

p -adische Hurwitzräume

Zur Erlangung des akademischen
Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Patrick Erik Bradley
aus Windsor/Ontario, Kanada

Tag der mündlichen Prüfung: Mittwoch, 26. Juni 2002
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich
Korreferent: Prof. Dr. Claus Günther Schmidt

*Vreme trece, vreme vine,
Toate-s vechi și nouă toate;
Ce e rău și ce e bine
Tu te-ntreabă și socoate;
Nu spera și nu ai teamă,
Ce e val, ca valul trece;
De te-ndeamnă, de te cheamă,
Tu rămâi la toate rece.*

...

(Mihai Eminescu (1850-1889): Glossă)

De aceea voi face pentru poporul acesta minuni fără seamăn. Înțelepciunea celor înțelepți se va pierde și istețimea celor isteți va pieri. (Is. 29, 14)

Vorwort

Hurwitzräume sind Modulräume für endliche verzweigte Überlagerungen von Kurven. Teilräume ihrer p -adischen Varianten sind Modulräume für Überlagerungen durch Mumfordkurven. Diese zu beschreiben ist das Thema der vorliegenden Arbeit.

Da erfahrungsgemäß „normale“ Menschen sich in der p -adischen Welt nur schwer zurechtfinden, gibt es eine etwas längere Einführung in die p -adische Geometrie. Große Teile der Abschnitte 1-3 entstanden bei einer Vortragsreihe zur Vorbereitung der Angehörigen des Lehrstuhls Schmidt auf einen Vortrag von Yves André über [And02].

In Abschnitt 1 gibt es einen kurzen Abriss der rigid analytischen Geometrie.

Abschnitt 2 erweitert diese Theorie durch die Berkovichgeometrie. Dies hat den Vorteil, dass es endlich Mannigfaltigkeiten gibt, die mit einer richtigen Topologie versehen sind, dass Wege in der üblichen Weise erklärt werden können und die Überlagerungstheorie funktioniert.

Das Problem, dass die topologische Fundamentalgruppe einer p -adischen Mannigfaltigkeit zu klein ist, wurde letztlich durch André vernünftig gelöst, indem er den Begriff der Überlagerung ausdehnte und so die „temperierte“ Fundamentalgruppe bekam. Vor ihm erschuf de Jong seine „étales“ Überlagerungen. Die damit gewonnene étale Fundamentalgruppe ist jedoch viel zu groß. Der Abschnitt 3 verdient seinen Namen durch die Orbiversionen dieser Fundamentalgruppen für Orbifaltigkeiten. . .

Mithilfe der Orbifundamentalgruppe $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ gewinnen wir ganz leicht einen Teichmüllerraum für Hurwitzräume von Überlagerungen durch Mumfordkurven mit fester Galoisgruppe. Einige Quotienten von $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ sind nämlich Bass-Serre-Fundamentalgruppen von Graphen von Gruppen, mit denen Herrlich geeignete Teichmüllerräume basteln konnte. Von diesen müssen nur die passenden ausgewählt werden — et voilà! — ist er in diesem Abschnitt 4 konstruiert.

Eine eindimensionale Orbifaltigkeit heißt Mumfordorbifaltigkeit, wenn sie eine Galoisüberlagerung durch eine Mumfordkurve zulässt. Kato und André befassten sich intensiv mit Mumfordorbifaltigkeiten, deren zugrunde liegende Kurve der \mathbb{P}^1 ist und drei markierte Punkte hat („Mumford-Schwarz-Orbifaltigkeiten“). Die Frage, unter welchen Bedingungen eine gegebene Orbifaltigkeit eine Mumfordorbifaltigkeit ist, ließen beide außer Acht. Abschnitt 5 nicht.

In Abschnitt 6 wird versucht, diejenigen Hurwitzräume von Abschnitt 4, die Überlagerungen der projektiven Gerade parametrisieren, in den Hurwitzräumen für Überlagerungen des \mathbb{P}^1 durch beliebige Kurven wiederzufinden. Heraus kommt dabei ein virtueller riemannscher Existenzsatz. Nebenbei wird erwähnt, dass Harbater das inverse Galoisproblem über \mathbb{Q}_p mittels Überlagerungen von $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ durch Mumfordkurven (vom HM-Typ) löste. Hier wird hervorgehoben, dass er dabei für jede Gruppe eine richtige Mumfordkurve (also Geschlecht ≥ 2) nehmen darf.

Die Arbeit ist mit sehr vielen Beispielen durchsetzt.

Danken möchte ich an erster Stelle Herrn Prof. Frank Herrlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Betreuung während ihrer Entstehung. Er betreute auch die vorausgehende und vorbereitende Diplomarbeit. Seine oft erwähnte offene Tür erwies sich mal wieder als sehr wertvoll.

Weiter danke ich Stefan Kühnlein, der Fragen meinerseits zwar mit „Ich kenne mich doch in p -adischer Geometrie nicht aus!“ beantwortete, dennoch oft unterstützend beitragen konnte.

Herrn Prof. Yves André sei gedankt für die Übermittlung von [AndIII], einem für mich sehr wertvollen Artikel. Auch er wurde nicht von dummen Fragen verschont, die er zufriedenstellend beantworten konnte.

Eine Frühversion wurde von Stefan Kühnlein Korrektur gelesen. Dafür sei ebenfalls gedankt.

Ich danke den Leuten am Lehrstuhl Schmidt des Mathematischen Instituts II für geduldiges Zuhören und Stellen vieler Fragen während der eingangs erwähnten Vortragsreihe.

Für die freundliche Übernahme des Korreferats möchte ich schließlich Herrn Prof. Claus-Günther Schmidt danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Etwas rigid analytische Geometrie	7
1.1	Die Tateuniformisierung elliptischer Kurven	7
1.2	Affinoide Varietäten	8
1.3	Rigid analytische Räume	10
1.4	Die Tateabbildung	12
1.5	Beispiele	13
2	p-adische Mannigfaltigkeiten	14
2.1	Affinoide Räume	14
2.1.1	Gel'fandspektrum	14
2.1.2	Gel'fandspektrum und Restklassenkörper	15
2.1.3	Affinoide Bereiche	20
2.1.4	Die Reduktionsabbildung	21
2.2	Mannigfaltigkeiten	23
2.2.1	Wege	25
2.2.2	Skelette	27
2.2.3	Analytische Skelette	28
3	Ein Zoo von Fundamentalgruppen	30
3.1	Faserfunktoren	30
3.2	Wege	37
3.3	Tangentiale Basispunkte	38
3.4	Beispiele	39
3.5	Orbifaltigkeiten	44
4	Teichmüllerräume	48
4.1	Mumfordkurven vom Geschlecht $g \geq 2$	48
4.2	Diskontinuierlich uniformisierbare Mumfordkurven	50
4.3	Mumfordorbifaltigkeiten	52
4.3.1	Beispiel: Tateorbifaltigkeiten	54
5	Bestimmung aller Mumfordorbifaltigkeiten	57
5.1	Bestimmung	57
5.2	Orbipunkte	61
6	Inverse Galoistheorie	64
6.1	Die großen Hurwitzräume	64

6.2	Der Mumfordkurvenort	66
6.2.1	Die HM-Komponenten	66
6.2.2	Katobäume mit trivialen Kantengruppen	67
6.2.3	Virtuelle Verzweigung	68
6.2.4	Endlichkeit der Kartenzahl	71
6.3	Zyklische Galoisüberlagerungen explizit	73
6.3.1	Freie Produkte zyklischer Gruppen	74
6.3.2	Überlagerungen von Primzahlgrad	76
6.3.3	Überlagerungen von nicht primem Grad	79
6.4	Realisierung von Galoisgruppen	80

1 Einführung: Etwas rigid analytische Geometrie

1.1 Die Tateuniformisierung elliptischer Kurven

Bekanntlich sieht die Uniformisierung komplexer elliptischer Kurven E so aus:

$$E \cong \mathbb{C}/\Lambda$$

mit einem Gitter Λ in \mathbb{C} .

Wie soll so etwas p -adisch bewerkstelligt werden? Die additive Gruppe von \mathbb{C}_p kennt nämlich keine nicht trivialen diskreten Untergruppen. Gäbe es eine derartige Untergruppe $\Lambda \subseteq \mathbb{C}_p$, so wäre für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle „Gitterpunkte“ $\lambda \in \Lambda$ stets $p^n \lambda \in \Lambda$. Folglich enthielte Λ den Häufungspunkt

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n \lambda.$$

Widerspruch!

Um diesem Umstand beizukommen, erinnerte sich Tate [Ta71] der komplexen Exponentialfunktion: er betrachtete mit ihrer Hilfe die multiplikative Teiluniformisierung

$$E \cong \mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}.$$

Und immerhin: für $q \in \mathbb{C}_p^\times$ mit $|q| < 1$ ist $q^{\mathbb{Z}}$ eine diskrete Untergruppe von \mathbb{C}_p^\times und $\mathbb{C}_p^\times / q^{\mathbb{Z}}$ eine elliptische Kurve. Letzteres gilt, da die der komplexen multiplikativen Uniformisierung entsprechenden Reihen p -adisch konvergieren [Si94, V.3.1]. Solch eine elliptische Kurve heißt eine *Tatekurve*. Tates Resultat lautet:

Satz. *Genau dann ist eine elliptische Kurve E über \mathbb{C}_p eine Tatekurve, wenn für ihre j -Invariante gilt:*

$$|j_E| > 1.$$

In diesem Fall hat E schlechte (multiplikativ zerfallende) Reduktion.

Hierfür erfand Tate die Theorie der *rigid analytischen Varietäten*. Diese sind mit einer *Grothendiecktopologie* versehen. Die erste Überraschung hier ist, dass im Sinne der Grothendiecktopologie tatsächlich eine Uniformisierung vorliegt, dass nämlich \mathbb{C}_p^\times einfach zusammenhängend ist.

1.2 Affinoide Varietäten

Sei $K, |\cdot|$ ein nicht trivial, nicht archimedisch vollständig bewerteter Körper. Weiter sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} &= \{x \in K \mid |x| \leq 1\} && \text{der Bewertungsring} \\ \mathfrak{m} &= \{x \in K \mid |x| < 1\} && \text{das Bewertungsideal} \\ k &= \mathfrak{o}/\mathfrak{m} && \text{der Restklassenkörper} \end{aligned}$$

von K . Die Potenzreihenalgebra

$$\begin{aligned} T_n &:= K\langle X_1, \dots, X_n \rangle \\ &= \left\{ f \in K[[X_1, \dots, X_n]] \mid f = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{m}} X^{\underline{m}}, \lim_{|\underline{m}| \rightarrow \infty} |a_{\underline{m}}| = 0 \right\} \end{aligned}$$

heißt die *Tatealgebra* (der *strikt konvergenten* Potenzreihen) über K (hier sei $X := (X_1, \dots, X_n)$ und $\underline{m} \in \mathbb{N}^n$ Multiindex). Wir bemerken noch kurz, dass es egal ist, welche von \mathbb{R}^n herrührende Norm auf \mathbb{N}^n gewählt wird. Sie sind alle äquivalent.

Vorsehen mit der *Gaußnorm* $|\cdot|$, dem maximalen Koeffizientenbetrag, ist T_n eine noethersche, faktorielle K -Banachalgebra. Alle ihre Ideale sind abgeschlossen [BGR84, 6.1.1/3].

Definition 1.1. Eine K -affinoide Algebra ist ein Quotient $A = T_n/\mathfrak{a}$ mit einem Ideal \mathfrak{a} von T_n . A bekommt die Quotientennorm

$$|f + \mathfrak{a}| := \text{dist}(f, \mathfrak{a}) = \inf_{g - f \in \mathfrak{a}} \{|g|\}.$$

Morphismen K -affinoider Algebren sind K -Algebrahomomorphismen $A \rightarrow B$.

Bemerkung 1.2. K -affinoide Algebren sind noethersche Banachalgebren, und Morphismen sind stetig (wegen „noethersch“) [BGR84, 6.1.3/1].

Wir können nun die Kategorie der K -affinoiden Varietäten definieren: Die Objekte sind

$$\text{Sp } A = (\text{Max } A, A),$$

und die Morphismen sind

$$\text{Sp } A \rightarrow \text{Sp } B = (\sigma^a, \sigma),$$

wobei A eine K -affinoide Algebra und $\text{Max } A$ ihr Maximalspektrum, d.h. die Menge aller ihrer maximalen Ideale, $\sigma: B \rightarrow A$ ein Morphismus K -affinoider Algebren und $\sigma^a: \text{Max } A \rightarrow \text{Max } B$ der induzierte Morphismus der Maximalspektren ist.

Bemerkung 1.3. σ^a ist wohldefiniert.

Beweis. Sei $x \in \operatorname{Sp} A$. Für das zugehörige maximale Ideal $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max} A$ ist A/\mathfrak{m}_x ein endlicher Erweiterungskörper von K . Die Noethernormalisierung [BGR84, 6.1.2] gibt uns nämlich eine endliche Einbettung einer Tatealgebra T_n in den Körper A/\mathfrak{m}_x . Also ist T_n ein Körper, folglich $n = 0$, d.h. $T_n = K$. Wegen $\sigma^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \ker(B \rightarrow A/\mathfrak{m}_x)$ ist die K -Algebra $B/\sigma^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ eine endliche Unter algebra von A/\mathfrak{m}_x , also ein Körper. Somit ist $\sigma^{-1}(\mathfrak{m}_x) \in \operatorname{Max} B$. \square

Wie in Funktionalanalysis und algebraischer Geometrie üblich schreiben wir für $x \in \operatorname{Sp} A$ und $f \in A$

$$f(x) := f \pmod{\mathfrak{m}_x}$$

als Element von \bar{K} , dem algebraischen Abschluss von K . Die Elemente von A werden als Funktionen $\operatorname{Max} A \rightarrow \bar{K}$ aufgefasst. \bar{K} wird mit der eindeutigen Betragsfortsetzung von $|\cdot|_K$ bewertet.

Definition 1.4. Eine Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Sp} A$ heißt ein affinoider Bereich von $\operatorname{Sp} A$, falls es eine affinoide Algebra A_U und einen Morphismus $\varphi: \operatorname{Sp} A_U \rightarrow \operatorname{Sp} A$ mit $\varphi(\operatorname{Sp} A_U) \subseteq U$ gibt, und für jeden Morphismus $\psi: \operatorname{Sp} B \rightarrow \operatorname{Sp} A$ mit $\psi(\operatorname{Sp} B) \subseteq U$ genau eine Abbildung existiert, sodass das Dreieck kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \operatorname{Sp} A_U & \\ \exists^! \nearrow & & \searrow \varphi \\ \operatorname{Sp} B & \xrightarrow{\psi} & \operatorname{Sp} A \end{array}$$

Lemma 1.5. Es ist φ injektiv und $\varphi(\operatorname{Sp} A_U) = U$.

Beweis. [BGR84, 7.2.2/1] \square

Die kanonische Topologie auf einer affinoiden Varietät ist die von den affinoiden Bereichen erzeugte Topologie.

Bemerkung 1.6. Es gibt Faserprodukte:

$$\operatorname{Sp} A \times_{\operatorname{Sp} B} \operatorname{Sp} C = \operatorname{Sp} A \hat{\otimes}_B C.$$

Dabei sei $A \hat{\otimes}_B C$ die Kompletterung von $A \otimes_B C$ bezüglich der Norm

$$|g| := \inf_{g = \sum_{i=1}^r a_i \otimes c_i} \max_{i=1}^r |a_i| |c_i|.$$

Die Kompletterung des Tensorproduktes erfüllt die UAE des Tensorproduktes für stetige B -Morphismen in der Kategorie der B -Banachmoduln.

Behauptung. Sind A , B und C K -affinoid, so ist es auch $A \hat{\otimes}_B C$.

Beweis. [BGR84, 6.1.1/10] Sei zunächst $B = K$. Die stetige Surjektion $\varphi: T_n \rightarrow C$ ist nach Banach offen und strikt (d.h. die Norm auf C ist äquivalent zur Quotientennorm). Mit etwas Analysis folgt:

$$\text{id}_A \hat{\otimes} \varphi: A \hat{\otimes}_K T_n \rightarrow A \hat{\otimes}_K C$$

ist strikt. Schalten wir nun für $A = T_m/\mathfrak{a}$ die Surjektion $T_m \hat{\otimes}_K T_n \rightarrow A \hat{\otimes}_K T_n$ vor, sehen wir, dass $A \hat{\otimes}_K C$ affinoid ist.

Der allgemeine Fall wird auf den obigen zurückgeführt. \square

Als Folge gilt [BGR84, 7.2.2/5]

Lemma 1.7. *Durchschnitte affinoider Bereiche von $\text{Sp } A$ sind affinoid.*

1.3 Rigid analytische Räume

Definition 1.8. *Eine Grothendiecktopologie auf einer Menge X besteht aus*

1. *einer Menge S von Teilmengen von X , den zulässigen offenen Mengen,*
2. *einer Familie $\{\text{Cov } U\}_{U \in S}$ zulässiger Überdeckungen $\{U_i\}_{i \in I}$ von $U \in S$ mit $U_i \in S$*

mit

1. $U, V \in S \Rightarrow U \cap V \in S$
2. $U \in S \Rightarrow \{U\} \in \text{Cov } U$
3. $U \in S, \{U_i\}_{i \in I} \in \text{Cov } U, \{U_{ij}\}_{j \in J_i} \in \text{Cov } U_i \forall i \in I \Rightarrow \{U_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov } U$
4. $U, V \in S$ mit $V \subseteq U, \{U_i\}_{i \in I} \in \text{Cov } U \Rightarrow \{V \cap U_i\}_{i \in I} \in \text{Cov } V$

Für affinoide Varietäten $X = \text{Sp } A$ gibt es die *schwache G -Topologie*: die zulässigen Mengen sind die affinoiden Bereiche von X , und die zulässigen Überdeckungen zulässiger Mengen sind die endlichen Überdeckungen durch affinoide Bereiche von X .

Mit der Mengeninklusion als Morphismen bildet eine Grothendiecktopologie auf X eine Kategorie $\mathfrak{G}(X)$, deren Objekte die zulässigen offenen Mengen sind.

Definition 1.9. Eine Prägarbe auf X ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathfrak{G}(X) \rightarrow \underline{\text{Ab}}, \underline{\text{Ring}} \text{ etc.}$$

Eine Garbe auf X ist eine Prägarbe, welche die üblichen Garbenaxiome für zulässige Mengen und Überdeckungen erfüllt.

Beispiel 1. Die Struktur(prä-)garbe auf $X = \text{Sp } A$

$$\mathcal{O}_X: U = \text{Sp } B \mapsto \mathcal{O}_X(U) = B$$

ist eine Garbe. Dies folgt aus

Satz 1.10 (Azyklizitätssatz von Tate). Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ eine zulässige Überdeckung von X . Dann ist \mathfrak{U} für den Čechkomplex $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ azyklisch, d.h. die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\varepsilon} \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots$$

ist exakt.

Korollar 1.11. 1. $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(X) = A, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$

2. \mathcal{O}_X ist eine Garbe.

Beweis. 1. Klar.

2. Mit $U_i = \text{Sp } A_i$ ist die Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} \prod_i A_i \xrightarrow{d} \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$$

exakt. Dabei sind

$$\varepsilon: f \mapsto (f|_{U_i})_i, \quad d: (f_i)_i \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}.$$

□

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal G -geringter Raum (übliche Definition, nur mit G -Topologie).

Definition 1.12. (X, \mathcal{O}_X) heißt eine rigid analytische Varietät über K , falls gilt:

1. (a) \emptyset und X sind zulässig offen in X

(b) Seien U zulässig offen in X und $V \subseteq U$. Existiert eine zulässige Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von U mit $V \cap U_i$ zulässig offen in X für alle $i \in I$, so ist V zulässig offen in X .

(c) Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ Überdeckung einer zulässig offenen Menge U von X .
 Hat \mathfrak{U} eine Verfeinerung (eine Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ von U mit $\tau: J \rightarrow I$ und $V_j \subseteq U_{\tau(j)} \forall j \in J$) durch zulässige offene Mengen in X ,
 so ist $\mathfrak{U} \in \text{Cov } U$.

2. X hat eine zulässige affinoid Überdeckung, d.h. eine zulässige Überdeckung $\{X_i\}_{i \in I}$ durch affinoid Varietäten $(X_i, \mathcal{O}_X|_{X_i})$.

Definition 1.13. Ein Morphismus rigid analytischer Varietäten $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus lokal G -geringter Räume über K .

1.4 Die Tateabbildung

Für K -affinoid Algebren A gelten folgende Bezeichnungen

$$A^\circ := \{f \in A \mid |f|_{\text{sup}} \leq 1\}, \quad \mathfrak{t}(A) := \{f \in A \mid |f|_{\text{sup}} < 1\}, \quad \bar{A} := A^\circ / \mathfrak{t}(A).$$

mit $|f|_{\text{sup}} := \max_{x \in \text{Sp } A} |f(x)|$. Wegen der Stetigkeit induziert ein Morphismus $\varphi: B \rightarrow A$ eine Abbildung $\varphi^\circ: B^\circ \rightarrow A^\circ$, also einen k -Algebrahomomorphismus $\bar{\varphi}: \bar{B} \rightarrow \bar{A}$. Dies auch noch funktoriell, d.h. wir haben den *Reduktionsfunktork*

$$\underline{K\text{-affinoid Varietäten}} \rightarrow \underline{k\text{-affine Varietäten}}, \quad \text{Sp } A \mapsto \text{Sp } \bar{A}, \quad \varphi \mapsto \bar{\varphi}.$$

Dabei sei $\text{Sp } \bar{A} := (\text{Max } \bar{A}, \bar{A})$ — in diesem Abschnitt kennen wir offenbar noch nicht den Begriff „Schema“. Siehe auch die unten stehende Anmerkung.

Sei $x \in \text{Sp } A$. Dann gibt es die kanonische Abbildung $\sigma: A \rightarrow A/\mathfrak{m}_x$. Diese induziert wiederum $\bar{\sigma}: \bar{A} \rightarrow \overline{A/\mathfrak{m}_x}$. Da A/\mathfrak{m}_x über K endlich algebraisch ist, ist auch $\overline{A/\mathfrak{m}_x}$ endlich algebraisch über k , also ein Körper. Dies bedeutet

$$\ker \bar{\sigma} \in \text{Max } \bar{A}.$$

Wir bekommen deshalb eine Abbildung (die *Tateabbildung*)

$$\pi_A: \text{Sp } A \rightarrow \text{Sp } \bar{A}, \quad x \mapsto \bar{x}$$

mit dem Punkt \bar{x} zu $\mathfrak{m}_{\bar{x}} := \ker \bar{\sigma} \in \text{Sp } \bar{A}$. Sie ist funktoriell, denn sie induziert den Reduktionsfunktork:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp } A & \xrightarrow{\varphi} & \text{Sp } B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ \text{Sp } \bar{A} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \text{Sp } \bar{B} \end{array}$$

Es gilt der wichtige Satz [Ta71] oder [BGR84, 7.1.5/4]

Satz 1.14 (Tate). *Die Tateabbildung ist surjektiv.*

Anmerkung. *Es ist etwas unbefriedigend, dass die rigid analytische Tateabbildung nicht auf das volle Spektrum (richtiger) affiner Varietäten abbildet. Mit Hilfe von Berkovich [Ber90] bekommen wir (im nächsten Abschnitt) eine bessere Tateabbildung ...*

1.5 Beispiele

Sei K algebraisch abgeschlossen.

1. Es ist $\mathrm{Sp} K = (\mathrm{pt}, K)$ und $\overline{\mathrm{Sp} K} = \mathrm{Sp} k$.
2. $\mathrm{Sp} K\langle T \rangle = \mathbb{D}$ und $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{A}_k^1$.
3. Ist $X = \mathrm{Sp} K\langle T, T^{-1} \rangle = \{z \in K \mid |z| = 1\}$, so ist wegen

$$K\langle T, T^{-1} \rangle = K\langle x, y \rangle / (xy - 1) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T^n \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\}$$

$$\bar{X} = \mathrm{Sp} k[t, t^{-1}] = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}.$$

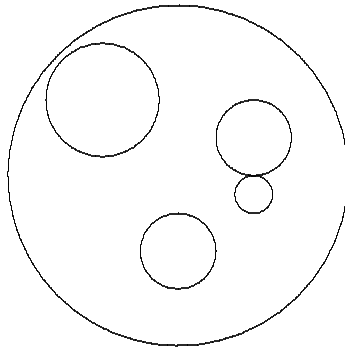
4. Sei $X = \mathrm{Sp} K\langle T, \pi T \rangle$ mit $|\pi| = r \in (0, 1) \cap |K^\times|$. Es ist X der Kreisring

$$\{x \in K \mid r \leq |x| \leq 1\} = \mathrm{Sp} K\langle x, y \rangle / (xy - \pi).$$

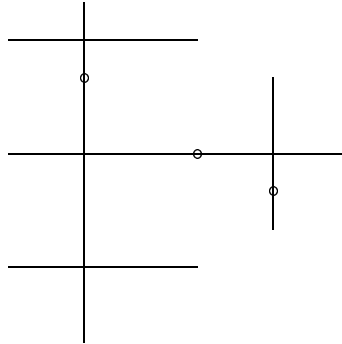
Und $\bar{X} = \mathrm{Sp} k[x, y] / (xy)$ ist das Achsenkreuz. Die Tateabbildung $\Pi: X \rightarrow \bar{X}$ leistet folgendes: Für $\bar{x} \in \bar{X}_{\mathrm{ns}}$ ist $\Pi^{-1}(\bar{x})$ ein offener Kreis im Rand und

$$\Pi^{-1}(\text{Doppelpunkt}) = \{r < |x| < 1\}.$$

5. Nach [Gr68, 5.2] ist jeder zusammenhängende affinoide Bereich X des \mathbb{P}^1 das Komplement offener Kreisscheiben:



Die Reduktion \bar{X} sieht dann etwa so aus



Jede Komponente ist ein Zariski-offener Teil einer affinen Gerade. Dies wurde in [Brad98, 2.5] explizit berechnet.

2 *p*-adische Mannigfaltigkeiten

Rigid analytische Räume sind etwas unbefriedigend in ihrer Handhabung, da sie nur mit einer Grothendiecktopologie ausgestattet sind. Ihre Strukturgarben sind als solche für die jeweilige Grothendiecktopologie zu verstehen. Zudem sind Wege stets trivial. V. Berkovich ist es jedoch gelungen [Ber90], ihnen eine vernünftige Topologie zu geben, bezüglich der sie lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend sind.

2.1 Affinoide Räume

2.1.1 Gel'fandspektrum

Sei A eine normierte Algebra über einem bewerteten Körper $(K, |\cdot|_K)$.

Definition 2.1. Mit $M(A)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten multiplikativen Halbnormen $\chi: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\chi|_K = |\cdot|_K$, das (Gel'fand-)Spektrum von A .

Wir wiederholen kurz die Begriffe:

Eine *Halbnorm* ist eine Funktion $\chi: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die positiv semidefinit ist und die Bedingung $\chi(\lambda f) = |\lambda|_K \cdot \chi(f)$ für alle $\lambda \in K$, $f \in A$ sowie die (gewöhnliche) Dreiecksungleichung erfüllt. Eine Halbnorm heißt *beschränkt*, wenn ein $C > 0$ existiert mit $\chi(f) \leq C|f|$ für alle $f \in A$. Und *multiplikativ* bedeutet $\chi(f \cdot g) = \chi(f) \cdot \chi(g)$ für alle $f, g \in A$.

Bemerkung 2.2. Für jede Einheit $f \in A^\times$ und jedes $\chi \in M(A)$ gilt $\chi(f) = |f|$.

Beweis. Wegen $\chi(f^n) \leq C|f^n|$ ist zunächst $\chi(f) \leq \sqrt[n]{C}|f|$. Da n beliebig war, folgt $\chi(f) \leq |f|$, d.h. es ist $C = 1$ wählbar. Da aber auch $f^{-1} \in A$, haben wir dieselbe Ungleichung für f^{-1} . Wegen der Multiplikativität von χ folgt daher die Behauptung. \square

Wie in der Funktionalanalysis üblich wird die Menge $M(A)$ mit der schwächsten Topologie versehen, für die alle Einsetzungsabbildungen

$$E_f^A: M(A) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi \mapsto \chi(f)$$

mit $f \in A$ stetig sind.

Ab jetzt sei $(A, |\cdot|)$ eine Banachalgebra über einem vollständig und nicht trivial bewerteten Körper $(K, |\cdot|_K)$. Ein beschränkter Homomorphismus zwischen normierten kommutativen K -Algebren $\varphi: A \rightarrow B$ heißt *zulässig*, falls die Quotientennorm auf $A/\ker \varphi$ äquivalent zur Restriktion der Norm von B auf $\varphi(A)$ ist.

Definition 2.3. *Eine kommutative Banach- K -Algebra heißt K -affinoid, falls es $r_1, \dots, r_n > 0$ und einen zulässigen Epimorphismus $K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n \rangle \rightarrow A$ gibt. Eine K -affinoide Algebra heißt strikt, falls $r_1 = \dots = r_n = 1$ gewählt werden kann.*

Hier sei $K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n \rangle$ die K -Algebra der Potenzreihen $f = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{m}} \underline{T}^{\underline{m}}$ mit $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$, $\lim_{|\underline{m}| \rightarrow \infty} |a_{\underline{m}}| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n} = 0$ und $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$. Die strikt K -affinoiden Algebren sind genau die K -affinoiden Algebren aus Abschnitt 1.

Bemerkung 2.4. *Affinoide Algebren sind noethersch, alle ihre Ideale sind abgeschlossen [Ber90, 2.1.3], und für striktes A gibt es eine kanonische Abbildung $\text{Max } A \rightarrow M(A)$, die einen Homöomorphismus von $\text{Max } A$ auf eine dichte Teilmenge von $M(A)$ induziert [Ber90, 2.1.15].*

2.1.2 Gel'fandspektrum und Restklassenkörper

Sei $x \in M(A)$ und $|\cdot|_x$ die zugehörige Halbnorm (da wir gerne von Punkten sprechen, sehen wir uns genötigt, diese Unterscheidung zu machen). Zwar ist $|\cdot|_x$ kein Algebromorphismus, dennoch (und der Grund wird alsbald ersichtlich werden), sprechen wir vom *Kern* von $|\cdot|_x$. Es ist nämlich $\mathfrak{p}_x := \ker |\cdot|_x := (|\cdot|_x)^{-1}(\{0\})$ ein (abgeschlossenes) Primideal von A :

Erstens ist $0 \in \ker |\cdot|_x$. Zweitens ist wegen der Dreiecksungleichung mit f und g auch $f \pm g \in \ker |\cdot|_x$, und schließlich sorgt die Multiplikativität dafür, dass mit f auch $g \cdot f$ für jedes $g \in A$ im Kern von $|\cdot|_x$ liegt. Also ist \mathfrak{p}_x ein Ideal. Die Primidealeigenschaft von \mathfrak{p}_x ist klar, da \mathbb{R} ein Körper ist.

So bekommen wir eine stetige Abbildung

$$M(A) \rightarrow \text{Spec } A, \quad x \mapsto \mathfrak{p}_x.$$

Die induzierte Norm auf A/\mathfrak{p}_x setzt sich zu einer Bewertung auf $F(x) := \text{Quot } A/\mathfrak{p}_x$ fort. Die Kompletterung $\mathcal{H}(x) := \widehat{F(x)}$ hiervon wollen wir den *analytischen Restklassenkörper* von x nennen.

Für $f \in A$ sei $f(x) := \chi_x(f)$ das Bild von f unter der kanonischen Abbildung $\chi_x: A \rightarrow \mathcal{H}(x)$. Wie üblich werden Elemente von A als Funktionen auf $M(A)$ aufgefasst, deren Bildpunkte aber in verschiedenen Zielmengen liegen.

Beispiel 2. *Beginnen wir erst einmal mit $K = \mathbb{C}$, den komplexen Zahlen. Die allgemeine Theorie von [Ber90] beschränkt sich nicht auf nicht archimedisch bewertete Grundkörper. Die \mathbb{C} -Algebra der auf dem komplexen Einheitskreis konvergenten Potenzreihen $\mathbb{C}\langle z \rangle$ ist mit der Supremumnorm $|\cdot|_{\text{sup}}$ eine Banachalgebra. Nach Lemma 2.8 und Gel'fand-Mazur (außer \mathbb{C} gibt es keine komplexen Banachdivisionsalgebren [Rud92, 10.14]) ist $M(\mathbb{C}\langle z \rangle)$ homöomorph zu $\text{Max } \mathbb{C}\langle z \rangle$ mit der Gel'fandtopologie, nach [Rud92, 11.9] also kompakt (mit den Bezeichnungen von Definition 2.7 ist $\mathfrak{X}(\mathbb{C}\langle z \rangle) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\langle z \rangle, \mathbb{C}) \cong \text{Max } \mathbb{C}\langle z \rangle$).*

Beispiel 3. *Sei K algebraisch abgeschlossen. In der rigiden Geometrie ist $\text{Sp } K\langle T \rangle = D(0, 1^+)$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. In $M(K\langle T \rangle)$ treten die vier Sorten von Punkten auf:*

1. *Jedes $x \in D(0, 1^+)$ liefert eine multiplikative Halbnorm*

$$\chi_x: K\langle T \rangle \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto |f(x)|_K.$$

2. *Jede Kreisscheibe $D(x, r^+) \subseteq D(0, 1^+)$ mit $r \in |K^\times|$ liefert*

$$\eta_{x,r}: K\langle T \rangle \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto |f|_{D(x,r^+)} := \sup_{\xi \in D(x,r^+)} |f(\xi)|_K,$$

ein Element von $M(K\langle T \rangle)$.

3. *Dasselbe gilt, falls $r \notin |K^\times|$.*

4. Sei schließlich $\mathcal{D} := \{D_\alpha\}$ eine absteigende unendliche Familie abgeschlossener Kreisscheiben in $D(0, 1^+)$. Dann nehmen wir

$$\chi: K\langle T \rangle \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f|_{\mathcal{D}} := \inf_{\alpha} |f|_{D_\alpha},$$

als multiplikative Halbnorm. Ist $\sigma := \bigcap_{\alpha} D_\alpha \neq \emptyset$, so ist entweder $\sigma = \{x\}$, ein Punkt, also $\chi = \chi_x$ der Sorte 1, oder $\sigma = D$ eine Kreisscheibe und $\chi = \eta_D$ der Sorte 2. Im Fall $\sigma = \emptyset$ bekommen wir eine neue Sorte von Punkten in $M(K\langle T \rangle)$.

Die Sorte 1 heißt klassische Punkte, die anderen generische (Berkovich-)Punkte. Dass es keine weiteren Sorten von Punkten gibt, sehen wir nach [Ber90, 1.4.4] so: für gegebenes $|\cdot| \in M(K\langle T \rangle)$ sei $\mathcal{D} := \{D(x, |T-x|^+) \subseteq D(0, 1^+)\}$. Es ist \mathcal{D} eine unendliche absteigende Familie von Kreisscheiben, und es ist $|T-x|_{\mathcal{D}} = |T-x|$ für alle $x \in K$. Da multiplikative Halbnormen auf $K\langle T \rangle$ durch ihre Werte auf den Polynomen $T-x$, $x \in K$, vollständig bestimmt sind, gilt $|\cdot| = |\cdot|_{\mathcal{D}}$.

Für den Restklassenkörper eines Punktes $x \in M(K\langle T \rangle)$ gilt:

1. Ist x ein klassischer Punkt, so ist $\mathcal{H}(x) = K$. [BGR84, 6.1.2/3]
2. Ist x generisch der Sorte 2, so ist $\overline{\mathcal{H}(x)} = \bar{K}$ und $|\mathcal{H}(x)| = |K|$.
3. Ist x generisch der Sorte 3, so ist $\overline{\mathcal{H}(x)} = \bar{K}$ und $|\mathcal{H}(x)^\times|$ ist die von $|K^\times|$ und r erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$.
4. Ist x ein Punkt der Sorte 4, so ist $\mathcal{H}(x)$ eine Erweiterung von K mit derselben Wertehalbgruppe wie K .

Lemma 2.5. Die nicht archimedischen Kugeln

$$D(0, r^+) := M(K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n \rangle)$$

sind kompakt.

Beweis. Auf $A = K\langle r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n \rangle$ nehmen wir natürlich die Gaußnorm $|\cdot|_{\text{sup}}$. Da A uniform ist (dies bedeutet, dass die Norm potenzmultiplikativ ist), ist die Gelfandtransformation

$$\hat{\cdot}: A \rightarrow \prod_{x \in M(A)} \mathcal{H}(x) =: G(A), f \mapsto (f(x))_{x \in M(A)}$$

ein isometrischer Isomorphismus [Ber90, 1.3.2], also sind $M(A)$ und $M(G(A))$ zueinander homöomorph ($G(A)$ ist eine normierte K -Algebra). Es ist aber $M(G(A))$ homöomorph zur Čech-Stone-Kompaktifizierung von $M(A)$ [Ber90, 1.2.3]. \square

Satz 2.6. *Es ist $M(A)$ nicht leer, hausdorffsch, kompakt.*

Beweis. $M(A) \neq \emptyset$: Für striktes A haben wir die Inklusion

$$\emptyset \neq \text{Max } A \subseteq M(A),$$

die jedem maximalen Ideal \mathfrak{m} von A den Lift des Betrags von $A/\mathfrak{m} \subseteq \bar{K}$ (der algebraische Abschluss von K) auf A zuordnet:

$$\chi_{\mathfrak{m}}: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f + \mathfrak{m}|_{\bar{K}}.$$

Im Fall A nicht strikt sei zunächst $A = K\langle r^{-1}T \rangle$ mit $r = (r_1, \dots, r_n)$ und $T = (T_1, \dots, T_n)$. Sei $\rho \in (K^\times)^n$ mit $|\rho|_K \leq r$ (komponentenweise). Dann gilt für die Kugeln:

$$\emptyset \neq D(0, |\rho|_K^+) \subseteq D(0, r^+)$$

via der Inklusionsabbildung $\chi \mapsto \chi|_{K\langle r^{-1}T \rangle}$. Ist schließlich $A = K\langle r^{-1}T \rangle/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K\langle r^{-1}T \rangle$, so ist

$$M(A) = V(\mathfrak{a}) := \{x \in D(0, r^+) \mid \ker |x| \supseteq \mathfrak{a}\},$$

und für $\rho \in (K^\times)^n$ mit $|\rho|_K \leq r$ gilt

$$\emptyset \neq V(\mathfrak{a}K\langle |\rho|_K^{-1}T \rangle) = V(\mathfrak{a}) \cap D(0, |\rho|_K^+) \subseteq M(A).$$

hausdorffsch: Seien $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte in $M(A)$. Ohne Einschränkung gibt es ein $f \in A$ mit

$$|f(x)|_{\mathcal{H}(x)} < |f(y)|_{\mathcal{H}(y)}.$$

Es gibt reelle r mit $|f(x)|_{\mathcal{H}(x)} < r < |f(y)|_{\mathcal{H}(y)}$. Dann sind

$$U := \{z \in M(A) \mid |f(z)|_{\mathcal{H}(x)} < r\}, \quad V := \{z \in M(A) \mid r < |f(z)|_{\mathcal{H}(y)}\}$$

disjunkte offene Umgebungen von x und y .

kompakt: Ist $A \cong K\langle r^{-1}T \rangle/\mathfrak{a}$, so ist $M(A) = V(\mathfrak{a}) \subseteq D(0, r^+)$ Zariski-abgeschlossen in der kompakten Kugel $D(0, r^+)$. Zariski-abgeschlossene Teilmengen sind aber abgeschlossen. \square

Anmerkung. *Wünschenswert wäre es wohl, den Beweis von [Rud92] zu übertragen, aber er beruht massiv auf der Tatsache, dass die komplexe Einheitskreisscheibe kompakt ist. Wir können daher nur über lokalen Körpern auf ein Analogon zu Banach-Alaoglu [Rud92, 3.15] hoffen (um die Kompaktheit der rigiden Einheitskreisscheibe zu verwenden).*

Definition 2.7. Ein nicht trivialer und beschränkter Algebromorphismus $\chi: A \rightarrow \mathbb{F}$ in einen bewerteten Körper \mathbb{F} heißt ein Charakter von A . Die Menge aller Äquivalenzklassen von Charakteren von A bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(A)$. Zwei Charaktere $\chi': A \rightarrow \mathbb{F}'$ und $\chi'': A \rightarrow \mathbb{F}''$ heißen dabei äquivalent ($\chi \sim \chi'$), wenn ein Charakter $\chi: A \rightarrow \mathbb{F}$ und Einbettungen $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}'$, $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}''$ existieren, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{F}' \\ & & & \nearrow & \\ & & & \mathbb{F} & \\ A & \xrightarrow{\quad} & & \searrow & \\ & & & & \mathbb{F}'' \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 2.8. Es gibt eine Bijektion $M(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A)$.

Beweis. Wir geben zwei zueinander inverse Abbildungen an.

$$\begin{aligned} \alpha: M(A) &\rightarrow \mathfrak{X}(A), \quad x \mapsto (\chi_x: A \rightarrow \mathcal{H}(x), f \mapsto f(x)) \\ \beta: \mathfrak{X}(A) &\rightarrow M(A), \quad [\chi: A \rightarrow \mathbb{F}] \mapsto (|\cdot|_\chi: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |\chi(f)|_{\mathbb{F}}) \end{aligned}$$

Es ist χ_x tatsächlich ein Charakter, und β ist wohldefiniert.

$\alpha \circ \beta = \text{id}$: Zum Charakter $\chi: A \rightarrow \mathbb{F}$ bekommen wir $x \in M(A)$ als

$$x = |\cdot|_\chi: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto |\chi(f)|_{\mathbb{F}}.$$

Mit α wird daraus

$$\chi_x: A \rightarrow \mathcal{H}(x), \quad f \mapsto f(x).$$

Wegen $\ker |\cdot|_\chi = \ker(\chi)$ faktorisiert χ über die kanonische Abbildung $A \rightarrow F(x)$, es ist daher $F(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von \mathbb{F} . Dies impliziert $\chi \sim \chi_x$.

$\beta \circ \alpha = \text{id}$: Es ist $\alpha(x) = \chi_x$. Da aber $|\chi_x(f)|_{\mathcal{H}(x)} = |f(x)| = |f|_x$ ist (die letzte Gleichheit folgt aus der Definition der Quotientennorm), haben wir die Behauptung gezeigt. \square

Indem wir die Bijektion zu einem Homöomorphismus erklären, identifizieren wir manchmal $M(A)$ mit $\mathfrak{X}(A)$. Dies definiert gerade die *Gel'fandtopologie* auf $\mathfrak{X}(A)$ — die schwächste Topologie, für die die Einsetzungsabbildungen $\chi \mapsto \chi(f)$ stetig sind.

2.1.3 Affinoide Bereiche

Für strikt affinoide Algebren kennen wir affinoide Bereiche von $\text{Max } A$ [BGR84, 7.2]. Dies führt zu

Definition 2.9. Sei A eine strikt affinoide K -Algebra, und sei $X = M(A)$. Ein strikt affinoider Bereich von X ist der Abschluss eines affinoiden Bereichs von $\text{Max } A$ in X . Ein affinoider Bereich von X ist eine abgeschlossene Teilmenge $V \subseteq X$, für die es eine K -affinoide Algebra A_V und einen beschränkten Homomorphismus $\varphi: A \rightarrow A_V$ gibt, die folgender UAE genügen: Zu jedem beschränkten Homomorphismus K -affinoider Algebren $\psi: A \rightarrow B$ mit $\psi^*: M(B) \rightarrow V \subseteq M(A)$ gibt es einen beschränkten Homomorphismus $A_V \rightarrow B$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A_V \\ & \searrow \psi & \swarrow \\ & & B \end{array}$$

kommutativ macht.

Berkovich zeigt, dass der Homomorphismus $A \rightarrow A_V$ durch V eindeutig bestimmt ist. Es ist nämlich $M(A_V) \cong V$. Außerdem ist A_V eine flache A -Algebra [Ber90, 2.2.4].

Nun können wir die Strukturgarbe eines strikt affinoiden Raums einführen. Sei $\mathfrak{S}(X)$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X , die endliche Vereinigung affinoider Bereiche von X sind — die *speziellen Teilmengen* von X . Für $V \in \mathfrak{S}(X)$ sei $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von V durch affinoide Bereiche von X . Da der Durchschnitt zweier affinoider Bereiche wieder affinoid ist [BGR84, 7.2.2/5], ist

$$A_V := \ker \left(\prod_{i \in I} A_{V_i} \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} A_{V_i \cap V_j} \right)$$

für $V \in \mathfrak{S}(X)$ wohldefiniert, da A_V zudem nicht von der Überdeckung \mathcal{V} abhängt: der Azyklizitätssatz 1.10 gilt auch hier [Ber90, 2.2.5]. Die *Strukturgarbe* auf X ist dann die (Prä-)Garbe

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X) := \varprojlim_{V \in \mathfrak{S}(X), V \subseteq U} A_V$$

(U durchläuft dabei die offenen Mengen von X).

Definition 2.10. Das Paar (X, \mathcal{O}_X) heißt ein strikt K -affinoider Raum. Ein Morphismus $(M(A), \mathcal{O}_{M(A)}) \rightarrow (M(B), \mathcal{O}_{M(B)})$ strikt K -affinoider Räume ist ein Morphismus lokal geringter Räume, der von einem beschränkten Homomorphismus $\varphi: B \rightarrow A$ herrührt (hier ist er dann einfach $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$).

Bemerkung 2.11. Die Zuordnung $A \rightarrow (M(A), \mathcal{O}_{M(A)})$ ist ein treuer kontravarianter Funktor von der Kategorie der strikt K -affinoiden Algebren in die Kategorie der lokal geringten Räume.

2.1.4 Die Reduktionsabbildung

Für eine kommutative Banachalgebra A , $|\cdot|$ ist die Menge

$$A^\circ := \{f \in A \mid \rho(f) \leq 1\}$$

ein Ring und

$$\mathfrak{t}(A) := \{f \in A \mid \rho(f) < 1\}$$

ist ein Ideal in diesem Ring. Dabei bezeichne $\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f^n|}$ den Spektralradius von $f \in A$, eine beschränkte Halbnorm auf A [Ber90, 1.3.3.] Wir definieren

$$\bar{A} := A^\circ / \mathfrak{t}(A).$$

Ein beschränkter Homomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ kommutativer Banachalgebren induziert Ringhomomorphismen $\varphi^\circ: A^\circ \rightarrow B^\circ$ und $\bar{\varphi}: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$. Insbesondere gibt es für jeden Punkt $x \in M(A)$ einen Homomorphismus $\bar{\chi}_x: \bar{A} \rightarrow \overline{\mathcal{H}(x)}$. Da $\overline{\mathcal{H}(x)}$ ein Körper ist, ist $\ker(\bar{\chi}_x)$ ein Primideal von \bar{A} . Mit

$$k(\bar{x}) := \text{Quot}(\bar{A} / \ker(\bar{\chi}_x)),$$

erhalten wir eine Körpereinbettung $k(\bar{x}) \rightarrow \overline{\mathcal{H}(x)}$ und folgende Abbildung

$$\pi: M(A) \rightarrow \text{Spec } \bar{A}, \quad x \mapsto \ker(\bar{\chi}_x),$$

die *Reduktionsabbildung* (oder auch *Tateabbildung*).

Bemerkung 2.12. 1. Ist die Norm auf A trivial, dann ist $A^\circ = A$ und $\mathfrak{t}(A) = \text{Nil}(A)$. In diesem Fall stimmt die Abbildung $\pi: M(A) \rightarrow \text{Spec } \bar{A} = \text{Spec } A$ nicht mit der Abbildung $M(A) \rightarrow \text{Spec } A$, $x \mapsto \ker(\chi_x)$ aus Unterabschnitt 2.1.2 überein [Ber90, 2.4].

2. Ist die Bewertung auf K nicht trivial und A eine strikt K -affinoide Algebra, so stimmt $\pi|_{\text{Max } A}$ mit der Tateabbildung $\text{Max } A \rightarrow \text{Max } \bar{A}$ überein [Ber90, 2.4].

3. In jedem Falle ist \bar{A} eine reduzierte endlich erzeugte k -Algebra [BGR84, 6.3.4/3] (die Reduziertheit ist wegen der Multiplikatilität des Spektralradius klar).

Definition 2.13. Eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge Z einer affinoiden Menge $X = M(A)$ heißt ein Rand von X , falls alle $f \in A$ ihr Maximum irgendwo in Z annehmen. Nach dem Lemma von Zorn existieren minimale Ränder. Falls es in X einen kleinsten Rand gibt, so heißt er der Shilovrand $\partial^{\text{sh}}(X)$ von X .

Es gilt folgende Verallgemeinerung des Satzes von der Surjektivität der Tateabbildung.

Satz 2.14. Sei A eine strikt K -affinoide Algebra. Bezeichne $X = M(A)$, $\bar{X} = \text{Spec } \bar{A}$, $\bar{X}_{\text{gen}} = \{\text{generische Punkte der irred. Komp. von } \bar{X}\}$. Dann gilt:

1. Die Reduktionsabbildung $\pi: X \rightarrow \bar{X}$ ist surjektiv.
2. Für jedes $\bar{x} \in \bar{X}_{\text{gen}}$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $\pi(x) = \bar{x}$. Falls $|A|_{\text{sup}} = |K|$, dann ist $\bar{K}(\bar{x}) \rightarrow \overline{\mathcal{H}(x)}$ für derartiges x ein Isomorphismus.
3. X hat einen Shilovrand: $\partial^{\text{sh}}(X) = \pi^{-1}(\bar{X}_{\text{gen}})$.

Beweis. [Ber90]. Vorab: Nach [BGR84, 6.2.3/3] ist $\rho(f) = |f|_{\text{sup}}$.

1. geht wie der Satz von Tate (Satz 1.14)

2. Sei zunächst \bar{X} irreduzibel mit generischem Punkt \bar{x} . Jedenfalls ist $\pi(|_{\text{sup}}) \in \bar{X}_{\text{gen}}$, da $|_{\text{sup}}$ eine Norm ist: der zugehörige Charakter $\chi_{\text{sup}}: A \rightarrow \mathcal{H}(|_{\text{sup}})$ ist injektiv, somit auch $\bar{\chi}_{\text{sup}}$.

Sei nun $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$. Wir behaupten, dass $|_x = |_{\text{sup}}$ gilt: falls $|f|_{\text{sup}} = 0$ ist, gilt $f \in \text{Nil}(A)$ und damit $|f(x)| = 0$. Falls aber $|f|_{\text{sup}} > 0$ ist, existieren nach [BGR84, 6.2.1/4] ein $a \in K^\times$ und ein $n \geq 1$ mit $|f|_{\text{sup}}^n = |a|$. Für $g := a^{-1}f^n$ gilt $|g|_{\text{sup}} = 1$. Wegen $g \in A^\circ \setminus \mathfrak{t}(A)$ folgt $|g(x)| = 1$. Also ist $|f(x)| = |f|_{\text{sup}}$. Dies aber bedeutet $\pi^{-1}(\bar{x}) = \{x\}$.

Falls $|A|_{\text{sup}} = |K|$ ist, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass A reduziert sei. Dann ist $\text{Quot}(A)$ überall dicht in $\mathcal{H}(x)$. Also hat jedes Element aus $\overline{\mathcal{H}(x)}$ einen Lift $\frac{f}{g} \in \text{Quot}(A)$ mit $|f|_{\text{sup}} = |g|_{\text{sup}}$. Nach Voraussetzung existiert ein $a \in K$ mit $|f|_{\text{sup}} = |g|_{\text{sup}} = |a|$. Somit kann der Lift auch als $\frac{a^{-1}f}{a^{-1}g}$, einem Quotient von Elementen aus $A^\circ \setminus \mathfrak{t}(A)$ geschrieben werden. Dies zeigt $\bar{K}(\bar{x}) \cong \overline{\mathcal{H}(x)}$.

Sei nun X beliebig. Für $\bar{x} \in \bar{X}_{\text{gen}}$ sei $f \in A^\circ$ mit $\bar{f}(\bar{x}) \neq 0$ und derart, dass \bar{f} auf allen irreduziblen Komponenten von \bar{X} verschwindet, auf denen \bar{x} nicht liegt. Mit $B := A\langle f^{-1} \rangle$ gilt $M(B) = X(f^{-1}) = \{x \in X \mid |f(x)| = 1\}$. Es folgt

$\pi^{-1}(\bar{x}) \subseteq X(f^{-1})$. Wegen $\bar{B} = \bar{A}[\bar{f}^{-1}]$ und $|B|_{\text{sup}} = |A|_{\text{sup}}$ ([BGR84, 7.2.6]) folgt 2., da die Aussage für B gilt.

3. Sei $f \in A^\circ \setminus \mathfrak{t}(A)$. Dann gibt es eine Komponente von \bar{X} , auf der \bar{f} nicht verschwindet, also ein $\bar{x} \in \bar{X}_{\text{gen}}$ mit $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{0}$. Sei $x := \pi^{-1}(\bar{x})$. Dann ist $|f(x)| = 1 = |f|_{\text{sup}}$. Also nimmt tatsächlich jedes $f \in A$ irgendwo auf der endlichen Menge $\pi^{-1}(\bar{X}_{\text{gen}})$ ihr Maximum an. Es liegt also ein (offenbar minimaler) Rand vor. Wegen der Endlichkeit ist er auch Shilovrand. \square

Beispiel 4. Sei $K = \mathbb{C}_p$. Es ist für $\mathbb{D} = D(0, 1^+)$ der Shilovrand $\partial^{\text{sh}}(\mathbb{D}) = \{|\cdot|_{\text{sup}}\}$: tatsächlich ist $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$.

2.2 Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden seien alle affinoiden Mengen stets strikt affinoid. Mit $\text{Int}(X/Y)$ sei das topologische Innere von $X \subseteq Y$ im topologischen Raum Y gemeint.

Definition 2.15. Ein quasiaffinoider Raum ist ein Paar $((U, \mathcal{O}), \varphi)$, wobei (U, \mathcal{O}) ein lokal geringter Raum ist und $\varphi: U \rightarrow X$ eine offene Einbettung in einen affinoiden Raum X ist. Ein Morphismus $((U, \mathcal{O}), \varphi) \rightarrow ((U', \mathcal{O}'), \varphi')$ quasiaffinoider Räume ist ein Morphismus $\theta: U \rightarrow U'$ lokal geringter Räume, für den $V \rightarrow V'$ ein Morphismus affinoider Räume ist, wenn $V \subseteq U$, $V' \subseteq U'$ affine Bereiche und $\theta(V) \subseteq \text{Int}(V'/U')$ ist.

Bemerkung 2.16. Es ist $V \rightarrow V'$ vom beschränkten Homomorphismus

$$A'_{V'} \rightarrow \mathcal{O}'(\text{Int}(V'/U')) \rightarrow \mathcal{O}(\theta^{-1}(\text{Int}(V'/U'))) \rightarrow A_V$$

induziert.

Definition 2.17. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum. Ein K -analytischer Atlas auf X ist eine Familie K -quasiaffinoider Räume $\mathfrak{U} = \{((U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}), \varphi_i)\}_{i \in I}$ (die Karten von \mathfrak{U} genannt werden), sodass

1. \mathfrak{U} eine offene Überdeckung von X ist und
2. $(U_i \cap U_j, \varphi_i) \rightarrow (U_i \cap U_j, \varphi_j)$ für alle $i, j \in I$ ein Isomorphismus quasiaffinoider Räume ist.

Ein quasiaffinoider Teilraum (U, φ) von X heißt verträglich mit \mathfrak{U} , falls die Abbildungen $(U \cap U_i, \varphi_i) \rightarrow (U \cap U_i, \varphi)$ für alle $i \in I$ Isomorphismen quasiaffinoider Räume sind. Zwei Atlanten von X heißen verträglich, falls stets alle Karten des einen Atlanten mit dem anderen Atlas verträglich sind.

Bemerkung 2.18. *Verträglichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Atlanten von X .*

Definition 2.19. *Ein lokal geringter Raum mit einer Verträglichkeitsklasse K -analytischer Atlanten heißt ein K -analytischer Raum. Ein Morphismus K -analytischer Räume $X \rightarrow Y$ ist ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ lokal geringter Räume, für den Atlanten $\{(U_i, \varphi_i)\}$ auf X und $\{(V_j, \psi_j)\}$ auf Y existieren, sodass die von f induzierten Abbildungen $(U_i \cap f^{-1}(V_j), \varphi) \rightarrow (V_j, \psi_j)$ für alle $i \in I$ und $j \in J$ Morphismen quasiaffinoider Räume sind.*

Die Morphismen hängen dabei nur von den Verträglichkeitsklassen von Atlanten auf X und Y ab, wir bekommen also eine Kategorie K -An.

Definition 2.20. *Ein parakompakter K -analytischer Raum S , in dem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die zu einem affinoiden Bereich eines glatten analytischen Raums isomorph ist, heißt eine K -Mannigfaltigkeit. Eine \mathbb{C}_p -Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine p -adische Mannigfaltigkeit.*

Begriffe: Ein Hausdorffraum X heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Teilüberdeckung enthält. Ein n -dimensionaler K -analytischer Raum heißt *glatt*, wenn er lokal einen étalen Morphismus nach \mathbb{A}_K^n zulässt.

Beispiel 5. 1. \mathbb{D} , die Einheitskreisscheibe ist eine Mannigfaltigkeit, die selbst nicht glatt ist.

2. Der n -dimensionale affine Raum $\mathbb{A}^n = M(K[X_1, \dots, X_n])$ (wir erinnern uns, dass für jede normierte K -Algebra A der Raum $M(A)$ gebildet werden darf) ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Er ist die Vereinigung aller affinoider Kugeln um Null.

3. Die projektive Gerade $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ ist die Einpunktkompaktifizierung der affinen Gerade. Als solche ist sie ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit.

Anmerkung. *Es klingt sicher etwas unschön, wenn Mannigfaltigkeiten nicht automatisch glatt sind. Doch wir werden später wie in [AndIII] häufig mit affinoiden Kreisscheiben zu tun haben, von denen wir uns wünschen, dass sie auch Mannigfaltigkeiten genannt werden dürfen. Y. André bezeichnet in seinen Werken nach [AndIII] mit „Mannigfaltigkeiten“ nur noch parakompakte glatte analytische Räume, was sicher wesentlich natürlicher ist.*

2.2.1 Wege

Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{A}^1 = M(K[X])$ wegzusammenhängend ist. Wir definieren den *Radius* von Punkten

$$r: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \text{ der Sorte 1} \\ \varepsilon, & x = \eta_{y,\varepsilon} \text{ der Sorte 2 oder 3} \\ \inf \text{ der Radien der } D_\alpha \in \mathcal{D}, & x = \eta_{\mathcal{D}} \text{ der Sorte 4} \end{cases}$$

(„Sorte“ wie in Beispiel 3), und für $\rho \geq r(x)$ definieren wir Kreisscheiben:

- A. Ist $\rho > r(x)$, so gibt es genau eine abgeschlossene Kreisscheibe D vom Radius ρ , die x enthält. Es sei also $D(x, \rho^+) := D$.
- B. Ist $\rho = r(x)$ und $x = \eta_{y,r(x)}$ der Sorte 2 oder 3, so sei $D(x, r(x)^+) := D(y, r(x)^+)$.
- C. Ist schließlich $\rho = r(x)$ und x der Sorte 1 oder 4, so sei $D(x, r(x)^+) := \{x\}$.

Daraus machen wir wieder Punkte. Sei

$$\mathcal{K} := \{D(x, \rho^+) \mid x \in \mathbb{A}^1, \rho > r(x)\}.$$

Dann sei

$$p: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{A}^1, D(x, \rho^+) \mapsto \begin{cases} \chi_D, & \text{A.} \\ \eta_{y,r(x)}, & \text{B.} \\ x, & \text{C.} \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{A}^1$ sei $r(x, y)$ der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe, die x und y enthält. Mit

$$\begin{aligned} \ell'_{x,y} &:= \{p(D(x, t^+)) \mid r(x) \leq t \leq r(x, y)\}, \\ \ell''_{x,y} &:= \{p(D(y, t^+)) \mid r(y) \leq t \leq r(x, y)\} \end{aligned}$$

ist

$$\ell_{x,y} := \ell'_{x,y} \cup \ell''_{x,y} \subseteq \mathbb{A}^1$$

abgeschlossen, homöomorph zum reellen Einheitsintervall und sogar *der* (injektive) Weg in \mathbb{A}^1 von x nach y . Also ist \mathbb{A}^1 sogar einfach zusammenhängend. Allgemein gilt

Satz 2.21. *Analytische Räume sind lokal wegzusammenhängend* [Ber90, 3.2.1].

Ein Resultat von Tragweite ist

Satz 2.22. *Mannigfaltigkeiten sind lokal kontrahierbar [Ber99]*

Es gibt also universelle topologische Überlagerungen. Wir wollen uns damit begnügen, den eindimensionalen Fall zu verstehen.

Definition 2.23. *Ein zusammenhängender, lokal kompakter hausdorffscher topologischer Raum X heißt ein Quasipolyeder, falls*

1. *Die Topologie von X eine Basis aus offenen Mengen U hat mit*

(a) $U^{\text{cl}} \setminus U$ *ist endlich,*

(b) *für alle $x, y \in U$, $x \neq y$ existiert genau eine abgeschlossene Teilmenge $\ell_{x,y} \subseteq U$ und ein Homöomorphismus $\varphi: [0, 1] \rightarrow \ell_{x,y}$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$.*

2. *Alle zusammenhängenden offenen Teilmengen von X sind abzählbar im Unendlichen, d.h. bei der Einpunktkompaktifizierung $X \cup \{\infty\}$ des lokal kompakten Raumes X hat ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Ein Quasipolyeder X heißt einfach zusammenhängend, falls 1.(b) auch für $U = X$ gilt.

Bemerkung 2.24. *Sei X ein Quasipolyeder.*

1. *Lokal kompakte zusammenhängende Teile von X sind Quasipolyeder.*

2. *Zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $\Sigma, T \subseteq X$ gibt es genau eine abgeschlossene Teilmenge $\ell_{\Sigma,T} \subseteq X$ und einen Homöomorphismus $\varphi: [0, 1] \rightarrow \ell_{\Sigma,T}$ mit $\varphi(0) \in \Sigma$, $\varphi(1) \in T$ und $\ell_{\Sigma,T} \cap \Sigma = \{x\}$, $\ell_{\Sigma,T} \cap T = \{y\}$. Weiter ist*

$$\ell_{\Sigma,T} \setminus \{x, y\} = \{z \in X \mid \Sigma \text{ und } T \text{ liegen in verschiedenen Zsh.komp. von } X \setminus \{z\}\}$$

Ist $\Sigma \subseteq X$ zusammenhängend abgeschlossen, so ist die Retraktion

$$\tau_{\Sigma}: X \rightarrow \Sigma, x \mapsto \begin{cases} x, & x \in \Sigma \\ \text{zweiter Endpunkt von } \ell_{x,\Sigma}, & x \in X \setminus \Sigma \end{cases}$$

stetig.

Einfach zusammenhängende Quasipolyeder X werden folgendermaßen kompaktifiziert. Sei

$$\hat{X} := \{\leq \mid \leq \text{ ist partielle Ordnung auf } X \text{ und } \forall x, y \in X \exists^1 \sup(x, y), \\ \text{ sowie } x \leq y \Rightarrow \forall z \in \ell_{x,y}: x \leq z \leq y\}$$

Eine Einbettung $X \rightarrow \hat{X}$ bekommen wir so:

$$\iota: X \rightarrow \hat{X}, x \mapsto \leq_x \text{ mit } y \leq_x z :\Leftrightarrow z \in \ell_{x,y}.$$

Basis für eine Topologie auf \hat{X} sind die in X relativ kompakten Teilmengen von X und die Mengen $\tilde{U} \subseteq \hat{X}$, sodass U Zusammenhangskomponente eines Punktes $x \in X$ mit nicht kompaktem Abschluss und \tilde{U} die Vereinigung von U und denjenigen $\leq \in \partial X := \hat{X} \setminus X$ mit $\ell_x^{\leq} \cap U \neq \emptyset$. Dabei sei für $x \in X$

$$\ell_x^{\leq} := \{y \in X \mid x \leq y\}.$$

Offenbar ist $\ell_x^{\leq y}$ homöomorph zu $[0, 1]$ oder ein Punkt, und für $\leq \in \partial X$ ist ℓ_x^{\leq} homöomorph zu $[0, 1)$.

Definition 2.25. 1. Ein einfach zusammenhängendes Quasipolyeder X heißt speziell, falls für alle $\leq \in \hat{X}$ eine Abbildung $\Theta: X \rightarrow [0, 1]$ existiert, die für jedes $x \in X$ eine ordnungserhaltende homöomorphe Einbettung $\ell_x^{\leq} \rightarrow [0, 1]$ induziert.

2. Ein Quasipolyeder heißt speziell, falls jedes einfach zusammenhängende Teilquasipolyeder speziell ist.

Satz 2.26. Einfach zusammenhängende Quasipolyeder sind kontrahierbar [Ber90, 4.1.6].

Korollar 2.27. \mathbb{P}^1 ist einfach zusammenhängend.

Beweis. \mathbb{P}^1 ist ein einfach zusammenhängendes spezielles Quasipolyeder [Ber90, 4.2.1]. \square

2.2.2 Skelette

Sei X ein einfach zusammenhängendes Quasipolyeder. Die zusammenhängende Hülle einer abgeschlossenen Teilmenge $\Sigma \subseteq X$ bezeichnen wir mit $L_X(\Sigma)$. Offenbar ist

$$L_X(\Sigma) = \bigcup_{x,y \in \Sigma} \ell_{x,y}.$$

Nach [Ber90, 4.1.3] ist $\Delta(X) := X \cap L_{\hat{X}}(\partial X)$ ein kontrahierbares Polyeder, und es gibt einen Homöomorphismus

$$\partial(\Delta(X)) \rightarrow \partial X$$

(die Ränder sind als Mengen gleich: $\partial\Delta(X) = \partial X \cap \Delta(X)$). $\Delta(X)$ besteht aus den Punkten von X , die keine zusammenhängende offene Umgebung mit

einem einzigen Endpunkt besitzen. Falls X höchstens einen Endpunkt besitzt, ist $\Delta(X)$ leer.

Für beliebige Quasipolyeder X sei $\Delta(X)$ die Menge aller Punkte von X , die keine einfach zusammenhängenden Quasipolyeder mit einem einzigen Endpunkt als offene Umgebung zulassen.

Definition 2.28. $\Delta(X)$ heißt das Skelett von X .

Es gilt [Ber90, 4.1.4]

Satz 2.29. 1. $\Delta(X)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von X , die genau dann leer ist, wenn X ein einfach zusammenhängendes Quasipolyeder mit höchstens einem Endpunkt ist.

2. $\Delta(X)$ ist ein Polyeder, das keinen Punkt enthält, der eine zu $[0, 1)$ homöomorphe offene Umgebung besitzt. Falls X kompakt ist, ist es auch $\Delta(X)$.

3. Die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus \Delta(X)$ sind einfach zusammenhängende Quasipolyeder, die einen Endpunkt in $\Delta(X)$ haben.

Für spezielle Quasipolyeder X ist $\Delta(X)$ ein starker Deformationsretrakt von X [Ber90, 4.1.6]. Außerdem hat X eine universelle topologische Überlagerung $\Omega \rightarrow X$, Ω ist ein einfach zusammenhängendes spezielles Quasipolyeder, und es gilt

$$\Omega/\pi_1(X) \cong \Delta(X).$$

[Ber90, 4.1.8]. Allgemeiner gilt für proendliche Gruppen G , die stetig auf Ω operieren:

$$\partial(\Omega)/G \cong \partial(\Omega/G)$$

[Ber90, 4.1.7].

2.2.3 Analytische Skelette

Sei X eine nicht singuläre irreduzible projektive Kurve über \mathbb{C}_p . Es gibt eine reine affinoide Überdeckung \mathcal{U} von X , sodass $\overline{X_{\mathcal{U}}} =: \bar{X}$ semistabil ist [vdP84]. Sei $\pi_{\mathcal{U}}: X \rightarrow \overline{X_{\mathcal{U}}}$ die Tateabbildung. Als topologischer Raum ist X^{an} ein zusammenhängendes spezielles Quasipolyeder, das Skelett $\Delta(X^{\text{an}})$ ist ein zusammenhängender lokal endlicher topologischer Graph [Ber90, 4.3.1 und 4.3.2].

Bekanntlich gilt für die Fasern der Tateabbildung (z.B. [Ber90, 4.3.1] oder Referenzen darin):

$$\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x}) \text{ ist ein } \begin{cases} \text{Punkt,} & \text{falls } \bar{x} \in \bar{X}_{\text{gen}} \\ \text{offener Kreis,} & \text{falls } \bar{x} \in \bar{X}_{\text{ns}} \\ \text{offener Kreisring,} & \text{falls } \bar{x} \in \bar{X}_{\text{sing}} \end{cases} \text{ ist.}$$

In jedem Fall ist die Faser ein spezielles einfach zusammenhängendes Quasipolyeder. Im Fall von Punkt oder Kreisscheibe ist das Skelett leer. Und im Fall des Kreisrings haben wir zwei Enden:

$$\widehat{\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x})} = \pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x}) \cup \{x_1, x_2\} \quad \text{mit } x_1, x_2 \in \partial^{\text{sh}}(X).$$

Dann ist also $\Delta(\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x}))$ homöomorph zum offenen Einheitsintervall. Für den Abschluss der Faser in X unterscheiden wir zwei Fälle:

1. \bar{x} liegt auf zwei Komponenten von \bar{X} . Dann ist

$$\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x})^{\text{cl}} = \widehat{\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x})}.$$

2. \bar{x} liegt auf nur einer Komponente von \bar{X} . Dann ist

$$\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x})^{\text{cl}} = \widehat{\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x})} / Z_2,$$

wobei die Aktion von Z_2 lediglich die beiden Enden identifiziert.

Nun können wir einen Graph $\Delta_{\mathfrak{U}}(X)$ definieren: Die Eckenmenge ist $\partial^{\text{sh}}(X)$, und die Kanten sind die Abschlüsse der Skelette $\Delta(\pi_{\mathfrak{U}}^{-1}(\bar{x}))$ in X (also homöomorph zu $[0, 1]$ oder $[0, 1)$). $\Delta_{\mathfrak{U}}(X)$ heißt das *analytische Skelett von X bezüglich \mathfrak{U}* . Die verschiedenen semistabilen Reduktionen unterscheiden sich durch eine Folge von Kantenkontraktionen (Auf- und Niederblasen irreduzibler Komponenten [vdP84, 1.1]). Aus diesem Grund sprechen wir, falls der Graph $\Delta_{\mathfrak{U}}(X)$ reduziert ist (d.h. alle Ecken Valenz ≥ 3 haben), vom *analytischen Skelett* $\Delta^{\text{an}}(X)$ von X schlechthin.

Wir können folglich die analytische Reduktion im topologischen Sinne als Deformationsretrakt auf der Kurve auffassen!

Satz 2.30. *Es ist $\Delta(X^{\text{an}})$ das maximale Subpolyeder von $\Delta^{\text{an}}(X)$ ohne Endpunkte [Ber90, 4.3.2].*

3 Ein Zoo von Fundamentalgruppen

In der p -adischen Geometrie wurde alsbald festgestellt, dass die topologische Fundamentalgruppe einer p -adischen Mannigfaltigkeit viel zu klein ist. Dies liegt daran, dass es zu viele topologisch einfach zusammenhängende Mengen gibt. Äquivalent umformuliert: es gibt zuwenig topologische Überlagerungen einer gegebenen Mannigfaltigkeit. So ist etwa die beliebte Überlagerung der punktierten Einheitskreisscheibe $z \mapsto z^n$ keine topologische Überlagerung, da punktierte Kreisscheiben einfach zusammenhängend sind. Aus diesem Grund schwächte A. de Jong den Begriff der Überlagerung ab, um etwas bessere Fundamentalgruppen zu bekommen. Diese Abschwächung war jedoch Yves André zuviel, was ihn zu seinen temperierten Überlagerungen führte, die seiner Meinung nach immer die p -adisch richtigen Fundamentalgruppen liefern.

Das meiste dieses Kapitels steht in [AndIII].

3.1 Faserfunktoren

Definition 3.1. Sei S eine K -Mannigfaltigkeit. Ein geometrischer Punkt von S ist ein Morphismus $\bar{s}: M(\Omega) \rightarrow S$, wobei $(\Omega, | |)$ eine algebraisch abgeschlossene vollständige Erweiterung von $(K, | |)$ ist — es ist Ω eine normierte K -Algebra, daher ist $M(\Omega)$ wohldefiniert.

Mit $s := \bar{s}(M(\Omega)) \in S$ meinen wir stets den Bildpunkt des geometrischen Punktes \bar{s} .

Definition 3.2. Eine Überlagerung von S ist ein analytischer Morphismus $f: S' \rightarrow S$, sodass S eine offene Überdeckung \mathfrak{U} hat mit der Eigenschaft:

$$\forall U \in \mathfrak{U}: f^{-1}(U) = \coprod_i V_i$$

und alle $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ sind endlich.

Ein Morphismus von Überlagerungen von S ist ein kommutatives Dreieck

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{an} & S'' \\ & \searrow \tilde{u}_l & \swarrow \tilde{u}_r \\ & S & \end{array}$$

Die Kategorie, die wir erhalten, nennen wir Cov_S .

Um Fundamentalgruppen erklären zu können, führen wir den Faserfunktoren ein. Diesen brauchen wir als Ersatz für Homotopieklassen von Wegen, die wir nur für *Berkovichwege* (Wege in der Berkovichtopologie) kennen. Letztere liefern wie immer die topologische Fundamentalgruppe...

Definition 3.3. *Unter der geometrischen Faser eines geometrischen Punktes $\bar{s}: M(\Omega) \rightarrow S$ von S unter der Überlagerung $f: S' \rightarrow S$ verstehen wir die Menge aller Liftungen von \bar{s} zu geometrischen Punkten von S' :*

$$f^{-1}(\bar{s}) := \left\{ \bar{s}': M(\Omega) \rightarrow S' \mid \begin{array}{ccc} & & S' \\ & \nearrow \bar{s}' & \downarrow f \\ M(\Omega) & \xrightarrow{\bar{s}} & S \end{array} \text{ kommutiert} \right\}.$$

Der Faserfunktoren ist der kovariante Funktoren

$$F_{S, \bar{s}}: \text{Cov}_S \rightarrow \underline{\text{Sets}}, (f: S' \rightarrow S) \mapsto f^{-1}(\bar{s}).$$

Falls aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Mannigfaltigkeit S es gerade geht, schreiben wir bloß $F_{\bar{s}}$ für den Faserfunktoren.

Sei nun Cov_S^\bullet eine volle Unterkategorie von Cov_S , die stabil ist unter Bildung von Zusammenhangskomponenten, Faserprodukten und *Quotienten* über S . Letzteres bedeutet:

Für $(S' \rightarrow S) \in \text{Cov}_S^\bullet$ sei $R \subseteq S' \times_S S'$ eine Äquivalenzrelation, die zugleich Vereinigung von Zusammenhangskomponenten sei. Dann soll $(S'/R \rightarrow S)$ auch in Cov_S^\bullet liegen.

Wir definieren nun die Fundamentalgruppe als Automorphismengruppe des eingeschränkten Faserfunktoren $F_{\bar{s}}^\bullet := F_{S, \bar{s}}^\bullet := F_{\bar{s}}|_{\text{Cov}_S^\bullet}$:

$$\pi_1^\bullet(S, \bar{s}) := \text{Aut } F_{\bar{s}}^\bullet.$$

Um die Fundamentalgruppe zu topologisieren, nehmen wir als Einsumgebungsbasis die Stabilisatoren

$$\mathfrak{B} := \{\text{Stab}_{S', \bar{s}'}^\bullet \subseteq \pi_1^\bullet(S, \bar{s}) \mid (S' \xrightarrow{f} S) \in \text{Cov}_S^\bullet, \bar{s}' \in f^{-1}(\bar{s})\}.$$

Bemerkung 3.4. *Es ist tatsächlich \mathfrak{B} durchschnittsstabil, \mathfrak{B} also tatsächlich eine Umgebungsbasis der Eins. Desweiteren ist \mathfrak{B} stabil unter Konjugation mit Elementen aus $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$, somit sind Gruppenverknüpfung und Inversenbildung stetig in der von \mathfrak{B} erzeugten Topologie. Die Fundamentalgruppe ist mit dieser Topologie also eine topologische Gruppe.*

Nun kommen wir zu unserem Zoo von Fundamentalgruppen. \bullet wird für gewisse (Tier-)arten von Überlagerungen stehen, die zu einer Reihe von Fundamentalgruppen führen werden.

Definition 3.5. $\bullet = \text{ét}$: Eine Überlagerung $(S' \xrightarrow{f} S) \in \text{Cov}_S$ heißt étale, falls eine offene Überdeckung \mathfrak{U} von S existiert, sodass $f^{-1}(U) = \coprod V_i$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ gilt und alle $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ endlich étale sind.

$\bullet = \text{alg}$: Eine Überlagerung $f: S' \rightarrow S$ heißt algebraisch (bei [AndIII] oder [dJ95] endlich-étale), falls $f \in \text{Cov}_S^{\text{ét}}$ und als Morphismus endlich ist.

$\bullet = \text{top}$: Eine Überlagerung f von S heißt topologisch, falls in der Situation von $\bullet = \text{alg}$ alle $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ Isomorphismen sind.

$\bullet = \text{temp}$: Eine Überlagerung $f: S' \rightarrow S$ heißt temperiert, falls eine topologische Überlagerung $T' \rightarrow T$ existiert, sodass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{/R} & S' \\ \text{top} \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\text{alg}} & S \end{array}$$

Dabei sei der obere Pfeil ein Quotient über S .

Topologische Überlagerungen sind natürlich nur der Vollständigkeit halber mit aufgeführt.

Bemerkung 3.6. Ist $S' \rightarrow S$ eine étale Überlagerung, so ist notwendig S' eine Mannigfaltigkeit.

Beispiel 6. Sei T eine Tatekurve über \mathbb{C}_p ($p \neq 2$). Die Legendregleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ für die elliptische Kurve T liefert zusammen mit der universellen topologischen Überlagerung von T eine Überlagerung

$$\mathbb{C}_p^\times \rightarrow T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1,$$

die außerhalb der vier Verzweigungspunkte $0, 1, \lambda, \infty$ temperiert ist.

Lemma 3.7. Es ist $\text{Cov}_S^{\text{temp}}$ eine volle Unterkategorie von $\text{Cov}_S^{\text{ét}}$.

Beweis. [AndIII, 11.2.5], [dJ95]. Sie beweisen sogar, dass die Verkettung einer étalen mit einer algebraischen Überlagerung (egal in welcher Reihenfolge) eine étale Überlagerung ist. \square

Beispiel 7. Die Überlagerung

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto z^n,$$

der punktierten p -adischen Einheitskreisscheibe ist algebraisch, aber für $n \geq 2$ nicht topologisch. Der Grund hierfür ist, dass der nicht klassische Punkt sup nur sich selbst als Urbild hat.

Alternativ können wir auch anführen, dass \mathbb{D} topologisch einfach zusammenhängend ist, da \mathbb{D} eine lokal kompakte zusammenhängende Teilmenge des einfach zusammenhängenden Quasipolyeders \mathbb{P}^1 ist (solche Mengen sind offenbar auch einfach zusammenhängende Quasipolyeder).

Bemerkung 3.8. 1. Für $\bullet \in \{\text{ét}, \text{alg}, \text{top}, \text{temp}\}$ ist Cov_S^\bullet stabil unter Zusammenhangskomponentenbildung, Faserprodukten und Quotienten über S .

2. $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$ stimmt mit der Gruppe von Homotopieklassen von Berkovichwegen überein und ist daher diskret.

3. Es ist $\pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})$ eine proendliche topologische Gruppe. Für $\text{char } K = 0$ und $S = X^{\text{an}}$, die Analytifizierung einer glatten algebraischen Varietät, stimmt $\pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})$ mit der grothendieckschen algebraischen Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{alg}}(X, \bar{s})$ überein [AndIII, 1.4.1].

4. Wir haben einen Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen

$$\pi_1^\bullet(S, \bar{s}) \rightarrow \varprojlim_{\text{Stab}_{S', \bar{s}'}} \pi_1^\bullet(S, \bar{s}) / \text{Stab}_{S', \bar{s}'}$$

Insbesondere ist $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$ ein separierter, prodiskreter topologischer Raum [AndIII, 1.4.2].

Mit den üblichen Methoden folgt nun

Satz 3.9. Der angereicherte Funktor

$$F_{\bar{s}}^\bullet: \text{Cov}_S^\bullet \rightarrow \pi_1^\bullet(S, \bar{s}) - \underline{\text{Sets}}$$

in die Kategorie der diskret topologisierten Mengen mit stetiger $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$ -Aktion von links ist voll treu und induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{disj. } \cup \text{ von } \bullet\text{-Ül./}S\} \rightarrow \pi_1^\bullet(S, \bar{s}) - \underline{\text{Sets}}.$$

Dabei entsprechen zusammenhängende Überlagerungen den $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$ -Bahnen.

Beweis. [AndIII, 1.4.5] □

Korollar 3.10. 1. $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$ ist genau dann eine prodiskrete topologische Gruppe, wenn zusammenhängende Überlagerungen in Cov_S^\bullet einen Galoisabschluss haben.

2. Ist $\text{Cov}_S^{\text{alg}}$ eine volle Unterkategorie von Cov_S^\bullet , dann ist $\pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})$ die proendliche Komplettierung von $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$.

Beweis. 1. folgt direkt aus dem Satz.

2. Die proendliche Komplettierung $\widehat{\pi_1^\bullet(S, \bar{s})}$ ist der projektive Limes über alle endlichen Quotienten $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})/\text{Stab}_{S', \bar{s}'}$. Nach dem Satz gehören dazu endliche \bullet -Überlagerungen, also algebraische Überlagerungen. Dies aber bedeutet nach dem Satz

$$\pi_1^\bullet(S, \bar{s})/\text{Stab}_{S', \bar{s}'} \cong \pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})/\text{Stab}_{S', \bar{s}'}^{\text{alg}},$$

mithin $\widehat{\pi_1^\bullet(S, \bar{s})} \cong \pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})$. □

Bemerkung 3.11. 1. Es ist nach dem Korollar $\pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s}) = \widehat{\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})}$.

2. Der topologische Gruppenhomomorphismus $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$ ist surjektiv, da die letztere Gruppe diskret ist (nach [AndIII, 1.4.8] hat $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})$ dichtes Bild in $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$). Dass die erste Gruppe eine topologische ist, folgt aus der folgenden Tatsache [AndIII, 2.1.2]:

3. $\text{Cov}_S^{\text{temp}}$ „kennt Galoisabschlüsse“. Dazu nehmen wir ohne Einschränkung eine temperierte Überlagerung der Bauart

$$f: \tilde{T} \xrightarrow{\text{top}} T \xrightarrow{\text{alg}} S$$

mit \tilde{T} topologisch einfach zusammenhängend und T/S galoissch. Diese Überlagerung ist galoissch, da die folgende Sequenz exakt ist

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(T, \bar{t}) \rightarrow \text{Aut}_S \tilde{T} \rightarrow \text{Aut}_S T \rightarrow 1,$$

und wir $\tilde{T}/\text{Aut}_S \tilde{T} = S$ haben. Dass diese Wahl von temperierten Überlagerungen keine Einschränkung ist, sehen wir so: $\text{Cov}_S^{\text{alg}}$ und $\text{Cov}_T^{\text{top}}$ kennen Galoisabschlüsse. Für topologische Überlagerungen haben wir die übliche Galoisstheorie via \tilde{T}/T , der universellen topologischen Überlagerung von T . Quotienten der Galoisüberlagerung f haben ihren Galoisabschluss unterhalb von f . Dieser ist ebenfalls temperiert.

Wichtig ist folgender

Satz 3.12. *Für irreduzible nicht singuläre projektive algebraische Kurven S über K ist $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$ frei, endlich erzeugt (und damit diskret).*

Beweis. Nach [Ber90, 4.3.2] ist S ein spezielles Quasipolyeder und das Skelett $\Delta(S)$ Teilgraph des analytischen Graphen $\Delta^{\text{an}}(S)$. Genauer sind ihre Bettizahlen gleich und höchstens gleich dem Geschlecht g von S . Wir behaupten

$$\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s}) = \pi_1(\Delta(S)).$$

Sei $\Omega \rightarrow S$ die universelle topologische Überlagerung. [Ber90, 4.1.8] gibt uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta(\Omega) & \hookrightarrow & \Omega \\ \downarrow / \pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s}) & & \downarrow / \pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s}) \\ \Delta(S) & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Es ist wegen der Retraktion $\Omega \rightarrow \Delta(\Omega)$ sogar kartesisch. Es folgt daher leicht, dass der linke Pfeil universell in der Kategorie der Graphenüberlagerungen von $\Delta(S)$ ist. Also gilt die Behauptung. Insgesamt folgern wir, dass $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$ frei in höchstens g Erzeugern ist. \square

Korollar 3.13. *1. Eindimensionale reduzierte affinoide Räume sowie lokal kompakte Teile glatter projektiver Kurven haben freie, endlich erzeugte topologische Fundamentalgruppen.*

2. Eindimensionale Mannigfaltigkeiten haben freie topologische Fundamentalgruppen.

3. Quasiprojektive Kurven haben dieselbe topologische Fundamentalgruppe wie ihre projektiven Abschlüsse.

Beweis. 1. Sei X eindimensional, affinoid. Ihre Normalisierung X' liegt endlich über X und ist nach [vdP80] in eine projektive Kurve S' affinoid einbettbar. Insbesondere ist X' ein spezielles Quasiunterpolyeder von S' , das Skelett $\Delta(X')$ ist daher ein Teilgraph von $\Delta^{\text{an}}(S')$. Es folgt $\pi_1^{\text{top}}(X', \bar{x}') \subseteq \pi_1^{\text{top}}(S', \bar{s}')$. Die Behauptung für X' ist nun ein bekanntes Resultat der kombinatorischen Gruppentheorie [Ser80, Theorem 5]. Da X aus X' durch Verkleben endlich vieler Punkte entsteht, entsteht $\Delta(X)$ aus $\Delta(X')$ durch Hinzufügen von Kanten. Wir sahen im Beweis des vorangehenden Satzes, dass Fundamentalgruppen sich bei Skelettbildung nicht ändern. Der zweite Teil von 1. ist klar, da lokal kompakte Teile spezieller Quasipolyeder selbst solche sind.

2. Sei die Mannigfaltigkeit S zunächst glatt. Da S parakompakt ist, gibt es eine abzählbare reine lokal endliche affinoidale Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}$. Es sei \mathfrak{U} so gewählt, dass alle U_i bezüglich der Überdeckung $\mathfrak{U}_i = U_i \cap \mathfrak{U}$ semistabile Reduktion hat [vdP84] (nachdem U_i in eine projektive Kurve eingebettet wurde). Das Skelett $\Delta(S)$ entsteht nun durch Verkleben der Graphen $\Delta(U_i)$ mit endlicher Bettizahl längs ihrer Durchschnitte. Somit ist auch $\Delta(S)$ ein lokal endlicher Graph und hat freie Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s})$. Dass die topologische Fundamentalgruppe von S mit der Graphenfundamentalgruppe von $\Delta(S)$ übereinstimmt ergibt sich wie im Beweis von Satz 3.12 aus der Retraktion $S \rightarrow \Delta(S)$, die sich aus den lokalen Retraktionen verkleben lässt.

Im allgemeinen Fall normalisieren wir die affinoiden Teile wie in 1.

3. Die analytischen Skelette beider Kurven unterscheiden sich nur um endlich viele Enden (für jeden herausgenommenen Punkt kommt ein Ende hinzu). Die Graphenfundamentalgruppen sind somit gleich. \square

Anmerkung. In [dJ95, 5.3] wird die Isomorphie $\pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s}) \cong \pi_1(\Delta(S))$ für eindimensionale S in der Sprache der formellen und rigiden Geometrie geführt.

Bemerkung 3.14. 1. Eine Einsumgebungsbasis \mathfrak{B} in $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})$ besteht aus den abgeschlossenen Normalteilern H mit $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})/H \cong \text{Aut}(\tilde{T}/S)$, wobei $\tilde{T} \rightarrow T$ die topologisch universelle Überlagerung einer algebraischen Galoisüberlagerung $T \rightarrow S$ ist.

2. Für eindimensionale S ist die Kompletierungsabbildung $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s})$ injektiv [AndIII, 2.1.6].

Beweis. 1. Offensichtlich.

2. Sei $H \in \mathfrak{B}$, also $T \rightarrow S$ eine algebraische Galoisüberlagerung mit $G := \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})/H = \text{Aut}(\tilde{T}/S)$. G enthält als Normalteiler von endlichem Index eine freie Gruppe, nämlich $\pi_1^{\text{top}}(T, \bar{t})$, und ist somit residuell endlich. Dann ist aber auch $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \cong \varprojlim_{H \in \mathfrak{B}} \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})/H$ residuell endlich: sei dazu $g \in \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \setminus \{1\}$. Dann existiert ein Quotient G von $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})$, für den $\text{pr}_G(g) \neq 1_G$ ist, wobei $\text{pr}_G: \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \rightarrow G$ die kanonische Projektion ist. Aber, da G residuell endlich ist, hat G einen Normalteiler N von endlichem Index, der $\text{pr}_G(g)$ nicht enthält. Dann liegt aber g nicht in $\text{pr}_G^{-1}(N)$, einem Normalteiler von $\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s})$ von endlichem Index. Schließlich gilt für residuell endliche Gruppen, dass die kanonische Abbildung in ihre proendliche Kompletierung injektiv ist. \square

Beispiel 8. *Es liegt $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \bar{s})$ dicht in \hat{F}_2 , der proendlichen Kompletterung der freien nicht abelschen Gruppe in 2 Erzeugern. Diese temperierte Fundamentalgruppe spielt eine wichtige Rolle in einer geometrischen Beschreibung der lokalen absoluten Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ [And02].*

Für Galoisüberlagerungen kennt die Topologie eine exakte Sequenz der Fundamentalgruppen. Wir kennen sie auch:

Lemma 3.15. *Sei $S' \xrightarrow{/G} S$ eine endliche étale Galoisüberlagerung. Dann ist die Sequenz*

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(S', \bar{s}') \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) \rightarrow G \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. [AndIII, 2.1.8] □

3.2 Wege

Sei S eine zusammenhängende K -Mannigfaltigkeit. Nach Satz 2.21 ist S wegzusammenhängend. Wir wollen aber auch die Existenz étaler Wege skizzieren. Seien \bar{s}, \bar{t} geometrische Punkte von S .

Definition 3.16. *Ein in S verlaufender \bullet -Weg von \bar{s} nach \bar{t} ist ein Isomorphismus von Funktoren*

$$\alpha: F_{\bar{s}}^\bullet \rightarrow F_{\bar{t}}^\bullet.$$

Bemerkung 3.17. *1. Ein Element von $\pi_1^\bullet(S, \bar{s})$ ist nichts anderes als ein in S verlaufender geschlossener \bullet -Weg, der in \bar{s} beginnt und endet.*

2. Ein top-Weg $\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}$ ist dasselbe wie eine Homotopieklasse von Berkovichwegen in S von s nach t .

3. Wegen $\text{Cov}_S^\bullet \subset \text{Cov}_S^{\text{ét}}$ gibt es eine stetige Abbildung

$$\varphi_{\text{ét}, \bullet}: \text{Iso}(F_{\bar{s}}^{\text{ét}}, F_{\bar{t}}^{\text{ét}}) \rightarrow \text{Iso}(F_{\bar{s}}^\bullet, F_{\bar{t}}^\bullet).$$

Dabei werde die Topologie auf der Menge $\text{Iso}(F_{\bar{s}}^\bullet, F_{\bar{t}}^\bullet)$ von den $\text{Stab}_{S', \bar{s}'}^\bullet \circ \alpha$ mit $\alpha: F_{\bar{s}}^\bullet \rightarrow F_{\bar{t}}^\bullet$ erzeugt.

Entscheidend ist

Lemma 3.18. *Es ist $\varphi_{\text{ét}, \text{top}}$ surjektiv, d.h. es existiert zu jedem Paar \bar{s}, \bar{t} ein étaler Weg $\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}$, der in S verläuft.*

Beweisskizze. [AndIII, 1.3.3], [dJ95, 2.9]. Lifte einen top-Weg $\gamma: \bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}$ auf die universelle topologische Überlagerung von S und finde dort einen étalen Weg (dies ist die Hauptarbeit) mit demselben Anfangs- und Endpunkt wie γ . Der Pushforward ist dann ein étaler Weg in S von \bar{s} nach \bar{t} . \square

3.3 Tangentiale Basispunkte

Tangentiale Basispunkte für Fundamentalgruppen von Kurven gehören im Komplexen zu Einbettungen des Funktionenkörpers in den Körper der Puiseuxreihen in einem unendlich fernen Punkt der Kurve. Diese Einbettungen hängen wiederum nur vom Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial z}$ und nicht vom lokalen Parameter z ab [Del89] oder [Schm01].

Das Problem, dass die Gaußnorm von $K(z)$ nicht auf den Körper der Puiseuxreihen fortsetzbar ist, und wir daher keine generischen Berkovichpunkte bekommen, umgeht Y. André in [AndIII, 2.2] dadurch, dass er nur temperierte Überlagerungen der Tangente ($\cong \mathbb{A}^1$) im unendlich fernen Punkt zulässt.

Sei K algebraisch abgeschlossen der Charakteristik Null. Sei weiter \bar{S} eine zusammenhängende eindimensionale K -Mannigfaltigkeit. Für einen klassischen Punkt $0 \in \bar{S}$ sei $S := \bar{S} \setminus \{0\}$. Der Punkt 0 hat eine Umgebungsbasis aus Kreisscheiben um 0 . Nach Gabber-Lütkebohmert (Satz 3.22) gilt für jede temperierte Überlagerung $f \in \text{Cov}_S^{\text{temp}}$, dass

$$f|_{f^{-1}(\dot{D})}: f^{-1}(\dot{D}) \rightarrow \dot{D}$$

für hinreichend kleine punktierte Kreisscheiben \dot{D} um 0 eine disjunkte Vereinigung von Kummerüberlagerungen von beschränktem Grad ist:

$$\begin{array}{ccc} \coprod \dot{D} & \longrightarrow & f^{-1}(\dot{D}) \\ \text{triv} \downarrow & & \downarrow \text{temp} \\ \coprod' \dot{D} & \xrightarrow{\text{kum}} & \dot{D} \end{array}$$

Der rechte senkrechte Pfeil ist daher temperiert, und wir bekommen einen Funktor

$$\text{Cov}_S^{\text{temp}} \rightarrow \text{Cov}_{\dot{D}}^{\text{temp}}.$$

Ist $T_{\bar{S},0} \cong \mathbb{A}_K^1$ der Tangentialraum an 0 , so können wir mit dem Isomorphismus

$$\text{Cov}_{\dot{D}}^{\text{temp}} \rightarrow \text{Cov}_{\dot{T}_{\bar{S},0}}^{\text{temp}}$$

verketteten und bekommen so für jeden geometrischen Punkt \vec{t} von $\dot{T}_{\bar{s},0}$ einen Faserfunktorkomplex

$$F_{\vec{t}}^{\text{temp}} : \text{Cov}_S^{\text{temp}} \rightarrow \text{Cov}_{\dot{T}_{\bar{s},0}}^{\text{temp}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}, f \mapsto f^{-1}(\vec{t}).$$

Sei nun $\vec{t} \in \dot{T}_{\bar{s},0}$ ein solcher tangentialer Basispunkt.

Satz 3.19. *Für jeden geometrischen Punkt \bar{s} von S existiert ein temp-Weg $\bar{s} \rightsquigarrow \vec{t}$. Mit anderen Worten:*

$$F_{S,\bar{s}}^{\text{temp}} \cong F_{\dot{T}_{\bar{s},0},\vec{t}}^{\text{temp}}.$$

Beweis. Der Beweis von der Existenz étaler Wege lässt sich fast wörtlich übertragen [AndIII, 2.2.3]. \square

Korollar 3.20. *Es existieren die Fundamentalgruppen $\pi_1^{\text{temp}}(S, \vec{t})$ mit tangentialen Basispunkten \vec{t} (sowie ihre \bullet -Abkömmlinge für $\text{Cov}_S^\bullet \subseteq \text{Cov}_S^{\text{temp}}$ unter den üblichen Stabilitätsvoraussetzungen).*

3.4 Beispiele

Im folgenden sei $K = \mathbb{C}_p$.

Beispiel 9. *Es ist $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{P}^1, \bar{s}) = \pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{A}^1, \bar{s}) = 1$, da beide Gruppen dicht in der jeweiligen algebraischen Fundamentalgruppe liegen. Hieraus folgt sofort $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1, \bar{s}) = 1$ (wegen der Surjektion auf die topologische Fundamentalgruppe).*

Beispiel 10. *Ist \bar{S} eine projektive algebraische Kurve über \mathbb{C}_p und S Zariski-offen in \bar{S} , so gilt*

$$\pi_1^{\text{top}}(\bar{S}, \bar{s}) = \pi_1^{\text{top}}(S, \bar{s}).$$

Insbesondere ist $\mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ stets topologisch einfach zusammenhängend.

Beweis. Dies ist die Aussage von Korollar 3.13.3. \square

Bemerkung 3.21. *Wir haben bereits gesehen, dass \mathbb{P}^1 ein einfach zusammenhängendes spezielles Quasipolyeder ist (Korollar 2.27). Für solche sind dann auch lokal kompakte Teilmengen einfach zusammenhängend.*

Beispiel 11. *Für $\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ gilt*

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{G}_m, 1) = \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{G}_m, 1) \cong \hat{\mathbb{Z}},$$

da zusammenhängende algebraische Überlagerungen über \mathbb{G}_m kummersch sind:

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m, z \mapsto z^n.$$

Beispiel 12. Sei S eine elliptische Kurve über \mathbb{C}_p . Hat S gute Reduktion, dann ist S topologisch einfach zusammenhängend. Da algebraische Überlagerungen $S' \rightarrow S$ Isogenien sind, hat auch S' gute Reduktion. Hieraus folgt

$$\pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) = \pi_1^{\text{alg}}(S, \bar{s}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^2.$$

Ist im andern Fall S eine Tatekurve mit universeller topologischer Überlagerung $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}} = S$, so sieht unsere Sequenz von Fundamentalgruppen

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{G}_m, 1) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(S, 1) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(S, 1) \rightarrow 1$$

(wir schreiben Tatekurven als Multiplikativgruppen) so aus:

$$1 \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(S, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Da $\pi_1^{\text{temp}}(S, 1) \subseteq \pi_1^{\text{alg}}(S, 1) \cong \hat{\mathbb{Z}}^2$ abelsch ist, folgt

$$\pi_1^{\text{temp}}(S, 1) \cong \hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}.$$

Satz 3.22 (Gabber-Lütkebohmert). Jede algebraische Überlagerung der p -adischen punktierten Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist über einer hinreichend kleinen punktierten Kreisscheibe um 0 eine disjunkte Vereinigung von Kummerüberlagerungen.

Beweis. [Lüt93] □

Beispiel 13. Sei $S = \mathbb{D}$, die p -adische Einheitskreisscheibe.

1. Genau dann ist eine endliche Gruppe Quotient von $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, 0)$, wenn sie von ihren p -Sylogruppen erzeugt wird.
2. Eine nicht triviale algebraische Galoisüberlagerung von \mathbb{D} ist etwa die Artin-Schreier-Überlagerung $\mathbb{D} \xrightarrow{/Z_p} \mathbb{D}$, $z \mapsto z^p - z$.
3. Es ist $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{D}, 0) = \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, 0)$.

Beweis von 1. Sei G ein endlicher Quotient von $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, 0)$. Nach [Lüt93, 2.11] gehört hierzu ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{/G_p} & \mathbb{D} \\ & \searrow /G & \downarrow \text{triv} \\ & & \mathbb{D} \end{array}$$

Dabei sei G_p der von den p -Sylogruppen erzeugte Normalteiler von G .

Ist umgekehrt $G = G_p$, so ist nach einem Spezialfall der Abhyankarvermutung (der von Raynaud bewiesen werden konnte [Ray94]) G als Galoisgruppe $X \xrightarrow{/G} \mathbb{A}^1$ einer zusammenhängenden algebraischen Überlagerung der affinen Gerade realisierbar. \square

Beispiel 14. Die punktierte Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist kum-zusammenhängend.

Gemeint ist $\bullet = \text{kum}$: Sei $\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{kum}}$ die Kategorie der endlichen disjunkten Vereinigungen von Kummerüberlagerungen über \mathbb{D} . Sie ist stabil unter Zusammenhangskomponenten, Faserprodukten und Quotienten über \mathbb{D} . Da Kummerüberlagerungen zyklisch galoissch sind, ist $\pi_1^{\text{kum}}(\mathbb{D}, \bar{s})$ eine topologische Gruppe, die topologisch isomorph zu $\hat{\mathbb{Z}}$ ist (da es zu jedem Grad genau eine Kummerüberlagerung gibt).

Beweis. Es ist $\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{kum}}$ eine volle Unterkategorie von $\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{ét}}$. Nach Bemerkung 3.17 erhalten wir für zwei geometrische Punkte \bar{s}, \bar{t} von \mathbb{D} eine Abbildung

$$\varphi_{\text{ét,kum}}: \text{Iso}(F_{\bar{s}}^{\text{ét}}, F_{\bar{t}}^{\text{ét}}) \rightarrow \text{Iso}(F_{\bar{s}}^{\text{kum}}, F_{\bar{t}}^{\text{kum}}).$$

Lemma 3.18 sagt, dass die linke Menge nicht leer ist. Also ist die rechte Menge auch nicht leer, und wir haben einen Kummerweg $\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}$, der in \mathbb{D} verläuft. \square

Die Inklusion $\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{kum}} \subseteq \text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{alg}}$ (volle Unterkategorie) gibt einen topologischen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \vec{0}) \rightarrow \pi_1^{\text{kum}}(\mathbb{D}, \vec{0})$$

Wir behaupten nun:

Bemerkung 3.23. φ ist surjektiv.

Beweis. Sei \dot{D}_ε die punktierte Kreisscheibe vom Radius ε . Offenbar haben wir die Identifikation:

$$\pi_1^{\text{kum}}(\dot{D}, \vec{0}) \cong \varprojlim_{0 < \varepsilon \leq 1} \pi_1^{\text{kum}}(\dot{D}_\varepsilon, \vec{0}).$$

Letztere Gruppe kommt vom induktiven System der Kategorien $\text{Cov}_{\dot{D}_\varepsilon}^{\text{kum}}$ her.

Wir haben aber auch den Funktor

$$\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{alg}} \rightarrow \varinjlim_{0 < \varepsilon \leq 1} \text{Cov}_{\dot{D}_\varepsilon}^{\text{kum}}, f \mapsto [f_\varepsilon].$$

Dabei ist f_ε der Pullback von f :

$$\begin{array}{ccc} X_\varepsilon & \longrightarrow & X \\ f_\varepsilon \downarrow & & \downarrow f \\ \dot{D}_\varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{D} \end{array}$$

Für kleine ε ist nach Gabber-Lütkebohmert (Satz 3.22) $f_\varepsilon \in \text{Cov}_{\dot{D}_\varepsilon}^{\text{kum}}$, der Funktor also wohldefiniert. Mit der Identifikation von eben ergibt dies einen topologischen Gruppenhomomorphismus

$$\psi: \pi_1^{\text{kum}}(\dot{\mathbb{D}}, \vec{0}) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(\dot{\mathbb{D}}, \vec{0}).$$

Leicht einzusehen ist, dass $\varphi \circ \psi = \text{id}$ ist. Beachte dabei, dass der Morphismus φ den alg-Weg $\gamma = (\gamma_G)$ auf folgenden kum-Weg abbildet: zunächst ist jedes $\gamma_G \in \text{Aut } f^{-1}(\vec{0})$, wenn f die zugehörige Überlagerung ist. Für kleine ε nehmen wir dann das entsprechende $\gamma_G^\varepsilon \in \text{Aut } f_\varepsilon^{-1}(\vec{0})$. Setze f_ε fort zur kum-Überlagerung $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \dot{\mathbb{D}}$. Dies ergibt $\tilde{\gamma}_G \in \text{Aut } \tilde{f}^{-1}(\vec{0})$. Dann ist $\varphi(\gamma) = (\tilde{\gamma}_G)$. \square

Beispiel 15. Für die punktierte p -adische Einheitskreisscheibe $\dot{\mathbb{D}}$ gilt

$$\pi_1^{\text{temp}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) = \pi_1^{\text{alg}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) \cong \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}) \times \hat{\mathbb{Z}}.$$

Beweis. Die erste Gleichheit gilt, weil $\dot{\mathbb{D}}$ topologisch einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung 3.23 gibt uns eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}) \xrightarrow{\iota^*} \pi_1^{\text{alg}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) \xrightarrow{\kappa} \pi_1^{\text{kum}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) \rightarrow 1$$

In der Tat haben wir für die Inklusion $\iota: \dot{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{D}$ den natürlichen Funktor

$$\text{Cov}_{\mathbb{D}}^{\text{alg}} \rightarrow \text{Cov}_{\dot{\mathbb{D}}}^{\text{alg}}, X \mapsto X \times_{\mathbb{D}} \dot{\mathbb{D}},$$

der uns einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\iota^*: \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s})$ liefert. Da Wege aus $\iota^*(\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}))$ von Faserautomorphismen unverzweigter Überlagerungen von \mathbb{D} herkommen, ist offenbar $\iota^*(\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s})) \subseteq \ker(\kappa)$.

Umgekehrt ist ein Weg $\gamma = (\gamma_f)$ (f durchläuft alle algebraischen Galoisüberlagerungen $X \rightarrow \dot{\mathbb{D}}$) aus $\ker(\kappa)$ von der Gestalt, dass immer wenn f über eine Kummerüberlagerung faktorisiert, der zugehörige Faserautomorphismus trivial ist. Lassen wir alle derartigen Überlagerungen weg, verbleiben nur Überlagerungen, die sich zu algebraischen Überlagerungen der vollen Einheitskreisscheibe fortsetzen lassen. Also ist $\gamma \in \iota^*(\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}))$.

Es ist ι^* injektiv. Wir haben eben gesehen, dass ι^* das „Auffüllen mit Einsen“ ist: Für jede verzweigte endliche Galoisüberlagerung f von \mathbb{D} steht an der entsprechenden Stelle in $\iota^*(\gamma)$ eben $\gamma_f = 1$.

Schließlich operiert $\pi_1^{\text{kum}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s})$ trivial auf $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s})$:

Gehen wir zur Sequenz von Quotienten über:

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Z_n \rightarrow 1$$

so haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{/N} & \dot{\mathbb{D}} \\ & \searrow /G & \downarrow /Z_n \\ & & \dot{\mathbb{D}} \end{array}$$

wobei der waagrechte Pfeil von einer unverzweigten Überlagerung $f: \bar{X} \xrightarrow{/N} \mathbb{D}$ herrührt. Für kleine ε ziehen wir uns auf \dot{D}_ε zurück:

$$\begin{array}{ccc} X_\varepsilon & \xrightarrow{\text{triv}} & \dot{D}_\varepsilon \\ & \searrow /G & \downarrow /Z_n \\ & & \dot{D}_{\varepsilon^n} \end{array}$$

Es ist $f_\varepsilon: \bar{X}_\varepsilon \rightarrow D_\varepsilon$ eine triviale Überlagerung, und folglich operiert Z_n trivial auf $\text{Aut } f_\varepsilon^{-1}(\bar{s})$ (Wir haben ohne Einschränkung angenommen, dass \bar{s} hinreichend nahe am Nullpunkt liegt). \square

Anmerkung. *Y. André* [AndIII, 2.3.7] beweist die Exaktheit der dualen Sequenz

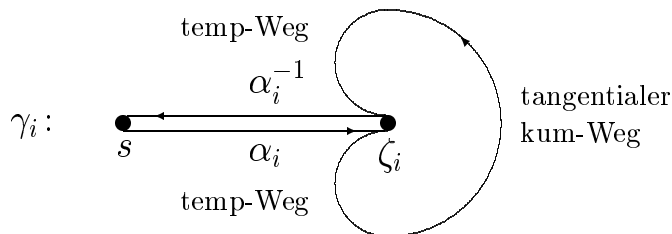
$$1 \leftarrow \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}, \bar{s}) \leftarrow \pi_1^{\text{alg}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) \leftarrow \pi_1^{\text{kum}}(\dot{\mathbb{D}}, \bar{s}) \leftarrow 1$$

um auf dasselbe Ergebnis zu kommen.

Beispiel 16. Sei $S := \mathbb{A}^1 \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ das Komplement von m Punkten im \mathbb{A}^1 . Ist \bar{s} ein geometrischer Punkt von S und sind \vec{t}_i tangentiale Basispunkte in ζ_i ($i = 1, \dots, m$), so sei $\alpha_i: \vec{t}_i \rightsquigarrow \bar{s}$ ein temp-Weg in S . Für kleine ε gibt es einen topologischen Monomorphismus (der von α_i abhängt)

$$\varphi_i: \hat{\mathbb{Z}} \cong \pi_1^{\text{kum}}(\dot{D}_\varepsilon(\zeta_i), \vec{t}_i) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(S, \vec{t}_i) \cong \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}).$$

Zeichnen wir links einen topologischen Erzeuger γ aus, so fassen wir $\gamma_i := \varphi_i(\gamma)$ als lokale Monodromie auf.



Es gilt (mit $\langle \cdot \rangle_N$ sei die normale Hülle gemeint)

Satz 3.24.

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{S}, \bar{s}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle_N^{\text{cl}}.$$

Eine natürliche Frage ist, ob wie im Komplexen die lokalen Monodromien so wählbar sind, dass

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{S}, \bar{s}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle^{\text{cl}}$$

oder mit zusätzlicher lokaler Monodromie γ_∞ in $\infty \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{A}^1$

$$\gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_\infty = 1$$

gilt. Diese Frage beantwortet Y. André negativ [AndIII, 6.4.6].

3.5 Orbifaltigkeiten

Sei K von Charakteristik Null.

Definition 3.25. Eine K -Orbifaltigkeit $\mathcal{S} = (\bar{S}, (Z_i, e_i))$ ist ein normaler K -analytischer Raum \bar{S} mit einer lokal endlichen Familie (Z_i) von irreduziblen Divisoren und natürlichen Zahlen $e_i > 0$.

Eine Orbikarte von \mathcal{S} ist ein analytischer Morphismus $\varphi: W \rightarrow V \subseteq \bar{S}$ mit

- W ist eine K -Mannigfaltigkeit.
- $\varphi \in \text{Cov}_V$.
- Außerhalb $Z := \bigcup_i Z_i \cup \bar{S}_{\text{sing}}$ ist φ eine temperierte Galoisüberlagerung, die über Z_i mit dem Index e_i verzweigt.

Wir setzen generell voraus, dass Orbifaltigkeiten durch Orbikarten überdeckbar sind. Sei weiter $S := \bar{S} \setminus Z$.

Definition 3.26. Ein Morphismus $f: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ von Orbifaltigkeiten ist ein Morphismus $\bar{S}' \rightarrow \bar{S}$, sodass \bar{S}' mit Orbikarten $\varphi': W' \rightarrow V'$ überdeckt ist und Orbikarten $\varphi: W \rightarrow V \subseteq \bar{S}$ existieren, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} W' & \xrightarrow{\varphi'} & V' & \longrightarrow & \bar{S}' \\ \downarrow & & & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{\varphi} & V & \longrightarrow & \bar{S} \end{array}$$

kommutiert.

Beispiel 17. Sei $\mathcal{S} = (\bar{S}, (Z_i, e_i)_{i \in I})$ und $J := \{i \in I \mid e_i > 1\}$. Dann ist $(\bar{S}, (Z_i, e_i)_{i \in J})$ als Orbifaltigkeit isomorph zu \mathcal{S} .

Bemerkung 3.27. *Es ist die Kategorie der K -Mannigfaltigkeiten in naheliegender Weise eine volle Unterkategorie der Kategorie der K -Orbifaltigkeiten.*

Definition 3.28. *Ein Morphismus $f: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ heißt eine Orbiüberlagerung, falls der zugrunde liegende Morphismus $f: \bar{\mathcal{S}}' \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ in $\text{Cov}_{\bar{\mathcal{S}}}$ liegt, und für jede Orbikarte $\varphi': W' \rightarrow V' \subseteq \bar{\mathcal{S}}'$ die Komposition $f \circ \varphi: W' \rightarrow f(V')$ eine Orbikarte von $\bar{\mathcal{S}}$ ist.*

Bemerkung 3.29. 1. *Wir bekommen so eine Kategorie $\text{Cov}_{\mathcal{S}}$.*

2. *Sind \mathcal{S}' und \mathcal{S} Mannigfaltigkeiten, so ist eine Orbiüberlagerung $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ nichts anderes als eine temperierte Überlagerung.*

Beispiel 18. *Genau dann ist $(\mathbb{A}^1, (0, e)) \rightarrow (\mathbb{A}^1, (0, e'))$, $z \mapsto z^n$, ein Morphismus, wenn $e' \mid ne$, und genau dann eine Orbiüberlagerung, wenn $e' = ne$ ist.*

Beweis. Es genügt die Betrachtung des Diagramms folgender Orbikarten:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{z^e} & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & & \downarrow z^n \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{z^{e'}} & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

Der linke senkrechte Pfeil muss dann die Abbildung $z \mapsto z^{\frac{en}{e'}}$ sein, woraus alles folgt. \square

Im Gegensatz zur komplexen Welt gibt es hier keine universellen temperierten Überlagerungen, deshalb:

Definition 3.30. *Eine Orbifaltigkeit heißt uniformisierbar, falls sie eine globale Orbikarte hat.*

Beispiel 19. *Wie im Komplexen gilt für K algebraisch abgeschlossen:*

Genau dann ist $(\mathbb{P}^1, (\zeta_i, e_i)_{i=0, \dots, n})$ uniformisierbar, wenn $n \geq 2$ oder wenn $n = 1$ und $e_0 = e_1$ ist [AndIII, 4.4.5].

Bemerkung 3.31. *Sei \mathcal{S} uniformisierbar und $(f: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}) \in \text{Cov}_{\mathcal{S}}$. Dann ist die Restriktion $f^{-1}(S) \rightarrow S$ eine temperierte Überlagerung.*

Beweis. [AndIII, 4.4.5] \square

Die ursprüngliche Idee für die Erfindung der Orbifaltigkeiten war es, Quotienten von Mannigfaltigkeiten zu studieren:

Definition 3.32. Sei $\mathcal{S} = (\bar{S}, (Z_i, e_i))$ eine zusammenhängende Orbifaltigkeit. Es operiere eine diskrete Gruppe G eigentlich diskontinuierlich als Gruppe von Automorphismen auf \mathcal{S} . Dann sei der Orbiquotient die Orbifaltigkeit

$$\mathcal{S}/G := (\bar{S}/G, (D \cdot G, e_D \cdot |G_D|)),$$

wobei D die Z_i und ein Vertretersystem der Primdivisoren von \bar{S} mit nicht trivialem Stabilisator G_D durchläuft. Dabei sei $e_D = 1$ für $D \notin \{Z_i\}$.

Bemerkung 3.33. Für Orbiquotienten mit virtuell torsionsfreiem G ist die kanonische Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ eine Orbiüberlagerung [AndIII, 2.1.9].

Das für uns wichtigste Tierchen im Zoo kann nun eingeführt werden. Sei dazu \mathcal{S} eine zusammenhängende uniformisierbare Orbifaltigkeit. Wegen der Uniformisierbarkeit haben wir einen Restriktionsfunktor

$$\text{Res}: \text{Cov}_{\mathcal{S}} \rightarrow \text{Cov}_{\mathcal{S}}^{\text{temp}}$$

Für ihn gilt [AndIII, 4.5.2]

Satz 3.34. Res ist voll treu. Das Bild sind die temperierten Überlagerungen $S' \rightarrow S$, die sich zu verzweigten Überlagerungen $\bar{S}' \rightarrow \bar{S}$ fortsetzen lassen mit normalem \bar{S}' und Verzweigungsindex $e(Z_{ij}) \mid e_i$ für jeden Primdivisor Z_{ij} über Z_i . Diese Kategorie ist stabil unter Zusammenhangskomponenten, Faserprodukten, Quotienten, disjunkten Vereinigungen und Galoisabschlüssen über S .

Skizze. Wie in Beispiel 18 gilt $e'_{ij} = \frac{e_i}{n_{ij}}$ für Z_{ij} über Z_i mit Verzweigungsindex $e(Z_{ij}) = n_{ij}$. Dazu wird Kiehls Satz über die Existenz tubularer Umgebungen gebraucht [Kie67]. Für die volle Treue benötigen wir die Fortsetzbarkeit temperierter Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten zu verzweigten Überlagerungen [AndIII, 2.1.11]. \square

Definition 3.35. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $S = \bar{S} \setminus Z$ (für die Orbifaltigkeit \mathcal{S}). Dann definieren wir

$$F_{\mathcal{S}, \bar{s}} := F_{S, \bar{s}}^{\text{temp}} \Big|_{\text{Cov}_{\mathcal{S}}}, \quad \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) := \text{Aut } F_{\mathcal{S}, \bar{s}}.$$

$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ heißt die Orbifundamentalgruppe von \mathcal{S} mit Basispunkt \bar{s} .

Bemerkung 3.36. 1. Nach Satz 3.34 kann $\text{Cov}_{\mathcal{S}}$ als volle Unterkategorie von $\text{Cov}_{\bar{S}}^{\text{temp}}$ aufgefasst werden. Dies gibt der Orbifundamentalgruppe $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ die Struktur einer topologischen Gruppe, und wegen der Galoisstabilität von $\text{Cov}_{\mathcal{S}}$ ist $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ prodiskret.

2. Folgendes Diagramm von Funktoren kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{disj. } \cup \text{ von orb-}\ddot{U}l \text{ von } \mathcal{S} \} & \xrightarrow{\text{Res}} & \{ \text{disj. } \cup \text{ von temp-}\ddot{U}l \text{ von } S \} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) - \underline{\text{Sets}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \pi_1^{\text{temp}}(S, \bar{s}) - \underline{\text{Sets}} \end{array}$$

Dabei entsprechen den offenen Normalteilern die Galoisüberlagerungen und umgekehrt.

Für Orbiquotienten nach endlichen Gruppen haben wir ebenfalls die exakte Sequenz von Fundamentalgruppen (vgl. Lemma 3.15)

Lemma 3.37. Sei $f: \mathcal{S}' \xrightarrow{/G} \mathcal{S}$ eine endliche Quotientenorbiüberlagerung. Dann ist für jedes \bar{s}' in der geometrischen Faser $f^{-1}(\bar{s})$ die Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}', \bar{s}') \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) \rightarrow G \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Die Funktorialität von π_1^{orb} liefert einen natürlichen Morphismus topologischer Gruppen

$$\alpha: \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}', \bar{s}') \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}).$$

α ist injektiv: Das System aller zusammenhängender galoisscher Orbiüberlagerungen, die über f faktorisieren, ist kofinal in $\text{Cov}_{\mathcal{S}}^{\text{orb}}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) &= \lim_{X \in \text{Cov}_{\mathcal{S}}^{\text{orb}}} \text{Aut}(X/\mathcal{S}) = \lim_{X' \in \text{Cov}_{\mathcal{S}'}^{\text{orb}}} \text{Aut}(X'/\mathcal{S}) \\ &\supseteq \lim_{X' \in \text{Cov}_{\mathcal{S}'}^{\text{orb}}} \text{Aut}(X'/\mathcal{S}') = \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}', \bar{s}'). \end{aligned}$$

Vgl. auch den Beweis von [AndIII,1.4.12(b)].

G ist als Automorphismengruppe einer Orbiüberlagerung von \mathcal{S} Quotient von $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$. Also gibt es eine Surjektion

$$\beta: \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) \rightarrow G.$$

Es ist dabei $\ker \beta$ die Menge aller $\gamma \in \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$, die $f^{-1}(\bar{s})$ punktweise fest lassen, also gleich im α (beachte dass jedes $\gamma \in \text{im } \alpha$ sich zu einem Faserautomorphismus über \bar{s}' liften lässt). \square

Beispiel 20. Die e -fach punktierte Kreisscheibe $\mathcal{S}_e := (\mathbb{D}, (0, e))$ ist eine uniformisierbare Orbifaltigkeit. Als globale Orbikarte dient

$$\mathcal{S}_0 = \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{S}_e, \quad z \mapsto z^e.$$

Die exakte Sequenz dazu lautet

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_e) \rightarrow Z_e \rightarrow 1$$

und wie in Beispiel 15 operiert die Galoisgruppe Z_e trivial auf $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D})$. Daher gilt

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_e) \cong \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}) \times \mathbb{Z}/e\mathbb{Z},$$

und wegen $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{D}) \cong \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{D}) \times \hat{\mathbb{Z}}$ (Beispiel 15) folgt

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathbb{D}) \cong \varprojlim_{e \in \mathbb{N}} \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_e).$$

Beispiel 21. Die Orbifaltigkeit $\mathcal{S} = \left(\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1, (0, 2), (1, 2), (\infty, 2), (\lambda, 2) \right)$ mit $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$ ist uniformisierbar durch eine elliptische Kurve $E \xrightarrow{/Z_2} \mathcal{S}$, die der Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ genügt (es sei $p \neq 2$). Die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(E, 1) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) \rightarrow Z_2 \rightarrow 1$$

sagt uns, dass im Fall $|\lambda||\lambda-1| = 1$ (gute Reduktion)

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^2 \rtimes Z_2$$

und im Fall $|\lambda||\lambda-1| \neq 1$ (Tatekurve)

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) \cong (\mathbb{Z} \times \hat{\mathbb{Z}}) \rtimes Z_2$$

ist. Die Operation von Z_2 auf der Fundamentalgruppe der elliptischen Kurve wird in 4.3.1 beschrieben werden.

Anmerkung. Im Gegensatz zur komplexen Orbifundamentalgruppe hängt die p -adische Orbifundamentalgruppe von der relativen Lage der Orbipunkte ζ_i zueinander ab.

4 Teichmüllerräume

4.1 Mumfordkurven vom Geschlecht $g \geq 2$

Sei C eine Mumfordkurve über \mathbb{C}_p von Geschlecht $g \geq 2$. Ihre stabile Reduktion ist eine Kurve über $\bar{\mathbb{F}}_p$, deren Schnittgraph das Geschlecht g hat. Wir haben bereits gesehen (Satz 3.12), dass

$$\Gamma := \pi_1^{\text{top}}(C, \bar{s}) \cong F_g,$$

die topologische Fundamentalgruppe von C , frei in g Erzeugern ist, da sie isomorph zur Fundamentalgruppe des Graphen ist (Satz 3.12). Wir haben die universelle topologische Überlagerung

$$\Omega \xrightarrow{/\Gamma} C$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^1$, und Γ operiert diskontinuierlich auf Ω . Dies liefert eine treue Darstellung $F_g \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ der freien Gruppe als Schottkygruppe [GvP80].

Die Menge \mathfrak{S}_g aller Darstellungen $F_g \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ ist eine affine \mathbb{C}_p -Varietät:

$$\mathfrak{S}_g \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)^g,$$

und die Menge \mathfrak{X}_g der treuen diskontinuierlichen Darstellungen von F_g ist ein offener analytischer Bereich von \mathfrak{S}_g :

$$\tau \in \mathfrak{X}_g \quad \Leftrightarrow \quad \forall \sigma \in F_g \setminus \{1\} : \left| \frac{\mathrm{Spur}^2}{\det} \left(\tau(\widetilde{\sigma}) \right) \right| > 1,$$

wobei $\tilde{\gamma} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p)$ ein Vertreter von $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ sei. Die Ungleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass eine p -adische Möbiustransformation hyperbolisch ist [GvP80, I.1.3].

Es operiert $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ auf \mathfrak{X}_g durch Konjugation, und

$$\bar{\mathfrak{X}}_g := \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p) \backslash \mathfrak{X}_g$$

ist der *Teichmüllerraum* zu F_g .

Die *Teichmüllermulgruppe* $\Gamma_g := \mathrm{Out} F_g$ operiert durch Vorschalten, und wir bekommen eine Uniformisierung des Modulraums \mathfrak{M}_g der Mumfordkurven von Geschlecht g :

$$\bar{\mathfrak{X}}_g / \Gamma_g \cong \mathfrak{M}_g,$$

der analytisch offen im Modulraum \mathcal{M}_g aller irreduziblen projektiven Kurven vom Geschlecht g liegt (nach [Lüt83] stimmt die analytische Unterraumstruktur mit der analytischen Quotientenraumstruktur auf \mathfrak{M}_g überein).

Den Beweis dieses Sachverhalts skizzieren wir kurz [Her84].

Zunächst ist

$$\bar{\mathfrak{X}}_g / \Gamma_g \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p) \backslash (\mathfrak{X}_g / \mathrm{Aut} F_g),$$

da innere Automorphismen von F_g trivial auf $\bar{\mathfrak{X}}_g$ operieren. Schließlich sind zwei Mumfordkurven C und C' genau dann isomorph, wenn ihre Fundamentalgruppen $\pi_1^{\mathrm{top}}(C, \bar{s})$ und $\pi_1^{\mathrm{top}}(C', \bar{s}')$ in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ konjugiert sind [Mum72].

Dass $\bar{\mathfrak{T}}_g$ einfach zusammenhängend ist, zeigt [Ger81] folgendermaßen: Für einen fest gewählten stabilen endlichen Graph Γ sei $\mathfrak{M}_g(\Gamma) := \{C \in \mathfrak{M}_g \mid \bar{C} = \Gamma\}$, wobei \bar{C} der duale Graph zum Schnittgraph der zu C gehörigen reduzierten stabilen Kurve sei. Es kann nun gezeigt werden, dass

$$\mathfrak{M}_g(\Gamma) \cong \mathfrak{B}_g(\Gamma) / \text{Aut } \Gamma$$

mit $\mathfrak{B}_g(\Gamma)$ analytisch offen in \mathbb{C}_p^{3g-3} und $\text{Stab}_{\Gamma_g}(\mathfrak{B}_g(\Gamma)) = \text{Aut } \Gamma$.

Zur Dimension von \mathfrak{M}_g . Sei T ein maximaler Teilbaum des Graphen Γ . Die g Kanten von $\Gamma \setminus T$ erzeugen die Bass-Serre-Fundamentalgruppe von Γ :

$$\pi_1^{\text{BS}}(\Gamma) \cong F_g.$$

Via $\tau \in \bar{\mathfrak{T}}_g$ definiert jede Kante von $\Gamma \setminus T$ eine hyperbolische Möbiustransformation γ . Diese hat zwei verschiedene Fixpunkte $x, y \in \mathbb{P}^1$ und einen Multiplikator $t \in \mathbb{C}_p^\times$. Festlegung der Fixpunkte $0, 1, \infty$ lässt uns $3g - 3$ Koordinaten für den Modulraum.

In der Tat ist der Teichmüllerraum auch zusammenhängend: dazu lassen wir Doppelverhältnisse von Fixpunkten hyperbolischer Transformationen von eben gegen die Werte $0, 1$ oder ∞ gehen und kommen so von einem $\mathfrak{B}_g(\Gamma)$ zu einem $\mathfrak{B}_g(\Gamma')$, wo der Graph Γ' aus Γ durch Kontraktion einer Kante hervorgeht. Dies zeigt, dass $\bar{\mathfrak{T}}_g$ rigid analytisch zusammenhängend ist. Somit ist der Teichmüllerraum auch für die Berkovichtopologie zusammenhängend.

Wir haben den analytischen Raum $\bar{\mathfrak{T}}_g$ mithilfe seiner klassischen Punkte definiert. Gerritzen zerschneidet ihn scheinbar in „offene“ Teile $\mathfrak{B}_g(\Gamma)$. Diese sind aber nicht zulässig offen — besser gesagt: die scheinbar disjunkten $\mathfrak{B}_g(\Gamma)$ überlappen sich eben doch, und zwar auf generischen Punkten (von Kreisscheiben)! Solch nicht klassische Punkte sind einfach Familien von Darstellungen der Fundamentalgruppe, die zu Familien von Mumfordkurven über einer Kreisscheibe gehören. Ein direkter Berkovichweg von $\mathfrak{M}_g(\Gamma)$ nach $\mathfrak{M}_g(\Gamma')$ etwa ist eine analytische Familie von Mumfordkurven, bei denen faserweise als Reduktionsgraph stets Γ oder Γ' auftritt.

4.2 Diskontinuierlich uniformisierbare Mumfordkurven

[Her85] kann allgemeinere Modulräume von Mumfordkurven uniformisieren. Sei hierzu N eine endlich erzeugte Gruppe. Die Menge $\mathfrak{S}(N)$ aller Darstellungen $N \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ ist wieder eine algebraische Varietät und die Menge $\mathfrak{T}(N)$ der treuen diskontinuierlichen Darstellungen ein offener analytischer Unterraum.

Im Fall, dass $\mathfrak{Z}(N)$ nicht leer ist, bekommen wir in ähnlicher Weise wie vorhin einen groben Modulraum $\mathfrak{M}(N)$ für Überlagerungen

$$\Omega' \xrightarrow{/N} C$$

von Mumfordkurven C von Geschlecht $g(C) = \text{rg } N^{\text{ab}}$, die außerhalb des Verzweigungsortes temperiert sind. Es enthält nämlich N einen freien Normalteiler F von endlichem Index, der ein kommutatives Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Omega' & \xrightarrow{/\tau(F)} & C' \\ & \searrow / \tau(N) & \downarrow \text{endlich} \\ & & C \end{array}$$

induziert. Es kann nun bewiesen werden, dass

$$\mathfrak{M}(N) \cong \overline{\mathfrak{Z}(N)} / \text{Out } N$$

gilt.

Sind ζ_i die kritischen Werte von $\Omega' \xrightarrow{/N} C$ und e_i die zugehörigen Verzweigungsindizes, so bekommen wir eine Orbifaltigkeit $\mathcal{C} = (C, (\zeta_i, e_i))$ zusammen mit einer globalen Orbikarte

$$\Omega' \xrightarrow{/N} \mathcal{C}.$$

Der Modulraum $\mathfrak{M}(N)$ parametrisiert somit alle Mumfordkurven, die als Orbifaltigkeit N -uniformisierbar sind.

Bruchstücke von Hurwitzräumen bekommen wir auf folgende Weise. Fixiere $F = F_g$ in N und setze

$$\text{Aut}_F(N) := \{\alpha \in \text{Aut } N \mid \alpha(F) = F\}, \quad \text{Out}_F(N) := \text{Aut}_F(N) / \text{Inn}(N).$$

Der durch

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{Z}(N)} & \xrightarrow{/ \text{Out}_F(N)} & \mathfrak{M}(N, F) \\ & \searrow / \text{Out } N & \downarrow \text{cov} \\ & & \mathfrak{M}(N) \end{array}$$

definierte Modulraum $\mathfrak{M}(N, F)$ über $\mathfrak{M}(N)$ parametrisiert endliche verzweigte Überlagerungen von Mumfordkurven, die in das erste kommutative Dreieck passen.

4.3 Mumfordorbifaltigkeiten

Definition 4.1. Eine Orbifaltigkeit $\mathcal{S} = (\bar{S}, (\zeta_i, e_i)_{i=0}^n)$ heißt eine Mumford-orbifaltigkeit, falls eine globale Galoisorbikarte

$$\varphi: \bar{S}' \xrightarrow{/G} \bar{S}$$

mit einer Mumfordkurve \bar{S}' existiert. Ist $\bar{S} = \mathbb{P}^1$, so sprechen wir von einer rationalen Mumfordorbifaltigkeit, und falls zudem noch $n = 2$ ist, von einer Mumford-Schwarz-Orbifaltigkeit. In diesem Fall ist die Indexmenge meist $\{0, 1, \infty\}$.

Sei $\Omega' \xrightarrow{\text{top}} \bar{S}'$ die universelle topologische Überlagerung von \bar{S}' , und sei $N_\varphi := \text{Aut}(\Omega', \mathcal{S})$. Dann ist

$$\Omega' \xrightarrow{/N_\varphi} \mathcal{S}$$

eine Galoisorbiüberlagerung, das folgende Diagramm kommutiert und hat exakte Zeilen [AndIII, 4.5.8]:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}}(\bar{S}', \bar{s}') & \longrightarrow & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(\bar{S}', \bar{s}') & \longrightarrow & N_\varphi & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

und die senkrechten Abbildungen links (dichtes Bild, Zielgruppe diskret) und in der Mitte sind surjektiv (trivial), während rechts die Identität steht.

Lemma 4.2. Es ist N_φ isomorph zu einer Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen.

Beweis. Sei \mathfrak{U} eine reine Überdeckung von \bar{S} , die die ζ_i trennt (d.h. $\#\{\pi_{\mathfrak{U}}(\zeta_i) \mid i = 0, \dots, n\} = n + 1$) und eine semistabile Reduktion von \bar{S} liefert. Wir betrachten $\overline{\bar{S}}_{\mathfrak{U}}$ als Graph und bekommen einen Graph von Gruppen $(\overline{\bar{S}}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi \bullet})$ aus folgendem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega' & \longrightarrow & \bar{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \xrightarrow{\text{univ}} & \overline{\bar{S}'_{\varphi^{-1}(\mathfrak{U})}} \\ & \searrow & \downarrow \pi_{\mathfrak{U}} \\ & & \mathcal{S} \\ & \searrow & \downarrow \pi_{\mathfrak{U}} \\ & & (\overline{\bar{S}}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi \bullet}) \end{array}$$

(unten stehen Graphen) mit Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{BS}}(\overline{\bar{S}}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi \bullet}) \cong N_\varphi$. □

Wir sehen sogar: jede Ecke des Graphen $\overline{S'_{\varphi^{-1}(\mathfrak{U})}}$ ist eine rationale Kurve über dem Restklassenkörper, also ist \bar{S} total degeneriert, d.h. eine Mumfordkurve.

Auf „galoissch“ kann verzichtet werden:

Bemerkung 4.3. *Das endliche Bild einer Mumfordkurve ist eine Mumfordkurve. Insbesondere ist für jede Mumfordorbifaltigkeit $\mathfrak{S} = (\bar{S}, (\zeta_i, e_i))$ die Kurve \bar{S} eine Mumfordkurve.*

Beweis. [Brad98, Satz 5.24] □

Bemerkung 4.4. *Einer Überlagerung von Graphen von Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{/N} & (\Gamma, N_{\bullet}) \\ & \searrow & \downarrow \text{cov} \\ & & (\bar{S}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi\bullet}) \\ & \swarrow & \\ & & \end{array}$$

entspricht eineindeutig eine Untergruppe N von N_{φ} , der wiederum eineindeutig eine Orbiüberlagerung

$$\begin{array}{ccc} \Omega' & \xrightarrow{/N} & \mathfrak{S}' \\ & \searrow & \downarrow \text{orb} \\ & & \mathfrak{S} \\ & \swarrow & \\ & & \end{array}$$

entspricht, wenn $\mathfrak{S}' = (\Omega'/N, (\zeta_{ij}, e_{ij}))$ mit ζ_{ij} über ζ_i und e_{ij} der Verzweigungsindex von ζ_{ij} über ζ_i ($i = 0, \dots, n$). Also ist $\text{Cov}_{(\bar{S}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi\bullet})} \rightarrow \text{Cov}_{\mathfrak{S}}$ eine volle Unterkategorie, und wir bekommen einen Morphismus der Fundamentalgruppen

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathfrak{S}) \rightarrow \pi_1^{\text{BS}}(\bar{S}_{\mathfrak{U}}, N_{\varphi\bullet})$$

mit dichtem Bild, also eine Surjektion.

Sei für unsere Karte φ

$$\mathfrak{I}(\varphi) := \left\{ \begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{orb}}(\mathfrak{S}, \bar{s}) & \longrightarrow & \text{PGL}_2(\mathbb{C}_p) \\ \downarrow & \nearrow & \\ N_{\varphi} & & \end{array} \right\}$$

treu
diskont.

die Menge aller Darstellungen von $\pi_1^{\text{orb}}(\mathfrak{S}, \bar{s})$, die über treue diskontinuierliche Darstellungen von N_{φ} faktorisieren. Nach dem Homomorphiesatz ist die induzierte Abbildung

$$\mathfrak{I}(\varphi) \rightarrow \mathfrak{I}(N_{\varphi})$$

bijektiv, wir bekommen also auf $\mathfrak{T}(\varphi)$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit transportiert.

Wir halten nun die Galoisgruppe G fest. Sei $\mathfrak{K}(\mathcal{S})$ die Menge aller Isomorphieklassen von Mumfordgaloisorbikarten $\varphi: \bar{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ mit $\text{Aut}(\bar{S}', \mathcal{S}) \cong G$. Nach Riemann-Hurwitz ist das Kartengeschlecht $g(\varphi) = g(\bar{S}') = g'$ konstant, und wir können definieren (das Geschlecht von \bar{S} sei g):

$$\mathfrak{H}_G(\mathcal{S}) := \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{K}(\mathcal{S})} \mathfrak{M}(N_\varphi, F_{g'}) .$$

Den Hurwitzraum für Überlagerungen über Mumfordkurven vom Geschlecht g bekommen wir nun folgendermaßen: Sei

$$\text{MOrb}_g(\underline{e})$$

die Unterkategorie der Kategorie der Orbifaltigkeiten, die aus den eindimensionalen Mumfordorbifaltigkeiten von Geschlecht g mit Verzweigungsindexfolge \underline{e} gebildet wird.

Definition 4.5. *Der Modulraum*

$$\mathfrak{H}_g(G, \underline{e}) := \bigcup_{\mathcal{S} \in \text{MOrb}_g(\underline{e})} \mathfrak{H}_G(\mathcal{S})$$

heißt der Mumford-Hurwitzraum für G -Überlagerungen mit Signatur \underline{e} von Mumfordkurven vom Geschlecht g .

In Abschnitt 6 sehen wir, dass $\mathfrak{H}_g(G, \underline{e})$ nur endlich viele Komponenten hat.

4.3.1 Beispiel: Tateorbifaltigkeiten

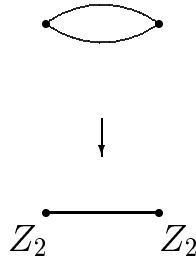
Wir untersuchen Galoisüberlagerungen mit $G = Z_2$. Die einfachste nicht zu triviale Orbifaltigkeit ist $\mathcal{S}_\lambda := (\mathbb{P}^1, (0, 2), (1, 2), (\infty, 2), (\lambda, 2))$. Genau dann ist im Fall $p \neq 2$ \mathcal{S}_λ eine rationale Mumfordorbifaltigkeit (genauer sollte hier gesagt werden: Tateorbifaltigkeit), wenn $|\lambda||\lambda - 1| \neq 1$ ist. Die Gleichung $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ gibt uns eine Orbikarte $\varphi: T \rightarrow \mathcal{S}_\lambda$ mit einer Tatekurve T und Galoisgruppe Z_2 . Es ist

$$\mathfrak{H}_0(Z_2, 2, 2, 2, 2) = \{\lambda' \in \mathbb{C}_p \mid |\lambda'| |\lambda' - 1| \neq 1\} = \mathfrak{M}(Z_2 * Z_2, \mathbb{Z}) .$$

Der rechte Modulraum ist durch die Orbikarte mit der universellen Überlagerung der Tatekurve gegeben:

$$\mathbb{C}_p^\times \xrightarrow{/Z_2 * Z_2} \mathcal{S}_\lambda$$

mit Galoisgruppe $\pi_1^{\text{BS}}(\Gamma) \cong Z_2 * Z_2$, wobei Γ der Graph von Gruppen in einer Reduktion von φ ist:



Wir würden gern die zugehörige Surjektion $\pi: \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_\lambda, \bar{s}) \rightarrow \pi_1^{\text{BS}}(\Gamma)$ verstehen. Dabei ist $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_\lambda, \bar{s}) \cong (\mathbb{Z} \times \hat{\mathbb{Z}}) \rtimes Z_2 \cong \hat{\mathbb{Z}} \rtimes (Z_2 * Z_2)$.

Die letzte Isomorphie holen wir aus folgendem

Lemma 4.6. *Sei \mathcal{S} eine Mumfordorbifaltigkeit mit einer endlichen globalen Galoisorbikarte $\varphi: \bar{S}' \xrightarrow{/G} \mathcal{S}$ mit einer Mumfordkurve \bar{S}' und der universellen topologischen Überlagerung $\psi: \Omega \rightarrow \bar{S}'$. Dann kommutiert folgendes Diagramm und hat exakte Zeilen und Spalten:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}}(\Omega, \bar{\omega}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}}(\Omega, \bar{\omega}) & \longrightarrow & 1 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}}(\bar{S}', \bar{s}') & \longrightarrow & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s}) & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}}(\bar{S}', \bar{s}') & \longrightarrow & \pi_1^{\text{BS}}(\bar{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}, N_\bullet) & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Dabei ist \mathcal{U} eine die Verzweigungspunkte von φ trennende reine Überdeckung von \bar{S} und N die Deckgruppe von $\varphi \circ \psi: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$.

Beweis. Die unteren zwei Zeilen sind das Diagramm eingangs Abschnitt 4.3, die linke Spalte ist nach Lemma 3.15 und die mittlere Spalte nach Lemma 3.37 exakt. Die Kommutativität der oberen beiden Kästchen ist klar, da der linke der beiden oberen betreffenden Pfeile die Identität ist. \square

In unserem Fall sieht das exakte Gitter so aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 1 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_\lambda, \bar{s}) & \longrightarrow & Z_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & Z_2 * Z_2 & \longrightarrow & Z_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Uns interessiert die Aktion von $Z_2 * Z_2$ auf $\hat{\mathbb{Z}}$.

Behauptung. *Die beiden Erzeuger von $Z_2 * Z_2$ invertieren den topologischen Erzeuger von $\hat{\mathbb{Z}}$.*

Beweis. Im Komplexen spaltet die analoge mittlere Zeile derart, dass Z_2 die beiden Erzeuger der topologischen Fundamentalgruppe des Torus jeweils invertiert (in der Mitte steht dann die topologische Orbifundamentalgruppe der entsprechenden Orbifaltigkeit). Für die Operation von Z_2 auf der algebraischen Fundamentalgruppe des Torus sollte das Entsprechende passieren. Dann ist die p -adische Behauptung jedenfalls für elliptische Orbikarten mit guter Reduktion gezeigt. Für Tatekurven als Orbikarten dürfte da nichts anderes passieren, oder?

Nun kommt der richtige Beweis für die Operation von Z_2 in der mittleren Zeile, der für beliebige elliptische Kurven T funktioniert. Sei $\varphi_n: \Omega_n \rightarrow T$ eine temperierte Überlagerung. Diese ist ein Gruppenhomomorphismus. Im Fall, dass T gute Reduktion hat, ist φ_n eine Isogenie. Im anderen Fall können wir ruhig annehmen, dass φ_n die universelle Überlagerung einer Isogenie ist (dies ist nicht unbedingt nötig). Sei σ_n die Involution auf Ω_n über derjenigen von T . Liften wir die Involution $t \mapsto t^{-1}$ von T auf Ω_n , so bekommen wir eine Abbildung

$$\sigma_n \cdot \varepsilon_n: \Omega_n \rightarrow \Omega_n, \quad \omega \mapsto \omega^{-1} \cdot \varepsilon_n(\omega),$$

mit $\varepsilon_n(\omega) \in \ker \varphi_n$. Es ist ε_n stetig und $\ker \varphi_n$ diskret, also

$$\varepsilon_n = \text{const} = \sigma_n(1).$$

Es ist $\sigma := (\sigma_n) \in \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_\lambda, \bar{s}) \setminus \pi_1^{\text{temp}}(T, \bar{t})$ und $\varepsilon := (\varepsilon_n) \in \pi_1^{\text{temp}}(T, \bar{t})$, und die Involution operiert durch Konjugation auf der abelschen Fundamentalgruppe

$$\pi_1^{\text{temp}}(T, \bar{t}) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(T, \bar{t}), \gamma \mapsto (\sigma\varepsilon) \cdot \gamma \cdot (\sigma\varepsilon)^{-1} = \sigma\gamma\sigma^{-1} \stackrel{!}{=} \gamma^{-1}.$$

Die letzte Gleichheit rechnen wir für jedes φ_n nach. Hier ist die Faser der Eins (die wir als Basispunkt wählen dürfen) gleich der Deckgruppe G_n . Dann ist $\gamma_n \in G_n$ (sei $\gamma = (\gamma_n)$) die Translation $x \mapsto x \cdot \gamma_n$, und es gilt für alle $x \in \varphi_n^{-1}(1)$

$$\gamma_n^{\sigma_n}(x) = \sigma_n \gamma_n \sigma_n(x) = \sigma_n \gamma_n(x^{-1}) = \sigma_n(x^{-1} \cdot \gamma_n) = \gamma_n^{-1} \cdot x = \gamma_n^{-1}(x),$$

also $\gamma_n^{\sigma_n} = \gamma_n^{-1}$.

Zur mittleren Spalte: $Z_2 * Z_2$ ist einfach das freie Produkt zweier Kopien von $\langle \sigma \rangle$. \square

Bemerkung 4.7. *Übrigens kann auch elementar gezeigt werden, dass genau dann eine gegebene Einbettung $Z_2 * Z_2 \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ diskret ist, wenn in $Z_2 * Z_2 = \langle s \rangle * \langle t \rangle$ die Erzeuger s und t bis auf PGL_2 -Konjugation die Fixpunktmenge $\{0, 1, \lambda, \infty\}$ mit $|\lambda| |\lambda - 1| \neq 1$ besitzen. [GvP80, IX. §2]*

5 Bestimmung aller Mumfordorbifaltigkeiten

5.1 Bestimmung

Hier behandeln wir die Frage, wann eine gegebene Orbifaltigkeit eine Mumfordorbifaltigkeit ist, d.h. eine globale Galoisorbikarte besitzt, die eine Mumfordkurve ist.

In Bemerkung 4.3 sahen wir, dass die Orbifaltigkeit selbst notwendigerweise eine Mumfordkurve sein muss. Als nächstes wollen wir die Reduktionsgraphen von Mumfordorbifaltigkeiten genauer untersuchen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{P}^1$ ein spezielles Quasipolyeder. Operiert eine diskrete Gruppe G diskontinuierlich auf Ω , so wird eine Operation auf dem Skelett $\Delta(\Omega)$, einem Baum, induziert [Ber90, 4.1.7]. Ist $X = \Omega/G$ eine nicht singuläre irreduzible projektive Kurve, so gibt es eine reine affinoide Überdeckung \mathcal{U} von X , sodass

$$\Delta(\Omega)/G \cong \Delta_{\mathcal{U}}(X)$$

ist. Wir definieren als *Quotientenskelett* den topologischen Graph von Gruppen

$$(\Delta_{\mathcal{U}}(X), G_{\bullet}).$$

Gegeben sei nun eine endlich erzeugte diskrete Gruppe $N \subseteq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$. Es gibt ein spezielles Quasipolyeder $\Omega^*(N) \subseteq \mathbb{P}^1$, dessen Skelett $\Delta^*(N)$ als Spitzen die Limespunkte von N und die Fixpunkte der Elemente von N endlicher Ordnung besitzt.

Definition 5.1. *Das Quotientenskelett $\Gamma^*(N) := (\Delta^*(N)/N, N_\bullet)$ heißt der Katograph zu N .*

Anmerkung. *In [Kat00] werden Quotientenskelette für p -adische Dreiecksgruppen untersucht.*

Natürlich gibt es auch das spezielle Quasipolyeder $\Omega(N) = \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{L}(N)$, das Komplement der Limespunkte $\mathcal{L}(N)$ von N in \mathbb{P}^1 . Dazu gehört ein Quotientenskelett $\Gamma(N) = (\Delta(N)/N, N_\bullet)$ mit $\Delta(N) = \Delta(\Omega(N))$. $\Gamma(N)$ ist ein endlicher Graph von Gruppen. Die Abbildung $\Omega(N) \rightarrow \Omega(N)/N$ ist eine Orbiüberlagerung, und der Quotient ist eine Mumfordkurve.

Ein Katograph hat endlich viele *Spitzen*, d.h. Kanten, die homöomorph zu $[0, 1)$ sind. Diese entsprechen eineindeutig den kritischen Werten der Überlagerung

$$\Omega(N) \rightarrow \Omega(N)/N.$$

Ihre Anzahl errechnet sich wie folgt:

Satz 5.2. *Sei C die Anzahl der zyklischen Eckengruppen, c die Anzahl der zyklischen Kantengruppen von $\Gamma(N)$. Ebenso seien D bzw. d die Anzahl der nicht zyklischen Ecken- bzw. Kantengruppen von $\Gamma(N)$. Dann gilt*

$$\#\partial\Gamma^*(N) = 3(D - d) + 2(C - c).$$

Beweis. Sei zunächst $\Gamma^*(N)$ ein Baum. [Kat00] folgend, zerlegen wir den Baum in seine *irreduziblen Komponenten*, diese sind maximale Teilbäume T_i mit nicht trivialen Kantengruppen und zugleich Katobäume für ihre Fundamentalgruppen $N_i \subseteq N$. Dabei ist N freies Baumprodukt der N_i und

$$\#\partial\Gamma^*(N) = \sum_i \#\partial T_i.$$

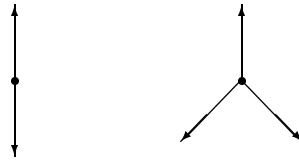
Sei daher $T := \Gamma^*(N)$ ein irreduzibler Katobaum. Nach [Kat00] lässt sich T auf folgende Weise aus den Katobäumen der Ecken- und Kantenstabilisatoren (diese sind endlich!) zusammen kleben: Sei dazu $N = G_1 *_H G_2$ ein amalgamiertes Produkt von Gruppen. Dann ist $T = \Gamma^*(G_1) \#_{\Gamma^*(H)} \Gamma^*(G_2)$, ein Graph von Gruppen, der durch Verkleben der Katographen $\Gamma^*(G_1)$ und $\Gamma^*(G_2)$ längs

Graphen-von-Gruppen-Morphismen $\Gamma^*(H) \rightarrow \Gamma^*(G_1)$ und $\Gamma^*(H) \rightarrow \Gamma^*(G_2)$ entsteht. Er macht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^*(H) & \longrightarrow & \Gamma^*(G_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^*(G_2) & \longrightarrow & \Gamma^*(G_1) \#_{\Gamma^*(H)} \Gamma^*(G_2) \end{array}$$

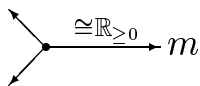
kartesisch und erfüllt eine entsprechende UAE. Nach [Kat00, Proposition 3.9] ist jeder irreduzible Katobaum lokal von dieser Gestalt.

Katographen endlicher Gruppen sehen so aus (wir wollen sie *elementare Katobäume* nennen): Im Fall $p > 5$ haben sie nur eine Ecke:

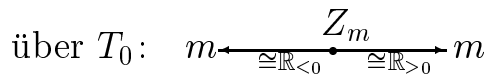
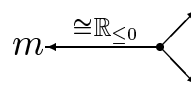


je nachdem, ob der Stabilisator zyklisch ist oder nicht. Ist $p \leq 5$, so gibt es auch elementare Katobäume, die auch Kanten (homöomorph zu $[0, 1]$) besitzen. Deren Fundamentalgruppen sind nicht zyklisch. Zu Segmenten mit Enden lassen sie sich im Fall zyklischer Kantengruppen folgendermaßen verkleben (wir tun dies exemplarisch für zwei nicht zyklische Gruppen amalgamiert über einer zyklischen Gruppe): zunächst sitzt an jedem Ende als Stabilisator die Zerlegungsgruppe (zyklisch) des Verzweigungspunktes. Die zu verklebenden Enden verwandeln wir mittels Homöomorphismen in unendlich lange Geodätische. Nun verkleben wir gemäß [Kat00]:

T_1 :



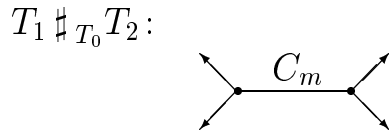
T_2 :



mit Klebemorphismen

$$\varphi_1: T_0 \rightarrow T_1, t \mapsto |t|, \quad \varphi_2: T_0 \rightarrow T_2, t \mapsto -|1 - t|$$

gibt das Segment $\cong [0, 1]$ mit Spitzen



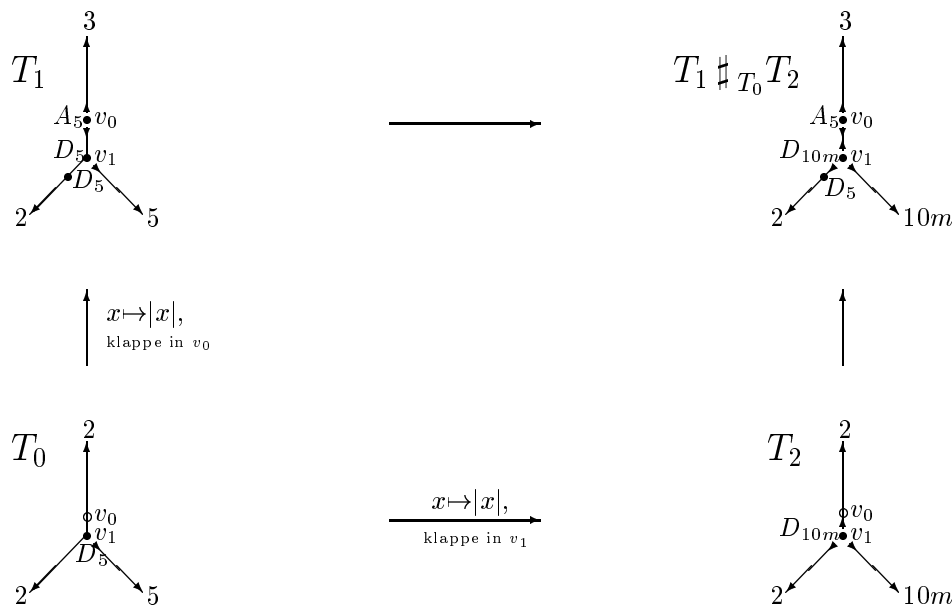
Wir verifizieren nun am Ergebnis die Formel. Da es für $p > 5$ keine diskontinuierlich einbettbaren Segmente mit nicht zyklischer Kantengruppe gibt [Her82], haben wir in diesem Fall die Formel für Katobäume bewiesen.

Für $p \leq 5$ verklebt Kato, um Dreiecksgruppen zu erhalten, elementare Katobäume längs Katobäumen nicht zyklischer Kantengruppen. Es treten dabei folgende Fälle auf, die auch bei mehr als drei Spitzen die einzigen sind:

- Beide Klebemorphismen sind injektiv.
- Eine Achse von T_0 wird in einem der Klebemorphismen geklappt.
- Eine Achse von T_0 wird in beiden Klebemorphismen geklappt.

Die Formel wird auch hier in jedem Falle verifiziert.

Zur Illustration seien $p = 5$ und $T_0 = \Gamma^*(D_5)$, $T_1 = \Gamma^*(A_5)$, $T_2 = \Gamma^*(D_{10m})$.



Beachte, dass der Punkt v_0 in T_1 eine Ecke ist, aber nicht in T_0 oder T_2 : dort ist er ein markierter Punkt \circ auf der Spitze, die als Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0}$ angesehen wird.

Sei nun $\Gamma = \Gamma^*(N)$ ein Katograph von positivem Geschlecht g . Da der Klebevorgang lokal ist, verifizieren wir die Formel an einem maximalen Teilbaum T von Γ . Er hat mindestens soviele Spitzen wie Γ , die überschüssigen verkleben

sich wie oben zu Kanten von $\Gamma \setminus T$ mit nicht trivialem Stabilisator. Eventuelle weitere Kanten von $\Gamma \setminus T$ (mit Stabilisator 1) liefern keinen Beitrag. \square

Anmerkung. Diese Formel gibt es schon versteckt in [Her85] in der Dimensionsformel für Teichmüllerräume $\overline{\mathfrak{X}(\Gamma)}$ für Mumfordkurven in einem $\mathfrak{M}(N)$ mit festem Reduktionsgraph von Gruppen Γ . Man muss sich nur noch daran erinnern, dass in

$$\dim \overline{\mathfrak{X}(\Gamma)} = 3g - 3 + \underbrace{3(D - d) + 2(C - c)}_{=:n}$$

die Zahl n die Anzahl der markierten Punkte ist.

Es gilt

Satz 5.3. Genau dann ist eine eindimensionale Orbifaltigkeit eine Mumford-orbifaltigkeit, wenn sie eine globale galoissche Orbikarte besitzt, für die das zugehörige Quotientenskelett ein Katograph ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{S} = (\bar{S}, (\zeta_i, e_i))$ die Orbifaltigkeit.

\Rightarrow ist ziemlich klar: Für eine Orbikarte $\varphi: C \xrightarrow{/G} \mathfrak{S}$ sei $\omega: \Omega \rightarrow C$ die universelle topologische Überlagerung der Mumfordkurve C . Dann ist $\omega \circ \varphi$ die Quotientenabbildung nach einer diskreten Gruppe $N \subseteq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$, und der Quotientengraph $(\Delta^*(N)/N, N_\bullet)$ ist ein Katograph.

\Leftarrow : Sei $C \rightarrow \mathfrak{S}$ eine Karte, dessen zugehöriges Quotientenskelett ein Katograph zu N sei. Als Fundamentalgruppe eines Graphs von Gruppen mit endlichen Untergruppen von $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ als Eckengruppen enthält N einen freien Normalteiler H von endlichem Index [GvP80, I.§3]. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{P}^1$ deren Regularitätsbereich. Dann gibt es ein kommutatives Dreieck

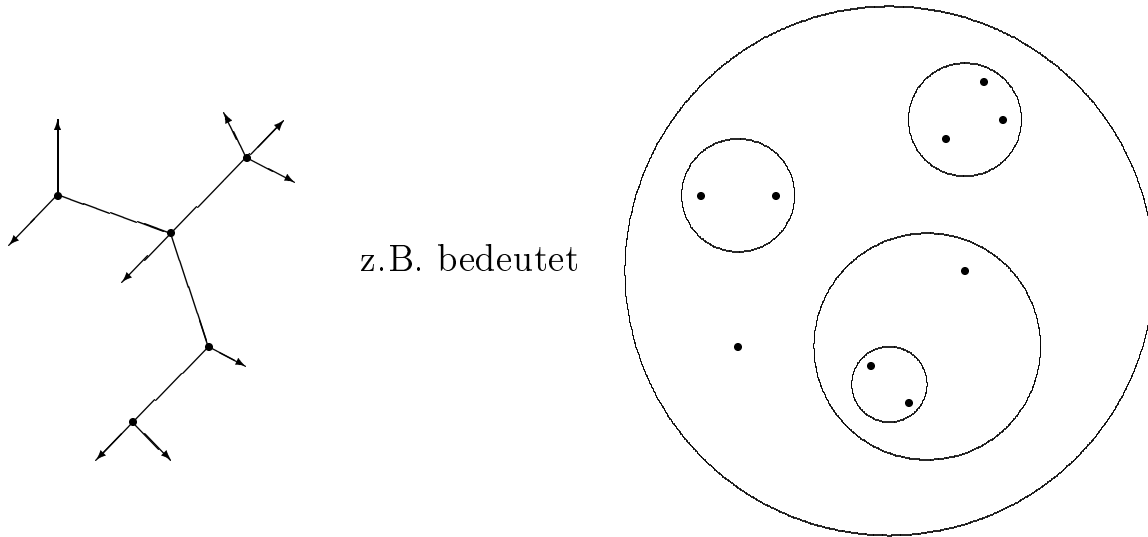
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow[\text{top}]{/H} & X \\ & \searrow /N & \downarrow \\ & & \mathfrak{S} \end{array}$$

mit einer Mumfordkurve X . Der senkrechte Pfeil ist eine globale Orbikarte. \square

5.2 Orbipunkte

Um anhand der Verzweigungspunkte Aussagen darüber machen zu können, ob eine globale Mumforduniformisierung möglich ist oder nicht, beobachten wir, dass diejenigen Ecken von $\Gamma^*(N)$, von denen 2 oder 3 Spitzen ausgehen, generische Punkte minimaler Kreisscheiben sind, welche die 2 oder 3 zugehörigen

kritischen Werte enthalten. Im Fall von 3 Spitzen an einer Ecke bilden die 3 zugehörigen markierten Punkte ein gleichseitiges Dreieck. Ecken mit genau einer Spitze geben Punkte, die von allen anderen Paaren oder Tripeln weiter weg sind als jene im Paar oder Tripel untereinander. Teilbäume im Katograph, bei denen an jeder Ecke genau eine Spitze sitzt, geben Familien von Kreisringen, in deren Randkomponenten jeweils genau ein Punkt (des Teilbaums) liegt.



Denken wir daran, dass in Ränder offene Kreisscheiben hineinpassen, und dass dies schwierig zu zeichnen ist.

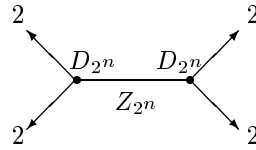
Als notwendige Bedingung haben wir deshalb eine Trennbarkeit der Orbipunkte auf eben genannte Weise. Dies ist sozusagen die korrekte Verallgemeinerung der „geometrischen Bedingung“ aus der Diplomarbeit [Brad98]. In Abschnitt 6.2 erarbeiten wir eine „kombinatorische Bedingung“ für das Vorliegen einer Mumfordorbifaltigkeit.

Beispiel 22. Wir sahen, dass \mathcal{S}_λ ($|\lambda| = 1$) für $p \neq 2$ genau dann eine Tateorbifaltigkeit ist, wenn $|\lambda - 1| < 1$ gilt. Wie sieht die Sache für $p = 2$ aus?

Die Legendregleichung der Tatekurve sagt uns jedenfalls, dass genau dann eine Tateorbifaltigkeit vorliegt, wenn $|\lambda - 1| < |2|$ ist. Es gibt aber auch noch andere Orbikartenmorphisamen!

Behauptung. Genau dann ist \mathcal{S}_λ eine rationale Mumfordorbifaltigkeit, wenn $|\lambda - 1| < 1$ ist.

Beweis. Mit Herrlichs Liste für Segmente von Gruppen [Her82] können wir folgenden Katobaum ansetzen

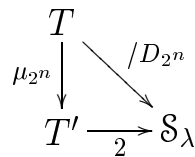


(an den Enden stehen die Verzweigungsordnungen). Die Dicke des Kreisrings über der Kante ist dabei [Her82, Lemma 3] gleich $1 - |1 - \zeta_{2^n}|$ für eine primitive 2^n -te Einheitswurzel ζ_{2^n} . Für hinreichend großes n sehen wir

$$1 > |1 - \zeta_{2^n}| = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} \stackrel{!}{>} |1 - \lambda|.$$

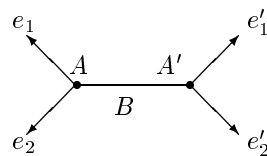
□

Der Kreisring zur Kante des Katobaums für $Z_2 * Z_2$ hat im Fall $p = 2$ übrigens die Dicke $1 - |2| = \frac{1}{2}$. Eine Orbikarte, die obigen Katobaum liefert ist z.B. durch eine Tatekurve T gegeben, die in das Diagramm passt



mit einer Isogenie μ_{2^n} .

Beispiel 23 (Rationale Mumfordorbifaltigkeiten mit 4 Orbipunkten). Wir geben hier alle möglichen diskontinuierlich einbettbaren Segmente mit 4 Enden und Verzweigungsindizes an:



Die Formel 5.2 sagt uns, dass B in jedem Falle zyklisch sein muss, und Herrlichs Liste gibt uns die erlaubten Gruppen. Dabei seien $l > 1$ beliebig und $m, m' > 1$ prim zu p .

Zusammen mit Völklein kann er zeigen [FrV91]:

Satz 6.1 (Fried, Völklein). 1. *Es gibt eine glatte \mathbb{Q} -Varietät $H_{0,r}^{\text{inn}}(G)_{\mathbb{Q}}$, die ein grober Modulraum für über r Punkten verzweigende G -Galoisüberlagerungen von \mathbb{P}^1 ist.*

2. *Hat G triviales Zentrum, so ist $H_{0,r}^{\text{inn}}(G)_{\mathbb{Q}}$ ein feiner Modulraum.*

Diese Hurwitzräume sind allerdings nicht zusammenhängend, und Komponenten müssen nicht auch über \mathbb{Q} definiert sein. Das Problem der inversen Galoistheorie ist es eben, absolut irreduzible, über \mathbb{Q} definierte Komponenten zu finden.

S. Wewers zeigt [Wew98, Theorem 3], dass es ein über \mathbb{Z} definiertes Modell $H_{0,r}^{\text{inn}}(G)$ gibt, das auch ein (feiner oder grober, je nach $Z(G)$) Modulraum für gewisse G -Überlagerungen über $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ ist, und dass

$$H_{0,r}^{\text{inn}}(G)_{\mathbb{Q}} = H_{0,r}^{\text{inn}}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

gilt.

Uns interessiert mehr das p -adische Modell $\mathcal{H}_{0,r}(G) := H_{0,r}^{\text{inn}}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p$ des Hurwitzraums. Eine möglichst genaue Beschreibung des Ortes

$$\mathfrak{h}_{0,r}(G) = \bigcup_{\underline{e}} \mathfrak{h}_0(G, \underline{e}) \subseteq \mathcal{H}_{0,r}(G)$$

— \underline{e} durchläuft die r -Tupel (e_1, \dots, e_r) — der Überlagerungen durch Mumfordkurven wäre wünschenswert.

Sei $\varphi: X \xrightarrow{/G} \mathbb{P}_K^1$ eine endliche algebraische Überlagerung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null, die über den Punkten ζ_1, \dots, ζ_r mit den Ordnungen e_1, \dots, e_r verzweigt. Sie ist gegeben durch einen surjektiven topologischen Gruppenhomomorphismus

$$\psi: \pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_r\}, \bar{s}) \rightarrow \text{Aut}(\varphi) \cong G.$$

Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ topologische Erzeuger von $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_r\}, \bar{s})$, so sind die $g_i := \psi(\gamma_i)$, $i = 1, \dots, r$ Erzeuger von G der Ordnung e_i . Mit den Konjugationsklassen C_i der γ_i in G definieren wir den *Verzweigungstyp* $\mathbf{C} := (C_1, \dots, C_r)$ der Überlagerung φ .

Im Komplexen beispielsweise ist γ_i ein geschlossener topologischer Weg in $\mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_r\}$, der nur um ζ_i läuft, und Lift auf X gibt eine Permutation der Faser $g_i \in \text{Aut}(\varphi)$.

Konjugation bedeutet Wechsel des Erzeugendensystems.

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist [V96, 4.32]

Satz 6.2 (Riemannscher Existenzsatz — komplex). *Genau dann gibt es eine endliche Galoisüberlagerung $X \xrightarrow{/G} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ vom Verzweigungstyp $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$, wenn Erzeuger g_1, \dots, g_r von G existieren mit $g_1 \cdots g_r = 1$ und $g_i \in C_i$ für $i = 1, \dots, r$.*

6.2 Der Mumfordkurvenort

6.2.1 Die HM-Komponenten

In [Har87] realisiert Harbater alle endlichen Gruppen als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}_p(T)$, indem er zyklische Überlagerungen

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, z \mapsto z^n$$

geschickt verklebt. Er bekommt galoissche Mumfordorbikarten für rationale Orbifaltigkeiten $\mathcal{S} = (\mathbb{P}^1, (\zeta_1, e_1), \dots, (\zeta_{2r}, e_{2r}))$ mit $e_i = e_{i+r}$ für $i = 1, \dots, r$. Dabei müssen nach Abschnitt 5 die Orbipunkte schön in Paare ζ_i, ζ_{i+r} trennbar sein, d.h. von einer Ecke des zugehörigen Katobaums gehen stets entweder genau zwei oder gar keine Spitzen aus. Die Eckengruppen sind zyklisch und die Kantengruppen trivial. An das Verzweigungsdatum $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{2r})$ mit Konjugationsklassen C_i der Deckgruppe G der Karte muss Harbater aber die Bedingung stellen, dass ein Vertreter in \mathbf{C} der Gestalt

$$(g_1, \dots, g_r, g_1^{-1}, \dots, g_r^{-1})$$

existiert. Dieser Vertreter heißt *H(arbater)M(umford)-Vertreter* von \mathbf{C} .

M. Fried rechnet nach, dass unter der folgenden Bedingung an G und \mathbf{C} mit HM-Vertreter der Teilraum $\mathcal{H}_0(G, \mathbf{C})$ des Hurwitzraums $\mathcal{H}_{0,2r}(G)$ mit Verzweigungsdatum \mathbf{C} eine Komponente (wir nennen sie eine *HM-Komponente*) ist [Fr93, 3.21]:

HM. Wird aus \mathbf{C} ein beliebiges Paar (verschieden nummerierter) inverser Konjugationsklassen entfernt, so erzeugt jedes Vertretersystem der verbliebenen Konjugationsklassen die Gruppe G .

Aus den Betrachtungen in Abschnitt 6.4 folgt

Satz 6.3. *Ist G eine endliche Gruppe, so enthalten HM-Komponenten im Hurwitzraum $\mathcal{H}_{0,2r}(G)$ genau dann Mumfordorbifaltigkeiten, wenn G ein Quotient eines freien Baumprodukts zyklischer Gruppen ist.*

Beweis. Jeder endliche Baum mit zyklischen Eckengruppen und trivialen Kantengruppen kann wie in Abschnitt 6.4 diskontinuierlich einbettbar gemacht werden. \square

Es folgt das harbatersche Resultat:

Korollar 6.4. *Jede endliche Gruppe G ist Galoisgruppe einer Überlagerung $\bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ mit einer Mumfordkurve \bar{S} .*

Beweis. G wird von ihren zyklischen Untergruppen G_1, \dots, G_r erzeugt und ist somit Quotient des freien Produkts $G_1 * \dots * G_r$. \square

Korollar 6.5. *Jede HM-Komponente von $\mathcal{H}_{0,2r}(G)$ enthält Überlagerungen von Mumfordorbifaltigkeiten durch Mumfordkurven.*

Beispiel 24 (Zyklische Gruppen).

Sei $n > 1$ zu p prim. Für jeden HM-Teilraum $\mathcal{H}_0(Z_n, \mathbf{C})$ vom Verzweigungstyp $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ ist der Mumfordkurvenort $\mathfrak{H}_0(Z_n, \mathbf{C})$ nach dem vorangehenden Korollar nicht leer. Hier ist \mathbf{C} von der Gestalt $\mathbf{C}_\nu = (\zeta, \zeta^{-1}, \zeta^\nu, \zeta^{-\nu})$ mit einer n -ten Einheitswurzel und $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$ ist. Die zugehörige Gleichung mit Parameter λ lautet

$$y^n = x(x-1)^l(x-\lambda)^{n-l}.$$

Bereits Ullrich [Ul81] zeigte, dass es λ gibt, für welche die Gleichung einer Mumfordkurve vorliegt.

6.2.2 Katobäume mit trivialen Kantengruppen

Hier sind natürlich nur Kanten homöomorph zu $[0, 1]$ gemeint.

Da in den folgenden Unterabschnitten die HM-Bedingung immer weiter aufgeweicht werden soll, wird auch das Bestimmen von Komponenten immer schwieriger. Wir begnügen uns daher mit Existenzaussagen.

Da die Fundamentalgruppe eines Baums von Gruppen von den Eckenstabilisatoren erzeugt wird, wird hier unsere Galoisgruppe G als Quotient ebenfalls von den Eckengruppen erzeugt. Von jeder Ecke mit nicht trivialem Stabilisator gehen zwei oder drei Enden aus. Der Katobaum entsteht durch Anheften von Katobäumen nicht hyperbolischer Mumford-Schwarz-Orbifaltigkeiten an einem Baum, indem zusätzliche Kanten eingefügt werden. Jene Orbifaltigkeiten sind

über $\bar{\mathbb{Q}}$ definiert. Daher haben wir lokale Monodromien γ_0, γ_∞ bzw. $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ (je nach Anzahl der Enden), welche die Relation

$$\gamma_0\gamma_\infty = 1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1$$

erfüllen.

Umgekehrt gibt es zu jedem System $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ von Konjugationsklassen von G mit der Eigenschaft, dass Vertreter $\gamma_i \in C_i$ existieren und die Menge $\{1, \dots, r\}$ sich so in Paare und Tripel partitionieren lässt, dass für jedes Paar i, j bzw. für jedes Tripel i, j, k die Relation

$$\gamma_i\gamma_j = 1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma_i\gamma_j\gamma_k = 1$$

gilt, eine rationale Mumfordorbifaltigkeit, die eine Mumfordkurve als Karte mit genau diesem Verzweigungsverhalten hat. In diesem Fall wollen wir \mathbf{C} *mumfordsch* nennen.

Dies liefert die bestmögliche direkte Übertragung des riemannschen Existenzsatzes für Mumfordkurven:

Satz 6.6 (Riemannscher Existenzsatz — mumfordsch). *Sei G eine endliche Gruppe. Der Mumford-Hurwitzraum $\mathfrak{H}_0(G, \mathbf{C})$ ist nicht leer, wenn \mathbf{C} mumfordsch ist.*

6.2.3 Virtuelle Verzweigung

Die Motivation für diesen Unterabschnitt ist das Beispiel [AndIII, 6.4.6] einer Mumford-Schwarz-Orbifaltigkeit, deren Orbifundamentalgruppe nicht von lokalen Monodromien γ_0, γ_1 in den Orbipunkten $0, 1$ topologisch erzeugt wird. Es lässt sich auch keine lokale Monodromie γ_∞ in ∞ finden mit $\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1$. Der riemannsche Existenzsatz gilt also allgemein nicht. Der Grund ist, dass schon eine uniformisierende p -adische Dreiecksgruppe dies alles verbietet. Da es sich um eine Fundamentalgruppe eines Baums von Gruppen handelt, wissen wir was zu tun ist...

Gegeben sei ein Verzweigungsdatum $(\mathbf{Z}, \mathbf{C}) = (\zeta_1, \dots, \zeta_r, C_1, \dots, C_r)$ für eine endliche Mumfordorbikarte $\varphi: \bar{S}' \xrightarrow{/G} \mathfrak{S}$ einer rationalen Mumfordorbifaltigkeit \mathfrak{S} . Der Katobaum T zu φ sieht mehr Verzweigung. Sei dazu T' seine Stabilisierung. Im Abschnitt 5.1 sahen wir, dass T durch Verkleben elementarer Katobäume derart entsteht, dass von jeder Ecke höchstens 3 Spitzen \mathcal{E} oder Kanten e mit nicht trivialem Stabilisator ausgehen. Ist $p > 5$, sind alle Kantengruppen von T , demnach auch von T' , zyklisch. Wir betrachten nun eine Ecke v

von T mit nicht trivialem Stabilisator G_v . Je nachdem, ob G_v zyklisch ist oder nicht, gehen von v zwei oder drei Enden \mathcal{E} oder Kanten e mit nicht trivialem Stabilisator aus (ausschließlich Kanten oder Enden ist durchaus möglich). Da T Verklebung elementarer Katobäume ist, gibt es wieder (lokal gesehen) lokale Monodromien γ_e und $\gamma_{\mathcal{E}}$, die G_v erzeugen und die Relation

$$\prod_{e \dashv' v} \gamma_e \cdot \prod_{\mathcal{E} \dashv' v} \gamma_{\mathcal{E}} = 1$$

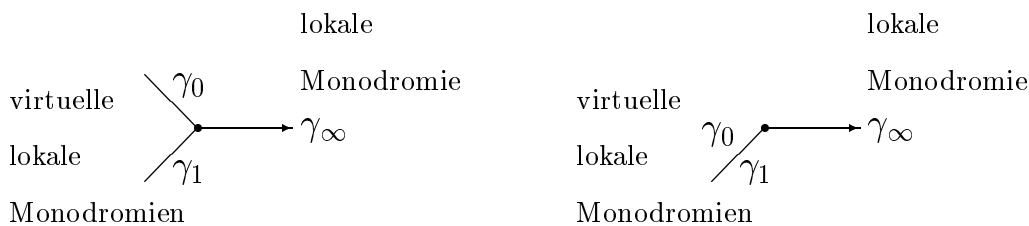
erfüllen. Dabei soll $x \dashv' v$ (oder auch $v \vdash' x$) bedeuten: x geht von v aus und hat nicht trivialen Stabilisator.

Falls aber $p \leq 5$ ist, kann es in T' auch nicht zyklische Kantengruppen geben. In diesem Fall gibt es in T' Ecken v mit nicht zyklischem Stabilisator G_v , von denen aber nur zwei Spitzen oder Kanten mit nicht trivialem Stabilisator ausgehen. Da Eckengruppen von den Stabilisatoren der ausgehenden Kanten und Spitzen erzeugt werden, bekommen wir für derartige Ecken v unsere Relationen so: sei $E \vdash' v$ die Kante oder Spitze, für welche $G_E \neq 1$ zyklisch ist, und $e \vdash' v$ die Kante mit nicht zyklischem Stabilisator. Es seien nun γ_0 ein Erzeuger von G_E und γ_1, γ_2 Erzeugende von G_e mit

$$\prod_{i \in \{0,1,2\}} \gamma_i = 1.$$

Definition 6.7. *Die in obiger Weise ausgewählten Erzeuger der Kantengruppen heißen die virtuellen lokalen Monodromien von T' .*

Lokal können wir uns in etwa folgendes Bild machen:



mit der Relation $\prod_{i \in \{0,1,\infty\}} \gamma_i = 1$. Es gilt

Lemma 6.8. *$\pi_1^{\text{BS}}(T)$ wird von den lokalen und den virtuellen lokalen Monodromien erzeugt. Dies gilt auch für G selbst.*

Definition 6.9. Ein Verzweigungstyp $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ zu G heißt virtuell mumfordsch, wenn es für $i = 1, \dots, r$ Vertreter $\gamma_i \in C_i$ gibt und Elemente $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_s \in G \setminus \{1\}$, sodass sich $\{1, \dots, s\}$ in endlich viele Paare und Tripel derart zerlegen lässt, dass gilt:

1. $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_s \rangle$.
2. Für jedes Paar oder Tripel I der Partition gilt $\prod_{i \in I} \gamma_i = 1$ und $\langle \gamma_i \rangle_{i \in I}$ ist in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ einbettbar.

Auf diese Weise gelingt mit den Methoden aus Abschnitt 6.4 die Übertragung aus dem Komplexen:

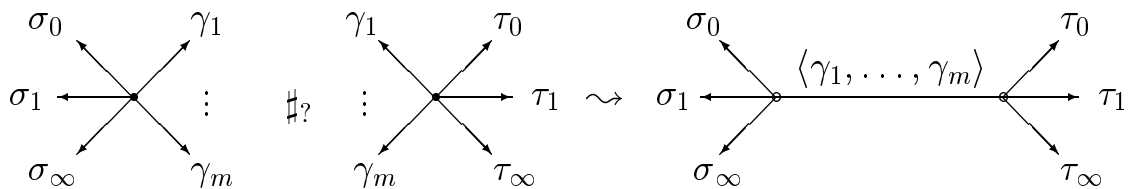
Satz 6.10 (Virtueller riemannscher Existenzsatz). Sei G eine endliche Gruppe. Genau dann gibt es eine Galoisüberlagerung $\bar{S} \xrightarrow{/G} \mathbb{P}^1$ vom Verzweigungstyp \mathbf{C} mit einer Mumfordkurve \bar{S} , wenn \mathbf{C} virtuell mumfordsch ist.

Folgende Fragen ergeben sich in natürlicher Weise:

Frage 1. Lassen sich die virtuellen Monodromierelationen auf die Orbifundamentalgruppe liften?

Frage 2. Erzeugen die (virtuell) lokalen Monodromien $\pi_1^{\mathrm{orb}}(S, \bar{s})$ topologisch?

Zu Frage 1. Die Frage bedarf einer Erläuterung. Die Orbipunkte der rationalen Mumfordorbifaltigkeit kommen in Einer- bis Dreiergrüppchen daher. Der Einfachheit halber mögen es zwei Dreiergrüppchen. Von den beiden Ecken mit den Stabilisatoren G_1 und G_2 gehen also je drei Spitzen in einem wie Kato-graphen gebildeten Quotientenskelett Δ einer beliebigen Galoisorbikarte aus. Außerdem sind sie durch eine Kante mit Stabilisator H verbunden. Wir halten einen Schnitt in die universelle Überlagerung von Δ als Baum von Gruppen fest und stellen uns vor, dass er durch Verkleben in etwa so entstanden sein mag:



Dabei seien die Bäume links stabilisierte Quotientenbäume für G_1 und G_2 mit $G_1 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty, \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$, $G_2 = \langle \tau_0, \tau_1, \tau_\infty, \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ und $H = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_\infty \rangle$

mit Relationen $\prod_{i \in \{0,1,\infty\}} \sigma_i \cdot \prod_{j=1}^m \gamma_j = 1$ bzw. $\prod_{i \in \{0,1,\infty\}} \tau_i \cdot \prod_{j=1}^m \gamma_j = 1$, woraus sich leicht virtuelle Monodromierelationen gewinnen lassen. Die Frage ist, ob jeder vorkommende Quotientenbaum einer gegebenen rationalen Mumfordorbifaltigkeit auf diese Weise entsteht. \square

Zu Frage 2. Hier stellt sich die Frage, ob endlich viele virtuelle lokale Monodromien (d.h. Erzeugende für die Kantengruppen) genügen. Um die Methoden des folgenden Unterabschnitts anwenden zu können werden Formeln für die Anzahlen für Spitzen der vorkommenden Quotientenbäume benötigt. \square

Am liebsten würden wir jetzt unserem Zoo ein weiteres Tierchen hinzufügen: die Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{mumf}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ als Faserfunktoraufomorphismengruppe für Orbiüberlagerungen von \mathcal{S} durch Mumfordkurven. Dann würden wir diese Arbeit mit der Beantwortung (ohne wenn und aber) der beiden Fragen für $\pi_1^{\text{mumf}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ krönen. Zwar lässt die zugehörige Kategorie $\text{Cov}_{\mathcal{S}}^{\text{mumf}}$ Quotienten über \mathcal{S} zu, doch mit den Faserprodukten hapert es. Ob beim Verkleben zweier Karten eine Mumfordkurve herauskommt, hängt sehr davon ab, wie die „Blätter“ miteinander verheftet werden. Im Allgemeinen klappt dies eben nicht.

Uns bleibt die allgemein übliche Methode: wir setzen

$$\Pi^{\text{mumf}}(\mathcal{S}) := \varprojlim_{\varphi} \pi_1^{\text{BS}}(\Delta(\varphi)),$$

wobei φ alle Mumfordgaloisorbikarten von \mathcal{S} durchläuft und $\Delta(\varphi)$ der Katobaum zu φ ist. In diese Gruppe gibt es einen topologischen Morphismus von $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, \bar{s})$ mit dichtem Bild, und sie erlaubt das Erwünschte (zweimal „Ja“), falls die Kartenzahl endlich ist.

6.2.4 Endlichkeit der Kartenzahl

Mit der *Kartenzahl* einer Mumfordorbifaltigkeit \mathcal{S} meinen wir die Anzahl aller Isomorphieklassen stabilisierter Katographen für Mumfordgaloisorbikarten von \mathcal{S} bei fester Galoisgruppe G (deshalb wäre wohl „Katozahl“ angebrachter?).

Satz 6.11. *Die Kartenzahl für \mathcal{S} ist bei vorgegebener Galoisgruppe G endlich.*

Beweis. Die Vorgabe der Gruppe G beschränkt zunächst die Größe der Ecken­gruppen G_v von Katographen, da $G_v \subseteq G$ ist.

Sei zuerst \mathcal{S} eine rationale Mumfordorbifaltigkeit. Weiter seien alle Ecken­gruppen nicht trivial in einem Katobaum T_{φ} einer zu betrachtenden Karte

$\varphi: \bar{S}' \rightarrow \mathcal{S}$. Ist in einem Segment von T_φ , das wir als diskontinuierlich einbettbar und stabil annehmen dürfen, die Kantengruppe nicht trivial, so sind nach Herrlichs Liste [Her82] nicht beide Eckengruppen zugleich zyklisch. Also gehen von diesem Segment mindestens drei Spitzen oder Kanten mit nicht trivialem Stabilisator aus. Es folgt, dass die Eckenzahl von Katobäumen für \mathcal{S} mit ausschließlich nicht trivialen Kantengruppen beschränkt ist, da es laut [Kat00] nur endlich viele Isomorphieklassen von Katobäumen mit genau drei Spitzen und beschränkter Stabilisatorordnung gibt.

Sei nun φ eine Karte, für die T_φ auch triviale Eckengruppen haben darf. Ist T ein maximaler Teilbaum von T_φ mit lauter trivialen Eckengruppen, so hat T keine Ecke von Valenz 2 (in T). Es folgt, dass die Anzahl der Ecken mit Valenz 1 in T , wenn φ läuft, beschränkt ist, da für jede solche Ecke aus Gründen der Stabilität mindestens zwei Enden in T_φ ausgehen.

Somit ist die Behauptung für alle rationalen Mumfordorbifaltigkeiten gezeigt. Führe nun im allgemeinen Fall die obigen Betrachtungen für einen Fundamentalbereich (als Baum von Gruppen) des Katographen in seiner universellen Überlagerung aus. \square

Bemerkung 6.12. *Wir sehen [Kat00] (Kartenzahlendlichkeit für dreipunktige rationale Mumfordorbifaltigkeiten) als Induktionsanfang für die Endlichkeit der Kartenzahl beliebiger Mumfordorbifaltigkeiten.*

Der Beweis des Satzes zeigt sogar

Korollar 6.13. *Der Mumford-Hurwitzraum $\mathfrak{H}_g(G, \underline{e})$ hat bei vorgegebener Signatur $\underline{e} = (e_1, \dots, e_r)$, Galoisgruppe G und Quotientengeschlecht g nur endlich viele Komponenten.*

Beweis. Im Fall $g = 0$ sahen wir, dass es für festes r nur endlich viele Katobäume mit r Spitzen gibt, deshalb genügen endlich viele Orbifaltigkeiten \mathcal{S} , sodass

$$\mathfrak{H}_0(G, \underline{e}) = \dot{\bigcup}_{\mathcal{S}} \mathfrak{H}_G(\mathcal{S})$$

eine disjunkte Vereinigung ist.

Für $g > 0$ sahen wir, dass es nur endlich viele Fundamentalbereiche für Katographen gibt. Also kommen wir auch hier mit nur endlich vielen \mathcal{S} für $\mathfrak{H}_g(G, \underline{e})$ aus.

In jedem Falle genügen endlich viele $\mathfrak{M}_{F_g}(N)$, die endlich über den nach [Her85] zusammenhängenden Herrlich-Modulräumen $\mathfrak{M}(N)$ liegen. Folglich hat der Mumford-Hurwitzraum nur endlich viele Komponenten. \square

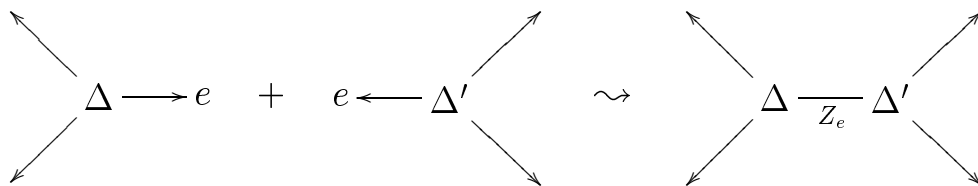
Korollar 6.14. *Sei $\mathcal{S} = (\bar{S}, (\zeta_1, e_1), \dots, (\zeta_n, e_n))$ eine Mumfordorbifaltigkeit von Geschlecht g . Dann wird $\Pi^{\text{mumf}}(\mathcal{S})$ (topologisch) erzeugt von freien Erzeugern e_1, \dots, e_g und endlich vielen (virtuell) lokalen Monodromietripeln $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ mit der Relation $\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1$, unter denen genau n Tripel mit nicht nur virtuellen Monodromien sind.*

Beweis. $\Pi^{\text{mumf}}(\mathcal{S})$ ist ein projektiver Limes der Fundamentalgruppen der Katographen. Da nach dem Beweis von Satz 6.11 die Eckenzahl durch die Anzahl der Orbipunkte von \mathcal{S} beschränkt ist, setzen wir für rein virtuelle Tripel $\gamma_{\varphi,0}, \gamma_{\varphi,1}, \gamma_{\varphi,\infty}$ einer Karte $\varphi: \bar{S}' \xrightarrow{/G} \mathcal{S}$ (\bar{S}' Mumfordkurve)

$$\gamma_{\varphi',i} := \begin{cases} \gamma_{\varphi,i}, & \varphi' = \varphi \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 0, 1, \infty,$$

und wir bekommen topologische Erzeuger $\gamma_i := (\gamma_\varphi)$. Die anderen Tripel $\gamma_{\varphi,i}$ einer Karte bestehen aus Erzeugern der Zerlegungsgruppe von einem bis drei Orbipunkten und höchstens zwei virtuellen Monodromien, von denen (je nach Karte) auch eine trivial sein darf. Dies liefert ein einziges Tripel $\gamma_i := (\gamma_{\varphi,i})$ topologischer Erzeuger von $\Pi^{\text{mumf}}(\mathcal{S})$ mit der gewünschten Relation. \square

Beispiel 25 (Alle rationalen 4-Punkt-Mumfordorbifaltigkeiten). *Sei $\mathcal{S} = (\mathbb{P}^1, (0, e_0), (1, e_1), (\infty, e_\infty), (\lambda, e_\lambda))$ eine rationale Mumfordorbifaltigkeit. Neben Beispiel 23, das uns Segmente durch Verkleben zweier elementarer Katobäume liefert, gibt es noch die Möglichkeit, Katographen der Dreiecksgruppen aus [Kat00] miteinander oder mit elementaren Katographen zu verkleben:*



So hat beispielsweise die Tateorbifaltigkeit \mathcal{S}_λ für $p \neq 2$ nur Segmente als Katobäume, während es für $p = 2$ mehr Katobäume gibt.

6.3 Zyklische Galoisüberlagerungen explizit

Beginnen wir etwas allgemeiner.

Lemma 6.15. *Bei einer endlichen Galoisüberlagerung durch eine Mumfordkurve ist die Anzahl der Verzweigungspunkte gerade.*

Beweis. Sei $C \rightarrow \mathcal{S}$ die endliche Orbiüberlagerung, C die Mumfordkurve. Gehen wir zur topologisch universellen Überlagerung von C über:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{/\Gamma} & C \\ & \searrow /G & \downarrow \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

Die Verzweigungspunkte der Überlagerung entsprechen eineindeutig den Γ -Bahnen der Fixpunkte elliptischer Elemente von G . Die Fixpunkte einer elliptischen Transformation liegen jedoch nicht in derselben Γ -Bahn. Denn sei s elliptisch mit den Fixpunkten x und y und $y = \gamma x$ für $\gamma \in \Gamma$. Dann ist auch s^γ ein Lift von $s \bmod \Gamma$ (G liegt im Normalisator von Γ !) mit $x = \gamma^{-1}y$ als einem Fixpunkt, und nach der UAE der universellen top-Überlagerung $\Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ folgt $s = s^\gamma$. Dann aber kann x kein regulärer Punkt sein. Daß überhaupt nur endlich viele Verzweigungspunkte vorliegen, liegt an der Endlichkeit der Klassenzahl Γ -konjugierter elliptischer Elemente von G . \square

Lemma 6.16. *Sei $G = G_1 * \dots * G_r$ ein freies Produkt von Gruppen. Dann liegt jedes Element $s \neq 1$ endlicher Ordnung in genau einem Konjugat eines der G_i .*

Beweis. s liegt ohnehin nur in Konjugaten eines der Faktoren G_i [LS77, IV.1.6], ohne Einschränkung sei s sogar in G_1 . Dann lässt sich die Gleichung $s = g^{-1}a_i g$ mit $a_i \in G_i$ und $i \neq 1$ leicht ad absurdum führen. \square

6.3.1 Freie Produkte zyklischer Gruppen

Sei nun $G = \langle s_0 \rangle * \dots * \langle s_m \rangle$ das m -fache freie Produkt der zyklischen Gruppe $Z_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit sich und operiere diskontinuierlich auf dem \mathbb{P}^1 mit Regularitätsbereich Ω . Nach der UAE des freien Produkts gibt es zum durch $s_i \mapsto \bar{1}$ definierten Isomorphismus $\langle s_i \rangle \cong Z_n$ der Faktoren von G genau einen Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \rightarrow Z_n$, sodass für jedes i das Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} & \langle s_i \rangle & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ G & \xrightarrow{\quad} & Z_n \end{array}$$

Es sei Γ der Kern dieser Abbildung.

Bemerkung 6.17. *Da die Kommutatorfaktorgruppe $G/[G, G]$ endlich ist, gilt $\Omega/G \cong \mathbb{P}^1$. [GvP80, VIII,4.3]*

Satz 6.18. Γ ist frei vom Rang $m(n-1)$.

Beweis. Die Elemente von Γ sind Worte in den s_i der Gestalt $s_k^{\alpha_k} \cdots s_l^{\alpha_l}$, deren Exponentensumme durch n teilbar ist. Ein Verfahren von K. Reidemeister [Reid27] liefert $m(n-1)$ Erzeugende für Γ :

$$s_0^j s_i s_0^{-j-1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, m,$$

dessen Unverkürzbarkeit wir mit der Riemann-Hurwitz-Formel für das Geschlecht g von $C = \Omega/\Gamma$ in der zugehörigen Überlagerung

$$C \rightarrow \mathcal{S} = (\mathbb{P}^1, (\zeta_1, n), \dots, (\zeta_m, n))$$

vom Grad n nachweisen können. In der Tat ist

$$2g - 2 = -n + 2 \cdot n(m+1)$$

oder äquivalent

$$g = m(n-1).$$

Die Überlagerung ist nämlich genau in den Γ -Bahnen der Fixpunkte der s_i , die alle elliptisch sind, total verzweigt. Jene Fixpunkte sind regulär, da s_i nach Lemma 6.16 genau eine Ecke, also insbesondere nur endlich viele Ecken, des Baums zu G fest lässt [Her80, Satz 6]. Weiter ist Γ torsionsfrei, denn nicht triviale Elemente endlicher Ordnung sind zu einem nicht trivialen Element eines der Faktoren $\langle s_i \rangle$ konjugiert, haben also Exponentensumme inkongruent 0 mod n und können daher nicht in Γ liegen. Es ist G Fundamentalgruppe eines Baums von Gruppen T mit universeller Überlagerung $\mathcal{T} \xrightarrow{/G} T$. Da nun der Quotient T/Γ ein Graph mit trivialen Eckengruppen ist, folgt: Γ ist frei. \square

Das in Satz 6.18 gefundene Erzeugendensystem zerlegt Γ in m Untergruppen vom Rang $n-1$, die s_0 -invariant sind. Sei dazu $\Gamma_i = \langle \gamma_{i1}, \dots, \gamma_{i(n-1)} \rangle$ mit $\gamma_{ij} = s_0^j s_i s_0^{-j-1}$. Dann ist

$$\gamma_{ij}^{s_0} = s_0^{-1} \gamma_{ij} s_0 = \begin{cases} \gamma_{i(j-1)}, & \text{falls } j = 2, \dots, n-1 \\ \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{i\nu} \right)^{-1} & \text{für } j = 1. \end{cases}$$

Die entsprechenden diskontinuierlichen Gruppen $G_i = \langle s_0 \rangle * \langle s_i \rangle$ mit zugehörigem gewöhnlichem Bereich Ω_i ergeben Orbikarten

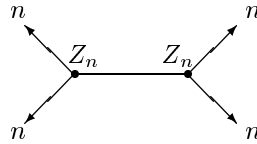
$$C_i = \Omega_i/\Gamma_i \rightarrow \mathcal{S}_i = (\mathbb{P}^1, (0, n), (1, n), (\infty, n), (\lambda_i, n))$$

mit Deckgruppe Z_n . Die Mumfordkurve C_i ist vom Geschlecht $g_i = n-1$. Weiter ist $\Omega = \bigcap_{i=1}^m \Omega_i$, denn ein gewöhnlicher Punkt für G ist auch für alle G_i gewöhnlich und umgekehrt.

Bemerkung 6.19. *Es ist \mathcal{S} die zusammenhängende Summe der \mathcal{S}_i :*

$$\mathcal{S} = \#_{i=1}^m \mathcal{S}_i.$$

Beweis. Der Quotientenbaum für G ist ein m -eckiger Baum mit Eckengruppen Z_n und trivialen Kantengruppen. Im Katobaum zu G sind folglich alle Katobäume zu G_i



durch jeweils eine Kante verbunden. □

Lemma 6.20. *Sei $C \xrightarrow{|Z_n} \mathcal{S}$ eine Orbikarte einer beliebigen Mumfordorbifaltigkeit \mathcal{S} . Dann sind alle Eckengruppen im zugehörigen Katograph zyklisch und die Kantengruppen trivial.*

Beweis. Die Stabilisatoren von Ecken im Katograph sind Untergruppen der Deckgruppe Z_n . □

6.3.2 Überlagerungen von Primzahlgrad

Die Verzweigungspunkte seien $0, 1, \infty$ und λ mit $|\lambda| = 1$. Wir wollen die Lage von λ möglichst genau bestimmen, bei der die Orbifaltigkeit \mathcal{S}_λ eine Mumfordkurve mit zyklischer Deckgruppe als Orbikarte zulässt. Es gelte daher $e_0 = e_\infty$ und $e_1 = e_\lambda$. Der Einfachheit halber sei der Grad $n = q$ eine von p und von 2 verschiedene Primzahl. Wir gehen zunächst von einer diskontinuierlichen Gruppe $G = \langle s \rangle * \langle t \rangle$, einem freien Produkt von zwei Kopien der Gruppe der q -ten Einheitswurzeln, aus. Ganz konkret seien für eine primitive q -te Einheitswurzel ζ die beiden Erzeuger von G als gebrochen-lineare Transformationen gegeben. s sei durch die Matrix

$$s = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben, während t die Konjugation mit der Transformation

$$\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sei:

$$t = \varphi^{-1}s\varphi = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda\zeta - 1 & \lambda(1 - \zeta) \\ \zeta - 1 & \lambda - \zeta \end{pmatrix}.$$

s hat die Fixpunkte 0 und ∞ , t die Fixpunkte 1 und λ . Hieraus können wir alle über 0, 1, λ , ∞ verzweigten Galoisüberlagerungen durch Mumfordkurven bekommen, indem wir alle freien Normalteiler vom Index q der Gruppe $G = \langle s \rangle * \langle t \rangle \cong Z_q * Z_q$ explizit beschreiben.

Für $f = 1, \dots, q - 1$ liefern die Abbildungen

$$\varphi_f: G \rightarrow Z_q, \quad s \mapsto \zeta, \quad t \mapsto \zeta^f,$$

alle normalen Schottkyuntergruppen von G vom Index q , nämlich $\Gamma_f = \ker \varphi_f$. Und dies sind alle, da jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow Z_q$ über das direkte abelsche Produkt $G^{ab} = \langle s \rangle \times \langle t \rangle$ faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & Z_p \\ & \searrow & \nearrow \psi \\ & G^{ab} & \end{array}$$

und ψ durch Nachschalten eines Automorphismus von Z_p auf die Gestalt

$$\psi_f: s \mapsto \zeta, \quad t \mapsto \zeta^f$$

gebracht werden kann (hier sind mit s und t deren Bilder in G^{ab} gemeint).

Die mit dem Reidemeisterverfahren gewonnenen Erzeuger für die Schottkygruppe Γ_f lauten

$$\gamma_{if} = s^i t s^{-f-i} = \frac{1}{\lambda - 1} \begin{pmatrix} (\lambda\zeta - 1)\zeta^{-f} & \lambda\zeta^i(1 - \zeta) \\ \zeta^{-i-f}(\zeta - 1) & \lambda - \zeta \end{pmatrix}$$

mit $i = 1, \dots, q - 1$. Eine Transformation ist genau dann hyperbolisch, wenn der Betrag ihrer normierten Spur größer als Eins ist. Wegen

$$\text{Sp } \gamma_{if} = \frac{(1 + \zeta^{1-f})\lambda - (\zeta + \zeta^{-1})}{\lambda - 1}$$

und $\det \gamma_{if} = \zeta^{1-f}$ bedeutet dies (der Fall $\lambda = \zeta = -1$ kann nicht eintreten):

$$\frac{(\text{Sp } \gamma_{if})^2}{\det \gamma_{if}} > 1 \Leftrightarrow |\lambda - 1| < |(1 + \zeta^{1-f})\lambda - (\zeta + \zeta^{-1})| = |1 + \zeta^{1-f} - (\zeta + \zeta^{-1})| \leq 1.$$

Die Gleichheit gilt, da die Differenz der beiden entsprechenden Ausdrücke einen Betrag kleiner oder gleich $|\lambda - 1|$ hat. Im Falle

$$|\lambda - 1| = |1 + \zeta^{1-f} - (\zeta + \zeta^{-1})|$$

können wir also sofort sagen, daß Γ_f nicht diskontinuierlich ist und daher keine Mumfordkurve vorliegt. Im anderen Fall müssen wir nur nachprüfen, ob (oder wann) ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ_f existiert. Der isometrische Kreis für γ_{if} ist jedoch

$$I_{\gamma_{if}} = \left\{ \left| z - \frac{\zeta - \lambda}{\zeta - 1} \zeta^{i+f} \right| < |\lambda - 1| \right\}$$

und der für γ_{if}^{-1}

$$I_{\gamma_{if}^{-1}} = \left\{ \left| z + \frac{\zeta^{-1} - \lambda}{\zeta - 1} \zeta^{i+f} \right| < |\lambda - 1| \right\},$$

wie sofort aus den entsprechenden Matrizen abgelesen werden kann, und es gilt für deren affinoide Abschlüsse

$$I_{\gamma_{if}}^+ \cap I_{\gamma_{if}^{-1}}^+ = \emptyset, \quad I_{\gamma_{if}}^+ \cap I_{\gamma_{jf}}^+ = \emptyset, \quad I_{\gamma_{if}^{-1}}^+ \cap I_{\gamma_{jf}^{-1}}^+ = \emptyset \quad \text{und} \quad I_{\gamma_{if}}^+ \cap I_{\gamma_{jf}^{-1}}^+ = \emptyset.$$

Das Komplement dieser offenen Kreise im \mathbb{P}^1 ist also ein Fundamentalbereich für Γ_f .

G. van Steen [vSt82, 3.2] konnte mit Hilfe von Thetafunktionen nun Gleichungen für die zugehörigen Kurven bekommen, daher haben wir das Resultat

Satz 6.21. *Genau dann beschreibt die Gleichung*

$$y^q = x(x-1)^a(x-\lambda)^b$$

mit $1 \leq a, b < q$, $|\lambda| = 1$ und ungerader Primzahl q eine Überlagerung des \mathbb{P}^1 durch eine Mumfordkurve, wenn $b = q - a$ und

$$|\lambda - 1| < |1 + \zeta^{1-f} - (\zeta + \zeta^{-1})|$$

mit $af \equiv 1 \pmod{q}$ ist.

Beweis. G. van Steen sieht, dass zu φ_f mit $af \equiv 1 \pmod{q}$ die Gleichung mit $b = q - a$ gehört. In Lemma 6.20 sahen wir, dass zyklische Überlagerungen durch Mumfordkurven allgemein durch freie Produkte von zyklischen Gruppen uniformisiert werden. \square

Anmerkung. *Wie wir bereits wissen, hat die Schranke für $|\lambda - 1|$*

$$\varepsilon := \varepsilon(q, f) := |1 + \zeta^{1-f} - (\zeta + \zeta^{-1})|$$

den Wert 1 [Her82, Lemma 3].

6.3.3 Überlagerungen von nicht primem Grad

Die über vier Punkten verzweigte Überlagerung sei hier durch das Paar (G, Γ) realisiert mit $G = \langle s \rangle * \langle t \rangle$ und einer freien Gruppe Γ . Die Ordnung der Erzeugenden s und t seien d und e . Eine Surjektion $G \rightarrow Z_n$ liefert die gewünschte Orbikarte.

Der Fall $d \mid e$.

Dann ist $n = e$, da sonst die obere Kurve nicht zusammenhängend ist. Ist ζ primitive n -te Einheitswurzel und $f = \frac{n}{d}$, so liefert die durch

$$s \mapsto \zeta^f, \quad t \mapsto \zeta$$

definierte Abbildung $G \rightarrow Z_n$ eine Basis für Γ : sei

$$\gamma_j = (t^f)^j s (t^f)^{-j-1},$$

dann ist

$$\{\gamma_{ij} = t^i \gamma_j t^{-i} \mid i = 1, \dots, f, j = 1, \dots, d-1\}$$

eine Basis für Γ . Eine Rechnung wie im vorigen Abschnitt liefert eine Schranke $\varepsilon \leq 1$ für $|\lambda - 1|$.

Der Fall $\text{ggT}(d, e) = 1$.

Hier ist notwendig $n = ed$. Liften wir einen Automorphismus der oberen Kurve mit Ordnung n zu $\sigma \in G$, so können wir annehmen, dass σ bei der Abbildung $G \rightarrow Z_n$ auf ζ abgebildet wird. Mit φ wie in Abschnitt 6.3.2 sei $\tau = \varphi^{-1} \sigma \varphi$. Ist

$$\gamma_j = (\sigma^e)^j \tau^e (\sigma^e)^{-j-1},$$

so ist

$$\{\gamma_{ij} = (\sigma^d)^i \gamma_j (\sigma^d)^{-i} \mid i = 1, \dots, d-1, j = 1, \dots, e-1\}$$

eine Basis für Γ . Wie vorher lässt sich auch hier eine Schranke ≤ 1 für $|\lambda - 1|$ finden.

Der Fall $d \nmid e$ und $e \nmid d$.

Es ist $n = \text{kgV}(d, e)$, und es sei $l = \text{ggT}(d, e)$. Sei X eine Mumfordkurve. Es faktorisiert die Überlagerung:

$$X \xrightarrow{l} Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

mit $X \rightarrow Y$ vom Grad l , und $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ verzweigt über denselben Punkten wie die ursprüngliche Überlagerung $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Auch Y ist eine Mumfordkurve, und nach dem vorhergehenden Fall ist $|\lambda - 1| < \varepsilon \leq 1$.

Gilt umgekehrt die Abschätzung für hinreichend kleine ε , so gibt es einen passenden Katobaum, und X ist Mumfordkurve.

In jedem der Fälle genügt X einer Gleichung

$$y^n = x(x-1)^a(x-\lambda)^{n-a}$$

(s. 6.2)

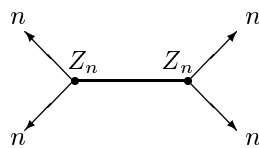
6.4 Realisierung von Galoisgruppen

Wir realisieren viele endliche Gruppen als Decktransformationsgruppen von Orbikarten rationaler Mumfordorbifaltigkeiten

$$C \xrightarrow{/G} \mathbb{P}_K^1,$$

wobei K eine hinreichend große endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p ist. Die Gruppe G nennen wir dann *Mumford-realisiertbar* oder einfach *realisiertbar*. Ist das Kartengeschlecht größer oder gleich 2, so nennen wir G *mit höherem Geschlecht* realisiertbar.

In Abschnitt 6.3 haben wir sicher die zyklischen Gruppen Z_n mit $n = p$ oder mit $\text{ggT}(n, p) = 1$ realisiert. Dazu brauchten wir lediglich Katographen der Form



Zulässige Verzweigungsindizes an den Enden geben dann eine Mumfordkurve C , die in das kommutative Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & C \\ & \searrow & \downarrow /Z_n \\ & /N & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

passt. Dabei ist Ω die universelle topologische Überlagerung von C und N die Fundamentalgruppe des Katographen. Selbstverständlich gibt es die Realisierung $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ aller zyklischer Gruppen, die genau über 0 und ∞ verzweigt (genau solche verklebt Harbater für die Lösung des Realisierungsproblems). Um aber von den anderen zyklischen Gruppen sicher sagen zu können, ob auch sie mit höherem Geschlecht realisierbar sind, können wir so vorgehen:

Für zyklische p -Potenzgruppen Z_{p^r} finden wir nach Herrlichs Liste kein passendes Segment! Eine solche Überlagerung kann scheinbar höchstens mit Index p verzweigen, was jedoch nur für $r = 1$ geht. Dieselbe Fundamentalgruppe wie

$$Z_{p^r} \text{ --- } Z_{p^r}$$

hat aber die diskontinuierlich einbettbare Strecke

$$Z_{p^r} \xrightarrow{Z_{p^{r-1}}} \cdots \xrightarrow{Z_p} Z_p \xrightarrow{1} Z_p \xrightarrow{Z_p} \cdots \xrightarrow{Z_{p^{r-1}}} Z_{p^r}$$

Nun können wir weiter wie in Abschnitt 6.3.2 verfahren.

Sei nun G eine endliche Gruppe. Wir übersetzen den Beweis von [Har87, 2.3] in die Sprache der Graphen von Gruppen. Dazu nehmen wir an, G werde von zwei bereits realisierten Untergruppen H_1 und H_2 erzeugt. Es seien also zwei rationale Mumfordorbifaltigkeiten

$$\mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}^1, (\zeta_{11}, e_{11}), \dots, (\zeta_{1q}, e_{1q})), \quad \mathcal{S}_2 = (\mathbb{P}^1, (\zeta_{2,q+1}, e_{2,q+1}), \dots, (\zeta_{2r}, e_{2r}))$$

und Orbikarten $\varphi_1: C_1 \xrightarrow{/H_1} \mathcal{S}_1$, $\varphi_2: C_2 \xrightarrow{/H_2} \mathcal{S}_2$, mit Mumfordkurven C_1, C_2 gegeben. Sei T_i der Katobaum zu φ_i . Die Überlagerung φ_i induziert einen Morphismus von Graphen von Gruppen, der das Diagramm kartesisch macht

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{/H_i} & \mathcal{S}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_i & \xrightarrow{/H_i} & T_i \end{array}$$

Sei $T_i^+ = T_i \# v$ eine zusammenhängende Summe des Katobaums mit einer Ecke v . Dies soll bedeuten, dass an irgend einer Ecke von T_i eine Kante (ohne Gruppen) e mit Endpunkt v an ihrem Anfangspunkt angehängt werde (auch wenn die Notation nicht wohldefiniert aussieht!). Γ_i^+ definieren wir über das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_i^+ & \longrightarrow & \Gamma_i \\ /H_i \downarrow & & \downarrow /H_i \\ T_i^+ & \xrightarrow{\text{Kontr.}} & T_i \end{array}$$

Schließlich seien

$$\Delta_i^+ := G/H_i \times \Gamma_i^+, \quad \Delta_i := G/H_i \times \Gamma_i.$$

Nun ist $\Delta_i^+ \setminus \Delta_i = G \times e$ für $i = 1, 2$ und wir können $\Delta_i^+ \rightarrow T_i^+$ längs der Morphismen $(\Delta_i^+ \setminus \Delta_i \rightarrow T_i^+ \setminus T_i) \cong (G \times e \xrightarrow{\text{triv}} e)$ verkleben und erhalten

$$\bar{\varphi}: \Delta \xrightarrow{/G} T = T_1^+ \#_e T_2^+ = T_1 \# T_2.$$

Offenbar ist Δ zusammenhängend und T ein Katobaum zu einer r -fach punktierten Orbifaltigkeit $\mathcal{S} = \left(\mathbb{P}^1, (\zeta'_{ij}, e_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,r}} \right)$. Lift von $\bar{\varphi}$ gibt eine Orbikarte

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{/G} & \mathcal{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \xrightarrow{/G} & T \end{array}$$

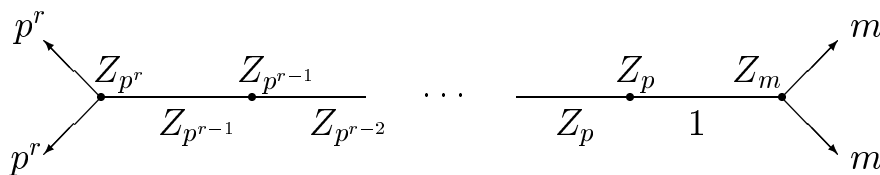
mit einer Mumfordkurve C und Decktransformationsgruppe G .

Bemerkung 6.22. *Es ist offenbar $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ ebenfalls eine zusammenhängende Summe (im üblichen Sinn).*

Eine beliebige zyklische Gruppe schreiben wir als $Z_m \times Z_{p^r}$ mit $\text{ggT}(p, m) = 1$ und verkleben wie eben (und Harbater ursprünglich) die Überlagerungen

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad z \mapsto z^m \quad \text{bzw.} \quad z \mapsto z^{p^r}$$

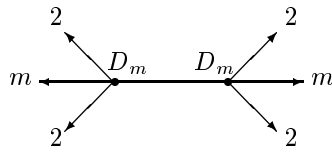
zu



Riemann-Hurwitz ergibt Kartengeschlecht ≥ 2 und wir halten fest:

Satz 6.23. *Jede endliche Gruppe ist mit höherem Geschlecht Mumford-realisiert.*

Beispiel 26. *Die Diedergruppen haben wir übrigens in Beispiel 22 mit Tatekurven realisiert. Die D_m mit m prim zu oder gleich p sind mithilfe von*



mit höherem Geschlecht realisierbar. Dies gibt für die D_{p^r} mit $r > 1$ keine diskontinuierlich einbettbare Graphen von Gruppen. Machen wir das Segment wie bei Z_{p^r} instabil,

$$D_{p^r} \xrightarrow{Z_{p^r}} Z_{p^r} \xrightarrow{Z_{p^{r-1}}} \cdots \xrightarrow{Z_p} Z_p \xrightarrow{1} Z_p \xrightarrow{Z_p} \cdots \xrightarrow{Z_{p^{r-1}}} Z_{p^r} \xrightarrow{Z_{p^r}} D_{p^r}$$

so ist die Welt wieder in Ordnung.

Literatur

- [And02] Yves André. *On a Geometric Description of $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ and a p -adic Avatar of \widehat{GT}* , Preprint math.AG/0203181
- [AndIII] Yves André. *p -adic orbifolds and monodromy*, Kapitel III aus *Period mappings and differential equations. From \mathbb{C} to \mathbb{C}_p* , Tôhoku-Hokkaidô Lectures in Arithmetic Geometry, Preprint math.AG/0203194
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*, Mathematical Surveys and Monographs, Number 33, AMS (1990)
- [Ber99] Vladimir G. Berkovich. *Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. 137, No. 1, 1–84 (1999)
- [Brad98] Patrick Erik Bradley. *Mumfordkurven und Reduktion analytischer Abbildungen*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1998)
- [BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, Reinhold Remmert. *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261, Springer-Verlag, 1984
- [Del89] Pierre Deligne. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over \mathbb{Q} , Publ. Math. Sci. Res. Inst., vol. 16, Springer-Verlag,, 1989, Proc. Workshop, Berkeley/CA (USA) 1987, 79-297
- [dJ95] Aise Johan de Jong. *Étale fundamental groups of non-archimedean analytic spaces*, Compositio Math. 97, 89-118 (1995)
- [Fr93] Michael Fried. *Introduction to MODULAR TOWERS*, in *Recent Developments in the Inverse Galois Problem, Seattle, 1993*, Contemp. Math. 186, 91-171 (1993)
- [FrV91] Michael Fried, Helmut Völklein. *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Math. Ann. 290, 771-800 (1991)
- [Ger81] Lothar Gerritzen. *Zur analytischen Beschreibung des Raumes der Schottky-Mumford-Kurven*, Math. Ann. 255, 259-271 (1981)
- [Gr68] Hans Grauert. *Affinoide Überdeckungen eindimensionaler affinoider Räume*, Publ. Math. IHES 34 (1968)

- [GvP80] Lothar Gerritzen, Marius van der Put. *Schottky Groups and Mumford Curves*, Lecture Notes in Mathematics 817, Springer-Verlag, 1980
- [Har87] David Harbater. *Galois coverings of the arithmetic line*, in *Number Theory: New York, 1984-85*, LNM 1240, 165-195, Springer-Verlag (1987)
- [Her80] Frank Herrlich. *Endlich erzeugbare p -adische diskontinuierliche Gruppen*, Arch. Math., Vol. 35, 505-515 (1980)
- [Her82] Frank Herrlich. *p -adisch diskontinuierlich einbettbare Graphen von Gruppen*, Arch. Math., Vol. 39, 204-216 (1982)
- [Her84] Frank Herrlich. *On the stratification of the moduli space of mumford curves*, Groupes d'étude d'Analyse ultramétrique (Y. Amice, G. Christol, P. Robba) 11e année, 1983/84, no. 18
- [Her85] Frank Herrlich. *Nichtarchimedische Teichmüllerräume*, Habilitationsschrift Bochum (1985)
- [Kat00] Fumiharu Kato. *p -adic Schwarzian triangle groups of Mumford type*, Preprint math.AG/9908174
- [Kie67] R Kiehl. *Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 33, 5-20 (1967)
- [Lüt83] Werner Lütkebohmert. *Ein globaler Starrheitssatz für Mumfordkurven*, J. für reine und angew. Math. 340, 118-139 (1983)
- [Lüt93] Werner Lütkebohmert. *Riemann's existence problem for a p -adic field*, Invent. Math. 111, 309-330 (1993)
- [LS77] Roger Lyndon, Paul Schupp. *Combinatorial Group Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 89, Springer-Verlag, 1977
- [Mum72] David Mumford. *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Mathematica, Vol. 24, Fasc. 2, 129-174 (1972)
- [Ray94] Michel Raynaud. *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Inv. Math. 116, 425-462 (1994)

- [Reid27] Kurt Reidemeister. *Knoten und Gruppen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität 5, 7-23 (1927)
- [Rud92] Walter Rudin. *Functional Analysis*, TATA McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 15. Wiederdruck (1992)
- [Schm01] Gabriela Schmithüsen. *Die Aktion von $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf der algebraischen Fundamentalgruppe von \mathbb{P}^1 ohne drei Punkte*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (2001)
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*, Springer-Verlag, 1980
- [Si94] Joseph H. Silverman. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 151, Springer-Verlag, 1994
- [Ta71] John Tate. *Rigid Analytic Spaces*, Inventiones math. 12, 257–289 (1971)
- [Ul81] Hugo Ullrich. *Zur p -adischen Uniformisierung von Kurven*, Dissertation, Bochum, 1981
- [V96] Helmut Völklein. *Groups as Galois Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 53, Cambridge University Press, 1996
- [vdP80] Marius van der Put. *The Class Group of a One-Dimensional Affinoid Space*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 30, 4, 155–164 (1980)
- [vdP84] Marius van der Put. *Stable Reductions of Algebraic Curves*, Indag. Math. 46, 461–478 (1984)
- [vSt82] Guido van Steen. *Galois Coverings of the Non-Archimedean Projective Line*, Math. Zeitschr. 180, 217-224 (1982)
- [Wew98] Stefan Wewers. *Construction of Hurwitz spaces*, Dissertation, Essen (1998)

Lebenslauf

Geboren wurde ich am 28. September 1969 in Windsor/Ontario, Kanada. Ab 1976 besuchte ich die Grundschule in Pforzheim und ab 1980 das Kepler-Gymnasium Pforzheim. Dort erwarb ich 1989 das Abitur und widmete mich anschließend ein Jahr lang ganz dem Violoncellospiel.

Am 1. Oktober 1990 nahm ich das Studium der Physik an der Universität Karlsruhe auf, erlangte das Vordiplom und wechselte am 1. Oktober 1993 zum Mathematikstudium mit Nebenfach Physik, das ich 1999 mit dem Diplom abschloss.

Es schloss sich 1999 meine Dissertation an, zunächst auf Stipendienbasis und seit 1. Oktober 2000 als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut I an der Universität Karlsruhe.

Am 18. Oktober 1996 ehelichte ich die Violoncellistin Gabriela Beleşică. Seitdem beschäftigen wir uns erfolgreich mit dem Problem der Klangerzeugung auf dem Barockvioloncello.

Am 13. Januar 1999 erblickte unser Sohn Andrei Victor, und am 31. Mai 2001 unsere Tochter Maria Ecaterina das Licht der Welt.