http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 17, 3 pp., *26.09.2003*

Charakterisierung des Betrages reeller Determinanten mit Hilfe von Funktionalgleichungen

Peter Volkmann[1]

Es bezeichne R den Bereich der reellen Zahlen, und es sei $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Für $n \in N$ werden die Elemente von R^n als Spalten aufgefaßt, insbesondere sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach [4] löst $f : R^n \to R$ die Funktionalgleichung

$$\max\{f(x+y), f(x-y)\} = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R^n) \tag{1}$$

genau dann, wenn $f(x) = |\alpha(x)|$ mit einer additiven Funktion $\alpha : R^n \to R$ ist. (Dabei kann statt R^n auch eine beliebige Abelsche Gruppe genommen werden; eine Pexidersche Form von (1) wird in [3] behandelt.) Dieses Resultat führt zur nachfolgenden Charakterisierung von

$$F(x_1, \dots, x_n) = |\det(x_1, \dots, x_n)| \quad (x_1, \dots, x_n \in R^n), \tag{2}$$

welche ähnlich ist zur Charakterisierung der Funktion $F(x_1, \dots, x_n) = \det(x_1, \dots, x_n)$ als eine n-lineare Funktion mit den weiter unten stehenden Eigenschaften (C), (D).

Satz. *Mit* $n \in N$ *sei*

$$F : \underbrace{R^n \times \cdots \times R^n}_{n \text{ mal}} \to R. \tag{3}$$

Es gilt (2) *genau dann, wenn* F *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(A) *Bezüglich jeder Veränderlichen ist* F *eine Lösung von* (1), *d.h.: Sind* $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in R^n$, *so wird* (1) *gelöst durch*

$$f(x) = F(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (x \in R^n). \tag{4}$$

[1] Anläßlich eines Gastaufenthaltes an der Universität Katowice im Frühjahr 2003.

(B) *Für die Funktionen* (4) *gilt* $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ $(\lambda \in R, x \in R^n)$.

(C) *Der Wert von* F *ist Null, wenn zwei Argumente übereinstimmen; für* $1 \leq k < l \leq n$ *gilt also*

$$F(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_{l-1}, x, a_{l+1}, \ldots, a_n) = 0.$$

(D) $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Beweis. Die Funktion (2) hat die Eigenschaften (A), (B), (C), (D). Umgekehrt folgt im Falle $n = 1$ die Form (2) bereits aus (B), (D). Es sei nun $n \geq 2$, und für die Funktion (3) werde (A), (B), (C) und (D) vorausgesetzt. Nach Sperner [5], S. 117 ff. gilt (2), falls neben (B), (D) noch folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \tag{5}$$

$$F(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) = F(\ldots, a+b, \ldots, b, \ldots) = F(\ldots, a, \ldots, a+b, \ldots). \tag{6}$$

Wegen (A) gilt nun nach [4]

$$F(x_1, \ldots, x_n) = |\alpha(x_k)| \tag{7}$$

mit einer von $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ abhängigen additiven Funktion $\alpha : R^n \to R$. Daraus folgt zunächst (5). Zum Nachweis von (6) stellen wir uns dort im linken Term a an der k-ten und b an der l-ten Stelle vor $(k < l)$, und wir verwenden (7) mit $x_l = b$. Dann wird

$$|\alpha(b)| = F(\ldots, b, \ldots, b, \ldots),$$

also $\alpha(b) = 0$ (nach (C)), und weiter

$$\begin{aligned} F(\ldots, a+b, \ldots, b, \ldots) &= |\alpha(a+b)| = |\alpha(a) + \alpha(b)| = |\alpha(a)| \\ &= F(\ldots, a, \ldots, b, \ldots). \end{aligned}$$

Das beweist die linke Gleichung in (6); analog gilt $F(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) = F(\ldots, a, \ldots, a+b, \ldots)$.

Zusatz. *Der Satz bleibt richtig, wenn* (B) *durch folgende Bedingung ersetzt wird:*

(B′) *Mit einer (beliebigen) Norm* $\| \cdot \| : R^n \to R$ *ist*

$$\sup\{F(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in R^n; \|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_n\| \leq 1\} < \infty.$$

Beweis. Zunächst gilt (B′) für die Funktion (2). Umgekehrt folgt (B) aus (A) und (B′): Aus (A) folgt (über (7)) für $m \in N$

$$F(\dots, mx_k, \dots) = |\alpha(mx_k)| = |m\alpha(x_k)| = m|\alpha(x_k)| = mF(\dots, x_k, \dots).$$

Entsprechend läßt sich m aus jedem Argument von F herausziehen, also kann (4) geschrieben werden als

$$(8) f(x) = m^{n-1}F(a_1/m, \dots, a_{k-1}/m, x, a_{k+1}/m, \dots, a_n/m)(x \in R^n, m \in N).$$

Sind in (7)

$$(9) \qquad \|x_1\|, \dots, \|x_{k-1}\|, \|x_{k+1}\|, \dots, \|x_n\| \le 1,$$

so folgt aus (B′) für die additive Funktion $\alpha : R^n \to R$ die Gültigkeit von

$$\sup\{|\alpha(x_k)| \mid x_k \in R^n, \|x_k\| \le 1\} < \infty,$$

also ist α stetig und damit linear, insbesondere also homogen (vgl. Aczél [1]). (7) liefert dann

$$(10) \quad F(x_1, \dots, \lambda x_k, \dots, x_n) = |\lambda| F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \ (\lambda \in R, x_k \in R^n),$$

falls noch (9) gilt. In (8) werde nun m aus N so groß gewählt, daß (9) für $x_j = a_j/m$ ($j = 1, \dots, n; j \neq k$) erfüllt ist. Dann werde in (8) x durch λx ersetzt: Es kann (10) angewandt werden, und es ergibt sich so $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ ($\lambda \in R, x \in R^n$).

Bemerkung. Der Beweis des Satzes beruht auf einer Charakterisierung der Funktion (2) durch die Eigenschaften (B), (D), (5), (6). Nach Bröcker [2], S. 91 wird diese Funktion bereits durch (B), (D), (6) charakterisiert. Den Herren Kollegen Volker Drumm und Stefan Kühnlein verdanke ich die Hinweise auf [2], [5].

Literatur

[1] János ACZÉL: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Birkhäuser Basel 1961.

[2] Theodor BRÖCKER: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.* Ibid. 2003.

[3] Raymond M. REDHEFFER und Peter VOLKMANN: *Die Funktionalgleichung $f(x) + \max\{f(y), f(-y)\} = \max\{f(x+y), f(x-y)\}$.* International Series of Numerical Mathematics 123, Birkhäuser Basel, 311-318 (1997).

[4] Alice SIMON (CHALJUB-SIMON) und Peter VOLKMANN: *Caractérisation du module d'une fonction additive à l'aide d'une équation fonctionnelle.* Aequationes Math. **47**, 60-68 (1994).

[5] Emanuel SPERNER: *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, I.* Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1948.

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.