Andreas M. Fröhlich

H^∞-Kalkül und Dilatationen

H^∞-Kalkül und Dilatationen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Andreas M. Fröhlich
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juli 2003
Referent: Prof. Dr. Lutz Weis
Korreferent: HDoz. Dr. Peer Kunstmann

Karlsruhe 2003

Vorwort

Diese Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe entstanden.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der drei Lehrstühle des Instituts, aber auch allen anderen Angehörigen der mathematischen Fakultät, danke ich ganz herzlich für die angenehme und anregende Arbeitsatmosphäre, für viele mathematische Diskussionen, interessante Gespräche und Vorträge, aber auch für Fußballspiele bei jedem Wetter, Schokoladenkekse statt Tee, Sommerausflüge und Weihnachtsfeiern, Erklärungen zu chinesischen Schriftzeichen und natürlich für so manches Tennismatch.

Mein Dank gilt auch den vielen Studierenden, die ich bei der Betreuung von Vorlesungen kennen gelernt habe, denn nur mit ihnen zusammen konnte ich immer wieder neu entdecken, wie spannend und faszinierend es sein kann, Mathematik und ihre Schönheit zu vermitteln.

Herrn Prof. Dr. Lutz Weis möchte ich für die wissenschaftliche Betreuung und die Hinführung zum Thema danken, Herrn Dr. Peer Kunstmann für die Übernahme des Korreferats.

Der Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft habe ich es zu verdanken, dass ich im März 2002 beim »Third European-Maghreb Workshop on Semigroup Theory, Evolution Equations and Applications« in Marrakesch (Marokko) Teile meiner Arbeit vorstellen und diskutieren konnte.

Den Organisatoren der Konferenz »Evolution Equations and Semigroups« in Cortona (Italien), Prof. Angelo Favini und Prof. Alfredo Lorenzi, danke ich für ihre Einladung und die freundliche Aufnahme im April 2002.

Auch bei den regelmäßigen TULKA-Treffen der Funktionalanalysis-Arbeitsgruppen der Universitäten Tübingen, Ulm und Karlsruhe hat sich mir die

Gelegenheit geboten, über meine Arbeit zu berichten. Ich danke allen Teilnehmern, die diese Treffen durch ihre Vorträge und Diskussionen, aber auch (später am Abend) durch ihre musikalischen Beiträge und ihre Freude am Feiern interessant gemacht haben.

Dank gebührt schließlich all jenen, die das mühsame Korrekturlesen dieser Arbeit übernommen haben, besonders auch denen unter ihnen, für die das behandelte Thema ungewohntes Terrain war.

Das Wichtigste jedoch ist der Dank an meine Eltern Eva-Maria und Reimar, meinen Bruder Martin und meine Freundin Kristiane Kronsbein für alles, was sie auf meinem bisherigen Lebensweg für mich getan haben.

Andreas M. Fröhlich

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für gewisse Operatoren und geeignete Funktionenklassen kann man einen *Funktionalkalkül* definieren, also Ausdrücke der Form $f(A)$ erklären. Ein Beispiel hierfür ist der Dunford-Kalkül für beschränkte Operatoren und holomorphe Funktionen [8, Definition VII.3.9], bei dem man

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) R(z, A)\, dz$$

mit einem geeigneten Weg γ setzt, in Analogie zur Cauchyschen Integralformel. Diese Vorgehensweise kann man übernehmen [4, 19], wenn f für $z \to 0$ und für $z \to \infty$ hinreichend stark fällt und A ein (im allgemeinen unbeschränkter) sektorieller Operator ist, wenn also das Spektrum von A im Abschluss eines Sektors

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \mu \right\}$$

enthalten ist, und die Norm $\|R(z, A)\|$ außerhalb größerer Sektoren geeignet abgeschätzt werden kann. Dieser Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren lässt sich auf eine größere Klasse von Funktionen ausweiten, wobei $f(A)$ dann im Allgemeinen kein beschränkter Operator mehr ist.

Bei der Behandlung vieler Fragen, insbesondere im Zusammenhang mit Differentialgleichungen [7, 14], ist es von Interesse, ob die betrachteten sektoriellen Operatoren einen *beschränkten* H^∞*-Funktionalkalkül* besitzen, d. h. ob $f(A)$ für alle auf einem gewissen Sektor beschränkten und holomorphen Funktionen ein stetiger Operator ist und zudem die Abschätzung $\|f(A)\| \leqslant C\|f\|_\infty$ erfüllt.

Wir werden uns zunächst auf den Fall konzentrieren, dass $-A$ der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe (T_t) ist und A dichtes Bild besitzt. In einem Hilbertraum H weiß man [18], dass in diesem Falle A genau dann einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül hat, wenn die C_0-Halbgruppe

$(T_t)_{t\geqslant 0}$ ähnlich zu einer Kontraktionshalbgruppe ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $(T_t)_{t\geqslant 0}$ bezüglich einer äquivalenten Hilbertraumnorm eine Kontraktionshalbgruppe ist.

Kontraktionshalbgruppen im Hilbertraum lassen sich durch die Existenz einer *Dilatation* charakterisieren [29]; man sagt, dass $(T_t)_{t\geqslant 0}$ die Dilatation $(U_t)_{t\geqslant 0}$ hat, wenn

- es einen Hilbertraum Y gibt, der H als Unterraum enthält,
- $(U_t)_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe von unitären Operatoren $U_t : Y \to Y$ ist
- und die Dilatationsgleichung $PU_t|_H = T_t$ erfüllt ist, wobei P die Orthogonalprojektion auf H bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "U_t"] & Y \arrow[d, "P"] \\ H \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "T_t"] & H \end{tikzcd}$$

Der Grundgedanke dabei ist: In einem größeren (und möglicherweise »komplizierteren«) Raum Y findet man eine C_0-Halbgruppe (U_t), die »bessere« Eigenschaften hat als (T_t), aber nach einer geeigneten Projektion wieder die ursprüngliche Halbgruppe liefert.

Im Hilbertraum kann also die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls mittels Dilatationen charakterisiert werden. In der vorliegenden Arbeit werden wir diese Charakterisierung zunächst auf reflexive L^p-Räume und dann auf beliebige Banachräume mit endlichem Kotyp übertragen.

Definiert man den Dilatationsbegriff in Banachräumen analog (Y ist dann ein Banachraum, (U_t) eine C_0-Halbgruppe bijektiver Isometrien und P eine kontrahierende Projektion), so zeigt sich [27, 28], dass jede kontraktive C_0-Halbgruppe eine Dilatation besitzt.

Zu jeder beschränkten C_0-Halbgruppe lässt sich eine äquivalente Norm angeben, bezüglich derer die C_0-Halbgruppe kontraktiv wird. Man kann daher nicht erwarten, dass im Banachraum allein die Existenz einer Dilatation die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls garantiert.

Wir werden aber zeigen, dass die Existenz ganz bestimmter Dilatationen charakteristisch für den beschränkten H^∞-Funktionalkalkül ist. Die dabei betrachteten Operatoren (U_t) sind *Verschiebungs-Operatoren* auf geeignet gewählten Räumen Y, und die Einbettung des Banachraums X in Y gelingt mit Hilfe von *Quadratfunktionen*.

Im letzten Kapitel verzichten wir auf die Voraussetzung, dass $-A$ eine Halbgruppe erzeugt. Es zeigt sich, dass für dicht definierte sektorielle Operatoren mit dichtem Bild die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls dadurch gekennzeichnet ist, dass A einen *Multiplikationsoperator* als Dilatation hat. Dieses Ergebnis ist selbst für den Hilbertraumfall neu.

Im Einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen aufgebaut:

In **Kapitel 1** werden zunächst grundlegende Bezeichnungen und Schreibweisen eingeführt. Dann definieren wir den Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren und geben einige seiner Eigenschaften an. Schließlich präzisieren wir noch den hier verwendeten Dilatationsbegriff.

In **Kapitel 2** widmen wir uns den Hilberträumen. Wir zeigen das schon bekannte Resultat und geben dabei die Dilatation konkret an: In $Y = L^2(\mathbb{R}, H)$ ist U_t durch $U_t f := f(\cdot + t)$ gegeben. Die Einbettung von H in Y gelingt, weil im Hilbertraum die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls äquivalent dazu ist [19], dass A und A^* quadratischen Abschätzungen der Form

$$\left(\int_0^\infty \|\psi(tA)x\|^2 \,\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \leqslant Q\|x\| \qquad \text{für alle } x \in H$$

genügen. Wir betrachten speziell $\psi(z) = z^{1/2}e^{-z}$ und orientieren uns bei den weiteren Verallgemeinerungen an dieser Vorgehensweise.

Nach den Hilberträumen betrachten wir in **Kapitel 3** reflexive L^p-Räume und erhalten auch hier eine Dilatationscharakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls. Entscheidend ist dabei, dass sich dieser durch Abschätzungen der Form

$$\left\| \left(\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \,\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant Q\|x\|_{L^p} \qquad \text{für alle } x \in L^p\,,$$

so genannte Quadrat-Funktionen-Abschätzungen, charakterisieren lässt. Zu $X = L^p(\Omega)$ wählen wir $Y = L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ und $(U_t f)(\omega) := f(\cdot + t, \omega)$.

Im Gegensatz zum Hilbertraumfall erhalten wir für die L^p-Räume keine Äquivalenz als Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls; dies hängt damit zusammen, dass in L^p der betrachtete Sektor von Bedeutung ist. In **Kapitel 4** begegnen wir diesem Problem mit der zusätzlichen Voraussetzung der R-Sektorialität, welche die Abhängigkeit vom Sektor beseitigt. Eine allgemeinere Aussage dieser Art findet man in [14].

Um beliebige Banachräume betrachten zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung der im Hilbertraum und in L^p verwendeten Quadratfunktionen; diese Verallgemeinerung wurde von Kalton und Weis [15] gefunden. In **Kapitel 5** werden Definitionen und wichtige Ergebnisse aus dieser Arbeit zusammengefasst. Man betrachtet lineare Operatoren $u : H \to X$, für die

$$\|u\|_\ell := \sup\left\{ \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u(e_n)\right\|^2\right)^{1/2} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ (e_n)_{n=1}^m \text{ ist ONS in } H \right\}$$

endlich bleibt, wobei (g_n) eine Folge von unabhängigen, $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen ist. Im Falle $H = L^2(\Omega)$ können manche dieser Operatoren durch Funktionen $f : \Omega \to X$ dargestellt werden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir in **Kapitel 6** die Dilatationscharakterisierung auf Banachräume endlichen Kotyps übertragen, denn in solchen Räumen impliziert der beschränkte H^∞-Funktionalkalkül gemäß [15] die Abschätzung

$$\|t \mapsto A^{1/2} T_t x\|_\ell \leqslant D\|x\|\,.$$

Wir führen in diesem Kapitel auch den so genannten *Mond-Dualoperator* $A^\#$ im *Mond-Dualraum* $X^\#$ ein. Es handelt sich dabei (ähnlich wie beim bekannten Sonnen-Dual) um eine geeignete Einschränkung von A', die dicht definiert ist und dichtes Bild hat.

In **Kapitel 7** geben wir eine andere mögliche Dilatation (N_t) an, deren Erzeuger ein Multiplikationsoperator ist. Indem wir den Dilatationsbegriff auf die Erzeuger ausdehnen, lösen wir uns auch von der Voraussetzung, dass $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt, und betrachten statt dessen beliebige dicht definierte, sektorielle Operatoren mit dichtem Bild. Der beschränkte H^∞-Funktionalkalkül kann dadurch charakterisiert werden, dass A einen bestimmten Multiplikationsoperator als Dilatation hat. Im Hilbertraum ist dies $(Mf)(t) := (it)^\alpha f(t)$, definiert in $L^2(\mathbb{R}, H)$.

1 Beschränkter H^∞-Funktionalkalkül

1.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

Wir werden im Folgenden ausnahmslos *komplexe* Banach- und Hilberträume betrachten, also solche mit Skalarkörper $\mathbb{C}$, und wir nehmen stets an, dass diese Räume nicht nur aus dem Nullvektor bestehen.

Sind X und Y Banachräume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ die Menge der linearen Operatoren aus X nach Y. Für den Definitionsraum eines Operators $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ schreiben wir $\mathcal{D}(A)$ und für seinen Bildraum $\mathcal{R}(A)$. Abkürzend setzen wir schließlich noch $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Die Menge der abgeschlossenen linearen Operatoren aus X nach Y, also diejenigen Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, deren Graph $G_A := \{ (x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A) \}$ abgeschlossen ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(X, Y)$, und für den Banachraum der stetigen linearen Operatoren von X nach Y, versehen mit der Operatornorm $\|A\| := \sup\{ \|Ax\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1 \}$, verwenden wir die Bezeichnung $\mathcal{B}(X, Y)$. Im Fall $X = Y$ setzen wir wiederum $\mathcal{A}(X) := \mathcal{A}(X, X)$ und $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Der Dualraum von X wird mit X' bezeichnet, d.h. $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

Für das Spektrum eines Operators $A \in \mathcal{L}(X)$ schreiben wir $\sigma(A)$, für die Resolventenmenge $\rho(A)$, und für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$.

Für $\theta \in (0, \pi)$ definieren wir den Sektor $S_\theta := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta \}$ in der komplexen Zahlenebene. Die Argumentfunktion $z \mapsto \arg z$ soll dabei den Wertebereich $(-\pi, \pi]$ haben.

Es sei $H(S_\theta)$ die Menge aller auf S_θ definierten, komplexwertigen und holomorphen Funktionen und $H^\infty(S_\theta)$ die Menge der beschränkten Funktionen in $H(S_\theta)$. Die Funktionenklasse $\Psi(S_\theta)$ enthalte diejenigen Funktionen aus

$H^\infty(S_\theta)$, bei denen $|f(z)|$ nahe $z = 0$ durch $c|z|^s$ und für z mit hinreichend großem Betrag durch $c/|z|^s$ (mit $s > 0$) abgeschätzt werden kann; es ist also

$$\Psi(S_\theta) := \left\{ \psi \in H(S_\theta) \;\middle|\; \exists\, c, s > 0 \;\forall z \in S_\theta : |\psi(z)| \leqslant c \cdot \min\{|z|^s, |z|^{-s}\} \right\}.$$

1.2 Sektorielle Operatoren

Es sei X ein Banachraum. Wir werden nun eine ganz spezielle Klasse von Operatoren betrachten, die *sektoriellen* Operatoren.

1.2.1 Definition Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ heißt *sektoriell*, wenn ein $\mu \in (0, \pi)$ existiert, für das die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gilt $\sigma(A) \subset \overline{S_\mu}$.

(b) Zu jedem $\theta \in (\mu, \pi)$ existiert eine Konstante C_θ mit

$$\|zR(z, A)\| \leqslant C_\theta \qquad \text{für alle } z \notin \overline{S_\theta}\,.$$

Man sagt in diesem Falle, dass A *vom Typ* μ ist. Ist A vom Typ μ für alle $\mu \in (0, \pi)$, so heißt A *vom Typ* 0.

Jeder sektorielle Operator hat definitionsgemäß nichtleere Resolventenmenge. Ist nun $z \in \rho(A)$, so ist $R(z, A)$ als stetiger Operator insbesondere abgeschlossen, und damit muss auch die Inverse, also $z - A$, ein abgeschlossener Operator sein. Sektorielle Operatoren sind also stets abgeschlossen.

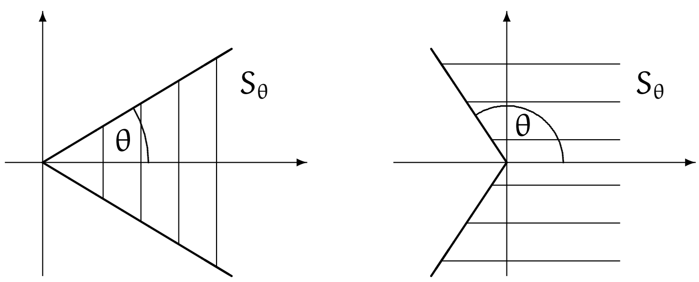

Abbildung 1.1: Der Sektor S_θ (mit $\theta < \pi/2$ bzw. $\theta > \pi/2$).

1.2.2 Bemerkung Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ ist bereits dann sektoriell, wenn $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ gilt und eine Konstante C mit $\|tR(t,A)\| \leqslant C$ für alle $t < 0$ existiert. Um dies einzusehen, betrachtet man die Taylorentwicklung von $R(z,A)$ um $t_0 < 0$. Diese hat den Konvergenzradius $\|R(t_0,A)\|^{-1} \geqslant |t_0|/C$, und damit ist $\sigma(A)$ tatsächlich in einem gewissen Sektor enthalten. Die Normabschätzung für die Resolvente ergibt sich ebenfalls aus der Taylorentwicklung.

Man beachte, dass ein sektorieller Operator gemäß unserer Definition nicht dicht definiert sein muss; manchmal wird dies in der Definition ebenfalls gefordert. (Gleiches gilt für dichtes Bild und Injektivität.)

1.2.3 Satz [9, Theorem 4.6] Es besteht folgende Äquivalenz: Der Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ ist genau dann dicht definiert und vom Typ $\mu < \pi/2$, wenn $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt.

1.3 Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Cowling, Doust, McIntosh und Yagi haben für sektorielle Operatoren einen Funktionalkalkül definiert [4]; eine ausführliche Darstellung dieses Kalküls findet man in [10]. Wir wollen an dieser Stelle die wichtigsten Ergebnisse kurz wiederholen: Ist A vom Typ μ und $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta > \mu$, so ist $\psi(A) \in \mathcal{B}(X)$ gegeben durch

$$\psi(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z) R(z,A) \, dz\,,$$

wobei $\mu < \alpha < \theta$ gilt und γ_α den positiv orientierten Rand des Sektors S_α bezeichnet. Das Integral existiert als uneigentliches Riemann-Integral (und auch als Bochner-Integral) wegen $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und der Resolventenabschätzung für den Operator A.

Man vergleiche dies mit der Darstellung $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z)(z-\lambda)^{-1} \, dz$, die für $\lambda \in S_\alpha$ aus der Cauchyschen Integralformel folgt.

Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes kann man zeigen, dass die Definition unabhängig vom gewählten Winkel α ist. Durch $\psi \mapsto \psi(A)$ ist dann ein Algebrenhomomorphismus gegeben.

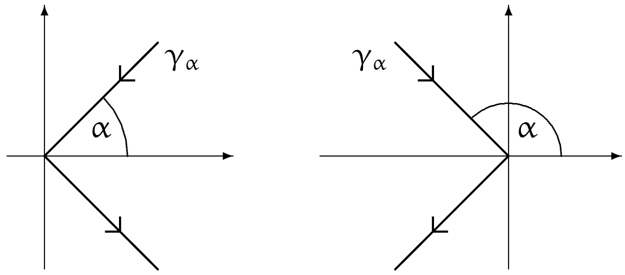

Abbildung 1.2: Der Integrationsweg γ_α (mit $\alpha < \pi/2$ bzw. $\alpha > \pi/2$).

Dieser Funktionalkalkül wird für injektives und dicht definiertes A mit dichtem Bild folgendermaßen erweitert: Ist $f \in H^\infty(S_\theta)$, so gilt $f \cdot \psi_0 \in \Psi(S_\theta)$ für $\psi_0(z) := z/(1+z)^2$, so dass man

$$f(A) := \psi_0(A)^{-1}(f \cdot \psi_0)(A)$$

definieren kann. Für Funktionen $f \in \Psi(S_\theta)$ ist diese Definition verträglich mit der ursprünglichen. Im Allgemeinen muss $f(A)$ kein stetiger Operator sein; wir erhalten aber einen dicht definierten, abgeschlossenen Operator. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und Funktionen $f, g \in H^\infty(S_\theta)$ gilt zudem

$$(\alpha f + g)(A)|_{\mathcal{D}(g(A))} = \alpha f(A) + g(A)\,, \qquad (fg)(A)|_{\mathcal{D}(g(A))} = f(A)g(A)\,.$$

Außerdem hat man $(z \mapsto 1)(A) = \mathrm{id}_X$, und

$$z \mapsto \frac{1}{\lambda - z}\,, \quad \text{wobei } \lambda \notin \overline{S_\theta}\,,$$

wird durch den Funktionalkalkül auf $R(\lambda, A)$ abgebildet. Erzeugt $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t), so gilt $(z \mapsto e^{-tz})(A) = T_t$. Der Kalkül besitzt darüber hinaus die folgende Konvergenzeigenschaft.

1.3.1 Satz [4, Lemma 2.1] Es sei A ein injektiver, dicht definierter, sektorieller Operator vom Typ μ, der dichtes Bild hat, und es gelte $\theta \in (\mu, \pi)$. Weiter sei (f_n) eine Funktionenfolge in $H^\infty(S_\theta)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen ein $f \in H^\infty(S_\theta)$.

(b) Es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$.

(c) Es ist $f_n(A) \in \mathcal{B}(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt eine Konstante $M > 0$ mit $\|f_n(A)\| \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt $f(A) \in \mathcal{B}(X)$, $\|f(A)\| \leqslant M$ und $f_n(A)x \to f(A)x$ für alle $x \in X$.

Während in [4] lokal gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) vorausgesetzt wird, verlangen wir nur die punktweise Konvergenz. Dies ist gerechtfertigt, da wegen der Beschränktheit der Funktionen f_n die lokal gleichmäßige Konvergenz aus der punktweisen folgt [13, Kapitel 9].

1.3.2 Definition Es sei A ein injektiver, dicht definierter, sektorieller Operator vom Typ μ, der dichtes Bild hat, und es gelte $\theta \in (\mu, \pi)$. Man sagt, dass A einen *beschränkten* $H^\infty(S_\theta)$*-Funktionalkalkül* besitzt, wenn $f(A) \in \mathcal{B}(X)$ für alle $f \in H^\infty(S_\theta)$ gilt. Wir schreiben dafür $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$.

1.3.3 Bemerkung Gilt $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$, so existiert ein $C > 0$ mit $\|f(A)\| \leqslant C\|f\|_\infty$. In diesem Falle ist der Operator $\Phi : H^\infty(S_\theta) \to \mathcal{B}(X)$, der durch $\Phi(f) := f(A)$ definiert wird, nämlich gemäß Satz 1.3.1 abgeschlossen, und der Graphensatz liefert die Stetigkeit von Φ.

Um nachzuweisen, dass A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat, reicht es, diese Abschätzung auf $\Psi(S_\theta)$ zu überprüfen.

1.3.4 Lemma [4, Corollary 2.2] Es sei A ein injektiver, dicht definierter, sektorieller Operator vom Typ μ, der dichtes Bild hat, und es gelte $\theta \in (\mu, \pi)$. Existiert dann eine Konstante $C > 0$ mit $\|\psi(A)\| \leqslant C\|\psi\|_\infty$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$, so gilt $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$.

Es gibt Operatoren, die auf keinem Sektor einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül haben [20], und selbst wenn ein beschränkter H^∞-Funktionalkalkül existiert, kann man im Allgemeinen nicht erwarten, dass dies auch auf Sektoren S_θ mit θ beliebig nahe am Typ μ gilt.

1.3.5 Bemerkung Der erweiterte Funktionalkalkül kann für eine noch größere Klasse von Funktionen definiert werden. Es reicht aus, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f \cdot \psi_0^n \in \Psi(S_\theta)$ gilt. Man definiert für eine solche Funktion $f(A) := \psi_0(A)^{-n}(f \cdot \psi_0^n)(A)$. Damit ist beispielsweise $(z \mapsto z)(A) = A$, und man setzt $A^\alpha := (z \mapsto z^\alpha)(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, wobei z^α auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiert ist und $1^\alpha = 1$ gilt.

Natürlich kann es vorkommen, dass ein sektorieller Operator nicht alle für den Kalkül geforderten Eigenschaften (injektiv, dicht definiert, dichtes Bild) hat. In diesem Falle kann man sich behelfen, indem man ihn auf geeignete Teilräume von X einschränkt.

1.3.6 Satz [4, Theorem 3.8] Ist $A \in \mathcal{A}(X)$ sektoriell vom Typ μ, so folgt

$$\mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} = \left\{ x \in X : \tfrac{1}{n} R(-\tfrac{1}{n}, A)x \text{ konvergiert} \right\}.$$

Für den Abschluss von Definitions- und Bildraum gilt

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \left\{ x \in X : -nR(-n, A)x \xrightarrow{n\to\infty} x \right\} =: X_\infty\,,$$
$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \left\{ x \in X : \tfrac{1}{n} R(-\tfrac{1}{n}, A)x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \right\} =: X_{00}\,.$$

Der Teil von A in X_∞, also die Einschränkung von A auf

$$\{ x \in \mathcal{D}(A) \cap X_\infty : Ax \in X_\infty \},$$

ist sektoriell vom Typ μ und dicht definiert, und der Teil von A in X_{00} ist sektoriell vom Typ μ, injektiv und hat dichtes Bild.

Der Teil von A in $X_\infty \cap X_{00}$ hat schließlich alle für den Funktionalkalkül nötigen Eigenschaften: Er ist sektoriell vom Typ μ, injektiv, dicht definiert und hat dichtes Bild.

1.3.7 Bemerkung Aus der Tatsache, dass die Summe $\mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ direkt ist, folgt insbesondere, dass ein sektorieller Operator mit dichtem Bild stets injektiv sein muss. Wir können daher im Folgenden auf die Voraussetzung der Injektivität verzichten, wenn dichtes Bild gefordert ist.

1.4 Auf der Suche nach Dilatationen

1.4.1 Definition Ist X ein Banachraum und $(T_t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe, so heißt die C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf dem Banachraum Y eine Dilatation von (T_t), wenn

- der Operator $U_t : Y \to Y$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Isometrie ist,
- es eine Einbettung $J : X \to Y$ mit $\|x\|_X \sim \|Jx\|_Y$ und

- eine stetige Projektion $P : Y \to Y$ auf $J(X)$ gibt, so dass
- die Dilatationsgleichung $JT_t = PU_tJ$ für alle $t \geqslant 0$ erfüllt ist. Das folgende Diagramm muss also kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{U_t} & Y \\ \cup & & \downarrow P \\ J(X) & & J(X) \\ J\uparrow & & \uparrow J \\ X & \xrightarrow{T_t} & X \end{array}$$

Es wird hier nicht verlangt, dass J eine isometrische Einbettung von X in Y ist. Dies kann man aber erreichen, indem man auf X die äquivalente Norm $x \mapsto \|Jx\|_Y$ einführt.

Die Frage ist nun, in welcher Beziehung die Existenz einer Dilatation zu einem beschränkten H^∞-Funktionalkalkül steht. Wenn $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) erzeugt, dann wird auf X durch

$$\|x\|_{\text{neu}} := \sup_{t \geqslant 0} \|T_t x\|$$

eine äquivalente Norm definiert, bezüglich derer $(T_t)_{t \geqslant 0}$ kontrahierend ist. Folglich hat (T_t) eine Dilatation [27, 28]. Ganz ohne die Voraussetzung eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls finden wir also Dilatationen; umgekehrt bedeutet dies aber auch, dass wir aus der Existenz irgendeiner Dilatation für den H^∞-Funktionalkalkül nichts folgern können.

Unser Ziel wird es daher sein, im Falle der Beschränktheit des H^∞-Funktionalkalküls eine Dilatation (U_t) mit Erzeuger $-B$ konkret anzugeben, aus deren Existenz sich wiederum die Beschränktheit des H^∞-Funktionalkalküls folgern lässt. Die C_0-Gruppe (U_t) wird dabei so konstruiert sein, dass der Operator B einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül besitzt.

2 Dilatationen in Hilberträumen

2.1 Der Funktionalkalkül im Hilbertraum

Betrachten wir den Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren nicht auf einem beliebigen Banachraum X, sondern auf einem Hilbertraum H mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, so vereinfacht sich manches.

Zunächst einmal muss der sektorielle Operator, wie das folgende Ergebnis zeigt, nicht so viele Voraussetzungen für den Funktionalkalkül erfüllen.

2.1.1 Lemma [4, Theorem 2.3] Ist A ein injektiver, sektorieller Operator in einem Hilbertraum, so ist A dicht definiert und hat dichtes Bild.

Wir fordern aus diesem Grunde in den Sätzen dieses Kapitels nur die Injektivität des sektoriellen Operators; allein dadurch ist bereits gewährleistet, dass der Funktionalkalkül definiert werden kann. (Gemäß Bemerkung 1.3.7 könnten wir die Voraussetzung der Injektivität auch durch die Forderung ersetzen, dass der Operator dichtes Bild hat.)

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich dadurch, dass die Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls im Hilbertraum vom Winkel θ des Sektors unabhängig ist.

2.1.2 Theorem [19, Abschnitt 8] Es sei A ein injektiver Operator vom Typ μ auf einem Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für ein gewisses $\theta \in (\mu, \pi)$ gilt $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$.

(b) Es gilt $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$ für alle $\theta \in (\mu, \pi)$.

Im Hilbertraum reicht es also, von *beschränktem* H^∞*-Funktionalkalkül* zu reden, ohne dabei den Sektor S_θ anzugeben. Abkürzend schreiben wir in diesem Falle auch $A \in \mathcal{H}^\infty$.

2.1.3 Bemerkung Im Hilbertraum können wir zu einem dicht definierten sektoriellen Operator A den adjungierten Operator A^* betrachten. Dann hat man $z \in \rho(A^*) \iff \bar{z} \in \rho(A)$ und $R(z, A^*) = R(\bar{z}, A)^*$ für $z \in \rho(A)$. Also ergibt sich: Falls A vom Typ μ ist, gilt dies auch für A^*. Ebenso überträgt sich die Injektivität von A. Ist nämlich $A^*y = 0$, so folgt $(Ax, y) = (x, A^*y) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. Da A dichtes Bild hat, bedeutet dies $y = 0$.

Die Operatoren A mit beschränktem H^∞-Funktionalkalkül können dadurch charakterisiert werden, dass A und A^* so genannten quadratischen Abschätzungen genügen. Diese werden wir nun betrachten.

2.2 Quadratische Abschätzungen

2.2.1 Definition Es sei H ein Hilbertraum. Der Operator $A \in \mathcal{A}(H)$ sei sektoriell vom Typ μ, und es gelte $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta \in (\mu, \pi)$. Dann genügt A einer *quadratischen Abschätzung bezüglich* ψ, falls eine Konstante $Q > 0$ existiert mit

$$\left(\int_0^\infty \|\psi(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leqslant Q\|x\| \qquad \text{für alle } x \in H\,.$$

2.2.2 Theorem [4, Theorem 2.4] Es sei A ein injektiver Operator vom Typ μ auf einem Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Der Operator A hat einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül.

(b) Für alle $\theta \in (\mu, \pi)$ und alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$ gilt: A und A^* genügen einer quadratischen Abschätzung bezüglich ψ.

2.2.3 Bemerkung Insbesondere folgt hieraus, dass A genau dann einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül hat, wenn dies für A^* gilt.

Die Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls mit Hilfe von quadratischen Abschätzungen wird es uns im Folgenden ermöglichen, Theorem 2.3.3 zu beweisen. Dieses werden wir in späteren Kapiteln auf L^p-Räume und sogar noch allgemeinere Banachräume ausdehnen.

2.3 Charakterisierung mittels Dilatationen

Als Hilfsmittel benötigen wir die folgende Aussage:

2.3.1 Lemma Der injektive Operator $-A \in \mathcal{A}(H)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) im Hilbertraum H. Falls A einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül hat, gilt

$$\int_0^\infty (AT_t x, y)\, dt = (x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in H\,,$$

wobei das auftretende Integral absolut konvergent ist.

Für den Beweis dieses Lemmas werden wir das folgende Ergebnis verwenden:

2.3.2 Satz [4, Theorem 4.2] Es sei X ein Banachraum. Der Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ sei sektoriell vom Typ μ, injektiv, dicht definiert und habe dichtes Bild und einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta \in (\mu, \pi)$. Zu jedem $\psi \in \Psi(S_\theta)$ gibt es dann eine Konstante $C > 0$ mit

$$\int_0^\infty \left|\langle \psi(tA)x, x'\rangle\right| \frac{dt}{t} \leqslant C\|x\|\,\|x'\| \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } x' \in X'\,.$$

Beweis (Lemma 2.3.1) Betrachtet man $\psi(z) := ze^{-z}$, so gilt $\psi \in \Psi(S_\theta)$ für alle $\theta < \pi/2$, und da A nach Voraussetzung sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ ist und für alle $\theta > \mu$ einen $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül besitzt, liefert Satz 2.3.2 die Konvergenz von

$$\int_0^\infty \left|\langle \psi(tA)x, x'\rangle\right| \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left|\langle tAT_t x, x'\rangle\right| \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left|\langle AT_t x, x'\rangle\right| dt$$

für alle $x \in H$ und $x' \in H'$, also auch die Konvergenz des Integrals mit dem Integranden $|(AT_t x, y)|$. Satz 2.3.2 liefert außer der Konvergenz noch, dass das Integral stetig von x und y abhängt; es reicht daher, die behauptete Gleichheit für $x \in \mathcal{D}(A)$ zu zeigen.

Es gelte also $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y \in H$. Wegen $AT_t x = T_t A x$ und dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist dann

$$\int_0^\infty (AT_t x, y)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-t/n}(T_t A x, y)\, dt\,.$$

Für das rechts auftretende Integral gilt

$$\int_0^\infty e^{-t/n}(T_tAx, y)\,dt = \left(\int_0^\infty e^{-t/n}T_tAx\,dt, y\right) = \big(R(\tfrac{1}{n}, -A)Ax, y\big)$$
$$= \big(R(\tfrac{1}{n}, -A)(A + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})x, y\big) = \big(x - \tfrac{1}{n}R(\tfrac{1}{n}, -A)x, y\big),$$

und damit ergibt sich

$$\int_0^\infty (AT_tx, y)\,dt = (x, y) - \lim_{n\to\infty}\big(\tfrac{1}{n}R(\tfrac{1}{n}, -A)x, y\big).$$

Mit Satz 1.3.6 erhalten wir die Behauptung, denn es gilt $\overline{\mathcal{R}(A)} = H$. □

Nun kommen wir zur Charakterisierung des beschränkten H^∞- Funktionalkalküls. Dieses Ergebnis ist bekannt (siehe [29] und Theorem 1.1 in [18]), doch wir geben hier einen einfachen Beweis mittels quadratischer Abschätzungen, den wir in den folgenden Kapiteln verallgemeinern können.

2.3.3 Theorem Der injektive Operator $-A \in \mathcal{A}(H)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) im Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A hat einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : H \to L^2(\mathbb{R}, H)$ mit $\|x\|_H \sim \|Jx\|_{L^2(\mathbb{R},H)}$ und $JT_t = PU_tJ$ für alle $t \geqslant 0$, wobei P die Orthogonalprojektion auf $J(H)$ ist und $U_t \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, H))$ durch $U_tf := f(\cdot + t)$ definiert wird.

$$\begin{tikzcd}
L^2(\mathbb{R}, H) \arrow[r, "U_t"] & L^2(\mathbb{R}, H) \arrow[d, "P"] \\
J(H) \arrow[u, phantom, "\cup"] & J(H) \\
H \arrow[u, "J"] \arrow[r, "T_t"] & H \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b). Wir definieren die Einbettung $J : H \to L^2(\mathbb{R}, H)$ durch

$$(Jx)(s) := \begin{cases} A^{1/2}T_sx, & s > 0, \\ 0, & s \leqslant 0. \end{cases}$$

Dass tatsächlich $Jx \in L^2(\mathbb{R}, H)$ gilt, sieht man folgendermaßen: Der Operator A ist sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$. Betrachten wir die Funktion $\psi(z) := z^{1/2}e^{-z}$ auf einem Sektor S_θ mit $\theta \in (\mu, \pi/2)$, so genügt A nach Theorem 2.2.2 einer quadratischen Abschätzung bezüglich ψ. Wegen

$$\int_0^\infty \|\psi(tA)x\|^2 \, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|(tA)^{1/2}e^{-tA}x\|^2 \, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|A^{1/2}T_t x\|^2 \, dt = \|Jx\|^2_{L^2(\mathbb{R},H)}$$

folgt $\|Jx\| \leqslant Q\|x\|$, insbesondere also $Jx \in L^2(\mathbb{R}, H)$. Es fehlt noch die Abschätzung von $\|Jx\|$ nach unten; um diese zu erhalten, definieren wir den Operator $J_* : H \to L^2(\mathbb{R}, H)$ durch

$$(J_*x)(s) := \begin{cases} (A^*)^{1/2}\, T_s^* x\,, & s > 0\,, \\ 0\,, & s \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Wie für J ergibt sich mit Theorem 2.2.2 die Abschätzung $\|J_*x\| \leqslant Q\|x\|$, und wegen Lemma 2.3.1 ist

$$2(Jx, J_*y) = 2\int_0^\infty \big(A^{1/2}\, T_s x, (A^*)^{1/2}\, T_s^* y\big) \, ds = \int_0^\infty 2(AT_{2s}x, y) \, ds = (x, y)$$

für alle $x, y \in H$. Daraus folgt

$$\|(x, y)\| \leqslant 2\|Jx\| \cdot \|J_*y\| \leqslant 2\|Jx\| \cdot Q\|y\|\,.$$

Supremumsbildung über alle $y \in H$ mit $\|y\| \leqslant 1$ liefert

$$\|x\| \leqslant 2Q\|Jx\|\,,$$

also die für $\|x\| \sim \|Jx\|$ noch fehlende Abschätzung. Als letztes ist zu überprüfen, ob die Dilatationsgleichung $JT_t = PU_tJ$ erfüllt ist: Nach Definition von U_t ist

$$(U_tJx)(s) = (Jx)(s + t) = \begin{cases} A^{1/2}\, T_{s+t}x\,, & s + t > 0\,, \\ 0\,, & s + t \leqslant 0\,, \end{cases}$$

und aufgrund der Halbgruppeneigenschaft von (T_t) bedeutet dies

$$(U_tJx)(s) = \begin{cases} A^{1/2}\, T_s(T_t x)\,, & s > -t\,, \\ 0\,, & s \leqslant -t\,. \end{cases}$$

Die Orthogonalprojektion P auf $J(H)$ ist die Abbildung von H nach $J(H)$, die durch $Pf - f \perp J(H)$ charakterisiert wird. Da alle Funktionen in $J(H)$ auf $(-\infty, 0]$ verschwinden, spielen die Werte von f auf $(-\infty, 0]$ dabei keine Rolle, d.h. es gilt $Pf = P(f \cdot \chi_{\mathbb{R}^+})$. Somit ist

$$PU_t Jx = P\left(s \mapsto \begin{cases} A^{1/2}T_s(T_t x)\,, & s > 0 \\ 0\,, & s \leqslant 0 \end{cases}\right) = P(JT_t x) = JT_t x\,,$$

wobei im letzten Schritt die Projektionseigenschaft von P benutzt wurde.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Wir bezeichnen den Erzeuger der C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit $-B$. Gemäß Lemma 2.3.4 ist der Operator B vom Typ $\pi/2$ und hat einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül. Für $\operatorname{Re} z < 0$ und $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} JR(z, A)x &= -JR(-z, -A)x = -J\int_0^\infty e^{zt}T_t x\,dt = -\int_0^\infty e^{zt}JT_t x\,dt \\ &= -\int_0^\infty e^{zt}PU_t Jx\,dt = -P\int_0^\infty e^{zt}U_t(Jx)\,dt \\ &= -PR(-z, -B)Jx = PR(z, B)Jx\,. \end{aligned}$$

Nach Definition des Funktionalkalküls bedeutet dies $J\psi(A) = P\psi(B)J$, also

$$\psi(A) = J^{-1}P\psi(B)J\,,$$

für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$, wobei $\theta > \pi/2$. Wegen der Stetigkeit von $J^{-1}P$ und J folgt damit $\|\psi(A)\| \leqslant C\|\psi\|_\infty$ aus der Existenz des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls für den Operator B. Nach Lemma 1.3.4 besitzt A also einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül. $\square$

Um den Beweis zu vervollständigen, muss noch das folgende Lemma gezeigt werden.

2.3.4 Lemma Es sei $-B$ der Erzeuger der C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^2(\mathbb{R}, H)$, die gegeben ist durch $U_t f := f(\cdot + t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: B ist vom Typ $\pi/2$ und hat einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül.

Beweis Für eine Schwartz-Funktion $f : \mathbb{R} \to H$ erhält man offenbar

$$Bf = -f' = \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}f\,, \tag{2.3.1}$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}, H)$ bezeichnet und M für den durch $(Mg)(t) = -\mathrm{i}tg(t)$ gegebenen Multiplikationsoperator M in $L^2(\mathbb{R}, H)$ steht. Auf $L^2(\mathbb{R}, H)$ ist $\mathcal{F}$ eine Isometrie, und M hat die folgenden Eigenschaften: Es gilt $\sigma(M) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$, und für $z \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$ und $g \in L^2(\mathbb{R}, H)$ ist

$$\big(R(z, M)g\big)(t) = \frac{g(t)}{z + \mathrm{i}t},$$

also ergibt sich $\|R(z, M)\| \leqslant 1/\operatorname{dist}(z, \mathrm{i}\mathbb{R}) = |\operatorname{Re} z|^{-1}$. Wegen (2.3.1) hat man

$$(z - B)f = \mathcal{F}^{-1}(z - M)\mathcal{F}f$$

für alle Schwartz-Funktionen $f : \mathbb{R} \to H$. Die Menge der Schwartz-Funktionen $\mathscr{S}(\mathbb{R}, H)$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R}, H)$ und wird durch U_t in sich abgebildet; folglich [9, Proposition II.1.7] liegt $\mathscr{S}(\mathbb{R}, H)$ in $\mathcal{D}(B)$ bezüglich der Graphennorm dicht. Es folgt $\sigma(B) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$ und

$$R(z, B) = \mathcal{F}^{-1}R(z, M)\mathcal{F} \qquad \text{für } z \notin \mathrm{i}\mathbb{R}, \tag{2.3.2}$$

also $\|R(z, B)\| \leqslant \|R(z, M)\| \leqslant |\operatorname{Re} z|^{-1}$. Damit ist B, wie M, vom Typ $\pi/2$.

Der Operator M hat einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül: Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta > \pi/2$ und $\alpha \in (\pi/2, \theta)$ gilt nämlich

$$\big(\psi(M)g\big)(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\big(R(z, M)g\big)(t)\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\,\frac{g(t)}{z + \mathrm{i}t}\,dz\,.$$

Der Cauchysche Integralsatz liefert dann

$$\big(\psi(M)g\big)(t) = \psi(-\mathrm{i}t)g(t)\,,$$

und damit gilt $\|\psi(M)g\|_2 \leqslant \|\psi\|_\infty \cdot \|g\|_2$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R}, H)$, d.h. man hat $\|\psi(M)\| \leqslant \|\psi\|_\infty$. Diese Abschätzung überträgt sich auch auf B, denn wegen (2.3.2) und nach Definition des Funktionalkalküls gilt

$$\psi(B) = \mathcal{F}^{-1}\psi(M)\mathcal{F}\,,$$

und das bedeutet $\|\psi(B)\| \leqslant \|\psi(M)\| \leqslant \|\psi\|_\infty$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$. □

2.3.5 Bemerkung Der im Beweis verwendete Multiplikationsoperator M ist ein normaler Operator im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, H)$. Als solcher besitzt er einen Funktionalkalkül, der durch $(f(M)g)(t) = f(-\mathrm{i}t)g(t)$ gegeben ist, wobei f eine auf $\mathrm{i}\mathbb{R}$ beschränkte, messbare Funktion ist. Im Beweis haben wir nachgerechnet, dass der Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren mit dem schon bekannten Kalkül für normale Operatoren verträglich ist.

3 Dilatationen in L^p

3.1 Der Funktionalkalkül im L^p-Raum

Wir wenden uns jetzt den L^p-Räumen zu, d.h. wir betrachten den Banachraum $X = L^p(\Omega, \nu)$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist. Dabei beschränken wir uns auf den reflexiven Fall, setzen also $1 < p < \infty$ voraus. Abkürzend schreiben wir L^p statt $L^p(\Omega, \nu)$; zwischen Repräsentanten und Äquivalenzklassen werden wir nicht explizit unterscheiden.

Es sei $q \in (1, \infty)$ der zu p duale Index, d.h. es gelte $1/p + 1/q = 1$. Wir identifizieren L^q und den Dualraum X' von X mittels der Dualität

$$\langle x, y \rangle = \int_\Omega x(\omega) y(\omega)\, d\nu(\omega) \qquad (x \in L^p,\ y \in L^q)\,.$$

Ist $A \in \mathcal{A}(L^p)$ ein dicht definierter Operator, so bezeichnet $A' \in \mathcal{A}(L^q)$ den bezüglich dieser Dualität dualen Operator.

Da L^p reflexiv ist, reicht es hier, wie im Hilbertraumfall, für den Funktionalkalkül die Injektivität des sektoriellen Operators vorauszusetzen. (Gemäß Bemerkung 1.3.7 reicht auch die Forderung, dass A dichtes Bild hat.)

3.1.1 Lemma [4, Theorem 3.8] Ist A ein injektiver, sektorieller Operator in einem reflexiven Banachraum, so ist A dicht definiert und hat dichtes Bild.

Ist $A \in \mathcal{A}(L^p)$ ein injektiver, sektorieller Operator vom Typ μ, so gilt dies auch für den dualen Operator; dies ergibt sich analog zu Bemerkung 2.1.3.

Nach Definition des Funktionalkalküls ist ferner $\psi(A') = \psi(A)'$, also überträgt sich auch ein beschränkter $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül auf den dualen Operator.

3.2 Quadrat-Funktionen-Abschätzungen

Im Hilbertraum konnte die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls mittels quadratischer Abschätzungen charakterisiert werden; ein entsprechendes Mittel gibt es auch im L^p-Fall.

3.2.1 Definition Der Operator $A \in \mathcal{A}(L^p)$ sei sektoriell vom Typ μ, und es gelte $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta \in (\mu, \pi)$. Dann genügt A einer *Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich* ψ, falls eine Konstante $Q > 0$ existiert mit

$$\left\| \left(\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant Q \|x\|_{L^p} \qquad \text{für alle } x \in L^p .$$

Im Hilbertraumfall $p = 2$ entspricht dies einer quadratischen Abschätzung, wie eine Anwendung des Satzes von Fubini zeigt:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \int_0^\infty |\psi(tA)x(\omega)|^2 \, \frac{dt}{t} \, d\nu(\omega) \\ &= \int_0^\infty \int_\Omega |\psi(tA)x(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) \, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|\psi(tA)x\|_{L^2}^2 \, \frac{dt}{t} . \end{aligned}$$

3.2.2 Theorem [4, Corollary 6.8 (i)] Der Operator $A \in \mathcal{A}(L^p)$ sei injektiv und sektoriell vom Typ μ, und es gelte $A \in \mathcal{H}^\infty(S_\theta)$ für ein $\theta \in (\mu, \pi)$. Ist $\tau \in (\theta, \pi)$ und $\psi \in \Psi(S_\tau)$, so genügen A und A' einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich ψ.

Hierbei ist zu beachten, dass es auf die jeweiligen Winkel ankommt: Aus der Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls folgen Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich $\psi \in \Psi(S_\tau)$ mit $\tau > \theta$. Man muss also hinnehmen, dass der betrachtete Winkel größer wird.

Falls ψ gewisse zusätzliche Eigenschaften hat, gilt auch die Umkehrung, d.h. Quadrat-Funktionen-Abschätzungen bezüglich eines geeigneten $\psi \in \Psi(S_\tau)$ für A und A' implizieren die Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls für $\theta > \tau$. (Auch hier verschlechtert sich also der Winkel.)

Um die »Umkehrung« präziser formulieren zu können, setzen wir abkürzend $\psi_e(z) := \psi(e^z)$ und definieren für $0 < \theta < \tau < \pi$

$$\Psi_\tau(S_\theta) := \left\{ \psi \in \Psi(S_\theta) : e^{-\tau|\cdot|}\widehat{\psi_e}(\cdot)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\},$$
$$\Psi_\tau(S_\tau-) := \bigcap_{\theta\in(0,\tau)} \Psi_\tau(S_\theta).$$

Die Menge $\Psi_\tau(S_\theta)$ enthält also die Funktionen aus $\Psi(S_\theta)$, für die eine Abschätzung der Form $|\widehat{\psi_e}(t)| \geqslant Ce^{-\tau|t|}$ besteht.

3.2.3 Beispiel Wählt man ein $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} a > 0$ und setzt

$$\psi(z) := \frac{z}{(a-z)(\overline{a}-z)},$$

so gilt $\psi \in \Psi_\tau(S_\tau-)$ für $\tau = \arg a$ [4, Example 4.7].

Wir kommen jetzt zur angekündigten »Umkehrung« von Theorem 3.2.2.

3.2.4 Theorem [4, Corollary 6.8 (ii) und Beweis] Der Operator $A \in \mathcal{A}(L^p)$ sei injektiv und sektoriell vom Typ μ. Weiter sei $\tau > \mu$, und für die Funktionen ψ, χ gelte $\psi, \chi \in \Psi(S_{\tau_1})$ für alle $\tau_1 < \tau$ und $\psi\chi \in \Psi_\tau(S_\tau-)$. Wenn dann A und A' Quadrat-Funktionen-Abschätzungen bezüglich ψ bzw. χ genügen, so hat A für alle $\theta > \tau$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül.

3.3 Der Banachraum Y und die Gruppe (U_t)

Bei der Suche nach einer Dilatation müssen wir insbesondere den zu betrachtenden Banachraum Y für das Dilatationsschema finden. Den Hilbertraum H haben wir in den Hilbertraum $Y = L^2(\mathbb{R}, H)$ eingebettet; wir haben also Funktionen $f : \mathbb{R} \to H$ mit der Norm

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R},H)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_H^2 \, dt\right)^{1/2}$$

betrachtet und die Einbettung J entsprechend gewählt. Die nötige Normäquivalenz folgte dann mit Hilfe von quadratischen Abschätzungen. Würden wir für $X = L^p$ den Raum $Y = L^2(\mathbb{R}, L^p)$ betrachten, so wären dies Funktionen $f : \mathbb{R} \to L^p$ mit der Norm

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R},L^p)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_{L^p}^2 \, dt \right)^{1/2} .$$

Um die Quadrat-Funktionen-Abschätzungen für den Beweis der Normäquivalenz verwenden zu können, brauchen wir aber L^p- und L^2-Norm in umgekehrter Reihenfolge. Dies können wir erreichen, indem wir $f : \mathbb{R} \to L^p$ als eine Funktion von $\mathbb{R} \times \Omega$ nach $\mathbb{C}$ auffassen. Wir schreiben dann auch $f(t, \omega)$ statt $f(t)(\omega)$ und betrachten

$$\|f\|_{L^p(L^2)} = \big\|\omega \mapsto \|f(\cdot, \omega)\|_{L^2}\big\|_{L^p} = \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t, \cdot)|^2 \, dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \in [0, \infty] .$$

Umgekehrt können wir auch eine Funktion aus $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$, also eine Funktion $f : \Omega \to L^2(\mathbb{R})$, als eine Funktion von $\mathbb{R}\times\Omega$ nach $\mathbb{C}$ auffassen und wiederum $f(t, \omega)$ statt $f(\omega)(t)$ schreiben. Manchmal wird in diesem Falle auch $f(t)$ für die Funktion $\omega \mapsto f(t, \omega)$ stehen.

Wie schon beim skalarwertigen L^p identifizieren wir den Raum $L^q(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ mit dem Dualraum von $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ vermöge der Dualität

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} \big(f(\omega), g(\omega)\big)_{L^2} \, d\nu(\omega) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} f(t, \omega)g(t, \omega) \, dt \, d\nu(\omega) .$$

Dass diese Identifizierung zulässig ist, findet man in [6, Theorem IV.1.1]. Man muss dabei beachten, dass ein Hilbertraum die Radon-Nikodým-Eigenschaft hat [6, Corollary IV.1.4] und das Ergebnis von endlichen auf σ-endliche Maßräume übertragen werden kann.

Als nächstes stellt sich die Frage, welche C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ wir in dem Raum $Y = L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ betrachten sollen. Im Hilbertraumfall hatten wir $U_t f := f(\cdot + t)$ gewählt und verwenden daher jetzt

$$(U_t f)(\omega) := f(\cdot + t, \omega) \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } f \in L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R})) .$$

3.3.1 Lemma Auf diese Weise wird eine C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von Isometrien auf dem Funktionenraum $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ definiert.

Beweis Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|U_t f\|_{L^p(L^2)} = \|\omega \mapsto \|f(\cdot + t, \omega)\|_{L^2}\|_{L^p} = \|\omega \mapsto \|f(\cdot, \omega)\|_{L^2}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(L^2)}\,,$$

die Operatoren U_t sind also Isometrien. Die Gruppeneigenschaft ist offensichtlich; es muss daher nur noch $U_t f \to f$ für $t \to 0$ gezeigt werden. Dies ergibt sich mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes aus

$$\|U_t f - f\|_{L^p(L^2)} = \|\omega \mapsto \|f(\cdot + t, \omega) - f(\cdot, \omega)\|_{L^2}\|_{L^p}\,,$$

denn für alle $\omega \in \Omega$ gilt sowohl

$$h_t(\omega) := \|f(\cdot + t, \omega) - f(\cdot, \omega)\|_{L^2} \xrightarrow{t \to 0} 0$$

als auch $|h_t(\omega)| \leqslant 2\|f(\cdot, \omega)\|_{L^2}$. Die Funktion $\omega \mapsto \|f(\cdot, \omega)\|_{L^2}$ ist nach Definition von $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ über Ω integrierbar. □

3.3.2 Satz Ist $-B$ der Erzeuger dieser C_0-Gruppe, so gilt: Der Operator B ist vom Typ $\pi/2$ und hat für jedes $\theta > \pi/2$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül.

Beweis Betrachten wir ein $f \in L^p(\Omega, \mathscr{S}(\mathbb{R})) \subset L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$, so gilt

$$Bf = -\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} f\,, \tag{3.3.1}$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation bezüglich der Variablen t ist, also

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \widehat{f(\omega)} \qquad \text{für } \omega \in \Omega\,,$$

und M den durch

$$(Mg)(t, \omega) := -itg(t, \omega)$$

gegebenen Multiplikationsoperator bezeichnet. Als Operator in $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ ist M vom Typ $\pi/2$ und hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \pi/2$. Dies zeigt man wie beim Beweis von Lemma 2.3.4: Offenbar ist $\sigma(M) \subset i\mathbb{R}$, und für $z \notin i\mathbb{R}$ und alle $g \in L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ gilt

$$\big(R(z, M)g\big)(t, \omega) = \frac{g(t, \omega)}{z + it}\,.$$

Daher ist $\|R(z,M)\| \leqslant 1/\operatorname{dist}(z, i\mathbb{R}) = |\operatorname{Re} z|^{-1}$, und somit wissen wir, dass M vom Typ $\pi/2$ ist. Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta > \pi/2$ und $\alpha \in (\pi/2, \theta)$ gilt

$$(\psi(M)g)(t,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)(R(z,M)g)(t,\omega)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\,\frac{g(t,\omega)}{z+it}\,dz\,,$$

und der Cauchysche Integralsatz liefert

$$(\psi(M)g)(t,\omega) = \psi(-it)g(t,\omega)\,,$$

woraus $\|\psi(M)\| \leqslant \|\psi\|_\infty$ folgt, also die Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls.

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie auf $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$, denn definitionsgemäß gilt für alle $f \in L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^p(L^2)} = \|\omega \mapsto \|\widehat{f(\omega)}\|_{L^2}\|_{L^p} = \|\omega \mapsto \|f(\omega)\|_{L^2}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(L^2)}\,.$$

Weil $L^p(\Omega, \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ in $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ dicht liegt, ergibt sich mit (3.3.1) wie im Beweis von Lemma 2.3.4

$$R(z,B) = \mathcal{F}^{-1}R(z,M)\mathcal{F} \qquad \text{für alle } z \notin i\mathbb{R}\,,$$

und mit den Eigenschaften von M folgen daraus die Behauptungen. $\square$

3.3.3 Bemerkung Der Beweis zeigt, dass man $f(M)$, und damit auch $f(B)$, schon dann definieren kann, wenn f nur messbar und beschränkt auf $i\mathbb{R}$ ist. Der Operator B besitzt also sogar einen wesentlich besseren Funktionalkalkül als dies der Satz ausdrückt. Man vergleiche hierzu auch Bemerkung 2.3.5.

3.4 Einbettung J und Projektion P

Genau wie im Hilbertraum benötigen wir die folgende Hilfsaussage:

3.4.1 Lemma Der injektive Operator $-A \in \mathcal{A}(L^p)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) in L^p. Falls A für ein $\theta < \pi/2$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat, gilt

$$\int_0^\infty \langle AT_t x, y\rangle\,dt = \langle x, y\rangle \qquad \text{für alle } x \in L^p \text{ und } y \in L^q\,.$$

Beweis Man beweist diese Gleichung genau wie Lemma 2.3.1. Dabei ist zu beachten, dass die verwendeten Sätze 2.3.2 und 1.3.6 für beliebige Banachräume gelten, und dass diesmal explizit $\theta < \pi/2$ vorausgesetzt ist. $\square$

Für den Rest dieses Abschnitts nehmen wir nun an, dass die Voraussetzungen von Lemma 3.4.1 erfüllt sind, dass also der injektive Operator $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) in L^p erzeugt und zudem A für ein gewisses $\theta < \pi/2$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat.

In dieser Situation wollen wir eine Einbettung $J : L^p \to Y$ in den (im vorangehenden Abschnitt betrachteten) Banachraum $Y = L^p(L^2) = L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ mit $\|x\|_{L^p} \sim \|Jx\|_Y$ und eine beschränkte Projektion $P : Y \to J(L^p)$ auf $J(L^p)$ definieren, so dass die Dilatationsgleichung $JT_t = PU_tJ$ erfüllt ist. Wir orientieren uns dabei am Hilbertraumfall, also am Vorgehen beim Beweis von Theorem 2.3.3.

3.4.2 Definition Für $x \in L^p$ und $s \in \mathbb{R}$ sowie $\omega \in \Omega$ setzen wir

$$(Jx)(s,\omega) := \begin{cases} A^{1/2}\,T_s x(\omega)\,, & s > 0\,, \\ 0\,, & s \leqslant 0\,. \end{cases}$$

3.4.3 Satz Auf diese Weise wird ein Operator $J : L^p \to L^p(L^2)$ definiert, und es gibt Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha\|x\|_{L^p} \leqslant \|Jx\|_{L^p(L^2)} \leqslant \beta\|x\|_{L^p} \qquad \text{für alle } x \in L^p\,.$$

Beweis Wir betrachten $\psi(z) := z^{1/2}e^{-z}$. Wegen $\theta < \pi/2$ gilt $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und aus Theorem 3.2.2 folgt, dass A (und auch A') einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich ψ genügen. Nun ist

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \,\frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} &= \left\| \left(\int_0^\infty |(tA)^{1/2} e^{-tA} x(\cdot)|^2 \,\frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \\ &= \left\| \left(\int_0^\infty |A^{1/2} T_t x(\cdot)|^2 \,dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p} = \|Jx\|_{L^p(L^2)}\,, \end{aligned}$$

d.h. die Quadrat-Funktionenabschätzung liefert $\|Jx\| \leqslant Q\|x\|$. Folglich ist J tatsächlich ein Operator von L^p nach $L^p(L^2)$, und dieser ist stetig.

Damit ist nur noch die Existenz von α zu beweisen. Weil auch A' einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich ψ genügt, ist der durch

$$(J_*x)(s,\omega) := \begin{cases} (A')^{1/2}\,T_s' x(\omega)\,, & s > 0\,, \\ 0\,, & s \leqslant 0 \end{cases}$$

definierte Operator $J_* : L^q \to L^q(L^2)$ ebenfalls stetig. Mit Lemma 3.4.1 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
2\langle Jx, J_*y\rangle_{(L^p(L^2),L^q(L^2))} &= 2\int_0^\infty \langle A^{1/2}T_s x, (A')^{1/2}T_s' y\rangle_{(L^p,L^q)}\, ds \\
&= \int_0^\infty 2\langle AT_{2s}x, y\rangle_{(L^p,L^q)}\, ds = \langle x, y\rangle_{(L^p,L^q)}
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

für alle $x \in L^p$ und $y \in L^q$. Es folgt

$$\|\langle x, y\rangle\| \leqslant 2\|Jx\| \cdot \|J_*y\| \leqslant 2\|Jx\| \cdot Q\|y\|\,,$$

und Supremumsbildung über $y \in L^q$ mit $\|y\| \leqslant 1$ liefert die noch fehlende Abschätzung $\|x\| \leqslant 2Q\|Jx\|$ von $\|Jx\|$ nach unten. □

Wir kommen zur Projektion P. Im Hilbertraumfall war P die Orthogonalprojektion auf $J(H)$; da diese Definition für die Übertragung auf den L^p-Fall ungeeignet ist, wollen wir P mit J und J_* ausdrücken.

Die Orthogonalprojektion $P : L^2(H) \to J(H)$ ist im Hilbertraum definiert durch die Gleichung

$$(Px - x, Jy) = 0 \qquad \text{für alle } x, y \in H\,,$$

und dies ist gleichbedeutend mit $(J^*Px - J^*x, y) = 0$ für alle $x, y \in H$, d.h. $J^*P = J^*$. Folglich ist $P = 2J_*J^*$, denn im Beweis von Theorem 2.3.3 wurde

$$2(Jx, J_*y) = (x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

nachgewiesen, also $2J^*J_* = \mathrm{id}$, und damit ist $J^*(2J_*J^*) = (2J^*J_*)J^* = J^*$.

Die entsprechende Definition $P = 2J_*J'$ ist für den L^p-Fall immer noch nicht geeignet, denn mit $J' : L^q(L^2) \to L^q$ und $J_* : L^q \to L^q(L^2)$ würde so ein Operator in $L^q(L^2)$ definiert. Beachten wir jedoch, dass P im Hilbertraumfall als Orthogonalprojektion selbstadjungiert ist, so folgt $P = P^* = (2J_*J^*)^* = 2J(J_*)^*$. Dies lässt sich mit $(J_*)' : L^p(L^2) \to L^p$ übertragen.

3.4.4 Definition Der Operator $P : L^p(L^2) \to L^p(L^2)$ sei gegeben durch

$$P := 2J(J_*)'\,.$$

3.4.5 Satz Das so definierte P ist eine stetige Projektion auf $J(L^p)$.

Beweis Da J und J_* stetig sind, gilt dies definitionsgemäß auch für P. Auch $P(L^p) \subset J(L^p)$ ist nach Definition offensichtlich, d.h. wir müssen nur noch $PJx = Jx$ für alle $x \in L^p$ zeigen. Für $x \in L^p$ und $y \in L^q$ gilt gemäß (3.4.1)

$$2\langle Jx, J_* y\rangle = \langle x, y\rangle\,, \quad \text{also} \quad 2\langle (J_*)' Jx, y\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

Dies bedeutet $2(J_*)'J = \mathrm{id}$ und damit

$$PJ = (2J(J_*)')J = J(2(J_*)'J) = J\,. \qquad \square$$

Die Überprüfung der Dilatationsgleichung werden wir erst im nächsten Abschnitt vornehmen. Wir stellen hier aber noch eine dafür nötige Aussage über P bereit, nämlich dass es bei der Bestimmung von Pf auf die Werte von $f(t, \omega)$ für $t \leqslant 0$ nicht ankommt.

3.4.6 Lemma Ist $f \in L^p(L^2)$ und $h(t, \omega) := f(t, \omega)\chi_{\mathbb{R}^+}(t)$, so gilt $Pf = Ph$.

Beweis Wegen $P = 2J(J_*)'$ reicht es, die Gleichung $(J_*)'f = (J_*)'h$ zu beweisen. Für $f \in L^p(L^2)$ und $y \in L^q$ gilt aber

$$\langle (J_*)'f, y\rangle = \langle f, J_* y\rangle = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f(t, \omega)(J_* y)(t, \omega)\,,$$

und wegen $(J_* y)(t, \omega) = 0$ für $t \leqslant 0$ folgt die Behauptung. $\square$

3.5 Charakterisierung mittels Dilatationen

Wir kommen nun zur Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls im L^p-Raum. Im Unterschied zum Hilbertraumfall erhalten wir keine Äquivalenz, sondern nur eine Implikationskette, bei deren Durchlaufen sich der Winkel θ des $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls verschlechtert.

3.5.1 Theorem Der injektive Operator $-A \in \mathcal{A}(L^p)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) in L^p, wobei $1 < p < \infty$. Dann besteht die Implikationskette (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) für die folgenden Aussagen.

(a) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : L^p \to L^p(L^2)$ mit $\|x\|_{L^p} \sim \|Jx\|_{L^p(L^2)}$ und $JT_t = PU_tJ$ für alle $t \geqslant 0$, wobei P eine stetige Projektion auf $J(L^p)$ ist und $U_t \in \mathcal{B}(L^p(L^2))$ durch $(U_tf)(\omega) := f(\cdot + t, \omega)$ definiert wird.

$$\begin{array}{ccc} L^p(L^2) & \xrightarrow{U_t} & L^p(L^2) \\ \cup & & \downarrow P \\ J(L^p) & & J(L^p) \\ J \uparrow & & \uparrow J \\ L^p & \xrightarrow{T_t} & L^p \end{array}$$

(c) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \pi/2$.

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b). Wir definieren die Einbettung J und die Projektion P wie in Abschnitt 3.4. Die Dilatationsgleichung $JT_t = PU_tJ$ kann dann ganz analog zum Hilbertraumfall überprüft werden: Nach Definition von U_t ist

$$(U_tJx)(s, \omega) = (Jx)(s + t, \omega) = \begin{cases} A^{1/2}T_sT_tx(\omega), & s > -t, \\ 0, & s \leqslant -t. \end{cases}$$

Hierauf soll die Projektion P angewandt werden. Wegen Lemma 3.4.6 gilt

$$PU_tJx = P\left((s, \omega) \mapsto \begin{cases} A^{1/2}T_sT_tx(\omega), & s > 0 \\ 0, & s \leqslant 0 \end{cases}\right) = P(JT_tx) = JT_tx,$$

wobei im letzten Schritt die Projektionseigenschaft von P benutzt wurde.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Es sei $-B$ der Erzeuger der Gruppe (U_t). Gemäß Satz 3.3.2 hat B für $\theta > \pi/2$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül. Nun folgt die Behauptung genau wie im Hilbertraumfall, also wie im Beweis von Theorem 2.3.3. □

4 Bessere Winkel durch $\mathcal{R}$-Sektorialität

Wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, kommt es in $X = L^p$ bei der Frage nach der Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls auf den Sektor S_θ an.

Insbesondere können wir mit Theorem 3.5.1 aus der Existenz einer Dilatation bisher nur schließen, dass der betrachtete Operator auf jedem Sektor S_θ mit $\theta > \pi/2$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül besitzt.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, diesen Winkel zu verbessern: Mit Hilfe einer zusätzlichen Voraussetzung für den Operator ($\mathcal{R}$-Sektorialität) erhalten wir bei der Dilatationscharakterisierung in L^p wieder eine Äquivalenz wie im Hilbertraumfall.

Mit dieser zusätzlichen Voraussetzung folgt aus der Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls für ein $\theta > \mu$, wobei μ der Typ des Operators ist, wieder die Existenz für alle $\theta > \mu$. Ein allgemeineres Ergebnis dieser Art findet man in [14, Theorem 5.3].

4.1 $\mathcal{R}$-Beschränktheit

Um den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit einführen zu können, benötigen wir die so genannten *Rademacher-Funktionen* $r_1, r_2, \ldots$, die definiert sind durch

$$r_n(t) := \operatorname{sgn}\bigl(\sin(2^n \pi t)\bigr) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)\,.$$

Die ersten drei Funktionen der Folge sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

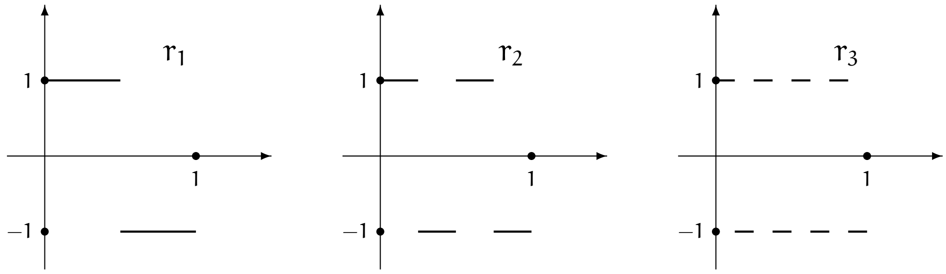

Abbildung 4.1: Die Rademacher-Funktionen r_1, r_2 und r_3.

4.1.1 Definition Es seien X und Y Banachräume. Eine Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ heißt R-*beschränkt*, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ sowie $x_1, \dots, x_m \in X$ gilt:

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^m r_n(t) T_n x_n \right\|_Y^2 dt \right)^{1/2} \leqslant C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^m r_n(t) x_n \right\|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

Eine R-beschränkte Menge von Operatoren ist beschränkt, denn für $m = 1$ ergibt sich auf der linken Seite der Abschätzung

$$\left(\int_0^1 \|r_1(t) T_1 x_1\|^2 \, dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \|T_1 x_1\|^2 \, dt \right)^{1/2} = \|T_1 x_1\|,$$

und auf der rechten Seite $\|x_1\|$. Folglich ist $\|T\| \leqslant C$ für alle $T \in \mathcal{T}$.

4.1.2 Bemerkung [30, Abschnitt 1.f] Sind X und Y Hilberträume, so ist eine Menge $\mathcal{T}$ genau dann R-beschränkt, wenn sie beschränkt ist.

Im L^p-Falle kann man die Bedingung für R-Beschränktheit ganz ohne Verwendung der Rademacher-Funktionen formulieren: Eine Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(L^p)$ ist genau dann R-beschränkt, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ sowie $x_1, \dots, x_m \in X$ gilt:

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^m |T_n x_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant C \left\| \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Sektorielle Operatoren sind dadurch charakterisiert, dass die Menge

$$\left\{ zR(z, A) : z \notin \overline{S_\theta} \right\}$$

für gewisse θ beschränkt ist. Fordert man statt der Beschränktheit die R-Beschränktheit, so kommt man zur Definition der R-Sektorialität.

4.1.3 Definition Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ heißt R-*sektoriell*, wenn ein $\mu \in (0, \pi)$ existiert, für das die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gilt $\sigma(A) \subset \overline{S_\mu}$.

(b) Für jedes $\theta \in (\mu, \pi)$ ist $\left\{ zR(z, A) : z \notin \overline{S_\theta} \right\}$ eine R-beschränkte Menge.

Man sagt dann, A sei R-*sektoriell vom Typ* μ. Gilt dies für alle $\mu \in (0, \pi)$, so bezeichnet man A als R-*sektoriell vom Typ* 0.

Im Hilbertraum bringt diese Definition gemäß Bemerkung 4.1.2 nichts Neues: Jeder sektorielle Operator ist dort R-sektoriell.

4.2 Bessere Winkel in L^p

Wie schon im letzten Kapitel betrachten wir wieder den Fall $X = L^p(\Omega, \nu)$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist und $1 < p < \infty$ gilt.

Für spezielle Mengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(L^p)$ kann man die R-Beschränktheit mit Hilfe von Quadrat-Funktionen charakterisieren.

4.2.1 Lemma [30, Abschnitt 4] Es sei $N : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}(L^p)$ eine stark stetige Funktion. Die Menge $\{ N(t) : t \in \mathbb{R}^+ \}$ ist genau dann R-beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\left\| \left(\int_0^\infty |N(t)f(t)(\cdot)|^2 \, dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant C \left\| \left(\int_0^\infty |f(t, \cdot)|^2 \, dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

für jede Funktion $f \in L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}^+))$ gilt, wobei wir hier wieder $f(t)$ für die Funktion $\omega \mapsto f(t, \omega) = f(\omega)(t)$ schreiben.

4.2.2 Bemerkung Die in Lemma 4.2.1 auftretende Abschätzung lässt sich auch mit der Norm des Raumes $L^p(L^2)$ ausdrücken:

$$\left\| (t, \omega) \mapsto N(t)f(t)(\omega) \right\|_{L^p(L^2)} \leqslant C \|f\|_{L^p(L^2)},$$

wobei hier mit $L^p(L^2)$ der Raum $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}^+))$ gemeint ist. Man beachte, dass auf der linken Seite nicht $N(t)f(t,\omega)$ stehen darf, da $N(t)$ zunächst auf die L^p-Funktion $f(t) = f(t,\cdot)$ angewandt werden muss, bevor ω eingesetzt werden kann. Aus diesem Grunde steht auch in Lemma 4.2.1 auf der linken Seite $N(t)f(t)(\cdot)$ und nicht $N(t)f(t,\cdot)$.

Abkürzend schreiben wir auch $t \mapsto N(t)f(t)$ statt $(t,\omega) \mapsto N(t)f(t)(\omega)$, d.h. wir fassen dies als eine auf $\mathbb{R}^+$ definierte Abbildung auf, deren Werte dann Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$ sind.

Die R-Beschränktheit überträgt sich auf die Menge $\{\, N(t)' : t \in \mathbb{R}^+\}$ der dualen Operatoren. Man vergleiche hierzu [15, Corollary 5.6].

4.2.3 Satz Es sei $N : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}(L^p)$ eine stark stetige Funktion und die Menge $\{\, N(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ sei R-beschränkt. Dann ist auch $\{\, N(t)' : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{B}(L^q)$ eine R-beschränkte Menge.

Beweis Auch $t \mapsto N(t)'$ ist eine stark stetige Funktion. Um die Behauptung zu zeigen, werden wir die Abschätzung aus Lemma 4.2.1 in ihrer in Bemerkung 4.2.2 angegebenen Form überprüfen. Für jedes $g \in L^q(L^2)$ gilt

$$\big\|t \mapsto N(t)'g(t)\big\|_{L^q(L^2)} = \sup\big\{\, |\langle f, t \mapsto N(t)'g(t)\rangle| : f \in L^p(L^2),\ \|f\| = 1 \,\big\}\,.$$

Also existiert insbesondere ein $f \in L^p(L^2)$ mit $\|f\| = 1$ und

$$\begin{aligned}\big\|t \mapsto N(t)'g(t)\big\| &\leqslant 2\langle f, t \mapsto N(t)'g(t)\rangle = 2\int_0^\infty \langle f(t), N(t)'g(t)\rangle_{(L^p,L^q)}\,dt \\ &= 2\int_0^\infty \langle N(t)f(t), g(t)\rangle_{(L^p,L^q)}\,dt = 2\langle t \mapsto N(t)f(t), g\rangle \\ &\leqslant 2\big\|t \mapsto N(t)f(t)\big\|_{L^p(L^2)} \cdot \|g\| \leqslant 2C\|g\|\,.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde $\|f\| = 1$ und die vorausgesetzte R-Beschränktheit der Menge $\{\, N(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ verwendet. Nach Bemerkung 4.2.2 bedeutet dies, dass $\{\, N(t)' : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{B}(L^q)$ eine R-beschränkte Menge ist. □

Außer diesen Ergebnissen werden wir noch die folgende Überlegung zu den in Abschnitt 3.2 definierten Quadrat-Funktionen-Abschätzungen benötigen.

4.2.4 Bemerkung Betrachten wir die Funktion $\psi(z) := z^{1/2}(e^{i\varphi} - z)^{-1}$, wobei $0 < \varphi < \pi$, so gilt für jeden sektoriellen Operator A vom Typ $\mu < \varphi$

$$\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |(tA)^{1/2}(e^{i\varphi} - tA)^{-1}x(\cdot)|^2 \frac{dt}{t}$$
$$= \int_0^\infty |A^{1/2}R(e^{i\varphi}/t, A)x(\cdot)|^2 \frac{dt}{t^2}.$$

Mit der Substitution $s = 1/t$ folgt dann

$$\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |A^{1/2}R(e^{i\varphi}s, A)x(\cdot)|^2 \, ds.$$

Also genügt A genau dann einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich ψ, wenn für A die Abschätzung

$$\left\|(t, \omega) \mapsto A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x(\omega)\right\|_{L^p(L^2)} \leqslant Q\|x\|_{L^p}$$

besteht. Im folgenden Beweis werden wir dies wieder abkürzen zu

$$\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} \leqslant Q\|x\|_{L^p}.$$

4.2.5 Theorem Der Operator $A \in \mathcal{A}(L^p)$ sei injektiv und R-sektoriell vom Typ μ. Für ein gewisses $\theta > \mu$ besitze A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül. Dann hat A für alle $\tau > \mu$ einen beschränkten $H^\infty(S_\tau)$-Funktionalkalkül.

Beweis Wir wählen ein α mit $\theta < \alpha < \pi$. Gemäß Theorem 3.2.2 genügt A dann einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich jedes $\psi \in \Psi(S_\alpha)$. Wählt man ein β mit $\alpha < \beta < \pi$, so liegt die Funktion

$$z \mapsto \frac{z^{1/2}}{e^{i\beta} - z}$$

in $\Psi(S_\alpha)$ und mit Bemerkung 4.2.4 ergibt sich

$$\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} \leqslant Q\|x\|_{L^p} \qquad \text{für alle } x \in L^p. \tag{4.2.1}$$

Nun betrachten wir ein beliebiges φ mit $\mu < \varphi < \pi$ und zeigen, dass A einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich $\psi(z) := z^{1/2}(e^{i\varphi} - z)^{-1}$ genügt. Mit der Resolventengleichung ergibt sich

$$R(e^{i\varphi}t, A) - R(e^{i\beta}t, A) = t(e^{i\beta} - e^{i\varphi})R(e^{i\varphi}t, A)R(e^{i\beta}t, A),$$

so dass man für alle $x \in L^p$

$$A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x = A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x + t(e^{i\beta} - e^{i\varphi})R(e^{i\varphi}t, A)A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x$$

erhält. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} &\leqslant \left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} \\ &\quad + 2\left\|t \mapsto tR(e^{i\varphi}t, A)A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)}\end{aligned}$$

für alle $x \in L^p$. Wegen der vorausgesetzten R-Sektorialität des Operators A ist die Menge

$$\{\, tR(e^{i\varphi}t, A) : t > 0 \,\}$$

R-beschränkt, und mit Lemma 4.2.1 erhält man

$$\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} \leqslant (1 + 2C)\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\beta}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)},$$

wobei C die in Lemma 4.2.1 vorkommende Konstante ist. Mit Gleichung (4.2.1) folgt

$$\left\|t \mapsto A^{1/2}R(e^{i\varphi}t, A)x\right\|_{L^p(L^2)} \leqslant (1 + 2C)Q\|x\|_{L^p},$$

und dies bedeutet (Bemerkung 4.2.4), dass A einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich der Funktion $\psi(z) = z^{1/2}(e^{i\varphi} - z)^{-1}$ genügt.

Um Theorem 3.2.4 verwenden zu können, müssen wir auch noch für A' eine Quadrat-Funktionen-Abschätzung zeigen. Wegen der vorausgesetzten R-Sektorialität von A ist die Menge

$$\{\, tR(e^{-i\varphi}t, A) : t > 0 \,\}$$

R-beschränkt. Gemäß Satz 4.2.3 ist dann auch

$$\{\, tR(e^{-i\varphi}t, A') : t > 0 \,\}$$

R-beschränkt. Weil auch A' Quadrat-Funktionen-Abschätzungen bezüglich aller Funktionen aus $\Psi(S_\alpha)$ genügt, folgt ganz analog zu den für A gemachten Überlegungen: A' genügt einer Quadrat-Funktionen-Abschätzung bezüglich $\chi(z) := z^{1/2}(e^{-i\varphi} - z)^{-1}$. Gemäß Beispiel 3.2.3 gilt $\psi\chi \in \Psi_\varphi(S_\varphi -)$. Aus Theorem 3.2.4 folgt somit, dass A für alle $\tau > \varphi$ einen beschränkten $H^\infty(S_\tau)$-Funktionalkalkül hat. Da $\varphi > \mu$ beliebig war, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

4.3 Charakterisierung mittels Dilatationen

Aus Theorem 3.5.1 ergibt sich mit Theorem 4.2.5 nun unmittelbar das folgende Ergebnis:

4.3.1 Theorem Es sei $1 < p < \infty$, und der injektive Operator $A \in \mathcal{A}(L^p)$ sei R-sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$. Weiter sei (T_t) die von $-A$ erzeugte beschränkte analytische Halbgruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta \in (\mu, \pi)$.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : L^p \to L^p(L^2)$ mit $\|x\|_{L^p} \sim \|Jx\|_{L^p(L^2)}$ und $JT_t = PU_tJ$ für alle $t \geqslant 0$, wobei P eine stetige Projektion auf $J(L^p)$ ist und $U_t \in \mathcal{B}(L^p(L^2))$ durch $(U_t f)(\omega) := f(\cdot + t, \omega)$ definiert wird.

$$
\begin{array}{ccc}
L^p(L^2) & \xrightarrow{U_t} & L^p(L^2) \\
\cup & & \downarrow {\scriptstyle P} \\
J(L^p) & & J(L^p) \\
{\scriptstyle J} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle J} \\
L^p & \xrightarrow{T_t} & L^p
\end{array}
$$

(c) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta \in (\mu, \pi)$.

5 Verallgemeinerte Quadratfunktionen

Kalton und Weis haben verallgemeinerte Quadratfunktionen in beliebigen Banachräumen eingeführt [15]. Da wir diese Methoden für den Dilatationssatz im allgemeinen Fall verwenden wollen, wiederholen wir in diesem Kapitel die wichtigsten Ergebnisse.

5.1 Bisher betrachtete Quadratfunktionen

Es wird im Folgenden darum gehen, die für Hilberträume und L^p-Räume gefundene Dilatationscharakterisierung auf allgemeinere Räume zu übertragen. Im Hilbertraum haben wir Ausdrücke der Form

$$\left\| t \mapsto \|f(t)\|_H \right\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{5.1.1}$$

für Funktionen $f : \mathbb{R} \to H$ betrachtet, und im L^p-Falle waren für Funktionen $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ Ausdrücke der Bauart

$$\left\| \omega \mapsto \|f(\cdot, \omega)\|_{L^2} \right\|_{L^p} = \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t, \cdot)|^2 \, dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \tag{5.1.2}$$

relevant. Wie lassen sich diese so genannten Quadratfunktionen für beliebige Banachräume verallgemeinern? Um diese Frage zu beantworten, werden wir die Methoden aus [15] verwenden.

5.2 Umformulierung für Quadratfunktionen in L^p

Die im Hilbertraumfall verwendete Norm aus (5.1.1) können wir auch für einen beliebigen Banachraum X aufschreiben, doch schon im Falle $X = L^p$

wurde deutlich, dass dies nicht die richtige Verallgemeinerung liefert. Wir versuchen daher, den Ausdruck in (5.1.2) so umzuformen, dass die speziellen Eigenschaften von L^p nicht mehr benötigt werden.

Betrachten wir eine Funktion $f \in L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ wieder ein σ-endlicher Maßraum ist, so können wir zu f einen stetigen Operator $u_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^p(\Omega)$ mit $\|u_f\| \leqslant \|f\|_{L^p(L^2)}$ definieren. Setzen wir nämlich

$$\big(u_f(h)\big)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t,\omega)h(t)\,dt \qquad \text{für } h \in L^2(\mathbb{R}),$$

so ist u_f offenbar linear, und für $\omega \in \Omega$ gilt die Abschätzung

$$\big|\big(u_f(h)\big)(\omega)\big| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t,\omega)h(t)\,dt\right| = \big|\big(f(\cdot,\omega),\overline{h}\big)_{L^2}\big| \leqslant \|f(\cdot,\omega)\|_{L^2} \cdot \|h\|_{L^2}.$$

Damit folgt die behauptete Stetigkeit:

$$\|u_f(h)\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p(L^2)} \cdot \|h\|_{L^2}.$$

Wir formen jetzt den Ausdruck in (5.1.2) so um, dass der Operator u_f vorkommt. Dazu sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$. Dann ist auch $(\overline{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis, und für $\omega \in \Omega$ gilt

$$\|f(\cdot,\omega)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|(f(\cdot,\omega),\overline{e_n})_{L^2}\big|^2 = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{m} \big|\big(u_f(e_n)\big)(\omega)\big|^2.$$

Nun sei (g_n) eine Folge unabhängiger, $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma, \mathfrak{B}, P)$, auf den sich auch die im Folgenden gebildeten und mit $\mathbb{E}$ bezeichneten Erwartungswerte beziehen.

Wegen $\mathbb{E}\, g_n^2 = 1$ und der Unabhängigkeit der g_n gilt

$$\sum_{n=1}^{m} \big|\big(u_f(e_n)\big)(\omega)\big|^2 = \mathbb{E} \sum_{n=1}^{m} \big|\big(u_f(e_n)\big)(\omega) g_n\big|^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m} \big(u_f(e_n)\big)(\omega) g_n\right|^2.$$

Gemäß der so genannten *Khintchine-Gleichheit* [5, S. 238] hat man mit einer gewissen Konstante $C_p > 0$

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m} \big(u_f(e_n)\big)(\omega) g_n\right|^2\right)^{1/2} = C_p \left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m} \big(u_f(e_n)\big)(\omega) g_n\right|^p\right)^{1/p}.$$

Insgesamt erhalten wir also die Gleichheit

$$\|f(\cdot,\omega)\|_{L^2} = \sup_{m\in\mathbb{N}} C_p \left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m} (u_f(e_n))(\omega) g_n\right|^p\right)^{1/p}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten der Gleichung die L^p-Norm und wendet rechts den Satz von der monotonen Konvergenz an, so folgt

$$\Big\|\omega \mapsto \|f(\cdot,\omega)\|_{L^2}\Big\|_{L^p} = C_p \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|\omega \mapsto \left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m} (u_f(e_n))(\omega) g_n\right|^p\right)^{1/p}\right\|_{L^p}.$$

Der Satz von Fubini liefert schließlich

$$\|f\|_{L^p(L^2)} = C_p \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u_f(e_n)\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

Diesen Ausdruck kann man für jeden Banachraum X hinschreiben, wenn man die L^p-Norm durch die Norm auf X ersetzt; allerdings verbleibt eine Abhängigkeit von p, die wir noch beseitigen wollen: Gemäß [24, Corollary 4.9] ist die durch diesen Ausdruck definierte Norm äquivalent zu der durch

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u_f(e_n)\right\|_{L^p}^2\right)^{1/2} \tag{5.2.1}$$

gegebenen. Ersetzt man hier die L^p-Norm durch die Norm eines beliebigen Banachraums X, so hat man sich vollständig vom L^p-Fall gelöst.

5.3 Quadratfunktionen in beliebigen Banachräumen

Wie im letzten Abschnitt sei (g_n) eine Folge unabhängiger, $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma, \mathfrak{B}, P)$.

5.3.1 Definition [15, Definition 4.1] Ist H ein Hilbertraum und X ein Banachraum, so bezeichne $\ell_+(H,X)$ den Vektorraum aller $u \in \mathcal{L}(H,X)$ mit $\|u\|_\ell < \infty$, wobei

$$\|u\|_\ell := \sup\left\{ \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u(e_n)\right\|^2\right)^{1/2} \,\middle|\, m\in\mathbb{N},\ (e_n)_{n=1}^m \text{ ist ONS in } H \right\}.$$

Hierbei steht »ONS« abkürzend für Orthonormalsystem. Den Vektorraum $\ell(H,X) \subset \ell_+(H,X)$ definieren wir als den Abschluss der Menge der endlichdimensionalen Operatoren in $\ell_+(H,X)$.

Der einzige Unterschied zwischen der so definierten Norm und der im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Darstellung (5.2.1) ist, dass jetzt bei der Bildung des Supremums beliebige endliche Orthonormalsysteme betrachtet werden. Dies erklärt sich einfach dadurch, dass in einem beliebigen Hilbertraum H, im Gegensatz zum separablen Raum $L^2(\mathbb{R})$, keine abzählbare Orthonormalbasis existieren muss. Aus den obigen Überlegungen ergibt sich aber trotzdem, dass für $H = L^2(\mathbb{R})$ und $X = L^p$ die so definierte Norm $f \mapsto \|u_f\|_\ell$ äquivalent zu $\|\cdot\|_{L^p(L^2)}$ ist, da jedes ONS $(e_n)_{n=1}^m$ zu einer Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ergänzt werden kann.

5.3.2 Bemerkung Nach Definition der $\|\cdot\|_\ell$-Norm gilt für ein beliebiges $e_1 \in H$ mit $\|e_1\| = 1$ stets

$$\|u\|_\ell \geqslant \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{1} g_n u(e_n)\right\|^2\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}\|g_1 u(e_1)\|^2\right)^{1/2} = \|u(e_1)\|\,.$$

Folglich hat man $\ell_+(H,X) \subset \mathcal{B}(H,X)$ und $\|u\|_{\mathcal{B}(H,X)} \leqslant \|u\|_\ell$.

Umgekehrt ist jeder stetige, endlichdimensionale Operator $u : H \to X$ in $\ell(H,X)$ enthalten. Um dies nachzuweisen, reicht es, den Fall $\dim u(H) = 1$ zu betrachten, für den sich $\|u\|_\ell$ leicht berechnen lässt:

5.3.3 Lemma Es sei $u : H \to X$ ein stetiger Operator mit $\dim u(H) = 1$, d.h. es sei $u = (\cdot, h)x$ mit $h \in H$ und $x \in X$. Dann gilt $\|u\|_\ell = \|h\| \cdot \|x\|$.

Beweis Für jedes Orthonormalsystem $(e_n)_{n=1}^m$ in H ergibt sich

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u(e_n)\right\|^2 = \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n\,(e_n,h)x\right\|^2 = \|x\|^2 \cdot \mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m}(e_n,h)g_n\right|^2.$$

Da die g_n unabhängig und $N(0,1)$-verteilt sind, ist für $\alpha_n \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariable $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$ wiederum normalverteilt, mit Erwartungswert 0 und Varianz $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2$. Das bedeutet

$$\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{m}(e_n,h)g_n\right|^2 = \sum_{n=1}^{m}\big(\mathrm{Re}(e_n,h)\big)^2 + \sum_{n=1}^{m}\big(\mathrm{Im}(e_n,h)\big)^2 = \sum_{n=1}^{m}|(e_n,h)|^2,$$

und wir erhalten mit Hilfe der Besselschen Ungleichung

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u(e_n)\right\|^2 = \|x\|^2 \cdot \sum_{n=1}^{m} |(e_n, h)|^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|h\|^2 .$$

Ist $h \neq 0$, so kann man das Orthonormalsystem mit $m = 1$ und $e_1 = h/\|h\|$ betrachten und auf diese Weise bei der letzten Abschätzung Gleichheit erhalten. Damit ist $\|u\|_\ell = \|x\| \cdot \|h\|$ bewiesen. □

In [15] wird implizit das folgende Ergebnis verwendet:

5.3.4 Satz Der normierte Raum $(\ell_+(H,X), \|\cdot\|_\ell)$ ist ein Banachraum.

Beweis Es sei (u_k) eine Cauchyfolge in $\ell_+(H,X)$. Dann ist (u_k) insbesondere beschränkt in $\ell_+(H,X)$, es gilt also $\|u_k\|_\ell \leqslant M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein gewisses $M > 0$. Zudem ist (u_k) gemäß Bemerkung 5.3.2 auch eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(H,X)$; diese konvergiert in $\mathcal{B}(H,X)$ gegen einen Operator u.

Wir wollen nun zeigen, dass (u_k) auch in $\ell_+(H,X)$ gegen u konvergiert. Dazu sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|u_j - u_k\|_\ell \leqslant \epsilon$ für $j,k \geqslant K$, d.h. für jedes Orthonormalsystem $(e_n)_{n=1}^m$ in H hat man

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n (u_j - u_k)(e_n)\right\|^2 \leqslant \epsilon^2 \qquad \text{für } j,k \geqslant K .$$

Da für jedes $\sigma \in \Sigma$

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n(\sigma)(u_j - u_k)(e_n)\right\|^2 \xrightarrow{j\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{m} g_n(\sigma)(u - u_k)(e_n)\right\|^2$$

gilt, und man eine integrierbare Majorante mit Hilfe der Abschätzung

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n(\sigma)(u_j - u_k)(e_n)\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |g_n(\sigma)| \cdot \|(u_j - u_k)(e_n)\| \leqslant 2M \sum_{n=1}^{m} |g_n(\sigma)|$$

erhält, liefert der Lebesguesche Konvergenzsatz für alle $k \geqslant K$

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n (u - u_k)(e_n)\right\|^2 = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n (u_j - u_k)(e_n)\right\|^2 \leqslant \epsilon^2 .$$

Da dies für jedes endliche Orthonormalsystem (e_n) gilt, folgt $\|u - u_k\|_\ell \leqslant \epsilon$ für $k \geqslant K$. Somit gilt $u \in \ell_+(H,X)$ und $u_k \to u$ in $\ell_+(H,X)$, d.h. die Vollständigkeit von $(\ell_+(H,X), \|\cdot\|_\ell)$ ist bewiesen. □

Da $\ell(H, X)$ als abgeschlossener Unterraum von $\ell_+(H, X)$ definiert ist, folgt aus Satz 5.3.4 unmittelbar das folgende Ergebnis:

5.3.5 Korollar Auch der normierte Raum $(\ell(H, X), \|\cdot\|_\ell)$ ist ein Banachraum.

5.3.6 Satz [15, Remark 4.2 a)] Falls X nicht c_0 enthält, also keinen Unterraum besitzt, der isomorph zu c_0 ist, gilt $\ell(H, X) = \ell_+(H, X)$.

5.4 Dualität bei Quadratfunktionen

Bei den Betrachtungen für den L^p-Fall haben wir nicht nur $L^p(L^2)$, sondern auch den dazu dualen Raum $L^q(L^2)$ verwendet. Es stellt sich daher die Frage, wie der Dualraum von $\ell(H, X)$ aussieht. Um darauf eine Antwort zu finden, benötigen wir den folgenden Begriff.

5.4.1 Definition Es sei H ein Hilbertraum und $w : H \to H$ ein linearer Operator. Wenn es $h_n, y_n \in H$ gibt, so dass eine Darstellung der Form

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (\cdot, h_n) y_n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$$

für w existiert, dann heißt w *nuklear*, und die *Spur* (engl. trace) von w wird definiert durch

$$\mathrm{tr}(w) := \sum_{n=1}^{\infty} (y_n, h_n)\,. \tag{5.4.1}$$

Wegen $\|(\cdot, h_n)y_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|h_n\| \cdot \|y_n\|$ konvergiert die Reihendarstellung von w in $\mathcal{B}(H)$, jeder nukleare Operator ist also stetig.

5.4.2 Bemerkung Um einzusehen, dass die Definition der Spur unabhängig von der gewählten Darstellung des Operators w ist, überprüfen wir, dass für $w = 0$ die Summe in (5.4.1) verschwindet. Zu diesem Zweck sei (e_k) ein abzählbares Orthonormalsystem in H mit $[y_1, y_2, \ldots] \subset [e_1, e_2, \ldots]$. Dann gilt

$y_n = \sum_k (y_n, e_k) e_k$ und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n, h_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_k (y_n, e_k) e_k, h_n \Big) = \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} (y_n, e_k)(e_k, h_n)$$
$$= \sum_k \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (e_k, h_n) y_n, e_k \Big) = \sum_k (w(e_k), e_k) = 0\,.$$

Die Vertauschung der Summationsreihenfolge ist gerechtfertigt durch die vorausgesetzte Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|y_n\|$ und die Abschätzung

$$\sum_k \big|(y_n, e_k)(e_k, h_n)\big| \leqslant \Big(\sum_k |(y_n, e_k)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_k |(e_k, h_n)|^2 \Big)^{1/2} = \|y_n\| \cdot \|h_n\|\,.$$

Mit diesen Überlegungen haben wir auch das folgende Ergebnis gezeigt: Falls (e_k) eine Orthonormalbasis des Bildraums von w ist, gilt

$$\operatorname{tr}(w) = \sum_k (w(e_k), e_k)\,.$$

Da insbesondere stetige Operatoren mit endlichdimensionalem Bildraum nuklear sind, ist die folgende Definition sinnvoll.

5.4.3 Definition [15, Abschnitt 5] Ist H ein Hilbertraum und X ein Banachraum, so bezeichne $\ell'_+(H, X')$ den Vektorraum aller $v \in \mathcal{B}(H, X')$ mit $\|v\|_{\ell'} < \infty$, wobei

$$\|v\|_{\ell'} := \sup\big\{ |\operatorname{tr}(v'u)| : u \in \ell(H, X),\ \dim\big(u(H)\big) < \infty,\ \|u\|_{\ell} \leqslant 1 \big\}\,.$$

Den Vektorraum $\ell'(H, X') \subset \ell'_+(H, X')$ definieren wir als den Abschluss der Menge der endlichdimensionalen Operatoren in $\ell'_+(H, X')$.

Mit v' wird dabei der Operator $v' : X'' \to H$ bezeichnet, der durch

$$(v'x'', h)_H = \langle x'', vh \rangle_{(X'', X')} \qquad \text{für alle } x'' \in X'' \text{ und } h \in H$$

charakterisiert ist. Um $v'u$ zu bilden, betten wir X kanonisch in X'' ein.

5.4.4 Bemerkung Ist $(e_n)_{n=1}^m$ eine Orthonormalbasis des endlichdimensionalen Bildraums von $v'u$, so gilt nach Bemerkung 5.4.2

$$\operatorname{tr}(v'u) = \sum_{n=1}^{m} ((v'u)(e_n), e_n)_H = \sum_{n=1}^{m} \langle u(e_n), v(e_n)\rangle_{(X,X')} .$$

Es gibt noch eine weitere Darstellung für diese Spur: Gilt $u = \sum_{n=1}^{m}(\cdot, h_n)y_n$, so ergibt sich $v'u = \sum_{n=1}^{m}(\cdot, h_n)v'(y_n)$, und man erhält

$$\operatorname{tr}(v'u) = \sum_{n=1}^{m} (v'(y_n), h_n) = \sum_{n=1}^{m} (y_n, v(h_n)) .$$

Insbesondere folgt aus $v_k \to v$ in $\mathcal{B}(H, X')$ also $\operatorname{tr}(v_k'u) \to \operatorname{tr}(v'u)$.

5.4.5 Lemma Für $v \in \ell_+'(H, X')$ gilt $\|v\|_{\mathcal{B}(H,X')} \leqslant \|v\|_{\ell'}$.

Beweis Betrachten wir für $x \in X$ und $h \in H$ mit $\|x\| \leqslant 1$ und $\|h\| \leqslant 1$ den Operator $u := (\cdot, h)x$, so wissen wir aus Lemma 5.3.3, dass $\|u\|_\ell \leqslant 1$ gilt. Gemäß der Definition von $\|\cdot\|_{\ell'}$ folgt also $|\operatorname{tr}(v'u)| \leqslant \|v\|_{\ell'}$, und da sich $\operatorname{tr}(v'u) = \langle x, v(h)\rangle$ aus Bemerkung 5.4.4 ergibt, folgt

$$|\langle x, v(h)\rangle| \leqslant \|v\|_{\ell'} .$$

Nimmt man hier das Supremum über alle derartigen x und h, so erhält man auf der linken Seite $\|v\|_{\mathcal{B}(H,X')}$, und die Behauptung ist bewiesen. □

5.4.6 Satz Bei $\ell_+'(H, X')$ und $\ell'(H, X')$, jeweils mit $\|\cdot\|_{\ell'}$ als Norm, handelt es sich um Banachräume.

Beweis Ist (v_k) eine Cauchyfolge in $\ell_+'(H, X')$, so folgt mit Lemma 5.4.5, dass (v_k) auch in $\mathcal{B}(H, X')$ eine Cauchyfolge ist und mithin gegen ein gewisses $v \in \mathcal{B}(H, X')$ konvergiert.

Um zu zeigen, dass $v_k \to v$ in $\ell_+'(H, X')$ gilt, sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\|v_j - v_k\|_{\ell'} \leqslant \epsilon$ für $j, k \geqslant K$ gilt. Für jeden endlichdimensionalen Operator $u \in \ell(H, X)$ mit $\|u\|_\ell \leqslant 1$ gilt also

$$\left|\operatorname{tr}\big((v_j - v_k)'u\big)\right| \leqslant \epsilon .$$

Für $j \to \infty$ folgt daraus, wie wir in Bemerkung 5.4.4 sahen,

$$\left|\operatorname{tr}\big((v - v_k)'u\big)\right| \leqslant \epsilon ,$$

und damit erhalten wir $\|v - v_k\|_{\ell'} \leqslant \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $v \in \ell'_+(H, X')$ und $v_k \to v$ in $\ell'_+(H, X')$.

Somit ist die Vollständigkeit von $\ell'_+(H, X')$ bewiesen, und die Vollständigkeit von $\ell'(H, X')$ ist dann ebenfalls klar. □

5.4.7 Lemma [15, Proposition 5.2] Es bestehen die Inklusionen $\ell_+(H, X') \subset \ell'_+(H, X')$ sowie $\ell(H, X') \subset \ell'(H, X')$, und für jedes $v \in \ell_+(H, X')$ hat man die Abschätzung $\|v\|_{\ell'} \leqslant \|v\|_\ell$.

Beweis Es sei $v \in \ell_+(H, X')$ und für ein $u \in \ell(H, X)$ mit endlichdimensionalem Bildraum gelte $\|u\|_\ell \leqslant 1$. Gemäß Bemerkung 5.4.4 hat man

$$\operatorname{tr}(v'u) = \sum_{n=1}^{m} \langle u(e_n), v(e_n) \rangle$$

mit einem gewissen Orthonormalsystem $(e_n)_{n=1}^m$ in H. Somit ist

$$\operatorname{tr}(v'u) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(g_j g_k) \langle u(e_j), v(e_k) \rangle \,,$$

weil $g_1, g_2, \ldots$ unabhängige, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen sind. Aus

$$|\operatorname{tr}(v'u)| = \left| \mathbb{E} \left\langle \sum_{j=1}^{m} g_j u(e_j), \sum_{k=1}^{m} g_k v(e_k) \right\rangle \right| \leqslant \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{j=1}^{m} g_j u(e_j) \right\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{m} g_k v(e_k) \right\| \right)$$

folgt dann mit der Schwarzschen Ungleichung

$$|\operatorname{tr}(v'u)| \leqslant \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^{m} g_j u(e_j) \right\|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^{m} g_k v(e_k) \right\|^2 \right)^{1/2} \leqslant \|u\|_\ell \cdot \|v\|_\ell \leqslant \|v\|_\ell \,,$$

und nach Definition von $\|v\|_{\ell'}$ bedeutet dies $\|v\|_{\ell'} \leqslant \|v\|_\ell$. Die Inklusion $\ell_+(H, X') \subset \ell'_+(H, X')$ und die Normabschätzung sind damit bewiesen.

Ist (v_n) eine Folge in $\ell_+(H, X')$, die bezüglich $\|\cdot\|_\ell$ gegen ein $v \in \ell_+(H, X')$ konvergiert, so gilt $v_n \to v$ nach dem bisher Bewiesenen auch in dem Raum $(\ell'_+(H, X'), \|\cdot\|_{\ell'})$. Definitionsgemäß ist also auch $\ell(H, X') \subset \ell'(H, X')$. □

5.4.8 Satz [15, Proposition 5.1] Für $u \in \ell(H, X)$ und $v \in \ell'_+(H, X')$ ist $v'u$ stets ein nuklearer Operator. Bezüglich der Spur-Dualität $\langle u, v \rangle_\ell := \operatorname{tr}(v'u)$ ist $\ell'_+(H, X')$ der Dualraum von $\ell(H, X)$.

Wenn die betrachteten Räume explizit genannt werden sollen, verwendet man bei Dualitäten Schreibweisen wie $\langle x, x' \rangle_{(X,X')}$. Im Falle von $\langle \cdot, \cdot \rangle_\ell$ werden wir stattdessen die Schreibweise

$$_{\ell(H,X)}\langle u, v \rangle_{\ell'_+(H,X')}$$

benutzen, um sehr lange, unübersichtliche Indizes zu vermeiden.

5.4.9 Bemerkung Mit der in Bemerkung 5.4.2 angegebenen Darstellung der Spur ergibt sich: Besitzt H eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis (e_n), so gilt

$$\langle u, v \rangle_\ell = \mathrm{tr}(v'u) = \sum_n ((v'u)(e_n), e_n)_H = \sum_n \langle u(e_n), v(e_n) \rangle_{(X,X')} .$$

5.5 Weitere Eigenschaften der Quadratfunktionen

Wir werden nun speziell den Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ betrachten, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist. Gewisse Operatoren aus $\ell(L^2(\Omega), X)$ lassen sich dann durch Funktionen $f : \Omega \to X$ darstellen.

Da hierbei die Messbarkeit und Integrierbarkeit derartiger Funktionen eine Rolle spielt, wollen wir in der folgenden Bemerkung einige grundlegende Definitionen und Aussagen zusammenfassen, die in diesem Zusammenhang wichtig sind. Genaueres findet man in den Arbeiten von Bochner [2] und Pettis [23], sowie in [3], [8] und [12]. Einen guten Überblick über verschiedene Integralbegriffe liefert auch [11].

5.5.1 Bemerkung Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \to X$ *einfach*, wenn sie eine Darstellung der Form $f(\cdot) = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(\cdot) x_k$ mit $A_k \in \mathfrak{A}$ und $x_k \in X$ besitzt. Eine einfache Funktion heißt *integrierbar*, wenn sie eine derartige Darstellung mit $\nu(A_k) < \infty$ für $k = 1, \ldots, n$ hat. Man setzt dann

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\nu := \sum_{k=1}^n \nu(A_k) x_k .$$

Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *stark messbar* oder *Bochner-messbar*, wenn es eine Folge einfacher Funktionen gibt, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Sie heißt *schwach messbar*, wenn für jedes $x' \in X'$ die skalarwertige Funktion $x' \circ f$ messbar ist.

Die Funktion f ist genau dann stark messbar, wenn sie schwach messbar ist und zudem eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ existiert, so dass $f(\Omega \setminus N) \subset X$ separabel ist. Aus der starken Messbarkeit von f folgt die Messbarkeit der reellwertigen Funktion $\|f(\cdot)\|$, und wenn man $h : \Omega \to \mathbb{C}$ als messbar voraussetzt, dann ist $h(\cdot)f(\cdot)$ wiederum stark messbar.

Falls zu $f : \Omega \to X$ eine Folge (f_n) integrierbarer einfacher Funktionen existiert, die punktweise fast überall gegen f konvergiert, und für die

$$\int_\Omega \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\nu(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt, heißt f *Bochner-integrierbar*, und das Bochner-Integral von f wird definiert durch

$$\int_\Omega f(\omega) \, d\nu(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) \, d\nu(\omega) .$$

Die Funktion f ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn sie stark messbar ist und zudem $\int_\Omega \|f(\omega)\| \, d\nu(\omega) < \infty$ gilt.

5.5.2 Definition Mit $\mathcal{P}^2(\Omega, X)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller stark messbaren Funktionen $f : \Omega \to X$ mit der Eigenschaft, dass $x' \circ f \in L^2(\Omega)$ für alle $x' \in X'$ gilt.

5.5.3 Satz Für jede Funktion $f \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$ gilt

$$\|f\|_{\mathcal{P}^2} := \sup\big\{ \|x' \circ f\|_{L^2} : x' \in X', \ \|x'\| \leqslant 1 \big\} < \infty .$$

Beweis Wir müssen zeigen, dass der Operator $M : X' \to L^2(\Omega)$, der durch $Mx' := x' \circ f$ definiert wird, stetig ist. Offenbar ist er linear, und wenn wir noch seine Abgeschlossenheit zeigen können, dann folgt die Stetigkeit aus dem Graphensatz. Es gelte also $x'_n \to x'$ in X' und $Mx'_n \to \varphi$ in $L^2(\Omega)$. Statt eine geeignete Teilfolge auszuwählen, nehmen wir o. B. d. A. an, dass bereits $Mx'_n \to \varphi$ punktweise fast überall gilt. Da andererseits $Mx'_n = x'_n \circ f$ punktweise gegen $x' \circ f = Mx'$ konvergiert, ist $Mx' = \varphi$ bewiesen. □

Jede Funktion aus $\mathcal{P}^2(\Omega, X)$ erlaubt es uns, einen linearen Operator von $L^2(\Omega)$ nach X zu definieren. Man findet dies in [15] vor Definition 4.5.

5.5.4 Satz und Definition Ist $f \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$, so wird durch

$$\langle u_f(\varphi), x'\rangle_{(X,X')} = \int_\Omega \langle f(\omega), x'\rangle \varphi(\omega)\, d\nu(\omega) \quad \text{für } x' \in X' \text{ und } \varphi \in L^2(\Omega)$$

ein stetiger Operator $u_f : L^2(\Omega) \to X$ definiert.

Wir sagen, dass die Funktion f den Operator u_f repräsentiert, und setzen $\|f\|_\ell := \|u_f\|_\ell$. Mit $\ell_+(\Omega, X)$ bzw. $\ell(\Omega, X)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$ mit $u_f \in \ell_+(L^2(\Omega), X)$ bzw. $u_f \in \ell(L^2(\Omega), X)$. Um das Maß deutlich zu machen, schreiben wir auch $\ell_+(\Omega, \nu, X)$ und $\ell(\Omega, \nu, X)$.

Ebenso wird durch $g \in \mathcal{P}^2(\Omega, X')$ ein stetiger Operator $v_g : L^2(\Omega) \to X'$ definiert, und wiederum setzen wir $\|g\|_{\ell'} := \|v_g\|_{\ell'}$. Auch die Funktionenmengen $\ell'_+(\Omega, X')$ und $\ell'(\Omega, X')$ werden analog definiert.

Beweis Offenbar hängt $R(f, x', \varphi) := \int_\Omega \langle f(\omega), x'\rangle \varphi(\omega)\, d\nu(\omega)$ linear von x' und φ ab, und wir erhalten

$$\begin{aligned} |R(f, x', \varphi)| &\leqslant \int_\Omega \left|\langle f(\omega), x'\rangle \varphi(\omega)\right| d\nu(\omega) \\ &\leqslant \|x' \circ f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \leqslant \|x'\| \cdot \|f\|_{\mathcal{P}^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $R(f, \cdot, \varphi) \in X''$ und $\|R(f, \cdot, \varphi)\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{P}^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}$ für jedes $\varphi \in L^2(\Omega)$, und durch $\widetilde{u}_f(\varphi) := R(f, \cdot, \varphi)$ wird dann ein stetiger Operator $\widetilde{u}_f : L^2(\Omega) \to X''$ definiert. Jetzt müssen wir nur noch $\widetilde{u}_f(L^2(\Omega)) \subset \iota(X)$ zeigen, wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Injektion bezeichnet.

Ist $\varphi \in L^2(\Omega)$ so gewählt, dass f auf $\operatorname{supp}\varphi$ beschränkt ist und zudem $\nu(\operatorname{supp}\varphi) < \infty$ gilt, so erhält man $\|\varphi(\cdot)f(\cdot)\| \leqslant C|\varphi(\cdot)|$ und $\varphi \in L^1(\Omega)$. Somit ist $\|\varphi(\cdot)f(\cdot)\|$ integrierbar, und da f stark messbar ist, existiert das Integral

$$I(f, \varphi) := \int_\Omega \varphi(\omega) f(\omega)\, d\nu(\omega)\,.$$

Nun gilt offenbar $\langle I(f, \varphi), x'\rangle = R(f, x', \varphi)$ für alle $x' \in X'$, d.h. wir können $\widetilde{u}_f(\varphi) = \iota(I(f, \varphi)) \in \iota(X)$ folgern.

Weil derartige φ, wie wir in Lemma 5.5.5 zeigen werden, in $L^2(\Omega)$ dicht liegen, folgt die Inklusion $\widetilde{u}_f(L^2(\Omega)) \subset \iota(X)$ aus der Stetigkeit von $\widetilde{u}_f$ und der Abgeschlossenheit von $\iota(X)$ in X''. □

In [15] wird implizit das folgende Lemma verwendet:

5.5.5 Lemma Es sei $f : \Omega \to X$ stark messbar. Dann gilt $\overline{B_f} = L^2(\Omega)$ für

$$B_f := \{\, \varphi \in L^2(\Omega) : f \text{ ist beschränkt auf } \operatorname{supp}\varphi \text{ und } \nu(\operatorname{supp}\varphi) < \infty \,\}.$$

Beweis Es sei $\varphi \in L^2(\Omega)$ beliebig. Wir definieren

$$\Omega_n := \{\, \omega \in \Omega : |\varphi(\omega)| > 1/n,\ \|f(\omega)\| < n \,\}.$$

Dann ist $\nu(\Omega_n) < \infty$ wegen $\varphi \in L^2(\Omega)$ und $|\varphi| > 1/n$ auf Ω_n. Zudem ist f auf Ω_n beschränkt, so dass $\varphi_n := \varphi \cdot \chi_{\Omega_n} \in B_f$ gilt.

Offenbar gilt $\varphi_n \to \varphi$ punktweise, und wegen $|\varphi_n| \leqslant |\varphi|$ folgt mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz $\varphi_n \to \varphi$ in $L^2(\Omega)$. □

Wir können $\|f\|_\ell < \infty$ zwar nicht für alle $f \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$ erwarten, aber bei gewissen Funktionen ist klar, dass sie Operatoren aus $\ell(H, X)$ liefern:

5.5.6 Lemma Aus $h \in L^2(\Omega)$ und $x \in X$ folgt $h(\cdot)x \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$, und es ergibt sich $\|h(\cdot)x\|_\ell = \|h\|_{L^2} \cdot \|x\|$ sowie $h(\cdot)x \in \ell(\Omega, X)$.

Beweis Da $\omega \mapsto x$ stark messbar ist, gilt dies auch für $h(\cdot)x$, und wegen $x' \circ h(\cdot)x = h(\cdot)\langle x, x'\rangle \in L^2(\Omega)$ für alle $x' \in X'$ ergibt sich $h(\cdot)x \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$.

Definitionsgemäß gilt für $u := u_{h(\cdot)x}$

$$\langle u(\varphi), x'\rangle = \int_\Omega \langle h(\omega)x, x'\rangle \varphi(\omega)\, d\nu(\omega) = \langle (\varphi, \overline{h})_{L^2} x, x'\rangle,$$

und damit ist $u = (\cdot, \overline{h})x$. Aus Lemma 5.3.3 folgt $\|u\| = \|\overline{h}\| \cdot \|x\| = \|h\| \cdot \|x\|$, und weil u endlichdimensional ist, gilt $u \in \ell(L^2(\Omega), X)$. □

5.5.7 Satz Die Menge $T(\Omega, X)$ sei definiert durch

$$T(\Omega, X) := \left\{ \sum_{n=1}^{m} h_n(\cdot)x_n \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ h_n \in L^2(\Omega),\ x_n \in X \right\}.$$

Dann gilt $T(\Omega, X) \subset \ell(\Omega, X)$, und $\{\, u_f : f \in T(\Omega, X) \,\}$ liegt dicht in $\ell(L^2(\Omega), X)$. Insbesondere ist also auch $\{\, u_f : f \in \ell(\Omega, X) \,\}$ dicht in $\ell(L^2(\Omega), X)$.

Beweis Die Inklusion $T(\Omega, X) \subset \ell(\mathbb{R}, X)$ folgt sofort aus Lemma 5.5.6, denn $u_{f+g} = u_f + u_g$. Wie wir im Beweis von Lemma 5.5.6 gesehen haben, repräsentiert die Funktion $h(\cdot)x$ den Operator $u = (\cdot, \overline{h})x$. Folglich werden durch die Funktionen aus $T(\Omega, X)$ genau die endlichdimensionalen, stetigen Operatoren auf $L^2(\Omega)$ repräsentiert, d.h. nach Definition von $\ell(L^2(\Omega), X)$ liegt $\{ u_f : f \in T(\Omega, X) \}$ dicht in $\ell(L^2(\Omega), X)$. □

5.5.8 Korollar Die Menge $T_S(\mathbb{R}, X)$ sei definiert durch

$$T_S(\mathbb{R}, X) := \left\{ \sum_{n=1}^{m} h_n(\cdot)x_n \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ h_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ x_n \in X \right\},$$

wobei $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ die Menge der Schwartz-Funktionen bezeichnet. Dann hat man $T_S(\mathbb{R}, X) \subset \ell(\mathbb{R}, X)$, und $\{ u_f : f \in T_S(\mathbb{R}, X) \}$ liegt dicht in $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$.

Beweis Da $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt und $\|h(\cdot)x\|_\ell = \|h\|_{L^2} \cdot \|x\|$ gilt, liegt $T_S(\mathbb{R}, X)$ bezüglich $\|\cdot\|_\ell$ dicht in $T(\mathbb{R}, X)$, und wir erhalten die Behauptung aus Satz 5.5.7. □

Aufgrund der Definition von $\ell'_+(L^2(\Omega), X')$ scheint es schwierig zu sein, für gegebene Operatoren $u \in \ell(L^2(\Omega), X)$ und $v \in \ell'_+(L^2(\Omega), X')$ die Dualität $\langle u, v \rangle_\ell$ konkret auszurechnen. Werden diese Operatoren jedoch durch Funktionen repräsentiert, so ist dies leicht möglich. Man kann sich dann nämlich darauf beschränken, mit den Funktionen zu rechnen:

5.5.9 Satz [15, Corollary 5.5] Für Funktionen $f \in \ell(\Omega, X)$ und $g \in \ell'_+(\Omega, X')$ gilt

$$\langle u_f, v_g \rangle_\ell = \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle \, d\nu(\omega)\,.$$

Etwas Vergleichbares würde man gerne auch bei Operatoren machen; insbesondere möchte man Operatoren, die auf $L^2(\Omega)$ definiert sind, auf den Raum $\ell(L^2(\Omega), X)$ fortsetzen.

Dass dies möglich ist, zeigt das folgende Ergebnis, wobei $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ σ-endliche Maßräume sind.

5.5.10 Theorem [15, Corollary 4.8] Es sei $M \in \mathcal{B}(L^2(\Omega_1), L^2(\Omega_2))$, und mit $M' \in \mathcal{B}(L^2(\Omega_2), L^2(\Omega_1))$ werde der duale Operator bezüglich der Dualitäten $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega_k} f(\omega)g(\omega)\, d\nu_k(\omega)$ bezeichnet. Dann ist durch

$$\mathcal{M}u := u \circ M'$$

ein Operator $\mathcal{M} : \ell(L^2(\Omega_1), X) \to \ell(L^2(\Omega_2), X)$ mit $\|\mathcal{M}\| \leqslant \|M\|$ definiert, und dieser ist eine Fortsetzung von M im folgenden Sinne: Ist $f \in \ell(\Omega_1, X)$ gegeben, und gilt $\mathcal{M}u_f = u_g$ für ein $g \in \mathcal{P}^2(\Omega_2, X)$, so ist

$$\langle g(\cdot), x' \rangle = M\big(\langle f(\cdot), x' \rangle\big) \qquad \text{für alle } x' \in X'.$$

5.5.11 Bemerkung Betrachten wir eine Funktion $f \in \ell(\Omega_1, X)$ von der Form $f(\cdot) = h(\cdot)x$ mit $h \in L^2(\Omega_1)$ und $x \in X$, so gilt

$$\begin{aligned}
\langle (\mathcal{M}u_f)(\varphi), x' \rangle = \langle u_f M'\varphi, x' \rangle &= \int_{\Omega_1} \langle f(\omega), x' \rangle (M'\varphi)(\omega)\, d\nu_1(\omega) \\
&= \langle x, x' \rangle \int_{\Omega_1} h(\omega)(M'\varphi)(\omega)\, d\nu_1(\omega) \\
&= \langle x, x' \rangle \int_{\Omega_2} (Mh)(\omega)\varphi(\omega)\, d\nu_2(\omega) \\
&= \int_{\Omega_2} \langle (Mh)(\omega)x, x' \rangle \varphi(\omega)\, d\nu_2(\omega)\,,
\end{aligned}$$

und das bedeutet, dass $\mathcal{M}u_f$ durch die Funktion $(Mh)(\cdot)x$ repräsentiert wird. Als Ergebnis haben wir also

$$\mathcal{M}u_{h(\cdot)x} = u_{Mh(\cdot)x} \qquad \text{für } h \in L^2(\Omega_1) \text{ und } x \in X\,.$$

5.5.12 Bemerkung Ist die Funktion f nicht von der gerade betrachteten Bauart, so erhalten wir für $\langle (\mathcal{M}u_f)(\varphi), x' \rangle$ die Darstellung

$$\int_{\Omega_1} \langle f(\omega), x' \rangle (M'\varphi)(\omega)\, d\nu_1(\omega) = \int_{\Omega_2} \big(M\langle f(\cdot), x' \rangle\big)(\omega)\varphi(\omega)\, d\nu_2(\omega)\,.$$

Existiert nun eine stark messbare Funktion $g : \Omega_2 \to X$ mit

$$M\langle f(\cdot), x' \rangle = \langle g(\cdot), x' \rangle \qquad \text{für alle } x' \in X'\,,$$

so ergibt sich, dass $\mathcal{M}u_f$ durch die Funktion g repräsentiert wird. Etwas unpräzise kann man sagen, dass dieses »Hineinziehen« von M in die Dualität $\langle f(\cdot), x' \rangle$ immer dann möglich ist, wenn »klar« ist, wie M auf Funktionen $f : \Omega_1 \to X$ fortgesetzt werden kann. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn M ein Multiplikationsoperator ist.

5.5.13 Satz Jeder isometrische Isomorphismus $M : L^2(\Omega_1) \to L^2(\Omega_2)$ kann zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{M} : \ell(L^2(\Omega_1), X) \to \ell(L^2(\Omega_2), X)$ fortgesetzt werden, so dass $\mathcal{M} u_{h(\cdot)x}$ für $h \in L^2(\Omega_1)$ und $x \in X$ durch die Funktion $(Mh)(\cdot)x$ repräsentiert wird.

Beweis Wegen Theorem 5.5.10 und Bemerkung 5.5.11 muss nur noch gezeigt werden, dass $\mathcal{M}$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Gemäß Theorem 5.5.10 können wir auch den Operator $M^{-1} : L^2(\Omega_2) \to L^2(\Omega_1)$ zu einem Operator $\mathcal{M}_1 : \ell(L^2(\Omega_2), X) \to \ell(L^2(\Omega_1), X)$ fortsetzen. Auf $T(\Omega_1, X)$ bzw. $T(\Omega_2, X)$ gilt wegen Bemerkung 5.5.11 offenbar $\mathcal{M}_1\mathcal{M} = \mathrm{id}$ bzw. $\mathcal{M}\mathcal{M}_1 = \mathrm{id}$, und da die Menge $T(\Omega_k, X)$ nach Satz 5.5.7 in $\ell(L^2(\Omega_k), X)$ dicht liegt, ergibt sich $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^{-1}$. Wegen $\|\mathcal{M}\| \leqslant \|M\| = 1$ und $\|\mathcal{M}_1\| \leqslant \|M^{-1}\| = 1$ folgt die Behauptung. □

Wenn eine Funktionenfolge punktweise konvergiert, was kann man dann über die $\|\cdot\|_\ell$-Norm der Grenzfunktion aussagen? Auf diese Frage gibt der folgende Satz eine Antwort.

5.5.14 Satz [15, Lemma 4.10 b)] Es seien $f_n, f \in \mathcal{P}^2(\Omega, X)$. Gilt dann fast überall $f_n(\omega) \to f(\omega)$, so folgt $\|f\|_\ell \leqslant \liminf \|f_n\|_\ell$.

5.5.15 Satz [15, Remark 5.4] Entsprechendes gilt auch für die $\|\cdot\|_{\ell'}$-Normen.

6 Dilatationen im allgemeinen Fall

Mit den Methoden aus Kapitel 5 können wir nun die Dilatationscharakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls für Banachräume endlichen Kotyps beweisen.

6.1 Die Dilatation (U_t)

In diesem Abschnitt sei X ein beliebiger Banachraum.

6.1.1 Definition Es sei $t \in \mathbb{R}$. Der Operator $U_t : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird definiert als die Fortsetzung des in $L^2(\mathbb{R})$ durch $h \mapsto h(\cdot + t)$ definierten Operators nach $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ gemäß Theorem 5.5.10, also durch

$$(U_t u)(\varphi) = u\big(\varphi(\cdot - t)\big) \qquad \text{für } u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \text{ und } \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

6.1.2 Lemma Dann ist $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe von Isometrien.

Beweis Aus Satz 5.5.13 ergibt sich, dass der Operator U_t ein isometrischer Isomorphismus ist. Die Gruppeneigenschaft ist nach Definition klar, also müssen wir nur noch $U_t u \to u$ für $t \to 0$ beweisen.

Betrachten wir zunächst den Operator $u_{h(\cdot)x}$ mit $h \in L^2(\mathbb{R})$ und $x \in X$; nach Bemerkung 5.5.11 ist $U_t u_{h(\cdot)x} = u_{h(\cdot+t)x}$. Mit Lemma 5.5.6 ergibt sich

$$\|U_t u_{h(\cdot)x} - u_{h(\cdot)x}\|_\ell = \|u_{(h(\cdot+t)-h(\cdot))x}\|_\ell = \|h(\cdot + t) - h\|_{L^2} \cdot \|x\| \xrightarrow{t\to 0} 0\,.$$

Damit haben wir auch $U_t u_f \to u_f$ für $t \to 0$ und alle $f \in T(\mathbb{R}, X)$. Für beliebiges $u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ gibt es nach Satz 5.5.7 eine Folge (u_n) von Operatoren, die durch Funktionen aus $T(\mathbb{R}, X)$ repräsentiert werden, mit $u_n \to u$. Wegen $\|U_t\| = 1$ ist

$$\begin{aligned}\|U_t u - u\|_\ell &\leqslant \|U_t u - U_t u_n\|_\ell + \|U_t u_n - u_n\|_\ell + \|u_n - u\|_\ell \\ &\leqslant \|u - u_n\|_\ell + \|U_t u_n - u_n\|_\ell + \|u_n - u\|_\ell ,\end{aligned}$$

und es folgt die Konvergenz $U_t u \to u$ für $t \to 0$. □

6.1.3 Satz Es sei $-B$ der Erzeuger der C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Dann ist B ein sektorieller Operator vom Typ $\pi/2$; dieser ist injektiv und dicht definiert und hat dichtes Bild. Für jedes $\theta > \pi/2$ hat der Operator B einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül.

Beweis Wegen Bemerkung 5.5.11 gilt

$$U_t u_{h(\cdot)x} - u_{h(\cdot)x} = u_{(h(\cdot+t)-h(\cdot))x}$$

für $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, und damit folgt nach Definition des Erzeugers

$$-B u_{h(\cdot)x} = u_{h'(\cdot)x} .$$

Nun ist bekanntlich $h' = \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} h$, wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet und M durch $(Mf)(t) := itf(t)$ definiert ist. Somit wird der Operator $-Bu_{h(\cdot)x}$ durch die Funktion $(\mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} h)(\cdot)x$ repräsentiert.

Jetzt sei $z \notin \overline{S_{\pi/2}}$, also insbesondere $z \notin i\mathbb{R}$; wir wollen zeigen, dass z in der Resolventenmenge von B liegt. Für $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ wird der Operator $(z - B)u_{h(\cdot)x}$ nach den eben gemachten Überlegungen durch die Funktion

$$(\mathcal{F}^{-1} M_z^{-1} \mathcal{F} h)(\cdot)x$$

repräsentiert, wobei M_z der durch $(M_z f)(t) := f(t)/(z + it)$ gegebene beschränkte Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R})$ ist.

Wir bilden daher gemäß Theorem 5.5.10 die Fortsetzung $\mathcal{M}_z$ von M_z, setzen die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ gemäß Satz 5.5.13 zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{F}_\ell$ auf $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ fort, und betrachten

$$R_z := \mathcal{F}_\ell^{-1} \mathcal{M}_z \mathcal{F}_\ell .$$

Es gilt $(z - B)R_z u = R_z(z - B)u = u$ für $u = u_{h(\cdot)x}$ mit $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, und damit auch für alle $u \in T_S(\mathbb{R}, X)$.

Die Menge $K := \{ u_f : f \in T_S(\mathbb{R}, X) \}$ liegt dicht in $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ und wird durch U_t in sich abgebildet; daher liegt K in $\mathcal{D}(B)$ bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_B$ dicht [9, Proposition II.1.7]. Somit ergibt sich $(z - B)R_z = \mathrm{id}$ auf ganz $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ und $R_z(z - B) = \mathrm{id}$ auf $\mathcal{D}(B)$.

Wir wissen jetzt, dass $z \in \rho(B)$ und $R(z, B) = R_z$ für alle $z \notin \overline{S_{\pi/2}}$ gilt. Die für die Sektorialität nötige Abschätzung der Norm $\|R(z, B)\|$ erhalten wir aus $R(z, B) = \mathcal{F}_\ell^{-1}\mathcal{M}_z\mathcal{F}_\ell$, denn $\mathcal{F}_\ell$ ist eine Isometrie, und für $\mathcal{M}_z$ gilt

$$\|\mathcal{M}_z\| \leqslant \|M_z\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(z, i\mathbb{R})}\,.$$

Als Gruppenerzeuger ist der Operator $-B$ natürlich dicht definiert, und da die Menge $\{ f' : f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \}$ in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt, hat B auch dichtes Bild. Daraus wiederum folgt, dass B injektiv ist (Bemerkung 1.3.7).

Abschließend müssen wir noch die Existenz eines beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalküls für alle $\theta > \pi/2$ beweisen. Dazu halten wir ein $\theta > \pi/2$ fest und wählen $\alpha \in (\pi/2, \theta)$. Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ ist dann

$$\psi(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)R(z, B)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\mathcal{F}_\ell^{-1}\mathcal{M}_z\mathcal{F}_\ell\, dz\,.$$

Die Operatoren $\mathcal{F}_\ell^{-1}$ und $\mathcal{F}_\ell$ lassen sich aus dem Integral herausziehen; für das verbleibende Integral werden wir nun

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\mathcal{M}_z\, dz = \mathcal{M}_\psi \tag{6.1.1}$$

beweisen, wobei $\mathcal{M}_\psi$ die Fortsetzung des durch $(M_\psi f)(t) := \psi(-it)f(t)$ gegebenen Operators ist. Daraus folgt dann $\psi(B) = \mathcal{F}_\ell^{-1}\mathcal{M}_\psi\mathcal{F}_\ell$, und wegen

$$\|\mathcal{M}_\psi\| \leqslant \|M_\psi\| \leqslant \|\psi\|_\infty$$

ergibt sich die Abschätzung $\|\psi(B)\| \leqslant \|\psi\|_\infty$, was bedeutet, dass B einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat.

Zum Beweis von (6.1.1) sei $f \in \ell(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ und $x' \in X'$. Wenn wir die linke Seite von (6.1.1) mit L_ψ bezeichnen, dann ist

$$\langle (L_\psi u_f)(\varphi), x'\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \psi(z)\langle (\mathcal{M}_z u_f)(\varphi), x'\rangle\, dz\,.$$

Gemäß Bemerkung 5.5.12 gilt

$$\langle (\mathcal{M}_z u_f)(\varphi), x' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle f(t), x' \rangle}{z + it} \varphi(t) \, dt \, .$$

Durch Vertauschen der Integrale und Anwenden des Cauchyschen Integralsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle (L_\psi u_f)(\varphi), x' \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), x' \rangle \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \frac{\psi(z)}{z + it} \, dz \right) \varphi(t) \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), x' \rangle \psi(-it) \varphi(t) \, dt = \langle (\mathcal{M}_\psi u_f)(\varphi), x' \rangle \, , \end{aligned}$$

und da $\ell(\mathbb{R}, X)$ in $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ dicht liegt, ist (6.1.1) bewiesen. □

6.1.4 Bemerkung Wie im L^p-Fall (Bemerkung 3.3.3) lässt sich auch hier $\mathcal{M}_f$ für jede auf $i\mathbb{R}$ beschränkte, messbare Funktion f definieren, und diese Definition könnte man auch auf B ausdehnen.

6.2 Der Mond-Dual

Es sei A ein Operator mit einem beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül, wobei $\theta < \pi/2$. Für die Konstruktion der Einbettung J und der Projektion P würden wir gerne, wie im L^p-Fall, den dualen Operator A' verwenden. Es gilt $\rho(A') = \rho(A)$, und für alle $z \in \rho(A)$ hat man $R(z, A') = R(z, A)'$. Also ist auch A' sektoriell.

Falls der zugrunde liegende Banachraum nicht reflexiv ist, ergibt sich jedoch das Problem, dass A' nicht mehr dicht definiert sein muss. In diesem Falle ist A' aber nicht für den verwendeten Funktionalkalkül geeignet; offensichtlich kann $-A'$ dann auch keine analytische Halbgruppe erzeugen.

Die Lösung dieses Problems besteht darin, sich auf einen geeigneten Unterraum von X' zurückzuziehen und den Operator A' dort zu betrachten.

6.2.1 Definition Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ ein dicht definierter, sektorieller Operator. Der *Sonnen-Dualraum* $X^\odot$ ist definiert als der Abschluss von $\mathcal{D}(A')$ in $(X', \|\cdot\|_{X'})$, und der *Sonnen-Dualoperator* $A^\odot$ zu A als der Teil von A' in $X^\odot$.

Im reflexiven Fall gilt $X^{\odot} = X'$. Aber auch wenn X nicht reflexiv ist, kann $X^{\odot}$ nicht zu klein werden; man weiß nämlich, dass durch

$$\|x\|^{\odot} := \sup\{\, |\langle x, x^{\odot}\rangle| : x^{\odot} \in X^{\odot},\ \|x^{\odot}\| \leqslant 1 \,\}$$

eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm auf X gegeben ist [21, Theorem 1.3.5].

Da $A^{\odot}$ zwar dicht definiert ist, aber kein dichtes Bild haben muss (wie das Beispiel $A(x_n) = (x_n/n)$ auf ℓ^1 zeigt), werden wir zu einem noch kleineren Unterraum von X' übergehen, der allerdings noch groß genug ist, um wiederum eine äquivalente Norm zu erzeugen.

6.2.2 Definition Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ ein dicht definierter, sektorieller Operator mit dichtem Bild. Der *Mond-Dualraum* $X^{\#}$ ist definiert als

$$X^{\#} := \overline{\mathcal{D}(A')} \cap \overline{\mathcal{R}(A')}\,,$$

und der *Mond-Dualoperator* $A^{\#}$ zu A als der Teil von A' in $X^{\#}$. Es gilt also

$$A^{\#}x' = A'x' \quad \text{für } x' \in \mathcal{D}(A^{\#}) = \{\, x' \in \mathcal{D}(A') \cap \overline{\mathcal{R}(A')} : A'x' \in \overline{\mathcal{D}(A')} \,\}\,.$$

6.2.3 Satz Die Einbettung $\iota : X \to (X^{\#})'$, die durch $(\iota x)(x^{\#}) := x^{\#}(x)$ definiert wird, ist ebenso wie ihre Inverse stetig, d.h.

$$\|x\|^{\#} := \sup\{\, |\langle x, x^{\#}\rangle| : x^{\#} \in X^{\#},\ \|x^{\#}\| \leqslant 1 \,\}$$

definiert eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm auf X.

Beweis Offenbar gilt $\|x\|^{\#} \leqslant \|x\|$ für alle $x \in X$. Um auch eine Abschätzung in umgekehrter Richtung zu beweisen, wählen wir ein beliebiges $x' \in X'$ mit $\|x'\| \leqslant 1$ und setzen

$$x_n^{\#} := \tfrac{1}{n}R(-\tfrac{1}{n}, A')x' - nR(-n, A')x' \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Dann gilt $x_n^{\#} \in \mathcal{D}(A')$, und wegen

$$\begin{aligned} x_n^{\#} &= (\tfrac{1}{n} + A' - A')R(-\tfrac{1}{n}, A')x' + (-n - A' + A')R(-n, A')x' \\ &= -x' - A'R(-\tfrac{1}{n}, A')x' + x' + A'R(-n, A')x' \\ &= -A'R(-\tfrac{1}{n}, A')x' + A'R(-n, A')x' \end{aligned}$$

hat man auch $x_n^\# \in \mathcal{R}(A')$, d.h. es ist $x_n^\# \in X^\#$. Gemäß Satz 1.3.6 gilt

$$\tfrac{1}{n}R(-\tfrac{1}{n}, A)x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für alle } x \in \overline{\mathcal{R}(A)} = X\,,$$

und Satz 1.3.6 liefert auch die Konvergenz

$$-nR(-n, A)x \xrightarrow{n\to\infty} x \qquad \text{für alle } x \in \overline{\mathcal{D}(A)} = X\,.$$

Damit ergibt sich für jedes $x \in X$

$$\langle x, x_n^\# \rangle = \big\langle \tfrac{1}{n}R(-\tfrac{1}{n}, A)x - nR(-n, A)x, x' \big\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, x' \rangle\,.$$

Der Operator A ist sektoriell, also gilt $\|tR(-t, A)\| \leqslant C$ für alle $t > 0$. Folglich ist $\|x_n^\#\| \leqslant 2C$, und wir erhalten

$$\|x\|^\# \geqslant \lim_{n\to\infty} |\langle x, x_n^\#/2C \rangle| = \frac{|\langle x, x' \rangle|}{2C} \qquad \text{für alle } x \in X\,.$$

Supremumsbildung über alle x' mit $\|x'\| \leqslant 1$ liefert $2C\|x\|^\# \geqslant \|x\|$. □

6.2.4 Satz Der dicht definierte Operator A sei sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ und habe dichtes Bild. Dann folgt:

(a) Es gilt $\rho(A) = \rho(A') = \rho(A^\#)$ und für $z \in \rho(A^\#)$ ist $R(z, A^\#)$ die Einschränkung von $R(z, A') = R(z, A)'$ auf $X^\#$.

(b) Auch der Operator $A^\#$ ist dicht definiert, sektoriell vom Typ μ und hat dichtes Bild.

(c) Die beschränkte analytische Halbgruppe $(T_t^\#)$, die von $-A^\#$ erzeugt wird, ist die Einschränkung von (T_t') auf $X^\#$, wobei (T_t) die von $-A$ erzeugte, beschränkte analytische Halbgruppe bezeichnet.

(d) Wenn A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat, dann gilt das auch für $A^\#$.

Beweis (a) Es ist bekannt, dass $\rho(A) = \rho(A')$ und $R(z, A') = R(z, A)'$ gilt. Nun sei $z \in \rho(A)$; wir wollen $z \in \rho(A^\#)$ beweisen. Man hat

$$\langle x, R(z, A)'(z - A^\#)x^\# \rangle = \langle (z - A)R(z, A)x, x^\# \rangle = \langle x, x^\# \rangle$$

für alle $x^\# \in \mathcal{D}(A^\#)$ und $x \in X$, also $R(z, A)'(z - A^\#) = \mathrm{id}$ auf $\mathcal{D}(A^\#)$.

Für jedes $x^\# \in X^\#$ gilt $y^\# := R(z,A)'x^\# \in \mathcal{D}(A^\#)$, wie wir nun zeigen werden: Offenbar ist $y^\# \in \mathcal{D}(A')$. Weil $R(z,A)'$ stetig ist und $\mathcal{R}(A')$ in sich abbildet, wird auch $\overline{\mathcal{R}(A')}$ durch $R(z,A)'$ in sich abgebildet; es gilt also auch $y^\# \in \overline{\mathcal{R}(A')}$. Und schließlich ist $A'R(z,A)'$ stetig und bildet $\mathcal{D}(A')$ in sich ab, so dass wegen $x^\# \in \overline{\mathcal{D}(A')}$ auch $A'y^\# \in \overline{\mathcal{D}(A')}$ folgt. Damit ist $y^\# \in \mathcal{D}(A^\#)$ bewiesen, und wegen

$$\langle x, (z-A^\#)R(z,A)'x^\#\rangle = \langle R(z,A)(z-A)x, x^\#\rangle = \langle x, x^\#\rangle$$

für alle $x^\# \in X^\#$ und $x \in \mathcal{D}(A)$ ergibt sich $(z-A^\#)R(z,A)' = \mathrm{id}$ auf ganz $X^\#$. Wir wissen jetzt, dass $z \in \rho(A^\#)$ gilt, und dass $R(z,A^\#)$ die Einschränkung von $R(z,A)'$ auf $X^\#$ ist.

Abschließend müssen wir noch zeigen, dass auch $\rho(A^\#) \subset \rho(A)$ gilt. Es sei also $z \in \rho(A^\#)$. Nach Satz 6.2.3 existiert ein $\alpha > 0$, so dass es zu jedem $x \in X$ ein $x^\# \in X^\#$ mit $\|x^\#\| \leqslant 1$ und $|\langle x, x^\#\rangle| \geqslant \alpha\|x\|$ gibt. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ und das zugehörige $x^\#$ folgt mit $\beta := \|R(z,A^\#)\|^{-1}$

$$\begin{aligned}\|(z-A)x\| &\geqslant \beta\big|\langle (z-A)x, R(z,A^\#)x^\#\rangle\big| \\ &= \beta\big|\langle x, (z-A^\#)R(z,A^\#)x^\#\rangle\big| = \beta|\langle x, x^\#\rangle| \geqslant \alpha\beta\|x\|\,.\end{aligned}$$

Damit ist die Injektivität von $z-A$ bewiesen, und auch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(z-A)$ ergibt sich unmittelbar: Ist (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(A)$ mit $(z-A)x_n \to y$ für $n \to \infty$, so folgt aus der Ungleichung, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Bezeichnen wir den Grenzwert mit x, so folgt $x \in \mathcal{D}(A)$ und $(z-A)x = y$ aus der Abgeschlossenheit von A.

Nun ist noch zu zeigen, dass der Operator $z-A$ dichtes Bild hat. Für $z = 0$ ist dies klar; im Folgenden sei also $z \neq 0$. Hätte $z-A$ kein dichtes Bild, so gäbe es ein $x' \in X'$ mit $x' \neq 0$ und $\langle (z-A)x, x'\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. Dann ist $x' \in \mathcal{D}(A')$ und $(z-A)'x' = 0$, also $A'x' = zx' \in \mathcal{D}(A')$ und $x' = A'x'/z \in \mathcal{R}(A')$. Somit haben wir $x' \in \mathcal{D}(A^\#)$ und $(z-A^\#)x' = 0$. Wegen $z \in \rho(A^\#)$ folgt $x' = 0$ im Widerspruch zur Wahl von x'.

(b) Dies folgt aus Satz 1.3.6.

(c) Gemäß (b) erzeugt $-A^\#$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(T_t^\#)$. Da $R(z,A^\#)$ die Einschränkung von $R(z,A)'$ auf $X^\#$ ist, ergibt sich nach Definition des Funktionalkalküls $\psi(A^\#) = \psi(A)'|_{X^\#}$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$. Wegen

$T_t = \psi(tA) - R(-1, tA)$ mit $\psi(z) := e^{-z} - (1+z)^{-1}$ und der entsprechenden Darstellung von $T_t^\#$ folgt die Behauptung.

(d) Wegen $\psi(A^\#) = \psi(A)'|_{X^\#}$ und $\|\psi(A)'\| = \|\psi(A)\|$ erhält man die Abschätzung $\|\psi(A^\#)\| \leqslant \|\psi(A)\| \leqslant C\|\psi\|_\infty$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$. □

6.3 Die Einbettung J

Für die Definition der Einbettung J haben wir im L^p-Fall verwendet, dass aus der Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls Quadrat-Funktionen-Abschätzungen folgen. Um im allgemeineren Fall entsprechend vorgehen zu können, werden wir im Folgenden Banachräume betrachten, die endlichen Kotyp besitzen.

6.3.1 Definition Es sei $2 \leqslant q < \infty$. Ein Banachraum X hat den *Kotyp* q, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in X$

$$\left(\sum_{n=1}^m \|x_n\|^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^m r_n(t)x_n\right\|^q dt\right)^{1/q}$$

gilt, wobei (r_n) die aus Abschnitt 4.1 bekannte Folge der Rademacher-Funktionen ist. Wenn X einen Kotyp $q \in [2, \infty)$ hat, sagen wir auch, X habe *endlichen Kotyp*.

6.3.2 Beispiel Der Raum $L^p(\Omega)$ hat für $1 \leqslant p \leqslant 2$ den Kotyp 2 und für $2 \leqslant p < \infty$ den Kotyp p. Die Räume $L^\infty(\Omega)$ und c_0 haben dagegen keinen endlichen Kotyp [1, Abschnitt 5.I.2].

Ein Banachraum X mit endlichem Kotyp kann daher nicht c_0 enthalten. Insbesondere fallen dann gemäß Satz 5.3.6 die beiden Räume $\ell_+(L^2(\mathbb{R}), X)$ und $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ zusammen.

6.3.3 Theorem [15, Theorem 7.2] Der Banachraum X habe endlichen Kotyp, und der dicht definierte, sektorielle Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ mit dichtem Bild besitze einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül. Zu jedem $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|\omega| \in (\theta, \pi)$ existiert dann ein $C > 0$ mit

$$\|t \mapsto A^{1/2}R(te^{i\omega}, A)x\|_\ell \leqslant C\|x\| \qquad \text{für } x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A),$$
$$\|t \mapsto (A^\#)^{1/2}R(te^{i\omega}, A^\#)x^\#\|_{\ell'} \leqslant C\|x^\#\| \qquad \text{für } x^\# \in \mathcal{D}(A^\#) \cap \mathcal{R}(A^\#).$$

Die Normen beziehen sich dabei auf $\ell(\mathbb{R}^+, X)$ bzw. $\ell'_+(\mathbb{R}^+, X')$.

Sehen wir uns die hier auftretenden Funktionen etwas genauer an: Es gilt

$$A^{1/2}R(te^{i\omega}, A)x = t^{-1/2}(A/t)^{1/2}R(e^{i\omega}, A/t)x = t^{-1/2}\psi(A/t)x$$

für $\psi(z) := z^{1/2}/(e^{i\omega} - z)$. Das folgende Lemma, das in [15] implizit verwendet wird, erlaubt uns also, den $\|\cdot\|_\ell$-Term in Theorem 6.3.3 umzuschreiben.

6.3.4 Lemma Es sei $A \in \mathcal{A}(X)$ ein sektorieller Operator vom Typ μ, der Banachraum X habe endlichen Kotyp, und es sei $\mu < \theta < \pi$. Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und $x \in X$ gilt dann

$$\|t \mapsto \psi(tA)x\|_{\ell(L^2(\mathbb{R}^+, dt/t), X)} = \|t \mapsto t^{-1/2}\psi(A/t)x\|_\ell\,.$$

Beweis Wir betrachten die von den Funktionen

$$f(t) := \psi(tA)x \qquad \text{und} \qquad g(t) := t^{-1/2}\psi(A/t)x$$

repräsentierten Operatoren $u_f \in \ell(L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}), X)$ und $u_g \in \ell(L^2(\mathbb{R}^+), X)$. Der durch $(Mh)(t) := t^{-1/2}h(1/t)$ definierte Operator $M : L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ ist ein isometrischer Isomorphismus, denn

$$\int_0^\infty |(Mh)(t)|^2\, dt = \int_0^\infty |h(1/t)|^2\, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |h(\tau)|^2\, \frac{d\tau}{\tau}\,.$$

Nach Bemerkung 5.5.12 gilt $\mathcal{M}u_f = u_g$ für die Fortsetzung $\mathcal{M}$ von M, und damit folgt die Behauptung aus Satz 5.5.13. $\square$

Dass hier der Raum $\ell(L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}), X)$ mit dem Maß $\frac{dt}{t}$ auftritt, ist nicht verwunderlich; auch im L^p-Fall betrachtet man bei Quadrat-Funktionen-Abschätzungen die Norm von $t \mapsto \psi(tA)x$ in $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}))$. Um lange Indizes bei den Normen zu vermeiden, schreiben wir statt $\ell(L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}), X)$ in Zukunft kürzer $\ell(\frac{dt}{t}, X)$, und entsprechend auch $\ell'_+(\frac{dt}{t}, X')$.

6.3.5 Korollar Es sei $A \in \mathcal{A}(X)$ ein sektorieller Operator vom Typ μ, und es sei $\mu < \theta < \pi$. Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und $x^\# \in X^\#$ gilt dann

$$\|t \mapsto \psi(tA^\#)x^\#\|_{\ell'_+(dt/t, X')} = \|t \mapsto t^{-1/2}\psi(A^\#/t)x^\#\|_{\ell'}\,.$$

Beweis Wir betrachten analog zum Beweis von Lemma 6.3.4 die Operatoren $v_f \in \ell'_+(L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}), X')$ und $v_g \in \ell'_+(L^2(\mathbb{R}^+), X')$. Weil $\ell(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}, X)$ in dem Raum $\ell(L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}), X)$ dicht liegt (vgl. Satz 5.5.7), gilt

$$\|v_f\|_{\ell'_+(dt/t,X')} = \sup_{\|h\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant 1} {}_{\ell(dt/t,X)}\langle u_h, v_f \rangle_{\ell'_+(dt/t,X')} .$$

Wegen Satz 5.5.9 ergibt sich für die hier auftretende Dualität

$$\int_0^\infty \langle h(t), f(t) \rangle \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \langle h(1/\tau), f(1/\tau) \rangle \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^\infty \langle \tau^{-1/2} h(1/\tau), g(\tau) \rangle \, d\tau .$$

Damit haben wir

$$\|v_f\|_{\ell'_+(dt/t,X')} = \sup_{\|h\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant 1} \langle \mathcal{M} u_h, v_g \rangle_\ell$$

mit der Fortsetzung $\mathcal{M}$ des Operators $M : L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ aus dem Beweis von Lemma 6.3.4, und da $\mathcal{M}$ ein isometrischer Isomorphismus ist, folgt die Behauptung. □

Wenn A einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül besitzt, dann liefern die verschiedenen Quadrat-Funktionen äquivalente Normen, wie der folgende Satz zeigt.

6.3.6 Satz [15, Proposition 7.7] Der dicht definierte, sektorielle Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ mit dichtem Bild habe einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül, es sei $\tau > \theta$, und es gelte $\varphi, \psi \in \Psi(S_\tau)$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$

$$\frac{1}{C} \|\psi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant \|\varphi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant C \|\psi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)}$$

gilt, und für alle $x^\# \in \mathcal{D}(A^\#) \cap \mathcal{R}(A^\#)$

$$\frac{1}{C} \|\psi(tA^\#)x^\#\|_{\ell'(dt/t,X')} \leqslant \|\varphi(tA^\#)x^\#\|_{\ell'(dt/t,X')} \leqslant C \|\psi(tA^\#)x^\#\|_{\ell'(dt/t,X')} .$$

6.3.7 Bemerkung In [15] wird hier nur die (wie dort gezeigt wird) wesentlich schwächere Voraussetzung der *Beinahe-ℓ-Sektorialität* des Operators A gemacht; mit diesem Begriff wollen wir uns aber nicht weiter beschäftigen.

Mit Hilfe all dieser Instrumente können wir nun das folgende Ergebnis beweisen, das wir für die Definition der Einbettung J benötigen.

6.3.8 Theorem Der Banachraum X habe endlichen Kotyp, der dicht definierte sektorielle Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ mit dichtem Bild besitze einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül, und es sei $\tau > \theta$ und $\varphi \in \Psi(S_\tau)$. Dann gibt es ein $D > 0$ mit

$$\|t \mapsto \varphi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant D\|x\| \quad \text{und} \quad \|t \mapsto \varphi(tA^\#)x^\#\|_{\ell'_+(dt/t,X')} \leqslant D\|x^\#\|$$

für alle $x \in X$ und $x^\# \in X^\#$.

Beweis Zunächst wollen wir uns überlegen, dass die Funktionen für alle $x \in X$ bzw. $x^\# \in X^\#$ in $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}, X)$ bzw. $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}, X')$ liegen. Bei der ersten Funktion müssen wir also zeigen, dass für alle $x \in X$ und $x' \in X'$

$$\int_0^\infty |\langle \varphi(tA)x, x'\rangle|^2 \frac{dt}{t} < \infty$$

gilt. Wegen der Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle \varphi(tA)x, x'\rangle|^2 &\leqslant \|\varphi(tA)x\| \cdot \|x'\| \cdot |\langle \varphi(tA)x, x'\rangle| \\ &\leqslant C\|\varphi\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|x'\| \cdot |\langle \varphi(tA)x, x'\rangle| \end{aligned}$$

folgt dies aus Satz 2.3.2. Analog geht man bei der Funktion mit $A^\#$ vor.

Da wir endlichen Kotyp von X voraussetzen, liefert Theorem 6.3.3, dass für alle $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$ die Abschätzung

$$\|t \mapsto A^{1/2}R(te^{i\omega}, A)x\|_\ell \leqslant C\|x\|$$

mit einem $\omega \in (\theta, \pi)$ besteht. Nach Lemma 6.3.4 ist

$$\|t \mapsto A^{1/2}R(te^{i\omega}, A)x\|_\ell = \|t \mapsto \psi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)}$$

für die Funktion $\psi(z) := z^{1/2}/(e^{i\omega} - z)$. Wir haben also

$$\|t \mapsto \psi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant C\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A),$$

und mit Satz 6.3.6 ergibt sich dann auch

$$\|t \mapsto \varphi(tA)x\|_{\ell(dt/t,X)} \leqslant D\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$$

mit einer gewissen Konstante $D > 0$. Weil $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$ in X dicht liegt (man betrachte eine Folge (x_n) wie im Beweis von Satz 6.2.3), folgt aus Satz 5.5.14 die Abschätzung für alle $x \in X$. Bei der Anwendung dieses Satzes brauchen wir die oben bewiesene Tatsache, dass die Funktion $t \mapsto \varphi(tA)x$ für alle $x \in X$ in $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}, X)$ liegt.

Nun zur zweiten Abschätzung: Man geht völlig analog vor, wobei man Korollar 6.3.5 und Satz 5.5.15 beachten muss. $\square$

Jede Funktion aus $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^+, X)$ können wir auch als ein Element von $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}, X)$ auffassen, indem wir mit Null fortsetzen; wie man es erwarten würde, ändert sich dabei nichts an der $\|\cdot\|_\ell$-Norm:

6.3.9 Lemma Es sei $f \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^+, X)$, und $h \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}, X)$ werde durch $h(t) := f(t)$ für $t > 0$ und $h(t) := 0$ für $t \leqslant 0$ definiert. Dann gilt $\|h\|_\ell = \|f\|_\ell$.

Beweis Jedes Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}^+)$ kann als ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ aufgefasst werden. Folglich erhält man die Abschätzung $\|h\|_\ell \geqslant \|f\|_\ell$.

Die kanonische Einbettung $S : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R})$ durch triviale Fortsetzung lässt sich zu einem Operator $\mathcal{S} : \ell(L^2(\mathbb{R}^+), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ fortsetzen. Dabei ist $\|\mathcal{S}\| \leqslant \|S\| = 1$. Wegen $\mathcal{S}u_f = u_h$ ergibt sich

$$\|h\|_\ell = \|u_h\|_\ell = \|\mathcal{S}u_f\|_\ell \leqslant \|u_f\|_\ell = \|f\|_\ell \,. \qquad \square$$

Für den Rest dieses Abschnitts sei nun X ein Banachraum mit endlichem Kotyp. Vom Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ verlangen wir, dass er sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ ist, zudem dicht definiert und mit dichtem Bild. Mit (T_t) bezeichnen wir die von $-A$ erzeugte beschränkte analytische Halbgruppe, und wie in Abschnitt 6.2 sei $(T_t^\#)$ die von $-A^\#$ erzeugte beschränkte analytische Halbgruppe. Außerdem möge A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$ besitzen. Wir können dann die Einbettung J definieren.

6.3.10 Definition Der lineare Operator $J : X \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird folgendermaßen definiert: Für $x \in X$, $x' \in X'$ und $\varphi \in L^2(\mathbb{R}))$ sei

$$\langle (Jx)(\varphi), x' \rangle := \int_0^\infty \langle A^{1/2} T_t x, x' \rangle \varphi(t)\, dt \,.$$

Der Operator $Jx \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird also repräsentiert durch die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} A^{1/2} T_t x\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \leqslant 0\,. \end{cases}$$

6.3.11 Bemerkung Offenbar ist J linear, und $Jx \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ für alle $x \in X$ ergibt sich folgendermaßen: Wählen wir $\tau \in (\theta, \pi/2)$, wenden Theorem 6.3.8 auf die Funktion $\varphi \in \Psi(S_\tau)$ an, die durch $\varphi(z) := z^{1/2} e^{-z}$ gegeben ist, und beachten Lemma 6.3.4, so erhalten wir

$$\|t \mapsto A^{1/2} T_t x\|_\ell = \|t \mapsto \varphi(tA)x\|_{\ell(dt/t, X)} \leqslant D\|x\|\,.$$

Mit Lemma 6.3.9 folgt dann nicht nur $Jx \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$, sondern sogar die Stetigkeit von J. (Man beachte auch, dass $\ell_+(L^2(\mathbb{R}), X)$ und $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wegen der Voraussetzung des endlichen Kotyps zusammenfallen.)

6.3.12 Definition Völlig analog zum Operator J definieren wir den linearen, stetigen Operator $J_\# : X^\# \to \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')$, mit $(A^\#)^{1/2} T_t^\#$ statt $A^{1/2} T_t$.

Im Grunde ist natürlich $J_\# x^\# \in \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X^\#)$, aber wir fassen $J_\#$ als Operator in den größeren Raum $\ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')$ auf.

Das aus Lemma 2.3.1 bekannte Ergebnis für den Hilbertraum kann man genau wie im L^p-Fall (Lemma 3.4.1) auf die jetzige Situation übertragen:

6.3.13 Lemma Unter den gemachten Annahmen gilt

$$\int_0^\infty \langle AT_t x, x' \rangle \, dt = \langle x, x' \rangle \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } x' \in X'\,.$$

Damit folgt dann wieder die Normäquivalenz $\|x\| \sim \|Jx\|_\ell$.

6.3.14 Satz Es gibt Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\alpha\|x\| \leqslant \|Jx\|_\ell \leqslant \beta\|x\|\,.$$

Beweis Wir wissen bereits, dass J stetig ist, d.h. es ist nur noch die Existenz von α zu beweisen. Wegen Satz 5.5.9 und Lemma 6.3.13 gilt

$$2\langle Jx, J_\# x^\# \rangle_\ell = 2\int_0^\infty \langle A^{1/2} T_t x, (A^\#)^{1/2} T_t^\# x^\# \rangle \, dt = \int_0^\infty 2\langle AT_{2t} x, x^\# \rangle \, dt = \langle x, x^\# \rangle$$

für $x \in X$ und $x^\# \in X^\#$. Damit folgt

$$|\langle x, x^\# \rangle| \leqslant 2\|Jx\|_\ell \cdot \|J_\# x^\#\|_{\ell'} \leqslant 2\|Jx\|_\ell \cdot D\|x^\#\|$$

wegen der Stetigkeit von $J_\#$. Bilden wir nun das Supremum über alle $x^\# \in X^\#$ mit $\|x^\#\| \leqslant 1$, so erhalten wir mit Hilfe von Satz 6.2.3 die Abschätzung von $\|Jx\|_\ell$ nach unten. □

6.4 Die Projektion P

Wir machen die gleichen Voraussetzungen wie am Ende des letzten Abschnitts: X sei ein Banachraum mit endlichem Kotyp, und der dicht definierte Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ sei sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ und habe dichtes Bild. Für ein gewisses $\theta < \pi/2$ besitze A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül. Die Einbettungen J und $J_\#$ seien gemäß der Definitionen 6.3.10 und 6.3.12 erklärt.

Wie müssen wir in dieser Situation die Projektion P von $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ auf $J(X) \subset \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ definieren? Während wir im Hilbertraum einfach die Orthogonalprojektion verwendet hatten, wurde im L^p-Fall die Definition $P := 2J(J_*)'$ herangezogen.

In dieser Definition können wir nicht einfach $J_* : L^q \to L^q(L^2)$ durch den Operator $J_\# : X^\# \to \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')$ ersetzen; $(J_\#)'$ ist nämlich ein Operator von $\ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')'$ nach $(X^\#)'$. Um dieses Problem zu bewältigen, müssen wir geeignete Einbettungen betrachten.

Aus Satz 6.2.3 wissen wir bereits, dass die stetige Abbildung $\iota : X \to (X^\#)'$, die durch $(\iota x)(x^\#) := x^\#(x)$ definiert ist, auf $\iota(X) \subset (X^\#)'$ eine stetige Inverse hat. Ebenso können wir $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ in $\ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')'$ einbetten:

6.4.1 Definition Die Abbildung $\iota_\ell : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')'$ wird definiert durch

$$(\iota_\ell u)(v) := \langle u, v \rangle_\ell \qquad \text{für } u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \text{ und } v \in \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')\,.$$

6.4.2 Bemerkung Gemäß Satz 5.4.8 ist ι_ℓ wohldefiniert und stetig.

Wir können damit den Operator $(J_\#)' \circ \iota_\ell : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to (X^\#)'$ betrachten. Als nächstes werden wir zeigen, dass sein Bild in $\iota(X)$ liegt, dass er also in gewissem Sinne X-wertig ist. Zunächst betrachten wir zu diesem Zweck Operatoren aus $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$, die durch Funktionen aus $T_S(\mathbb{R}, X)$ repräsentiert werden.

6.4.3 Satz Ist $f \in T_S(\mathbb{R}, X)$, so gilt für alle $x^\# \in X^\#$

$$\langle (J_\#)'(\iota_\ell u_f), x^\# \rangle_{((X^\#)', X^\#)} = \left\langle \int_0^\infty A^{1/2} T_t f(t)\, dt, x^\# \right\rangle_{(X, X')}. \tag{6.4.1}$$

Beweis Zunächst wollen wir uns überlegen, dass das in der Gleichung auftretende Integral existiert. Da wir annehmen, dass A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$ hat, ergibt sich für die Funktion $\psi(z) := z^{1/2} e^{-z}$ die Abschätzung $\|(tA)^{1/2} T_t\| \leqslant C\|\psi\|_\infty$, also

$$\|A^{1/2} T_t f(t)\| \leqslant \frac{C\|\psi\|_\infty}{t^{1/2}} \cdot \|f(t)\|,$$

und nach Wahl von f existiert das in (6.4.1) vorkommende Integral. Nach Definition von ι_ℓ und wegen Satz 5.5.9 gilt

$$\begin{aligned}\langle (J_\#)'(\iota_\ell u_f), x^\# \rangle_{((X^\#)', X^\#)} &= {}_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')'}\langle \iota_\ell u_f, J_\# x^\# \rangle_{\ell(L^2(\mathbb{R}), X')} \\ &= \langle u_f, J_\# x^\# \rangle_\ell = \int_0^\infty \langle f(t), (A^\#)^{1/2} T_t^\# x^\# \rangle_{(X, X')}\, dt.\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass $(A^\#)^{1/2} T_t^\#$ eine Einschränkung von $(A^{1/2} T_t)'$ ist, so folgt die Behauptung. □

Satz 6.4.3 besagt, dass $\int_0^\infty A^{1/2} T_t f(t)\, dt \in X$ durch ι auf $(J_\#)'(\iota_\ell u_f)$ abgebildet wird. Damit wissen wir, dass

$$(J_\#)'(\iota_\ell u_f) \in \iota(X) \qquad \text{für alle } f \in T_S(\mathbb{R}, X) \tag{6.4.2}$$

gilt. Für beliebige $u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ überträgt sich dies:

6.4.4 Korollar Für jeden Operator $u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ gilt

$$(J_\#)'(\iota_\ell u) \in \iota(X).$$

Beweis Auf $\iota(X)$ ist ι^{-1} stetig, also ist $\iota(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $(X^\#)'$. Da zudem $\{u_f : f \in T_S(\mathbb{R}, X)\}$ bezüglich $\|\cdot\|_\ell$ in $\ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ dicht liegt, folgt die Behauptung aus (6.4.2) und der Stetigkeit von $(J_\#)'\iota_\ell$. $\square$

Dieses Ergebnis ermöglicht es uns, den Operator P folgendermaßen zu definieren:

6.4.5 Definition Der lineare Operator $P : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird definiert durch

$$P := 2J \circ \iota^{-1} \circ (J_\#)' \circ \iota_\ell\,.$$

6.4.6 Satz Der Operator P ist eine stetige Projektion auf $\mathcal{R}(J)$.

Beweis Die Stetigkeit von P ergibt sich unmittelbar aus der Definition, und auch $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(J)$ ist klar. Es ist also nur noch $Px = x$ für alle $x \in \mathcal{R}(J)$ nachzuweisen, d.h. $PJ = J$. Nach Definition von P ist das gleichbedeutend mit $2\iota^{-1}(J_\#)'\iota_\ell J = \mathrm{id}_X$, und dies werden wir jetzt überprüfen. Für alle $x \in X$ und $x^\# \in X^\#$ gilt nach Definition der Operatoren

$$\begin{aligned}\langle \iota^{-1}(J_\#)'\iota_\ell Jx, x^\#\rangle_{(X,X')} &= \langle (J_\#)'\iota_\ell Jx, x^\#\rangle_{((X^\#)',X^\#)} \\ &= {}_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')'}\langle \iota_\ell Jx, J_\# x^\#\rangle_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')} \\ &= \langle Jx, J_\# x^\#\rangle_\ell = \tfrac{1}{2}\langle x, x^\#\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Beweis von Satz 6.3.14 bekannt ist. Da X durch $X^\#$ genormt wird (Satz 6.2.3), folgt die Behauptung. $\square$

Im Folgenden werden wir eine Eigenschaft von P brauchen, die auch im Hilbertraum- und im L^p-Falle schon eine Rolle spielte, nämlich dass Pu_f nur von den Werten von f auf $\mathbb{R}^+$ abhängt.

6.4.7 Satz Für jede Funktion $f \in \ell(\mathbb{R}, X)$ gilt $Pu_f = Pu_g$, wobei $g \in \ell(\mathbb{R}, X)$ durch $g(t) := f(t)\chi_{\mathbb{R}^+}(t)$ gegeben ist.

Beweis Es reicht offensichtlich, die entsprechende Eigenschaft für den Operator $(J_\#)'\iota_\ell$ zu überprüfen. Für alle $x^\# \in X^\#$ gilt

$$\langle (J_\#)'\iota_\ell u_f, x^\#\rangle_{((X^\#)',X^\#)} = {}_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')'}\langle \iota_\ell u_f, J_\# x^\#\rangle_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')} = \langle u_f, J_\# x^\#\rangle_\ell\,.$$

Da $J_\# x^\#$ nach Definition von $J_\#$ durch eine auf $(-\infty, 0]$ verschwindende Funktion repräsentiert wird und $\langle u_f, J_\# x^\#\rangle_\ell$ gemäß Satz 5.5.9 berechnet werden kann, folgt die Behauptung. $\square$

6.5 Charakterisierung mittels Dilatationen

Wir können nun die Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls in der allgemeinen Form angeben.

6.5.1 Theorem Der Operator $-A \in \mathcal{A}(X)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) in einem Banachraum X mit endlichem Kotyp, und A habe dichtes Bild. Dann gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) für die folgenden Aussagen:

(a) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : X \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ mit $\|x\|_X \sim \|Jx\|_\ell$ und $JT_t = PU_tJ$ für alle $t \geqslant 0$, wobei $P : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ eine beschränkte Projektion auf $J(X)$ ist und die C_0-Gruppe $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ durch $(U_tu)(\varphi) := u(\varphi(\cdot - t))$ definiert wird.

$$\begin{array}{ccc} \ell(L^2(\mathbb{R}), X) & \xrightarrow{U_t} & \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \\ \cup & & \downarrow P \\ J(X) & & J(X) \\ J\uparrow & & \uparrow J \\ X & \xrightarrow{T_t} & X \end{array}$$

(c) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \pi/2$.

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b). Es seien J und P definiert wie in den Abschnitten 6.3 und 6.4. Wegen Lemma 6.1.2 und der Sätze 6.3.14 und 6.4.6 ist nur noch die Dilatationsgleichung $JT_t = PU_tJ$ zu überprüfen. Definitionsgemäß wird Jx durch die Funktion

$$s \mapsto \begin{cases} A^{1/2}T_sx\,, & s > 0\,, \\ 0\,, & s \leqslant 0 \end{cases}$$

repräsentiert. Nach Definition von U_t wird somit U_tJx durch

$$s \mapsto \begin{cases} A^{1/2}T_{s+t}x\,, & s > -t\,, \\ 0\,, & s \leqslant -t \end{cases}$$

repräsentiert. Um PU_tJx zu bestimmen, können wir gemäß Satz 6.4.7 die Projektion P ebenso gut auf den durch die Funktion

$$s \mapsto \begin{cases} A^{1/2}T_{s+t}x\,, & s > 0\,,\\ 0\,, & s \leqslant 0 \end{cases}$$

repräsentierten Operator anwenden. Diese letzte Funktion repräsentiert wegen $T_{s+t}x = T_s(T_tx)$ aber den Operator $J(T_tx)$. Somit ist $PU_tJx = PJT_tx$, und weil P eine Projektion auf $\mathcal{R}(J)$ ist, folgt $PU_tJx = JT_tx$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Es sei $-B$ der aus Satz 6.1.3 bekannte Erzeuger von (U_t). Genau wie im Beweis von Theorem 2.3.3 folgt $JR(z,A) = PR(z,B)J$ für $\operatorname{Re} z < 0$, also auch $\psi(A) = J^{-1}P\psi(B)J$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$. Wegen $\theta > \pi/2$ liefert Satz 6.1.3, dass B einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat, und wegen der Stetigkeit von $J^{-1}P$ und J folgt $\|\psi(A)\| \leqslant C\|\psi\|_\infty$. □

Mit Hilfe von [14] bekommt man das folgende Ergebnis für Banachräume, welche zusätzlich die so genannte Eigenschaft Δ haben (siehe hierzu Bemerkung 6.5.3).

6.5.2 Korollar Gelten die Voraussetzungen von Theorem 6.5.1, ist A zusätzlich R-sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ und hat X die Eigenschaft Δ, so besteht die folgende Äquivalenz: Genau dann gilt (b) aus Theorem 6.5.1, wenn A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \mu$ hat.

Beweis Für R-sektorielle Operatoren vom Typ μ in Banachräumen mit der Eigenschaft Δ gilt gemäß [14, Theorem 5.3]: Aus der Existenz eines beschränkten $H^\infty(\theta_0)$-Funktionalkalküls mit einem $\theta_0 > \mu$ folgt die Existenz für alle $\theta > \mu$. (Dies ist eine Verallgemeinerung von Theorem 4.2.5.) □

6.5.3 Bemerkung Es seien (r_n) und $(\tilde{r}_n)$ zwei Rademacher-Folgen, also zwei Folgen von unabhängigen, symmetrischen, $\{-1,1\}$-wertigen Zufallsvariablen, und diese beiden Folgen seien auch wechselseitig unabhängig. Wir sagen, dass X die Eigenschaft Δ hat, wenn ein $C > 0$ existiert mit

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} r_j\tilde{r}_k x_{jk}\right\|^2 \leqslant C\cdot\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_j\tilde{r}_k x_{jk}\right\|^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_{jk} \in X$. Banach-Verbände mit endlichem Kotyp haben stets diese Eigenschaft, ebenso UMD-Räume [14]. Korollar 6.5.2 ist also insbesondere auf $X = L^p(\Omega, \nu)$ mit $1 < p < \infty$ anwendbar und stellt somit eine Verallgemeinerung von Theorem 4.3.1 dar.

7 Dilatationen für sektorielle Operatoren

Wegen des verwendeten Dilatationsbegriffs mussten wir bisher stets voraussetzen, dass der Operator $-A$ eine Halbgruppe erzeugt. Aber auch für sektorielle Operatoren, bei denen das nicht zutrifft, ist man an einer Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls interessiert.

Hat (T_t) die Dilatation (U_t), so überträgt sich, wie wir gesehen haben, die Dilatationsgleichung auf die Resolventen der Erzeuger $-A$ und $-B$. Man könnte also gewissermaßen den Operator B als eine Dilatation von A bezeichnen. Nach einem derartigen B können wir aber auch dann suchen, wenn A kein Halbgruppenerzeuger ist.

In den Beweisen der verschiedenen Dilatationssätze stellte sich jeweils heraus, dass B über die Fouriertransformation ähnlich zu einem Multiplikationsoperator war. Diesen können wir verwenden, um eine Dilatation für A zu erhalten.

7.1 Der Hilbertraumfall

Der Dilatationssatz, den wir in diesem Kapitel beweisen werden, hat im Hilbertraum die folgende Gestalt [17, Theorem 10.14]:

7.1.1 Theorem Es sei A ein injektiver, sektorieller Operator vom Typ μ auf dem Hilbertraum H. Dann hat A genau dann einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül, wenn der Multiplikationsoperator

$$(Mf)(t) := (it)^\alpha f(t)\,, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}, H)$$

für ein (und damit alle) α mit $2\mu/\pi < \alpha < 2$ eine Dilatation von A ist. Dies bedeutet, dass eine Einbettung $J : H \to L^2(\mathbb{R}, H)$ existiert, so dass $(Jx, Jy)_{L^2}$

ein zu $(x, y)_H$ äquivalentes Skalarprodukt ist und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|\arg z| > \alpha\pi/2$ die Dilatationsgleichung $PR(z, M)J = JR(z, A)$ gilt, wobei P die Orthogonalprojektion auf $J(H)$ ist. Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, H) & \xrightarrow{R(z,M)} & L^2(\mathbb{R}, H) \\ \cup & & \downarrow P \\ J(H) & & J(H) \\ J \uparrow & & \uparrow J \\ H & \xrightarrow{R(z,A)} & H \end{array}$$

Da M normal ist und jeder normale sektorielle Operator einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül besitzt, erhalten wir die folgende Charakterisierung.

7.1.2 Korollar Ein injektiver, sektorieller Operator auf einem Hilbertraum hat genau dann einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül, wenn er einen normalen sektoriellen Operator als Dilatation besitzt.

Setzt man $\mu < \pi/2$ voraus, so kann man $\alpha = 1$ in Theorem 7.1.1 wählen, und die von $-A$ erzeugte beschränkte analytische Halbgruppe (T_t) hat dann

$$(N_t f)(s) := e^{-ist} f(s)$$

als Dilatation, es gilt also $PN_tJ = JT_t$. Die hierbei verwendete Einbettung J hat die Gestalt

$$Jx := A^{1/2} R(i\cdot, A)x \,.$$

Wir wollen dieses Theorem gleich für Banachräume endlichen Kotyps beweisen; zu diesem Zweck betrachten wir zunächst den Fall $\mu < \pi/2$ und beweisen die Theorem 6.5.1 entsprechende Aussage für die Dilatation (N_t). Anschließend gehen wir zu größeren Winkeln μ über; die dabei verwendete Methode könnte man auch direkt zur Verbesserung von Theorem 6.5.1 einsetzen.

7.2 Die Dilatation (N_t)

In diesem Abschnitt sei X ein beliebiger Banachraum.

7.2.1 Definition Es sei $t \in \mathbb{R}$. Der Operator $N_t : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ sei die (gemäß Theorem 5.5.10 gebildete) Fortsetzung des Multiplikationsoperators in $L^2(\mathbb{R})$, der h auf die Funktion $s \mapsto e^{-ist}h(s)$ abbildet, also

$$(N_t u)(\varphi) = u\big(s \mapsto e^{-ist}\varphi(s)\big) \qquad \text{für } u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \text{ und } \varphi \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

7.2.2 Lemma Die so definierten Operatoren $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ bilden eine C_0-Gruppe von Isometrien.

Beweis Man beweist dies genau wie Lemma 6.1.2. Auch diesmal wird der Operator $N_t u_{h(\cdot)x}$ durch die Funktion $s \mapsto e^{-ist}h(s)x$ repräsentiert. □

7.2.3 Satz Es sei $-M$ der Erzeuger des C_0-Gruppe $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Der Operator M ist sektoriell vom Typ $\pi/2$, er ist injektiv und dicht definiert und hat dichtes Bild. Für jedes $\theta > \pi/2$ hat M einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül.

Beweis Für $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ wird $N_t u_{h(\cdot)x} - u_{h(\cdot)x}$ durch die Funktion

$$s \mapsto (e^{-ist} - 1)h(s)x$$

repräsentiert, und nach Definition des Erzeugers ist $s \mapsto ish(s)x$ der Repräsentant von $Mu_{h(\cdot)x}$. Völlig analog zu den Überlegungen im Beweis von Satz 6.1.3 zeigt man: Für $\operatorname{Re} z < 0$ ist $R(z, M)$ die Fortsetzung des Multiplikationsoperators in $L^2(\mathbb{R})$, der h auf

$$s \mapsto \frac{h(s)}{z - is}$$

abbildet. (Für den im Beweis von Satz 6.1.3 angegebenen Operator $\mathcal{M}_z$ gilt dabei $\mathcal{M}_z = R(z, -M)$.)

Damit folgt, dass M sektoriell vom Typ $\pi/2$ ist. Als Gruppenerzeuger ist M auch dicht definiert, und weil $\{\, s \mapsto isf(s) : f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \,\}$ in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt, hat M dichtes Bild und ist folglich auch injektiv.

Wie im Beweis von Satz 6.1.3 (dort war $\mathcal{M}_\psi = \psi(-M)$) erhält man, dass $\psi(M)$ für alle $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und $\theta > \pi/2$ die Fortsetzung des Multiplikationsoperators in $L^2(\mathbb{R})$ ist, der h auf

$$s \mapsto \psi(is)h(s)$$

abbildet. Folglich hat M einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \pi/2$. □

7.2.4 Bemerkung Der Operator M besitzt sogar einen noch besseren Kalkül: Man kann $f(M)$ für jede auf $i\mathbb{R}$ beschränkte, messbare Funktion f definieren (vgl. Bemerkung 6.1.4).

7.3 Die Einbettung J

In diesem Abschnitt sei X ein Banachraum mit endlichem Kotyp. Von dem Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ verlangen wir, dass er sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ ist, dicht definiert und mit dichtem Bild. Der Monddual $A^\#$ sei wie in Abschnitt 6.2 definiert. Außerdem möge A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$ besitzen.

7.3.1 Definition Der lineare Operator $J : X \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird folgendermaßen definiert: Für $x \in X$, $x' \in X'$ und $\varphi \in L^2(\mathbb{R}))$ sei

$$\langle (Jx)(\varphi), x' \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \langle A^{1/2} R(it, A)x, x' \rangle \varphi(t)\, dt\,.$$

Der Operator $Jx \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ wird also repräsentiert durch die Funktion

$$t \mapsto A^{1/2} R(it, A)x\,.$$

Den Operator $J_\# : X^\# \to \ell'_+(L^2(\mathbb{R}), X')$ definieren wir analog; $J_\# x^\#$ wird repräsentiert durch die Funktion

$$t \mapsto (A^\#)^{1/2} R(-it, A^\#)x^\#\,.$$

7.3.2 Bemerkung Aus Theorem 6.3.8 und dessen Beweis folgt sofort, dass J und $J_\#$ stetig sind. Es wird später klar werden, warum wir bei der Definition von $J_\#$ ein Minus einfügen müssen.

Wenn wir nun noch ein Analogon zu Lemma 6.3.13, also zu der Gleichung

$$\int_0^\infty \langle AT_t x, x' \rangle\, dt = \langle x, x' \rangle \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } x' \in X'\,,$$

beweisen, dann folgt wieder $\|Jx\|_\ell \sim \|x\|$. Weil bei den Überlegungen zur Normäquivalenz die Dualität $\langle Jx, J_\# x^\# \rangle_\ell$ betrachtet werden muss, ist hier der folgende Satz das richtige Hilfsmittel.

7.3.3 Satz Unter den gemachten Annahmen gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle AR(it, A)R(-it, A)x, x'\rangle \, dt = \pi\langle x, x'\rangle \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } x' \in X'.$$

Für den Beweis verwenden wir die folgende Aussage, mit der auch der Beweis von Lemma 6.3.13 erbracht werden könnte.

7.3.4 Lemma Für $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\int_0^\infty \psi(t) \frac{dt}{t} = 1$ gilt unter den gemachten Annahmen

$$\int_0^\infty \psi(tA)x \frac{dt}{t} = x \qquad \text{für alle } x \in X,$$

wobei das Integral als uneigentliches Riemann-Integral aufzufassen ist.

Beweis Wir definieren die Funktionenfolge (φ_n) durch

$$\varphi_n(z) := \int_{1/n}^{n} \psi(tz) \frac{dt}{t}.$$

Für alle $z \in S_\theta$ haben wir

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \int_0^\infty |\psi(tz)| \frac{dt}{t} \leqslant \int_0^\infty \frac{c|tz|^s}{1+|tz|^{2s}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{c\tau^s}{1+\tau^{2s}} \frac{d\tau}{\tau} < \infty,$$

d.h. die Funktionen φ_n liegen in $H^\infty(S_\theta)$ und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_\infty < \infty$. Weil A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat, folgt auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n(A)\| < \infty.$$

Für festes z gilt

$$\varphi_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty \psi(tz) \frac{dt}{t},$$

und die Cauchysche Integralformel liefert, dass dieses Integral den Wert

$$\int_0^\infty \psi(t) \frac{dt}{t} = 1$$

hat. Die Folge (φ_n) erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 1.3.1; wir erhalten $\varphi_n(A)x \to x$ für alle $x \in X$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\varphi_n(A)x = \int_{1/n}^{n} \psi(tA)x \frac{dt}{t},$$

und diese Gleichheit sieht man ein, indem man geeignete Riemann-Summen betrachtet und wiederum Satz 1.3.1 anwendet. □

Beweis (Satz 7.3.3) Mit $\psi(z) := z/(z^2+1)$ gilt

$$\psi(tA) = tAR(i, tA)R(-i, tA) = AR(i/t, A)R(-i/t, A)/t\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} &\langle AR(it, A)R(-it, A)x, x'\rangle\, dt \\ &= 2\int_0^{\infty} \langle AR(i/t, A)R(-i/t, A)x, x'\rangle \frac{dt}{t^2} = 2\int_0^{\infty} \langle \psi(tA)x, x'\rangle \frac{dt}{t}\,.\end{aligned}$$

Aus Satz 2.3.2 folgt, dass diese Integrale absolut konvergieren, und weil gemäß Lemma 7.3.4

$$\int_0^{\infty} \psi(tA)x \frac{dt}{t} = x\int_0^{\infty} \psi(t)\frac{dt}{t} = x\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi x}{2}$$

für alle $x \in X$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. □

Völlig analog zum Beweis von Satz 6.3.14 ergibt sich nun

$$\langle Jx, J_\# x^\# \rangle_\ell = \pi\langle x, x^\# \rangle \tag{7.3.1}$$

und damit die Normäquivalenz $\|Jx\|_\ell \sim \|x\|$.

7.3.5 Bemerkung Die bisher gemachten Überlegungen funktionieren auch dann, wenn man $J_\#$ ohne das Minus definiert und die Jx bzw. $J_\# x^\#$ repräsentierenden Funktionen auf $(-\infty, 0)$ Null setzt. Mit diesen Definitionen wäre jedoch die Dilatationsgleichung nicht erfüllt.

7.4 Die Projektion P

Bei der Definition der Projektion P gehen wir genau wie in Abschnitt 6.4 vor. Nur in Satz 6.4.3 wurde die spezielle Gestalt von $J_\#$ benutzt, aber das entsprechende Resultat gilt auch für die jetzt verwendete Einbettung:

7.4.1 Satz Ist $f \in T_S(\mathbb{R}, X)$, so gilt für alle $x^\# \in X^\#$

$$\langle (J_\#)'(\iota_\ell u_f), x^\# \rangle_{((X^\#)', X^\#)} = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} A^{1/2}R(-it, A)f(t)\, dt, x^\# \right\rangle_{(X, X')}\,.$$

Beweis Weil A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül mit $\theta < \pi/2$ hat, ergibt sich für $\psi(z) := z^{1/2}(-1 \pm iz)^{-1}$ und alle $t > 0$

$$\|(tA)^{1/2}R(\pm it, A)\| = \|(A/t)^{1/2}R(-1, \pm iA/t)\| = \|\psi(A/t)\| \leqslant C\|\psi\|_\infty .$$

Daraus folgt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Abschätzung

$$\|A^{1/2}R(-it, A)f(t)\| \leqslant \frac{C\|\psi\|_\infty}{|t|^{1/2}} \cdot \|f(t)\| ,$$

und wegen $f \in T_S(\mathbb{R}, X)$ existiert das in der Behauptung auftretende Integral. Nach Definition von ι_ℓ und wegen Satz 5.5.9 gilt

$$\begin{aligned}\langle (J_\#)'(\iota_\ell u_f), x^\# \rangle_{((X^\#)', X^\#)} &= {}_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')'}\langle \iota_\ell u_f, J_\# x^\# \rangle_{\ell(L^2(\mathbb{R}),X')} \\ &= \langle u_f, J_\# x^\# \rangle_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), (A^\#)^{1/2}R(-it, A^\#)x^\# \rangle_{(X,X')}\, dt .\end{aligned}$$

Da $(A^\#)^{1/2}R(-it, A^\#)$ eine Einschränkung von $(A^{1/2}R(-it, A))'$ ist, folgt die behauptete Gleichheit. $\square$

Also wird auch diesmal durch

$$P := \pi^{-1}\, J \circ \iota^{-1} \circ (J_\#)' \circ \iota_\ell$$

eine stetige Projektion auf den Bildraum $\mathcal{R}(J)$ der Einbettung J definiert. Die Konstante π^{-1} statt 2 erklärt sich durch Gleichung (7.3.1).

Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass mit den Operatoren J und P, die wir definiert haben, auch die Dilatationsgleichung erfüllt ist.

7.5 Charakterisierung mittels Dilatationen

Wir könnten nun ein Ergebnis analog zu Theorem 6.5.1 formulieren, d.h. (N_t) als die Dilatation von (T_t) angeben. Aus der Dilatationsgleichung würden wir dann im Beweis

$$JR(z, A) = PR(z, M)J \tag{7.5.1}$$

ableiten und dies auf die Funktionalkalküle übertragen. Stattdessen wollen wir aber die Dilatation gleich durch (7.5.1) charakterisieren. Weil man aus den Resolventen die Halbgruppen durch Integration erhalten kann [22, Corollary 1.7.5], sind diese beiden alternativen Formulierungen gleichwertig.

7.5.1 Theorem Der Operator $-A \in \mathcal{A}(X)$ erzeuge eine beschränkte analytische Halbgruppe in einem Banachraum X mit endlichem Kotyp, und A habe dichtes Bild. Dann gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) für die folgenden Aussagen:

(a) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \pi/2$.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : X \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ mit $JR(z, A) = PR(z, M)J$ für alle z mit $\operatorname{Re} z < 0$ und $\|x\|_X \sim \|Jx\|_\ell$, wobei $P : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ eine beschränkte Projektion auf $J(X)$ und der Operator $-M$ der Erzeuger der C_0-Gruppe $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ aus Definition 7.2.1 ist. Für $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ wird $Mu_{h(\cdot)x}$ also durch die Funktion $s \mapsto ish(s)x$ repräsentiert.

$$\begin{array}{ccc}
\ell(L^2(\mathbb{R}), X) & \xrightarrow{R(z,M)} & \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \\
\cup & & \downarrow{\scriptstyle P} \\
J(X) & & J(X) \\
{\scriptstyle J}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle J} \\
X & \xrightarrow{R(z,A)} & X
\end{array}$$

(c) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \pi/2$.

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b). Sind J und P wie in den vorangehenden Abschnitten definiert, so müssen wir nur noch die Dilatationsgleichung überprüfen. Es gelte also $\operatorname{Re} z < 0$. Die Resolventengleichung liefert

$$A^{1/2}R(it, A)R(z, A)x = \frac{A^{1/2}R(it, A)x}{z - it} - \frac{A^{1/2}R(z, A)x}{z - it},$$

und dies ist die Funktion, die $JR(z, A)x$ repräsentiert. Also gilt

$$\begin{aligned}
\langle JR(z, A)x, J_\# x^\# \rangle_\ell &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle A^{1/2}R(it, A)R(z, A)x, (A^\#)^{1/2}R(-it, A^\#)x^\# \rangle \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle A^{1/2}R(it, A)x, (A^\#)^{1/2}R(-it, A^\#)x^\# \rangle}{z - it} \, dt \\
&\qquad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle A^{1/2}R(z, A)x, (A^\#)^{1/2}R(-it, A^\#)x^\# \rangle}{z - it} \, dt .
\end{aligned}$$

Weil $R(z, M)$ auf Operatoren, die durch Funktionen repräsentiert sind, als Multiplikation mit $(z - it)^{-1}$ wirkt, liefert das erste Integral den Wert

$$\langle R(z, M)Jx, J_\# x^\# \rangle_\ell .$$

Um einzusehen, dass das zweite Integral den Wert 0 liefert, müssen wir als erstes beachten, dass

$$\lambda \mapsto \frac{\langle A^{1/2}R(z,A)x, (A^{\#})^{1/2}R(-\lambda, A^{\#})x^{\#}\rangle}{z-\lambda}$$

auf jedem Sektor S_ν mit $\pi/2 < \nu < \min\{|\arg z|, \pi - \theta\}$ holomorph ist. Des Weiteren gilt dort nach Definition des Funktionalkalküls $\|\psi(A^{\#}/\lambda)\| \leqslant C$ für $\psi(z) := z^{1/2}(-1-z)^{-1}$, d.h.

$$\|(A^{\#})^{1/2}R(-\lambda, A^{\#})x^{\#}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{1/2}},$$

und die Behauptung folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz. (Man integriert über einen Halbkreis in der rechten Halbebene und lässt dessen Radius gegen ∞ gehen.) Wir haben also insgesamt

$$\langle JR(z,A)x, J_{\#}x^{\#}\rangle_{\ell} = \langle R(z,M)Jx, J_{\#}x^{\#}\rangle_{\ell},$$

und mit Gleichung (7.3.1) folgt

$$\begin{aligned}\pi\,\langle R(z,A)x, x^{\#}\rangle &= \langle JR(z,A)x, J_{\#}x^{\#}\rangle_{\ell} = \langle R(z,M)Jx, J_{\#}x^{\#}\rangle_{\ell} \\ &= {}_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')'}\langle \iota_\ell R(z,M)Jx, J_{\#}x^{\#}\rangle_{\ell'_+(L^2(\mathbb{R}),X')} \\ &= \langle (J_{\#})'\iota_\ell R(z,M)Jx, x^{\#}\rangle_{((X^{\#})',X^{\#})}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\pi R(z,A) = \iota^{-1}(J_{\#})'\iota_\ell R(z,M)J,$$

und nach Definition der Projektion P folgt

$$JR(z,A) = PR(z,M)J.$$

(b) $\Longrightarrow$ (c). Dieser Schritt verläuft wieder analog zum Beweis von Theorem 2.3.3. Der einzige Unterschied ist, dass diesmal die Dilatationsgleichung direkt für die Resolventen vorausgesetzt ist und nicht erst aus der Gleichung für die Halbgruppen gefolgert werden muss. □

Genau wie in Korollar 6.5.2 kann man wieder eine Äquivalenz erhalten:

7.5.2 Korollar Gelten die Voraussetzungen von Theorem 7.5.1, ist A zusätzlich R-sektoriell vom Typ $\mu < \pi/2$ und hat X die Eigenschaft Δ, so besteht die folgende Äquivalenz: Genau dann gilt (b) aus Theorem 7.5.1, wenn A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \mu$ hat.

7.6 Dilatation ohne Halbgruppe

Wir verzichten jetzt auf die Voraussetzung, dass $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt.

7.6.1 Theorem Der Operator $A \in \mathcal{A}(X)$ sei sektoriell vom Typ μ, dicht definiert und habe dichtes Bild. Der Banachraum X besitze endlichem Kotyp, und es sei $2\mu/\pi < \alpha < 2$. Dann gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) für die folgenden Aussagen:

(a) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta < \alpha\pi/2$.

(b) Es gibt eine Einbettung $J : X \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ mit $JR(z, A) = PR(z, M^\alpha)J$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|\arg z| > \alpha\pi/2$ und $\|x\|_X \sim \|Jx\|_\ell$, wobei $P : \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \to \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$ eine beschränkte Projektion auf $J(X)$ und der Operator $-M$ der Erzeuger der C_0-Gruppe $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ aus Definition 7.2.1 ist. Für $x \in X$ und $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ wird $M^\alpha u_{h(\cdot)x}$ also durch die Funktion $s \mapsto (is)^\alpha h(s)x$ repräsentiert.

$$\begin{array}{ccc}
\ell(L^2(\mathbb{R}), X) & \xrightarrow{R(z,M^\alpha)} & \ell(L^2(\mathbb{R}), X) \\
\cup & & \downarrow P \\
J(X) & & J(X) \\
J\uparrow & & \uparrow J \\
X & \xrightarrow{R(z,A)} & X
\end{array}$$

(c) A hat einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für alle $\theta > \alpha\pi/2$.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Ergebnis. Entsprechendes findet man (in allgemeinerer Form) auch in [16].

7.6.2 Satz Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator vom Typ μ mit dichtem Bild. Weiter habe A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für ein $\theta > \mu$, und es sei $\beta \in (0, \pi/\theta)$.
Dann ist der durch den Funktionalkalkül definierte Operator A^β sektoriell vom Typ $\beta\theta$, er ist dicht definiert und hat dichtes Bild, und für alle $\tau > \beta\theta$ hat er einen beschränkten $H^\infty(S_\tau)$-Funktionalkalkül. Für $f \in H^\infty(S_\tau)$ gilt dabei $f(A^\beta) = f_\beta(A)$, mit $f_\beta(z) := f(z^\beta)$.

Beweis Die Eigenschaften des Funktionalkalküls garantieren, dass der Operator A^β abgeschlossen und dicht definiert ist. Er hat auch dichtes Bild, denn $(A^\beta)^{-1} = A^{-\beta}$ und $A^{-\beta}$ ist ebenfalls dicht definiert.

Als nächstes zeigen wir, dass A^β sektoriell vom Typ $\beta\theta$ ist: Offenbar gilt

$$zR(z, A^\beta) = f_z(A) \qquad \text{mit} \qquad f_z(\lambda) := \frac{z}{z - \lambda^\beta}$$

für $|\arg z| > \beta\theta$. Für $|\arg z| > \beta\theta + \epsilon$ sind die Funktionen f_z gleichmäßig beschränkt auf S_θ und die Resolventen-Abschätzung für A^β folgt aus der Tatsache, dass A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül hat.

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass die letzte Behauptung des Satzes gilt: Für $\psi \in \Psi(S_\tau)$ und $x \in X$ haben wir

$$\begin{aligned}
\psi(A^\beta)AR(-1, A)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(z)R(z, A^\beta)AR(-1, A)x\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\lambda}{(z - \lambda^\beta)(-1 - \lambda)}R(\lambda, A)x\, d\lambda\right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(z)}{z - \lambda^\beta}\, dz\right)\frac{\lambda}{-1 - \lambda}R(\lambda, A)x\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \psi(\lambda^\beta)\frac{\lambda}{-1 - \lambda}R(\lambda, A)x\, d\lambda \\
&= \psi_\beta(A)AR(-1, A)x\,,
\end{aligned}$$

wobei γ der Rand eines Sektors ist, der zwischen $S_{\beta\theta}$ und S_τ liegt, und γ_1 den Rand eines Sektors zwischen S_μ und S_θ bezeichnet. Weil der Bildraum $\mathcal{R}(AR(-1, A)) = \mathcal{R}(A)$ in X dicht liegt, folgt die Gleichheit $\psi(A^\beta) = \psi_\beta(A)$ für $\psi \in \Psi(S_\tau)$. Damit ist insbesondere klar, dass A^β einen beschränkten $H^\infty(S_\tau)$-Funktionalkalkül hat.

Für beliebiges $f \in H^\infty(S_\tau)$ wenden wir das schon Bewiesene auf

$$\psi(z) := \frac{zf(z)}{(1 + z)^2}$$

an und erhalten die Gleichheit $f(A^\beta)x = f_\beta(A)x$ für $x \in \mathcal{R}(A^\beta R(-1, A^\beta)^2) = \mathcal{D}(A^\beta) \cap \mathcal{R}(A^\beta)$. Diese Menge liegt dicht in X, also folgt $f(A^\beta) = f_\beta(A)$. $\square$

Beweis (Theorem 7.6.1) (a) $\Longrightarrow$ (b). Wir setzen $A_0 := A^{1/\alpha}$. Mit Satz 7.6.2 folgt, dass A_0 ein sektorieller Operator vom Typ $\theta/\alpha < \pi/2$ ist, der dicht definiert ist und dichtes Bild hat. Der Operator erzeugt also eine beschränkte analytische Halbgruppe.

Mit Satz 7.6.2 folgt auch, dass A_0 einen beschränkten $H^\infty(S_\tau)$-Funktionalkalkül für jedes $\tau > \theta/\alpha$ hat. Wegen $\theta/\alpha < \pi/2$ können wir ein $\tau < \pi/2$ wählen. Theorem 7.5.1 liefert nun J_0 und P_0 mit $J_0 R(z, A_0) = P_0 R(z, M) J_0$ für alle z mit $\operatorname{Re} z < 0$. Nach Definition des Funktionalkalküls folgt $J_0 \psi_0(A_0) = P_0 \psi_0(M) J_0$ für alle $\psi_0 \in \Psi(S_\nu)$ und $\nu > \pi/2$.

Zu einer Funktion $f_0 \in H^\infty(S_\nu)$ betrachten wir

$$f_n(z) := f_0(z)\psi_n(z) \quad \text{mit} \quad \psi_n(z) := \frac{nz - z/n}{(n+z)(\frac{1}{n}+z)} = -\frac{n}{-n-z} + \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}-z}\,.$$

Aus Satz 1.3.6 folgt $\psi_n(A_0)x \to x$ für alle $x \in X$ und $\psi_n(M)u \to u$ für alle $u \in \ell(L^2(\mathbb{R}), X)$, so dass sich die Gleichheit

$$J_0 f_0(A_0) = P_0 f_0(M) J_0$$

mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ aus $J_0 f_n(A_0)x = P_0 f_n(M) J_0 x$ ergibt.

Mit $J := J_0$ und $P := P_0$ erhalten wir die behauptete Dilatationsgleichung: Ist $|\arg z| > \alpha\pi/2$, so können wir ein $\nu \in (\pi/2, |\arg z|/\alpha)$ wählen. Dann gilt

$$f_\alpha \in H^\infty(S_\nu) \quad \text{für} \quad f_\alpha(\lambda) := \frac{1}{z - \lambda^\alpha}\,.$$

Mit $f(\lambda) := (z-\lambda)^{-1}$ und Satz 7.6.2 folgt

$$JR(z, A) = Jf(A) = J_0 f_\alpha(A_0) = P_0 f_\alpha(M) J_0 = Pf(M^\alpha)J = PR(z, M^\alpha)J\,.$$

(b) $\Longrightarrow$ (c). Dieser Schritt verläuft wieder analog zum Beweis von Theorem 2.3.3. Dass M^α sektoriell vom Typ $\alpha\pi/2$ ist und einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$-Funktionalkalkül für jedes $\theta > \alpha\pi/2$ besitzt, folgt mit Satz 7.6.2 aus Satz 7.2.3. □

7.6.3 Bemerkung Weil man $f(M)$ für jede auf $i\mathbb{R}$ beschränkte, messbare Funktion f definieren kann (siehe Bemerkung 7.2.4), lässt sich $f(M^\alpha)$ für jede auf dem Rand von $S_{\alpha\pi/2}$ beschränkte, messbare Funktion erklären.

Literaturverzeichnis

[1] Bernard Beauzamy. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*. Second revised edition, North-Holland, 1985.

[2] S. Bochner. *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*. Fund. Math. **20** (1933), 262–276.

[3] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, 1980.

[4] Michael Cowling, Ian Doust, Alan McIntosh, Atsushi Yagi. *Banach space operators with a bounded* H^∞ *functional calculus*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) **60** (1996), 51–89.

[5] Joe Diestel, Hans Jarchow, Andrew Tonge. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, 1995.

[6] Joseph Diestel, John Jerry Uhl. *Vector Measures*. American Mathematical Society, 1977.

[7] Giovanni Dore, Alberto Venni. *On the closedness of the sum of two closed operators*. Math. Z. **196** (1987), 189–201.

[8] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publishers, 1958.

[9] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer Verlag, 2000.

[10] Andreas Fröhlich. *Ein Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1998.

[11] T. H. Hildebrandt. *Integration in abstract spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 111–139.

[12] Einar Hille, Ralph S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, 1957.

[13] Klaus Jänich. *Einführung in die Funktionentheorie*. Zweite Auflage, Springer-Verlag, 1980.

[14] Nigel J. Kalton, Lutz Weis. *The* H^∞*-calculus and sums of closed operators*. Math. Ann. **321** (2001), 319–345.

[15] Nigel J. Kalton, Lutz Weis. *The* H^∞*-functional calculus and square function estimates*. Preprint.

[16] Hikosaburo Komatsu. *Fractional powers of operators*. Pac. J. Math. **19** (1966), 285–346.

[17] Peer C. Kunstmann, Lutz Weis. *Maximal* L_p*-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and* H^∞*-functional calculus*. Enthalten in: Levico Lectures on Evolution Equations by Functional Analytic Methods (Hg.: Mimmo Iannelli, Rainer Nagel und Susanna Piazzera). Springer-Verlag, in Vorbereitung.

[18] Christian Le Merdy. *The similarity problem for bounded analytic semigroups on Hilbert space*. Semigroup Forum **56** (1998), 205-224.

[19] Alan McIntosh. *Operators which have an* H^∞ *functional calculus*. Proc. Centre Math. Analysis **14** (1986), 210–231.

[20] Alan McIntosh, Atsushi Yagi. *Operators of type* ω *without a bounded* H^∞ *functional calculus*. Proc. Centre Math. Analysis **24** (1989), 159–172.

[21] Jan van Neerven. *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators*. Lecture Notes in Mathematics 1529, Springer-Verlag, 1992.

[22] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983.

[23] B. J. Pettis. *On integration in vector spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 277–304.

[24] Gilles Pisier. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*. Cambridge University Press, 1989.

[25] Michael Reed, Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, 1972.

[26] Walter Rudin. *Functional Analysis*. Second edition, McGraw-Hill, 1991

[27] Željko Štrkalj. *Dilatationen von Halbgruppen*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1998.

[28] Elena Stroescu. *Isometric dilations of contractions on Banach spaces*. Pac. J. Math. **47** (1973), 257–262.

[29] Béla Sz.-Nagy. *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. Acta Sci. Math. **15** (1953), 87–92.

[30] Lutz Weis. *A new approach to maximal* L_p*-regularity*. Enthalten in: Proceedings of the 6th International Conference on Evolution equations (Hg.: Günter Lumer und Lutz Weis). Marcel Dekker, 2000.

[31] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 2. Auflage, Springer-Verlag, 1997.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Andreas Fröhlich
Geburtsdatum:	04.11.1971
Geburtsort:	Karlsruhe
Eltern:	Reimar und Eva-Maria Fröhlich

Schulbildung

1978 – 1982	Grundschule Hochstetten
1982 – 1991	Gymnasium Neureut
12.06.1991	Abitur (Allgemeine Hochschulreife)

Zivildienst

02.09.1991 – 30.11.1992	Städtisches Klinikum Karlsruhe

Studium

Fachrichtung:	Mathematik (mit Anwendungsgebiet Informatik)
Hochschule:	Universität Karlsruhe (TH)
Studiendauer:	Oktober 1992 bis September 1998
Diplomvorprüfung:	10.10.1994
Diplomarbeit:	»Ein Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren«
Diplomprüfung:	01.09.1998

Tätigkeiten während des Studiums

01.10.1994 – 30.09.1996	Wissenschaftliche Hilfskraft (Mathematisches Institut I)
01.10.1996 – 31.03.1997	Wissenschaftliche Hilfskraft (Institut für Mathematische Stochastik)

Berufstätigkeit

01.10.1998 – 31.03.1999	Wissenschaftlicher Angestellter
01.04.1999 – 31.08.1999	Wissenschaftliche Hilfskraft
seit 01.09.1999	Wissenschaftlicher Angestellter (Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe)