

Forschungszentrum Karlsruhe  
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte  
FZKA 6351

**Anisotropes plastisches Fließen  
bei großen Deformationen**

Oliver Häusler  
Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte  
Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1999

# **Anisotropes plastisches Fließen bei großen Deformationen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Oliver Häusler  
aus Freiburg i.Br.

Tag der mündlichen Prüfung:

2.7.1999

Hauptreferent:

Prof. Dr. rer. nat. D. Munz

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als „wissenschaftliche Hilfskraft mit abgeschlossener Hochschulausbildung“ am Institut für Materialforschung II des Forschungszentrums Karlsruhe.

Herrn Prof. Dr. D. Munz danke ich für die Förderung der Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Ch. Tsakmakis für die Betreuung dieser Arbeit. Er hat durch zahlreiche fachliche Diskussionen entscheidende Impulse zum Gelingen dieser Arbeit geliefert.

Insbesondere möchte ich mich bei allen KollegInnen des Instituts bedanken, die mir bei meiner Arbeit geholfen haben.

Oliver Häusler

# Kurzfassung

## Anisotropes plastisches Fließen bei großen Deformationen

Im vorliegenden Bericht wird die Formulierung und Integration eines Materialmodells zur Beschreibung von anisotropem plastischen Fließen bei großen Deformationen vorgestellt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass von Beginn an eine Anisotropie vorhanden ist und die Achsen der Anisotropie sich mit der Deformation entwickeln (rotieren). Es werden unterschiedliche Entwicklungen der Anisotropie im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung sowie in der Fließfunktion berücksichtigt.

Das Materialmodell wird in der sogenannten plastischen Zwischenkonfiguration so formuliert, dass es den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung erfüllt. Aus diesen Bedingungen werden neben einem anisotropen Hyperelastizitätsgesetz Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen gewonnen, die die nichtlineare isotrope und die nichtlineare kinematische Verfestigung beschreiben. Ausserdem folgt daraus eine Fließregel sowie Materialgleichungen, die die Drehung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung beschreiben. Für die Wahl der Verzerrungs– und Spannungstensoren sowie deren objektive Geschwindigkeiten wurde das Konzept der dualen Variablen verwendet.

Das für beliebige Anisotropie formulierte Materialmodell wird mit Hilfe von Strukturtenoren für die beiden Spezialfälle von transversaler Isotropie sowie von Orthotropie angegeben. Dies wird im Hinblick auf die numerische Umsetzung in die Momentankonfiguration transformiert. Unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verzerrungen erfolgt die Implementation des Materialmodells in das Finite Element Programm ABAQUS über die Benutzerschnittstelle UMAT. Die Integration erfolgt mit einem zweifachen Operator–Split–Verfahren. Die Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix werden hierbei numerisch bestimmt.

Am Beispiel einfacher Scherung werden die Einflüsse einiger Materialparameter sowie der Wahl der Anfangsorientierungen der Anisotropieachsen diskutiert. Mit dem orthotropen Materialmodell wird der Zugversuch an einem dünnen Blech und die Torsion eines dünnwandigen Rohres simuliert.

# Abstract

## Anisotropic Plastic Flow at Finite Deformations

This report deals with the formulation and numerical integration of a constitutive model which describes the anisotropic plastic flow at finite deformations. We assume an orientational development of the anisotropy during the process of deformation (rotation of the axes of anisotropy). Different rotations of axes associated with the elasticity law, the kinematic hardening and the yield function are introduced.

The constitutive equations are formulated with respect to the so-called plastic intermediate configuration and satisfy the second law of thermodynamic (in form of the Clausius–Duhem–Inequality) for every admissible process. The evolution equations governing the response of the hardening variables are derived as sufficient conditions for the second law, while the stress tensor is given by a hyperelasticity relation. The choice of strain and stress tensors and the objective rates is motivated by the concept of dual variables.

For the case of transversely isotropy and orthotropy the constitutive model is represented using so-called structural tensors. With a view to a numerical implementation, the equations are transformed in the actual configuration. For small elastic strains the model is implemented as a UMAT–subroutine into the finite element code ABAQUS. The integration procedure is based on the operator splitting method. The contributions to the consistent tangent modulus are calculated numerically.

The effect of some material parameters and the initial orientations of the axes of anisotropy is discussed by calculating the case of simple shear. For demonstrating the capabilities of the orthotropic model version the predicted model responses for tension loading of a thin plate as well as the torsion of a thin tube is calculated.

# Inhaltsverzeichnis

Notation und Operatoren	iv
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Darstellung von Anisotropie</b>	<b>4</b>
2.1 Vorstellung verschiedener Anisotropie-Klassen . . . . .	4
2.2 Formulierung anisotroper Funktionen . . . . .	8
2.2.1 Zusammenhänge bei anisotropen Invarianten . . . . .	8
2.2.2 Strukturtenoren für transversale Isotropie . . . . .	10
2.2.3 Strukturtenoren für Orthotropie . . . . .	10
2.3 Isotrope Invarianten . . . . .	11
2.3.1 Invariante Darstellung einer skalarwertigen, transversal isotropen Funktion . . . . .	13
2.3.2 Invariante Darstellung einer skalarwertigen, orthotropen Funktion .	14
<b>3 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>15</b>
3.1 Kinematik . . . . .	15
3.2 Zerlegung der Deformation . . . . .	17
3.2.1 Konzept der dualen Variablen . . . . .	18
3.2.2 Transformationsbeziehungen . . . . .	20

<b>4</b>	<b>Anisotropes (Visko–) Plastizitätsmodell</b>	<b>23</b>
4.1	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	24
4.2	Herleitung des Materialmodells . . . . .	25
4.2.1	Darstellung der Anisotropieachsen . . . . .	25
4.2.2	Elastizitätsgesetz . . . . .	26
4.2.3	Innere Dissipationsungleichung . . . . .	29
4.2.4	Normalenregel, isotrope Verfestigung und Entwicklung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz . . . . .	35
4.2.5	Kinematische Verfestigung . . . . .	38
4.2.6	Entwicklung der Anisotropieachsen in der kinematischen Verfestigung	39
4.2.7	Entwicklung der Anisotropieachsen in der Fließfunktion . . . . .	40
4.2.8	Zusammenfassung der Materialgleichungen für allgemeine Anisotropie	40
4.3	Materialgleichungen für transversale Isotropie und Orthotropie . . . . .	42
4.3.1	Darstellung der Strukturtenoren . . . . .	42
4.3.2	Transformation auf die Momentankonfiguration . . . . .	46
4.3.3	Materialgleichungen für transversale Isotropie . . . . .	50
4.3.4	Materialgleichung für Orthotropie . . . . .	58
4.3.5	Zusammenfassung der Gleichungen für transversale Isotropie und Orthotropie . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Numerik</b>	<b>70</b>
5.1	Finite-Element-Methode bei nichtlinearen Problemen . . . . .	70
5.1.1	Variationsformulierung . . . . .	70
5.1.2	Lösung der nichtlinearen Gleichgewichtsbedingung . . . . .	72
5.2	Bestimmung der Spannung . . . . .	74
5.2.1	Kleine elastische Verzerrungen . . . . .	74
5.2.2	Bar-Transformation . . . . .	78
5.2.3	Operator-Split-Verfahren . . . . .	79
5.3	Bestimmung der konsistenten Tangente . . . . .	87

<b>6</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>90</b>
6.1	Einfache Scherung . . . . .	90
6.1.1	Transversale Isotropie . . . . .	91
6.1.2	Orthotropie . . . . .	99
6.1.3	Vergleich FEM — Runge–Kutta . . . . .	107
6.2	Zugversuch . . . . .	111
6.3	Torsion eines dünnwandigen Rohrs . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>118</b>
<b>A</b>	<b>Kristall–Eigenschaften</b>	<b>121</b>
A.1	Isotropie–Gruppen . . . . .	121
A.2	Strukturtenoren aller Kristall–Klassen . . . . .	123
<b>B</b>	<b>Invariante Darstellungen</b>	<b>125</b>
B.1	Invarianten von Tensoren . . . . .	125
B.2	Invariante Darstellung der Fließfunktion . . . . .	126
B.3	Invertierung von $\mathbf{c}^{(\text{kin})}$ . . . . .	127
<b>C</b>	<b>Transformationen</b>	<b>129</b>
C.1	Familie 1: Zerlegung der Verzerrungstensoren . . . . .	129
C.2	Familie 1: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten . . . . .	130
C.3	Familie 2: Zerlegung der Verzerrungstensoren . . . . .	131
C.4	Familie 2: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten . . . . .	132
C.5	Familie 1: Spannungstensoren und –geschwindigkeiten . . . . .	133
C.6	Familie 2: Spannungstensoren und –geschwindigkeiten . . . . .	134
<b>D</b>	<b>Abhängigkeit der elastischen freien Energiefunktion</b>	<b>135</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>



# Notation und Operatoren

Vektoren und Tensoren 2.Stufe werden mit fettgedruckten Symbolen bezeichnet, Tensoren 4.Stufe mit fettgedruckten, kalligrafischen Symbolen. Die komponentendarstellung tensorieller Größen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem. Soweit nicht anders vermerkt gilt die Einstein'sche Summationskonvention. Zum Teil werden unterschiedliche Größen mit demselben Symbol bezeichnet. Sollten dadurch Verwechslungen möglich sein, wird im Text explizit die Bedeutung der entsprechenden Größe erwähnt. Die Rechenregeln für Tensorrechnungen werden in Analogie zu den Lehrbüchern von Klingbeil [38] und de Boer [20] angewendet.

## Notation

### Lateinische Buchstaben

<b>1</b>	Einheitstensor 2.Stufe ( $\mathbf{1} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ )
<b>A</b>	Almansiverzerrungstensor
<b>C</b>	Rechter Cauchy–Green–Verzerrungstensor
<b>B</b>	Linker Cauchy–Green–Verzerrungstensor
<b>D</b>	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
<b>F</b>	Deformationsgradient
<b>q</b>	Wärmeflussvektor
<b>E</b>	Green'scher Verzerrungstensor
<b>e</b>	spezifische innere Energie
<b>f</b>	Fließfunktion
<b>f</b>	spezifische Volumenkraft
<b>k</b>	innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der isotropen Verfestigung
<b>L</b>	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
<b>m, m<sup>(i)</sup></b>	Richtungen der Anisotropie
<b>M, M<sup>(i)</sup></b>	Strukturtenoren
<b><math>\hat{P}</math></b>	Mandel'scher Spannungstensor der Zwischenkonfiguration

$\mathcal{R}_R$	Referenzkonfiguration
$\hat{\mathcal{R}}_t$	Zwischenkonfiguration
$\mathcal{R}_t$	Momentankonfiguration
$\mathbf{Q}$	orthogonaler Rotationstensor
$\mathbf{R}_n^\varphi$	Drehung mit dem Winkel $\varphi$ um den Einheitsvektor $\mathbf{n}$
$\mathbf{R}$	Rotationstensor der polaren Zerlegung
$r$	innere Variable vom Dehnungstyp zur Beschreibung der isotropen Verfestigung
$s$	plastische Bogenlänge
$\mathbf{S}_u$	Spiegelung an der $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ -Ebene im $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ -System
$\mathbf{S}$	gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
$\mathbf{T}$	Cauchy'scher Spannungstensor
$t$	Zeitpunkt
$\tilde{\mathbf{T}}$	2.Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\hat{\mathbf{T}}$	2.Piola-Kirchhoff Spannungstensor der Zwischenkonfiguration
$\mathbf{u}$	Verschiebung
$\mathbf{U}$	rechter Strecktensor der polaren Zerlegung
$\mathbf{V}$	linker Strecktensor der polaren Zerlegung
$\mathbf{W}$	Wirbeltensor
$W$	Spannungsleistung
$\mathbf{x}$	Ortsvektor zu einem Materiellen Punkt
$\mathbf{Y}$	innere Variable vom Dehnungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung
$\mathbf{Z}$	innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung

## Griechische Buchstaben

$\gamma_*$	Rate der spezifischen Entropieproduktion
$\hat{\xi}$	Translationstensor der kinematischen Verfestigung in der Zwischenkonfiguration
$\hat{\Gamma}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration
$\eta_*$	spezifische Entropie
$\Theta$	Temperatur
$\rho$	Dichte
$\psi$	spezifische freie Energie
$\Phi, \Delta, \Pi$	Rotationstensoren zur Beschreibung der Änderung der Anisotropierichtungen

## Tensoren 4.Stufe

$\mathcal{E}$	Einheitstensor 4.Stufe ( $\delta_{ik}\delta_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ )
$\mathcal{I}$	Symmetrisierungstensor 4.Stufe ( $\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ )
$\mathcal{C}^{(\text{elast})}$	Elastizitätstensor
$\mathcal{C}^{(\text{kin})}$	Tensor 4.Stufe der kinematischen Verfestigung
$\mathcal{M}^{(\text{kin})}$	inverser Tensor 4.Stufe der kinematischen Verfestigung
$\mathcal{K}$	Tensor 4.Stufe der Fließfunktion

## Indizes

$()_e$	elastischer Anteil von $()$
$()_p$	inelastischer Anteil von $()$
$()_A$	antisymmetrischer Anteil von $()$
$()_S$	symmetrischer Anteil von $()$
$\mathbf{M}_{(e)}^{(i)}$	$i$ -ter Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz
$\mathbf{M}_{(k)}^{(i)}$	$i$ -ter Strukturtenoren in der kinematischen Verfestigung
$\mathbf{M}_{(f)}^{(i)}$	$i$ -ter Strukturtenoren in der Fließfunktion
$()_0$	numerische Näherung zum Zeitpunkt $t$
$()_{1/2}$	numerische Näherung zum Zeitpunkt $t + \frac{\Delta t}{2}$
$()_1$	numerische Näherung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$
$I()$	Werte im 1.Operator
$II()$	Werte im 2.Operator
$\overline{()}$	bartransformierte Größe

## Operatoren

grad	Gradient
tr	Spur
div	Divergenz
det	Determinante
$\mathbf{A}^D$	Deviatorischer Anteil von $\mathbf{A}$ ( $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{1}$ )
$\ \mathbf{A}\ $	euklidische Norm ( $\ \mathbf{A}\  = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ )
$\langle \rangle$	McAuley-Klammer
$()^{-1}$	Inverse
$()^T$	Transponierte
$\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$	dyadisches Produkt ( $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} = m_i n_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = A_{ij}B_{ij}$ )
$\mathbf{A}\mathbf{B}$	Tensorprodukt ( $\mathbf{A}\mathbf{B} = A_{ip}B_{pj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )
$\mathcal{C}[\mathbf{A}]$	Anwenden von $\mathcal{C}$ auf $\mathbf{A}$ ( $\mathcal{C}[\mathbf{A}] = C_{ijkl}A_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )

## Rechenregeln

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1T} = \mathbf{A}^{T-1}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_S = \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{B}_S = \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_A = \mathbf{A}_A \cdot \mathbf{B}_A = \mathbf{A}_A \cdot \mathbf{B}$$

# Kapitel 1

## Einleitung

Nachdem in den letzten Jahren viele Arbeiten zur Beschreibung von isotropem Materialverhalten durchgeführt wurden, ist das Interesse groß, auch für Materialien mit richtungsabhängigem (anisotropem) Verhalten geeignete Modelle zu entwickeln. Ein solches anisotropes Materialverhalten wird häufig bei Metallen beobachtet. Hierbei kann die Anisotropie entweder von Beginn an vorhanden sein oder die Anisotropie stellt sich mit zunehmender Deformation ein (induzierte Anisotropie).

Im Rahmen dieser Arbeit werden konstitutive Gleichungen ermittelt, die das mechanische Verhalten für eine von Beginn an vorhandene und sich mit der Deformation entwickelnde Anisotropie beschreiben. Diese Anisotropie kann z.B. bei einkristallinen Legierungen, in Werkstoffen der Mikrosystemtechnik oder bei gewalzten Blechen in der Umformtechnik auftreten. Außerdem ist dieses Materialmodell der erste Schritt, um eine Theorie zur Beschreibung von Materialien mit induzierter Anisotropie allgemeiner Art zu entwickeln. Eine solche induzierte Anisotropie tritt meist erst bei großen Verformungen ein (Prantil et al. [50], Cho und Dafalias [11], Dafalias [16]). Modelle über induzierte Anisotropie bei kleinen Deformationen (die Induzierung der Anisotropie wurde hierbei durch eine Deformation der Fließfläche in Abhängigkeit der plastischen Vordeformation realisiert) sind in den Arbeiten von Baltov und Sawczuk [5], Yoshimura [76], Svensson [59], Backhaus [4] und Wegener und Schlegel [75] zu finden. Allen Arbeiten ist gemeinsam, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht berücksichtigt wird. Experimente zur Bestimmung der Form der Fließflächen sind in den Arbeiten von Rider et al. [52] und Takeda [60] zu finden.

Das Vorgehen zur Herleitung anisotroper Materialmodelle kann auf zwei verschiedene Arten geschehen. Die erste Möglichkeit basiert auf mikromechanischen Betrachtungen,

bei denen das plastische Fließen auf Mikroebene durch das Gleiten von Versetzungen entlang den Gleitebenen in den einkristallinen Körnern (bei Polykristallen) beschrieben wird (zur Kinematik der Gleitung von Versetzungen siehe Asaro und Rice [3] und Asaro [2]). Der Übergang dieses Plastizitätsmodells für Einkristalle, das durch das ausschließliche Gleiten entlang von Gleitebenen anisotrop ist, auf Polykristalle wird mit Hilfe von sogenannten *Orientierungsverteilungsfunktion* ( $ODF = \text{orientation distribution function}$ ) durchgeführt. Hierzu wird jeder Orientierung eines Kristalls des Polykristalls eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Durch eine Mittelung mit der Orientierungsverteilungsfunktion als Gewichtung kann sowohl ein isotropes Materialmodell (in diesem Fall kommen alle Orientierungen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vor) als auch ein anisotropes Modell (bestimmte Orientierungen treten häufiger auf als andere) gewonnen werden. Dieses Vorgehen wird u.a. in den Arbeiten von Ning und Aifantis [47], Prantil et al. [50], Rashid [51], van der Giessen und van Houtte [68] und Svendsen und Hutter [58] beschrieben. In diesen Arbeiten tritt eine Rotation der Kristallachsen auf, die vom sogenannten plastischen Spin gesteuert wird (siehe hierzu auch Aravas und Aifantis [1], Dafalias und Rashid [19] und Dafalias [17]). Die Diskussion, ob einem materiellen Punkt des Körpers nur eine oder mehrere Orientierungen (und somit auch mehrere plastische Spins) zugeordnet werden können, ist zur Zeit noch nicht beendet (Dafalias [16]).

Diese Arbeit befasst sich mit der zweiten Möglichkeit ein Materialmodell zu entwickeln. Hierbei wird nicht versucht die mikroskopischen Vorgänge, die bei plastischem Fließen stattfinden, zu erfassen, sondern man betrachtet rein phänomenologisch die makroskopische Materialantwort und versucht diese durch geeignete konstitutive Gleichungen zu beschreiben. Dabei wird von einem anisotropen Elastizitätsgesetz, einer anisotropen kinematischen Verfestigung sowie einer anisotropen Fließfunktion ausgegangen. In Anlehnung an Dafalias [18, 16] werden hierzu verschiedene Rotationstensoren eingeführt, die die Änderung der Anisotropierichtungen beschreiben. Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens werden sogenannte innere Variablen verwendet.

Ausgangspunkt des Modells ist die (nicht eindeutige) Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil. Weiterhin wird verlangt, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung immer erfüllt ist (im Gegensatz zum Modell von Dafalias). Ausserdem sollen die Evolutionsgleichungen invariant gegenüber beliebigen Rotationen der sogenannten Zwischenkonfiguration und der Momentankonfiguration sein. Das komplette Modell wird in der Zwischenkonfiguration formuliert, wobei als Spannungstensor der sogenannte Mandel’sche Spannungstensor verwendet wird. Aus den Anforderungen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik werden Evolutionsgleichungen für die plastische Verformung, für die Verfestigungsvariablen sowie für die Rotationstensoren, die die Änderung der Anisotropierich-

tungen beschreiben, gewonnen.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird erläutert, wie anisotrope Werkstoffe charakterisiert werden können. Es wird gezeigt, wie anisotrope, skalarwertige Funktionen durch die Einführung sogenannter Strukturtenoren durch isotrope, skalarwertige Funktionen ersetzt werden können. Für diese Funktionen werden dann die entsprechenden Darstellungssätze vorgestellt. Im dritten Kapitel werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik kurz zusammengefasst. Insbesondere wird hierbei die Zerlegung der Deformation in elastische und inelastische Anteile beschrieben und die benötigten Spannungs- und Verzerrungstensenoren vorgestellt. Weiterhin erfolgt hier die Vorstellung des *Konzeptes der dualen Variablen* (Haupt und Tsakmakis [26]), mit Hilfe dessen Dehnungs- und Spannungstensenoren in natürlicher Weise einander zugeordnet werden sollen und das diesen Tensenoren entsprechende objektive Zeitableitungen zuordnet.

Die Herleitung des Materialmodells erfolgt im vierten Kapitel. Es handelt sich um ein Modell, welches dem allgemeinen theoretischen Rahmen entspricht, der in Tsakmakis [66] vorgeschlagen wurde. Hier werden durch Auswertung der Clausius–Duhem–Ungleichung die Evolutionsgleichungen für beliebige Anisotropie in der Zwischenkonfiguration hergeleitet. Anschließend wird erläutert, wie die Strukturtenoren für zwei Anisotropieklassen (transversale Isotropie und Orthotropie) in Abhängigkeit von Eulerwinkeln aussehen. Für diese beiden Anisotropieklassen wird das Materialmodell von der Zwischen- in die Momentankonfiguration transformiert.

Unter der Voraussetzung von kleinen elastischen Verformungen wird die numerische Implementierung des Modells in das Finite Element Programm ABAQUS im fünften Kapitel beschrieben. Hierzu müssen vom Benutzer über die Schnittstelle UMAT die zu einer vorgegeben Deformation gehörigen Spannungen bestimmt und an das FE-Programm übergeben werden. Die Bestimmung dieser Spannungen erfolgt mit einem zweifachen Operator-Split-Verfahren, wobei im ersten Operator die elastischen Anteile mit der Mittelpunktsregel und im zweiten Operator die inelastischen Anteile mit dem impliziten Euler-Verfahren integriert werden. Um eine schnelle Lösung des Randwertproblems im FE-Programm zu erzielen, muss außerdem die sogenannte konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix bestimmt werden. Diese wird in dieser Arbeit numerisch ermittelt.

Abschließend erfolgen einige Beispielrechnungen, die mit dem transversal isotropen und dem orthotropen Materialmodell durchgeführt werden. Zunächst wird am Beispiel der einfachen Scherung der Einfluss einiger Materialparameter und der Anfangsorientierung untersucht bevor der Zugversuch an einem dünnen Blech (siehe Imatani et al. [36]) und die Torsion eines dünnwandigen Rohres (siehe Culie und Nouailhas [13], Méric et al. [44], Nouailhas und Culie [48] und Nouailhas et al. [49]) simuliert wird.

# Kapitel 2

## Darstellung von Anisotropie

Die Betrachtung anisotroper Materialien (sowohl Ein- als auch Poly-Kristalle) zeigt, dass zumeist keine völlig ungeordnete Struktur auftritt, sondern dass auch hierbei bestimmte Symmetrien vorhanden sind. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird beschrieben, welche Transformationseigenschaften Konstitutiv-Gleichungen zur Beschreibung solcher Materialien erfüllen müssen (siehe dazu Boehler [7], Kapitel 2). Ausserdem werden verschiedene Symmetrie-Klassen, auch Anisotropie-Klassen genannt, vorgestellt (Truesdell und Noll [61]).

Die invariante Beschreibung anisotroper Materialien mit sogenannten Strukturtenoren wird im nächsten Abschnitt hergeleitet (Boehler [7], Liu [42], Zheng und Spencer [78] und Zhang und Rychlewski [77]), bevor im dritten Teil Darstellungssätze für isotrope und anisotrope skalar- und tensorwertige Funktionen vorgestellt werden (Boehler [7], Rivlin [53], Wang [69, 72, 70, 71, 73], Smith [55] und Spencer [56]).

Abschliessend werden für die zwei speziellen Anisotropie-Klassen der transversalen Isotropie und der Orthotropie die Darstellung mit Strukturtenoren exemplarisch vorgestellt (Boehler [7] und Schröder [54]).

### 2.1 Vorstellung verschiedener Anisotropie-Klassen

Zunächst muss geklärt werden, was Anisotropie bedeutet und wie sich ein anisotropes Material verhält. Hierzu gehen wir von einem Körper aus der mit einer mechanischen Belastungsgröße (z.B. dem Verzerrungstensor) beaufschlagt wird, die eine mechanische Reaktion (z.B. den Spannungstensor) hervorruft. Die Belastung wird im folgenden mit einem Tensor  $\mathbf{E}$ , die Reaktion mit einem Tensor  $\mathbf{T}$  bezeichnet.



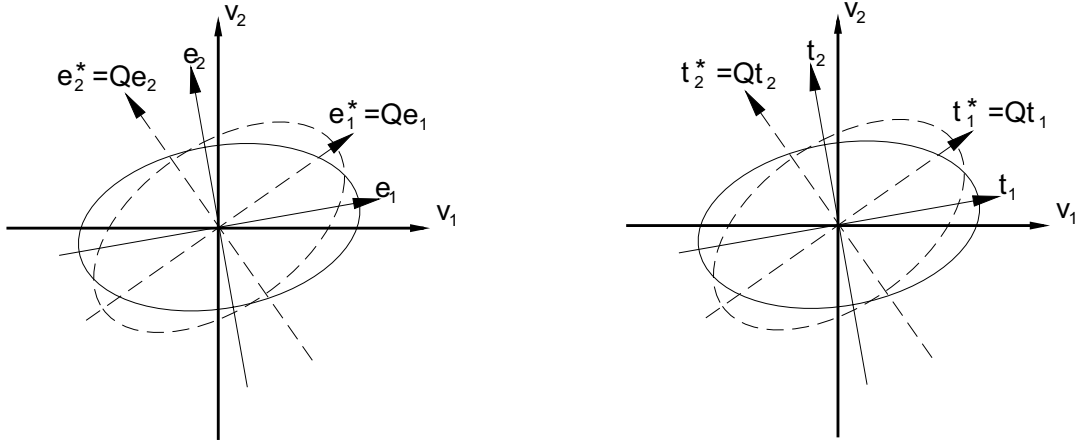


Abbildung 2.1: Zur Definition eines isotropen Materials

In Abbildung 2.1 ist das Verhalten für einen isotropen Werkstoff schematisch dargestellt. Hierbei stellen die Koordinaten-Achsen  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  die Orientierung des Materials im Raum dar, die für die folgenden Überlegungen fest gehalten wird. Die Ellipsen repräsentieren die Tensoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{T}$ , wobei mit  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  bzw.  $\mathbf{t}_1$  und  $\mathbf{t}_2$  die Hauptachsen der zugehörigen Tensoren dargestellt werden.

Ist das Material isotrop, so fallen, wie in Abbildung 2.1 zu erkennen, die Hauptachsen der Belastungstensoren ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}^*$ ) und der Reaktionstensoren ( $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^*$ ) zusammen. Eine zweite Eigenschaft, die direkt aus der ersten folgt, ist: Wird eine andere Belastung  $\mathbf{E}^*$  aufgebracht, die gegenüber der ersten mit einem orthogonalen Tensor  $\mathbf{Q}$  rotiert ist

$$\mathbf{E}^* := \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T \quad , \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) \quad , \quad (2.1)$$

dann ist auch der Reaktionstensor mit dem gleichen Rotationstensor transformiert

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad , \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) \quad . \quad (2.2)$$

Analog zur Änderung der Belastungstensoren, kann natürlich auch die Orientierung des Körpers verändert werden, d.h. die Orientierungs-Achsen  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  werden rotiert:

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}_1 \quad ; \quad \mathbf{v}_2^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}_2 \quad , \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) \quad . \quad (2.3)$$

In diesem Fall bleiben die Hauptachsen der Ellipsen, die die Materialantwort  $\mathbf{T}$  bzw.  $\mathbf{T}^*$  repräsentieren, unabhängig von der Orientierung des Körpers immer gleich, sie sind invariant gegenüber beliebigen Rotationen des Körpers.

Ein anderes Verhalten wird bei anisotropen Körpern beobachtet, wie aus Abbildung 2.2 deutlich wird.

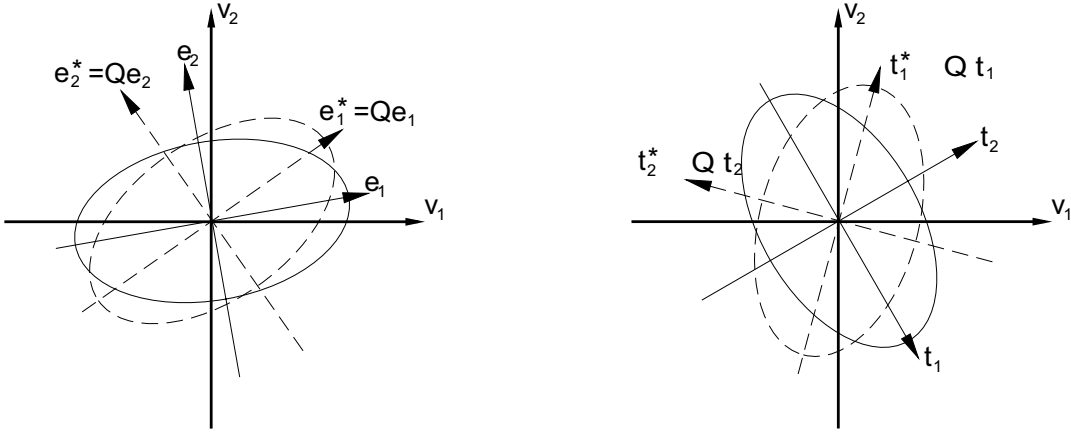


Abbildung 2.2: Zur Definition eines anisotropen Materials

Auch in diesem Fall werden zwei Belastungsgrößen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{E}^*$  vorgegeben, die sich durch eine Rotation  $\mathbf{Q}$  unterscheiden. Die Orientierung des Materials ist in beiden Fällen gleich. In diesem Fall stellen sich jedoch nicht zwei Materialantworten  $(\mathbf{T}, \mathbf{T}^*)$  ein, die dieselben Hauptachsen wie die Belastungen haben, sondern im allgemeinen unterscheiden sie sich. Folglich gehen auch die Materialantworten nicht mehr aus denselben Transformationen auseinander hervor, wie die Belastungen (2.1):

$$\mathbf{T}^* \neq \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) \quad . \quad (2.4)$$

Wird für diesen anisotropen Körper seine Orientierung gemäß (2.3) verändert, die Belastungsgröße bleibt aber gleich, so ändern sich die Hauptachsen der Materialantwort. In diesem Fall ist Reaktion des Materials auf die Belastung nicht mehr invariant gegenüber beliebigen Rotationen des Körpers und die Materialantwort weist Abhängigkeiten von der Orientierung auf.

Allerdings besitzt auch ein anisotroper Körper bestimmte Symmetrien, d.h. es gibt Transformationen bezüglich denen sich die Reaktion des Materials als invariant erweist. Diese orthogonalen Transformationen werden als die sogenannte *materielle Symmetriegruppe* oder *Isotropiegruppe*  $\mathcal{G} \in \mathcal{O}(3)$  bezeichnet. Es gilt also die Transformationseigenschaft

$$\mathbf{E}^* := \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \quad . \quad (2.5)$$

Verschiedene Anisotropie-Klassen lassen sich somit über ihre Isotropiegruppen charakterisieren. Für Isotropie besteht die Isotropiegruppe aus der vollständigen Gruppe der orthogonalen Tensoren  $\mathcal{O}(3)$ , während für den allgemeinsten anisotropen Fall die Isotropiegruppe nur aus der identischen Abbildung und der Inversion besteht  $\mathcal{G} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ .

Obwohl es eine unendliche Anzahl an Isotropiegruppen gibt, reichen zwölf davon aus um alle anisotropen Werkstoffe zu beschreiben (Truesdell und Noll [61], S.82). Zur Beschreibung der Symmetrietransformationen genügen im wesentlichen Drehungen. Hierbei bezeichnet der Tensor  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}^\varphi$  eine Drehung um den Einheitsvektor  $\mathbf{u}$  mit dem Winkel  $\varphi$ . In einem Orthonormal-System  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  hat dieser Tensor die Darstellung

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} . \quad (2.6)$$

Von den zwölf Isotropiegruppen sind die ersten elf den 32 Kristallklassen zugeordnet. Auf die Unterteilung und Eigenschaften dieser Kristallklassen wird hier nicht weiter eingegangen, eine ausführliche Betrachtung findet sich z.B. in Truesdell und Noll [61], S.83. Eine Auflistung der Isotropiegruppen für die Kristallklassen ist im Anhang A.1 zu finden. In aktuellen Arbeiten über Kristallografie werden zusätzlich zu diesen Kristallklassen sogenannte *Quasi-Kristallklassen* eingeführt. Da dadurch auch alle kontinuierlichen Drehungen zu den Isotropiegruppen zählen, ergeben sich unendlich viele Quasi-Kristallklassen (siehe hierzu Bruhns et al. [8]). An dieser Stelle werden nur die zwei Anisotropieklassen beschrieben, die in der Praxis am häufigsten anzutreffen sind. Dies ist zum einen die *Orthotropie*: Ein Material wird orthotrop genannt, wenn seine Isotropiegruppe Spiegelungen an drei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen enthält. Die Isotropiegruppe besteht also aus

$$\mathcal{G} = \{\pm \mathbf{1}, \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{w}}^\pi\} . \quad (2.7)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass eine Spiegelung an der  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ -Ebene

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \quad (2.8)$$

aus einer Drehung um  $180^\circ$  um  $\mathbf{u}$  und einer anschließenden Inversion  $-\mathbf{1}$  zusammengesetzt werden kann. Somit sind auch die Kristall-Klassen 3, 5, 6 und 7 (Anhang A.1) orthotrop.

Die zwölfte Anisotropie-Klasse wird *transversale Isotropie* genannt. Sie wird charakterisiert durch beliebige Rotationen um eine Achse  $\mathbf{w}$ , und besitzt somit die Isotropiegruppe

$$\mathcal{G} = \{\pm \mathbf{1}, \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\varphi}\} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad . \quad (2.9)$$

Keine der Kristall-Klassen weist diese Eigenschaften auf, diese Anisotropie-Klasse tritt nur bei Poly-Kristallen sowie bei Materialien mit einer geschichteten oder gebündelten Struktur auf.

## 2.2 Formulierung anisotroper Funktionen

Für isotrope skalar-, vektor- und tensorwertige Funktionen die von einer endlichen Anzahl symmetrischer und antisymmetrischer Tensoren 2.Stufe und Vektoren abhängen, existieren viele koordinatenunabhängige, nicht reduzierbare Darstellungssätze (siehe Abschnitt 2.3). Bei anisotropen Funktionen, die somit nicht mehr invariant gegenüber beliebigen orthogonalen Transformationen sind, ist das Problem eine solche Darstellung zu finden noch nicht gelöst. Aus diesem Grund werden sogenannte *Strukturtenoren* gesucht, die die Symmetrie der Anisotropie charakterisieren. Mit Hilfe dieser Strukturtenoren gelingt es dann, anisotrope Funktionen durch neue isotrope Funktionen darzustellen und für diese die Darstellungssätze für isotrope Funktionen anzuwenden.

Im folgenden Abschnitt werden für die speziellen Anisotropiefälle Orthotropie und transversale Isotropie die Strukturtenoren vorgestellt (Liu [42]). Für die 32 Kristall-Klassen sind die zugehörigen Strukturtenoren, auf deren Herleitung (siehe Zheng und Spencer [78] und Zhang und Rychlewski [77]) hier verzichtet wird, in Anhang A.2 angegeben.

### 2.2.1 Zusammenhänge bei anisotropen Invarianten

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden nur skalarwertige anisotrope Funktionen benötigt. Deshalb beschränken sich auch die nächsten Überlegungen nur auf eine Funktion  $\psi(\mathbf{v}, \mathbf{A})$ , die von  $m$  Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $n$  Tensoren 2.Stufe  $\mathbf{A}$  abhängen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Diese Funktion wird als invariant unter einer Gruppe  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(3)$  bezeichnet, wenn die Gleichung

$$\psi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad , \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \quad (2.11)$$

erfüllt ist. Hierbei sind die Operationen  $\mathbf{Q}\mathbf{v}$  und  $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$  durch

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{v} &= (\mathbf{Q}\mathbf{v}_1, \mathbf{Q}\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m) \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T &= (\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_n\mathbf{Q}^T) \quad .\end{aligned}\tag{2.12}$$

gegeben. Die Funktion  $\psi$  wird isotrop genannt wenn die Transformation  $\mathbf{Q}$  aus der Gruppe der vollständigen orthogonalen Tensoren ist ( $\mathbf{Q} \in \mathcal{G} = \mathcal{O}(3)$ ).

Viele anisotrope Materialien weisen Strukturen auf, die neben den Variablen (2.10) durch bestimmte Vektoren  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_p)$  und Tensoren 2.Stufe  $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_q)$  charakterisiert werden können. Mit  $\mathcal{G}$  wird eine Gruppe bezeichnet die diese Charakteristiken erhält, d.h., mit der Eigenschaft dass

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} \in \overline{\mathcal{G}}, \mathbf{Q}\mathbf{m} = \mathbf{m}, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}\} \quad , \quad \overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{O}(3) \quad .\tag{2.13}$$

Hierbei wird für  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{M}$  die gleiche Abkürzung wie in Gleichung (2.10) verwendet.

Mit Hilfe des in Liu [42] dargestellten Theorems lässt sich eine Funktion  $\psi$ , die invariant unter der Gruppe  $\mathcal{G}$  ist, durch eine Funktion  $\overline{\psi}$  ersetzen, die invariant unter der Gruppe  $\overline{\mathcal{G}}$  ist:

### Theorem 1

*Eine Funktion  $\psi$  ist invariant unter einer Gruppe  $\mathcal{G}$  dann und nur dann wenn sie durch*

$$\psi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \overline{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M})\tag{2.14}$$

*dargestellt werden kann, wobei  $\overline{\psi}$  invariant unter der Gruppe  $\overline{\mathcal{G}}$  ist.*

Insbesondere kann die anisotrope Funktion  $\psi$  durch eine isotrope Funktion  $\overline{\psi}$  ersetzt werden, falls die Gruppe  $\overline{\mathcal{G}}$  gleich der vollständigen orthogonalen Gruppe ( $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{O}(3)$ ) ist. In den beiden folgenden Abschnitten werden für transversale Isotropie und Orthotropie die Strukturtenoren  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{M}$  gesucht, die die Eigenschaft (2.13) für  $\mathcal{G} = \mathcal{O}(3)$  so erfüllen, dass  $\mathcal{G}$  gleich der Isotropiegruppe für transversale Isotropie und Orthotropie ist. Die Strukturtenoren für alle Kristall-Klassen sind in Anhang A.2 angegeben. Es zeigt sich hierbei jedoch, dass die Beschränkung auf Vektoren  $\mathbf{m}$  und Tensoren 2.Stufe  $\mathbf{M}$  nicht ausreicht, sondern dass auch Tensoren höherer Stufe benötigt werden. Die Gültigkeit des Theorems auch für diesen Fall wurde in Zhang und Rychlewski [77] gezeigt. Allerdings ist es für diese Fälle sehr aufwendig, koordinateninvariante, nicht reduzierbare Darstellungssätze zu finden.

## 2.2.2 Struktur­tensoren für transversale Isotropie

Transversale Isotropie ist gekennzeichnet durch eine ausgezeichnete Richtung  $\mathbf{w}$ , um die beliebige Rotationen  $\varphi$  erlaubt sind (siehe Kapitel 2.1). Es lassen sich dann fünf verschiedene Isotropiegruppen angeben (siehe hierzu Liu [42] und Spencer [56], Abschnitt 1.4). Insbesondere wird in dieser Arbeit der Fall transversaler Isotropie betrachtet, bei der die Isotropiegruppe durch

$$\mathcal{G}_{\text{ta}} = \{\pm \mathbf{1}, \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\varphi}\} \quad (2.15)$$

gegeben ist, wobei  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\varphi}$  wie in Gleichung (2.6) definiert ist.

Gesucht sind nun die Vektoren und Tensoren, die die Transformationseigenschaften (2.13) erfüllen. Ein Vektor kann die Gleichung

$$\mathbf{m} = -\mathbf{1}\mathbf{m} \quad (2.16)$$

nie erfüllen, somit kommen als Struktur­tensor nur noch Tensoren 2.Stufe in Frage. Wird ein beliebiger Tensor  $\mathbf{M}$  in die Gleichung  $\mathbf{M} = \mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\varphi}\mathbf{M}\mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\varphi\text{T}}$  eingesetzt, folgt aus komponentenweisem Koeffizientenvergleich als Lösung der Einheitstensor  $\mathbf{1}$  (diese triviale Lösung wird im weiteren nicht interessieren) sowie der Struktur­tensor

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} = \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad . \quad (2.17)$$

## 2.2.3 Struktur­tensoren für Orthotropie

Bei Orthotropie sind Spiegelungen an drei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen erlaubt, womit sich die Isotropiegruppe

$$\mathcal{G}_{\text{o}} = \{\pm \mathbf{1}, \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^{\pi}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}}^{\pi}\} \quad (2.18)$$

ergibt.

Die analoge Vorgehensweise wie bei transversaler Isotropie liefert drei Strukturtenoren:

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} = \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad . \quad (2.21)$$

Da die Summe dieser drei Strukturtenoren den Einheitstensor ergeben

$$\mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(3)} = \mathbf{1} \quad (2.22)$$

genügen zwei Strukturtenoren zur Beschreibung orthotroper Funktionen.

## 2.3 Isotrope Invarianten

Durch die Einführung der Strukturtenoren im vorigen Abschnitt ist es gelungen, anisotrope skalarwertige Funktionen durch isotrope zu ersetzen. Somit können zur Formulierung der Materialgleichungen Darstellungssätze für isotrope Funktionen verwendet werden. Für skalarwertige Funktionen die von symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren 2.Stufe abhängen, wurden Darstellungssätze unter anderem in Wang [69, 70, 73], Smith [55] und Spencer [56] vorgestellt.

Zur Darstellung der skalarwertigen, isotropen Funktion sind diejenigen skalaren Größen gesucht, die invariant gegenüber beliebigen orthogonalen Transformationen sind. Insbesondere ist bei einer vorgegeben Anzahl von unabhängigen Tensoren derjenige Satz von Invarianten (*Basis*) gesucht, aus denen alle anderen Invarianten dargestellt werden können. Wird die skalare Funktion als Polynom dieser Invarianten dargestellt, so werden diese Basis *Integritätsbasis* genannt. Das Theorem von *Hilbert* beweist, dass für jeden endlichen Satz von Vektoren und Tensoren beliebiger Stufe eine endliche Integritätsbasis existiert (Gurevich [22]). Kann eine Invariante durch andere Invarianten dargestellt werden, so ist sie *reduzierbar*. Eine Basis die keine reduzierbaren Invarianten enthält ist *minimal*.

Hängt die Funktion nur von Tensoren 2.Stufe  $\mathbf{P}^{(S_i)}$  ab, kann sie als Polynom von Spuren von Tensor-Produkten  $\text{tr } \mathbf{\Pi}$  dargestellt werden. Ein Tensor-Produkt ist hierbei in der Form

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{P}^{(S_1)} \mathbf{P}^{(S_2)} \dots \mathbf{P}^{(S_r)} \quad (2.23)$$

gegeben, mit beliebigen Tensoren 2.Stufe  $\mathbf{P}^{(S_i)}$  und beliebigen ganzen Zahlen  $S_i$ . Die Spuren dieser Tensorprodukte sind die Invarianten der Funktion und beschreiben eine Integritätsbasis, die jedoch nicht minimal ist. Deshalb müssen die überzähligen Invarianten entfernt werden.

Mit Hilfe einer Verallgemeinerung des *Cayley–Hamilton–Theorem* für Tensoren 2.Stufe

$$\mathbf{P}^3 - \mathbf{P}^2 \text{tr } \mathbf{P} + \frac{1}{2} \{(\text{tr } \mathbf{P})^2 - \text{tr } \mathbf{P}^2\} \mathbf{P} - \mathbf{1} \det \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

lassen sich Invarianten angeben, die eine endliche Integritätsbasis bilden (siehe hierzu Spencer [56], Abschnitt 3). Diese Invarianten bilden jedoch im allgemeinen keine minimale Basis. Für die weiteren Betrachtungen werden die beliebigen Tensoren  $\mathbf{P}^{(i)}$  zerlegt in ihren symmetrischen Anteil  $\mathbf{A}^{(i)}$  und ihren antisymmetrischen Anteil  $\mathbf{W}^{(i)}$ . Unter anderem folgt aus der Verallgemeinerung des Cayley–Hamilton–Theorem, dass eine Invariante der Basis höchstens vom Grad sechs sein kann. Es genügt somit, die Invarianten von bis zu sechs verschiedenen Tensoren zu betrachten. Integritäts-Basen für mehr als sechs Tensoren ergeben sich durch das Kombinieren der Basen für sechs Tensoren in allen möglichen Kombinationen.

Um eine minimale Integritäts-Basis zu erhalten werden die Spuren der Tensor-Produkte von einem bis zu sechs Tensoren, die aus dem verallgemeinerten Cayley–Hamilton–Theorem folgen, aufgelistet. Anschliessend werden so viele (reduzierbare) Invarianten wie möglich durch andere Invarianten ausgedrückt. Dies wird im folgenden exemplarisch für einen symmetrischen Tensor und zwei symmetrische Tensoren vorgeführt. Die minimalen Invarianten für symmetrische und antisymmetrische Tensoren sowie für die Kombinationen aus symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren sind in den Arbeiten von Wang [69, 72] zu finden.

Bei nur einem symmetrischen Tensor  $\mathbf{A}$  folgen aus dem Cayley–Hamilton–Theorem die Invarianten

$$\text{tr } \mathbf{A} \quad , \quad \text{tr } \mathbf{A}^2 \quad , \quad \text{tr } \mathbf{A}^3 \quad . \quad (2.25)$$

Diese Invarianten bilden gleichzeitig eine minimale Integritäts-Basis.



Für zwei symmetrische Tensoren  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  bilden die Invarianten

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{B} \quad , \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{B}^2 \quad , \quad \operatorname{tr} \mathbf{B} \mathbf{A}^2 \quad , \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 \quad , \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 \quad (2.26)$$

eine Basis. Hierbei wurde ausgenutzt, dass bei der Spur eines Tensor-Produkts von symmetrischen Tensoren die Tensoren im Produkt zyklisch vertauscht werden dürfen. Die letzte Invariante in Gleichung (2.26) ist reduzierbar und kann somit weggelassen werden, wodurch eine minimale Basis erhalten wird.

Die Ergebnisse der minimalen Integritäts-Basis für bis zu drei symmetrische Tensoren und einem antisymmetrischen Tensor sind in Anhang B.1 zusammengefasst. In den beiden folgenden Abschnitten werden für transversale Isotropie und Orthotropie skalarwertige Funktionen hergeleitet, die von einem symmetrischen Tensor abhängen.

### 2.3.1 Invariante Darstellung einer skalarwertigen, transversal isotropen Funktion

Im folgenden soll eine skalarwertige, transversal isotrope Funktion  $f$ , die von einem symmetrischen Tensor  $\mathbf{A}$  abhängt, vollständig dargestellt werden. Dazu wird die transversal isotrope Funktion mit Hilfe des Strukturtenors  $\mathbf{M}$  (siehe Abschnitt 2.2.2) durch eine isotrope Funktion  $\bar{f}$  ersetzt

$$f(\mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{A}, \mathbf{M}) \quad . \quad (2.27)$$

Diese Funktion  $\bar{f}$  wird dann mit Hilfe der Darstellungssätze für isotrope skalarwertige Funktionen durch ihre Invarianten dargestellt. Für zwei symmetrische Tensoren ergeben sich die folgenden Invarianten (siehe Tabelle B.1):

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \operatorname{tr} \mathbf{A}^3, \operatorname{tr} \mathbf{M}, \operatorname{tr} \mathbf{M}^2, \operatorname{tr} \mathbf{M}^3, \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M}, \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M}^2, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{M}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{M}^2 \quad . \quad (2.28)$$

Unter Ausnutzen der Eigenschaften

$$\operatorname{tr} \mathbf{M} = 1 \quad , \quad \mathbf{M}^p = \mathbf{M} \quad , \quad p \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2.29)$$

können einige der Invarianten weggelassen werden, und es verbleiben die Invarianten

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \operatorname{tr} \mathbf{A}^3, \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{M} \quad . \quad (2.30)$$

Die nicht reduzierbare Darstellung der transversal isotropen Funktion  $f$ , bei der der Tensor  $\mathbf{A}$  maximal vom zweiten Grad auftritt, lautet somit:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) = & \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + \alpha_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + \alpha_4 \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M} + \alpha_5 \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \mathbf{M} \\ & + \alpha_6 (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 + \alpha_7 (\operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M})^2 + \alpha_8 \operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{M} \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Invariante Darstellung einer skalarwertigen, orthotropen Funktion

Handelt es sich bei der Funktion  $f$  um eine orthotrope Funktion, so sind zwei Struktur-  
tensoren  $(\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)})$  erforderlich (2.2.3) um die anisotrope Funktion durch eine isotrope  
Funktion

$$f(\mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{A}, \mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}) \quad (2.32)$$

darzustellen. Die isotrope Funktion hängt somit von drei symmetrischen Tensoren  
 $(\mathbf{A}, \mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)})$  ab die insgesamt 24 Invarianten bilden (siehe Tabelle B.1). Diese  
24 Invarianten lassen sich durch ausnutzen der Eigenschaften

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{M}^{(1)} &= 1 \quad , \quad \operatorname{tr} \mathbf{M}^{(2)} = 1 \\ \mathbf{M}^{(1)p} &= \mathbf{M}^{(1)} \quad , \quad \mathbf{M}^{(2)p} = \mathbf{M}^{(2)} \quad , \quad p \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{M}^{(2)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.33)$$

auf sieben Invarianten

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \operatorname{tr} \mathbf{A}^3, \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(1)}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{M}^{(1)}, \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(2)}, \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{M}^{(2)} \quad (2.34)$$

reduzieren.

Somit lautet die nicht reduzierbare Darstellung der orthotropen Funktion  $f$  mit  $\mathbf{A}$  maxi-  
mal vom Grad zwei:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + \alpha_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + \alpha_4 \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(1)} \\ &\quad + \alpha_5 \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{M}^{(1)} + \alpha_6 \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(2)} + \alpha_7 \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{M}^{(2)} \\ &\quad + \alpha_8 (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 + \alpha_9 (\operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(1)})^2 + \alpha_{10} (\operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(2)})^2 \\ &\quad + \alpha_{11} \operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(1)} + \alpha_{12} \operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(2)} + \alpha_{13} \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(1)} \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{M}^{(2)} \quad . \end{aligned} \quad (2.35)$$

# Kapitel 3

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Zunächst werden die grundlegenden Begriffe, die bei der Entwicklung von Materialmodellen benötigt werden, vorgestellt, bevor eine kurze Einführung in die Kinematik mit der Zerlegung der Deformation erfolgt. Um Materialgleichungen für große Deformationen zu erhalten wird das Konzept der dualen Variablen (siehe hierzu Haupt und Tsakmakis [26, 27] und Svendsen und Tsakmakis [57]) vorgestellt.

### 3.1 Kinematik

Ausgangspunkt ist ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  abgebildet im euklidischen Punktraum  $E$ . Mit  $\mathcal{R}_R$  wird der Raumbereich bezeichnet, den der materielle Körper in einer zeitlich konstanten sogenannten *Bezugskonfiguration* einnimmt. Jedem materiellen Punkt  $X$  des Körpers kann nach der Festlegung eines Ursprungs  $O$  in  $E$  und eines raumfesten kartesischen Koordinatensystems mit dem Nullpunkt  $O$  ein Ortsvektor  $\mathbf{X}$  zugeordnet werden. Zum Zeitpunkt  $t$  nimmt der materielle Körper den von der Zeit abhängigen Raumbereich  $\mathcal{R}_t$ , die sogenannte *Momentankonfiguration* ein. Der Ortsvektor, der dem materiellen Punkt  $X$  in der Momentankonfiguration zugeordnet ist, wird mit  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Er wird durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \tag{3.1}$$

beschrieben. Für einen festgehaltenen Zeitpunkt  $t$  existiert hierbei die Inverse der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad . \tag{3.2}$$

Damit lässt sich zu jedem beliebigen aber festen Zeitpunkt  $t$  ein *Deformationsgradient*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.3)$$

definieren, der die Deformation in der Umgebung des materiellen Punktes  $X$  beschreibt. Er stellt eine Abbildungsvorschrift dar, die ein materielles Linienelement in der Bezugs- konfiguration  $d\mathbf{X}$  auf ein materielles Linienelement in der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$  zuordnet

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad . \quad (3.4)$$

Analog zur Betrachtung von materiellen Linienelementen können auch Normalen an Flächen betrachtet werden. Mit  $\Phi(\mathbf{X}) = C = \text{const.}$  wird eine materielle Fläche in der Bezugs- konfiguration definiert und mit  $\phi(\mathbf{x}, t) = C$  dieselbe Fläche in der Momentankon- figuration. Durch

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.6)$$

sind dann die Normalen an den Flächen der Bezugs- bzw. der Momentankonfiguration festgelegt. Für einen festen Zeitpunkt  $t$  folgt aus dem totalen Differential

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

die Abbildungsvorschrift

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{\Lambda} \quad (3.8)$$

zwischen den Normalen der Momentan- und Bezugs- konfiguration.

Da eine positive Determinante des Deformationsgradienten  $\det \mathbf{F} > 0$  angenommen wird, existiert eine eindeutige polare Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad , \quad (3.9)$$

mit dem eigentlich orthogonalen Rotationstensor  $\mathbf{R}$ ,  $\det \mathbf{R} = 1$  und dem symmetrischen, positiv definiten rechten bzw. linken Strecktensor  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ .

Durch die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{L} := \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.10)$$

ist schließlich der *räumliche Geschwindigkeitsgradient*  $\mathbf{L}$  definiert, der in der Form

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.11)$$

additiv in seinen symmetrischen Anteil  $\mathbf{D}$ , den *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor*, und seinen antisymmetrischen Anteil  $\mathbf{W}$ , den *Wirbeltensor*, zerlegt werden kann.

## 3.2 Zerlegung der Deformation

Ausgangspunkt für die Formulierung der Materialgleichungen ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten ([40])

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (3.12)$$

in einen reversiblen, *elastischen* Anteil  $\mathbf{F}_e$  und einen irreversiblen, *inelastischen* Anteil  $\mathbf{F}_p$  (siehe Abbildung 3.1). Dadurch wird eine weitere Konfiguration, die sogenannte *Zwischenkonfiguration*  $\hat{\mathcal{R}}_t$ , festgelegt. Diese Zwischenkonfiguration wird durch eine fiktive, im allgemeinen nicht kompatible Entlastung erhalten und ist somit spannungsfrei. Ein materielles Linienelement der Zwischenkonfiguration  $d\hat{\mathbf{x}}$  kann somit durch die Abbildungen

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p d\mathbf{X} = \mathbf{F}_e^{-1} d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

aus den Linienelementen der Bezugs- bzw. Referenzkonfiguration bestimmt werden.

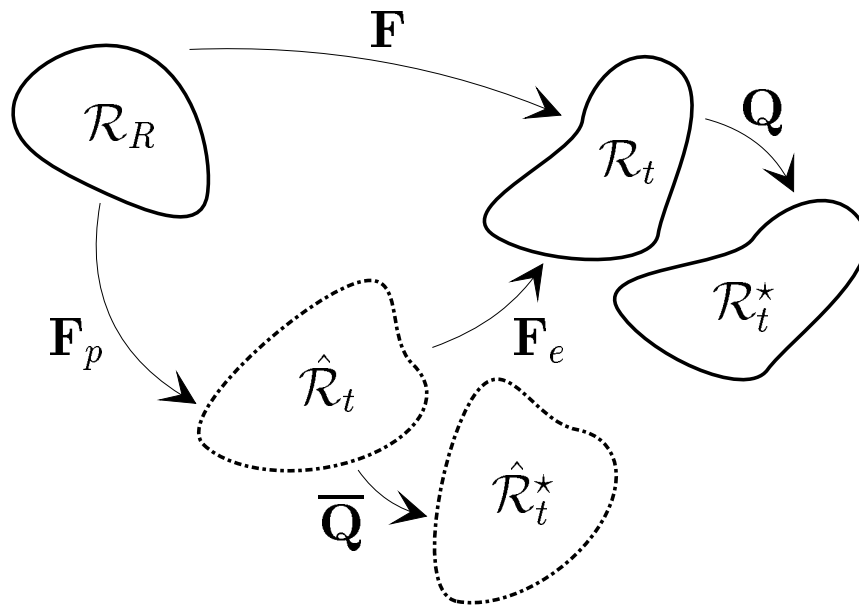


Abbildung 3.1: Zerlegung der Deformation

Es wird angenommen, dass  $\det \mathbf{F}_e > 0$  (und somit  $\det \mathbf{F}_p > 0$ ) gilt. Analog zu der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten (3.9) existieren dann auch für die elastischen und inelastischen Anteile des Deformationsgradienten polare Zerlegungen der Form

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \quad , \quad (3.14)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p \quad . \quad (3.15)$$

Ebenso gibt es einen elastischen und einen inelastischen Geschwindigkeitsgradienten, die beide additiv in ihre symmetrischen (Verzerrungsgeschwindigkeitstensor) und antisymmetrischen (Wirbeltensor) Anteile

$$\mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{D}_e + \mathbf{W}_e \quad (3.16)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p \quad (3.17)$$

zerlegt werden können.

### 3.2.1 Konzept der dualen Variablen

Es existieren verschiedene Möglichkeiten Verzerrungstensoren zu definieren und diesen in sinnvoller Weise Spannungstensoren zuzuordnen. Zum einen wird auf Grundlage der materiellen Linienelemente ein skalares Verzerrungsmaß

$$\Delta = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.18)$$

definiert. Dieses Verzerrungsmaß ist forminvariant bezüglich der gewählten Konfiguration. Alle Größen die aus dem Verzerrungsmaß  $\Delta$  abgeleitet sind werden der sogenannten *Familie 1* zugeordnet. Ausserdem kann das Verzerrungsmaß in einen elastischen und einen inelastischen Anteil gemäß

$$\Delta = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) = \Delta_e + \Delta_p \quad (3.19)$$

zerlegt werden. Den verschiedenen Konfigurationen sind nunmehr verschiedene Verzerrungstensoren zugeordnet. Als Verzerrungstensoren ergeben sich der *Green'sche Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \quad (3.20)$$

mit

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p) \quad , \quad \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{1}) \quad (3.21)$$

in der Bezugskonfiguration, der Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1}) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (3.22)$$

mit

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{1}) \quad , \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1}) \quad , \quad (3.23)$$

sowie der *Almansi'sche Verzerrungstensor*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_p \quad (3.24)$$

mit

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_e^{-1}) \quad , \quad \mathbf{A}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^{T-1} \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \quad (3.25)$$

in der Momentankonfiguration.

Größen der *Familie 2* werden dagegen aus einem anderen skalaren Verzerrungsmaß

$$\delta = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad , \quad (3.26)$$

das auf den Normalen an materiellen Flächen basiert, hergeleitet. Aus dieser Betrachtung folgt der *Piola'sche Verzerrungstensor*  $\boldsymbol{\epsilon}$  relativ zur Bezugskonfiguration, der Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  und der *Finger'sche Verzerrungstensor*  $\boldsymbol{\alpha}$  in der Momentankonfiguration (siehe Anhang C).

Die objektiven Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren sind durch die Forminvarianz der zeitlichen Ableitung der Dehnungsmaße (3.18) und (3.26) (siehe Haupt und Tsakmakis [26, 27] und Tsakmakis [62])

$$\dot{\Delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{A}} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (1.\text{Familie}) \quad , \quad (3.27)$$

$$\dot{\delta} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.\text{Familie}) \quad (3.28)$$

gegeben, wobei die sogenannten *Oldroyd-Ableitungen* für die beiden Familien bezüglich der Momentan- bzw. Zwischenkonfiguration mit

$$(\ )^{\Delta} = (\ ) \cdot + \mathbf{L}^T (\ ) + (\ ) \mathbf{L} \quad , \quad (\ )^{\Delta} = (\ ) \cdot + \hat{\mathbf{L}}_p^T (\ ) + (\ ) \hat{\mathbf{L}}_p \quad (1.\text{Familie}) \quad , \quad (3.29)$$

$$(\ )^{\Delta} = (\ ) \cdot - \mathbf{L} (\ ) - (\ ) \mathbf{L}^T \quad , \quad (\ )^{\Delta} = (\ ) \cdot - \hat{\mathbf{L}}_p (\ ) - (\ ) \hat{\mathbf{L}}_p^T \quad (2.\text{Familie}) \quad (3.30)$$

definiert sind. Auch die Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren lassen sich additiv in elastische und inelastische Anteile zerlegen.

Weiterhin existieren die folgenden Beziehungen zwischen den objektiven Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren und dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor:

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \mathbf{D} = -\overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.31)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{T}}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p = -\overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}_p \quad . \quad (3.32)$$

Aus der Invarianz der Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{T}}} = \boldsymbol{\varsigma} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \quad (3.33)$$

folgen die den jeweiligen Verzerrungstensoren zugeordneten Spannungstensoren. Es handelt sich hierbei für die 1.Familie um den *2.Piola-Kirchhoff* Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  der Bezugsconfiguration, den *2.Piola-Kirchhoff* Spannungstensor der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathbf{T}}$  sowie den *Cauchy'schen* Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und den *gewichteten Cauchy'schen* Spannungstensor  $\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{T}$  in der Momentankonfiguration. Im Rahmen der 2.Familie handelt es sich um den Spannungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  in der Bezugsconfiguration, den Spannungstensor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  in der Zwischenkonfiguration sowie den Spannungstensor  $\boldsymbol{\varsigma} = -\mathbf{S}$  in der Momentankonfiguration.

Schließlich werden aus der Forminvarianz der zeitlichen Ableitung der Spannungsleistung die objektiven Spannungsgeschwindigkeiten bestimmt. Dies sind die materiellen Zeitableitungen für Größen der Bezugsconfiguration und die Oldroyd-Ableitungen

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot) - \mathbf{L}(\cdot) - (\cdot)\mathbf{L}^T \quad , \quad (\cdot)^\nabla = (\cdot) - \hat{\mathbf{L}}_p(\cdot) - (\cdot)\hat{\mathbf{L}}_p^T \quad (1.Familie) \quad , \quad (3.34)$$

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot) + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L} \quad , \quad (\cdot)^\nabla = (\cdot) + \hat{\mathbf{L}}_p^T(\cdot) + (\cdot)\hat{\mathbf{L}}_p \quad (2.Familie) \quad (3.35)$$

für Größen der Momentan- bzw. Zwischenkonfiguration. (Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Spannungs- und Verzerrungstensoren sowie deren Geschwindigkeiten ist in Anhang C zusammengefasst).

Im weiteren Verlauf der Arbeit beschränken wir uns auf eine Formulierung der Materialgleichung bezüglich der 1.Familie. Durch eine analoge Vorgehensweise können aber auch für Größen der 2.Familie die entsprechenden Evolutionsgleichungen gewonnen werden.

### 3.2.2 Transformationsbeziehungen

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen Anteil (3.12) ist nicht eindeutig, sondern die Zwischenkonfiguration ist nur bis auf



eine Starrkörperrotation  $\bar{\mathbf{Q}}$  (siehe Abbildung 3.1) festgelegt. Die Zerlegung des Deformationsgradienten hat dann die Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_p \quad , \quad \bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \bar{\mathbf{Q}}^T \quad , \quad \det \bar{\mathbf{Q}} = 1 \quad . \quad (3.36)$$

Dies begründet gewisse Invarianzanforderungen, die die Feldgleichungen erfüllen müssen (siehe hierzu Green und Naghdi [21]).

Als weitere Einschränkung für die Materialgleichungen wird verlangt, dass sie das Prinzip der materiellen Objektivität im Zusammenhang mit beliebigen Starrkörperbewegungen, die der Momentankonfiguration überlagert werden, erfüllen. Die überlagerten Starrkörperbewegung werden beschrieben durch

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad , \quad \det \mathbf{Q} = 1 \quad . \quad (3.37)$$

Für die neue Deformation gilt

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_e^* \mathbf{F}_p^* \quad , \quad (3.38)$$

$$\mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{Q}}^T \quad , \quad (3.39)$$

$$\mathbf{F}_p^* = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_p \quad . \quad (3.40)$$

Durch Einsetzen des neuen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^*$  in die Definitionen der Verzerrungstensoren (3.24) und (3.22) sowie in die objektiven Geschwindigkeiten der Verzerrungstensoren lässt sich feststellen, dass Größen der Momentan- und Zwischenkonfiguration jeweils das Transformationsverhalten

$$(\cdot)^* = \mathbf{Q} (\cdot) \mathbf{Q}^T \quad (3.41)$$

$$\hat{(\cdot)}^* = \bar{\mathbf{Q}} \hat{(\cdot)} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad . \quad (3.42)$$

besitzen. Dies ist für die Tensoren  $\mathbf{L}$  und  $\hat{\mathbf{L}}_p$  jedoch nicht der Fall. Da im weiteren Verlauf der Arbeit hauptsächlich der plastische Geschwindigkeitsgradient  $\hat{\mathbf{L}}_p$  benötigt wird, wird die Verletzung der Eigenschaft 3.42 an dieser Größe gezeigt. In die Definition für  $\hat{\mathbf{L}}_p$  (3.17) werden die rotierten Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_p^*$  (3.40) eingesetzt:

$$\hat{\mathbf{L}}_p^* = \dot{\mathbf{F}}_p^* \mathbf{F}_p^{*-1} = \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \bar{\mathbf{Q}}^T + \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{L}}_p \bar{\mathbf{Q}}^T \quad . \quad (3.43)$$

Es ist sofort zu erkennen, dass wegen dem antisymmetrischen Tensor  $\dot{\bar{\mathbf{Q}}} \bar{\mathbf{Q}}^T$  der plastische Geschwindigkeitsgradient die Eigenschaft (3.42) nicht besitzt. Folglich erfüllt

zwar der symmetrische Anteil, die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{D}}_p$ , die Eigenschaft (3.42), nicht jedoch der antisymmetrische Anteil, der plastische Wirbeltensor  $\hat{\mathbf{W}}_p$ :

$$\hat{\mathbf{D}}_p^* = \overline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{D}}_p \overline{\mathbf{Q}}^T \quad , \quad (3.44)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_p^* = \dot{\overline{\mathbf{Q}}} \overline{\mathbf{Q}}^T + \overline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{W}}_p \overline{\mathbf{Q}}^T \quad . \quad (3.45)$$

# Kapitel 4

## Anisotropes (Visko–) Plastizitätsmodell

In diesem Kapitel wird ausgehend vom Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ein thermodynamisch konsistentes, anisotropes (Visko–) Plastizitätsmodell hergeleitet. Hierbei wird von einem anisotropen Elastizitätsgesetz, nichtlinearer isotroper Verfestigung ausgegangen, einer nichtlinearen, anisotropen kinematischen Verfestigung und einer anisotropen Fließfunktion. Für die inneren tensor- und skalarwertigen Zustandsvariablen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens und der Anisotropie werden Konstitutivgleichungen als hinreichende Bedingung zur Erfüllung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung gewonnen. Es werden drei verschiedene Rotationsensoren eingeführt, die die Drehung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion beschreiben. Weitere Betrachtungen zu dieser Theorie finden sich auch in der Arbeit von Tsakmakis [66]. Die Formulierung des Materialmodells erfolgt in der Zwischenkonfiguration mit Größen der 1.Familie (vgl. Abschnitt 3.2.1). In analoger Weise können auch Evolutionsgleichungen im Rahmen der 2.Familie entwickelt werden.

Eine andere (phänomenologische) Vorgehensweise zur Beschreibung von anisotropem plastischen Fließen findet sich in den Arbeiten von Cho [10], Cho und Dafalias [11], Dafalias [14, 16] und Dafalias und Rashid [19]. In diesen Arbeiten werden ebenfalls Konstitutivgleichungen für tensorielle innere Variablen angegeben, die jedoch nicht thermodynamisch motiviert sind. Dies geschieht über eine Evolutionsgleichung für den sogenannten *plastischen Spin*, die Differenz zwischen der Rotation der Substruktur und der Rotation des Körpers. Die Diskussion über die genaue Interpretation dieses plastischen Spin's ist zur Zeit noch nicht abgeschlossen. Da eine thermodynamische Überprüfung der Theorie von Dafalias nicht existiert, ist die thermodynamische Konsistenz dieses Materialmodells nicht gewährleistet.

## 4.1 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Eine Anforderung an das in dieser Arbeit entwickelte Materialmodell war seine thermodynamisch konsistente Formulierung. Nur dann ist gewährleistet, dass in allen denkbaren Belastungsfällen der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt ist, d.h. es wird zu keinem Zeitpunkt Entropie vernichtet.

In dieser Arbeit wird der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der *Clausius–Duhem–Ungleichung* angenommen. Ausgangspunkt ist die Entropiebilanz in lokaler Form

$$\dot{\eta}_* = \frac{\mathbf{r}_w}{\Theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} + \gamma_* \quad , \quad (4.1)$$

wobei  $\Theta$  die (positive) absolute Temperatur,  $\eta_*$  die spezifische Entropie,  $\mathbf{r}_w$  die Wärmezufuhr pro Zeit- und Masseneinheit,  $\rho$  die Dichte in der Momentankonfiguration,  $\mathbf{q}$  den Wärmeflussvektor und  $\gamma_*$  die Rate der spezifischen Entropieproduktion bedeutet.

Durch Einsetzen des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{\rho_R} W - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{r}_w \quad (4.2)$$

mit der spezifischen inneren Energie  $\mathbf{e}$  und der Definition der spezifischen freien Energie  $\psi$

$$\psi = \mathbf{e} - \Theta \eta_* \quad (4.3)$$

ergibt sich als Bedingung für die nichtnegative Entropieproduktion ( $\gamma_* \geq 0$ ) die Clausius–Duhem–Ungleichung (Coleman und Gurtin [12] und Haupt [24])

$$-\dot{\psi} - \dot{\Theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} W - \frac{\mathbf{q}}{\rho \Theta} \cdot \operatorname{grad} \Theta \geq 0 \quad , \quad (4.4)$$

die an jedem Punkt des Körpers zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein muss.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur isotherme Prozesse mit homogener Temperaturverteilung betrachtet. Aus diesem Grund entfallen die Terme mit der zeitlichen Ableitung der Temperatur  $\dot{\Theta}$  und dem Gradienten der Temperatur  $\operatorname{grad} \Theta$ . Somit lautet die Clausius–Duhem–Ungleichung für diesen Fall, wenn außerdem die Definition der Spannungsleistung in der Momentankonfiguration (3.33) eingesetzt wird

$$\frac{1}{\rho_R} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (4.5)$$

## 4.2 Herleitung des Materialmodells

In diesem sowie dem nächsten Abschnitt wird das Materialmodell das verwendet werden soll vorgestellt. Diese Ausführungen sind eine ausführliche Darstellung der Theorie über anisotropes plastisches Fließen, die in Tsakmakis [66] und Häusler und Tsakmakis [28, 29] vorgeschlagen wurde.

### 4.2.1 Darstellung der Anisotropieachsen

Anisotrope Eigenschaften in einem materiellen Körper können durch bestimmte Richtungen beschrieben werden (siehe hierzu Kapitel 2.2). Diese Richtungen werden durch ein orthogonales Dreibein repräsentiert, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Richtungen sind hierbei nicht an den Körper gebunden (keine materiellen Linien) und werden somit nicht mit den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_e$ ,  $\mathbf{F}_p$  zwischen der Bezugsconfiguration  $\mathcal{R}_R$ , der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{R}}_t$  und der Momentankonfiguration  $\mathcal{R}_t$  transformiert.

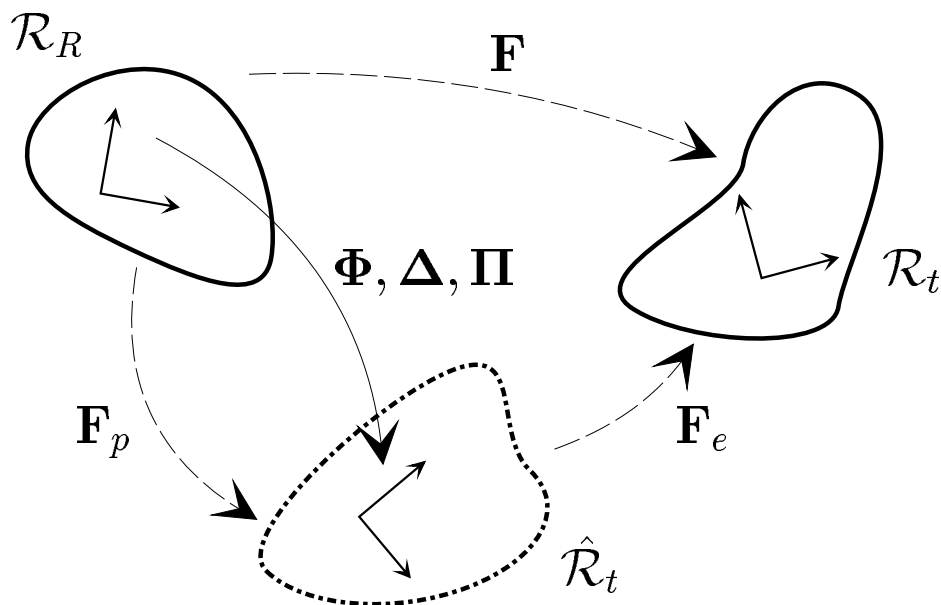


Abbildung 4.1: Zur Darstellung der Anisotropieachsen

Es wird angenommen, dass die Anisotropierichtungen in der Bezugsconfiguration zeitlich konstant sind, und dass drei verschiedene Dreibeine zur Beschreibung der Anisotropie im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion existieren, die unabhängig voneinander rotieren können. Mit  $\Phi$  soll die Rotation der Anisotropierichtungen im Elastizitätsgesetz zwischen der Bezugs- und der Zwischenconfiguration beschrieben werden,  $\Delta$  beschreibt die Rotation der Richtungen in der kinematischen Verfestigung und  $\Pi$  diejenigen in der Fließfunktion.  $\Phi, \Delta, \Pi$  sind hierbei Tensoren aus der eigentlich orthogonalen Gruppe  $\mathcal{SO}(3)$ , die ausserdem den Transformationsbeziehungen

$$\Phi^* = \bar{Q}\Phi \quad , \quad \Delta^* = \bar{Q}\Delta \quad , \quad \Pi^* = \bar{Q}\Pi \quad (4.6)$$

genügen müssen.

Zwischen der Zwischenconfiguration und der Momentankonfiguration werden die drei Richtungen mit dem elastischen Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_e$  transformiert. Dies hat zur Folge, dass diese drei Richtungen nicht mehr senkrecht aufeinander stehen und die Strukturtenoren in der Momentankonfiguration somit nicht mehr den Eigenschaften (2.29) bzw. (2.33) genügen.

## 4.2.2 Elastizitätsgesetz

Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben ist der Ausgangspunkt zur Herleitung der thermodynamisch konsistenter Materialgleichungen die Clausius–Duhem–Ungleichung. Mit Größen der Zwischenconfiguration formuliert lautet sie

$$\frac{1}{\rho_R} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}^\Delta - \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (4.7)$$

Die Zerlegung der objektiven Dehnungsgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{\Gamma}}^\Delta$  in elastischen und inelastischen Anteil sowie Einsetzen der objektiven Geschwindigkeit (3.29) liefert

$$\frac{1}{\rho_R} \left\{ \hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p^\Delta + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{W}}_p \right\} - \dot{\psi} \geq 0 \quad , \quad (4.8)$$

wobei der letzte Summand in der Klammer zusätzlich hinzugefügt wurde. Dies ist erlaubt, da das Skalarprodukt zwischen einem symmetrischen Tensor  $\hat{\mathbf{T}}$  und einem antisymmetrischen Tensor  $\hat{\mathbf{W}}_p$  verschwindet. Durch Ausnutzen der Beziehungen (3.32) und (3.17) folgt daraus die Ungleichung

$$\frac{1}{\rho_R} \left\{ \hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e + \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_p \right\} - \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (4.9)$$

An dieser Stelle wird ein neuer Spannungstensor, der sogenannte *Mandel'sche Spannungstensor* (siehe Lubliner [43])

$$\hat{\mathbf{P}} := (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{T}}_e) \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{C}_e \hat{\mathbf{T}} \quad (4.10)$$

eingeführt. Dieser Spannungstensor  $\hat{\mathbf{P}}$ , erstmals von Mandel erwähnt, ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Er ist nur dann symmetrisch, wenn der Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{T}}$  und der zweite Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor  $\hat{\mathbf{T}}$  koaxial sind, d.h. sie dieselben Hauptachsen besitzen. Dies ist im allgemeinen nur bei isotropem Materialverhalten gegeben. Sein symmetrischer bzw. antisymmetrischer Anteil ist gegeben durch

$$\hat{\mathbf{P}}_S = \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}_e \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}}_e \quad (4.11)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_A = \hat{\mathbf{T}}_e \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}}_e \quad . \quad (4.12)$$

Allerdings ist es auch kein beliebiger Tensor 2.Stufe mit neun unabhängigen Komponenten (Lubliner [43]). Wird ein Elastizitätsgesetz für  $\hat{\mathbf{T}}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$  bzw.  $\hat{\mathbf{T}}_e$  formuliert, so hängt nach (4.10) auch der Mandel'sche Spannungstensor nur von  $\mathbf{C}_e$  und somit von nur sechs unabhängigen Komponenten ab.

Einsetzen des Mandel'schen Spannungstensors (4.11)-(4.12) in die Ungleichung (4.9) ergibt

$$\frac{1}{\rho_R} \left( \hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{T}}}_e + \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \dot{\hat{\mathbf{D}}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \dot{\hat{\mathbf{W}}}_p \right) - \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (4.13)$$

Desweiteren wird von einer spezifischen freien Energiefunktion ausgegangen, die additiv in einen elastischen und einen inelastischen Anteil

$$\psi(t) = \psi_e(t) + \psi_p(t) \quad (4.14)$$

zerlegt werden kann.

Für den elastischen Anteil der spezifischen freien Energie wird angenommen, dass dieser nur vom elastischen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_e$  und vom Rotationstensor zur Beschreibung der Anisotropierichtungen im Elastizitätsgesetz  $\mathbf{\Phi}$  abhängt:

$$\psi_e(t) = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \mathbf{\Phi}) \quad . \quad (4.15)$$

Mit anderen Worten, es wird angenommen, dass von Beginn an eine Anisotropie im Elastizitätsgesetz vorhanden ist und dass mit zunehmenden Deformationen nur eine Rotation der Anisotropie–Achsen (deformationsinduzierte Anisotropie) stattfindet. Dies ist

natürlich ein spezieller Fall, der aber als erster Schritt zur Erfassung allgemeiner Anisotropieverhältnisse angesehen werden kann.

Volle Invarianzanforderungen bezüglich beliebigen Rotationen der Zwischenkonfiguration  $\bar{\mathbf{Q}}$  und der Momentankonfiguration  $\mathbf{Q}$  (siehe z.B. Casey und Naghdi [9]) verlangen, dass die skalarwertige, elastische freie Energiefunktion  $\psi_e$  invariant gegenüber solchen Rotationen ist

$$\bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \mathbf{\Phi}) = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e^*, \mathbf{\Phi}^*) = \bar{\psi}_e(\mathbf{Q}\mathbf{F}_e\bar{\mathbf{Q}}^T, \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{\Phi}) \quad . \quad (4.16)$$

Damit lässt sich zeigen (siehe Anhang D), dass die elastische freie Energiefunktion nur von einem Verzerrungstensor  $\check{\mathbf{\Gamma}}_e$  abhängt:

### Theorem 2

Die elastische freie Energie  $\bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \mathbf{\Phi})$  ist invariant unter beliebigen Rotationen der Zwischenkonfiguration und beliebigen Rotationen der Momentankonfiguration, dann und nur dann wenn sie sich auch in Abhängigkeit von dem Verzerrungstensor  $\check{\mathbf{\Gamma}}_e$  darstellen lässt:

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \mathbf{\Phi}) = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e^*, \mathbf{\Phi}^*) \iff \psi_e = \check{\psi}_e(\check{\mathbf{\Gamma}}_e) \quad . \quad (4.17)$$

Der Verzerrungstensor  $\check{\mathbf{\Gamma}}_e$  ist der mit dem Rotationstensor  $\mathbf{\Phi}$  von der Zwischen- in die Bezugskonfiguration zurückrotierte Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ ,

$$\check{\mathbf{\Gamma}}_e := \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} \quad . \quad (4.18)$$

Die zeitliche Ableitung der elastischen freien Energiefunktion ist dann mit

$$\dot{\psi}_e = \frac{\partial \check{\psi}_e}{\partial \check{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \left( \dot{\mathbf{\Phi}}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \dot{\mathbf{\Phi}} \right) \quad (4.19)$$

gegeben. Diese Ableitung in (4.7) eingesetzt, liefert die Ungleichung

$$\left( \hat{\mathbf{T}} - \rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \check{\psi}_e}{\partial \check{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e + \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \hat{\mathbf{W}}_p - \rho_R \dot{\psi}_p - \rho_R \left( 2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} \frac{\partial \check{\psi}_e}{\partial \check{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T \right) \cdot \dot{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^T \geq 0 \quad , \quad (4.20)$$

die für jeden möglichen Prozess erfüllt sein muss.



Zunächst wird ein rein elastischer Prozess betrachtet. Für solche Prozesse wird angenommen, dass  $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_p = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\mathbf{W}}_p = \mathbf{0}$  und  $\dot{\psi}_p = 0$  gilt. In diesem Fall verbleibt von der Clausius–Duhem–Ungleichung (4.20) nur der erste Summand. Ferner nehmen wir an, dass  $\hat{\mathbf{T}}$  nur von Zustandsvariablen (aber nicht von ihren Geschwindigkeiten) abhängt, so dass die Ungleichung nur dann für beliebige Werte  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}$  erfüllt ist, wenn der 2.Piola–Kirchhoff–Spannungstensor der Zwischenkonfiguration der Potentialbeziehung

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \mathbf{\Phi} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \mathbf{\Phi}^T \quad (4.21)$$

genügt. Diese Beziehung wird auch als Elastizitätsgesetz bezeichnet.

Im weiteren gehen wir davon aus, dass das Elastizitätsgesetz auch für elastisch–inelastische Prozesse seine Gültigkeit behält. Die Clausius–Duhem–Ungleichung reduziert sich dann auf die sogenannte *innere Dissipationsungleichung*

$$\mathcal{D}_{int} = \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \hat{\mathbf{W}}_p - \rho_R \dot{\psi}_p - 2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T \geq 0 \quad . \quad (4.22)$$

Gleichungen (4.21) und (4.22) sind bei viskoplastischem Materialverhalten notwendige und hinreichende Bedingungen zur Erfüllung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (vergleiche dazu auch Coleman und Gurtin [12]). Für plastisches Materialverhalten stellen die beiden Beziehungen nur hinreichende Bedingungen dar, es gelingt nicht sie als notwendige Bedingung herzuleiten (siehe dazu auch Tsakmakis [63, 64]).

Wird die Definition des antisymmetrischen Mandel’schen Spannungstensors  $\hat{\mathbf{P}}_A$  (4.12) in die innere Dissipationsungleichung (4.22) eingesetzt folgt die Ungleichung

$$\mathcal{D}_{int} = \hat{\mathbf{P}}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T \right) - \rho_R \dot{\psi}_p \geq 0 \quad . \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Innere Dissipationsungleichung

Nach der Herleitung des Elastizitätsgesetzes werden aus der inneren Dissipationsungleichung Evolutionsgleichungen gesucht, die das Verfestigungsverhalten des Materials beschreiben. Plastisches Fließen erfolgt durch Gleiten von Versetzungen. Dieses Gleiten wird durch verschiedene Störungen im Gitter behindert. Wenn die Anzahl dieser Störungen zunimmt, spricht man von einer Verfestigung des Materials. Unterschieden werden hierbei zwei verschiedene Arten der Verfestigung. Zum einen die *kinematische Verfestigung*, die das Aufstauen von Versetzungen an Hindernissen im Material (z.B. Korngrenzen, Einschlüssen) beschreibt. Umgesetzt wird dies durch die Translation der Fließfläche im Spannungsraum. Diese Behinderung kann in verschiedenen Richtungen unterschiedlich stark sein und wird somit anisotrop beschrieben.

Der zweite Verfestigungstyp ist die *isotrope Verfestigung*. Durch diesen wird das gegenseitige Behindern des Gleitens von Versetzungen beschrieben. Die Umsetzung im Materialmodell erfolgt über eine Vergrößerung der Fließfläche als Grenze zwischen elastischem und inelastischem Bereich.

Zur Beschreibung dieser beiden Verfestigungstypen wird davon ausgegangen, dass die plastische spezifische freie Energiefunktion  $\psi_p$  additiv in einen Anteil  $\psi_p^{(\text{iso})}$  zur Beschreibung der isotropen Verfestigung und einen Anteil  $\psi_p^{(\text{kin})}$  zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung

$$\psi_p(t) = \psi_p^{(\text{iso})}(t) + \psi_p^{(\text{kin})}(t) \quad (4.24)$$

zerlegt werden kann.

Weiterhin wird angenommen, dass der Anteil zur Beschreibung der isotropen Verfestigung durch

$$\psi_p^{(\text{iso})} = \hat{\psi}_p^{(\text{iso})}(r) = \frac{1}{\rho_R} \left( \frac{1}{2} \gamma^{(\text{iso})} r^2 + h^{(\text{iso})} r \right) \quad (4.25)$$

gegeben ist. Dieser Ansatz entspricht der allgemeinen Vorgehensweise, die in Tsakmakis [65] für eine realistische Beschreibung des Energiehaushaltes des Materials vorgeschlagen wurde. In Gleichung (4.26) ist  $r$  eine innere, skalarwertige Variable vom Dehnungstyp. Mit

$$R := \rho_R \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(\text{iso})}}{\partial r} \quad (4.26)$$

wird die thermodynamisch konjugierte innere Variable zu  $r$ , eine skalarwertige Größe vom Spannungstyp, definiert. Einsetzen des Ansatzes für  $\psi_p^{(\text{iso})}$  in (4.26) liefert

$$R = \gamma^{(\text{iso})} r + h^{(\text{iso})} \quad . \quad (4.27)$$

$\gamma^{(\text{iso})}$  und  $h^{(\text{iso})}$  sind nichtnegative Materialparameter, wobei  $h^{(\text{iso})}$  den Anfangswert für  $R$  darstellt ( $h^{(\text{iso})} = R|_{r=0}$ ). Wie wir später sehen werden, beschreibt  $R$  das Verhalten der sogenannten isotropen Verfestigung.

Der Anteil der plastischen freien Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p$  wird, in Analogie zur elastischen freien Energiefunktion  $\psi_e$  (4.17), mit

$$\psi_p^{(\text{kin})} = \check{\psi}_p^{(\text{kin})}(\check{\mathbf{Y}}) \quad (4.28)$$

angesetzt, wobei

$$\check{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Delta}^T \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{\Delta} \quad (4.29)$$

gilt. Der symmetrische, dehnungsartige Tensor 2.Stufe  $\hat{\mathbf{Y}}$ , eine innere Variable zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung, wirkt in der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{R}}_t$ . Er ist definiert, dieselbe mathematische Struktur wie der Verzerrungstensors  $\hat{\mathbf{T}}_e$  zu besitzen. Der Tensor  $\tilde{\mathbf{Y}}$  ist der mit dem Rotationstensor  $\mathbf{\Delta}$  von der Zwischen- in die Bezugskonfiguration rotierte Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung.

Analog zum Elastizitätsgesetz (4.21) ist über die Potentialbeziehung

$$\hat{\mathbf{Z}} := \rho_R \mathbf{\Delta} \frac{\partial \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \mathbf{\Delta}^T \quad (4.30)$$

der symmetrische, thermodynamisch konjugierte Tensor 2. Stufe vom Spannungstyp  $\hat{\mathbf{Z}}$  gegeben. Er ist definiert, dieselbe mathematische Struktur wie der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration zu besitzen.

Abschließend wird der, im allgemeinen nicht symmetrische, *Translationstensor der kinematischen Verfestigung*  $\hat{\mathbf{\xi}}$  mit der mathematischen Struktur eines Mandel'schen Spannungstensors in der Zwischenkonfiguration, entsprechend Gleichung (4.10) durch

$$\hat{\mathbf{\xi}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{\xi}}_S + \hat{\mathbf{\xi}}_A \quad (4.31)$$

definiert, mit dem symmetrischen Anteil  $\hat{\mathbf{\xi}}_S$  und dem antisymmetrischen Anteil  $\hat{\mathbf{\xi}}_A$ :

$$\hat{\mathbf{\xi}}_S = \hat{\mathbf{Z}} + \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{Z}} + \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Y}} \quad , \quad (4.32)$$

$$\hat{\mathbf{\xi}}_A = \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Y}} \quad . \quad (4.33)$$

Es wird angenommen, dass der Anteil der plastischen freien Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p^{(\text{kin})}$  quadratisch vom Dehnungstensor  $\tilde{\mathbf{Y}}$  abhängt:

$$\tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{\rho_R} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{c}}^{(\text{kin})}[\tilde{\mathbf{Y}}] \quad , \quad (4.34)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{c}}^{(\text{kin})}$  einen zeitlich konstanten Tensor 4.Stufe bedeutet. Er besitzt die Symmetriebedingungen  $\tilde{\mathbf{c}}_{ijkl}^{(\text{kin})} = \tilde{\mathbf{c}}_{jikl}^{(\text{kin})} = \tilde{\mathbf{c}}_{ijlk}^{(\text{kin})} = \tilde{\mathbf{c}}_{klij}^{(\text{kin})}$  und ist positiv definit. Die partielle Ableitung der freien Energiefunktion nach dem Dehnungstensor  $\tilde{\mathbf{Y}}$  kann dann durch

$$\rho_R \frac{\partial \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} := \tilde{\mathbf{c}}^{(\text{kin})}[\tilde{\mathbf{Y}}] \quad (4.35)$$

beschrieben werden. Inversion der Potentialbeziehung (4.35) liefert

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \rho_R \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \frac{\partial \psi_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \right] \quad (4.36)$$

mit dem zeitlich konstanten, positiv definiten Tensor 4.Stufe  $\widetilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})}$  ( $\widetilde{\mathcal{M}}_{ijkl}^{(\text{kin})} = \widetilde{\mathcal{M}}_{jikl}^{(\text{kin})} = \widetilde{\mathcal{M}}_{ijlk}^{(\text{kin})} = \widetilde{\mathcal{M}}_{klij}^{(\text{kin})}$ ). Die beiden Tensoren  $\mathcal{C}^{(\text{kin})}$  und  $\widetilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})}$  erfüllen die Gleichung

$$\widetilde{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} \widetilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} = \mathcal{I} \quad , \quad (4.37)$$

wobei  $\mathcal{I}$  den Symmetrisierungstensor 4. Stufe darstellt.

Die zeitliche Ableitung der plastischen freien Energiefunktion ist nach (4.24) durch

$$\dot{\psi}_p = \dot{\psi}_p^{(\text{iso})} + \dot{\psi}_p^{(\text{kin})} \quad (4.38)$$

gegeben. Die Ableitung des Ansatzes zur Beschreibung der isotropen Verfestigung liefert zusammen mit (4.26)

$$\dot{\psi}_p^{(\text{iso})} = \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(\text{iso})}}{\partial r} \dot{r} = \frac{1}{\rho_R} R \dot{r} \quad , \quad (4.39)$$

und die Ableitung des Anteils der plastischen, freien Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p^{(\text{kin})}$  ist mit (4.28) und (4.29) durch

$$\dot{\psi}_p^{(\text{kin})} = \frac{\partial \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \cdot \left( \dot{\Delta}^T \hat{\mathbf{Y}} \Delta + \Delta^T \dot{\mathbf{Y}} \Delta + \Delta^T \hat{\mathbf{Y}} \dot{\Delta} \right) \quad (4.40)$$

gegeben. Einsetzen des antisymmetrischen Translationstensors der kinematischen Verfestigung  $\hat{\xi}_A$  und der Potentialbeziehung (4.30) liefert daraus die Gleichung

$$\dot{\psi}_p^{(\text{kin})} = \frac{1}{\rho_R} \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} + \frac{1}{\rho_R} \hat{\xi}_A \cdot \dot{\Delta} \Delta^T \quad . \quad (4.41)$$

Aus der Identität

$$\hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} = \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left[ \left( \Delta^T \hat{\mathbf{Y}} \Delta \right)' - 2 \Delta^T \hat{\mathbf{Y}} \dot{\Delta} \right] \quad (4.42)$$

folgt nach einigen Umrechnungen und unter Ausnutzung der objektiven Geschwindigkeit für Spannungstensoren in der Zwischenkonfiguration (3.34)

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \dot{\hat{\mathbf{Z}}} - \hat{\mathbf{L}}_p \hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{L}}_p^T \quad , \quad (4.43)$$

der additiven Zerlegung des inelastischen Geschwindigkeitsgradienten  $\hat{\mathbf{L}}_p$  (siehe Gleichung (3.17)), und den Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung  $\tilde{\mathbf{Y}}$  (siehe Gleichung (4.36)), die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} = & \hat{\xi}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\xi}_A \cdot \left( \hat{\mathbf{W}}_p - 2 \dot{\Delta} \Delta^T \right) + \\ & \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left( \widetilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} \Delta \right] - \Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Einsetzen in (4.41) ergibt für die zeitliche Ableitung der plastischen freien Energiefunktion

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_p^{(\text{kin})} = & \frac{1}{\rho_R} \hat{\xi}_A \cdot \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T \right) + \frac{1}{\rho_R} \hat{\xi}_S \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \\ & \frac{1}{\rho_R} \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left( \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \right] - \Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für die innere Dissipationsungleichung (4.23) folgt somit zusammen mit den Gleichungen (4.39) und (4.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} = & \left( \hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\xi}_S \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \left( \hat{\mathbf{P}}_A - \hat{\xi}_A \right) \cdot \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T \right) - R\dot{r} + \\ & \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left( \Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \right] \right) + \\ & \hat{\xi}_A \cdot \left[ \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T \right) - \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T \right) \right] \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.46)$$

An dieser Stelle erfolgt nochmals kurz eine Anmerkung zur Invarianz der inneren Dissipation bezüglich beliebigen Rotationen der Zwischenkonfiguration  $\bar{\mathbf{Q}}$  (vgl. Abschnitt 3.2.2). Für die Größen  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}$  und  $\hat{\mathbf{D}}_p$  folgt sofort (siehe auch Gleichung (3.44)), dass sie ein Transformationsverhalten gemäß (3.42) aufweisen. Wir werden jetzt zeigen, dass dies auch für die Spintensoren

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Phi} \Phi^T \quad (4.47)$$

$$\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\Delta} \Delta^T \quad (4.48)$$

der Fall ist. Der plastische Wirbeltensor  $\hat{\mathbf{W}}_p$  erfüllt die Eigenschaft (3.42) nicht (siehe (3.45)). Für beliebige Rotationen der Zwischenkonfiguration folgt mit (4.6) für den Tensor  $\hat{\Omega}$  der Zusammenhang

$$\hat{\Omega}^* = \hat{\mathbf{W}}_p^* - \hat{\Phi}^* \Phi^{*T} \quad (4.49)$$

$$= \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{W}}_p \bar{\mathbf{Q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \bar{\mathbf{Q}}^T - \left( \bar{\mathbf{Q}} \hat{\Phi} \Phi^T \bar{\mathbf{Q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \bar{\mathbf{Q}}^T \right) \quad (4.50)$$

$$= \bar{\mathbf{Q}} \hat{\Omega} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad . \quad (4.51)$$

Für den Tensor  $\hat{\Theta}$  kann mit denselben Überlegungen ebenfalls die Gültigkeit von (3.42) nachgewiesen werden.

Die innere Dissipation (4.46) darf für keinen zulässigen Prozess negative Werte annehmen ( $\mathcal{D}_{int} \geq 0$ ). Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die drei Ungleichungen

$$\mathcal{D}_1 = \left( \hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\boldsymbol{\xi}}_S \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \left( \hat{\mathbf{P}}_A - \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} - R\dot{r} \geq 0 \quad (4.52)$$

$$\mathcal{D}_2 = \boldsymbol{\Delta}^T \hat{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Delta} \cdot \left( \boldsymbol{\Delta}^T \hat{\mathbf{D}}_p \boldsymbol{\Delta} - \tilde{\mathcal{M}}^{(kin)} \left[ \boldsymbol{\Delta}^T \hat{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Delta} \right] \right) \geq 0 \quad (4.53)$$

$$\mathcal{D}_3 = \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \hat{\boldsymbol{\Theta}} \right) \geq 0 \quad (4.54)$$

für alle beliebigen zulässigen Prozesse erfüllt wird.

Natürlich sind dies nur hinreichende Bedingungen. Durch die Aufspaltung in die drei Ungleichungen können jedoch in sinnvoller Weise Evolutionsgleichungen für die plastische Verformungsgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{D}}_p$  (Normalenregel), die isotrope und kinematische Verfestigung und für die Entwicklung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung hergeleitet werden. Insbesondere weisen die Normalenregel und die Verfestigungsregeln ähnliche Strukturen wie im isotropen Fall auf (vgl. Tsakmakis [63, 64]). Eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Erfüllung der gesamten Dissipationsungleichung (4.46) lässt sich dagegen nicht finden.

Im folgenden werden die Bedingungen hergeleitet um die drei Ungleichungen (4.52)-(4.54) zu erfüllen.

#### 4.2.4 Normalenregel, isotrope Verfestigung und Entwicklung der Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz

Zunächst wird angenommen, dass eine Fließfunktion im Raum der deviatorischen Mandel'schen Spannungstensoren existiert. Diese Fließfunktion  $f$  soll von den sogenannten *effektiven Spannungen*

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D \quad (4.55)$$

abhängen, wobei der hochgestellte Operator  $D$  anzeigt, dass der deviatorische Anteil gebildet werden soll. Die Fließfunktion ist eine beliebige anisotrope Funktion und somit nur invariant unter bestimmten Rotationen. Mit Hilfe von Strukturtenoren (siehe Abschnitt 2.2) gelingt es, diese anisotrope Funktion durch eine isotrope Funktion darzustellen, so dass sie invariant unter beliebigen Rotationen ist.

Die Fließfunktion grenzt den Bereich von rein elastischem Verhalten vom Bereich mit elastisch-inelastischem Verhalten ab. Befindet sich der Spannungspunkt innerhalb der Fließfläche

$$f = k \quad (4.56)$$

ist das Verhalten rein elastisch, ansonsten elastisch-inelastisch. Der Radius der Fließfläche wird durch die isotrope Verfestigung  $k$  beschrieben, während ihr Mittelpunkt durch den Translationstensor der kinematischen Verfestigung  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  gegeben ist.

Für  $k$  wird

$$k = R + h_0^{(\text{iso})} \quad (4.57)$$

angesetzt, wobei  $h_0^{(\text{iso})}$  eine nichtnegative Materialkonstante ist. Mit der Annahme  $r(s=0) = 0$  ( $\Rightarrow R(s=0) = h^{(\text{iso})}$ ) folgt

$$k_0 := k \Big|_{s=0} = h^{(\text{iso})} + h_0^{(\text{iso})} \quad . \quad (4.58)$$

Die sogenannte *plastische Bogenlänge*  $s$  ist hierbei ein skalares Maß für die plastische Verformung.

Die Fließfunktion hängt von der effektiven Spannung  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  und weiteren Parametern ab, die das Verfestigungsverhalten berücksichtigen. Sie muss eine homogene Funktion ersten Grades in  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  sein, d.h. sie muss die Beziehung

$$\hat{f}(\lambda \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \dots) = \lambda \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \dots) \quad (4.59)$$

erfüllen. Außerdem muss sie konvex sein, d.h. ein Vektor von einem Punkt im Inneren der Fließfläche zu einem Punkt auf der Fließfläche schließt mit der Normalen an diesem Punkt auf der Fließfläche immer einen Winkel nicht größer als  $90^\circ$  ein.

Es wird nun eine Fließfunktion der Form

$$f = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \sqrt{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot \hat{\boldsymbol{\kappa}} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}]^D} \quad (4.60)$$

mit dem positiv definiten Tensor 4.Stufe  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ , der die Symmetrieeigenschaft  $\hat{\kappa}_{ijkl} = \hat{\kappa}_{klij}$  aufweist, angenommen. Durch diesen Tensor wird die Anisotropie der Fließfläche beschrieben. Den Anschluss zum isotropen Fall erhält man, indem der Tensor  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$  mit

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{3}{2} \mathcal{I} \quad (4.61)$$

angesetzt wird. Da die Spannungen  $\hat{\mathbf{P}}$  und  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  im isotropen Fall symmetrisch sind, folgt die übliche *von-Mises-Fließfunktion*

$$f = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D} \quad . \quad (4.62)$$

Nun wird eine neue tensorielle Größe

$$\hat{\mathbf{L}}_p^\diamond = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \quad (4.63)$$

eingeführt für die eine *Normalenregel*

$$\hat{\mathbf{L}}_p^\diamond = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \frac{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}}}{\left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right\|} \quad (4.64)$$

angegeben werden kann. Das Inkrement der plastischen Bogenlänge  $s$  ist dann durch

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{L}}_p^\diamond \cdot \hat{\mathbf{L}}_p^\diamond} = \sqrt{\frac{2}{3} (\hat{\mathbf{D}}_p \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}})} \quad (4.65)$$

gegeben. Für die plastische Deformationsgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{D}}_p$  und die Rotationsgeschwindigkeit der Anisotropieachsen  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  führt dies auf die Gleichungen

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} \equiv \frac{\dot{s}}{\beta} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right)_S \quad , \quad (4.66)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \hat{\mathbf{W}}_p - \hat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \equiv \frac{\dot{s}}{\beta} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right)_A \quad , \quad (4.67)$$



mit

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \right\| \quad . \quad (4.68)$$

In dieser Fließregel (4.66) ist als Spezialfall auch der isotrope Fall (vgl. Jansohn [37] und Lämmer [39]) enthalten, für den  $\beta = 1$  und  $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}_S$  gilt. Bei plastischem Materialverhalten wird das Inkrement der plastischen Bogenlänge für plastische Belastung aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f} - \dot{k} = 0$  bestimmt, während es bei Viskoplastizität aus der Materialgleichung

$$\dot{s} = \frac{\langle f - k \rangle^m}{\eta} \quad (4.69)$$

mit den positiven Materialparametern  $m$  und  $\eta$  gewonnen wird.

Dies alles eingesetzt in die Ungleichung (4.52) ergibt

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\boldsymbol{\xi}}_S \right) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} + \left( \hat{\mathbf{P}}_A - \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \right) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \right] - R\dot{r} \quad (4.70)$$

$$= \frac{\dot{s}}{\beta} \left( \hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} - R\dot{r} \quad . \quad (4.71)$$

Einsetzen der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{1}{f} \hat{\mathcal{K}} \left[ \hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right] \quad (4.72)$$

liefert dann (vgl. auch Gleichung (4.57))

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\dot{s}}{\beta f} \left( \hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \hat{\mathcal{K}} \left[ \hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right] - R\dot{r} \quad (4.73)$$

$$= \underbrace{h_0^{(\text{iso})} \dot{r}}_A + \underbrace{\frac{\dot{s}}{\beta} (f - k)}_B + \underbrace{k \left( \frac{\dot{s}}{\beta} - \dot{r} \right)}_C \geq 0 \quad . \quad (4.74)$$

Die Summanden A und B können niemals negativ sein, da bei rein elastischen Prozessen der Spannungspunkt innerhalb der Fließfläche ist und somit das Inkrement der plastischen Bogenlänge  $\dot{s} = 0$  ist, und bei elastisch-inelastischen Prozessen der Ausdruck  $f - k$  entweder  $= 0$  (bei Plastizität) oder  $\geq 0$  (bei Viskoplastizität) ist.  $\dot{s}$  und der Faktor  $\beta$  sind

per Definition niemals negativ. Die gesamte Ungleichung (4.74) ist somit erfüllt, wenn der Summand C nicht negativ wird,

$$k \left( \frac{\dot{s}}{\beta} - \dot{r} \right) \geq 0 \quad . \quad (4.75)$$

Dies ist in hinreichender Weise erfüllt, wenn für  $\dot{r}$  der Ansatz

$$\dot{r} = (1 - \beta^{(\text{iso})r}) \frac{\dot{s}}{\beta} \quad (4.76)$$

mit dem positiven Materialparameter  $\beta^{(\text{iso})}$  gewählt wird. Einsetzen von (4.27) liefert daraus zusammen mit der Beziehung  $\dot{k} = \gamma^{(\text{iso})}\dot{r}$  die Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung

$$\dot{k} = [\gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} (k - k_0)] \frac{\dot{s}}{\beta} \quad . \quad (4.77)$$

Im Unterschied zum isotropen Fall (vgl. Tsakmakis [63, 64]) taucht bei Anisotropie in der Evolutionsgleichung der zusätzliche Faktor  $\beta$  auf. Durch diesen Faktor wird in der Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung die Form (Krümmung) der Fließfläche berücksichtigt.

#### 4.2.5 Kinematische Verfestigung

Aus einer hinreichenden Bedingung für die zweite Ungleichung (4.53)

$$\mathcal{D}_2 = \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \cdot \left( \Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \right] \right) \geq 0$$

kann eine Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung  $\hat{\mathbf{Z}}$  gewonnen werden. Dazu wird der Multiplikand positiv proportional dem Multiplikator gesetzt:

$$\Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta - \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \right] = \dot{s} \tilde{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{Z}} \Delta \right] \right] \quad . \quad (4.78)$$

$\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}$  ist ein positiv definiten Tensor zur Beschreibung der Anisotropie mit den Symmetrieeigenschaften  $\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}_{ijkl} = \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}_{jikl} = \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}_{ijlk} = \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}_{klij}$ . Im allgemeinsten anisotropen Fall sind in diesem Tensor 15 Materialparameter enthalten. Aus Invarianzgründen im Zusammenhang mit beliebigen Drehungen der Zwischenkonfiguration muss der Tensor  $\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}$  das Transformationsverhalten

$$\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})\star} \left[ \hat{\mathbf{Z}}^\star \right] = \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Z}} \right] \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (4.79)$$

bzw.

$$\overline{\mathbf{Q}}^T \widehat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})*} \left[ \overline{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{Q}}^T \right] \overline{\mathbf{Q}} = \widehat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Z}} \right] \quad (4.80)$$

aufweisen.

Umformen dieses Ansatzes liefert schließlich die Evolutionsgleichung vom *Armstrong-Frederick-Typ* für die kinematische Verfestigung

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \widehat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{D}}_p \right] - \dot{s} \widehat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Z}} \right] \quad . \quad (4.81)$$

Der Tensor 4.Stufe  $\widehat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})}$ , der ebenfalls das Transformationsverhalten (4.79) bzw. (4.80) aufweisen muss, ist durch die Beziehung

$$\widehat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{D}}_p \right] = \Delta \tilde{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} \left[ \Delta^T \hat{\mathbf{D}}_p \Delta \right] \Delta^T \quad (4.82)$$

festgelegt. Die Evolutionsgleichung (4.81) weist dieselbe Struktur wie im isotropen Fall auf; mit den Tensoren  $\widehat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} = c\mathcal{I}$  und  $\widehat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} = b\mathcal{I}$  ergibt sich exakt derselbe Ansatz (vgl. Tsakmakis [63, 64]).

## 4.2.6 Entwicklung der Anisotropieachsen in der kinematischen Verfestigung

Schließlich verbleibt noch eine hinreichende Bedingung zu finden um die dritte Ungleichung (4.54)

$$\mathcal{D}_3 = \hat{\xi}_A \cdot (\hat{\Omega} - \hat{\Theta}) \geq 0$$

zu erfüllen. Sicherlich ist diese Ungleichung erfüllt, wenn man

$$\hat{\Omega} - \hat{\Theta} = \dot{s} \widehat{\mathcal{L}} \left[ \hat{\xi}_A \right] \quad (4.83)$$

setzt, wobei  $\widehat{\mathcal{L}}$  einen positiv definiten Tensor 4.Stufe bedeutet mit der Eigenschaft, dass  $\widehat{\mathcal{L}} \left[ \hat{\xi}_A \right]$  ein antisymmetrischer Tensor 2.Stufe ist. Da aber zur Zeit entsprechende experimentelle Untersuchungen fehlen um die Komponenten von  $\widehat{\mathcal{L}}$  zu bestimmen, werden wir uns im weiteren nur mit der Bequemlichkeitsannahme

$$\hat{\Omega} - \hat{\Theta} = \lambda \dot{s} \hat{\xi}_A \quad , \quad (4.84)$$

mit dem nichtnegativen Materialparameter  $\lambda$ , befassen.

Einsetzen der Evolutionsgleichung für die Entwicklung der Anisotropieachsen des Elastizitätsgesetzes (4.67) (vgl. auch (4.48)) liefert

$$\hat{\Theta} = \hat{W}_p - \dot{\Delta} \Delta^T = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{P}_A} - \lambda \dot{s} \hat{\xi}_A \quad (4.85)$$

als Evolutionsgleichung für die Entwicklung der Anisotropieachsen der kinematischen Verfestigung. Als Spezialfall sei hier kurz der Fall erwähnt, dass sich die Achsen der Anisotropie in der kinematischen Verfestigung und im Elastizitätsgesetz genau gleich entwickeln, was durch die Wahl von  $\lambda = 0$  erreicht wird.

#### 4.2.7 Entwicklung der Anisotropieachsen in der Fließfunktion

Bis jetzt sind für alle Größen, die Einfluss auf den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nehmen, Einschränkungen aus der Auswertung der Clausius–Duhem–Ungleichung gefunden worden. Über die Entwicklung der Anisotropieachsen in der Fließfunktion werden jedoch keine Aussagen gemacht. Deshalb können beliebige Ansätze verwendet werden um diese Entwicklungen zu beschreiben ohne die thermodynamischen Restriktionen zu verletzen. Vom physikalischen Standpunkt aus erscheint es plausibel, die Anisotropieachsen in der Fließfunktion genauso rotieren zu lassen wie die Anisotropieachsen im Elastizitätsgesetz. Diese Annahme beruht darauf, dass die Anisotropie der Elastizität und der Fließfunktion an die Orientierung der Kristallgitter gekoppelt ist, während die Anisotropie der kinematischen Verfestigung durch die Orientierung der aktiven Gleitsysteme beschrieben wird. Tatsächlich haben Rechnungen in diesem Zusammenhang gezeigt, dass nur bei identischer Entwicklung der Orientierung im Elastizitätsgesetz und der Fließfunktion physikalisch plausible, konvergente Lösungen erzielt werden.

Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit für die Rotationsgeschwindigkeit der Anisotropieachsen in der Fließfunktion der Ansatz

$$\hat{\Xi} = \hat{W}_p - \dot{\Pi} \Pi^T = \hat{\Omega} = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{P}_A} \quad (4.86)$$

verwendet.

#### 4.2.8 Zusammenfassung der Materialgleichungen für allgemeine Anisotropie

Für große elastische und inelastische Deformationen sind nunmehr die Evolutionsgleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens für beliebige Fälle von Anisotropie gegeben. Das komplette Materialmodell ist in Tabelle 4.1 nochmals zusammengefasst.

<u>Spezifische freie Energiefunktion</u>	
$\psi = \tilde{\psi}_e(\tilde{\mathbf{T}}_e) + \hat{\psi}_p^{(\text{iso})}(r) + \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}}) \quad .$	(4.87)
<u>Elastizitätsgesetz:</u>	
$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{T}}_e} \Phi^T \quad , \quad \tilde{\mathbf{T}}_e := \Phi^T \hat{\mathbf{T}}_e \Phi \quad , \quad \hat{\mathbf{P}} := (1 + 2\hat{\mathbf{T}}_e) \hat{\mathbf{T}} \quad .$	(4.88)
<u>Fließfunktion</u>	
$f = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathcal{K}}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \quad .$	(4.89)
<u>Fließregel</u>	
$\hat{\mathbf{D}}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\  \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right\  = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\  \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \right\  \quad .$	(4.90)
<u>Inkrement der plastischen Bogenlänge</u>	
$\dot{s} \quad \begin{cases} \text{aus } \dot{f} - \dot{k} = 0 & \text{(bei plastischer Belastung) (Plastizität)} \\ = \frac{\langle \dot{f} - \dot{k} \rangle^m}{\eta} & \text{(Viskoplastizität)} \end{cases} \quad .$	(4.91)
<u>Isotrope Verfestigung</u>	
$\dot{k} = \left[ \gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} (k - k_0) \right] \frac{\dot{s}}{\beta} \quad , \quad k := \rho_R \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(\text{iso})}}{\partial r} + h_0^{(\text{iso})} \quad .$	(4.92)
<u>Kinematische Verfestigung</u>	
$\hat{\mathbf{Z}} := \rho_R \Delta \frac{\partial \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \Delta^T = \hat{\mathbf{c}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{Y}}] \quad , \quad \tilde{\mathbf{Y}} := \Delta^T \hat{\mathbf{Y}} \Delta \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\xi}} := (1 + 2\hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{Z}} \quad ,$	(4.93)
$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{c}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{D}}_p] - \dot{s} \hat{\mathbf{b}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{Z}}] \quad .$	(4.94)
<u>Entwicklung der Anisotropieachsen</u>	
$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Phi} \Phi^T = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \quad \text{Elastizitätsgesetz} \quad ,$	(4.95)
$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Delta} \Delta^T = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} - \lambda \dot{s} \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \quad \text{kinematische Verfestigung} \quad ,$	(4.96)
$\hat{\boldsymbol{\Xi}} = \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\Pi} \Pi^T = \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\dot{s}}{\beta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \quad \text{Fließfunktion} \quad .$	(4.97)

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der Materialgleichungen in der Zwischenkonfiguration für allgemeine Anisotropie

## 4.3 Materialgleichungen für transversale Isotropie und Orthotropie

Für beliebige Fälle von Anisotropie sind nunmehr Materialgleichungen zur Beschreibung von elastisch–inelastischem Materialverhalten mit nichtlinearer isotroper und kinematischer Verfestigung hergeleitet worden, wobei sich die Achsen der Anisotropie im Elastizitätsgesetz, der kinematischen Verfestigung und der Fließfunktion jeweils unabhängig voneinander entwickeln können. Allerdings wurde bisher noch keine Aussage darüber gemacht, wie die anisotropen Funktionen der spezifischen freien Energie zur Beschreibung des elastischen Verhaltens  $\psi_e$  und zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p^{(\text{kin})}$  aussehen, da diese von der Art der Anisotropie abhängen.

In diesem Abschnitt werden für die zwei in der Praxis relevantesten Fälle von transversaler Isotropie und Orthotropie die freien Energiefunktionen und die Fließfunktionen angegeben. Dies geschieht mit Hilfe der Strukturtenoren, wie sie in Kapitel 2.2 hergeleitet wurden, und den Darstellungssätzen für isotrope, skalarwertige Funktionen aus Kapitel 2.3. Dazu wird zunächst erläutert, wie beliebige Orientierung, d.h. Richtungen im Raum, dargestellt werden können.

Die dadurch erhaltenen Evolutionsgleichungen für den Spannungstensor und die inneren Variablen sind zunächst noch in der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{R}}_t$  gegeben. Für die später beschriebene numerische Integration des Materialmodells müssen die Evolutionsgleichungen jedoch in die Momentankonfiguration  $\mathcal{R}_t$  transformiert werden. Dazu werden die Transformationsbeziehungen zwischen den Konfigurationen für die 1.Familie (siehe Anhang C.1, C.2 und C.5) verwendet.

### 4.3.1 Darstellung der Strukturtenoren

Mit Hilfe von Strukturtenoren wird, wie in Kapitel 2.2 erläutert, die Anisotropie in einem Materialmodell beschrieben. Für transversale Isotropie und Orthotropie werden diese Strukturtenoren aus ausgezeichneten Richtungen gebildet. Deshalb wird zunächst beschrieben, wie bei transversaler Isotropie eine beliebige Richtung, bzw. bei Orthotropie die beliebige Orientierung eines Dreibeins im Raum, dargestellt werden kann.

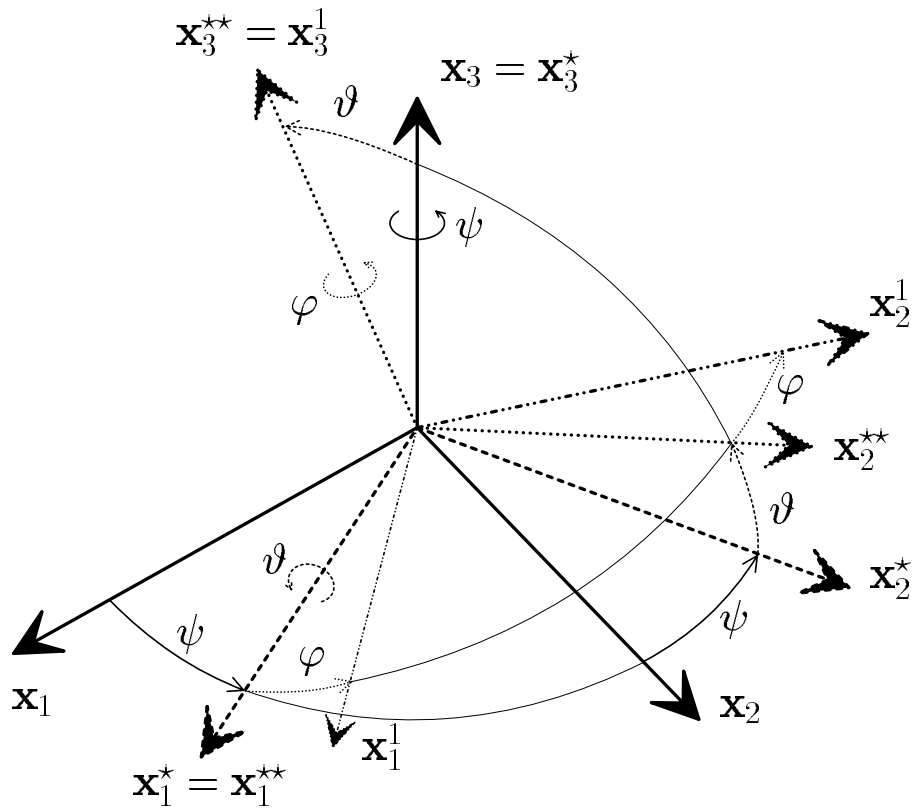


Abbildung 4.2: Definition der Eulerwinkel  $\psi, \vartheta, \varphi$

### Darstellung von beliebigen Orientierungen im dreidimensionalen Raum

Beliebige Orientierungen eines Dreibeins im dreidimensionalen Raum können durch die Angabe von drei Winkeln, die jeweils Drehungen um feste Achsen beschreiben, dargestellt werden. Es existieren verschiedene Möglichkeiten, die Orientierung so zu beschreiben. Häufig werden dazu die sogenannten *Euler-Winkel* verwendet, die auch in dieser Arbeit genutzt werden.

Die Definition der Euler-Winkel geht aus Abbildung 4.2 vor. Ausgangspunkt ist das  $(x_1, x_2, x_3)$ -Koordinatensystem. Zunächst wird dieses Koordinatensystem mit dem Winkel  $\psi$  um die  $x_3$ -Achse gedreht. Das dadurch entstandene  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ -System wird durch eine Drehung um die  $x_1^*$ -Achse mit dem Winkel  $\vartheta$  in das  $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**})$ -System überführt. Zum Schluss wird mit dem Winkel  $\varphi$  um die  $x_3^{**}$ -Achse gedreht und man erhält das Koordinatensystem  $(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ . Um jede beliebige Orientierung darzustellen müssen

die Eulerwinkel Werte im Bereich

$$0 \leq \psi \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.98)$$

annehmen.

Die Orientierung im Material wird im folgenden mit einer Richtung  $\mathbf{m}$  für transversale Isotropie bzw. durch drei senkrecht aufeinanderstehende Richtungen  $\mathbf{m}^{(1)}$ ,  $\mathbf{m}^{(2)}$  und  $\mathbf{m}^{(3)}$  für Orthotropie beschrieben. Zur Beschreibung nur einer ausgezeichneten Richtung bei der transversalen Isotropie genügen zwei Winkel. Ein dritter Winkel würde nur benötigt, um in der durch diese Richtung festgelegten Ebene eine Orientierung zu definieren. Es wird angenommen, dass die Achse der transversalen Isotropie in  $\mathbf{x}_3$ -Richtung zeigt wenn die Euler-Winkel den Wert 0 annehmen

$$\psi = 0 \quad , \quad \vartheta = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = \mathbf{x}_3 \quad . \quad (4.99)$$

Diese ausgezeichnete Richtung kann dann durch die beiden Euler-Winkel  $\psi$  und  $\vartheta$  in der Form

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} \quad (4.100)$$

angegeben werden.

Bei Orthotropie wird davon ausgegangen, dass die drei Orthotropie-Achsen und die Koordinatenachsen für Euler-Winkel von 0 übereinstimmen

$$\psi = 0 \quad , \quad \vartheta = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{x}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.101)$$

Die Richtungen sind dann durch

$$\mathbf{m}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} \quad (4.102)$$

$$\mathbf{m}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi \\ \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} \quad (4.103)$$

$$\mathbf{m}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} \quad (4.104)$$

gegeben.



## Bildung der Strukturtenoren

Nachdem nun die Richtungen zur Beschreibung der Anisotropie angegeben sind, lassen sich auch die Strukturtenoren darstellen. Nach Kapitel 2.2.2 ist die für transversale Isotropie

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (4.105)$$

und für Orthotropie (Kapitel 2.2.3)

$$\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (\text{keine Summation über } i) \quad . \quad (4.106)$$

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass zur Beschreibung von Orthotropie zwei Strukturtenoren genügen, da der mögliche dritte Strukturtenor aus den anderen beiden bestimmt werden kann.

Das komplette Materialmodell ist in der Zwischenkonfiguration formuliert, weshalb auch die Evolutionsgleichungen für die Strukturtenoren in dieser Konfiguration angegeben werden müssen. Da bei der Transformation der Strukturtenoren von der Zwischenkonfiguration in die Momentankonfiguration die Eigenschaften (2.29) bzw. (2.33) verlorengehen, können sie in  $\mathcal{R}_t$  nicht mehr durch zwei bzw. drei Eulerwinkel repräsentiert werden. In Spezialfällen (z.B. für kleine elastische Verformungen, vgl. Abschnitt 5.2.1) kann die Transformation zwischen Zwischen- und Momentankonfiguration durch einen orthogonalen Tensor beschrieben werden. In diesem Fall genügen die zwei bzw. drei Euler-Winkel, um über die Gleichungen (4.100) und (4.105) bzw. den Gleichungen (4.102)-(4.104) und (4.106) die Strukturtenoren zu bestimmen.

Ein Strukturtenor in der Bezugskonfiguration  $\mathcal{R}_R$  wird mit  $\check{\mathbf{M}}^{(i)}$  bezeichnet. Dieser Strukturtenor steht hierbei entweder für den Strukturtenor der transversalen Isotropie  $\check{\mathbf{M}}$  oder die Strukturtenoren der Orthotropie  $\check{\mathbf{M}}^{(1)}$  und  $\check{\mathbf{M}}^{(2)}$ . In der Bezugskonfiguration ist der Strukturtenor zeitlich konstant angenommen, d.h. es gilt

$$\frac{d\check{\mathbf{M}}^{(i)}}{dt} := \dot{\check{\mathbf{M}}^{(i)}} \equiv \mathbf{0} \quad . \quad (4.107)$$

Der Strukturtenor in der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathcal{R}}_t$  kann dann durch die Transformation

$$\hat{\mathbf{M}}^{(i)} = \mathbf{\Phi} \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{\Phi}^T \quad (4.108)$$

bestimmt werden. Anstelle des Rotationstensors  $\mathbf{\Phi}$  können natürlich auch entsprechend die Rotationstensoren  $\mathbf{\Delta}$  und  $\mathbf{\Pi}$  eingesetzt werden.

Als objektive Geschwindigkeit für die Strukturtenoren wird die objektive Geschwindigkeit für Verzerrungstensenoren (3.29) verwendet

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{M}}^{(i)}} = \dot{\hat{\mathbf{M}}^{(i)}} + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{M}}^{(i)} + \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \hat{\mathbf{L}}_p \quad . \quad (4.109)$$

Bilden der Zeitableitung von (4.107) führt dann auf die Evolutionsgleichung für die Strukturtenoren in der Zwischenkinfiguration

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{M}}^{(i)}} = \hat{\mathbf{D}}_p \hat{\mathbf{M}}^{(i)} + \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \hat{\mathbf{D}}_p + \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\hat{\Phi}} \hat{\Phi}^T \right)^T \hat{\mathbf{M}}^{(i)} + \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \left( \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\hat{\Phi}} \hat{\Phi}^T \right) \quad . \quad (4.110)$$

Für den antisymmetrischen Tensor  $\left( \hat{\mathbf{W}}_p - \dot{\hat{\Phi}} \hat{\Phi}^T \right)$  wurde in Kapitel 4.2 eine Materialgleichung als hinreichende Bedingung zur Erfüllung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik angegeben (Gleichungen (4.95)-(4.97)).

### 4.3.2 Transformation auf die Momentankonfiguration

Unser Ziel ist es, das Materialmodell im Finite-Element-Programm ABAQUS zu implementieren. Zu diesem Zweck werden die Materialgleichungen in der Momentankonfiguration benötigt. Die dazu erforderlichen Umrechnungen werden hier kurz vorgestellt.

Zwischen dem gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor in der Momentankonfiguration und dem Mandel'schen Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration kann mit Gleichung (4.10) und den Transformationsbeziehungen für Spannungstensenoren der 1.Familie (siehe Kapitel C.5) der Zusammenhang

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{F}_e^T \quad (4.111)$$

hergeleitet werden. Analog dazu kann ein Translationstensor der kinematischen Verfestigung in der Momentankonfiguration durch

$$\boldsymbol{\xi} := \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{F}_e^T \quad (4.112)$$

definiert werden.

Der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor ist ausserdem über das Elastizitätsgesetz, transformiert in die Momentankonfiguration, durch

$$\mathbf{S} = \rho_R \mathbf{F}_e \Phi \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e} \Phi^T \mathbf{F}_e^T \quad (4.113)$$

und der Spannungstensor der kinematischen Verfestigung in der Momentankonfiguration durch die vortransformierte Potentialbeziehung (4.30)

$$\mathbf{Z} = \rho_R \mathbf{F}_e \Delta \frac{\partial \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} \Delta^T \mathbf{F}_e^T \quad . \quad (4.114)$$

gegeben.

Da der Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung in der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathbf{Y}}$  die mathematische Struktur eines Dehnungstensors in der Zwischenkonfiguration besitzt, kann er durch

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.115)$$

in die Momentankonfiguration transformiert werden. Daraus folgt für den Translations-tensor der kinematischen Verfestigung in der Momentankonfiguration

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{Z} + 2\mathbf{Y}\mathbf{Z} \quad , \quad (4.116)$$

mit dem elastischen *Links–Cauchy–Green–Verzerrungstensor*

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T \quad . \quad (4.117)$$

Das Stoffgesetz (4.93)<sub>1</sub> kann relativ zur Momentankonfiguration umgeschrieben werden in der Form

$$\mathbf{Z} = \mathcal{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] \quad , \quad (4.118)$$

wobei der Tensor 4.Stufe  $\mathcal{C}^{(\text{kin})}$  relativ zu kartesischen Koordinaten durch

$$\mathcal{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] = \mathbf{F}_e \hat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} [\mathbf{F}_e^T \mathbf{Y} \mathbf{F}_e] \mathbf{F}_e^T \quad , \quad (4.119)$$

$$\mathcal{C}_{ijkl}^{(\text{kin})} = (F_e)_{ip} (F_e)_{jq} (F_e)_{kr} (F_e)_{ls} \hat{\mathcal{C}}_{pqrs}^{(\text{kin})} \quad (4.120)$$

gegeben ist. Die Evolutionsgleichung für den Spannungstensor der kinematischen Verfestigung ist relativ zu kartesischen Koordinaten durch

$$\overset{\nabla}{\mathbf{Z}} = \mathcal{C}^{(\text{kin})} \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \right] - \dot{s} \mathcal{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad (4.121)$$

mit dem Tensor 4.Stufe

$$\mathcal{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] = \mathbf{F}_e \hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} [\mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{F}_e^{T-1}] \mathbf{F}_e^T \quad , \quad (4.122)$$

$$\mathcal{B}_{ijkl}^{(\text{kin})} = (F_e)_{ip} (F_e)_{jq} (F_e^{-1})_{kr} (F_e^{-1})_{ls} \hat{\mathcal{B}}_{pqrs}^{(\text{kin})} \quad (4.123)$$

gegeben.

Die Fließregel in der Momentankonfiguration lautet

$$\hat{\mathbf{A}}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \mathbf{F}_e^{T-1} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}_s} \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.124)$$

und die Fließfunktion ist durch

$$f = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \sqrt{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\kappa}} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}]} \quad (4.125)$$

$$= \bar{f}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}) = \sqrt{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\kappa} [\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}]} \quad (4.126)$$

gegeben, mit dem Tensor 4.Stufe  $\boldsymbol{\kappa}$  definiert durch

$$(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\kappa} [\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}] = \mathbf{F}_e^T (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{F}_e^{T-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\kappa}} [\mathbf{F}_e^T (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{F}_e^{T-1}] \quad (4.127)$$

$$\mathcal{K}_{ijkl} = (F_e)_{ip} (F_e^{T-1})_{jq} (F_e)_{kr} (F_e^{T-1})_{ls} \hat{\mathcal{K}}_{pqrs} \quad . \quad (4.128)$$

Zwischen den partiellen Ableitungen der Fließfunktion nach dem Mandel'schen Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration und dem gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor in der Momentankonfiguration besteht der Zusammenhang

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \mathbf{F}_e^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{F}_e \quad , \quad (4.129)$$

und für den Faktor  $\beta$  folgt

$$\beta = \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \right\| = \sqrt{\mathbf{B}_e^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{S}}} \quad . \quad (4.130)$$

Schließlich wird noch ein Strukturtensor in der Momentankonfiguration definiert, der analog zu einem Verzerrungstensor der 1.Familie (Kapitel C.1) durch

$$\mathbf{M}^{(i)} := \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.131)$$

gegeben ist.

Vom numerischen Standpunkt her ist es sehr vorteilhaft, Evolutionsgleichungen für Strukturtenoren zu formulieren, die die Eigenschaften (2.29) erfüllen. Nur in diesem Fall ist es möglich, diese Strukturtenoren mit Hilfe von Euler-Winkeln darzustellen. Leider erfüllen die Strukturtenoren  $\mathbf{M}^{(i)}$  diese Eigenschaft nicht. Daher ist es sinnvoll, einen neuen Strukturtensor in der Momentankonfiguration  $\check{\mathbf{M}}^{(i)}$  durch

$$\check{\mathbf{M}}^{(i)} := \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{R}_e^T \quad (4.132)$$

einzuführen, der die Eigenschaft (2.29) aufweist. Ist für  $\check{\mathbf{M}}^{(i)}$  eine Evolutionsgleichung gegeben, so lässt sich daraus  $\mathbf{M}^{(i)}$  über

$$\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{V}_e^{-1} \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{V}_e^{-1} \quad (4.133)$$

berechnen. Aus (4.132) folgt zunächst

$$\mathbf{R}_e^T \left( \dot{\check{\mathbf{M}}}^{(i)} + \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{R}}_e^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T \right) \mathbf{R}_e = \dot{\hat{\mathbf{M}}}^{(i)} \quad . \quad (4.134)$$

Andererseits sieht man aus (4.109) und (4.95), dass die materielle Zeitableitung der Strukturtenoren der Zwischenkonfiguration mit

$$\dot{\hat{\mathbf{M}}}^{(i)} = -\hat{\mathbf{W}}_p^T \hat{\mathbf{M}}^{(i)} - \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \hat{\mathbf{W}}_p + \hat{\mathbf{\Omega}}^T \hat{\mathbf{M}}^{(i)} + \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \hat{\mathbf{\Omega}} \quad (4.135)$$

gegeben ist.

Für den Geschwindigkeitsgradienten (3.10) folgt

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{L}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.136)$$

$$= \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e \dot{\mathbf{U}}_e \mathbf{U}_e^{-1} \mathbf{R}_e^T + \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{L}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \quad , \quad (4.137)$$

mit dem antisymmetrischen Anteil

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T + \boldsymbol{\omega} \quad (4.138)$$

und einem neuen antisymmetrischen Tensor

$$\boldsymbol{\omega} := \mathbf{R}_e \left( \dot{\mathbf{U}}_e \mathbf{U}_e^{-1} \right)_A \mathbf{R}_e^T + \left( \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{L}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \right)_A \quad . \quad (4.139)$$

Somit ergibt sich aus (4.134) und (4.135)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{M}}}^{(i)} = & - \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T + \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T \right)^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T + \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T \right) + \\ & \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}_e^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R}_e^T \end{aligned} \quad (4.140)$$

oder nach Einsetzen von (4.138)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{M}}}^{(i)} = & - \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T + \mathbf{W} - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T + \mathbf{W} - \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}_e^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R}_e^T \end{aligned} \quad (4.141)$$

bzw.

$$\overset{\Delta}{\dot{\hat{\mathbf{M}}}^{(i)}} = \dot{\check{\mathbf{M}}}^{(i)} + \mathbf{L}^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{L} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{D} - \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} - \\ & \check{\mathbf{M}}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}_e^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R}_e^T \quad . \end{aligned} \quad (4.143)$$

### 4.3.3 Materialgleichungen für transversale Isotropie

Im folgenden werden für transversale Anisotropie, die durch einen Strukturtenor dargestellt werden kann, die Materialgleichungen hergeleitet. Im Elastizitätsgesetz wird der benötigte Strukturtenor mit  $\mathbf{M}_{(e)}$ , in der kinematischen Verfestigung mit  $\mathbf{M}_{(k)}$  und in der Fließfunktion mit  $\mathbf{M}_{(f)}$  bezeichnet. Die Materialgleichungen werden zunächst in der Zwischenkonfiguration angegeben und anschließend in die Momentankonfiguration transformiert.

Zuerst wird das transversal isotrope Elastizitätsgesetz formuliert. Da bei elastisch-inelastischem Materialverhalten der elastische Anteil der Verformung häufig sehr klein bleibt, wird hier nur ein lineares Elastizitätsgesetz angenommen. Dies hat zur Folge, dass die elastische freie Energiefunktion nur von Größen abhängt, in denen der in die Bezugs-konfiguration zurückrotierte Verzerrungstensor  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e$  maximal vom zweiten Grad auftritt. Die allgemeinste Darstellung der elastischen freien Energiefunktion ist dann mit (2.31) durch

$$\begin{aligned} \rho_R \tilde{\psi}_e \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \right) = & \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_3 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^2 + \alpha_4 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \right) + \alpha_5 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \right) + \\ & \alpha_6 \left( \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \right)^2 + \alpha_7 \left( \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \right)^2 + \alpha_8 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)} \right) \end{aligned} \quad (4.144)$$

mit den Materialparametern  $\alpha_1$  bis  $\alpha_8$  gegeben. Aufgrund der Bedingung  $\tilde{\psi}_e \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathbf{0} \right)$  folgt für den ersten Materialparameter direkt  $\alpha_1 = 0$ .

Bildung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e}$  und Transformation in die Zwischenkonfiguration über die Beziehungen (4.18) und (4.108) liefert zusammen mit (4.21) das Elastizitätsgesetz in der Zwischenkonfiguration

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} = & \left[ 2\alpha_6 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_8 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)} \right) \right] \mathbf{1} + \left[ 2\alpha_7 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)} \right) + \alpha_8 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right] \hat{\mathbf{M}}_{(e)} + \\ & 2\alpha_3 \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_5 \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)} + \hat{\mathbf{M}}_{(e)} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.145)$$

Wegen  $\hat{\mathbf{T}} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathbf{0} \right) = \mathbf{0}$  folgt hierbei sofort, dass zwei weitere Materialparameter verschwinden ( $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ ). Dieses lineare Elastizitätsgesetz kann auch in der Form

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathcal{C}}^{(\text{elast})} \left[ \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right] \quad (4.146)$$

formuliert werden. Hierbei besitzt der Elastizitätstensor 4.Stufe die Symmetrieeigenschaf-

ten  $\widehat{\mathcal{C}}_{ijkl}^{(\text{elast})} = \widetilde{\mathcal{C}}_{jikl}^{(\text{elast})} = \widehat{\mathcal{C}}_{ijlk}^{(\text{elast})} = \widetilde{\mathcal{C}}_{klij}^{(\text{elast})}$  und die Form

$$\widehat{\mathcal{C}}^{(\text{elast})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} - c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{elast})}}, \quad (4.147)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(\alpha_6 + \alpha_3) \quad , \\ c_{33} &= 2(\alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_7 + \alpha_3 + \alpha_5) \quad , \\ c_{12} &= 2\alpha_6 \quad , \\ c_{13} &= 2\alpha_6 + \alpha_8 \quad , \\ c_{55} &= 2\alpha_3 + \alpha_5 \quad . \end{aligned} \quad (4.148)$$

Die (symmetrischen) Spannungs- und Verzerrungstensoren werden hierzu als Vektoren in der Form

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{23} \end{pmatrix} \quad (4.149)$$

dargestellt. Die Tensoren sind bezüglich einem orthonormalen Koordinatensystem  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  dargestellt, in dem die  $\mathbf{x}_3$ -Achse in Richtung der ausgezeichneten Richtung der transversalen Isotropie  $\mathbf{m}$  zeigt, während die beiden anderen Achsen beliebig orientiert sein können.

Durch Transformieren von Gleichung (4.145) in die Momentankonfiguration mit (4.113) folgt schließlich das transversal isotrope Elastizitätsgesetz in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{S} = [2\alpha_6 \text{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e) + \alpha_8 \text{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)})] \mathbf{B}_e + [2\alpha_7 \text{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}) + \alpha_8 \text{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e)] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)} \mathbf{B}_e + \quad (4.150)$$

$$2\alpha_3 \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e + \alpha_5 (\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e) \quad . \quad (4.151)$$

$$= \mathcal{C}^{(\text{elast})} [\mathbf{A}_e]$$

Der Anteil der plastischen freien Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p^{(\text{kin})}$  soll, wie in Kapitel 4.2.3 erwähnt, höchstens vom 2. Grad im Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung sein. Somit ergibt sich der gleiche Ansatz wie für die elastische freie Energiefunktion (4.144).

$$\begin{aligned} \rho_R \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}}) = & c_1 + c_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} + c_3 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}}^2 + c_4 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \right) + c_5 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{Y}}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(\text{e})} \right) + \\ & c_6 \left( \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} \right)^2 + c_7 \left( \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \right)^2 + c_8 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \right) \end{aligned} \quad (4.152)$$

Es folgt wegen  $\tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}) = 0$  sofort  $c_1 = 0$ . Zusammen mit Gleichung (4.93)<sub>1</sub> und den Transformationsbeziehungen (4.108) und (4.29) folgt daraus unter der Berücksichtigung von  $\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ( $\Rightarrow c_2 = c_4 = 0$ ) für den Spannungstensor der kinematischen Verfestigung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}} = & \left[ 2c_6 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Y}} + c_8 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \right) \right] \mathbf{1} + \left[ 2c_7 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \right) + c_8 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Y}} \right] \hat{\mathbf{M}}_{(\text{k})} + \\ & 2c_3 \hat{\mathbf{Y}} + c_5 \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(\text{k})} + \hat{\mathbf{M}}_{(\text{k})} \hat{\mathbf{Y}} \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.153)$$

Der Tensor 4. Stufe besitzt dann die Form

$$\hat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} - c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{kin})}}, \quad (4.154)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(c_6 + c_3) \quad , \\ c_{33} &= 2(c_6 + c_8 + c_7 + c_3 + c_5) \quad , \\ c_{12} &= 2c_6 \quad , \\ c_{13} &= 2c_6 + c_8 \quad , \\ c_{55} &= 2c_3 + c_5 \quad . \end{aligned} \quad (4.155)$$

Wird Gleichung (4.153) nach dem Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung in der Zwischenkonfiguration aufgelöst folgt

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Z}} \right] \quad . \quad (4.156)$$

Zur Bestimmung des Tensors 4. Stufe  $\hat{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} = \left( \hat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})} \right)^{-1}$  siehe Kapitel B.3.



Schließlich folgt durch Transformation in die Momentankonfiguration mit (4.118) für den Zusammenhang zwischen Spannungstensor und Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung

$$\mathbf{Z} = [2c_6 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y}) + c_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)})] \mathbf{B}_e + [2c_7 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}) + c_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y})] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{B}_e + \quad (4.157)$$

$$2c_3 \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e + c_5 (\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e) \quad . \\ = \mathbf{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] \quad . \quad (4.158)$$

Für Evolutionsgleichung (4.121) des Spannungstensors  $\mathbf{Z}$  erhalten wir

$$\overset{\nabla}{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}^{(\text{kin})} \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \right] - \mathfrak{s} \mathbf{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad . \quad (4.159)$$

Der Tensor 4.Stufe  $\mathbf{B}^{(\text{kin})}$  ist über Gleichung (4.122) bzw. (4.123) definiert.  $\mathbf{B}^{(\text{kin})}$  kann mittels Strukturtenoren für transversale Isotropie dargestellt werden. Es ist naheliegend, diese Strukturtenoren gleich denjenigen, die zuständig für  $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{kin})}$  sind, zu wählen. Damit folgt

$$\hat{\mathbf{B}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{Z}}] = [2b_6 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}} + b_8 \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)})] \mathbf{1} + [2b_7 \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}) + b_8 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}}] \hat{\mathbf{M}}_{(k)} + 2b_3 \hat{\mathbf{Z}} + b_5 (\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)} + \hat{\mathbf{M}}_{(k)} \hat{\mathbf{Z}}) \quad . \quad (4.160)$$

Dies ist die allgemeinste Form für den Tensor 4.Stufe unter der Voraussetzung einer linearen Abhängigkeit von  $\hat{\mathbf{Z}}$  und der Bedingung  $\hat{\mathbf{B}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}] = \mathbf{0}$ .  $\hat{\mathbf{B}}^{(\text{kin})}$  hat dann, wie die beiden anderen Tensoren 4.Stufe  $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{elast})}$  und  $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{kin})}$ , die Form

$$\hat{\mathbf{B}}^{(\text{kin})} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{11} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{13} & b_{13} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} - b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{kin})}} \quad , \quad (4.161)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2(b_6 + b_3) \quad , \\ b_{33} &= 2(b_6 + b_8 + b_7 + b_3 + b_5) \quad , \\ b_{12} &= 2b_6 \quad , \\ b_{13} &= 2b_6 + b_8 \quad , \\ b_{55} &= 2b_3 + b_5 \quad . \end{aligned} \quad (4.162)$$

In der Momentankonfiguration formuliert (vgl. (4.122)) ist der Tensor  $\mathcal{B}^{(\text{kin})}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(\text{kin})}[\mathbf{Z}] = & [2b_6 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^{-1}\mathbf{Z}) + b_8 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)})] \mathbf{B}_e + \\ & [2b_7 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}) + b_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^{-1}\mathbf{Z})] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{B}_e + \\ & 2b_3 \mathbf{Z} + b_5 (\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{Z}) \quad . \end{aligned} \quad (4.163)$$

Die transversal isotrope Fließfunktion hängt in der Zwischenkonfiguration von dem Deviator der effektiven Spannung  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  ab (vgl. (4.89)). Da eine eindeutige Zerlegung der effektiven Spannung in symmetrischen Anteil

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S = \left( \hat{\mathbf{P}}_S - \hat{\boldsymbol{\xi}}_S \right)^D \quad (4.164)$$

und antisymmetrischen Anteil

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_A = \hat{\mathbf{P}}_A - \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \quad (4.165)$$

existiert, kann die Fließfunktion auch als transversal isotrope Funktion

$$f = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A) \quad (4.166)$$

dargestellt werden. Die entsprechende isotrope Funktion, die die transversal isotropen Eigenschaften beschreibt, hängt somit nach Kapitel 2.2 von zwei symmetrischen Tensoren  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S$  und  $\hat{\mathbf{M}}_{(f)}$  und einem antisymmetrischen Tensor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_A$  ab. Die transversal isotrope Fließfunktion der Form (4.60) ist dann durch

$$f^2 = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathcal{K}}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} = & v_1 \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^2 + v_2 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^2 \right) + v_3 \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \right)^2 + \\ & v_4 \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A^2 + v_5 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A^2 \right) + v_6 \operatorname{tr} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \end{aligned} \quad (4.168)$$

gegeben (siehe Kapitel B.2). Der Tensor  $\hat{\mathcal{K}}$  lautet relativ zu einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die ausgezeichnete Richtung der transversalen Isotropie  $\mathbf{m}$  in Richtung

der  $\mathbf{x}_3$ -Achse zeigt:

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} k_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1212} & 0 & k_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1313} & 0 & 0 & 0 & k_{1331} & 0 & 0 \\ 0 & k_{1221} & 0 & k_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1313} & 0 & k_{1331} & 0 \\ 0 & 0 & k_{1331} & 0 & 0 & 0 & k_{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1331} & 0 & k_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3333} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \text{ (Flie\ss fkt)}} \quad , \quad (4.169)$$

$$\begin{aligned} k_{1111} &= 2v_1 \quad , \\ k_{3333} &= 2(v_1 + v_2 + v_3) \quad , \\ k_{1212} &= v_1 - v_4 \quad , \\ k_{1221} &= v_1 + v_4 \quad , \\ k_{1313} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_4 - \frac{1}{2}v_5 + \frac{1}{2}v_6 \quad , \\ k_{3131} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_4 - \frac{1}{2}v_5 - \frac{1}{2}v_6 \quad , \\ k_{1331} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_4 + \frac{1}{2}v_5 \quad , \end{aligned} \quad (4.170)$$

wenn ein nichtsymmetrischer Tensor folgenderma\ss en als Vektor dargestellt wird:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.171)$$

Bei der Transformation dieser Flie\ss funktion auf die Momentankonfiguration wird zun\ac hst ausgenutzt, dass die effektive Spannung in der Momentankonfiguration wegen (4.111) und (4.112) durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}_e^T \quad (4.172)$$

gegeben ist. Die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile transformieren jedoch nicht in dieser Form. Deshalb werden in der Momentankonfiguration zwei nichtsymmetrische Tensoren  $\boldsymbol{\sigma}^{(S)}$  und  $\boldsymbol{\sigma}^{(A)}$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(S)} := \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \mathbf{F}_e^T \quad (4.173)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(S)} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}_e) \neq \boldsymbol{\sigma}_S \quad (4.174)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(A)} := \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \mathbf{F}_e^T \quad (4.175)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(A)} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{B}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}_e) \neq \boldsymbol{\sigma}_A \quad (4.176)$$

eingeführt, die wie die gesamte effektive Spannung aus dem symmetrischen und antisymmetrischen Anteil der effektiven Spannung der Zwischenkonfiguration folgen.

Dies eingesetzt in (4.168) liefert (vgl. (4.125))

$$f^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}[\boldsymbol{\sigma}] \quad (4.177)$$

$$\begin{aligned} &= v_1 \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}^{(S)})^2 + v_2 \operatorname{tr} (\mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(S)})^2) + v_3 (\operatorname{tr} (\mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}))^2 + \\ &v_4 \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}^{(A)})^2 + v_5 \operatorname{tr} (\mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(A)})^2) + v_6 \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}) \end{aligned} \quad (4.178)$$

als Fließfunktion in der Momentankonfiguration.

Zur Bestimmung der Fließregel (4.64) wird die partielle Ableitung der Fließfunktion (4.168) nach dem symmetrischen Anteil des Mandel'schen Spannungstensors gebildet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} &= \frac{1}{2\hat{f}} \left\{ 2v_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S + v_2 (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S) - \frac{2}{3} (v_2 + v_3) \operatorname{tr} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}) \mathbf{1} + \right. \\ &\left. 2v_3 \operatorname{tr} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}) \hat{\mathbf{M}}_{(f)} + \frac{1}{2} v_6 (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A) \right\} . \end{aligned} \quad (4.179)$$

Wird ein Tensor

$$\mathbf{N}^{(S)} := \mathbf{F}_e \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.180)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\hat{f}} \left\{ 2v_1 \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} + v_2 (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1}) - \right. \\ &\frac{2}{3} (v_2 + v_3) \operatorname{tr} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}) \mathbf{1} + 2v_3 \operatorname{tr} (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}) \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)} + \\ &\left. \frac{1}{2} v_6 (\mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1}) \right\} . \end{aligned} \quad (4.181)$$

definiert, führt dies auf die transversal isotrope Fließregel in der Momentankonfiguration

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{N}^{(S)} \quad . \quad (4.182)$$

Der Tensor  $\mathbf{N}^{(S)}$  ist die mit Gleichung (4.129) in die Momentankonfiguration transformierte Normale an der Fließfläche im Raum der symmetrischen Spannungstensoren. Diese Normale gibt die Richtung der plastischen Verformungsgeschwindigkeit in der Zwischenkonfiguration an.

Aus der Ableitung der Fließfunktion nach dem antisymmetrischen Mandel'schen Spannungstensor

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} = \frac{1}{2\hat{f}} \left\{ -2v_4 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A - v_5 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \right) + v_6 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \right\} \quad (4.183)$$

folgt analog zu (4.180) der Tensor der Momentankonfiguration

$$\mathbf{N}^{(A)} := \mathbf{F}_e \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} \mathbf{F}_e^{-1} \quad (4.184)$$

$$= \frac{1}{2f} \left\{ -2v_4 \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} - v_5 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} v_6 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) \right\} \quad . \quad (4.185)$$

Dies ist die in die Momentankonfiguration transformierte Richtung zur Beschreibung der Rotation von Anisotropieachsen, die in der Zwischenkonfiguration senkrecht auf der Fließfläche im Raum der antisymmetrischen Tensoren steht.

Die Evolutionsgleichungen für die mit  $\mathbf{R}_e$  in die Momentankonfiguration rotierten Strukturtenoren lauten dann (vgl. (4.95) und (4.143))

$$\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(e)} = \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(e)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)} \mathbf{D} - \\ \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)} - \check{\mathbf{M}}_{(e)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\ \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right] \quad (4.186)$$

für die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz,

$$\begin{aligned}
\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(k)} = & \mathbf{D}\check{\mathbf{M}}_{(k)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}\mathbf{D} - \\
& \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)} - \check{\mathbf{M}}_{(k)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\
& \dot{s} \left[ \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e + \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)} + \right. \\
& \left. \check{\mathbf{M}}_{(k)} \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e + \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.187}$$

mit

$$\boldsymbol{\xi}^{(A)} = \mathbf{F}_e^{T-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_A \mathbf{F}_e^T = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\xi} - \mathbf{B}_e^{-1} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{B}_e \right) \neq \boldsymbol{\xi}_A \tag{4.188}$$

für die Strukturtenoren der kinematischen Verfestigung (vgl. (4.96)) und

$$\begin{aligned}
\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(f)} = & \mathbf{D}\check{\mathbf{M}}_{(f)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}\mathbf{D} - \\
& \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\
& \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.189}$$

für die Strukturtenoren in der Fließfunktion (vgl. (4.97))

Der in den Evolutionsgleichungen benötigte Faktor  $\beta$  wird aus den beiden Tensoren  $\mathbf{N}^{(S)}$  und  $\mathbf{N}^{(A)}$  über die Beziehung

$$\beta = \sqrt{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}}} = \sqrt{(\mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{N}^{(S)} \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{N}^{(S)} + (\mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{N}^{(A)}} \tag{4.190}$$

bestimmt.

#### 4.3.4 Materialgleichung für Orthotropie

Orthotropes Materialverhalten wird durch jeweils zwei Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz  $(\mathbf{M}_{(e)}^{(1)}, \mathbf{M}_{(e)}^{(2)})$ , zwei in der kinematischen Verfestigung  $(\mathbf{M}_{(k)}^{(1)}, \mathbf{M}_{(k)}^{(2)})$  und zwei in der Fließfunktion  $(\mathbf{M}_{(f)}^{(1)}, \mathbf{M}_{(f)}^{(2)})$  beschrieben. Die Vorgehensweise zur Formulierung des Materialmodells erfolgt, analog zum Fall der transversalen Isotropie im vorigen Abschnitt,

durch Transformation der Materialgleichungen aus der Zwischen- in die Momentankonfiguration.

Die orthotrope, elastische freie Energiefunktion  $\tilde{\psi}_e$  in der Bezugskonfiguration ist mit (2.35) durch

$$\begin{aligned}
\rho_R \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e) = & \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_3 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^2 + \alpha_4 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_5 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \\
& \alpha_6 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) + \alpha_7 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) + \alpha_8 \left( \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \right)^2 + \\
& \alpha_9 \left( \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) \right)^2 + \alpha_{10} \left( \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right)^2 + \\
& \alpha_{11} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_{12} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) + \\
& \alpha_{13} \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \tilde{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{4.191}$$

und den dreizehn Materialparametern  $\alpha_1$  bis  $\alpha_{13}$  gegeben. Wegen der Bedingung  $\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathbf{0}) = 0$  folgt sofort  $\alpha_1 = 0$ . Mit (4.21) und  $\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ( $\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$ ) ergibt sich das lineare, orthotrope Elastizitätsgesetz in der Zwischenkonfiguration

$$\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) = \hat{\mathcal{C}}^{(\text{elast})} [\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] \tag{4.192}$$

$$\begin{aligned}
= & \left[ 2\alpha_8 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_{11} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_{12} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \mathbf{1} + \\
& \left[ \alpha_{11} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + 2\alpha_9 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_{13} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} + \\
& \left[ \alpha_{12} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_{13} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + 2\alpha_{10} \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} + \\
& 2\alpha_3 \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \alpha_5 \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) + \alpha_7 \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} + \hat{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \quad ,
\end{aligned} \tag{4.193}$$

das nur noch von neun Materialparametern abhängt. Wird der Tensor 4.Stufe  $\hat{\mathcal{C}}^{(\text{elast})}$  in einem orthonormalen Koordinatensystem  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  dargestellt in dem die beiden ausgezeichneten Achsen der Orthotropie  $\mathbf{m}^{(1)}$  und  $\mathbf{m}^{(2)}$  in  $\mathbf{x}_1$ - bzw. in  $\mathbf{x}_2$ -Richtung zeigen, hat er die Form

$$\hat{\mathcal{C}}^{(\text{elast})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{elast})}} \quad , \tag{4.194}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 2(\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{11}) \quad , \\
c_{22} &= 2(\alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) \quad , \\
c_{33} &= 2(\alpha_3 + \alpha_8) \quad , \\
c_{12} &= 2\alpha_8 + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} \quad , \\
c_{13} &= 2\alpha_8 + \alpha_{11} \quad , \\
c_{23} &= 2\alpha_8 + \alpha_{12} \quad , \\
c_{44} &= 2\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 \quad , \\
c_{55} &= 2\alpha_3 + \alpha_5 \quad , \\
c_{66} &= 2\alpha_3 + \alpha_7 \quad .
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Das in die Momentankonfiguration transformierte orthotrope Elastizitätsgesetz ist dann in der Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \left[ 2\alpha_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e) + \alpha_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)}) + \alpha_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e + \\
&\quad \left[ \alpha_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e) + 2\alpha_9 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)}) + \alpha_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \\
&\quad \left[ \alpha_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e) + \alpha_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)}) + 2\alpha_{10} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \\
&\quad 2\alpha_3 \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e + \alpha_5 \left( \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(1)} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \right) + \\
&\quad \alpha_7 \left( \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(e)}^{(2)} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e \right)
\end{aligned} \tag{4.196}$$

gegeben.

Die plastische freie Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung  $\psi_p^{(\text{kin})}$  ist, bei gleichen Annahmen wie im transversal isotropen Fall, in der Bezugskonfiguration mit

$$\begin{aligned}
\rho_R \tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}}) &= c_1 + c_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} + c_3 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}}^2 + c_4 \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + c_5 \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + \\
&\quad c_6 \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) + c_7 \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) + c_8 (\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}})^2 + \\
&\quad c_9 \left( \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) \right)^2 + c_{10} \left( \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) \right)^2 + \\
&\quad c_{11} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + c_{12} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{Y}} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) + \\
&\quad c_{13} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)})
\end{aligned} \tag{4.197}$$



und den Materialparametern  $c_1 - c_{13}$  gegeben. Wie bei der Elastizität verschwindet auch hier der Materialparameter  $c_1$ , da die Bedingung  $\tilde{\psi}_p^{(\text{kin})}(\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}) = 0$  erfüllt sein muss. Mit (4.93), (4.108) und (4.29) folgt dann, unter der Voraussetzung, dass  $\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  gilt, der Spannungstensor der kinematischen Verfestigung in der Zwischenkonfiguration

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}(\hat{\mathbf{Y}}) &= \left[ 2c_8 \text{tr} \hat{\mathbf{Y}} + c_{11} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + c_{12} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \mathbf{1} + \\ &\quad \left[ c_{11} \text{tr} \hat{\mathbf{Y}} + 2c_9 \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + c_{13} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \\ &\quad \left[ c_{12} \text{tr} \hat{\mathbf{Y}} + c_{13} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + 2c_{10} \text{tr} \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \end{aligned} \quad (4.198)$$

$$\begin{aligned} &2c_3 \hat{\mathbf{Y}} + c_5 \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \hat{\mathbf{Y}} \right) + c_7 \left( \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \hat{\mathbf{Y}} \right) , \\ &= \hat{\mathbf{c}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Y}} \right] \end{aligned} \quad (4.199)$$

mit dem Tensor 4.Stufe

$$\hat{\mathbf{c}}^{(\text{kin})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{kin})}} , \quad (4.200)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(c_3 + c_5 + c_8 + c_9 + c_{11}) , \\ c_{22} &= 2(c_3 + c_7 + c_8 + c_{10} + c_{12}) , \\ c_{33} &= 2(c_3 + c_8) , \\ c_{12} &= 2c_8 + c_{11} + c_{12} + c_{13} , \\ c_{13} &= 2c_8 + c_{11} , \\ c_{23} &= 2c_8 + c_{12} , \\ c_{44} &= 2c_3 + c_5 + c_7 , \\ c_{55} &= 2c_3 + c_5 , \\ c_{66} &= 2c_3 + c_7 . \end{aligned} \quad (4.201)$$

Die Inversion von (4.199) liefert

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} \left[ \hat{\mathbf{Z}} \right] , \quad (4.202)$$

wobei der Tensor  $\hat{\mathcal{M}}^{(\text{kin})} = \left( \hat{\mathbf{c}}^{(\text{kin})} \right)^{-1}$  in Kapitel B.3 bestimmt wird.

In der Momentankonfiguration ist der Spannungstensor der kinematischen Verfestigung durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} = & \left[ 2c_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y}) + c_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + c_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e + \\
& \left[ c_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y}) + 2c_9 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + c_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \\
& \left[ c_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y}) + c_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + 2c_{10} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \\
& 2c_3 \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e + c_5 \left( \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \right) + \\
& c_7 \left( \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{B}_e \mathbf{Y} \mathbf{B}_e \right)
\end{aligned} \tag{4.203}$$

$$= \mathcal{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] \tag{4.204}$$

mit der Evolutionsgleichung

$$\overset{\nabla}{\mathbf{Z}} = \mathcal{C}^{(\text{kin})} \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \right] - \dot{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \tag{4.205}$$

gegeben.

Wie bei transversaler Isotropie wird auch bei Orthotropie für  $\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})}$  derselbe Ansatz wie für  $\hat{\mathcal{C}}^{(\text{kin})}$  (mit neun Materialparametern  $b_3, b_5, b_7 - b_{13}$ ) verwendet:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} [\hat{\mathbf{Z}}] = & \left[ 2b_8 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}} + b_{11} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + b_{12} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{1} + \\
& \left[ b_{11} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}} + 2b_9 \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + b_{13} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \\
& \left[ b_{12} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}} + b_{13} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}) + 2b_{10} \operatorname{tr}(\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)}) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \\
& 2b_3 \hat{\mathbf{Z}} + b_5 \left( \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \hat{\mathbf{Z}} \right) + b_7 \left( \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \hat{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \hat{\mathbf{Z}} \right) .
\end{aligned} \tag{4.206}$$

Dann besitzt der Tensor 4.Stufe die Form

$$\hat{\mathcal{B}}^{(\text{kin})} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{kin})}}, \tag{4.207}$$

$$\begin{aligned}
b_{11} &= 2(b_3 + b_5 + b_8 + b_9 + b_{11}) & , \\
b_{22} &= 2(b_3 + b_7 + b_8 + b_{10} + b_{12}) & , \\
b_{33} &= 2(b_3 + b_8) & , \\
b_{12} &= 2b_8 + b_{11} + b_{12} + b_{13} & , \\
b_{13} &= 2b_8 + b_{11} & , \\
b_{23} &= 2b_8 + b_{12} & , \\
b_{44} &= 2b_3 + b_5 + b_7 & , \\
b_{55} &= 2b_3 + b_5 & , \\
b_{66} &= 2b_3 + b_7 & ,
\end{aligned} \tag{4.208}$$

Mit (4.122) wird diese Beziehung in die Momentankonfiguration transformiert, und es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{(\text{kin})}[\mathbf{Z}] &= \left[ 2b_8 \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^{-1}\mathbf{Z}) + b_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + b_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e + \\
&\quad \left[ b_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^{-1}\mathbf{Z}) + 2b_9 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + b_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \\
&\quad \left[ b_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^{-1}\mathbf{Z}) + b_{13} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(1)}) + 2b_{10} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(2)}) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \\
&\quad 2b_3 \mathbf{Z} + b_5 \left( \mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(1)} \mathbf{Z} \right) + \\
&\quad b_7 \left( \mathbf{Z}\mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(k)}^{(2)} \mathbf{Z} \right)
\end{aligned} \tag{4.209}$$

Die orthotrope Fließfunktion in der Zwischenkonfiguration ist eine Funktion von drei symmetrischen Tensoren  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S$ ,  $\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)}$  und  $\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)}$  und dem antisymmetrischen Tensor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_A$ . Unter Ausnutzung des Darstellungssatzes für isotrope Funktionen (Kapitel B.2) und unter Berücksichtigung der Form (4.60) lautet die Fließfunktion

$$\begin{aligned}
f^2 &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathcal{K}}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] & (4.210) \\
&= v_1 \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^2 + v_2 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^2 \right) + v_3 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^2 \right) + v_4 \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \right)^2 + \\
&\quad v_5 \left( \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \right)^2 + v_6 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + & (4.211) \\
&\quad v_7 \operatorname{tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A^2 + v_8 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A^2 \right) + v_9 \operatorname{tr} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A^2 \right) + v_{10} \operatorname{tr} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + \\
&\quad v_{11} \operatorname{tr} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + v_{12} \operatorname{tr} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) .
\end{aligned}$$

Die ersten sieben Summanden dieser Fließfunktion, in denen nur die symmetrischen Anteile der effektiven Spannung auftreten, entsprechen der orthotropen Fließfunktion von

Hill (1950). Die Fließfunktion (4.211) stellt somit lediglich eine Erweiterung der Hill'schen Fließfunktion für nichtsymmetrische Spannungstensoren dar. Der Tensor  $\hat{\mathcal{K}}$  lautet für diesen Fall

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} k_{1111} & 0 & 0 & 0 & k_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1212} & 0 & k_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1313} & 0 & 0 & 0 & k_{1331} & 0 & 0 \\ 0 & k_{1221} & 0 & k_{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{1122} & 0 & 0 & 0 & k_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2323} & 0 & k_{2332} & 0 \\ 0 & 0 & k_{1331} & 0 & 0 & 0 & k_{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2332} & 0 & k_{3232} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3333} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{(\text{Fließfkt})}} \quad , \quad (4.212)$$

$$\begin{aligned} k_{1111} &= 2(v_1 + v_2 + v_4) \quad , \\ k_{2222} &= 2(v_1 + v_3 + v_5) \quad , \\ k_{3333} &= 2v_1 \quad , \\ k_{1122} &= v_6 \quad , \\ k_{1212} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 - v_7 - \frac{1}{2}v_8 - \frac{1}{2}v_9 - \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{2}v_{11} - \frac{1}{2}v_{12} \quad , \\ k_{2121} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 - v_7 - \frac{1}{2}v_8 - \frac{1}{2}v_9 + \frac{1}{2}v_{10} - \frac{1}{2}v_{11} + \frac{1}{2}v_{12} \quad , \\ k_{1221} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_7 + \frac{1}{2}v_8 + \frac{1}{2}v_9 \quad , \\ k_{1313} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_7 - \frac{1}{2}v_8 - \frac{1}{2}v_{10} \quad , \\ k_{3131} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_7 - \frac{1}{2}v_8 + \frac{1}{2}v_{10} \quad , \\ k_{1331} &= v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_7 + \frac{1}{2}v_8 \quad , \\ k_{2323} &= v_1 + \frac{1}{2}v_3 - v_7 - \frac{1}{2}v_9 - \frac{1}{2}v_{11} \quad , \\ k_{3232} &= v_1 + \frac{1}{2}v_3 - v_7 - \frac{1}{2}v_9 + \frac{1}{2}v_{11} \quad , \\ k_{2332} &= v_1 + \frac{1}{2}v_3 + v_7 + \frac{1}{2}v_9 \quad . \end{aligned} \quad (4.213)$$

Mit den Definitionen für die nichtsymmetrischen Tensoren  $\boldsymbol{\sigma}^{(S)}$  (4.174) und  $\boldsymbol{\sigma}^{(A)}$  (4.176) in der Momentankonfiguration sowie den Transformationsbeziehungen (4.172), (4.173) und

(4.175) wird die Fließfunktion in die Momentankonfiguration transformiert (vgl. (4.125))

$$f^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}[\boldsymbol{\sigma}] \quad (4.214)$$

$$\begin{aligned} &= v_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(S)})^2 + v_2 \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(S)})^2\right) + v_3 \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(S)})^2\right) + \\ &v_4 \left(\operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right)\right)^2 + v_5 \left(\operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right)\right)^2 + v_6 \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right) \cdot \\ &\operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right) + v_7 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(A)})^2 + v_8 \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(A)})^2\right) + \\ &v_9 \operatorname{tr}\left(\mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}^{(A)})^2\right) + v_{10} \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right) + \\ &v_{11} \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)}\right) + v_{12} \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e\right) . \end{aligned} \quad (4.215)$$

Mit der partiellen Ableitung der Fließfunktion (4.211) nach dem symmetrischen Anteil des Mandel'schen Spannungstensors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_S} &= \frac{1}{2f} \left\{ 2v_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S + v_2 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + v_3 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) \right. \\ &\quad \left[ 2v_4 \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) + v_6 \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \\ &\quad \left[ 2v_5 \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) + v_6 \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) \right] \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ (2v_2 + 2v_4 + v_6) \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) + (2v_3 + 2v_5 + v_6) \operatorname{tr}\left(\hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S\right) \right] \mathbf{1} \\ &\quad \frac{1}{2} v_{10} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \right) + \frac{1}{2} v_{11} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \right) \\ &\quad \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.216)$$

lässt sich mit (4.180) der in der Momentankonfiguration definierte Tensor

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^{(S)} = & \frac{1}{2f} \left\{ 2v_1 \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} + v_2 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \right. \\
& v_3 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) \\
& \left[ 2v_4 \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) + v_6 \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \\
& \left[ 2v_5 \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) + v_6 \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) \right] \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \\
& - \frac{1}{3} \left[ (2v_2 + 2v_4 + v_6) \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) + (2v_3 + 2v_5 + v_6) \operatorname{tr} \left( \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \right) \right] \mathbf{1} \\
& \frac{1}{2} v_{10} \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \\
& \frac{1}{2} v_{11} \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) \\
& \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.217}$$

bestimmen. Mit Gleichung (4.124) folgt damit die Fließregel in der Momentankonfiguration

$$\hat{\mathbf{A}}_p = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\beta} \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{N}^{(S)} \quad . \tag{4.218}$$

Analog dazu folgt aus der Ableitung der Fließfunktion nach dem antisymmetrischen Mandel'schen Spannungstensor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_A} = & \frac{1}{2f} \left\{ -2v_7 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A - v_8 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \right) - v_9 \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} + \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \right) + \right. \\
& \frac{1}{2} v_{10} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + \frac{1}{2} v_{11} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \right) + \\
& \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} - \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_S \hat{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.219}$$

der Tensor  $\mathbf{N}^{(A)}$  aus Gleichung (4.184)

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^{(A)} = & \frac{1}{2f} \left\{ -2v_7 \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} - v_8 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) - \right. \\
& v_9 \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} + \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \\
& \frac{1}{2} v_{10} \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \\
& \frac{1}{2} v_{11} \left( \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{B}_e^{-1} \right) + \\
& \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} - \mathbf{B}_e \mathbf{M}_{(f)}^{(2)} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)}^{(1)} \right) \right\} .
\end{aligned} \tag{4.220}$$

Damit lassen sich, zusammen mit (4.143), (4.95), (4.96) und (4.97), die Evolutionsgleichungen für die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned}
\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(e)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \mathbf{D} - \\
& \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\
& \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{4.221}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(k)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \mathbf{D} - \\
& \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\
& \dot{s} \left[ \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e + \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \right. \\
& \left. \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e + \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{4.222}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(f)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \mathbf{D} - \\
& \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\
& \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right] .
\end{aligned} \tag{4.223}$$

$\xi^{(A)}$  ist hierbei durch Gleichung (4.188) gegeben.

Der Faktor  $\beta$  wird wie bei transversaler Isotropie aus (4.190), mit den Tensoren  $\mathbf{N}^{(S)}$  und  $\mathbf{N}^{(A)}$  aus den Gleichungen (4.217) und (4.220), gewonnen.

### 4.3.5 Zusammenfassung der Gleichungen für transversale Isotropie und Orthotropie

Zum Schluss diese Kapitels werden nochmals die Material-Gleichungen für transversale Isotropie und für Orthotropie in der Momentankonfiguration dargestellt (siehe Tabelle 4.2)

Elastizitätsgesetz:

$$\mathbf{S} = \mathbf{c}^{(\text{elast})} [\mathbf{A}_e] = \mathbf{c}^{(\text{elast})} [\mathbf{A} - \mathbf{A}_p] \quad , \quad (4.224)$$

$$\mathbf{c}^{(\text{elast})} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.150)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.196)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad . \quad (4.225)$$

Fließfunktion:

$$f = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}} [\boldsymbol{\sigma}]} \quad , \quad (4.226)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.178)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.215)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad . \quad (4.227)$$

Fließregel:

$$\dot{\Delta} \mathbf{A}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{N}^{(S)} \quad , \quad (4.228)$$

$$\mathbf{N}^{(S)} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.181)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.217)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad . \quad (4.229)$$

Isotrope Verfestigung:

$$\dot{k} = \left[ \gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} (k - k_0) \right] \frac{\dot{s}}{\beta} \quad (4.230)$$



Kinematische Verfestigung:

$$\check{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}^{(\text{kin})} \left[ \check{\mathbf{A}}_p \right] - \dot{s} \mathbf{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad , \quad (4.231)$$

$$\mathbf{C}^{(\text{kin})} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.157)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.203)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad , \quad (4.232)$$

$$\mathbf{B}^{(\text{kin})} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.163)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.209)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad . \quad (4.233)$$

Strukturtenoren:

$$\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{V}_e^{-1} \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{V}_e^{-1} \quad , \quad (4.234)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \mathbf{D} - \\ & \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.235)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \mathbf{D} - \\ & \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & \dot{s} \left[ \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e - \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \right. \\ & \left. \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \frac{1}{\beta} \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e - \lambda \mathbf{V}_e \boldsymbol{\xi}^{(A)} \mathbf{V}_e^{-1} \right) \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.236)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} = & \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \mathbf{D} - \\ & \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \left( \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T - \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} \left( \mathbf{V}_e^{-1} \mathbf{N}^{(A)} \mathbf{V}_e \right) \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.237)$$

$$\mathbf{N}^{(A)} : \begin{cases} \text{Gleichung (4.185)} & \text{für transversale Isotropie} \\ \text{Gleichung (4.220)} & \text{für Orthotropie} \end{cases} \quad (4.238)$$

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der Materialgleichungen in der Momentankonfiguration für transversale Isotropie und Orthotropie

# Kapitel 5

## Numerik

Im vorangegangenen Kapitel wurden Materialmodelle zur Beschreibung von transversal isotropem und orthotropem elastisch–inelastischem Materialverhalten hergeleitet. Für bestimmte, homogene Belastungszustände wie z.B. die einfache Scherung, können diese Materialmodelle exakt integriert werden um damit die Spannungen und die Verformungen zu berechnen. Bei Belastungen, die einen inhomogenen Zustand im belasteten Körper erzeugen, z.B. im Zugversuch und bei der Torsion eines Rohrs, ist dies jedoch nur mit Hilfe eines numerischen Verfahrens, der Finite-Element-Methode (FEM), möglich.

Dazu wird in diesem Kapitel zunächst kurz erläutert, auf welche Weise das Finite-Element-Programm ABAQUS die Lösung eines Randwertproblems bestimmt. Insbesondere wird erwähnt, welche Ausdrücke bei der Implementierung des Materialmodells über die Benutzerschnittstelle UMAT an ABAQUS übergeben werden müssen (vgl. auch Hib [33], Abschnitt 25.2.28). Wie diese Größen ermittelt werden wird dann im zweiten Abschnitt gezeigt, bevor im letzten Teil eine Möglichkeit zur numerischen Bestimmung der sogenannten *konsistenten Tangente* erläutert wird.

### 5.1 Finite–Element–Methode bei nichtlinearen Problemen

#### 5.1.1 Variationsformulierung

Ausgangspunkt bei der Formulierung der FE–Methode ist die Impulsbilanz

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad , \quad (5.1)$$

die zu jedem Zeitpunkt  $t$  und an jedem Punkt  $\mathbf{x}$  eines Körpers, der ein Volumen  $V$  einnimmt und an dem eine spezifische Volumenkraft  $\mathbf{f}$  angreift, definiert. Mit  $\partial V_t$  wird die Begrenzung des Körpers, d.h. seine Oberfläche, bezeichnet. Diese kann in einen Bereich  $\partial V_t^u$ , auf dem Verschiebungsrandbedingungen (kinematischer Rand)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial V_t^u \quad , \quad (5.2)$$

und in einen Bereich  $\partial V_t^\sigma$  auf dem Spannungsrandbedingungen (statischer Rand)

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial V_t^\sigma \quad (5.3)$$

gegeben sind, zerlegt werden.  $\bar{\mathbf{u}}$  bezeichnet hierbei den Verschiebungsvektor des Punktes  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t$ , während  $\bar{\mathbf{t}}$  den Spannungsvektor beschreibt. Mit  $\mathbf{n}$  wird die nach aussen gerichtete Einheitsnormale der Oberfläche bezeichnet. Zwischen den Randbereichen auf denen Spannungsrandbedingungen vorgegeben sind und denen mit vorgegeben Verschiebungsrandbedingungen besteht der Zusammenhang

$$\partial V_t^u \cup \partial V_t^\sigma = \partial V_t \quad \wedge \quad \partial V_t^u \cap \partial V_t^\sigma = 0 \quad . \quad (5.4)$$

Eine skalare Multiplikation der Gleichgewichtsbilanz (5.1) mit einer virtuellen Verschiebung  $\Delta \mathbf{v}$  und Integration über das gesamte Volumen liefert

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{v}) dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{v} dV \quad . \quad (5.5)$$

Durch Anwendung der Produktregel und des Gauß'schen Integralsatzes folgt daraus zunächst das Prinzip der virtuellen Verschiebung

$$\int_{\partial V_t} \mathbf{T} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \Delta \mathbf{v} dV + \rho \int_V \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{v} dV = \rho \int_V \ddot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{v} dV \quad . \quad (5.6)$$

Da die virtuelle Verschiebungen auf dem Rand  $\partial V_t^u$  verschwinden

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial V_t^u \quad (5.7)$$

lässt sich (5.6) mit (5.3) zusammenfassen zu der sogenannten schwachen Form der Gleichgewichtsbedingung (5.1)

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \Delta \mathbf{v} dV - \rho \int_V (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{v} dV - \int_{\partial V_t^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \Delta \mathbf{v} dA = 0 \quad . \quad (5.8)$$

Hierbei bedeutet  $\mathcal{G}$  ein Funktional von  $\mathbf{u}$  und  $\Delta \mathbf{v}$ .

Diese schwache Form der Gleichgewichtsbedingung erfüllt die Impulsbilanz nicht mehr exakt sondern nur noch gemittelt über die Volumenintegrale.

Bei der Finite-Element-Methode wird das Volumen in eine endliche Anzahl von Finiten Elementen unterteilt, die nur an ihre Knoten zusammenhängen. Besteht das FE-Modell aus  $m$  Knoten, so kann die Gleichgewichtsbedingung (5.8) im dreidimensionalen Fall als ein System von  $3m$  Gleichungen dargestellt werden. Bei linear-elastischem Materialverhalten handelt es sich hierbei um ein System von linearen Gleichungen, während bei elastisch-inelastischem Materialverhalten ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss.

### 5.1.2 Lösung der nichtlinearen Gleichgewichtsbedingung

Im Gegensatz zum linearen Fall, bei dem das durch räumliche Diskretisierung von (5.8) erhaltene lineare Gleichungssystem direkt nach den gesuchten Verschiebungen  $\Delta \mathbf{v}$  aufgelöst werden kann, ist dies bei nichtlinearen Problemen im allgemeinen nicht möglich. Da ausserdem geschwindigkeitsabhängige Effekte bei der Materialantwort auftreten können, muss zusätzlich eine zeitliche Diskretisierung erfolgen. Die Materialantwort, d.h. die Bestimmung der Gleichgewichtslage, wird dann iterativ von Inkrement zu Inkrement gelöst.

In Abbildung 5.1 ist schematisch das Vorgehen zur iterativen Bestimmung einer neuen Gleichgewichtslage dargestellt. Es wird angenommen, dass der Körper mit dem Volumen  $V$  in der Referenzkonfiguration den Raumbereich  $\mathcal{R}_R$  einnimmt, und dass die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt  $t$ , in der der Körper den Raumbereich  $\mathcal{R}_0$  einnimmt, bekannt ist. Gesucht ist die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  mit dem zugehörigen Raumbereich  $\mathcal{R}_1$ . Hierbei werden Variablen die sich auf den Zeitpunkt  $t$  beziehen mit dem tiefgestellten Index 0 und Variablen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  mit dem Index 1 gekennzeichnet.

Die bekannte Deformation zwischen  $\mathcal{R}_R$  und  $\mathcal{R}_0$  wird durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_0$  beschrieben. Ausgehend von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  werden iterativ weitere Zustände  $(\mathcal{R}_1^i, \mathcal{R}_1^{i+1}, \dots)$ , die die schwache Form der Impulsbilanz (5.8) nicht erfüllen, solange bestimmt, bis der Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , und somit der Deformationsgradient  $\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_0$  (vgl. Abbildung 5.1), gefunden ist. Die Deformationen der Nichtgleichgewichtslagen während der Iteration werden durch die Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_1^i = \Delta \mathbf{F}^i \mathbf{F}_0$  bzw.  $\mathbf{F}_1^{i+1} = \Delta \mathbf{F}^{i+1} \mathbf{F}_0$  beschrieben. Diese Vorgehensweise wird in Bathe [6] *updated Lagrange* Formulierung genannt, da die Ausgangskonfiguration für die Gleichgewichtsiteration die jeweils aktualisierte letzte Gleichgewichtskonfiguration ist.

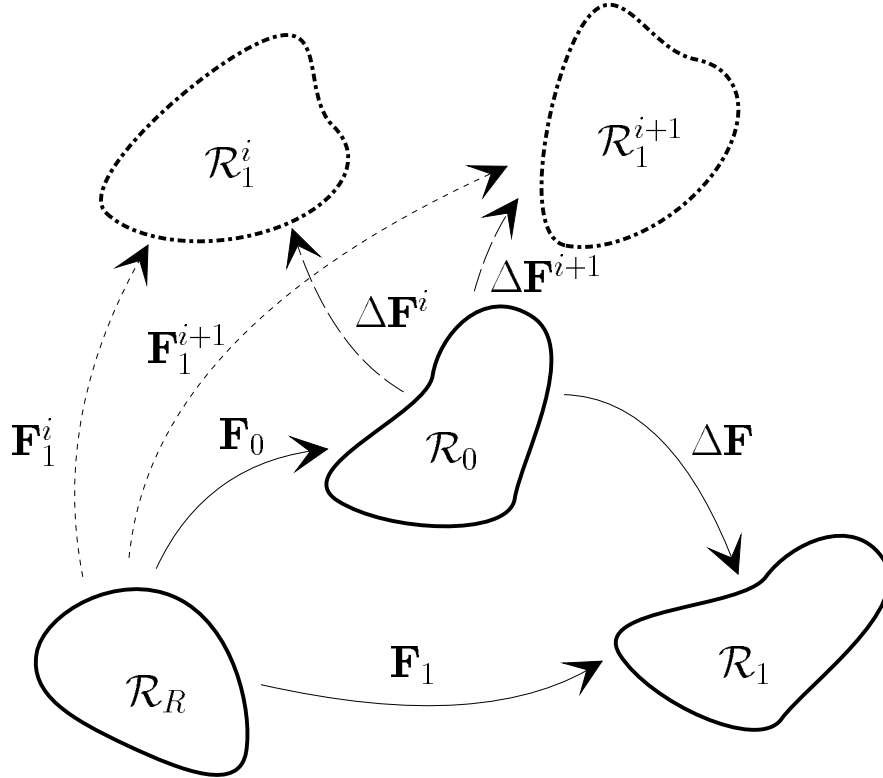


Abbildung 5.1: Iterative Bestimmung der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$

Um das nichtlineare Gleichungssystem der schwachen Form der Impulsbilanz (5.8) numerisch zu lösen, wird in ABAQUS wegen der quadratischen und somit sehr schnellen Konvergenz das Newton-Verfahren angewendet. Anstelle des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  wird der inkrementelle Verschiebungsvektor  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$ , der die Änderung der Verschiebung zwischen alter Gleichgewichtslage  $\mathcal{R}_0$  und neuer Gleichgewichtslage  $\mathcal{R}_1$  beschreibt, gesucht

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}_1, \Delta \mathbf{v}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) = \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) \quad . \quad (5.9)$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet dann

$$-\mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \mathbf{v}) = \left. \frac{\partial \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v})}{\partial \Delta \mathbf{u}} \right|_{\Delta \mathbf{u}^i} (\Delta \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^i) \quad . \quad (5.10)$$

Aus jeder Iterationslösung  $\Delta \mathbf{u}^i$  wird durch Lösen eines linearen Gleichungssystems eine neue, bessere Lösung  $\Delta \mathbf{u}^{i+1}$  bestimmt. Dies wird solange durchgeführt, bis die schwa-

che Form der Impulsbilanz und die Änderung der inkrementellen Verschiebungen einen positiven Grenzwert  $\varepsilon$  unterschreiten

$$\|\mathcal{G}^*(\Delta\mathbf{u}^{i+1}, \Delta\mathbf{v})\| \leq \varepsilon \quad \wedge \quad \|\Delta\mathbf{u}^{i+1} - \Delta\mathbf{u}^i\| \leq \varepsilon \quad . \quad (5.11)$$

Dieses Iterationsschema wird von ABAQUS intern durchgeführt. Der Benutzer muss hierzu verschiedene Größen, die von den Materialgleichungen abhängen, über die Schnittstelle UMAT an ABAQUS übergeben (siehe Hib [33], Abschnitt 25.2.28). Dies ist zum einen die Spannungsantwort, die aus einer vorgegeben Deformation folgt, und zum anderen eine Größe, aus der die partielle Ableitung in (5.10), die sogenannte *Tangentensteifigkeitsmatrix*, bestimmt werden kann.

## 5.2 Bestimmung der Spannung

Die von ABAQUS benötigte Spannungsantwort für ein vorgegebenes Verzerrungsinkrement muss mit einem geeigneten Integrationsalgorithmus vom Benutzer selbst bestimmt werden. Mit diesem Integrationsalgorithmus wird das System von konstitutiven Gleichung aus Tabelle 4.2 gelöst. ABAQUS schreibt dazu den Hughes–Winget–Algorithmus (siehe Hughes und Winget [35]) vor, der aus diesem Grund auch in dieser Arbeit verwendet wird.

### 5.2.1 Kleine elastische Verzerrungen

Die Integration erfolgt unter der Voraussetzung von kleinen elastischen Verzerrungen. Dann gelten z.B. die folgenden Zusammenhänge ( $\overline{\mathbf{U}}_e = \overline{\mathbf{U}}_e^T$ ,  $\overline{\mathbf{V}}_e = \overline{\mathbf{V}}_e^T$ ):

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{1} + \overline{\mathbf{U}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\varepsilon_e) \quad , \quad (5.12)$$

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{1} + \overline{\mathbf{V}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\varepsilon_e) \quad , \quad (5.13)$$

$$\mathbf{V}_e^{-1} = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\varepsilon_e) \quad , \quad (5.14)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}\overline{\mathbf{V}}_e = \mathbf{R}_e + \mathcal{O}(\varepsilon_e) \quad , \quad (5.15)$$

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\varepsilon_e) \quad . \quad (5.16)$$

Die Materialgleichungen in der Momentankonfiguration aus Tabelle 4.2 weisen unter diesen Voraussetzungen die gleiche Struktur wie das Modell in der Zwischenkonfiguration

auf. Weiterhin folgt aus dieser Vereinfachung, dass die Tensoren aus (4.173) und (4.175) jetzt dem symmetrischen bzw. dem antisymmetrischen Anteil der effektiven Spannung entsprechen:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(S)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T) = \boldsymbol{\sigma}_S \quad , \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(A)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) = \boldsymbol{\sigma}_A \quad . \quad (5.18)$$

Nach (4.132) fallen für kleine elastische Verzerrungen die mit  $\mathbf{F}_e$  in die Momentankonfiguration transformierten Strukturtenoren  $\mathbf{M}^{(i)}$  und die mit  $\mathbf{R}_e$  in die Momentankonfiguration rotierten Strukturtenoren  $\check{\mathbf{M}}^{(i)}$  zusammen

$$\mathbf{M}^{(i)} = \check{\mathbf{M}}^{(i)} \quad . \quad (5.19)$$

Für den antisymmetrischen Tensor  $\boldsymbol{\omega}$  (4.139) folgt

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{W}}_p \mathbf{R}_e^T \quad , \quad (5.20)$$

was zusammen mit (4.143) und

$$\boldsymbol{\Omega} := \mathbf{R}_e \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R}_e^T \quad (5.21)$$

auf die Evolutionsgleichung

$$\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}^{(i)} = \mathbf{D} \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \boldsymbol{\Omega} \quad (5.22)$$

führt.

Das komplette Differentialgleichungssystem für kleine Deformationen ist dann gegeben durch

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \mathbf{D} \quad , \quad (5.23)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \frac{\dot{s}}{\beta} \mathbf{N}^{(S)} \quad , \quad (5.24)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{Z}} = \frac{\dot{s}}{\beta} \mathbf{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{N}^{(S)}] - \dot{s} \mathbf{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad , \quad (5.25)$$

$$\dot{k} = [\gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} (k - k_0)] \frac{\dot{s}}{\beta} \quad , \quad (5.26)$$

$$\dot{s} = \frac{\langle f - k \rangle^m}{\eta} \quad , \quad (5.27)$$

$$\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(e)}^{(i)} = \mathbf{D}\check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)}\mathbf{D} + \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ (\mathbf{N}^{(A)})^T \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)}\mathbf{N}^{(A)} \right] \quad , \quad (5.28)$$

$$\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{D}\check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)}\mathbf{D} + \dot{s} \left[ \left( \frac{1}{\beta}\mathbf{N}^{(A)} - \lambda\xi_A \right)^T \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \frac{1}{\beta}\mathbf{N}^{(A)} - \lambda\xi_A \right) \right] \quad , \quad (5.29)$$

$$\overset{\Delta}{\check{\mathbf{M}}}_{(f)}^{(i)} = \mathbf{D}\check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)}\mathbf{D} + \frac{\dot{s}}{\beta} \left[ (\mathbf{N}^{(A)})^T \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(i)}\mathbf{N}^{(A)} \right] \quad . \quad (5.30)$$

Die Größen in den folgenden Gleichungen (5.31) – (5.45) werden nur für den orthotropen Fall angegeben. Für transversale Isotropie ergeben sich die Ausdrücke durch die analoge Vorgehensweise mit den Beziehungen aus Abschnitt 4.3.3.

Der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor ist für diesen Fall durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} \left( \mathbf{A}_e, \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \quad (5.31)$$

$$= \left[ 2\alpha_8 \operatorname{tr} \mathbf{A}_e + \alpha_{11} \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_{12} \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \mathbf{1} + \left[ \alpha_{11} \operatorname{tr} \mathbf{A}_e + 2\alpha_9 \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + \alpha_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} + \left[ \alpha_{12} \operatorname{tr} \mathbf{A}_e + \alpha_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \right) + 2\alpha_{10} \operatorname{tr} \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} + \quad (5.32)$$

$$2\alpha_3 \mathbf{A}_e + \alpha_5 \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(1)} \mathbf{A}_e \right) + \alpha_7 \left( \mathbf{A}_e \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(2)} \mathbf{A}_e \right) = \mathbf{C}^{(\text{elast})} [\mathbf{A}_e] \quad (5.33)$$

gegeben, wobei der elastische Anteil des Almansi'schen Verzerrungstensors aus

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} - \mathbf{A}_p \quad (5.34)$$

bestimmt wird. Der Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung folgt aus der Inver-



sion (siehe Kapitel B.3) der Beziehung

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \left( \mathbf{Y}, \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ 2c_8 \operatorname{tr}(\mathbf{Y}) + c_{11} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + c_{12} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] + \\ &\quad \left[ c_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{Y}) + 2c_9 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + c_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \\ &\quad \left[ c_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{Y}) + c_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + 2c_{10} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} &2c_3 \mathbf{Y} + c_5 \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \mathbf{Y} \right) + c_7 \left( \mathbf{Y} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \mathbf{Y} \right) \\ &= \mathbf{c}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y} = \mathcal{M}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad (5.38)$$

und der Translationstensor der kinematischen Verfestigung ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{1} + 2\mathbf{Y}) \mathbf{Z} \quad . \quad (5.39)$$

Der Ausdruck  $\mathcal{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}]$  wird über

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] &= \left[ 2b_8 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}) + b_{11} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + b_{12} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] + \\ &\quad \left[ b_{11} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}) + 2b_9 \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + b_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \\ &\quad \left[ b_{12} \operatorname{tr}(\mathbf{Z}) + b_{13} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \right) + 2b_{10} \operatorname{tr} \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \\ &\quad 2b_3 \mathbf{Z} + b_5 \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(1)} \mathbf{Z} \right) + b_7 \left( \mathbf{Z} \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(2)} \mathbf{Z} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

bestimmt. Die Fließfunktion ist durch

$$\begin{aligned} f^2 &= \left( f \left( \boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_A, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \right)^2 \\ &= v_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_S^2 + v_2 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S^2 \right) + v_3 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S^2 \right) + v_4 \left( \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right)^2 + \\ &\quad v_5 \left( \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right)^2 + v_6 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + \\ &\quad v_7 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_A^2 + v_8 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A^2 \right) + v_9 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A^2 \right) + v_{10} \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + \\ &\quad v_{11} \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + v_{12} \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

mit den symmetrischen und antisymmetrischen effektiven Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_S = (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi}_S)^D \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_A = -\boldsymbol{\xi}_A \quad , \quad (5.42)$$

gegeben. Daraus folgen die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile der Normalen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(S)} &= \mathbf{N}^{(S)} \left( \boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_A, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2f} \left\{ 2v_1 \boldsymbol{\sigma}_S + v_2 \left( \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + v_3 \left( \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right. \\ &\quad \left[ 2v_4 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + v_6 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \\ &\quad \left[ 2v_5 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + v_6 \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right] \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ (2v_2 + 2v_4 + v_6) \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + (2v_3 + 2v_5 + v_6) \operatorname{tr} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) \right] \mathbf{1} \\ &\quad \frac{1}{2} v_{10} \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A \right) + \frac{1}{2} v_{11} \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A \right) \\ &\quad \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(A)} &= \mathbf{N}^{(A)} \left( \boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_A, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2f} \left\{ -2v_7 \boldsymbol{\sigma}_A - v_8 \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A \right) - v_9 \left( \boldsymbol{\sigma}_A \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} + \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A \right) + \right. \\ &\quad \frac{1}{2} v_{10} \left( \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + \frac{1}{2} v_{11} \left( \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \right) + \\ &\quad \left. \frac{1}{2} v_{12} \left( \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} - \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Der Faktor  $\beta$  ist bei kleinen elastischen Verzerrungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \beta &= \beta \left( \boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_A, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(1)}, \check{\mathbf{M}}_{(f)}^{(2)} \right) \\ &= \sqrt{\mathbf{N}^{(S)} \cdot \mathbf{N}^{(S)} + \mathbf{N}^{(A)} \cdot \mathbf{N}^{(A)}} \quad . \end{aligned} \quad (5.45)$$

### 5.2.2 Bar-Transformation

Durch die Integration des Materialmodells soll aus einer bekannten Lösung zum Zeitpunkt  $t$  die Lösung am nächsten Inkrement zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  bestimmt werden.

Dazu wird eine neue Parametrisierung der Zeit mit  $\zeta \in [t, t + \Delta t]$  eingeführt. Die Durchführung der Hughes–Winget–Integration wird wie in den Arbeiten von Weber [74], Jansohn [37] und Lämmer [39] beschrieben durchgeführt. Zunächst wird eine sogenannte *Bar-Transformation* eingeführt. Diese ist für einen beliebigen symmetrischen Tensor  $\mathbf{G}$  der Momentankonfiguration durch

$$\overline{\mathbf{G}}(\zeta) := \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{G}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) \quad (5.46)$$

im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  definiert, wobei der orthogonale Rotationstensor  $\mathbf{Q}$  durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{Q}}^T(\zeta) = \mathbf{W}(\zeta) \mathbf{Q}^T(\zeta) \quad , \quad \mathbf{Q}(\zeta = 0) = \mathbf{1} \quad (5.47)$$

bestimmt werden kann. Skalare Größen bleiben von dieser Transformation natürlich unberührt. Ableitung einer bartransformierten Größe nach der Zeit liefert

$$\dot{\overline{\mathbf{G}}} = \mathbf{Q}^T \left( \underbrace{\dot{\mathbf{G}} - \mathbf{W}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{W}}_{:= \overset{\circ}{\mathbf{G}}} \right) \mathbf{Q} \quad . \quad (5.48)$$

Die explizite Abhängigkeit aller Größen von der Zeit  $\zeta$  ist hier der Übersichtlichkeit wegen fortgelassen worden. Der Ausdruck  $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$  ist auch als die sogenannte *Jaumann-Ableitung* des Tensors  $\mathbf{G}$  bekannt.

Da zwischen der Jaumannableitung und der Oldroydableitung der Zusammenhang

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}} = \begin{cases} \overset{\nabla}{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{G} & \text{für Spannungstensoren} \\ \overset{\Delta}{\mathbf{G}} - \mathbf{G}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{G} & \text{für Dehnungstensoren} \end{cases} \quad (5.49)$$

besteht, können die mit Oldroydableitungen definierten Evolutionsgleichungen durch gewöhnliche Zeitableitungen der bartransformierten Größen ersetzt werden

$$\dot{\overline{\mathbf{G}}} = \begin{cases} \mathbf{Q}^T \overset{\nabla}{\mathbf{G}} \mathbf{Q} + \overline{\mathbf{G}}\mathbf{D} + \mathbf{D}\overline{\mathbf{G}} & \text{für Spannungstensoren} \\ \mathbf{Q}^T \overset{\Delta}{\mathbf{G}} \mathbf{Q} - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{D} - \mathbf{D}\overline{\mathbf{G}} & \text{für Dehnungstensoren} \end{cases} \quad . \quad (5.50)$$

### 5.2.3 Operator-Split-Verfahren

Zur Lösung des in Tabelle 4.2 angegebenen Anfangswertproblems wird in Anlehnung an Jansohn [37] und Lämmer [39] ein sogenanntes *Operator-Split-Verfahren* verwendet. Hierzu

wird das komplette Differentialgleichungssystem in mehrere Anteile (Operatoren) unterteilt. Die Anfangsbedingungen für das komplette System sind dann die Anfangsbedingungen für den ersten Operator. Die Lösung dieses Operators dienen als Anfangsbedingungen für den zweiten Operator und so weiter. Die Lösung des letzten Operators ist schließlich die Lösung des kompletten Differentialgleichungssystems.

In dieser Arbeit wird ein zweifacher Operator-Split durchgeführt. Hierbei werden im ersten Operator nur die rein elastischen Anteile der Materialgleichung berücksichtigt, während im zweiten Operator die inelastischen Anteile untersucht werden. Dies hat den Vorteil, dass nach dem ersten Operator über die Fließbedingung überprüft werden kann, ob eine rein elastische oder eine elastisch-inelastische Belastung vorliegt. Der zweite Operator muss dann nur im letzteren Fall ausgewertet werden.

Zur Notation: Größen im ersten Operator werden mit einem links hochgestellten Index  $I$ , Größen im zweiten Operator mit dem Index  $II$  gekennzeichnet. Ausserdem werden Anfangsbedingungen zur Zeit  $\zeta = t$  mit einem rechts tiefgestellten Index 0, die Größen am Ende des Inkrements  $\zeta = t + \Delta t$  mit 1 und diejenigen in der Mitte des Zeitschritts, d.h.  $\zeta = t + \frac{1}{2}\Delta t$ , mit dem Index  $\frac{1}{2}$  identifiziert.

## 1.Operator — Elastischer Anteil

Die Integration im ersten Operator erfolgt mit dem Hughes-Winget-Verfahren. Dies bedeutet, dass das Differentialgleichungssystem bezüglich der bar-transformierten Konfiguration gelöst wird. Deshalb müssen die Lösungen der tensoriellen Gleichungen nach der Integration mit Hilfe von (5.46) vorwärts rotiert werden.

Im ersten Operator muss somit das bar-transformierte Differentialgleichungssystem

$${}^I\dot{\bar{\mathbf{A}}} = -\bar{\mathbf{D}}{}^I\bar{\mathbf{A}} - {}^I\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{D}} \quad , \quad (5.51)$$

$${}^I\dot{\bar{\mathbf{A}}}_p = -\bar{\mathbf{D}}{}^I\bar{\mathbf{A}}_p - {}^I\bar{\mathbf{A}}_p\bar{\mathbf{D}} \quad , \quad (5.52)$$

$${}^I\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{D}}{}^I\bar{\mathbf{Z}} + {}^I\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{D}} \quad , \quad (5.53)$$

$${}^I\dot{\bar{k}} = 0 \quad , \quad (5.54)$$

$${}^I\dot{\bar{s}} = 0 \quad , \quad (5.55)$$

$${}^I\dot{\overline{\mathbf{M}}}_{(e)}^{(i)} = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.56)$$

$${}^I\dot{\overline{\mathbf{M}}}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.57)$$

$${}^I\dot{\overline{\mathbf{M}}}_{(f)}^{(i)} = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.58)$$

mit den Anfangsbedingungen

$${}^I\overline{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_0 = \mathbf{A}_0 \quad , \quad (5.59)$$

$${}^I\overline{\mathbf{A}}_{p0} = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A}_{p0} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{A}_{p0} \quad , \quad (5.60)$$

$${}^I\overline{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{Z}_0 \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Z}_0 \quad , \quad (5.61)$$

$${}^I k_0 = k_0 \quad , \quad (5.62)$$

$${}^I s_0 = s_0 \quad , \quad (5.63)$$

$${}^I\overline{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} = \mathbf{Q}_0^T \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} \mathbf{Q}_0 = \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.64)$$

$${}^I\overline{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} = \mathbf{Q}_0^T \check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} \mathbf{Q}_0 = \check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.65)$$

$${}^I\overline{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} = \mathbf{Q}_0^T \check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} \mathbf{Q}_0 = \check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (5.66)$$

gelöst werden.

Beim Hughes–Winget–Verfahren wird von einem zeitlich konstanten Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}_\zeta$  im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  ausgegangen. Durch Lösung des Anfangswertproblems (5.47) lässt sich zeigen (siehe hierzu Hughes und Winget [35], Weber [74] und Jansohn [37]), dass der Rotationstensor der Bartransformation am Inkrementende  $\zeta = t + \Delta t$  nur bei Anwendung der Mittelpunktregel orthogonal ist. Er lautet dann

$$\mathbf{Q}_1 = \left( \mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W} \right)^{-1} \left( \mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W} \right) \quad . \quad (5.67)$$

Dieser Rotationstensor wird von ABAQUS über die Benutzerschnittstelle UMAT zur Verfügung gestellt.

Aus diesem Grund wird zur Integration der Materialgleichungen im ersten Operatot die Mittelpunktregel verwendet. Dies liefert, unter der Voraussetzung einer konstanten Deformationsgeschwindigkeit  $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}}_1$  (siehe Weber [74]), die Gleichungssysteme

$$\frac{{}^I\overline{\mathbf{A}}_1 - \mathbf{A}_0}{\Delta t} = \overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{D}}^T \overline{\mathbf{A}}_{\frac{1}{2}} - {}^I\overline{\mathbf{A}}_{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{D}} \quad , \quad (5.68)$$

$$\frac{{}^I\overline{\mathbf{A}}_{p1} - \mathbf{A}_{p0}}{\Delta t} = -\overline{\mathbf{D}}^T \overline{\mathbf{A}}_{p\frac{1}{2}} - {}^I\overline{\mathbf{A}}_{p\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{D}} \quad , \quad (5.69)$$

$$\frac{{}^I\bar{\mathbf{Z}}_1 - \mathbf{Z}_0}{\Delta t} = {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{D}}{}^I\bar{\mathbf{Z}}_{\frac{1}{2}} \quad , \quad (5.70)$$

$$\frac{{}^I\bar{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} - \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)}}{\Delta t} = \mathbf{0} \quad , \quad (5.71)$$

mit

$$\begin{aligned} {}^I\bar{\mathbf{A}}_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_0 + {}^I\bar{\mathbf{A}}_1) \quad , \quad {}^I\bar{\mathbf{A}}_{p\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{p0} + {}^I\bar{\mathbf{A}}_{p1}) \quad , \\ {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_0 + {}^I\bar{\mathbf{Z}}_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.72)$$

Da die Lösung im ersten Operator für alle Strukturtenoren gleich ist, beschränken wir uns hier auf das Ergebnis für die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz. Die Lösung für die anderen Strukturtenoren erfolgt analog.

Auflösen der Gleichungen (5.68) – (5.70) führt mit der Definition eines Dehnungsmaßes

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} := \Delta t\bar{\mathbf{D}} \quad (5.73)$$

auf

$${}^I\bar{\mathbf{A}}_1 + \frac{1}{2} (\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}{}^I\bar{\mathbf{A}}_1 + {}^I\bar{\mathbf{A}}_1\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{A}_0 + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} (\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad , \quad (5.74)$$

$${}^I\bar{\mathbf{A}}_{p1} + \frac{1}{2} (\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}{}^I\bar{\mathbf{A}}_{p1} + {}^I\bar{\mathbf{A}}_{p1}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{A}_{p0} - \frac{1}{2} (\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{A}_{p0} + \mathbf{A}_{p0}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad , \quad (5.75)$$

$${}^I\bar{\mathbf{Z}}_1 - \frac{1}{2} ({}^I\bar{\mathbf{Z}}_1\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}{}^I\bar{\mathbf{Z}}_1) = \mathbf{Z}_0 + \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_0\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{Z}_0) \quad . \quad (5.76)$$

Somit folgen für die Feldgrößen am Ende des ersten Operators die linearen Gleichungen

$${}^I\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^I\bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{Q}_1^T = \mathcal{A}^{-1} \left[ \mathbf{A}_0^* + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}_0^* + \mathbf{A}_0^*\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \right] \quad , \quad (5.77)$$

$${}^I\mathbf{A}_{p1} = \mathbf{Q}_1 {}^I\bar{\mathbf{A}}_{p1} \mathbf{Q}_1^T = \mathcal{A}^{-1} \left[ \mathbf{A}_{p0}^* - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}_{p0}^* + \mathbf{A}_{p0}^*\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \right] \quad , \quad (5.78)$$

$${}^I\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^I\bar{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{Q}_1^T = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \mathbf{Z}_0^* + \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_0^*\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Z}_0^*) \right] \quad , \quad (5.79)$$

$${}^I k_1 = k_0 \quad , \quad (5.80)$$

$${}^I s_1 = s_0 \quad , \quad (5.81)$$

$${}^I\check{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} = \mathbf{Q}_1 {}^I\overline{\check{\mathbf{M}}}_{(e)1}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T = \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)*} \quad , \quad (5.82)$$

$${}^I\check{\mathbf{M}}_{(k)1}^{(i)} = \mathbf{Q}_1 {}^I\overline{\check{\mathbf{M}}}_{(k)1}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T = \check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)*} \quad , \quad (5.83)$$

$${}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(i)} = \mathbf{Q}_1 {}^I\overline{\check{\mathbf{M}}}_{(f)1}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T = \check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)*} \quad , \quad (5.84)$$

mit den Tensoren 4.Stufe

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{I}_{ijkl} + \frac{1}{4} [\Delta\varepsilon_{ik}\delta_{jl} + \Delta\varepsilon_{il}\delta_{jk} + \Delta\varepsilon_{jl}\delta_{ik} + \Delta\varepsilon_{jk}\delta_{il}] \quad , \quad (5.85)$$

$$\mathcal{Z}_{ijkl} = \mathcal{I}_{ijkl} - \frac{1}{4} [\Delta\varepsilon_{ik}\delta_{jl} + \Delta\varepsilon_{il}\delta_{jk} + \Delta\varepsilon_{jl}\delta_{ik} + \Delta\varepsilon_{jk}\delta_{il}] \quad , \quad (5.86)$$

und dem von ABAQUS vorgegeben Dehnungsmaß

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T \quad . \quad (5.87)$$

Die vorwärtsrotierten Anfangsbedingungen der tensoriellen Größen lauten:

$$\mathbf{A}_0^* = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_1^T \quad , \quad \mathbf{A}_{p0}^* = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_{p0} \mathbf{Q}_1^T \quad , \quad (5.88)$$

$$\mathbf{Z}_0^* = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}_0 \mathbf{Q}_1^T \quad , \quad \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)*} = \mathbf{Q}_1 \check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T \quad , \quad (5.89)$$

$$\check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)*} = \mathbf{Q}_1 \check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T \quad , \quad \check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)*} = \mathbf{Q}_1 \check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} \mathbf{Q}_1^T \quad . \quad (5.90)$$

## 2.Operator — Inelastischer Anteil

Im Gegensatz zum ersten Operator erfolgt die Integration im zweiten Operator nicht in der bar-transformierten Konfiguration, da jetzt nicht mehr auf das von ABAQUS vorgegeben Dehnungsmaß  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  und somit auf das Hughes–Winget–Verfahren zurückgegriffen werden muss.

Mit den im ersten Operator bestimmten Lösungen liegen die Anfangsbedingungen für den zweiten Operator vor

$${}^II\mathbf{A}_0 = {}^I\mathbf{A}_1 \quad , \quad {}^II\mathbf{A}_{p0} = {}^I\mathbf{A}_{p1} \quad , \quad {}^II\mathbf{Z}_0 = {}^I\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (5.91)$$

$${}^IIk_0 = {}^Ik_1 \quad , \quad {}^IIs_0 = {}^Is_1 \quad , \quad (5.92)$$

$${}^II\check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} = {}^I\check{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} \quad , \quad {}^II\check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} = {}^I\check{\mathbf{M}}_{(k)1}^{(i)} \quad , \quad {}^II\check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} = {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(i)} \quad . \quad (5.93)$$

Zunächst wird überprüft, ob überhaupt eine inelastische Belastung vorliegt. Ist die Bedingung

$${}^IIf_0 - {}^IIk_0 = f \left( {}^II\boldsymbol{\sigma}_{S0}, {}^II\boldsymbol{\sigma}_{A0}, {}^II\check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)}, {}^II\check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)}, {}^II\check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} \right) - {}^IIk_0 > 0 \quad (5.94)$$

mit

$${}^H\mathbf{A}_{e0} = {}^H\mathbf{A}_0 - {}^H\mathbf{A}_{p0} \quad \Rightarrow \quad {}^H\mathbf{S}_0 = {}^H\mathbf{c}^{(\text{elast})} [{}^H\mathbf{A}_{e0}] \quad , \quad (5.95)$$

$${}^H\mathbf{Y}_0 = \mathcal{M}^{(\text{kin})} [{}^H\mathbf{Z}_0] \quad \Rightarrow \quad {}^H\boldsymbol{\xi}_0 = (\mathbf{1} + 2{}^H\mathbf{Y}_0) {}^H\mathbf{Z}_0 \quad (5.96)$$

$$\Rightarrow \quad {}^H\boldsymbol{\sigma}_{S0} = ({}^H\mathbf{S}_0 - {}^H\boldsymbol{\xi}_{S0})^D \quad , \quad {}^H\boldsymbol{\sigma}_{A0} = -{}^H\boldsymbol{\xi}_{A0} \quad (5.97)$$

erfüllt, liegt inelastische Belastung vor. Ansonsten liegt der Belastungspunkt innerhalb der Fließfläche und die Lösung des zweiten Operators ist gegeben durch

$${}^H\mathbf{A}_1 = {}^H\mathbf{A}_0 \quad , \quad {}^H\mathbf{A}_{p1} = {}^H\mathbf{A}_{p0} \quad , \quad {}^H\mathbf{Z}_1 = {}^H\mathbf{Z}_0 \quad , \quad (5.98)$$

$${}^Hk_1 = {}^Hk_0 \quad , \quad {}^Hs_1 = {}^Hs_0 \quad , \quad (5.99)$$

$${}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)0}^{(i)} \quad , \quad {}^H\check{\mathbf{M}}_{(k)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(k)0}^{(i)} \quad , \quad {}^H\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(f)0}^{(i)} \quad . \quad (5.100)$$

Bei inelastischer Belastung muss das Differentialgleichungssystem

$${}^H\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad , \quad (5.101)$$

$${}^H\dot{\mathbf{A}}_p = \frac{{}^H\dot{s}}{{}^H\beta} {}^H\mathbf{N}^{(S)} \quad , \quad (5.102)$$

$${}^H\dot{\mathbf{Z}} = \frac{{}^H\dot{s}}{{}^H\beta} {}^H\mathbf{c}^{(\text{kin})} [{}^H\mathbf{N}^{(S)}] - {}^H\dot{s} \mathcal{B}^{(\text{kin})} [{}^H\mathbf{Z}] \quad , \quad (5.103)$$

$${}^H\dot{k} = \frac{{}^H\dot{s}}{{}^H\beta} [\gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} ({}^Hk - h^{(\text{iso})})] \quad , \quad (5.104)$$

$${}^H\dot{s} = \frac{\langle {}^Hf - {}^Hk \rangle^m}{\eta} \quad (5.105)$$

$${}^H\dot{\check{\mathbf{M}}}_{(e)}^{(i)} = \frac{{}^H\dot{s}}{{}^H\beta} \left[ ({}^H\mathbf{N}^{(A)})^T {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} {}^H\mathbf{N}^{(A)} \right] \quad , \quad (5.106)$$

$${}^H\dot{\check{\mathbf{M}}}_{(k)}^{(i)} = {}^H\dot{s} \left[ \left( \frac{1}{{}^H\beta} {}^H\mathbf{N}^{(A)} - \lambda {}^H\boldsymbol{\xi}_A \right)^T {}^H\check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} + \right. \\ \left. {}^H\check{\mathbf{M}}_{(k)}^{(i)} \left( \frac{1}{{}^H\beta} {}^H\mathbf{N}^{(A)} - \lambda {}^H\boldsymbol{\xi}_A \right) \right] \quad , \quad (5.107)$$

$${}^H\dot{\check{\mathbf{M}}}_{(f)}^{(i)} = \frac{{}^H\dot{s}}{{}^H\beta} \left[ ({}^H\boldsymbol{\Lambda})^T {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} + {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)}^{(i)} {}^H\boldsymbol{\Lambda} \right] \quad (5.108)$$

zusammen mit den algebraischen Beziehungen (5.31) – (5.45) gelöst werden.



Für die gesamte Dehnung ist dann die Lösung durch

$${}^I\mathbf{A}_1 = {}^I\mathbf{A}_0 \quad (5.109)$$

gegeben.

Dieses Algebra-Differentialgleichungssystem wird mit dem vollimpliziten Euler-Verfahren gelöst. Dadurch ergibt sich das nichtlineare Gleichungssystem

$${}^I\mathbf{A}_{p1} - {}^I\mathbf{A}_{p1} - \frac{\Delta t}{{}^I\beta_1} \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} {}^I\mathbf{N}_1^{(S)} = \mathbf{0} \quad , \quad (5.110)$$

$${}^I\mathbf{Z}_1 - {}^I\mathbf{Z}_0 - \Delta t \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} \left( \frac{1}{{}^I\beta_1} {}^I\mathbf{C}_1^{(\text{kin})} [{}^I\mathbf{N}_1^{(S)}] - {}^I\mathbf{B}_1^{(\text{kin})} [{}^I\mathbf{Z}_1] \right) = \mathbf{0} \quad , \quad (5.111)$$

$${}^I k_1 - {}^I k_0 - \frac{\Delta t}{{}^I\beta_1} \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} [\gamma^{(\text{iso})} - \beta^{(\text{iso})} ({}^I k_1 - h^{(\text{iso})})] = 0 \quad , \quad (5.112)$$

$${}^I s_1 - {}^I s_0 - \Delta t \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} = 0 \quad , \quad (5.113)$$

$${}^I\check{\mathbf{M}}_1^{(i)} - {}^I\check{\mathbf{M}}_0^{(i)} - ({}^I\mathbf{\Pi}_1)^T {}^I\check{\mathbf{M}}_1^{(i)} + {}^I\check{\mathbf{M}}_1^{(i)} {}^I\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{0} \quad , \quad (5.114)$$

wobei Gleichung (5.114) für die Strukturtenoren im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion dieselbe Struktur aufweist und der antisymmetrische Tensor  ${}^I\mathbf{\Pi}_1$  durch

$${}^I\mathbf{\Pi}_1 = \begin{cases} \frac{\Delta t}{{}^I\beta_1} \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} {}^I\mathbf{N}_1^{(A)} & \text{Elastizitätsgesetz} \\ \Delta t \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} \left( \frac{1}{{}^I\beta_1} {}^I\mathbf{N}_1^{(A)} - \lambda {}^I\boldsymbol{\xi}_{A1} \right) & \text{kinematische Verfestigung} \\ \frac{\Delta t}{{}^I\beta_1} \frac{\langle {}^I f_1 - {}^I k_1 \rangle^m}{\eta} {}^I\mathbf{N}_1^{(A)} & \text{Fließfunktion} \end{cases} \quad (5.115)$$

gegeben ist. Das nichtlineare Gleichungssystem (5.110) – (5.114), bestehend aus 32 Gleichungen, muss zusammen mit den Beziehungen

$${}^I\mathbf{S}_1 = {}^I\mathbf{C}_1^{(\text{elast})} [{}^I\mathbf{A}_1 - {}^I\mathbf{A}_{p1}] \quad , \quad {}^I\boldsymbol{\xi}_1 = \left( \mathbf{1} + 2 {}^I\mathcal{M}_1^{(\text{kin})} [{}^I\mathbf{Z}_1] \right) {}^I\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (5.116)$$

$$\Rightarrow {}^I\boldsymbol{\sigma}_{S1} = ({}^I\mathbf{S}_1 - {}^I\boldsymbol{\xi}_{S1})^D \quad , \quad {}^I\boldsymbol{\sigma}_{A1} = -{}^I\boldsymbol{\xi}_{A1} \quad , \quad (5.117)$$

$${}^I f_1 = f \left( {}^I\boldsymbol{\sigma}_{S1}, {}^I\boldsymbol{\sigma}_{A1}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(1)}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(2)} \right) \quad , \quad (5.118)$$

$${}^I\mathbf{N}_1^{(S)} = \mathbf{N}^{(S)} \left( {}^I\boldsymbol{\sigma}_{S1}, {}^I\boldsymbol{\sigma}_{A1}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(1)}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(2)} \right) \quad , \quad (5.119)$$

$${}^I\mathbf{N}_1^{(A)} = \mathbf{N}^{(A)} \left( {}^I\boldsymbol{\sigma}_{S1}, {}^I\boldsymbol{\sigma}_{A1}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(1)}, {}^I\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(2)} \right) \quad , \quad (5.120)$$

$${}^I\beta_1 = \sqrt{{}^I\mathbf{N}_1^{(S)} \cdot {}^I\mathbf{N}_1^{(S)} + {}^I\mathbf{N}_1^{(A)} \cdot {}^I\mathbf{N}_1^{(A)}} \quad (5.121)$$

gelöst werden. Hierzu wird wegen der schnellen Konvergenz ein Newton–Verfahren verwendet. Im Gegensatz zu den Arbeiten von Hartmann et al. [23], Jansohn [37] und Lämmer [39], in denen für isotropes Materialverhalten eine Reduzierung des Gleichungssystems auf nur eine nichtlineare Gleichung gelingt, was einen erheblichen Vorteil im Hinblick auf die numerische Effizienz bedeutet, ist dies hier nicht möglich.

Es gelingt jedoch, die Differentialgleichungen für die Strukturtenoren auf jeweils drei skalare Gleichungen zu reduzieren, da die Strukturtenoren nur von drei Euler’schen Winkel abhängen. Die Differentialgleichungen sind von der Form

$$\dot{\check{\mathbf{M}}}^{(i)} = \boldsymbol{\Pi}^T \check{\mathbf{M}}^{(i)} + \check{\mathbf{M}}^{(i)} \boldsymbol{\Pi} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5.122)$$

wobei die beiden Strukturtenoren  $\check{\mathbf{M}}^{(1)}$  und  $\check{\mathbf{M}}^{(2)}$  über die Zusammenhänge (4.102) – (4.104) und (4.106) gegeben sind. Dann lässt sich die Differentialgleichung (5.122) auch in der Form

$$\dot{\varphi} = -\frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \boldsymbol{\Pi}_{13} - \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \boldsymbol{\Pi}_{23} \quad , \quad (5.123)$$

$$\dot{\vartheta} = \sin \psi \boldsymbol{\Pi}_{13} - \cos \psi \boldsymbol{\Pi}_{23} \quad , \quad (5.124)$$

$$\dot{\psi} = -\boldsymbol{\Pi}_{12} + \frac{\cos \psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \boldsymbol{\Pi}_{13} + \frac{\sin \psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \boldsymbol{\Pi}_{23} \quad (5.125)$$

formulieren.

Die jeweils sechs nichtlinearen Gleichungen (5.114) lassen sich somit durch

$${}^I\varphi_1 - {}^I\varphi_0 + \frac{\cos {}^I\psi_1}{\sin {}^I\vartheta_1} ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{13} + \frac{\sin {}^I\psi_1}{\sin {}^I\vartheta_1} ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{23} = 0 \quad , \quad (5.126)$$

$${}^I\vartheta_1 - {}^I\vartheta_0 - \sin {}^I\psi_1 ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{13} + \cos {}^I\psi_1 ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{23} = 0 \quad , \quad (5.127)$$

$${}^I\psi_1 - {}^I\psi_0 + ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{12} - \frac{\cos {}^I\psi_1 \cos {}^I\vartheta_1}{\sin {}^I\vartheta_1} ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{13} - \frac{\sin {}^I\psi_1 \cos {}^I\vartheta_1}{\sin {}^I\vartheta_1} ({}^I\boldsymbol{\Pi}_1)_{23} = 0 \quad (5.128)$$

mit  ${}^I\boldsymbol{\Pi}_1$  aus (5.115) ersetzen, wodurch sich die Anzahl der nichtlinearen Gleichungen auf 23 reduziert. Die Strukturtenoren im zweiten Operator werden durch Wiedereinsetzen der Euler’schen Winkel bestimmt.

Die Lösung für das komplette Differentialgleichungssystem ist somit durch

$$\mathbf{A}_1 = {}^H\mathbf{A}_1 \quad , \quad \mathbf{A}_{p1} = {}^H\mathbf{A}_{p1} \quad , \quad \mathbf{Z}_1 = {}^H\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (5.129)$$

$$k_1 = {}^Hk_1 \quad , \quad s_1 = {}^Hs_1 \quad , \quad (5.130)$$

$$\check{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(e)1}^{(i)} \quad , \quad \check{\mathbf{M}}_{(k)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(k)1}^{(i)} \quad , \quad \check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(i)} = {}^H\check{\mathbf{M}}_{(f)1}^{(i)} \quad (5.131)$$

gegeben. Hieraus wird der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor, der in der Benutzerschnittstelle UMAT an ABAQUS zurückgegeben werden muss, über

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{c}_1^{(\text{elast})} [\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_{p1}] \quad (5.132)$$

bestimmt.

### 5.3 Bestimmung der konsistenten Tangente

Wie in Abschnitt 5.1 bereits erläutert, verwendet ABAQUS zur Bestimmung der Gleichgewichtslage bei nichtlinearem Materialverhalten ein Newtonverfahren. Um die quadratische Konvergenz dieses Verfahrens zu gewährleisten, wird die sogenannte konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix in Gleichung (5.10) benötigt. Diese wird von ABAQUS intern berechnet, wenn über UMAT die partielle Ableitung der Spannung  $\mathbf{S}$ , die als Funktion des Verzerrungsmaßes  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  dargestellt werden kann, nach diesem Verzerrungsmaß

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.133)$$

an ABAQUS übergeben wird (vgl. Hib [31], Abschnitt 4.2). In Jansohn [37] und Lämmer [39] wurde gezeigt, welche Terme bei der Bildung der konsistenten Tangente auftreten, und welche davon vom Benutzer und welche von ABAQUS intern berechnet werden müssen.

Die konsistente Tangente hat keinen Einfluß auf das Ergebnis der FE-Rechnung, sie hat nur Einfluß auf die Anzahl der Iterationen die zum Bestimmen einer neuen Gleichgewichtslage benötigt werden und beschleunigt somit die Rechnung.

Die analytische Bestimmung der partiellen Ableitung ist sehr aufwendig und fehleranfällig. Ausserdem ist sie sehr unflexibel, was Änderungen an den Materialgleichungen betrifft. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Ableitung mit einem numerischen Verfahren ermittelt, wie es z.B. in Miehe [45] vorgestellt wurde:

Bekannt aus der Spannungsermittlung für das von ABAQUS vorgegebene Verzerrungsmaß  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  sei der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor  $\mathbf{S}$ . Die numerische Näherung

der partiellen Ableitung  $\mathcal{D}$  wird durch den vorderen Differenzenquotienten ermittelt. Zur Bildung des Differenzenquotienten bei einer skalaren Funktionen  $g$  die von einer skalaren Größe  $x$  abhängt, wird zum Funktionsargument eine kleine Zahl  $\chi$  hinzugezählt, d.h. man geht ein kleines Stück in die sogenannte *Abstiegsrichtung* der Funktion, und bestimmt dort den Funktionswert. Die Ableitung ergibt sich dann aus

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{g(x + \chi) - g(x)}{\chi} \quad . \quad (5.134)$$

Bei der Bildung des vorderen Differenzenquotienten einer tensoriellen Funktion die von einer tensoriellen Größe abhängt, existieren unter der Voraussetzung von symmetrischen Tensoren sechs Abstiegsrichtungen. Deshalb wird mit einer Schleife über alle sechs unabhängigen Komponenten des vorgegeben Verzerrungsmaßes  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  ein neues Verzerrungsmaß  $\check{\Delta}\boldsymbol{\epsilon}$  bestimmt, wobei jedesmal eine neue Abstiegsrichtung gewählt wird, d.h. es wird  $\chi$  jedesmal zu einer anderen Komponente addiert. Die Schleife läuft nacheinander über die Komponenten  $(kl) \rightarrow (11), (22), (33), (12), (13), (23)$  und das neue Verzerrungsmaß ist in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  gegeben durch

$$\check{\Delta}\boldsymbol{\epsilon}^{(kl)} = \Delta\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\chi}{2} [\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k] \quad . \quad (5.135)$$

Die Spannung für dieses neue Dehnungsincrement berechnet sich aus

$$\check{\mathbf{S}}^{(kl)} = \mathbf{S}(\check{\Delta}\boldsymbol{\epsilon}^{(kl)}) \quad . \quad (5.136)$$

Hieraus folgt die numerische partielle Ableitung

$$\mathcal{D}_{ijkl} = \frac{1}{\chi} \left[ \check{S}_{ij}^{(kl)} - S_{ij} \right] \quad , \quad (5.137)$$

die über die Benutzerschnittstelle UMAT an ABAQUS übergeben wird.

Bei der Wahl des Inkrements  $\chi$  in Abstiegsrichtung muss ein Kompromiss eingegangen werden. Wird es zu groß gewählt, ist die errechnete Tangente zu ungenau. Bei zu kleinem  $\chi$  (in der Größenordnung der Rechnergenauigkeit), können entscheidende Nachkommastellen verloren gehen, was zu falschen Ergebnissen bei der Tangentenberechnung führt. Eine übliche Wahl hierfür lautet

$$\chi = \sqrt{\text{Maschinengenauigkeit}} \quad . \quad (5.138)$$

Ein Nachteil der numerisch bestimmten Tangente ist der größere numerische Aufwand. Neben dem ersten Durchlaufen des Spannungsalgorithmus zur Ermittlung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors, muss dieser Programmteil nun zusätzlich noch sechs

mal ausgeführt werden. Der numerische aufwendigste und damit rechenzeitintensivste Programmteil ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems im zweiten Operator. Die Effizienz der Tangentenbestimmung kann dadurch gesteigert werden, dass als Startwert des Newtonverfahrens die Lösung, die aus der Spannungsberechnung bekannt ist, verwendet wird. Da sich die jeweils neu bestimmten Verzerrungsmaße  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  nur minimal vom ursprünglichen Maß  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  unterscheiden, weicht auch die berechnete Spannung  $\tilde{\mathbf{S}}^{(kl)}$  nur minimal von  $\mathbf{S}$  ab. Es sind deshalb nur sehr wenige Iterationen im Newtonverfahren erforderlich, um diese neue Spannung zu ermitteln.

# Kapitel 6

## Numerische Beispiele

Mit dem hergeleiteten Materialmodell zur Beschreibung von anisotropem elastisch-inelastischem Materialverhalten werden in diesem Kapitel für einige einfache Belastungen Testrechnungen durchgeführt. Damit soll zum einen gezeigt werden, dass das Materialmodell in der Lage ist, durch eine geeignete Wahl der Materialparameter ein physikalisch plausibles Materialverhalten vorherzusagen. Das Modell ist allerdings beschränkt auf den Fall von Anisotropie, die von Anfang an in dem Material vorherrscht, und bei der mit zunehmender Deformation nur Rotationen der Anisotropieachsen induziert werden. Es ist nicht möglich, die Entwicklung von anfänglich isotropem zu einem anisotropen Material oder den Übergang zwischen verschiedenen Typen von Anisotropie zu beschreiben.

Ausserdem wird durch einen Vergleich zwischen einer mittels eines Runge–Kutta–Verfahrens erzielten Lösung und der mit der FE–Methode gewonnenen Ergebnisse der Spannungsalgorithmus im FE–Programm überprüft.

### 6.1 Einfache Scherung

Um eine Materialantwort durch quasianalytisches Lösen des in Abschnitt 4.3 angegebenen Anfangs–Randwertproblems zu erhalten, muss eine Belastung gewählt werden, bei der sich ein homogener Deformationszustand und ein homogener Spannungszustand im Körper einstellt. Dies ist z.B. bei einer einfachen Scherung der Fall. Hierbei wird ein Quader an seiner Unterseite festgehalten und an seiner Oberseite eine Verschiebung  $\mathbf{u}$  in tangentialer Richtung entlang einer Quaderseite aufgebracht (vgl. Abbildung 6.1). Wird mit

$$\gamma = \tan \phi \tag{6.1}$$

eine Scherung definiert, wobei  $\phi = \phi(t)$  den Winkel der Scherung beschreibt, lautet der sich einstellende Deformationsgradient (*scherung* =  $\gamma(t)$ )

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6.2)$$

Der Geschwindigkeitsgradient mit symmetrischer Verzerrungsgeschwindigkeit und antisymmetrischem Wirbeltensor ist durch

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

gegeben, wobei mit  $\dot{\gamma}$  die Ableitung der Scherung  $\gamma$  nach der Zeit  $t$  bezeichnet wird.

Für diese Geometrie und diese Randbedingungen werden die Differentialgleichungen mit Hilfe eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens 4.Stufe (Uni [67]) gelöst. Die Testrechnungen werden sowohl für transversal isotropes als auch für orthotropes Materialverhalten durchgeführt. Dabei wird der Einfluss einiger Materialparameter auf das Materialverhalten untersucht. Ausserdem wird untersucht, inwieweit die Anfangsbedingungen für die Orientierung der Anisotropierichtungen Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Materialantwort besitzen.

Ein weiterer Vorteil der einfachen Scherung liegt darin, dass überprüft werden kann, ob die verwendeten objektiven Ableitungen in der Lage sind eine konvergente Lösung zu erzeugen, oder ob Oszillationen zu beobachten sind. Dies ist z.B. bei der Verwendung von Jaumann–Ableitungen der Fall (siehe hierzu Lehmann [41] und Haupt und Tsakmakis [25]).

### 6.1.1 Transversale Isotropie

Für transversale Isotropie wird angenommen, dass die Richtung der Anisotropieachse in der Scher–Ebene ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ) liegt. Der Euler–Winkel  $\vartheta$  besitzt dann den Wert  $\vartheta = -90^\circ$ , während der zweite Euler–Winkel  $\psi$  die Orientierung in dieser Ebene beschreibt (siehe Abbildung 6.1). Dabei nimmt  $\psi$  für Drehungen im Gegenuhrzeigersinn positive Werte an. Um auch Effekte zu erfassen die aus der Scher–Ebene wirken, wurden die Rechnungen mit dem kompletten dreidimensionalen Modell durchgeführt.

Ein Problem zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens besteht darin, geeignete Materialparameter zu bestimmen. Hierzu müssen Experimente gefunden

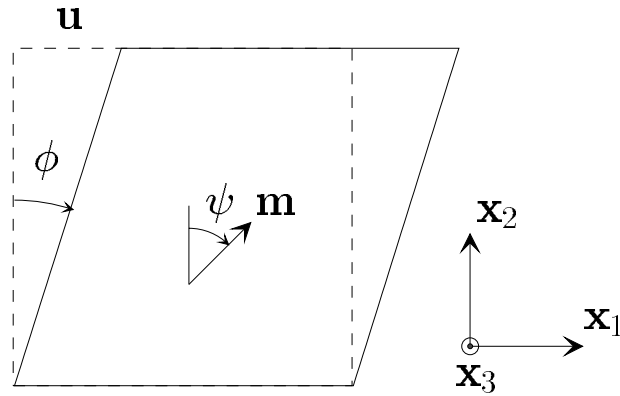


Abbildung 6.1: Einfache Scherung (transversale Isotropie)

werden, aus denen dann mit geeigneten Verfahren (z.B. neuronale Netze) die Materialparameter ermittelt werden können. Da dies im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war, wurden (mit Ausnahme der Elastizitätsparameter) Materialparameter so angenommen, dass physikalisch akzeptable Ergebnisse erhalten werden. Die Elastizitätsparameter hingegen wurden aus dem Tabellenbuch Hellwege [30] für Einkristalle entnommen. Im transversal isotropen Fall wurden hierzu die Materialparameter für Titan mit

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 160 \text{ GPa} \quad , \quad c_{33} = 181 \text{ GPa} \quad , \quad c_{55} = 93.0 \text{ GPa} \\
 c_{12} &= 90 \text{ GPa} \quad , \quad c_{13} = 66 \text{ GPa}
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

$\alpha_3 = 35.0 \cdot 10^3 \text{ MPa}$	$c_3 = 2000.0 \text{ MPa}$	$\nu_1 = 20.0$
$\alpha_5 = -46.75 \cdot 10^3 \text{ MPa}$	$c_5 = 800.0 \text{ MPa}$	$\nu_2 = 20.0$
$\alpha_6 = 45.0 \cdot 10^3 \text{ MPa}$	$c_6 = 0.0 \text{ MPa}$	$\nu_3 = 20.0$
$\alpha_7 = 81.25 \cdot 10^3 \text{ MPa}$	$c_7 = 0.0 \text{ MPa}$	$\nu_4 = 0.0$
$\alpha_8 = -24.0 \cdot 10^3 \text{ MPa}$	$c_8 = 0.0 \text{ MPa}$	$\nu_5 = 0.0$
$\gamma^{(\text{iso})} = 4000.0 \text{ MPa}$	$b_3 = 17.5$	$\nu_6 = 200.0$
$\beta^{(\text{iso})} = 20.0$	$b_5 = 0.0$	$m = 4.0$
$k_0 = 200.0 \text{ Mpa}$	$b_6 = 0.0$	$\eta = 3.0 \cdot 10^4 \text{ Mpa}^m \text{ s}$
$\lambda = 100.0 \text{ MPa}^{-1}$	$b_7 = 0.0$	
	$b_8 = 0.0$	

Tabelle 6.1: Materialparameter für transversale Isotropie



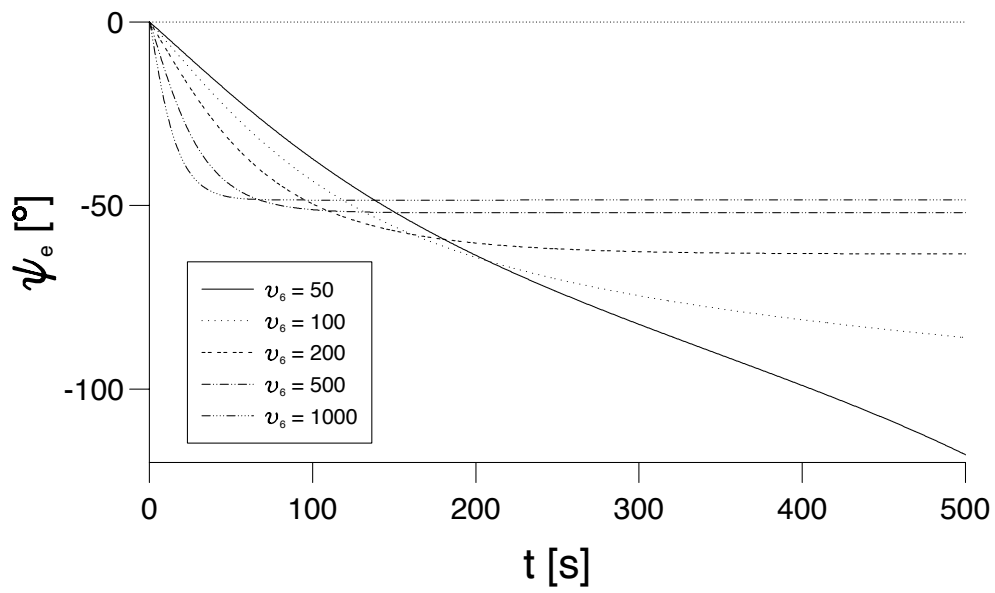


Abbildung 6.2: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit des Materialparameters  $v_6$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

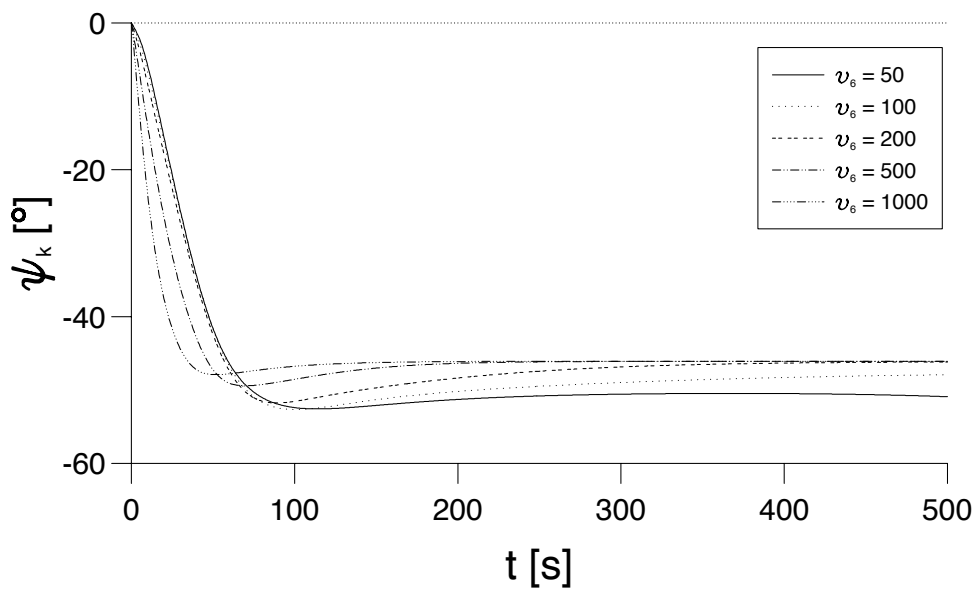


Abbildung 6.3: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit des Materialparameters  $v_6$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

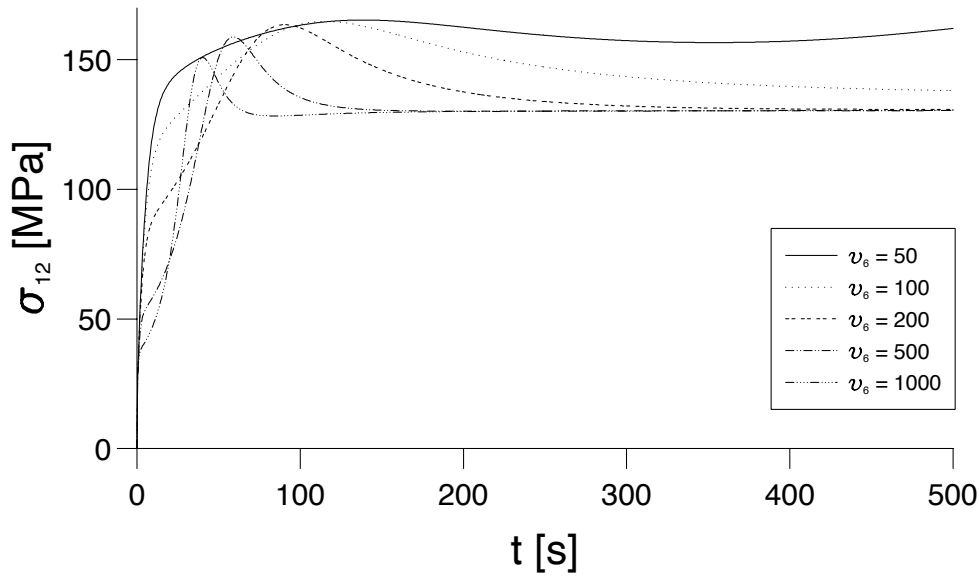


Abbildung 6.4: Scherspannung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\nu_e$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} \text{s}^{-1}$ )

verwendet, die über die Gleichungen (4.148) in die transversal isotropen Materialparameter  $\alpha_3 - \alpha_8$  umgerechnet werden können. Der komplette Parametersatz mit dem die folgenden Rechnungen (sofern nichts anderes erwähnt wird) durchgeführt wurden ist in Tabelle 6.1 angegeben.

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass mit den gewählten Materialparametern kein Experiment modelliert werden soll. Hierzu müssten aufwendige numerische und experimentelle Untersuchungen erfolgen. Ziel der folgenden Rechnungen ist es zu zeigen, dass das Modell prinzipiell in der Lage ist, ein physikalisch plausibles Verhalten zu beschreiben. Als Anfangsorientierung für die Anisotropierichtungen wurde angenommen, dass die Achsen in  $\mathbf{x}_2$ -Richtung zeigen. Die Eulerwinkel im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion haben dann die Anfangswerte

$$\psi_e = 0^\circ \quad , \quad \psi_k = 0^\circ \quad , \quad \psi_f = 0^\circ \quad . \quad (6.5)$$

In den Abbildungen 6.2 bis 6.10 sind für eine Scherungsgeschwindigkeit von  $\dot{\gamma} = 10^{-2} \text{s}^{-1}$  die Orientierungen im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung sowie die Scherspannung über der Zeit  $t$  aufgetragen.

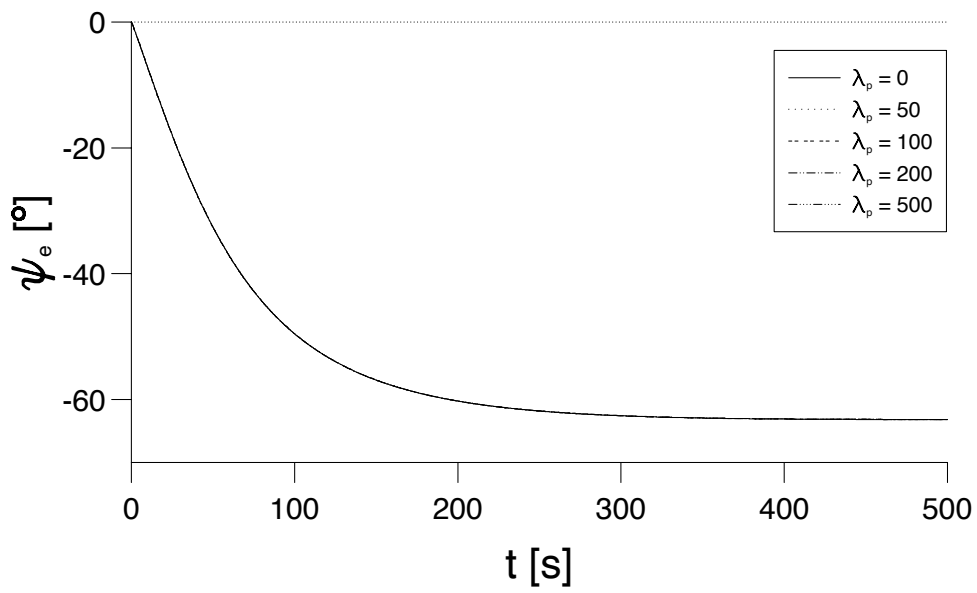


Abbildung 6.5: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

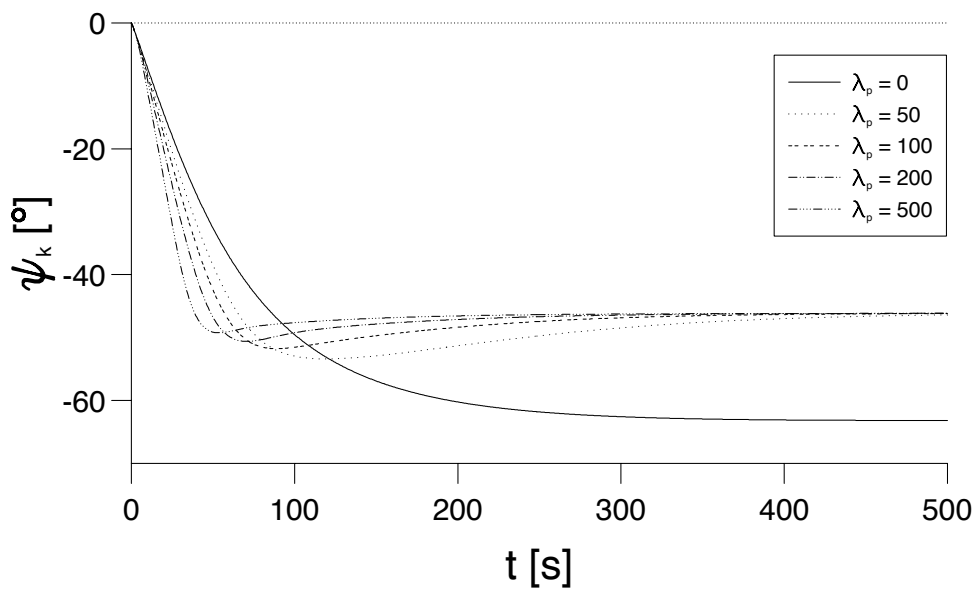


Abbildung 6.6: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

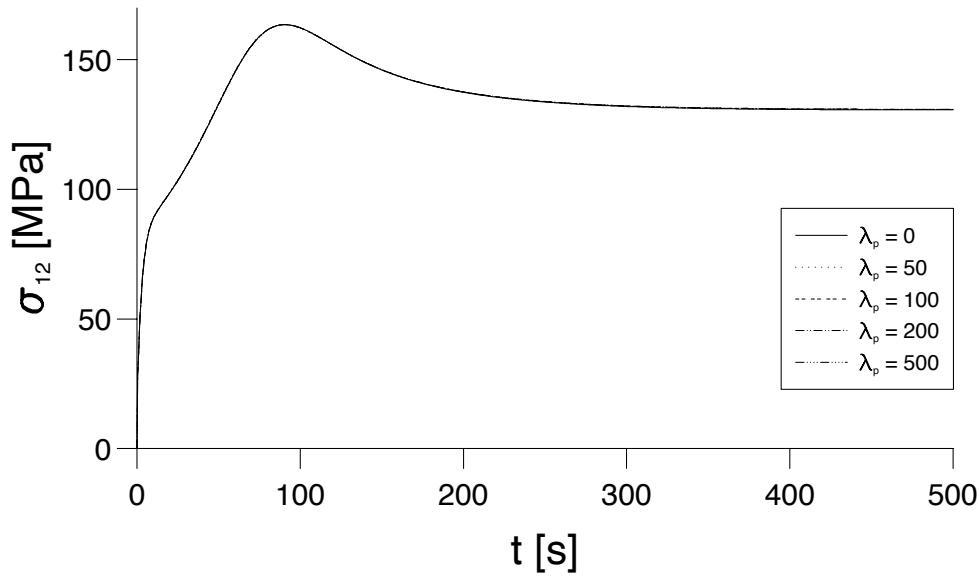


Abbildung 6.7: Scherspannung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

In den ersten drei Diagrammen 6.2, 6.3 und 6.4 wird der Einfluss des Materialparameters  $\nu_6$  der transversal isotropen Fließfunktion auf die Materialantworten dargestellt. Da die Eulerwinkel im Elastizitätsgesetz und in der Fließfunktion identisch sind, wird nur der elastische Eulerwinkel  $\psi_e$  aufgetragen. Es wird auf den Materialparameter  $\nu_6$  ein besonderes Augenmerk geworfen, weil im Falle verschwindend kleiner elastischer Verzerrungen (starrplastischer Körper) und verschwindender kinematischer Verfestigung die Richtung  $\mathbf{N}^{(A)}$  immer noch von Null verschieden ist (vgl. Gleichung (4.185))

$$\mathbf{N}^{(A)} = \frac{1}{2f} \left\{ \frac{1}{2} \nu_6 (\boldsymbol{\sigma}^{(S)} \mathbf{M}_{(f)} - \mathbf{M}_{(f)} \boldsymbol{\sigma}^{(S)}) \right\} . \quad (6.6)$$

Die Ergebnisse zeigen, dass ab einem Betrag ( $50 \leq \nu_6 \leq 100$ ) dieses Parameters sowohl die Eulerwinkel  $\psi_e$  und  $\psi_k$  als auch die Schubspannung  $\sigma_{12}$  gegen einen Grenzwert streben. Unterschreitet der Parameter diesen Betrag, wird ein solcher Grenzwert i.a. nicht erreicht. Der Eulerwinkel  $\psi_e$  im Elastizitätsgesetz wächst weiter an und die Schubspannung weist als Folge davon Oszillationen auf. Ferner sieht man, dass die anfängliche Steigung umso kleiner und die Grenzwert für die Winkel umso schneller erreicht wird, je größer  $\nu_6$  ist. Auch die Schubspannung erreicht ihren Grenzwert umso schneller, je größer  $\nu_6$  ist, während der Maximalwert abnimmt.

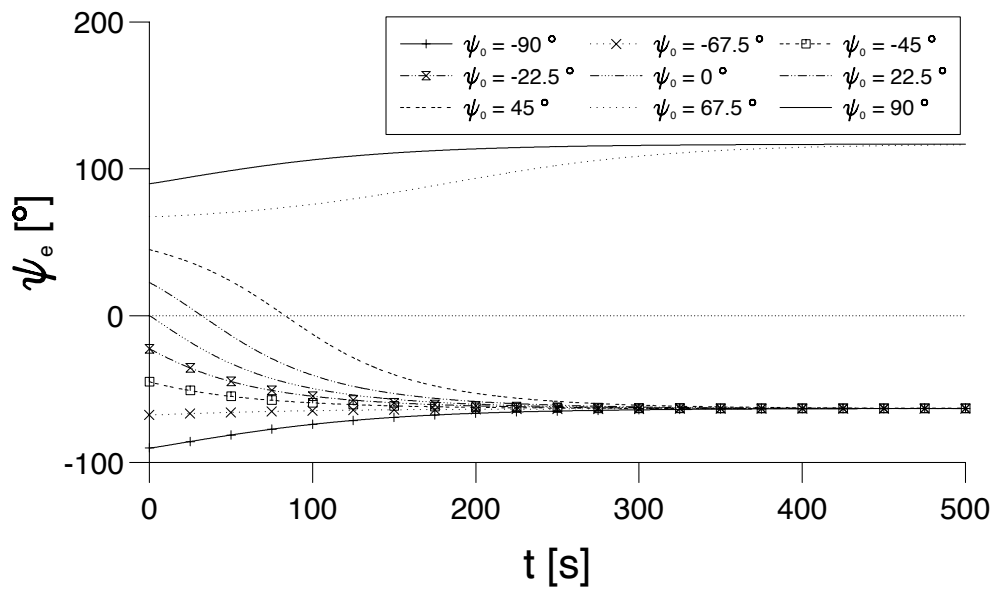


Abbildung 6.8: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

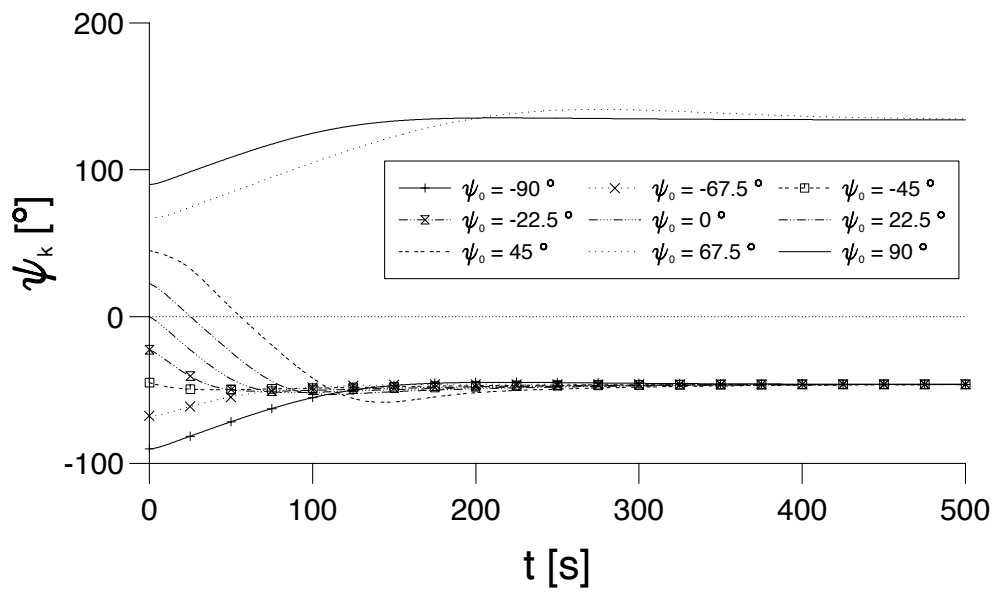


Abbildung 6.9: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

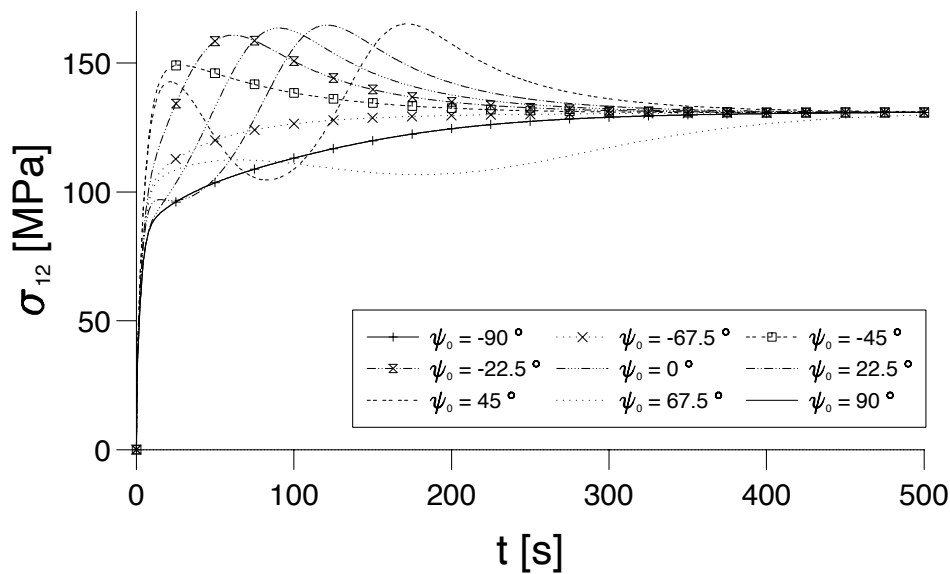


Abbildung 6.10: Scherspannung in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

Der Einfluss des Materialparameters  $\lambda$ , der in der Evolutionsgleichung für die Strukturtenoren der kinematischen Verfestigung auftritt, wird in den Abbildungen 6.5, 6.6 und 6.7 gezeigt. Der Effekt auf den „elastischen Eulerwinkel“  $\psi_e$  und auf die Schubspannung  $\sigma_{12}$  ist hierbei so gering, dass in den Diagramme 6.5 und 6.7 alle Kurven deckungsgleich verlaufen. Der Verlauf des Eulerwinkels der kinematischen Verfestigung wird dagegen beeinflusst. Für  $\lambda = 0$  ist er identisch mit dem Eulerwinkel des Elastizitätsgesetzes  $\psi_e$ , er verläuft monoton fallend. Bei Werten verschieden von Null stellt sich dagegen zunächst ein Minimum ein, bevor der Grenzwert erreicht wird. Je größer  $\lambda$  ist umso stärker ist zunächst der Abfall von  $\psi_k$ , desto früher wird aber auch der Grenzwert, der unabhängig vom Materialparameter  $\lambda$  ist, erreicht.

Zuletzt wurde noch untersucht, wie sich unterschiedliche Anfangsorientierungen auf das Materialverhalten auswirken. Dazu wurden für die Eulerwinkel verschiedene Anfangswerte zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$  gewählt. In den Rechnungen wurde für die Orientierung im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion der Anfangswinkel immer als gleich angenommen und mit  $\psi_0$  bezeichnet. Die zugehörigen Kurven sind in den Abbildungen 6.8, 6.9 und 6.10 aufgezeichnet. Es zeigt sich, dass die Eulerwinkel für beliebige Anfangswerte denselben Grenzwert erreichen. Die unterschiedlichen Grenzwert-

te, die für die Anfangswerte von  $\psi = 67.5^\circ$  bzw.  $\psi = 90^\circ$  im Vergleich zu den restlichen Anfangswerten erreicht werden, liegen an der Invarianz des Materialmodells gegenüber Rotationen um  $180^\circ$ . Um genau diesen Betrag unterscheiden sich die beiden Grenzwerte, und die Anisotropierichtungen sind somit gleichwertig, sie weisen nur in entgegengesetzte Richtungen. Insbesondere sind die Kurven für die Startwerte  $\psi = 90^\circ$  und  $\psi = -90^\circ$  entweder um den Betrag von  $180^\circ$  parallelverschoben (Abbildung 6.8 und Abbildungen 6.9) bzw. verlaufen deckungsgleich (6.10).

Am Verlauf der Schubspannung ist ein deutlicher Effekt zu sehen. Es wird zwar derselbe Grenzwert erreicht, allerdings kann je nach Wahl der Anfangsorientierung ein monotoner Verlauf der Schubspannung ( $\psi = -67.5^\circ, \pm 90^\circ$ ), ein Verlauf mit genau einem Maximum ( $\psi = -45^\circ, -22.5^\circ, 0^\circ$ ) und ansonsten ein Verlauf mit einem Maximum und einem Minimum erzielt werden. Solche Verläufe wurden sowohl in Torsions-Experimenten (vgl. Montheillet et al. [46], bei anfänglich isotropem Material) beobachtet, als auch von den Modellen von Dafalias (vgl. Dafalias [16]) beschrieben.

Es hat sich weiterhin gezeigt, dass bei allen Rechnungen die Anisotropieachse in der Scherebene ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ) bleibt, d.h. der Eulerwinkel  $\vartheta$  bleibt zeitlich konstant auf seinem Anfangswert  $\vartheta = -90^\circ$ .

## 6.1.2 Orthotropie

Bei den Untersuchungen für orthotropes Materialverhalten wurde davon ausgegangen, dass das Dreibein  $(\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \mathbf{m}^{(3)})$  so orientiert ist, dass die  $\mathbf{m}^{(3)}$ -Achse immer in  $\mathbf{x}_3$ -Richtung zeigt, und die  $(\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)})$ -Ebene der Orthotropie-Achsen somit in der Scherebene ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ) liegt. Die Orientierung der Anisotropieachsen wird dann nur durch einen Winkel  $\psi$  beschrieben, während die anderen Eulerwinkel die Werte  $\varphi = 0^\circ$  und  $\vartheta = 0^\circ$  haben. Trotz des eigentlich zweidimensionalen Problems wurden auch diese Testrechnungen mit dem kompletten dreidimensionalen Modell durchgeführt, um auch hier eventuelle Effekte, die zu Orientierungen führen die aus der Scherebene weisen, berücksichtigen zu können.

Als elastische Materialparameter wurden die Elastizitätsparameter für ein Bronze-Kristall aus dem Tabellenbuch Hellwege [30] verwendet

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 188.0 \text{ GPa} \quad , \quad c_{22} = 158.0 \text{ GPa} \quad , \quad c_{33} = 208.0 \text{ GPa} \\
 c_{44} &= 140.0 \text{ GPa} \quad , \quad c_{55} = 118.4 \text{ GPa} \quad , \quad c_{66} = 108.8 \text{ GPa} \\
 c_{12} &= 56.0 \text{ GPa} \quad , \quad c_{13} = 60.0 \text{ GPa} \quad , \quad c_{23} = 69.0 \text{ GPa} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

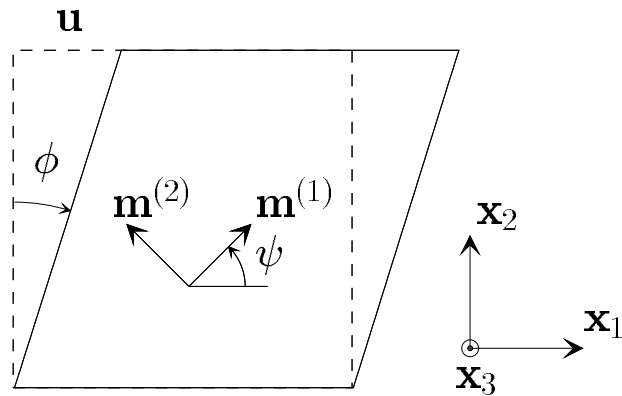


Abbildung 6.11: Einfache Scherung (Orthotropie)

Der komplette Parametersatz für die folgenden Testrechnungen (sofern nichts anderes erwähnt) ist in Tabelle 6.2 angegeben.

$\alpha_3=74.8 \cdot 10^3$ MPa	$c_3=2000.0$ MPa	$v_1=20.0$
$\alpha_5=-31.2 \cdot 10^3$ MPa	$c_5=800.0$ MPa	$v_2=20.0$
$\alpha_7=-9.6 \cdot 10^3$ MPa	$c_7=100.0$ MPa	$v_3=10.0$
$\alpha_8=29.2 \cdot 10^3$ MPa	$c_8=0.0$ MPa	$v_4=1.0$
$\alpha_9=19.6 \cdot 10^3$ MPa	$c_9=0.0$ MPa	$v_5=1.0$
$\alpha_{10}=-13.0 \cdot 10^3$ MPa	$c_{10}=0.0$ MPa	$v_6=1.0$
$\alpha_{11}=1.6 \cdot 10^3$ MPa	$c_{11}=0.0$ MPa	$v_7=0.0$
$\alpha_{12}=-2.4 \cdot 10^3$ MPa	$c_{12}=0.0$ MPa	$v_8=0.0$
$\alpha_{13}=11.4 \cdot 10^3$ MPa	$c_{13}=0.0$ MPa	$v_9=0.0$
$\gamma^{(iso)}=4000.0$ MPa	$b_3=17.5$	$v_{10}=0.0$
$\beta^{(iso)}=20.0$	$b_5=0.0$	$v_{11}=0.0$
$k_0=200.0$ Mpa	$b_7=0.0$	$v_{12}=20.0$
$\lambda=100.0$ MPa <sup>-1</sup>	$b_8=0.0$	$m=4.0$
	$b_9=0.0$	$\eta=3.0 \cdot 10^4$ Mpa <sup>m</sup> s
	$b_{10}=0.0$	
	$b_{11}=0.0$	
	$b_{12}=0.0$	
	$b_{13}=0.0$	

Tabelle 6.2: Materialparameter für Orthotropie



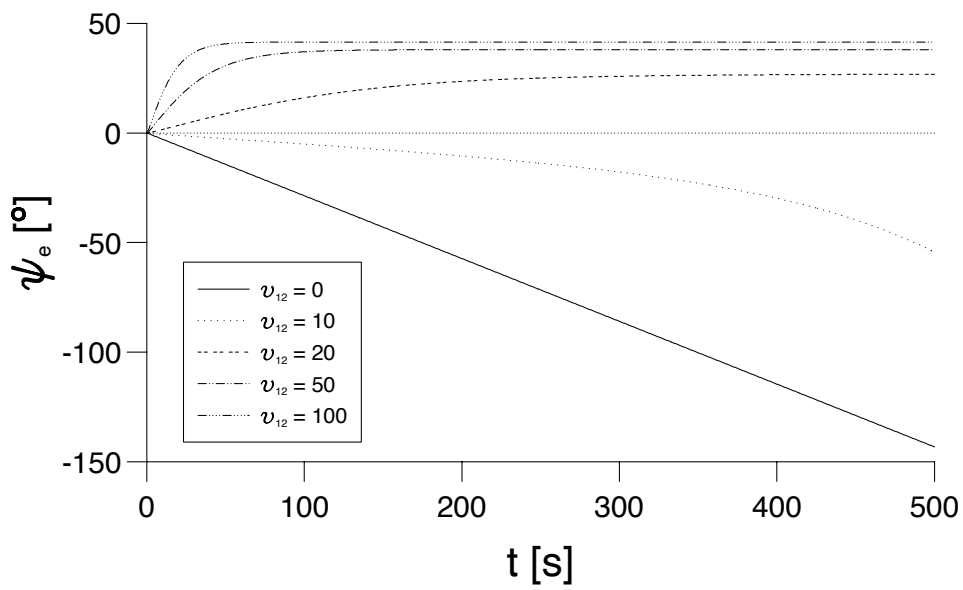


Abbildung 6.12: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit des Materialparameters  $\nu_{12}$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

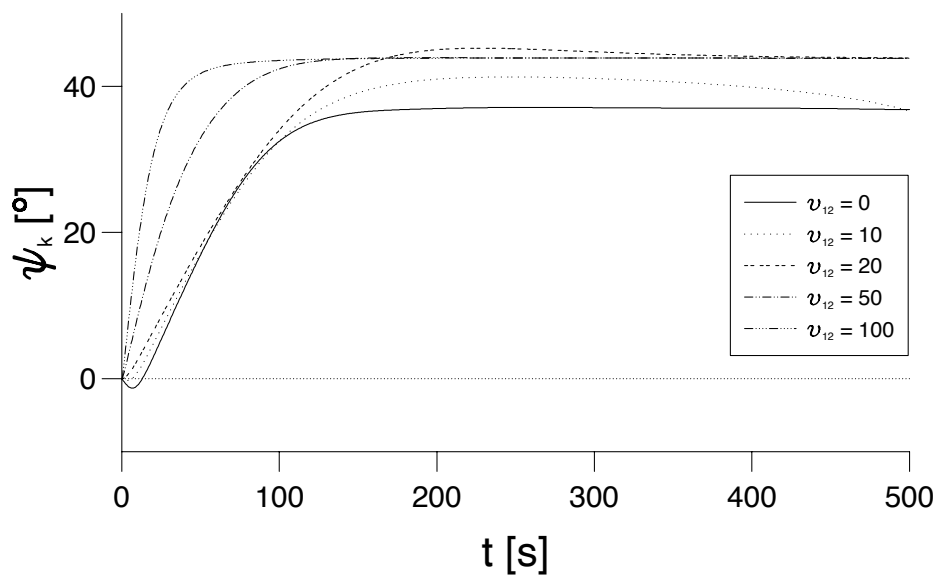


Abbildung 6.13: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\nu_{12}$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

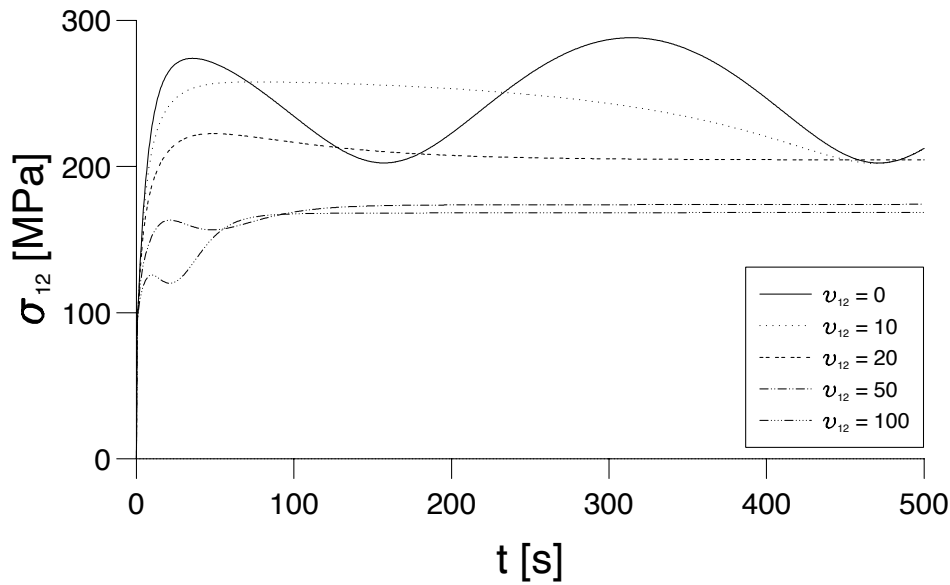


Abbildung 6.14: Scherspannung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\nu_{12}$  der Fließfunktion ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} \text{s}^{-1}$ )

Die Anfangswert für die Eulerwinkel zur Beschreibung der Orientierung im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung und in der Fließfunktion sind mit

$$\psi_e = 0^\circ \quad , \quad \psi_k = 0^\circ \quad , \quad \psi_f = 0^\circ \quad . \quad (6.8)$$

gegeben. Für eine Scherungsgeschwindigkeit von  $\dot{\gamma} = 10^{-2} \text{s}^{-1}$  werden in den nächsten neun Diagrammen die Orientierungen und Schubspannungen in Abhängigkeit von verschiedenen Materialparametern sowie in Abhängigkeit von den Anfangsorientierungen über der Zeit aufgetragen.

Zunächst wurde in den Abbildungen 6.12, 6.13 und 6.14 der Einfluss des in der Fließfunktion auftretenden Materialparameters  $\nu_{12}$  untersucht. Die beiden Eulerwinkel  $\psi$  im Elastizitätsgesetz und in der Fließfunktion sind gleich, weshalb nur der elastische Eulerwinkel aufgetragen wurde. Analytische Überlegungen für die einfache Scherung haben gezeigt, dass der Einfluss der Materialparameter  $\nu_{10}$ ,  $\nu_{11}$  und  $\nu_{12}$  identisch ist. Aus diesem Grund wurde nur der Einfluss von  $\nu_{12}$  untersucht.

Bei kleinen Werten für  $\nu_{12}$  werden für den elastischen Eulerwinkel  $\psi_e$  keine konvergenten Lösungen erzielt. Erst für größere Werte erreicht der Winkel einen Grenzwert, der umso

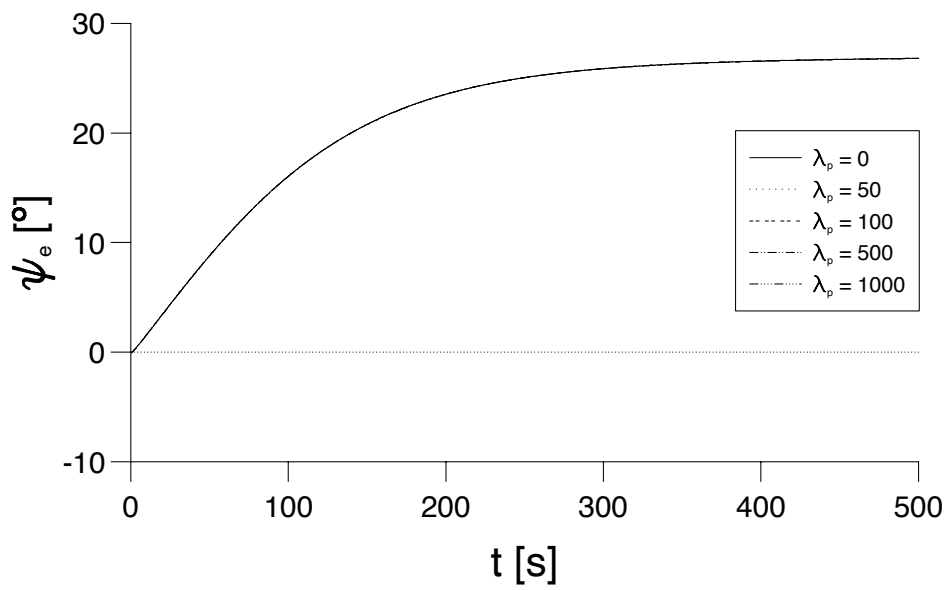


Abbildung 6.15: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

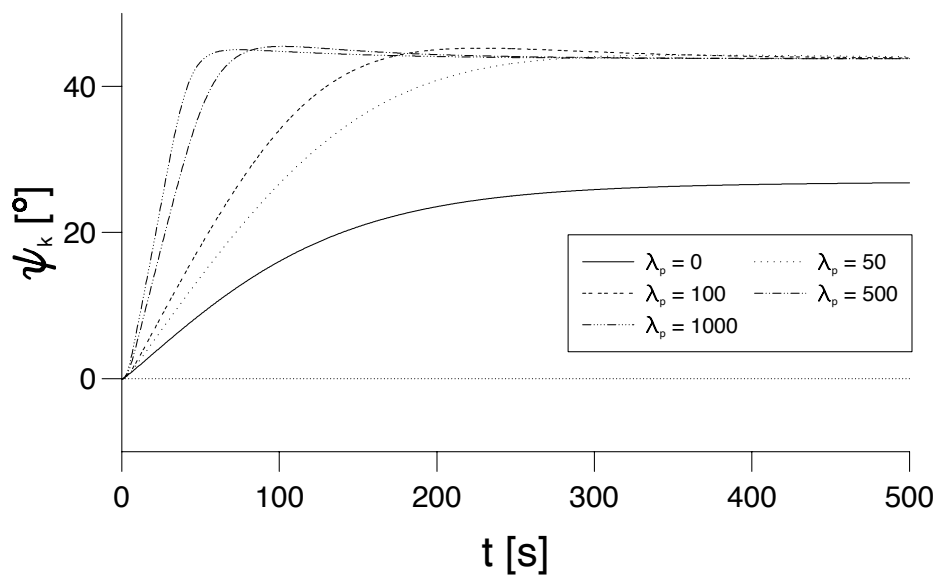


Abbildung 6.16: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

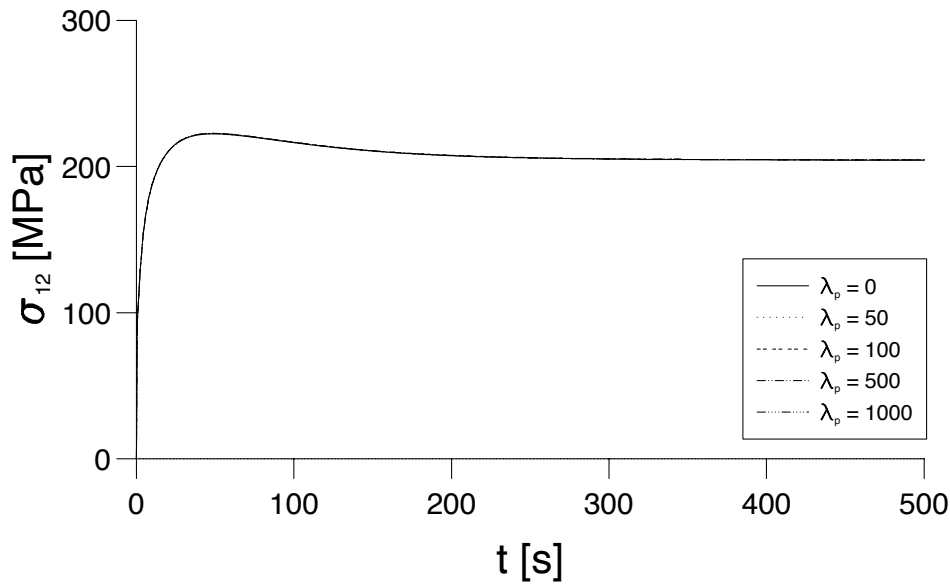


Abbildung 6.17: Scherspannung in Abhängigkeit des Materialparameters  $\lambda$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

größer ist und umso schneller erreicht wird, je größer der Materialparameter gewählt wird. Auch der Eulerwinkel in der kinematischen Verfestigung erreicht erst für größere Werte von  $v_{12}$  einen von diesem Materialparameter unabhängigen Grenzwert. Für  $v_{12} = 0$  stellt sich ein abweichender Grenzwert ein, während für  $v_{12} = 10$  kein Grenzwert erreicht wird.

Für die Scherspannung stellen sich schließlich für kleine Materialparameter Oszillationen ein, während die Scherspannung ansonsten einen Grenzwert erreicht. Dieser Grenzwert wird umso schneller erreicht und ist umso kleiner, je größer der Materialparameter ist. Außerdem ist bei den konvergenten Lösungen ein Einfluß auf den Verlauf der Scherspannung zu beobachten: Während dieser Verlauf zunächst nur einen Maximalwert durchläuft und anschließend den Grenzwert erreicht, stellt sich bei größeren Materialparametern nach dem Maximum noch ein Minimum ein, bevor der Grenzwert erreicht wird.

Wie bei transversaler Isotropie ist auch bei Orthotropie kein Einfluss des Materialparameters  $\lambda$  auf den elastischen Eulerwinkel  $\psi_e$  (siehe Abbildung 6.15) und auf die Scherspannung  $\sigma_{12}$  (siehe Abbildung 6.17) zu beobachten. Der Einfluss des Materialparameters auf den Eulerwinkel in der kinematischen Verfestigung  $\psi$  ist in Abbildung 6.16 zu erkennen. Für  $\lambda = 0$  entspricht der Verlauf dem des Eulerwinkels im Elastizitätsgesetz. Sonst wird ein von diesem Materialparameter unabhängiger Grenzwert umso schneller erreicht, je

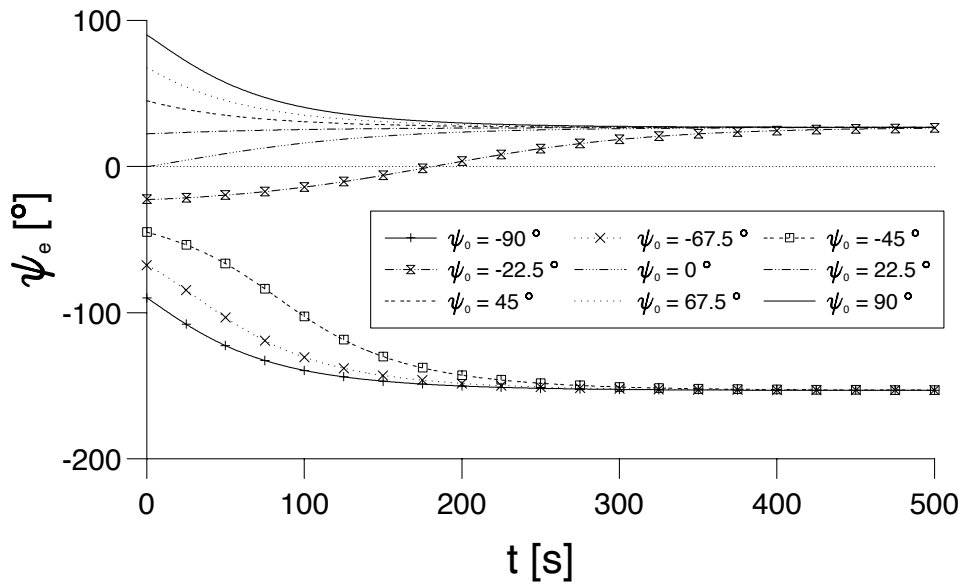


Abbildung 6.18: Orientierungen im Elastizitätsgesetz in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

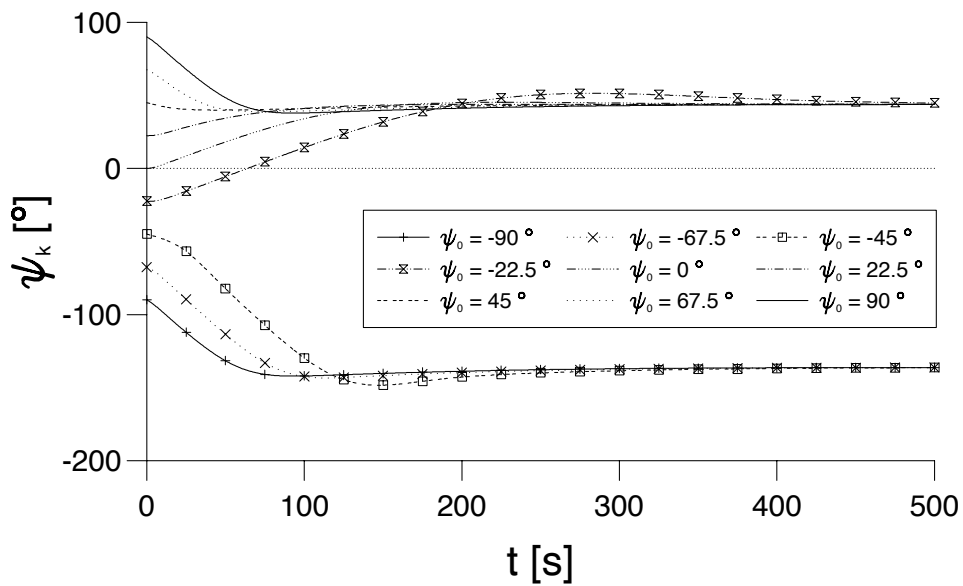


Abbildung 6.19: Orientierungen in der kinematischen Verfestigung in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

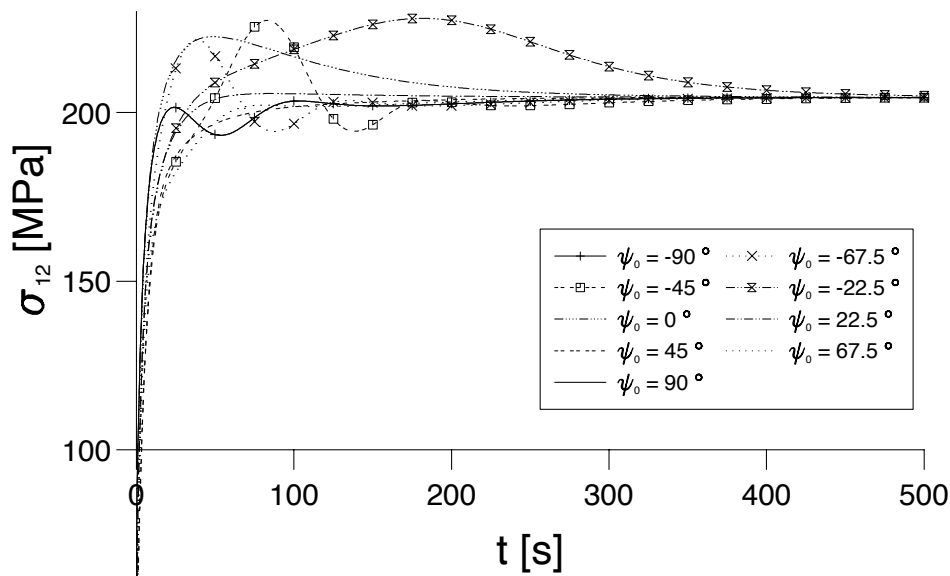


Abbildung 6.20: Scherspannung in Abhängigkeit der Anfangsorientierung  $\psi_0$  ( $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$ )

größer der Parameter ist.

Der Einfluss der Anfangsorientierungen ist in den Diagrammen 6.18, 6.19 und 6.20 abgebildet. Wie bei transversaler Isotropie haben alle Orientierungen denselben Startwert, der mit  $\psi_0$  bezeichnet wird. Auch bei Orthotropie ist das Materialverhalten invariant gegenüber Rotationen um  $180^\circ$ , weshalb die Grenzwerte für den Eulerwinkel des Elastizitätsgesetzes und der kinematischen Verfestigung, die sich um genau diesen Betrag unterscheiden, gleichwertig sind. Für die Anfangsorientierungen von  $\psi = 90^\circ$  und  $\psi = -90^\circ$  verlaufen die Orientierungen parallel (um  $180^\circ$  phasenverschoben) und die Scherspannungen deckungsgleich.

Auf die Scherspannung  $\sigma_{12}$  hat die Anfangsorientierung außerdem noch Einfluss auf den zeitlichen Verlauf. Dieser ist entweder monoton (für die Anfangswerte  $\psi = 22.5^\circ, 45.0^\circ, 67.5^\circ$ ), durchläuft ein Maximum vor Erreichen des Grenzwertes ( $\psi = -22.5^\circ, 0.0^\circ$ ) oder weist ein Maximum und ein Minimum auf ( $\psi = \pm 90^\circ, -67.5^\circ, -45.0^\circ$ ). Es sind dies dieselben Effekte die schon bei transversaler Isotropie beschrieben wurden und in den hierbei erwähnten Experimenten beobachtet wurden.

Auch bei Orthotropie treten keine Anisotropieeffekte auf, die aus der Scherebene ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ) zeigen. Die Eulerwinkel  $\varphi$  und  $\psi$  bleiben für die gesamte Rechnung konstant.

### 6.1.3 Vergleich FEM — Runge–Kutta

Das Verhalten eines Körpers unter einer inhomogenen Belastung (wie z.B. ein Zugstab oder Torsion eines Rohrs) kann nicht mehr durch die Lösung eines Differentialgleichungssystems mit dem Runge–Kutta–Verfahren gelöst werden, sondern es wird die Methode der Finiten Elemente verwendet. Zunächst wird mit dem FEM–Programm ABAQUS die einfache Scherung wie im vorigen Abschnitt berechnet, um die Qualität der FEM–Lösung zu überprüfen. Dazu wird der Quader durch ein dreidimensionales, 20–knotiges Kontinuumsselement (C3D20) diskretisiert und die Belastung in Form einer Verschiebung analog zu den Abbildungen 6.1 bzw. 6.11 auf diesen Quader aufgebracht. Die Rechnungen wurden mit den Materialparametern aus Tabelle 6.1 für transversale Isotropie und 6.2 für Orthotropie durchgeführt.

Bei den FE–Rechnungen wurde die automatische Schrittweitensteuerung von ABAQUS verwendet (siehe hierzu [32]). Hierbei wird von ABAQUS die Schrittweite angepasst, nimmt jedoch maximal den vom Benutzer vorgegeben Wert  $\Delta t_{max}$  an. Verglichen werden die Schubspannungen  $\sigma_{12}$  und der Eulerwinkel im Elastizitätsgesetz  $\psi_e$  bei verschiedenen maximalen Schrittweiten  $\Delta t_{max}$  für transversale Isotropie und Orthotropie.

#### Transversale Isotropie

Für transversale Isotropie ist in Abbildung 6.21 die Entwicklung des Eulerwinkels im Elastizitätsgesetz für eine Schergeschwindigkeit von  $\dot{\gamma} = 10^{-2} s^{-1}$  aufgetragen. Die Lösung wurde zum einen mit einem Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung und zum anderen mit ABAQUS bei einer maximalen Schrittweite von  $\Delta t_{max} = 1 s$  und  $\Delta t_{max} = 10 s$  bestimmt. Es ist zu erkennen, dass bei der kleineren maximalen Schrittweite eine hervorragende Übereinstimmung vorhanden ist (die Kurven verlaufen nahezu deckungsgleich). Bei  $\Delta t_{max} = 10 s$  ist die Abweichung zwar etwas größer, der qualitative Verlauf wird aber auf jeden Fall genau wiedergeben. Die relative Abweichung zwischen den beiden ABAQUS–Rechnungen und der Runge–Kutta–Rechnung bei der Zeit von  $t = 250 s$  beträgt 0.2 % für  $\Delta t_{max} = 1 s$  bzw. 2.1 % für  $\Delta t_{max} = 10 s$ .

Auch für die Schubspannung zeigt der Vergleich, dass die mit dem FE–Programm und die mit dem Runge–Kutta–Verfahren erzielten Lösungen sehr gut übereinstimmen (vgl. Abbildung 6.22). Insbesondere verlaufen die Kurven bei der kleineren Schrittweite für große Zeiten wieder nahezu deckungsgleich. Der maximale relative Fehler, der für die Schubspannung bei einer Zeit von ca.  $t = 80 s$  auftritt, beträgt ca. 0.9 % ( $\Delta t_{max} = 1 s$ ), bzw. 2.9 % ( $\Delta t_{max} = 10 s$ ).

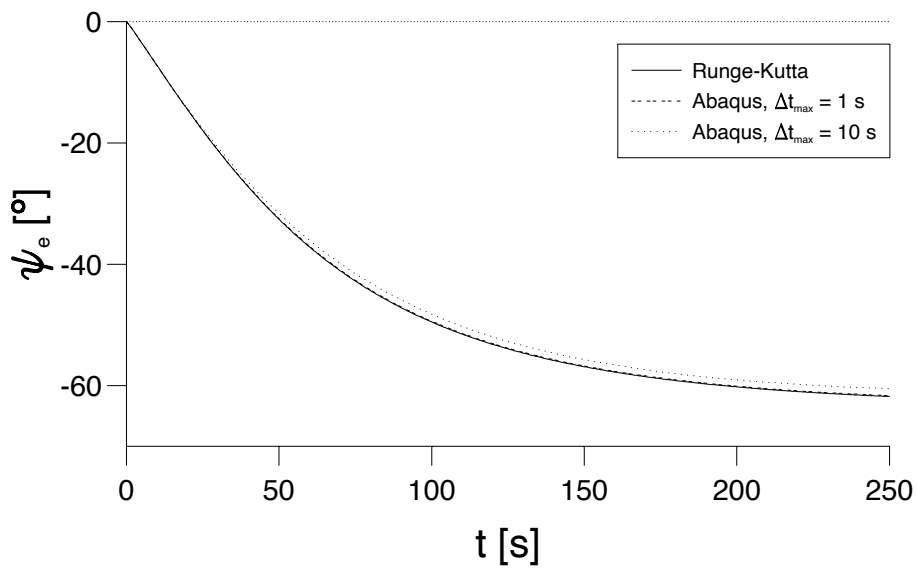


Abbildung 6.21: Vergleich zwischen Runge-Kutta-Rechnung und ABAQUS bei unterschiedlichen maximalen Schrittweiten  $\Delta t_{max}$  für den elastischen Eulerwinkel  $\psi_e$

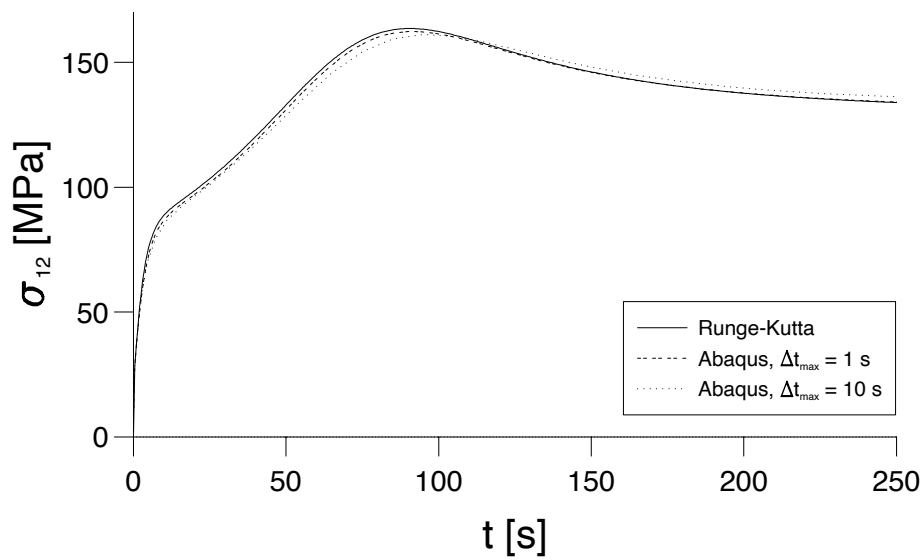


Abbildung 6.22: Vergleich zwischen Runge-Kutta-Rechnung und ABAQUS bei unterschiedlichen maximalen Schrittweiten  $\Delta t_{max}$  für die Schubspannung  $\sigma_{12}$



## Orthotropie

In den Abbildungen 6.23 und 6.24 sind für Orthotropie dieselben Vergleiche wie für transversale Isotropie zuvor durchgeführt worden. Auch hier ist die Abweichung der ABAQUS-Rechnungen sowohl bei  $\psi_e$  als auch bei  $\sigma_{12}$  von der Runge-Kutta-Lösung gering. Die relativen Abweichungen für den elastischen Eulerwinkel  $\psi_e$  betragen bei  $t = 250s$  0.4 % für die maximale Schrittweite von  $\Delta t_{max} = 1 s$  und 3.7 % bei  $\Delta t_{max} = 10 s$ . Die größte relative Abweichung bei der Schubspannung wird bei einem Zeitpunkt von  $t \approx 25s$  erreicht und beträgt für  $\Delta t_{max} = 1 s$  ca. 2.6 % und 4.5 % bei  $\Delta t_{max} = 10 s$ .

Der Vergleich hat gezeigt, dass sowohl bei transversaler Isotropie als auch bei Orthotropie selbst bei großen Schrittweiten mit dem FE-Programm ABAQUS die FE-Ergebnisse gut mit dem Runge-Kutta-Verfahren übereinstimmen. Somit können die ABAQUS-Rechnungen um Rechenzeit zu sparen mit relativ großen Schrittweiten durchgeführt werden, ohne das Ergebnis dieser Rechnungen zu sehr zu verfälschen.

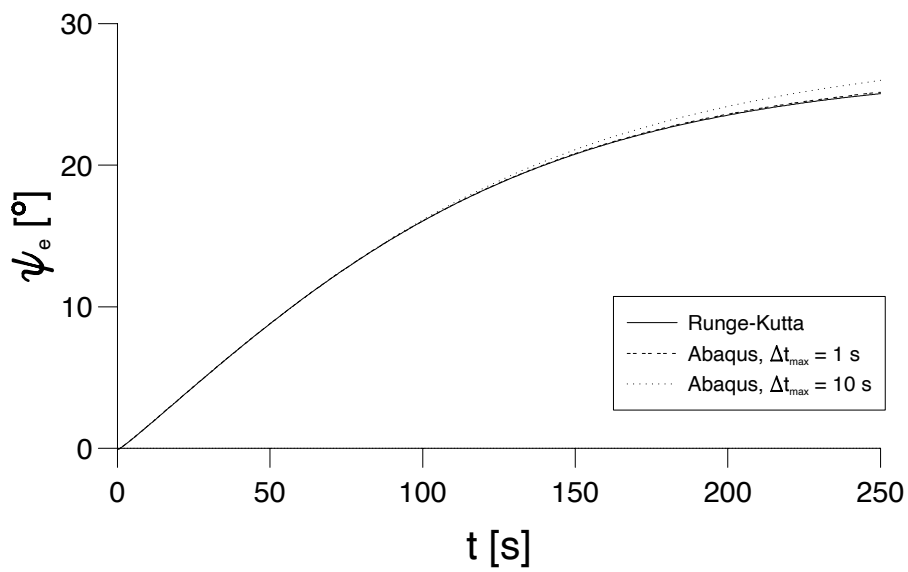


Abbildung 6.23: Vergleich zwischen Runge-Kutta-Rechnung und ABAQUS bei unterschiedlichen maximalen Schrittweiten  $\Delta t_{max}$  für den elastischen Eulerwinkel  $\psi_e$

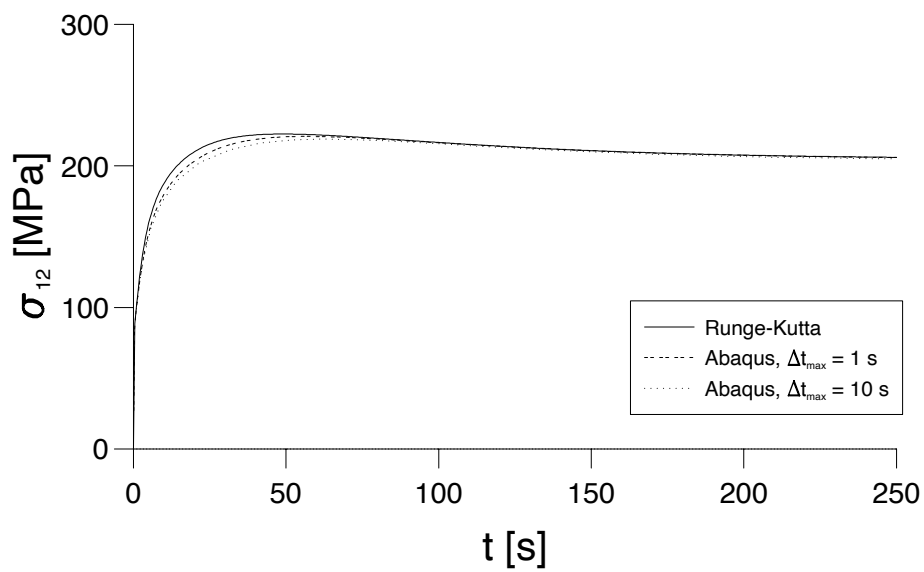


Abbildung 6.24: Vergleich zwischen Runge-Kutta-Rechnung und ABAQUS bei unterschiedlichen maximalen Schrittweiten  $\Delta t_{max}$  für die Schubspannung  $\sigma_{12}$

## 6.2 Zugversuch

Simuliert werden soll in diesem Abschnitt der Zugversuch an einem dünnen, orthotropen Blech. Das Blech ist 16.0mm lang, 8.0mm breit und 4.0mm dick. Es wird mit 48 C3D20R-Elementen vernetzt (siehe Abbildung 6.25). Da es sich um ein orthotropes Material handelt, können keine Symmetriebedingungen ausgenutzt werden und das Modell musste komplett vernetzt werden.

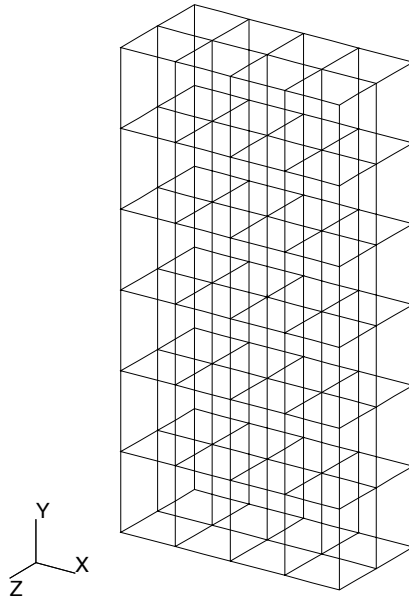


Abbildung 6.25: FE-Modell des dünnen Blechs

Als Anfangsrichtung der Orthotropie wird angenommen, dass die  $\mathbf{m}^{(3)}$ -Achse in  $\mathbf{z}$ -Richtung zeigt und die  $\mathbf{m}^{(2)}$ -Achse um  $45^\circ$  von der Zugrichtung ( $\mathbf{y}$ -Achse) abweicht. Die Anfangsorientierungen sind dann durch

$$\varphi_0 = 0^\circ \quad , \quad \vartheta_0 = 0^\circ \quad , \quad \psi_0 = 45^\circ \quad (6.9)$$

gegeben.

Als Randbedingungen wird die Unterseite des Blechs in allen drei Richtungen und die Oberseite in  $\mathbf{x}$ - und  $\mathbf{z}$ -Richtung festgehalten. In  $\mathbf{y}$ -Richtung wird eine Verschiebung  $\mathbf{u}$  aufgebracht. Die Verformungsgeschwindigkeit beträgt hierbei  $\dot{\mathbf{u}} = 10^{-2} \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ . Die Materialparameter für das orthotrope Material wurden wie in Tabelle 6.2 angenommen.

Die Verteilung der plastischen Bogenlänge auf der Vorderfont sowie auf der linken Seite des Blechs geht aus der Abbildung 6.26 hervor. Das Ergebnis ist nach einer Zeit von  $t = 304 \text{ s}$  erzielt worden, was einer Längenänderung von  $u = 3.04 \text{ mm}$  oder ca. 19.0 % entspricht. Zum Vergleich ist in Abbildung 6.27 die Verteilung der plastischen Bogenlänge in einem mit isotropem Materialmodell gerechneten Zugstab aufgezeichnet. Beim isotropen Material ist der Verlauf der plastischen Bogenlänge symmetrisch zu den Symmetrielinien des Blechs. Der inhomogene Verlauf liegt daran, dass sich das Blech bei dieser Zugbelastung zusammenziehen will, an seinem oberen und unteren Ende aufgrund der Randbedingungen jedoch daran gehindert wird. Bei dem orthotropen Material ist der Verlauf der plastischen Bogenlänge nicht mehr symmetrisch zu den Symmetriachsen der Geometrie. Er orientiert sich an den Richtungen der Orthotropie.

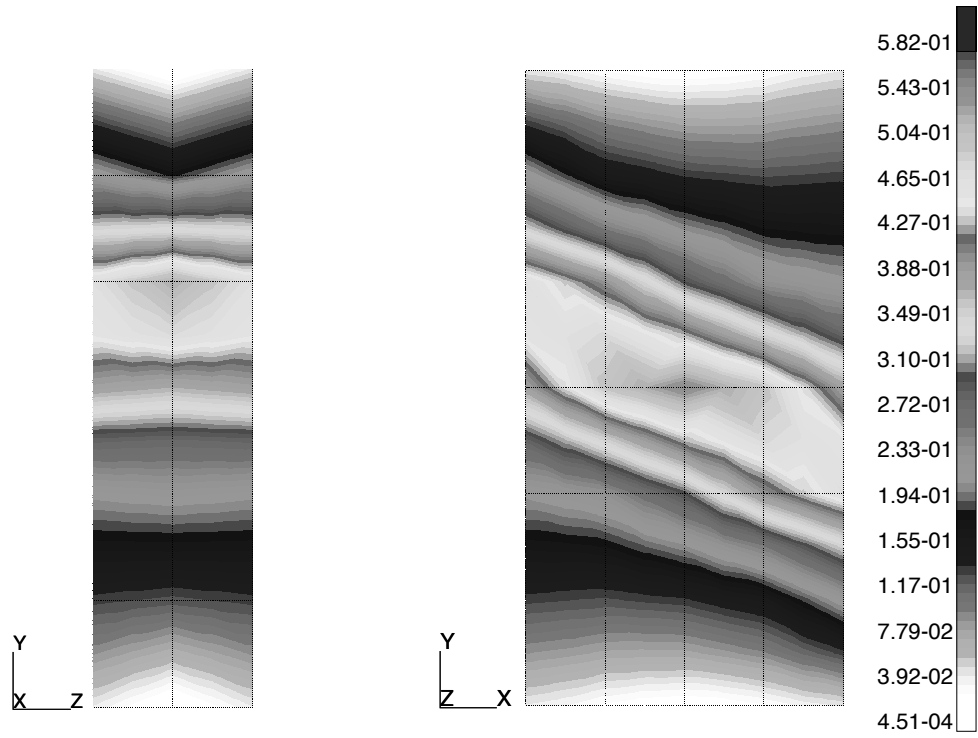


Abbildung 6.26: Verteilung der plastischen Bogenlänge bei Orthotropie

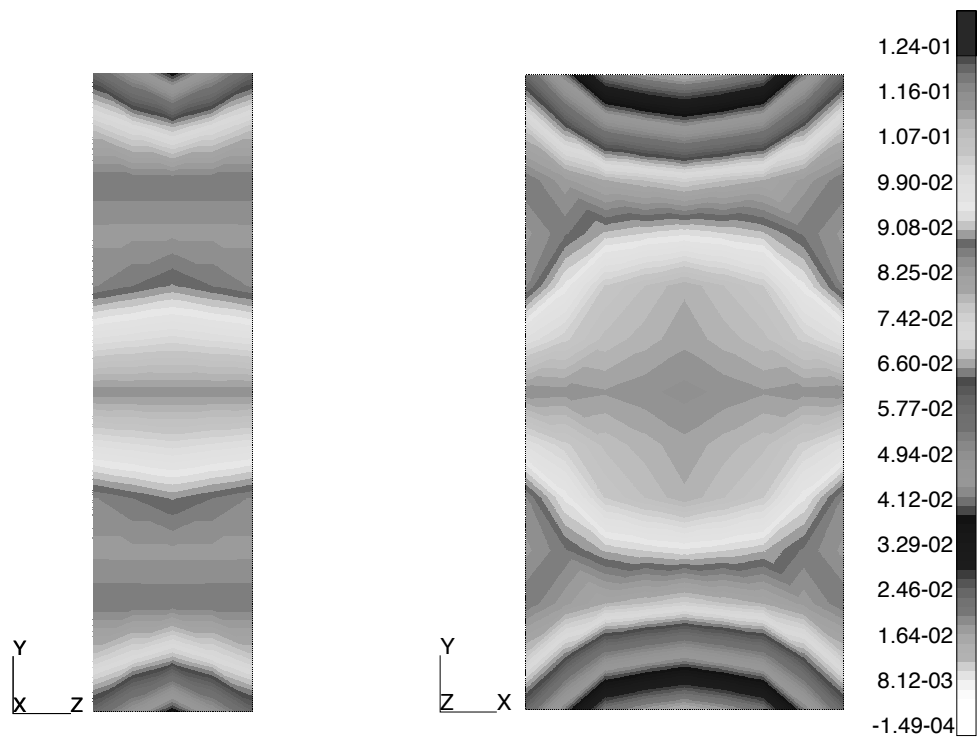


Abbildung 6.27: Verteilung der plastischen Bogenlänge bei Isotropie

### 6.3 Torsion eines dünnwandigen Rohrs

Abschließend wird mit dem orthotropen Materialmodell und den Materialparametern aus Tabelle 6.2 die Torsion eines dünnwandigen Rohrs berechnet. Die Geometrie und Vernetzung geht aus Abbildung 6.28 hervor. Hierdurch ist auch ein Zylinderkoordinatensystem  $(\mathbf{r}, \varphi, \mathbf{z})$  definiert. Die  $\mathbf{r}$ -Achse zeigt in radialer Richtung, die  $\varphi$ -Achse in Umfangsrichtung und die  $\mathbf{z}$ -Achse entlang der Symmetriachse des Rohrs. Der Innendurchmesser beträgt  $9\text{ mm}$ , die Wandstärke  $2\text{ mm}$  und die Höhe des Rohrs  $10\text{ mm}$ . Wie im Abschnitt zuvor wurden zur Vernetzung die Kontinuumsselemente C3D20R verwendet. Die Unterseite des Rohrs wird in Umfangsrichtung festgehalten, während an der Oberseite am Radius von  $10\text{ mm}$  eine Verschiebung in Umfangsrichtung mit der Verformungsgeschwindigkeit von  $10^{-1} \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  aufgebracht wird. Dies entspricht einer Winkelgeschwindigkeit von  $\dot{\varphi} = 1.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{s}}$ .

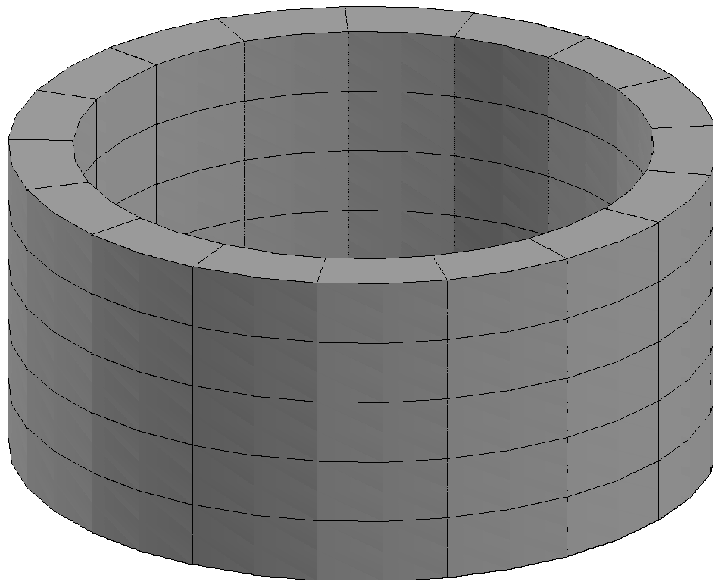


Abbildung 6.28: FE-Modell des Rohrs

In Abbildung 6.29 ist die Verformung des Rohrs nach einer Zeit von  $t = 10\text{ s}$  abgebildet. Die ursprünglich kreisrunde Geometrie (in der Abbildung punktiert gezeichnet) wird unter der Belastung elliptisch. Die Hauptachsen der Ellipse an der Rohroberseite und die der Ellipse an der Rohrunterseite sind um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht. Bei einer mit isotropem

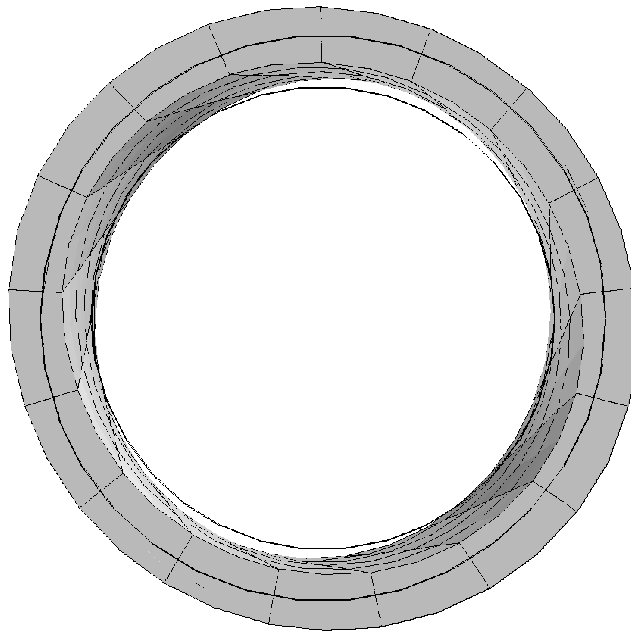


Abbildung 6.29: Verformung des Rohrs unter Torsionsbeanspruchung

Materialmodell simulierten Torsion des Rohrs würde sich keine inhomogene Verteilung der Deformation einstellen und der kreisrunde Querschnitt würde erhalten bleiben.

Die Verteilung der plastischen Bogenlänge geht aus Abbildung 6.30 hervor. In Abbildung 6.31 ist die plastische Bogenlänge am Innen- und Aussenradius über dem Umfang in der Mitte des Rohrs ( $z = 5mm$ ) aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die beiden Kurven periodisch sind, wobei die Periodenlänge  $180^\circ$  beträgt. Dies spiegelt die Invarianz der Orthotropie gegenüber Rotation um  $180^\circ$  wieder. Die Kurven entlang des Innen- und des Aussendurchmessers erreichen ihre jeweiligen Maximal- und Minimalwerte am selben Umfangswinkel, wobei der Betrag der plastischen Bogenlänge am Aussenradius etwas höher als der am Innenradius liegt.

In den Abbildungen 6.32 und 6.33 ist die Verteilung der Schubspannung  $\sigma_{\varphi z}$  in dem Zylinderkoordinatensystem am Rohr und am Innen- und Aussenradien über dem Umfang in Rohrmitte ( $z = 5mm$ ) angegeben. Auch in diesem Fall sind die Kurven periodisch mit der Periodenlänge von  $180^\circ$  und die Verläufe nur parallelverschoben, die Schubspannungen entlang des Aussenradius sind höher als die entlang des Innenradius. Die Maximal- und Minimalwerte treten an denselben Stellen wie die Extremwerte der plastischen Bogenlänge auf.

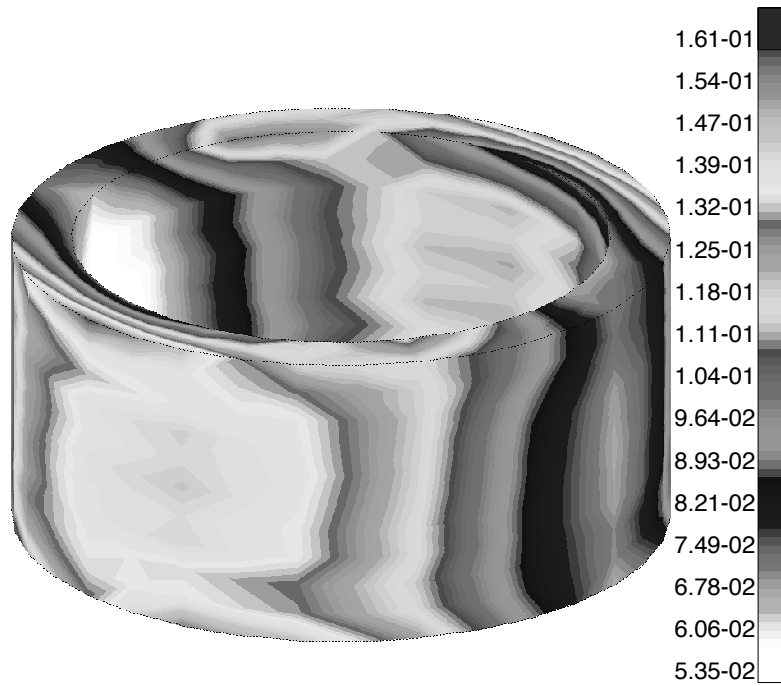


Abbildung 6.30: Verteilung der plastischen Bogenlänge am dünnwandigen Rohr

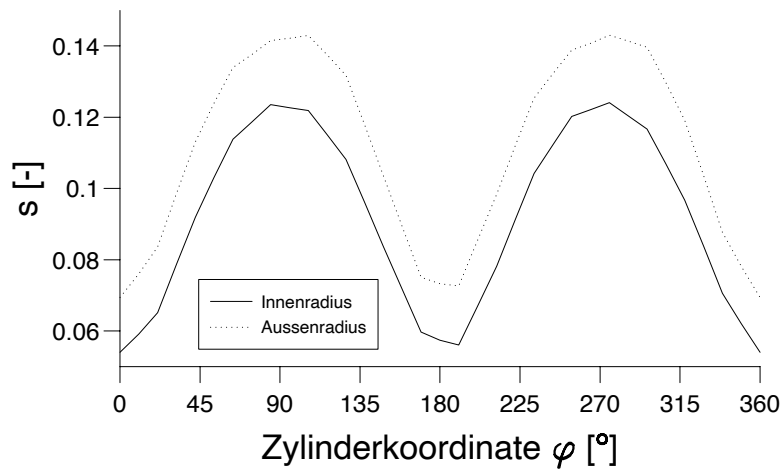


Abbildung 6.31: Verlauf der plastischen Bogenlänge am Innen- und Aussenradius über dem Umfang in der Mitte des dünnwandigen Rohrs



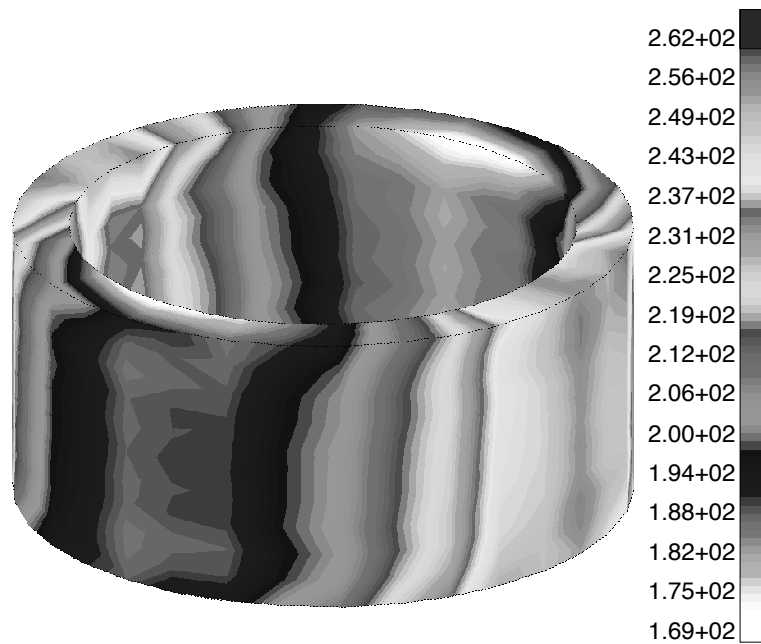


Abbildung 6.32: Verteilung der Schubspannung am dünnwandigen Rohr

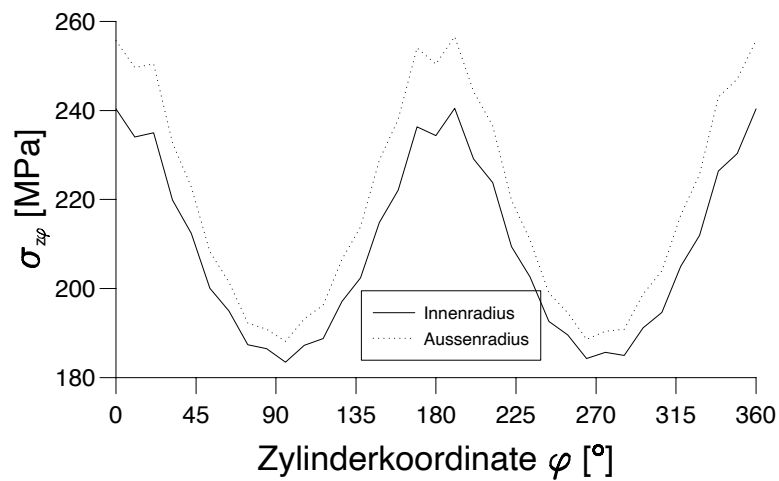


Abbildung 6.33: Verlauf der Schubspannung am Innen- und Aussenradius über dem Umfang in der Mitte des dünnwandigen Rohrs

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde auf der Grundlage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung ein Modell zur Beschreibung von plastischem Fließen für anisotropes Materialverhalten entwickelt. Dieses Modell basiert auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil und ist invariant gegenüber Rotationen der sogenannten plastischen Zwischenkonfiguration und gegenüber überlagerten Starrkörperbewegungen der Momentankonfiguration.

Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens wurden sogenannte innere Variablen (eine skalarwertige Variable zur Beschreibung der isotropen Verfestigung und eine tensorwertige Variable zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung) verwendet. Für diese inneren Variablen wurden Evolutionsgleichungen als hinreichende Bedingungen zur Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik gefunden.

Die Beschreibung der Anisotropie erfolgt mit Hilfe sogenannter Strukturtenoren. Somit ist es möglich, anisotrope, skalarwertige Funktionen durch isotrope Funktionen zu ersetzen, die nicht nur von den unabhängigen Größen sondern auch noch von den Strukturtenoren abhängen. Es wurde gezeigt, dass für transversale Isotropie ein Strukturtenor 2. Stufe und für Orthotropie zwei Strukturtenoren 2. Stufe genügen. Die isotropen Funktionen können dann mit Hilfe der Darstellungssätze über isotrope skalarwertige Funktionen formuliert werden.

Die Strukturtenoren werden direkt aus den ausgezeichneten Richtungen der Anisotropie gebildet. Diese Richtungen verändern sich während der Belastung. Um diese Änderungen zu beschreiben, werden orthogonale Rotationstenoren eingeführt. In Anlehnung an die Arbeiten von Dafalias (siehe u.a. Dafalias [15], Dafalias und Rashid [19] und Da-

falias [16]) wurden verschiedene Rotationen verwendet, um die Änderung der Anisotropie im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung sowie in der Fließfunktion unabhängig voneinander beschreiben zu können. Für die Rotationstensoren, die die Anisotropie-Richtungen im Elastizitätsgesetz und in der kinematischen Verfestigung beschreiben, können Evolutionsgleichungen als hinreichende Bedingung für die Clausius-Duhem-Ungleichung gewonnen werden. Der Rotationstensor in der Fließfunktion tritt bei diesen energetischen Betrachtungen nicht auf. Für ihn kann somit ein beliebiger Ansatz gewählt werden, ohne die thermodynamischen Restriktionen zu verletzen.

Das gesamte Materialmodell wurde unter der Voraussetzung von großen Deformationen entwickelt. Hierzu wurde das Konzept der dualen Variablen und Ableitungen verwendet. Die Formulierung erfolgte in der spannungsfreien, plastischen Zwischenkonfiguration mit dem Mandel'schen Spannungstensor der Zwischenkonfiguration und einem Translations-tensor der kinematischen Verfestigung, der ebenfalls die mathematische Struktur eines Mandel'schen Spannungstensors besitzt. Anschließend wurde das Materialmodell in die Momentankonfiguration transformiert.

Unter der Voraussetzung von kleinen elastischen Verzerrungen (in diesem Fall besitzen die Materialgleichungen in der plastischen Zwischenkonfiguration und in der Momentankonfiguration dieselbe mathematische Struktur) wurde das anisotrope Plastizitätsmodell in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert. Ansonsten wurden keine weiteren Vereinfachungen vorgenommen. Insbesondere wurde mit dem vollständigen Ansatz der kinematischen Verfestigung gearbeitet. Als Elastizitätsgesetz wurde hierbei eine Hyperelastizitätsbeziehung verwendet. Das Differentialgleichungssystem der Materialgleichungen wurde mit Hilfe eines Operator-Split-Verfahrens gelöst, wobei im ersten Operator die elastischen Anteile mit der Mittelpunktsregel und im zweiten Operator die inelastischen Anteile mit dem implizit-Euler-Verfahren bestimmt wurden. Die von ABAQUS verlangten Beiträge zur sogenannten Tangentensteifigkeitsmatrix wurden in dieser Arbeit numerisch bestimmt. Dies erfordert einen numerischen Mehraufwand, der mit einem erhöhten Rechenzeitbedarf gekoppelt ist. Allerdings wäre eine analytische Bestimmung dieser Beiträge sehr aufwendig, fehleranfällig und unflexibel, da bei Änderungen in den Konstitutivgleichungen eine neue Bestimmung der Tangentensteifigkeitsmatrix nötig wäre. Leider war es in dieser Arbeit nicht möglich einen effizienten Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen im 2.Operator zu finden. In diesem Operator müssen 23 (bei Orthotropie) bzw. 20 (bei transversaler Isotropie) nichtlineare Gleichungen mit einem Newton-Verfahren iterativ gelöst werden, was sehr hohe Rechenzeiten bewirkt.

Abschließend wurde am Beispiel der einfachen Scherung der Einfluss einiger Materialparameter sowie der Anfangsorientierung der Anisotropie-Richtung gezeigt. Es war zu

sehen, dass das Materialmodell in der Lage ist, ein physikalisch plausibles Materialverhalten vorherzusagen. Insbesondere ist es möglich, den Spannungsverlauf, den man bei Torsionsversuchen beobachtet (die Schubspannung durchläuft hierbei ein Maximum, bevor sie einen Grenzwert erreicht), zu beschreiben. Anhand der einfachen Scherung wurde weiterhin der in ABAQUS implementierte Spannungsalgorithmus überprüft. Als weiteres Beispiel wurde der Zugversuch eines dünnen Bleches simuliert. Hierbei zeigte sich die nichtsymmetrische, inhomogene Verteilung der plastischen Bogenlänge im Blech. Bei der Torsion eines dünnwandigen Rohrs ist schließlich neben der inhomogenen Verteilung der plastischen Bogenlänge und der Schubspannung zu erkennen, dass der ursprünglich kreisrunde Rohrquerschnitt unter Belastung eine elliptische Form annimmt.

Insgesamt ist es möglich, für eine von Anfang an vorherrschende und sich mit den Deformationen rotatorisch entwickelnde Anisotropie plastisches Fließen zu beschreiben. Um damit auch die Entwicklung von isotropem zu anisotropem Materialverhalten (z.B. bei Textur-entwicklung) beschreiben zu können, sind Erweiterungen des Modells notwendig. Dies kann mit Hilfe der Orientierungsverteilungsfunktion (ODF) geschehen, die jeder Orientierung anfänglich dieselbe Wahrscheinlichkeit zuordnet. Über eine geeignete Entwicklung der ODF bei Belastungen können dann ausgezeichneten Richtungen höhere Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden, was ein anisotropes Verhalten bewirkt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, durch eine skalare Größe die für Anisotropie verantwortlichen Parameter im Elastizitätsgesetz, in der kinematischen Verfestigung sowie in der Fließfunktion so zu beeinflussen, dass zunächst isotropes Verhalten vorhanden ist, und dieses Verhalten unter Belastung anisotrop wird.

# Anhang A

## Kristall-Eigenschaften

### A.1 Isotropie-Gruppen

In Tabelle A.1 sind für alle 32 Kristall-Klassen die zugehörigen Elemente der Isotropiegruppe aufgeführt (entnommen aus Truesdell und Noll [61]). Jede mögliche Isotropiegruppe enthält die identische Abbildung und die Inversion ( $\mathbf{1}, -\mathbf{1}$ ). Die vollständige Isotropiegruppe ist dann das direkte Produkt dieser Zwei-Element-Gruppe und der Gruppe  $\mathcal{G}_0$  aus der Tabelle, die nur aus eigentlich orthogonalen Tensoren (d.h. die Determinante dieser Tensoren ist positiv) besteht. Hierbei beschreibt der Tensor  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}^\varphi$  eine Drehung um die Achse  $\mathbf{u}$  mit dem Winkel  $\varphi$  in mathematisch positive Richtung in einem orthonormierten Koordinatensystem  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ . Mit  $\mathbf{p}$  wird die Raumdiagonale  $\mathbf{p} \equiv \frac{1}{3}\sqrt{\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}}$  bezeichnet.

	Kristall-Klasse	$\mathcal{G}_0$
	<i>Triklin</i>	
1.	alle Klassen	$\mathbf{1}$
	<i>Monoklin</i>	
2.	alle Klassen	$\mathbf{R}_{\mathbf{w}}^\pi$
	<i>Rhombisch</i>	
3.	alle Klassen	$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^\pi$

	Kristall-Klasse	$\mathcal{G}_0$
	<i>Tetragonal</i>	
4.	tetragonal–disphenoidal tetragonal–pyramidal tetragonal–dispyramidal	$\mathbf{R}_w^{\frac{1}{2}\pi}$
5.	tetragonal–scalenohedral tetragonal–pyramidal tetragonal–trapezohedral tetragonal–dipyramidal	$\mathbf{R}_w^{\frac{1}{2}\pi}, \mathbf{R}_u^\pi$
	<i>Trigonal</i>	
6.	trigonal–pyramidal rhombohedral	$\mathbf{R}_w^{\frac{2}{3}\pi}$
7.	ditrigonal–pyramidal trigonal–trapezohedral hexagonal–scalenohedral	$\mathbf{R}_u^\pi, \mathbf{R}_w^{\frac{2}{3}\pi}$
	<i>Hexagonal</i>	
8.	trigonal–dipyramidal hexagonal–pyramidal hexagonal–dipyramidal	$\mathbf{R}_w^{\frac{1}{3}\pi}$
9.	ditrigonal–dipyramidal dihexagonal–pyramidal hexagonal–trapezohedral dihexagonal–dipyramidal	$\mathbf{R}_u^\pi, \mathbf{R}_w^{\frac{1}{3}\pi}$
	<i>Kubisch</i>	
10.	tetartoidal diploidal	$\mathbf{R}_u^\pi, \mathbf{R}_v^\pi, \mathbf{R}_p^{\frac{2}{3}\pi}$
11.	hextetrahedral gyroidal hexoctahedral	$\mathbf{R}_u^{\frac{1}{2}\pi}, \mathbf{R}_v^{\frac{1}{2}\pi}, \mathbf{R}_w^{\frac{1}{2}\pi}$

Tabelle A.1: Kristall-Klassen mit zugehöriger Isotropiegruppe

## A.2 Strukturtenoren aller Kristall-Klassen

In Tabelle A.2 sind die Strukturtenoren nach Zhang und Rychlewski [77] für alle 32 Kristall-Klassen aufgeführt. Die Darstellung der Tensoren erfolgt in einem orthonormierten Koordinatensystem  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

	Kristall-Klasse	Strukturtenoren
	<i>Triklin</i>	
1.	pedial pinacoidal	$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$
	<i>Monoklin</i>	
2.	domatic sphenoidal prismatic	$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(2, 2), \mathbf{w}, \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(2, 2), \mathbf{N}_3, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$
	<i>Rhombisch</i>	
3.	rhombic-pyramidal rhombic-disphenoidal rhombic-dipyramidal	$\mathbf{T}(2, 2), \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(2, 2), \mathbf{E}, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(2, 2), \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$
	<i>Tetragonal</i>	
4.	tetragonal-disphenoidal tetragonal-pyramidal tetragonal-dipyramidal	$\mathbf{T}(4, 4), \mathbf{w}, \mathbf{E}$ $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{N}_3$ $\mathbf{T}(4, 4), \mathbf{N}_3$
5.	tetragonal-scalenohedral ditetragonal-pyramidal tetragonal-trapezohedral ditetragonal-dipyramidal	$\mathbf{T}(4, 4), \mathbf{w}$ $\mathbf{T}_d, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(4, 4), \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(4, 4)$
	<i>Trigonal</i>	
6.	trigonal-pyramidal rhombohedral	$\mathbf{T}(3, 3), \mathbf{w}, \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(3, 3) \otimes \mathbf{w}, \mathbf{N}_3$
7.	ditrigonal-pyramidal trigonal-trapezohedral hexagonal-scalenohedral	$\mathbf{T}(3, 3), \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(3, 3), \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(3, 3) \otimes \mathbf{w}$

	Kristall-Klasse	Strukturtensoeren
	<i>Hexagonal</i>	
8.	trigonal-dipyramidal hexagonal-pyramidal hexagonal-dipyramidal	$\mathbf{T}(3,3), \mathbf{N}_3$ $\mathbf{T}(6,6), \mathbf{w}, \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(6,6), \mathbf{N}_3$
9.	ditrigonal-dipyramidal dihexagonal-pyramidal hexagonal-trapezohedral dihexagonal-dipyramidal	$\mathbf{T}(3,3)$ $\mathbf{T}(6,6), \mathbf{w}$ $\mathbf{T}(6,6), \mathbf{E}$ $\mathbf{T}(6,6)$
	<i>Kubisch</i>	
10.	tetartoidal diploidal	$\mathbf{T}_h, \mathbf{E}$ $\mathbf{T}_h$
11.	hextetrahedral gyroidal hexoctahedral	$\mathbf{T}_d$ $\mathbf{O}_h, \mathbf{E}$ $\mathbf{O}_h$

Tabelle A.2: Kristall-Klassen mit zugehöriger Strukturtensoeren

Hierbei sind die Tensoren wie folgt definiert:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{T}(n, m) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(\mathbf{a}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_k)}_{m\text{mal}}, \quad \mathbf{a}_k = \mathbf{u} \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) + \mathbf{v} \sin\left(k \frac{2\pi}{n}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \\ & - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{O}_h = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{T}_h = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_d = & \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \\ & + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



# Anhang B

## Invariante Darstellungen

### B.1 Invarianten von Tensoren

In Tabelle B.1 sind die Tensorprodukte aufgeführt deren Spur die Invarianten unter der vollständigen Orthogonalen Gruppe  $\mathcal{O}(3)$  darstellen. Es sind die Invarianten für bis zu drei symmetrische Tensoren ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ) und einen antisymmetrischen Tensor ( $\mathbf{X}$ ) aufgeführt. Die Tabelle stellt eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus Truesdell und Noll [61] und Wang [69, 70, 73] dar. Die gesamten Invarianten für nicht mehr als drei symmetrische und einen antisymmetrischen Tensoren werden erhalten, indem zu den Invarianten des vorgegebenen Satzes von Tensoren die Invarianten aller möglichen Teilgruppen hinzugenommen werden. Bei einem symmetrischen Tensor  $\mathbf{A}$  und einem antisymmetrischen Tensor  $\mathbf{X}$  werden z.B. nicht nur die Invarianten von " $\mathbf{AX}$ " sondern auch die Invarianten von " $\mathbf{A}$ " und " $\mathbf{X}$ " benötigt.

Tensoren	Tensor-Produkte
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\mathbf{AB}, \mathbf{AB}^2, \mathbf{BA}^2, \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\mathbf{ABC}, \mathbf{A}^2\mathbf{BC}, \mathbf{B}^2\mathbf{CA}, \mathbf{C}^2\mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}, \mathbf{B}^2\mathbf{C}^2\mathbf{A}, \mathbf{C}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}$
$\mathbf{X}$	$\mathbf{X}^2$
$\mathbf{X}, \mathbf{A}$	$\mathbf{X}^2\mathbf{A}, \mathbf{X}^2\mathbf{A}^2, \mathbf{X}^2\mathbf{AXA}^2$

Tensoren	Tensor-Produkte
$\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\mathbf{XAB}, \mathbf{XA}^2\mathbf{B}, \mathbf{XB}^2\mathbf{A}, \mathbf{XA}^2\mathbf{B}^2, \mathbf{XA}^2\mathbf{BA}, \mathbf{XB}^2\mathbf{AB}, \mathbf{XA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A},$ $\mathbf{XB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{X}^2\mathbf{AB}, \mathbf{X}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{X}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}, \mathbf{X}^2\mathbf{AXB}, \mathbf{X}^2\mathbf{AXB}^2, \mathbf{X}^2\mathbf{BXA}^2$
$\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\mathbf{XABC}, \mathbf{XACB}, \mathbf{XBAC}, \mathbf{XA}^2\mathbf{BC}, \mathbf{XB}^2\mathbf{CA}, \mathbf{XC}^2\mathbf{AB}, \mathbf{XA}^2\mathbf{CB},$ $\mathbf{XB}^2\mathbf{AC}, \mathbf{XC}^2\mathbf{BA}, \mathbf{XBA}^2\mathbf{C}, \mathbf{XCB}^2\mathbf{A}, \mathbf{XAC}^2\mathbf{B}, \mathbf{XA}^2\mathbf{BCA}, \mathbf{XB}^2\mathbf{CAB},$ $\mathbf{XC}^2\mathbf{ABC}, \mathbf{XA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}, \mathbf{XB}^2\mathbf{C}^2\mathbf{A}, \mathbf{XC}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{XB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{C}, \mathbf{X}^2\mathbf{ABC},$ $\mathbf{X}^2\mathbf{BCA}, \mathbf{X}^2\mathbf{A}^2\mathbf{BC}, \mathbf{X}^2\mathbf{B}^2\mathbf{CA}, \mathbf{X}^2\mathbf{C}^2\mathbf{AB}, \mathbf{X}^2\mathbf{AXB C}$

Tabelle B.1: Invarianten von Tensoren unter der vollständigen orthogonalen Gruppe

## B.2 Invariante Darstellung der Fließfunktion

Gesucht ist die invariante, nicht reduzierbare Darstellung einer Funktion von einem (transversale Isotropie) bzw. zwei (Orthotropie) symmetrischen Struktur­tensoren ( $\mathbf{M}$  bzw.  $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}$ ), einem symmetrischen, deviatorischen Spannungstensor ( $\boldsymbol{\sigma}_S$ ) und einem antisymmetrischen Spannungstensor ( $\boldsymbol{\sigma}_A$ ). Da der transversal Isotropie Fall einfach durch streichen eines Struktur­tensors aus dem orthotropen Fall hervorgeht, wird nur die Herleitung der orthotropen Fließfunktion angegeben. Für transversale Isotropie werden nur die jeweiligen Zwischenergebnisse angegeben.

Die Fließfunktion hängt zunächst von 105 Invarianten (siehe Tabelle B.1) ab. Durch Ausnutzen der Eigenschaften (2.33) die die Struktur­tensoren erfüllen und streichen aller Ausdrücke in denen die Spannung vom Grad größer zwei auftritt, verbleiben die elf Invarianten

$$\begin{aligned} & \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_S^2, \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_A^2, \text{tr } (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S), \text{tr } (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S^2), \text{tr } (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S), \text{tr } (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S^2), \\ & \text{tr } (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A^2), \text{tr } (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A^2), \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S), \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S), \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{M}^{(2)}) \end{aligned} .$$

Im transversal isotropen Fall verbleiben entsprechend nur sechs Invarianten.

Die nichtreduzierbare, invariante Darstellung des bilinearen Ausdrucks (4.60)

$$\zeta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}[\boldsymbol{\sigma}] \tag{B.1}$$

wird durch Aufstellen eines Polynoms aus diesen Invarianten (B.2) erhalten, wobei jeder Summand des Polynoms die zweite Potenz der Spannung enthalten muss. Dies ergibt für

transversale Isotropie

$$\begin{aligned} \zeta = & \zeta_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_S^2 + \zeta_2 \operatorname{tr} (\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_S^2) + \zeta_3 (\operatorname{tr} (\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_S))^2 + \\ & \zeta_4 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_A^2 + \zeta_5 \operatorname{tr} (\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_A^2) + \zeta_6 \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_S) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

und für Orthotropie

$$\begin{aligned} \zeta = & \zeta_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_S^2 + \zeta_2 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S^2) + \zeta_3 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S^2) + \\ & \zeta_4 (\operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S))^2 + \zeta_5 (\operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S))^2 + \zeta_6 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S) \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S) + \\ & \zeta_7 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_A^2 + \zeta_8 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_A^2) + \zeta_9 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_A^2) + \\ & \zeta_{10} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S) + \zeta_{11} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}_S) + \zeta_{12} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}_A \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{M}^{(2)}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

### B.3 Invertierung von $\mathcal{C}^{(\text{kin})}$

Aus Bequemlichkeit wurden in dieser Arbeit die Materialparameter zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung so gewählt, dass der Spannungstensor der kinematischen Verfestigung  $\mathbf{Z}$  nicht von Größen abhängt, in denen die Spur des Dehnungstensors der kinematischen Verfestigung  $\mathbf{Y}$  auftritt. ( $\Rightarrow c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = c_{12} = c_{13} = 0$  im orthotropen Fall). Der Ansatz (4.198) für  $\mathbf{Z}$  bei Orthotropie reduziert sich dann auf

$$\mathbf{Z} = 2c_3 \mathbf{Y} + c_5 (\mathbf{Y} \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y}) + c_7 (\mathbf{Y} \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y}) = \mathcal{C}^{(\text{kin})} [\mathbf{Y}] \quad . \quad (\text{B.4})$$

Hiervon soll die inverse Beziehung

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}^{(\text{kin})} [\mathbf{Z}] \quad , \quad \mathcal{M}^{(\text{kin})} = (\mathcal{C}^{(\text{kin})})^{-1} \quad (\text{B.5})$$

bestimmt werden. Die Inversion für den transversal isotropen Fall, der nur von einem Strukturtensor abhängt, ergibt sich wenn die Terme mit dem zweiten Strukturtensor  $\mathbf{M}^{(2)}$  weggelassen werden ( $c_7 = 0$ ).

Ausgangspunkt ist der allgemeine Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & 2\xi_3 \mathbf{Z} + \xi_5 (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{M}^{(1)}) + \xi_7 (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{M}^{(2)}) + \\ & [2\xi_8 \operatorname{tr} \mathbf{Z} + \xi_{11} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Z}) + \xi_{12} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Z})] \mathbf{1} \\ & [\xi_{11} \operatorname{tr} \mathbf{Z} + 2\xi_9 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Z}) + \xi_{13} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Z})] \mathbf{M}^{(1)} \\ & [\xi_{12} \operatorname{tr} \mathbf{Z} + \xi_{13} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Z}) + 2\xi_{10} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Z})] \mathbf{M}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

für den Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung. Dieser Ansatz, der dem Elastizitätsgesetz (4.193) entspricht, wird verwendet, da davon ausgegangen wird, dass alle tensoriellen Größen auf dieselbe Weise dargestellt werden können.

Einsetzen von Gleichung (B.4) in (B.6) liefert

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} = & \pi_1 \mathbf{Y} + \pi_2 (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(1)}) + \pi_3 (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(2)}) + \\
& \pi_4 \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(1)} + \pi_5 \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(2)} + \pi_6 (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y} \mathbf{M}^{(1)}) \\
& [\pi_7 \operatorname{tr} \mathbf{Y} + \pi_8 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y}) + \pi_9 \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y})] \mathbf{1} \\
& [\pi_{10} \operatorname{tr} \mathbf{Y} + \pi_{11} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y}) + \pi_{12} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y})] \mathbf{M}^{(1)} \\
& [\pi_{13} \operatorname{tr} \mathbf{Y} + \pi_{14} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{Y}) + \pi_{15} \operatorname{tr} (\mathbf{M}^{(2)} \mathbf{Y})] \mathbf{M}^{(2)} \quad ,
\end{aligned} \tag{B.7}$$

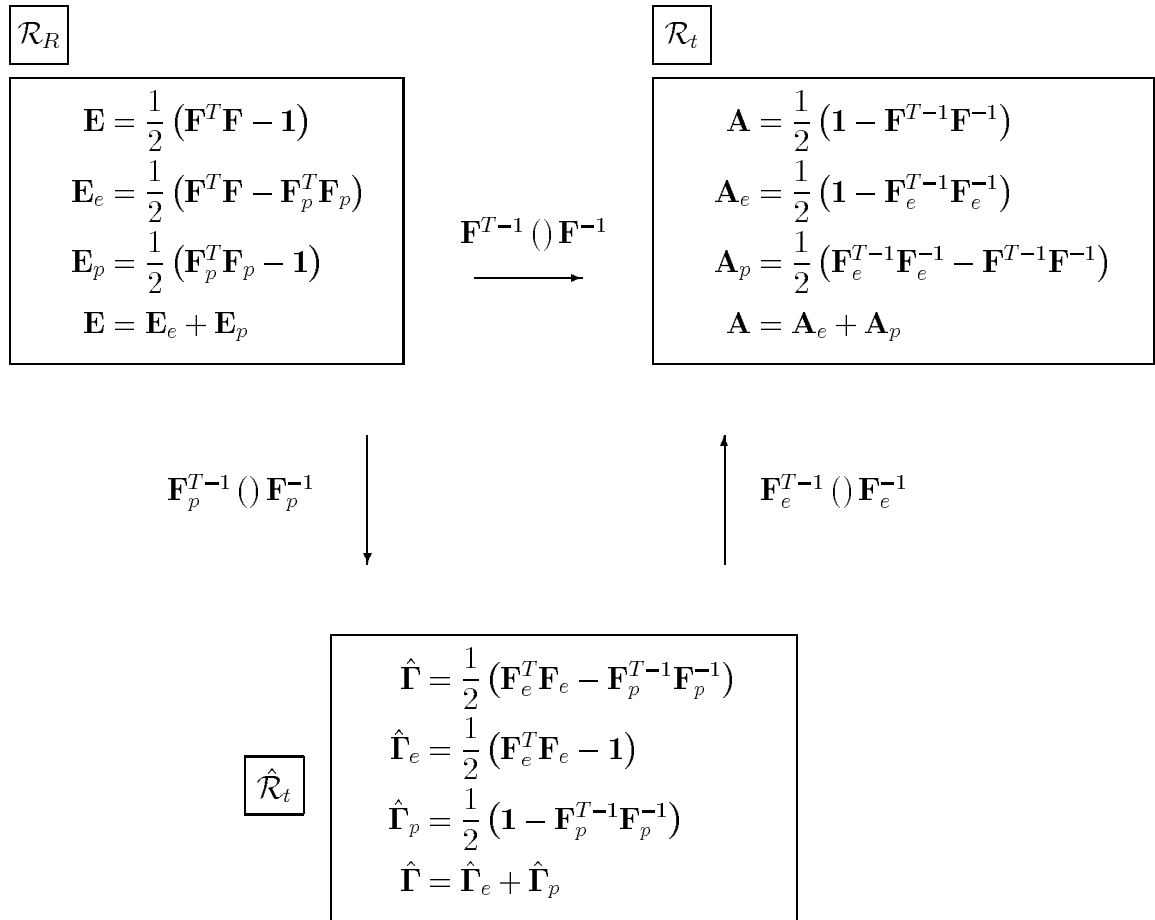
wobei die Faktoren  $\pi_1, \dots, \pi_{15}$  Funktionen der Parameter  $c_3, c_5, c_7$  und  $\xi_3, \xi_5, \xi_7, \dots, \xi_{13}$  sind. Durch Koeffizientenvergleich lassen sich dann die Faktoren im Ansatz des Dehnungstensor der kinematischen Verfestigung (B.5) als Funktion der Materialparameter der kinematischen Verfestigung darstellen:

$$\begin{aligned}
\xi_3 &= \frac{1}{2} \frac{4c_3^2 + c_5^2 + c_7^2 + 4c_3c_5 + 4c_3c_7 + c_5c_7}{(2c_3 + c_5)(4c_3^2 + c_7^2 + 2c_3c_5 + 4c_3c_7 + c_5c_7)} \\
\xi_5 &= -\frac{c_5}{4c_3^2 + c_7^2 + 2c_3c_5 + 4c_3c_7 + c_5c_7} \\
\xi_7 &= -\frac{c_7}{4c_3^2 + c_5^2 + 2c_3c_7 + 4c_3c_5 + c_5c_7} \\
\xi_8 &= \frac{1}{4} \frac{c_5c_7(4c_3 + c_5 + c_7)}{c_3(8c_3^3 + 8c_3^2c_5 + 8c_3^2c_7 + 2c_3c_5^2 + c_7c_5^2 + 2c_3c_7^2 + c_5c_7^2 + 6c_3c_5c_7)} \\
\xi_{11} &= \xi_{12} = -\xi_{13} = -2\xi_8 \\
\xi_9 &= \frac{1}{4} \frac{c_5^2}{c_3(2c_3^2 + 3c_3c_5 + c_5^2)} \\
\xi_{10} &= \frac{1}{4} \frac{c_7^2}{c_3(2c_3^2 + 3c_3c_7 + c_7^2)} \quad .
\end{aligned}$$

# Anhang C

## Transformationen

### C.1 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungstensoren



## C.2 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten

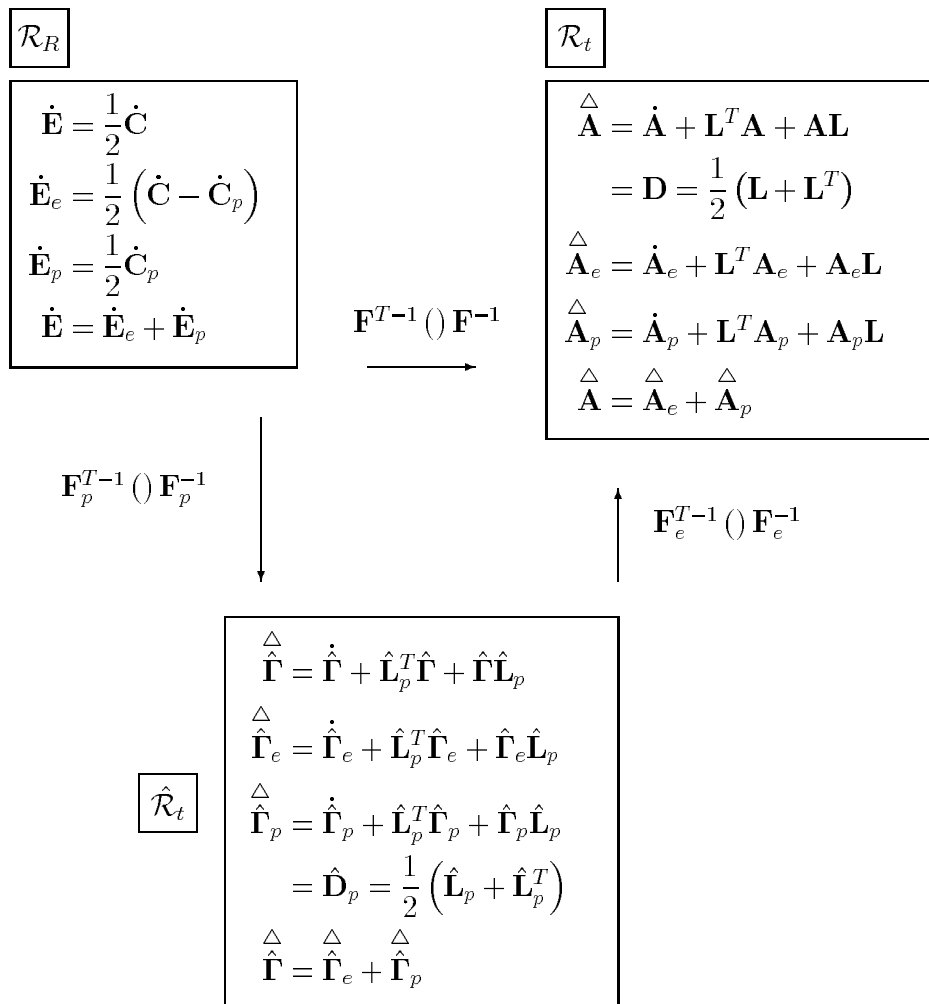
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \quad , \quad \mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad , \quad \mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} \quad , \quad \hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$$

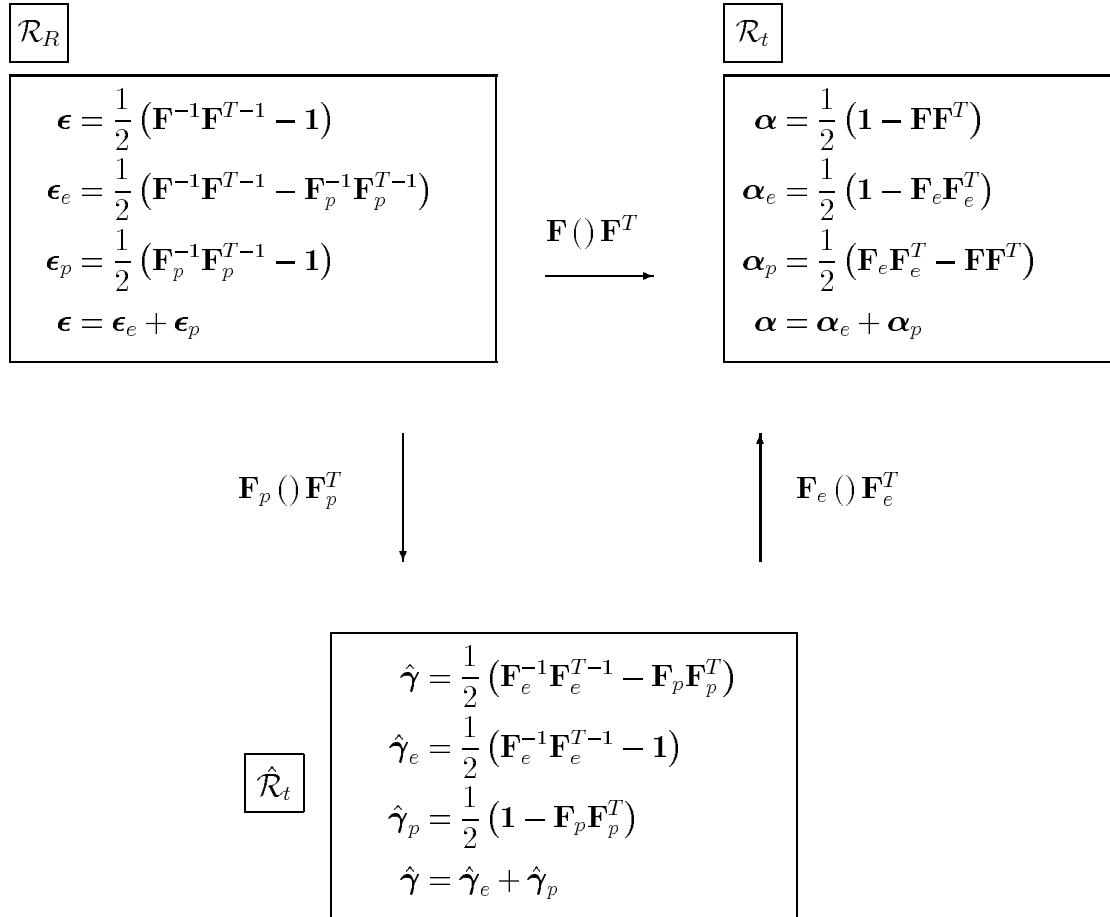
$()^\cdot$  : bzgl.  $\mathcal{R}_R$

$()^\Delta = ()^\cdot + \hat{\mathbf{L}}_p^T () + () \hat{\mathbf{L}}_p$  : bzgl.  $\hat{\mathcal{R}}_t$

$()^\Delta = ()^\cdot + \mathbf{L}^T () + () \mathbf{L}$  : bzgl.  $\mathcal{R}_t$



### C.3 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungstensoren

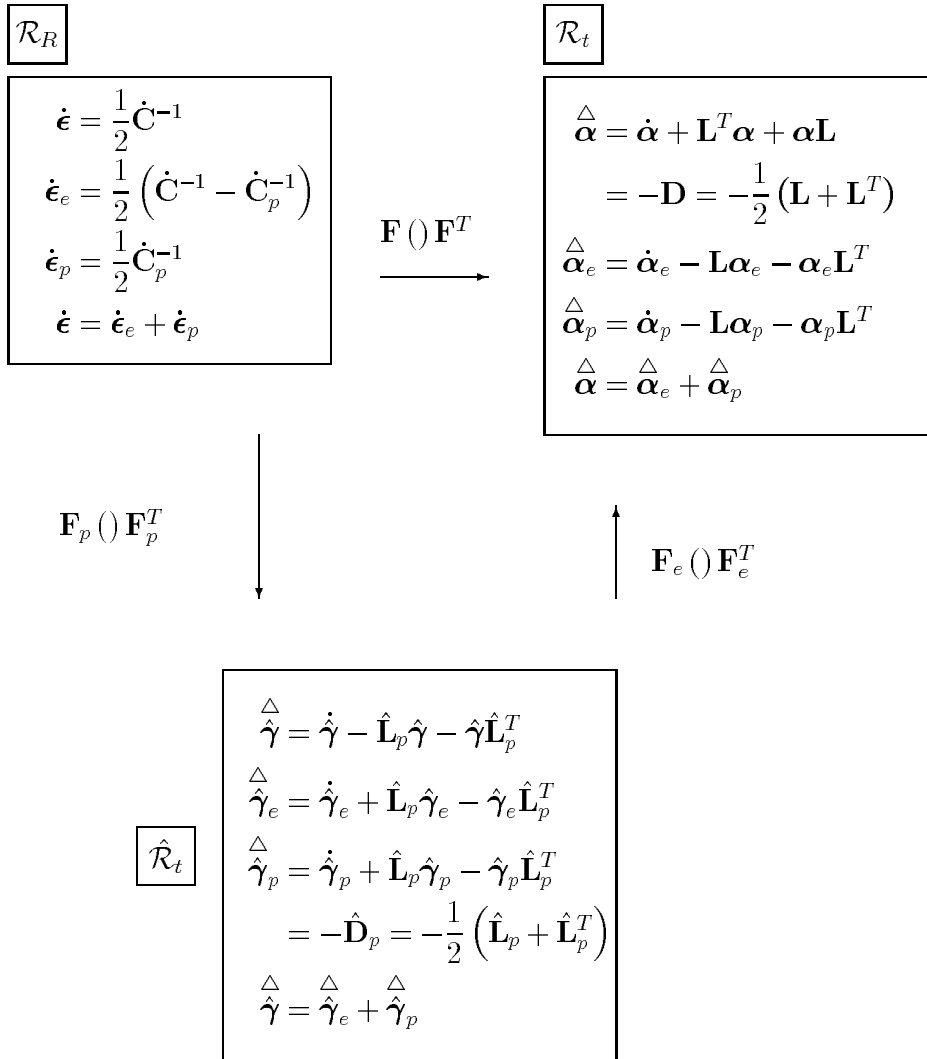


## C.4 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten

$()^\cdot$  : bzgl.  $\mathcal{R}_R$

$()^\Delta = ()^\cdot - \hat{\mathbf{L}}_p() - ()\hat{\mathbf{L}}_p^T$  : bzgl.  $\hat{\mathcal{R}}_t$

$()^\Delta = ()^\cdot - \mathbf{L}() - ()\mathbf{L}^T$  : bzgl.  $\mathcal{R}_t$



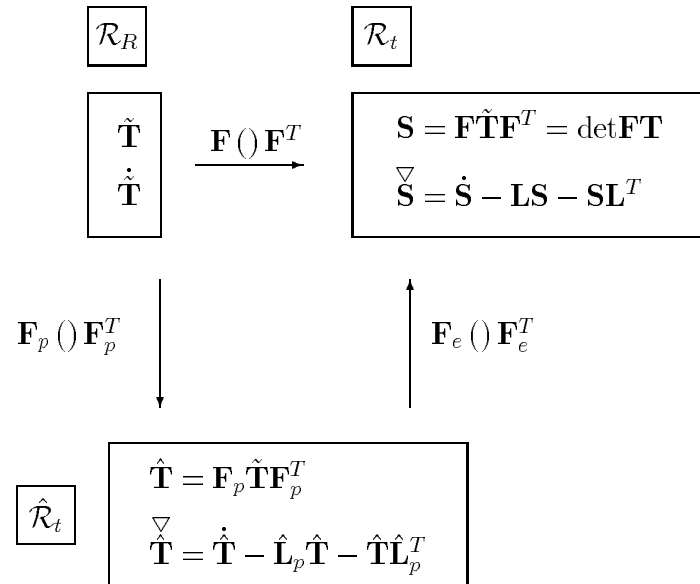


## C.5 Familie 1: Spannungstensoren und –geschwindigkeiten

$(\dot{\phantom{x}}) : \text{bzgl. } \mathcal{R}_R$

$(\dot{\phantom{x}})^\nabla = (\dot{\phantom{x}}) - \hat{\mathbf{L}}_p(\phantom{x}) - (\phantom{x})\hat{\mathbf{L}}_p^T : \text{bzgl. } \hat{\mathcal{R}}_t$

$(\dot{\phantom{x}})^\nabla = (\dot{\phantom{x}}) - \mathbf{L}(\phantom{x}) - (\phantom{x})\mathbf{L}^T : \text{bzgl. } \mathcal{R}_t$

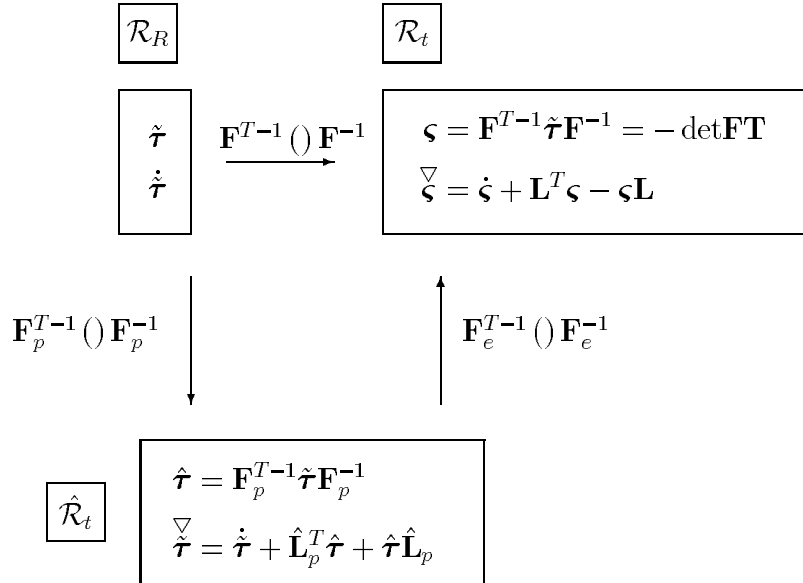


## C.6 Familie 2: Spannungstensoren und –geschwindigkeiten

$()^\cdot$  : bzgl.  $\mathcal{R}_R$

$()^\nabla = ()^\cdot + \hat{\mathbf{L}}_p^T () + ()\hat{\mathbf{L}}_p$  : bzgl.  $\hat{\mathcal{R}}_t$

$()^\nabla = ()^\cdot + \mathbf{L}^T () + ()\mathbf{L}$  : bzgl.  $\mathcal{R}_t$



## Anhang D

# Abhängigkeit der elastischen freien Energiefunktion

Bewiesen werden soll die Gültigkeit des Theorems 2

$$\bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \Phi) = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e^*, \Phi^*) \iff \psi_e = \tilde{\psi}_e(\tilde{\Gamma}_e) \quad (\text{D.1})$$

mit

$$\tilde{\Gamma}_e := \Phi^T \hat{\Gamma}_e \Phi \quad . \quad (\text{D.2})$$

Dazu müssen zwei Aussagen bewiesen werden:

- Wenn die elastische freie Energiefunktion  $\bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \Phi)$  invariant bezüglich Rotationen der Zwischen- und der Momentankonfiguration ist, dann kann sie auch nur in Abhängigkeit des Verzerrungstensors  $\tilde{\Gamma}_e := \Phi^T \hat{\Gamma}_e \Phi$  dargestellt werden:

Die Invarianzbedingungen verlangen, dass die Beziehung

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\mathbf{F}_e, \Phi) = \bar{\psi}_e(\mathbf{QF}_e\bar{\mathbf{Q}}^T, \bar{\mathbf{Q}}\Phi) \quad (\text{D.3})$$

für beliebige Rotationen  $\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}$ , erfüllt ist. Sie muss somit auch für die Rotation  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}_e^T$  erfüllt werden. Einsetzen dieser Rotation liefert

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{U}_e\bar{\mathbf{Q}}^T, \bar{\mathbf{Q}}\Phi) \quad . \quad (\text{D.4})$$

Durch Ausnutzen von

$$\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{C}_e\bar{\mathbf{Q}}^T = (\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{U}_e\bar{\mathbf{Q}}^T)^2 = 2\bar{\mathbf{Q}}\hat{\Gamma}_e\bar{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{1} \quad (\text{D.5})$$

folgt

$$\psi_e = \bar{\bar{\psi}}_e \left( \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \bar{\mathbf{Q}}^T, \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{\Phi} \right) \quad , \quad (\text{D.6})$$

was durch die Wahl von  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi}^T$  auf

$$\psi_e = \check{\psi}_e \left( \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} \right) \quad (\text{D.7})$$

führt, womit diese erste Behauptung bewiesen ist.

- Die zweite Aussage stellt die Umkehrung des Theorems dar: Kann die elastische freie Energiefunktion  $\psi_e$  in Abhängigkeit vom Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$  dargestellt werden, dann erfüllt  $\psi_e$  die Invarianzanforderungen, d.h. die Funktion ist unabhängig bezüglich Rotationen der Zwischen- und der Momentankonfiguration.

Einsetzen der rotierten Größen  $\mathbf{\Phi}^* = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{\Phi}$  und  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e^* = \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \bar{\mathbf{Q}}^T$  in  $\psi_e = \check{\psi}_e \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right)$  liefert

$$\psi_e = \check{\psi}_e \left( \mathbf{\Phi}^{*T} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e^* \mathbf{\Phi}^* \right) \quad (\text{D.8})$$

$$= \check{\psi}_e \left( \mathbf{\Phi}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{\Phi} \right) = \bar{\bar{\psi}}_e \left( \mathbf{F}_e, \mathbf{\Phi} \right) \quad , \quad (\text{D.9})$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

# Literaturverzeichnis

- [1] N. Aravas und E. C. Aifantis. On the Geometry of Slip and Spin in Finite Plastic Deformation. *International Journal of Plasticity*, 7:141–160, 1991.
- [2] R. J. Asaro. *Advances in Applied Mechanics*, Band 23, Kapitel Micromechanics of Crystals and Polycrystals, S. 1–115. Academic Press, San Diego, 1983.
- [3] R. J. Asaro und J. R. Rice. Strain Localization in Ductile Single Crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, S. 309–338, 1977.
- [4] G. Backhaus. Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung. *ZAMM*, 48:99–108, 1968.
- [5] A. Baltov und A. Sawczuk. A Rule of Anisotropic Hardening. *Arch. Mech.*, 1:81–92, 1965.
- [6] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice–Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [7] J.P. Boehler, Herausgeber. *Application of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Band 292 , *CISM Courses and Lectures*. Springer–Verlag, Wien–New York, 1987.
- [8] O. Bruhns, H. Xiao und A. Meyers. On Representations of Yield Functions for Crystals, Quasicrystals and Transversely Isotropic Solids. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 18:47–67, 1999.
- [9] J. Casey und P.M. Naghdi. A Remark on the Use of the Decomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$  in Plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47:672–675, 1980.
- [10] H. Cho. *The Effect of Anisotropy and Constitutive Spins in Large Inelastic Deformations*. Doktorarbeit, University of California Davis, 1992.
- [11] H. Cho und Y. F. Dafalias. Distortional and Orientational Hardening at Large Viscoplastic Deformations. *International Journal of Plasticity*, 12(7):903–925, 1996.

- [12] B. D. Coleman und M. E. Gurtin. Thermodynamics with Internal State Variables. *J. Chem. Phys.*, 47:597–613, 1967.
- [13] J. P. Cuhie und D. Nouailhas. New Constitutive Equations for Single-Crystal Alloys: Implementation in the SAMCEF Code, and Applications. *Rheologica Acta*, 5:17–27, 1993.
- [14] Y. F. Dafalias. Anisotropic Hardening of Initially Orthotropic Materials. *ZAMM*, 59:437–446, 1979.
- [15] Y. F. Dafalias. The Plastic Spin Concept and a Simple Illustration of its Role in Finite Plastic Transformations. *Mechanics of Materials*, 3:223–233, 1984.
- [16] Y. F. Dafalias. On Multiple Spins and Texture Development. Case Study: Kinematic and Orthotropic Hardening. *Arch. Mech.*, 100:171–194, 1993.
- [17] Y. F. Dafalias. Planar Double-Slip Micromechanical Model for Polycrystal Plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6):1260–1284, 6 1993.
- [18] Y. F. Dafalias. Plastic Spin: Necessity or Redundancy. *International Journal of Plasticity*, 14:909–931, 1998.
- [19] Y. F. Dafalias und M. M. Rashid. The Effect of Plastic Spin on Anisotropic Material Behavior. *International Journal of Plasticity*, 5:227–246, 1989.
- [20] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1982.
- [21] A. E. Green und P.M. Naghdi. Some Remarks on Elastic–Plastic Deformations at Finite Strains. *International Journal of Engineering Sciences*, 9:1219–1229, 1971.
- [22] G. B. Gurevich. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Noordhoff, 1964.
- [23] S. Hartmann, G. Lührs und P. Haupt. On Stress Algorithms in Viscoplasticity and Plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted for publication.
- [24] P. Haupt. Foundation of Continuum Mechanics. In *IUTAM International Summer School on Continuum Mechanics in Environment Sciences and Geophysics*, Udine, Juni 1992.
- [25] P. Haupt und Ch. Tsakmakis. On Kinematic Hardening and Large Plastic Deformations. *International Journal of Plasticity*, 2:279–293, 1986.

- [26] P. Haupt und Ch. Tsakmakis. On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 1:165–196, 1989.
- [27] P. Haupt und Ch. Tsakmakis. Stress Tensors associated with Deformation Tensors via Duality. *Arch. Mech.*, 48:347–384, 1996.
- [28] O. Häusler und Ch. Tsakmakis. Description of Plastic Anisotropy Effects at Large Deformations. Part II: The Case of Transversely Isotropy. *zur Veröffentlichung eingereicht*, 1999.
- [29] O. Häusler und Ch. Tsakmakis. Theoretical Modeling and Discussion of Anisotropic Plastic Flow. *zur Veröffentlichung eingereicht*, 1999.
- [30] K.-H. Hellwege, Herausgeber. *Landolt-Börnstein — Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, Band 11. Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York, 1979.
- [31] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS Theory, Version 5.8*, 1998.
- [32] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 5.8, Volume I*, 1998.
- [33] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 5.8, Volume III*, 1998.
- [34] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford at the Clarendon Press, 1950.
- [35] T. J. R. Hughes und J. Winget. Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations Arising in Large-Deformation Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1862–1867, 1980.
- [36] S. Imatani, T. Saito und K. Yamaguchi. A Plastic Constitutive Model for Anisotropic Materials and Finite Analysis of Strain Localization Process. *JSME International Journal, Series A*, 38(4):547–553, 1995.
- [37] W. Jansohn. Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und –viskoplastizität. Forschungsbericht FZKA 6002, Forschungszentrum Karlsruhe, 1997.
- [38] E. Klingbeil. *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

- [39] H. Lämmer. Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen. Forschungsbericht FZKA 6053, Forschungszentrum Karlsruhe, 1998.
- [40] E. H. Lee und D. T. Liu. Finite Strain Elastic–Plastic Theory particularly for Wave Analysis. *J. Appl. Phys.*, 38:19, 1967.
- [41] Th. Lehmann. Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto–plastische Formänderungen. *Ing.-Arch.*, 41:297–310, 1972.
- [42] I.-S. Liu. On Representations of Anisotropic Invariants. *International Journal of Engineering Sciences*, 20(10):1099–1109, 1982.
- [43] J. Lubliner. Normality Rules in Large-Deformation Plasticity. *Mechanics of Materials*, 5:29–34, 1986.
- [44] L. Méric, P. Poubanne und G. Cailletaud. Single Crystal Modeling for Structural Calculations: Part 1 – Model Presentation. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 113:162–170, January 1991.
- [45] C. Miehe. Numerical Computation of Algorithmic (Consistent) Tangent Moduli in Large-Strain Computational Inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:223–240, 1996.
- [46] F. Montheillet, M. Cohen und J. J. Jonas. Axial Stresses and Texture Development During the Torsion Testing of Al, Cu and  $\alpha$ -Fe. *Arch. Mech.*, 32(11):2077–2089, 1994.
- [47] J. Ning und E. C. Aifantis. Anisotropic Yield and Plastic Flow of Polycrystalline Solids. *International Journal of Plasticity*, 12(9):1221–1240, 1996.
- [48] D. Nouailhas und J.-P. Culié. Development and Application of a Model for Single-Crystal Superalloys. Forschungsbericht 1991-214, ASME Winter Annual Meeting, 1991.
- [49] D. Nouailhas, J.-P. Culié, G. Cailletaud und L. Méric. Finite Element Analysis of the Stress-Strain Behaviour of Single-crystal Tubes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 14(1):137–154, 1995.
- [50] V. C. Prantil, J. T. Jenkins und P. R. Dawson. An Analysis of Texture and Plastic Spin for Planar Polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(8):1357–1382, 1993.



- [51] M. M. Rashid. Texture Evolution and Plastic Response of Two-Dimensional Polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(5):1009–1029, 1992.
- [52] R. J. Rider, S. J. Harvey und T. H. Breckell. Anisotropic Yield Surfaces in Biaxial Cyclic Plasticity. In *Transaction of the International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. L: Inelastic Behaviour of Materials and Constitutive Equations*, S. 237–242, 1985.
- [53] R. S. Rivlin. Further Remarks on the Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials. *J. Rational Mech. Anal.*, 4:681–702, 1955.
- [54] J. Schröder. *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotroper Materialverhaltens*. Doktorarbeit, Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität Hannover, 1995.
- [55] G. F. Smith. On a Fundamental Error in Two Papers of C.-C. Wang “On Representations for Isotropic Functions, Parts I and II”. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 36: 161–165, 1969.
- [56] A. J. M. Spencer. Theory of Invariants. In A.C. Eringen, Herausgeber, *Continuum Physics*, Band I, S. 239–353. Academic Press, 1971.
- [57] B. Svendsen und Ch. Tsakmakis. A Local Differential Geometric Formulation of Stress-Strain Pairs and Time Derivatives. *Arch. Mech.*, 46:49–91, 1994.
- [58] B. Svendsen und K. Hutter. A Continuum Approach for Modelling Induced Anisotropy in Glaciers and Ice Sheets. *Annals of Glaciology*, 23:262–269, 1996.
- [59] N. L. Svensson. Anisotropy and the Bauschinger Effect in Cold Rolled Aluminium. *J. Mech. Eng. Sci.*, 8:162–172, 1965.
- [60] T. Takeda. The Application of an Anisotropic Yield Function of the Sixth Degree to Orthotropic Material. *Journal of Strain Analysis*, 26(3):201–207, 1991.
- [61] C. Truesdell und W. Noll. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. In S. Flügge, Herausgeber, *Handbuch der Physik*, Band III/3. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
- [62] Ch. Tsakmakis. *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1987.

- [63] Ch. Tsakmakis. Kinematic Hardening Rules in Finite Plasticity. Part I: A Constitutive Approach. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:215–231, 1996.
- [64] Ch. Tsakmakis. Kinematic Hardening Rules in Finite Plasticity. Part II: Some Examples. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:233–246, 1996.
- [65] Ch. Tsakmakis. Energiehaushalt des elastisch–plastischen Körpers. Unveröffentlichtes Paper vorgestellt auf dem Symposium: Aspekte der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, Kassel, April 1998.
- [66] Ch. Tsakmakis. Description of Plastic Anisotropy Effects at Large Deformations. Part I: Restrictions Imposed by the Second Law and the Postulate of Il’iushin. *zur Veröffentlichung eingereicht*, 1999.
- [67] United Kingdom Atomic Energy Authority, Computer Science and Systems Division. *Harwell Subroutine Library — A Catalogue of Subroutines*, aere harwell, oxfordshire edition, March 1985.
- [68] E. van der Giessen und P. van Houtte. A 2D Analytical Multiple Slip Model for Continuum Texture Development and Plastic Spin. *Mechanics of Materials*, 13:93–113, 1992.
- [69] C.-C. Wang. On Representations for Isotropic Functions. Part I: Isotropic Functions of Symmetric Tensors and Vectors. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33:249–267, 1968.
- [70] C.-C. Wang. A New Representation Theorem for Isotropic Functions: An Answer to Professor G. F. Smith’s Criticism of my Papers on Representations for Isotropic Functions. Part 1: Scalar-Valued Isotropic Functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 36:166–197, 1969.
- [71] C.-C. Wang. A New Representation Theorem for Isotropic Functions: An Answer to Professor G. F. Smith’s Criticism of my Papers on Representations for Isotropic Functions. Part 2: Vector-Valued Isotropic Functions, Symmetric Tensor-Valued Isotropic Functions, and Skew-Symmetric Tensor-Valued Isotropic Functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 36:198–223, 1969.
- [72] C.-C. Wang. On Representations for Isotropic Functions. Part II: Isotropic Functions of Skew-Symmetric Tensors, Symmetric Tensors, and Vectors. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33:299–287, 1969.
- [73] C.-C. Wang. Corrigendum to My Recent Papers on “Representations for Isotropic Functions”. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 36:198–223, 1970.

- [74] G. G. A. Weber. *Computational Procedures for a New Class of Finite Deformation Elastic-Plastic Constitutive Equations*. Doktorarbeit, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [75] K. Wegener und M. Schlegel. Suitability of Yield Functions for the Approximation of Subsequent Yield Surfaces. *International Journal of Plasticity*, 12(9):1151–1177, 1996.
- [76] Y. Yoshimura. Hypothetical Theory of Anisotropy and the Bauschinger Effect due to Plastic Strain History. Forschungsbericht 349, Aero Research Institute University of Tokyo, 1959.
- [77] J. M. Zhang und J. Rychlewski. Structural Tensors for Anisotropic Solids. *Arch. Mech.*, 42(3):267–277, 1990.
- [78] Q.-S. Zheng und A. J. M. Spencer. Tensors which Characterize Anisotropies. *International Journal of Engineering Sciences*, 31(5):679–693, 1993.