



Forschungszentrum Karlsruhe
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6952

**Untersuchungen zum
primären Energiespektrum
der kosmischen Strahlung
im PeV-Bereich mit dem
KASCADE-Experiment**

H. Ulrich
Institut für Kernphysik

März 2004

Forschungszentrum Karlsruhe

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6952

Untersuchungen zum primären Energiespektrum
der kosmischen Strahlung im PeV-Bereich
mit dem KASCADE-Experiment

Holger Ulrich

Institut für Kernphysik

von der Fakultät für Physik
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
2004

Impressum der Print-Ausgabe:

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

ISSN 0947-8620

**Untersuchungen zum primären
Energiespektrum
der kosmischen Strahlung im
PeV–Bereich
mit dem KASCADE–Experiment**

ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES EINES

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFEN

VON DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK DER

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

GENEHMIGTE

DISSERTATION

VON

DIPL.-PHYS. HOLGER ULRICH

AUS WORMS

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 11. 2003

Referent: Prof. Dr. K.-H. Kampert

Korreferent: Prof. Dr. H. Blümer

Zusammenfassung

Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung folgt über große Bereiche einem einfachen Potenzgesetz mit einer Indexänderung im Bereich um $4 \cdot 10^{15}$ eV. Man spricht hierbei vom Knie im Spektrum der kosmischen Strahlung. Zum Ursprung des Knies existieren eine große Anzahl von Theorien, doch wenige von ihnen konnten bisher bestätigt oder falsifiziert werden. Um eine klare Aussage machen zu können, ist es erforderlich, die Energiespektren der einzelnen Primärteilchenarten zu bestimmen. In dieser Arbeit wurde die mit dem KASCADE-Experiment gemessene korrelierte Häufigkeitsverteilung der Elektronen- und Myonenzahl ausgedehnter Luftschauer benutzt. Unter Verwendung von Entfaltungsmethoden, deren Anwendbarkeit auf die Luftschauerproblematik anhand von Simulationsrechnungen untersucht wurde, gelang es, die Flußspektren von 5 Primärteilchenarten (H, He, C, Si, Fe), als Stellvertreter verschiedener Massengruppen, zu bestimmen. Für diese Analyse wurden die zwei Hochenergiewechselwirkungsmodelle QGSJet und SIBYLL benutzt. Mit beiden Modellen war es möglich, die Einzelspektren zu entfalten. Obwohl beide Wechselwirkungsmodelle die experimentellen Daten nicht völlig konsistent beschreiben, konnten doch grundlegende, mit hoher Wahrscheinlichkeit vom Wechselwirkungsmodell unabhängige, Eigenschaften der Einzelspektren abgeleitet werden. Gleichzeitig treten die Defizite in der Beschreibung der Daten in unterschiedlichen Regionen des Meßbereichs auf, sodaß es möglich ist, die Unstimmigkeiten in den Voraussagen der Wechselwirkungsmodelle genau anzugeben.

Investigations of the primary energy spectrum of cosmic rays in the PeV region with the KASCADE experiment

Abstract

The energy spectrum of cosmic rays follows over a wide range a simple power law with a change of the spectral index at about $4 \cdot 10^{15}$ eV. This break is usually referred to as the knee in the spectrum of cosmic rays. There exists a large number of theories on the origin of the knee but only few of them could have been confirmed or falsified. To make a clear statement it is necessary to determine the energy spectra of individual primary particles. In this work the correlated frequency distribution of electron and muon numbers of extensive air showers measured by the KASCADE experiment was used. By application of different unfolding techniques it was possible to deconvolute the flux spectra of 5 primary particles (H, He, C, Si, Fe) representing different mass groups. The applied unfolding procedures were tested by simulations and found to be suitable for the analysis of air shower data. For this analysis the two different high energy hadronic interaction models QGSJet and SIBYLL were used. For each model it was possible to obtain the individual energy spectra. Although the description of the measured data is not fully consistent for both interaction models some basic properties of the individual energy spectra could have been derived which are probably independent of the interaction models. Additionally the shortfall of the data description occurs in different regions of the measuring range which makes it possible to specify the discrepancies of the model predictions.

Inhaltsverzeichnis

1 Kosmische Strahlung und ausgedehnte Luftschauer	1
1.1 Das Energiespektrum	1
1.2 Die chemische Zusammensetzung	3
1.3 Beschleunigung und Transport	7
1.4 Möglicher Ursprung des Knies	8
1.5 Ausgedehnte Luftschauer	11
1.5.1 Die hadronische Komponente	12
1.5.2 Die myonische Komponente	12
1.5.3 Die elektromagnetische Komponente	13
1.5.4 Schauer verschiedener Primärteilchen	14
2 Das KASCADE-Experiment	19
2.1 Der Zentraldetektor	20
2.2 Der Myonspurdetektor	22
2.3 Das Detektorfeld	23
3 Die Daten des KASCADE-Detektorfelds	27
3.1 Methodik der Luftschauerrekonstruktion	27
3.2 Mögliche Unsicherheiten in der Flußbestimmung	30

3.2.1	Atmosphärische Einflüsse	30
3.2.2	Genauigkeit der Winkelrekonstruktion	32
3.2.3	Lage des rekonstruierten Schauerzentrums	34
3.3	Schauergrößenspektren	35
3.4	Verwendete Daten und Ansatz der Analyse	39
4	Luftschauersimulationen	43
4.1	Das CORSIKA-Programm	43
4.2	Der Thinning-Algorithmus	45
4.3	Parametrisierung der Schauergrößenverteilungen	49
4.3.1	Die $\lg N_e$ -Verteilung	50
4.3.2	Die korrelierte $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung	54
4.3.3	Der Simulationssatz und die Energieabhängigkeit	57
5	Rekonstruktionsqualität	61
5.1	Effizienzen	61
5.2	Genauigkeit der rekonstruierten Schauergrößen	65
5.2.1	Systematiken der $\lg N_e$ -Bestimmung	65
5.2.2	Systematiken der $\lg N_\mu^{tr}$ -Bestimmung	69
5.2.3	Statistische Unsicherheiten	72
6	Entfaltungsmethoden	77
6.1	Problemstellung	77
6.2	Methode der Korrekturfaktoren	80
6.3	Anpassung einer Funktion	81
6.4	Regularisierte Entfaltung	82

6.4.1	Tikhonov-Regularisierung	83
6.4.2	Prinzip der maximalen Entropie	84
6.5	Iterative Verfahren	85
6.5.1	Das Van Cittert-Verfahren	85
6.5.2	Der Gold-Algorithmus	86
6.5.3	Bayessche Entfaltung	87
7	Auswahl und Test der Verfahren	89
7.1	Überblick und Auswahl der Entfaltungsmethoden	89
7.2	Erzeugung von Monte-Carlo-Daten und Definition der Responsematrix	90
7.3	Analyse mit dem Gold-Algorithmus	93
7.3.1	Bestimmung des Abbruchkriteriums	93
7.3.2	WMSE und χ_b^2 bei bekannten Unsicherheiten	95
7.3.3	Abschätzung der statistischen und systematischen Fehler	100
7.4	Das Bayes-Verfahren	106
7.5	Methode der reduzierten Entropie	108
8	Analyse der Daten	113
8.1	QGSJet-Hypothese	113
8.1.1	Vergleich zwischen Parameterisierungen und Monte Carlo Rechnung	113
8.1.2	Fehlerbetrachtung und -abschätzung	116
8.1.3	Ergebnisse	121
8.2	SIBYLL-Hypothese	133
8.2.1	Vergleich zwischen Monte Carlo Rechnung und Parametrisierung	133
8.2.2	Ergebnisse	134
8.3	Vergleich und weitere Eigenschaften der QGSJet- und SIBYLL-Ergebnisse	142

8.3.1	Kniepositionen der leichten Elemente	143
8.3.2	Das totale Energiespektrum	149
9	Zusammenfassung und Ausblick	153
A	Parameter der Schauergrößenverteilungen	157
A.1	Die $\lg N_e$ -Verteilung	157
A.2	Die $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilung	163
B	WMSE- und χ_b^2-Verläufe	169

Kapitel 1

Kosmische Strahlung und ausgedehnte Luftschauer

Sei ihrer Entdeckung vor fast hundert Jahren [Hes12] gibt uns die kosmische Strahlung immer wieder neue Rätsel auf. Schon relativ früh wurde durch die Entdeckung der durch die Strahlung ausgelösten ausgedehnten Luftschauer [Aug39] klar, daß sie sich über einen enormen Energiebereich erstreckt. Das bis heute höchstenergetische gemessene kosmische Teilchen besitzt eine Energie von $3 \cdot 10^{20}$ eV [Bir95]. Automatisch ergibt sich die Frage, welche Objekte als Quellen in Frage kommen, und welche Beschleunigungsmechanismen am Werk sind. Aber auch schon bei "kleineren" Energien bestehen Probleme bei der Interpretation der gemessenen Daten. Bei einer Energie von ca. $3 \cdot 10^{15}$ eV ändert sich die Steilheit des Energiespektrums, das ansonsten einem Potenzgesetz folgt. Obwohl die Entdeckung dieses "Knies" der kosmischen Strahlung schon mehr als 40 Jahre zurückliegt [Kul59], ist bis heute keine befriedigende bzw. eindeutige Erklärung für dessen Existenz vorhanden. Eng im Zusammenhang mit dessen Interpretation steht auch die Frage nach den Beschleunigungsmechanismen und der Zusammensetzung der kosmischen Strahlung in diesem Energiebereich. Der Inhalt dieses Kapitels soll einen kurzen Abriss über den heutigen Kenntnisstand geben. Darüberhinaus wird ein Überblick der Eigenschaften von ausgedehnten Luftschauern gegeben, die zur Zeit gerade im Kniebereich die einzige Möglichkeit der Messung von kosmischer Strahlung sind.

1.1 Das Energiespektrum

Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung erstreckt sich über mehr als 10 Größenordnungen in der Energie und ungefähr 30 Größenordnungen im Fluß. Teilchen mit Energien im MeV-Bereich sind solaren Ursprungs, der Sonnenwind verhindert das Vordringen von Teilchen dieser Energien bis zur Erde. Erst oberhalb von einem GeV spricht man von kosmischer Strahlung. Die Intensität niederenergetischer Teilchen (bis ≈ 30 GeV pro Ladungseinheit)

wird stark vom Magnetfeld des Sonnenwinds moduliert. Erst oberhalb der genannten Energie läßt sich die kosmische Strahlung ungestört beobachten.

Das Energiespektrum erscheint fast strukturlos und folgt über weite Bereiche einem Potenzgesetz

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\gamma} \quad (1.1)$$

mit einem spektralen Index von $\gamma \approx 2.75$. Zur besseren Veranschaulichung von Abweichungen von diesem Potenzgesetzverhalten ist es üblich, die Werte des Flußes mit einer Potenz der Energie zu multiplizieren. In Abbildung 1.1 ist der gemessene Fluß einiger ausgewählter Experimente skaliert mit E^3 (E in GeV) dargestellt. In dieser Darstellung werden Strukturen deutlich, deren Ursache bis heute noch nicht befriedigend geklärt sind.

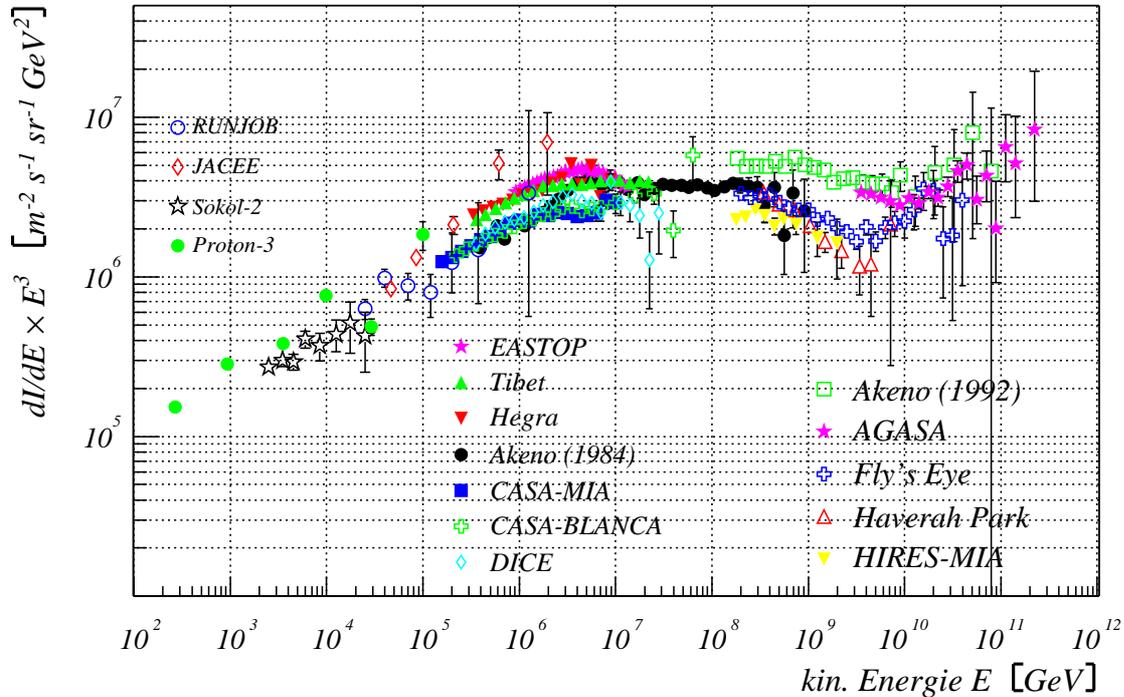


Abbildung 1.1: Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung. Die Experimente Proton-3 [Gri70], Sokol-2 [Gri90], JACEE [Tak98] und RUNJOB [Apa01] sind direkte Messungen, bei EASTOP [Agl99], Tibet [Ame96], Hagra [Arq00], Akeno [Nag84, Nag92], CASA-MIA [Gla99], CASA-BLANCA [Fow01], DICE [Swo00], HIRES-MIA [Abu01], Haverah Park [Ave03], Fly's Eye [Bir94] und AGASA [Tak03] handelt es sich um Luftschauerexperimente.

Im Bereich von 2 - 4 PeV zeigt sich eine Zunahme des spektralen Index von $\gamma = 2.75$ auf $\gamma = 3.05$, das sog. *Knie*. Der Index bleibt danach bis zu einer Energie von ungefähr $3 \cdot 10^{17}$ eV konstant, wo sich abermals eine Zunahme des Index andeutet. Dieses *zweite Knie* ist zur Zeit

in der Literatur noch nicht so etabliert wie das erste Knie, da z.B. das Akeno-Experiment (Punkte Akeno 1992 in Abb. 1.1) seine Existenz nicht bestätigen kann. Hingegen allgemein anerkannt ist die erneute Abnahme des Index auf $\gamma \approx 2.75$ im Bereich zwischen $5 \cdot 10^{18}$ und $1 \cdot 10^{19}$ eV, der sog. *Knöchel (Ankle)*. Oberhalb einer Energie von ca. $5 \cdot 10^{19}$ eV ist das gegenwärtige Wissen begrenzt und aktuell Gegenstand einer heftigen Diskussion. Ab einer Energie von $5 \cdot 10^{19}$ eV besitzen die Photonen der 3K-Hintergrundstrahlung im Ruhesystem eines Protons eine Energie von ≈ 200 MeV und mehr, wodurch inelastische Pionproduktion möglich wird. Im Fall schwererer Teilchen (ionisierte Atomkerne) ist die Photonenergie im Ruhesystem auch schon groß genug, um Resonanzen anzuregen und ein Auseinanderbrechen des Kerns zu induzieren. Aus diesen Gründen verkürzt sich die Reichweite der kosmischen Strahlung, und man erwartet im Fall von weit entfernten Quellen ein Abbrechen des Spektrums, der sog. *GZK-Cutoff*, benannt nach Greisen, Zatsepin und Kuz'min, die diesen als erste theoretisch vorhersagten [Gre66, Zat66]. Nur für nahe gelegene Quellen würde dieser Cutoff nicht auftreten, wobei hier jedoch praktisch keine astrophysikalischen Kandidaten vorhanden sind.

Das Experiment AGASA mißt Ereignisse jenseits von 10^{20} eV und findet keine Anzeichen eines solchen Cutoffs. In ersten Prototypmessungen sieht die HIRES-Kollaboration jedoch bei guter Übereinstimmung mit den Fly's Eye-Daten klare Hinweise auf den erwarteten GZK-Cutoff. Zur Zeit findet hier eine angeregte Diskussion statt, die unter Umständen erst durch das AUGER-Experiment geklärt werden kann.

Betrachtet man die experimentellen Resultate genauer, so zeigt sich, daß selbst im Kniebereich noch kein eindeutiges Spektrum vorliegt. Je nach Experiment variiert die Knieposition zwischen 1 PeV und 6 PeV. Darüberhinaus zeigt sich eine Art von Aufspaltung in zwei Klassen, die noch nicht verstanden ist. So befinden sich z.B. die Resultate der Experimente Casa-Mia, Akeno und Dice in guter Übereinstimmung, unterscheiden sich aber deutlich von den Daten der Experimente Tibet, Hegra und EAS-Top, die untereinander wiederum gut übereinstimmen. Ähnliches gilt für den Bereich des zweiten Knies. Fly's Eye, HIRES-Mia und Haverah Park sehen eine Abnahme des spektralen Index, Akeno/AGASA hingegen kann das zweite Knie nicht bestätigen und favorisiert eher einen gleichbleibenden Index bis zum Knöchel. Die Lage des Knöchels selbst variiert um einen Faktor 2 zwischen z.B. Fly's Eye und AGASA. Im Hinblick auf diese deutlichen Unterschiede, die durch verschiedene experimentelle Methoden kaum bzw. nicht zu erklären sind, bleibt weiterhin die Notwendigkeit von Messungen im gesamten Energiebereich bestehen, auch wenn sich neue Experimente nur auf das obere Ende des Spektrums konzentrieren.

1.2 Die chemische Zusammensetzung

Im Gegensatz zu ihrem Namen besteht die kosmische Strahlung fast vollständig aus geladenen Teilchen, in der Hauptsache Protonen und ionisierte Kerne, Elektronen und Gamma-Strahlung machen nur einen geringen Bruchteil aus. In diesem Zusammenhang spricht man

oft auch eher von Wasserstoffkernen als von Protonen. Die genaue chemische Zusammensetzung der kosmischen Strahlung ist nur im niederenergetischen Bereich, der mit Satelliten- und hochfliegenden Ballonexperimenten zugänglich ist, genau bekannt. Im Bereich unterhalb von 100 GeV dominieren Protonen und Heliumkerne die meßbare Strahlung, da aufgrund des Erdmagnetfeldes und des Sonnenwinds schwerere Kerne in der Häufigkeit stark unterdrückt sind. Unterhalb von ca. 10 GeV stellen Wasserstoffkerne fast 90% des ankommenden Teilchenflusses dar. Im Bereich von einigen GeV pro Nukleon ist der Teilchenfluß so groß, daß selbst das Verhältnis einzelner Isotope zueinander bestimmt werden kann. Prominentes Beispiel hierfür ist das $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ -Verhältnis mit dem die Verweildauer der kosmischen Strahlung in der Galaxis bestimmt werden kann.

Erst ab Energien oberhalb von ≈ 50 GeV pro Ladungseinheit beginnt die galaktische kosmische Strahlung ungestört sichtbar zu werden. Gerade in diesem Bereich enden aber die Messungen von Spektrometern auf Satelliten und hochfliegenden Ballons. In den Abbildungen 1.2 und 1.3 sind die gemessenen Spektren von Wasserstoff-, Helium- und Eisenkernen einiger ausgewählter Experimente dargestellt. Zur besseren Darstellung sind die Ordinatenwerte mit $E^{2.75}$ multipliziert. Man erkennt, daß die statistische Qualität der Daten mit zunehmender Energie stark abnimmt. Im Bereich um 400 GeV ist Wasserstoff das häufigste Element, Helium am zweithäufigsten. Der Heliumfluß ist hier ungefähr halb so groß wie der Protonfluß. Beim Vergleich der beiden Elemente ist von Interesse, ob beide Spektren den gleichen Index besitzen ($\gamma_H \approx 2.75$), oder ob das Heliumspektrum flacher verläuft. Nach einer Parametrisierung der direkten Messungen in [Wie98] ist letzteres der Fall, und man erwartet in der Gegend um $4 \cdot 10^5$ GeV einen Schnittpunkt der beiden Spektren. Im Rahmen der Messunsicherheiten ist es aber ebenfalls möglich, daß beide Spektren dem gleichen Potenzgesetz folgen, und damit das Proton zu Heliumverhältnis gleich bleibt. Eine Klärung dieser Frage steht noch aus, insbesondere da hier starke Unstimmigkeiten zwischen den Experimenten JACEE und RUNJOB bestehen, die als einzige Messungen im Bereich zwischen 100 TeV und 1 PeV durchgeführt haben. Gerade in diesem Bereich wären Anschlußmessungen von Luftschauerexperimenten besonders hilfreich. Zwar hat das Tibet-Experiment für beide Elemente Daten veröffentlicht [Ame00], doch sind bei diesen Ergebnissen die systematischen Unsicherheiten weitgehend unbekannt.

In Abbildung 1.3 ist neben dem Protonspektrum auch das Eisenspektrum dargestellt. Interessant hierbei ist der im Vergleich flachere Verlauf des Eisenspektrums. Ein ähnliches Verhalten scheint sich auch für Elemente schwerer als Bor anzudeuten. Insbesondere für die schweren Elemente sagen die meisten Propagationsmodelle einen kleineren Index voraus. Man erkennt in der Abbildung aber auch gerade bei den hohen Energien die großen Unsicherheiten (es sind nur die statistischen Fehler dargestellt), wodurch eine definitive Aussage schwer fällt. Bestätigt sich diese Indexabhängigkeit, würde der Anteil schwerer Elemente mit wachsender Energie zunehmen und damit die Komposition schwerer werden.

Die Datenkompilation nach Wiebel-Sooth et al. [Wie98] gilt als Standard- und Referenzquelle für die Komposition und die Energiespektren einzelner Elemente im Energiebereich oberhalb

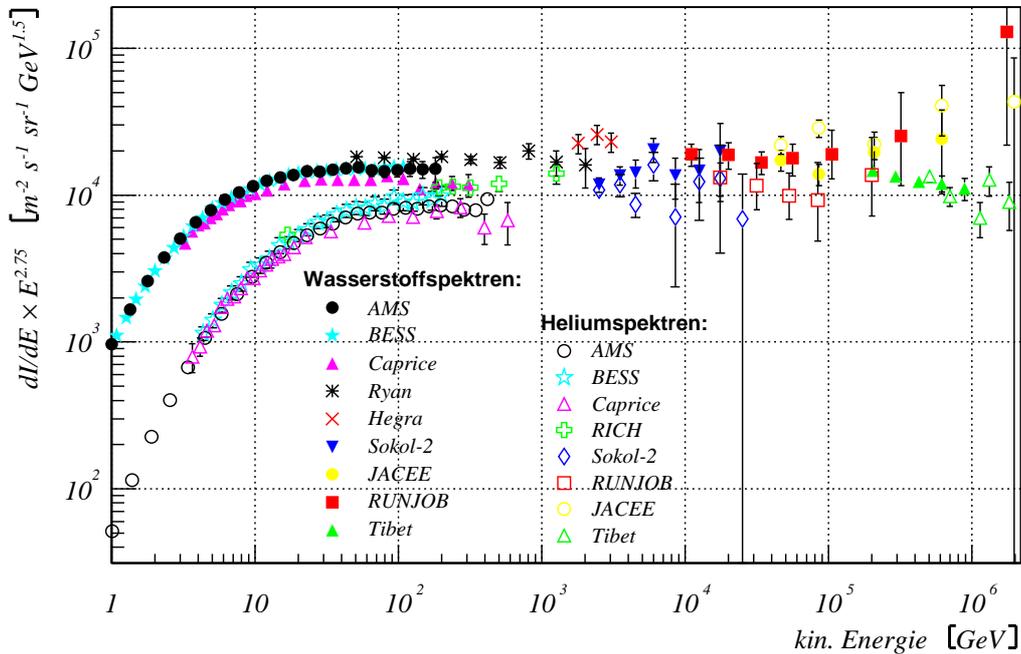


Abbildung 1.2: Energiespektren von Wasserstoff- und Heliumkernen ausgewählter Experimente. Die Flußwerte sind der Übersicht wegen mit $E^{2.75}$ skaliert. Die Daten stammen von AMS [Agu02], BESS [San00], Caprice [Boe03], RICH [Buc94], Ryan [Rya72], Hegra [Aha99], Sokol-2 [Gri90], JACEE [Tak98], RUNJOB [Apa01] und Tibet [Ame00].

von 1 TeV. In Abbildung 1.4 sind in der linken Hälfte die Flüße der Elemente Wasserstoff bis Nickel bei 1 TeV gemäß [Wie98] dargestellt. Neben Wasserstoff und Helium sind die *CNO*-Gruppe sowie die Elemente Neon, Magnesium, Silizium und Eisen am häufigsten vertreten. Es ist daher üblich, eine Einteilung in 5 bis 6 einzelne Massengruppen vorzunehmen. Neben *H* und *He* sind dies die *CNO*-Gruppe, die mittelschweren Elemente ($10 \leq Z \leq 16$), die schweren Elemente ($17 \leq Z \leq 25$) und die Eisengruppe (*Fe*, *Co* und *Ni*). Im Fall von 5 Massengruppen werden die mittelschweren und schweren Elemente zusammengefaßt. In der rechten Hälfte der Abbildung sind die in [Wie98] an die Daten direkter Messungen angepaßten und extrapolierten Spektrumsverläufe dargestellt. Man erkennt sowohl die unterschiedlichen Indizes, als auch den zunehmenden Anteil schwererer Elemente. Auch hier sind Daten im PeV-Bereich von Luftschauerexperimenten zumindest für einzelne Massengruppen notwendig, um sowohl einen Anschluß an die direkten Messungen zu liefern, als auch den weiteren Verlauf der Spektren bzw. der Komposition zu klären. Zwar deuten bisherige Ergebnisse von Luftschauerexperimenten eine ab dem Knie deutlich schwerer werdende Komposition an (z.B. [Ber98, Gla99b, Gla99, Web99, Fow01]), es existieren aber auch gegenteilige Ergebnisse (z.B. [Swo00]). In jedem Fall konnten bisher noch keine Spektren für einzelne Massengruppen in hinreichender Qualität bestimmt werden.

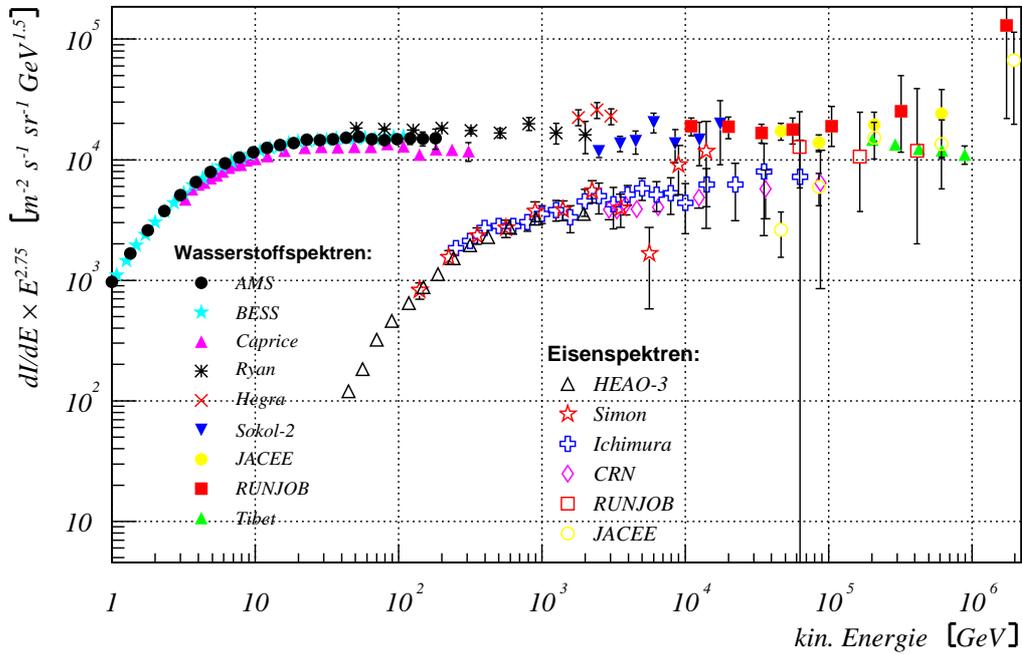


Abbildung 1.3: Energiespektren von Wasserstoff- und Eisenkernen ausgewählter Experimente. Die Wasserstoffdaten entsprechen denen der Abb. 1.2, Eisendaten stammen von HEAO-3 [Eng90], Simon [Sim80], Ichimura [Ich93], CRN [Mül91], RUNJOB [Apa01] und JACEE ($Z > 17$)[Tak98].

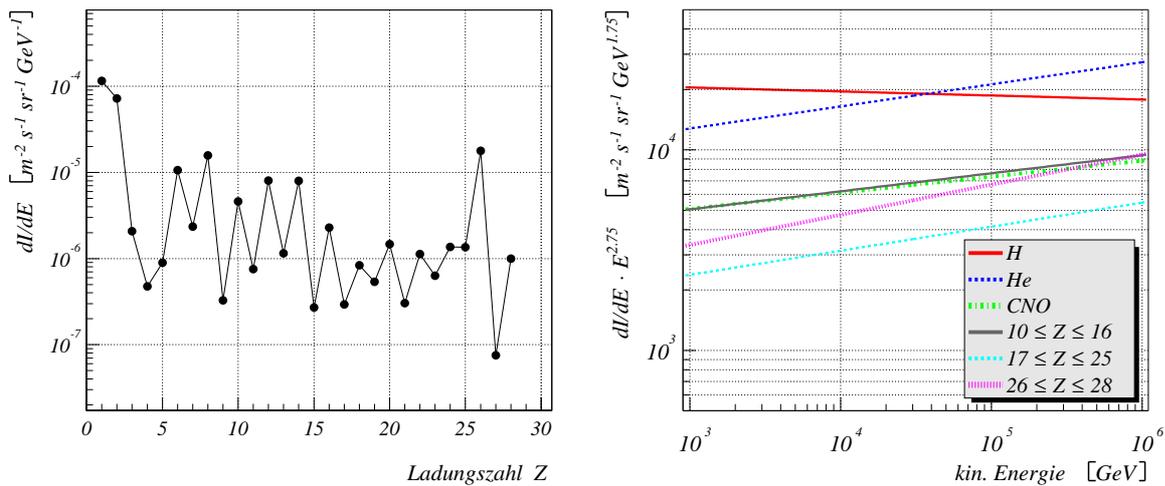


Abbildung 1.4: Links: Flußwerte einzelner Elemente bei einer Energie von 1 TeV; rechts: Energiespektren multipliziert mit $E^{2.75}$ verschiedener Elemente bzw. Elementgruppen; beide Darstellungen nach Wiebel-Sooth et al. [Wie98]

1.3 Beschleunigung und Transport

Die Standardtheorie der Beschleunigung der kosmischen Strahlung ist die Fermi-Beschleunigung 1. Ordnung bzw. diffuse Beschleunigung in starken Schockfronten [Bel78, Bla78, Dru83]. Ein Teilchen überquert hierbei wiederholt die Schockfront. Auf jeder Seite der Front wird es reflektiert, wodurch es bei jeder Überquerung Energie proportional der Geschwindigkeit der Schockfront gewinnt. Der große Vorteil dieses Modells ist, daß automatisch ein Potenzgesetz $E^{-\gamma}$ für das Energiespektrum der beschleunigten Teilchen folgt. Als Wert des Index ergibt sich ein Wert von $\gamma \approx 2$, der relativ unabhängig von den genauen Details bzw. den genauen Eigenschaften der Schockfront ist. Die maximal erreichbare Energie ist im wesentlichen abhängig von der Geschwindigkeit des Schocks, der Anzahl von Überquerungen und der Verweildauer der Teilchen in der Beschleunigungsregion bzw. der Lebensdauer des Schocks. Schockfronten sind ein oft beobachtetes Phänomen im Universum, wodurch sich eine Vielfalt an möglichen Quellkandidaten ergibt.

Als vielversprechendster Kandidat für die Beschleunigung gelten die Schockfronten von Supernovaüberresten [Bla80]. Zur Zeit werden große Anstrengungen unternommen, TeV- γ -Strahlung von Supernovaüberresten zu messen. Durch Untersuchungen des TeV- γ -Spektrums könnte die Hypothese, daß in Supernovaüberresten tatsächlich Beschleunigung von Hadronen stattfindet, bestätigt werden [Dru94]. Neben Supernovaexplosionen ist aber auch die Beschleunigung an Schocks, die beim Auftreffen eines Pulsarwinds auf die Atmosphäre/Magnetosphäre eines Begleiters entstehen [Har90], oder an der Stoßwelle des galaktischen Windes [Jok87] denkbar.

Neben der diffusen Schockbeschleunigung existieren auch Modelle, die eine direkte Beschleunigung in starken magnetischen und elektrischen Feldern annehmen. Ein Beispiel hierfür ist die Beschleunigung an den Polkappen von schnell rotierenden Pulsaren [Che86].

Die meisten der erwähnten Modelle können den Ursprung der kosmischen Strahlung bis zu Energien von maximal 10^{15} – 10^{17} eV erklären. Der Ursprung der Strahlung oberhalb von 10^{17} eV bis hin zu den höchsten Energien von 10^{20} eV ist sehr unsicher. Neben astrophysikalischen Modellen, die z.B. die Jets von aktiven galaktischen Kernen (AGN) als möglichen Beschleunigungsort sehen [Bie87, Rac93], existieren eine Vielzahl von Modellen, die neue Wechselwirkungen oder unbekannte Teilchen zur Erklärung heranziehen. Ein Überblick dieser "Top-Down"-Modelle findet sich z.B. in [Sig03].

Während die diffuse Schockbeschleunigung ein Energiespektrum mit einem Index von $\gamma \approx 2$ vorhersagt, mißt man tatsächlich einen Index von $\gamma \approx 2.7$. Die notwendige Indexänderung wird durch den Transport der geladenen Teilchen von den Quellregionen durch die Galaxis verursacht. Hierbei spielen Ionisationsverluste und Spallation im interstellaren Medium eine wichtige Rolle. Durch Spallationsprozesse werden z.B. erst die Häufigkeiten der Elemente Bor, Lithium und Beryllium sowie der Elemente unterhalb der Eisengruppe erzeugt. Da es sich um geladene Teilchen handelt, findet Diffusion im galaktischen Magnetfeld statt. Durch die

ständige Ablenkung geht jede Richtungsinformation verloren. Erst ab Energien oberhalb von ca. 10^{19} eV wird die Ablenkung der geladenen Teilchen so klein, daß Astroteilchenastronomie möglich wird. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Wechselwirkung der Strahlung auf dem Weg durch die Galaxis eine Indexänderung in der Größenordnung $\Delta\gamma \approx 0.6$ verursacht. Eine Übersicht bestehender Modelle zum Einschluß bzw. Transport der galaktischen kosmischen Strahlung in der Milchstraße findet sich in [Ces80].

1.4 Möglicher Ursprung des Knies

Zur Erklärung des Knies im totalen Energiespektrum der kosmischen Strahlung bestehen mehrere Ansätze, die sich grob in zwei Kategorien unterteilen lassen. Bei der einen Kategorie handelt es sich im weitesten Sinne um astrophysikalische Modelle, die das Knie durch Beschleunigungsmechanismen bzw. Propagationseigenschaften erklären, die andere postuliert noch nicht entdeckte bzw. neue physikalische Effekte bzw. Wechselwirkungen als Knieursprung. Die Erklärungsversuche dieser letzten Kategorie werden häufig unter dem Schlagwort "exotische Modelle" zusammengefaßt. Beiden Kategorien gemeinsam ist die Annahme, daß in den Flußspektren aller Primärteilchenarten ein Knie existiert, daß aber nach Aufsummation der Einzelspektren im Gesamtspektrum trotzdem keine deutlich sichtbare Feinstruktur entsteht. Der Schlüssel zur Unterscheidung der einzelnen Modelle liegt daher in den Eigenschaften der Energiespektren der verschiedenen Primärteilchensorten. Der folgende Überblick soll nur einen kurzen Einblick in die Vielfältigkeit der bestehenden Modellvorstellungen geben.

Astrophysikalische Modelle

Bei den astrophysikalischen Modellen ist die Natur des Knies eng mit der durch die Beschleunigung maximal erreichbaren Energie verbunden. Allen Modellen gemeinsam ist, daß sich die Knieposition im Spektrum eines Elements der Ladungszahl Z bei einer Energie $E_K^Z = Z \cdot E_K^H$ befindet, wobei E_K^H die Knieenergie des Wasserstoffspektrums ist. Diese Eigenschaft folgt aus der Tatsache, daß die Standardbeschleunigungsmechanismen alle elektromagnetischer Natur sind, womit die Rigidität als relevante Größe verbunden ist.

Auch die astrophysikalischen Modelle lassen sich in mehrere Klassen unterteilen. Die erste Klasse sieht die Knieenergie als die durch die Beschleunigung maximal erreichbare Energie, wobei das Knie im Gesamtspektrum eine Signatur des Knies im Wasserstoffspektrum ist (z.B. [Ber96]). Für diese Modelle erwartet man nach dem Knie einen starken Abfall des Spektrums.

Eine Erweiterung dieser Vorstellungen stellen Modelle dar, die unterschiedliche Arten der Beschleunigung postulieren. Ein Knie im Spektrum kommt zustande, wenn eine Art der Beschleunigung ihre Maximalenergie erreicht hat, und ihr Beitrag zum Gesamtfluß abnimmt.

Beispiele hierfür sind [Bie93] und [Kob02]. Im ersten Modell zeigt sich das Knie im Heliumspektrum als Knie im totalen Flußspektrum [Sta93], im zweiten Beispiel ist es das Knie im Eisenspektrum. Die Flüsse der leichten Komponenten besitzen hier die Eigenschaft, daß sich ihre Kniee in der Summe nicht bemerkbar machen. Neben der Rigiditätsabhängigkeit der einzelnen Kniepositionen charakterisiert diese Modelle ein relativ “weiches” Knie, d.h. eine Änderung des Index über einen relativ großen Energiebereich (ca. 1 Dekade). Innerhalb einer Dekade fällt die Indexänderung moderat aus und bewegt sich zwischen $\Delta\gamma \approx 0.3$ und $\Delta\gamma \approx 0.7$.

Die dritte Klasse von Modellen nimmt an, daß der durch die Beschleunigung zugängliche Energiebereich über das Knie hinaus reicht. Das Knie selbst kommt durch die Propagation der kosmischen Strahlung innerhalb der Galaxie zustande. Hierbei spielt die Energieabhängigkeit der unterschiedlichen Diffusionskoeffizienten (transversale Diffusion und Drift) die entscheidende Rolle (z.B. [Ptu93, Can02]). Unterhalb des Knies dominiert die normale transversale Diffusion, oberhalb des Knies die Hall-Diffusion (Drift), wodurch ein größerer Anteil der Strahlung die Galaxie verläßt, und damit das Spektrum steiler wird. Für die Indexänderung in den Einzelspektren werden ebenfalls Werte um 0.6 – 0.7 vorausgesagt.

Neben diesen Modellen soll noch das “Single Source Scenario” [Erl97] erwähnt werden. In diesem Modell zeigt sich das Knie im Gesamtspektrum als Signatur eines einzigen, nahen und relativ jungen Supernovaüberrests, in dem Schockwellenbeschleunigung stattfindet. Die Teilchen von dieser Quelle überlagern sich einem Hintergrundspektrum, welches im Gegensatz zu den von der Supernova stammenden Spektren kein Knie aufweist. Das eigentliche Knie im Gesamtspektrum wird hierbei maßgeblich durch die Kniestruktur des Spektrums der *CNO*-Gruppe verursacht und markiert damit das Ende der Beschleunigung im lokalen Supernovaüberrest.

Exotische Modelle

Neben den skizzierten astrophysikalischen Modellen existiert auch eine große Anzahl an Erklärungsversuchen für das Knie, die auf teilchenphysikalischen Annahmen basieren. Dabei werden neue Teilchen bzw. neue Wechselwirkungseigenschaften eingeführt. Tatsächlich sind in den meisten Modellen inhärent Probleme vorhanden, die ihre Gültigkeit zum Teil zweifelhaft erscheinen lassen. Aus diesem Grund spricht man oft im Zusammenhang mit diesen Hypothesen von “exotischen Modellen”. Als Beispiel für solche Modelle seien hier drei Modelle genannt, auf deren Probleme aber nicht eingegangen werden soll.

Unter der Annahme, daß Neutrinos massiv sind, ist theoretisch die Reaktion $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ möglich, bei der Protonen (Wasserstoff) zerstört werden. In [Wig03] wird postuliert, daß diese Reaktion zwischen Protonen der kosmischen Strahlung und Reliktneutrinos aus dem Urknall stattfindet. Das Knie im totalen Flußspektrum wird als die Schwellenenergie interpretiert, ab der dieser Prozeß für Protonen möglich wird, wodurch sich eine Abschätzung der

Neutrinomasse zu 0.5 eV ergibt. Das zweite Knie wird als Schwellenenergie für die Reaktion zwischen Heliumkernen und Reliktneutrinos aufgefaßt. Dieses Szenario besitzt eine klare Signatur, wenn es möglich ist, die Spektren der einzelnen Primärteilchenarten (insbesondere H und He) zu bestimmen.

Ein anderer Erklärungsversuch postuliert veränderte Eigenschaften der Hochenergiewechselwirkungen. So wird z.B. in [Nik95] vermutet, daß im Bereich der Knieenergie anstatt von sekundären Hadronen schwere Bosonen produziert werden, die dafür verantwortlich sind, daß schon in frühen Stadien der Luftschauerentwicklung ein großer Energieanteil unbemerkt dissipiert wird. Der nachgewiesene Luftschauer erscheint kleiner als erwartet, wodurch ihm eine kleinere Primärenergie zugeordnet wird. Die Anzahl der Schauer mit Primärenergien oberhalb der Reaktionsschwelle wird unterschätzt, wodurch ein Primärenergiespektrum mit steiler werdendem Index "gemessen" wird.

Analoge Erklärungen bieten Modelle, bei denen sich nicht nur die Eigenschaften der Hochenergiewechselwirkungen ändern, sondern auch neue Arten von Teilchen entstehen. Ein Beispiel hierfür stellt die Produktion von Gravitonen [Kaz03] in der ersten Wechselwirkung dar. Auch hier geht Energie in nicht detektierbaren Kanälen verloren, sodaß dem nachgewiesenen Luftschauer eine zu kleine Energie zugeordnet wird.

Modelle, wie die beiden zuletzt zitierten, besitzen ebenfalls eine Signatur, anhand derer ihre Gültigkeit überprüft werden kann. Für ein Primärteilchen der Massenzahl A kann der Wirkungsquerschnitt σ_A dieser Reaktionen als $\sigma_A \propto A \cdot \sigma_p$ angenommen werden, wobei σ_p der entsprechende Wirkungsquerschnitt für Protonen ist. Man erwartet daher zwar auch wieder für die rekonstruierten Flußspektren der einzelnen Primärteilchenarten ein Knie im jeweiligen Spektrum, die Kniepositionen wären aber im Gegensatz zu den astrophysikalischen Modellen proportional der Massenzahl.

Die Frage nach dem Ursprung des Knies kann zur Zeit noch nicht befriedigend geklärt werden. Die einzige Möglichkeit, zumindest einzelne Modellannahmen zu falsifizieren, besteht darin, die Spektren der einzelnen Komponenten der kosmischen Strahlung zu messen. Die Voraussagen der Theorien zum Knieursprung können dann anhand der Eigenschaften des spektralen Verlaufs (Knie, Kniepositionen, Indizes) überprüft bzw. bewertet werden. Besonders wichtig erscheinen hier die Spektren der Elemente Wasserstoff und Helium. Da für alle aufeinanderfolgenden Elemente mit Massen- bzw. Ladungszahlen A_1, Z_1 und A_2, Z_2 außer Wasserstoff und Helium $Z_1/Z_2 = A_1/A_2$ gilt, kann schon allein der Vergleich der Spektren dieser beiden Elemente zwischen einer Rigiditäts- und einer Massenabhängigkeit entscheiden. Gelingt es nicht, beide Spektren zu rekonstruieren, sondern nur ein "Wasserstoffspektrum" als Vertreter der leichten Elemente, wird die Interpretation durch den darin enthaltenen, nicht leicht faßbaren Heliumanteil erschwert.

1.5 Ausgedehnte Luftschauer

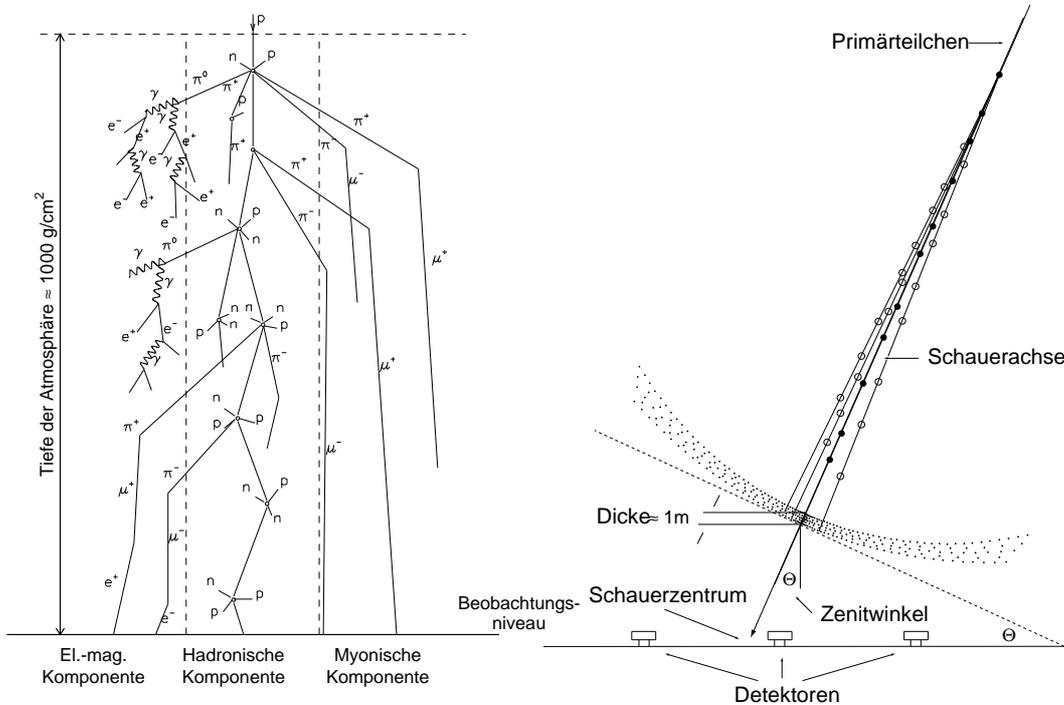


Abbildung 1.5: Schematische Darstellung eines ausgedehnten Luftschauers. Links: Aufteilung der einzelnen Komponenten. Rechts: Schematische Entwicklung in der Atmosphäre.

Ab Primärenergien oberhalb 10^{14} eV ist der Fluß der kosmischen Strahlung so klein, daß die direkte Messung mit Satelliten- oder Ballonexperimenten kaum noch möglich ist. Eine Alternative hierzu stellt die Messung ausgedehnter Luftschauer [Aug39] dar.

Tritt ein Teilchen der kosmischen Strahlung in die Erdatmosphäre ein, wird es mit einem Kern der Luftmoleküle (im wesentlichen Stickstoff oder Sauerstoff) zusammenstoßen und wechselwirken. Der Ort dieser ersten Wechselwirkung folgt einem Exponentialgesetz in der durchlaufenen Materiemenge λ und ist von der Wechselwirkungslänge λ_I des Teilchens abhängig. Für Protonen mit einer Energie von 10^{15} eV beträgt diese in Luft etwa 65 g/cm^2 , für Eisenkerne ca. 16 g/cm^2 . Ein Teil der Nucleonen des Atomkerns (Target) wechselwirkt mit dem Primärteilchen (Projektile), dabei entstehen Sekundärteilchen, in der Hauptsache Pionen (in jedem Ladungszustand etwa gleichviel) und Kaonen, mit geringerer Wahrscheinlichkeit auch andere Elementarteilchen. Die mittlere Zahl der Sekundärteilchen steigt dabei logarithmisch mit der Projektilenergie an, ist aber selbst bei fester Energie starken Schwankungen unterworfen, je nachdem wie zentral der Stoß stattgefunden hat. Die Transversalimpulse der Reaktionsprodukte liegen typischerweise in der Größenordnung von 500 MeV/c . Im Laborsystem (Beobachter am Boden bzw. Ruhesystem des Targets) bilden die auslaufenden Teilchen ein sehr enges Bündel. Die Sekundärteilchen durchlaufen die Atmosphäre und wechselwir-

ken wiederum selbst mit Kernen der Luft. Es entsteht so eine Teilchenlawine, die sich dem Erdboden nähert. Die Zunahme der Teilchenzahl hält solange an, bis die Energie der Reaktionsprodukte nicht mehr groß genug ist, um weitere Teilchenproduktion stattfinden zu lassen. Die Teilchenzahl nimmt dann nach Durchlaufen eines Maximums wieder ab. Da sich fast alle Teilchen ungefähr mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, trifft am Boden eine Teilchenfront von im Zentrum nur wenigen Metern Dicke auf. Man spricht von einem sog. *ausgedehnten Luftschauer*. Die laterale Ausdehnung des Schauers wird durch Streuprozesse in der Atmosphäre und durch die große Entstehungshöhe der Sekundärteilchen bestimmt. Je nach Energie des Primärteilchens kann die Ausdehnung mehrere 10 bis 1000 m betragen. In Abbildung 1.5 sind schematisch die Luftschauerentwicklung und die qualitative Topologie eines Luftschauers dargestellt.

Die Teilchen eines ausgedehnten Luftschauers werden in drei Komponenten eingeteilt, es sind dies die *hadronische*, die *myonische* und die *elektromagnetische* Komponente. Auf ihre Eigenschaften soll im Folgenden kurz eingegangen werden.

1.5.1 Die hadronische Komponente

In der hadronischen Komponente faßt man alle Baryonen und Mesonen zusammen. Hierbei handelt es sich überwiegend um Pionen, Kaonen, Protonen und Neutronen, sowie Kernfragmente. Die hadronische Komponente sorgt für den Energietransport während der Schauerentwicklung und generiert die anderen Schauerkomponenten. Fluktuationen in Ort und Anzahl der Wechselwirkungen der Hadronen sind auch für die Fluktuationen insbesondere der elektromagnetischen Komponente verantwortlich. Die hochenergetischen Hadronen sind stark um den Kern des Luftschauers (projizierter Auftreffort des Primärteilchens) konzentriert, die laterale Ausdehnung ist auf etwa 20 m begrenzt. Niederenergetische Hadronen (in der Hauptsache Neutronen) können sich allerdings auch weit von der Schauerachse (Flugrichtung des Primärteilchens) entfernen. Die am Erdboden auftreffenden hochenergetischen Hadronen (TeV-Energien) sind von besonderem Interesse, da sie nur wenigen Wechselwirkungen unterlagen und unter Umständen noch eng mit den Eigenschaften des Primärteilchens verknüpft sind.

1.5.2 Die myonische Komponente

Unter der myonischen Komponente versteht man die Gesamtheit der Myonen. Myonen eines Luftschauers entstehen durch den Zerfall geladener Pionen und Kaonen. Die Produktion durch photonukleare Prozesse spielt nur eine untergeordnete Rolle. Aufgrund der exponentiellen Abnahme der Luftdichte mit der Höhe besitzen Pionen/Kaonen in höheren Luftschichten eine größere Wahrscheinlichkeit zu zerfallen als in den unteren Schichten. Insbesondere hochenergetische Myonen (> 100 GeV) stammen aus den frühen Stadien der Luftschauerentwicklung und geben über die longitudinale Entwicklung Auskunft. Am Boden ankommende

niederenergetische Myonen (< 1 GeV) sind in aller Regel meist nicht weiter als 1 km entfernt entstanden. Da Vielfachstreuung und Bremsstrahlung im Vergleich zu Elektronen um einen Faktor $(m_\mu/m_e)^2 \approx 43000$ unterdrückt sind, behalten die Myonen ihre Flugbahn nahezu bei. Durch Messung der Flugrichtung der Myonen und Vergleich mit der Einfallrichtung des Luftschauers ist es möglich, den Entstehungsort der Myonen zu bestimmen.

Die longitudinale Entwicklung der Myonen (siehe Abb. 1.6) zeigt nach einem anfänglichen Anstieg ein Maximum, danach erfolgt aber nur ein schwacher Abfall. Dies hat zur Folge, daß die Fluktuationen der am Erdboden beobachtbaren Myonenanzahl wesentlich geringer ausfallen und nur wenig von der Höhe der ersten Wechselwirkung abhängen. Ferner ist diese Myonzahl nur schwach von der Art des den Schauer auslösenden Primärteilchens abhängig. Die Myonenzahl stellt daher einen guten Schätzwert für die Energie des Primärteilchens dar. Die myonische Komponente besitzt die größte laterale Ausdehnung. Einzelne Myonen können selbst bei Schauern im PeV-Bereich noch mehr als 1 km vom Schauerzentrum entfernt auftreten. Da die Myonen kaum der Vielfachstreuung unterliegen, wird die typische laterale Ausdehnung im wesentlichen durch die Geometrie (Entstehungshöhe und dortiger Winkel zur Schauerachse) festgelegt. Die Myonen werden vorzugsweise in Richtung der Pionflugbahn emittiert, sodaß die Lateralverteilung im gewissen Rahmen auch die Transversalimpulsverteilung der Pionen widerspiegelt. Im Rahmen des KASCADE-Experiments hat sich gezeigt, daß für Abstände bis 250 m vom Schauerzentrum die laterale Verteilung der Myondichten $\rho_\mu(r)$ sehr gut mit einer NKG-Funktion (siehe nächster Abschnitt) mit einem Moliere-Radius von 420 m beschrieben werden kann [Ant01].

1.5.3 Die elektromagnetische Komponente

Die Gesamtheit der Elektronen, Positronen und Gammaquanten bildet die elektromagnetische Komponente. Sie bildet mit ca. 90% den Löwenanteil aller Schauerteilchen, während die Myonen etwa 5% und die Hadronen nur ca. 1% aller Teilchen ausmachen. Die elektromagnetische Komponente wird hauptsächlich durch den Zerfall neutraler Pionen in zwei Photonen generiert. Elektronen/Positronen aus Myon- bzw. Kaonzerfällen spielen nur eine untergeordnete Rolle (außer bei sehr schräg einfallenden Schauern). Die Zerfallselektronen und -photonen starten durch Bremsstrahlung und Paarbildung elektromagnetische Subkaskaden. Aufgrund der kurzen Strahlungslänge in Luft X_0 von 37 g/cm^2 und der vergleichsweise niedrigen kritischen Energie E_{krit} von 82 MeV (für Luft) findet eine heftige Teilchenmultiplikation statt. Die longitudinale Entwicklung eines γ -induzierten Schauers läßt sich näherungsweise [Gre56] durch

$$N_e(E_0, t) = \frac{0.31}{\sqrt{\beta_0}} \cdot e^{t(1-1.5 \ln s)} \quad (1.2)$$

mit $t = \frac{X}{X_0}$, $\beta_0 = \ln \frac{E_0}{E_{krit}}$ und $s = \frac{3t}{t + 2\beta_0}$

beschreiben. Hierbei ist X die atmosphärische Tiefe in g/cm^2 und E_0 die Energie des den Schauer auslösenden Gammaquants. s wird als longitudinaler *Age*-Parameter oder longitudinales *Schaueralter* bezeichnet. Der Schauer startet bei $s = 0$, durchläuft sein Maximum

bei $s = 1$ und ist bei $s = 2$ auf weniger als ein Teilchen abgeklungen. Die laterale Ausdehnung eines rein elektromagnetischen Schauers wurde theoretisch von Kamata und Nishimura [Kam57] untersucht und berechnet. Das Ergebnis kann näherungsweise analytisch ausgedrückt werden durch [Gre56]:

$$\rho_e(r) = C(s) \frac{N_e}{2\pi r^2} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{s-2} \left(1 + \frac{r}{r_m}\right)^{s-4.5} \quad (1.3)$$

mit dem Normierungsfaktor $C(s) = \frac{\Gamma(4.5 - s)}{\Gamma(s)\Gamma(4.5 - s)}$

Hierbei ist $\rho_e(r)$ die Dichte der Elektronen im Abstand r vom Schauerzentrum, N_e die Gesamtzahl der Elektronen am Beobachtungsniveau, s der laterale Age-Parameter und r_m der Moliere-Radius, der aus der Theorie der Vielfachstreuung folgt. Für Meereshöhe gilt $r_m = 79$ m. Diese Formel gilt asymptotisch für Abstände größer als 1 m vom Schauerzentrum und den Age-Bereich $0.8 < s < 1.6$. Obwohl diese Formel von Greisen stammt, wird sie allgemein in Anlehnung an Kamata, Nishimura und Greisen als *NKG-Funktion* bezeichnet.

In einem hadronisch induzierten Luftschauer ist die elektromagnetische Komponente eine Überlagerung aus vielen solcher Subschauer, die mit unterschiedlicher Energie und in unterschiedlichen Höhen beginnen. Trotzdem hat sich in der Praxis die Beschreibung sowohl der longitudinalen wie auch der lateralen Form durch die Funktionen 1.2 und 1.3 als sehr gut erwiesen. Hierbei verlieren allerdings der Age-Parameter und der Moliere-Radius ihre ursprüngliche Bedeutung. Es ist insbesondere ein Standard, an die Elektronenlateralverteilung eine NKG-Funktion anzupassen. Je nach Lage und Energieschwelle des Experiments müssen aber andere Werte für r_m benutzt werden. Beim KASCADE-Experiment wird für r_m ein Wert von 89 m benutzt. In den Abbildungen 1.6 und 1.8 sind als Beispiel die Longitudinal- und die Lateralverteilung von Proton- und Eisen-induzierten Luftschauern dargestellt.

1.5.4 Schauer verschiedener Primärteilchen

Die Eigenschaften der verschiedenen Luftschauerkomponenten, insbesondere der elektromagnetischen und der myonischen, ermöglichen es, Aussagen über die Energie und die chemische Natur des Primärteilchens zu machen.

Betrachtet man die Longitudinalentwicklung von Proton- und Eisen-induzierten Luftschauern (siehe Abbildung 1.6), stellt man fest, daß in beiden Fällen im Maximum der Elektronenverteilung etwa gleich viele Teilchen vorhanden sind. Da Elektronen und Positronen den Löwenanteil der geladenen Teilchen eines Luftschauers darstellen, gilt dies auch für das Maximum aller geladenen Teilchen. Die Lage des Maximums in der Atmosphäre unterscheidet sich aber je nach Primärteilchenart, für Eisen-induzierte Schauer liegt es höher, also bei kleineren atmosphärischen Tiefen. Verständlich wird dies durch die kleinere Wechselwirkungslänge

von Eisenkernen und der damit verbundenen größeren Höhe der ersten Wechselwirkung. Betrachtet man den Einzelschauer, ist die durchlaufene Materiemenge zwischen erster Wechselwirkung und Schauermaximum zwar von der Primärenergie abhängig, aber kaum von der Art des Primärteilchens. Mißt man den longitudinalen Verlauf des Schauers, kann man mit Hilfe der Größe des Schauermaximums eine Aussage über die Primärenergie machen, seine Lage gibt Hinweise über die chemische Art des Primärteilchens. Diese Methode wird bei den Fluoreszenzmessungen von Luftschauern angewandt, wie sie z.B. beim Auger-Experiment durchgeführt werden.

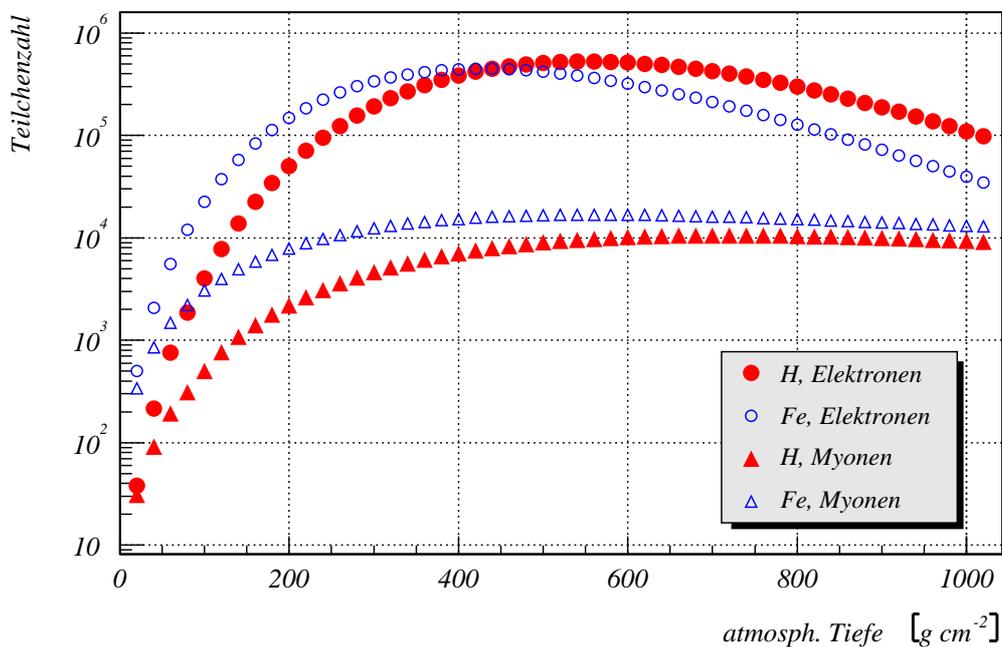


Abbildung 1.6: Mittlere Longitudinalentwicklung der Elektronen und Myonen für simulierte Proton- und Eisen-induzierte Schauer von 1 PeV Primärenergie unter einem Zenitwinkel von 0° . Es wurde über 50 Schauer gemittelt.

Wie man Abb. 1.6 entnimmt, schwächt sich die myonische Komponente nach Erreichen ihres Maximums im Gegensatz zu den Elektronen kaum ab. Ferner ist der Unterschied in der Myonzahl zwischen verschiedenen Primärteilchen weniger stark als in der Elektronenzahl. Diese Aussage, wie auch die folgenden, gelten für ein Beobachtungsniveau nahe Meereshöhe, wie z.B. bei KASCADE (siehe nächstes Kapitel). Im Mittel stellt also die Myonzahl einen guten Schätzer für die Primärenergie dar, während die Elektronenzahl als Indiz für die Primärteilchenart dient. Die Unterschiede in der Elektronenzahl spiegeln die verschiedenen Höhen des Schauermaximums bei Proton- und Eisen-induzierten Schauern wider. Tatsächlich ist die Art des Abfalls nach dem Elektronenmaximum bei mittleren Longitudinalentwicklungen praktisch nicht von der Art des Primärteilchens abhängig, dafür jedoch bei Eisen-induzierten

Schauern im Vergleich weiter fortgeschritten. Man findet selbst bei Einzelschauern gleicher Primärenergie eine starke Korrelation zwischen Elektronenzahl-zu-Myonzahl-Verhältnis mit der Lage des Schauermaximums, die unabhängig vom Primärteilchen ist.

In Abbildung 1.7 sind für verschiedene Primärenergien jeweils für Wasserstoff- und Eisen-induzierte Schauer die Formen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine bestimmte Kombination von Elektronen- und Myonzahl zu erhalten (für KASCADE-Niveau unter kleinem Zenitwinkel) dargestellt. Man kann sich ohne Weiteres vorstellen, wie in dieser *Schauergrößenebene* sowohl eine Energie- wie auch eine Massenachse eingezeichnet werden muß, anhand derer einzelne Schauer klassifiziert werden können [Bur02].

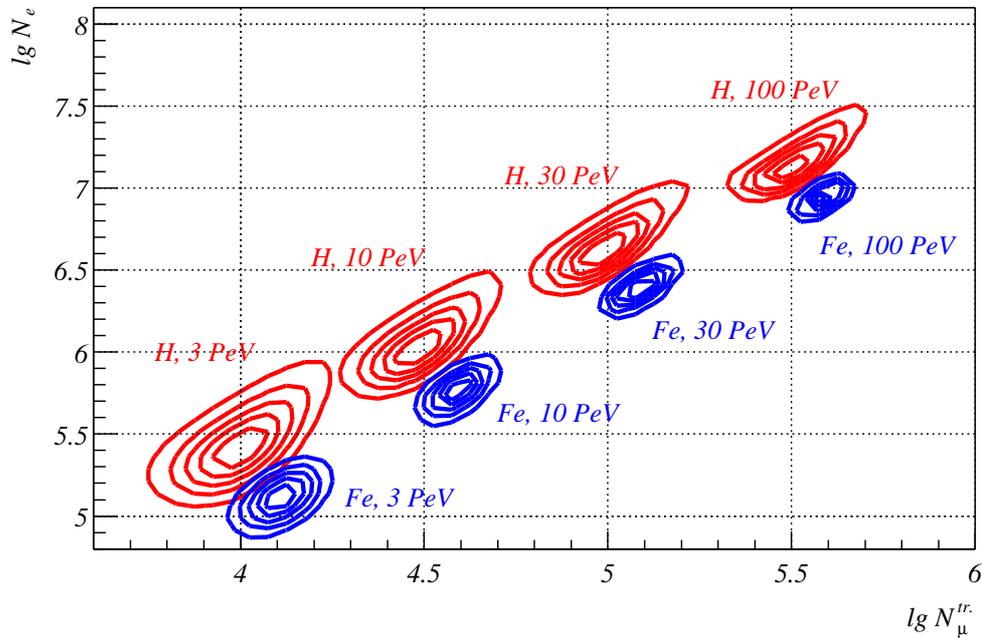


Abbildung 1.7: Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.})$ der Elektronen- und gestutzten (trunkierten) Myonzahl für Wasserstoff- und Eisen-induzierte Schauer verschiedener Primärenergien.

Ein Vergleich der Lateralverteilungen von Elektronen und Myonen für Wasserstoff- und Eisen-induzierte Schauer wird in Abbildung 1.8 durchgeführt. Klar erkennt man die unterschiedliche Anzahl von Elektronen bei den verschiedenen Primärteilchen. Bei genauerer Inspektion wird auch die unterschiedliche Krümmung der Elektronenlateralverteilung deutlich, bei 20 m Abstand vom Schauerzentrum unterscheiden sich die Elektronendichten der beiden Primärteilchen etwa um einen Faktor 5, bei 200 m nur noch um einen Faktor 2. Währenddessen stimmen die Myonendichten nahe dem Schauerzentrum im Mittel fast überein, für Eisen-induzierte Schauer fällt die Myonlateralverteilung aber mit zunehmendem Radius schwächer ab.

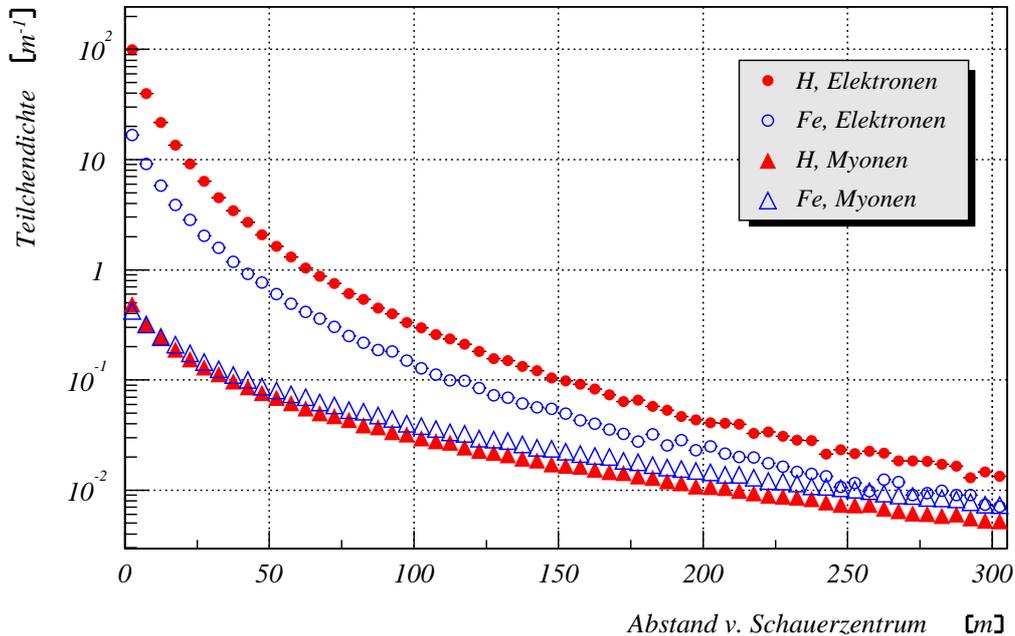


Abbildung 1.8: Mittlere Lateralverteilung der Elektronen und Myonen für simulierte Proton- und Eisen-induzierte Schauer von 1 PeV Primärenergie unter einem Zenitwinkel von 0° . Es wurde über 50 Schauer gemittelt.

Ursache ist in beiden Fällen wieder die unterschiedliche Schauerentwicklung. Die laterale Ausdehnung der Elektronen nimmt mit zunehmendem Abstand vom Schauermaximum immer mehr zu, die laterale Verteilung wird flacher. Betrachtet man diese Verbreiterung als Funktion des Abstands zum Schauermaximum, gibt es kaum Abhängigkeiten von der Art des Primärteilchens, auch im Schauermaximum sind in beiden Fällen die Lateralverteilungen praktisch identisch. Der Unterschied auf Beobachtungsniveau erklärt sich damit wieder durch die unterschiedliche Lage des Maximums.

Bei Eisen-induzierten Schauern findet die Schauerentwicklung in größeren Höhen statt als bei Wasserstoff-induzierten. Damit entstehen auch Myonen in größerem Abstand zum Erdboden. Da Myonen nach ihrer Entstehung kaum in der Atmosphäre abgelenkt werden, treffen Myonen, die unter einem Winkel α zur Schauerachse entstanden sind, umso weiter vom Schauerzentrum entfernt den Erdboden, je höher sie entstanden sind. Dieser rein geometrische Effekt erklärt die flacherer Myonlateralverteilung bei Eisen-induzierten Schauern.

Die Form der Lateralverteilungen erlaubt im Prinzip, bei fester Elektronenzahl bzw. Myonenzahl Aussagen über die chemische Natur des Primärteilchens zu machen. Voraussetzung hierfür ist allerdings eine ausreichend hohe Nachweisfläche bzw. Flächenbelegung mit Detektoren, aber auch eine hinreichend gute Detektorauflösung. In der Praxis ist daher die Aussagekraft der Lateralverteilungen und insbesondere des Age-Parameters begrenzt.

Kapitel 2

Das KASCADE-Experiment

KASCADE (*K*arlsruhe *S*hower *C*ore and *A*rray *D*etector) gehört zu den Luftschauerexperimenten. Die Anlage befindet sich auf dem Gelände des Forschungszentrum Karlsruhe (110 ü.N.N., 49.1° n. Breite, 8.4° ö. Länge). Das Hauptziel ist die Bestimmung des Energiespektrums der kosmischen Strahlung im Bereich zwischen 10^{14} eV und 10^{17} eV, sowie die chemische Zusammensetzung der Primärstrahlung in diesem Bereich.

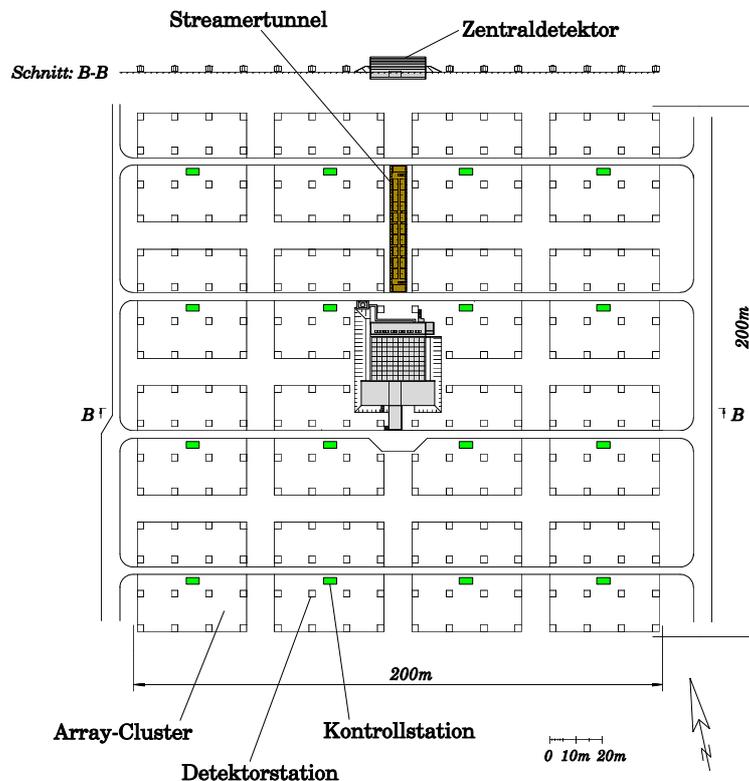


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des *KASCADE*-Experiments.

Um eine hohe Qualität der Ergebnisse sowie mehrere unabhängige Analysen zu ermöglichen, besteht das Experiment aus mehreren Detektortypen, die sowohl die verschiedenen Komponenten eines Luftschauers erfassen, als auch mehrere Schauerparameter einer einzelnen Komponente bestimmen können. Durch diese Menge an Informationen lassen sich die Konsistenz der verschiedenen Analyseergebnisse bzw. der verwendeten Hochenergiewechselwirkungsmodelle überprüfen. Insbesondere mit der Information über die hadronische Komponente lassen sich gezielte Tests verschiedener Wechselwirkungsmodelle durchführen.

Abbildung 2.1 zeigt ein schematisches Bild des Aufbaus der Anlage. Im Folgenden wird ein Abriß über die einzelnen Detektorkomponenten gegeben, der sich an der räumlichen Aufteilung in drei Hauptkomponenten orientiert. Weitergehende Informationen und Beschreibungen finden sich in [Ant03]. In Tabelle 2.1 sind die wichtigsten Eigenschaften der einzelnen Nachweissysteme zusammengestellt.

Detektor und -typ	Teilchenart	totale Fläche	Energieschwelle
Detektorfeld:			
Flüssigszintillatoren	e/γ	490 m ²	5 MeV
Plastikszintillatoren	μ	622 m ²	230 MeV
Myonspurdetektor (MTD):			
Streamer Tubes	μ	4×128 m ²	800 MeV
Zentraldetektor:			
Kalorimeter, Flüssigionsisationskammern	Hadronen	8×304 m ²	50 GeV
Triggerebene, Plastikszintillatoren	μ	208 m ²	490 MeV
Topcluster, Plastikszintillatoren	e/γ	23 m ²	5 MeV
Toplage, Flüssigionsisationskammern	e/γ	304 m ²	5 MeV
Vieldrahtproportionalkammern	μ	2×129 m ²	2.4 GeV
Limited Streamer Tubes	μ	250 m ²	2.4 GeV

Tabelle 2.1: Eigenschaften der verschiedenen Detektortypen im KASCADE-Experiment. Angegeben sind die zu messenden Teilchensorten, die totale Fläche der Detektoren und die Energieschwelle der nachzuweisenden Teilchen.

2.1 Der Zentraldetektor

Der in der Mitte des Detektorfeldes liegende Zentraldetektor beherbergt verschiedene Nachweissysteme, die insbesondere Informationen über das Zentrum ausgedehnter Luftschauer, den sog. Luftschauerkern, liefern können. Herzstück ist das Hadronkalorimeter, welches durch

Vieldrahtproportionalkammern und eine Lage von Streamertubes unterhalb und das Topcluster und die Toplage oberhalb umschlossen ist. Zwischen der zweiten und dritten Lage des Kalorimeters befindet sich eine Lage von Plastikszintillatoren, die sog. Triggerebene, die ein Auslesesignal für das Kalorimeter und die darunterliegenden Komponenten liefert, sowie zum Myonennachweis dient. Abbildung 2.2 zeigt einen schematischen Schnitt durch den Zentraldetektor.

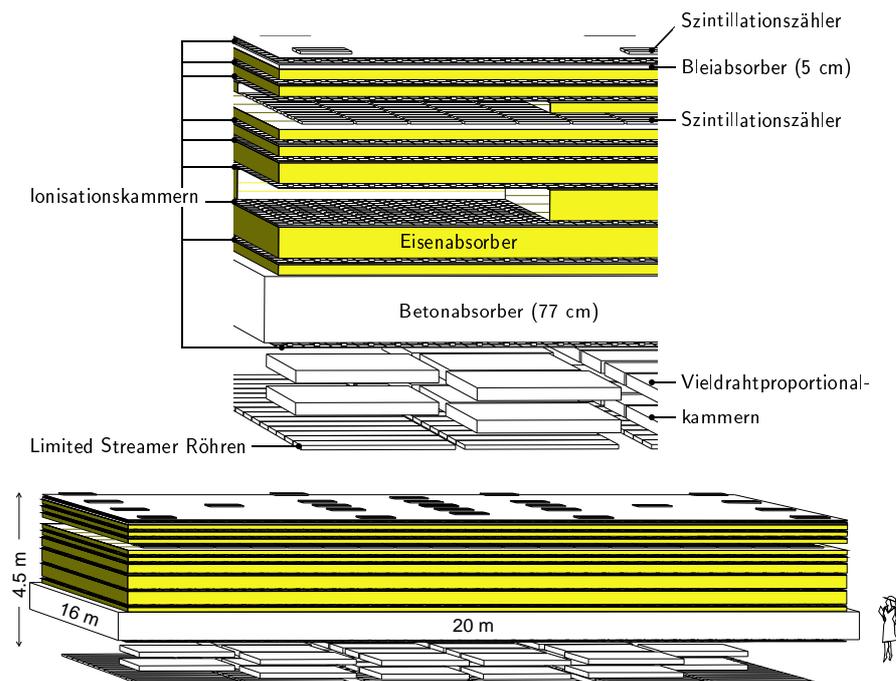


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Zentraldetektors und seiner Komponenten.

Bei dem Hadronkalorimeter handelt es sich um ein Sampling-Kalorimeter, das aus 8 Lagen Eisenabsorber und 9 Lagen von insgesamt 11000 Flüssigionisationskammern besteht. Die Dicke der Absorberschichten wird mit zunehmender Tiefe größer und entspricht insgesamt ungefähr 11.5 hadronischen Wechselwirkungslängen. Oberhalb der tiefsten Detektorlage befindet sich zusätzlich ein Betonabsorber. Die Ionisationskammern sind mit hochreinem Tetramethylsilan oder Tetramethylpentan gefüllt. Jede einzelne Kammer besitzt eine Fläche von $50 \times 50 \text{ cm}^2$ und eine Dicke von 1 cm. Die Kammer selbst ist in vier Segmente unterteilt, die getrennt ausgelesen werden. Die Energieschwelle nachweisbarer Hadronen liegt bei 50 GeV, die Obergrenze liegt bei ungefähr 25 TeV. Eine ausführliche Beschreibung des Kalorimeters und seiner Eigenschaften findet sich in [Eng99].

Die neunte Lage der Ionisationskammern befindet sich oberhalb des eigentlichen Kalorimeters. Sie stellt die sog. Toplage dar. Durch ihre Flächenbelegung von nahezu 100% ist sie

besonders für den Nachweis und die Analyse sehr kleiner Luftschauer geeignet, die durch das Detektorfeld nicht nachgewiesen werden können. Für diese Schauer stehen dann zusätzlich die Myon- und Hadroninformationen des übrigen Zentraldetektors zur Verfügung, wodurch Aussagen über Energie und Art des Primärteilchens möglich werden.

Die Triggerebene zwischen der zweiten und dritten Lage des Kalorimeters besteht aus insgesamt 228 Detektormodulen, bestehend aus jeweils zwei Plastiksintillatoren. Jedes Modul besitzt eine Fläche von 0.45 m^2 und wird von zwei Photomultipliern ausgelesen. Durch die Absorberschichten oberhalb ergibt sich für vertikale Myonen eine Energieschwelle von 490 MeV. Neben der Erzeugung eines Startsignals für die Datenauslese der Zentraldetektorkomponenten werden mit der Triggerebene Myondichten und Ankunftszeiten gemessen.

Auf dem Dach des Zentralgebäudes befindet sich das Topcluster. Es besteht aus 25 Szintillationszählern, die der Bauart der Triggerebene gleichen. Durch die hohe Flächenbelegungsichte von 7.5 % ist es möglich, auch kleine Luftschauer zu erfassen, und somit den Meßbereich von KASCADE zu tieferen Energien hin auszudehnen. Gleichzeitig wird die im Detektorfeld durch den Zentraldetektor verursachte Lücke geschlossen.

Unterhalb des Kalorimeters sind zwei Lagen aus je 16 Vieldrahtproportionalkammern übereinander angebracht. Die meisten Kammern besitzen eine Fläche von circa 9 m^2 , wodurch sich eine Gesamtfläche von 129 m^2 pro Lage ergibt. Die Kammern werden mit einer Mischung aus Argon und Methan betrieben, und dienen zur Spurmessung von Myonen, die das Kalorimeter durchflogen haben. Durch die darüberbefindliche Masse ergibt sich für senkrechte Myonen eine Schwelle von 2.4 GeV. Die Ortsauflösung der Myonen beträgt 1.1 cm, wodurch sich eine Winkelauflösung der Spuren von 1.5° ergibt. Ausführliche Informationen finden sich in [Boz01].

Bei Teilchendichten größer als 2 pro m^2 zeigen sich in der Spurrekonstruktion Sättigungseffekte. Um die dadurch verursachten Vieldeutigkeiten zu vermeiden, wurde unterhalb der Drahtkammern eine Lage von Limited Streamer Tubes angebracht. Diese Lage besteht aus sechs Reihen mit jeweils 15 Modulen. Damit ergibt sich eine Fläche von 250 m^2 . Die Kammern werden mit Kohlendioxid betrieben und sind baugleich mit den Kammern des Myonspurdetektors (nächster Abschnitt).

2.2 Der Myonspurdetektor

Nördlich des Zentraldetektorgebäudes befindet sich in einem 48 m langem, 5.4 m breiten und 2.4 m hohen Tunnel der Myonspurdetektor. Der Tunnel liegt unterhalb einer Schicht aus Erde, Eisenplatten und einer Betondecke. Diese Schicht stellt einen Absorber von ungefähr 18 elektromagnetischen Strahlungslängen dar, wodurch das Eindringen der elektromagnetischen Komponente des Luftschauers weitgehend verhindert wird. Für vertikale Myonen ergibt sich eine Energieschwelle von 800 MeV. Abbildung 2.3 zeigt einen schematischen Schnitt durch die Anlage.

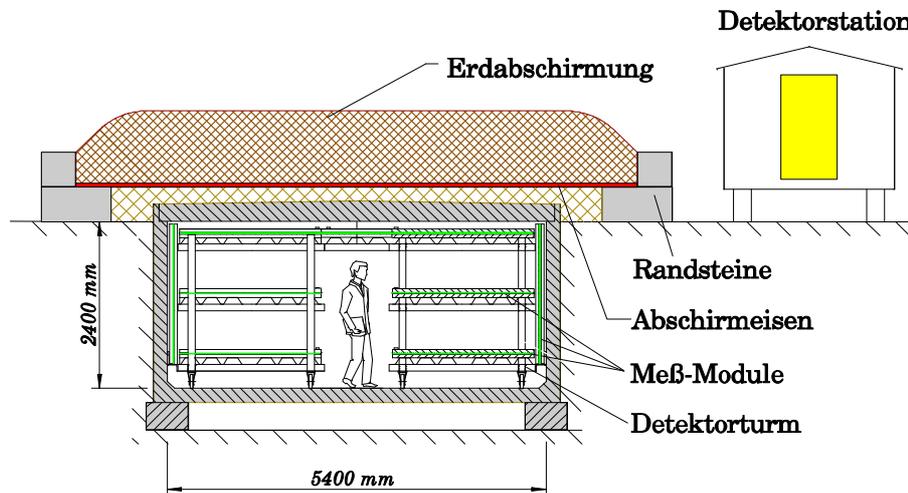


Abbildung 2.3: Querschnitt durch den Tunnel des Myonspurdetektors.

Im Tunnel befinden sich in zwei Reihen jeweils 8 Detektortürme hintereinander, die jeweils aus drei horizontalen Lagen von Limited-Streamer-Tube-Detektoren bestehen. Der vertikale Abstand der Lagen beträgt 82 cm, wodurch eine Winkelauflösung von 0.35° für vertikale Myonen erreicht wird. Die Gesamtlänge einer Turmreihe beträgt 32 m, für vertikale Myonen ergibt sich eine effektive Nachweisfläche von 128 m^2 . An den Seitenwänden des Tunnels sind zusätzlich senkrechte Kammern angebracht, welche die Akzeptanz für schräge Teilchen erhöhen. Die Kammern werden mit einem Gemisch aus Argon, Kohlendioxid und Isobutan betrieben. Durch die Vermessung der Myonspuren ist es unter Berücksichtigung der Schauerachse möglich, die Produktionshöhe der Myonen zu bestimmen. Diese Höhe erweist sich in Simulationsrechnungen als sensitiv auf die Masse des Primärteilchens. Genauere Informationen über die Eigenschaften des Myonspurdetektors finden sich in [Dol02].

2.3 Das Detektorfeld

Das Detektorfeld oder Array des KASCADE-Experiments stellt flächenmäßig den größten Experimententeil dar. Auf einer Fläche von $100 \times 100 \text{ m}^2$ sind insgesamt 252 Detektorstationen vorhanden. Die Stationen sind auf einem rechtwinkligen Gitter mit einem Abstand von 13 m angeordnet. Im äußeren Bereich des Feldes sind jeweils 16 Stationen (Hütten) zu einem sog. *Cluster* zusammengefaßt, im inneren Bereich um den Zentraldetektor jeweils 15 Hütten (Lücke durch das Zentralgebäude). Abbildung 2.1 deutet diese Zuordnung an. Jedes Cluster stellt eine unabhängige Einheit dar und kann unabhängig betrieben werden. Von der Kontrollstation in der Mitte des Clusters erfolgt die Hochspannungsversorgung der Detektoren, gleichzeitig

werden hier die Daten des Clusters gesammelt und digitalisiert. Über Lichtleitkabel werden die Daten jedes Clusters zum Zentralgebäude geleitet, wo sich die zentrale Datenerfassung befindet und die einzelnen Clusterinformationen zusammengefaßt werden.

Im Array werden zwei Typen von Detektoren verwendet, die e/γ -Detektoren zum Nachweis der elektromagnetischen Komponente und die Myondetektoren zur Detektion der Myonkomponente eines Luftschauers. Bei beiden Detektortypen handelt es sich um Szintillationszähler.

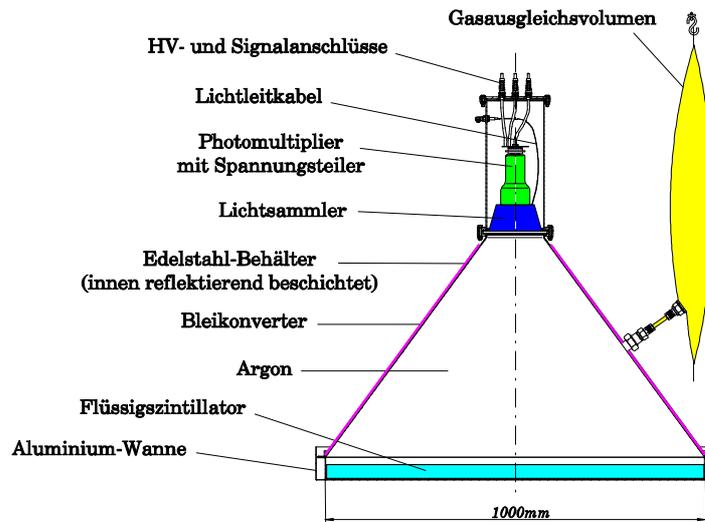


Abbildung 2.4: Aufbau des e/γ -Detektors.

Abbildung 2.4 zeigt den Aufbau des e/γ -Detektors [Völ92]. Am Boden eines Edelstahlkegels befindet sich eine etwa 5 cm hohe Schicht Flüssigszintillator, bestehend aus 80 % (vol.) Paraffin und 20 % Pseudocumol, in denen PMP als Szintillator gelöst vorliegt. Um den Szintillator vor Oxidation zu schützen, ist das Kegelvolumen mit Argon gefüllt, eine Verbindung zu einem außen angebrachten Nylonsack ermöglicht den temperaturbedingeten Druckausgleich. Die Innenseite des Kegels ist diffus reflektierend lackiert, wodurch das entstehende Szintillationslicht zur Kegelspitze hin geleitet wird. Dort befindet sich ein Lichtsammler aus Plexiglas, an dessen Oberseite ein 3" Photomultiplier angebracht ist. Um einen möglichst großen dynamischen Bereich zu erreichen, wird zusätzlich zum Anodensignal die vorletzte Dynode ausgelesen. Damit können je nach Einstellung der Elektronik bis zu 3000 minimal ionisierende Teilchen nachgewiesen werden. Der Detektor besitzt eine Zeitauflösung besser als 1 ns, die Energieauflösung für minimal ionisierende Teilchen beträgt ungefähr $10\%/\sqrt{E}$.

Beim Myondetektor [Kri92] handelt es sich um einen Plastiksintillator, seine Konstruktion ist in Abbildung 2.5 dargestellt. In einer $1.92 \times 1.92 \text{ m}^2$ Holzbox befinden sich vier quadratische ($90 \times 90 \text{ cm}^2$) Szintillatorplatten des Typs Bicon BD-416. An allen vier Seiten einer Platte befinden sich Wellenlängenschieberstäbe (Typ PMMA), die das Licht auskoppeln und zu den Photomultipliern an den Seitenmitten der Box leiten. Jeder der vier 1.5" Photomultiplier liest

dadurch die Signale von zwei Detektorsegmenten aus, umgekehrt wird jedes Segment von zwei Photoröhren ausgelesen. Durch diese Auslesetechnik wird eine hohe Ortshomogenität des

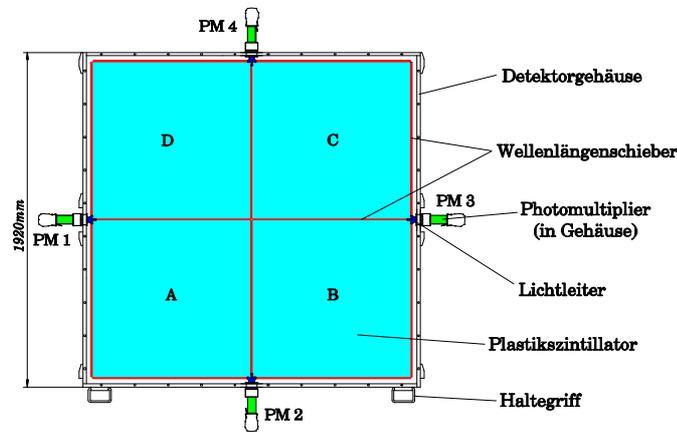


Abbildung 2.5: Aufbau des Myondetektors.

Detektors erreicht. Untersuchungen haben gezeigt, daß bei Auslese des Summensignals die vorhandenen Inhomogenitäten etwa 2 % betragen. Aufgrund der Bauweise kann es zu einem optischen Übersprechen der Segmente untereinander im Bereich von 10% kommen [Hei96].

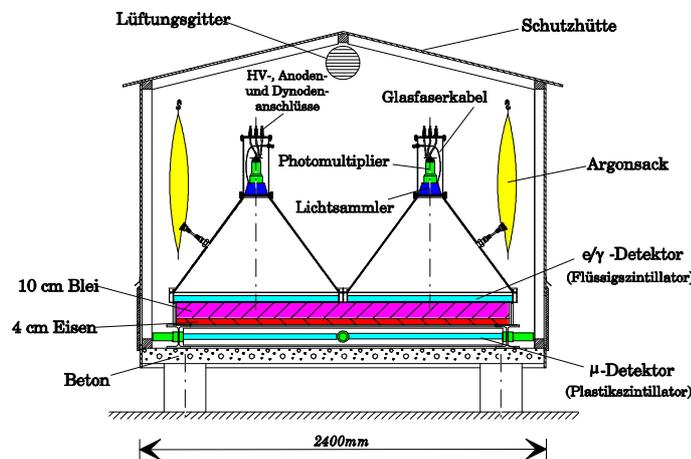


Abbildung 2.6: Schnitt durch eine Detektorstation eines äusseren Clusters.

Von den 252 Stationen sind nur die äusseren Cluster mit Myondetektoren bestückt (192 Hütten). Abbildung 2.6 zeigt den Aufbau einer Detektorstation eines äusseren Clusters. Der Myondetektor befindet sich unter einer Abschirmung aus 10 cm Blei und 4 cm Eisen. Diese Absorberschicht entspricht circa 20 elektromagnetischen Strahlungslängen, wodurch die elektromagnetischen Teilchen weitgehend gestoppt werden. Für senkrechte Myonen ergibt sich eine Energieschwelle von 230 MeV. Oberhalb der Abschirmung befinden sich auf der Hüttendiagonale zwei e/γ -Detektoren. Durch das verwendete Detektormaterial und die Sta-

tionswände ergibt sich für Elektronen eine Schwellenenergie von 5 MeV. In den inneren vier Clustern um den Zentraldetektor befinden sich keine Myondetektoren, dafür sind hier vier e/γ -Detektoren pro Station untergebracht.

Das Array wird mit einem sog. Clustertrigger betrieben. Hierbei wird erst dann das Auslesen der Daten gestartet, wenn eine Mindestanzahl von Einzeldetektoren eines Clusters ein Signal über der eingestellten Diskriminatorschwelle hatte. Dieser clusterinterne Trigger startet über die zentrale Datenerfassung die Auslese der übrigen Cluster. Diese Methode hat den Nachteil, daß kleine Luftschauber, die zwischen die Grenzen zweier Cluster fallen, unter Umständen nicht gemessen werden. Als Triggerschwelle für die einzelne Hütte wird eine Signalhöhe gefordert, die ungefähr einem Drittel des Einteilchenpeaks entspricht. Die Datenauslese des Clusters wird erst gestartet, wenn mindestens 10 Detektoren (äußere Cluster) bzw. 20 Detektoren (innere Cluster) über ihrer Schwelle liegen. Erst dann wird auch ein externer Trigger für die anderen Cluster ausgelöst. Messungen haben gezeigt, daß die Rate vom genauen Wert der Detektorschwelle nahezu unabhängig ist, solange sie deutlich unterhalb des Einteilchenpeaks liegt. Mit der Triggerbedingung 10/20 aus 32/60 beträgt die Rate des Arrays etwa 3 Hz. Ausführliche Informationen zur Datenerfassung und Elektronik des Detektorfeldes finden sich in [Sch96] und [Ant03].

Kapitel 3

Die Daten des KASCADE-Detektorfelds

In diesem Kapitel sollen die Daten des KASCADE-Detektorfelds näher vorgestellt werden. Hierbei handelt es sich um die rekonstruierte Elektronenzahl N_e und die sog. *trunkierte* Myonzahl N_μ^{tr} der nachgewiesenen ausgedehnten Luftschauer. Letztere bezeichnet die Anzahl der Myonen, die mehr als 40 m, aber weniger als 200 m vom Schauerzentrum entfernt sind. Die Häufigkeitsverteilung dieser Observablen bildet die Eingangsgröße der in dieser Arbeit vorgestellten Analyse.

Nach einem kurzen Überblick der Rekonstruktionsalgorithmen und der möglichen systematischen Einflüsse auf die Häufigkeitsverteilungen werden die Häufigkeitsverteilungen (Schauergrößenspektren) der genannten Observablen präsentiert. Die Diskussion und Parametrisierung der Rekonstruktionsqualität sowie der Effizienzen findet in Kapitel 5 statt.

3.1 Methodik der Luftschauerrekonstruktion

Das KASCADE-Detektorfeld liefert als Messgrößen die deponierten Energien der Schauerteilchen in den Detektoren und deren Zeitpunkt des Ansprechens. Um aus diesen Informationen die relevanten Parameter des Luftschauers zu rekonstruieren, durchlaufen die Daten einen iterativen Analyseprozess, bestehend aus drei Stufen, die sog. *Level*. Im Folgenden soll der Rekonstruktionsablauf skizziert werden, die Qualität der gewonnenen Parameter wird in Kapitel 5 diskutiert. Für eine ausführlichere Diskussion der Rekonstruktion sei auf die Referenzen [Web99], [Ant01] und [Mai03] verwiesen.

Level 1:

Aufgabe dieses ersten Analyseschritts ist es, mit robusten und schnellen Methoden verlässliche Startwerte für den weiteren Verlauf der Rekonstruktion zu liefern.

Bevor die eigentliche Rekonstruktion beginnt, werden die ADC-Werte unter Verwendung der Eichdaten für die einzelnen Detektoren in Energiedepositionen konvertiert. Weiterhin werden Detektoren mit unplausiblen Energie- bzw. Zeiteinträgen für die weitere Analyse aussortiert (Spike-Reduktion). Solche Einträge können z.B. durch unkorrelierte Myonen oder den Einfall eines Hadrons (insbesondere langsame Neutronen) erzeugt werden. Hierbei wird der Eintrag einer Station mit den Einträgen ihrer 8 nächsten Nachbarn verglichen.

Mit den Zeitdifferenzen der Stationen und deren Abständen werden Gradienten gebildet, deren Schwerpunkt als erste Schätzung der Einfallsrichtung dient [May93]. Der Ort des Schauerzentrums (Core) wird mit Hilfe eines neuronalen Netzes [May92] bestimmt. Durch eine geeignete Aufsummierung der Energieeinträge in den Arraystationen wird mit einer empirischen Formel eine erste Abschätzung der Elektronen- und der Myonenzahl vorgenommen. In dieser Formel wird auch der Fall berücksichtigt, daß sich Detektoren nahe des Schauerzentrums in Sättigung befinden können. Die Anzahl solcher Detektoren führt zu einer Korrektur der Schauergröße für sehr große Schauer.

Level 2:

In diesem Teil des Ablaufs werden Teilchendichten für die einzelnen Stationen und verbesserte Schauerparameter bestimmt.

Mit Hilfe der sog. *lateralen Energiekorrekturfunktionen (LECFs)* [Web99] werden die gemessenen Energiedepositionen in Teilchenzahlen konvertiert. Die LECFs sind aus Simulationsrechnungen bestimmte Funktionen, die die Größe der Energiedeposition eines Teilchens im Detektor wiedergeben. Es existieren vier Funktionen, zwei für die Deposition eines Myons im e/γ -Detektor bzw. im μ -Detektor, zwei weitere für die Energiedeposition von Elektronen, γ -Quanten und Hadronen in den beiden Detektortypen. Die letzten beiden Funktionen sind jeweils auf ein Elektron geeicht, beinhalten also implizit das Verhältnis von Elektronen zu γ -Quanten bzw. Hadronen. Da diese Verhältnisse ebenso wie die mittlere Energie der Luftschauerteilchen radiusabhängig sind, sind diese LECFs ebenfalls abhängig vom Abstand zum Schauerzentrum. Im Gegensatz dazu entsprechen die beiden Funktionen für die Myonen Konstanten. Weiterhin muß der Zenitwinkel des Schauers bekannt sein, um die effektive Dicke der Detektormaterialien berücksichtigen zu können. Als Werte für Schauerzentrum und -richtung werden die Ergebnisse aus Level 1 verwendet.

Im nächsten Schritt wird eine verbesserte Richtungsbestimmung vorgenommen. Bei dem eingesetzten Verfahren [Kra96, Mai03] werden die gemessenen Ankunftszeiten relativ zum Schauerzentrum mit den Medianwerten von Ankunftszeitverteilungen verglichen, die in Abhängigkeit von der Anzahl der pro Station nachgewiesenen Teilchen und vom Abstand zum Schauerzentrum in Schauerkoordinaten parametrisiert worden sind. Durch eine χ^2 -Minimierung wird die Richtung gefunden, welche die gemessenen Zeiten am Besten in die theoretisch erwartete Zeitebene (Schauerebene) transformiert. Als Gewichte der einzelnen Messwerte dienen die parametrisierten Breiten der entsprechenden Ankunftszeitverteilungen.

Mit dieser verbesserten Richtungsinformation wird eine Bestimmung der Lateralverteilung aus den neu gewonnenen Teilchendichten durchgeführt. Hierbei wird eine NKG-Funktion jeweils an die Lateralverteilung der Elektronen und Myonen in Schauerkoordinaten ange-

paßt. Freie Parameter sind hierbei die Elektronen- und Myonenzahl, der Age-Parameter der Elektronenlateralverteilung und die Core-Position. Der Age-Parameter der myonischen Lateralverteilung wird durch eine Parametrisierung in Abhängigkeit der Elektronenzahl (hier: Level 1) festgelegt. Als Wert des Moliere-Radius werden für die elektronische Komponente 89 m benutzt, für die myonische 420 m. Der hier erhaltene Wert der Core-Position ist endgültig, in Level 3 wird keine weitere Modifikation vorgenommen.

Hierbei wird zuerst die Elektronenlateralverteilung bestimmt und mit den damit erhaltenen Elektronendichten am Ort der Detektoren die Teilchenzahlen in den Myondetektoren auf punch-through-Effekte von Elektronen und Gammaquanten korrigiert. Erst anschliessend wird die Lateralverteilung der Myonen angepaßt.

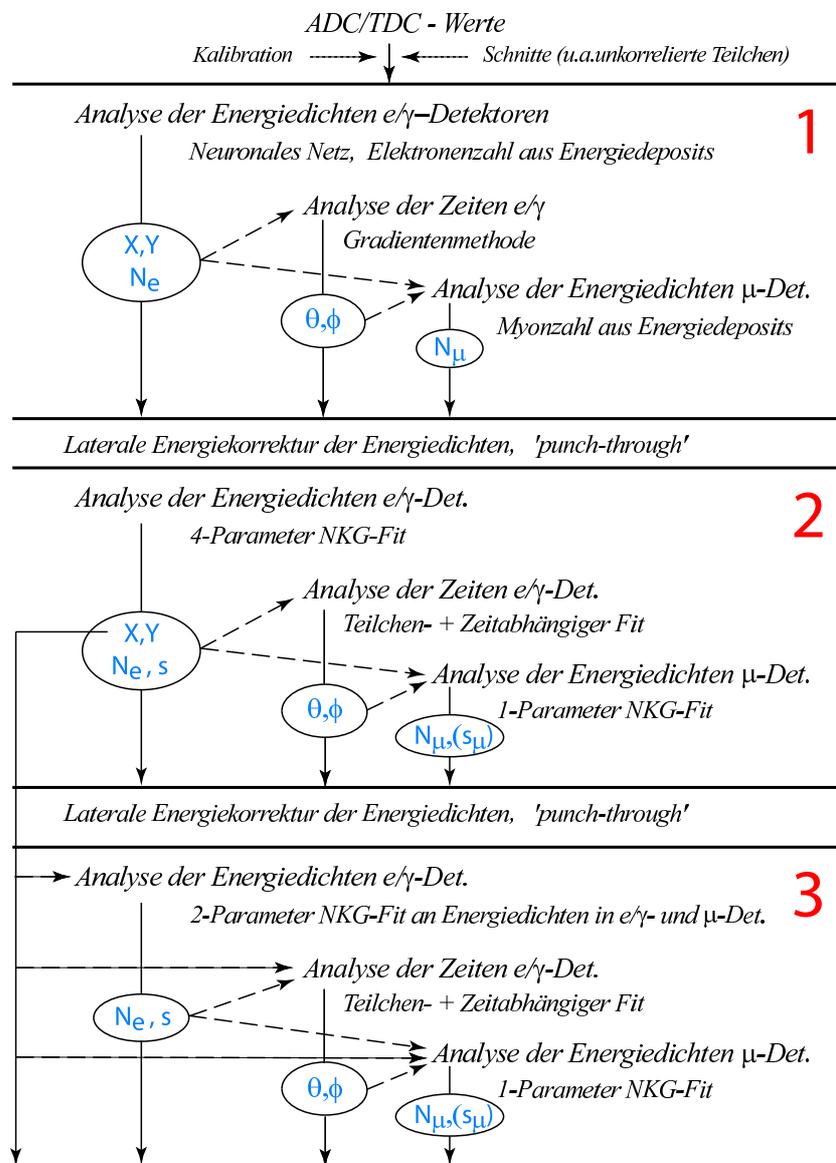


Abbildung 3.1: Schema des Rekonstruktionsablaufs der KASCADE-Array-Observablen.

Level 3:

Im letzten Schritt der Rekonstruktion werden nochmals die Werte für die Einfallsrichtung und die Schauergrößen verbessert.

Mit der verbesserten Position des Schauerzentrums und dem Wert des Zenitwinkels aus Level 2 werden die Energieeinträge erneut mittels der LECFs in Teilchenzahlen bzw. -dichten konvertiert. Bei der Bestimmung der Anzahl von Myonen pro Myondetektor werden die aus der Elektronenlateralverteilung (Level 2) resultierenden Erwartungswerte für punch through mitberücksichtigt. Mit Hilfe dieser Teilchenzahlen wird erneut die Einfallsrichtung und damit der endgültige Wert bestimmt. Anschliessend werden wieder NKG-Funktionen an die Lateralverteilung der Elektronen und Myonen angepaßt. Bei der Anpassung an die Elektronendichten wird jetzt die Lateralverteilung der Myonen aus Level 2 berücksichtigt, um die Einträge der e/γ -Detektoren zusätzlich auf mitnachgewiesene Myonen zu korrigieren. Bei diesen Anpassungen werden nur noch drei Parameter variiert, die Lage des Schauerzentrums wird aus Level 2 übernommen. Die Bestimmung der Myonlateralverteilung erfolgt analog wie in Level 2. Danach liegen die endgültigen Werte der elektronischen und myonischen Schauergröße und ihre age-Parameter vor.

In Abbildung 3.1 ist der Ablauf der Rekonstruktion nochmals schematisch dargestellt.

3.2 Mögliche Unsicherheiten in der Flußbestimmung

Ausgangsbasis fast aller weiteren Analysen der KASCADE-Arraydaten sind die Häufigkeitsverteilungen der Elektronen- und trunkierten Myonzahl der nachgewiesenen Luftschauer. Bevor diese sog. *Schauergrößenspektren* gezeigt werden, soll kurz auf mögliche Ursachen einer systematischen Fehlnormierung dieser Flußspektren eingegangen werden. Zu nennen sind hier die begrenzte Qualität der Winkelrekonstruktion, die Auswahl der Nachweisfläche und der sich ständig ändernde Luftdruck, welcher einer variierenden atmosphärischen Tiefe entspricht und daher die Entwicklung eines Luftschauers beeinflusst.

3.2.1 Atmosphärische Einflüsse

Die Entwicklung eines Luftschauers in der Atmosphäre ist von deren Struktur abhängig. Damit sind prinzipiell auch die Werte der Observablen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ selbst bei festem Primärteilchen, fester Energie und festem Winkel von der Schichtung und der Dicke der atmosphärischen Luftschicht beeinflusst. Untersuchungen anhand der Daten [Mai00, Ant03a] und anhand von Simulationsrechnungen [Ulr97] haben gezeigt, daß die Elektronenzahl von der Gesamtluftmasse, also dem Bodenluftdruck, abhängt. Im Fall der Myonzahl $\lg N_\mu^{tr.}$ wurde eine Abhängigkeit von der Höhe der 200 hPa-Isobaren und der effektiven Temperatur gefunden [Mai00]. Der Einfluß des Bodenluftdrucks ist in diesem Fall zu vernachlässigen.

Die Abnahme der Elektronenzahl N_e läßt sich durch ein Exponentialgesetz mit der Abschwächlänge Λ_{N_e} beschreiben. Der Wert der Abschwächlänge ist nicht konstant, sondern ändert sich mit der Primärenergie bzw. der Schauergroße. Unter Anwendung der Methode der konstanten Intensität wurden für Daten von KASCADE Werte für Λ_{N_e} zwischen 170 g/cm^2 und 200 g/cm^2 gefunden [Ant03a]. Simulationsrechnungen [Ulr98] ergaben für Primärenergien im Kniebereich einen Wert für Λ_{N_e} von ca. 170 g/cm^2 , nahezu unabhängig von der Art des Primärteilchens. Diese Werte entsprechen im ungünstigsten Fall ($\Lambda_{N_e} = 170 \text{ g/cm}^2$) einer Änderung der Elektronenzahl von 0.6% pro hPa.

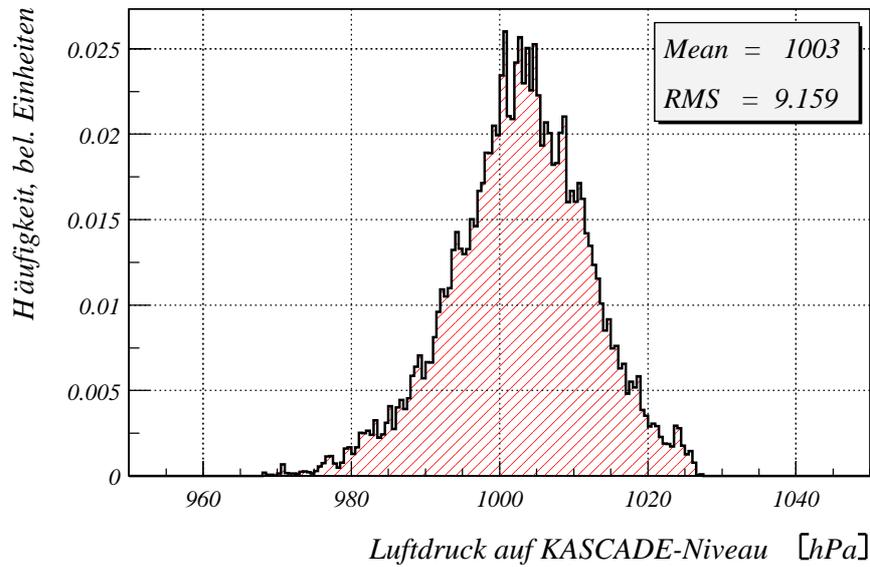


Abbildung 3.2: Verteilung des gemessenen Bodenluftdrucks am KASCADE-Experiment für die verwendeten Messzeiträume. Die Verteilung ist flächennormiert.

In Abbildung 3.2 ist die Verteilung des gemessenen Luftdrucks im Forschungszentrum Karlsruhe für die in dieser Arbeit verwendeten Meßzeiträume dargestellt. Man erkennt eine leicht asymmetrische Verteilung mit einem Mittelwert von 1003 hPa und einer Breite von 9.16 hPa . Der gemessene Mittelwert entspricht sehr gut dem von der US-Standardatmosphäre angenommenen Wert von 1002.9 hPa . Die US-Standardatmosphäre (Stand 1977) wird in Form einer Parametrisierung im Simulationsprogramm CORSIKA (siehe Kap. 4) verwendet und legt damit den Bezugspunkt fest. Die gemessene Häufigkeitsverteilung von $\lg N_e$ stellt in erster Näherung eine Faltung zwischen der durch Luftdruck unbeeinflussten Verteilung und einer Verteilung der $\lg N_e$ -Änderungen $\Delta \lg N_e$ dar. Die letztgenannte Verteilung entspricht der Verteilung aus Abb. 3.2, wobei der Luftdruck nach $\Delta \lg N_e \approx -\Delta p / (g \Lambda_{N_e} \ln 10)$ (mit Δp als Druckdifferenz gegenüber dem Standardwert und g als Erdbeschleunigung) einer $\lg N_e$ -Änderung entspricht. Unter ungünstiger Annahme von $\Lambda_{N_e} = 170 \text{ g/cm}^2$ ergibt sich für diese Verteilung eine Breite von $\Delta \lg N_e = 0.024$. Im Folgenden werden nur histogrammierte Häufigkeitsverteilungen der Schauergroßen betrachtet, deren minimale Kanalbreite in

$\lg N_e$ 0.05 beträgt. Dies entspricht ca. dem Doppelten der eben abgeschätzten Breite. Im Hauptteil der Analyse wurde eine Kanalbreite von 0.075 in $\lg N_e$ gewählt. In diesem Fall findet die Faltung fast vollständig innerhalb eines Kanals statt. Daher wurde auf eine Korrektur hinsichtlich des Bodenluftdrucks verzichtet. Die Anzahl der aufgrund der verbleibenden Ungenauigkeiten in "falsche" Kanäle einsortierten Schauer ist deutlich geringer als die statistischen Meßungenauigkeiten.

Im Fall der Myonen wurde in [Mai00] ein maximaler Effekt von 2.5 % Änderung von $N_\mu^{tr.}$ festgestellt, was sich sehr gut mit Erwartungen aus Simulationen deckt. Diese größte Verschiebung entspricht einer Änderung $\Delta \lg N_\mu^{tr.} = 0.01$. Die gewählten Kanalbreiten in $\lg N_\mu^{tr.}$ betragen 0.05. Aufgrund dieser geringen Größe des atmosphärischen Einflusses wurde auch hier auf eine Korrektur der gemessenen $\lg N_\mu^{tr.}$ -Werte verzichtet.

3.2.2 Genauigkeit der Winkelrekonstruktion

Die hier vorgestellten und in der nachfolgenden Analyse verwendeten Daten sind Schauer mit rekonstruierten Zenitwinkeln zwischen 0° und 18° . Durch den Schnitt der oberen Winkelintervallgrenze kann die Anzahl der gemessenen Schauer und damit der Fluß aufgrund der begrenzten Genauigkeit der Winkelrekonstruktion verfälscht werden.

Abbildung 3.3 zeigt einen Vergleich der Winkelauflösung für simulierte und gemessene Schauer in Abhängigkeit der logarithmierten Elektronenzahl. Die Auflösung wurde durch die sogenannte *Schachbrettmethode* bestimmt, bei der das Detektorfeld in zwei unabhängige Felder mit doppeltem Gitterabstand unterteilt wird. Details zu dieser Analyse finden sich in [Mai03] und [Ant03]. Die offenen Symbole entsprechen hierbei simulierten Proton- und Eisen-induzierten Schauern, die vollen Symbole den Messungen.

Zum einen erkennt man eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung, zum anderen praktisch keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Primärteilchen. Die Genauigkeit der Winkelrekonstruktion ist dominiert durch die Anzahl der nachgewiesenen Teilchen pro Detektorstation und damit im wesentlichen durch die elektromagnetische Schauergröße. Deshalb ergibt sich in der Auftragung von Abb. 3.3 ein einheitliches Bild. Unterschiede in der Form der Lateralverteilung bei verschiedenen Primärteilchenarten aber gleicher Elektronenzahl spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Betrachtet man Schauer mit Elektronen- und Myonenzahl innerhalb eines festgelegten Intervalls, folgt für die Abhängigkeit der Häufigkeiten für einen festen Zenitwinkelbereich vom Zenitwinkel

$$\frac{dn(\vartheta_1, \vartheta_2)}{d \lg N_e \lg N_\mu^{tr.}} \propto \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-c/\cos \vartheta} d\vartheta, \quad (3.1)$$

welche sich aus einem isotropen Primärfluss bei fester Primärenergie und der effektiven Nachweisfläche für schräg einfallende Schauer ergibt. Der exponentielle Faktor trägt der Abschwächung der Schauergröße mit zunehmendem Zenitwinkel (zunehmende atmosphärische

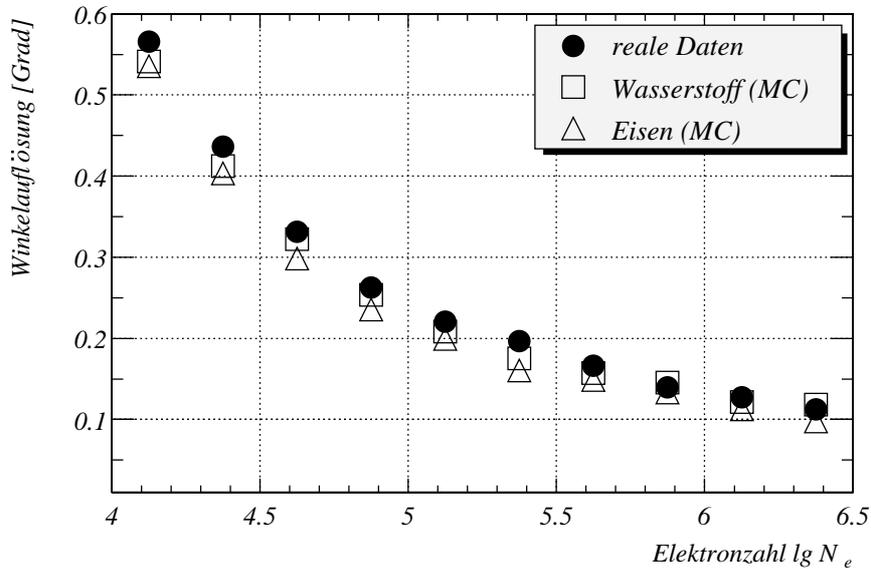


Abbildung 3.3: Winkelauflösung bestimmt durch Schachbrettmethode. Die offenen Symbole entsprechen der Simulation für Wasserstoff- und Eisen-induzierte Schauer, volle Symbole der Messung.

Tiefe) Rechnung. Um die begrenzte Auflösung der Zenitwinkelbestimmung zu berücksichtigen, muß Gl. 3.1 mit der Auflösungsfunktion gefaltet werden. Für diese Auflösungsfunktion kann in sehr guter Näherung eine Normalverteilung angenommen werden. Führt man die Faltung durch, ergibt sich für eine angenommene Winkelauflösung von 0.5° eine Flußunsicherheit von 0.04 %, für eine Auflösung von 0.3° etwa 0.02 %. Der statistische Effekt der Winkelrekonstruktion auf die Flußbestimmung kann also vernachlässigt werden.

Eine weitere mögliche Verfälschung der Flußbestimmung sind systematische Fehler der Zenitwinkelbestimmung und damit bevorzugte Zenitwinkelbereiche. Ausführliche Untersuchungen anhand von Simulationen [Mai03] zeigten aber keine systematischen Verzerrungen der rekonstruierten Winkel. Gestützt wird dieses Ergebnis durch einen Vergleich der durch das Array rekonstruierten Einfallsrichtung eines Schauers und den Richtungen der zugehörigen Myonen, die im Myonspurdetektor nachgewiesen wurden [Mai03]. Im Rahmen der Rekonstruktionsauflösungen konnte auch hier eine systematische Fehlrekonstruktion der Schauerrichtung ausgeschlossen werden.

Im weiteren wird daher kein Unterschied zwischen rekonstruierten und tatsächlichen Zenitwinkeln gemacht. Dies bezieht sich insbesondere auf den Vergleich von rekonstruierten mit rein simulierten Schauern (ohne Detektornachweis und Rekonstruktion).

3.2.3 Lage des rekonstruierten Schauerzentrums

Abbildung 3.4 zeigt die Häufigkeitsverteilung der rekonstruierten Schauerzentren auf der Fläche des Detektorfeldes. Im linken Teil der Abbildung für alle Schauer, in der rechten Hälfte für Schauer mit einer rekonstruierten Elektronenzahl von mehr als 30000 ($\lg N_e > 4.48$). Man erwartet eine homogene Verteilung auf der Fläche, die aber nur im Fall großer Schauer eingeschränkt gegeben ist.

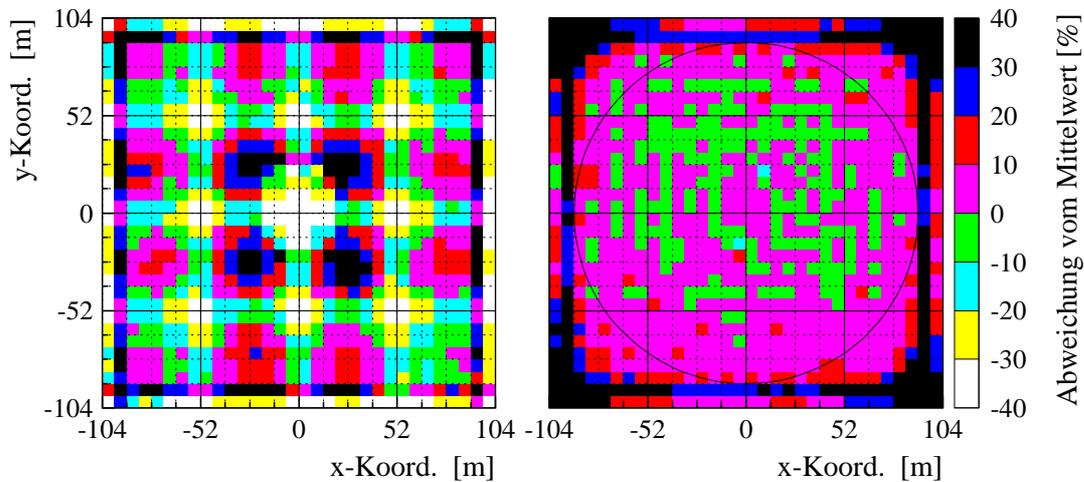


Abbildung 3.4: Verteilung der rekonstruierten Schauerkernepositionen. Links: alle Schauer; rechts: Schauer mit $N_e > 30000$.

Im Fall der linken Hälfte von Abb. 3.4 wird aufgrund des steil abfallenden Spektrums der Strahlung das Bild von kleinen Schauern dominiert. Diese Schauer sind gerade groß genug, um die Messung auszulösen und noch rekonstruiert werden zu können. Man erkennt hier die Clusterstruktur des Arrays. Ein Grund hierfür ist die Art, wie eine Messung ausgelöst wird. Da der im KASCADE-Array verwendete Trigger ein Clustertrigger ist (d.h. eine Multiplizitätsbedingung muß innerhalb eines Clusters erfüllt sein), kann ein zu kleiner Schauer keine Messung auslösen, wenn er in den Grenzbereich zweier Cluster fällt. So würde ein Schauer, der 5 Detektorstationen ansprechen läßt, nur dann nachgewiesen, wenn diese Stationen zum gleichen Cluster gehören, aber nicht, wenn 3 zum ersten und 2 zum benachbarten Cluster gehören. Dies führt dazu, daß im Zentrum eines Clusters mehr Schauer nachgewiesen werden als zu den Rändern hin.

Zu diesem Effekt kommt noch eine Systematik der Rekonstruktionsalgorithmen hinzu. Für sehr kleine Schauer neigt die Rekonstruktion dazu, das Schauerzentrum direkt auf eine Hütte zu legen. Dieses Verhalten verschwindet erst wieder bei größeren Schauern (siehe rechte Hälfte der Abbildung).

Im Fall größerer Schauer (ab einer Elektronenzahl von ca. 10000) spielen die oben angeführten Effekte keine Rolle mehr, und man könnte eine gleichmäßige Ausleuchtung der Arrayfläche erwarten. In der rechten Hälfte der Abb. 3.4 erkennt man jedoch, daß an den Rändern und insbesondere an den Ecken des Arrays deutlich mehr Schauer rekonstruiert werden als im Zentrum. Hierbei handelt es sich um eine Systematik der Rekonstruktion. Bei der überwiegenden Zahl dieser Randschauer handelt es sich um Schauer, deren Zentrum eigentlich außerhalb des Detektorfeldes liegt, und nur eine Flanke der Lateralverteilung in das Array reicht. Die Algorithmen erkennen diese Schauer nicht, und rekonstruieren das Schauerzentrum in der Gegend der höchsten nachgewiesenen Teilchendichte, welche sich dann am Rand befindet. Gleichzeitig werden natürlich auch die Parameter eines solchen Schauers wie z.B. die Elektronen- und die Myonenzahl falsch bestimmt.

Um solche falsch rekonstruierten Schauer in der Analyse weitgehend auszuschließen, wird bei allen Analysen der KASCADE-Array-Daten ein Schnitt auf die Lage des Schauerzentrums angewendet. Es wird gefordert, daß sich das rekonstruierte Schauerzentrum innerhalb eines Kreises mit einem Radius von 91 m um die Arraymitte befindet. Dieser Kreis ist in der rechten Hälfte von Abb. 3.4 angedeutet. Für Schauer innerhalb dieses Kreises erhält man gemäß der Erwartung eine homogene Häufigkeitsverteilung.

Zusätzlich wird ein Schaueralter (Age) von $0.2 < s < 2.1$ gefordert, da die aus obigen Gründen fehlrekonstruierten Schauerorte wegen der starken Parameterkorrelation im Lateralverteilungsfit automatisch zu unphysikalischen Age-Parametern führen.

3.3 Schauergößenspektren

Abbildung 3.5 zeigt die Häufigkeit bzw. die Anzahl rekonstruierter Schauer in Abhängigkeit der logarithmierten Elektronenzahl $\lg N_e$ und der logarithmierten trunkierten Myonenzahl $\lg N_\mu^{tr}$. Die Schauer stammen aus einem Zenitwinkelbereich von 0° bis 18° . Dies entspricht einer Änderung der atmosphärischen Tiefe von ca. 5%. Die Daten entsprechen einer Meßzeit von 899.7 Tagen. Am augenscheinlichsten ist der große Bereich, in dem KASCADE die Schauergößenspektren messen kann. Weiterhin fällt die stark abnehmende Häufigkeit mit zunehmenden Schauergößenspektren sowie eine "Streifenstruktur" im Bereich sehr kleiner Myonzahlen auf. Letztere ist ein Artefakt der Myonzahlrekonstruktion für Schauer mit weniger als ca. 800 Myonen, bei denen sich Diskretisierungseffekte bemerkbar machen.

Durch Projektion auf die $\lg N_e$ - bzw. $\lg N_\mu^{tr}$ -Achse erhält man die eindimensionalen Schauergößenspektren. In Abbildung 3.6 sind die differentiellen Flußspektren der Elektronenzahl für Schauer aus verschiedenen Zenitwinkelbereichen dargestellt, normiert auf Meßzeit, Raumwinkel und Fläche. Zur Verdeutlichung der Strukturen dieser Spektren sind die Ordinatenwerte mit $N_e^{2.5}$ multipliziert. Die Zenitwinkelbereiche wurden so gewählt, daß jeder Bereich einer atmosphärischen Tiefendifferenz von $\approx 52 \text{ g/cm}^2$ entspricht. Oberhalb von $\lg N_e \approx 4.5$ sind keine Effizienzeinflüsse mehr sichtbar und man erkennt deutlich die Änderung des spektra-

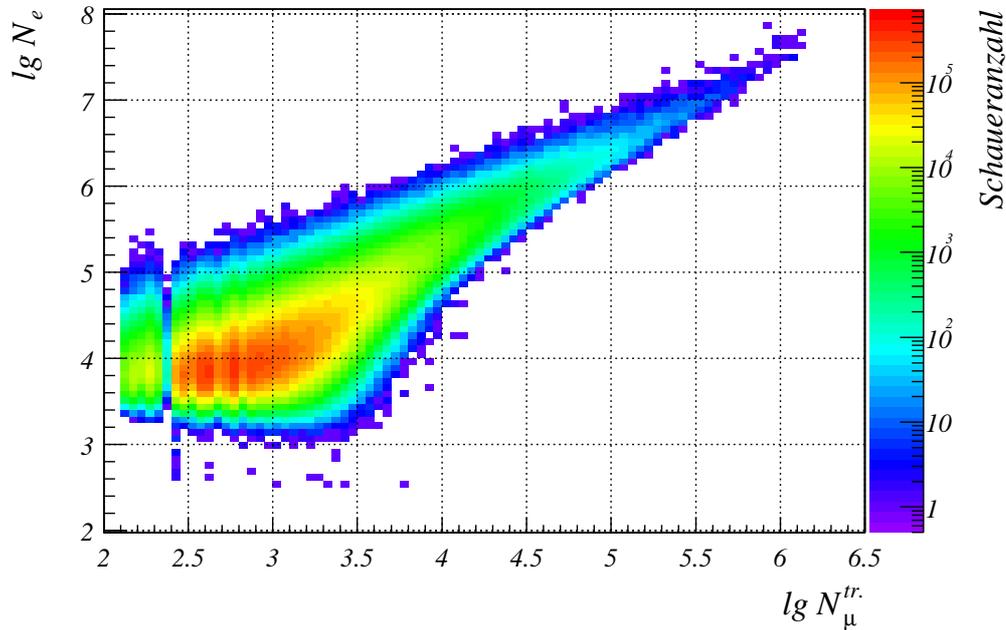


Abbildung 3.5: Anzahl der gemessenen Schauer in Abhängigkeit von $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$. Die Daten stammen aus dem Zenitwinkelbereich von 0° bis 18° und entsprechen einem Messzeitraum von 899.7 Tagen.

len Index und damit den Beginn des *Kniebereichs*. Im Vergleich der Spektren untereinander erkennt man ebenfalls die Verschiebung der Knieposition zu kleineren Werten von $\lg N_e$ mit zunehmendem Zenitwinkel. Da ein größerer Zenitwinkel einer Zunahme der durchquerten atmosphärischen Tiefe entspricht, wird hier die Abschwächung der Elektronenzahl deutlich. So verschiebt sich der Beginn des Kniebereichs von etwa $\lg N_e \approx 5.5$ für $0^\circ \leq \vartheta < 18^\circ$ nach $\lg N_e \approx 5.2$ bei $29.96^\circ \leq \vartheta < 33.96^\circ$. Eine ausführliche Analyse der Abschwächung der Elektronenzahl und Untersuchung der Kniepositionsverschiebung anhand der KASCADE-Daten ist in [Ant03a] zu finden. Bei genauerer Inspektion zeigt sich eine leichte Veränderung des spektralen Index vor dem Knie mit zunehmendem Winkel. Der Index nimmt von $\gamma_e = -2.424$ im ersten Winkelintervall auf $\gamma_e = -2.414$ im 4. Intervall zu, die Spektren werden ‐flacher‐. Dieses Verhalten läßt sich in Folge unterschiedlicher Schauerfluktuationen bei verschiedenen Zenitwinkeln verstehen.

In der linken Hälfte von Abbildung 3.7 ist der Kniebereich des Elektronenzahlspektrums für Zenitwinkel kleiner 18° nochmals vergrößert dargestellt. Es scheint, als ob das Knie eine Substruktur aufweist und sich aus zwei Knie-artigen Strukturen zusammensetzt. Diese Struktur befindet sich zwar am Rande der statistischen Signifikanz, könnte jedoch einen Hinweis auf die Natur des Knies geben. Nimmt man an, daß die Spektren der einzelnen Primärteilchenarten jeweils ein Knie besitzen, dessen Position aber je nach Teilchenart bei verschiedenen Energien liegt, würde man solche Strukturen bei hinreichend guter Rekonstruktionsauflösung

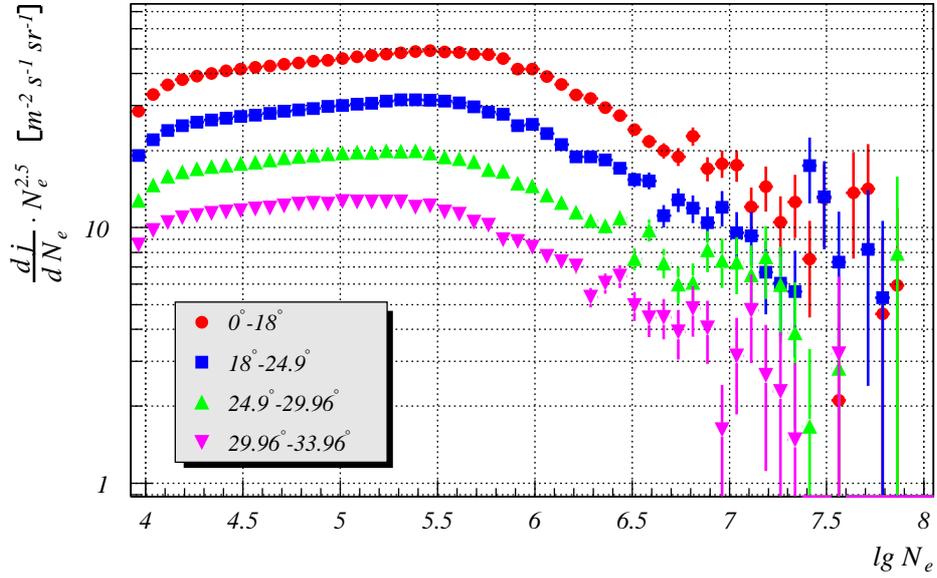


Abbildung 3.6: Flußspektren der Elektronenzahl für vier verschiedene Zenitwinkelbereiche. Die Flußwerte sind zur Verdeutlichung der Kniestruktur mit $N_e^{2.5}$ multipliziert.

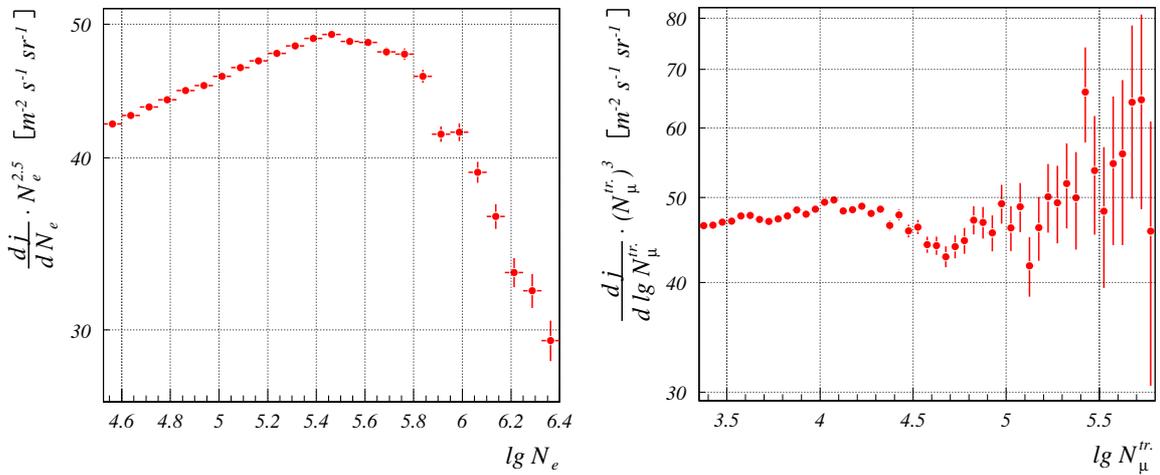


Abbildung 3.7: Rechts: Der Kniebereich des Elektronenzahlspektrums für $0^\circ \leq \vartheta < 18^\circ$. Links: Ausschnitt des Myonzahlspektrums für $0^\circ \leq \vartheta < 18^\circ$.

erwarten können.

Die Flußspektren der trunkeierten Myonzahl für die gleichen 4 Zenitwinkelbereiche sind in Abbildung 3.8 gezeigt. Zur besseren Verdeutlichung von Strukturen sind die Ordinatenwer-

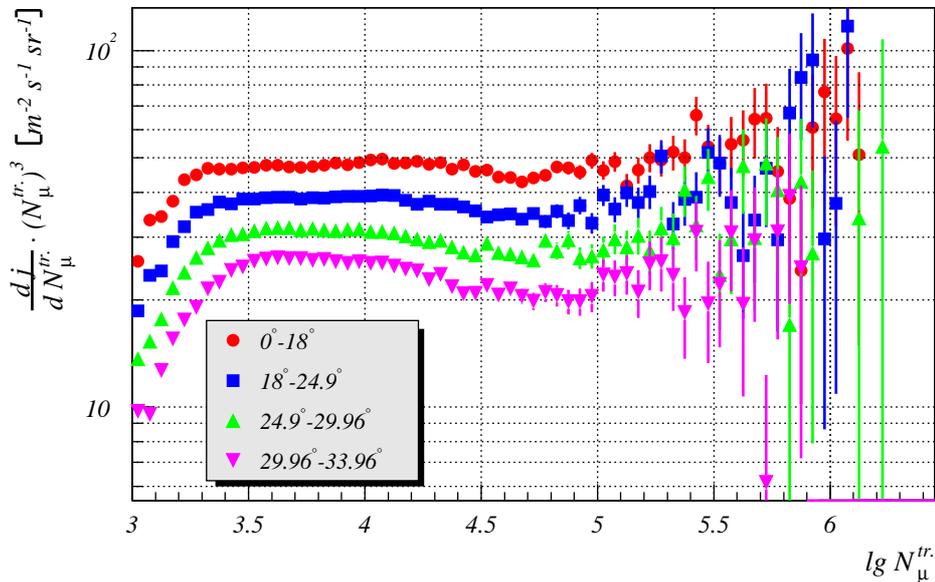


Abbildung 3.8: Flußspektren der trunkierten Myonzahl für vier verschiedene Zenitwinkelbereiche. Die Flußwerte sind zur Verdeutlichung der Kniestruktur mit $(N_{\mu}^{tr.})^3$ multipliziert.

te mit $(N_{\mu}^{tr.})^3$ multipliziert. Man erkennt, daß im Gegensatz zur Elektronenzahl die Schwelle abhängig vom Zenitwinkel ist. Ursache hierfür ist die Art des Triggers im KASCADE-Array. Da daß Triggersignal im Wesentlichen durch die elektromagnetische Komponente des Luftschauers erzeugt wird, liegt die Triggerschwelle unabhängig vom Zenitwinkel bei einer festen Elektronenzahl N_e . Aufgrund der Zunahme der atmosphärischen Tiefe und der damit verbundenen Abschwächung der Elektronenzahl mit zunehmendem Zenitwinkel, entspricht dieses feste N_e bei schrägen Schauern einer höheren Primärenergie des Schauers. Bei höherer Primärenergie ist aber auch die Myonzahl größer, die bei den durch diese Zenitwinkeldifferenzen auftretenden atm. Tiefenzunahmen nur unwesentlich abgeschwächt wird.

Im Gegensatz zur Elektronenzahl ist in diesen Spektren keine starke Indexänderung erkennbar. Im mittleren Bereich des gezeigten Ausschnitts findet zwar ein Abnahme und anschließend wieder eine Zunahme des Index statt, diese Struktur ist aber bei weitem nicht so ausgeprägt wie im Fall der Elektronenzahl. Die Position der Indexabnahme variiert auch hier mit dem Zenitwinkel, aufgrund der erwähnten geringen Abschwächung aber nur sehr gering, von $\lg N_{\mu}^{tr.} = 4.2$ im Winkelintervall $0^{\circ} - 18^{\circ}$ bis auf $\lg N_{\mu}^{tr.} = 4.05$ im Intervall $29.96^{\circ} - 33.96^{\circ}$. Zur Verdeutlichung dieser Struktur ist in der rechten Hälfte von Abbildung 3.7 nochmals das Myonzahlspektrum des ersten Zenitwinkelbereiches dargestellt. Man erkennt in dieser Art der Darstellung eine deutliche V-förmige Struktur.

Auch bei den Myonzahlspektren ist die Größe des spektralen Index vor der Indexänderung

vom Zenitwinkel abhängig. So findet man im Intervall 0° bis 18° einen Wert von $\gamma_\mu = -2.97$, der mit zunehmendem Winkel auf $\gamma_\mu = -3.04$ im Bereich $29.96^\circ \leq \vartheta < 33.96^\circ$ abnimmt. Auch hier spielt die unterschiedliche Größe der Schauerfluktuationen bei verschiedenen Winkeln und Primärenergien bei der Interpretation eine wesentliche Rolle.

3.4 Verwendete Daten und Ansatz der Analyse

Als Grundlage der nachfolgenden Analyse dieser Arbeit dient nur ein Ausschnitt des zweidimensionalen Schauergrößenspektrums in Abbildung 3.5. Dieser Ausschnitt wurde so gewählt, daß sich die Effizienzen der Messung und Rekonstruktion möglichst nicht bemerkbar machen. Zwar ist dieses Schwellenverhalten im Prinzip durch Monte-Carlo-Simulationen beschreibbar (siehe Kapitel 5), doch existieren bei der Messung Einflüsse, die nur schwer oder gar nicht durch Simulationen erfaßbar sind. Obwohl während der Meßzeit das Experiment und seine Komponenten ständig überwacht werden, ist es in der Vergangenheit immer wieder zu Ausfällen bzw. Fehlverhalten einzelner Detektoren gekommen, die erst später entdeckt wurden. Dabei hat sich gezeigt, daß sich der Ausfall z.B. eines Photomultipliers in einer Detektorstation bei der Rekonstruktion größerer Schauer ($\lg N_e > 4.5$) zwar nicht bemerkbar macht, die Rekonstruktion kleiner Schauer im Schwellenbereich teilweise aber sehr sensitiv hierauf reagiert. Hierdurch wird nicht nur der Verlauf der Effizienzkurve verschoben, sondern auch die Qualität der Rekonstruktion beeinträchtigt. Dies betrifft insbesondere die Myonzahlrekonstruktion, die sich ohnehin durch eine relativ breite Auflösungsfunktion auszeichnet (siehe Kap. 5).

Um diese Art von Unsicherheiten zu vermeiden, wird als Schnittkriterium

$$\lg N_e \geq 4.8 \quad \text{und} \quad \lg N_\mu^{\text{tr.}} \geq 3.6 \quad (3.2)$$

gefordert. Bei diesen relativ hohen Untergrenzen für die Werte der Schauergrößen sollten kaum Einflüsse aus dem Bereich der Trigger- und Rekonstruktionsschwelle auftreten.

In der nachfolgenden Analyse werden nur die Daten des ersten Zenitwinkelintervalls (0° bis 18°) verwendet. Die Analyse mehrerer Winkelbereiche war im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, wird aber im Rahmen der Kollaboration zukünftig weitergeführt.

Die Häufigkeitsverteilung der Schauergrößen wird als zweidimensionales Histogramm verwendet. Als Kanalbreiten wurden 0.075 für $\lg N_e$ und 0.05 für $\lg N_\mu^{\text{tr.}}$ gewählt. Abbildung 3.9 zeigt schließlich den verbleibenden Datenbereich in der erwähnten Form.

Betrachtet man den Inhalt einer Zelle i dieses Histogramms und bezeichnet ihn (nach entsprechender Normierung) als doppeltdifferenziellen Fluß $dj_i(\lg N_e, \lg N_\mu^{\text{tr.}})/d \lg N_e d \lg N_\mu^{\text{tr.}} \equiv J_i$, so läßt sich für seinen Wert formal das folgende Faltungsintegral ansetzen

$$J_i = \sum_A \int_{\text{Zelle } i} d \lg N_e d \lg N_\mu^{\text{tr.}} \int d \lg E P_A(\lg N_e, \lg N_\mu^{\text{tr.}} | \lg E) \frac{dj_A(\lg E)}{d \lg E}. \quad (3.3)$$

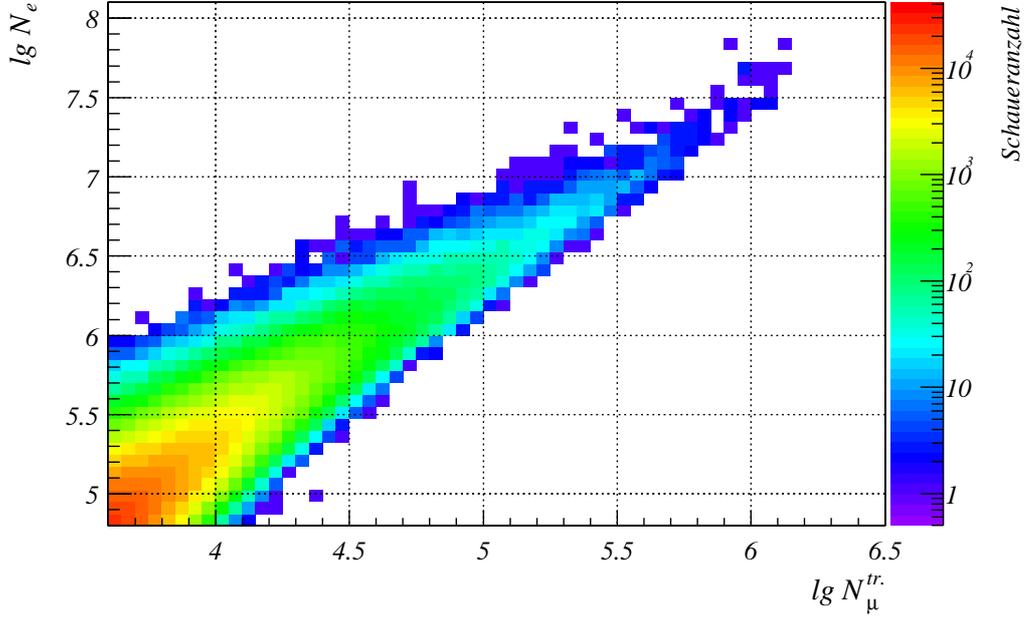


Abbildung 3.9: Der verwendete Ausschnitt der zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung der Schauergrößen (vgl. mit Abb. 3.5).

Hierbei verläuft die Summation über alle in der kosmischen Strahlung vorkommenden Primärteilchen, charakterisiert durch die Massenzahl A , und $dj_A/d\lg E$ ist hierbei das differentielle Energiespektrum dieser Primärteilchenart. Die massenabhängige Wahrscheinlichkeit P_A ist die Wahrscheinlichkeit, bei gegebener Primärenergie E (bzw. $\lg E$) einen Luftschauer mit den Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ zu rekonstruieren. Aufgrund der Größe des durch die kosmische Strahlung abgedeckten Energiebereichs ist es zweckmäßig, $\lg E$ anstatt E zur Beschreibung der Primärenergie zu benutzen. Entsprechendes gilt für die Schauergrößen N_e und $N_\mu^{tr.}$; in aller Regel werden immer die logarithmierten Werte benutzt. Die Integration in Gl. 3.3 erstreckt sich hierbei über den gesamten physikalisch möglichen Bereich.

Die Wahrscheinlichkeit P_A ist selbst wieder ein Faltungsintegral und setzt sich aus drei Anteilen zusammen:

$$P_A = \int d\lg N_e^{true} \int d\lg N_\mu^{tr.,true} r_A \cdot \varepsilon_A \cdot s_A \quad (3.4)$$

mit

$$\begin{aligned} r_A &= r_A(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.} | \lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true}) \\ \varepsilon_A &= \varepsilon_A(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true}) \\ s_A &= s_A(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true} | \lg E) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hierbei stellt s_A die Schauerfluktuationen dar, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schauer, der von einem Primärteilchen A mit der Energie $\lg E$ ausgelöst wurde, die wahre Elektronen-

zahl $\lg N_e^{true}$ und die trunke Myonzahl $\lg N_\mu^{tr.,true}$ am Beobachtungsniveau besitzt. ε_A ist die kombinierte Effizienz der Messung und Rekonstruktion und kann prinzipiell auch von anderen Parametern als den Schauergrößen abhängen und damit primärteilchenabhängig sein. Durch die Wahrscheinlichkeit r_A wird der Effekt der Rekonstruktion beschrieben, r_A ist die Wahrscheinlichkeit bei gegebenem $\lg N_e^{true}$ und $\lg N_\mu^{tr.,true}$ für diese Observablen die Werte $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ zu rekonstruieren.

Mit dieser Nomenklatur stellt das Datenhistogramm der Abbildung 3.9 ein System von gekoppelten Fredholmschen Integralgleichungen 1. Art dar. Ziel dieser Arbeit ist es, unter Annahme von 5 Primärteilchenarten als Vertreter der kosmischen Strahlung dieses System näherungsweise zu lösen, und damit die differentiellen Energiespektren dieser Repräsentanten der Primärstrahlung zu bestimmen. Die benötigten Funktionen s_A , ε_A und r_A werden dabei anhand von Simulationsrechnungen bestimmt, sodaß die Wahrscheinlichkeiten P_A berechnet und das Gleichungssystem durch Entfaltungsmethoden gelöst werden kann. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Beschreibung der Schauerfluktuationen, Kapitel 5 widmet sich den Rekonstruktionseigenschaften und den Effizienzen, in den Kapiteln 6 und 7 werden die benötigten Entfaltungsmethoden vorgestellt und getestet, und schließlich in dem daran anschließenden letzten Teil der Arbeit die Daten analysiert.

Kapitel 4

Luftschauersimulationen

4.1 Das CORSIKA–Programm

Praktisch jede Analyse der Daten von Luftschauerexperimenten ist auf den Vergleich bzw. die Resultate von Simulationsrechnungen angewiesen. Aus diesem Grund ist es von besonderer Bedeutung, ein Programm für die Simulation ausgedehnter Luftschauer zur Verfügung zu haben, daß sich durch Genauigkeit der Modellierung der zugrunde liegenden Physik wie auch durch die Möglichkeit der Untersuchung von Systematiken, die durch die Unsicherheit der hadronischen Wechselwirkungen bei den höchsten Energien verursacht werden, auszeichnet. Das Programm CORSIKA [Hec98] (*COsmic Ray SIMulations for KASCADE*) hat sich der Erfüllung dieser Anforderungen verschrieben. Ursprünglich wurde es für die Simulation von Luftschauern im Rahmen des KASCADE–Experiments entwickelt, ist mittlerweile aber weit verbreitet und zu einem Standard für die Luftschauerbeschreibung geworden.

Ziel ist es, nicht nur Mittelwerte typischer Luftschauerobservablen zu generieren, sondern auch ihre Fluktuationen realistisch widerzugeben. Ferner soll, soweit möglich, jede Information über die entstehenden Sekundärteilchen zur Verfügung stehen. Die Atmosphäre in CORSIKA setzt sich aus 78.1 % N_2 , 21.0 % O_2 und 0.9 % Ar (Volumenanteile) zusammen. Die Druck- und Dichteabhängigkeit folgt einer Parametrisierung der US-Standardatmosphäre nach Linsley [Hec98]. Es besteht zudem die Möglichkeit, andere Modellatmosphären zu benutzen. Ferner wird die Ablenkung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld berücksichtigt.

Als Primärteilchen stehen Protonen, leichte Kerne bis hin zu Eisen, Photonen und andere Teilchen (z.B. Mesonen) zur Verfügung. Jedes entstehende Teilchen wird in der Standardversion weiterverfolgt, bis es entweder das Beobachtungsniveau erreicht, unter eine einstellbare Energieschwelle gerät oder zerfällt. Für die Beschreibung elektromagnetischer Reaktionen ist das Programm EGS4 [Nel85] integriert. Dieses Programm gilt als Standard bei der Simulation elektromagnetischer Prozesse und behandelt für Elektronen und Positronen Paarvernichtung, Bhabha- und Møller-Streuung, Bremsstrahlung und Vielfachstreuung gemäß der

Molière-Theorie. Für Gammaquanten stehen Compton-Streuung, Paarerzeugung und Photoeffekt zur Verfügung. Zusätzlich wurden die direkte Myonpaarerzeugung und photonukleare Reaktionen mit Protonen und Neutronen der Kerne der Luftmoleküle implementiert. Diese beiden letzten Prozesse sind insbesondere bei Gamma-induzierten Luftschauern für die Myonproduktion von besonderer Bedeutung. In einer Spezialversion wird ausserdem noch die Erzeugung von Cherenkovlicht modelliert.

Beim Transport der Teilchen durch die Atmosphäre werden neben möglichen Reaktionen Ionisationsverluste und je nach Art des Teilchens Zerfälle berücksichtigt.

Zusätzlich zur EGS4-Behandlung, die sehr rechen- und zeitintensiv ist, existiert die sog. NKG-Option, bei der jedem entstehenden Elektron, Positron oder Photon ein elektromagnetischer Subschauer zugeordnet wird, dessen Anzahl von Teilchen und Lateralverteilung am Beobachtungsniveau durch Parametrisierungen berechnet wird. Durch Überlagerung der Subschauer ergeben sich die totalen Teilchenzahlen und eine laterale Dichteverteilung des Schauers an ausgewählten Orten. Bei dieser Methode stehen aber keine Informationen über Energie, Zeit und Ort der elektromagnetischen Sekundärteilchen zur Verfügung. Ausserdem sind die erhaltenen Teilchenzahlen nicht so zuverlässig wie bei der EGS4-Simulation und zeigen im Gegensatz zu ihr systematische Abweichungen. Diese Option wurde in dieser Arbeit nicht verwendet.

Die Beschreibung hadronischer Prozesse verläuft zweigeteilt. Für hohe Energien, d.h. größer als eine Laborenergie von 80 GeV, stehen fünf Wechselwirkungsmodelle zur Verfügung. Für Energien unterhalb 80 GeV erfolgt die Modellierung mit dem Programmpaket GHEISHA [Fes85]. Als Alternative steht in den neusten Versionen das Paket UrQMD [Bas98] zur Verfügung.

	QGSJET	VENUS	DPMJET	SIBYLL	HDPM
Gribov-Regge-Theorie	+	+	+		
Minijets	+		+	+	
Sekundäre Wechselwirkung		+	+		
Kern-Kern-Wechselwirkung	+	+	+		
Superpositionsmodell				+	+
Energiebereich (in eV)	$\leq 10^{20}$	$< 5 \cdot 10^{16}$	$< 10^{18}$	$\leq 10^{20}$	$< 10^{17}$

Tabelle 4.1: Charakteristika der beschriebenen Wechselwirkungsmodelle (nach [Kna97]). Die mit “+” gekennzeichneten Merkmale sind implementiert.

Bei den Hochenergiewechselwirkungsmodellen besteht die Wahl zwischen QGSJET [Kal93], VENUS [Wer93], DPMJET [Ran95], SIBYLL [Fle94, Eng99a] und HDPM [Cap89]. QGSJET, VENUS und DPMJET basieren auf der Gribov-Regge-Theorie, SIBYLL ist ein Minijet-Modell. Innerhalb des HDPM-Modells wird mit Hilfe von Parametrisierungen und dem Superpositionsmodell versucht, Beschleunigerdaten zu reproduzieren. Da die Extrapolation zu

höheren Energien unsicher ist, wird dieses Modell kaum noch benutzt. In den aktuellsten Versionen von CORSIKA steht auch das NeXus-Modell [Dre99] zur Verfügung, das aus einer Zusammenarbeit der Autoren von VENUS und QGSJET entstanden ist. Im Gegensatz zu bisherigen Modellen wird hier ein selbstkonsistenter Ansatz verfolgt, der nur wenig Raum für freie Parameter läßt und daher einen konzeptionellen Fortschritt darstellt.

Nähere Informationen über die Eigenschaften der Modelle und ihre Folgen für die Luftschauerentwicklung finden sich in den Referenzen [Kna97] und [Ris00]. In Tabelle 4.1 sind kurz die wichtigsten Merkmale der Wechselwirkungsmodelle angegeben.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden QGSJET in der Version des Jahres 2001 und SIBYLL in Version 2.1 als Hochenergiewechselwirkungsmodelle benutzt. Für die Niederenergiewechselwirkungen wurde das GHEISHA-Modell (Version von 2002) benutzt, die verwendete CORSIKA-Version ist 6.018. In Tabelle 4.2 sind die Werte der wichtigsten bei allen Simulationen verwendeten Parameter angegeben.

Beobachtungsniveau	110 m
Rechnung mit EGS	ja
Energieschwelle für Myonen	100 MeV
Energieschwelle für e^+, e^-, γ	3 MeV
Energieschwelle für Hadronen	100 MeV
Fragmentationsflag	2
Zenitwinkel	verteilt nach $\sin \vartheta \cos \vartheta$
Azimutwinkel	gleichverteilt $0^\circ - 360^\circ$
Atmosphäre	US-Standard

Tabelle 4.2: Bei allen CORSIKA-Simulationen verwendete Parameter.

4.2 Der Thinning-Algorithmus

Da in der Standardversion mit CORSIKA jedes Teilchen verfolgt wird, steigt auch die Rechenzeit mit der Anzahl der zu behandelnden Teilchen. Die Rechendauer pro Schauer skaliert etwa linear mit der Primärenergie des den Schauer auslösenden Teilchens. Die Art des Primärteilchens und sein Einfallswinkel führen nur zu kleinen Unterschieden. Ein von einem 1 PeV Proton ausgelöster Schauer benötigt auf einer Compaq XP 1000 (Alpha-Prozessor mit 667 MHz) im Mittel knapp 6 Minuten. Das bedeutet aber, daß ein 10 PeV Schauer ungefähr 60 Minuten, ein 100 PeV Schauer circa 10 Stunden benötigt. Zusätzlich skaliert die Anzahl der das Beobachtungsniveau erreichenden Teilchen und damit die Größe der Ausgabedatei

ebenfalls etwa linear mit der Primärenergie. Für einen 100 PeV Proton-induzierten Schauer werden damit im Mittel ungefähr 2 GByte benötigt. Aufgrund der großen intrinsischen Fluktuationen der Luftschauer ist aber damit die Erzeugung einer hinreichenden Anzahl von Schauern, um die Fluktuationen gut beschreiben zu können, oberhalb von einigen 10 PeV nicht mehr in realisierbarer Zeit möglich. Eine Simulation von Primärenergien oberhalb 10^{18} eV ist zur Zeit praktisch ausgeschlossen. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, bietet der sog. *thinning*-Algorithmus [Hil81, Hil97]. Hat sich ein Luftschauer soweit entwickelt, daß eine große Anzahl von Sekundärteilchen zur Verfügung steht, wird von den Teilchen, die bei einer Reaktion entstehen, nur noch eines weiterverfolgt, die anderen werden verworfen. Dieses verbliebene Teilchen erhält einen Gewichtungsfaktor und steht damit als Repräsentant für mehrere. Der Punkt, ab dem dieser Algorithmus greift, wird durch die "thinning"-Energie E_{thin} bzw. den "thinning level" $\varepsilon_{thin} = E_{thin}/E_{primär}$ festgelegt. Erst wenn in einer Reaktion Teilchen mit Energien kleiner als E_{thin} entstehen, wird diese Methode angewendet. Der thinning level kann als Maß für die Entwicklungsstufe eines Luftschauers interpretiert werden. Je kleiner sein Wert, desto später der Zeitpunkt, ab dem der Algorithmus greift. Jedem der erzeugten Teilchen wird eine Überlebenswahrscheinlichkeit p_i zugeordnet, die von der Energiesumme aller entstandenen Teilchen abhängt:

$$\begin{aligned} p_i &= E_i/\Sigma_i E_i & \text{für} & \quad \Sigma_i E_i < E_{thin} \\ p_i &= E_i/E_{thin} & \text{für} & \quad \Sigma_i E_i \geq E_{thin} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Unter Berücksichtigung dieser Wahrscheinlichkeiten wird eines der Teilchen mit $E_i < E_{thin}$ zufällig ausgewählt und weiterverfolgt. Als Gewichtungsfaktor w_i erhält es den Kehrwert seiner Wahrscheinlichkeit, $w_i = 1/p_i$.

Ausser dieser Art der Teilchenauswahl und Gewichtungszuordnung existieren noch weitere Vorschriften, die insbesondere den Charakteristika bestimmter Reaktionstypen Rechnung tragen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [Hec98a].

Durch die Anwendung des thinning-Algorithmus werden zusätzlich zu den intrinsischen Fluktuationen weitere statistische Unsicherheiten eingeführt. Die Größe dieser Unsicherheiten hängt von der Primärenergie des Schauers und dem thinning level ab. Um einen Wert des thinning levels zu finden, bei dem sich die zusätzlichen Fluktuationen nicht bemerkbar machen, aber trotzdem eine Reduktion der Rechenzeit möglich ist, wurde für 1 PeV Proton- und Eisen-induzierte Luftschauer eine Vergleichsreihe durchgeführt. Bei dieser Energie kann noch eine hinreichend große Zahl von Schauer in der Standardform erzeugt werden. Es wurden jeweils 2000 Schauer mit Zenitwinkeln zwischen 0° und 18° gerechnet, sowohl voll simuliert, als auch mit verschiedenen Werten für den thinning level. Die volle Simulation entspräche in diesem Fall einem theoretischen thinning level von $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-9}$, was sich aus der unteren Energieschwelle der Elektronen und Photonen von 3 MeV ergibt. Da Eisen-induzierte Schauer die kleinsten intrinsischen Fluktuationen aufweisen, erwartet man hier am ehesten einen beobachtbaren Einfluß des thinning.

Für diese Arbeit ist die $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung wesentlich. Um zu untersuchen, ob diese Verteilung bei gedünnten Schauern mit einem thinning level ε_{thin} noch mit der entsprechenden

ohne thinning erzeugten Verteilung kompatibel ist, wurde ein Kolmogorov-Test durchgeführt. Bei diesem Test werden die Formen der Verteilungen miteinander verglichen, und man erhält eine Wahrscheinlichkeit P_{Kol} , die abgibt, ob die beiden Verteilungen einer gemeinsamen (unbekannten) Grundverteilung entstammen. Werte von P_{Kol} nahe 1 bedeuten eine hohe Wahrscheinlichkeit für kompatible Verteilungen, Werte nahe 0 sprechen für verschiedene Grundverteilungen. In Tabelle 4.3 sind die entsprechenden Werte für Proton- und Eisen-induzierte Schauer angegeben. Da selbst ein thinning level von 10^{-4} bei Proton-induzierten Schauern eine Wahrscheinlichkeit von $P_{Kol} = 0.836$ liefert, wurde für Protonen auf die Simulation von Schauern mit $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ und $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ verzichtet. Wie erwartet macht sich der Einfluß des thinnings (“Ausdünnens”) bei Eisen-induzierten Schauern früher bemerkbar. In Abbildung 4.1 sind zur Visualisierung die Projektionen der $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung, d.h. die $\lg N_e$ - bzw. die $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung, für voll gerechnete Schauer und gedünnte Schauer mit $\varepsilon_{thin} = 10^{-5}$ dargestellt. Wie von dem entsprechenden Ergebnis des Kolmogorov-Tests zu erwarten ist, scheinen beide Verteilungen im Rahmen der statistischen Unsicherheiten identisch zu sein. Bei Primärenergien im PeV-Bereich scheint selbst ein thinning level von $\varepsilon_{thin} = 10^{-5}$ noch ohne signifikante Auswirkungen zu sein.

thinning level ε_{thin}	P_{Kol} Proton-ind.	P_{Kol} Eisen-ind.
$1 \cdot 10^{-6}$	0.936	0.999
$1 \cdot 10^{-5}$	0.999	0.992
$2.5 \cdot 10^{-5}$	nicht simuliert	0.469
$5 \cdot 10^{-5}$	nicht simuliert	0.241
$1 \cdot 10^{-4}$	0.836	0.012

Tabelle 4.3: Ergebnisse des Kolmogorov-Tests zwischen der $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung von voll simulierten Schauern und gedünnten Schauern.

Es bleibt die Frage, welcher Wert von ε_{thin} bei den höchsten noch relevanten Energien angebracht ist. In [Hec98a] wird gezeigt, daß sich für vertikale Proton-induzierte Schauer von 10 EeV für $\varepsilon_{thin} > 10^{-5}$ eine zusätzliche Verbreiterung der $\lg N_\mu$ -Verteilung signifikant bemerkbar macht. Die höchsten für diese Arbeit relevanten Energien liegen im Bereich von $5 \cdot 10^{17}$ eV. Bei diesen Energien ist keine voll simulierte Referenzverteilung mit ausreichender Statistik mehr zu erzeugen. Ein Hinweis auf die Qualität der erzeugten Schauergrößenverteilungen kann nur der Vergleich zwischen Schauern liefern, die mit verschiedenen thinning levels erzeugt wurden. Aus diesem Grund wurden für eine Primärenergie von $1 \cdot 10^{18}$ eV (absolute Obergrenze des in der Messung zugänglichen Energiebereichs) jeweils 500 Eisen-induzierte Schauer mit $\varepsilon_{thin} = 10^{-6}$, 10^{-5} , $5 \cdot 10^{-5}$ und 10^{-4} erzeugt. Als Referenzverteilung diente die $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung bei $\varepsilon_{thin} = 10^{-6}$. Die entsprechenden Verteilungen von Schauern mit größerem thinning level wurden mit dieser durch einen Kolmogorov-Test verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.2 in der rechten Hälfte dargestellt. Zum Vergleich sind in der

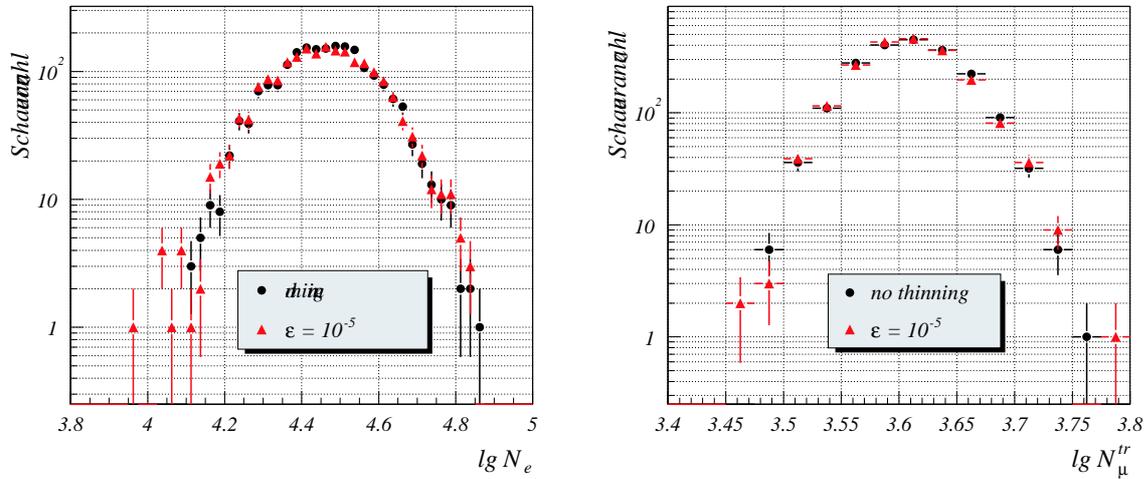


Abbildung 4.1: Vergleich der $\lg N_e$ -Verteilung (links) und der $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung (rechts) für voll simulierte und gedünnte Schauer, jeweils Eisen, 1 PeV, $0^\circ - 18^\circ$, 2000 Schauer.

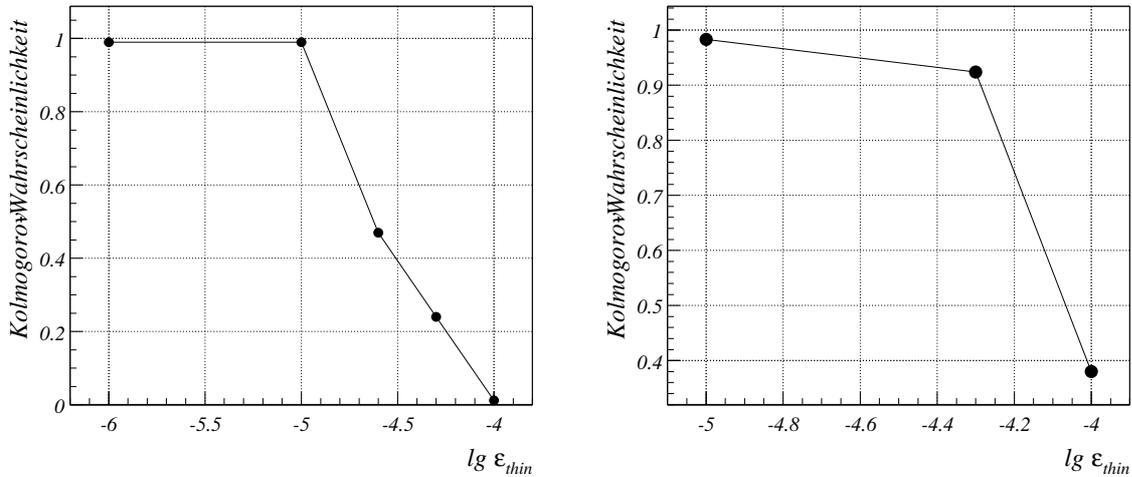


Abbildung 4.2: Abhängigkeit der Kolmogorov-Wahrscheinlichkeit vom thinning level, links für 1 PeV Eisenschauer, rechts für 1 EeV Eisenschauer. Im Fall der 1 PeV Schauer dienen voll simulierte Schauer als Referenz, bei den 1 EeV Schauern wurde der Vergleich mit $\epsilon_{thin} = 10^{-6}$ Schauern durchgeführt.

linken Hälfte die Ergebnisse aus Tabelle 4.3 für Eisen (1 PeV) graphisch wiedergegeben.

Man erkennt für den 1 PeV-Fall nach anfänglicher Konstanz der Wahrscheinlichkeitswerte ein plötzliches und starkes Abfallen mit größer werdendem thinning level. Das gleiche Bild ergäbe sich auch, falls die Schauer mit $\epsilon_{thin} = 10^{-6}$ als Referenz gedient hätten, da sich

diese kaum von den voll simulierten unterscheiden. Im Fall der 1 EeV Schauer zeigt sich ein analoges Verhalten, Schauer mit $\varepsilon_{thin} = 10^{-6}$ und $\varepsilon_{thin} = 10^{-5}$ sind kompatibel, danach setzt ein Abfall der Wahrscheinlichkeit mit zunehmendem thinning level ein. Unter der Annahme, daß auch hier ein zum 1 PeV-Fall analoges Verhalten vorausgesetzt werden kann, führt ein thinning level von 10^{-5} hier ebenfalls zu keinen signifikanten Verzerrungen der Verteilung.

Um die durch den thinning-Algorithmus entstehenden zusätzlichen Unsicherheiten in jedem Fall zu unterdrücken, wurden alle Simulationen, bei denen thinning angewendet wurde, mit einem thinning level von $\varepsilon_{thin} = 10^{-6}$ durchgeführt.

4.3 Parametrisierung der Schauergrößenverteilungen

Aufgrund der großen in Abschnitt 4.2 angesprochenen Rechenzeiten von vollständigen Luftschauersimulationen ist es kaum möglich, einen Simulationssatz zu erzeugen, der annähernd die gleiche statistische Aussagekraft wie die gemessenen Luftschauerereignisse besitzt. Dieses Problem läßt sich zumindest verringern, indem gedünnte Schauer benutzt werden. Nachteil dieser Methode ist aber, daß gedünnte Schauer nicht in der Detektorsimulation des KASCADE-Experiments verwendet werden können. Um diese Einschränkungen zu umgehen, wird folgende Strategie verfolgt:

- Simulation von Luftschauern bei einigen festen Energien unter Verwendung des thinning-Algorithmus. Die Beschränkung auf einzelne Primärenergien ermöglicht es, zumindest für diese Energien eine in größerem Maße statistisch belastbare Aussagekraft zu erzielen.
- Parametrisierung der relevanten Schauergrößenverteilung, also der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung. Die Beschreibung der Schauergrößenverteilung durch eine funktionale Form gestattet es zudem, durch Variation der Funktionsparameter bzw. der Art des funktionalen Zusammenhangs den Einfluß der begrenzten Simulationsstatistik zu untersuchen, wodurch neben statistischen auch systematische Effekte abgeschätzt werden können.
- Parametrisierung der Rekonstruktionseigenschaften. Anhand eines Simulationssatzes von vollständig simulierten Schauern, die als Eingabe für die Detektorsimulation mit anschließender Rekonstruktion dienen, lassen sich der Einfluß der Messung und Rekonstruktion auf die ursprünglichen (“wahren”) Schauergrößen untersuchen.
- Einfaltung der parametrisierten Rekonstruktionseigenschaften in die parametrisierten Schauerfluktuationen.

Wie sich im weiteren Verlauf zeigt, sind die Schauerfluktuationen (die Form der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung) die dominierende Größe. Ihre Bestimmung bzw. Parametrisierung ist Gegenstand dieses Abschnitts. Die Rekonstruktionseigenschaften werden in Kapitel 5 untersucht.

4.3.1 Die $\lg N_e$ -Verteilung

Im ersten Schritt wird zunächst die Verteilung der Lage des Schauermaximums in der Atmosphäre bestimmt. Im folgenden wird als Mass für die longitudinale Entwicklung bzw. für den Ort in der Atmosphäre immer die atmosphärische Tiefe t in g/cm^2 (Flächenbelegungsichte) benutzt. Der Ort der ersten Wechselwirkung des Primärteilchens folgt einer Exponentialverteilung mit der Wechselwirkungslänge λ_{Luft} :

$$P_{WW}(t) \propto e^{-t/\lambda_{Luft}} dt \quad (4.2)$$

In einem einfachen Modell kann angenommen werden, daß das Maximum der Schauerentwicklung in einem festen Abstand Λ vom Ort der ersten Wechselwirkung erreicht wird. Dieser Abstand ist Fluktuationen unterworfen, in erster Näherung wird für die Verteilung von Λ eine Normalverteilung mit Zentralwert Λ_0 und Breite σ angenommen. Als Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ort des Schauermaximums erhält man daher die Faltung einer Exponentialverteilung mit einer Normalverteilung:

$$P_{Max}(t) \propto dt \cdot \int_0^t e^{-(t-\Lambda)/\lambda_{Luft}} e^{-0.5(\Lambda-\Lambda_0)^2/\sigma^2} d\Lambda \quad (4.3)$$

Durch quadratische Erweiterung des Exponenten läßt sich dieses Integral umformen in

$$P_{Max}(t) \propto e^{-t/\lambda_{Luft}} dt \cdot \int_0^t e^{-0.5(\Lambda - (\sigma^2/\lambda_{Luft} + \Lambda_0))^2/\sigma^2} d\Lambda = e^{-t/\lambda_{Luft}} dt \int_a^b e^{-u^2} du \quad (4.4)$$

Im letzten Schritt wurde der Exponentenausdruck im Integral durch die Variable u substituiert, wodurch sich als Integrationsgrenzen

$$a = -(\sigma^2/\lambda_{Luft} + \Lambda_0)/(\sqrt{2}\sigma), \quad b = (t - (\sigma^2/\lambda_{Luft} + \Lambda_0))/(\sqrt{2}\sigma) \quad (4.5)$$

ergeben. Da sich σ maximal in der Größenordnung von λ_{Luft} bewegt, Λ_0 aber eher 5 bis 10mal größer als λ_{Luft} ist, kann die untere Integrationsgrenze in guter Näherung durch $-\infty$ ersetzt werden. Damit ergibt sich

$$P_{Max}(t) \propto e^{-t/\lambda_{Luft}} \text{erf}(b) dt \quad (4.6)$$

Hierbei ist $\text{erf}(x)$ das Integral der normierten Gaußverteilung von $-\infty$ bis x . In der linken Hälfte der Abbildung 4.3 ist eine Anpassung nach Gleichung 4.6 an die Verteilung der Maximumpositionen für simulierte Protonschauer einer Energie von $5 \cdot 10^{14}$ eV gezeigt. Man erkennt eine sehr gute Beschreibung der Verteilung. Die Parameter p_1 und p_2 in der Abbildung entsprechen hierbei $\sigma^2/\lambda_{Luft} + \Lambda_0$ bzw. $\sqrt{2}\sigma$.

Die Grundannahme in dieser vereinfachten Betrachtungsweise ist, daß alle Schauer gleicher Energie im Maximum ihrer Entwicklung dieselbe Anzahl von Teilchen (Elektronen) besitzen. Nach dem Maximum setzt ein Abklingen des Schauers ein, die Elektronenzahl nimmt ab. Die Fluktuationen von $\lg N_e$ auf Beobachtungsniveau t_0 kommen dann einfach durch die Verteilung der Abstände zwischen Maximumlage t_{max} und Beobachtungsniveau t_0 zustande.

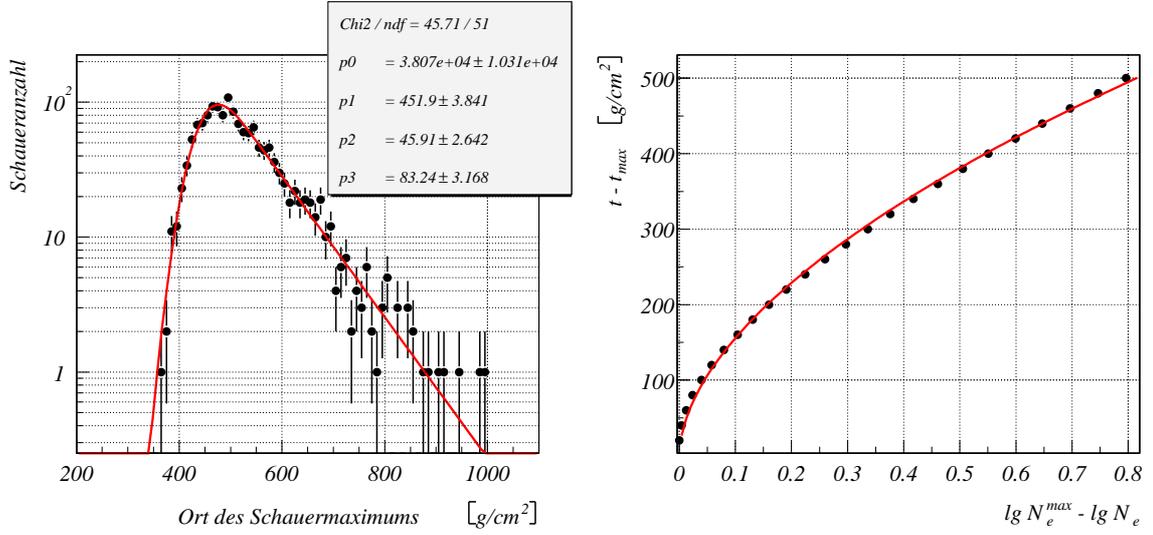


Abbildung 4.3: Links: Anpassung nach Gl. 4.6 an die Verteilung der Maximumpositionen für simulierte Schauer. Rechts: Entfernung vom Schauermaximum in Abhängigkeit der Abnahme von $\lg N_e$ nach dem Maximum für Protonschauer ($5 \cdot 10^{14}$ eV, mittlere Longitudinalentwicklung).

Betrachtet man die Abhängigkeit des Abstandes vom Schauermaximum von der logarithmierten Elektronenzahl auf der abfallenden Flanke der Longitudinalentwicklung, läßt sich bei einer mittleren Longitudinalentwicklung als Näherung ansetzen:

$$t_0 - t_{max} = p_5 (\lg N_e^{max} - \lg N_e)^{p_6} \quad (4.7)$$

Im rechten Teil von Abbildung 4.3 ist der Abstand zwischen aktueller atmosphärischer Tiefe der Schauerentwicklung und Lage des Schauermaximums über der Differenz zwischen $\lg N_e^{max}$ und $\lg N_e(t)$ für einen mittleren Proton-induzierten Luftschauer einer Primärenergie von 0.5 PeV dargestellt. Es handelt sich um den Mittelwert aus 200 simulierten Schauern mit einem Einfallswinkel, der zwischen 0° und 18° liegt und einer $\sin \vartheta \cos \vartheta$ -Verteilung folgt. Die eingezeichnete Kurve entspricht einer Anpassung nach Gl. 4.7. Man erkennt, daß die angenommene Abhängigkeit die tatsächliche näherungsweise wiedergibt. Im Bereich großer $\lg N_e$ -Differenzen zeigen sich leichte Unterschiede, die Abstandsabhängigkeit kann hier durch einen rein linearen Zusammenhang besser beschrieben werden.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{Max}(t)$ legt damit auch die Verteilungsfunktion $P(\lg N_e)$ fest. Durch Substitution von t durch $\lg N_e$ (Schauergröße am Boden) ergibt sich damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\lg N_e$. Berücksichtigt man noch, daß die Abhängigkeit in Gl. 4.7 für kleine $\lg N_e$ fast linear verläuft, die Fehlerfunktion in Gl. 4.6 aber nur für kleine Werte von t , also kleine Werte von $\lg N_e$ von 1 verschieden ist, ergibt sich durch Substitution als

Ansatz für die Verteilungsfunktion $P(\lg N_e)$

$$P(\lg N_e) = p_0 \times \operatorname{erf} \left(\frac{p_1 - \lg N_e}{p_2} \right) \times \exp \left(-\frac{t_0 - p_5(p_4 - \lg N_e)^{p_6}}{p_3} \right) \times F \quad (4.8)$$

Hierbei ist p_4 der Wert von $\lg N_e^{max}$.

Der Faktor F in Gl. 4.8 stellt den durch die Substitution entstehenden Differentialausdruck $(dt/d \lg N_e) d \lg N_e$ dar, und damit den Zusammenhang zwischen dem Tiefenintervall dt und dem Schauergrößenintervall $d \lg N_e$:

$$dt/d \lg N_e = p_5 p_6 (p_4 - \lg N_e)^{p_6 - 1} \quad (4.9)$$

Das Intervall dt entspricht der Breite desjenigen Bereichs atmosphärischer Tiefe, in dem sich die Maxima der Schauer mit $\lg N_{e,1} \leq \lg N_e < (\lg N_{e,1} + d \lg N_e)$ befinden. F divergiert für $\lg N_e \rightarrow \lg N_e^{max}$, falls $p_6 < 1$ gilt, was aber hier gerade der Fall ist. Dies bedeutet für das Tiefenintervall $dt \rightarrow \infty$ für $d \lg N_e \rightarrow 0$. Da aber die Lage des Beobachtungsniveaus t_0 die Schauerentwicklung beendet, muß gelten

$$dt \leq t_0 - t_{max}. \quad (4.10)$$

D.h., daß das Tiefenintervall nicht größer als der Restabstand zum Erdboden sein kann. Um dies zu berücksichtigen, wird für den letzten Term F folgender Ansatz gemacht:

$$F = \begin{cases} p_5 p_6 (p_4 - \lg N_e)^{p_6 - 1} d \lg N_e, & dt \leq t_0 - t_{max} \\ t_0 - t_{max} = p_5 (p_4 - \lg N_e)^{p_6}, & dt > t_0 - t_{max} \end{cases} \quad (4.11)$$

Tatsächlich unterliegen alle Parameter in Gl. 4.7 Fluktuationen und folgen einer eigenen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Für die Berechnung von $P(\lg N_e)$ müßte man daher ein mehrfaches Faltungsintegral betrachten. Hier wird aber vereinfachend angenommen, daß trotzdem die Form 4.8 erhalten bleibt. Diese Annahme wird durch die guten Ergebnisse bei der Anpassung an simulierte $\lg N_e$ -Verteilungen gerechtfertigt, wie sie in Abb. 4.4 dargestellt sind. Man kann aber nicht erwarten, daß die Werte der Parameter p_i die gleiche Bedeutung besitzen, wie bei den oben vorgenommenen Plausibilitätsbetrachtungen.

Ein klarer Nachteil der entwickelten Funktion ist die große Anzahl von Parametern, als auch die Tatsache, daß sie aufgrund der Fallunterscheidung zur Bestimmung von F nicht stetig differenzierbar ist. Darüberhinaus erkennt man in Abb. 4.4, daß ein beinahe scharfes Abbrechen der Verteilung am oberen Ende des $\lg N_e$ -Bereichs stattfindet. Ein etwas weniger scharf ausgeprägtes Ende der Verteilung erscheint plausibler. Als Alternative zu Gl. 4.8, die im Folgenden als *Modell 0* bezeichnet wird, kann

$$P(\lg N_e) = p_0 \times \operatorname{erf} \left(\frac{p_1 - \lg N_e}{p_2} \right) \times \exp(p_3 \cdot (p_4 - \lg N_e)) \times (p_4 - \lg N_e)^{p_5} d \lg N_e \quad (4.12)$$

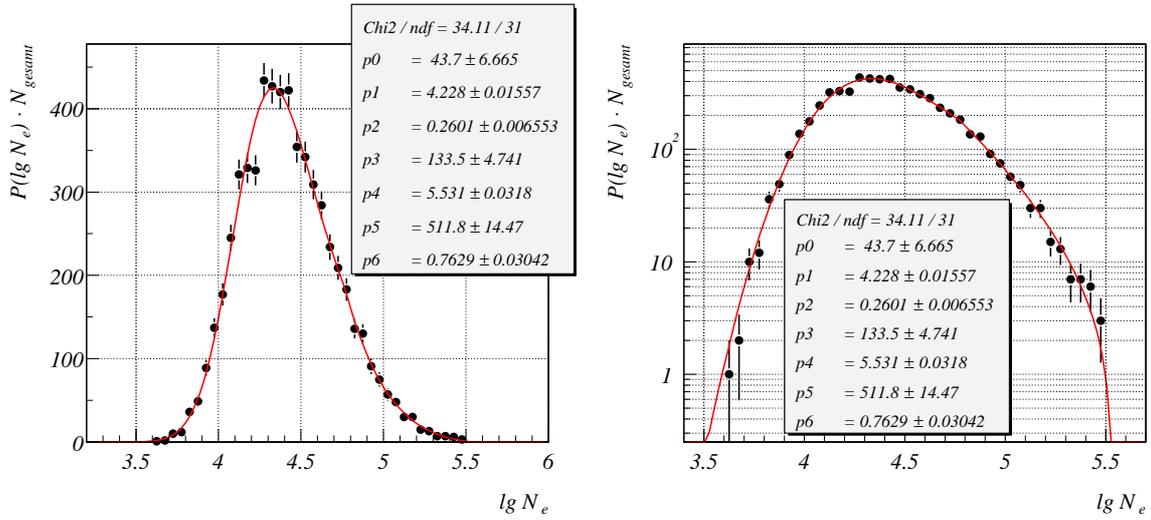


Abbildung 4.4: Anpassung einer Funktion nach Gl. 4.8 an die $\lg N_e$ -Verteilung für Proton-induzierte Schauer mit Primärenergie 0.5 PeV und Zenitwinkel kleiner 18° , die Schauerzahl N_{gesamt} beträgt 6000. Die linke Hälfte zeigt die Verteilung in linearer, die rechte Hälfte in logarithmischer Auftragung.

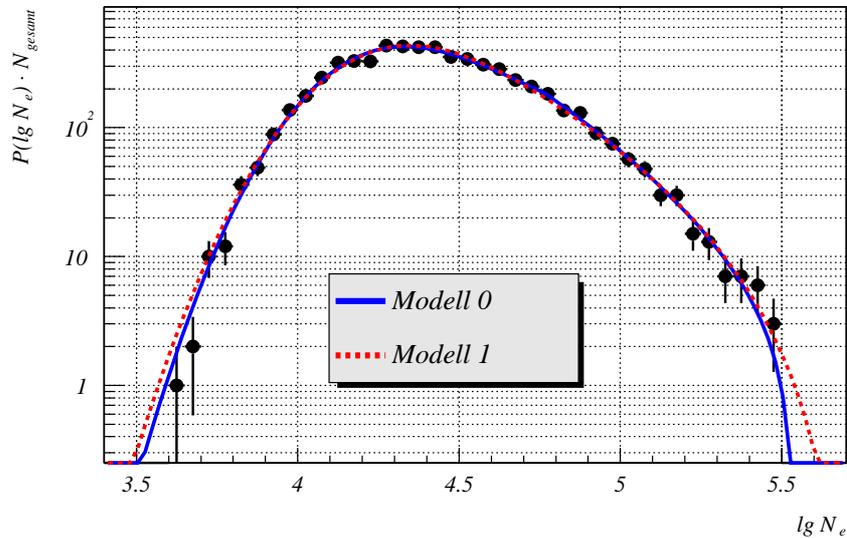


Abbildung 4.5: Vergleich verschiedener Funktionen zur Beschreibung der $\lg N_e$ -Verteilung (Proton, 0.5 PeV, Zenitwinkel $\leq 18^\circ$, $N_{gesamt} = 6000$).

dienen. Diese Funktion wird im Weiteren als *Modell 1* bezeichnet. Sie zeichnet sich durch eine geringere Anzahl von freien Parametern und eine stetige Differenzierbarkeit aus. Die Parameter haben im Gegensatz zu Gl. 4.8 eine weniger klare Bedeutung. p_4 entspricht wie oben $\lg N_e^{max}$, p_3 ist ein Maß für die Lage des Schwerpunkts und p_2 charakterisiert den Verlauf

der Verteilung hin zu kleinen $\lg N_e$ -Werten.

In Abbildung 4.5 ist eine Anpassung dieser Funktion an die Verteilung aus Abb. 4.4 im Vergleich zu Modell 0 dargestellt. Es wurde eine logarithmische Auftragung gewählt, um insbesondere das Verhalten an den Rändern vergleichen zu können. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung, allerdings ein weniger scharfes Abbrechen am oberen Ende der Verteilung. Im Rahmen der statistischen Unsicherheiten ist die Beschreibung der Verteilung mit Modell 1 von gleicher Qualität wie die mit Modell 0. Wenn nicht anders angegeben, wird Modell 1 zur Beschreibung der $\lg N_e$ -Verteilung benutzt.

4.3.2 Die korrelierte $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung

Zwischen den Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ besteht bei fester Primärenergie eine Korrelation, die z.B. dann sichtbar wird, wenn man das Verhältnis der Anzahl von Schauern mit einer trunkierten Myonzahl oberhalb eines Schwellenwertes $\lg N_{\mu,0}^{tr}$ zur Gesamtzahl aller Schauer in Abhängigkeit von $\lg N_e$ betrachtet. Dieser Quotient läßt sich schreiben als

$$Q(\lg N_e, \lg N_{\mu,0}^{tr}) = \frac{\int_{\lg N_{\mu,0}^{tr}}^{+\infty} p(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_\mu^{tr}}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_\mu^{tr}} \quad (4.13)$$

Bestünde keine Korrelation zwischen den beiden Schauergrößen, ergäbe sich für Q

$$Q(\lg N_e, \lg N_{\mu,0}^{tr}) = \int_{\lg N_{\mu,0}^{tr}}^{+\infty} p_\mu(\lg N_\mu^{tr}) d \lg N_\mu^{tr} \quad (4.14)$$

Hierbei ist p_μ die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung eines Schauers mit der Schauergröße $\lg N_\mu^{tr}$. Für den Fall keiner Korrelation ist dieser Quotient unabhängig von $\lg N_e$. Insbesondere für normalverteilte $\lg N_\mu^{tr}$ erhält man den Wert einer komplementären Fehlerfunktion.

In Abb. 4.6 ist dieses Verhältnis für 0.5 PeV Proton-induzierte Schauer mit einem Schwellenwert von $\lg N_{\mu,0}^{tr} = 3.2$ dargestellt. Der Verlauf ähnelt eher dem einer Fehlerfunktion und zeigt ein deutliches Schwellenverhalten. Als Ansatz zur Beschreibung dient eine Fehlerfunktion mit variierender Breite:

$$Q(\lg N_e, \lg N_{\mu,0}^{tr}) = \text{erf}(x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{\lg N_e - p_0}{p_1 - p_2 \cdot (p_0 - \lg N_e)} \quad (4.15)$$

Die in der Abbildung eingezeichnete Kurve stellt eine Anpassung mit dieser Funktion dar.

Der Wert des Parameters p_0 in Gl. 4.15 ist abhängig vom Schwellenwert $\lg N_{\mu,0}^{tr}$. Als Ansatz wird angenommen, daß sich diese Abhängigkeit durch ein Polynom 2. Grades beschreiben

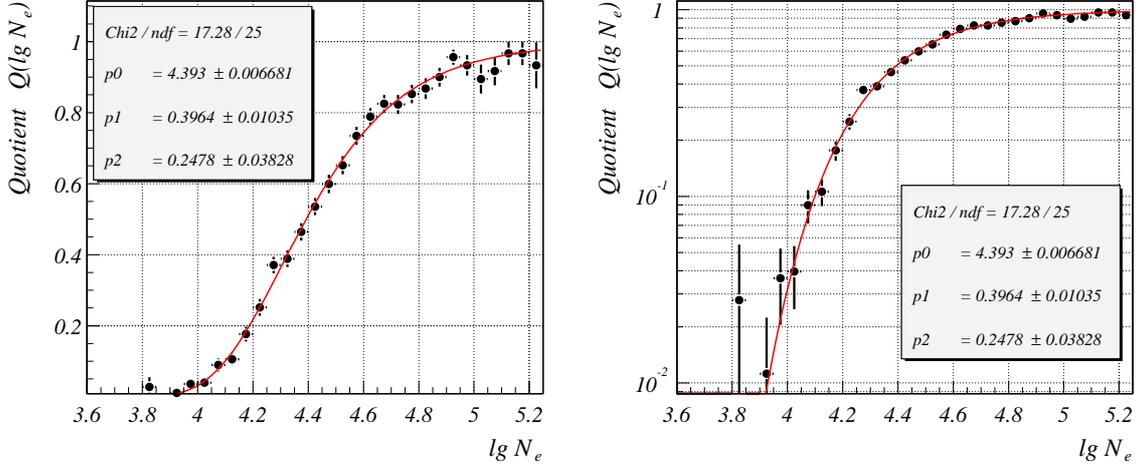


Abbildung 4.6: Verhältnis der Schauern mit $\lg N_{\mu}^{tr} > 3.2$ zu allen Schauern in Abhängigkeit von $\lg N_e$. Die Schauern sind Proton-induziert mit einer Primärenergie von 0.5 PeV und Einfallswinkeln kleiner 18° . Links in linearer, rechts in logarithmischer Darstellung.

läßt. Für die Parameter p_1 und p_2 wird angenommen, daß sie unabhängig von $\lg N_{\mu,0}^{tr}$ sind:

$$\begin{aligned}
 p_0(\lg N_{\mu,0}^{tr}) &= c_0 + c_1 \cdot \lg N_{\mu,0}^{tr} + c_2 \cdot (\lg N_{\mu,0}^{tr})^2 \\
 p_1(\lg N_{\mu,0}^{tr}) &= const. \\
 p_2(\lg N_{\mu,0}^{tr}) &= const.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Unter Benutzung von $P(\lg N_e)$ (hier aus Gl. 4.12) läßt sich dann die Wahrscheinlichkeit für einen Schauer mit Elektronenzahl $\lg N_e$ und einer trunkierten Myonzahl größer als $\lg N_{\mu,0}^{tr}$ angeben:

$$P(\lg N_e; \lg N_{\mu}^{tr} \leq \lg N_{\mu,0}^{tr}) = Q(\lg N_e, \lg N_{\mu,0}^{tr}) \cdot P(\lg N_e) \tag{4.17}$$

Damit ist aber auch die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr})$ für Schauern mit der Elektronenzahl $\lg N_e$ und der myonischen Schauergröße $\lg N_{\mu}^{tr}$ gegeben:

$$P(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr}) = \left(Q(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr}) - Q(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr} + d \lg N_{\mu}^{tr}) \right) \cdot P(\lg N_e) \tag{4.18}$$

Um die benötigten Parameter für $Q(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr})$ zu bestimmen, hat es sich als praktikabler und stabiler erwiesen, an die Verteilung von $P(\lg N_{\mu}^{tr})$ die entsprechende Funktion anzupassen. Aus Gleichung 4.18 folgt:

$$P(\lg N_{\mu}^{tr}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Q(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr}) - Q(\lg N_e, \lg N_{\mu}^{tr} + d \lg N_{\mu}^{tr}) \right) \cdot P(\lg N_e) d \lg N_e \tag{4.19}$$

In Abbildung 4.7 ist die Anpassung an die $\lg N_{\mu}^{tr}$ -Verteilung von 0.5 PeV Proton-induzierten Schauern nach Gl. 4.19 dargestellt. Man erkennt eine sehr gute Beschreibung der Daten.

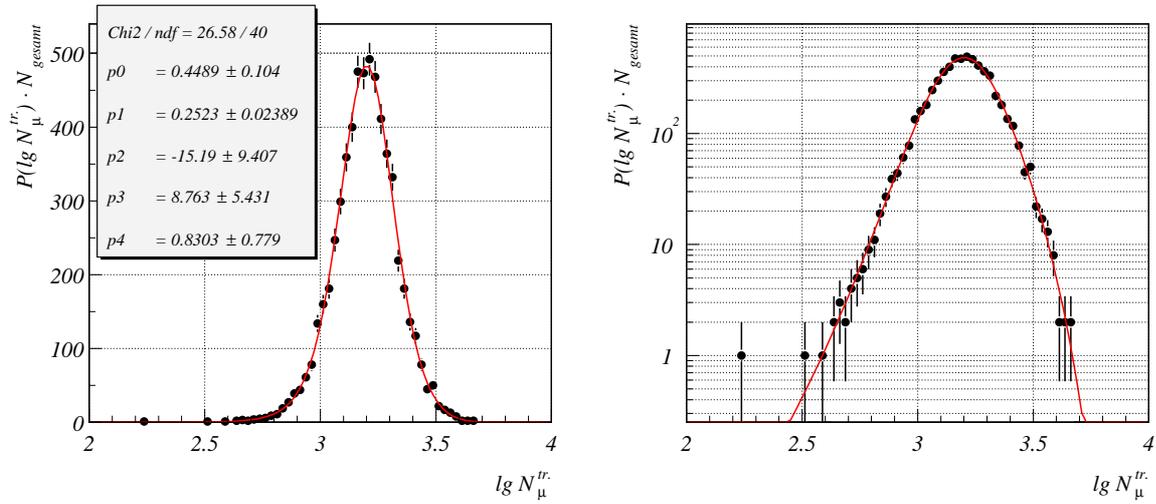


Abbildung 4.7: Anpassung einer Funktion nach Gl. 4.19 an die $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung für Proton-induzierte Schauer mit Primärenergie 0.5 PeV und Zenitwinkel kleiner 18° , $N_{gesamt} = 6000$ Schauer. Die linke Hälfte zeigt die Verteilung in linearer, die rechte Hälfte in logarithmischer Auftragung.

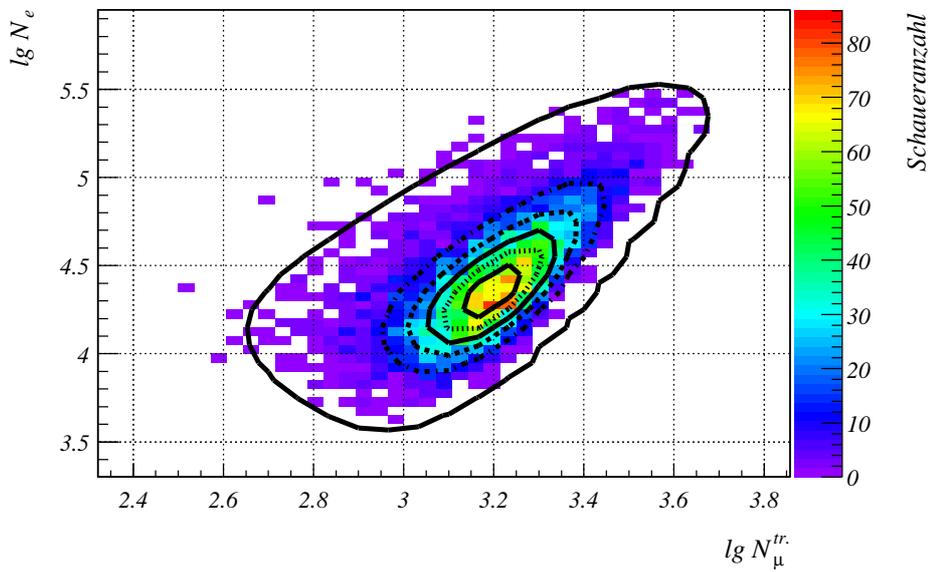


Abbildung 4.8: Die $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung für 0.5 PeV Protonschauer. Das Histogramm entspricht der Simulation, die Konturlinien einer Anpassung nach Gl. 4.18.

In Abbildung 4.8 ist die zweidimensionale $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung für 0.5 PeV Proton-induzierte Schauer (Zenitwinkel kleiner 18°) dargestellt. Als Konturlinien ist zusätzlich als Illustration die Anpassung nach Gleichung 4.18 unter Verwendung der in Abb. 4.7 angegebene

nen Parameter eingezeichnet. Man erkennt eine gute Beschreibung der simulierten Daten.

4.3.3 Der Simulationssatz und die Energieabhängigkeit

In Tabelle 4.4 ist eine Übersicht über die Anzahl der simulierten Schauer, ihre Primärenergie und den Zenitwinkelbereich dargestellt. Die Simulationen fanden bei festen Primärenergien statt, der Zenitwinkel variierte gemäß einer $\sin \vartheta \cos \vartheta$ -Verteilung. Diese Winkelabhängigkeit beschreibt die geometrische Akzeptanz eines flachen Detektorsystems (wie KASCADE) und entspricht einer Isotropie der kosmischen Strahlung. Die angegebenen Zenitwinkelbereiche entsprechen einem konstanten Raumwinkel. Bei der Simulation wurde der thinning-Algorithmus mit $\varepsilon_{thin} = 10^{-6}$ verwendet. Die angegebenen Werte beziehen sich jeweils auf Simulationen mit QGSJet wie auch mit SIBYLL.

	Proton	Helium	Kohlenstoff	Silizium	Eisen
$1 \cdot 10^{14}$ eV, 0° - 18°	8000	8000	8000	8000	8000
$5 \cdot 10^{14}$ eV, 0° - 18°	6000	6000	6000	6000	6000
$1 \cdot 10^{15}$ eV, 0° - 18°	4000	4000	4000	4000	4000
$3.16 \cdot 10^{15}$ eV, 0° - 18°	3000	3000	3000	3000	3000
$1 \cdot 10^{16}$ eV, 0° - 18°	2000	2000	2000	2000	2000
$3.16 \cdot 10^{16}$ eV, 0° - 18°	1500	1500	1500	1500	1500
$1 \cdot 10^{17}$ eV, 0° - 18°	1000	1000	1000	1000	1000
$3.16 \cdot 10^{17}$ eV, 0° - 18°	750	750	750	750	750
$1 \cdot 10^{18}$ eV, 0° - 18°	500	500	500	500	500

Tabelle 4.4: Anzahl der simulierten Schauer für die einzelnen Primärteilchen und Zenitwinkelbereiche.

Für jede Energie und jedes Winkelintervall wurden an die $\lg N_e$ - und $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung Funktionen gemäß Abschnitt 4.3.1 und 4.3.2 angepaßt:

$$\begin{aligned}
 P(\lg N_e) &= p_0 \times \operatorname{erf} \left(\frac{p_1 - \lg N_e}{p_2} \right) \times \exp(-p_3 \cdot \lg N_e) \times (p_4 - \lg N_e)^{p_5} d \lg N_e \\
 P(\lg N_\mu^{tr}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) - Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr} + d \lg N_\mu^{tr}) \right) \cdot P(\lg N_e) d \lg N_e \\
 Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) &= \operatorname{erf}(x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{\lg N_e - \lg N_0}{p_6 - p_7 \cdot (\lg N_0 - \lg N_e)} \\
 &\quad \text{und} \quad \lg N_0 = c_0 + c_1 \cdot \lg N_\mu^{tr} + c_2 \cdot (\lg N_\mu^{tr})^2
 \end{aligned}$$

Bei genauerer Untersuchung hat sich gezeigt, daß die Anzahl der primärenergieabhängigen freien Parameter reduziert werden kann, ohne daß ein Verlust in der Güte der Anpassung

auftritt. So kann z.B. im Fall von Proton-induzierten Schauern für alle Energien im Fall der QGSJet-Simulationen der Parameter p_3 gleich -1.1 , $p_5 = 2.5$, $p_7 = 0.235$, $c_1 = 3.5$ und $c_2 = 0.08$ gesetzt werden. Bei Variation aller Parameter ergaben sich die angegebenen Werte als im Rahmen der Fehler energieunabhängiger Durchschnitt. Durch die verbliebenen freien Parameter besteht genug Freiheit, um die Verteilung hinreichend gut zu beschreiben. Die bestimmten Werte dieser Parameter sind in Anhang A tabellarisch zusammengestellt.

In Abbildung 4.9 ist für Proton-induzierte Schauer (0° – 18°) die Abhängigkeit der verbliebenen Parameter p_1, p_2, p_4, p_6 und c_0 von der logarithmierten Primärenergie $\lg E$ dargestellt. Um die Energieabhängigkeit zu interpolieren, wurden Polynome verwendet. Der Grad des Polynoms orientierte sich dabei am Wert des χ^2 pro Freiheitsgrad während der Anpassung. Dieser Wert sollte zwischen 1.3 und 0.7 liegen. In allen Fällen konnte dies durch Polynome von höchstens drittem Grad erreicht werden. Der Verlauf von p_2 und p_6 (außer bei Si und Fe, dort Polynom 4. Grades) machte eine Beschreibung durch Polynome 3. Grades notwendig, in den anderen Fällen genügte ein Polynom 2. Grades. Diese Energieabhängigkeiten wurden für alle simulierten Primärteilchenarten (H, He, C, Si, Fe) bestimmt, die hier als Beispiele vorgestellten Energieabhängigkeiten (und die Größenordnung der Parameter) können als typisch für alle betrachteten Elemente angesehen werden.

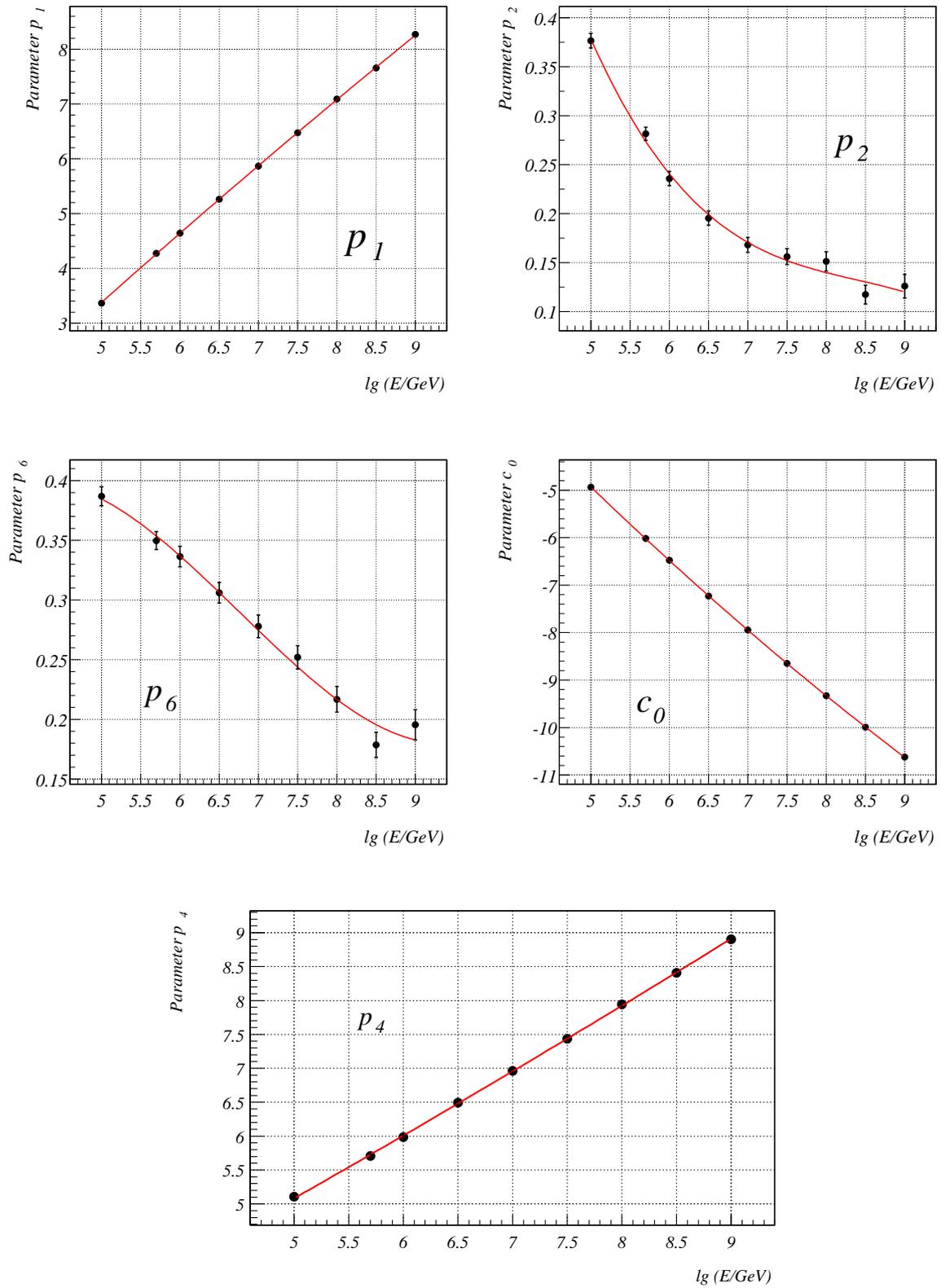


Abbildung 4.9: Energieabhängigkeit der Parameter p_1, p_2, p_6, c_0 und p_4 für Proton-induzierte Schauer (QGSJet). Die Energieabhängigkeit wurde durch Polynome (max. dritten Grades) beschrieben.

Kapitel 5

Rekonstruktionsqualität

5.1 Effizienzen

Für das Verständnis der gemessenen Daten sind nicht nur die Eigenschaften der Rekonstruktion von Bedeutung, sondern auch die Frage, ab welcher Schauergröße ein Schauer überhaupt gemessen und rekonstruiert wird. Um überhaupt als Ereignis erfaßt zu werden, müssen in der Messung entweder mehr als 10 Detektoren eines äußeren Clusters oder 20 Detektoren eines inneren Clusters angesprochen. Diese Bedingung muß innerhalb eines Clusters erfüllt sein, d.h. kleine Schauer, die zwischen die Cluster Grenzen fallen, gehen verloren.

Da die meisten Teilchen eines Luftschauers Elektronen und γ -Quanten sind, erwartet man eine Ansprechwahrscheinlichkeit abhängig von der elektronischen Schauergröße. Dies ist in sehr guter Näherung der Fall. In Abbildung 5.1, linke Hälfte, ist diese Ansprechwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von den Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ dargestellt. Es handelt sich um Proton-induzierte Luftschaue mit Zenitwinkeln kleiner 18° . Man erkennt praktisch keine Abhängigkeit von der myonischen Schauergröße. Nimmt man vereinfachend an, daß die Streubreite der angesprochenen Stationen bei fester Schauergröße nicht oder nur sehr gering von dieser abhängig ist, würde man bei einer Darstellung dieser *Trigger-Effizienz* über $\lg N_e$ eine integrierte Normalverteilung als Verlauf erwarten. Diese Abhängigkeit ist in der rechten Hälfte von Abb. 5.1 gezeigt. Zusätzlich ist die Anpassung einer solchen Fehlerfunktion eingezeichnet. Man erkennt eine sehr gute Beschreibung der simulierten Datenpunkte.

Nicht alle Ereignisse, die ein Ansprechen der Datenerfassung hervorrufen, können auch rekonstruiert werden. Sie werden im Verlauf der Rekonstruktion aussortiert. Hierbei spielt insbesondere die Rekonstruktion der Myonzahl eine entscheidende Rolle. Als Grundvoraussetzung müssen nach allen Schnitten (Spike-Reduktion) Signale von Myonstationen vorliegen. Zusätzlich kann es vorkommen, daß die Anzahl von Myonsignalen durch eine Interpretation als punch-through soweit reduziert wird, daß eine Rekonstruktion scheitert (z.B. möglich bei

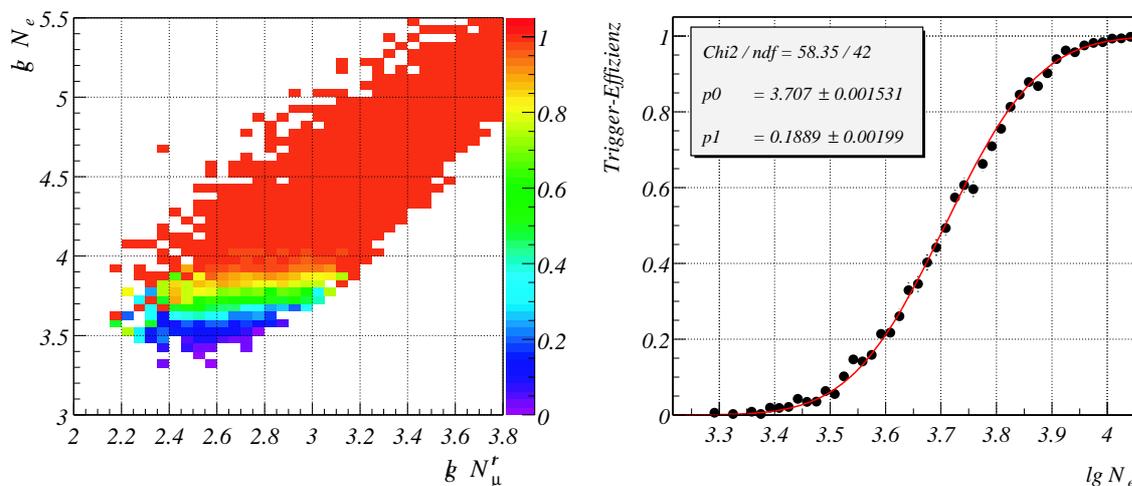


Abbildung 5.1: Linke Hälfte: Die Trigger-Effizienz für Proton-induzierte Schauer, $0^\circ < \vartheta < 18^\circ$ aufgetragen über $\lg N_\mu^{tr}$ und $\lg N_e$.
 Rechte Hälfte: Ansprechwahrscheinlichkeit nur in Abhängigkeit von $\lg N_e$, zusätzlich ist die Anpassung mit einer Fehlerfunktion eingetragen.

Core-Abständen kleiner 40 m).

Untersucht man die kombinierte Effizienz aus Trigger- und Rekonstruktionseffizienz, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schauer sowohl gemessen als auch rekonstruiert wird, erwartet man jetzt auch eine Abhängigkeit von der myonischen Schauergröße. In Abbildung 5.2 ist in der linken Hälfte analog zu Abb. 5.1 die Wahrscheinlichkeit für Messung und Rekonstruktion für Wasserstoff-induzierte Schauer dargestellt. Man erkennt hier besonders im Bereich kleiner Myonzahlen eine deutliche Abhängigkeit von $\lg N_\mu^{tr}$. Als Ansatz zur Beschreibung dieser Gesamteffizienz dient das Produkt aus zwei Fehlerfunktionen, wobei die eine die elektronische Schauergröße als Argument besitzt, die andere die myonische:

$$\epsilon(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) = \text{erf}(a) \cdot \text{erf}(b) \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lg N_e - p_0}{p_1}, \quad b = \frac{\lg N_\mu^{tr} - p_2}{p_3} \quad (5.1)$$

Hierbei wird angenommen, daß für die Gesamteffizienz Korrelationen zwischen den beiden Schauergrößen keine Rolle spielen.

In der rechten Hälfte von Abb. 5.2 sind für den Fall von Proton-induzierten Schauern (linke Hälfte) die Kontourflächen einer nach Gl. 5.1 angepaßten Funktion dargestellt.

Um eine bessere Aussage über die Gültigkeit einer Beschreibung der Gesamteffizienz mit Gl. 5.1 machen zu können, wurden für den simulierten Datensatz die Effizienzen in Abhängigkeit von $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ unter zur Hilfenahme der zweidimensionalen Anpassung nach Gl. 5.1 berechnet und mit den direkt aus der Simulation gewonnenen eindimensionalen Verteilungen verglichen. Dies ist im Folgenden wiederum für durch Protonen induzierte Schauer mit Einfallswinkeln kleiner 18° durchgeführt. Bei dem verwendeten differentiellen Energiespektrum

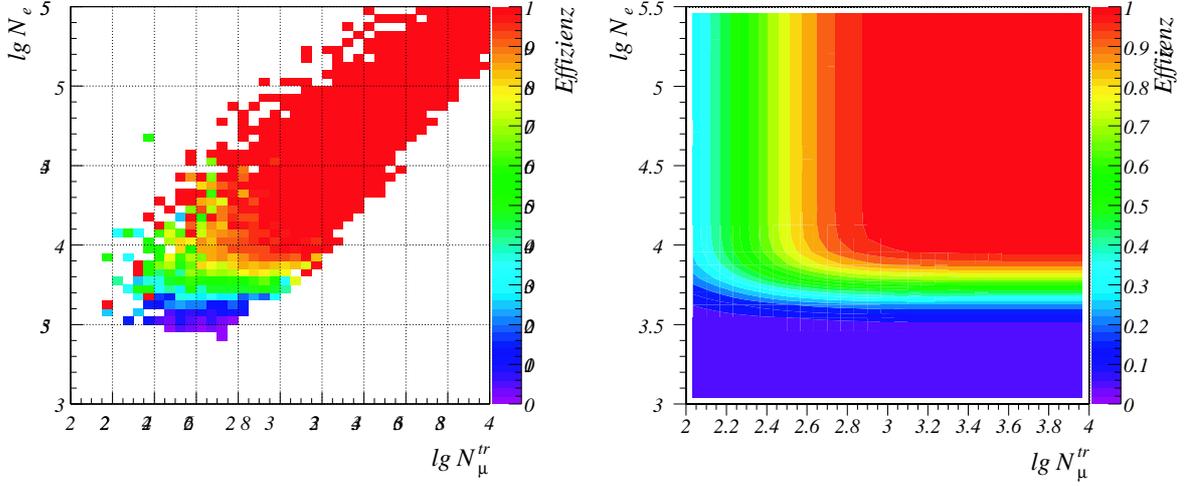


Abbildung 5.2: Linke Hälfte: Resultierende Effizienz aus Trigger- und Rekonstruktions-Effizienz für Proton-induzierte Schauer über $\lg N_\mu^{tr}$ und $\lg N_e$.
Rechte Hälfte: An die linke Hälfte angepaßte Funktion, siehe Text.

handelt es sich um ein Potenzgesetz mit einem Index von -2.

Für den Fall der $\lg N_e$ -Abhängigkeit gilt

$$\epsilon_e(\lg N_e) = \frac{\int N(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) \epsilon(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_\mu^{tr}}{\int N(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_\mu^{tr}} \quad (5.2)$$

Hierbei ist $N(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr})$ die Anzahldichte der Schauer mit Werten von $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ für die Schauergrößen.

Für den Fall der $\lg N_\mu^{tr}$ -Abhängigkeit gilt entsprechend

$$\epsilon_\mu(\lg N_\mu^{tr}) = \frac{\int N(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) \epsilon(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_e}{\int N(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr}) d \lg N_e} \quad (5.3)$$

Da hierbei auch über die intrinsischen Korrelationen der Schauergrößen und ihrer Fluktuationen integriert wird, erwartet man keine Beschreibung der Abhängigkeiten der eindimensionalen Verteilungen durch eine reine Fehlerfunktion.

In Abbildung 5.3 wird in der linken Hälfte die $\lg N_e$ -Abhängigkeit der direkt gewonnenen Effizienz mit der berechneten verglichen, in der rechten Hälfte wird der Vergleich für die $\lg N_\mu^{tr}$ -Abhängigkeit durchgeführt. Man erkennt in beiden Fällen eine sehr gute Übereinstimmung.

Betrachtet man die Effizienz in Abhängigkeit der Primärenergie, erkennt man wieder deutliche Unterschiede. In Abbildung 5.4 ist die Effizienz in Abhängigkeit der Primärenergie

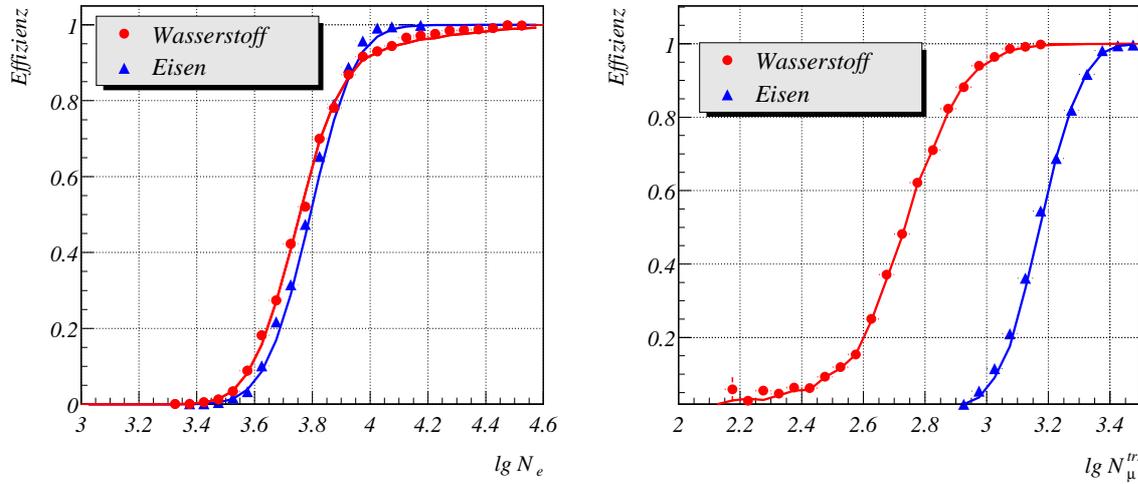


Abbildung 5.3: Vergleich der simulierten Effizienz mit der berechneten Effizienz unter Verwendung von Gl. 5.1. Die Symbole entsprechen der reinen Simulation, die Kurven den Berechnungen. Links: In Abhängigkeit von $\lg N_e$. Rechts: In Abhängigkeit von $\lg N_\mu^{tr}$.

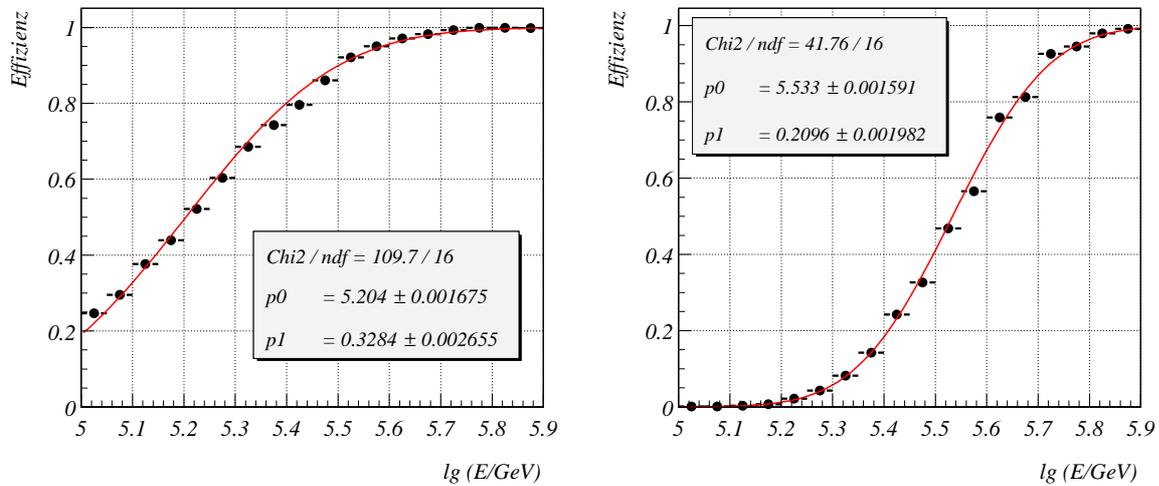


Abbildung 5.4: Effizienz in Abhängigkeit der Primärenergie. Links für Proton-induzierte Luftschauer, rechts im Fall von Eisen-induzierten.

aufgetragen, in der linken Hälfte für Wasserstoff-induzierte Schauer, in der rechten für Eisen-induzierte. Zusätzlich sind als Näherung die Anpassungen unter Verwendung von Fehlerfunktionen eingezeichnet. Im Fall von Protonen wird volle Effizienz oberhalb von ungefähr $5 \cdot 10^{14}$ eV erreicht, bei Eisenschauern ab $\approx 7 \cdot 10^{14}$ eV. Dafür ist der Abfall der Effizienzkurve zu kleinen Energien hin im Gegensatz zum Protonfall sehr viel steiler. So beträgt die Effizienz

für Protonenschauer von $1 \cdot 10^{14}$ eV noch 0.25, während Eisenschauer mit dieser Primärenergie nicht mehr in den Daten erscheinen.

5.2 Genauigkeit der rekonstruierten Schauergößen

Die rekonstruierten Werte der Schauergößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ stimmen in aller Regel nicht exakt mit den tatsächlichen (wahren) Werten überein. Ursachen hierfür sind zum einen statistischer Art (Fluktuationen in der erwarteten Anzahl nachgewiesener Teilchen pro Station), als auch systematischer. Letztere haben ihre Ursache z.B. in einer nicht hinreichend guten Beschreibung der Daten durch die verwendete Fitfunktion oder Korrekturen im Verlauf der Rekonstruktion, die nicht genau genug vorgenommen werden können. Im Folgenden sollen die Ungenauigkeiten für die beiden Schauergößen diskutiert werden. Um Verwechslungen vorzubeugen, sind rekonstruierte Größen mit dem Superscript “rek.”, wahre Größen mit dem Superscript “true” versehen. Grundlage für diese Untersuchungen ist der voll simulierte CORSIKA-QGSJet-Simulationssatz, für den ein kontinuierliches Energiespektrum (Potenzgesetz mit Index -2) verwendet wurde.

5.2.1 Systematiken der $\lg N_e$ -Bestimmung

Betrachtet man die systematische Abweichung zwischen den rekonstruierten und den wahren Werten von $\lg N_e$ in Abhängigkeit der wahren Schauergöße $\lg N_e^{true}$, findet man, abgesehen von sehr kleinen und sehr großen Schauern, über weite Bereiche hin nur kleine Differenzen, die nur eine moderate Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$ zeigen. Gleichzeitig findet man aber eine deutliche Abhängigkeit von der Art des Primärteilchens. In Abbildung 5.5 ist dieses Verhalten für die Primärteilchen Wasserstoff, Kohlenstoff und Eisen dargestellt.

Als Ursache für diese Abweichungen und die “Aufspaltung” zwischen den verschiedenen Primärteilchenarten könnte man eine falsche Korrektur der Elektronenzahl auf die Myonen vermuten. Da Schauer, die von schwereren Primärteilchen ausgelöst wurden, bei fester Elektronenzahl mehr Myonen enthalten, würde man bei einer falschen Korrektur eine Aufspaltung dieser Art erwarten. Genauere Untersuchungen haben aber gezeigt, daß dies nur einen sehr kleinen Beitrag zur Größe der systematischen Abweichung liefert, und hier nicht die eigentliche Ursache zu finden ist. Hauptursache für diesen Unterschied ist nach gegenwärtigem Wissensstand die nur begrenzte Fähigkeit der NKG-Funktion, die Lateralverteilung richtig zu beschreiben. Man findet bei fester Primärenergie eine starke Korrelation zwischen der Größe der systematischen Abweichung und dem Wert des gefitteten Age-Parameters. Zwischen dem Age-Parameter und der Entfernung des Schauersmaximums besteht ebenfalls eine ausgeprägte Korrelation. Der Abstand des Schauersmaximums vom Beobachtungsniveau läßt sich bei fester Primärenergie aber auch durch die Differenz zwischen $\lg N_e^{true}$ und $\lg N_\mu^{tr.,true}$ beschreiben.

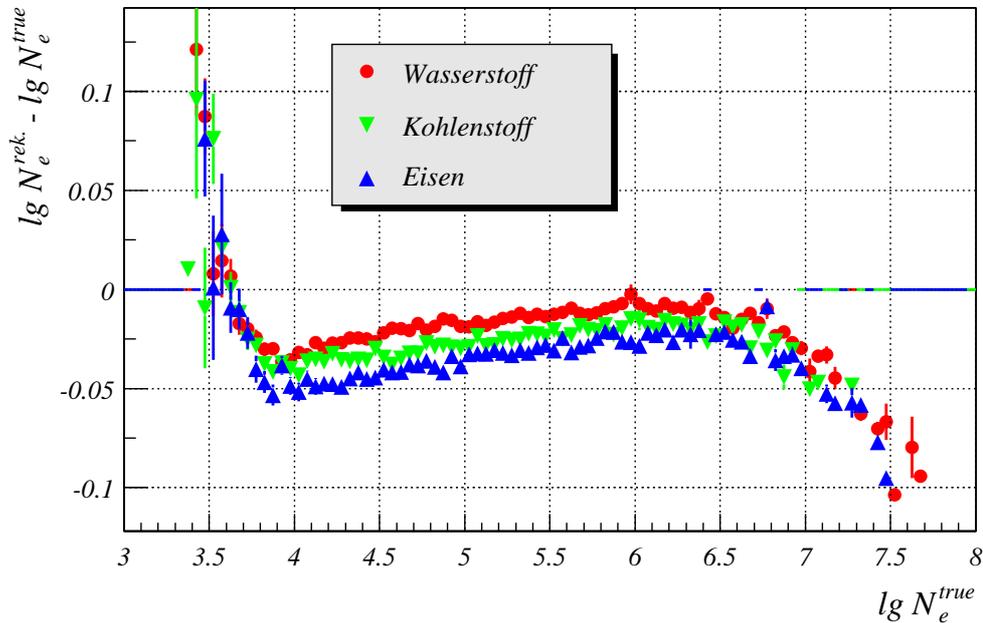


Abbildung 5.5: Systematische Differenz zwischen wahrem und rekonstruiertem $\lg N_e$ in Abhängigkeit der wahren Elektronenzahl.

Durch diese verschiedenen Korrelationen ist es möglich, die Größe der systematischen Abweichung durch die Differenz zwischen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ zu beschreiben. Die Beschreibung gelingt besser, wenn anstatt $\lg N_\mu^{tr.,true}$ das durch die Rekonstruktion bestimmte $\lg N_\mu^{tr.,rek.}$ benutzt wird. In diesem Fall wird noch ein kleiner Beitrag zur Systematik berücksichtigt, der durch eine falsche Korrektur der Elektronenzahl auf die Myonen verursacht wird. Daß sich so tatsächlich die systematischen Abweichungen beschreiben lassen, zeigt Abbildung 5.6. Hier ist wieder die systematische Differenz zwischen $\lg N_e^{rek.}$ und $\lg N_e^{true}$ dargestellt, diesmal aber über dem logarithmierten Verhältnis zwischen wahrer Elektronenzahl und rekonstruierter trunkierter Myonzahl $\lg N_\mu^{tr.,rek.}$. Im Gegensatz zu oben zeigt sich kein signifikanter Unterschied zwischen den einzelnen Primärteilchen, sondern ein einheitliches Verhalten.

Die vorhandene Abhängigkeit von der Differenz der logarithmierten wahren Elektronenzahl und dem rekonstruierten $\lg N_\mu^{tr.,rek.}$ läßt sich sehr gut durch einen linearen Zusammenhang beschreiben:

$$K(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,rek.}) = p_0 + p_1 \cdot (\lg N_e^{true} - \lg N_\mu^{tr.,true}) \quad (5.4)$$

Diese Funktion wurde an die Simulationsdaten angepaßt, wobei über alle Primärteilchensorten gemittelt wurde (siehe Abbildung 5.7, linke Hälfte). Korrigiert man jeden Schauer mit dem entsprechenden Wert der Funktion K , sollte sowohl die Abhängigkeit vom Primärteilchen als auch von $\lg N_e^{true}$ verschwinden. In Abbildung 5.7 ist in der rechten Hälfte die Differenz zwischen $\lg N_e^{rek.} - K$ und $\lg N_e^{true}$ über dem Logarithmus der wahren Elektronenzahl auf-

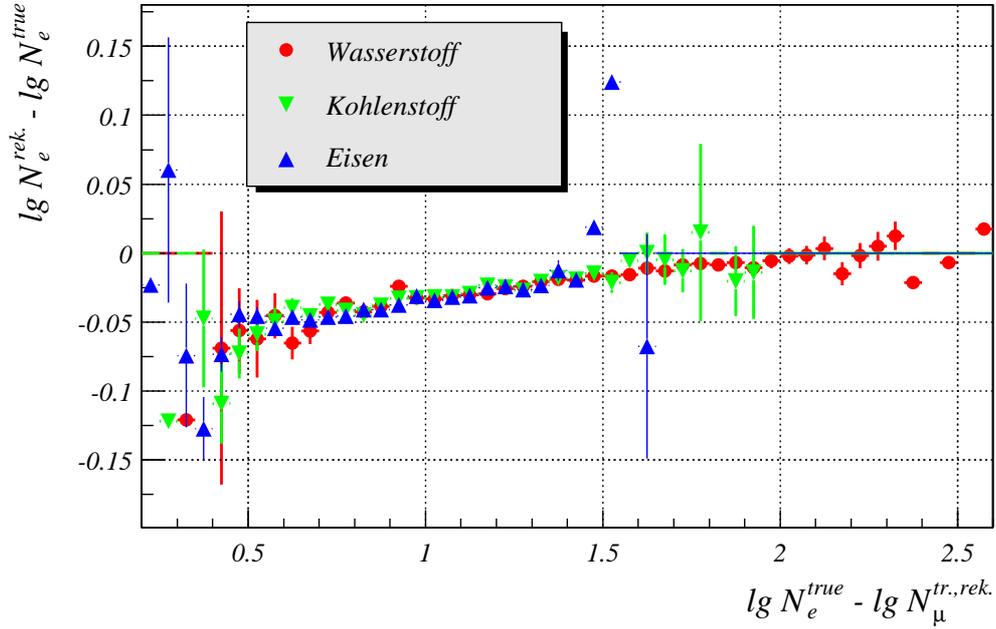


Abbildung 5.6: Systematische Differenz zwischen wahrem und rekonstruiertem $\lg N_e$ in Abhängigkeit der Differenz zwischen $\lg N_e^{true}$ und $\lg N_\mu^{tr.,rek.}$.

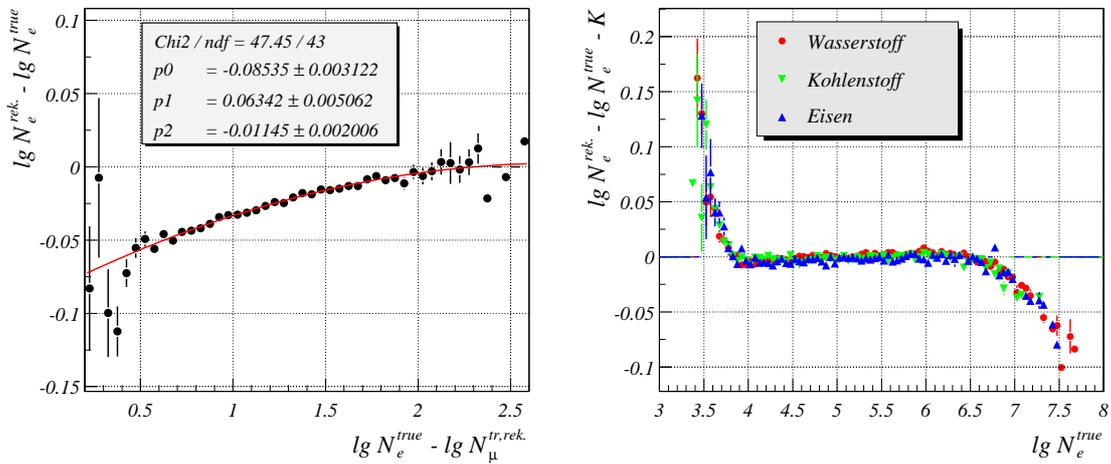


Abbildung 5.7: Links: Mittlere Beschreibung der Systematiken in der $\lg N_e$ -Rekonstruktion. Rechts: Verbleibende Systematiken der $\lg N_e$ -Rekonstruktion nach Korrektur mit $K(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,rek.})$ (siehe Text).

getragen. Bei sehr kleinen Schauergößen findet man, wie zu erwarten war, immer noch eine starke Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$, ab $\lg N_e^{true} \approx 3.8$ bleibt der Verlauf hingegen über knapp zweieinhalb Größenordnungen konstant bei Null. Erst bei sehr großen Schauergößen findet

wieder eine Abweichung statt, die schon bekannte Unterschätzung der rekonstruierten Elektronenzahl. Bei genauerer Inspektion findet man immer noch kleine Unterschiede zwischen den verschiedenen Primärteilchen, die Differenz beträgt allerdings maximal 0.008. Die in dieser Arbeit verwendeten Kanalbreiten für das Histogrammieren von $\lg N_e$ betragen 0.075, sodaß diese verbleibenden systematischen Unterschiede ignoriert werden können.

Die Abweichungen bei Schauergrößen unterhalb von $\lg N_e^{true} = 3.8$ haben ihre Ursache wahrscheinlich in der begrenzten Ausdehnung dieser Schauer. Bei sehr kleinen Schauern liefern nur wenige Detektorstationen ein Signal, siehe Abbildung 5.8. Gleichzeitig ist für kleine Schauer der Abstand zwischen den Stationen fast schon zu groß, um die laterale Ausdehnung hinreichend gut zu messen. Als Folge davon dominieren die Stationen nahe dem Schauerzentrum bei der Anpassung der NKG-Funktion zu stark, wodurch eine zu steile Lateralverteilung bzw. ein zu kleines Age bestimmt wird. Aufgrund der starken Korrelation zwischen der Elektronenzahl und dem Age kommt es zu einer Überschätzung von N_e .

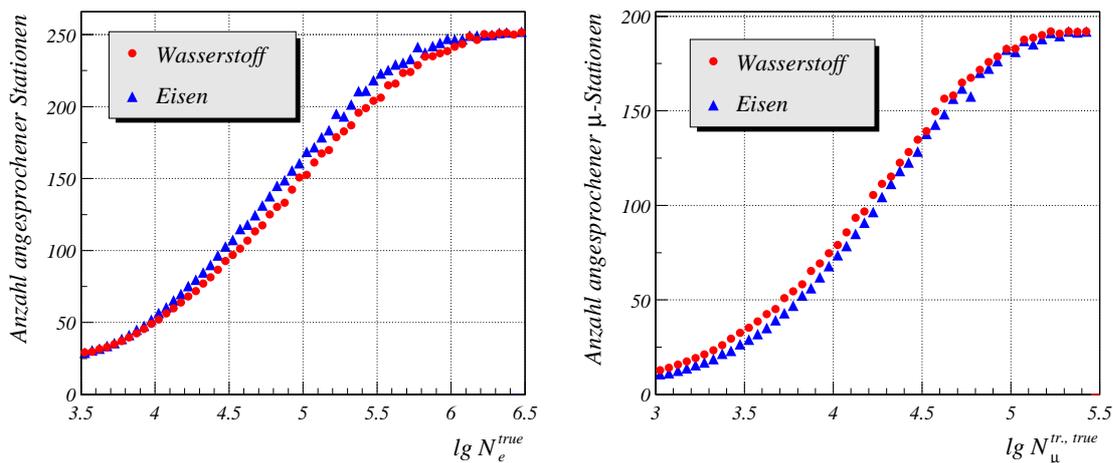


Abbildung 5.8: Links: mittlere Zahl angesprochener e/γ -Stationen in Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$; rechts: mittlere Zahl angesprochener μ -Stationen über $\lg N_\mu^{tr.,true}$.

In der nachfolgenden Analyse liegen allerdings die Werte von $\lg N_e^{rek.}$ so hoch, daß von Schauern mit solch kleinen Elektronenzahlen keine Beiträge zu den betrachteten Häufigkeiten zu erwarten sind.

Die Unterschätzung für Werte von $\lg N_e^{true}$ größer ≈ 6.5 läßt sich durch Sättigungseffekte erklären. Ab einer Schauergröße von ungefähr $\lg N_e^{true} = 6.3$ sprechen alle e/γ -Detektoren an. Gleichzeitig befinden sich in der Nähe des Schauerzentrums einzelne Detektoren schon in Sättigung, d.h. sie können nur noch eine beschränkte Information über die vorhandene Teilchendichte liefern. Die Anpassung der NKG-Funktion findet mit zunehmender Anzahl gesättigter Detektoren immer weiter vom Schauerzentrum entfernt statt. Da die NKG-Funktion die tatsächliche Lateralverteilung aber nur näherungsweise und nicht perfekt be-

schreiben kann, führt dies zu systematischen Effekten, die sich in einer Unterschätzung der elektronischen Schauergöße auswirken.

Beide angesprochene Bereiche der Über- bzw. Unterschätzung lassen sich durch einen parabelförmigen Übergang von einem konstanten Wert beschreiben:

$$\lg N_e^{rek.} - \lg N_e^{true} = \begin{cases} p2 & ; \lg N_e^{true} \geq p0 \text{ bzw. } \leq p0 \\ p2 + p1 \cdot (\lg N_e^{true} - p0)^2 & ; \lg N_e^{true} < p0 \text{ bzw. } > p0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Diese Anpassungen sind in Abbildung 5.9 dargestellt.

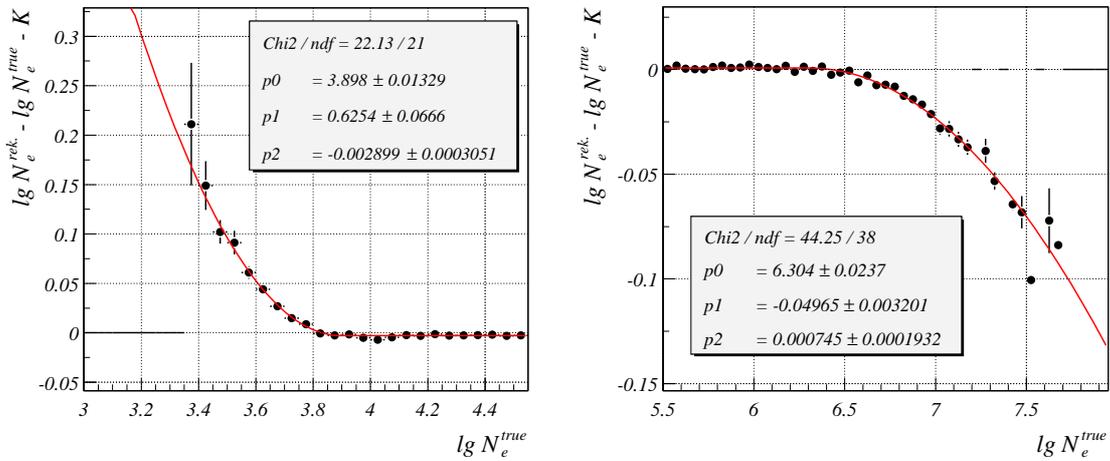


Abbildung 5.9: Systematiken der $\lg N_e$ -Bestimmung nach durchgeführter Korrektur für Bereiche kleiner (li.) und großer (re.) Schauergößen.

5.2.2 Systematiken der $\lg N_\mu^{tr.}$ -Bestimmung

Betrachtet man die Abhängigkeit der rekonstruierten $\lg N_\mu^{tr.}$ -Werte von den wahren, findet man ein qualitativ ähnliches Bild wie bei der elektronischen Schauergöße (siehe Abb. 5.10). Auch hier zeigt sich wieder eine Abhängigkeit vom betrachteten Primärteilchen. Diese Abhängigkeit schwächt sich bei einer Auftragung über der wahren Elektronenzahl ab, wie in Abbildung 5.11 zu erkennen ist.

Die Ursache für dieses Verhalten liegt wahrscheinlich in der $\lg N_e$ -Abhängigkeit des in der Anpassung der NKG-Funktion benutzten Age-Parameters. Dieser nach Simulationsrechnungen bestimmte Zusammenhang wurde für alle Primärteilchensorten gemittelt, was nur eine Näherung erster Ordnung darstellt. Tatsächlich hängt die Form der Myonlateralverteilung aber eher von der Verteilung der Entstehungshöhen der Myonen ab, die zum einen von der Art des Primärteilchens abhängt, und nur eine leichte Korrelation mit der elektronischen

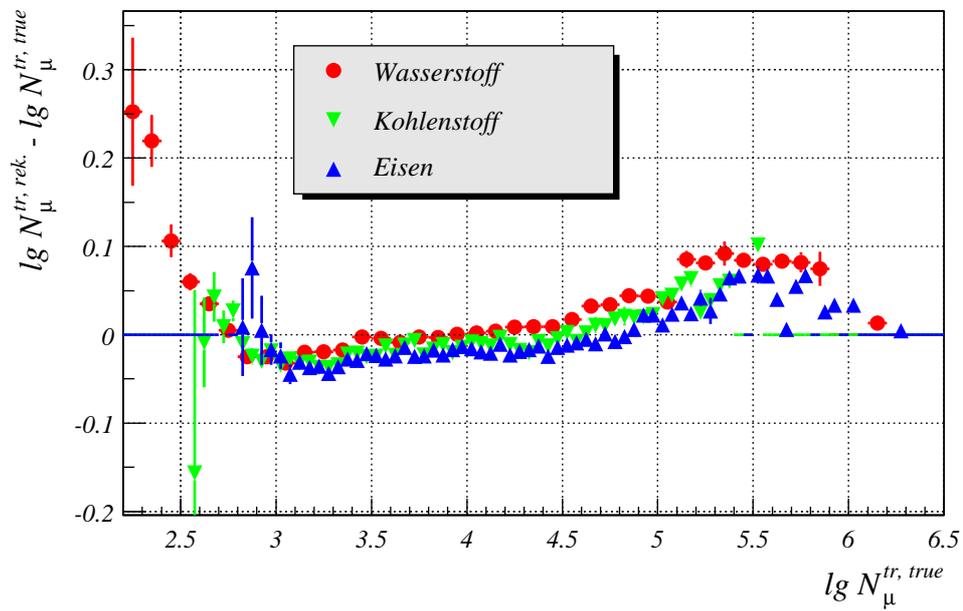


Abbildung 5.10: Systematische Differenzen zwischen wahrem und rekonstruiertem $\lg N_{\mu}^{tr.}$ in Abhängigkeit des wahren $\lg N_{\mu}^{tr.}$.

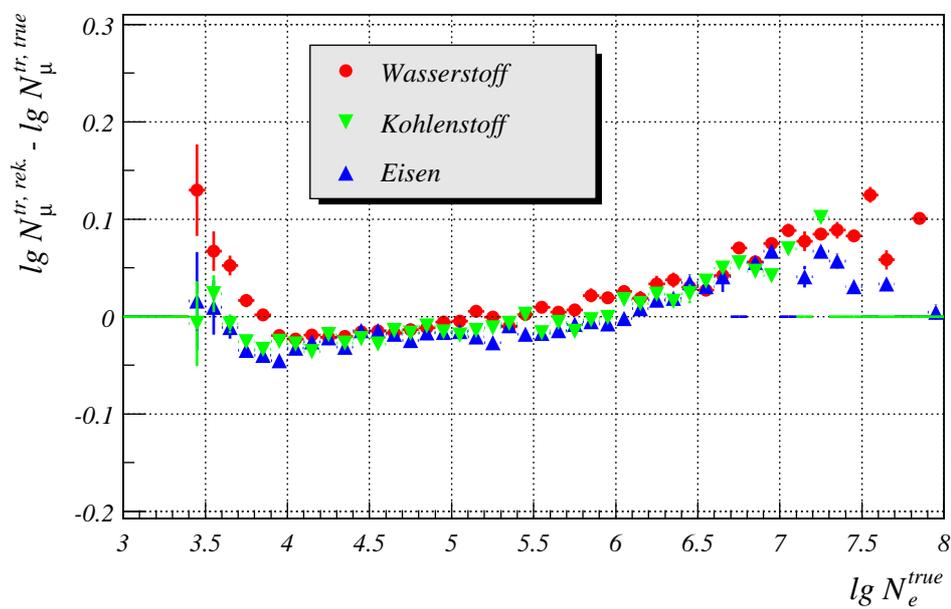


Abbildung 5.11: Systematische Differenzen zwischen wahrem und rekonstruiertem $\lg N_{\mu}^{tr.}$ in Abhängigkeit des wahren $\lg N_e$.

Schauergröße besitzt. Um die Korrelation mit der Art des Primärteilchens zu berücksichtigen, ist eine Parametrisierung des Myon-Age-Parameters durch die Elektronenzahl trotzdem besser geeignet als eine angenommene Myonzahlabhängigkeit.

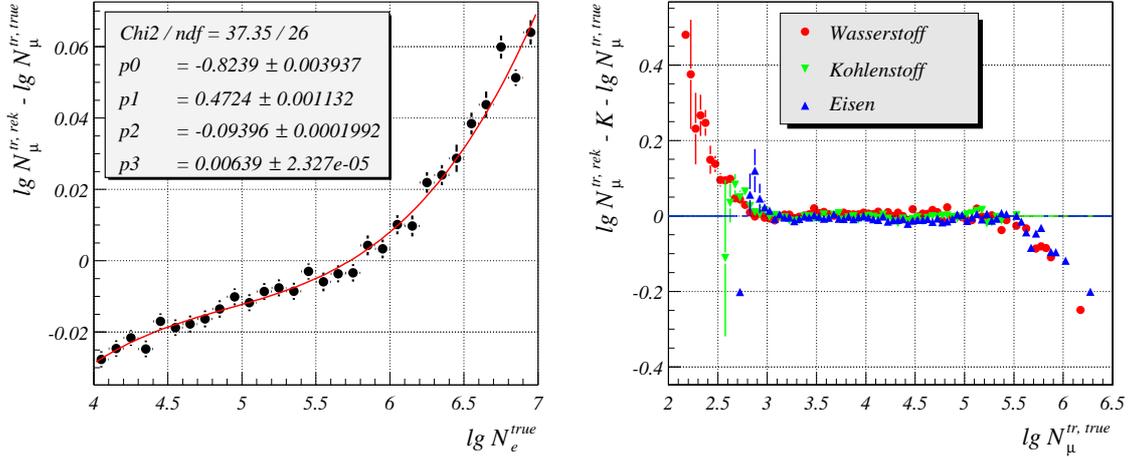


Abbildung 5.12: Links: Mittlere Beschreibung von $\Delta = \lg N_{\mu}^{tr.,rek.} - \lg N_{\mu}^{tr.,true}$ durch $\lg N_e^{true}$. Rechts: Verbleibende Systematiken nach Korrektur mit $K = K(\lg N_e^{true})$ (siehe Text).

Im linken Teil der Abbildung 5.12 ist die vorgenommene Anpassung der $\lg N_e^{true}$ -Abhängigkeit durch ein Polynom 3. Grades dargestellt. Unter Benutzung dieser Korrekturfunktion $K = K(\lg N_e^{true})$ können sowohl die Abhängigkeiten von $\lg N_{\mu}^{tr.,true}$ als auch von der Art des Primärteilchens über einen weiten Bereich in der myonischen Schauergröße korrigiert werden. Der korrigierte Unterschied zwischen rekonstruiertem und wahrem $\lg N_{\mu}^{tr.}$ ist in der rechten Hälfte von Abbildung 5.12 dargestellt. Sowohl für kleine Werte als auch für sehr große Myonzahlen erkennt man aber eine deutliche Über- bzw. Unterschätzung. Die Überschätzung bei kleinen Myonzahlen findet ihre Ursache ähnlich wie bei der Elektronenzahl in der kleinen Anzahl von angesprochenen Stationen, wie auch in einem durch die in diesem Bereich überschätzte Elektronenzahl falschen Age-Parameter. Oberhalb von $\lg N_{\mu}^{tr.,true} \approx 5.5$ haben alle im Detektorfeld vorhandenen Myondetektoren angesprochen. Gleichzeitig beginnen auch die ersten Myondetektoren in Sättigung zu gehen. Gleiches gilt bei diesen Schauergrößen auch für die e/γ -Detektoren. Hierdurch beginnt die Menge der vorhandenen Information zu leiden. Gleichzeitig wird der für die Anpassung verwendbare Radiusbereich kleiner, da Stationen bei kleinen Abständen vom Schauerzentrum nicht mehr beitragen, die innere Radiusbegrenzung (punch through) verschiebt sich nach außen. Im Endeffekt werden dadurch zunehmend zu kleine Schauergrößen rekonstruiert.

Die Bereiche der Unter- bzw. Überschätzung wurden (ähnlich wie bei den Elektronenzahlen) ausgehend von einem konstanten Verlauf durch einen parabelförmigen Übergang parametri-

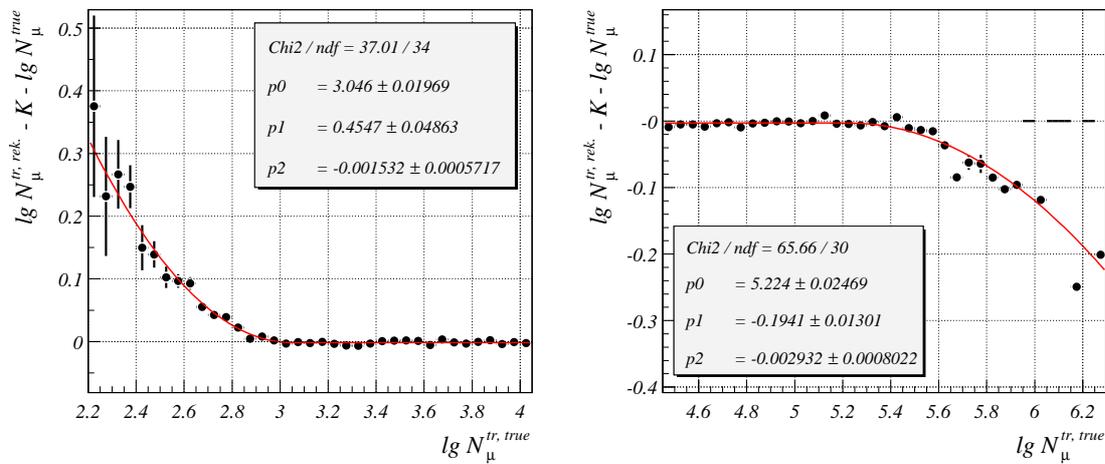


Abbildung 5.13: Verhalten der verbliebenen Systematiken in der $\lg N_{\mu}^{tr.}$ -Rekonstruktion für kleine (li.) und große (re.) Myonzahlen.

siert. Dies ist in Abbildung 5.13 dargestellt.

5.2.3 Statistische Unsicherheiten

Elektronenzahl $\lg N_e$

Nach Korrektur von $\lg N_e^{rek.}$ mit $K(\lg N_e^{true}, \lg N_{\mu}^{tr.,rek.})$ lassen sich die statistischen Unsicherheiten am besten in Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$ beschreiben. Abbildung 5.14 zeigt die Verteilung der Differenz zwischen $\lg N_e^{rek.} - K$ und $\lg N_e^{true}$ in Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$ für Wasserstoff-induzierte Schauer. Man erkennt zum einen eine Symmetrie der Verteilung bezüglich der Nulllinie, zum anderen ein Abnehmen der Breite mit zunehmender Schauergröße. In der Abnahme der Breite spiegelt sich die Zunahme der angesprochenen e/γ -Stationen mit der Elektronenzahl wieder. Durch die Zunahme der gemessenen/nachgewiesenen Elektronen steigt die Genauigkeit der Anpassung, womit die Verringerung der Breite einhergeht.

Innerhalb eines Bandes entlang der $\lg N_e^{rek.} - \lg N_e^{true} - K$ -Achse läßt sich die Form der Verteilung sehr gut durch eine Normalverteilung beschreiben. In Abbildung 5.15 ist dies beispielhaft in der linken Hälfte für $4.2 < \lg N_e^{true} \leq 4.3$ und rechts für $4.9 < \lg N_e^{true} \leq 5$ für Proton-induzierte Schauer gezeigt.

Für jeden einzelnen Streifen der Verteilung in Abb. 5.14 wurde eine Anpassung mit einer Normalverteilung durchgeführt. Der Wert des Zentralwertes ist für $3.9 < \lg N_e < 6.5$ mit Null verträglich, für die Bereiche unter- bzw. oberhalb folgt er der im vorherigen Abschnitt besprochenen Systematik. In Abbildung 5.16 ist die Abhängigkeit der Breite dieser Gaussverteilungen von der wahren Elektronenzahl dargestellt.

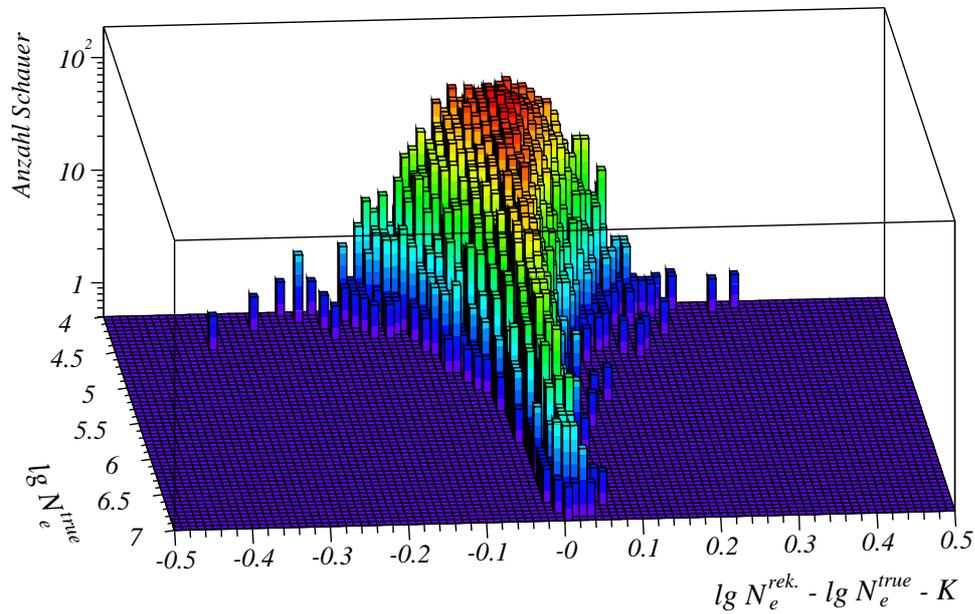


Abbildung 5.14: Verteilung der $\lg N_e$ -Ungenauigkeit nach erfolgter Korrektur (siehe Text) in Abhängigkeit von $\lg N_e^{true}$ für Protonenschauer.

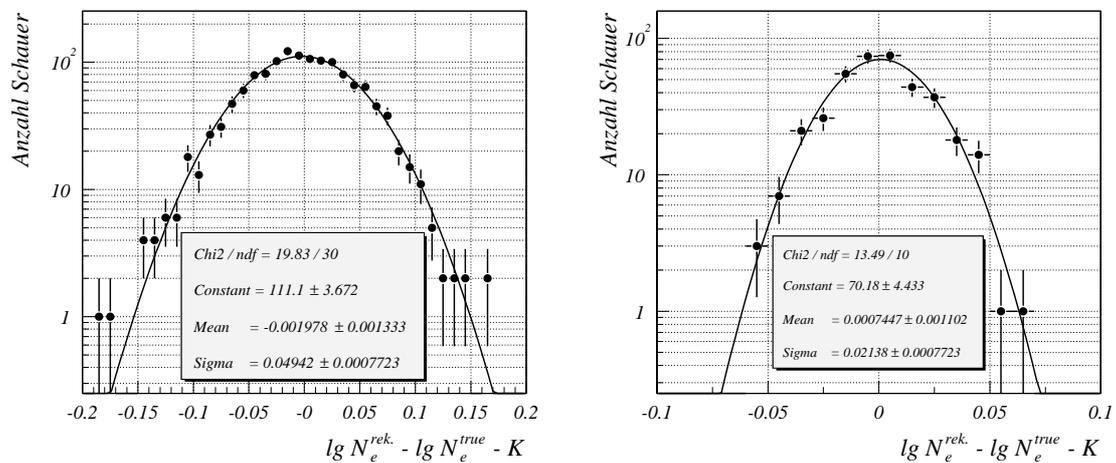


Abbildung 5.15: Verteilung der $\lg N_e$ -Ungenauigkeit für Proton-induzierte Schauer. Links: $4.2 < \lg N_e^{true} \leq 4.3$; rechts: $4.9 < \lg N_e^{true} \leq 5..$

Die eingezeichnete Kurve entspricht der Anpassung einer Funktion vom Typ

$$\sigma(\lg N_e^{true}) = p_0 + p_2 \cdot (\lg N_e^{true})^{p_1} \tag{5.6}$$

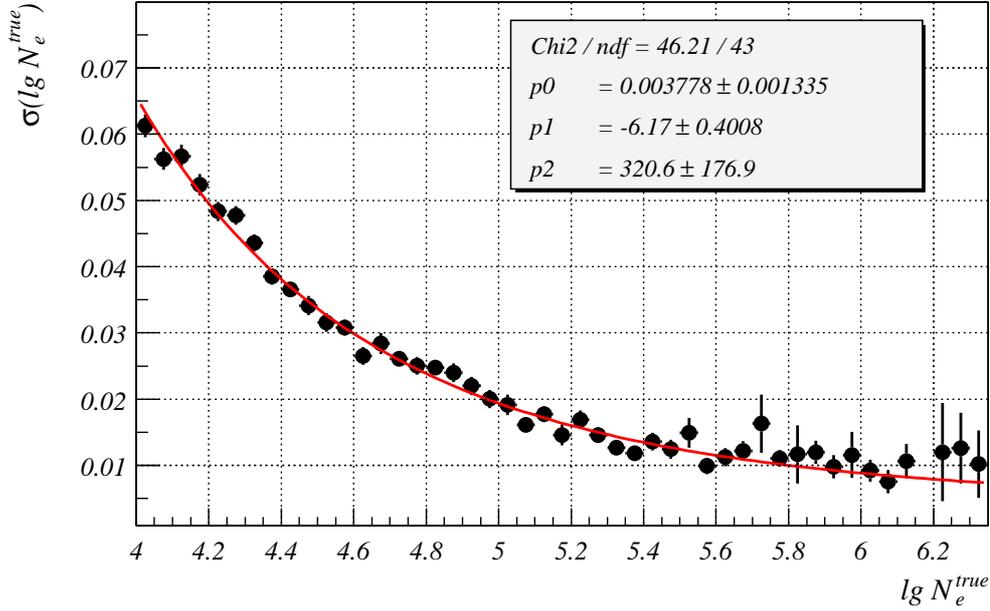


Abbildung 5.16: Abhängigkeit der Breite σ der angepassten Normalverteilung (statistischer Fehler) von der wahren elektronischen Schauergröße.

Myonzahl $\lg N_\mu^{tr.}$

Betrachtet man die Verteilung von $\lg N_\mu^{tr.,rek.} - K(\lg N_e^{true}) - \lg N_\mu^{tr.,true}$ in Abhängigkeit der wahren Myonzahl $\lg N_\mu^{tr.,true}$ ergibt sich ein zum Fall der Elektronenzahlbestimmung analoges Bild. Unterschiede finden sich aber in der Form der Verteilung. Für kleine Werte von $\lg N_\mu^{tr.,true}$ zeigt die Verteilung eine deutliche Asymmetrie, die mit zunehmendem $\lg N_\mu^{tr.,true}$ langsam verschwindet. Ab Werten von $\lg N_\mu^{tr.,true} = 4.1$ folgt die Verteilung im Rahmen der Statistik einer reinen Normalverteilung. In Abbildung 5.17 sind als Beispiel die Verteilungen für $3.6 < \lg N_\mu^{tr.,true} \leq 3.7$ und $4.2 < \lg N_\mu^{tr.,true} \leq 4.3$ dargestellt.

Im Fall kleiner Werte von $\lg N_\mu^{tr.,true}$ läßt sich die Verteilung durch

$$p(x) = \begin{cases} c_1 \cdot e^{-\frac{(x-M1)^2}{2 \cdot M2^2}} & x > M1 - \frac{M2^2}{M3} \\ c_1 c_2 \cdot e^{\frac{x}{M3}} & x \leq M1 - \frac{M2^2}{M3} \end{cases} \quad (5.7)$$

beschreiben, wobei $x = \lg N_\mu^{tr.,rek.} - K - \lg N_\mu^{tr.,true}$ ist. Der Faktor c_2 stellt einen Normierungsfaktor dar, der für einen stetigen Verlauf sorgt. Die Gültigkeitsbereiche sind so gewählt, daß die Funktion stetig differenzierbar ist. Die Abhängigkeit der relevanten Parameter $M1$, $M2$ und $M3$ von $\lg N_\mu^{tr.,true}$ ist in den Teilbildern der Abbildung 5.18 angegeben. Zur Beschreibung der Abhängigkeit von $\lg N_\mu^{tr.,true}$ wurde für $M2$ ein Polynom 3. Ordnung, für $M3$ ein Polynom 2. Ordnung und für $M1$ eine Funktion nach Gleichung 5.5 verwendet. Im Fall

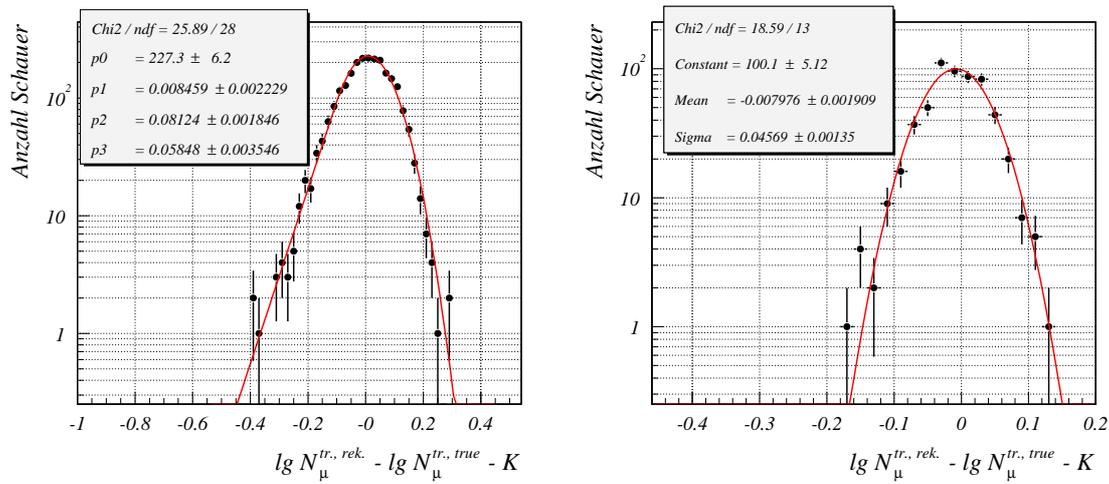


Abbildung 5.17: Verteilung von $\lg N_{\mu}^{tr.,rek.} - K(\lg N_e^{true}) - \lg N_{\mu}^{tr.,true}$, links für $3.6 < \lg N_{\mu}^{tr.,true} \leq 3.7$, rechts für $4.2 < \lg N_{\mu}^{tr.,true} \leq 4.3$.

von $M1$ wurde der Parameter $p2$ in Gl. 5.5 auf Null gesetzt.

Für Parameter $M3$ endet die Kurve bei $\lg N_{\mu}^{tr.,true} = 4.2$, da sich für $\lg N_{\mu}^{tr.,true} = 4.1$ die Verteilung nach Gl. 5.7 für die vorhandene Statistik nicht von einer Normalverteilung mit dem Zentralwert $M1$ und der Breite $M2$ unterscheidet. Für größere Werte von $\lg N_{\mu}^{tr.,true}$ wird als Beschreibung eine Normalverteilung mit $M2$ als Breite verwendet, der Zentralwert ist zwischen $\lg N_{\mu}^{tr.,true} = 4.0$ und 5.25 mit Null verträglich. Bei höheren $\lg N_{\mu}^{tr.,true}$ -Werten entspricht er der im vorigen Abschnitt besprochenen Systematik.

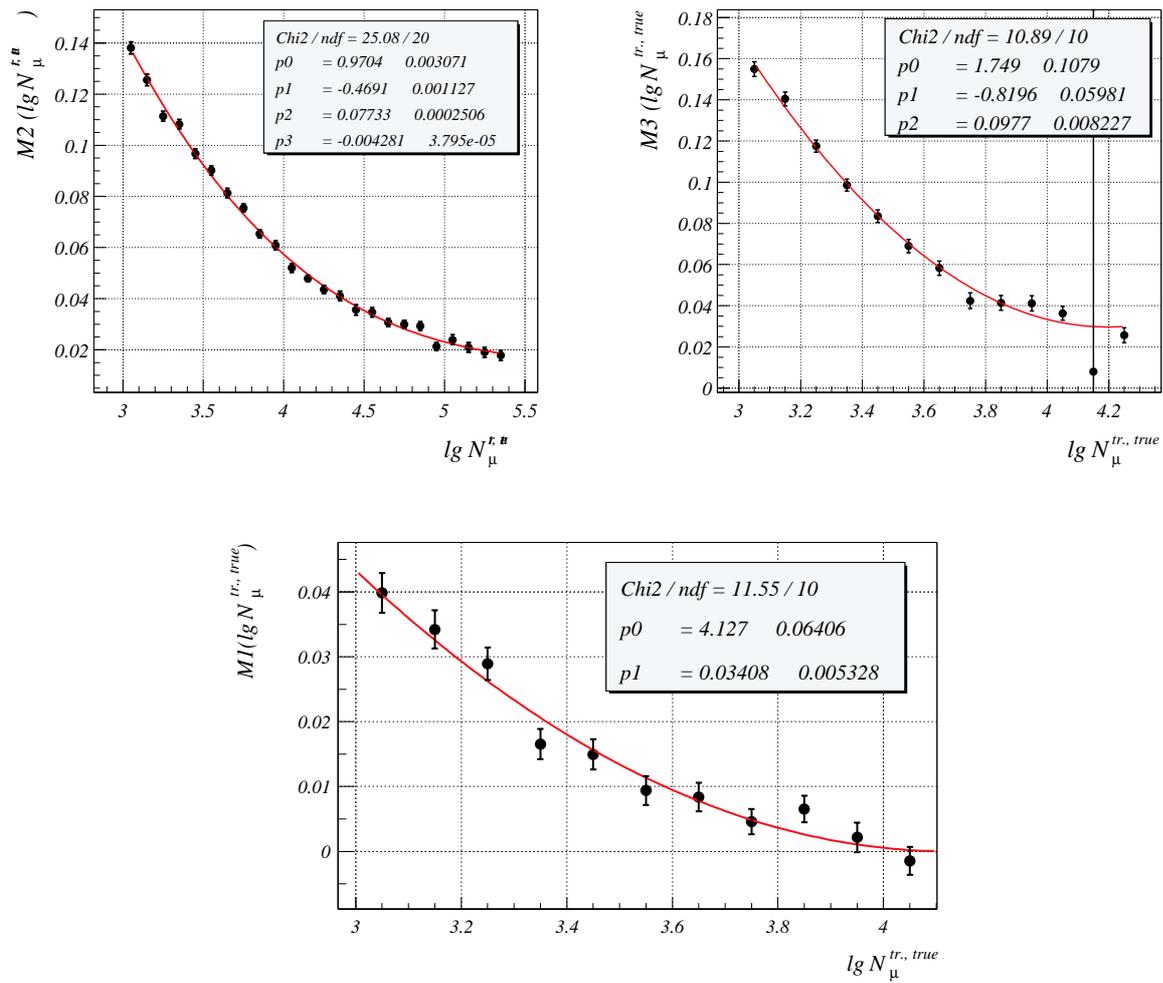


Abbildung 5.18: Abhängigkeit der Parameter $M2$ (links), $M3$ (rechts) und $M1$ (unten) aus Gl. 5.7 von $\lg N_\mu^{tr.,true}$.

Kapitel 6

Entfaltungsmethoden

Im üblichen Sinne versteht man unter Entfaltung die Korrektur der Verteilung einer Meßgröße auf Effekte begrenzter Detektor- oder Rekonstruktionsauflösung sowie dadurch verursachte systematische Abweichungen. Hierbei handelt es sich aus streng mathematischer Sicht um das Lösen einer Integralgleichung. Dieser Begriff wird hier daher allgemeiner im Zusammenhang mit dem Auffinden von Lösungen Fredholmscher Integralgleichungen erster Art verwendet. Im Folgenden wird das Entfaltungsproblem formal entwickelt und allgemeine Lösungsstrategien skizziert. Danach folgt eine kurze Übersicht der gängigsten Methoden mit ihren Vor- und Nachteilen. Hierbei findet eine Diskussion ihrer Anwendbarkeit bezüglich der Luftschau-erproblematik statt. Die Reihenfolge der Darstellung orientiert sich hierbei an [Cow98] und [Any91].

6.1 Problemstellung

Gegeben sei eine Größe x und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$. Diese Größe x transformiert sich durch einen physikalischen Prozess in eine der Messung zugängliche Observable y . Die gemessene Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(y)$ wird bestimmt durch die Funktion $s(y|x)$, die bei gegebenem Wert x die Wahrscheinlichkeit beschreibt, mit der ein Wert y theoretisch gemessen werden kann. Zusätzlich kommt in der Regel eine Effizienzfunktion $\epsilon(x)$ zum Tragen, die von x abhängt und eine nicht vollständige Nachweiswahrscheinlichkeit beschreibt. Es gilt also

$$p(y) = \int dx s(y|x) \epsilon(x) f(x) \quad (6.1)$$

Die Integration erstreckt sich über alle zulässigen Werte von x . Im Folgenden ist bei Nichtangabe der Integrationsgrenzen immer diese Vorschrift gemeint.

Durch eine Messung der Observablen y und Bestimmung der Funktionen $s(y|x)$ und $\epsilon(x)$ (durch Simulationsrechnungen oder Messungen) stellt sich die Bestimmung von $f(x)$ als

Lösen der obigen Integralgleichung dar. Hierbei handelt es sich um eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art. Problematisch hierbei ist die Tatsache, daß für solche Gleichungen keine Standardmethoden existieren, und die Existenz einer eindeutigen Lösung nicht allgemein garantiert ist. Anwendbare Verfahren und die Interpretation der erhaltenen Ergebnisse hängen immer stark von der Struktur der Verteilung $f(x)$ und der Funktion $s(y|x)$ ab.

Als Ausgangspunkt einer Analyse liegen die gemessenen Werte von y in Form eines Histogramms mit N Kanälen vor. Gesucht ist dann ein entsprechendes Histogramm mit M -Kanälen der zugehörigen Werte von x . Y_i sei die Anzahl der Ereignisse von y in Kanal i , also

$$Y_i = X_{tot} P_i(y) \quad (6.2)$$

Hierbei ist X_{tot} die Gesamtzahl des Auftretens von x und $P_i(y)$ die Wahrscheinlichkeit, einen Wert von y in Kanal i zu messen. Unter Benutzung von $p(y)$ ergibt sich

$$Y_i = X_{tot} \int_{Kanal\ i} dy \int dx s(y|x) \epsilon(x) f(x) \quad (6.3)$$

Bezeichnet man mit X_j den Erwartungswert des Auftretens von x innerhalb des Kanals j des zugehörigen Histogramms, so folgt nach Aufteilung des Integrals

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_{j=1}^M \frac{\int_{Kanal\ i} dy \int_{Kanal\ j} dx s(y|x) \epsilon(x) f(x)}{(X_j/X_{tot})} X_j \\ &= \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j \end{aligned} \quad (6.4)$$

Diese Umformulierung in eine Matrixgleichung stellt den Ausgangspunkt für die weitere Vorgehensweise zur Bestimmung der einzelnen Werte von X_j und damit der Verteilung $f(x)$ dar. Die auftretende Matrix \mathbf{R} wird auch als *Auflösungsmatrix* oder *Response-Matrix* bezeichnet. Oft fasst man die Funktionen $s(y|x)$ und $\epsilon(x)$ zu einer sog. Auflösungs- oder Kernelfunktion $k(y|x)$ zusammen:

$$k(y|x) = s(y|x) \epsilon(x) \quad (6.5)$$

Für die einzelnen Matrixelemente R_{ij} gilt

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\int_{Kanal\ i} dy \int_{Kanal\ j} dx k(y|x) f(x)}{\int_{Kanal\ j} dx f(x)} \\ &= P(\text{Wert von } y \text{ in Kanal } i \mid \text{Wert von } x \text{ in Kanal } j) \end{aligned} \quad (6.6)$$

und gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Ereignis aus Kanal j der Ursprungsverteilung einen Eintrag im Kanal i der Meßverteilung liefert. Die Matrixelemente R_{ij} sind nicht unabhängig von der gesuchten Verteilung $f(x)$, da über die Kanalhalte der Ursprungsgröße integriert werden muß. Bei der Bestimmung der Elemente benutzt man daher entweder die

beste Vermutung für $f(x)$, die zur Verfügung steht, oder wählt (falls möglich) die Kanalbreite so klein, daß der Verlauf innerhalb des Kanals keine Rolle spielt. In jedem Fall liegt hier eine mögliche Ursache für eine Verzerrung der Ergebnisse, auf den die Lösung hin untersucht werden muß.

In aller Regel kommt zu den gemessenen Werten der Observablen y noch ein Untergrund $u(y)$ hinzu. Die Daten müssen dann auf diesen Untergrund hin korrigiert werden, da er nicht in der Formulierung der Matrixelemente enthalten ist. Dieser Untergrund wird normalerweise durch eine eigene Messung oder durch Monte Carlo Simulationen bestimmt. Allgemein wird er als bekannt vorausgesetzt und wird daher nicht mitaufgeführt.

Angewendet auf die Luftschauermessung entsprechen z.B. die Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ der Observablen y und die Primärenergie $\lg E_0$ der Größe x . Die Auflösungsfunktion $k(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.} | \lg E_0)$ setzt sich dann aus drei Teilen zusammen: den Schauerfluktuationen $s(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true} | \lg E_0)$, der Rekonstruktionsgenauigkeit $r(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.} | \lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true})$ und der Effizienz $\varepsilon(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{true})$.

$$k(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.} | \lg E_0) = \int d \lg N_e^{true} d \lg N_\mu^{tr.,true} r \cdot \varepsilon \cdot s \quad (6.7)$$

Durch ein Teilchen mit der Energie $\lg E_0$ werden wahre Schauergrößen $\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true}$ erzeugt, die mit den tatsächlich gemessenen bzw. rekonstruierten Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr.}$ in der Regel nicht übereinstimmen. Gleichzeitig hängt die Effizienz ε für Messung und Rekonstruktion in erster Näherung sowohl von $\lg N_e^{true}$ als auch von $\lg N_\mu^{tr.,true}$ ab. Weiterhin sind die Auflösungsfunktionen für die einzelnen Primärteilchenarten unterschiedlich, sodaß die zu betrachtende Matrixgleichung folgende Struktur annimmt:

$$Y_i(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.}) = \sum_{A=1}^{56} \sum_{j=1}^M R_{ij}^A X_j^A(\lg E_0) \quad i = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

Hierbei sind als Primärteilchen die Elemente zwischen Wasserstoff und Eisen angenommen.

Die gemessenen Schauergrößenspektren beinhalten nicht genug Information, um tatsächlich alle Teilchensorten in Betracht zu ziehen. Ein einzelnes Spektrum kann durch die Annahme einer einzigen Primärteilchenart schon beschrieben werden. Erst durch Kombination mehrerer Spektren (verschiedene Winkelbereiche und/oder Observablen) ist es möglich, mehrere Komponenten einzubeziehen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in den folgenden Abschnitten.

Eine Inversion der Gleichung 6.4 scheitert in den meisten Fällen. Ursachen hierfür sind sowohl statistischer als auch struktureller Art. Aufgrund von statistischen Schwankungen der Kanalinhalt Y_i ist das Gleichungssystem nie exakt erfüllt. Dadurch ist die Existenz einer Lösung bzw. einer sinnvollen Lösung (hinreichend nahe den wahren Werte von X_j) nicht mehr garantiert. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Dimensionen M und N der Variablen x bzw. y sich sehr unterscheiden und das System über- oder unterbestimmt ist.

Aber auch im Fall einer vorhandenen Lösung (der exakten Lösung) des Gleichungssystems ist diese meistens unbrauchbar. Die exakte Lösung gibt nach einer Vorwärtsfaltung sämtliche statistischen Schwankungen der gemessenen Größen Y_i wieder. Damit dies möglich ist, zeigt die Lösung ein stark oszillierendes Verhalten mit i.d.R. großen Amplituden, sodaß diese exakte Lösung nur wenig mit der eigentlich gesuchten zu tun hat.

Selbst im Fall einer "perfekten" Statistik (unendliche Meßzeit) führt aber die Struktur der Matrix \mathbf{R} zu Schwierigkeiten. Innerhalb der Matrix sind normalerweise nur die Elemente R_{ii} der Diagonalen und die ihr unmittelbar benachbarten signifikant von Null verschieden. Gleichzeitig herrscht eine 'beinahe' Symmetrie der Werte bzgl. der Diagonalen. Dies hat zur Folge, daß \mathbf{R} fast singulär ist. Für die Determinante gilt

$$\det \mathbf{R} = |\mathbf{R}| \approx 0 \quad (6.9)$$

Ist die Matrix singulär, existiert keine eindeutige Lösung, ist sie fast singulär, so wird die Lösung durch Matrixinversion in den seltensten Fällen nahe der wahren Lösung liegen. Da bei der Matrixinversion implizit durch $|\mathbf{R}|$ geteilt wird, erhält man aufgrund von Rechenungenauigkeiten, verursacht durch die begrenzte Genauigkeit bei der Darstellung von Fließkommazahlen in modernen Computern, zum einen unsinnig große Werte, zum anderen ein Oszillieren der Lösung. Hinzu kommt, daß diese Rechenungenauigkeiten auch schon bei der Bestimmung der Matrixelemente vorliegen.

6.2 Methode der Korrekturfaktoren

Eine oft verwendete Methode zum Lösen der Gl. 6.4 ist das Anwenden von sog. Korrekturfaktoren an die gemessenen Daten. Hierbei wird angenommen, es handle sich bei der Response-Matrix $\tilde{\mathbf{R}}$ um eine Diagonalmatrix, also

$$Y_i = \tilde{R}_{ii} X_i \quad (6.10)$$

Voraussetzung hierfür ist aber, daß die Dimensionen des Datenvektors \vec{Y} und des gesuchten Vektors \vec{X} gleich sind, $N = M$.

Die Korrekturfaktoren C_i folgen dann als

$$C_i = 1/\tilde{R}_{ii} \quad (6.11)$$

In der Praxis bestimmt man die Faktoren durch Rechnung oder Monte Carlo Simulationen. Hierbei geht man von einer wahren Verteilung (beste Vermutung) aus und erzeugt eine Datenmenge Y_i^{MC} . Mit Hilfe der benutzten bekannten Vektorelemente X_i^{MC} ergeben sich die Werte für C_i und auf die Daten angewendet eine Lösung $\vec{\hat{X}}$:

$$\hat{X}_i = \frac{X_i^{MC}}{Y_i^{MC}} Y_i \quad (6.12)$$

Betrachtet man den Erwartungswert für die Schätzung \vec{X} , folgt

$$\begin{aligned} E(\hat{X}_i) &= C_i Y_i = \frac{X_i^{MC}}{Y_i^{MC}} Y_i \\ &= \left(\frac{X_i^{MC}}{Y_i^{MC}} - \frac{X_i}{Y_i} \right) Y_i + X_i \end{aligned} \quad (6.13)$$

Man erhält nur dann ein unverfälschtes Resultat, wenn das Verhältnis X_i/Y_i in der Messung das Gleiche wie in der Monte Carlo Rechnung ist. Insbesondere kann die Untersuchung der Größe und Richtung der hier auftretenden Systematiken sehr aufwendig werden.

Ausserdem zeigt sich, daß der statistische Fehler des Ergebnisses \hat{X}_i nicht richtig wiedergegeben und meistens unterschätzt wird, falls Monte Carlo Verteilung und Realität nicht übereinstimmen. Diese Methode kann daher eigentlich nur dazu dienen, Startwerte für weitere Analysen zu liefern.

6.3 Anpassung einer Funktion

Ist die Form der Verteilung $f(x)$ bekannt, und als Funktion der Parameter $\alpha_k (k = 0 \dots l)$ darstellbar, können die Werte X_j in Gl. 6.4 in Abhängigkeit der Funktionsparameter ausgedrückt werden. Die Werte der einzelnen α_k können dann durch ein Minimierungsverfahren bestimmt werden, und man erhält so eine Näherungslösung für $f(x, \alpha_k)$:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i - \sum_{j=1}^M R_{ij} f(x_j, \alpha_k)}{\sigma(Y_i)} \right)^2 \quad (6.14)$$

$\sigma(Y_i)$ sind hierbei die statistischen Fehler der gemessenen Werte Y_i . In manchen Fällen kann sogar Gl. 6.3 als Ausgangspunkt dienen.

Der Erfolg und die Qualität dieses Verfahrens ist von der genauen Kenntnis der analytischen Form von $f(x)$ abhängig. Beschreibt die verwendete Funktion $\tilde{f}(x, \alpha_k)$ die gesuchte Verteilung nur unzureichend, oder kann mögliche Feinstrukturen im Verlauf nicht wiedergeben, führt man einen systematischen Fehler ein. Dieser Fehler kann zu einer signifikanten Verzerrung, also verfälschten Werten und falschen Formeigenschaften führen. Im Extremfall ist eine Anpassung nicht möglich oder instabil.

Im Fall des primären Energiespektrums der kosmischen Strahlung ist die analytische Form des Flusses $j_A(E_0)$ der einzelnen Komponenten mit Massenzahl A nur unzureichend bekannt. Insbesondere eine Modellierung eines möglichen Knies, die flexibel genug ist, um beliebig scharfe oder weiche Übergänge wiederzugeben, ist nur näherungsweise denkbar. Auch der Verlauf oberhalb eines solchen Knies ist unbekannt. Denkbar wäre der Übergang in ein Potenzgesetz mit festem Index, aber auch eine stetige Veränderung des Index.

Trotz dieser Unsicherheiten ist das Verfahren für verschiedene postulierte Formen von $j_A(E_0)$ angewendet worden [Gla99a]. Eine Diskussion der Abhängigkeit der erhaltenen Resultate von

der angenommenen funktionalen Form und der vorgenommenen Einschränkung des erlaubten Parameterbereichs gestaltet sich bei einer solchen Analyse aber als schwierig.

Geeigneter sind Verfahren, die Werte für die einzelnen Kanalinhalt X_j liefern, anhand derer es dann möglich ist, eine solche analytische Form zu entwickeln. Von der Anpassung einer Fitfunktion wird daher im Folgenden abgesehen.

6.4 Regularisierte Entfaltung

Um eine Näherungslösung $\hat{f}(x)$ der gesuchten Verteilung $f(x)$ zu erhalten, könnte man Gl. 6.4 als Ausgangspunkt für ein Minimierungsverfahren (least square oder log-likelihood) zur Bestimmung der X_j benutzen:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i - \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j}{\sigma(Y_i)} \right)^2 \quad (6.15)$$

Im Folgenden wird immer nur das χ^2 -Funktional betrachtet. Auf eine gesonderte Formulierung als log-likelihood-Problem wird verzichtet, da diese Umformulierung auf der Hand liegt. Eine Minimierung dieses Funktionals in Abhängigkeit der Unbekannten X_j scheitert in aller Regel, da sich die gleichen Schwierigkeiten wie bei der direkten Inversion der Matrixgleichung ergeben. Als Ausweg dient eine Einschränkung des Lösungsraums durch die Berücksichtigung einer Nebenbedingung an die Unbekannten X_j . Diese Nebenbedingung stellt die *Regularisierung* dar, ihr entspricht ein Funktional $S(\vec{X})$ bzw. $S(x)$. Ihre Stärke wird durch einen multiplikativen Faktor, den sog. *Regularisierungsparameter* τ , gesteuert.

$$\chi_{mod}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Y_i - \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j}{\sigma(Y_i)} \right)^2 + \tau S(\vec{X}) \quad (6.16)$$

Eine frühe Untersuchung dieses Ansatz findet sich bei [Lev44] und wurde dann u.a. in [Mar63] weiterentwickelt.

In manchen Darstellungen findet sich der Parameter τ nicht vor dem Regularisierungsterm, sondern vor dem ursprünglichen χ^2 -Funktional. In diesem Fall steuert er die Stärke der least-square-Bedingung, keine Regularisierung würde $\tau = \infty$ bedeuten.

Die Hoffnung ist, durch das Stellen einer Nebenbedingung eine Einschränkung des Lösungsraums zu bewirken und eine Lösung nahe der wirklichen mit einer minimalen systematischen Abweichung zu erhalten. Im Rest dieses Abschnittes werden die zwei gängigsten Regularisierungen kurz beschrieben.

6.4.1 Tikhonov–Regularisierung

Die hier verwendete Form der Regularisierung stellt implizit Bedingungen an eine der Ableitungen der gesuchten Funktion $\hat{f}(x)$ bzw. die X_j :

$$S(x) = \int dx \left(\frac{d^k \hat{f}(x)}{d x^k} \right)^2 \quad (6.17)$$

Durch das Einfügen in das zu minimierende Funktional wird gefordert, daß der Mittelwert des Quadrats einer Ableitung minimal wird. Prinzipiell ist die Verwendung mehrerer Ableitungen oder eine beliebige Linearkombination verschiedener Ableitungen möglich. Normalerweise ist aber die Beschränkung auf eine Ableitung ausreichend.

Aufgestellt wurde dieser Ansatz unabhängig voneinander von Phillips [Phi62] und Tikhonov [Tik63]. In die Literatur ist diese Art der Regularisierung als *Tikhonov–Regularisierung* eingegangen.

Üblicherweise wird in Gl. 6.17 die zweite Ableitung ($k = 2$) benutzt. Dies entspricht der Forderung nach einer möglichst kleinen Krümmung der Funktion.

Ein Vorteil dieses Vorgehens wird deutlich, wenn man zur Matrixdarstellung übergeht. Hier kann der Regularisierungsterm durch Differenzen zwischen den einzelnen Vektorelementen X_j angenähert werden. Für $k = 2$ und konstante Kanalbreiten ergibt sich:

$$S(\vec{X}) = \sum_{j=2}^{M-1} (X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1})^2 \quad (6.18)$$

Die Kanalbreite wird hierbei dem Regularisierungsparameter zugeschlagen. Dieses Regularisierungsfunktional läßt sich dann darstellen als

$$S(\vec{X}) = \vec{X}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \vec{X} \quad (6.19)$$

wobei \mathbf{B} eine $(M - 2) \times M$ -Matrix ist. Für $k = 2$ ergibt sich [Höc96]

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Mit Definition einer $N \times N$ Fehlermatrix \mathbf{C} der Daten durch $C_{ij} = \delta_{ij}/\sigma(Y_i)$ kann man das Minimierungsfunktional umschreiben:

$$\chi_{mod}^2 = (\mathbf{C}(\vec{Y} - \mathbf{R}\vec{X}))^T (\mathbf{C}(\vec{Y} - \mathbf{R}\vec{X})) + \tau \vec{X}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \vec{X} \quad (6.21)$$

Die Minimierung dieser Gleichung führt zu einem linearen Gleichungssystem mit $(M - 2)$ neuen Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{R} \\ \sqrt{\tau} \mathbf{B} \end{bmatrix} \vec{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\vec{Y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Das Minimierungsproblem ist auf die Lösung eines (überbestimmten) linearen Gleichungssystems zurückgeführt worden. Hierfür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung wie z.B. die *Singulärwertzerlegung* oder das *Damped Least Square*-Verfahren [Law74, Höc96].

Ein Nachteil dieser Entfaltungsmethode ist, daß an die Lösung nicht ohne weiteres die Forderung nach Positivität gestellt werden kann. Kann die Lösung aus physikalischen Gründen nur nichtnegative Werte annehmen, neigt die Tikhonov-Entfaltung dazu, in den Bereichen mit kleinen oder keinen Kanalinhalt negative Ergebnisse ("Unterschwinger") zu liefern, insbesondere wenn dies an den Histogrammgrenzen der Fall ist.

Der Einbau einer solchen Positivitätsbedingung in das Minimierungsfunktional kann nur durch Näherungen oder eine Entwicklung der gesuchten Verteilung vorgenommen werden und führt automatisch zu nichtlinearen Gleichungen [Bel85]. Dadurch sind aber eine Formulierung als Matrixgleichung und die Anwendung einfacher Matrixoperationen nicht mehr möglich.

6.4.2 Prinzip der maximalen Entropie

Eine weit verbreitete Form der Regularisierung stellt das Prinzip der maximalen Entropie dar. Diese Methode wird insbesondere bei der Bildanalyse und der Wiederherstellung optischer Informationen benutzt. Hierbei wird die sog. Informations-Entropie [Sha48] verwendet:

$$H = - \int f(x) \ln f(x) dx = - \sum_{j=1}^M X_j \ln X_j \quad (6.23)$$

Als Regularisierungsterm dient die negative Entropie (Negentropie):

$$S(\vec{X}) = -H(\vec{X}) = \sum_{j=1}^M X_j \ln X_j \quad (6.24)$$

Ein minimaler Wert von $S(\vec{X})$ entspricht dann maximaler Entropie. Die Entropie stellt hier ein Maß für die Glattheit bzw. Strukturlosigkeit der Funktion $f(x)$ dar. Der Maximale Wert wird für eine Gleichverteilung erreicht. Durch Verwendung dieses Funktionals läßt sich eine stark oszillierende und verrauschte Lösung unterdrücken. Einen weiteren Vorteil stellt die implizite Positivität von $f(x)$ dar. Unter Verwendung dieser Methode können nur positive Lösungen erzeugt werden.

Eine Erweiterung dieses Verfahrens stellt die *method of reduced cross-entropy* [Sch94] dar. Hierbei wird gefordert, daß sich die Lösung wenig von einer Referenzfunktion $r(x)$ unterscheidet. Diese Referenz stellt die beste Vermutung oder in der Bayesschen Terminologie den Prior dar.

Der Regularisierungsterm entspricht jetzt der negativen Shannon-Jaynes Entropie [Jay68]:

$$S(\vec{X}) = -K(f; r) = \int f(x) \ln \frac{f(x)}{r(x)} dx = \sum_{j=1}^M X_j \ln \frac{X_j}{R_j} \quad (6.25)$$

R_j (nicht zu verwechseln mit den Elementen R_{ij} der Responsematrix) ist hierbei der dem Kanal j zugehörige Erwartungswert der Verteilung $r(x)$.

Ein Nachteil der auf Entropie basierenden Verfahren ist die Nichtlinearität der resultierenden Minimierungsfunktionale, was unter Umständen aufwendige numerische Methoden verlangt. Trotzdem haben sich beide Verfahren weit verbreitet und gelten in manchen Gebieten schon als Standard.

6.5 Iterative Verfahren

Bei diesen Verfahren handelt es sich um iterative Algorithmen, die sich der exakten Lösung in Form einer Reihe nähern, und so 'brauchbare' Näherungslösungen liefern. In der Regel ist man an der exakten Lösung nicht interessiert, da diese statistische Schwankungen der Daten reproduziert und somit in den meisten Fällen unbrauchbar ist. Es kann sogar passieren, daß aufgrund dieser Fluktuationen eine exakte Lösung gar nicht existiert. Man bricht daher die Iteration ab und führt hiermit implizit eine Regularisierung durch. Ein allgemeingültiges Abbruchkriterium läßt sich ebensowenig angeben wie im Fall des Regularisierungsparameters. In aller Regel ist es vom Problem und den Anforderungen an die Lösung abhängig. Im Folgenden sollen einige verbreitete Verfahren kurz vorgestellt werden.

6.5.1 Das Van Cittert-Verfahren

Bei dem iterativen Verfahren nach Van Cittert [Cit33] ist \mathbf{R} die Responsematrix, \vec{Y} der Datenvektor und \vec{X} der gesuchte Lösungsvektor. Die Iterationsvorschrift zur Erzeugung einer neuen Schätzung für die Lösung lautet dann

$$X_i^{k+1} = X_i^k + \mu \left(Y_i - \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j^k \right) \quad (6.26)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Dimension von Daten- und Lösungsvektor übereinstimmt. Ist dies nicht der Fall, führt man die Ersetzungen

$$\mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad , \quad \vec{Y} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \vec{Y} \quad (6.27)$$

durch. Um zusätzlich statistische Fehler der Daten zu berücksichtigen, benutzt man die Fehlermatrix \mathbf{C} der Daten und definiert als modifizierte Responsematrix und Datenvektor

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{C} \mathbf{R} \quad , \quad \tilde{\vec{Y}} = \mathbf{C} \vec{Y} \quad (6.28)$$

Um die Konvergenz der Reihe 6.26 zu gewährleisten, muß für den Parameter μ

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (6.29)$$

gelten, wobei λ_{max} der größte Eigenwert der Matrix \mathbf{R} ist. In der Praxis führt man daher entweder eine Abschätzung der Größe der Eigenwerte durch oder bestimmt empirisch einen hinreichend kleinen Wert für μ .

Ein Nachteil dieses Alorithmus ist, daß negative Lösungen auftreten können, selbst wenn diese physikalisch nicht möglich sind. Ausserdem können im Fall schlecht konditionierter Responsematrizen immer noch unerwünschte Oszillationseffekte eine Lösung unbrauchbar machen.

6.5.2 Der Gold-Algorithmus

Das Gold-Verfahren [Gol64] kann als eine Weiterentwicklung des Van Cittert-Verfahrens betrachtet werden. Es ist robuster und kann nur positive Lösungen liefern. Durch diesen letzten Punkt findet implizit eine weitere Regularisierung statt.

Gegeben sei eine $n \times n$ nichtsinguläre Matrix \mathbf{R} , deren Elemente R_{ij} nichtnegativ und insbesondere R_{ii} ungleich Null seien. Weiterhin sei der Datenvektor \vec{Y} positiv. Unter diesen Voraussetzungen besitzt das System 6.4 eine eindeutige Lösung. Es ist dann möglich, eine Diagonalmatrix \mathbf{D} mit folgenden Eigenschaften zu definieren:

$$\vec{X} = \mathbf{D}\vec{Y} \quad \text{mit} \quad D_{ii} = X_i/Y_i \quad (6.30)$$

Diese Matrix \mathbf{D} ist nicht identisch mit der Inversen \mathbf{R}^{-1} (außer in dem trivialen Fall, daß \mathbf{R} selbst diagonal ist). Der Grundgedanke besteht nun darin, diese Matrix \mathbf{D} durch fortlaufende Iterationen anzunähern. Dadurch ist es möglich, eine Näherungslösung \vec{X} zu erhalten, ohne explizit von \mathbf{R}^{-1} Gebrauch zu machen. Als Rekursivformel für \mathbf{D} im Iterationsschritt $k + 1$ ergibt sich

$$D_{ii}^{k+1} = \frac{D_{ii}^k Y_i}{\sum_{j=1}^n R_{ij} D_{jj}^k Y_j} \quad (6.31)$$

bzw. für die Elemente von \vec{X}^{k+1}

$$X_i^{k+1} = \frac{X_i^k Y_i}{\sum_{j=1}^n R_{ij} X_j^k} \quad (6.32)$$

Wie aus Gleichung 6.32 zu entnehmen ist, sind die \vec{X}^k für positive Y_i immer positive Vektoren.

Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich zeigen [Gol64], daß diese Folge gegen die exakte Lösung \vec{X}_{exakt} des Gleichungssystems konvergiert. Ferner folgt, daß während der Konvergenz die quadratische Form

$$F(\vec{X}^k) = (\vec{X}^k - \vec{X}_{exakt})^T \mathbf{R} (\vec{X}^k - \vec{X}_{true}) \quad (6.33)$$

gegen Null konvergiert. Dabei ist \vec{X}_{true} die unbekannte wahre Verteilung. Weiterhin beeinflusst die Wahl der Startwerte (die Ausgangsvermutung) X_i^0 nur die Konvergenzrate, aber nicht die Konvergenz an sich.

Bei der Auswertung von Meßwerten hat man das Problem, daß diese statistischen Fluktuationen unterworfen sind. Die exakte Lösung von Gl. 6.4 ist in diesem Fall unerwünscht. Man stellt daher ein Abbruchkriterium auf, bei dessen Erfüllung die Iteration beendet wird. Das Ziel ist es, auf diesem Weg trotzdem eine "brauchbare" Näherungslösung zu erhalten.

Hat man es bei \mathbf{R} mit einer $m \times n$ Matrix zu tun, wobei $m > n$ gilt, so kann das Verfahren leicht modifiziert angewendet werden, falls \mathbf{R} den Rang n besitzt. In diesem Fall besitzt die $n \times n$ Matrix $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ ebenfalls den Rang n und ist positiv definit [Gol83]. Durch Multiplikation der Gl. 6.4 von links mit \mathbf{R}^T erhält man das modifizierte System

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} \vec{X} = \vec{Y}_{mod} \quad \text{mit} \quad \vec{Y}_{mod} = \mathbf{R}^T \vec{Y} \quad (6.34)$$

Um die statistischen Fehler der Datenwerte zu berücksichtigen, bezieht man diese in die Responsematrix \mathbf{R} ein. Definiert man die $m \times m$ Fehlermatrix \mathbf{C} durch $C_{ij} = \delta_{ij}/\sigma_i$, wobei die σ_i die Fehler der einzelnen Y_i darstellen, kann man folgendes Gleichungssystem betrachten:

$$\tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} \vec{X} = \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{C} \vec{Y} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{C} \mathbf{R} \quad (6.35)$$

Besitzt die Matrix \mathbf{R} den Rang n , dann ist auch $\tilde{\mathbf{R}}$ vom Rang n und die Matrix $\tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}}$ positiv definit. Benutzt man diese Matrix und den modifizierten Datenvektor $\vec{Y}_{mod} = \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{C} \vec{Y}$ in Gleichung 6.32, läßt sich das Funktional 6.33 als

$$F(\vec{X}^k) = \sum_i \frac{(\sum_{j=1}^n R_{ij} X_j^k - Y_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (6.36)$$

schreiben. Die Konvergenz der Folge \vec{X}^k stellt in diesem Fall einfach eine χ^2 -Minimierung dar.

6.5.3 Bayessche Entfaltung

Eine weitere Möglichkeit zur Entfaltung liefert das Bayes-Theorem [Ago95]. Existiert eine Lösung \vec{X} , kann man eine Matrix \mathbf{P} definieren, deren Elemente die Wahrscheinlichkeiten angeben, mit der die Meßwerte Y_i zu den Lösungselementen X_j beitragen:

$$\vec{X} = \mathbf{P} \vec{Y} \quad (6.37)$$

Diese Matrix \mathbf{P} enthält nur nichtnegative Elemente und kann damit nur nichtnegative Werte X_j liefern. Auch bei dieser Matrix handelt es sich nicht um die Inverse \mathbf{R}^{-1} .

Die Elemente P_{ji} werden iterativ bestimmt. Man geht von einer angenommenen Lösung \vec{X}^0 aus, die eine Anfangsvermutung darstellt. Mit diesem Startwert läßt sich nach dem Bayes-Theorem die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß bei gemessenen Daten \vec{Y} die Unbekannten \vec{X}^0 auftreten:

$$P(X_j^0|Y_i) = \frac{R_{ij}X_j^0}{\sum_{l=1}^M R_{jl}X_l^0} \quad (6.38)$$

Hierbei sind die R_{ij} die Elemente der Responsematrix \mathbf{R} . Mit diesen Wahrscheinlichkeiten erhält man eine verbesserte Schätzung \vec{X}^{k+1} (im ersten Schritt $k = 0$) der Lösung:

$$X_j^{k+1} = \sum_{i=1}^N P(X_j^k|Y_i)Y_i \quad (6.39)$$

Müssen Effizienzen ϵ berücksichtigt werden, folgt mit

$$\epsilon_j = \sum_{j=1}^M P(Y_i|X_j^k) = \sum_{j=1}^M R_{ij} \quad (6.40)$$

für die Lösungselemente X_j :

$$X_j^{k+1} = \frac{1}{\epsilon_j} \sum_{i=1}^N P(X_j^k|Y_i)Y_i \quad (6.41)$$

Mit dieser neuen Lösungsvermutung wird das Verfahren wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

In der technischen Umsetzung ist dieses Verfahren etwas aufwendiger als der Gold-Algorithmus, da mehr Rechenoperationen durchgeführt werden müssen. Bei der Art der in dieser Arbeit auftretenden Problemstellungen sind beide Methoden jedoch in den Ergebnissen weitgehend äquivalent (siehe nächstes Kapitel). Die Konvergenzeigenschaften der Bayes-Entfaltung sind allerdings zum Teil noch unbestimmt.

Kapitel 7

Auswahl und Test der Verfahren

7.1 Überblick und Auswahl der Entfaltungsmethoden

Jedes der im letzten Kapitel vorgestellten Verfahren besitzt seine eigene Klasse von Anwendungen bzw. Problemstellungen, für die es besonders geeignet ist. Ein für jede Art von Anwendung konzipierter Entfaltungsalgorithmus existiert in dieser Form nicht. Die Analyse der $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Schauergrößenspektren und die Natur der zugrundeliegenden Primärenergiespektren definieren zusätzliche Randbedingungen, welche die Auswahl einzelner Verfahren ermöglichen.

Die Datenpunkte (die Häufigkeit bzw. Anzahl der gemessenen Schauer innerhalb definierter Schauergrößenintervalle) sind immer nichtnegativ. Das Gleiche gilt für die Werte der gesuchten Unbekannten, den Häufigkeiten der Primärenergien. Diese Positivitätsbedingung legt daher Verfahren nahe, die nur nichtnegative Ergebnisse liefern können. Daher werden hier z.B. die Tikhonov-Regularisierung und das van-Cittert-Verfahren nicht beachtet.

In der vorliegenden Analyse übersteigt die Anzahl der Datenpunkte die Anzahl der Unbekannten, man hat es mit einem überbestimmten System zu tun. Verfahren, die auf dem Prinzip der Entropie basieren, sind in aller Regel für unterbestimmte Probleme am besten geeignet. Weiterhin stellt die hier vorkommende Zahl der Unbekannten (≈ 150) ein Problem für jeden Minimierungsalgorithmus dar. Aus diesem Grund wird normalerweise durch an das jeweilige Problem angepaßte Näherungen eine Linearisierung des Regularisierungsfunktionalis bzw. Minimierungsausdrucks durchgeführt, und dieses dann iterativ oder durch geeignete Matrixoperationen gelöst. Im Fall der Energiespektren der kosmischen Strahlung erweist sich eine Linearisierung aufgrund des Potenzgesetzcharakters der Spektren als schwierig. Daher wird auf Minimierungsalgorithmen zurückgegriffen und das Programmpaket MINUIT [Jam94] in der im ROOT-Paket [Bru97] implementierten Form benutzt. Das dabei angewendete reduced-cross-entropy-Verfahren dient aufgrund dieser zuvor geschilderten Problematik eher zur Konsistenzprüfung. Zur Analyse der Schauergrößenspektren werden vorrangig der

Gold-Algorithmus und die Bayessche Entfaltung eingesetzt. Hierbei haben sich beide Verfahren in Hinblick auf ihre Ergebnisse als äquivalent erwiesen.

Im Verlauf dieses Kapitels werden die drei genannten Verfahren nochmals vorgestellt und ihre Eigenschaften bzw. ihre technische Umsetzung anhand eines Monte-Carlo-Beispiels diskutiert. Nach Vorstellung des Monte-Carlo-Datensatzes und der Definition der nötigen Responsematrizen wird am Beispiel des Gold-Algorithmus die Bestimmung des Abbruchkriteriums sowie die Abschätzung der statistischen und systematischen Unsicherheiten erklärt. Für alle drei verwendeten Entfaltungsmethoden hat sich das gewählte Abbruchkriterium bewährt und wird daher in allen Fällen eingesetzt. Obwohl die Verfahren an mehreren verschiedenartigen Monte-Carlo-Beispielen (Energiespektren mit und ohne Knie, verschiedene/nicht verschiedene Kniepositionen für die einzelnen Elemente) getestet wurden und sich als geeignet erwiesen, werden aus Platzgründen nur die Ergebnisse eines Monte-Carlo-Beispiels diskutiert. Hierbei handelt es sich um ein Modell mit rigiditätsabhängigen Kniepositionen in den Einzelspektren. Dies dürfte der Wahrheit nahe kommen, und damit die Ergebnisse am ehesten übertragbar sein.

7.2 Erzeugung von Monte-Carlo-Daten und Definition der Responsematrix

Um die Verfahren zu testen und ihre Eigenschaften zu untersuchen, wurden Monte-Carlo-Daten erzeugt, die sich an der Wirklichkeit orientieren. Hierbei wurden fünf Komponenten (Wasserstoff, Helium, Kohlenstoff, Silizium und Eisen) der kosmischen Strahlung angenommen. Für jedes dieser Elemente wurde ein Potenzgesetz mit einer Knie-Struktur als differentielles Energiespektrum angenommen. Die Spektren folgen der Form

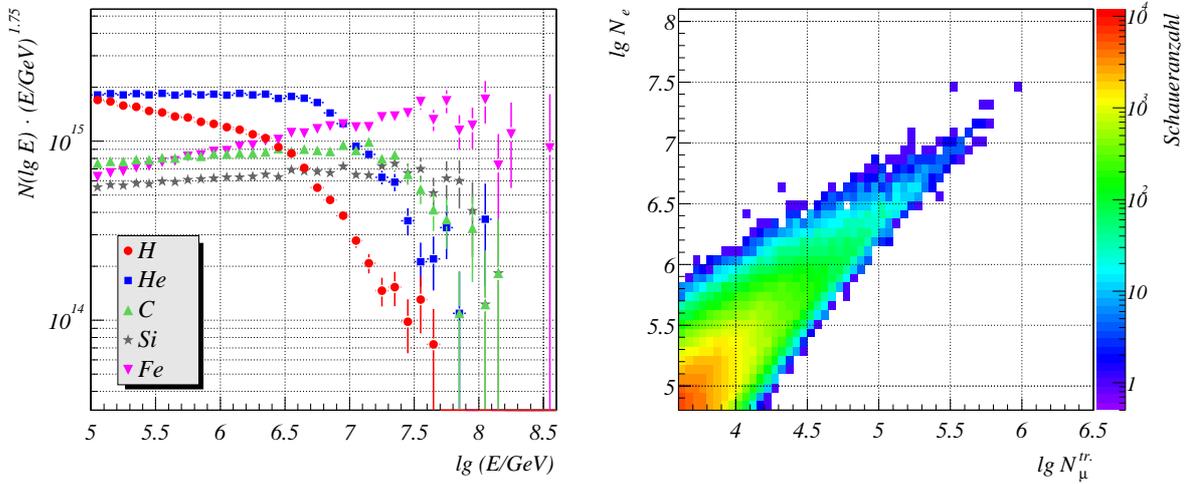
$$\frac{dI(E)}{dE} \propto E^{\gamma_1} \left(1 + \left(\frac{E}{E_K} \right)^\epsilon \right)^{(\gamma_2 - \gamma_1)/\epsilon} \quad (7.1)$$

E_K ist hierbei die Knieenergie, γ_1 der Index vor dem Knie, γ_2 der Index nach dem Knie. Der Parameter ϵ legt die Breite des Kniebereichs fest. Die Normierung der Elemente zueinander und die Werte der Indizes vor dem Knie orientieren sich an den Werten direkter Messungen zusammengefaßt in der Kompilation [Wie98]. Für die Lage der Kniepositionen wurden verschiedene Modelle untersucht (abhängig von der Ladung oder der Masse bzw. unabhängig von der Primärteilchenart). Die Werte von E_K und γ_2 wurden jeweils so gewählt, daß die resultierenden Schauergrößenspektren grob mit den gemessenen Schauergrößenspektren übereinstimmen. Im Folgenden wird das Modell einer Rigiditätsabhängigkeit der Kniepositionen diskutiert. Die Werte der einzelnen Parameter sind in Tabelle 7.1 angegeben.

Für die Erzeugung der Schauergrößen wurden die in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Parametrisierungen der Schauerfluktuationen und Rekonstruktionseigenschaften benutzt. Die Anzahl der so künstlich erzeugten Luftschauerdaten entspricht ungefähr einem Drittel der in

Element	γ_1	γ_2	E_K (in PeV)	ε
Wasserstoff	-2.9	-4.0	4.0	3.0
Helium	-2.75	-4.0	8.0	3.0
Kohlenstoff	-2.7	-4.0	24.0	3.0
Silizium	-2.7	-4.0	56.0	3.0
Eisen	-2.6	-4.0	104.0	3.0

Tabelle 7.1: Parameter der nach Gl. 7.1 generierten Energiespektren.

Abbildung 7.1: Links: Angenommene Energiespektren, skaliert mit $E^{1.75}$. Rechts: Das resultierende $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Schauergrossenspektrum.

dieser Arbeit verwendeten KASCADE-Daten. In Abbildung 7.1 sind in der linken Hälfte die einzelnen nach Gl. 7.1 generierten Primärenergiespektren dargestellt, in der rechten Hälfte als zweidimensionales Histogramm die daraus erzeugte Häufigkeitsverteilung der $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Schauergrossen.

Der Inhalt einer Zelle dieses Histogramms stellt einen Datenpunkt Y_j des Datenvektors \vec{Y} dar. Die Indizierung j verläuft hierbei (bezogen auf die Abbildung) zeilenweise von links nach rechts, beginnend in der Histogrammecke links unten. Es werden hierbei nur die Zellen berücksichtigt, deren Inhalt verschieden von Null ist. Die Kanalinhalte der histogrammierten Primärenergiespektren (Abb. 7.1, links) stellen die Unbekannten X_i dar. Der Inhalt des gesamten Datenhistogramms wird demnach durch

$$\vec{Y} = \mathbf{R}\vec{X} \quad (7.2)$$

interpretiert. Hierbei ist \mathbf{R} die Responsematrix, deren Elemente den Wahrscheinlichkeitszu-

sammenhang zwischen $\lg E$ und $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ darstellen. Der Unbekanntenvektor \vec{X} enthält die fünf Primärenergiespektren, geordnet nach Massenzahl. Die Responsematrix besteht dann aus fünf Submatrizen, die jeweils die Responsematrix für eine Primärteilchenart darstellen. Schematisch läßt sich dies schreiben als

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{R}^H \quad \mathbf{R}^{He} \quad \mathbf{R}^C \quad \mathbf{R}^{Si} \quad \mathbf{R}^{Fe} \right) \quad \text{und} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{X}^H \\ \vec{X}^{He} \\ \vec{X}^C \\ \vec{X}^{Si} \\ \vec{X}^{Fe} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Für die Elemente der einzelnen Submatrizen \mathbf{R}^A gilt dabei

$$R_{ij}^A = \frac{\int_{Zelle \ i} d \lg N_e d \lg N_\mu^{tr} \int_{Kanal \ j} d \lg E P_A(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr} | \lg E) J_A(\lg E)}{\int_{Kanal \ j} d \lg E J_A(\lg E)} \quad (7.4)$$

$J_A(\lg E)$ ist hierbei das Energieflußspektrum des jeweiligen Primärteilchens, im Prinzip also der Vektor \vec{X}^A . Tatsächlich spielt aber die genaue Form des Flusses für die Berechnung der Matrixelemente nur eine untergeordnete Rolle und macht sich in den Resultaten nicht bemerkbar, da die Zellengröße hinreichend klein gewählt wurde. Für die Berechnung der Submatrizen wurde ein differentielles Flußspektrum der Form $\propto E^{-3}$ verwendet.

Für die Wahrscheinlichkeiten P_A gilt

$$P_A(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr} | \lg E) = \int_{-\infty}^{+\infty} d \lg N_e^{true} \int_{-\infty}^{+\infty} d \lg N_\mu^{tr.,true} r_A \varepsilon_A s_A \quad (7.5)$$

mit

$$\begin{aligned} r_A &= r_A(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr} | \lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true}) \\ \varepsilon_A &= \varepsilon_A(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true}) \\ s_A &= p_A(\lg N_e^{true}, \lg N_\mu^{tr.,true} | \lg E) \end{aligned}$$

Die Funktionen r_A , ε_A und s_A repräsentieren die (im Prinzip primärteilchenabhängige) Rekonstruktion, Effizienz und die individuellen Schauerfluktuationen, die in den Kapiteln 4 und 5 behandelt wurden.

Nicht für alle möglichen Energien ist der Fluß rekonstruierbar, so kann trivialerweise kein Fluß für Energien bestimmt werden, deren Nachweiswahrscheinlichkeit im betrachteten Schauergrößenbereich ($4.8 \leq \lg N_e \leq 8.1$, $3.6 \leq \lg N_\mu^{tr} \leq 6.5$) nahe Null ist. Aufgrund der steil abfallenden Primärenergiespektren ist hier die untere Energiegrenze von besonderer Bedeutung. Um eine untere Energieschwelle festzusetzen, werden alternativ folgende Ansätze verfolgt:

1. Es wird eine minimale Nachweiswahrscheinlichkeit P_A gefordert. Nur die Energien werden in der Analyse berücksichtigt, für die eine hinreichend hohe Nachweiswahrscheinlichkeit existiert. In der Praxis haben sich Werte zwischen 10^{-5} und 10^{-4} bewährt. Es

hat sich gezeigt, daß der genaue Wert für das Ergebnis keine entscheidende Rolle spielt, solange er kleiner als $\approx 10^{-3}$ ist. Ausschlaggebend für die Wahl des Mindestwerts ist die Konditionierung der Responsematrizen. Je kleiner der Mindestwert gewählt wird, desto schlechter sind die Matrizen konditioniert, d.h. desto mehr nähern sie sich der Singularität. Wird der Mindestwert zu groß gewählt, können sich über den Schwellenbereich hinaus systematische Verzerrungen zeigen.

2. Für die einzelnen Energien wird die maximale Wahrscheinlichkeit berechnet, für irgendeine Zelle des Nachweisbereichs einen Beitrag zu liefern. Es wird weiterhin angenommen, daß Schauer der betrachteten Energie einen Mindestbeitrag zum Inhalt dieser Datenzelle liefern. Mit der bekannten Wahrscheinlichkeit läßt sich berechnen, wie viele Schauer N_E der betrachteten Energie vorhanden sein müssen. Gleichzeitig kann aus dem durch direkte Messungen näherungsweise bekannten totalen Fluß eine konservative Grenze N_G für die Anzahl Schauer (egal welches Primärteilchen) abgeschätzt werden. Ist N_E größer als N_G , wird diese Energie nicht in die Analyse miteinbezogen.

Letzendlich bedeutet das 2. Auswahlverfahren auch nur einen Schnitt auf eine minimale Nachweiswahrscheinlichkeit. Der Unterschied liegt darin, daß die Wahl der Mindestnachweiswahrscheinlichkeit physikalisch motivierter ist. Wie sich gezeigt hat, sind die Ergebnisse für Energien mit einer Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit von weniger als 0.2 aufgrund von systematischen Abweichungen nicht vertrauenswürdig. Die untere Energiegrenze wird in der Praxis so gewählt, daß zum einen die Matrix nicht zu schlecht konditioniert wird, zum anderen sich das Ergebnis der Entfaltung praktisch nicht ändert, wenn die Energieschwelle modifiziert wird.

Zur Bestimmung der Obergrenze der zu betrachtenden Primärenergien wird gefordert, daß die Wahrscheinlichkeit, im vorhandenen Datensatz einen Beitrag zu liefern, mindestens 10^{-4} beträgt. Auch hier spielt der genaue Wert nur eine untergeordnete Rolle, da aufgrund durch die Methode verursachter systematischer Unsicherheiten dann keine zuverlässigen Ergebnisse mehr erzielbar sind.

7.3 Analyse mit dem Gold-Algorithmus

7.3.1 Bestimmung des Abbruchkriteriums

Bei den iterativen Verfahren spielt die Anzahl der Iterationen die dem Regularisierungsparameter entsprechende Rolle. Gesucht ist ein Kriterium, welches festlegt, nach wievielen Iterationsschritten das Verfahren abgebrochen wird. Eine augenscheinliche Größe zur Beurteilung der fortschreitenden Qualitätsverbesserung ist der Wert des $\chi_{est.}^2$, welches durch

$$\chi_{est.}^2 = \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} (Y_j - (\mathbf{R}\vec{X})_j)^2 \quad (7.6)$$

definiert wird. Hierbei ist N die Anzahl der Datenpunkte Y_j und σ_j die zugehörigen geschätzten statistischen Fehler. Der Vektor \vec{X} entspricht der aktuellen Schätzung für die unbekannt-ten Energiespektren \vec{X} . In der linken Hälfte von Abbildung 7.2 ist der Wert dieses $\chi_{est.}^2$ in Abhängigkeit der Iterationsschritte für die vorgestellten Monte-Carlo-Daten dargestellt. Man erkennt zunächst eine rasche Abnahme, die aber mit steigender Zahl der Iterationen immer langsamer ausfällt. Dieses Verhalten ist in der rechten Hälfte der Abbildung nochmals verdeutlicht. Hier ist die negative Änderungsrate $\Delta\chi^2 = \chi_{est.}^2(k) - \chi_{est.}^2(k+1)$ zwischen aufeinanderfolgenden Iterationen k und $k+1$ gezeigt. Diese Änderungsrate $\Delta\chi^2$ wird im Folgenden anstatt der Schrittnummer k zur Charakterisierung der fortlaufenden Iteration benutzt.

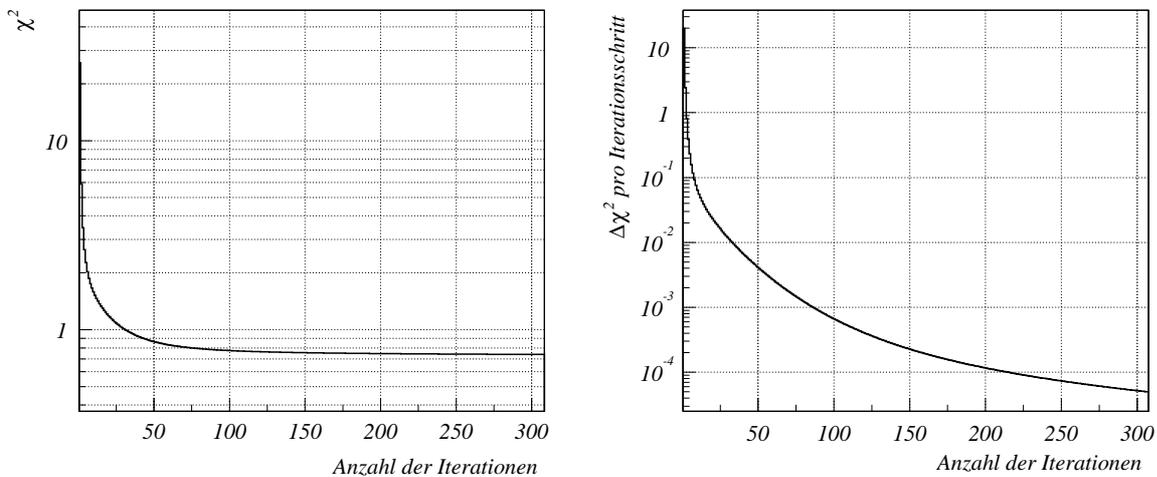


Abbildung 7.2: Links: Wert des $\chi_{est.}^2$ -Funktional in Abhängigkeit der Iterationsanzahl. Rechts: Änderungsrate von $\chi_{est.}^2$ über der Anzahl der Iterationsschritte. Die Werte beziehen sich auf die im Text vorgestellten Monte-Carlo-Daten.

Während $\chi_{est.}^2$ ein Gütemaß für die Wiedergabe der Daten darstellt, und damit auch abhängig von der Abschätzung der statistischen Fehler, ist man aber tatsächlich an einem Kriterium zur Beschreibung der Qualität bzw. der Eigenschaften der Lösung des inversen Problems interessiert. Eine Möglichkeit hierfür bietet der sog. *mittlere gewichtete Fehler* (im Folgenden kurz *WMSE*, *weighted mean squared error*). Er ist definiert als

$$WMSE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{\vec{X},i}^2 + b_i^2}{\vec{X}_i} \quad (7.7)$$

Hierbei ist M die Dimension des geschätzten Lösungsvektors \vec{X} , $\sigma_{X,i}$ die statistischen Fehler der Lösungskomponenten und b_i die systematischen Abweichungen gegenüber der wahren Lösung \vec{X} . Im Verlauf der Iteration nimmt der statistische Fehler der Lösung zu, da die Näherungslösung mit zunehmender Iterationstiefe immer sensitiver auf die statistischen Fluktuationen der Meßdaten wird. Deshalb wird die Iteration letztendlich vorzeitig abgebro-

chen. Gleichzeitig nehmen aber die systematischen Abweichungen der Lösungsschätzung von der wahren Lösung ab. Man erwartet daher für den Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Anzahl der Iterationsschritte (bzw. des Wertes des Regularisierungsparameters im Fall einer regularisierten Entfaltung) ein Minimum. Im Bereich geringerer Iterationsschritte dominieren systematische Abweichungen, im Bereich einer großen Anzahl von Iterationen dominieren die statistischen Unsicherheiten und beginnen die Lösung unbrauchbar zu machen. Der Ort des Minimums stellt daher einen guten Kompromiss zwischen beiden Arten von Unsicherheiten dar. Der Verlauf des WMSE und seine Bestimmung werden im Folgenden anhand des vorgestellten Monte-Carlo-Beispiels (siehe Abb. 7.1) unter Anwendung des Gold-Algorithmus erläutert.

Eine weitere Größe zur Bestimmung des Abbruchs stellt die gewichtete Summe der systematischen Unsicherheiten bzw. die mittlere gewichtete systematische Abweichung dar:

$$\chi_b^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{b_i^2}{\sigma_{b,i}^2} \quad (7.8)$$

Hierbei sind die b_i wieder die systematischen Abweichungen gegenüber der wahren Lösung und $\sigma_{b,i}^2$ die zugehörigen Varianzen der b_i . Im Verlauf der Iteration nimmt die Größe der systematischen Unsicherheiten immer weiter ab (vgl. Abb. 7.3, rechts), gleichzeitig nimmt aber die statistische Unsicherheit ihrer Bestimmung eher zu. Die Idee besteht nun darin, die Iteration dann abzubrechen, wenn χ_b^2 einen Wert von ungefähr Eins annimmt. In diesem Fall ist der Fehler $\sigma_{b,i}$ im Mittel in etwa genauso groß wie der Wert b_i . Eine weitere Reduktion der systematischen Unsicherheiten macht keinen Sinn mehr, da die Unsicherheiten ihrer Bestimmung größer als die eigentlichen Werte werden. In diesem Fall wäre dann z.B. eine Korrektur der Lösungselemente X_i auf die systematischen Abweichungen hin nicht mehr sinnvoll. Der Verlauf von χ_b^2 und seine Bestimmung wird in den folgenden Abschnitten ebenfalls anhand des vorgestellten Monte-Carlo-Beispiels erläutert.

7.3.2 WMSE und χ_b^2 bei bekannten Unsicherheiten

In diesem Fall ist die exakte Lösung, also die zugrundeliegenden Primärenergiespektren, bekannt. Ferner soll nicht nur ein Datensatz vorhanden sein (d.h. eine Stichprobe der Energiespektren), sondern im Prinzip beliebig/genügend viele. Mit Hilfe dieser zweiten Bedingung ist es möglich, den statistischen Fehler der Lösung ohne Schätzung zu bestimmen. Jeder der K Datensätze wird entfaltet und das Quadrat des statistische Fehlers σ_i für den Flußwert j_i bei einer festen Energie E_i als Varianz der Verteilung der entsprechenden Lösungswerte bezüglich des Mittelwertes definiert:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{X}_{i,k} - \bar{X}_i)^2, \quad \text{mit} \quad \bar{X}_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{X}_{i,k} \quad (7.9)$$

Analog hierzu sind die Abweichungen b_i als Mittelwert der Abweichung zwischen geschätzter Lösung \tilde{X}_i und wahren Wert X_i definiert:

$$b_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{X}_{i,k} - X_i) \quad (7.10)$$

Die Fehler $\sigma_{b,i}$ der systematischen Abweichungen b_i ergeben sich wieder durch die Varianz der Verteilung der entsprechenden b_i bzgl. des Mittelwerts von b_i .

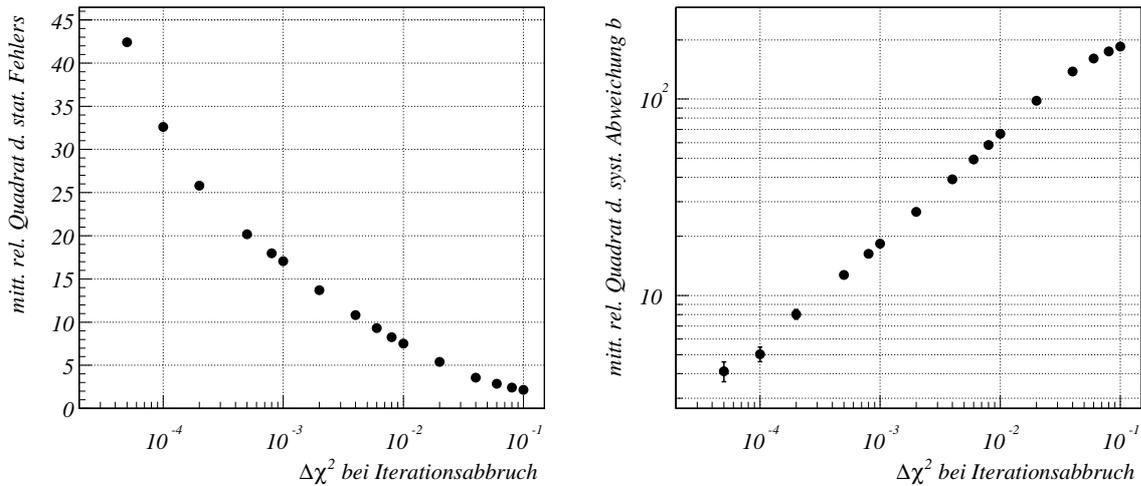


Abbildung 7.3: Verlauf des relativen Quadrates des statistischen Fehlers (links) und der relativen quadrierten mittleren systematischen Abweichung (rechts) in Abhängigkeit der Iterationstiefe, charakterisiert durch $\Delta\chi^2$.

In der linken Hälfte der Abbildung 7.3 ist das Quadrat des statistischen Fehlers dividiert durch den wahren Wert X_i , also der erste Term des WMSE (Gl. 7.7), in Abhängigkeit des $\Delta\chi^2$ pro Iterationsschritt dargestellt. Kleine Werte von $\Delta\chi^2$ bedeuten dabei eine große Zahl von Iterationen. Man erkennt deutlich die Zunahme des statistischen Fehlers mit dem Fortschreiten der Iteration. In der rechten Hälfte von Abbildung 7.3 ist der Wert des zweiten Terms des WMSE, die relative quadratische mittlere Abweichung, in Abhängigkeit des Iterationsverlaufs aufgetragen. Zu Beginn der Iteration sind große systematische Abweichungen erkennbar, die aber im weiteren Verlauf der Iteration immer kleiner werden.

In Abbildung 7.4 ist schliesslich der gewichtete mittlere Fehler WMSE dargestellt. Man erkennt ein breites Minimum im Bereich von ungefähr $\Delta\chi^2 \approx 5 \cdot 10^{-4}$. Im Bereich rechts davon (wenige Iterationsschritte) wird der Wert des WMSE durch die Abweichungen b_i dominiert, im linken Bereich bzgl. des Minimums dominieren die statistischen Fehler. Beim Vergleich mit Abbildung 7.3 fällt auf, daß am Ort des Minimums beide Beiträge zum WMSE ungefähr gleich groß sind.

Der Verlauf der mittleren gewichteten systematischen Abweichung χ_b^2 in Abhängigkeit der

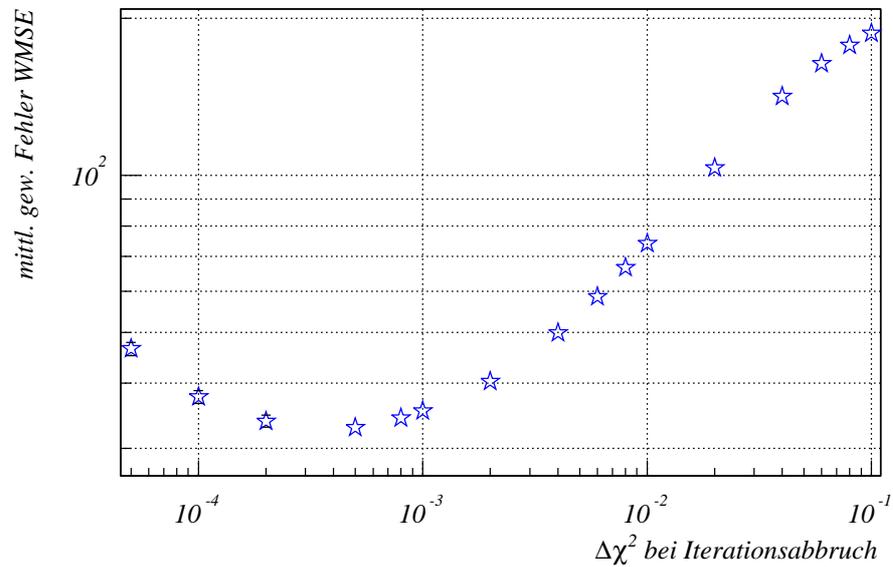


Abbildung 7.4: Wert des gewichteten mittleren Fehlers WMSE in Abhängigkeit von $\Delta\chi^2$ pro Iterationsschritt.

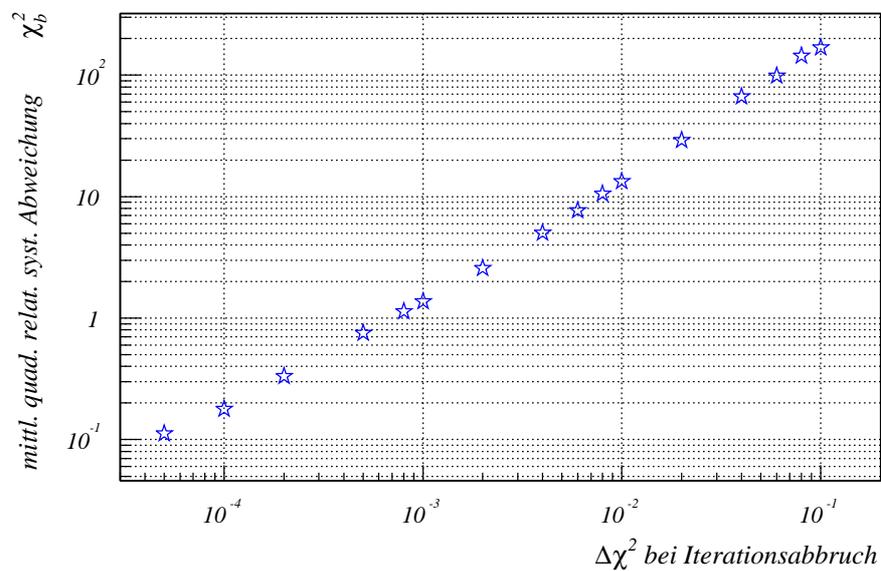


Abbildung 7.5: Wert der mittleren gewichteten systematischen Abweichung χ_b^2 in Abhängigkeit der Iterationstiefe (gekennzeichnet durch $\Delta\chi^2$ -Wert bei Abbruch).

Iterationstiefe ist schließlich in Abbildung 7.5 dargestellt. Man erkennt eine monotone Abnahme dieser Größe, wobei die Bedingung $\chi_b^2 \approx 1$ bei einer Iterationstiefe von $\Delta\chi^2 \approx 8 \cdot 10^{-4}$ erreicht wird.

Wie die Breite des Minimums in Abbildung 7.4 nahelegt, unterscheiden sich die entfaltenen Lösungen für $\Delta\chi^2 = 0.0005$ und $\Delta\chi^2 = 0.0008$ kaum bzw. praktisch nicht. In Abbildung 7.6 werden die entfaltenen Spektren für eine Iterationstiefe von $\Delta\chi^2 = 0.0008$ mit den ursprünglichen “wahren” Spektren der einzelnen Primärteilchen verglichen. Offene Symbole entsprechen dabei den originären Spektren, geschlossene den entfaltenen. In der linken Hälfte der Abbildung werden die Spektren von Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff verglichen, in der rechten Hälfte die von Silizium und Eisen. Im Großen und Ganzen erkennt man eine gute Übereinstimmung zwischen Original und Lösung. Trotzdem fallen insbesondere an den jeweiligen unteren Energiegrenzen deutliche systematische Abweichungen auf. Am stärksten sind diese im Eisenspektrum ausgeprägt. Auch im Bereich zwischen 1 PeV und 4 PeV erkennt man eine Korrelation zwischen dem Wasserstoff- und dem Heliumspektrum. Im Heliumspektrum werden zuwenige Ereignisse rekonstruiert (eine “Delle” in der Auftragung von Abb. 7.6), die sich im Wasserstoffspektrum als Überschätzung im gleichen Bereich wiederfinden.

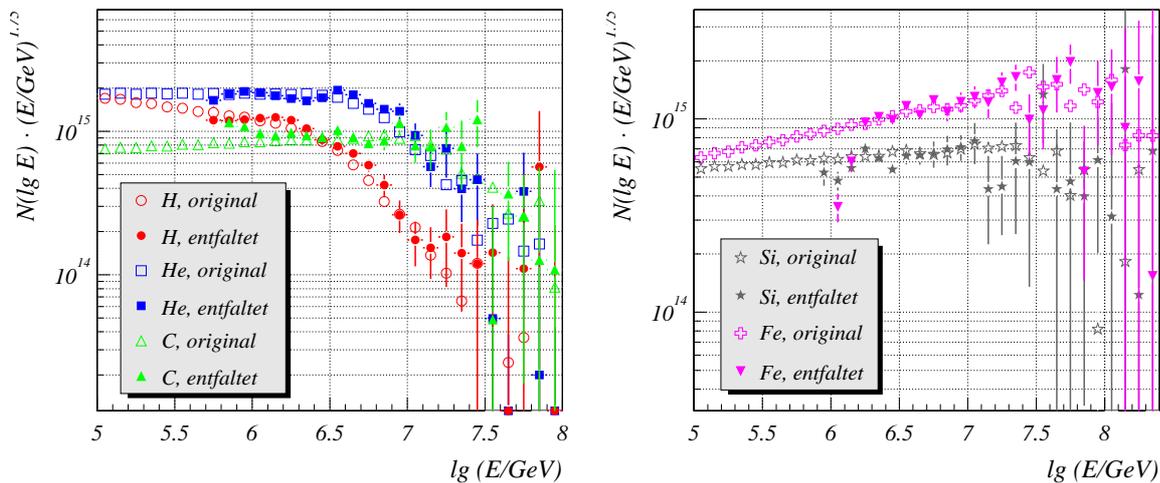


Abbildung 7.6: Vergleich der originären und entfaltenen Primärenergiespektren. Links: Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff; Rechts: Silizium und Eisen. Offene Symbole entsprechen den originären Spektren, geschlossene den entfaltenen. Die Fehlerbalken stellen die statistischen Fehler dar.

Die untere Energiegrenze der entfaltenen Spektren ergibt sich durch die Forderung einer genügend großen Nachweiswahrscheinlichkeit, auf die in Abschnitt 7.2 eingegangen wurde. Die systematischen Abweichungen in Abbildung 7.6 treten bei kleinen Energien auf, sodaß hier ein Zusammenhang mit der Nachweiswahrscheinlichkeit nahe liegt. In Abbildung 7.7 ist für die einzelnen Primärteilchenarten diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Energie aufgetragen.

Im Vergleich mit den entfaltenen Spektren zeigt sich, daß die großen Systematiken am unteren Energiebereich mit Nachweiswahrscheinlichkeiten W kleiner als 0.2 korreliert sind. Untersu-

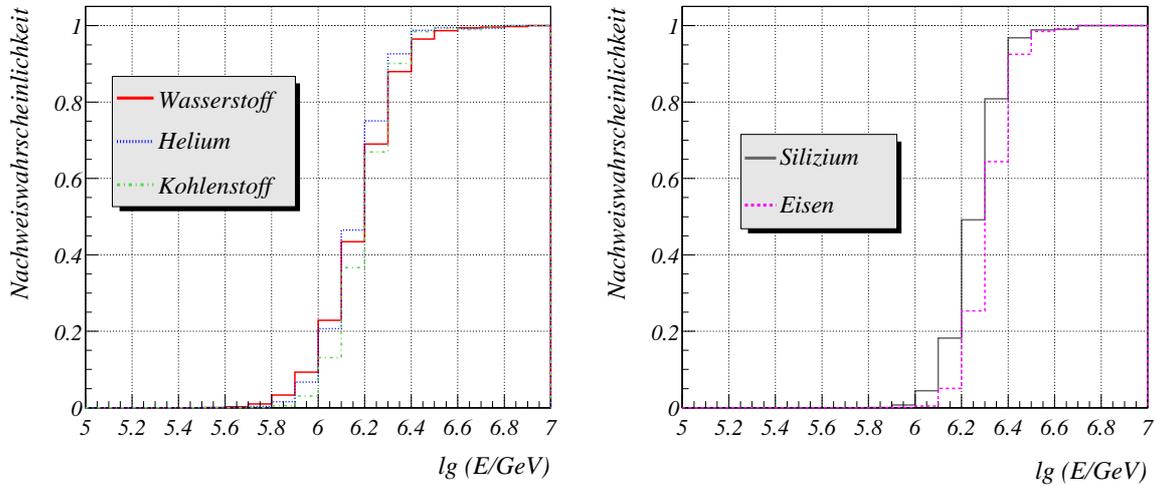


Abbildung 7.7: Nachweiswahrscheinlichkeit der einzelnen Primärteilchenarten im gewählten Energiebereich. Links: Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff. Rechts: Silizium und Eisen.

chungen an anderen Beispielen haben die Aussage bestärkt, daß Ergebnisse für Energien mit $W < 0.2$ nur sehr eingeschränkt belastbar und oft mit größeren systematischen Abweichungen behaftet sind. Eine Ursache für dieses Verhalten liegt in den unterschiedlichen Konvergenzraten bei verschiedenen Energien. Die Veränderung der Lösungen \tilde{X}_i pro Iterationsschritt ist zu Beginn der Iteration für alle Unbekannten prozentual gesehen in der gleichen Größenordnung. Bei kleinen Nachweiswahrscheinlichkeiten wirkt sich eine Veränderung der geschätzten Lösung aber im Vergleich kaum auf die rekonstruierten Daten aus, die im Verlauf der Entfaltung implizit mit den Ursprungsdaten (gemessenen) verglichen werden. Der Unterschied zwischen diesen beiden Datensätzen wirkt sich im weiteren Verlauf aber auf die Größe der Veränderungen und damit auf die Konvergenzrate aus. Um entsprechend gute Schätzungen für Unbekannte mit kleinen Nachweiswahrscheinlichkeiten zu erhalten, muß die Anzahl der Iterationen sehr groß werden. Dann beginnen jedoch die Lösungswerte der Unbekannten mit großen Nachweiswahrscheinlichkeiten (bzw. $W = 1$) sich zunehmend der exakten Lösung zu nähern und damit “zu verrauschen”. Systematiken im Bereich kleiner Nachweiswahrscheinlichkeit sind daher kaum zu vermeiden. Ohne eine Korrektur sollte dieser Bereich daher bei der Interpretation der Lösung nicht verwendet werden.

Sieht man von diesen durch die Nachweiswahrscheinlichkeit identifizierbaren Bereichen ab, verbleiben über große Bereiche systematische Abweichungen in einer maximalen Größe von 20% (siehe hierzu auch Abschnitt 7.3.3). Die Frage, ob die Ergebnisse auf diese Fehler hin korrigiert werden können, geht einher mit der Abschätzung der systematischen Abweichungen für den (realen) Fall, daß die tatsächliche Lösung nicht bekannt ist. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit diesem Thema.

7.3.3 Abschätzung der statistischen und systematischen Fehler

Bei der Bestimmung des Abbruchkriteriums der Iteration im vorhergehenden Abschnitt waren die tatsächlichen statistischen und systematischen Fehler bekannt. Bei der Anwendung auf reale Messdaten ist dies nicht der Fall. Es bleibt daher zu klären, wie eine Abschätzung dieser Fehler durchgeführt werden kann bzw. wie gut sie ist.

Statistische Fehler

Im Fall der KASCADE-Daten steht nur ein Datensatz zur Verfügung, nämlich das zweidimensionale $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Schauergrößenspektrum. Um den statistischen Fehler der aus ihm gewonnenen primären Energiespektren zu bestimmen, werden aus dem Schauergrößenspektrum künstlich neue Datensätze erzeugt. Hierbei wird das Schauergrößenspektrum als Wahrscheinlichkeitsverteilung angesehen, nach der mit einem Zufallsgenerator ebensoviele neue $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr}$ -Paare erzeugt werden, wie in der Messung vorhanden sind. Durch Wiederholung dieser Prozedur können beliebig/ausreichend viele neue künstliche Datensätze erzeugt werden. Jeder der K Datensätze wird entfaltet und der statistische Fehler σ_i der Lösung X_i wie im Abschnitt zuvor durch die Standardabweichung der $\tilde{X}_{i,k}$ -Verteilung bestimmt:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{X}_{i,k} - \bar{\tilde{X}}_i)^2 \quad (7.11)$$

Die ursprüngliche Datenverteilung ist selbst nur eine Stichprobe aus der theoretisch zu erwartenden Schauergrößenverteilung. Daher bilden die neuen Datensätze die in ihr enthaltenen statistischen Fluktuationen nach, und es ist zu erwarten, daß der hier abgeschätzte statistische Fehler nicht genau mit den statistischen Fehlern übereinstimmt. In Abbildung 7.8 werden für das vorliegende Beispiel (siehe Abb. 7.1) die mit der beschriebenen Methode abgeschätzten Fehler mit den tatsächlichen (siehe vorhergehender Abschnitt) im Fall von Wasserstoff-induzierten (linke Hälfte) und Eisen-induzierten (rechte Hälfte) verglichen. Die Iterationstiefe beträgt $\Delta\chi^2 = 0.0008$.

Man erkennt bis auf den Bereich hoher Energien im Wesentlichen eine sehr gute Übereinstimmung. Am oberen Ende des Spektrums beinhalten die originären Primärspektren nur noch ein oder gar kein Ereignis mehr. Genau in diesen Fällen wird der gewonnene Fehler aufgrund der erwähnten statistischen Schwankungen im ursprünglichen Datensatz stark überschätzt. Diese starke Überschätzung kann schon aufgrund des plötzlichen und starken Anstiegs des Fehlerwertes erkannt werden. Da für Bereiche mit $X_i = 0$ aufgrund der Natur des angewendeten Algorithmus immer $\tilde{X}_i > 0$ folgt, ist es aber beruhigend, daß diese \tilde{X}_i durch die extrem großen Fehler praktisch ausgesondert bzw. als insignifikant erklärt werden.

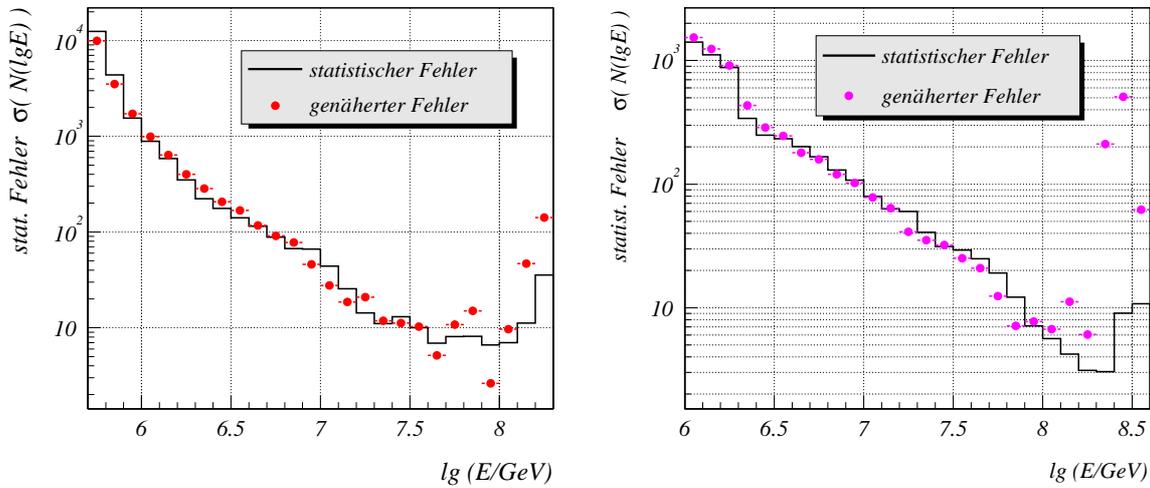


Abbildung 7.8: Vergleich zwischen genähertem und tatsächlichem statistischen Fehler, links für Wasserstoff-induzierte Schauer, rechts für Eisen-induzierte. Die Iterationstiefe beträgt $\Delta\chi^2 = 0.0008$.

Systematische Abweichungen

Um den Wert des WMSE zu berechnen und eine Vorstellung über die Größe systematischer Abweichungen im Vergleich zu den statistischen Unsicherheiten zu erhalten, ist es erforderlich, eine Abschätzung der mittleren systematischen Abweichung durchzuführen. Zur quantitativen Abschätzung dieser Unsicherheiten, die sich aufgrund des angewendeten Algorithmus bzw. damit verbunden dem Iterationsabbruch ergeben, wird folgender Ansatz verwendet:

- Eine entfaltete Näherungslösung, charakterisiert durch den $\Delta\chi^2$ -Wert bei Iterationsabbruch, wird als Vorlage gewählt.
- Durch Verwendung eines Zufallszahlengenerators werden anhand der Vorlage unter Verwendung der Responsematrizen neue "Datensätze" erzeugt. Durch die Wahl des schwachen Abbruchkriteriums ist gewährleistet, daß diese neuen Datensätze dem originalen Datensatz im Rahmen der statistischen Unsicherheiten zumindest ähneln.
- Die Datensätze werden entfaltet und die gewonnenen Ergebnisse \vec{X} werden mit der ursprünglichen Näherungslösung, welche in diesem Zusammenhang die "wahren" Spektren darstellt, verglichen und die mittlere systematische Abweichung \tilde{b}_i der einzelnen Lösungskomponenten als Mittelwert der Differenz $\tilde{X}_i - \hat{X}_i$ bestimmt.
- Durch Variation des Iterationsabbruchs kann die systematische Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe bestimmt werden.

- Durch Wahl einer neuen Vorlage wird das Verfahren wiederholt.

Für jede Vorlage wird der Verlauf des WMSE und von χ_b^2 bestimmt. In den Abbildungen 7.9 und 7.10 sind diese Verläufe für verschiedene Vorlagen und den wahren Verlauf dargestellt. Aus den Verläufen kann der Ort des Iterationsabbruchs bestimmt werden. Der dem Abbruch entsprechende $\Delta\chi^2$ -Wert sollte größer oder gleich dem die Vorlage charakterisierenden $\Delta\chi^2$ -Wert sein. Ist er kleiner, bedeutet dies, daß bei der als Vorlage benutzten Näherungslösung die Iteration zu früh abgebrochen wurde. Die Vorlage weist noch deutliche Unterschiede zur gesuchten Lösung auf, und die systematischen Abweichungen sind nur unzureichend (in der Regel zu klein) bestimmbar. Ist der dem Iterationsabbruch entsprechende $\Delta\chi^2$ -Wert sehr viel größer als der der Vorlage, wird die systematische Unsicherheit in aller Regel überschätzt, da dann die Vorlage schon sehr starke statistische Fluktuationen (sie ist "verrauscht") aufweist, die sich im Vergleich zu den aus der Vorlage entfaltenen Lösungen als systematische Abweichungen äußern.

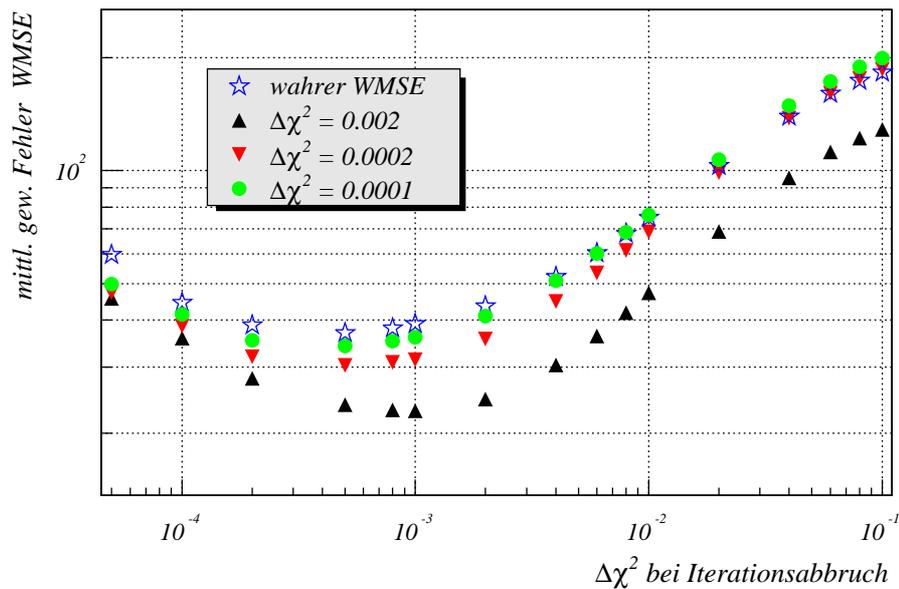


Abbildung 7.9: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe. Verglichen wird der "wahre" Verlauf mit den sich durch verschiedene Schätzungen (charakterisiert durch $\Delta\chi^2$) ergebenden Verläufe (siehe Text).

Der Ausdruck "sehr viel kleiner" bzw. "ungefähr gleich" im Zusammenhang mit dem $\Delta\chi^2$ -Wert der Vorlage und dem den Iterationsabbruch charakterisierenden Wert ist hierbei im Zusammenhang mit der Form bzw. der Breite des Minimums im WMSE-Verlauf zu sehen. Bei einem breiten Minimum wie in Abbildung 7.9 mit dem Minimum bei $\Delta\chi^2 = 0.0005$, wäre selbst eine Vorlage mit $\Delta\chi^2 = 8 \cdot 10^{-5}$ bei Iterationsabbruch noch zur Abschätzung der Systematiken brauchbar.

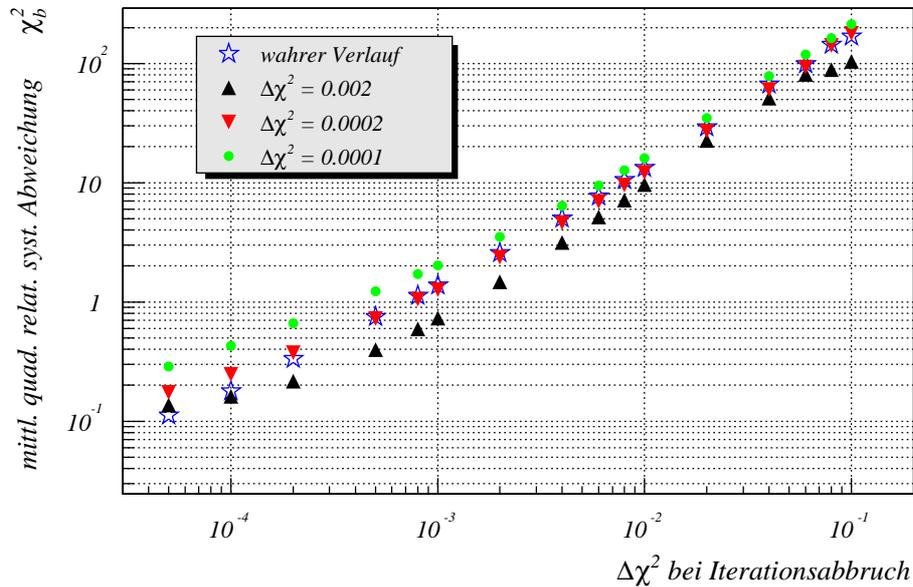


Abbildung 7.10: Verlauf der geschätzten relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren (charakterisiert durch den $\Delta\chi^2$ -Wert beim jeweiligen Iterationsabbruch, siehe Text).

Tatsächlich gelingt es, mit dieser Methode brauchbare Abschätzungen zu erhalten. In Abbildung 7.11 wird als Beispiel der Betrag $|\tilde{b}_i|$ (der Betrag wird aus Gründen der Darstellung benutzt) der Abschätzungen mit den “wahren” Werten $|b_i|$ verglichen, in der linken Hälfte für das Energiespektrum von Wasserstoff, in der rechten Hälfte für das Eisenspektrum. Die Vorlage entspricht hier einer Näherungslösung mit einem Iterationsabbruch bei einer $\chi_{est.}^2$ -Änderung von 0.0001.

Als Ganzes betrachtet werden die Beträge der systematischen Abweichungen recht gut wiedergegeben, sowohl die Größenordnung als auch der Verlauf in Abhängigkeit der Energie werden gut reproduziert. Betrachtet man jedoch die Werte für einzelne Energiewerte, stellt man teilweise signifikante Unterschiede fest, teilweise sogar ein falsches Vorzeichen. Für die Bestimmung des optimalen Abbruchkriteriums spielt dies nur eine untergeordnete Rolle. Im Minimum des WMSE sind statistische und systematische Abweichung ungefähr gleich groß, die Unsicherheit in der Bestimmung der systematischen Abweichungen ist aber im Mittel kleiner als die Abweichung selbst, sodaß sich diese Ungenauigkeit im Vergleich zu den statistischen Fehlern nicht signifikant bemerkbar macht.

In Abbildung 7.12 ist die relative systematische Abweichung für die entfalteten Wasserstoff- und Eisenspektren dargestellt. Als Abszisse wird hierbei nicht die Primärenergie, sondern die Werte X_i der Lösung, also die Anzahl N der Schauer benutzt. Die Kreissymbole entsprechen Ergebnissen mit den “wahren” systematischen Abweichungen, Quadrate bzw. Dreiecke den

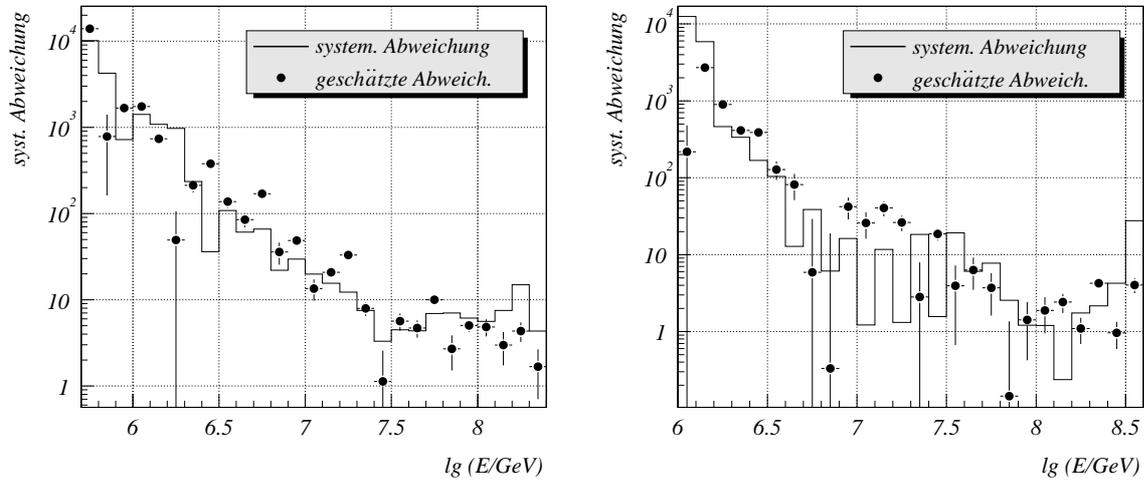


Abbildung 7.11: Vergleich der “wahren” systematischen Abweichungen mit den im Text beschriebenen abgeschätzten Abweichungen; links für das Wasserstoffspektrum, rechts für das Eisenspektrum. Die Iterationstiefe der Vorlagenspektren entspricht $\Delta\chi^2 = 0.0001$.

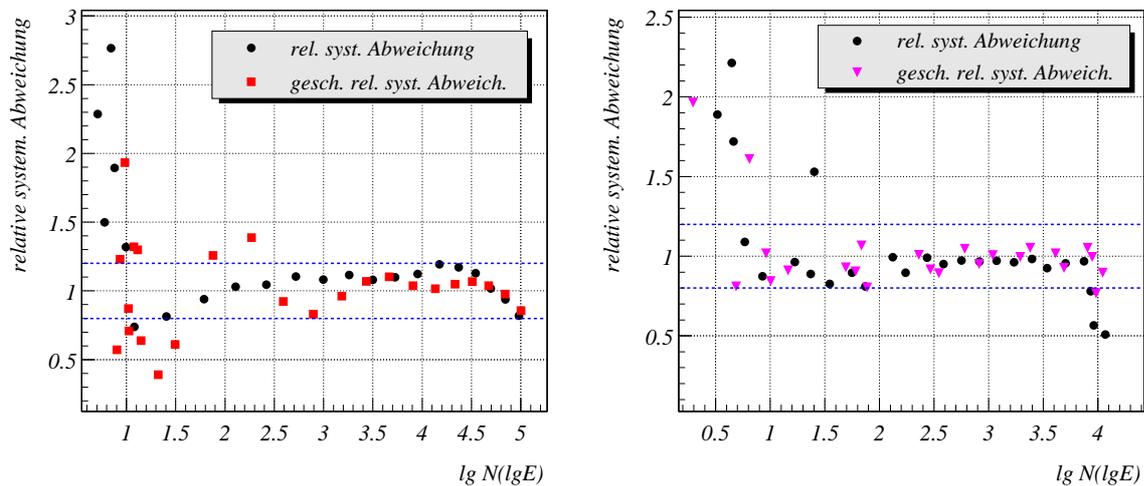


Abbildung 7.12: Vergleich der relativen systematischen Abweichungen für die wahren und die geschätzten Systematiken; links für das Wasserstoffspektrum, rechts für das Eisenspektrum. Die Iterationstiefe der verwendeten Vorlagenspektren entspricht $\Delta\chi^2 = 0.0001$.

Ergebnissen mit geschätzten Werten für die Systematiken. Im Bereich oberhalb von $N = 30$ erkennt man eine große Ähnlichkeit der Verläufe. Insbesondere die Schwankungsbreite bzw. der Wertebereich der relativen Abweichung stimmt sehr gut überein. Der Bereich kleiner Ereigniszahlen ($N < 10$) zeigt sehr große relative Abweichungen, die relative Abweichung beträgt immer mehr als 100%. Da in diesem Bereich die statistischen Fehler aber schon so groß wie die Werte X_i selbst sind (und damit die X_i nicht signifikant), spielt hier die tatsächliche Größe der systematischen Unsicherheit auch keine große Rolle mehr. In diesen Fällen wird für die systematische Unsicherheit ein Wert von 10 Ereignissen angenommen.

Durch den Bereich oberhalb von $N > 30$ läßt sich eine Abschätzung der systematischen Fehler durchführen. Anhand der Schwankungsbreite der relativen Abweichung wird ein symmetrisches Band festgelegt, welches den Wertebereich abdeckt. Dieses Band ist in der Abbildung 7.12 durch die gestrichelten Linien angedeutet. In diesem Fall entspricht es einer relativen systematischen Abweichung von 20%. Hierdurch können für die entfaltenen Spektren absolute systematische Fehler bestimmt werden.

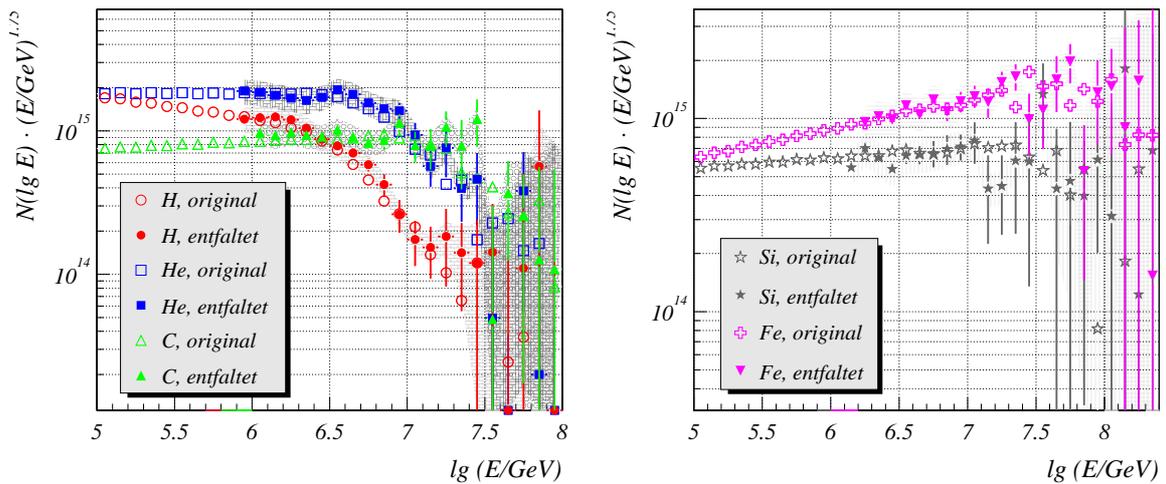


Abbildung 7.13: Vergleich der originären und entfaltenen Primärspektren. Links: Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff; Rechts: Silizium und Eisen. Offene Symbole entsprechen den originären Spektren, geschlossene den Entfalteten. Die Fehlerbalken stellen die geschätzten statistischen Fehler dar, die Bänder die geschätzten systematischen Abweichungen.

Zusammenfassend sind in Abbildung 7.13 die entfaltenen Spektren des in Abschnitt 7.2 vorgestellten Monte-Carlo-Beispiels zusammen mit den originalen Spektren dargestellt. Zusätzlich zu den statistischen Fehlern sind als Bänder die nach dem in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren abgeschätzten systematischen Abweichungen eingezeichnet. Die Lösungspunkte für Primärenergien mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit kleiner als 20% werden hier nicht gezeigt, da in diesem Fall die Lösung nicht vertrauenswürdig bzw. systematisch verfälscht ist

(siehe Abschn. 7.3.2).

Im Rahmen der statistischen und systematischen Fehler werden die originalen Spektren sehr gut reproduziert. Das angewendete Entfaltungsverfahren scheint gut zu funktionieren und für die vorliegende Problemstellung anwendbar zu sein.

7.4 Das Bayes-Verfahren

Als weiteres iteratives Verfahren steht das Bayes-Verfahren zur Verfügung. Auch hier ist nur eine nichtnegative Lösung möglich, was genau der Randbedingung des bestehenden Problems entspricht. Details zum Algorithmus finden sich in Kapitel 6.5.3.

Als angenommene Lösung \vec{X}^0 für den Start der Iteration wird eine Gleichverteilung in $\lg E$ angenommen, d.h. $X_i^0 = \text{const.}$, hier $X_i^0 = 10^7$. Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen hat sich allerdings gezeigt, daß die Ergebnisse des Algorithmus nur sehr wenig von der Wahl der Startvermutung abhängen. Damit der Flußwert als Unbekannte X_i berücksichtigt wird, wird gefordert, daß für die entsprechende Primärenergie $\lg E_i$ mindestens eine Nachweiswahrscheinlichkeit von $5 \cdot 10^{-5}$ besteht. Die erzielten Ergebnisse für Energien mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit größer als 0.05 hängen wie auch zuvor beim Gold-Algorithmus praktisch nicht davon ab, welcher Schwellenwert genau gewählt wird, solange dieser kleiner als ≈ 0.001 ist. Die Berechnung bzw. Abschätzung der statistischen und systematischen Unsicherheiten erfolgt analog zu den in Abschnitt 7.3.3 beschriebenen Verfahren. Zur Bestimmung des Abbruchkriteriums der Iteration wird auch hier wieder der WMSE und die relative systematische Unsicherheit abgeschätzt, anhand derer der Zeitpunkt des Iterationsabbruch wie zuvor abgelesen wird.

In den Abbildungen 7.14 und 7.15 sind analog zu den Abbildungen 7.9 und 7.10 die Verläufe des WMSE und der relativen systematischen Abweichung für verschiedene Vorlagen (zur Abschätzung der Systematik) dargestellt. Die einzelnen Vorlagen sind wieder durch den $\Delta\chi^2$ -Wert beim jeweiligen Iterationsabbruch gekennzeichnet.

Anhand der genannten Abbildungen wird der Iterationsabbruch bei einer Iterationstiefe von $\Delta\chi^2 = 0.0002$ festgelegt. Die sich ergebenden Lösungen für die einzelnen Primärenergiespektren sind in Abbildung 7.16 dargestellt, in der linken Hälfte für die Elemente H, He und C, in der rechten für Si und Fe. Gleichzeitig sind in der Abbildung wieder die originalen Spektren eingetragen, sodaß ein direkter Vergleich zwischen Original und Lösung möglich ist.

Beim Vergleich der Lösungen mit den originalen Spektren stellt man wie im Fall des Gold-Algorithmus wieder starke systematische Abweichungen bei kleinen Nachweiswahrscheinlichkeiten fest, deutlich am unteren Rand des Energiebereiches erkennbar. Auch hier muß als Faustregel für eine vertrauensvolle Lösung eine Nachweiswahrscheinlichkeit W von mindestens 0.2 gefordert werden, für kleinere Werte ist die rekonstruierte Lösung zu unsicher.

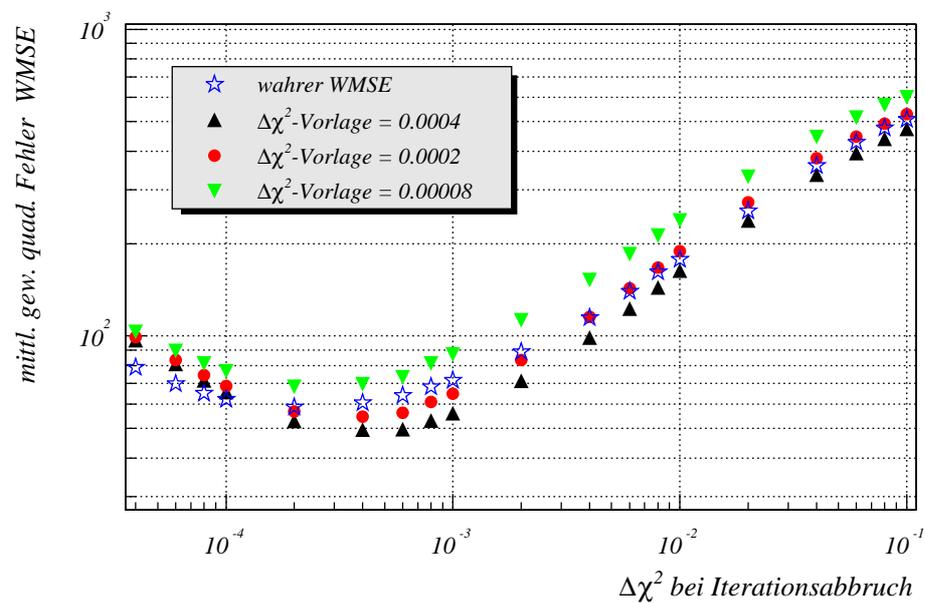


Abbildung 7.14: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe. Verglichen wird der “wahre” Verlauf mit den sich durch verschiedene Schätzungen (charakterisiert durch den $\Delta\chi^2$ -Wert der Vorlage) ergebenden Verläufe.

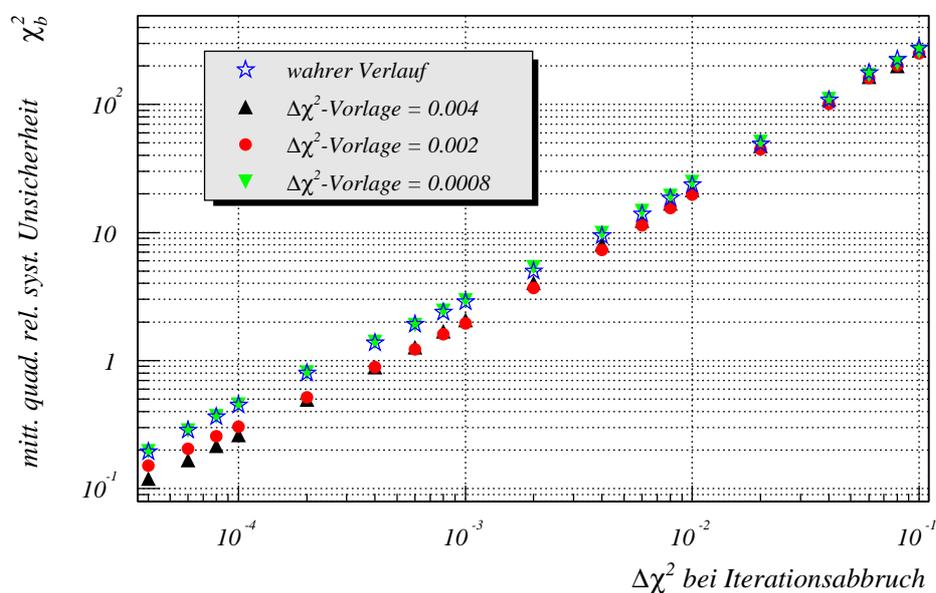


Abbildung 7.15: Verlauf der geschätzten relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren (charakterisiert durch den $\Delta\chi^2$ -Wert der Vorlage) verglichen mit dem wahren Verlauf.

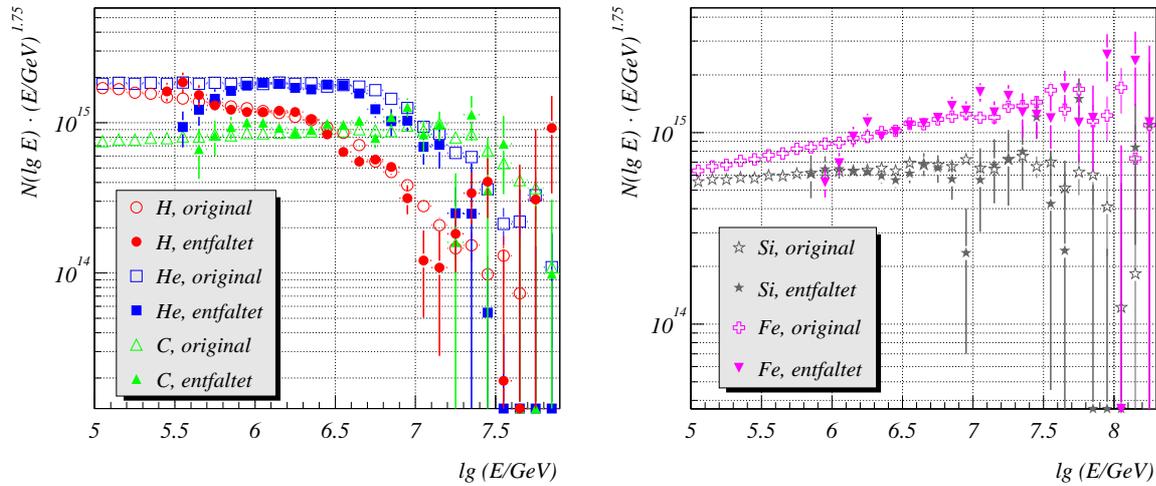


Abbildung 7.16: Vergleich der entfalteten Spektren mit den originalen. Links: die Elemente H, He und C; rechts: die Elemente Si und Fe.

Ferner deuten sich für kleine Flußwerte, insbesondere deutlich bei den Spektren von Silizium und Eisen, im Vergleich zu den Ergebnissen des Gold-Algorithmus etwas größere Streuungen bzw. statistische Unsicherheiten an. Dieses Verhalten wurde auch bei der Untersuchung weiterer Modellspektren beobachtet.

Abgesehen von diesen erkennbaren Abweichungen bzw. Unsicherheiten ergibt sich trotzdem auch hier für alle Primärteilchen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Lösung und originalem Spektrum. Die Qualität der Lösungen ist der des Gold-Algorithmus äquivalent. Ein Vergleich der Abbildungen 7.16 und 7.6 zeigt im Rahmen der statistischen Unsicherheiten eine Übereinstimmung der Lösungen, sodaß beide Verfahren alternativ zueinander eingesetzt werden können. Die Abschätzung der systematischen Fehler aufgrund der angewendeten Methode liefert für den Bayes-Algorithmus die gleiche Größenordnung wie beim Gold-Algorithmus. Auf eine Darstellung der Lösungsspektren mit abgeschätzten systematischen Fehlern analog zu Abbildung 7.13 wurde verzichtet, da praktisch kein Unterschied zu genannter Abbildung besteht.

7.5 Methode der reduzierten Entropie

Alternativ zu den beiden angewandten iterativen Verfahren wird noch die auf Entropie-Überlegungen basierende “reduced cross entropy”-Methode verwendet, siehe Abschnitt 6.4.2. Hierbei handelt es sich um eine Form der regularisierten Entfaltung, bei der numerisch ein

erweitertes χ^2 -Funktional minimiert wird:

$$\chi_{mod}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \sum_{j=1}^M R_{ij} X_j)^2}{\sigma(Y_i)^2} + \tau S(\vec{X}) \quad (7.12)$$

τ ist der Regularisierungsparameter, für den Regularisierungsterm $S(\vec{X})$ gilt bei der verwendeten Methode

$$S(\vec{X}) = \sum_{j=1}^M X_j \ln \frac{X_j}{R_j} \quad (7.13)$$

Hierbei sind die R_j die Werte einer Referenzverteilung $r(x)$ bzw. \vec{R} (nicht mit der Responsematrix \mathbf{R} und deren Elementen R_{ij} zu verwechseln), von der angenommen wird, daß sie einen ähnlichen Verlauf wie die gesuchte Lösung \vec{X} besitzt. Die Verteilung $r(x)$ und die Lösung \vec{X} sind hier als normierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufzufassen.

Als unnormierte Referenzverteilung wird hier ein Potenzgesetz angenommen:

$$r(\lg E) = 8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-1.7 \cdot (\lg E - 5)}, \quad E \text{ in GeV} \quad (7.14)$$

Als Vorfaktor wurde $8 \cdot 10^6$ gewählt, er sollte ungefähr in der gleichen Größenordnung wie der gesuchte Wert liegen. Aufgrund des sehr steil abfallenden Spektrums und dem damit verbundenen sehr großen Wertebereich der X_j wurde das Problem folgendermaßen umformuliert:

$$\begin{aligned} \text{Skalierung der Unbekannten:} \quad \tilde{X}_j &= X_j / R_j \\ \text{Skalierung der Responsematrix:} \quad \tilde{R}_{ij} &= R_{ij} \cdot R_j \end{aligned} \quad (7.15)$$

Für den Regularisierungsterm muß nun auch eine neue Referenzfunktion $\tilde{r}(x)$ bzw. neue Erwartungswerte \tilde{R}_j angenommen werden. Hier ergibt sich einfach

$$\tilde{R}_j = 1 \quad (7.16)$$

Mit einer Normierung des Lösungsvektors \vec{X} ergibt sich als modifiziertes χ^2 -Funktional:

$$\chi_{mod}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \sum_{j=1}^M \tilde{R}_{ij} \tilde{X}_j)^2}{\sigma(Y_i)^2} + \tau \sum_{j=1}^M \frac{\tilde{X}_j}{\sum_{k=1}^M \tilde{X}_k} \ln \frac{\tilde{X}_j}{\sum_{k=1}^M \tilde{X}_k} \quad (7.17)$$

Von der Form her handelt es sich jetzt um die Methode der reduzierten Entropie. Im Folgenden wird daher auch immer von der *Methode der reduzierten Entropie* gesprochen. Die Minimierung dieses Funktionals wird mit Hilfe des MINUIT-Programmpakets [Jam94] in der Form seiner Implementierung in das ROOT-Paket [Bru97] durchgeführt.

Während bei den iterativen Verfahren das Ergebnis von der Iterationstiefe bzw. vom Ort des Iterationsabbruchs abhängt, ist hier das Ergebnis abhängig vom Wert des Regularisierungsparameters τ . Um seinen optimalen Wert zu finden, wird analog zum Auffinden des günstigsten Iterationsabbruchs vorgegangen. Die Rolle des $\Delta\chi^2$ -Wertes übernimmt jetzt der Parameter τ . Für systematisch variierte τ -Werte wird jeweils eine Lösung generiert, diese Lösungen

dienen gleichzeitig als Vorlagen zur Bestimmung systematischer Abweichungen analog zum Vorgehen in Abschnitt 7.3.3. Ebenso werden statistische Unsicherheiten wieder durch eine ‘‘Duplikation’’ der Daten (Abschnitt 7.3.3) bestimmt. Mit den Abschätzungen für systematische und statistische Unsicherheiten ist es möglich, den WMSE und die relative systematische Unsicherheit zu bestimmen. Abbildung 7.17 zeigt den Verlauf des WMSE in Abhängigkeit des Wertes des Regularisierungsparameters. Die einzelnen Verläufe entsprechen dabei den verschiedenen Vorlagen zur Abschätzungen der systematischen Unsicherheiten, jeweils charakterisiert durch den zur Erzeugung der Vorlage benutzten τ -Wert. Man erkennt auch hier ein Minimum im Verlauf, welches den geeigneten Wert des Regularisierungsparameter festlegt. In Abbildung 7.18 ist der Verlauf der relativen systematischen Abweichung ebenfalls in Abhängigkeit des Regularisierungsparameters für verschiedene Vorlagen dargestellt.

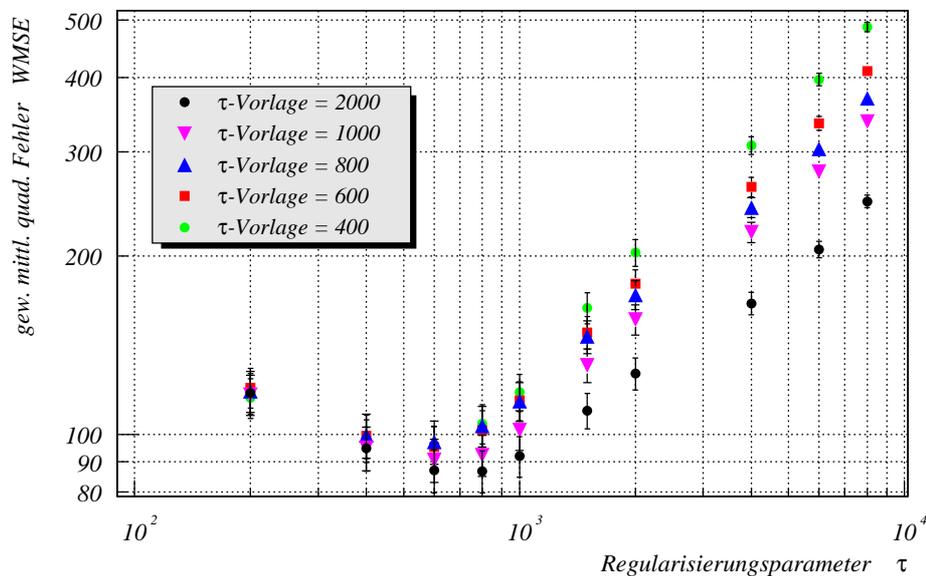


Abbildung 7.17: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit des Regularisierungsparameters τ . Die einzelnen Kurven entsprechen verschiedenen Schätzungen, charakterisiert durch den Wert τ der Vorlage.

Während der Verlauf des WMSE einen Wert von $\tau = 600$ nahelegt, grenzt der Verlauf der relativen systematischen Abweichung τ auf Werte um 1000 ein. Es wurde als Kompromiß für den Regularisierungsparameter ein Wert von $\tau = 800$ gewählt. Tatsächlich unterscheiden sich die Lösungen für das Intervall $400 \leq \tau \leq 1000$ kaum, insbesondere nicht im Rahmen der statistischen Unsicherheiten. Abbildung 7.19 zeigt den Vergleich der so entfaltenen Spektren mit den originalen Primärenergiespektren, in der linken Hälfte für die Elemente H, He und C, in der rechten für Si und Fe.

Auch hier zeigt sich im unteren Energiebereich eine gute Übereinstimmung zwischen Lösung

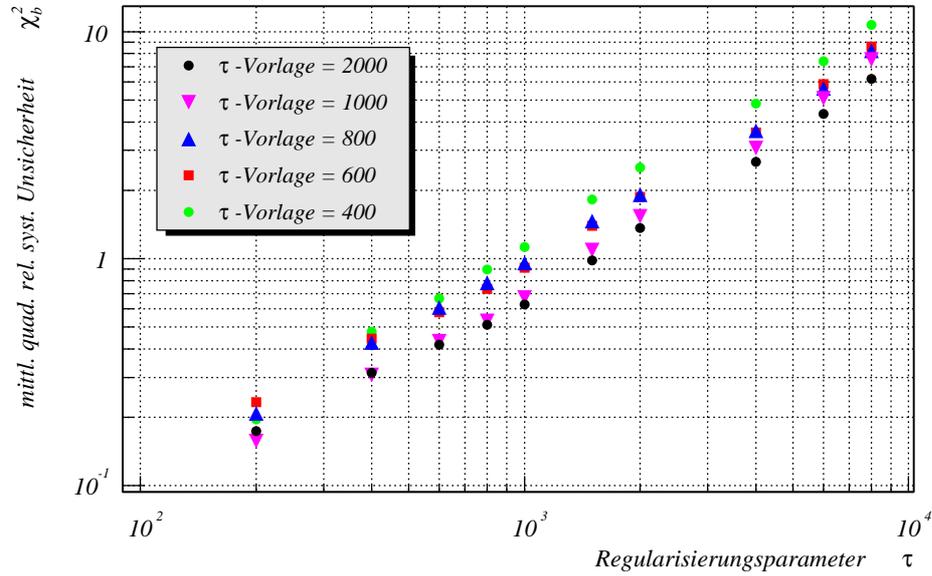


Abbildung 7.18: Verlauf der geschätzten relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit des Regularisierungsparameters. Die einzelnen Kurven entsprechen verschiedenen Schätzungen, charakterisiert durch den τ -Wert der Vorlage.

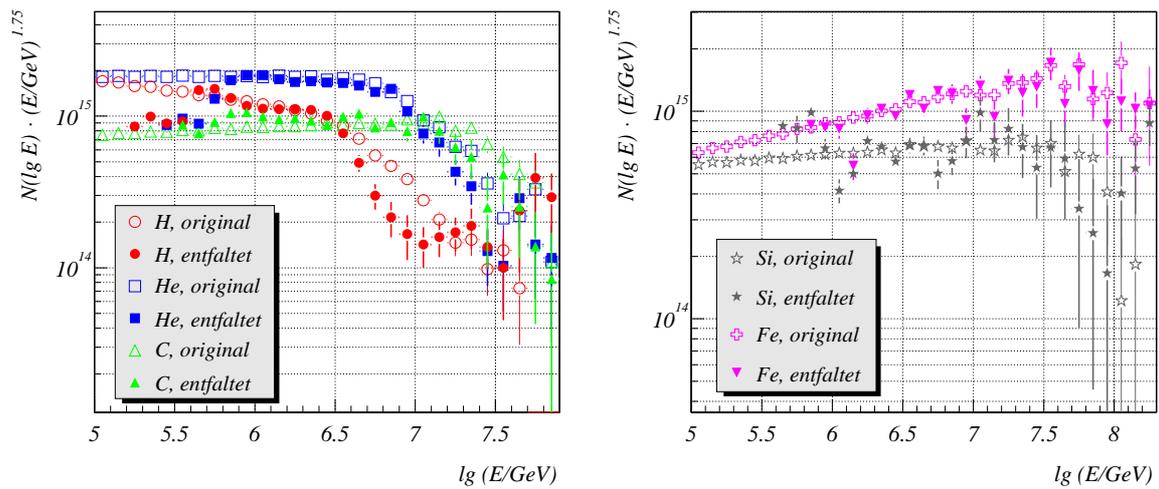


Abbildung 7.19: Vergleich der entfalteten Spektren mit den originalen. Links: die Elemente H, He und C; rechts: die Elemente Si und Fe.

und originalen Spektren. Man erkennt ebenfalls systematische Abweichungen für Energien mit Nachweiswahrscheinlichkeiten kleiner 0.2. Hier gehen die Lösungsspektren in die Anfangsvermutung $r(x)$ über, das Gleiche findet auch am oberen Ende des Energiebereiches statt, wenn die Nachweiswahrscheinlichkeit wieder unter 0.2 sinkt und der Beitrag zum Gesamtspektrum vernachlässigbar klein wird (Ansteigen der letzten Wasserstoffpunkte im linken Teilbild). Auffällig ist die starke systematische Unterschätzung des Flußes nach dem jeweiligen Knie im Spektrum, am stärksten ist dies im Wasserstoffspektrum der Fall. Diese Unterschätzung wird durch die Abschätzung der Systematiken nicht reproduziert. Die Systematikabschätzung sagt wieder eine maximale systematische Abweichung bzw. Unsicherheit von $\pm 20\%$ voraus, also in der gleichen Größe wie zuvor bei den iterativen Verfahren. Auch durch Wahl einer anderen Anfangsvermutung (anderer Index, andere Absolutnormierung, Potenzspektrum mit Knie) oder eines anderen Wertes des Regularisierungsparameters konnte diese Systematik im besten Fall leicht abgeschwächt, jedoch weder beseitigt noch richtig abgeschätzt werden. Obwohl die Ergebnisse der Reduzierten-Entropie-Methode bei niedrigen Energien gute Lösungen und insbesondere auch die Kniepositionen richtig liefern, wird diese Methode bei der Analyse der KASCADE-Daten nur als zusätzlicher Konsistenztest der beiden anderen Methoden benutzt. Unterschiede zum Ergebnis der beiden iterativen Verfahren müssen mit großer Vorsicht interpretiert werden, insbesondere wenn sie nach einer Indexänderung (Knie) im Spektrum auftreten.

Kapitel 8

Analyse der Daten

8.1 QGSJet-Hypothese

8.1.1 Vergleich zwischen Parameterisierungen und Monte Carlo Rechnung

Bevor das gemessene zweidimensionale Schauergößenspektrum der Elektronen- und der Myonenzahl analysiert wird, wird in diesem Abschnitt ein kurzer Vergleich zwischen der Qualität der verwendeten Parameterisierungen und den entsprechenden Monte Carlo Simulationen durchgeführt. Als Referenz dient der allgemeine KASCADE-Simulationsatz, der schon zur Parametrisierung der Rekonstruktionseigenschaften verwendet wurde. Hierbei folgen die Primärenergien der simulierten Schauer einem E^{-2} -Gesetz und fallen isotrop unter Zenitwinkeln zwischen 0° und 40° ein. Als primäre Elemente wurden Wasserstoff, Helium, Kohlenstoff, Silizium und Eisen simuliert. Jeder mit CORSIKA erzeugte Schauer wird dreimal für die Detektorsimulation (CRES) verwendet, die simulierte Detektorantwort wird mit dem gleichen Rekonstruktionsprogramm (KRETA) wie tatsächlich gemessene Daten verarbeitet. Die in diesem Abschnitt diskutierten Simulationen wurden mit CORSIKA, Version 6.018, GHEISHA in der Version des Jahres 2002 und QGSJet (Version von 2001) als Hochenergie-wechselwirkungsmodell durchgeführt.

Abbildung 8.1 zeigt als Datenpunkte die simulierten und rekonstruierten Verteilungen für die Elektronenzahl (links) und die trunkierte Myonenzahl (rechts) jeweils für zwei Intervalle in der komplementären Schauergröße. Dargestellt sind die Ergebnisse sowohl für Wasserstoff- als auch für Eisen-induzierte Schauer. Die beiden Intervalle in der Myonenzahl bzw. Elektronenzahl befinden sich in den entsprechenden Schauergößenspektren einmal vor und einmal nach dem Knie. Als Histogramm überlagert sind die entsprechenden Verteilungen, die sich unter Verwendung der in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Parameterisierungen berechnen lassen. Man erkennt im Rahmen der begrenzten direkten Monte Carlo Statistik eine sehr gute Übereinstimmung.

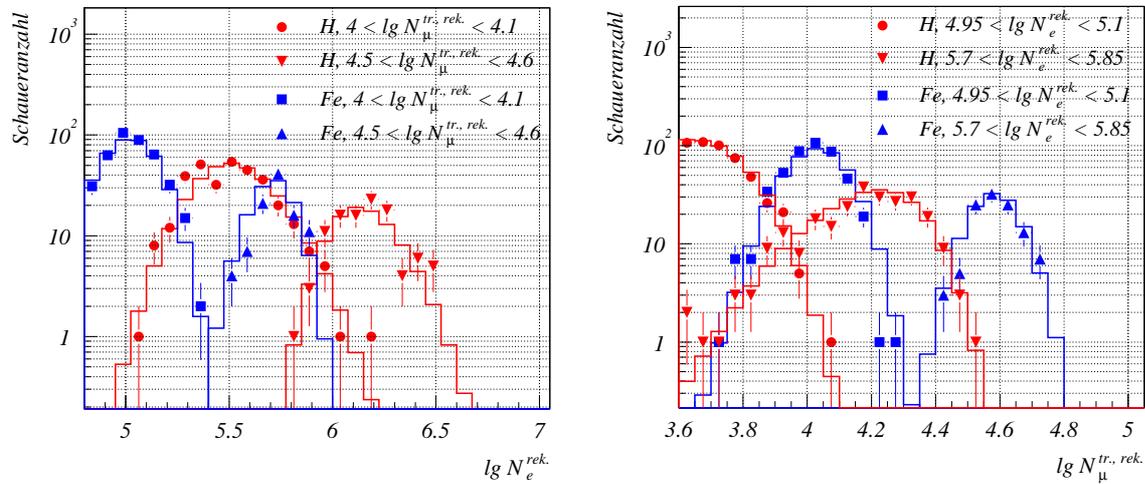


Abbildung 8.1: Vergleich zwischen direkt simulierten und berechneten Verteilungen von $\lg N_e$ (links) und $\lg N_\mu^{tr.}$ (rechts) in Intervallen von $\lg N_\mu^{tr.}$ (links) bzw. $\lg N_e$ (rechts). Die Histogramme entsprechen den berechneten Verteilungen.

Alle durchgeführten Schritte bei den direkten Simulationen (im Folgenden sind mit “direkt” immer die Ergebnisse von vollständigen Simulationen und nicht von Parametrisierungen gemeint) beziehen sich hierbei auf rekonstruierte Schauerparameter, ebenso sind alle Effizienzen berücksichtigt. Insbesondere wurde auf einen rekonstruierten Zenitwinkel zwischen 0° und 18° und eine Lage des rekonstruierten Schauerzentrums innerhalb eines 91 m Kreises um die Mitte von KASCADE geschnitten.

Die gezeigten Verteilungen dienen hier nur als Beispiel. Es wurden ausführliche Untersuchungen durchgeführt, die auch für die anderen betrachteten Primärteilchensorten (He , C , Si) eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Parameterisierung und vorhandenen direkten Monte Carlo Simulationen ergaben.

In Abbildung 8.1 wird weiterhin deutlich, wie die Anzahl der vorhandenen Schauer mit der Primärenergie abnimmt. Der Schnitt $4.5 < \lg N_\mu^{tr.} < 4.6$ (im Folgenden wird der Superskript “rek.” fallengelassen, wenn nicht ausdrücklich betont, handelt es sich immer um rekonstruierte Größen) entspricht in etwa einer Primärenergie von 10 PeV. Die gezeigte $\lg N_e$ -Verteilung enthält bei beiden Primärteilchen ca. 100 Schauer. Hierbei sind mehrfach verwendete Schauer nicht berücksichtigt, sodaß es sich tatsächlich nur um ca. 35 originäre CORSIKA-Schauer handelt.

Abbildung 8.2 zeigt die gemessenen $\lg N_e$ - und $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen (links bzw. rechts) für die in Abb. 8.1 genannten Schnitte. Gleichzeitig sind die in Abbildung 8.2 gezeigten Verteilungen eingezeichnet. Der Simulationssatz müßte circa einen Faktor 100 mehr Schauer enthalten, um die gleiche statistische Aussagekraft wie die gemessenen Luftschauer zu besitzen. Die

Erzeugung eines KASCADE-Simulationssatzes (wie der verwendete) nimmt zur Zeit unter Verwendung von etwa 30 Linux-PCs 5 Monate in Anspruch. Auch unter Verwendung einer größeren Anzahl von schnelleren Rechnern erscheint eine Verbesserung der Simulationsstatistik selbst um einen Faktor 10 als schwer realisierbar.

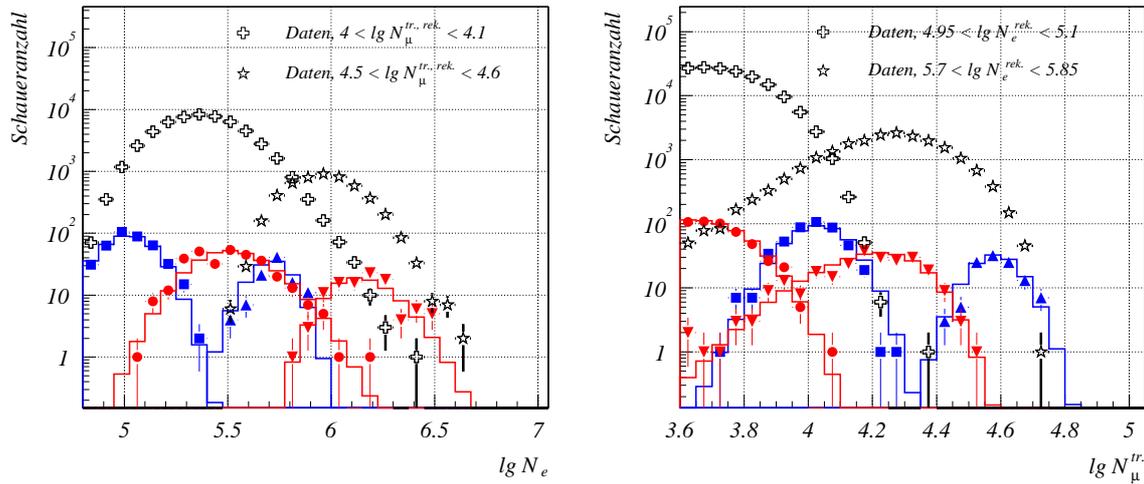


Abbildung 8.2: Gemessene Verteilungen von $\lg N_e$ (links) und $\lg N_\mu^{tr.}$ (rechts) für die in Abb. 8.1 gezeigten Schnitte. Die zusätzlich eingetragenen Verteilungen der simulierten bzw. parameterisierten Schauer sind identisch mit denen in Abb. 8.1.

Interessant im Hinblick auf die Ergebnisse der Entfaltung ist der Vergleich der Schauergrößenverteilungen von Eisen-induzierten (Monte Carlo) Schauern mit den gemessenen Datenverteilungen in Abb. 8.2. Obwohl den Monte-Carlo- bzw. parametrisierten Verteilungen ein E^{-2} -Spektrum und dem wirklichen Eisenspektrum eher ein $E^{-2.7}$ -Spektrum zugrunde liegt, ist schon eine qualitative Aussage über den Anteil der schweren Komponente möglich. Im Fall der $\lg N_\mu^{tr.}$ -Spektren liegen die rechten Flanken der simulierten Verteilungen auf den Flanken der gemessenen Verteilungen, sie scheinen sogar darüber hinaus zu ragen. Für die $\lg N_e$ -Spektren gilt Entsprechendes für die linken Flanken. Aufgrund der relativ eng gewählten $\lg N_e$ - bzw. $\lg N_\mu^{tr.}$ -Schnitte trägt nur ein schmaler Primärenergiebereich zur Verteilung bei, sodaß der Exponent des Energiespektrums nur wenig zur Form der Verteilung beiträgt. Es läßt sich anhand von Abb. 8.2 abschätzen, daß bei Verwendung einer QGSJet-Annahme der Anteil von Eisen als Vertreter der schweren Komponente sehr gering ausfallen wird, da nicht die Möglichkeit besteht, bei einer stärkeren Gewichtung der Eisenschauer als durch die vorhandene Monte Carlo-Statistik vorgegeben die Flanken der gemessenen $\lg N_\mu^{tr.}$ - bzw. $\lg N_e$ -Verteilungen konsistent zu beschreiben. In jedem Fall zeigt sich hier, daß auch die Ausläufer der Schauergrößenverteilungen eine wichtige Rolle spielen. Da durch direkte Simulationsrechnungen nicht eine den Daten entsprechende statistische Basis erzeugt werden kann, erscheint der eingeschlagene Weg über die Parametrisierung der entsprechenden Verteilungen der einzig gangbare.

8.1.2 Fehlerbetrachtung und -abschätzung

Da die rekonstruierten Energiespektren von Wasserstoff und Helium wie schon erwähnt den “wahren” Spektren am ehesten entsprechen (keine “Kontamination” durch Zwischenelemente), spielen ihre Form und insbesondere die Lage der jeweiligen Kniepositionen zueinander eine wichtige Rolle. Nur anhand dieser Elemente kann über eine Ladungszahl- oder Massenzahl-Abhängigkeit der Knieposition im Primärspektrum der einzelnen Primärteilchen entschieden werden. Bei den Spektren der übrigen Repräsentanten ist nicht genau genug abzuschätzen, wie groß der Einfluß der nicht berücksichtigten Primärteilchenarten in Bezug auf die Intensität und die Form der rekonstruierten Flußspektren ist.

Aufgrund dieser Bedeutung der H - und He -Spektren ist es wichtig, sich über die Größe sowohl statistischer als auch systematischer Fehler im Klaren zu sein. Ihre Größe entscheidet darüber, mit welcher Sicherheit Aussagen über die Natur des Knies in den Energiespektren der kosmischen Strahlung gemacht werden können. Im Folgenden wird daher die Größe der einzelnen Fehleranteile immer exemplarisch für die Spektren von Wasserstoff und Helium dargestellt.

Statistische Fehler

Die zu beachtenden statistischen Fehler setzen sich aus zwei Anteilen zusammen:

1. Endliche Anzahl der gemessenen Schauer und die damit durch die Entfaltungsmethode generierten statistischen Unsicherheiten
2. Begrenzte Anzahl der simulierten Luftschaue und damit Unsicherheiten in den bestimmten Parametern der $\lg N_e$ - $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen

Zur Bestimmung des aus der endlichen Zahl gemessener Ereignisse folgenden Fehleranteils wird das in Abschnitt 7.3.3 vorgestellte Verfahren der “Datenduplikation” angewendet.

Die begrenzte Statistik der simulierten Schauer äußert sich bei der Anpassung der parametrischen Funktionen (Kapitel 4) an die $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilung in der Größe der Fehler der zu bestimmenden Parameter. Um eine Abschätzung des Einflusses dieser Unsicherheit auf die Entfaltungsergebnisse zu gewinnen, wurde folgender Ansatz gewählt:

1. Es wird angenommen, daß für jeden Fitparameter der erhaltene Wert der Zentralwert einer Gaussverteilung und sein statistischer Fehler die Breite dieser Verteilung ist.
2. Anhand dieser Verteilung wird mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators ein neuer Wert für den Parameter bestimmt.

3. Für jeden Parameter bei jeder Primärenergie wird dies unabhängig und gleichzeitig durchgeführt. Da hierbei Korrelationen zwischen den Parametern vernachlässigt werden, wird eine eher konservative Abschätzung durchgeführt.
4. Mit Hilfe der neuen Parameterwerte wird die Energieabhängigkeit neu bestimmt.
5. Unter Verwendung dieser Abhängigkeiten werden neue Responsematrizen berechnet, mit denen die Daten dann wieder entfaltet werden.

Dieses Verfahren wird mehrmals angewendet. Da bei jeder Entfaltung eine andere Matrizenkombination verwendet wird, erhält man für jede Unbekannte X_i verschiedene Werte, die eine Häufigkeitsverteilung definieren. Die Breite dieser Verteilung wird dann als statistischer Fehler aufgrund der begrenzten Anzahl von simulierten Schauern angesehen.

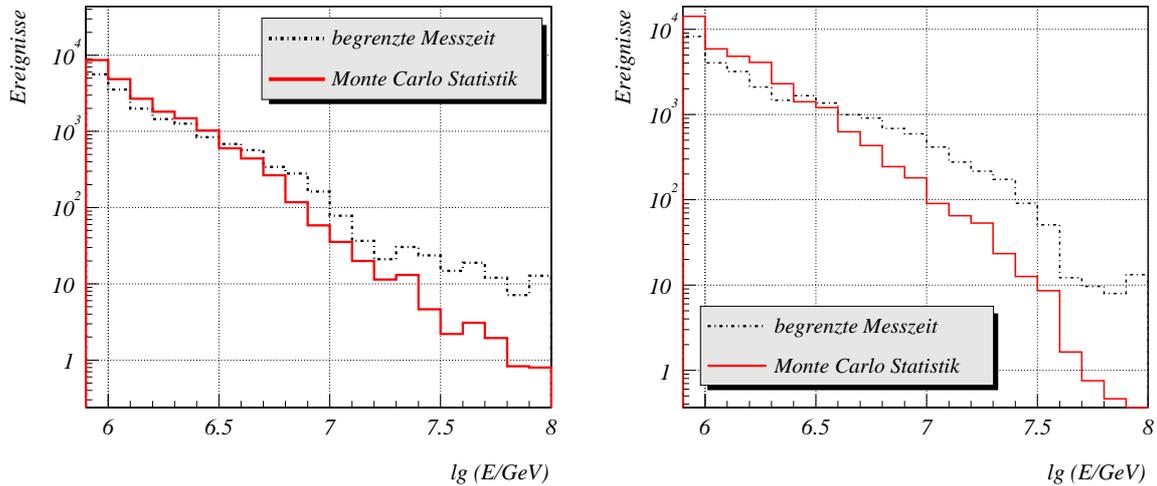


Abbildung 8.3: Vergleich der statistischen Unsicherheiten, einmal verursacht durch die endliche Anzahl der gemessenen Schauern (Meßzeit), zum anderen durch die begrenzte Monte-Carlo-Statistik; links für das Wasserstoffspektrum, rechts für das Heliumspektrum.

In der Abbildung 8.3 sind im Vorgriff auf Abschnitt 8.1.3 exemplarisch in der linken Hälfte für das Wasserstoff- und das Heliumspektrum in der rechten Hälfte die beiden Arten von statistischem Fehler als Histogramme dargestellt. Als Einheit der Fehler wird die Anzahl von Ereignissen, d.h. die Zahl von Schauern der jeweiligen Primärenergie verwendet. Wie zu erwarten, liefert die begrenzte Datenmenge bei kleinen Primärenergien einen geringeren Beitrag zum Fehler als die begrenzte Simulationsstatistik. Bei einer Energie von ungefähr 3 PeV sind beide Arten von statistischer Unsicherheit gleichgroß, bei hohen Energien spielt nur noch die begrenzte Anzahl gemessener Schauern eine Rolle. Bei Energien oberhalb von 10 PeV ist zum einen der Unterschied zwischen der Zahl von gemessenen und simulierten Schauern

kleiner als im Bereich von 1 PeV, zum anderen werden die Schauerfluktuationen bei hohen Energien immer kleiner und die Ausläufer der Verteilungen immer steiler. Mit zunehmender Energie nähern sich die Unsicherheiten in der Bestimmung der simulierten $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung immer mehr der durch die Definition der Zellenbreite begrenzten Auflösung an, wodurch ihre Auswirkungen immer kleiner werden.

Systematische Fehler

Auch im Fall der systematischen Fehler sind zwei Hauptkomponenten zu nennen:

1. Das angewendete Entfaltungsverfahren und damit verbunden die ihm eigenen Systematiken
2. Die Art der verwendeten Parametrisierungen, insbesondere die Ausläufer der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilungen

Der erste Punkt wurde in Abschnitt 7.3.3 im Zusammenhang mit den Tests der angewendeten Verfahren diskutiert. Auch bei der Entfaltung realer Daten ergibt sich eine systematische Unsicherheit von 20% für die erzielten Flußwerte aufgrund der angewendeten Verfahren. Wie schon die Diskussion in Kapitel 7 gezeigt hat, gehen die systematischen Unsicherheiten der verwendeten Verfahren (Gold, Bayes, Entropie) weitgehend in die gleiche Richtung. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der einzelnen Verfahren stellt sich als praktisch nicht signifikant heraus (siehe Abschnitte 8.1.3 und 8.2.2).

Kernstück jeder Entfaltungsanalyse sind die zur Interpretation der Daten nötigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Zu ihrer Bestimmung wurden an simulierte Verteilungen in dieser Arbeit Parametrisierungen angepaßt. Im Rahmen der vorhandenen Monte-Carlo-Statistik geben die angesetzten Parametrisierungen die Schauergrößenverteilungen sehr gut wieder, ihre Form beruht aber auf einer ad-hoc-Annahme und wird daher zwangsläufig von der exakten Form der Verteilung im Fall unendlicher Statistik abweichen. Dies bezieht sich vor allem auf die Ausläufer der Verteilungen, die durch die begrenzte Anzahl von simulierten Luftschauern nur teilweise erfaßbar sind. Die Form dieser Ausläufer ist aber wichtig für die Beschreibung der Regionen mit sehr wenigen Schauern in Abb. 3.9, da die Anzahl an gemessenen Schauern wesentlich größer als die von simulierten ist.

Der unsicherste Punkt in der Beschreibung der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung (siehe Kap. 4) im Hinblick auf Ausläufer der Verteilung ist die $\lg N_e$ -Verteilung. Ihre Form geht in die Bestimmung der $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung und der Korrelationen zwischen den beiden Schauergrößen ein. Der verwendete Ansatz zur Parameterisierung von $\lg N_\mu^{tr}$ und der Korrelationen zwischen den Schauergrößen spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle.

Im Bereich um das Maximum der $\lg N_e$ -Verteilung ist die Simulationsstatistik gut genug,

um praktisch keinen Spielraum für die Form der Verteilung in diesem Bereich zuzulassen, unabhängig von der funktionalen Form der Beschreibung. Im Gegensatz dazu ist die Anzahl simulierter Schauer nicht ausreichend, um den Verlauf der Verteilung hin zu sehr hohen und niedrigen Werten von $\lg N_e$ eindeutig festzulegen. Es läßt sich z.B. nicht entscheiden, ob und ab welchem Wert die Verteilung den Wert Null annimmt. Aufgrund des steil abfallenden Primärenergiespektrums spielen insbesondere die Ausläufer zu hohen Werten von $\lg N_e$ (und durch die Korrelation damit auch zu hohem $\lg N_\mu^{tr}$) hin eine wichtige Rolle. Je nach Stärke dieser Ausläufer werden z.B. mehr oder weniger Schauer höherer Primärenergie durch niederenergetischere Schauer “vorgetäuscht”. Bei der quantitativen Analyse der Schauerdaten muß dieser Anteil bekannt sein.

Um diesen Einfluß zu untersuchen, werden zwei Extremannahmen gemacht, die zur Illustration in Abbildung 8.4 für Proton-induzierte Schauer einer Primärenergie von 0.5 PeV im Vergleich zur verwendeten Parametrisierung dargestellt sind. Im ersten Fall wird angenommen, daß die Simulationen exakt die Breite der Verteilung wiedergeben und es keine weiteren Ausläufer zu höheren bzw. niedrigeren Werten von $\lg N_e$ gibt. Diese Annahme ist in der Abbildung als Modell 2 gekennzeichnet. Modell 2 läßt sich verallgemeinert durch den Ordinatenwert charakterisieren, bei dem das Abschneiden der Verteilung stattfindet.

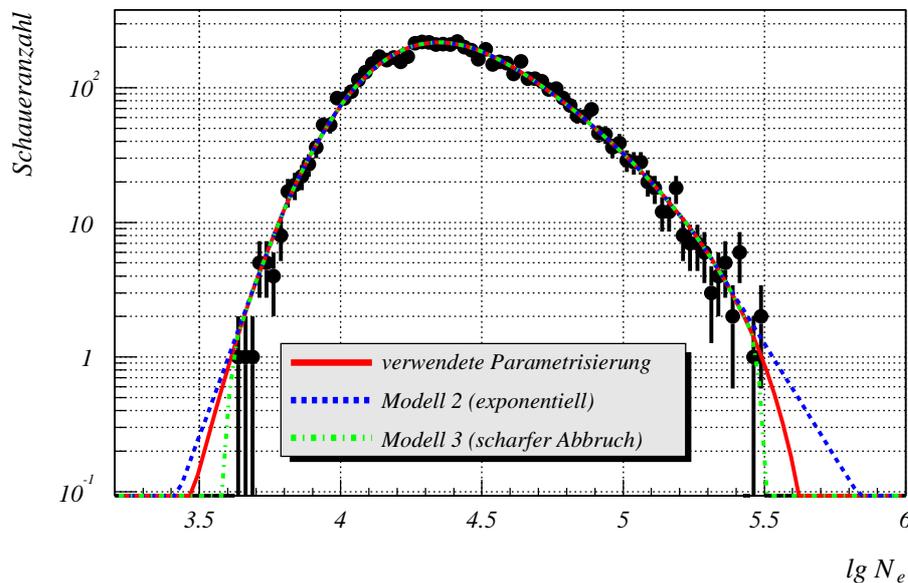


Abbildung 8.4: Simulierte $\lg N_e$ -Verteilung für Proton-induzierte Schauer einer Primärenergie von $5 \cdot 10^{14}$ eV. Eingezeichnet sind die in dieser Arbeit verwendete Parametrisierung sowie die zwei im Text beschriebenen Annahmen zur Abschätzung der systematischen Unsicherheit.

Der zweite Fall entspricht einer Überschätzung der Ausläufer. Obwohl am oberen Ende der Verteilung gerade bei Wasserstoff-induzierten Schauern ein deutlich konkaveres Verhalten im Vergleich zu einem exponentiellen Abfallen festzustellen ist, wird jetzt ein exponentieller Abfall angenommen. Hierbei wird die angenommene Verteilung durch eine Exponentialfunktion stetig differenzierbar nach unten bzw. oben fortgesetzt, sobald der Verteilungswert ein Zehntel des Maximums beträgt. Diese Vorschrift liefert besonders für kleine Primärenergien deutlich überhöhte Ausläufer hin zu großen $\lg N_e$ -Werten. In Abb. 8.4 ist diese Form der Beschreibung als Modell 3 gekennzeichnet. Modell 3 ist durch einen angenommenen Bruchteil des Verteilungsmaximumswerts charakterisiert, ab dem der Übergang zum exponentiellen Abfall stattfindet.

Unter Benutzung der beschriebenen Alternativmodelle werden neue Responsematrizen berechnet und die Entfaltung erneut durchgeführt. Der Einfluß von Modell 2 und Modell 3 geht dabei in jeweils entgegengesetzte Richtungen. Ist die zu Modell 2 gehörige Lösung kleiner als die Referenzlösung (Verwendung der originalen Parametrisierungen), so ist die zu Modell 3 gehörige Lösung größer, und umgekehrt. Die Ergebnisse unter Verwendung von Modell 2 und Modell 3 definieren daher für jedes Primärspektrum ein Band, welches die Lösung bei Verwendung der ursprünglichen Matrizen umschließt. Die Breite dieses Band stellt die systematische Unsicherheit aufgrund der verwendeten Parametrisierungen dar. Es hat sich gezeigt, daß ein stetiger Zusammenhang zwischen dem Maximalbruchteil von Modell 3 und dem Abstand der zugehörigen Lösung von der Referenzlösung besteht. Entsprechendens gilt für Modell 2, hier legt der Abschneidewert den Abstand fest. Da der angenommene Abschneidewert und Maximalbruchteil als konservativ angesehen werden können (Modell 2: es existieren sicherlich noch Schauer mit kleineren bzw. größeren $\lg N_e$ -Werten; Modell 3: die Simulationsstatistik ist bei jeder Energie gut genug, um für den Verlauf zwischen Maximum und einem Zehntel des Maximalwertes der $\lg N_e$ -Verteilung keinen Spielraum in der Beschreibung zuzulassen), erhält man damit auch eine konservative Abschätzung der systematischen Unsicherheit.

In Abbildung 8.5 sind für das Wasserstoff- (links) und das Heliumspektrum (rechts) die systematischen Unsicherheiten aufgrund der verwendeten Entfaltungsmethode (Gold-Algorithmus) und der verwendeten Parametrisierung dargestellt. Für den Vergleich wurde als Einheit des Fehlers wiederum die Anzahl von Ereignissen bzw. Schauern gewählt. Man erkennt, daß bei kleinen Energien beide Arten der systematischen Unsicherheit etwa gleich groß sind. Mit zunehmender Energie nimmt aber die Bedeutung der verwendeten Form der Parametrisierungen ab, bei den höchsten Energien dominiert eindeutig die Art der Entfaltungsmethode. Aufgrund der steil abfallenden primären Energiespektren wird die Zahl der gemessenen Schauer mit zunehmender Energie immer kleiner. Damit verbunden spielen die Ränder der Schauerfluktuationsverteilungen eine immer kleinere Rolle, da diese Ausläufer durch die geringere Anzahl von Schauern immer weniger "ausgeleuchtet" werden. Im Extremfall sehr hoher Energien wird nur noch der Zentralbereich um das Maximum der Verteilungen zur Beschreibung der Daten benötigt.

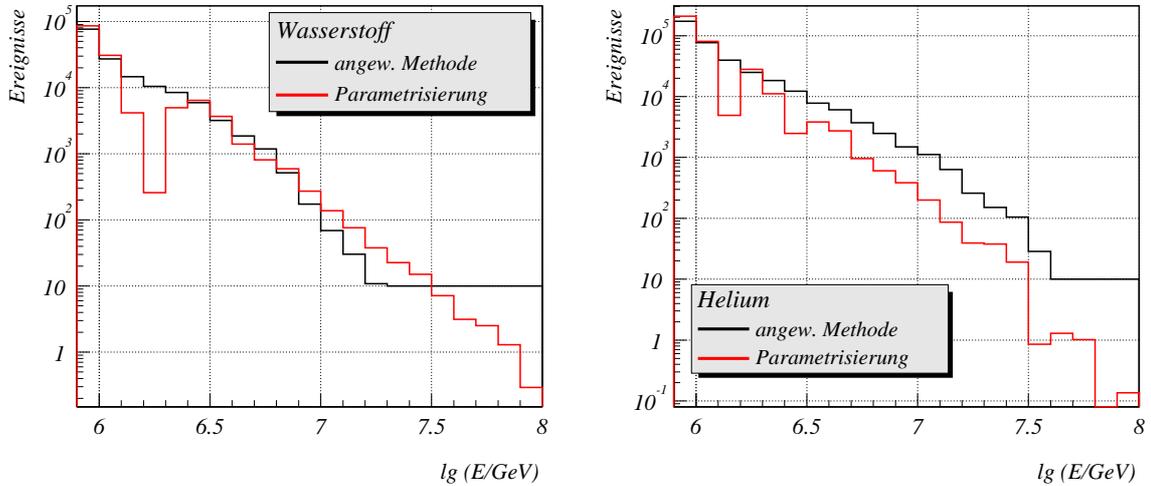


Abbildung 8.5: Vergleich der abgeschätzten systematischen Unsicherheiten aufgrund der verwendeten Entfaltungsmethode und der Unsicherheit der verwendeten Parametrisierung, links für das Wasserstoffspektrum, rechts für das Heliumspektrum.

8.1.3 Ergebnisse

Vergleich der Ergebnisse verschiedener Entfaltungsmethoden

Die Entfaltung der Ergebnisse unter der Annahme des QGSJet-Modells und der entsprechenden Responsematrizen erfolgt mit dem Gold-Algorithmus, der Bayes-Methode und dem Prinzip der reduzierten Entropie. In den Abbildungen 8.6 und 8.7 sind die resultierenden Spektren für die angenommenen fünf Primärteilchenarten H, He, C, Si und Fe dargestellt. Als geschlossene Symbole sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, als offene Symbole die Ergebnisse der zwei anderen Entfaltungsmethoden eingetragen. Die Fehlerbalken stellen den gesamten statistischen Fehler (Meßzeit und Monte-Carlo-Statistik) unter Verwendung des Gold-Algorithmus dar, aus Gründen der Übersichtlichkeit sind für die Ergebnisse der beiden anderen Methoden keine Fehler dargestellt.

Man erkennt, daß zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Entfaltungsmethoden praktisch kein bzw. kein signifikanter Unterschied besteht. Im Folgenden werden daher immer die Ergebnisse des Gold-Algorithmus gezeigt und keine Klassifizierung mehr bzgl. der angewendeten Entfaltungsmethode durchgeführt. Die zu den einzelnen Entfaltungsmethoden gehörenden Verläufe des WMSE und χ_b^2 zum Auffinden des Iterationsabbruchs bzw. Regularisierungsparameters sind in Anhang B zu finden. Auf die Eigenschaften der Lösung, insbesondere den Verlauf des Energiespektrum von Eisen, wird im nächsten Unterabschnitt eingegangen. Der Vollständigkeit halber ist in Abbildung 8.8 das totale Primärenergiespektrum (Summenspektrum aus den einzelnen Komponenten) dargestellt. Aufgrund der vergleichsweise hohen

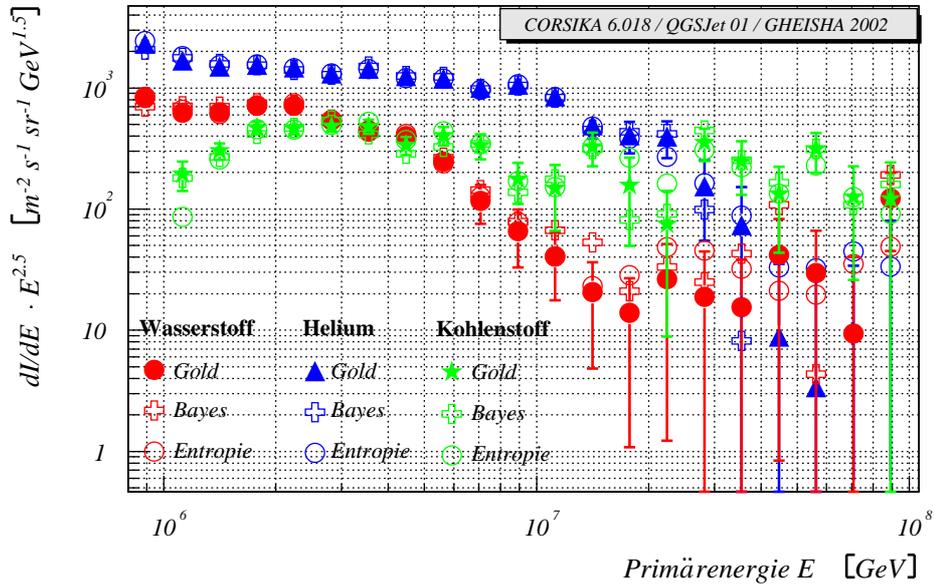


Abbildung 8.6: Entfaltete Spektren für Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff. Dargestellt sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, der Bayes-Entfaltung und des Prinzips der reduzierten Entropie.

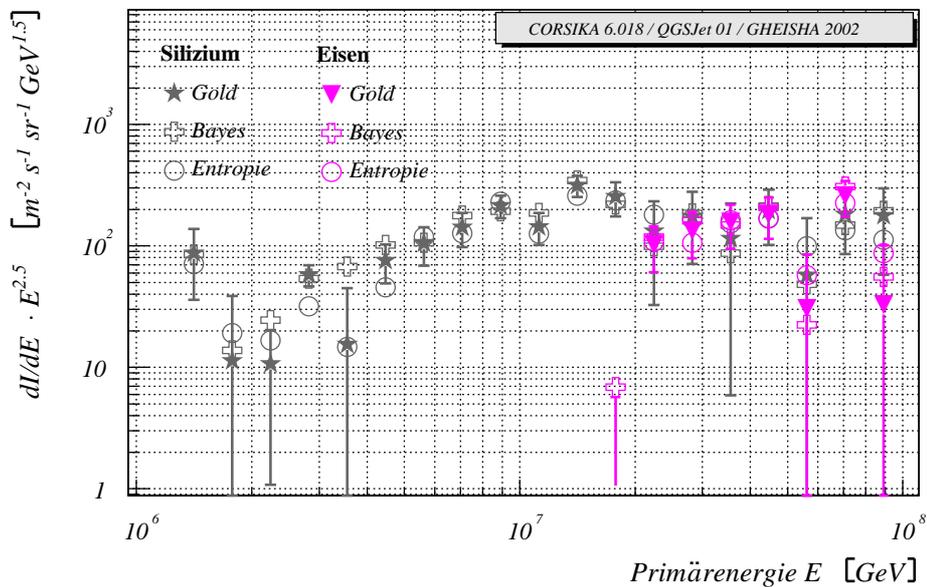
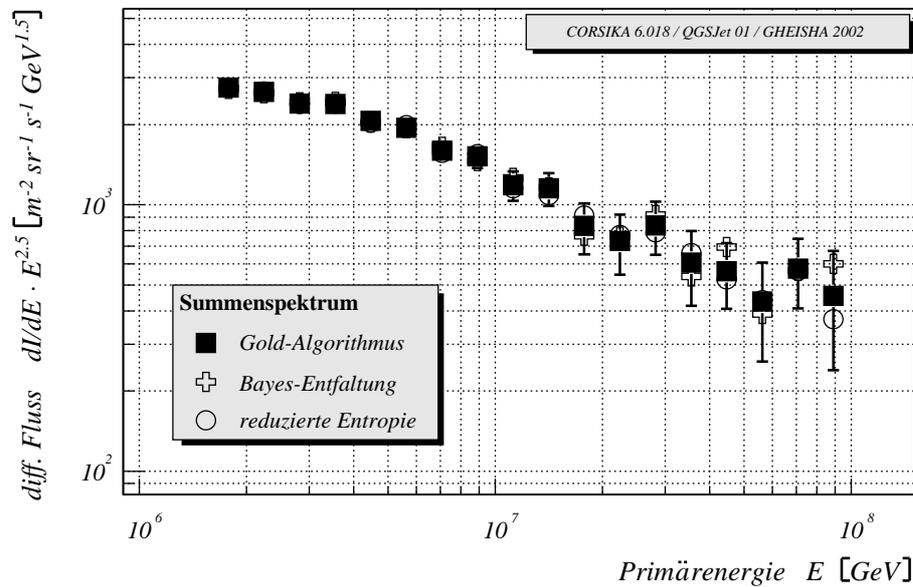


Abbildung 8.7: Entfaltete Spektren für Silizium und Eisen. Dargestellt sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, der Bayes-Entfaltung und des Prinzips der reduzierten Entropie.

Schwelle für das Eisenspektrum ($\lg E > 6.2$) beginnt das Summenspektrum erst ab einer Energie von 1.78 PeV.



Abbildungung 8.8: Entfaltetes totales Primärenergiespektrum. Dargestellt sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, der Bayes-Entfaltung und des Prinzips der reduzierten Entropie.

Diskussion der entfalteten Energiespektren

Die Abbildungen 8.9 und 8.10 zeigen wiederum die Spektren der einzelnen Primärteilchenarten. Diesmal sind nur die Ergebnisse des Gold-Algorithmus dargestellt. Die eingezeichneten Bänder geben die systematische Unsicherheit (Entfaltungsmethode und Parametrisierung) wieder. Am größten sind die systematischen Unsicherheiten sowohl bei kleinen Energien, als auch bei kleinen Flußwerten. Ursache für Ersteres sind die großen Fluktuationen der Schauergrößen bei geringen Energien, die damit Systematiken aufgrund der gewählten Parametrisierungsform am stärksten ausgesetzt sind. Dies zeigt sich auch im Wasserstoffspektrum, da Proton-induzierte Schauer die größten Schauerfluktuationen unter den betrachteten Primärteilchen besitzen.

In Abbildung 8.11 ist das aus den einzelnen Primärspektren resultierende totale Primärenergiespektrum mit seiner systematischen Unsicherheit dargestellt. Die systematische Unsicherheit ist kleiner als die Summe der Beträge der Einzelsystematiken. Ursache hierfür ist die Tatsache, daß die systematischen Abweichungen der einzelnen Primärspektren nicht unabhängig voneinander sind. Wird z.B. das Wasserstoffspektrum als Ganzes zu höheren Flußwerten

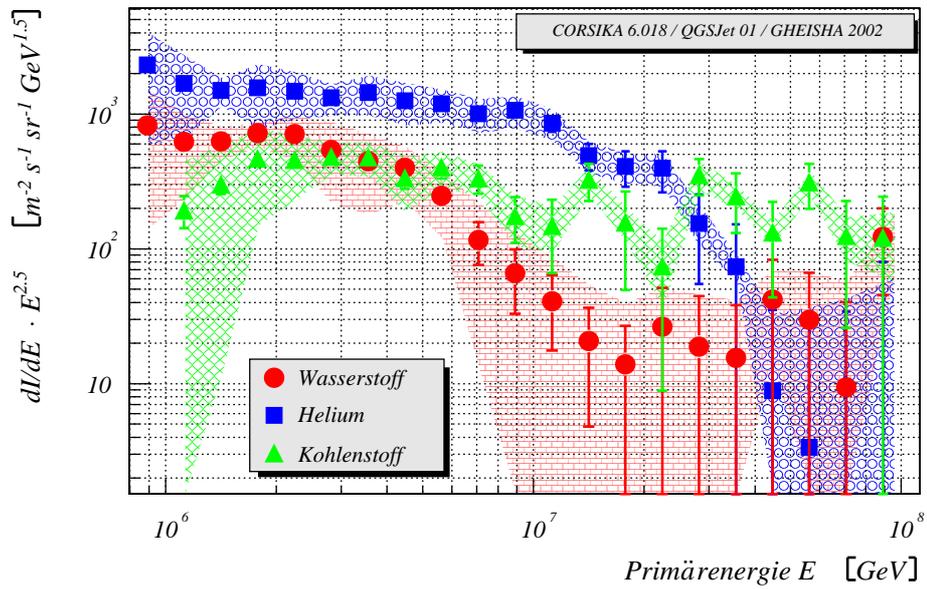


Abbildung 8.9: Flußspektrn von Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff. Die eingezeichneten Bänder geben die gesamte systematische Unsicherheit wieder, die Fehlerbalken den gesamten statistischen Fehler.

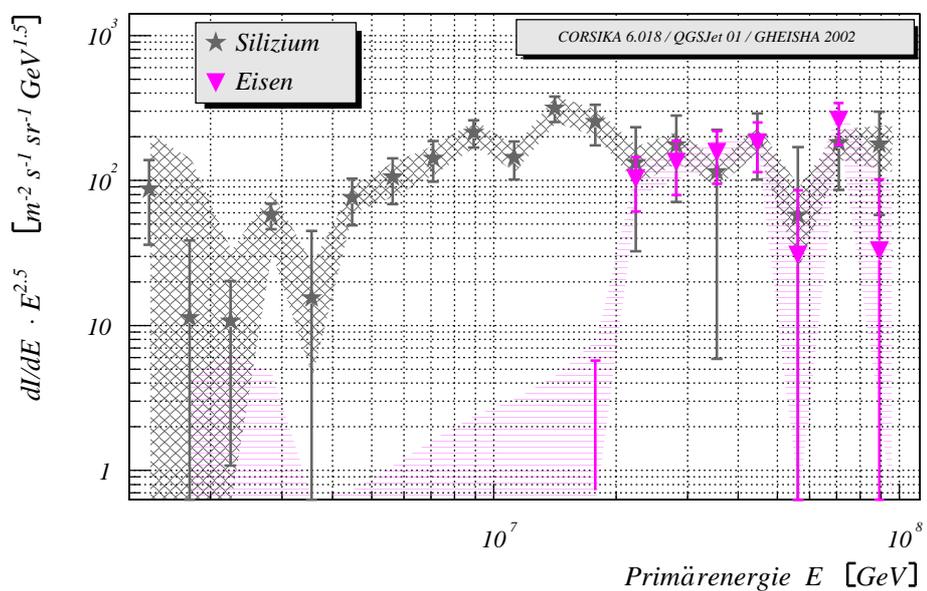


Abbildung 8.10: Flußspektrn von Silizium und Eisen. Die eingezeichneten Bänder geben die gesamte systematische Unsicherheit wieder, die Fehlerbalken den gesamten statistischen Fehler.

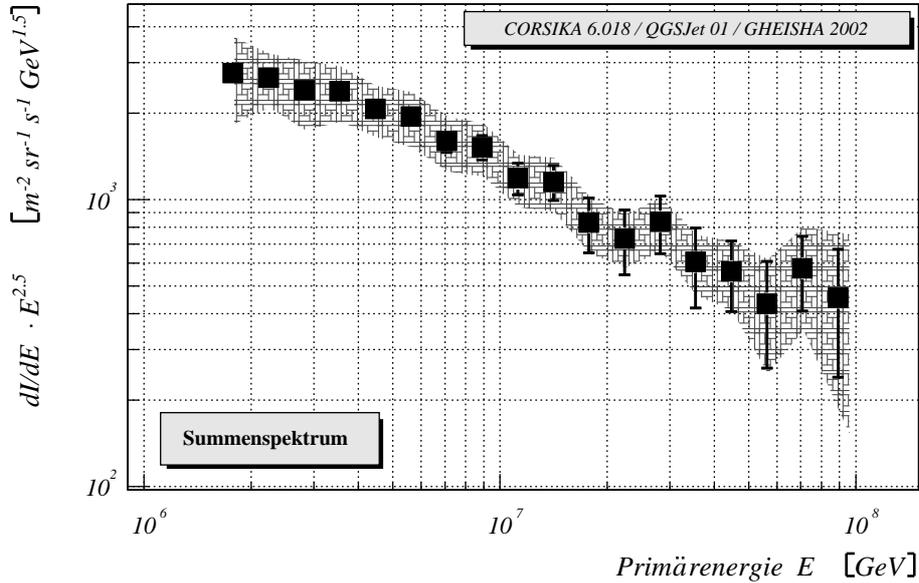


Abbildung 8.11: Resultierendes totales Energieflußspektrum unter QGSJet-Hypothese. Das eingezeichnete Band gibt die systematische Unsicherheit wieder.

verschoben, so wird das Heliumspektrum zu geringeren Flußwerten hin verschoben. In der Summe heben sich die Systematiken teilweise auf. Die Gesamtzahl der gemessenen Schauer grenzt den Gesamtfluß im Energiespektrum stark ein, es können sich höchstens die Verhältnisse der einzelnen Primärteilchenspektren zueinander verschieben.

Die auffälligsten Eigenschaften der Lösung sind die Knie-Strukturen im Wasserstoff- und Heliumspektrum, sowie das Fehlen von Eisen bei kleinen Energien. Die Knie-Strukturen im Wasserstoff- und Heliumspektrum haben zur Folge, daß die Zusammensetzung der Strahlung oberhalb von ≈ 5 PeV immer schwerer wird. Die rekonstruierten Ereigniszahlen von Wasserstoff oberhalb von 20 PeV sind mit Null verträglich, das Gleiche gilt für Helium oberhalb von ca. 50 PeV. Eine genauere Diskussion der Lage der jeweiligen Kniepositionen findet in Abschnitt 8.3 statt. Vergleicht man die Einzelspektren mit dem totalen Flußspektrum (Abb. 8.11), zeigt sich, daß das Knie im Summenspektrum durch das “Abknicken” des Wasserstoff- und des Heliumspektrums verursacht wird. Auch hier findet die Diskussion des Knies in Abschnitt 8.3 statt.

Die hierarchische Anordnung der Kniepositionen im Wasserstoff- und Heliumspektrum würde auch ein Knie im Kohlenstoffspektrum erwartet lassen. Setzt man eine Abhängigkeit der Knieposition von der Ladungszahl voraus, sollte das Kohlenstoffknie im günstigsten Fall ($Z = 6$) bei ungefähr 30 PeV sichtbar werden. Da aber Kohlenstoff mindestens die gesamte *CNO*-Gruppe repräsentiert, wäre ebenso ein Knie in der Gegend von 40 PeV denkbar. Tatsächlich ist im Kohlenstoffspektrum kein Knie erkennbar. Die statistische Aussagekraft der entfalteten Flußwerte in bzw. oberhalb des genannten Energiebereichs ist allerdings nicht groß genug,

um ein Knie sicher ausschliessen zu können.

Im Bereich unterhalb von $2 \cdot 10^{16}$ eV ist kein Eisenanteil vorhanden. Gleichzeitig entspricht dieser Energiebereich dem unteren Teil der Eisen-Kante, in dem sich die größten Abweichungen zu den Daten finden (siehe nächster Absatz und Abb. 8.12). Erst oberhalb von 20 PeV findet sich plötzlich ein Eisenfluß. Dieses Ergebnis ist im Hinblick auf Resultate direkter Messungen (vgl. Abb. 1.3) eher verwunderlich und erscheint unglaubwürdig. Die Ursache für dieses Verhalten läßt sich im Vergleich durch Vorwärtsfaltung gewonnener und gemessener Daten finden.

Neben den erhaltenen Flußspektren der einzelnen Primärteilchen ist natürlich die Qualität der Lösung von Interesse. Die Beschreibung der gemessenen $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Häufigkeitsverteilung durch eine Vorwärtsfaltung der Lösung ist wenig befriedigend. Als Ganzes betrachtet entspricht der Vergleich zwischen gemessenen und vorwärtsgefalteten (aus der Lösung rekonstruierte) Daten einem χ^2 pro Freiheitsgrad von 2.38. Bei genauerer Inspektion der "rekonstruierten" Daten, stellt man fest, daß ihre Abweichungen von den gemessenen Daten nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern bevorzugt in bestimmten Regionen des Datenbereichs auftreten.

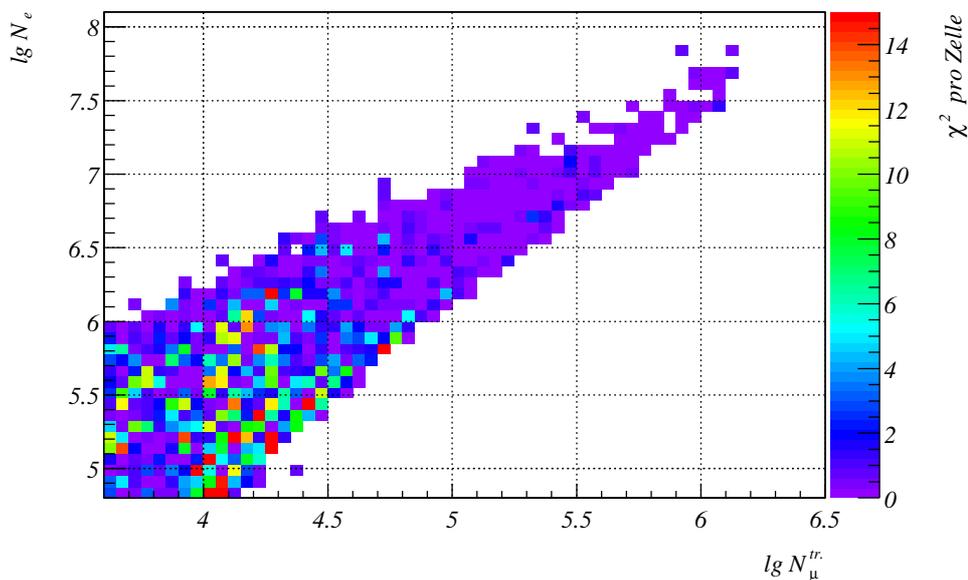


Abbildung 8.12: Verteilung der Abweichungen (χ_i^2) zwischen gemessenen Daten und durch Vorwärtsfaltung der Lösung rekonstruierter Daten.

Abbildung 8.12 zeigt farblich kodiert die Verteilung der Abweichungen $\chi_i^2 = (N_{mess} - N_{rek})^2 / \sigma^2$, wobei N_{mess} die Zahl der gemessenen Schauer innerhalb einer Datenzelle und N_{rek} die durch Vorwärtsfaltung der Lösung entsprechende "rekonstruierte" Anzahl von Schauern

ist. σ^2 ist der geschätzte statistische Fehler der Meßdaten. Aus Übersichtsgründen wurde in der Darstellung eine Begrenzung des Maximalwerts auf 15 durchgeführt. Man erkennt eine gute Beschreibung im Bereich großer Schauergrößen, dagegen findet man zum Teil sehr große Abweichungen im Bereich kleiner Elektronen- und Myonenzahlen in der Umgebung des Knies. Diese Abweichungen treten insbesondere am in der Darstellung der Abbildung rechten Rand des Datenbereichs, der *Eisen-Kante*, bei kleinen Schauergrößen auf. In diesem Bereich befinden sich Schauer, die von schweren Primärteilchen ausgelöst wurden, hierbei wird die Berandung des Datenbereichs durch Eisen-induzierte Schauer verursacht. Tatsächlich werden in diesem Bereich durch die Lösung mehr Ereignisse erzeugt, als in den gemessenen Daten vorhanden sind.

Die Struktur dieser gezeigten χ^2 -Ebene hängt, wie im Folgenden erläutert wird, stark mit den Eigenschaften der Lösungen zusammen.

In den Abbildungen 8.13 und 8.14 sind als Beispiele die $\lg N_e$ -Verteilungen für zwei Schnitte in $\lg N_\mu^{tr.}$ bzw. die $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilung für zwei Schnitte in $\lg N_e$ dargestellt. Die Schnitte zeigen jeweils einmal einem Bereich am Knie sowie oberhalb des Knies in den entsprechenden eindimensionalen Schauergrößenspektren.

Im Fall der Schnitte $4.5 < \lg N_\mu^{tr.} < 4.6$ und $5.7 < \lg N_e < 5.85$ (obere Teilbilder) erkennt man, daß die gemessenen Verteilungen (dargestellt durch Symbole) ohne einen Eisen-Anteil beschrieben werden können. Als schwerstes Element ist Silizium zulässig, wäre Eisen signifikant vorhanden, würde die entsprechende Verteilung Ereignisse jenseits des gemessenen Datenbereichs liefern. Bei genauerer Inspektion stellt man fest, daß am linken bzw. rechten Rand der jeweiligen Schauergrößenverteilung sogar durch den Silizium-Anteil ein leichter Überschuß verursacht wird. Dies ist die Ursache für die großen Abweichungen an der Eisen-Kante in Abbildung 8.12. Um die Daten näherungsweise zu beschreiben, muß der Eisen-Anteil verschwinden.

Bei Energien jenseits des Knies sieht die Situation anders aus. Wie in den unteren Teilbildern ($4.85 < \lg N_\mu^{tr.} < 4.95$ und $6.15 < \lg N_e < 6.3$) erkennbar ist, werden jetzt alle 5 Primärteilchensorten benötigt, um die gemessene Datenverteilung zu beschreiben. Am linken bzw. rechten Rand der Verteilung ist wieder Raum für einen Eisen-Anteil. Dies ist die Ursache für das plötzliche Auftreten eines Eisenflusses oberhalb von 20 PeV.

Anhand des Vergleichs zwischen gemessenen und durch Vorwärtsfaltung gewonnener Schauergrößenverteilungen im Bereich unterhalb des Knies bzw. am Knie könnte man den Eindruck gewinnen, eine Beschreibung des gemessenen $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr.}$ -Schauergrößenspektrums sei auch ohne Eisen mit nur 4 primären Komponenten (H, He, C, Si) möglich. Führt man mit diesem Ansatz eine Analyse durch, erhält man jedoch eine noch schlechtere Lösung. In Abbildung 8.15 ist die Verteilung der Abweichungen χ_i^2 zwischen gemessenen Daten und der vorwärtsgefalteten Lösung unter Annahme der 4 Komponenten dargestellt.

Insgesamt erhält man einen größeren χ^2 -Wert pro Freiheitsgrad (≈ 2.9) als im Fall von

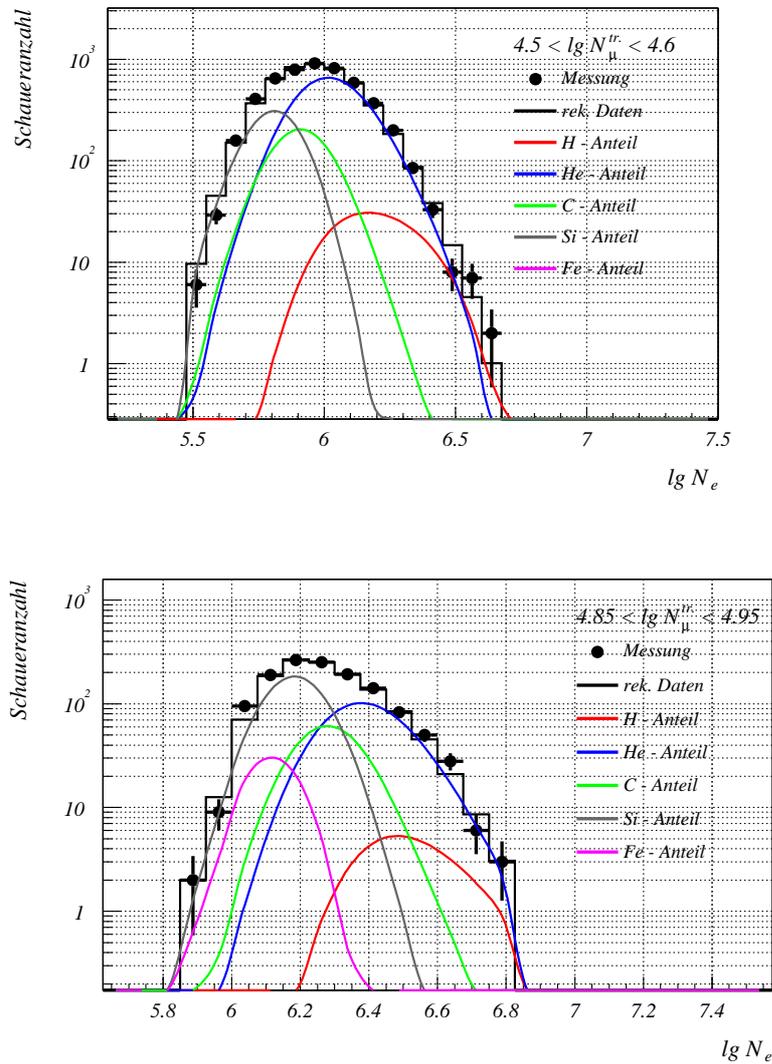


Abbildung 8.13: Vergleich der Häufigkeitsverteilungen gemessener Schauer mit den durch die Entfaltung rekonstruierten Schauerverteilungen für verschiedene Schnitte in der trunkierten Myonzahl.

5 Komponenten. Ausserdem zeigt sich im unteren Bereich des zweidimensionalen Schauergrössenspektrums keine Verbesserung (d.h. die Annahme von Eisen hat im Fall von 5 primären Komponenten die Lösung nicht negativ beeinflusst), dafür erkennt man jetzt im oberen Datenbereich an der Eisen-Kante größere Abweichungen. Diese werden deutlich erkennbar, wenn man wieder die $\lg N_e$ - bzw. $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilungen für Schnitte in der komplementären Schauergrösse betrachtet. In Abbildung 8.16 sind die gemessenen Datenverteilungen aus den unteren Teilbildern der Abbildungen 8.13 und 8.14 dargestellt, diesmal verglichen mit der Lösung aus der Beschreibung mit den vier Komponenten.

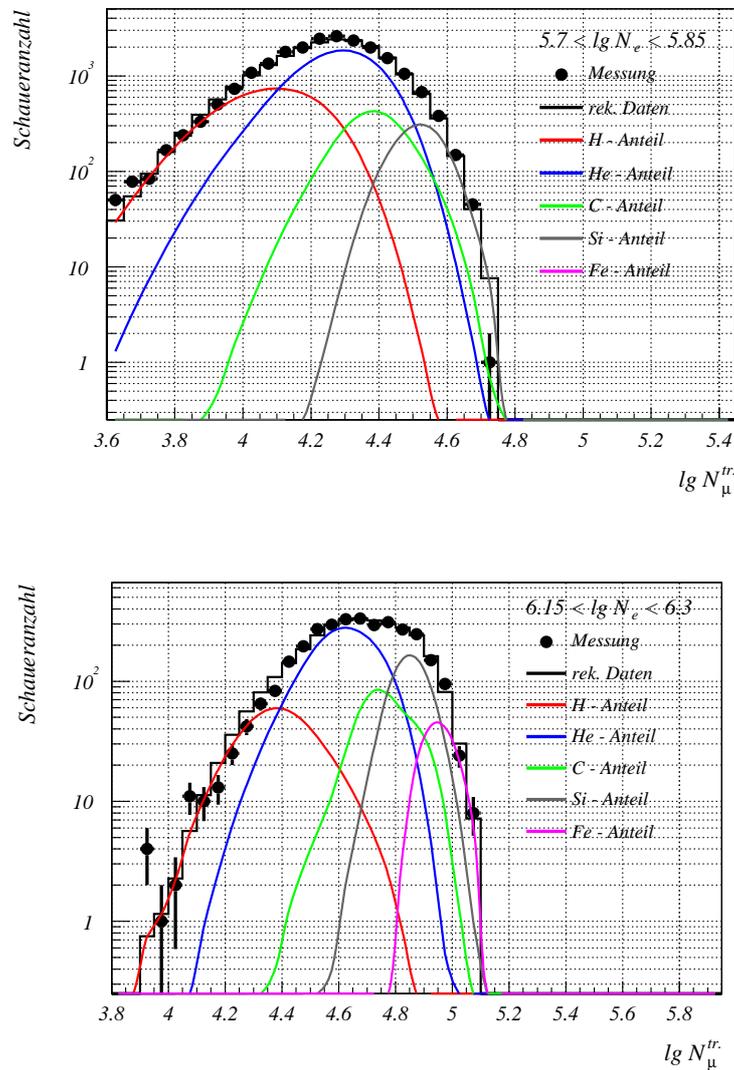


Abbildung 8.14: Vergleich der Häufigkeitsverteilungen gemessener Schauer mit den durch die Entfaltung rekonstruierten Schauerverteilungen für verschiedene Schnitte in der Elektronenzahl.

Im Vergleich zu den Abbildungen 8.13 und 8.14 (unten) stellt man eine erkennbar schlechtere Beschreibung des linken bzw. rechten Randes der Verteilung fest. Dies zeigt sich z.B. auch bei dem χ^2 -Vergleich zwischen gemessener und durch Vorwärtsfaltung rekonstruierter Verteilung. Im Fall der $\lg N_{\mu}^{tr}$ -Verteilung mit $6.15 < \lg N_e < 6.3$ (unteres Teilbild) ergibt sich bei 4 angenommenen Komponenten ein χ^2 -Wert von 3.6 im Gegensatz zu $\chi^2 = 2.5$ im Fall von 5 Komponenten. Der Ansatz, die Entfaltung mit 5 Komponenten durchzuführen, scheint also trotzallem berechtigt zu sein.

Es wurden auch Analysen durchgeführt, bei denen von vornherein Eisen und Silizium (zu verschiedenen Anteilen) zusammengefaßt worden ist. Dabei konnte aber auch keine verbesserte

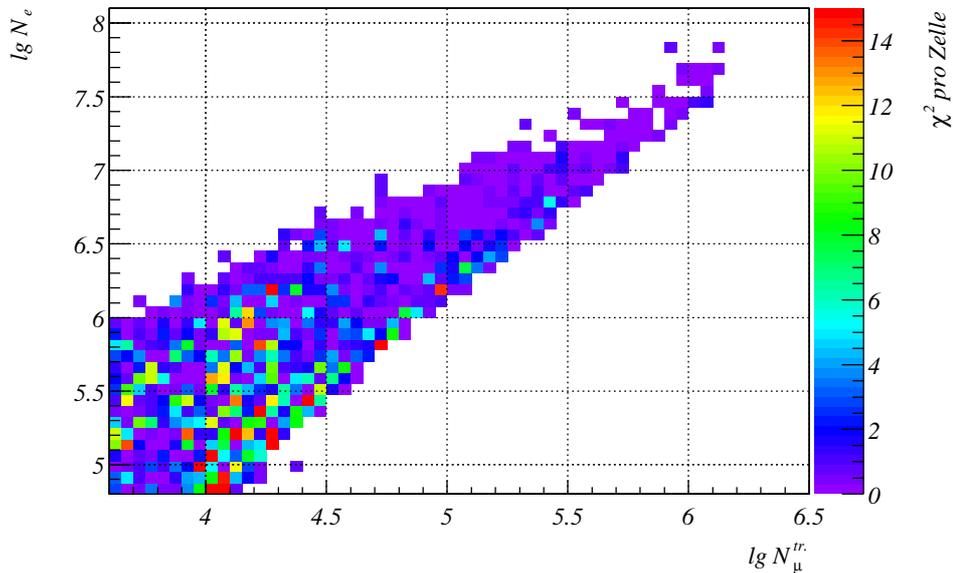


Abbildung 8.15: Verteilung der Abweichungen zwischen gemessenen Daten und mit den Entfaltungsergebnissen rekonstruierter Schauer für den Fall von 4 angenommenen Primärteilchenarten (ohne Eisen).

Beschreibung der gemessenen Daten erzielt werden.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das gemessene zweidimensionale Schauergrößenspektrum nur unzureichend durch die QGSJet-Hypothese beschrieben wird. Um die Ursache hierfür weiter einzugrenzen, ist in Abbildung 8.17 für die 5 angenommenen Primärteilchenarten der Verlauf des Maximums der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Wahrscheinlichkeitsverteilung im Vergleich zu den gemessenen Daten dargestellt. Der Ort des Maximums wurde hierbei immer in das Zentrum der entsprechenden Datenzelle gelegt, wodurch der leicht Zickzack-artige Verlauf zustande kommt. Der Abstand zweier Punkte des gleichen Primärteilchens entspricht dabei immer einer Energiedifferenz von $\Delta \lg E = 0.1$.

Es fällt auf, daß die Verläufe für verschiedene Primärteilchen einfach nur parallel zueinander verschoben sind, in erster Näherung also die gleiche Steigung besitzen. Vergleicht man die Verläufe mit der oberen der Begrenzung der Daten, der *leichten Kante* (hier erwartet man aufgrund des kleinen N_e zu N_μ^{tr} -Verhältnisses Schauer, die von leichten Primärteilchen ausgelöst wurden), so erkennt man eine stark unterschiedliche Steigung. Dieser Unterschied in den Steigungen führt dazu, daß sich die Zentren der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Wasserstoff- und Helium-induzierten Schauern mit zunehmender Primärenergie immer mehr dem Rand der Meßdatenverteilung annähern. Qualitativ wird dadurch klar, daß eine Abnahme des Anteils der leichten Elemente stattfinden muß, damit die obere Flanke der Meßdatenverteilung beschrieben werden kann.

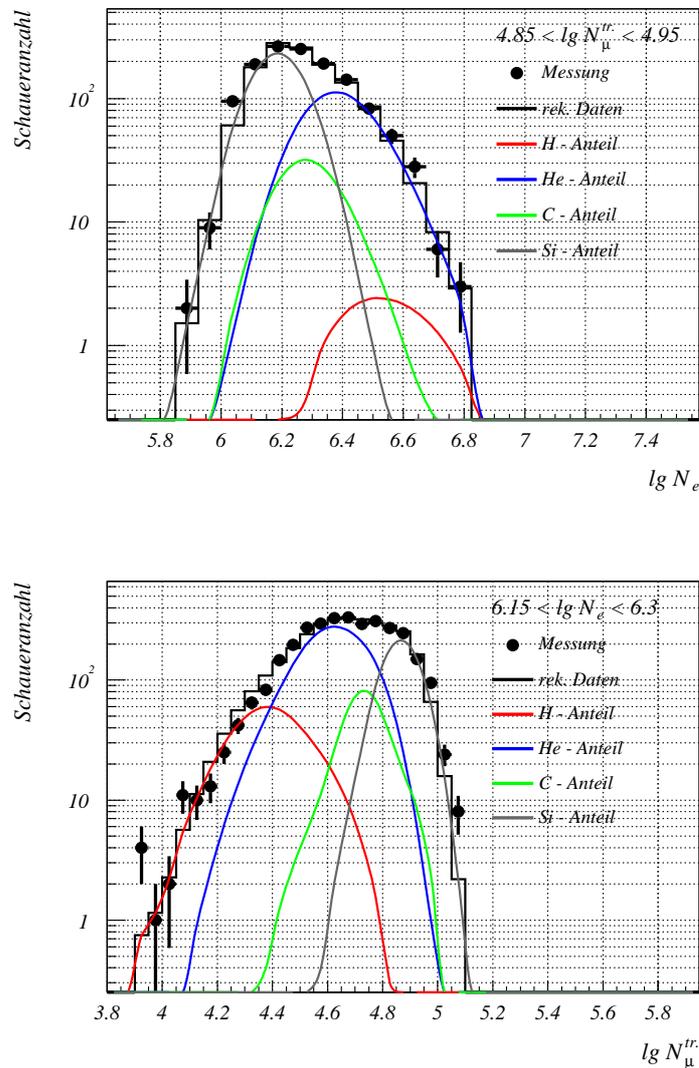


Abbildung 8.16: Vergleich der Häufigkeitsverteilungen gemessener Schauer und mit den Entfaltungsergebnissen rekonstruierter Schauer unter der Annahme von 4 Primärteilchenarten (ohne Eisen).

Der Verlauf der Maximalpositionen und der Eisen-Kante hingegen ist fast parallel. Die Kurve für Eisen-induzierte Schauer stellt beinahe eine Iso-Linie (Linie konstanter Intensität bzw. konstanter Schauerzahl) der gemessenen $\lg N_e - \lg N_{\mu}^{tr.}$ -Verteilung dar. Das bedeutet aber, daß in erster Näherung die Anzahl Eisen-induzierter Schauer für alle Primärenergien ungefähr gleich groß ist. Qualitativ erhält man so bei hohen Energien einen großen Anteil von Eisen im primären Flußspektrum, bei kleinen Energien hingegen einen sehr niedrigen. Bei genauerer Betrachtung muß der Eisen-Anteil sogar, wie bei den Entfaltungsergebnissen beobachtet, verschwinden, da sich sonst Schauer ausserhalb des gemessenen Datenbereichs finden müßten.

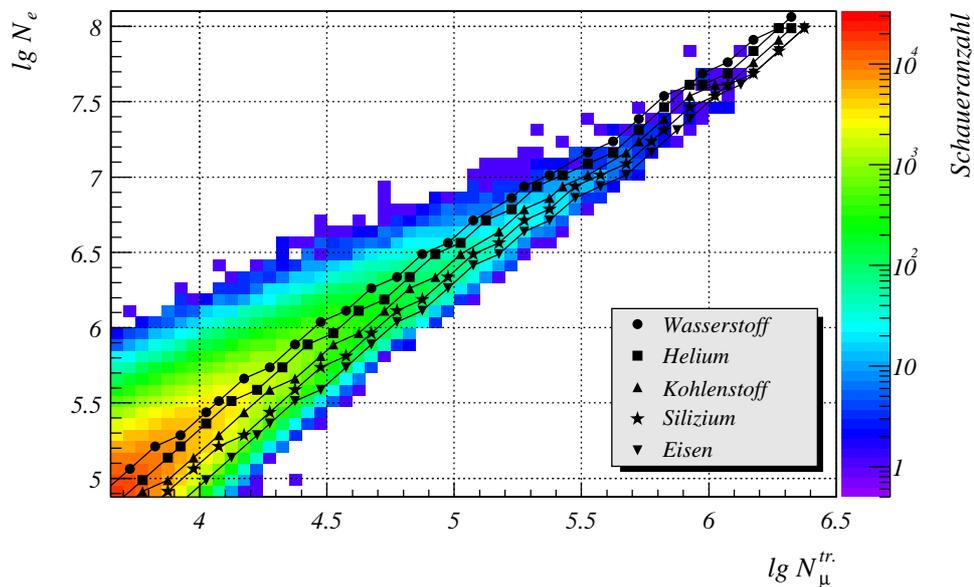


Abbildung 8.17: Verlauf der Maximumpositionen (wahrscheinlichste Werte) der $\lg N_e$ – $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen für H, He, C, Si und Fe im Vergleich zu der gemessenen Schauergrößenverteilung.

Um die Meßdaten konsistent beschreiben zu können, würde man rein qualitativ einen größeren Abstand der simulierten Schauer von der Eisen-Kante, insbesondere bei kleinen Schauergrößen, fordern, sowie eine etwas flachere Steigung, damit im oberen Datenbereich die gemessenen Häufigkeiten gut beschrieben werden können. Im Bereich großer Schauergrößen hat sich die Beschreibung der Daten durch die vorwärtsgefaltete Lösung als gut erwiesen, hier sollten die Verläufe der Maximalpositionen kaum verändert sein.

8.2 SIBYLL-Hypothese

8.2.1 Vergleich zwischen Monte Carlo Rechnung und Parametrisierung

Auch im Fall der mit SIBYLL-Simulationen erzeugten Parametrisierungen soll vor den eigentlichen Analyseergebnissen ein kurzer Vergleich zwischen den Verteilungen gewonnen durch Monte Carlo Rechnungen, berechnet nach den Parametrisierungen und den gemessenen Daten stammend durchgeführt werden.

Abbildung 8.18 zeigt in Analogie zu Abbildung 8.2 im linken Teilbild die $\lg N_e$ -Verteilungen für zwei Schnitte in $\lg N_\mu^{tr}$, im rechten Teilbild die $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilungen für zwei Schnitte in $\lg N_e$. Die offenen Symbole entsprechen dabei den Verteilungen gemessener Schauer, die geschlossenen Symbole den Ergebnissen direkter vollständiger Simulationsrechnungen. Die eingezeichneten Linienhistogramme stellen die Voraussagen der entsprechenden Parametrisierungen für Wasserstoff- und Eisen-induzierte Schauer dar. Die Schnitte, Symbole und Farben sind identisch mit denen der Abbildung 8.1.

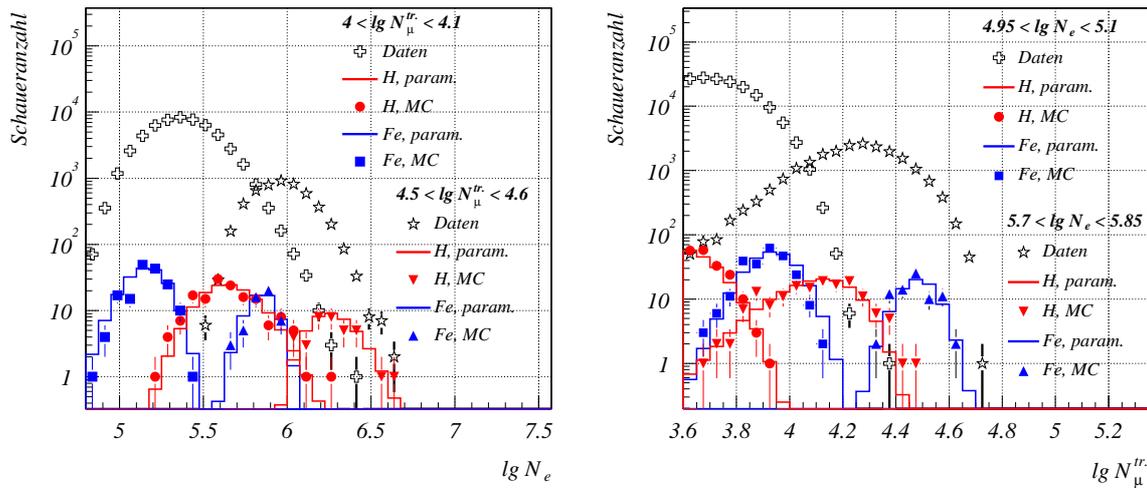


Abbildung 8.18: Gemessene Verteilungen von $\lg N_e$ (links) und $\lg N_\mu^{tr}$ (rechts) für verschiedene Schnitte in der komplementären Schauergröße. Die zusätzlich eingetragenen Verteilungen entsprechen simulierten (Symbole) bzw. parametrisierten (Histogramme) Schauern für Proton- und Eisen-induzierte Schauer, analog zu Abb. 8.1

Auch hier erkennt man zwischen den Verteilungen der direkten Simulationsrechnungen und den aus der Parametrisierung folgenden eine im Rahmen der vorhandenen Statistik zufriedenstellende Übereinstimmung. Im Vergleich zu Abb. 8.2 fällt auf, daß hier die Verteilungen der Eisen-induzierten Schauer weiter von den Flanken der gemessenen Verteilungen entfernt

sind als im Fall der QGSJet-Simulationen. Hierin spiegelt sich der grundlegende Unterschied zwischen QGSJet- und SIBYLL-Simulationen wieder. Im Vergleich zu QGSJet erhält man bei SIBYLL-Simulationen für eine feste Primärenergie weniger Myonen, dafür mehr Elektronen. Bei einem Schnitt auf $\lg N_\mu^{tr.}$ ist die $\lg N_e$ -Verteilung für mit SIBYLL berechnete Schauer also zu höheren Elektronenzahlen hin verschoben. Bei einem Schnitt auf $\lg N_e$ verhält es sich gerade umgekehrt, die $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilung ist im Vergleich zu kleineren Werten hin verschoben.

Betrachtet man insbesondere das linke Teilbild der Abb. 8.18 genauer, so läßt der doch recht große Abstand der Flanken der von Eisen-induzierten Schauern erzeugten Verteilungen von den Ausläufern der gemessenen Schauerverteilungen einen großen Anteil von Eisen in der Lösung erwarten, bei einer entsprechenden Beschreibung dieser Ausläufer. Zumindest unter diesem Gesichtspunkt erscheint daher die SIBYLL-Hypothese vielversprechender als die QGSJet-Hypothese zu sein.

8.2.2 Ergebnisse

Vergleich der Ergebnisse verschiedener Entfaltungsmethoden

Im Fall der Entfaltung unter Benutzung der SIBYLL-Hypothese erfolgte die Analyse wiederum sowohl mit dem Gold-Algorithmus als auch mit der Bayes-Methode und dem Verfahren der reduzierten Entropie. In den Abbildungen 8.19 (H, He, C) und 8.20 (Si, Fe) sind die erhaltenen Energiespektren der 5 Primärteilchenarten unter Verwendung der drei Entfaltungsmethoden dargestellt. Die zur Bestimmung der Abbruchkriterien bzw. des Regularisierungsparameters benötigten Verläufe des WMSE und χ_b^2 finden sich in Anhang B.

Auch hier (wie in Abschnitt 8.1.3) zeigt sich zwischen den Resultaten der einzelnen Entfaltungsmethoden praktisch kein Unterschied. Nur im Fall von Silizium liefert das Entropiebasierte Verfahren oberhalb von 15 PeV noch Flußwerte, während die beiden anderen Algorithmen keine Ereignisse liefern. Tatsächlich handelt es sich hier aber um Ereigniszahlen kleiner als 1, die mit Null verträglich sind, und welche sich somit um ein systematisches Artefakt des Entropie-Verfahrens handeln. Auf den eigentlich unerwarteten Verlauf des Energiespektrums von Silizium wird im nächsten Unterabschnitt ausführlich eingegangen.

Da zwischen den Ergebnissen der Algorithmen keine signifikanten Unterschiede bestehen, werden im Folgenden auch wieder nur die Ergebnisse des Gold-Algorithmus gezeigt und auf eine Spezifizierung der Entfaltungsmethode verzichtet.

Diskussion der entfalteten Energiespektren

In den Abbildungen 8.21 und 8.22 sind nochmals die Flußspektren (nach dem Gold-Algorithmus) der 5 angenommenen Primärteilchenarten dargestellt. Die eingezeichneten

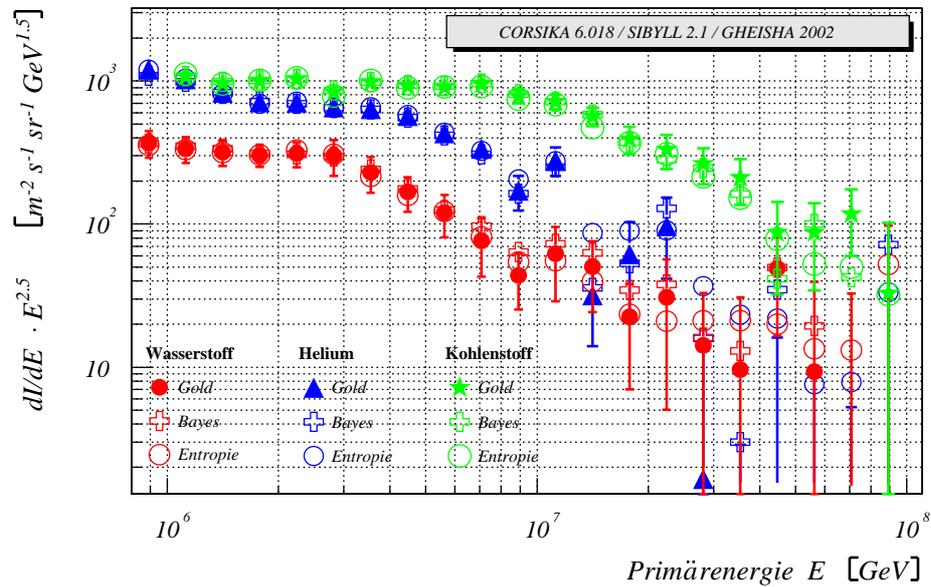


Abbildung 8.19: Entfaltete Spektren für Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff. Dargestellt sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, der Bayes-Entfaltung und des Prinzips der reduzierten Entropie.

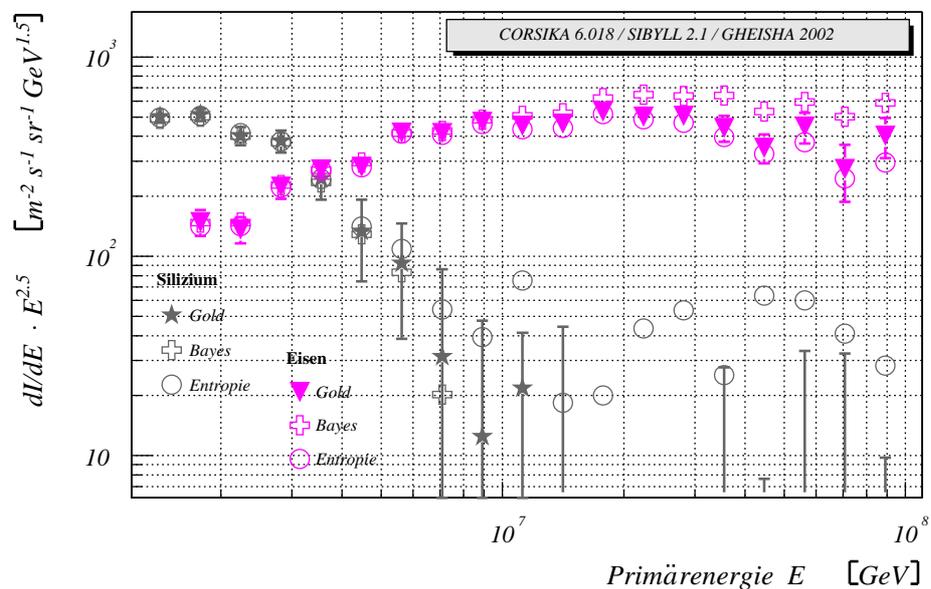


Abbildung 8.20: Entfaltete Spektren für Silizium und Eisen. Dargestellt sind die Ergebnisse des Gold-Algorithmus, der Bayes-Entfaltung und des Prinzips der reduzierten Entropie.

Bänder stellen die abgeschätzte systematische Unsicherheit aufgrund der angewandten Entfaltungsmethode und der verwendeten Parametrisierungen dar, die Fehlerbalken beinhalten den statistischen Fehler aufgrund der begrenzten Messzeit und der beschränkten Monte-Carlo-Statistik. Die Berechnung der Fehler bzw. Unsicherheiten erfolgte nach den in Abschnitt 8.1.2 aufgeführten Verfahren.

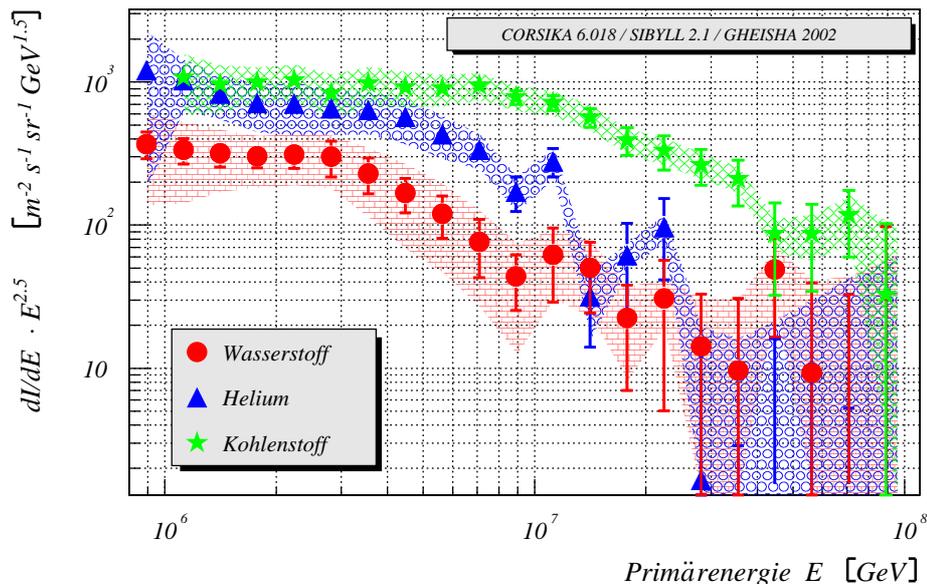


Abbildung 8.21: Flußspektren von Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff. Die eingezeichneten Bänder geben die systematische Unsicherheit wieder.

Abbildung 8.23 zeigt schließlich noch das unter der SIBYLL-Hypothese erhaltene totale Primärenergiespektrum (Summe aus den fünf Einzelspektren) unter Angabe der statistischen und systematischen Unsicherheiten.

Die Spektren der leichten Elemente Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff zeigen ein jeweils deutlich ausgeprägtes Knie. Die Kniepositionen in diesen Spektren sind hierarchisch angeordnet und verschieben sich mit zunehmender Masse/Ladung der Primärteilchenart zu höheren Energien. Eine genauere Untersuchung der Kniepositionen und deren Eigenschaften erfolgt in Abschnitt 8.3. Im Energiespektrum des Siliziums zeigt sich ebenfalls eine Knie-artige Struktur, jedoch dem eben skizzierten Bild widersprechend schon bei einer Energie von ≈ 3 PeV. Tatsächlich findet dieses Knie seine Erklärung mit den Abweichungen an der Eisen-Kante in Abb. 8.24 und der mangelnden Beschreibung der gemessenen Daten, wie im Folgenden erläutert wird.

Obwohl der Vergleich zwischen gemessenen und aus Simulationsrechnungen stammenden $\lg N_e$ - bzw. $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen in Abschnitt 8.2.1 zumindest qualitativ eine bessere Beschreibung des gemessenen Schauergößenspektrums verspricht, zeigt sich, daß auch hier keine

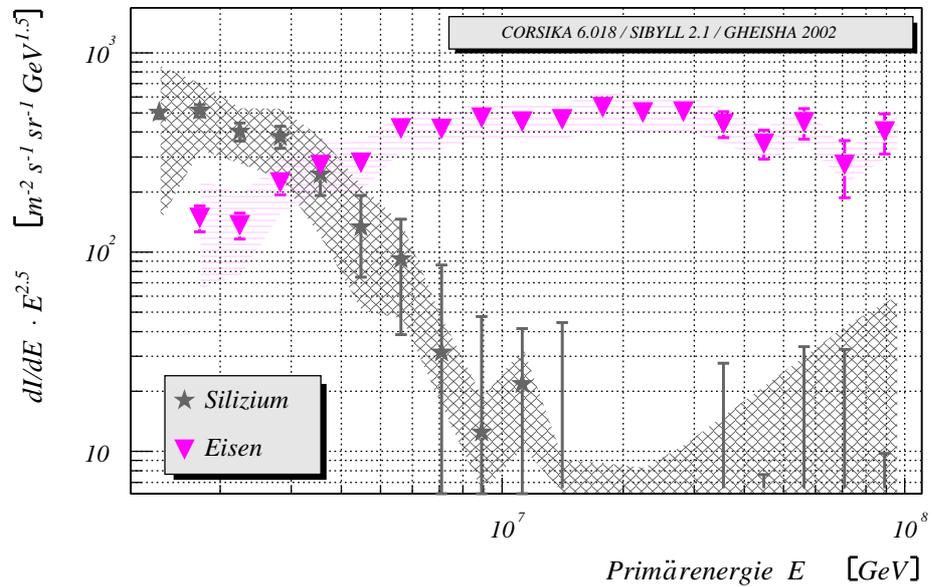


Abbildung 8.22: Flußspektrn von Silizium und Eisen. Die eingezeichneten Bänder geben die systematische Unsicherheit wieder.

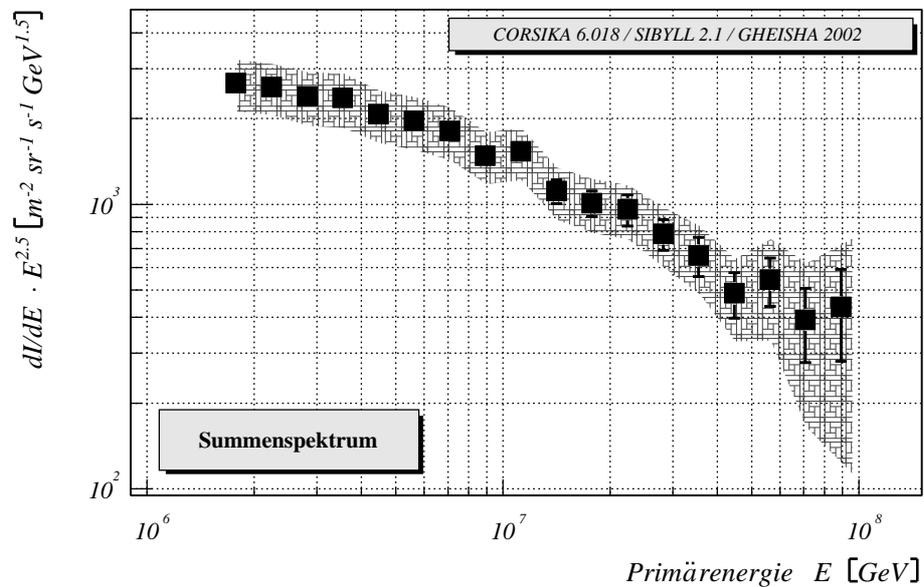


Abbildung 8.23: Resultierendes totales Primärenergieflußspektrum unter der SIBYLL-Hypothese. Das eingezeichnete Band gibt die systematische Unsicherheit wieder.

konsistente Beschreibung der Daten möglich ist. Abbildung 8.24 zeigt farblich kodiert die Verteilung der Abweichungen $\chi_i^2 = (N_{mess} - N_{rek})^2/\sigma^2$ zwischen gemessener Schauerverteilung und durch Vorwärtsfaltung der Lösung rekonstruierter Datenverteilung. Zum besseren Vergleich wurde wie in Abb. 8.12 eine Beschränkung der χ_i^2 -Skala auf einen Maximalwert von 15 vorgenommen. Im Gegensatz zur QGSJet-Hypothese erkennt man im Bereich kleiner Schauergößen vor dem Knie eine gute Beschreibung der gemessenen Daten durch die erhaltene Lösung. Dafür machen sich ab dem Kniebereich starke Abweichungen an der Eisen-Kante bemerkbar. In dieser Region werden durch die Vorwärtsfaltung der Lösung im Gegensatz zur gemessenen Schauergößenverteilung zu wenige Ereignisse rekonstruiert. Betrachtet man das globale Ergebnis der χ^2 -Summe, so ergibt sich ein Wert von $\chi^2 = 2.46$ pro Freiheitsgrad, ähnlich wie im Fall der QGSJet-Annahme.

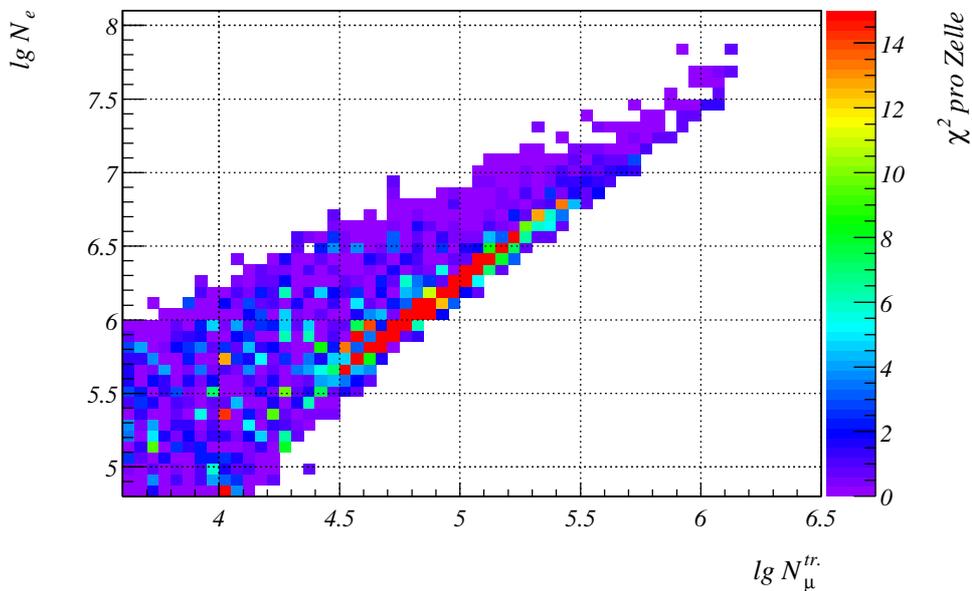


Abbildung 8.24: Verteilung der Abweichungen zwischen gemessenen Daten und durch die Entfaltung rekonstruierter Daten. Dargestellt ist die Abweichung χ_i^2 jeder Datenzelle.

In der Abbildung 8.25 werden für verschiedene Schnitte in der trunkierten Myonzahl die gemessenen $\lg N_e$ -Verteilungen mit den sich durch Vorwärtsfaltung der Lösung ergebenden Verteilungen verglichen. Die Reihenfolge der Teilbilder (von oben nach unten) entspricht hierbei einer Zunahme des Primärenergiebereichs. Zusätzlich sind als Kurven die rekonstruierten Anteile der verschiedenen Primärteilchen dargestellt.

In Abbildung 8.26 wird der entsprechende Vergleich für Schnitte in der Elektronenzahl zwischen den $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilungen durchgeführt. Auch hier entspricht die Reihenfolge der Teilbilder einer Zunahme des beitragenden Primärenergiebereichs.

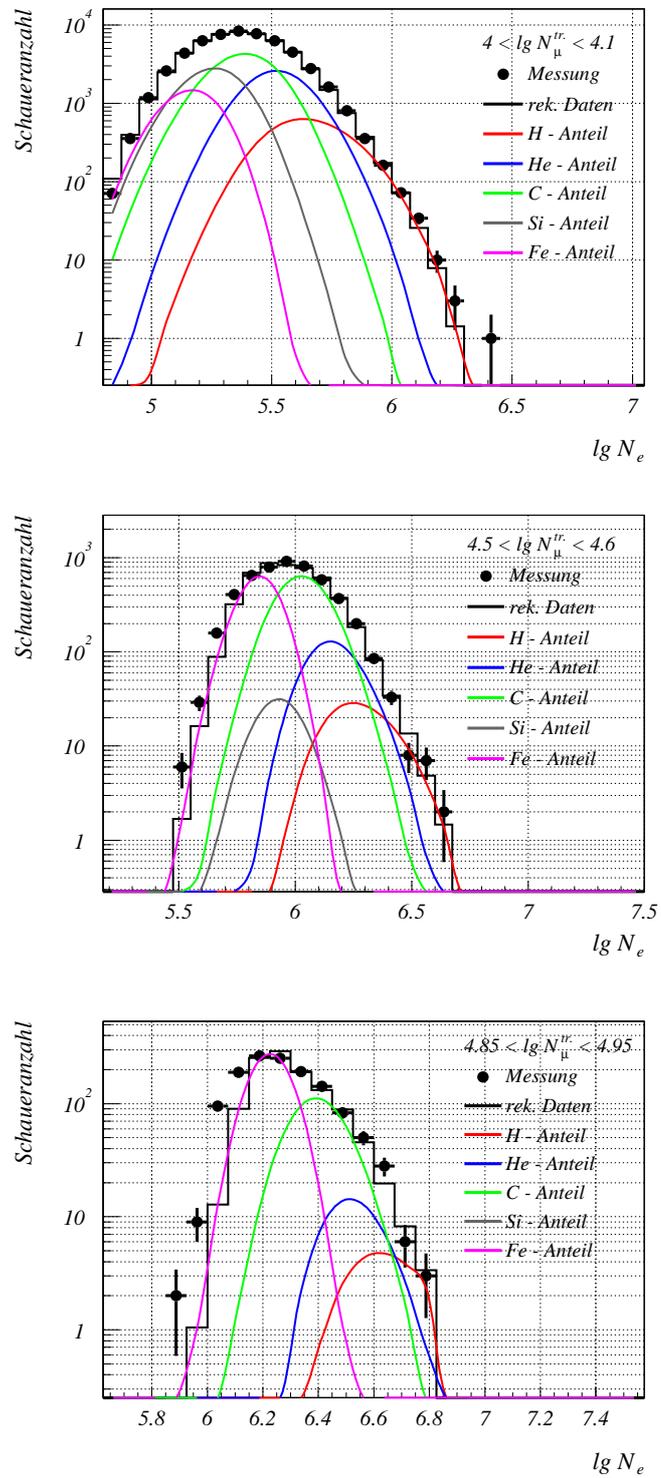


Abbildung 8.25: Vergleich der Häufigkeitsverteilungen gemessener Schauer mit den durch die Entfaltung rekonstruierten Schauerverteilungen für verschiedene Schnitte in der trunkierten Myonzahl.

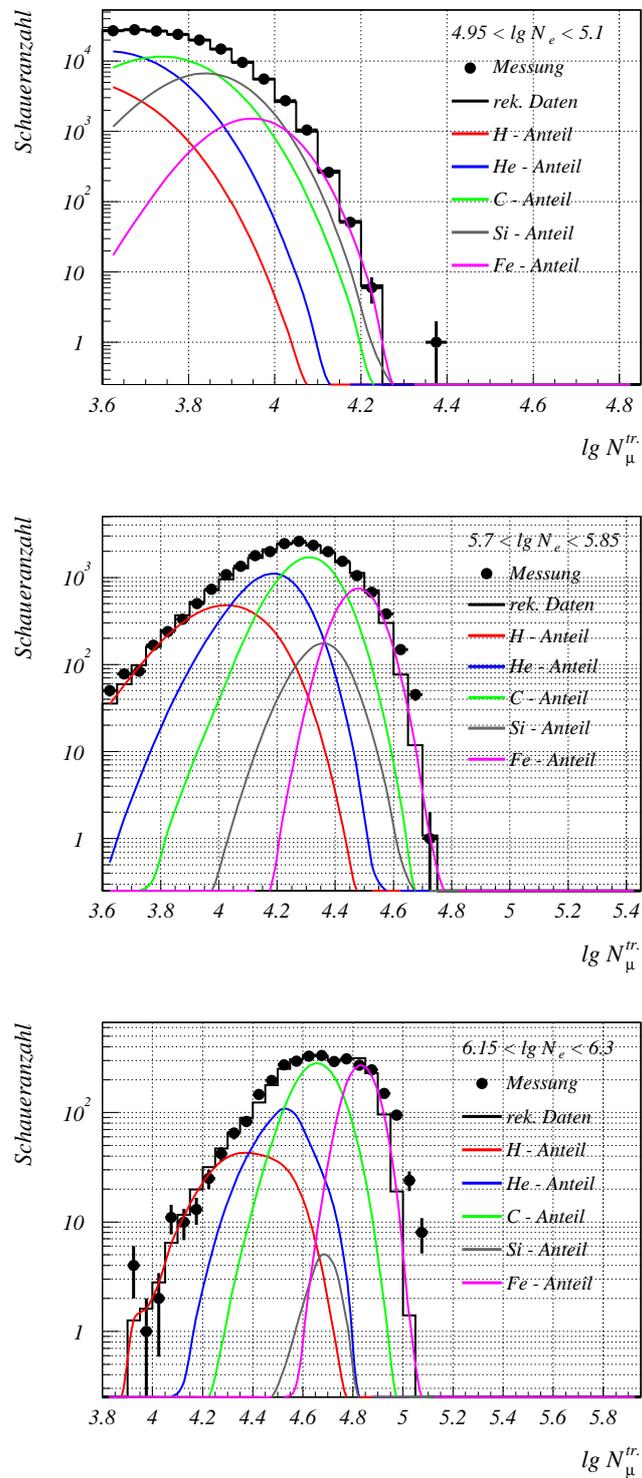


Abbildung 8.26: Vergleich der Häufigkeitsverteilungen gemessener Schauer mit den durch die Entfaltung rekonstruierten Schaueranteilen für verschiedene Schnitte in der Elektronenzahl.

Im Bereich niedriger Energie (obere Teilbilder) erkennt man eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Verteilung, insbesondere auch deren Ausläufer. Alle fünf angenommenen Komponenten sind dabei (insbesondere im oberen Teilbild der Abb. 8.25) zur Beschreibung notwendig. Im Bereich knapp oberhalb des Knies (mittlere Teilbilder in den Abbildungen) fällt auf, daß an den Flanken bei kleinen $\lg N_e$ -Werten bzw. bei großen $\lg N_\mu^{tr}$ -Werten Abweichungen auftreten. Mit Hilfe des Entfaltungsergebnisses können nicht genug Schauer reproduziert werden. Diese Flanken entsprechen Schauern, die von schweren (Eisen) Primärteilchen ausgelöst wurden. Um diesen Bereich der Verteilungen zumindest annähernd beschreiben zu können, muß der Eisen-Anteil in der Lösung entsprechend groß sein. Gleichzeitig kann die gegenüberliegende Flanke jedoch nur durch die leichten Elemente beschrieben werden, sodaß deren Anteil nicht beliebig reduziert werden kann. Dies hat zur Folge, daß zwischen dem Eisen- und dem Kohlenstoff-Anteil kaum noch Raum für Silizium-induzierte Schauer bleibt. Der Silizium-Anteil wird unterdrückt, wodurch im Siliziumspektrum eine verstärkte Abnahme des Flußes stattfindet, das in Abbildung 8.22 beobachtet "verfrühte" Knie bei 3 PeV.

Mit zunehmender Energie wird die Situation dramatischer. Im oberen Energiebereich (untere Teilbilder der Abb. 8.25 und 8.26) kann die linke Flanke in der $\lg N_e$ -Verteilung bzw. die rechte Flanke in der $\lg N_\mu^{tr}$ -Verteilung überhaupt nicht mehr beschrieben werden, die Fluktuationen der Eisen-induzierten Schauer sind nicht groß genug, um diesen Bereich abzudecken. Gleichzeitig ist der Schwerpunkt der Eisenverteilungen so weit von der entsprechenden Flanke verschoben, daß der Eisen-Anteil signifikant zur Beschreibung des Verteilungsmaximums herangezogen wird. Zur Beschreibung der den leichten Komponenten entsprechenden Flanke ist jedoch insbesondere Kohlenstoff notwendig, sodaß zwangsläufig für Silizium kein Platz mehr bleibt. Im Fall der dargestellten $\lg N_e$ -Verteilung ist sein Beitrag nicht mehr vorhanden. Die erwähnte zwangsweise Anreicherung von Eisen zur Beschreibung der entsprechenden schweren Verteilungsflanken ist damit auch die Ursache für den vergleichsweise flachen Verlauf bzw. kleinen Index des Eisenspektrums in Abbildung 8.22.

Das dargestellte Szenario läßt sich auch wieder in der Lage der Maximumspositionen der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Elemente im Bezug zu dem gemessenen zweidimensionalen Schauergrößenspektrum erkennen. In Abbildung 8.27 ist dieser Verlauf analog zu Abb. 8.17 für die 5 Elemente dargestellt.

Im Gegensatz zur QGSJet-Hypothese liegt für Eisen die entsprechende Kurve bei SIBYLL weiter von der Kante der schweren Elemente entfernt. Im Hinblick auf die mit zunehmender Energie immer schmaler werdenden Schauerfluktuationen liegt die Eisenkurve bei den höchsten Energien sogar zu weit von der Eisen-Kante entfernt. Eine Beschreibung dieses Randes der gemessenen Verteilung mit Hilfe von Eisen-induzierten Schauern scheint hier schon rein qualitativ kaum möglich, sodaß man sowohl einen großen Eisen-Anteil, als auch eine mangelnde Beschreibung der Daten in diesem Bereich erwartet.

Gleichzeitig fällt bei genauerer Inspektion auf, daß die Kurve für Kohlenstoff über große Bereich hinweg fast dem "Datenkamm", d.h. der Linie der am schwächsten abfallenden Intensität (ausgehend von der Zelle mit der maximalen Anzahl von Schauern, links unten), folgt. Um

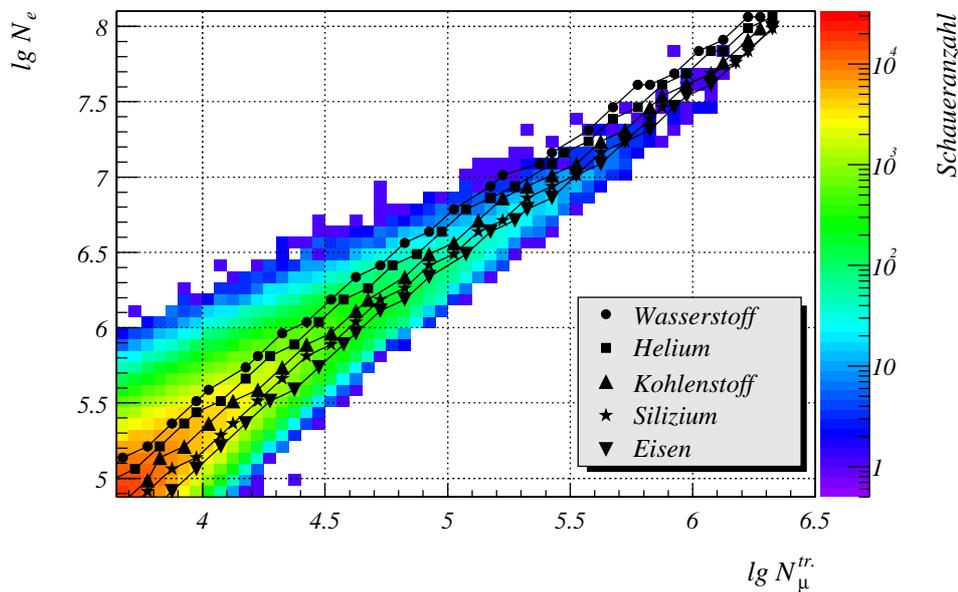


Abbildung 8.27: Verlauf der Maximumpositionen der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Verteilungen für H, He, C, Si und Fe im Vergleich zu der gemessenen Schauergrößenverteilung.

das Integral der gemessenen Schauergrößenverteilung zu erhalten, muß der Kohlenstoff-Anteil ebenfalls sehr groß sein. Damit zeichnet sich in diesem Bild schon ab, daß für Silizium als Element zwischen Eisen und Kohlenstoff in einer Lösung kaum Raum bleibt.

8.3 Vergleich und weitere Eigenschaften der QGSJet- und SIBYLL-Ergebnisse

Nach der Vorstellung der beiden Ergebnisse der Entfaltungsanalyse der KASCADE-Meßdaten in den vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels soll in diesem Abschnitt ein Vergleich der Lösungen unter QGSJet- und SIBYLL-Hypothese gezogen werden. Obwohl die Lösungen unter Verwendung beider Wechselwirkungsmodelle die Meßdaten nur unzureichend beschreiben können und damit in vielen Punkten wenig aussagekräftig sind, bestehen doch Gemeinsamkeiten, die zumindest einen Hinweis auf die Eigenschaften der tatsächlichen Flußspektren der primären Elemente bzw. Elementgruppen geben können. Dies ist insbesondere das totale Energiespektrum als Summe der Einzelflußspektren, sowie darüberhinaus die Struktur der Spektren der leichten Elemente.

8.3.1 Kniepositionen der leichten Elemente

Für eine Interpretation des Knieursprungs im totalen Spektrum ist die Struktur der Spektren der einzelnen Primärteilchenarten ein wichtiger Hinweis. Insbesondere das Auftreten eines Knies in den Einzelspektren und die Lage der jeweiligen Kniepositionen zueinander können Aufschluß über die stattfindenden physikalischen Prozesse geben.

In den Abbildungen 8.28 und 8.29 sind die Spektren der fünf angenommenen Primärteilchenarten zusammen mit dem daraus folgenden Summenspektrum nochmals für die beiden Wechselwirkungsmodellannahmen dargestellt. Um die Kniepositionen besser sichtbar zu machen, wurden die Flußwerte hier mit $E^{2.7}$ skaliert. Wie man erkennt, entspricht ein Index γ von ≈ 2.7 in beiden Fällen dem beobachteten spektralen Index der Wasserstoff-, Helium- und Kohlenstoffspektren unterhalb des Kniebereiches. Da es sich bei diesen Elementen um die Komponenten mit dem größten Anteil am Gesamtfluß handelt, folgt für das totale Energiespektrum ebenfalls ein Index $\gamma \approx 2.7$. In beiden Fällen resultiert das Knie im Gesamtspektrum aus den sich ändernden spektralen Verläufen der leichten Elemente (H, He). Auf die Knieposition und die Indices vor und nach dem Knie im Gesamtspektrum wird im nächsten Unterkapitel näher eingegangen. Bei den QGSJet-Lösungen entspricht das Knie im totalen Spektrum dem Abbrechen des Wasserstoffflusses. Im Fall von SIBYLL ist der Wasserstoffanteil etwa einen Faktor 2 geringer als bei den QGSJet-Lösungen und um einen Faktor 3 geringer als der Helium- und Kohlenstoffanteil (bei einer Energie von ca. 2 PeV). Das Knie im Gesamtspektrum wird daher eher durch das Heliumknie verursacht. Als Gemeinsamkeit findet bei beiden Analysen eine Änderung der chemischen Zusammensetzung über den Kniebereich hinweg statt, wobei die Komposition schwerer wird. Es kann angenommen werden, daß diese Eigenschaft tatsächlich eine Eigenschaft der Primärstrahlung ist.

Der Verlauf des Gesamtspektrums nach dem Knie wird durch die Anteile der noch vorhandenen schwereren Elemente bestimmt, sodaß die Änderung des Index im totalen Spektrum wesentlich schwächer ausfällt als in den Einzelspektren. Zumindest die SIBYLL-Resultate legen nahe, daß wahrscheinlich jede Komponente ein Knie in ihrem Spektrum besitzt, dessen Position sich mit zunehmender Masse/Ladung des Primärteilchens zu höheren Energien hin verschiebt. Damit würde man ein aufeinanderfolgendes Abbrechen der einzelnen Spektren erwarten, bis schließlich als einzig dominierendes Element nur noch Eisen vorhanden ist. Das Gesamtspektrum würde dann dem Eisenspektrum folgen und seine Kniestruktur nachbilden. Dies wäre dann die Ursache für ein zweites Knie im Gesamtflußspektrum, das allerdings außerhalb des KASCADE-Meßbereichs liegt.

Auch wenn die in dieser Arbeit erhaltenen Energiespektren der Elemente Wasserstoff und Helium wegen der bereits angesprochenen Inkonsistenzen kaum mit den tatsächlichen Spektren übereinstimmen, ist es interessant zu untersuchen, ob im Rahmen der statistischen Fehler und der durch die angewandte Analyse entstehenden systematischen Unsicherheiten, eine Aussage über die Abhängigkeit der Kniepositionen von der Art des Primärteilchens möglich ist. In

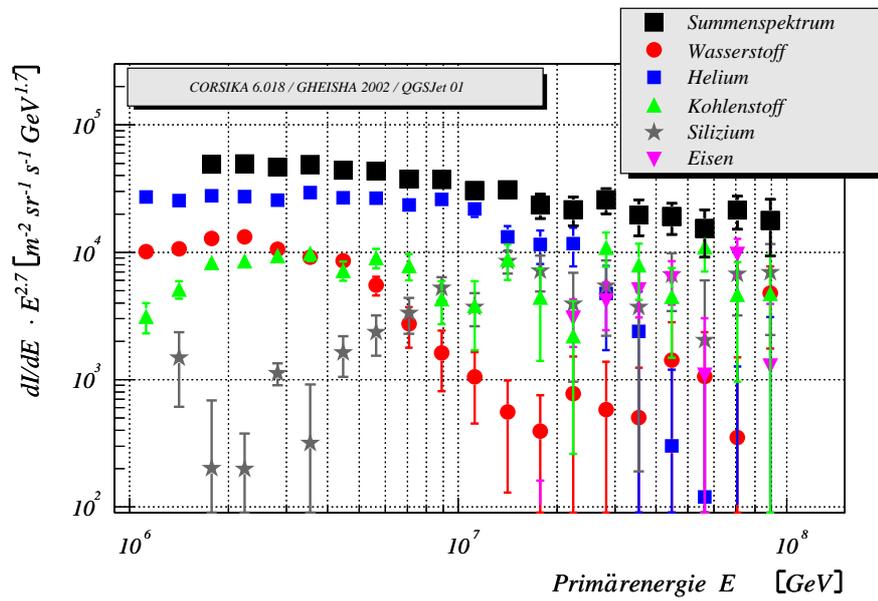


Abbildung 8.28: Entfaltete Energiespektren unter QGSJet-Hypothese. Zur Verdeutlichung der Kniepositionen sind die Flußwerte mit $E^{2.7}$ skaliert.

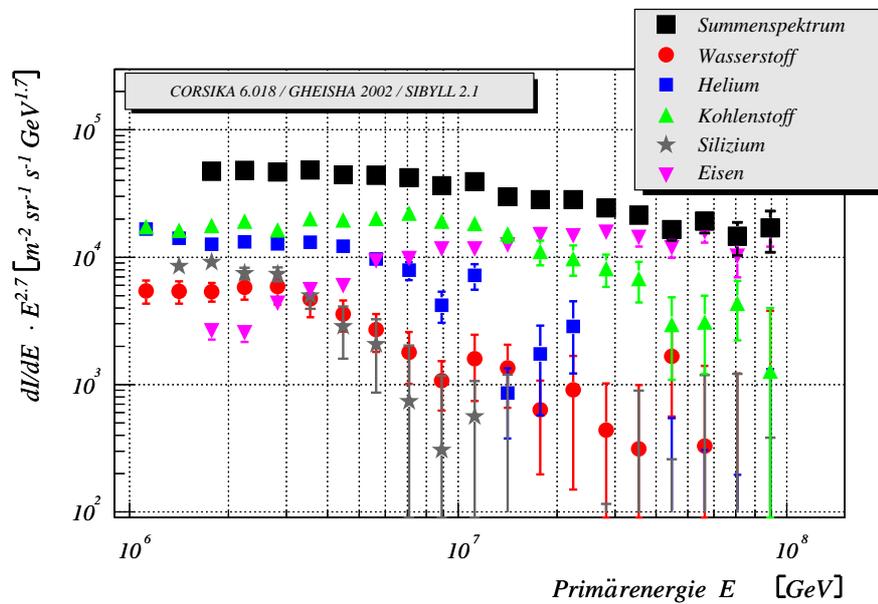


Abbildung 8.29: Entfaltete Energiespektren unter SIBYLL-Hypothese. Zur Verdeutlichung der Kniepositionen sind die Flußwerte mit $E^{2.7}$ skaliert.

erster Linie steht hierbei die Frage im Vordergrund, ob zwischen einer Abhängigkeit von der Ladungszahl oder der Massenzahl unterschieden werden kann.

In Abbildung 8.30 sind die Wasserstoff- und Heliumspektren der QGSJet-Analyse dargestellt, die Flußwerte sind im linken Teilbild jedoch über der Energie pro Ladungszahl (proportional der Rigidität), im rechten Teilbild über der Energie pro Massenzahl (der Energie pro Nukleon entsprechend) aufgetragen. Die entsprechende Darstellung für die Wasserstoff- und Heliumspektren der SIBYLL-Analyse finden sich in Abbildung 8.31. Im Fall der SIBYLL-Ergebnisse ist zusätzlich das Flußspektrum von Kohlenstoff eingetragen, da dieses hier auch ein deutlich ausgeprägtes Knie aufweist.

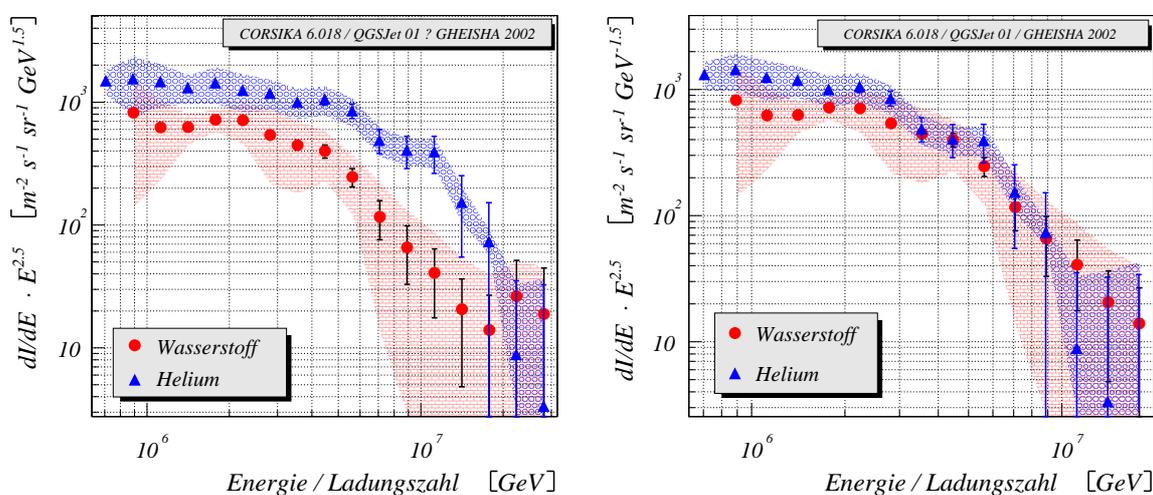


Abbildung 8.30: Vergleich zwischen Wasserstoff- und Heliumspektrum unter QGSJet-Hypothese. Links: Flußspektrum aufgetragen über Energie pro Ladungszahl. Rechts: Flußspektrum aufgetragen über Energie pro Massenzahl.

Die Form der Einzelspektren ist stark von der systematischen Unsicherheit beeinflusst. Innerhalb der eingezeichneten Bänder kann sich der Verlauf der Spektren verformen. Hierbei findet ein gleichzeitiger Übergang zur unteren bzw. oberen Begrenzung des jeweiligen Bandes statt. Es ist also nicht möglich, daß z.B. das Wasserstoffspektrum bei 1 PeV am oberen Rand des Bandes liegt und bei 10 PeV am unteren Rand. Gleichzeitig sind die Systematiken der einzelnen Elemente korreliert. Erhöht sich zum Beispiel der Wasserstofffluß, nimmt der Heliumfluß ab und umgekehrt. Bei einem Vergleich bzw. einer Beschreibung der Eigenschaften der Spektren muß die Form und Breite der Systematikbänder berücksichtigt werden. Dies gilt besonders für das Energiespektrum des Wasserstoffs, welches die größten systematischen Unsicherheiten aufweist.

Auf die Anpassung einer Funktion an die Einzelspektren wurde daher verzichtet, da z.B. im Fall der QGSJet-Analyse das Wasserstoffspektrum dem Verlauf des unteren Randes des Systematikbandes folgen könnte. Eine Beschreibung des Spektrums mit einer Funktion analog

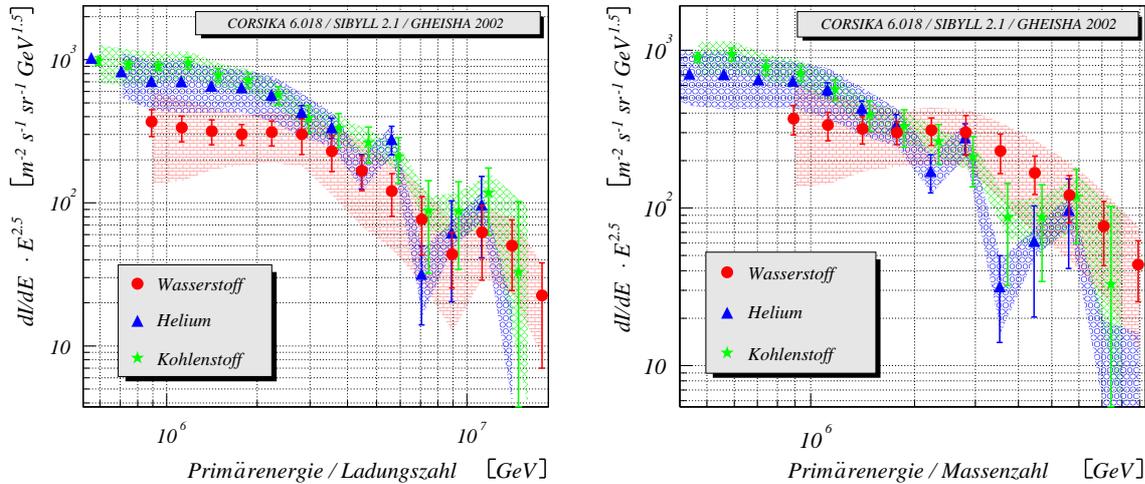


Abbildung 8.31: Vergleich zwischen Wasserstoff-, Helium- und Kohlenstoffspektrum unter SIBYLL-Hypothese. Links: Flußspektren aufgetragen über Energie pro Ladungszahl. Rechts: Flußspektren aufgetragen über Energie pro Massenzahl.

zu Gleichung 7.1 würde dann keinen Sinn mehr machen.

Beim Vergleich der QGSJet- und SIBYLL-Ergebnisse zeigt sich, daß die Form der systematischen Abweichungen besonders im Fall des Wasserstoffspektrums stark vom verwendeten Wechselwirkungsmodell abhängt. Während bei Verwendung von SIBYLL die Form des Spektrums weitgehend erhalten bleibt und sich nur der Absolutfluß verschiebt, kann sich unter der QGSJet-Annahme der Verlauf vor dem Knie vollständig verzerren, sodaß im Extremfall keine Knieposition im üblichen Sinn (z.B. durch Gl. 7.1) mehr definiert werden kann. Bei den QGSJet-Ergebnissen kann daher auch nicht entschieden werden, welche Darstellung in Abb. 8.30 ein “einheitlicheres” Bild liefert. Die entfalteten Flußwerte scheinen zwar eine Abhängigkeit der Knieposition von der Ladungszahl zu präferieren, im Rahmen der Systematik läßt sich aber keine definitive Aussage treffen.

Im Fall der SIBYLL-Ergebnisse liegen bessere Verhältnisse vor. Selbst im Rahmen der systematischen Unsicherheiten läßt sich eine Abhängigkeit der Knieposition von der Massenzahl ausschließen. Beim Vergleich der beiden Teilbilder in Abbildung 8.31 liefert die linke Darstellung ein einheitlicheres Bild, wobei eine etwas schwächere Abhängigkeit der Knieposition von der Ladungszahl suggeriert wird (eher $\propto Z^{0.8}$). In Anbetracht der Systematiken ist aber eine Abhängigkeit von Z durchaus noch im Rahmen und somit zu favorisieren.

Im Hinblick auf eine Fortführung der Analyse wird selbst bei der Wahl des “idealen Wechselwirkungsmodells”, mit dem eine konsistente Beschreibung des gemessenen Schauergrößenspektrums gelingt, eine abschliessende Aussage über Abhängigkeiten von möglichen Kniepositionen nicht garantiert sein. Zwar kann angenommen werden, daß in diesem Fall die Form

der Systematikbänder eher denen der SIBYLL-Analyse entspricht, jedoch wird die Breite des Wasserstoffbandes von ähnlicher Größenordnung sein. Als einzige Möglichkeit zur Reduzierung der Systematiken bleibt eine genauere Beschreibung der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen. Wie in Abschnitt 8.1.2 gezeigt wurde, werden die systematischen Unsicherheiten gerade im wichtigen einstelligen PeV-Bereich von den Unsicherheiten in der Form der Parametrisierung der angesprochenen Verteilung verursacht. Durch eine theoretisch besser fundierte Modellfunktion und/oder eine größere Anzahl von gedünnt simulierten Schauern könnte hier eventuell Abhilfe geschaffen werden, sodaß die resultierende systematische Gesamtunsicherheit etwa einen Faktor 2 kleiner wird, und nur noch der methodischen Unsicherheit der Entfaltung entspricht.

Vergleicht man die Spektren von Wasserstoff, Helium und Kohlenstoff sowohl unter QGSJet- und SIBYLL-Analyse miteinander, zeigt sich, daß alle drei Spektren über begrenzte Bereiche näherungsweise durch ein Potenzgesetz beschrieben werden können. Dabei besitzen alle Spektren im Bereich unterhalb des Knies (C-Spektrum unter QGSJet-Annahme: oberhalb 2 PeV bis Ende des Energiebereichs) einen spektralen Index von ≈ 2.7 . Oberhalb des Knies weisen sowohl Wasserstoff und Helium als auch Kohlenstoff bei der SIBYLL-Analyse einen Index $\gamma \approx 3.6$ auf. Daß die Werte der spektralen Indizes sich praktisch nicht unterscheiden, läßt sich ebenso wie die unterschiedlichen Kniepositionen der Modelle untereinander qualitativ wieder am Verlauf der Maximumpositionen der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen im Vergleich zu den gemessenen Daten ablesen.

Ganz grob läßt sich die Anzahl von Schauern eines Primärteilchens bei gegebener Primärenergie durch die Anzahl der gemessenen Schauer in der Zelle abschätzen, die der entsprechenden Maximumposition entspricht. Der spektrale Verlauf kann im Vergleich zum Datenkamm abgeschätzt werden. Der Datenkamm ist hierbei als die Verbindungslinie zwischen den Punkten mit dem betragsmäßig kleinsten negativen Gradienten zu verstehen, wobei die Konstruktion in der Datenzelle mit den meisten Schauern beginnt. Anders ausgedrückt ergibt sich die Richtung des Datenkamms durch den größten senkrechten Abstand zweier Isolinien (Linien konstanter Schaueranzahl bzw. konstanten Flußes). Abbildung 8.32 zeigt das zweidimensionale Schauergrößenspektrum mit einigen Isolinien (10000, 3000, 1000, 300, 100, 30 und 10 Schauer). Zusätzlich sind die Zellen des Datenkamms eingetragen. Im Vergleich dazu ist ebenfalls der Verlauf der Maximumpositionen für Wasserstoff- und Eiseninduzierte Schauer gemäß QGSJet- und SIBYLL-Parametrisierungen dargestellt.

Folgt man dem Datenkamm, bleibt der Abstand zwischen zwei Isolinien in etwa konstant. Aufgrund der in den Daten vorhandenen Regelmäßigkeit in der Anordnung der Isolinien zueinander gilt dies auch, wenn man einer zum Datenkamm parallel verschobenen Linie folgt. Die durch den Verlauf der Maximumpositionen vorgegebene Richtung legt die Eigenschaften des betreffenden Energiespektrums fest. Der Abstand der gekreuzten Isolinien entlang des Verlaufs entspricht einem Energieintervall und ist daher ein Maß für den (reziproken) spektralen Index des betreffenden Primärspektrums. Bleiben diese Abstände konstant, erhält man einen konstanten Index. Ist die Verlaufskurve nur gleichmäßig zum Datenkamm ver-

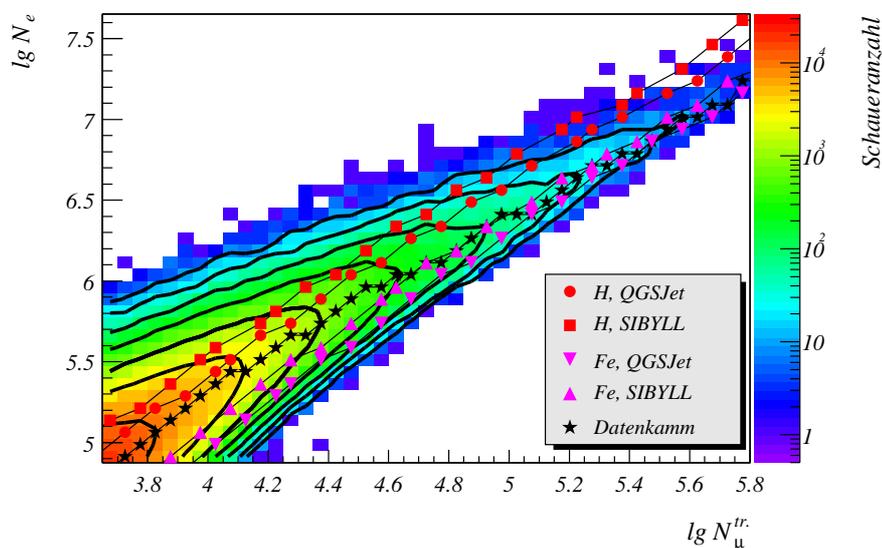


Abbildung 8.32: Verlauf der Maximumpositionen der $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilungen für Wasserstoff- und Eiseninduzierte Schauer nach QGSJet- und SIBYLL-Parametrisierungen. Zusätzlich ist das zweidimensionale Schauergrößenspektrum mit einigen Isolinien und dem Datenkamm eingetragen.

schoben, erhält man den durch den Kamm vorgegebenen spektralen Verlauf, der aufgrund der in erster Ordnung konstanten Abstände einen konstanten Index besitzt. Im Fall der Wasserstoff-induzierten Schauer ist dies im Bereich kleiner $\lg N_e$ - und $\lg N_\mu^{tr.}$ -Werte (kleine Primärenergien) der Fall. Ab $\lg N_\mu^{tr.}$ -Werten von etwa 4.5 entfernt sich aber der Verlauf der Maximumpositionen zunehmend vom Verlauf des Datenkamms. Der Abstand der vom Verlauf der Maximumpositionen durchquerten Isolinien nimmt ab. Dies bedeutet aber einen steilerwerdenden Verlauf des Spektrums bzw. eine Veränderung des Index zu größeren Werten. Im Primärenergiespektrum ist ein Knie vorhanden. Die Knieposition entspricht hierbei in etwa der Energie, ab der das Auseinanderlaufen der beiden Kurven sichtbar wird.

Im Vergleich zueinander zeigt sich, daß die Verläufe der Maximumpositionen von Wasserstoff für QGSJet und SIBYLL praktisch nur parallel zueinander verschoben sind. Bei gleicher Primärenergie ist der zugehörige SIBYLL-Punkt gegenüber dem QGSJet-Wert um eine Zelle zu kleineren Myonenzahlen und eine Zellenbreite zu größeren Elektronenzahlen hin verschoben. Die Steigung ist aber in beiden Punkten gleich. Die zu den anderen Elementen gehörigen Kurven sind gegenüber der Wasserstofflinie ebenfalls einfach verschoben (siehe Abb. 8.17 und 8.27). Da beide Kurven nur verschoben sind, erhält man auch in etwa die gleichen spektralen Indices vor bzw. nach dem Knie im jeweiligen Spektrum. Für SIBYLL liegt der Maximumverlauf in Abb. 8.32 etwas nach links oben verschoben. Dadurch beginnt die Kurve etwas früher in den Bereich kleiner werdender Isolinienabstände einzudringen als die entsprechende QGSJet-Kurve. Dies hat dann zur Folge, daß im SIBYLL-Wasserstoffspektrum das Knie bei

einer etwas kleineren Energie als im QGSJet-Wasserstoffspektrum liegt.

Man erkennt in Abbildung 8.32 auch die schon angesprochene Problematik für die schweren Elemente im Fall von SIBYLL. Die Kurve der Eisen-Maximumpositionen liegt im oberen Energiebereich oberhalb des Datenkamms. Sollen die Ausläufer des Schauergößenspektrums unterhalb des Datenkamms beschrieben werden, kann dies nur durch eine entsprechende Erhöhung des Eisenflusses geschehen. In diesem Fall wäre jedoch die Zahl der den Maximumpositionen entsprechenden Schauern zu hoch.

Auch wenn diese Überlegungen nur einen sehr qualitativen Charakter besitzen, erlauben sie es dennoch, die Eigenschaften der Lösungen zu verstehen bzw. die Eigenschaften einzelner Wechselwirkungsmodelle grob zu beurteilen. Die Eigenschaften eines idealen Modells, welches die Daten konsistent beschreiben kann, könnte in grober Näherung durch eine Synthese der QGSJet- und SIBYLL-Interpretationen konstruiert werden. Beginnend mit dem Maximumverläufen des SIBYLL-Modells bei kleinen Energien müßten diese Verläufe stetig in die des QGSJet-Modells bei hohen Energien übergehen. Mit einem solchen Modell würde man wahrscheinlich wieder Kniestrukturen in den Flußspektren der leichten Elemente erhalten. Die Kniepositionen lägen dabei wohl zwischen denen von SIBYLL und QGSJet. Gleichzeitig wird aufgrund des geneigteren Verlaufs die Indexänderung über das Knie hinweg weniger stark ausfallen.

8.3.2 Das totale Energiespektrum

Obwohl sich die Einzelspektren der angenommenen Primärteilchen für die Ergebnisse der beiden Wechselwirkungsmodelle im Hinblick auf Intensitäten und Verhältnisse der Elemente zueinander unterscheiden, zeigt sich, daß die totalen Flußspektren als Summe der Einzelspektren praktisch identisch sind. In Abbildung 8.33 sind die Summenspektren der QGSJet- und SIBYLL-Analyse gemeinsam dargestellt. Zur Verdeutlichung der Kniestruktur wurden die Flußwerte mit $E^{2.7}$ skaliert. Zusätzlich ist als schraffiertes Band die abgeschätzte systematische Unsicherheit des QGSJet-Spektrums eingezeichnet. Das entsprechende SIBYLL-Band ist von der gleichen Größenordnung und wäre darin enthalten.

Man erkennt, daß beide Spektren im Rahmen der statistischen Fehler nahezu übereinstimmen. Das Knie ist im Bereich von 4 PeV erkennbar. Daß die unterschiedlichen Modellannahmen der Hochenergiewechselwirkungen keinen signifikanten Einfluß auf das entfaltete Summenspektrum haben, läßt sich dadurch erklären, daß in erster Ordnung im totalen Flußspektrum nur die Anzahl der gemessenen Schauer wiedergegeben wird. Die Energiezuordnung kann durch eine Linearkombination aus $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ vorgenommen werden, welche eine Gerade konstanter Energie und sich ändernder Massenzahl A definiert. Diese Energiegeraden stehen schräg auf den Verläufen der Maximumpositionen in Abbildung 8.17 und sind für verschiedene Energien parallel zueinander verschoben. Die einer Energie zugehörige Anzahl von Schauern ergibt sich in erster Ordnung als Summe der Schauer entlang der entsprechenden

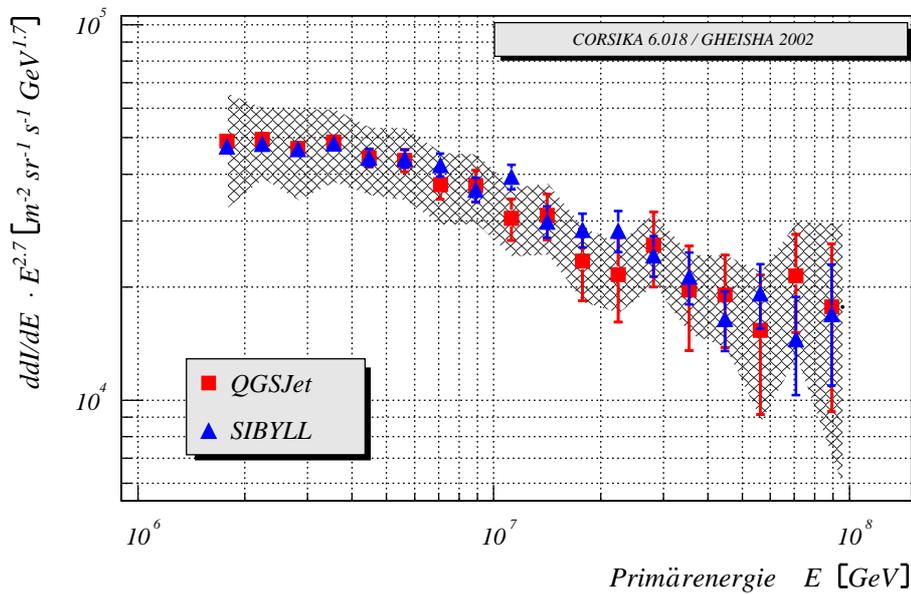


Abbildung 8.33: Vergleich der Resultate für das totale Energiespektrum unter Verwendung der QGSJet- und der SIBYLL-Hypothese. Das eingezeichnete Band entspricht der abgeschätzten systematischen Unsicherheit des QGSJet-Ergebnis.

Energiegeraden. Da die Maximumsverläufe für QGSJet und SIBYLL nur parallel zueinander verschoben sind (siehe Abb. 8.32), besitzt die einer festen Energie zugeordnete Energiegerade unter SIBYLL-Annahme die gleiche Steigung wie die QGSJet-Energiegerade und liegt nur leicht verschoben zu dieser, jeweils eine Zellenbreite in $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$. Der Intensitätsunterschied entlang der beiden Geraden ist so gering, daß er sich im Energiespektrum kaum bemerkbar macht.

Bei der Verwendung des idealen Modells, welches die Meßdaten konsistent beschreiben kann, ist ebenfalls zu erwarten, daß die entsprechenden Energiegeraden ähnlich zu denen von QGSJet- bzw. SIBYLL liegen. Man kann daher annehmen, daß sich im Fluß des totalen Energiespektrums nur sehr kleine Unterschiede im Vergleich zu den hier erhaltenen Spektren zeigen.

An den Verlauf des totalen Flußspektrums wurde eine Funktion analog zu Gleichung 7.1 angepaßt:

$$\frac{dI(E)}{dE} \cdot E^{2.7} = p_0 \cdot E^{p_2} \left(1 + \left(\frac{E}{p_1} \right)^{p_4} \right)^{(p_3 - p_2)/p_4} \cdot E^{2.7} \quad (8.1)$$

Hierbei entsprechen die Parameter p_1 der Knieposition, p_2 dem Index vor dem Knie, p_3 dem Index nach dem Knie und p_4 dem Parameter ε aus Gl. 7.1, der die Breite des Kniebereichs festlegt. Vor dem Knie sind in den totalen Flußspektren nicht genug Datenpunkte vorhanden, um die Breite des Kniebereichs hinreichend genau zu bestimmen. Bei freiem Parameter p_4

ergibt sich z.B. bei Anpassung an das QGSJet-Spektrum ein Wert von 4.31 mit einem Fehler von ± 3.35 . Bei der Anpassung an das SIBYLL-Spektrum ergibt sich ein ähnlicher Wert (3.35 ± 4.2). Daher wird im Folgenden für p_4 ein Wert von $p_4 = 4$ fest vorgegeben. In der Abbildung 8.34 sind die Ergebnisse der Anpassung für die beiden Flußspektren dargestellt.

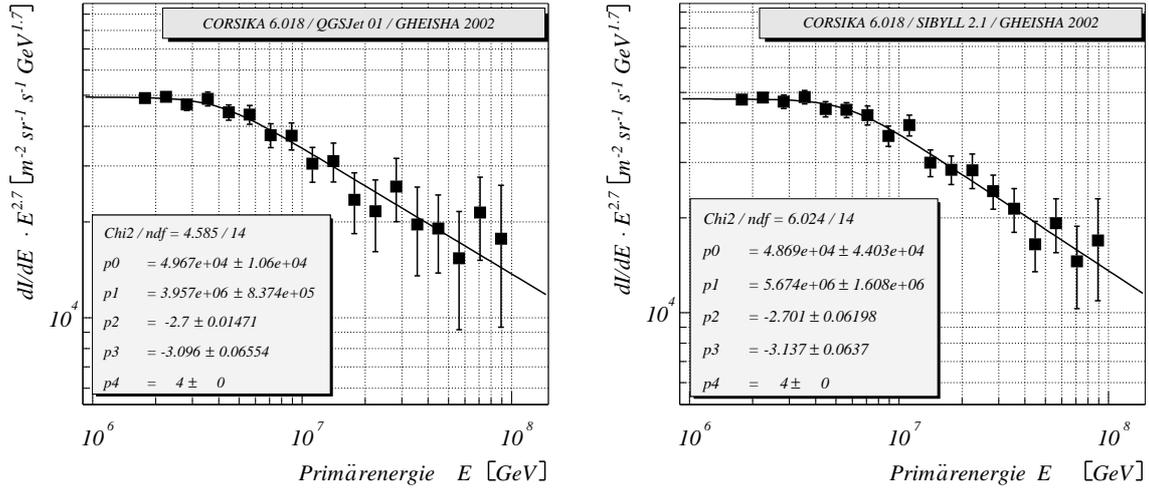


Abbildung 8.34: Totales Energiespektrum mit angepaßter Funktion, siehe Text. Links: QGSJet-Ergebnis; rechts: SIBYLL-Ergebnis.

Bei der Anpassung ergeben sich χ^2 -Werte von 0.32 (QGSJet) bzw. 0.42 (SIBYLL) pro Freiheitsgrad. Ursache für diese kleinen Werte ist wahrscheinlich eine Überschätzung der statistischen Fehler, da eine eher konservative Abschätzung insbesondere des Beitrags aufgrund der begrenzten Anzahl von simulierten Schauern vorgenommen wurde. Für den Index vor dem Knie ergeben sich $\gamma_1 = -2.70 \pm 0.01$ (QGSJet) und $\gamma_1 = -2.70 \pm 0.06$ (SIBYLL), für den Index nach dem Knie $\gamma_2 = -3.10 \pm 0.07$ (QGSJet) und $\gamma_2 = -3.14 \pm 0.06$ (SIBYLL). Die Knieposition ergibt sich zu $E_K = 4.0 \pm 0.8$ PeV (QGSJet) bzw. $E_K = 5.7 \pm 1.6$ PeV (SIBYLL). Alle angepaßten Parameter stimmen für beide Modellannahmen im Rahmen der Fehler jeweils überein. Dies bestätigt den rein optischen Eindruck der Abbildung 8.33, nach dem praktisch kein Unterschied zwischen den beiden Spektren besteht. Da die Definition der Knieposition aber auch stark von der Art der Anpassungsfunktion abhängt, wird hier nur der Fluß vor dem Knie bei 1.78 PeV angegeben. Als Entfaltungsergebnisse ergeben sich $dI(1.78 \text{ PeV})/dE = 6.54 \cdot 10^{-13} \pm 2.5 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$ für QGSJet und $dI(1.78 \text{ PeV})/dE = 6.33 \cdot 10^{-13} \pm 2.1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ GeV}^{-1}$ für SIBYLL.

Die Abbildung 8.35 zeigt einen Ausschnitt der Abbildung 1.1 im Bereich zwischen 10^{14} eV und 10^{18} eV. Die Flußwerte wurden für die Darstellung mit E^3 skaliert. Zusätzlich zu den Ergebnissen anderer Experimente ist das totale Energiespektrum der QGSJet-Analyse eingezeichnet. Auf die Darstellung des SIBYLL-Ergebnisses wurde aus Übersichtsgründen verzichtet.

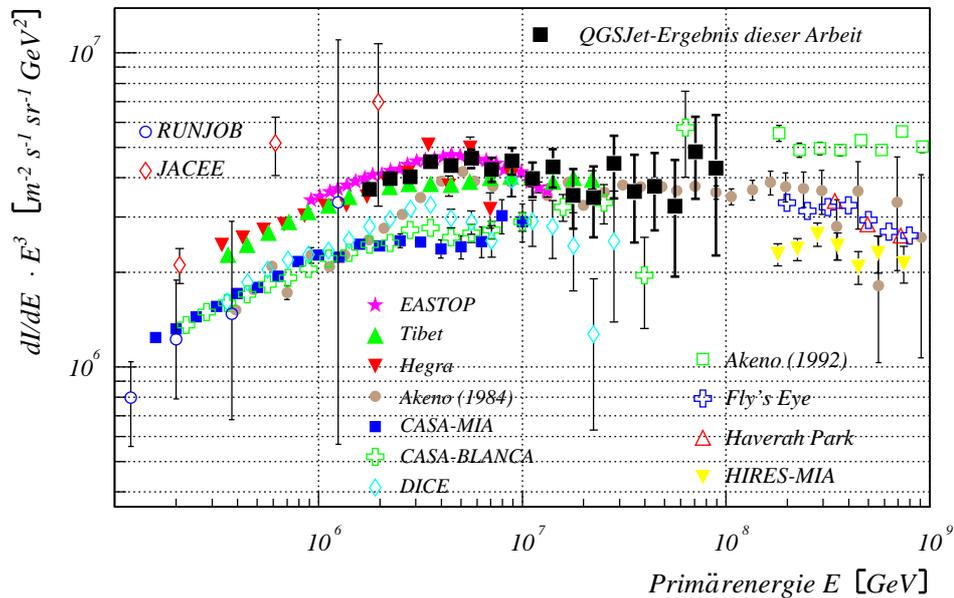


Abbildung 8.35: Vergleich des in dieser Arbeit erhaltenen totalen Energiespektrums mit den Ergebnissen einiger ausgewählter Experimente.

Im Bereich vor dem Knie stimmt das Flußspektrum sehr gut mit den Ergebnissen des Hegera-Experiments überein, nach dem Knie nähert sich das Spektrum den Daten von Akeno(1984) an. Die Extrapolation dieses KASCADE-Ergebnisses würde nahtlos in die Fly's Eye-Daten anschliessen. Berücksichtigt man die systematischen Unsicherheiten, sind die Tibet-, Hegera-, EASTOP- sowie die Akeno-Daten(1984, oberhalb 4 PeV) kompatibel, nicht verträglich sind dagegen die Daten von CASA-MIA, CASA-Blanca und DICE. Die letztgenannten Experimente stimmen untereinander gut überein, sind aber nicht unabhängig voneinander. Alle drei Experimente benutzten in ihren Analysen die Detektoren des CASA-Experiments, sodaß es nicht verwundert, daß diese Experimente untereinander mehr oder weniger konsistent sind.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stand das Energiespektrum der kosmischen Strahlung im Bereich zwischen 10^{15} eV und 10^{17} eV. Von besonderem Interesse waren hierbei die Spektren einzelner Elemente, die als Stellvertreter für Gruppen von Primärteilchen angesehen werden können.

Ausgangspunkt der Untersuchungen waren die Daten des KASCADE-Detektorfeldes, die Elektronenzahl N_e und die Myonzahl N_μ^{tr} . Die verwendeten Daten wurden zwischen Mai 1998 und Februar 2002 aufgenommen. Die effektive Meßzeit betrug dabei 900 Tage. Nach einer Vorstellung der Daten und dem Grundgedanken der Analyse in Kapitel 3 wurden in Kapitel 4 die Eigenschaften von Luftschauern untersucht, wobei die Beschreibung der intrinsischen Fluktuationen der Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ im Mittelpunkt standen. Es wurden funktionale Zusammenhänge entwickelt, die eine analytische Beschreibung dieser Fluktuationen zumindest näherungsweise erlauben. In Kapitel 5 fand eine Untersuchung der Qualität der von KASCADE gemessenen und anschliessend rekonstruierten Luftschauer statt. Hierbei konnten die durch die Messung und Rekonstruktion erzeugten systematischen und statistischen Unsicherheiten der rekonstruierten Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ quantifiziert und primärteilchenunabhängig beschrieben werden. Durch die Kenntnis der Schauerfluktuationen und Rekonstruktionseigenschaften war es möglich, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Messung der Schauergrößen $\lg N_e$ und $\lg N_\mu^{tr}$ bei gegebener Primärenergie in parametrischer Form darzustellen. Im Hinblick auf eine Anwendung auf die KASCADE-Daten wurde in Kapitel 6 ein Überblick über Entfaltungsmethoden gegeben. Die Anwendbarkeit von drei verschiedenen Methoden (Gold-Algorithmus, Bayes-Entfaltung, Verfahren der reduzierten Entropie) auf die Luftschauerproblematik wurde anhand von Monte-Carlo-Simulationen ausführlich untersucht (Kapitel 7). Hierbei zeigte sich, daß alle drei Methoden anwendbar sind. Gleichzeitig konnten Abschätzungen der bei Anwendung dieser Verfahren auftretenden systematischen und statistischen Unsicherheiten angegeben werden. Die eigentliche Analyse der KASCADE-Daten wurde unter Annahme von zwei verschiedenen Hochenergiewechselwirkungsmodellen, QGSJet und SIBYLL, und fünf vorhandenen Primärteilchensorten (H,

He, C, Si, Fe) in Kapitel 8 durchgeführt. Um das bei Luftschauerexperimenten ungünstige Verhältnis zwischen der Anzahl von realisierbaren Monte-Carlo-Simulationen und gemessenen Schauerereignissen zu berücksichtigen, wurde die Strategie verfolgt, bei einigen festen Primärenergien die Wahrscheinlichkeit für die Messung von $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Paaren zu parametrisieren und die Energieabhängigkeit der relevanten Parameter zu interpolieren (Kapitel 4). Vorteil dieses Vorgehens ist die Möglichkeit, den Einfluß der begrenzten Monte-Carlo-Statistik und der gewählten Form der Parametrisierung anhand der Variation des gewählten funktionalen Zusammenhangs bzw. der verwendeten Parameter zu untersuchen. Diese Einflüsse wurden bei den Ergebnissen der Analyse berücksichtigt. Die Ergebnisse der Analyse wurden ausführlich in Kapitel 8 dargestellt und ihre Eigenschaften diskutiert.

QGSJet und SIBYLL wurden aus zwei verschiedenen Gründen gewählt. Zum einen sind diese hadronischen Wechselwirkungsmodelle in den Analysegruppen von Luftschauerexperimenten weit verbreitet, zum anderen handelt es sich bei beiden im Gegensatz zu anderen Modellen, die bei der Beschreibung von Luftschauerdaten zum Einsatz kommen, um physikalisch und theoretisch motivierte Modelle. Anhand der Ergebnisse der Entfaltungsanalyse in Kapitel 8 hat sich gezeigt, daß im Augenblick mit keinem der beiden Modelle die Detektorfelddaten konsistent über den ganzen Energiebereich beschrieben werden können. Dabei ist zu betonen, daß die Ursache für die mangelnde Kompatibilität nicht in den Grundannahmen der Analyse liegt, sondern tatsächlich in den Eigenschaften der Modellierung der hadronischen Wechselwirkungen. Inwieweit die Eigenschaften des verwendeten Niederenergiewechselwirkungsmodells (GHEISHA 2002) zu den Inkonsistenzen beitragen, konnte im Rahmen der Arbeit nicht untersucht werden, jedoch zeigen erste Untersuchungen unter Benutzung alternativer Modelle, daß hier nur ein marginaler Beitrag zu erwarten ist.

Trotz des unbefriedigenden Status, daß eine konsistente Beschreibung der Daten nicht gelingt, und damit nur eingeschränkt belastbare Ergebnisse für die Einzelenergiespektren erzielt werden konnten, ergaben sich doch Lösungsaspekte, die bei einer Fortführung der Analyse vielversprechend erscheinen. Da beide Modelle die Daten in jeweils verschiedenen Bereichen nicht beschreiben können, scheinen Gemeinsamkeiten hinsichtlich der rekonstruierten Einzelspektren zumindest eingeschränkt Eigenschaften der Realität wiederzugeben. Die Analyse ergab für beide Modelle ein praktisch identisches totales Energiespektrum, welches ein ausgeprägtes Knie bei ca. $4.4 \cdot 10^{15}$ eV aufweist. Vor bzw. nach dem Knie kann das Spektrum durch ein Potenzgesetz $\propto E^{-\gamma}$ beschrieben werden. Für den spektralen Index ergaben sich Werte von $\gamma = 2.70 (\pm 0.01)$ (QGSJet) bzw. ± 0.06 (SIBYLL) vor dem Knie und $\gamma = 3.10 \pm 0.07$ (QGSJet) bzw. $\gamma = 3.14 \pm 0.06$ (SIBYLL) nach dem Knie. Es scheint plausibel, daß sich das tatsächliche Gesamtspektrum kaum von dem in dieser Arbeit erhaltenen unterscheidet.

Obwohl das Verhältnis der einzelnen Primärteilchenarten zueinander und insbesondere die Form der Energiespektren der schweren Elemente eine starke Abhängigkeit vom verwendeten Wechselwirkungsmodell zeigen, bestehen auch hier Gemeinsamkeiten. Für beide Modelle ergibt sich eine Änderung der chemischen Zusammensetzung über den Kniebereich. In beiden Fällen weisen die Spektren der leichten Elemente ein Kniestruktur auf, die für das

Knie im Gesamtspektrum verantwortlich ist. Bei beiden Modellen befinden sich die Kniepositionen des Wasserstoff- und Heliumspektrums bei unterschiedlichen Energien. Über die Energieabhängigkeit der Kniepositionen (Rigiditäts- oder Massenabhängigkeit) kann keine Aussage gemacht werden. Eine solche Aussage wäre zwar im Rahmen der vorhandenen statistischen und systematischen (verursacht durch die Analysemethode) Unsicherheiten möglich, aufgrund der Unfähigkeit der Modelle die Daten zu beschreiben zur Zeit jedoch kaum vertretbar. Tatsächlich erscheint es aber als weitgehend sicher, daß die beobachtete Kompositionsänderung hin zu schwereren Elementen stattfindet, wobei die Kniestruktur im Gesamtspektrum durch die Knie in den Flußspektren der Einzelelemente zustande kommt und die Kniepositionen der leichten Elemente widerspiegelt. Das zweite Knie im Gesamtspektrum könnte dann als Signatur des Knies im Eisenspektrum verstanden werden.

Über diese eher qualitativen Aussagen zu den Eigenschaften der Einzelspektren hinaus, bieten die Ergebnisse der Analysen aber auch Möglichkeiten der weiteren Verbesserung der Wechselwirkungsmodelle. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen liefert die Analyse der zweidimensionalen $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Häufigkeitsverteilung nicht nur Aussagen über die Kompatibilität einzelner Modelle. Sie zeigt, in welchen Datenbereichen Unstimmigkeiten auftreten und gibt Hinweise, was deren Ursachen sein könnten, wodurch sich die Möglichkeit der Verbesserung ergibt [Eng03]. So erscheint es durchaus vorstellbar, in einer Fortsetzung und Erweiterung der vorgestellten Analyse anhand der Forderung nach hinreichender Beschreibung der Experimentdaten den Verlauf der mittleren $\lg N_e - \lg N_\mu^{tr}$ -Korrelation soweit einzugrenzen, daß dieser als Vergleichsmerkmal für Modellentwicklungen dienen kann.

Zur Illustration des möglichen Potentials der Ergebnisse von Luftschauerexperimenten kann Abbildung 9.1 dienen. In der Abbildung ist ein Ausschnitt des gemessenen Wasserstoffspektrums verschiedener Experimente gezeigt (siehe Abb. 1.2). Darüberhinaus sind am hochenergetischen Ende die Ergebnisse dieser Analyse für das Wasserstoffspektrum sowohl für QGSJet als auch für SIBYLL-Hypothese eingetragen. Diese Abbildung läßt sich auf zweierlei Arten interpretieren, die einen Ausblick auf weiterführende Analysen geben.

Man erkennt, daß im Gegensatz zu den direkten Messungen im Bereich unterhalb von ca. 200 GeV die Daten von direkten Messungen darüber kaum Aufschluß über den tatsächlichen Verlauf der Flußspektrums geben können. Zum Teil ist die statistische Aussagekraft zu gering, zum Teil widersprechen sich die Resultate verschiedener Experimente. Auf der anderen Seite sind 200 GeV noch zu gering, um eine genaue Aussage über den spektralen Index machen zu können. Erst an diesem Ende des Meßbereichs beginnt der Potenzgesetzcharakter des Spektrums sichtbar zu werden. Zur Illustration wurden ausgehend vom letzten Meßpunkt des BESS-Spektrums extrapolierte Spektren eingetragen, wobei die angenommenen Indizes $\gamma = 2.72$, $\gamma = 2.75$ und $\gamma = 2.78$ betragen. Diese Variation entspricht in etwa der durch die Niederenergiemessungen vorgegebenen Unsicherheit. Obwohl der Unterschied zwischen QGSJet und SIBYLL durchaus als Maß für die extremale Unsicherheit der möglichen Wechselwirkungsmodelle angesehen werden kann [Eng03], entspricht der Unterschied der Ergebnisse für diese beiden Modellvorstellungen gerade der eingezeichneten Unsicher-

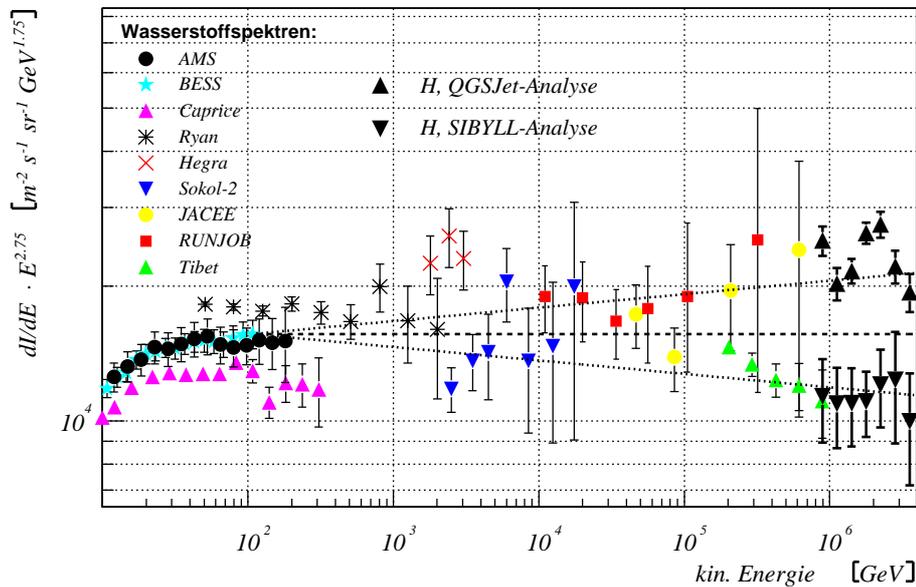


Abbildung 9.1: Vergleich des Anschlusses zwischen Messungen des Wasserstoffspektrums und den Ergebnissen unter Benutzung der QGSJet- bzw. SIBYLL-Parametrisierungen. Die eingezeichneten Linien entsprechen Extrapolationen der BESS-Messungen unter Annahme verschiedener spektraler Indices ($\gamma = 2.72, 2.75, 2.78$; siehe Text).

heit der Niederenergiemessungen. Sollte es möglich sein, ein Modell zu finden, welches die KASCADE-Daten konsistent beschreiben kann, wäre die Möglichkeit gegeben, diese bestehenden Unsicherheiten deutlich zu reduzieren. Aufgrund der großen Meßzeit und Fläche von Luftschauerexperimenten sind die relativen statistischen Fehler durchaus mit denen der Niederenergiemessungen vergleichbar.

Auf der anderen Seite könnten Präzisionsmessungen im Bereich zwischen 200 GeV und 1 TeV (z.B. ATIC [Guz99]) die Situation deutlich verbessern. Unter Annahme eines konstanten spektralen Index ergäben sich enge Einschränkungen an die möglichen Ergebnisse von Luftschauermessungen und damit auch an die zu deren Interpretation verwendeten Wechselwirkungsmodelle.

Durch die hohe Qualität der Daten des KASCADE-Detektorfeldes befinden sich die Analyse und das Verständnis von Luftschauerdaten an einem Punkt, an dem neue Ergebnisse von theoretischer Seite bzw. den Entwicklern von Wechselwirkungsmodellen gefragt sind. Trotz der weiter fortgeschrittenen Verbesserung und Entwicklung der hadronischen Wechselwirkungsmodelle, scheinen auch Luftschauermessungen eine Genauigkeit erreicht zu haben, die es möglich macht, Unstimmigkeiten genau anzugeben, und so auf die Weiterentwicklung dieser Modellen weiterhin Einfluß auszuüben.

Anhang A

Parameter der Schauergrößenverteilungen

A.1 Die $\lg N_e$ -Verteilung

Die $\lg N_e$ -Verteilung bei fester Primärenergie wird durch folgenden funktionaler Zusammenhang beschrieben:

$$P(\lg N_e) = C \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{\lg N_e - p_1}{p_2} \right) \cdot \exp \left(\frac{p_4 - \lg N_e}{p_3} \right) \cdot (p_4 - \lg N_e)^{p_5} \quad (\text{A.1})$$

In den folgenden Tabellen sind die durch die Anpassung an simulierte Verteilungen gewonnenen Werte der Parameter angegeben. Die Parameter p_3 und p_5 wurden dabei auf feste Werte gesetzt und nicht variiert. Parameter p_4 wurde nur für Wasserstoff-induzierte Schauer variiert, der entsprechende energieabhängige Verlauf wurde interpoliert und bei den Primärteilchen He, C, Si und Fe der Wert von p_4 auf den zur simulierten Energien berechneten Wert festgesetzt.

	p_3 , QGSJet	p_5 , QGSJet	p_3 , SIBYLL	p_5 , SIBYLL
H, alle Energien	-1.1	2.5	-0.4	2.6
He, alle Energien	-4.899	2.5	-4.606	2.6
C, alle Energien	-8.701	2.5	-9.075	2.6
Si, alle Energien	-13.94	2.5	-12.02	2.6
Fe, alle Energien	-20.8	2.5	-17.47	2.6

Tabelle A.1: Werte der Parameter p_3 und p_5 .

	p_1	p_2	p_4
H, 10^{14} eV, QGSJet	3.363 ± 0.013	0.3766 ± 0.0074	5.104 ± 0.031
H, $5 \cdot 10^{14}$ eV, QGSJet	4.275 ± 0.011	0.2815 ± 0.0067	5.708 ± 0.025
H, 10^{15} eV, QGSJet	4.643 ± 0.011	0.2358 ± 0.0072	5.987 ± 0.027
H, $3 \cdot 10^{15}$ eV, QGSJet	5.261 ± 0.010	0.1955 ± 0.0073	6.491 ± 0.027
H, 10^{16} eV, QGSJet	5.867 ± 0.010	0.1681 ± 0.0076	6.964 ± 0.028
H, $3 \cdot 10^{16}$ eV, QGSJet	6.474 ± 0.011	0.1562 ± 0.0081	7.437 ± 0.026
H, 10^{17} eV, QGSJet	7.091 ± 0.014	0.1513 ± 0.0099	7.941 ± 0.031
H, $3 \cdot 10^{17}$ eV, QGSJet	7.659 ± 0.013	0.1174 ± 0.0095	8.410 ± 0.030
H, 10^{18} eV, QGSJet	8.271 ± 0.018	0.1260 ± 0.0120	8.902 ± 0.032
H, 10^{14} eV, SIBYLL	3.428 ± 0.0139	0.3962 ± 0.0083	4.967 ± 0.020
H, $5 \cdot 10^{14}$ eV, SIBYLL	4.326 ± 0.010	0.2751 ± 0.0069	5.630 ± 0.017
H, 10^{15} eV, SIBYLL	4.683 ± 0.009	0.2197 ± 0.0069	5.940 ± 0.019
H, $3 \cdot 10^{15}$ eV, SIBYLL	5.336 ± 0.010	0.2034 ± 0.0074	6.398 ± 0.018
H, 10^{16} eV, SIBYLL	5.911 ± 0.009	0.1504 ± 0.0074	6.900 ± 0.021
H, $3 \cdot 10^{16}$ eV, SIBYLL	6.543 ± 0.010	0.1460 ± 0.0075	7.363 ± 0.019
H, 10^{17} eV, SIBYLL	7.126 ± 0.011	0.1230 ± 0.0085	7.875 ± 0.022
H, $3 \cdot 10^{17}$ eV, SIBYLL	7.740 ± 0.014	0.1277 ± 0.0097	8.356 ± 0.024
H, 10^{18} eV, SIBYLL	8.315 ± 0.014	0.1101 ± 0.0100	8.856 ± 0.025

Tabelle A.2: Parameterwerte für Wasserstoff-induzierte Schauer.

	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad QGSJet}$	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad SIBYLL}$
H, 10^{14} eV	104.9/87	51.04/41
H, $5 \cdot 10^{14}$ eV	69.28/70	43.15/42
H, 10^{15} eV	69.75/60	54.04/41
H, $3 \cdot 10^{15}$ eV	71.03/52	39.52/39
H, 10^{16} eV	42.44/44	56.62/41
H, $3 \cdot 10^{16}$ eV	42.56/41	42.1/41
H, 10^{17} eV	44.38/34	80.04/40
H, $3 \cdot 10^{17}$ eV	32.39/27	40.22/38
H, 10^{18} eV	32.29/25	37.1/38

Tabelle A.3: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Wasserstoff-induzierte Schauer.

	p_1	p_2	p_4
He, 10^{14} eV, QGSJet	3.752 ± 0.013	0.4068 ± 0.0045	5.08
He, $5 \cdot 10^{14}$ eV, QGSJet	4.459 ± 0.009	0.2892 ± 0.0040	5.726
He, 10^{15} eV, QGSJet	4.804 ± 0.010	0.2594 ± 0.0046	6.008
He, $3 \cdot 10^{15}$ eV, QGSJet	5.381 ± 0.009	0.2193 ± 0.0047	6.479
He, 10^{16} eV, QGSJet	5.959 ± 0.009	0.1909 ± 0.0053	6.956
He, $3 \cdot 10^{16}$ eV, QGSJet	6.510 ± 0.009	0.1556 ± 0.0057	7.437
He, 10^{17} eV, QGSJet	7.103 ± 0.010	0.1440 ± 0.0061	7.924
He, $3 \cdot 10^{17}$ eV, QGSJet	7.682 ± 0.010	0.1284 ± 0.0066	8.415
He, 10^{18} eV, QGSJet	8.248 ± 0.010	0.1095 ± 0.0072	8.912
He, 10^{14} eV, SIBYLL	3.857 ± 0.095	0.4136 ± 0.0046	4.968
He, $5 \cdot 10^{14}$ eV, SIBYLL	4.550 ± 0.009	0.2912 ± 0.0042	5.636
He, 10^{15} eV, SIBYLL	4.882 ± 0.010	0.2561 ± 0.0047	5.924
He, $3 \cdot 10^{15}$ eV, SIBYLL	5.455 ± 0.009	0.2169 ± 0.0049	6.405
He, 10^{16} eV, SIBYLL	5.995 ± 0.008	0.1703 ± 0.0050	6.889
He, $3 \cdot 10^{16}$ eV, SIBYLL	6.573 ± 0.008	0.1480 ± 0.0052	7.376
He, 10^{17} eV, SIBYLL	7.160 ± 0.009	0.1307 ± 0.0058	7.866
He, $3 \cdot 10^{17}$ eV, SIBYLL	7.740 ± 0.010	0.1321 ± 0.0063	8.358
He, 10^{18} eV, SIBYLL	8.299 ± 0.010	0.1023 ± 0.0068	8.854

Tabelle A.4: Parameterwerte für Helium-induzierte Schauer.

	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad QGSJet}$	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad SIBYLL}$
He, 10^{14} eV	79.69/80	67.21/42
He, $5 \cdot 10^{14}$ eV	109.1/74	55.74/41
He, 10^{15} eV	121.3/78	54.25/42
He, $3 \cdot 10^{15}$ eV	72.66/75	41.45/42
He, 10^{16} eV	87.69/73	47.84/43
He, $3 \cdot 10^{16}$ eV	83.98/71	37.43/41
He, 10^{17} eV	76.96/76	29.28/40
He, $3 \cdot 10^{17}$ eV	133.3/74	37.93/38
He, 10^{18} eV	65.35/69	39.26/39

Tabelle A.5: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Helium-induzierte Schauer.

	p_1	p_2	p_4
C, 10^{14} eV, QGSJet	3.692 ± 0.011	0.3286 ± 0.0032	5.08
C, $5 \cdot 10^{14}$ eV, QGSJet	4.436 ± 0.008	0.2495 ± 0.0029	5.726
C, 10^{15} eV, QGSJet	4.771 ± 0.009	0.2221 ± 0.0033	6.008
C, $3 \cdot 10^{15}$ eV, QGSJet	5.362 ± 0.009	0.1956 ± 0.0036	6.479
C, 10^{16} eV, QGSJet	5.920 ± 0.008	0.1620 ± 0.0034	6.956
C, $3 \cdot 10^{16}$ eV, QGSJet	6.484 ± 0.008	0.1360 ± 0.0040	7.437
C, 10^{17} eV, QGSJet	7.083 ± 0.009	0.1300 ± 0.0046	7.924
C, $3 \cdot 10^{17}$ eV, QGSJet	7.650 ± 0.009	0.1114 ± 0.0051	8.415
C, 10^{18} eV, QGSJet	8.216 ± 0.008	0.0939 ± 0.0051	8.912
C, 10^{14} eV, SIBYLL	3.882 ± 0.012	0.3523 ± 0.0031	4.968
C, $5 \cdot 10^{14}$ eV, SIBYLL	4.582 ± 0.009	0.2631 ± 0.0030	5.636
C, 10^{15} eV, SIBYLL	4.892 ± 0.010	0.2290 ± 0.0035	5.924
C, $3 \cdot 10^{15}$ eV, SIBYLL	5.456 ± 0.009	0.1939 ± 0.0036	6.405
C, 10^{16} eV, SIBYLL	6.011 ± 0.009	0.1616 ± 0.0039	6.889
C, $3 \cdot 10^{16}$ eV, SIBYLL	6.578 ± 0.009	0.1452 ± 0.0042	7.376
C, 10^{17} eV, SIBYLL	7.135 ± 0.009	0.1222 ± 0.0045	7.866
C, $3 \cdot 10^{17}$ eV, SIBYLL	7.700 ± 0.009	0.1158 ± 0.0050	8.358
C, 10^{18} eV, SIBYLL	8.252 ± 0.008	0.0855 ± 0.0051	8.854

Tabelle A.6: Parameterwerte für Kohlenstoff-induzierte Schauer.

	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad QGSJet}$	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad SIBYLL}$
C, 10^{14} eV	81.03/76	42.65/42
C, $5 \cdot 10^{14}$ eV	82.46/72	27.83/40
C, 10^{15} eV	63.26/75	59.74/42
C, $3 \cdot 10^{15}$ eV	78.02/71	41.89/43
C, 10^{16} eV	102.5/77	48.1/39
C, $3 \cdot 10^{16}$ eV	51.31/73	67.59/42
C, 10^{17} eV	102/75	32.48/41
C, $3 \cdot 10^{17}$ eV	96.19/73	47.69/42
C, 10^{18} eV	46.67/64	29.55/36

Tabelle A.7: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Kohlenstoff-induzierte Schauer.

	p_1	p_2	p_4
Si, 10^{14} eV, QGSJet	3.642 ± 0.009	0.2734 ± 0.0020	5.08
Si, $5 \cdot 10^{14}$ eV, QGSJet	4.412 ± 0.009	0.2200 ± 0.0024	5.726
Si, 10^{15} eV, QGSJet	4.733 ± 0.008	0.1928 ± 0.0026	6.008
Si, $3 \cdot 10^{15}$ eV, QGSJet	5.308 ± 0.008	0.1637 ± 0.0027	6.479
Si, 10^{16} eV, QGSJet	5.907 ± 0.008	0.1480 ± 0.0031	6.956
Si, $3 \cdot 10^{16}$ eV, QGSJet	6.479 ± 0.008	0.1289 ± 0.0032	7.437
Si, 10^{17} eV, QGSJet	7.050 ± 0.008	0.1100 ± 0.0037	7.924
Si, $3 \cdot 10^{17}$ eV, QGSJet	7.631 ± 0.009	0.1042 ± 0.0041	8.415
Si, 10^{18} eV, QGSJet	8.196 ± 0.009	0.0880 ± 0.0047	8.912
Si, 10^{14} eV, SIBYLL	3.655 ± 0.008	0.2770 ± 0.0020	4.968
Si, $5 \cdot 10^{14}$ eV, SIBYLL	4.430 ± 0.008	0.2161 ± 0.0025	5.636
Si, 10^{15} eV, SIBYLL	4.773 ± 0.008	0.1926 ± 0.0028	5.924
Si, $3 \cdot 10^{15}$ eV, SIBYLL	5.358 ± 0.007	0.1616 ± 0.0029	6.405
Si, 10^{16} eV, SIBYLL	5.924 ± 0.007	0.1328 ± 0.0031	6.889
Si, $3 \cdot 10^{16}$ eV, SIBYLL	6.512 ± 0.007	0.1211 ± 0.0033	7.376
Si, 10^{17} eV, SIBYLL	7.073 ± 0.007	0.1020 ± 0.0036	7.866
Si, $3 \cdot 10^{17}$ eV, SIBYLL	7.644 ± 0.007	0.0888 ± 0.0040	8.358
Si, 10^{18} eV, SIBYLL	8.216 ± 0.008	0.0861 ± 0.0043	8.854

Tabelle A.8: Parameterwerte für Silizium-induzierte Schauer.

	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad QGSJet}$	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad SIBYLL}$
Si, 10^{14} eV	98.05/74	49.94/39
Si, $5 \cdot 10^{14}$ eV	78.49/79	30.03/42
Si, 10^{15} eV	68.53/72	33.89/41
Si, $3 \cdot 10^{15}$ eV	71.48/68	27.74/39
Si, 10^{16} eV	101.1/71	34.83/37
Si, $3 \cdot 10^{16}$ eV	89.67/74	36.63/41
Si, 10^{17} eV	65.66/69	25.94/41
Si, $3 \cdot 10^{17}$ eV	54.61/70	50.18/39
Si, 10^{18} eV	44.84/63	37.26/37

Tabelle A.9: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Silizium-induzierte Schauer.

	p_1	p_2	p_4
Fe, 10^{14} eV, QGSJet	3.531 ± 0.004	0.2176 ± 0.0009	5.08
Fe, $5\cdot 10^{14}$ eV, QGSJet	4.357 ± 0.006	0.1889 ± 0.0014	5.726
Fe, 10^{15} eV, QGSJet	4.699 ± 0.008	0.1720 ± 0.0020	6.008
Fe, $3\cdot 10^{15}$ eV, QGSJet	5.280 ± 0.007	0.1459 ± 0.0020	6.479
Fe, 10^{16} eV, QGSJet	5.849 ± 0.007	0.1237 ± 0.0024	6.956
Fe, $3\cdot 10^{16}$ eV, QGSJet	6.464 ± 0.008	0.1181 ± 0.0027	7.437
Fe, 10^{17} eV, QGSJet	7.019 ± 0.007	0.0972 ± 0.0030	7.924
Fe, $3\cdot 10^{17}$ eV, QGSJet	7.613 ± 0.008	0.0924 ± 0.0033	8.415
Fe, 10^{18} eV, QGSJet	8.187 ± 0.007	0.0825 ± 0.0030	8.912
Fe, 10^{14} eV, SIBYLL	3.518 ± 0.007	0.2195 ± 0.0016	4.968
Fe, $5\cdot 10^{14}$ eV, SIBYLL	4.360 ± 0.007	0.1875 ± 0.0019	5.636
Fe, 10^{15} eV, SIBYLL	4.709 ± 0.008	0.1676 ± 0.0023	5.924
Fe, $3\cdot 10^{15}$ eV, SIBYLL	5.289 ± 0.006	0.1378 ± 0.0022	6.405
Fe, 10^{16} eV, SIBYLL	5.883 ± 0.007	0.1206 ± 0.0027	6.889
Fe, $3\cdot 10^{16}$ eV, SIBYLL	6.467 ± 0.007	0.1056 ± 0.0027	7.376
Fe, 10^{17} eV, SIBYLL	7.066 ± 0.007	0.0977 ± 0.0033	7.866
Fe, $3\cdot 10^{17}$ eV, SIBYLL	7.620 ± 0.007	0.0856 ± 0.0033	8.358
Fe, 10^{18} eV, SIBYLL	8.182 ± 0.007	0.0758 ± 0.0036	8.854

Tabelle A.10: Parameterwerte für Eisen-induzierte Schauer.

	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad QGSJet}$	$\chi^2/\text{Freiheitsgrad SIBYLL}$
Fe, 10^{14} eV	72.58/78	49.34/40
Fe, $5\cdot 10^{14}$ eV	80.68/78	48.81/42
Fe, 10^{15} eV	73.24/71	31.78/41
Fe, $3\cdot 10^{15}$ eV	71.64/78	36.25/42
Fe, 10^{16} eV	62.89/66	29.87/43
Fe, $3\cdot 10^{16}$ eV	51.47/65	14.25/35
Fe, 10^{17} eV	70.36/74	45.37/41
Fe, $3\cdot 10^{17}$ eV	73.54/67	40.21/37
Fe, 10^{18} eV	66.26/76	28.18/39

Tabelle A.11: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Eisen-induzierte Schauer.

A.2 Die $\lg N_\mu^{tr.}$ -Verteilung

Die Verteilung von $\lg N_\mu^{tr.}$ bei fester Primärenergie wird beschrieben durch

$$P(\lg N_\mu^{tr.}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.}) - Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.} + d \lg N_\mu^{tr.}) \right) \cdot P(\lg N_e) d \lg N_e \quad (\text{A.2})$$

mit

$$Q(\lg N_e, \lg N_\mu^{tr.}) = \text{erf} \left(\frac{\lg N_e - \lg N_0}{p_6 - p_7 \cdot (\lg N_0 - \lg N_e)} \right) \quad (\text{A.3})$$

und

$$\lg N_0 = c_0 + c_1 \cdot \lg N_\mu^{tr.} - c_2 \cdot (\lg N_\mu^{tr.})^2 \quad (\text{A.4})$$

Die folgenden Tabellen sind die durch eine Anpassung an die simulierten Verteilungen gewonnenen Werte der einzelnen Parameter angegeben. Hierbei hat sich gezeigt, daß nicht alle Parameter zur Beschreibung der Verteilungen frei variieren müssen. Die entsprechenden Parameter sind p_7 , c_1 und c_2 . Ihre Werte wurden festgelegt und nicht weiter variiert.

	p_7	c_1	c_2
H, alle Energien, QGSJet	0.235	3.5	0.08
He, alle Energien, QGSJet	0.04	3.5	0
C, alle Energien, QGSJet	0	3.5	0
Si, alle Energien, QGSJet	0	3.5	0
Fe, alle Energien, QGSJet	0	3.5	0
H, alle Energien, SIBYLL	0.3383	3.8	0.1246
He, alle Energien, SIBYLL	0.1877	3.5	0.087
C, alle Energien, SIBYLL	0	3.4	0
Si, alle Energien, SIBYLL	0	3.3	0
Fe, alle Energien, SIBYLL	0	3.15	0

Tabelle A.12: Werte der Parameter p_7 , c_1 und c_2 .

	p_6 , QGSJet	c_0 , QGSJet	p_6 , SIBYLL	c_0 , SIBYLL
H, 10^{14} eV	0.3868 ± 0.0079	-4.935 ± 0.005	0.4090 ± 0.0086	-5.202 ± 0.005
H, $5 \cdot 10^{14}$ eV	0.3497 ± 0.0075	-6.015 ± 0.005	0.3497 ± 0.0080	-6.318 ± 0.005
H, 10^{15} eV	0.3363 ± 0.0086	-6.476 ± 0.006	0.3304 ± 0.0089	-6.778 ± 0.006
H, $3 \cdot 10^{15}$ eV	0.3060 ± 0.0087	-7.232 ± 0.006	0.3023 ± 0.0093	-7.513 ± 0.006
H, 10^{16} eV	0.2780 ± 0.0095	-7.948 ± 0.007	0.2711 ± 0.0099	-8.204 ± 0.006
H, $3 \cdot 10^{16}$ eV	0.2520 ± 0.0098	-8.649 ± 0.007	0.2417 ± 0.0100	-8.845 ± 0.007
H, 10^{17} eV	0.2168 ± 0.0108	-9.331 ± 0.007	0.2058 ± 0.0106	-9.444 ± 0.007
H, $3 \cdot 10^{17}$ eV	0.1787 ± 0.0105	-9.994 ± 0.007	0.1970 ± 0.0114	-9.989 ± 0.007
H, 10^{18} eV	0.1955 ± 0.0127	-10.62 ± 0.009	0.1826 ± 0.0122	-10.500 ± 0.008

Tabelle A.13: Parameterwerte für Wasserstoff-induzierte Schauer.

	χ^2 /Freiheitsgrad QGSJet	χ^2 /Freiheitsgrad SIBYLL
H, 10^{14} eV	63.35/62	75.86/71
H, $5 \cdot 10^{14}$ eV	47.09/54	56.77/79
H, 10^{15} eV	47.54/47	41.8/53
H, $3 \cdot 10^{15}$ eV	66.1/45	36.65/47
H, 10^{16} eV	29.73/38	33.03/40
H, $3 \cdot 10^{16}$ eV	43.46/37	37.03/39
H, 10^{17} eV	26.18/30	27.94/32
H, $3 \cdot 10^{17}$ eV	23.41/26	32.12/31
H, 10^{18} eV	39.14/24	40.2/27

Tabelle A.14: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Wasserstoff-induzierte Schauer.

	p_6 , QGSJet	c_0 , QGSJet	p_6 , SIBYLL	c_0 , SIBYLL
He, 10^{14} eV	0.2466 ± 0.0080	-5.686 ± 0.004	0.1419 ± 0.0096	-4.914 ± 0.004
He, $5 \cdot 10^{14}$ eV	0.2617 ± 0.0063	-7.051 ± 0.004	0.1699 ± 0.0066	-5.940 ± 0.003
He, 10^{15} eV	0.2460 ± 0.0070	-7.656 ± 0.004	0.1590 ± 0.0071	-6.378 ± 0.004
He, $3 \cdot 10^{15}$ eV	0.2514 ± 0.0071	-8.681 ± 0.005	0.1421 ± 0.0070	-7.095 ± 0.004
He, 10^{16} eV	0.2368 ± 0.0078	-9.712 ± 0.005	0.1304 ± 0.0071	-7.786 ± 0.004
He, $3 \cdot 10^{16}$ eV	0.2239 ± 0.0080	-10.77 ± 0.006	0.1244 ± 0.0070	-8.444 ± 0.004
He, 10^{17} eV	0.2045 ± 0.0089	-11.83 ± 0.006	0.0999 ± 0.0080	-9.073 ± 0.005
He, $3 \cdot 10^{17}$ eV	0.2008 ± 0.0096	-12.9 ± 0.007	0.0927 ± 0.0091	-9.669 ± 0.005
He, 10^{18} eV	0.2090 ± 0.0109	-13.98 ± 0.008	0.0896 ± 0.0087	-10.240 ± 0.006

Tabelle A.15: Parameterwerte für Helium-induzierte Schauer.

	χ^2 /Freiheitsgrad QGSJet	χ^2 /Freiheitsgrad SIBYLL
He, 10^{14} eV	74.77/76	110.8/76
He, $5 \cdot 10^{14}$ eV	76.22/62	57.16/60
He, 10^{15} eV	44.1/55	52.53/59
He, $3 \cdot 10^{15}$ eV	24.79/41	45.44/50
He, 10^{16} eV	40.36/45	33.05/44
He, $3 \cdot 10^{16}$ eV	34.44/32	41.82/43
He, 10^{17} eV	56.74/30	28.92/29
He, $3 \cdot 10^{17}$ eV	25.8/26	43.2/27
He, 10^{18} eV	17.97/23	20.5/23

Tabelle A.16: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Helium-induzierte Schauer.

	p_6 , QGSJet	c_0 , QGSJet	p_6 , SIBYLL	c_0 , SIBYLL
C, 10^{14} eV	0.1082 ± 0.0098	-5.934 ± 0.003	0.1273 ± 0.0092	-5.477 ± 0.003
C, $5 \cdot 10^{14}$ eV	0.1602 ± 0.0058	-7.266 ± 0.003	0.1889 ± 0.0056	-6.727 ± 0.003
C, 10^{15} eV	0.1643 ± 0.0062	-7.861 ± 0.003	0.1878 ± 0.0060	-7.292 ± 0.004
C, $3 \cdot 10^{15}$ eV	0.1639 ± 0.0062	-8.872 ± 0.004	0.1669 ± 0.0060	-8.254 ± 0.004
C, 10^{16} eV	0.1555 ± 0.0066	-9.902 ± 0.004	0.1604 ± 0.0062	-9.235 ± 0.004
C, $3 \cdot 10^{16}$ eV	0.1432 ± 0.0066	-10.94 ± 0.004	0.1675 ± 0.0065	-10.220 ± 0.004
C, 10^{17} eV	0.1314 ± 0.0077	-12.000 ± 0.005	0.1346 ± 0.0072	-11.210 ± 0.005
C, $3 \cdot 10^{17}$ eV	0.1260 ± 0.0081	-13.070 ± 0.005	0.1273 ± 0.0078	-12.210 ± 0.005
C, 10^{18} eV	0.1131 ± 0.0086	-14.13 ± 0.006	0.1241 ± 0.0079	-13.23 ± 0.006

Tabelle A.17: Parameterwerte für Kohlenstoff-induzierte Schauer.

	χ^2 /Freiheitsgrad QGSJet	χ^2 /Freiheitsgrad SIBYLL
C, 10^{14} eV	56.15/57	72.13/59
C, $5 \cdot 10^{14}$ eV	51.92/46	37.45/49
C, 10^{15} eV	42.91/42	50.22/43
C, $3 \cdot 10^{15}$ eV	36.28/38	42.76/39
C, 10^{16} eV	38.13/33	21/33
C, $3 \cdot 10^{16}$ eV	33.3/30	43.37/31
C, 10^{17} eV	6.698/20	20.58/25
C, $3 \cdot 10^{17}$ eV	15.46/21	11.34/18
C, 10^{18} eV	10.16/16	15.3/16

Tabelle A.18: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Kohlenstoff-induzierte Schauer.

	p_6 , QGSJet	c_0 , QGSJet	p_6 , SIBYLL	c_0 , SIBYLL
Si, 10^{14} eV	0.0478 ± 0.0139	-6.167 ± 0.002	0.0558 ± 0.0126	-5.447 ± 0.002
Si, $5 \cdot 10^{14}$ eV	0.1210 ± 0.0053	-7.456 ± 0.002	0.1124 ± 0.0056	-6.594 ± 0.002
Si, 10^{15} eV	0.1243 ± 0.0054	-8.040 ± 0.003	0.1243 ± 0.0055	-7.115 ± 0.003
Si, $3 \cdot 10^{15}$ eV	0.1240 ± 0.0052	-9.039 ± 0.003	0.1170 ± 0.0054	-8.015 ± 0.003
Si, 10^{16} eV	0.1223 ± 0.0058	-10.06 ± 0.003	0.1180 ± 0.0054	-8.938 ± 0.003
Si, $3 \cdot 10^{16}$ eV	0.1083 ± 0.0060	-11.100 ± 0.003	0.1032 ± 0.0058	-9.874 ± 0.003
Si, 10^{17} eV	0.1126 ± 0.0064	-12.150 ± 0.004	0.1016 ± 0.0060	-10.820 ± 0.004
Si, $3 \cdot 10^{17}$ eV	0.0974 ± 0.0071	-13.200 ± 0.004	0.0906 ± 0.0064	-11.770 ± 0.004
Si, 10^{18} eV	0.0959 ± 0.0082	-14.27 ± 0.005	0.0896 ± 0.0074	-12.720 ± 0.005

Tabelle A.19: Parameterwerte für Silizium-induzierte Schauer.

	χ^2 /Freiheitsgrad QGSJet	χ^2 /Freiheitsgrad SIBYLL
Si, 10^{14} eV	54.42/45	60.9/47
Si, $5 \cdot 10^{14}$ eV	24.63/41	36.96/40
Si, 10^{15} eV	34.29/39	34.54/38
Si, $3 \cdot 10^{15}$ eV	28.96/33	27.52/32
Si, 10^{16} eV	25.97/30	25.38/27
Si, $3 \cdot 10^{16}$ eV	35.86/25	22.49/27
Si, 10^{17} eV	28.49/19	17.88/22
Si, $3 \cdot 10^{17}$ eV	19.51/18	6.663/18
Si, 10^{18} eV	32.79/15	17.9/18

Tabelle A.20: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Silizium-induzierte Schauer.

	p_6 , QGSJet	c_0 , QGSJet	p_6 , SIBYLL	c_0 , SIBYLL
Fe, 10^{14} eV	0.0871 ± 0.0053	-6.357 ± 0.002	0.0142 ± 0.0036	-5.232 ± 0.002
Fe, $5 \cdot 10^{14}$ eV	0.0921 ± 0.0047	-7.630 ± 0.002	0.0573 ± 0.0070	-6.279 ± 0.002
Fe, 10^{15} eV	0.1044 ± 0.0048	-8.200 ± 0.002	0.0800 ± 0.0056	-6.744 ± 0.002
Fe, $3 \cdot 10^{15}$ eV	0.1096 ± 0.0044	-9.182 ± 0.002	0.0844 ± 0.0048	-7.552 ± 0.002
Fe, 10^{16} eV	0.1033 ± 0.0046	-10.19 ± 0.003	0.0792 ± 0.0053	-8.394 ± 0.003
Fe, $3 \cdot 10^{16}$ eV	0.0975 ± 0.0051	-11.220 ± 0.003	0.0744 ± 0.0053	-9.253 ± 0.003
Fe, 10^{17} eV	0.0829 ± 0.0054	-12.270 ± 0.003	0.0720 ± 0.0059	-10.13 ± 0.003
Fe, $3 \cdot 10^{17}$ eV	0.0854 ± 0.0059	-13.32 ± 0.004	0.0662 ± 0.0062	-11.000 ± 0.003
Fe, 10^{18} eV	0.0800 ± 0.0055	-14.38 ± 0.003	0.0512 ± 0.0072	-11.880 ± 0.003

Tabelle A.21: Parameterwerte für Eisen-induzierte Schauer.

	χ^2 /Freiheitsgrad QGSJet	χ^2 /Freiheitsgrad SIBYLL
Fe, 10^{14} eV	37.47/38	51.83/38
Fe, $5 \cdot 10^{14}$ eV	22.99/30	22.19/33
Fe, 10^{15} eV	57.22/30	22.99/32
Fe, $3 \cdot 10^{15}$ eV	20.41/24	28.7/28
Fe, 10^{16} eV	46.84/24	44.13/24
Fe, $3 \cdot 10^{16}$ eV	23.31/21	21.75/23
Fe, 10^{17} eV	12/16	10.93/18
Fe, $3 \cdot 10^{17}$ eV	17.05/14	24.51/18
Fe, 10^{18} eV	8.631/13	5.826/13

Tabelle A.22: Erzieltes χ^2 pro Freiheitsgrad bei der Anpassung für Eisen-induzierte Schauer.

Anhang B

Verlauf von WMSE und χ_b^2 bei der Entfaltung der Daten

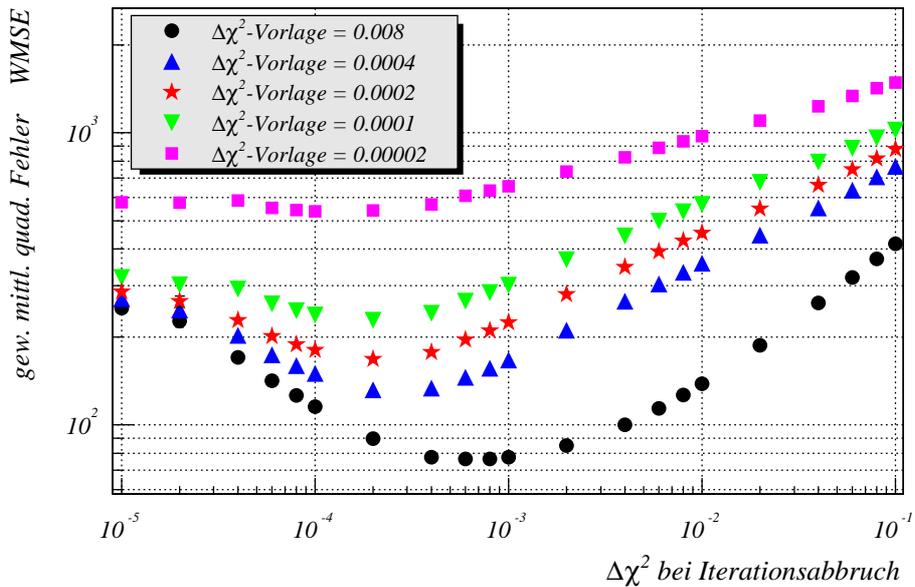


Abbildung B.1: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, Gold-Algorithmus, QGSJet-Hypothese.

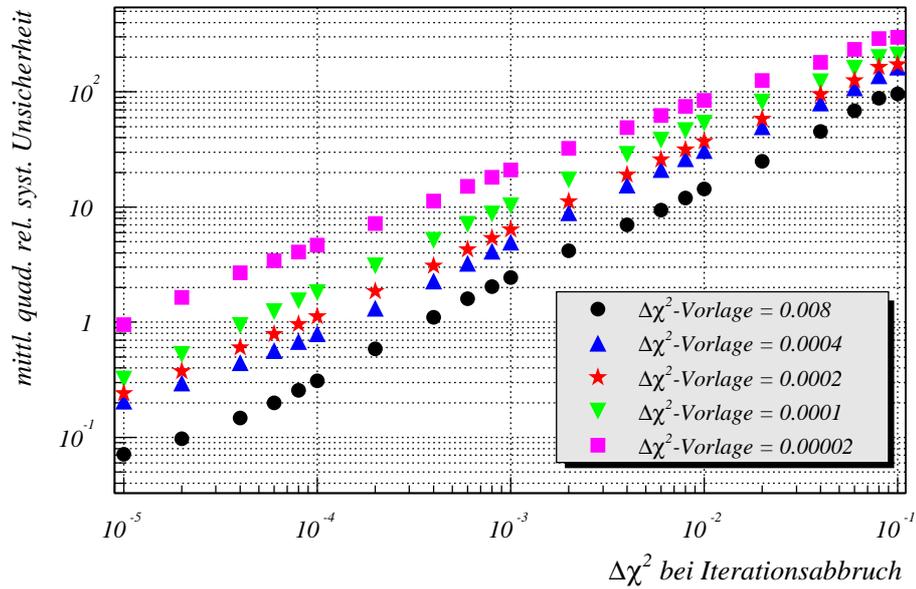


Abbildung B.2: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, Gold-Algorithmus, QGSJet-Hypothese.

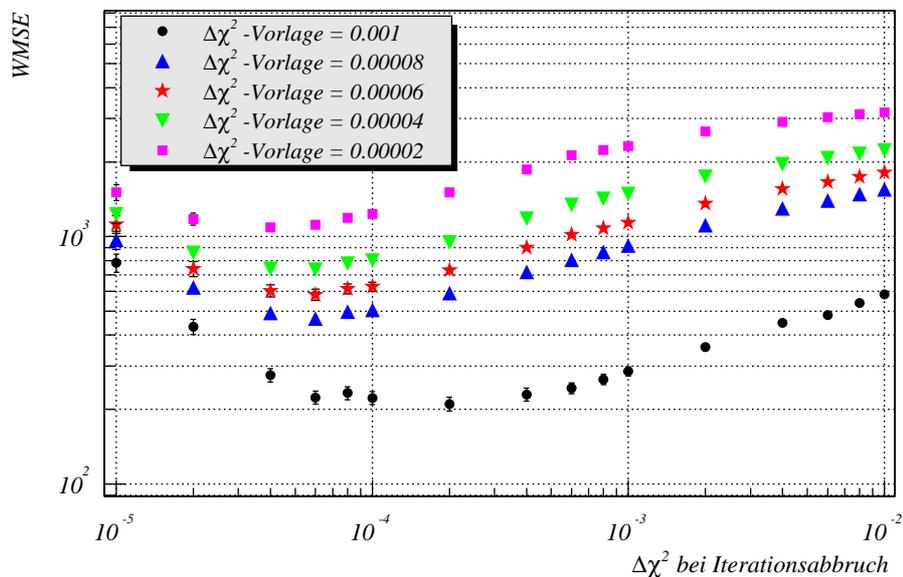


Abbildung B.3: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, Bayes-Entfaltung, QGSJet-Hypothese.

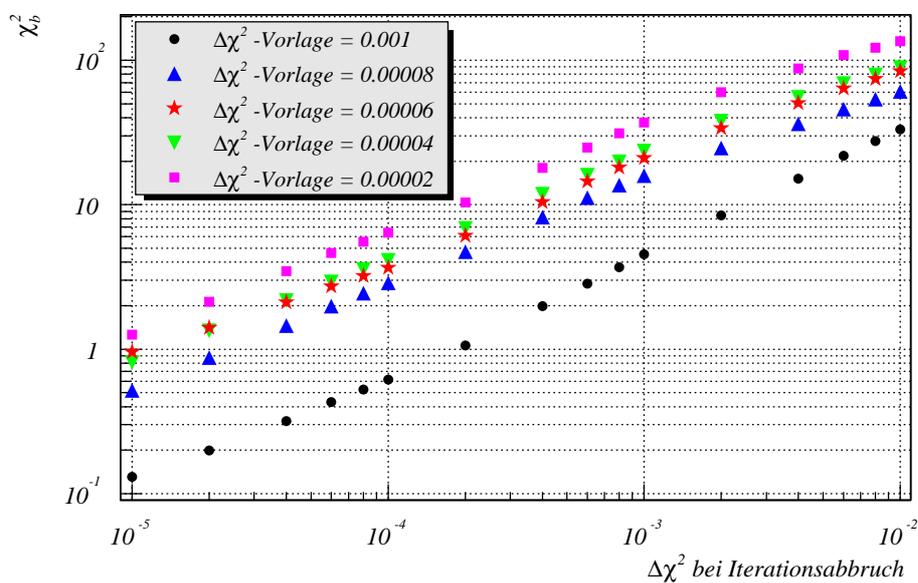


Abbildung B.4: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, Bayes-Entfaltung, QGSJet-Hypothese.

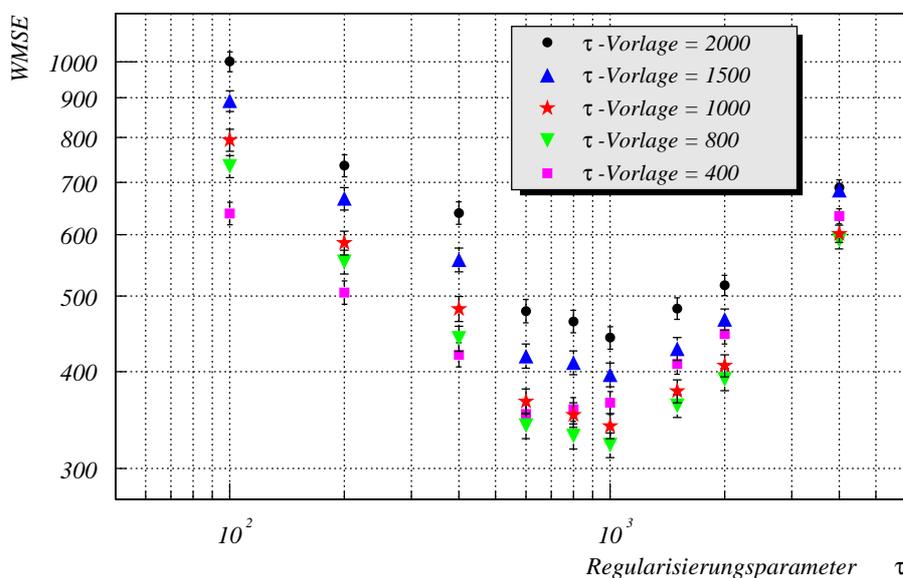


Abbildung B.5: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, reduzierte Entropie, QGSJet-Hypothese.

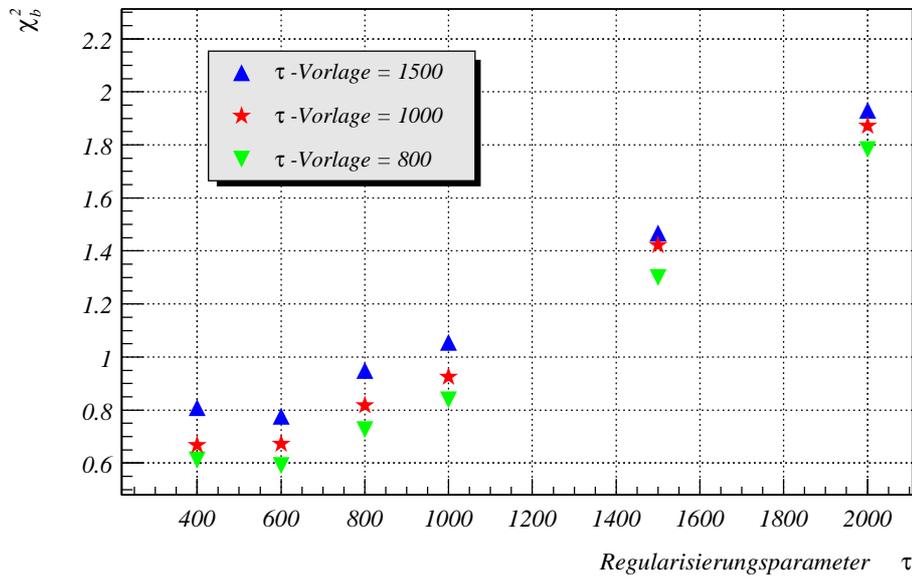


Abbildung B.6: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, reduzierte Entropie, QGSJet-Hypothese.

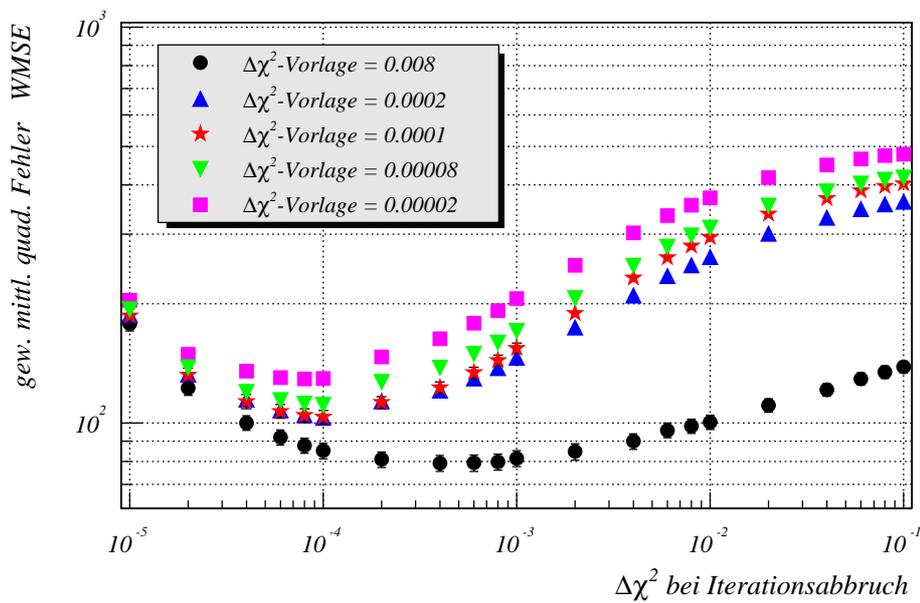


Abbildung B.7: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, Gold-Algorithmus, SIBYLL-Hypothese.

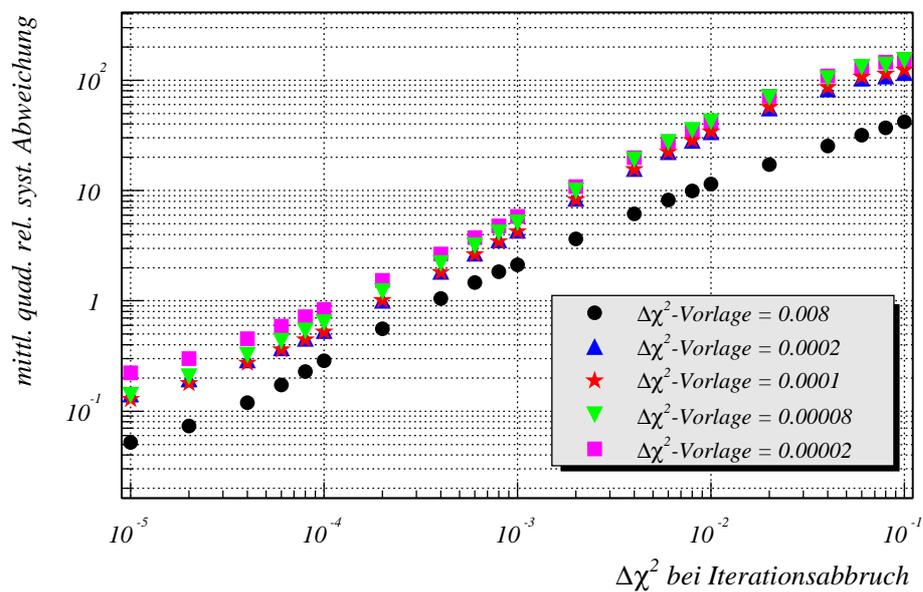


Abbildung B.8: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, Gold-Algorithmus, SIBYLL-Hypothese.

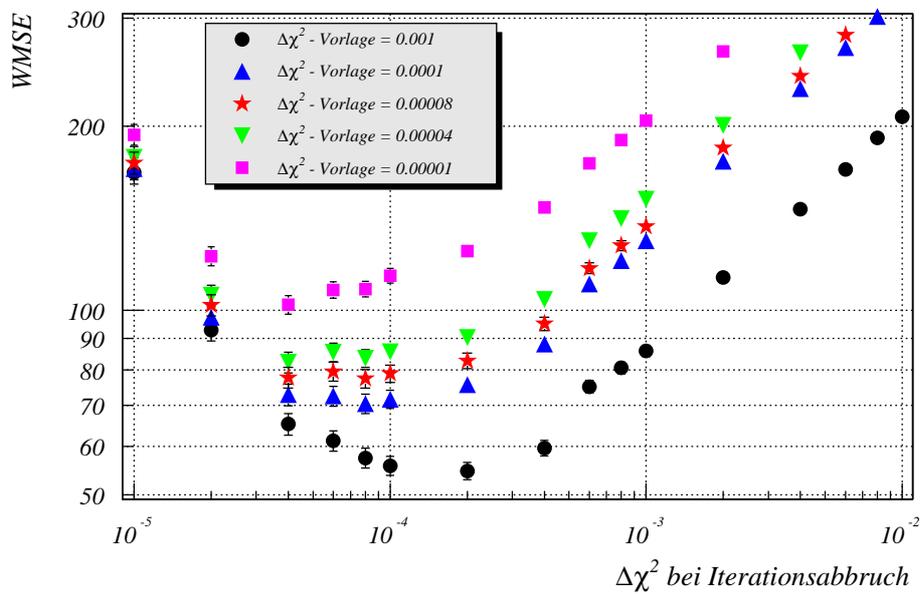


Abbildung B.9: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, Bayes-Entfaltung, SIBYLL-Hypothese.

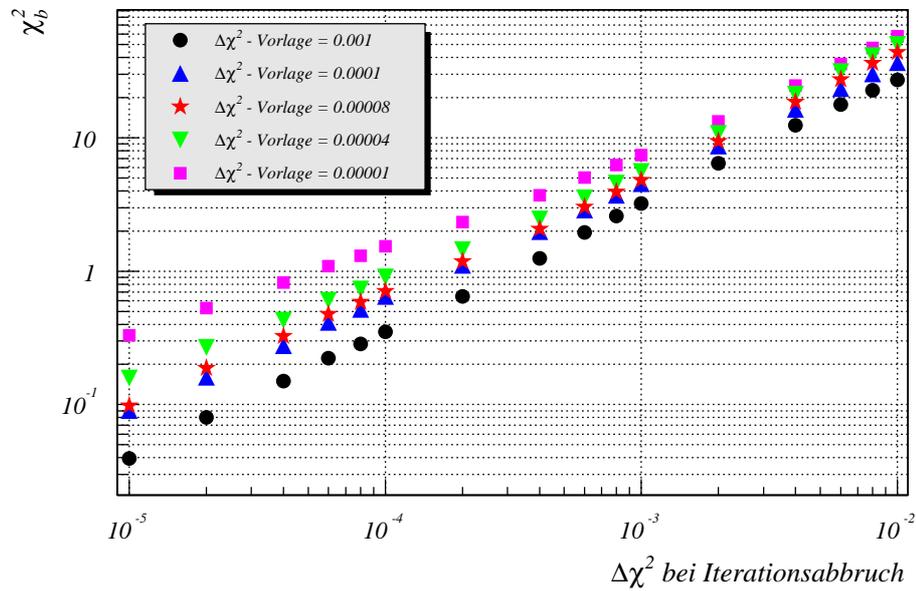


Abbildung B.10: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, Bayes-Entfaltung, SIBYLL-Hypothese.

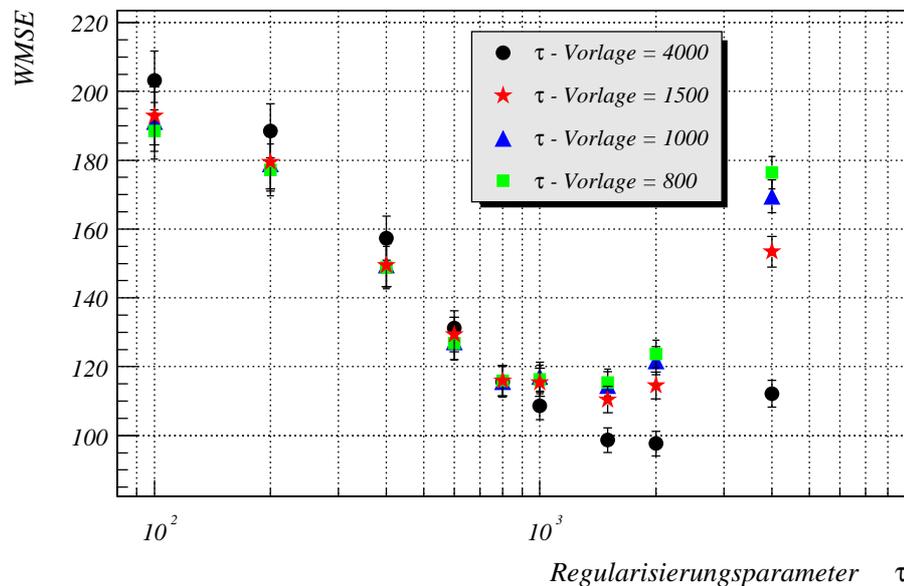


Abbildung B.11: Verlauf des WMSE in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren zur Abschätzung der systematischen Abweichungen, reduzierte Entropie, SIBYLL-Hypothese.

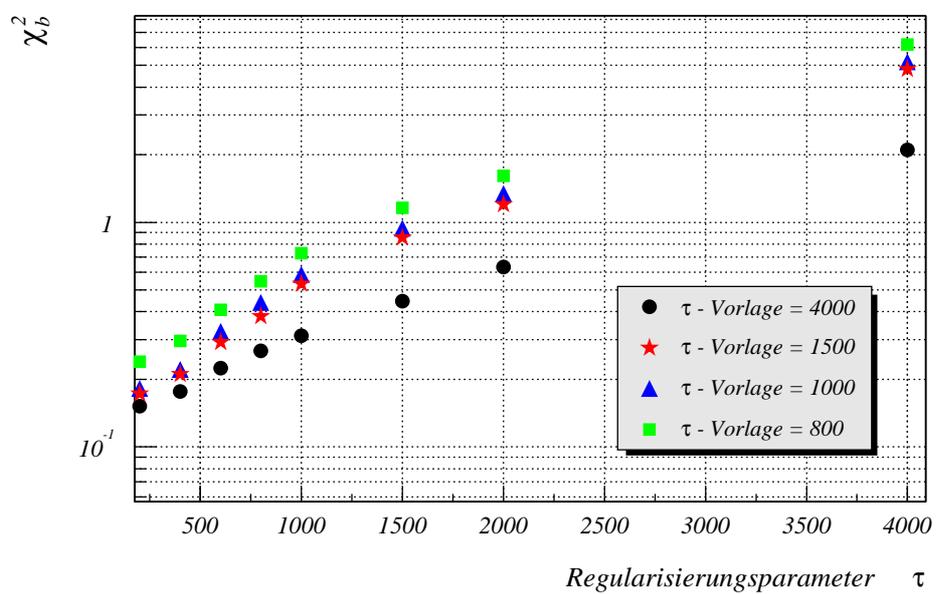


Abbildung B.12: Verlauf der relativen systematischen Abweichung in Abhängigkeit der Iterationstiefe für verschiedene Vorlagenspektren, reduzierte Entropie, SIBYLL-Hypothese.

Literaturverzeichnis

- [Abu01] T. Abu-Zayyad et al.; *Ap. J.* **557** (2001) 686.
- [Agl99] M. Aglietta et al.; *Astropart. Phys.* **10** (1999) 1.
- [Ago95] G. D'Agostini; *Nucl. Instrum. Methods A* **362** (1995) 487.
- [Agu02] M. Aguilar et al.; *Phys. Rep.* **366** (2002) 331.
- [Aha99] F. Aharonian et al.; *Phys. Rev. D* **59** (1999) 092003.
- [Ame96] M. Amenomori et al.; *Ap. J.* **461** (1996) 408.
- [Ame00] M. Amenomori et al.; *Phys. Rev. D* **62** (2000) 112002.
- [Ant01] T. Antoni et al., KASCADE-Collaboration; *Astropart. Phys.* **14** (2001) 245.
- [Ant03] T. Antoni et al., KASCADE-Collaboration; *Nucl. Instrum. Methods A* **513** (2003) 490.
- [Ant03a] T. Antoni et al., KASCADE-Collaboration; *Astropart. Phys.* **19** (2003) 703.
- [Any91] V.B. Anykeyev, A.A. Spiridonov und V.P. Zhigunov; *Nucl. Instrum. Methods A* **303** (1991) 350.
- [Any92] V.B. Anykeyev, A.A. Spiridonov und V.P. Zhigunov; *Nucl. Instrum. Methods A* **322** (1992) 280.
- [Apa01] A.V. Apanasenko et al.; *Astropart. Phys.* **16** (2001) 13.
- [Arq00] F. Arqueros et al.; *Astron. Astrophys.* **359** (2000) 682.
- [Aug39] P. Auger et al.; *Rev. Mod. Phys.* **11** (1939) 228.
- [Ave03] M. Ave et al.; *Astropart. Phys.* **19** (2003) 47.
- [Ban97] P. Bandzuch, M. Morhac und J. Kristiak; *Nucl. Instrum. Methods A* **384** (1997) 506.
- [Bas98] S.A. Bass et al.; *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** (1998) 225.

- [Bel78] A.R. Bell; *Mon. Not. R. astr. Soc.* **182** (1978) 147.
- [Bel85] E.A. Belogorlov und V.P. Zhigunov; *Nucl. Instrum. Methods A* **235** (1985) 146.
- [Ber96] E.G. Berezhko; *Astropart. Phys.* **5** (1996) 367.
- [Ber98] K. Bernlöhr et al.; *Astropart. Phys.* **8** (1998) 253.
- [Bie87] P.L. Biermann und P.A. Strittmatter; *Ap. J.* **322** (1987) 643.
- [Bie93] P.L. Biermann; *Astron. Astrophys.* **271** (1993) 649.
- [Bir94] D.J. Bird et al.; *Ap. J.* **424** (1994) 491.
- [Bir95] D.J. Bird et al.; *Ap. J.* **441** (1995) 144.
- [Bla78] R.D. Blandford und J.P. Ostriker; *Ap. J.* **221** (1978) L29.
- [Bla80] R.D. Blandford und J.P. Ostriker; *Ap. J.* **237** (1980) 793.
- [Boe03] M. Boezio et al.; *Astropart. Phys.* **19** (2003) 583.
- [Boz01] H. Bozdog et al.; *Nucl. Instrum. Methods A* **465** (2001) 455.
- [Bru97] R. Brun und F. Rademakers; *Nucl. Instrum. Methods A* **389** (1997) 81.
- [Buc94] J. Buckley et al.; *Ap. J.* **429** (1994) 736.
- [Bur02] J. van Buren; *Diplomarbeit, Universität Karlsruhe* (2002).
- [Can02] J. Candia, E. Roulet und L.N. Epele; *JHEP* **12** (2002) 033.
- [Cap89] J.N. Capdevielle; *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **15** (1989) 909.
- [Ces80] C.J. Cesarsky; *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **18** (1980) 289.
- [Che86] K.S. Cheng, C. Ho und M. Ruderman; *Ap. J.* **300** (1986) 500.
- [Cit33] P.H. van Cittert; *Z. Phys.* **69** (1933) 298.
- [Cow98] G. Cowan; *Statistical Data Analysis*; Oxford University Press (1998).
- [Dol02] P. Doll et al.; *Nucl. Instrum. Methods A* **488** (2002) 517.
- [Dre99] H.J. Drescher, M. Hladik, S.S. Ostapchenko und K. Werner; *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25** (1999) L91.
- [Dru83] L.O'C. Drury; *Rep. Prog. Phys.* **46** (1983) 973.
- [Dru94] L.O'C. Drury, F.A. Aharonian und H.J. Völk; *Astron. Astrophys.* **287** (1994) 959.
- [Eng90] J.J. Engelmann et al.; *Astron. Astrophys.* **233** (1990) 96.

- [Eng99] J. Engler et al.; Nucl. Instrum. Methods **A 427** (1999) 528.
- [Eng99a] R. Engel, T.K. Gaisser, P. Lipari und T. Stanev; Proc. 26th Int. Cosmic Ray Conf., Salt Lake City (USA), **1** (1999) 415.
- [Eng03] R. Engel; persönliche Mitteilung (2003).
- [Erl97] A.D. Erlykin und A.W. Wolfendale; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **23** (1997) 979.
- [Fes85] H. Fesefeldt; Report **PITHA-85/02** (1985), RWTH Aachen.
- [Fle94] R.S. Fletcher, T.K. Gaisser, P. Lipari und T. Stanev; Phys. Rev. **D50** (1994) 5710.
- [Fow01] J.W. Fowler et al.; Astropart. Phys. **15** (2001) 49.
- [Gla99] M.A.K. Glasmacher et al.; Astropart. Phys. **10** (1999) 291.
- [Gla99a] R. Glasstetter et al.; Proc. 26th Int. Cosmic Ray Conf., Salt Lake City (USA), **1** (1999) 222.
- [Gla99b] M.A.K. Glasmacher et al.; Astropart. Phys. **12** (1999) 1.
- [Gol64] R. Gold; Argonne National Laboratory Report ANL-6984; Argonne (1964).
- [Gol83] G.H. Golub und C.F. van Loan; *Matrix Computations*; North Oxford Academic, Oxford (1983)
- [Gre56] K. Greisen; Prog. Cosmic Ray Physics **Vol. III** (1956) 1.
- [Gre66] K. Greisen; Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 748.
- [Gri70] N.L. Grigorov et al.; Sov. J. Nucl. Phys. **Vol. 11, No. 5** (1970) 588.
- [Gri90] N.L. Grigorov; Sov. J. Nucl. Phys. **Vol. 51, No. 1** (1990) 99.
- [Guz99] T.G. Guzik et al.; Proc. 26th Int. Cosmic Ray Conf., Salt Lake City (USA), **5** (1999) 6.
- [Han71] R.J. Hanson; SIAM J. Numer. Anal. **Vol. 8, No. 3** (1971) 616.
- [Har90] A.K. Harding und T.K. Gaisser; Ap. J. **358** (1990) 561.
- [Hec98] D. Heck et al.; Report FZKA 6019, Forschungszentrum Karlsruhe (1998).
- [Hec98a] D. Heck und J. Knapp; Report FZKA 6097, Forschungszentrum Karlsruhe (1998).
- [Hei96] A. Heiss; Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1996).
- [Hes12] V.F. Hess; Z. Phys. **13** (1912) 1084.
- [Hil81] A.M. Hillas; Proc. 17th Int. Cosmic Ray Conf., Paris (Frankreich), **8** (1981) 193.

- [Hil97] A.M. Hillas; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **52B** (1997) 29.
- [Höc96] A. Höcker und V. Kartvelishvili; Nucl. Instrum. Methods **A 372** (1996) 469.
- [Ich93] M. Ichimura et al.; Phys. Rev. D **48** (1993) 1949.
- [Jam94] F. James; MINUIT Reference Manual, CERN Program Library Long Writeup **D506** (1994).
- [Jay68] E.T. Jaynes; IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern. **SSC-4** (1968) 227.
- [Jok87] J.R. Jokipii und G. Morfill; Ap. J. **312** (1987) 170.
- [Kal93] N.N. Kalmykov und S.S. Ostapchenko; Yad. Fiz. **56** (1993) 105.
- [Kam57] K. Kamata und J. Nishimura; Suppl. Prog. Theo. Phys. **4** (1957) 93.
- [Kaz03] D. Kazanas und A. Nicolaidis; Gen. Rel. Grav. **35** (2003) 1117.
- [Kna97] J. Knapp; Report FZKA 5970, Forschungszentrum Karlsruhe (1997).
- [Kob02] K. Kobayakawa, Y.S. Honda und T. Samura; Phys. Rev. **D66** (2002) 083004.
- [Kra96] H. Krawczynski et al.; Nucl. Instrum. Methods **A 383** (1996) 431.;
- [Kri92] W. Kriegleder; Report KFK 5023, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1992)
- [Kul59] G.V. Kulikov und G.B. Khristiansen; Soviet Phys. JETP **35** (1959) 441.
- [Law74] C.E. Lawson und R.J. Hanson; *Solving Least Square Problems*; Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1974)
- [Lev44] K. Levenberg; Quart. of Appl. Math. **2** (1944) 164.
- [Mai00] G. Maier; Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (2000).
- [Mai03] G. Maier; Dissertation (2003), Universität Karlsruhe.
- [Mar63] D.W. Marquardt; J. Soc. Indust. Appl. Math. **Vol. 11, No. 2** (1963) 431.
- [May92] H.J. Mayer; Nucl. Instrum. Methods **A 317** (1993) 339.
- [May93] H.J. Mayer; Nucl. Instrum. Methods **A 330** (1993) 254.
- [Mül91] D. Müller et al.; Ap. J. **374** (1991) 356.
- [Nag84] M. Nagano et al.; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **10** (1984) 1295.
- [Nag92] M. Nagano et al.; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **18** (1992) 423.
- [Nel85] W.R. Nelson, H. Hirayama und D.W.O. Rogers; Report SLAC 265, Stanford Linear Accelerator Center (1985).

- [Nik95] S.I. Nikolsky; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **39A** (1995) 228.
- [Phi62] D.L. Phillips; J. ACM **9** (1962) 84.
- [Ptu93] V.S. Ptuskin et al.; Astron. Astrophys. **268** (1993) 726.
- [Rac93] J.P. Rachen und P.L. Biermann; Astron. Astrophys. **272** (1993) 161.
- [Ran95] J. Ranft; Phys. Rev. **D51** (1995) 64.
- [Ris00] M. Risse; Report FZKA 6493, Forschungszentrum Karlsruhe (2000).
- [Rya72] M.J. Ryan, J.F. Ormes und V.K. Balasubrahmanyam; Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 985.
- [San00] T. Sanuki et al.; Ap. J. **545** (2000) 1135.
- [Sch94] M. Schmelling; Nucl. Instrum. Methods **A 340** (1994) 400.
- [Sch96] H. Schieler; Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (1996).
- [Seg01] A. Seghour und F.Z. Seghour; Nucl. Instrum. Methods **A 457** (2001) 617.
- [Sha48] C.E. Shannon; Bell Sys. Tech. J. **27** (1948) 379.
- [Sig03] G. Sigl; Annals Phys. **303** (2003) 117.
- [Sim80] M. Simon et al.; Ap. J. **239** (1980) 712.
- [Sta93] T. Stanev, P.L. Biermann und T.K. Gaisser; Astron. Astrophys. **274** (1993) 902.
- [Swo00] S.P. Swordy und D.B. Kieda; Astropart. Phys. **13** (2000) 137.
- [Tak98] Y. Takahashi; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **60B** (1998) 83.
- [Tak03] M. Takeda et al.; Astropart. Phys. **19** (2003) 447.
- [Tik63] A.N. Tikhonov; Sov. Math. **5** (1963) 1035.
- [Ulr97] H. Ulrich; Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1997).
- [Ulr98] H. Ulrich; AUGER technical note GAP-98-043 (1998), <http://www.auger.org> .
- [Völ92] G. Völker; Report KFK 4983, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1992).
- [Web99] J. Weber; Report FZKA 6339, Forschungszentrum Karlsruhe (1999).
- [Wer93] K. Werner; Phys. Rep. **232** (1993) 87.
- [Wie98] B. Wiebel-Sooth, P.L. Biermann und H. Meyer; Astron. Astrophys. **330** (1998) 389.
- [Wig03] R. Wigmans; Astropart. Phys. **19** (2003) 379.

- [Zat66] G.T. Zatsepin und V.A. Kuz'min; JETP Lett. **4** (1966) 78.
- [Zhi83] V.P. Zhigunov; Nucl. Instrum. Methods **A 216** (1983) 183.
- [Zhi88] V.P. Zhigunov, T.B. Kostkina und A.A. Spiridonov; Nucl. Instrum. Methods **A 273** (1988) 362.