

Quantitative Analyse und objektivierte Darstellung von Ultraschallbildern zur medizinischen Diagnose

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
von der Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Fridericiana Karlsruhe
genehmigte
DISSERTATION

Vorgelegt von:
Dipl.-Ing. Armin Günter
geb. am 03. April 1970 in Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:
Hauptreferent:
Koreferent:

27. Mai 2002
Prof. Dr.-Ing. Kristian Kroschel
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Lübbert

Meinen Eltern.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Lübbert¹ bedanken. Ohne seine Aufgeschlossenheit und vielfältigste Unterstützung wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Seinem Engagement ist es zu verdanken, dass dieses interdisziplinäre Projekt zustande kam. Sein breit gefächertes Wissen und seine Verbundenheit zur Praxis vermittelten mir Einblicke, die weit über mein Fachgebiet hinausgingen. Sehr gerne denke ich auch an die vielen persönlichen Gespräche mit Herrn Prof. Lübbert zurück.

Ein besonderes Dankeschön möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Kroschel² für die Übernahme des Hauptreferats aussprechen. Herr Prof. Kroschel hat mir außerdem die Doktorandenstelle am Institut für Physik der Universität Greifswald vermittelt. Ich hatte dort nicht nur Gelegenheit, die vorliegende Dissertation anzufertigen, sondern ich verbrachte in Greifswald auch fünf erlebnisreiche Jahre, die mir stets in angenehmer Erinnerung bleiben werden.

Des Weiteren gilt mein Dank den am Projekt beteiligten Ärzten der Klinik für Urologie in Greifswald, Herrn Prof. Dr.-med. K.-J. Klebingat, OA Dr.-med. U. Zimmermann, und in besonderem Maße Herrn Dr.-med. D. Rösing, der in aufopferungsvoller Arbeit Ultraschallbilder aufgezeichnet und klassifiziert hat.

Auch die vielen intensiven fachlichen Gespräche mit Herrn PD Dr. rer.-nat. B. Pompe haben maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Herrn Dipl.-phys. T. Kinder sowie Herrn Dr. rer.-nat. G. Papastavrou danke ich für die Durchsicht des Manuskriptes.

Nicht zuletzt geht mein herzlicher Dank an alle Kollegen des Fachbereichs Angewandte Physik (Universität Greifswald), die stets für ein beispiellos angenehmes Arbeitsklima sorgten, sowie an alle Freunde, mit denen ich Höhen und Tiefen der Promotionszeit durchleben durfte.

¹ Universität Greifswald, Institut für Physik, Fachbereich Angewandte Physik

² Universität Karlsruhe, Institut für Nachrichtentechnik

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Technik der Ultraschalldiagnose	5
3. Akustische Eigenschaften von biologischem Gewebe	10
3.1 Physikalische Parameter	10
3.2 Mikrostruktur des Gewebes	12
3.3 Rückstreuenspektren	14
3.4 Inhomogenität und Grenzen des Puls-Echo-Verfahrens	16
4. Modellierung der Ultraschallechos	18
4.1 Schallwandler und Schallfeld	18
4.2 Abbildung des Gewebes auf das Echosignal	21
4.3 Interpretation der Abbildung des Gewebes	24
4.3.1 Gefensterte Analyse	24
4.3.2 Beugungsprofil	25
4.3.3 Speckle	28
4.4 Vereinfachtes systemtheoretisches Modell	30
4.5 Korrektur systembedingter Einflüsse	31
4.6 Relatives Rückstreuverhalten	33
4.7 Zusammenfassung	34

5. Systemidentifikation	35
5.1 Wahl der Methode	35
5.2 Theoretische Grundlagen	39
5.2.1 Parametrisierung diskreter Systeme	39
5.2.2 Schätzung der Systemordnung	41
5.3 Algorithmen zur Schätzung von ARMA-Modellen	43
5.3.1 PEM	43
5.3.2 RPEM	47
5.3.3 Modifizierte Yule-Walker-Methode	52
5.4 Probleme in der Anwendung	55
5.4.1 Additives Rauschen	55
5.4.2 Blockverarbeitung	56
5.4.3 RPEM bei instationären Prozessen	56
5.5 Detektion kleiner Inhomogenitäten der Makrostruktur	57
5.5.1 Inhomogener Hintergrund	58
5.5.2 Lokale Leistungen und F-Test	59
5.6 Beispiele: ARMA-Modelle aus experimentellen Daten	63
5.6.1 Messaufbau	63
5.6.2 Additives Rauschen des Messaufbaus	64
5.6.3 Vergleich PEM – modifizierte Yule-Walker-Methode	66
5.6.4 RPEM und In-vivo-Referenz	71
5.7 Zusammenfassung	71
6. Entfaltung	73
6.1 Entfaltung im Frequenzbereich	73
6.1.1 Additives Rauschen	74
6.1.2 Kurzzeitanalyse	75
6.1.3 Schlussfolgerung	78
6.2 Entfaltung im Zeitbereich: Wahl der Methode	78
6.3 ARMA-Systeme im Zustandsraum	81

6.4	Entfaltung durch Kalman-Interpolation	83
6.5	Spektrum des entfalteten Signals	88
6.5.1	Wiener-Hopf-Gleichung	89
6.5.2	Zusammenhang Zustandsraum-Modell – Faltung	91
6.5.3	Spektrum	92
6.5.4	σ_W^2 und σ_V^2 als Filterparameter	95
6.6	Robustheit des Entfaltungsfilters	96
6.7	Beispiele und Optimierung: Stationärer Fall	100
6.7.1	Parameter der Berechnungen	100
6.7.2	Methode der Berechnungen	100
6.7.3	Einfluss von σ_W^2	102
6.7.4	Einfluss des additiven Rauschens	105
6.7.5	Einfluss der Kurzzeitanalyse	105
6.8	Instationärer Fall	109
6.8.1	Länge der Impulsantwort	109
6.8.2	Rekonstruktion von Impulsen	109
6.8.3	Konsequenzen für die Schätzung von σ_W^2	112
6.8.4	Beispiel: Spektralschätzung in instationärer Umgebung	113
6.9	Zusammenfassung	115
7.	Schätzung von Rückstreupektrren	117
7.1	Theoretische Grundlagen	117
7.2	Mittelwertbildung aus Spektralschätzungen	120
7.2.1	Methode LMP	120
7.2.2	Methode LMA	123
7.2.3	Methode MLA	124
7.2.4	Anwendung auf Ultraschallechos	125
7.3	Geglättete Amplitudenspektren	127
7.3.1	Bias und Varianz geglätteter Spektren	127
7.3.2	BT-Spektralschätzer mit Log-Amplitude	128

7.3.3	Cepstral geglättete Spektren mit Log-Amplitude . . .	130
7.3.4	Vergleich zwischen BT- und cepstraler Glättung . . .	132
7.4	Zusammenfassung	136
8.	Darstellung von Ultraschallbildern	138
8.1	Einhüllende des rohen HF-Echos	138
8.1.1	Hilberttransformation	139
8.1.2	Maximalwertoperator	139
8.1.3	Momentanleistung	140
8.2	Lokale Rückstreustärke	141
8.3	Beispiele: Parameterbilder	143
8.3.1	Lokale Rückstreustärke	144
8.3.2	Spektrale Parameter und farbcodierte Darstellung . .	147
8.4	Zusammenfassung	152
9.	Klinische Studie	156
9.1	Aufgabenstellung	156
9.1.1	Warum Nierenultraschall?	156
9.1.2	Warum Ultraschallkontrastmittel?	157
9.1.3	Wahl der Methoden	158
9.2	Ergebnisse	160
9.2.1	Intraindividueller Vergleich	161
9.2.2	Interindividueller Vergleich	164
9.3	Zusammenfassung	166
10.	Zusammenfassung und Ausblick	169
A.	Ergänzende Materialien	172
A.1	Rayleigh-Oberflächen-Integral	172
A.2	Separationsansatz zur Beugungskorrektur	174
A.3	Kalman-Interpolation zur Entfaltung	177

A.4 Dispersion	183
B. Formelzeichen, Definitionen, Abkürzungen	189
Literaturverzeichnis	193

1. Einleitung

Was ist quantitative Ultraschalldiagnose?

Die medizinische Ultraschalldiagnose ist heutzutage ein routinemäßig eingesetztes bildgebendes Verfahren. Es zeichnet sich durch Echtzeitfähigkeit, minimale Belastung des Patienten und verhältnismäßig geringe Kosten aus. Demgegenüber steht allerdings die verrauschte und detailarme Bildqualität. Zudem haben die Bilder wenig Aussagekraft in Bezug auf die Gewebeart. In jedem Fall ist eine zuverlässige Diagnose nur durch einen im Umgang mit Ultraschall erfahrenen Arzt möglich, der die Bilder einschließlich zahlreicher Artefakte richtig zu deuten weiß. Diese Tatsachen motivieren Arbeiten zur Verbesserung und Erweiterung der bestehenden Verfahren zur Erzeugung von Ultraschallbildern.

Die Auswertung der Ultraschallbilder erfolgt bis heute nur visuell und rein qualitativ, doch schon seit den Anfängen der Ultraschall-Technologie wurde der Wunsch nach computergestützter quantitativer Diagnostik laut. Unter quantitativer Diagnostik versteht man das Messen von lokalen Parametern, die eine objektive (physikalische) Aussage über bestimmte Eigenschaften der beschallten Strukturen leisten sollen. Insbesondere richtete man bald ein Augenmerk auf die Frage, ob pathologisch verändertes Gewebe mit Hilfe solcher Methoden besser erkannt werden könnte, sei es durch einen nachgeschalteten statistischen Klassifikator, oder durch die bildhafte Darstellung dieser Parameter („Parameterbilder“). In der Literatur haben sich für diese Aufgabenstellung Begriffe wie „Gewebedifferenzierung“ und „Gewebecharakterisierung“ etabliert (engl. „ultrasonic tissue characterization“). Erste Eindrücke zu den Möglichkeiten und Problemen vermitteln [Gre86, Thi87, ABM⁺94, STKG96, DTOS96].

Problematik

Allerdings tritt bei der Messung von Parametern ein großes Problem auf, vor allem bei Ultraschallechos aus dem lebenden Körper (*in vivo*): Abgesehen

von der Rückstreuamplitude liegt die Schwankungsbreite der Parameter im Bereich der Messunsicherheiten, so dass zufällige und systembedingte Fehler jede Messung unbrauchbar machen können (C.R.Hill in [DTOS96]: „Can tissue characterization ever become a science?“). Die hohen Messunsicherheiten sind auf die Inhomogenität der beschallten Strukturen zurückzuführen:

- Systembedingte Fehler, welche auf Beugung, Dämpfung, Streuung und Brechung des Schalls zurückzuführen sind, können schwer geschätzt und deshalb auch nur schwer korrigiert werden.
- Die Verwendung größerer Datenausschnitte zur Verkleinerung der statistischen Unsicherheit von Messungen hat Grenzen, da bei heterogenen Datenausschnitten ein unbrauchbarer mittlerer Parameterschätzwert resultiert, der wichtige Details verdeckt.

Jede Arbeit zur Gewebedifferenzierung sollte sich daher mit der Korrektur von systembedingten Fehlern und mit der statistischen Unsicherheit von Parametermessungen beschäftigen. Die Schwerpunkte der vorliegenden Dissertation liegen auf der Schätzung von korrigierten Rückstreuenspektren sowie auf der Darstellung von geräteunabhängigen und somit objektivierten Parameterbildern. Der frequenzabhängige Verlauf von Rückstreuenspektren hat sich in zahlreichen Arbeiten als sinnvoller Parameter herausgestellt (Kapitel 3). Objektivierte Parameterbilder machen die Ergebnisse quantitativer Analysen für den Arzt verständlich und begreifbar.

Ansätze in dieser Arbeit

Wegen der großen Variabilität des menschlichen Gewebes und wegen der großen technischen Unterschiede in den Ultraschallgeräten liegt in dieser Arbeit der Schwerpunkt auf allgemeingültigeren theoretischen Abhandlungen. Beispiele aus Daten „echter“ Ultraschallbilder sollen die Ergebnisse untermauern.

An erster Stelle steht die Entwicklung eines systemtheoretischen Modells für die Entstehung der Ultraschallechos. Dieses Modell ist Grundlage für kritische Diskussionen verschiedener Methoden, die auf eine Korrektur systembedingter Fehler zielen (Kapitel 4). In der systemtheoretischen Behandlung der Ultraschallechos bestehen die Korrekturverfahren dann aus zwei Komponenten, nämlich der Messung der Fehler, also einer Systemidentifikation (Kapitel 5), und der eigentlichen Korrektur durch Entfaltung (Kapitel 6). Beide Komponenten müssen aufeinander abgestimmt sein.

Für alle Parametermessungen ist es wünschenswert, dass sie eine möglichst geringe Unsicherheit bei gleichzeitig hoher räumlicher Auflösung besitzen, insbesondere wenn Echos aus heterogenen Medien Gegenstand der Untersuchung sind. Deshalb sollte auch schon die Korrektur systembedingter Fehler auf dieses wichtige Kriterium ausgerichtet sein. Daraus ergibt sich der Ansatz, eine Minimum-Varianz-Entfaltung auf der Basis von KALMAN-Interpolationsalgorithmen zu verwenden, und zwar derart, dass nach der Entfaltung ein nahezu unkorrelierter Zufallsprozess übrig bleibt („whitening filter“). Es wird gezeigt, dass eine solche Entfaltung gegenüber der üblichen Methode der Division von Spektren viele Vorteile aufweist, insbesondere im Hinblick auf die Schätzung von Rückstreuenspektren. Eine geeignete Parametrisierung der entfalteten Echos kann außerdem als Grundlage einer weitgehend geräteunabhängigen und speckle-reduzierten Darstellung von Ultraschallbildern dienen („objektivierte Ultraschallbilder“, Kapitel 8).

Zur Schätzung von Rückstreuenspektren kommen üblicherweise gemittelte Periodogramme mit *logarithmierter* Amplitude (dB-Skala) zum Einsatz, wobei in der Regel nur *wenige* unabhängige Periodogramme zur Mittelwertbildung herangezogen werden können. Um die Genauigkeit dieser Schätzmethode beurteilen zu können, muss man Erwartungswert und Varianz kennen. Allerdings sind diese beiden Kenngrößen bisher nur für gemittelte Periodogramme mit *linearer* Amplitude und für den asymptotischen Fall *vieler* unabhängiger Schätzungen zur Mittelwertbildung untersucht worden. Mit Hilfe der Ergebnisse einer entsprechenden Analyse für den Fall weniger gemittelter Periodogramme mit logarithmierter Amplitude können klare Richtlinien für ein optimiertes Vorgehen bei der Schätzung von Rückstreuenspektren gewonnen werden (Kapitel 7).

Klinische Studie

Am Ende der Dissertation findet sich eine Studie mit klinischem Datenmaterial (Kapitel 9). Mit dieser Studie sollte ursprünglich herausgefunden werden, ob das Ultraschallkontrastmittel LevovistTM zur Erhöhung der Unterscheidbarkeit von Nierenparenchym- und Nierenkarzinomgewebe beitragen kann. Um den Einfluss von störenden zwischenliegenden Fett- und Gewebeschichten zu vermindern, wurden außerdem Ultraschallbilder *intraoperativ* aufgezeichnet, d.h. der Schallkopf befand sich, mit einer dämpfungsfreien Vorlaufstrecke zur Ankopplung, direkt auf dem Organ bzw. Tumor. Ein statistischer Vergleich von gewebespezifischen Parametern aus (korrigierten) Rückstreuenspektren zeigte allerdings, dass die starke Inhomogenität der Gewebeausschnitte Zweifel an der Realisierbarkeit einer *automatischen Ge-*

webedifferenzierung aufkommen lässt, wenn auch ein solches System von vielen Ärzten zur Unterstützung ihrer Diagnose gewünscht wird.

2. Technik der Ultraschalldiagnose

Dieses Kapitel skizziert das technische Funktionsprinzip der Ultraschallbildung, wie sie in der medizinischen Diagnostik eingesetzt wird.

Für die medizinische Ultraschalldiagnose kommt ein Puls-Echo-Verfahren zum Einsatz: Ein kurzer Schallpuls wird von einer bestimmten Position ausgehend in das Medium gesendet (Sendepuls), und die Echos an der gleichen Position während einer gewissen Zeitdauer empfangen. Sowohl beim Senden als auch beim Empfangen wird eine starke Richtwirkung angestrebt, so dass sich der Schall annähernd entlang einer Linie ausbreitet (Sendefokussierung) und nur das vom Wandler empfangen wird, was entlang der gleichen Linie zurückgestreut oder reflektiert wurde (Empfangsfokussierung). Man erreicht dies mit einer konkav geformten Wandleroberfläche oder durch zeitlich aufeinander abgestimmte Ansteuerung einiger eng beieinander liegender sehr kleiner Teilwandler.

Den Zeitverlauf aller überlagerten Echos, die entlang einer solchen Linie empfangen wurden, bezeichnet man als *A-Scan*. Da die Schallgeschwindigkeit in biologischem Gewebe näherungsweise konstant ist ($c_0 \approx 1540$ m/s), kann über die Laufzeit eines empfangenen Schallereignisses auf den Ort zurückgeschlossen werden, wo die zugehörige Reflexion oder Rückstreuung stattgefunden hat.

Da der Schallpuls auf seinem Wege durch das Gewebe gedämpft wird (ca. auf ein tausendstel, also -60 dB, nach Durchlaufen von 30 cm Schallweg, d.h. 15 cm Eindringtiefe), muss das empfangene hochfrequente Echo (HF-Echo) entsprechend verstärkt werden. Dies geschieht mit einer zeitabhängigen Verstärkung (time controlled gain, TCG; oder time-gain-compensation, TGC) entlang jedes A-Scans.

Solche A-Scans werden nun aus mehreren, meist fächerartig aufgespreizten Richtungen aufgenommen (siehe Abb. 2.1). Um ein Schnittbild des Mediums zu erhalten, sind aber noch weitere Schritte notwendig, da sich die mittelwertfreien HF-Echos kaum für eine Visualisierung eignen.

Wandlertyp	konkaves Single-Element
Wandlerdurchmesser	14 mm
geometrischer Fokus	60 mm
Resonanzfrequenz der Piezokeramik	3,8 MHz
Dauer des abgestrahlten Schallpulses	ca. $0,52 \cdot 10^{-6}$ s
angenommene Schallgeschwindigkeit	$c_0 = 1540$ m/s
Dauer B-Scan	$71,8 \cdot 10^{-3}$ s
Anzahl A-Scans innerhalb eines B-Scans	239
Öffnungswinkel B-Scan	100°

Tab. 2.1: Kenndaten des in dieser Arbeit verwendeten Schallwandlers. Solche Single-Element-Schallwandler mit festem Fokus und mechanischer Scan-Bewegung sind sehr weit verbreitet und gehören zur Standardausstattung vieler Ultraschallgeräte. Die Resonanzfrequenz der Piezokeramik ist auf die Abdominalsonografie abgestimmt (Kompromiss zwischen Eindringtiefe des Schalls und Auflösung).

In erster Linie möchte man in einem Ultraschallbild anatomische Strukturen wie Organ- oder Tumorbegrenzungen erkennen, die sich vor allem in der Rückstreumplitude widerspiegeln. Deshalb wird in den heute üblichen Ultraschallgeräten die Einhüllende der HF-Echos detektiert (siehe Abb. 2.3). Da die Rückstreumplituden auch noch nach Durchlaufen des Tiefenausgleichsverstärkers einen sehr großen Dynamikumfang aufweisen, werden die Einhüllenden einer Amplitudenkompression unterworfen, so dass kleine Amplituden relativ zu großen Amplituden angehoben werden (z.B. $y = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$).

Nach der Wandlung dieser komprimierten Einhüllenden in digitale Signale folgen weitere Schritte der Verarbeitung, die sich allerdings von Gerät zu Gerät sehr unterscheiden können. Am Ende des Darstellungsprozesses steht eine Koordinatentransformation, um die entlang den „Falten“ des A-Scan-Fächers verlaufenden Rückstreumplituden auf einem Monitor ausgeben zu können und um die Räume zwischen den Falten durch Interpolation aufzufüllen. Das fertige Ultraschallbild wird *B-Bild* genannt und grauwertcodiert dargestellt. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 2.2 zu sehen. Zur weiteren Veranschaulichung sind in Tab. 2.1 einige typische technische Daten zusammengestellt.

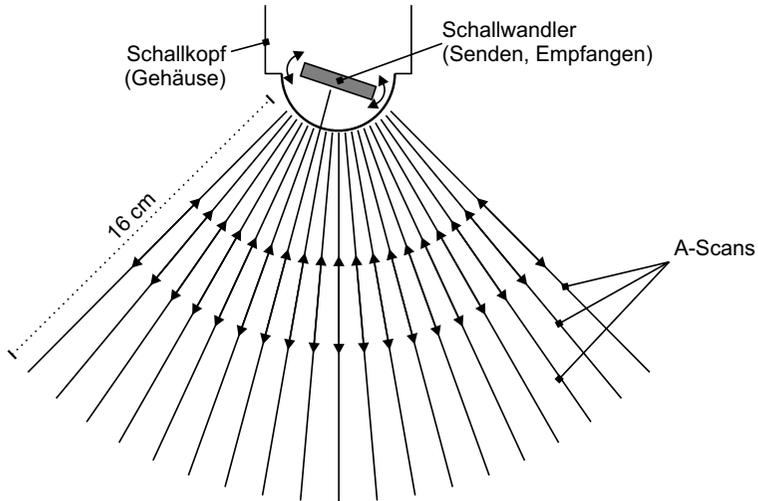


Abb. 2.1: Entstehungsprinzip eines Ultraschall-B-Bildes mit einem Single-Element-Wandler. Die fächerartig angeordneten Sendeelemente werden durch Hin- und Herkippen des Schallwandlers erreicht.



Abb. 2.2: Typisches Ultraschall-B-Bild einer gesunden Niere. Die fleckige Struktur, Speckle-Rauschen genannt, ist eine unvermeidliche Interferenzerscheinung (näher erläutert in Abschnitt 4.3.3).

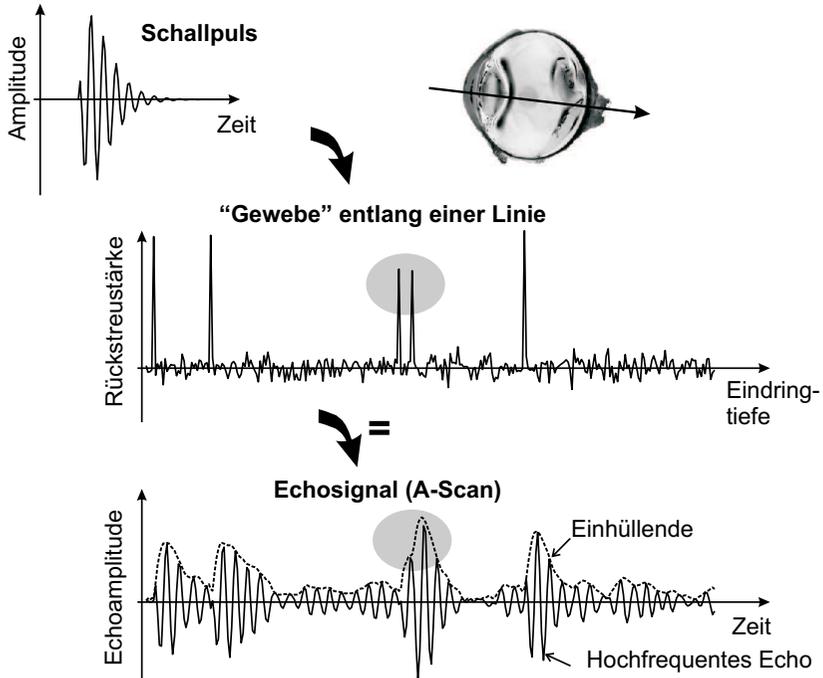


Abb. 2.3: Entstehungsprinzip eines A-Scans. Die beiden grau hinterlegten Impulse im „Gewebe“ (Stellen starker Rückstreuung) können weder im HF-Echo noch in der Einhüllenden aufgelöst werden. Um die beiden Impulse zu rekonstruieren muss eine Entfaltung durchgeführt werden.

Für das Messen von gewebespezifischen Parametern aus Ultraschallbildern können die Ergebnisse verschiedener Verarbeitungsstufen der Echos herangezogen werden. *Allerdings sind selbst die hochfrequenten Echos stark geräteabhängig, obwohl sie am Anfang der Verarbeitungskette stehen. Daraus ergibt sich die Forderung, geräteunabhängigere und standardisierte Echosignale zu gewinnen, die dann Ausgangspunkt für die Umsetzung in eine bildhafte Darstellung sein sollten. Der Weg zu diesem Ziel führt über die in dieser Arbeit entwickelten Methoden der Entfaltung.*

In Abb. 2.2 ist ferner die verwaschene und fleckige Struktur des Ultraschallbildes zu erkennen. Dieses sogenannte *Speckle*-Rauschen wird nicht nur als störend und auflösungsbegrenzend eingestuft, sondern es ist auch geräteabhängig. Mit den hier entwickelten Korrekturverfahren kann das Speck-

le-Rauschen deutlich reduziert werden, was zu leichter verständlichen Ultraschallbildern führt. Das Ergebnis der Korrektur systembedingter Verfälschungen hat dann auch einen direkteren Bezug zur Mikrostruktur des Gewebes, was die Diagnose weiter vereinfachen kann (siehe hierzu auch Abb. 2.3).

3. Akustische Eigenschaften von biologischem Gewebe

Eine Gewebecharakterisierung kann nur dann durchgeführt werden, wenn sich die akustischen Eigenschaften biologischen Gewebes reproduzierbar auf die Ultraschallechos abbilden. Dieses Kapitel soll aufzeigen, welche akustischen Eigenschaften für die Gewebecharakterisierung eine Rolle spielen. Besonders wichtig ist die Mikrostruktur des Gewebes, die sich über die Rückstreuung manifestiert.

3.1 Physikalische Parameter

Biologisches Gewebe besteht zum größten Teil aus Wasser und wird deshalb als flüssigkeitsähnliches Medium behandelt. Für die Schallausbreitung in Flüssigkeiten ist charakteristisch, dass die schnellen Druckänderungen adiabatisch ablaufen und dass nur Longitudinalwellen existieren.

Die Schallausbreitung in einem flüssigkeitsähnlichen Medium wird von drei physikalischen Parametern getragen: der Massendichte ρ , der adiabatischen Kompressibilität $\kappa(\omega) = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$ (relative Volumenänderung) und dem Dämpfungskoeffizienten $a(\omega)$. Der Dämpfungskoeffizient enthält die Verluste durch Streuung und Absorption und ist ein Maß für die Abschwächung des Schalldruckes $p(z, \omega)$, abhängig von der durchlaufenen Strecke z :

$$\left| \underline{p}(z, \omega) \right| = \left| \underline{p}(z = 0, \omega) \right| \cdot e^{a(\omega) \cdot z} \quad , \quad a(\omega) \leq 0 \quad . \quad (3.1)$$

Man beachte, dass die Kompressibilität und die Dämpfung frequenzabhängig sind.

ρ	$\approx 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
κ	$4,0 \cdot 10^{-11} \dots 4,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{\text{g}}$
c	$1470 \dots 1570 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Z	$1,47 \cdot 10^5 \dots 1,57 \cdot 10^5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$
$a(\omega)$	$0,1 \dots 0,8 \frac{\text{dB}}{\text{cm} \cdot \text{MHz}}$

Tab. 3.1: Typische Werte der akustischen Parameter in biologischem Gewebe bei einer Temperatur von ca. 20° C (aus [Zol94], [Zis93]).

Ferner gilt für die Schallausbreitungsgeschwindigkeit $c(\omega)$ und den Wellenwiderstand $Z(\omega)$ (auch akustische Impedanz genannt, [Mil87], S.26):

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa(\omega)}} \quad (3.2)$$

$$Z(\omega) = \rho c(\omega) . \quad (3.3)$$

Schallgeschwindigkeit $c(\omega)$ und Dämpfung $a(\omega)$ sind über die Kausalitätsforderung eng miteinander verknüpft (*Dispersion*). In Anhang A.4 werden die Zusammenhänge zwischen den beiden Größen ausführlich dargestellt. Dort findet sich auch eine Argumentation, dass sich $c(\omega)$ innerhalb der im diagnostischen Ultraschall verwendeten Frequenzbereiche nur unwesentlich ändert.

In Tabelle 3.1 sind einige typische Werte der akustischen Parameter für biologische Medien aufgelistet.

Wie man der Tabelle entnimmt, überstreicht die Dämpfung einen vergleichsweise großen Wertebereich. Die Aussagekraft der lokalen Dämpfung in Bezug auf pathologische Veränderungen wird durch zahlreiche Arbeiten untermauert [KSM76, KS79, CT83, FHC83, RWB84, VCT85, BLFP87, LP88, CO90, OTH⁺91, Hal93, JGC⁺00]. Messungen der Dämpfung sind aber nur in größeren, weitgehend homogenen Gewebereichen ($> 1 \text{ cm}^2$ in der Schnittebene des B-Bildes) zuverlässig. Für inhomogene Tumoren wie z.B. dem Nierenzellkarzinom oder bei kleinen pathologischen Veränderungen wie Lebermetastasen ist die Messung fast unmöglich.

Eine Korrelation zwischen akustischen Parametern (Schallgeschwindigkeit, Impedanz, Dämpfung) und histologischen Parametern wurde für *In-vitro*-Gewebeproben aus menschlicher Leber [CMV⁺86] nachgewiesen. Dort werden auch verschiedene Dämpfungsmodelle in Bezug auf ihre Abhängigkeit

von der Frequenz diskutiert. Eine Verbindung zwischen Histologie und akustischen Parametern, die aus *In-vivo*-Ultraschallechos geschätzt wurden, ist bisher nicht gelungen.

Im nun folgenden Abschnitt schließt sich eine detailliertere Diskussion des Einflusses weiterer akustischer Kenngrößen auf die Ultraschallechos an.

3.2 Mikrostruktur des Gewebes

Biologisches Gewebe ist durch eine zufällige Anordnung der oben genannten akustischen Parameter gekennzeichnet. Deshalb wird eine einfallende Schallwelle in alle Richtungen frequenzabhängig gestreut. Die Bestimmung der tatsächlichen Verteilung von Kompressibilität und Dichte innerhalb eines Volumenelements würde die Lösung des inversen Streuproblems erfordern. Dies ist aber mit dem Puls-Echo-Verfahren nicht möglich, da die Ausschnitte des Ultraschallechos, die man zur statistischen Analyse heranzieht, die Summe aller Rückstreuungen eines kleinen Volumenelements enthalten (siehe auch Kapitel 4: Modellierung der Ultraschallechos). Außerdem sind die Abstände von Streuzentren typischerweise kleiner als die verwendete Wellenlänge des Schalls ($\lambda \approx 0,5$ mm), weshalb einzelne Streuerpositionen nicht aufgelöst werden können.

Trotzdem ermöglicht die statistische Analyse der Echos indirekt Rückschlüsse auf die Struktur im Gewebe. Dies hängt damit zusammen, dass sich die Teilechos von sämtlichen Streuern im betrachteten Volumenelement zu einem typischen Interferenzmuster überlagern. Das Potenzial der statistischen Analyse für quantitative Aussagen hinsichtlich der Gewebeart wurde bereits um 1969 entdeckt, und Anfang der 70er-Jahre fanden erste Versuche zur spektralen Analyse der hochfrequenten Echos statt [CH75].

Die räumliche Anordnung der akustischen Parameter kann als ein stochastischer Prozess aufgefasst werden, der sich durch eine Auswahl verschiedener Mittelwerte näherungsweise beschreiben lässt. Gewebedifferenzierung ist die Aufgabe, reproduzierbare und eindeutige Abbildungen dieser Mittelwerte auf das Echosignal zu finden. Hierbei ist zu beachten, dass die Schätzung solcher Mittelwerte nur in stationären Bereichen sinnvoll ist. Inhomogenitäten im Sinne von ausreichend ausgedehnten stationären Zufallsprozessen sind demzufolge Grundlage für die Charakterisierung von Mikrostrukturen. Andere Inhomogenitäten wie Organbegrenzungen, Blutgefäße, oder im allgemeinen Sinne durch das Puls-Echo-Verfahren auflösbare Strukturen (mit gegenüber ihrer Umgebung deutlich veränderter Rückstreustärke) können dagegen die Charakterisierung vollständig vereiteln. Diese Art von Inhomogenitäten

Gewebeparameter	Messung	Literatur
Korrelation, Rückstreukoeffizient	korrigiertes Rückstreu- spektrum	[NHN82, MMI84, UO85, RTB89, IH90, IWBH90, WWG95, SES99, JGC ⁺ 00]
	laterale und axiale Korrelation im B-Bild (Größe der Speckle)	[Höf95, Oos90]
mittlerer Streuerab- stand	Autokorrelation im korrigierten Rückstreu- spektrum	[VD93, VD94, SSE97]
Streuerdichte	SNR der Einhüllenden, Kurtosis des HF-Echos	[OTV85, Kuc86, CZM94, Hui98]
	mittlere Rückstreuin- tensität, (lokale) Vari- anz des HF-Echos	entspricht weitestge- hend den klassischen B-Bildern
	Rückstreupektrum bei der Mittenfrequenz	[Hui98, SES99, JGC ⁺ 00]
	Parameter der K- Verteilung	[Sha95, SMN ⁺ 96]
Struktur allgemein	Co-Occurrence- Parameter des B-Bildes	[NNGH86, BSMG93]

Tab. 3.2: Eine Auswahl an Parametern, die potenziell die Mikrostruktur von biologischem Gewebe differenzieren können.

genitäten sei im Folgenden der *Makrostruktur* zugeordnet. Des Weiteren gibt es noch Inhomogenitäten, die sich in räumlich ausgedehnten allmählichen Veränderungen äußern (*inhomogener Hintergrund*).

Tabelle 3.2 enthält eine Übersicht der für die Charakterisierung der Mikrostruktur wichtigsten statistischen Parameter. Ein großes, und bisher ungelöstes Problem ist allerdings die inhomogene Verteilung der Dämpfung: Eine reduzierte Echogenität, d.h. geringere mittlere Amplitude des Echo-signals, kann ihre Ursache sowohl in lokal stärkerer Dämpfung als auch in geringerer Rückstreustärke haben. Diese Zweideutigkeit schränkt die Zuverlässigkeit von Verfahren der Gewebedifferenzierung erheblich ein.

Eine zufrieden stellende Beschreibung der Streumechanismen in biologischem Weichgewebe ist allerdings bis heute nicht gelungen ([Bam79, SG84, Duc90, ST93, Seh93]; [Höf95], S.72ff). Dies unterstreicht die dem Themenkomplex Gewebedifferenzierung innewohnende „Unvollständigkeit“.

3.3 Rückstreuungsspektren

Die Korrespondenz zwischen Autokorrelation der (zufällig verteilten) akustischen Größen (akustische Impedanz, Schallgeschwindigkeit oder Kompressibilität) und lokalem Spektrum des Echsignals nimmt eine wichtige Stellung ein: Sogar im „Lexikon der Medizin“ [ZS99] ist unter dem Stichwort „Sonografie“ die *Akusto-Spektroskopie* aufgeführt. Allerdings sind Rückschlüsse von den Rückstreuungsspektren auf die Struktur im Gewebe nur unter Laborbedingungen zuverlässig, d.h. wenn Streuproben in einem Wassertank an der Stelle des Fokus' platziert werden. Unter *In-vivo*-Bedingungen sieht die Sache freilich anders aus, denn dort erfährt die Schallwelle auf ihrem Weg zum interessierenden Streuvolumen und zurück frequenzabhängige Verzerrungen, die durch meistens nicht messbare Beugungs- und Dämpfungseinflüsse zustande kommen.

Arbeiten zur Messung von Rückstreuungsspektren aus Medien mit zufälliger Struktur sind zahlreich [CH75, NHN82, LGFE83, MMI84, UO85, LOF+86, RTB89, IH90, IWBH90, WWG95, FKSMa96, FLK+97, SES99, JGC+00]. Das theoretische Fundament bilden die Zusammenhänge zwischen dem Rückstreuungskoeffizienten, dem *Modell der kontinuierlichen Inhomogenitäten* (schwache Streuung in inhomogenen Medien, [Che60], S.41ff, [Höf95], S.40ff), der Autokorrelation akustischer Parameter im Medium und schließlich dem Rückstreuungsspektrum, d.h. dem mittleren Leistungsdichtespektrum eines Abschnittes des hochfrequenten Ultraschallechos aus dem betrachteten Medium. Die Darstellung dieser Zusammenhänge ist umfangreich und bedient sich zahlreicher Näherungen, deshalb sei der Leser auf die Literatur verwiesen (insbesondere [UI81, IH90, IWBH90, Sch96]).

Die Wertigkeit der Rückstreuungsspektren in Bezug auf die Unterscheidung verschiedenen Gewebes wird in [GJSH96] demonstriert: In einem speziellen Phantom wurde ein Einschluss eingearbeitet, der im Vergleich zu seiner Umgebung andere Rückstreuungseigenschaften hat. Im normalen B-Bild ist dieser Einschluss nicht zu erkennen, aber die spektrale Analyse der hochfrequenten Ultraschallechos kann ihn sichtbar machen. Indessen sind derart klare Ergebnisse wahrscheinlich nur mit künstlichen Streuobjekten wie kleinsten Kügelchen aus Glas oder Polystyrol erzielbar, für die zum Teil sogar analy-

tische Betrachtungen über die zugehörigen Rückstreupektren möglich sind. Mangels zufrieden stellender Streumodelle für biologisches Gewebe ([Höf95], S.68ff) ist die Aussagekraft des frequenzabhängigen Verlaufs der Rückstreupektren kritisch zu betrachten (siehe auch Kapitel 9).

Neben dem prinzipiellen frequenzabhängigen Verlauf der Rückstreupektren kann auch aus den Periodizitäten im Rückstreupektrum Information über die Struktur des Gewebes abgelesen werden, nämlich die mittleren Streuerabstände [VD93, VD94]. In der vorliegenden Arbeit hingegen beschränken sich sämtliche Untersuchungen auf den prinzipiellen Verlauf, und die Schwankungen im geschätzten Rückstreupektrum werden ausgeglättet (vgl. [JGC+00]).

Unter Vernachlässigung der Detailinformation im Rückstreupektrum $R_X(\omega)$ kann das logarithmierte Spektrum (dB-Skala) innerhalb einer gewissen Bandbreite (-12 oder -20 dB-Bandbreite des Schallwandlers, z.B. $f = 2 \dots 5$ MHz) um die Mittenfrequenz ω_0 linearisiert werden ([LOF+86, RTB89], [Hui98], S.19ff):

$$10 \log_{10} R_X(\omega) \approx b_0 + b_1(\omega - \omega_0) , \quad b_0 \equiv 10 \log_{10} R_X(\omega_0) . \quad (3.4)$$

Die spektralen Parameter b_0, b_1 können aus den geschätzten Spektren durch lineare Regression in der genannten Bandbreite ermittelt werden. Ein weiterer interessanter Parameter ist die mittlere quadratische Abweichung dieser Gerade vom geschätzten (möglicherweise geglätteten) Spektrum $10 \log_{10} \hat{R}_X(\omega)$ [Sch96]:

$$\hat{b}_{\text{err}} \equiv \frac{1}{N} \left(10 \log_{10} \hat{R}_X(\omega) - \hat{b}_0 - \hat{b}_1(\omega - \omega_0) \right)^2 , \quad (3.5)$$

wobei N die Anzahl der Frequenzstützstellen innerhalb der untersuchten Bandbreite bezeichnet.

Die Schätzung der mittleren Rückstreuintensität bzw. die Rückstreustärke bei der Mittenfrequenz (b_0) eignet sich gut zur Gewebedifferenzierung. Entsprechende Untersuchungen an pathologischen Veränderungen in Leber, Prostata und Hoden sind recht vielversprechend. Zwar können Unterschiede in der Rückstreuintensität auch im konventionellen B-Bild subjektiv erkannt werden, doch vermag eine objektive Messung feine Unterschiede deutlicher herauszustellen (siehe auch Kapitel 8).

Allerdings ist bei der Schätzung von logarithmierten Leistungsdichtespektren vieles zu beachten. Deshalb liegt ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf der Untersuchung statistischer Eigenschaften gemittelter Periodogramme mit dB-Skala – der üblichen Schätzmethode in der Gewebecharakterisierung (Kapitel 7). Insgesamt ist es das Ziel der Arbeit, einen

Ursache	Auswirkung
Größere Bereiche mit veränderter Schallgeschwindigkeit	verzerrte Abbildung, verfälschte Abmessungen
Brechung des Schalls an ausgedehnten Impedanzsprüngen	verzerrte Abbildung, falsche Lokalisierung von Objekten
Reflexion des Schalls an ausgedehnten Impedanzsprüngen	Schallabschwächung hinter der Reflexionsstelle, bis hin zur Schallauslöschung
Mehrfachreflexionen	Geisterbilder
abschnittsweise erhöhte Dämpfung	scheinbar verringerte Rückstreuung hinter diesen Abschnitten
abschnittsweise niedrigere Dämpfung	scheinbar erhöhte Rückstreuung hinter diesen Abschnitten

Tab. 3.3: Die wichtigsten sichtbaren Artefakte beim Puls-Echo-Ultraschall.

Weg zur Schätzung von Rückstreuenspektren bzw. deren Parametrisierung mit höchstmöglicher räumlicher Auflösung bei gleichbleibend niedriger Varianz und kleinem Fehler (Bias) zu finden.

3.4 Inhomogenität und Grenzen des Puls-Echo-Verfahrens

Für die physikalischen Grenzen des Puls-Echo-Ultraschalls sind tatsächlich in erster Linie die Inhomogenitäten der Makrostruktur verantwortlich. Änderungen der akustischen Parameter, die über kleine und stationäre Schwankungen hinausgehen, verursachen zahlreiche Verfälschungen, die im Fachjargon als *Artefakte* bekannt sind. Einige dieser Artefakte verbergen sich zwar dem Auge, können aber die Zuverlässigkeit von gewebedifferenzierenden Messungen entscheidend beeinträchtigen. In Tabelle 3.3 sind die wichtigsten Artefakte zusammengestellt.

Alle diese Störungen, die der Schallpuls auf seinem Weg durch das Gewebe erfährt, ziehen außerdem noch Phasenverzerrungen (*phase aberrations*) nach sich, was die Analyse der Mikrostruktur des Gewebes zusätzlich erschwert. Die Erklärung hierfür liegt darin, dass sich die HUYGENSSchen Elementarwellen, die entweder von der Oberfläche des Schallwandlers oder vom streuenden Medium ausgehen, auf eine nicht vorhersagbare Weise überla-

gern. Dies hat zur Folge, dass die Interferenzmuster im B-Bild (Speckle) nicht nur mit der Struktur des Gewebes an der dortigen Stelle, sondern auch mit den Makrostrukturen zwischen Schallwandler und dieser Stelle in Verbindung gebracht werden können. Leider sind bis heute keine Verfahren bekannt, die dieses Phänomen quantifizieren und somit korrigieren könnten.

Aber auch für den computergestützten Vergleich verschiedener Gewebeklassen ergibt sich aus der Makrostruktur des Gewebes und den damit verbundenen Fehlern eine kaum behebbare Schwierigkeit: Sind nämlich die untersuchten Gewebeklassen grundsätzlich durch Inhomogenität in der Makrostruktur gekennzeichnet, wächst der Wertebereich der gewebespezifischen Parameter stark an und lässt somit die Diskriminanz zwischen den Klassen bedenklich schrumpfen. Selbst wenn man sehr viele Schnittebenen eines Tumors in die Analyse mit einbeziehen würde, könnten höchstens Inhomogenitätsmaße, d.h. Messung von Parametern zur Charakterisierung von *instationären* Prozessen zu einer Klassifikation herangezogen werden.

4. Modellierung der Ultraschallechos

Ziel der quantitativen Ultraschalldiagnose ist es, einen reproduzierbaren Zusammenhang zwischen empfangenen Ultraschallechos und der Mikrostruktur des Gewebes herzustellen. Hierzu müssen systembedingte Fehler korrigiert und zufällige Fehler begrenzt werden. Deshalb ist es der erste Schritt, sämtliche Fehlerquellen durch physikalische und systemtheoretische Modellierung der Ultraschallechos zu präzisieren. Im Anschluss an die Diskussion der wichtigsten Konsequenzen des Modells werden die Möglichkeiten der Korrektur systembedingter Fehler ausgelotet. Weitere Arbeiten hierzu sind u. a. [UI81, UI84, LF86, IH90, IWBH90, Jen91, JGJ93, APR96, Jen97] sowie die Dissertationen [Höf95, Sch96].

4.1 Schallwandler und Schallfeld

Das Schallfeld eines flächenhaften Strahlers berechnet man mit Hilfe des RAYLEIGH-Oberflächen-Integrals, das im Anhang A.1 hergeleitet wird. Gemäß dem Koordinatensystem in Abb. 4.1 ist der Schalldruck $p(\mathbf{r}, t)$ an einem Ort \mathbf{r} abhängig von den Schallschnellen $v_n(\mathbf{r}', t)$ der Wandlerelemente $dS(\mathbf{r}')$ (c_0 : mittlere Schallgeschwindigkeit, ρ_0 : mittlere Dichte des Mediums):

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_S \frac{\rho_0 \cdot \dot{v}_n \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right)}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS(\mathbf{r}') . \quad (4.1)$$

Im Frequenzbereich gilt entsprechend (Wellenzahl $k = \omega/c_0$)

$$\underline{p}(\mathbf{r}, \omega) = \int_S \frac{j\omega\rho_0 e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{v}_n(\mathbf{r}', \omega) dS(\mathbf{r}') . \quad (4.2)$$

Um die weiteren Betrachtungen in diesem Kapitel möglichst übersichtlich zu halten, soll die Schallschnelle des Wandlers als über die ganze Fläche konstant angenommen werden:

$$\dot{v}_n \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) = \dot{v}_n \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) = \dot{v}_n(t) * \delta \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) \quad (4.3)$$

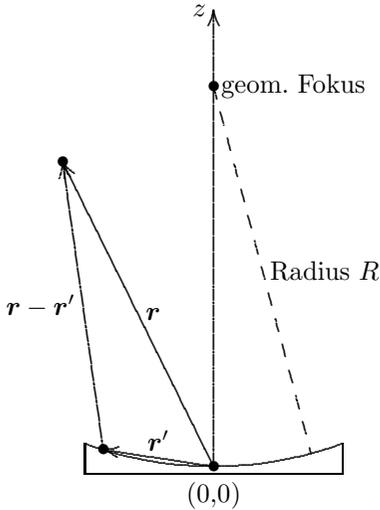


Abb. 4.1: Koordinatensystem für das RAYLEIGH-Oberflächen-Integral.

So ist es möglich, die Schnelle vor das Oberflächenintegral zu ziehen. Dies motiviert die Definition einer Übertragungsfunktion, die ausschließlich die Geometrie und Anordnung des Schallwandlers repräsentiert:

$$h_{\phi}(\mathbf{r}, t) \equiv \int_S \frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right)}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS(\mathbf{r}') \quad (4.4)$$

$$H_{\phi}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \int_S \frac{e^{-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS(\mathbf{r}') \quad (4.5)$$

Da diese Übertragungsfunktionen maßgebend für die Beugung des Schalls sind, seien sie als *Beugungscharakteristik* bezeichnet.

Daraus ergeben sich die Schalldrücke im Zeit- bzw. im Frequenzbereich:

$$\boxed{\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \rho_0 \cdot \dot{v}_n(t) * h_{\phi}(\mathbf{r}, t) \\ \underline{p}(\mathbf{r}, \omega) &= \rho_0 \cdot j\omega \cdot \underline{v}_n(\omega) \cdot H_{\phi}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}} \quad (4.6)$$

Interpretationen und Beispiele hierzu findet der Leser später in Abschnitt 4.3.2.

Einfluss der Dämpfung

Wenn der Schall auf seinem Weg vom Wandlerelement bei \mathbf{r}' zum Ort \mathbf{r} ein dispersives Medium durchläuft, kann der Einfluss dieses Mediums durch die komplexe Wellenzahl eingebracht werden ($a \leq 0$):

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c(\omega)} + j a(\omega) . \quad (4.7)$$

In biologischem Gewebe ist die Schallgeschwindigkeit zwar über die beim diagnostischen Ultraschall verwendeten Frequenzbereiche und Schalleindringtiefen nahezu konstant (Anhang A.4). Allerdings bewirkt die schwache Frequenzabhängigkeit eine zusätzliche Phasenverschiebung um $k_\delta \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, die bei $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 15 \text{ cm}$ ungefähr einen Wert von $-\pi$ erreicht und in manchen Fällen berücksichtigt werden muss (z.B. wenn Simulationsstudien mit echten Echosignalen verglichen werden sollen).

k_δ wird hier aus einer Näherungslösung für die Wellenzahl \underline{k} gewonnen, die von einer linearen Frequenzabhängigkeit der Dämpfung ausgeht. Mit ω_0 als Mittenfrequenz des bandbegrenzten Übertragungsverhaltens und $\omega_1 < \omega$ als beliebige Bezugsfrequenz ergibt sich (siehe Gleichung (A.87), S.186)

$$\underline{k} \approx \frac{\omega}{c(\omega_1)} - \frac{2 \cdot a(\omega_0)}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1} + j a(\omega) . \quad (4.8)$$

Dies entspricht der komplexen Wellenzahl für konstante Schallgeschwindigkeit,

$$\underline{k}_0 \equiv \frac{\omega}{c(\omega_1)} + j a(\omega) , \quad (4.9)$$

nebst einem zusätzlichen reellen und negativen Term (es gilt $a(\omega_0) < 0$ und $\omega > \omega_1$, der Term muss wegen der geforderten Kausalität negativ sein)

$$k_\delta \equiv \frac{2 \cdot a(\omega_0)}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1} , \quad (4.10)$$

welcher der Dämpfungsübertragungsfunktion als zusätzlicher Phasenterm zugeschrieben werden kann und für das „Zerfließen“ des ausgesendeten Wellenpaketes verantwortlich ist. So erhalten wir die modifizierte Beugungscharakteristik (durch den Index „d“ gekennzeichnet)

$$H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega) = \int_S \frac{e^{-j(\underline{k}_0 + k_\delta) \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS(\mathbf{r}') . \quad (4.11)$$

Daraus wird unmittelbar klar, dass die Dämpfung das vom Wandler erzeugte Schallfeld stark beeinflussen kann.

Für das Fernfeld, d.h. für $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| \rightsquigarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}|$, kann der Exponentialterm komplett vor das Integral gezogen werden¹. Mit der Definition einer eigenständigen Dämpfungsübertragungsfunktion vereinfacht sich die systemtheoretische Behandlung von Ultraschallechos beträchtlich:

$$H_d(\mathbf{r}, \omega) \equiv \exp(a(\omega) |\mathbf{r}|) \cdot \exp\left(\mathrm{j} \cdot \frac{2a(\omega_0)}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1} \cdot |\mathbf{r}|\right) \quad (4.13)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega) = H_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_\phi(\mathbf{r}, \omega), \quad \text{für } |\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|}. \quad (4.14)$$

Diese Trennung der beiden Einflüsse Dämpfung und Schallbeugung ist auch wichtige Voraussetzung für die separate Dämpfungskorrektur, wie sie üblicherweise in der Gewebedifferenzierung eingesetzt wird ([Sch96, JGC⁺00], weitere Ausführungen in Abschnitt 4.5 „Korrektur systembedingter Einflüsse“).

4.2 Abbildung des Gewebes auf das Echosignal

Der von einem Schallwandler erzeugte Schalldruck wurde im letzten Abschnitt hergeleitet. Definieren wir die Abkürzung („T“ für „Transmit“):

$$h_T(t) \equiv \rho_0 \cdot \dot{v}_n(t). \quad (4.15)$$

$h_T(t)$ kann als Sendesignal verstanden werden. Damit wird der Schalldruck $p_i(\omega)$ einer einfallenden Welle („i“ steht für „incident“) gemäß Gleichung (4.6) zu ($H_T(\omega) \equiv \mathcal{F}\{h_T(t)\}$)

$$\underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = H_T(\omega) \cdot H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.16)$$

In \mathbf{r} wird die einfallende Welle gestreut und erfährt eine richtungs- und frequenzabhängige Änderung gemäß der Übertragungsfunktion des Gewebes,

¹ Auf den ersten Blick mag die Approximation $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}|$ für den Phasenterm der Dämpfung ungerechtfertigt erscheinen, doch in Anbetracht der Tatsache, dass die Dispersionskorrektur k_δ sehr viel kleiner gegenüber der reellen Wellenzahl k ist –

$$k_\delta = \frac{2a(\omega_0)}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_0} \ll \frac{\omega}{c_0} = k \quad (4.12)$$

– wirken sich Änderungen in $|\mathbf{r}|$ entsprechend weit weniger stark auf eine Phasenänderung aus (siehe hierzu auch A.4).

$H_G(\mathbf{r}, \omega)$. Bei isotroper Streuung entfällt die Richtungsabhängigkeit. Die gestreute Welle („s“ für „scattered“) ist eine gedämpfte Kugelwelle (komplexe Wellenzahl $\underline{k} = \underline{k}_0 + k_\delta$, siehe (4.7) bis (4.11)). Die Streuantworten jedes Punktes eines Streuvolumens V aufintegriert, erhalten wir

$$\underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega) = \int_V \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) \cdot \frac{e^{-j\underline{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}) . \quad (4.17)$$

Unter Vernachlässigung anisotroper Streuung kann aus dem physikalischen Modell der kontinuierlichen Inhomogenitäten ein Ausdruck für die Gewebeanwort $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ gefunden werden. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Wellendifferentialgleichung ergibt zunächst für die gestreute Welle [Che60, UI81, IH90, IWBH90, Höf95]

$$\underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega) = \int_V \left(k^2 \cdot \frac{2 \Delta c(\mathbf{r})}{c_0} \cdot \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\rho_0} \cdot \nabla (\Delta \rho(\mathbf{r})) \cdot \nabla \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \right) \cdot \frac{e^{-j\underline{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}) , \quad (4.18)$$

wobei von der BORN-Approximation $\underline{p}_s \ll \underline{p}_i$ Gebrauch gemacht wurde und nur kleine Schwankungen $c = c_0 + \Delta c$, $\Delta c \ll c_0$ bzw. $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$, $\Delta \rho \ll \rho_0$ zugelassen sind (siehe hierzu auch o.g. Literatur zum physikalischen Modell). Weiterhin darf innerhalb des Streuvolumens V keine Dämpfung auftreten. Dies bedeutet, dass V klein genug sein muss, um die Dämpfung vernachlässigen zu können.

Vernachlässigt man nun die anisotrope Dichtestreuung, d.h. geht man davon aus, dass im biologischen Gewebe die Dichte weit weniger schwankt als die Schallgeschwindigkeit, gelangt man zu dem einfacheren Ausdruck

$$\underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega) = \int_V k^2 \cdot \frac{2 \Delta c(\mathbf{r})}{c_0} \cdot \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \frac{e^{-j\underline{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}) , \quad (4.19)$$

und folglich

$$H_G(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \cdot \frac{2 \Delta c(\mathbf{r})}{c_0} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \frac{2 \Delta c(\mathbf{r})}{c_0} . \quad (4.20)$$

Hierbei ist $\Delta c(\mathbf{r})$ und damit auch $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ als räumlicher Zufallsprozess zu verstehen.

Den gesuchten Ausdruck für das empfangene Ultraschallecho erhalten wir, wenn wir $\underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega)$ an jeder Stelle der Wandleroberfläche in geeigneter Weise berücksichtigen. Hierzu nehmen wir an, dass der piezoelektrische Schallempfänger nur über seine ganze Fläche gleichphasige Dickenschwingungen

zulässt. Mit dieser Annahme und aufgrund der Tatsache, dass Piezowandler Druckempfänger sind ([ZZ93], S.183), kann $\underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega)$ ohne zusätzliche Gewichtungsterme über die ganze Wandleroberfläche integriert werden. Bezeichnen wir die elektromechanische Übertragungsfunktion sowie weitere gerätespezifische Filter² zusammenfassend als $H_R(\omega)$ („R“ für „Receive“), lautet das Spektrum der Echo-Spannung schließlich

$$\underline{e}(\omega) = H_R(\omega) \cdot \int_S \underline{p}_s(\mathbf{r}', \omega) \, dS(\mathbf{r}') \quad (4.21)$$

$$= H_R(\omega) \cdot \int_S \int_V \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) \cdot \frac{e^{-j\mathbf{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV(\mathbf{r}) \, dS(\mathbf{r}') \quad (4.22)$$

$$= H_R(\omega) \cdot \int_V \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) \cdot \int_S \frac{e^{-j\mathbf{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS(\mathbf{r}') \, dV(\mathbf{r}) \quad (4.23)$$

$$= H_R(\omega) \cdot \int_V \underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) \cdot \frac{1}{2} H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega) \, dV(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

Einsetzen von $\underline{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$ aus Gleichung (4.16) nebst der Abkürzung

$$H_W(\omega) \equiv \frac{1}{2} \cdot H_T(\omega) \cdot H_R(\omega) \quad (4.25)$$

liefert den für die Analyse von Ultraschallechos fundamentalen Ausdruck

$$\underline{e}(\omega) = H_W(\omega) \cdot \int_V H_{\phi,d}^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) \, dV(\mathbf{r}) \quad (4.26)$$

Anhand dieser Gleichung verdeutlicht sich der Einfluss der tiefenabhängig variierenden Beugungscharakteristik $H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega)$. Würde man ein kleines streuendes Volumenelement in Richtung der Schallausbreitung verschieben, bekäme man ein variierendes Echospektrum. Diese systembedingte Schwankung übersteigt den Wertebereich von Parametern zur Charakterisierung von Weichgewebe, und deshalb ist eine entsprechende Korrektur unumgänglich.

² Hier wird vorausgesetzt, dass die Empfangselektronik ein stationäres Verhalten hat. Alle Einflüsse nichtstationärer Funktionalitäten wie die des Tiefenausgleichsverstärkers sollten vor der Analyse korrigiert werden.

4.3 Interpretation der Abbildung des Gewebes

4.3.1 Gefensterte Analyse

Bisher haben wir nur das Echosignal eines kleinen Volumenelements betrachtet. Beim *In-vivo*-Ultraschall haben wir es allerdings mit einem ausgedehnten Medium zu tun, welches zudem im Allgemeinen inhomogen ist. Somit erhalten wir in jedem Fall ein instationäres Echosignal, welches stückweise analysiert werden muss.

Jeder Zeitpunkt t_z des Echosignals entspricht einer Eindringtiefe $z = c_0 \cdot t_z / 2$. Entsprechend der Länge des Sendepulses überlagern sich die Rückstreuungsechos eines kleinen Volumens $V(z)$ zu einem Teilecho

$$\underline{e}(z, \omega) = H_W(\omega) \cdot \int_{V(z)} H_{\phi,d}^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) dV(\mathbf{r}) . \quad (4.27)$$

Der gesamte A-Scan $e(t)$ kann als Überlagerung der Teilechos aus aneinander grenzenden Volumenelementen aller Eindringtiefen verstanden werden, da sich mit fortschreitender Zeit auch die Grenzen des Volumens $V(z)$ in z -Richtung verschieben.

Das zu einem Zeitpunkt $t_z = 2z/c_0$ des Echosignals gehörige Streuvolumen $V(z)$ wird in [OTH⁺91] als „isochronisches Volumen“ bezeichnet. Vereinfacht und idealisiert kann auch von „isochronischen Flächen“ gesprochen werden [FHC83].

Unser Bestreben ist es, das Spektrum $|\underline{e}(z, \omega)|$ in unterschiedlichen Eindringtiefen zu schätzen, um etwas über die Mikrostruktur des Gewebes in $V(z)$ zu erfahren. Allerdings sind wir gezwungen, auf das Zeitmittel zurückzugreifen, da wir aufgrund der komplexen Zusammensetzung des Echosignals keinen Zugang zum Scharmittel haben. Hierzu benötigen wir einen Ausschnitt des Echosignals, ausgewählt durch die Fensterfunktion $g(t - 2z/c_0)$ (z liege in der Mitte des Fensters):

$$e(z, t) = e(t) \cdot g(t - 2z/c_0) . \quad (4.28)$$

Dies entspricht ungefähr dem Echo eines durch ein Raumfenster $g(z, \mathbf{r})$ eingegrenzten Volumens ([IH90], Anhang A.2):

$$\underline{e}(z, \omega) \approx H_W(\omega) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} g(z, \mathbf{r}) \cdot H_{\phi,d}^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) dV(\mathbf{r}) . \quad (4.29)$$

Das Raumfenster $g(z, \mathbf{r})$, das direkt mit dem isochronischen Streuvolumen $V(z)$ verknüpft ist, kann nicht einfach erhalten werden [MMI84]. Die Volu-

mentelemente $V(z)$ haben im Allgemeinen eine sehr komplizierte Struktur [FC84]. Oft wird vereinfachend von ebenen Volumenausschnitten ausgegangen [VCT85]. Eine andere Näherung wäre die Aufteilung des Raumbereichs in eine laterale und eine axiale Komponente, wobei die laterale Komponente durch die Richtcharakteristik ausgedrückt wird [IWBH90].

Außerdem entspricht die Fensterung im Zeitsignal einer Faltung im Frequenzbereich, was zwangsläufig zu Fehlern führt [MMI84]. Diese Fehlerquelle kann mit der in Kapitel 6 erörterten Entfaltung im Zeitbereich umgangen werden.

Das Zeitfenster sollte zumindest so lang sein, dass eine volle Periode der niedrigsten wichtigen Frequenz enthalten ist [CH75]. Dies hängt auch mit der Zeit-Frequenz-Unschärfe zusammen. Beispiel: Mittenfrequenz des Schallwandlers $f_0 = 3.5$ MHz, niedrigste Frequenz innerhalb der Bandbreite des Wandlers: $f_{\text{low}} = 2$ MHz, \leadsto Fensterlänge $\tau_{\text{min}} \approx 1/f_{\text{low}} = 0,5 \cdot 10^{-6}$ s, bei einer Abtastfrequenz von $f_s = 20$ MHz sind dies $\tau_{\text{min}} = 10$ Samples.

Für die Analyse der Echosignale fordern wir *quasistationäres Verhalten* für einen gewissen Tiefenbereich $z_1 \dots z_2$. Diese Forderung ist nur dann erfüllt, wenn $H_{\phi,d}^2(\mathbf{r}, \omega)$ innerhalb des Raumbereichs $g(z, \mathbf{r})$ keine wesentlichen Änderungen in z -Richtung erfährt und wenn die statistischen Eigenschaften von $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ innerhalb des gleichen Raumbereichs ungefähr konstant bleiben. Deshalb sollten nur dämpfungs- und beugungskorrigierte Echosignale zur Analyse herangezogen werden. Wenn das untersuchte Medium in seiner Makrostruktur inhomogen ist, sollten die Fenster möglichst klein sein.

4.3.2 Beugungsprofil

Eine erste Interpretation des Ausdrucks (4.26) für die Abbildung des Gewebes auf ein Ultraschallecho verdeutlichte die verzerrenden Eigenschaften des Schallfeldes. Um dies weiter zu veranschaulichen, betrachten wir die Punktantworten, d.h. wir reduzieren das Medium auf einen einzigen Punkt, der alleine für die Rückstreuanwort verantwortlich ist und zudem keinerlei Frequenzabhängigkeit einführt:

$$h_G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}, t) . \quad (4.30)$$

Damit entfällt das Volumenintegral im Echosignal (4.26) und man erhält die Punktantwort im Frequenzbereich $\underline{e}(\mathbf{r}, \omega)$:

$$\underline{e}(\mathbf{r}, \omega) = H_W(\omega) \cdot H_{\phi,d}^2(\mathbf{r}, \omega) . \quad (4.31)$$

Die Beispiele in Abb. 4.2 verdeutlichen, wie die Schallbündelung zwangsläufig mit Auffächerungen und Schallschwächungen in nächster Nähe zum Wandler und jenseits des Fokus' einhergehen. Man spricht von *Beugungsprofilen*, weil das hinter einer Apertur gebeugte Schallfeld dem eines Kolbenschwingers gleicher Größe ähnelt ([Kut88], S.74ff).

In nächster Nähe zur Membran (*Nahfeld*; bis ca. einem Abstand, der das doppelte der größten Wandlerabmessung beträgt [ZZ93]) gestaltet sich das Schallfeld wesentlich komplizierter als in größerer Entfernung (*Fernfeld*; $|\mathbf{r}| \gg d$, d : Wandlerdurchmesser) und kann dort nur numerisch berechnet werden. Für das Fernfeld existieren jedoch für einige Wandlergeometrien analytische Näherungen, die den Einfluss bestimmter Parameter auf das Beugungsprofil direkter erkennen lassen. Die Grenze zwischen Nahfeld und Fernfeld ist nicht eindeutig bestimmt, aber wenn die Abnahme der Schallintensität in einen durch $1/|\mathbf{r}|$ geprägten Verlauf übergegangen ist, kann man von Fernfeldverhalten sprechen [Mil87]. Die Nahfeld-Fernfeld-Grenze ist auch für die Gewebedifferenzierung wichtig, da im Nahfeld der Dämpfungsterm nicht vor das Volumenintegral in (4.26) gezogen werden kann (siehe auch Herleitungen in den Abschnitten 4.1 und 4.2) und somit die Bestimmung jeglicher Gewebeparameter mit Fehlern behaftet sein muss (nachgewiesen in [O'D83, CO90]).

Im *In-vivo*-Ultraschall ist die genaue Form des Beugungsprofils weder vorhersagbar noch messbar. In der Praxis versucht man deshalb oft, die Schallbeugung und die Dämpfung getrennt zu behandeln. Weitere Untersuchungen zu Beugungsprofilen in Bezug auf die Ultraschalldiagnose findet man auch in [CT83, O'D83, RWB84, FC84, VCT85, CO90].

Ein sehr interessanter Aspekt des Beugungsprofils wurde in [Oos90] gezeigt. Man bemerkte sowohl in Simulationen als auch im Experiment mit speziell hergestellten Phantomen eine Verbreiterung der lateralen Autokorrelationsfunktion eines B-Bildes nach Hinzunahme frequenzabhängiger Dämpfung und schrieb dies der Veränderung des Beugungsprofils zu, ohne aber dieses Phänomen tiefer gehend zu untersuchen. Um die Zusammenhänge zwischen lateraler Ausdehnung des Beugungsprofils und der Autokorrelation des B-Bildes aufzudecken, benötigt man auch Wissen über die Korrelationslängen im Medium, welche ebenfalls die Autokorrelationsfunktion beeinflussen ([Höf95]; siehe auch folgenden Abschnitt 4.3.3 über Speckle).

An den Erkenntnissen über Beugungsprofile sowie deren Auswirkung auf die Ultraschallechos ändert sich prinzipiell nichts, wenn statt der hier betrachteten sogenannten Single-Element-Wandler komplexere Systeme mit Multi-Element-Wandlern und dynamischer Fokussierung verwendet werden.

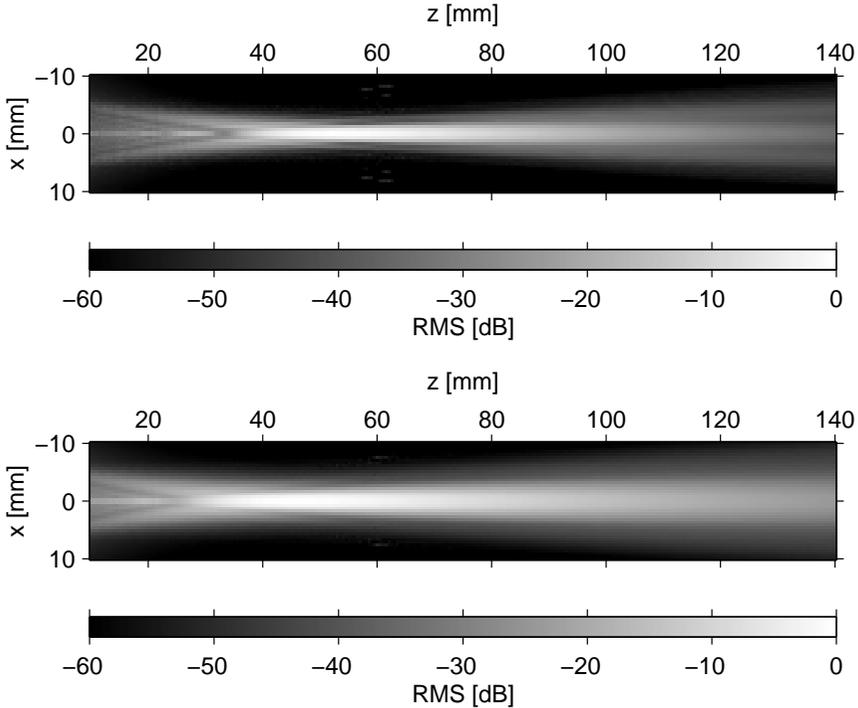


Abb. 4.2: Simulierte „Beugungsprofile“ eines konkaven Wandlers bei zwei verschiedenen Mittenfrequenzen. Dargestellt ist der auf das globale Maximum normalisierte RMS-Wert (Root Mean Square) der Punktantworten (4.31). **Oben:** Mittenfrequenz $f_0 = 5$ MHz. **Unten:** $f_0 = 3$ MHz. Man beachte die stärkere Bündelung bei der höheren Mittenfrequenz.

Simulationsparameter:

Wellenform $h_W(t) = e^{-(t-\tau)^2/2\sigma^2} \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ mit $\sigma = 0,244 \cdot 10^{-6}$ s und $\tau = 0,75 \cdot 10^{-6}$ s. Konkaver, kreisrunder Wandler mit geometrischem Fokus $R = 60$ mm, Durchmesser $d = 13$ mm, aufgeteilt in 2133 diskrete und gleich große Elementarwandler. $c_0 = 1500$ m/s. Abtastfrequenz $f_s = 50$ MHz. Simulation im Zeitbereich durch phasensensitive Überlagerung der Wellenformen. Dämpfung vernachlässigt.

4.3.3 Speckle

Typisch für alle Ultraschallbilder ist das Speckle-Muster im B-Bild, eine Interferenzerscheinung, die in ähnlicher Weise auch in der Laser-Technologie auftritt. Die kurzen Punktantworten, von zufällig verteilten Streuern frequenzabhängig verzerrt, überlagern sich innerhalb eines A-Scans im Extremfall zur Auslöschung oder zur Verstärkung (*axiales Speckle*). Wird das zufällige Medium durch mehrere benachbarte A-Scans abgebildet, überlappen sich die Beugungsprofile dieser A-Scans teilweise. Zwei nebeneinander liegende A-Scans sind korreliert, da sich die beschallten Volumenelemente gleicher Eindringtiefe überschneiden (*laterales Speckle*). Gewöhnlich haben die Speckles in lateraler Richtung eine größere Ausdehnung als in axialer Richtung. In Abb. 4.3 ist ein Beispiel dargestellt.

Das zufällige Speckle-Muster kann mit herkömmlichen Methoden der Statistik analysiert werden. Hierbei wird der Größe der Speckles, ausgedrückt durch laterale und axiale Autokorrelation, besondere Bedeutung beigemessen [WSSL83, SW84, WIS88, OTH⁺91, BSMG93]. Es besteht auch ein direkter Zusammenhang zu den entsprechenden Autokorrelationen der hochfrequenten Echos, da das B-Bild aus diesen berechnet wird [Höf95].

Allerdings hat die Analyse des Speckle-Musters im B-Bild für die Gewebedifferenzierung eher geringen Nutzen. Zwar drückt sich im Speckle auch die Mikrostruktur des Gewebes aus [Höf95, Oos90]. Aber die vielfältigen Verfälschungen wie Schallbeugung, Dämpfung und die Abhängigkeiten von der Mittenfrequenz bringen erhebliche Schwierigkeiten mit sich [OTV85, Oos90, OTH⁺91]. Die meisten Arbeiten zur Gewebedifferenzierung berücksichtigen daher nur die axiale Komponente der Autokorrelation, die aber direkt mit dem lokalen Rückstreupektrum verknüpft ist und deshalb keine zusätzliche Information liefern kann. Eine angemessene Korrektur (z.B. durch Entfaltung) der Beugung und Dämpfung ist in jedem Falle erforderlich, wie in den zitierten Arbeiten unterstrichen wird.

Aus diesen Gründen wird das Speckle-Muster eher als störend eingeschätzt – die grundlegende Motivation für Maßnahmen zur Speckle-Reduktion [HL93]. Auch die Entfaltung der hochfrequenten Echos hat letztendlich die Reduktion des Speckles zum Ziel, aber nur in axialer Richtung (Diskussion von lateralen Entfaltungen in Abschnitt 6.2).

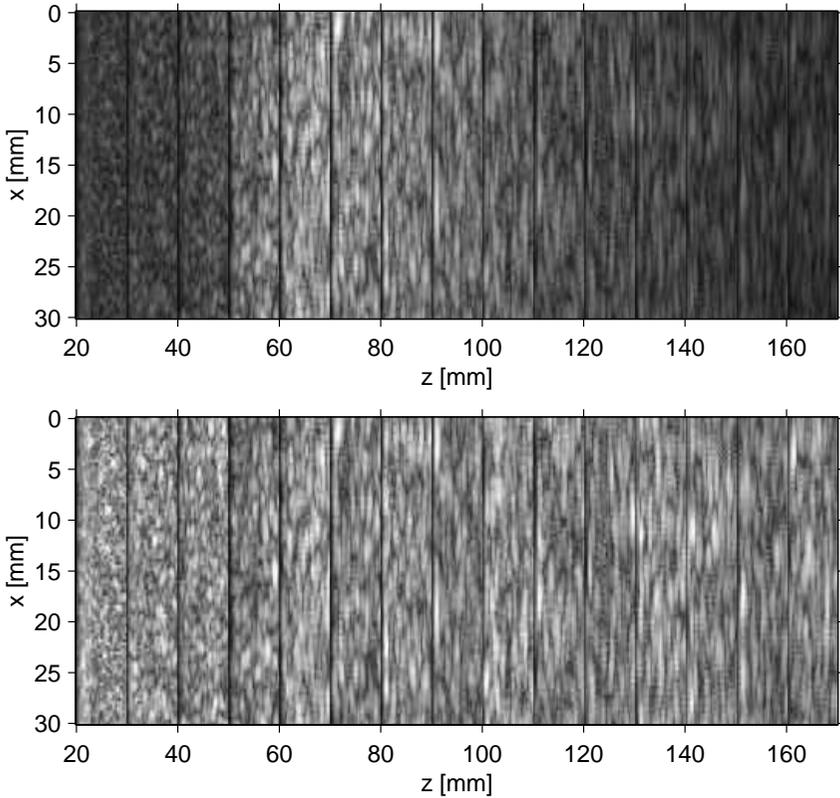


Abb. 4.3: Simuliertes Speckle-Muster im B-Bild (100 äquidistante A-Scans) in Abhängigkeit von der Eindringtiefe z . **Oben:** Man erkennt deutlich die Fokussierung des Schalls um $z = 80$ mm. **Unten:** Amplituden auf das Maximum der jeweiligen Gewebeschicht normiert. Die Verschiedenartigkeit des Speckle-Musters ist alleine auf die Schallbeugung zurückzuführen (vgl. Abb. 4.2). **Simulationsparameter:** Mittenfrequenz $f_0 = 5$ MHz. Wellenform $h_W(t) = e^{-(t-\tau)^2/2\sigma^2} \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ mit $\sigma = 0,198 \cdot 10^{-6}$ s und $\tau = 0,61 \cdot 10^{-6}$ s. Konkaver, kreisrunder Wandler mit geometrischem Fokus $R = 80$ mm, Durchmesser $d = 13$ mm, aufgeteilt in 349 diskrete und gleich große Elementarwandler. $c_0 = 1500$ m/s. Abtastfrequenz $f_s = 50$ MHz. Zweidimensionale Simulation im Zeitbereich durch phasensensitive Überlagerung der Wellenformen. Dämpfung vernachlässigt. Gewebematrix 300×50 Punkte bzw. 30×5 mm, Punktstreuer zufällig auf 10 % der Matrixpunkte verteilt. Amplitudenkompression der Einhüllenden gemäß $y = x^{0,5}$.

4.4 Vereinfachtes systemtheoretisches Modell

Betrachten wir zunächst noch einmal das mathematische Modell (4.26), (4.27) für die Ultraschallechos mit der Fernfeldnäherung ($H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega) = H_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_\phi(\mathbf{r}, \omega)$, Gl. (4.14)) und unter der Annahme, dass die Dämpfung innerhalb des Volumenelements $V(z)$ vernachlässigt werden kann (d.h. die Dämpfung wird nur bis zum Volumenelement berücksichtigt):

$$\underline{e}(z, \omega) = H_W(\omega) \cdot H_d^2(z, \omega) \int_{V(z)} H_\phi^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) dV(\mathbf{r}) . \quad (4.32)$$

Sowohl für die Gewebedifferenzierung als auch für die Darstellung von standardisierten Ultraschallbildern mit erhöhter Aussagekraft bezüglich der Gewebeart ist es entscheidend, lokale Parametrisierungen der Ultraschallechos zu finden, die unabhängig vom Ort der Parametrisierung eine stets gleichbleibende Proportionalität zur Gewebeantwort $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ aufweisen. Wie wir aus Gleichung (4.32) erkennen, gestaltet sich die Lösung dieses Problems schwierig, weil die Beugungscharakteristik $H_\phi(\mathbf{r}, \omega)$ innerhalb des Volumenintegrals auftritt. Für die Lösung des inversen Streuproblems, d.h. die Identifizierung aller $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ innerhalb des Volumenelementes, beinhaltet das Echo $\underline{e}(z, \omega)$ zu wenig Informationen. Man kann sich deshalb nur darauf konzentrieren, statistisch sinnvolle Mittelwerte zu schätzen, die im Zusammenhang zur Gewebeantwort und somit zur Mikrostruktur stehen.

Die Schallbeugung muss aber auch zur Bestimmung derartiger Mittelwerte separat und korrigierbar auftreten. Für Leistungsdichtespektren lässt sich ein Separationsansatz angeben (Anhang A.2):

$$R_E(z, \omega) = |H_W(\omega)|^2 \cdot |H_d(z, \omega)|^4 \cdot |D(z, \omega)|^2 \cdot |B(z, \omega)|^2 , \quad (4.33)$$

wobei $D(z, \omega)$ ein Beugungsanteil (diffraction) und $B(z, \omega)$ ein Rückstreuanteil (backscattering) ist. Rein formal erhält man daraus durch Faktorisierung die Näherung

$$\int_{V(z)} H_\phi^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) dV(\mathbf{r}) \approx D(z, \omega) \cdot B(z, \omega) , \quad (4.34)$$

womit der Ausdruck (4.32) in eine zeitliche (eindimensionale) Faltung überführt wäre:

$$\underline{e}(z, \omega) = H_W(\omega) \cdot H_d^2(z, \omega) \cdot D(z, \omega) \cdot B(z, \omega) . \quad (4.35)$$

Die Annahme von $D(z, \omega)$ als alleinige Beschreibung der Schallbeugung kann auch gerechtfertigt werden, indem man für das isochronische Volumen $V(z)$ eine „mittlere Beugungscharakteristik“ annimmt: $H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega) \approx$

$D(z, \omega)$, siehe [OTH⁺91]. Allerdings erscheint eine derartige Approximation etwas „gewagt“. Von einem heuristischen Standpunkt aus betrachtet könnte man argumentieren, dass sich der Einfluss von $H_{\phi, d}$ für jedes betrachtete Volumenelement $V(z)$ einfach als verzerrende Übertragungsfunktion $D(z, \omega)$ auf die „tatsächliche“ Rückstreuantwort $B(z, \omega)$ auswirkt.

Solange nur Leistungsdichtespektren und daraus abgeleitete Parameter betrachtet werden, ist die Phase von $D(z, \omega)$ oder $B(z, \omega)$ nicht relevant. Davon abgesehen gestaltet sich die Behandlung der Phase äußerst schwierig, da der Schall auf seinem Weg durch das Gewebe unzählige Phasenverzerrungen durchläuft („phase aberrations“), die sich nicht nachvollziehen lassen.

4.5 Korrektur systembedingter Einflüsse

Da die direkte Messung von $D(z, \omega)$ und $H_W(\omega)$ sehr aufwändig ist, betrachtet man den zu analysierenden Bereich des Echosignals relativ zu Echosignalen aus einem wohldefinierten *Referenz*-Medium und aus gleicher Eindringtiefe. Alle Größen, die mit dem Referenzmedium in Verbindung gebracht werden, seien im Folgenden mit einem hochgestellten ^{ref} gekennzeichnet.

Die Korrektur systembedingter Einflüsse gelingt dann durch die Entfaltung $\underline{e}(z, \omega)/\underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega)$. Das Referenzmedium könnte ein gewebeimitierendes Ultraschallphantom [Hui98, JGC⁺00] oder eine reflektierende Fläche [IWBH90] sein.

Verwendet man zur Messung der Referenzechos $\underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega)$ das gleiche Ultraschallsystem wie bei der Analyse des unbekanntes Mediums, gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} D^{\text{ref}}(z, \omega) &\approx D(z, \omega) \\ H_W^{\text{ref}}(\omega) &\approx H_W(\omega) \end{aligned} \quad (4.36)$$

und wir erhalten wegen (4.35)

$$\frac{\underline{e}(z, \omega)}{\underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega)} \approx \frac{[H_d(z, \omega)]^2 \cdot B(z, \omega)}{[H_d^{\text{ref}}(z, \omega)]^2 \cdot B^{\text{ref}}(z, \omega)}. \quad (4.37)$$

Allerdings sind die in (4.36) vorausgesetzten Näherungen oft nur unzureichend erfüllt, zumal $D^{\text{ref}}(z, \omega)$ und $H_W^{\text{ref}}(\omega)$ für eine stabile Entfaltung minimalphasig sein müssen. Eventuell verbleibende Allpassterme, sofern bestimmbar, können durch eine antikausale Filterung im Anschluss an die

Entfaltung beseitigt werden. In jedem Falle gelten die Näherungen aber für die Beträge. (Zur Erinnerung: $D(z, \omega)$ wird nur durch die Wandlergeometrie bestimmt.)

An (4.37) erkennt man das übliche Dilemma: Möchte man die relativen Rückstreuenspektren messen, muss man die Dämpfung kennen und entsprechend korrigieren. Ist hingegen die Schätzung der lokalen Dämpfung die Aufgabe, muss die Rückstreuung bekannt sein. Eine mögliche Lösung des Problems ist die *Multi-Narrow-Band-Methode* [FHC83, CT83], mit der Dämpfungs- und Rückstreuanteil gleichzeitig geschätzt werden. Allerdings ist diese Methode nur dann anwendbar, wenn ausreichend große homogene Gewebereiche vorhanden sind ($> 1 \text{ cm}^2$ in der Schnittebene des B-Bildes), und außerdem darf die Dämpfung nur lokal von der Referenz abweichen – über die ganze Länge des A-Scans gesehen darf kein Trend in der Abweichung bestehen [Sch96].

Wahl des Referenzmediums

Die in Frage kommenden Referenzmedien können in zwei Klassen aufgeteilt werden:

1. *Deterministisch.* Hierzu zählen feste Reflektoren wie dünne Drähte, Stahlkugeln und ebene Flächen, die meist in Wassertanks angeordnet werden.
2. *Stochastisch.* Alle Medien mit zufälligen Streuerverteilungen fallen in diese Kategorie. Für die quantitative Ultraschalldiagnose sind gewebeimitierende Streuphantome und Datenbanken mit *in vivo* gewonnenen Ultraschallaufnahmen geeignet.

Umfassende und aufschlussreiche Diskussionen zur Wahl des Referenzmediums findet man in [Hui98], allerdings nur auf experimenteller Basis. Wie nun gezeigt wird, erlauben aber auch die analytischen Betrachtungen der letzten Abschnitte klare Schlussfolgerungen.

Wählen wir einen ebenen Reflektor, der senkrecht zur z -Achse und in einem dämpfungsfreien Medium ($H_d(\mathbf{r}, \omega) \equiv 1$) angebracht ist, erhalten wir für das Echo den Ausdruck (mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$)

$$\begin{aligned} \underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega) &= H_W(\omega) \cdot D^{\text{ref}}(z, \omega) \\ &= H_W(\omega) \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_\phi^2(\mathbf{r}, \omega) \, dx \, dy . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hier geht also die Beugung mit einem Flächenintegral ein, während sie bei einem Echo aus stochastischem Medium in einem Volumenintegral steht. Die Diskrepanz verdeutlicht sich, wenn wir die Leistungsdichtespektren gegenüberstellen (siehe Anhang A.2, (A.22) und (A.27)):

$$\left| D^{\text{ref}}(z, \omega) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_{\phi}^2(\mathbf{r}, \omega) \, dx \, dy \right|^2 \quad (4.39)$$

$$\left| D(z, \omega) \right|^2 = \int_{V(z)} |H_{\phi}(\mathbf{r}, \omega)|^4 \, dV(\mathbf{r}) \quad (4.40)$$

$$\leadsto D(z, \omega) \neq D^{\text{ref}}(z, \omega) . \quad (4.41)$$

Somit muss mit einer unbefriedigenden Beugungskorrektur gerechnet werden, es sei denn, das Streuvolumen $V(z)$ hat in z -Richtung eine sehr kleine Ausdehnung.

Wählt man hingegen ein stochastisches Medium als Referenz, so ist $\underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega)$ zufälligen Schwankungen unterworfen. Dieser unerwünschte Effekt wird umgangen, indem man bei der Bestimmung der Referenz je nach Methode der Systemidentifikation geeignete Mittelwerte aus den Daten vieler A-Scans bildet. Entsprechende Methoden werden im nächsten Kapitel erarbeitet.

4.6 Relatives Rückstreuverhalten

Ein besonderer Vorteil von gewebeimitierenden Streuphantomen ergibt sich dann, wenn die Dämpfungseigenschaften möglichst realitätsnah nachgebildet sind. Dann kürzen sich die Dämpfungsterme in (4.37) und man erhält *relative Rückstreuenspektren*:

$$\frac{\left| \underline{e}(z, \omega) \right|^2}{\left| \underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega) \right|^2} \approx \frac{\left| B(z, \omega) \right|^2}{\left| B^{\text{ref}}(z, \omega) \right|^2} . \quad (4.42)$$

Wir führen nun eine Nomenklatur ein, die eine andere Sichtweise auf das Problem der Beugungs- und Dämpfungskorrektur erlaubt. Erstens betrachten wir die Referenzen $\underline{e}^{\text{ref}}(z, \omega)$ als Momentan-Übertragungssystem, im Folgenden als $H(z, \omega)$ bezeichnet, und zweitens interpretieren wir das relative Rückstreuverhalten als zeitlich instationären Zufallsprozess $w(t)$ mit dem momentanen Spektrum:

$$R_W(z, \omega) \equiv \left| \frac{B(z, \omega)}{B^{\text{ref}}(z, \omega)} \right|^2 . \quad (4.43)$$

Somit gelangen wir zu der Darstellung des zeitlich instationären Ultraschallechos $e(t)$

$$\boxed{e(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(z, \omega)\} * w(t)} . \quad (4.44)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung wird die Beugungs- und Dämpfungskorrektur als zeitvarianten Entfaltungsproblem interpretiert: Das relative Rückstreuungsspektrum ergibt sich aus einer Schätzung des Eingangssignals $w(t)$, die im idealisierten Fall einer Faltung mit dem inversen Referenzsystem $\mathcal{F}^{-1} \{1/H(z, \omega)\}$ entspricht:

$$w(t) = e(t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{H(z, \omega)} \right\} . \quad (4.45)$$

Das Modell in (4.44) widerstrebt vielleicht der Intuition, da nicht der ausgesendete Schallpuls, sondern das Medium als Eingangssignal gesehen wird (ähnliche Betrachtungen in [Kuc79, JMGS93]). Die Identifikation der lokalen Rückstreuungseigenschaften wird über den Umweg einer zeitvarianten Entfaltung erreicht.

4.7 Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde klar, dass die angestrebte quantitative Diagnose aufgrund der komplizierten Natur der Ultraschallechos nur mit recht groben Näherungen möglich ist. Die Behandlung der Echos aus stochastischen Medien erfolgte hier – im Gegensatz zu anderen Arbeiten – bewusst systemtheoretisch und unabhängig von physikalischen Streutheorien. Gleichwohl konnte eine Verbindung zum häufig verwendeten Streumodell der kontinuierlichen Inhomogenitäten gezeigt werden.

Die systemtheoretischen Vereinfachungen, die zum Faltungsmodell (4.44) führten, sind heuristischer Natur. Trotzdem kann eine befriedigende Beugungs- und Dämpfungskorrektur erreicht werden, wenn man die Korrekturterme auf der Basis von Echos aus einem stochastischen Medium bestimmt. Dieses *Referenzmedium* sollte ähnliche Dämpfungseigenschaften wie das untersuchte biologische Gewebe aufweisen.

5. Systemidentifikation

Nachdem nun ein einfaches Faltungsmodell zur Beschreibung der Ultraschallechos vorliegt, können zur Vorbereitung der Entfaltung die zu korrigierenden systembedingten Einflüsse in geeigneter Weise gemessen und parametrisiert werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, die hierfür in Betracht kommen, werden im nun folgenden Kapitel erörtert. Im Hinblick auf den in dieser Arbeit verwendeten Entfaltungsalgorithmus, der von einer Zustandsraumdarstellung des Faltungsmodells ausgeht, liegt der Schwerpunkt auf der Schätzung von ARMA-Modellen.

5.1 Wahl der Methode

Die Quantifizierung der systembedingten Fehler ist gleichbedeutend mit einer Systemidentifikation auf der Basis gemessener Ultraschallechos, oder, von einem geringfügig anderen Standpunkt aus betrachtet, als *Parametrisierung* der gemessenen Zufallsprozesse zu verstehen.

Zwischen Identifikation der gesuchten Systeme und der Schätzung des Eingangssignals, d.h. der Entfaltung, besteht immer eine enge Verwandtschaft, oft sind die Identifikationsmethoden sogar selbst zur Entfaltung geeignet. Unter einem erweiterten Betrachtungshorizont offenbaren sich auch viele Parallelitäten zur adaptiven Filterung und zur Kanalverzerrung aus der Nachrichtentheorie.

Um die Eignung verschiedener Identifikations- bzw. Entfaltungsmethoden beurteilen zu können, sollten zunächst alle bekannten Eigenschaften der Ultraschallechos ausgewertet werden. Wichtig ist ferner die Entscheidung zugunsten „stochastischer Referenzen“ zur Beugungs- und Dämpfungskorrektur (Abschnitt 4.5), was bedeutet, dass hier nur Zufallsprozesse als Eingangs- bzw. Ausgangssignal in Frage kommen. Direkte Messungen von Impulsantworten, wie sie beispielsweise durch Messung von Reflexionen an einem Draht oder an einer ebenen Fläche denkbar wären, werden hier also nicht behandelt.

Die entscheidenden Eigenschaften der Echosignale sind einerseits die Instationarität und andererseits das bandpassartige Spektrum. Der Instationarität kann auf zweierlei Weise Rechnung getragen werden:

1. *Blockverarbeitung, En-bloc-Berechnung.* Die Signale werden in quasi-stationäre Blöcke zerlegt, und innerhalb jedes Blockes kann dann eine Systemidentifikation durchgeführt werden. Zuverlässigere Schätzungen sind unter Umständen dann möglich, wenn mehrere unabhängige Signale (Realisierungen) in die Berechnungen einfließen („Multi-Input Multi-Output“, MIMO).
2. *Tracking.* Einem anfänglich geschätzten Startsystem wird eine gewisse Variabilität eingeräumt. Der Algorithmus versucht dann, die Veränderungen des Systems im Rahmen der erlaubten Variabilität zu verfolgen. Dies lässt sich mit rekursiven Algorithmen realisieren.

Die Form des Spektrums bestimmt die Wahl des Parametrisierungsmodells:

1. *MA-Modell (Moving Average).* Ein MA-Modell ist theoretisch immer geeignet. Allerdings kann für eine genügend genaue Modellierung eine sehr hohe Filterordnung erforderlich sein, was sich nicht nur in großem Rechenaufwand, sondern eventuell auch in unsicheren Schätzungen niederschlägt, besonders wenn die zur Verfügung stehenden Datenmengen gering sind. Außerdem können MA-Modelle nur durch numerische Suche gefunden werden, da die Schätzgleichungen nichtlinear sind.
2. *AR-Modell (Auto Regressive).* Dies ist ein System, das nur aus Polstellen besteht. Mit einem AR-Modell lassen sich nur Systeme mit resonanzartigen Spitzen repräsentieren. Dies funktioniert bei einigen Ultraschallsystemen recht gut [LGF83, WWG95]. Des Weiteren existieren lineare und robuste Algorithmen zur Schätzung von AR-Parametern aus Zufallsprozessen.
3. *ARMA-Modell (Auto Regressive Moving Average).* Bei zu großer Diskrepanz zwischen wahren System und AR-Modell ist das ARMA-Modell die Lösung, eine Kombination aus AR- und MA-Modell. Man erkauft sich die dann realitätsnahe Parametrisierung durch einen enormen Zuwachs an Komplexität in den Schätzalgorithmen, da wegen der Nichtlinearität des Gleichungssystems nur die numerische Suche als Lösungsstrategie bleibt.

Wie bereits angedeutet wurde, gehen Systemidentifikation und Entfaltung Hand in Hand. Deshalb ist es wichtig, die Zusammenhänge zu verschiedenen Entfaltungsmethoden zu beleuchten. Hier kann man folgende Kategorien unterscheiden:

1. *Nichtparametrische Methoden.* Hierzu gehört insbesondere die Division im Frequenzbereich, die zur Schätzung von korrigierten und/oder relativen Rückstreupektrern üblich ist. Ein weiterer wichtiger Vertreter dieser Gruppe ist die blinde Entfaltung über Cepstrum, Bicepstrum ([PN88], [NP93], S.219ff, [Hay96], S.772ff) oder Unterraum-Zerlegung (subspace decomposition, [Hay96], S.804). Die Anwendbarkeit blinder Entfaltungen auf Ultraschallechos wird weiter unten diskutiert.
2. *Parametrische Methoden.* Diese Methoden basieren auf einem der oben aufgezählten Modelle. Hier wären alle zustandsraumbasierten Algorithmen zu nennen (KALMAN-FILTER), die der instationären Natur der Ultraschallechos Rechnung tragen können (Literaturhinweise im Kapitel 6: „Entfaltung“).

Wie aus der Diskussion im vorigen Kapitel hervorgeht, bietet sich zur Korrektur der systembedingten Einflüsse die Verwendung eines stochastisch streuenden Mediums als Referenz an (Phantom, biologisches Gewebe). Dementsprechend müssen auch die Methoden der Systemidentifikation ausgerichtet sein: Die Echos sind als Zufallsprozesse zu interpretieren, und daraus müsste man die Systemfunktionen schätzen. Hierbei wird das Eingangssignal als (zunächst unbekanntes) weißes Rauschen angenommen, und die geschätzte Systemfunktion enthält auch einen Anteil, der das (absolute) Rückstreupektrum des Mediums repräsentiert (siehe Abschnitte 4.4 bis 4.6).

In der Gruppe der nichtparametrischen Methoden kämen mit dieser Betrachtungsweise nur noch die verschiedenen blinden Entfaltungen in Frage, Methoden also, die gleichzeitig das Eingangssignal *und* die Übertragungsfunktion schätzen.

Allerdings erweisen sich die blinden Entfaltungen in ihrer Anwendung auf Ultraschallechos als problematisch, und zwar vor allem aus zwei Gründen: Erstens haben die Verfahren, die auf Spektren höherer Ordnung basieren, eine langsame Konvergenz ([Hay96], S.802f), und zweitens ist die Voraussetzung, dass das Eingangssignal nicht normalverteilt sein darf, beim Ultraschall in der Regel nicht gegeben [APR95]. Solange keine zufriedenstellenden Modelle von der Mikrostruktur biologischen Gewebes existieren, ist die Annahme von nicht-normalverteilten Eingangssignalen (z.B. durch Punkt-

streuermodele gerechtfertigt) reine Spekulation. Punktstreuermodele sind zwar unter Umständen sinnvoll zur Schätzung von (hypothetischen) Streuerdichten als Gewebeparameter. Doch ist andererseits intuitiv klar, dass die nachgewiesene fraktale Struktur von biologischem Gewebe [Höf95] wenig Anhaltspunkte für die Rechtfertigung eines solchen Modells liefert.

Entfaltungen über das Bicepstrum, wie sie in [APR95] untersucht wurden, setzen außerdem einen unkorrelierten Prozess für das Eingangssignal voraus, was bezüglich der Vielfalt möglicher Gewebestrukturen zu restriktiv ist, vor allem wenn farbige Rückstreuenspektren aus den Echos geschätzt werden sollen. Ein weiterer Nachteil ist darin zu sehen, dass relativ große stationäre Signalausschnitte für einigermaßen zuverlässige Schätzungen unabdingbar sind (in [APR95]: Segmente mit 10 benachbarten A-Scans und der Länge 128 Samples bei einer Abtastfrequenz von 13,3 MHz).

Der oft hervorgehobene Vorteil, dass sich mit dieser Methode auch nicht-minimalphasige Übertragungsfunktionen schätzen lassen, verliert erheblich an Gewicht, wenn man bedenkt, welche nicht nachvollziehbaren Verzerrungen die Phase des Ultraschallpulses auf dem Weg durch das Medium erfährt und wie die Phase so an Aussagekraft verliert (Abschnitt 3.4, [Oos90, OTH⁺91]).

So bleiben die parametrischen Verfahren. Besonders interessant sind hierbei die ARMA-Modelle, da sich diese durch ihre Allgemeinheit auszeichnen. Die Algorithmen zur Schätzung solcher Modelle haben zwar gegenüber den einfachen AR-Modellen eine wesentlich größere Komplexität, doch allzu oft entzieht sich die breitbandige Natur der Ultraschallpulse einer ausreichend genauen Modellierung durch ein AR-System. Wenn es um die Schätzung von Rückstreuenspektren geht, könnte die Mittelung der Spektren einiger unabhängiger AR-Schätzungen aus dem gleichen Gewebebereich ein Ausweg sein [WWG95]. Für die angestrebte Entfaltung sind die Fehler dagegen nicht tolerierbar, und deswegen fällt die Entscheidung zu Gunsten von ARMA.

Die niedrigste Varianz haben naturgemäß jene Verfahren, in welchen die AR und die MA-Parameter gleichzeitig geschätzt werden. Hierzu gehört insbesondere die *Prediction Error Method* (PEM), welche eng mit der Maximum-Likelihood-Schätzung verwandt ist und somit die kleinstmögliche Varianz hat (die PEM und die Maximum-Likelihood-Schätzung entsprechen einander direkt, wenn die Systemordnungen des zu schätzenden Modells und des Zufallsprozesses gleich sind; [SS89], S.198ff). Um der Zeitvarianz Rechnung zu tragen, können entweder quasistationäre Blöcke verarbeitet werden [JMGS93], oder man bemüht die um einiges schwerer handhabbare rekursive Variante, die *Recursive Prediction Error Method* (RPEM). Vom Standpunkt der Spektralschätzung aus gesehen verdient außerdem die modifizierte

YULE-WALKER-Methode einige Beachtung, bei der die ARMA-Parameter aus einem auf andere Weise gewonnenen Leistungsdichtespektrum errechnet werden.

5.2 Theoretische Grundlagen

Zweck dieses Abschnittes ist die Formulierung einiger wichtiger Definitionen sowie die Zusammenfassung der untersuchten Algorithmen und deren wichtigster Eigenschaften, vor allem bezüglich der praktischen Umsetzung. Da ausführliche Herleitungen und theoretische Analysen der Algorithmen eine beträchtliche Komplexität besitzen, sei der Leser auf die einschlägige Literatur verwiesen [Lju87, SS89, KT93].

5.2.1 Parametrisierung diskreter Systeme

Von nun an erfolgen alle Betrachtungen im Diskreten, d.h. sämtliche Parametrisierungen und Entfaltungen stützen sich auf abgetastete Echosignale ($t \in \mathbb{N}$, $\omega = 2\pi f/f_S$). Aus diesem Grunde entziehen sich die konkreten Ergebnisse von Systemordnung und -parameter einer Verallgemeinerung, da eine Abhängigkeit von der Abtastfrequenz besteht. Ganzrationale Modellierung im Kontinuierlichen (Laplace-Transformierte), ausgehend von den in Kapitel 4 hergeleiteten physikalischen Zusammenhängen, wäre unter Umständen auch denkbar, ist aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Differenzgleichung

Um die Orientierung in der Vielzahl an parametrischen Modellen diskreter Zufallsprozesse zu erleichtern, beginnen wir mit dem SISO ARMAX-Modell (Single-Input-Single-Output, AutoRegressive Moving Average eXtended), aus dem dann das gewünschte ARMA-Modell als Spezialfall hervorgeht. Die Differenzgleichung des ARMAX-Modells lautet

$$y(t) + \sum_{\nu=1}^{N_A} a_\nu y(t - \nu) = u(t) + \sum_{\mu=1}^{N_B} b_\mu u(t - \mu) + w(t) + \sum_{\eta=1}^{N_C} c_\eta w(t - \eta). \quad (5.1)$$

Hierbei wird das Ausgangssignal mit $y(t)$, das Eingangssignal mit $u(t)$ und das Störsignal mit $w(t)$ bezeichnet. Es ist wichtig zu verstehen, dass *per definitionem* nur $y(t)$ und $u(t)$ messbar sind. Beim ARMA-Modell liegt kein

messbares Eingangssignal $u(t)$ vor, d.h. $u(t) \equiv 0$, und die obige Differenzengleichung reduziert sich auf

$$y(t) + \sum_{\nu=1}^{N_A} a_\nu y(t - \nu) = w(t) + \sum_{\eta=1}^{N_C} c_\eta w(t - \eta) . \quad (5.2)$$

Die \mathcal{Z} -Transformation von Gleichung (5.1) lautet

$$Y(z) A(z) = U(z) B(z) + W(z) C(z) \quad (5.3)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} W(z) \quad (5.4)$$

und mit den Umbenennungen

$$G(z) \equiv \frac{B(z)}{A(z)} \qquad H(z) \equiv \frac{C(z)}{A(z)} \quad (5.5)$$

$$\rightsquigarrow Y(z) = G(z) U(z) + H(z) W(z) . \quad (5.6)$$

In der Literatur findet man häufig eine Art Mischform aus Darstellung im Zeitbereich und im \mathcal{Z} -Bereich, die eine bessere Erkennbarkeit der Übertragungsfunktionen bzw. der Signale ermöglicht. Hierbei bezeichnet z^{-1} einen Verzögerungsoperator mit der Verzögerung um ein Abtastintervall, d.h.

$$z^{-1} y(t) \equiv y(t - 1) \quad (5.7)$$

$$(z^{-1})^n y(t) \equiv y(t - n) . \quad (5.8)$$

Mit Polynomen der Art

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{N_A} a_\nu (z^{-1})^\nu \quad (5.9)$$

lässt sich das ARMAX-Modell im Zeitbereich darstellen als

$$y(t) = G(z^{-1}) u(t) + H(z^{-1}) w(t) . \quad (5.10)$$

Lineare Regression

In kompakter Vektorschreibweise lautet Gleichung (5.1):

$$y(t) = \boldsymbol{\psi}(t)^T \boldsymbol{\theta}(t) , \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) \equiv \begin{pmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-N_B) \\ u(t) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-N_A) \\ w(t) \\ w(t-1) \\ \vdots \\ w(t-N_C) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}(t) \equiv \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_{N_A}(t) \\ 1 \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_{N_B}(t) \\ 1 \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_{N_C}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{\theta}(t)$ den möglicherweise zeitlich variablen *Parametervektor*, der in Aufgaben der Systemidentifikation zu schätzen ist. Eine einfache lineare Regression

$$\hat{y}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

ist allerdings nicht möglich, da $\boldsymbol{\psi}(t)$ die nicht direkt messbare Zeitreihe

$$\{w(t), \dots, w(t-N_C)\}$$

enthält. Dies verdeutlicht aber, wie im Falle von ARMA-Modellen ($u(t) \equiv 0$) Systemidentifikation und Entfaltung, d.h. Schätzung von $w(t)$, Hand in Hand gehen.

5.2.2 Schätzung der Systemordnung

Für eine gute Beschreibung von unbekanntem Zufallsprozessen durch ARMA-Parameter ist die richtige Wahl der AR- und der MA-Ordnung entscheidend. Man darf sich hierbei nicht dazu verleiten lassen, die Ordnung einfach sehr hoch zu wählen, denn allzu oft verschlechtern sich dann die Ergebnisse, und außerdem neigen dann viele Schätzalgorithmen zu schlechterem Konvergenzverhalten. Es gilt also ein Optimum zu finden. Im Wesentlichen stehen zur Bewältigung dieser Aufgabe vier Werkzeuge zur Verfügung:

1. *Akaike Information Criterion (AIC)* bzw. *Bayesian Information Criterion (BIC)*. Ein weitestgehend heuristisch gewonnenes Maß, welches

aus Daten des Prozesses und der gewählten Systemordnung berechnet wird. In vielen Fällen liefert es ein Minimum für eine bestimmte Ordnung ([Pri81], S.373-376; [SS89], S.442ff), die man dann wählen sollte.

2. *Test auf Unkorreliertheit des Fehlersignals.* Wenn die Modellordnungen richtig gewählt sind, ist das Fehlersignal des Prädiktors unkorreliert (weißer Prozess). Ein statistischer Test auf Unkorreliertheit gibt dann Auskunft darüber, ob die Modellordnung richtig gewählt wurde ([Kay88], S.297f).
3. *Inspektion der Pole und Nullstellen.* Pole und Nullstellen, die unter Vernachlässigung eines gewissen Schätzfehlers an der selben Stelle liegen, tragen nicht zum Frequenzgang bei und können gestrichen werden, was in einer kleineren Systemordnung resultiert ([SS89], S.433).
4. *Vergleich mit nichtparametrischen Methoden.* In dieser Kategorie ist insbesondere ein Vergleich der Leistungsdichtespektren des aus den aktuellen Parametern geschätzten Signals mit den entsprechenden Spektren des gemessenen Signals sinnvoll.

Diese Übersicht verdeutlicht den heuristischen Charakter des Vorgehens zur Bestimmung einer optimierten Systemordnung.

Das AIC ist für die Gesamtsystemordnung $\eta \equiv N_A + N_C$ eines ARMA-Systems definiert als

$$\text{AIC}(\eta) \equiv N_{\text{eff}} \log \hat{\sigma}_\epsilon^2 + 2\eta. \quad (5.13)$$

Hierbei ist N_{eff} die effektive Anzahl der zur Schätzung herangezogenen Datenpunkte, und $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ ist die geschätzte Leistung des Prädiktorfehlersignals. Da aufgrund von Einschwingvorgängen die Zeitpunkte $t = 1 \dots N_A$ nicht berücksichtigt werden sollten, errechnet sich bei einem MIMO-Modell mit K Kanälen und einer Länge T der Zeitreihen $N_{\text{eff}} = (T - N_A) \cdot K$. Entsprechend sind bei der Berechnung von $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ aus den Prädiktorfehlersignalen die ersten $\epsilon(1) \dots \epsilon(N_A)$ wegzulassen.

Die Definition des BIC lautet mit der zusätzlich benötigten Samplevarianz der gemessenen Zeitreihe $\hat{\sigma}_Y^2$

$$\begin{aligned} \text{BIC}(\eta) \equiv N_{\text{eff}} \log \hat{\sigma}_\epsilon^2 - (N_{\text{eff}} - \eta) \cdot \log \left(1 - \frac{\eta}{N_{\text{eff}}} \right) \\ + \eta \log N_{\text{eff}} + \eta \log \left[\frac{1}{\eta} \left(\frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\sigma}_\epsilon^2} - 1 \right) \right]. \quad (5.14) \end{aligned}$$

Es sei noch angemerkt, dass nur dann, wenn die gewählte Ordnung mit derjenigen des wahren Systems übereinstimmt, klare und zum Teil analytisch berechenbare Aussagen über die Varianz und die Konvergenz der Parameterschätzungen möglich sind [Lju87, SS89].

5.3 Algorithmen zur Schätzung von ARMA-Modellen

5.3.1 PEM

Um die Unsicherheit der geschätzten ARMA-Parameter so gering wie möglich zu halten, müssen so viele A-Scans wie möglich in den Schätzprozess eingebunden werden. Betrachten wir zunächst immer die ARMA-Parameter einer bestimmten Eindringtiefe. Dann können wir auf zwei verschiedene Arten vorgehen:

1. *SISO-Modell* (Single Input Single Output). Die ARMA-Parameter sind für jeden A-Scan zu schätzen, um dann aus den so erhaltenen Parametern einen Mittelwert zu bilden. Da aber Ultraschallechos aus stochastischen Medien nie durch ein „richtiges“ sondern höchstens durch ein „bestes“ Modell beschrieben werden können (auch ein „homogenes“ Ultraschallphantom weist Schwankungen in der Streuverteilung auf), arbeiten die Schätzalgorithmen im Allgemeinen nicht optimal und können stark voneinander abweichende Modellparameter finden [SS89], obwohl sie alle das lokale Leistungsdichtespektrum gut annähern. Mittelwerte dieser Parameter können deshalb irreführend sein. Abhilfe könnte vielleicht damit geschaffen werden, wenn simulierte Ultraschallechos als Referenz dienen (hier nicht verfolgt).
2. *MIMO-Modell* (Multi Input Multi Output). Mit diesem Modell wird ein einziger Satz von ARMA-Parametern aus vielen „parallelen“ Kanälen gewonnen, die in unserem Falle die A-Scans sind. Mit dieser Vorgehensweise werden die Probleme der gemittelten SISO-Modelle vermieden [Jen94].

Die Definition des Multi-Kanal-ARMA-Modells lautet gemäß den Gleichungen (5.2), (5.4) und den in einem Vektor zusammengefassten hochfrequenten A-Scans $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot \mathbf{w}(t) . \quad (5.15)$$

Das Fehlersignal ist die Differenz zwischen dem gemessenen $\mathbf{y}(t)$ und der Prädiktion um einen Schritt, $\hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta}, t|t-1)$, d.h. $\hat{\mathbf{y}}(t)$ wird mit allen Werten $y(t-1), y(t-2), \dots$ und mit dem Parametersatz $\boldsymbol{\theta}$ bestimmt:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) \equiv \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta}, t|t-1). \quad (5.16)$$

Zur Berechnung des optimalen Parametersatzes $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ wird folgende Kostenfunktion¹ minimiert:

$$\mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, t)^T \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, t). \quad (5.17)$$

Die Minimierung geschieht über den NEWTON-RAPHSON-Algorithmus mit variabler Schrittweite $\alpha(m)$ (Iterations-Index m)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1) - \alpha(m) \left[\mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1)) \right]^{-1} \left[\mathcal{C}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1)) \right]^T. \quad (5.18)$$

Die erste Ableitung der Kostenfunktion ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta}) &\equiv \frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= 2 \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t), \end{aligned} \quad (5.19)$$

und mit $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}) \equiv (\varepsilon_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \varepsilon_K(\boldsymbol{\theta}))^T$ ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_K(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_K(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_L} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_L} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_K(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_L} \end{pmatrix}^T.$$

Da $\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})$ eine skalarwertige Funktion ist, wird $\mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta})$ zu einem Gradientenvektor.

¹ Diese Kostenfunktion entspricht der Spur der Fehlersignal-Korrelationsmatrix. Bei der zweiten wichtigen Möglichkeit für die Kostenfunktion berechnet man die Determinante der Korrelationsmatrix. Mit dieser Variante wird der PEM-Schätzer unter wenigen zusätzlichen Annahmen (Störprozess $w(t)$ normalverteilt) identisch zum Maximum-Likelihood-Schätzer und hat somit die kleinstmögliche Varianz [SS89], S.198ff.

Die zweite Ableitung der Kostenfunktion ist die HESSE-Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}) &\equiv \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_L} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_L} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \theta_L} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_L} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mit der Bezeichnung

$$\boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_\ell} \quad (5.21)$$

erhalten wir für die einzelnen Elemente der HESSE-Matrix unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(2 \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) \right) \\ &= 2 \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_k} \right)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) + 2 \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{\theta}, t). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Eine Möglichkeit zur Vereinfachung in dieser Berechnungsvorschrift bietet sich mit der Linearisierung des Prädiktorfehlers um den Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1)$ an:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}) \approx \boldsymbol{\epsilon} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1) \right) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1)} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m-1)) \quad (5.23)$$

Damit verschwinden sämtliche zweite Ableitungen der Art

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_\ell} \right) \equiv 0, \quad (5.24)$$

und die Elemente der HESSE-Matrix (5.22) lassen sich näherungsweise angeben als

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_\ell} \right) \approx 2 \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\psi}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{\theta}, t). \quad (5.25)$$

Bezeichnet man außerdem die bereits aufgetretene Matrix der Gradienten

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}, t) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (5.26)$$

gelangt man zu einer in der Literatur über Systemidentifikation üblichen Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}) &\approx 2 \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= 2 \sum_{t=1}^T \Psi(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \Psi(\boldsymbol{\theta}, t). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Man kennt diesen Optimierungs-Algorithmus, der auf der Linearisierung des Fehlers beruht, auch unter dem Namen GAUSS-NEWTON-Algorithmus. Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die Linearisierung in die Kostenfunktion einsetzt und direkt minimiert.

Für den Fall des ARMA-Modells ist der Parametervektor

$$\boldsymbol{\theta} = \left(a_1 \quad \dots \quad a_{N_A} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{N_C} \right)^T, \quad (5.28)$$

und daraus wird die Matrix Ψ zu ([SS89], S.213f)

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\theta}, t) &= \left(\mathbf{y}^F(t-1), \dots, \mathbf{y}^F(t-N_C), \right. \\ &\quad \left. -\boldsymbol{\epsilon}^F(t-1), \dots, -\boldsymbol{\epsilon}^F(t-N_C) \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

mit den gefilterten Zeitreihen (für jeden Iterationsschritt m der Minimumsuche neu zu berechnen)

$$\mathbf{y}^F(t) \equiv \frac{\mathbf{y}(t)}{\hat{C}(z^{-1})}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^F(t) \equiv -\frac{\boldsymbol{\epsilon}(t)}{\hat{C}(z^{-1})}. \quad (5.30)$$

Dies verdeutlicht, dass nur minimalphasige ARMA-Systeme identifiziert werden können, da ansonsten die Filterung mit $[\hat{C}(z^{-1})]^{-1}$ instabil wäre. Während der numerischen Suche nach dem optimalen Parametersatz $\boldsymbol{\theta}$ müssen deshalb nach jedem Iterationsschritt alle Nullstellen von $\hat{C}(z^{-1})$ ins Innere des Einheitskreises gespiegelt werden. Gleiches gilt natürlich auch für die Nullstellen von $\hat{A}(z^{-1})$.

Bedeutung des Fehlersignals

Stimmt die Systemordnung des analysierten Zufallsprozesses mit der des ARMA-Schätzers überein, ist das Prädiktorfehlersignal gleich dem Eingangssignal (gilt nur bei minimalphasigen Systemen, [SS89], S.195):

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{w}(t) . \quad (5.31)$$

Ist das den Zufallsprozess erzeugende System nicht minimalphasig, gilt Gleichheit nur für die Signalleistungen (mittelwertfreie Prozesse angenommen):

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_W^2 . \quad (5.32)$$

Die Referenzsysteme sollten die Signalleistung enthalten. Deshalb berechnen wir ein neues Zählerpolynom gemäß

$$\hat{c}_0 + \sum_{\eta=1}^{N_C} \hat{c}_{\eta} \hat{c}_0 z^{-\eta} , \quad (5.33)$$

mit $\hat{c}_0 \equiv \sqrt{\hat{\sigma}_{\epsilon}^2}$. Bisher wurde nämlich $c_0 = 1$ angenommen, da der PEM-Algorithmus c_0 nicht direkt schätzen kann.

Wie beim AIC/BIC-Kriterium (S.42) sollten die Werte $\boldsymbol{\epsilon}(1) \dots \boldsymbol{\epsilon}(N_A)$ nicht in die Schätzung von $\hat{\sigma}_{\epsilon}^2$ einbezogen werden, da sie von Einschwingvorgängen geprägt sind.

5.3.2 RPEM

Während im letzten Abschnitt ein Datenblock konstanter Länge für die Schätzung der Parameter herangezogen wurde, wird nun eine rekursive Methode hergeleitet, welche die Schätzwerte mit jedem neuen zur Verfügung stehenden Ein- bzw. Ausgangsvektor aktualisiert. Allerdings soll zunächst immer noch von *zeitinvarianten* Systemen ausgegangen werden. Die Grundidee dabei ist, die Rekursion des NEWTON-RAPHSON-Algorithmus' über die fortschreitende Zeit laufen zu lassen:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1} - \alpha_T \left[\boldsymbol{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}) \right]^{-1} \left[\boldsymbol{C}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}) \right] . \quad (5.34)$$

Dies ist eine prinzipiell andere Vorgehensweise, und deshalb sind die Ergebnisse nicht direkt mit denen der *En-bloc*-Berechnung vergleichbar. Trotzdem

ist der rekursive Algorithmus vorteilhaft, da er, evtl. in Verbindung mit einem *Vergessensfaktor*, das Tracking von zeitlich variablen Systemen erlaubt (siehe nächsten Abschnitt). Außerdem hat es sich als nützlich erwiesen, mit einigen Rekursionen zunächst einen groben Schätzwert für die Parameter zu suchen und diesen dann als Startwert für eine präzise *En-bloc*-Berechnung zu verwenden.

Ein echtes rekursives Vorgehen erfordert auch Rekursionsformeln für die Kostenfunktionen und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}, T) &= \sum_{t=1}^{T-1} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T) \\ &= \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}, T-1) + \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T), \end{aligned} \quad (5.35)$$

und entsprechend

$$\mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta}, T) = \mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta}, T-1) + 2\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T) \quad (5.36)$$

$$\mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}, T) = \mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}, T-1) + 2\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T). \quad (5.37)$$

Setzt man die Schätzwerte von $\boldsymbol{\theta}$ zum Zeitpunkt $T-1$ ein, erhält man (für die anderen Rekursionen gilt entsprechendes)

$$\mathcal{C}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T) = \mathcal{C}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T-1) + 2\boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T). \quad (5.38)$$

Das Problem hierbei ist aber, dass diese Rekursion bzgl. $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}$ immer noch Werte aller Zeiten von $t=1$ bis $t=T$ benötigt. Man wünscht sich dagegen eine rekursive Berechnung aus dem vorherigen Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-2}$. Man erreicht dies durch folgende Approximationen:

$$\mathcal{C}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T-1) \approx 0 \quad (5.39)$$

$$\mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}, T-1) \approx \mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-2}, T-1). \quad (5.40)$$

Die Näherung (5.39) entspringt der *A-priori*-Annahme, dass $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1}$ bereits das Minimum der Kostenfunktion $\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta})$ ist, und die Motivation für (5.40) liegt in der ebenfalls *a priori* langsamen Änderung der HESSE-Matrix $\mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta})$. Jetzt hängt die NEWTON-RAPHSON-Iteration für die Minimumsuche prinzipiell nicht mehr vom Zeitpunkt T ab, es sei denn, für die Berechnung von $\boldsymbol{\Psi}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ sind alle Daten bis zum Zeitpunkt T erforderlich, wie dies bei einigen

parametrischen Modellen der Fall ist, denn dann sind noch entsprechende Approximationen hierfür notwendig. So ergibt sich der Algorithmus

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_t &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} - \alpha_t \left[\mathbf{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \right]^{-1} \cdot 2 \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \\ \mathbf{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) &= \mathbf{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-2}, t-1) + 2 \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \end{aligned}} \quad (5.41)$$

Beim bereits mehrfach betrachteten multikanaligen ARMA-Modell mit gleichen Parametern in allen Kanälen werden die angesprochenen Approximationen für $\boldsymbol{\Psi}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ benötigt. Die korrekte Berechnung wäre für $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) = \frac{\hat{A}_{t-1}(z^{-1})}{\hat{C}_{t-1}(z^{-1})} \mathbf{y}(t) . \quad (5.42)$$

Zur Erinnerung: Auch hier gilt wieder $C(z^{-1}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{N_C} c_\nu (z^{-1})^\nu$. Damit kann die korrekte Rekursion auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) = \hat{A}_{t-1}(z^{-1}) \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \cdot \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t-1, \nu} (z^{-1})^\nu \quad (5.43)$$

$$= \hat{A}_{t-1}(z^{-1}) \mathbf{y}(t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t-1, \nu} \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t - \nu) . \quad (5.44)$$

Man modifiziert dieses rekursive Filter jetzt so, dass zu jedem Zeitpunkt t der aktuell zur Verfügung stehende Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}$ eingesetzt wird, d.h. man verwendet ein zeitvariantes Filter. Auf diese Weise erhält man zu jedem Zeitpunkt einen neuen Wert für $\boldsymbol{\epsilon}$, der dann für die Rekursion verwendet wird:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \approx \hat{A}_{t-1}(z^{-1}) \mathbf{y}(t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t-1, \nu} \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu-1}, t - \nu) . \quad (5.45)$$

Genauso verfährt man mit den Elementen des Gradienten (5.29)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) &= \left(\mathbf{y}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t-1), \dots, \mathbf{y}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-N_C}, t-N_C), \right. \\ &\quad \left. - \boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t-1), \dots, -\boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-N_C}, t-N_C) \right) , \end{aligned} \quad (5.46)$$

mit

$$\mathbf{y}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t) \approx \mathbf{y}(t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t,\nu} \mathbf{y}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu}, t - \nu) \quad (5.47)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t) \approx \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t,\nu} \boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu}, t - \nu) . \quad (5.48)$$

An (5.45) erkennt man, dass der Prädiktorfehler $\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)$ mit Hilfe vergangener Prädiktorfehler $\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1-\tau}, t - \tau)$, $\tau \geq 1$, berechnet wird. Dies erscheint jedoch unglücklich, da ja bereits der Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}$ zur Verfügung steht. Es erweist sich als günstig, die Berechnung derart abzuwandeln, dass immer die neuesten Schätzwerte verwendet werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \approx \hat{A}_{t-1}(z^{-1}) \mathbf{y}(t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t-1,\nu} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu}, t - \nu) . \quad (5.49)$$

Hierfür benötigt man allerdings zu jedem Zeitpunkt t die zusätzliche rekursive Berechnung

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t) = \hat{A}_t(z^{-1}) \mathbf{y}(t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t,\nu} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu}, t - \nu) . \quad (5.50)$$

Auch die Näherung des gefilterten Prädiktorfehlers kann entsprechend modifiziert werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t) \approx \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t, t) - \sum_{\nu=1}^{N_C} \hat{c}_{t,\nu} \boldsymbol{\epsilon}^F(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-\nu}, t - \nu) . \quad (5.51)$$

Identifikation von zeitvarianten Systemen

Möchte man zeitlich variable Systeme identifizieren, muss der Algorithmus die Möglichkeit bieten, die veränderlichen Parameter zu verfolgen. Als Lösung bietet sich ein rekursiver Algorithmus an, der den neuesten Parametersatz aus vorherigen Parametern bestimmt. Das Konvergenzverhalten wird durch den *Vergessensfaktor* (engl. *forgetting factor*) $\lambda < 1$ beeinflusst, mit dem weiter zurückliegende Prädiktorfehler immer weiter ausgeblendet werden:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}, T) = \sum_{t=1}^T \lambda^{T-t} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad , \quad \lambda < 1 . \quad (5.52)$$

Hiermit werden die zugehörigen Rekursionsformeln zu

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}, T) = \lambda \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}, T-1) + \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T) \quad (5.53)$$

$$\mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta}, T) = \lambda \mathcal{C}'(\boldsymbol{\theta}, T-1) + 2 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}, T) \quad (5.54)$$

$$\mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}, T) = \lambda \mathcal{C}''(\boldsymbol{\theta}, T-1) + 2 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}, T) . \quad (5.55)$$

Der rekursive PEM-Algorithmus, wie er im vorigen Abschnitt hergeleitet wurde, verändert sich dadurch nur in der Berechnung von \mathcal{C}'' :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_t &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} - \alpha_t \left[\mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \right]^{-1} \cdot 2 \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \\ \mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) &= \lambda \mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-2}, t-1) + 2 \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \end{aligned}$$

(5.56)

Beschleunigter Algorithmus

Durch einige Umformungen kann ein Algorithmus hergeleitet werden, der für einkanalige Modelle (SISO) numerisch effizienter ist, da dann an die Stelle der Matrixinversion eine skalare Division tritt ([SS89], S.330f). Definieren wir

$$\mathbf{P}(t) \equiv \left[\mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \right]^{-1} , \quad (5.57)$$

lautet die Rekursion von $\mathcal{C}''(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)$ in (5.56)

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \lambda \mathbf{P}^{-1}(t-1) + 2 \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) . \quad (5.58)$$

Wenden wir hierauf das Matrix-Inversion-Lemma² an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{P}(t-1) - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \\ &\cdot \left[\frac{\lambda}{2} \mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t)^T \right]^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}, t) \mathbf{P}(t-1) . \end{aligned} \quad (5.59)$$

² *Matrix-Inversion-Lemma*, [SS89], S.511. Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} zwei positiv definite $M \times M$ -Matrizen, \mathbf{D} eine positiv definite $N \times N$ -Matrix, und \mathbf{C} eine $M \times N$ -Matrix. Wenn

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^H$$

dann gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{C} \left(\mathbf{D} + \mathbf{C}^H \mathbf{B} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{B} .$$

Für einkanalige Anwendungen (SISO) ist die Inversion ein Skalar, da in diesem Fall $\Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t)$ ein Zeilenvektor ist.

Mit der Definition $\mathbf{K}(t) \equiv \mathbf{P}(t) \Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t)^T$ ist die Rekursion

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} - 2 \alpha_t \mathbf{K}(t) \epsilon(\hat{\theta}_{t-1}, t) . \quad (5.60)$$

Durch Einsetzen von (5.59) wird außerdem

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t-1) \Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t)^T \left[\frac{\lambda}{2} \mathbf{I} + \Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t) \mathbf{P}(t-1) \Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t)^T \right]^{-1} \quad (5.61)$$

und somit

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\mathbf{P}(t-1) - \mathbf{K}(t) \Psi(\hat{\theta}_{t-1}, t) \mathbf{P}(t-1) \right) . \quad (5.62)$$

Zusammen mit (5.60) bilden diese beiden Gleichungen den für einkanalige Modelle beschleunigten rekursiven PEM Algorithmus.

5.3.3 Modifizierte Yule-Walker-Methode

Mit der modifizierten YULE-WALKER-Methode können ARMA-Parameter direkt aus Leistungsdichtespektren (bzw. aus geschätzten Autokorrelationsfolgen) bestimmt werden (einige Varianten sind in [FP84] beschrieben).

Spektrale Faktorisierung

Ein zentrales Element ist hierbei die spektrale Faktorisierung, mit der aus dem Leistungsdichtespektrum eine Impulsantwort konstruiert wird. Im Einzelnen gilt ([Pri81], S.733ff):

$$\begin{aligned} R_Z(\omega) &= \left| H(z = e^{j\omega}) \right|^2 \\ &= H(z) \cdot H^*(1/z^*) \Big|_{z = e^{j\omega}} = H(z) \cdot H(1/z) \Big|_{z = e^{j\omega}} . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Man entwickelt $\log[H(z) \cdot H^*(1/z^*)]$ in eine LAURENT-Reihe

$$\log[H(z) \cdot H^*(1/z^*)] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha(t) z^{-t} \quad (5.64)$$

und erhält somit

$$H(z) = \exp \left(\frac{\alpha(0)}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} \alpha(t) z^{-t} \right) \quad (5.65)$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log R_Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5.66)$$

da $\alpha(t)$ die Fourier-Koeffizienten von $\log R_Z(\omega)$ sind.

In der Praxis berechnet man die \mathcal{Z} -Transformierte in (5.65) durch FFT. Man erhält dann die gesuchte Impulsantwort $h(t)$ durch inverse FFT aus $H(z)$ (der Zusammenhang zwischen \mathcal{Z} -Transformation und diskreter Fourier-Transformation ist z.B. in [KK98], S.229f erklärt).

Schätzen von ARMA-Parametern

Die ARMA-Parameter erhalten wir nun in folgenden Schritten:

1. Bestimmen der nicht erwartungstreuen Autokorrelationsfolge (AKF) durch inverse FFT des geschätzten Leistungsdichtespektrums.
2. Gewichtung der AKF mit einem PARZEN-Fenster der Länge $2T_W + 1$, was einer Glättung des Leistungsdichtespektrums entspricht (siehe hierzu auch Abschnitt 7.3.4).
3. Berechnung der AR-Parameter über die modifizierten YULE-WALKER-Gleichungen:

$$\hat{r}_Z(N_C + \ell) + \hat{a}_1 \hat{r}_Z(N_C + \ell - 1) + \dots + \hat{a}_{N_A} \hat{r}_Z(N_C + \ell - N_A) = \varepsilon(N_C + \ell) \quad 1 \leq \ell \leq T_W - N_C \quad (5.67)$$

mit T_W als maximal verwendete Zeitverschiebung in der AKF (siehe Punkt 2.). Das überbestimmte Gleichungssystem wird durch lineare Regression gelöst ($\sum \varepsilon^2(N_C + \ell) \stackrel{!}{=} \min$). Sollte das Polynom $A(z) = \sum_{\tau=0}^{N_A} a_{\tau} z^{-\tau}$ Nullstellen außerhalb des Einheitskreises haben, werden diese ins Innere des Einheitskreises gespiegelt, um Stabilität von $1/A(z)$ zu gewährleisten.

4. Berechnung eines Nennerpolynoms $\tilde{C}(z) = \sum_{\tau=0}^{N_A} \tilde{c}_{\tau} z^{-\tau}$ aus der AKF und den bereits geschätzten AR-Parametern mit

$$\frac{\tilde{C}(z)}{\hat{A}(z)} \equiv \frac{\hat{r}_Z(0)}{2} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \hat{r}_Z(\tau) z^{-\tau} \quad (5.68)$$

und dem zugehörigen Leistungsdichtespektrum

$$\tilde{R}_Z(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \hat{r}_Z(\tau) z^{-\tau} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\tilde{C}(z)}{\hat{A}(z)} + \frac{\tilde{C}^*(1/z^*)}{\hat{A}^*(1/z^*)} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (5.69)$$

$$= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{C}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})} \right\}. \quad (5.70)$$

Man erhält die \tilde{c}_τ durch lineare Regression von (5.68) im Zeitbereich (inverse \mathcal{Z} -Transformation von (5.68)):

$$\tilde{c}_\tau * \mathcal{Z}^{-1} \left\{ 1/\hat{A}(z) \right\} \approx (\hat{r}_Z(0)/2, \hat{r}_Z(1), \dots, \hat{r}_Z(T_W))^T. \quad (5.71)$$

Hierzu bildet man für die $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ 1/\hat{A}(z) \right\}$ eine Faltungsmatrix. Dieser Algorithmus mit dem überbestimmten Gleichungssystem ($T_W > N_A$) ist auch unter dem Namen SHANK-Methode zum Filterdesign bekannt.

5. Wenn $N_C = N_A$, gelangt man schließlich mit (rechte Seite von (5.69) auf einen Nenner gebracht)

$$\hat{C}(z) \cdot \hat{C}^*(1/z^*) = \tilde{C}(z) \cdot \hat{A}^*(1/z^*) + \tilde{C}^*(1/z^*) \cdot \hat{A}(z) \quad (5.72)$$

zu den gesuchten MA-Parametern \hat{c}_τ .

Für $N_C < N_A$ geht der Weg über die Berechnung einer Impulsantwort $\tilde{h}(t)$ durch spektrale Faktorisierung des (näherungsweise ermittelten) Leistungsdichtespektrums $\tilde{R}_Z(\omega)$, wie sie am Anfang des Abschnittes vorgestellt wurde.

6. Die Schätzung der MA-Parameter \hat{c}_t gelingt dann durch lineare Regression des überbestimmten Gleichungssystems

$$\tilde{h}(t) = \hat{c}_t * \mathcal{Z}^{-1} \left\{ 1/\hat{A}(z) \right\} \quad (5.73)$$

mit der gleichen Methode wie in Punkt 4. In seltenen Fällen ist das gefundene ARMA-Modell nicht minimalphasig. Da die anstehende Entfaltung nur mit einem minimalphasigen System stabil ist, müssen die Nullstellen gegebenenfalls am Einheitskreis gespiegelt werden.

5.4 Probleme in der Anwendung

5.4.1 Additives Rauschen

Wenn die Referenz-Übertragungsfunktionen aus gemessenen Echos (z.B. Referenzphantom) geschätzt wurden, so enthalten diese zunächst auch additives Systemrauschen. Wie im Kapitel 6 „Entfaltung“ gezeigt wird, kann das Eingangssignal aber nur dann in optimaler Weise rekonstruiert werden, wenn die Referenzen keinen Rauschanteil enthalten.

Bei den diskutierten PEM-Verfahren ist additives Rauschen immer in das ARMA-Modell einbezogen. Zur Handhabung des Rauschens sind zwei Möglichkeiten denkbar: Erstens eine Rauschunterdrückung vor der Systemidentifikation (wird hier nicht weiter verfolgt), und zweitens das Entfernen des Rauschanteils aus dem zum ARMA-Modell gehörigen Leistungsdichtespektrum mit anschließender erneuter ARMA-Parametrisierung.

Wenn der Rauschprozess V vom Signalprozess Y unabhängig ist, gilt für das Leistungsdichtespektrum $R_Z(\omega)$ des gemessenen Signals $z(t)$:

$$R_Z(\omega) = R_Y(\omega) + R_V(\omega) . \quad (5.74)$$

Entweder wurde $R_Z(\omega)$ nichtparametrisch geschätzt oder es wird aus den geschätzten ARMA-Parametern berechnet:

$$R_Z(\omega) = \left| H_Z(z = e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{C(z) \cdot C^*(1/z^*)}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)} \Bigg|_{z = e^{j\omega}} \quad (5.75)$$

$$\leadsto R_Y(\omega) = \left(\frac{C(z) \cdot C^*(1/z^*) - R_V(\omega) \cdot A(z) \cdot A^*(1/z^*)}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)} \right) \Bigg|_{z = e^{j\omega}} . \quad (5.76)$$

Dieser Zusammenhang verdeutlicht, dass nur das Zählerpolynom neu berechnet werden muss. Die neuen MA-Parameter lassen sich über spektrale Faktorisierung bestimmen, in Anlehnung an das im Abschnitt 5.3.3 (modifizierte YULE-WALKER-Methode) vorgestellte Verfahren.

1. Berechnung von $R_Y(\omega)$ anhand von (5.76).
2. Bestimmen einer Impulsantwort $h_Y(t)$ durch spektrale Faktorisierung von $R_Y(\omega)$ nach der Methode auf S.52f.

3. Die Schätzung der neuen MA-Parameter $\hat{c}_{Y,t}$ gelingt dann durch lineare Regression des überbestimmten Gleichungssystems

$$h_Y(t) = \hat{c}_{Y,t} * \mathcal{Z}^{-1} \{1/A(z)\} \quad (5.77)$$

wie in Punkt 6 auf S.53f.

5.4.2 Blockverarbeitung

Für die Entfaltung ist es wichtig, dass die Referenzübertragungsfunktion in einer nahtlosen zeitlichen Entwicklung vorliegt, denn für jeden Abtastzeitpunkt des hochfrequenten Echos wird ein ARMA-System benötigt. Sprung- und Knickstellen in den ARMA-Parametern sind zu vermeiden, da ansonsten Streifenmuster oder sonstige Artefakte in Parametrisierungen der entfalteten Echos auftreten können (Kapitel 8).

Allerdings können bei der Blockverarbeitung zur Identifikation zeitvarianter Systeme in aufeinanderfolgenden Datenblöcken stark voneinander abweichende ARMA-Parameter gefunden werden. Solche Schwankungen konnten hier weitgehend eingedämmt werden, indem die Parameter eines Datenblockes als Startwerte für die Schätzung im folgenden Datenblock verwendet wurden. Für den ersten Datenblock wurde ein Startwert mit dem RPEM-Verfahren ($\lambda = 0,95$) aus dem ersten A-Scan desselben Datenblocks bestimmt.

Es hat sich als praktikabel erwiesen, die Datenblöcke höchstens zu 50% überlappen zu lassen und die ARMA-Parameter der dazwischen liegenden Abtastzeitpunkte durch Interpolation zu finden (Spline-Interpolation für stetige und differenzierbare Stützstellen). Nach der Interpolation sollte geprüft werden, ob alle Systeme minimalphasig sind, und eventuell auftauchende gemischtphasige Systeme durch Spiegelung der Nullstellen am Einheitskreis korrigiert werden. Falls vor der Interpolation alle Systeme minimalphasig waren, sind die eventuell auftretenden Unstetigkeiten nach einer solchen Korrektur sehr klein und somit vertretbar.

5.4.3 RPEM bei instationären Prozessen

Die rekursive PEM bezieht unmittelbar vorangegangene Schätzwerte in die aktuellen Ergebnisse ein. Inwieweit sich der Algorithmus an Schätzwerte aus der Vergangenheit erinnert, wird durch die Wahl des Vergessensfaktors λ bestimmt. Großes Erinnerungsvermögen bewirkt einen Glättungseffekt:

Die Schätzwerte schwanken weniger, aber dafür können schnelle Änderungen in den Parametern nicht verfolgt werden. Kleines Erinnerungsvermögen bewirkt das Gegenteil. Somit gilt es einen Kompromiss zu finden.

Zu Beginn der Schätzung benötigt der Algorithmus ein kleines Erinnerungsvermögen ($\lambda = 0,95$), um von den Startwerten aus schnell einschwingen zu können und einen kleinen Schätzfehler zu erreichen. Danach kann der Vergessensfaktor erhöht werden ($\lambda = 0,99$). Das Problem ist indessen, dass hyper- oder hypoechoische Stellen den Algorithmus stören und Konvergenz auf (andere) lokale Minima bewirken können. Deshalb müssen solche Stellen maskiert werden (Abschnitt 5.5). Hierbei hat sich folgende Methode bewährt:

1. Maskierte Stellen aus den A-Scans herausschneiden und die verbleibenden Signalstücke aneinander fügen.
2. Überblenden an den Schnittstellen: Ungefähr zwei Wellenlängen (der Mittenfrequenz) vor der Schnittstelle bis hin zur Schnittstelle kontinuierlich auf Null ausblenden, und jenseits der Schnittstelle gleichermaßen wieder einblenden. Hierfür eignet sich z.B. eine Hälfte des BLACKMAN-Fensters ($0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi n/N) + 0,08 \cdot \cos(4\pi n/N)$, $n = 0, 1, \dots, N/2$ und N gerade).
3. ARMA-Parameter rekursiv schätzen.
4. Die gefundenen Parameter den richtigen Eindringtiefen zuordnen.
5. Mittelwerte der Parameter über alle A-Scans hinweg bilden.

Trotz dieser Maskierung können noch Unregelmäßigkeiten auftreten. Eine ungenügende Genauigkeit der geschätzten ARMA-Parameter schlägt sich insbesondere auch in einer lokal erhöhten Leistung oder in ungewöhnlich hohen Spitzen des Prädiktorfehlersignals nieder. Solche Ausreißer können aber leicht mit einem Schwellenwert detektiert werden. Die zugehörigen ARMA-Parameter werden dann verworfen. Wie einige Experimente mit den Ultraschallechos gezeigt haben, führt die Anwendung einer solchen Ausreißerdetektion zu erheblich robusteren Ergebnissen.

5.5 Detektion kleiner Inhomogenitäten der Makrostruktur

Stark inhomogene Bereiche können die Bestimmung einer Referenz stören und verfälschen, aber sie ziehen auch irreführende Resultate in der quanti-

tativen Analyse nach sich. Zu derartigen Inhomogenitäten zählen insbesondere kleine Bereiche, die im Vergleich zu ihrer Umgebung im Ultraschallbild angehobene (*hyperechogene*) oder abgesenkte (*hypoechogene*) Rückstreuung manifestieren. Diese Bereiche gilt es zu maskieren, d.h. von der Analyse auszuschließen. Überhaupt ist die Maskierung eine in Arbeiten zur quantitativen Ultraschalldiagnose verbreitete Vorgehensweise, um Ausreißer in den Messungen von vornherein zu vermeiden. Die Methoden der Maskierung reichen von manueller Eingabe am Computer bis hin zu komplexen, heuristisch entwickelten Algorithmen.

5.5.1 Inhomogener Hintergrund

Eine der Methoden zur Detektion von starken Inhomogenitäten kleiner Ausdehnung beruht auf der Definition eines *inhomogenen Hintergrundes* im Ultraschallbild ([Hui98], S.65f; dort ging es in erster Linie um die Detektion von mittelgroßen und nicht direkt sichtbaren Blutgefäßen in Leberparenchym, welche durch ihre Inhomogenität die Gewebecharakterisierung stören). Dieser inhomogene Hintergrund ist eine von Details bereinigte, sprich geglättete Variante des Ultraschall B-Bildes. Bildet man nun den Quotienten aus Originalbild und geglättetem Bild, weichen Stellen mit starken Inhomogenitäten *kleiner* Ausdehnung deutlich von eins ab. Mit einem geschickt gewählten Grenzwert können so hyperechogene ($> 1,5$) und hypoechogene ($< 0,5$) Bereiche detektiert werden (Werte aus [Hui98]). Für die Glättung eignet sich die eindimensionale Mittelwertbildung oder ein eindimensionaler Binomial-Tiefpass, der nacheinander in beide Koordinatenrichtungen des Bildes angewendet wird (separierbares zweidimensionales Filter, [KZ95], S.190, 194). Für einen ausreichenden Glättungseffekt sollte das Filter mehrere Speckles umfassen. Die Wahl der Grenzwerte hängt auch davon ab, ob das B-Bild mit oder ohne Amplitudenkomprimierung in die Berechnungen eingeht.

Diese Methode hat den entscheidenden Nachteil, dass auch das Bild des Quotienten aus Originalbild und geglättetem Bild Speckle-Rauschen enthält, was die Wahl des Grenzwertes zu einer heiklen Angelegenheit macht. Zusätzliches Glätten des Quotientenbildes ist hier kein Ausweg, da dann der Kontrast zwischen Hintergrund und instationären Stellen reduziert wird. Wegen dieser Nachteile wird nun eine wesentlich robustere Methode vorgestellt.

5.5.2 Lokale Leistungen und F-Test

Da wir die Ultraschallechos als Zufallsprozesse betrachten, interpretieren wir kleine Inhomogenitäten der Makrostruktur als *instationäre* Abschnitte. Instationaritäten eines Zufallsprozesses entstehen im allgemeinsten Sinne durch die (zeitliche) Veränderung von Parametern, die diesen Prozess beschreiben. Allerdings ist die Schätzung der lokalen Parameter aufgrund der begrenzten Datenmenge Schwankungen unterworfen, die auch bei stationären Prozessen auftreten. Vergleicht man nun einen lokalen Parameter mit dem gleichen lokalen Parameter eines anderen Bereichs (Referenzbereich, z.B. Umgebung des ersten Bereichs), muss man diese Schwankungen berücksichtigen, um nicht irrtümlich auf Unterschiede in diesem Parameter zu schließen. Hierfür sind statistische Tests geeignet, welche die Schwankungen adäquat in die Schlussweise einbeziehen.

Die Werte des HF-Echos werden in der Regel nur unwesentlich von der Normalverteilung $\mathcal{N}(0, \sigma)$ abweichen [CZM94]. Daraus folgt, dass auch die HILBERT-Transformierte der Verteilung $\mathcal{N}(0, \sigma)$ unterworfen ist, denn die HILBERT-Transformation ist ein Allpass und ändert deshalb nicht die Leistung σ^2 des Signals. Bezeichnen wir die Amplitude des HF-Echos mit der Zufallsvariablen X und die HILBERT-Transformierte mit $Y \equiv \mathcal{H}\{X\}$, so ist das Quadrat der Einhüllenden Z (zur mathematischen Definition der Einhüllenden siehe auch Abschnitt 8.1.1)

$$Z^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{mit} \quad X, Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma) . \quad (5.78)$$

Die normierte Zufallsvariable Z^2/σ^2 ist dann $\chi^2(2)$ -verteilt,

$$\rightsquigarrow \frac{Z^2}{\sigma^2} = \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{X}, \tilde{Y} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (5.79)$$

$$\rightsquigarrow \frac{Z^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2) , \quad (5.80)$$

falls die HILBERT-Transformierte als unabhängig vom Original-Signal angenommen wird (was strenggenommen nicht so ist, aber einfache Computer-Experimente bestätigen die $\chi^2(2)$ -Verteilung für die quadrierte Einhüllende in sehr guter Näherung).

Die empirische Leistung innerhalb eines Bildausschnittes ist hier

$$\bar{s}_N^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n^2 . \quad (5.81)$$

Falls die Z_n^2 statistisch unabhängig voneinander sind, ist die normierte Zufallsvariable \bar{Z}_N

$$\bar{Z}_N \equiv \frac{\bar{s}_N^2 \cdot N}{\sigma^2} = \sum_{n=1}^N \frac{Z_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2N) \quad (5.82)$$

einer $\chi^2(2N)$ -Verteilung unterworfen.

In der Regel sind unmittelbar benachbarte Z_n^2 korreliert (im B-Bild sowohl axial als auch lateral). Der geforderten statistischen Unabhängigkeit trägt man näherungsweise dadurch Rechnung, indem man eine $\chi^2(2N_{\text{eff}})$ -Verteilung annimmt, bei der $N_{\text{eff}} < N$ die entsprechend reduzierte effektive Anzahl voneinander unabhängiger Werte bezeichnet. Für das Verhältnis $\gamma_{\text{corr}} \equiv N/N_{\text{eff}}$ kann die volle Halbwertsbreite der Autokorrelationsfolge $r_Z(\kappa) = 1/K \sum_{k=1}^K Z_k Z_{k+\kappa}$ als Orientierung dienen.

Die Testgröße zum Vergleich zweier geschätzter Leistungen aus zwei Bereichen der Einhüllenden sei nun definiert durch

$$Q \equiv \frac{\bar{s}_{1,N}^2}{\bar{s}_{2,M}^2} = \frac{\bar{Z}_{1,N} \cdot \sigma_1^2 / N}{\bar{Z}_{2,M} \cdot \sigma_2^2 / M} \quad (5.83)$$

Unter der Nullhypothese $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ vereinfacht sich die Testgröße zu

$$Q = \frac{\bar{Z}_{1,N} / N}{\bar{Z}_{2,M} / M} \quad (5.84)$$

Da aber $\bar{Z}_{1,N} \sim \chi^2(2N)$ und $\bar{Z}_{2,M} \sim \chi^2(2M)$ gilt (siehe Gleichungen (5.81), (5.82)), ist $P\{Q < \xi\}$ eine F -Verteilung gemäß $F(2N, 2M)$, sprich eine F -Verteilung³ mit den Freiheitsgraden $2N$ und $2M$. Mit frei wählbarem Signifikanzniveau α wird die Nullhypothese abgelehnt, falls $Q > F^{-1}(2N, 2M, 1 - \alpha)$.

³ Die $F(N, M)$ -Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$, gilt nur für $x > 0$):

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{N+M}{2}) \cdot N^{N/2} \cdot M^{M/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}) \cdot \Gamma(\frac{M}{2})} \cdot \frac{x^{N/2-1}}{\left(\frac{M}{2} + \frac{N}{2} x\right)^{(N+M)/2}} \quad (5.85)$$

$$= \frac{M^{M/2} N^{N/2} x^{N/2-1}}{\left(\frac{M}{2} + \frac{N}{2} x\right)^{(N+M)/2} \cdot B\left(\frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right)} \quad (5.86)$$

$$F(x) = I\left(x; \frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \quad (5.87)$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion ist, $B(a, b)$ die Beta-Funktion ([AS84], S.79) bezeichnet, und $I(x; a, b)$ die unvollständige Beta-Funktion repräsentiert ([AS84], S.420ff, siehe auch [BSMM95], S.634).

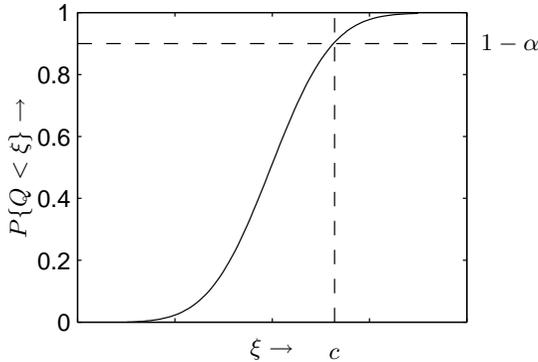


Abb. 5.1: Zur Erläuterung der Größen α und $c \equiv F^{-1}(2N, 2M, 1 - \alpha)$. $P\{Q < \xi\}$ ist die kumulative Wahrscheinlichkeit.

α) (entspricht dem $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung $F(2N, 2M)$) (*hyperechogen*), oder falls $Q < F^{-1}(2N, 2M, \alpha)$ (*hypoechogen*). In Abb. 5.1 ist die Bedeutung dieser Schlussweise veranschaulicht. Die Werte der Umkehrfunktion $F^{-1}(2N, 2M, P)$ müssen numerisch berechnet werden.

Der F -Test reagiert empfindlich auf Abweichungen von den zugrunde liegenden Verteilungen ([Sta00], S.199), insbesondere führen Ausreißer in den Stichproben zur Ablehnung der Nullhypothese, doch ist dies hier gerade erwünscht. Um der Korrelation in der Einhüllenden Rechnung zu tragen, sind die Freiheitsgrade $2N$ und $2M$ entsprechend zu reduzieren, da die *effektive Anzahl an unabhängigen Samples* bei korrelierten Signalen kleiner ist als bei unkorrelierten Signalen.

In der Praxis bestimmt man nun $\bar{s}_{2,M}^2$ in großen Datenausschnitten, so dass kleine instationäre Bereiche nicht ins Gewicht fallen. Wenn sehr viele impulsartige Ausreißer zu erwarten sind, ist vor der Bestimmung von $\bar{s}_{2,M}^2$ die Anwendung eines Medianfilters auf die Einhüllenden sinnvoll, doch muss dann die effektive Anzahl $M_{\text{eff}} < M$ wegen des Glättungseffektes entsprechend der Filterlänge reduziert werden. Im zweiten Schritt ist dann $\bar{s}_{1,N}^2$ in kleinen Datenausschnitten zu bestimmen, welche bei Ablehnung der Nullhypothese als instationär markiert werden. In Abb. 5.2 sind Beispiele zu sehen.

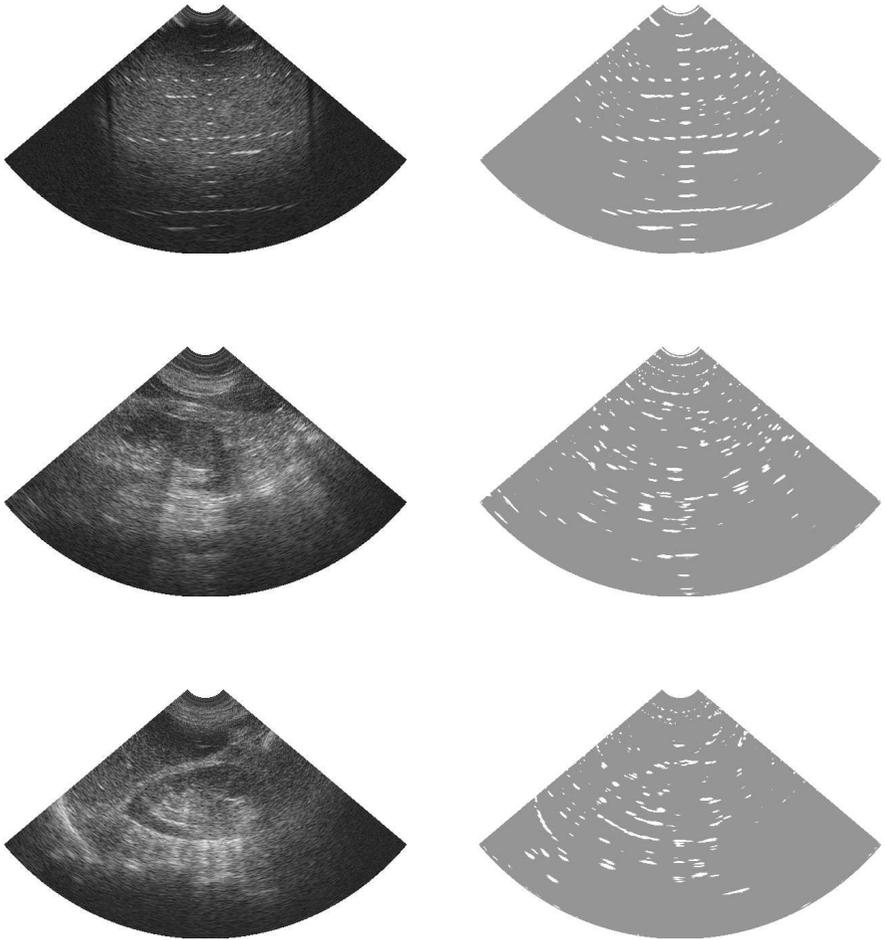


Abb. 5.2: Beispiele für die Detektion instationärer Bereiche mit dem F -Test. Die Einhüllenden der A-Scans umfassen 604 Samples bei einer Eindringtiefe von 16,3 cm. Größe der Datenausschnitte für $\bar{s}_{2,M}^2$: 50 Samples ($\hat{=}13,5$ mm) \times 20 A-Scans. Für $\bar{s}_{1,N}^2$: 5 Samples \times 5 A-Scans. $\gamma_{\text{corr}} = 5$ für M, N . Signifikanzniveau $\alpha = 0,01$.

5.6 Beispiele: ARMA-Modelle aus experimentellen Daten

In diesem Abschnitt werden Anwendungsbeispiele für die ARMA-Parametrisierungen von Ultraschallechos aus stochastischen Medien (Phantom, Niere) gezeigt und diskutiert. Hierbei kommen drei verschiedene Methoden zum Einsatz, die PEM (prediction error method), RPEM (recursive prediction error method) und die modifizierte YULE-WALKER-Methode. Die Ergebnisse sind aufgrund der speziellen gerätetechnischen Ausrüstung natürlich nicht uneingeschränkt zu verallgemeinern. Da jedoch alle in Ultraschallwandlern verwendeten Piezokeramiken (PVDF oder PZT, [Kut88]) im Wesentlichen ähnliche Eigenschaften aufweisen (typische Übertragungsfaktoren, [Ler85]) und die Ultraschallechos nach Durchlaufen von HF-Filtern immer die typische Bandpasscharakteristik zeigen, ist trotzdem eine gewisse Allgemeingültigkeit gegeben. Die optimale Systemordnung kann aber abweichen. Die Vor- und Nachteile der untersuchten Schätzmethoden gelten uneingeschränkt.

5.6.1 Messaufbau

Ziel der Korrektur durch Entfaltung ist es, auch bei verschiedenen Schallköpfen bzw. Ultraschallgeräten direkt miteinander vergleichbare Rückstreuungsspektren zu erhalten. Dies bedeutet, dass sowohl Beugung und Dämpfung als auch sämtliche Systemfunktionen des verwendeten Ultraschallgerätes korrigiert werden müssen. Am einfachsten gelingt dies, wenn man ein Referenzmedium mit genau der gleichen Apparatur und den gleichen Geräteeinstellungen beschallt, wie später das zu untersuchende Medium. Auf diese Weise werden automatisch auch zeitvariante Systemkomponenten wie der Tiefenausgleichsverstärker korrekt berücksichtigt. *Die in den folgenden Abschnitten gezeigten Spektrogramme der Referenzmedien sind daher immer inklusive aller Übertragungsfunktionen der Aufnahmeapparatur, wie sie in Abb. 5.3 dargestellt ist.*

Als Referenz dient in erster Linie ein gewebeimitierendes Phantom (kommerziell, Schallgeschwindigkeit $c_0 = 1540$ m/s, Dämpfung $a_0 = 0,5$ dB/(cmMHz)). Streu- und Dämpfungseigenschaften sind so konstruiert, dass das Phantom Lebergewebe imitiert (siehe auch Abb. 8.4). Um zu einer Referenz zu gelangen, werden zunächst die Reflexionsstellen an den im Phantom eingebrachten Drähten und Einschlüssen sowie die Bereiche „außerhalb“ der (schallabsorbierenden) Wände des Phantoms maskiert (siehe hierzu Abschnitt 5.5). Die Handhabung maskierter Stellen ist jeweils zusammen mit den Methoden der Systemidentifikation beschrieben.

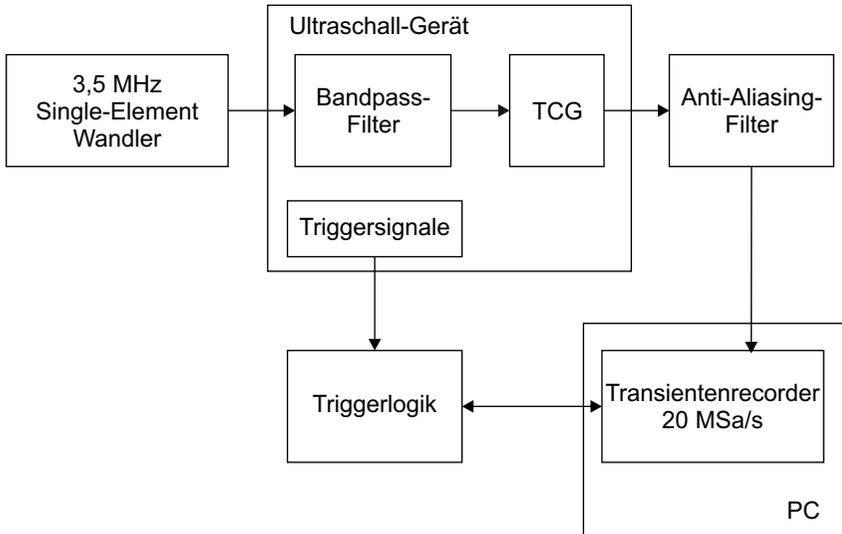


Abb. 5.3: Aufbau zur Digitalisierung der HF-Echos. Schallwandler: Single-Element, 3,5 MHz Mittenfrequenz (nominal), sonstige technische Daten siehe auch Tab. 2.1, S.6. Anti-Aliasing-Filter: elliptisches Filter (passives LC-Filter) neunter Ordnung mit Grenzfrequenz 10 MHz, womit ein annähernd linearer Phasengang innerhalb der Bandbreite des Schallwandlers gegeben ist. Die Digitalisierung erfolgte mit einer Auflösung von 12 bit. TCG: Tiefenausgleichsverstärker.

5.6.2 Additives Rauschen des Messaufbaus

Um das Rauschspektrum der Apparatur zu messen, beschallt man gefiltertes und entgastes Wasser oder ein stark absorbierendes Material und zeichnet das „Echosignal“ auf. Da die Gewinnung von entgastem Wasser aufwändig ist, kam in dieser Arbeit ein stark schallabsorbierender gummiartiger Polyurethan-Block zum Einsatz ($c_0 = 1450$ m/s, Dämpfung 5 dB/cm bei 2 MHz, 16 dB/cm bei 5 MHz, 50 dB/cm bei 10 MHz, jeweils einfacher Weg). Da schon in kleinsten Eindringtiefen praktisch nichts mehr zurückgestreut wird (bei 3 cm Eindringtiefe, also 6 cm Schallweg, ist die Dämpfung bei der Mittenfrequenz $f_0 = 3,5$ MHz schon ca. 60 dB), kann man dieses Signal ab einer Eindringtiefe von 3 cm sicherlich als reines Rauschen betrachten. Für Tiefen < 3 cm kann dann ein konstantes Grundrauschen angenommen werden.

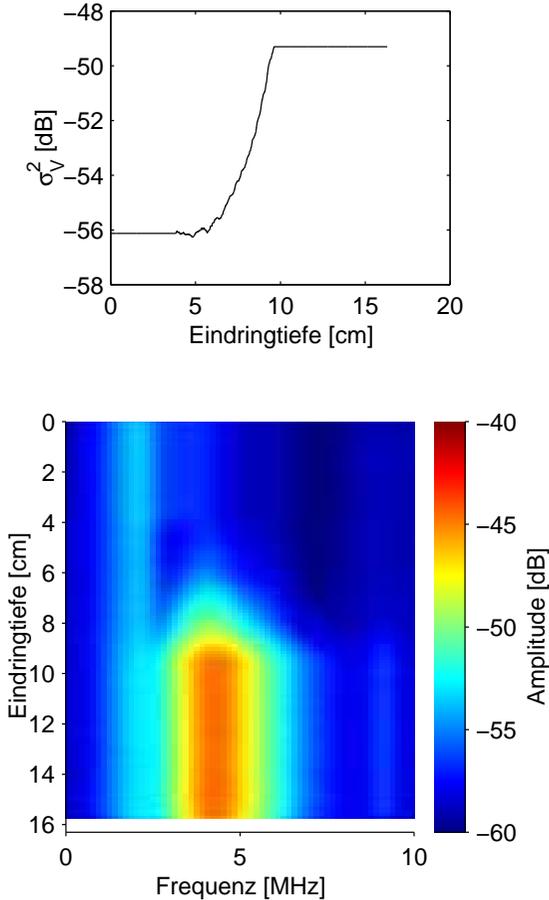


Abb. 5.4: **Oben:** Gemessene Rauschleistung σ_V^2 . Die maximale Verstärkung des Tiefenausgleichs (40 dB) ist bei ca. 10 cm Eindringtiefe erreicht, deshalb bleibt die Rauschleistung für größere Eindringtiefen konstant. Das Grundrauschen (weißes Rauschen) ist bei ca. -56 dB, 10 dB über dem Quantisierungsrauschen (12-bit A/D). **Unten:** Das Spektrum des verstärkten Rauschens für Eindringtiefen > 10 cm ist nicht weiß.

Aus Abb. 5.4 entnehmen wir, dass der Tiefenausgleichsverstärker das (thermische) Rauschen des Schallwandlers ab einer Eindringtiefe von ca. 6 cm über das Grundrauschen der Aufnahmeapparatur angehoben hat. Für Eindringtiefen > 10 cm zeigt das Spektrogramm in Abb. 5.4 das HF-Bandpassfilter des Ultraschallgerätes (siehe Abb. 5.3).

5.6.3 Vergleich PEM – modifizierte Yule-Walker-Methode

Betrachten wir zunächst die Rückstreuenspektren aus dem oben beschriebenen gewebeimitierenden Ultraschallphantom, wobei die Spektren verschiedener Eindringtiefen zu Spektrogrammen zusammengefasst sind (Abbildungen 5.5 und 5.6). Man erkennt deutlich den Einfluss der Schallbeugung, der sich insbesondere in der Fokussierung des Schalls zeigt (maximale Rückstreuung zwischen 5 und 10 cm). Als Folge der Schalldämpfung im Medium verlagert sich der Schwerpunkt des Spektrums mit zunehmender Eindringtiefe zu tieferen Frequenzen hin.

Des Weiteren demonstrieren die Abbildungen 5.5 und 5.6, dass die in Abschnitt 5.4.1 vorgeschlagene Methode zur Eliminierung des Rauschanteils im Spektrum gut funktioniert.

Die modifizierte YULE-WALKER-Methode liefert innerhalb der Übertragungsbandbreite gute Übereinstimmung zum zugrunde liegenden periodogramm-basierten Spektrogramm, wogegen in den Sperrbereichen Abweichungen von $+2 \dots +3$ dB vorherrschen. Die Gründe hierfür sind vor allem darin zu suchen, dass die ARMA-Parameter durch Least-Squares-Schätzer im *Zeitbereich* gewonnen werden, wo der größte Teil der Energie aus Frequenzanteilen der Übertragungsbandbreite stammt.

Die Ergebnisse der PEM Multikanal-Methode erscheinen insgesamt homogener mit etwas geringerer Unsicherheit, doch mit kleinen Fehlern innerhalb der Übertragungsbandbreite. Ein Teil der in Abb. 5.5 links unten angezeigten Fehler an den Flanken der Übertragungsbandbreite ist dem Bias des nichtparametrisch geschätzten Vergleichsspektrogramms zuzuschreiben, da die Zeitfenster des Periodogramm-basierten Schätzers mit einem BLACK-MAN-Fenster gewichtet wurden.

Systemordnung

Wenden wir uns nun der Systemordnung zu. Um die beste Systemordnung zu finden, schätzt man die ARMA-Spektren für verschiedene Ordnungen und beurteilt einige Kriterien. Hier kommen zum Einsatz: Das Bayesian

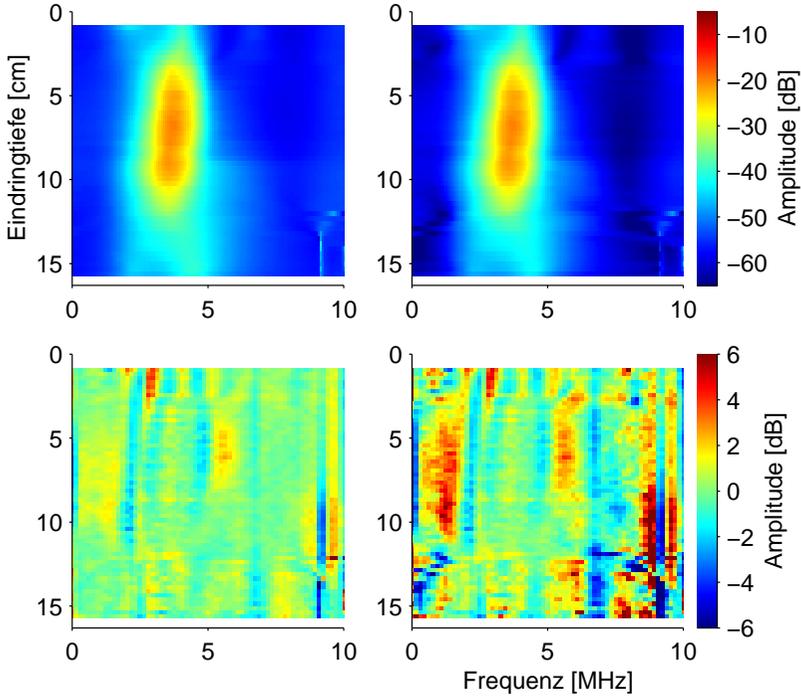


Abb. 5.5: **Oben links:** Spektrogramm aus ARMA-Modellen ($N_C = 6$, $N_A = 7$), mit PEM (Blockverarbeitung) aus einem gewebeimitierenden Phantom ermittelt. **Oben rechts:** ARMA-Modelle ($N_C = 6$, $N_A = 7$) nach Abzug des Rauschspektrums (siehe Abschnitt 5.4.1). **Unten:** Ergebnisse relativ zu nichtparametrisch gewonnenem Spektrogramm (gemittelte Periodogramme, Länge der Datenausschnitte 128 Samples, gewichtet mit BLACKMAN-Fenster).

Information Criterion (BIC), der Gesamtfehler des ARMA-Spektrogramms im Vergleich zum Periodogramm-basierten Spektrogramm, und die Anzahl der sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufhebenden Pole und Nullstellen. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.7 und 5.8 zusammengestellt.

Die Spektrogrammfehler betrachtet, zeigt sich prinzipiell kein Unterschied zwischen PEM und modifizierter YULE-WALKER-Methode. Nur die Anzahl der sich gegenseitig aufhebenden Pole und Nullstellen ist bei der modifizierten YULE-WALKER-Methode etwas geringer, was durch die getrennte Schät-

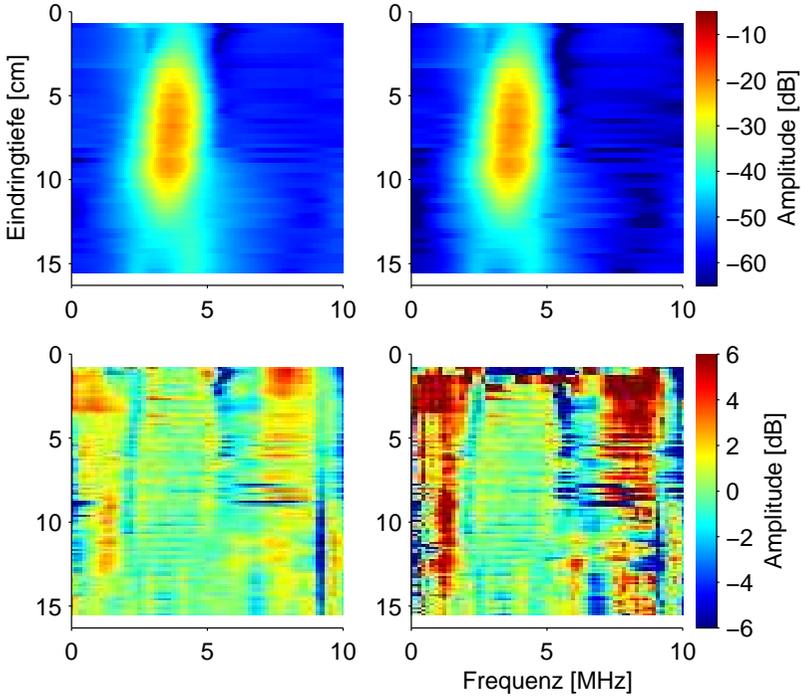


Abb. 5.6: **Oben links:** Spektrogramm aus ARMA-Modellen ($N_C = 6$, $N_A = 7$), mit der modifizierten YULE-WALKER-Methode (Blockverarbeitung) aus einem gewebeimitierenden Phantom ermittelt. **Oben rechts:** ARMA-Modelle ($N_C = 6$, $N_A = 7$) nach Abzug des Rauschspektrums (siehe Abschnitt 5.4.1). **Unten:** Ergebnisse relativ zu nichtparametrisch gewonnenem Spektrogramm (gemittelte Periodogramme, Länge der Datenausschnitte 128 Samples, gewichtet mit BLACKMAN-Fenster).

zung von AR- und MA-Parametern begründet ist (in der PEM werden AR- und MA-Parameter gleichzeitig bestimmt). Insgesamt scheint eine Ordnung von ($N_C = 5$, $N_A = 6$) oder ($N_C = 6$, $N_A = 7$) ein guter Kompromiss zu sein.

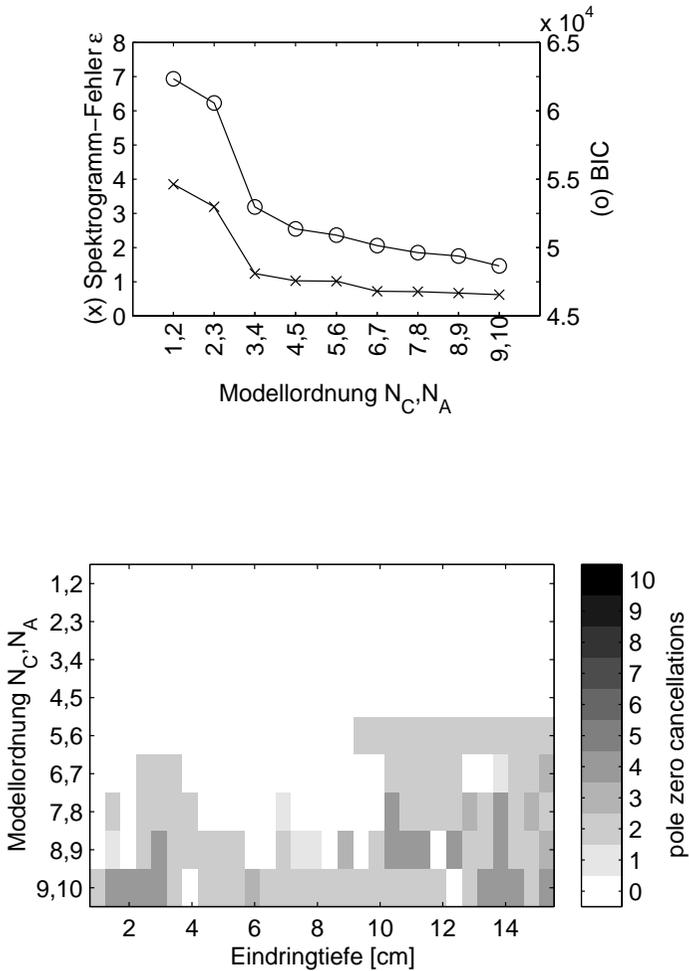


Abb. 5.7: PEM Multikanal-Schätzer für ARMA-Modelle verschiedener Ordnung. **Oben:** BIC und Fehler zwischen nichtparametrisch und parametrisch (ARMA) geschätzten Spektrogrammen (mittlere Absolutdifferenz der dB-skalierten Spektren zwischen 1 und 9 MHz). **Unten:** Anzahl der Pol-Nullstellen-Paare, deren Abstand kleiner als 0,05 ist, und die daher fast keinen Beitrag zum Modell leisten.

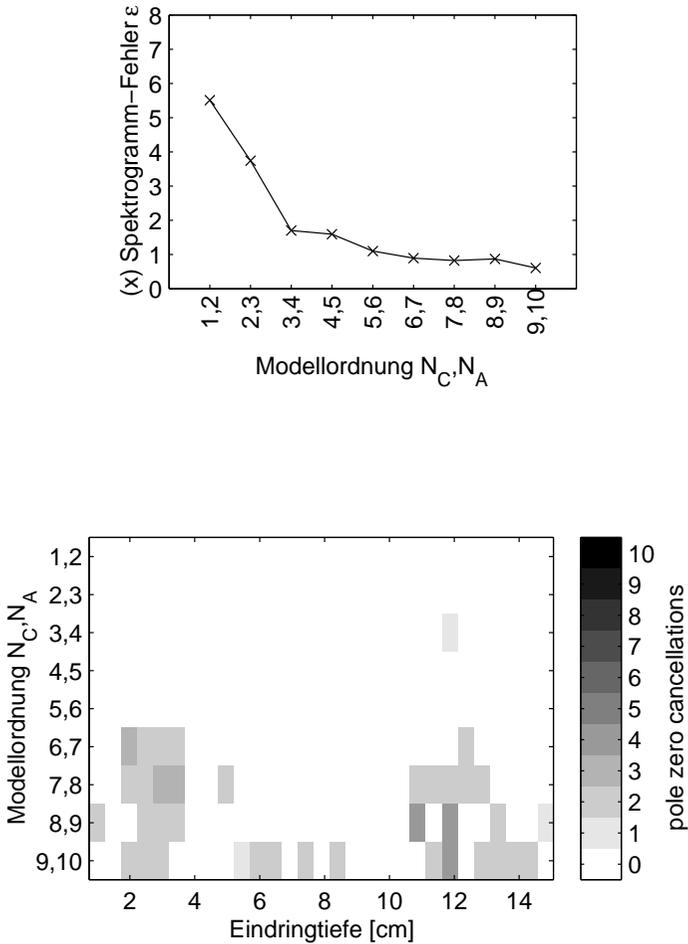


Abb. 5.8: Modifizierte YULE-WALKER-Methode für ARMA-Modelle verschiedener Ordnung. **Oben:** Fehler zwischen nichtparametrisch und parametrisch (ARMA) geschätzten Spektrogrammen (mittlere Absolutdifferenz der dB-skalierten Spektren zwischen 1 und 9 MHz). **Unten:** Anzahl der Pol-Nullstellen-Paare, deren Abstand kleiner als 0,05 ist, und die daher fast keinen Beitrag zum Modell leisten.

5.6.4 RPEM und In-vivo-Referenz

Abgesehen von der hohen Komplexität des RPEM-Algorithmus' tritt das Problem auf, dass man wegen der durch Maskierung zerstückelten Signale (Probleme stark instationärer Signalabschnitte, siehe Abschnitt 5.4.3) im Allgemeinen zunächst nur SISO-Modelle schätzen kann und die so erhaltenen ARMA-Parameter einer jeden Eindringtiefe mitteln muss. Wie die Theorie fordert und wie die Inspektion der Verteilungen geschätzter Parameter aus dem homogenen Phantom zeigten, sind diese näherungsweise normalverteilt. Trotzdem ist für gemittelte ARMA-Parameter eine nicht erwartungstreue Schätzung der Spektren zu erwarten, vor allem was die Spektrogramme aus *In-vivo*-Daten angeht (siehe auch Abb. 5.9).

Allerdings kann die in Abb. 5.9 sichtbare Tendenz, hohe Amplituden in den Spektren auszuglätten, gerade für *In-vivo*-Referenzen ein nicht zu unterschätzender Vorteil sein. Einerseits kann nämlich mit *In-vivo*-Referenzen die Gewebedämpfung und die zugehörige Schallbeugung besser modelliert werden als mit einem gewebeimitierenden Phantom [Hui98]. Aber andererseits zeigt sich z.B. in der Nierensonografie die Niere selbst als echoärmere Region, während die Umgebung echoreich ist, und dieses Rückstreuverhalten würde mit einer Referenz aus Nierensonografie (evtl. nur aus Echos des gleichen Patienten gewonnen) unerwünschterweise ausgeglichen werden und somit den Kontrast der Parameterbilder aus den entfalteten Echos mindern. Das in Abb. 5.9 gezeigte Spektrogramm der RPEM-Referenz aus Nierensonografie fällt aber wesentlich flacher aus als das mit nichtparametrischen Methoden gewonnene, obwohl in beiden Fällen die instationären Bereiche maskiert wurden. Somit hätten wir einen Kompromiss zwischen Kontrast und realitätsnahem Referenzmedium erreicht.

5.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene Methoden der parametrischen Systemidentifikation behandelt, welche ARMA-Parametrisierungen von Ultraschallechos aus *stochastischen* Medien ermöglichen. Diese ARMA-Modelle sind Grundlage einer Korrektur von Schallbeugung und -dämpfung durch Entfaltung.

Wie die Ergebnisse illustrierten, hat die PEM (Prediction Error Method) die meisten Vorzüge, falls Echos aus homogenen Streumedienn (Phantom) die Korrekturmodelle (Referenzen) liefern sollen. Die Erörterung der modi-

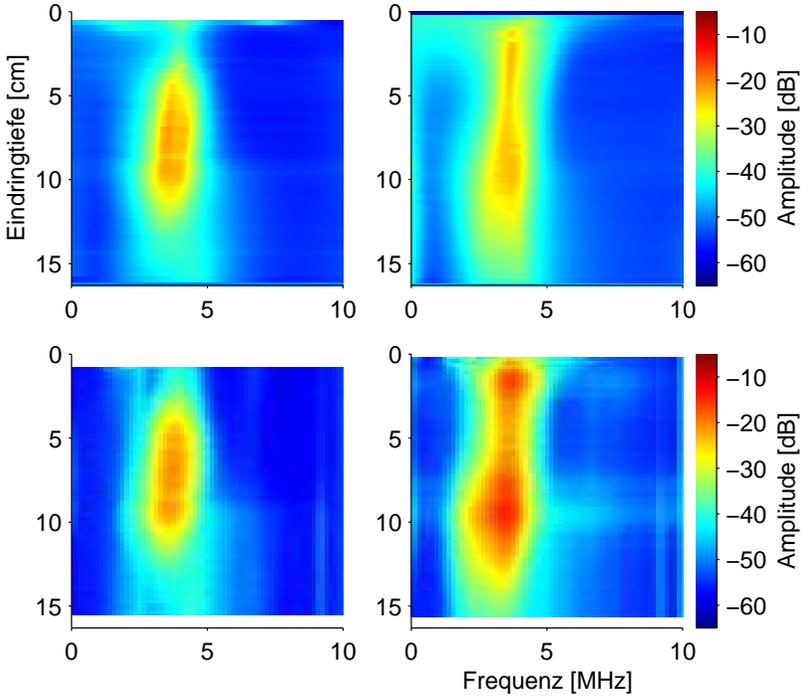


Abb. 5.9: **Oben:** Spektrogramm aus ARMA-Modellen ($N_C = 5$, $N_A = 6$), mit der RPEM ermittelt (Einschwingphase: $\lambda = 0,95$, sonst $\lambda = 0,99$). **Unten:** Spektrogramm aus gemittelten Periodogrammen, Länge der Datenausschnitte 128 Samples, gewichtet mit BLACKMAN-Fenster. **Links:** Gewebeimitierendes Ultraschallphantom. **Rechts:** Serie von Ultraschallbildern der Niere (19 Patienten).

fizierten YULE-WALKER-Methode war in erster Linie der Schlüssel zu einem robusten Verfahren, die Rauschanteile aus ARMA-Systemen zu entfernen.

Die hier vorgeschlagene RPEM (Recursive Prediction Error Method) zur Identifikation von Korrekturmodellen aus *In-vivo*-Echos ist offenbar ein vielversprechender Ansatz, bedarf aber noch weiterer Untersuchungen. Die *In-vivo*-Referenz wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

6. Entfaltung

Entfaltung im Hinblick auf die Gewebedifferenzierung bedeutet, möglichst genaue Schätzungen der relativen Rückstreupektren zu erhalten. Dieses Kapitel zeigt hierfür neue Wege auf, die gegenüber der sonst üblichen Division im Spektralbereich wesentliche Vorteile aufweisen: Die relativen Rückstreupektren werden *nach* einer zustandsraumbasierten Entfaltung im Zeitbereich geschätzt [Gün01b]. Darüber hinaus bilden entfaltete Echos die Grundlage für eine weitgehend geräteunabhängige und somit objektivierte Darstellung von Ultraschallbildern. Deshalb ist auch das Verhalten der Entfaltung in instationären Echoabschnitten zu untersuchen.

6.1 Entfaltung im Frequenzbereich

Die intuitivste und sicherlich auch am leichtesten handhabbare Form der Entfaltung ist die Division von Spektren:

$$y(t) = h(t) * w(t) \tag{6.1}$$

$$\rightsquigarrow w(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} \right\}. \tag{6.2}$$

Für Leistungsdichtespektren gilt entsprechend:

$$R_W(\omega) = \frac{R_Y(\omega)}{|H(\omega)|^2}. \tag{6.3}$$

In der Praxis erwächst aber aus der Anwendung dieser Methode eine Reihe von Problemen. Ein Großteil der Schwierigkeiten hängt damit zusammen, dass Spektren prinzipiell nur für stationäre Signale einen Sinn ergeben, eine Voraussetzung, die in Ultraschallechos grob verletzt ist. Deshalb muss eine Kurzzeitanalyse vorgenommen werden. Des Weiteren entstehen Fehler durch additives Rauschen, welches in obigen Berechnungsvorschriften vernachlässigt wurde.

6.1.1 Additives Rauschen

Ist das gemessene Echosignal durch additives Rauschen $v(t)$ gestört, d.h.

$$z(t) = h(t) * w(t) + v(t) , \quad (6.4)$$

kann die Rekonstruktion von $w(t)$ über Gleichung (6.2) empfindliche Fehler aufweisen.

Da $H(\omega)$ auch gemessen werden muss und durch Rauschen der Leistungsdichte $R_V(\omega)$ gestört ist, erhält man für das *relative* Leistungsdichtespektrum

$$R_{\hat{W}}(\omega) = \frac{R_Z(\omega)}{|H(\omega)|^2 + R_V(\omega)} = \frac{|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + R_V(\omega)}{|H(\omega)|^2 + R_V(\omega)} . \quad (6.5)$$

In der Analyse von Ultraschallechos werden üblicherweise die logarithmierten Spektren parametrisiert (Abschnitt 3.3 und Kapitel 7):

$$\log R_{\hat{W}}(\omega) = \log \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + R_V(\omega) \right) - \log \left(|H(\omega)|^2 + R_V(\omega) \right) . \quad (6.6)$$

Um den Gesamtfehler $\left(\log R_{\hat{W}}(\omega) - \log R_W(\omega) \right)$ dieses relativen Spektrums besser überschauen zu können, ist eine Linearisierung des Logarithmus' für kleine $R_V(\omega)$ hilfreich¹:

$$\begin{aligned} & \log \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + R_V(\omega) \right) \\ & \approx \log |H(\omega)|^2 + \log R_W(\omega) + \frac{R_V}{2 |H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega)} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

¹ Allgemein: Linearisierung um den Punkt a ergibt

$$\begin{aligned} f(a+x) & \approx f(a) + f'(a) \cdot x , \quad x \ll a \\ & \rightsquigarrow \log(a+x) \approx \log a + \frac{x}{a} \end{aligned}$$

Allerdings ist hier $x = R_V(\omega) \geq 0$, und deshalb bietet sich die Verbesserung der Approximation für größere positive x auf Kosten der Approximation für die (sowieso nicht existenten) negativen x an. Für den Logarithmus ist der Faktor 1/2 beim linearen Term günstig:

$$\log(a+x) \approx \log a + \frac{x}{2a}$$

Hiermit erhalten wir einen Ausdruck für den Gesamtfehler

$$\log R_{\hat{W}}(\omega) - \log R_W(\omega) \approx \frac{R_V(\omega)}{2 |H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega)} - \frac{R_V(\omega)}{2 |H(\omega)|^2} \quad (6.8)$$

Je stärker also das relative Rückstreupektrum $R_W(\omega)$ vom weißen Spektrum der Leistung eins abweicht, desto größer wird der Fehler – ein für Gewebedifferenzierung sehr ungünstiges Verhalten, da schließlich gerade diese Abweichungen so genau wie möglich gemessen werden sollen. Dieses Verhalten zeigt sich auch in der später durchgeführten umfangreicheren Analyse (Abschnitt 6.7.4). Siehe auch Abb. 6.1.

Vielleicht ist man versucht, eine rauschfreie Referenz zu benutzen. Allerdings wird dann der Fehler im Bereich von $R_W(\omega) \approx 1$ größer als mit der verrauschten Referenz:

$$R_{\hat{W}}(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + R_V(\omega)}{|H(\omega)|^2} \quad (6.9)$$

$$\rightsquigarrow \log R_{\hat{W}}(\omega) - \log R_W(\omega) = \frac{R_V(\omega)}{|H(\omega)|^2} . \quad (6.10)$$

Aber auch die Berechnung der Differenz $\hat{R}_Z(\omega) - R_V(\omega)$ ist bedenklich, da in der Regel $\hat{R}_Z(\omega)$ aus wenigen Daten bestimmt werden muss und deshalb eine gewisse Varianz aufweist. Nach Abzug von $R_V(\omega)$ bleibt diese Varianz aber erhalten, und somit ist nach Logarithmierung die Varianz auch größer als wenn das Spektrum aus einer rauschfreien Umgebung geschätzt wäre. Außerdem können bei der Differenzbildung unsinnige negative Werte auftreten.

6.1.2 Kurzzeitanalyse

Im Falle instationärer Signale berechnet man *Kurzzeitspektren* (in der Regel nichtparametrisch, d.h. auf der Basis gemittelter und geglätteter Periodogramme). Allerdings sind diese mit abnehmender Länge T der Zeitfenster $f(t)$ mehr und mehr verfälscht ([KK98], S.335):

$$\langle \hat{R}_Z(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{AT} R_Z(\omega) * \left| \mathcal{F} \{ f_T(t) \} \right|^2 \quad \text{mit} \quad A \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f_T^2(t) . \quad (6.11)$$

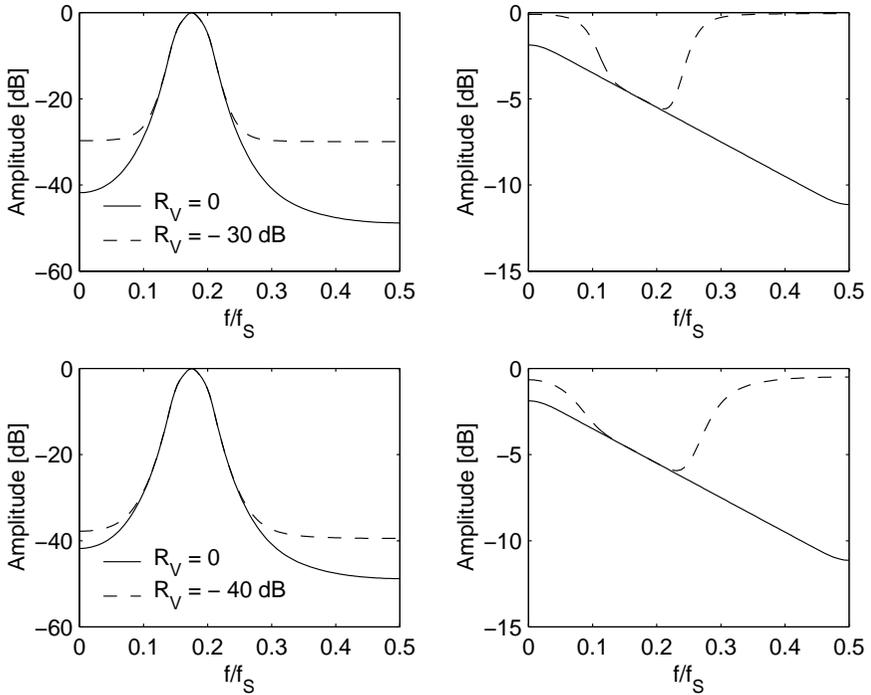


Abb. 6.1: Links: — Amplitudengang $|H(\omega)|$ (typisches Referenzspektrum), - - - Erwartungswerte der aufgrund von additivem Rauschen verfälschten Spektren. Rechts: — Relatives Spektrum $R_W(\omega)$, - - - Erwartungswerte der entsprechend verfälschten Schätzungen, $R_{\hat{W}}(\omega)$.

Definieren wir den dadurch im logarithmierten Spektrum entstandenen (frequenzabhängigen) Fehler (Bias) als $\varepsilon_Z(\omega)$:

$$\log \langle \hat{R}_Z(\omega) \rangle = \log R_Z(\omega) + \varepsilon_Z(\omega), \quad (6.12)$$

und nehmen wir an, dass die Referenz $\log |H(\omega)|^2$ mit einem Fehler $\varepsilon_H(\omega)$ behaftet ist, erhalten wir für das geschätzte relative Rückstreuungsspektrum

$$\log R_{\hat{W}}(\omega) = \log \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) \right) + \varepsilon_Z(\omega) - \log |H(\omega)|^2 - \varepsilon_H(\omega). \quad (6.13)$$

Der Fehler ist damit

$$\log R_{\hat{W}}(\omega) - \log R_W(\omega) = \varepsilon_Z(\omega) - \varepsilon_H(\omega). \quad (6.14)$$

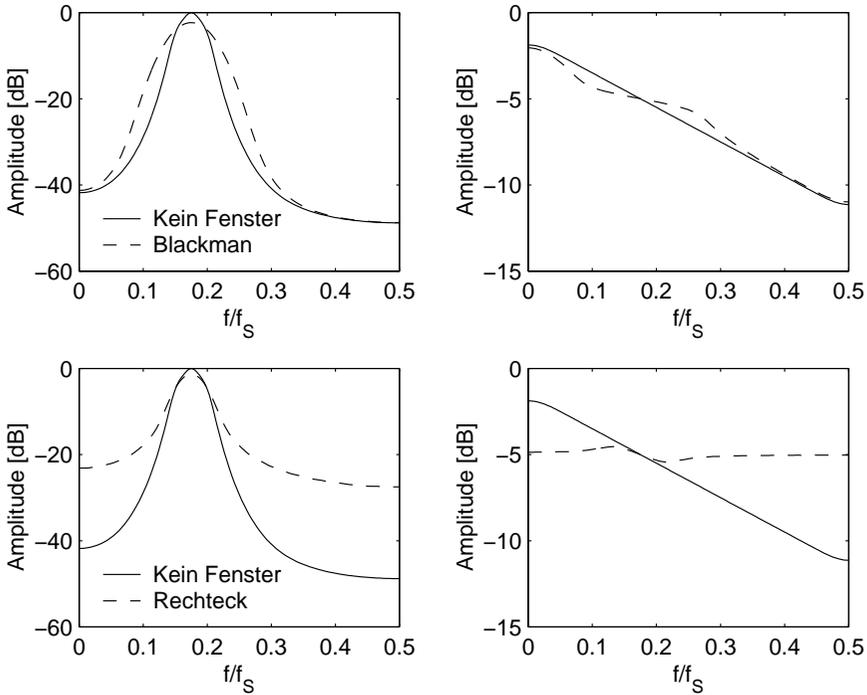


Abb. 6.2: Links: — Amplitudengang $|H(\omega)|$ (typisches Referenzspektrum), - - - Erwartungswerte der aufgrund von kurzen Zeitfenstern verfälschten Spektren, nach Gleichung (6.11) (BLACKMAN-Fenster, Rechteck-Fenster). **Rechts:** — Relatives Spektrum $R_W(\omega)$, - - - Erwartungswerte der entsprechend verfälschten Schätzungen, $R_{\hat{W}}(\omega)$. Die Fensterlänge ist 32 Samples.

Die Konsequenz daraus ist, dass beide zueinander ins Verhältnis gesetzten Spektren mit der gleichen Fensterfunktion geschätzt werden sollten, da sich ansonsten der Fehler des relativen Spektrums vergrößert. Dass auch aus $R_Z(\omega) \neq |H(\omega)|^2$ bzw. $R_W(\omega) \neq 1$ Fehler entstehen, kann leider nicht vermieden werden.

In Abb. 6.2 sind zwei Beispiele dargestellt: Das BLACKMAN-Fenster hat eine hohe Sperrbanddämpfung, was insgesamt eine bessere Annäherung an das wahre relative Spektrum ermöglicht. Dies wird aber durch eine stärkere Glättung (verminderte Frequenzauflösung) innerhalb der bandpassartigen Spektren $|H(\omega)|^2$ bzw. $|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega)$ erkauft, was sich in einem S-förmigen

gen Verlauf im relativen Spektrum äußert. Im anderen Extrem, dem Rechteckfenster, bezahlt man die erheblich verbesserte Frequenzauflösung mit einer niedrigen Sperrbanddämpfung (*Leckeffekt*) und folglich einer schlechten Rekonstruktion des relativen Spektrums $R_W(\omega)$. Interessiert man sich allerdings nur für die Minimierung des Fehlers innerhalb einer kleinen Bandbreite um die Mittenfrequenz, könnte das Rechteckfenster die günstigere Wahl sein.

Ein weiteres Problem der Entfaltung im Frequenzbereich ist es, dass die Division von Kurzzeitspektren höchstens auf indirektem Wege ein zusammenhängendes entfaltetes Echosignal liefern kann. Überblendung zwischen überlappenden Signalsegmenten ist die üblicherweise angewendete Methode, um trotzdem zu zusammenhängenden Signalen zu gelangen [OTH⁺91, SES99].

6.1.3 Schlussfolgerung

Eine Lösung der genannten Probleme verspricht die *zeitvariante Entfaltung im Zeitbereich*, idealerweise unter Berücksichtigung des additiven Rauschens. Der nächste Abschnitt stellt einige bekannte Methoden vor und zeigt Verwandtschaften und Unterschiede zwischen den Methoden auf.

6.2 Entfaltung im Zeitbereich: Wahl der Methode

In der Einleitung zur Systemidentifikation wurden bereits einige Entfaltungsmethoden diskutiert (Abschnitt 5.1). Dort fiel die Entscheidung zugunsten parametrischer Methoden, die sich auf ARMA-Modellierung von Zufallsprozessen stützen.

Die Untersuchung und Entwicklung von Entfaltungsalgorithmen erhielt den wahrscheinlich größten Vorschub im Fachgebiet der Seismik, und zwar hauptsächlich in den 70er Jahren [OM72, Cru74, BZ76, MK78]. Auch im Bereich der Ultraschalldiagnose gibt es einige Arbeiten zum Thema Entfaltung der HF-Echos [Kuc79, LW83, Jen92, JMGS93, APR95, HLT98], denn schließlich ist eine höhere axiale Auflösung der konventionellen B-Bilder zu erwarten.

Im Gegensatz zur Entfaltung der einzelnen HF-Echos, also einer *axialen Entfaltung*, stehen Versuche, die durch Überlappung der Schallfelder benachbarter A-Scans verursachten lateralen Glättungseffekte durch entsprechende Korrekturen zu mindern [HT80, Vol82, APR95]. Diese *lateralen Entfaltungen* sind jedoch nicht unumstritten, weil sie mehr *ad hoc* und weniger durch

physikalische Modelle motiviert sind. Zudem wird die Auswertung lateraler Information durch die weit verbreitete fächerartige Anordnung der A-Scans (teilweise mit variablem Winkelabstand) erschwert. Diese beiden Gründe sind triftig genug, um vorerst auf laterale Entfaltung zu verzichten.

Der Weg zur Entscheidung zugunsten einer Entfaltungsmethode führt über eine etwas detailliertere Analyse der Möglichkeiten. Nach einer ersten groben Analyse (Abschnitt 5.1) wurden bereits die auf ARMA-Modellen basierenden parametrischen Methoden favorisiert.

Prädiktive Entfaltung

Weiß man von vornherein, dass das gesuchte Eingangssignal weißes Rauschen ist und kann man ferner Störungen und Modellfehler außer Acht lassen, entspricht das Prädiktorfehler-Signal der ARMA-Schätzalgorithmen diesem gesuchten Eingangssignal (siehe auch Beschreibung der PEM auf S.47: „Bedeutung des Fehlersignals“). Man nennt Entfaltungsalgorithmen, die das Eingangssignal über diesen Umweg der Parametrisierung des Zufallsprozesses schätzen, *prädiktive Entfaltung* [Hay96], vor allem im Zusammenhang mit den rekursiven Verfahren RPEM (recursive prediction error method) und RLS (recursive least squares).

Allerdings wird das Eingangssignal bei all diesen Verfahren *a priori* als unkorreliert (weißes Rauschen) und normalverteilt vorausgesetzt, wodurch eine Unterscheidung von verschiedenen relativen Rückstreuenspektren unterbunden wird. Genau dieser Voraussetzung ist es hingegen zu verdanken, dass sich diese Methoden innerhalb gewisser Grenzen an ein zeitvariantes System anpassen können (*tracking*). Als überfordert entpuppt sich dieses adaptive Verhalten bei stark instationären Signalabschnitten, da es auf Berechnung von *Zeitmitteln* beruht, wobei das „Erinnerungsvermögen“ durch exponentiell abfallende Gewichtung vergangener Werte eingebracht wird (*Vergessensfaktor*). Werden nämlich Werte bis weit zurück in die Vergangenheit berücksichtigt, ist zwar die Varianz der identifizierten Systeme gering, doch andererseits kann der Algorithmus keinen schnellen Veränderungen folgen. Ein Peak im Ausgangssignal würde sich dann auf einen Peak im Fehlersignal niederschlagen.

Diese Verfahren der Entfaltung beinhalten außerdem eine unangenehme Zweideutigkeit: Ob eine erhöhte Signalleistung dem System oder dem Eingangssignal zuzuschreiben ist, kann nicht geklärt werden.

Weitere spezifische Nachteile sind: RLS-Filter, in erster Linie für die Schätzung von AR-Systemen gedacht ([Hay96], S.562ff), weisen bei ARMA-Sys-

temen ungünstige Konvergenzeigenschaften auf ([Kay88], S.316). RPEM-Filter sind zwar, auch bei ARMA-Systemen, im Vergleich zu RLS-Filtern optimal (Minimum-Varianz-Schätzer), doch zu dem Preis der Nichtlinearität, die nach numerischen Suchalgorithmen verlangt. Diese wiederum können je nach Konstellation ebenfalls ungünstiges Konvergenzverhalten haben.

Zustandsraumbasierte Entfaltung

Eine andere Vorgehensweise ist die Modellierung bereits anderweitig identifizierter Systeme im Zustandsraum. Dadurch können zeitvariante Systeme berücksichtigt werden, aber der Algorithmus ist nicht adaptiv, d.h. das System muss für alle Zeiten im Voraus bekannt sein.

Zu den zustandsraumbasierten Methoden zählen insbesondere die KALMAN-Filter [Kal60, Kai68, BH97, Kro96] und die KALMAN-Interpolation [KF68, BH97, Kro96]. Ursprünglich sind diese Methoden dazu gedacht, den Zustandsvektor fortlaufend zu schätzen, um damit entweder den Zustand eines Systems zu beobachten oder um additives weißes Rauschen zu unterdrücken. Das Eingangssignal zu schätzen stellt in dieser Form eine eher ungewöhnliche Aufgabe dar, doch wurden auch hierzu entsprechende Algorithmen entwickelt, sogar in ihrer Minimum-Varianz-Form (J.M. MENDEL in [MK77, Men77, MK78, Men81, KM83]).

KALMAN-Filter arbeiten mit dem *Scharmittel*. Deshalb treten Probleme bezüglich der Vergangenheit des Signals, hervorgerufen durch die Wahl eines bestimmten Vergessensfaktors, grundsätzlich nicht auf – die Vergangenheit fließt mit der Länge der Impulsantwort des aktuellen Systems ein. Dies ist mit verantwortlich für die Robustheit von KALMAN-Filtern.

Allerdings wird bei allen KALMAN-Filtern und -Interpolationen vorausgesetzt, dass das Eingangssignal weißes Rauschen ist, und zwar *a priori*. Die Ausführungen des nächsten Abschnittes zeigen aber, dass die von MENDEL entwickelte Entfaltung auch für farbige Eingangssignale zuverlässig funktioniert. Eine sich anschließende Herleitung, die einen Ausdruck für das Leistungsdichtespektrum des entfalteten Signals zum Ergebnis hat, bildet die Grundlage zu Untersuchungen, wie und in welchen Grenzen das ursprüngliche Spektrum des Eingangssignals rekonstruiert werden kann.

Die Leistung des Eingangssignals muss für jeden Zeitpunkt angegeben werden, was nur näherungsweise möglich ist. In welchem Rahmen der Entfaltungsalgorithmus Ungenauigkeiten verzeiht, ist Thema des Abschnittes 6.6.

Dass außerdem additives weißes Rauschen in den genannten Algorithmen von vornherein Berücksichtigung findet, kann nur von Vorteil sein, denn

die Leistung des Rauschens eines Ultraschallsystems kann leicht geschätzt werden. Somit zeichnet sich die Entfaltung mittels KALMAN-Interpolation gegenüber den prädiktiven Entfaltungsmethoden zusätzlich durch Rauschunterdrückung aus.

6.3 ARMA-Systeme im Zustandsraum

Zustandsraummodell

Allgemein lautet das Zustandsraummodell für ein MIMO-System [BH97, Kro96]:

$$\mathbf{q}(t+1) = \mathbf{A}(t) \mathbf{q}(t) + \mathbf{B}(t) [\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t)] \quad (6.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{q}(t) . \quad (6.16)$$

Die erste der beiden Gleichungen nennt man *Zustandsgleichung*, weil sie die Entwicklung des Zustandsvektors $\mathbf{q}(t)$ vom Zeitpunkt t zum nächsten Zeitpunkt $t+1$ beschreibt. Die zweite Gleichung wird mit *Beobachtungsgleichung* bezeichnet, weil sie den Zusammenhang zwischen dem aktuellen Zustand des Systems und dem beobachtbaren (messbaren) Signal $\mathbf{y}(t)$ herstellt.

Man beachte, dass alle Größen zeitlich schwanken können, was die Modellierung instationärer Zufallsprozesse erlaubt. Das als weiß angenommene Rauschen $\mathbf{w}(t)$ heißt *Prozessrauschen* und geht in die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors ein.

In der Praxis ist aber jede Messung mit Unsicherheiten behaftet, was sich im additiven *Messrauschen* niederschlägt (*Messgleichung*):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{q}(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) . \quad (6.17)$$

Zusätzliche Forderungen sind:

$$\langle \mathbf{w}(t) \rangle = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{R}_W(t, \tau) = \langle \mathbf{w}(t) \mathbf{w}^\top(\tau) \rangle = \begin{cases} \mathbf{R}_W(t), & t = \tau \\ \mathbf{0}, & t \neq \tau \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{R}_V(t, \tau) = \langle \mathbf{v}(t) \mathbf{v}^\top(\tau) \rangle = \begin{cases} \mathbf{R}_V(t), & t = \tau \\ \mathbf{0}, & t \neq \tau \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{R}_{WV}(t, \tau) = \langle \mathbf{w}(t) \mathbf{v}^\top(\tau) \rangle = \mathbf{0} \quad \forall t, \tau. \quad (6.22)$$

ARMA-Modell

Prinzipiell sind mehrere Repräsentationsformen von ARMA-Modellen im Zustandsraum möglich. Für die Zwecke dieser Arbeit ist jedoch die *regelbare kanonische Form* am besten geeignet. In dieser Form ist für den Nenner der Grad N und für den Zähler der Grad $N - 1$ zu wählen²:

$$H_{\text{ARMA}}(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{c_0 + \sum_{\eta=1}^{N-1} c_\eta z^{-\eta}}{1 + \sum_{\nu=1}^N a_\nu z^{-\nu}}. \quad (6.23)$$

² Wählt man Nenner und Zähler vom gleichen Grad N , erhält man (Rechnung analog [BH97], S.206f)

$$\mathbf{q}(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{q}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w(t)$$

$$y(t) = \left(c_N - c_0 \cdot a_N, c_{N-1} - c_0 \cdot a_{N-1}, \dots, c_1 - c_0 \cdot a_1 \right) \cdot \mathbf{q}(t) + w(t).$$

In diesem Modell taucht $w(t)$ in der Beobachtungsgleichung auf. Dies ist eine Abweichung vom Zustandsraummodell mit (6.16), und somit ist der in dieser Arbeit verwendete Entfaltungsalgorithmus nicht anwendbar.

Das zugehörige (SISO-) Zustandsraummodell lautet (gemäß [BH97], S.206f; dort ist allerdings $H_{\text{ARMA}}(z)$ leicht abweichend definiert)

$$\mathbf{q}(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{q}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w(t+1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_{N-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{q}(t). \quad (6.24)$$

In dieser Darstellung kann es störend sein, dass $w(t+1)$ eingeht, d.h. dass sich das (zufällige) Eingangssignal ohne Zeitverzögerung auf den neuen Zustandsvektor auswirkt. Dies kann man aber leicht umgehen, indem man im Zähler von 6.23 eine Zeitverzögerung um einen Schritt hinzufügt (Multiplikation der Übertragungsfunktion mit z^{-1}).

6.4 Entfaltung durch Kalman-Interpolation

Filterung, Prädiktion, Interpolation

Die Schreibweise des Schätzwertes $\hat{x}(t|t+\delta)$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt t alle Messwerte der Zeitpunkte $\{0, 1, \dots, t+\delta\}$ in die Berechnungen eingehen. Man unterscheidet dann ([Kro96], S.10)

$$\begin{array}{ll} \hat{x}(t|t+\delta), & \delta = 0 & \text{Filterung} \\ & \delta < 0 & \text{Prädiktion} \\ & \delta > 0 & \text{Interpolation} \end{array} \quad (6.25)$$

Algorithmen, die einen Wert sowohl anhand von vergangenen, gegenwärtigen und zukünftigen Messdaten schätzen, bezeichnet man als *Interpolation*. Die Tabelle 6.1 listet alle bekannten Unterarten der Interpolation auf.

Die Interpolation von einem festen Zeitpunkt aus (fixed interval) benutzt die Daten aller zur Verfügung stehender Zeitpunkte $\{0, 1, \dots, T\}$ und hat deshalb

Schätzer	fester Parameter	Interpolation für . . .	engl. Bezeichnung
$\hat{x}(t t + \delta)$	t	festen Zeitpunkt	fixed point
$\hat{x}(t t + \delta)$	δ	festen Zeitabstand	fixed lag
$\hat{x}(t t + \delta)$, $T = t + \delta \rightsquigarrow$ $\hat{x}(T - \delta T)$	T	von einem festen Zeitpunkt aus	fixed interval

Tab. 6.1: Interpolationsarten.

die geringste Varianz (Minimum-Varianz-Schätzer). Dies kommt einer *Offline*-Arbeitsweise gleich. Die beiden anderen Interpolationsarten sind hingegen eher für *Online*-Berechnungen gedacht, da z.B. bei der Interpolation für einen festen Zeitpunkt der Schätzwert mit neu hinzukommenden Daten immer sicherer wird. Für die Bearbeitung von Ultraschallechos bietet sich die Fixed-interval-Methode an, da jeder A-Scan eine für sich abgeschlossene Einheit bildet, zu der keine neuen Messwerte hinzukommen.

Allgemeine Entfaltung

Entfaltung ist im allgemeinsten Sinne die Schätzung des Eingangssignals $w(t)$ durch eine beliebige (nicht notwendigerweise lineare) Funktion f aller zur Verfügung stehenden Messwerte $Z(t + \delta) \equiv \{z(0), z(1), \dots, z(t + \delta)\}$, kurz $f(Z(t + \delta))$:

$$y(t) = h(t) * w(t) \quad (6.26)$$

$$z(t) = y(t) + v(t) \quad (6.27)$$

$$\rightsquigarrow \hat{w}(t|t + \delta) = f(Z(t + \delta)) \quad (6.28)$$

Der Minimum-Varianz-Schätzer für $\hat{w}(t|t + \delta)$ ist der bedingte Erwartungswert (Definition: $\langle f(X)|Y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot p_{X|Y}(x|y) dx$, [GD86], S.273f):

$$\epsilon = w(t) - f(Z(t + \delta)) \quad (6.29)$$

$$\langle \epsilon^2 \rangle \stackrel{!}{=} \min \quad (6.30)$$

$$\rightsquigarrow \hat{w}(t|t + \delta) = \langle w(t)|Z(t + \delta) \rangle . \quad (6.31)$$

Wir fordern nun, dass sich $w(t)$ nicht direkt auf die Messung $z(t)$ auswirkt, mit anderen Worten, dass $z(t)$, und damit auch $Z(t)$, nur von vergangenen

Werten $w(t-1), w(t-2), \dots$ abhängt. Dies ist für kausale Systeme auch immer zutreffend. Da also $w(t)$ und $Z(t)$ statistisch unabhängig sind, gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{w_t|Z_t} = \frac{p_{w_t, Z_t}}{p_{Z_t}} = p_{w_t} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \langle w_t | Z_t \rangle &= \int_{\mathbb{R}} w(t) \cdot p_{w_t|Z_t}(w(t)|Z(t)) \, dw(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} w(t) \cdot p_{w_t}(w(t)) \, dw(t) = \langle w_t \rangle . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Da für Kalman-Filter w_t als mittelwertfrei angenommen wird, haben wir schließlich

$$\langle w(t)|Z(t) \rangle = \langle w(t) \rangle = 0 . \quad (6.34)$$

Die Konsequenz daraus ist, dass nur für Interpolation, d.h. für $\delta > 0$, eine optimale Schätzung des Eingangsprozesses $w(t)$ gelingt [Men77].

Entfaltung im Zustandsraum

Für die Zustandsvektoren gilt auf ähnliche Weise (man beachte, dass die Erwartungswerte von Null verschieden sind):

$$\hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) = \langle \mathbf{q}(t+1)|Z(t+\delta) \rangle \quad (6.35)$$

$$\hat{\mathbf{q}}(t+1|t+1) = \langle \mathbf{q}(t+1)|Z(t+1) \rangle . \quad (6.36)$$

Diese Zusammenhänge kann man für die Herleitung eines Ausdruckes für die Schätzung von $\hat{\mathbf{w}}$ ausnutzen, indem man den bedingten Erwartungswert auf die Zustandsgleichung (6.15) anwendet³

$$\langle \mathbf{q}(t+1)|Z(t+\delta) \rangle = \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{q}(t)|Z(t+\delta) \rangle + \langle \mathbf{B}(t) \mathbf{w}(t)|Z(t+\delta) \rangle \quad (6.37)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta) = \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t+\delta) \quad (6.38)$$

$$\mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta-1) = \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1) - \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t+\delta-1) . \quad (6.39)$$

Die Herleitung für $\hat{\mathbf{w}}$ lässt sich nun alleine durch Einsetzen der Ergebnisse für interpolierte Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{q}}$ bewerkstelligen (siehe Anhang A.3).

³ Zunächst muss für ein Multikanal-Modell $\mathbf{B} \mathbf{w}(t)$ gerechnet werden, da später in einer Gleichung \mathbf{B}^{-1} auftaucht. Durch geschicktes Umrechnen dieser Gleichung gelingt jedoch eine Darstellung mit \mathbf{B}^T , womit auch Einkanal-Modelle $\mathbf{b} w(t)$ möglich werden.

Zusammengefasst ergibt sich für ein SISO-System (jeder A-Scan soll separat entfaltet werden) der nun aufgelistete *Fixed-interval*-Algorithmus, nach dem Autor der entsprechenden Veröffentlichungen als „Entfaltung nach MENDEL“ bezeichnet. Da Eingangs- und Ausgangssignal sowie die additive Störung skalare Größen sind, werden die Kovarianzmatrizen ebenfalls zu Skalaren:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_W(t) &= \sigma_W^2(t) \\ \mathbf{R}_V(t) &= \sigma_V^2(t) . \end{aligned} \quad (6.40)$$

Zunächst erfolgt eine normale Kalman-Filterung. Mit der Kovarianzmatrix des geschätzten Zustandsvektors

$$\mathbf{P} \equiv \left\langle (\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) \cdot (\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})^T \right\rangle , \quad (6.41)$$

und der Initialisierung (siehe auch Bemerkungen weiter unten)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(1|0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(1|0) &= \mathbf{1} \end{aligned} \quad (6.42)$$

ist dies im Einzelnen:

$$\begin{aligned} L(t) &= \left(\mathbf{C}(t) \mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{C}(t)^T + \sigma_V^2(t) \right)^{-1} \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{C}(t)^T L(t) \\ \tilde{z}(t|t-1) &= (z(t) - \mathbf{C}(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t-1)) \\ \xi(t|t-1) &= L(t) \cdot \tilde{z}(t|t-1) \\ \hat{\mathbf{q}}(t) &= \hat{\mathbf{q}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t) \cdot \tilde{z}(t|t-1) \\ \mathbf{P}(t|t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(t) \mathbf{C}(t)) \mathbf{P}(t|t-1) \\ \hat{\mathbf{q}}(t+1|t) &= \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t) \sigma_W^2(t) \mathbf{B}(t)^T \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die Variable $L(t)$ wird später für die Berechnung der Fehlervarianz benötigt, deswegen müssen die Werte zwischengespeichert werden. Gleichmaßen erfordert die Berechnung des Interpolationswertes von $\hat{w}(t)$ die Zwischenspeicherung der Zeitreihe $\xi(t|t-1)$.

In einem zweiten Schritt wird der eigentliche Interpolationswert von $\hat{w}(t)$ *rückwärts* berechnet (Initialisierung mit $\boldsymbol{\rho}(T|T) = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned}\hat{w}(t+1|T) &= \sigma_W^2(t) \cdot \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\rho}(T-t|T) \\ \mathbf{J}(T-t) &= \mathbf{A}(t) \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{K}(T-t) \mathbf{C}(t)] \\ \boldsymbol{\rho}(T-t-1|T) &= \mathbf{J}(T-t)^T \cdot \boldsymbol{\rho}(T-t|T) \\ &\quad + \mathbf{C}(t)^T \xi(T-t|T-t-1)\end{aligned}\tag{6.44}$$

Gleichzeitig mit diesem Rückwärtslauf kann auch auf einfache Weise die Varianz $\sigma_{\tilde{w}}^2$ des Schätzfehlers $\tilde{w} \equiv w(t+1) - \hat{w}(t+1|T)$ errechnet werden [MK77]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{w}}^2(T-t|T) &\equiv \left\langle (\tilde{w} - \langle \tilde{w} \rangle)^2 \right\rangle \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\rho}}(T-t-1|T) &\equiv \left\langle \boldsymbol{\rho}(T-t-1|T) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(T-t-1|T) \right\rangle \\ &= \mathbf{J}(T-t)^T \mathbf{R}_{\boldsymbol{\rho}}(T-t|T) \mathbf{J}(T-t) \\ &\quad + \mathbf{C}(t)^T L(T-t) \mathbf{C}(t) \\ \rightsquigarrow \sigma_{\tilde{w}}^2(T-t|T) &= \sigma_W^2(t) - \sigma_W^2(t) \mathbf{B}(t)^T \mathbf{R}_{\boldsymbol{\rho}}(T-t|T) \mathbf{B}(t) \sigma_W^2(t)\end{aligned}\tag{6.45}$$

Initialisierung

Prinzipiell können $\hat{\mathbf{q}}(1|0)$ und $\mathbf{P}(1|0)$ frei gewählt werden. Man kann davon ausgehen, dass mit „vernünftigen“ Startwerten immer gutmütige Konvergenz der Entfaltung gegeben ist. Von einem eher theoretischen Standpunkt aus gesehen sollte $\hat{\mathbf{q}}(1|0) = \mathbf{0}$ sein und $\mathbf{P}(1|0)$ sollte mit dem zu erwartenden Wert bezüglich des modellierten Prozesses initialisiert werden, denn nur dann ist wirklich optimale Konvergenz und auch Äquivalenz zum WIE-NER-Filter gegeben ([BH97], S.306f). Für die hier behandelten instationären Ultraschallechos ist aber \mathbf{P} nicht bekannt. Eine Lösung wäre, die Entfaltung zunächst mit willkürlich gewähltem $\mathbf{P}(1|0)$ zu starten und den Zeitpunkt abzuwarten, zu dem der Algorithmus hinreichend eingeschwungen ist. Der dann erreichte Wert der Kovarianzmatrix könnte als neuer Startwert dienen. Diese Methode wurde auch in [Jen92] verwendet, und die dort ermittelte Einschwingzeit lag zwischen 20 und 30 Samples.

In der Berechnung von $\sigma_{\tilde{w}}^2$ ist der Startwert $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\rho}}(T|T) = \mathbf{0}$ zu wählen [MK77].

Bemerkungen

Dass $\sigma_{\hat{W}}^2(T-t|T)$ nicht von $z(t)$ und somit nur von den vorgegebenen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\sigma_W^2(t)$, $\sigma_V^2(t)$ sowie von den Startwerten abhängt, offenbart sich durch Inspektion des Algorithmus'. Für $\sigma_V^2 \gg \sigma_W^2$ geht die Fehlervarianz $\sigma_{\hat{W}}^2 \rightarrow \sigma_W^2$. Umgekehrt geht die Fehlervarianz für $\sigma_V^2 \ll \sigma_W^2$ gegen Null.

6.5 Spektrum des entfalteten Signals

In diesem Abschnitt soll nun ein Ausdruck für das Leistungsdichtespektrum des mittels KALMAN-Interpolation entfalteten Signals entwickelt werden. Dies erfordert natürlich wieder die Annahme der Existenz quasistationärer Abschnitte im gemessenen Signal, da ansonsten die Betrachtung eines Spektrums keinen Sinn ergibt. Diese Annahme impliziert, dass sich die Matrizen des Zustandsraummodells innerhalb eines gewissen zeitlichen Rahmens nicht oder nur sehr langsam ändern. Somit kann aber eine Brücke zwischen dem KALMAN-Filter, der für instationäre Prozesse adäquat ist, und dem für stationäre Prozesse anwendbaren Filter nach WIENER-KOLMOGOROV (im folgenden nur als WIENER-Filter bezeichnet) geschlagen werden. Dies ist aus zwei Gründen sinnvoll:

1. KALMAN-Filter und kausales WIENER-Filter sind für stationäre Prozesse äquivalent: Für $t \rightarrow \infty$ liefern sie das gleiche Schätzergebnis $\hat{y}(t)$ ([Unb90], S.414; [BH97], S.306f). Diese Äquivalenz gilt auch für KALMAN-Interpolation und akausales WIENER-Filter, wie weiter unten gezeigt wird.
2. Da ein WIENER-Filter aus den Korrelationsfunktionen $r_Y(\tau)$ und $r_V(\tau)$ berechnet wird, gelangt man direkt zu einer spektralen Darstellung für $R_{\hat{Y}}(\omega)$ und somit auch für $R_{\hat{W}}(\omega)$.

Die Vorgehensweise gliedert sich wie folgt: Zunächst wird die WIENER-HOPF-Gleichung betrachtet, deren Lösung einerseits die Übertragungsfunktion des WIENER-Filters liefert, andererseits aber auch Ausgangspunkt für die Herleitung des KALMAN-Filters ist. Durch diese Äquivalenzbetrachtung kann dann sofort eine Lösung für das Entfaltungsproblem angegeben werden.

Es sei hier noch bemerkt, dass eine analytische Herleitung der Übertragungsfunktionen aus den rekursiven Berechnungsvorschriften des KALMAN-

Algorithmus' nicht möglich ist, obwohl für \hat{w} eine geschlossene Form angegeben werden kann ([MK77], Gl.25). Das liegt daran, dass die darin vorkommende Fehlerkorrelationsmatrix $\mathbf{P}(t|t-1)$ die numerische Lösung der diskreten algebraischen RICCATI-Gleichung ist⁴.

6.5.1 Wiener-Hopf-Gleichung

Ziel ist es, aus dem gemessenen und rauschbehafteten Signal $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$ ein Signal $\mathbf{d}(t)$ zu schätzen, welches aus einer linearen Filterung von $\mathbf{y}(t)$ hervorgeht. Die Schätzung soll mit einem Filter der Impulsantwort $\mathbf{g}(t, \tau)$ erfolgen (zeitvarianter Multikanal-Prozess):

$$\hat{\mathbf{d}}(t|b) = \sum_{\tau=a}^b \mathbf{g}(t, \tau) \cdot \mathbf{z}(\tau) . \quad (6.46)$$

Für $b > t$ ergibt sich eine akausale Filterung. Möchte man z.B. das Rauschen unterdrücken, wählt man im einkanaligen Fall $\mathbf{d}(t) = y(t)$ und erhält

$$\hat{y}(t|b) = \sum_{\tau=a}^b g(t - \tau) \cdot z(\tau) . \quad (6.47)$$

Die Schätzung soll „optimal“ erfolgen, d.h. die Spur der Fehlerkorrelationsmatrix wird minimiert:

$$\epsilon(t) \equiv \text{Spur} \left\langle \left[\mathbf{d}(t) - \hat{\mathbf{d}}(t|b) \right] \cdot \left[\mathbf{d}(t) - \hat{\mathbf{d}}(t|b) \right]^T \right\rangle \stackrel{!}{=} \min . \quad (6.48)$$

Dann gilt aber das *Orthogonalitäts-Prinzip* ([Pap91], S.201):

$$\left\langle \left[\mathbf{d}(t) - \hat{\mathbf{d}}(t|b) \right] \cdot \mathbf{z}^T(\theta) \right\rangle = \mathbf{0} . \quad (6.49)$$

⁴ Annahme für stationäre Verhältnisse: die Fehlerkorrelationsmatrix $\mathbf{P}(t|t-1)$ ändert sich nicht mehr, da sie bereits einen Erwartungswert darstellt. Setzen wir nun an: $\bar{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t-1)$, erhalten wir aus den Filtergleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{A} \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \\ \mathbf{P}(t|t) &= \left[\mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T \left(\mathbf{C} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_V \right)^{-1} \mathbf{C} \right] \bar{\mathbf{P}} \\ &\rightsquigarrow \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T \left(\mathbf{C} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_V \right)^{-1} \mathbf{C} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die diskrete algebraische Riccati-Gleichung (discrete algebraic Riccati equation, DARE).

Für instationäre Verhältnisse gelangt man auf analoge Weise zur diskreten Riccati-Differenzgleichung. Der Algorithmus des KALMAN-Filters kann aber als numerische rekursive Lösungsmethode dieser Differenzgleichung interpretiert werden [Hay96, BH97].

Setzen wir hier (6.47) ein, erhalten wir die diskrete WIENER-HOPF-Gleichung:

$$\left\langle \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{z}^T(\vartheta) \right\rangle - \sum_{\tau=a}^b \mathbf{g}(t, \tau) \cdot \left\langle \mathbf{z}(\tau) \cdot \mathbf{z}^T(\vartheta) \right\rangle = \mathbf{0}, \quad a \leq \vartheta \leq b. \quad (6.50)$$

Für eine zeitinvariante Impulsantwort $\mathbf{g}(t)$, die innerhalb $a \leq t \leq b$ vollständig abgeklungen sein soll (nötigenfalls setzt man $a = -\infty$ und $b = \infty$), kann die WIENER-HOPF-Gleichung über Fourier-Transformation gelöst werden. Wir benötigen im Weiteren nur die Lösung für einkanalige Prozesse, und deshalb können wir auf die etwas kompliziertere Mehrkanal-Lösung verzichten. Außerdem betrachten wir hier akausale Filterung (Interpolation), sodass Randbedingungen keine Beachtung finden müssen (für die kausale Lösung ist erforderlich, dass $g(t) = 0 \forall t < 0$, was die Randbedingung $b = t$ nach sich zieht. Kausale Lösungen findet man z.B. in [BH97, Kro96]). Unter Berücksichtigung, dass die Kovarianzterme im stationären Fall nur vom Zeitabstand abhängen, vereinfacht sich die WIENER-HOPF-Gleichung weiter zu

$$r_{D,Z}(t) - \sum_{\tau=a}^b g(t - \tau) \cdot r_Z(\tau) = 0 \quad (6.51)$$

$$\rightsquigarrow G(\omega) \cdot R_Z(\omega) = R_{D,Z}(\omega) \quad (6.52)$$

$$\rightsquigarrow G(\omega) = \frac{R_{D,Z}(\omega)}{R_Z(\omega)}. \quad (6.53)$$

Betrachten wir wieder den Fall der Rauschunterdrückung, d.h. $d(t) \equiv y(t)$, erhalten wir für das Leistungsdichtespektrum des geschätzten Signals $\hat{y}(t)$

$$R_{\hat{Y}}(\omega) = |G(\omega)|^2 \cdot R_Z(\omega) = \frac{R_{Y,Z}^2(\omega)}{R_Z(\omega)}. \quad (6.54)$$

Nun gilt es noch eine Verbindung zum Zustandsraummodell und zum KALMAN-Filter herzustellen. Der hauptsächliche Unterschied liegt darin, dass statt des Signals $\hat{y}(t)$ zunächst der Zustandsvektor geschätzt wird:

$$\hat{\mathbf{q}}(t|b) = \sum_{\tau=a}^b \tilde{\mathbf{g}}(t, \tau) \cdot \mathbf{z}(\tau) \quad (6.55)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t|b) = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{q}}(t|b) \quad (6.56)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{g}(t, \tau) = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(t, \tau). \quad (6.57)$$

Daraus erkennt man, dass die Schätzung über das Zustandsraummodell genauso auf die Lösung der WIENER-HOPF-Gleichung hinauslaufen wird, nur ist die optimale Filterfunktion zunächst eine andere als bei der direkten Schätzung $\hat{\mathbf{y}}(t|b)$. Die Skalierung mit der deterministischen Matrix \mathbf{C} stellt den Zusammenhang zur Lösung des direkten Schätzproblems her. In der Tat können die Berechnungsvorschriften des KALMAN-Filters bzw. der KALMAN-Interpolation sehr elegant über die Lösung der WIENER-HOPF-Gleichung hergeleitet werden, wenn man zusätzlich den Umweg über die *Innovations* geht [KF68, Kai68].

6.5.2 Zusammenhang Zustandsraum-Modell – Faltung

Das Faltungsmodell lautet (hier in der skalaren Form):

$$z(t) = h(t) * w(t) + v(t) \ , \quad y(t) \equiv h(t) * w(t) \ . \quad (6.58)$$

Der Ausdruck für $y(t)$ wird nun als Zustandsraummodell repräsentiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t+1) &= \mathbf{A} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} w(t+1) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{q}(t) \ . \end{aligned} \quad (6.59)$$

Hierbei ist im skalaren Fall $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ ein Spaltenvektor, und $\mathbf{C} = \mathbf{c}^T$ ein Zeilenvektor.

Gesucht ist ein Ausdruck für die Impulsantwort $h(t)$ in Abhängigkeit von den Zustandsraum-Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} .

Eine Möglichkeit führt über die Lösung der Zustandsdifferenzgleichung. \mathcal{Z} -Transformation der Gleichungen bei konstanten Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ergibt

$$\begin{aligned} z \cdot \mathcal{Z} \{ \mathbf{q}(t) \} &= \mathbf{A} \cdot \mathcal{Z} \{ \mathbf{q}(t) \} + z \cdot \mathbf{B} W(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C} \cdot \mathcal{Z} \{ \mathbf{q}(t) \} \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\rightsquigarrow Y(z) = z \cdot \mathbf{C} (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot W(z) \quad (6.61)$$

$$= H(z) \cdot W(z) \quad (6.62)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{h(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \cdot \mathbf{C} (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \right\}} \ . \quad (6.63)$$

Eine andere Möglichkeit, $h(t)$ zu erhalten, liegt in der Rekursion der Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}(T) &= \mathbf{A} [\mathbf{A} \mathbf{q}(T-2) + \mathbf{B} w(T-1)] + \mathbf{B} w(T) \\
 &\quad \dots \\
 \mathbf{q}(t) &= \mathbf{A}^t \mathbf{q}(0) + \sum_{\tau=1}^t \mathbf{A}^{t-\tau} \mathbf{B} \cdot w(\tau) \\
 \rightsquigarrow y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{q}(t) = \mathbf{C} \mathbf{A}^t \mathbf{q}(0) + \sum_{\tau=1}^t \mathbf{C} \mathbf{A}^{t-\tau} \mathbf{B} \cdot w(\tau) . \quad (6.64)
 \end{aligned}$$

In der Regel setzt man $\mathbf{q}(0) = 0$. Die Summe lässt sich als Faltung interpretieren, und daraus liest man die (kausale) Impulsantwort $h(t)$ ab:

$$\boxed{h(t) = \mathbf{C} \mathbf{A}^t \mathbf{B}} . \quad (6.65)$$

Diese Koeffizienten sind auch unter dem Namen *Markov-Parameter* bekannt [Men81].

Diese beiden Herleitungen verdeutlichen, wie eng die Zustandsraumdarstellung mit der Faltung verknüpft ist. Es existieren sogar spezielle Vorgehensweisen, wie aus einem gegebenen $h(t)$ durch geschickte (numerische) Zerlegung in das Matrixprodukt $\mathbf{C} \mathbf{A}^t \mathbf{B}$ ein Zustandsraummodell gewonnen werden kann (Singulärwert-Zerlegung, [Men81]).

Somit ist in Verbindung mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes klar, dass durch Schätzung von $\hat{y}(t)$ mittels eines akausalen WIENER-Filters und anschließender Filterung mit $h^{-1}(t)$ das gleiche Ergebnis für $\hat{w}(t)$ zu erwarten ist wie bei einer direkten Schätzung von $\hat{w}(t)$ mittels geeigneter KALMAN-Interpolation (fixed-interval), welche auf dem zu $h(t)$ gehörenden Zustandsraum-Modell basiert.

6.5.3 Spektrum

Wenn nun also eine Spektraldarstellung für die optimalen Schätzwerte $\hat{y}(t)$ vorliegt, kann daraus sofort eine Spektraldarstellung für $\hat{w}(t)$ abgeleitet wer-

den. Aus der (akausalen) Lösung der WIENER-HOPF-Gleichung (6.54) lesen wir ab:

$$R_{\hat{Y}}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot R_{\hat{W}}(\omega) \stackrel{(6.54)}{=} |G(\omega)|^2 \cdot R_Z(\omega) \quad (6.66)$$

$$\leadsto R_{\hat{W}}(\omega) = \left| \frac{G(\omega)}{H(\omega)} \right|^2 \cdot R_Z(\omega) = \frac{R_{Y,Z}^2(\omega)}{|H(\omega)|^2 \cdot R_Z(\omega)}. \quad (6.67)$$

Dieses Ergebnis kann auch als lineare Filterung des beobachteten Prozesses $z(t)$ mit dem „optimalen“ Entfaltungsfilter

$$H_{\text{dec}}(\omega) \equiv \frac{G(\omega)}{H(\omega)} = \frac{R_{Y,Z}(\omega)}{H(\omega) \cdot R_Z(\omega)} \quad (6.68)$$

betrachtet werden. Diese Übertragungsfunktion soll nun weiter analysiert werden, und zwar im Hinblick auf das der KALMAN-Interpolation zugrunde liegende Zustandsraum-Modell für einkanalige Prozesse. Der Einfachheit halber seien hier dessen wichtigste Eigenschaften kurz wiederholt:

$$\langle w(t) \cdot v(\vartheta) \rangle = 0 \quad (6.69)$$

$$r_W(\tau) \equiv \langle w(t) \cdot w(t + \tau) \rangle = \sigma_W^2 \delta(\tau) \quad (6.70)$$

$$r_V(\tau) \equiv \langle v(t) \cdot v(t + \tau) \rangle = \sigma_V^2 \delta(\tau). \quad (6.71)$$

Die Annahme, dass das Störuschen unkorreliert sein soll, ist keine Einschränkung, da korreliertes Rauschen durch zusätzliche Zustandsvariablen, d.h. durch Filterung eines weißen Störuschens modelliert werden kann. Dies führt auf eine Erweiterung des Zustandsvektors ([Sor66], S.238ff; [BH97], S.225ff).

Mit $z(t) = y(t) + v(t)$ und $y(t) = h(t) * w(t)$ erhält man für die Leistungsdichtespektren

$$R_Z(\omega) = R_{Y+V}(\omega) = R_Y(\omega) + R_V(\omega) = R_Y(\omega) + \sigma_V^2 \quad (6.72)$$

$$R_{Y,Z}(\omega) = R_{Y,Y+V}(\omega) = R_Y(\omega) \quad (6.73)$$

$$R_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2. \quad (6.74)$$

Mit diesen Gleichungen in (6.68) eingesetzt gelangen wir zu dem wichtigen Ergebnis für die aus der Entfaltung mittels KALMAN-Interpolation resultierende Übertragungsfunktion, das *Entfaltungsfilter* $H_{\text{dec}}(\omega)$:

$$H_{\text{dec}}(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2}{\left[|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_V^2 \right] \cdot H(\omega)} \quad (6.75)$$

$$\leadsto \boxed{H_{\text{dec}}(\omega) = \frac{H^*(\omega) \cdot \sigma_W^2}{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_V^2}} \quad (6.76)$$

Diese Übertragungsfunktion gilt im „quasistationären“ Fall und entspricht dem akausalen WIENER-Filter für die Entfaltung. Wie immer ist die Spektralanalyse von instationären Prozessen nur dann legitim, wenn sich $H(\omega)$, σ_W^2 und σ_V^2 innerhalb des betrachteten Signalausschnittes nicht wesentlich ändern. Zur Berücksichtigung von Einschwingvorgängen des Entfaltungsfilters $H_{\text{dec}}(\omega)$ in der Nähe abrupter Signaländerungen sollte die Spektralanalyse erst nach einer vollen Länge der Impulsantwort $h_{\text{dec}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\text{dec}}(\omega)\}$ gestartet werden, weshalb eine großzügige Maskierung von kleinen, stark instationären Bereiche sinnvoll ist.

Entscheidend für das Verständnis ist hier, dass unter stationären Bedingungen die Filterung mit der Übertragungsfunktion $H_{\text{dec}}(\omega)$ und die rekursive Entfaltung mittels KALMAN-Interpolation äquivalent zueinander sind. Das durch Entfaltung zu rekonstruierende Signal braucht also nicht weißes Rauschen zu sein, d.h. es stellt keine Verletzung der Voraussetzungen dar, wenn das Eingangssignal $w(t)$ farbig ist.

Ganz allgemein ist also das Leistungsdichtespektrum des rekonstruierten Signals $\hat{w}(t)$

$$R_{\hat{W}}(\omega) = |H_{\text{dec}}(\omega)|^2 \cdot R_Z(\omega) \quad (6.77)$$

$$= |H_{\text{dec}}(\omega)|^2 \cdot \left[|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2 \right] \quad (6.78)$$

$$\boxed{R_{\hat{W}}(\omega) = \left| \frac{H^*(\omega) \cdot \sigma_W^2}{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_V^2} \right|^2 \cdot \left[|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2 \right]} \quad (6.79)$$

Für den Sonderfall, dass $w(t)$ tatsächlich weiß ist, wird das Leistungsdichtespektrum des entfalteteten Signals zu

$$R_{\hat{W}}(\omega) = |H_{\text{dec}}(\omega)|^2 \cdot \left[|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_V^2 \right] \quad (6.80)$$

$$= \frac{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^4}{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_V^2} \quad (6.81)$$

Wenn dann außerdem keine Störungen vorliegen, d.h. $\sigma_V = 0$, ist das entfaltete Signal weißes Rauschen $R_{\hat{W}}(\omega) = \sigma_W^2$.

Für $\sigma_V^2 \neq 0$ ist $R_{\hat{W}}(\omega)$ *kein* weißes Leistungsdichtespektrum, was auch mit Hilfe der geschlossenen Form des Fixed-interval-Algorithmus' gezeigt werden kann [Men81].

6.5.4 σ_W^2 und σ_V^2 als Filterparameter

Aus der Beschreibung des Entfaltungsalgorithmus' sowie aus den Betrachtungen über das Spektrum des entfalteten Signals geht klar hervor, dass die Parameter σ_W^2 und σ_V^2 einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis haben. Da die genauen Werte dieser Parameter normalerweise nicht bekannt sind, müssen sie aus dem gemessenen Signal $z(t)$ ermittelt werden.

In Abschnitt 5.6.2 (S.64) wurde an der hier verwendeten Ultraschall-Apparatur für Eindringtiefen > 10 cm farbiges Rauschen gemessen. Die Modellierung farbigen Rauschens im Zustandsraum würde die Entfaltung erheblich komplexer machen. Man beachte aber, dass bei einer in biologischem Gewebe üblichen Dämpfung von 0,5 dB/(cm·MHz) mit einer Mittenfrequenz von $f_0 = 3,5$ MHz bei 10 cm Eindringtiefe, d.h. 20 cm Schallweg, der Sendepuls schon um 35 dB abgeschwächt ist und die Rückstreuung von Weichgewebe mindestens um 20 dB schwächer ausfällt als eine direkte Reflexion. Unter diesen Voraussetzungen kann zur Schätzung von Rückstreuenspektren sowieso keine vernünftige Rauschunterdrückung mehr erwartet werden. Dieser Argumentation zufolge ist im Entfaltungsalgorithmus die Annahme von weißem Rauschen für $v(t)$ vertretbar.

Nun muss noch ein Verfahren zur Abschätzung von σ_W^2 gefunden werden. Gemäß einem Vorschlag in [JMGS93] kann die Schätzung durch folgendes Prinzip erfolgen:

Innerhalb eines quasistationären Signalabschnittes gilt für die Korrelationsfolgen der Signale (Eingangssignal W und additives Rauschen V statistisch unabhängig, $h(t)$: Impulsantwort der Übertragungsfunktion in diesem Signalabschnitt):

$$r_h(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} h(t) h(t + \tau) \quad (6.82)$$

$$r_Z(\tau) = r_h(\tau) * r_W(\tau) + r_V(\tau) . \quad (6.83)$$

Nehmen wir nun an, dass W näherungsweise weißes Rauschen ist:

$$r_W(\tau) \approx \sigma_W^2 \cdot \delta(\tau) . \quad (6.84)$$

Dieser Forderung kann durch entsprechendes Design des Entfaltungsprozesses, d.h. durch geschickte Wahl der Referenz (Übertragungsfunktion $H(\omega)$), leicht nachgekommen werden. Nun ist es möglich, Gleichung (6.83) nach σ_W^2 aufzulösen:

$$\sigma_W^2 \approx \left. \frac{r_Z(\tau) - r_V(\tau)}{r_h(\tau)} \right|_{\tau=0} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_Z(\omega) - R_V(\omega) d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega}. \quad (6.85)$$

Dieser Ausdruck kann für theoretische Betrachtungen benutzt werden, wenn die Autokorrelationsfolgen bzw. die entsprechenden Leistungsdichtespektren von vornherein bekannt sind. Für eine Schätzung aus dem gemessenen Signal bietet sich folgende Berechnungsvorschrift an (erwartungstreu, weil $z(t)$ als mittelwertfrei angenommen wird):

$$\hat{r}_Z(\tau = 0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z^2(t) \quad (6.86)$$

Setzen wir zudem $R_V(\omega) = \sigma_V^2$, erhalten wir schließlich die Schätzvorschrift

$$\hat{\sigma}_W^2 \equiv \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z^2(t) - \sigma_V^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega}. \quad (6.87)$$

Ungünstige Wahl der Fensterlänge T kann zu Artefakten im entfalteten Signal führen, vor allem in der Umgebung von Reflexionsstellen (Impulsen). Deshalb wird im Anschluss an die Erörterung der Rekonstruktion von Impulsen nochmals auf die Schätzung von σ_W^2 eingegangen (Abschnitt 6.8.3).

6.6 Robustheit des Entfaltungsfilters

Im Regelfall sind $\hat{\sigma}_W^2$ und $\hat{\sigma}_V^2$ unsichere Schätzwerte. Um die Robustheit des Entfaltungsfilters abschätzen zu können, betrachten wir das verallgemeinerte Filter mit variablem Parameter p :

$$H_{\text{dec}}(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \frac{1}{p}}. \quad (6.88)$$

In einem konkreten Anwendungsfall, in dem die Form der zu erwartenden Spektren im Voraus weitestgehend bekannt ist, kann p so eingestellt werden,

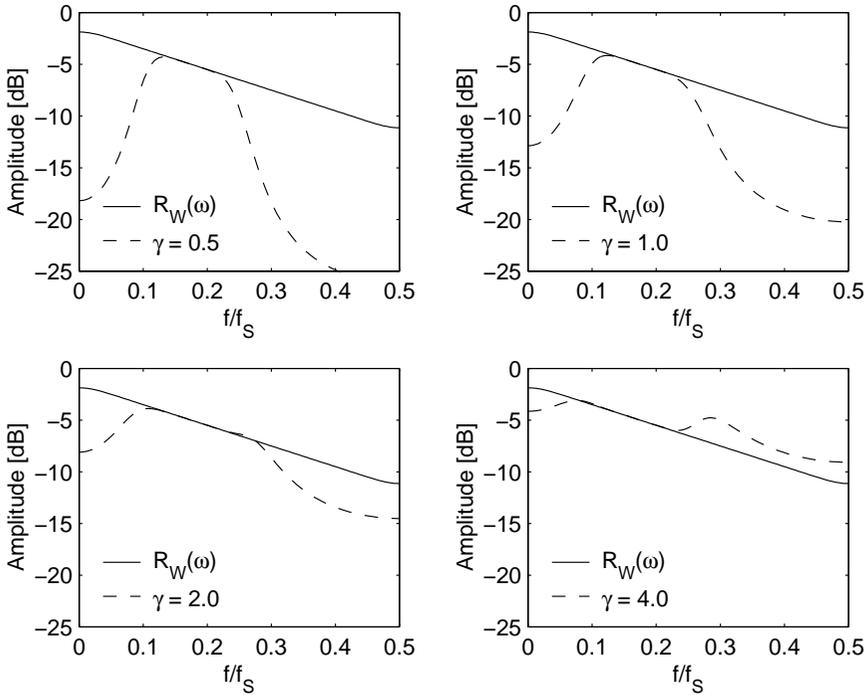


Abb. 6.3: — Relatives Spektrum $R_W(\omega)$, - - - Erwartungswerte der Entfaltungen, $R_{\hat{W}}(\omega)$, mit akausalem Entfaltungs-Filter für $\langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} R_Y(\omega) d\omega / \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega$ und $p = \gamma \cdot \langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle / \sigma_V^2$ mit $\sigma_V^2 = -40$ dB. Amplitudengang $|H(\omega)|^2$ wie in Abb. 6.2.

dass optimale Kompromisse für die Schätzung von relativen Rückstreupek-
 tren innerhalb eines bestimmten Bandbereichs erreicht werden. Auf diese
 Weise fungiert p als *filter tuning parameter* (einfaches Beispiel in [Men81]).

Dies ist in Abb. 6.3 demonstriert, indem mit $p = \gamma \cdot \langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle / \sigma_V^2$ ein zusätzli-
 cher variabler Multiplikator γ eingeführt wurde. Mit dieser Sichtweise wird
 die naturgegebene Schwankung des Schätzwerts $\hat{\sigma}_W^2$ erfasst. Die Abbildung
 für $\gamma = 1$ zeigt auch das typische Verhalten des (akausalen) Entfaltungs-
 Filters, welches das Rauschen im Sperrbereich des Bandpasses $H(\omega)$ zu un-
 terdrücken sucht. Ein Minimum-Varianz-Schätzer ist eben in der Regel nicht
 erwartungstreu, und dieses Verhalten zeigt sich auch hier.

Der Ansatz mit variablem p erlaubt auch die Beurteilung des Verhaltens der Entfaltung, wenn z.B. σ_W^2 zu hoch oder zu niedrig gewählt wurde. Es geht in diesem Zusammenhang auch um Einschätzung der Robustheit der Entfaltung bei unsicherem $\hat{\sigma}_W^2$ oder $\hat{\sigma}_V^2$. Wir setzen daher

$$p = \frac{\hat{\sigma}_W^2}{\hat{\sigma}_V^2} = \frac{\gamma \cdot \sigma_W^2}{\sigma_V^2} . \quad (6.89)$$

Für sehr große γ gilt dann

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} R_{\hat{W}}(\omega) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|H(\omega)|^2}{\left(|H(\omega)|^2 + \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2}\right)^2} \cdot \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2\right) \quad (6.90)$$

$$= R_W(\omega) + \frac{\sigma_V^2}{|H(\omega)|^2} . \quad (6.91)$$

Hieraus wird deutlich, dass selbst mit viel zu hoch geschätztem σ_W^2 innerhalb der Übertragungsbandbreite des Systems, wo $|H(\omega)|^2 \gg \sigma_V^2$ ist, immer noch gute Schätzwerte für das relative Rückstreupektrum $R_W(\omega)$ gewonnen werden können. Nur in den Frequenzbereichen mit schlechtem Signal-Rausch-Verhältnis, d.h. $|H(\omega)|^2 \approx \sigma_V^2$ (oder gar $|H(\omega)|^2 < \sigma_V^2$) wird $R_W(\omega)$ viel zu hoch geschätzt, was sich insgesamt in einer zu hohen Varianz $\sigma_{\hat{W}}^2$ des entfaltenen Signals niederschlägt.

In der anderen Richtung, $\gamma \rightarrow 0$, können wir zum Zwecke einer Abschätzung innerhalb der Übertragungsbandbreite, d.h. mit $|H(\omega)|^2 \gg \sigma_V^2$, folgende Näherung angeben:

$$R_{\hat{W}}(\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2 \cdot |H(\omega)|^2}\right)^2} \cdot \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2\right) \quad (6.92)$$

$$\approx \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2 \cdot |H(\omega)|^2}\right)^2} \cdot R_W(\omega) . \quad (6.93)$$

Tolerieren wir maximal ein Prozent Fehler, müssen wir fordern:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2 \cdot |H(\omega)|^2}\right)^2} > 0,99 \quad (6.94)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2 \cdot |H(\omega)|^2} < 0,005 . \quad (6.95)$$

Hierbei ist $|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2 / \sigma_V^2$ das Signal-Rausch-Verhältnis des resultierenden Signals $z(t)$:

$$\frac{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2}{\sigma_V^2} = 30 \text{ dB} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma > 0,2 \quad (6.96)$$

$$\frac{|H(\omega)|^2 \cdot \sigma_W^2}{\sigma_V^2} = 40 \text{ dB} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma > 0,02 . \quad (6.97)$$

Diese Abschätzungen sowie der Fehler für $\gamma \rightarrow \infty$ verdeutlichen, wie robust das vorgestellte Entfaltungsfiler bezüglich der Schätzung von relativen Rückstreuenspektren innerhalb von Bandbreiten genügend hohen Signal-Rausch-Verhältnisses ist.

Eine weitere Fehlerquelle in der Entfaltung ist die Unsicherheit in der geschätzten Referenz $H(\omega)$. Im ungünstigsten Fall ist diese Referenz selbst mit Rauschen behaftet. Dann ist das Leistungsdichtespektrum des entfalteten Signals

$$R_{\hat{W}}(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2 + \sigma_V^2}{\left(|H(\omega)|^2 + \sigma_V^2 + \frac{\sigma_V^2}{\gamma \cdot \sigma_W^2}\right)^2} \cdot \left(|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2\right) . \quad (6.98)$$

Um das Verhalten dieser Entfaltung weiter zu beleuchten, sind wiederum Grenzwertbetrachtungen hilfreich:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} R_{\hat{W}}(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2 \cdot R_W(\omega) + \sigma_V^2}{|H(\omega)|^2 + \sigma_V^2} . \quad (6.99)$$

Dieser Ausdruck entspricht dem der Division von Spektren, bei der keinerlei Rauschunterdrückung stattfindet. Es ist bemerkenswert, dass dieser Grenzwert mit dem üblichen $\gamma \approx 1$ auch bei $\sigma_W^2 / \sigma_V^2 \gg 1$ schon gut angenähert wird, was die numerische Suche nach einem optimalen γ innerhalb eines „vernünftigen“ Bereichs (zwischen 0,1 und 10) nutzlos macht (siehe nächsten Abschnitt).

6.7 Beispiele und Optimierung: Stationärer Fall

Ziel dieses Abschnittes ist es, für typische relative Rückstreuenspektren die Fehler der beiden vorgestellten Entfaltungsmethoden miteinander zu vergleichen, also der Entfaltung im Frequenzbereich (Division von Spektren) und der Entfaltung im Zeitbereich (Kalman-Interpolation nach MENDEL).

Zudem sollen noch einige praktische Aspekte der MENDEL-Entfaltung beleuchtet werden, um schließlich zu einer optimierten Rekonstruktion der relativen Rückstreuenspektren zu gelangen.

6.7.1 Parameter der Berechnungen

Die nun folgenden Fehlerabschätzungen können nur beispielhafter Natur sein, da allgemein gültige Rechnungen wohl kaum möglich sind. Deshalb werden typische Verläufe von Rückstreuenspektren verwendet, wie sie in der Literatur zu finden sind. Bei Echos aus biologischem Weichgewebe ist eine Linearisierung der logarithmierten Spektren in guter Näherung möglich, zumindest innerhalb einer gewissen Bandbreite (Abschnitt 3.3, S.14). Nehmen wir also für die relativen Rückstreuenspektren folgendes Modell an:

$$10 \log_{10} R_W(\omega) \approx b_0 + b_1 (\omega - \omega_0) , \quad b_0 = 10 \log_{10} R_W(\omega_0) . \quad (6.100)$$

Einige typische Werte für b_0 und b_1 , wie sie von verschiedenen Autoren gefunden wurden, sind in Tab. 6.2 aufgelistet. Für die numerischen Beispiele sowie für die späteren Simulationen kommt eine FIR-Realisierung dieses Filters zum Einsatz (IFFT des Amplitudengangs in (6.100), mit HAMMING-Fenster gewichtet, Filterlänge 31 Samples).

6.7.2 Methode der Berechnungen

Da die Schätzung von relativen Rückstreuenspektren sowie deren Parametrisierung im Mittelpunkt steht, bietet sich als Gütekriterium der Gesamtfehler innerhalb der Bandbreite des Gesamtübertragungssystems an. Für diskrete Spektren ist dann der mittlere quadratische Fehler (mean squared error, MSE):

$$\varepsilon^2(\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \left| 10 \log_{10} R_{\hat{W}}(\omega, \gamma) - 10 \log_{10} R_W(\omega) \right|^2 ,$$

$$N = \# \{ \omega_1, \dots, \omega_2 \} , \quad (6.101)$$

Parameter	Organ	relativ zu ...	Literatur
$b_1 = -2,3 \dots 0$ dB/MHz $b_0 = -45 \dots -30$ dB	Prostata	Rayleigh Streuung ($\sim \omega^4$) und Fokus	[SES99]
$b_1 = -2 \dots -3$ dB/MHz $b_0 = -15 \dots 0$ dB	Prostata	Speziell hergestelltes Phantom	[JGC+00]
$b_1 = -2 \dots +2$ dB/MHz $b_0 = -5 \dots 10$ dB	Leber	Leber	[Hui98]

Tab. 6.2: Typische Parameter des linearen Modells für Rückstreuenspektren aus Weichgewebe.

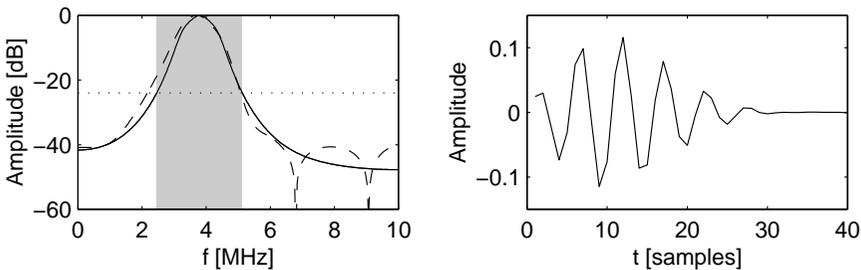


Abb. 6.4: **Links:** — Amplitudenspektrum eines Modells für $|H(\omega)|$, - - - gemessenes Echospektrum aus einem Phantom in der Gegend des Fokus', abzüglich des gemessenen Rauschpegels von -36 dB (relativ zum Maximum bei f_0). **Rechts:** Impulsantwort $h(t)$ des Modells (6.102) (minimalphasig).

und $p = \gamma \cdot \langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle / \sigma_V^2$ sowie $\langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} R_Y(\omega) d\omega / \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega$ als Filterparameter im Entfaltungsfiler (6.88) zur Berechnung von $R_{\hat{W}}(\omega, \gamma)$.

Das verwendete Modell für die Übertragungsfunktion $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ repräsentiert in guter Näherung den Amplitudengang von Piezokeramiken (ähnliches Modell in [Höf95], S.23), und deckt sich gleichermaßen gut mit dem spektralen Verlauf von gemessenen Echos aus einem Phantom (siehe auch Abb. 6.4)

$$h(t) = h_0 \cdot (t/\tau)^2 \cdot e^{-(t/\tau)^2} \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t) \quad (6.102)$$

mit $f_0 = 3,8$ MHz, $f_S = 20$ MHz, $\tau = 2,5/f_0$. Die Frequenzen, bei welchen das Amplitudenspektrum $|H(\omega)|$ um -24 dB vom Maximum abgefallen ist,

werden durch ω_1 und ω_2 markiert. Mit der Wahl $h_0 = 0,338$ liegt das Maximum von $|H(\omega)|$ bei 0 dB. Um später konkrete Beispiele der Entfaltung im Zustandsraum simulieren zu können, wird an den Verlauf von $H(\omega)$ ein ARMA-Modell ($N_C = 5$, $N_A = 6$) angepasst⁵. Alle nun folgenden Beispiele und Berechnungen basieren auf diesem Modell⁶.

6.7.3 Einfluss von σ_W^2

Wie bereits in Abschnitt 6.6 besprochen wurde, hat der Filterparameter σ_W^2 einen gewissen Einfluss auf das Ergebnis der Entfaltung, wenn auch innerhalb der Übertragungsbandbreite des Systems keine wesentlichen Veränderungen zu erwarten sind.

Zunächst ist die Genauigkeit der Schätzvorschrift für $\hat{\sigma}_W^2$ (Gleichung (6.87)) im Umfeld unserer Modellspektren (6.100) für $R_W(\omega)$ von Interesse. Plausiblerweise verschlechtert sich die Schätzung umso mehr, je weiter sich $R_W(\omega)$ vom flachen Verlauf entfernt, da dann die Näherung (6.84) zunehmend gröber wird (Abb. 6.5). Der zum Teil doch recht große Fehler von weit über 50 % wirkt sich weniger auf die Ergebnisse innerhalb der Übertragungsbandbreite aus, sondern mehr auf die Leistung der entfalteten Signale insgesamt. Allerdings sind die hohen Fehler auf höhere Frequenzanteile außerhalb der Übertragungsbandbreite zurückzuführen, wo Systemrauschen die Rekonstruktion des relativen Spektrums sowieso verhindert.

Um die Untersuchungen über den Einfluss von σ_W^2 zu vervollständigen, steht noch die Optimierung des Parameters γ in (6.101) aus:

$$\gamma_{\text{opt}} = \min_{\gamma} \varepsilon^2(\gamma) . \quad (6.103)$$

Die Suche des Minimums entspricht einem nichtlinearen Leastsquares-Problem [CL96].

⁵ Numerische GAUSS-NEWTON-Suche des Minimums von

$$\sum_{\omega=-\pi}^{\pi} \left(\frac{\hat{c}_0 + \sum_{\eta=1}^{N_C} \hat{c}_{\eta} e^{-j\omega\eta}}{1 + \sum_{\nu=1}^{N_A} \hat{a}_{\nu} e^{-j\omega\nu}} - H(\omega) \right)^2 ,$$

mit 128 Stützstellen für ω .

⁶ Die Parameter des ARMA-Modells im Einzelnen:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0,0246 & -0,0184 & 0,0086 & -0,0056 & 0,0029 & -0,0002 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1,9538 & 3,6182 & -3,3844 & 2,9283 & -1,2794 & 0,5301 \end{pmatrix}$$

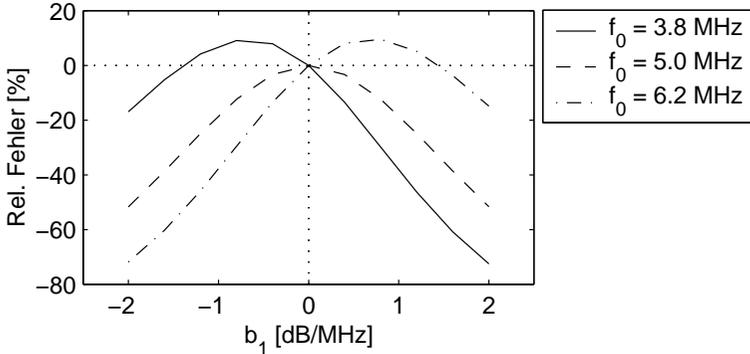


Abb. 6.5: Relativer Fehler $(\langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle - \sigma_W^2) / \sigma_W^2$. Schätzvorschrift für $\hat{\sigma}_W^2$ nach (6.87), Spektrum $R_W(\omega)$ nach (6.100). Rauscheinflüsse wurden vernachlässigt ($R_V(\omega) \equiv 0$). Für ein weißes Spektrum $R_W(\omega) \equiv \text{const.}$, gleichbedeutend mit $b_1 = 0$, ist der Fehler Null.

Die Verläufe des Fehlers $\varepsilon(\gamma)$ in Abb. 6.6 zeigen beispielhaft, dass für verschiedenste SNRs ein Minimum in der Gegend von $\gamma \approx 2$ zu erwarten ist und dass dieses Minimum eine deutliche Verringerung des Fehlers gegenüber $\gamma = 1$ bringt. Der flache Verlauf der Fehlerkurven für größere Werte von γ bestätigt die Grenzwertbetrachtungen aus Abschnitt 6.6 (S.96f.), wo die Robustheit des Entfaltungsfilters bezüglich zu großem γ bereits herausgestellt wurde. (Vorsicht ist allerdings geboten, wenn die lokale Leistung oder die Einhüllende des entfalteten Signals für bildhafte Darstellungen vorgesehen ist, denn dann wirkt sich zu hohes γ ungünstig aus.)

Dass überhaupt ein Minimum von $\varepsilon(\gamma)$ gefunden wird, hat seine Ursache in der mittels γ variierten Bandbreite des Entfaltungsfilters. Mit dieser etwas erhöhten Bandbreite erfährt das Spektrum des entfalteten Signals beiderseits der Übertragungsbandbreite des Referenzsystems eine kleine Anhebung, die der Rekonstruktion von *a priori* exponentiellem Verlauf (linear in dB) der relativen Spektren zum Vorteil gereicht.

Die Ergebnisse in Abb. 6.7 kristallisieren den Kompromiss $\gamma \approx 2$ für eine Vielzahl an Fällen weiter heraus.

Im Falle rauschbehafteter Referenzen, d.h. mit

$$\langle \hat{\sigma}_W^2 \rangle = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} R_Z(\omega) d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 + \sigma_V^2 d\omega} \quad (6.104)$$

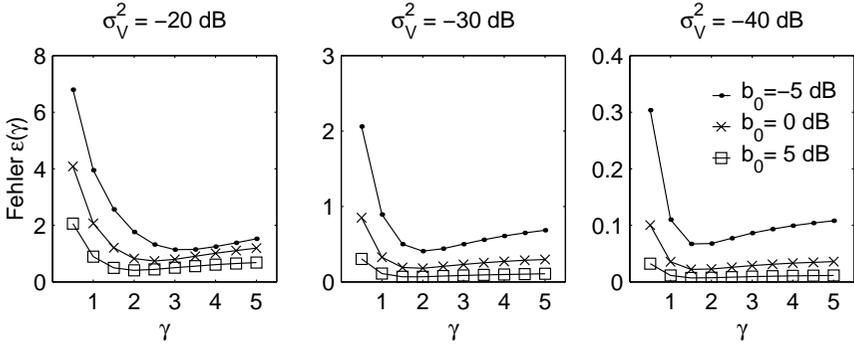


Abb. 6.6: Rauschfreie Referenz. MSE $\varepsilon(\gamma)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$. Der durch Kurzzeitanalyse zu erwartende Bias in den Spektren wurde vernachlässigt. $b_1 = -2$ dB/MHz.

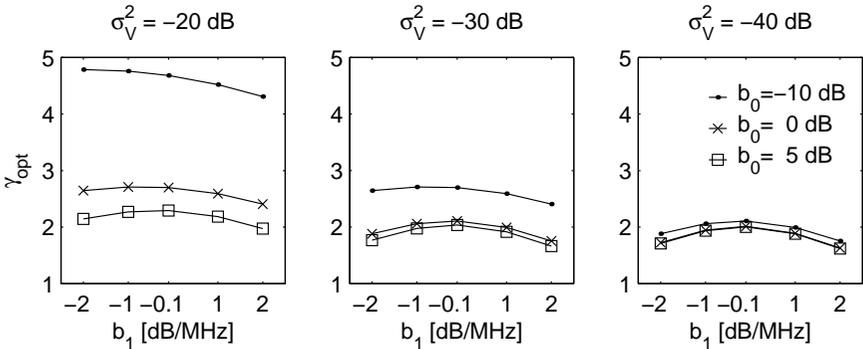


Abb. 6.7: Rauschfreie Referenz. Optimales γ_{opt} , welches den kleinsten MSE von $R_{\hat{W}}(\omega)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$ liefert. Der durch Kurzzeitanalyse zu erwartende Bias in den Spektren wurde vernachlässigt.

ergeben sich ähnliche Verhältnisse, nur dass für kleines σ_V^2 bzw. großes b_0 , in anderen Worten für großes SNR, kein Minimum im Sinne von (6.103) gefunden wird (Abb. 6.8). Das hängt mit dem asymptotischen Verhalten von $R_W(\omega)$ für $\gamma \rightarrow \infty$ zusammen (Gl. (6.99)). Abb. 6.8 verdeutlicht aber, dass der Fehler für $\gamma > 2$ kaum noch abnimmt. Da bei schlechterem SNR dagegen noch ein Optimum in der Gegend von $\gamma \approx 2$ gefunden wird, ist dieser Wert auch hier eine vernünftige Wahl (Abb. 6.9).

Überraschenderweise hat die Minimierung des Fehlers $\varepsilon(\gamma)$ offenbar wenig mit der Fehlerhaftigkeit von $\hat{\sigma}_W^2$ zu tun. So verlangt z.B. bei $b_1 = -2$ dB/MHz der relative Fehler $(\hat{\sigma}_W^2 - \sigma_W^2) / \sigma_W^2$ von fast 80 % (siehe Abb. 6.5) nicht nach einem Ausgleich durch höheres γ .

6.7.4 Einfluss des additiven Rauschens

Das additive Rauschen wird zwar im MENDEL'schen Entfaltungsalgorithmus berücksichtigt, kann aber aufgrund seiner breitbandigen Natur nur bedingt unterdrückt werden. Innerhalb der Übertragungsbandbreite von $H(\omega)$ findet de facto keine Rauschminderung statt, nur in den angrenzenden Bandbereichen kommt der Kompromiss des WIENER-Filters zum Tragen.

Wie aus Abb. 6.10 hervorgeht, lohnt sich dieser Kompromiss aber im Vergleich zur Entfaltung im Frequenzbereich, insbesondere wenn das relative Spektrum $R_W(\omega)$ stärker vom weißen Spektrum der Leistung eins abweicht. Für $b_0 = 0$ ist die Entfaltung im Frequenzbereich nicht im Nachteil. Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit den Ausführungen in Abschnitt 6.1.1.

6.7.5 Einfluss der Kurzzeitanalyse

Kommt zu dem Störfaktor Rauschen noch der durch Kurzzeit-FFT verursachte Bias in den Spektren hinzu, ist die Zeitbereichsentfaltung klar im Vorteil, und zwar umso stärker, desto kürzer die Zeitfenster sind und desto steiler $R_W(\omega)$ ist. Ohne den Einfluss der Kurzzeitanalyse (Abb. 6.10) stehen die beiden Entfaltungsmethoden für $b_0 = 0$ ungefähr pari. Deshalb bietet es sich an, den Einfluss der Fensterung im Zeitbereich bei diesem Wert zu analysieren, wobei die auf Rauschen zurückzuführenden Fehler trotzdem berücksichtigt werden können. (Das akausale Entfaltungs-Filter bekommt mit zunehmendem Rauschen mehr und mehr Bandpasscharakter mit höherer Sperrbanddämpfung. Als Folge hiervon entsteht bei der Kurzzeit-Spektralschätzung nach der Entfaltung auch ein größerer Bias.)

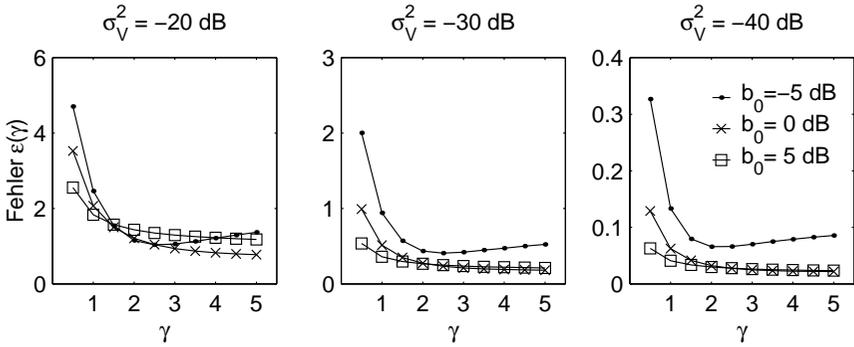


Abb. 6.8: Rauschbehaftete Referenz. MSE $\varepsilon(\gamma)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$. Der durch Kurzzeitanalyse zu erwartende Bias in den Spektren wurde vernachlässigt. $b_1 = -2$ dB/MHz.

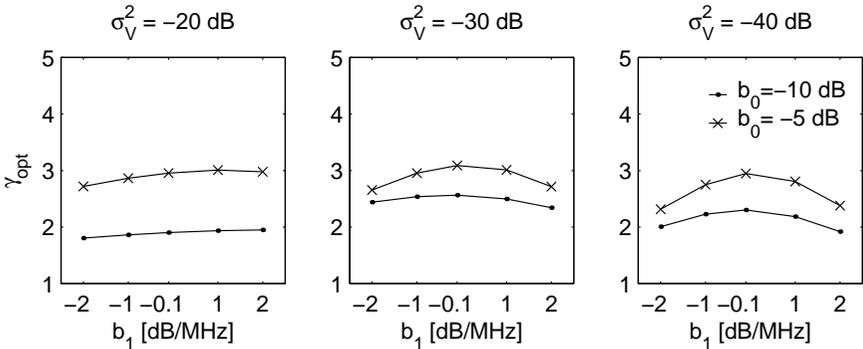


Abb. 6.9: Rauschbehaftete Referenz. Optimales γ_{opt} , welches den kleinsten MSE von $R_{\hat{W}}(\omega)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$ liefert. Der durch Kurzzeitanalyse zu erwartende Bias in den Spektren wurde vernachlässigt.

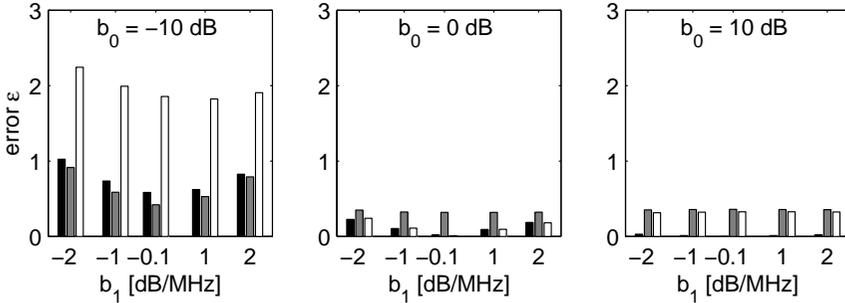


Abb. 6.10: Fehler $\varepsilon(\gamma = 2)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$ für verschiedene Formen des relativen Spektrums $R_W(\omega)$.

■ MENDEL-Entfaltung, rauschfreie Referenz. ■ MENDEL-Entfaltung, rauschbehaftete Referenz. □ Division der rauschbehafteten Spektren. $\sigma_V^2 = -30$ dB. Der durch Kurzzeitanalyse zu erwartende Bias in den Spektren wurde vernachlässigt.

Abb. 6.11 zeigt die Fehler in Abhängigkeit des Fenstertyps für das realistische $\sigma_V^2 = -30$ dB. Um die Unterschiede möglichst zu betonen, wurde ein sehr kurzes Fenster von 32 Samples und ein steiles $R_W(\omega)$ mit $b_1 = -2$ dB/MHz gewählt. Als Ergebnis kann man festhalten, dass die nach der Zeitbereichsentfaltung gewonnen Spektren erwartungsgemäß wesentlich weniger durch die Fensterung beeinflusst werden als die Resultate der Division von Spektren. Das KAISER-Fenster mit -30 dB oder -40 dB Sperrbanddämpfung ist für beide Arten der Entfaltung ein guter Kompromiss zwischen Frequenzauflösung und Leakage (weil $\sigma_V^2 = -30$ dB). Es könnten auch TSCHEBYSCHEFF-Fenster verwendet werden, doch ziehen deren Unregelmäßigkeiten (Anhebung an den beiden Enden des Fensters) zusätzlichen Bias nach sich, der sich vor allem bei größeren Fensterlängen bemerkbar macht.

Abb. 6.12 veranschaulicht schließlich die Auswirkung der Fensterlänge. Während die Schätzung der quasi-weißen Spektren nach der Entfaltung im Zeitbereich kaum eine Abhängigkeit von der Fensterlänge offenbart, entstehen durch die Entfaltung im Frequenzbereich zum Teil beträchtliche Fehler.

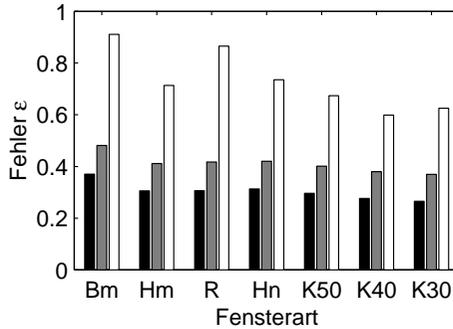


Abb. 6.11: Fehler $\varepsilon(\gamma = 2)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$ für verschiedene Fensterfunktionen (Bm: BLACKMAN, Hm: HAMMING, R: Rechteck, Hn: HANN, Kx: KAISER mit x dB Sperrbanddämpfung), Fensterlänge 32 Samples. MENDEL-Entfaltung, rauschfreie Referenz. MENDEL-Entfaltung, rauschbehaftete Referenz. Division der rauschbehafteten Spektren. $b_0 = 0$ dB. $b_1 = -2$ dB/MHz.

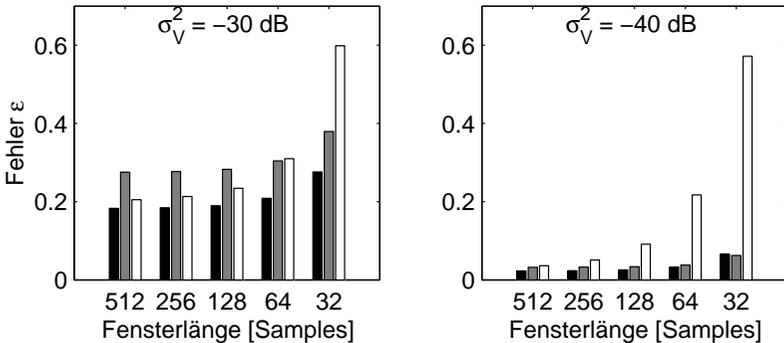


Abb. 6.12: Fehler $\varepsilon(\gamma = 2)$ innerhalb der -24 dB-Bandbreite von $|H(\omega)|$ für verschiedene Fensterlängen. MENDEL-Entfaltung, rauschfreie Referenz. MENDEL-Entfaltung, rauschbehaftete Referenz. Division der rauschbehafteten Spektren. KAISER-Fenster mit 40 dB Sperrbanddämpfung. $b_0 = 0$ dB. $b_1 = -2$ dB/MHz.

6.8 Instationärer Fall

Im Zusammenhang mit der Entfaltung können Instationaritäten auf mehreren Ebenen auftreten: Das „Eingangssignal“, also das zu rekonstruierende Signal $w(t)$ kann instationär sein, aber auch die Referenzübertragungsfunktion und die Rauschleistung können zeitlich variieren. Die Referenz wird sich in der Regel nur langsam verändern, wie die Ergebnisse aus Abschnitt 5.6 (S.63ff.) gezeigt haben. Die größten Schwankungen sind von der Rückstreuung im Gewebe zu erwarten, im Extremfall kann dies die impulsartig starke Rückstreuung eines in schwach streuendem Medium eingebetteten kleinen schallharten Gegenstandes sein.

Entscheidend für das Verhalten der Entfaltung unter solch extremen Bedingungen ist die Länge der Impulsantwort des Entfaltungsfilters. Aber auch die geschätzte Leistung $\hat{\sigma}_W^2$ hat einen bemerkenswerten Einfluss auf das Ergebnis, wenn es um die Rekonstruktion von scharfen Kanten geht. Dagegen spielt die Einschwingzeit der gesamten Entfaltung wegen eventuell ungünstig gewählter Anfangsparameter eher eine untergeordnete Rolle.

6.8.1 Länge der Impulsantwort

In den vorigen Abschnitten wurde stets stillschweigend von der Äquivalenz zwischen akausalem Entfaltungsfilter nach WIENER und MENDEL'schem Entfaltungsalgorithmus ausgegangen, doch strenggenommen gilt diese Äquivalenz nur für $t \rightarrow \infty$. Nach der Länge des WIENER-Entfaltungsfilters zu urteilen (Abb. 6.13), beschränkt sich der Einfluss des Filters jedoch auf eine kleine Zeitumgebung. Die Beispiele in Abb. 6.13 verdeutlichen zudem den akausalen Charakter der Filter (Impulsantwort ungleich Null für Zeiten $t < 0$), und die zunehmende Länge der Impulsantwort mit kleiner werdendem Verhältnis σ_V^2/σ_W^2 . Lässt man nur langsame Änderungen von σ_W^2 zu, können (zusammen mit den ebenfalls langsamen Änderungen in der Referenz) für die Rekonstruktion von instationären Ultraschallechos sehr ähnliche Verhältnisse erwartet werden.

6.8.2 Rekonstruktion von Impulsen

Die Form der Impulsantworten des Entfaltungsfilters wirkt sich letztlich auch auf die Rekonstruktion von Impulsen in $w(t)$ aus. Mit kleiner werdendem Verhältnis σ_W^2/σ_V^2 wird die Höhe der geschätzten Impulse immer geringer, bis sie schließlich im Rauschen untergehen.

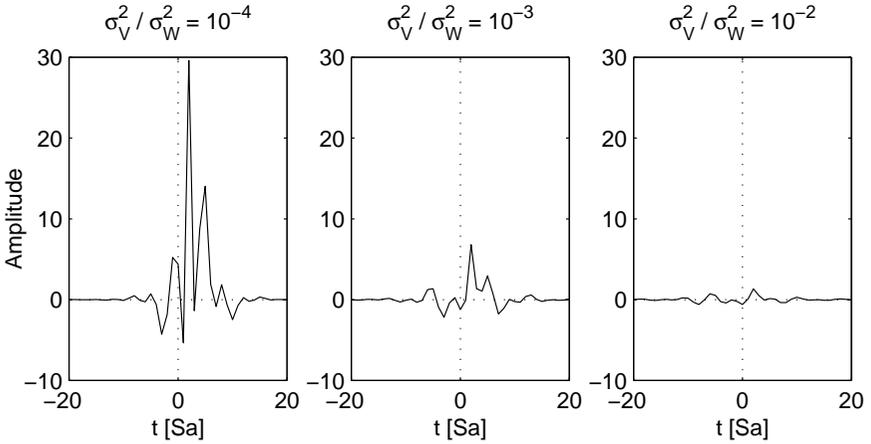


Abb. 6.13: Impulsantworten des Entfaltungsfilters nach WIENER (6.76). $H(\omega)$ wie in (6.102).

Mit den folgenden analytischen Zusammenhängen wird der Sachverhalt etwas konkreter. Nehmen wir an, dass sich die Grenze zwischen zwei verschiedenen Medien durch einen Impuls⁷ in der Reflektivität äußert (Amplitude r proportional dem Reflexionskoeffizienten):

$$w(t) = r \cdot \delta(t) . \quad (6.106)$$

Unter der Voraussetzung, dass sich das Referenzsystem und die Rauschleistung in einer gewissen Umgebung des Impulses nicht wesentlich ändern, ist der entfaltete Impuls die additive Überlagerung eines verzerrten Impulses und Rauschens:

$$\begin{aligned} \hat{w}(t) &= h_{\text{dec}}(t) * (h(t) * w(t) + v(t)) \\ &= h_{\text{dec}}(t) * (h(t) * r\delta(t) + v(t)) \\ &= r \cdot h_{\text{dec}}(t) * h(t) + h_{\text{dec}}(t) * v(t) \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$R_{\hat{W}}(\omega) = r^2 \cdot |H_{\text{dec}}(\omega) \cdot H(\omega)|^2 + |H_{\text{dec}}(\omega)|^2 \cdot \sigma_V^2 . \quad (6.108)$$

⁷ Da hier nur zeitdiskrete Probleme behandelt werden, lautet die Definition des Impulses:

$$\delta(t) \equiv \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.105)$$

Dieser diskrete Impuls ist nicht mit der Delta-Distribution im Kontinuierlichen zu verwechseln, wenngleich eine enge Verwandtschaft bezüglich systemtheoretischer Eigenschaften besteht.

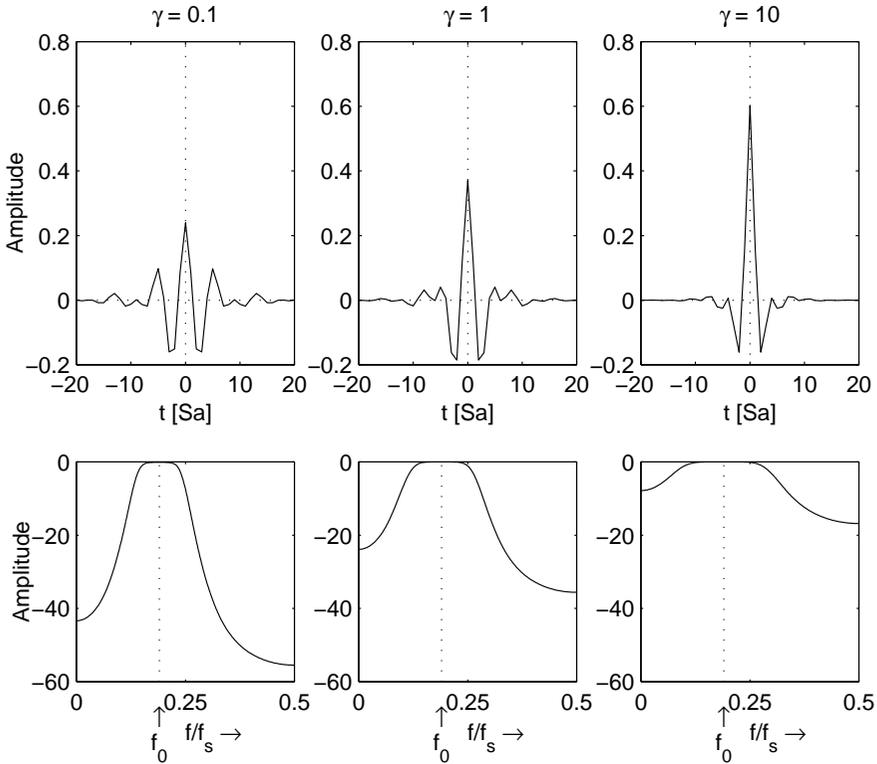


Abb. 6.14: Impulse nach der Entfaltung mit dem Entfaltungsfiler nach WIENER (6.76). $H(\omega)$ wie in (6.102).

Für das Leistungsdichtespektrum erhält man das gleiche Ergebnis, wenn $w(t)$ weißes Rauschen mit der Leistung $\sigma_W^2 = r^2$ ist. Der linke Summand in Gleichung (6.108) beschreibt das quadrierte Amplitudenspektrum eines determinierten Signals, während der rechte Summand ein echtes Leistungsdichtespektrum im statistischen Sinne darstellt. Beispiele für den linken Summanden werden in Abb. 6.14 gezeigt.

Genauso wie bei der Rekonstruktion von relativen Rückstreupektrern tritt auch hier das praktische Problem auf, wie groß und wie genau idealerweise der Filterparameter σ_W^2 gewählt werden soll, oder mit anderen Worten, wie robust sich die Rekonstruktion von Impulsen mit unsicheren $\hat{\sigma}_W^2$ verhält. Deshalb definieren wir hier wie im letzten Kapitel einen variablen Multiplikator γ , der das vorgegebene „wahre“ σ_W^2 verändert: $p = \sigma_V^2 / (\gamma \cdot \sigma_W^2)$.

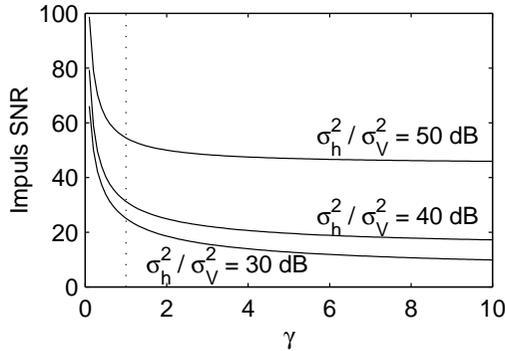


Abb. 6.15: Impuls SNR: Höhe des entfaltenen Impulses $\max_t \{h_{\text{dec}}(t) * h(t)\}$ im Verhältnis zum Rauschhintergrund $|H_{\text{dec}}(\omega)| \cdot \sigma_V$, in Abhängigkeit von γ . Siehe auch (6.107), (6.108). $H(\omega)$ wie in (6.102). $\sigma_h^2 \equiv \sum_{t=0}^T h^2(t)$ mit $T = 30$, $f_0/f_S = 3,8/20$.

Wie Abb. 6.14 demonstriert, variiert die Höhe des entfaltenen Impulses je nach gewähltem γ beträchtlich. Dagegen offenbart sich die Amplitude bei der Mittenfrequenz f_0 als sehr robust. Aus dieser Abbildung könnte man schließen, dass ein höheres γ zu einer besseren Annäherung an die ursprüngliche Höhe des Impulses führt. Allerdings erhöht sich dann auch die Rauschleistung, die in (6.108) durch den zweiten Summanden repräsentiert wird. Deshalb ist in jedem Falle das Verhältnis der Höhe des entfaltenen Impulses zum Rauschhintergrund zu beachten. Das Ergebnis in Abb. 6.15 weist somit in die entgegengesetzte Richtung, d.h. γ sollte eher klein gewählt werden, da sich der entfaltete Impuls sonst schlechter vom Rauschhintergrund abhebt.

6.8.3 Konsequenzen für die Schätzung von σ_W^2

Beim *In-vivo*-Ultraschall sind Organgrenzen, Blutgefäße etc. für Reflexionsstellen verantwortlich, und somit ist der Impuls in $w(t)$ in der Regel auf beiden Seiten mit zufälligen Rückstreuensignalen des angrenzenden Gewebes umgeben. Würde man nun das hohe σ_W^2 der Reflexionsstelle auch für die Entfaltung der benachbarten schwach streuenden Gewebe einsetzen, wäre dort die Leistung des entfaltenen Signals viel zu hoch, und in ungünstigen Fällen können sogar zusätzliche Impulse auftreten, die als reine Artefakte zu werten wären. Demzufolge ist eine zuverlässige Entfaltung von *In-vivo*-Ultraschallechos, die sich bekanntlich durch starke Heterogenität auszeich-

nen, nur mit möglichst hoch aufgelöster Schätzung von σ_W^2 möglich. Da aber andererseits mit erhöhter örtlicher Auflösung von $\hat{\sigma}_W^2$ auch die Varianz $\text{var} \left\{ \hat{\sigma}_W^2 \right\}$ zunimmt, muss ein Kompromiss gefunden werden.

Während sich die Schätzung von relativen Rückstreuenspektren aus entfalteten Echos als robust gegenüber Schwankungen des Filterparameters σ_W^2 erwiesen hat, stellten sich Schätzungen von Impulshöhe und lokaler mittlerer Leistung als anfällig heraus, was nach niedriger Varianz $\text{var} \left\{ \hat{\sigma}_W^2 \right\}$ verlangt.

Eine mögliche Kompromisslösung ist mit dem Medianfilter zu erreichen, der eine gewisse Mittelwertbildung (Glättung) verrauschter Daten ohne ein Verschleifen scharfer Kanten ermöglicht [Jäh93], S.122f, [KZ95], S.269ff. Scharfe Impulse werden zwar auch ausgeglättet, was im Lichte der Ergebnisse des vorigen Abschnittes 6.8.2 aber nicht unbedingt ins Gewicht fällt: Obwohl die entfalteten Impulse mit dem dann zu niedrigen Filterparameter σ_W^2 nicht die richtige Höhe erreichen, werden sie trotzdem mit gutem Kontrast zum Rauschhintergrund rekonstruiert.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit hat sich für die Bestimmung von $\hat{\sigma}_W^2$ folgende Vorgehensweise bewährt:

1. Den eventuell vorhandenen Gleichanteil der HF-Echos beseitigen.
2. Die lokale mittlere Leistung entlang jedes A-Scans bestimmen: $\hat{\sigma}_Z^2(t) = \sum_{\tau=-T_W}^{T_W-1} z(t+\tau)$ mit der Fenstergröße $2T_W = 32$ und der Fensterverschiebung $t = k \cdot \Delta_t$, $\Delta_t = 16$, $k \in \mathbb{N}$ (bei $f_0 \approx 3,5$ MHz, $f_s = 20$ MHz).
3. Die Ergebnisse aller A-Scans zu einer Matrix zusammenfassen (jede Spalte enthält einen A-Scan).
4. Einen Medianfilter der Größe 11×5 (Zeilen \times Spalten) auf diese Matrix anwenden. Dieser Wahl haftet natürlich eine gewisse Willkür an, doch hängt der optimale Kompromiss wesentlich vom Bildinhalt ab.
5. $\hat{\sigma}_W^2$ nach Gl. (6.87), S.96 schätzen.
6. Resultat interpolieren, so dass für jeden Abtastwert $z(t)$ ein $\hat{\sigma}_W^2(t)$ zur Verfügung steht.

6.8.4 Beispiel: Spektralschätzung in instationärer Umgebung

Zur weiteren Veranschaulichung der Entfaltung und der Schätzung von Spektren nach der Entfaltung diene das nun folgende Beispiel. Die einzelnen Schritte der Simulationsstudie waren:

1. Weißes Rauschen (normalverteilt) der Leistung eins wurde in zwei Zeitabschnitten (regions of interest, ROIs) mit FIR-Filtern verändert, so dass $10 \cdot \log_{10} R_W(\omega) = b_0 + b_1 \cdot (\omega - \omega_0)$. ROI#1 mit $b_0 = 0$, $b_1 = -2$ dB/MHz. ROI#2 mit $b_0 = 5$, $b_1 = 2$ dB/MHz.
2. Das Resultat wurde mit einem zeitvarianten ARMA-System gefaltet (zeitvariante Faltung im Zustandsraum, ARMA-Modell aus RPEM Systemidentifikation von Echos aus Streuphantom, Abb. 5.9 auf S.72).
3. Normalverteiltes Rauschen der Leistung $\sigma_V^2 = -30$ dB wurde hinzugefügt.
4. Bestimmung von $\hat{\sigma}_W^2$, wie im vorigen Abschnitt beschrieben (abweichend davon: Fenstergröße $2T_W = 64$, Fensterverschiebung $\Delta_t = 32$; Medianfilter nur eindimensional mit Länge = 11). Ergebnis in Abb. 6.16.
5. Entfaltung nach MENDEL mit $\gamma = 2$. Die Referenz ist das System aus Punkt 2.
6. Kurzzeit-Spektralanalyse mit gemittelten Periodogrammen. Länge der FFT: 64 Samples. Fensterfunktion: BLACKMAN-Fenster. Mittelwertbildung für jede Fensterverschiebung aus zehn statistisch unabhängigen Simulationen. Ergebnisse innerhalb der beiden ROIs in Abb. 6.17.
7. Lineare Regression in allen logarithmierten Leistungsdichtespektren (dB-Skala), um die Schätzwerte \hat{b}_0 , \hat{b}_1 zu erhalten. Bandbreite für die Regression: 2,26...5 MHz. Ergebnisse in Abb. 6.18.

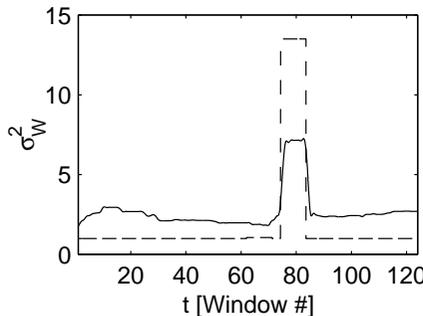


Abb. 6.16: - - - Wahrer Verlauf $\sigma_W^2(t)$. — Geschätzter Verlauf $\hat{\sigma}_W^2(t)$ nach (6.87) (Abschnitt 6.5.4) sowie Abschnitt 6.8.3. Zum Schätzfehler siehe Abb. 6.5.

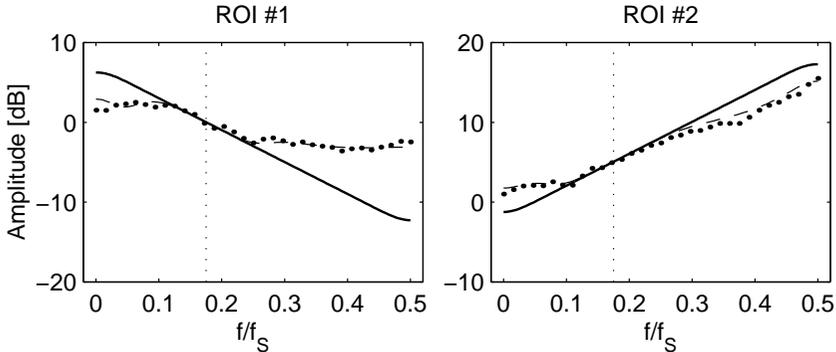


Abb. 6.17: — Wahres relatives Spektrum, $R_W(\omega)$, innerhalb der ROI. - - - Erwartungswert des geschätzten relativen Spektrums, $R_{\hat{W}}(\omega)$ nach Gleichung (6.79). \cdots Mittelwert aus allen $\hat{R}_W(\omega)$ innerhalb der ROI. $H(\omega)$ wie in (6.102).

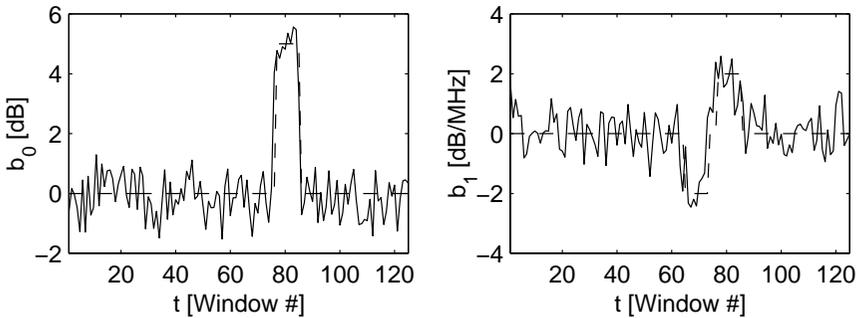


Abb. 6.18: **Links:** - - - Wahrer Verlauf $b_0(t)$. — Geschätzter Verlauf $\hat{b}_0(t)$. **Rechts:** - - - Wahrer Verlauf $b_1(t)$. — Geschätzter Verlauf $\hat{b}_1(t)$.

6.9 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde untersucht, inwieweit ein spezieller Entfaltungsalgorithmus, der auf der KALMAN-Interpolation beruht, für die Entfaltung von Ultraschallechos geeignet ist. Wie gezeigt wurde, schränkt der Algorithmus die weitere Verarbeitung der entfalteten Echos in keiner Weise ein, da sowohl relative Rückstreuenspektren als auch instationäre Bereiche wie Impulse und sprunghafte Änderungen des Rückstreuerverhaltens sehr gut rekonstruiert werden. Für die Schätzung von relativen Rückstreuenspektren ist die

Entfaltung, die hier im Zeitbereich erfolgt, im Vergleich zu der üblichen Methode, der Division von lokalen Kurzzeitspektren, sogar deutlich im Vorteil. Somit eignet sich der Algorithmus hervorragend für eine Standardisierung von Ultraschallechos aus unterschiedlichsten Geräten.

7. Schätzung von Rückstrespektren

Aus den Rückstrespektren von Ultraschallechos können zweierlei Informationen über Eigenschaften des beschallten Mediums gewonnen werden: Die frequenzabhängige Rückstreuamplitude und die ebenfalls von der Frequenz abhängige Dämpfung. In der Diskussion über die für eine Gewebedifferenzierung relevanten Parameter (Kapitel 3) wurde bereits herausgestellt, dass für die spektralen Parameter *logarithmierte Spektren* (dB-Skala) zugrunde gelegt werden, vor allem weil sich dann Linearisierungen der (korrigierten) Rückstrespektren anbieten, sofern es sich beim Medium um biologisches Weichgewebe handelt.

Da aber selbst in der allgemeinen Literatur über Spektralschätzverfahren [Kay88, Koo95, KK98] nicht auf die statistischen Eigenschaften von den hier wichtigen *logarithmierten* Spektren eingegangen wird, soll dieses Kapitel eine entsprechende Analyse für die *klassischen* Periodogramm-basierten Spektralschätzer bieten, insbesondere im Hinblick auf die Forderung, mit möglichst wenig Datenmaterial (hohe Ortsauflösung von Parameterbildern) Schätzwerte mit geringer Varianz und gleichzeitig akzeptabel geringer Verfälschung (Bias) zu erreichen. Ein Großteil des Kapitels wurde in [Gün01a] veröffentlicht.

7.1 Theoretische Grundlagen

Jeder Entwurf eines statistischen Schätzers zielt auf erwartungstreue Ergebnisse mit niedriger Varianz. In der Spektralschätzung kann niedrige Varianz auf zweierlei Weise erreicht werden: Die erste Methode ist es, einen Mittelwert aus einigen statistisch unabhängigen Periodogrammen des gleichen stochastischen Prozesses zu bilden. Die Periodogramme durch Filterung im Frequenzbereich zu glätten ist die zweite Möglichkeit, aber in diesem Fall müssen wir darauf achten, dass dies mit einem Verlust an Frequenzauflösung verbunden ist.

Dieses Kapitel konzentriert sich auf die Untersuchung von Periodogrammen mit logarithmischer Skalierung, und zwar sowohl nach Mittelwertbildung als auch nach Glättung. Deshalb ist der Ausgangspunkt die statische Analyse des Periodogramms mit linearer Amplitude.

Für zufällige Zeitreihen definiert das Theorem von WIENER-CHINTCHINE das *Leistungsdichtespektrum* als Fourier-Transformation der Autokorrelationsfolge. Wir können einen Schätzwert dieses Leistungsdichtespektrums erhalten, indem wir das *Periodogramm* berechnen (durch hochgestelltes ^{per} gekennzeichnet):

$$\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \equiv |X(\omega)|^2 \quad (7.1)$$

$$\text{mit} \quad X(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega t}, \quad (7.2)$$

wobei $X(\omega)$ die diskrete Fourier-Transformation eines Ausschnittes von $x(t)$ ist, skaliert mit $1/\sqrt{T}$ ($t, t_0 \in \mathbb{Z}$ und $T \in \mathbb{N}^+$). Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f/f_S$ ist hier immer relativ zur Abtastfrequenz f_S gemeint. Wenn wir dies in Real- und Imaginärteil aufspalten, erhalten wir

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \text{Re}X(\omega) + j \text{Im}X(\omega) \\ \rightsquigarrow \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) &= [\text{Re}X(\omega)]^2 + [\text{Im}X(\omega)]^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Für $T \rightarrow \infty$ sind Real- und Imaginärteil statistisch unabhängig voneinander und sie haben beide eine Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz σ_R^2 gemäß ([Koo95]; $R_X(\omega)$ ist das wahre Leistungsdichtespektrum)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_R^2(\omega) = \frac{1}{2} R_X(\omega). \quad (7.4)$$

Daraus folgt, dass der Ausdruck

$$\frac{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)}{\sigma_R^2(\omega)} = \frac{[\text{Re}X(\omega)]^2}{\sigma_R^2(\omega)} + \frac{[\text{Im}X(\omega)]^2}{\sigma_R^2(\omega)} \quad (7.5)$$

eine $\chi^2(2)$ -Verteilung mit Mittelwert 2 und Varianz 4 hat [Koo95, Pap91]. Folglich sind Erwartungswert und Varianz des Periodogramms

$$\left\langle \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \right\rangle = 2 \sigma_R^2(\omega) = R_X(\omega) \quad (7.6)$$

$$\text{var} \left\{ \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \right\} = 4 \sigma_R^4(\omega) = R_X^2(\omega) \quad (7.7)$$

für $T \rightarrow \infty$, $\omega \neq 0, \pm \pi$.

Aus diesem Ergebnis schließen wir, dass das Periodogramm kein konsistenter Schätzer ist und dass zur Verringerung der hohen Varianz eine Mittelwertbildung oder Glättung erforderlich ist.

Definieren wir das *Amplitudenspektrum* als Wurzel aus dem Periodogramm:

$$\sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)} = |X(\omega)| = \sqrt{[\text{Re}X(\omega)]^2 + [\text{Im}X(\omega)]^2}. \quad (7.8)$$

Die normierte Variable

$$\frac{\sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)}}{\sigma_R(\omega)} = \sqrt{\frac{[\text{Re}X(\omega)]^2}{\sigma_R^2(\omega)} + \frac{[\text{Im}X(\omega)]^2}{\sigma_R^2(\omega)}} \quad (7.9)$$

hat eine RAYLEIGH-Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(z) = z \cdot e^{-z^2/2}$, $z \geq 0$, deren Mittelwert gleich $\sqrt{\pi/2}$ und deren Varianz gleich $(4 - \pi)/2$ ist. Erwartungswert und Varianz des Amplitudenspektrums sind damit

$$\left\langle \sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_R(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{R_X(\omega)} \quad (7.10)$$

$$\text{var} \left\{ \sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)} \right\} = \frac{4 - \pi}{2} \sigma_R^2(\omega) = \frac{4 - \pi}{4} R_X(\omega) \\ \text{für } T \rightarrow \infty, \quad \omega \neq 0, \pm \pi. \quad (7.11)$$

Die RAYLEIGH-Verteilung im Amplitudenspektrum ergibt sich also zwangsläufig aus der Schätzmethode, und eine Verbindung zur Entstehung von Ultraschallechos kann nur in der Frage bestehen, ob die untersuchten Rückstreustrukturen die Voraussetzungen für obige Herleitung erfüllen, d.h. ob die Rückstreustrukturen stochastischer und (quasi-) stationärer Natur sind. In [Hui98] (S.18) wird nämlich davon ausgegangen, dass die RAYLEIGH-Verteilung im Amplitudenspektrum speziell mit der Natur der Ultraschallechos zusammenhängt. Außerdem ist noch anzumerken, dass sich die RAYLEIGH-Verteilung der Einhüllenden eines Ultraschallechos aus anderen Gründen ergibt (Betrag des analytischen Signals; siehe Abschnitt 8.1.1).

Es sei hier betont, dass alle diese Ergebnisse nur für $T \rightarrow \infty$ exakt gelten. Numerische Beispiele zeigen jedoch schon für kleine Fensterlängen von $T = 32$ Abtastwerten eine sehr gute Übereinstimmung mit diesen theoretischen Ergebnissen.

7.2 Mittelwertbildung aus Spektralschätzungen

Dieser Abschnitt ist der Entwicklung von Ausdrücken für Erwartungswert und Varianz in Amplitudenspektren mit logarithmierter Skala gewidmet, die aus Mittelung *weniger* unabhängiger Schätzungen resultieren: Instationäre Signalabschnitte und begrenzte Beobachtungszeit schränken die Anzahl der für eine Mittelung zur Verfügung stehenden unabhängigen Schätzungen ein (typischerweise < 10).

Zur Berechnung von Log-Amplitudenspektren durch Mittelwertbildung sind mehrere Möglichkeiten denkbar:

1. „LMP“ (Logarithmus des Mittelwertes aus Periodogrammen): Mittelwertbildung aus statistisch unabhängigen Periodogrammen, anschließend Logarithmierung ($\log \sqrt{x} = 0,5 \cdot \log x$), u.a. benutzt in [UO85, LGFE83, JGC+00].
2. „LMA“ (Logarithmus des Mittelwertes aus Amplitudenspektren): Mittelwertbildung aus den Quadratwurzeln von Periodogrammen, benutzt in [OTH+91, Hui98].
3. „MLA“ (Mittelwert aus logarithmierten Amplitudenspektren), in [BLFP87] betrachtet.

Alle diese Methoden liefern unterschiedliche Erwartungswerte und Varianzen, abhängig von der Anzahl der gemittelten Spektren. Herleitungen hierzu folgen in den nächsten drei Abschnitten.

7.2.1 Methode LMP

Wir definieren das Log-Amplitudenspektrum zu

$$A_X(\omega) \equiv 0,5 \cdot \log R_X(\omega) . \quad (7.12)$$

Die Schätzvorschrift für die Methode LMP lautet

$$\hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \equiv 0,5 \cdot \log \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m) \right) . \quad (7.13)$$

Nun definieren wir eine Hilfsvariable Z :

$$Z \equiv \sum_{m=1}^M \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m) / \sigma_R^2(\omega) \quad (7.14)$$

mit $\sigma_R^2(\omega) = R_X(\omega)/2$ aus Gl. (7.4). Dieses Z hat eine $\chi^2(2M)$ -Verteilung mit der Dichte ([Pap91], S.79)

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^M \cdot \Gamma(M)} \cdot z^{M-1} \cdot e^{-z/2}, \quad z \geq 0 \quad (7.15)$$

$$\text{mit } \Gamma(M) \equiv \int_0^\infty y^{M-1} e^{-y} dy, \quad M \geq 1. \quad (7.16)$$

Der Schätzer lautet nun

$$\hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) = 0,5 \cdot \log \left(\frac{1}{M} \cdot \sigma_R^2(\omega) \cdot Z \right) \quad (7.17)$$

Nehmen wir Erwartungswerte und ordnen die Terme erhalten wir

$$\left\langle \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\rangle = 0,5 \cdot \log R_X(\omega) + 0,5 \cdot (-\log M - \log 2 + \langle \log Z \rangle) . \quad (7.18)$$

Der rechte Summand entspricht dem Bias, im Folgenden als $b_{\text{LMP}}(M)$ bezeichnet (vgl. (7.12)):

$$\left\langle \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\rangle = A_X(\omega) + b_{\text{LMP}}(M) . \quad (7.19)$$

$\langle \log Z \rangle$ kann analytisch berechnet werden (Ergebnis mit der Software MAPLE ermittelt; laut (7.15) gilt $f_Z(z) = 0$ für $z < 0$):

$$\langle \log Z \rangle = \int_0^\infty \log(z) f_Z(z) dz = \log 2 + \psi_0(M) . \quad (7.20)$$

$\psi_0(M)$ ist die sogenannte *Digamma-Funktion* mit der Berechnungsvorschrift ([AS84], S.79f)

$$\begin{aligned} \psi_0(M) &\equiv \frac{d}{dM} \log(\Gamma(M)) = \frac{\Gamma'(M)}{\Gamma(M)} \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-My}}{1-e^{-y}} dy . \end{aligned} \quad (7.21)$$

Setzen wir (7.20) in (7.18) ein, erhalten wir also für den Bias des Schätzers LMP

$$\boxed{b_{\text{LMP}}(M) = 0,5 (\psi_0(M) - \log M)} . \quad (7.22)$$

Der Bias hängt nur von der Anzahl M der gemittelten Spektren ab. Die Werte für alle verwendeten M vorab berechnet, erhält man auf einfache

Weise erwartungstreue Spektralschätzer. Der Verlauf von $b_{\text{LMP}}(M)$ ist in Abb. 7.1 auf S.126 für $M = 1 \dots 10$ gezeigt.

Das Ergebnis wird durch Betrachten von $M \rightarrow \infty$ weiter veranschaulicht. Da der empirische Mittelwert ein erwartungstreuer Schätzer ist, erhalten wir:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m) \right) = \langle \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \rangle \stackrel{(7.6)}{=} R_X(\omega) \quad (7.23)$$

$$\sim \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) = 0,5 \cdot \log R_X(\omega) \stackrel{(7.12)}{=} A_X(\omega) \quad (7.24)$$

$$\rightsquigarrow \lim_{M \rightarrow \infty} b_{\text{LMP}}(M) = 0 . \quad (7.25)$$

Wir leiten nun die Varianz des Schätzers LMP her. Mit Gl. (7.17) und der Tatsache, dass mit konstantem a

$$\text{var} \{ \log(aZ) \} = \text{var} \{ \log a + \log Z \} = \text{var} \{ \log Z \} , \quad (7.26)$$

gelangen wir zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LMP}}^2(M) &\equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\} \\ &\stackrel{(7.17)}{=} 0,25 \cdot \text{var} \{ \log Z \} . \end{aligned} \quad (7.27)$$

Die Varianz von $\log Z$ kann berechnet werden mit

$$\text{var} \{ \log Z \} = \langle (\log Z)^2 \rangle - \langle \log Z \rangle^2 \quad (7.28)$$

und dem Zusammenhang (Ergebnis mit der Software MAPLE ermittelt)

$$\langle (\log Z)^2 \rangle = \int_0^\infty \log^2(z) f_Z(z) dz = (\log 2 + \psi_0(M))^2 + \psi_1(M) . \quad (7.29)$$

Die höhere Funktion $\psi_1(M)$ ist eine der sogenannten *Polygamma-Funktionen* ([AS84], S.81)

$$\begin{aligned} \psi_n(M) &\equiv \frac{d^{n+1}}{dM^{n+1}} \log(\Gamma(M)) = \frac{d^n}{dM^n} \frac{\Gamma'(M)}{\Gamma(M)} = \frac{d^n}{dM^n} \psi_0(M) \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{y^n e^{-My}}{1 - e^{-y}} dy , \quad n \geq 1 . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\boxed{\sigma_{\text{LMP}}^2(M) = 0,25 \cdot \psi_1(M)} . \quad (7.31)$$

Wir schließen daraus, dass *die Varianz genauso wie der Bias der Schätzmethode LMP nur von der Anzahl der gemittelten Spektren abhängt.*

Eine Nachschlagetabelle für Bias und Varianz des LMP-Schätzers findet sich auf S.127 (Tab. 7.1), und den Verlauf der Standardabweichung im Vergleich zu anderen Schätzmethoden entnimmt man Abb. 7.2 auf S.126.

7.2.2 Methode LMA

Der Schätzer ist wie folgt definiert:

$$\hat{A}_X^{\text{LMA}}(\omega) \equiv \log \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m)} \right) \quad (7.32)$$

Führen wir auch hier eine Hilfsvariable Z ein:

$$Z \equiv \sum_{m=1}^M \sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m) / \sigma_R(\omega)} \quad (7.33)$$

mit $\sigma_R(\omega) = \sqrt{R_X(\omega)/2}$ (Gl. (7.4)). Damit lautet der LMA-Schätzer

$$\hat{A}_X^{\text{LMA}}(\omega) = \log \left(\frac{1}{M} \cdot \sigma_R(\omega) \cdot Z \right) . \quad (7.34)$$

Nun bilden wir die Erwartungswerte und fassen die Terme zusammen:

$$\left\langle \hat{A}_X^{\text{LMA}}(\omega) \right\rangle = 0,5 \cdot \log R_X(\omega) + (-\log M - 0,5 \cdot \log 2 + \langle \log Z \rangle) . \quad (7.35)$$

Der erste Summand ist das wahre Log-Amplitudenspektrum, und der zweite Summand ist der Bias des Schätzwertes, $b_{\text{LMA}}(M)$.

Für $M \rightarrow \infty$ erhalten wir (vergleiche mit (7.23))

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \hat{A}_X^{\text{LMA}}(\omega) \stackrel{(7.10)}{=} 0,5 \cdot \log \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{R_X(\omega)} \right) \quad (7.36)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} b_{\text{LMA}}(M) = \log \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx -0,1208 \approx -1.049 \text{ dB} \quad (7.37)$$

Um den Bias für kleine M zu berechnen, benötigen wir den Erwartungswert $\langle \log Z \rangle$. Im Prinzip könnte man diesen mit der Beziehung (7.20) erhalten. Die Herleitung der Dichte von Z , die aus der Addition von RAYLEIGH-verteilten Zufallsvariablen resultiert, ist allerdings analytisch nicht ohne weiteres handhabbar, weshalb hier eine numerische Approximation durchgeführt wird. Hierbei wird ausgenutzt, dass sich die Dichte einer Summe von unabhängigen Zufallsgrößen aus der Faltung der Einzeldichten bzw. der inversen Fourier-Transformation des Produktes der charakteristischen Funktionen errechnet ([Pap91], S.195). Außerdem ist $\hat{A} \equiv \sqrt{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)/\sigma_R(\omega)}$ RAYLEIGH-verteilt (siehe Abschnitt 7.1), die entsprechende Dichte sei mit $f_{\hat{A}}(z)$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &\equiv \mathcal{F} \left\{ f_{\hat{A}}(z) \right\} \\ f_Z(z) &= \frac{\mathcal{F}^{-1} \left\{ \Phi^M(\omega) \right\}}{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \Phi^M(\omega) \right\} dz} . \end{aligned} \quad (7.38)$$

Die Normierung ist erforderlich, da definitionsgemäß die Gesamtfläche unter einer Wahrscheinlichkeitsdichte eins sein soll. Bei der Berechnung über FFT muss beachtet werden, dass die resultierende Dichte innerhalb der Länge der FFT vollständig abgeklungen ist, d.h. die Einzeldichte sollte vor ihrer Transformation in den Frequenzbereich entsprechend mit angehängten Nullen auf eine ausreichende Länge gebracht werden.

Nun berechnen wir die Varianz

$$\sigma_{\text{LMA}}^2(M) \equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMA}}(\omega) \right\} = \text{var} \{ \log Z \} \quad (7.39)$$

gemäß Gleichung (7.28). Allerdings muss das Integral numerisch ausgewertet werden. Die Ergebnisse von $b_{\text{LMA}}(M)$ und $\sigma_{\text{LMA}}^2(M)$ findet man (für $M = 1 \dots 10$) in Abb. 7.1 bzw. Abb. 7.2 auf S.126

Wie beim Schätzer LMP, sind Bias und Varianz des Schätzers LMA nur von der Anzahl der gemittelten Spektren abhängig.

7.2.3 Methode MLA

Definition des Schätzers (geometrisches Mittel):

$$\hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(0,5 \cdot \log \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m) \right) \quad (7.40)$$

Wir führen wiederum eine Hilfsvariable Z ein:

$$Z_m \equiv \frac{\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega, m)}{\sigma_R^2(\omega)} \quad (7.41)$$

$$\hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(0,5 \log Z_m + 0,5 \log \sigma_R^2(\omega) \right). \quad (7.42)$$

Die Verteilung von Z_m ist für alle m die gleiche. Mit $\langle \sum_m \xi_m \rangle = \sum_m \langle \xi_m \rangle$ und $\text{var} \{ \sum_m \xi_m \} = \sum_m \text{var} \{ \xi_m \}$ (gültig falls alle ξ_m untereinander unabhängig sind [Pap91]) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) \rangle &= 0,5 \cdot \langle \log Z \rangle + 0,5 \cdot \log \sigma_R^2(\omega) \\ \text{var} \{ \hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) \} &= \frac{1}{M^2} \cdot M \cdot 0,25 \cdot \text{var} \{ \log Z \}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Die Lösungen für $\langle \log Z \rangle$ und $\text{var} \{ \log Z \}$ sind (Ergebnis mit der Software MAPLE ermittelt; $f_Z(z)$ ist die Dichte einer $\chi^2(2)$ -Verteilung):

$$\begin{aligned} \langle \log Z \rangle &= (\log(2) - \gamma) \\ &\text{mit } \gamma \approx 0,5772 \quad (\text{Eulergamma}), \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\text{var} \{ \log Z \} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (7.45)$$

$$\langle \hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) \rangle \stackrel{(7.4), (7.44)}{=} 0,5 \cdot \log R_X(\omega) - 0,5 \cdot \gamma \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} b_{\text{MLA}} &= -0,5 \cdot \gamma \approx -0,2886 \approx -2,5067 \text{ dB} \\ \sigma_{\text{MLA}}^2(M) &\equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{MLA}}(\omega) \right\} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

7.2.4 Anwendung auf Ultraschallechos

Bei der Biaskorrektur von Spektralschätzungen in Ultraschallanwendungen, wo die Mittelwertbildung über Ausschnitte benachbarter A-Scans vorgenommen wird, ist die laterale Korrelation aufgrund der überlappenden Beugungsprofile zu beachten. Durch diese Korrelation verringert sich die *effektive Anzahl* der gemittelten Spektren: Bildet man also einen Mittelwert über die Spektren von zehn teilweise korrelierten A-Scans, hat das gemittelte

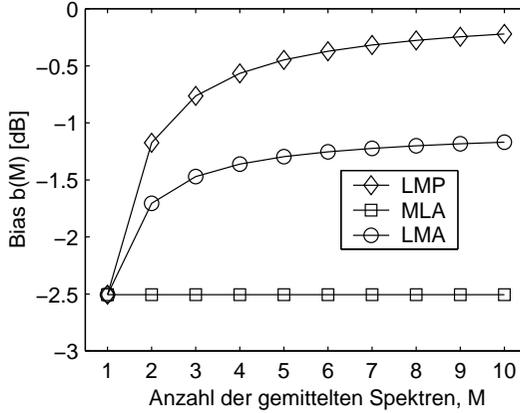


Abb. 7.1: Bias $b_{\text{LMP}}(M)$, $b_{\text{LMA}}(M)$ und b_{MLA} der geschätzten Log-Amplitudenspektren.

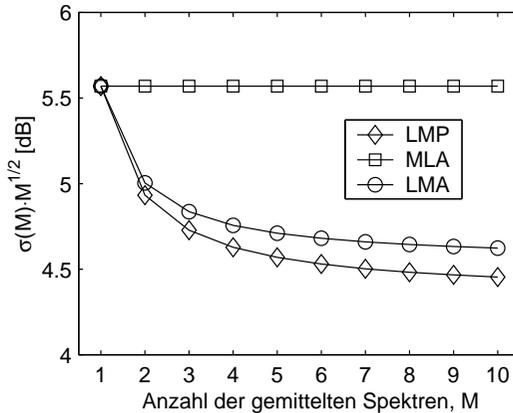


Abb. 7.2: Standardabweichung $\sigma_{\text{LMP}}(M) \cdot M^{1/2}$, $\sigma_{\text{LMA}}(M) \cdot M^{1/2}$ und $\sigma_{\text{MLA}}(M) \cdot M^{1/2}$ der geschätzten Log-Amplitudenspektren.

Spektrum die statistischen Eigenschaften einer Mittelwertbildung von vielleicht nur fünf *unabhängigen* Spektren.

Viele Single-Element-Wandler werden zum Scan mit nichtkonstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt (sie ist oft in der Mitte des B-Scans schneller als an den Rändern). Man müsste also zunächst für jeden Winkel- und Tiefen-

M	$b_{\text{LMP}}(M)$ [dB]	$\sigma_{\text{LMP}}^2(M)$ [dB ²]	$\sigma_{\text{LMP}}(M)$ [dB]
1	-2,51	31,03	5,57
2	-1,17	12,16	3,49
3	-0,76	7,45	2,73
4	-0,57	5,35	2,31
5	-0,45	4,17	2,04
6	-0,37	3,42	1,85
7	-0,32	2,90	1,70
8	-0,28	2,51	1,58
9	-0,25	2,22	1,49
10	-0,22	1,98	1,41

Tab. 7.1: Nachschlagetabelle für Bias, Varianz und Standardabweichung des LMP-Schätzers.

bereich die mittlere laterale Korrelation messen und damit eine Korrekturtabelle für das gesamte Ultraschallbild erstellen.

7.3 Geglättete Amplitudenspektren

Eine andere Methode zur Verringerung der Varianz in geschätzten Leistungsdichtespektren ist die Glättung, d.h. Mittelung *innerhalb* der gleichen Schätzung. Dies kann entweder mittels Filterung im Spektrum oder durch Fensterung in der entsprechenden Zeitbereichsdarstellung geschehen. Zwei Methoden werden nun betrachtet: Fensterung der Autokorrelationsfolge (AKF), auch als BLACKMAN-TUKEY-Spektralschätzer bekannt (Bezeichnung: BT), und die Fensterung des Cepstrums (Bezeichnung: Cep).

7.3.1 Bias und Varianz geglätteter Spektren

Bezeichne $\hat{S}_X(\omega)$ einen Spektralschätzer mit beliebiger Amplitudenskalierung (die logarithmisch sein kann). Das geglättete Spektrum $\bar{\hat{S}}_X(\omega)$ resul-

tiert dann aus der Faltung mit dem Spektrum eines Zeitfensters $W(\omega) = \mathcal{F}\{w(\tau)\}$:

$$\bar{\hat{S}}_X(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \hat{S}_X(\omega) * W(\omega) \quad (7.48)$$

$$\rightsquigarrow \left\langle \bar{\hat{S}}_X(\omega) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{S}_X(\omega) \right\rangle * W(\omega). \quad (7.49)$$

Die Varianz des geglätteten Spektrums ist näherungsweise (ohne Beweis; Verallgemeinerung der Varianz des BT-Schätzers [Kay88], S.98; $w(\tau)$ als reell und gerade angenommen):

$$\text{var} \left\{ \bar{\hat{S}}_X(\omega) \right\} \approx \frac{1}{2\pi} \text{var} \left\{ \hat{S}_X(\omega) \right\} * \frac{W^2(\omega)}{T}. \quad (7.50)$$

T bezeichnet die Länge des zur Spektralschätzung herangezogenen Datenausschnittes (vgl. Abschnitt 7.1).

7.3.2 BT-Spektralschätzer mit Log-Amplitude

Um Bias und Varianz des Spektrums mit logarithmierter Amplitude zu errechnen, benötigen wir Kenntnis über die Wahrscheinlichkeitsdichten in der BT-geglätteten Schätzung (siehe (7.20), (7.28)). Zur Vermeidung komplizierter Herleitungen schlage ich die folgende einfache Approximation vor. Vorausgesetzt wir würden die Varianz des BT-Schätzwertes *a priori* kennen, könnten wir diesen Schätzwert mit einem Mittelwert aus L unabhängigen Schätzungen gleichsetzen, so dass beide Schätzungen die gleiche Varianz hätten. Dies ist möglich, weil die Glättung im Spektrum als Summe verschieden gewichteter unabhängiger Zufallsgrößen betrachtet werden kann (zur statistischen Unabhängigkeit der Spektralschätzwerte benachbarter Frequenzen siehe [Koo95], S.260ff).

Für den BT-Schätzer gilt ([Kay88], S.99; $w(\tau)$ bezeichne die Fensterfunktion in der Autokorrelationsfolge, Fensterlänge $2T_W + 1$)

$$\text{var} \left\{ \hat{R}_X^{\text{BT}}(\omega) \right\} \approx \frac{1}{T} \sum_{\tau=-T_W}^{T_W} w^2(\tau) \cdot R_X^2(\omega). \quad (7.51)$$

Verglichen zum Periodogramm mit $\text{var} \left\{ R_X^{\text{per}}(\omega) \right\} = R_X^2(\omega)$ entspricht dies einer um den Faktor $c \equiv 1/T \cdot \sum_{\tau} w^2(\tau)$ reduzierten Varianz. Die gleiche Varianz könnte durch Mittelung von

$$L = \frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{1}{T} \sum_{\tau} w^2(\tau)} \quad (7.52)$$

unabhängigen Periodogrammen erreicht werden. Mit diesem $L = 1/c$ können wir auf die Ergebnisse von $\hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega)$ zurückgreifen. Folglich ist der Erwartungswert für das *logarithmierte* BT-Spektrum

$$\hat{A}_X^{\text{BT}}(\omega) \equiv 0,5 \cdot \log \hat{R}_X^{\text{BT}}(\omega) \quad (7.53)$$

unter Berücksichtigung von (7.17) und (7.31)

$$\langle \hat{A}_X^{\text{BT}}(\omega) \rangle = 0,5 \left(\log \sigma_R^2(\omega) + \log 2 + \psi_0(1/c) - \log(1/c) \right) . \quad (7.54)$$

Wenn L klein ist, d.h. wenn nur schwach geglättet wird, können wir annehmen, dass die Schätzungen bei benachbarten Frequenzen immer noch nahezu statistisch unabhängig sind und deshalb in guter Näherung eine $\chi^2(2)$ -Verteilung haben, deren Mittelwert dem Erwartungswert linearer BT-Spektralschätzer ([Kay88], S.98, gilt nur für $T_W \ll T$) entspricht:

$$\sigma_R^2(\omega) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot R_X(\omega) * W(\omega) . \quad (7.55)$$

Wenn andererseits eine starke Glättung vorliegt (L groß), nähert sich die Verteilung im linearen BT-Spektralschätzer einer Normalverteilung mit dem gleichen Mittelwert, und somit bleibt der auf die Logarithmierung zurückzuführende Bias $0,5 \cdot (\psi_0(1/c) - \log(1/c))$ sehr klein (da $\lim_{L \rightarrow \infty} b_{\text{LMP}}(L) = 0$, Gl. (7.23)).

Der Erwartungswert lässt sich also folgendermaßen darstellen:

$$\boxed{\langle \hat{A}_X^{\text{BT}}(\omega) \rangle = 0,5 \cdot \log \left(\frac{1}{2\pi} \cdot R_X(\omega) * W(\omega) \right) + 0,5 \cdot (\psi_0(1/c) - \log(1/c))} . \quad (7.56)$$

Für die Varianz erhalten wir mit (7.27) und (7.31)

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{BT}}(\omega) \right\} &= 0,25 \cdot \text{var} \{ \log Z \} \\ &= 0,25 \cdot \psi_1(1/c) . \end{aligned} \quad (7.57)$$

Im Falle großer L und deshalb kleiner Varianz von Z ist eine Linearisierung der Logarithmierung um $\langle Z \rangle$ erlaubt¹

$$\text{var} \{ \log Z \} \approx \frac{\text{var} \{ Z \}}{\langle Z \rangle^2} = \frac{4L}{(2L)^2} = \frac{1}{L} = c . \quad (7.58)$$

¹ $g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) \rightsquigarrow \text{var} \{ g(x) \} = (g'(x_0))^2 \cdot \text{var} \{ x \}$

Insgesamt ist also die Varianz des BT-Schätzers mit Log-Amplitude für hinreichend starke Glättung

$$\sigma_{\text{BT}}^2 \equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{BT}}(\omega) \right\} \approx 0,25 \cdot c \quad . \quad (7.59)$$

Wird statt des Periodogramms eine bereits aus Mittelwertbildung mehrerer Periodogramme entstandene Spektralschätzung als Ausgangsbasis für die BT-Glättung herangezogen, kann die zusätzlich reduzierte Varianz in den Faktor c mit einbezogen werden. Mittelung von M Spektren verringert die Varianz gegenüber dem einfachen Periodogramm um den Faktor $1/M$, und demzufolge setzt man c/M statt c bzw. $M \cdot L$ statt L .

Monte-Carlo-Experimente haben außerdem bestätigt, dass die Näherungen dieses Abschnittes sehr genau sind.

7.3.3 Cepstral geglättete Spektren mit Log-Amplitude

Cepstrale Glättung wird durch Gewichtung des Cepstrums²

$$\hat{c}(\tau) \equiv \mathcal{F}^{-1} \left\{ 0,5 \cdot \log \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \right\} \quad (7.60)$$

mit einer Fensterfunktion $w(\tau)$ implementiert, so dass die *hochquefrenten*³ Anteile ausgeblendet werden. Dieses gefenstertere Cepstrum wird dann Fourier-transformiert, was das gewünschte Log-Spektrum liefert:

$$\hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \equiv \mathcal{F} \left\{ \hat{c}(\tau) \cdot w(\tau) \right\} \quad . \quad (7.61)$$

Diese Definition kann verallgemeinert werden, wenn wir $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\}$ statt $\mathcal{F}^{-1} \left\{ 0,5 \cdot \log \hat{R}_X^{\text{per}}(\omega) \right\}$ für das Cepstrum benutzen. Um nun Bias und

² Wird der komplexe Logarithmus verwendet, erhält man das *komplexe* Cepstrum, andernfalls das *reelle* Cepstrum. Das reelle Cepstrum ist gerade ([RS78]). Anmerkung: Es existieren leicht abweichende Definitionen, die statt des Leistungsdichtespektrums das Amplitudenspektrum, oder statt der inversen eine normale Fourier-Transformation verwenden.

³ Die Zeitverschiebung τ des Cepstrums $c(\tau)$ wird als *Quefrenz* bezeichnet.

Varianz des cepstral geglätteten Spektrums zu erhalten, setzen wir $\hat{S}_X(\omega) \equiv \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega)$ in (7.49) und (7.50).

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \cdot \langle \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \rangle * W(\omega) \\ &= 0,5 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot W(\omega) * \log R_X(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \cdot b_{\text{LMP}}(M) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega . \end{aligned} \quad (7.62)$$

Mit der Beziehung

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = 2\pi \cdot w(0) \quad (7.63)$$

erhalten wir schließlich für den Erwartungswert

$$\boxed{\langle \hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \rangle = \frac{1}{4\pi} \cdot W(\omega) * \log R_X(\omega) + w(0) \cdot b_{\text{LMP}}(M)} . \quad (7.64)$$

Für die Varianz gilt

$$\text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\} * \frac{W^2(\omega)}{T} , \quad (7.65)$$

und da $\text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\}$ nicht von der Frequenz ω abhängt, lautet das Ergebnis unter Verwendung des PARSEVAL'schen Theorems sowie $c \equiv 1/T \cdot \sum_{\tau} w^2(\tau)$:

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \right\} &= \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\omega) d\omega \\ &= c \cdot \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{LMP}}(\omega) \right\} . \end{aligned} \quad (7.66)$$

Zusammengefasst ergibt sich die Varianz aus M gemittelten Periodogrammen mit anschließender cepstraler Glättung

$$\boxed{\sigma_{\text{Cep}}^2 \equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{Cep}}(\omega) \right\} = c \cdot \sigma_{\text{LMP}}^2(M)} . \quad (7.67)$$

7.3.4 Vergleich zwischen BT- und cepstraler Glättung

Intention dieses Abschnittes ist es, die Kompromisse zwischen reduzierter Varianz und erhöhtem Bias für verschiedene Fensterfunktionen anhand eines beispielhaften bandbegrenzten Spektrums sowie anhand eines typischen Spektrums nach der Entfaltung zu demonstrieren. Um den Bias für einen Spezialfall abzuschätzen, ermitteln wir, in Anlehnung an die Betrachtungen im Kapitel 6 über Entfaltung, den mittleren quadrierten Fehler innerhalb einer bestimmten Bandbreite (weil in Ultraschallanwendungen normalerweise die von additivem Rauschen dominierten Ausläufer des Spektrums nicht von Interesse sind):

$$\varepsilon^2(T_W) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \left| \langle \hat{A}_X(\omega, T_W) \rangle - A_X(\omega) \right|^2, \quad (7.68)$$

$$N = \# \{ \omega_1, \dots, \omega_2 \},$$

mit $A_X(\omega) \equiv 0,5 \cdot \log R_X(\omega)$. Das hier benutzte Beispielspektrum ist

$$R_X(\omega) = \left| \mathcal{F} \left\{ h_0 \cdot (t/\tau)^2 \cdot e^{-(t/\tau)^2} \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t) \right\} \right|^2 \quad (7.69)$$

mit $f_0 = 3,8$ MHz, $f_S = 20$ MHz, $\tau = 2,5/f_0$, $h_0 = 0,338$. ω_1 und ω_2 markieren diejenigen Frequenzen, bei denen das Amplitudenspektrum gegenüber seinem Hauptmaximum um -24 dB abgefallen ist (siehe Abb. 7.3 oder Abb. 7.5).

Die Frage ist nun, welche Methode der Glättung mit welcher Fensterfunktion den besten Kompromiss liefert. Für einzelne ($M = 1$) geglättete Periodogramme gelten die Varianzen in Abhängigkeit vom Fensterlängenparameter T_W

$$\sigma_{\text{BT}}^2(T_W) \equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{BT}}(T_W) \right\} \approx 0,25 \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{\tau=-T_W}^{T_W} w^2(\tau)$$

$$\sigma_{\text{Cep}}^2(T_W) \equiv \text{var} \left\{ \hat{A}_X^{\text{Cep}}(T_W) \right\} \approx 0,41 \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{\tau=-T_W}^{T_W} w^2(\tau). \quad (7.70)$$

Die Länge des Fensters ist $2T_W + 1$. Wie stark die Varianz reduziert werden kann, ist also auch durch die Form des Fensters und die Beziehung T_W/T bestimmt. Einige Beispiele sind in Tab. 7.2 zusammengestellt.

Ausgehend von den Ausdrücken für die Varianzen stellen wir fest, dass mit festem T_W und gleichzeitiger Vergrößerung des Datenausschnittes T für das

Fensterfunktion	BARTLETT	PARZEN	BLACKMAN	HAMMING
$\sum_{\tau=-T_W}^{T_W} w^2(\tau)$	$0,667 \cdot T_W$	$0,539 \cdot T_W$	$0,609 \cdot T_W$	$0,795 \cdot T_W$

Tab. 7.2: Das Potenzial einiger Fensterfunktionen zur Verringerung der Varianz. Den stärksten Glättungseffekt erzielt das PARZEN-Fenster.

Periodogramm die Varianz immer kleiner wird, während der Bias (ungefähr) gleich bleibt.

In unserem Beispiel sollte T zumindest so groß sein, dass der Leckeffekt vernachlässigt werden kann. Mit anderen Worten: Wir führen unsere Analyse im Sinne von $T \rightarrow \infty$ durch. Der Bias-Varianz-Kompromiss für die Beispielspektren (7.69) ist in Abb. 7.4 dargestellt ($T = 1024$). Wenn wir eine geringere Varianz anstreben, lösen wir (7.70) nach T_W , um die zugehörige Fensterlänge zu erhalten. Entsprechend den Kurvenverläufen in Abb. 7.6 scheint der Wert $\sigma = 1$ dB eine vernünftige Wahl zu sein. Hierfür ergibt sich $T_W = 17$ für das Rechteckfenster im Cepstrum, und $T_W = 101$ für das PARZEN-Fenster in der Autokorrelationsfolge.

Ein Spektrum, das nach der Entfaltung geglättet werden soll (breitbandiges Spektrum), ist in Abb. 7.6 untersucht. Wegen der Breitbandigkeit kann prinzipiell eine geringere Varianz durch Glättung erreicht werden, ohne dass sich der Fehler wesentlich erhöht. So erscheint hier ein $\sigma = 0,5$ dB möglich, was $T_W = 25$ für BT-Glättung und PARZEN-Fenster, sowie $T_W = 4$ für cepstrale Glättung und Rechteck-Fenster ergibt.

Abb. 7.4 zeigt, dass in unserem bandbegrenzten Spektrum das mit einem Rechteckfenster modifizierte Cepstrum die besten Kompromisse erreicht. Im Falle der BT-Glättung sollte das weniger bekannte PARZEN-Fenster

$$w(\tau) = \begin{cases} 1 - 6(\tau/T_W)^2 + 6(|t|/T_W)^3, & |\tau| \leq T_W/2 \\ 2(1 - |t|/T_W)^3, & T_W/2 < |\tau| \leq T_W \end{cases} \quad (7.71)$$

dem üblicherweise verwendeten BARTLETT-Fenster vorgezogen werden (es sei angemerkt, dass nur diese beiden Fensterfunktionen ein nicht-negatives Spektrum haben, womit nicht-negative Schätzungen für die Leistungsdichtespektren garantiert sind).

Das Spektrum nach einer Entfaltung im Zeitbereich ist wesentlich breitbandiger und reagiert anders auf die Glättungsverfahren: Die BT-Glättung ist im Beispiel Abb. 7.5 die günstigere Wahl.

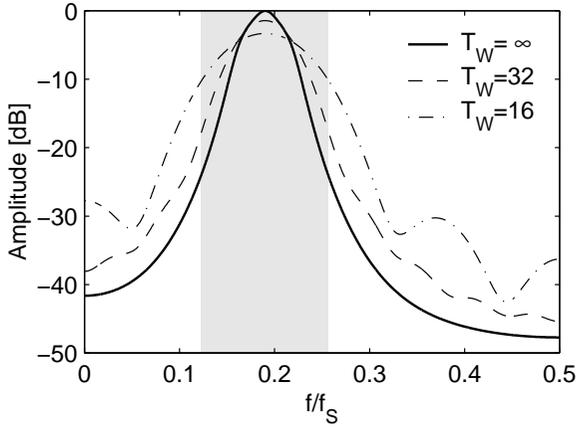


Abb. 7.3: Log-Amplitudenspektrum aus Gl. (7.69) und Erwartungswerte BT-geglätteter Varianten unter Benutzung von PARZEN-Fenstern mit unterschiedlicher Fensterlänge $2T_W + 1$. Der Bereich $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ist grau hinterlegt.

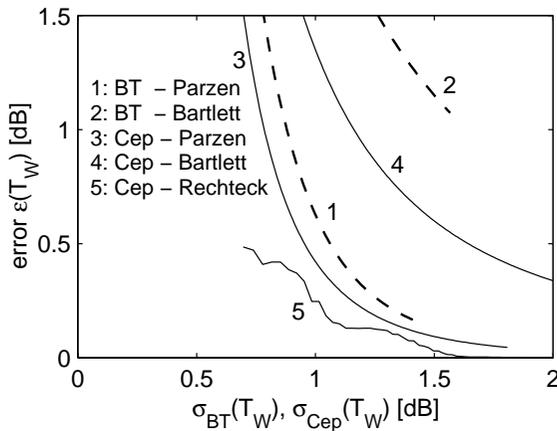


Abb. 7.4: Kompromiss zwischen Bias und Varianz für das Beispielspektrum aus Abb. 7.3 mit Log-Amplitude, mit $T = 1024$ und $T_W = 8 \dots 200$. Kleinstmögliche Varianz bei gleichzeitig akzeptabel kleinem Bias wird durch Kurven angezeigt, die möglichst weit links unten verlaufen. Der Bias $w(0) \cdot b_{LMP}(1)$ wurde in allen cepstral geglätteten Spektren korrigiert.

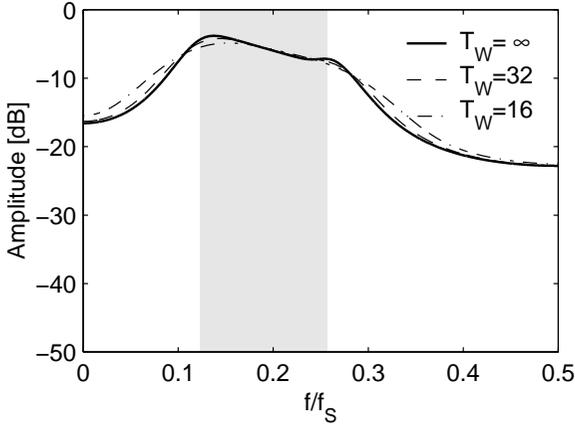


Abb. 7.5: Log-Amplitudenspektrum nach Entfaltung mit Kalman-Interpolation (vgl. Abb. 6.3, S.97) und Erwartungswerte BT-geglätteter Varianten unter Benutzung von PARZEN-Fens-tern mit unterschiedlicher Fensterlänge $2T_W + 1$. Der Bereich $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ist grau hinterlegt.

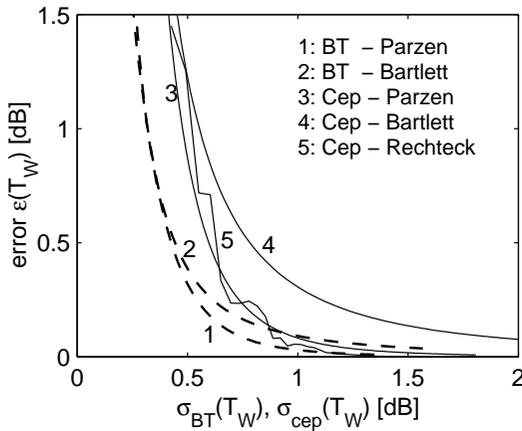


Abb. 7.6: Kompromiss zwischen Bias und Varianz für das Beispielspektrum aus Abb. 7.5 mit Log-Amplitude, mit $T = 1024$ und $T_W = 3 \dots 200$. Kleinstmögliche Varianz bei gleichzeitig akzeptabel kleinem Bias wird durch Kurven angezeigt, die möglichst weit links unten verlaufen. Der Bias $w(0) \cdot b_{LMP}(1)$ wurde in allen cepstral geglätteten Spektren korrigiert.

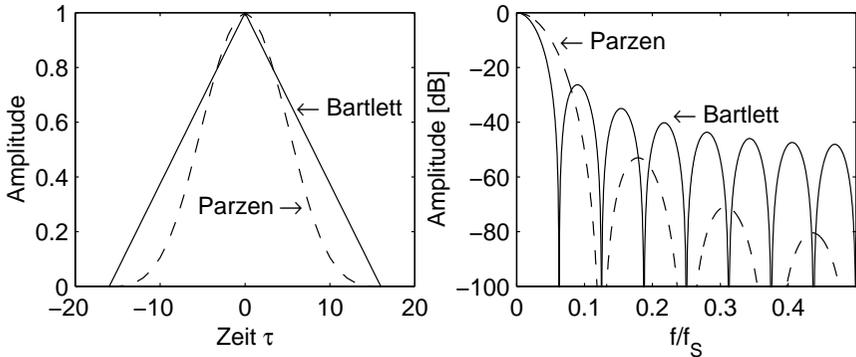


Abb. 7.7: Vergleich der Fensterfunktionen PARZEN und BARTLETT.
Links: Zeitbereich. **Rechts:** Amplitudengang.

Zur Interpretation der Ergebnisse bleibt festzuhalten, dass das PARZEN-Fenster ein breiteres Hauptmaximum und eine insgesamt höhere Sperrbanddämpfung hat als das BARTLETT-Fenster, was die Unterschiede in den Glättungseigenschaften erklärt (siehe Abb. 7.7). Das Rechteck-Fenster kann, zur Gewichtung des Cepstrums eingesetzt, zu merkwürdigen Spektren führen, da das Cepstrum unter Umständen abrupt abgeschnitten wird (dies erklärt den zackigen Verlauf in Abb. 7.4 und Abb. 7.6). Dagegen blenden BARTLETT- und PARZEN-Fenster in einem allmählichen Übergang auf Null aus.

Die beiden Beispiele demonstrieren, wie schwierig die Wahl der richtigen Methode zur Glättung von Spektren ist. Prinzipiell kann man aber sagen, dass bei der Bestimmung von Rückstreuenspektren erst das entfaltete Spektrum geglättet werden sollte, da so geringere Varianzen bei gleichbleibend kleinem Bias erreichbar sind. Dann ist aber die BT-Glättung mit PARZEN-Fenster in jedem Falle zu bevorzugen.

7.4 Zusammenfassung

Periodogramm-basierte Spektralschätzer mit logarithmierter Amplitude, die aus der Mittelwertbildung weniger unabhängiger Schätzungen hervorgehen, weisen einen Fehler (Bias) auf, der aber nur von der Anzahl der gemittelten Spektren abhängt und somit leicht korrigiert werden kann. Allerdings führt die Mittelung von Periodogrammen (Leistungsdichtespektren) mit anschlie-

ßender Logarithmierung (LMP) zu geringerer Varianz als die Mittelung von Amplitudenspektren (Quadratwurzel aus Periodogramme) mit nachfolgender Logarithmierung (LMA).

Zur Wahl der optimalen Glättungsmethode, mit der die Varianz im Log-Amplitudenspektrum weiter verringert werden soll, können kaum allgemein gültige Richtlinien angegeben werden, da der durch die Glättung verursachte Fehler (Bias) stark vom Verlauf des wahren Spektrums abhängt. Die Analysen des vorigen Abschnittes zeigen jedoch, dass das weniger bekannte PARZEN-Fenster zur Gewichtung der Autokorrelationsfolge im Spektralschätzer nach BLACKMAN-TUKEY dem sonst üblichen BARTLETT-Fenster (Dreiecksfenster) vorgezogen werden sollte.

Schließlich bleibt festzuhalten, dass die Varianz in logarithmierten Spektren bei allen Schätzmethoden unabhängig von der Frequenz bzw. vom Verlauf des Spektrums ist – ein großer Vorteil in der Parametrisierung von Rückstreuenspektren für die quantitative Ultraschalldiagnose.

8. Darstellung von Ultraschallbildern

Die Ultraschallechos selbst – ob roh oder entfaltet – sind mittelwertfreie Zufallsprozesse und somit für eine bildhafte Darstellung nicht geeignet. Um zu einer visuell leicht verständlichen Darstellung zu gelangen, muss der lokale Informationsgehalt konzentriert werden. In konventionellen Ultraschallgeräten geschieht dies durch die Detektion der Einhüllenden der HF-Echos. Liegen dagegen die wesentlich breitbandigeren entfalteten HF-Echos vor, verliert die Einhüllende ihren Sinn. Die Übersetzung der entfalteten Echos in eine aussagekräftige Form gelingt nur mit sogenannten *Parameterbildern*: Die lokal extrahierten Parameter werden grau- oder farbcodiert dargestellt, sollen sich durch hohe Genauigkeit und hohe räumliche Auflösung auszeichnen und in einem direkten Verhältnis zu Gewebeeigenschaften stehen. Der einfachste und bezüglich der anatomischen Gegebenheiten zugleich aussagekräftigste Parameter ist die mittlere Rückstreustärke, ermittelt durch die lokale Varianz der entfalteten HF-Echos. Natürlich können Parameterbilder auch auf der Basis roher HF-Echos oder deren Einhüllenden erzeugt werden, doch ist wegen der Korreliertheit dieser Signale die räumliche Auflösung gegenüber der Parametrisierung von entfalteten Echos zu verringern, da sonst eine gewisse Genauigkeit der Parameter nicht gewahrt bleiben kann. Ferner entspricht der Übergang von entfalteten Echos zu HF-Echos und schließlich zur Einhüllenden einer Transformation von Zufallsgrößen, so dass für einen bestimmten statistischen Parameter jeweils unterschiedliche Werte resultieren.

8.1 Einhüllende des rohen HF-Echos

Aufgrund der Bandpasscharakteristik des Sendepulses wird unter der Annahme eines passiven Mediums auch das Echosignal Bandpassverhalten zeigen. Man geht also davon aus, dass das (mittelwertfreie) Echosignal $e(t)$ als kombinierte Amplituden- und Phasenmodulation aufgefasst werden kann:

$$e(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad . \quad (8.1)$$

8.1.1 Hilberttransformation

Demodulation bandbegrenzter, mittelwertfreier Signale ist gleichbedeutend mit der Rekonstruktion des Basisbandes. Dies gelingt über das sogenannte analytische Signal $e^+(t)$ ([KK98], S.27ff):

$$e^+(t) = e(t) + j \mathcal{H} \{e(t)\} \quad , \quad (8.2)$$

$$\mathcal{H} \{e(t)\} \equiv \mathcal{F}^{-1} \left\{ -j \operatorname{sign}(\omega) \cdot \mathcal{F} \{e(t)\} \right\} \quad . \quad (8.3)$$

Das analytischen Signal $e^+(t)$ ist ein einseitiges Bandpasssignal, d.h. alle Anteile auf der negativen Frequenzachse verschwinden, während die Beiträge aus positiven Frequenzen doppelte Leistungsdichten haben (die Energie des analytischen Signals ist gleich derjenigen des ursprünglichen Signals). Demodulation gelingt nun, indem man den einseitigen Anteil um die Trägerfrequenz, die hier der Mittelfrequenz ω_0 des Bandpasses entspricht, nach links verschiebt. Im Zeitbereich entspricht diese Operation der Multiplikation mit der Exponentialfunktion. Somit erhält man das *äquivalente Tiefpasssignal*

$$e_{\text{TP}}(t) = e^+(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad . \quad (8.4)$$

Der Betrag dieses komplexen Signals entspricht der Einhüllenden:

$$a(t) = |e_{\text{TP}}(t)| = |e^+(t)| = \sqrt{e^2(t) + \mathcal{H} \{e(t)\}^2} \quad . \quad (8.5)$$

Die HILBERT-Transformation kann über FFT des gesamten A-Scans oder über ein FIR-Filter ([KK98], S.199ff) realisiert werden. Beide Methoden beanspruchen recht viel Rechenzeit.

8.1.2 Maximalwertoperator

Zur schnellen Detektion der Einhüllenden schlage ich den Maximalwert-Operator vor. Dieser zählt zu den Rangordnungs-Operatoren und kommt ganz ohne Multiplikationen und Additionen aus ([KZ95], S.257ff):

$$\hat{a}(t) = \max_{\tau} \{|e(t + \tau)|; \tau = 0, 1, 2, \dots, T\} \quad . \quad (8.6)$$

Wenn die zeitliche Zuordnung von $a(t)$ wichtig ist, kann man auch den entsprechend zentrierten Operator verwenden.

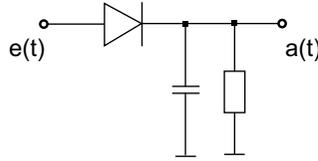


Abb. 8.1: Analoger Schaltkreis zur Detektion der Einhüllenden.

Die Fensterlänge T sollte man so wählen, dass ungefähr eine halbe Periode der Mittenfrequenz innerhalb des Fensters liegt. Man erreicht eine Unterabtastung, wenn t in Schritten größer als eins gezählt wird. Innerhalb einer halben Periodendauer der Mittenfrequenz bleibt der Maximalwert in den meisten Fällen konstant, so dass mit der entsprechenden Schrittweite nur geringes Aliasing zu erwarten ist.

Zur Interpretation dieser Vorgehensweise kann der in Abb. 8.1 gezeigte Schaltkreis zur analogen Detektion der Einhüllenden helfen ([OW83], S.457). Im Allgemeinen weichen die Ergebnisse aus Detektor und Berechnung über HILBERT-Transformation nur wenig voneinander ab.

8.1.3 Momentanleistung

Ähnlich zur Detektion der Einhüllenden mittels Maximalwert-Operator ist auch die Berechnung der Momentanleistung $\sigma_E^2(t)$ jeweils innerhalb einer Periodendauer T_0 der Mittenfrequenz ω_0 denkbar. $\sigma_E(t)$ kann dann als momentaner Effektivwert betrachtet werden, woraus sich sofort der Schätzwert für die Einhüllende, $\hat{a}(t)$, ergibt ($e(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$):

$$\sigma_E^2(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{\tau=-T_0/2}^{T_0/2} e^2(t + \tau) \approx \frac{a^2(t)}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 \tau) d\tau = \frac{a^2(t)}{2} \quad (8.7)$$

$$\rightsquigarrow \hat{a}(t) \approx \sqrt{2} \cdot \sigma_E(t) . \quad (8.8)$$

Die Momentanleistung, wie sie hier zur Detektion der Einhüllenden betrachtet wurde, hat eine prinzipiell andere Bedeutung als die lokale Rückstreuleistung. Obwohl die Berechnungsvorschriften identisch sind, kann aus den rohen HF-Echos für die lokale Rückstreuleistung nur auf der Basis eines mehrere Perioden umfassenden Zeitfensters ein genügend genauer Schätzwert berechnet werden.

8.2 Lokale Rückstreustärke

Im Gegensatz zur Einhüllenden, die durch eine deterministische Rechenvorschrift direkt aus dem HF-Echo hervorgeht, ist die lokale Rückstreustärke die *Schätzung* eines statistischen Parameters, der den Zufallsprozess „HF-Echo“ beschreibt. Wie jede Schätzung ist auch diese einer gewissen Unsicherheit unterworfen, die zu kennen für die quantitative Analyse oder für die Darstellung dieses Parameters in einem Parameterbild nützlich ist, vor allem um wiederum einen Kompromiss zwischen Auflösung und Genauigkeit zu finden.

Die Schätzvorschrift für die lokale Rückstreuleistung lautet (gleich der Varianz mittelwertfreier Zufallsprozesse)

$$\hat{\sigma}_X^2 \equiv \hat{r}_X(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x^2(t) . \quad (8.9)$$

Die Wurzel aus diesem Wert, also $\hat{\sigma}_X$, sei als lokale Rückstreustärke bezeichnet.

Die Annahme der Mittelwertfreiheit ist für die von Parameterbildern aus entfalteten Echos wichtig, da Impulse nur mit dieser Schätzvorschrift richtig abgebildet werden, denn würde man stattdessen die Varianz berechnen, also den quadrierten Mittelwert abziehen, würde der Impuls deutlich an Höhe einbüßen¹.

Zur Herleitung eines Ausdruckes für $\text{var} \left\{ \hat{\sigma}_X^2 \right\}$ gehen wir von der Varianz der nicht erwartungstreu geschätzten Autokorrektionsfolge aus:

$$\hat{r}_X(\tau) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \cdot x(t + \tau) . \quad (8.10)$$

¹ Allerdings kann die Mittelwertfreiheit nach der Entfaltung nicht immer gewahrt bleiben, weil die ARMA-Modelle der Referenz, also das Zustandsraummodell für die Entfaltung, einen kleinen Gleichanteil enthalten können, der sich auf das entfaltete Signal fortpflanzt. Somit hätte obiger Schätzwert den Bias $+\langle X(t) \rangle^2$. Ob dieser Bias vertretbar ist, hängt vom Gleichanteil der Referenz in der Entfaltung ab und kann nicht allgemein gültig erörtert werden.

Die Varianz dieser Schätzung ist nach [KK98], S.301 (Herleitung umfangreich)

$$\begin{aligned} \text{var} \{ \hat{r}_X(\tau) \} = \\ \frac{1}{N} \sum_{t=-(T-1-|\tau|)}^{T-1-|\tau|} \left(1 - \frac{|t| + |\tau|}{T} \right) \cdot \left(r_X^2(t) + r_X(t + |\tau|) \cdot r_X(t - |\tau|) \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Mit $\sigma_X^2 = r_X(\tau = 0)$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\text{var} \{ \hat{\sigma}_X^2 \} = \frac{2}{N} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|t|}{T} \right) \cdot r_X^2(t), \quad (8.12)$$

und speziell für Unkorreliertheit, also $r_X(\tau) = \delta(\tau)$,

$$\text{var} \{ \hat{\sigma}_X^2 \} = \frac{2}{N} \cdot r_X^2(0) = \frac{2}{N} \cdot \sigma_X^4. \quad (8.13)$$

Es besteht also eine deutliche Abhängigkeit von der Korreliertheit des Prozesses. Folglich sind für die Schätzungen $\hat{\sigma}_Z^2$ aus dem rohen HF-Echo zur Wahrung einer gewissen Genauigkeit wesentlich größere Signalausschnitte erforderlich als für entsprechende Schätzungen auf der Basis des entfalteten Echos $\hat{w}(t)$. Ein quantitatives Beispiel in Abb. 8.2 verdeutlicht dies. *Hierin liegt auch begründet, dass die Schätzung $\hat{\sigma}_W^2$ nach Gleichung (6.87) (S.96), die aus $\hat{\sigma}_Z^2$ hervorgeht, ein Parameterbild mit geringerer Auflösung ergibt als die erneute Schätzung $\hat{\sigma}_{\hat{W}}^2$ aus dem Ergebnis der Entfaltung, $\hat{w}(t)$.*

Allerdings ist zu beachten, dass die lokale Leistung von $\hat{w}(t)$ auch mit der Schätzung $\hat{\sigma}_W^2$ zusammenhängt, was in gewisser Weise zu einer Pseudoauflösung führen kann. Aus Abb. 8.3 geht hervor, inwieweit eine variierende Signalleistung σ_W^2 trotz eines fest gewählten $s_W^2 = 1$ im Filterparameter $p \equiv s_W^2/\sigma_V^2$ nach der Entfaltung noch rekonstruiert werden kann. Idealerweise sollten die Kurven in Abb. 8.3 flach verlaufen, was aber nicht der Fall ist. Es fällt auf, dass ein gegenüber s_W^2 erhöhtes σ_W^2 besser rekonstruiert wird als ein erniedrigtes, eine Eigenschaft, die nicht von der Mittenfrequenz und auch nicht von der Form der bandpassartigen Referenz $H(\omega)$ abhängt (die Kurvenformen bleiben trotz Variation dieser beiden Charakteristika von $H(\omega)$ ähnlich). Für $p \equiv s_W^2/\sigma_V^2 \rightarrow \infty$ nähert sich $\sigma_{\hat{W}}^2/\sigma_W^2 \rightarrow 1$, wie zu erwarten war. Allgemein können die Fehler folgendermaßen erklärt werden: Im Fall $\sigma_W^2 > s_W^2$ ist das tatsächliche SNR besser als das für die Entfaltung

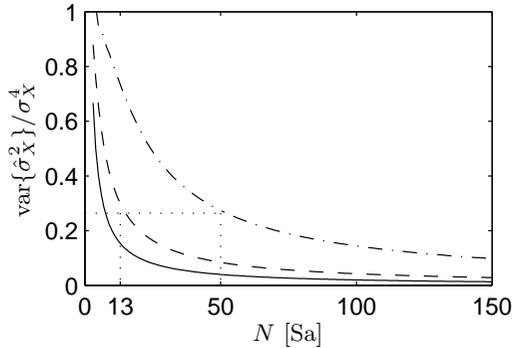


Abb. 8.2: Normierte Varianz des Schätzers $\hat{\sigma}_X^2$ in Abhängigkeit von der Länge N des Datenausschnittes. — Unkorrelierter normalverteilter Zufallsprozess X (minimale Varianz). — — Korreliertheit nach Entfaltung (Entfaltungsfiler (6.88), S.96, Filterparameter $p \equiv s_W^2/\sigma_V^2$, $s_W^2 = 1$, $\sigma_V^2 = -30$ dB; Referenz $H(\omega)$ wie in (6.102), S.100). - · - Korreliertheit des rohen HF-Echos (normalverteiltetes weißes Rauschen gefiltert mit $H(\omega)$). Ist im HF-Echo für eine bestimmte Varianz die Fensterlänge $N = 50$ erforderlich, kann im entfalteten Echo die gleiche Varianz schon mit $N = 13$ erreicht werden.

angenommene. $\hat{w}(t)$ kann den Spitzen von $w(t)$ nicht folgen. Dagegen ist für $\sigma_W^2 < s_W^2$ das SNR kleiner als angenommen und somit schlägt sich das Rauschen auf $\hat{w}(t)$ nieder, da es ungenügend unterdrückt wird.

In der Praxis der Gewebedifferenzierung ist die Korrelation $r_X(\tau)$ natürlich nicht bekannt. Aber auch in diesem Fall kann die Varianz der lokalen Rückstreustärke abgeschätzt werden [Bro98].

8.3 Beispiele: Parameterbilder

In diesem Abschnitt wird anhand von Beispielen erörtert, welche potenziellen Vorteile gegenüber konventionellen Ultraschallbildern erreicht werden können, wenn die Parametrisierung der entfalteten HF-Echos Ausgangspunkt einer bildhaften Darstellung ist.

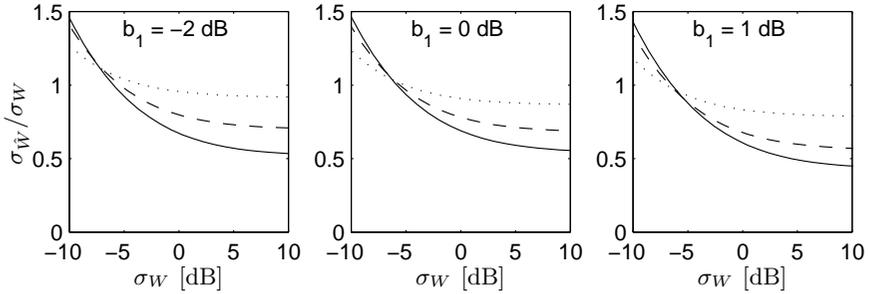


Abb. 8.3: Leistung σ_W^2 des entfalteten Signals im Verhältnis zur Leistung σ_W^2 des Eingangssignals bei festem $s_W^2 = 1$ (Entfaltungsfilter (6.88), S.96, Filterparameter $p \equiv s_W^2 / \sigma_V^2$; Referenz $H(\omega)$ wie in (6.102), S.100). — $\sigma_V^2 = -30$ dB. — $\sigma_V^2 = -40$ dB. \cdots $\sigma_V^2 = -50$ dB.

8.3.1 Lokale Rückstreustärke

Die naheliegendste Parametrisierung entfalteter Echosignale ist sicherlich die lokale Rückstreustärke, denn sie kann mit hoher räumlicher Auflösung bestimmt werden und entspricht dem intuitiven Verständnis des Puls-Echo-Prinzips [GR00].

Anhand eines wohldefinierten Testobjektes, dem in Abb. 8.4 dargestellten Ultraschallphantom, kann geprüft werden, inwieweit die aus den entfalteten Echos gewonnenen Parameterbilder der lokalen Rückstreustärke mit konventionellen Bildern konkurrieren können oder diese in der Darstellungsqualität übertreffen: Die Position der Nylonfäden sollte scharf und ohne Artefakte dargestellt werden (Rekonstruktion von Impulsen), und die Einschlüsse veränderter Rückstreustärke sollten klar erkennbar sein (Gewebekontrast).

Wie der Vergleich in Abb. 8.5 veranschaulicht, ist das aus entfalteten Echos berechnete Bild deutlich glatter, ohne die Lokalisierbarkeit der Reflexionsstellen zu beeinträchtigen, wie dies bei normalen Glättungsfiltern zu erwarten wäre. Die Einschlüsse sind aufgrund des reduzierten Speckle-Rauschens deutlicher als homogene Einheit zu erkennen.

Mit der Entfaltung wurde insbesondere die Korrektur von Beugungs- und Dämpfungseffekten beabsichtigt. Dies zeigt sich darin, dass die homogene Streueigenschaft des Phantomgrundmaterials als über das gesamte Bild gleich bleibender Grauton abgebildet wird – eine objektivierte und geräteunabhängigere Darstellung.

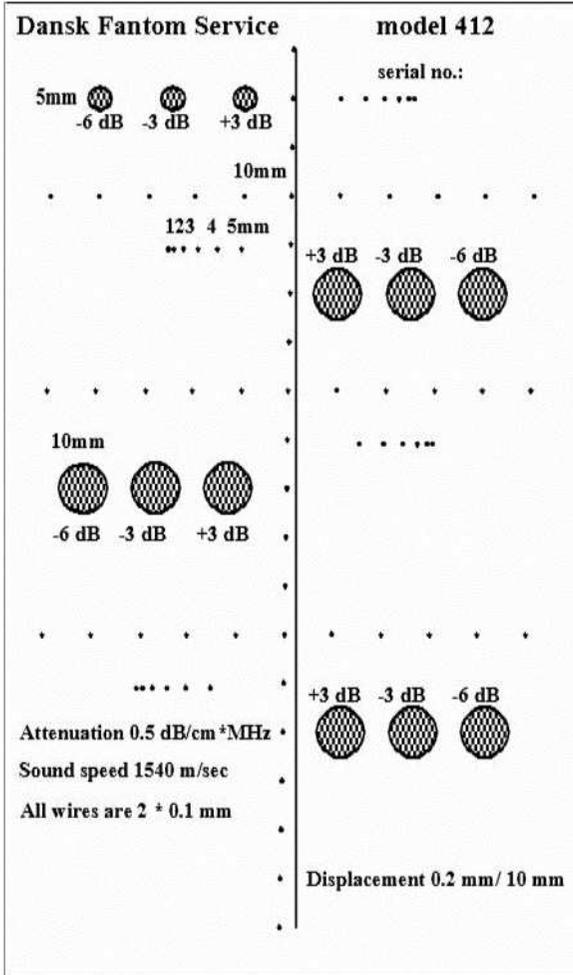


Abb. 8.4: Ultraschallphantom. Die Punkte zeigen die Position von dünnen Nylonfäden an, die senkrecht zur Darstellungsebene verlaufen. Zylindrische Einschlüsse mit gegenüber dem Grundmaterial des Phantoms veränderter Rückstreustärke sind durch Kreisscheiben gekennzeichnet.

Auch die Parameterbilder von *In-vivo*-Aufnahmen in Abb. 8.5 bis Abb. 8.8 zeigen sich im Vergleich zur konventionellen Darstellung glatter und mit gleichbleibend deutlichen Details. *Die Unterdrückung des Speckle-Rauschens ermöglicht eine kontrastreichere Darstellung, was der Unterscheidung von verschiedenen Gewebearten zugute kommt.*

Allerdings kann das Speckle-Rauschen nicht vollständig unterdrückt werden, was drei Gründe hat: Erstens können Dämpfung und Rückstreuungsspektrum des *In-vivo*-Gewebes von denen des Phantoms abweichen, was zu axialer Restkorrelation führt. Zweitens sind die Echos aus größeren Eindringtiefen stark durch Rauschen gestört, worauf das Entfaltungsfiler mit schmälere Durchlassbereichen reagiert, und somit stärkere axiale Korrelation nach sich zieht. Drittens bleibt die laterale Korrelation prinzipiell erhalten, und somit verstärken die beiden erstgenannten Ursachen das Rest-Speckle.

Details der Berechnung

Die Entfaltung (Algorithmus auf S.86f.) wurde mit einer vom Rauschannteil befreiten ARMA-Referenz ($N_C = 6$, $N_A = 7$) durchgeführt, die mittels PEM aus dem Phantom gewonnen wurde (Abb. 5.5 auf S.67). Im Übrigen erfolgte die Schätzung von σ_W^2 mit den Methoden aus Abschnitt 6.5.4 und Abschnitt 6.8.3, und σ_V^2 war wie in Abb. 5.4, S.65. Der in Abschnitt 6.7 optimierte Parameter des Entfaltungsfilters war $\gamma = 2$. Details zur Aufnahmeapparatur und zum verwendeten Schallwandler sind in Abschnitt 5.6.1 bzw. in Tab. 2.1 beschrieben.

Zur Schätzung der lokalen Rückstreustärke wurde ein Datenausschnitt von lediglich 6 Samples verwendet (bei der verwendeten Abtastfrequenz von 20 MHz und einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von 1540 m/s entspricht dies einer axialen Fensterlänge von 0,23 mm). Die Einhüllende der rohen HF-Echos wurde nach Abschnitt 8.1.3 bestimmt, und zwar ebenfalls mit der Fensterlänge 6 Samples.

Für die Darstellung der lokalen Rückstreustärke $\hat{\sigma}_W$ aus entfaltenen Echos ist zu beachten, dass diese einen anderen Wertebereich und eine andere empirische Verteilung hat als die Einhüllende der rohen HF-Echos. Um trotzdem einen vergleichbaren Wertebereich und Kontrast zu erzielen, wurde in allen Beispielbildern zunächst eine RAYLEIGH-Verteilung an die Daten angepasst, und dann wurden die Daten durch den Wert der zehnfachen Standardabweichung plus Mittelwert dieser RAYLEIGH-Verteilung geteilt².

² RAYLEIGH-Dichte:

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} \cdot e^{-x^2/(2\beta^2)}, \quad x \geq 0.$$

Die Annahme einer globalen RAYLEIGH-Verteilung ist eine grobe Näherung, liefert aber praktikable Ergebnisse für die Ermittlung eines Wertebereichs.

Nach der beschriebenen Normierung erfolgt eine Amplitudenkompression derart, dass im Intervall $[0, 1]$ die darzustellenden Amplitudenwerte ungefähr eine symmetrische Verteilung mit Schwerpunkt in der Mitte dieses Intervalls haben. Hier erwies sich die Transformation $y = \log(\alpha x + 1) / \log(\alpha + 1)$ mit $\alpha = 100$ als günstig. Für die Darstellung auf Monitoren mit Kathodenstrahlröhre bietet sich eine zusätzliche Gammakorrektur mit $z = y^\nu$ an (je nach Gerät ist $\nu \in [1,5 \dots 2,5]$).

8.3.2 Spektrale Parameter und farbcodierte Darstellung

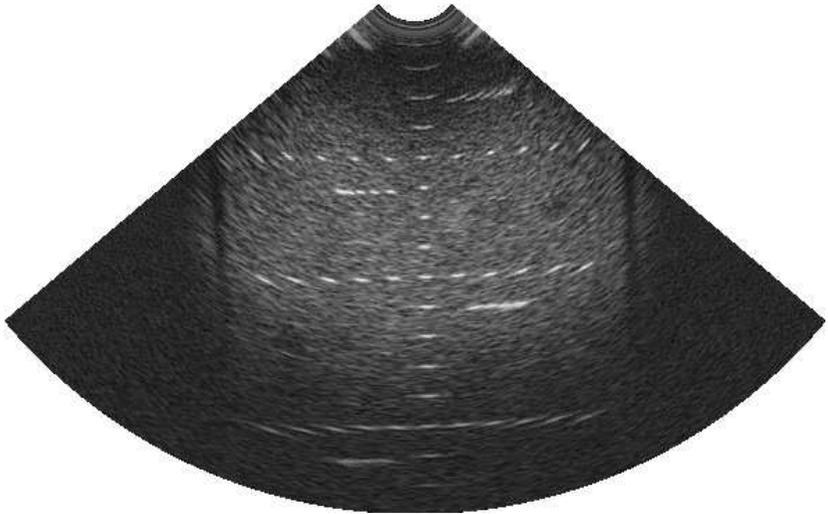
Eine zweite Möglichkeit, die entfalteten Echos in ein Bild umzuwandeln, ist die Parametrisierung der lokalen relativen Rückstreupektren. In erster Linie bietet sich der Wert des Rückstreupektrums bei einer ausgewählten Frequenz an. Parameter, die den Verlauf des Spektrums und somit die Mikrostruktur des Gewebes charakterisieren, sind in einer bildhaften Darstellung wenig aussagekräftig, da die Schätzung dieser Parameter mit großen Unsicherheiten behaftet ist, wenn sie aus *In-vivo*-Daten erfolgen soll (siehe auch Kapitel 3 sowie die dort zitierten Arbeiten).

Die Darstellung der Parameterbilder ist hier farbkodiert (Falschfarbendarstellung). Gegenüber grauwertkodierten Bildern haben Farbdarstellungen den Vorteil, dass die mit gleichen Farben kodierten Gebiete im Bild besser als zusammengehörig wahrgenommen werden. Ferner kann durch geschickte Wahl der Farbskala optimal auf den Informationsgehalt *relativer* Rückstreupektren eingegangen werden: Ein kleiner Grünbereich signalisiert geringe Abweichung von den Referenzspektren, während entsprechend der intuitiven „Temperaturskala“ größere Werte von Gelb bis Rot, und kleinere Werte von Cyan bis Dunkelblau reichen. Die Farbkodierung Grün agiert als Orientierungshilfe und somit wird die Auffassung des Ultraschallbildes zusätzlich objektiviert (dies wäre mit einem „mittleren Helligkeitswert“ in der Grauwertkodierung nicht möglich).

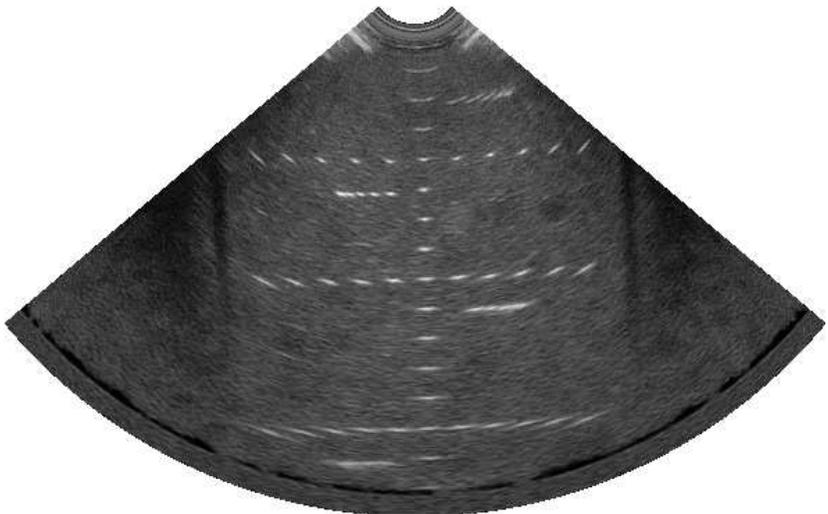
Zusätzlich kann in die farbigen Parameterbilder das konventionelle grauwertkodierte B-Bild (oder ein anderes Parameterbild) eingebracht werden,

Mittelwert $\beta\sqrt{\pi/2}$, Standardabweichung $\beta\sqrt{(4-\pi)/2}$. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für β ist

$$\hat{\beta}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N x_n^2.$$



(a) Konventionelles B-Bild.



(b) Lokale Rückstreustärke nach Entfaltung.

Abb. 8.5: Vergleich zwischen konventionellem B-Bild und dem Parameterbild lokaler Rückstreustärke nach Entfaltung im Zeitbereich (Aufnahme aus dem Ultraschallphantom in Abb. 8.4).



(a) Konventionelles B-Bild.



(b) Lokale Rückstreustärke nach Entfaltung.

Abb. 8.6: Vergleich zwischen konventionellem B-Bild und dem Parameterbild lokaler Rückstreustärke nach Entfaltung im Zeitbereich (Längsschnitt einer Niere mit Tumor rechts oben).



(a) Konventionelles B-Bild.



(b) Lokale Rückstreustärke nach Entfaltung.

Abb. 8.7: Vergleich zwischen konventionellem B-Bild und dem Parameterbild lokaler Rückstreustärke nach Entfaltung im Zeitbereich (Längsschnitt einer Niere mit Tumor links unten).



(a) Konventionelles B-Bild.



(b) Lokale Rückstreustärke nach Entfaltung.

Abb. 8.8: Vergleich zwischen konventionellem B-Bild und dem Parameterbild lokaler Rückstreustärke nach Entfaltung im Zeitbereich (Längsschnitt einer gesunden Niere, Leber links oben).

wenn die Gesamtdarstellung mit dem sogenannten HSB-Farbmodell aufgebaut wird (HSB: Hue Saturation Brightness). Hierbei entspricht die Farbart (Hue) dem Wert des spektralen Parameters, und der Grauwert des B-Bildes geht in die Helligkeit (Brightness) ein. Mit einer Farbsättigung (Saturation) von < 1 kann außerdem eine transparenter wirkende Darstellung erreicht werden. Auf diese Weise erhält der Betrachter den Eindruck, dass das farb-codierte Parameterbild dem B-Bild überlagert wäre.

Wie in Abb. 8.9 und Abb. 8.10 zu sehen ist, können auf der Basis von entfaltenen Echos hochauflösende Bilder spektraler Parameter errechnet werden. Die Schätzungen der relativen Rückstreupektren sind innerhalb der Bandbreite des Schallwandlers robust (Abschnitte 6.6ff.) und eignen sich deshalb besonders für eine bildhafte Darstellung. Die lokale Rückstreustärke dagegen wird vom gesamten Spektrum und somit auch von den Rauschanteilen beeinflusst.

Details der Berechnung

Zunächst wurde eine Entfaltung der HF-Echos durchgeführt, deren Eckpunkte bereits im vorigen Abschnitt skizziert wurden.

Zur Berechnung der spektralen Parameter bilden logarithmierte Amplitudenspektren die Grundlage. Hierzu wurden zunächst die Periodogramme der Länge 32 Samples von vier benachbarten A-Scans gemittelt (bei der verwendeten Abtastfrequenz von 20 MHz und einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von 1540 m/s entspricht dies einer axialen Fensterlänge von ca. 1,2 mm, die laterale Fensterausdehnung ist im Sektor-Scan variabel). Die Fenster wurden mit einem BLACKMAN-Fenster gewichtet.

Um den Bias durch Logarithmierung zu vermeiden und um die Varianz der Spektralschätzwerte zu verringern, wurden die gemittelten Spektren dann noch geglättet (Gewichtung der Autokorrelationsfolge mit einem PARZEN-Fenster der Länge 31, dies entspricht der in den Abschnitten 7.3.2 bis 7.3.4 beschriebenen BT-Methode).

8.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie aus den entfaltenen Ultraschallechos bildhafte Darstellungen erzeugt werden können. Da die Entfaltung systembedingte Einflüsse weitgehend korrigiert, sind auch die Bilder geräteunabhängiger und objektiver. Die Unterdrückung des Speckle-Rauschens in Bil-

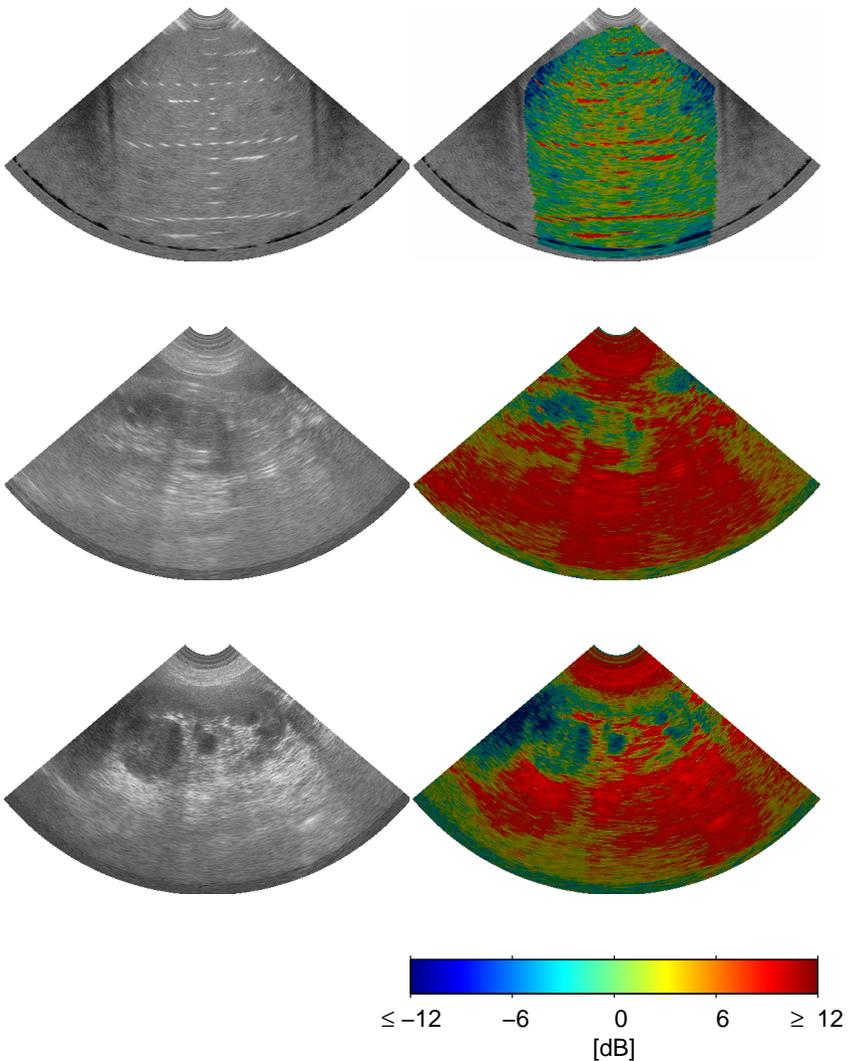


Abb. 8.9: Links: Lokale Rückstreustärke. Rechts: Relative Rückstreuenspektren bei $f = 3,75$ MHz, nach der Entfaltung im Zeitbereich geschätzt. Der Wertebereich der Darstellung wurde auf $-12 \dots 12$ dB beschränkt, um Details im Bereich des Nierenparenchyms sichtbar zu machen. Im Phantombild (oben) sind einige der Einschlüsse zu erkennen (vgl. Abb. 8.4).

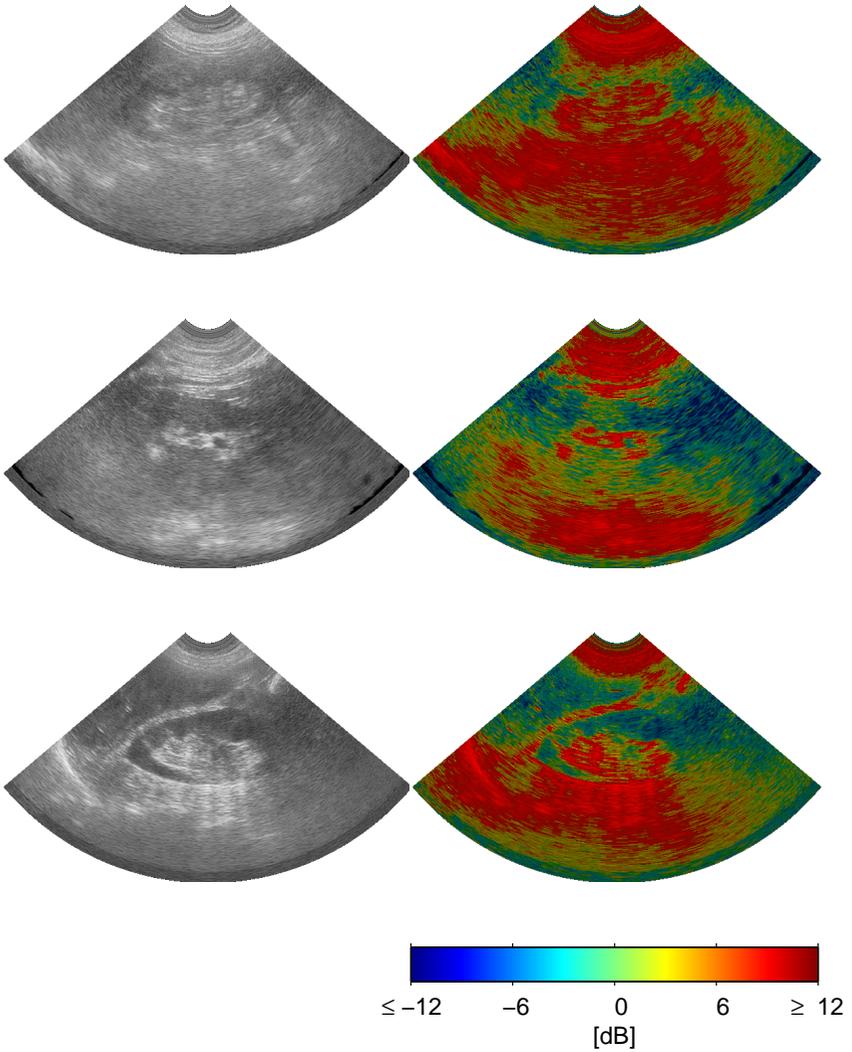


Abb. 8.10: Links: Lokale Rückstreustärke. Rechts: Relative Rückstreu-
spektren bei $f = 3,75$ MHz, nach der Entfaltung im Zeitbereich
geschätzt. Weitere Erläuterungen in Abb. 8.9.

dern der lokalen Rückstreustärke ist überzeugend, und gleichzeitig offenbart sich ein mindestens genau so hoher Detailreichtum und Gewebekontrast wie bei konventionellen Bildern. Wegen des reduzierten Speckle-Rauschens ist in vielen Fällen sogar eine wesentlich kontrastreichere Darstellung verschiedener Gewebearten möglich, was für die Diagnose von großem Nutzen sein kann.

9. Klinische Studie

Die ursprüngliche Idee war es, mit Hilfe von Methoden der automatischen Gewebedifferenzierung ähnlich denen in [Sch96] eine Dignitätsaussage für ausgewählte Gewebereiche zu erhalten und somit auch die Sichtbarkeit von Nierentumoren in Ultraschallbildern zu verbessern. Deshalb wurde zunächst die nun beschriebene Machbarkeitsstudie durchgeführt. Leider stellte sich heraus, dass die automatische Gewebedifferenzierung in naher Zukunft wohl kaum realisierbar sein wird. Die Ursachen hierfür sind vielfältig und liegen sowohl in den Einschränkungen des Puls-Echo-Verfahrens als auch in der großen Variabilität der Gewebestrukturen.

Die Studie wurde in enger Zusammenarbeit mit Herrn Dr.-med. D. Rösing (Klinik für Urologie, Universität Greifswald) angefertigt. Weiterhin waren beteiligt: Prof. Dr.-Ing. U. Lübbert, PD Dr.-rer.-nat. B. Pompe (Institut für Physik, Universität Greifswald), Prof. Dr.-med. K.-J. Klebingat, OA Dr.-med. U. Zimmermann (Klinik für Urologie, Universität Greifswald). Teile der Studie wurden in [GRK99] präsentiert.

9.1 Aufgabenstellung

9.1.1 Warum Nierenultraschall?

Es bietet sich aus mehreren Gründen an, eine klinische Studie zur Gewebedifferenzierung mittels Ultraschall am Organ der Niere durchzuführen. „Als Organ mit einer Fülle von Anomalien und Formvarianten treten [...] bei der Niere oft diagnostische Probleme bei der Abgrenzung des Normalen zum Pathologischen, insbesondere in der Tumordiagnostik auf“ ([Zol94], S.115). Deshalb steht an erster Stelle der potenziell hohe Wert einer quantitativen Ultraschalldiagnose für die Diagnose und Detektion von Nierentumoren:

- Kleinere Tumoren werden oft übersehen (Tumoren im Anfangsstadium oder multifokales Wachstum; sonografische Nachweisbarkeit ab einem Durchmesser von ca. 2 cm).

- Die genaue Größe und die Begrenzung von Tumoren sind für deren operative Entfernung (Nierenteilresektion) von größter Wichtigkeit. Leider kommt es oft vor, dass weder Sonografie noch Spiral-CT die erforderliche Klarheit schafft.
- Kleine Nierenkarzinome sind in ca. 75 % der Fälle in ihrer Echogenität (subjektiv) nicht vom Nierenparenchym zu unterscheiden ([Zol94], S.129), dagegen weisen Nierenkarzinome ab mittlerer Größe häufig unregelmäßige Echostrukturen auf.
- Prinzipiell wäre es wünschenswert, auf das teure und für den Patienten mit hoher Strahlenbelastung einhergehende Spiral-CT zu verzichten.

Für die Durchführbarkeit einer Studie zur Gewebedifferenzierung sind von Bedeutung:

- Die Niere ist ein paariges Organ, womit mehr intraindividuelle Vergleichsdaten vorhanden sind.
- Die Inzidenz von Nierentumoren ist vergleichsweise hoch, was eine rasche Sammlung von Daten unterschiedlicher Patienten ermöglicht.
- Die Niere kann sowohl vor als auch während der Operation ohne großen Aufwand sonografiert werden. Vorteil der intraoperativen Sonografie ist es, dass der Schallkopf mit einer schallkoppelnden Vorlaufstrecke direkt auf das freigelegte Organ aufgesetzt werden kann und somit der ansonsten störende Einfluss zwischenliegender Fett- und Gewebeschichten vermieden werden kann.

9.1.2 Warum Ultraschallkontrastmittel?

Wie im vorigen Abschnitt bereits angeklungen ist, läge der für die Detektion von Nierentumoren erstrebenswerte Mehrwert einer Gewebedifferenzierung in der deutlicheren Unterscheidbarkeit von gesundem Parenchymgewebe und krankem Tumorgewebe, also der Erhöhung des Gewebekontrastes. Deshalb liegt es auf der Hand, Ultraschallkontrastmittel (USKM) einzusetzen. Zwar wurde USKM ursprünglich zur besseren Diagnose der Durchblutung von Organen mittels Farbdoppler-Sonografie entwickelt. Es gibt jedoch Hinweise, dass die Kapillargefäßstruktur entscheidenden Einfluss auf das Rückstreuungsspektrum von Schall hat ([Höf95] etc.).

Es wurde das 1996 auf dem Markt erschienene USKM LevovistTM 2,5 g (D-Galaktose + Palmitinsäure) verwendet [FS95]. Der erhöhte „Kontrast“,

womit in der Regel erhöhte Rückstreuintensität aus Blutgefäßen gemeint ist, wird dadurch erreicht, dass sich an speziellen Keimen kleinste Gasbläschen im Blut ausbilden, die dann große Schallimpedanzsprünge verursachen (es existieren verschiedene Stoffe, die diese Bläschenbildung auslösen; Forschungen hierzu sind noch aktuell).

Allerdings sind für die Studie auch einige Nachteile des Einsatzes eines solchen USKMs zu notieren:

- Von der Injektion des USKMs bis zur maximalen Wirkung vergeht ungefähr eine Minute. Aufgrund der Atmung des Patienten ist es aber praktisch unmöglich, den Zeitpunkt für die Aufnahme eines Ultraschallbildes genau festzulegen.
- Die Wirksamkeit des USKMs lässt rasch nach (wenige Minuten).
- Kontinuierliche Beschallung von USKM-angereichertem Blut führt zur Zerstörung der Gasbläschen. Ob der Effekt des USKMs erhalten bleibt, hängt dann im Wesentlichen davon ab, ob mit ausreichender Durchblutung des untersuchten Gewebes neues USKM-reiches Blut nachkommt.
- Kosten, Aufwand und Patientenbelastung (USKM muss intravenös verabreicht werden) sind sehr hoch.

9.1.3 Wahl der Methoden

Die Veränderung der Echogenität eines Gewebebereiches kann oft schon im konventionellen Ultraschallbild beobachtet werden. Da die Anreicherung von USKM nur dann diagnostisch nützlich ist, wenn sich dadurch ein erhöhter Kontrast zwischen verschiedenen Gewebebereichen ergibt, notierte ein im Umgang mit Sonografie erfahrener Arzt die Echogenität des karzinomverdächtigen Areals im Vergleich zum gesunden Parenchymgewebe (hyper-, hypo- oder isoechogen) vor und nach Verabreichung von USKM (*intraindividuellem Vergleich*).

Dem subjektiven Eindruck sollte eine objektive Beurteilung gegenübergestellt werden, die sich auf Methoden der quantitativen Analyse von Ultraschallechos stützt.

Die Aufzeichnung der *präoperativen* Ultraschalldaten erfolgte in der Regel am Abend vor der Operation:

1. Aufzeichnung der HF-Echos von zwei bis drei Ultraschallbildern aus Längs- und Querschnitten der gesunden Niere.
2. Aufzeichnung der HF-Echos mehrerer Schnittebenen der kranken Niere.
3. Verabreichung von USKM.
4. Neuerliche Aufzeichnung der HF-Echos mehrerer Schnittebenen der kranken Niere.
5. Markieren von Parenchym- und Tumorgewebe durch einen Arzt mit Hilfe einer speziell entwickelten Software.

Die Schritte 2 bis 5 wurden an der operativ freigelegten und noch durchbluteten Niere wiederholt (*intraoperativer Ultraschall*).

Details zur Aufnahmeapparatur findet man in Abschnitt 5.6.1, einige technische Daten des verwendeten Schallwandlers sind in Tab. 2.1 aufgelistet.

Zur Auswertung der Daten mittels quantitativer Ultraschalldiagnose wurden relative Rückstreuenspektren parametrisiert. Relativ heißt hier, dass zur Korrektur von Beugungs- und Dämpfungseffekten alle lokal geschätzten Rückstreuenspektren auf Referenzspektren entsprechender Eindringtiefe bezogen wurden. Selbstverständlich blieben sämtliche Geräteeinstellungen über alle Aufnahmen hinweg konstant, auch für die Aufnahme der Referenz aus dem gewebeimitierenden Phantom. Die genauen Parameter der Analyse sind in Tab. 9.1 aufgelistet.

Man könnte argumentieren, dass statt der gemittelten Spektren aus einem künstlichen Phantommaterial besser solche aus *In-vivo*-HF-Echos verwendet werden sollten, um die Dämpfungseigenschaften des zu analysierenden Gewebes besser modellieren zu können. Bei weitestgehend homogenen Organen wie der Leber und der Testis ist eine solche Vorgehensweise sicherlich die beste Wahl, aber bei den heterogenen Ultraschallbildern der Niere ist sie zweifelhaft (siehe Ergebnisse in Abschnitt 5.6.4).

Die statistische Auswertung der aus den HF-Echos geschätzten Parameter erfolgte für den *intraindividuellen* Vergleich nach dem gleichen Prinzip wie bei der subjektiven Auswertung. Es ging also nur darum, ob ein Parameter wie z.B. die Rückstreustärke \hat{b}_0 in einem Gewebebereich (Parenchym) einen höheren (hyper), niedrigeren (hypo) oder einen gleichen (iso) Mittelwert hatte wie in einem anderen Gewebebereich (Tumor). Als statistisches Verfahren eignet sich hierfür der U-Test (auch MANN-WHITNEY-Test oder WILCOXON-Rangsummen-Test genannt; [Sta00], S.197ff), der unabhängig

Abtastfrequenz	20 MHz
Mittelfrequenz f_0	3,5 MHz
berücksichtigte Bandbreite	2...5 MHz
Fensterlänge	128 Samples
Spektralschätzer	gemittelte Periodogramme, anschließend geglättet (BT-Methode mit PARZEN-Fenster, $T_W = 24$, siehe hierzu Abschnitte 7.3.2ff.)
Fenstergewichtung	BLACKMAN-Fenster
Anzahl gemittelter Spektren	6 lateral
Abstand benachbarter Fenster	3 A-Scans, 64 Samples
Spektrale Parameter	b_0, b_1, b_{err} (siehe Abschnitt 3.3)
Referenz	gewebeimitierendes Phantom (siehe Abb. 8.4, S.145)

Tab. 9.1: Parameter der quantitativen Analyse.

von der empirischen Verteilung der Parameter eine entsprechende Aussage unter Berücksichtigung eines vorgegebenen Signifikanzniveaus leistet. Der T-Test ist ungeeignet, da er von normalverteilten Stichproben ausgeht.

Zur Beurteilung der Parameterverteilungen insgesamt ist ein *interindividueller* Vergleich interessant. Somit können einerseits die Wertebereiche der Parameter auf ihre Plausibilität hin überprüft werden, und andererseits können allgemein gültige und vom Patienten unabhängige Trends festgestellt werden.

9.2 Ergebnisse

Insgesamt wurden die Ultraschallbilder von 48 Patienten gesammelt, davon war in 44 Fällen ein Nierenzellkarzinom und in vier Fällen eine gutartige Raumforderung diagnostiziert worden. Bei fünf Patienten wurden keine intraoperativen Ultraschallbilder aufgezeichnet. Ultraschallaufnahmen, die ohne USKM angefertigt wurden, sind im Folgenden als *nativ* bezeichnet. Für die statistische Auswertung kamen einige Aufnahmen nicht in Betracht, da das Parenchymgewebe nicht klar erkennbar oder bereits fast vollständig vom Tumor verdrängt war.

9.2.1 Intraindivideller Vergleich

In der Praxis ist es äußerst schwierig, mehrere Ultraschallaufnahmen aus der gleichen Schnittebene des Organs zu gewinnen, da Schallkopf und Patient frei beweglich sind und auch schon die Atmung des Patienten „Verwacklungen“ verursacht. Dies wäre bei weitgehend homogener Organstruktur kein Problem. Es hat sich aber gezeigt, dass sich die Parameterverteilungen selbst innerhalb eines Patientendatensatzes von Schnittebene zu Schnittebene zum Teil voneinander unterscheiden, wie die Ergebnisse in Tab. 9.2 demonstrieren. Zwar stimmen bei durchschnittlich 50 % der Patienten die Parametermittelwerte verschiedener Aufnahmen innerhalb der Aufnahmeklassen überein, doch erscheint dies angesichts der angestrebten Diskriminanz viel zu wenig.

Da für den hier angestrebten Vergleich des Gewebekontrastes Tumor – Parenchym vor und nach Verabreichung von USKM also keine identischen Schnittebenen zur Verfügung standen, wurden für jede Aufnahmeklasse (präoperativ, intraoperativ, mit und ohne USKM) sowie für jede Gewebeklasse (Parenchym, Tumor) die Parameter aller Aufnahmen eines Patienten zu einer Parameterverteilung zusammengefasst (insgesamt acht Klassen). Kleine hochgradig instationäre Bereiche (hyperechogen) wurden nach der Methode aus Abschnitt 5.5.2 von der Parameterextraktion ausgeschlossen, um die Parameterverteilungen nicht unnötig zu verbreitern (das Verhältnis der Fläche solcher instationärer Bereiche zur Gesamtfläche des markierten Gewebebereichs schwankte zwischen 0 und 10 %, mit einer maximalen Häufigkeit bei 3 % bis 4 %, unabhängig von der Aufnahmeklasse).

Nun wurden die Mittelwerte der Parameterverteilungen „Tumor“ und „Parenchym“ innerhalb jeder Aufnahmeklasse mit dem U-Test auf Gleichheit getestet (Ergebnis in Tab. 9.3). Das Ergebnis ist für alle vollständigen Datensätze in der Grafik Abb. 9.1 veranschaulicht. Man erkennt auf den ersten Blick, dass keine generelle Aussage hinsichtlich der Anreicherung von USKM möglich ist, wenn auch in Einzelfällen eine im Mittel erhöhte Echogenität objektiv nachgewiesen werden kann (hier nicht aufgeschlüsselt). Von einem Vergleich präoperativ – intraoperativ sollte abgesehen werden (siehe hierzu nächsten Abschnitt).

Schließlich bleibt noch festzustellen, dass die subjektiv recht häufig erkannte Erhöhung des Gewebekontrastes nach Verabreichung von USKM nicht mit den Ergebnissen des U-Tests übereinstimmt. Möglicherweise ist die Betrachtung des Mittelwertes der Parameterverteilungen zu grob im Vergleich zu dem gut ausgebildeten Differenzierungsvermögen des Arztes, aber auch eine gewisse Voreingenommenheit des Arztes kann nicht ausgeschlossen werden.

Aufnahmeklasse	Parameterart	Anzahl der Vergleiche			
		hypo	iso	hyper	Σ
Präoperativ Nativ	b_1	6 (17,1 %)	17 (48,6 %)	12 (34,3 %)	35
	b_0	12 (34,3 %)	15 (42,9 %)	8 (22,9 %)	35
	b_{err}	10 (28,6 %)	20 (57,1 %)	5 (14,3 %)	35
Präoperativ USKM	b_1	5 (16,1 %)	20 (64,5 %)	6 (19,4 %)	31
	b_0	6 (19,4 %)	16 (51,6 %)	9 (29,0 %)	31
	b_{err}	9 (29,0 %)	17 (54,8 %)	5 (16,1 %)	31
Intraoperativ Nativ	b_1	4 (11,1 %)	20 (55,6 %)	12 (33,3 %)	36
	b_0	12 (33,3 %)	14 (38,9 %)	10 (27,8 %)	36
	b_{err}	3 (8,3 %)	27 (75,0 %)	6 (16,7 %)	36
Intraoperativ USKM	b_1	4 (16,0 %)	18 (72,0 %)	3 (12,0 %)	25
	b_0	6 (24,0 %)	13 (52,0 %)	6 (24,0 %)	25
	b_{err}	5 (20,0 %)	17 (68,0 %)	3 (12,0 %)	25

Tab. 9.2: Intraindividueller Vergleich der Parametermittelwerte (U-Test) zwischen jeweils zwei Aufnahmen innerhalb der jeweiligen Aufnahmeklasse. Signifikanzniveau 0,01.

Aufnahmeklasse	Parameterart	Anzahl der Patienten			
		hypo	iso	hyper	Σ
Präoperativ Nativ	Echogenität (subjektiv)	3 (6,3 %)	28 (58,3 %)	17 (35,4 %)	48
	b_1	14 (40,0 %)	11 (31,4 %)	10 (28,6 %)	35
	b_0	10 (28,6 %)	5 (14,3 %)	20 (57,1 %)	35
	b_{err}	17 (48,6 %)	10 (28,6 %)	8 (22,9 %)	35
Präoperativ USKM	Echogenität (subjektiv)	2 (4,2 %)	18 (37,5 %)	28 (58,3 %)	48
	b_1	12 (41,4 %)	7 (24,1 %)	10 (34,5 %)	29
	b_0	11 (37,9 %)	5 (17,2 %)	13 (44,8 %)	29
	b_{err}	14 (48,3 %)	9 (31,0 %)	6 (20,7 %)	29
Intraoperativ Nativ	Echogenität (subjektiv)	3 (7,0 %)	18 (55,8 %)	28 (37,2 %)	43
	b_1	3 (11,5 %)	13 (50,0 %)	10 (38,5 %)	26
	b_0	5 (19,2 %)	11 (42,3 %)	10 (38,5 %)	26
	b_{err}	11 (42,3 %)	12 (46,2 %)	3 (11,5 %)	26
Intraoperativ USKM	Echogenität (subjektiv)	0 (0,0 %)	8 (18,6 %)	35 (81,4 %)	43
	b_1	4 (17,4 %)	16 (69,6 %)	3 (13,0 %)	23
	b_0	4 (17,4 %)	14 (60,9 %)	5 (21,7 %)	23
	b_{err}	8 (34,8 %)	10 (43,5 %)	5 (21,7 %)	23

Tab. 9.3: Intraindividueller Vergleich der Parametermittelwerte (U-Test) zwischen Tumor und Parenchym. Signifikanzniveau 0,01.

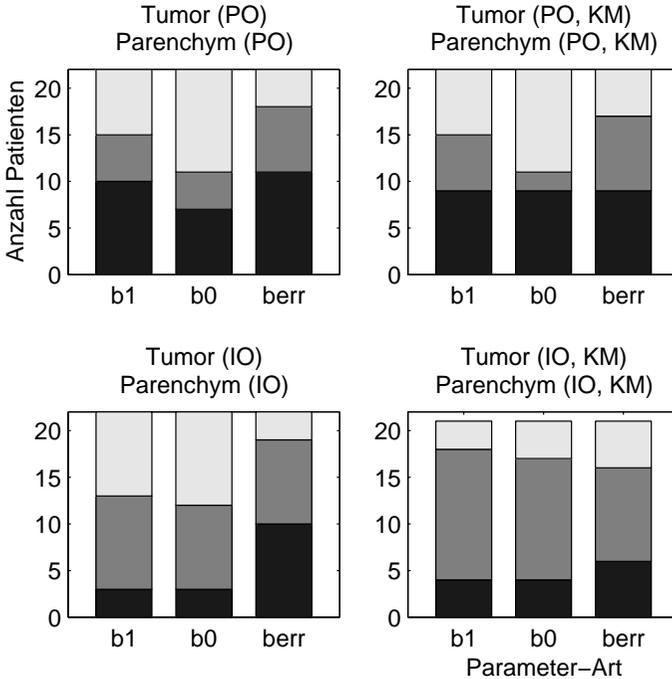


Abb. 9.1: Intraindividueller Vergleich der Parametermittelwerte (U-Test) zwischen Tumor und Parenchym, nur die vollständigen Datensätze. Signifikanzniveau 0,01.

■ : Hypoechoigen, ■ : Isoechoigen, □ : Hyperechoigen.

PO: Präoperativ, IO: Intraoperativ, KM: Kontrastmittel. Beim Vergleich (IO, KM) wurde ein Datensatz nicht berücksichtigt, da er weniger als fünf Parameterschätzungen enthielt.

9.2.2 Interindividueller Vergleich

Ein interindividueller Vergleich der spektralen Parameter ist möglich, da eine breitbandige Korrektur von Schallbeugung und -dämpfung vorgenommen wurde. Allerdings kann die Dämpfung im untersuchten (lebenden) Gewebe von dem des Korrektur- (Referenz-) Mediums abweichen, was aber beim inhomogenen Nierenultraschall nicht zuverlässig gemessen werden kann. Die Spektrogramme in Abb. 5.5 und Abb. 5.9 auf S.67 bzw. S.72 zeigen aber, dass im großen und ganzen die Dämpfung ähnlich ist (auf nähere Untersuchungen hierzu wurde verzichtet; tatsächlich ist die genaue Dämpfungskor-

rektur eines der wichtigsten ungelösten Probleme der *In-vivo*-Gewebecharakterisierung).

Die Abbildungen 9.2 und 9.3 demonstrieren¹, wie stark die Mittelwerte der spektralen Parameter von Patient zu Patient (interindividuell) schwanken, was eine Trennung der Klassen unmöglich macht. Ein allgemein gültiger Trend ist weder für die Kontrastmittelanreicherung noch für die generelle Klassifizierbarkeit von Tumor und Parenchymgewebe feststellbar. Da die intraindividuellen Mittelwerte bei den intraoperativen Aufnahmen gleichermaßen stark gestreut sind wie bei den präoperativen, kann die Ursache einer ungenügenden Dämpfungskorrektur praktisch ausgeschlossen werden, denn beim intraoperativen Ultraschall liegt zwischen Schallwandler und untersuchtem Gewebereich nur eine dämpfungsfreie Vorlaufstrecke und evtl. ein nur sehr kurzes Stück Gewebe. Auch die vergleichbaren Wertebereiche des Parameters b_1 bei präoperativen und intraoperativen Aufnahmen deuten auf eine akzeptable Dämpfungskorrektur hin (die Dämpfung ist frequenzabhängig und müsste bei unzureichender Korrektur zu verändertem b_1 führen). Allerdings liegt der Wertebereich von b_0 intraoperativ ca. 5 dB höher als präoperativ. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass mit zunehmender Beschallungsintensität die Gesamtrückstreustärke im Phantommaterial anders ansteigt als im lebenden Gewebe, ab einer gewissen Intensität sogar nichtlinear (die Einstellungen am Ultraschallgerät waren für prä- und intraoperative Aufnahmen gleich, und somit war die Beschallungsintensität mit der dämpfungsfreien Vorlaufstrecke intraoperativ höher). Entsprechende Experimente erschienen aber mangels einer positiven Gesamttendenz der klinischen Studie als unangemessen aufwändig.

Die Wertebereiche der Parameter sind plausibel und decken sich gut mit Ergebnissen aus der Literatur [Hui98, Sch96, SES99, JGC⁺00].

Die intraindividuellen *Standardabweichungen* (ohne Abbildung) liegen für \hat{b}_0 im Intervall [1 . . . 5] dB, mit Schwerpunkt bei ca. 2,9 dB, und für \hat{b}_1 im Intervall [0,6 . . . 1,6] dB/MHz, mit Schwerpunkt bei ca. 1 dB. Vergleicht man dies

¹ Um das Verständnis der Streudiagramme zu erleichtern wurde für jede Klasse zusätzlich eine Kontur gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte einer aus den Daten der jeweiligen Klasse geschätzten bivariaten Normalverteilung eingezeichnet (z.B. [Sta00], S.311f). Sei der Parametervektor mit \mathbf{x} bezeichnet (z.B. $\mathbf{x} = (b_0, b_1)^T$). Für jeden Datensatz wurden die Mittelwerte $\bar{\mathbf{x}}$ und die Kovarianzmatrix Σ geschätzt. Die in den Streudiagrammen eingezeichneten Ellipsen genügen der Gleichung

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 1 .$$

mit den ungefähr zu erwartenden Standardabweichungen des Schätzers², 3,31 dB für \hat{b}_0 und 0,86 dB/MHz für \hat{b}_1 , gelangt man zu dem Schluss, dass die hier ursprünglich angestrebte Gewebecharakterisierung in erster Linie deswegen scheitert, weil die Schwankungsbreite der Parameter im Vergleich zur Mess- und Schätzunsicherheit viel zu groß ist.

9.3 Zusammenfassung

Mit den Ergebnissen dieses Kapitels wurden starke Anhaltspunkte für die große intraindividuelle und interindividuelle Variabilität von spektralen Parametern aus Nierenparenchym und Nierentumor gefunden. Selbst mit genauester Dämpfungs- und Beugungskorrektur ist wahrscheinlich keine Verbesserung der Diskriminanz zwischen den Klassen Parenchym- und Tumorgewebe zu erwarten, und deshalb ist auch keine zuverlässige Klassifikation zwischen diesen beiden Gewebearten möglich. Dieses negative Ergebnis überrascht aber keineswegs, wenn man die Varianz der Parameterschätzwerte aus anderen Arbeiten zur Gewebecharakterisierung betrachtet. Dass sich in einigen Arbeiten trotzdem Klassifikationsergebnisse ergeben haben, liegt zum einen an der Tatsache, dass bisher nur homogenere Gewebestrukturen wie Leber und Hoden untersucht wurden, und zum anderen aber auch an der sorgfältigen manuellen Auslese „gutmütiger“ Datensätze.

An diesem Punkt müssen wir uns die in der Einleitung zitierte Frage in Erinnerung rufen: „Can tissue characterization ever become a science?“ (C.R.Hill in [DTOS96]). Die Arbeiten zur Gewebedifferenzierung sind freilich nicht umsonst, da deren Methoden der Korrektur systembedingter Verfälschungen die Grundlage von geräteunabhängigeren und standardisierten Ultraschallbildern bilden.

² Die Schätzvarianzen der linearen Regression $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \hat{b}$ durch Minimieren von $\sum (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^2$ sind (mit $\bar{x} \equiv 1/N \sum_{n=1}^N x_n$ und σ^2 der Varianz der Messwerte y)

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2} \quad \sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{n=1}^N x_n^2}{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2} .$$

Das Modell des relativen Rückstreupektrums ist $b_0 + b_1(f - f_0)$. Somit setzen wir $x_n = f_n - f_0$, und die f_n sind die Frequenzstützpunkte innerhalb der untersuchten Bandbreite $2,5 \text{ MHz} \leq f_n \leq 5 \text{ MHz}$, 128 Stützpunkte auf $f_S = 20 \text{ MHz}$. Außerdem schätzen wir ab: $\sigma^2 \approx \sigma_{\text{LMP}}^2(3) = 7,45 \text{ dB}^2$ (aus Abschnitt 7.2, wegen Korrelation benachbarter A-Scans statt der sechs gemittelten Spektren effektiv nur drei). Schließlich ergeben sich daraus die o.g. Standardabweichungen. Die vorgenommene Glättung in den relativen Rückstreupektralen verringert diese Standardabweichungen nicht, verhindert aber den Bias b_{LMP} (siehe 7.3)

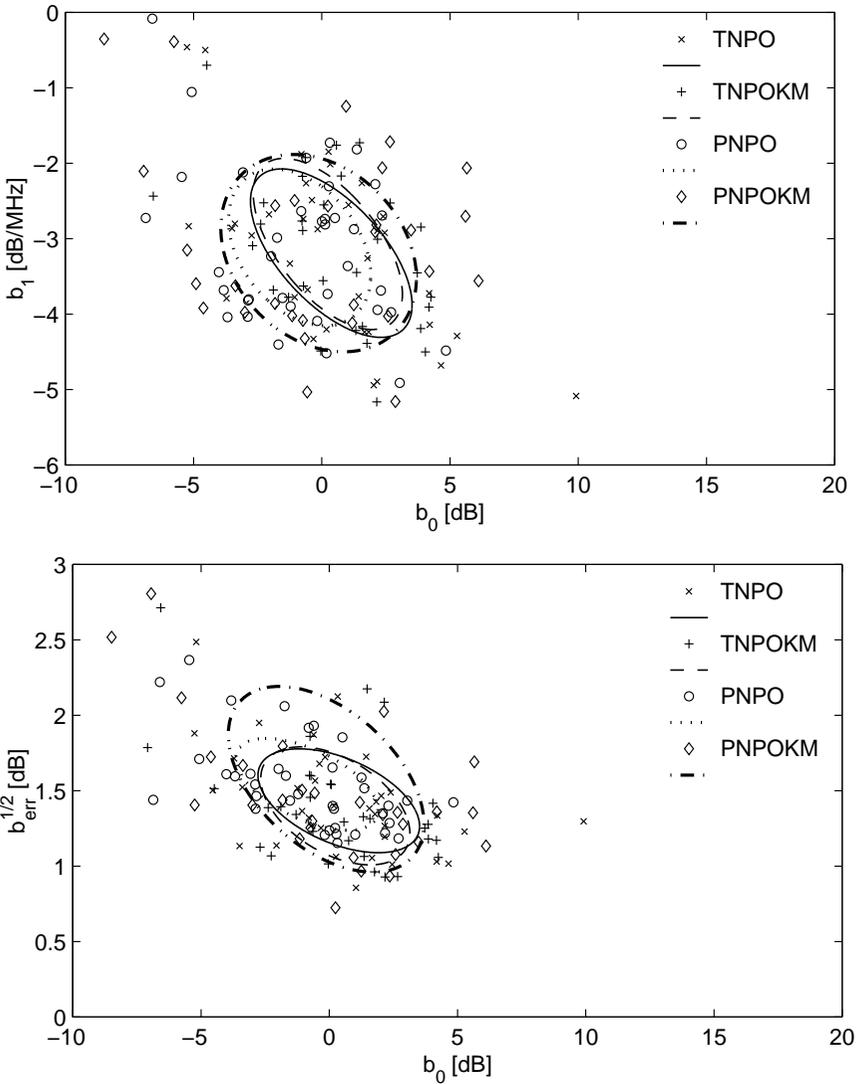


Abb. 9.2: Streudiagramme der intraindividuellen Parametermittelwerte, präoperativ. TN: Tumor Niere, PN: Parenchym Niere, PO: Präoperativ, KM: Kontrastmittel. Eine Trennung der Klassen ist nicht möglich. Die Ellipsen sind die Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte einer aus den Daten der jeweiligen Klasse geschätzten bivariaten Normalverteilung (Erläuterung in der Fußnote auf S.165).

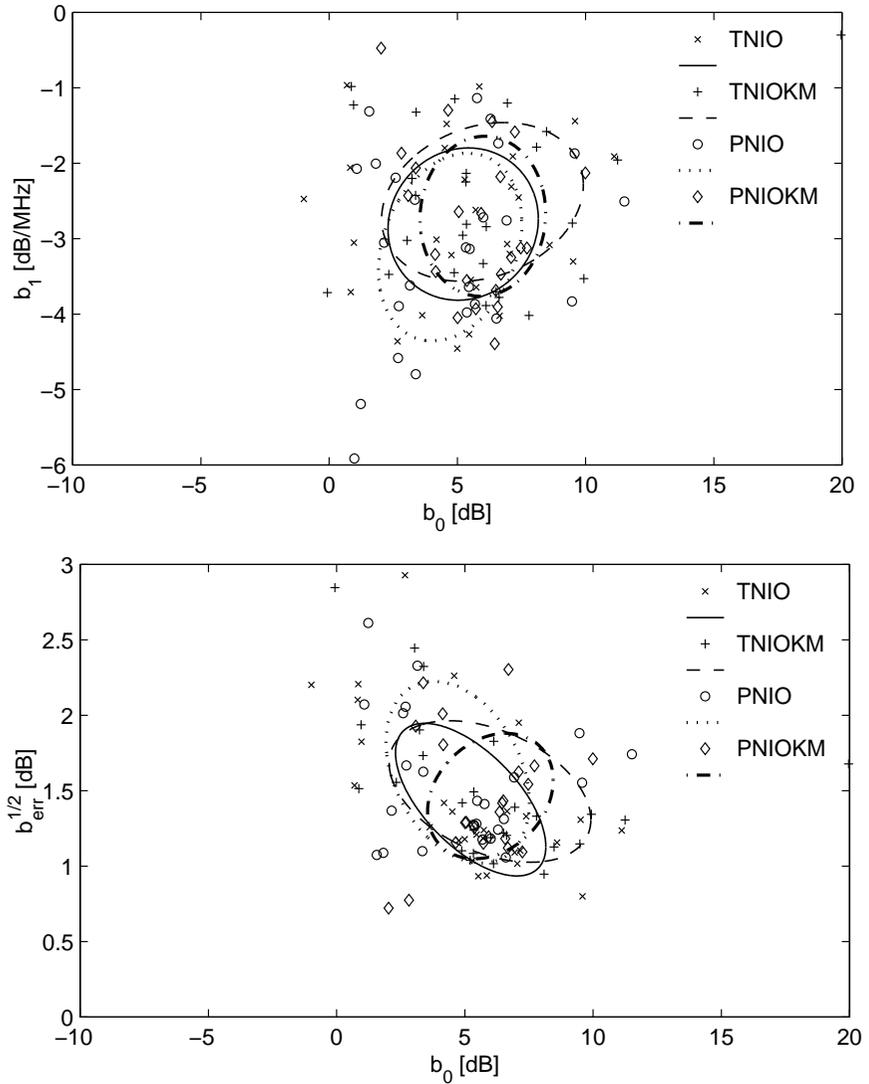


Abb. 9.3: Streudiagramme der intraindividuellen Parametermittelwerte, **intraoperativ**. TN: Tumor Niere, PN: Parenchym Niere, IO: Präoperativ, KM: Kontrastmittel. Eine Trennung der Klassen ist nicht möglich. Die Ellipsen sind die Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte einer aus den Daten der jeweiligen Klasse geschätzten bivariaten Normalverteilung (Erläuterung in der Fußnote auf S.165).

10. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Rahmenwerk zur Berechnung objektivierter Ultraschallbilder entwickelt, mit deren Hilfe die medizinische Diagnose erleichtert werden könnte: Die vorgestellten objektivierten Bilder stehen in einem direkteren Zusammenhang zum untersuchten Weichgewebe, da gerätespezifische Verfälschungen weitgehend korrigiert werden konnten.

Ausgehend von hochfrequenten Ultraschallechos, die aus marktüblichen klinischen Ultraschallgeräten stammen, führte der Weg zunächst über die Korrektur systembedingter Verfälschungen, zu denen insbesondere Schallbeugung, Schalldämpfung, Übertragungsverhalten des Schallwandlers und nachgeschalteter Verstärker sowie additives Rauschen zählen. Diese korrigierten Echos sind weitgehend geräteunabhängig und somit unabdingbare Voraussetzung für eine quantitative Analyse von Ultraschallechos. Schließlich können die Ergebnisse der quantitativen Analyse visualisiert werden, und man erhält auf diese Weise objektivierte Ultraschallbilder.

Ausgangspunkt war die Diskussion physikalischer Grundlagen und die Entwicklung eines einfachen systemtheoretischen Modells, um erstens der Anwendbarkeit von Methoden der statistischen Signalanalyse den Weg zu bereiten, und um zweitens die Grenzen der quantitativen Ultraschalldiagnose aufzuzeigen.

Der nächste Schritt war die Parametrisierung der systembedingten Verfälschungen. Dies geschah, in Abstimmung auf die nachfolgenden Korrekturverfahren, durch Anpassen eines zeitvarianten ARMA-Modells an Echos, die aus einem gewebeimitierenden Streuphantom aufgezeichnet wurden. Unter den diskutierten Methoden, ARMA-Parametrisierungen zu erhalten, erwies sich ein Multikanal-Prädiktionsfehlerverfahren als besonders praktikabel. Allerdings sind die gemessenen Echos aus dem Phantom rauschbehaftet, und somit enthalten die geschätzten ARMA-Modelle einen Rauschanteil. Um in den Korrekturverfahren diesem Rauschen in optimaler Weise Rechnung tragen zu können, wurde ein Verfahren entwickelt, den Rauschanteil mittels spektraler Faktorisierung nachträglich aus den ARMA-Parametrisierungen zu entfernen.

Zur Durchführung der Korrektur systembedingter Verfälschungen fiel die Wahl auf Methoden der zeitvarianten Entfaltung, deren Ergebnis ein Zufallsprozess sein sollte, der unabhängig von der Eindringtiefe des Schalls in gleichbleibendem Bezug zur Mikrostruktur des Gewebes steht. Kernpunkte der Korrektur-Strategie waren

1. Erhaltung möglichst breitbandiger Informationen über das spektrale Rückstreuverhalten aller Gewebeabschnitte,
2. die Auslegung der Entfaltung als eine Art Whitening-Filter im Zeitbereich, was effizientere und genauere Spektralschätzungen ermöglicht,
3. die Einbeziehung additiven Rauschens,
4. es sollte ein zusammenhängender Zufallsprozess resultieren, der sich zur weiteren Signalauswertung und schließlich zur Darstellung objektiver Ultraschallbilder eignet.

Alle diese Forderungen konnten mit einer zustandsraumbasierten Entfaltung (KALMAN-Interpolation) erfüllt werden. Mit Hilfe einer Analogiebetrachtung zwischen dem auf der KALMAN-Interpolation beruhenden Entfaltungsalgorithmus und dem akausalen WIENER-Filter wurde das Spektrum des rekonstruierten (entfalteten) Eingangssignals hergeleitet. Als Ergebnis ist festzuhalten, dass die Entfaltung auch korrelierte Signale in einem gewissen Rahmen zu rekonstruieren vermag, obwohl der Algorithmus des KALMAN-Filters für dieses Signal einen unkorrelierten Zufallsprozess fordert.

Für die Beurteilung der Qualität und Robustheit dieser Entfaltung wurde in erster Linie das Spektrum des Ergebnisses der Entfaltung betrachtet, welches im Zusammenhang mit Ultraschallechos dem relativen Rückstreupektrum entspricht.

Somit war nicht nur eine breitbandige Behandlung der Entfaltung möglich, sondern es zeigte sich auch ein im statistischen Sinne effizienter Weg zur Schätzung der in der Gewebecharakterisierung wichtigen Rückstreupektren. Außerdem wurde das Verhalten der Entfaltung in der Umgebung von starken Instationaritäten behandelt. Dabei stellte sich heraus, dass die vorgestellte Methode auch zur Rekonstruktion von Impulsen (Stellen starker Rückstreuung) geeignet ist, und somit auch auf *In-vivo*-Ultraschallbilder angewendet werden kann.

Da den Rückstreupektren in der quantitativen Ultraschalldiagnose eine zentrale Rolle zukommt, wurden in einem weiteren Teil der Arbeit die statistischen Eigenschaften periodogrammbasierter Spektralschätzer mit logarithmischer Amplitudenskala untersucht. Um eine hohe räumliche Auflösung

spektraler Parameter im Ultraschallbild zu erreichen, können nur wenige Spektren gemittelt werden. Die Analyse ergab, dass dann allerdings ein Schätzfehler (Bias) von bis zu $-2,5$ dB entsteht. Da dieser Fehler aber nur von der Anzahl der gemittelten Spektren abhängt, kann er leicht korrigiert werden. Außerdem wurden verschiedene Verfahren der Glättung von Spektren erörtert. Für die Glättung von relativen Rückstreuungsspektren erwies es sich als besonders günstig, die zugehörige Autokorrelationsfolge mit einem PARZEN-Fenster zu gewichten.

Die Parametrisierung der entfalteten, d.h. korrigierten Ultraschallechos ermöglichte die Darstellung von geräteunabhängigeren Ultraschallbildern mit gleichzeitig erheblich reduziertem Speckle-Rauschen, ohne dass eventuell vorhandene Konturen und Peaks negativ beeinflusst wurden. Die Unterdrückung des Speckle-Rauschens ermöglichte eine kontrastreichere Darstellung, was der Unterscheidung von verschiedenen Gewebearten zugute kommt und die Diagnose vereinfachen kann. Dies konnte anhand einiger Beispiele demonstriert werden.

Eine klinische Studie an Nierentumoren bestätigte die bereits bekannte prinzipielle Problematik der quantitativen Ultraschalldiagnose, dass die Schwankungsbreite gewebecharakterisierender Parameter im Bereich der Messunsicherheiten liegt. Zusätzlich verschlechtert sich die Diskriminanz zwischen Gewebeklassen durch die Inhomogenität von Nierentumoren und Nierenparenchym sowie durch große interindividuelle Unterschiede. Die Hoffnung, dass sich mit dem Einsatz von jüngst auf den Markt gekommenen Ultraschallkontrastmitteln bessere Bedingungen ergeben würden, hat sich leider als trügerisch herausgestellt.

Da die Streumechanismen in biologischem Weichgewebe weithin ungeklärt sind und da das Puls-Echo-Verfahren zu wenig Informationen zur hinreichend genauen Rekonstruktion der Mikrostrukturen des Gewebes liefert, wird sich die weitere Entwicklung der Ultraschalldiagnose auf die Verbesserung und Objektivierung der Bilder konzentrieren. Hierzu leistet die vorliegende Dissertation einen Beitrag. Der nächste Schritt wäre es nun, eine echtzeitfähige Implementierung der vorgestellten Methoden zu entwickeln. Hierzu könnte es hilfreich sein, den Entfaltungsalgorithmus durch geeignete Approximationen zu vereinfachen. Im Anschluss daran müsste in einer Studie die Praxistauglichkeit der korrigierten Ultraschallbilder getestet werden.

A. Ergänzende Materialien

A.1 Rayleigh-Oberflächen-Integral

Das RAYLEIGH-Oberflächen-Integral dient der Berechnung von Schalldrücken, die von einer beliebig geformten schwingenden Oberfläche oder einer Oberfläche mit inhomogen verteilter Schallschnelle erzeugt wird ([Kut88], S.73ff).

Das RAYLEIGH-Integral impliziert Näherungen, die nur bei genauem Verständnis der Herleitung offenbar werden. Da in der Literatur über diesen Punkt häufig hinweg gegangen wird, soll hier der Versuch einer ausführlichen Darstellung unternommen werden.

Zunächst wird das Schallfeld einer sehr kleinen Kugelquelle berechnet. Das Geschwindigkeitspotenzial $\phi(r, t)$ in einer Entfernung r von der Quelle ergibt sich als eine Lösung der Wellengleichung zu (homogenes Medium, Kugelkoordinaten)

$$\phi(r, t) = \frac{\phi_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} . \quad (\text{A.1})$$

ϕ_0 kann über die Ergiebigkeit ([ZZ93], S.76f) und die Schallschnelle einer gegenüber der Wellenlänge sehr kleinen Kugelquelle (Punktquelle) bestimmt werden ($ka \ll 1$, a : Radius der Kugelquelle):

$$Q = \oint_S \mathbf{v} \, ds = \oint_S v(r) \mathbf{e}_r \, ds = v(a) 4\pi r^2 \quad (\text{A.2})$$

$$v(a, t) = -\text{grad } \phi|_{r=a} = \phi_0 e^{j(\omega t - ka)} \left(\frac{1}{a^2} + j \frac{k}{a} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$v(a) = \frac{\phi_0}{a^2} e^{-jka} (1 + jka) \approx \frac{\phi_0}{a^2} \quad \text{für } ka \ll 1 \quad (\text{A.4})$$

und schließlich

$$\phi_0 = \frac{Q}{4\pi} . \quad (\text{A.5})$$

Der Schalldruck in beliebiger Entfernung r lässt sich nun in Abhängigkeit von der Ergiebigkeit angeben:

$$p(r, t) = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_0 j \omega \frac{Q}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} . \quad (\text{A.6})$$

Nimmt man als Näherung an, dass von jeder beliebig geformten, aber gegenüber der Wellenlänge kleinen Schallquelle eine Kugelwelle ausgeht und die Ergiebigkeit dieser Quelle deshalb der einer kugelförmigen Quelle ähnelt, lässt sich auch jede größere Schallquelle aus kleinen schwingenden Teilflächen zusammensetzen und deren Schallfeld berechnen, wobei allerdings zu beachten ist, dass Elemente von flächenhaften Strahlern Halbkugelwellen abstrahlen und sich deshalb bei gleich bleibender Ergiebigkeit der Teilschalldruck verdoppelt:

$$Q \approx \mathbf{v} \, ds \quad (\text{A.7})$$

$$dp(r, t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{v} \, ds . \quad (\text{A.8})$$

Der Gesamtschalldruck berechnet sich durch das Oberflächenintegral über die abstrahlende Fläche (RAYLEIGH-Integral):

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_S \frac{j\omega\rho_0 e^{j(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}') . \quad (\text{A.9})$$

Wenn die Wandlerfläche nicht in eine sehr große starre Wand eingebettet ist, geht die Halbkugelwelle der Flächenelemente zu den Rändern der Fläche hin in Kugelwellen über, was kleiner werdenden Teilschalldrücken entspricht. Dieser Effekt wird mit der variablen Schallschnelle $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$ modelliert.

Des Weiteren kann man das Skalarprodukt $\mathbf{v}(\mathbf{r}') \, ds(\mathbf{r}')$ als $v_n(\mathbf{r}') \, dS(\mathbf{r}')$ schreiben, wenn der Wandler überall nur in Richtung der Flächennormalen schwingt:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_S \frac{j\omega\rho_0 e^{j(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} v_n(\mathbf{r}') \, dS(\mathbf{r}') . \quad (\text{A.10})$$

Im diagnostischen Ultraschall wird ein piezoelektrischer Wandler mit einem sehr kurzen Spannungsimpuls angeregt, woraus eine breitbandige Schnelle mit der komplexen Amplitude $\underline{v}_n(\mathbf{r}', \omega)$ entsteht. Damit gilt für jede Frequenz der komplexen Schwingung $p(\mathbf{r}, t) = \underline{p}(\mathbf{r}, \omega) \cdot e^{j\omega t}$

$$\underline{p}(\mathbf{r}, \omega) \cdot e^{j\omega t} = \int_S \frac{j\omega\rho_0 e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{v}_n(\mathbf{r}', \omega) \, dS(\mathbf{r}') \cdot e^{j\omega t} . \quad (\text{A.11})$$

Auf beiden Seiten über alle $\omega \in \mathbb{R}$ zu integrieren ergibt nichts anderes als die inverse Fouriertransformation:

$$p(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \int_S \frac{j\omega \rho_0 e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underline{v}_n(\mathbf{r}', \omega) dS(\mathbf{r}') \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Nach Einsetzen der Beziehung (mit $k = \omega/c_0$)

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ j\omega \cdot e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot v_n(\mathbf{r}', \omega) \right\} = \dot{v}_n \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0} \right) \quad (\text{A.13})$$

erhalten wir schließlich

$$\boxed{p(\mathbf{r}, t) = \int_S \frac{\rho_0 \cdot \dot{v}_n \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0} \right)}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS(\mathbf{r}')} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Separationsansatz zur Beugungskorrektur

Die nun folgende Herleitung lehnt sich an [IWBH90], doch wird hier die Einschränkung auf Spektren aus dem Fokus fallengelassen. Als Ausgangspunkt dienen die in 4.2 und 4.3.1 hergeleiteten Ausdrücke (4.29) und (4.32) für das gefensterete Ultraschallecho mit dem Gesamtvolumen $V_{\text{ges}} = \mathbb{R}^3$:

$$\underline{e}(z, \omega) \approx H_W(\omega) \cdot H_d^2(z, \omega) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} g(z, \mathbf{r}) \cdot H_\phi^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot H_G(\mathbf{r}, \omega) dV(\mathbf{r}) \quad (\text{A.15})$$

Hierin sind die Gewebeantwort $H_G(\mathbf{r}, \omega)$ und somit auch das Echospektrum $\underline{e}(z, \omega)$ zufälligen Schwankungen unterworfen. Bezeichnen wir die entsprechenden Zufallsvariablen abkürzend mit Γ und E .

Man betrachte zunächst den Mittelwert geschätzter Kreuz-Leistungsdichtespektren (Definition in [Kay88], S.453,455), wobei $n, m \in \mathbb{N}$ zwei A-Scans aus einem Medium mit gleich bleibenden statistischen Eigenschaften kennzeichnen; die Abhängigkeit von ω wird der Übersichtlichkeit halber weglassen:

$$\begin{aligned} \langle E_n(z) E_m^*(z) \rangle &= |H_W|^2 \cdot |H_d(z)|^4 \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(z, \mathbf{r}_1) g^*(z, \mathbf{r}_2) H_{\phi,n}^2(\mathbf{r}_1) H_{\phi,m}^{2*}(\mathbf{r}_2) \langle H_{G,n}(\mathbf{r}_1) H_{G,m}^*(\mathbf{r}_2) \rangle \\ &\cdot dV(\mathbf{r}_1) dV(\mathbf{r}_2), \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

da $g(z, \mathbf{r})$ und $H_\phi(\mathbf{r})$ keine statistische Größen sind.

Die räumliche Kreuzkorrelationsfunktion des Gewebes ist

$$r_\Gamma(n, m; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left\langle H_{G,n}(\mathbf{r}_1) H_{G,m}^*(\mathbf{r}_2) \right\rangle \quad (\text{A.17})$$

und wird, wenn sich die Struktur des Gewebes zwischen benachbarten A-Scans nicht wesentlich ändert, zu einer Autokorrelationsfunktion:

$$r_\Gamma(n, m; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx r_\Gamma(n, n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv r_\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) . \quad (\text{A.18})$$

Geht man für Γ zusätzlich von einem schwach stationären Prozess aus, hängt r_Γ nur vom Unterschied $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ab. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} & \mathbf{r}_1 &= \mathbf{u} + \frac{\Delta \mathbf{r}}{2} \\ \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{u} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

wird aus Gl. (A.16)

$$\begin{aligned} \langle E_n(z) E_m^*(z) \rangle &= |H_W|^2 \cdot |H_d(z)|^4 \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{r}, z) g^*(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{r}, z) H_{\phi,n}^2(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{r}) H_{\phi,m}^{2*}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{r}) dV(\mathbf{u}) \\ &\cdot r_\Gamma(\Delta \mathbf{r}) dV(\Delta \mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Integration bezüglich $V(\mathbf{u})$ erlaubt die Darstellung mit der räumlichen Korrelationsfunktion von $g(z, \mathbf{r})$ und $H_\phi^2(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \langle E_n(z) E_m^*(z) \rangle &= |H_W|^2 \cdot |H_d(z)|^4 \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}^3} r_\phi(n, m, z; \Delta \mathbf{r}) \cdot r_\Gamma(\Delta \mathbf{r}) dV(\Delta \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

mit

$$\begin{aligned} r_\phi(n, m, z; \Delta \mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} g\left(\mathbf{u} + \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) \cdot g^*\left(\mathbf{u} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) \\ &\cdot H_{\phi,n}^2\left(\mathbf{u} + \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) \cdot H_{\phi,m}^{2*}\left(\mathbf{u} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) dV(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$= \int_{V(z)} H_{\phi,n}^2\left(\mathbf{u} + \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) \cdot H_{\phi,m}^{2*}\left(\mathbf{u} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{2}\right) dV(\mathbf{u}) . \quad (\text{A.23})$$

Man beachte, dass r_ϕ von z abhängt, was mit der ursprünglichen Integration über $V(z)$, also ohne Raumfenster, verdeutlicht wird (siehe Abschnitt 4.3.1: „Gefensterter Analyse“).

Wenn die Streuergröße gegenüber der mittleren Wellenlänge des Sendepulses sehr klein ist und wenn die Anzahl der Streuer in den betrachteten Volumenelementen sehr groß ist, nähert sich die Struktur des Gewebes einem weißen Prozess¹

$$r_\Gamma(\Delta\mathbf{r}) \rightarrow \sigma_\Gamma^2 \delta(\Delta\mathbf{r}) \quad (\text{A.24})$$

und hat somit einen wesentlich schmälere Träger als r_ϕ . Die Ausblendeeigenschaft des Dirac-Impulses bewirkt dann, dass

$$r_\phi(n, m, z; \Delta\mathbf{r}) \approx r_\phi(n, m, z; \mathbf{0}) \quad (\text{A.25})$$

zu Konstanten bezüglich $\Delta\mathbf{r}$ angesetzt werden dürfen. Der allgemeinere Fall tiefenabhängig schwankender Gewebestruktur lässt sich wiederum durch innerhalb der Raumfenster quasi-stationäre Korrelationsfunktionen $r_\Gamma(z; \Delta\mathbf{r})$ ausdrücken. Somit erhält man als Näherungslösung für den Erwartungswert der Kreuzspektren

$$\begin{aligned} \langle E_n(z) E_m^*(z) \rangle &= |H_W|^2 \cdot |H_d(z)|^4 \cdot r_\phi(n, m, z; \mathbf{0}) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^3} r_\Gamma(z; \Delta\mathbf{r}) dV(\Delta\mathbf{r}) . \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Gl. (A.26) ist es nun möglich, den variablen Einfluss der Schallbeugung zu eliminieren und direkt auf die Gewebeinformationen zuzugreifen, die in Form eines Volumenintegrals über die dreidimensionale Korrelationsfunktion vorliegt. Es ist ferner möglich, mit dem Modell der kontinuierlichen Inhomogenitäten diese Korrelation in einen direkten Zusammenhang zu physikalischen Größen (Rückstreukoeffizient) zu setzen [IWBH90, Jen91, ST93].

Definieren wir nun einen Beugungsanteil $D(z, \omega)$ (diffraction) und einen Rückstreuanteil $B(z, \omega)$ (backscattering)

$$|D(z, \omega)|^2 \equiv r_\phi(n, n, z, \omega; \mathbf{0}) \quad (\text{A.27})$$

$$|B(z, \omega)|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^3} r_\Gamma(z, \omega; \Delta\mathbf{r}) dV(\Delta\mathbf{r}) , \quad (\text{A.28})$$

¹ Existieren Korrelationen, d.h. Regelmäßigkeiten zwischen den Streuern, spricht man von kohärenter Streuung. Der Anwendbarkeit dieser Näherung muss demnach ggf. eine Zerlegung des gestreuten Signals in einen kohärenten und einen inkohärenten Anteil vorausgehen [IWBH90].

gelangen wir zu einem leicht handhabbaren Ausdruck für die lokalen Leistungsdichtespektren $R_E(z, \omega) \equiv \langle E_n(z, \omega) E_n^*(z, \omega) \rangle$ der Ultraschallechos:

$$R_E(z, \omega) = |H_W(\omega)|^2 \cdot |H_d(z, \omega)|^4 \cdot |D(z, \omega)|^2 \cdot |B(z, \omega)|^2 . \quad (\text{A.29})$$

A.3 Kalman-Interpolation zur Entfaltung

Ausgangspunkt der Herleitung des Fixed-interval-Algorithmus' zur Entfaltung sind die beiden Gleichungen

$$B(t) \hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta) = \hat{\mathbf{q}}(t + 1|t + \delta) - A(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t + \delta) \quad (\text{A.30})$$

$$B(t) \hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta - 1) = \hat{\mathbf{q}}(t + 1|t + \delta - 1) - A(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t + \delta - 1) , \quad (\text{A.31})$$

die sich aus der Anwendung der bedingten Erwartungswerte auf die Zustandsgleichung ergeben (siehe Abschnitt 6.4).

Um einen Ausdruck für $\hat{\mathbf{w}}$ zu erhalten, müssen die Ergebnisse für interpolierte Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{q}}$ eingesetzt werden.

Interpolation für einen festen Zeitpunkt

Es soll ein rekursiver Algorithmus hergeleitet werden. Wir wollen darauf hinaus, dass $\hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta)$ in Abhängigkeit von einem früheren Schätzwert $\hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta - 1)$ und von den optimalen Schätzwerten $\hat{\mathbf{q}}(t|t)$ und $\hat{\mathbf{q}}(t|t - 1)$ der KALMAN-Filterung berechnet wird. Wir betrachten die Differenz:

$$\begin{aligned} B \cdot (\hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta) - \hat{\mathbf{w}}(t|t + \delta - 1)) &= (\hat{\mathbf{q}}(t + 1|t + \delta) - \hat{\mathbf{q}}(t + 1|t + \delta - 1)) \\ &\quad - A \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t|t + \delta) - \hat{\mathbf{q}}(t|t + \delta - 1)) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Für die Berechnung der Differenzen der geschätzten Zustandsvektoren benötigt man nur ein Resultat aus der Fixed-interval-Interpolation für $\delta > 0$ ([Kro96], S.364f):

$$\hat{\mathbf{q}}(t|t + \delta) = F(t) \hat{\mathbf{q}}(t + 1|t + \delta) + (I - F(t) A(t)) \cdot \hat{\mathbf{q}}(t|t) \quad (\text{A.33})$$

mit den Definitionen

$$F(t) \equiv P(t|t) A^T(t) P^{-1}(t + 1|t) \quad (\text{A.34})$$

$$P \equiv \left\langle (q - \hat{q}) \cdot (q - \hat{q})^T \right\rangle . \quad (\text{A.35})$$

Daraus ergibt sich zunächst eine der gesuchten Differenzen in (A.32)

$$\hat{\mathbf{q}}(t|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t|t+\delta-1) = \mathbf{F}(t) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1)) \quad (\text{A.36})$$

Dies wiederum eingesetzt in (A.32) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta) - \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta-1)) = \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{F}(t)) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1)) . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Diese Differenz der geschätzten Zustandsvektoren muss nun noch auf „Berechenbares“, d.h. auf Schätzwerte aus Filterung und Prädiktion um einen Schritt, zurückgeführt werden, damit eine echte Rekursionsformel entsteht. Da $t+1 < t+\delta$, muss so aufgerechnet werden, dass man auf Schätzwerte $(t+\delta|t+\delta)$ kommt. Dies gelingt mit der Rekursion der Differenzen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1) = \\ \mathbf{F}(t+1) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+2|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+2|t+\delta-1)) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t+2|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+2|t+\delta-1) = \\ \mathbf{F}(t+2) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+3|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+3|t+\delta-1)) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1) = \\ \mathbf{F}(t+1) \cdot \mathbf{F}(t+2) (\hat{\mathbf{q}}(t+3|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+3|t+\delta-1)) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

...

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+1|t+\delta-1) = \\ \prod_{i=t+1}^{t+\delta-1} \mathbf{F}(i) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+\delta|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+\delta|t+\delta-1)) . \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Dieses Ergebnis, das übrigens die Rekursionsformel zur Berechnung der Interpolation für einen festen Zeitpunkt darstellt, kann jetzt in (A.37) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta) - \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta-1) = \\ \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{F}(t)) \cdot \prod_{i=t+1}^{t+\delta-1} \mathbf{F}(i) \cdot (\hat{\mathbf{q}}(t+\delta|t+\delta) - \hat{\mathbf{q}}(t+\delta|t+\delta-1)) . \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Weitere Umformungen:

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{F}(t)) = \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1}(t+1|t) \quad (\text{A.43})$$

weil

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &\equiv \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}^{-1}(t+1|t) && \text{Def. (A.34)} \\ \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A} \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T && \text{KALMAN-Filter, (6.43)} \\ \rightsquigarrow \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}^T &= \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{P}(t+1|t) - \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T) \\ \rightsquigarrow \mathbf{F}(t) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1}(t+1|t)) \\ \rightsquigarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{F}(t)) &= \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1}(t+1|t) . \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Außerdem erhält man aus dem Algorithmus der Filterung:

$$\hat{\mathbf{q}}(t|t) - \hat{\mathbf{q}}(t|t-1) = \mathbf{K}(t) \nu(t|t-1) \quad (\text{A.45})$$

mit der Gain-Matrix \mathbf{K} und dem *Innovations*-Prozess ([Kai68])

$$\begin{aligned} \nu(t|t-1) &\equiv z(t) - \hat{y}(t|t-1) = z(t) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}(t|t-1) \\ &= y(t) - \hat{y}(t|t-1) + v(t) . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Damit wird die Rekursionsformel zur Berechnung interpolierter Schätzwerte für das Eingangssignal und für einen festen Zeitpunkt wie in [MK77, MK78]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta) &= \hat{\mathbf{w}}(t|t+\delta-1) \\ &+ \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{-1}(t+1|t) \cdot \prod_{i=t+1}^{t+\delta-1} \mathbf{F}(i) \cdot \mathbf{K}(t+\delta) \cdot \nu(t+\delta|t+\delta-1) \end{aligned}$$

(A.47)

Um einen *Fixed-interval*-Schätzer zu erhalten, muss zunächst der laufende Parameter umgestellt werden, d.h. $t+\delta = T$, und man würde eine Rekursionsformel folgender Art suchen:

$$\hat{\mathbf{w}}(T-\delta|T) = f(\hat{\mathbf{w}}(T-\delta \pm 1|T)) \quad (\text{A.48})$$

Fixed-interval-Interpolation

Betrachten wir das bereits im vorigen Abschnitt verwendete Resultat für die Schätzung des Zustandsvektors mit dem Fixed-interval-Algorithmus (wobei

hier die Substitution $t + \delta = T$ bereits eingearbeitet ist; ferner soll zur Verbesserung der Übersichtlichkeit die Umbenennung $\tau = T - \delta$ eingeführt werden):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}(\tau|T) &= \mathbf{F}(\tau) \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|T) \\ &\quad + [\mathbf{I} - \mathbf{F}(\tau) \mathbf{A}(\tau)] \cdot \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau) \\ &= \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T(\tau) \mathbf{P}^{-1}(\tau + 1|\tau) \cdot \\ &\quad \cdot [\hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|T) - \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|\tau)] + \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau)\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

weil

$$\hat{\mathbf{q}}(t|t + 1) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{q}}(t|t) \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(t|t) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}^{-1}(t + 1|t) . \quad (\text{A.51})$$

Man beachte, dass die Schätzung *rückwärts* in der Zeit vonstatten geht, d.h. der neue Wert $\hat{\mathbf{q}}(\tau|T)$ wird aus dem zuvor geschätzten „zukünftigen“ Wert $\hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|T)$ errechnet. Zusammen mit der Berechnungsvorschrift (vgl. (A.30))

$$\mathbf{B} \hat{\mathbf{w}}(\tau|T) = \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|T) - \mathbf{A}(\tau) \hat{\mathbf{q}}(\tau|T) \quad (\text{A.52})$$

hat man bereits einen implementierbaren Algorithmus zur Schätzung des Eingangssignal-Vektors $\mathbf{w}(t)$. Allerdings ist diese Vorgehensweise numerisch ineffizient, weil zu jedem Zeitpunkt die Fehlerkorrelationsmatrix $\mathbf{P}(\tau + 1|\tau)$ invertiert werden muss. Um das zu umgehen, kann ein residualer Zustandsvektor eingeführt werden ([Men81]):

$$\boldsymbol{\rho}(\tau|T) \equiv \mathbf{P}^{-1}(\tau|\tau - 1) [\hat{\mathbf{q}}(\tau|T) - \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1)] \quad (\text{A.53})$$

Insbesondere ist für $\tau = T + 1$

$$\boldsymbol{\rho}(T + 1|T) = 0 , \quad (\text{A.54})$$

was zur Initialisierung benutzt wird.

Ziel ist es nun, eine Rekursion für $\boldsymbol{\rho}$ herzuleiten, um dann mittels Umstellen der Definition (A.53) den geschätzten Zustandsvektor zu erhalten:

$$\hat{\mathbf{q}}(\tau|T) = \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) + \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \boldsymbol{\rho}(\tau|T) . \quad (\text{A.55})$$

Zunächst wird aus (A.49) mit der Definition (A.53)

$$\hat{\mathbf{q}}(\tau|T) = \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T(\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) + \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau) \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T(\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) + \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) + \mathbf{K}(\tau) \boldsymbol{\nu}(\tau|\tau - 1) \\ &\quad (\text{A.57})\end{aligned}$$

Umstellen und Multiplizieren mit $\mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau) [\hat{\mathbf{q}}(\tau|T) - \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1)] = \\ \mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T(\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\ + \mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau) \mathbf{K}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1) . \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Die linke Seite ist nun aber gerade die Definition des residualen Zustandsvektors:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\tau|T) = \mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T(\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\ + \mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau) \mathbf{K}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1) . \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Durch Einsetzen der Berechnungsvorschriften für $\mathbf{K}(\tau)$ sowie für $\mathbf{P}(\tau|\tau)$ aus dem KALMAN-Filter gelingt die Eliminierung der Inversen $\mathbf{P}^{-1}(\tau - 1|\tau)$, und man erhält schließlich ²:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\tau|T) = [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T \mathbf{A}^T(\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\ + \mathbf{C}^T \left[\mathbf{C}^T \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C} + \mathbf{R}_V \right]^{-1} \nu(\tau|\tau - 1) . \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{L}(\tau) \equiv \left[\mathbf{C}^T \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C} + \mathbf{R}_V \right]^{-1} \quad (\text{A.61})$$

taucht schon bei der Berechnung der KALMAN-Filterung auf und kann zur Einsparung von Rechenzeit zwischengespeichert werden. Dies ist bei SISO ARMA-Modellen kein Aufwand, da es sich dann um einen Skalar handelt. Außerdem wird noch der Innovations-Prozess $\nu(\tau|\tau - 1)$ aus der KALMAN-Filterung benötigt.

Vor diesem Hintergrund wird nun eine übersichtliche neue Herleitung des Fixed-interval-Schätzers für $\hat{\mathbf{w}}$ möglich. Der Ausgangspunkt ist wiederum die Gleichung (vgl. (A.30), (A.52))

$$\mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{w}}(\tau|T) = \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|T) - \mathbf{A}(\tau) \hat{\mathbf{q}}(\tau|T) . \quad (\text{A.62})$$

Um die Rekursion von $\boldsymbol{\rho}(\tau|T)$ für eine Rekursion von $\hat{\mathbf{w}}(\tau|T)$ nutzen zu können, setzen wir hier zunächst (A.55) und darin wiederum (A.60) ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \hat{\mathbf{w}}(\tau|T) = \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|\tau) + \mathbf{P}(\tau + 1|\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\ - \mathbf{A}(\tau) [\hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) + \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \boldsymbol{\rho}(\tau|T)] . \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

² $\mathbf{P}(\tau|\tau) = \mathbf{P}^T(\tau|\tau)$

↪ $\mathbf{P}(\tau|\tau) = \mathbf{P}^T(\tau|\tau - 1) \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T = \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T$

$$\begin{aligned}
\leadsto \quad \mathbf{B} \hat{\mathbf{w}}(\tau|T) &= \hat{\mathbf{q}}(\tau + 1|\tau) \\
&+ \mathbf{P}(\tau + 1|\tau) \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|\tau) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C}^T \mathbf{L}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1) . \quad (\text{A.64})
\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benötigen wir folgende Beziehungen, die aus dem KALMAN-Filter-Algorithmus gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau + 1) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau) \\
&= \mathbf{A} [\hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) + \mathbf{K} \nu(\tau|\tau - 1)] \\
&= \mathbf{A} [\hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) + \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C}^T \mathbf{L}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1)] \quad (\text{A.65})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\tau + 1|\tau) &= \mathbf{A} \mathbf{P}(\tau|\tau) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \\
&= \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}] \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \quad (\text{A.66})
\end{aligned}$$

Beides eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \hat{\mathbf{w}}(\tau|T) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) \\
&+ \mathbf{A} \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C}^T \mathbf{L}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1) \\
&+ \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}] \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\
&+ \mathbf{B} \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \hat{\mathbf{q}}(\tau|\tau - 1) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|\tau) \\
&- \mathbf{A}(\tau) \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) \mathbf{C}^T \mathbf{L}(\tau) \nu(\tau|\tau - 1) . \quad (\text{A.67})
\end{aligned}$$

Beachten wir wieder, dass

$$[\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}] \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) = \mathbf{P}(\tau|\tau - 1) [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C}]^T$$

gilt (siehe Fußnote vorige Seite), gelangen wir zu der einfachen Berechnungsvorschrift

$$\boxed{\hat{\mathbf{w}}(\tau|T) = \mathbf{R}_W \mathbf{B}^T \boldsymbol{\rho}(\tau + 1|T)} \quad (\text{A.68})$$

A.4 Dispersion

Zweck dieses Abschnittes ist es, das Ausmaß der Dispersion bei Schallausbreitung im biologischen Weichgewebe abzuschätzen. Dies erfolgte zwar zum Teil in [JGJ93, Höf95], doch war dort die Simulation von Ultraschallechos betrachtet worden. Hier geht es um die Analyse von Echos, und es soll geklärt werden, in welchem Rahmen Näherungen zulässig sind.

In dämpfungsfreien flüssigkeitsähnlichen Medien errechnet sich die Schallgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit = Gruppengeschwindigkeit) zu [Mil87]

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa}} \quad (\text{A.69})$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2 \rho_0 \kappa, \quad (\text{A.70})$$

wobei ρ_0 die Dichte des Mediums ist, und κ die Kompressibilität, d.h. die durch einen Druck erzeugte relative Volumenänderung $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$. In dämpfungsfreien Medien folgt die Volumenänderung stets gleichphasig mit der Druckänderung, aber in dämpfenden Medien verursachen Relaxationsprozesse frequenzabhängige Phasenverschiebungen und außerdem wird auch die Größe der Volumenänderung selbst frequenzabhängig. Mit kleinen Drücken gelten die linearen HOOKEschen Gesetze, und deshalb lässt sich die relative Volumenänderung systemtheoretisch als Faltung mit der Impulsantwort $\kappa(t)$ der Kompressibilität darstellen. Die Fourier-Transformierte ist komplex:

$$\underline{\kappa}(\omega) = \mathcal{F}\{\kappa(t)\} = \kappa_1(\omega) + j \kappa_2(\omega). \quad (\text{A.71})$$

Die Dämpfung lässt sich über eine komplexe Wellenzahl in die Schallausbreitung einbringen:

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c(\omega)} + j a(\omega). \quad (\text{A.72})$$

Gesucht ist ein Zusammenhang zur frequenzabhängigen komplexen Kompressibilität, was über (A.70) gelingt:

$$\begin{aligned} \underline{k}^2 &= \omega^2 \rho_0 \underline{\kappa}(\omega) \\ \frac{\omega^2}{c(\omega)^2} - a(\omega)^2 + j \frac{2\omega a(\omega)}{c(\omega)} &= \omega^2 \rho_0 \kappa_1(\omega) + j \omega^2 \rho_0 \kappa_2(\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile liefert Beziehungen zwischen Phasengeschwindigkeit $c(\omega)$, Dämpfung $a(\omega)$ und der Kompressibilität:

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_1(\omega)}} \quad (\text{A.74})$$

$$a(\omega) = \frac{\omega \rho_0 \kappa_2(\omega) c(\omega)}{2} . \quad (\text{A.75})$$

Hätte man einen Zusammenhang zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Kompressibilität, stünde mit diesen beiden Gleichungen ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Phasengeschwindigkeit und Dämpfungskoeffizient zur Verfügung. Die gesuchte Beziehung zwischen $\kappa_1(\omega)$ und $\kappa_2(\omega)$ basiert auf nur zwei Forderungen: Erstens muss die Impulsantwort $\kappa(t)$ kausal sein, d.h. $\kappa(t) = 0$ für $t < 0$, und zweitens muss sie reell sein. Aufspaltung der Impulsantwort in einen geraden und ungeraden Anteil ergibt zunächst mit der inversen Fourier-Transformation und der zweiten Forderung [Föl90], S.208:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \kappa_g(t) + \kappa_u(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \kappa_1(\omega) \cos(\omega t) d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \kappa_2(\omega) \sin(\omega t) d\omega . \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Mit der Forderung $\kappa(t) = 0$ für $t < 0$ gelangt man schließlich zu der Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \kappa_1(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \kappa_2(\omega) \sin(\omega t) d\omega . \quad (\text{A.77})$$

Gleichheit lässt sich dadurch erreichen, dass $\kappa_2(\omega)$ gegenüber $\kappa_1(\omega)$ für sämtliche Frequenzen um -90° phasenverschoben ist. Der $+90^\circ$ -Phasenschieber ist die bekannte HILBERT-Transformation mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} . \quad (\text{A.78})$$

Das um -90° verschobene Signal errechnet sich daher aus

$$\begin{aligned} \kappa_1(\omega) &= -h(t) * \kappa_2(\omega) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\kappa_2(\tilde{\omega})}{\omega - \tilde{\omega}} d\tilde{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Die Eigenschaft (A.76) beinhaltet aber auch, dass der Imaginärteil der Fourier-Transformierten von reellen Signalen ungerade und der Realteil gerade

ist: $\kappa_2(\omega) = -\kappa_2(-\omega)$. Setzt man dies wiederum in (A.79) ein, gelangt man zu

$$\kappa_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{\omega} \kappa_2(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} . \quad (\text{A.80})$$

Analog gilt

$$\kappa_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{\omega} \kappa_1(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} . \quad (\text{A.81})$$

Diese beiden Gleichungen sind auch als KRAMERS-KRONIG-Beziehungen bekannt. Allerdings sind sie oftmals wenig nützlich, weil Real- bzw. Imaginärteil von $\underline{\kappa}(\omega)$ für *alle* Frequenzen bekannt sein muss. Deshalb wird daraus in [OJM81] ein in der Frequenz lokaler Zusammenhang hergeleitet, der nur dann gilt, wenn die Änderung der Phasengeschwindigkeit über der Frequenz langsam und resonanzfrei ist:

$$\kappa_2(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \omega \frac{d\kappa_1(\omega)}{d\omega} . \quad (\text{A.82})$$

Daraus folgt zusammen mit den Gln. (A.74) und (A.75)

$$\frac{1}{c(\omega_1)} - \frac{1}{c(\omega)} = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{a(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2} d\tilde{\omega} . \quad (\text{A.83})$$

In biologischem Gewebe kann die Dämpfung über weite Frequenzbereiche als linear angenommen werden:

$$a(\omega) = a_0 + a_1 (\omega - \omega_0) . \quad (\text{A.84})$$

a_0 ist also die Dämpfung bei der Frequenz ω_0 . Allerdings ist bei diesem Ansatz zu unterscheiden, ob eine lineare Approximation innerhalb eines gewissen Frequenzintervalls oder über alle Frequenzen gemeint ist. Im zweiten Fall muss $a(\omega = 0) = 0$ sein, im ersten jedoch nicht. So erhält man den Zusammenhang

$$\begin{aligned} a(\omega = 0) &= a_0 - a_1 \omega \\ a_1 &= \frac{a_0}{\omega_0} \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

und schließlich

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\omega_0} \omega . \quad (\text{A.86})$$

Setzt man diese linearisierte Dämpfung in die oben hergeleitete Dispersionsbeziehung (A.83) ein und multipliziert mit ω , gelangt man zu dem in der Literatur häufig verwendeten Zusammenhang [OJM81, LF86, Höf95, JGJ93]

$$\boxed{\frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{c(\omega_1)} - \frac{2a_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1}}. \quad (\text{A.87})$$

Die komplexe Wellenzahl ist daher

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \frac{\omega}{c(\omega)} + j a(\omega) \\ &= \frac{\omega}{c(\omega_1)} - \frac{2a_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1} + j a(\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Die gegenüber dem dispersionsfreien Fall zusätzliche Phasenverschiebung ist $\exp(-j k_\delta |\mathbf{r}|)$, mit der Definition

$$k_\delta \equiv \frac{2a_0}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (\text{A.89})$$

Hierbei kann $\omega/c(\omega_1)$ als Wellenzahl in dispersionsfreien Medien betrachtet werden. Diese Näherungslösung der KRAMERS-KRONIG-Beziehungen hat allerdings einen entscheidenden Nachteil: Die aufgrund von Dispersion und der geforderten Kausalität notwendige zusätzliche Phasenverzerrung $k_\delta |\mathbf{r}|$ hängt davon ab, wie die Frequenz ω_1 gewählt wird, aber in der Regel kennt man weder die Dämpfung noch die Phasengeschwindigkeit $c(\omega_1)$. In jedem Fall sollte man $\omega_1 < \omega$ wählen, da sonst nichtkausale Verschiebungen nach links stattfinden. Aber selbst dann ist die Kausalität nur näherungsweise gegeben.

Bei der Analyse von echten oder simulierten Ultraschallbildern betrachtet man normalerweise nur lokale Eigenschaften der Echosignale, so dass dieser Fehler nicht ins Gewicht fällt, zumal sich $k_\delta |\mathbf{r}|$ nur langsam mit der Entfernung ändert. Der Phasengang ist über einen weiten Frequenzbereich annähernd linear, weshalb keine drastischen Verzerrungen der Wellenform zu erwarten sind (siehe Abb. A.1 und Abb. A.2).

Um einen Eindruck vom Verlauf der Phasengeschwindigkeit über der Frequenz zu erhalten, kann für die in flüssigkeitsähnlichen Medien typisch kleinen Abweichungen Δc , $c(\omega) = c(\omega_1) + \Delta c$, in (A.83) noch eine Näherung angewendet werden:

$$\frac{1}{\alpha + x} \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \cdot x \quad , \quad |x| \ll \alpha \quad (\text{A.90})$$

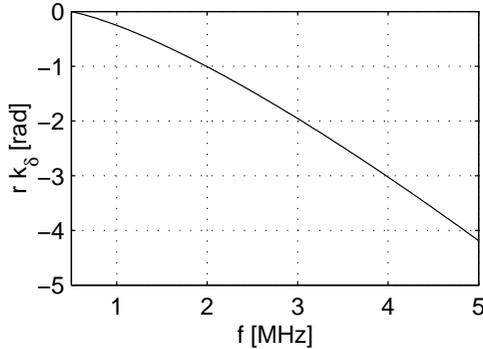


Abb. A.1: Phasenverzerrung in Abhängigkeit der von Frequenz und bei $r = |\mathbf{r}| = 0,1 \text{ m}$. $f_0 = 3,5 \text{ MHz}$, $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 0,5 \text{ MHz}$. $a_0 = 20 \text{ Np/m} = 0,496 \text{ dB}/(\text{cm MHz})$, $c(\omega_1) = 1540 \text{ m/s}$.

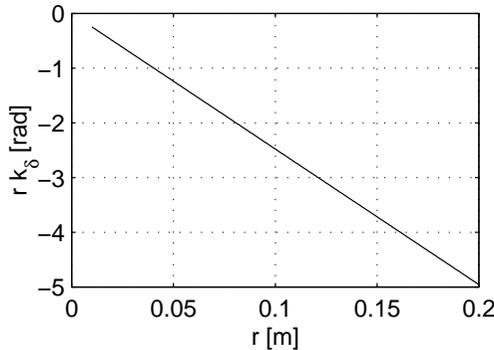


Abb. A.2: Phasenverzerrung in Abhängigkeit von der Entfernung und bei: $f = f_0 = 3,5 \text{ MHz}$. $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 0,5 \text{ MHz}$. $a_0 = 20 \text{ Np/m} = 0,496 \text{ dB}/(\text{cm MHz})$, $c(\omega_1) = 1540 \text{ m/s}$.

und daher, mit $\Delta c(\omega) = c(\omega) - c(\omega_1)$

$$\frac{1}{c(\omega)} \approx \frac{1}{c(\omega_1) + \Delta c(\omega)} \approx \frac{1}{c(\omega_1)} + \frac{1}{c(\omega_1)^2} \cdot \Delta c(\omega). \quad (\text{A.91})$$

Daraus erhält man wieder zusammen mit (A.83)

$$\Delta c(\omega) = c(\omega) - c(\omega_1) = \frac{2 c(\omega_1)^2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{a(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}^2} d\tilde{\omega}, \quad (\text{A.92})$$

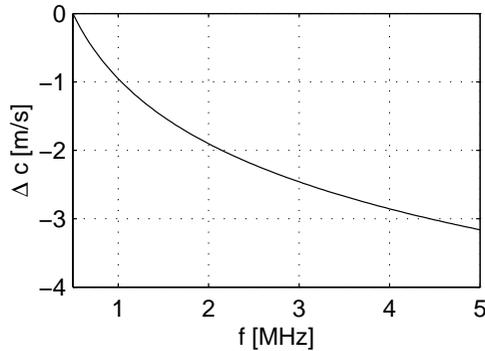


Abb. A.3: Abweichung der Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Frequenz und bei $r = |\mathbf{r}| = 0.1$ m. $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 3,5$ MHz. $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 0,5$ MHz. $a_0 = 20$ Np/m = 0,496 dB/(cm MHz), $c(\omega_1) = 1540$ m/s.

und wieder mit der linearisierten Dämpfung (A.86)

$$c(\omega) \approx c(\omega_1) + \frac{2c(\omega_1)^2}{\pi} \cdot \frac{a_0}{\omega_0} \cdot \log \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (\text{A.93})$$

B. Formelzeichen, Definitionen, Abkürzungen

Notationen allgemein

a	Spaltenvektor
A	Matrix
A^T	transponierte Matrix
A^H	konjugiert komplexe Transposition
A^{-1}	Inverse der Matrix
I	Identitätsmatrix: $AI = A$
0	Nullvektor bzw. Nullmatrix
1	Einsvektor bzw. Einsmatrix
a^*	komplexe Konjugation
$ \cdot $	Betrag
$\text{Re}\{\cdot\}$	Realteil
$\text{Im}\{\cdot\}$	Imaginärteil
$x(t)$	kontinuierliches Zeitsignal bzw. diskretes Zeitsignal mit $t \in \mathbb{N}$
$X(\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$	Fourier-Transformation
$x(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$	inverse Fourier-Transformation
$\int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt$	kontinuierliche Fourier-Transformation
$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	kontinuierliche inverse Fourier-Transformation
$\sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}$	zeitdiskrete Fourier-Transformation, $\omega = 2\pi f/f_s$
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	zeitdiskrete inverse Fourier-Transformation
$\underline{x} = \underline{x} e^{j \arg \underline{x}}$	bei allen harmonischen Schwingungen: komplexe Amplitude von $x(t) = \text{Re}\{\underline{x} e^{j\omega t}\}$

$\mathcal{H}\{\cdot\}$	Hilbert-Transformation
$x(t) * y(t)$	Faltung
$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t} x(t)$	zeitliche Ableitung
∇	Nabla-Operator
$\Delta = \nabla^2$	Laplace-Operator
$\delta(t)$	Delta-Distribution
\log	natürlicher Logarithmus

Akustik

$f, \omega = 2\pi f$	Frequenz, Kreisfrequenz
f_s	Abtastfrequenz
f_0	Mittelfrequenz
$a(\omega)$	Dämpfungskoeffizient
a_0, a_1	Koeffizienten des linearen Dämpfungsmodells
$b(\omega)$	Rückstreukoeffizient
b_0, b_1	Koeffizienten des linearen Rückstreumodells
$c(\omega)$	Schallausbreitungsgeschwindigkeit
c_0	mittlere Schallausbreitungsgeschwindigkeit
ρ_0	mittlere Massendichte
κ	adiabatische Kompressibilität
p	Schallwechseldruck
v	Betrag der Schallschnelle
$k = \omega/c$	Wellenzahl
ϕ	Geschwindigkeitspotential
$Q = \oint_{\mathcal{O}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{o}$	Ergiebigkeit

Stochastik, Spektralschätzung

X, X_t	Zufallsvariable, Zufallsprozess
x	Realisierung der Zufallsvariable X
$x(t)$	Realisierung eines ergodischen Zufallsprozesses

\hat{x}	Schätzwert
$F_X(x)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung von X
$f_X(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichte von X
$f_{XY}(x)$	Verbunddichte von X, Y
$f_{X Y}(x)$	bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte von X
$P\{\cdot\}$	Wahrscheinlichkeit
$\langle g(X) \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$	Erwartungswert einer Funktion $g(X)$
$\sigma_X^2 \equiv \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$	Varianz von X
$\text{var}\{\cdot\}$	allgemeiner Varianzoperator
$\langle X Y \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} x f_{X Y}(x) dx$	bedingter Erwartungswert
$r_X(t_1, t_2) \equiv \langle X(t_1) \cdot X(t_2) \rangle$	Autokorrelationsfunktion (X reell)
$r_X(\tau) \equiv \langle X(t) \cdot X(t + \tau) \rangle$	Autokorrelationsfkt. (X reell, stationär)
$r_{XY}(t_1, t_2) \equiv \langle X(t_1) \cdot Y(t_2) \rangle$	Kreuzkorrelationsfkt. (X, Y reell)
$r_{XY}(\tau) \equiv \langle X(t) \cdot Y(t + \tau) \rangle$	Kreuzkorrelationsfkt. (X, Y reell, stationär)
$R_X(\omega) \equiv \mathcal{F}\{r_X(\tau)\}$	Autoleistungsdichte, Leistungsdichtespektrum
$R_{XY}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{r_{XY}(\tau)\}$	Kreuzleistungsdichte
$\hat{R}_X^{\text{per}}(\omega)$	Periodogramm-Spektralschätzer
$\hat{R}_X^{\text{BT}}(\omega)$	BLACKMAN-TUKEY-Spektralschätzer
$\hat{R}_X^{\text{cep}}(\omega)$	cepstral geglättetes Spektrum
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2
$\chi^2(\ell)$	Chi-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgrad ℓ
$\hat{y}(t \tau)$	Schätzung von $y(t)$ mit $y(0), y(1), \dots, y(\tau)$
$\mathbf{R}_X(t, \tau) = \langle \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(\tau)^T \rangle$	Autokorrelationsmatrix
LMP	Log. des Mittelwertes aus Periodogrammen
LMA	Log. des Mittelwertes aus Amplitudenspektren
MLA	Mittelwert aus log. Amplitudenspektren

Modellierung der Ultraschallechos

$\underline{e}(\omega)$	Spektrum des Echosignals
$g(t)$	Fensterfunktion (Gate)
$H_T(\omega), h_T(t)$	Übertragungsverhalten der elektromechan.

	Komponenten beim Senden
$H_R(\omega), h_R(t)$	Übertragungsverhalten der elektromechan. Komponenten beim Empfangen
$H_W(\omega) \equiv \frac{1}{2} \cdot H_T(\omega) \cdot H_R(\omega)$	
$H_G(\omega), h_G(t)$	Übertragungsverhalten des Gewebes
$H_\phi(\mathbf{r}, \omega), h_\phi(\mathbf{r}, t)$	Beugungscharakteristik (Schallfeld-Übertragungsfunktion)
$H_d(\mathbf{r}, \omega)$	frequenzabhängige Dämpfung
$H_{\phi,d}(\mathbf{r}, \omega)$	Beugungscharakteristik bei dispersiven Medien
$p_i(\mathbf{r}, t)$	Schalldruck der einfallenden (incident) Welle
$p_s(\mathbf{r}', t)$	Schalldruck der gestreuten (scattered) Welle
V	Streuolumen
S	Wandleroberfläche
ref	Bezeichner für Variablen des Referenzmediums

Systemidentifikation, Entfaltung

$\delta(t)$	Dirac-Impuls
λ	Vergessensfaktor (forgetting factor)
z^{-1}	Verzögerungsoperator
$\boldsymbol{\theta}$	Parametervektor
\mathcal{C}	Kostenfunktion
$\boldsymbol{\epsilon}, \varepsilon$	Prädiktorfehler
$H_{\text{dec}}(\omega)$	Übertragungsfunktion des Entfaltungsfilters
γ	Filterparameter des Entfaltungsfilters
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multi Input Multi Output
ARMA	Autoregressive Moving Average
(R)PEM	(Recursive) Prediction Error Method
RLS	Recursive Least Squares
AIC	Akaike Information Criterion
BIC	Bayesian Information Criterion

Literaturverzeichnis

- [ABM⁺94] ALLISON, Janice W. ; BARR, Lori L. ; MASSOTH, Richard J. ; BERG, Greg P. ; KRASNER, Brian H. ; GARRA, Brian S.: Understanding the Process of Quantitative Ultrasonic Tissue Characterization. In: *Radiographics* 14 (1994), Nr. 5, S. 1099–1108
- [APR95] ABEYRATNE, U.R. ; PETROPULU, A.P. ; REID, J.M.: Higher Order Spectra Based Deconvolution of Ultrasound Images. In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control: UFFC* 42 (1995), Nr. 6, S. 1064–1075
- [APR96] ABEYRATNE, U.R. ; PETROPULU, A.P. ; REID, J.M.: On modeling the tissue response from ultrasonic B-scan images. In: *IEEE Transactions on medical imaging* 15 (1996), Nr. 4, S. 479–490
- [AS84] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I.A.: *Pocketbook of mathematical functions*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1984
- [Bam79] BAMBER, J.C.: Theoretical Modelling of the Acoustic Scattering Structure of Human Liver. In: *Acoustic Letters* 3 (1979), Nr. 6, S. 114–119
- [BH97] BROWN, R.G. ; HWANG, P.Y.C.: *Introduction to random signals and applied kalman filtering*. 3. John Wiley and Sons, 1997
- [BLFP87] BERGER, G. ; LUAGIER, P. ; FINK, M. ; PERRIN, J.: Optimal precision in ultrasound attenuation estimation and application to the detection of duchenne muscular dystrophy carriers. In: *Ultrasonic Imaging* 9 (1987), S. 1–17
- [Bro98] BROERSEN, P.M.T.: Estimation of the accuracy of mean and variance of correlated data. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 47 (1998), S. 1085–1091
- [BSMG93] BASSET, O. ; SUN, Z. ; MESTAS, J.L. ; GIMENEZ, G.: Texture analysis of ultrasonic images of the prostate by means of co-occurrence matrices. In: *Ultrasonic Imaging* 15 (1993), S. 218–237
- [BSMM95] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 2. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1995

- [BZ76] BERKHOUT, A.J. ; ZAAANEN, P.R.: A comparison between Wiener filtering, Kalman filtering, and deterministic least-squares estimation. In: *Geophysical Prospecting* 24 (1976), S. 141–197
- [CH75] CHIVERS, R.C. ; HILL, C.R.: A spectral approach to ultrasonic scattering from human tissue. In: *Physics in medicine and biology* 20 (1975), S. 799–815
- [Che60] CHERNOV, L.A.: *Wave propagation in random media*. McGraw-Hill, New York, 1960
- [CL96] COLEMAN, T.F. ; LI, Y.: An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. In: *SIAM Journal on Optimization* 6 (1996), S. 418–445
- [CMV⁺86] CLOOSTERMANS, M.J.T.M. ; MOL, H.J. ; VERHOEF, W.A. ; J.M.THIJSEN ; KUBAT, K.: In-vitro estimation of acoustic parameters of the liver and correlations with histology. In: *Ultrasound in Medicine and Biology* 12 (1986), S. 39–51
- [CO90] CÉSPEDES, I. ; OPHIR, J.: Diffraction correction methods for pulse-echo acoustic attenuation estimation. In: *Ultrasound in medicine and biology* 16 (1990), S. 707–717
- [Cru74] CRUMP, N.: A Kalman filter approach to the deconvolution of seismic signals. In: *Geophysics* 39 (1974), Nr. 1, S. 1–13
- [CT83] CLOOSTERMANS, M.J.T.M ; THIJSSEN, J.M.: A beam corrected estimation of the frequency dependent attenuation of biological tissues from backscattered ultrasound. In: *Ultrasonic Imaging* 5 (1983), S. 136–147
- [CZM94] CHEN, J.-F. ; ZAGZEBSKI, J.A. ; MADSEN, E.L.: Non-Gaussian Versus Non-Rayleigh Statistical Properties of Ultrasound Echo Signals. In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control: UFFC* 41 (1994), Nr. 4, S. 435–440
- [DTOS96] DUNN, F. ; TANAKA, M. ; OHTSUKI, S. ; SAJJOH, Y.: *Ultrasonic Tissue Characterization*. Springer, 1996
- [Duc90] DUCK, F.A.: *Physical properties of tissue*. Academic Press, 1990
- [FC84] FINK, M. ; CARDOSO, J.F.: Diffraction effects in pulse-echo measurement. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 31 (1984), S. 313–330
- [FHC83] FINK, M. ; HOTTIER, F. ; CARDOSO, J.F.: Ultrasonic signal processing for in vivo attenuation measurement: Short time fourier analysis. In: *Ultrasonic Imaging* 5 (1983), S. 117–135
- [FKSMa96] FELEPPA, E.J. ; KALISZ, A. ; SOKIL-MELGAR, J.B. ; ET AL, F.L. L.: Typing of prostate tissue by ultrasonic spectrum analysis. In: *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control* 43 (1996), S. 609–619

- [Föl90] FÖLLINGER, O.: *Laplace- und Fourier-Transformationen*. 5. Hüthig, 1990
- [FLK⁺97] FELEPPA, E.J. ; LIU, T. ; KALISZ, A. ; SHAO, M.C. ; FLESHNER, N. ; REUTER, V.: Ultrasonic spectral-parameter imaging of the prostate. In: *International Journal of Imaging Systems and Technology* 8 (1997), Nr. 1, S. 11–25
- [FP84] FRIEDLANDER, B. ; PORAT, B.: The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 2 (1984), Nr. 2, S. 158–173
- [FS95] FRITZSCH, T. ; SCHLIEF, R.: Levovist. Imaging agent. In: *Drugs of the future* 12 (1995), Nr. 20, S. 1224–1227
- [GD86] GRAY, R.M. ; DAVISSON, L.D.: *Random processes (A mathematical approach for engineers)*. Prentice Hall information and system sciences series, 1986
- [GJSH96] GÄRTNER, T. ; JENDERKA, K.V. ; SCHNEIDER, H. ; HEYNEMANN, H.: Tissue characterization by imaging of acoustical parameters. In: *Acoustical Imaging* 22 (1996), S. 365–370
- [Gün01a] GÜNTER, A.: Bias and variance of Averaged and Smoothed Periodogram-based Log-Amplitude Spectra. In: LONCARIC, S. (Hrsg.) ; BABIC, H. (Hrsg.): *Proceedings of the 2nd International Symposium on Image and Signal Processing*, 2001, S. 452–457
- [Gün01b] GÜNTER, A.: Estimating backscatter spectra after deconvolution with Kalman smoothing. In: INSANA, M.F. (Hrsg.) ; SHUNG, K.K. (Hrsg.): *Proceedings of SPIE Medical Imaging 2001: Ultrasonic Imaging and Signal Processing* Bd. 4325, 2001, S. 333–345
- [GR00] GÜNTER, A. ; RÖSING, D.: Entfaltung von in-vivo Ultraschallbildern. In: HORSCH, A. (Hrsg.) ; LEHMANN, T. (Hrsg.): *Bildverarbeitung für die Medizin 2000*, Springer, 2000 (Informatik aktuell), S. 153–157
- [Gre86] GREENLEAF, J.F. (Hrsg.): *Tissue Characterization with ultrasound, Part 2*. CRC Press Publications, Boca Raton, Florida, 1986
- [GRK99] GÜNTER, A. ; RÖSING, D. ; KLEBINGAT, K.-J.: Gewebedifferenzierung von Nierentumoren mittels Ultraschall. In: *Ultraschall in der Medizin, Supplement 1*, 1999, S. 41
- [Hal93] HALPERN, Ethan J.: Calculation of Tissue Attenuation with a Clinical Ultrasound Unit. In: *Investigative radiology: the official publ. of the Association of University Radiologists* 28 (1993), Nr. 7, S. 598–603
- [Hay96] HAYKIN, S.: *Adaptive Filter Theory*. 3. Prentice Hall International, 1996
- [Höf95] HÖFER, S.: *Die statistische Analyse medizinischer Ultraschallbilder unter Berücksichtigung der physikalischen Effekte der Ultraschallbildung sowie der fraktalen Struktur der abgebildeten Organe*. Shaker, (Berichte aus d. Elektrotechn.), 1995

- [HL93] HEALEY, A.J. ; LEEMAN, S.: Speckle reduction methods in ultrasound pulse-echo imaging. In: *IEEE conference publication* 369 (1993), S. 68–76
- [HLT98] HAIDER, B. ; LEWIN, P.A. ; THOMENIUS, K.E.: Pulse Elongation and Deconvolution Filtering for Medical Ultrasonic Imaging. In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 45 (1998), Nr. 1, S. 98–113
- [HT80] HUNDT, E.E. ; TRAUTENBERG, E.A.: Digital Processing of Ultrasound Data by Deconvolution. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 27 (1980), Nr. 5, S. 249–252
- [Hui98] HUISMAN, H.J.: *In vivo ultrasonic tissue characterization of liver metastases*. Dissertation Katholieke Universiteit Nijmegen, 1998
- [IH90] INSANA, M.F. ; HALL, T.J.: Characterizing the microstructure of random media using ultrasound. In: *Physics in medicine and biology* 35 (1990), Nr. 10, S. 1373–1386
- [IWBH90] INSANA, M.F. ; WAGNER, R.F. ; BROWN, D.G. ; HALL, T.J.: Describing smallscale structures in random media using puls-echo ultrasound. In: *The journal of the Acoustical Society of America : JASA* 87 (1990), S. 179–192
- [Jen91] JENSEN, J.A.: A Model for the Propagation and Scattering of Ultrasound in Tissue. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 89 (1991), Nr. 1, S. 182–191
- [Jen92] JENSEN, J. A.: Deconvolution of Ultrasound Images. In: *Ultrasonic Imaging* 14 (1992), S. 1–15
- [Jen94] JENSEN, J.A.: Estimation of in-vivo pulses in medical ultrasound. In: *Ultrasonic Imaging* 16 (1994), S. 190–203
- [Jen97] JENSEN, J.A.: A new approach to calculating spatial impulse responses. In: *IEEE International Ultrasonics Symposium, Toronto, Canada, 1997* (1997)
- [JGC⁺00] JENDERKA, K. V. ; GÄRTNER, T. ; COBET, U. ; ZACHARIAS, M. ; HEYNEMANN, H.: Tissue Characterization by Imaging the Local Frequency Dependent Relative Backscatter Coefficient. In: *Proceedings of the international conference SPIE Medical Imaging 2000* (2000), S. 270–277
- [JGJ93] JENSEN, J.A. ; GHANDHI, D. ; JR, W.D. O.: Ultrasound fields in an attenuating medium. In: *Proceedings of the IEEE 1993 Ultrasonics Symposium 2* (1993), S. 943–946
- [Jäh93] JÄHNE, Bernd: *Digital Image Processing, Concepts, algorithms, and scientific Applications*. 2. Springer, New York, 1993
- [JMGS93] JENSEN, J.A. ; MATHORNE, J. ; GRAVESEN, T. ; STAGE, B.: Deconvolution of in-vivo ultrasound b-mode images. In: *Ultrasonic Imaging* 15 (1993), S. 122–133

- [Kai68] KAILATH, T.: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part 1: Linear Filtering in Additive White Noise. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 (1968), S. 646–655
- [Kal60] KALMAN, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. In: *ASME Journal of basic engineering* 82d (1960), S. 35–45
- [Kay88] KAY, Steven M.: *Modern spectral estimation*. Prentice Hall Signal Processing Series, 1988
- [KF68] KAILATH, T. ; FROST, P.: An Innovations approach to least-squares estimation. Part 2: Linear smoothing in additive white noise. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 (1968), S. 665–660
- [KK98] KAMMEYER, K.-D. ; KROSCHER, K.: *Digitale Signalverarbeitung*. 4. B.G. Teubner, 1998
- [KM83] KORMYLO, J.J. ; MENDEL, J.M.: Maximum-Likelihood Seismic Deconvolution. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 21 (1983), Nr. 1, S. 72–83
- [Koo95] KOOPMANS, L.H.: *The spectral analysis of time series*. Academic Press, 1995
- [Kro96] KROSCHER, K.: *Statistische Nachrichtentheorie*. 3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996
- [KS79] KUC, R. ; SCHWARTZ, M.: Estimating the acoustic attenuation coefficient slope for liver from reflected ultrasound signals. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasound* 26 (1979), S. 353–362
- [KSM76] KUC, R. ; SCHWARTZ, M. ; VON MICKSKY, L.: Parametric estimation of the acoustic attenuation coefficient slope for soft tissues. In: *Proceedings 1976 IEEE Ultrasonic Symposium* (1976), S. 44–47
- [KT93] KALOUPSIDIS, N. ; THEODORIDIS, S.: *Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithms*. Prentice Hall International Series in Acoustics, Speech and Signal Processing, 1993
- [Kuc79] KUC, R.: Application of Kalman filtering techniques to diagnostic ultrasound. In: *Ultrasonic Imaging* 1 (1979), S. 105–120
- [Kuc86] KUC, R.: Ultrasonic tissue characterization using kurtosis. In: *IEEE Transactions on Ultrasound, Ferroelectrics and Frequency Control* 33 (1986), Nr. 3, S. 273–279
- [Kut88] KUTTRUFF, H.: *Physik und Technik des Ultraschalls*. S. Hirzel Stuttgart, 1988
- [KZ95] KLETTE, Reinhard ; ZAMPERONI, Piero: *Handbuch der Operatoren für die Bildbearbeitung Bildtransformationen für die digitale Bildverarbeitung*. 2. Vieweg, F /VVA, 1995
- [Ler85] LERCH, R.: Simulation von Ultraschallwandlern. In: *Acoustica* 57 (1985), S. 205–217

- [LF86] LERCH, R. ; FRIEDRICH, W.: Ultrasound fields in attenuating media. In: *The journal of the Acoustical Society of America : JASA* 80 (1986), Nr. 4, S. 1140–1147
- [LGFE83] LIZZI, F.L. ; GREENEBAUM, M. ; FELEPPA, E.J. ; ELBAUM, M.: Theoretical framework for spectrum analysis in ultrasonic tissue characterization. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 73 (1983), Nr. 4, S. 1366–1373
- [Lju87] LJUNG, L.: *System identification (Theory for the user)*. Prentice Hall Information and System Sciences Series, 1987
- [LOF⁺86] LIZZI, F.L. ; OSTROMOGILSKY, M. ; FELEPPA, E.J. ; RORKE, M. ; YAREMKO, M.M.: Relationship of Ultrasonic Spectral Parameters to features of Tissue Microstructure. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 33 (1986), Nr. 3, S. 319–329
- [LP88] LYONS, M.E. ; PARKER, K.J.: Absorption and attenuation in soft tissues: II - experimental results. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 35 (1988), Nr. 4
- [LW83] LIU, C.N. ; WAAG, R.C.: Digital Processing for Improvement of Ultrasonic Abdominal Images. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 2 (1983), Nr. 2, S. 66–75
- [Men77] MENDEL, J.M.: White-Noise Estimators for Seismic Data Processing in Oil Exploration. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 22 (1977), Nr. 5, S. 694–706
- [Men81] MENDEL, J.M.: Minimum-Variance Deconvolution. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 19 (1981), Nr. 3, S. 161–171
- [Mil87] MILLNER, R.: *Ultraschalltechnik: Grundlagen und Anwendungen*. 1. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1987
- [MK77] MENDEL, J.M. ; KORMYLO, J.: New fast optimal white-noise estimators for deconvolution. In: *IEEE Transactions on geoscience electronics* 15 (1977), Nr. 1, S. 32–41
- [MK78] MENDEL, J.M. ; KORMYLO, J.: Single-Channel White-Noise Estimators for Deconvolution. In: *Geophysics* 43 (1978), Nr. 1, S. 102–124
- [MMI84] MADSEN, E.L. ; M.F. INSANA, J.A. Z.: Method of data reduction for accurate determination of acoustic backscatter coefficients. In: *The journal of the Acoustical Society of America : JASA* 76 (1984), S. 913–923
- [NHN82] NICHOLAS, D. ; HILL, C.R. ; NASSIRI, D.K.: Evaluation of backscattering coefficients for excised human tissues: principles and techniques. In: *Ultrasound in medicine and biology* 8 (1982), S. 7–15

- [NNGH86] NICHOLAS, D. ; NASSIRI, D.K. ; GARBUTT, P. ; HILL, C.R.: Tissue characterization from ultrasound B-scan data. In: *Ultrasound in Medicine and Biology* 12 (1986), S. 135–143
- [NP93] NIKIAS, C.L. ; PETROPULU, A.P.: *Higher-order spectra analysis: A nonlinear signal processing framework*. Prentice Hall, 1993
- [O'D83] O'DONNELL, M.: Effects of diffraction on measurements of the frequency-dependent ultrasonic attenuation. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 30 (1983), S. 320–325
- [OJM81] O'DONNELL, M. ; JAYNES, E.T. ; MILLER, J.G.: Kramers-Kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity. In: *The journal of the Acoustical Society of America : JASA* 69 (1981), S. 696–701
- [OM72] OTT, N. ; MEDER, H.G.: The Kalman filter as a prediction error filter. In: *Geophysical Prospecting* 20 (1972), S. 549–560
- [Oos90] OOSTERVELD, B.J.: *On the quantitative analysis of ultrasound signals with applications to diffuse liver disease*. PhD thesis, Biophysics Laboratory of the Department of Ophthalmology, Academic Hospital , Nijmegen (Netherlands), 1990
- [OTH⁺91] OOSTERVELD, B.J. ; THIJSSSEN, J.M. ; HARTMAN, P.C. ; ROMIJN, R. ; ROSEBUSCH, G.J.E.: Ultrasound attenuation and texture analysis of diffuse liver disease: methods and preliminary results. In: *Physics in Medicine and Biology* 36 (1991), S. 1039–1064
- [OTV85] OOSTERVELD, B.J. ; THIJSSSEN, J.M. ; VERHOEF, W.A.: Texture of B-mode Echograms: 3-D Simulations and experiments of the effects of diffraction and scatterer density. In: *Ultrasonic Imaging* 7 (1985), S. 142–160
- [OW83] OPPENHEIM, A.V. ; WILLSKY, A.S.: *Signals and Systems*. Prentice-Hall Signal Processing Series, 1983
- [Pap91] PAPOULIS, A.: *Probability, random variables, and stochastic processes*. 3. Mc Graw Hill, 1991
- [PN88] PAN, R. ; NIKIAS, C.L.: The complex cepstrum of higher-order cumulants and non-minimum phase system identification. In: *IEEE Transaction on ASSP* 36 (1988), S. 186–205
- [Pri81] PRIESTLEY, M.B.: *Spectral analysis and time series*. Academic Press, 1981
- [Rei86] REID, J.M.: The Measurement of Scattering. In: *Tissue Characterization with Ultrasound* (1986), S. 81–114
- [RS78] RABINER, L.R. ; SCHAFER, R.W.: *Digital processing of speech signals*. Prentice-Hall Signal Processing Series, 1978
- [RT67] ROBINSON, E.A. ; TREITEL, S.: Principles of digital Wiener filtering. In: *Geophysical Prospecting* 15 (1967), S. 311–333

- [RTB89] ROMIJN, R.L. ; THIJSEN, J.M. ; VAN BEUNIGEN, G.W.J.: Estimation of scatterer size from backscattered ultrasound: a simulation study. In: *IEEE Transactions on Ultrasound, Ferroelectrics and Frequency Control (UFFC)* 36 (1989), S. 593–606
- [RWB84] ROBINSON, D.E. ; WILSON, L.S. ; BIANCHI, T.: Beam pattern(diffraction) correction for ultrasonic attenuation measurements. In: *Ultrasonic Imaging* 6 (1984), S. 292–303
- [Sch96] SCHMITZ, G.: *Ein Verfahren zur Ultraschall-Gewebscharakterisierung der Prostata*. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 17, 1996
- [Seh93] SEHGAL, C.M.: Quantitative relationship between tissue composition and scattering of ultrasound. In: *The journal of the Acoustical Society of America: JASA* 94 (1993), Nr. 4, S. 1944–1952
- [SES99] SCHMITZ, G. ; ERMERT, H. ; SENGE, T.: Tissue-Characterization of the prostate using Radio Frequency Ultrasonic Signals. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 46 (1999), Nr. 1, S. 126–138
- [SG84] SEHGAL, C.M. ; GREENLEAF, J.F.: Scattering of ultrasound by tissues. In: *Ultrasonic Imaging* 6 (1984), S. 60–80
- [Sha95] SHANKAR, P.M.: A model for ultrasonic scattering form tissues based on K-distribution. In: *Physics in medicine and biology* 40 (1995), S. 1633–1649
- [SMN⁺96] SHANKAR, P.M. ; MOLTHEN, R. ; NARAYANAN, V.M. ; REID, J.M. ; GENIS, V. ; FORSBERG, F. ; PICCOLI, C.W. ; LINDENMAYER, A.E. ; GOLDBERG, B.B.: Studies on the Use of Non-Rayleigh Statistics for Ultrasonic Tissue Characterization. In: *Ultrasound in medicine and biology* 22 (1996), Nr. 7, S. 873–882
- [Sor66] SORENSON, H.W.: Kalman Filtering Techniques. In: *Advances in Control Systems Theory and Applications, Volume 3* (1966), S. 219–292
- [SS89] SOEDERSTROEM, T. ; STOICA, P.: *System Identification*. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1989
- [SSE97] SIMON, C. ; SEIP, R. ; EBBINI, E.S.: A Robust and computationally efficient algorithm for mean scatterer spacing. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 44 (1997), Nr. 4, S. 882–894
- [ST93] SHUNG, K.K. ; THIEME, G.A.: *Ultrasonic scattering in biological tissues*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993
- [Sta00] STAHEL, W.A.: *Statistische Datenanalyse, Eine Einführung für Naturwissenschaftler*. 3. Vieweg, 2000
- [STKG96] SCHECTER, Stuart O. ; TEICHHOLZ, Louis E. ; KLIIG, Victor ; GOLDMAN, Martin E.: Ultrasonic Tissue Characterization: Review of a

- Noninvasive Technique for Assessing Myocardial Viability (Review). In: *Echocardiography*. 13 (1996), Nr. 4, S. 415–430
- [SW84] SMITH, S.W. ; WAGNER, R.F.: Ultrasound speckle size and lesion signal to noise ratio: verification of theory. In: *Ultrasonic Imaging* 6 (1984), S. 174–180
- [Thi87] THIJSEN, J.M.: Ultrasonic tissue characterization and echographic imaging. In: *Medical Progress through Technology* 13 (1987), S. 29–46
- [TOHR93] THIJSEN, J.M. ; OSTERVELD, B.J. ; HARTMAN, P.C. ; ROSEBUSCH, G.J.E.: Correlations between acoustic and texture parameters from RF and B-mode liver echograms. In: *Ultrasound in Medicine and Biology* 19 (1993), Nr. 1, S. 13–20
- [UI81] UEDA, M. ; ICHIKAWA, H.: Analysis of an echo signal reflected from a weakly scattering volume by discrete model of the medium. In: *Journal of the acoustical society of America* 70 (1981), Nr. 6, S. 1768–1775
- [UI84] UEDA, M. ; ICHIKAWA, H.: Erratum: Analysis of an echo signal reflected from a weakly scattering volume by discrete model of the medium. In: *Journal of the acoustical society of America* 75 (1984), Nr. 3, S. 1012
- [Unb90] UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie*. 5. Oldenbourg-Verlag Wien, 1990
- [UO85] UEDA, M. ; OZAWA, Y.: Spectral analysis of echoes for backscattering coefficient measurement. In: *The journal of the Acoustical Society of America : JASA* 77 (1985), Nr. 1, S. 38–47
- [VCT85] VERHOEF, W.A. ; CLOOSTERMANS, M.J. ; THIJSEN, J.M.: Diffraction and dispersion effects on the estimation of ultrasound attenuation and velocity in biological tissues. In: *IEEE transactions on biomedical engineering* 32 (1985), S. 521–529
- [VD93] VARGHESE, Tomy ; DONOHUE, Kevin D.: Characterization of tissue microstructure scatterer distribution with spectral correlation. In: *Ultrasonic Imaging* 15 (1993), S. 238–254
- [VD94] VARGHESE, Tomy ; DONOHUE, Kevin D.: Mean scatterer spacing estimates with spectral autocorrelation. In: *The journal of the Acoustical Society of America: JASA* 96 (1994), Nr. 6, S. 3504–3515
- [Vol82] VOLLMANN, W.: Resolution Enhancement of Ultrasonic B-Scan Images by Deconvolution. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 29 (1982), Nr. 2, S. 78–83
- [WIS88] WAGNER, R.F. ; INSANA, M.F. ; SMITH, S.W.: Fundamental correlation lengths of coherent speckle in medical ultrasonic images. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 35 (1988), Nr. 1, S. 34–44

- [WSSL83] WAGNER, R.F. ; SMITH, S.W. ; SANDRIK, J.M ; LOPEZ, H.: Statistics of speckle in ultrasound B-scans. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 30 (1983), S. 156–163
- [WWG95] WEAR, K.A. ; WAGNER, R.F. ; GARRA, B.S.: A Comparison of Autoregressive Spectral Estimation Algorithms and Order Determination Methods in Ultrasonic Tissue Characterization. In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 42 (1995), Nr. 4, S. 709–716
- [Zis93] ZISKIN, Marvin C.: Fundamental Physics of Ultrasound and Its Propagation in Tissue. In: *Radiographics: a publ. of the Radiological Soc. of North America* 13 (1993), Nr. 3, S. 705–710
- [Zol94] ZOLLER, W.G.: *Einführung in die Ultraschalldiagnostik*. 2. Verlag Karger, Basel, 1994
- [ZS99] ZETKIN, M. ; SCHALDACH, H.: *Lexikon der Medizin*. 16. Ullstein Medical, 1999
- [ZZ93] ZOLLNER, M. ; ZWICKER, E.: *Elektroakustik*. 3. Springer, 1993