

QuadrikenSplines

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Informatik
der Universität Karlsruhe genehmigte

Dissertation

von

Claudia Bangert

aus Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung:

15. Dezember 1999

Erster Gutachter:

Prof. Dr. H. Prautzsch

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. J. Hoschek

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Projektive Geometrie	6
1.1 Homogene Koordinaten	6
1.2 Doppelverhältnis	7
1.3 Projektive Abbildungen	9
2 Quadriken	10
2.1 Definition	10
2.2 Kegelschnitte	11
2.3 Quadriken im Raum	14
2.4 Interpolation mit Quadriken	17
3 Rationale Parametrisierung von Kreisen	21
3.1 Stereographische Projektion	22
3.2 Konstruktion einer rationalen Parametrisierung des Kreises	23
3.3 Positive Gewichte	26
3.4 Stetigkeitsordnung	27
3.5 Minimaler Grad und Segmentanzahl	28
3.6 Symmetrische Darstellungen	29
3.7 Kugeln	30
4 Rationale quadratische Dreiecksflächenstücke auf Quadriken	31
4.1 Kriterien	31
4.2 Anwendungen und Bemerkungen	34
5 Quadrikensplines	38
5.1 Konstruktion des Makroelementes	38
5.2 Verbinden zweier Makroelemente	42
5.3 Bézier-Darstellung der Quadrikensplines	50

6	Freiheitsgrade	54
6.1	Wahl der Randebenen und Nabenpunkte	54
6.2	Wahl der Tangentialebenen in den Nabenpunkten	56
6.3	Zulässige Konfigurationen	58
6.4	Transversalensysteme	60
6.5	Vermeidung globaler Abhängigkeiten	64
6.6	Ein Beispielmakroelement	65
7	Duale Quadrikensplines	71
8	Powell-Sabin-Interpolanten	75
8.1	Powell-Sabin-Interpolanten	75
8.2	Powell-Sabin-Interpolanten als Quadrikensplines	77
9	Konvexität	81
9.1	Konvexe Quadrikenstücke	81
9.2	Konvexe Powell-Sabin-Interpolanten	83
9.3	Zuordnung passender Tangentialebenen	87
9.4	Abtasten konvexer Funktionen	88
9.5	Konvexe Makroelemente	96
9.6	Konvexe Keilkonstruktion	98
10	Glätten von Quadrikensplines	105
10.1	Krümmungen	105
10.2	Glätten	109
	Literaturverzeichnis	112

Einleitung

Geometrische Objekte werden zur Darstellung im Rechner durch funktionale, parametrische oder implizite Flächen beschrieben. Während erstere für eine Freiformmodellierung nur eingeschränkt einsetzbar sind, haben sich parametrische Flächen in B-Spline- oder Bézier-Darstellung in vielen CAD-Systemen als Standard etabliert. Sie bieten den Vorteil einer einfachen und effizienten Auswertbarkeit in einzelnen Punkten sowie einer intuitiven Handhabbarkeit durch Steuerung der Flächengestalt über meist wenige Kontrollpunkte. Demgegenüber steht die Darstellung mit impliziten Flächen, bei der geometrische Objekte durch Gleichungen in den Koordinaten ihrer Punkte beschrieben werden. In diesem Fall läßt sich insbesondere das Zugehörigkeitsproblem einzelner Punkte einfach lösen. Auch die Schnittpunktbestimmung mit einer Geraden, die beispielsweise beim "Raytracing"- (Strahlverfolgungs-) Verfahren zur Generierung photorealistischer Bilder vermehrt auftritt, ist für Flächen in impliziter Darstellung effizienter als für parametrische Flächen berechenbar (siehe z.B. [Hart '93] oder [Bloomenthal & Bajaj '97]).

1985 entwickelte Sederberg ([Sederberg '85]) eine Bézier-Darstellung für algebraische Flächen, das sind implizite Flächen, die durch eine polynomiale Gleichung beschrieben werden. Diese Darstellung wurde später u.a. von Dahmen ([Dahmen '89, Dahmen & Thamm-Schaar '93]) verwendet, um größere Flächenverbände aus algebraischen Flächenstücken zusammenzusetzen. Warren ([Warren '86]) formulierte Kriterien für den glatten Übergang zwischen algebraischen Flächenstücken.

Die nach Ebenen einfachsten algebraischen Flächen sind sogenannte Quadriken, die durch ein Polynom zweiten Grades in Punktkoordinaten beschrieben werden. Sie besitzen nicht nur zahlreiche geometrische Eigenschaften, die sich zur Modellierung ausnutzen lassen, sondern lassen sich auch einfach auswerten und zu glatten, das heißt tangentialebenenstetigen, Flächenverbänden zusammensetzen. Weiterhin sind beliebige drei- und viereckige, eben berandete Flächenstücke sehr einfach in eine rationale Parameterdarstellung vom Maximalgrad vier bzw. Bigrad (2,4) überführbar.

In dieser Arbeit werden verschiedene Fragestellungen, die im Zusammenhang mit Quadriken und aus ihnen zusammengesetzten Flächenverbänden auftreten, behandelt.

Im ersten Kapitel werden anhand einiger Grundlagen aus der projektiven Geometrie die im folgenden verwendeten Notationen kurz eingeführt. Das zweite Kapitel faßt wichtige Eigenschaften von Quadriken zusammen. Für den sinnvollen Einsatz von Quadriken zum geometrischen Modellieren ist eine Konvertierung zwischen den eingangs erwähnten verschiedenen Darstellungsformen erwünscht. Daher befassen sich Kapitel drei und vier mit der rationalen Parameterdarstellung von Quadriken.

Schon 200 v. Chr. kannte Appolonius eine quadratische Parametrisierung des Kreises (siehe [Blaschke '54]), des "natürlichsten" Kegelschnittes. Da in modernen CAD-Systemen Kurven bevorzugt durch rationale Splines beschrieben werden, wurden in den letzten Jahren vermehrt rationale Kreisdarstellungen untersucht (u.a. in [Piegl & Tiller '89, Hsu et al. '93, Chou '95, Piegl & Tiller '97]). Bisher war jedoch eine glatte periodische Parametrisierung regulärer zweidimensionaler Quadriken, wie z.B. des Kreises, nicht bekannt. Kreise werden in zahlreichen Modellervorgängen benötigt und müssen für numerische Berechnungen mindestens ein- bis zweimal stetig differenzierbar parametrisiert sein. In Kapitel drei dieser Arbeit werden daher Konstruktionsverfahren, Stetigkeitsbetrachtungen und Minimalgradbestimmungen für eine Darstellung des gesamten Kreises als periodischen rationalen Spline angegeben. Entsprechende Parametrisierungen regulärer Kegelschnitte ergeben sich als projektive Bilder. Desweiteren werden die Überlegungen auf ovale Quadriken erweitert.

Hipparch (180-125 v. Chr) verwendete bereits die stereographische Projektion auf der Kugel ([Blaschke '54]), doch erst 1993 zeigten Dietz, Hoschek und Jüttler ([Dietz et al. '93]), daß sich jede rationale Parametrisierung einer Quadrik mittels einer verallgemeinerten stereographischen Projektion gewinnen läßt. Diese Tatsache wurde unter anderem dazu verwendet, Bedingungen aufzustellen, unter denen ein rationales quadratisches Dreieckspatch auf einer Quadrik liegt. Weitere Kriterien für rationale quadratische Dreieckspatche auf Quadriken finden sich bereits in [Sederberg & Anderson '85], [Boehm & Hansford '91] und [Niebuhr '92], bzw. später auch bei [Degen '96] und [Albrecht '98a]. In Kapitel vier wird ein Kriterium von Niebuhr erweitert und eine einfache analytische Formulierung abgeleitet. Anhand dieser analytischen Formulierung lassen sich einige Eigenschaften rationaler Bézier-Darstellungen dreieckiger Quadrikenstücke ablesen und insbesondere die Bézier-Darstellung eines Dreieckspatches auf einer Quadrik aus ihrer impliziten Gleichung unmittelbar konstruieren.

Der Hauptteil der Arbeit ist Quadrikensplines gewidmet, das sind Flächen, die aus dreieckigen Quadrikenstücken glatt zusammengesetzt sind. Mit ihnen lassen sich beliebig vorgegebene Punkte eines Dreiecksnetzes mit zugeordneten Tangentialebenen interpolieren. 1989 wurden Quadrikensplines von Dahmen im CAGD eingeführt

([Dahmen '89]), der sie anhand ihrer algebraischen Gleichung berechnet, sich jedoch auf einen analytisch einfachen Spezialfall beschränkt. Der in dieser Arbeit beschriebene geometrische Zugang bietet zahlreiche Vorteile: Zum einen ermöglicht er die Konstruktion allgemeinerer Quadriken-splines. Weiterhin lassen sich Aussagen über den Einfluß der Freiheitsgrade auf die geometrische Gestalt der Fläche gewinnen. Darüber hinaus ergibt sich durch Dualisierung der Konstruktion eine weitere Klasse von Quadriken-splines, die nur in bestimmten Fällen mit der Klasse der primalen Quadriken-splines übereinstimmt. Schließlich ergeben sich die Powell-Sabin-Splines, stückweise quadratische C^1 -Funktionen zur Interpolation funktionaler Daten, als Spezialfall eines nur aus Paraboloiden zusammengesetzten Quadriken-splines.

In Kapitel fünf wird die geometrische Konstruktion von Quadriken-splines, die Punkte und zugeordnete Tangentialebenen eines Dreiecksnetzes interpolieren, beschrieben. Da sich drei beliebig vorgegebene Punkte und Tangentialebenen nicht durch eine einzige Quadrik interpolieren lassen, muß jedes Dreieck durch ein sogenanntes "Makroelement", einem Flächenverbund aus sechs Quadrikenstücken, interpoliert werden. Die Anordnung der dreieckigen Quadriken-segmente folgt hierbei dem Powell-Sabin-Split ([Powell & Sabin '77]). Die den Quadrikenstücken paarweise gemeinsamen Randebenen treffen sich in einer Geraden, der Transversalengeraden, auf der ein allen Quadriken des Makroelementes gemeinsamer Punkt mit Tangentialebene frei gewählt werden kann. Durch diesen "Nabepunkt", seine Tangentialebene, die gegebenen Eckdaten sowie die Randebenen sind die Quadriken des Makroelementes eindeutig bestimmt und lassen sich über einfache harmonische Verhältnisse mit Hilfe von Quadrikenbüscheln konstruieren. Da zwei benachbarte Makroelemente im allgemeinen nicht glatt aneinanderstoßen, müssen sie durch ein Flächenstück aus vier weiteren Quadrikenstücken verbunden werden. Die Tangentialebenenstetigkeit des verbindenden Flächenstückes erfordert jedoch, daß die Tangentialebenen in den Nabepunkten angrenzender Makroelemente gewissen linearen Abhängigkeiten genügen und die entsprechenden Transversalen koplanar sind.

Die bei der Wahl der Transversalen und Tangentialebenen in den Nabepunkten bestehenden Freiheitsgrade werden in Kapitel sechs behandelt. Hierin wird gezeigt, daß sich die globalen Bedingungen an die Tangentialebenen durch eine lokale Konstruktion, bei der jedem Eckpunkt ein Freiheitsgrad in Form eines Gewichtes zugeordnet ist, erfüllen lassen. Die sich ebenfalls global auswirkenden Koplanaritätsbedingungen für benachbarte Transversalen können nur bei Verfeinerung der gegebenen Daten durch eine lokale Konstruktion garantiert werden. Weiterhin werden ein globaler Algorithmus zur Konstruktion gültiger Transversalensysteme angegeben und spezielle Transversalensysteme diskutiert.

Kapitel sieben befaßt sich mit dualen Quadriksplines, die sich durch Übertragung der geometrischen Konstruktion eines Quadriksplines in den Dualraum ergeben. Diese Dualisierung ergibt eine weitere Klasse von Quadriksplines, die nur für spezielle Transversalensysteme mit der Klasse der primalen Quadriksplines übereinstimmt.

In Kapitel acht wird gezeigt, wie sich durch eine spezielle Wahl der Nabenelemente, zugehörigen Tangentialebenen und Transversalen Quadriksplines ergeben, die nur aus Paraboloiden zusammengesetzt sind. Diese definieren gerade die von Powell und Sabin ([Powell & Sabin '77]) konstruierten stückweise quadratischen C^1 -Funktionen zur Interpolation funktionaler Daten, die sogenannten Powell-Sabin-Splines.

Für diesen Spezialfall lassen sich Konvexitätsaussagen gewinnen, die geometrisch und algebraisch darstellbar sind und eine unvollständige Aussage von Carnicer und Dahmen ([Carnicer & Dahmen '92]) über die Konvexität von Powell-Sabin-Interpolanten korrigieren. In Kapitel neun werden diese Kriterien hergeleitet und Verfahren bereitgestellt, die konvexe Interpolanten garantieren. Hierzu wird unter anderem untersucht, wie konvexe Funktionen abgetastet werden müssen, damit der zugehörige Powell-Sabin-Interpolant konvex ist. Durch geometrische Überlegungen lassen sich die Konvexitätskriterien auch auf Makroelemente allgemeiner Quadriksplines erweitern. Weiterhin läßt sich die Konvexität des zwei benachbarte Makroelemente verbindenden Flächenstücks durch eine einfache analytische Ungleichung ausdrücken.

Werden die Freiheitsgrade in der Konstruktion der Quadriksplines willkürlich gewählt, ergeben sich zum Teil unerwünschte Artefakte oder sehr wellige Flächen. Kapitel zehn befaßt sich daher mit dem Glätten von Quadriksplines. Hierzu werden zunächst Krümmungen einer Quadrik aus ihrer impliziten Darstellung berechnet. Die bei der Glättung parametrischer Flächen angewendeten Energiefunktionale können auch für durch implizite Gleichungen beschriebene Quadriksplines eingesetzt werden, da die numerische Auswertung der auftretenden Integrale keine Parametrisierung der Fläche erfordert. Mögliche Verfahren zur Optimierung der Freiheitsgrade, um eine "ansprechende" Fläche zu erhalten, werden diskutiert. Ihre genauere Untersuchung und praktische Umsetzung bietet Raum für weitere Forschungen.

Zusammenfassend seien hier die Hauptresultate der Arbeit nochmals aufgeführt: Es wird erstmalig ein Verfahren zur Konstruktion C^k -stetiger stückweise rationaler periodischer Kreisdarstellungen angegeben. Darüberhinaus enthält die Arbeit eine allgemeine geometrische Konstruktion von Quadriksplines, die dualisierbar ist und insbesondere Powell-Sabin Interpolanten als Spezialfall ergibt. Weiterhin wird ein Konvexitätskriterium für Powell-Sabin-Interpolanten abgeleitet und auf Quadriken-

splines übertragen. Der allgemeine Zugang liefert darüberhinaus Freiheitsgrade für einen Glättungsprozeß.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Prautzsch herzlich für die Betreuung meines Promotionsvorhabens und seine Unterstützung während der letzten Jahre danken. Auch Herrn Prof. Dr. J. Hoschek gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferates und zahlreiche wertvolle Anregungen. Schließlich möchte ich noch meine Kollegen erwähnen, die mir in vielen Diskussionen und mit tatkräftiger Unterstützung bei praktischen Problemen mit Druckern, Rechnern etc. sehr hilfreich waren.

Kapitel 1

Projektive Geometrie

In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen aus der projektiven Geometrie kurz zusammengefaßt, um vor allem die in dieser Arbeit verwendeten Notationen vorzustellen. Für weitergehende Informationen sei beispielsweise auf [Boehm & Prautzsch '94] und [Schaal '80] verwiesen.

1.1 Homogene Koordinaten

Im Rahmen dieser Arbeit werden Punkte üblicherweise durch ihre affinen oder euklidischen Koordinaten $\mathbf{x} = [x \ y]^t$ im \mathbb{R}^2 bzw. $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^t$ im \mathbb{R}^3 beschrieben. Im Zusammenhang mit Quadriken ist es jedoch häufig vorteilhaft, den affinen Raum um seine Fernpunkte zu erweitern und im somit entstandenen projektiven Raum zu arbeiten. Punkte des projektiven Raumes werden durch homogene Koordinaten $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ x_2]^t$ im \mathcal{P}^2 bzw. $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3]^t$ im \mathcal{P}^3 beschrieben, die zur Unterscheidung mit hohlen Buchstaben bezeichnet werden. Die Koordinatenvektoren \mathbf{x} und $\rho\mathbf{x}$ ($\rho \neq 0$) bezeichnen denselben Punkt. Seine affinen Koordinaten ergeben sich durch Division der Koordinaten x_1, x_2 und evtl. x_3 durch die homogenisierende Koordinate x_0 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \\ x_3/x_0 \end{bmatrix}.$$

Verschwindet x_0 , so beschreibt \mathbf{x} einen Fernpunkt - eine Richtung - des affinen Raumes.

Geraden- und Ebenengleichungen der Form $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{n} = \mathbf{x}^t \mathbf{n} + d = 0$ vereinfachen sich im projektiven Raum zu einem Skalarprodukt der homogenen Punktkoordinaten mit dem Koeffizientenvektor \mathcal{U} der Ebene,

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \dots = \mathcal{U} \mathbf{x} = \rho [d \ \mathbf{n}^t] \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = 0.$$

Die Menge der Hyperebenen bildet ebenso wie die Menge der Punkte einen projektiven Raum, den sogenannten Dualraum. Dessen Elemente werden in analoger Weise durch Ebenenkoordinaten \mathcal{U} beschrieben. Dies sind die bis auf einen gemeinsamen homogenen Faktor festgelegten Koeffizienten der Ebenengleichung. Zur Unterscheidung von Ebenen und Punkten werden homogene Ebenenkoordinaten durch geschweifte Großbuchstaben beschrieben. Dabei bezeichnet \mathcal{U} sowohl die Ebene als auch den sie beschreibenden Koordinatenvektor und ihre Gleichung $\mathcal{U}(\mathfrak{x}) = \mathcal{U}\mathfrak{x} = 0$. Die Punkte der Ebene \mathcal{U} bilden also die Lösung der Gleichung $\mathcal{U}(\mathfrak{x}) = 0$.

Im projektiven Raum der Ebenen lassen sich Aussagen und Konstruktionen in gleicher Weise formulieren bzw. durchführen wie im Punktraum. Werden diese Aussagen bzw. Konstruktionen nun in den Punktraum zurückübertragen, indem die Punkte des Hyper-ebenenraumes als Ebenen des Punktraumes usw. interpretiert werden, ergeben sich die sogenannten dualen Aussagen und Konstruktionen.

Schnitt und Vereinigung werden im Rahmen dieser Arbeit mit \cap und \cup bezeichnet. So schreibt sich die Schnittgerade zweier Ebenen im Raum als $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ oder die Verbindungsgerade zweier Punkte als $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$. Für manche Berechnungen sind die homogenen Koordinaten von Schnitten oder Vereinigungen erforderlich, die sich über alternierende Produkte berechnen. Die Ebenenkoordinaten der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ergeben sich zu $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$ und analog ergeben sich die homogenen Koordinaten des Schnittpunktes der Ebenen \mathcal{A}, \mathcal{B} und \mathcal{C} zu $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$.

1.2 Doppelverhältnis

Einen zentralen Begriff in der projektiven Geometrie bildet das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Bezeichnen $\mathfrak{a} = [a_0 \ a_1]^t, \mathfrak{b} = [b_0 \ b_1]^t, \dots$ die homogenen und $\alpha = a_1/a_0, \beta = b_1/b_0, \dots$ die inhomogenen Koordinaten kollinearere Punkte bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems der aufgespannten Geraden, so berechnet sich das Doppelverhältnis wie folgt:

$$DV[\mathfrak{a} \mathfrak{b} \mathfrak{c} \mathfrak{d}] := \frac{|\mathfrak{a} \mathfrak{c}|}{|\mathfrak{a} \mathfrak{d}|} : \frac{|\mathfrak{b} \mathfrak{c}|}{|\mathfrak{b} \mathfrak{d}|} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} : \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Das Doppelverhältnis ist unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. Ist insbesondere einer der Punkte ein Fernpunkt, so wird das Doppelverhältnis zum Teilverhältnis.

Besonderes Interesse gilt dem Fall, daß das Doppelverhältnis $DV[\mathfrak{a} \mathfrak{b} \mathfrak{c} \mathfrak{d}] = -1$ beträgt. Die Punkte \mathfrak{a} und \mathfrak{b} werden dann durch \mathfrak{c} und \mathfrak{d} harmonisch getrennt bzw.

befinden sich in harmonischer Lage bzgl. c und d . Ist beispielsweise d ein Fernpunkt, so ist c der Mittelpunkt der Punkte a und b . Diese Eigenschaft wird wie in Abbildung 1.1 häufig zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes herangezogen.

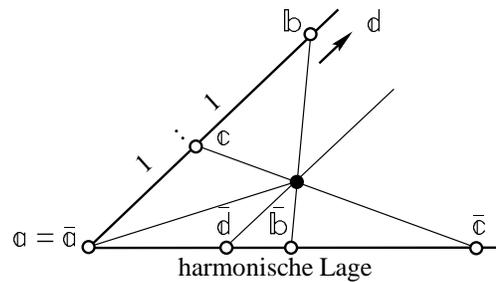


Abbildung 1.1: Harmonische Lage.

Der Satz von Menelaos beschreibt die Kollinearität von Punkten über Doppelverhältnisse auf Dreiecksseiten.

Satz 1.1 (Satz von Menelaos) Gegeben seien ein Dreieck $a b c$ sowie ein beliebiger Punkt y , der auf keiner Dreiecksseite liegt. Seien weiterhin $y_{ab} = y c \cap a b$, $y_{bc} = y a \cap b c$, $y_{ca} = y b \cap c a$. Auf den Seiten des Dreiecks seien zusätzlich Punkte $z_{ab} \neq y_{ab}$, $z_{bc} \neq y_{bc}$, $z_{ca} \neq y_{ca}$ wie in Abbildung 1.2 gewählt.

Dann sind die Punkte z_{ab}, z_{bc} und z_{ca} genau dann kollinear, wenn

$$DV[a b z_{ab} y_{ab}] \cdot DV[b c z_{bc} y_{bc}] \cdot DV[c a z_{ca} y_{ca}] = -1.$$

Die affine Version dieses Satzes findet sich z.B. in [Boehm & Prautzsch '94].

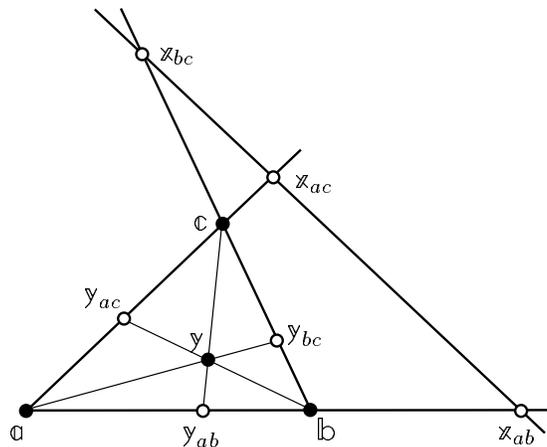


Abbildung 1.2: Satz von Menelaos.

1.3 Projektive Abbildungen

Geraden- und doppelverhältnistreue Abbildungen zwischen projektiven Räumen sind sogenannte projektive Abbildungen. Sie lassen sich in homogenen Koordinaten durch eine Matrixmultiplikation realisieren:

$$x \mapsto Ax.$$

Im n -dimensionalen projektiven Raum ist eine projektive Abbildung durch $n + 1$ Punkte in allgemeiner Lage und ihre Bilder eindeutig festgelegt.

Eine projektive Abbildung eines projektiven Punktraumes in seinen Dualraum wird als Korrelation bezeichnet. So wird beispielsweise die Zuordnung eines Punktes zu seiner Polarebene bezüglich einer fest vorgegebenen Quadrik durch eine spezielle Korrelation, eine sogenannte Polarität, beschrieben. Auch die weiter oben beschriebene Dualität wird durch Korrelationen vermittelt.

Kapitel 2

Quadriken

Quadriken sind algebraische Kurven bzw. Flächen zweiten Grades, d.h. Kurven und Flächen, die sich implizit durch ein Polynom zweiten Grades in affinen, euklidischen bzw. homogenen Koordinaten beschreiben lassen. Quadriken haben nicht zuletzt aufgrund ihres niedrigen Grades einige angenehme Eigenschaften, die bei der Kurven- und Flächenmodellierung genutzt werden. In diesem Abschnitt werden Quadriken kurz definiert und klassifiziert sowie einige später benötigten Eigenschaften zusammengefaßt.

2.1 Definition

Die Gleichung

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^t \mathbf{x} + \alpha = [1 \ \mathbf{x}^t] \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a}^t \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

mit einer symmetrischen Matrix \mathbf{A} beschreibt eine Quadrik \mathcal{Q} in affinen Koordinaten \mathbf{x} . In homogenen Koordinaten \mathbf{x} schreibt sich die gleiche Quadrik als $\mathbf{x}^t \mathbb{A} \mathbf{x} = 0$. Ist die Matrix \mathbb{A} regulär (d.h. $\det \mathbb{A} \neq 0$), heißt die Quadrik regulär, andernfalls singulär.

Die homogene Darstellung der Gleichung hat neben ihrer einfachen symmetrischen Gestalt weitere Vorteile. So berechnet sich der Tangentialraum \mathcal{X} an die durch 2.1 definierte Quadrik \mathcal{Q} in einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$ durch eine einfache Matrixmultiplikation

$$\mathcal{X} = \mathbb{A} \mathbf{x}.$$

Punkte und zugeordnete Tangentialebenen werden im folgenden immer durch den gleichen Buchstaben (beispielsweise \mathfrak{p} und \mathcal{P}) beschrieben. Zusammen bilden sie ein **Kontaktelement**, das auch durch $\boxed{\mathfrak{p}}$ bezeichnet wird.

Die Polargerade bzw. -ebene zu einem beliebigen Punkt y ergibt sich gleichermaßen als $\mathcal{Y} = \mathbb{A}y$. Hierbei ist der Pol der Ebene \mathcal{Y} bezüglich der Quadrik \mathcal{Q} die Spitze y des (eventuell nicht reellen) Tangentenkegels an den Schnitt von \mathcal{Y} mit \mathcal{Q} .

2.2 Kegelschnitte

Kegelschnitte sind Quadriken in der Ebene und ergeben sich u.a. als ebener Schnitt mit einem Kreiskegel. Enthält die Schnittebene die Kegelspitze, ergibt sich ein singulärer Kegelschnitt, der entweder aus einer oder zwei Geraden besteht oder zu einem Punkt entartet. Andernfalls ergibt sich ein regulärer Kegelschnitt - eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel.

Projektiv sind alle regulären Kegelschnitte äquivalent (siehe beispielsweise [Boehm & Prautzsch '94]). Durch Auszeichnung einer Ferngeraden ($x_0 = 0$) lassen sich jedoch in der verbleibenden affinen Ebene Unterscheidungen vornehmen. Eine Ellipse schneidet die Ferngerade gar nicht, eine Parabel tangiert sie in einem Punkt und eine Hyperbel schneidet die Ferngerade in zwei Punkten. Wird nun ein Punkt $[0, x_1, x_2]^t$ der Ferngerade in die Kegelschnittgleichung (2.1) eingesetzt und die Diskriminante der sich ergebenden quadratischen Gleichung in x_1/x_2 bestimmt, ergibt sich folgendes analytisches Kriterium zur Unterscheidung der Kegelschnitte: Ist

$$\det \mathbf{A} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0, \text{ so ist der Kegelschnitt (2.1) eine } \begin{cases} \text{Hyperbel} \\ \text{Parabel} \\ \text{Ellipse} \end{cases}.$$

Jeder reguläre Kegelschnitt läßt sich quadratisch rational parametrisieren. In der projektiven Geometrie finden sich dazu einige Verfahren. Eines dieser Verfahren, die stereographische Projektion, wird in Abschnitt 3.1 näher erläutert.

Satz von Brianchon

Da die symmetrische Matrix \mathbf{A} nur sechs unabhängige Koeffizienten besitzt, ist jeder Kegelschnitt bereits durch fünf Bestimmungswerte (Punkte und Tangenten) in genügend allgemeiner Lage eindeutig festgelegt. Folglich sind sechs beliebig vorgegebene Tangenten nicht unabhängig voneinander, sondern genügen gewissen Abhängigkeiten, wie sie im Satz von Brianchon formuliert werden:

Satz 2.1 (Satz von Brianchon) *Die Geraden eines Sechsseits sind genau dann Tangenten an einen Kegelschnitt, wenn sich die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Eckpunkte in einem Punkt schneiden.*

Fallen je zwei der sechs Seiten des Sechsseits zusammen, so ergibt sich die spezielle Konfiguration in Abbildung 2.1 rechts.



Abbildung 2.1: Satz von Brianchon.

Harmonische Verhältnisse

Bei Kegelschnitten finden sich in natürlicher Weise harmonische Verhältnisse:

Bemerkung 2.2 Auf einer beliebigen Geraden werden ein Punkt und seine Polare bezüglich eines die Gerade nicht tangierenden regulären Kegelschnitts von den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt harmonisch getrennt.

Diese wohlbekannte Eigenschaft ist sehr einfach einsichtig, da sich alle Kegelschnitte projektiv (i.e. unter Beibehaltung von Doppelverhältnissen) auf einen Kreis abbilden lassen (siehe Abbildung 2.2).

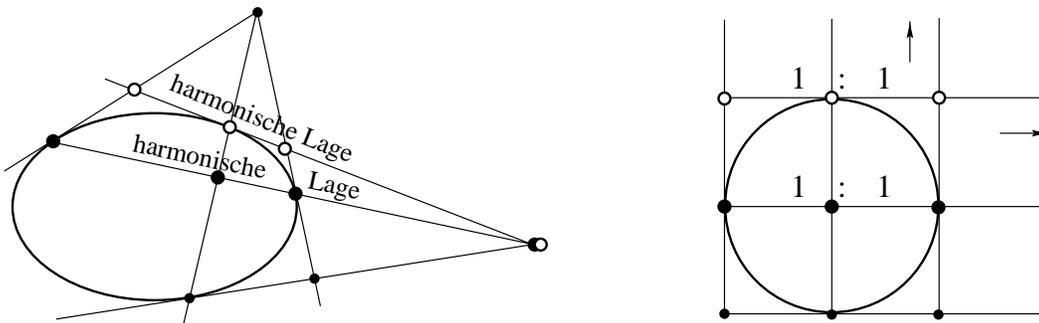


Abbildung 2.2: Harmonische Verhältnisse bei Kegelschnitten.

Zweibogenkonstruktion

Liegt ein Kegelschnitt \mathcal{K}_2 mit einem weiteren Kegelschnitt \mathcal{K}_1 und einer Doppelgeraden \mathcal{G} im Bündel, d.h. $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 + \mu\mathcal{G}^2$, so haben die beiden Kegelschnitte in den Schnittpunkten mit der Geraden gemeinsame Tangenten. Aus zwei Kegelschnittbögen auf \mathcal{K}_1 bzw. \mathcal{K}_2 läßt sich dann wie in Abbildung 2.3 eine Kurve tangentialstetig zusammensetzen. Derartige Kurven werden im folgenden als **Zweibogen** bezeichnet, die

Doppelgerade \mathcal{G} , die die beiden Bögen trennt, wird Übergangs-, Berühr- oder **Trenngerade** genannt.

Drei beliebig vorgegebene Kontaktelemente, d.h. Punkte und Tangenten, \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{p} , liegen im allgemeinen nicht auf einem Kegelschnitt (vergleiche Satz 2.1), können aber nach Vorgabe einer Trenngeraden \mathcal{G} durch p durch einen Zweibogen mit C^1 -Kontakt entlang \mathcal{G} interpoliert werden. Dieser Zweibogen ist durch die drei Kontaktelemente und die Trenngerade eindeutig festgelegt und kann über harmonische Verhältnisse konstruiert werden. Auf der Trenngeraden existiert neben \boxed{p} noch ein zweites, beiden Kegelschnittbögen gemeinsames Kontaktelement \boxed{q} . Aus Bemerkung 2.2 folgt, daß a und der Schnittpunkt \bar{a} der Tangente in a mit der Trenngeraden \mathcal{G} von den Tangenten \mathcal{P} und \mathcal{Q} harmonisch getrennt werden. Diese Eigenschaft genügt zur Konstruktion des gesuchten Zweibogens, siehe Abbildung 2.3.

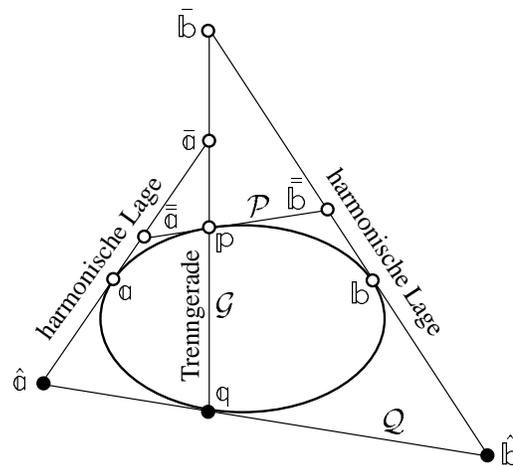


Abbildung 2.3: Zweibogenkonstruktion

Konstruktion 2.3 (Zweibogen) Gegeben seien drei Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{p} sowie eine Trenngerade \mathcal{G} durch p , die weder a noch b enthält. Die Punkte a , b und p seien nicht kollinear; die zugehörigen Tangenten haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt und enthalten nur genau einen der Punkte a , b oder p .

Seien weiterhin $\bar{a} = \mathcal{G} \cap \mathcal{A}$, $\bar{b} = \mathcal{G} \cap \mathcal{B}$ die Schnittpunkte der Tangenten mit der Trenngeraden und \hat{a} und \hat{b} die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangente \mathcal{P} mit \mathcal{A} und \mathcal{B} . Konstruiere den vierten harmonischen Punkt \hat{a} bzw. \hat{b} zu a , \bar{a} und \bar{a} bzw. b , \bar{b} und \bar{b} . Dann ist $\mathcal{Q} = \hat{a}\hat{b}$ die zweite gemeinsame Tangente beider Kegelschnittbögen und $\mathcal{Q} \cap \mathcal{G} = q$ der gemeinsame Berührungspunkt. Die beiden Kegelschnitte des Zweibogens sind durch $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$ bzw. $\boxed{b} \boxed{p} \boxed{q}$ eindeutig festgelegt.

2.3 Quadriken im Raum

Klassifikation

Im Gegensatz zu Kegelschnitten finden sich bei regulären Quadriken ($\text{Rang } \mathbb{A} = 4$) im reellen dreidimensionalen projektiven Raum zwei Klassen projektiv äquivalenter Quadriken, die sogenannten ringförmigen und ovalen Quadriken. Singuläre Quadriken teilen sich in kegelige Quadriken ($\text{Rang } \mathbb{A} = 3$), sich schneidende Ebenenpaare ($\text{Rang } \mathbb{A} = 2$) und Doppel Ebenen ($\text{Rang } \mathbb{A} = 1$).

Anhand von Ebenenschnitten lassen sich diese und weitere Unterscheidungen charakterisieren. Jede Ebene schneidet eine Raumquadrik in einem Kegelschnitt. Der Schnitt der Quadrik mit einer ihrer Tangentialebenen enthält den Berührungspunkt als Doppelpunkt, der Kegelschnitt zerfällt somit in ein (evtl. zusammenfallendes) Geradenpaar mit dem Berührungspunkt als singulären Punkt (siehe Abbildung 2.4). Tangentialebenen-schnitte können somit zur projektiven Unterscheidung von Quadriken ohne planare Komponenten verwendet werden (siehe beispielsweise [Boehm & Prautzsch '94], S.141):

Lemma 2.4 (Projektive Äquivalenzklassen) *Eine Quadrik ist genau dann oval, kegelig oder ringförmig, wenn eine beliebige Tangentialebene sie in einem konjugiert komplexen, doppelt zählenden oder reellen Geradenpaar schneidet.*

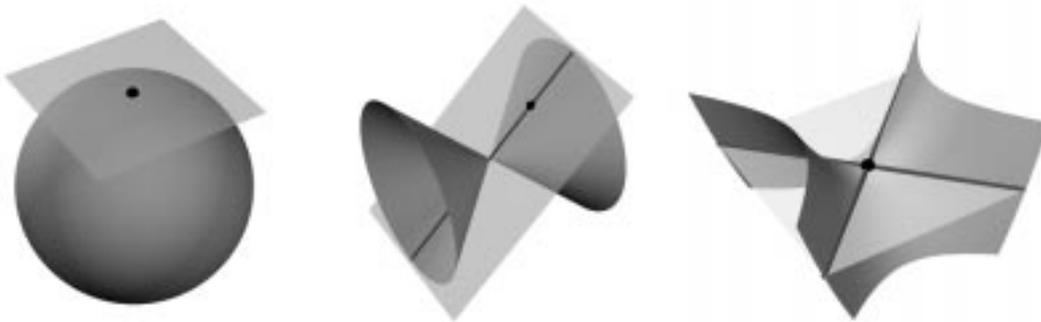


Abbildung 2.4: Schnitt einer Quadrik mit ihrer Tangentialebene.

Bemerkung 2.5 *Die projektive Klassifikation von Quadriken ohne ebene Komponenten ($\text{Rang } \mathbb{A} > 2$) läßt sich folgendermaßen analytisch ausdrücken: Ist*

$$\det \mathbb{A} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0, \text{ dann beschreibt Gleichung (2.1) eine } \begin{cases} \text{ovale Quadrik} \\ \text{kegelige Quadrik} \\ \text{Ringquadrik} \end{cases}.$$

Zur Bestimmung der affinen Äquivalenzklassen wird wie bereits im zweidimensionalen Fall der Schnitt mit der Fernebene untersucht. Zu den ovalen Quadriken zählen das Ellipsoid, das keinen reellen Schnitt mit der Fernebene besitzt, das elliptische Paraboloid, das die Fernebene tangiert und das zweischalige Hyperboloid, das die Fernebene in einem reellen regulären Kegelschnitt schneidet. Die Ringquadriken teilen sich in einschalige (elliptische) Hyperboloide, die einen regulären Schnitt mit der Fernebene besitzen, und hyperbolische Paraboloid, die die Fernebene tangieren. Die kegeligen Quadriken lassen sich analog unterteilen. Da im Rahmen dieser Arbeit im allgemeinen singuläre Fälle ausgeschlossen sind, wird auf diese Quadriken nicht näher eingegangen. Durch Untersuchung gewisser Invarianten der Untermatrix \mathbf{A} von \mathbb{A} läßt sich die affine Unterscheidung auch analytisch beschreiben. Eine Übersicht hierüber findet sich u.a. in [Flaquer et al. '92].

Implizite Bézier-Darstellung von Quadrikenstücken

Sederberg ([Sederberg '85]) führte eine implizite Bézier-Darstellung für algebraische Flächen ein. Er verwendet ein Referenztetraeder $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4$ und schreibt die implizite Gleichung der Fläche in baryzentrischen Koordinaten $\mathbb{1} = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^t$ bezüglich dieses Tetraeders. Da baryzentrische Koordinaten spezielle projektive Koordinaten sind, entspricht diese Darstellung dem Resultat einer projektiven Koordinatentransformation. Sei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbb{V} \mathbb{1}$, $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ mit $\mathbb{V} = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_4]$, $\mathbf{v}_i = (1 \ \mathbf{v}_i)^t$. Dann schreibt sich die Gleichung der Quadrik \mathcal{Q} aus Gleichung (2.1) als

$$\mathbf{x}^t \mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbb{1}^t \mathbb{V}^t \mathbb{A} \mathbb{V} \mathbb{1} = \mathbb{1}^t \mathbb{B} \mathbb{1} = 0.$$

Mit den multivariaten Bernsteinpolynomen $B_{ijkl}(\mathbb{1}) = \frac{2}{i!j!k!l!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k \lambda_4^l$ vom Grad zwei als Basisfunktionen ergibt sich hieraus unmittelbar die Bézier-Darstellung der Quadrikgleichung:

$$\mathbb{1}^t \mathbb{B} \mathbb{1} = \sum_{i=1}^4 b_{ijkl} B_{ijkl}(\mathbb{1}) = 0. \quad (2.2)$$

Die Koeffizienten β_{rs} der Matrix \mathbb{B} entsprechen den Bézier-Koeffizienten $b_{e_r+e_s}$ mit den r - bzw. s -ten Einheitsvektoren e_r bzw. e_s . Da projektive Transformationen den Typ einer Quadrik nicht ändern, kann die Klassifikation aus Bemerkung 2.5 auch mit Hilfe der Matrix \mathbb{B} vorgenommen werden.

Bemerkung 2.6 Die Quadrik \mathcal{Q} enthält genau dann einen der Tetraedereckpunkte \mathbf{v}_i , wenn $b_{2e_i} = 0$. Weiter ist eine Ebene \mathcal{V}_i genau dann die Tangentialebene an \mathcal{Q} in \mathbf{v}_i , wenn eine Konstante α existiert, so daß für alle $j \neq i$ gilt $b_{e_i+e_j} = \alpha \mathcal{V}_i(\mathbf{v}_j)$, wobei $\mathbf{v}_j = [1 \ \mathbf{v}_j]^t$.

Büschel und C^1 -Übergänge

Die durch die Gleichung

$$Q_\lambda = Q_0 + \lambda Q_\infty$$

beschriebenen Quadriken bilden ein Quadrikenbüschel. Durch jeden Punkt des projektiven Raumes existiert genau eine Quadrik des Büschels. Jede Quadrik Q_λ enthält den Schnitt $Q_0 \cap Q_\infty$, der im allgemeinen aus einer algebraischen Kurve vierten Grades besteht. Entartet diese Kurve wie in Abbildung 2.5 rechts zu einem doppelt zählenden Kegelschnitt, so berühren sich alle Quadriken der Schar längs dieser Schnittkurve. In diesem Fall gehören die Ebene des Kegelschnitts als Doppelebene und der längs dieser Schnittkurve berührende Tangentialebenenkegel zum Büschel und spannen ebenfalls das Quadrikenbüschel auf.

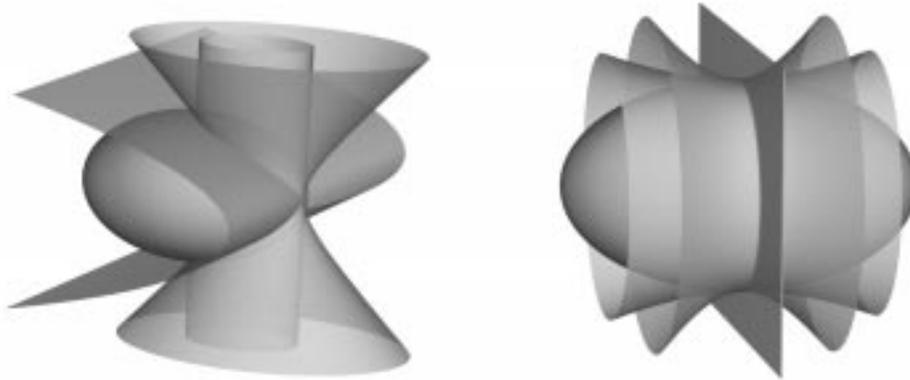


Abbildung 2.5: Quadrikenbüschel.

Umgekehrt müssen je zwei Quadriken mit C^1 -Kontakt in einer Ebene zu einem Büschel gehören, das die Berührebene als Doppelebene enthält. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage für algebraische Flächen beliebigen Grades findet sich in [Warren '86]. Die gemeinsamen Tangentialebenen längs der Schnittkurve beider Quadriken hüllen den Tangentialebenenkegel durch den Pol der Berührebene bezüglich beider Quadriken ein. Somit ist der C^1 -Kontakt zweier Quadriken in einer Ebene bereits garantiert, falls drei nicht kollineare Punkte und Tangentialebenen übereinstimmen, da hierdurch Berührebene und Tangentialebenenkegel eindeutig festgelegt sind:

Lemma 2.7 *Alle Quadriken mit drei gemeinsamen Kontaktelementen \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} gehören zum Büschel $\mathcal{K} + \lambda\mathcal{U}^2$, wobei \mathcal{U} die Punktebene $a|b|c$ und \mathcal{K} den eindeutigen Tangentialebenenkegel durch \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{c} bezeichne. Folglich haben sie C^1 -Kontakt in der Ebene \mathcal{U} .*

Korollar 2.8 *Zwei Quadriken mit C^1 -Kontakt entlang einer Kurve gehören notwendig zu einem durch drei gemeinsame Kontaktelemente aufgespannten Büschel und umgekehrt. Insbesondere ist die gemeinsame Kurve ein (doppelt zählender) Kegelschnitt.*

In Bemerkung 2.13 wird die explizite Gleichung des Büschels $\mathcal{K} + \lambda\mathcal{U}^2$ hergeleitet.

2.4 Interpolation mit Quadriken

Quadrikenbüschel können zur einfachen Konstruktion interpolierender Quadriken herangezogen werden. Hierzu seien drei beliebige unabhängige Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} gegeben.

Definition 2.9 *Ein Tripel von Kontaktelementen \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} heißt **unabhängig**, wenn die vier Punkte a , b , c und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ projektiv unabhängig sind und keiner der Punkte a , b , c in zwei der Ebenen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} enthalten ist. Ein Tripel \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} , \boxed{a} \boxed{b} c oder a b \boxed{c} heißt unabhängig, wenn es zu einem unabhängigen Tripel von Kontaktelementen \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} ergänzt werden kann.*

Annahme 2.10 (Unabhängigkeitsvoraussetzung) *Im folgenden werden zur Vermeidung von Spezialsituationen immer unabhängige Tripel von Punkten und/oder Kontaktelementen vorausgesetzt.*

Drei unabhängige Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} können im allgemeinen nicht durch eine einzige Quadrik interpoliert werden. Gäbe es eine derartige interpolierende Quadrik, so bestünde ihr Schnitt mit der Punktebene a b c aus einem Kegelschnitt, der bereits durch fünf Bestimmungselemente festgelegt ist. Folglich müßten die drei Punkte und Tangentialebenen gewissen Bedingungen genügen, wie sie beispielsweise im Satz von Brianchon (siehe Satz 2.1) formuliert sind. Dieser Sachverhalt läßt sich analytisch wie folgt ausdrücken:

Lemma 2.11 *Drei unabhängige Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn \boxed{a} , \boxed{b} , und \boxed{c} Brianchons Konfiguration bilden (vergl. Abbildung 2.1). Dies ist genau dann der Fall, wenn die Punkte a , b , c und die zugehörigen Tangentialebenen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} folgende Gleichung erfüllen:*

$$\mathcal{A}(b)\mathcal{B}(c)\mathcal{C}(a) = \mathcal{B}(a)\mathcal{C}(b)\mathcal{A}(c).$$

Beweis:

Die Ebene des Büschels \mathcal{A} \mathcal{B} durch c wird durch

$$\mathcal{B}(c) \mathcal{A} - \mathcal{A}(c) \mathcal{B}$$

dargestellt. Brianchons Bedingung ist somit genau dann erfüllt, wenn die vier Ebenen $\mathcal{B}(c) \mathcal{A} - \mathcal{A}(c) \mathcal{B}$, $\mathcal{A}(b) \mathcal{C} - \mathcal{C}(b) \mathcal{A}$, $\mathcal{C}(a) \mathcal{B} - \mathcal{B}(a) \mathcal{C}$ und $a \wedge b \wedge c$ einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= [(\mathcal{B}(c)\mathcal{A} - \mathcal{A}(c)\mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A}(b)\mathcal{C} - \mathcal{C}(b)\mathcal{A}) \wedge (\mathcal{C}(a)\mathcal{B} - \mathcal{B}(a)\mathcal{C})] [a \wedge b \wedge c] \\ &= (\mathcal{A}(c)\mathcal{C}(b)\mathcal{B}(a) - \mathcal{B}(c)\mathcal{A}(b)\mathcal{C}(a)) [\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}] [a \wedge b \wedge c], \end{aligned}$$

woraus aufgrund der projektiven Unabhängigkeit der Punkte a, b, c und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ die Aussage des Lemmas unmittelbar folgt. \square

Lemma 2.11 bleibt auch dann gültig, wenn \mathcal{A}, \mathcal{B} und \mathcal{C} als Geraden in der Ebene abc interpretiert werden. In diesem Fall kann der Faktor $a \wedge b \wedge c$ im Beweis weggelassen werden.

Guo ([Guo '91]) leitet wesentlich aufwendiger eine äquivalente Darstellung dieser Gleichung aus der algebraischen Gleichung der Quadrik durch \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{c} her.

Ein weiteres Kriterium, wann drei Kontaktelemente auf einem Kegelschnitt liegen, beinhaltet die folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.12 *Drei unabhängige Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn die Tangentialebenen \mathcal{B} und \mathcal{C} den Punkt a und den Schnittpunkt i der Tangentialebene \mathcal{A} mit der Verbindungsgeraden bc harmonisch trennen. Ein spezielles projektives Bild dieses Sachverhalts ist in Bild 2.6 dargestellt.*

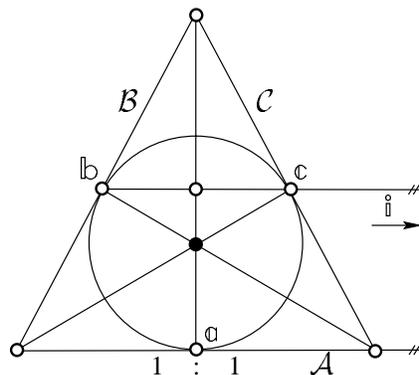


Abbildung 2.6: Kegelschnitt.

Ist die Brianchon-Bedingung verletzt, können die Kontaktelemente durch einen Flächenverbund aus sechs Quadrikenstücken interpoliert werden. Dies wird in Kapitel 5 näher behandelt. Existiert jedoch ein Kegelschnitt durch die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{c} , so läßt sich nach Lemma 2.7 ein ganzes Bündel interpolierender Quadriken bestimmen.

Bemerkung 2.13 Der eindeutig bestimmte Tangentenkegel \mathcal{K} durch die Kontaktelemente $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$ und $\boxed{\mathfrak{c}}$ enthält \mathfrak{c} und liegt mit dem Ebenenpaar $\mathcal{A} \mathcal{B}$ und der Ebene

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{s} \quad \text{mit } \mathfrak{s} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \\ &= \mathcal{B}(\mathfrak{a}) \mathcal{A}(\mathfrak{b}) \mathcal{C} - \mathcal{B}(\mathfrak{a}) \mathcal{C}(\mathfrak{b}) \mathcal{A} - \mathcal{C}(\mathfrak{a}) \mathcal{A}(\mathfrak{b}) \mathcal{B} \end{aligned}$$

im Büschel (siehe Abbildung 2.7). Damit schreibt sich \mathcal{K} als

$$\mathcal{K} = -2\mathcal{A}(\mathfrak{c})\mathcal{B}(\mathfrak{c})\mathcal{V}\mathcal{V}^t + \mathcal{V}(\mathfrak{c})^2(\mathcal{A}\mathcal{B}^t + \mathcal{B}\mathcal{A}^t)$$

und spannt gemeinsam mit der Ebene

$$\mathcal{U} = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$$

das Quadrikenbüschel auf, das die Kontaktelemente $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$ und $\boxed{\mathfrak{c}}$ interpoliert.

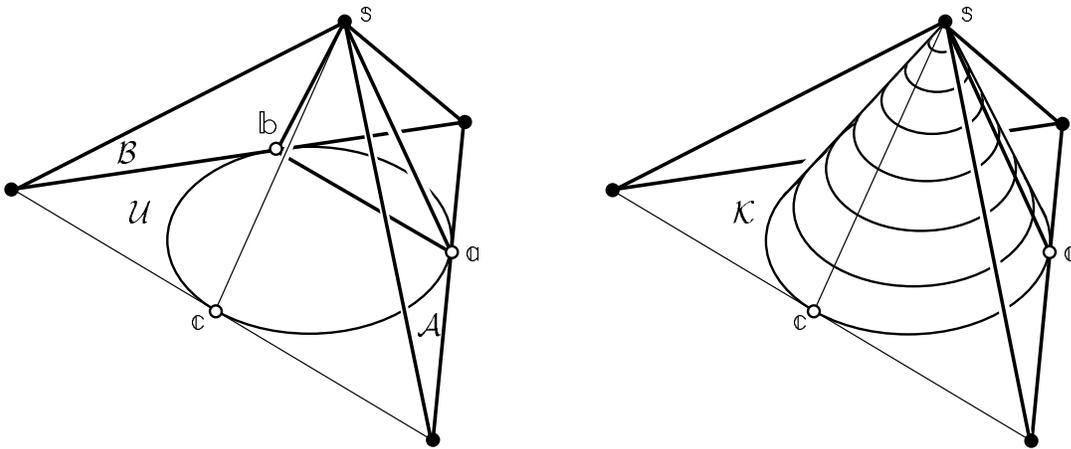


Abbildung 2.7: Tangentialebenenkegel durch drei Kontaktelemente.

Durch jeden Punkt \mathfrak{q} des Raumes existiert eine eindeutig bestimmte Quadrik $\mathcal{Q}_{\mathfrak{q}}$ des Büschels durch $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$, $\boxed{\mathfrak{c}}$. Die Lage von \mathfrak{q} bestimmt den projektiven Typ der Quadrik $\mathcal{Q}_{\mathfrak{q}}$. Da jeder Kegel von seinen Tangentialebenen eingehüllt wird, wird als “Äußeres” des Kegels derjenige von ihm berandete Teil des Raumes bezeichnet, der die Tangenten enthält. Damit läßt sich folgendes Lemma formulieren:

Lemma 2.14 Die Quadrik $\mathcal{Q}_{\mathfrak{q}}$ durch drei Kontaktelemente $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$ und $\boxed{\mathfrak{c}}$ und einen weiteren Punkt \mathfrak{q} ist genau dann oval, wenn \mathfrak{q} im Inneren des Tangentialebenenkegels \mathcal{K} liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathcal{A}(\mathfrak{c})\mathcal{B}(\mathfrak{c})\mathcal{K}(\mathfrak{q}) > 0. \quad (2.3)$$

\mathcal{K} ist hierbei die Gleichung des Tangentialebenenkegels aus Bemerkung 2.13.

Beweis:

Die Quadrik $\mathcal{Q}_q = -\mathcal{K}(q)\mathcal{U}\mathcal{U}^t + \mathcal{U}(q)^2\mathcal{K}$ ist nach Bemerkung 2.5 genau dann oval, wenn die Determinante ihrer beschreibenden Matrix (hier auch mit \mathcal{Q}_q bezeichnet) negativ ist. Da sie sich nicht direkt berechnen läßt, wird \mathcal{Q}_q mit der regulären Matrix $[\mathfrak{a} \ \mathfrak{b} \ \mathfrak{c} \ \mathfrak{s}]$ multipliziert. Mit $\mathcal{V}(\mathfrak{c}) = -|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_q \mathfrak{a} &= (\mathcal{U}(q))^2 (\mathcal{V}(\mathfrak{c}))^2 \mathcal{B}(\mathfrak{a})\mathcal{A} \\ \mathcal{Q}_q \mathfrak{b} &= (\mathcal{U}(q))^2 (\mathcal{V}(\mathfrak{c}))^2 \mathcal{A}(\mathfrak{b})\mathcal{B} \\ \mathcal{Q}_q \mathfrak{c} &= (\mathcal{U}(q))^2 \{2\mathcal{A}(\mathfrak{c})\mathcal{B}(\mathfrak{c})|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|\mathcal{V} + |\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|^2(\mathcal{B}(\mathfrak{c})\mathcal{A} + \mathcal{A}(\mathfrak{c})\mathcal{B})\} \\ \mathcal{Q}_q \mathfrak{s} &= -\mathcal{K}(q)|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|\mathcal{U}\end{aligned}$$

ergibt sich die Determinante

$$|\mathcal{Q}_q [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}]| = |\mathcal{Q}_q| |\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}| = -2(\mathcal{U}(q))^6 \mathcal{K}(q) (\mathcal{A}(\mathfrak{b})) (\mathcal{B}(\mathfrak{a})) \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \mathcal{B}(\mathfrak{c}) \cdot |\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|^6 |\mathcal{A} \ \mathcal{B} \ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{s}) \ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c})|.$$

Mithilfe der Beziehung

$$\begin{aligned}[\mathcal{A} \ \mathcal{B} \ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{s}) \ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c})] &= \\ &= (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{s})) \ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B}(\mathfrak{a}) & 0 \\ \mathcal{A}(\mathfrak{b}) & 0 & 0 \\ \mathcal{A}(\mathfrak{c}) & \mathcal{B}(\mathfrak{c}) & -|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}| \end{bmatrix}\end{aligned}$$

berechnet sich schließlich die Determinante von \mathcal{Q}_q zu

$$|\mathcal{Q}_q| = -2(\mathcal{U}(q))^6 \mathcal{K}(q) |\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|^6 (\mathcal{A}(\mathfrak{b}))^2 (\mathcal{B}(\mathfrak{a}))^2 \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \mathcal{B}(\mathfrak{c}),$$

woraus die Ungleichung 2.3 unmittelbar folgt.

Sei $\mathfrak{r} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{U}$ der Schnittpunkt der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} mit der Punkzebene \mathcal{U} . Als Schnittpunkt zweier Tangenten an \mathcal{K} liegt er nach den hier gewählten Bezeichnungen außerhalb des Tangentialebenenkegels \mathcal{K} . Einsetzen in die Kegelgleichung ergibt:

$$\mathcal{K}(\mathfrak{r}) = -2\mathcal{A}(\mathfrak{c})\mathcal{B}(\mathfrak{c})(\mathcal{V}(\mathfrak{r}))^2 + 0.$$

Damit ist die Ungleichung (2.3) gleichbedeutend damit, daß

$$\mathcal{K}(\mathfrak{r}) \mathcal{K}(q) < 0,$$

d.h. q und \mathfrak{r} auf verschiedenen Seiten des Kegels liegen. □

Kapitel 3

Rationale Parametrisierung von Kreisen

Die neben Geraden einfachsten geometrischen Objekte sind Kreise. Aufgrund ihrer Symmetrie und Einfachheit treten sie in zahlreichen Anwendungen wie beispielsweise bei der Modellierung von Rotationsflächen oder im Musterentwurf auf.

In CAD-Systemen werden Kurven und Flächen häufig durch rationale Splines, d.h. stückweise rationale Kurven, beschrieben, weswegen in den letzten Jahren vermehrt nach rationalen Kreisdarstellungen gesucht wurde (siehe z.B. [Piegl & Tiller '89, Hsu et al. '93, Chou '95, Piegl & Tiller '97]). Bereits 200 v. Chr. kannte Apollonius eine quadratische Parametrisierung des Kreises und Hipparch (180-125 v. Chr) verwendete die stereographische Projektion auf der Kugel (siehe [Blaschke '54]).

Piegl & Tiller ([Piegl & Tiller '89]) beschrieben 1989 eine stückweise quadratische rationale Parametrisierung und zeigten darüberhinaus, daß durch quadratische rationale C^1 -Splines nicht der gesamte Kreis darstellbar ist.

Chou ([Chou '95]) beschäftigte sich später mit der Darstellung des gesamten Kreises durch ein einziges rationales Segment. Hierzu ist mindestens Grad 4, mit positiven Gewichten sogar Grad 5 erforderlich; die zugehörige periodische homogene B-Spline-Darstellung ist jedoch nicht differenzierbar.

In den vorangehenden Arbeiten findet sich keine glatte Parametrisierung des gesamten Kreises. Da zahlreiche numerische Verfahren, die beim geometrischen Modellieren zum Einsatz kommen, differenzierbare Parametrisierungen erfordern, wird hier eine einfache Methode zur Konstruktion einer $n - 1$ -mal differenzierbaren periodischen B-Spline-Darstellung des Kreises vorgestellt. Diese ist von minimalem Grad $2n$ (Siehe auch [Bangert & Prautzsch '97a]). Grundlage dieser Darstellung ist die stereographi-

sche Projektion, die im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt wird.

3.1 Stereographische Projektion

Die stereographische Projektion bildet eine projektive Ebene auf eine beliebige Quadrik ab. Seien hierzu eine Gerade bzw. Ebene $\mathcal{U} = \{y | \mathcal{U}^t y = 0\}$, eine Quadrik $\mathcal{Q} = \{x | x^t \mathcal{Q} x = 0\}$, sowie ein Punkt $z \in \mathcal{Q}$, das Projektionszentrum, gegeben. Jeder Punkt y der Ebene \mathcal{U} wird durch die stereographische Projektion auf den Schnittpunkt der Geraden $z y$ mit der Quadrik \mathcal{Q} abgebildet. Jeder Punkt der Ebene wird hierdurch genau einem Punkt der Quadrik zugeordnet; die Schnittgerade (der Schnittpunkt) zwischen der Tangentialebene (Tangente) an \mathcal{Q} in z und der Ebene \mathcal{U} wird auf z abgebildet.

Die Beziehungen zwischen Bild x und Urbild y ergeben sich somit zu:

$$\begin{aligned} x &= (2z^t \mathcal{Q} y) y + (y^t \mathcal{Q} y) z \\ y &= -(\mathcal{U}^t z) x + (\mathcal{U}^t x) z. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1 Ist $y(t)$ bzw. $y(u, v)$ eine rationale Parametrisierung der Gerade bzw. Ebene \mathcal{U} , so liefert die stereographische Projektion eine rationale Parametrisierung der Quadrik. Jede Parametrisierung eines regulären Kegelschnitts kann über stereographische Projektion gewonnen werden. Bei Raumquadriken gilt das jedoch nicht mehr (siehe u.a. [Dietz '95]).

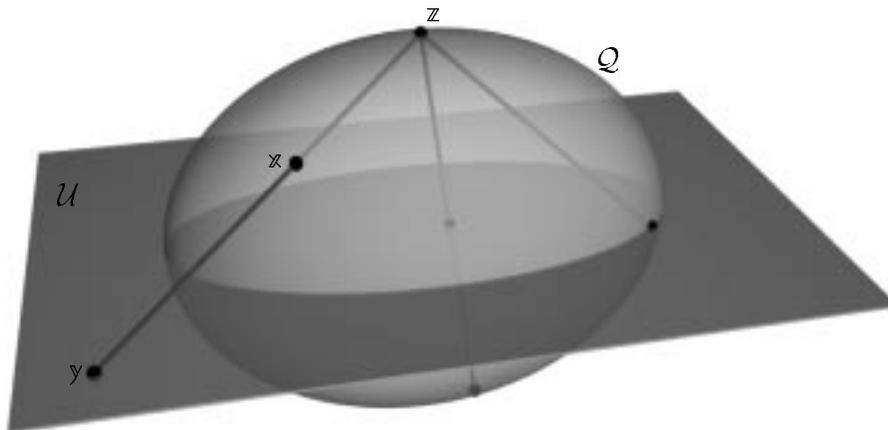


Abbildung 3.1: Stereographische Projektion.

3.2 Konstruktion einer rationalen Parametrisierung des Kreises

Sei $\mathfrak{x} = [w \ x \ y]^t$ eine periodische Parametrisierung des Einheitskreises in homogenen Koordinaten mit w als homogenisierender Koordinate, d.h.

$$x^2 + y^2 = w^2.$$

Wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, ergibt sich jede rationale Parametrisierung $\mathfrak{x}(t)$ des Kreises aus einer rationalen Parametrisierung $\mathfrak{p}(t) = [r(t) \ p(t) \ 0]^t$ der Geraden $y = 0$ durch stereographische Projektion,

$$\mathfrak{x} = \begin{bmatrix} p^2 + r^2 \\ 2pr \\ r^2 - p^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

mit Zentrum $\mathfrak{c} = [1 \ 0 \ -1]^t$, siehe Abbildung 3.2.

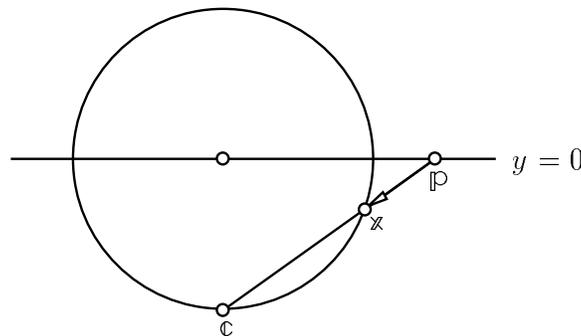


Abbildung 3.2: Stereographische Projektion.

Für eine periodische Parametrisierung des Kreises ist somit eine periodische Parametrisierung der Geraden $y = 0$ als Urbild der stereographischen Projektion erforderlich. Jede derartige Parametrisierung ergibt sich jedoch durch Zentralprojektion mit Zentrum \mathfrak{c} einer geschlossenen Kurve um \mathfrak{c} wie in Abbildung 3.3.

Der Einfachheit halber stellen wir diese Kurve als $\mathfrak{p}(t) = [p(t) \ r(t)]^t$ bezüglich eines affinen Koordinatensystems mit Ursprung \mathfrak{c} und Einheitsvektoren $[1 \ 0]^t$ und $[0 \ 1]^t$ dar. Die Koordinatenspalten \mathfrak{p} und $[p/r \ 1]^t$ bezeichnen somit den gleichen Punkt auf der Geraden $y = 0$ und die Punkte \mathfrak{c} , \mathfrak{p} und $\mathfrak{p} = [p \ r]^t$ liegen auf einer Geraden.

Sei nun $\mathfrak{p}(t)$ eine geschlossene periodische Kurve um \mathfrak{c} , $\mathfrak{p}(t)$ die durch Projektion aus \mathfrak{c} induzierte Parametrisierung der Geraden $y = 0$ und $\mathfrak{x}(t)$ das Bild der Geraden unter stereographischer Projektion. Bei jedem Umlauf von $\mathfrak{p}(t)$ um \mathfrak{c} werden Gerade und

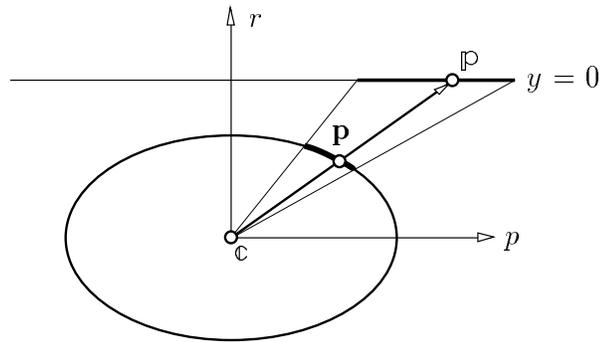


Abbildung 3.3: Zentralprojektion.

Kreis durch $\mathbf{p}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ zweimal durchlaufen. Ist $\mathbf{p}(t)$ punktsymmetrisch zu \mathbf{c} , d.h. gilt $\mathbf{p}(t) = -\mathbf{p}(t+m)$ mit einer Konstanten m , so sind beide Durchläufe von Kreis und Gerade gleich parametrisiert, d.h. für die Parameter t und $t+m$ ergeben sich die gleichen Punkte auf Kreis bzw. Gerade. Die Koordinatendarstellung von \mathbf{p} hat jedoch verschiedene Vorzeichen pro Durchlauf.

Da eine periodische Darstellung des Kreises keine zwei unterschiedlichen Parametrisierungen pro Durchlauf erlaubt, ergibt sich zusammenfassend:

Satz 3.2 Jede periodische stückweise rationale Kreisdarstellung $\mathbf{x}(t)$ ergibt sich durch Projektion einer geschlossenen periodischen polynomialen Kurve $\mathbf{p}(t)$, die symmetrisch zum Projektionszentrum \mathbf{c} ist, auf die Gerade $y=0$ und anschließender stereographischer Projektion mit Zentrum \mathbf{c} der Geraden auf den Kreis.

Bemerkung 3.3 Eine periodische stückweise rationale Parametrisierung eines beliebigen Kegelschnitts ergibt sich als projektives Bild der Kreisdarstellung $\mathbf{x}(t)$.

Beispiel 3.4 Mit Hilfe der oben dargestellten Konstruktion wird eine Darstellung des Kreises als differenzierbarer periodischer Spline vierten Grades ermittelt. Sei $\alpha = 90^\circ/m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, und

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \cos(3\alpha + 2i\alpha) \\ \sin(3\alpha + 2i\alpha) \end{bmatrix}.$$

Weiterhin bezeichne $N_i^2(t)$ die stückweise quadratischen B-Spline-Funktionen über den Knoten $i, i+1, i+2, i+3$. Dann ist

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_i N_i^2(t)$$

ein punktsymmetrischer Spline mit $\mathbf{p}(t) = -\mathbf{p}(t+m)$. Abbildung 3.4 zeigt diese Kurve für $m=3$.

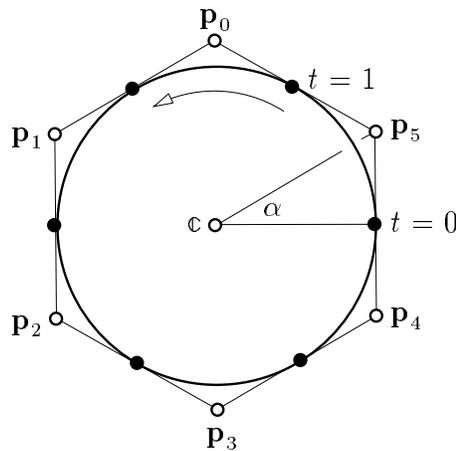


Abbildung 3.4: Punktsymmetrische Splinekurve

Einsetzen in (3.1) liefert die zugehörige Parametrisierung \varkappa des Kreises als stückweise quartischer C^1 -Spline,

$$\varkappa(t) = \sum \varkappa_i N_i^4(t),$$

wobei N_i^4 die B-Spline-Funktionen über den Knoten $[i/3]$, $[(i+1)/3]$, \dots , $[(i+5)/3]$, $[x] := \max\{i \leq x \mid i \in \mathbb{Z}\}$ bezeichnet. Die Kontrollpunkte sind wie folgt gegeben (vergleiche auch Abbildung 3.5):

$$\begin{aligned} \varkappa_{3l\pm 1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ c \cos(\beta + 4l\alpha \pm \alpha) \\ c \sin(\beta + 4l\alpha \pm \alpha) \end{bmatrix} \\ \varkappa_{3l} &= \begin{bmatrix} \omega \\ d \cos(\beta + 4l\alpha) \\ d \sin(\beta + 4l\alpha) \end{bmatrix} \\ \beta &= 2\alpha - 90^\circ \\ c &= 1/\cos \alpha \\ d &= (\cos^2 \alpha + 2)/(3 \cos^2 \alpha) \\ \omega &= (2 \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 2)/(3 \cos^2 \alpha) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.5 Die Kreisdarstellung $\varkappa(t)$ ist rotationssymmetrisch bezüglich Rotationen um den Winkel 4α .

Bemerkung 3.6 Die Konstruktion aus Beispiel 3.4 läßt sich nicht mit $\alpha = 90^\circ$ ($m = 1$), d.h. mit nur einem Splinesegment, durchführen. In ([Chou '95]) wird der gesamte Kreis durch ein quartisches Segment beschrieben, bei dem jedoch Null als Gewicht auftritt. Diese Darstellung läßt sich auch nicht periodisch glatt fortsetzen.

Beispiel 3.7 Abbildung 3.6 zeigt ein einschaliges Rotationshyperboloid mit zugehörigem Kontrollnetz einer Tensorprodukt-B-Spline-Darstellung vom Grad (2,4).

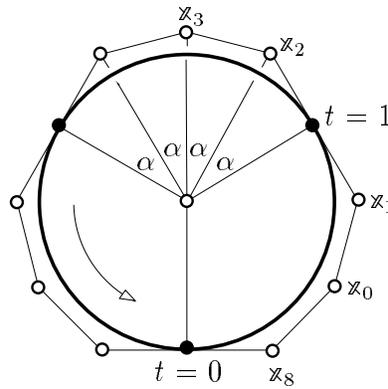


Abbildung 3.5: Der Kreis als periodischer Spline.

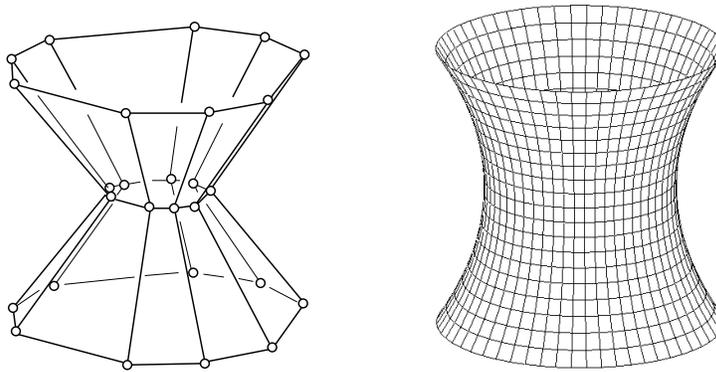


Abbildung 3.6: Einschaliges Rotationshyperboloid mit zugehörigem Kontrollnetz.

3.3 Positive Gewichte

Positive Gewichte in der Parameterdarstellung der Splinekurve haben numerische Vorteile, u.a. liegt auch die Kurve in der konvexen Hülle der zugehörigen Kontrollpunkte. Chou benötigt für eine Kreisdarstellung mit positiven Gewichten ein Polynom fünften Grades (siehe Bemerkung 3.6). Zum Vergleich werden in diesem Abschnitt die Gewichte der Bézier-Darstellung der vorher konstruierten Kreissegmente untersucht.

Im vorangehenden Beispiel ergeben sich die Bézier-Punkte der Parametrisierung aus den Spline-Kontrollpunkten x_i in Gleichung (3.2) zu

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_2, x_3, x_4, \frac{1}{2}(x_4 + x_5), \text{ etc.},$$

die Gewichte, d.h. w -Koordinaten, sind somit alle positiv.

Im allgemeinen Fall ergibt sich die Bézier-Darstellung eines beliebigen Kreissegments

$$x^l(t) = \sum_{i=0}^{2k+2} \begin{bmatrix} w_i \\ x_i \\ y_i \end{bmatrix} B_i^{2k+2}(t)$$

aus der Bézier-Darstellung des zugehörigen Segmentes \mathbf{p}^l des Urbildes \mathbf{p}

$$\mathbf{p}^l(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \begin{bmatrix} p_i \\ r_i \end{bmatrix} B_i^{k+1}(t)$$

und der Produktformel für Bernsteinpolynome (siehe [Farin '90], S. 65). Insbesondere ergibt sich die homogenisierende w -Koordinate zu:

$$\binom{2k+2}{j} w_j = \sum_{i=\max(0, j-k-1)}^{\min(k+1, j)} (p_i p_{j-i} + r_i r_{j-i}) \binom{k+1}{i} \binom{k+1}{j-i}.$$

Beschreibt das Segment \mathbf{x}^l höchstens einen Halbkreis, so kann aufgrund der nachfolgend gezeigten Symmetrieeigenschaften ohne Einschränkung angenommen werden, daß \mathbf{p}^l vollständig im ersten Quadranten der p, r -Ebene liegt. Dies bedeutet aber

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_0, r_0 \\ 0 &< p_{i+1}, r_i \quad \text{für } i = 0 \dots k, \end{aligned}$$

woraus sich die Positivität der Gewichte w_i unmittelbar ergibt:

Lemma 3.8 *Die Bézier-Darstellung der Segmente der periodischen, stückweise rationalen Kreisdarstellung aus Lemma 3.2 besitzt positive Gewichte.*

3.4 Stetigkeitsordnung

Jede periodische Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ des Einheitskreises ist mittels stereographischer Projektion mit einer geschlossenen Kurve $\mathbf{p}(t)$ verknüpft, die punktsymmetrisch zum Projektionszentrum \mathbf{c} verläuft. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Stetigkeitsordnungen von $\mathbf{p}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ übereinstimmen.

Ist $\mathbf{p}(t)$ C^k -stetig, so ist nach Gleichung 3.1 auch $\mathbf{x}(t)$ k -mal stetig differenzierbar. Für die Umkehrung betrachten wir die inverse stereographische Projektion, die den Kreis $x^2 + y^2 = w^2$ auf die Gerade $[r \ p \ 0]^t$ abbildet. Sie wird durch

$$2p \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ w - y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad 2r \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} w + y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

für $\mathbf{x} \neq [1 \ 0 \ 1]^t$ bzw. $\mathbf{x} \neq \mathbf{c}$ beschrieben.

Da w keine Nullstellen besitzt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß w positiv ist. Dann sind wegen $(w - y)(w + y) = x^2$ die einzelnen Faktoren $w - y$ und $w + y$ nichtnegativ und es gilt

$$p = \pm \sqrt{(w - y)/2} \quad \text{und} \quad r = x/2p$$

bzw.

$$p = x/2r \quad \text{und} \quad r = \pm \sqrt{(w+y)/2}.$$

Da nur entweder p oder r das Vorzeichen in $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 1]^t$ bzw. $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ändern, existiert immer eine Darstellung von \mathbf{p} , die die gleiche Stetigkeitsordnung wie \mathbf{x} besitzt. Damit gilt:

Lemma 3.9 *Die Parametrisierungen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ aus Lemma 3.2 besitzen die gleiche Stetigkeitsordnung.*

Bemerkung 3.10 *Ist die homogene Darstellung $\mathbf{x}(t)$ des Kreises n -mal stetig differenzierbar, sind auch die affinen Koordinatenfunktionen x/w und y/w n -mal differenzierbar. x/w und y/w können jedoch auch glatter sein. Insbesondere läßt sich zeigen, daß $n = 2k$ -fach stetig differenzierbare symmetrische affine Darstellungen des Kreises auch $2k + 1$ -mal differenzierbar sind (siehe hierzu [Bangert & Prautzsch '97a]). Dies verallgemeinert die Aussage von Piegl und Tiller ([Piegl & Tiller '89]) für $n = 0$.*

3.5 Minimaler Grad und Segmentanzahl

Seien x, y, w stückweise polynomiale Funktionen ohne gemeinsamen Teiler. Dann sind auch $w - y$ und $w + y$ teilerfremd. Wegen $(w - y)(w + y) = x^2$ läßt sich $x = 2pr$ so faktorisieren, daß noch $w - y = 2p^2$ und $w + y = 2r^2$, siehe [Kubota '72]. Folglich ist auch \mathbf{p} stückweise polynomial und der Grad von \mathbf{x} ist doppelt so hoch wie der Grad von \mathbf{p} .

Da Polynome nicht periodisch sind, muß \mathbf{p} stückweise polynomial vom Grad $k + 1$ sein. Folglich erfordert eine k -fach differenzierbare Parametrisierung des Einheitskreises den Minimalgrad $2k + 2$.

Das B-Spline-Kontrollpolygon einer periodischen, punktsymmetrischen Kurve \mathbf{p} besteht aus einer geraden Anzahl von mindestens vier Kontrollpunkten.

Ist \mathbf{p} vom Grad n und Stetigkeitsordnung $(n - 1)$, so stimmen die Anzahl ihrer B-Spline-Kontrollpunkte und die Anzahl ihrer Segmente überein. Folglich besteht \mathbf{p} aus mindestens 4 Segmenten, während die Kreisdarstellung \mathbf{x} vom Grad $2n$ mindestens 2 Segmente erfordert. Zusammenfassend ergibt sich:

Lemma 3.11 *Eine periodische, stückweise rationale C^k -Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ des Kreises hat den Minimalgrad $2k + 2$ und benötigt mindestens zwei Segmente.*

3.6 Symmetrische Darstellungen

Zur Untersuchung von Symmetrieeigenschaften von $\mathfrak{x}(t)$ wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{c}$. Daraus folgt $r(0) = 0$. Sei $\alpha(t)$ der Winkel $\mathfrak{p}(0), \mathfrak{c}, \mathfrak{p}(t)$ und $\beta(t)$ der Winkel $\mathfrak{x}(0), [1 \ 0 \ 0]^t, \mathfrak{x}(t)$ vergleiche Bild 3.7. Wir machen hier Gebrauch von der Tatsache, daß der Peripheriewinkel α der halbe Perimeterwinkel β ist.

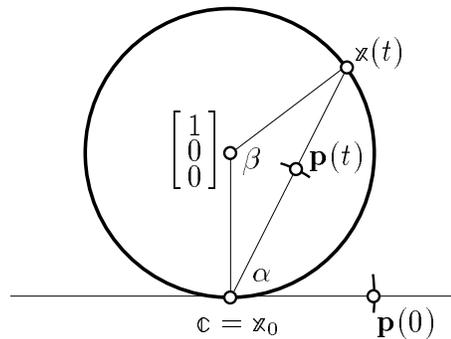


Abbildung 3.7: Peripheriewinkel.

Unter Verwendung dieser Winkel lassen sich Kreis- und Urbildparametrisierung wie folgt schreiben:

$$\mathfrak{x}(t) = \xi(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{p}(t) = \rho(\alpha) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Aus der Formel (3.1) für die stereographische Projektion folgt dann

$$\xi(\beta) = \xi(2\alpha) = p^2 + r^2 = \rho^2(\alpha).$$

Ist die Kurve $\mathfrak{p}(t)$ invariant unter Rotationen mit Zentrum \mathfrak{c} um den Winkel ϕ , dann gilt

$$\rho(\alpha) = \rho(\alpha + \phi),$$

woraus

$$\xi(\beta) = \xi(\beta + 2\phi)$$

und somit die Invarianz von \mathfrak{x} unter Drehungen um den Ursprung mit Winkel 2ϕ folgt:

Lemma 3.12 *Ist $\mathfrak{p}(t)$ rotationssymmetrisch bezüglich Rotationen um \mathfrak{c} um den Winkel ϕ , dann ist $\mathfrak{x}(t)$ rotationssymmetrisch bezüglich Rotationen um den Ursprung um den Winkel 2ϕ .*

Ist weiterhin \mathbf{p} symmetrisch zur Geraden durch \mathbf{c} und $\mathbf{p}(t)$, dann gilt

$$\rho(\alpha + \delta) = \rho(\alpha - \delta), \quad \alpha = \alpha(t)$$

und somit

$$\xi(\beta + 2\delta) = \xi(\beta - 2\delta), \quad \beta = \beta(t).$$

Folglich ist \mathbf{x} symmetrisch zur Geraden durch den Ursprung $[1 \ 0 \ 0]^t$ und $\mathbf{x}(t)$.

3.7 Kugeln

Die Konstruktion glatter periodischer Parametrisierungen für Kreise läßt sich nicht auf Kugeln übertragen. Zunächst ist die stereographische Projektion auf die Kugel keine Bijektion zwischen Ebene und Kugel. Weiterhin ist es nicht möglich, einen ebenen Bereich differenzierbar und singularitätenfrei auf die gesamte Kugel abzubilden, siehe beispielsweise ([Prautzsch & Trump '92]).

Es ist jedoch möglich, die Kugel durch verschiedene Dreiecks- oder Vierecksflächenstücke zu überdecken. Farin, Piper und Worsey (1987) stellen Oktanten der Kugel dar und Dietz zeigte 1995, daß für beliebig vorgegebene ebene Randkurven (Kreise) ein Tensorprodukt-Patch vom Grad (2,4) auf der Kugel existiert. In Anlehnung an die Würfeltopologie läßt sich somit die gesamte Kugel mit 6 Tensorproduktflächen vom Grad (2,4) überdecken.

Darstellungen niedrigeren Grades der gesamten Kugel sind jedoch nicht möglich: Angenommen, es existierten f quadratische Dreieckspatches mit insgesamt v Ecken, die die Kugel überdeckten. Nach [Dietz '95], Theorem 3.4, gilt, daß die Winkelsumme in jedem Patch 180° beträgt. Es folgt

$$v \cdot 360^\circ = \text{Summe aller Winkel} = f \cdot 180^\circ$$

und damit $v = f/2$. Da insgesamt $e = 3f/2$ Randkurven existieren, ist Euler's Gleichung $v - e + f = 2$ verletzt und somit die Annahme falsch.

Gleichermaßen ist es unmöglich, die gesamte Kugel in biquadratische Tensorproduktflächenstücke zu zerlegen. Jedes derartige Patch kann nämlich in zwei quadratische Dreiecksstücke zerlegt werden.

Da jede irreduzible Parametrisierung der Kugel von geradem Grad ist ([Dietz et al. '93]), kann die Kugel nicht in Dreiecks- bzw. Viereckspatches zerlegt werden, deren Grad kleiner als 4 bzw. (2,4) ist.

Kapitel 4

Rationale quadratische Dreiecksflächenstücke auf Quadriken

Während Raytraceprogramme zur photorealistischen Darstellung von Flächen bevorzugt mit Netzen und impliziten Flächen arbeiten, basieren die meisten Modellierprogramme auf parametrischen Kurven und Flächen. Aus diesem Grund sind Konvertierungen zwischen den Darstellungsmethoden erwünscht. In den vorangehenden Betrachtungen über Quadriken wird ihre implizite Darstellung verwendet. Jede Quadrik läßt sich jedoch auch rational parametrisieren, was in den letzten Jahren ausgiebig erforscht wurde. In diesem Abschnitt werden einige weitere Aspekte der Erkennung und Konstruktion quadratischer Dreiecksflächenstücke auf Quadriken dargestellt.

4.1 Kriterien

Jedes dreieckige Flächenstück auf einer Quadrik läßt sich mithilfe der stereographischen Projektion rational parametrisieren. In der Dissertation von Dietz ([Dietz '95]) findet sich eine ausführliche Erörterung dieser Methode. Schneiden sich die drei Randkegelschnitte des Quadrikenstücks in einem Punkt, so findet sich eine quadratische Parametrisierung, im allgemeinen Fall werden jedoch rationale Polynome vom Grad vier benötigt.

Umgekehrt wurde seit längerem das Problem diskutiert, unter welchen Bedingungen ein rationales quadratisches Dreieckspatch auf einer Quadrik liegt. Während eine rationale quadratische Kurve immer einen Kegelschnitt beschreibt, kann ein quadratisches Dreieckspatch auf einer Fläche vierten Grades liegen. Überlegungen hierzu finden sich

u.a bei [Sederberg & Anderson '85, Boehm & Hansford '91, Niebuhr '92, Dietz '95, Degen '96, Albrecht '98a]. Einige Ergebnisse seien an dieser Stelle kurz aufgeführt:

Sei $\mathbb{b}(u, v, w) = \sum \mathbb{b}_{ijk} B_{ijk}^2(u, v, w)$ die rationale Bézier-Darstellung eines nichtdegenerierten quadratischen Dreieckspatches in homogenen Koordinaten. Dann bezeichnen $\mathcal{U}_1 = \mathbb{b}_{020} \wedge \mathbb{b}_{011} \wedge \mathbb{b}_{002}$, $\mathcal{U}_2 = \mathbb{b}_{002} \wedge \mathbb{b}_{101} \wedge \mathbb{b}_{200}$ und $\mathcal{U}_3 = \mathbb{b}_{200} \wedge \mathbb{b}_{110} \wedge \mathbb{b}_{020}$ die Randebenen des Patches.

Ein geometrisches Kriterium wird durch folgenden Satz gegeben:

Satz 4.1 (Boehm & Hansford 1991, Dietz 1995) *\mathbb{b} liegt genau dann auf einer regulären Quadrik, wenn \mathbb{b} nicht auf einem Kegel liegt, die drei Randkegelschnitte sich in einem Punkt \mathfrak{q} mit koplanaren Tangenten schneiden und die Anzahl der Randkurvensegmente durch \mathfrak{q} 0 oder 2 beträgt.*

Niebuhr ([Niebuhr '92]) entwickelte aus einer Idee von Sederberg & Anderson ein einfaches hinreichendes Kriterium für quadratische Dreiecksflächenstücke auf Quadriken:

Satz 4.2 (Niebuhr 1992) *Sind die Randkurven einer rationalen quadratischen Dreiecks-Bézier-Fläche Kegelschnitte, so zerfallen die Bilder der drei ebenen Schnitte - bestimmt durch die drei Ebenen der Randkurven - in Geradenpaare:*

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_1(\mathbb{b}_{200} u + \mathbb{b}_{110} 2v + \mathbb{b}_{101} 2w) &=: \bar{u} = 0 \\ v = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_2(\mathbb{b}_{110} 2u + \mathbb{b}_{020} v + \mathbb{b}_{011} 2w) &=: \bar{v} = 0 \\ w = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_3(\mathbb{b}_{101} 2u + \mathbb{b}_{011} 2v + \mathbb{b}_{002} w) &=: \bar{w} = 0. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß die Geraden $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ und $\bar{w} = 0$ zusammenfallen, ist die rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche Parameterdarstellung einer nicht zerfallenden Flächen zweiter Ordnung.

Mit den "Bildern der drei ebenen Schnitte" bezeichnet Niebuhr diejenigen Kurven im Parameterraum, die sich durch den Schnitt der Randebenen \mathcal{U}_i mit dem Dreiecksflächenstück ergeben.

In einem kürzlich erschienen Artikel von Albrecht findet sich ein analytisches Kriterium, das auch zerfallende Quadriken umfaßt, jedoch recht komplexe Berechnungen erfordert und trotz des geometrischen Ursprungs über die Veronese-Quadrik relativ unanschaulich bleibt. Ist β die Determinante der Matrix

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbb{b}_{200} & \mathbb{b}_{020} & \mathbb{b}_{002} & \mathbb{b}_{011} \end{bmatrix}$$

und sind weiterhin β_{101}^k bzw. β_{110}^k die Determinanten der Matrizen, die sich durch Ersetzen der $(k + 1)$ -ten Spalte in \mathbb{B} durch $[1 \ \mathbf{b}_{101}]^t$ bzw. $[1 \ \mathbf{b}_{110}]^t$ ergeben, so schreibt sich Korollar 2 in [Albrecht '98b] wie folgt:

Satz 4.3 (Albrecht 1998) *Das nichtdegenerierte rationale quadratische Bézier-Flächenstück \mathbb{b} in Standardform (d.h. mit Eckgewichten 1) liegt genau dann auf einer Quadrik, wenn die Kontrollpunkte \mathbf{b}_{ijk} und Gewichte w_{ijk} die folgenden Gleichungen erfüllen:*

$$\begin{aligned}
& -4w_{101}^2 w_{011}^2 \beta_{101}^0 \beta_{101}^1 \beta_{101}^2 + w_{101}^2 \beta_{101}^0 (\beta_{101}^3)^2 + w_{011}^2 \beta_{101}^1 \beta^2 = 0 \\
& -4w_{101}^2 w_{110} w_{011}^2 (\beta_{101}^0 \beta_{101}^1 \beta_{110}^2 + \beta_{101}^0 \beta_{110}^1 \beta_{101}^2 + \beta_{110}^0 \beta_{101}^1 \beta_{101}^2) \\
& \quad + w_{101}^2 w_{110} (2\beta_{101}^0 \beta_{101}^3 \beta_{110}^3 + \beta_{110}^0 (\beta_{101}^3)^2) \\
& \quad - w_{101} w_{011} \beta_{101}^3 \beta^2 + w_{110} w_{011}^2 \beta_{110}^1 \beta^2 = 0 \\
& -4w_{110}^2 w_{101} w_{011}^2 (\beta_{110}^0 \beta_{110}^1 \beta_{101}^2 + \beta_{110}^1 \beta_{101}^0 \beta_{110}^2 + \beta_{101}^1 \beta_{110}^0 \beta_{110}^2) \\
& \quad + w_{110}^2 w_{101} (2\beta_{110}^0 \beta_{110}^3 \beta_{101}^3 + \beta_{101}^0 (\beta_{110}^3)^2) \\
& \quad - w_{110} w_{011} \beta_{110}^3 \beta^2 + w_{101} w_{011}^2 \beta_{101}^1 \beta^2 = 0 \\
& -4w_{110}^2 w_{011}^2 \beta_{110}^0 \beta_{110}^1 \beta_{110}^2 + w_{110}^2 \beta_{110}^0 (\beta_{110}^3)^2 + w_{011}^2 \beta_{110}^2 \beta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Im Gegensatz hierzu läßt sich Niebuhrs Kriterium in Satz 4.2 analytisch sehr einfach fassen und anwenden. Darüberhinaus ist es für reguläre Quadriken sogar notwendig:

Satz 4.4 *Ein nichtdegeneriertes quadratisches Patch \mathbb{b} liegt genau dann auf einer regulären Quadrik, wenn es auf keinem Kegel liegt und*

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{200} & 2\mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{110} & 2\mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{101} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{110} & \mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{020} & 2\mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{011} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{101} & 2\mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{011} & \mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{002} \end{bmatrix} = 1. \quad (4.1)$$

Beweis:

Der Schnitt des Patches \mathbb{b} mit den Ebenen \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 und \mathcal{U}_3 entspricht im Parameterraum je zwei Geraden, die in Satz 4.2 aufgeführt sind.

Die erste Gerade beschreibt das Urbild der Randkurve, $\mathcal{W}_1 = (\mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{200} \ \mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{110} \ \mathcal{U}_1 \mathbb{b}_{101})^t$, $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{110} \ \mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{020} \ \mathcal{U}_2 \mathbb{b}_{011})^t$ und $\mathcal{W}_3 = (\mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{101} \ \mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{011} \ \mathcal{U}_3 \mathbb{b}_{002})^t$ bilden die Spalten der Matrix aus Gleichung (4.1) und beschreiben die Geraden $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ und $\bar{w} = 0$ aus Satz 4.2.

Ist Gleichung (4.1) erfüllt, so fallen die Geraden $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ und $\bar{w} = 0$ aus Satz 4.2 zusammen, und \mathbb{b} liegt auf einer regulären Quadrik.

Ist umgekehrt \mathbb{b} Teil einer regulären Quadrik, dann beschreibt die Parametrisierung eine stereographische Projektion aus dem Parameterraum auf die Quadrik. Die drei Geraden \mathcal{W}_1 , \mathcal{W}_2 und \mathcal{W}_3 bestimmen die Fundamentalgerade im Parameterraum, die

durch die Parameterabbildung auf das Projektionszentrum $q = \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \wedge \mathcal{U}_3$ abgebildet wird. \mathcal{W}_1 , \mathcal{W}_2 und \mathcal{W}_3 müssen somit paarweise linear abhängig sein, also Gleichung (4.1) erfüllen. \square

Bemerkung 4.5 Gleichung (4.1) ist für ein rationales quadratisches Dreieckspatch auf einem Kegel nicht notwendig erfüllt (siehe [Niebuhr '92]).

4.2 Anwendungen und Bemerkungen

Eine ringförmige, kegelige bzw. ovale Quadrik wird von jeder ihrer Tangentialebenen in einem reellen Geradenpaar, einer Doppelgeraden bzw. einem konjugiert komplexen Geradenpaar geschnitten (siehe Lemma 2.5). Folglich trifft ein beliebiger Kegelschnitt auf einer Quadrik eine beliebige, ihn nicht tangierende Tangentialebene in zwei reellen verschiedenen, zusammenfallenden oder zwei konjugiert komplexen Punkten. Beim Schneiden der Tangentialebene $\mathcal{V}_3 = \mathbb{b}_{002} \wedge \mathbb{b}_{011} \wedge \mathbb{b}_{101}$ in \mathbb{b}_{002} mit dem Randkegelschnitt in der Ebene $\mathcal{U}_3 = \mathbb{b}_{200} \wedge \mathbb{b}_{020} \wedge \mathbb{b}_{110}$ ergibt sich eine quadratische Gleichung, die genau dann eine doppelt zählende Lösung besitzt, wenn ihre Diskriminante Null ist:

Lemma 4.6 Ein rationales quadratisches Dreieckspatch auf einem Kegel erfüllt notwendigerweise die folgende Bedingung:

$$(\mathcal{V}_3 \mathbb{b}_{200})(\mathcal{V}_3 \mathbb{b}_{020}) - (\mathcal{V}_3 \mathbb{b}_{110})^2 = 0, \quad (4.2)$$

wobei $\mathcal{V}_3 = \mathbb{b}_{002} \wedge \mathbb{b}_{011} \wedge \mathbb{b}_{101}$ die Tangentialebene in \mathbb{b}_{002} beschreibt.

In [Albrecht '98a] wird eine ähnliche Formulierung dieses Kriteriums relativ aufwendig über die Berechnung der Gaußschen Krümmung hergeleitet. Eine ausführliche Abhandlung über rationale Patche auf Kegeln findet sich in der Dissertation von Niebuhr ([Niebuhr '92]).

Lemma 4.7 Drei unabhängige Kontaktelemente (siehe Definition 2.9) liegen genau dann auf einer Quadrik, wenn der Satz von Brianchon in der Ebene der drei Punkte erfüllt ist (vergleiche 2.11). In den Bézier-Punkten eines rationalen quadratischen Dreieckspatches drückt sich diese Bedingung wie folgt aus:

$$= \frac{|\mathbb{b}_{020} \mathbb{b}_{011} \mathbb{b}_{002} \mathbb{b}_{110}| |\mathbb{b}_{002} \mathbb{b}_{101} \mathbb{b}_{200} \mathbb{b}_{011}| |\mathbb{b}_{200} \mathbb{b}_{110} \mathbb{b}_{020} \mathbb{b}_{101}|}{|\mathbb{b}_{020} \mathbb{b}_{011} \mathbb{b}_{002} \mathbb{b}_{101}| |\mathbb{b}_{002} \mathbb{b}_{101} \mathbb{b}_{200} \mathbb{b}_{110}| |\mathbb{b}_{200} \mathbb{b}_{110} \mathbb{b}_{020} \mathbb{b}_{011}|} = \quad (4.3)$$

Bemerkung 4.8 Gleichung (4.3) ist quadratisch in jedem der Bézier-Punkte. Insbesondere ist sie nur von den Punkten abhängig und unabhängig von den jeweiligen Gewichten. Sollen nun fünf beliebig vorgegebene Bézier-Punkte so durch einen sechsten Punkt ergänzt werden, daß das resultierende Dreieckspatch auf einer Quadrik liegt, muß dieser sechste Punkt notwendig auf der durch Gleichung (4.3) definierten Quadrik liegen.

Beispiel 4.9 Sind alle Punkte bis auf einen Eckpunkt, z.B. \mathfrak{b}_{200} , gegeben, so muß dieser gemäß Bemerkung (4.8) auf der durch

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \mathfrak{x}^t (\mathfrak{b}_{002} \wedge \mathfrak{b}_{101} \wedge \mathfrak{b}_{011}) \cdot (\mathfrak{b}_{110} \wedge \mathfrak{b}_{020} \wedge \mathfrak{b}_{101})^t \mathfrak{x} - \\ \epsilon_2 \mathfrak{x}^t (\mathfrak{b}_{002} \wedge \mathfrak{b}_{101} \wedge \mathfrak{b}_{110}) \cdot (\mathfrak{b}_{110} \wedge \mathfrak{b}_{020} \wedge \mathfrak{b}_{011})^t \mathfrak{x} = 0, \end{aligned}$$

$\epsilon_1 = \mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110}$, $\epsilon_2 = \mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101}$, definierten Quadrik liegen. Sie enthält insbesondere die fünf gegebenen Punkte \mathfrak{b}_{002} , \mathfrak{b}_{020} , \mathfrak{b}_{101} , \mathfrak{b}_{011} , \mathfrak{b}_{110} . Die Tangentialebene

$$\mathcal{T} = \epsilon_1 \rho_1 \mathfrak{b}_{002} \wedge \mathfrak{b}_{101} \wedge \mathfrak{b}_{011} - \epsilon_2 \rho_2 \mathfrak{b}_{110} \wedge \mathfrak{b}_{020} \wedge \mathfrak{b}_{011}$$

($\rho_1 = |\mathfrak{b}_{110} \mathfrak{b}_{020} \mathfrak{b}_{101} \mathfrak{b}_{011}|$, $\rho_2 = |\mathfrak{b}_{002} \mathfrak{b}_{101} \mathfrak{b}_{110} \mathfrak{b}_{011}|$) im Punkt \mathfrak{b}_{011} schneidet die Quadrik in den Geraden

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{011} + \mu(\epsilon_2 \mathfrak{b}_{110} + \epsilon_1 \mathfrak{b}_{101}), \quad \nu \in \mathbb{R} \\ \mathfrak{b}_{011} + \nu(\epsilon_2 \mathfrak{b}_{110} + \epsilon_1 \mathfrak{b}_{101} + \rho_1 \mathfrak{b}_{002} + \rho_2 \mathfrak{b}_{020}), \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Quadrik ist folglich ringförmig.

Lemma 4.10 Gleichung (4.1) ist äquivalent zu

$$\begin{vmatrix} \mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200} & 2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110} & \mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{020} \end{vmatrix} = 0 \text{ und} \quad (4.4)$$

$$\begin{vmatrix} 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200} & 2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101} & 2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{011} \end{vmatrix} = 0 \text{ und} \quad (4.5)$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200} & 2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110} & 2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011} \end{vmatrix} = 0 \text{ und} \quad (4.6)$$

$$\begin{vmatrix} 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200} & 2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101} & \mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{002} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Diese Gleichungen sind wiederum äquivalent zu

$$(4.4) \text{ und } (4.5) \text{ und } (4.7) \text{ und Brianchons Bedingung (4.3)}. \quad (4.8)$$

Beweis:

Da das Flächenstück nicht degeneriert ist, ist $\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110} \neq 0$ und $\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101} \neq 0$ und Gleichung (4.1) ist äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110} \\ 2\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101} \end{bmatrix} = \frac{\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200}}{2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110}} \begin{bmatrix} 2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110} \\ \mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{020} \\ 2\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{011} \end{bmatrix} = \frac{\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{200}}{2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101}} \begin{bmatrix} 2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101} \\ 2\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011} \\ \mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{002} \end{bmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu den Gleichungen (4.4) - (4.7). Aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) folgt Brianchons Bedingung (4.3):

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110})(\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{011})(\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101}) &\stackrel{(4.6)}{=} (\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011})(\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{011})(\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{002}) \\ &\stackrel{(4.5)}{=} (\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101})(\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110})(\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011}), \end{aligned}$$

und umgekehrt ergibt sich Gleichung (4.6) aus den Gleichungen (4.3) und (4.5):

$$(\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{110})(\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{101}) \stackrel{(4.3)}{=} \frac{(\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{101})(\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{110})(\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011})}{(\mathcal{U}_2 \mathfrak{b}_{011})} \stackrel{(4.5)}{=} (\mathcal{U}_3 \mathfrak{b}_{011})(\mathcal{U}_1 \mathfrak{b}_{002}).$$

Folglich sind die Gleichungen (4.4) - (4.7) und somit auch Gleichung (4.1) äquivalent zu (4.8). \square

Zur Überprüfung, ob ein rationales quadratisches Dreiecks-Bézier-Patch auf einer Quadrik liegt, müssen laut Satz 4.3 (siehe [Albrecht '98b]) zunächst neun 4×4 Determinanten β_{ijkl} aus den erweiterten Koordinaten von je vier Bézierpunkten bestimmt werden. Anschließend werden vier Gleichungen aus zweimal drei und zweimal sieben Summanden aufgestellt, die quartisch in den gegebenen Gewichten und kubisch in den berechneten Determinanten sind.

Liegt das untersuchte rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Patch nicht auf einem Kegel, erfüllt also nicht Gleichung (4.2), so läßt sich die Zugehörigkeit zu einer Quadrik wesentlich effizienter bestimmen: Gleichung (4.1) erfordert ebenfalls die Bestimmung von neun 4×4 Determinanten $\mathcal{U}_i \mathfrak{b}_{jkl}$, die sich jedoch aufgrund ihrer symmetrischen Struktur durch drei alternierende Produkte und danach neun Skalarprodukte bestimmen lassen. Anschließend ist nur die Überprüfung von vier quadratischen Gleichungen (4.4) - (4.7) erforderlich. Weiterhin weisen die Gleichungen eine symmetrische Struktur und je nur zwei Summanden auf. Der für die Gleichungen (4.4) - (4.7) wesentlich geringere erforderliche Aufwand wiegt bei weitem die notwendige Überprüfung auf ein kegeliges Patch gemäß Gleichung (4.2) auf.

Bemerkung 4.11 Die Gewichte eines nicht degenerierten rationalen quadratischen Dreieckspatches, dessen Bézier-Punkte den Satz von Brianchon (Gleichung 4.3) erfüllen, können so berechnet werden, daß das Patch auf einer Quadrik liegt. Diese

Quadrik ist bereits durch die Bézier-Punkte eindeutig festgelegt, da sie den Schnittpunkt der Randebenen $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$ enthalten muß (siehe Satz 4.1). Die Eckgewichte können ohne Einschränkung zu eins normiert werden (siehe z.B. [Farin '90] oder [Hoschek & Lasser '89]). Die "inneren" Gewichte w_{110} und w_{101} ergeben sich aus den in den Gewichten quadratischen Gleichungen (4.4) und (4.7). Anschließend berechnet sich w_{011} linear aus Gleichung (4.5). Für die Wahl der Gewichte gibt es daher vier Möglichkeiten entsprechend den vier Möglichkeiten, die Randsegmente des Patches zu wählen. Nach Gleichung (4.8) liegt das Flächenstück auf einer Quadrik.

Sind drei Punkte und Tangentialebenen gegeben, die Brianchons Bedingung erfüllen, kann ein interpolierendes rationales quadratisches Dreieckspatch auf einer Quadrik wie folgt bestimmt werden:

Konstruktion 4.12 (Interpolierendes rationales Dreieckspatch) Wähle den Schnittpunkt \mathfrak{q} der Randebenen, der gleichzeitig eine eindeutige Quadrik aus der Schar interpolierender Quadriken festlegt (siehe Bemerkung 2.7). Die inneren Bézier-Punkte ergeben sich als Schnittpunkte der Randebene durch je zwei Eckpunkte und \mathfrak{q} mit den entsprechenden Tangentialebenen. Die Eckgewichte werden zu eins normiert, die inneren Gewichte bestimmen sich dann aus Bemerkung 4.11.

Kapitel 5

QuadrikenSplines

Die Schnittpunktbestimmung einer Geraden mit einer Fläche läßt sich für implizite Flächen wesentlich einfacher als für parametrische Flächen lösen. Aus diesem Grund wurden unter anderem Splines aus algebraischen Flächenstücken entwickelt. Die neben Ebenen einfachsten impliziten Flächen sind Quadriken, mit denen sich tangential-ebenenstetige Flächenverbände konstruieren und zusätzlich Punkte eines Dreiecksnetzes mit zugeordneten Tangentialebenen interpolieren lassen.

Diese Eigenschaften wurden zuerst von Dahmen ([Dahmen '89]) und später von Guo ([Guo '91]) ausgenutzt, um sogenannte QuadrikenSplines zu berechnen. Sie verwenden die implizite Bézier-Darstellung von Sederberg ([Sederberg '85]) zur Darstellung der Quadrikensegmente sowie die Idee des Powell-Sabin-Splits ([Powell & Sabin '77]). Im Gegensatz zu Dahmens und Guos rein analytisch-algebraischen Ansatz werden in diesem Abschnitt QuadrikenSplines zur Interpolation gegebener Punkt- und Tangentialebenendaten geometrisch hergeleitet. Neben einer Verallgemeinerung der Verfahren von Dahmen und Guo, die insbesondere die Powell-Sabin-Interpolanten als Spezialfall enthält, ergibt sich hierdurch auch eine geometrische Interpretation der Freiheitsgrade.

Zunächst wird die Interpolation eines einzigen Dreiecks durch ein aus sechs Quadrikenstücken bestehendes sogenanntes Makroelement dargestellt. Im Anschluß werden die Lücken zwischen je zwei benachbarten Makroelementen durch vier weitere Quadrikensegmente gefüllt.

5.1 Konstruktion des Makroelementes

Gegeben sei ein räumliches Dreiecksnetz, dessen Eckpunkten Tangentialebenen zugeordnet seien. Weiterhin seien in jedem Dreieck die Unabhängigkeitsvoraussetzungen

aus Definition 2.9 erfüllt.

Betrachten wir zunächst ein einzelnes Dreieck $a|b|c$ des gegebenen Dreiecksnetzes wie in Abbildung 5.4(a). Drei beliebige Kontaktelemente können nicht durch eine einzige Quadrik interpoliert werden, da im allgemeinen kein Kegelschnitt durch die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} existiert (siehe Abschnitt 2.4). Auch eine Interpolation durch drei oder vier tangentialebenenstetig anschließende Quadrikenstücke wie in Abbildung 5.1 ist nicht möglich.

Existiert beispielsweise eine Anordnung wie in Abbildung 5.1 Mitte, so werden die gegebenen Kontaktelemente durch drei Quadrikenstücke mit gemeinsamem Kontaktelement \boxed{p} interpoliert. Die Kegelschnitte durch \boxed{a} , \boxed{b} bzw. \boxed{b} , \boxed{c} bzw. \boxed{c} , \boxed{a} und \boxed{p} auf je einer dieser Quadriken schneiden sich in einem Punkt mit koplanaren Tangenten. Nach [Dietz '95] lassen sich diese Kegelschnitte bereits durch eine einzelne Quadrik interpolieren. Dies steht jedoch im Widerspruch zur allgemeinen Wahl der Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} . Dieser Widerspruch kann auch über die analytische Formulierung des Satzes von Brianchon (Lemma 2.11) hergeleitet werden. Die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} bzw. \boxed{b} , \boxed{c} bzw. \boxed{c} , \boxed{a} und \boxed{p} müssen jeweils der Gleichung aus Lemma 2.11 genügen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(b)\mathcal{B}(p)\mathcal{P}(a) &= \mathcal{B}(a)\mathcal{P}(b)\mathcal{A}(p) \\ \mathcal{B}(c)\mathcal{C}(p)\mathcal{P}(b) &= \mathcal{C}(b)\mathcal{P}(c)\mathcal{B}(p) \\ \mathcal{C}(a)\mathcal{A}(p)\mathcal{P}(c) &= \mathcal{A}(c)\mathcal{P}(a)\mathcal{C}(p). \end{aligned}$$

Aufmultiplizieren der drei linken bzw. rechten Seiten ergibt, daß auch die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} dem Satz von Brianchon genügen, somit auf einem Kegelschnitt liegen.

Eine Anordnung wie in Bild 5.1 rechts kann durch Betrachtung der Bézier-Darstellung der einzelnen Quadrikensegmente ausgeschlossen werden.

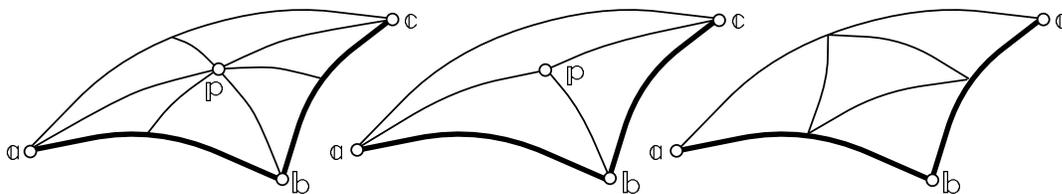


Abbildung 5.1: Makroelement (links) und unzulässige Splits .

Drei beliebige Kontaktelemente lassen sich jedoch durch einen tangentialebenenstetigen Flächenverbund aus sechs Quadrikenstücken, der im folgenden als **Makroelement**

bezeichnet wird, wie in den Abbildungen 5.1 links und 5.4 (c) dargestellt, interpolieren. Die Übergangsebenen zwischen den Quadrikenstücken sind wie beim Powell-Sabin-Split angeordnet und treffen sich in einer gemeinsamen **transversalen Geraden** (vergleiche Abbildung 5.4(b)). Auf dieser Transversalen kann noch ein allen sechs Quadriken des Makroelementes gemeinsames Kontaktelement $\square_{\mathfrak{p}}$ frei gewählt werden.

Definition 5.1 Ein Kontaktelement $\square_{\mathfrak{p}}$, das allen sechs Quadriken eines Makroelementes gemeinsam ist, wird als **Nabenelement** bezeichnet. Der Punkt \mathfrak{p} heißt **Nabepunkt** des Makroelementes.

Da alle Berührebenen die Transversale enthalten, muß folglich noch ein zweiter Nabepunkt \mathfrak{q} auf ihr liegen. Aus den Überlegungen in Bemerkung 2.2 und der Zweibogenkonstruktion (2.3) folgt, daß die Tangentialebenen \mathcal{P} und \mathcal{Q} die gegebenen Punkte \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} und den Schnittpunkt ihrer Tangentialebenen mit der Transversale $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{c}}$ harmonisch trennen. Hierdurch lassen sich analog zur Zweibogenkonstruktion drei Punkte konstruieren, die die Tangentialebene \mathcal{Q} und damit den zweiten Nabepunkt \mathfrak{q} auf der Transversalen festlegen (siehe Abbildung 5.2).

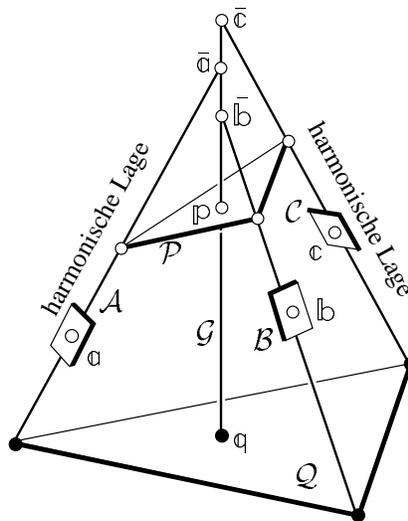


Abbildung 5.2: Konstruktion des zweiten Nabenelementes.

Die drei Kontaktelemente $\square_{\mathfrak{a}}$, $\square_{\mathfrak{p}}$ und $\square_{\mathfrak{q}}$ können durch eine ganze Schar Quadriken mit C^1 -Kontakt in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ interpoliert werden. Aus den Quadrikenbüscheln $\square_{\mathfrak{a}}$ $\square_{\mathfrak{p}}$ $\square_{\mathfrak{q}}$ bzw. $\square_{\mathfrak{b}}$ $\square_{\mathfrak{p}}$ $\square_{\mathfrak{q}}$ suchen wir nun je ein Element \mathcal{Q}_1 bzw. \mathcal{Q}_2 mit C^1 -Kontakt in der Trennebene \mathcal{U} zwischen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} . Hierzu konstruieren wir einen Zweibogen (siehe Abbildung 2.3) in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{b}$, der sich wie in Abbildung 5.3 als Schnitt dieser Ebene mit \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 ergibt. Wir erhalten einen zweiten Berührungspunkt \mathfrak{x} in der Trennebene \mathcal{U} , durch den die gesuchten Elemente der Quadrikscharen eindeutig festgelegt

sind. Da Q_1 und Q_2 in drei Kontaktelementen \boxed{p} , \boxed{q} und \boxed{x} , dessen Tangentialebene durch die Tangenten an den Kegelschnitt $\boxed{p} \boxed{q} \boxed{x}$ und an den Zweibogen festgelegt ist, übereinstimmen, haben sie C^1 -Kontakt in der Trennebene. Die Quadriken Q_1 und Q_2 sind hierbei eindeutig.

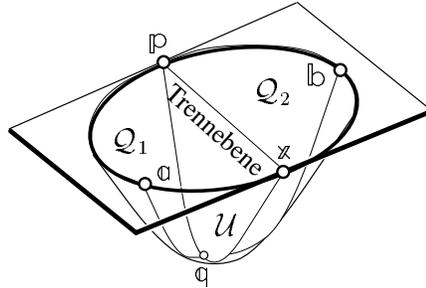


Abbildung 5.3: Ebener Schnitt durch zwei Quadriken mit C^1 -Übergang.

Analog lassen sich die weiteren vier Quadriken des Makroelementes konstruieren. Die Tangentialebenenstetigkeit des Flächenverbundes ist durch die Büschelzugehörigkeit der einzelnen Quadriken garantiert. So gehören beispielsweise Q_1 und Q_6 zum Quadrikenbüschel $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$, haben folglich C^1 -Kontakt in der Ebene $a p q$ (vergl. Bemerkung 2.7). Zusammenfassend ergibt sich folgende Konstruktion:

Konstruktion 5.2 (Makroelementkonstruktion) Wähle eine geeignete transversale Gerade, ein Nabenelement \boxed{p} mit p auf der Transversalen, sowie wie in Abbildung 5.4(b) sechs Übergangsebenen durch die Transversale und je einen Eckpunkt bzw. je einen inneren Punkt der Kanten des Dreiecks abc .

Bestimme die Schnittpunkte \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} der Tangentialebenen A , B , C mit der Transversalen. Konstruiere die Tangentialebene Q so, daß P und Q die Punktepaare $a \bar{a}$, $b \bar{b}$ und $c \bar{c}$ jeweils harmonisch trennen. Der zweite Nabenelement q ergibt sich als Schnitt der Tangentialebene Q mit der Transversalen.

Bestimme den Schnittpunkt x des Zweibogens $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{b}$ mit der Trennebene U zwischen a und b . Die Quadriken Q_1 und Q_2 ergeben sich als Quadriken des Büschels $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$ bzw. $\boxed{b} \boxed{p} \boxed{q}$ durch x . Analog lassen sich Q_3, \dots, Q_6 konstruieren.

Aus der Konstruktion folgt also:

Lemma 5.3 Die Ausgangsdaten \boxed{a} , \boxed{b} , \boxed{c} , die gewählte Transversale, das Nabenelement \boxed{p} und die Übergangsebenen legen die Quadriken des Makroelementes vollständig und eindeutig fest.

Durch die Kanten des Dreiecks werden nun die Brandungsebenen des Makroelementes so gewählt, daß sie sich in einem Punkt z auf der transversalen Geraden treffen.

5.2 Verbinden zweier Makroelemente

Benachbarte Makroelemente lassen sich im allgemeinen leider nicht direkt tangential-ebenenstetig anschließen, da ihre Randkurven, selbst wenn sie in der gleichen Ebene liegen, im allgemeinen verschieden sind. Unter gewissen Bedingungen kann die Lücke zwischen ihnen jedoch mit vier weiteren Quadrikenstücken, die wie in den Abbildungen 5.8(b) und 5.7 angeordnet sind, glatt gefüllt werden. Hierzu wird zunächst die folgende einfache Eigenschaft der C^1 -Vererbung benötigt, die aus Lemma 2.7 folgt:

C^1 -Vererbung

Zwei Quadriken haben genau dann C^1 -Kontakt in einer Ebene \mathcal{V} , wenn sie im Büschel $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}_\infty$ liegen, wobei \mathcal{Q} eine der beiden Quadriken bezeichnet. Dieser C^1 -Kontakt in \mathcal{V} wird an alle Quadrikenpaare

$$\mathcal{Q} + \mu\mathcal{U}^2 \quad \text{und} \quad (\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2) + \mu\mathcal{U}^2 \quad (5.1)$$

mit C^1 -Kontakt mit \mathcal{Q} bzw. $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2$ in einer beliebigen Ebene \mathcal{U} vererbt, da $(\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2) + \mu\mathcal{U}^2 = (\mathcal{Q} + \mu\mathcal{U}^2) + \lambda\mathcal{V}^2$.

Für jeden Punkt x in \mathcal{V} existiert genau ein solches Quadrikenpaar durch x , siehe Abbildung 5.6. Folglich ergibt sich:

Lemma 5.4 *Seien \mathcal{Q} und $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2$ zwei Quadriken mit C^1 -Kontakt in \mathcal{V} . Dann haben auch die eindeutig bestimmten Quadriken $\mathcal{Q} + \mu\mathcal{U}^2$ und $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2 + \mu\mathcal{U}^2$, die \mathcal{Q} und $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2$ in \mathcal{U} berühren und durch einen gemeinsamen Punkt $x \in \mathcal{V}$ gehen, einen C^1 -Kontakt in \mathcal{U} : der C^1 -Kontakt "vererbt" sich.*

Bemerkung 5.5 *Seien \boxed{a} , \boxed{p} , \boxed{b} drei beliebige Kontaktelemente und \mathcal{U} eine Ebene durch p . Dann bilden alle Quadrikenpaare durch \boxed{a} , \boxed{p} bzw. \boxed{b} , \boxed{p} mit C^1 -Kontakt in \mathcal{U} ein Büschel von Quadrikenpaaren der Form 5.1 mit Büschelparameter μ .*

Bemerkung 5.6 *Stimmen \mathcal{Q} und $\mathcal{Q} + \lambda\mathcal{V}^2$ überein, dann auch $\mathcal{Q} + \mu\mathcal{U}^2$ und $\mathcal{Q} + \mu\mathcal{U}^2 + \lambda\mathcal{V}^2$.*

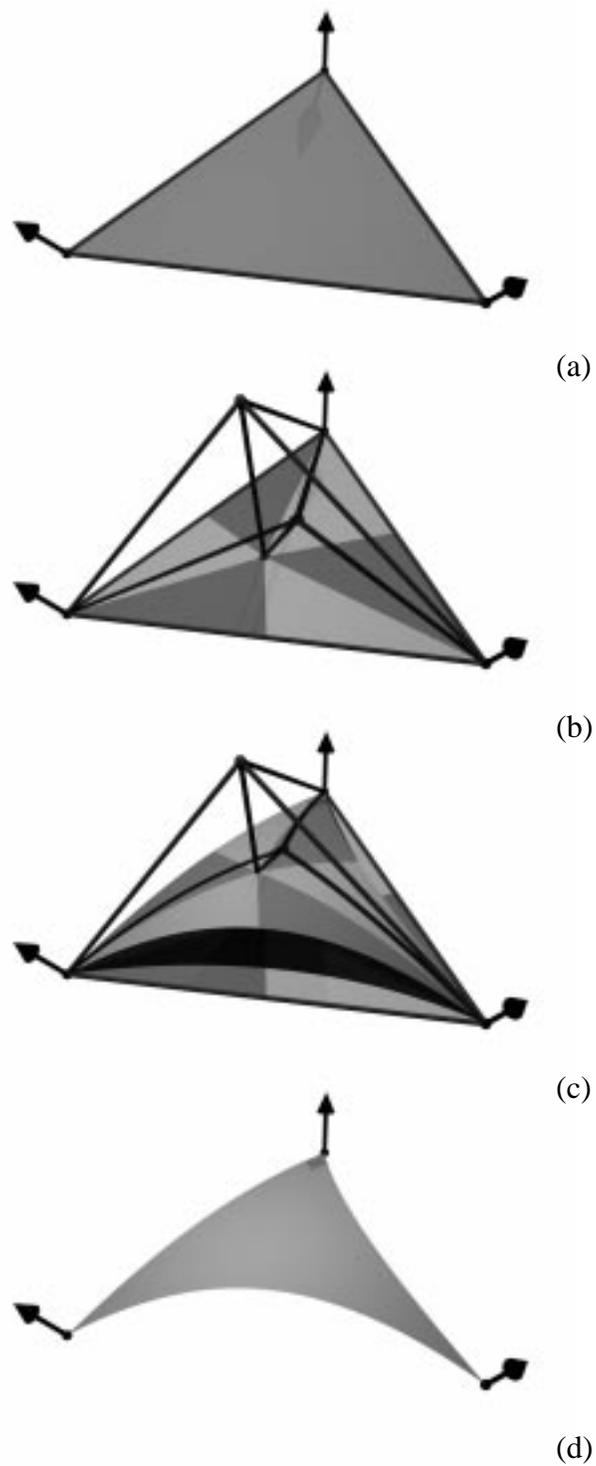


Abbildung 5.4: Konstruktion des Makroelementes: (a) Einzeldreieck mit Normalen, (b) Unterteilung des Dreiecks an der transversalen Geraden (Powell-Sabin-Split), (c) sechs tangentialebenenstetig anschließende Quadrikenstücke, (d) Makroelement.

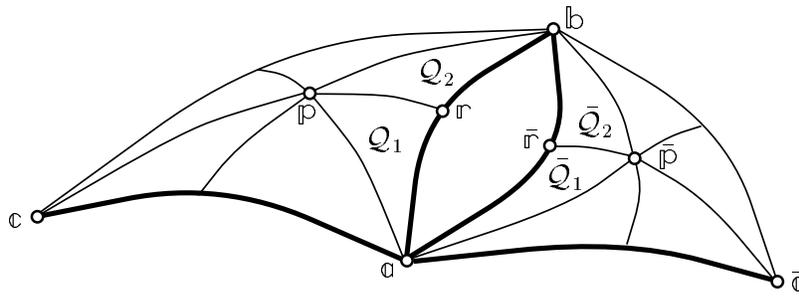
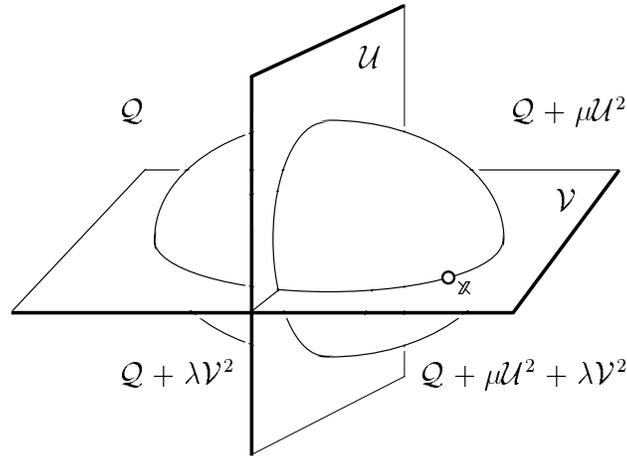


Abbildung 5.5: Zwei benachbarte Makroelemente.

Abbildung 5.6: C^1 -Vererbung.

Übergangskonstruktion

Durch vier Quadrikenstücke \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$ wie in Abbildung 5.7 können zwei benachbarte Makroelemente glatt verbunden werden. Die mit einem Querstrich versehenen Größen gehören dabei jeweils zum zweiten Makroelement.

Wie in der Konstruktion von Dahmen und Guo nehmen wir an, daß die Quadriken-segmente Q_1 , Q_2 und \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 der Makroelemente durch eine gemeinsame Ebene \mathcal{U} getrennt werden, die Transversalen \mathcal{L} und $\bar{\mathcal{L}}$ der benachbarten Makroelemente somit koplanar sind. Weiterhin bezeichnen r bzw. \bar{r} die Schnittpunkte der Randkurven der beiden Makroelemente durch a b mit der Trennebene \mathcal{U} . Die Lücke zwischen den Makroelementen kann nun durch folgende Konstruktion gefüllt werden:

Konstruktion 5.7 (Übergangskonstruktion) Wähle eine beliebige Ebene \mathcal{V} durch a b so, daß beide Makroelemente auf verschiedenen Seiten von \mathcal{V} liegen. Die Kontakt-elemente \boxed{r} , \boxed{a} und $\boxed{\bar{r}}$ definieren einen Zweibogen in der Ebene r a \bar{r} mit Trennebene \mathcal{V} . Dieser Zweibogen trifft \mathcal{V} in a und einem zweiten Punkt s .

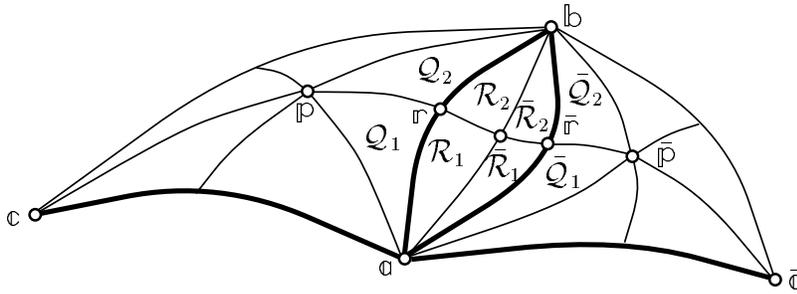


Abbildung 5.7: Verbinden zweier benachbarter Makroelemente.

Sei \mathcal{R}_1 die eindeutig bestimmte Quadrik durch \mathfrak{s} mit C^1 -Kontakt zu \mathcal{Q}_1 in der Ebene $\mathfrak{a}r\mathfrak{b}$, sei weiterhin $\bar{\mathcal{R}}_1$ die Quadrik durch $\bar{\mathfrak{r}}$ mit C^1 -Kontakt zu \mathcal{R}_1 in der Trennebene \mathcal{V} .

Konstruiere die längs \mathcal{U} tangentialebenenstetig an \mathcal{R}_1 bzw. $\bar{\mathcal{R}}_1$ anschließenden Quadriken \mathcal{R}_2 und $\bar{\mathcal{R}}_2$ durch \mathfrak{b} . Der C^1 -Kontakt zwischen \mathcal{Q}_1 und \mathcal{R}_1 bzw. \mathcal{R}_1 und $\bar{\mathcal{R}}_1$ vererbt sich auf \mathcal{Q}_2 und \mathcal{R}_2 bzw. \mathcal{R}_2 und $\bar{\mathcal{R}}_2$ (siehe Lemma 5.4).

Bemerkung 5.8 Sind \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 identisch, dann auch \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 bzw. $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$ (siehe Bemerkung 5.6).

Glattheitsbedingung

Die vier Quadriken \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$ verbinden die Makroelemente genau dann tangentialebenenstetig, wenn auch $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ C^1 -Kontakt besitzen. Der folgende Satz formuliert ein einfaches Kriterium für diesen C^1 -Kontakt:

Satz 5.9 Sei x_p der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit der Tangentialebene \mathcal{P} im Nebenpunkt \mathfrak{p} . Der Schnittpunkt von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit der Ebene im Büschel der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} durch \mathfrak{p} werde mit y_p bezeichnet. Die entsprechenden Punkte des Nachbarmakroelementes seien wie in Abbildung 5.7 mit Querstrichen versehen.

Dann lassen sich zwei Makroelemente genau dann tangentialebenenstetig verbinden, wenn die Doppelverhältnisse

$$DV[\mathfrak{a}\mathfrak{b}x_p y_p] = DV[\mathfrak{a}\mathfrak{b}x_{\bar{p}} y_{\bar{p}}]$$

übereinstimmen.

Die Tangentialebenen in $\bar{\mathfrak{r}}$ an $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ müssen nach Konstruktion 5.7 nicht übereinstimmen. Wird jedoch die Tangentialebene $\bar{\mathcal{P}}$ in $\bar{\mathfrak{p}}$ verändert, so ändert sich auch die Tangentialebene $\bar{\mathcal{R}}$ in $\bar{\mathfrak{r}}$ an $\bar{\mathcal{Q}}_1$. Die Ebene $\bar{\mathcal{P}}$ kann sogar so verändert werden, daß die Tangentialebenen in $\bar{\mathfrak{r}}$ an $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ übereinstimmen. Der Zusammenhang zwischen $\bar{\mathcal{R}}$ und $\bar{\mathcal{P}}$ wird durch eine projektive Abbildung π beschrieben, die im folgenden

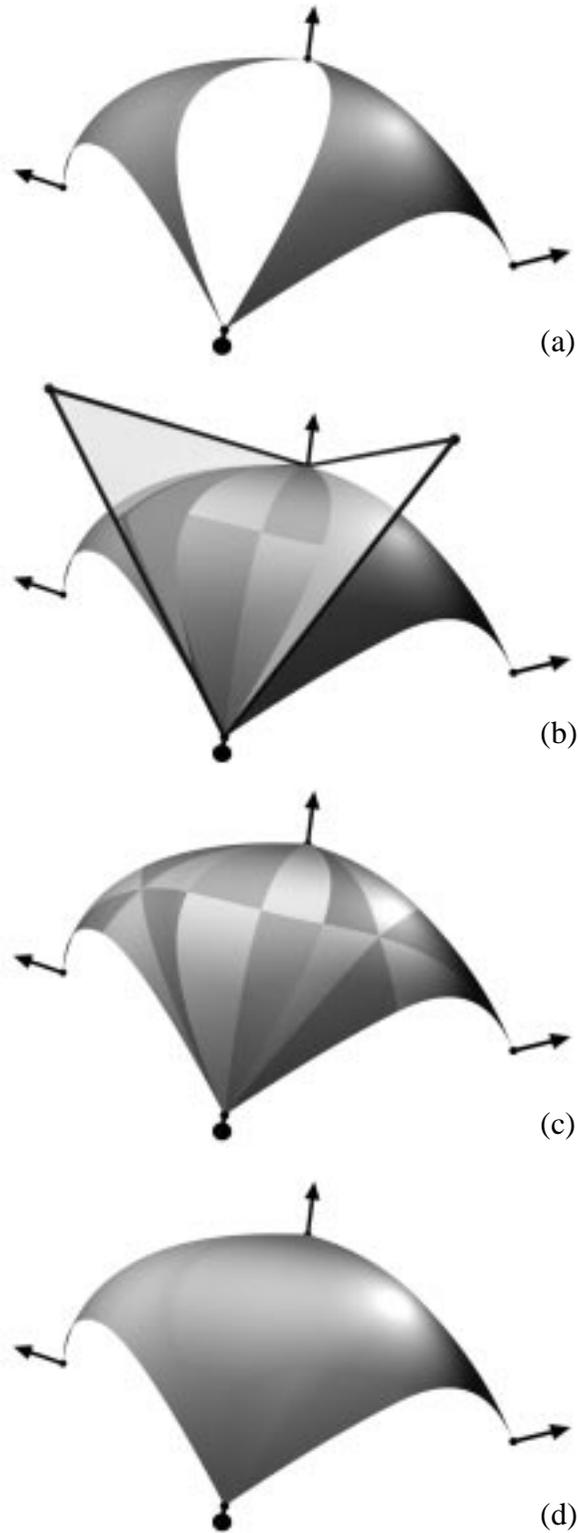


Abbildung 5.8: Konstruktion des Keils: (a) Benachbarte Makroelemente, (b) Füllung aus vier Quadrikenstücken, (c) einzelne Quadrikenstücke, (d) Quadrikspline.

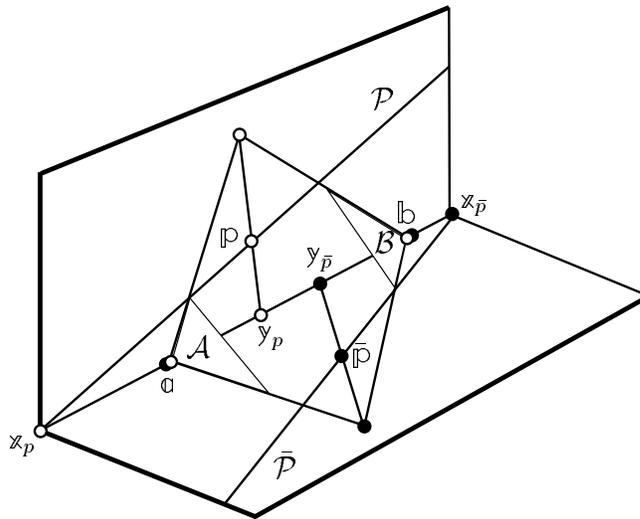


Abbildung 5.9: Doppelverhältnisse.

hergeleitet wird.

Gegeben seien zwei Kontaktelemente \boxed{a} und \boxed{b} sowie zwei weitere Punkte p und q . Die Schnittpunkte der Tangentialebenen \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} mit der Geraden pq seien wie in Abbildung 5.2 als \bar{a} und \bar{b} bezeichnet. Dann existiert eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung π mit Fixpunkten a, \bar{a}, b und \bar{b} , die jede Ebene \mathcal{P}' durch p auf eine Ebene \mathcal{Q}' durch q abbildet, so daß \mathcal{P}' und \mathcal{Q}' die Punktepaare $a \bar{a}$ bzw. $b \bar{b}$ harmonisch trennen.

Bemerkung 5.10 Ist $\tilde{\mathcal{P}}$ eine beliebige Ebene durch p , $\tilde{\mathcal{Q}}$ die Ebene durch q , so daß $\tilde{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ die Punktepaare $a \bar{a}$ bzw. $b \bar{b}$ harmonisch trennen, so läßt sich eine Abbildungsmatrix \mathbb{P} von π wie folgt angeben:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} a & \bar{a} & b & \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\mathcal{P}}(a)}{\tilde{\mathcal{Q}}(a)} & & & \\ & -\frac{\tilde{\mathcal{P}}(a)}{\tilde{\mathcal{Q}}(a)} & & \\ & & \frac{\tilde{\mathcal{P}}(b)}{\tilde{\mathcal{Q}}(b)} & \\ & & & -\frac{\tilde{\mathcal{P}}(b)}{\tilde{\mathcal{Q}}(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \bar{a} & b & \bar{b} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Mit Hilfe dieser Abbildung π läßt sich folgendes Lemma formulieren:

Lemma 5.11 Es existieren genau dann zwei Quadriken \mathcal{Q}_1 bzw. \mathcal{Q}_2 durch die Kontaktelemente $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$ bzw. $\boxed{b} \boxed{p} \boxed{q}$ mit C^1 -Kontakt in einer beliebig vorgegebenen Ebene \mathcal{U} durch p und q , wenn $\pi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$. In diesem Fall sind die beiden Quadriken eindeutig bestimmt.

Beweis:

Die Kegelschnitte $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$ bzw. $\boxed{b} \boxed{p} \boxed{q}$ auf den Quadriken \mathcal{Q}_1 bzw. \mathcal{Q}_2 legen über harmonische Verhältnisse je eine Tangente in q und damit die Tangentialebene $\pi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ eindeutig fest. Existieren also die beiden Quadriken, so muß $\pi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ gelten.

Gilt umgekehrt $\pi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$, so erfüllen die gegebenen Kontaktelemente Brianchons Bedingung (vergl. Bemerkungen 2.11 und 2.12), es existiert somit je eine Schar interpolierender Quadriken durch $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{q}$ bzw. $\boxed{b} \boxed{p} \boxed{q}$. Der Zweibogen $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{b}$ trifft seine Trennebene \mathcal{U} in p und einem zweiten Kontaktpunkt x . Dieser Punkt x legt aus jedem Büschel eine Quadrik \mathcal{Q}_1 bzw. \mathcal{Q}_2 eindeutig fest. Da \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 die Kontaktelemente \boxed{p} , \boxed{q} und \boxed{x} gemeinsam haben, haben sie einen C^1 -Kontakt längs \mathcal{U} . Da weiterhin jedes Paar von Quadriken \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 mit C^1 -Kontakt längs \mathcal{U} den Zweibogen $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{b}$ enthalten muß, sind diese Quadriken eindeutig. \square

Die Tangenten der Kegelschnitte $\boxed{a} \boxed{p} \boxed{b}$ bzw. $\boxed{a} \boxed{q} \boxed{b}$ in p bzw. q schneiden die Gerade ab in zwei Punkten z_p bzw. z_q . Enthält \mathcal{P} den Punkt z_p , so existiert nach Bemerkung 2.7 bereits eine einzige Quadrik durch die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{p} , \boxed{b} und den Punkt q , insbesondere fallen die beiden Quadriken aus Lemma 5.11 zusammen. Folglich enthält $\mathcal{Q} = \pi(\mathcal{P})$ den Punkt z_q .

Sei wie in Satz 5.9 y_p der Schnittpunkt von a b mit der Ebene im Büschel der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} durch p und sei y_q analog definiert. Die Punkte a , b , y_p und z_p sind - ebenso wie a , b , y_q und z_q - in harmonischer Lage (siehe Abbildung 2.6). Da π die Punkte a , b und z_p auf a , b und z_q abbildet, muß wegen der Doppelverhältnistreue projektiver Abbildungen auch y_p auf y_q abgebildet werden. Folglich gilt:

$$DV[a \ b \ z_p \ y_p] = DV[a \ b \ z_q \ y_q]. \quad (5.2)$$

Mit diesen Überlegungen läßt sich nun Satz 5.9 beweisen:

Beweis von Satz 5.9:

Wir wenden Lemma 5.11 und die nachfolgenden Überlegungen nacheinander auf die Kontaktelemente \boxed{a} und \boxed{b} und anstelle von \boxed{p} und \boxed{q} auf $\boxed{p} \boxed{r}$, $\boxed{r} \boxed{s}$, $\boxed{s} \boxed{\bar{r}}$ und $\boxed{\bar{r}} \boxed{\bar{p}}$ (mit jeweils anderen Abbildungen π) an, wobei \boxed{s} ein (nach Konstruktion existierendes) gemeinsames Kontaktelement der Quadriken \mathcal{R}_1 , $\bar{\mathcal{R}}_1$, \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_2$ darstellt.

Hieraus wird zunächst die Notwendigkeit der Doppelverhältnisbedingung gefolgert. Bilden die Quadriken \mathcal{R}_1 , $\bar{\mathcal{R}}_1$, \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_2$ eine glatte Verbindung zwischen den Makroelementen, so gilt nach Lemma 5.11 und Gleichung (5.2)

$$\begin{aligned} DV[a \ b \ z_p \ y_p] &= DV[a \ b \ z_r \ y_r] = DV[a \ b \ z_s \ y_s] = \\ &= DV[a \ b \ z_{\bar{r}} \ y_{\bar{r}}] = DV[a \ b \ z_{\bar{p}} \ y_{\bar{p}}]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Stimmen umgekehrt die Doppelverhältnisse $DV [\alpha \text{ lb } x_p \text{ y}_p]$ und $DV [\alpha \text{ lb } x_{\bar{p}} \text{ y}_{\bar{p}}]$ überein, so haben die Tangentialebenen von $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ in \bar{r} einen gemeinsamen Punkt $x_{\bar{r}}$. Weiterhin berühren sie außerdem den Zweibogen $\boxed{r} \boxed{\alpha} \boxed{\bar{r}}$, sind folglich identisch. Da $\bar{\mathcal{R}}_1 \bar{\mathcal{R}}_2$ bzw. $\bar{\mathcal{Q}}_1 \bar{\mathcal{Q}}_2$ zwei Quadrikenpaare mit C^1 -Kontakt längs \mathcal{U} sowie gemeinsamem Zweibogen $\boxed{\alpha} \boxed{\bar{r}} \boxed{\text{lb}}$ sind, haben auch $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ bzw. $\bar{\mathcal{R}}_2$ und $\bar{\mathcal{Q}}_2$ einen C^1 -Kontakt in der Zweibogenebene. \square

Bemerkung 5.12 Nach Lemma 5.11 existieren für $\mathcal{Q} = \pi(\mathcal{P})$ zwei Quadriken durch $\boxed{\alpha}$, $\boxed{\text{p}}$, $\boxed{\alpha}$ bzw. $\boxed{\text{lb}}$, $\boxed{\text{p}}$, $\boxed{\alpha}$. Folglich erfüllen beide Tripel von Kontaktelementen den Satz von Brianchon (siehe Satz 2.1), was sich nach Lemma 2.11 in zwei linearen Bedingungen für \mathcal{Q} ausdrücken läßt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{p})\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{Q}(\alpha) &= \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{Q}(\text{p})\mathcal{A}(\alpha) \\ \mathcal{B}(\text{p})\mathcal{P}(\alpha)\mathcal{Q}(\text{lb}) &= \mathcal{P}(\text{lb})\mathcal{Q}(\text{p})\mathcal{B}(\alpha) \end{aligned}$$

Mit der Zusatzbedingung $\mathcal{Q}(\alpha) = 0$ berechnet sich \mathcal{Q} wie folgt:

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q} &= \mathcal{A}(\alpha) \mathcal{B}(\text{p}) \mathcal{P}(\alpha) \cdot (\text{lb} \wedge \text{p} \wedge \alpha) \\ &+ \mathcal{A}(\text{p}) \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{P}(\text{lb}) \cdot (\alpha \wedge \text{p} \wedge \alpha) \\ &+ \mathcal{A}(\text{p}) \mathcal{B}(\text{p}) \mathcal{P}(\alpha) \cdot (\alpha \wedge \text{lb} \wedge \alpha). \end{aligned}$$

Lemma 5.13 Das Doppelverhältnis aus Satz 5.9 läßt sich analytisch wie folgt darstellen:

$$DV[\alpha \text{ lb } x_p \text{ y}_p] = -\frac{\mathcal{B}(\alpha) \mathcal{A}(\text{p}) \mathcal{P}(\text{lb})}{\mathcal{A}(\text{lb}) \mathcal{B}(\text{p}) \mathcal{P}(\alpha)}.$$

Ist insbesondere $\mathcal{P}(x) = 0$ in Hesse-Normalform gegeben und α in erweiterten Koordinaten, so bezeichnet $\mathcal{P}(\alpha)$ den euklidischen Abstand zwischen α und \mathcal{P} usw.

Beweis:

Der Schnittpunkt x_p der Kante αlb mit der Tangentialebene \mathcal{P} im Nebenpunkt schreibt sich als

$$x_p = \mathcal{P}(\text{lb})\alpha - \mathcal{P}(\alpha)\text{lb}.$$

Die Ebene $(\mathcal{A}(\text{p}))\mathcal{B} - (\mathcal{B}(\text{lb}))\mathcal{A}$ im Büschel der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} enthält den Punkt p und schneidet die Kante αlb in

$$y_p = (\mathcal{B}(\text{p})\mathcal{A}(\text{lb}))\alpha - (\mathcal{A}(\text{p})\mathcal{B}(\alpha))\text{lb}.$$

Aus der Definition des Doppelverhältnisses ergibt sich sofort die Behauptung. \square

Bemerkung 5.14 Das Makroelement besitzt zwei Nabelemente, d.h. zwei allen Quadrikensegmenten gemeinsame Kontaktelemente \boxed{p} and \boxed{q} auf der transversalen Geraden. Im Beweis von Satz 5.9 sind sie beliebig austauschbar. Folglich ändert sich das Doppelverhältnis aus Lemma 5.13 nicht, wenn p durch q ersetzt wird.

Bemerkung 5.15 Das Produkt der drei Doppelverhältnisse auf den Kanten des Dreiecks abc ist unabhängig von \boxed{p} . Werden die Schnittpunkte der Geraden ab mit \mathcal{P} bzw. der Ebene im Büschel \mathcal{AB} durch p mit x_{ab} bzw. y_{ab} bezeichnet und die Punkte x_{bc} , y_{bc} , x_{ca} und y_{ca} analog definiert, dann gilt nach Lemma 5.13:

$$\gamma = DV[a|b|x_{ab}|y_{ab}] \cdot DV[b|c|x_{bc}|y_{bc}] \cdot DV[c|a|x_{ca}|y_{ca}] = -\frac{\mathcal{A}(b) \mathcal{B}(c) \mathcal{C}(a)}{\mathcal{B}(a) \mathcal{C}(b) \mathcal{A}(c)}.$$

Folglich sind drei beliebige Punkte z_{ab} , z_{bc} , z_{ca} auf den Kanten ab , bc , ca genau dann kollinear, wenn

$$DV[a|b|z_{ab}|y_{ab}] \cdot DV[b|c|z_{bc}|y_{bc}] \cdot DV[c|a|z_{ca}|y_{ca}] = \gamma.$$

Diese Bedingung verallgemeinert den Satz von Menelaos (siehe Satz 1.1) mit $\gamma = -1$. Der Spezialfall $\gamma = -1$ tritt genau dann ein, wenn Brianchon's Bedingung für die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{c} erfüllt ist, siehe Lemma 2.11.

Beispiel 5.16 Bild 5.10 zeigt den Kotflügel eines VW-Käfers. Zur Konstruktion der Fläche wurde ein Dreiecksnetz durch einen Quadriken spline interpoliert. Die freien Parameter wie Transversalen und Nabelemente wurden gemäß den Abschnitten 6.2 und 6.4 zufällig gewählt. Die resultierende Gestalt der Fläche läßt bedauerlicherweise sehr zu wünschen übrig. Einige Ansätze, die Gestalt des Interpolanten über die Wahl der freien Parameter zu beeinflussen, finden sich in den Abschnitten 9 und 10.

Beispiel 5.17 In Abbildung 5.11 wurde eine Birne durch einen Quadriken spline modelliert.

5.3 Bézier-Darstellung der Quadriken splines

Zur Visualisierung der hier konstruierten Quadriken beispielsweise mit dem Raytraceprogramm PovRay wird eine algebraische Gleichung benötigt. Daher wird in diesem Abschnitt kurz die Bernstein-Bézier-Darstellung der impliziten Quadriken Gleichungen bezüglich eines jeweiligen Referenztetraeders angegeben, um insbesondere die zusätzlichen Freiheitsgrade im Vergleich zu Dahmen und Guo auch analytisch zu erfassen. Die Notation folgt der Notation in Gleichung 2.2 im Abschnitt über implizite Bézier-Darstellungen. Bemerkung 2.6 garantiert die Interpolationsbedingung.



Abbildung 5.10: Kotflügel eines VW-Käfers, durch einen Quadrikspline interpoliert.

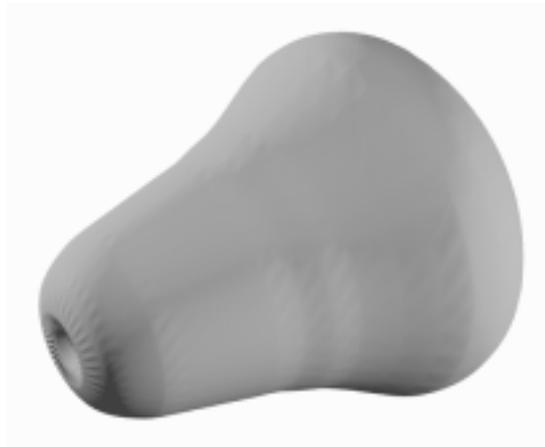


Abbildung 5.11: Durch Quadriksplines modellierte Birne.

Darstellung des Makroelements

Jedes Makroelement besteht aus Quadrikssegmenten, die durch Tetraeder berandet werden. Bezüglich dieser Hülltetraeder wird die implizite Bézier-Darstellung der Quadriksgleichungen angegeben.

Die Quadriken Q_1, \dots, Q_6 des Makroelementes werden somit bezüglich der Referenztetraeder $\mathfrak{a} y_{ab} y z$, $\mathfrak{b} y_{ab} y z$, $\mathfrak{b} y_{bc} y z$, \dots dargestellt. Hierbei bezeichnen $y = \nu_a \mathfrak{a} + \nu_b \mathfrak{b} + \nu_c \mathfrak{c}$, $\nu_a + \nu_b + \nu_c = 1$, den Durchstoßpunkt der Transversalen durch die Punktebene und $y_{ab} = \alpha_{ab} \mathfrak{a} + \beta_{ab} \mathfrak{b}$ ($\alpha_{ab} + \beta_{ab} = 1$) usw. den Schnittpunkt der Trennebene zwischen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} mit der Kante $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, sowie z einen Punkt auf der Transversalen (vergleiche Abbildung 5.12). Zur Vereinfachung seien im folgenden alle Punkte in erweiterten Koordinaten angegeben. Die Bézierkoeffizienten b_{ijkl}^r ($r = 1, \dots, 6$) der

Bézier-Darstellung der Quadriken \mathcal{Q}_r schreiben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 b_{2000}^r &= 0 \\
 b_{1100}^1 &= \alpha \mathcal{A}(y_{ab}) & b_{1100}^2 &= \beta \mathcal{B}(y_{ab}) & b_{1100}^3 &= \beta \mathcal{B}(y_{bc}) \\
 b_{1010}^1 &= \alpha \mathcal{A}(y) & b_{1010}^2 &= \beta \mathcal{B}(y) & b_{1010}^3 &= \beta \mathcal{B}(y) \\
 b_{1001}^1 &= \alpha \mathcal{A}(z) & b_{1001}^2 &= \beta \mathcal{B}(z) & b_{1001}^3 &= \beta \mathcal{B}(z) \\
 \\
 b_{0101}^{1/2} &= \alpha_{ab} b_{1001}^1 + \beta_{ab} b_{1001}^2 & & & \cdots & \\
 b_{0110}^{1/2} &= \alpha_{ab} b_{1010}^1 + \beta_{ab} b_{1010}^2 & & & & \\
 b_{0200}^{1/2} &= \alpha_{ab} b_{1100}^1 + \beta_{ab} b_{1100}^2 & & & & \\
 \\
 b_{0020}^r &= \nu_a b_{1010}^1 + \nu_b b_{1010}^3 + \nu_c b_{1010}^5 & & & \cdots & \\
 b_{0011}^r &= \nu_a b_{1001}^1 + \nu_b b_{1001}^3 + \nu_c b_{1001}^5 & & & & \\
 b_{0002}^r &= d & & & &
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Der frei wählbare Koeffizient $d = b_{0002}^r$ legt den Nebenpunkt $\mathbb{p} = \rho y + (1 - \rho)z$ auf der Transversalen fest. Hierbei gilt die Beziehung

$$d = - \left(\frac{\rho}{1 - \rho} \right)^2 b_{0020}^r - 2 \left(\frac{\rho}{1 - \rho} \right) b_{0011}^r,$$

bzw. umgekehrt:

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{-b_{0011}^r \pm \sqrt{(b_{0011}^r)^2 - b_{0020}^r b_{0011}^r}}{b_{0020}^r}.$$

Die Tangentialebene \mathcal{P} im Nebenpunkt wird durch die Gewichte α , β und γ bestimmt (vergleiche hierzu Abschnitt 6.2):

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\mathcal{P}(\mathfrak{a})}{\mathcal{A}(\mathbb{p})} : \frac{\mathcal{P}(\mathfrak{b})}{\mathcal{B}(\mathbb{p})} : \frac{\mathcal{P}(\mathfrak{c})}{\mathcal{C}(\mathbb{p})}.$$

Diese Gewichte verkörpern auch die im Vergleich zur Konstruktion von Dahmen zusätzlich gewonnen Freiheitsgrade (siehe hierzu Bemerkung 6.1). Dahmens Einschränkungen ergeben sich dadurch, daß die Gradienten der impliziten Darstellung in den Eckpunkten normiert sind.

Übergangskonstruktion

Betrachten wir exemplarisch die Verbindung zweier benachbarter Makroelemente mit gemeinsamen Kontaktelementen $\boxed{\mathfrak{a}}$ und $\boxed{\mathfrak{b}}$. Die Trennebene \mathcal{V} durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ trifft $z\bar{z}$ in einem Punkt $\mathfrak{u} = \eta z + \bar{\eta}\bar{z}$, $\eta + \bar{\eta} = 1$. Der Punkt \mathfrak{u} läßt sich weiterhin schreiben als

$$\mathfrak{u} = \xi_1 y_{ab} + \xi_2 y + \xi_3 z = \bar{\xi}_1 y_{ab} + \bar{\xi}_2 \bar{y} + \bar{\xi}_3 \bar{z}, \quad \sum \xi_i = \sum \bar{\xi}_i = 1.$$

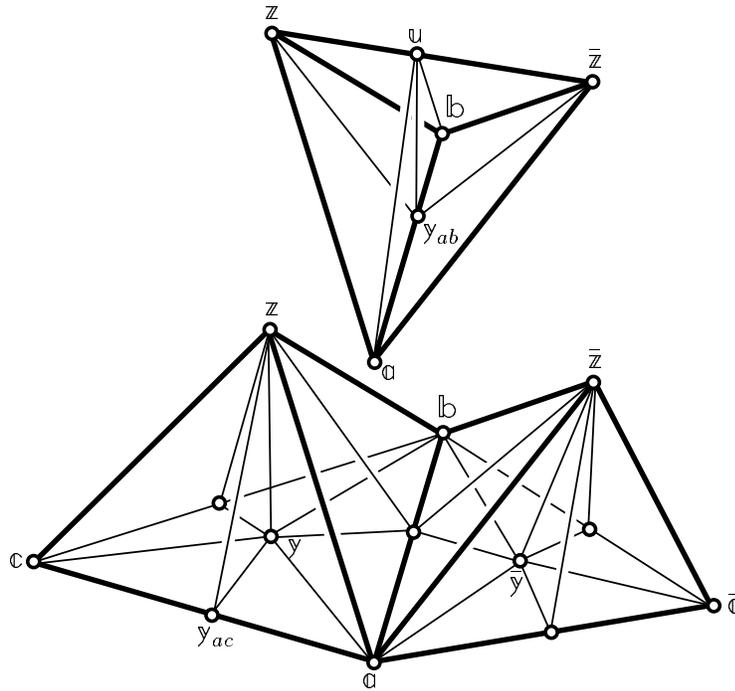


Abbildung 5.12: Referenztetraeder.

Die vier Quadrikensegmente der Füllung auf den Quadriken \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_1$, $\bar{\mathcal{R}}_2$ werden durch die Tetraeder $ay_{ab}uz$, $by_{ab}uz$, $ay_{ab}u\bar{z}$ und $by_{ab}u\bar{z}$ berandet. Die Bézier-Koeffizienten c_{ijkl}^r bzw. \bar{c}_{ijkl}^r ($r = 1, 2$) der impliziten Bézierdarstellungen von \mathcal{R}_r bzw. $\bar{\mathcal{R}}_r$ bezüglich dieser Tetraeder ergeben sich dann wie folgt (wobei die mit einem Querstrich versehenen Größen, da sie sich völlig analog ergeben, nicht alle explizit aufgeführt sind):

$$\begin{aligned}
 c_{ij0l}^{1/2} &= b_{ij0l}^{1/2} \\
 c_{1010}^{1/2} &= \xi_1 b_{1100}^{1/2} + \xi_2 b_{1010}^{1/2} + \xi_3 b_{1001}^{1/2} = \alpha \mathcal{A}(u) \\
 c_{0110}^{1/2} &= \xi_1 b_{0200}^{1/2} + \xi_2 b_{0110}^{1/2} + \xi_3 b_{0101}^{1/2} = \bar{c}_{0110}^{-1/2} \\
 &= \alpha_{ab} \alpha \mathcal{A}(u) + \beta_{ab} \beta \mathcal{B}(u) \\
 c_{0011}^{1/2} &= \xi_1 b_{0101}^{1/2} + \xi_2 b_{0011}^{1/2} + \xi_3 b_{0002}^{1/2} \\
 c_{0020}^1 &= \rho c_{0011}^1 + (1 - \rho) \bar{c}_{0011}^1.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Kapitel 6

Freiheitsgrade

Die im vorigen Abschnitt vorgestellte Konstruktion beinhaltet eine ganze Reihe von Freiheitsgraden, wie beispielsweise die Wahl der Transversalen, der Randebenen und Nabenelemente. Während einige dieser Daten nahezu völlig frei gewählt werden können, müssen manche globalen Abhängigkeiten gerecht werden. So müssen beispielsweise die transversalen Geraden benachbarter Patche koplanar sein oder die Tangentialebenen in den Nabepunkten gewisse lineare Beziehungen erfüllen. In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten dargelegt, diese freien Komponenten passend zu wählen.

6.1 Wahl der Randebenen und Nabepunkte

Die einzelnen Quadrikensegmente eines Quadrikensplines können so ungünstig abgeschnitten werden, daß “Löcher” und Mehrfachkomponenten in den Flächenverbänden auftreten. Liegt beispielsweise bei einem Makroelement der Schnittpunkt einer Tangentialebene mit der Transversalen außerhalb des berandenden Tetraeders, so kann in einer Umgebung des zugehörigen Eckpunktes das Makroelement wie in Abbildung 6.1 links komplett außerhalb des Tetraeders liegen. Dahmen schlug zur Vermeidung dieser Fälle vor, jedes Segment wie in Abbildung 6.1 rechts über die Dreiecksebenen hinaus in einem zweiten Tetraeder fortzusetzen, was jedoch nicht die Einschichtigkeit und den Zusammenhang der Flächensegmente garantiert. Guo ([Guo '95]) verwendete die Idee eines zweiten berandenden Tetraeders und führte sogenannte “bitetrahedral patches” ein, bei denen wie in Abbildung 6.2 zwei Makroelemente pro Dreieck bzw. zwei Verbindungsflächen pro Dreieckskante kombiniert werden.

Zu jedem Makroelement wird ein weiteres Makroelement gewählt, das mit dem ersten und der Doppalebene durch die gegebenen Punkte im Büschel liegt, d.h. einen C^1 -Übergang entlang der Punktebene besitzt. Hierzu können die Nabepunkte beliebig gewählt werden, die Wahl der Tangentialebene eines Nabepunktes legt jedoch die

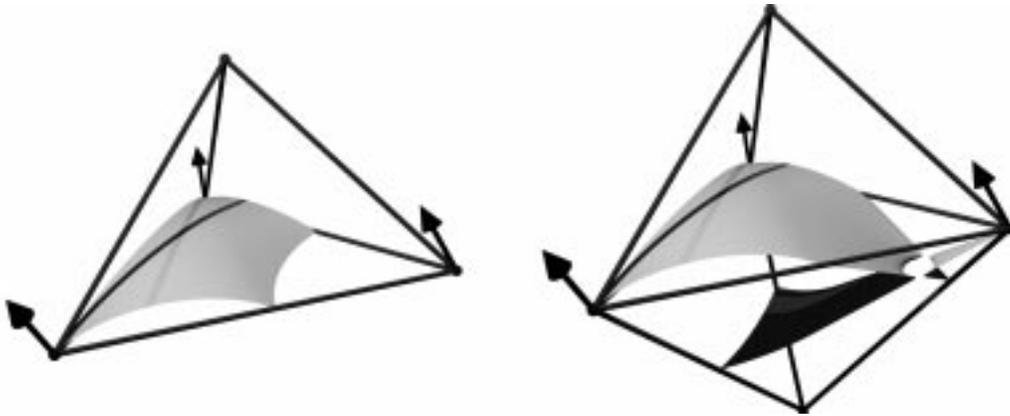


Abbildung 6.1: Unerwünschte “Löcher” und Mehrschichtigkeiten in der Fläche.

zweite fest. Jedes der beiden Makroelemente wird durch einen Tetraeder begrenzt, die das zugehörige Punktdreieck als gemeinsame Seitenfläche besitzen und deren vierte Tetraederspitzen ober- bzw. unterhalb der Punktebene liegen.

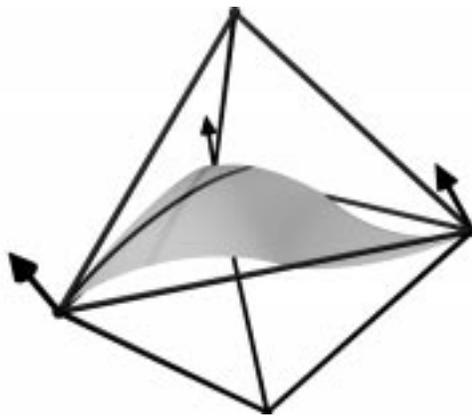


Abbildung 6.2: Guos Konstruktion mit zwei Makroelementen.

Guo gibt Kriterien an, wie die freien Koeffizienten b'_{0002} der impliziten Bézierdarstellung der einzelnen Quadrikensegmente gewählt werden müssen, damit die zusammengesetzten Makroelemente einschichtig und zusammenhängend sind. Diese sind auch für die hier vorgestellte allgemeinere Konstruktion gültig und lassen sich unmittelbar in Bedingungen an die Lage der Nabenpunkte umrechnen. Die zugehörigen Tangentialebenen müssen sich aufgrund der Bündelzugehörigkeit in der Punktebene schneiden. Aus der Eindeutigkeit des Makroelementes (siehe Lemma 5.3) folgt umgekehrt, daß die beiden Makroelemente im Bündel liegen, wenn sich die Tangentialebenen in den Nabenpunkten in der Punktebene schneiden. Werden sie über Gewichte in den

Eckpunkten wie im folgenden Abschnitt berechnet, so sind die Gewichte für beide Makroelemente die gleichen.

Die Einschichtigkeit und Polstellenfreiheit der Keile läßt sich ebenso durch Schranken für die jeweils frei wählbaren Koeffizienten garantieren. Auch hierfür sei auf [Guo '95] verwiesen.

6.2 Wahl der Tangentialebenen in den Nabenpunkten

Satz 5.9 beschreibt lineare Abhängigkeiten zwischen den Tangentialebenen in den Nabenpunkten benachbarter Makroelementes. Ist nämlich das Kontaktelement $\boxed{\mathbb{p}}$ des einen Makroelementes festgelegt, so läßt sich die Tangentialebene $\bar{\mathcal{P}}$ im Nabenpunkt $\bar{\mathbb{p}}$ des Nachbarpatches nur noch um die Gerade $\bar{\mathbb{p}} \times \bar{\mathbb{p}}$ frei drehen. In dieser Beschreibung sind die Abhängigkeiten global, sie lassen sich jedoch durch eine lokale Konstruktion erfüllen.

Zulässige Tangentialebenenkonfigurationen, d.h. Konfigurationen, die den Bedingungen von Satz 5.9 genügen, lassen sich nämlich einfach durch Zuordnung eines festen Gewichtes zu den Punkten des gegebenen Netzes gewinnen. Die Tangentialebenen in den Nabenpunkten bestimmen sich dann für jedes Dreieck lokal aus einem linearen Gleichungssystem, das nur noch von den Daten des jeweiligen Dreiecks abhängt. Betrachte hierzu eine Menge von Dreiecken $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_f\}$, die die Triangulierung der Datenpunkte $\mathfrak{a}_i, i = 1, \dots, n$, festlegen. Weiterhin bezeichne \mathbb{p}_μ den Nabenpunkt des zum Dreieck \mathcal{T}_μ gehörenden Makroelementes.

In diesem Abschnitt wird zu jedem Nabenpunkt \mathbb{p}_μ eine Tangentialebene \mathcal{P}_μ bestimmt, so daß die Tangentialebenen die Doppelverhältnisbedingung aus Satz 5.9 für alle Kanten der Triangulierung erfüllen.

Hierzu seien den Eckpunkten \mathfrak{a}_i beliebige Gewichte α_i zugeordnet, so daß in jedem Dreieck $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{a}_k$ mit Nabenpunkt \mathbb{p}_μ mindestens ein Gewicht von Null verschieden ist. Die Ebenen \mathcal{P}_μ , die sich als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\mu(\mathfrak{a}_l) &= \alpha_l \mathcal{A}_l(\mathbb{p}_\mu), \quad l = i, j, k \\ \mathcal{P}_\mu(\mathbb{p}_\mu) &= 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

ergeben, bilden dann eine zulässige Menge von Tangentialebenen. Für das Doppelverhältnis aus Satz 5.9 bezüglich der Kante $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j$ ergibt sich nämlich nach Lemma 5.13

$$\text{DV} [\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \times \mathfrak{y}] = -\frac{\alpha_j \mathcal{A}_j(\mathfrak{a}_i)}{\alpha_i \mathcal{A}_i(\mathfrak{a}_j)}. \quad (6.2)$$

Das Doppelverhältnis hängt somit nur von α_i und α_j und nicht mehr von den Nabenpunkten und Tangentialebenen ab.

Bemerkung 6.1 Werden alle Gewichte α_i gleich eins gewählt und sind die Gleichungen aller Tangentialebenen in Hesse-Normalform gegeben, ergeben sich genau die speziellen Quadriksplines von Dahmen ([Dahmen '89]).

Beispiel 6.2 In Bild 6.3 werden vier verschiedene Quadriksplines dargestellt, die alle die gleichen sechs Kontaktelemente α_i eines Ellipsoids interpolieren. Oben links wurden die Nabenpunkte p_μ beliebig und die zugehörigen Tangentialebenen T_μ wie in Bemerkung 6.1 gemäß Dahmens Konstruktion gewählt. Oben rechts wurden die Nabenpunkte auf das Ausgangsellipsoid gelegt. Links unten wurden die Gewichte α_i variiert, so daß darüberhinaus die Tangentialebenen in den Nabenpunkten das Ellipsoid berühren. Der Spline rechts unten besteht aus zwei verallgemeinerten Powell-Sabin-Interpolanten (siehe Abschnitt 8), die das Ellipsoid exakt rekonstruieren.

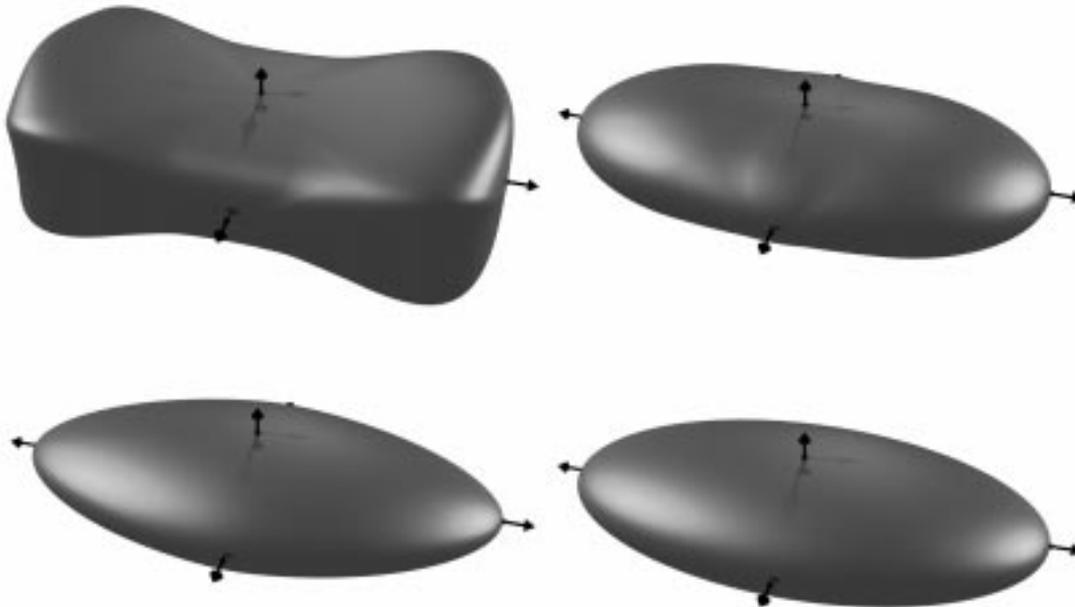


Abbildung 6.3: Sechs Kontaktelemente eines Ellipsoids durch vier verschiedene Quadriksplines interpoliert.

6.3 Zulässige Konfigurationen

Satz 6.3 *Ist der stückweise lineare Interpolant des gegebenen Dreiecksnetzes homöomorph zu einer Scheibe oder Kugel, so läßt sich jede zulässige Menge von Tangentialebenen wie in Gleichung 6.2 durch den Eckpunkten zugeordnete Gewichte bestimmen. Für andere Netze ist in manchen Eckpunkten mehr als ein Gewicht erforderlich, um alle zulässigen Tangentialebenenkonfigurationen zu erhalten.*

Beweis: Gegeben sei ein beliebiges Dreiecksnetz. Besitzt das Dreiecksnetz einen Rand, ist es also nicht geschlossen, dann lassen sich ohne Einschränkung die Dreiecke des Netzes so durchnummerieren, daß jedes Dreieck \mathcal{T}_ν für $\nu = 2, \dots, f$ maximal zwei Kanten mit den vorhergehenden Dreiecken $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{\nu-1}$ gemeinsam hat. Ist das Netz geschlossen, so gelte diese Anordnung für $\nu = 2, \dots, f - 1$.

Jedem Dreieck \mathcal{T}_ν mit Eckpunkten a_i, a_j, a_k wird eine Ebene \mathcal{P}_ν zugeordnet, so daß $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_f$ die Doppelverhältnisbedingung von Satz 5.9 erfüllen. Durch

$$\alpha_l^\nu := \frac{\mathcal{P}_\nu(a_l)}{\mathcal{A}_l(\mathbb{P}_\nu)}, \quad l = i, j, k, \quad (6.3)$$

werden den Eckpunkten des Dreiecks \mathcal{T}_ν Gewichte zugeordnet. Bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmen diese drei Gewichte durch das lineare Gleichungssystem (6.1) die Tangentialebene \mathcal{P}_ν im Nabepunkt eindeutig und umgekehrt.

Jedem Eckpunkt können jedoch mehrere verschiedene Gewichte zugeordnet werden, die jedoch im Falle einer zulässigen Tangentialebenenkonfiguration nicht mehr unabhängig sind und fast alle ohne Einschränkung gleich gesetzt werden können.

Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

Für das Dreieck \mathcal{T}_1 wählen wir die Gewichte α_l^1 beliebig und legen damit entsprechend der Gleichung (6.3) eine Tangentialebene fest. Jedes Dreieck \mathcal{T}_ν mit $\nu > 1$, hat mit einem weiteren Dreieck \mathcal{T}_κ (mit $\kappa < \nu$) eine Kante $a_i a_j$ gemeinsam. Wir setzen $\alpha_i^\nu := \alpha_i^\kappa$ und $\alpha_j^\nu := \alpha_j^\kappa$. Hat \mathcal{T}_ν eine zweite Kante, beispielsweise $a_j a_k$, mit einem Dreieck \mathcal{T}_λ gemeinsam, wobei $\lambda < \nu$, so wählen wir α_k^ν derart, daß $\alpha_k^\nu : \alpha_j^\nu = \alpha_k^\lambda : \alpha_j^\lambda$, um die Doppelverhältnisbedingung von Satz 5.9 zu garantieren, siehe Gleichung (6.2). Existiert kein solches Dreieck \mathcal{T}_λ , wählen wir α_k^ν beliebig. Folglich können in jedem Punkt freie Gewichte beliebig gewählt werden, während andere durch die Doppelverhältnisbedingung von Satz 5.9 festgelegt sind. In jedem Punkt existiert jedoch mindestens ein frei wählbares Gewicht.

Für offene Netze ist diese Konstruktion immer durchführbar, in einem geschlossenen Netz ist jedoch das letzte Dreieck \mathcal{T}_f von drei bereits durchlaufenen Dreiecken, z.B.

$\mathcal{T}_\kappa, \mathcal{T}_\lambda, \mathcal{T}_\mu$, umgeben. Wir wählen die Gewichte α_i^f, α_j^f und α_k^f wie bisher über die Beziehungen $\alpha_i^f := \alpha_i^\kappa, \alpha_j^f := \alpha_j^\kappa$ und α_k^f durch $\alpha_j^f : \alpha_k^f = \alpha_j^\lambda : \alpha_k^\lambda$. Die Doppelverhältnisbedingung aus Satz 5.9 ist auch auf der letzten Kante $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k$ erfüllt, wenn

$$\alpha_k^f : \alpha_i^f = \alpha_k^\mu : \alpha_i^\mu. \quad (6.4)$$

Ist das geschlossene Netz orientierbar, dann ist (6.4) immer erfüllt. In diesem Fall orientieren wir alle Dreieckskanten im Gegenuhrzeigersinn und ordnen jeder orientierten Kante $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j$ eines Dreiecks \mathcal{T}_ν das Teilverhältnis $\alpha_i^\nu : \alpha_j^\nu$ zu. Das Produkt aller Teilverhältnisse über alle Dreiecke ergibt folglich eins. Weiterhin sind die zwei einer Kante zugeordneten Teilverhältnisse invers zueinander, da jede Kante in ihren beiden angrenzenden Dreiecken umgekehrt orientiert ist. Folglich läßt sich das Produkt aller Teilverhältnisse auch als

$$1 = \frac{\alpha_k^f}{\alpha_i^f} \frac{\alpha_i^\mu}{\alpha_k^\mu}$$

schreiben, was (6.4) beweist.

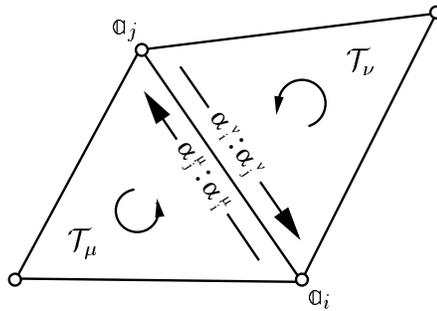


Abbildung 6.4: Teilverhältnisse auf den Kanten.

Betrachten wir nun die freien Gewichte. Ist das Netz berandet, so ergeben sich im ersten Dreieck \mathcal{T}_1 drei freie Gewichte. In jedem weiteren Dreieck \mathcal{T}_ν ergeben sich r freie Gewichte, wobei r zwei minus die Anzahl der mit $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{\nu-1}$ gemeinsamen Kanten beträgt. Insgesamt ergibt sich somit

$$w := 3 + 2(f - 1) - e_{\text{inner}},$$

mit e_{inner} als Anzahl der inneren Kanten. Sei v die Anzahl aller Kanten, e die Anzahl der Eckpunkte, g das Geschlecht des Netzes und h die Anzahl seiner Randkomponenten. Aus der Euler-Poincaré-Formel

$$v + f - e = 2 - 2g - h$$

und

$$3f = e + e_{\text{inner}}$$

ergibt sich dann

$$\begin{aligned} w &= 1 + 2f - e_{\text{inner}} \\ &= 1 + (3f - e - e_{\text{inner}}) - f + e \\ &= v - 1 + 2g + h. \end{aligned}$$

Für $g = 0$ und $h = 1$ ist der lineare Interpolant des Netzes homöomorph zu einer Scheibe und folglich die Anzahl der freien Gewichte $w = v$. Nur in diesem Fall erhalten wir somit alle zulässigen Tangentialebenenkonfigurationen über die vorangehende Konstruktion mit genau einem freien Gewicht pro Eckpunkt.

Ist das Netz geschlossen ($h = 0$) und orientierbar, bleibt die Anzahl freier Gewichte für alle Dreiecke mit Ausnahme des letzten die gleiche, im letzten Dreieck ist sie null. Die Gesamtzahl der Freiheitsgrade ergibt somit:

$$w = v + 2g.$$

Somit können wir auch hier nur für Netze, deren linearer Interpolant homöomorph zu einer Kugel ist (d.h. $g = 0$), alle zulässigen Tangentialebenenkonfigurationen durch genau ein freies Gewicht pro Punkt beschreiben. \square

6.4 Transversalensysteme

Um die Vererbung des C^1 -Kontakts zwischen Q_1 und Q_2 auf \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 bzw. $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$ zu garantieren, müssen die transversalen Geraden benachbarter Makroelemente koplanar gewählt werden. In diesem Abschnitt werden zunächst verschiedene spezielle Transversalensysteme und dann eine Strategie zur passenden Bestimmung solcher "Transversalensysteme" dargestellt.

Jedem Dreieck des gegebenen Netzes muß eine transversale Gerade zugeordnet werden, in der sich die Trennebenen zwischen den einzelnen Quadriken des Makroelementes schneiden. Diese Transversalen müssen gewissen globalen Abhängigkeiten genügen, die in der folgenden Definition zusammengefaßt sind:

Definition 6.4 (Transversalensystem) Eine Menge von Geraden \mathcal{G}_{ijk} heißt **Transversalensystem** eines Dreiecksnetzes, falls:

1. Jedes Dreieck $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ wird von einer Transversalen \mathcal{G}_{ijk} im Inneren geschnitten.
2. Für benachbarte Dreiecke $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ und $\alpha_i \alpha_j \alpha_l$ spannen die Geraden \mathcal{G}_{ijk} und \mathcal{G}_{ijl} eine Ebene \mathcal{U}_{ij} auf.
3. Die Ebene \mathcal{U}_{ij} schneidet die gemeinsame Kante $\alpha_i \alpha_j$ der Nachbardreiecke im Inneren.

Dahmen ([Dahmen '89]) nennt hierzu einige Systeme:

- **Sterntransversalen:** Ist der stückweise lineare Interpolant des Dreiecksnetzes sternförmig, so können alle Transversalen durch einen Sternpunkt der Fläche und beispielsweise den Inkreismittelpunkt des jeweiligen Dreiecks gewählt werden.
- **Umkreistransversalen:** Sind alle Dreiecke der Triangulierung spitzwinklig, so bilden die Geraden senkrecht zur Dreiecksfläche durch den Umkreismittelpunkt ein Transversalensystem.

Ein anderes Transversalensystem wird durch die Geraden

$$\mathcal{G}_{ijk} = \{x \mid \lambda_i \mathcal{A}_i(x) = \lambda_j \mathcal{A}_j(x) = \lambda_k \mathcal{A}_k(x)\}, \quad (6.5)$$

mit beliebigen Konstanten λ gebildet. Dieses Transversalensystem bewirkt zahlreiche Vereinfachungen in der Konstruktion des Quadrikenlines.

Die Gerade \mathcal{G}_{ijk} enthält insbesondere den Schnittpunkt der Tangentialebenen \mathcal{A}_i , \mathcal{A}_j und \mathcal{A}_k . Damit trennen die Nabenpunkte ρ_{ijk} und α_{ijk} den Schnittpunkt der Tangentialebenen $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k$ und den Durchstoßpunkt der Transversalen durch die Dreiecksebene $y_{ijk} = \mathcal{G}_{ijk} \cap (\alpha_i \cup \alpha_j \cup \alpha_k)$ harmonisch. Die Ebenen \mathcal{U}_{ij} enthalten die Schnittgerade $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$. In der Doppelverhältnisbedingung von Satz 5.9 fallen somit die zu benachbarten Dreiecken $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ und $\alpha_i \alpha_j \alpha_l$ gehörenden Punkte $((\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) + \rho_{ijk}) \cap (\alpha_i \cup \alpha_j)$ und $((\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) + \rho_{ijl}) \cap (\alpha_i \cup \alpha_j)$ - dort y_p bzw. $y_{\bar{p}}$ genannt - zusammen. Folglich schneiden sich (bezüglich des Transversalensystems \mathcal{G}_{ijk}) zulässige innere Tangentialebenen \mathcal{P}_{ijk} und \mathcal{P}_{ijl} benachbarter Makroelemente auf der Kante $\alpha_i \alpha_j$. Eine derartige Menge zulässiger Tangentialebenen wird durch Ebenen \mathcal{P}_{ijk} parallel zu den zugehörigen Dreiecken $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ gebildet.

Bemerkung 6.5 Sind insbesondere alle gewichteten Ebenengleichungen $\lambda_i \mathcal{A}_i(x) = 0$ in Hesse-Normal-Form gegeben, so besteht \mathcal{G}_{ijk} aus allen Punkten mit gleichem Abstand zu den Ebenen \mathcal{A}_i , \mathcal{A}_j und \mathcal{A}_k .

Bemerkung 6.6 Ein Problem bei der Verwendung des Transversalensystems \mathcal{G}_{ijk} besteht in der passenden Wahl der Gewichte λ_i , so daß die Transversalen die zugehörigen Dreiecke und die von ihnen aufgespannten Trennebenen die entsprechenden Kanten im Inneren schneiden.

Die Transversale \mathcal{G}_{ijk} schneidet die Ebene $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j\mathfrak{a}_k$ in

$$y_{ijk} = d_{ijk}\mathfrak{a}_i + d_{jki}\mathfrak{a}_j + d_{kij}\mathfrak{a}_k, \quad (6.6)$$

mit

$$d_{ijk} = -\lambda_j\mathcal{A}_j(\mathfrak{a}_k) \lambda_k\mathcal{A}_k(\mathfrak{a}_j) + \lambda_i\mathcal{A}_i(\mathfrak{a}_k) \lambda_k\mathcal{A}_k(\mathfrak{a}_j) + \lambda_i\mathcal{A}_i(\mathfrak{a}_j) \lambda_j\mathcal{A}_j(\mathfrak{a}_k)$$

(siehe hierzu Abschnitt 6.6). Sind die Punkte \mathfrak{a}_i in erweiterten Koordinaten gegeben, so schneidet die Transversale \mathcal{G}_{ijk} das Dreieck $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j\mathfrak{a}_k$ genau dann im Innern, wenn

$$\frac{d_{ijk}}{d} > 0, \quad \frac{d_{jki}}{d} > 0, \quad \frac{d_{kij}}{d} > 0, \quad d = d_{ijk} + d_{jki} + d_{kij}.$$

Die Trennebene \mathcal{U}_{ij} schneidet die Kante $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j$ im Punkt

$$y_{ij} = \lambda_i\mathcal{A}_i(\mathfrak{a}_j)\mathfrak{a}_i + \lambda_j\mathcal{A}_j(\mathfrak{a}_i)\mathfrak{a}_j,$$

also genau dann in ihrem Inneren, wenn

$$\lambda_i\mathcal{A}_i(\mathfrak{a}_j) \cdot \lambda_j\mathcal{A}_j(\mathfrak{a}_i) > 0.$$

Leider ist keines der drei oben angegebenen Transversalensysteme bei allen Datensätzen verwendbar. Die folgende Konstruktion beschreibt jedoch einen Algorithmus, nach dem ein globales Transversalensystem ermittelt werden kann.

Konstruktion 6.7 (Transversalensystem) Ein Transversalensystem zu einem gegebenen Dreiecksnetz kann wie folgt bestimmt werden: Zunächst werden die Dreiecke des Netzes wie im Beweis von Satz 6.3 so angeordnet, daß jedes Dreieck (bis auf gegebenenfalls ein Dreieck \mathcal{T}_f) maximal zwei vorher auftretende Nachbarn besitzt. Für das erste Dreieck \mathcal{T}_1 wird nun eine Transversale nach einer beliebigen Strategie bestimmt.

Hat das Dreieck \mathcal{T}_μ nur einen einzigen Nachbar \mathcal{T}_ν mit $\nu < \mu$, so wird eine passende Transversale \mathcal{G}_μ durch einen inneren Punkt von \mathcal{T}_μ bestimmt, so daß die von \mathcal{G}_μ und \mathcal{G}_ν aufgespannte Ebene das Innere der gemeinsamen Kante der Nachbardreiecke schneidet.

Existieren zwei Nachbardreiecke \mathcal{T}_ν und \mathcal{T}_λ von \mathcal{T}_μ mit $\mu > \lambda, \mu > \nu$, so lassen sich aus den Ebenenbüscheln durch die Transversalen \mathcal{G}_ν bzw. \mathcal{G}_λ je eine Ebene auswählen,

die das Innere der gemeinsamen Kanten von \mathcal{T}_ν und \mathcal{T}_μ bzw. \mathcal{T}_λ und \mathcal{T}_μ treffen und deren Schnittgerade - die Transversale \mathcal{G}_μ - das Innere des Dreiecks \mathcal{T}_μ schneidet.

Im Falle geschlossener Netze gibt es ein Dreieck \mathcal{T}_f , dessen drei Nachbardreiecken bereits eine Transversale zugeordnet ist. Findet sich hierzu keine passende Transversale \mathcal{G}_f , so kann das Dreieck wie im folgenden Abschnitt unterteilt werden.

Die Lage der Transversalen nimmt großen Einfluß auf die Gestalt des zugehörigen Makroelementes, wie die Abbildungen 6.5, 6.6 und 6.7 zeigen.

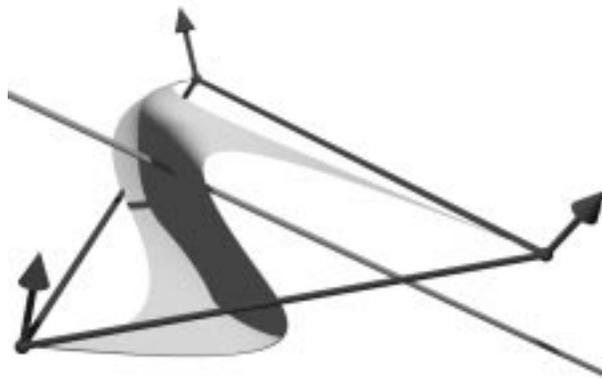


Abbildung 6.5: Willkürlich gewählte Transversale.

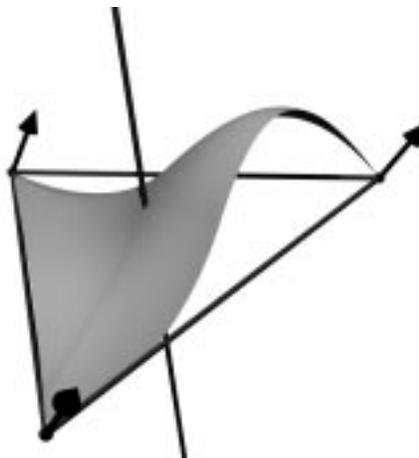


Abbildung 6.6: Transversale senkrecht zur Dreiecksebene.



Abbildung 6.7: Aus gegebenen Normalen gemittelte Transversale.

6.5 Vermeidung globaler Abhängigkeiten

Bei der Bestimmung von Transversalensystemen läßt sich (siehe Bemerkung 6.6) nicht immer einfach garantieren, daß die Transversalen das Innere der Dreiecke und die aufgespannten Trennebenen das Innere der Dreieckskanten schneiden. Durch Unterteilung der Dreiecke $\triangle abc$ des ursprünglichen Netzes in je drei Dreiecke $\triangle abd$, $\triangle adc$ und $\triangle dbc$ kann dieses globale Problem jedoch umgangen werden.

Hierzu wird zunächst zu jedem Dreieck $\triangle abc$ ein beliebiger Punkt d gewählt. Weiterhin wird zu jeder Kante des Ausgangsdreiecks eine Trennebene bestimmt, die die Kante im Inneren schneidet. Die drei Trennebenen schneiden sich in einem Punkt z , durch den Geraden in den Trennebenen so gewählt werden, daß sie das Innere der Dreiecke $\triangle abd$, $\triangle adc$ bzw. $\triangle dbc$ schneiden. Diese Geraden bilden ein passendes Transversalensystem; der resultierende Quadrikenspline besteht im wesentlichen aus 36 Quadrikensegmenten pro Dreieck des Ausgangsnetzes, während ein "gewöhnlicher" Quadrikenspline nur zwölf Segmente pro Dreieck benötigt.

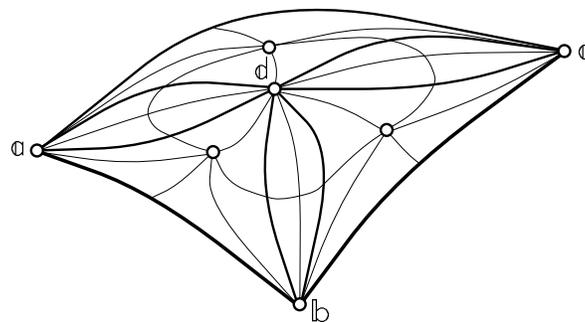


Abbildung 6.8: Unterteilung.

Bemerkung 6.8 Eine Verallgemeinerung der Makroelement-Konstruktion mit drei unabhängigen Transversalen liefert einen Flächenverbund aus 12 Quadrikensegmenten wie in Abbildung 6.9. Die Konstruktion dieses Quadrikensplines ist rein lokal und benötigt circa 18 Quadrikensegmente pro Dreieck (siehe [Bangert & Prautzsch '99b]).

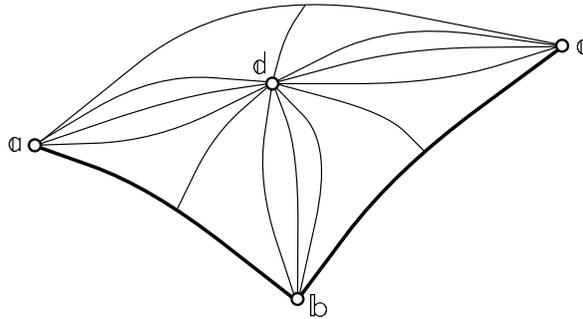


Abbildung 6.9: Verallgemeinertes Makroelement.

6.6 Ein Beispielmakroelement

In diesem Abschnitt werden exemplarisch ein spezielles Makroelement konstruiert und die algebraischen Gleichungen seiner Quadriken aufgestellt. Die Berechnungen werden für die spezielle Wahl der Transversalen durch den Schnittpunkt der vorgegebenen Tangentialebenen durchgeführt. Weiterhin wird die Tangentialebene im Nebenpunkt parallel zur Ebene der gegebenen Punkte gewählt.

Gegebene Punkte und Tangentialebenen

Seien also \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} die gegebenen Eckpunkte des Makroelementes in erweiterten Koordinaten, i.e. $\mathfrak{a} = [1 \ \mathbf{a}^t]^t$. Die zugehörigen Tangentialebenengleichungen \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} seien so normiert, daß die Transversale durch

$$\mathcal{G} = \{x \mid \mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x) = \mathcal{C}(x)\} \quad (6.7)$$

beschrieben wird. Sie enthält insbesondere den Schnittpunkt $\mathfrak{s} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ der Tangentialebenen \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} . Sei

$$y = \alpha_y \mathfrak{a} + \beta_y \mathfrak{b} + \gamma_y \mathfrak{c}, \quad (6.8)$$

der Durchstoßpunkt y der Transversalen durch die Punktebene $\mathcal{S} = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$. Dabei können die homogenen Koordinaten von y ohne Einschränkung so normiert werden,

daß $\mathcal{A}_y = \mathcal{B}_y = \mathcal{C}_y = 1$, womit sich die Koeffizienten α_y , β_y und γ_y wie folgt berechnen:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^t \\ \mathcal{B}^t \\ \mathcal{C}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \mathbb{M}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

das heißt

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \frac{1}{M} (- \mathcal{B}_c \mathcal{C}_b + \mathcal{A}_c \mathcal{C}_b + \mathcal{A}_b \mathcal{B}_c) \\ \beta_y &= \frac{1}{M} (\mathcal{B}_c \mathcal{C}_a - \mathcal{A}_c \mathcal{C}_a + \mathcal{A}_c \mathcal{B}_a) \\ \gamma_y &= \frac{1}{M} (\mathcal{B}_a \mathcal{C}_b + \mathcal{A}_b \mathcal{C}_a - \mathcal{A}_b \mathcal{B}_a). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Hierbei bezeichne

$$\mathbb{M} := \begin{bmatrix} \mathcal{A}^t \\ \mathcal{B}^t \\ \mathcal{C}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \mathcal{A}_b & \mathcal{A}_c \\ \mathcal{B}_a & \mathcal{B}_b & \mathcal{B}_c \\ \mathcal{C}_a & \mathcal{C}_b & \mathcal{C}_c \end{bmatrix},$$

und

$$M := \det \mathbb{M} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_a & \mathcal{A}_b & \mathcal{A}_c \\ \mathcal{B}_a & \mathcal{B}_b & \mathcal{B}_c \\ \mathcal{C}_a & \mathcal{C}_b & \mathcal{C}_c \end{vmatrix} = \mathcal{A}_b \mathcal{B}_c \mathcal{C}_a + \mathcal{A}_c \mathcal{B}_a \mathcal{C}_b = S_s, \quad (6.10)$$

das nach den Unabhängigkeitsvoraussetzungen (2.10) aus Abschnitt 2.4 von Null verschieden ist.

Nabepunkte und Tangentialebenen

Der frei gewählte Nabepunkt p läßt sich auf der Transversalen durch y und s als

$$p = y + \rho s$$

(mit einem geeigneten Faktor ρ) und damit der zweite allen Quadriken des Makroelementes gemeinsame Nabepunkt q als

$$q = y - \rho s = p - 2\rho s$$

darstellen. Dies folgt unmittelbar aus der harmonischen Lage der Punkte s , p , y und q , die bei der speziellen Wahl der Transversalen durch s gegeben ist.

Aus den letzten beiden Gleichungen und der Normierung von y ergibt sich somit:

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{B}(p) = \mathcal{C}(p) = \mathcal{A}(y) = \dots = \mathcal{A}(q) = \dots = 1. \quad (6.11)$$

Die Tangentialebene in \mathfrak{p} wird parallel zur Punktebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gewählt. Da \mathfrak{a} , \mathfrak{b} und \mathfrak{c} in erweiterten Koordinaten dargestellt sind, geben $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$, $\mathcal{P}(\mathfrak{b})$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{c})$ bis auf eine gemeinsame Konstante den euklidischen Abstand der jeweiligen Punkte von der Ebene \mathcal{P} , der in diesem Fall in allen drei Punkten übereinstimmt, an. Folglich läßt sich \mathcal{P} aus $\mathcal{P}(\mathfrak{a}) = \mathcal{P}(\mathfrak{b}) = \mathcal{P}(\mathfrak{c}) = 1, \mathcal{P}(\mathfrak{p}) = 0$ in ähnlicher Weise wie γ zu

$$\mathcal{P} = \alpha_P \mathcal{A} + \beta_P \mathcal{B} + \gamma_P \mathcal{C} + \delta_P \mathcal{S} \quad (6.12)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \alpha_P \\ \beta_P \\ \gamma_P \end{bmatrix} = \mathbb{M}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}(\mathfrak{p}) = \alpha_P + \beta_P + \gamma_P + \delta_P \rho \mathcal{S} \mathfrak{s} = 0,$$

berechnen. Dies ergibt für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \frac{1}{M} (-\mathcal{B}\mathfrak{c}\mathcal{C}\mathfrak{b} + \mathcal{B}\mathfrak{c}\mathcal{C}\mathfrak{a} + \mathcal{B}\mathfrak{a}\mathcal{C}\mathfrak{b}) \\ \beta_P &= \frac{1}{M} (\mathcal{A}\mathfrak{c}\mathcal{C}\mathfrak{b} - \mathcal{A}\mathfrak{c}\mathcal{C}\mathfrak{a} + \mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{C}\mathfrak{a}) \\ \gamma_P &= \frac{1}{M} (\mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}\mathfrak{c} + \mathcal{A}\mathfrak{c}\mathcal{B}\mathfrak{a} - \mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}\mathfrak{a}) \\ \delta_P &= \frac{-1}{\rho M} (\alpha_P + \beta_P + \gamma_P). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Analog bestimmt sich die Tangentialebene in \mathfrak{q} :

$$\mathcal{Q} = \alpha_P \mathcal{A} + \beta_P \mathcal{B} + \gamma_P \mathcal{C} - \delta_P \mathcal{S},$$

mit $\mathcal{Q}(\mathfrak{a}) = \mathcal{Q}(\mathfrak{b}) = \mathcal{Q}(\mathfrak{c}) = 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathfrak{q} &= (\alpha_y + \beta_y + \gamma_y) - \rho \mathcal{P}\mathfrak{s} \\ &= (\alpha_y + \beta_y + \gamma_y) + (\alpha_P + \beta_P + \gamma_P) \\ &= \mathcal{Q}\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Die Summe aller Elemente von \mathbb{M}^{-1} und \mathbb{M}^{-t} stimmen überein und werden im folgenden durch

$$L := \alpha_y + \beta_y + \gamma_y = \alpha_P + \beta_P + \gamma_P = \frac{1}{2} \mathcal{P}\mathfrak{q} = \mathcal{P}\mathfrak{y} \quad (6.14)$$

abgekürzt.

Die Zweibogenkonstruktion

Durch die spezielle Wahl des Transversalensystems schreibt sich die Übergangsebene zwischen den Quadriken \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 als $\mathcal{U} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Der Schnittpunkt \mathfrak{y}_p dieser Ebene mit der Kante $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ergibt sich zu

$$\mathfrak{y}_p = \mathcal{U} \cap (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathcal{A}\mathfrak{b})\mathfrak{a} + (\mathcal{B}\mathfrak{a})\mathfrak{b}. \quad (6.15)$$

Der Zweibogen $\square{a} \square{p} \square{b}$ besteht aus den Kegelschnittbögen durch $\square{a} \square{p}$ und einen weiteren Punkt q_{ab} in \mathcal{U} bzw. $\square{b} \square{p}$ und q_{ab} . Hierbei ergibt sich q_{ab} über die harmonische Lage der Punkte

$$\begin{aligned} s_{ab} &= (a \wedge b \wedge p) \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = (\mathcal{A}b)(\mathcal{B}a)p - (\mathcal{B}p)\{(\mathcal{A}b)a + (\mathcal{B}a)b\} \\ &= (\mathcal{A}b)(\mathcal{B}a)p - y_p, p, y_p \text{ und } q_{ab} \end{aligned}$$

zu

$$q_{ab} = (\mathcal{A}b)(\mathcal{B}a)p - 2y_p. \quad (6.16)$$

Die Quadrikgleichung

Sei \mathcal{K} der durch $\square{a} \square{p} \square{q}$ definierte Tangentialebenenkegel, \mathcal{W} die Ebene durch a, p, q . Dann ist die Quadrik \mathcal{Q}_1 des Makroelementes durch $\square{a} \square{p} \square{q} q_{ab}$ die eindeutig bestimmte Quadrik des Büschels $\mathcal{K} + \lambda\mathcal{W}^2$ durch q_{ab} und schreibt sich als

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{W}\mathcal{W}^t \mathcal{K}(q_{ab}) - 2(\mathcal{W}q_{ab})^2 \mathcal{K}. \quad (6.17)$$

Eine Gleichung des Tangentialebenenkegels \mathcal{K} ergibt sich beispielsweise wie folgt (siehe auch Abbildung 2.7):

$$\mathcal{K} = -2\mathcal{P}a \mathcal{Q}a \mathcal{V}\mathcal{V}^t + (\mathcal{V}a)^2(\mathcal{P}\mathcal{Q}^t + \mathcal{Q}\mathcal{P}^t), \quad (6.18)$$

mit

$$\mathcal{V} = (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{A}) \wedge p \wedge q = \mathcal{Q}p \mathcal{P}q \mathcal{A} - \mathcal{Q}p \mathcal{A}q \mathcal{P} - \mathcal{A}p \mathcal{P}q \mathcal{Q}.$$

Da es hierbei auf einen homogenen Faktor nicht ankommt, wird der Einfachheit halber im folgenden

$$\mathcal{V} := \frac{1}{2}\{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\} - L\mathcal{A} = \alpha_P \mathcal{A} + \beta_P \mathcal{B} + \gamma_P \mathcal{C} - (\alpha_P + \beta_P + \gamma_P)\mathcal{A} \quad (6.19)$$

gesetzt.

Die Ebene $a p q$ berechnet sich über das alternierende Produkt zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2p} a \wedge p \wedge q = a \wedge y \wedge s \\ &= \mathcal{A}y \{\mathcal{B}a \mathcal{A} + \mathcal{C}a \mathcal{B} - \mathcal{B}a \mathcal{C} - \mathcal{C}a \mathcal{A}\} \\ &= (\mathcal{B}a - \mathcal{C}a)\mathcal{A} + \mathcal{C}a \mathcal{B} - \mathcal{B}a \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Einsetzen der Gleichungen 6.11 und 6.19 in 6.18 ergibt

$$\mathcal{K} = -2\mathcal{V}\mathcal{V}^t + \mathcal{P}\mathcal{Q}^t + \mathcal{Q}\mathcal{P}^t.$$

Aus Gleichung 6.16 folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(q_{ab}) &= -\mathcal{A}b \mathcal{B}a \\
\mathcal{B}(q_{ab}) &= -\mathcal{A}b \mathcal{B}a \\
\mathcal{C}(q_{ab}) &= \mathcal{A}b \mathcal{B}a - 2\mathcal{A}b \mathcal{C}a - 2\mathcal{B}a \mathcal{C}b = -2\gamma_y M - \mathcal{A}b \mathcal{B}a \\
\mathcal{P}(q_{ab}) &= -2(\mathcal{A}b + \mathcal{B}a) \\
\mathcal{Q}(q_{ab}) &= -2(\mathcal{A}b + \mathcal{B}a) + (\mathcal{A}b \mathcal{B}a) \mathcal{Q}_P \\
\mathcal{V}(q_{ab}) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{P}(q_{ab}) + \mathcal{Q}(q_{ab}) \} - L \mathcal{A}(q_{ab}) \\
&= 2L(\mathcal{A}b \mathcal{B}a) - 2(\mathcal{A}b + \mathcal{B}a) = \mathcal{Q}(q_{ab}) \\
&= \alpha_P \mathcal{A}(q_{ab}) + \beta_P \mathcal{B}(q_{ab}) + \gamma_P \mathcal{C}(q_{ab}) - (\alpha_P + \beta_P + \gamma_P) \mathcal{A}(q_{ab}) \\
&= -2\gamma_P \gamma_y M
\end{aligned}$$

und durch Einsetzen in die vorangehende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(q_{ab}) &= -2\mathcal{V}(q_{ab})^2 + \mathcal{Q}(q_{ab}) \mathcal{P}(q_{ab}) \\
&= -2\mathcal{Q}(q_{ab}) \{ 2L \mathcal{A}b \mathcal{B}a \} \\
&= 8LM \gamma_P \gamma_y (\mathcal{A}b \mathcal{B}a).
\end{aligned}$$

Mittels

$$\mathcal{W}(q_{ab}) = (\mathcal{B}a - \mathcal{C}a) \mathcal{A}(q_{ab}) + \mathcal{C}a \mathcal{B}(q_{ab}) - \mathcal{B}a \mathcal{C}(q_{ab}) = 2\gamma_y \mathcal{B}a M$$

und der vorangehenden Gleichung ergibt sich schließlich aus (6.17) die Gleichung der Quadrik \mathcal{Q}_1 :

Satz 6.9 Die Quadrik \mathcal{Q}_1 des durch die Kontaktelemente \boxed{a} , \boxed{b} und \boxed{c} , die Transversale \mathcal{G} aus Gleichung 6.7 und das Nabenelement \boxed{p} festgelegten Makroelementes genügt der Gleichung:

$$\mathcal{Q}_1 = \gamma_P L \mathcal{A}b \mathcal{W} \mathcal{W}^t - \gamma_y M \mathcal{B}a \mathcal{K}. \quad (6.21)$$

Die Gleichungen der Ebene \mathcal{W} und des Kegels \mathcal{K} ergeben sich aus (6.20) und (6.18). Die Quadriken $\mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_6$ ergeben sich analog durch passende Vertauschung der Punkte a, b und c .

Gleichungen

Für spätere Berechnungen werden hier einige Gleichungen bereitgestellt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_a &= 0 & \mathcal{K}_a &= 2LA \\
 \mathcal{W}_b &= -M\gamma_y & \mathcal{K}_b &= 2L\{1 - LA_b\}A + LA_b\{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\} \\
 \mathcal{W}_c &= M\beta_y & \mathcal{K}_c &= 2L\{1 - LA_c\}A + LA_c\{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\} \\
 \mathcal{W}_s &= 0 & \mathcal{K}_s &= -\frac{2}{\rho^2 M}L^2\mathcal{S} \\
 \mathcal{W}_p &= 0 & \mathcal{K}_p &= 2L\mathcal{P} \\
 \mathcal{W}_q &= 0 & \mathcal{K}_q &= 2L\mathcal{Q} \\
 \mathcal{W}_y &= 0 & \mathcal{K}_y &= L\{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_a &= 1 & \mathcal{Q}_{1a} &= -2\gamma_y \mathcal{B}_a M L A \\
 \mathcal{V}_b &= 1 - LA_b & \mathcal{Q}_{1b} &= -2\gamma_y M L \{(\mathcal{B}_a - \mathcal{A}_b)A + \mathcal{A}_b\mathcal{B}\} \\
 \mathcal{V}_c &= 1 - LA_c & \mathcal{Q}_{1c} &= \dots \\
 \mathcal{V}_s &= 0 & \mathcal{Q}_{1s} &= \frac{2}{\rho^2} \gamma_y \mathcal{B}_a L^2 \mathcal{S} \\
 \mathcal{V}_p &= 0 & \mathcal{Q}_{1p} &= -2\gamma_y \mathcal{B}_a M L \mathcal{P} \\
 \mathcal{V}_q &= 0 & \mathcal{Q}_{1q} &= -2\gamma_y \mathcal{B}_a M L \mathcal{Q} \\
 \mathcal{V}_y &= 0 & \mathcal{Q}_{1y} &= -\gamma_y \mathcal{B}_a M L \{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\}
 \end{aligned}$$

Kapitel 7

Duale Quadrikensplines

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion der Quadrikensplines in den Dualraum übertragen, wodurch sich eine weitere Klasse von Quadrikensplines ergibt. Zunächst werden hierzu einige grundlegenden Betrachtungen angestellt und im Anschluß der Zusammenhang zwischen dualen und primalen Splines hergestellt.

Die Ebenen des dreidimensionalen projektiven Raums sind die Punkte im zugehörigen Dualraum und umgekehrt. Eine Quadrik des Dualraums wird als Tangentenquadrik bezeichnet. Ist sie regulär, so besteht sie aus den Tangentialebenen an eine Punktquadrik des Primalraumes. Alle im folgenden betrachteten Quadriken werden als regulär vorausgesetzt. Zwei Punktquadriken, die sich längs einer Ebene \mathcal{U} berühren, werden durch zwei Tangentenquadriken mit C^1 -Kontakt in einem Punkt eingehüllt. Dieser Punkt ist die Spitze des gemeinsamen Tangentenkegels, der bezüglich jeder der beiden Punktquadriken polar zur Übergangsebene \mathcal{U} ist.

Ein Quadrikenspline im Dualraum hüllt folglich einen Flächenverbund aus tangential-ebenenstetig zusammengesetzten Punktquadrikensegmenten ein. Dieser "Punktspline" im Primalraum wird im folgenden als **dualer Spline** bezeichnet.

Bemerkung 7.1 *Eine Korrelation bildet einen Quadrikenspline auf einen Spline aus Tangentenquadriken ab, der einen dualen Spline einhüllt.*

Ein Makroelement im Primalraum wird durch ein Tangentenmakroelement eingehüllt. Die Schnittgerade der zwei Tangentialebenen, die allen sechs Punktquadriken des Makroelementes gemeinsam sind, ist die transversale Gerade des Tangentenmakroelementes. Auf dieser "dualen Transversalen" liegen die Spitzen der den benachbarten Quadriken des Makroelementes gemeinsamen Tangentialebenenkegel. Dies entspricht im primalen Fall der Tatsache, daß alle sechs Berührebenen zwischen je zwei benachbarten Punktquadriken eines Makroelementes die primale Transversale enthalten. Zusammenfassend ergibt sich:

Lemma 7.2 Jedes primale Makroelement ist auch ein duales Makroelement und umgekehrt.

Zwei Nachbarmakroelemente wurden durch vier Quadrikensegmente glatt verbunden. In der Konstruktion wurde hierbei eine gemeinsame, von den benachbarten Transversalen aufgespannte Kontaktebene für beide Patche zugrundegelegt, längs der die Quadriken $Q_1, R_1, \bar{R}_1, \bar{Q}_1$ die Quadriken $Q_2, R_2, \bar{R}_2, \bar{Q}_2$ berühren (siehe Abbildung 5.7). Bei der dualen Konstruktion entstehen hier jedoch im allgemeinen vier verschiedene Übergangsebenen, da die vier gemeinsamen Tangentialebenenkegel von Q_1 und Q_2, R_1 und R_2, \dots wie in Abbildung 7.1 im allgemeinen verschiedene Spitzen haben. Folglich liefert im allgemeinen die duale Konstruktion eine andere Klasse von Quadriksplines, ein dualer Quadrikspline kann nicht durch eine primale Konstruktion gewonnen werden.

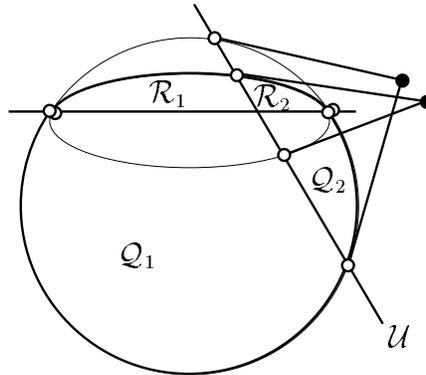


Abbildung 7.1: Tangentenkegel.

Lemma 7.3 Liegt das spezielle Transversalensystem \mathcal{G}_{ijk} aus Gleichung (6.5) in Abschnitt 6.4 zugrunde, so fallen die Spitzen der Tangentialebenenkegel von Q_1 und Q_2, R_1 und R_2, \dots mit dem Schnittpunkt $x_p = x_{\bar{p}}$ der Tangentialebenen \mathcal{P} und $\bar{\mathcal{P}}$ mit der gemeinsamen Kante $\mathbb{O} \mathbb{O}$ zusammen. Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (5.3) im Beweis des Satzes 5.9, da $y_p = y_r = y_s = y_{\bar{r}} = y_{\bar{p}}$.

In diesem Fall ist somit die Konstruktion selbstdual und das duale Transversalensystem schreibt sich als

$$\mathcal{L}_{ijk} = \{\mathcal{X} \mid \mu_i \mathcal{X}(\mathbb{O}_i) = \mu_j \mathcal{X}(\mathbb{O}_j) = \mu_k \mathcal{X}(\mathbb{O}_k)\},$$

wobei \mathcal{L}_{ijk} den Schnitt aller Ebenen \mathcal{X} bezeichnet. Insbesondere liegt die Gerade \mathcal{L}_{ijk} in der Ebene $\mathbb{O}_i \mathbb{O}_j \mathbb{O}_k$.

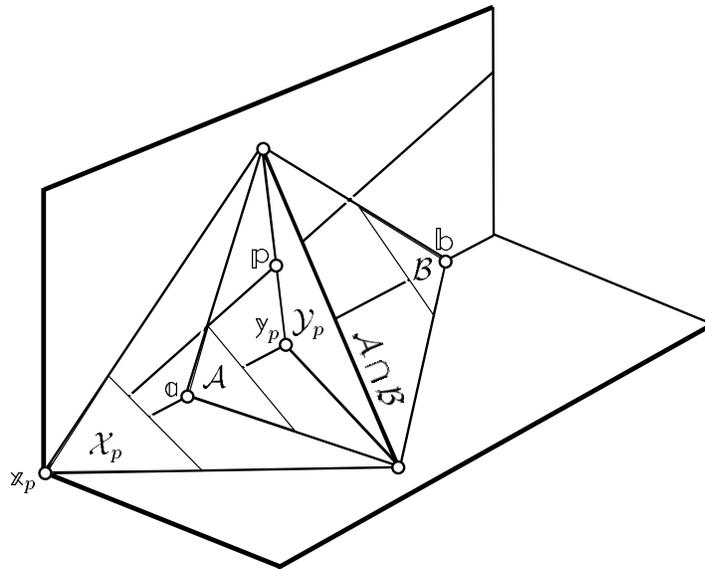


Abbildung 7.2: Duales Doppelverhältnis.

Der duale Spline erfüllt analogerweise die Doppelverhältnisbedingung von Satz 5.9, wie beispielsweise unmittelbar aus Bemerkung 5.13 folgt. Um zulässige Konfigurationen von Nabepunkten und Tangentialebenen für einen dualen Spline zu erhalten, kann die gleiche Konstruktion wie im primalen Fall angewandt werden. Die Gleichungen (6.1) sind symmetrisch im Nabepunkt p und seiner Tangentialebene \mathcal{P} . Folglich können entweder Nabepunkte vorgegeben und die zugehörigen Tangentialebenen passend zur Doppelverhältnisbedingung aus Satz 5.9 berechnet werden oder umgekehrt Tangentialebenen durch die dualen Transversalen frei gewählt und das lineare Gleichungssystem nach den Nabepunkten aufgelöst werden.

Bemerkung 7.4 Auch die Konstruktion verallgemeinerter Makroelemente läßt sich dualisieren (vergleiche [Bangert & Prautzsch '99b]). Ein duales verallgemeinertes Makroelement läßt sich auch durch die primale Konstruktion gewinnen und umgekehrt.



Abbildung 7.3: Primaler und dualer Quadrikspline.

Kapitel 8

Powell-Sabin-Interpolanten

Die Anordnung der Segmente eines Makroelementes folgt dem Powell-Sabin-Split. Die Zusammenhänge gehen jedoch wesentlich weiter: durch den geometrischen Zugang zu Quadriken-splines ergeben sich Powell-Sabin-Splines als spezielle Quadriken-splines. In diesem Abschnitt werden die Zusammenhänge näher erläutert.

8.1 Powell-Sabin-Interpolanten

Ein Powell-Sabin-Interpolant ist eine stückweise quadratische bivariate Funktion. Er interpoliert Funktionswerte $f(\mathbf{p}_i)$ und Gradienten $\nabla f(\mathbf{p}_i)$, die über einem Dreiecksgitter in der Parameterebene angeordnet sind. Zur Konstruktion des Interpolanten wird jedes Dreieck $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k$ durch Einfügen eines Unterteilungspunktes \mathbf{p}_{ijk} im Dreiecksinneren und je eines Unterteilungspunktes \mathbf{p}_{ij} auf den Kanten $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ in sechs Dreiecke $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{ijk}$ unterteilt. Zu jedem dieser Dreiecke wird eine quadratische Funktion bestimmt, die längs der Dreieckskanten C^1 -stetig an die über den angrenzenden Dreiecken definierten Funktionen anschließt.

Damit zwei Powell-Sabin-Elemente über benachbarten Dreiecken, etwa $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k$ und $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_l$, entlang der gemeinsamen Kante $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j$ einen C^1 -Kontakt haben, müssen die Punkte \mathbf{p}_{ijk} , \mathbf{p}_{ij} und \mathbf{p}_{ijl} kollinear sein. Powell und Sabin zeigten 1977, daß bei gegebenen Unterteilungspunkten der quadratische C^1 -Interpolant existiert und eindeutig bestimmt ist.

Der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit des Interpolanten erfolgt über die Konstruktion der Bézier-Ordinaten b_{rst}^{ijk} , b_{rst}^{jik} etc. der über den Dreiecken $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{ijk}$, $\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{ijk}$ etc. definierten quadratischen Polynomsegmente. Wie in Abbildung 8.2 dargestellt, legen die Funktionswerte $f(\mathbf{p}_i)$ die Bézier-Ordinaten über den Abszissen \mathbf{p}_i fest. Die angrenzenden Ordinaten b_{110}^{ijk} und b_{101}^{ijk} werden über den Abszissen $(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ij})/2$

in den durch die Gradienten festgelegten Tangentialebenen gewählt. Der C^1 -Übergang zwischen zwei benachbarten quadratischen Funktionen erfordert die Kollinearität der Punkte

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ij})/2 \\ b_{110}^{ijk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ij} \\ b_{020}^{ijk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{ij})/2 \\ b_{110}^{jik} \end{bmatrix},$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{101}^{ijk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_{ij} + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{011}^{ijk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{101}^{jik} \end{bmatrix}.$$

Wird zusätzlich noch die letzte Ordinate b_{002} so gewählt, daß die Punkte

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{101}^{ijk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{101}^{jik} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_{ijk})/2 \\ b_{101}^{kij} \end{bmatrix}, \text{ und } \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ijk} \\ b_{002}^{ijk} \end{bmatrix},$$

koplanar sind, so haben je zwei zu benachbarten Dreiecken $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{ijk}$ gehörende Funktionen einen C^1 -Übergang.

Da die Unterteilungspunkte \mathbf{p}_{ijk} , \mathbf{p}_{ij} und \mathbf{p}_{ijl} kollinear sind, besteht automatisch ein C^1 -Übergang zwischen benachbarten Powell-Sabin-Elementen: Die Bézier-Ordinaten b_{200}^{ijk} , b_{101}^{ijk} , b_{110}^{ijk} und b_{101}^{ijl} definieren eine Ebene - die gegebene Tangentialebene - über den zugehörigen Abszissen \mathbf{p}_i , $(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ijk})/2$, $(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ij})/2$ und $(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ijl})/2$; analog liegen die durch die Ordinaten b_{110}^{ijk} , b_{011}^{ijk} , b_{020}^{ijk} , b_{110}^{jik} und b_{011}^{ijl} und ihre Abszissen $(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{ij})/2$, $(\mathbf{p}_{ij} + \mathbf{p}_{ijk})/2$, \mathbf{p}_{ij} , $(\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_{ij})/2$ und $(\mathbf{p}_{ij} + \mathbf{p}_{ijl})/2$ definierten Punkte in einer Ebene.

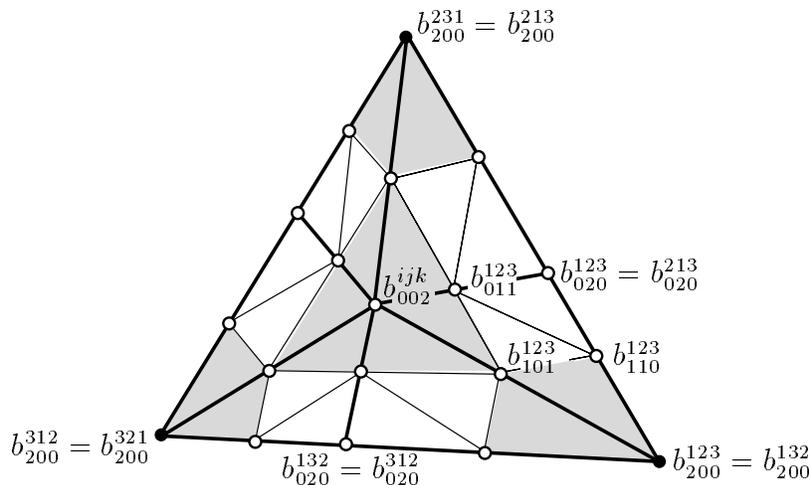


Abbildung 8.1: Powell-Sabin-Interpolant.

8.2 Powell-Sabin-Interpolanten als Quadrikensplines

Die im vorigen Abschnitt gegebenen Stützstellen und Funktionswerte definieren Punkte \mathbb{p}_i eines räumlichen Dreiecksnetzes, die Gradienten $\nabla f(\mathbf{p}_i)$ legen zugehörige Tangentialebenen \mathcal{P}_i fest:

Bemerkung 8.1 Sind die Funktionswerte p_i einer Funktion f zu Stützstellen \mathbf{p}_i und die entsprechenden Gradienten $\nabla f(\mathbf{p}_i)$ gegeben, so schreiben sich die Punkte \mathbb{p}_i als

$$\mathbb{p}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_i \\ p_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_i \\ f(\mathbf{p}_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

und die zugehörigen Tangentialebenen als

$$\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix} -f(\mathbf{p}_i) + \mathbf{p}_i \nabla f(\mathbf{p}_i) \\ -\nabla f(\mathbf{p}_i) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diese Punkte und Tangentialebenen lassen sich durch einen Quadrikenspline interpolieren, der bei einer speziellen Wahl der Nabenelemente und Randebenen mit einem Powell-Sabin-Spline übereinstimmt:

Satz 8.2 Wird der Nabepunkt \mathbb{p} aller Makroelemente als Fernpunkt \mathbb{f}_z der z -Achse und die zugehörige Tangentialebene als Fernebene gewählt und liegen zusätzlich die Randebenen der jeweiligen Quadrikensegmente parallel zur z -Achse, so sind die Makroelemente Powell-Sabin-Elemente. Benachbarte Makroelemente stoßen direkt tangentialebenenstetig aneinander, die Keilkonstruktion kann entfallen. Der resultierende Quadrikenspline ist der Powell-Sabin-Interpolant mit den Durchstoßpunkten der jeweiligen Transversalen durch die Parameterdreiecke als Unterteilungspunkt.

Beweis:

Jede Quadrik, die die Fernebene in \mathbb{f}_z berührt, ist ein Paraboloid, das eine quadratische Funktion über der x - y -Ebene definiert. Die Randebenen der Paraboloidsegmente des Makroelementes zerlegen die x - y -Ebene in die gleichen Teildreiecke, über denen die Segmente des Powell-Sabin-Interpolanten definiert sind. Die Eindeutigkeit des Makroelementes und des Powell-Sabin-Elementes zeigt ihre Übereinstimmung.

Da hier die Nabenelemente der benachbarten Makroelemente übereinstimmen, kann nach Lemma 5.4 die Keilkonstruktion entfallen: die Quadrikenpaare \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 und $\bar{\mathcal{Q}}_1$, $\bar{\mathcal{Q}}_2$ mit C^1 -Kontakt in der durch benachbarte Transversalen aufgespannten Ebene \mathcal{U} haben auch C^1 -Kontakt in der Ebene $\mathfrak{a} \setminus \mathbb{p}$. \square

Satz 8.2 läßt sich für beliebige Punktdaten verallgemeinern:

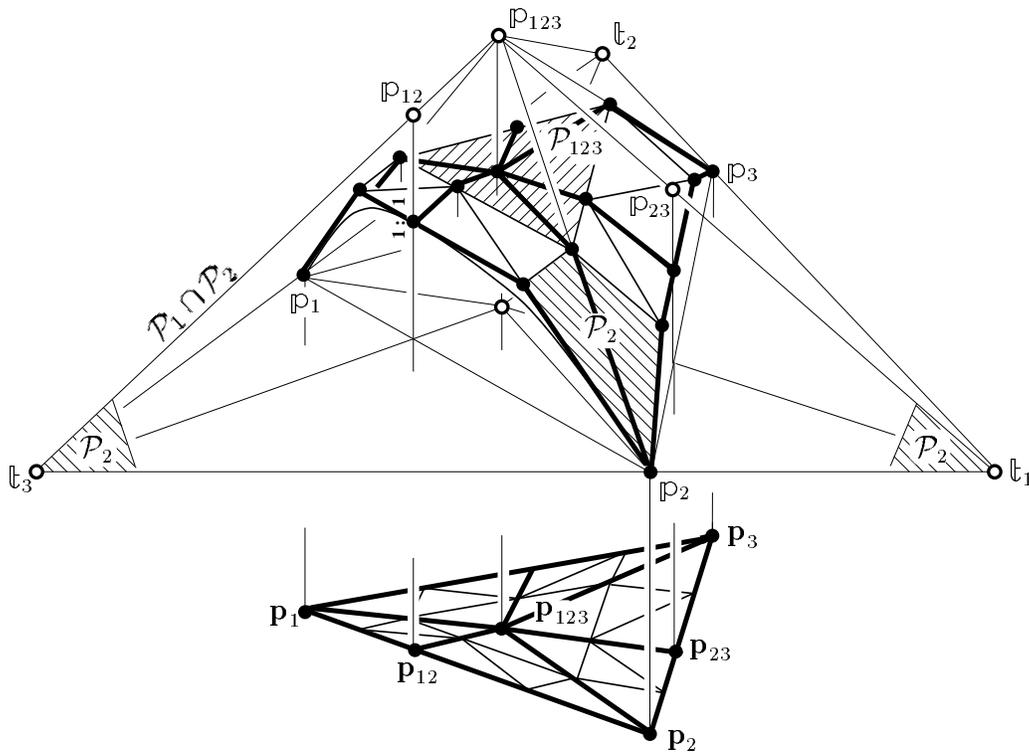


Abbildung 8.2: Powell-Sabin-Interpolant als Quadriken spline mit speziellen Transversalen.

Korollar 8.3 Gegeben sei ein Dreiecksnetz mit den Eckpunkten zugeordneten Tangentialebenen. Ist der stückweise lineare Interpolant des Dreiecksnetzes sternförmig und liegt das Netz ganz in einem Halbraum, der von einer Ebene \mathcal{P} durch einen Sternpunkt \mathfrak{p} berandet wird, so kann das Netz durch ein projektives Bild eines Powell-Sabin-Splines interpoliert werden. Hierzu wird der Sternpunkt \mathfrak{p} als Nabenelement und die Ebene \mathcal{P} als zugeordnete Tangentialebene gewählt.

Ein Beispiel hierzu findet sich in Abbildung 8.3.

Für Powell-Sabin-Splines sind viele Konstruktionen einfacher als für allgemeine Quadriken splines: Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes für das zweite Nabenelement wird zur Mittelpunktskonstruktion. Werden die Transversalen speziell durch den Schnittpunkt der Tangentialebenen der zugehörigen Dreiecke gewählt, so sind die Tangentialebenen im zweiten Nabenelement eines Makroelementes jeweils parallel zur zugehörigen Dreiecksebene. Für diesen Spezialfall werden im nächsten Kapitel Konvexitätsbetrachtungen angestellt.

Beispiel 8.4 Bild 8.3 zeigt zwei Quadriken splines, die die gleichen Kontaktelemente \mathfrak{Q}_i interpolieren. Links oben wurden die Nabenelemente \mathfrak{P}_μ so variiert, daß sich eine "optisch" glatte und schöne Fläche ergibt. Links unten wird ein verallgemeinerter

Powell-Sabin-Interpolant, bei dem alle Nabelemente $\boxed{P_\mu}$ zusammenfallen, gezeigt. Rechts sind die einzelnen Splines in ihre Makroelemente und zugehörigen Keile zerlegt.

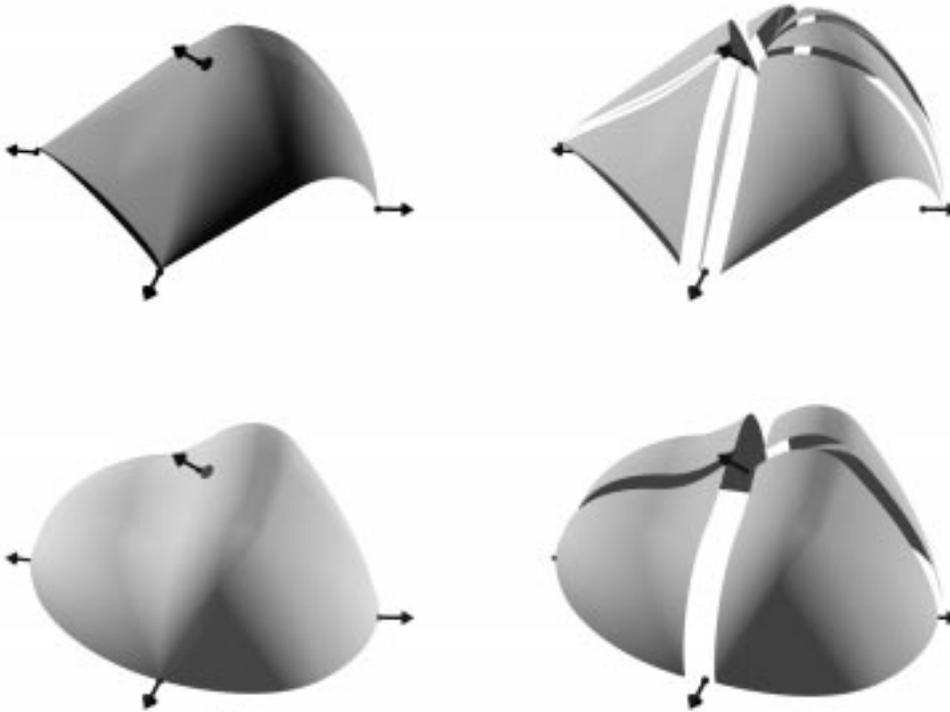


Abbildung 8.3: Quadriksplines (oben) und projektives Powell-Sabin-Element (unten) zu den gleichen Kontaktelementen.

Multivariate Powell-Sabin-Splines

In [Bangert & Prautzsch '99a] wird eine multivariate Verallgemeinerung der Powell-Sabin Splines vorgestellt. Hierzu wird ein Simplex $p_1 \dots p_n$ des Parameterraums \mathbb{R}^{n-1} durch Einfügen eines inneren Punktes $p_{i_1 \dots i_m}$ auf jeder $(m-1)$ -dimensionalen Seite $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ in Teilsimplexe $p_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{1 \dots n}$ zerlegt. Über jedem dieser Teilsimplexe existiert dann eine eindeutig bestimmte quadratische Funktion mit C^1 -Übergang an den Rändern, die Funktionswerte und erste Ableitungen in den Eckpunkten des Ausgangssimplex interpoliert. Die aus diesen quadratischen Funktionen zusammengesetzte stückweise quadratische C^1 -Funktion $f(x)$ definiert ein multivariates Powell-Sabin-Element. Stimmen die Unterteilungspunkte auf gemeinsamen Seitenflächen angrenzender Simplexe überein und sind die inneren Punkte $p_{1 \dots n}$ bzw. $p_{2 \dots n+1}$

der Simplexe mit dem gemeinsamen inneren Punkt der Seitenfläche $\mathbf{p}_{2\dots n}$ kollinear, so ist auch der C^1 -Anschluß zum Nachbarsimplex gewährleistet.

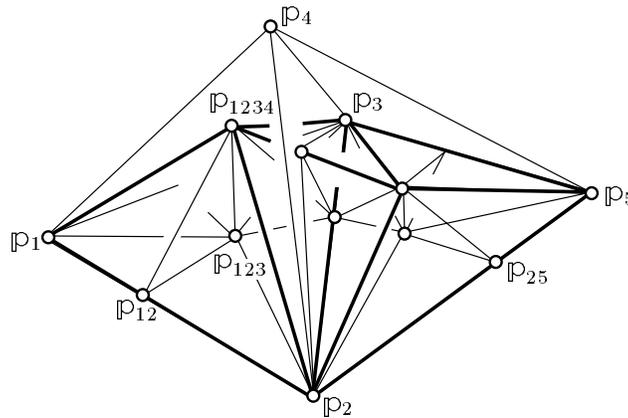


Abbildung 8.4: Parametersimplexe eines trivariaten Powell-Sabin-Splines.

Die Nullkontur $f(x, y, z) = 0$ des trivariaten “Powell-Sabin-Splines” definiert einen Quadriken spline, der einer Simplexzerlegung des Raumes eingeschrieben ist. Werden beispielsweise die Funktionswerte $f(\mathbf{p}_1) = f(\mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_3)$ auf Null gesetzt, so beschreibt die Nullkontur des Powell-Sabin-Interpolanten im Simplex $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_{1234}$ ein Makroelement. Ein Makroelement in einem Nachbarsimplex $\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_5 \mathbf{p}_{2345}$ wird durch einen Keil aus vier Quadrikenstücken, die den Simplexe $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_{12} \mathbf{p}_{124} \mathbf{p}_{1234}$, $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_{12} \mathbf{p}_{124} \mathbf{p}_{2345}$, $\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_{12} \mathbf{p}_{124} \mathbf{p}_{1234}$ und $\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_{12} \mathbf{p}_{124} \mathbf{p}_{2345}$ eingeschrieben sind, verbunden. Die Transversalen $\mathbf{p}_{123} \mathbf{p}_{1234}$ und $\mathbf{p}_{235} \mathbf{p}_{2345}$ sind hierbei nicht mehr zwangsläufig koplanar. Stattdessen ist jedoch die Wahl der Trennebene \mathcal{V} zwischen den Makroelementen eingeschränkt, da sie mit der gemeinsamen Randebene $\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4$ der Ausgangsimplexe zusammenfallen muß.

Kapitel 9

Konvexität

Ein wichtiges Kriterium bei der Beurteilung von Interpolationsverfahren ist die Form des resultierenden Interpolanten. Spezielles Interesse gilt hierbei der Frage, ob konvexe Daten durch einen konvexen Interpolanten rekonstruiert werden.

In diesem Abschnitt werden zunächst verschiedene Kriterien für die Konvexität von Quadrikenstücken dargestellt. Hieraus werden Bedingungen für konvexe Powell-Sabin-Interpolanten abgeleitet sowie Verfahren bereitgestellt, die konvexe Interpolanten garantieren. Schließlich werden diese Ergebnisse auf allgemeine Quadriken splines übertragen.

9.1 Konvexe Quadrikenstücke

In der Literatur (beispielsweise in [Carnicer & Garcia-Esnaola '98]) finden sich zahlreiche mehr oder weniger äquivalente Definitionen von Konvexität. In dieser Arbeit wird im wesentlichen folgende Aussage zugrundegelegt:

Definition 9.1 *Eine reguläre, tangentialebenenstetige, zusammenhängende Fläche ist genau dann **konvex**, wenn sie ganz auf einer Seite jeder ihrer Tangentialebenen liegt.*

Hiermit folgt notwendig, daß die Gaußsche Krümmung K einer konvexen Fläche immer nichtnegativ ist (vergleiche z.B. [Laugwitz '68], S. 50f), da nur dann die Fläche lokal auf einer Seite der Tangentialebene liegt.

Jede Tangentialebene an eine ringförmige, kegelige bzw. ovale Quadrik schneidet diese wie in Abbildung 2.4 in einem reellen Geradenpaar, einer Doppelgeraden bzw. einem konjugiert komplexen Geradenpaar (und somit nur einem reellen Punkt). Folglich muß ein streng konvexes Quadrikenstück notwendig Teil einer ovalen Quadrik, d.h. eines

einschaligen Hyperboloids, eines Ellipsoids oder eines elliptischen Paraboloids sein. Wird die Quadrik in homogenen Koordinaten durch

$$\mathbf{x}^t \mathbb{M} \mathbf{x} = 0$$

beschrieben, so ist sie genau dann oval, wenn

$$\det \mathbb{M} < 0.$$

Da jede Tangentialebene an eine Quadrik das gleiche Verhalten zeigt, die Gaußsche Krümmung somit in jedem Punkt der Quadrik das gleiche Vorzeichen besitzt, genügt jeweils die Auswertung der Eigenschaften in einem Punkt. Insbesondere gilt:

Bemerkung 9.2 *Eine Quadrik ist genau dann oval und insbesondere ein auf ihr liegendes Dreiecksstück genau dann streng konvex, wenn eine beliebige Tangentialebene an die Quadrik einen Kegelschnitt auf der Quadrik, der den Berührungspunkt der Tangentialebene nicht enthält, in keinem reellen Punkt schneidet.*

Konvexitätskriterien für quadratische Dreiecksflächenstücke auf Quadriken

Die geometrischen Kriterien des vorangehenden Abschnitts werden nun zur Herleitung analytischer Kriterien eingesetzt. Ein rationales quadratisches Dreiecksflächenstück $\mathfrak{b}(u, v, w) = \sum \mathfrak{b}_{ijk} B_{ijk}^2(u, v, w)$ auf einer Quadrik ist genau dann konvex, wenn es auf einer ovalen Quadrik liegt. Wird Bemerkung 9.2 auf die Tangentialebene $\mathcal{V} = \mathfrak{b}_{002} \wedge \mathfrak{b}_{101} \wedge \mathfrak{b}_{011}$ in \mathfrak{b}_{002} und die gegenüberliegende Randkurve ($w = 0$) mit Bézier-Punkten \mathfrak{b}_{200} , \mathfrak{b}_{110} und \mathfrak{b}_{020} angewandt, so ergibt sich durch Einsetzen der Kurve in die Ebenengleichung und Bestimmung der Diskriminante der quadratischen Gleichung:

Lemma 9.3 *Das zusammenhängende rationale quadratische Dreiecksflächenstück $\mathfrak{b}(u, v, w)$ auf einer Quadrik ist genau dann konvex, wenn*

$$\mathcal{V}(\mathfrak{b}_{200}) \mathcal{V}(\mathfrak{b}_{020}) - (\mathcal{V}(\mathfrak{b}_{110}))^2 > 0, \quad \mathcal{V} = \mathfrak{b}_{002} \wedge \mathfrak{b}_{101} \wedge \mathfrak{b}_{011}.$$

Ist das Flächenstück integral (beispielsweise als Graph einer quadratischen Funktion), so kann für $\mathcal{V}(\mathfrak{x})$ der Abstand des jeweiligen Punktes \mathfrak{x} von der Ebene \mathcal{V} eingesetzt werden.

Diese Gleichung findet sich in äquivalenter Form auch in [Albrecht '98a], wo sie jedoch über die explizite Berechnung der Gaußschen Krümmung hergeleitet wird.

9.2 Konvexe Powell-Sabin-Interpolanten

Ein Powell-Sabin-Interpolant besteht aus dreieckigen Quadrikenstücken. Da sie stetig differenzierbar zusammengesetzt sind [Powell & Sabin '77], ist der Interpolant trivialeweise konvex, wenn alle Teilflächen konvex sind (vergleiche hierzu beispielsweise [Grandine '89]). Folglich lassen sich die Ergebnisse der beiden vorangehenden Abschnitte zur Charakterisierung konvexer Powell-Sabin-Interpolanten heranziehen. Insbesondere genügt es, ein einzelnes Powell-Sabin-Element zu betrachten.

Konvexitätsbedingungen

Gegeben seien drei Punkte \mathbb{p}_i , $i = 1, 2, 3$, mit zugeordneten Tangentialebenen \mathcal{P}_i , die wie in Bemerkung 8.1 durch Parameterwerte \mathbf{p}_i , Funktionswerte p_i und Gradienten $\nabla f(\mathbf{p}_i)$ festgelegt sind. Die Daten seien streng konvex - beispielsweise von einer streng konvexen Funktion f in den Parameterwerten \mathbf{p}_i abgetastet.

Definition 9.4 Punkte $\mathbb{p}_i = [1 \ \mathbf{p}_i \ p_i]^t$ eines Dreiecksnetzes mit zugeordneten Tangentialebenen \mathcal{P}_i bilden eine **streng konvexe Konfiguration**, wenn das Netz in jedem Punkt ganz auf einer Seite der zugeordneten Tangentialebene liegt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß sich die Tangentialebenengleichungen so normieren lassen, daß

$$a_{ij} := \mathcal{P}_i(\mathbb{p}_j) > 0, \quad \forall i \neq j. \quad (9.1)$$

Bemerkung 9.5 Ergeben sich die Tangentialebenengleichungen wie in Bemerkung 8.1 aus Daten, die von einer streng konvexen Funktion f abgetastet wurden, so sind diese Ungleichungen wegen

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -\nabla f(\mathbf{p}_i)(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + f(\mathbf{p}_j) - f(\mathbf{p}_i) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)H_f(\mathbf{p}_i + \theta(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i))(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i), \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned} \quad (9.2)$$

und der positiven Definitheit der Hesseform im Falle strenger Konvexität immer erfüllt.

Der Graph einer streng konkaven Funktion bildet im Sinne von Definition 9.1 ebenfalls eine streng konvexe Fläche. Daher wird im folgenden zwischen konkaven und konvexen Funktionen nicht unterschieden; ist nämlich f konvex, so ist $-f$ konkav und umgekehrt.

Wir werden uns weiterhin auf die Konstruktion spezieller Powell-Sabin-Interpolanten beschränken, bei denen die Transversale \mathcal{G}_{ijk} jedes Dreiecks $\mathbb{p}_i\mathbb{p}_j\mathbb{p}_k$ den Schnittpunkt s_{ijk} der Tangentialebenen \mathcal{P}_i , \mathcal{P}_j und \mathcal{P}_k enthält. Hierzu wird vorausgesetzt, daß die Punkte und Tangentialebenen jedes Dreiecks "**wohlsoziiert**" sind, das heißt, die

Transversalen \mathcal{G}_{ijk} das Punktdreieck $\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j\mathbb{P}_k$ im Inneren schneiden. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Projektion \mathbf{p}_{ijk} des Tangentialebenenschnittpunktes \mathbf{s}_{ijk} auf die x - y -Ebene im Inneren des zugehörigen Parameterdreiecks $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k$ liegt (wie in [Carnicer & Dahmen '92] vorausgesetzt). Dieser Punkt \mathbf{p}_{ijk} ist der Unterteilungspunkt für das Powell-Sabin-Element.

Lemma 9.6 *Die Punkte \mathbb{P}_l und Tangentialebenen \mathcal{P}_l des Dreiecks $\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j\mathbb{P}_k$ sind genau dann wohl assoziiert, wenn für alle zyklischen Permutationen von (i, j, k) gilt:*

$$d_{ijk} := a_{ij}a_{jk} + a_{ik}a_{kj} - a_{kj}a_{jk} > 0. \quad (9.3)$$

Obwohl diese Aussage auch in [Carnicer & Dahmen '92] zu finden ist, soll sie mit den hier verwendeten Notationen bewiesen werden:

Beweis:

Werden der Fernpunkt $\mathbb{f}_z = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^t$ der z -Achse und der Schnittpunkt $\mathbf{s}_{ijk} = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_k$ der Tangentialebenen in die Tangentialebenengleichungen aus Bemerkung 8.1 eingesetzt, so ergibt sich

$$\forall i : \mathcal{P}_i(\mathbb{f}_z) = 1, \quad \forall \text{Dreiecke } \mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k : \mathcal{P}_i(\mathbf{s}_{ijk}) = 0.$$

Die Transversale $\mathbb{f}_z\mathbf{s}_{ijk}$ schreibt sich somit als $\{\mathbf{x} | \mathcal{P}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_j(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_k(\mathbf{x})\}$ und schneidet die Punktebene $\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j\mathbb{P}_k$ im Punkt

$$\mathbf{y}_{ijk} = d_{ijk}\mathbb{P}_i + d_{jki}\mathbb{P}_j + d_{kij}\mathbb{P}_k$$

mit $\mathcal{P}_l(\mathbf{y}_{ijk}) = a_{ij}a_{jk}a_{ki} + a_{ji}a_{kj}a_{ik} > 0$, für $l = i, j, k$ (siehe hierzu die Gleichungen 6.8 und 6.9). Die baryzentrischen Koordinaten von \mathbf{y}_{ijk} haben somit die gleichen Vorzeichen wie die d_{ijk} . Folglich liegt \mathbf{y}_{ijk} genau dann im Inneren des Punktdreiecks bzw. die gegebenen Daten sind wohl assoziiert, wenn alle Koeffizienten d_{ijk} positiv sind. \square

Entgegen einer Aussage von Carnicer und Dahmen ([Carnicer & Dahmen '92]) muß der spezielle Powell-Sabin-Interpolant zu wohl assoziierten Daten einer konvexen Funktion nicht konvex sein ([Floater '97]).

Mit einer Zusatzforderung an die Tangentialebenen läßt sich die Konvexität des Powell-Sabin-Splines garantieren. Hierzu werden die Schnittpunkte \mathbb{t}_i der Punktebene $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2\mathbb{P}_3$ mit den Geraden $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_k$ (den Schnittgeraden der Ebenen \mathcal{P}_j und \mathcal{P}_k) benötigt, wobei wie oben alle zyklischen Permutationen von (i, j, k) betrachtet werden. Die Punkte \mathbb{t}_i bilden das **Tangentendreieck**, das sich durch den Schnitt der Tangentialebenen mit der Ebene der drei Punkte ergibt (siehe Abbildung 8.2). Hiermit ist das gegebenenfalls unendliche Dreieck gemeint, das das Punktdreieck enthält.

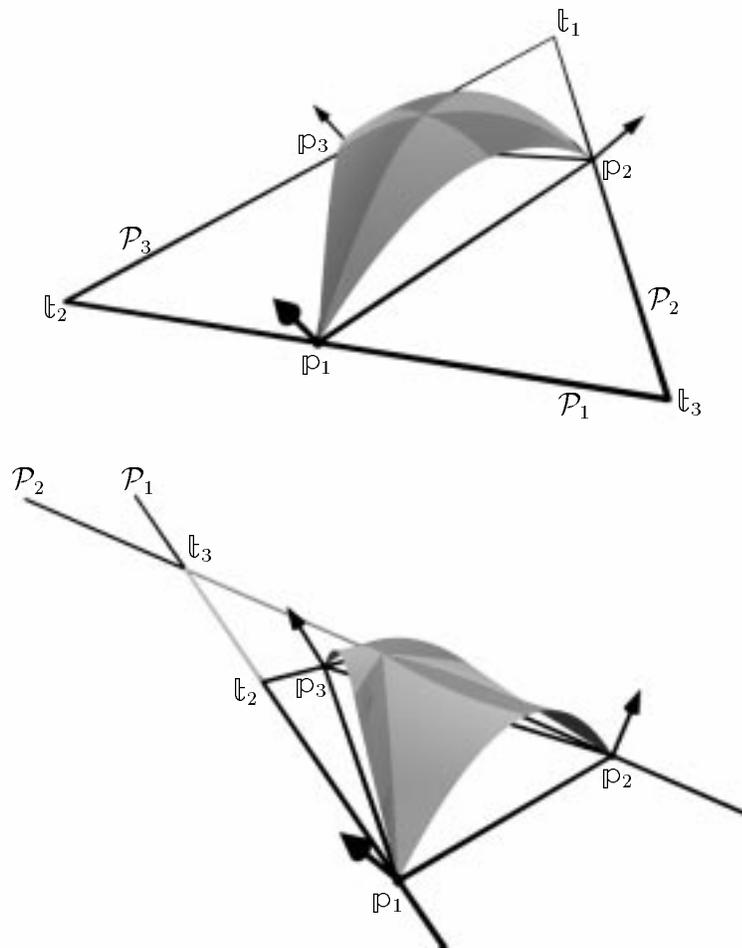


Abbildung 9.1: Powell-Sabin-Interpolanten zu streng konkaven Daten mit wohllassoziierten Tangentialebenen.

Satz 9.7 Gegeben seien Punkte p_1, p_2, p_3 mit wohllassoziierten Tangentialebenen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, die eine streng konvexe Konfiguration bilden. Das hierdurch wie in Abbildung 8.2 bestimmte Powell-Sabin-Element mit projiziertem Schnittpunkt s_{123} der Tangentialebenen als Unterteilungspunkt ist genau dann konvex, wenn das Tangentendreieck $t_1 t_2 t_3$ endlich ist (siehe die Abbildungen 9.1 und 9.2).

Beweis:

Die Aussage von Satz 9.7 folgt unmittelbar aus der geometrischen Konstruktion des Powell-Sabin-Interpolanten. Hierzu wird die Konvexitätsaussage von Bemerkung 9.2 verwendet, derzufolge eine Quadrik genau dann oval ist, wenn eine beliebige Tangentialebene einen beliebigen regulären Kegelschnitt auf der Quadrik, der den Berührungspunkt nicht enthält, in keinem reellen Punkt schneidet.

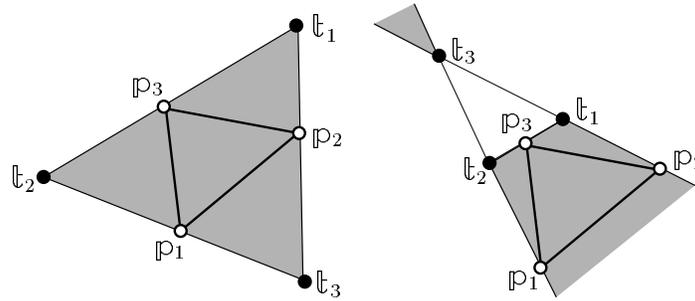


Abbildung 9.2: Unendliches und endliches Tangentendreieck.

Dementsprechend wird die Tangentialebene im zweiten allen Quadriken des Makroelementes gemeinsamen Nabepunktes q (ungleich dem Fernpunkt f_z) mit den Zweibögen in den Randebenen des Makroelementes geschnitten. Die Tangentialebene ist aufgrund der speziellen Wahl der Transversalen parallel zur Dreiecksebene. Der Zweibogen besteht aus 2 Parabelbögen, die jeweils den Fernpunkt f_z der z -Achse enthalten und deren zweite gemeinsame Tangente ebenfalls parallel zur Dreiecksebene liegt (siehe Abbildung 8.2). Damit nun kein Schnitt zwischen beispielsweise den Kegelschnitten des Zweibogens durch p_1 und p_2 und der Tangentialebene Q auftritt, müssen der Durchstoßpunkt t_3 von $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ durch die Dreiecksebene $p_1 p_2 p_3$ sowie der Punkt p_3 auf verschiedenen Seiten der Kante $p_1 p_2$ liegen. Mit Bemerkung 9.2 folgt sofort die Aussage von Satz 9.7. \square

Korollar 9.8 *Das Tangentendreieck ist genau dann endlich, wenn die Tangentialebene \mathcal{P}_i im Nabepunkt es nicht trifft.*

Bemerkung 9.9 *Der Powell-Sabin-Interpolant zu wohllassoziierten Daten mit den projizierten Tangentialebenenschnittpunkten als Unterteilungspunkten ist genau dann konvex, wenn die zugehörigen Bézier-Polygone konvex sind. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 9.7 und Abbildung 8.2.*

Willemans und Dierckx [Willemans & Dierckx '94] beschreiben die Konvexität eines allgemeinen Powell-Sabin-Elementes durch zwölf Ungleichungen, um damit konvexe Approximanten zu berechnen. Da die Konvexität jedes Quadrikensegmentes wie in Lemma 9.3 durch eine einzige Ungleichung beschrieben werden kann, wären bereits sechs Ungleichungen hinreichend. In der speziellen Situation von Satz 9.7 kann diese Zahl sogar auf drei verringert werden.

Lemma 9.10 *Sei a_{ij} wie in Gleichung 9.1 definiert und weiter*

$$b_{ijk} := a_{ij} a_{jk} + a_{ik} a_{ji} - a_{ij} a_{ji}, \quad (9.4)$$

mit einer zyklischen Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$. Das Tangendendreieck $\mathbb{t}_1\mathbb{t}_2\mathbb{t}_3$ ist genau dann endlich, wenn b_{123} , b_{231} und b_{312} alle positiv sind. Da hierbei homogene Faktoren in den Ebenengleichungen ausgeklammert werden können, kann für a_{ij} auch der Euklidische Abstand $d(\mathcal{P}_i, \mathbb{p}_j)$ zwischen der Ebene \mathcal{P}_i und dem Punkt \mathbb{p}_j eingesetzt werden.

Beweis:

Das Tangendendreieck $\mathbb{t}_1\mathbb{t}_2\mathbb{t}_3$ ist genau dann endlich, wenn für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ die Punkte \mathbb{t}_k und \mathbb{p}_k auf verschiedenen Seiten der Kante $\mathbb{p}_i\mathbb{p}_j$ liegen. Liegt \mathbb{p}_k auf der Kante $\mathbb{p}_i\mathbb{p}_j$, so verschwindet b_{ijk} . Fallen \mathbb{p}_k und \mathbb{t}_k zusammen, so ist $b_{ijk} < 0$. Da b_{ijk} linear in \mathbb{p}_k ist, ist b_{ijk} genau dann positiv, wenn \mathbb{t}_k und \mathbb{p}_k auf verschiedenen Seiten der Kante $\mathbb{p}_i\mathbb{p}_j$ liegen. \square

Bemerkung 9.11 Die Größen b_{ijk} und d_{kji} sind dual zueinander, denn eine Vertauschung der Indizes, d.h. eine Ersetzung von a_{ij} durch a_{ji} , und damit eine Vertauschung von Punkten mit Ebenen und umgekehrt überführt die eine Größe in die andere.

Bemerkung 9.12 Die Koeffizienten b_{ijk} und d_{kji} entsprechen den Koeffizienten α_P , β_P , γ_P und α_y , β_y , γ_y aus den Gleichungen (6.13) und (6.9) in Abschnitt 6.6.

Bemerkung 9.13 (Multivariate Verallgemeinerung) Satz 9.7 und das Konvexitätskriterium (9.4) lassen sich völlig analog auf n -variate Powell-Sabin-Splines übertragen. Hierbei muß über jeder m -dimensionalen Randfläche ($m = 1, \dots, n$) das jeweilige Tangentialebenensimplex endlich sein (siehe [Bangert & Prautzsch '99a]).

9.3 Zuordnung passender Tangentialebenen

Die Konvexitätsbedingungen aus Gleichungen (9.4) und (9.3) können zur Konstruktion konvexer C^1 -Interpolanten eingesetzt werden. Zunächst werden Punkten eines Dreiecksnetzes passende Tangentialebenen zugeordnet, so daß der zugehörige spezielle Powell-Sabin-Spline konvex ist.

In [Carnicer & Dahmen '92] wird ein Algorithmus zur Zuordnung wohlassoziierter Tangentialebenen zu den Punkten eines konvexen Dreiecksnetzes angegeben. Dieser Algorithmus bestimmt Tangentialebenen, die die folgende Summe

$$\sum_{\text{Dreiecke } \mathbb{p}_i\mathbb{p}_j\mathbb{p}_k} \left(\alpha_{ij}(a - a_{ij})^2 + \alpha_{jk}(a - a_{jk})^2 + \alpha_{ki}(a - a_{ki})^2 + \delta_{ijk}(d - d_{ijk}) \right)$$

minimieren. Durch die Bedingung aus Satz 9.7 kann er um den Summanden $\beta_{ijk}(b - b_{ijk})$ erweitert werden, um zusätzlich die Tangentialebenenbedingung zu garantieren.

9.4 Abtasten konvexer Funktionen

Der im vorigen Abschnitt beschriebene Algorithmus zur Konstruktion konvexer Powell-Sabin-Interpolanten ordnet gegebenen Punkten eines Dreiecksnetzes Tangentialebenen zu, so daß der zugehörige Powell-Sabin-Spline konvex ist. Sind jedoch die Tangentialebenen bereits vorgegeben und sollen sie nicht verändert werden, müssen die gegebenen Daten durch zusätzliche Kontaktelemente verfeinert werden. Ob der Interpolant konvex ist, hängt davon ab, wo neue Kontaktelemente eingefügt werden.

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie konvexe Funktionen abgetastet werden müssen, d.h., wie die zu interpolierenden Daten gewählt werden müssen, damit sich ein konvexer Powell-Sabin-Interpolant ergibt. Hieraus werden einige Ansätze zur Verfeinerung gegebener Dreiecksnetze abgeleitet.

Beispiel 9.14 Die Funktion $f(\mathbf{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$ ist streng konvex. Durch den Gradienten $\nabla f = [2x \ 2y]^t$ sind in Punkten $\mathbf{p}_i = [1 \ x_i \ y_i \ x_i^2 + y_i^2]^t$ Tangentialebenen $\mathcal{P}_i = [x_i^2 + y_i^2 \ -2x_i \ -2y_i \ 1]^t$ festgelegt. Hiermit ergibt sich für die Größen aus den Gleichungen (9.1), (9.3) und (9.4):

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -2x_i x_j - 2y_i y_j + x_i^2 + x_j^2 + y_i^2 + y_j^2 \\ &= \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 > 0, \end{aligned}$$

$$d_{ijk} = \left(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 + \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\|^2 - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j\|^2 \right) \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k\|^2 =$$

$$b_{kji} = \left(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 + \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\|^2 - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j\|^2 \right) \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k\|^2.$$

Beispielsweise ist d_{ijk} positiv, wenn

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 + \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\|^2 - \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k\|^2 > 0,$$

d.h.

$$2\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\| \cos(\angle(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)) > 0.$$

Folglich sind die Daten genau dann wohlsoziiert, kann also der projizierte Schnittpunkt der Tangentialebenen als Unterteilungspunkt gewählt werden, wenn alle Dreiecke in der Parameterebene spitzwinklig sind.

Bemerkung 9.15 (Zusammenhang mit Voronoi-Diagramm) Das Voronoi-Mosaik einer Menge von Punkten \mathbf{p}_i in der Ebene kann mit Hilfe des Paraboloids

$$z = f(\mathbf{x}) = x^2 + y^2$$

erzeugt werden. Die Tangentialebenen in $(\mathbf{p}_i, f(\mathbf{p}_i))$ an das Paraboloid definieren ein konvexes Tangentenpolyeder. Es ist durch den Rand des Schnittes der Halbräume

$$\mathcal{P}_i : z - f(\mathbf{p}_i) + (\mathbf{p}_i - \mathbf{x})\nabla f(\mathbf{p}_i) \geq 0$$

gegeben. Die Projektion der Kanten des Tangentenpolyeders auf die Parameterebene ergibt die Kanten des Voronoi-Mosaiks zur Punktmenge \mathbf{p}_i (siehe hierzu beispielsweise [Edelsbrunner '87], S. 24 f). Die zugehörige Delaunay-Triangulierung ist gerade die Triangulierung, die zum eindeutig bestimmten konvexen linearen Interpolanten der Punkte $(\mathbf{p}_i, f(\mathbf{p}_i))$ gehört. Die projizierten Schnittpunkte der Tangentialebenen, d.h. die Eckpunkte der Voronoi-Zellen, sind die Umkreismittelpunkte der Dreiecke. Diese können genau dann als Unterteilungspunkte für einen Powell-Sabin-Interpolanten gewählt werden, wenn sie im Inneren der Punktdreiecke liegen, d.h. also, wenn die Parameterdreiecke alle spitzwinklig sind.

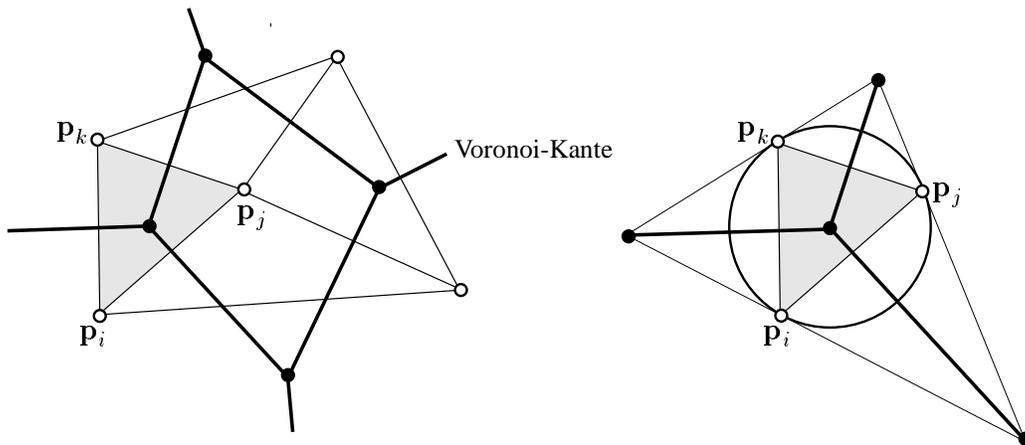


Abbildung 9.3: Voronoi-Mosaik und Delaunay-Triangulierung.

Bemerkung 9.16 Eine beliebige quadratische konvexe Funktion $g(\mathbf{x})$ beschreibt ebenfalls ein Paraboloid, das durch eine affine Transformation aus dem Paraboloid aus Beispiel 9.14 bzw. Bemerkung 9.15 hervorgeht. In der x - y -Ebene wird diese Transformation bis auf Translation durch eine Matrix B beschrieben, die mit der Hesse-Form H_f der Funktion f über die Beziehung $H_g = B^t B$ zusammenhängt.

Die Bedingung (9.3) für die Wohllassoziiertheit der Daten und die Tangentialebenenbedingung (9.4) schreiben sich genauso wie in Beispiel 9.14, nur daß in diesem Fall nicht die euklidische Metrik, sondern die durch die Hesse-Matrix H_f durch $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t H_f \mathbf{v}$ festgelegte Metrik zugrundegelegt wird. Die Beziehungen zum Voronoi-Mosaik sind gleichermaßen analog bezüglich der Metrik $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Powell-Sabin-Interpolanten besitzen quadratische Präzision. Sind also die Funktionswerte $f(\mathbf{p}_i)$ über Abszissen \mathbf{p}_i von einer quadratischen Funktion abgetastet, so wird diese unabhängig von der Wahl des Unterteilungspunktes rekonstruiert. Dies folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit des Powell-Sabin-Interpolanten. Folglich ist jeder beliebige Powell-Sabin-Interpolant zu einer beliebigen konvexen quadratischen Funktion wieder konvex.

Da jede Funktion lokal durch eine quadratische Funktion approximiert werden kann, sollte eine genügend feine Abtastung einer konvexen Funktion die Konvexität des zugehörigen Interpolanten garantieren. Im Fall beliebiger Powell-Sabin-Interpolanten ist die Überprüfung der Konvexität jedoch sehr aufwendig (siehe [Chang & Davis '84], [Willemans & Dierckx '94]), weswegen wir diesen Sachverhalt nur für den speziellen Interpolanten mit den projizierten Tangentialebenenschnittpunkten als Unterteilungspunkten untersuchen.

Für diesen speziellen Interpolanten reduziert sich insgesamt die Anzahl der Konvexitätsbedingungen auf die Hälfte. Im folgenden wird gezeigt, daß sich diese Kriterien geometrisch ausdrücken lassen, so beispielsweise die Wohllassoziiiertheit in einem Winkelkriterium ähnlich wie in Beispiel 9.14. Bei genügend feiner Abtastung impliziert die Wohllassoziiiertheit sogar die Tangentialebenenbedingung.

Sei im folgenden f eine streng konvexe, bivariate Funktion von hinreichend hoher Differenzierbarkeitsordnung. Taylorentwicklung um \mathbf{p}_0 ergibt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{p}_0) + \mathbf{h}^t \nabla f(\mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t H_f(\mathbf{p}_0) \mathbf{h} + O(\mathbf{h}^3), \\ \nabla f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{h}) &= \nabla f(\mathbf{p}_0) + H_f(\mathbf{p}_0) \mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{p}_0, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

Das Konvexitätskriterium $a_{ij} > 0$ ist nach Bemerkung 9.4 erfüllt. Werden die beiden vorangehenden Gleichungen in (9.2) eingesetzt, erhält man für a_{ij} :

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^t H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + R_{ij},$$

wobei R_{ij} eine Summe von Termen mindestens dritter Ordnung in $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$, $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0)$ und $(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_0)$ bezeichnet. Für das Folgende wird die Abkürzung $H_{ij} := 1/2 (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^t H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ eingeführt.

Die Wohllassoziiiertheit der Daten wird gemäß Gleichung (9.3) durch die Größen

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= a_{ij} a_{jk} + a_{ik} a_{kj} - a_{kj} a_{jk} \\ &= (H_{ij} + R_{ij})(H_{jk} + R_{jk}) + (H_{ik} + R_{ik})(H_{kj} + R_{kj}) - \\ &\quad - (H_{kj} + R_{kj})(H_{jk} + R_{jk}) \\ &= H_{jk} \frac{1}{2} \{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^t H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) \} + F_{ijk} \end{aligned}$$

beschrieben, wobei F_{ijk} für eine Summe von Termen mindestens fünften Grades in $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j), (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0), \dots$ steht. Analog ergibt sich für die Größen b_{ijk} , die die Tangentialebenenbedingung (9.4) beschreiben,

$$\begin{aligned} b_{ijk} &= a_{ij}a_{jk} + a_{ik}a_{ji} - a_{ij}a_{ji} \\ &= H_{ij} \frac{1}{2} \{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k) \} + \bar{F}_{ijk}. \end{aligned}$$

Auch hier fassen die Terme \bar{F}_{ijk} Summanden mindestens fünften Grades in $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j), (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0), \dots$ zusammen.

Da die Terme H_{ij} etc. aufgrund der positiven Definitheit der Hesseform immer positiv sind, verhalten sich die Vorzeichen der b_{ijk} bzw. d_{ijk} in einer genügend kleinen Umgebung von \mathbf{p}_0 wie die Vorzeichen von $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)$ bzw. $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k)$.

$H_f(\mathbf{p}_0)$ ist positiv definit und symmetrisch, folglich auch diagonalisierbar:

$$H_f(\mathbf{p}_0) = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}] \begin{bmatrix} \lambda_{max} & 0 \\ 0 & \lambda_{min} \end{bmatrix} [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^t,$$

wobei \mathbf{u}, \mathbf{v} die Eigenvektoren von $H_f(\mathbf{p}_0)$ zum größten Eigenwert λ_{max} bzw. zum kleinsten Eigenwert λ_{min} sind. Mit

$$B := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{max}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_{min}} \end{bmatrix} [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^t$$

ergibt sich somit

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) &= |B(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)| |B(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)| \cos \alpha, \\ \alpha &= \angle(B(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j), B(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)). \end{aligned}$$

Geometrisch beschreibt $\Phi_0 : \mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ eine Abbildung, die die durch $\mathbf{x} H_f(\mathbf{p}_0) \mathbf{x} = 1$ beschriebene Ellipse auf einen Kreis abbildet. Die Terme $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) H_f(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)$ sind somit positiv, wenn die Dreiecke $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k$ nach dieser Abbildung spitzwinklig sind.

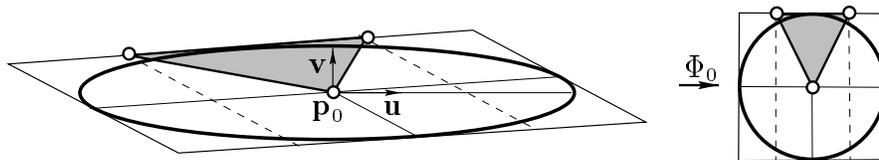


Abbildung 9.4: Abbildung Φ_0 mit bezüglich der Metrik H_f spitzwinkligem Dreieck.

Mithilfe der durch die Matrix H_f induzierten Metrik $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} H_f(\mathbf{0}) \mathbf{v}$ ergibt sich zusammenfassend:

Satz 9.17 Sind die gegebenen Daten von einer konvexen Funktion f abgegriffen und die Punktdreiecke klein genug, dann ist der wie oben konstruierte Powell-Sabin-Interpolant genau dann konvex, wenn die Parameterdreiecke spitzwinklig bezüglich des durch die Hessematrix von f in jedem Punkt \mathbf{p}_0 induzierte Skalarprodukt $\mathbf{u}H_f(\mathbf{p}_0)\mathbf{v}$ sind.

Im folgenden untersuchen wir die durch die Hessematrix H_f induzierte Metrik etwas genauer, indem wir rechte Winkel charakterisieren:

Satz 9.18 Zwei Richtungen \mathbf{u}, \mathbf{v} sind genau dann orthogonal bezüglich der durch die Hessematrix $H_f(\mathbf{p}_0)$ induzierten Metrik, wenn sie konjugiert bezüglich der "Hesse-Ellipse" $\mathcal{E}: \mathbf{x}H_f(\mathbf{p}_0)\mathbf{x} = 1$ sind. Dies ist äquivalent dazu, daß \mathbf{u} und \mathbf{v} konjugierte Richtungen der funktionalen Fläche $[\mathbf{x}^t f(\mathbf{x})]^t$ in \mathbf{p}_0 sind.

Beweis:

Die zweite Fundamentalmatrix einer funktionalen Fläche $[\mathbf{x}^t f(\mathbf{x})]^t$ in \mathbf{p}_0 ist

$$H = (h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f(\mathbf{p}_0))^2}} H_f(\mathbf{p}_0).$$

Diese legt die Dupinsche Indikatrix

$$\{y \mid y = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix}, [\xi_1 \ \xi_2] H \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \pm 1\}$$

in der Tangentialebene von \mathbf{p}_0 fest.

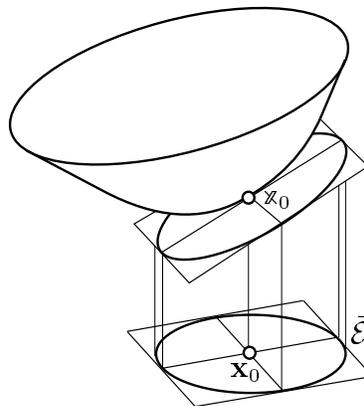


Abbildung 9.5: Projizierte Dupin'sche Indikatrix.

Wird die Dupinschen Indikatrix in \mathbf{p}_0 senkrecht auf die Parameterebene projiziert, ergibt sich eine Ellipse $\bar{\mathcal{E}}$, die ähnlich zur Hesse-Ellipse \mathcal{E} ist, d.h. $\bar{\mathcal{E}}$ läßt sich durch

eine Streckung mit Zentrum \mathbf{p}_0 in \mathcal{E} überführen. Konjugierte Richtungen bezüglich \mathcal{E} , $\tilde{\mathcal{E}}$ und somit auch bezüglich der funktionalen Fläche entsprechen einander.

Die erste Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus der Definition konjugierter Richtungen. \square

Bemerkung 9.19 *Hauptkrümmungslinien sind spezielle konjugierte Linien und bilden folglich ein Netz orthogonaler Linien bezüglich der jeweils lokal durch die Hessematrix induzierten Metrik.*

Satz 9.18 kann dazu verwendet werden, Dreiecke zu konstruieren, die bezüglich der durch die Hesse-Form induzierte Metrik spitzwinklig sind.

Bezeichnen \mathbf{u} und \mathbf{v} zwei konjugierte Richtungen in \mathbf{p}_0 , so sind nach Satz 9.18 die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} orthogonal bezüglich der durch $H_f(\mathbf{p}_0)$ induzierten Metrik. Das durch \mathbf{p}_0 , $2h\mathbf{u}$ und $h\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ aufgespannte Dreieck besitzt unabhängig vom Verhältnis $h : k$ in den Eckpunkten \mathbf{p}_0 bzw. $\mathbf{p}_0 + 2h\mathbf{u}$ spitze Winkel. Ist der Winkel des Dreiecks in $\mathbf{p}_0 + h\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ größer als 90° , so läßt sich h unter Beibehaltung von k so weit herabsetzen, daß das Dreieck bezüglich der speziellen Metrik spitzwinklig wird.

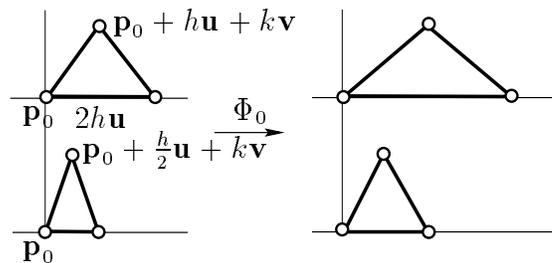


Abbildung 9.6: Dreiecke.

Diese Konstruktion spitzwinkliger Dreiecke läßt sich unter Verwendung eines Netzes konjugierter Linien, beispielsweise Krümmungslinien, sogar global vornehmen. Eine konvexe Funktion f kann folglich so abgetastet werden, daß der zugehörige Powell-Sabin-Interpolant konvex ist. Dies setzt allerdings voraus, daß das Netz konjugierter Linien keine Ausnahmepunkte besitzt, in denen das Netz kein reguläres Vierecksnetz mehr ist, sich also beispielsweise mehr als zwei konjugierte Linien treffen. Werden beispielsweise die Krümmungslinien als konjugiertes Netz gewählt, so bilden die Nabelpunkte der funktionalen Fläche solche Ausnahmepunkte, in deren Umgebung die Krümmungslinien ein sehr irreguläres Verhalten aufweisen können (siehe z.B. [Maekawa et al. '96]).

Sei also die durch den Graphen von f definierte Fläche so nach u und v parametrisiert, daß die Parameterlinien ein reguläres Vierecksnetz konjugierter Linien bilden, d.h.

keine Ausnahmepunkte auftreten:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x}(u, v) \\ f(\mathbf{x}(u, v)) \end{bmatrix} = \mathbb{p}(\mathbf{x}(u, v)) = \mathfrak{q}(u, v).$$

Die Punkte \mathbf{u}_{ij} mit passend gewähltem Startpunkt \mathbf{u}_{00} und

$$\mathbf{u}_{i+1j} = \mathbf{u}_{ij} + h_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{ij+1} = \mathbf{u}_{ij} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

bilden ein Rechtecksgitter in der (u, v) -Parameterebene. Da die Parameterlinien konjugiert bezüglich der Hesse-Ellipse \mathcal{E} sind, wird das Gitter für genügend kleine Werte h_i und k auf ein bezüglich der durch die Hesse-Matrix induzierte Metrik näherungsweise rechtwinkliges Gitter $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_{ij})$ in der x - y -Parameterebene abgebildet. Im folgenden werden alle Winkelangaben auf die jeweils lokal durch H_f induzierte Metrik bezogen.

In das Gitter \mathbf{x}_{ij} in der x - y -Parameterebene wird ein Dreiecksgitter aus den Dreiecken

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &: \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{i+2j} \mathbf{x}_{i+1j+1}, \quad i+j \text{ gerade,} \\ \bar{\Delta}_{ij} &: \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{i+2j} \mathbf{x}_{i+1j-1}, \quad i+j \text{ gerade,} \end{aligned}$$

eingepaßt (siehe Abbildung 9.7).

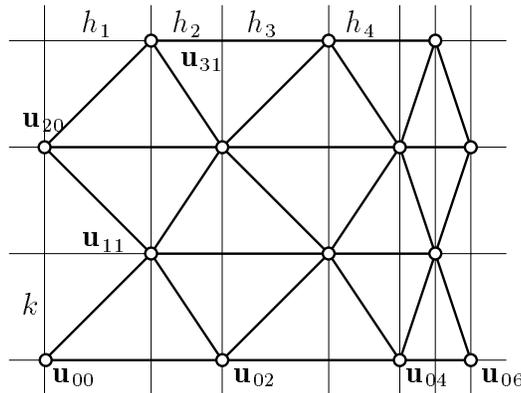


Abbildung 9.7: Dreiecksgitter.

Sind h_i und k klein genug, so sind nach obigen Überlegungen die folgenden Winkel bezüglich der durch $H_f(\mathbf{x}_{ij})$ induzierten Metrik kleiner als 90° :

$$\alpha_{ij} = \angle(\mathbf{x}_{i+2j} \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{i+1j+1}), \quad \beta_{ij} = \angle(\mathbf{x}_{i+1j+1} \mathbf{x}_{i+2j} \mathbf{x}_{ij})$$

Ist für festes i einer der Winkel

$$\gamma_{ij} = \angle(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_{i+1, j+1}, \mathbf{x}_{i+2, j})$$

stumpf, so wird die Schrittweite h_i solange halbiert, bis für alle j der Winkel γ_{ij} weniger als 90° beträgt und somit alle Dreiecke Δ_{ij} spitzwinklig sind. Für die Dreiecke $\bar{\Delta}_{ij}$ wird analog vorgegangen.

Durch sukzessive Anpassung aller Schrittweiten h_i ergibt sich ein Dreiecksgitter aus spitzwinkligen Dreiecken. Nach Satz 9.17 ist der zugehörige Powell-Sabin-Interpolant konvex:

Satz 9.20 *Jede konvexe Funktion über einem kompakten Definitionsbereich läßt sich so abtasten, daß der zugehörige Powell-Sabin-Interpolant konvex ist.*

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß zu jeder konvexen Funktion f über kompaktem Definitionsbereich ein Netz konjugierter Linien ohne Ausnahmepunkte gefunden werden kann. Besitzt der Graph von f keine Nabelpunkte, so läßt sich die Fläche nach Krümmungslinien parametrisieren, die unser gesuchtes Netz bilden.

Ein Nabelpunkt auf der funktionalen Fläche liegt vor, wenn der über der Hesse-Ellipse in der Parameterebene errichtete orthogonale Zylinder \mathcal{Z} durch die Tangentialebene in einem Kreis geschnitten wird. Wird zur gegebenen Funktion f ein linearer Term l dazuaddiert, so verändert sich die Hesse-Matrix nicht, konjugierte Richtungen von f und von $f + l$ stimmen somit überein. Auch der Zylinder \mathcal{Z} verändert sich nicht, während die Tangentialebene gekippt wird. Da das Ebenenbüschel durch \mathbb{p}_0 i.a. genau zwei Ebenen enthält, die aus \mathcal{Z} einen Kreis ausschneiden, existieren in jedem Parameterwert \mathbb{p}_0 genau zwei lineare Terme l und $-l$, so daß die funktionale Fläche $f \pm l$ einen Nabelpunkt in \mathbb{p}_0 besitzt.

Über dem kompakten Definitionsbereich läßt sich somit ein linearer Term l finden, so daß der Graph von $f + l$ auf dem gesamten Definitionsbereich keinen Nabelpunkt besitzt. Die Krümmungslinien der durch $f + l$ definierten funktionalen Fläche bilden ein reguläres Netz konjugierter Linien des Graphen von f . \square

Da konvexe Daten immer durch eine konvexe Funktion interpoliert werden können und das Dreiecksgitter \mathbf{x}_{ij} immer so gewählt werden kann, daß es gegebene Punkte enthält, folgt:

Korollar 9.21 *Konvexe Daten können immer so verfeinert werden, daß die Tangentialebenen wohlsoziiert und die Tangentialebenendreiecke endlich sind.*

Das Auffinden effizienter Verfeinerungen bleibt weiteren Untersuchungen überlassen.

9.5 Konvexe Makroelemente

Die Konstruktion konvexer Powell-Sabin-Splines wie im vorangehenden Abschnitt stellt einige Bedingungen an die Daten. Um jedoch beispielsweise die Wohl-assoziiertheit zu erfüllen, müssen gegebenenfalls die Dreiecke sehr stark verfeinert werden, was in einer großen Anzahl von Patchen resultiert. Allgemeine Quadriken-splines besitzen hingegen zusätzliche Freiheitsgrade, die eingesetzt werden können, um u.a. die Wohl-assoziiertheitsbedingung direkt, d.h. ohne Verfeinerung, zu garantieren. Daher werden in diesem Abschnitt Bedingungen für die Konvexität von Makroelementen aufgestellt.

Bei beliebigen Transversalensystemen werden Konvexitätsbetrachtungen sehr komplex. Enthält jedoch die Transversale eines Dreiecks den Schnittpunkt der den Eckpunkten zugeordneten Tangentialebenen, so lassen sich die Konvexitätsbetrachtungen für Powell-Sabin-Elemente aus dem vorigen Kapitel auf das Makroelement übertragen. Ein beliebiges Makroelement läßt sich projektiv auf die Powell-Sabin-Konfiguration abbilden, indem einer der Nabepunkte auf den Fernpunkt der z -Achse und seine Tangentialebene auf die Fernebene abgebildet werden. Jedes Quadrikenstück eines konvexen Makroelementes ist Teil einer ovalen Quadrik, das projektive Bild ebenfalls. Zusammen mit Korollar 9.8 folgt hieraus:

Satz 9.22 (Konvexes Makroelement) *Ein Makroelement, dessen Transversale den Schnittpunkt der Tangentialebenen enthält, ist genau dann konvex, wenn die Tangentialebene im Nabepunkt das Tangentendreieck nicht schneidet.*

Bemerkung 9.23 *Durch eine Perspektivität, die den Schnittpunkt der Tangentialebenen geradenweise und die Dreiecksebene punktweise fest läßt, kann ein konvexes Makroelement in ein konvexes Makroelement mit einem beliebigen Nabepunkt auf der Transversale überführt werden.*

Im vorigen Abschnitt waren die Powell-Sabin-Splines durch die gegebenen Daten bereits vollständig festgelegt. Allgemeine Quadriken-splines haben mehr Freiheitsgrade, die in der Wahl des Durchstoßpunktes der Transversalen durch die Punktebene, der Nabepunkte und zugeordneten Tangentialebenen bestehen. Um jedoch später einfache Aussagen über die Konvexität der Keile machen zu können, werden die Tangentialebenen im Nabepunkt im folgenden wieder auf Ebenen parallel zu den jeweiligen Punktebenen eingeschränkt.

Analytisches Konvexitätskriterium

Die Konvexitätskriterien (9.4) und (9.3) lassen sich in ähnlicher Weise für Makroelemente formulieren. Diese allgemeinen Kriterien können direkt aus den Quadriken-glei-

chungen in Satz 6.9 abgeleitet werden.

Die gesamte Notation in diesem Abschnitt folgt Abschnitt 6.6. Die Eckpunkte \mathfrak{a} , \mathfrak{b} und \mathfrak{c} des untersuchten Makroelements seien in erweiterten Koordinaten gegeben und ihre zugehörigen Tangentialebenen so normiert, daß die Transversale durch $\{x | \mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x) = \mathcal{C}(x)\}$ wie in Gleichung (6.7) gegeben ist. Da die Daten eine konvexe Konfiguration bilden, lassen sie sich zusätzlich so normieren, daß das Einsetzen eines Punktes in eine beliebige Tangentialebenengleichung einen nichtnegativen Wert ergibt, z.B.:

$$\mathcal{A}\mathfrak{b} > 0, \quad \mathcal{B}\mathfrak{c} > 0, \quad \mathcal{C}\mathfrak{a} > 0, \dots,$$

was im folgenden vorausgesetzt wird.

Das Makroelement durch $\boxed{\mathfrak{a}} \boxed{\mathfrak{b}} \boxed{\mathfrak{c}}$ besteht aus sechs Quadriken Q_1, \dots, Q_6 mit zwei gemeinsamen Nabenelementen $\boxed{\mathfrak{p}}$ und $\boxed{\mathfrak{q}}$. Hier wird exemplarisch die Quadrik Q_1 durch $\boxed{\mathfrak{a}} \boxed{\mathfrak{p}} \boxed{\mathfrak{q}}$ und den durch den Zweibogen $\boxed{\mathfrak{a}} \boxed{\mathfrak{p}} \boxed{\mathfrak{b}}$ in Gleichung (6.16) bestimmten Punkt q_{ab} untersucht. Q_1 ist genau dann oval, wenn die Determinante ihrer beschreibenden Matrix aus Gleichung (6.21) negativ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 0 &> \det \left\{ \begin{bmatrix} \mathfrak{a}^t \\ \mathfrak{b}^t \\ \mathfrak{p}^t \\ \mathfrak{q}^t \end{bmatrix} \cdot Q_1 \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{p} & \mathfrak{q} \end{bmatrix} \right\} \\ &\stackrel{(6.22)}{=} \det \begin{bmatrix} 0 & x \mathcal{A}\mathfrak{b} & x & x \\ x \mathcal{A}\mathfrak{b} & y & x & x \\ x & x & 0 & 2Lx \\ x & x & 2Lx & 0 \end{bmatrix} \\ &= x^4 4L \frac{\mathcal{A}\mathfrak{b}}{\mathcal{B}\mathfrak{a}} \{ \mathcal{A}\mathfrak{b} \mathcal{B}\mathfrak{a} L - (\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}\mathfrak{a}) \} \\ &= x^4 4L \frac{\mathcal{A}\mathfrak{b}}{\mathcal{B}\mathfrak{a}} \{ -\gamma_P \gamma_y M \}, \end{aligned}$$

mit $x = -2\gamma_y \mathcal{B}\mathfrak{a} M L$ und $y = x(\mathcal{B}\mathfrak{a} - \mathcal{A}\mathfrak{b})\mathcal{A}\mathfrak{b}/\mathcal{B}\mathfrak{a}$. Die Größen L , M , γ_y und γ_P ergeben sich aus den Gleichungen (6.10), (6.14), (6.9) und (6.13). Unter Berücksichtigung positiver Faktoren folgt zusammenfassend:

Lemma 9.24 Die Quadrik Q_1 des Makroelementes ist genau dann konvex, wenn

$$\gamma_y \gamma_P L > 0.$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf andere Art erhalten, indem berücksichtigt wird, daß \mathcal{Q}_1 mit der Ebene $\mathcal{W} = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}$ und dem durch $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{p}}$ und $\boxed{\mathfrak{q}}$ festgelegten Tangentenkegel \mathcal{K} im Büschel liegt. Nach Lemma 2.14 aus Abschnitt 2.4 ist die durch den Punkt \mathfrak{q}_{ab} festgelegte Quadrik \mathcal{Q}_1 des Büschels $\mathcal{K} + \lambda\mathcal{W}^2$ genau dann oval, wenn mit den Darstellungen in den Gleichungen (6.18), (6.20) und (6.16) gilt:

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}_{ab}) \cdot \mathcal{P}_{\mathfrak{a}} \mathcal{Q}_{\mathfrak{a}} > 0,$$

was sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.22) zu

$$\delta\gamma_y \gamma_P LM \mathcal{A} \mathfrak{b} \mathcal{B}_{\mathfrak{a}} > 0,$$

umformen läßt und somit äquivalent zur Aussage von Lemma 9.24 ist.

Ist das Makroelement konvex, so liegt der Durchstoßpunkt $y = \alpha_y \mathfrak{a} + \beta_y \mathfrak{b} + \gamma_y \mathfrak{c}$ der Transversalen durch die Punktebene auf derselben Seite von \mathcal{A} wie \mathfrak{b} oder \mathfrak{c} . Aufgrund der speziellen Normierung der Tangentialebenen in Abschnitt 6.6 gilt $\mathcal{A}(y) = 1$. Somit ist die homogenisierende Koordinate $L = \alpha_y + \beta_y + \gamma_y$ von y positiv. Sind umgekehrt die Koeffizienten $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$ und $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P$ alle positiv, dann ist auch ihre Summe L positiv. Hieraus folgt mit Lemma 9.24 und symmetrischen Betrachtungen für die übrigen Quadriken des Makroelementes:

Korollar 9.25 *Das in Abschnitt 6.6 berechnete Makroelement zu konvexen Ausgangsdaten ist genau dann konvex, wenn*

$$\alpha_y > 0, \beta_y > 0, \gamma_y > 0 \text{ und } \alpha_P > 0, \beta_P > 0, \gamma_P > 0.$$

Bemerkung 9.26 *Ist einer der Koeffizienten α_y, β_y oder γ_y negativ, schneidet die Transversale das zugehörige Dreieck nicht in einem inneren Punkt. Das Transversalensystem ist nicht zulässig.*

9.6 Konvexe Keilkonstruktion

Zwei benachbarte Makroelemente eines Quadrikensplines durch die Kontaktelemente $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$, $\boxed{\mathfrak{c}}$ bzw. $\boxed{\mathfrak{a}}$, $\boxed{\mathfrak{b}}$, $\boxed{\bar{\mathfrak{c}}}$ werden durch einen Keil aus vier Quadriken $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$ glatt verbunden (vergl. Abschnitt 5.2). In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen der Keil zwischen zwei konvexen Makroelementen, die wie im vorangehenden Abschnitt konstruiert wurden, konvex ist. Auch für die Konvexität eines Keils ist bereits hinreichend, daß er nur aus ovalen Quadriken besteht.

Der Keil ist durch die Randebenen des Makroelementes und eine Ebene \mathcal{V} durch die Kante $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, die Berührebene zwischen den Quadrikenpaaren $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ und $(\bar{\mathcal{R}}_1, \bar{\mathcal{R}}_2)$

vollständig festgelegt (siehe die Konstruktion 5.7). Die Wahl der Ebene \mathcal{V} werden wir weiter unten einschränken, um zu einfachen Aussagen über die Konvexität der Keile zu gelangen. Die Quadriken \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 , $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{R}}_2$, sowie \mathcal{Q}_1 und \mathcal{Q}_2 des einen bzw. $\bar{\mathcal{Q}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_2$ des anderen Makroelementes berühren sich in der gleichen Ebene \mathcal{U} , die die Transversalen der Makroelemente sowie in unserem Spezialfall die Schnittgerade der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} enthält.

Seien \mathfrak{r} und $\bar{\mathfrak{r}}$ wie in Abbildung 5.5 die Randpunkte der Makroelemente in der Übergangsebene \mathcal{U} . Die Bezeichnungen in diesem Abschnitt folgen denjenigen in der Konstruktion 5.7 sowie dem vorigen und Abschnitt 6.6. Insbesondere sind die Punkte \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , $\bar{\mathfrak{c}}$, \mathfrak{r} und $\bar{\mathfrak{r}}$ in erweiterten Koordinaten gegeben und \mathcal{U} läßt sich als $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ darstellen.

Die Tangentialebenen \mathcal{R} bzw. $\bar{\mathcal{R}}$ in \mathfrak{r} bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sind parallel zur Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, da wegen der speziellen Transversalenwahl die Pole der Ebene \mathcal{U} bezüglich aller Quadriken \mathcal{Q}_1 , \mathcal{R}_1 , $\bar{\mathcal{R}}_1$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ in einem Punkt \mathfrak{x}_p zusammenfallen (siehe Lemma 7.3). Weil die Tangentialebenen in den Nabenpunkten im vorigen Abschnitt parallel zur entsprechenden Punktebene gewählt wurden, ist dieser Punkt der Fernpunkt der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{x}_p = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathcal{P} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}).$$

Aus der Parallelität von \mathcal{R} und $\bar{\mathcal{R}}$ zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und der Normierung der Koordinaten von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} folgt:

$$\mathcal{R}\mathfrak{a} = \mathcal{R}\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{R}}\mathfrak{a} = \bar{\mathcal{R}}\mathfrak{b}.$$

Die Trennebene \mathcal{V} zwischen den Quadriken \mathcal{R}_1 und $\bar{\mathcal{R}}_1$ bzw. \mathcal{R}_2 und $\bar{\mathcal{R}}_2$ durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ wird hier speziell durch die Schnittgerade der Tangentialebenen \mathcal{R} und $\bar{\mathcal{R}}$ gewählt. Für die Zweibogenkonstruktion in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}$ liegt somit ein besonders einfacher Spezialfall vor. Die beiden Kegelschnittbögen durch $\boxed{\mathfrak{a}}$ und $\boxed{\mathfrak{r}}$ bzw. $\boxed{\mathfrak{a}}$ und $\boxed{\bar{\mathfrak{r}}}$ mit tangentialstetigem Übergang längs \mathcal{V} treffen sich in einem zweiten Punkt \mathfrak{u} . Da sich die Tangenten in \mathfrak{r} und $\bar{\mathfrak{r}}$ an den Zweibogen in der Trennebene \mathcal{V} treffen, ist \mathfrak{u} durch die harmonische Lage von \mathfrak{a} , $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{r} \cup \bar{\mathfrak{r}})$, \mathfrak{u} und $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{r} \cup \bar{\mathfrak{r}})$ festgelegt (siehe Abbildung 9.8). Dieser Punkt \mathfrak{u} legt die tangentialebenenstetig an \mathcal{Q}_1 bzw. $\bar{\mathcal{Q}}_1$ anschließenden Quadriken \mathcal{R}_1 und $\bar{\mathcal{R}}_1$ mit C^1 -Kontakt in \mathcal{V} eindeutig fest.

Weiterhin existiert auf dem Kegelschnitt durch $\boxed{\mathfrak{a}}$ und $\boxed{\mathfrak{r}}$ noch ein zweiter Punkt \mathfrak{r}_a in der Ebene \mathcal{U} , der nach Bemerkung 2.2 mit den Punkten $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{r} \cup \bar{\mathfrak{r}})$, \mathfrak{r} und $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{r} \cup \bar{\mathfrak{r}})$ in harmonischer Lage ist. Auch durch diesen Punkt \mathfrak{r}_a und den C^1 -Kontakt mit \mathcal{Q}_1 in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{b}$ ist die Quadrik \mathcal{R}_1 vollständig bestimmt. Insbesondere ist sie genau dann oval, wenn der Punkt \mathfrak{r}_a im Inneren des Kegels \mathcal{K} liegt, der \mathcal{Q}_1 in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{b}$ berührt (siehe Lemma 2.14 in Abschnitt 2.4).

Bei der Konstruktion des Kegels \mathcal{K} wird wie in Bemerkung 2.13 vorgegangen. Die Ebene

$$\mathcal{W} = (\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}) \cup \mathfrak{a} \cup \bar{\mathfrak{a}}$$

bestimmt sich aus

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_{\mathfrak{a}} &= 2\mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{A}\bar{\mathfrak{a}} \\ \mathcal{R}_{\bar{\mathfrak{a}}} &= (\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}_{\mathfrak{a}})\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}\end{aligned}$$

und ergibt

$$\mathcal{W} = \mathcal{R}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{B}_{\mathfrak{a}}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}) - (\mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}})\mathcal{R}.$$

Einsetzen der Punkte \mathfrak{r} und $\bar{\mathfrak{r}}$ liefert:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_{\mathfrak{r}} &= \mathcal{A}_{\mathfrak{r}}(\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}_{\mathfrak{a}}) \\ \mathcal{W}_{\mathfrak{r}} &= \mathcal{A}_{\mathfrak{r}}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}_{\mathfrak{a}}) \\ \mathcal{W}_{\bar{\mathfrak{r}}} &= \mathcal{A}_{\bar{\mathfrak{r}}}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}_{\mathfrak{a}}) - (\mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}})\mathcal{R}_{\bar{\mathfrak{r}}}.\end{aligned}$$

Der Tangentialebenenkegel $\boxed{\mathfrak{a}}\boxed{\bar{\mathfrak{a}}}\boxed{\mathfrak{r}}$ schreibt sich nach Bemerkung 2.13 als

$$\mathcal{K} = -2\mathcal{A}_{\mathfrak{r}}\bar{\mathcal{A}}_{\mathfrak{r}}\{\mathcal{W}\mathcal{W}^t\} + (\mathcal{W}_{\mathfrak{r}})^2\{\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}^t + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{A}^t\}.$$

Die Quadrik \mathcal{R}_1 ist nach Lemma 2.14 genau dann oval, wenn

$$\mathcal{K}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}})\mathcal{A}_{\bar{\mathfrak{r}}}\bar{\mathcal{A}}_{\mathfrak{r}} > 0.$$

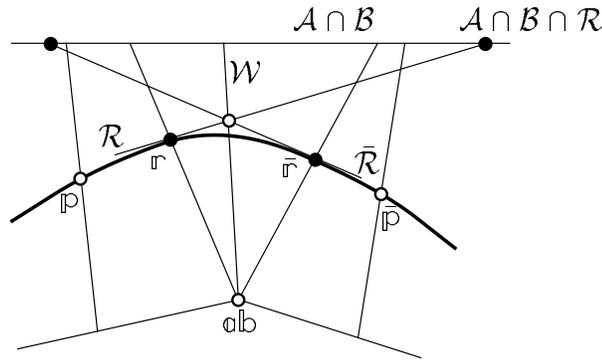
Einsetzen von Gleichung (9.5) in die Kegelgleichung ergibt

$$\mathcal{K}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}) = -8(\mathcal{A}\mathfrak{b} + \mathcal{B}_{\mathfrak{a}})(\mathcal{A}_{\mathfrak{r}})^4(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^2\bar{\mathcal{R}}_{\mathfrak{r}}\mathcal{R}_{\bar{\mathfrak{r}}}(\mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}})\left|\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{R}\bar{\mathcal{R}}\right|\left|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\right|.$$

woraus aus Symmetriegründen und unter Berücksichtigung positiver Faktoren zusammenfassend folgt:

Lemma 9.27 *Der Keil zwischen den Makroelementen $\boxed{\mathfrak{a}}\boxed{\mathfrak{b}}\boxed{\mathfrak{c}}$ bzw. $\boxed{\mathfrak{a}}\boxed{\mathfrak{b}}\boxed{\bar{\mathfrak{c}}}$ mit Randpunkten \mathfrak{r} und $\bar{\mathfrak{r}}$ in der gemeinsamen Übergangsebene \mathcal{U} ist genau dann konvex, wenn*

$$\bar{\mathcal{R}}_{\mathfrak{r}}\mathcal{R}_{\bar{\mathfrak{r}}}\left|\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{R}\bar{\mathcal{R}}\right|\left|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}\right| < 0. \quad (9.8)$$

Abbildung 9.9: Schnitt des Quadrikenplanes mit der Ebene \mathcal{U} .

Geometrische Interpretation

Das Konvexitätskriterium 9.8 läßt sich durch Bedingungen an die Lage der Randebenen der Makroelemente erfüllen:

Lemma 9.28 Sind die Randebenen $\mathfrak{a}b\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{a}b\bar{\mathfrak{r}}$ angrenzender streng konvexer Makroelemente so gewählt, daß

$$\begin{cases} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{R} \text{ und } \mathfrak{r} \text{ auf verschiedenen Seiten von } \bar{\mathcal{R}} \text{ liegen und} \\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{R} \text{ und } \bar{\mathfrak{r}} \text{ auf derselben Seite von } \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \cup \mathfrak{r} \text{ liegen und} \\ \mathfrak{a} \text{ und } \bar{\mathfrak{r}} \text{ auf derselben Seite von } \mathcal{R} \text{ liegen,} \end{cases} \quad (9.9)$$

dann ist der Keil zwischen den Makroelementen streng konvex (siehe Abbildung 9.9).

Beweis: Zum Beweis werden wir verwenden, daß sich die homogenisierende Koordinate eines Punktes \mathfrak{x} durch Einsetzen in die Gleichung der Ferngeraden \mathcal{E}_0 ergibt. Damit liegen zwei Punkte \mathfrak{x} und \mathfrak{r} in beliebigen homogenen Koordinaten genau dann auf der gleichen Seite einer Ebene \mathcal{E} , wenn

$$\mathcal{E}(\mathfrak{x}) \mathcal{E}(\mathfrak{r}) - \mathcal{E}_0(\mathfrak{x}) \mathcal{E}_0(\mathfrak{r}) > 0$$

gilt.

Damit und mit den Normierungen des vorangehenden Abschnitts schreibt sich Bedingung (9.9) als

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{R}}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{R}) \cdot \mathcal{E}_0(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{R}) \cdot \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{r}) < 0, \\ (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{r})(\bar{\mathfrak{r}}) \cdot \mathcal{E}_0(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{R}) \cdot (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{R})(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{r}) > 0, \\ \mathcal{R}(\bar{\mathfrak{r}}) > 0. \end{cases}$$

Mit

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{R})(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{r}) = \mathcal{A}\mathfrak{b}\mathcal{B}\mathfrak{r}\mathcal{R}\mathfrak{a} + \mathcal{B}\mathfrak{a}\mathcal{R}\mathfrak{b}\mathcal{A}\mathfrak{r} > 0,$$

folgt Gleichung (9.8) und somit die Konvexität des Keils unmittelbar. \square

Bemerkung 9.29 Zu den vier Kontaktelementen zweier benachbarter Dreiecke, die eine konvexe Konfiguration bilden, können Randebenen und Nabepunkte so bestimmt werden, daß der sie verbindende Flächenverbund konvex ist (siehe die Abbildungen 9.10 und 9.11). Die analytische Formulierung dieser Beziehung erfordert jedoch komplexe Berechnungen, auf die hier verzichtet wird. Weiterhin bleibt noch zu untersuchen, inwieweit sich die Abhängigkeiten global erfüllen lassen.



Abbildung 9.10: Konvexer Keil.



Abbildung 9.11: Nichtkonvexer Keil .

Bemerkung 9.30 *In Abschnitt 8.2, Seite 80, werden Nullmengen trivariater Powell-Sabin-Splines betrachtet. Da der Schnitt einer konvexen Menge mit einer (Hyper-)Ebene wiederum konvex ist, kann das Konvexitätskriterium für multivariate Powell-Sabin-Interpolanten aus [Bangert & Prautzsch '99a] auf diese speziellen Quadriken-splines angewendet werden. Diese Zusammenhänge und ihre Auswirkungen müssen noch genauer untersucht werden.*

Kapitel 10

Glätten von Quadriken Splines

Bei der Konstruktion der Quadriken Splines existieren zahlreiche Freiheitsgrade, deren willkürliche Wahl zu unerwünschten Artefakten oder zu sehr welligen Flächen führen kann (siehe hierzu Abschnitt 6.1 und die Abbildungen 5.10, 5.11 und 6.3). Läßt sich der lokale Einfluß der Freiheitsgrade noch relativ gut geometrisch ausdrücken, so sind die globalen Auswirkungen nur schwer abschätzbar.

In diesem Kapitel werden einige Ansätze zur Glättung von Quadriken Splines vorgestellt, in denen die Freiheitsgrade optimal gewählt werden sollen, um möglichst “ansprechende” Flächen zu erhalten. Dieses “optische” Kriterium muß zunächst eine mathematisch faßbare Form erhalten. Hierzu werden Krümmungen einer Quadrik aus ihrer impliziten Darstellung berechnet. Danach werden Energiefunktionale definiert, mit denen die Glattheit einer Fläche bewertet werden kann. Schließlich werden Strategien zur Auswertung dieser Funktionale vorgestellt. Die Anpassung der Freiheitsgrade zur Optimierung der Glattheitsfunktionale wird Stoff für zukünftige Untersuchungen bieten.

10.1 Krümmungen

Anhand verschiedener Krümmungen kann die Glattheit einer Fläche beurteilt werden. Wünschenswert ist eine möglichst gleichmäßige Krümmungsverteilung entlang der gesamten Fläche oder zumindest eine geringe Oszillation der Krümmung. Zur Beurteilung der Krümmung einer Fläche stehen verschiedene Krümmungsmaße zur Verfügung, beispielsweise die Hauptkrümmungen, die mittlere und Gaußsche Krümmung. Sie berechnen sich im wesentlichen aus den ersten und zweiten Ableitungen einer beliebigen regulären Parametrisierung der Fläche. Insbesondere sind sie (eventuell bis auf Vorzeichen) invariant unter regulären Umparametrisierungen und Bewegungen.

Seien $g_{ij} = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ die Fundamentalgrößen erster Art, $h_{ij} = \mathbf{x}_{ij} \mathbf{n}$ die Fundamentalgrößen zweiter Art einer Parametrisierung $\mathbf{x}(y_1, y_2)$ der Fläche. Dann ergeben sich die Gaußsche Krümmung K bzw. die mittlere Krümmung H als

$$K = \det[(g_{ij})^{-1} (h_{ij})], \quad \text{bzw.} \quad H = \frac{1}{2} \text{Spur} [(g_{ij})^{-1} (h_{ij})].$$

Die Hauptkrümmungen

$$\kappa_{1/2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

sind die Eigenwerte der Matrix $(g_{ij})^{-1} (h_{ij})$, die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen die entsprechenden Eigenvektoren.

Im folgenden werden Formeln hergeleitet, die die Krümmungen einer Quadrik direkt aus ihrer impliziten Gleichung $\mathbf{x}^t \mathbb{A} \mathbf{x} = 0$ ermitteln. Mittels stereographischer Projektion (siehe Abschnitt 3.1) wird hierzu zunächst eine Parametrisierung der Fläche bestimmt, aus der sich die parametrisierungsinvarianten Krümmungen in einem Punkt \mathbf{x}_0 gemäß obiger Formeln berechnen lassen. Da die Krümmungen bewegungsinvariant sind, können wir weiterhin ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Quadrik $\mathbf{x}^t \mathbb{A} \mathbf{x} = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^t$ enthält und dort die Tangentialebene $\mathcal{X}_0 = \mathbb{A} \mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ \beta]^t$ besitzt, d.h., daß die Matrix \mathbb{A} von folgender Form ist:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & & & \\ 0 & \mathbf{A} & & \\ \beta & & & \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^3.$$

Die z -Achse des Koordinatensystems schneidet die Quadrik in einem zweiten Punkt $\mathbf{z} = [1 \ 0 \ 0 \ \delta]^t$, der als Zentrum der stereographischen Projektion gewählt wird (vergleiche hierzu Abschnitt 3.1). Die Bildebene sei die Tangentialebene $\mathcal{X}_{0\mathbf{y}} = 0$ mit $\mathbf{y} = [1 \ y_1 \ y_2 \ 0]^t = [1 \ \mathbf{y} \ 0]^t$.

Diese stereographische Projektion ergibt folgende Parametrisierung der Quadrik:

$$\mathbf{x} = c \mathbf{y} - d \mathbf{z},$$

wobei $c = c(\mathbf{y}) = (2\mathbf{z}^t \mathbb{A} \mathbf{y})$ und $d = d(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}^t \alpha \mathbf{y})$. In euklidischen Koordinaten folgt somit

$$\mathbf{x}(c - d) = \begin{bmatrix} c \mathbf{y} \\ -d \delta \end{bmatrix}.$$

Insbesondere ist $\mathbf{x}(\mathbf{o}) = \mathbf{x}_0$, $c(\mathbf{o}) = 2\delta\beta$ und $d(\mathbf{o}) = 0$.

Zur Berechnung der Krümmungen werden zunächst die Ableitungen nach y_1 und y_2 , die mit den Indizes 1 und 2 gekennzeichnet sind, bereitgestellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(c-d) &= \begin{bmatrix} c\mathbf{y}_1 + c_1\mathbf{y} \\ -d_1\delta \end{bmatrix} - \mathbf{x}(c_1 - d_1), \\ \mathbf{x}_2(c-d) &= \begin{bmatrix} c\mathbf{y}_2 + c_2\mathbf{y} \\ -d_2\delta \end{bmatrix} - \mathbf{x}(c_2 - d_2), \\ \mathbf{x}_{11}(c-d) &= \begin{bmatrix} c\mathbf{y}_{11} + 2c_1\mathbf{y}_1 + c_{11}\mathbf{y} \\ -d_{11}\delta \end{bmatrix} - 2\mathbf{x}_1(c_1 - d_1) - \mathbf{x}(c_{11} - d_{11}), \\ \mathbf{x}_{12}(c-d) &= \begin{bmatrix} c\mathbf{y}_{12} + c_1\mathbf{y}_2 + c_2\mathbf{y}_1 + c_{12}\mathbf{y} \\ -d_{12}\delta \end{bmatrix} - \mathbf{x}_1(c_2 - d_2) - \\ &\quad - \mathbf{x}_2(c_1 - d_1) - \mathbf{x}(c_{12} - d_{12}), \\ \mathbf{x}_{22}(c-d) &= \begin{bmatrix} c\mathbf{y}_{22} + 2c_2\mathbf{y}_2 + c_{22}\mathbf{y} \\ -d_{22}\delta \end{bmatrix} - 2\mathbf{x}_2(c_2 - d_2) - \mathbf{x}(c_{22} - d_{22}). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$c = 2\delta(\beta + y_1\alpha_{13} + y_2\alpha_{23}),$$

$$c_1 = 2\delta\alpha_{13},$$

$$c_2 = 2\delta\alpha_{23},$$

$$c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0,$$

$$d = \alpha_{11}y_1^2 + 2\alpha_{12}y_1y_2 + \alpha_{22}y_2^2,$$

$$d_1 = 2(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2),$$

$$d_2 = 2(\alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2),$$

$$d_{11} = 2\alpha_{11},$$

$$d_{12} = 2\alpha_{12},$$

$$d_{22} = 2\alpha_{22},$$

und

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{ij} = \mathbf{o}.$$

Auswerten der Ableitungen in $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ ergibt:

$$d = d_1 = d_2 = 0,$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{11}/\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{12}/\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{22}/\beta \end{bmatrix}.$$

Für die Fundamentalgrößen folgt somit

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 & g_{12} &= 0 & g_{22} &= 1 \\ h_{11} &= -\alpha_{11}/\beta & h_{12} &= -\alpha_{12}/\beta & h_{22} &= -\alpha_{22}/\beta, \end{aligned}$$

und damit für die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\beta^2} = -\frac{\det A}{\beta^4}.$$

Die mittlere Krümmung berechnet sich folglich zu:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{(\alpha_{11} + \alpha_{22})}{\beta}.$$

Aus der Bewegungsinvarianz der Fundamentalgrößen und der Krümmungen folgt:

Satz 10.1 Die Gaußsche Krümmung einer Quadrik

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^t \mathbf{x} + \alpha = 0$$

in einem Punkt \mathbf{x}_0 beträgt

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \mathbf{a}^t \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{vmatrix}}{|\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0|^4}. \quad (10.1)$$

Bezeichnen \mathbf{u} und \mathbf{v} zwei orthonormale Vektoren in der Tangentialebene von \mathbf{x}_0 , so bestimmt sich die mittlere Krümmung zu

$$H = -\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{u}^t \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{v}^t \mathbf{A} \mathbf{v})}{|\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0|}. \quad (10.2)$$

Beweis:

Sei $\mathcal{X}_0 = \mathbb{A}_{\mathbf{x}_0} = \beta[-\mathbf{x}_0^t \mathbf{n}_0 \quad \mathbf{n}_0^t]^t$ die Tangentialebene in $\mathbf{x}_0 = [1 \quad \mathbf{x}_0]^t$ und sei $\beta = |\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0|$. Der Normalenvektor \mathbf{n}_0 werde durch zwei Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} zu einem Orthonormalsystem ergänzt.

Dann bildet die Bewegung

$$\mathbf{x} \mapsto \bar{\mathbf{x}} = \mathbb{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{o}^t \\ -\mathbf{B}\mathbf{x}_0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{v}^t \\ \mathbf{n}_0^t \end{bmatrix},$$

die Quadrik auf die Standardkonfiguration ab:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{X}}_0 = \mathbb{B}^{-t} \mathcal{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbb{B}^{-t} \mathbb{A}_{\mathbf{x}_0}.$$

Die Quadrik schreibt sich somit als $\bar{\mathbf{x}}^t \mathbb{B}^{-t} \mathbb{A} \mathbb{B}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^t \bar{\mathbb{A}} \bar{\mathbf{x}} = 0$ mit

$$\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{B}^{-t} \mathbb{A} \mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \mathbf{u}^t \mathbf{A} \mathbf{u} & \mathbf{u}^t \mathbf{A} \mathbf{v} & \mathbf{u}^t \mathbf{A} \mathbf{n}_0 \\ 0 & \mathbf{v}^t \mathbf{A} \mathbf{u} & \mathbf{v}^t \mathbf{A} \mathbf{v} & \mathbf{v}^t \mathbf{A} \mathbf{n}_0 \\ \beta & \mathbf{n}_0^t \mathbf{A} \mathbf{u} & \mathbf{n}_0^t \mathbf{A} \mathbf{v} & \mathbf{n}_0^t \mathbf{A} \mathbf{n}_0 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$K = -\frac{\det \bar{\mathbb{A}}}{\beta^4} = -\frac{\det(\mathbb{B}^{-t} \mathbb{A} \mathbb{B}^{-1})}{\beta^4} = -\frac{\det A}{\beta^4}$$

und

$$H = -\frac{1}{2} \frac{(\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{22})}{\beta},$$

woraus wegen der Parametrisierungs- und Bewegungsinvarianz der Krümmungen die Behauptung folgt. \square

Beispiel 10.2 In einem Punkt $\mathbf{x}_0 = r[\cos \phi \cos \psi \quad \cos \phi \sin \psi \quad \sin \phi]^t$ ergeben die Krümmungen der Kugel $\mathbf{x}^2 = r^2$ mit $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, $\alpha = -r^2$ und den normierten Tangentenvektoren \mathbf{u} , \mathbf{v} :

$$K(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{r^2}, \quad H(\mathbf{x}_0) = -\frac{(\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2)}{2\beta} = -\frac{1}{r}.$$

Beispiel 10.3 Das hyperbolische Paraboloid $z = xy$ besitzt mit $\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 1]^t$, $\alpha = 0$, $\alpha_{i \ 4-i} = 1$, $\alpha_{ij} = 0$ sonst, in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ die Krümmungen

$$K(\mathbf{o}) = -1 \quad \text{und} \quad H(\mathbf{o}) = 0.$$

10.2 Glätten

In Kapitel 6 wurden die Freiheitsgrade der Quadrikensplinekonstruktion untersucht. Diese bestehen in der Wahl der Randebenen der einzelnen Quadrikensegmente, der damit verknüpften Wahl der transversalen Geraden, sowie der Wahl der Nabenelemente. Die Wahl der Randebenen kann nicht auf einfache Weise analytisch formuliert und insofern kaum für eine Optimierung der Flächengestalt verwendet werden. Ähnliches gilt für die transversalen Geraden, die darüberhinaus komplexen globalen Abhängigkeiten genügen müssen (siehe Abschnitt 6.4).

Die Wahl der Nabenelemente läßt sich jedoch einfach durch analytische Gewichte steuern. Der Nabepunkt wird hierbei durch eine Koordinate auf der Transversalengeraden festgelegt und eine zugehörige Tangentialebene kann als Lösung des

Gleichungssystem (6.1) berechnet werden (siehe die Abschnitte 6.2 und 6.6). Diese Lösung hängt von Gewichten ab, die den Eckpunkten des gegebenen Dreiecksnetzes beliebig zugeordnet werden können. Damit ergibt sich je ein Freiheitsgrad pro Dreieck des gegebenen Netzes sowie je ein weiterer pro Eckpunkt des Netzes. Diese Freiheitsgrade können nun in einem Glättungsprozeß variiert werden.

Das Glätten parametrischer Flächen wird üblicherweise auf die Minimierung gewisser “Glattheitsfunktionale” zurückgeführt. In diese Glattheitsfunktionale gehen verschiedene Krümmungsmaße und deren erste Ableitungen ein. In [Greiner '91] wird beispielsweise die “thin plate energy” einer über einem Definitionsbereich Ω parametrisierten Fläche F durch

$$J_{ab}(F) = \int_{\Omega} a(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + 2(1-b)\kappa_1\kappa_2 d\omega \quad (10.3)$$

mit Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 und Materialkonstanten a, b gegeben. Mit Hilfe der Gaußschen und mittleren Krümmung läßt sich Gleichung (10.3) umformulieren zu

$$J_{ab}(F) = \int_{\Omega} 4aH^2 + 2(1-a-b)K d\omega. \quad (10.4)$$

Da sich die Gaußsche und mittlere Krümmung einer Quadrik nach dem vorangehenden Abschnitt direkt aus ihrer impliziten Gleichung bestimmen lassen, können die Integranden in (10.3) und (10.4) auch für implizit dargestellte Quadrikensplines aufgestellt werden.

Die Integrale lassen sich auch für parametrische Flächen nur numerisch auswerten. Hierzu werden in ausgewählten Punkten der Fläche die Werte des Integranden bestimmt und mit bestimmten Gewichten multipliziert aufsummiert. Somit können die Integrale auch für implizit dargestellte Quadrikensegmente mit Hilfe von Integrationsformeln ausgewertet werden. Integrationsformeln für mehrdimensionale Integrale finden sich in zahlreichen Numerikbüchern, beispielsweise in [Stroud '74].

Die einfachste Integrationsformel liefert die Verallgemeinerung der Trapezformel für eindimensionale Integrale. Angewendet auf die dreieckigen Quadrikensegmente der Quadrikensplines ergibt sich, daß zunächst der Integrand in den Eckpunkten der Segmente ausgewertet wird. Nicht vorgegebene Eckpunkte berechnen sich hierbei durch den Schnitt einer Kante des berandenden Tetraeders mit der Quadrik, d.h. durch Lösen einer quadratischen Gleichung. Die aus den Gleichungen (10.1) und (10.2) erhaltenen Krümmungswerte werden in den Integranden in (10.4) eingesetzt und anschließend aufsummiert. Mit einem Drittel der Fläche des von den Eckpunkten aufgespannten Dreiecks multipliziert ergibt sich eine Näherung für das Integral J_{ab} des Segmentes.

Die Genauigkeit des Integrals kann durch Unterteilung des Quadrikensegmentes oder Anwendung komplexerer Integrationsformeln erhöht werden.

Die “thin-plate-energy” des gesamten Quadrikensplines, die sich durch Aufsummieren der Energien der einzelnen Quadrikensegmente ergibt, kann nun in Abhängigkeit von den vorher beschriebenen Gewichten, die die Nabenelemente festlegen, berechnet werden. Dieser Ausdruck kann mit einem Optimierungsverfahren minimiert werden. Die Auswahl geeigneter Optimierungsverfahren und anderer Energiefunktionale bietet Raum für weitere Untersuchungen.

Literaturverzeichnis

- G. Albrecht** (1998a). Determination and classification of triangular quadric patches. *Computer Aided Geometric Design*, 15(7):675–698.
- G. Albrecht** (1998b). Rational Quadratic Bézier Triangles on Quadric s. In *Proceedings: Computer Graphics International*, S. 34–40, Juni 1998.
- Ch.L. Bajaj, J. Chen, G. Xu** (1994). Free Form Surface Design with A-Patches. In *Proceedings of Graphics Interface '94*, S. 174–181. Canadian Information Processing Society, 1994.
- Ch.L. Bajaj, J. Chen, R.J. Holt, A.N. Netravali** (1999). Energy formulations of A-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 16(1):39–59. ISSN 0167-8396.
- C. Bangert, H. Prautzsch** (1997a). Circle and Sphere as rational splines. *Neural, Parallel & Scientific Computations - Special Issue: Computer Aided Geometric Design*, 5(1&2):153–162.
- C. Bangert, H. Prautzsch** (1997b). Quadric splines. In **Vogler Mick, Röschel** (Hrsg.) (1997b), *Tagungsbericht der Konferenz "107 Jahre Drehfluchtprinzip" in Vorau, Austria*, 1997.
- C. Bangert, H. Prautzsch** (1999a). A geometric criterion for the convexity of Powell-Sabin-Elements. *Computer Aided Geometric Design*, 16(6):529–538.
- C. Bangert, H. Prautzsch** (1999b). Quadric splines. *Computer Aided Geometric Design*, 16(6):497–515.
- C. Bangert** (1998). Quadrikensplines und Konvexität. In *Vortragsauszüge des 23. Differentialgeometriekolloquiums am 22.05.1998 in Dresden, 1998*, S. 1–10, 1998.
- W. Blaschke** (1954). *Projektive Geometrie*. Birkhäuser.
- J. Bloomenthal, Ch.L. Bajaj** (1997). *Introduction to implicit surfaces*. Morgan Kaufmann.

- J. Bloomenthal** (1987). Modelling with Implicit Surfaces. *SIGGRAPH Tutorial on the Modelling of Natural Phenomena*, 16.
- W. Boehm, D. Hansford** (1991). Bezier Patches on Quadrics. *NURBS for curve and surface design*, S. 1–14.
- W. Boehm, H. Prautzsch** (1994). *Geometric Concepts for Geometric Design*. A.K. Peters, Wellesley, MA.
- J.M. Carnicer, W. Dahmen** (1992). Convexity Preserving Interpolation and Powell-Sabin Elements. *Computer Aided Geometric Design*, 9(4):279–290.
- J.M. Carnicer, M.S. Floater** (175-184). Algorithms for convexity preserving interpolation of scattered data. In **J. Hoschek, P. Kaklis** (Hrsg.) (175-184), *Advanced Course on Fairshape*, S. 175–184. Teubner, Stuttgart, 175-184.
- J.M. Carnicer, M. Garcia-Esnaola** (1998). Global Convexity of Curves and Polygons. *Computer Aided Geometric Design*, 15:893–907.
- Z.J. Cendes, S.H. Wong** (1987). C^1 Quadratic Interpolation Over Arbitrary Point Sets. *IEEE Computer Graphics and Applications*, S. 8–16.
- G. Chang, P.J. Davis** (1984). The Convexity of Bernstein Polynomials over Triangles. *Journal of Approximation Theory*, 40:11–28.
- J.J. Chou** (1995). Higher order Bézier circles. *Computer Aided Design*, 27(4):303–309.
- W. Dahmen, T.M. Thamm-Schaar** (1993). Cubicoids: modeling and visualization. *Computer Aided Geometric Design*, 10:89–108.
- W. Dahmen** (1989). Smooth piecewise quadric surfaces. In **T. Lyche, L. Schumaker** (Hrsg.) (1989), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, S. 181–194. Academic Press, 1989.
- W.L.F. Degen** (1996). The type of triangular Bézier surfaces. In **G. Mullineux** (Hrsg.) (1996), *The Mathematics of Surfaces VI*, S. 153–170. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- P. Dierckx, S. Van Leemput, T. Vermeire** (1992). Algorithms for surface fitting using Powell-Sabin splines. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 12(2):271–299.
- P. Dierckx** (1997). On calculating normalized Powell-Sabin B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 15:61–78.

- R. Dietz, J. Hoschek, B. Jüttler** (1993). An Algebraic Approach to Curves and Surfaces on the Sphere and on other Quadrics. *Computer Aided Geometric Design*, 10:211–229.
- R. Dietz, J. Hoschek, B. Jüttler** (1995). Rational patches on quadric surfaces. *Computer Aided Design*, 27:27–40.
- R. Dietz** (1995). *Rationale Bézier-Kurven und Bézier-Flächenstücke auf Quadriken*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1995.
- M.P. doCarmo** (1992). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg Verlag, 2. Auflage.
- H. Edelsbrunner** (1987). *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer Verlag.
- G. Farin, B. Piper, A.J. Worsey** (1987). The octant of a sphere as a non-degenerate triangular Bézier patch. *Computer Aided Geometric Design*, 4:329–332.
- G. Farin** (1990). *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design – A Practical Guide*. Academic Press, 2. Auflage.
- J. Flaquer, G. Garate, M. Pargada** (1992). Envelopes of moving quadric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 9:299–312.
- M.S. Floater** (1997). A counterexample to a theorem about the convexity of Powell-Sabin elements. *Computer Aided Geometric Design*, 14:383–385.
- T. Gallagher, B. Piper** (1992). Convexity preserving surface interpolation. In **N.S. Sapidis** (Hrsg.) (1992), *Designing Fair Curves and Surfaces*, S. 277–293. SIAM, 1992.
- T.A. Grandine** (1989). On convexity of piecewise polynomial functions on triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 6(3):181–187.
- G. Greiner** (1991). Surface Construction Based on Variational Principles. In **P.J. Laurent, A. Le Méhauté, L.L. Schumaker** (Hrsg.) (1991), *Curves and Surfaces II*, S. 1–11. AK Peters, Boston, 1991.
- G. Greiner** (1994). Data dependent fairness functionals. Technischer Bericht 9, Universität Erlangen, IMMD IX, 1994.
- B. Guo** (1991). Modeling Arbitrary Smooth Objects with Algebraic Surfaces. Technical Report CORNELLCS/TR91-1226, Cornell University, Computer Science Department, August 1991.

- B. Guo** (1995). Quadric and cubic bitetrahedral patches. *The Visual Computer*, 11(5):253–262. ISSN 0178-2789.
- J.C. Hart** (1993). Ray Tracing Implicit Surfaces. Technischer Bericht EECS-93-014, Washington State University - School of EECS, 1993.
- E. Hartmann, Y.Y. Feng** (1993). On the convexity of functional splines. *Computer Aided Geometric Design*, 10(2):127–142.
- Ch.M. Hoffmann** (1993). Implicit curves and surfaces in CAGD. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1):79–88.
- J. Hoschek, D. Lasser** (1989). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1. Auflage.
- J. Hoschek** (1983). Dual Bezier Curves and Surfaces. In **R. E. Barnhill, W. Boehm** (Hrsg.) (1983), *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, S. 147–156. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1983.
- S. Y. Hsu, L. R. Chow, H. C. Liu** (1993). A New Approach for the Generation of Circles. *Computer Graphics Forum*, 12(2):105–110.
- K.K. Kubota** (1972). Pythagorean triples in unique factorization domains. *American mathematical monthly*, 79(5):503–505.
- D. Laugwitz** (1968). *Differentialgeometrie*. Teubner, 2 Auflage.
- D. Levin, E. Nadler** (1995). Convexity preserving interpolation by algebraic curves and surfaces. *Numerical Algorithms*, 9(1-2):113–139. Algorithms for constrained approximation and optimization (Stowe, VT, 1993).
- T. Maekawa, F.E. Wolter, N.M. Patrikalakis** (1996). Umbilics and lines of curvature for shape interrogation. *Computer Aided Geometric Design*, 13:133–161.
- J. Niebuhr** (1992). *Eigenschaften der Darstellung insbesondere degenerierter Quadriken mittels Dreiecks-Bezierflächen*. Dissertation, Universität Braunschweig, 1992.
- L. Piegl, W. Tiller** (1989). A Menagerie of Rational B-Spline Circles. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(5):48–56.
- L. Piegl, W. Tiller** (1997). *The Nurbs Book*, Kapitel 7.5 Construction of Circles, S. 298–309, 326–331. Springer, Berlin, 2 Auflage, 1997.
- M.J.D. Powell, M.A. Sabin** (1977). Piecewise Quadratic Approximations on Triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3(4):316–325.

- H. Prautzsch, W. Trump** (1992). Simple surfaces have no simple C^1 -parametrization. In **T. Lyche, L.L. Schumaker** (Hrsg.) (1992), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, S. 475–480. Academic Press, Boston, 1992.
- H. Schaal** (1980). *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Band 2. Vieweg Verlag, Braunschweig, 2. Auflage.
- T.W. Sederberg, D.C. Anderson** (1985). Steiner Surface Patches. *IEEECGA*, S. 23–36.
- T. Sederberg** (1985). Piecewise algebraic surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, 2(1-3):53–60.
- A.H. Stroud** (1974). *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York.
- S. Teller** (1989). Smoothing Polyhedra with Quadric Patches. Technical Report UCB//CSD-89-285, EECS Computer Science Division, University of California, Berkeley, Mai 1989.
- J. Warren** (1986). On Algebraic Surfaces Meeting with Geometric Continuity. Technical Report CORNELLCS//TR86-770, Cornell University, Computer Science Department, August 1986.
- J. Warren** (1987). Blending Quadric Surfaces with Quadric and Cubic Splines. In *Symposium on Computational Geometry, (Waterloo, Canada, June 8–10, 1987)*, S. 341–347. ACM, 1987.
- K. Willemans, P. Dierckx** (1994). Surface fitting using convex Powell-Sabin splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 56(3):263–282.
- K. Willemans, P. Dierckx** (1996). Smoothing scattered data with a monotone Powell-Sabin spline surface. *Numerical Algorithms*, 12:215–232.

Lebenslauf

22.11.1967	In Stuttgart geboren
1974 - 1978	Grundschule Herten
1978 - 1987	Gymnasium Grenzach-Wyhlen
Mai 1987	Erlangung der allgemeinen Hochschulreife
Oktober 1987 - Mai 1994	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Karlsruhe (TH)
März 1989	Vordiplom
Oktober 1989 - Juni 1990	Auslandsstudium am Institut Fourier der Universität Grenoble (Frankreich)
Juni 1990	Licence
Mai 1994	Diplom
Oktober 1988 - Februar 1994	Verschiedene Tutor- und Korrektortätigkeiten an den mathematischen Instituten I und II der Universität Karlsruhe
Februar 1992 - April 1992	Auslandspraktikum am INRETS, Lyon (Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité)
Juli 1994 - Januar 1995	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Betriebs- und Dialogsysteme der Universität Karlsruhe
Seit Februar 1995	Wissenschaftliche Angestellte am Institut für Betriebs- und Dialogsysteme der Universität Karlsruhe