http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 12, 4 pp., *11.03.2002*

Funktionalungleichungen in topologischen Vektorräumen

Peter Volkmann

1. Ergebnis. Ein Satz über Differentialungleichungen [7] wird auf allgemeinere Funktionalungleichungen erweitert. Dazu sei E ein reeller separierter topologischer Vektorraum, und es sei K ein *Keil* in E, d.h. eine abgeschlossene, konvexe, nichtleere Teilmenge (von E) mit $\lambda x \in K$ für $x \in K$ und $\lambda \geq 0$.

In E werden $x \leq y$ und $x \ll y$ durch $y - x \in K$ bzw. $y - x \in \operatorname{Int} K$ definiert, wobei $\operatorname{Int} K$ das Innere von K bedeutet. Unter K^* wird die Menge der linearen, stetigen Funktionale φ auf E mit $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in K$ verstanden. Schließlich sei $T > 0$, und $C([0,T], E)$ bezeichne den Raum aller stetigen $u : [0,T] \to E$.

Satz. *Es sei $\Omega \subseteq C([0,T], E)$, $\Phi : (0,T] \times \Omega \to E$, und es seien $v, w \in \Omega$ mit folgender Eigenschaft:*

(P) *Aus $0 < t \leq T$, $\varphi \in K^*$, $v(\tau) \ll w(\tau)$ $(0 \leq \tau < t)$, $\varphi(v(t)) = \varphi(w(t))$ folgt $\varphi(\Phi(t,v)) \leq \varphi(\Phi(t,w))$.*

Dann ergibt sich aus

$$v(0) \ll w(0),\ \Phi(t,w) \ll \Phi(t,v) \quad (0 < t \leq T) \tag{1}$$

die Ungleichung

$$v(t) \ll w(t) \quad (0 \leq t \leq T). \tag{2}$$

Beweis (wie zu Satz 1 in [7]). Wäre (2) falsch, so gäbe es ein $t \in (0,T]$ mit

$$v(\tau) \ll w(\tau) \quad (0 \leq \tau < t), \tag{3}$$

$$w(t) - v(t) \in \operatorname{Rand} K. \tag{4}$$

Wegen (4) existiert dann ein $\varphi \in K^*$, so daß

$$\varphi(w(t) - v(t)) = 0 \tag{5}$$

und

$$\varphi(x) > 0 \quad (x \in \operatorname{Int} K) \tag{6}$$

ausfällt. Aus (3), (5) folgt mit (P) die Ungleichung $\varphi(\Phi(t,v)) \le \varphi(\Phi(t,w))$, aber aus (1) folgt mit (6) die umgekehrte Ungleichung $\varphi(\Phi(t,w)) < \varphi(\Phi(t,v))$. Es ergibt sich also ein Widerspruch, und der Satz ist bewiesen.

2. Beispiele. 1. Es sei $D \subseteq (0,T] \times E$, und die Funktion

$$f(t,x) : D \to E$$

sei bezüglich der Variablen x *quasimonoton wachsend* [7], d.h. aus $(t,x) \in D,\ (t,y) \in D,\ \varphi \in K^*,\ x \le y,\ \varphi(x) = \varphi(y)$ folgt $\varphi(f(t,x)) \le \varphi(f(t,y))$.

Setzt man $\Omega = \{u \mid u \in C([0,T],E),\ (t,u(t)) \in D \text{ für } 0 < t \le T\}$ und erklärt man $\Phi : (0,T] \times \Omega \to E$ durch

$$\Phi(t,u) = f(t,u(t)) \quad (0 < t \le T,\ u \in \Omega),$$

so ist (P) für alle $v, w \in \Omega$ erfüllt.

Herzog [2] gibt einen Überblick über Quasimonotonie und ihre Anwendungen.

2. Es sei Ω die Menge der stetigen $u : [0,T] \to E$, so daß die linksseitige Ableitung

$$u'_-(t) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

für alle $t \in (0,T]$ existiert. Erklärt man $\Phi : (0,T] \times \Omega \to E$ durch

$$\Phi(t,u) = -u'_-(t) \quad (0 < t \le T,\ u \in \Omega),$$

so ist (P) für alle $v, w \in \Omega$ erfüllt.

3. Für $F : [0,T] \to [0,T]$ gelte $0 \le F(t) \le t$ $(0 \le t \le T)$, und mit $\Omega = C([0,T],E)$ sei $\Phi : (0,T] \times \Omega \to E$ definiert durch

$$\Phi(t,u) = u(F(t)) \quad (0 < t \le T,\ u \in \Omega).$$

Dann gilt (P) für alle $v, w \in \Omega$.

4. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ seien $\Phi_k : (0,T] \times \Omega_k \to E$, wobei $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n \subseteq C([0,T],E)$. Es seien $v, w \in \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_n$, und (P) gelte mit allen $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ (an Stelle von Φ). Setzt man $\Omega = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_n$ und erklärt man $\Phi : (0,T] \times \Omega \to E$ durch

$$\Phi(t,u) = \Phi_1(t,u) + \ldots + \Phi_n(t,u) \quad (0 < t \le T,\ u \in \Omega), \tag{7}$$

so gilt (P) auch mit diesem Operator Φ. Statt (7) kann allgemeiner

$$\Phi(t,u) = \alpha_1(t)\Phi_1(t,u) + \ldots + \alpha_n(t)\Phi_n(t,u) \tag{8}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : (0,T] \to [0,\infty)$ genommen werden.

5. Gemäß (7) (d.h. durch Addition) lassen sich die beiden Φ aus den Beispielen 1, 2 kombinieren. In diesem Falle liefert das hier vorliegende Ergebnis den Satz 1 aus [7], also einen Satz über Differentialungleichungen, welche von der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t,u(t)) \quad (0 \leq t \leq T) \tag{9}$$

mit einer bezüglich x quasimonoton wachsenden rechten Seite $f(t,x)$ herrühren.

6. Entsprechende Kombination der Φ aus den Beispielen 1, 3 führt auf einen Ungleichungssatz in Zusammenhang mit der Funktionalgleichung

$$u(F(t)) + f(t,u(t)) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \tag{10}$$

wobei $0 \leq F(t) \leq t$ gilt und $f(t,x)$ bezüglich x wieder quasimonoton wächst. Funktionalgleichungen der Form (10) werden im Übersichtsartikel von Baron und Jarczyk [1] behandelt.

7. Schließlich kann, (8) entsprechend, ein Ungleichungssatz für die (9), (10) verallgemeinernde Gleichung

$$\alpha(t)u'(t) = \beta(t)u(F(t)) + f(t,u(t)) \quad (0 \leq t \leq T)$$

mit $\alpha, \beta : [0,T] \to [0,\infty)$ formuliert werden. Auch etwas verwickeltere Beispiele lassen sich leicht angeben.

3. Weitere Zusammenhänge mit der Literatur. Resultate über Differential-Funktional-Ungleichungen findet man bei Herzog [3], [4]. In [5] benutzt Herzog Differentialungleichungen beim Existenzbeweis für Lösungen von Funktionalgleichungen der Form $f(\omega, u(\omega),\ u(g_1(\omega)), \ldots, u(g_m(\omega))) = 0$ in $\mathbb{R}^n$; dabei variiert ω in einem metrischen Raume. Es dürfte auch nicht schwer sein, die in [6] gegebene Version des Lemmas von Nagumo und Westphal über parabolische Differentialungleichungen in den Rahmen der vorliegenden Arbeit zu stellen.

Literatur

[1] Karol Baron und Witold Jarczyk: *Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems.* Aequationes Math. **61**, 1-48 (2001).

[2] Gerd Herzog: *Quasimonotonicity.* Nonlinear Analysis **47**, 2213-2224 (2001).

[3] —: *Second order differential-functional inequalities for bounded functions.* Erscheint in Positivity.

[4] —: *Differential-functional inequalities for bounded vector valued functions.* Erscheint in Z. Analysis Anwendungen.

[5] —: *Semicontinuous solutions of systems of functional equations.* Manuskript.

[6] Alice Simon und Peter Volkmann: *Parabolic inequalities in ordered topological vector spaces.* Nonlinear Analysis **25**, 1051-1054 (1995).

[7] Peter Volkmann: *Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. **127**, 157-164 (1972).

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.