Auftriebsstrahl deutlich abweichen. Die beiden Teilprobleme sind also stark miteinander gekoppelt. Die Amplituden beider Teilfunktionen nehmen mit wachsendem Abstand von der Kugel deutlich stärker ab als die jeweilige Grundlösung. Besonders markant ist die im Vergleich zum reinen Auftriebsstrahl deutlich langsamere Ausbreitung des Auftriebsanteils im Mischkonvektionsnachlauf, der offensichtlich von der im äußeren Bereich des Nachlaufs ansteigenden Axialgeschwindigkeit und der damit verbundenen Vorzeichenumkehr der turbulenten Schubspannung an seiner Ausbreitung gehindert wird.

## 7. Literaturverzeichnis

- AFZAL, N. 1983 Mixed convection in an axisymmetric buoyant plume. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* **26**, 381-388
- BATCHELOR, G.K. 1954 Heat convection and buoyancy effects in fluids. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **80**, 339-358
- BEVILAQUA, P. & LYKOURDIS, P.S. 1978 Turbulence memory in self-preserving wakes. *Journal of Fluid Mechanics* **89**, 589-606
- BUNK, M.; HOELLE, C.; KNEBEL, J.U. & MÜLLER, U. 1995 Berechnung von turbulenten Auftriebsströmungen mit dem k-epsilon- $T^2$ -Turbulenzmodell. *FZKA-Bericht* **5519**
- BREMHORST, K. & KREBS, L. 1992 Experimentally determined turbulent Prandtl numbers in liquid sodium at low Reynolds numbers. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* **35**, 351-359
- CANNON, S. & CHAMPAGNE, F. 1993 Large-scale structures in wakes behind axisymmetric bodies. *Turbulent shear flows 8: selected papers from the Eighth Int. Symposium on Turbulent Shear Flows*, München, 9.-11. September 1991. Berlin [u. a.] : Springer, 6.5.1-6.5.6.
- CARMODY, T. 1964 Establishment of the wake behind a disk. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* **86**, 869-882
- CARTECIANO, L.N. 1996 Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen. *Dissertation Universität Karlsruhe FZKA-Bericht* **5775**
- CHEVRAY, R. 1968 The turbulent wake of a body of revolution. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 275-284
- DURST, F.; MELLING, A. & WHITELAW, J.H. 1987 *Theorie und Praxis der Laser-Doppler-Anemometrie*. G. Braun Karlsruhe
- EL BAZ, A.; CRAFT, T.J.; INCE, N.Z. & LAUNDER, B.E. 1993 On the adequacy of the thin-shear-flow equations for computing turbulent jets in stagnant surroundings. *International Journal of Heat and Fluid Flow* **14**, 164-169
- ERMSHAUS, R. 1970 Eigentümlichkeiten turbulenter Nachlaufströmungen. *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt* **46**, Göttingen

- FAVRE, A. 1969 Statistical equations of turbulent gases. *in: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, Soc. for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania* , 231-266
- FREYMUTH, P. 1975 Search for the final period of decay of the axisymmetric turbulent wake. *Journal of Fluid Mechanics* **68**, 813-829
- FREYMUTH, P. & UBEROI, M.S. 1973 Temperature fluctuations in the wake behind an optically heated sphere. *Physics of Fluids* **16**, 161-168
- FUJII, T. 1963 Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* **6**, 597-606
- GEORGE, W.K.; ALPERT, R.L. & TAMANINI, F. 1977 Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **20**, 1145-1154
- GEBHARDT, B. 1960 *Heat Transfer*. McGraw Hill Book Company, New York
- GIBSON, C.H.; CHEN, C.C. & LIN, S. C. 1968 Measurements of turbulent velocity and temperature fluctuations in the wake of a sphere. *AIAA Journal*. **6**, 642-649
- GROTH, J. & JOHANSSON, A.V. 1988 Turbulence reduction by screens. *Journal of Fluid Mechanics* **197** 139-155
- HALL, A.A. & HISLOP, G.S. 1938 Velocity and temperature distributions in the turbulent wake behind a heated body of revolution. *Proceedings of the Cambridge Phil. Society* **34**, 48-67
- HARLOW, F. & NAKAYAMA, P. I. 1967 Turbulence Transport Equations. *Physics of Fluids* **10**, 2323-2332
- HALL, C.A.; PORSCHING, T.A. & DOUGALL, R.S. 1980 *EPRI-Report. NP-1416*, 3-7
- HIGUCHI, H. & KUBOTA, T. 1990 Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations. *Physics of Fluids A* **2**, 1615-1623
- HOSSAIN, M. 1980 Mathematische Modellierung von turbulenten Auftriebsströmungen. *Dissertation Universität Karlsruhe*
- HWANG, N.H.C. & BALDWIN, L.V. 1966 Decay of turbulence in axisymmetric wakes. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 261-268
- KIRK, G.D. & JOHNSON, A.T. 1986 Experimental determination of mixed convective heat transfer from a sphere to air. *Int. Comm. in Heat and Mass Transfer* **13**, 369-387

- KNEBEL, J.U. 1993 Experimentelle Untersuchungen in turbulenten Auftriebsstrahlen in Natrium. *Dissertation Universität Karlsruhe KfK-Bericht 5175*
- KOTSOVINOS, N.E. & LIST, E.J. 1976 Turbulence measurement in a two-dimensional buoyant jet using laser doppler velocimetry. *The accuracy of flow measurements by laser Doppler methods : Proceedings of the LDA-Symposium, Copenhagen, 25.-28. August 1975, Skovlunde, 684-689*
- KREBS, L. 1979 Ausbreitung von Temperaturstörungen in begrenzter Strömung hinter einem Düsenblock. *Dissertation Universität Karlsruhe KfK-Bericht 2846*
- KREITH, F. 1963 *Principles of Heat Transfer*. 2nd Edition, Scranton Int. Text Book Company, New York
- LAUNDER, B. E. & SPALDING, D. B. 1974 The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering 3*, 269-289
- LUMLEY, J.L. & KHAJEH-NOURI, B. 1974 Computational modeling of turbulent transport. *in: Turbulent Diffusion in Environmental Pollution*, Academic Press
- MARTH, W. 1992 Der Schnelle Brüter SNR 300 im Auf und Ab seiner Geschichte. *KfK-Bericht 4666*
- MORTON, B.R. 1959 Forced plumes. *Journal of Fluid Mechanics 2*, 151-163
- NAKAGOME, H. & HIRATA, M. 1976 The structure of turbulent diffusion in an axisymmetrical thermal plume. *Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection, Vol. 1* Hemisphere Publishing Corporation, 361-372
- PAPANICOLAOU, P.N. & LIST, E.J. 1988 Investigations of round vertical turbulent buoyant jets. *Journal of Fluid Mechanics 195*, 341-391
- POPE, S.B. 1978 An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly. *AIAA Journal*, 279-281
- PRANDTL, L. 1927 Ueber die ausgebildete Turbulenz. *Proceedings of the Second Int. Congress for Applied Mechanics, Zürich, 12.-17. September 1926. Zürich [u. a.] : Füssli, 62-74*
- REICHARDT, H. & ERMSHAUS, R. 1962 Impuls- und Wärmeübertragung im turbulenten Windschatten hinter Rotationskörpern. *Int. Jour. of Heat and Mass Transf. 5*, 251-265
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Transactions of the Royal Society, London 174*, 935ff



- RIDDHAGNI, P.R.; BEVILAQUA, P.M. & LYKLOUDIS, P.S. 1971 Measurements in the turbulent wake of a sphere. *AIAA Journal* **9**, 1433-1434
- RODI, W. 1975 A review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers. in: *Studies in Convection - Theory, Measurement and Applications* Academic Press **1**, 79-165
- RODI, W. 1985 Turbulenzmodelle und ihre Anwendung mit Hilfe von Differenzenverfahren. Vorlesung WS 1985/86 Universität Karlsruhe
- RUCK, B. 1987 *Laser-Doppler-Anemometrie*. AT-Fachverlag Stuttgart
- SCHMIDT, W. 1941 Turbulent propagation of a stream of air. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **21**, 265-278
- SHABBIR, A. & GEORGE, W.K. 1994 Experiments on a round turbulent buoyant plume. *Journal of Fluid Mechanics* **275**, 1-32
- SPEEDING, G.R.; BROWAND F.K. & FINCHAM, A.M. 1996 Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **314**, 53-103
- SUCKOW, D. 1993 Experimentelle Untersuchung turbulenter Mischkonvektion im Nachlauf einer beheizten Kugel. *Dissertation Universität Karlsruhe KfK-Bericht* **5174**
- SWAIN, L.M. 1929 On the turbulent wake behind a body of revolution. *Proc. Roy. Soc. A* **125**, 647-659
- TANG, L. & JOHNSON, A.T. 1990 Flow visualization of mixed convection about a sphere. *Int. Communications in Heat and Mass Transfer* **17**, 67-77
- TAMANINI, F. 1977 An improved version of the k-epsilon-g.model of turbulence and its application to axisymmetric forced and buoyant jets. *Basic Res. Dep. Factory Mutual Res. Corp., Factory Mutual Systems, Norwood, Massachusetts, Technical Report* **22360-4, RC77-BT-4**
- TUREAUD, T.F. 1988 An experimental investigation and the numerical prediction of the effects of large temperature difference on a turbulent wake. *Dissertation, Dep. of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, Indiana*
- UBEROI, M.S. & FREYMUTH, P. 1970 Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake. *Physics of Fluids*, **13**, 2205-2210
- ZEL'DOVICH, Y.B. 1937 Limiting laws for turbulent flows in free convection. *Zh. Eksp. Theoret. Fiz.* **7**, 1463ff

# Anhang

I. Normierte Darstellung der Profile für $Q=60\text{W}$ .....	A1
II. Messungen bei 40 W Heizleistung.....	A2
III. Profile der Horizontalgeschwindigkeit für $Q = 0 \text{ W}$ und $Q = 60 \text{ W}$ .....	A6
IV. Rohdaten.....	A7
V. Fehlerabschätzung.....	A10
VI. Bildung der Grashof-Zahl .....	A15

# I. Normierte Darstellung der Profile für Q=60W

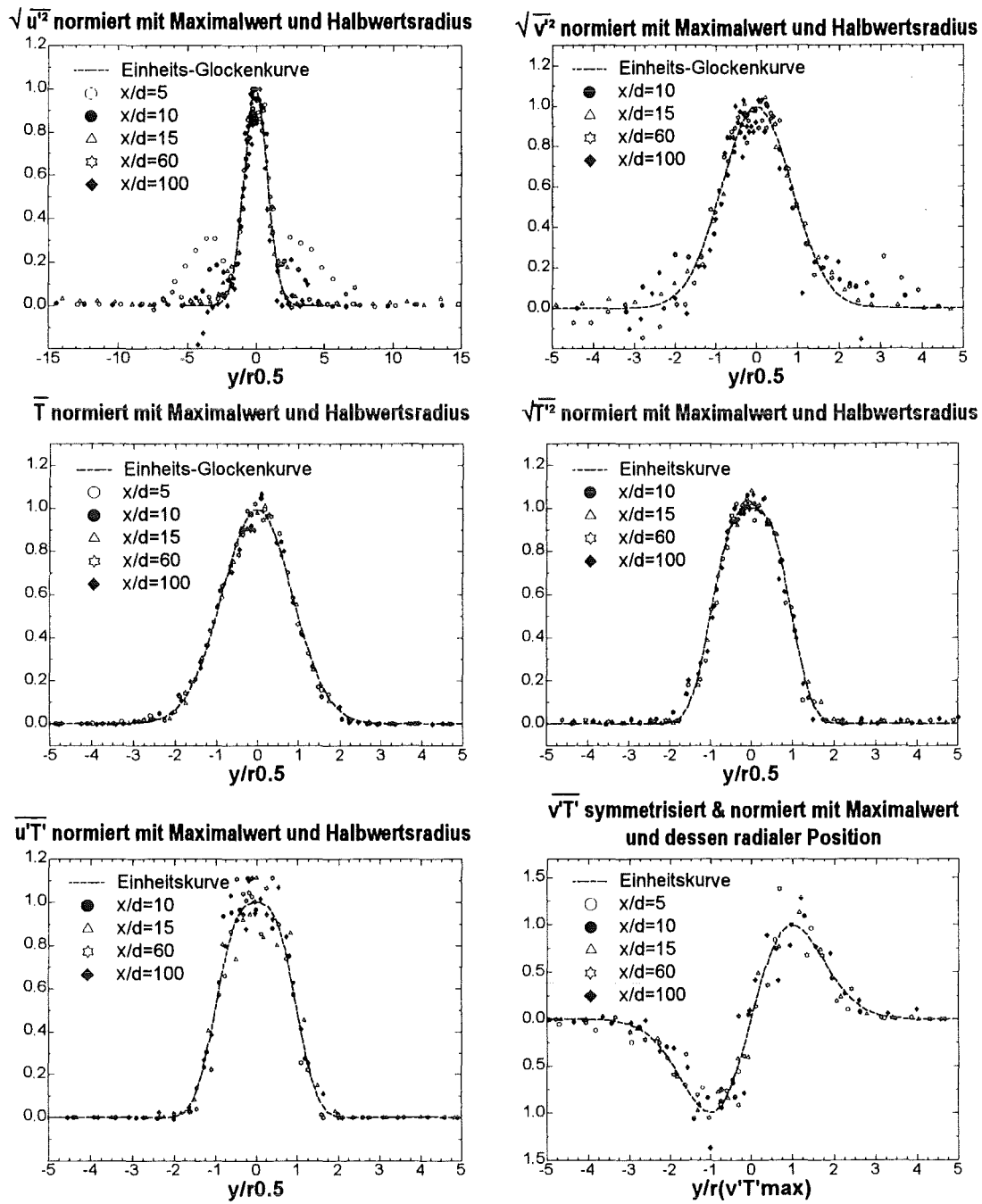


Bild A1: normierte Darstellung der Radialprofile des RMS-Werts von Axial-, Radialgeschwindigkeit und der Temperatur, des horizontalen und axialen Wärmestroms und der Temperatur (von links oben im Uhrzeigersinn) bei  $Q=60W$

## II. Messungen bei 40 W Heizleistung

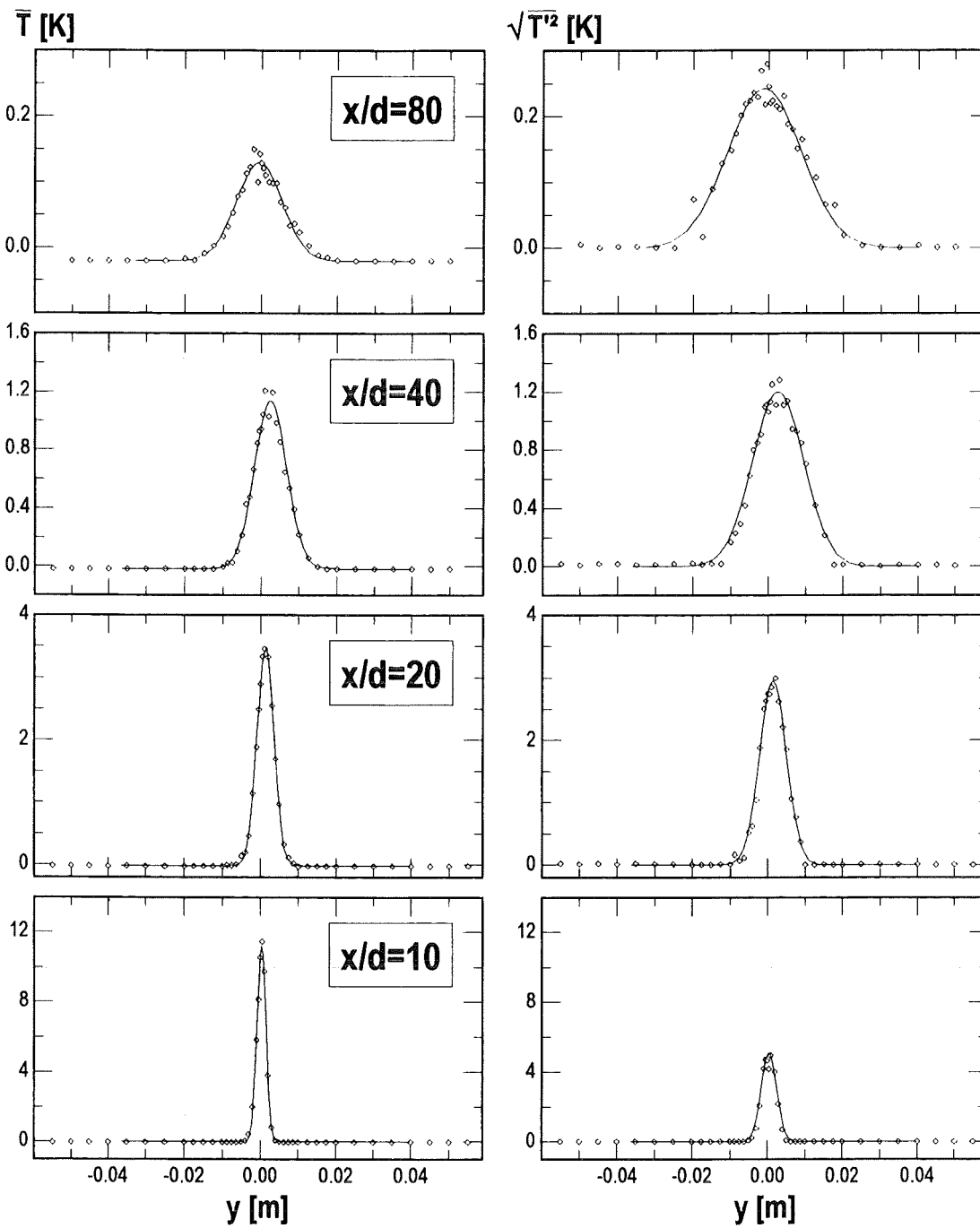


Bild A2: Temperatur (links) und RMS-Wert der Temperatur (rechts) bei  $Q = 40$  W

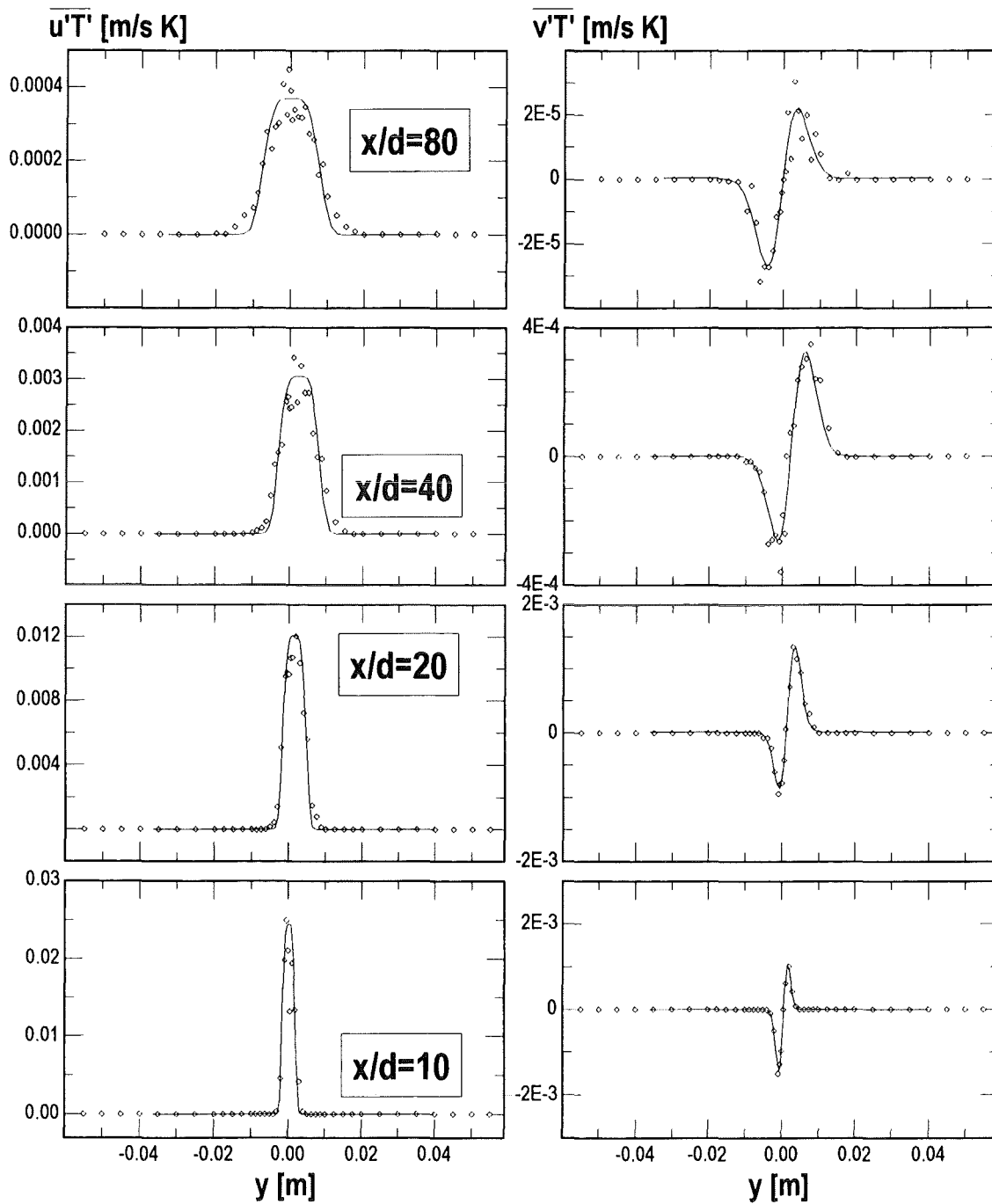


Bild A3: Axialer (links) und radialer (rechts) turbulenter Wärmestrom bei  $Q = 40 \text{ W}$

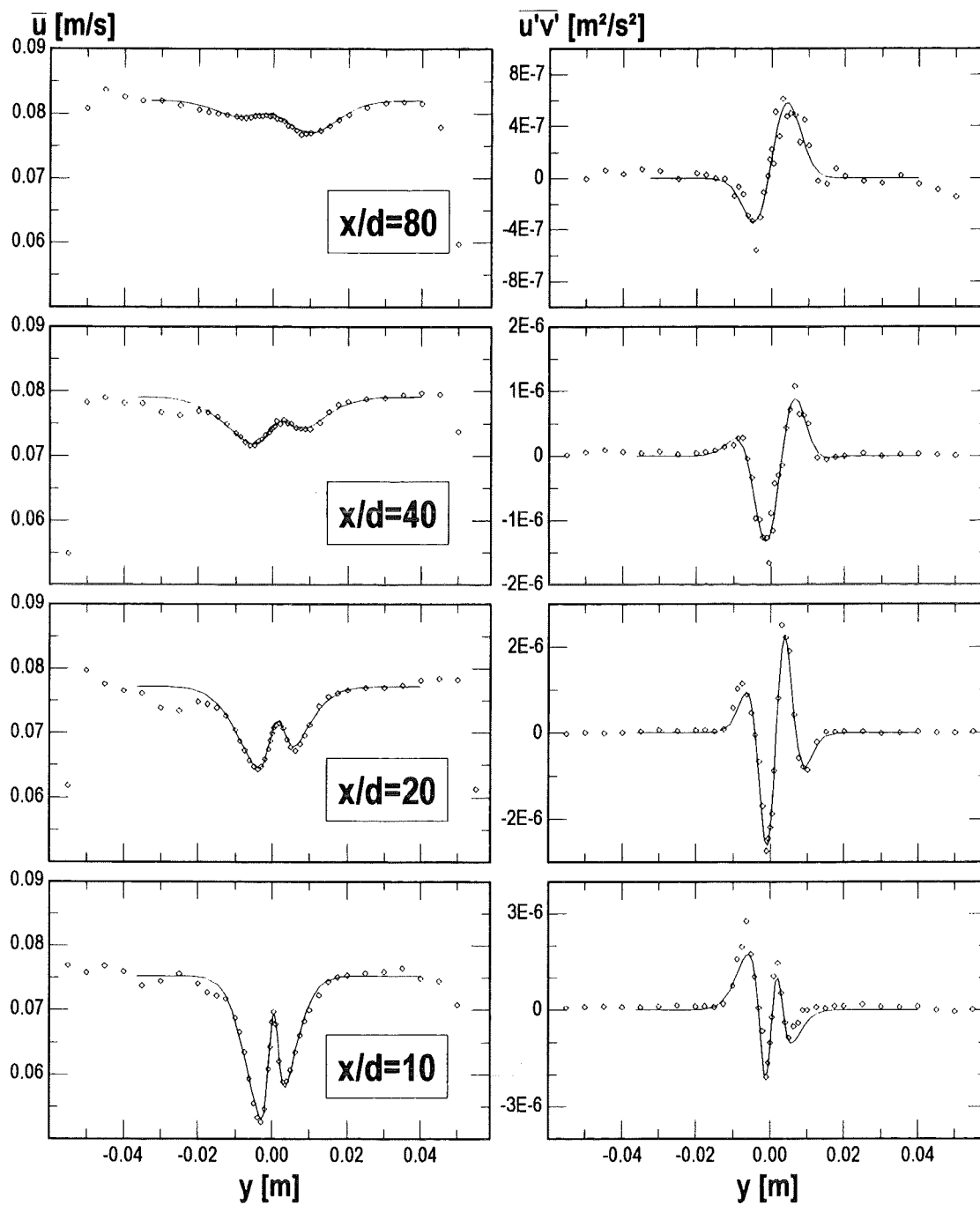


Bild A4: Axialgeschwindigkeit (links) und turbulente Schubspannung (rechts) bei  $Q = 40 \text{ W}$

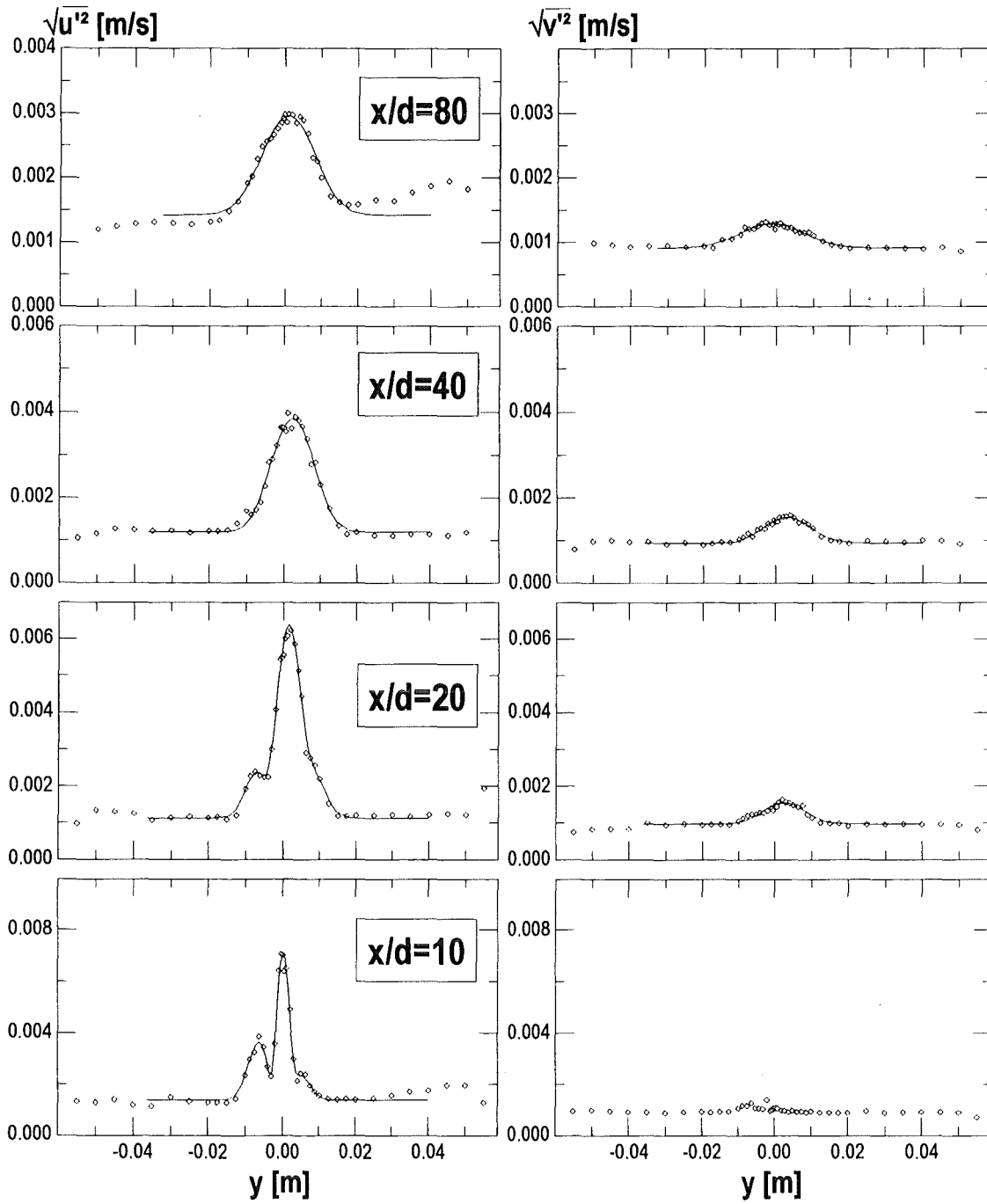


Bild A5: RMS-Wert von Axial- (links) und Radialgeschwindigkeit (rechts) bei  $Q = 40 W$

### III. Profile der Horizontalgeschwindigkeit für $Q = 0 \text{ W}$ und $Q = 60 \text{ W}$

In Bild A6 ist die Horizontalgeschwindigkeit  $\bar{v}$  für die Traverse  $\varphi=0^\circ$  dargestellt. Sie entspricht damit, wie im Kapitel "Meßergebnisse" beschrieben, der Radialgeschwindigkeit. Die eingezeichneten Kurvenzüge sind keine Formfunktionen, sondern einfache Näherungskurven (sog. B-Splines).

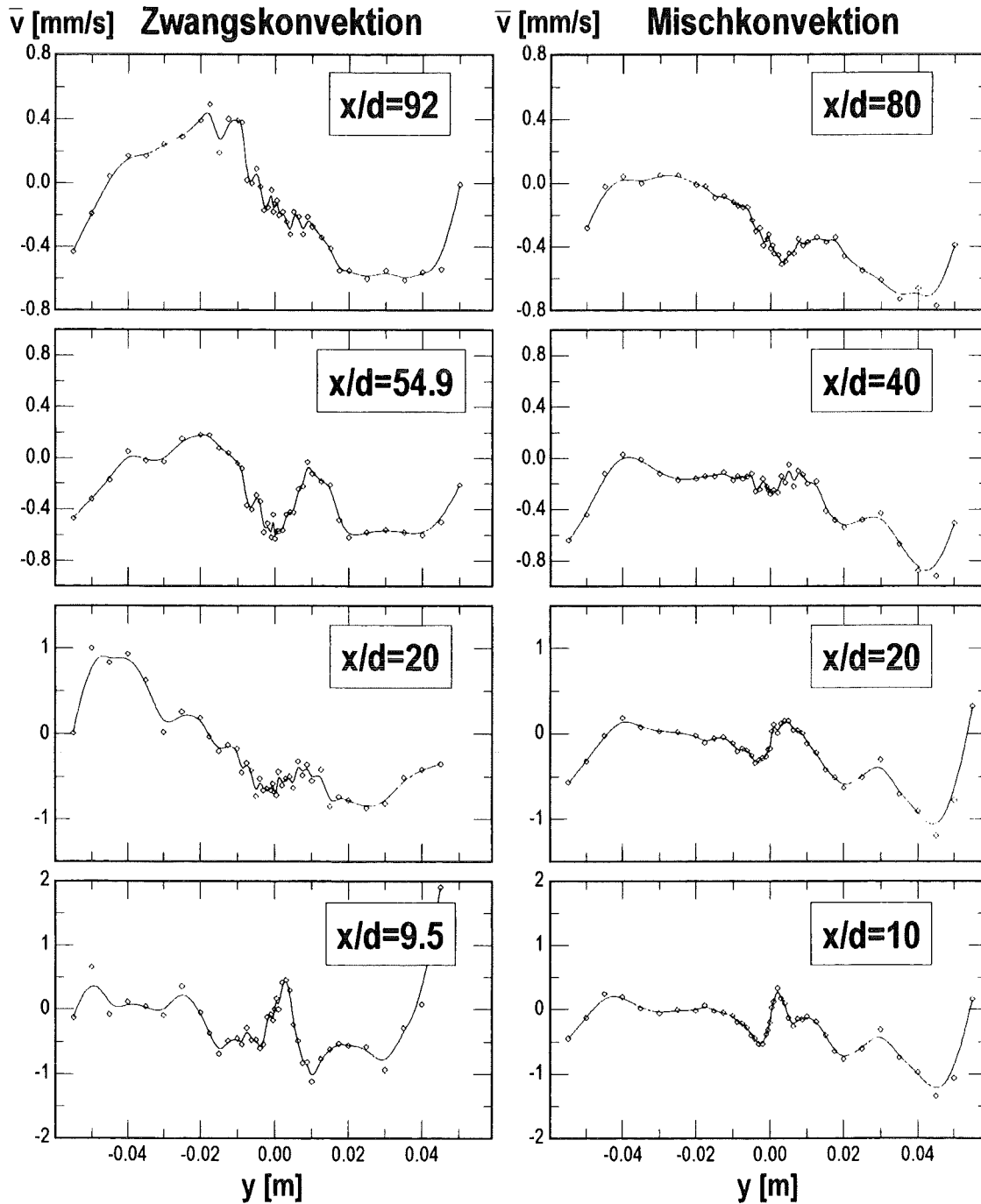


Bild A6: Horizontal-/Radialgeschwindigkeit bei  $Q = 0 \text{ W}$  (links) und  $Q = 60 \text{ W}$  (rechts)



#### IV. Rohdaten

Im folgenden werden Signale von Geschwindigkeit und Temperatur als Funktion der Zeit dargestellt. Aus der Messung 706 werden drei typische Punkte des Profils ausgewählt.

- **im Außenfeld ( $y=40\text{mm}$ ):** Die Temperatur ist konstant, die Geschwindigkeiten schwanken leicht, sind aber nicht miteinander korreliert.

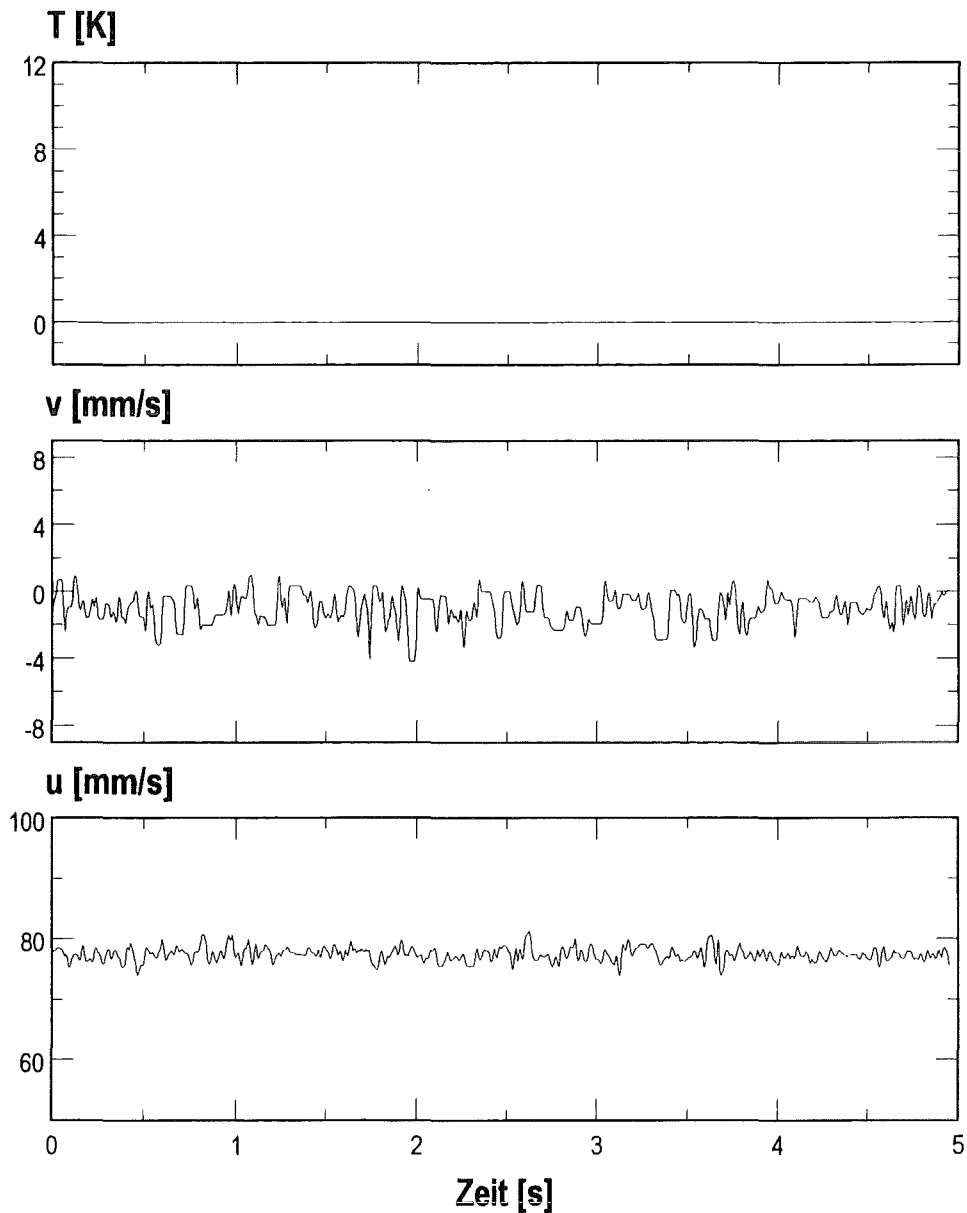
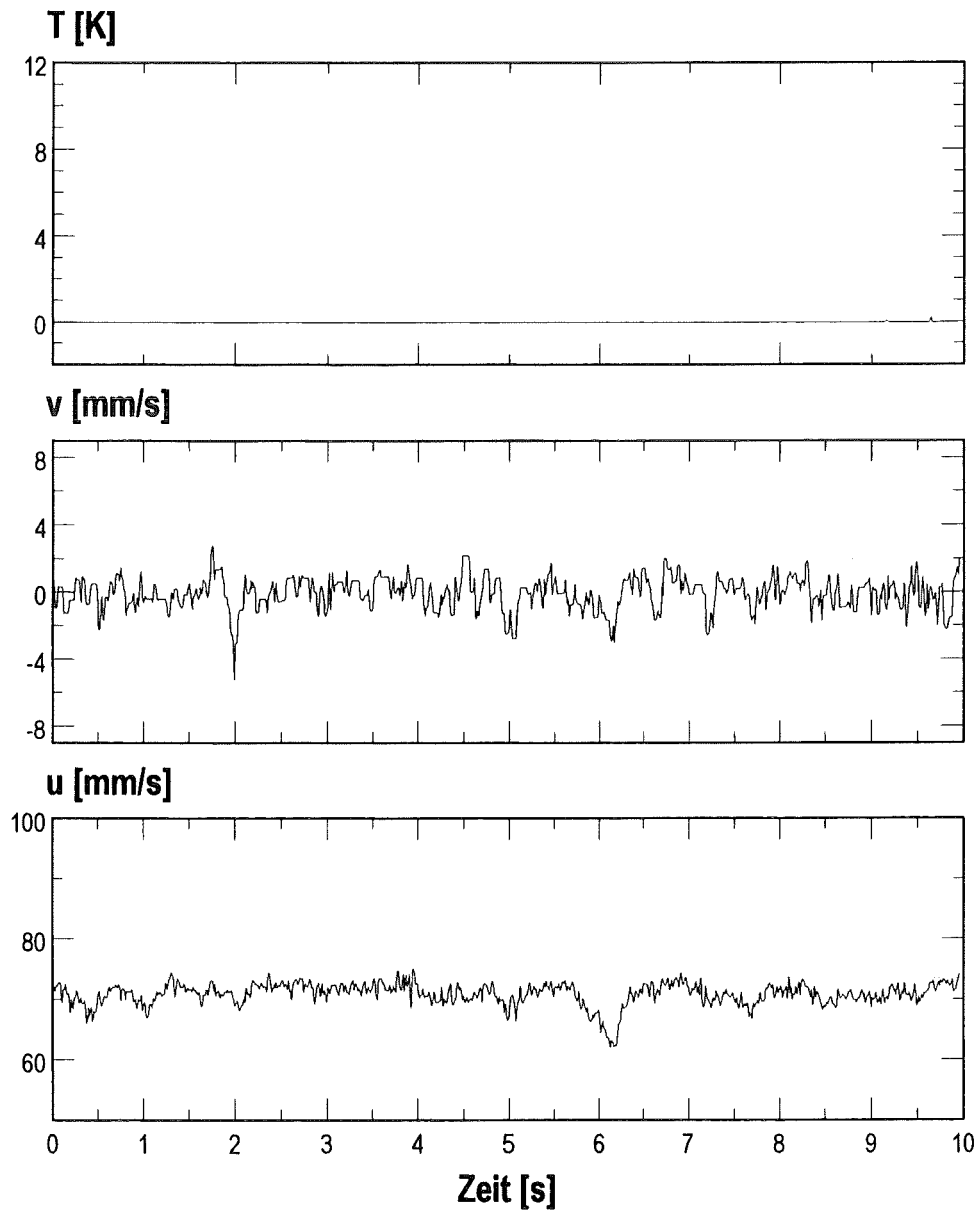


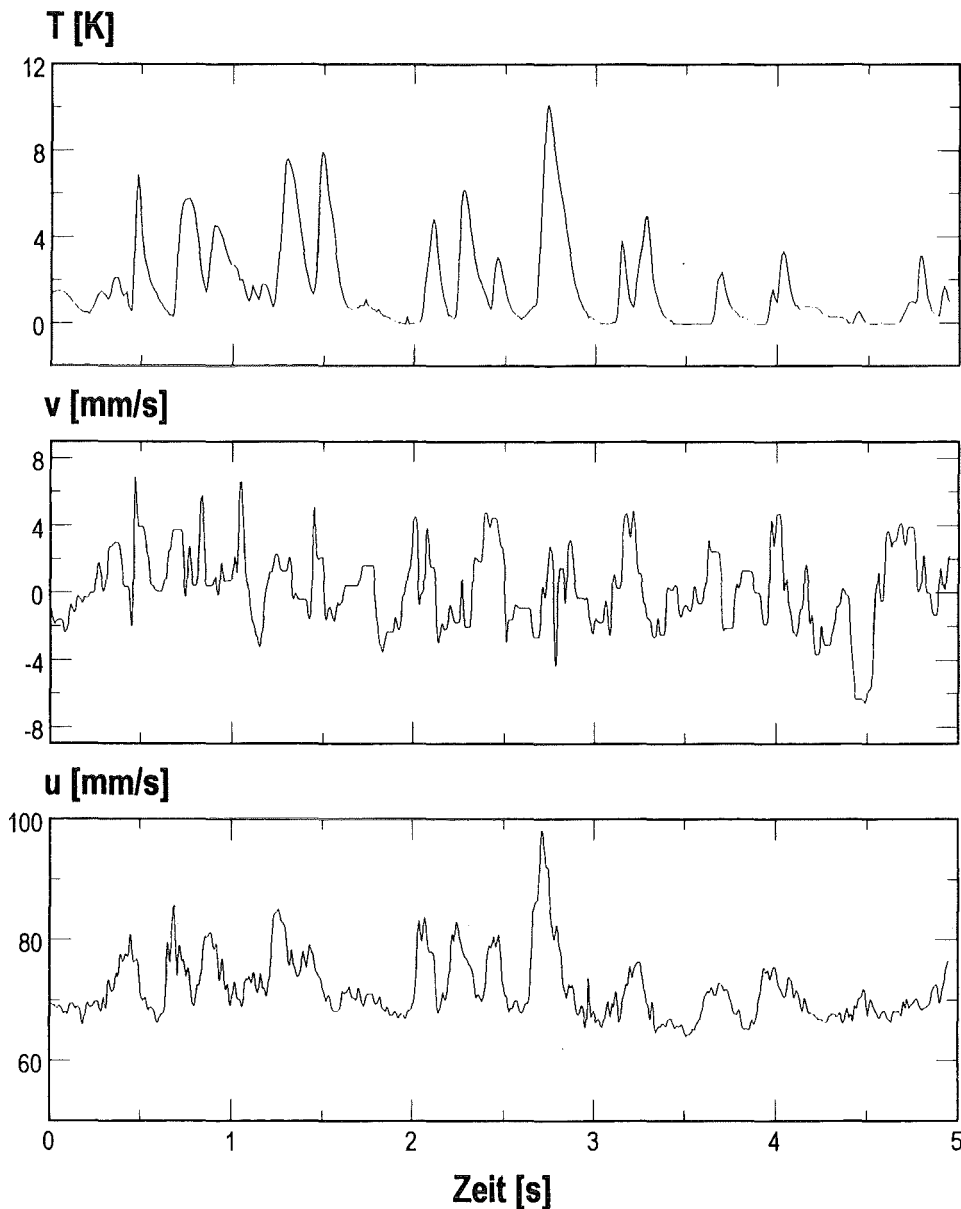
Bild A7: zeitlicher Signalverlauf in der Außenströmung, von oben nach unten:  
Temperatur, Horizontal- und Axialgeschwindigkeit

- **innerhalb des Nachlaufs, außerhalb des Auftriebsstrahls ( $y=-10\text{mm}$ ):** Die Geschwindigkeit ist auch hier konstant. Die Schwankungen der Geschwindigkeit sind größer als im Außenfeld. An verschiedenen Stellen verhalten sich die beiden Geschwindigkeiten ähnlich und sind deshalb korreliert. Besonders deutlich wird dies im Bereich um  $t = 6$  Sekunden.



*Bild A8: zeitlicher Signalverlauf innerhalb des Nachlaufs, außerhalb des Auftriebsstrahls, von oben nach unten: Temperatur, Horizontal- und Axialgeschwindigkeit*

- **innerhalb des Nachlaufs und des Auftriebsstrahls ( $y=4\text{mm}$ ):** Temperatur und Geschwindigkeit schwanken stark. Die Temperatur schwankt mehr im Bereich niedriger Frequenzen, während die Geschwindigkeit auch hochfrequente Schwankungsanteile besitzt. Deutlich ist zu erkennen, daß die Temperatur in diesem Bereich stark mit der Axialgeschwindigkeit, aber auch klar mit der Horizontalgeschwindigkeit korreliert.



*Bild A9: zeitlicher Signalverlauf innerhalb von Nachlauf und Auftriebsstrahl, von oben nach unten:  
Temperatur, Horizontal- und Axialgeschwindigkeit*

## V. Fehlerabschätzung

Durch einen Vergleich von wiederholt durchgeführten Messungen wurde sichergestellt, daß alle Rand- und Anfangsbedingungen sowie die Meßergebnisse an den vermessenen Punkten im Strömungsfeld reproduzierbar sind. Die ermittelten experimentellen Unsicherheiten weichen von den von Suckow (1993) ermittelten Werten leicht ab, da zum Teil andere Komponenten in der Anlage verbaut worden sind. Die aufgetretenen Fehler und Unsicherheiten werden nach Art der Meßgrößen unterteilt.

### Positionierung

Die Angabe eines im herkömmlichen Sinne relativen Fehlers für die Koordinaten  $(x, y, z)$ , besonders für die Axialkoordinate  $x$ , die sehr große Werte annehmen kann, erscheint wenig sinnvoll, denn die einzige systemkonstante Skalierungsgröße ist der Kugeldurchmesser  $d$ . Der mit  $d$  gebildete relative Fehler kann aber als dimensionloser Fehler verstanden werden. Die im folgenden aufgeführten Prozentangaben beziehen sich auf diesen dimensionlosen Fehler.

Der Fehler bei der Bestimmung des Koordinatensystem-Nullpunkts ist in alle drei Raumrichtungen jeweils kleiner als  $\pm 0.5\text{mm}$  (5%). Die Positioniergenauigkeit des LDA-Meßvolumens und der Thermoelementsonde sowie die relative Lage der beiden Systeme zueinander beträgt  $\pm 0.01\text{mm}$  ( $\pm 0.1\%$ ). Die Lage der beiden um  $90^\circ$  zueinander verdrehten Meßvolumina des LDA-Systems kann als perfekt einstellbar betrachtet werden, so daß hier nur ein vernachlässigbar kleiner, nicht quantitativ erfaßbarer Fehler auftritt. Der bei der Bestimmung des axialen Abstandes des Kugelheizers von der Meßebeane auftretende Fehler wird kleiner als  $\pm 0.5\text{mm}$  ( $\pm 5\%$ ) abgeschätzt. Hier zeigt sich die niedrige Aussagekraft des dimensionslosen Fehlers: Berechnet man den relativen Fehler des axialen Abstands mit dem Abstand  $(x/d)$  selbst, so ergibt sich bereits für die Position des kleinsten vermessenen Profils bei  $(x/d)=5$  ein relativer Fehler von nur  $\pm 1.25\%$ , für den maximalen Abstand bei  $(x/d)=100$  ist der relative Fehler mit  $0.05\%$  verschwindend gering.

### Versuchsparameter

Hier werden die relativen Fehler mit den Mittelwerten der entsprechenden Größen gebildet. Die Versuchsparameter sind sehr genau einstellbar, so daß bei der Fehlerbetrachtung der Fehler beim Einstellen der Versuchsparameter gegenüber dem Fehler durch die zeitlichen Schwankungen der Größe vernachlässigt werden kann.

Der Volumenstrom  $\dot{V}$  im Wasserkreislauf und somit auch die querschnittsgemittelte  $u_{\text{Bulk}}$  schwanken während einer mehrstündigen Messung um  $\pm 0.7\%$ .

Die mittlere Temperatur der Anströmung schwankt um  $\pm 0.05\text{K}$ , dies entspricht  $\pm 0.2\%$ , berechnet mit der maximalen System-Temperaturdifferenz  $\Delta T$ .

Im Bereich der Teststrecke treten keine Wärmeverluste an die Umgebung auf, da die Teststrecke mit Isolationsmaterial umgeben ist.

Die elektrische Heizleistung der Kugel  $\dot{Q}$  wird bis auf  $\pm 0.03\text{W}$  bzw.  $\pm 0.05\%$  bei maximaler Heizleistung konstant gehalten. Die Temperatur des Kugelheizers schwankt etwas stärker, gebildet mit der jeweiligen Temperaturdifferenz zwischen Kugelinneem und Anströmung um ca.  $\pm 0.2\%$ . Offensichtlich sind hierfür die in unmittelbarer Nähe des Kugelheizers aufgrund der Beheizung auftretenden, sehr starken zeitlichen Schwankungen der Wassertemperatur verantwortlich, die das Signal des Thermoelements im Kugelinneem beeinflussen.

### **Zeitliche Mittelwerte der Geschwindigkeiten und der Temperatur**

Die Unsicherheit der mittleren Axialgeschwindigkeit  $\bar{u}$  beträgt  $\pm 0.5\text{mm/s}$  bzw.  $\pm 0.7\%$ .

Ein systematischer Fehler durch Schiefstellung der LDA-Optik relativ zur Kanalachse kann unter Berücksichtigung der in Kapitel 4.1.1. beschriebenen Abschätzung hier vernachlässigt werden.

Aus dieser Abschätzung wird auch deutlich, daß der systematische Fehler bei den horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  nicht vernachlässigt werden kann. Die in Bild A6 dargestellten Profile der Horizontalgeschwindigkeit zeigen aber, daß eine Quantifizierung weder des systematischen noch des Gesamtfehlers für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten in sinnvoller Weise möglich ist. Die Reproduzierbarkeit der Profile ist nur in unbefriedigendem Maße gegeben. Aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit vollständig auf die Auswertung dieser Größen verzichtet.

Die LDA-Messung bestimmt die Geschwindigkeiten von in der Strömung mitgeführten Partikeln, nicht die Strömungsgeschwindigkeit selbst. Aufgrund der kleinen Partikelgröße, aufgrund des im Vergleich zu Gasströmungen geringen Dichteunterschieds zwischen Partikel und Wasser und aufgrund der niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten ist das Teilchenfolgevermögen ideal und der erzeugte Fehler mit  $0.01\%$  vernachlässigbar.

Die Unsicherheit der mittleren Temperatur beträgt  $\pm 6\text{mK}$  bzw.  $0.028\%$  bezogen auf die System-Temperaturdifferenz  $\Delta T$ .

## RMS-Werte der Geschwindigkeiten und der Temperatur

Für die RMS-Werte werden folgende Unsicherheiten ermittelt:

$$\sqrt{u'^2}: \quad \pm 1.5\%,$$

$$\sqrt{v'^2}, \sqrt{w'^2}: \quad \pm 2\%,$$

$$\sqrt{T'^2}: \quad \pm 0.8\%.$$

Hier zeigt sich, daß die RMS-Werte der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten deutlich besser reproduzierbar sind als deren zeitliche Mittelwerte.

Der aus den Messungen ermittelte RMS-Wert einer Größe setzt sich zusammen aus dem wahren RMS-Wert bei unendlich langer Meßzeit und einem Meßfehler, der mit steigender Anzahl von Meßpunkten abnimmt. Bei der in den durchgeführten Versuchen minimalen Anzahl von  $N=5120$  Meßpunkten beträgt der relative Fehler des RMS-Werts, skaliert mit dem mittleren RMS-Wert, dann  $+2.5\%$ .

LDA-Geschwindigkeitsmessungen sind aufgrund des Grundrauschens des Systems (genauer: der Frequenzshift-Einheit und des Counters) generell mit einem Fehler von ca.  $1\%$  der gemessenen Geschwindigkeit befrachtet. Dieser Fehler stellt einen systematischen Fehler für die RMS-Werte der Geschwindigkeiten dar, der ermittelte Turbulenzgrad, also der Quotient aus RMS-Wert und Mittelwert der Geschwindigkeit ist also generell ca.  $1\%$  zu hoch. Für den RMS-Wert der Temperatur gilt dies nicht, was in den gezeigten Profilen deutlich wird, wo der RMS-Wert im Außenfeld verschwindet.

## Kreuzkorrelationen aus Geschwindigkeit und Temperatur

Für die Kreuzkorrelationen bzw. turbulenten Schubspannungen und Wärmeströme gelten folgenden Unsicherheiten:

$$\overline{u'v'}: \quad \pm 2.5\%,$$

$$\overline{u'T'}: \quad \pm 2\%,$$

$$\overline{v'T'}: \quad \pm 3\%.$$

Auch für diese Kreuzkorrelationen gelten die bei den RMS-Werten gemachten Aussagen: Der aus der endlichen Meßzeit entstehende relative Fehler der Kreuzkorrelationen, skaliert mit dem Mittelwert der jeweiligen Kreuzkorrelation, beträgt hier  $+5\%$ .

Das Grundrauschen des LDA-Systems erzeugt auch bei den Kreuzkorrelationen einen systematischen Fehler. Der relative Fehler ist hier aber deutlich geringer, da die Kreuzkorrelationen von höherer Ordnung sind als die RMS-Werte, so daß der Fehler hier vernachlässigbar klein wird.

Der im Experiment vorhandene Abstand (1mm) des Thermoelements vom LDA-Meßvolumen erzeugt einen systematischen Fehler in den turbulenten Wärmeströmen. Eine Abschätzung an Hand der Rohdaten ergibt einen relativen Fehler von -2%.

### Gesetzmäßigkeiten

Für die charakteristischen Parameter der Profile der Strömungsgrößen sind in Kapitel 4 Potenzgesetze hergeleitet worden, die eine Näherung darstellen. In den Tabellen A1 und A2 sind die Abweichungen der aus den Messungen bestimmten Größen von der jeweiligen Potenzfunktion aufgeführt.

$\bar{u}$	$\overline{u'v'}$	$\sqrt{u'^2}$	$\sqrt{v'^2}$
$u_0$	$\overline{u'v'}_{\max}$	Tu(u)	Tu(v)
0.2	13.1	3.7	1.5
$u_N$	$r(\overline{u'v'}_{\max})$	$\sqrt{u'^2}_{\max}$	$\sqrt{v'^2}_{\max}$
6.9	12.1	6.2	5.5
$r_{0.5N}$		$r_{0.5\sqrt{u'^2}}$	$r_{0.5\sqrt{v'^2}}$
1.6		7.9	10.1

*Tabelle A1: Mittlere Abweichung in % der aus den Messungen bestimmten Größen von der jeweiligen Potenzfunktion bei Zwangskonvektion*

$\bar{u}$	$\bar{T}$	$\sqrt{\overline{u'^2}}$	$\sqrt{\overline{v'^2}}$	$\sqrt{\overline{T'^2}}$	$\overline{u'v'}$	$\overline{u'T'}$	$\overline{v'T'}$
$u_0$	$T_{\max}$	$Tu(u)$	$Tu(v)$	$Trms_{\max}$	$\overline{u'v'}_{N,\max}$	$\overline{u'T'}_{\max}$	$\overline{v'T'}_{\max}$
0.38	11.0	3.3	2.4	6.4	12.4	11.7	8.8
$u_N$	$r_{0.5T}$	$\sqrt{\overline{u'^2}}_{\max}$	$\sqrt{\overline{v'^2}}_{\max}$	$r_{0.5Trms}$	$\overline{u'v'}_{A,\max}$	$r_{0.5uT}$	$r(\overline{v'T'}_{\max})$
8.0	6.7	13.9	7.9	8.1	7.5	9.0	5.5
$u_A$		$r_{0.5\sqrt{u'^2}}$	$r_{0.5\sqrt{v'^2}}$		$r(\overline{u'v'}_{N,\max})$		
4.5		9.6	8.6		5.0		
$r_{0.5N}$					$r(\overline{u'v'}_{A,\max})$		
3.7					4.9		
$r_{0.5A}$							
5.2							

*Tabelle A2: Mittlere Abweichung der aus den Messungen bestimmten Größen von der jeweiligen Potenzfunktion bei Mischkonvektion*



## VI. Bildung der Grashof-Zahl

Zur Bewertung der mit der Heizleistung gebildeten Grashof-Zahl wird eine Abschätzung durchgeführt. Der Kugelheizer aus Kupfer besitzt in seinem Innern eine mit Silberlot aufgefüllte Bohrung mit einem Durchmesser von  $D_{\text{Bohrung}} = 4.5\text{mm}$  und einer Länge von  $L_{\text{Bohrung}} = 8\text{mm}$ , in die eine Heizspirale und ein Thermoelement eingelassen ist. Die Leitfähigkeit des Silberlots ist nicht genau bekannt, sie ist ähnlich hoch wie bei Kupfer,

$$\lambda_{\text{Cu}} = 384 \frac{\text{W}}{\text{mK}}. \quad (1)$$

Im Innern der Heizspirale liegt ein in guter Näherung räumlich isothermer Zustand vor, da die Heizspirale an der Mantelfläche der Bohrung anliegt und der Wärmestrom nach kurzer Aufheizphase nur nach außen abfließen kann. Nach Definition des äquivalenten Innenradius einer Kugel, deren Oberfläche der Mantelfläche der Bohrung entspricht

$$R_i = \frac{\sqrt{D_{\text{Bohrung}} L_{\text{Bohrung}}}}{2} = 3\text{mm}, \quad (2)$$

kann der Temperaturverlauf in der Kugelschale über eine Wärmebilanz im Festkörper näherungsweise bestimmt werden aus:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{r}} \lambda_{\text{Cu}} (T_i - T(r)). \quad (3)$$

Die Temperatur auf der Kugeloberfläche beträgt dann

$$T = \left( T_i - \dot{Q} \frac{\frac{1}{R_i} - \frac{2}{d}}{4\pi\lambda_{\text{Cu}}} \right). \quad (4)$$

Aufgrund der hohen Wärmeleitfähigkeit von Kupfer ergibt sich z. B. für eine Heizleistung von 60W lediglich eine Temperaturdifferenz von  $T_i - T_{\text{Oberfläche}} \approx 1.7\text{K}$ , so daß die Temperatur des Thermoelements als Näherung der Oberflächentemperatur verwendet werden kann. Bild A10 zeigt die mit dieser Temperatur und die mit der Heizleistung gebildeten Grashof-Zahlen im Vergleich.

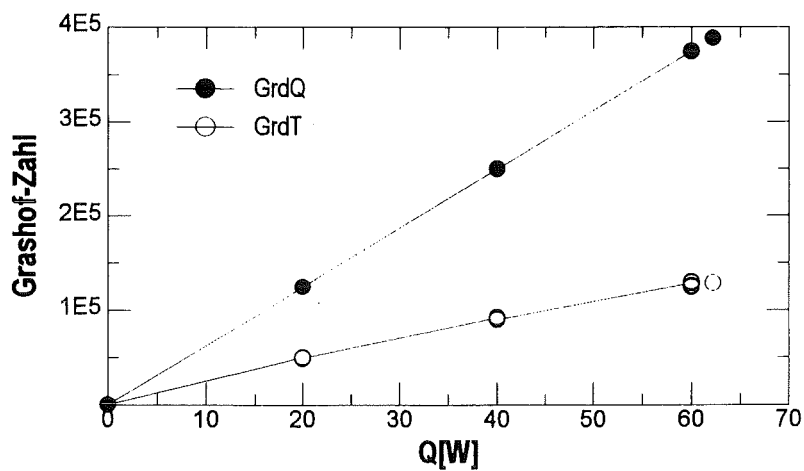


Bild A10: Vergleich der mit der Heizleistung (●) und der mit der Temperaturdifferenz (○) gebildeten Grashof-Zahl

In dieser Arbeit wird die in der Literatur für das untersuchte Strömungsproblem übliche, mit der Heizleistung gebildete Grashof-Zahl verwendet. Für weitergehende Untersuchungen, in denen Aussagen auf Basis der Kennzahlen getätigt werden sollen, ist das Ergebnis der Abschätzung jedoch zu berücksichtigen und unter Umständen die Grashof-Zahl neu zu definieren.