

KfK 5174  
November 1993

# **Experimentelle Untersuchung turbulenter Mischkonvektion im Nachlauf einer beheizten Kugel**

D. Suckow  
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



**KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**  
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

**KfK 5174**

**EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG TURBULENTER  
MISCHKONVEKTION IM NACHLAUF EINER BEHEIZTEN KUGEL**

**Detlef Suckow**

Von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0303-4003

## Kurzfassung

In der Wasser-Teststrecke FLUTMIK wird der achsensymmetrische Nachlauf stromab einer beheizten Kugel untersucht. Die Kugel befindet sich in einem vertikal angeordneten Kanal, der von unten nach oben turbulent zwangsdurchströmt wird. Ein Vergleich mit dem unbeheizten Nachlauf zeigt den Einfluß von Auftriebskräften auf das Strömungsfeld.

Die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung turbulenter Strömungen und verschiedene auftriebserweiterte Formen des  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells werden ausführlich dargestellt. Die experimentell zu bestimmenden Größen leiten sich hieraus ab.

Die Temperatur und die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in axialer und radialer Richtung werden zeitgleich mit einer Thermoelementsonde und einem Zweikomponenten, zwei Farben Laser Doppler Anemometer gemessen. Die Strömungsgrößen werden für Abstände zwischen 5 und 106 Kugeldurchmessern ermittelt. Das Prinzip und die Funktionsweise des Laser Doppler Anemometers werden beschrieben.

Aus den gemessenen Größen werden die mittlere Geschwindigkeit, die mittlere Temperatur, deren Schwankungsintensitäten und die turbulenten Austauschgrößen für den Impuls- und Wärmetransport berechnet. Es werden das Abklingverhalten der Größen entlang der Kanalachse zusammen mit den radialen Profilen angegeben und diskutiert.

Die Bedeutung der Meßergebnisse im achsensymmetrischen auftriebsbehafteten turbulenten Nachlauf für die Behandlung mit den vorgestellten Turbulenzmodellen wird aufgezeigt.

# Experimental investigation of turbulent mixed convection in the wake of a heated sphere

## Abstract

The axisymmetric wake of a heated sphere under conditions of turbulent mixed convection is investigated in the water test section FLUTMIK. The sphere is located in a vertical channel with forced convective upward flow. The influence of buoyancy forces to the flow field is studied by comparison with the unheated wake.

The theoretical fundamentals describing turbulent flows and different versions of the  $k$ - $\epsilon$  turbulence model extended by buoyancy terms are described in detail. The quantities to be determined experimentally are derived.

The temperature and the components of the velocity vector in axial and radial directions are measured simultaneously by means of a thermocouple probe and a two component, two color laser Doppler anemometer. The flow quantities are determined at axial distances between 5 and 106 sphere diameters. The functional principle and the basis of the laser Doppler anemometer are explained.

The mean velocity, the mean temperature, the intensities of their fluctuations and the turbulent exchange quantities of momentum and heat transport are calculated. The decay laws of the quantities along the axis of the channel and the radial profiles are indicated and discussed.

The applicability of the experimental results of the axisymmetric buoyancy influenced turbulent wake with respect to the turbulence models presented are shown.

## Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung

Abstract

Verzeichnis der Symbole

	Seite
1. Einführung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Die untersuchte Anordnung	3
1.3 Literaturübersicht	4
1.4 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	7
2. Theorie	9
2.1 Einführung	9
2.2 Grundgleichungen	10
2.3 Exakte Transportgleichungen	13
2.4 Das auftriebserweiterte $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell	19
2.4.1 Modellierung	19
2.4.2 Merkmale des auftriebserweiterten Modells	23
2.4.3 Das algebraische Spannungs/Fluß $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell	25
2.5 Gleichungen des Strömungsproblems	28
2.5.1 Annahmen und Vereinfachungen	28
2.5.2 Gleichungen der Hauptströmung und der Turbulenzgrößen	29
2.5.3 Das auftriebserweiterte $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell	32
2.5.4 Das algebraische Spannungs/Fluß $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell	34
2.5.5 Aus dem Experiment zu bestimmende Größen	36
2.6 Zusammenfassung	38
3. Das Experiment	39
3.1 Einleitung	39
3.2 Statistische Kenngrößen und Auswertebeziehungen	39
3.3 Der experimentelle Aufbau	41
3.4 Instrumentierung	43
3.4.1 Temperaturmessung	43
3.4.2 Geschwindigkeitsmessung	44
3.4.2.1 Prinzip der Laser-Doppler-Anemometrie	45
3.4.2.2 Optischer Aufbau	47
3.4.3 Signalverarbeitung	50

	Seite
4. Meßergebnisse	55
4.1 Parameter der Strömung und Meßprogramm	55
4.2 Visualisierung der Strömung	57
4.3 Die Hauptströmung	61
4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse der Hauptströmung	74
4.5 Turbulenzstruktur	75
4.5.1 Temperaturfluktuationen	75
4.5.2 Turbulenter Wärmetransport	83
4.5.3 Der integrale Wärmefluß	88
4.5.4 Geschwindigkeitsfluktuationen	89
4.5.5 Turbulente Schubspannungen	95
4.5.6 Kinetische Energie der Turbulenz	99
4.6 Zusammenfassung der Ergebnisse der Turbulenzstruktur	107
4.7 Turbulenzmodellierung	109
4.7.1 Turbulente Austauschgrößen	109
4.7.2 Bedeutung der Meßergebnisse für das $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell	113
4.8 Experimentelle Unsicherheiten	117
5. Schlußbetrachtung	119
6. Literaturverzeichnis	123
A. Anhang	131
A.1 Beschreibung des Versuchstands FLUTMIK	131
A.1.1 Wasserkreislauf	131
A.1.2 Signalfluß	134
A.1.3 Daten des Wasserkreislaufs	136
A.1.4 Daten des LDA-Systems	137
A.2 Verhalten der Temperaturmeßsonde	138
A.3 Stoffdaten	139
A.4 Ausgewertete Datensätze	140
A.5 Fehlerrechnung	140

## Verzeichnis der Symbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$A's$	var.	Konstanten
$A_o$	1	Freiflächenanteil
$c_p$	J/kg·K	spezifische Wärmekapazität
$C's$	1	Konstanten
$c_w$	1	Widerstandsbeiwert
$d$	m	Durchmesser
$d$	m	Kugeldurchmesser
$d_s$	m	Abstand der Interferenzstreifen
$d_m$	m	Durchmesser des LDA-Meßvolumens
$D$	m	Kanaldurchmesser
$f_d$	Hz	Signalfrequenz
$f_p$	Hz	Dopplerfrequenz eines Partikels
$f_s$	Hz	Shiftfrequenz
$f_o$	Hz	Frequenz der Braggzelle
$g$	m/s <sup>2</sup>	Erdbeschleunigung
$G$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Auftriebsproduktion/-vernichtung von $k$
$G_{1j}$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Auftriebsproduktion/-vernichtung von $\overline{u'_1 u'_j}$
$G_{1T}$	m·K/s <sup>2</sup>	Auftriebsproduktion/-vernichtung von $\overline{u'_1 T'_1}$
$G_v$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Auftriebsproduktion/-vernichtung von $v'^2$
$Gr$	1	Grashof-Zahl
$H$	m <sup>3</sup> ·K/s	kinematisches Wärmeflußintegral
$k$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	kinetische Energie der Turbulenz
$l$	m	Länge
$l_m$	m	Länge des LDA-Meßvolumens
$L$	m	Länge
$\hat{L}$	m	charakteristische Länge
$n$	1	Brechungsindex
$N's$	1	Zahl der Interferenzstreifen
$N$	1	Anzahl der Ereignisse
$\dot{N}$	Hz	Datenrate
$P$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Produktion von $k$ durch turbulente Schubspannungen
$P_{1j}$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Produktion von $\overline{u'_1 u'_j}$
$P_{1T}$	m·K/s <sup>2</sup>	Produktion von $\overline{u'_1 T'_1}$
$P_T$	K <sup>2</sup> /s	Produktion von $T'^2$
$p$	N/m <sup>2</sup>	Druck

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$p'$	$N/m^2$	Druckfluktuationen
$Pr$	1	Prandtl-Zahl
$\dot{Q}$	$W$	Heizleistung
$r$	$m$	radiale Koordinate
$r_{0.5T}$	$m$	Halbwertsradius der Temperatur
$r_{0.5TRMS}$	$m$	Halbwertsradius des RMS-Werts der Temperatur
$r_{0.5u}$	$m$	Halbwertsradius der Geschwindigkeit
$Re$	1	Reynolds-Zahl
$R_{xy}$	1	Korrelationskoeffizient zweier Signale
$t$	$s$	Zeit
$t_M$	$s$	Meßzeit
$T$	$K$	Temperaturdifferenz ( $T_1 - T_0$ )
$\bar{T}_0$	$K$	Temperatur der Anströmung
$T_1$	$K$	Temperatur
$T_u$	$s$	integrales Zeitmaß
$u, v, w$	$m/s$	Komponenten der Momentangeschwindigkeit
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	$m/s$	Komponenten der mittleren Geschwindigkeit
$u', v', w'$	$m/s$	Komponenten der Fluktuationsgeschwindigkeit
$\bar{u}_a$	$m/s$	Außengeschwindigkeit
$\bar{u}_i$	$m/s$	mittlere Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation
$u'_i$	$m/s$	Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation
$u_p$	$m/s$	Partikelgeschwindigkeit
$u_{PS}$	$m/s$	Partikelgeschwindigkeit senkrecht zu Interferenzstreifenmuster
$\bar{u}_1$	$m/s$	Geschwindigkeitsdefizit
$\bar{V}$	$m/s$	charakteristische Geschwindigkeit
$\dot{V}$	$m^3/s$	Volumenstrom
$x$	$m$	axiale Koordinate
$x_i$	var.	Koordinaten in Tensornotation

Griechisches Alphabet:

$\alpha$	$1/K$	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\beta$	1	Mischkonvektionsparameter
$\Gamma$	$m^2/s$	molekulare Diffusivität
$\Gamma_t$	$m^2/s$	Wirbeldiffusivität
$\delta_{ij}$	1	Kronecker-Symbol ( = 1 für $i=j$ , = 0 für $i \neq j$ )

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\varepsilon$	$m^2/s^3$	Dissipationsrate von $k$
$\varepsilon_{ij}$	$m^2/s^3$	Dissipationsrate von $\overline{u'_i u'_j}$
$\varepsilon_T$	$K^2/s$	Dissipationsrate von $T'^2$
$\theta$	Grad	Schnittwinkel
$\lambda$	$W/m \cdot K$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	$m$	Wellenlänge
$\nu$	$m^2/s$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	$m^2/s$	Wirbelviskosität
$\Pi_{ij}$	$1/m^2 \cdot s^2$	Druck-Scher-Korrelation ("pressure strain")
$\Pi_{iT}$	$K/m \cdot s^2$	Druck-Temperaturgradient-Korrelation ("pressure scrambling")
$\rho_{xy}$	1	Korrelationsfunktion zweier Signale
$\rho$	$kg/m^3$	Dichte
$\sigma_t$	1	turbulente Prandtl-Zahl
$\sigma_\varepsilon$	1	Prandtl-Zahl für $\varepsilon$
$\sigma_k$	1	Prandtl-Zahl für $k$
$\tau$	$s$	Zeitverschiebung
$\tau$	$N/m^2$	Schubspannung
$\varphi$	Grad	Winkel in Zylinderkoordinaten
$\phi_i$	var.	Momentanwert einer Strömungsgröße
$\bar{\phi}_i$	var.	Mittelwert einer Strömungsgröße
$\phi'_i$	var.	Fluktuationen einer Strömungsgröße
$\omega$	1	Funktion in Modellgleichung

#### Indizes:

d	Kugeldurchmesser
D	Kanaldurchmesser
E	Einlaufstrecke
i, j, k	Indizes der Tensornotation
g	gesamt
K	Kugel
KT, VL	Kühlturm, Vorlauf
krit	kritisch
m	Wert auf Mittelachse
M	Mischkonvektion
M	Meßstrecke
r	in r-Richtung

Symbol	Bezeichnung
s	Sieb
t	turbulent
x	in x-Richtung
Z	Zwangskonvektion
o	Wert der Anströmung

sonstige Zeichen:

—	zeitliche Mittelwertbildung
'	Schwankungsgröße
Δ	Differenzwert

Abkürzungen:

LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
RMS	"Root-Mean-Square"-Wert
ADC	"Analog-Digital-Converter"
PSD	"Power Spectrum Density"

## 1. Einführung

### 1.1 Motivation

Turbulente Strömungsvorgänge sind in vielen Bereichen der Natur und Technik anzutreffen. Die auftretenden Wechselwirkungen der Turbulenz sind beispielsweise verantwortlich für Transportvorgänge in der Atmosphäre, Mischungsbewegungen bei Einleitungen von Abwasser in Gewässer oder für die auftretenden Windkräfte bei Gebäuden und Fahrzeugen. Bei Problemen der Brand- und Klimatechnik, bei der Schadstoffausbreitung und bei der Kühlung von Komponenten in technischen Anlagen werden durch Dichteunterschiede zusätzlich Auftriebskräfte hervorgerufen, die das Strömungsverhalten dann wesentlich kennzeichnen.

In den letzten Jahren gewinnt die Nutzung der Naturkonvektion zum Transport von Wärme, im Zusammenhang mit Sicherheitsüberlegungen und der Nachwärmeabfuhr bei flüssigmetallgekühlten schnellen Brutreaktoren (Liquid Metal Fast Breeder Reactor, LMFBR), zunehmend an Bedeutung. Aufgrund der hohen Wärmeleistungsdichten im Kernbereich Schneller Brutreaktoren wird Natrium zur Kühlung der Brennelemente eingesetzt. Eine sichere Auslegung der Wärmeabfuhr muß sowohl im Auslegungsbetrieb als auch im Fall der Nachwärmeabfuhr durch Naturkonvektion sichergestellt sein. Die Kenntnis der Strömungs- und Temperaturfelder sowie der Transportvorgänge ist deshalb wichtig.

Zur Untersuchung der Kühlungsmechanismen und der thermohydraulischen Phänomene werden Experimente in vereinfachten zweidimensionalen und komplexen dreidimensionalen Modellgeometrien durchgeführt, die den Reaktor oder Komponenten daraus in unterschiedlichen Maßstäben simulieren (Hoffmann et al. (1991), (1992)). Als Modellfluid wird Wasser verwendet. Eines der Versuchsziele ist die Überprüfung und Verifizierung bestehender Rechenprogramme und der darin verwendeten Turbulenzmodelle. Hierbei stellt sich das Problem, wie die gewonnenen Ergebnisse der Wassereperimente benutzt werden können, um die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in Fluiden großer Wärmeleitfähigkeit vorauszusagen (Weinberg et al. (1990)).

Im Reaktorpool sind eine Vielzahl turbulenter Strömungsformen zu finden. Ein Teil der auftretenden Strömungsverhältnisse ist sowohl durch Trägheitskräfte der erzwungenen Konvektion als auch durch Auftriebseffekte der freien Konvektion geprägt, so daß beide Mechanismen gleichzeitig be-

trachtet werden müssen. Die Analyse der turbulenten Transportvorgänge bei kombinierter Konvektion oder Mischkonvektion ist damit notwendig.

Zur Untersuchung der Übertragbarkeit Wasser/Natrium und der numerischen Simulation turbulenter Mischkonvektion ist es sinnvoll, die auftretenden Strömungsprobleme auf möglichst einfache, charakteristische Anordnungen zu reduzieren. Der experimentelle Aufwand und die Arbeiten zur Modellierung der Probleme können minimiert werden.

Um eine gesicherte experimentelle Datenbasis bereitzustellen ist es sinnvoll, möglichst identische Experimente in Wasser und Natrium durchzuführen. Die geometrischen Daten, Versuchsparameter und Turbulenzgrößen lassen sich dann konsistent übertragen.

Erste experimentelle Untersuchungen in geometrisch identischen Wasser- und Natrium-Teststrecken werden von Krebs (1979) und von Krebs und Bremhorst (1983) für einen auftriebsfreien Temperaturfreistrahle durchgeführt. Knebel (1993) untersucht das Ausbreitungsverhalten von allgemeinen turbulenten Auftriebsfreistrahlen in Natrium und vergleicht diese mit Ergebnissen für Luft und Wasser aus der Literatur.

Parallel zu dem in der vorliegenden Arbeit untersuchten Wasser-Experiment wird eine geometrisch identische Teststrecke mit Natrium als Strömungsmedium am Kernforschungszentrum Karlsruhe aufgebaut.

Die mathematische Behandlung turbulenter Strömungen ist heute bereits weit fortgeschritten und erfolgt mit immer komplexeren Turbulenzmodellen. Zur Verifizierung der Modelle ist es unumgänglich, eine Vielzahl typischer Strömungsprobleme numerisch und experimentell zu untersuchen. Für viele praktische Problemstellungen wird das  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell mit Erfolg eingesetzt. Durch Hinzunahme des Auftriebsterms kann es auch für auftriebsbehaftete Prozesse der Mischkonvektion eingesetzt werden. Solche Erweiterungen sind allerdings bisher noch wenig getestet.

Aus den aufgeführten Gründen ist es notwendig, experimentelle Untersuchungen in Wasser bei turbulenter Mischkonvektion durchzuführen.

## 1.2 Die untersuchte Anordnung

Zur Untersuchung der thermo- und fluiddynamischen Austauschvorgänge bei turbulenter Mischkonvektion wird eine näherungsweise punktförmige Wärmequelle betrachtet, die sich in einer niederturbulenten Außenströmung befindet. Hinter der Wärmequelle bildet sich ein achsensymmetrischer, auftriebsbehafteter Nachlauf aus, der sich in der bewegten Umgebung ausbreitet. Das Strömungsproblem ist schematisch in Abbildung (1.1) dargestellt.

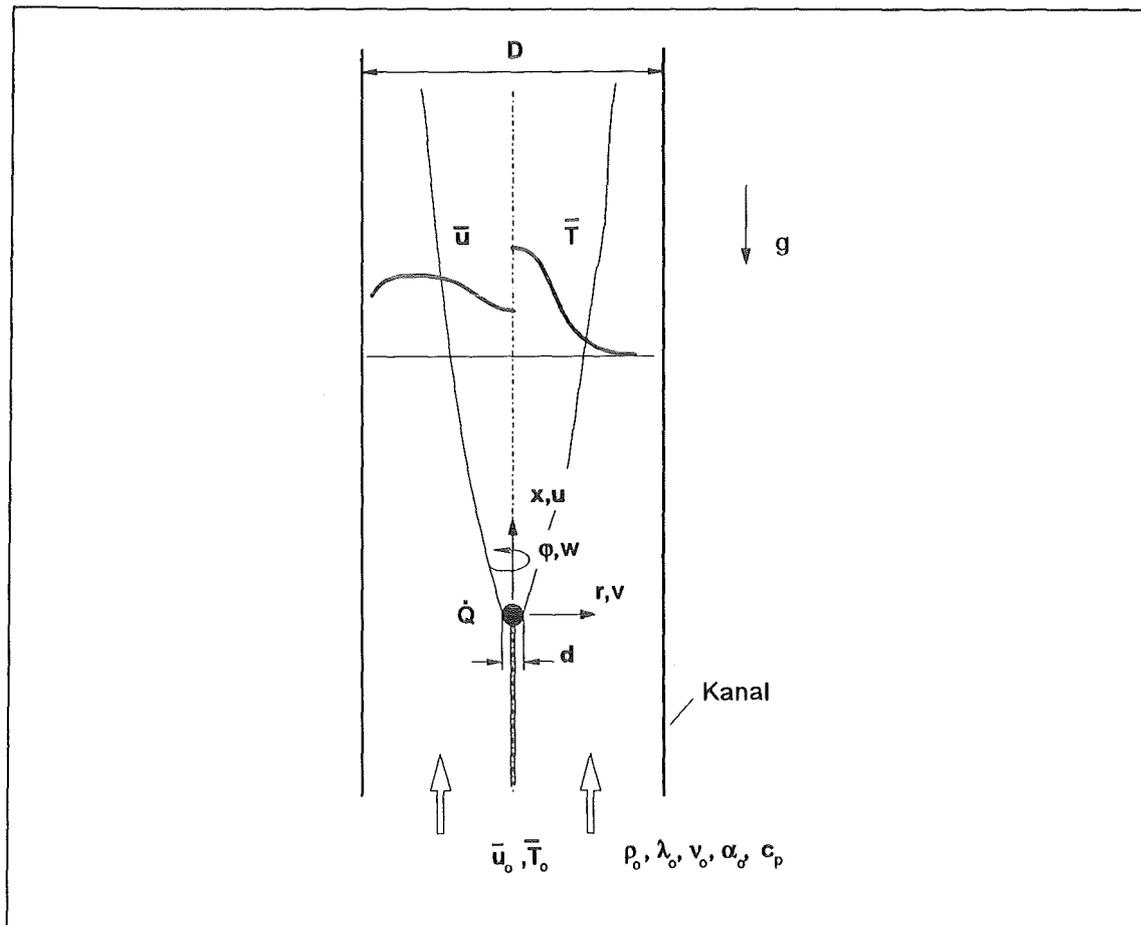


Abb. (1.1): Schematische Darstellung der Strömung im Nachlauf einer beheizten Kugel.

Ein vertikal angeordneter, quadratischer Kanal der Seitenlänge  $D$  wird entgegen dem Schwerevektor  $g$  mit der querschnittsgemittelten Anströmgeschwindigkeit  $\bar{u}_0$  und der Temperatur  $\bar{T}_0$  durchströmt.  $\bar{u}_0$  entspricht der Volumenstromdichte im Kanal. Die Strömung ist turbulent und im Mittel stationär. In der Mittelachse des Wasserkanals ist eine Kugel des Durchmessers  $d$  angeordnet, die mit der konstanten Heizleistung  $\dot{Q}$  beheizt wird. Der Kugeldurchmesser ist im Vergleich zu den Kanalabmessungen klein.

Hinsichtlich der Wärmefreisetzung kann die Kugel als punktförmige Wärmequelle aufgefaßt werden. Hinter der Kugel bildet sich eine Nachlaufströmung aus, der sich aufgrund von Dichteunterschieden ein turbulenter Auftriebsstrahl überlagert. Das durch den Strömungswiderstand des Körpers erzeugte Geschwindigkeitsdefizit wird mit zunehmendem Abstand von der Wärmequelle reduziert. Das überlagerte Temperaturfeld breitet sich aus, bei gleichzeitiger Abnahme der maximalen Temperaturüberhöhung. Durch die auftretenden Auftriebseffekte wird die axiale Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes stark beeinflusst.

In den vorliegenden Untersuchungen ist der von Wandeinflüssen des Kanals ungestörte Bereich der Nachlaufströmung von Interesse. Die Strömung wird in der Umgebung der Mittelachse als rotationssymmetrisch angenommen. Die Beschreibung des Problems erfolgt in den Zylinderkoordinaten  $x$ ,  $r$  und  $\varphi$ . Der axiale Abstand vom Zentrum der Kugel wird mit  $x$ , die radiale Erstreckung mit  $r$  und die azimutale Winkellage mit  $\varphi$  bezeichnet. Die Momentangeschwindigkeiten in axialer, radialer und azimutaler Richtung sind durch  $u$ ,  $v$  und  $w$  gegeben.  $T$  bezeichnet den Momentanwert der Temperaturdifferenz gegenüber der Umgebung. Charakteristische Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und der mittleren Temperaturdifferenz  $\bar{T}$  sind qualitativ in Abb.(1.1) eingetragen.

Die Strömung außerhalb des Auftriebsstrahls ist durch die Eigenschaften der Anströmung, durch die Dichte  $\rho_o$  bei der Temperatur  $\bar{T}_o$ , der kinematischen Viskosität  $\nu_o$ , der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$ , der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_o$  und den thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_o$ , charakterisiert. Das Fluid ist inkompressibel und bleibt im gesamten Strömungsgebiet einphasig.

### 1.3 Literaturübersicht

Die untersuchte Konfiguration läßt sich auf das idealisierte Problem eines reinen Auftriebsstrahls ("plume") zurückführen, wenn die räumliche Ausdehnung der Kugel sehr klein ist. Die Strömung kann dann als Mischkonvektions-Plume bezeichnet werden, bei dem sich eine punktförmige, isolierte und stationäre Wärmequelle in einem vertikal strömenden Medium befindet, von der kein Anfangsimpuls ausgeht. Hinter der Wärmequelle bildet sich ein achsensymmetrisches Strömungsfeld aus. Der durch die Dichteunterschiede eingebrachte Auftrieb tritt in Wechselwirkung mit der

erzwungenen Strömung, so daß der Zustand der Mischkonvektion erreicht wird. Bei hinreichend großer Wärmezufuhr und Relativgeschwindigkeiten ist die Strömung turbulent.

Appalaswamy und Jaluria (1980), Afzal (1983) und Riley und Drake (1983) untersuchen theoretisch die Problematik des Ausbreitungsverhaltens des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes auf der Basis von Ähnlichkeitslösungen für den laminaren Fall bei verschiedenen molekularen Prandtl-Zahlen. Afzal (1985) gelingt es, den gesamten Bereich der Mischkonvektion durch Einführung eines Mischkonvektionparameters mit einem einzigen Gleichungssatz zu beschreiben. Er unterscheidet dabei zwischen gleich- und entgegengerichteter äußerer Strömung.

Crane (1977) betrachtet eine bewegte Wärmequelle in einer ruhenden Umgebung, bei dem sich das Bezugssystem mit der Quelle bewegt, so daß sich das Problem auf das der Mischkonvektion reduziert. Aus Ähnlichkeitslösungen gibt er den axialen Verlauf der Geschwindigkeit, der Temperatur und das Ausbreitungsverhalten an. Für große Abstände und den Fall der voll ausgebildeten turbulenten Strömung führt dies auf eine Näherungslösung.

In der Arbeit von Afzal (1985b) ist ein Überblick der theoretischen Arbeiten zu Mischkonvektions-Plumes bei laminarer Strömung gegeben. Der turbulente Bereich wird jedoch in keiner Übersicht bisher behandelt.

Die Realisierung einer beliebig kleinen Wärmequelle ist im Experiment nicht möglich. Eine beheizte Kugel kann in einem gewissen Abstand als punktförmige Wärmequelle angesehen werden. Durch die endliche Ausdehnung wird die Strömungsgeschwindigkeit hinter dem Körper vermindert. Das realisierte Problem wird damit in eine auftriebsbehaftete Nachlaufströmung bei Mischkonvektion überführt.

Das Problem der turbulenten Impulsübertragung im Nachlauf ("Wake") rotationssymmetrischer Körper wird erstmalig von Swain (1926) auf der Grundlage der Prandtlischen Mischungswegtheorie (1925) theoretisch behandelt. Experimentelle Daten zur Impuls- und Wärmeübertragung liefern Hall und Hislop (1938) in Form von Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen im achsensymmetrischen Nachlauf eines vertikal angeordneten, beheizten Kreiszyinders.

Reichardt und Ermshaus (1962) greifen diese Versuche auf. Sie untersuchen den Geometrieinfluß des Rotationskörpers durch Variation des

Verhältnisses von Länge und Durchmesser. Im Gegensatz zum ebenen Problem wird die Breitenentwicklung deutlich und in geringem Maß die Geschwindigkeitsverteilung des Nachlaufs von der Art der Anfangsstörung beeinflusst. Der turbulente Wärmeaustausch liegt etwas über dem des Impulses. Die Ergebnisse werden von Ermshaus (1970) und von Bevilaqua und Lykoudis (1978) für den unbeheizten Fall bestätigt. In beiden Arbeiten werden die mittleren und turbulenten Größen gemessen. Bevilaqua und Lykoudis analysieren für die Kugel und eine poröse Scheibe den Einfluß auf die Selbsterhaltung der Strömung. Weitere Messungen, bei denen das Ähnlichkeitsverhalten des Geschwindigkeitsfeldes untersucht wird, werden für den Kugelnachlauf von Uberoi und Freymuth (1970), Riddhagni (1971) und von Cannon und Champagne (1991) für verschiedene Scheiben und Siebe durchgeführt. Hierzu gehören auch die Arbeiten von Carmody (1964), Hwang und Baldwin (1966). Eine umfassende Zusammenstellung gesicherter experimenteller Daten freier turbulenter Grenzschichtströmungen, in die der achsensymmetrische Nachlauf enthalten ist, gibt Rodi (1975).

Die einzigen Messungen, bei denen das Ausbreitungs- und Austauschverhalten von Temperaturfluktuationen im Nachlauf einer beheizten Kugel untersucht wird, sind bei Freymuth und Uberoi (1973), Freymuth (1975) und Gibson, Chen und Lin (1968) zu finden. Gibson et al. führen die Experimente in einem horizontalen Wasserkanal durch, wobei erhitztes Wasser in den Nachlauf injiziert wird. Freymuth und Uberoi benutzen einen Windkanal, in dem die Kugel optisch beheizt wird. Gibson et al. bestimmen auf der Basis der gemessenen axialen Geschwindigkeit und der Temperatur für Abstände von 60 Kugeldurchmessern die turbulenten Dissipationsraten der kinetischen Energie der Turbulenz und der Intensität der Temperaturfluktuationen. Im Mittelpunkt der Arbeit von Freymuth und Uberoi steht die Bestimmung der einzelnen Anteile aus Produktion, Konvektion, Diffusion und Dissipation in der Bilanzgleichung der Temperaturfluktuationen. An verschiedenen axialen Positionen messen sie die Fluktuationen der axialen und radialen Geschwindigkeiten und der Temperatur. Der radiale turbulente Wärmetransport, die turbulente Diffusion der Temperatur, die Intensität der Temperaturfluktuationen, sowie die Abhängigkeit der Temperaturspektren von den Parametern der Nachlaufströmungen werden ermittelt. Die Untersuchungen beschränken sich auf den Ähnlichkeitsbereich, der bei ihrer Anordnung für Abstände größer als 80 Kugeldurchmesser erreicht ist. Zur Untersuchung des Abklingverhaltens der Turbulenz führt Freymuth (1975) in derselben Versuchsanordnung weitere Ex-

perimente durch. Die Messungen erfassen aber nur den Fernbereich des Nachlaufs, wobei die Reynolds-Zahl der Anströmung variiert wird.

Alle aufgeführten experimentellen Arbeiten behandeln Nachlaufströmungen hinter rotationssymmetrischen Körpern. Die durch Beheizung der Körper auftretenden Dichteunterschiede sind aber so gering, daß Auftriebskräfte vernachlässigbar sind.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß experimentelles Datenmaterial bei turbulenter Mischkonvektion in achsensymmetrischen Nachlaufströmungen nicht existiert. Die theoretischen Abhandlungen basieren auf laminarer Strömung und können somit für den turbulenten Fall nicht herangezogen werden.

#### 1.4 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Experimentelle Untersuchungen in flüssigem Natrium erfordern selbst bei einfachster Geometrie eine aufwendige Versuchstechnik und werden durch die stark exotherme Reaktion mit Luft und Wasser erschwert. Die Messung kleiner Geschwindigkeiten bei schnell veränderlichen Momentanwerten, die typisch für turbulente Strömungen sind, bereitet Schwierigkeiten. Die turbulenten Transportgrößen für Impuls und Wärme können aus Messungen nicht direkt bestimmt werden. Zur Analyse der Transportmechanismen bei Mischkonvektion sind diese Turbulenzgrößen aber notwendig.

Natrium besitzt ähnliche kinematische Eigenschaften wie Wasser. Die molekulare Prandtl-Zahl von Natrium,  $Pr = 0.006$ , ist um drei Größenordnungen geringer als bei Wasser,  $Pr = 7.0$ . Die molekularen Diffusionsvorgänge des Temperaturfeldes in Natrium sind gegenüber dem turbulenten Anteil nicht mehr vernachlässigbar.

Zur Entwicklung von Gesetzmäßigkeiten zur Übertragbarkeit von Ergebnissen in Wasser auf die Verhältnisse in Natrium und zur Verifizierung des  $k-\epsilon$  Turbulenzmodells bei Mischkonvektion müssen die turbulenten Größen gemessen werden.

Ziel der Arbeit ist es, im Modellfluid Wasser detaillierte Messungen des turbulenten Impulstransportes, des axialen und radialen Wärmetransports und des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes durchzuführen.

Das auftriebserweiterte  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell basiert auf Modellansätzen,

die in die exakten turbulenten Transportgleichungen eingeführt werden. Die Anteile der maßgebenden Terme in den exakten Transportgleichungen werden bestimmt. Aus den Meßdaten wird das Ausbreitungsverhalten und die axiale Entwicklung der Temperatur und der Geschwindigkeit ermittelt.

Auf die Einleitung und Definition der untersuchten Anordnung werden im nächsten Kapitel (Kapitel 2) zunächst die Grundgleichungen der Auftriebsströmung angegeben. Dies beinhaltet die Gleichungen für die Größen des Hauptströmungsfeldes und die Transportgleichungen für die turbulenten Korrelationen. Die Modellansätze zur Ableitung des auftriebserweiterten  $k-\epsilon$  Turbulenzmodells werden erläutert und das vollständige Gleichungssystem präsentiert. Um Anisotropieeffekten infolge des Auftriebs in der Modellierung Rechnung zu tragen, wird eine Erweiterung durch eine Transportgleichung für die Intensität der Temperaturfluktuationen angegeben.

Der experimentelle Aufbau und die verwendete Meßtechnik wird in Kapitel 3 dargestellt. Die Grundlagen der Laser-Doppler-Anemometrie zur Messung der Geschwindigkeiten und deren Besonderheiten im Zusammenhang bei der Messung im Auftriebsstrahl werden bereitgestellt.

Die Darstellung der Meßergebnisse und der daraus ermittelten Turbulenzgrößen erfolgt in Kapitel 4. Ein Vergleich zwischen Zwangs- und Mischkonvektion zeigt die thermo- und fluiddynamischen Phänomene, die durch die Wechselwirkungen zwischen erzwungener und freier Konvektion bedingt sind. Der Einfluß des Auftriebs im Zusammenhang mit dem  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell wird dabei herausgestellt.

Abschließend werden in Kapitel 5 die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt.

## 2. Theorie

### 2.1 Einführung

Turbulente Strömungen sind im allgemeinen dreidimensional, instationär und drehungsbehaftet. Sie zeigen komplexe Variationen des Geschwindigkeits-, Temperatur- und Druckfeldes nach Ort und Zeit. Durch die Turbulenzbewegung tritt ein hoher Impuls- und Wärmeaustausch auf, der eine intensive Durchmischung bewirkt.

Eine wesentliche Eigenschaft der Turbulenz ist ihr dissipativer Charakter. Großskalige Wirbelstrukturen werden durch die Hauptströmung und durch andere Wirbel gestreckt, so daß immer kleinere Wirbel entstehen. In den kleinsten Wirbeln wird durch molekulare Wechselwirkungen die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung in innere Energie des Fluids überführt. Die Längen- und Zeitskalen der dissipativen Elemente sind um mehrere Größenordnungen kleiner, als die der energietragenden, großskaligen Bewegungen.

Zur Auflösung der kleinsten Strukturen erfordert die Berechnung der exakten, zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen eine sehr feine Diskretisierung. Ein erster Weg in diese Richtung wird mit der "large-eddy" Simulation beschritten, bei der die energietragenden Wirbel direkt berechnet und die kleinskaligen Verteilungen modelliert werden.

Bei kleinen Turbulenzgraden ist bereits eine volle direkte numerische Simulation der Strömung möglich. Bei größeren Reynolds-Zahlen und besonders bei Strömungen mit Auftriebseffekten ist die Leistungsfähigkeit heutiger Rechenanlagen schnell überschritten. In diesen Strömungsfällen müssen sowohl die großskaligen Strukturen als auch die kleinsten dissipativen Strukturen erfaßt werden.

Zur mathematischen Beschreibung turbulenter Strömungen wird deshalb üblicherweise eine statistische Betrachtungsweise eingeführt, bei der die gemittelten Gleichungen behandelt werden. Durch die Mittelung der nicht-linearen konvektiven Terme der Schwankungsbewegung entstehen zwischen den Fluktuationsgrößen unbekannt Korrelationen. Das resultierende Gleichungssystem ist nicht geschlossen. Zur Schließung des Systems wird in dieser Arbeit das auftriebserweiterte  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell vorgestellt. Eine umfassende Übersicht der für praktische Anwendungen verwendeten Turbulenzmodelle ist in Rodi und Murakami (1989) zu finden.

## 2.2 Grundgleichungen

Die thermo- und fluiddynamischen Prozesse turbulenter Strömungen werden durch die zeitabhängigen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie in ihren Einzelheiten exakt beschrieben. Zusammen mit einer Zustandsgleichung bilden sie ein geschlossenes Gleichungssystem.

Die Grundgleichungen für die Strömungsgrößen Geschwindigkeit  $u_i$ , Temperatur  $T$  und Druck  $p$  eines Newtonschen Fluids bilden den Ausgangspunkt zur mathematischen Behandlung turbulenter Strömungen. Die Bilanzgleichungen für Strömungsvorgänge lauten in Tensornotation geschrieben:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (2.1)$$

Impulsbilanzgleichung (Navier-Stokes-Gleichung):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i \quad . \quad (2.2)$$

Energiebilanzgleichung:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad . \quad (2.3)$$

Darin sind  $\nu$  die kinematische Viskosität,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck und  $g_i$  die Komponente der Erdbeschleunigung in die Richtung  $x_i$ . Wir betrachten ein inkompressibles Fluid, bei dem die auftretenden relativen Dichteunterschiede klein sind. Die Dichte ist damit nur eine Funktion der Temperatur.

$$\rho = \rho(T) \quad . \quad (2.4)$$

Da die Strömungsgeschwindigkeiten relativ klein sind, tritt in der Energiebilanzgleichung (2.3) die Temperatur selbst als abhängige Variable auf. Effekte durch viskose Dissipation sollen vernachlässigbar klein sein. Im Strömungsfeld sollen keine zusätzlichen inneren Wärmequellen auftreten.

Bei den Gleichungen (2.1) bis (2.4) handelt es sich um ein nicht-lineares, partielles Differentialgleichungssystem, bei dem die Energie- und Impulsbilanzgleichungen über die temperaturabhängige Dichte im Auftriebsglied  $\rho g_i$  gekoppelt wird. Aus den in der Einführung genannten Schwierigkeiten ist es für praktische Anwendungen nicht lösbar.

Durch die üblicherweise verwendete statistische Betrachtung werden die Momentanwerte der Größe  $\Phi_1$ , die eine Funktion des Ortes  $x_1$  und der Zeit  $t$  ist, in einen Mittelwert  $\bar{\Phi}_1$  und einen Fluktuationsanteil  $\Phi'_1$  aufgespalten.

$$\Phi_1(x_1, t) = \bar{\Phi}_1 + \Phi'_1 \quad (2.5)$$

Für die betrachtete Strömung ist der Mittelwert  $\bar{\Phi}_1$  durch den zeitlichen Mittelwert gegeben. Es ist

$$u_1 = \bar{u}_1 + u'_1 \quad (2.6a)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (2.6b)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.6c)$$

Einsetzen der Aufspaltungen mit anschließender zeitlicher Mittelung führt auf den Reynoldsschen Gleichungssatz für die Größen des Hauptströmungsfeldes. Für im Mittel stationäre Strömungen lauten sie:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (2.7)$$

Impulsbilanzgleichung:

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_1 u'_j} \right) + \rho g_1 \quad (2.8)$$

Energiebilanzgleichung:

$$\rho c_p \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho c_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} - \rho c_p \overline{u'_1 T'} \right) \quad (2.9)$$

Hierin ist  $Pr$  die Prandtl-Zahl. Sie beschreibt das Verhältnis der molekularen Transportkoeffizienten von Impuls und Wärme.

$$Pr = \frac{\nu}{\Gamma} \quad (2.10)$$

Die Größe  $\Gamma$  ist die Diffusivität oder Temperaturleitzahl, die den molekularen Wärmetransport charakterisiert.  $Pr$ ,  $\nu$  und  $\Gamma$  sind reine Stoffgrößen.

$$\Gamma = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (2.11)$$

Die Gleichungen (2.7) bis (2.9) der mittleren Strömung und die Zustandsgleichung (2.4) stellen kein geschlossenes System dar. Durch den Mittelungsprozess der nichtlinearen konvektiven Glieder in den zeitabhängigen Gleichungen treten neue unbekannte Korrelationen zwischen den Fluktuationsgrößen auf. Die Korrelationen  $-\rho \overline{u'_1 u'_j}$  und  $-\rho c_p \overline{u'_1 T'}$  beschreiben den Impuls- und Wärmetransport durch die Schwankungsbewegung.

$-\rho \cdot \overline{u'_i u'_j}$  wirken wie Spannungen auf das Fluid und werden als turbulente Spannungen bezeichnet. Die Korrelationen  $-\rho c_p \cdot \overline{u'_i T'}$  sind die entsprechenden turbulenten Wärmeflüsse.

Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse in die Richtung  $x_i$  führen zu einer Erhöhung des molekularen Impulsaustauschs  $\rho \nu \cdot \partial \bar{u}_i / \partial x_j$  und des molekularen Wärmeaustauschs  $\lambda \cdot \partial \bar{T} / \partial x_i$ . Bei großen Reynolds-Zahlen ist in den meisten Strömungsbereichen der molekulare Austausch gegenüber dem turbulenten Austausch vernachlässigbar klein.

Das Gleichungssystem Gln.(2.7) bis (2.9) läßt sich für die mittleren Größen  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{T}$  und  $\bar{p}$  lösen, wenn für die zusätzlichen turbulenten Terme Bestimmungsgleichungen angegeben werden. Grundlage für derartige Schließungsmaßnahmen, bei denen die unbekanntes Korrelationen auf bekannte Größen zurückgeführt werden, sind in neuerer Zeit die exakten Transportgleichungen für die Korrelationen.

### 2.3 Exakte Transportgleichungen

Die exakten Transportgleichungen der turbulenten Transportgrößen lassen sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten. Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen ist in Hinze (1975), Jischa (1982), Bradshaw und Cebeci (1981) und Rodi (1972) gegeben. Bei den angegebenen Gleichungen ist die Einsteinsche Summationskonvention zu beachten. Dies bedeutet, daß bei wiederholtem Auftreten eines Indizes in einem Term die Summe über alle drei Raumrichtungen zu bilden ist. Die exakte Transportgleichung für die turbulenten Spannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  lautet:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j) - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) - \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) - \alpha \left( g_j \overline{u'_i T'} + g_i \overline{u'_j T'} \right) \quad (2.12)$$

*konvektiver  
Transport*

*turbulente*

*Diffusion*

*viskose*

$P_{ij}$  = Spannungsproduktion     $G_{ij}$  = Auftriebsproduktion

$$- 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} + \frac{p'}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} ,$$

$\epsilon_{ij}$  = Dissipation

$\Pi_{ij}$  = Druck-Scher-Korrelation  
("pressure strain")

worin  $\alpha$  der thermische Ausdehnungskoeffizient ist, der die Dichteänderungen infolge von Temperaturänderungen beschreibt.

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.13)$$

$\delta_{ik}$  und  $\delta_{jk}$  stellen das Kroneckersymbol dar, wobei  $\delta_{i=k} = 1$  und  $\delta_{i \neq k} = 0$  ist. Der Einfluß des Auftriebs tritt im Produktionsterm  $G_{ij}$  auf. Aufgrund der Koppelung zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfluktuationen entstehen zusätzliche turbulente Spannungen. Die physikalische Bedeutung der weiteren Terme ist angegeben.

Bei großer turbulenter Reynolds-Zahl

$$Re_t = \sqrt{k} \frac{L}{\nu} , \quad (2.14)$$

in der  $L$  ein charakteristisches integrales Längenmaß ist, sind die kleinsten Wirbel der Schwankungsbewegung näherungsweise lokal isotrop, das heißt sie sind richtungs- und ortsunabhängig. Unter diesen Voraussetzungen ist in den drei turbulenten Normalspannungen die Energie der turbulenten Schwankungsbewegung vollständig gespeichert. Die turbulenten Schubspannungen leisten keinen Beitrag. Die Summe der Normalspannungen  $-\overline{u'_i u'_i}$  stellt die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  dar.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} ( \overline{u'_1{}^2} + \overline{u'_2{}^2} + \overline{u'_3{}^2} ) \quad (2.15)$$

Die exakte Transportgleichung für  $k$  berechnet sich aus der Summe der Transportgleichungen (2.12) für  $\overline{u'_i u'_j}$  mit  $i=j$ .

$$\overline{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_k \left( \frac{u'_1 u'_1}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (2.16)$$

*konvektiver Transport*                      *turbulente Diffusion*                      *molekulare Diffusion*

$$- \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \quad - \alpha g_i \overline{u'_i T'} \quad - \nu \frac{\partial \overline{u}'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}'_j}{\partial x_k}$$

$P =$  *Spannungsproduktion*       $G =$  *Auftriebsproduktion*       $\epsilon =$  *Dissipationsrate*

Die Transportgleichung ist Grundlage für das  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell, in dem eine modellierte Form von Gleichung (2.16) gelöst wird.

Durch das Hauptströmungsfeld wird kinetische Energie der Turbulenz konvektiv transportiert. Für die Erzeugung und Erhaltung der Turbulenz ist der Produktionsterm  $P$  verantwortlich. Durch Wechselwirkungen der turbulenten Spannungen mit dem Gradienten der Hauptströmung wird der Hauptströmung Energie entzogen und der Turbulenz zugeführt. Der Auftriebsterm  $G$  stellt den Austausch von potentieller Energie des Systems und kinetischer Energie dar. Bei der untersuchten instabilen Schichtung ist  $G$  ein Quellterm, so daß die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  erhöht wird. Durch den diffusiven Transport erfolgt eine örtliche Umverteilung von  $k$ . Bei Integration über das Strömungsfeld wird der Term zu Null. Der turbulente Anteil der Diffusion wird bestimmt durch Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten und durch Fluktuationen des Druckes. Bei großen Reynolds-Zahlen ist der molekulare Anteil des Diffusionsprozesses vernachlässigbar. Die Dissipationsrate  $\epsilon$  der kinetischen Energie der Turbulenz überführt schließlich kinetische Energie der Schwankungsbewegung infolge viskoser Kräfte in innere Energie des Fluids. Sie wird

hervorgerufen durch den Gradienten der Fluktuationskomponenten und ist stets eine Energiesenke.

Basierend auf den Überlegungen von Harlow und Nakayama (1968) leiten Tennekes und Lumley (1972) eine exakte Transportgleichung für die Dissipationsrate  $\epsilon$  aus den Navier-Stokes-Gleichungen her.

$$\bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = -2\nu \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} - 2\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

konvektiver  
Transport

Produktion durch die Hauptströmung

$$-2\nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)^2} - 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left( \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}$$

Produktion durch  
Wirbelfadenstreckung

turbulente Diffusion

$$+ \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k^2} - 2\nu^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2} \quad (2.17)$$

molekulare  
Diffusion

viskose Vernichtung

Bei lokaler Isotropie wird von Tennekes und Lumley gezeigt, daß die Produktion durch die Hauptströmung gegenüber den restlichen Gliedern vernachlässigbar ist. Im Vergleich zur turbulenten Diffusion kann zusätzlich der molekulare Anteil vernachlässigt werden.

$$\bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \overline{u'_i \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)^2} + 2 \frac{\nu}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} \right)$$

konvektiver  
Transport

turbulente Diffusion

(2.18)

$$-2\nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - 2\nu^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2}$$

Produktion durch  
Wirbelfadenstreckung

viskose Vernichtung

Die resultierende Gleichung ist zusammen mit der Gleichung für  $k$  die Basis für das  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell. Die Transportgleichung für  $\epsilon$  enthält eine Anzahl neuer unanschaulicher Korrelationen. Der Produktionsterm durch den Auftrieb ist in dieser Gleichung unberücksichtigt. Der Auftriebseinfluß wird erst in der modellierten Gleichung eingeführt.

Die Energiebilanzgleichung (2.9) der Hauptströmung enthält die Korrelation  $\overline{u'_1 T'}$  für die sich eine exakte Transportgleichung herleiten läßt.

$$\overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_1 T'}}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_1 u'_k T'} + \frac{1}{\rho} \delta_{1k} \overline{p' T'} - \Gamma \overline{u'_1} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} - \nu \overline{T'} \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_k} \right)$$

*konvektiver Transport*
*turbulente Diffusion*
*molekulare*

$$- \left( \overline{u'_1 u'_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_k} \right) - \alpha g_1 \overline{T'^2} \tag{2.19}$$

*Produktion durch Hauptströmungsfeld*
*Auftriebsproduktion*

$$- (\nu + \Gamma) \left( \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_1}}$$

*viskose Vernichtung*
 $\Pi_{1T} =$  *Druck-Temperatur-gradient-Korrelation ("pressure scrambling")*

Die physikalische Bedeutung der einzelnen Glieder ist angegeben. Wie in der Gleichung für  $\overline{u'_1 u'_j}$  treten Terme auf, die die Wechselwirkungen zwischen dem Gradienten der mittleren Temperatur und den turbulenten Spannungen sowie zwischen den mittleren Geschwindigkeiten und den turbulenten Wärmeflüssen darstellen. Das Hauptsenkenglied in der Gleichung für  $\overline{u'_1 T'}$  ist der Term  $\Pi_{1j}$ , der eine Korrelation zwischen Druckfluktuationen und den Gradienten der Temperaturfluktuationen enthält. Im Auftriebsterm steht die Intensität der Temperaturfluktuationen.

Eine zusätzlich erweiterte Form des auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells verwendet die exakte Transportgleichung für  $T'^2$ .

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_k T'^2} - \Gamma \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} \right) \quad (2.20)$$

konvektiver
turbulente
molekulare  
Transport
Diffusion

$$- 2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} - 2\Gamma \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} .$$

$P_T =$  Produktion durch  $\epsilon_T =$  Dissipation  
das Temperatur-  
Feld

Analog zur Gleichung für  $k$ , die einen Maßstab für die Geschwindigkeitsfluktuationen liefert, legt die Transportgleichung für  $T'^2$  einen Maßstab für die Temperaturfluktuationen fest. Die Gl.(2.16) für  $k$  und Gl.(2.20) sind ähnlich aufgebaut. Die Gleichung für  $T'^2$  enthält jedoch kein Auftriebsglied und kein Druckglied.

Die aufgeführten Transportgleichungen sind sehr komplex. Durch die Diffusions- und Dissipationsglieder werden unbekannte Korrelationen höherer Ordnung eingeführt.

Um eine bessere Übersicht zu erhalten, sind die exakten Transportgleichungen zusammen mit der Kontinuitäts-, Impulsbilanz- und Energiebilanzgleichung für die Hauptströmung in Tabelle (2.1) zusammengefaßt. Die einzelnen Terme der Gleichungen sind hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung geordnet.

Größe	Konvektion	Diffusion	Produktion Hauptströmung	Produktion Auftrieb	Dissipation	Druck- Korrelation	Quelle Senke	Gl.
Kont.	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$							(2.21)
Impuls	$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$	$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right)$		$+ \rho g_i$			$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$	(2.22)
Energie	$\rho c_p \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$	$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho c_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \rho c_p \overline{u'_i T'} \right)$						(2.23)
$\overline{u'_i u'_j}$	$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}$	$= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{\rho}{\rho} (\delta_{jk} \overline{u'_i u'_k} + \delta_{ik} \overline{u'_j u'_k}) - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right)$	$- \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)$	$- \alpha \left( g_i \overline{u'_j T'} + g_j \overline{u'_i T'} \right)$	$- 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}$	$+\frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j \partial x_i}$		(2.24)
$k$	$\bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k}$	$= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_k \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right)$	$-\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}$	$-\alpha g_i \overline{u'_i T'}$	$- \nu \frac{\partial \overline{u'_j u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}$			(2.25)
$\epsilon$	$\bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}$	$= - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_k u'_k u'_i}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_k} \right)^2$			$- 2\nu^2 \frac{\partial \overline{u'_k u'_k}}{\partial x_i \partial x_j}$	$- 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{p'} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \right)$		(2.26)
$\overline{u'_i T'}$	$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k}$	$= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_i u'_k T'} + \frac{1}{\rho} \delta_{ik} \overline{p' T'} - \Gamma \overline{u'_i} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} - \nu T' \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right)$	$- \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)$	$-\alpha g_i \overline{T'^2}$	$- (\nu + \Gamma) \frac{\partial \overline{u'_i} \partial \overline{T'}}{\partial x_k \partial x_k}$	$+\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_i}$		(2.27)
$\overline{T'^2}$	$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k}$	$= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_k T'^2} - \Gamma \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} \right)$	$- 2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}$		$- 2\Gamma \frac{\partial \overline{T'} \partial \overline{T'}}{\partial x_k \partial x_k}$			(2.28)

Tab.(2.1): Gleichungen des Hauptströmungsfeldes und exakte Transportgleichungen für stationäre, lokal isotrope Strömungen.

## 2.4 Das auftriebserweiterte k-ε Turbulenzmodell

Das Gleichungssystem (2.7) bis (2.9) kann durch Einführung von Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  und turbulenten Wärmeflüsse  $\overline{u'_i T'}$  nicht geschlossen werden.

Die Schließung des Systems erfolgt durch Einbringen zusätzlicher halbempirischer Informationen, bei denen die verschiedenen Korrelationen durch Näherungsannahmen modelliert werden.

### 2.4.1 Modellierung

Das Turbulenzmodell baut auf dem Prinzip der Wirbelviskosität und der Wirbeldiffusivität auf. In Analogie zum Newtonschen Ansatz zur Berechnung des molekularen Spannungstensors und unter Anwendung des Austauschansatzes von Boussinesq werden die turbulenten Spannungen modelliert.

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.29)$$

Die turbulenten Spannungen sind über die Wirbelviskosität  $\nu_t$  proportional zum Gradienten der mittleren Geschwindigkeit. Der turbulente Wärmefluß wird in Anlehnung an den Fourierschen Wärmeleitansatz durch Einführung der Wirbeldiffusivität zum Gradienten der mittleren Temperatur in Beziehung gesetzt.

$$-\overline{u'_i T'} = \Gamma_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (2.30)$$

Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  und die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  sind im Gegensatz zu den molekularen Größen keine Stoffgrößen, sondern von der Turbulenzstruktur abhängig.  $\nu_t$  wird als skalare isotrope Größe behandelt. Basierend auf der Reynolds-Analogie zwischen Wärme- und Impulsaustausch wird die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  über die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  definiert.

$$\Gamma_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (2.31)$$

Der turbulente Wärmeaustausch ist mit der Dynamik der Strömung gekoppelt. Obwohl  $\sigma_t$  in der Strömung variieren kann, ist sie im k-ε Turbulenzmodell eine Konstante. Aus Dimensionsbetrachtungen heraus ist die Wirbelviskosität proportional zu einem Geschwindigkeitsmaßstab  $\hat{V}$  und einem Längenmaß  $\hat{L}$ . Ein physikalisch sinnvoller Geschwindigkeitsmaßstab ist durch die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  gegeben.

$$\nu_t \propto \hat{V} \cdot \hat{L} \quad , \quad (2.32)$$

$$\hat{V} \propto k^{1/2} \quad . \quad (2.33)$$

Nach Kolmogorov (1968) und Prandtl (1945) wird die Wirbelviskosität durch

$$\nu_t = C'_\mu \sqrt{k} \cdot \hat{L} \quad (2.34)$$

ausgedrückt, worin  $C'_\mu$  eine empirische Konstante ist. Die Gl.(2.34) ist als Kolmogorov-Prandtl Beziehung bekannt. Nach Überlegungen von Harlow und Nakayama (1968) ist durch eine Kombination aus kinetischer Energie der Turbulenz  $k$  und deren Dissipationsrate  $\varepsilon$  ein Längenmaß festgelegt.

$$\hat{L} \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad . \quad (2.35)$$

Mit Einführung von Gl.(2.35) in Gl.(2.34) ergibt sich  $\nu_t$  zu

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad , \quad (2.36)$$

worin  $C_\mu$  ein dimensionsloser empirischer Faktor ist. Die Wirbelviskosität wird damit durch Lösung der Transportgleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  bestimmt. Zur Lösung der Differentialgleichungen von  $k$  und  $\varepsilon$  müssen in den Transportgleichungen (2.16) und (2.18) Modellannahmen getroffen werden. Die Einzelheiten der Modellierungen werden bei Rodi (1972), Hossain (1980), Launder und Mitarbeitern (1972, 1975a, 1975b, 1976) und Lumley und Khajeh-Nouri (1974) diskutiert.

In der Transportgleichung für  $k$  werden folgende Modellierungen eingeführt:

$$\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \left[ u'_k \left( \frac{u'_1 u'_1}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right] \quad , \quad (2.37)$$

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad , \quad (2.38)$$

$$\varepsilon = - \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \quad . \quad (2.39)$$

In der Gleichung für die Dissipationsrate  $\varepsilon$  müssen für das Diffusionsglied, die Glieder, die die Wirbelfadenstreckung und die viskose Ver-nichtung ausdrücken, Näherungen eingeführt werden, vgl. Launder et al. (1976). Die Modellannahmen in der Gleichung (2.18) für  $\varepsilon$  lauten:

$$\frac{\varepsilon^2}{k} \left( \begin{array}{c} P \\ C_{\varepsilon 1} \quad - \quad - \quad C_{\varepsilon 2} \\ \varepsilon \end{array} \right) = -2\nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - 2\nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \quad . \quad (2.40)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = - \left( \nu u'_1 \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\nu}{\rho} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_1}{\partial x_k} \right) \right) . \quad (2.41)$$

Darin sind  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$  und  $\sigma_\varepsilon$  empirische Konstanten.  $\sigma_k$  und  $\sigma_\varepsilon$  werden als Prandtl-Zahl für  $k$  und  $\varepsilon$  bezeichnet. Der Ausdruck  $P$ , Gl. (2.38), beschreibt die Produktion von  $k$  durch die Hauptströmung.

Der Auftrieb ist in der Gleichung für  $\varepsilon$  zunächst nicht enthalten. Rodi (1979) schlägt vor, das Verhältnis  $P/\varepsilon$  von  $k$  in Gleichung (2.40) durch die Gesamtproduktion  $(P+G)/\varepsilon$  zu ersetzen. Zur Unterscheidung zwischen vertikalen und horizontalen Auftriebsschichten wird für  $C_{\varepsilon 1}$  eine Funktion mit einem Auftriebsparameter  $R_f$  und einer weiteren empirischen Konstante  $C_{\varepsilon 3}$  eingeführt.

$$\frac{P}{\varepsilon} C_{\varepsilon 1} \Rightarrow \frac{(P+G)}{\varepsilon} C_{\varepsilon 1} (1 + C_{\varepsilon 3} R_f) . \quad (2.42)$$

Die Produktion  $G$  kinetischer Energie der Turbulenz durch den Auftrieb schreibt sich mit Gleichung (2.30) als

$$G = -\alpha g_1 \overline{u'_1 T'} = \alpha g_1 \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} . \quad (2.43)$$

Die Fluß-Richardson-Zahl  $R_f$  ist ein Parameter, der die Auftriebsproduktion  $G_v$  der Querschwanke  $v'^2$  zur Gesamtproduktion  $(P+G)$  gewichtet.

$$R_f = - \frac{1}{2} \frac{G_v}{(P+G)} . \quad (2.44)$$

Für vertikale Auftriebsschichten ist  $R_f = 0$ , da horizontale Querschwanke von den Auftriebskräften unbeeinflusst sind. Die Auftriebsproduktion  $G_v$  ist Null. In horizontalen Schichten sind die Querschwanke parallel zum Schwerevektor, so daß die gesamte Auftriebsproduktion in die Komponente  $v'^2$  übergeht.

$$R_f = \frac{G}{(P+G)} . \quad (2.45)$$

Bei Einführung der Modellannahmen in die exakten Transportgleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  ergeben sich die in Tabelle (2.2) angegebenen, modellierten Differentialgleichungen (2.49) und (2.50).

Das vollständige Gleichungssystem, bei dem die turbulenten Austauschgrößen für Impuls und Wärme mit dem auftriebserweiterten  $k$ - $\varepsilon$  Turbulenzmodell bestimmt werden, ist in Tab.(2.2) zusammengestellt. Das Modell ist ein sogenanntes Zwei-Gleichungs-Modell, bei dem  $\nu_t$  aus je einer Transportgleichung für einen Geschwindigkeitsmaßstab und einen Längenmaßstab berechnet wird.

Größe	Konvektion	Diffusion	Quellen/Senken	Gl.		
Kontinuität	$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$			(2.46)		
$\bar{u}_i$	$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} =$	$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \nu_t \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]$	$-\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{\rho} g_i$	(2.47)		
$\bar{T}$	$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} =$	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right]$		(2.48)		
$k$	$\bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} =$	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]$	$+ P + G - \varepsilon$	(2.49)		
$\varepsilon$	$\bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} =$	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right]$	$+\frac{\varepsilon^2}{k} \left[ C_{\varepsilon 1} \frac{(P+G)}{\varepsilon} (1+C_{\varepsilon 3} R_f) - C_{\varepsilon 2} \right]$	(2.50)		
Zustandsgl.	$\bar{\rho} = \rho(\bar{T})$			(2.51)		
Wirbelviskosität	$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$		(2.52)	turbulente Prandtl-Zahl	(2.55)	
Produktion von $k$	$P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$		(2.53)	Fluß-Richardson-Zahl	$R_f = \frac{1}{2} \frac{G_v}{(P+G)}$	(2.56)
Auftriebsproduktion von $k$	$G = -\alpha g_i \overline{u'_i T'} = \alpha g \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$		(2.54)			

Tab.(2.2): Das allgemeine, auftriebserweiterte  $k$ - $\varepsilon$  Turbulenzmodell.

Das mit Auftriebsgliedern erweiterte Standard  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell enthält sieben empirische Konstanten. Die Werte der Konstanten lassen sich zum Teil aus Messungen in einfachen Strömungsgeometrien bestimmen. Die übrigen Modellkonstanten werden durch Computer-Optimierung so bestimmt, daß eine große Anzahl von Experimenten mit geringen Abweichungen simuliert werden können.

Für Zwangskonvektion und Fluide mit  $Pr \geq 0.3$  geben Launder und Spalding (1974) einen Standardsatz der Modellkonstanten an, Tabelle (2.3).

Konstante	$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\sigma_t$
Wert	0.09	1.44	1.92	0.8	1.0	1.3	0.5-0.9

Tab.(2.3): Empirische Konstanten des auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells.

In verschiedenen Arbeiten werden auch auftriebsbehaftete Strömungen mit diesem Satz von Konstanten oder mit nur gering abweichenden Werten mit Erfolg simuliert; Hossain (1980), Markatos et al. (1982), Plumb und Kennedy (1977), Jackson et al. (1990).

Der Wert für die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  ist problemabhängig. Für freie Scherschichtströmungen werden mit  $\sigma_t \approx 0.6$  und für Wandgrenschichten mit  $\sigma_t \approx 0.9$  gute Übereinstimmungen zwischen Experiment und Rechnung erzielt.

Die Konstante  $C_{\epsilon 3}$  im Auftriebskorrekturglied der Transportgleichung für  $\epsilon$  wird von Rodi (1979) und Hossain (1980) angegeben.

#### 2.4.2 Merkmale des auftriebserweiterten Modells

In dem vorgestellten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell werden gegenüber dem Standardmodell für Zwangskonvektion mehrere Erweiterungen eingeführt, durch die Auftriebseffekte berücksichtigt werden. Die wichtigsten Merkmale des Modells und der im allgemeinen als Standarderweiterung bezeichneten Modellierungen sollen zusammengefaßt und ihre Grenzen aufgezeigt werden.

Wichtige Voraussetzung für die Modellannahmen des Turbulenzmodells ist die Beschränkung auf große turbulente Reynolds-Zahlen, so daß das Strömungsfeld näherungsweise lokal isotrop ist. Viele der Approximationen beruhen auf dieser Eigenschaft, besonders die der Transportgleichung für  $\epsilon$ .

Das Turbulenzmodell basiert auf Beziehungen für die Wirbelviskosität und

Wirbeldiffusivität. Die Modellansätze benutzen die Vorstellung, daß die Flüsse einer transportierten Größe dem Gradienten der verantwortlichen mittleren Größe folgen. Diese Modellbildung wird als Gradientendiffusionsansatz bezeichnet.

Quell- oder Senkenterme, durch die Auftriebseffekte eingeführt werden, treten in dem Gleichungssystem an drei Stellen auf: In der Impulsbilanzgleichung, in der Transportgleichung für  $k$  und in der Transportgleichung für die Dissipationsrate  $\varepsilon$ .

Das Auftriebsglied  $\bar{\rho}g_i$  in der Impulsbilanzgleichung des Hauptströmungsfeldes bewirkt eine Kopplung zwischen dem mittleren Temperaturfeld und dem mittleren Geschwindigkeitsfeld. Durch den Gradienten der mittleren Temperatur  $\partial\bar{T}/\partial x_i$  im Auftriebsproduktionsglied  $G$  der modellierten Transportgleichung für  $k$  wird die kinetische Energie der Turbulenz direkt durch das Temperaturfeld beeinflusst. Je nach Vorzeichen des Terms wird die kinetische Energie erhöht oder gedämpft.

Auftriebseinflüsse verändern das integrale Längenmaß der Turbulenz. Da durch den Ansatz der Gl. (2.34) das Längenmaß eng mit der Gleichung für  $\varepsilon$  verbunden ist, wird durch einfaches Ersetzen der Spannungsproduktion  $P$  durch die Gesamtproduktion  $(P+G)$  eine entsprechende Wirkung erzielt.

Nach Untersuchungen von Hossain (1980) kann der Auftriebseinfluß so schon zu einem guten Teil simuliert werden. Bei komplexeren Strömungen treten allerdings erhebliche Abweichungen auf. Die Gründe hierfür liegen in dem unrealistischen Ansatz für die Wirbelviskosität.

Das Turbulenzmodell verwendet eine isotrope Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität. Das bedeutet, daß alle turbulenten Spannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  und Wärmeflüsse  $\overline{u'_i T'}$  in gleicher Weise vom Auftrieb verändert werden. In Realität wirken Auftriebskräfte aber nur in vertikaler Richtung, so daß eine gerichtete Beeinflussung der Turbulenz stattfindet. Die Austauschkoefizienten  $\nu_t$  und  $\Gamma_t$  sind also anisotrope Größen. Die Wirbeldiffusivität ist aufgrund der konstanten turbulenten Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  starr an die Dynamik der Strömung gekoppelt. Aus Experimenten ist bekannt, daß sich die empirischen Konstanten  $C_\mu$  und  $\sigma_t$  in den Beziehungen für  $\nu_t$  und  $\Gamma_t$  im Strömungsfeld durch den Auftrieb stark ändern können. Im Standardmodell werden  $C_\mu$  und  $\sigma_t$  aber konstant gehalten.

Betrachten wir die Diffusionsglieder in den Gleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$ . Die Diffusivitäten von  $k$  und  $\varepsilon$  werden durch die Prandtl-Zahlen  $\sigma_k$  und  $\sigma_\varepsilon$  zur Wirbelviskosität  $\nu_t$  in Beziehung gesetzt. Da  $\nu_t$  isotrop ist, sind auch die Diffusionsflüsse der kinetischen Energie und der Dissipationsrate für alle Richtungen gleich groß.

### 2.4.3 Das algebraische Spannungs/Fluß $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell

Eine realistischere Simulation auftriebsbehafteter Strömungen wird erzielt, wenn die empirischen Konstanten  $C_\mu$  und  $\sigma_t$  Funktionen des Auftriebseinflusses sind. Das Prinzip der Wirbelviskosität/Wirbeldiffusivität wird beibehalten.

Rodi (1976), Hossain und Rodi (1982) entwickeln auf der Grundlage von Vorschlägen von Gibson und Launder (1978, 1976), ein Modell, bei dem die modellierten Transportgleichungen für  $\overline{u'_i u'_j}$ ,  $\overline{u'_i T'}$  und  $T'^2$  zu algebraischen Beziehungen vereinfacht werden. In dem Modell werden der konvektive und diffusive Transport der turbulenten Spannungen und der turbulenten Wärmeflüsse in den exakten Transportgleichungen (2.12) und (2.19) zum Transport von  $k$  in Beziehung gesetzt. Die Differentialterme der abhängigen Größen vereinfachen sich zu algebraischen Ausdrücken. Die auftretenden Auftriebsglieder in den Transportgleichungen bleiben durch die Approximationen vollständig erhalten. Die algebraischen Gleichungen lauten (Hossain (1980):

$$\overline{u'_i u'_j} = k \left[ \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1-C_2) \left( \frac{P_{ij}}{\epsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\epsilon} \right) + (1-C_3) \left( \frac{G_{ij}}{\epsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\epsilon} \right)}{C_1 + \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right)} \right], \quad (2.57)$$

$$\overline{u'_i T'} = \frac{\frac{k}{\epsilon} \left[ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + (1-C_{2T}) P_{iT} + (1-C_{3T}) G_{iT} \right]}{C_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right)}, \quad (2.58)$$

wobei

$$P = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j}, \quad G = -\alpha g_1 \overline{u'_i T'}$$

$$P_{ij} = - \left[ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right], \quad G_{ij} = -\alpha \left[ g_j \overline{u'_i T'} + g_i \overline{u'_j T'} \right],$$

$$P_{iT} = \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_k}, \quad G_{iT} = -\alpha g_i \overline{T'^2}$$

Bei Vernachlässigung des Konvektions- und Diffusionsterms in der Transportgleichung (2.20) für  $T'^2$  und einem geeigneten Ansatz für die Dissipation  $\epsilon_T$  leitet sich eine algebraische Beziehung für  $T'^2$  her (vgl. Launder (1975)).

$$\overline{T'^2} = C'_T \frac{k}{\epsilon} \overline{u'_i T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}. \quad (2.59)$$

Die empirische Größe  $C'_T$  ist das Verhältnis des Zeitmaßstabes der Temperaturfluktuationen zu dem der Geschwindigkeitsfluktuationen. Die Diffusionskoeffizienten  $\nu_t/\sigma_k$  und  $\nu_t/\sigma_\epsilon$  in den modellierten Gleichungen für  $k$  und  $\epsilon$  werden durch leicht geänderte Diffusionsansätze ersetzt, Daly und Harlow (1970).

$$\frac{\nu_t}{\sigma_k} \Rightarrow C_s \frac{\overline{u'_i u'_j} k^2}{k \epsilon} \quad (2.60)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \Rightarrow C_\epsilon \frac{\overline{u'_i u'_j} k^2}{k \epsilon} \quad (2.61)$$

Ohne Auftrieb gehen die Diffusionsansätze (2.60) und (2.61) in die des Standard  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells über, Hossain (1980). Die Gleichungen für  $k$  und  $\epsilon$  schreiben sich dann

$$\bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \nu + C_s \frac{\overline{u'_i u'_j} k^2}{k \epsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \alpha g_i \overline{u'_i T'} - \epsilon \quad (2.62)$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \nu + C_\epsilon \frac{\overline{u'_i u'_j} k^2}{k \epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} (P+G) (1 + C_{\epsilon 3} R_f) - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.63)$$

Mit den Gleichungen (2.57) bis (2.59) werden die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  und die empirische Konstante  $C_\mu$  Funktionen des Auftriebs.

$$\sigma_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{1}{\overline{u'_i T'}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (2.64)$$

$$C_\mu = \frac{\overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \delta_{ij} k}{\left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)} \cdot \frac{\epsilon}{k^2} \quad (2.65)$$

Die algebraischen Beziehungen für  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{u'_i T'}$  führen den richtungsabhängigen Einfluß des Auftriebs in  $\sigma_t$  und  $C_\mu$  ein. Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  und die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  bleiben jedoch isotrope Größen.

Die algebraischen Ausdrücke, zusammen mit den angegebenen Transportgleichungen für  $k$  und  $\epsilon$  und den Gleichungen für die Hauptströmung, bilden ein geschlossenes Gleichungssystem, das mit entsprechenden Randbedingungen gelöst werden kann.

Statt der algebraischen Gleichung (2.59) für  $\overline{T'^2}$  kann auch eine zusätzliche Transportgleichung gelöst werden, um die Intensität der Temperaturfluktuationen zu berechnen. Die Kopplung zwischen  $\overline{T'^2}$  und den anderen

Strömungsgrößen ist im allgemeinen nur relativ schwach. Nach Hossain (1980) führt dies kaum zu einer Verbesserung der Ergebnisse.

Die Verteilung der Intensität der Temperaturfluktuationen kann jedoch in Hinblick auf die Übertragbarkeit Wasser/Natrium von Interesse sein. In Flüssigmetallen läßt sich die Temperatur genau messen, so daß eine berechnete Verteilung für  $T'^2$  mit experimentellen Ergebnissen verglichen und beurteilt werden kann. Der Transport der Korrelation der Temperaturfluktuationen wird durch die exakte Transportgleichung (2.20) beschrieben. Mit geeigneten Modellannahmen ergibt sich die modellierte Transportgleichung für  $T'^2$ .

$$\bar{u}_i \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( C_{TT} \frac{k^2 \overline{\partial T'^2}}{\epsilon \partial x_i} \right) - 2 \overline{u_i T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{C_T} \frac{\epsilon}{k} \overline{T'^2}, \quad (2.66)$$

mit den empirischen Konstanten  $C'_T$  und  $C_{TT}$ .

Das als  $k-\epsilon-T'^2$  Modell oder  $k-\epsilon-g$  Modell bezeichnete Turbulenzmodell wird von Tamanini (1977) zur Berechnung eines vertikalen Auftriebsfreistrahls in Luft erfolgreich eingesetzt.

Die in diesem Kapitel aufgetretenen neuen empirischen Konstanten sind in Tabelle (2.4) zusammen mit den von Launder und Mitarbeitern angegebenen Werten aufgeführt.

Konstante	$C'_T$	$C_{TT}$	$C_\epsilon$	$C_S$	$C_{1T}$	$C_{2T}$	$C_{3T}$	$C_1$	$C_2$
Wert	1.6	0.13	0.15	0.24	3.0	0.5	0.5	2.2	0.55

Tab. (2.4): Empirische Konstanten für auftriebserweiterte Formen des  $k-\epsilon$  Turbulenzmodells.

## 2.5 Gleichungen des Strömungsproblems

Die mathematische Behandlung allgemeiner, stationärer turbulenter Strömungen mit Auftriebseinflüssen ist abgeschlossen. Wir wenden jetzt das beschriebene Modell auf das in dieser Arbeit untersuchte Strömungsproblem an.

### 2.5.1 Annahmen und Vereinfachungen

Die Nachlaufströmung der Kugel wird durch die in Abb.(1.1) verwendete Bezeichnungsweise beschrieben. Für die zeitlichen Mittelwerte und Fluktuationsgrößen der Geschwindigkeitskomponenten, der Temperatur und des Druckes gilt die durch Gln.(2.6a-c) eingeführte Schreibweise.

Das Strömungsfeld im Nachlauf der Kugel ist eine typische Scherschichtströmung mit Grenzschichtcharakter, bei der sich die beschriebenen Gleichungen wesentlich vereinfachen lassen.

Die Geschwindigkeit  $\bar{u}$  in die Hauptströmungsrichtung  $x$  ist wesentlich größer als die Querkomponente  $\bar{v}$  der Geschwindigkeit. Aufgrund der geringen radialen Erstreckung der Strömung sind die Gradienten der statistischen Größen in  $r$ -Richtung wesentlich größer als in  $x$ -Richtung. Weiterhin wird angenommen, daß die Strömung im Bereich des Nachlaufs achsensymmetrisch ist. Der interessierende Strömungsbereich kann damit als zweidimensional betrachtet werden, so daß die statistischen Größen nur Funktionen von  $x$  und  $r$  sind. Das bedeutet

$$\bar{u} \gg \bar{v} \quad , \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (2.68)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \text{statistische Größen} \right) = 0 \quad . \quad (2.70)$$

Die mittlere Geschwindigkeitskomponente in  $\varphi$ -Richtung ist Null.

$$\bar{w} = 0 \quad . \quad (2.71)$$

Aus den Grenzschichtapproximationen Gln.(2.67) und (2.68) resultiert, daß radiale Druckvariationen vernachlässigbar klein sind.

$$\bar{p} = \bar{p}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{d\bar{p}}{dx} \quad . \quad (2.72)$$

### 2.5.2 Gleichungen der Hauptströmung und der Turbulenzgrößen

Nach Einführung der Annahmen (2.67) bis (2.72) reduzieren sich die Gleichungen (2.7) bis (2.9) der Hauptströmung.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}) = 0 \quad . \quad (2.73)$$

Impulsbilanzgleichung in x-Richtung:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu_o r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \overline{u'v'} \right) + \frac{\bar{\rho}(\bar{T}) - \rho_o}{\rho_o} g \quad . \quad (2.74)$$

Energiebilanzgleichung:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\nu_o}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - r \overline{v'T'} \right) \quad . \quad (2.75)$$

Die Prandtl-Zahl wird dabei mit den Stoffeigenschaften der Anströmung gebildet.

$$Pr = \frac{\nu_o}{\Gamma_o} = \frac{\nu_o \rho_o c_p}{\Gamma_o} \quad . \quad (2.76)$$

Wir setzen die getroffenen Annahmen in die exakten Transportgleichungen (2.24) bis (2.27) für die Turbulenzgrößen ein. Tabelle (2.5) enthält alle für die Nachlaufströmung relevanten Gleichungen der turbulenten Korrelationen. Die Gleichung für die Dissipationsrate  $\epsilon$  ist nicht angegeben, da sie in exakter Form kein Auftriebsglied enthält.

Die Gleichungen der Hauptströmung (2.74) und (2.75) enthalten nur die turbulente Schubspannung  $\overline{u'v'}$  und den radialen turbulenten Wärmefluß  $\overline{v'T'}$ . Für die mittlere Bewegung scheint es ausreichend zu sein, nur die beiden turbulenten Austauschgrößen zu bestimmen. Die Transportgleichungen für  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{v'T'}$  enthalten aber die Korrelation  $\overline{v'^2}$ , die turbulente Normalspannung, die im Produktionsglied durch die Hauptströmung auftritt.

In der Gleichung für die kinetische Energie der Turbulenz  $k$ , die im Turbulenzmodell modelliert wird, tritt der axiale turbulente Wärmefluß  $\overline{u'T'}$  im Produktionsterm durch den Auftrieb auf. Die Intensität der Temperaturfluktuationen ist wiederum im Auftriebsproduktionsglied der Gleichung für  $\overline{u'T'}$  zu finden. Der Auftrieb beeinflusst also direkt die turbulente Schubspannung  $\overline{u'v'}$ , die kinetische Energie der Turbulenz und den axialen turbulenten Wärmefluß in vertikaler Richtung. In der Nachlaufströmung sind die Auftriebsproduktionsglieder stets positiv und bewirken eine Erhöhung des turbulenten Transports. Die Kopplung zwischen den sieben

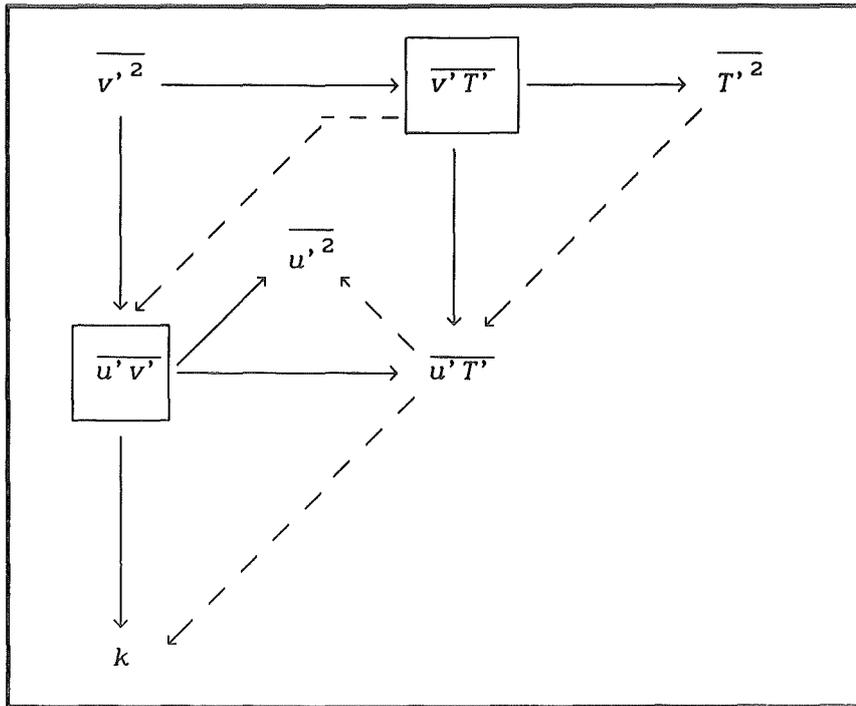


Abb. (2.1): Kopplung zwischen den Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen.  $\square$  = Größe tritt in der Gleichung der Hauptströmung auf,  $\longrightarrow$  = Kopplung durch den Gradienten der Hauptströmung,  $\dashrightarrow$  = Kopplung durch Auftrieb.

Transportgleichungen ist in Abbildung (2.1) verdeutlicht (nach Hossain (1980)). Die Pfeile geben dabei die Richtung an, in die die einzelnen Korrelationen eine Beeinflussung ausüben. Betrachten wir zum Beispiel die Korrelation  $\overline{v'^2}$ . Sie tritt in den Transportgleichungen der turbulenten Schubspannung Gl.(2.80) und des radialen turbulenten Wärmeflusses  $\overline{v'T'}$  Gl.(2.85) im Quellterm auf, der die Produktion durch die Hauptströmung darstellt.  $\overline{v'^2}$  beeinflusst damit  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{v'T'}$ .

Es sind zwei Kopplungsmechanismen zu unterscheiden: die Einflußnahme durch den Gradienten der mittleren Geschwindigkeit und der mittleren Temperatur (ausgezogene Pfeile) und die Beeinflussung durch Auftriebseffekte (gestrichelte Pfeile). Es ist offensichtlich, daß die Kopplung aufgrund der Produktionsglieder durch das Hauptströmungsfeld anders verläuft als die Kopplung durch die Auftriebskräfte.

Größe	Konvektion	Diffusion	Quelle/Senke	Auftrieb	G1.			
$\bar{u}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r v \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \overline{u'v'} \right]$	$-\frac{1}{\rho_0} \frac{d\bar{p}}{dx}$	$-\frac{\rho(\bar{T}) - \rho_0}{\rho_0} g$	(2.77)			
$\bar{T}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{v}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - r \overline{v'T'} \right]$			(2.78)			
Kont.	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \bar{v}] = 0$				(2.79)			
		turb. Diffusion	molek. Diffusion	Produkt. Hauptströmung	Produkt. Auftrieb	Dissipation	press. strain/scrambling	
$\overline{u'v'}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{ru'v'^2} + \frac{u'p'}{\rho} \right] + \frac{\overline{u'w'^2}}{r}$	$+v \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial r} \right) - \frac{\overline{u'v'}}{r^2} \right]$	$-\frac{\overline{u'v'}}{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	$+ \alpha g \overline{v'T'}$	$-2\nu \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1 \partial x_1}$	$\frac{p'}{\rho} \left[ \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right]$	(2.80)
$\overline{u'^2}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{rv'u'^2} \right] - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{u'p'}}{\partial x}$	$-\frac{\partial \overline{u'^3}}{\partial x} + v \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \right]$	$-2\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	$+2\alpha g \overline{u'T'}$	$-2\nu \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_1 \partial x_1}$	$+2 \frac{p'}{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x}$	(2.81)
$\overline{v'^2}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{rv'^3} + 2 \frac{v'p'}{\rho} \right] + 2 \frac{\overline{v'w'^2}}{r}$	$+v \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial r} \right) - 2 \frac{\overline{v'^2}}{r^2} + 2 \frac{\overline{w'^2}}{r^2} \right]$			$-2\nu \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial x_1 \partial x_1} - 2\nu \frac{\overline{w'^2}}{r^2}$	$+2 \frac{p'}{\rho} \frac{\partial v'}{\partial r}$	(2.82)
$k$	$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rv' \left( \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right]$	$+v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial k}{\partial r} \right]$	$-\frac{\overline{u'v'}}{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{w'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	$+ \alpha g \overline{u'T'}$	$-v \frac{\partial u'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} - \nu \frac{1}{r^2} [u'^2 + w'^2]$		(2.83)
$\overline{u'T'}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{u'v'T'} + \frac{1}{\rho} \overline{p'T'} \right]$	$+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \Gamma u' \frac{\partial T'}{\partial r} - \nu T' \frac{\partial u'}{\partial r} \right]$	$-\frac{\overline{u'v'}}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{v'T'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	$+ \alpha g \overline{T'^2}$	$-(\nu + \Gamma) \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x_1 \partial x_1}$	$+ \frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x}$	(2.84)
$\overline{v'T'}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{rv'^2 T'} \right]$	$+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \Gamma v' \frac{\partial T'}{\partial r} - \nu T' \frac{\partial v'}{\partial r} \right]$	$-\frac{\overline{v'T'}}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}$		$-(\nu + \Gamma) \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial x_1 \partial x_1}$	$+ \frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial r}$	(2.85)
$\overline{T'^2}$	$\bar{u} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \overline{rv'T'^2} \right]$	$+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \Gamma \overline{T'^2} \right]$	$-2\overline{v'T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}$		$-2\Gamma \frac{\partial \overline{T'T'}}{\partial x_1 \partial x_1}$		(2.86)

Tab. (2.5): Exakte Grenzschichttransportgleichungen für die turbulenten Impuls- und Wärmeflüsse bei Mischkonvektion.

### 2.5.3 Das auftriebserweiterte $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell

Die angeschriebenen Grenzschichttransportgleichungen sind nicht lösbar. Das Strömungsfeld kann mit Hilfe des beschriebenen auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells berechnet werden. Die Annahmen der Nachlaufströmung werden jetzt in die allgemeine Form des Modells eingeführt.

Mit dem Ansatz der Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität lassen sich die turbulente Schubspannung und der radiale turbulente Wärmefluß in der im Turbulenzmodell verwendeten Form ausdrücken.

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad , \quad (2.87)$$

$$-\overline{v'T'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad , \quad (2.88)$$

Die vereinfachten Gleichungen des Hauptströmungsfeldes und die Gleichungen des auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Modells sind in Tabelle (2.6) zusammengestellt.

Größe	Konvektion	Diffusion	Quellen/Senken	Gl.
Kontinuität	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \bar{v}] = 0$			(2.89)
$\bar{u}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} =$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \nu + \nu_t \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right]$	$-\frac{1}{\rho_o} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\bar{\rho} - \rho_o}{\rho_o} g$	(2.90)
$\bar{T}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} =$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right]$		(2.91)
$k$	$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial r} =$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right]$	$+ P + G - \varepsilon$	(2.92)
$\varepsilon$	$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} =$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right]$	$+\frac{\varepsilon^2}{k} \left[ C_{\varepsilon 1} \frac{(P+G)}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right]$	(2.93)
Zustandsgl.	$\bar{\rho} = \rho(\bar{T})$			(2.94)
Wirbelviskosität	$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$	(2.95)	turbulente Prandtl-Zahl	$\sigma_t = \frac{\nu_t}{\Gamma_t}$ (2.98)
Produktion von $k$	$P = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2$	(2.96)		
Auftriebsproduktion von $k$	$G = -\alpha g \overline{u'T'} = \alpha g \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$	(2.97)		

Tab.(2.6): Das auftriebserweiterte  $k$ - $\varepsilon$  Turbulenzmodell für Mischkonvektion.

## 2.5.4 Das algebraische Spannungs/Fluß $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell

In Kapitel 2.4.3 wird das auftrieberweiterte  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell angegeben, bei dem die turbulenten Spannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  und turbulenten Wärme-flüsse  $\overline{u'_i T'}$  aus algebraischen Beziehungen bestimmt werden. Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  und die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  sind über die empirischen Parameter  $C_\mu$  und  $\sigma_t$  von Auftriebseinflüssen abhängig. Mit den getroffenen Vereinfachungen und Grenzschichtapproximationen ergeben sich die in Zylinderkoordinaten angegebenen Gleichungen (Hossain (1980)).

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad \text{mit} \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} = \omega_v \cdot \frac{\overline{v'^2}}{k} \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (2.99)$$

$$C_\mu = \omega_v \cdot \frac{\overline{v'^2}}{k} = f_1 \left( \frac{P+G}{\epsilon}, \text{Auftriebseinfluß} \right), \quad (2.100)$$

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1-C_2}{C_1 + \frac{P+G}{\epsilon} - 1} \frac{P+G}{\epsilon} - \frac{C_2-C_3}{C_1 + \frac{P+G}{\epsilon} - 1} \frac{G}{\epsilon} \right). \quad (2.101)$$

$$-\overline{v'T'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}, \quad \text{mit} \quad \sigma_t = f_2 \left( \text{Auftriebseinfluß} \right). \quad (2.102)$$

$$\sigma_t = \omega_v \left( C_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right) \right). \quad (2.103)$$

$$-\overline{u'T'} = \left( \frac{1}{C_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right)} \right) \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad (2.104)$$

$$+ \left( \frac{1 - C_{2T}}{C_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right)} \right) \left( \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1-C_{3T}}{1-C_{2T}} \alpha g \overline{T'^2} \right) \frac{k}{\epsilon}.$$

$$\overline{T'^2} = C_T \frac{k}{\epsilon} \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}. \quad (2.105)$$

Mit

$$\omega_v = \left( \frac{1-C_2}{C_1 + \frac{P+G}{\epsilon} - 1} \right) \left( 1 + \frac{1-C_3}{1-C_2} \frac{1}{C_{1T} + \frac{1}{2} \left( \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right)} \right) \frac{k}{\epsilon} \alpha g \frac{\partial \bar{T} / \partial r}{\partial \bar{u} / \partial r} \quad (2.106)$$

und

$$P = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (2.107)$$

$$G = -\alpha g \overline{u'T'}. \quad (2.108)$$

Scherströmungen sind im allgemeinen vom Zustand des lokalen Gleichgewichts nicht weit entfernt, so daß man den konvektiven und diffusiven Transport der turbulenten Spannungen und Wärme-flüsse nicht approximiert, sondern ganz vernachlässigen kann. Es gilt dann  $(P+G)/\epsilon = 1$ . Die algebraischen Gleichungen vereinfachen sich dann erheblich. Das daraus re-

Größe	Konvektion	Diffusion	Quellen/Senken	Gl.	
Kontinuität	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \bar{v}] = 0$			(2.109)	
$\bar{u}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \nu + \nu_t \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right]$	$-\frac{1}{\rho_o} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} g$	(2.110)	
$\bar{T}$	$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\nu}{Pr} + \nu_t \sigma_t \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right]$		(2.111)	
$k$	$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\nu_t^2}{k} \frac{\partial k}{\partial r} \right]$	$+ P + G - \varepsilon$	(2.112)	
$\varepsilon$	$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\nu_t^2}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right]$	$+\frac{\varepsilon^2}{k} \left[ C_{\varepsilon 1} \frac{(P+G)}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right]$	(2.113)	
Zustandsgl.	$\rho = \rho(\bar{T})$			(2.114)	
Produktion von $k$	$P = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	(2.115)	Auftriebsproduktion von $k$	$G = -\alpha g \overline{u'T'}$	(2.120)
Wirbelviskosität	$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\mu \varepsilon} = \omega_\nu \frac{\nu_t^2}{k} \frac{k^2}{\varepsilon}$	(2.116)	$\omega_\nu = \frac{1-C_2}{C_1} \left( 1 + \frac{1-C_3}{1-C_2} \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \alpha g \frac{\partial \bar{T}/\partial r}{\partial \bar{u}/\partial r} \right)$	(2.121)	
Turbulente Prandtl-Zahl	$\sigma_t = C_{1T} \omega_\nu$	(2.117)		(2.122)	
Algebraische Gleichungen	$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$	(2.118)	$-\overline{v'T'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}$	(2.123)	
	$\frac{\nu_t^2}{k} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1-C_2}{C_1} \right) = \text{const.}$	(2.119)	$\overline{T'^2} = C_{1T} \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \overline{T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}$	(2.124)	
	$-\overline{u'T'} = \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u'v'} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + (1 - C_{2T}) \cdot \overline{v'T'} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - (1 - C_{3T}) \cdot \alpha \cdot g \cdot \overline{T'^2} \right)$				(2.125)

Tab. (2.7): Das algebraische Spannungs/Fluß  $k$ - $\varepsilon$  Turbulenzmodell für Mischkonvektion.

sultierende algebraische Spannungs/Fluß  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell ist in Tabelle (2.7) angeschrieben.

Anstelle der algebraischen Beziehung Gl.(2.105) für  $\overline{T'^2}$  kann die Transportgleichung (2.66) gelöst werden. Sie lautet

$$\bar{u} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( r C_{TT} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial r} \right) - 2 \overline{v'T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \frac{2}{C_T} \frac{\epsilon}{k} \overline{T'^2} \quad (2.126)$$

Die hier auftretenden empirischen Konstanten sind in Tabelle (2.4) aufgeführt.

### 2.5.5 Aus dem Experiment zu bestimmende Größen

Auftriebserweiterte Formen des  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells für die Mischkonvektionsströmung können validiert werden, wenn die im Modell und in den relevanten Transportgleichungen auftretenden Größen möglichst vollständig aus Messungen bestimmt werden.

Die in den Gleichungen auftretenden Größen lassen sich entsprechend ihrer Bedeutung in drei Gruppen unterteilen:

- a) Größen des Hauptströmungsfeldes,
- b) Turbulente Spannungen und turbulente Wärmeflüsse,
- c) Andere Korrelationen.

Die Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten und der Temperatur sind experimentell bestimmbar. Die Messung von Druckfluktuationen und der daraus resultierenden Korrelationen ist bis heute noch nicht mit ausreichender Genauigkeit möglich. Die in den Transportgleichungen (2.80) bis (2.86) auftretenden Dissipationsglieder können nicht direkt bestimmt werden.

Im Kopf von Tabelle (2.8) sind diejenigen Größen eingetragen, die möglichst aus Messungen im Mischkonvektionsnachlauf der Kugel bestimmt werden sollten. Die Größen sind entsprechend der Zuverlässigkeit geordnet, mit der sie meßbar sind. In den Spalten unter den zu messenden Größen sind die Gleichungen angegeben, in denen die Größen auftreten. Die Korrelation  $\overline{u'v'}$  beispielsweise tritt in der Impulsbilanzgleichung (Imp), der Transportgleichung von  $k$ ,  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{u'^2}$  auf.

Gruppe	1			2						3														
	Hauptstr.	tur. Spannung	tur. Wärmefluß	$\overline{u', v'}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$	$\overline{u', T'}$	$\overline{v', T'}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$												
Größe	$\bar{u}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\overline{u', v'}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$	$\overline{u', T'}$	$\overline{v', T'}$	$\overline{u', 2}$	$\overline{v', 2}$												
Imp	Imp			Imp																				
Ener	Ener		Ener					Ener																
Gleich.	k			k	k	k	k	k																
des	$\overline{u', v'}$			$\overline{u', v'}$																				
Auf-	$\overline{u', 2}$			$\overline{u', 2}$																				
tretens	$\overline{v', 2}$			$\overline{v', 2}$																				
	$\overline{u', T'}$																							
	$\overline{v', T'}$																							

Tab. (2.8): Größen, deren Messung wünschenswert ist mit Angabe der Gleichungen in denen diese auftreten  
 (Imp = Impulsbilanzgleichung, Ener = Energiebilanzgleichung).

## 2.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die mathematische Behandlung turbulenter Strömungen dargestellt, bei denen Auftriebseffekte berücksichtigt werden. Zur Berechnung des Strömungsfeldes wird aus praktischen Gründen eine statistische Betrachtung eingeführt. Das entstehende Gleichungssystem ist aufgrund der entstehenden turbulenten Korrelationen zwischen den Fluktuationsgrößen nicht geschlossen. Für die unbekanntenen Korrelationen lassen sich exakte Transportdifferentialgleichungen angeben, die die Transportmechanismen beschreiben, das Problem der Schließung aber nicht lösen. Durch Einführung von Modellansätzen wird das auftriebserweiterte  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell abgeleitet, das Wirbelviskositäts- und Wirbeldiffusivitätsbeziehungen verwendet. Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  wird aus der Lösung der Transportgleichungen für die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  und deren Dissipationsrate  $\epsilon$  berechnet. Beide Gleichungen enthalten Auftriebsglieder.

Hauptmerkmal des Modells ist, daß  $\nu_t$  und die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  isotrope Größen sind, obwohl Auftriebseffekte die Turbulenz gerichtet beeinflussen. Zur Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit wird eine verbesserte Version des  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells angegeben, bei dem die turbulenten Spannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  und turbulenten Wärme-flüsse  $\overline{u'_i T'}$  mit algebraischen Beziehungen bestimmt werden. Die empirischen Parameter  $C_\mu$  und  $\sigma_t$ , die in den Beziehungen für  $\nu_t$  und  $\Gamma_t$  auftreten, sind jetzt keine Konstanten mehr, sondern hängen von Auftriebseinflüssen ab.

Die Einführung der Grenzschichtapproximationen für die Mischkonvektionsnachlaufströmung führt auf ein reduziertes Gleichungssystem. Die Transportgleichungen für die relevanten Turbulenzgrößen zusammen mit dem auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell werden angegeben. Die Analyse der Gleichungen zeigt, welche turbulenten Austauschgrößen für die auftretenden Wechselwirkungen maßgebend sind und aus dem Experiment bestimmt werden sollten.

### 3. Das Experiment

#### 3.1 Einleitung

In Kapitel 2 werden die Grenzschichttransportgleichungen und das auftriebserweiterte  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell für den untersuchten achsensymmetrischen Mischkonvektionsnachlauf formuliert. Die Analyse der Gleichungen zeigt, welche Größen den Wärme- und Impulsaustausch im Strömungsfeld charakterisieren.

Ziel des experimentellen Programms ist es, die Größen der zweiten und dritten Gruppe der Tab.(2.8) zu messen. Dies sind die mittlere Geschwindigkeitskomponente  $\bar{u}$ , die mittlere Temperaturdifferenz  $\bar{T}$  gegenüber der Anströmung, die turbulenten Größen  $u'^2$ ,  $v'^2$ ,  $T'^2$  und die Korrelationen  $u'v'$ ,  $u'T'$  und  $v'T'$ .

In diesem Abschnitt wird der Versuchsaufbau, die eingesetzte Meßtechnik zur Geschwindigkeits- und Temperaturmessung zusammen mit den besonderen Anforderungen zur Messung der Korrelationen dargestellt.

Eine Einführung in die statistischen Kenngrößen stellt die Algorithmen zur Auswertung der Meßdaten und zur Beschreibung des Turbulenzfeldes bereit.

#### 3.2 Statistische Kenngrößen und Auswertebeziehungen

Zur Beschreibung der Strömung werden verschiedene statistische Kenngrößen verwendet. Am Beispiel der Geschwindigkeitssignale  $u(t)$  und  $v(t)$  soll dies dargelegt werden.

Der zeitliche Mittelwert  $\bar{u}$  über die Mittelungszeit  $t_m$  ist gegeben durch

$$\bar{u} = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} u(t) dt \quad . \quad (3.1)$$

Die Zeit  $t_m$  muß so groß gewählt werden, daß der zeitliche Mittelwert  $\bar{u}$  unabhängig von  $t_m$  ist. Im Experiment erfolgt die Mittelung über mehrere Minuten.

Die Intensität der Schwankungsbewegung kennzeichnet der RMS-Wert ("Root Mean Square") des mittelwertfreien Signals, das in Kapitel 2 als Fluktuationssignal  $u'(t)$  bezeichnet wird.

$$\sqrt{u'^2} = \left[ \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^m (u(t) - \bar{u})^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^m (u'(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion beschreibt die Verwandtschaft zweier stochastischer Signale. Sie bildet den zeitlichen Mittelwert der Signale  $u'(t)$  und  $v'(t)$  zu verschiedene Zeitdifferenzen  $\tau$  der beiden Eingangssignale.

$$\rho_{uv}(\tau) = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^m u'(t) \cdot v'(t+\tau) dt \quad (3.3)$$

Die Korrelationsfunktion identischer Signale führt zur Autokorrelationsfunktion  $\rho_{uu}(\tau)$ . Die Kreuzkorrelation  $\rho_{uv}$  und die Autokorrelation  $\rho_{uu}$  werden für  $\tau = 0$  erhalten, die vereinfachend als  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{u'u'}$  geschrieben werden. Die Korrelationsfunktion  $\rho_{uv}$  wird auch als Korrelationsfunktion zweiter Ordnung bezeichnet.

$$\overline{u'v'} = \rho_{uv}(\tau=0) = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^m u'(t) \cdot v'(t) dt \quad (3.4)$$

$$\overline{u'u'} = \rho_{uu}(\tau=0) = \lim_{t_m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \int_0^m u'(t) \cdot u'(t) dt \quad (3.5)$$

Die normierten Korrelationsfunktionen ergeben sich bei Normierung von  $\rho_{uv}(\tau)$  und  $\rho_{uu}(\tau)$  mit den RMS-Werten

$$R_{uv}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{u'^2} \sqrt{v'^2}} \cdot \rho_{uv}(\tau) \quad (3.6)$$

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{u'^2} \sqrt{u'^2}} \cdot \rho_{uu}(\tau) = \frac{1}{u'^2} \cdot \rho_{uu}(\tau) \quad (3.7)$$

Der Wert der normierten Korrelationsfunktion  $R_{uv}$  bei der Zeitverschiebung  $\tau = 0$  ist der Korrelationskoeffizient. Er kann Werte im Bereich  $0 \leq R_{uv} \leq 1$  annehmen.

$$R_{uv} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{u'^2} \sqrt{v'^2}} \quad (3.8)$$

Bei den im Experiment diskret verteilten Meßsignalen gehen die angeführten Rechenvorschriften in folgende Auswertebeziehungen über.

Der Anzahlmittelwert

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i, \quad (3.9)$$

entspricht dem zeitlichen Mittelwert, wobei  $N$  die Anzahl der Ereignisse und  $u_i$  und  $v_i$  die diskreten Ereigniswerte sind.

Für den RMS-Wert gilt

$$\sqrt{u'^2} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \right)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Die Kreuzkorrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen berechnet sich aus

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N u_i v_i - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N u_i \cdot \sum_{i=1}^N v_i \right) \right], \quad (3.11)$$

wobei eine entsprechende Beziehung für die Kreuzkorrelationen zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfluktuationen anzuwenden ist.

### 3.3 Der experimentelle Aufbau

Im Hinblick auf eine einfache mathematische Behandlung und zur Reduktion des Umfangs der Messungen gehen wir von einer achsensymmetrischen Nachlaufströmung aus. Eine Rohrtteststrecke erfüllt diese Annahme offensichtlich sofort. Zur Messung der Geschwindigkeiten wird ein Zwei-Komponenten Laser-Doppler-Anemometer (LDA) verwendet. Ein ungestörter optischer Zugang zum Strömungsfeld ist nur dann möglich, wenn die begrenzenden Wände eben sind. Gekrümmte Flächen zylindrischer Rohre erfordern aufwendige Korrekturoptiken (Ritterbach et al. (1987)) oder die Anpassung der Brechungsindizes von Fluid und Rohrwand; Gardavsky et al. (1989). Die Messungen werden deshalb in einer quadratischen Teststrecke durchgeführt. Der prinzipielle Aufbau der Teststrecke FLUTMIK (Fluktuationen in turbulenter Mischkonvektion) ist in Abbildung (3.1) gegeben.

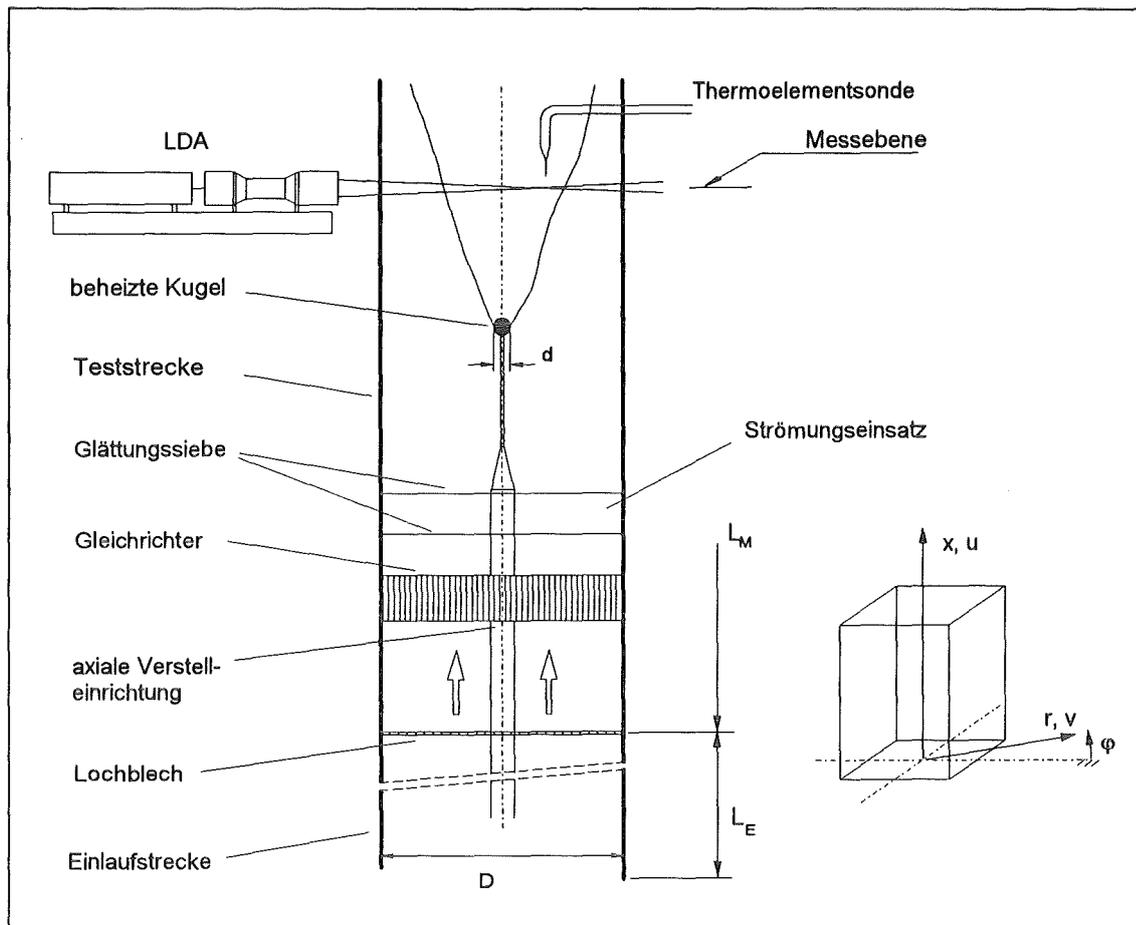


Abb. (3.1): Schematische Darstellung der Teststrecke mit beheizter Kugel, Strömungseinbauten und Meßfühlern.

Die gesamte Teststrecke ist vertikal angeordnet und wird aus einem großen Beruhigungsbehälter heraus von unten nach oben mit Wasser durchströmt. Sie besteht aus einer Einlaufstrecke der Länge  $L_E = 2000 \text{ mm}$  und einem Glaskanal, der die eigentliche Meßstrecke darstellt. Der gesamte Kanal besitzt durchgängig einen quadratischen Querschnitt mit  $D = 140 \text{ mm}$  lichter Weite. Die Meßstrecke hat eine Gesamtlänge von  $L_M = 1550 \text{ mm}$ . Im Kanal befindet sich ein Strömungseinsatz, der aus einem Gleichrichter und einer Siebkombination besteht. Dieser kann mit einer automatischen Verstelleinrichtung axial verschoben werden. Auf einem schlanken Stab ist eine von innen elektrisch beheizte Kugel des Durchmessers  $d = 10.41 \text{ mm}$  befestigt. Die Kugelhalterung bildet zusammen mit dem Strömungseinsatz eine Einheit. Die Kugel wird dabei so geführt, daß sie jeweils im Zentrum des Kanals positioniert wird.

Das Durchmesser Verhältnis von Kugel zu Kanal beträgt  $d/D = 1/14$ . Die relative Versperrung durch die Kugel ist  $0.4 \%$ . Die Annahme einer punktförmigen Wärmequelle ist damit in guter Näherung erfüllt. Für das Ge-

schwindigkeitsfeld stellt die Kugel dagegen einen Widerstandskörper mit endlicher Ausdehnung dar.

Die Messung der Geschwindigkeitskomponenten und der Temperaturdifferenz erfolgt in der örtlich konstant gehaltenen Meßebene. Das Meßvolumen des LDA und die Temperaturmeßsonde können durch automatische Traversiereinheiten über den gesamten Kanalquerschnitt verfahren werden, so daß jede radiale Position erreichbar ist. Mit Hilfe der axialen Verstelleinrichtung des Strömungseinsatzes läßt sich der axiale Abstand  $x/d$  zwischen Meßebene und Kugelmitte im Bereich  $1.5 < x/d < 106$  variieren.

Die gesamte Teststrecke ist in einen geschlossenen Wasserkreislauf integriert. Weitere Einzelheiten des Versuchstandes und der Teststrecke sind im Anhang A.1 angegeben.

### 3.4 Instrumentierung

Die Messung der Korrelationen zwischen den Geschwindigkeitsfluktuationen und zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen erfordert die simultane Erfassung der zeitabhängigen Größen  $u$ ,  $v$  und  $T$ . Mit dem Zweikomponenten LDA werden die beiden Geschwindigkeitskomponenten in axialer und radialer Richtung gleichzeitig gemessen. Zur Messung der Temperatur wird eine Thermoelementsonde verwendet, die parallel zum Meßvolumen des LDA positioniert wird. Beide Meßverfahren werden in den weiteren Abschnitten dargestellt.

Neben den genannten Feldgrößen werden verschiedene Prozeßgrößen des Wasserkreislaufs erfaßt und überwacht. Die Einzelheiten der Signalverarbeitung und der Meßstellen zur Kreislaufüberwachung sind im Anhang A.1.2 zusammengestellt.

#### 3.4.1 Temperaturmessung

Zur Messung der Momentanwerte der Temperatur im Mischkonvektionsnachlauf wird ein NiCr-Ni Mantelthermoelement eingesetzt, bei dem die Meßstelle mit dem Mantel verbunden ist. Das Thermoelement hat einen Durchmesser von  $0.5 \text{ mm}$ . Die Meßspitze ist über eine Länge von  $10 \text{ mm}$  auf  $0.25 \text{ mm}$  Durchmesser reduziert. Gemessen wird die Spannungsdifferenz zwischen

diesem Thermoelement und einem Referenzthermoelement, das am Ende der Einlaufstrecke eingebaut ist. Das Referenzthermoelement ist ein isoliertes NiCr-Ni Thermoelement von 2 mm Durchmesser. Kurzzeitige Temperaturänderungen werden durch die integrierende Charakteristik der Meßstelle tiefpassgefiltert. Durch Verwendung des Differenzsignals werden der durch die Anströmtemperatur  $\bar{T}_0$  bedingte Gleichspannungsanteil beseitigt und Störeinflüsse reduziert. Die Messung des Leistungsdichtespektrums der Temperaturfluktuationen zeigt, daß Frequenzen bis etwa 30 Hz auflösbar sind, bevor der Signalanteil im Rauschpegel untergeht. Für die vorliegenden Untersuchungen ist dies ausreichend (siehe Anhang A.2).

Die Anströmtemperatur  $\bar{T}_0$  wird im Beruhigungsbehälter mit einem Präzisionsplatinwiderstand (Pt-100) in Vierleitertechnik gemessen. Da die gesamte Einlaufstrecke isoliert ist, können wir davon ausgehen, daß die Temperatur an der Referenzmeßstelle identisch ist mit der Temperatur  $\bar{T}_0$ . Im folgenden wird für die Temperaturdifferenz die Bezeichnung

$$T = T_1 - \bar{T}_0 \quad (3.12)$$

verwendet. Die Temperatur  $T$  berechnet sich aus der gemessenen Spannungsdifferenz nach Powell et al. (1974).

Die Temperaturmeßsonde  $T_1$  ist auf einer eigenen Traversiereinheit montiert. Sie wird automatisch so positioniert, daß die Temperatur 1 mm stromab der Meßvolumina des LDA gemessen wird. Der Abstand entspricht vier Sondendurchmessern. Eine Beeinflussung der Geschwindigkeitsmessung durch die Staupunktströmung an der Sondenspitze kann damit ausgeschlossen werden. Das integrale Längenmaß der Strömung ist außerdem sehr viel größer als dieser Abstand. Daher sind die entstehenden Meßfehler bei der Korrelationsmessung vernachlässigbar klein.

### 3.4.2 Geschwindigkeitsmessung

Die Messung von Geschwindigkeitsfeldern mit Hilfe von Laser-Doppler-Anemometern ist ein in der Strömungsmeßtechnik seit vielen Jahren eingesetztes Verfahren. In Wasserströmungen bietet das LDA gegenüber anderen Strömungsmeßverfahren, wie der Hitzdrahtanemometrie, einige Vorteile. Da es ein optisches Verfahren ist, sind Störungen durch eine physische Meßsonde ausgeschlossen. Das LDA mißt lokal, muß nicht kalibriert werden, kann Rückströmungen detektieren und erfaßt nur die Geschwindigkeitskomponente in einer bestimmten Richtung. Bei der untersuchten Mischkonvektionströmung treten, besonders in radialer Richtung, kleine Geschwindig-

keiten auf. Mit dem LDA sind hochaufgelöste Messungen möglich. Die Messung statistischer Momente und von Kreuzkorrelationen wird durch den zufälligen und intermittenten Charakter des Geschwindigkeitssignals und durch das statistische Vorkommen von Partikeln im Meßvolumen beeinflusst. Bei der Messung ist das zu berücksichtigen. Zum Verständnis der Problematik wird daher das Grundprinzip des LDA beschrieben. Umfassende Informationen zu dem Meßverfahren sind in der Literatur zu finden, Durst et al. (1987), Ruck (1987), Adrian (1983).

### 3.4.2.1 Prinzip der Laser-Doppler-Anemometrie

Die Geschwindigkeitsmessung beruht auf dem Effekt, daß mit einem Laser erzeugte, monochromatische kohärente Lichtwellen von einem bewegten Teilchen gestreut werden und eine Doppler-Verschiebung aufweisen. Die von einem lichtstreuenden Teilchen erzeugte Verschiebung ist meßtechnisch nicht auflösbar. Beim Zweistrahlverfahren wird der Laserstrahl durch eine Optik in zwei Teilstrahlen aufgespalten und mit einer Linse in einem Meßvolumen fokussiert, Abbildung(3.2). Infolge der unterschiedlichen Richtungen der Partialstrahlen ergeben sich zwei unterschiedlich dopplerverschobene Lichtwellen verschiedener Frequenzen. Die entstehende hochfrequente Signalwelle ist mit einer niederfrequenten Schwebung moduliert, die auf der Ebene eines Photodetektors detektiert wird. Die Schwebungsfrequenz ist unabhängig von der Detektionsrichtung und der Geschwindigkeit des Teilchens direkt proportional.

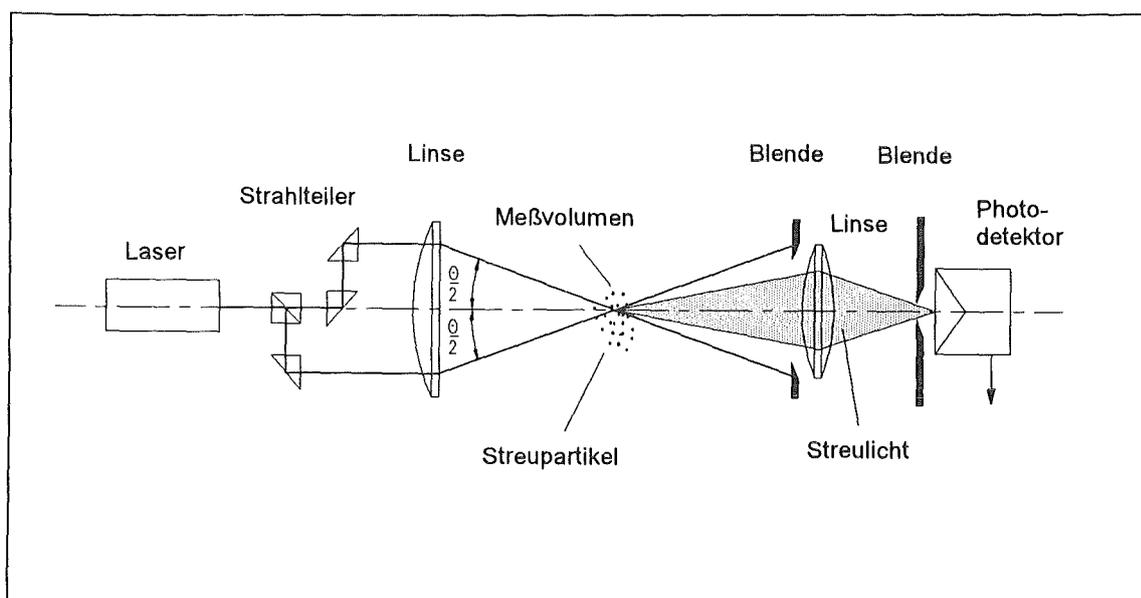


Abb. (3.2): Das LDA-Zweistrahlverfahren.

Neben der Doppler-Beschreibung läßt sich das Meßprinzip in der Praxis durch das vereinfachte Interferenzstreifenmodell erklären.

Das Modell postuliert, daß sich im Schnittpunkt zweier Laserstrahlen durch Überlagerung der Intensitätsmaxima der ebenen Wellenfronten durch konstruktive und destruktive Interferenz ein ebenes Interferenzstreifenmuster ausbildet. Aufgrund der Gaußschen Intensitätsverteilung der Laserstrahlen ist das Meßvolumen ein Rotationsellipsoid, dessen Ausdehnung durch  $1/e^2$  definiert ist. Der Streifenabstand

$$d_s = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)} \quad (3.13)$$

hängt vom Schnittwinkel  $\theta$  der Laserstrahlen und von der Wellenlänge  $\lambda$  der Wellenfronten ab, Abbildung (3.3).

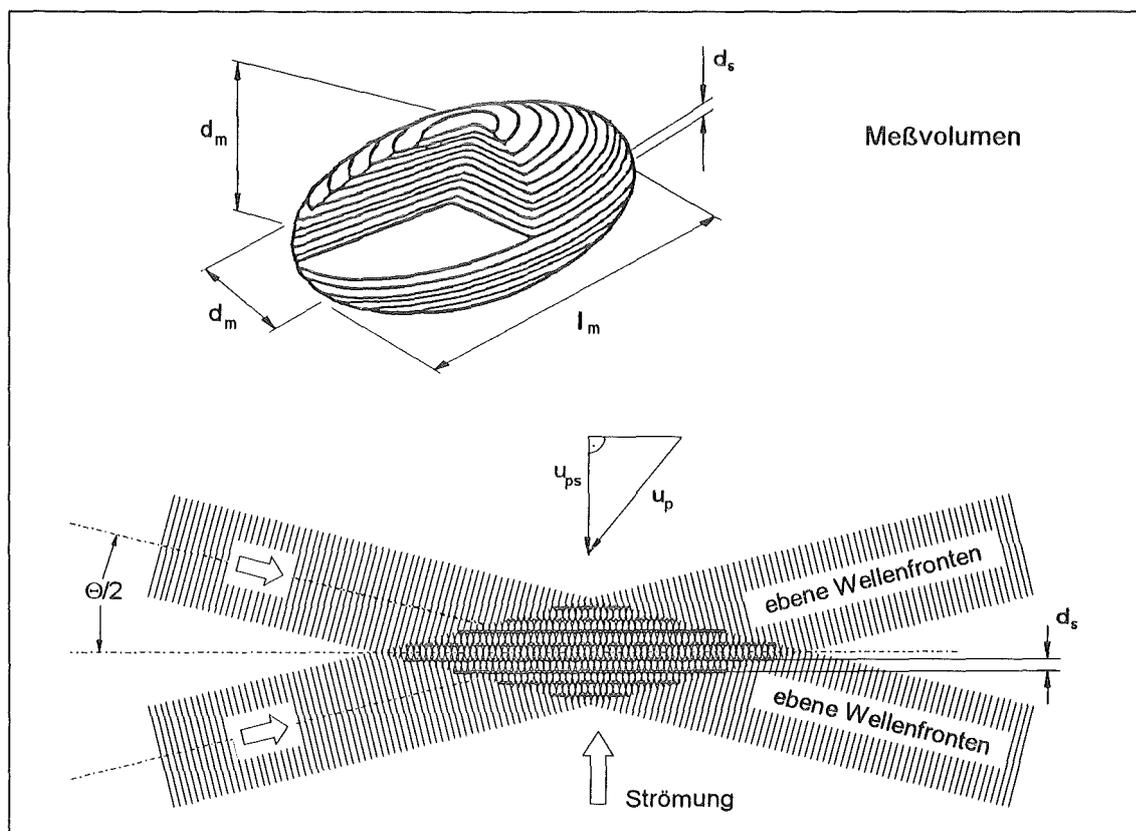


Abb.(3.3): Das Interferenzstreifenmodell.

Bewegt sich ein Partikel mit der Geschwindigkeit  $u_p$  durch das Interferenzstreifenmuster, so sendet es Streulicht aus, das eine Intensitätsvariation aufweist, die der Dopplerfrequenz  $f_p$  entspricht. Die Frequenz des als "Dopplerburst" bezeichneten Signals steht in direktem Zusammenhang mit der Geschwindigkeitskomponente  $u_{ps}$  des Partikels senkrecht zur Ebene der Interferenzstreifen im Meßvolumen.

$$u_{ps} = f_p \cdot d_s = f_p \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\theta/2)} \quad (3.14)$$

Die Länge  $l_m$ , der Durchmesser  $d_m$  und die Zahl der Interferenzstreifen  $N_m$  des Meßvolumens sind gegeben durch

$$l_m = d_1 / \sin(\theta/2) \quad , \quad (3.15)$$

$$d_m = d_1 / \cos(\theta/2) \quad , \quad (3.16)$$

$$N_m = d_m / d_s \quad , \quad (3.17)$$

worin  $d_1$  der Durchmesser der Laserstrahlen im Schnittpunkt ist.

Zur Vorzeichenbestimmung von  $u_{ps}$  werden frequenzverschiebende optische Komponenten, wie optoakustische Modulatoren (Braggzellen) verwendet, die in den Strahlengang der Laserstrahlen eingebracht werden und ihnen eine Differenzfrequenz aufprägen. Diese "Shiftfrequenz"  $f_s$  bewirkt anschaulich eine Bewegung des Streifenmusters in eine bestimmte Richtung. Je nachdem, ob ein Partikel das Meßvolumen in oder entgegen der Bewegungsrichtung durchquert, wird die detektierte Signalfrequenz  $f_d$  erniedrigt oder erhöht. Die Komponente  $u_{ps}$  der Partikelgeschwindigkeit  $u_p$  beträgt je nach Strömungs- und Shiftichtung

$$u_{ps} = f_d \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\theta/2)} = (f_p \pm f_s) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\theta/2)} \quad (3.18)$$

Die Zahl der Streifen  $N_s$ , die ein Partikel dann beim Durchqueren des Meßvolumens kreuzt, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.

$$N_s = N_m \frac{u_{ps}}{u_p} + f_s \frac{d_m}{|u_p|} \quad (3.19)$$

Der erste Anteil entsteht durch das stehende Streifenmuster und der zweite durch die Bewegung des Streifenmusters. Nach Tropea (1986) kann dies mit Gl.(3.16) zu

$$N_s = \frac{d_m}{|u_p|} \left[ f_s + \frac{u_{ps}}{d_s} \right] \quad (3.20)$$

umgeformt werden.

### 3.4.2.2 Optischer Aufbau

Die Geschwindigkeitsmessungen werden mit einem kommerziellen zweikanaligen LDA-System der Firma Dantec (DISA55x) durchgeführt. Das System wird in der 3-Strahl Konfiguration betrieben. Der verwendete optische Aufbau ist in Abbildung (3.4) schematisch dargestellt.

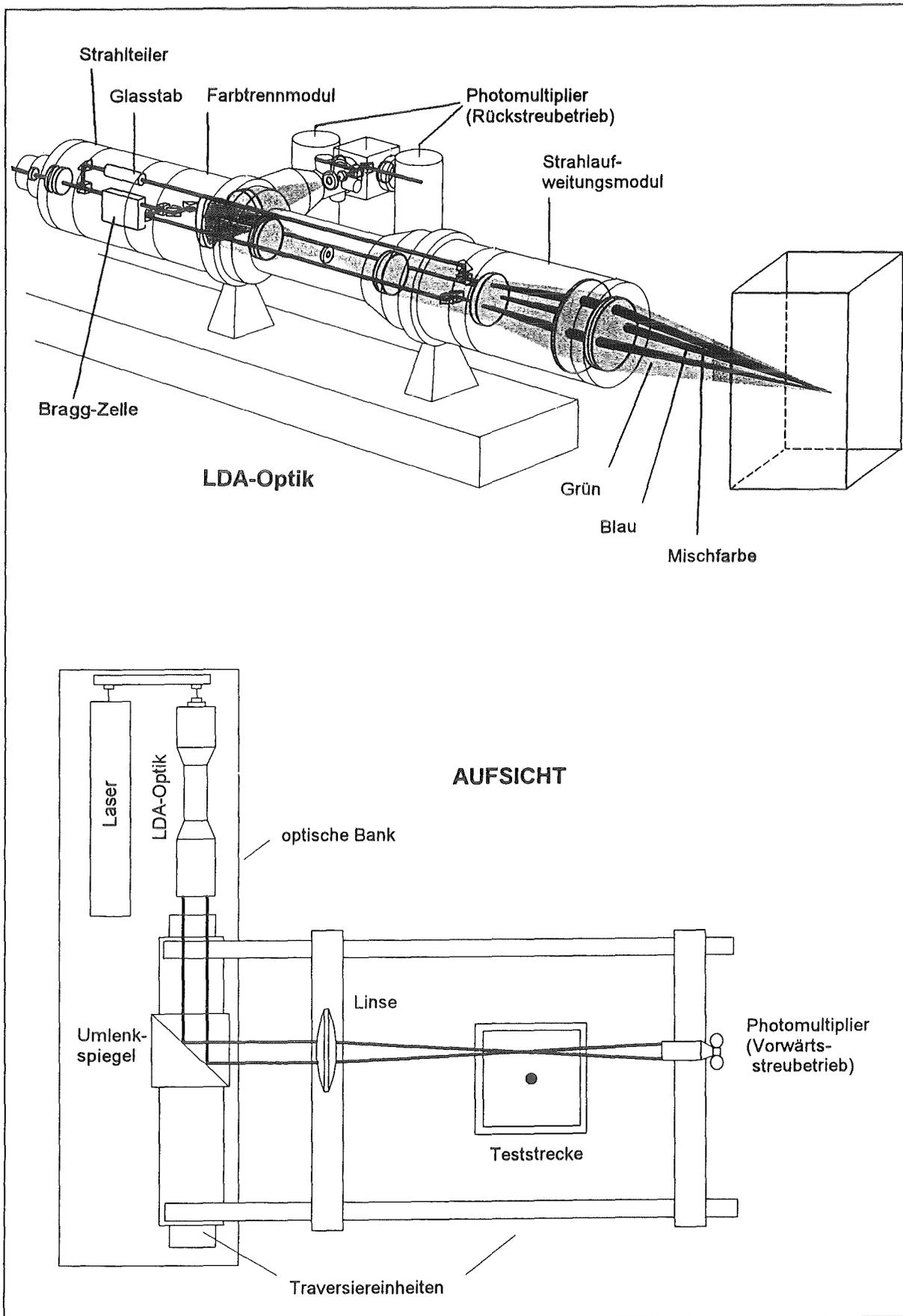


Abb.(3.4): Optischer Aufbau des LDA-Systems im Experiment.  
(LDA-Optik nach Dantec 1983).

Die Trennung der beiden Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  erfolgt durch Verwendung der grünen ( $514.5 \text{ nm}$ ) und der blauen Spektrallinie ( $488 \text{ nm}$ ) des emittierten Lichts eines  $5 \text{ W}$  Spectra-Physics Argon-Ionen Lasers. Die Messungen werden mit einer Ausgangsleistung des Lasers von  $1.2 \text{ W}$  durchgeführt. Der Laser, die Sendeoptik, die Empfangsoptik und die Traversiereinheit sind zusammen auf einer optischen Bank montiert.

Der mischfarbene Laserstrahl wird in der Sendeoptik mit einem Strahlteiler in zwei Partialstrahlen gleicher Intensität aufgeteilt. Ein Partialstrahl durchläuft eine Braggzelle, wobei er eine Frequenzverschiebung von  $f_0 = -40 \text{ MHz}$  erfährt. Der zweite Strahl durchläuft parallel dazu einen Glasstab, der die optische Wegdifferenz, die durch die Braggzelle verursacht wird, ausgleicht. In einem Farbtrennmodul erfolgt die Aufspaltung des frequenzverschobenen Strahls in die grüne und blaue Spektrallinie. Durch Aufweitung der drei Strahlen in einem Strahlaufweitungsmodul werden die Abmessungen der beiden Meßvolumina proportional zum Aufweitungsfaktor ( $1.95:1$ ) reduziert und gleichzeitig die Intensität des emittierten Streulichts erhöht. Der Strahlabstand und damit der Schnittwinkel  $\theta$  wird in einem Strahlumlenkmodul festgelegt. Über einen Umlenkspiegel und eine Linse der Brennweite  $l_L = 310 \text{ mm}$  werden die Strahlen im Meßort fokussiert. Beide Komponenten sind unabhängig voneinander verfahrbar. Die beiden Farbstrahlen bilden jeweils mit dem dritten mischfarbenen Strahl ein Meßvolumen. Die durch die Strahlen aufgespannten Meßebenen stehen senkrecht zueinander. Das Strahlenpaar Grün-Mischfarbe mißt die axiale Geschwindigkeitskomponente  $u$ , während das Paar Blau-Mischfarbe die normale Komponente  $v$  erfaßt.

Das von den Partikeln in der Strömung emittierte Streulicht wird in Vorwärtsstreuung von einer Empfangsoptik detektiert und mit Farbtrennprismen und schmalbandigen Interferenzfiltern den beiden Geschwindigkeitskomponenten zugeordnet. Hierbei wandeln zwei Photomultiplikatoren die optischen Streulichtsignale in elektrische Frequenzen um.

### 3.4.3 Signalverarbeitung

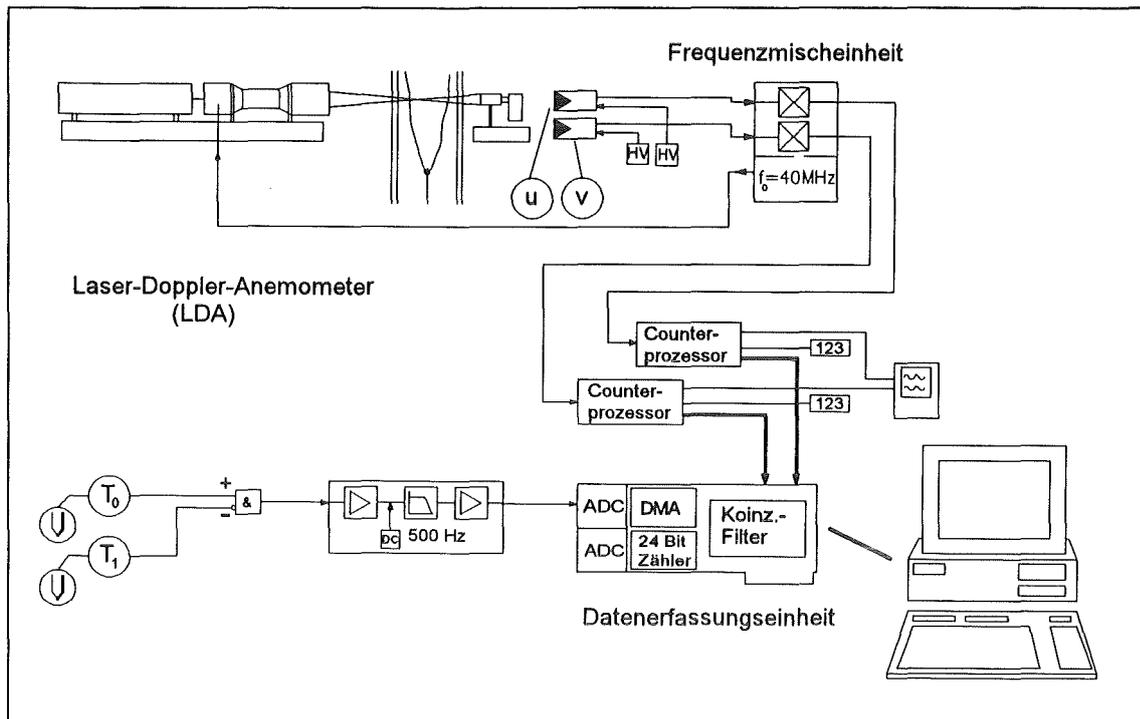


Abb.(3.5): Schematik der Signalverarbeitung

#### LDA-Signal

Die Signale der Photomultiplikatoren werden gemäß Abbildung (3.5) in einer elektronischen Frequenzmischeinheit (DISA 55N11) durch sogenanntes "Downmixing" in ihrer Frequenz reduziert. Die resultierende elektronische Shiftfrequenz  $f_s$  ist so gewählt, daß sie mindestens doppelt so groß ist wie die maximal vorkommende Dopplerfrequenz  $f_p$  eines Partikels senkrecht zu den Interferenzstreifen. Nach Verstärkung und Bandpassfilterung ermitteln zwei Counterprozessoren (TSI 1980B) die Dopplerfrequenzen  $f_d$  der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente. Nach Gl.(3.18) berechnet sich hieraus die Geschwindigkeit.

Zur Auswertung eines Dopplerburst-Signals müssen vom Counterprozessor mindestens  $N_c = 8$  Streifendurchgänge gezählt werden. Das Signal wird mit verschiedenen Amplitudendiskreminierungen bewertet und einem 5/8 Streifenzeitvergleich unterzogen. Hierbei bestimmt sich die Dopplerfrequenz aus der Zeit für 5 und aus 8 Nulldurchgängen des Bursts, wobei die zulässige Abweichung auf 1 % eingestellt ist.

Die beiden Signale werden zusammen mit einem Freigabesignal in digitaler Darstellung an einen Kleinrechner weitergeleitet und in einer speziellen Datenerfassungseinheit verarbeitet; Tropea und Struthers (1987), Dostek

(1989). Die Datenerfassungseinheit arbeitet als "Sample and Hold" (SH) Prozessor, bei dem der zuletzt gemessene Wert solange gehalten wird, bis ein neues Signal vorliegt. Im Puffer des Moduls wird eine Koinzidenzfilterung durchgeführt, wobei nur Signalpaare weiter verarbeitet werden, die in beiden Kanälen gleichzeitig anliegen. Die Öffnungszeit wird auf  $49.6 \mu\text{s}$  eingestellt, um zu gewährleisten, daß die Korrelationsmessungen von einem Partikel stammen. Die Öffnungszeit ist dabei so gewählt, daß die Zeit zwischen den Messungen von  $u$  und  $v$  um mindestens eine Größenordnung kleiner ist als die Zeit, die ein Partikel benötigt, um das Meßvolumen mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit zu passieren. Der angegebene Wert wird aus einer experimentellen Analyse verschiedener Öffnungszeiten ermittelt. Die kleinste einstellbare Öffnungszeit des Koinzidenzfilters beträgt  $1.6 \mu\text{s}$ .

#### Thermoelement-Signal

Das Differenzsignal der Thermoelementsonde wird entsprechend des Meßortes  $x/d$  unter Berücksichtigung der maximal auftretenden Temperaturdifferenzen um den Faktor 500 bis 5000 verstärkt und zur Eliminierung der Netzfrequenz über ein Tiefpassfilter von 31.5 Hz geführt. Das analoge Signal wird simultan zum LDA-Signal von der Datenerfassungseinheit, unter Verwendung einer SH-Einheit, von einem schnellen 12 Bit Analog-Digital-Wandler (ADC) digitalisiert, so daß die Korrelationsmessungen zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen zum selben Zeitpunkt erfolgen. Der Meßbereich des ADC beträgt  $0 + 0.5 \text{ V}$ .

Die Datenübertragung in den Arbeitsspeicher des Kleinrechners erfolgt durch "Direct Memory Access" (DMA). Die maximale Datenerfassungsrate des Systems beträgt 145 kHz. Die gesamte Datenerfassung, einschließlich der Traversierung des Meßvolumens und der Thermoelementsonde, ist rechnergestützt.

Die Strömung wird mit Silicon-Carbide Partikeln dotiert, die als Suspension zugeführt werden. Der mittlere Teilchendurchmesser ist  $1.5 \mu\text{m}$ . Bei einer mittleren bewerteten Datenrate  $\dot{N}$  des Counterprozessors von 600 Hz für die axiale und von 300 Hz für die normale Geschwindigkeitskomponente ergeben sich je nach Meßort Mittelungszeiten von 4 bis 5 Minuten. Pro Meßort werden 15360 Ereignisse in Datenblöcken von jeweils 1024 Ereignissen gemessen und vom Rechner zur weiteren Auswertung gespeichert.

Die wichtigsten Parameter des Datenerfassungssystems und der optischen Parameter des LDA-Systems sind in Tabelle (3.1) zusammengestellt. Weitere Angaben sind im Anhang A.1.4 aufgeführt.

Größe		Einheit		
Wellenlänge	$\lambda$	<i>nm</i>	514.5	488.0
Schnittwinkel	$\theta$	<i>Grad</i>	6.303	6.253
Meßvolumen	$d_m \times l_m$	<i>mm</i>	0.083 x 1.43	0.079 x 1.53
Streifenabstand	$d_s$	$\mu m$	4.679	4.487
Shiftfrequenz	$f_s$	<i>KHz</i>	20	20
Streifenzahl	$N_m$	1	17	17
Streifenzahl	$N_s$	1	41	23
(für $u=0.07$ m/s $v= 0$ m/s)				
Counterprozessor:				
Hochpassfilter		<i>KHz</i>	30	10
Tiefpassfilter		<i>KHz</i>	100	100
Auswertemodus		Continuous Mode		

Tab. (3.1): Zusammenstellung der wichtigsten Parameter des Datenerfassungssystems und der LDA-Optik.

Die Mittelwerte der Geschwindigkeiten berechnen sich nach Gl.(3.9) aus dem Anzahlmittelwert der Einzelereignisse, die RMS-Werte nach Gl.(3.10) und die Kreuzkorrelationen nach Gl.(3.11).

Eine einseitige Gewichtung der Mittelwerte ("biasing") aufgrund der geschwindigkeitsabhängigen Ankunftsrate der Partikel muß nicht berücksichtigt werden. Wie oben angeführt, arbeitet das LDA-Datenerfassungssystem als SH-Prozessor. Für solche Systeme sind die Mittelwerte und RMS-Werte der Geschwindigkeiten nach Winter (1989) und Edwards (1987) bei hoher Datendichte, das heißt für

$$\dot{N} \cdot T_u > 5 \quad , \quad (3.21)$$

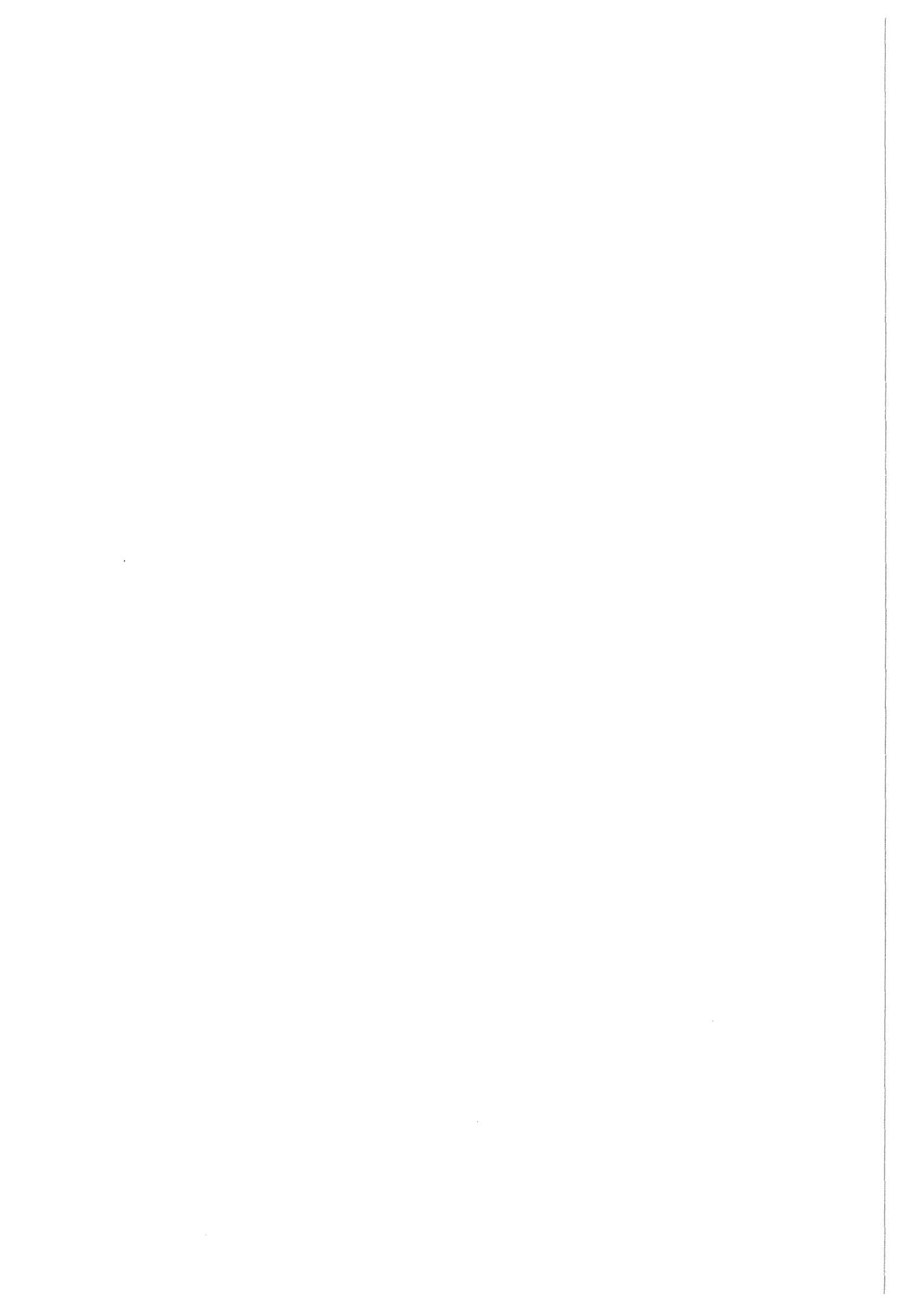
frei von biasing Effekten.  $T_u$  ist das integrale Zeitmaß der Strömung nach

$$T_u = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) d\tau \quad . \quad (3.22)$$

Es ist ein Maß für die mittlere Korrelationszeit der Strömung. Das integrale Zeitmaß wird aus Messungen der Autokorrelationsfunktion  $R_{uu}(\tau)$  an verschiedenen Positionen in der Strömung ermittelt. Für die Datendichte

ergibt sich im Mittel der Wert  $\dot{N} \cdot T_u = 50$ , so daß die Bedingung (3.21) erfüllt ist.

Außerdem kann für Turbulenzgrade  $(\overline{u'^2})^{1/2}/\bar{u}$  kleiner 30 % der Einfluß der Teilchenankunftsrate im allgemeinen vernachlässigt werden. Die maximal auftretenden Turbulenzgrade sind 15 %.



## 4. Meßergebnisse

### 4.1 Parameter der Strömung und Meßprogramm

Die Mischkonvektionsströmung wird durch Trägheits-, Auftriebs- und Zähigkeitskräfte beeinflusst. Sie setzt sich aus einer nichtlinearen Überlagerung einer reinen Nachlaufströmung ("wake") und eines Auftriebsstrahls ("plume") zusammen. Der Kugelnachlauf wird durch die Reynolds-Zahl, die mit den Anströmbedingungen gebildet wird, beschrieben.

$$Re = \frac{\bar{u}_0 d}{\nu_0} \quad (4.1)$$

Die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit  $\bar{u}_0$  der Anströmung wird mit einem geeichten Durchflußmesser ermittelt.

Für den Auftriebsstrahl verknüpft die Grashof-Zahl

$$Gr = \frac{1}{2\pi} \frac{g \alpha_0 \dot{Q}}{\rho_0 c_p \nu_0^3} d^2 \quad (4.2)$$

die relevanten Größen miteinander. Sie drückt das Verhältnis von Auftriebs- zu Zähigkeitskräften aus und wird in der untersuchten Anordnung mit der eingespeisten konstanten Heizleistung  $\dot{Q}$  gebildet.  $Re$  und  $Gr$  nach Gln.(4.1) und (4.2) kennzeichnen die Bedingungen im Ursprung der Strömung.

Die Entwicklung der Strömung im auftriebsbehafteten Nachlauf ist eine Funktion von der Lauflänge  $x$ . Die lokalen Verhältnisse lassen sich durch die mit  $x$  gebildeten Kennzahlen  $Re_x$  und  $Gr_x$  beschreiben.

$$Re_x = \frac{\bar{u}_0 x}{\nu_0} \quad (4.3)$$

$$Gr_x = \frac{1}{2\pi} \frac{g \alpha_0 \dot{Q}}{\rho_0 c_p \nu_0^3} x^2 \quad (4.4)$$

Mit dem Mischkonvektionsparameter

$$\beta = \frac{Re_x}{\sqrt{Re_x^2 + Gr_x}} \quad (4.5)$$

der unabhängig von  $x$  ist, gelingt es, den gesamten Bereich der Mischkonvektion zu charakterisieren; Afzal (1985). Es ist deutlich, daß  $\beta$  den Einfluß der Zwangskonvektion im Vergleich zur Naturkonvektion gewichtet. Die beiden asymptotischen Grenzfälle der Natur- und der Zwangskonvektion entsprechen  $\beta = 0$  und  $\beta = 1$ . Bei gegebenen Strömungsbedingungen ist  $\beta$  eine Konstante.

In der Teststrecke werden zwei Strömungsfälle untersucht:

- die Zwangskonvektion mit  $\beta = 1$ ,
- und die Mischkonvektion mit  $\beta = 0.62$ .

Die Parameter der beiden Meßreihen sind in Tabelle (4.1) zusammengestellt. Die Teststrecke wird in beiden Meßreihen mit der Geschwindigkeit  $\bar{u}_0$  durchströmt. Diese Strömung wird im folgenden als Grundströmung bezeichnet. Die dieser Geschwindigkeit entsprechende Reynolds-Zahl  $Re_D$  ist mit dem Kanaldurchmesser  $D$  gebildet.  $x/d$  ist der mit dem Kugeldurchmesser normierte Abstand vom Mittelpunkt der Kugel. Die Reynolds-Zahl  $Re$  liegt weit unterhalb des kritischen Wertes von  $Re = 3 \cdot 10^5$ , so daß die Grenzschicht der Kugelumströmung laminar ist.

Für jeden der in Tabelle (4.2) angegeben axialen Abstände werden Messungen über den gesamten, teilweise auch nur über den halben Kanalquerschnitt, durchgeführt. Die Symmetrie der Nachlaufströmung wird an einigen axialen Positionen durch zusätzliche Messungen unter verschiedenen Winkellagen  $\varphi$  überprüft. Die Symmetrie ist im untersuchten Bereich der Strömung gut erfüllt.

Die bei Mischkonvektion zugeführte Heizleistung  $\dot{Q}$  ist so gewählt, daß an der Kugeloberfläche gerade keine Siedevorgänge auftreten.

Bei der Zwangskonvektion handelt es sich um eine reine Nachlaufströmung. Tab.(4.2) zeigt, daß für diesen Strömungsfall Messungen nur an sechs axialen Abständen durchgeführt werden. Die Messungen sollen als Vergleichsbasis dienen, um die Wirkung von Auftriebseffekten auf das Strömungsfeld zu beurteilen. Ziel des Meßprogramms ist es, den Impuls- und Wärmetransport bei Mischkonvektion detailliert zu untersuchen.

$\beta$	$\bar{u}_0$	$\bar{T}_0$	$Re_D$	$Re$	$Re_x$	$Gr_x$	$Gr$	$\dot{Q}$
1	m/s	°C	1	1	1	1	1	W
1.0	0.071	20.0	9810	730	$3.65 \cdot 10^3$ $+ 7.73 \cdot 10^4$	0	0	0
0.62						$2.11 \cdot 10^7$ $+ 9.48 \cdot 10^9$	$8.44 \cdot 10^5$	100

Tab.(4.1): Parameter der Meßreihen

		$\beta = 0.62$		$\beta = 1.0$	
$\psi$		$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$
$x/d$					
5		■		■	
7.5		■			
10		■			
12.5		■			
15		■	■	■	■
20		■			
30		■			
35		■	■	■	■
40		■			
50		■			
60		■			
70		■		■	■
80		■			
90		■			
100		■	■	■	■
106		■		■	

Tab. (4.2): Meßprogramm

#### 4.2 Visualisierung der Strömung

Zur Visualisierung der Strömungsstruktur in der Mischkonvektionsströmung wird eine Schlierenoptik verwendet (Goldstein (1976), Oertel (1989)). Das Schlierensystem wird mit zwei sphärischen Hohlspiegeln in der sogenannten Z-Anordnung aufgebaut, wobei sich in der Operatorebene eine Messerkante befindet. Bei diesem Verfahren wird die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex der Flüssigkeit ausgenutzt, die eine dem Temperaturgradienten proportionale Strahlablenkung eines parallelen Lichtbündels bewirkt. Unterschiedliche Temperaturgradienten stellen sich in Form verschiedener Graustufen dar. Betragsmäßig große Temperaturgradienten erscheinen dabei dunkel. Radiale Gradienten werden bei vertikaler Anordnung und axiale Gradienten bei horizontaler Anordnung der Messerkante sichtbar.

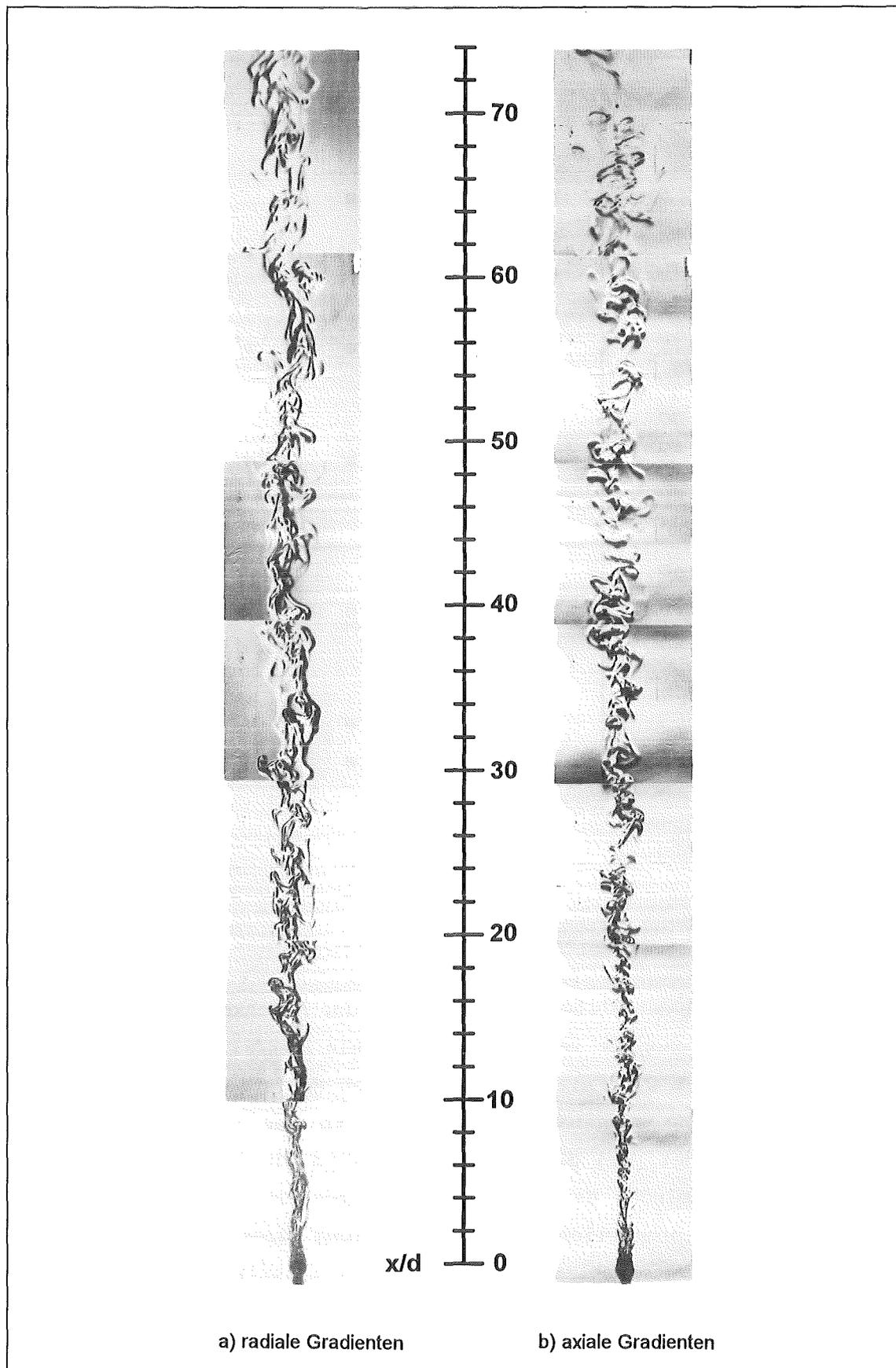


Abb. (4.1): Schlierenaufnahmen der Mischkonvektionsströmung im Kugelnachlauf für  $0 \leq x/d \leq 74$ , (a) radiale Gradienten der Temperatur, (b) axiale Gradienten der Temperatur.

In Abbildung (4.1) sind die Temperaturgradienten im Nachlauf der Kugel bei Mischkonvektion ( $\beta = 0.62$ ) für  $0 \leq x/d \leq 74$  visualisiert. Im linken Teil der Abbildung sind die radialen Gradienten  $\partial T/\partial r$  und im rechten Teil Gradienten in axialer Richtung  $\partial T/\partial x$  zu sehen.

Die Entwicklung des Temperaturfeldes ist eng mit der Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes verknüpft. Einzelne Wirbelstrukturen transportieren die ihnen aufgeprägte Temperatur durch die Strömung und tauschen ihre Wärme mit kälteren Wirbeln aus. Dies bedeutet, daß die sichtbaren Schlierenstrukturen Temperaturballen entsprechen, die ihrerseits mit Geschwindigkeitswirbeln zu identifizieren sind.

Der Auftriebsstrahl breitet sich mit zunehmendem Abstand von der Kugel aus. Die Breitenentwicklung des Strahls hängt dabei von der Geschwindigkeit der Grundströmung ab. Die axiale Entwicklung der Strömungsstrukturen zeigt zwei Strömungsbereiche, in denen deutlich unterschiedliche Längenskalen zu erkennen sind. Dies läßt eine Einteilung in einen Formierungsbereich und einen Mischkonvektions- oder Auftriebsbereich zu.

Bis etwa  $x/d \approx 15$  weist der Strahl einen kontinuierlichen Bereich auf. Die Strahlgrenze ist noch gut erkennbar. In diesem Bereich dominieren kleinskalige Strukturen. Die Strömung wird hier noch durch die Kugelumströmung geprägt.

Für größere Abstände findet eine Umstrukturierung der Strömung statt. Die charakteristischen Abmessungen der Strukturen vergrößern sich. Der gesamte Strahl ist stark intermittierend. Die Strahlgrenze ist nicht mehr klar definiert. Die im Auftrieb in Form von Dichteunterschieden gespeicherte potentielle Energie wird in kinetische Energie umgesetzt. Es entstehen einzelne heiße Fluidballen, die aufgrund ihres größeren Auftriebs eine höhere Geschwindigkeit besitzen als der Hauptteil des Auftriebsstrahls. Diese mischen sich weiter stromab wieder in den Strahl ein, wobei großskalige Wirbelstrukturen zu beobachten sind.

Die Schlierenaufnahmen der axialen Gradienten zeigen besonders deutlich, daß in der auftriebsbehafteten Nachlaufströmung kein kontinuierlich zusammenhängender, warmer Kernbereich anzutreffen ist. Kalte Bereiche der Grundströmung dringen immer wieder bis auf die Strahlachse durch. Für Nachlaufströmungen ist dies typisch. Infolge der starken Einmischung kalten Fluids wird sich die durch die Beheizung der Kugel erzeugte Temperaturüberhöhung wesentlich schneller abbauen, als dies zum Beispiel in auftriebsbehafteten Freistrahlen im allgemeinen der Fall ist.

Die starke Intermittenz lässt sich sehr gut am zeitlichen Verlauf des Temperatursignals zeigen. In Abbildung (4.2) sind für einen Meßort auf der Mittelachse des Strahls ( $r/d = 0$ ) und den axialen Abstand  $x/d = 35$  der Verlauf der Temperaturdifferenz  $T(t)$  und das zugehörige Zeitsignal der axialen Geschwindigkeitskomponente  $u(t)$  über einer Beobachtungszeit von  $t = 20$  s aufgetragen. Neben den maximalen Amplituden des Temperatursignals treten zeitweise Bereiche auf, in denen das Fluid die Temperatur der Grundströmung besitzt. Es kann beim Eintreten in den Strahl nicht ausreichend erwärmt werden. Ein ähnliches Verhalten wird von Gibson et al. (1968) im auftriebsfreien Nachlauf einer beheizten Kugel beobachtet. Die beschriebene erhöhte Geschwindigkeit der heißen Fluidballen ist am Signal von  $u(t)$  deutlich zu sehen. Geschwindigkeit und Temperatur sind miteinander korreliert.

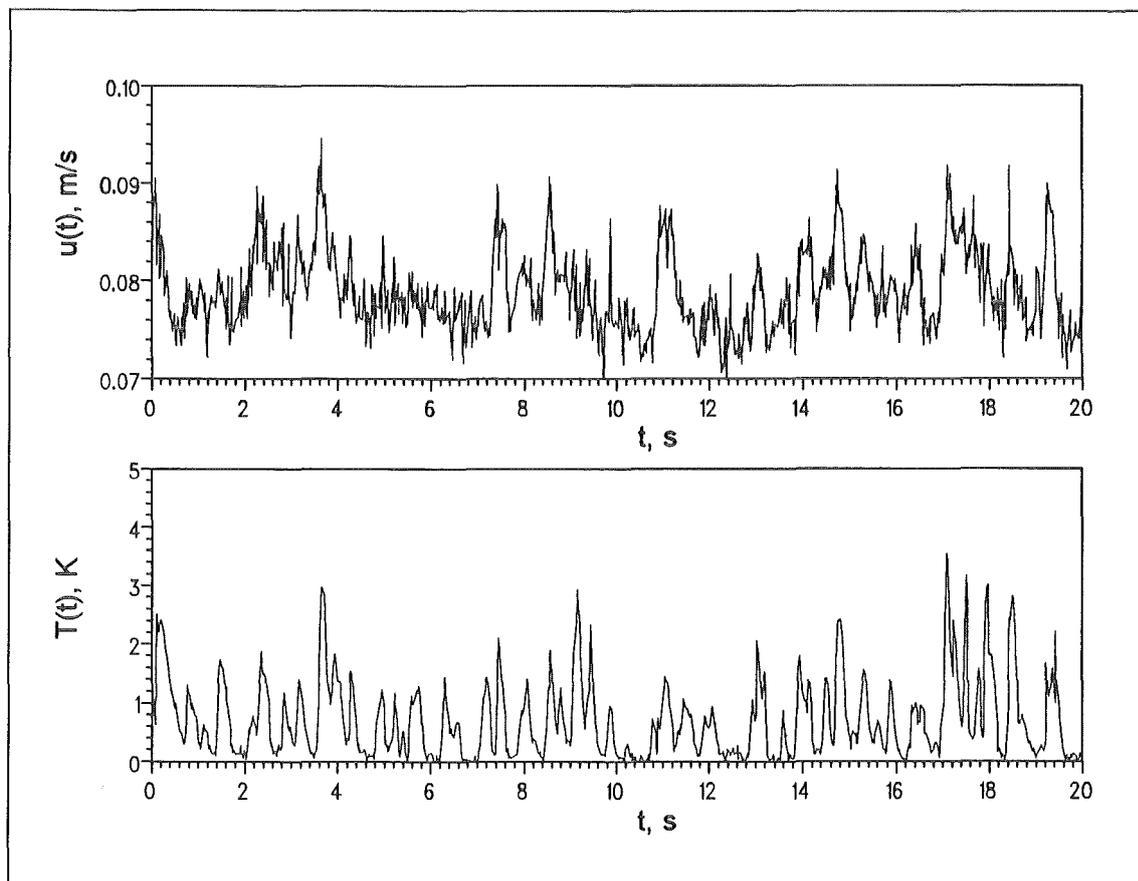


Abb.(4.2): Zeitlicher Verlauf der Signale von  $T(t)$  und  $u(t)$  für  $x/d = 35$  und  $r/d = 0$  bei Mischkonvektion.

### 4.3 Die Hauptströmung

Das Hauptströmungsfeld wird durch die Verteilungen der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und bei Mischkonvektion zusätzlich durch die mittlere Temperaturdifferenz  $\bar{T}$  beschrieben. Im folgenden werden die Meßergebnisse unter Benutzung der in Abbildung (4.3) gegebenen Bezeichnungen dargestellt.

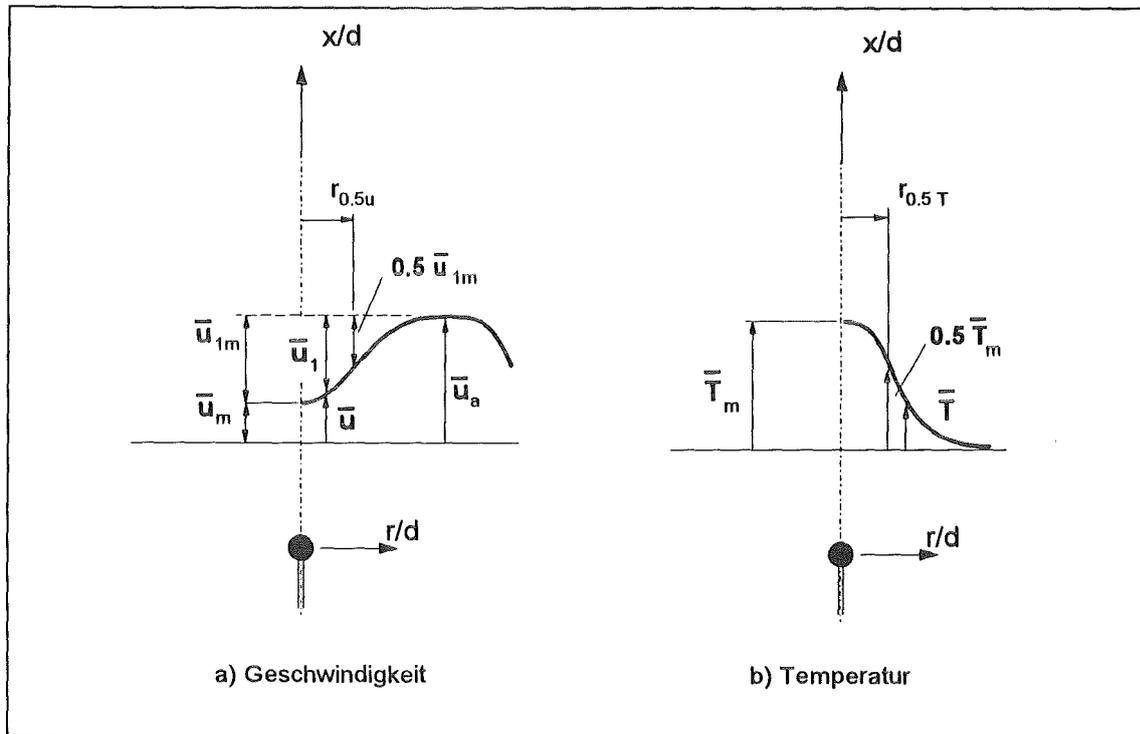


Abb.(4.3): Skizze zur Erläuterung der Bezeichnungen,

a) Geschwindigkeitsverteilung, b) Temperaturverteilung.

Der Strömungswiderstand der Kugel bewirkt einen Impulsverlust. Im Nachlauf ist die Strömungsgeschwindigkeit gegenüber der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$  im äußeren Bereich herabgesetzt. Wir sprechen hier von einer Geschwindigkeitsdelle. Die Verlustgeschwindigkeit  $\bar{u}_1$  im Nachlauf wird ausgedrückt durch

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_a - \bar{u} \quad (4.6)$$

Die maximale Verlustgeschwindigkeit ist  $\bar{u}_{1m}$  und tritt entlang der Strömungsachse oder Kanalachse bei  $r/d = 0$  auf. Im Fall der Mischkonvektion bezeichnet  $\bar{u}_{1m}$  die nach Gl. (4.6) berechnete Geschwindigkeit auf der Strömungsachse und  $\bar{u}_m$  den entsprechenden Wert von  $\bar{u}$ , Abb.(4.3a).  $r_{0.5u}$  ist der Halbwertsradius der mittleren axialen Geschwindigkeit. Dies ist die radiale Position, an dem die Verlustgeschwindigkeit  $\bar{u}_1$  auf  $0.5 \cdot \bar{u}_{1m}$  abgenommen hat.

Nach Abb.(4.3b) wird die mittlere Temperatur als  $\bar{T}$  und der Maximalwert auf der Strömungssachse mit  $\bar{T}_m$  bezeichnet. Der Halbwertsradius der mittleren Temperatur  $r_{0.5T}$  ist die radiale Position, an dem die Temperatur auf  $0.5 \cdot \bar{T}_m$  abgefallen ist.

Die Außengeschwindigkeit wird aus den Geschwindigkeitsprofilen als die maximal auftretende Geschwindigkeit  $\bar{u}$  der Grundströmung bestimmt. Hierfür werden die radialen Verläufe von  $\bar{u}$  durch kubische Splines angenähert. Der Anstieg von  $\bar{u}_a / \bar{u}_{a0}$  ist in Abbildung (4.4) für beide Meßreihen dargestellt.  $\bar{u}_{a0}$  ist der Wert von  $\bar{u}_a$  an der axialen Position  $x/d = 5$ . Die Meßwerte bei Zwangskonvektion ( $\beta = 1$ ) und bei Mischkonvektion ( $\beta = 0.62$ ) werden im weiteren durch die Symbole Dreieck ( $\Delta$ ) und Kreis ( $\circ$ ) gekennzeichnet. Es zeigt sich, daß der Anstieg für beide Parameter durch eine Gerade angenähert werden kann und über die gesamte Länge der Teststrecke 4.6 % beträgt. Für  $x/d = 5$  liegt  $\bar{u}_a$  bereits 14 % über der querschnittsgemittelten Geschwindigkeit  $\bar{u}_o$ . Dies hat folgenden Grund. Durch die Entwicklung der Wandgrenzschicht wird die Strömung in Wandnähe stark verringert. Der Massenstrom wird reduziert. Die Position  $x/d = 5$  entspricht einer Lauflänge von  $1.4 \cdot D$  stromab des Strömungseinsetzes, so daß die Dicke der Wandgrenzschicht bereits wieder zugenommen hat. Obwohl die Strömungsgeschwindigkeit hinter der Kugel stark vermindert ist, kann die damit verbundene Verdrängungswirkung hinsichtlich des Massenstroms vernachlässigt werden.

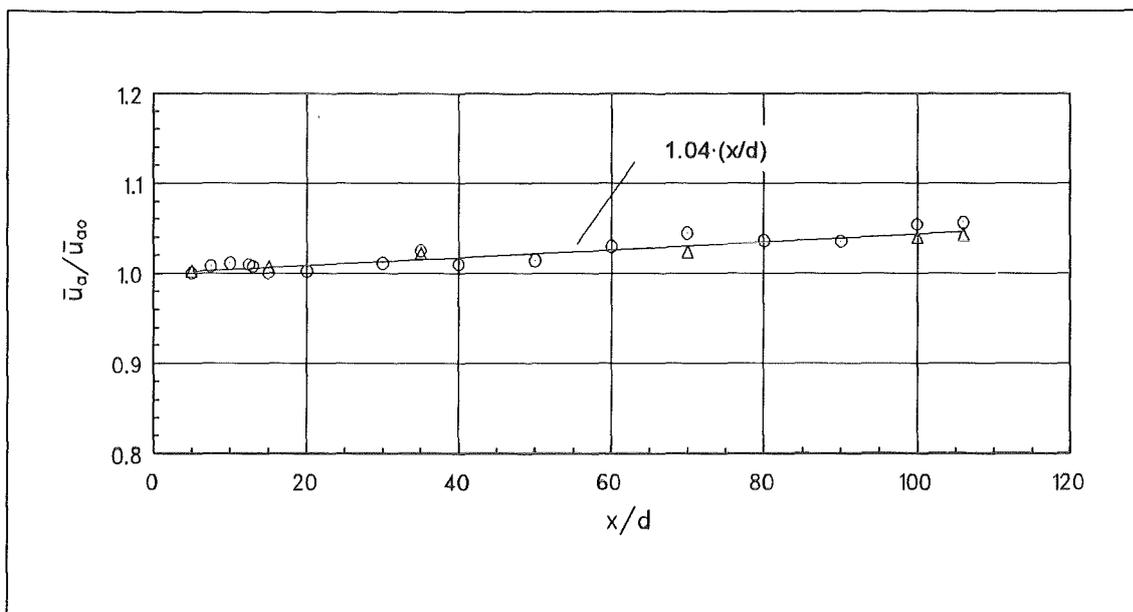


Abb.(4.4): Abhängigkeit der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$  vom axialen Abstand. ( $\Delta$ ) Zwangskonvektion, ( $\circ$ ) Mischkonvektion, (-) Näherungsgerade.

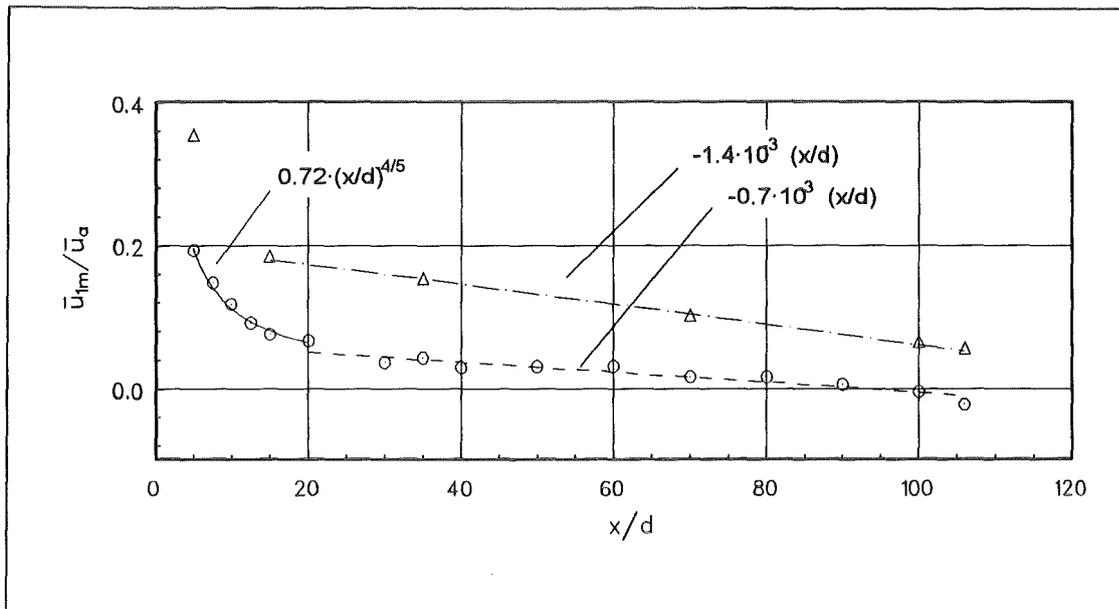


Abb. (4.5): Axiale Entwicklung der maximalen Verlustgeschwindigkeit  $\bar{u}_{1m} / \bar{u}_a$  bei  $r/d = 0$ . ( $\Delta$ ) Zwangskonvektion, ( $\circ$ ) Mischkonvektion, (---), (--) Näherungsgeraden, (—) Potenzgesetz.

Die axiale Entwicklung der Strömung im Kugelnachlauf ist durch den Abbau der maximalen Verlustgeschwindigkeit gekennzeichnet. Abbildung (4.5) zeigt den mit der Außengeschwindigkeit normierten Verlauf von  $\bar{u}_{1m} / \bar{u}_a$  als Funktion des Abstandes von der Kugel. Die eingetragenen Kurvenzüge sind Näherungskurven, mit denen die Meßwerte mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate angenähert werden.

Wir wollen zunächst die Zwangskonvektion betrachten. Die Geschwindigkeitsdelle ist bei  $x/d = 5$  bereits bis auf  $0.35 \cdot \bar{u}_a$  ausgeglichen. Mit zunehmendem Abstand ändert sich das Verhalten. Der Nachlauf wird wesentlich langsamer aufgefüllt. Für  $x/d \geq 15$  nimmt das Geschwindigkeitsdefizit linear mit  $1.4 \cdot 10^{-3} \cdot (x/d)$  ab.

Bei Beheizung der Kugel treten im Strömungsfeld zusätzlich Auftriebskräfte auf. Der Auftriebseinfluß bewirkt eine Beschleunigung der Strömung und damit eine Verminderung des Geschwindigkeitsdefizits  $\bar{u}_{1m}$  auf der Achse. Die durch den Strömungswiderstand der Kugel verminderte Geschwindigkeit wird durch den Auftriebseinfluß im Vergleich zur reinen Nachlaufströmung wesentlich schneller ausgeglichen. Bei  $x/d = 5$  beträgt das Geschwindigkeitsdefizit nur noch 20 % der Außengeschwindigkeit. Die axiale Abnahme läßt sich bis  $x/d \leq 15$  durch ein Potenzgesetz der Form

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_{1m}} = A \cdot \left[ \frac{x}{d} \right]^m \quad (4.7)$$

beschreiben. Der Exponent ergibt sich zu  $m = -4/5$  und die Proportionalitätskonstante zu  $A = 0.72$ . Die weitere Entwicklung zeigt analog zum unbeheizten Fall einen linearen Verlauf mit einem Abfall von  $0.7 \cdot 10^{-3} (x/d)$  und ist damit um den Faktor 0.5 geringer. Im Gegensatz zur reinen Nachlaufströmung wird das Geschwindigkeitsdefizit bereits für  $x/d \approx 90$  vollständig ausgeglichen. Bei  $x/d = 106$  ist die axiale Geschwindigkeit auf der Achse um etwa 2 % größer als die Außengeschwindigkeit.

Die Schlierenaufnahmen zeigen einen Formierungsbereich, in dem eine Umstrukturierung der Strömung stattfindet. Aus Abb.(4.5) wird deutlich, daß dieser Lauflängenbereich bis  $x/d \approx 15$  mit einem starken Abbau des Geschwindigkeitsdefizits verbunden ist. Dieses Verhalten tritt bei Zwangs- und Mischkonvektion auf. Es kann daher mit der Ausbildung des Kugelnachlaufs und der damit verbundenen Wirbelbildung und den intensiven Mischungsvorgängen erklärt werden.

Die bei Mischkonvektion zugeführte Wärme führt zu einer Temperaturüberhöhung. Die maximale mittlere Temperaturdifferenz  $\bar{T}_m$  auf der Achse ist in Abbildung (4.6) über dem axialen Abstand  $x/d$  aufgetragen. Sie ist auf den Wert  $\bar{T}_{m0} = 5.72 \text{ K}$  bei  $x/d = 5$  bezogen. Bei dem maximal untersuchten Abstand  $x/d = 106$  ist die Temperatur auf  $0.04 \cdot \bar{T}_{m0}$  abgefallen, was einer Temperaturdifferenz  $\bar{T}_m = 0.23 \text{ K}$  entspricht. Die axiale Abschwächung läßt sich durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von  $-1$  beschreiben. Die Abklingkonstante der Näherungsfunktion ist 5.18. Für einen auftriebsfreien beheizten Kugelnachlauf ohne axialen Druckgradienten wird aus

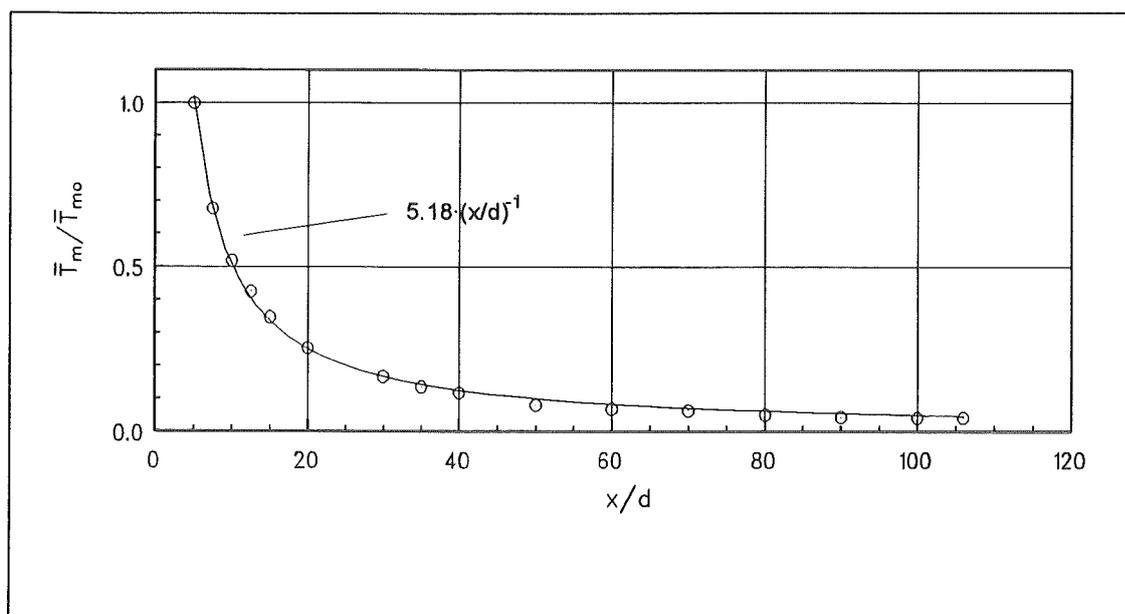


Abb.(4.6): Axiale Abschwächung der maximalen mittleren Temperatur  $\bar{T}_m / \bar{T}_{m0}$ ,  
 (-) Potenzgesetz.

Ähnlichkeitslösungen und Messungen ein Abklingexponent von  $-2/3$  gefunden (Freymuth und Uberoi (1973), Hinze (1975)). Die Temperaturabnahme ist dort im wesentlichen durch den radialen turbulenten Wärmetransport bedingt. Der im Experiment gefundene wesentlich stärkere Abfall läßt sich durch die zusätzliche starke Kopplung von Energie- und Impulsbilanzgleichung (Gl. (2.74), (2.75)) über das Auftriebsglied  $\Delta\bar{\rho}/\rho_0 g$  erklären. Das Auftriebsglied bewirkt eine Erhöhung des Impulses bei gleichzeitiger Verminderung der mittleren Temperatur. Das in Abschnitt 4.2 beschriebene diskontinuierliche Verhalten des Strömungsfeldes unterstützt dies. Der Einfluß des turbulenten Wärmetransports wird später besprochen.

#### Geschwindigkeitsverteilung

Die Wechselwirkungen zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld sind in den radialen Verteilungen der Geschwindigkeit klar zu erkennen. Die radialen Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\bar{u}(r,x)$ , normiert mit der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$ , sind in Abbildung (4.7) über dem dimensionslosen Radius  $r/d$  für sechs verschiedene Abstände von der Kugel aufgetragen. Die Profile von  $\bar{u}/\bar{u}_a$  bei Zwangskonvektion und Mischkonvektion sind im linken und rechten Teil der Abbildung gegenübergestellt. Die begrenzende Wand der Teststrecke liegt bei  $r/d = 6.72$ . Die Verteilungen von  $\bar{u}/\bar{u}_a$  sind bezüglich der Achse der Strömung zentriert. Kleine Asymmetrien der Strömung bezogen auf das vorgegebene Koordinatensystem des Meßsystems werden so korrigiert. Die maximale radiale Verschiebung beträgt  $|\Delta(r/d)| = 0.25$ . Bei Zwangskonvektion können die Geschwindigkeitsprofile in Achsnähe mit einer Glockenkurve nach Gauß angenähert werden. Die Lage des Minimums ergibt die radiale Verschiebung. Bei Mischkonvektion wird bei gleicher Vorgehensweise die radiale Lage der maximalem mittleren Temperatur  $\bar{T}_m$  benutzt, da sich diese eindeutig bestimmen läßt.

In der reinen Nachlaufströmung zeigt das Geschwindigkeitsprofil bei  $x/d = 5$  eine ausgeprägte Geschwindigkeitsdelle, die eng begrenzt ist. Es treten große radiale Gradienten  $\partial(\bar{u}/\bar{u}_a)/\partial(r/d)$  auf. Mit zunehmendem Abstand wird die Verteilung flacher und breitet sich in die Grundströmung aus. Bei einem Abstand  $x/d = 106$  ist die Delle noch vorhanden. In Nachläufen kann das umgebende schnellere Fluid der Grundströmung aus eigenem Antrieb nicht in den Nachlauf eintreten. Der Prozess wird im Gegensatz zu Freistrahlen wesentlich durch diffusiven Transport bestimmt.

Bei Mischkonvektion ist für  $x/d = 5$  noch die typische Profilform des Nachlaufs zu sehen. Das Geschwindigkeitsdefizit ist reduziert und der radiale Gradient kleiner. Für größere  $x/d$  ändert sich das Profil. In der

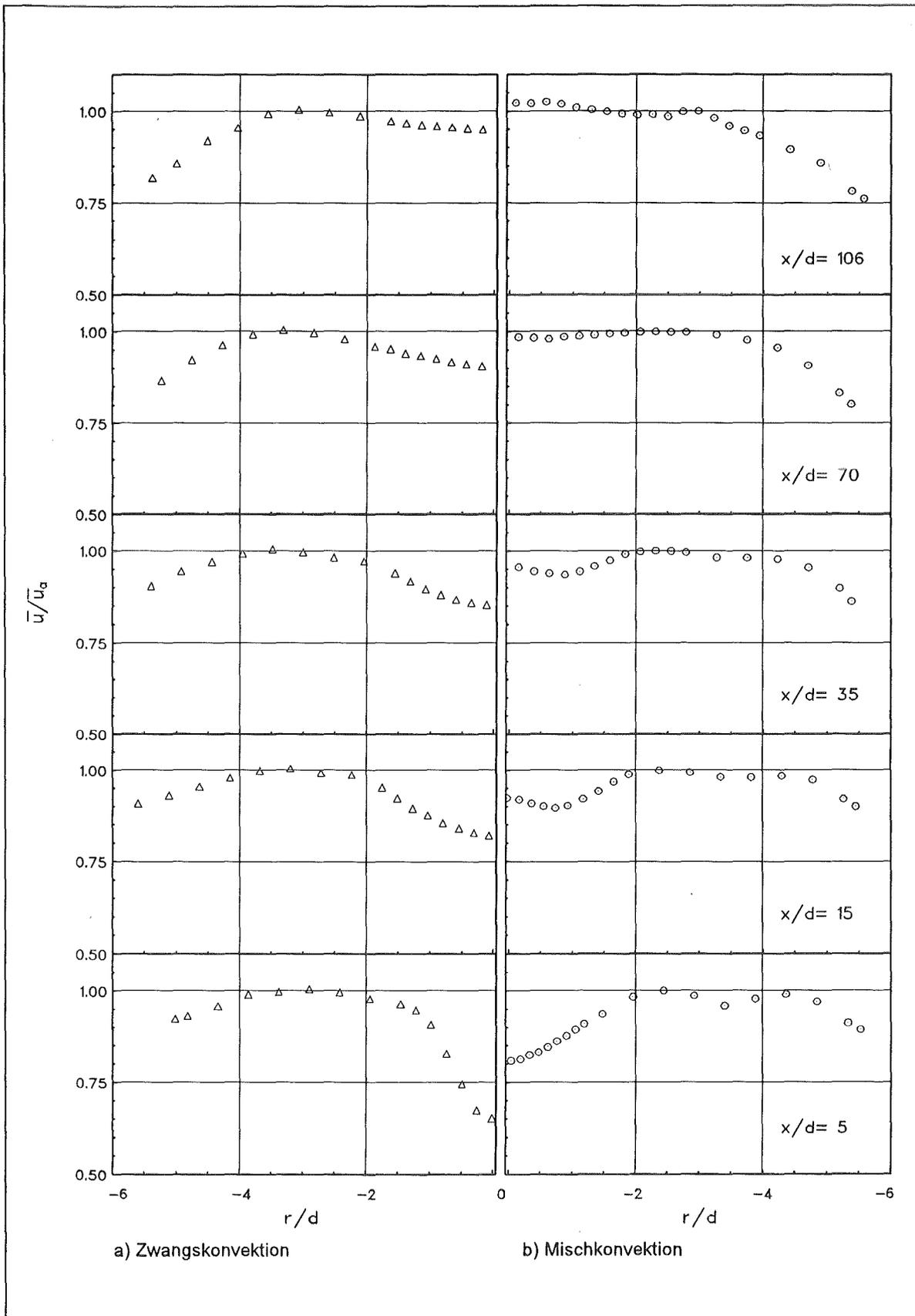


Abb. (4.7): Radiale Verteilung der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\bar{u}$  in verschiedenen Abständen von der Kugel.  
 a) Zwangskonvektion ( $\Delta$ ), b) Mischkonvektion ( $\circ$ ).

Umgebung der Achse kommt es zu einer Überhöhung der Geschwindigkeit. Die Verteilung zeigt einen Wendepunkt mit verschwindenden Gradienten. Die Überhöhung ist die direkte Folge des Auftriebs und bildet sich bereits bei  $x/d = 7.5$  aus. Der Auftriebseinfluß nimmt mit dem axialen Abstand zu. Bei  $x/d = 106$  entsteht ein Vorlaufprofil, bei dem die Geschwindigkeit  $\bar{u}_m$  über der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$  liegt. Die Strömung wird in Achsumgebung hauptsächlich durch Auftriebskräfte beeinflusst.

Die Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe unterscheiden sich in beiden Strömungsfällen etwas voneinander. Bei  $x/d = 106$  und Mischkonvektion ist ein Wandeinfluß bis  $|r/d| = 2.7$  erkennbar und bei der reinen Nachlaufströmung dagegen nur bis  $|r/d| = 3.4$ . Die Wandgrenzschicht entwickelt sich unabhängig von Auftriebseinflüssen. Nach Überlegungen von Reichardt (1965) wird durch den Strömungswiderstand der Kugel eine Quellströmung erzeugt, durch die ein Impulsstrom in den äußeren Bereich abwandert. Durch den Geschwindigkeitsverlust  $\bar{u}_1$  im Nachlauf wird Fluid nach außen abgedrängt, was eine Erhöhung des Impulses der Außenströmung und damit der Geschwindigkeit bewirkt. Die Impulserhöhung findet im Randbereich des Nachlaufs statt und breitet sich mit diesem aus.

Infolge des Auftriebs kommt es bei Mischkonvektion mit zunehmendem Abstand in Umgebung der Strömungsachse zu einer Geschwindigkeitszunahme, so daß sich eine Strahlströmung in einer überlagerten Grundströmung ausbildet. Die Eigenschaft solcher Strömungen ist es, Fluid aus der Außenströmung einzumischen. Der Impulsstrom im Strahl wird erhöht bei entsprechender Abnahme des Impulses der Grundströmung. Die Geschwindigkeit muß sich also vermindern. Die Entwicklung ist auch für kleinere axiale Abstände zu erkennen.

#### Temperaturverteilung

Die radialen Profile der mittleren Temperaturdifferenz  $\bar{T}$  zeigen einen Verlauf, der durch Glockenkurven nach Gauß beschrieben werden kann.

$$\frac{\bar{T}}{\bar{T}_m} = \exp \left[ -\ln(2) \cdot \left( \frac{r}{r_{0.5T}} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

Die Glockenkurven beschreiben an den Rändern die Temperaturverteilung nicht exakt, da sie im Gegensatz zur tatsächlichen Strömung erst für  $r \rightarrow \infty$   $\bar{T} = 0$  ergeben. Daher ist es praktisch, für die radiale Ausbreitung den Halbwertsradius  $r_{0.5T}$  zu verwenden. Der axiale Verlauf des mit  $d$  normierten Halbwertsradius  $r_{0.5T}$  ist in Abbildung (4.8) dargestellt. Die axiale Ausbreitung des Temperaturfeldes wird für alle untersuchten Abstände durch ein Potenzgesetz

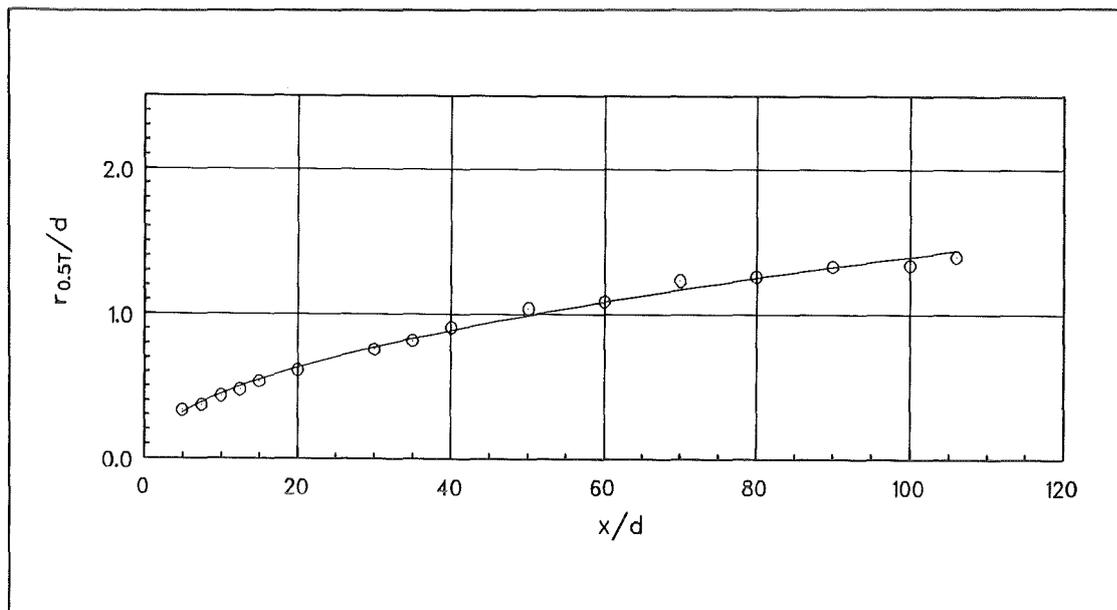


Abb.(4.8): Axialer Verlauf des Halbwertsradius  $r_{0.5T}/d$  des Temperaturfeldes bei Mischkonvektion. (o) Meßwerte, (—) Potenzgesetz.

$$\frac{r_{0.5T}}{d} = A_T \cdot \left[ \frac{x}{d} - \frac{x_0}{d} \right]^m \quad (4.9)$$

mit dem Exponenten  $1/2$  und der Ausbreitungskonstanten  $A_T = 0.14$  wiedergegeben. Der virtuelle Ursprung des Temperaturfeldes ergibt sich zu  $x_0 = 0$  und fällt mit dem Zentrum der beheizten Kugel zusammen. Freymuth und Uberoi (1973) finden ebenfalls  $x_0 = 0$ . Die Annahme einer punktförmigen Wärmequelle für das Temperaturfeld wird damit gestützt.

In Abbildung (4.9) sind die normierten Verteilungen  $\bar{T}(r,x)/\bar{T}_m$  der Meßwerte über dem Radius  $r$ , bezogen auf den Halbwertsradius  $r_{0.5T}$ , für sämtliche untersuchten axialen Abstände aufgetragen. Die Glockenkurve nach Gl.(4.8) ist als Kurvenzug eingezeichnet. Bei der Berechnung der einzelnen Glockenkurven werden nur Meßwerte verwendet, deren Wert 20 % der jeweiligen Maximaltemperatur überschreitet. Die maximale Temperatur  $\bar{T}_m$  wird aus der Glockenkurve bestimmt und ist bereits in Abb.(4.6) angegeben. Die normierten Temperaturprofile fallen sehr gut zusammen. Dies besagt, daß die Verteilungen in allen Ebenen  $x/d = const.$  einander ähnlich sind. In der englischen Literatur wird diese Eigenschaft als "self-preservation" bezeichnet. Im folgenden soll hierfür der Begriff Selbsterhaltung verwendet werden. In der Literatur wird in diesem Zusammenhang auch der Begriff Ähnlichkeit ("Similarity") benutzt. Die beiden Begriffe haben aber unterschiedliche Bedeutung (Hinze (1975), Stewart und Townsend (1951)).

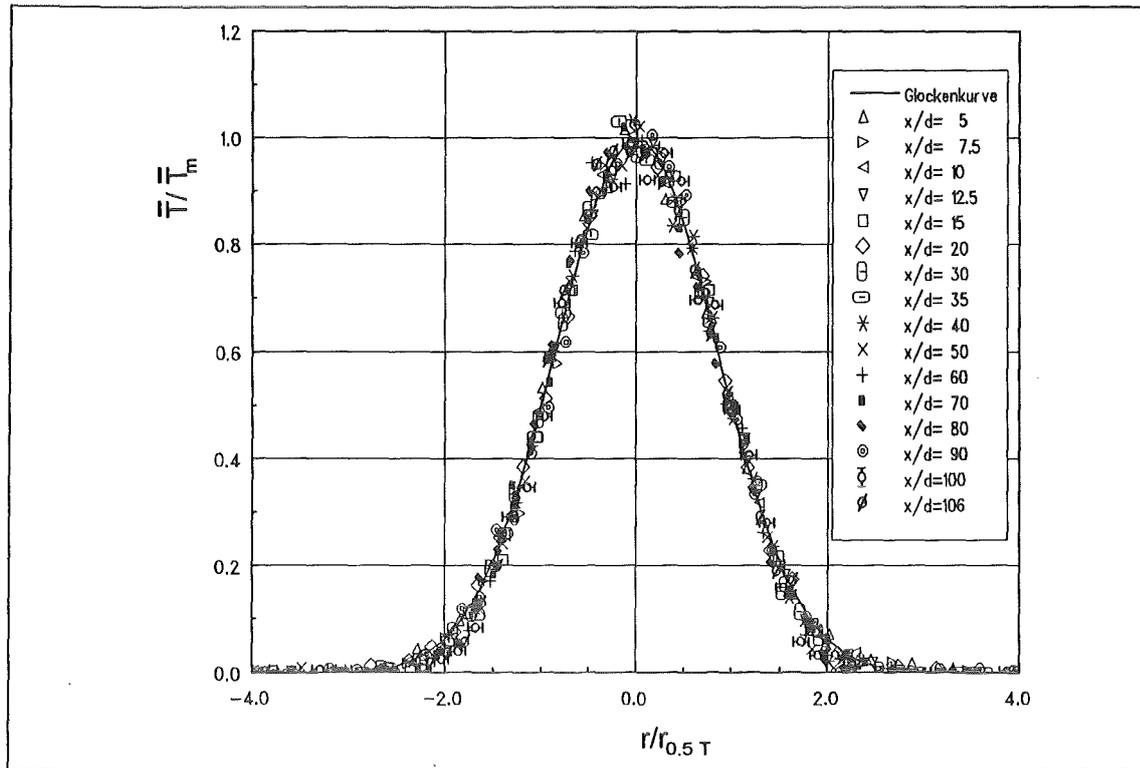


Abb. (4.9): Normierte Temperaturverteilungen  $\bar{T}/\bar{T}_m$  über  $r/r_{0.5T}$  bei Mischkonvektion für  $x/d = 5 + 106$ .

Selbsterhaltung bedeutet, daß sich die Form der radialen Verteilungen einer Strömungsgröße mit dem axialen Abstand nicht verändert und mit lokalen charakteristischen Maßstäben für die Länge und die Strömungsgröße normiert werden können. Die Maßstäbe müssen dabei universelle Funktionen vom Abstand des Ursprungs der Strömung sein. Die Struktur des Feldes und die kinematischen Beziehungen ändern sich während der axialen Entwicklung nicht mehr. Die Struktur muß für andere abklingende turbulente Strömungen nicht notwendiger Weise die gleiche sein (Bevilaqua und Lykoudis (1978)).

Ähnlichkeit bedeutet dagegen, daß nur je ein Maßstab für die Länge und die Strömungsgröße benötigt werden, um die Struktur jedes turbulenten Strömungsfeldes zu beschreiben.

$\bar{T}_m$  und  $r_{0.5T}$  sind charakteristische Temperatur- und Längenmaßstäbe des mittleren Temperaturfeldes. Das Abkling- und Ausbreitungsverhalten wird durch die angegebenen Potenzgesetze für alle axialen Positionen  $x/d$  beschrieben. Die Form der Verteilungen ist durch die Glockenkurve gegeben. Das mittlere Temperaturfeld entwickelt sich damit selbsterhaltend. Gibson et al. (1963) stellen fest, daß das Abklingverhalten eines Skalars innerhalb von etwa  $x/d \leq 10$  selbsterhaltend wird.

Die Streuung der Meßwerte bei  $r/r_{0.5T} = 0$  ist durch die starke Spreizung der Profile für große  $x/d$  bedingt. In den Randgebieten ergeben sich geringe Abweichungen von der Glockenkurve. Dies ist plausibel, da die Glockenkurve bis ins Unendliche reicht. Das Temperaturfeld ist aber durch die endlichen Kanalabmessungen begrenzt.

Das Ausbreitungsverhalten des Temperaturfeldes ist durch den Halbwertsradius  $r_{0.5T}$  gekennzeichnet. Ein entsprechender Halbwertsradius des Geschwindigkeitsfeldes  $r_{0.5u}$  kann bei Zwangskonvektion anhand der Geschwindigkeitsprofile angegeben werden. Wie erwähnt, können auch die Verteilungen von  $\bar{u}$  durch Glockenkurven nach Gauß angenähert werden. Mit Gl. (4.6) und analog zu Gl. (4.8) ist

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_{1m}} = \exp \left[ -\ln(2) \cdot \left( \frac{r}{r_{0.5u}} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Der axiale Verlauf des Halbwertsradius des mittleren Geschwindigkeitsfeldes  $r_{0.5u}$  bei Zwangskonvektion normiert mit  $d$  ist in Abbildung (4.10) dargestellt.

Die Ausbreitung der Nachlaufdecke kann für  $x/d \geq 15$  mit einem Potenzgesetz mit dem Exponent  $0.13$  angenähert werden, was ein schwach nicht-lineares Verhalten bedeutet. Für kleinere axiale Abstände weichen die Werte von  $r_{0.5u}/d$  von dem Potenzgesetz ab, da im Formierungsbereich der Nachlauf noch maßgeblich durch die Kugelgeometrie beeinflusst ist.

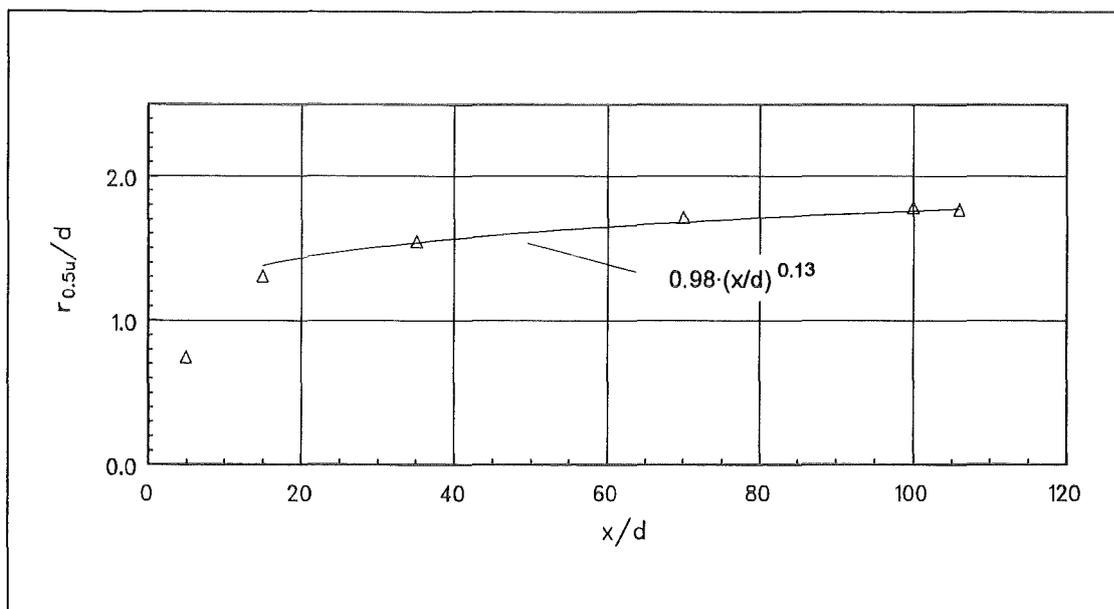


Abb. (4.10): Axialer Verlauf des Halbwertsradius  $r_{0.5u}/d$  des Geschwindigkeitsfeldes bei Zwangskonvektion.

(Δ) Messung, (—) Potenzgesetz.

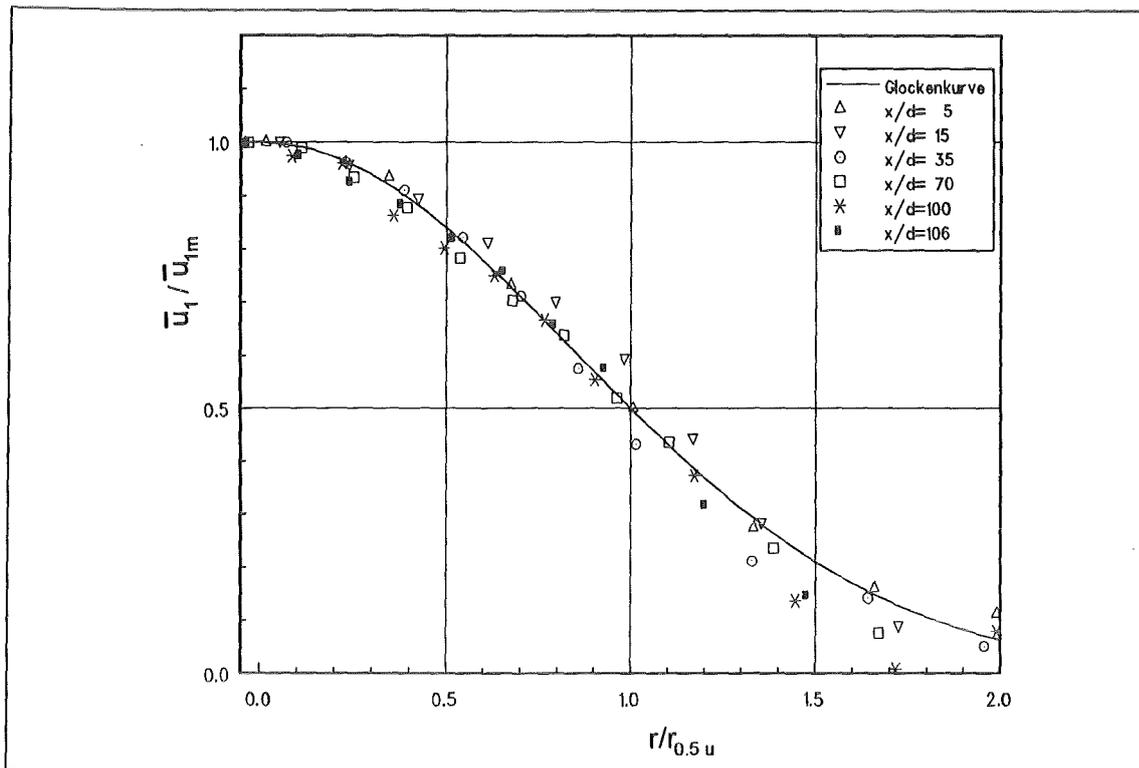


Abb. (4.11): Radiale Geschwindigkeitsverteilungen  $\bar{u}_1 / \bar{u}_{1m}$  über  $r/r_{0.5u}$  bei Zwangskonvektion.

Die radialen Profile  $\bar{u}_1(r, x) / \bar{u}_{1m}$  sind in Abbildung (4.11) über dem Radius  $r/r_{0.5u}$  für verschiedene axiale Abstände aufgetragen. Die Geschwindigkeit und der Radius sind dabei auf die jeweiligen Werte der maximalen Verlustgeschwindigkeit und des Halbwertsradius bezogen. Die Glockenkurve Gl.(4.10) ist mit eingezeichnet. Die Meßwerte fallen innerhalb eines Streubandes mit der Glockenkurve für  $|r/d| \leq 1.3$  zusammen. In den Randbereichen der Glockenkurve nimmt die Verlustgeschwindigkeit schneller ab als das durch die Glockenkurve beschriebene Profil. Dies ist verständlich, da dem Nachlauf durch die äußere Grundströmung und die Wandgrenzschicht endliche Grenzen gesetzt sind. Die Glockenkurve reicht dagegen bis ins Unendliche. Die Form der Profile ist unabhängig vom axialen Abstand.

Aus den Geschwindigkeitsverteilungen bei Mischkonvektion ist ersichtlich, daß ein ausgezeichneter Halbwertsradius nicht angebar ist. Erms-  
haus (1970), Cannon und Champagne (1991) geben ein integrales Breitenmaß  $l_0$  an, das für reine Nachlaufströmungen in einer unendlich ausgedehnten Grundströmung verwendet wird.

$$l_o^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_{1m}} r dr \quad (4.9)$$

Für beide Strömungsfälle wird im vorliegenden Experiment die Integration über die Geschwindigkeitsverteilungen bis  $R = r(\bar{u}_a)$  durchgeführt. Das integrale Breitenmaß  $l_o$ , bezogen auf  $d$ , ist in Abbildung (4.12) über dem axialen Abstand aufgetragen. Die Meßwerte sind zur Verdeutlichung des Verlaufs mit Geraden verbunden, sie stellen keine Näherungsfunktion dar. Der Verlauf des Halbwertsradius  $r_{0.5u}/d$  für Zwangskonvektion ist zum Vergleich eingetragen.  $l_{o,Z}$  und  $l_{o,M}$  bezeichnen die Werte von  $l_o$  bei Zwangs- und Mischkonvektion.

Bei Zwangskonvektion sind die Unterschiede zwischen  $r_{0.5u}$  und  $l_{o,Z}$  für  $x/d \geq 15$  nicht sehr groß. Für die Beschreibung der Ausbreitung sind sie ohne Bedeutung. Es fällt auf, daß die Werte bei  $x/d = 5$  zusammenfallen, obwohl  $r_{0.5u}$  größer sein muß als  $l_{o,Z}$ . Das Geschwindigkeitsprofil in Abb.(4.7) zeigt für  $|r/d| \geq 1.2$  noch ein Geschwindigkeitsdefizit, das bei der Integration nach Gl.(4.9) einen Beitrag leistet und so, im Vergleich zu  $r_{0.5u}$ , zu einem größeren Wert von  $l_{o,Z}$  führt.

Der Auftriebseinfluß bei Mischkonvektion bewirkt eine schnellere Ausbreitung des Nachlaufs, das integrale Breitenmaß  $l_{o,M}$  ist bis  $x/d = 80$  größer als  $l_{o,Z}$ . Bis  $x/d \approx 35$  nimmt  $l_{o,M}$  deutlich zu. Für größere Abstände kommt es zu einem Ausgleich der Geschwindigkeitsdelle.

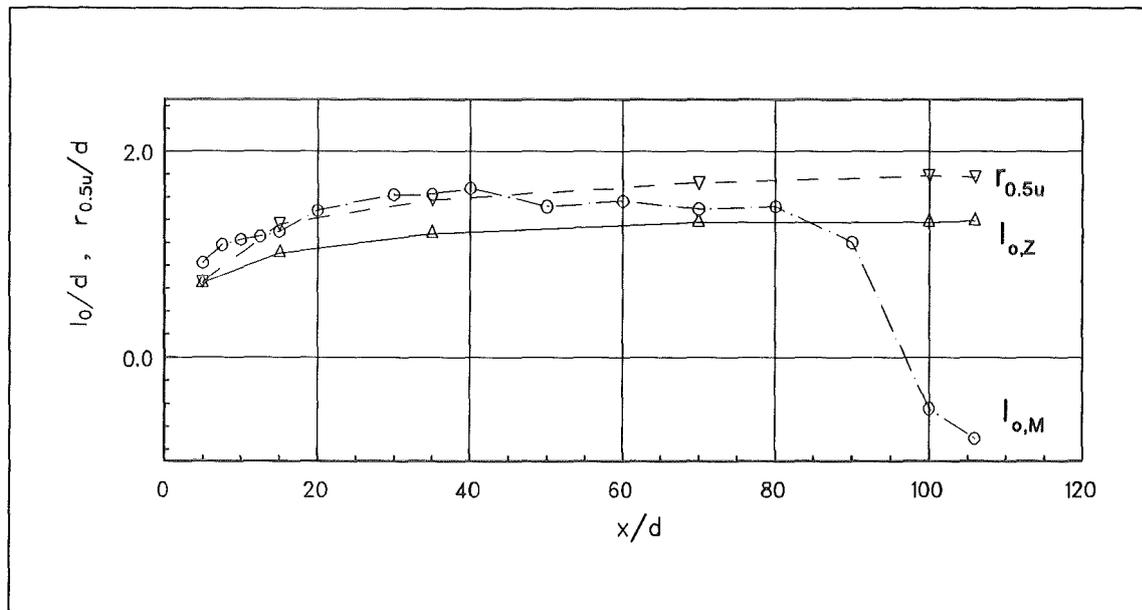


Abb.(4.12): Axialer Verlauf des integralen Breitenmaß  $l_o/d$  und des Halbwertsradius  $r_{0.5u}/d$  des Geschwindigkeitsfelds. Zwangskonvektion: ( $\Delta$ )  $l_{o,Z}$ , ( $\nabla$ )  $r_{0.5u}$ . Mischkonvektion: ( $\circ$ )  $l_{o,M}$ .

Bei  $x/d = 90$  ist  $l_{o,M} = 0$ , was den Verlauf von  $\bar{u}_{1m}$  in Abb.(4.5) bestätigt. Das integrale Breitenmaß  $l_{o,M}$  ist jetzt kein Maß mehr für die Breite der Geschwindigkeitsdelle, sondern kennzeichnet den Vorlauf. Das Vorzeichen ändert sich daher.

Es hat sich gezeigt, daß die Verteilungen der Temperatur basierend auf den gefundenen Gesetzmäßigkeiten der charakteristischen Maßstäbe  $\bar{T}_m$  und  $r_{0.5T}$  selbsterhaltend sind. Die maximale Verlustgeschwindigkeit  $\bar{u}_{1m}$  und der Halbwertsradius  $r_{0.5u}$  sind die entsprechenden charakteristischen Maßstäbe des Geschwindigkeitsfeldes bei Zwangskonvektion. Das Potenzgesetz, das den Verlauf von  $r_{0.5u}$  beschreibt, kann allerdings nicht als eine universelle Funktion für das asymptotische Verhalten im Sinne einer Selbsterhaltung angesehen werden. Für große Abstände wird im Experiment die Ausbreitung durch die anwachsende Wandgrenzschicht beeinflusst. Bei Nachlaufströmungen zeigt die Literatur, daß das Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit vom Widerstandskörper im allgemeinen erst für axiale Abstände im Bereich  $80 \leq x/d \leq 200$  selbsterhaltend wird (Freymuth und Uberoi (1973), Bevilacqua und Lykoudis (1978)). Für das Geschwindigkeitsfeld bei Zwangskonvektion kann aus diesen Gründen keine Selbsterhaltung gezeigt werden.

Gemäß den angegebenen Definitionen ist im untersuchten Bereich des Mischkonvektionsnachlaufs eine selbsterhaltende Entwicklung des Strömungsfeldes prinzipiell nicht möglich. Selbsterhaltung bedingt, daß sich die Strömungsstruktur und die damit verbundenen physikalischen Mechanismen nicht ändern. Die Mischkonvektion stellt ein Übergangsgebiet dar, in dem sich das Geschwindigkeitsfeld umstrukturiert. Wie Abb.(4.5) zeigt, ändern die Geschwindigkeitsprofile ihre Form. Im Nahbereich der Kugel dominieren Trägheitskräfte. Mit zunehmendem Abstand nimmt der Einfluß der Auftriebskräfte zu und der der Trägheitskräfte ab. Bei großen Abständen sind nur noch Auftriebseffekte maßgeblich für das Strömungsgeschehen in Achsumgebung verantwortlich. Die physikalischen Mechanismen ändern sich dann nicht mehr, so daß für Abstände von  $x/d \geq 106$  eine Selbsterhaltung des Geschwindigkeitsfeldes in Umgebung der Kanalachse grundsätzlich möglich ist. Dieser Bereich kann in der verwendeten Teststrecke allerdings nicht untersucht werden.

#### 4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse der Hauptströmung

Die wesentlichen Ergebnisse des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes der mittleren Strömungsgrößen können für Zwangskonvektion ( $\beta = 1$ ) und Mischkonvektion ( $\beta = 0.62$ ) wie folgt zusammengefaßt werden:

- Die Geschwindigkeit im Kugelnachlauf ist bei Zwangsströmung gegenüber der Grundströmung im untersuchten Bereich  $5 \leq x/d \leq 106$  stets vermindert. Bei Mischkonvektion wird die Nachlaufdüse vollständig ausgeglichen. Für  $x/d \geq 100$  kommt es in Umgebung der Achse der Strömung zu einer Geschwindigkeitsüberhöhung.
- Bis etwa  $x/d \leq 15$  liegt in beiden Strömungsfällen ein Formierungsgebiet vor. Für größere Abstände von der Kugel nimmt die Geschwindigkeit auf der Achse jeweils linear zu.
- Die Ausbreitung des Geschwindigkeitsfeldes kann durch ein integrales Breitenmaß beschrieben werden.
- Die Geschwindigkeitsprofile bei Zwangskonvektion werden im Nachlauf durch Glockenkurven nach Gauß für alle axialen Abstände gut beschrieben. Bei Mischkonvektion kann eine entsprechende Funktion nicht angegeben werden.
- Die Abnahme der Temperatur und das Ausbreitungsverhalten erfolgt bei Mischkonvektion nach einem Potenzgesetz. Die Temperaturverteilungen werden durch Glockenkurven nach Gauß sehr gut beschrieben.
- Das Temperaturfeld entwickelt sich basierend auf einem charakteristischen Temperatur- und Längenmaßstab selbsterhaltend. Die Temperaturverteilungen sind einander ähnlich.

## 4.5 Turbulenzstruktur

Die turbulenten Austausch- und Transportprozesse werden durch die turbulenten Spannungen, turbulenten Wärmeflüsse und die Intensität der Temperaturfluktuationen charakterisiert. In Tab. (2.7) sind diejenigen Turbulenzgrößen aufgeführt, deren Messung wünschenswert ist. Die im folgenden diskutierten Turbulenzgrößen gehören, entsprechend dieser Einteilung, zur zweiten Gruppe.

Die Diskussion der Größen des Hauptströmungsfeldes zeigt, daß die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  maßgeblich durch das Temperaturfeld beeinflusst wird. Aus diesem Grund soll als erstes das Turbulenzfeld der Temperaturfluktuationen dargestellt und diskutiert werden.

### 4.5.1 Temperaturfluktuationen

Die Intensität der Temperaturfluktuationen  $\overline{T'^2}$  wird durch den RMS-Wert  $(T'^2)^{1/2}$  der Temperaturfluktuationen Gl. (3.2) charakterisiert. In Abbildung (4.13) sind die RMS-Profile der Temperaturfluktuationen für alle untersuchten axialen Abstände gezeigt. Da die gezeigten Temperaturänderungen für alle axialen Abstände klein sind, sind sie direkt proportional zu Dichtefluktuationen. Die maximal auftretenden RMS-Werte der Temperatur bei  $x/d = 5$  und  $x/d = 106$  betragen  $3.58 \text{ K}$  und  $0.16 \text{ K}$ . Die RMS-Werte der Temperatur und der Radius sind mit den charakteristischen Größen des mittleren Temperaturfeldes  $\bar{T}_m$  und  $r_{0.5T}$  normiert. Die so normierten Verteilungen fallen nicht zusammen. Dies bedeutet, daß das Abklingverhalten des RMS-Werts der Temperatur sich von dem der mittleren Temperatur unterscheidet. Abbildung (4.14) zeigt die gleichen Verteilungen, die jetzt aber mit dem RMS-Wert der Temperatur auf der Kanalachse  $(T'_m)^{1/2}$  jeder einzelnen Verteilung normiert sind. Die verbesserte Übereinstimmung der selbstnormierten Profile ist ein Anzeichen dafür, daß für eine selbsterhaltende Beschreibung des turbulenten Temperaturfeldes ein neuer charakteristischer Temperaturmaßstab benötigt wird.

Die Meßwerte fallen in den Flanken der Verteilungen für  $|r/r_{0.5T}| \geq 1.0$  gut aufeinander. Das bedeutet, daß die mittlere Temperatur und die RMS-Werte der Temperatur sich nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten ausbreiten. Der Halbwertsradius des RMS-Wertes der Temperatur  $r_{0.5TRMS}$  kennzeichnet das Ausbreitungsverhalten. Er wird als der Radius definiert, an

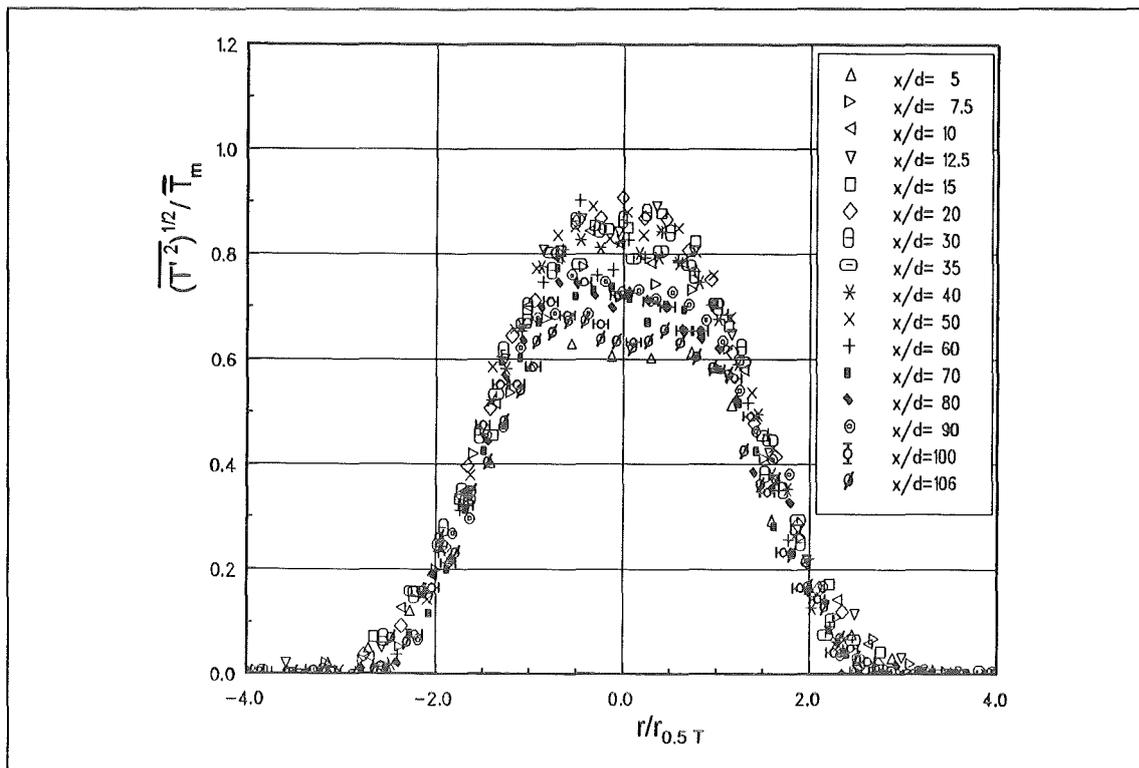


Abb.(4.13): Normierte Verteilungen des RMS-Werte der Temperatur bei Mischkonvektion.

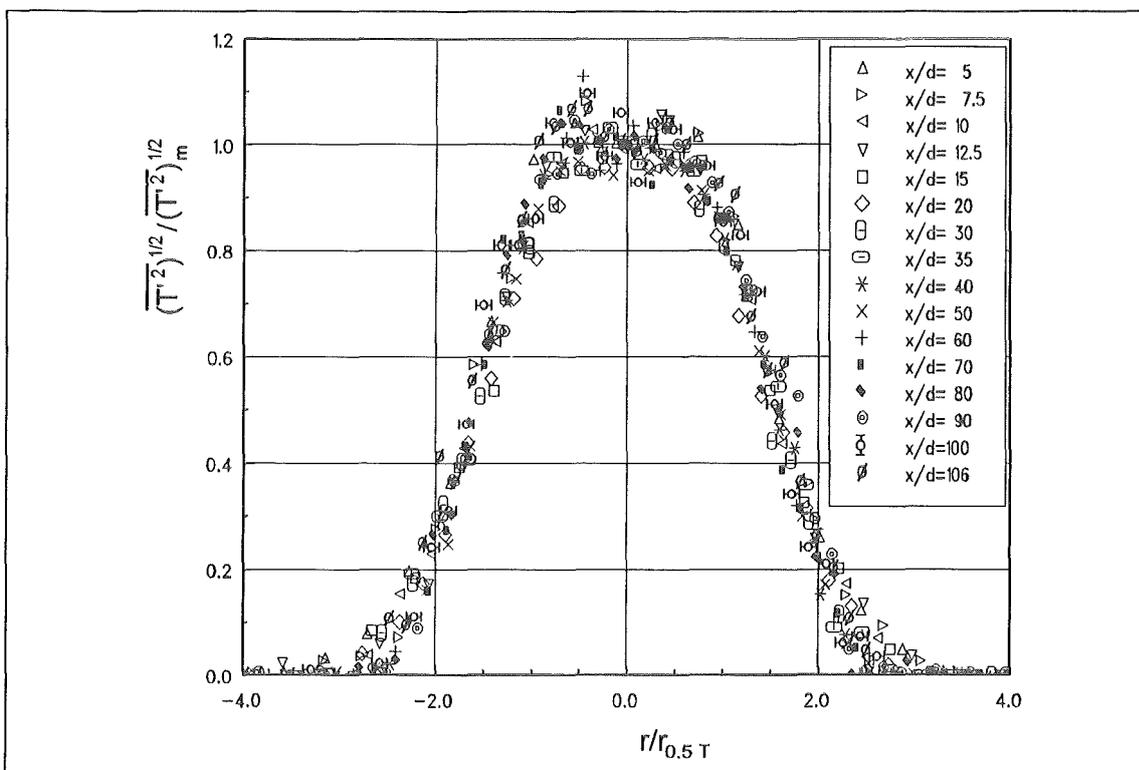


Abb.(4.14): Selbstnormierte radiale Verteilungen der RMS-Werte der Temperatur bei Mischkonvektion.

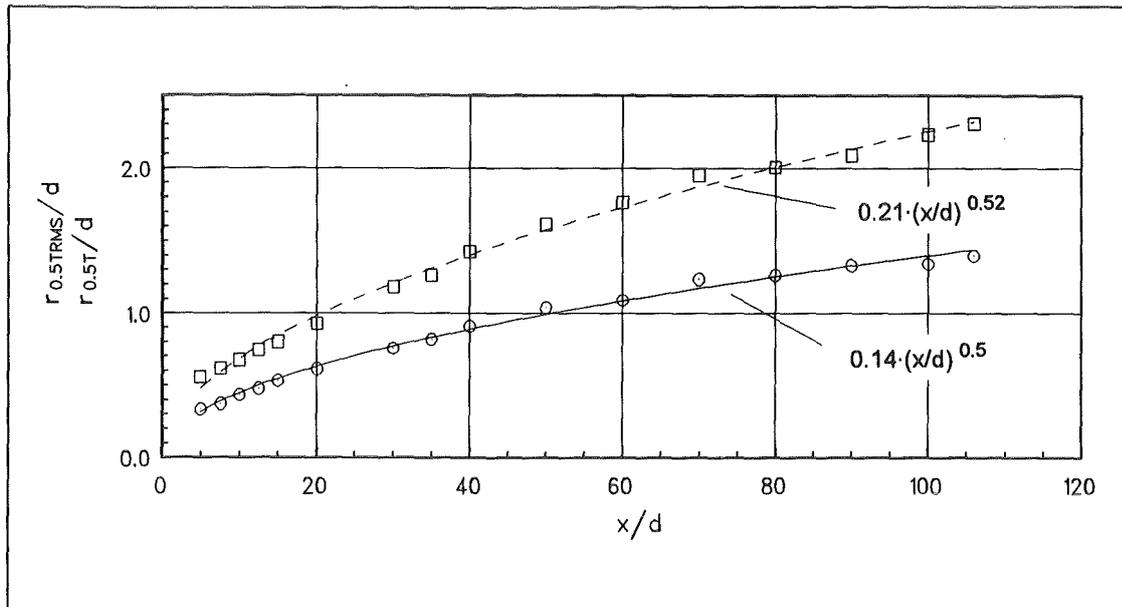


Abb. (4.15): Axialer Verlauf der normierten Halbwertsradien der mittleren Temperatur und des RMS-Wertes bei Mischkonvektion.

(○)  $r_{0.5T}/d$ , (□)  $r_{0.5TRMS}/d$ , (—) Potenzgesetz für  $r_{0.5T}/d$ ,  
 (---) Potenzgesetz für  $r_{0.5TRMS}/d$ .

dem der RMS-Wert der Temperatur  $0.5 \cdot \overline{(T'_m)^2}^{1/2}$  des Wertes auf der Kanalachse beträgt. Die Halbwertsradien  $r_{0.5T}$  und  $r_{0.5TRMS}$ , bezogen auf den Kugeldurchmesser  $d$ , sind in Abbildung (4.15) über dem axialen Abstand aufgetragen. Der Verlauf von  $r_{0.5TRMS}/d$  wird durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von  $0.52$  gut wiedergegeben. Dieser ist nur geringfügig größer als der für die mittlere Temperatur gefundene Exponent von  $0.5$  und kann daher als gleich groß angesehen werden. Das Feld der Temperaturfluktuationen breitet sich deutlich schneller aus, was durch die um den Faktor  $1.47$  größere Ausbreitungskonstante von  $0.21$  belegt wird. Die axiale Breitenentwicklung des mittleren und des turbulenten Temperaturfeldes kann damit als eine universelle Funktion eines charakteristischen Längenmaßes, in Form des Halbwertsradius  $r_{0.5T}$  der mittleren Temperatur, beschrieben werden.

Das Verhältnis des RMS-Wertes der Temperatur auf der Kanalachse zur maximalen mittleren Temperatur  $\bar{T}_m$  ist in Abbildung (4.16) in Abhängigkeit vom axialen Abstand dargestellt. Dieses Verhältnis kann in Analogie zum Geschwindigkeitsfeld als Turbulenzgrad des Temperaturfeldes bezeichnet werden. Der Verlauf läßt sich in zwei typische Bereiche unterteilen.

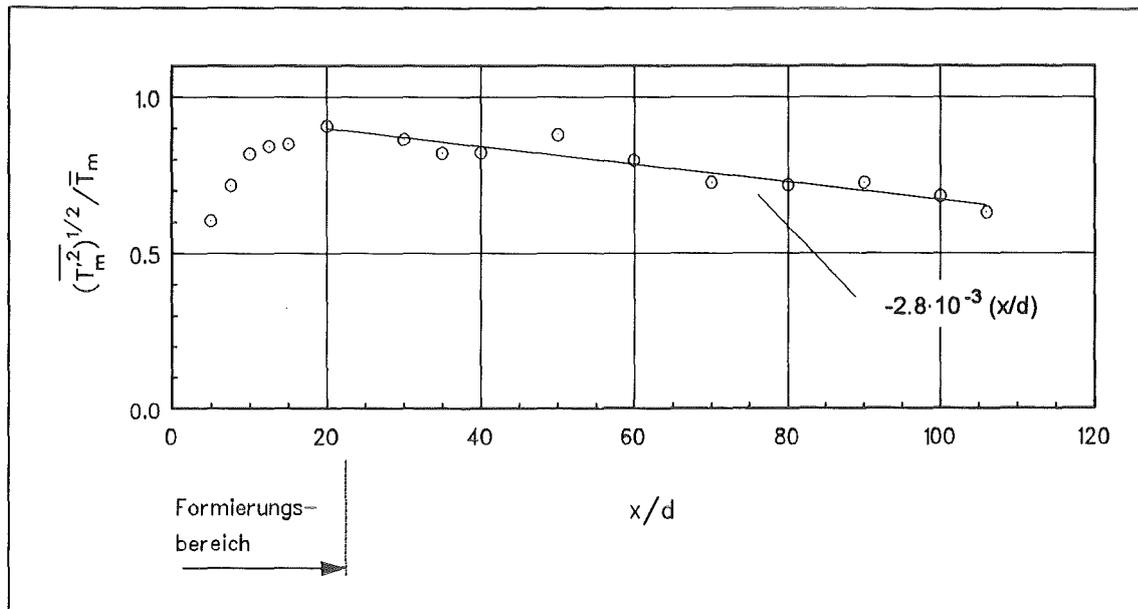


Abb. (4.16): Axialer Verlauf der RMS-Werte der Temperatur auf der Kanalachse bezogen auf die maximale mittlere Temperatur.  
 (○) Meßwerte, (—) Näherungsgerade.

Bis zu einem axialen Abstand von etwa  $x/d < 20$  nehmen die relativen Temperaturfluktuationen von etwa 60 % auf 90 % der maximalen mittleren Temperatur zu. Im Anschluß daran nimmt das Verhältnis ab und kann durch eine Gerade angenähert werden. Die Steigung beträgt  $-2.8 \cdot 10^{-3}$ . Bei  $x/d = 106$  ist der RMS-Wert der Temperatur auf etwa 65 % der maximalen mittleren Temperatur abgeklungen. Der zuerst genannte Bereich fällt mit dem im Geschwindigkeitsfeld beobachteten Formierungsbereich zusammen.

Die lokale Grashof-Zahl  $Gr_x$  nach Gl. (4.4) ist eine Funktion vom axialen Abstand der Wärmequelle und kennzeichnet die Entwicklung des überlagerten Auftriebsstrahls. Der Übergang zu turbulenten Auftriebsstrahlen ist nach dem Übergangskriterium nach Bill und Gebhart (1975) (siehe auch List (1982)) bei  $Gr_x = 3 \cdot 10^8$  gegeben. Dieser Wert wird für  $x/d \approx 18$  erreicht und liegt am Ende des Formierungsbereichs vor.

Die gemessenen RMS-Werte sind im Vergleich zu Messungen in reinen Auftriebsstrahlen sehr hoch. George et al. (1977) findet relative Temperaturfluktuationen von etwa 40 % auf der Strömungsachse. Gibson et al. (1968) ermitteln aus Messungen in einem Kugelnachlauf, bei dem die Temperatur allerdings nur als passiver Skalar wirkt, einen Wert von 38 %. Der große Unterschied zu den Literaturwerten ist mit dem stark diskontinuierlichen Charakter des Temperaturfeldes im Mischkonvektionsnachlauf zu erklären.

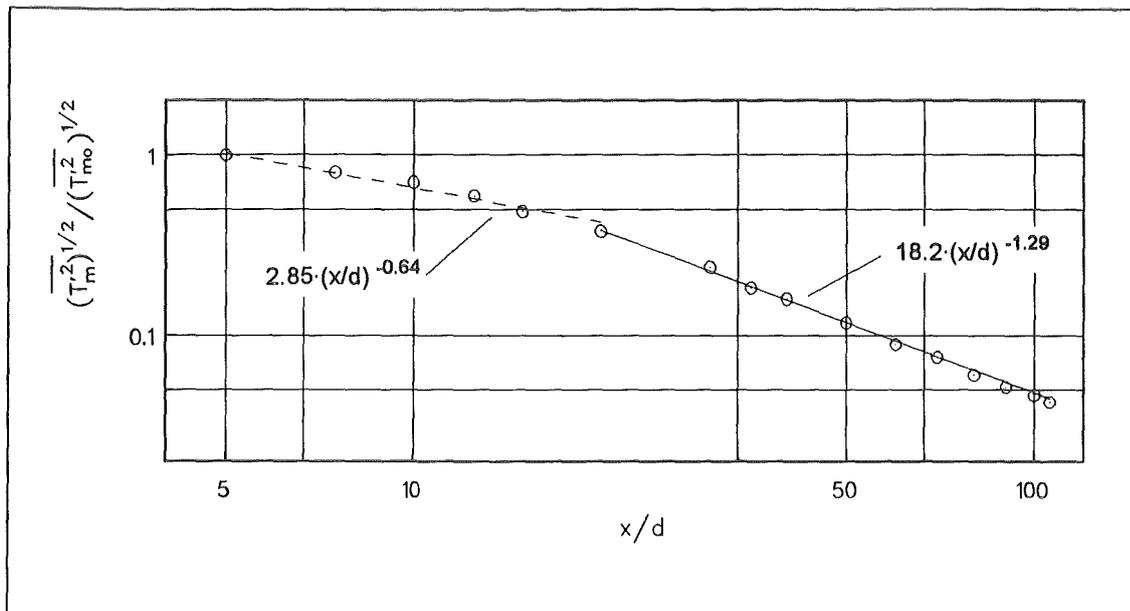


Abb. (4.17): Axiale Abschwächung des RMS-Werts der Temperatur auf der Kanalachse bezogen auf den Wert bei  $x/d = 5$ . (○) Meßwerte, (--) Potenzgesetz  $x/d < 20$ , (—) Potenzgesetz  $x/d \geq 20$ .

Die axiale Abschwächung des RMS-Wertes der Temperatur auf der Kanalachse ist in doppellogarithmischer Darstellung in Abbildung (4.17) gezeigt. Die Meßwerte sind, in Analogie zur mittleren Temperatur, mit dem RMS-Wert  $(T_{mo}'^2)^{1/2}$  bei  $x/d = 5$  normiert. Die unterschiedliche axiale Entwicklung des turbulenten Temperaturfeldes in den oben angeführten Abstandsbereichen ist klar zu sehen. Für die Abschwächung kann in beiden Bereichen ein Potenzgesetz angegeben werden. Im Formierungsbereich ergibt sich der Exponent zu  $-0.64$ . Für Abstände  $x/d \geq 20$  von der Wärmequelle beträgt der Exponent  $-1.29$ . Der RMS-Wert der Temperatur klingt hier, im Vergleich zum Formierungsbereich, doppelt so schnell ab.

In Abbildung (4.18) ist das gefundene Potenzgesetz für die axiale Abschwächung der mittleren Temperatur den RMS-Werten in linearer Auftragung gegenübergestellt. Die langsamere Abschwächung der Intensität der Temperaturfluktuationen im Formierungsbereich im Vergleich zur mittleren Temperatur des Hauptströmungsfeldes ist deutlich zu erkennen. Die axiale Entwicklung der beiden Strömungsgrößen nähert sich für größere  $x/d$  einander an.

Bei genauerer Analyse der Profile der RMS-Werte der Temperatur in den Abbn. (4.13) und (4.14) erkennt man, daß sich die Form der Verteilungen mit dem axialen Abstand von der Kugel ändert. Abbildung (4.19) zeigt

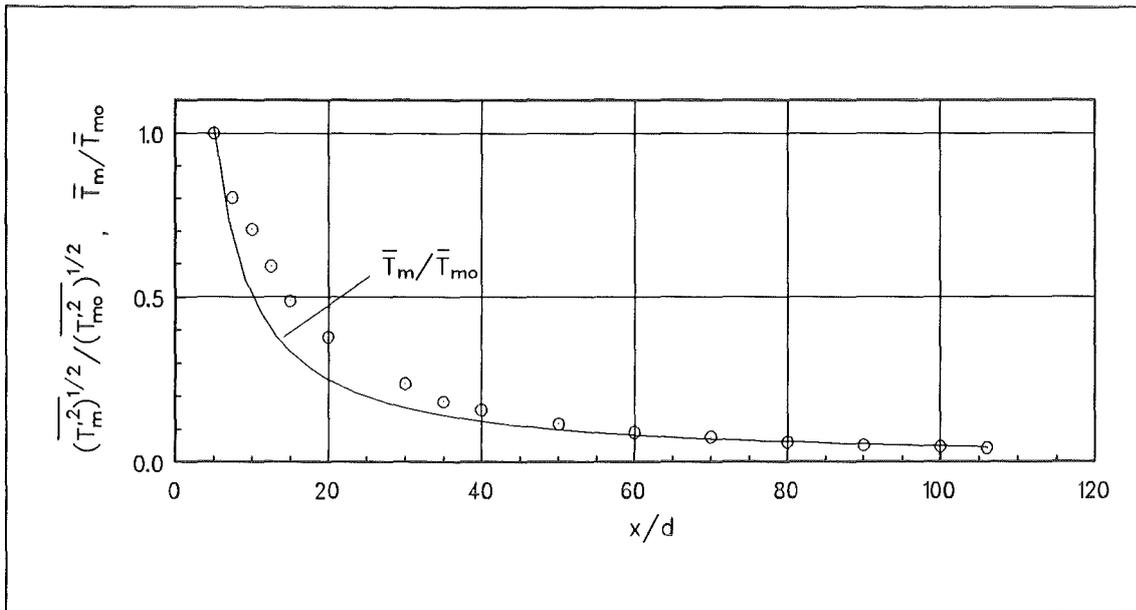


Abb. (4.18): Axiale Abschwächung des normierten RMS-Werts der Temperatur auf der Kanalachse im Vergleich zur mittleren Temperatur jeweils bezogen auf die Werte bei  $x/d = 5$ .  
 (○) Meßwerte des RMS-Werts, (—) Potenzgesetz für  $\overline{T_m} / \overline{T_{mo}}$ .

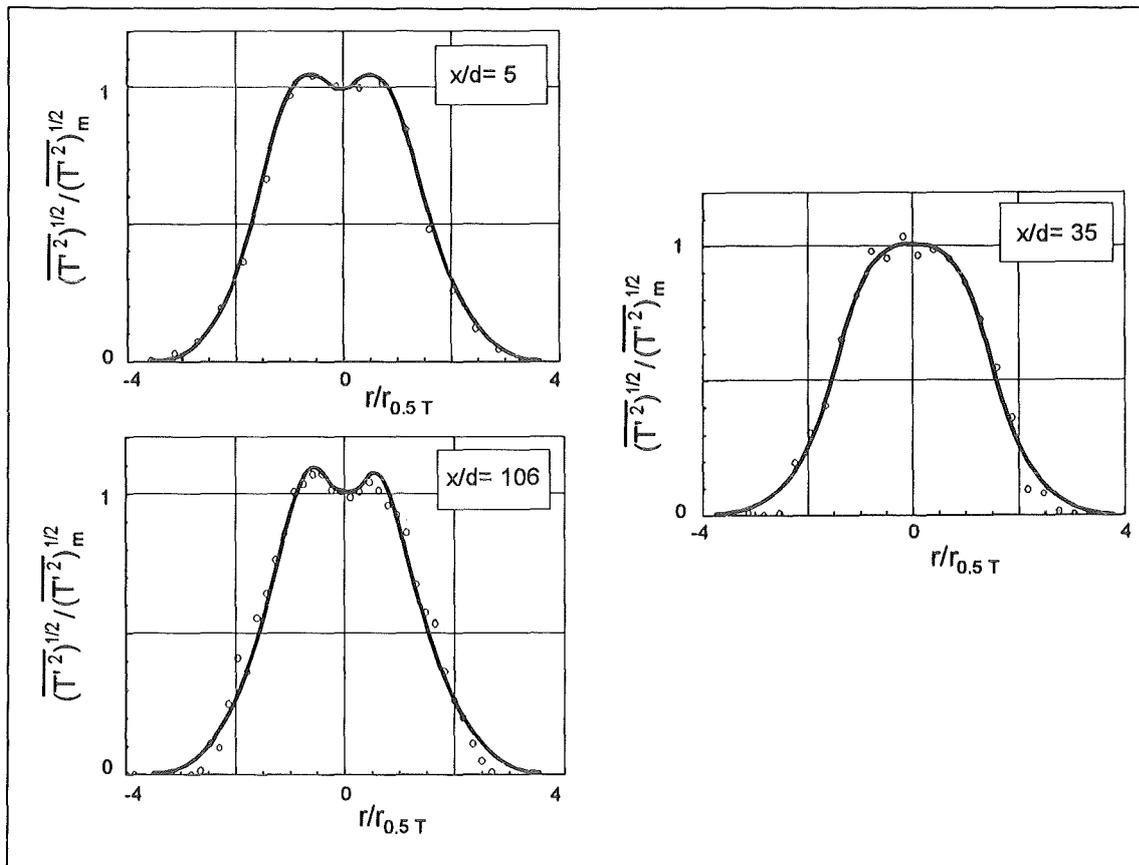


Abb. (4.19): Charakteristische Profilformen der normierten RMS-Werte der Temperatur bei  $x/d = 5, 35, 106$ .

drei charakteristische Profile, die bei  $x/d = 5, 35$  und  $106$  zu beobachten sind. Die eingezeichneten Kurvenzüge sollen dabei die Profilform verdeutlichen. Bei  $x/d = 5$  und  $x/d = 106$  treten M-förmige Verteilungen auf mit einem relativen Minimum auf der Kanalachse und maximalen RMS-Werten bei  $|r/r_{0.5T}| \approx 0.5$ . Das Profil bei  $x/d = 35$ , das stellvertretend für die übrigen axialen Abstände ist, zeigt dagegen in Achsumgebung ein breites Maximum des RMS-Wertes. Dieses unterschiedliche Verhalten läßt sich aus den folgenden Ausführungen erklären.

Der radiale Verlauf der Intensität der Temperaturfluktuationen wird hauptsächlich durch den radialen Gradienten der mittleren Temperatur  $\partial\bar{T}/\partial r$  bestimmt. Der Gradient ist in den Flanken der Profile der mittleren Temperatur maximal und verschwindet auf der Achse. Die RMS-Werte werden entsprechend ein relatives Maximum und Minimum aufweisen. Aufgrund molekularer und turbulenter Diffusion wird der RMS-Wert auf der Achse jedoch nicht zu Null. Es ergibt sich das charakteristische M-förmige Profil. Messungen in Strömungen, bei denen die Temperatur ein passiver Skalar ist zeigen, daß diese ausgeprägte Profilform auch bei sehr großen Abständen von bis zu  $1000$  dimensionslosen Abständen erhalten bleibt (Freyduth und Uberoi (1971), (1973), Freyduth (1975)).

Unter der Wirkung von Auftriebseinflüssen kommt es zu einer Zunahme des RMS-Wertes der Temperatur auf der Kanalachse. Das beschriebene Minimum tritt nicht mehr auf. Eine Erklärung hierfür leitet sich aus der exakten Transportgleichung für die Intensität der Temperaturfluktuationen, Gln. (2.20) und (2.28) in Abschnitt 2, ab. Der Produktionsterm von  $T'^2$

$$P_T = -2 \overline{u'_1 T'} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} \quad (4.10)$$

in Gl. (2.20) stellt den Austausch von Wärme durch die Wechselwirkung zwischen den turbulenten Wärmeflüssen und dem mittleren Temperaturgradienten dar. Dem Hauptströmungsfeld wird Wärme entzogen und dem Turbulenzfeld zugeführt, wodurch die mittlere Temperatur abnimmt und die Intensität der Temperaturfluktuationen zunimmt. Bei achsensymmetrischen Strömungen setzt sich  $P_T$  aus einem radialen und axialen Anteil zusammen.

$$P_T = -2 \left( \overline{v' T'} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \overline{u' T'} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \quad (4.11)$$

Die turbulenten Wärmeflüsse  $\overline{v' T'}$  und  $\overline{u' T'}$  sind turbulente Diffusionsflüsse in radialer und axialer Richtung. Die axialen Geschwindigkeitsfluktuationen werden durch Auftriebskräfte direkt beeinflußt, so daß die Korrelation zwischen  $u'$  und  $T'$  groß ist. Die Diskussion der Meßergebnisse der mittleren Temperatur zeigt, daß der axiale Gradient  $\partial\bar{T}/\partial x$  im

Vergleich zu Strömungen, bei denen die Temperatur als passiver Skalar wirkt, größer wird. In der Umgebung der Kanalachse wird außerdem der radiale Gradient  $\partial\bar{T}/\partial r$  verschwindend klein und auf der Kanalachse zu Null. Das zweite Glied in Gl.(4.11) ist in Umgebung der Kanalachse damit maßgebend und bewirkt eine Zunahme des RMS-Wertes der Temperatur. Die beiden Anteile in Gl.(4.11) lassen sich aus den Meßwerten von  $\overline{v'T'}$ ,  $\overline{u'T'}$  (Abb.(4.22)) und den gefundenen Gesetzmäßigkeiten zur Beschreibung der mittleren Temperatur berechnen. In Abbildung (4.20) ist das lokale Maximum von  $\overline{v'T'} \cdot \partial\bar{T}/\partial r$  bezogen auf das Maximum von  $\overline{u'T'} \cdot \partial\bar{T}/\partial x$  jeder einzelnen Verteilung in Abhängigkeit von  $x/d$  dargestellt. Die Profile der RMS-Werte in Abb.(4.19) lassen sich anhand der vorstehenden Überlegungen und der axialen Entwicklung dieses Verhältnisses erklären. Bei  $x/d = 5$  ist der radiale Anteil im Produktionsterm um den Faktor 140 größer als der axiale Anteil. Die Produktion von  $T'^2$  außerhalb der Kanalachse überwiegt, das typische M-förmige Profil ist zu sehen. Mit zunehmendem Abstand nimmt das Verhältnis um etwa den Faktor 3 ab, so daß der axiale Anteil des Produktionsterms  $P_T$  an Bedeutung gewinnt. Auf der Kanalachse ist die Produktion von  $T'^2$  entsprechend größer und es ergeben sich RMS-Profile wie für  $x/d = 35$  gezeigt. Mit weiterer Entwicklung des Turbulenzfeldes verschiebt sich das Verhältnis wieder zugunsten des radialen Anteils. Bei  $x/d = 106$  tritt wieder eine M-förmige Verteilung der RMS-Werte auf.

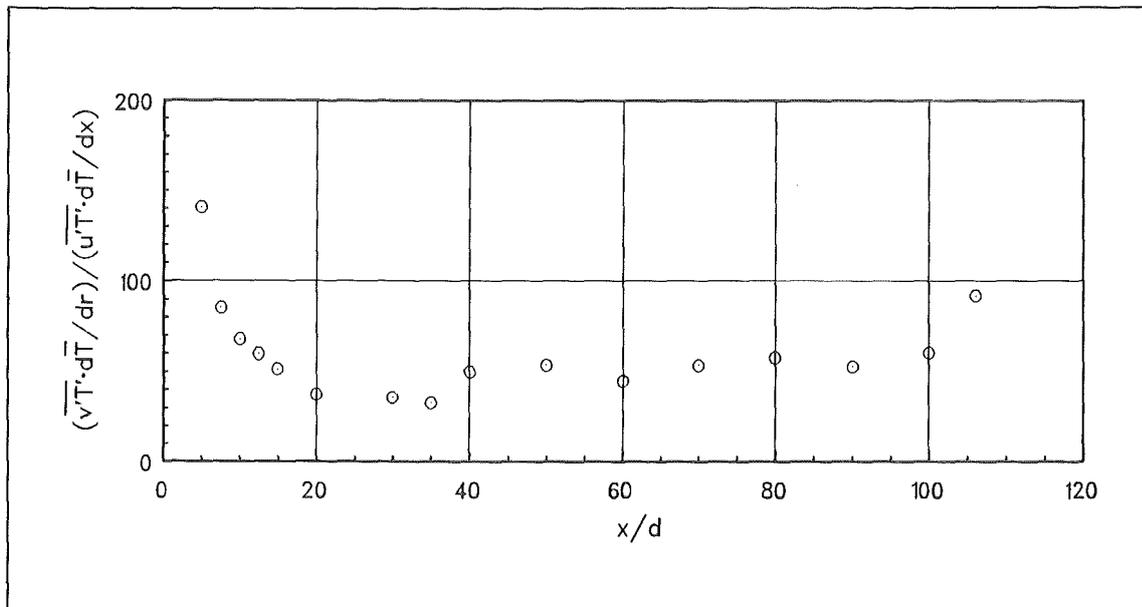


Abb.(4.20): Axiale Entwicklung des Verhältnisses der Anteile der Produktion  $P_T$  der Intensität der Temperaturfluktuationen bei Mischkonvektion.

Im Rahmen der Grenzschichtapproximationen wird das Glied  $\overline{u'T'} \cdot \partial\bar{T}/\partial x$  von  $P_T$  im allgemeinen als vernachlässigbar klein angesehen (vgl. Tab.(2.5)), da der axiale Gradient  $\partial\bar{T}/\partial x$  um etwa zwei Größenordnungen kleiner ist als der radiale Gradient. Im Zusammenhang mit einer Turbulenzmodellierung sollte dieser Anteil, in Achsumgebung, aber mit berücksichtigt werden. Dies bedeutet streng genommen eine Inkonsistenz mit den Annahmen der Grenzschichtapproximationen.

Aus diesen Betrachtungen wird deutlich, daß sich das turbulente Temperaturfeld nicht nur im Formierungsbereich, sondern auch für axiale Abstände von  $x/d \geq 100$  umstrukturiert. Der Bereich  $20 \leq x/d < 100$  stellt demnach einen Übergangsbereich dar. Die oben angeführte Tendenz zur Selbsterhaltung wird aufgrund der in Abschnitt 4.3 gegebenen Definition der Selbsterhaltung damit im untersuchten Bereich widerlegt.

#### 4.5.2 Turbulenter Wärmetransport

Die Abbildung (4.22) zeigt für fünf axiale Abstände die radialen Verteilungen von  $\overline{v'T'}$  und  $\overline{u'T'}$ , die proportional zu den radialen und axialen turbulenten Wärmeströmen  $\rho c_p \overline{v'T'}$  und  $\rho c_p \overline{u'T'}$  sind. Die Größen sind mit der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$  als Referenzgeschwindigkeit und der maximalen mittleren Temperatur  $\bar{T}_m$  auf der Kanalachse normiert. Der Radius ist auf den Kugeldurchmesser bezogen.

Der radiale turbulente Wärmetransport  $\overline{v'T'}$  ist maßgebend für die radiale Ausbreitung des Temperaturfeldes und der damit verbundenen Abnahme der mittleren Temperatur. Basierend auf dem Prinzip der Wirbeldiffusivität ist nach Gl.(2.88)  $\overline{v'T'}$  proportional zum radialen Gradienten der mittleren Temperatur.

$$-\overline{v'T'} \propto \frac{\partial\bar{T}}{\partial r} \quad (4.12)$$

Die normierten radialen Verläufe des radialen turbulenten Wärmeflusses und des radialen Gradienten der mittleren Temperatur bei  $x/d = 5$  sind in Abbildung (4.21) aufgetragen.  $\partial\bar{T}/\partial r$  wird aus dem Profil der Gaußschen Glockenkurve ermittelt. Wie Abb.(4.21) zeigt, ist die Verteilung von  $\overline{v'T'}$  antisymmetrisch zur Kanalachse. Dies entspricht dem Verlauf des Gradienten  $\partial\bar{T}/\partial r$ , der links und rechts von der Kanalachse das Vorzeichen wechselt. Die Vorzeichenumkehr der Korrelation auf der Kanalachse kennzeichnet den Transport jeweils vom Auftriebsstrahl nach außen in die

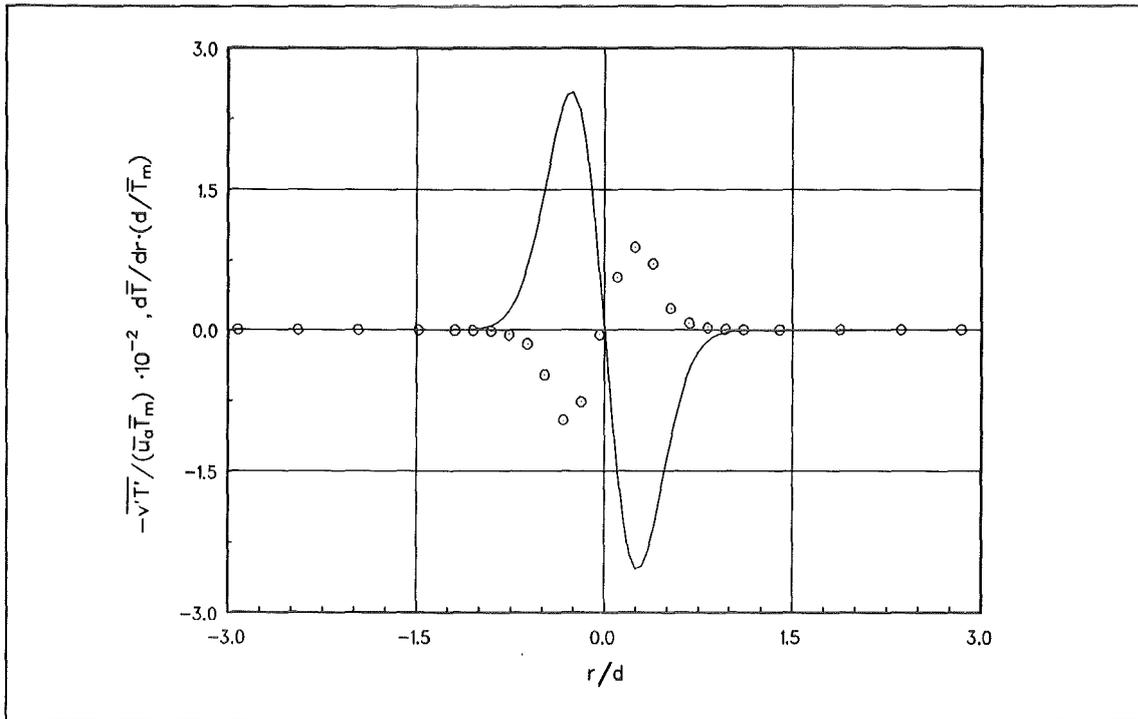


Abb.(4.21): Normierter radialer Verlauf von  $\partial\bar{T}/\partial r$  und  $\overline{v'T'}$  bei  $x/d = 5$ .  
 (—)  $\partial\bar{T}/\partial r$  aus Glockenkurve nach Gauß, (○) Meßwerte  $\overline{v'T'}$ .

kältere Umgebung. Der Betrag der Korrelation wird maximal im Maximum von  $\partial\bar{T}/\partial r$ . Entsprechend der Ausbreitung des mittleren Temperaturfeldes verschiebt sich das Maximum von  $\overline{v'T'}$  zu größeren Radien bei gleichzeitiger Abnahme des Betrages. Auf der Kanalachse ist  $\overline{v'T'}$  Null.

Der axiale turbulente Wärmefluß wird im Gegensatz zu  $\overline{v'T'}$  durch Auftriebseinflüsse direkt beeinflusst. Er bewirkt einen zusätzlichen turbulenten Wärmetransport in Hauptströmungsrichtung. Die Verteilungen von  $\overline{u'T'}$  sind symmetrisch zur Kanalachse, Abb.(4.22). Bei  $x/d = 5$  treten in den Randbereichen  $1.0 \leq |r/d| \leq 0.3$  des Auftriebsstrahls negative Werte von  $\overline{u'T'}$  auf. Das Maximum des Betrages liegt bei  $|r/d| = 0.5$ , was gerade dem Kugelradius entspricht.

Physikalisch bedeutet dies einen Wärmetransport zur Kugel hin. Das Verhalten ist auf die turbulente Schwankungsbewegung des Geschwindigkeitsfeldes zurückzuführen. Das Profil des RMS-Wertes der axialen Geschwindigkeitsfluktuationen  $(u'^2)^{1/2}$  in Abb.(4.26b) (Abschnitt 4.5.4) zeigt bei  $|r/d| = 0.5$  einen Wendepunkt mit einem relativen Minimum. Der Mischkonvektionsnachlauf ist eine Überlagerung eines Kugelnachlaufs und eines Auftriebsstrahls. Da sich das Geschwindigkeitsfeld des Nachlaufs schneller ausbreitet als das des Temperaturfeldes, sind die Geschwindig-

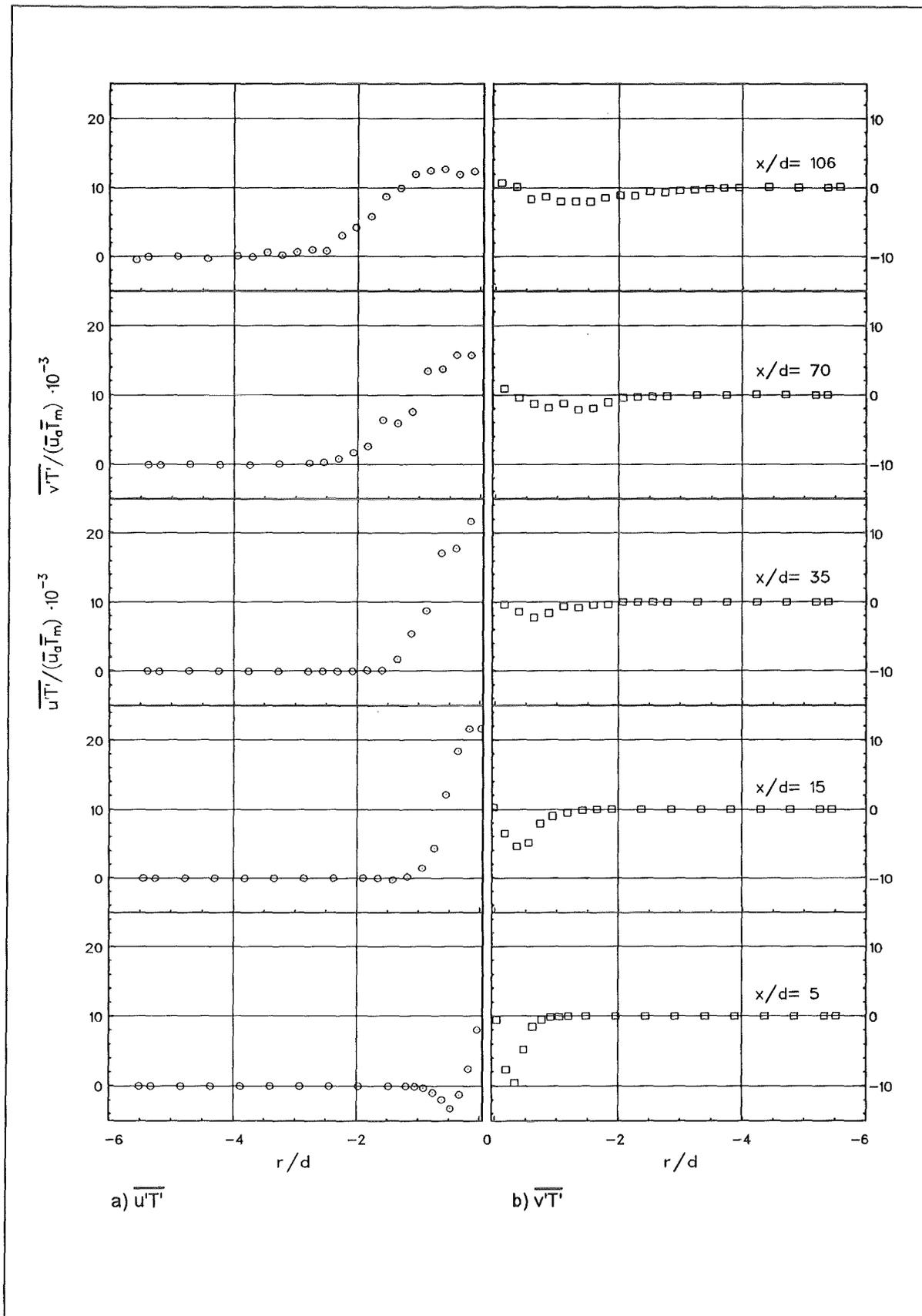


Abb. (4.22): Radiale Verteilungen der radialen und axialen turbulenten Wärmeflüsse für verschiedene axiale Abstände. (○)  $\overline{u'T'}$ , (□)  $\overline{v'T'}$ .

keitsfluktuationen  $u'$  in den Randbereichen von Auftriebseffekten noch weitgehendst unbeeinflusst. Die Geschwindigkeitsfluktuationen sind dort im Mittel negativ, so daß die Korrelation  $\overline{u'T'}$  ebenfalls negative Werte annimmt. Dieses Verhalten ist in den Randbereichen des Auftriebsstrahls bis etwa  $x/d = 12.5$  zu beobachten. Auf der Kanalachse zeigen alle Verteilungen der Abb.(4.22b) ein Maximum. Der konvektive Wärmetransport durch das mittlere Hauptströmungsfeld wird durch das Turbulenzfeld unterstützt.

Ein Vergleich der turbulenten radialen und axialen Wärmeflüsse belegt, daß der axiale Transport entscheidend durch den Auftrieb erhöht wird. In Abbildung (4.23) sind in halblogarithmischer Auftragung die maximalen Beträge der Korrelationen in dimensionsbehafteter Form über dem axialen Abstand dargestellt. Bei  $x/d = 5$  ist  $|\overline{v'T'}| = 4.45 \text{ K}\cdot\text{m/s}$ , das heißt um 1.19 größer als  $\overline{u'T'}$ . Mit zunehmendem Abstand von der Wärmequelle nimmt der radiale Wärmefluß kontinuierlich ab. Im Gegensatz dazu nimmt der axiale Wärmefluß bis  $x/d \approx 15$  zu, was die direkte Folge der Produktion von axialen Geschwindigkeitsfluktuationen durch Auftriebskräfte ist. Diese Zunahme findet in dem bereits diskutierten Formierungsbereich statt. Für größere Abstände klingt die Korrelation ab. Der axiale turbulente Wärmefluß ist für  $x/d \geq 20$  stets um eine Größenordnung größer als der radiale turbulente Wärmefluß. Bei  $x/d = 106$  betragen die Korrelationen  $|\overline{v'T'}| = 0.04 \text{ K}\cdot\text{m/s}$  und  $\overline{u'T'} = 0.32 \text{ K}\cdot\text{m/s}$ .

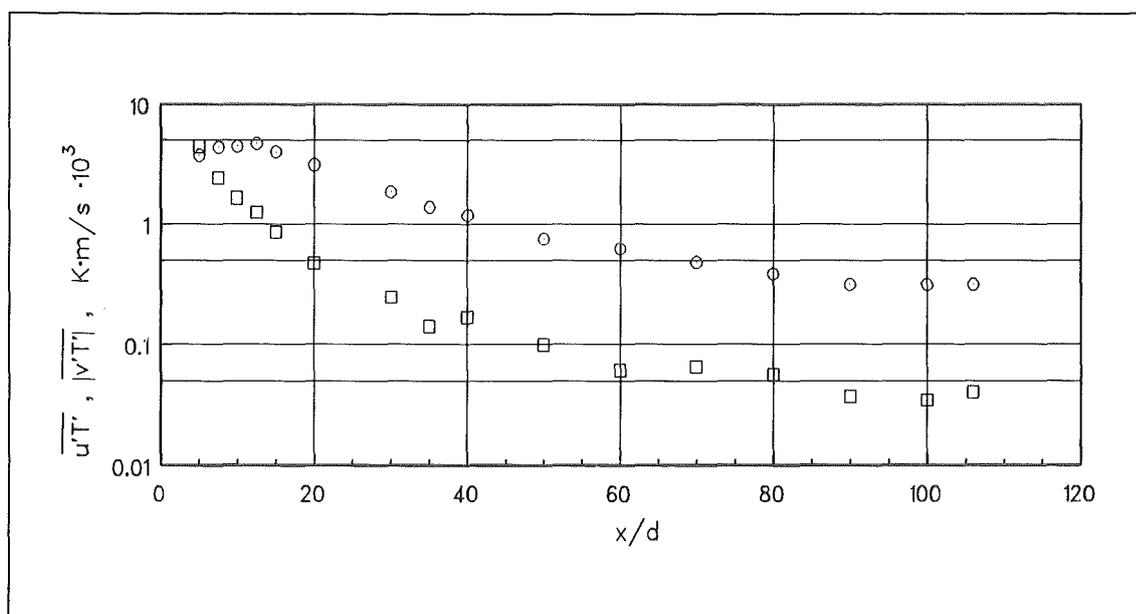


Abb.(4.23): Axialer Verlauf der maximalen turbulenten Wärmeflüsse.

(○)  $\overline{u'T'}$ , (□)  $|\overline{v'T'}|$ .

Durch Normierung der Korrelationen  $\overline{u'T'}$  und  $\overline{v'T'}$  mit den RMS-Werten der Fluktuationsgrößen ergeben sich die Korrelationskoeffizienten  $R_{uT}$  und  $R_{vT}$ . Sie sind durch die Rechenvorschrift Gl.(3.8) definiert. Die Korrelationskoeffizienten sind ein dimensionsloses Maß für die spezifische Intensität des axialen und radialen Wärmetransports durch die Geschwindigkeits- und die Temperaturfluktuationen. Die RMS-Werte können dabei als innere Skalierungsgrößen des Turbulenzfeldes aufgefaßt werden. In Abbildung (4.24) sind die Beträge der maximal auftretenden Korrelationskoeffizienten der turbulenten Wärmeflüsse gezeigt.

Die Zunahme des axialen turbulenten Wärmetransports innerhalb der ersten  $15 \cdot x/d$  wird durch den starken Anstieg des Korrelationskoeffizienten  $R_{uT}$  belegt. Bei  $x/d = 5$  beträgt  $R_{uT} = 0.23$ . Für Abstände  $x/d \geq 15$  ist der Koeffizient unabhängig vom axialen Abstand und nimmt einen konstanten mittleren Wert von  $0.48$  an. Der Betrag des Korrelationskoeffizienten  $R_{vT}$  zeigt ein ähnliches Verhalten wie  $R_{uT}$ . Der Korrelationskoeffizient fällt von  $|R_{vT}| = 0.43$  bei  $x/d = 5$  auf einen konstanten mittleren Betrag von  $0.14$  ab, der sich im Mittel für axiale Abstände  $x/d \geq 20$  einstellt. Die spezifische Intensität des axialen turbulenten Wärmetransports ist um  $240\%$  größer als die des radialen turbulenten Wärmetransports.

Die Konstanz der Korrelationskoeffizienten in den angegebenen axialen Abständen kann so interpretiert werden, daß sich die energetischen Austauschverhältnisse innerhalb des Turbulenzfeldes praktisch nicht mehr ändern, obwohl die absoluten Beträge der turbulenten Wärmeflüsse im

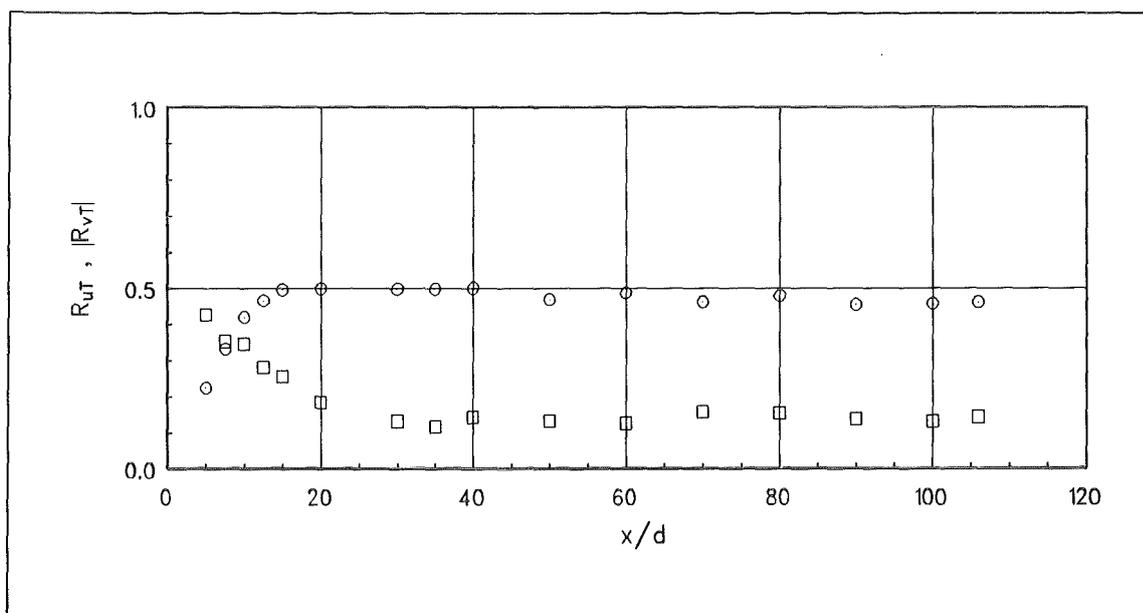


Abb.(4.24): Betrag der maximalen Korrelationskoeffizienten im Bereich des Mischkonvektionsnachlaufs. (○)  $R_{uT}$ , (□)  $|R_{vT}|$ .

Strömungsfeld abnehmen. Da die RMS-Werte die Intensität der Fluktuationen des Turbulenzfeldes kennzeichnen, können sie als ein Maß für die in der Schwankungsbewegung gespeicherte Energie verstanden werden. Ein konstanter Korrelationskoeffizient bedeutet also, daß der turbulente Wärmefluß in Relation zu dieser zur Verfügung stehenden Energie konstant bleibt.

Die Überlegungen aus Abschnitt 4.5.1 in Hinsicht auf das Verhalten der Intensität der Temperaturfluktuationen können anhand der vorgestellten turbulenten Wärmeflüsse bestätigt werden.

#### 4.5.3 Der integrale Wärmefluß

Das lokale kinematische Wärmeflußintegral pro Längeneinheit in Ebenen senkrecht zur Kanalachse ist definiert durch

$$H_g(x/d) = \pi \int_0^{\infty} \bar{u} \cdot \bar{T} \, r dr + \pi \int_0^{\infty} \overline{u' T'} \, r dr = H + H_t \quad , \quad (4.13)$$

wobei der erste Term den mittleren kinematischen Wärmefluß  $H$  und der zweite Term den turbulenten kinematischen Wärmefluß  $H_t$  darstellt. Die beiden Anteile werden für das vorliegende Experiment aus der Integration der Verteilungen von  $\bar{u}$ ,  $\bar{T}$  und  $\overline{u' T'}$  für Ebenen  $x/d = \text{const.}$  berechnet. Dabei werden die Profile von  $\bar{u}$  und  $\overline{u' T'}$  durch kubische Splinefunktionen

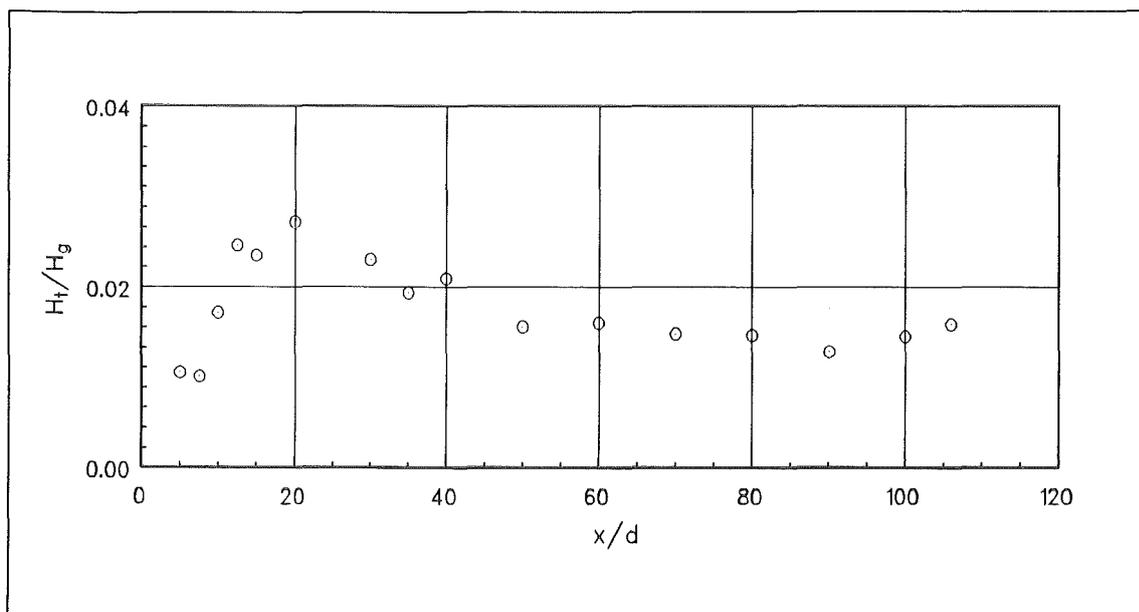


Abb. (4.25): Axialer Verlauf des turbulenten Anteils des lokalen kinematischen Wärmeflußintegrals.

angenähert. Für die Temperatur werden die Glockenkurven nach Gauß verwendet. In Abbildung (4.25) ist der Anteil des turbulenten Wärmeflusses  $H_t$ , bezogen auf den gesamten Wärmefluß  $H_g$ , über dem axialen Abstand dargestellt. Der Wärmefluß durch das Turbulenzfeld hat insgesamt nur einen sehr geringen Anteil am gesamten Wärmefluß. Im Formierungsbereich steigt dieser Anteil zunächst von 1.1 % bei  $x/d = 5$  auf maximal 2.7 % bei  $x/d = 20$  an. Für  $x/d > 40$  wird ein Wert von im Mittel 1.5 % erreicht. Der axiale Wärmetransport im untersuchten Mischkonvektionsnachlauf erfolgt damit hauptsächlich durch das Hauptströmungsfeld.

#### 4.5.4 Geschwindigkeitsfluktuationen

Das Turbulenzfeld wird unter anderem durch die Intensität der Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_1'^2$  charakterisiert. Im Gegensatz zur Temperatur handelt es sich um ein vektorielles Feld. Die Intensitäten der Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten können unterschiedlich groß sein. Die Beträge der Intensitäten in axialer und radialer Richtung sind durch die RMS-Werte  $(u'^2)^{1/2}$  und  $(v'^2)^{1/2}$  gegeben, Gln. (3.2) und (3.10). Im folgenden wird für die RMS-Werte die Bezeichnung Turbulenzintensität verwendet. Das Quadrat der axialen und der radialen Turbulenzintensitäten sind die turbulenten Normalspannungen  $u'^2$  und  $v'^2$  des turbulenten Spannungstensors  $\overline{u'_i u'_j}$ . In Abbildung (4.26) sind die gemessenen radialen Profile der axialen und radialen Turbulenzintensität, normiert mit der Außengeschwindigkeit  $\bar{u}_a$ , für fünf axiale Abstände aufgetragen. Die Abbn. (4.26a) und (4.26b) zeigen die Profile bei Zwangskonvektion und Mischkonvektion. Wir wollen zunächst nur den Bereich der Nachlaufströmung, das heißt in Umgebung der Kanalachse betrachten.

#### Zwangskonvektion

Bei Zwangskonvektion zeigen die Profile der axialen Turbulenzintensität eine charakteristische M-förmige Verteilung mit einem relativen Minimum auf der Kanalachse. Das Maximum der Turbulenzintensität tritt außerhalb der Kanalachse auf. Bei  $x/d = 5$  ist es um etwa 50 % größer als das Minimum. Die Produktion von Geschwindigkeitsfluktuationen durch die Hauptströmung  $-2 \cdot \overline{u'v'} \cdot \partial \bar{u} / \partial r$  (Gl. 2.81) ist mit dem radialen Gradienten der mittleren axialen Geschwindigkeit  $\partial \bar{u} / \partial r$  gekoppelt und daher im Maximum des Gradienten am größten. Mit Abnahme des mittleren Geschwindigkeitsdefizits verringert sich der Gradient stromabwärts und damit die axiale

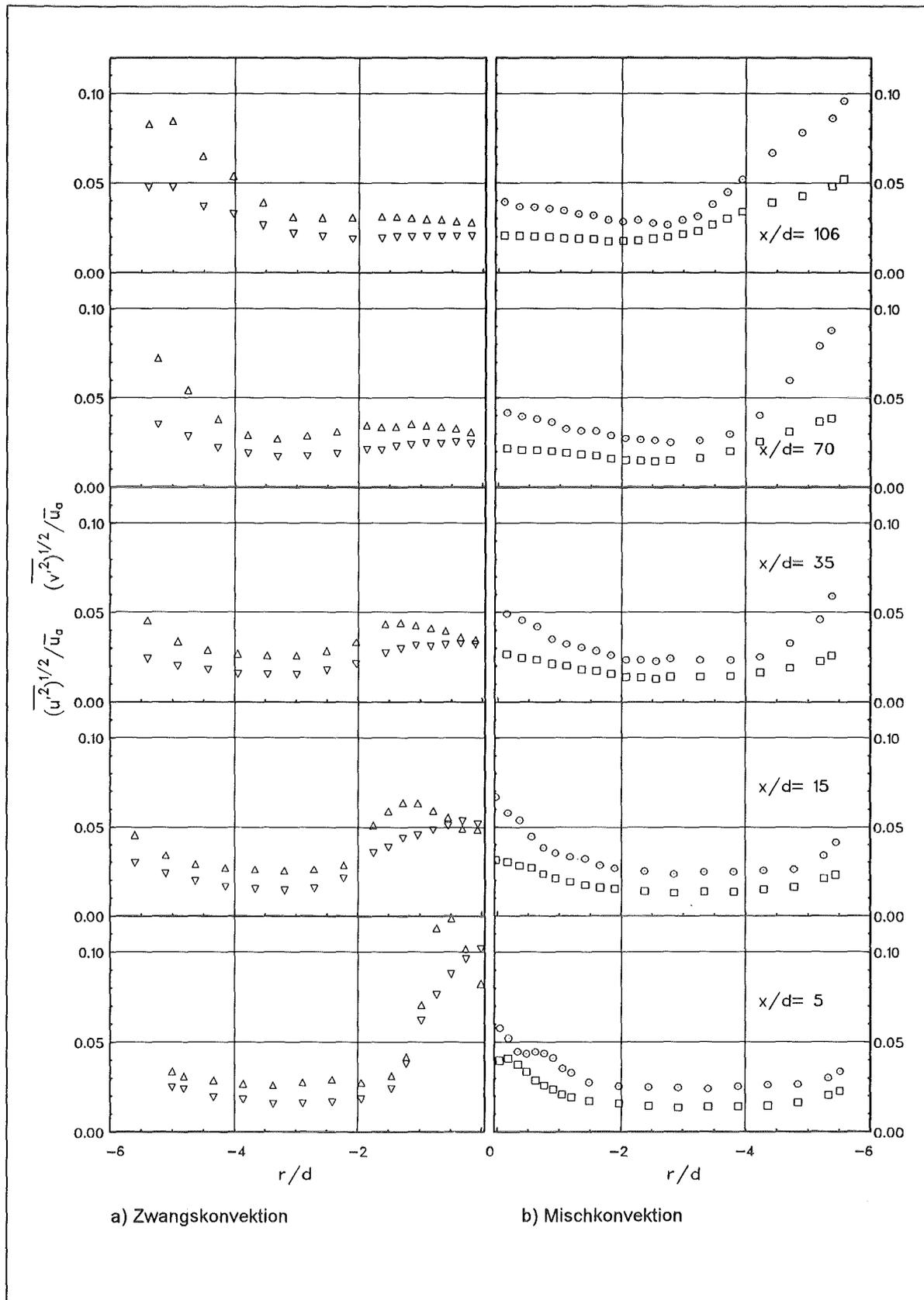


Abb.(4.26): Radiale Verteilung der axialen und radialen Turbulenzintensität in verschiedenen Abständen von der Kugel.

a) Komponenten bei Zwangskonvektion, ( $\Delta$ ) axial, ( $\nabla$ ) radial,  
 b) Komponenten bei Mischkonvektion, ( $\circ$ ) axial, ( $\square$ ) radial.

Turbulenzintensität. Das Maximum verlagert sich entsprechend der Ausbreitung der Nachlaufdüse zu größeren Radien. Für  $x/d = 106$  beträgt der Unterschied zwischen dem Maximum und dem Minimum 11 %. Vergleichbare Messungen von Bevilacqua et al. (1978) und Uberoi et al. (1970) zeigen ein ähnliches Verhalten.

Die Profile der radialen Turbulenzintensität besitzen dagegen einfache Verteilungen, wobei das Maximum auf der Kanalachse auftritt.

### Mischkonvektion

Unter der Wirkung von Auftriebskräften verändern sich die Profile der axialen Turbulenzintensität deutlich. Das bekannte M-förmige Profil der Zwangskonvektion ist nicht mehr zu finden. Die gemessenen Verteilungen lassen sich folgendermaßen erklären.

In der Strömung überlagern sich zwei Effekte. Einerseits werden die radialen Gradienten der mittleren axialen Geschwindigkeit stark reduziert, wodurch die Produktion von Geschwindigkeitsfluktuationen durch die Hauptströmung und damit die Turbulenzintensität zunächst abnimmt. Andererseits wirken die Auftriebskräfte in axialer Richtung. Dies führt auf eine zusätzliche Produktion von axialen Geschwindigkeitsfluktuationen. Die verantwortliche Größe ist der axiale turbulente Wärmefluss  $\overline{u'T'}$ , der über das Produktionsglied  $\alpha g \cdot \overline{u'T'}$  in Gl. (2.81) wirksam wird. Da  $\overline{u'T'}$  auf der Kanalachse ein Maximum zeigt, ist die Zunahme der axialen Turbulenzintensität dort am größten. Im Profil der Turbulenzintensität ist bei  $x/d = 5$  noch ein Teil des M-förmigen Verlaufs zu erkennen, der bis  $x/d = 12.5$  zu beobachten ist. Bei der Besprechung der axialen turbulenten Wärmeflüsse in Abschnitt 4.5.2 wurde dieses Verhalten bereits erklärt.

Die Form der Verteilungen der radialen Turbulenzintensität verändert sich gegenüber dem unbeheizten Fall aber nicht. Da die Auftriebskräfte parallel zum Schwerkraftvektor wirken, enthält die Transportgleichung (2.82) für  $v'^2$  kein Auftriebsglied. Die radiale Turbulenzintensität wird durch Auftriebseinflüsse daher nicht direkt beeinflusst.

Im Vergleich zu den Profilen der mittleren Geschwindigkeit fällt weiterhin auf, daß die Turbulenzintensität gegenüber dem Wandeinfluß empfindlicher ist als die mittlere Geschwindigkeit. Der Anstieg der Turbulenzintensität beginnt bei kleineren Radien als die Abnahme der mittleren Geschwindigkeit. Der Einfluß der Wandgrenzschicht erstreckt sich für  $x/d = 106$  bis etwa  $|r/d| = 3$ . Das Feld der Temperaturfluktuationen hat

sich bei dieser Entfernung genauso weit ausgedehnt. Dies bedeutet, daß die Ausbreitung des Mischkonvektionsnachlaufs durch die Wandgrenzschicht unmittelbar beeinflußt wird und so für die vorliegenden Untersuchungen die Grenze sinnvoller Messungen erreicht ist.

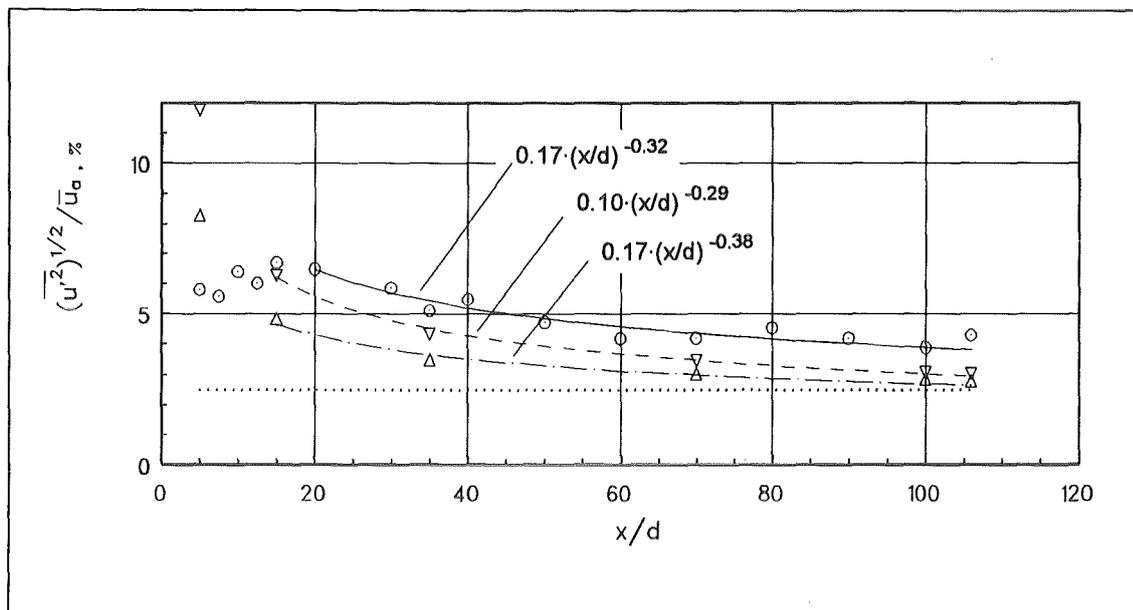


Abb.(4.27): Axialer Verlauf der axialen Turbulenzintensität. Zwangskonvektion: ( $\Delta$ ) Kanalachse, ( $\nabla$ ) im Maximum. Mischkonvektion: ( $\circ$ ), ( $\odot$ ) äußerer Turbulenzgrad, (-), (--), (---) Potenzgesetze.

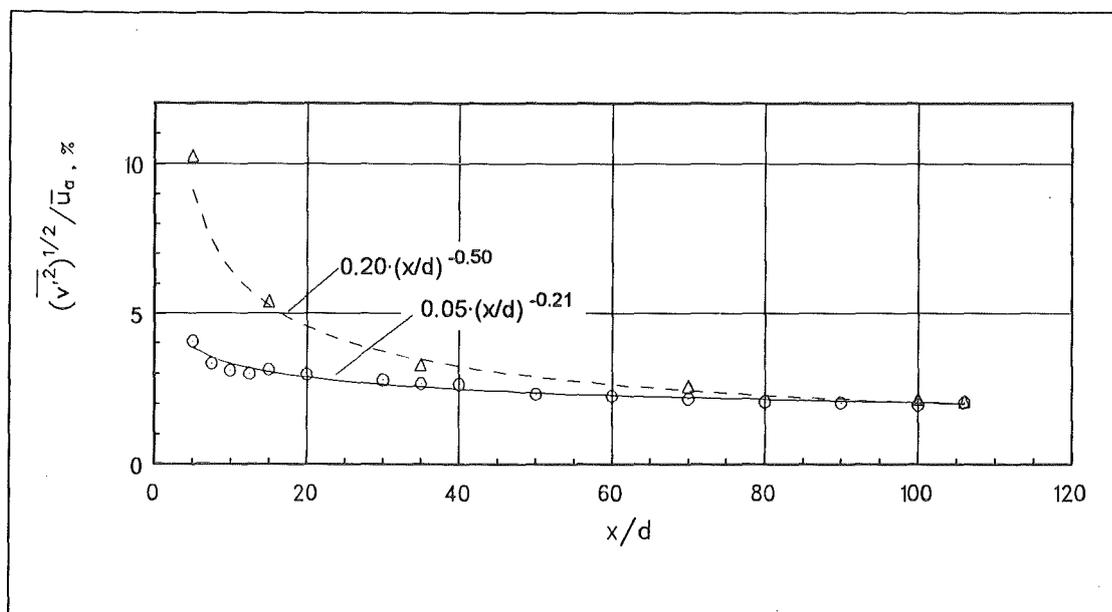


Abb.(4.28): Axialer Verlauf der radialen Turbulenzintensität. ( $\Delta$ ) Zwangskonvektion, ( $\circ$ ) Mischkonvektion, (-), (--) Potenzgesetze.

In Abbildung (4.27) ist die Änderung der axialen Turbulenzintensität auf der Kanalachse in Abhängigkeit vom axialen Abstand von der Kugel dargestellt. Die Turbulenzintensität ist auf die mittlere Außengeschwindigkeit bezogen. Für Zwangskonvektion sind die Meßwerte der axialen Turbulenzintensität im Maximum der Verteilungen und auf der Kanalachse eingetragen, für Mischkonvektion nur auf der Kanalachse. Abbildung (4.28) zeigt in gleicher Normierung die radiale Turbulenzintensität.

Im Fall der Zwangskonvektion klingen die axiale und radiale Turbulenzintensität kontinuierlich mit  $x/d$  ab. Das Abklingverhalten kann für  $x/d \geq 15$  durch Potenzgesetze angenähert werden. Die Exponenten für die axiale Turbulenzintensität im Maximum und auf der Kanalachse betragen  $-0.29$  und  $-0.38$  und der für die radiale Komponente  $-0.5$ . Die Näherungsfunktionen sind in den Abbildungen eingetragen.

Durch den Auftriebseinfluß wird die Schwankungsbewegung in axialer Richtung intensiviert und die in Querrichtung gedämpft. Die axiale Turbulenzintensität auf der Kanalachse ist bei  $x/d = 5$  um den Faktor  $0.71$  kleiner als die im auftriebsfreien Fall, Abb.(4.27). Innerhalb des Formierungsbereichs steigt sie stark an und erreicht etwa bei  $x/d = 15$  ein Maximum, das den  $1.07$ fachen Wert der maximalen Turbulenzintensität außerhalb der Kanalachse bei Zwangskonvektion aufweist. Die axiale Turbulenzintensität klingt für  $x/d \geq 15$  näherungsweise nach einem Potenzgesetz mit dem Exponenten  $-0.32$  ab. Bei der maximal untersuchten Entfernung von der Kugel  $x/d = 106$  ist der Meßwert auf der Kanalachse um das  $1.6$ fache größer als der entsprechende Meßwert der Zwangskonvektion. Die Zunahme der Turbulenzintensität durch Auftriebseffekte ist beachtlich, wenn wir bedenken, daß die Produktion durch die Hauptströmung aufgrund des abnehmenden radialen Gradienten  $\partial \bar{u} / \partial r$  stark vermindert ist.

Die radiale Turbulenzintensität ist bis  $x/d = 70$  deutlich kleiner als bei der reinen Nachlaufströmung. Für  $x/d = 5$  beträgt der Unterschied  $150\%$ . Mit zunehmendem Abstand gleichen sich die Werte einander an. Das Abklingverhalten wird bei Mischkonvektion für  $x/d \geq 15$  ebenfalls durch ein Potenzgesetz proportional zu  $(x/d)^{-0.21}$  wiedergegeben.

Der Turbulenzgrad  $(u'_a)^2 / \bar{u}_a$  der Grundströmung ist in Abb.(4.27) zum Vergleich eingetragen. Außerhalb der Wandgrenzschicht beträgt er  $2.5\%$ .

Die Profile in Abb.(4.26) zeigen, daß die radiale Turbulenzintensität stets kleiner ist als die axiale. In Abbildung (4.29) ist das Verhältnis der beiden Größen auf der Strömungsachse zueinander dargestellt. Es ist

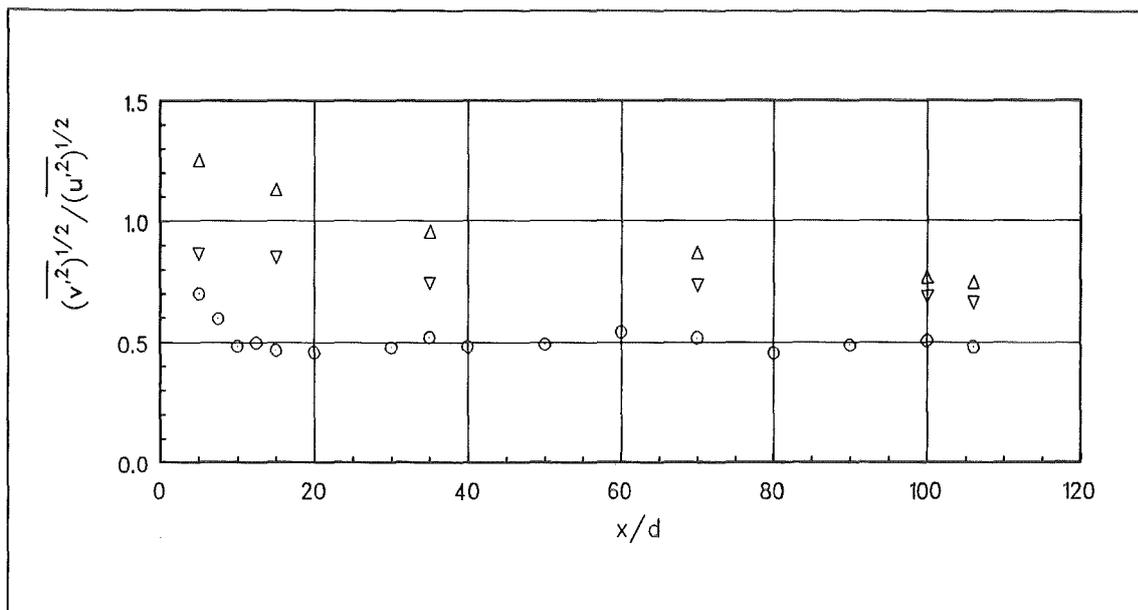


Abb. (4.29): Verhältnis der radialen und axialen Turbulenzintensität.  
 Zwangskonvektion: (Δ) Kanalachse, (∇) im Maximum; Mischkonvektion (○).

gleichbedeutend mit dem Quotienten der Normalspannungen. Für Zwangskonvektion ist außerdem der Verlauf der axialen Turbulenzintensität im Maximum der Verteilungen eingetragen.

In isotroper Strömung sind alle Komponenten der Geschwindigkeitsfluktuationen gleich groß und es gilt

$$u' = v' = w'. \quad (4.14)$$

Die Messungen zeigen, daß in der Nachlaufströmung die energietragenden Wirbel nicht isotrop sind. Dies schließt eine lokale Isotropie der kleinsten dissipativen Elemente der Turbulenzbewegung nicht aus.

Bei Zwangskonvektion ist das Verhältnis der Turbulenzintensitäten eine Funktion vom Abstand. Für große Abstände scheint der Quotient einem asymptotischen Wert von  $3/4$  für den Achswert und von  $2/3$  im Maximum zuzustreben.

Im Fall der Mischkonvektion wird durch den Auftrieb die Anisotropie der Schwankungsbewegung erhöht. Bereits ab  $x/d = 10$  stellt sich ein konstantes Verhältnis von  $1/2$  ein. Dies deutet auf einen Gleichgewichtszustand im Transportmechanismus zwischen den axialen und radialen Geschwindigkeitsfluktuationen längs der Strömungsachse hin.

In der Grundströmung kann für die radiale Turbulenzintensität in guter

Näherung

$$\overline{v'^2} = 2/3 \cdot \overline{u'^2} \quad (4.15)$$

gesetzt werden. Das Verhältnis gilt bei Zwangs- und Mischkonvektion außerhalb der Wandgrenzschicht.

#### 4.5.5 Turbulente Schubspannungen

Das Produkt  $-\rho \cdot \overline{u'v'}$  stellt die turbulente Schubspannung dar. Die radiale Verteilung der Kreuzkorrelation  $\overline{u'v'}$ , normiert mit der Außengeschwindigkeit  $\overline{u_a^2}$ , ist in Abbildung (4.30) gezeigt. Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Ordinaten bei Zwangs- und Mischkonvektion. Da die Nachlaufströmung achsensymmetrisch ist, sind die Profile der turbulenten Schubspannung antisymmetrisch und haben auf der Strömungsachse einen Nulldurchgang. Im Gegensatz zur turbulenten Normalspannung  $v'^2$  wird die Spannungskomponente  $\overline{u'v'}$  über den Produktionsterm  $v'^2 \cdot \partial \overline{u} / \partial r$  in Gl. (2.80) von der Hauptströmung direkt gespeist. Ein entsprechendes Glied tritt bei der Spannungskomponente  $u'^2$  auf. Der Maximalwert in den Profilen von  $\overline{u'v'}$  muß im allgemeinen an den radialen Positionen auftreten, an denen die radiale Turbulenzintensität und der radiale Gradient der mittleren axialen Geschwindigkeit am größten sind. Die Verteilungen der radialen Turbulenzintensität in Abb. (4.26) zeigen unabhängig vom Auftriebseinfluß immer die gleiche Form. Die Profile der Kreuzkorrelation  $\overline{u'v'}$  sind aufgrund dessen dem Gradienten  $\partial \overline{u} / \partial r$  direkt proportional und können im wesentlichen mit dessen Verlauf erklärt werden.

Bei Zwangskonvektion ändert sich die Form der Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit mit dem Abstand nicht (vgl. Abb. (4.7)). In Analogie zu Abb. (4.21) tritt der maximale Gradient  $\partial \overline{u} / \partial r$  in den Flanken der stets Gaußförmigen Profile auf. Der Verlauf von  $\overline{u'v'}$  zeigt an diesen Stellen ein Maximum, das proportional zu  $\partial \overline{u} / \partial r$  abnimmt.

Bei Mischkonvektion kommt es im Nachlauf zu einer vollständigen Umstrukturierung der turbulenten Schubspannungsverteilung. Im Vergleich zur Zwangskonvektion wechseln die Kreuzkorrelationen  $\overline{u'v'}$  in Umgebung der Strömungsachse das Vorzeichen. Wie aus den Profilen der mittleren axialen Geschwindigkeit in Abb. (4.7) abzuleiten ist, ändert auch der radiale Gradient  $\partial \overline{u} / \partial r$  in der Nachlaufdüse das Vorzeichen. Proportional hierzu zeigen die Profile von  $\overline{u'v'}$  einen zweiten Nulldurchgang außerhalb der Kanalachse. Besonders deutlich ist dies in Abb. (4.30b) bei  $x/d = 15$  und  $x/d = 35$  zu sehen, der Nulldurchgang erfolgt bei  $|r/d| = 0.7$  und

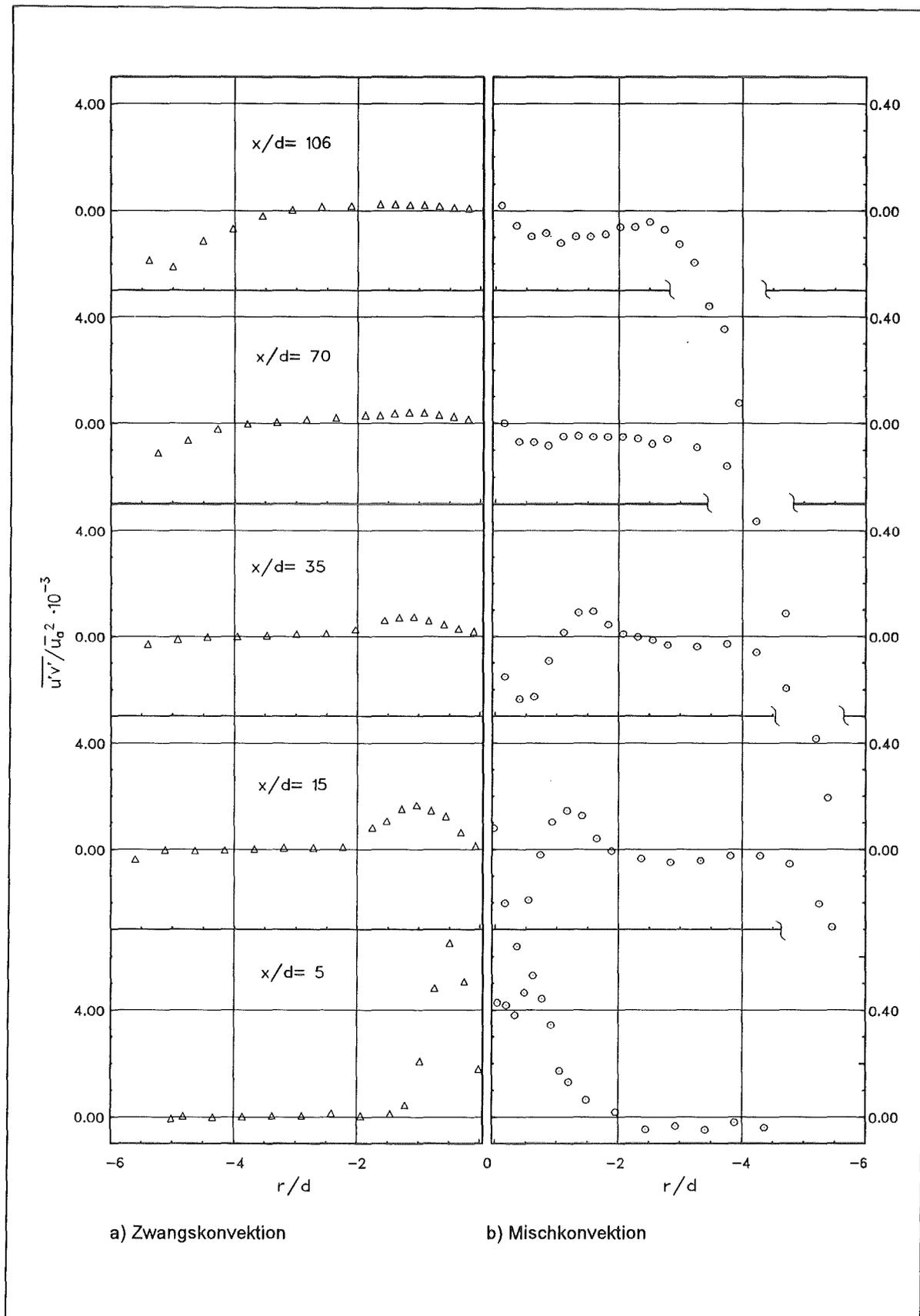


Abb. (4.30): Radiale Verteilung der turbulenten Schubspannung in verschiedenen Abständen von der Kugel. a) Zwangskonvektion, b) Mischkonvektion.

$|r/d| = 1$ . Dieser Verlauf ist in den Profilen ab  $x/d = 7.5$  zu beobachten. Bei  $x/d = 5$  erfolgt der Nulldurchgang des Profils der Kreuzkorrelation leicht außerhalb der Strömungsachse bei  $r/d = 0.2$ , was auf die Schwierigkeiten bei der Messung der turbulenten Schubspannungen mit dem LDA in dem hier relativ großen Temperaturgradienten zurückzuführen ist.

Mit zunehmendem Abstand ändert sich die Verteilung wieder. Bei  $x/d = 70$  ist die Umkehrung der Kreuzkorrelation nicht mehr zu sehen. Das Geschwindigkeitsdefizit in der Nachlaufdüse ist fast vollständig ausgeglichen. Der Gradient der mittleren axialen Geschwindigkeit wird verschwindend klein und wird bei  $x/d = 90$  zu Null. Die jetzt negativen Kreuzkorrelationen werden hauptsächlich durch die Auftriebsproduktion  $\alpha g \cdot \overline{v' T'}$  in Gl. (2.80), die dem radialen turbulenten Wärmetransport proportional ist, erzeugt. Für  $x/d = 106$  nimmt der Betrag von  $\overline{u' v'}$  infolge des Vorlaufprofils der mittleren axialen Geschwindigkeit wieder zu.

Zusammenfassend können wir feststellen: Bei Zwangskonvektion wird die Form der Profile von  $\overline{u' v'}$  allein durch den radialen Gradienten der axialen mittleren Geschwindigkeit bestimmt. Bei Mischkonvektion wird die Profilform zusätzlich vom radialen turbulenten Wärmefluß mitbestimmt.

Die Entwicklung der Wandgrenzschicht ist im Anstieg des Betrages der turbulenten Schubspannungen in wandnähe deutlich zu erkennen. Beim maximalen Abstand  $x/d = 106$  von der Kugel geht das Wandprofil von  $\overline{u' v'}$  fließend in das Profil über, das durch den Mischkonvektionsnachlauf bestimmt wird. Die zuvor beschriebene Beeinflussung des Strömungsverhaltens durch die sich entwickelnde Wandgrenzschicht für  $x/d \geq 100$  wird dadurch bestätigt.

Der axiale Verlauf der maximalen Beträge der Kreuzkorrelationen  $(\overline{u' v'} / \overline{u_a^2})$  für Zwangskonvektion sowie der maximalen und minimalen Beträge bei Mischkonvektion im Bereich der Nachlaufströmung sind in doppellogarithmischer Darstellung in Abbildung (4.31) eingetragen. Aus Abb. (4.30b) ist ersichtlich, daß bei Mischkonvektion in Achsumgebung nicht bei jedem  $x/d$  ein maximaler und minimaler Wert auftritt. Die Abschwächung von  $\overline{u' v'}$  bei Zwangskonvektion wird durch ein Potenzgesetz mit dem Exponenten  $-1.19$  beschrieben. Der Maximalwert bei  $x/d = 5$  beträgt  $6.45 \cdot 10^{-3}$ . Für die Meßwerte bei Mischkonvektion ist eine solche Beziehung nicht angebar. Die maximale Spannung von  $0.53 \cdot 10^{-3}$  tritt bei  $x/d = 5$  auf und ist um den Faktor  $0.8$  geringer als diejenige im unbeheizten Fall.

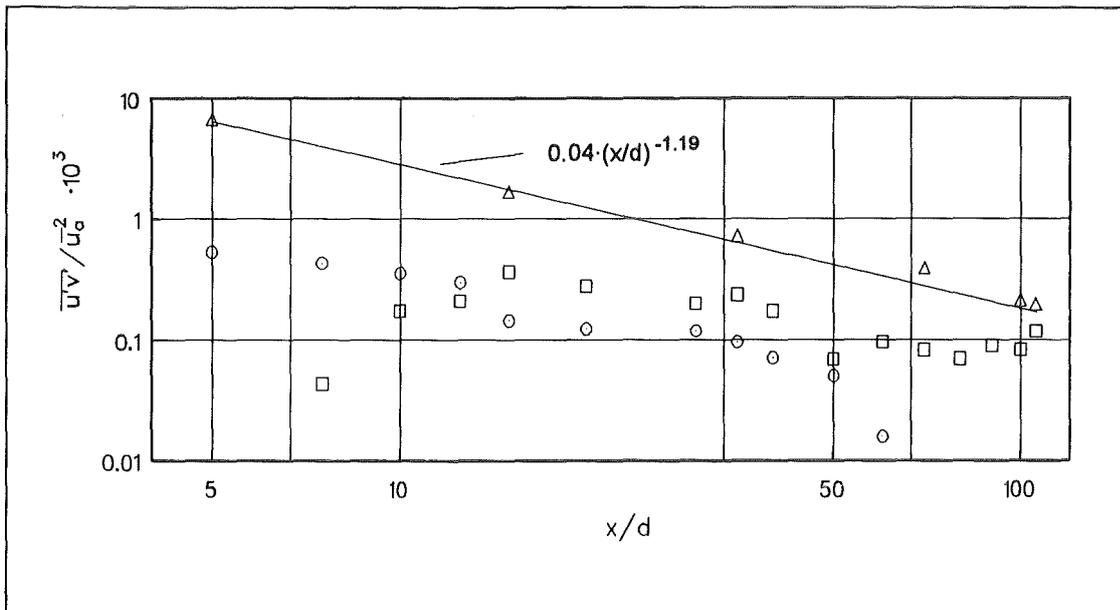


Abb. (4.31): Axialer Verlauf der Extrema der turbulenten Schubspannung im Bereich des Nachlaufs. Zwangskonvektion: ( $\Delta$ ) maximales  $\overline{u'v'}$ , (-) Potenzgesetz; Mischkonvektion: ( $\circ$ ) maximales  $\overline{u'v'}$ , ( $\square$ ) minimales  $\overline{u'v'}$ .

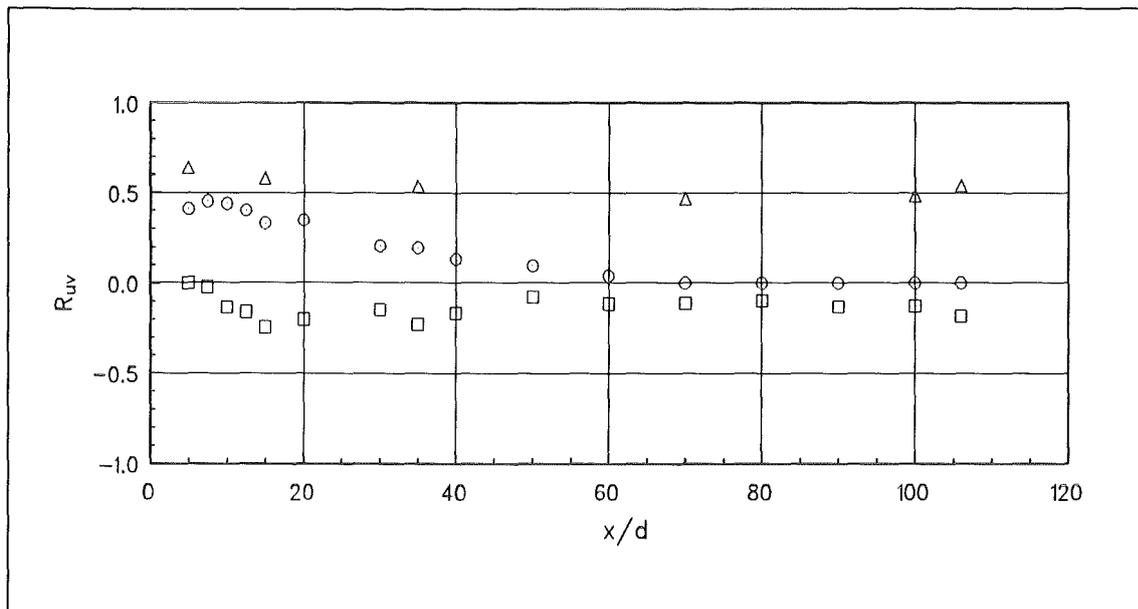


Abb. (4.32): Axialer Verlauf der Extrema des Korrelationskoeffizienten im Bereich des Nachlaufs. Zwangskonvektion: ( $\Delta$ ) maximales  $R_{uv}$ ; Mischkonvektion: ( $\circ$ ) maximales  $R_{uv}$ , ( $\square$ ) minimales  $R_{uv}$ .

Der axiale Verlauf der Extrema des Korrelationskoeffizienten  $R_{uv}$  ist in Abbildung (4.32) gezeigt. Er wird nach der Rechenvorschrift Gl. (3.8) gebildet. Die aufgetragenen Größen entsprechen denen in Abb. (4.31). Der Korrelationskoeffizient ist ein dimensionsloses Maß für das Niveau des

spezifischen Impulsaustauschs durch die lokalen turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen im Turbulenzfeld. Während der maximale Korrelationskoeffizient bei Zwangskonvektion über den gesamten untersuchten  $x/d$ -Bereich mit  $R_{uv} = 0.5$  konstant ist, ändert er sich bei Mischkonvektion mit dem Abstand von der Wärmequelle. Das heißt, daß der spezifische Impulsaustausch durch Auftriebseinflüsse stark vermindert wird. Im Gegensatz zum turbulenten Wärmetransport verändern sich die beteiligten Mechanismen in Abhängigkeit von der Strömungsentwicklung.

#### 4.5.5 Kinetische Energie der Turbulenz

Die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  ist in den Normalspannungen gespeichert und gemäß Gl.(2.15) definiert durch

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (4.16)$$

Im vorliegenden Experiment werden die Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer und radialer Richtung an den in Tab.(4.2) angegebenen axialen Abständen gemessen. Diese Hauptexperimente werden unter einem Traversenwinkel von  $0$  Grad durchgeführt. Aufgrund des optischen Aufbaus des LDA kann die azimuthale Geschwindigkeitskomponente dabei nicht gemessen werden. Aus zusätzlichen Messungen unter einem Traversenwinkel von  $90$  Grad kann diese Komponente ermittelt werden.

In Abbildung (4.33) sind für die axialen Abstände  $x/d = 35$  und  $x/d = 100$  die Profile der azimuthalen Turbulenzintensität  $(\overline{w'^2})^{1/2}$  zusammen mit den axialen und radialen Turbulenzintensitäten bei Zwangs- und Mischkonvektion dargestellt. Die Größen sind mit  $\bar{u}_a^2$  normiert. Im Bereich des Nachlaufs fallen die Profile der azimuthalen Geschwindigkeitsfluktuationen mit denen der radialen Komponente im Rahmen der Meßgenauigkeit sehr gut zusammen. In wandnähe weicht die azimuthale Turbulenzintensität zu größeren Werten hin ab und liegt zwischen dem der axialen und radialen Turbulenzintensität. Der Anstieg der azimuthalen Komponente innerhalb der Wandgrenzschicht ist verständlich. Die radialen Geschwindigkeitsfluktuationen stehen normal zur Kanalwand und werden mit Annäherung an die Wand gedämpft. Gleichzeitig werden die wandparallelen, azimuthalen Fluktuationen verstärkt.

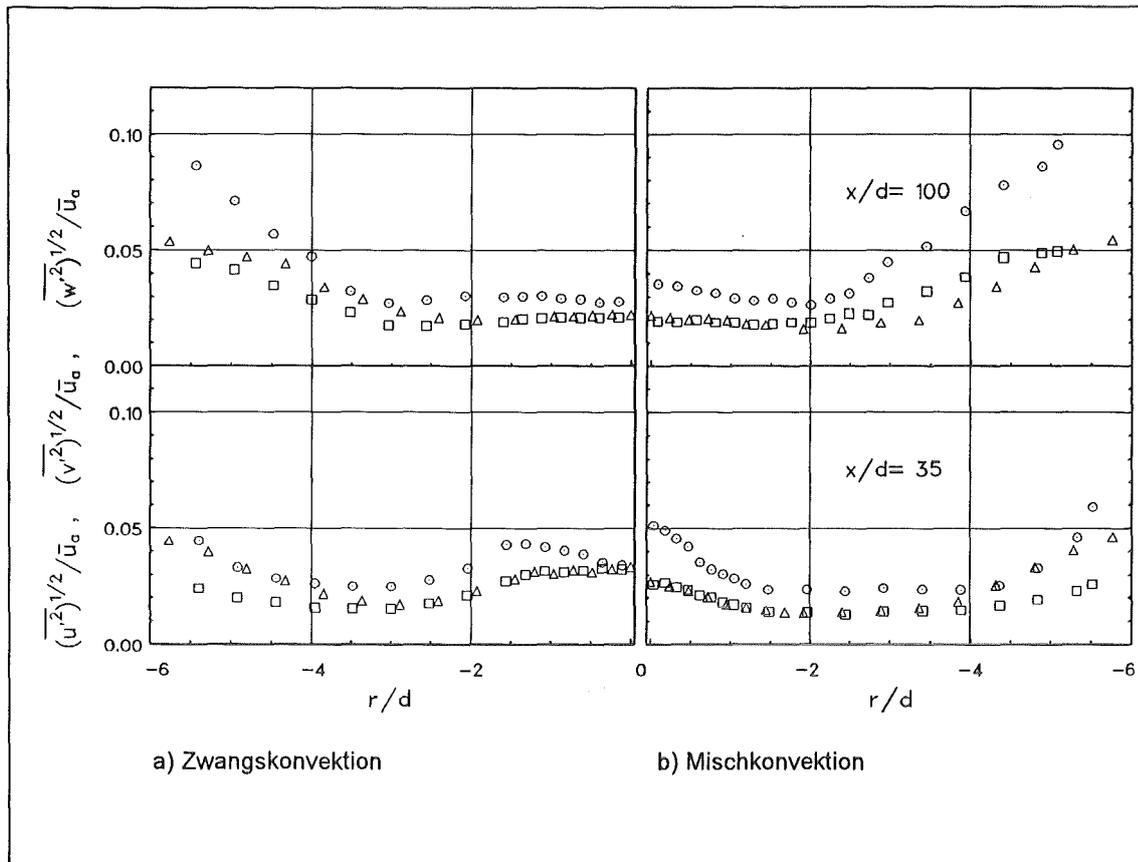


Abb.(4.33): Radiale Profile der Turbulenzintensität in axialer (○), radialer (□) und azimuthaler Richtung (Δ).

Aufgrund des Verhaltens der Turbulenzintensitäten kann im Bereich des Nachlaufs für beide Strömungsfälle

$$\overline{w'^2} = \overline{v'^2} \quad (4.17)$$

gesetzt werden. Die kinetische Energie der Turbulenz außerhalb des Nachlaufs ist in den vorliegenden Untersuchungen nicht unmittelbar von Interesse. Auf einen gesonderten Ansatz für die azimuthale Komponente in diesem Bereich wird daher verzichtet. Mit Gl.(4.17) berechnet sich die kinetische Energie der Turbulenz nach

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + 2 \cdot \overline{v'^2}) \quad (4.18)$$

In Abbildung (4.34) sind die nach Gl.(4.18) berechneten Profile von  $k$  für Zwangs- und Mischkonvektion gezeigt. Da die axialen Fluktuationen den größten Beitrag zu  $k$  liefern, ergeben sich für die Profile von  $\overline{u'^2}$  und  $k$  ähnliche Formen. Entsprechend ist  $k$  bei Zwangskonvektion im Maximum der axialen Turbulenzintensität am größten und mit Auftrieb auf der Kanalachse.

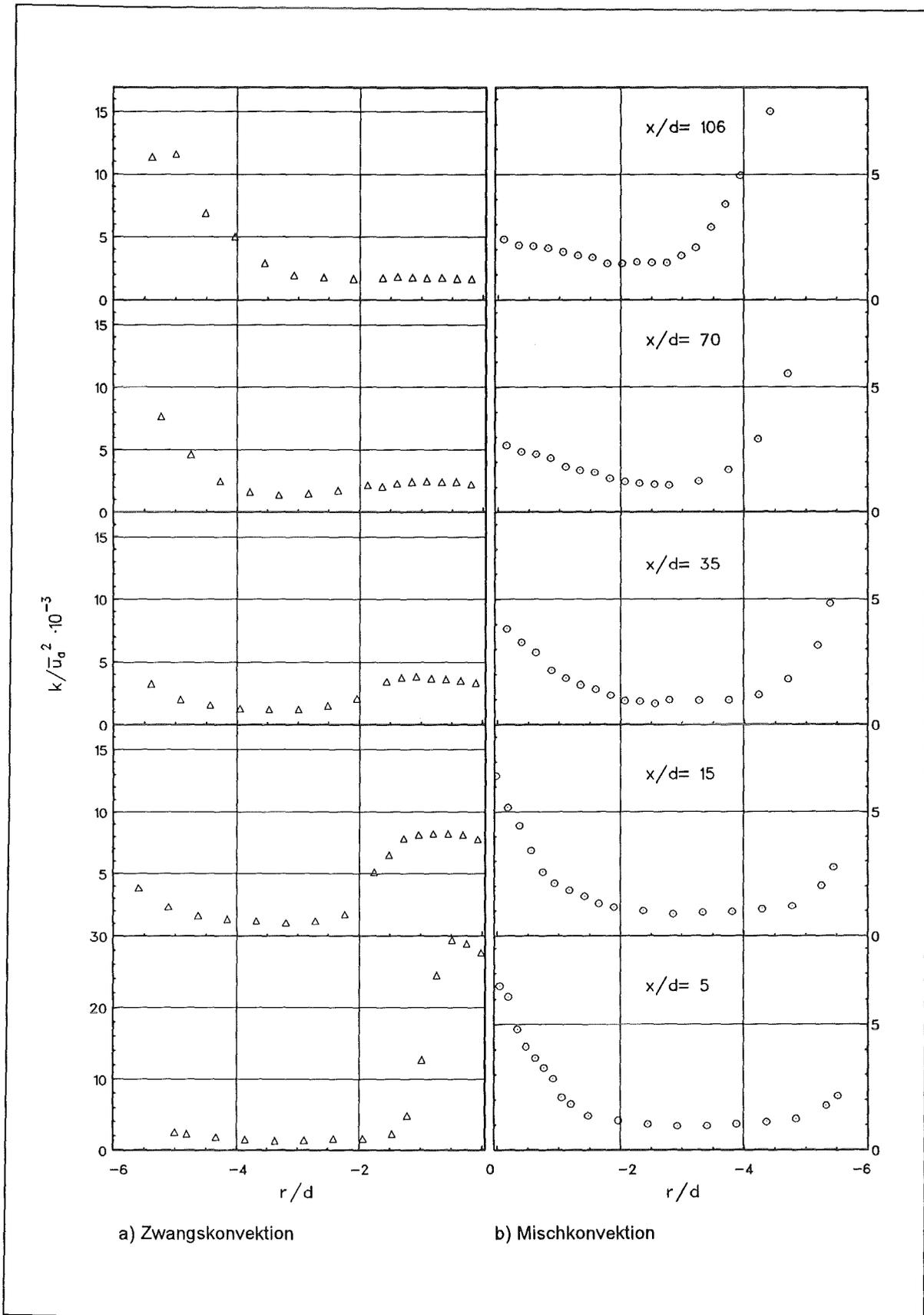


Abb. (4.34): Radiale Profile der kinetischen Energie der Turbulenz nach Gl. (4.18).

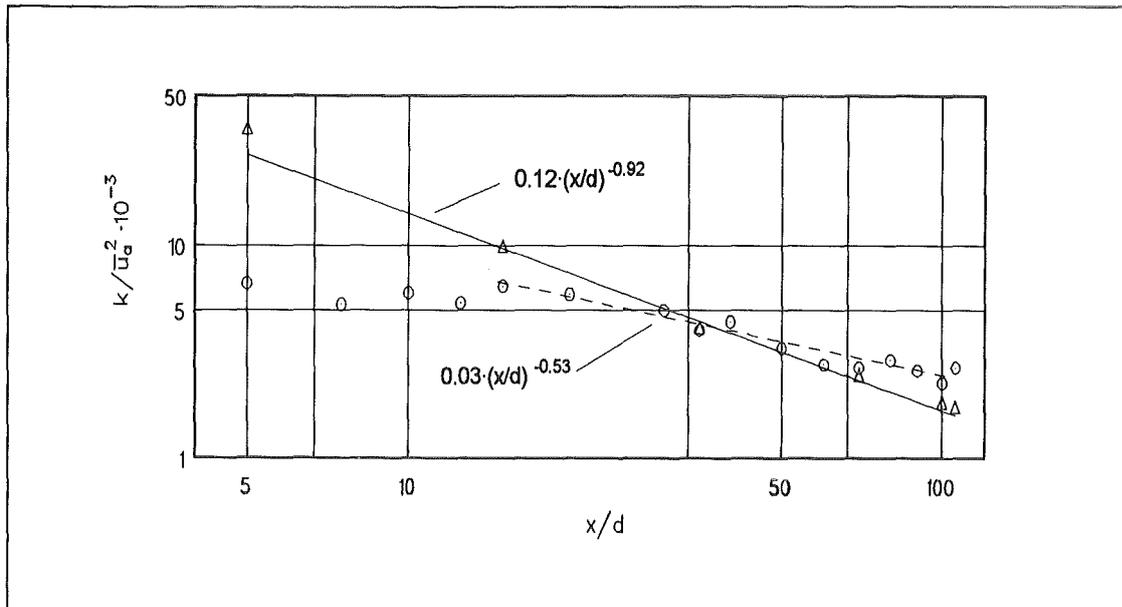


Abb. (4.35): Axialer Verlauf der kinetischen Energie der Turbulenz auf der Kanalachse. Mischkonvektion: (○) Meßwert, (--) Potenzgesetz; Zwangskonvektion: (Δ) Meßwert, (-) Potenzgesetz.

Ein Vergleich der kinetischen Energie der Turbulenz entlang der Strömungsachse ist in doppellogarithmischer Auftragung in Abbildung (4.35) gezeigt. In der reinen Nachlaufströmung klingt  $k$  für  $x/d \geq 15$  nach einem Potenzgesetz ab, wobei sich der Exponent zu  $-0.92$  ergibt. Bei Mischkonvektion ist die kinetische Energie der Turbulenz innerhalb des Formierungsgebiets deutlich kleiner als die ohne Auftriebseinfluß. Der Unterschied beträgt bei  $x/d = 5$ , bezogen auf den Wert bei Zwangskonvektion, 420 %. Im Gegensatz zum unbeheizten Fall bleibt  $k$  in diesem Bereich näherungsweise konstant, was mit der gegenläufigen Entwicklung der axialen und radialen Turbulenzintensität zu begründen ist, Abn.(4.27) und (4.28). Mit zunehmendem Abstand klingt  $k$  ab. Die Abschwächung kann für  $x/d \geq 15$  näherungsweise durch ein Potenzgesetz proportional zu  $(x/d)^{-0.53}$  beschrieben werden. Aufgrund der Produktion von  $k$  durch Auftriebskräfte ist das Abklingverhalten gegenüber dem der Zwangskonvektion geringer. Der Meßwert von  $k$  ist mit Auftrieb bei  $x/d = 106$  um das 1.6fache größer.

Die relativen Anteile der axialen und radialen Geschwindigkeitsfluktuationen  $v'^2/k$  und  $u'^2/k$  an der kinetischen Energie der Turbulenz entlang der Strömungsachse sind in Abbildung (4.36) und Abbildung (4.37) gezeigt. Ohne Auftrieb sind beide Verhältnisse schwache Funktionen vom axialen Abstand und können durch Geraden angenähert werden. Die Steigungen ermitteln sich für  $u'^2/k$  und  $v'^2/k$  zu  $1.22 \cdot 10^{-3}$  und  $-0.61 \cdot 10^{-3}$ .

Mit Auftrieb ist die axiale Abhängigkeit der Quotienten nicht mehr zu finden. Die Anteile der Fluktuationen an  $k$  bleiben für  $x/d \geq 15$  konstant. Der Quotient  $\overline{u'^2}/k$  nimmt einen mittleren Wert von 0.675 an und der radiale einen Wert von 0.162. Eine konstante Beziehung zwischen den radialen und axialen Turbulenzintensitäten wurde bereits in Abschnitt 4.5.4 gefunden. Beide Quotienten müssen deshalb das gleiche Verhalten

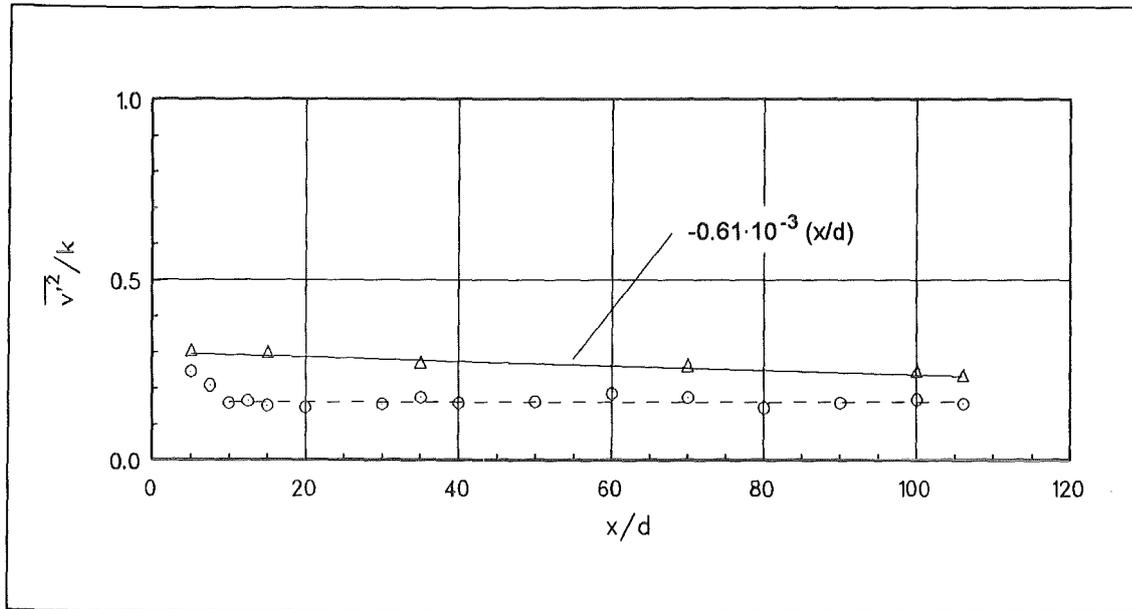


Abb. (4.36): Axialer Verlauf von  $\overline{v'^2}/k$ . Mischkonvektion: (○) Meßwert, (--) Konstante; Zwangskonvektion: (Δ) Meßwert, (-) Näherungsgerade.

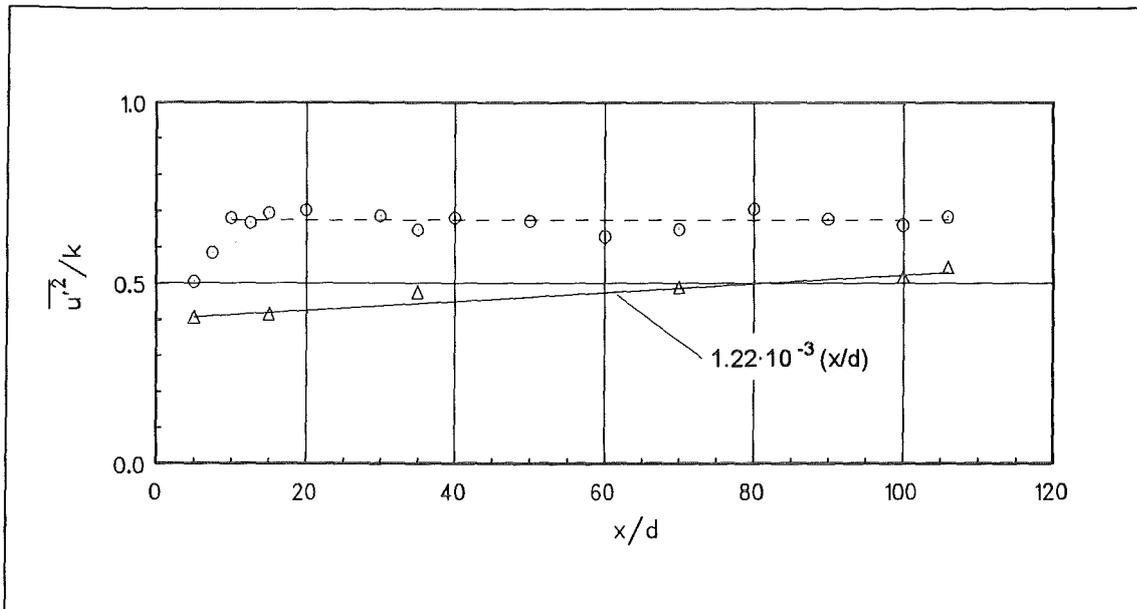


Abb. (4.37): Axialer Verlauf von  $\overline{u'^2}/k$ . Mischkonvektion: (○) Meßwert, (--) Konstante; Zwangskonvektion: (Δ) Meßwert, (-) Näherungsgerade.

zeigen. Wie erwartet wird das Verhältnis  $\overline{u'^2}/k$  von Auftriebseffekten sehr stark verändert, Abb.(4.37). Der mittlere Wert bei Mischkonvektion ist im Vergleich zur Zwangskonvektion bei  $x/d = 15$  um 61 % größer. Der Beitrag der radialen Geschwindigkeitsfluktuationen an  $k$  wird durch die gerichtete Wirkung der Auftriebskräfte deutlich vermindert. Aufgrund von Gl.(4.17) gilt dies auch für die azimutale Komponente. Der Beitrag der axialen Fluktuationskomponente übersteigt den der radialen und azimutalen um jeweils 316 %.

Der Auftriebseinfluß auf die kinetische Energie der Turbulenz läßt sich an der exakten Transportgleichung Gl.(2.83) gut erkennen. Ohne Auftrieb tritt als maßgeblicher Quellterm die Schubspannungsproduktion von  $k$

$$P = -\overline{u'v'} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad (4.19)$$

auf. Bei Mischkonvektion kommt der Term

$$G = -\alpha g \cdot \overline{u'T'} \quad (4.20)$$

hinzu, der die direkte Produktion von  $k$  durch Auftriebskräfte darstellt. Die radialen Verteilungen der Produktionsterme nach den Gln.(4.19) und (4.20) sind in Abbildung (4.38) exemplarisch für den axialen Abstand  $x/d = 35$  bei Zwangskonvektion und bei Mischkonvektion vergleichend dar-

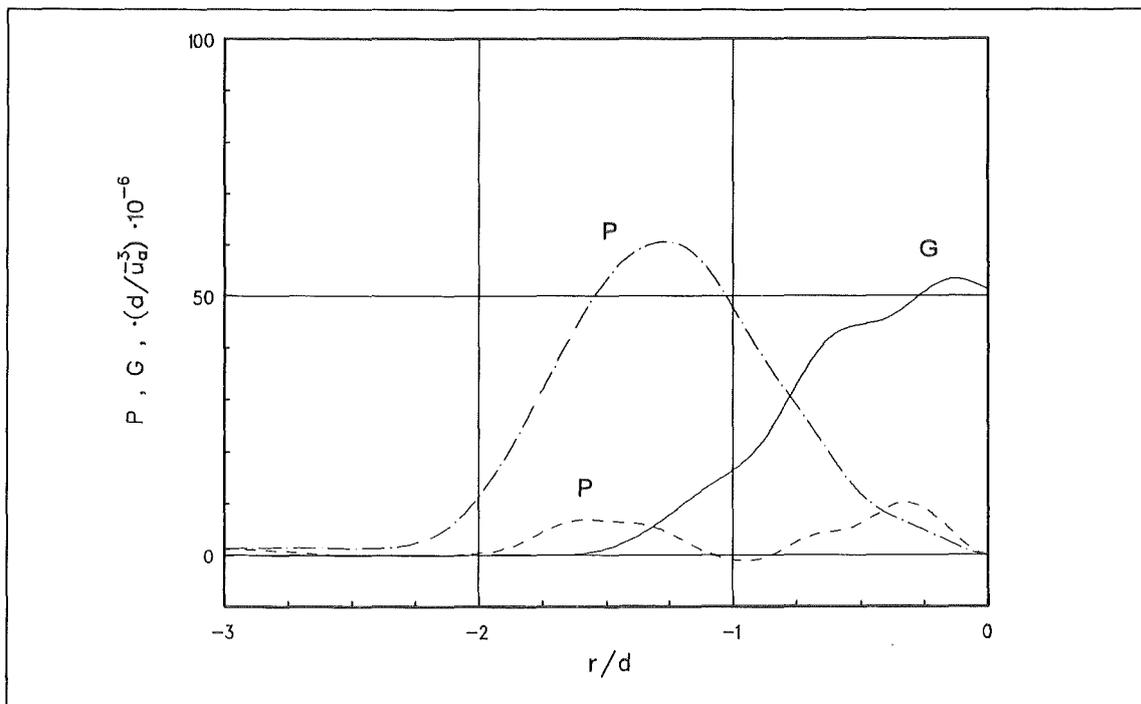


Abb.(4.38): Vergleich der Produktion kinetischer Energie der Turbulenz durch die Hauptströmung und den Auftrieb für  $x/d = 35$ .

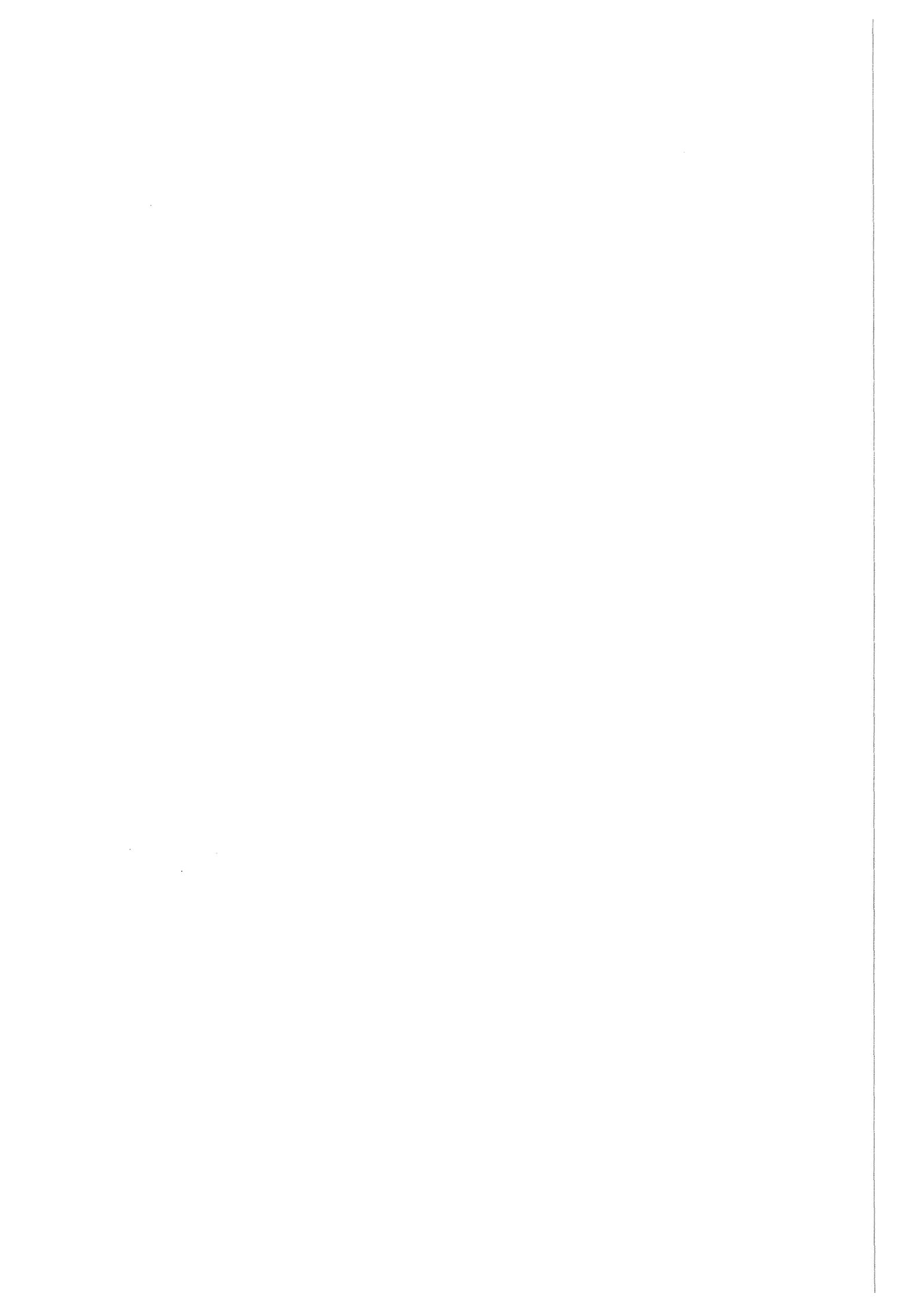
(—) Auftriebsproduktion; Schubspannungsproduktion:

(-.-) Zwangskonvektion, (--) Mischkonvektion.

gestellt. Durch die Umstrukturierung des mittleren Geschwindigkeitsfeldes wird die Schubspannungsproduktion von  $k$  bei Mischkonvektion drastisch reduziert. Im Vergleich zur Zwangskonvektion wird der Hauptströmung damit wesentlich weniger Energie entzogen. Die verminderte Rate der Schubspannungsproduktion wird durch die Auftriebsproduktion kompensiert.

Aus Abb.(4.38) ist ersichtlich, daß der Anteil durch den Produktionsterm  $G$  genauso groß wird, wie der durch den Term  $P$ . Wie beschrieben ist  $G$  auf der Kanalachse maximal, so daß das Maximum von  $k$  zur Kanalachse hin verschoben wird. Für die Erhöhung der kinetischen Energie der Turbulenz ist damit hauptsächlich die Auftriebsproduktion von  $k$  verantwortlich.

Untersuchungen in Auftriebsfreistrahlen ("forced plumes") zeigen ein anderes Verhalten (Hossain (1980), Ramaprian und Chandrasekhara (1989)). Durch den in Freistrahlen vorhandenen Geschwindigkeitsüberschuß bewirkt der Auftrieb eine Beschleunigung der Strömung. Die Folge ist eine Erhöhung der Scherung und somit der turbulenten Schubspannungen. Entsprechend nimmt neben der Auftriebsproduktion von  $k$  auch die Schubspannungsproduktion von  $k$  zu, so daß der Hauptströmung mehr Energie entzogen wird. Die kinetische Energie der Turbulenz wird in Auftriebsfreistrahlen daher stets größer sein als in dem hier untersuchten Mischkonvektionsnachlauf.



#### 4.6 Zusammenfassung der Ergebnisse der Turbulenzstruktur

Die wesentlichen Ergebnisse aus den Messungen der Fluktuationsgrößen und deren Analyse im untersuchten Bereich  $5 \leq x/d \leq 106$  des Kugelnachlaufs seien wie folgt zusammengefasst:

- Die axiale Breitenentwicklung der Intensität der Temperaturfluktuationen erfolgt nach einem Potenzgesetz, das die gleiche axiale Abhängigkeit besitzt wie das des mittleren Temperaturfeldes. Die Ausbreitung des turbulenten Temperaturfeldes erfolgt jedoch schneller.
- Die Profile des RMS-Werts der Temperatur zeigen für  $5 < x/d < 100$  einfache Verteilungen mit einem Maximum auf der Kanalachse. Für  $x/d \geq 100$  treten M-förmige Profile auf.
- Der radiale turbulente Wärmefluß ist dem Gradienten der mittleren Temperatur direkt proportional.
- Der axiale turbulente Wärmefluß ist in Umgebung der Kanalachse maximal und ist ab  $x/d \geq 20$  um eine Größenordnung größer als der radiale turbulente Wärmefluß. Im Vergleich zum axialen Wärmetransport durch die Hauptströmung ist der axiale turbulente Wärmefluß vernachlässigbar klein.
- Die axiale Turbulenzintensität wird durch Auftriebseffekte direkt beeinflusst, die radiale Turbulenzintensität dagegen nicht. Durch den Auftrieb wird die axiale Turbulenzintensität und damit die Anisotropie der Schwankungsbewegung erhöht.
- Die Profile der radialen Turbulenzintensität sind einfache Verteilungen und bleiben bei Zwangs- und Mischkonvektion in Strömungsrichtung erhalten. Die Profile der axialen Turbulenzintensität sind bei Zwangskonvektion M-förmige Verteilungen und bei Mischkonvektion einfache, wobei die maximale Turbulenzintensität auf der Kanalachse auftritt.
- Die radialen und azimuthalen Turbulenzintensitäten sind unabhängig von Auftriebseinflüssen und im Bereich der Nachlaufströmung gleich groß.
- Die Abschwächung der Turbulenzintensitäten kann bei Zwangs- und Mischkonvektion ab einem bestimmten Abstand jeweils durch Potenzgesetze beschrieben werden.
- Die Profile der turbulenten Schubspannung werden durch den Auftriebs-einfluß im Vergleich zur reinen Nachlaufströmung vollständig umstrukturiert und stark vermindert. Die Verteilungen von  $\overline{u'v'}$  sind bei Zwangskonvektion dem radialen Gradienten der mittleren axialen Ge-

schwindigkeit direkt proportional. Bei Mischkonvektion wird  $\overline{u'v'}$  zusätzlich durch die Auftriebsproduktion  $\alpha g \cdot \overline{v'T'}$  beeinflusst.

- Die kinetische Energie der Turbulenz wird bei Zwangskonvektion durch die Schubspannungsproduktion und bei Mischkonvektion dagegen maßgeblich durch den axialen turbulenten Wärmefluß bestimmt.
- Das Abklingverhalten von  $k$  wird in beiden Strömungsfällen ab  $x/d \geq 15$  durch Potenzgesetze wiedergegeben. Bei Zwangskonvektion klingt  $k$  stärker ab als bei Mischkonvektion.
- Die Anteile der axialen und radialen Geschwindigkeitsfluktuationen an der kinetischen Energie der Turbulenz sind bei Mischkonvektion für  $x/d \geq 15$  unabhängig und bei Zwangskonvektion schwache Funktionen vom Abstand.

## 4.7 Turbulenzmodellierung

### 4.7.1 Turbulente Austauschgrößen

In den besprochenen auftriebserweiterten Formen des  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells wird das Prinzip der Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität verwendet. Dies sind die turbulenten Austauschgrößen für den Impuls und die Wärme. Gemäß den Gln. (2.87), (2.88) und (2.31) sind die Größen definiert durch

$$\nu_t = \frac{-\overline{u'v'}}{\partial\bar{u}/\partial r} \quad , \quad (4.21)$$

$$\Gamma_t = \frac{-\overline{v'T'}}{\partial\bar{T}/\partial r} \quad . \quad (4.22)$$

Die Berechnung von  $\nu_t$  und  $\Gamma_t$  nach den Gln. (4.21) und (4.22) auf der Kanalachse führt auf einen unbestimmten Ausdruck vom Typ "0/0", da sowohl die radialen Gradienten der mittleren Größen  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$  als auch die Korrelationen  $\overline{u'v'}$  und  $\overline{v'T'}$  zu Null werden. Der Grenzwert auf der Kanalachse kann unter Verwendung der Regel von de l'Hôpital berechnet werden (Tennekes et al. (1972)). Dieser Grenzwert ist endlich.

$$\nu_t(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\overline{u'v'}}{\partial\bar{u}/\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r}(-\overline{u'v'})}{\frac{\partial}{\partial r}(\partial\bar{u}/\partial r)} \quad . \quad (4.23)$$

Eine entsprechende Gleichung ergibt sich für die Wirbeldiffusivität.

$$\Gamma_t(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\overline{v'T'}}{\partial\bar{T}/\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r}(-\overline{v'T'})}{\frac{\partial}{\partial r}(\partial\bar{T}/\partial r)} \quad . \quad (4.23)$$

Die Ableitungen der Temperatur werden aus den Gaußschen Glockenkurven für die Temperatur berechnet. Für die zweite Ableitung der mittleren Geschwindigkeit werden die Profile von  $\bar{u}$  zunächst mit einer kubischen Splinefunktion angenähert und anschließend numerisch differenziert. Der Verlauf der Korrelationen kann in Umgebung der Kanalachse mit einer Regressionsgeraden angenähert werden. Die Steigung der Geraden entspricht der Ableitung.

Die so berechnete normierte Wirbelviskosität  $\nu_t/\nu_0$  bei Zwangs- und Mischkonvektion und die normierte Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t/\Gamma_0$  bei Mischkonvektion sind in Abbildung (4.39) über  $x/d$  aufgetragen.  $\nu_0$  und  $\Gamma_0$  sind die molekularen Werte der Grundströmung. Sie sind über die Prandtl-Zahl  $Pr_0 = 7$  miteinander verknüpft, Gl. (2.10).

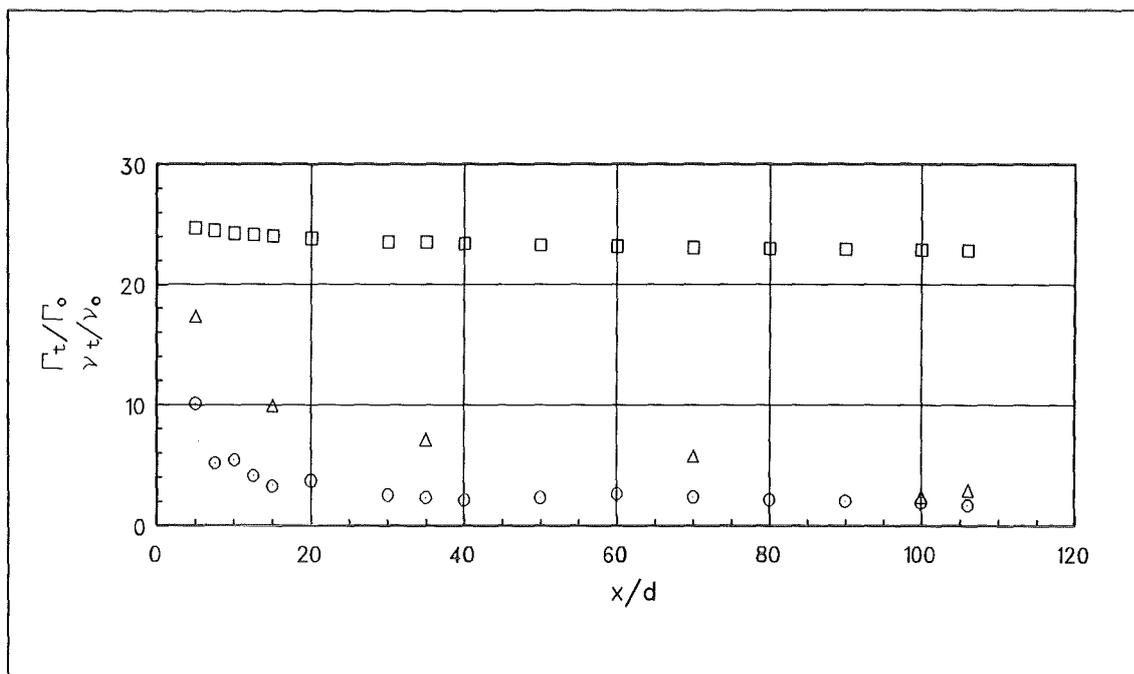


Abb.(4.39): Axialer Verlauf der Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität.  
 (○)  $\nu_t$  Mischkonvektion, (Δ)  $\nu_t$  Zwangskonvektion, (□)  $\Gamma_t$ .

Bei Zwangskonvektion klingt die Wirbelviskosität  $\nu_t/\nu_0$  von einem maximalen Wert von 17.1 auf 2.8 bei  $x/d = 5$  und  $x/d = 106$  ab. Dieser Wert entspricht etwa dem bei Mischkonvektion.

Im Vergleich zur Zwangskonvektion wird die Wirbelviskosität  $\nu_t$  durch den Auftriebseinfluß deutlich reduziert. Durch Abnahme des Geschwindigkeitsdefizits der Hauptströmung wird der radiale Gradient der axialen mittleren Geschwindigkeit kleiner. Die turbulenten Schubspannungen werden aber vergleichsweise stärker reduziert, so daß der turbulente Impulsaustausch behindert wird. Die Folge hieraus ist, daß der molekulare Austausch an Bedeutung gewinnt. Die Wirbelviskosität wird bei Mischkonvektion für axiale Abstände von  $x/d \geq 15$  näherungsweise unabhängig vom axialen Abstand. Im Mittel beträgt der Wert  $2.2 \cdot \nu_0$  und ist damit von gleicher Größenordnung wie der molekulare Austausch. Nur im Formierungsbereich der Strömung ist  $\nu_t$  größer, bei  $x/d = 5$  ist der Wert 10.1. Das Verhalten ist auf die in Abschnitt 4.5.4 diskutierte Umstrukturierung der turbulenten Schubspannungsverteilungen zurückzuführen.

Die Wirbeldiffusivität  $\Gamma_t$  kann im Mischkonvektionsnachlauf für axiale Abstände  $x/d \geq 15$  als konstant angenommen werden und beträgt  $23.2 \cdot \Gamma_0$ . Der Wärmetransport durch Wärmeleitung ist für die Ausbreitung des Temperaturfeldes damit von untergeordneter Bedeutung. Wie die Wirbelvis-

kosität nimmt  $\Gamma_t$  im Formierungsbereich leicht ab. Bei  $x/d = 5$  ist  $\Gamma_t = 24.7 \cdot \Gamma_o$ .

Das Verhalten von  $\nu_t$  und  $\Gamma_t$  außerhalb des Formierungsbereichs bedeutet eine direkte Proportionalität zwischen den radialen Gradienten der Hauptströmungsgrößen  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$  und dem Turbulenzfeld.

In den Turbulenzmodellen wird die Wirbeldiffusivität nicht direkt verwendet, sondern in Form der turbulenten Prandtl-Zahl.

$$\sigma_t = \frac{\nu_t}{\Gamma_t} \quad (4.25)$$

Der axiale Verlauf von  $\sigma_t$  ist in Abbildung (4.40) gezeigt. Der eingetragene Kurvenzug ist eine Näherungsfunktion, die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt ist. Es wird ein Polynomansatz verwendet. Die Koeffizienten sind in Tabelle (4.3) eingetragen.

$$\sigma_t = A_1 + A_2(x/d) + A_3(x/d)^{-1} + A_4(x/d)^{-2} + A_5(x/d)^{-3} \quad (4.26)$$

Koeffizient	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Wert	0.44	$3.2 \cdot 10^{-4}$	13.25	-90.32	416.52

Tab. (4.3): Koeffizienten der Näherungsfunktion für  $\sigma_t$ .

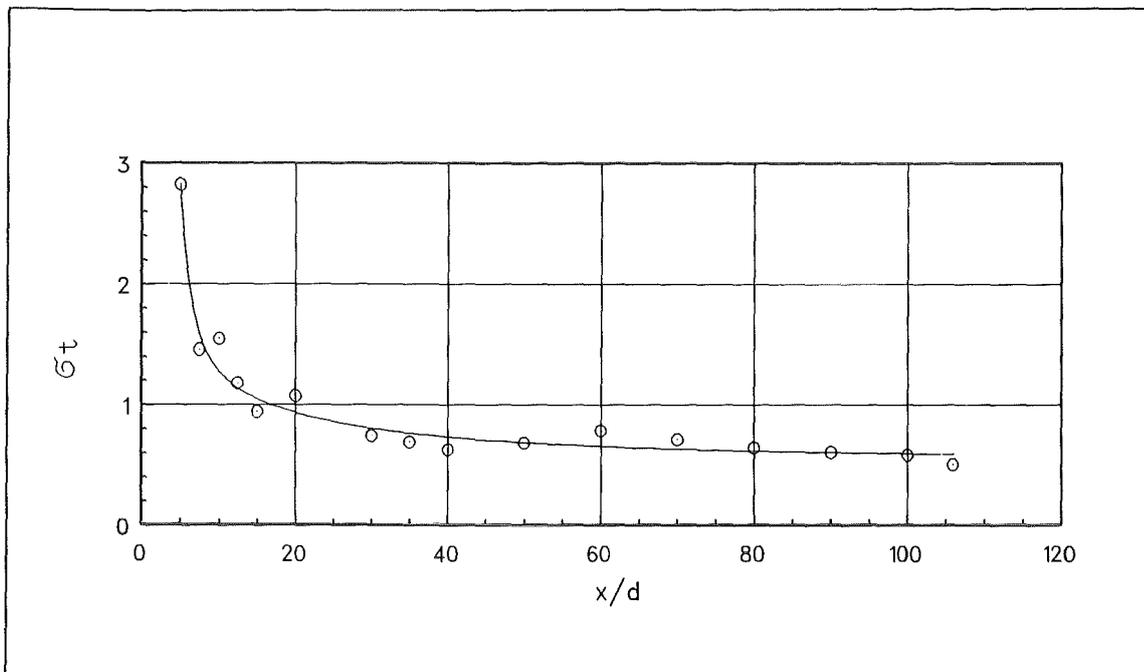


Abb. (4.40): Turbulente Prandtl-Zahl. (o) Gl. (4.25), (—) Näherungskurve nach Gl. (4.26).

Die Struktur des Turbulenzfeldes beeinflußt das Verhältnis der Austauschgrößen für Impuls und Wärme im Mischkonvektionsnachlauf eindeutig. Solange das Strömungsfeld von der Kugelumströmung geprägt ist, ist die turbulente Prandtl-Zahl wesentlich größer als eins. Für  $x/d = 5$  ist sie 2.8, was ebenfalls eine um diesen Betrag größere Wirbelviskosität im Vergleich zur Wirbeldiffusivität bedeutet. Bis  $x/d = 15$  formiert sich die Strömung, wobei das Turbulenzfeld seine Struktur ändert.  $\sigma_t$  fällt auf einen Wert von etwa 1.0 ab. Für größere axiale Abstände ergibt sich aus der Näherungsfunktion ein asymptotischer Wert der turbulenten Prandtl-Zahl von  $\sigma_t = 0.61$ . Die Austauschgröße für die Wärme ist in der Strömung also größer als die Austauschgröße für den Impuls.

Reichardt und Ermshaus (1962) finden in einem freien, turbulenten und achsensymmetrischen Nachlauf, wobei die Temperatur als passiver Skalar wirkt,  $\sigma_t = 0.86$ . Der im vorliegenden Experiment gefundene asymptotische Wert für  $\sigma_t$  entspricht dem in der Literatur für freie Scherschichtströmungen angegebenen Wert von  $\sigma_t = 0.6$ . Für Wandgrenzschichten, wie turbulente Rohrströmungen, wird im allgemeinen  $\sigma_t = 0.9$  angegeben.

Die unterschiedlichen Werte der turbulenten Prandtl-Zahl lassen sich aus folgenden Überlegungen ableiten. In Rohrströmungen wird der turbulenten Austauschbewegung durch die Rohrwand scharfe Grenzen gesetzt, so daß die Freiheit der Turbulenz beschränkt ist und die Austauschgrößen für den Impuls und die Wärme ungefähr gleich groß sind. Bei der von Reichardt und Ermshaus untersuchten Nachlaufströmung wird die achsensymmetrische Strömung allseitig von einer turbulenzfreien äußeren Potentialströmung umschlossen. Ähnlich wie bei der Rohrströmung wird die turbulente Austauschbewegung durch die scharfe Begrenzung der Potentialströmung behindert. Die turbulenten Prandtl-Zahlen sind in beiden Fällen daher von gleicher Größenordnung. Im Gegensatz dazu wird im vorliegenden Experiment die achsensymmetrische, auftriebsbehaftete Nachlaufströmung von einer turbulenten Außenströmung allseitig umgeben. Die Turbulenz wird weniger behindert und ist somit freier. Die Austauschgröße für die Wärme ist größer als diejenige für den Impuls. Bei achsensymmetrischen Freistrahlen in einer turbulenzfreien Außenströmung kann das umgebende Fluid ungehindert in den Strahl eintreten. Die Turbulenz ist freier als die von Reichardt und Ermshaus untersuchte Nachlaufströmung, die turbulente Prandtl-Zahl liegt bei  $\sigma_t = 0.6$ .

Aufgrund dieser Überlegungen sollte der hier angegebene asymptotische Wert der turbulenten Prandtl-Zahl in dem genannten Wertebereich liegen.

#### 4.7.2 Bedeutung der Messergebnisse für das $k$ - $\epsilon$ Turbulenzmodell

In Kapitel 2 sind zwei Formen von auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodellen beschrieben worden. Bei der ersten Form wird die Auftriebsproduktion  $G$  eingeführt, die als Standarderweiterung bezeichnet wird. Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse werden über  $\nu_t$  und die Modellkonstante  $\sigma_t$  modelliert, die unabhängig vom Auftrieb sind. In der zweiten Form, dem algebraischen Spannungs-/Flußmodell, ist ebenfalls die Auftriebsproduktion enthalten. Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse werden aber aus algebraischen Gleichungen bestimmt. Die Größen  $\nu_t$  und  $\sigma_t$  werden durch den Auftrieb direkt verändert.

Die Gleichungen der beiden mathematischen Modelle in der Formulierung für vertikale Grenzschichtströmungen sind in den Tabellen (2.6) und (2.7) gegeben. Die wichtigsten Erkenntnisse aus den Messungen, hinsichtlich der in den Modellen verwendeten Auftriebserweiterungen, sollen diskutiert werden. Im folgenden wird das  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell mit der Standarderweiterung als Modell I und das algebraische Spannungs-/Flußmodell als Modell II bezeichnet.

Die mittlere axiale Geschwindigkeit nimmt durch den Auftrieb stark zu. Die hauptsächlich verantwortliche Größe dafür ist das Auftriebsglied  $\Delta\bar{p}/\rho_0 g$  in der Impulsbilanzgleichung. Der Quellterm ist unabhängig vom verwendeten Modell, da er in der Gleichung für das Hauptströmungsfeld auftritt. Hossain (1980) findet in Simulationsrechnungen mit den Modellen I und II für Auftriebsstrahlen, daß das Auftriebsglied der maßgebliche Term für die mittlere Geschwindigkeit ist und dessen Ausbreitungsverhalten bestimmt. Das im Experiment gefundene Verhalten bestätigt dies.

Die nach Gl.(4.21) berechnete Wirbelviskosität ist von der gleichen Größenordnung wie die molekulare Viskosität. Viskose Effekte haben an der Entwicklung der Nachlaufströmung maßgeblichen Einfluß und können nicht vernachlässigt werden. Die in Gl.(2.14) definierte turbulente Reynolds-Zahl  $Re_t$  ist in  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodellen durch

$$Re_t = \frac{k^2}{\nu \cdot \epsilon} \quad (4.27)$$

gegeben. Mit Gl.(2.36) und Gl.(4.27) ist

$$Re_t = \frac{\nu_t}{\nu} \cdot \frac{1}{C_\mu} \quad (4.28)$$

Aus Abb.(4.38) ist ersichtlich, daß  $Re_t$  klein ist im Vergleich zu den als groß bezeichneten turbulenten Reynolds-Zahlen von  $10^3$  bis  $10^4$  (Rotta (1972)). Es erscheint daher sinnvoll, bei der Simulation der Mischkonvektionsströmung die sogenannten "low Reynolds number" Modifikationen im  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell zu verwenden. Eine Berücksichtigung viskoser Effekte erfolgt dabei im wesentlichen durch die Einführung verschiedener Dämpfungsfunktionen für die Wirbelviskosität und Modellkonstanten, die Funktionen von  $Re_t$  nach Gl.(4.27) sind. Patel et al. (1985) untersuchen in einer Übersicht derartige Erweiterungen.

Die molekulare Wärmeleitung kann gegenüber dem radialen turbulenten Wärmefluß  $\overline{v'T'}$  vernachlässigt werden, Abb.(4.38).

Die Analyse der kinetischen Energie der Turbulenz zeigt, daß nach Abb.(4.37) die Auftriebsproduktion  $G$  in der Mischkonvektionsströmung dominiert. Sie ist proportional zum vertikalen, axialen turbulenten Diffusionsfluß  $\overline{u'T'}$ .

Im Modell I wird  $G$  durch die Beziehung Gl.(2.96)

$$G = \alpha g \cdot \Gamma_t \cdot \partial \bar{T} / \partial x \quad (4.29)$$

proportional zum axialen Gradienten der mittleren Temperatur modelliert. Entlang der Strömungsachse ist  $\overline{u'T'}$  maximal, so daß die Auftriebsproduktion hier prinzipiell erfaßt wird. Da die Wirbeldiffusivität von der Idee her isotrop ist, werden Gleichungen vom Typ der Gl.(4.29) im allgemeinen nur für den turbulenten Wärmefluß in Richtung des größten Temperaturgradienten angewendet, der in radialer Richtung auftritt. Die Diskussion des Produktionsterms  $P_T$ , Gl.(4.11) in Abschnitt 4.5.1, zeigt, daß der Gradient  $\partial \bar{T} / \partial x$  um zwei Größenordnungen kleiner ist als der radiale Gradient. Aus der Formulierung nach Gl.(4.29) ist zu schließen, daß die großen im Experiment gemessenen axialen turbulenten Wärmeflüsse schlecht wiedergegeben werden.

Da  $\overline{u'T'}$  im Modell II durch die algebraischen Gleichungen Gl.(2.104) oder Gl.(2.124) zu den radialen Gradienten der Hauptströmungsgrößen in Beziehung gesetzt wird, ist eine realistischere Modellierung von  $G$  zu erwarten. In der Umgebung und auf der Strömungsachse wird  $G$  dann aber zu Null, was den Messungen widerspricht. Infolgedessen erscheint es sinnvoll, in der algebraischen Gleichung für  $\overline{u'T'}$  den Anteil der axialen Gradienten mit zu berücksichtigen. Tamanini (1977, 1978) verwendet in Simulationsrechnungen eine solche Erweiterung.

Die sehr großen Werte der Intensität der Temperaturfluktuationen  $\overline{T'^2}$  nach Abb.(4.16) und von  $\overline{u'T'}$  nach Abb.(4.22) bedeuten eine relativ starke Kopplung zwischen beiden Turbulenzgrößen (vgl. Abb.(2.1)). Modell I berücksichtigt einen derartigen Einfluß nicht. Modell II dagegen verwendet die algebraische Gl.(2.105) für  $\overline{T'^2}$ . Eine genauere Beschreibung der Einflußnahme kann erfolgen, wenn anstelle von Gl.(2.105) die modellierte Transportgleichung für  $\overline{T'^2}$  Gl.(2.126) gelöst wird. Die Lösung der Gleichung bietet die Möglichkeit, die berechneten Verteilungen mit denen der Messung zu vergleichen.

Die vereinfachte Form des in Tab.(2.7) gezeigten Modells II beruht auf der Annahme, daß der konvektive und diffusive Transport der turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse vernachlässigt werden kann. Da die Querschwankungen vom Auftrieb unbeeinflusst sind, muß das Verhältnis  $\overline{v'^2}/k$  konstant sein. Es ist durch Gl.(2.118) gegeben. Aus Abb.(4.35) und den Profilen von  $k$  und  $\overline{v'^2}$  für Mischkonvektion wird diese Annahme, außerhalb der Formierungsbereichs, bestätigt. Mit den in Tab.(2.4) angegebenen Modellkonstanten ergibt sich für  $\overline{v'^2}/k = 0.53$ , das Experiment liefert den Wert  $0.16$ . Dies deutet auf die Notwendigkeit einer Modifikation der Modellkonstanten hin.

In der Impulsbilanzgleichung Gl.(2.77) tritt die turbulente Schubspannung im Diffusionsterm auf. In beiden Modellen wird  $\overline{u'v'}$  über den Gradientendiffusionsansatz mit der Wirbelviskosität  $\nu_t$  proportional zum radialen Gradienten der mittleren axialen Geschwindigkeit modelliert, Gl.(2.87). Bei Zwangskonvektion führt der Ansatz auf die im Experiment gefundene Form der Schubspannungsverteilungen. Wie die Diskussion der Kreuzkorrelation  $\overline{u'v'}$  bei Mischkonvektion zeigt, werden die Schubspannungen trotz eines verschwindenden radialen Geschwindigkeitsgradienten nicht zu Null. In diesem Fall kann der Gradientendiffusionsansatz die physikalischen Vorgänge nicht wiedergeben. Der Einfluß des Auftriebsproduktionssterms  $-\alpha g \cdot \overline{v'T'}$  auf die Schubspannungen muß dann berücksichtigt werden. Der Anteil des turbulenten diffusiven Impulsaustauschs in der Impulsbilanzgleichung wird deshalb zu klein sein. Gleichzeitig bedeutet dies, daß die Schubspannungsproduktion von  $k$  in der modellierten Transportgleichung für  $k$  und  $\epsilon$  keinen Beitrag mehr liefert.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß das algebraische Spannungs/Fluß  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodell das größere Potential bietet, auftriebsbehaftete turbulente Strömungen zu simulieren. Detailliertere Aussagen über die

Leistungsfähigkeit der besprochenen auftriebserweiterten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodelle sind nur möglich, wenn die vorliegenden experimentellen Daten des Mischkonvektionsnachlaufs mit entsprechenden Simulationsrechnungen verglichen werden.

Die zur Validierung der Modellierungen wichtigsten Strömungsgrößen sind in der vorgelegten Arbeit vollständig bestimmt worden. Gemäß der Einteilung in Tab.(2.8) sind dies die Größen der ersten und zweiten Gruppe.

#### 4.8 Experimentelle Unsicherheiten

Die in der neu aufgebauten Wasserteststrecke FLUTMIK anfänglich aufgetretenen technischen Schwierigkeiten werden durch eine Reihe von Vorexperimenten, bei denen die eingesetzte Meßtechnik und Strömungsführung optimiert werden, behoben. Ein Vergleich von wiederholt durchgeführten Messungen an identischen axialen Positionen zeigt, daß sowohl die eingestellten Anfangs- und Randbedingungen als auch die ermittelten radialen Profile der Strömungsgrößen reproduzierbar sind.

Die relativen statistischen Fehlergrenzen werden nach den im Anhang A.5 gegebenen Ausführungen bestimmt.

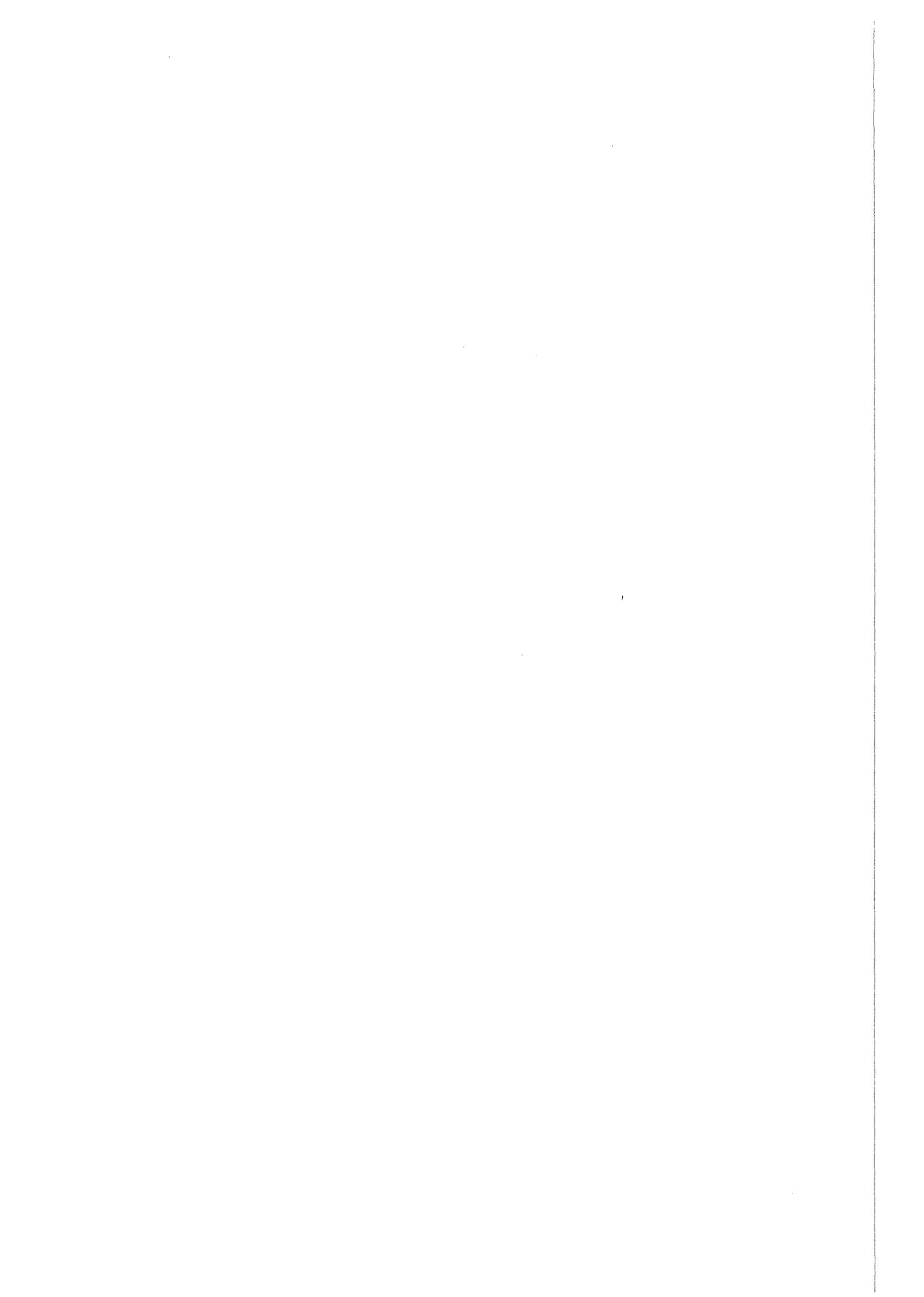
Die zugeführte Heizleistung  $\dot{Q}$  wird auf  $\pm 0.3\%$  konstant gehalten. Die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit  $\bar{u}_0$  schwankt während der Messung eines kompletten radialen Profils um  $\pm 0.6\%$ , die mittlere Temperatur der Anströmung  $\bar{T}_0$  um  $\pm 0.05\%$ . Die Wärmeverluste an die Umgebung sind vernachlässigbar, da der gesamte Glaskanal isoliert ist und sich in einer auf  $\bar{T}_0$  klimatisierten Umgebung befindet. Eine sehr hohe Konstanz der Anfangs- und Randbedingungen ist daher gewährleistet.

Die axiale Position des Strömungseinsatzes und somit der Kugel kann auf  $\pm 0.03 \cdot x/d$  genau eingestellt werden. Die Genauigkeit der radialen Positionierung der LDA-Meßvolumina und der Thermoelementsonde beträgt  $\pm 0.01\text{ mm}$ , wobei der Abstand und die relative Lage beider Systeme zueinander auf  $\pm 1\%$  ( $\pm 0.01\text{ mm}$ ) eingehalten wird.

Die Genauigkeit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  beträgt  $\pm 0.45\text{ mm/s}$ , die der mittleren Temperatur  $\bar{T}$  beträgt  $\pm 3\text{ mK}$ . Die Unsicherheiten der Turbulenzgrößen sind in Tabelle (4.4) eingetragen. Die relative statistische Fehlergrenze des integralen Wärmeflusses ergibt sich zu  $\pm 8\%$ .

Größe	Unsicherheit	Größe	Unsicherheit
$\overline{(u'{}^2)}^{1/2}$	$\pm 2.0\%$	$\overline{u'v'}$	$\pm 3.0\%$
$\overline{(v'{}^2)}^{1/2}$	$\pm 2.0\%$	$\overline{u'T'}$	$\pm 2.5\%$
$\overline{(w'{}^2)}^{1/2}$	$\pm 2.0\%$	$\overline{v'T'}$	$\pm 2.5\%$
$\overline{(T'{}^2)}^{1/2}$	$\pm 0.6\%$	$k$	$\pm 4.0\%$

Tab. (4.4): Experimentelle Unsicherheiten der Turbulenzgrößen



## 5. Schlußbetrachtung

In der vorliegenden Arbeit wird das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld stromab einer vertikal angeströmten beheizten Kugel in einer turbulenten Kanalströmung experimentell untersucht. Im Vergleich zu den Abmessungen des Kanals ist die Kugel klein und kann in Hinsicht auf das Temperaturfeld als eine näherungsweise punktförmige Wärmequelle angesehen werden. Die Experimente werden in der Wasser-Teststrecke FLUTMIK durchgeführt. Die Temperatur und die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in axialer und radialer Richtung werden zeitgleich mit einer Thermoelementsonde und einem Zwei-Komponenten LDA gemessen. Das Hauptströmungsfeld wird durch die mittlere axiale Geschwindigkeit und die mittlere Temperaturdifferenz gegenüber der Anströmung beschrieben. Auf Basis der gemessenen Strömungsgrößen wird das Turbulenzfeld durch die Intensitäten der Fluktuationen der Temperatur und der axialen und radialen Geschwindigkeitskomponenten, die turbulenten Spannungen und turbulenten Wärme Flüsse charakterisiert. Ein Vergleich mit dem unbeheizten Fall zeigt den Einfluß der Auftriebskräfte auf die thermo- und fluiddynamischen Wechselwirkungen bei Mischkonvektion.

Das Strömungsfeld stromab der Kugel kann bei Mischkonvektion in einen Formierungsbereich und einen Übergangsbereich eingeteilt werden. Bei Zwangskonvektion schließt sich an den Formierungsbereich ein Nachlaufbereich an. Der Formierungsbereich wird durch die Kugelumströmung geprägt und tritt unabhängig von Auftriebseinflüssen bei Zwangskonvektion und Mischkonvektion auf. Der Nachlaufbereich der Zwangskonvektion wird durch eine kontinuierliche Abnahme des Geschwindigkeitsdefizit entlang der Kanalachse gekennzeichnet. Es sind nur Trägheitskräfte wirksam. Im Übergangsbereich der Mischkonvektion wird durch Auftriebskräfte ein vollständiger Ausgleich des Geschwindigkeitsdefizits erreicht. Der Einfluß der Auftriebskräfte nimmt gegenüber dem der Trägheitskräfte zu.

Die Zunahme der mittleren axialen Geschwindigkeit wird durch das Auftriebsglied in der Impulsbilanzgleichung hauptsächlich bestimmt. Die Abnahme der mittleren Temperatur ist eine direkte Folge hiervon. Das radiale Ausbreitungsverhalten der mittleren Temperatur und des Turbulenzfeldes der Temperatur erfolgt nach der gleichen Gesetzmäßigkeit.

Die axialen Geschwindigkeitsfluktuationen und der axiale turbulente Wärmefluß werden durch Auftriebseinflüsse direkt beeinflußt und erhöht. Die radialen und azimutalen Geschwindigkeitsfluktuationen und der radiale turbulente Wärmefluß bleibt dagegen unbeeinflußt.

Im Vergleich zum Wärmetransport durch die Hauptströmung ist der axiale Wärmetransport durch das Turbulenzfeld vernachlässigbar klein.

Der Auftriebseinfluß bewirkt eine Umstrukturierung der turbulenten Schubspannungsverteilungen und eine starke Reduzierung des turbulenten Impulsaustauschs. Eine Erhöhung der kinetischen Energie der Turbulenz bei Mischkonvektion erfolgt direkt durch den axialen turbulenten Wärmefluß. Die Produktion kinetischer Energie der Turbulenz durch die turbulenten Schubspannungen ist bei Mischkonvektion von untergeordneter Bedeutung und bei Zwangskonvektion die allein verantwortliche Größe.

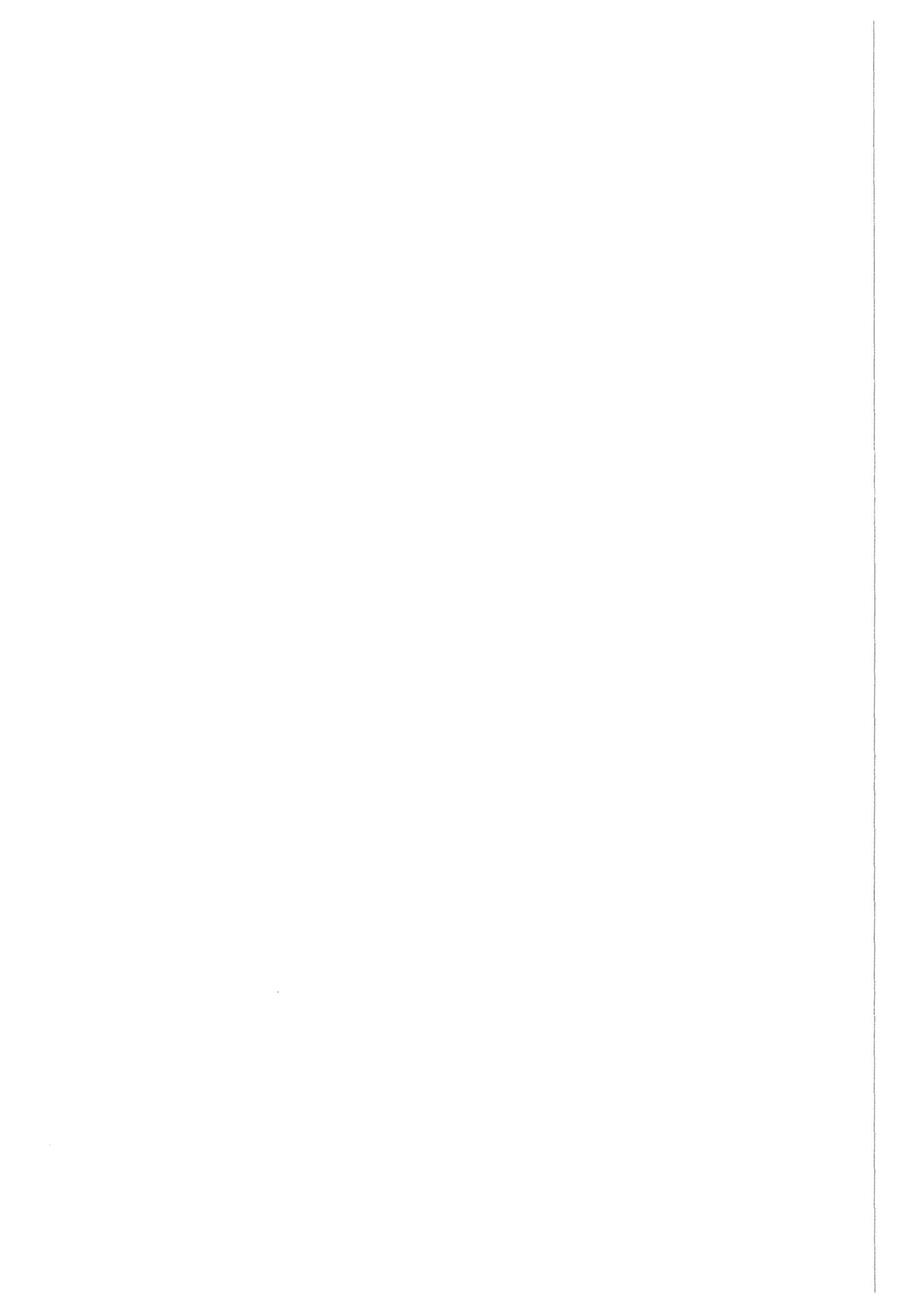
Die turbulenten Austauschgrößen für Wärme und Impuls in Form der Wirbel-diffusivität und der Wirbelviskosität werden berechnet. Die molekulare Wärmeleitung ist gegenüber der Wirbel-diffusivität vernachlässigbar. Viskose Effekte müssen in der Strömung, im Vergleich zur Wirbelviskosität, berücksichtigt werden.

Dies ist eine Folge der im Experiment kleinen realisierten Reynolds-Zahl des Kugelnachlaufs. Sie wird durch den im Bereich der Mischkonvektion einzustellenden Mischkonvektionsparameter und durch die maximal zuführbare Heizleistung, die der Grashof-Zahl direkt proportional ist, festgelegt.

Es zeigt sich, daß ein direkter Vergleich der Meßergebnisse mit Untersuchungen anderer Experimentatoren nicht möglich ist. In der Literatur stehen nur Ergebnisse für freie Nachlaufströmungen zur Verfügung, bei denen eine unendlich ausgedehnte, nicht turbulente Außenströmung vorliegt. Im Gegensatz dazu liegt hier eine Kanalströmung mit begrenzenden Wänden und einem axialen Druckgradienten vor. Einflüsse durch die Wandgrenzschicht und durch die turbulente Außenströmung treten auf.

Die vorgelegten Meßergebnisse sind die ersten Untersuchungen, die einen achsensymmetrischen Nachlauf mit überlagerten Auftriebseffekten behandeln und die zur Validierung der vorgestellten  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodelle notwendigen Größen bestimmen.

Die nächsten auf diese Arbeit aufbauenden, weiterführenden Aufgaben ergeben sich unmittelbar. Einerseits ist dies die Durchführung von Simulationsrechnungen mit den auftriebserweiterten Formen des  $k$ - $\epsilon$  Turbulenzmodells und andererseits die Durchführung von Vergleichsmessungen in der Natrium-Teststrecke.



## 6. Literaturverzeichnis

*Adrian, R.J. (1983)*

Laser Velocimetry, in: Fluid Mechanics Measurement, ed. R.J. Goldstein, Springer-Verlag, pp.155-243

*Afzal, N. (1983)*

Mixed Convection in an Axisymmetric Buoyant Plume, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.26, pp.381-388

*Afzal, N. (1985a)*

Mixed Convection Plume above a Point Heat Source in a Vertical Free Stream, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.28, pp.2043-2047

*Afzal, N. (1985b)*

Mixed Convection in Buoyant Plumes, in: Handbook of Heat and Mass Transfer, Vol.1 Heat Transfer operations, ed. N.P. Cheremisinoff, Publ. Comp., pp.429-485

*Appalaswamy, A.V.; Jaluria, Y. (1980)*

Axisymmetric Plume Flow in a Vertical Uniform Free Stream, J. of Appl. Mech., Vol.47, pp.667-669

*Bendat, J.S.; Piersol, A.G. (1986)*

Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 2nd edition, USA

*Bevilaqua, P.; Lykoudis, P.S. (1978)*

Turbulence Memory in Self-perserving Wakes, J. of Fluid Mech., Vol.89, pp.589-606

*Bill, R.G.; Gebhart, B. (1975)*

The Transition of Plane Plumes, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.18, pp.513-526

*Bradshaw, P.; Cebeci, T. (1981)*

Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press

*Cannon, S.; Champagne, F. (1991)*

Large-scale Structures in Wakes behind Axisymmetric Bodies, 8th Symp. on Turbulent Shear Flows, Munich, 9-11 Sept., Vol.1, pp.6.5.1-6.5.6

*Carmody, Th. (1964)*

Establishment of the Wake behind a Disk, J. of Basic Engineering, Trans. of the ASME, Vol.86, pp.869-882

*Cotton, M.A; Jackson, J.D. (1990)*

Vertical Tube Air Flows in the Turbulent Mixed Convection Regime  
Calculated Using a Low Reynolds-number  $k-\epsilon$  Model, Int. J. Heat Mass  
Transfer, Vo.33, No.2, pp.275-286

*Crane, L.J. (1977)*

The Round Plume due to a Falling Point Source of Heat, J. of App. Math.  
and Phys. (ZAMP), Vol.28, pp.599-606

*Daly, B.; Harlow, F. (1970)*

Transport Equations in Turbulence, The Physics of Fluid, Vol.13,  
pp.2634-2649

*Dantec, (1983)*

DISA, Laser Doppler Anemometry, Publ.No.3205, Denmark

*Dostek Inc. (1989)*

Model 1400 A - LDA Data Acquisition Interface, Dostek Inc. Document No.  
90-1285A

*Durst, F.; Melling, A.; Whitelaw, H. (1987)*

Theorie und Praxis der Laser-Doppler-Anemometrie, Verlag G. Braun,  
Karlsruhe

*Edwards, R.V. (1987)*

Report of the Special Panel on Statistical Particle Bias Problems in  
Laser Anemometry, Trans. of the ASME, J. of Fluids Eng., Vol.109,  
pp.89-93

*Ermschaus, R. (1970)*

Eigentümlichkeiten turbulenter Nachlaufströmungen, Mitteilg. Max-Planck-  
Inst. f. Strömungsforschung und der Aerody. Versuchsanstalt, Göttingen,  
ed. E.A. Müller, H. Schlichting

*Freytmuth, P.; Uberoi, M.S. (1971)*

Structure of Temperature Fluctuations in the Turbulent Wake behind a  
Heated Cylinder, Physics of Fluids, Vol.14, pp.2574-2580

*Freytmuth, P.; Uberoi, M.S. (1973)*

Temperature Fluctuations in the Turbulent Wake behind an Optically  
Heated Sphere, Physics of Fluids, Vol.16, pp.161-168

*Freytmuth, P. (1975)*

Search for the Final Period of Decay of the Axisymmetric Turbulent Wake,  
J. of Fluid Mech., Vol.68, pp.813-829

- Gardavsky, J.; Hrbek, J; Chára, Y.; Severa, M. (1989)*  
 Refraction Corrections for LDA Measurements in Circular Tubes within Rectangular Optical Boxes, Dantec Informations, Measurements and Analysis, No.8, Nov., pp.2-5
- Gibson, C.H.; Chen, C.C.; Lin C. (1968)*  
 Measurements of Turbulent Velocity and Temperature Fluctuations in the Wake of a Sphere, AIAA J., Vol.6, No.4, pp.642-649
- Gibson, M.M.; Launder, B.E. (1976)*  
 On the Calculation of Horizontal Turbulent Free Shear Flow under Gravitational Influence, ASME, J. of Heat Transfer, 98c, pp.81-87
- Gibson, M.M.; Launder, B.E. (1978)*  
 Groundeffects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer, J. of Fluid Mech., Vol.86, pp.491-511
- Goldstein, L.J.; Winter, A.R., et al. (1989)*  
 Measurement in Heat Transfer, Springer Verlag, 2nd ed., pp.241-263
- Groth, J.; Johansson, A.V. (1988)*  
 Turbulence Reduction by Screens, Jour. of Fluid Mech., Vol.197, pp.139-155
- Hall, A.A.; Hislop, G.S. (1938)*  
 Velocity and Temperature Distributions in the Turbulent Wake behind a Heated Body of Revolution, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol.34, pp.48-67
- Hall, C.A.; Porsching, T.A.; Dougall, R.S. (1990)*  
 EPRI-Report, NP-1416, pp.3-7
- Harlow, F.; Nakayama, P.I. (1968)*  
 Transport of Turbulence Energy Decay Rate, Los Alamos Scientific Laboratory, Univ. of California, Report LA-3854, UC-34, Physics, TID-4500
- Hinze, J.O. (1975)*  
 Turbulence, McGraw-Hill Book Company, 2nd edition
- Hoffmann, H.; Sardain, P.; Webster, R. (1991)*  
 The European R+D-Program on Natural Convection Decay Heat Removal for the EFR, Int. Conf. on Fast Reactors and Related Fuel Cycles, Oct.28-Nov.1, Kyoto, Japan, Vol.2, pp.13.5.1-13.5.9

*Hoffmann,H; Weinberg,D. (1992)*

Investigations on Natural Convection Decay Heat Removal for the EFR using Various Model Geometries, Int. Conf. on Design and Safety Nuclear Power Plants, Oct.25-29, Tokyo, Japan, Vol.3, pp.26.2.1-26.2.7

*Hossain,Md.S. (1980)*

Mathematische Modellierung von turbulenten Auftriebsströmungen, Dissertation, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe,

*Hwang,N.H.C.; Baldwin,L.V. (1966)*

Decay of Turbulence in Axisymmetric Wakes, J. of Basic Engineering, Trans. of the ASME - Ser.D, pp.261-268

*Jischa,M. (1982)*

Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch, Vieweg-Verlag

*Knebel,J.U. (1993)*

Experimentelle Untersuchungen in turbulenten Auftriebsstrahlen in Natrium, Dissertation, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 5175

*Kolmogorov,A.N. (1968)*

Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Turbulent Fluid, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Seria fizicheskaja Vi, No.1-2, pp.56-58 (1942)  
(Engl. Übersetzung: Imperial College, Mech. Eng. Dept. Report ON/6)

*Krebs,L. (1979)*

Ausbreitung von Temperaturstörungen in begrenzter Strömung hinter einem Düsenblock, Dissertation, Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 2846

*Krebs,L.; Bremhorst,K. (1983)*

Verification of the Extended Gradient Diffusion Model by Measurements of the Mean and Fluctuating Temperature Fields in Sodium Flow Downstream a Multi-bore Jet Block, 4th Sym. on Turb. Shear Flows, Karlsruhe, Germany, Session 17, pp.17.1-17.5

*Launder,B.E.; Spalding,D.B. (1972)*

Lecture in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, London

*Launder,B.E.; Spalding,D.B. (1974)*

The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng., Vol.3, pp.269-289

*Launder,B.E. (1975a)*

On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol.67, pp.569-581

- Launder, B.E. (1976a)*  
 Progress in the Modelling of Turbulent Transport, Lectures Series 76,  
 von Kármán Institute, Brussels, Belgium
- Launder, B.E. (1976b)*  
 Heat and Mass Transfer, in: Turbulence, ed. P. Bradshaw, Topics in  
 Applied Physics, Vol.12, Springer Verlag
- List, E.J. (1982)*  
 Turbulent Jets and Plumes, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.14, pp.189-212
- Oertel, H.; Oertel, H. (1989)*  
 Optische Strömungsmeßtechnik, G. Braun Verlag, Karlsruhe
- Patel, V.C.; Rodi, W.; Scheuerer, G. (1985)*  
 Turbulence Models for Near-wall and Low Reynolds Number Flows: a Review,  
 AIAA Jour., Vol.23, pp.1308-1319
- Powell, R.L.; Hall, W.J.; Hyink, C.H.; Sparks, L.L. (1974)*  
 Thermocouples Reference Tables Based on the IPTS-68, U.S.Department of  
 Commerce, National Bureau of Standards, March, Chap.7, pp.137-141
- Prandtl, L. (1925)*  
 Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, ZAMM 5,  
 pp.136-139
- Prandtl, L. (1945)*  
 Über ein neues Formel-System für die ausgebildete Turbulenz, Nachr.  
 Akad. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl. 1945, p.6 (mit Anhang von K.  
 Wieghardt)
- Ramaprian, B.R.; Chandrasekhara, M.S. (1989)*  
 Measurements in Vertical Plane Turbulent Plumes, J. of Fluids Eng.,  
 Vo.111, pp.69-77
- Reichardt, H. (1965)*  
 Zur Problematik der turbulenten Strahlausbreitung in einer Grund-  
 strömung, Mitteilg. Max-Planck-Inst. f. Strömungsforschung und der  
 Aerody. Versuchsanstalt, Göttingen, ed. E.A.Müller, H.Schlichting, Nr.35
- Reichardt, H.; Ermshaus, R. (1962)*  
 Impuls- und Wärmeübertragung im turbulenten Windschatten hinter  
 Rotationskörpern, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.5, pp.251-265

*Riddhagni, P.R. ; Bevilaqua, P.M. ; Lykoudis, P.S. (1971)*

Measurements in the Turbulent Wake of a Sphere, AIAA Journal, Vol.9, pp.1433-1434

*Riley, D.S. ; Drake, D.G. (1983)*

Mixed Convection in an Axisymmetric Bouyant Plume, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol.36, Part 1, pp.43-54

*Ritterbach, C. ; Höttges, J. ; Els, H. (1987)*

Optical Improvement of LDV-Measurement in Pipe Flow, Laser Anemometry, Advances and Applications, Proc. of the 2nd Int. Conf., 21-23 Sept., ed. J. Turner, S. Fraser, Springer Verlag, pp.299-311

*Rodi, W. (1970)*

Basic Equations for Turbulent Flow in Cartesian and Cylindrical Coordinates, Imperial College London, Mech. Eng. Dept., Report BL/TN/A/36

*Rodi, W. (1972)*

The Prediction of Free Turbulent Boundary Layers by Use of a Two-Equation Model of Turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College London, Mech. Eng. Dept.

*Rodi, W. (1975)*

A Review of Experimental Data of Uniform Density Free Turbulent Boundary Layers, in: Studies in Convection, Theory, Measurement and Applications, ed. B.E. Launder, Academic Press, Vol.1, pp.79-165

*Rodi, W. ; Murakami, S. (1989)*

Turbulence Models for Practical Applications, Part I-V, SEISAN-KENKYU, Vol.41, Nr.8-12

*Rotta, J.C. (1972)*

Turbulente Strömungen - Eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendungen, B.G. Teubner Verlag Stuttgart

*Ruck, B. (1987)*

Laser-Doppler-Anemometrie, AT-Fachverlag, Stuttgart

*Stewart, R.W. ; Townsend, A.A. (1951)*

Similarity and Self-preservation in Isotropic Turbulence, Phil. Trans. Roy. Soc. A, Vol.243, pp.359-386

*Swain, L.M. (1929)*

On the Turbulent Wake behind a Body of Revolution, Proc. Roy. Soc. A, Vol.125, pp.647-659

*Tamanini, F. (1977)*

An Improved Version of the  $k-\epsilon-g$  Model of Turbulence and its Application to Axisymmetric Forced and Bouyant Jets, Factory Mutual Res., Technical Report 22360-4/RC 77-BT-4, Norwood, Massachusetts

*Tamanini, F. (1978)*

The Effect of Buoyancy on the Turbulence Structure of Vertical Round Jets, J. of Heat Mass Transfer, Vol.100, pp.659-664

*Tennekes, H.; Lumley, J.L. (1972)*

A First Course in Turbulence, The MIT Press, London

*Tropea, C. (1986)*

A Practical Aid for Choosing the Shift Frequency in LDA, Exp. in Fluids, Vol.4, pp.79-80

*Tropea, C.; Struthers, D. (1987)*

Microprozessor Based On-Line Measurement System for LDA, Proc. Int. Specialists Meeting on The Use of Computers in Laser Velocimetry, May 18-20, ed. H.J. Pfeiffer, B. Jaeggy, Report R105/87, pp.29.1-29.7

*Uberoi, M.S.; Freymuth, P. (1970)*

Turbulent Energy Balance and Spectra of the Axisymmetric Wake, Physics of Fluids, Vol.13, pp.2205-2210

*Weinberg, D.; Suckow, D.; Müller, U.; Hoffmann, H. (1990)*

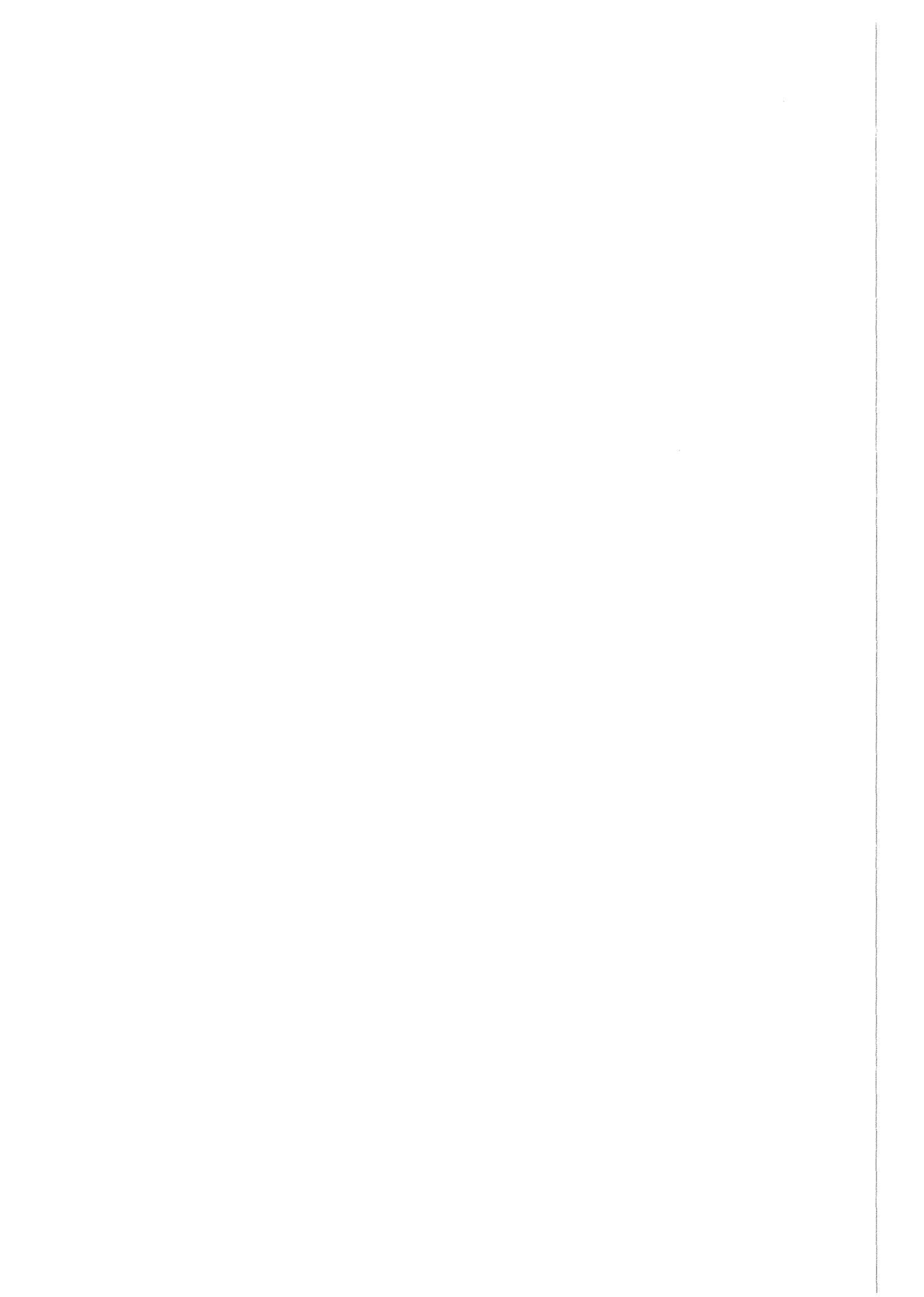
The Transferability to Reactor Conditions of Thermohydraulics Model Investigations of Decay Heat Removal, American Nuclear Society, Int. Fast Reactor Safety Meet., Aug.12-16, Snowbird, USA, Vol.2, pp.341-350

*Winter, A.R.; Graham, L.J.W.; Bremhorst, K. (1989)*

Relationship between Laser Doppler Anemometry Velocity Bias and Flow Time Scales, Proc. 10th Australasian Fluid Mech. Conf., Dec., Melbourne Univ., Australia

*Wuest, W. (1960)*

Drahtsiebe in der Strömungstechnik, Draht Vol.11, Nr.8, pp.416-421



## A. Anhang

### A.1 Beschreibung des Versuchstands FLUTMIK

In Kapitel 3.3 sind bereits die für das Verständnis der Arbeit wesentlichen Merkmale der Teststrecke dargestellt. In Ergänzung hierzu werden der gesamte Versuchsstand beschrieben und die technischen Daten zusammengestellt.

#### A.1.1 Wasserkreislauf

Der Wasserkreislauf, in dem vollentsalztes Wasser umgepumpt wird, ist schematisch in Abbildung (A.1) dargestellt. Sämtliche Rohrleitungen und Armaturen sind aus rostfreien Stahl gefertigt. Die von einem drehzahlgesteuerten Gleichstrommotor angetriebene Normkreiselpumpe (Hermetic, Typ N65-315) wird aus einem überdruckfreien Speisewasserbehälter von  $2 \text{ m}^3$  Rauminhalt bei einer Zulaufhöhe von  $5 \text{ m}$  gespeist. Um die Kreiselpumpe bei dem im Experiment eingestellten Volumenstrom von  $\dot{V} = 5 \text{ m}^3/\text{h}$  in einem günstigen Betriebspunkt zu betreiben, wird ein Teilstrom auf die Saugseite der Pumpe rückgeführt. Ein nachgeschalteter Plattenwärmetauscher (Schmidt, Typ Sigma 32) führt im Gegenstrombetrieb die durch die mechanischen Verluste der Pumpe freigesetzte Wärme ab. Die Sekundärseite des Wärmetauschers ist an einen  $5 \text{ MW}$  Naßkühlturm angeschlossen. Die Wassertemperatur  $\bar{T}_o$  in der Teststrecke wird mittels eines elektronischen PID-Festwertregelkreises auf  $\pm 0.01 \text{ K}$  konstant gehalten. Hierbei reguliert ein elektropneumatisch betätigtes Dreiwegeverteilterventil (Kobold, Typ 23/16-31 BN) den über den Wärmetauscher geführten Teilvolumenstrom. Die Isttemperatur  $T_{o,I}$  wird mit einem Platinwiderstandsthermometer (Pt-100) erfaßt. Von dieser Meßstelle an sind die Rohrleitungen und Armaturen des Kreislaufs mit  $100 \text{ mm}$  dicker Glaswolle thermisch isoliert.

Bei LDA-Messungen sollten die im Wasser enthaltenen Partikel ein möglichst trägheitsfreies Folgevermögen aufweisen. Um die Anzahl großer Partikel zu reduzieren, wird ein Teilstrom des Wassers ständig über Kerzenfilter (Putsch, Typ MGG 5-3) geleitet, die Partikel über  $5 \mu\text{m}$  herausfiltern. Der maximale Durchsatz ist durch den zulässigen Druckabfall über das Filter, den ein Differenzdruckmanometer anzeigt, vorgegeben.

Der Volumenstrom  $\dot{V}$  im Kreislauf wird mit einem geeichten Schwingkörperdurchflußmesser (Rota, Typ Rotaflux NW25, PN40) gemessen und wird als

Momentanwert einem elektronischen PID-Festwertregelkreis zugeführt, der über die Erregung des Gleichstrommotors die Drehzahl der Kreiselpumpe beeinflusst. Der Volumenstrom kann so über die gesamte Messzeit auf  $\pm 0.6\%$  konstant gehalten werden.

Das Wasser strömt jetzt in einen Beruhigungsbehälter mit einem Volumen von  $2.8\text{ m}^3$ , durch den eine Vergleichmäßigung der Strömung und der Temperatur erzielt wird. Ein zusätzlicher Ausgleichsbehälter, der mit einem Luftpolster beaufschlagt ist, kann möglicherweise auftretende Druckschwankungen dämpfen. Bei den durchgeführten Experimenten zeigt sich, daß eine derartige Dämpfung aber nicht notwendig ist.

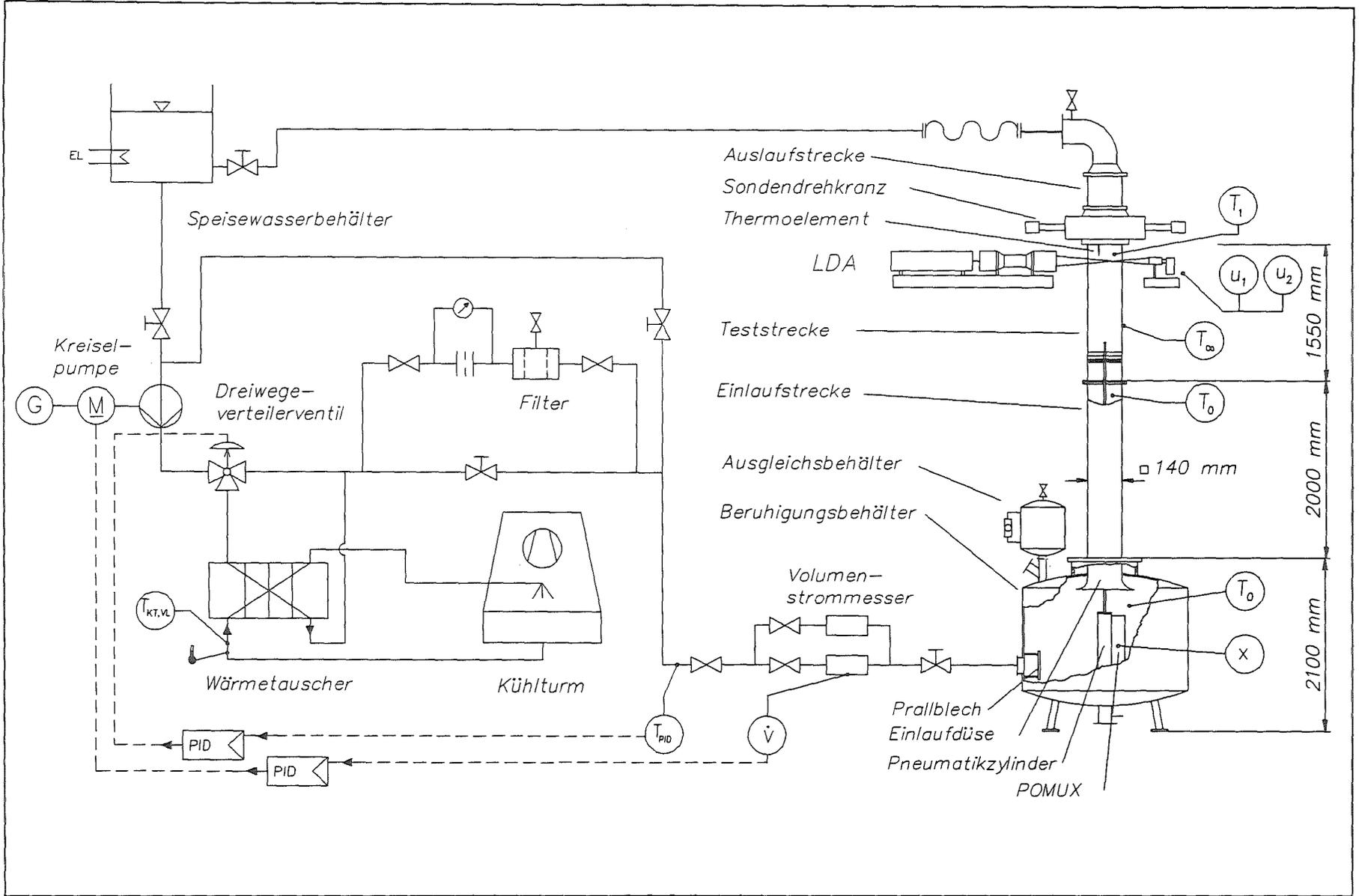
Die Zuströmung in die Einlaufstrecke der Länge  $L_E = 2000\text{ mm}$  erfolgt aus dem Beruhigungsbehälter über eine Einlaufdüse. Im Übergang zur eigentlichen Meßstrecke der Länge  $L_M = 1550\text{ mm}$  ist ein Lochblech eingebaut, das aufgrund des hohen Widerstandbeiwerts von  $c_w = 20$  eine intensive Quervermischung bewirkt. Meßstrecke und Einlaufstrecke haben einen quadratischen Querschnitt mit einer inneren Seitenlänge von  $D = 140\text{ mm}$ . Die Meßstrecke ist aus Flachglas aufgebaut und mit Silikon längsverklebt, wobei die Ecken zu einem Radius von  $10\text{ mm}$  ausgeformt sind.

Im Glaskanal befindet sich der Strömungseinsatz, der mit der Kolbenstange eines im Beruhigungsbehälter eingebauten Pneumatikzylinders (Festo, Typ DNN-32-1500) axial verschoben werden kann. Die axiale Position erfaßt ein berührungslos arbeitendes Absolutmeßsystem (Angewandte Digital Elektronik, Typ POMUX P200 KA04), dessen Auflösung  $\pm 0.03\text{ mm}$  beträgt. Hierbei wertet ein magnetoresistiver Sensor das von einem Permanentmagneten im Kolbenboden des Pneumatikzylinders erzeugte Magnetfeld aus. Der Strömungseinsatz besteht aus einem Röhrgleichrichter, dem zwei Siebe in Form einer Kaskade nachgeschaltet sind. Während der Gleichrichter eine drallfreie Strömung erzeugt, reduzieren die Siebe Ungleichförmigkeiten der Geschwindigkeitsfluktuationen in der Anströmung der Kugel. Die Siebauslegung erfolgt nach Wuest (1960) und Johansson und Groth (1988).

Die Kugel besteht aus einem in Kugelform gewickelten Heizleiter einer Nickel-Chrom-Legierung, der mit Kupfer ausgegossen ist. Zusätzlich befindet sich im Inneren ein NiCr-Ni Thermoelement, das die Kugeltemperatur  $T_K$  mißt. Die Kugeloberfläche ist zur Verhinderung von Korrosion vernickelt.

Die Thermoelementsonde zur Messung der Temperatur  $T_1$  in der Nachlaufströmung ist in einen Sondendrehkranz eingebaut. Mit Schrittmotoren

Abb. (A.1) : Schematische Darstellung des Versuchstands FLUTMIK



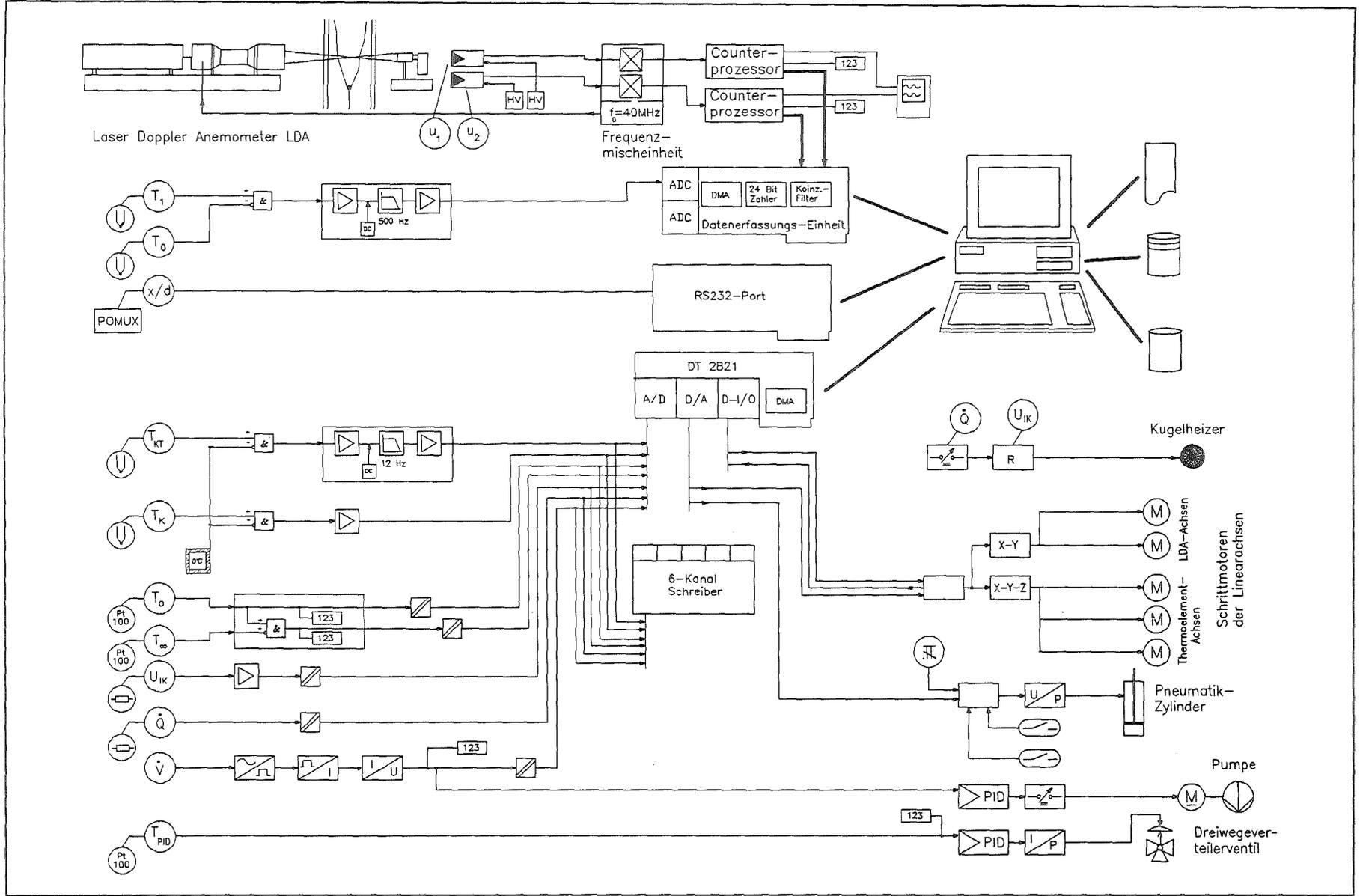
lässt sich die Sonde über den Kanalquerschnitt verfahren und in verschiedenen Winkellagen  $\varphi$  positionieren. An den Sondendrehkranz schließt eine Auslaufstrecke von  $L_A = 700 \text{ mm}$  an, die am Ende kontinuierlich in einen runden Querschnitt übergeht. Ein Kunststoffschlauch gewährleistet eine mechanische Entkopplung von Teststrecke und Speisewasserbehälter. Die Bildung von Gasblasen an der beheizten Kugel kann durch sorgfältige Entgasung des Wassers vermieden werden. Hierzu sind im Speisewasserbehälter Heizstäbe mit einer Gesamtheizleistung von  $18 \text{ kW}$  eingebaut.

### A.1.2 Signalfluß

Die gesamte Meßwerterfassung und Versuchssteuerung wird mit einem Kleinrechner (Compaq, Typ 386/20) durchgeführt. Das Signalflußschema ist in Abbildung (A.2) gegeben.

Die Kontrollgrößen des Wasserkreislaufs werden auf einem Schreiber und vom Rechner registriert. Als Datenschnittstelle dient eine Multifunktionskarte (Data Translation, DT2821) mit der die Schrittmotoren (Isert Elektronik, 5-Achsen-system) der Traversiereinheiten und das Positioniersystem des Strömungseinsatzes angesteuert werden.

Abb. (A.2) : SignalfIuBschema



### A.1.3 Daten des Wasserkreislaufs

Fluid:	vollentsalztes Wasser	
Wasservolumen:	etwa $5 \text{ m}^3$	
Wassertemperatur:	$\bar{T}_o$	$20^\circ\text{C} \pm 0.01 \text{ K}$
Normkreiselpumpe:	max. Fördermenge	$100 \text{ m}^3/\text{h}$
	max. Förderhöhe	$128 \text{ m Fl.S.}$
Gleichstrommotor:	max. Leistungsaufnahme	$53 \text{ kW}$
	Nenn Drehzahl	$3000 \text{ 1/min}$
Kerzenfilter:	Filtergewebe	$5 \mu\text{m}$
Einlaufstrecke:	Edelstahl	
	Länge $L_E$	$2000 \text{ mm}$
	Wanddicke	$5 \text{ mm}$
	Innenmaß $D$	$140 \times 140 \text{ mm}$
Meßstrecke:	Flachglas	
	Länge $L_M$	$1555 \text{ mm}$
	Innenmaß $D$	$140 \times 140 \text{ mm}$
	Toleranz	$\pm 0.1 \text{ mm}$
	Wanddicke	$10 \text{ mm}$

Größe	Einheit	Sieb 1	Sieb 2
Drahtdurchmesser $d_d$	$mm$	0.63	0.50
Maschenweite $h$	$mm$	2.23	1.82
Freifläche $A_o$	%	51.5	52.6
Sieb Reynolds-Zahl $Re_s = \frac{u_o d_d}{\nu \cdot A_o}$	1	86	67
$Re_s \cdot A_o$	1	45	36
Widerstandsbeiwert $c_w$	1	2.48	2.53
Abstand Sieb 1 - Sieb 2	$mm$	35	
Abstand Sieb 1 - Gleichrichter	$mm$	35	

Tab. (A.1): Auslegungsdaten der Siebe

Größe	Einheit	Lochplatte	Gleichrichter
Material	-	<i>Edelstahl</i>	<i>Polycarbonat</i>
Teilung $p$	<i>mm</i>	7	3.6
Länge $l$	<i>mm</i>	2	25
Lochdurchmesser $d_1$	<i>mm</i>	4	3.5
Freifläche $A_o$	%	30	-
Loch Reynolds-Zahl $Re_d = \frac{u_o d_1}{\nu}$	1	284	248
Widerstandsbeiwert $c_w$	1	20.1	ca. 3.5

Tab. (A.2): Auslegungsdaten Lochplatte und Gleichrichter

#### A.1.4 Daten des LDA-Systems

Laser: Spectra Physics, Modell 165-08  
 Argon-Ionen, 5 W

LDA-Optik: DISA 55X  
 3-Strahl, 2-Farben Konfiguration

Counterprozessor: TSI, 1980B
 

- Input Conditioner 1984 B
- Timer Modul 1985 B
- Read Out Modul 1992

Frequenzmischeinheit:  
 DISA 55N11, 2-Kanalsystem

Datenerfassungseinheit:  
 DOSTEK Inc. (Zech Electronics)  
 LDA Data Acquisition Interface Modell 1400
 

- Grundmodul 30-1200
- A/D Konvertermodul 31-1210 A
- Zwei-Komponentenmodul 31-1220

Tracerpartikel:  
 Silicon Carbide, Fabrikat TSI Model 10081  
 Dichte:  $3.2 \text{ g/cm}^3$   
 Brechungsindex: 1.59  
 mittlerer Durchmesser:  $1.5 \mu\text{m} \pm 1.4 \%$

## A.2 Verhalten der Temperaturmeßsonde

In Abbildung (A.3) ist das einseitige normierte Autoleistungsdichtespektrum  $S_{TT}(f)$  (PSD = "Power Spectrum Density") des Thermoelementsignals  $T(t) = T_1 - \bar{T}_0$  über der Signalfrequenz  $f$  doppellogarithmisch aufgetragen. Die Abtastfrequenz beträgt 100 Hz. Es wird die in Abb.(3.5) gezeigte und beschriebene Signalverarbeitung verwendet. Die PSD ist gegeben durch die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion  $\rho_{TT}(\tau)$  entsprechend Gl.(3.3).

$$S_{TT}(f) = 2 \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^{\infty} \rho_{TT}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad . \quad (\text{A.1})$$

Die digitale Berechnung der PSD erfolgt nach Bendat und Piersol (1986) (Seite 391-400). Zur Reduzierung des Leistungsverlustes durch Diskontinuitäten am Anfang und Ende jeden Datenblocks ("side-lobe leakage") wird eine Hanning Fensterfunktion benutzt mit Korrektur der eingebrachten Dämpfung. Die gezeigte PSD ist der Mittelwert aus 25 Spektren mit einer Blocklänge von 4096 Werten.

Aus Abb.(A.3) ist zu entnehmen, daß der Signalanteil erst für Frequenzen größer als etwa 30 Hz im Rauschpegel untergeht.

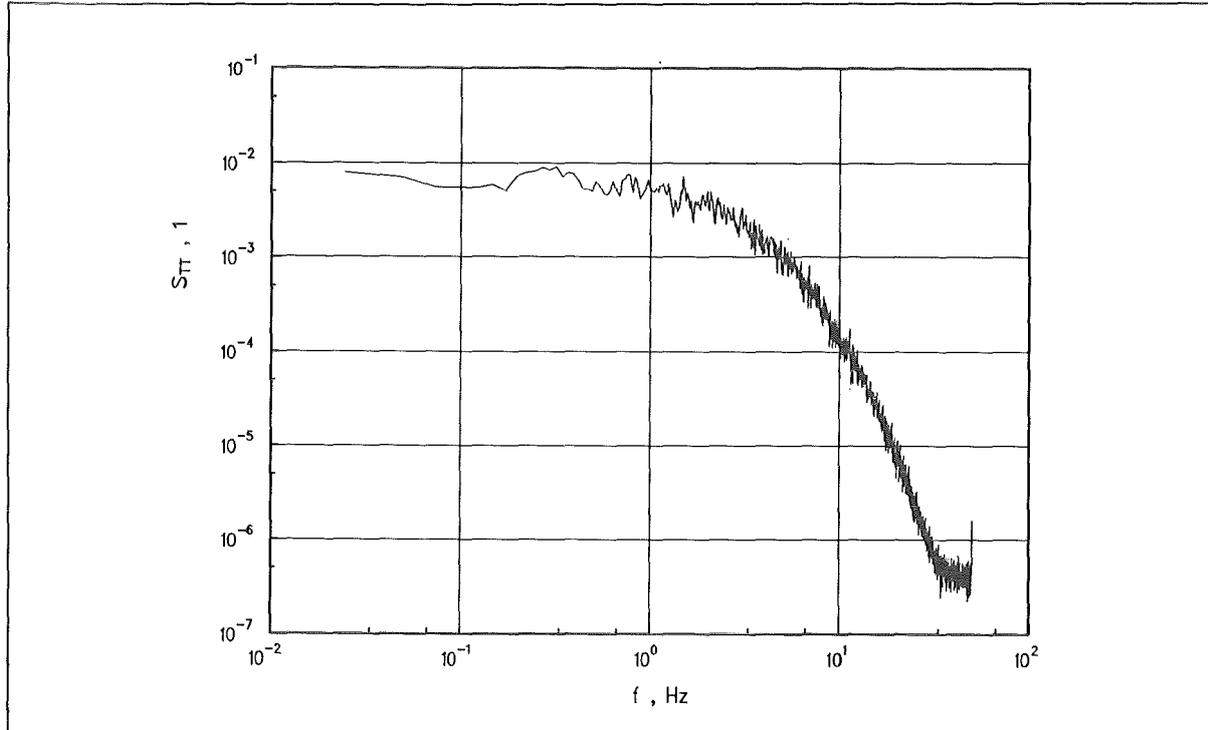


Abb. (A.3): Normiertes Autoleistungsdichtespektrum des Thermoelementsignals  $T(t) = T_1 - \bar{T}_0$ .

### A.3 Stoffdaten

Physikalische Größe	Einheit	Wert bei		
		20 °C	25 °C	30 °C
dyn. Viskosität $\mu$	$\text{Ns/m}^2 \cdot 10^{-6}$	1002.6	890.8	797.7
kin. Viskosität $\nu$	$\text{m}^2/\text{s} \cdot 10^{-6}$	1.0058	0.8904	0.8045
Dichte $\rho$	$\text{kg/m}^3$	998.207	997.048	995.650
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$	$\text{W/m}\cdot\text{K}$	0.599	0.609	0.618
Diffusivität $\Gamma$	$\text{m}^2/\text{s} \cdot 10^{-6}$	0.144	0.146	0.148
spezifische Wärmekapazität $c_p$	$\text{J/kg}\cdot\text{K}$	4181.9	4179.6	4178.5
Brechungsindex $n$	1	1.33299	1.33252	1.33192
Prandtl-Zahl $Pr$	1	7.01	6.13	5.43
thermischer Ausdehnungs- koeffizient $\alpha$	$1/\text{K} \cdot 10^{-3}$	0.21423	0.25687	0.29795

Tab. (A.3): Verwendete Stoffdaten für vollentsalztes Wasser.

(Hall et al. (1990))

#### A.4 Ausgewertete Datensätze

		$\beta = 0.62$		$\beta = 1.0$	
$\psi$		$0^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$
$x/d$					
5		ME064p		ZE047p	
7.5		ME049p			
10		ME050p			
12.5		ME051p			
15		ME063p	ME037p	ZE035p	ZE036p
20		ME052p			
30		ME053p			
35		ME062p	ME039p	ZE038p	ZE040p
40		ME054p			
50		ME055p			
60		ME056p			
70		ME061p		ZE041p	ZE048p
80		ME057p			
90		ME058p			
100		ME059p	ME045p	ZE043p	ZE044p
106		ME060p			

Tab.(A.4): Datensätze.

#### A.5 Fehlerrechnung

Die für die Fehlerfortpflanzung relevanten Zusammenhänge und Rechenvorschriften sind in der VDE/VDI-Richtlinie 2620, Blatt 1 (1973) und in der Deutschen Norm DIN 1319, Teil 3 (1983) gegeben.

Das Meßergebnis  $y$  kann sich aus mehreren unabhängigen Meßgrößen  $x_i$  zusammensetzen, die in einer funktionalen Beziehung stehen.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{A.2})$$

Die statistische Ergebnisfehlergrenze  $\Delta y^*$  ergibt sich, in dem die Funktion Gl.(A.2) in eine Taylorreihe entwickelt wird, wobei die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

$$\Delta y^* = \pm \left( \left[ \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right]^2 + \dots + \left[ \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n \right]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

$\Delta x_i$  sind die größten Fehlergrenzen der Meßgrößen  $x_i$ . Die relative statistische Ergebnisfehlergrenze  $\Delta y^*/y$  ergibt sich durch Division von Gl.(A.3) durch das Meßergebnis  $y$ .

Die in Abschnitt 4.8 angegebenen Fehlergrenzen sind nach Gl.(A.3) ermittelt.