



---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 6918

# **Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile auf Grundlage der Bootstrapmethode**

**K. Heiermann**  
Institut für Materialforschung

Oktober 2003

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft  
Wissenschaftliche Berichte  
FZKA 6918

Konfidenzintervalle für die  
Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer  
Bauteile auf Grundlage der  
Bootstrapmethode

K. Heiermann  
Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2003

**Impressum der Print-Ausgabe:**

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

**ISSN 0947-8620**

# **Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile auf Grundlage der Bootstrapmethode**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau der

Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Phys. Klaus Heiermann**

aus Bergkamen

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 2003

Hauptreferent: Prof. Dr. rer. nat. D. Munz

Korreferentin: Prof. Dr. rer. nat. A. Brückner-Foit

## **Abstract**

### **Reliability Confidence Intervals for Ceramic Components as Obtained from the Bootstrap Method**

Fracture of ceramic components is governed by the multiaxial Weibull theory. Due to the inherent scatter in fracture behaviour of ceramics, strength and lifespan predictions are prone to statistical uncertainty. In this report, a strategy for the assessment of uncertainty in the estimation of the failure probability of ceramic components due to the scatter of material data is presented. Confidence intervals for the failure probability are obtained by means of stochastic re-sampling methods. A considerable computational effort can be saved by using neural networks to calculate the failure probability. The strategy presented in this report may be applied for different purposes: estimation of the reliability of a ceramic component, identification of parameters for an experimental investigation, interpretation of experimental results, and development of a strategy to obtain samples or experimental data.

## **Kurzfassung**

### **Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile auf Grundlage der Bootstrapmethode**

Das Versagensverhalten keramischer Bauteile wird durch die mehrachsige Weibulltheorie beschrieben. Wegen der Streuung können Festigkeits- und Lebensdauervorhersagen nur mit einer statistischen Unsicherheit getroffen werden. In diesem Bericht wird ein Verfahren vorgestellt, welches die Auswirkung des Stichprobenumfangs und der Messgröße zur Bestimmung der Materialparameter auf die statistische Unsicherheit der Ausfallwahrscheinlichkeit quantitativ abschätzen kann. Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit werden durch Simulationsmethoden bestimmt. Die zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit benötigte Rechenzeit kann durch den Einsatz Neuronaler Netze reduziert werden. Das vorgestellte Verfahren kann zu unterschiedlichen Zwecken eingesetzt werden: Bewertung der Zuverlässigkeit von Bauteilen, geeignete Bestimmung von Parametern für experimentelle Untersuchungen, Beurteilung der Aussagekraft von Messungen und Entwicklung von Strategien zur Erhebung von Stichproben oder Durchführung von Messungen.



# Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der verwendeten Symbole	3
<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Versagensverhalten von Keramik</b>	<b>9</b>
1.1 Spontanes Versagen . . . . .	9
1.2 Versagensverhalten mit Berücksichtigung des unterkritischen Risswachstums . . . . .	12
1.3 Bestimmung der Materialparameter . . . . .	13
1.4 Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile . . . . .	16
<b>2 Die nichtparametrische Bootstrapmethode</b>	<b>19</b>
2.1 Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	19
2.2 Durchführung der Bootstrapsimulation . . . . .	20
2.3 Konstruktion von Bootstrapkonfidenzintervallen . . . . .	22
2.4 Realisierung der Bootstrapsimulationen . . . . .	25
<b>3 Neuronale Netze</b>	<b>28</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	28
3.2 Der Lernprozess . . . . .	30
3.3 Aufbereitung von Eingangsdaten . . . . .	31
3.4 Beurteilung der Approximationsqualität eines Netzes . . . . .	33
<b>4 Inhaltliche Einordnung</b>	<b>34</b>
4.1 Zusammenarbeit der Verfahren . . . . .	34
4.2 Übersicht . . . . .	35
4.3 Programmtechnische Anbindung der Bootstrapmethode an das Pro- grammpaket STAU . . . . .	37
4.3.1 Variante mit Verwendung der Neuronalen Netze . . . . .	38
<b>5 Ergebnisse</b>	<b>40</b>
5.1 Festlegung geeigneter Randbedingungen für Versuche zur Bestim- mung der Lebensdauer . . . . .	40
5.1.1 Ausgangssituation und Aufgabe . . . . .	40

5.1.2	Bestimmung des Lastniveaus . . . . .	41
5.1.3	Ergebnisse der statischen Biegeversuche . . . . .	41
5.2	Vergleich und Bewertung von Datenbasen . . . . .	43
5.2.1	Vergleich der Datenbasen in Bezug auf die Zuverlässigkeits- analyse . . . . .	44
5.3	Strategien zur Versuchsführung . . . . .	46
5.3.1	Generierte Stichproben . . . . .	47
5.4	Bestimmung des Umfangs von Stichproben . . . . .	49
5.5	Bauteilbewertung . . . . .	50
5.5.1	Beschreibung des Modells . . . . .	50
5.5.2	Resultate . . . . .	51
5.5.3	Einfluss der Datenbasis auf die Vorhersageunsicherheit . . . . .	52
5.6	Abhängigkeit der Konfidenzintervalle vom Startwert des Zufalls- zahlengenerators . . . . .	53
5.6.1	Schwankung der Bootstrapkonfidenzintervalle . . . . .	54
5.6.2	Approximationsverhalten der Neuronalen Netze . . . . .	54
5.7	Potential zur Rechenzeitersparnis durch den Einsatz Neuronaler Netze . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>58</b>
	<b>Anhang</b>	<b>59</b>
	Berechnung der Normalspannung . . . . .	59
	ML-Schätzer . . . . .	60
	Ergebnisse der Experimente . . . . .	62



# Liste der verwendeten Symbole

Nicht aufgeführt sind physikalische Einheiten und chemische Formeln.

## griechische Bezeichnungen

$\alpha$	1.) Konfidenzniveau 2.) Quantil zur Beurteilung der Approximation
$\beta$	Winkel zur Bestimmung der Rissorientierung
$\delta_{l,p}$	relativer Ausgabefehler des Neuron $l$ beim Trainingsbeispiel $p$
$\Theta_k$	Schwellwert des $k$ -ten Neurons einer Schicht
$\theta$	wahrer Wert eines statistischen Schätzers
$\hat{\theta}$	aus Stichprobe $\mathbf{x}$ ermittelter Wert für den Schätzer $\theta$
$\hat{\theta}^{*b}$	$b$ -te Bootstrapreplikation
$\overline{\hat{\theta}^*}$	arithmetisches Mittel der Bootstrapschätzer $\hat{\theta}^{*b}$
$\theta_\alpha$	$\alpha$ -Quantil zur Verteilung von $\hat{\theta}$
$\theta_{\text{ob}}$ ( $\theta_{\text{un}}$ )	obere (untere) Grenze des Konfidenzintervalls
$\vartheta$	Polarwinkel der Kugelkoordinaten $r, \vartheta, \varphi$
$\kappa$	Parameter zur Steuerung der Interpolationsfähigkeit
$\xi$	Zeitpunkt im Intervall $[0; t]$
$\sigma$	(einachsige) Spannung
$\sigma^*$	eine für die Form einer Probe charakteristische Spannung z. B. Randfaserspannung
$\dot{\sigma}$	Belastungsgeschwindigkeit
$\sigma_0, \hat{\sigma}_0$	Weibullmodul, volumenunabhängig
$\sigma_B$	Bruchspannung, Versagenslast
$\sigma_c$	Sättigungswert der Versagenslast
$\sigma_{ij}$	Komponenten des Spannungstensors
$\sigma_{\text{eq}}$	Äquivalenz- oder Vergleichsspannung
$\sigma_{\text{eq}c}$	kritische Vergleichsspannung
$\sigma_n$	Normalspannung
$\sigma_{\text{un}}$	untere Grenze der Festigkeit
$\tau$	Schubspannung
$\Phi$	Standardnormalverteilung

$\phi_N$	Transformation zur Konstruktion von Konfidenzintervallen
$\varphi$	Azimutwinkel der Kugelkoordinaten $r, \vartheta, \varphi$
$\Psi$	stetige, symmetrische Verteilung
$\psi$	Aktivierungsfunktion der Neuronalen Netze
$\Omega$	Raumwinkel

## lateinische Bezeichnungen

$\mathcal{A}$	Transformationsmatrix auf Kugelkoordinaten
$A^*, A_1^*, A_2^*$	Risswachstumsparameter für montone Last
$A^\dagger$	Risswachstumsparameter für periodische Last
$a$	Risslänge, Fehlergröße
$a_c$	kritische Risslänge
$B, \hat{B}$	Risswachstumsparameter
$b$	1.) Weibullmodul, volumenabhängig 2.) Summationsindex für Bootstrapdatensätze
$\mathbf{d}_p$	$p$ -tes Trainingsbeispiel für Neuronale Netze
$d_{l,p}$	$l$ -tes Element aus $\mathbf{d}_p$
$\mathcal{E}$	zu minimierende Größe beim Training Neuronaler Netze
$F$	1.) Verteilung der Grundgesamtheit 2.) Kraft
$\hat{F}$	empirische Verteilung der Originalstichprobe
$\mathcal{F}$	mittlerer Trainingsfehler zur Beurteilung der Approximation durch Neuronale Netze
$f$	Dichte zur Verteilungsfunktion $F: f(x) = F'(x)$
$g_{ij}$	metrischer Tensor, Metrik
$I$	Zahl der Eingabeneuronen
$J, K$	Zahl der Neuronen einer verdeckten Schicht
$K_I$	Spannungsintensitätsfaktor Modus- $I$ -Belastung
$K_{Ic}$	Risszähigkeit
$K_{Ieq}$	äquivalenter Spannungsintensitätsfaktor Modus- $I$ -Belastung
$K_{\text{Bootstrap}}$	empirische Verteilung der Bootstrapreplikationen
$K_{\text{th}}$	Schwellwert des unterkritischen Risswachstums
$k_{\text{ob}} (k_{\text{un}})$	Anzahl der Werte jenseits der oberen (unteren) Grenze $x_{\text{ob}} (x_{\text{un}})$ bei abgeschnittener Weibullverteilung
$L$	1.) Zahl der Ausgabeneuronen 2.) Likelihoodfunktion
$m, \hat{m}$	Weibullexponent der Festigkeitsverteilung
$m^*$	Weibullexponent der Verteilung der Lebensdauer
$N$	Umfang der gemessenen Stichprobe $\mathbf{x}$
$N_B$	Anzahl der Bootstrapsimulationen

$N_i$	Anzahl der Neuronen in der $i$ -ten Schicht eines Neuronalen Netzes
$N_N$	Anzahl der Neuronen
$N_P$	Anzahl der Trainingsbeispiele
$N_S$	Anzahl der Schichten eines Neuronalen Netzes
$n, n_1, n_2, \hat{n}$	Risswachstumsexponent
$\mathcal{P}$	Wahrscheinlichkeit
$\mathcal{P}_f$	Ausfallwahrscheinlichkeit
$\hat{\mathcal{P}}_f$	mit STAU geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit
$r$	Radius der Kugelkoordinaten $r, \vartheta, \varphi$
$\mathcal{S}$	Integrand bei Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_f$
$s$	Stichprobenfunktion
$\hat{\text{se}}_{\text{boot}}$	Standardabweichung der Bootstrapschätzer $\hat{\theta}^{*b}$
$T$	1.) Gesamtzeit eines Versuchs, Versuchsdauer 2.) Temperatur
$T_{\text{NN}}$	benötigte Rechenzeit eines Neuronalen Netzes für eine Bootstrapsimulation
$T_{\text{STAU}}$	benötigte Rechenzeit von STAU für eine Bootstrapsimulation
$T_{\text{Train}}(N_P)$	Rechenzeit des Trainingsalgorithmus' für ein Neuronales Netz mit $N_P$ Beispielen
$t$	Zeit
$t'$	Zeit (Integrationsvariable)
$t_0$	Weibullmodul der Verteilung der Lebensdauer
$t_{\text{ges NN}}$	insgesamt benötigte Rechenzeit der Neuronalen Netze
$t_{\text{ges STAU}}$	insgesamt benötigte Rechenzeit von STAU
$V$	Bauteilvolumen
$V_0$	Einheitsvolumen
$v_k$	Aktivierung des Neurons
$w_{ij}$	synaptisches Gewicht zwischen dem $i$ -ten Neuron der aktuellen Schicht und dem $j$ -ten Neuron der nächsten Schicht
$\mathbf{x}$	1.) Stichprobe 2.) Eingabetupel für Neuronale Netze
$\mathbf{x}^*, (\mathbf{x}^{\mathbf{b}^*})$	eine ( $b$ -te) durch Bootstrapsimulation gewonnene Stichprobe
$x_i, (x_i^{*b})$	$i$ -tes Element aus $\mathbf{x}$ ( $\mathbf{x}^{\mathbf{b}^*}$ )
$x_{\text{ob}} (x_{\text{un}})$	Wert der oberen (unteren) Grenze bei abgeschnittener Weibullverteilung
$Y$	Geometriefaktor
$\mathbf{y}$	Ausgabetupel für Neuronale Netze
$\mathbf{y}_p$	zum $p$ -ten Trainingsbeispiel gehörendes Ausgabetupel für Neuronale Netze
$y_l, (y_{l,p})$	$l$ -tes Element aus $\mathbf{y}$ ( $\mathbf{y}_p$ )
$z_0$	Größe zur Biaskorrektur von Bootstrapkonfidenzintervallen
$z_\alpha$	$\alpha$ -Quantil einer symmetrischen Verteilung $\Psi: z_\alpha = \Psi^{-1}(\alpha)$



# Einleitung

Herstellungsbedingte Fehler und Sprödigkeit sind die Ursachen für die statistische Streuung der Festigkeit und der Lebensdauer von Komponenten aus keramischen Werkstoffen. Diese Streuung erzwingt die Anwendung statistischer Methoden zur Auslegung von Bauteilen. Statt einer Bauteilfestigkeit oder einer Lebensdauer ist nur die Angabe einer Versagenswahrscheinlichkeit zu einem gegebenen Zeitpunkt möglich. Eine erste phänomenologische Beschreibung des Versagensverhaltens von Ketten durch Weibull [1] auf der Grundlage des Modells des schwächsten Kettengliedes („weakest link theory“) ließ sich auf die Keramik übertragen. Eine Beschreibung des spröden Versagens mit Hilfe der linear-elastischen Bruchmechanik erfolgte durch Batdorf und Crose [2], was die Behandlung mehrachsiger Spannungszustände erlaubte. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Bauteilen unregelmäßiger Geometrie ist bei analytischer Kenntnis der Spannung oder einer geschlossen darstellbaren Näherungslösung möglich [3, 4]. Praktikabel wurde sie durch die Entwicklung von Programmsystemen, welche die zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit erforderliche numerische Integration über den Spannungsverlauf durchführen, und deren Anbindung an Finite Elemente Programme. Zunächst war das an der Universität Karlsruhe und am Forschungszentrum Karlsruhe entwickelte Programm STAU auf die Berechnung der spontanen Ausfallwahrscheinlichkeit komplexer Bauteile unter mehrachsigen Spannungszuständen beschränkt. Die aktuelle Version des Programmpaketes STAU ist in der Lage, das unterkritische Risswachstum, Belastungstests, transiente Last und temperaturabhängige Materialparameter zu berücksichtigen [5]. Allerdings ist es nicht möglich, die statistische Unsicherheit des Ergebnisses aufgrund der Streuung der Materialdaten anzugeben. Die vorliegende Arbeit will daher Verfahren vorstellen, welches für die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils aus Keramik nicht nur eine Zahl, sondern einen Vertrauensbereich liefert. Da die gesetzlichen Bestimmungen in Bezug auf die Qualitätssicherung immer strenger werden, ist es sinnvoll, auch Kenntnisse über die statistische Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeit des zu bewertenden Bauteils zu besitzen. Hierzu wird ein nichtparametrisches Simulationsverfahren, die sogenannte „Bootstrapmethode“, eingesetzt. Dieses Verfahren nutzt nur die Ergebnisse der Experimente, die zur Materialcharakterisierung durchgeführt werden und erfordert insbesondere keine Annahme über die unbekanntete Verteilung der Ausfallwahrschein-

lichkeit. Wie bei allen statistischen Simulationen ist auch hier die Rechenzeit eine kritische Größe, vor allem bei komplexen Anwendungen mit zeitabhängiger thermisch-mechanischer Belastung. Daher liegt es nahe, den Zusammenhang zwischen Materialparametern und Ausfallwahrscheinlichkeit durch Neuronale Netze abzubilden, die in diesem Zusammenhang als extrem flexibles Werkzeug zur Interpolation eingesetzt werden.

Die Arbeit beginnt mit einer Darstellung des in [3], [4] und [5] beschriebenen Verfahrens zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile.

In Kapitel 2 wird die nichtparametrische Bootstrapmethode vorgestellt und gezeigt, wie durch deren Verwendung Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit gewonnen werden können.

In Kapitel 3 werden Neuronale Netze vorgestellt. Dabei wird insbesondere auf das Training und die Qualität der Approximation durch die Neuronalen Netze eingegangen.

In Kapitel 4 wird die Zusammenarbeit der Bootstrapmethode, des Programmpaketes STAU und der Neuronalen Netze und die programmtechnische Realisierung dieses Zusammenwirkens erläutert.

In Kapitel 5 werden Konfidenzintervalle der Ausfallwahrscheinlichkeit angegeben, die aus verschiedenen Datenbasen hervorgehen. Anhand der ermittelten Vorhersageunsicherheit wird eine Strategie zur effizienten und zielgerichteten Erhebung von experimentellen Daten aufgezeigt. Außerdem wird ausführlich auf weitere Zielrichtungen wie die Bauteilbewertung und vergleichende Bewertung von Stichproben eingegangen, zu denen die Bootstrapmethode bei der Bewertung von keramischen Bauteilen eingesetzt werden kann. Weiterhin wird das numerische Verhalten an verschiedenen Beispielen dargestellt, so dass der Arbeitsaufwand bei einer Anwendung abgeschätzt werden kann. Hierbei wird auch deutlich, welches Potential zur Einsparung von Rechenzeit Neuronale Netze bieten.

# Kapitel 1

## Versagensverhalten von Keramik

Die Streuung der mechanischen Eigenschaften keramischer Werkstoffe ist charakteristisch für diese Klasse von Werkstoffen. Eine deterministische Versagensprognose wird diesem Sachverhalt nicht gerecht. Statt dessen kann nur eine Versagenswahrscheinlichkeit für ein Bauteil oder eine Probe angegeben werden, wofür die Anwendung statistischer Methoden und Verfahren bei der Bauteilauslegung erforderlich ist.

### 1.1 Spontanes Versagen

Keramische Bauteile enthalten herstellungsbedingt „Fehler“, wie beispielsweise Poren, Einschlüsse oder Ausscheidungen einer Phase an Korngrenzen. Für die Beschreibung des durch diese Fehler verursachten spontanen Versagens von Keramik hat sich das folgende Modell etabliert [3]:

1. Die Fehler können als bruchmechanische Risse angesehen werden.
2. Die Größe und damit die Festigkeit eines Fehlers ist eine Zufallsgröße im Sinne der Statistik.
3. Die Lage der Fehler im Bauteil ist ebenfalls eine Zufallsgröße und unterliegt einer Gleichverteilung.
4. Die Orientierung der Fehler im Raum oder an der Oberfläche unterliegt ebenfalls einer Gleichverteilung.
5. Die Festigkeiten der einzelnen Fehler sind voneinander statistisch unabhängig.
6. Das Versagen eines Fehlers ist gleichbedeutend mit dem Versagen des gesamten Bauteils.

Durch die Verwendung der linear-elastischen Bruchmechanik (Punkt 1) wird der Zusammenhang zwischen der Fehlergröße oder Risslänge  $a$ , der anliegenden Belastung  $\sigma$ , dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  und der geometrischen Form, die sich im Faktor  $Y$  widerspiegelt, festgelegt:

$$K_I = \sigma Y \sqrt{a} \quad (1.1)$$

Der in Gleichung (1.1) angegebene Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  stellt die Belastungsgröße dar. Versagen erfolgt, wenn die Belastungsgröße einen kritischen Wert  $K_{Ic}$  überschreitet. Bei mehrmodaler Belastung wird die Belastungsgröße  $K_{Ieq}$  über eine einachsige Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$ , die eine zum Modus  $I$  gleichwertige Belastung eines mehrachsigen belasteten Bauteils ist [6], wie folgt definiert:

$$K_{Ieq} = \sigma_{eq} Y \sqrt{a}$$

Ein Überblick über verschiedene Vergleichsspannungskriterien ist in [6, 7, 8] gegeben. Die Vergleichsspannung wird aus der Normalspannung  $\sigma_n$  und der Schubspannung  $\tau$  am Ort des Risses bestimmt, die aus den Hauptspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$  wie in Abb. 1.1 dargestellt hervorgehen:

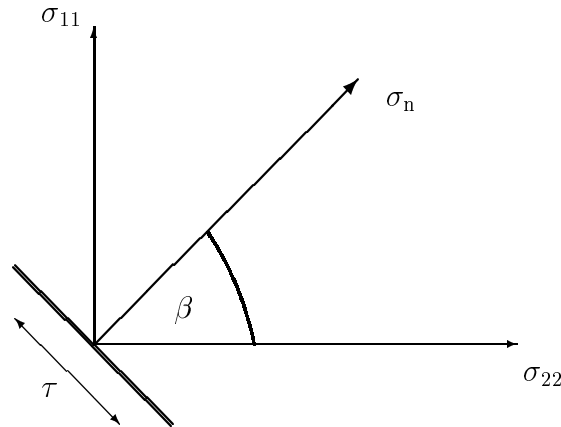


Abb. 1.1: Normal- und Schubspannung am ebenen Riss

Ausdrücke für die Normal- und die Schubspannung werden im Anhang hergeleitet (s. Gl. (7.1) und (7.2)). Untersuchungen haben ergeben, dass keramische Werkstoffe unter mehrmodaler Beanspruchung häufig modus- $I$ -gesteuert, also schubspannungsunempfindlich, versagen [6]. Daher wird in dieser Arbeit das Normalspannungskriterium verwendet. Für die Vergleichsspannung gilt dann:

$$\sigma_{eq} = \sigma_n$$



Als Konsequenz aus Punkt 6 ist der Fehler mit der ungünstigsten Kombination aus Orientierung, Festigkeit und anliegender Vergleichsspannung versagensrelevant. Allgemein versagt ein einzelner Fehler spontan unter mehrachsiger Last, wenn der Spannungsintensitätsfaktor  $K_{Ieq}$  einen kritischen Wert  $K_{Ic}$  überschreitet, d. h.

$$K_{Ieq} \geq K_{Ic} = \sigma_{eq} Y \sqrt{a_c} \quad (1.2)$$

Gleichung (1.2) kann leicht auf zeitabhängige Probleme verallgemeinert werden. Versagen tritt dann ein, wenn die Spannungsintensitätsfaktor  $K_{Ieq}(t)$  zu einem Zeitpunkt  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq t$ ) einen kritischen Wert  $K_{Ic}(t)$  überschreitet.

$$K_{Ieq}(t) \geq K_{Ic} = \sigma_{eq}(t) Y \sqrt{a_c(t)} \quad (1.3)$$

Zu einer gegebenen Last  $\sigma_{eq}(t)$  gehört eine kritische Risslänge  $a_c(t)$  und umgekehrt. Für den Sonderfall einer konstanten Last ergibt sich unmittelbar aus (1.3), dass das Versagen entweder gar nicht oder sofort bei Aufbringung der Last eintritt.

Da Lage, Orientierung und Festigkeit der Fehler einer statistischen Streuung unterliegen (s. S. 9), ist eine deterministische Versagensprognose unmöglich. Da der Fehler mit dem ungünstigsten Spannungsintensitätsfaktor zum Versagen führt, liegt es nahe, mit Hilfe der Extremwertstatistik einen Ausdruck für die Versagenswahrscheinlichkeit herzuleiten. Dazu wird das auf S. 9 vorgestellte Modell um folgende Annahmen über die unbekanntete Verteilung der Fehlerfestigkeit erweitert [3, 5]:

7. Die Anzahl der Fehler im Bauteil ist poissonverteilt.
8. Die Fehlerfestigkeit hat eine untere Grenze  $\sigma_{un} = 0$ .
9. Die Verteilung der Fehlerfestigkeit ist um  $\sigma_{un} = 0$  in eine Taylorreihe entwickelbar und die ersten  $M$  Ableitungen im Punkt  $\sigma_{un} = 0$  sind Null.

Aus der statistischen Theorie der Extremwerte folgt, dass die Verteilung der Fehlerfestigkeit im Anziehungsbereich einer von drei möglichen Grenzverteilungen liegt [9]. Es lässt sich zeigen, dass die Annahmen 8 und 9 eine notwendige Bedingung und ein hinreichendes Kriterium für die Lage im Anziehungsbereich einer Weibullverteilung darstellen [9]. Die Verteilung der Bauteilfestigkeit und damit die Ausfallwahrscheinlichkeit als Grenzverteilung der Fehlerfestigkeit ist somit für den Spezialfall einer homogenen statischen Last durch

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{b} \right)^m \right] \quad (1.4)$$

gegeben [5]. Die Herleitung ist in [5] sehr ausführlich dargestellt, so dass auf eine Wiederholung hier verzichtet werden kann. In anderen Herleitungen [3, 4]

wird die im Vergleich zu Punkt 9 einschränkende Annahme getroffen, die Verteilung der Risslänge unterliege einer Paretoverteilung. Die Parameter  $m$  und  $b$  werden als Weibullexponent bzw. Weibullmodul bezeichnet. Diese Parameter beschreiben die statistische Unsicherheit der Ausfallwahrscheinlichkeit. Vor der Verallgemeinerung von (1.4) auf inhomogene und zeitabhängige Lastfälle, sollen noch der Mechanismus des unterkritischen Risswachstums und die Bestimmung der Materialparameter diskutiert werden.

## 1.2 Versagensverhalten mit Berücksichtigung des unterkritischen Risswachstums

Die natürlichen, durch den Herstellungsprozess entstandenen Fehler können im Betrieb, auch unter konstanter Last, „wachsen“, d. h. länger werden bzw. an Festigkeit verlieren. Dieser Mechanismus wird als unterkritisches Risswachstum bezeichnet und kann die Lebensdauer eines keramischen Bauteils erheblich mindern. Experimentell hat sich gezeigt, dass die Risswachstumsgeschwindigkeit  $\frac{da}{dt}$  nur vom Spannungsintensitätsfaktor der Modus- $I$ -Belastung  $K_I = \sigma \sqrt{a} Y$  abhängt:

$$\frac{da}{dt} = f(K_I)$$

Graphisch sehen die sogenannten  $\frac{da}{dt}$ - $K$ -Kurven wie folgt aus:

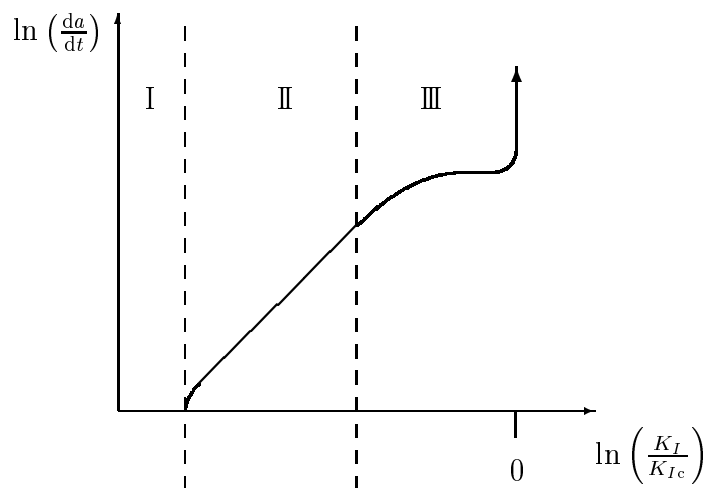


Abb. 1.2:  $\frac{da}{dt}$ - $K$ -Kurve in doppelt-logarithmischer Darstellung

Im Bereich I in Abb. 1.2 findet kein unterkritisches Risswachstum statt, da der

Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  unterhalb eines Schwellwertes  $K_{th}$  liegt. Die Existenz eines solchen Schwellwertes wurde bisher nur für Glas nachgewiesen, welches dasselbe Versagensverhalten zeigt. Bei Keramiken ist Bereich I im Allgemeinen nicht nachweisbar.

Im Bereich III in Abb. 1.2 breitet sich der Riss instabil aus bzw. ein Versagen steht unmittelbar bevor. Für die Beschreibung des Versagensverhaltens ist daher in erster Linie der Bereich II in Abb. 1.2 von Bedeutung. Aus dem linearen Verlauf im Bereich II folgt, dass dort das Risswachstum durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann:

$$\frac{da}{dt} = A^* \cdot \left( \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^n \quad (1.5)$$

Durch Integration von (1.5) lässt sich eine Bedingung für das Versagen nach unterkritischem Risswachstum ableiten [5]. Für  $n \neq 2$  gilt:

$$a(t) \geq a_c(t) = \left[ \left( \frac{\sigma_{eq}(t) Y}{K_{Ic}} \right)^{n-2} + \frac{(n-2) A^* Y^n}{2 K_{Ic}^n} \int_0^t \sigma_{eq}^n(\xi) d\xi \right]^{\frac{2}{2-n}} \quad (1.6)$$

Das Integral in (1.6) beschreibt die Rissverlängerung infolge der Belastung. Man kann die Bedingung für das Versagen eines Risses auch mit Hilfe der Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  ausdrücken. Eine Umrechnung mit Gl. (1.3) ergibt:

$$\sigma_{eq}(t) \geq \sigma_c(t) = \left[ \sigma_{eq}^{n-2}(t) + \frac{(n-2) A^* Y^2}{2 K_{Ic}^2} \int_0^t \sigma_{eq}^n(\xi) d\xi \right]^{\frac{1}{n-2}} \quad (1.7)$$

Der Vorfaktor des Integrals in (1.7) wird mit  $\frac{1}{B}$  bezeichnet:

$$B = \frac{2 K_{Ic}^2}{A^* Y^2 (n-2)}$$

$B$  enthält mit der Risszähigkeit  $K_{Ic}$ , dem Geometriefaktor  $Y$  und dem Parameter  $A^*$  alle Informationen über den Riss und das Material. Die Parameter  $B$  und  $n$  werden als „Parameter des unterkritischen Risswachstums“ oder als Risswachstumsparameter bezeichnet.

### 1.3 Bestimmung der Materialparameter

Die Festigkeit eines keramischen Werkstoffes wird durch die Weibullparameter der Inertfestigkeit beschrieben. Das Versagensverhalten eines keramischen Werkstoffes lässt sich sowohl durch die Weibullparameter der Lebensdauer als auch durch die in Abschnitt 1.2 definierten Risswachstumsparameter charakterisieren. Die in

dieser Arbeit zur Verfügung stehenden Messwerte wurden im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 483 „Hochbeanspruchte Gleit- und Friktionssysteme aus Basis ingenieurkeramischer Werkstoffe“<sup>1</sup> der Universität Karlsruhe (TH) und des Forschungszentrums Karlsruhe zur Charakterisierung der Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Keramik F99,7 des Herstellers Friatec erhoben. Die Bestimmung der Materialparameter erfolgte durch dynamische und statische Vierpunktbiegeversuche. Die Versuche wurden am Institut für Werkstoffkunde I<sup>2</sup> der Universität Karlsruhe und am Zentrallaboratorium des Institutes für Keramik im Maschinenbau<sup>3</sup>, ebenfalls Universität Karlsruhe, durchgeführt.

Die Bestimmung der Weibullparameter  $m$  und  $b$  erfolgt durch dynamische Biegeversuche bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten im Bereich des Plateaus (s. Abb. 1.3). Die Bestimmung der Risswachstumsparameter aus statischen Biegeversuchen mit dem Lastniveau  $\sigma$  erfolgt mit der Maximum-Likelihood-Methode für die Weibullverteilung [10], da die Lebensdauer wie die Festigkeit einer Weibullverteilung unterliegt [3, 8]. Die Weibullparameter der Lebensdauerverteilung werden mit  $m^*$  und  $t_0$  bezeichnet:

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{t_0} \right)^{m^*} \right]$$

$m^*$  und  $t_0$  werden aus einer Messung, bestehend aus dreißig Proben, bestimmt. Die Umrechnung in die gebräuchlichen Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  erfolgt durch [3]:

$$m^* = \frac{m}{n - 2} \quad \text{und} \quad t_0 = \frac{B b^{n-2}}{\sigma^n} \quad (1.8)$$

Bei Versuchen zur Bestimmung der Lebensdauer kommt es vor, dass einerseits Proben unmittelbar nach Aufbringung der Last versagen und andererseits Proben ohne Versagen die gesamte Versuchsdauer überstehen. Die Berücksichtigung dieser sogenannten „Sofortbrüche“ und „Durchläufer“ bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Die Anzahl der Durchläufer wird mit  $k_{ob}$  und die Gesamtversuchsdauer mit  $x_{ob}$  bezeichnet. Die Anzahl der Sofortbrüche bezeichnet man mit  $k_{un}$  und eine im Vergleich zur Versuchsdauer sehr kurze Zeitspanne, in der die Effekte der Lastaufbringung abklingen, mit  $x_{un}$ . Eine innerhalb dieser Zeitspanne versagende Probe gilt als Belastungs- oder Sofortbruch. In diesem etwas komplizierteren Falle gilt für die Weibullparameter  $m^*$  und  $t_0$  [3, 10]:

$$t_0 = \left[ \frac{1}{N + k_{un}} \left( \sum_{i=1}^N x_i^{m^*} + k_{ob} x_{ob}^{m^*} + \frac{1}{2} k_{un} x_{un}^{m^*} \right) \right]^{\frac{1}{m^*}} \quad (1.9)$$

<sup>1</sup>im folgenden kurz als „SFB 483“ bezeichnet

<sup>2</sup>im folgenden kurz als „IWK I“ bezeichnet

<sup>3</sup>im folgenden kurz als „IKM-ZL“ bezeichnet

und

$$0 = \sum_{i=1}^N \ln x_i + k_{\text{un}} \ln x_{\text{un}} + \frac{N}{m^*} - (N + k_{\text{un}}) \frac{\sum_{i=1}^N x_i^{m^*} \ln x_i + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^{m^*} \ln x_{\text{ob}} + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^{m^*} \ln x_{\text{un}}}{\sum_{i=1}^N x_i^{m^*} + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^{m^*} + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^{m^*}} \quad (1.10)$$

Die Ausdrücke sind im Anhang (Abschnitt 7.2 auf Seite 60ff) hergeleitet. Bei Versuchen zur Bestimmung der Inertfestigkeit treten keine Sofortbrüche und Durchläufer auf, und in den Gleichungen (1.9) und (1.10) ist  $t_0$  durch  $b$  und  $m^*$  durch  $m$  zu ersetzen. Außerdem bezeichnen die  $x_i$  in diesem Falle keine Zeitpunkte, zu denen ein Versagen stattgefunden hat, sondern Versagensspannungen. Zur Bestimmung der Risswachstumsparameter im dynamischen Vierpunktbiegeversuchen wurden drei verschiedene niedrige Belastungsgeschwindigkeiten gewählt. Pro Belastungsgeschwindigkeit liegt eine Stichprobe vom Umfang fünfzehn vor. Der Einfluss des unterkritischen Risswachstums hängt sehr stark von der Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$  ab. Bei niedrigen Belastungsgeschwindigkeiten haben die Risse ausreichend Zeit zu wachsen, und das Bauteil versagt bei einer vergleichsweise geringen Last. Bei großen Belastungsgeschwindigkeiten hingegen tritt Versagen ein, bevor sich die Risse merklich verlängern konnten. Daher ist die Versagensspannung  $\sigma_B$  in diesem Bereich von der Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$  unabhängig. Der vom unterkritischen Risswachstum beeinflusste Bereich erscheint in Abb. 1.3 als linearer Verlauf, der Bereich hoher Belastungsgeschwindigkeiten als Sättigungswert  $\sigma_c$  [3].

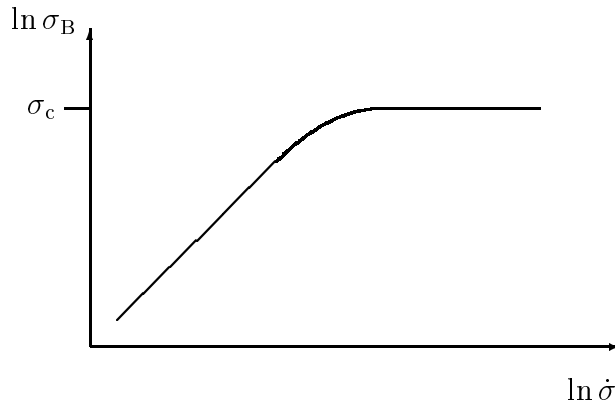


Abb. 1.3: Abhängigkeit der Versagensspannung  $\sigma_B$  von der Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$  in doppelt-logarithmischer Darstellung

Die Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  werden aus der Steigung und dem Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden durch die Mediane der Versuchsreihen bestimmt, die bei geringen Belastungsgeschwindigkeiten gemessen wurden [3]. Es gilt:

$$\ln \sigma_B = \frac{1}{n+1} \ln \dot{\sigma} + \frac{1}{n+1} \ln [(n+1) B \sigma_c^{n-2}] \quad (1.11)$$

Diese Auswertung ist nur korrekt, wenn (1.5) gilt. Die Weibullparameter der Inertfestigkeit werden aus der Versuchsreihe bestimmt, die bei einer Belastungsgeschwindigkeit im Sättigungsbereich gemessen wurde. Damit liegen Ausdrücke für die Materialparameter  $m$ ,  $b$ ,  $n$  und  $B$  vor. Die Streuung der mechanischen Eigenschaften und der grundsätzliche Stichprobencharakter von Messungen hat zur Konsequenz, dass die Gleichungen (1.8) – (1.11) statistische Schätzer zur Bestimmung der Materialparameter darstellen, die somit einer statistischen Streuung unterliegen.

Diese Überlegungen behandeln nur Lastfälle, in denen der Rissfortschritt durch (1.5) beschrieben werden kann, also Fälle mit konstanter oder monotoner Belastungsgeschwindigkeit. Das Risswachstum bei periodischen oder schwingenden Beanspruchungen wird durch

$$\frac{da}{dN} = A^\dagger \cdot \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \right)^n$$

beschrieben, was im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wird. Dabei bezeichnen  $N$  die Zahl der Lastwechsel und  $\Delta K_I$  die sogenannte Schwingbreite.

## 1.4 Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile

In diesem Abschnitt werden die Ausdrücke für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit, also die Verallgemeinerungen von (1.4) auf allgemeine Lastfälle, angegeben und kurz diskutiert. Die spontane Ausfallwahrscheinlichkeit eines keramischen Bauteils unter mehrachsiger Last ist gegeben durch [3]:

$$\mathcal{P}_f = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^m d\Omega dV \right] \quad (1.12)$$

$V_0$  bezeichnet das Einheitsvolumen. Die Integration in (1.12) geht über das Bauteilvolumen  $V$  (Volumenintegral) und die Rissorientierung  $\Omega$ . In Gleichung (1.12) bezeichnet  $\sigma_0$  den volumenunabhängigen Weibullparameter, der sich aus  $b$  wie folgt ergibt:

$$\sigma_0 = b \left[ \frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma^*} \right)^m d\Omega dV \right]^{\frac{1}{m}} \quad (1.13)$$

$\sigma^*$  ist die maximale Randfaserspannung der Vierpunktbiegeprobe oder, falls  $b$  mit einer anderen Versuchsanordnung bestimmt wird, eine für die jeweilige Proben-geometrie charakteristische Spannung. In jedem Fall ergibt sich durch (1.13) der geometrieunabhängige Weibullparameter  $\sigma_0$ , eine Materialkenngröße, die nicht mehr von der Versuchsanordnung oder der Probengeometrie abhängt, mit der  $b$  bestimmt wurde [3, 5]. Eine Verallgemeinerung auf zeitabhängige Lasten mit Berücksichtigung des unterkritischen Risswachstums ergibt folgenden Ausdruck für die Ausfallwahrscheinlichkeit [5]:

$$\mathcal{P}_f(t) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{S} \, d\Omega \, dV \right] \quad (1.14)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{S} = \left( \max_{\xi \in [0; t]} \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(\xi)}{\sigma_0} \right)^{n-2} + \frac{\sigma_0^2}{B} \int_0^{\xi} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(t')}{\sigma_0} \right)^n dt' \right]^{\frac{1}{n-2}} \right\} \right)^m$$

Der Integrand  $\mathcal{S}$  in (1.14) ist Ausdruck für die kritische Spannung aus Gl. (1.7), versehen mit einer Maximumsbildung über die Zeit. Diese ist notwendig, da für das Versagen jeweils die maximale an einem Ort im Intervall  $[0; t]$  erfahrene kritische Spannung maßgeblich ist. Dadurch wird die Ausfallwahrscheinlichkeit eine monoton wachsende Größe. Der Ausdruck

$$\frac{\sigma_0^2}{B} \int_0^{\xi} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(t')}{\sigma_0} \right)^n dt' \quad (1.15)$$

repräsentiert den Einfluss des unterkritischen Risswachstums. Für den Fall, dass dieses unberücksichtigt bleibt, reduziert sich der Integrand  $\mathcal{S}$  auf

$$\max_{\xi \in [0; t]} \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(\xi)}{\sigma_0} \right)^m \right] \right\}$$

Dieser Ausdruck beschreibt den Anteil der spontanen Ausfallwahrscheinlichkeit unter zeitabhängiger Last. Gleichung (1.14) drückt die Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_f$  von den Schätzern für die Materialparameter  $m$ ,  $\sigma_0$ ,  $n$  und  $B$ , die einer statistischen Streuung unterliegen, aus. Die Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit von den Randbedingungen, vom Lastfall und von der Bauteilgeometrie sind deterministischer Natur und werden in diesem Zusammenhang festgehalten und nicht weiter beachtet. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist aufgrund der Abhängigkeit von den Materialparametern eine Zufallsvariable. Gleichung (1.14) stellt deshalb in Verbindung mit (1.8) – (1.11) einen statistischen

Punktschätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_f$  dar. Es gilt:

$$\hat{\mathcal{P}}_f(t) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{S} \, d\Omega \, dV \right] \quad (1.16)$$

$$\text{mit } \mathcal{S} = \left( \max_{\xi \in [0;t]} \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(\xi)}{\hat{\sigma}_0} \right)^{\hat{n}-2} + \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{B}} \int_0^{\xi} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}(t')}{\hat{\sigma}_0} \right)^{\hat{n}} dt' \right]^{\frac{1}{\hat{n}-2}} \right\} \right)^{\hat{m}}$$

Dabei sind  $\hat{m}$ ,  $\hat{\sigma}_0$ ,  $\hat{n}$  und  $\hat{B}$  die statistischen Schätzer für die Materialparameter. Im folgenden werden die Akzente bei den Materialparametern  $m$ ,  $\sigma_0$ ,  $n$  und  $B$  nicht mehr verwendet. Der Punktschätzer  $\hat{\mathcal{P}}_f$  unterliegt einer statistischen Verteilung, die zunächst unbekannt ist. In Abschnitt 2.1 wird darauf genauer eingegangen.



# Kapitel 2

## Die nichtparametrische Bootstrapmethode

Die nichtparametrische Bootstrapmethode ist ein verteilungsfreies statistisches Verfahren zur Schätzung eines Funktionals  $s$ , etwa für den Mittelwert, einer Verteilungsfunktion  $F$  durch das entsprechende Funktional der empirischen Verteilungsfunktion  $\hat{F}$  einer Stichprobe. Die Realisierung erfolgt durch eine spezielle Form der Monte-Carlo-Simulation. Da dieses Verfahren in dieser Arbeit zur Bestimmung von Konfidenzintervallen eingesetzt wird, wird auf letztere vor der Erläuterung der Bootstrapmethode genauer eingegangen.

### 2.1 Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit

Die statistische Verteilung des Schätzers  $\hat{\mathcal{P}}_f$  für die Ausfallwahrscheinlichkeit hängt nicht nur von der Unsicherheit der Materialparameter, sondern auch vom Lastfall, der Geometrie und den Randbedingungen ab. Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren zur Bestimmung der Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit zu etablieren und erstmals anzuwenden.

Grundproblem bei der Bestimmung von Konfidenzintervallen zu einem gegebenen Konfidenzniveau  $\alpha$  ist die Bestimmung der unteren und oberen Grenzen  $\theta_{\text{un}}$  und  $\theta_{\text{ob}}$ , so dass

$$\mathcal{P} \{ \theta_{\text{un}} \leq \theta \leq \theta_{\text{ob}} \} = 1 - 2\alpha \quad (2.1)$$

gilt. In Gl. 2.1 bezeichnet  $\theta$  den (häufig nicht bekannten) wahren Wert für den Schätzer  $\hat{\theta}$ . Das von  $\theta_{\text{un}}$  und  $\theta_{\text{ob}}$  gebildete Intervall enthält den wahren Wert  $\theta$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - 2\alpha$ , wenn eine Stichprobe erhoben und das Intervall bestimmt wird [11]. Dabei sind die Intervallgrenzen  $\theta_{\text{un}}$  und  $\theta_{\text{ob}}$  Zufallsgrößen. Sie und die Intervalllänge hängen also von der Stichprobe ab, mit

der  $\theta_{\text{un}}$  und  $\theta_{\text{ob}}$  bestimmt werden [12]. Im Allgemeinen beschränkt man sich auf symmetrische Konfidenzintervalle. In diesem Falle gilt:

$$\mathcal{P} \{ \theta > \theta_{\text{ob}} \} = \mathcal{P} \{ \theta < \theta_{\text{un}} \} = \alpha$$

Konfidenzintervalle lassen sich einfach bestimmen, wenn die Verteilung der Stichprobenfunktion bekannt ist. Eine Verteilungsannahme für den Schätzer  $\hat{\mathcal{P}}_f$  ist höchst spekulativ. Zur Schätzung von Konfidenzintervallen für  $\mathcal{P}_f$  ist man daher auf die Ausnutzung nichtparametrischer Simulationsverfahren angewiesen [13]. Das Simulationsverfahren soll unabhängig von Lastfall, Geometrie, Randbedingungen und Streuung der Materialparameter auf dem Rechner laufen. Bevor die Bestimmung der Konfidenzintervalle in Abschnitt 2.3 aufgegriffen wird, soll die in dieser Arbeit verwendete nichtparametrische Bootstrapsmethode vorgestellt werden:

## 2.2 Durchführung der Bootstrapsimulation

Die nichtparametrische Bootstrapsmethode [14, 15] gehört zur Klasse der sogenannten „Resamplingverfahren“, bei denen durch Simulation mit einem Zufallszahlengenerator neue, sogenannte „Bootstrapsstichproben“  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$  nach einer vorgegebenen Verteilung  $F$  erzeugt werden. Diese neu erzeugte Stichprobe wird mit demselben Stichprobenfunktional  $s$  ausgewertet wie die Originalstichprobe  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ :

$$\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*)$$

Mit  $\hat{\theta}^*$  wird also der Wert von  $s$  für die Realisierung  $\mathbf{x}^*$  bezeichnet. Für den Schätzer  $\hat{\theta}$ , der sich aus der Originalstichprobe ergibt, gilt:

$$\hat{\theta} = s(\mathbf{x})$$

Ziel ist es, Informationen über die Verteilung des Schätzers  $\hat{\theta}$  zu erhalten. Speziell bei der nichtparametrischen Bootstrapsmethode wird jede Bootstrapsstichprobe  $\mathbf{x}^*$  durch  $N$ -maliges *Ziehen mit Zurücklegen* aus der Originalstichprobe generiert.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Originalstichprobe $\mathbf{x}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Realisierung einer Simulation $\mathbf{x}^*$	0	0	3	1	2	1	0	1	0	2	0	2	0	2	1

Tab. 2.1: Beispiel für eine Bootstrapsimulation

Das entspricht einer Simulation aus der Originalstichprobe  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ , wobei jedem  $x_i$  die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{N}$  zugeordnet wird. Jede Bootstrapstichprobe enthält also ausschließlich Elemente  $x_i^*$ , die auch schon in der Originalstichprobe  $\mathbf{x}$  enthalten sind, allerdings nicht notwendig alle, dafür jedoch i. a. einige mehrfach. Tabelle 2.1 zeigt ein Beispiel für ein Simulationsergebnis  $\mathbf{x}^*$  aus einer Stichprobe  $\mathbf{x}$  vom Umfang  $N = 15$ . Bei der Erzeugung von  $\mathbf{x}^*$  wurden also  $x_1$  und  $x_2$  gar nicht gezogen,  $x_3$  dreimal,  $x_4$  einmal usw. Der Umfang der Stichproben  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}^*$  beträgt in beiden Fällen  $N = 15$ . Ein Grundgedanke der Methode ist der Verzicht auf eine Annahme über die Verteilung  $F$  der Grundgesamtheit, der die Stichprobe  $\mathbf{x}$  entstammt. Mit einer solchen Annahme ließe sich die Verteilung des Schätzers  $\hat{\theta}$  analytisch oder zumindest numerisch bestimmen. Eine solche Annahme wäre in den meisten Fällen sehr hypothetisch und einschränkend. Als Schätzer für die Verteilung  $F$  der Grundgesamtheit dient die empirische Verteilung  $\hat{F}$ , nach der die neuen Stichproben generiert werden. Die empirische Verteilung der Originalstichprobe  $\hat{F}$  dient als nichtparametrischer Schätzer für die unbekannte Verteilung  $F$  der Grundgesamtheit.

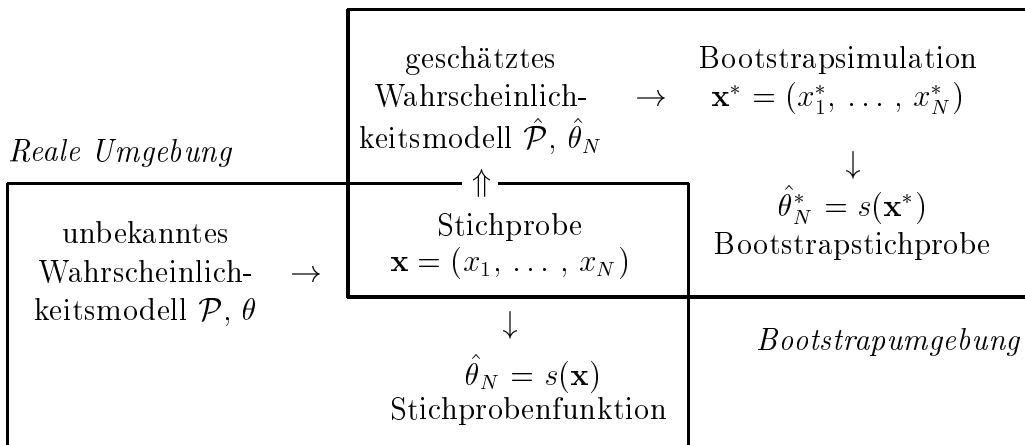


Abb. 2.1: Schematische Darstellung der Bootstrapsmethode nach Efron & Tibshirani [14]

Die empirische Verteilung  $\hat{F}$  der Originalstichprobe wird als die Realisierung mit der größten Beobachtungswahrscheinlichkeit betrachtet. Die Verwendung von  $\hat{F}$  als nichtparametrischen Maximum-Likelihood-Schätzer für  $F$  ist der Kernpunkt der nichtparametrischen Bootstrapsmethode. Durch ihn wird aus der Originalstichprobe  $\mathbf{x}$  ein Schätzer  $\hat{F}$  der Grundgesamtheit  $F$  konstruiert. Diese Vorgehensweise zur Erzeugung von Bootstrapstichproben  $\mathbf{x}^{*b}$  ( $b = 1, \dots, N_B$ ) ist charakteristisch für die Methode und gab ihr ihren Namen. Die Übertragung von Aussagen von der Originalstichprobe  $\mathbf{x}$  auf die Grundgesamtheit  $F$  erfolgt durch

Generierung und Auswertung von  $N_B$  Bootstrapstichproben  $\mathbf{x}^{*b}$ , ( $b = 1, \dots, N_B$ ). Die Verteilung des Schätzers  $\hat{\theta}$  bzw. Konfidenzintervalle für diesen werden aus der empirischen Verteilung der Bootstrapschätzer  $\hat{\theta}^{*b}$  bestimmt. Abschnitt 2.3 wird sich mit dieser Thematik befassen. Eine schematische Darstellung der Bootstraphmethode ist in Abb. 2.1 gegeben.

## 2.3 Konstruktion von Bootstrapkonfidenzintervallen

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion von Konfidenzintervallen aus den Ergebnissen der Bootstrapsimulation vorgestellt. Gegeben sei hierzu ein Konfidenzniveau  $\alpha$ , für das ein zweiseitiges Konfidenzintervall konstruiert wird. Die gewünschte Überdeckungswahrscheinlichkeit ist also  $1 - 2\alpha$ . In dieser Arbeit werden einheitlich 90%-Konfidenzintervalle verwendet, d. h.  $\alpha = 0,05$ . Wenn  $s$  einer Normalverteilung unterliegt, erhält man ein Konfidenzintervall durch Bildung des arithmetischen Mittels

$$\bar{\hat{\theta}}^* = \frac{1}{N_B} \sum_{b=1}^{N_B} \hat{\theta}^{*b} = \frac{1}{N_B} \sum_{b=1}^{N_B} s(\mathbf{x}^{*b})$$

und der Standardabweichung

$$\hat{\text{se}}_{\text{boot}} = \sqrt{\frac{1}{N_B - 1} \sum_{b=1}^{N_B} [s(\mathbf{x}^{*b}) - \bar{\hat{\theta}}^*]^2}$$

der Bootstrapreplikationen  $\hat{\theta}^{*b}$ :

$$\begin{aligned} \theta &\in \left[ \bar{\hat{\theta}}^* + z_\alpha \cdot \hat{\text{se}}_{\text{boot}} ; \bar{\hat{\theta}}^* - z_\alpha \cdot \hat{\text{se}}_{\text{boot}} \right] \\ &= \left[ \bar{\hat{\theta}}^* - 1,645 \cdot \hat{\text{se}}_{\text{boot}} ; \bar{\hat{\theta}}^* + 1,645 \cdot \hat{\text{se}}_{\text{boot}} \right] \\ z_\alpha &= \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0,05) \approx -1,645 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Der Konstruktion in (2.2) liegt die Annahme einer Normalverteilung  $\Phi$  der Bootstrapreplikationen  $\hat{\theta}^{*b}$  zugrunde. Will oder kann man eine derartige Annahme nicht treffen, erfolgt eine Bestimmung des Konfidenzintervalls aus der empirischen Verteilung  $K_{\text{Bootstrap}}$  der Bootstrapreplikationen [14, 15]:

$$\theta \in \left[ K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(\alpha) ; K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(1 - \alpha) \right] \quad (2.3)$$

Der Konstruktion in (2.3) liegt keine Verteilungsannahme zugrunde. Sie beruht auf der in Abschnitt 2.2 diskutierten Annahme, dass die empirische Verteilung  $\hat{F}$  der Originalstichprobe  $\mathbf{x}$  ein Schätzer für die unbekannte Verteilung  $F$  der

Grundgesamtheit ist. Die Intervallgrenzen in (2.2) und in (2.3) sind jeweils die  $\alpha$ - bzw.  $(1 - \alpha)$ -Quantile der zugrundegelegten Verteilung.

Die empirischen Konfidenzintervalle kann man durch eine sogenannte „Biaskorrektur“ modifizieren [15]. Zur Konstruktion dieser „biaskorrigierten“ Konfidenzintervalle nimmt man an, es existiere eine monoton steigende Transformation  $\phi_N(x)$ , so dass

$$\mathcal{P}\{\phi_N(\hat{\theta}_N) - \phi_N(\theta) + z_0 \leq x\} = \Psi(x) \quad (2.4)$$

für alle möglichen Verteilungen gilt. In Gl. (2.4) ist  $\Psi$  eine stetige, symmetrische Verteilung, häufig die Standardnormalverteilung  $\Phi$ , und der von  $F$  und  $N$  abhängige Summand  $z_0$  ein Korrekturterm zur Biaskorrektur. Die Transformation  $\phi_N(x)$  bewirkt, dass die Intervalle nach (2.2) und (2.3) nahezu deckungsgleich werden [14]. Außerdem hat sie im Falle  $\Psi = \Phi$  eine Normierung und eine Varianzstabilisierung [15] zur Folge. Gleichung (2.4) gilt exakt, falls  $\phi_N(s)$  der Verteilung  $\Psi$  mit dem Mittelwert  $\phi_N(\hat{\theta}_N) - z_0$  unterliegt. Zur Konstruktion von Konfidenzintervallen benötigt man das  $\alpha$ - und das  $1 - \alpha$ -Quantil. Für das  $\alpha$ -Quantil  $\theta_\alpha$  gilt:

$$\theta_\alpha = \phi_N^{-1}(\phi_N(\hat{\theta}_N) + z_0 + z_\alpha) \quad (2.5)$$

mit  $z_\alpha = \Psi^{-1}(\alpha)$ . Wenn (2.4) auch für  $\hat{F}$  gilt, erhält man

$$K_{\text{Bootstrap}}(\hat{\theta}_N) = P\{\phi_N(\hat{\theta}_N^*) - \phi_N(\hat{\theta}_N) + z_0 \leq z_0\} = \Psi(z_0)$$

Damit wird auch die Bedeutung von  $z_0$  klar:

$$z_0 = \Psi^{-1}(K_{\text{Bootstrap}}(\hat{\theta}_N)) \quad (2.6)$$

was durch Abbildung 2.2 veranschaulicht wird.

Die Größe  $z_0$  ist das Maß für die sogenannte „Biaskorrektur“, die das Konfidenzintervall verschiebt. Richtung und Betrag der Verschiebung hängen von der Lage des Schätzers aus der Originalprobe ab. Sind die Ergebnisse der Bootstrapsimulationen mehrheitlich größer als der Schätzer aus der Originalprobe, gilt  $z_0 < 0$ . Dann werden die Simulationsergebnisse  $\hat{\theta}_N^{*b}$  als tendenziell zu groß interpretiert, und das Intervall wird zu kleineren Werten verschoben. Aus Gleichung (2.4) und der Symmetrie von  $\Psi$  erhält man [15]

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \Psi(-z_\alpha) \\ &= \Psi(\phi_N(\hat{\theta}_N) - \phi_N(\theta_\alpha) + z_0) \\ &= P\{\phi_N(\hat{\theta}_N^*) - \phi_N(\hat{\theta}_N) \leq \phi_N(\hat{\theta}_N) - \phi_N(\theta_\alpha)\} \\ &= P\{\hat{\theta}_N^* \leq \phi_N^{-1}(\phi_N(\hat{\theta}_N) - z_0 - z_\alpha)\} \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass

$$\phi_N^{-1}(\phi_N(\hat{\theta}_N) - z_0 - z_\alpha) = K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(1 - \alpha)$$

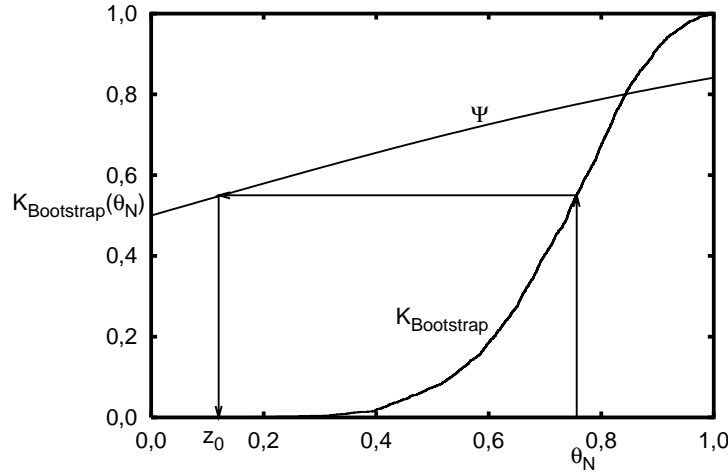


Abb. 2.2: Bestimmung der Korrekturgröße  $z_0$

gilt. Man ersetzt nun das Konfidenzniveau  $\alpha$  durch beliebige  $0 < x < 1$  und erhält:

$$K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(x) = \phi_N^{-1}(\phi_N(\hat{\theta}_N) - \Psi^{-1}(x) - z_\alpha)$$

woraus sich zusammen mit der Definition von  $\theta_\alpha$  (s. Gl. (2.5))

$$\theta_\alpha = K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(\Psi(z_\alpha + 2z_0))$$

ergibt. Als Konfidenzintervall erhält man konsequenterweise als Verallgemeinerung von (2.3)

$$\theta \in [K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(\Psi(2z_0 + z_\alpha)); K_{\text{Bootstrap}}^{-1}(\Psi(2z_0 - z_\alpha))] \quad (2.7)$$

mit  $-z_{1-\alpha} = z_\alpha < 0$  wegen der Symmetrie von  $\Psi$  und wegen  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Mit dieser Konstruktion ist aus der empirischen Verteilung der Bootstrapsimulationen durch Bestimmung der Quantile für  $\alpha_{\text{unten}}$  und  $\alpha_{\text{oben}}$  ein Konfidenzintervall entstanden. Aus Gl. (2.7) geht hervor, dass das Konfidenzintervall ohne „Biaskorrektur“, also für  $z_0 = 0$  gerade das empirische Konfidenzintervall der Verteilung der Bootstrapreplikationen ist. Der Schätzer  $\hat{\theta}_N$  aus der Originalstichprobe bestimmt Betrag und Richtung der „Biaskorrektur“ nach Gl. (2.6). Die „Biaskorrektur“ ist nur durch den in Abschnitt 2.2 beschriebenen und in Abb. 2.1 skizzierten Übergang möglich geworden, da zur „Biaskorrektur“ der „wahre Wert“ der Zielgröße  $\theta$  benötigt wird. In der „realen Umgebung“ (s. Abb. 2.1) sind weder  $\theta$  noch  $F$  bekannt. Man erhält lediglich einen Schätzer  $\hat{\theta}_N$  aus der Stichprobe  $\mathbf{x}$ . Der Übergang zur „Bootstrapumgebung“ erfolgt durch die Betrachtung der empirischen Verteilung  $\hat{F}$  der Stichprobe  $\mathbf{x}$  als nichtparametrischen Schätzer für die Verteilung  $F$  der Grundgesamtheit. In der „Bootstrapumgebung“ ist der „wahre Wert“

des statistischen Schätzers mit  $\hat{\theta}_N$  bekannt. Aus  $\hat{F}$  lassen sich in natürlicher Weise Stichproben  $\mathbf{x}^*$  entnehmen und auswerten:  $\hat{\theta}_N^{*b} = s(\mathbf{x}^{*b})$ . Aus der empirischen Verteilung der Bootstrapreplikationen  $\hat{\theta}_N^{*b}$  werden Konfidenzintervalle bestimmt, die mit dem (in der „Bootstrapumgebung“) wahren Wert der Zielgröße  $\hat{\theta}_N$  einer „Biaskorrektur“ unterzogen werden können.

## 2.4 Realisierung der Bootstrapsimulationen

In diesem Abschnitt soll kurz dargelegt werden, wie die Bootstrapsimulation für die in Abschnitt 1.3 beschriebenen Stichproben (s. Abb. 2.3) durchgeführt wird. Eine genaue Erläuterung des Simulationsalgorithmus' ist erforderlich, da die Weibull- und die Risswachstumsparameter aus mehreren Stichproben geschätzt werden sollen. Hier sind die die beiden Fälle aus Abschnitt 1.3 zu unterscheiden: Im Falle der Charakterisierung der Lebensdauer mit statischen Biegeversuchen gehen sowohl die Weibullparameter der Lebensdauerverteilung als auch die der Inertfestigkeit jeweils aus einer Stichprobe vom Umfang  $N = 30$  hervor. Wird das Festigkeits- und das Lebensdauerverhalten mit dynamischen Biegeversuchen charakterisiert, gehen die Risswachstumsparameter aus drei Stichproben vom Umfang  $N = 15$  und die Weibullparameter der Inertfestigkeit aus einer Stichprobe vom Umfang  $N = 15$  hervor. In beiden Fällen ist für jede Stichprobe getrennt eine Bootstrapsimulation durchzuführen. Für die Erhebung aus vier Stichproben vom Umfang  $N = 15$  zeigt die folgende Tabelle ein mögliches Ergebnis einer Bootstrapsimulation:

Nr. des Wertes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. Stichprobe	0	0	3	1	2	1	0	1	0	2	0	2	0	2	1
2. Stichprobe	1	1	1	1	3	0	1	0	0	2	1	2	0	1	1
3. Stichprobe	4	0	0	1	0	3	0	0	1	2	1	0	2	0	1
4. Stichprobe	0	0	1	2	0	1	1	5	0	0	3	0	0	2	0

Tab. 2.2: Beispiel für eine Bootstrapsimulation aus vier Stichproben

Eine Bootstrapsimulation besteht also aus *vier* einzelnen Ziehungen für vier Niveaus der Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$ . Bei der ebenfalls in Abschnitt 1.3 erwähnten Erhebung aus je dreißig dynamischen und statischen Vierpunktbiegeversuchen sind es zwei. Bei der Simulation mit vier Stichproben ergab sich, dass ein Fünftel der Simulationsergebnisse für die weitere Auswertung nicht verwendet werden kann. Das Ergebnis einer Simulation ist genau dann physikalisch nicht interpretierbar, wenn die Steigung der Ausgleichsgeraden durch die Mediane null oder negativ wird. Prinzipielle Ursache ist die Risswachstumsgeschwindigkeit der verwendeten  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Keramik. Ein durch ein ungünstiges Simulationsergebnis bedingter negativer Risswachstumsexponent ist offensichtlich nur dann ausgeschlossen,

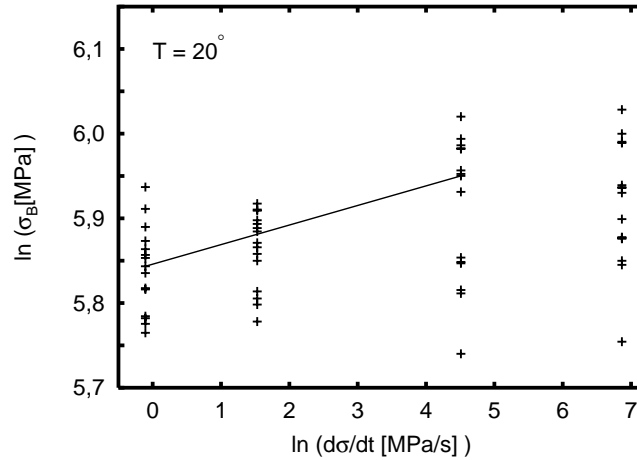


Abb. 2.3: Stichproben zur Bestimmung der Risswachstumsparameter, erhoben bei  $\dot{\sigma}_1=0,9$ ,  $\dot{\sigma}_2=4,62$ ,  $\dot{\sigma}_3=91$  und  $\dot{\sigma}_4=958 \text{ MPa/s}$  bei Raumtemperatur

wenn der kleinste Wert einer Stichprobe, erhoben bei einer Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}_i$  größer ist als der größte Wert Stichprobe, erhoben bei der nächstkleineren Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}_{i-1}$ . Durch eine andere Wahl der Belastungsgeschwindigkeiten oder durch einen größeren Stichprobenumfang pro Belastungsgeschwindigkeit ließe sich der Anteil der nicht interpretierbaren Simulationsergebnisse reduzieren. Da keine Möglichkeit bestand, auf den Stichprobenumfang oder die gewählten Belastungsgeschwindigkeiten Einfluss zu nehmen, ist eine Änderung der Bootstrapstrategie erforderlich, um diese Daten für eine Simulation verwenden zu können. Es wurde jede Simulation, die zu einem negativen oder extrem schwachen Risswachstums führte, durch eine neue Simulation ersetzt. Durch diese Maßnahme wurde der Einfluss des unterkritischen Risswachstums überschätzt, da Simulationsergebnisse mit schwachem oder fehlendem Risswachstum unberücksichtigt blieben. Das Problem der nicht interpretierbaren Simulationsergebnisse wirft die Frage nach der Interpretierbarkeit der Stichproben selbst auf. Eine signifikante Abhängigkeit der Versagenslast  $\sigma_B$  von der Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$  ist theoretisch naheliegend und experimentell bestätigt [3] (s. auch Abb. 1.3). Abb. 2.3 legt nahe, dass sich die 3. Stichprobe in der Nähe bzw. im Bereich des Sättigungswertes, der Inertfestigkeit, befindet, die bei  $\dot{\sigma}_4$  gemessen wird. Dass die Versagensspannung signifikant steigt, lässt sich durch einen paarweisen Vergleich der einzelnen Stichproben mit dem Wilcoxonrangsummentest [16] zeigen.

Für die Stichprobenpaare 1 und 3, 2 und 4 und 1 und 4 lehnt der Test die Hypothese ab, die Stichproben entstammten derselben Grundgesamtheit. Damit ist ein signifikanter Anstieg der Versagensspannung bis zum Sättigungswert statistisch abgesichert. Die Daten weisen damit ein Risswachstum experimentell nach. Aus Abb. 2.3 geht hervor, dass bei  $\dot{\sigma}_3$  und  $\dot{\sigma}_4$  leichte Abweichungen von der Weibullge-



Probe	1	2	3	4
1	×	+	-	-
2		×	+	-
3			×	+

Tab. 2.3: Paarweiser Wilcoxonrangsummentest mit Konfidenzniveau  $\alpha = 0,1$

raden zu vermuten sind, was durch Abb. 2.4 bestätigt wird. Diese Abweichungen beeinflussen die Weibullauswertung nicht, führen bei der Bootstrapsimulation jedoch zu starken Streuungen bei den Weibullparametern. Aus den in Abb. 2.3

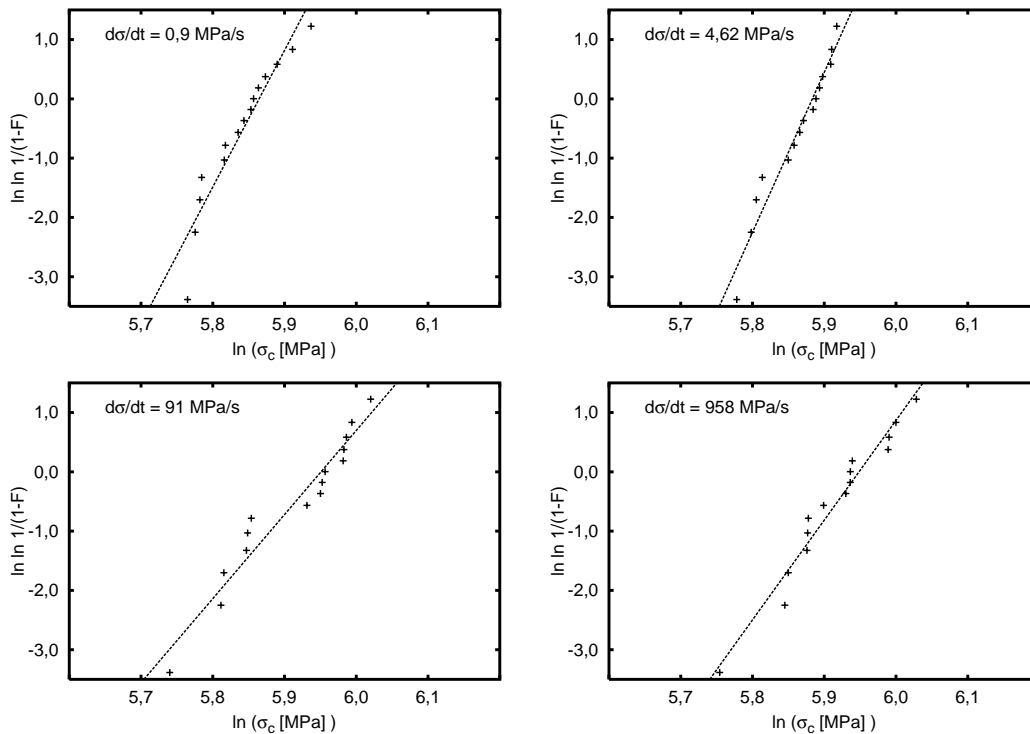


Abb. 2.4: Weibulldarstellung der dynamischen Biegeversuche

und 2.4 dargestellten dynamischen Biegeversuchen erhält man die Weibullparameter  $m = 15$  und  $b = 383 \text{ MPa}$ . Als Risswachstumsparameter ergeben sich  $B = 14.000 \text{ MPa}^2/\text{s}$  und  $n = 41,5$ . Die Zahlenwerte sind in Tab. 7.1 auf Seite 63 im Anhang aufgeführt. Die Probenabmessungen betragen 3 mm in der Höhe, 4 mm in der Tiefe und 50 mm in der Breite bei Rollenabständen von 20 mm oben und 40 mm unten.

# Kapitel 3

## Neuronale Netze

Der Versuch, den Lernprozess von Lebewesen zu verstehen und in der Informatik zu nutzen, hat zur Entwicklung der „Neuronalen Netze“ geführt. Der Name „Neuronales Netz“ ist vom Begriff Neuron = Nervenzelle abgeleitet, da die Vorgänge der Informationsübermittlung in einem Neuronalen Netz denen in einem System von Nervenzellen ähneln. Die bislang entwickelten Netze sind in der Lage, komplexe Zusammenhänge zu erlernen, wobei der Lernprozess entfernt an den Lernprozess von Lebewesen zum Erlernen elementarer Fähigkeiten erinnert.

### 3.1 Grundlagen

Ein Neuronales Netz  $\mathcal{N}$  kann als Abbildung eines Tupels  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}^I$  auf ein Tupel  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_L) \in \mathbb{R}^L$  betrachtet werden. Das Einsatzgebiet erstreckt sich teilweise auch auf sehr komplizierte Zusammenhänge. Neuronale Netze werden bei der Lösung von direkten Näherungs- und Vorhersageproblemen, bei inversen Problemen, wie der Optimierung und der Identifizierung von Parametern, oder bei Problemen der Klassifizierung, wie der Erkennung bestimmter Bildmuster eingesetzt [17, 18]. Der Anwender kann durch geeignete Wahl von Parametern die Fähigkeiten eines Neuronalen Netzes in eine gewünschte Richtung lenken, indem er z. B. steuert, dass das Netz eher interpolieren als klassifizieren soll. Ein weiterer Vorteil gegenüber anderen numerischen Verfahren ist, dass Neuronale Netze nahezu unabhängig vom vorliegenden Zusammenhang zu handhaben sind und trotz dieser Tatsache in vielen Fällen sehr gute Ergebnisse liefern. Andere Interpolationsverfahren, wie z. B. die lineare Regression, setzen einen bestimmten Zusammenhang zur Anwendbarkeit voraus oder müssen für jeden Zusammenhang angepasst werden. Neuronale Netze erlernen den Zusammenhang  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  durch Trainingsbeispiele, indem sie interne Parameter, die synaptischen Gewichte, so anpassen, dass ein durch Beispiele gegebener Zusammenhang reproduziert wird. Diese Anpassung heißt Lernprozess und erfolgt unter Verwendung eines Optimierungsverfahrens. Das trainierte Netz ist dann in der

Lage, den durch die Beispiele definierten Bereich zu reproduzieren, wenn die Beispiele, das Netz und der zu reproduzierende Zusammenhang so geartet sind, dass das Netz diesen erlernen kann. Diese Bedingung ist dann nicht erfüllt, wenn die Beispiele mehrdeutig oder nicht vollständig sind. Für Extrapolationen eignet sich ein solches Netz nicht unbedingt. Zur Wiedergabe eines kontinuierlichen Zusammenhangs werden sogenannte „Feedforward-Netze“ verwendet.

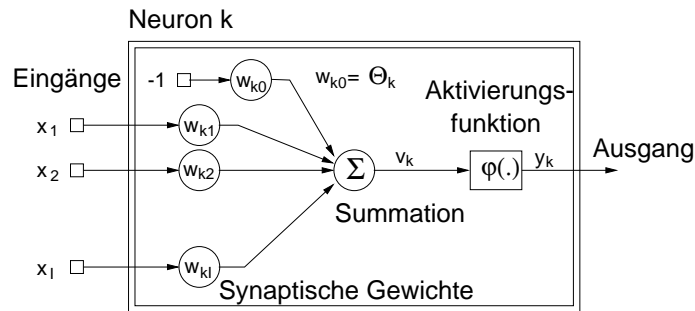


Abb. 3.1: Skizze eines Neurons

Das Neuron erhält Eingangsdaten  $x_i$ , die nach Multiplikation mit den synaptischen Gewichten  $w_{ki}$  zur Aktivierung  $v_k$  aufsummiert werden. Weiterhin hat jedes Neuron noch einen Schwellwert  $\Theta_k$ , der entscheidet, ob das Neuron einen Ausgangswert  $y_k > 0,5$  liefert. Der Schwellwert  $\Theta_k$  wird wie ein synaptisches Gewicht  $w_{k0}$  mit dem Eingabewert  $x_0 = -1$  behandelt. Daraus folgt

$$v_k = \sum_{i=0}^I w_{ki} x_i \quad \text{mit} \quad w_{k0} = \Theta_k \quad \text{und} \quad x_0 = -1 \quad (3.1)$$

Die Aktivierung  $v_k$  wird gemäß

$$y_k = \psi(v_k) \quad (3.2)$$

auf den Ausgang  $y_k$  des Neurons abgebildet.  $\psi$  ist hierbei die sogenannte Aktivierungsfunktion. Als Aktivierungsfunktion können z. B. Stufen- oder Rampenfunktionen dienen, aber auch stetige Funktionen wie der Tangenshyperbolicus oder, wie in der vorliegenden Arbeit, die Sigmoidalfunktion [19]

$$\psi : ] - \infty; +\infty[ \rightarrow ] 0; 1[ \quad \psi(v) = \frac{1}{1 + e^{-v}}$$

Ein Neuronales Netz besteht aus einer geordneten Struktur von Neuronen, die in Schichten angeordnet sind. Erforderlich sind die Eingabeschicht, deren Neuronenzahl mit der Zahl der Eingabeparameter übereinstimmen muss, und die Ausgabeschicht, deren Neuronenzahl mit der Zahl der Ausgabeparameter übereinstimmen muss. Zwischen beiden Schichten können verdeckte Schichten angeordnet sein, deren Neuronenzahl frei wählbar ist, wobei die Zahl der Schichten

und die Zahl der Neuronen je Schicht die Güte der Approximation beeinflussen können. Die Skizze einer möglichen Anordnung mit zwei verdeckten Schichten findet sich in Abb. 3.2.

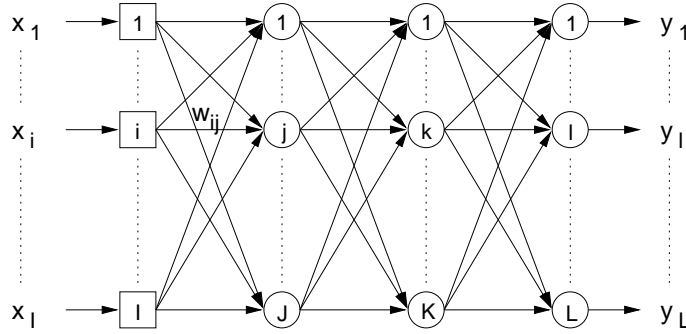


Abb. 3.2: Skizze eines Neuronales Netzes mit zwei verdeckten Schichten

Die einzelnen Schritte bei der Berechnung eines Ergebnisses durch das Neuronale Netz sehen in Anlehnung an Gln. (3.1) und (3.2) wie folgt aus [17]:

$$\begin{aligned}
 y_i^{(0)} &= x_i \\
 v_k^{(n)} &= \sum_{j=0}^J w_{kj}^{(n)} y_j^{(n-1)} \\
 y_k^{(n)} &= \psi(v_k^{(n)})
 \end{aligned}$$

wobei  $n$  hier die Nummer der Schicht bezeichnet.

## 3.2 Der Lernprozess

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Schritte des Lernprozesses dargestellt. Während des Lernprozesses werden die synaptischen Gewichte so angepasst, dass der Zusammenhang  $\mathbf{y} = \mathcal{N}(\mathbf{x})$  wiedergegeben wird. Zu diesem Zweck müssen Trainingsbeispiele in Form von Eingabetupeln  $\mathbf{x}$  und Ergebnissen  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_L)$  zur Verfügung stehen, die bekannt sein müssen. Die zu Beginn nach einer Gleichverteilung im Intervall  $[-1; 1]$  zufällig belegten synaptischen Gewichte  $w_{ij}$  werden im Laufe des Prozesses durch das sogenannte „Rprop“-Verfahren so angepasst, dass die Größe

$$\mathcal{E} = \sum_{p=1}^{N_P} \left( \sum_{l=1}^L \left( d_{l,p} - y_{l,p}^{(N)} \right)^2 \right) + 10^{-\kappa} \sum_{kj} w_{kj}^2 \quad (3.3)$$

möglichst klein wird [19]. Der erste Summand in (3.3) bezeichnet die Summe der Fehlerquadrate zwischen dem Ausgabebetupel des Netzes  $\mathbf{y}_p^{(N)}$  und dem zum  $p$ -ten Trainingsbeispiel gehörenden Ergebnistupel  $\mathbf{d}_p$ . Dazu werden die Quadrate der synaptischen Gewichte  $w_{kj}^2$ , versehen mit dem Faktor  $10^{-\kappa}$ , addiert. Die Wahl des Parameters  $\kappa$  entscheidet, ob das Neuronale Netz eher dazu neigt, den Zusammenhang  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  zu interpolieren oder zu klassifizieren [19]. Da es im vorliegenden Fall darum geht, den Zusammenhang

$$\mathcal{P}_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0; 1] \quad \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_f(m, \sigma_0, n, B)$$

in Gl. (1.16) möglichst gut zu approximieren, handelt es sich um ein Interpolationsproblem. Für klassifizierende Netze ist  $\kappa > 6$  die rechte Wahl, für interpolierende Netze sollte  $5 \geq \kappa \geq 6$  gewählt werden. Der optimale Wert von  $\kappa$  hängt außerdem wegen der Summation über diese in Gl. (3.3) von der Anzahl der synaptischen Gewichte ab [19]. Die Zahl der synaptischen Gewichte berechnet sich aus der Zahl der Schichten  $N_S$  und der Zahl der Neuronen pro Schicht  $N_i$  wie folgt:

$$N_{\text{syn. Gew.}} = \sum_{i=1}^{N_S-1} (N_i + 1) \cdot N_{i+1} \quad (3.4)$$

Die für diese Arbeit erforderlichen Berechnungen wurden mit der Voreinstellung  $\kappa = 6$  durchgeführt. Eine Wahl von  $\kappa \leq 4$  veranlasst den Trainingsalgorithmus im wesentlichen, synaptische Gewichte klein zu halten. Die Approximation der Trainingsbeispiele tritt in den Hintergrund, und die Interpolationsfähigkeit des Netzes ist dementsprechend schlecht. Die Struktur der verwendeten Netze bestand zunächst aus zwei verdeckten Schichten mit jeweils acht Neuronen. Die Ausgabe-schicht bestand obligatorisch aus einem Neuron für die Ausfallwahrscheinlichkeit, die Eingabeschicht aus vier Neuronen. Bei Vernachlässigung des unterkritischen Risswachstums wäre eine Eingabeschicht aus zwei Neuronen erforderlich, da die Ausfallwahrscheinlichkeit dann nur noch von den Weibullparametern  $m$  und  $\sigma_0$  abhängt. Die Zahl der Trainingsbeispiele muss groß genug sein, damit die synaptischen Gewichte festgelegt werden können. Wenn die Zahl der Trainingsbeispiele nicht ausreicht, um die synaptischen Gewichte festzulegen, bleiben diese unbestimmt, und die Fähigkeit des Netzes zur Interpolation und zur Approximation ist eingeschränkt.

### 3.3 Aufbereitung von Eingangsdaten

Die Werte des Ausgabebetupels müssen wegen des Wertebereichs der Sigmoidalfunktion auf ein Intervall  $\mathcal{I} = [\frac{1}{2} - \Delta; \frac{1}{2} + \Delta]$  transformiert werden [17]. Verbreitet ist die Wahl  $\mathcal{I} = [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$ . Da der Trainingsprozess die Größe  $\mathcal{E}$  (s. Gl. 3.3), die die Summe aller absoluten Fehler enthält, zu minimieren versucht, spielen

die Trainingsbeispiele mit Ausgabewerten am oberen Rande des Wertebereiches eine entscheidende Rolle, während die Trainingsbeispiele mit Ausgabewerten am unteren Rande des Wertebereiches insbesondere dann die Wahl der synaptischen Gewichte kaum beeinflussen, wenn sich der Wertebereich über mehrere Größenordnungen erstreckt. Ein Neuronales Netz ist nicht in der Lage, einen derartigen Zusammenhang so zu erlernen, dass die Approximation bezogen auf den relativen Fehler im gesamten Wertebereich gut ist. Ähnliche Probleme können auftreten, wenn sich der Wertebereich einer Eingabegröße über mehrere Größenordnungen erstreckt. Abhilfe schafft in einem solchen Fall eine Transformation der Daten auf entsprechende Wertebereiche oder eine andere Wahl der Eingabegrößen. Bei der vorliegenden Anwendung sind beide Maßnahmen erforderlich, da die Realisierungen des Risswachstumsparameters  $B$  innerhalb der Bootstrapsimulation über mehr als eine Größenordnung schwanken. Als Eingabedaten zur Charakterisierung des Risswachstums werden deshalb die Weibullparameter der Lebensdauerverteilung oder Steigung und Achsenabschnitt verwendet. Die Wertebereiche der Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  sind zur Verdeutlichung der in Tab. 3.1 aufgeführt.

Charakterisierung des Risswachstums mit dynamischen Biegeversuchen (1.11)			
Eingabegröße Nr.			
1	2	3	4
$m$	$\sigma_0 [MPa]$	Steigung $\frac{1}{n+1}$	Achsenabschnitt $\frac{1}{n+1} \ln [(n+1) B \sigma_c^{n-2}]$
$\in [10, 0; 30, 3]$	$\in [323; 368]$	$\in [1, 0 \cdot 10^{-2}; 4, 3 \cdot 10^{-2}]$	$\in [5, 78; 5, 89]$
—		$n \in [22, 5; 99, 3]$	$B \in [1; 2 \cdot 10^5]$
Charakterisierung des Risswachstums mit statischen Biegeversuchen (1.8)			
$m$	$\sigma_0 [MPa]$	Exponent $m^* = \frac{m}{n-2}$	Weibullparameter $\ln t_0 = \ln \frac{B b^{n-2}}{\sigma^n}$
$\in [7, 6; 22, 8]$	$\in [340; 402]$	$\in [0, 18; 0, 46]$	$\in [6, 7; 12, 2]$
—		$n \in [25, 9; 99, 0]$	$B \in [4 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^6]$

Tab. 3.1: geeignete Wahl der Eingangsdaten für Neuronale Netze

Diese Wahl der Eingabegrößen vermeidet die oben genannten Probleme und ermöglicht die Anwendung der Neuronalen Netze in diesem Fall.

### 3.4 Beurteilung der Approximationsqualität eines Netzes

Während des Trainings der Neuronalen Netze wird laufend ein relativer Fehler  $\alpha$  ausgegeben, den 9 von 10 Trainings- bzw. Validierungsbeispiele unterschreiten. Die relativen Fehler pro Ausgabeneuron  $l$  und Trainingsbeispiel  $p$

$$\delta_{l,p} = \frac{|y_{l,p} - d_{l,p}|}{|d_{l,p}|} \quad (3.5)$$

werden geordnet, und der Wert  $\alpha$  ergibt sich als 90%-Quantil. Es gilt also  $\delta_{l,p} \leq \alpha$  in 9 von 10 Fällen. Anhand des Wertes  $\alpha$  kann der Anwender einen Eindruck von der Qualität der Approximation gewinnen. Akzeptabel sind Werte im Bereich  $\alpha \lesssim 0,1$  [19].

Der sogenannte mittlere Trainingsfehler  $\mathcal{F}$ , eine Größe die ebenfalls während des Trainings ausgegeben wird, kann auch zur Beurteilung der Approximation herangezogen werden. Es gilt:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{L \cdot N_P} \left( \sum_{p=1}^{N_P} \sum_{l=1}^L |y_{l,p} - d_{l,p}|^2 \right) \quad (3.6)$$

Auch hier ist man auf praktische Erfahrungen angewiesen, um einen Wert für  $\mathcal{F}$  nennen zu können, bis zu dem die Approximation durch die Netze akzeptiert werden können. Es hat sich gezeigt, dass Netze mit einem Trainingsfehler  $\mathcal{F} \gtrsim 10^{-3}$  keine brauchbaren Näherungen mehr liefern [19]. In diesem Fall ist das Neuronale Netz nicht in der Lage, aus den Trainingsbeispielen einen Zusammenhang zu erlernen.

# Kapitel 4

## Inhaltliche Einordnung

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur Berechnung von Konfidenzintervallen für die Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteils nach Gl. 2.7 vorgestellt. Das Verfahren besteht aus einer Kombination von nichtparametrischer Bootstrapmethode, dem Programmpaket STAU und Neuronalen Netzen. Ein derartiges parameterfreies Verfahren zur Schätzung von Konfidenzintervallen für die Ausfallwahrscheinlichkeit liegt bislang nicht vor. Es vorzustellen, anhand von vorhandenen Materialdaten und Finite-Elemente-Modellen zu testen und zu etablieren, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

### 4.1 Zusammenarbeit der Verfahren

Statistische Grundlage zur Bestimmung der Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit sind die Stichproben zur Bestimmung der Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  und der Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$ . Verfahren zur Bestimmung von Konfidenzintervallen für die Weibullparameter sind seit langem bekannt [20, 21]. Für die Bestimmung der Risswachstumsparameter sind Verfahren bekannt, die jedoch keine Aussagen zu Konfidenzintervallen machen. Zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit selbst gibt es u. a. die Programmpakete STAU [7] und CARES [22], die in der Industrie und in der Forschung Anwendung finden, allerdings nicht weit verbreitet sind. Zur Bestimmung von Konfidenzintervallen liegt dagegen kein Standardverfahren vor, weil es für jede Geometrie und jeden Lastfall gesondert anzupassen wäre. Die vorgestellte Kombination aus Bootstrapmethode, STAU und Neuronalen Netzen beseitigt nun diese Lücke und stellt eine Möglichkeit bereit, Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit zu schätzen. Da zur deren Bestimmung auch eine empirische Verteilung der Materialparameter erzeugt wird, können die Bootstrapkonfidenzintervalle für die Materialparameter ebenfalls bestimmt werden. Die numerischen und statistischen Verfahren, die hier kombiniert werden, sind für sich betrachtet bereits etabliert. Vor einer Darstellung der Zusammenarbeit werden die verwendeten numerischen

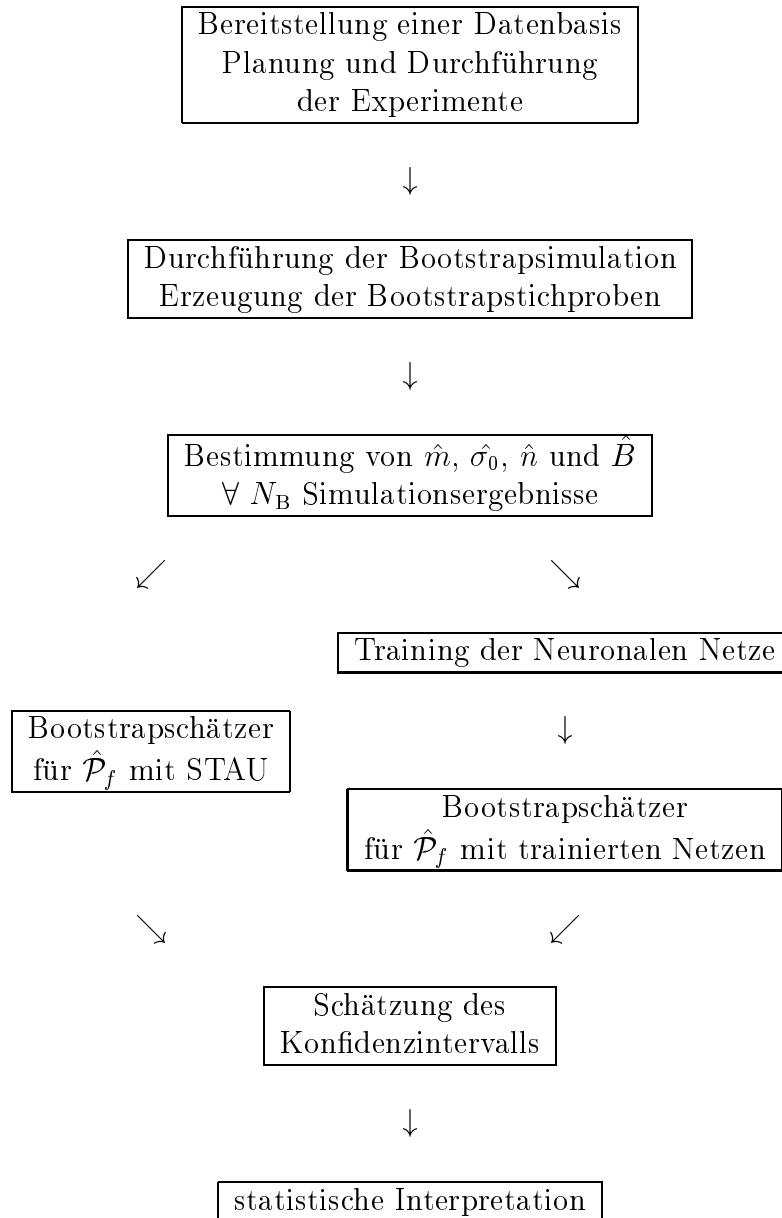


und statistischen Werkzeuge aus unterschiedlichen Gebieten noch einmal kurz erläutert:

- STAU: Postprozessor zur Weiterverarbeitung von Ergebnissen einer Finiten-Elemente-Analyse, Programmpaket zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit  $\hat{\mathcal{P}}_f$
- Bootstraphmethode: Parameterfreies statistischen Verfahren zur Schätzung der Unsicherheit einer Zielgröße, im vorliegenden Fall  $\hat{\mathcal{P}}_f$
- Neuronale Netze: Extrem flexibles numerisches Werkzeug, im vorliegenden Fall verwendet zur Reproduktion eines durch einige Beispiele definierten Zusammenhanges zum Zwecke der Rechenzeiterparnis
- „Biaskorrektur“: Zur Bootstraphmethode gehörendes Verfahren zur Schätzung von Konfidenzintervallen aus der Verteilung der Bootstraphreplikationen und dem Schätzer aus der Originalstichprobe.

## 4.2 Übersicht

1. Datenerhebung bzw. Versuchsdurchführung und Auswertung
  - Bereitstellung einer Datenbasis für STAU und die Bootstraphsimulation, d. h. Planung und Durchführung der Experimente
  - Durchführung der Bootstraphsimulation, d. h. Erzeugung von  $N_B \approx 10^4$  neuen Bootstraphstichproben, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben
  - Schätzung der Materialparameter aus der Originalstichprobe und den Bootstraphstichproben, wie in Abschnitt 1.3 beschrieben (Gln. (1.8) – (1.11))
2. Auswertung der Bootstraphsimulation
  - (2a) alleinige Verwendung von STAU
    - Auswertung der Bootstraphstichproben, d. h. Berechnung von  $N_B$  Realisierungen von  $\hat{\mathcal{P}}_f$  nach Gl. (1.16)
  - (2b) Approximation durch Neuronale Netze
    - Training der Neuronalen Netze mit  $N_P$  Trainingsbeispielen von ( $N_P \approx 10^2$ ), die mit STAU berechnet wurden.
    - Auswertung der Bootstraphstichproben, d. h. Berechnung von  $N_B$  Realisierungen von  $\hat{\mathcal{P}}_f$  mit den trainierten Neuronalen Netzen
3. Statistische Auswertung der Ergebnisse der Simulation
  - Statistische Schätzung des Konfidenzintervalls aus den  $N_B$  Realisierungen für die Ausfallwahrscheinlichkeit nach Gl. (2.7) und dessen Interpretation



Tab. 4.1: Darstellung der gesamten Prozedur als Flussdiagramm

## 4.3 Programmtechnische Anbindung der Bootstraphmethode an das Programmpaket STAU

In diesem Abschnitt soll die programmtechnische Realisierung der Methode zur Schätzung von Konfidenzintervallen dargelegt werden.

### Bootstrapsimulation

Aus dem Flussdiagramm in Tabelle 4.1 geht hervor, dass zunächst die eigentliche Bootstrapsimulation erfolgt. Diese Aufgabe übernimmt ein autarkes Programm. Es erzeugt aus der Originalstichprobe durch Ziehen mit Zurücklegen Bootstrapstichproben und bestimmt zu jeder Bootstrapstichprobe die Materialparameter. Die eigentliche Simulation übernimmt ein Zufallszahlengenerator der IMSL-Bibliothek, der  $N$  natürliche, gleichverteilte Zufallszahlen aus  $\{1, \dots, N\}$  liefert.

### Bereitstellung der Materialparameter

Statische Biegeversuche zur Bestimmung der Risswachstumsparameter werden mit der Maximum-Likelihood-Methode (Gl. (1.9) und (1.10)) ausgewertet, dynamische Versuche nach (1.11). Die Weibullparameter der Lebensdauerverteilung werden nach (1.8) in die Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  umgerechnet. Die Weibullparameter der Inertfestigkeit werden stets nach (1.9) und (1.10) bestimmt. Da das Programmpaket STAU über eine Option für Parameterstudien verfügt, werden die Materialparameter in entsprechendem Format übergeben [7]. Des weiteren liegt eine empirische Verteilung der Materialparameter vor, aus der nach (2.7) Bootstrapkonzidenzintervalle bestimmt werden können.

### Berechnungen mit STAU

In der Variante ohne Verwendung der Neuronalen Netze erfolgt die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit STAU für alle  $N_B$  Bootstrapsimulationen. Bei Wahl der Option für Parameterstudien berechnet STAU für jeden gegebenen Satz von Materialparametern die Ausfallwahrscheinlichkeit und legt Ergebnisdateien in wohldefiniertem Format [7] an. Das Programm zur Bestimmung der Materialparameter und STAU bilden gemeinsam die programmtechnische Realisierung des in Kapitel 2 eingeführten Stichprobenfunktional  $s$ .

### Bestimmung des Bootstrapkonzidenzintervalls

Die Auswertung, d. h. die Bestimmung des Konfidenzintervalls nach (2.7) aus der empirischen Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeit und der „Biaskorrektur“ erfolgt anschließend durch ein speziell entwickeltes Programm. Dazu werden

alle aus Bootstrapreplikationen berechneten Werte für die Ausfallwahrscheinlichkeit aus den Ergebnisdateien von STAU gelesen.

Die Grenzen des Konfidenzintervalls werden dann in ein geeignetes Graphikprogramm übertragen. Da eine Festlegung auf eine einheitliche Darstellung oder auf ein bestimmtes Graphikprogramm hinderlich ist, erfolgt die Einbindung in die Graphik manuell.

### 4.3.1 Variante mit Verwendung der Neuronalen Netze

Die Auswertung vieler Bootstrapstichproben mit dem Programmpaket STAU nimmt erfahrungsgemäss sehr viel Rechenzeit in Anspruch. Um auch für komplexe Finite-Elemente-Modelle realer Bauteile die Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit mit der Bootstrapmethode bestimmen zu können, ist man darauf angewiesen, viele Bootstrapstichproben in angemessener Zeit auszuwerten. Dies wird durch eine alternative Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit erreicht. Der komplexe numerische Zusammenhang aus Gl. (1.16) wird durch Neuronale Netze approximiert, d. h. es werden bis auf die Trainingsbeispiele alle Bootstrapstichproben mit Neuronalen Netzen ausgewertet. Von den zahlreichen Fähigkeiten der Neuronalen Netze profitiert diese Anwendung hauptsächlich von der Flexibilität bei der Reproduktion numerischer Zusammenhänge. Die Ergänzung der Neuronalen Netze ermöglicht die Auswertung von Bootstrapstichproben in großer Zahl und rundet das Verfahren ab. Werden Neuronale Netze zur Berechnung der Bootstrapreplikationen verwendet, ändert sich die Vorgehensweise in einigen Punkten, die im folgenden besonders hervorgehoben werden.

### Bootstrapsimulation

Die Bootstrapsimulation verläuft exakt so, wie bei der Variante ohne Verwendung der Neuronalen Netze.

### Bereitstellung der Materialparameter

Statische Biegeversuche zur Bestimmung der Risswachstumsparameter werden mit der Maximum-Likelihood-Methode (Gl. (1.9) und (1.10)) ausgewertet, dynamische Versuche nach (1.8) und (1.11). Die Weibullparameter der Inertfestigkeit werden stets nach (1.9) und (1.10) bestimmt. Da das Programmpaket STAU über eine Option für Parameterstudien verfügt, werden die Materialparameter in entsprechendem Format übergeben [7]. Im Gegensatz zur Variante ohne Verwendung der Neuronalen Netze reicht es hier aus, nur die  $N_P$  Materialparameter für STAU bereitzustellen, die als Trainingsbeispiele verwendet werden. Die aus den Bootstrapsimulationen gewonnenen Materialparameter müssen dem Neuronalen Netzen zur Verfügung gestellt werden. Die Materialparameter für die  $N_P$  Trainingsbeispiele stehen darüberhinaus dem Trainingsprogramm zur Verfügung. Um

eine Schwankung der Materialparameter über viele Größenordnungen zu vermeiden (s. 3.3), werden den Neuronalen Netzen nicht die Risswachstumsparameter, sondern die Weibullparameter der Verteilung der Lebensdauer, falls die Lebensdauer mit statischen Biegeversuchen charakterisiert worden ist, oder Steigung und Achsenabschnitt, falls die Lebensdauer mit dynamischen Biegeversuchen charakterisiert worden ist, als Eingabedaten übergeben. Wie in der Variante ohne Verwendung der Neuronalen Netze liegt eine empirische Verteilung der Materialparameter vor, aus der nach (2.7) Bootstrapkonfidenzintervalle bestimmt werden können.

## **Berechnungen mit STAU und Vorbereitung des Trainings**

Bei Verwendung der Neuronalen Netze erfolgt die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit STAU nur für die Trainingsbeispiele. Anschließend werden die Daten der Trainingsbeispiele, bestehend aus Materialparametern und zugehöriger Ausfallwahrscheinlichkeit, via Eingabedatei dem Trainingsprogramm für Neuronale Netze übergeben.

## **Training der Neuronalen Netze**

Das Training der Neuronalen Netze erfolgt durch ein speziell aus der freien Software SNNS (Stuttgart Neural Network Simulator)<sup>1</sup> entwickeltes Programm, welches auch in [19] verwendet wurde. Das Ergebnis des Trainingsprozesses ein automatisch generiertes Unterprogramm, welches eine Näherung für (1.16) darstellt.

## **Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit**

Dieses Unterprogramm wird in ein Hauptprogramm eingebunden und berechnet alle Bootstrapreplikationen. Es liefert eine empirische Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeit. In der Variante mit Verwendung Neuronaler Netze bilden das Programm zur Bestimmung der Materialparameter und das vom Trainingsprogramm erzeugte Unterprogramm gemeinsam die programmtechnische Realisierung des in Kapitel 2 eingeführten Stichprobenfunctionals  $s$ .

## **Bestimmung des Bootstrapkonfidenzintervalls**

Die Bestimmung des Konfidenzintervalls und die graphische Anbindung erfolgt ebenso wie bei der Variante ohne Neuronale Netze. Der Aufruf einzelner Programme wie z. B. der des Trainingsprogramms für Neuronale Netze, des Compilers oder des Hauptprogramms erfolgt durch Shellskripte.

---

<sup>1</sup>erhältlich unter <http://www-ra.informatik.uni-tuebingen.de/SNNS/>

# Kapitel 5

## Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen Ergebnisse gezeigt werden, die mit der nichtparametrischen Bootstrapmethode berechnet wurden. Die Beispiele gehen auf unterschiedliche Zielrichtungen ein. Mit der Bootstrapmethode lassen sich Parameter eines geplanten Experiments im Vorfeld zur effizienteren Ausnutzung von Ressourcen geeignet festlegen. Weiterhin lassen sich Bauteile bewerten, beispielsweise um die Erfüllung einer vorgegebenen Spezifikation nachzuweisen. Als Beispiele wurden Materialdaten und Finite-Elemente-Modelle verwendet, die im Rahmen des SFB 483 gewonnen wurden.

### 5.1 Festlegung geeigneter Randbedingungen für Versuche zur Bestimmung der Lebensdauer

Insbesondere bei Versuchen zur Bestimmung der Lebensdauer hängt die Ausfallwahrscheinlichkeit von Proben im Versuch empfindlich von Randbedingungen, wie z. B. der Geometrie oder dem gewählten Lastniveau ab. Anhand eines Beispiels soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, wie mit der Bootstrapmethode ein Lastniveau für Lebensdauerversuche festgelegt werden kann.

#### 5.1.1 Ausgangssituation und Aufgabe

Es soll ein Lastniveau für statische Vierpunktbiegeversuche festgelegt werden. Aussagekräftig sind die Versuchsergebnisse nur, wenn höchstens etwa  $1/3$  Sofortbrüche und höchstens  $1/3$  sogenannte Durchläufer vorhanden sind. Vorgegeben sind der Stichprobenumfang mit  $N = 30$  und die Dauer des Versuchs mit  $T \geq 500 h$ . Zur Vorhersage des Lastniveaus und des Versagensverhaltens steht eine Stichprobe aus dynamischen Biegeversuchen zur Verfügung, die in Abb. 2.3 und 2.4 auf Seite 27 beschrieben ist.

### 5.1.2 Bestimmung des Lastniveaus

Zur Bestimmung des Lastniveaus wird die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Biegebalkens in Abhängigkeit von der Last nach  $T = 500 h$  berechnet, was in Abb. 5.1 (links) als Kurve dargestellt ist. Die senkrechten Linien bezeichnen die 90%-

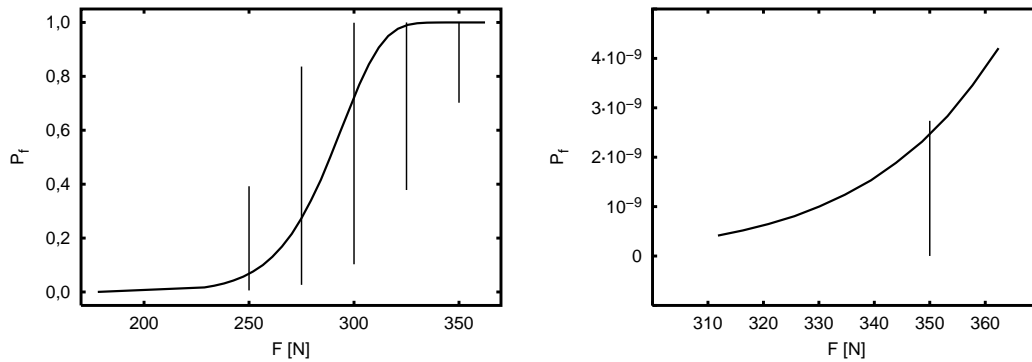


Abb. 5.1: Ausfallwahrscheinlichkeit nach  $T = 500 h$  (links) und nach Beginn des Versuchs (rechts) in Abhängigkeit von der Last

Konfidenzintervalle für ausgewählte Lastniveaus. Man erkennt, dass sich für ein Lastniveau von  $F = 350 N$  eine Ausfallwahrscheinlichkeit  $0,7 \leq P_f \leq 1,0$  ergibt. Zur Abschätzung der Zahl der Sofortbrüche muss die spontane Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Last berechnet werden. Hierzu genügt es, das zum Lastniveau von  $F = 350 N$  gehörende Konfidenzintervall zu berechnen. Man erkennt, dass mit dem spontanen Versagen einer Biegeprobe nicht zu rechnen ist.

### 5.1.3 Ergebnisse der statischen Biegeversuche

In diesem Abschnitt werden die Versuchsergebnisse und die Vorhersage miteinander verglichen. Nachdem ursprünglich eine Versuchszeit von  $T = 500 h$  vorgesehen war, wurden die Rechnung und der Versuch wegen eines Durchläufers auf insgesamt  $T = 850 h$  ausgedehnt.

In Abb. 5.2 ist die empirische Verteilungsfunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit als Treppenfunktion in Rot dargestellt. Die gemessenen Werte für die Lebensdauer sind in Tab. 7.2 auf Seite 63 im Anhang angegeben. Die mit STAU berechnete Ausfallwahrscheinlichkeit auf Grundlage der Originalstichprobe ist als grüne Kurve dargestellt. Zusätzlich sind zu ausgewählten Zeitpunkten 90%-Bootstrapkonfidenzintervalle als senkrechte Balken eingetragen. Der in Blau dargestellte Konfidenzschlauch ergibt sich durch lineare Interpolation dieser 90%-Konfidenzintervalle. Man erkennt, dass der berechnete und der gemessene Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeit für  $t \geq 20.000 s \approx 5,5 h$  gut übereinstimmen. Am Ende des betrachteten Zeitraumes von  $T = 850 h$  hatte eine Probe nicht versagt.

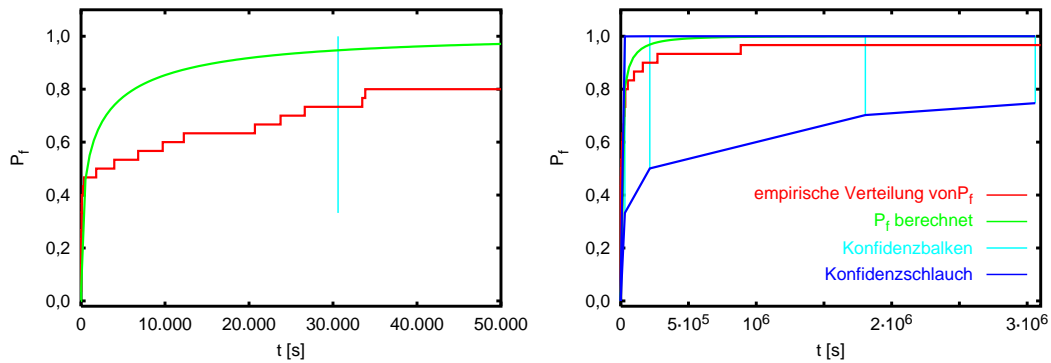


Abb. 5.2: Ausfallwahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit bis  $t = 14 h$  (links) und bis  $T = 850 h$  (rechts)

Somit lieferte die Messung Ergebnisse, die den in Abschnitt 5.1.1 gestellten Anforderungen entsprachen. Man erkennt, dass der berechnete und der gemessene Verlauf im Rahmen der statistischen Unsicherheit übereinstimmen.

Aus den gemessenen Werten für die Lebensdauer und den Inertfestigkeiten kann nach [3] die Abhängigkeit der Risswachstumsgeschwindigkeit vom Spannungsinintensitätsfaktor  $K_I$  ohne Annahme eines Potenzgesetzes berechnet werden. Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in Abb. 5.3 dargestellt.

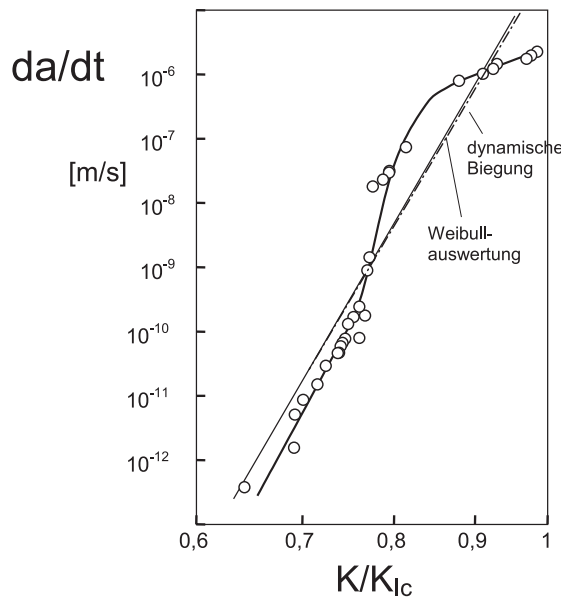


Abb. 5.3: Gemessene  $\frac{da}{dt}$ - $K$ -Kurve mit Weibullauswertung (aus [23])

Dabei entspricht jedem Punkt in Abb. 5.3 eine gemessene Lebensdauer. Die



frühen Brüche, dargestellt in der steil ansteigenden Treppenfunktion in Abb. 5.2 entsprechen den Punkten bei großer Risswachstumsgeschwindigkeit, die von der Weibullgeraden abweichen. Man erkennt, dass die Weibullauswertung im Bereich der langsam wachsenden, d. h. spät versagenden Risse mehr oder minder zufällig mit dem tatsächlichen Verlauf übereinstimmt. Im Bereich der früh versagenden Risse ist der Risswachstumsexponent  $n$  geringer als vorhergesagt, was zu höheren Ausfallwahrscheinlichkeiten im Bereich  $t \leq 20.000 \text{ s}$  führt [23]. Der Verlauf der Kurve in Abb. 5.3 zeigt, dass der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  bei den früh versagenden Proben nicht mehr im linear verlaufenden Bereich liegt (s. Abb. 1.2), sondern im Bereich III, bei dem ein Versagen unmittelbar bevorsteht und der durch die Weibullauswertung nicht erfasst wird. Liegt der Spannungsintensitätsfaktor jedoch im Bereich III, so ist das Bauteil für einen praxisrelevanten Einsatz zu hoch belastet. Eine Weibullauswertung ist im Falle einer Abweichung vom Potenzgesetz (1.5) nicht mehr möglich. Liegt ein Risswachstumsgesetz vor, welches keine Potenzform hat, so ist eine Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit STAU in der vorliegenden Form nicht mehr möglich. Hier wäre eine komplette Anpassung der Integration an ein neues Risswachstumsgesetz erforderlich, was mit sehr hohem Aufwand verbunden ist.

## 5.2 Vergleich und Bewertung von Datenbasen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, welche Auswirkung die Wahl einer Datenbasis auf die Vorhersageunsicherheit der Materialparameter und der Ausfallwahrscheinlichkeit hat.

Die Ergebnisse der statischen Biegeversuche stellen eine weitere Stichprobe dar, die sich als Grundlage für eine Bootstrapsimulation eignet. Neben dieser Bestimmung der Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  aus statischen Biegeversuchen wurden zusätzlich dreißig dynamische Biegeversuche zur Bestimmung der Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  der Inertfestigkeit durchgeführt. Die Kombination dieser beiden Stichproben wird mit dem Kürzel „30/30“ gekennzeichnet. Die Vorhersageunsicherheit, die sich unter Verwendung dieser Daten ergibt, soll mit der verglichen werden, die sich unter Verwendung der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Daten abschätzen lässt. Diese Daten, bestehend aus drei Stichproben vom Umfang  $N = 15$  zur Bestimmung der Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  und einer Stichprobe vom Umfang  $N = 15$  zur Bestimmung der Inertfestigkeit werden mit „15/15/15/15“ bezeichnet. Aus beiden Erhebungen lassen sich Werte zu neuen Stichproben zusammenfassen. Die Stichproben, die der Bestimmung der Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  der Inertfestigkeit dienen, lassen sich mit dem Wilcoxon-Rangsummentest [16] derselben Grundgesamtheit zuordnen. Dieses Testergebnis rechtfertigt die Kombination zu einer Stichprobe vom Umfang  $N = 45$ . Dies ermöglicht zwei Kombinationen der Daten: Eine Kombination aus drei Stichproben vom Umfang  $N = 15$ , erhoben bei geringen Belastungsgeschwindigkeiten  $\dot{\sigma}$

zur Bestimmung der Risswachstumsparameter, und der Stichprobe vom Umfang  $N = 45$  zur Bestimmung der Inertfestigkeit. Diese erste Kombination wird mit „15/15/15/45“ bezeichnet. Die zweite Kombination besteht aus der Stichprobe vom Umfang  $N = 30$ , den Ergebnissen der statischen Biegeversuche, und der Stichprobe vom Umfang  $N = 45$  zur Bestimmung der Inertfestigkeit. Diese erste Kombination wird mit „30/45“ bezeichnet. Es folgt eine kurze tabellarische Aufstellung aller Stichproben, die im Rahmen des SFB 483 erhoben und zur Bauteilbewertung und zur Auswertung der statischen Versuche eingesetzt wurden.

Kürzel	Stichproben- umfang $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3$	Stichproben- umfang statische Last	Stichproben- umfang $\dot{\sigma} \rightarrow \infty$	Stichproben- umfang insgesamt
30/30	–	30	30	60
15/15/15/15	15, 15, 15	–	15	60
30/45	–	30	45	75
15/15/15/45	15, 15, 15	–	45	90

Tab. 5.1: Definition weiterer Stichproben durch Kombination

### 5.2.1 Vergleich der Datenbasen in Bezug auf die Zuverlässigkeitsanalyse

In diesem Abschnitt werden die zur Materialcharakterisierung erhobenen Daten, wie in Tabelle 5.1 definiert, im Hinblick auf die Vorhersageunsicherheit in der Zuverlässigkeitsanalyse verglichen und bewertet. Sowohl für die Materialparameter als auch für die Ausfallwahrscheinlichkeit wird die Unsicherheit durch Angabe der 90%-Konfidenzintervalle charakterisiert. Zur Bestimmung wurden jeweils  $N_B = 2.000$  Simulationen verwendet. Eine Approximation der Gleichungen zur Bestimmung der Materialparameter durch Neuronale Netze macht hier keinen Sinn, da die Auswertung der Gleichungen (1.8) – (1.11) kaum Rechenzeit in Anspruch nimmt.

Die 90%-Konfidenzintervalle für die Weibullparameter  $m$  und  $\sigma_0$  sind in Abb. 5.4 (links) gegeneinander aufgetragen. Die Punkte bezeichnen die Maximum-Likelihood-Schätzer, die sich aus der Originalstichprobe ergeben. Da die Weibullparameter nur von den Werten zur Bestimmung der Inertfestigkeit abhängen, spielen hier nur die 15, 30 bzw. 45 Werte eine Rolle. Man erkennt, dass 30 statt 15 Proben eine deutliche Verringerung der Vorhersageunsicherheit mit sich bringen, weitere 15 Proben hingegen nicht. Dieses Verhalten ist hinreichend bekannt [20, 21]. Die 90%-Konfidenzintervalle für die Risswachstumsparameter  $n$  und  $B$  sind ebenfalls in Abb. 5.4 (rechts) gegeneinander aufgetragen. Der Risswachstumsparameter  $B$  hängt wegen Gl. (1.11) auch noch von den Werten zur Bestimmung der Inertfe-

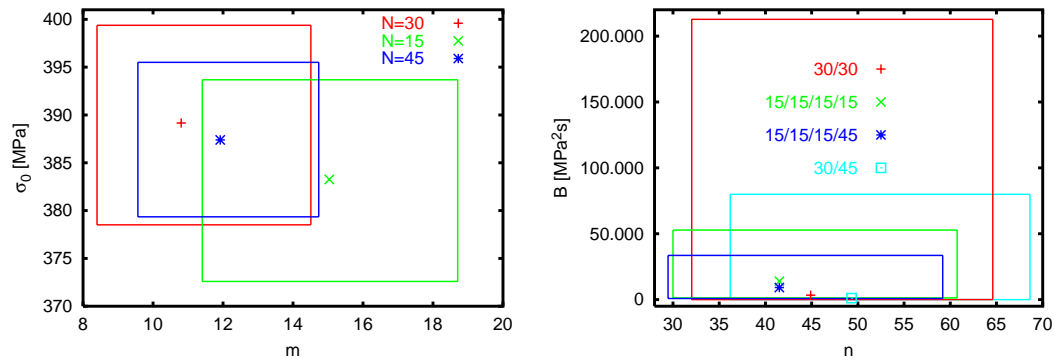


Abb. 5.4: Materialparameter für die Inertfestigkeit (links) und das unterkritische Risswachstum (rechts)

stigkeit ab, weshalb sich Änderungen für die Risswachstumsparameter ergeben, berücksichtigt man zusätzliche Werte zur Inertfestigkeit. Das relativ große Konfidenzintervall für den Parameter  $B$  bei Verwendung der mit statischen Biegeversuchen erhobenen Stichproben ist durch die Art der Simulation bedingt. Die Stichprobe enthält einen Durchläufer, der den Wert für  $B$  groß werden lässt. Wird die durchlaufende Probe bei der Simulation nun mehrfach gezogen, ergibt sich ein entsprechend großer Wert für  $B$ . Da vom oberen Rand der empirischen Verteilung bei der Bestimmung des Konfidenzintervalls nur 5% unberücksichtigt bleiben, schließt das Intervall so hohe Werte für  $B$  ein.

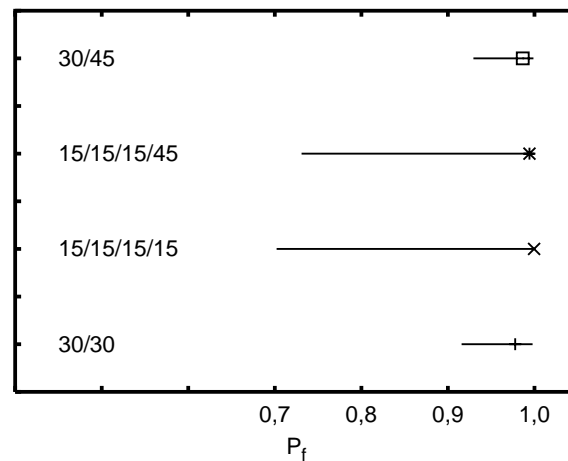


Abb. 5.5: Ausfallwahrscheinlichkeit der Biegeprobe am Ende der Versuchsdauer, berechnet mit verschiedenen Datenbasen

Der statische Biegeversuch wurde mit unterschiedlichen Kombinationen von Daten, wie in Tabelle 5.1 definiert, simuliert. In Abb. 5.5 sind die Konfidenzin-

tervale der Ausfallwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Stichproben dargestellt. Man erkennt, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit am Ende der Versuchsdauer auf Basis unterschiedlicher Daten mit unterschiedlicher Präzision vorhergesagt werden kann. In Abb. 5.5 führen die Daten zur Lebensdauer aus statischen Versuchen (Kombinationen „30/30“ und „30/45“) zu schärferen Vorhersagen als die Daten aus dynamischen Versuchen (Kombinationen „15/15/15/15“ und „15/15/15/45“). Aus diesen Berechnungen ist ersichtlich, dass es nicht allein auf den Stichprobenumfang ankommt, sondern dass die Art der Messung, mit der eine Größe bestimmt wird, sich auf die Vorhersageunsicherheit der Zielgröße auswirken kann. Die Bootstrapmethode bietet nun die Möglichkeit, diese Auswirkung quantitativ abzuschätzen. In Abschnitt 5.3 wird dieses Verhalten mit Stichproben unterschiedlichen Umfangs zur Charakterisierung der Lebensdauer vertieft.

Die große Unsicherheit bei der Bestimmung des Risswachstumsparameters  $B$  bei der Vorhersage aus statischen Versuchen überträgt sich nicht auf die Ausfallwahrscheinlichkeit, denn für große Werte von  $B$  bleibt das Risswachstum praktisch unberücksichtigt, da das Zeitintegral (1.15) keinen Beitrag mehr liefert. Die Ausfallwahrscheinlichkeit konvergiert für große Werte von  $B$  gegen den Wert, der sich bei Versagen ohne Risswachstum ergibt.

### 5.3 Strategien zur Versuchsführung

In Abschnitt 5.1 wurde die Vorhersageunsicherheit verschiedener Stichproben auf die Ausfallwahrscheinlichkeit und die Materialparameter bestimmt. Es wurde gezeigt, dass sowohl der Stichprobenumfang als auch die Strategie der Erhebung einen Einfluss auf die Vorhersageunsicherheit haben. Der Vergleich der Vorhersageunsicherheit dynamischer und statischer Biegeversuche hat gezeigt, dass eine geschickte Strategie zur Erhebung der Stichprobe weitaus größeres Potential besitzt, eine geringere Vorhersageunsicherheit zu erreichen als die Erhöhung des Stichprobenumfangs. Die Umfänge der in Abschnitt 5.1 verwendeten Stichproben unterscheiden sich nur in der Zahl der Versuche zur Bestimmung der Inertfestigkeit, die das Versagensverhalten eines statisch belasteten Biegebalkens nicht maßgeblich beeinflusst. Weiterhin sind die Daten zur Lebensdauer nicht mit dem Potenzgesetz (1.5) vereinbar, wie in Abb. 5.3 zu sehen ist. Daher soll der Zusammenhang zwischen Erhebungsstrategie, Stichprobenumfang und daraus resultierender Vorhersageunsicherheit anhand von Stichproben aufgezeigt werden, die zu den verwendeten Modellen passen. Zu diesem Zweck wurden Stichproben mit dem Zufallszahlengenerator erzeugt, bei denen die Lebensdauer mit gleicher Anzahl von Proben auf verschiedene Weise charakterisiert worden ist. Zum Vergleich wurde eine weitere Serie von Stichproben generiert, die sich von der ersten im Gesamtumfang unterscheidet.

### 5.3.1 Generierte Stichproben

Um den Einfluss der Art der Erhebung und des Umfanges charakterisieren zu können, wurden folgende Stichproben generiert: Eine Stichprobe zur Charakterisierung der Lebensdauer mit statischen Biegeversuchen vom Umfang 100, bezeichnet mit „100“, eine Stichprobe aus je zwanzig dynamischen Biegeversuchen bei fünf verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten, bezeichnet mit „5 · 20“ und eine Stichprobe aus je fünfzig dynamischen Biegeversuchen bei zwei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten, bezeichnet mit „2 · 50“. Alle Belastungsgeschwindigkeiten liegen unterhalb der Belastungsgeschwindigkeit, bei der die Inertfestigkeit gemessen wird. Die Inertfestigkeit selbst wird mit dreißig dynamischen Biegeversuchen charakterisiert. Bei der Generierung der statischen Biegeversuche wurden Durchläufer oder Sofortbrüche vernachlässigt. Weiterhin wurden nach diesem Muster drei Stichproben vom Gesamtumfang sechzig generiert: Eine Stichprobe zur Charakterisierung der Lebensdauer mit statischen Biegeversuchen vom Umfang 60, bezeichnet mit „60“, eine Stichprobe aus je zwölf dynamischen Biegeversuchen bei fünf verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten, bezeichnet mit „5 · 12“ und eine Stichprobe aus je dreißig dynamischen Biegeversuchen bei zwei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten, bezeichnet mit „2 · 30“. Die parametrischen Simulationen erfolgten nach einer Weibullverteilung. Dabei wurden die Parameter verwendet, die aus den in Abschnitt 5.2 vorgestellten Messreihen hervorgehen. Alle generierten Stichproben sind noch einmal in Tab. 5.2 zusammengefasst:

Kürzel	Stichproben- umfang $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, \dot{\sigma}_4, \dot{\sigma}_5$	Stichproben- umfang statische Last	Stichproben- umfang insgesamt
100	–	100	100
5 · 20	20, 20, 20, 20, 20	–	100
2 · 50	50, –, –, –, 50	–	100
60	–	60	60
5 · 12	12, 12, 12, 12, 12	–	60
2 · 30	30, –, –, –, 30	–	60

Tab. 5.2: Zusammenfassung der generierten Stichproben

Die Inertfestigkeit wurde mit dreißig dynamischen Biegeversuchen charakterisiert, was in Tab. 5.2 nicht aufgeführt ist. Für alle Stichproben in Tab. 5.2 wurde die Vorhersageunsicherheit für die Ausfallwahrscheinlichkeit bestimmt. Als Beispiel wurde der statische Biegeversuch mit der bereits in Abschnitt 5.1.2 aufgegebenen Belastung von  $F = 350 \text{ N}$  verwendet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.6 dargestellt.

Man erkennt die sehr scharfe Vorhersage, die mit statischen Versuchen erzielt werden kann. Sämtliche Bootstrapreplikationen lagen auf oder bei Eins, so dass

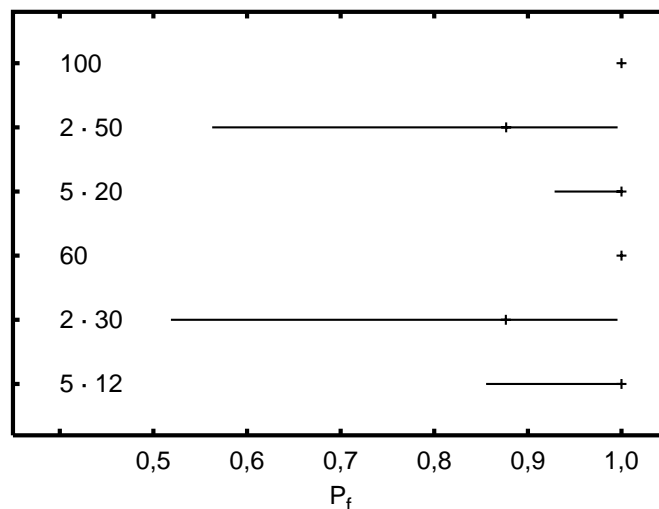


Abb. 5.6: Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit der Biegeprobe, berechnet unter Verwendung verschiedener Datenbasen

ein Konfidenzintervall nicht dargestellt werden kann. Hätte man bei der Generierung Durchläufer berücksichtigt, so wäre eine größere Unsicherheit zu erwarten. Offensichtlich erreicht man bei statischen Biegeversuchen bereits bei vergleichsweise geringem Stichprobenumfang eine scharfe Vorhersage. Bei Betrachtung der dynamischen Biegeversuche erkennt man ebenfalls, dass ein Stichprobenumfang von einhundert keine wesentliche Verringerung der Vorhersageunsicherheit einbringt, unabhängig davon, wie viele Proben bei welchen Belastungsgeschwindigkeiten vermessen werden. Die Vorhersageunsicherheit lässt sich hingegen erheblich mindern, indem man eine größere Zahl von Belastungsgeschwindigkeiten wählt. Dieses Resultat ist plausibel, denn die Risswachstumsparameter werden aus der Steigung und dem Achsenabschnitt der (Ausgleichs-)Geraden durch die Mediane bestimmt. Die Bootstrapsimulation sorgt für eine starke Schwankung der Mediane bei einer einzelnen Belastungsgeschwindigkeit. Bei Verwendung von nur zwei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten wirken sich diese Schwankungen auf die Parameter der unterkritischen Risswachstums aus, da bei zwei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten keine Ausgleichsgerade bestimmt wird. Bei fünf verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten hat ein Ausreißer bei einem der Mediane nur eine vergleichsweise geringe Schwankung der Materialparameter zur Folge. Deshalb ist die Vorhersageunsicherheit bei Verwendung von fünf Belastungsgeschwindigkeiten weitaus geringer.

In diesem Beispiel legt die quantitative Abschätzung der Vorhersageunsicherheit für die Ausfallwahrscheinlichkeit also nahe, das Risswachstum mit statischen Biegeversuchen zu charakterisieren. Ist dies z. B. aus Zeitgründen nicht möglich, legt die Untersuchung nahe, dynamische Versuche bei mehreren Belastungsge-

schwindigkeiten und etwas größerem Stichprobenumfang durchzuführen. Derartige Überlegungen und Untersuchungen lassen sich auf viele Fälle übertragen, in denen Zielgrößen aus Stichproben oder Messungen gewonnen werden.

## 5.4 Bestimmung des Umfangs von Stichproben

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich die Bootstrapmethode einsetzen lässt, um den erforderlichen Umfang einer Stichprobe bei einmal festgelegter Erhebungsstrategie so abzuschätzen, dass eine vorgegebene Breite des Konfidenzintervalls unterschritten wird. Die Vorgehensweise gleicht einem Suchen, eine echte „Berechnung“ des Stichprobenumfangs ist auf diese Weise nicht möglich, jedoch dienen diese Untersuchungen als Vorbereitung zur Lösung des „inversen Problems“, d. h. der Bestimmung des Stichprobenumfangs bei gegebener Vorhersageunsicherheit. Zur Darstellung der Vorgehensweise reicht es aus, die Vorhersageunsicherheit der Weibullparameter  $m$  und  $b$  zu bestimmen. Das Beispiel der Weibullparameter bietet sich an, da zu diesen bereits eine parametrische Methode zur Bestimmung der Konfidenzintervalle entwickelt wurde [20] und sich somit Vergleichsmöglichkeiten bieten. Es wird eine Stichprobe verwendet, mit der eine  $\text{Si}_3\text{N}_4$ -Keramik charakterisiert worden ist [24]. Die Stichprobe hat den Umfang  $N = 405$  und bietet sich daher für diese Untersuchung geradezu an. Aus den 405 Werten  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{405}\}$  wurden sechs Stichproben  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  mit  $N=15, 30, 50, 100, 200$  und  $405$  unter Beibehaltung der gemessenen Reihenfolge gebildet.

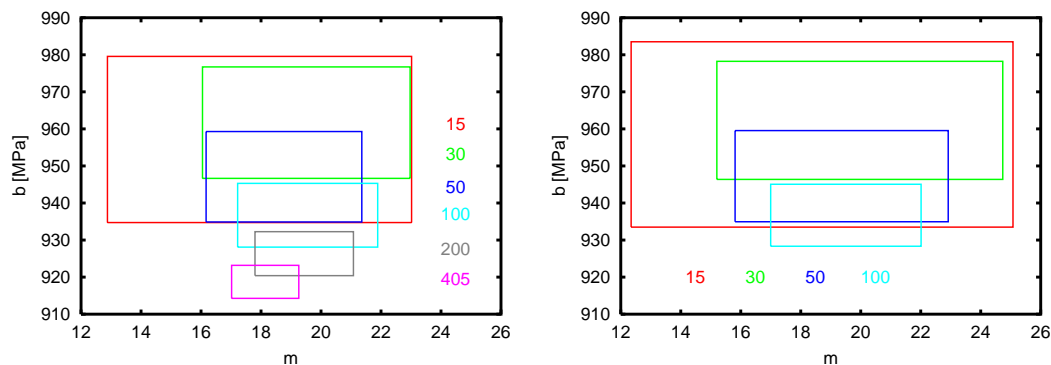


Abb. 5.7: Konfidenzintervalle der Weibullparameter, berechnet mit  $N_B = 2.000$  Simulationen aus Bootstrapsimulationen (links) und nach [20] (rechts)

In Abb. 5.7 sind die 90%-Konfidenzintervalle für die Weibullparameter  $m$  und  $b$  dargestellt. Das linke Bild enthält die aus Bootstrapsimulationen gewonnenen Intervalle, das rechte Bild enthält zum Vergleich die analytisch gewonnenen Intervalle nach [20], die für Stichprobenumfänge von 200 und 405 nicht mehr verfügbar sind. Bei dieser Untersuchung handelt es sich um eine numerische Berechnung des

Konvergenzverhaltens der entsprechenden Zielgröße in Abhängigkeit von der Anzahl der Messwerte. Man kann aus Abb. 5.7 einen Stichprobenumfang ablesen, bei dem eine gegebene Vorhersageunsicherheit für die Weibullparameter  $m$  und  $b$  unterschritten wird. Für kompliziertere Stichprobenfunktionen, etwa für die Risswachstumsparameter oder die Ausfallwahrscheinlichkeit liegen keine tabellierten Werte oder asymptotische Näherungen zur Bestimmung von Konfidenzintervallen vor, so dass man in diesen Fällen ganz auf parameterfreie Verfahren wie die Bootstrapmethode angewiesen ist. Will man einen minimalen Stichprobenumfang ermitteln, der eine gegebene Vorhersageunsicherheit unterschreitet, sind weitere Simulationen erforderlich. Die Bootstrapmethode lässt sich selbstredend ebenso mit einer anderen Zielgröße anwenden. Sind lediglich die Materialparameter  $m$  und  $b$  bekannt, kann so vorgegangen werden, dass fiktive Stichproben unterschiedlichen Umfangs z. B. für die Inertfestigkeit durch eine parametrische Simulation nach einer (Weibull-)verteilung erzeugt werden und mit diesen eine entsprechende nichtparametrische Simulation z. B. für die Ausfallwahrscheinlichkeit durchgeführt wird. Diese Vorgehensweise bietet sich vor allem bei vergleichenden Untersuchungen zum Einsatz verschiedener Materialien an.

## 5.5 Bauteilbewertung

In diesem Abschnitt werden exemplarisch für die Bewertung eines Bauteils die Konfidenzintervalle der Ausfallwahrscheinlichkeit für eine Kupplungsscheibe aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$  berechnet.

### 5.5.1 Beschreibung des Modells

Es handelt sich hier um die Modellierung und Auswertung eines Modellversuches zur Tribologie an einem Trockenreibungsprüfstand, der am Institut für Werkstoffkunde I im Rahmen des Sonderforschungsbereiches durchgeführt wurde. Der Kupplungsscheibe dienten sechs Graugussbolzen als Reibpartner, die alle mit speziell angefertigten Adaptern im Prüfstand befestigt sind. An der Antriebswelle des Prüfstandsmotors sind eine Halte-, eine Zentriervorrichtung und eine Momentenmessnabe für die Kupplungsscheibe angebracht. Die Vorrichtung besteht im wesentlichen aus einer Grund- und einer Halteplatte, zwischen denen die Kupplungsscheibe kraftschlüssig geklemmt wird. Auf der Gussseite ist eine Halteplatte auf einer Grundplatte angebracht. Die Halteplatte trägt die sechs Graugussbolzen als Reibelemente, die einzeln gefedert sind. Die Kupplungsscheibe rotiert während des Versuchs mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und wird kraftgesteuert via Längsführung gegen die Reibpartner gepresst. Der Entwurf und das FE-Modell wurden am Institut für Werkstoffkunde I erstellt. Alternativ wurden als Reibpartner auch sogenannte „Pellets“ aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$  verwendet. Modelliert wurde eine Aufheizphase von  $t = 100 \text{ s}$ , an deren Ende die Ausfallwahrscheinlichkeit



infolge der aufgetragenen transienten thermisch-mechanischen Belastung berechnet wurde. Weitere Details zur Versuchsdurchführung sind in [25] enthalten. Das FE-Modell enthält einige Vereinfachungen, wie z. B. die Reduzierung auf zwei Dimensionen und die Vernachlässigung des Abriebs bei den Graugussbolzen. Das FE-Netz der Kupplungsscheibe ist in Abb. 5.8 (links) skizziert. Die statistische

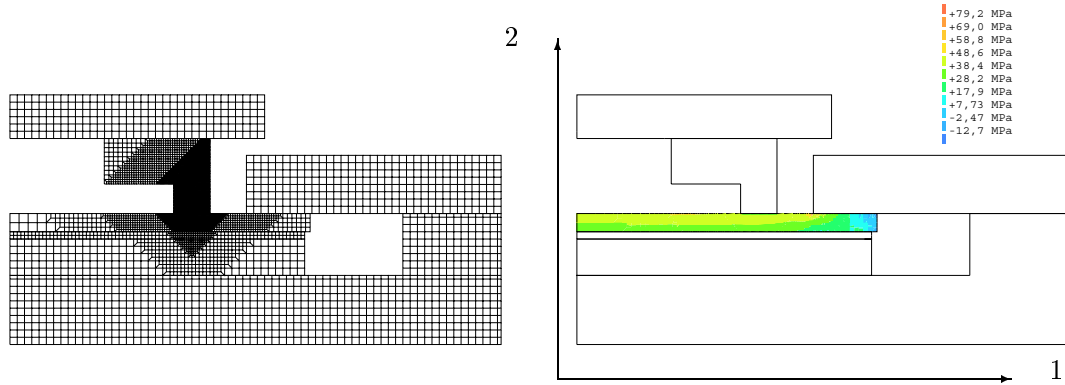


Abb. 5.8: Finite-Elemente-Netz (links) und Spannungsverteilung ( $\sigma_{11}$ ) (rechts) der Kupplungsscheibe

Auswertung betrifft natürlich nur die Keramikplatte, deren Spannungsverteilung ( $\sigma_{11}$ ) in Abb. 5.8 (rechts) graphisch dargestellt ist. Als Datenbasis für die Simulation wurde die in Tabelle 5.1 definierte Stichprobe „30/30“ verwendet.

## 5.5.2 Resultate

Für die Kupplungsscheibe wird nun die Ausfallwahrscheinlichkeit am Ende der Aufheizphase berechnet. Zur Überprüfung der Konvergenz werden  $N_B = 250$ ; 500; 1.000; 2.000; 5.000; 10.000 und 20.000 Simulationen verwendet und die in Abschnitt 2.3 beschriebenen „biaskorrigierten“ 90%-Bootstrapkonfidenzintervalle bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.9 links dargestellt.

Der Punkt in Inneren der Intervalle bezeichnet den Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeit von  $6 \cdot 10^{-7}$ , der sich aus der Originalstichprobe unter Verwendung von Gleichung (1.16) ergibt. Man sieht, dass Konvergenz bei etwa  $N_B = 2.000$  eintritt. Dieses Verhalten stimmt mit den Erfahrungswerten in [14] überein. Daher werden für den Vergleich mit der Approximation durch Neuronale Netze nur diese  $N_B = 2.000$  Beispiele herangezogen. Die Ergebnisse der Optimierung und damit die Näherungswerte für Ausfallwahrscheinlichkeit hängen von den Startwerten der synaptischen Gewichte ab. Um diesen Einfluss auszuschalten, wurden bei der Approximation durch Neuronale Netze immer jeweils zehn Neuronale Netze für eine Zahl  $N_P$  von Trainingsbeispielen trainiert ( $N_P = \{100, 200, 300, 400, 500\}$ ). Diese Netze berechnen für jede Simulation eine Realisierungen für die Ausfallwahrscheinlichkeit, aus deren empirischer Verteilung die Konfidenzintervalle bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.9 rechts dargestellt. Die waage-

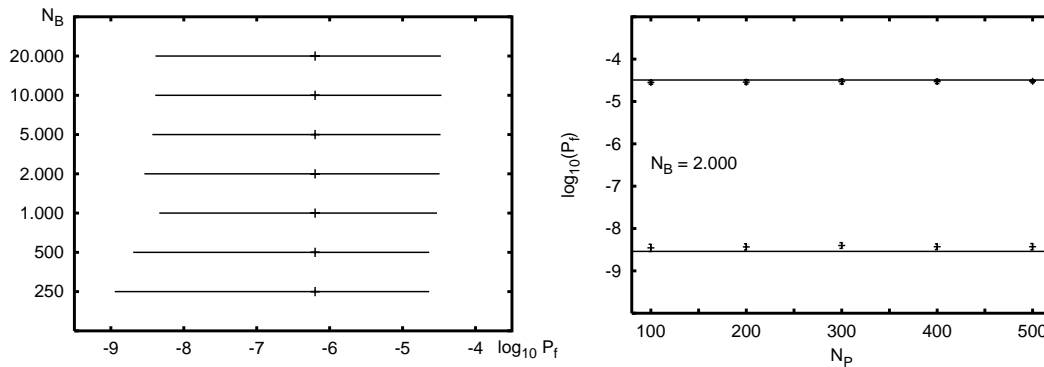


Abb. 5.9: Ausfallwahrscheinlichkeit der Kupplungsscheibe in Abhängigkeit von der Zahl der Bootstrapsimulationen (links) und Güte der Approximation der Konfidenzintervalle für  $N_B = 2.000$  durch Neuronale Netze in Abhängigkeit von der Zahl der Trainingsbeispiele (rechts)

rechten Balken bezeichnen die Grenzen des Konfidenzintervalls für die Ausfallwahrscheinlichkeit bei  $N_B = 2.000$  Simulationen, wie es schon in Abb. 5.9 links dargestellt ist. Die Fehlerbalken stellen die Unsicherheit der Approximation durch Neuronale Netze dar. Dargestellt sind einheitlich Fehlerbalken mit der 1,96-fachen Breite der Standardabweichung, was, eine Normalverteilung vorausgesetzt, einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95% entspricht. Erzeugt wurden sie durch Mittelung über zehn Netze. Man erkennt, dass die Approximation durch die Neuronalen Netze hervorragend ist, auch wenn das Ergebnis der Bootstrapsimulation nicht alle Fehlerbalken schneidet. Eine Angabe der Ausfallwahrscheinlichkeit auf zwei Dezimalstellen macht ohnehin keinen Sinn, da die Streuung der Ausfallwahrscheinlichkeit aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit von den Materialparametern groß ist (s. Gl. 1.16).

### 5.5.3 Einfluss der Datenbasis auf die Vorhersageunsicherheit

Während in Abschnitt 5.5.2 die Vorhersageunsicherheit mit der Datenbasis aus statischen Biegeversuchen („30/30“) gezeigt wurden, werden hier zum Vergleich seien hier die Ergebnisse des Modells der Kupplungsscheibe aufgeführt, berechnet mit der Daten aus dynamischen Biegeversuchen („15/15/15/15“ wie in Tabelle 5.1 definiert).

Man erkennt, dass auf dieser Datenbasis eine Ausfallwahrscheinlichkeit vorhergesagt wird, die mit  $6 \cdot 10^{-10}$  drei Größenordnungen von der Vorhersage durch die andere Datenbasis abweicht. Ein Vergleich der Abbildungen 5.9 und 5.10 (jeweils links) zeigt einerseits die Überlappung der Konfidenzintervalle und damit die Verträglichkeit der beiden Vorhersagen, andererseits jedoch die schlechtere Vorhersageunsicherheit aufgrund der Datenbasis aus dynamischen Biegeversuchen in

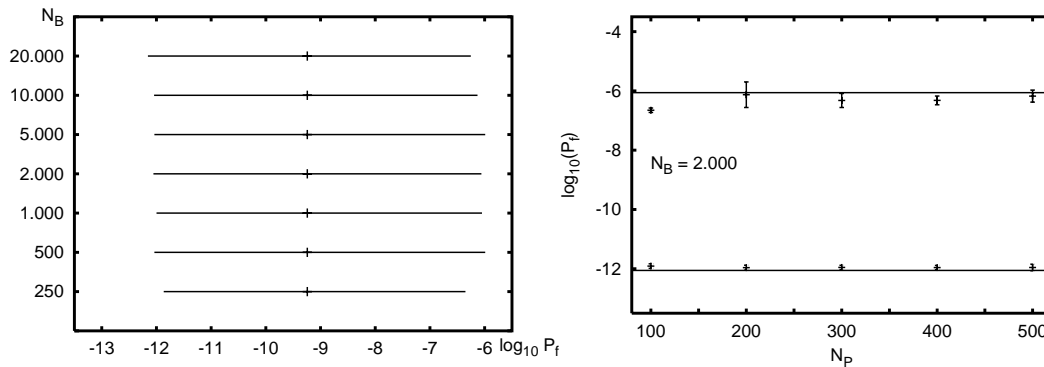


Abb. 5.10: Ausfallwahrscheinlichkeit der Kupplungsscheibe in Abhängigkeit von der Zahl der Simulationen (links) und Güte der Approximation durch Neuronale Netze in in Abhängigkeit von der Zahl der Trainingsbeispiele (rechts)

Bezug auf die Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit, da sich das mit Daten aus dynamischen Versuchen berechnete Konfidenzintervall über sechs Größenordnungen erstreckt ( $10^{-6}$  bis  $10^{-12}$ ), im Gegensatz zu vier Größenordnungen bei Verwendung der Daten aus statischen Biegeversuchen. Aus Abb. 5.10 rechts ist weiterhin ersichtlich, dass die Approximation der oberen Grenze des Konfidenzintervalls mit Neuronalen Netzen im Vergleich zur Verwendung der Daten aus statischen Biegeversuchen geringfügig schlechter ist, da sich hier eine etwas stärkere Abhängigkeit von der zufälligen Belegung der synaptischen Gewichte zeigt.

## 5.6 Abhängigkeit der Konfidenzintervalle vom Startwert des Zufallszahlengenerators

Zur Durchführung einer Bootstrapsimulation benötigt man statistisch unabhängige, zufällige Zahlenfolgen, die einer diskreten Gleichverteilung in  $1, \dots, N$  unterliegen. Auf dem Rechner können Vorgänge, die solche Folgen liefern, bislang nicht realisiert werden. Statt dessen kommen Algorithmen zum Einsatz, die deterministische Folgen von Zahlen liefern. Diese Zahlen sehen gleichverteilt und statistisch unabhängig aus. Für diese Algorithmen hat sich der Begriff „Zufallszahlengenerator“ eingebürgert. Für die Bootstrapsimulationen, mit denen die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse gewonnen wurden, wurde ein Zufallszahlengenerator aus einer mathematischen Unterprogramm-bibliothek (IMSL von Visual Numerics) verwendet.

### 5.6.1 Schwankung der Bootstrapkonfidenzintervalle

Um den Einfluss verschiedener Realisierungen der Bootstrapsimulationen abzuschätzen, wurden die in Abb. 5.5 dargestellten Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit am Modell des Biegebalkens mit den Daten aus dynamischen (in Abb. 5.11 rechts) und statischen (in Abb. 5.11 links) Biegeversuchen insgesamt zehnmal berechnet, wobei der Zufallszahlengenerator jeweils mit einem anderen Startwert initialisiert wurde, so dass sich andere Realisierungen ergaben.

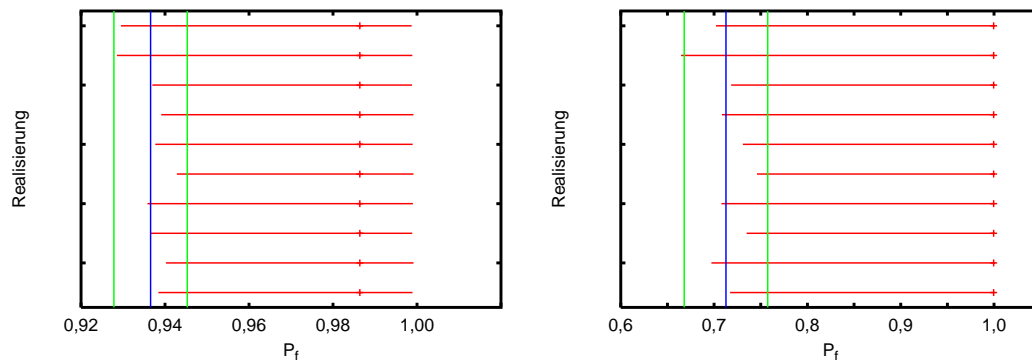


Abb. 5.11: Darstellung der Konfidenzintervalle, berechnet aus den statischen Versuchen („30/30“, links) und den dynamischen Biegeversuchen bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten („15/15/15/15“, rechts) unter Verwendung von zehn verschiedenen Startwerten für den Zufallszahlengenerator inklusive Darstellung der Mittelwerte in Blau und der Fehlerbalken in Grün

In Abb. 5.11 sind die Konfidenzintervalle für die Ausfallwahrscheinlichkeit für zehn verschiedene Startwerte des Zufallszahlengenerators in Rot dargestellt. Aus den zehn Realisierungen wurden Mittelwert und Streuung der unteren Grenze des Intervalls, die als 95%-Fehlerbalken aufgetragen ist, berechnet. Die statistische Schwankung der unteren Grenze ist trotz der empfindlichen Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit von den Materialparametern klein gegenüber der Gesamtlänge der Intervalle. Die Lage der Konfidenzintervalle stimmt mit Abb. 5.5 überein, so dass die durch die Variation des Startwertes bedingten Schwankungen vernachlässigt werden können. Eine Darstellung der oberen Grenze macht wenig Sinn, da alle Schätzungen sehr nahe bei Eins liegen, so dass Schwankungen und Fehlerbalken kaum darstellbar sind und auch keinen Erkenntnisgewinn bringen.

### 5.6.2 Approximationsverhalten der Neuronalen Netze

In diesem Abschnitt soll ein Beispiel für eine Berechnung der Konfidenzintervalle durch Neuronale Netze gezeigt werden. Hierzu wurde für die in Abschnitt 5.6.1 untersuchten Beispiele eine Approximation mit Neuronalen Netzen berechnet.

Untersucht wurde die ausschließlich mit dynamischen Versuchen erhobene Stichprobe („15/15/15/15“). Es wurden für jeden Startwert für je  $N_P = 100, \dots, 500$  Trainingsbeispiele wie schon bei der Untersuchung der Kupplungsscheibe (s. Abschnitte 5.5.2 und 5.5.3) zehn Neuronale Netze trainiert und die 95%-Fehlerbalken aufgetragen (s. Abb. 5.9 und 5.10). Die Ergebnisse sind in Abb. 5.12 dargestellt. Diese Berechnungen wurden mit der Standardeinstellung  $\kappa = 6$  durchgeführt. Dabei wurde, wie in Abschnitt 5.6.1 nur die Schwankung der unteren Grenze bzw. deren Güte der Approximation durch die Neuronale Netze untersucht. Bei Verwendung der aus dynamischen Biegeversuchen („15/15/15/15“) gewonnenen Daten ist die Approximation der Konfidenzintervalle wie gewünscht möglich. Bereits bei 300 Trainingsbeispielen ergibt sich eine Intervallgrenze, die mit der ohne Approximation berechneten so gut übereinstimmt, dass man das Ergebnis einer beliebigen Realisierung als Intervallgrenze angeben könnte. Offensichtlich sind die Neuronale Netze in diesem Fall in der Lage, den Zusammenhang (1.16) wiederzugeben.

Neuronale Netze sind jedoch nicht in der Lage, jeden beliebigen Zusammenhang zu approximieren. Die Qualität der Approximation lässt sich mit den in Abschnitt 3.3 angedeuteten und in [19] ausführlich erläuterten Maßnahmen erheblich verbessern.

## 5.7 Potential zur Rechenzeiterparnis durch den Einsatz Neuronaler Netze

Es wurde gezeigt, dass die wiederholte Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit zumindest im Prinzip durch Neuronale Netze geleistet werden kann.

Zum Abschluss sollen noch Anhaltspunkte dafür gegeben werden, wie groß das Potential zur Einsparung von Rechenzeit durch den Einsatz Neuronaler Netze ist. Benötigt eine STAU-Rechnung die Zeit  $T_{\text{STAU}}$ , ist für die Berechnung aller  $N_B$  Simulationen die Gesamtzeit  $t_{\text{gesSTAU}} = T_{\text{STAU}} N_B$  erforderlich. Die insgesamt benötigte Rechenzeit für Neuronale Netze setzt sich zusammen aus der Rechenzeit für die  $N_P$  Trainingsbeispiele, die Trainingszeit  $T_{\text{Train}}$  der Netze selbst, die von der Netzstruktur und der Zahl der Trainingsbeispiele abhängt, und der Rechenzeit des trainierten Netzes für die  $N_B$  Simulationen. Soll über  $N_N$  Netze gemittelt werden, ist dies außer bei den Trainingsbeispielen ebenfalls zu berücksichtigen:

$$t_{\text{gesNN}} = T_{\text{STAU}} \cdot N_P + T_{\text{Train}}(N_P) \cdot N_N + T_{\text{NN}} \cdot N_B \cdot N_N \quad (5.1)$$

$T_{\text{NN}}$  ist hier die Zeit, die das Netz braucht, um eine Simulation komplett zu berechnen. In Tab. 5.3 sind die Rechenzeiten zusammengestellt:

Zur Anzahl der synaptischen Gewichte siehe Gl. (3.4). Die große Streuung erklärt sich durch die ungleichmäßige Auslastung des Rechners. Es war nicht möglich, die Rechnungen allein auf einem Prozessor laufen zu lassen. Aus der Tabelle geht

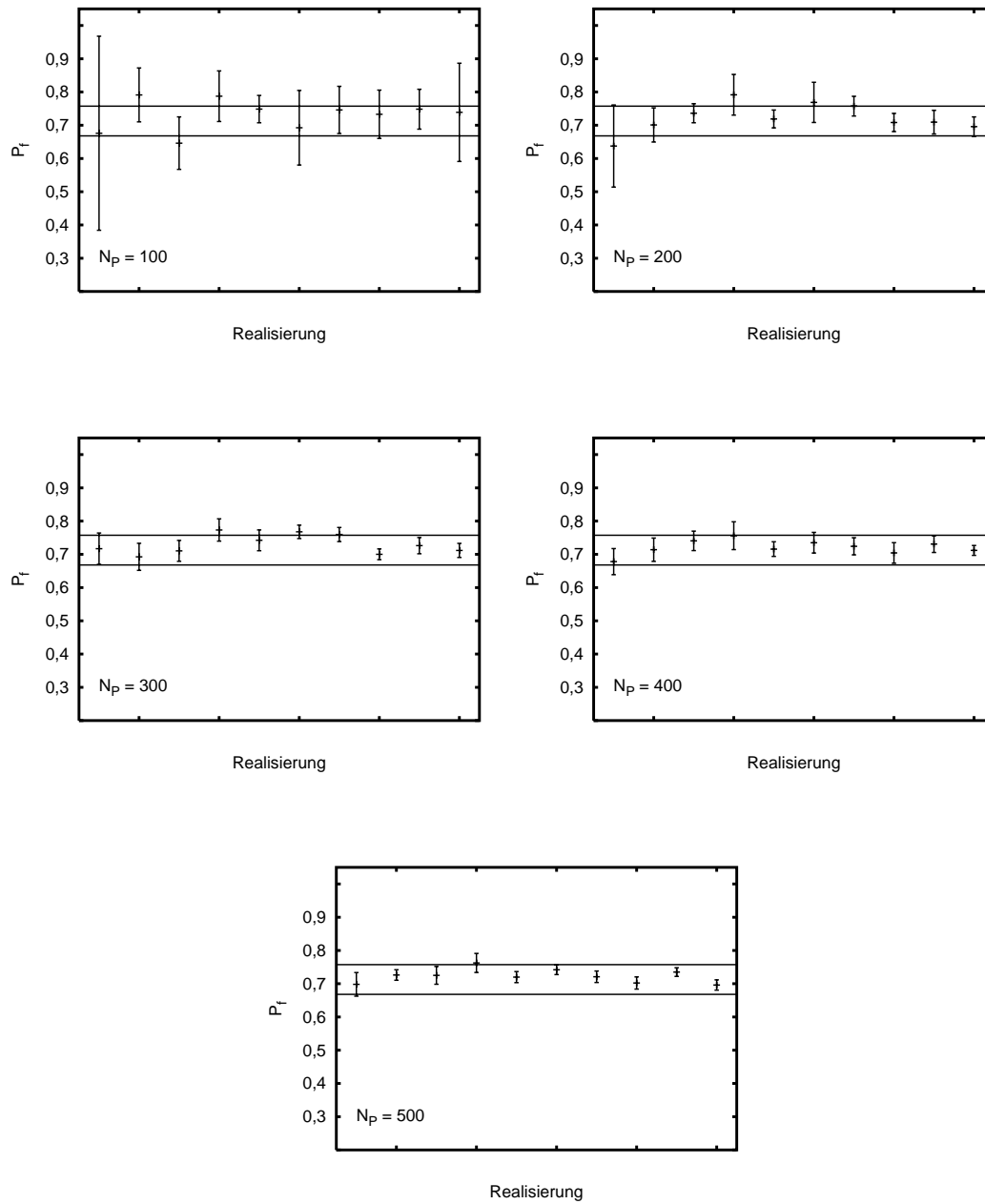


Abb. 5.12: Konvergenzverhalten der Neuronalen Netze, berechnet mit Daten aus dynamischen Biegeversuchen („15/15/15/15“)

Anzahl der Trainingsbeispiele	Zahl der synaptischen Gewichte	Trainingszeiten für ein Netz	Rechenzeit für 2.000 Beispiele	Rechenzeit für Trainingsbeispiele	$\frac{t_{\text{ges STAU}}}{t_{\text{ges NN}}}$
100	121	$17,3 \pm 1,5 s$	$1,5 \pm 0,3 s$	$0,5 h$	20
200	121	$33,7 \pm 4,2 s$	$0,9 \pm 0,2 s$	$1,0 h$	10
300	121	$50,1 \pm 6,9 s$	$0,9 \pm 0,2 s$	$1,5 h$	7
400	121	$64,7 \pm 0,9 s$	$0,9 \pm 0,3 s$	$2,0 h$	5
500	121	$80,6 \pm 1,1 s$	$0,9 \pm 0,3 s$	$2,5 h$	4
100	193	$27,1 \pm 0,7 s$	$1,2 \pm 0,7 s$	$0,5 h$	20
200	193	$52,5 \pm 2,7 s$	$1,2 \pm 0,4 s$	$1,0 h$	10
300	193	$77,4 \pm 0,9 s$	$1,2 \pm 0,4 s$	$1,5 h$	7
400	193	$102,4 \pm 0,7 s$	$1,2 \pm 0,4 s$	$2,0 h$	5
500	193	$127,4 \pm 0,8 s$	$1,2 \pm 0,4 s$	$2,5 h$	4

Tab. 5.3: Rechenzeit verschiedener Netze bei unterschiedlicher Zahl von Trainingsbeispielen

hervor, dass für die Berechnung aller 2.000 Beispiele mit STAU etwa 10  $h$  benötigt werden, was etwa  $T_{\text{STAU}} = 18 s$  pro Rechnung entspricht. Die benötigte Zeit zum Training der Netze hängt außer von der Anzahl der Trainingsbeispiele noch von der Struktur des Netzes ab. Hier wurde die in Abschnitt 3.2 definierte Geometrie mit zwei verdeckten Schichten zu je acht Neuronen verwendet. Zum Vergleich wurden dieselben Rechnungen mit Netzen gestartet, die eine zusätzliche verdeckte Schicht bestehend aus acht Neuronen besitzen. Man sieht, dass der Aufwand zum Training etwas steigt. Viel wichtiger ist aber der zusätzliche Bedarf an Trainingsbeispielen und der damit verbundene Mehraufwand, denn die Berechnung der Trainingsbeispiele nimmt fast die komplette Rechenzeit in Anspruch.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, eine Methode zur Bestimmung von Konfidenzintervallen für die Ausfallwahrscheinlichkeit zu erarbeiten. Zu diesem Zweck wurde die nichtparametrische Bootstrapmethode eingesetzt, indem die Bootstrapreplikationen mit dem Programmpaket STAU berechnet wurden. Zur Reduzierung der Rechenzeit wurden als Variante Bootstrapreplikationen mit Neuronalen Netzen berechnet. Die Zusammenarbeit der verschiedenen numerischen Methoden aus unterschiedlichen Anwendungsgebieten und deren programmtechnische Realisierung wurden ausführlich erläutert. Die Bestimmung von Konfidenzintervallen wurde alternativ mit Neuronalen Netzen durchgeführt. Exemplarisch wurde gezeigt, welches Potential zur Einsparung von Rechenzeit die Approximation mit Neuronalen Netzen bietet. Anhand mehrerer Anwendungsbeispiele mit unterschiedlichen Zielrichtungen wurden die Einsatzmöglichkeiten diskutiert. Dabei wurde auch dargelegt, mit welchem numerischen Verhalten der Anwender rechnen muss.

Ein möglicher Anwendungsfall ist die Bauteilbewertung, bei der es um die quantitative Abschätzung der Vorhersageunsicherheit kleiner Ausfallwahrscheinlichkeiten geht, was bei der Qualitätssicherung Einsatzpotential bietet. Die meisten Einsatzmöglichkeiten liegen jedoch bei der Planung von Experimenten. So ist es mit Hilfe der Bootstrapmethode möglich, Parameter für Versuche *vor* Durchführung der Experimente sinnvoll abzuschätzen. Darüber hinaus bestehen Möglichkeiten, den Umfang von Stichproben, die Art ihrer Erhebung und den Einfluss von Stichproben auf Zielgrößen wirkungsvoll zu beurteilen. Damit eignet sich die Bootstrapmethode, Strategien zur Erhebung von Daten zu entwickeln.



# Anhang

## Berechnung der Normal- und Schubspannung

Die Berechnung der Normal- und Schubspannung am Riss erfolgt durch Transformation des diagonalisierten Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  auf Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Diese Transformation wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\vartheta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{\vartheta r} & \sigma_{\vartheta\vartheta} & \sigma_{\vartheta\varphi} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\vartheta} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \mathcal{A}$$

mit der Transformationsmatrix  $\mathcal{A}^{-1}$

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right)_{ij}$$

In Kugelkoordinaten sieht die (transformierte euklidische) Metrik wie folgt aus:

$$g_{ij} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Deren Komponenten werden für den Übergang zu physikalischen Komponenten des Spannungstensors benötigt

$$\sigma_{ij} \rightarrow \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \cdot \sqrt{g_{jj}}}$$

Zur Berechnung der Normal- und Schubspannung werden die physikalischen Komponenten  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\vartheta}$  und  $\sigma_{r\varphi}$  benötigt. Man erhält schließlich

$$\sigma_n = \sigma_{rr} = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cdot \sigma_{11} + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cdot \sigma_{22} + \cos^2 \vartheta \cdot \sigma_{33} \quad (7.1)$$

für die Normalspannung  $\sigma_n$  und

$$\begin{aligned} \sigma_{r\vartheta} &= \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi \cdot \sigma_{11} + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi \cdot \sigma_{22} - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \sigma_{33} \\ \sigma_{r\varphi} &= -\sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \cdot \sigma_{11} + \sin \vartheta \sin \varphi \sin \varphi \cdot \sigma_{22} \\ \tau &= \sqrt{\sigma_{r\vartheta}^2 + \sigma_{r\varphi}^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

für die Schubspannung  $\tau$  [4, 6].

## Maximum-Likelihood-Schätzer für die Weibullverteilung

Herleitung der Maximum-Likelihood-Schätzer für die Weibullparameter  $b$  und  $m$  unter Berücksichtigung von Durchläufern und Sofortbrüchen. Die Weibullverteilung hat folgende Verteilungsfunktion

$$F(x_i) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_i}{b} \right)^m \right]$$

und damit folgende Dichte

$$f(x_i) = \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} = \frac{m}{b} \left( \frac{x_i}{b} \right)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{x_i}{b} \right)^m \right]$$

Die Maximum-Likelihood-Methode schätzt die Parameter  $b$  und  $m$  so, dass die gemeinsame Dichte der gemessenen Stichprobe für die Schätzer  $\hat{b}$  und  $\hat{m}$  maximal wird. Die gemeinsame Dichte ist die sogenannte Likelihood-Funktion  $L$ :

$$L(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f(x_i) F^{k_{\text{un}}}(x_{\text{un}}) [1 - F(x_{\text{ob}})]^{k_{\text{ob}}}$$

Hierbei sind die  $x_i$  die Messwerte und  $x_{\text{ob}}$  bzw.  $x_{\text{un}}$  die Stellen, an denen die Verteilung abgeschnitten ist.  $k_{\text{ob}}$  bzw.  $k_{\text{un}}$  bezeichnen die jeweils Anzahl der Werte  $\geq x_{\text{ob}}$  bzw.  $\leq x_{\text{un}}$ . Zur Bestimmung der Parameter  $m$  und  $b$  leitet man  $\ln L$  ab. Wegen  $L > 0$  und wegen der strengen Monotonie von  $\ln$  ist dies möglich.

$$\begin{aligned} \ln L &= m \sum_{i=1}^N \ln x_i - \sum_{i=1}^N \ln x_i - Nm \ln b + N \ln m - \left( \frac{1}{b} \right)^m \sum_{i=1}^N x_i^m \\ &+ k_{\text{un}} \ln \left[ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right] \right] - k_{\text{ob}} b^{-m} x_{\text{ob}}^m \end{aligned}$$

Mit  $0 = \frac{\partial \ln L}{\partial b}$  erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{Nm}{b} - (-m)b^{-m-1} \sum_{i=1}^N x_i^m - k_{\text{ob}}(-m)b^{-m-1}x_{\text{ob}}^m \\ &- k_{\text{un}} \frac{\exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]} \frac{m}{b} \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \end{aligned}$$

Die Näherung

$$-\frac{\exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]} = \frac{1}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]} \approx \frac{1}{2} - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^{-m} \quad (7.3)$$

erlaubt eine explizite Berechnung von  $b$  in Abhängigkeit von  $m$ , der Messwerte  $x_i$  und der Grenzen  $x_{\text{ob}}$  bzw.  $x_{\text{un}}$  :

$$\begin{aligned}
m(N + k_{\text{un}}) &= b \frac{m}{b^{m+1}} \left( \sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \right) \\
b^m &= \frac{1}{N + k_{\text{un}}} \left( \sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \right) \quad (7.4) \\
b &= \left[ \frac{1}{N + k_{\text{un}}} \left( \sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \right) \right]^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck entspricht Gl. (1.9). Für  $m$  erhält man durch  $0 = \frac{\partial \ln L}{\partial m}$  eine implizite Gleichung, wobei ebenfalls (7.3) verwendet wird:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^N \ln x_i - N \ln b + \frac{N}{m} - \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i}{b} \right)^m \ln \left( \frac{x_i}{b} \right) - k_{\text{ob}} \left( \frac{x_{\text{ob}}}{b} \right)^m \ln \left( \frac{x_{\text{ob}}}{b} \right) \\
&+ k_{\text{un}} \frac{\exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]}{1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \right]} \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m \ln \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right) \\
0 &= \sum_{i=1}^N \ln x_i - N \ln b + \frac{N}{m} - \left( \frac{1}{b} \right)^m \sum_{i=1}^N x_i^m \ln x_i + \left( \frac{1}{b} \right)^m \ln b \sum_{i=1}^N x_i^m - k_{\text{ob}} \left( \frac{x_{\text{ob}}}{b} \right)^m \ln x_{\text{ob}} \\
&+ k_{\text{ob}} \left( \frac{x_{\text{ob}}}{b} \right)^m \ln b - k_{\text{un}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m - 1 \right] \ln x_{\text{un}} + k_{\text{un}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_{\text{un}}}{b} \right)^m - 1 \right] \ln b \\
0 &= \frac{N}{m} + \sum_{i=1}^N \ln x_i + k_{\text{un}} \ln x_{\text{un}} \\
&- \frac{1}{b^m} \left[ \sum_{i=1}^N x_i^m \ln x_i + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m \ln x_{\text{ob}} + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \ln x_{\text{un}} \right] \\
&+ \ln b \left[ \frac{1}{b^m} \left( \sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \right) - N - k_{\text{un}} \right] \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Setzt man (7.4) in (7.5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^N \ln x_i + k_{\text{un}} \ln x_{\text{un}} + \frac{N}{m} \\
&- (N + k_{\text{un}}) \frac{\sum_{i=1}^N x_i^m \ln x_i + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m \ln x_{\text{ob}} + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \ln x_{\text{un}}}{\sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m} \\
&+ \ln b \cdot \underbrace{\left[ -N - k_{\text{un}} + (N + k_{\text{un}}) \frac{\sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m}{\underbrace{\sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m}_{=1}} \right]}_{=0}
\end{aligned}$$

$m$  ist damit durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^N \ln x_i + k_{\text{un}} \ln x_{\text{un}} + \frac{N}{m} \\
&- (N + k_{\text{un}}) \frac{\sum_{i=1}^N x_i^m \ln x_i + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m \ln x_{\text{ob}} + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m \ln x_{\text{un}}}{\sum_{i=1}^N x_i^m + k_{\text{ob}} x_{\text{ob}}^m + \frac{1}{2} k_{\text{un}} x_{\text{un}}^m}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck entspricht Gl. (1.10). Die hergeleiteten Ausdrücke (1.9) und (1.10) und finden sich auch in [3, 8, 10].

## Ergebnisse der Experimente

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die Ergebnisse der zur Bootstrapsimulation verwendeten dynamischen und statischen Vierpunktbiegeversuche angegeben. Tab. 7.1 enthält die vier Messreihen zu je fünfzehn Messungen (Bezeichnung „15/15/15/15“ laut Abschnitt 5.2), wie in Abb. 2.3 und 2.4 auf Seite 27 dargestellt. Tab. 7.2 enthält die zwei Messreihen zu je dreißig Messungen (Bezeichnung „30/30“ laut Abschnitt 5.2), wie in Abb. 5.2 und 5.3 auf Seite 42 dargestellt. Der zweite Wert in Tab. 7.2 stellt mit 3117600 s  $\approx$  850 h die Versuchsdauer und damit den Durchläufer dar. Die Versuchslast von 350 N entspricht einer Randfaserspannung von 290,5 MPa. Die verwendeten Korrekturfaktoren nach [20] betragen 0,908 für  $N = 15$ , 0,955 für  $N = 30$  und 0,9705 für  $N = 45$ .

Nr.	$\dot{\sigma}_1 = 0,9MPa/s$	$\dot{\sigma}_2 = 4,62MPa/s$	$\dot{\sigma}_3 = 91MPa/s$	$\dot{\sigma}_4 = 958MPa/s$
1	378,8	334,9	346,7	356,7
2	352,0	350,0	401,0	379,6
3	325,2	360,9	396,1	315,5
4	336,2	323,1	334,1	345,5
5	342,2	368,8	411,6	364,7
6	369,1	347,2	311,1	356,4
7	324,4	329,7	397,9	403,4
8	361,3	354,6	346,2	399,0
9	348,4	368,3	384,7	415,0
10	345,0	364,2	383,8	347,2
11	318,9	332,1	376,6	399,6
12	349,6	352,8	386,3	357,0
13	335,7	371,5	335,4	378,5
14	322,3	359,4	348,5	376,2
15	355,4	362,6	396,5	378,5
$\Rightarrow m = 15, b = 383 MPa, B = 14.000 MPa^2s, n = 41,5$				

Tab. 7.1: Ergebnisse der dynamischen Biegeversuche des IWK I, alle Werte in MPa.

dynamische Versuche [MPa]			statische Versuche [s]		
Nr. 1-10	Nr. 11-20	Nr. 21-30	Nr. 1-10	Nr. 11-20	Nr. 21-30
295,5	369,8	392,2	6803	13	26640
298,1	375,3	393,3	3117600	1800	18
300,1	377,1	394,1	108	11	33480
313,2	378,3	394,9	9720	23760	69
315,0	379,6	401,8	9	8	97920
319,7	382,7	406,8	3960	227	270680
331,0	382,7	415,3	51840	65	10
357,5	386,0	420,3	87	163080	12240
366,3	389,0	420,8	885600	20700	33840
366,5	390,7	452,3	29	15	360
$\Rightarrow m = 10,8, b = 389 MPa, B = 3.370 MPa^2s, n = 44,9$					

Tab. 7.2: Ergebnisse der dynamischen und statischen Biegeversuche des IKM-ZL

# Literaturverzeichnis

- [1] W. Weibull: A Statistical Theory of the Strength of Materials, *Ingeniors Vetenskaps Akad. Hand.* **151** (1939) 1–45
- [2] S. B. Batdorf und J. G. Crose: A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Nonuniform Stress, *J. Appl. Mechanics* **41** (1974) 459–461
- [3] D. Munz und T. Fett: Ceramics Mechanical Properties, Failure Behaviour, Materials Selection, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999
- [4] A. Heger: Bewertung der Zuverlässigkeit mehrachsiger belasteter keramischer Bauteile, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 132, Düsseldorf, 1998
- [5] C. Ziegler: Bewertung der Zuverlässigkeit keramischer Komponenten bei zeitlich veränderlichen Spannungen und bei Hochtemperaturbelastung, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 238, Düsseldorf, 1998
- [6] A. Brückner-Foit, T. Fett, K.-S. Schirmer und D. Munz: Discrimination of Multiaxially criteria Using Brittle Fracture Loci, *J. Eur. Cer. Soc.* **16** (1997) 689–696
- [7] K. Heiermann et al.: STAU – A Post Processor for a Finite Element Program To Calculate the Failure Probability under Thermal Shock Loading, User’s Manual, Version 3, Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe, 2000
- [8] T. Thiemeier, A. Brückner-Foit und D. Munz: Lifetime Prediction for Ceramic Components Subjected to Multiaxial Loading, in E. Czoboly (Hrsg.): *Failure Analysis – Theory and Practice*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Fracture, Budapest, Ungarn, 19.-24. September 1988, Band 1, 476-484
- [9] D. Pfeifer: Einführung in die Extremwertstatistik, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1989
- [10] J. F. Lawless: Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley & Sons, Inc., 1982

- [11] E. Kreyszig: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, 5. Nachdruck der 7. Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1998
- [12] M. Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 5. erweiterte Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970
- [13] D. Stoyan: Stochastik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1993
- [14] B. Efron und R. J. Tibshirani: An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall/CRC, 1993
- [15] J. Shao und D. Tu: The Jackknife and Bootstrap, Springer-Verlag, New York, 1995
- [16] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, 25. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart · Leipzig 1991
- [17] S. Haykin: Neural Networks: A Comprehensive Foundation, Macmillan, New York, 1994
- [18] E. Fiesler und R. Beale: Handbook of Neural Computation, Institute of Physics Publishing and Oxford University Press, 1997
- [19] N. Huber: Anwendung Neuronaler Netze bei nichtlinearen Problemen der Mechanik, *Wissenschaftliche Berichte*, FZKA-6504, 2000
- [20] D. R. Thoman, L. J. Bain und C. E. Antle: Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics* **11**, Nr. 3 (1969) 445–460
- [21] DIN 51110, Prüfung von keramischen Hochleistungswerkstoffen, Teil 1-3, Hrsg. Deutsches Institut für Normung, Berlin 1990, übergegangen in ENV 843/5
- [22] B. Schenk et al.: CERAMIC/ERICA: Allied Signal Engines' life prediction codes for structural ceramic applications, in: P. Vincenzini (Hrsg.): *Advances in Science and Technology* **13**, Tagungsband World Ceramic Congress CIMTEC, Florenz 1998, 363–378
- [23] T. Fett, D. Badenheim, R. Oberacker, K. Heiermann und R. Nejma: Sub-critical Crack Growth for an Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Determined with Different Methods, *J. Mater. Sci. Letters* **22** (2003) 363–365
- [24] G. Wötting: Persönliche Mitteilung: Messung der Inertfestigkeit einer niederdruckgesinterten Siliziumnitridkeramik (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>) der Fa. H. C. Ceramics GmbH & Co. KG

- [25] T. Erbacher, T. Beck und O. Vöhringer: Experimentelle und numerische Analyse des Schädigungsverhaltens hochbeanspruchter Friktionsflächen aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Keramik, in K.-H. Zum Gahr und J. Schneider (Hrsg.): *Hochbeanspruchte Gleit- und Friktionssysteme auf Basis ingenieurkeramischer Werkstoffe*, Tagungsband zum Statuskolloquium des SFB 483, Rufdruck, Druck- und Verlagsgesellschaft mbH Karlsruhe, 2002, 165–176