

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5809

**Finite-Element-Berechnung
von Magnetlagern mit
Hochtemperatursupraleiter-
Volumenkörpern**

A. O. Hauser

Institut für Technische Physik

Oktober 1996

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5809

**Finite-Element-Berechnung von Magnetlagern mit
Hochtemperatursupraleiter-Volumenkörpern**

Andreas Oliver Hauser

Institut für Technische Physik

**Von der Fakultät für Elektrotechnik der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation**

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1996

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Supraleitende Magnetlager nutzen die diamagnetischen Eigenschaften von Hochtemperatursupraleitern für eine berührungslose und damit abrieb- und reibungslose Lagerung aus. Solche Lager sind selbststabilisierend und bieten sich zum Bau von Schwungradenergiespeichern an.

Zur Konstruktion und Optimierung solcher Lager ist die Berechnung der wichtigsten Lagerparameter - der maximalen Hubkraft, der vertikalen und der horizontalen Steifigkeit - zwingend notwendig.

Ziel dieser Arbeit ist es, zunächst ein allgemein zugängliches Werkzeug zu entwickeln, mit dessen Hilfe die magnetischen Kräfte in supraleitenden Magnetlagern berechnet und die Lagerparameter optimiert werden können.

Da bei der Lösung dieses Problems in erster Linie die elektromagnetische Feldverteilung im Hochtemperatursupraleiter sowie im umgebenden Luftraum von Bedeutung ist und Nichtlinearitäten im Werkstoff Supraleiter berücksichtigt werden müssen, bietet sich die Verwendung der Methode der finiten Elemente als numerisches Lösungsverfahren an. Um das makroskopische elektromagnetische Verhalten von Hochtemperatursupraleitern berücksichtigen zu können, mußte ein neues finites Element entwickelt werden. Mittels dieses Elements wird die Berechnung und Optimierung von Schwungradenergiespeichern, die mit supraleitenden Magnetlagern ausgestattet sind, möglich, wobei auf ein kommerziell erhältliches FE-Programm mit all seinen Hilfsmitteln zurückgegriffen werden kann.

Die Elementformulierung sowie die integrierten Modelle zur makroskopischen Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene in Hochtemperatursupraleitern werden mittels Vergleich durchgeführter Rechnungen mit vorhandenen Meßdaten verifiziert.

Zur Simulation horizontaler und vertikaler Bewegungen des Lagerrotors werden Verfahren entwickelt, die auf einer zeitabhängigen Variation der magnetischen Koerzitivfeldstärken der permanentmagnetischen Werkstoffe basieren.

Mit Hilfe dieses neuentwickelten Werkzeuges wird ein im Forschungszentrum Karlsruhe entwickeltes Schwungrad berechnet und hinsichtlich seiner entscheidenden Lagerparameter - der Hubkraft und der magnetischen Steifigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung - optimiert. Eine Unterteilung des Ringmagneten in drei Einzelringe, die mit wechselnder Magnetisierungsrichtung in die Schwungradscheibe eingelassen werden, scheint hierbei die besten Resultate zu liefern.

Finite element calculation of magnetic bearings with high-temperature superconductors

Abstract

Superconducting magnetic bearings take use of the diamagnetic properties of high-temperature superconductors to obtain a contactless and, therefore, frictionless and wearless bearing. These kinds of bearings are selfstable and can be used in flywheel energy storage systems.

The calculation of the main parameters of such bearings - the maximum levitation force, the vertical and the horizontal stiffness - is essential for their construction and optimization.

Therefore, the first goal of this work is to develop a common available calculation tool which allows both, the calculation of the magnetic forces in superconducting magnetic bearings, as well as the optimization of the bearing parameters.

Solving this problem, the electromagnetic field distribution inside of the high-temperature superconductor and in the surrounding air is of main interest. Further, nonlinearities in the superconductor have to be taken into consideration. Therefore, the Finite Element Method is used.

To take into consideration the macroscopic electromagnetic behaviour of high-temperature superconductors, it is necessary to develop a new finite element. Using this new element, the calculation and optimization of flywheel energy storage systems which include superconducting magnetic bearings become possible. On the same time, the new element allows to use all the tools of a commercial FE-program.

The formulation of the element as well as the integrated models for the macroscopic description of the electromagnetic phenomena in high-temperature superconductors are verified by comparing experimental results with calculated ones.

Special procedures for the simulation of motion for the bearing rotor - for both, vertical and horizontal movement - has been developed, basing on a time dependent variation of the magnetic coercitive force of the permanent magnets.

Using the new developed calculation tool, a flywheel, developed at the research centre of Karlsruhe, has been calculated and optimized with regard to its main bearing parameters. A subdivision of the ring magnet into three single rings with alternating polarization seems to be the best configuration.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Supraleitung	9
2.1	Konventionelle Supraleiter	9
2.2	Hochtemperatursupraleiter	14
3	Supraleitende magnetische Lager und ihr Einsatz in Schwungrädern	19
3.1	Supraleitende magnetische Lager	19
3.2	Schwungräder	25
4	Modelle für HTSL	29
4.1	Analytische Modelle	29
4.2	Perfekt diamagnetisches Modell	30
4.3	Nicht perfekt diamagnetisches Modell	31
4.4	Modell des kritischen Zustands	33
4.5	Modell des eingefrorenen Flusses	34
4.6	Modell des Flußkriechens und des Flußfließens	34
4.7	Modelle zur Berücksichtigung der Feldabhängigkeit von J_c	36
5	Problembeschreibung mittels der Methode der finiten Elemente	39
5.1	Lokale Ansatzfunktionen	41
5.2	Aufstellung der Vektordifferentialgleichung	42
5.3	Aufstellen der Element- und Systemmatrizen	47
5.4	Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und anisotropen Materialeigenschaften	48
5.5	Lösungsverfahren für das FE-Gleichungssystem	49

5.6	Transiente Berechnungen und das Newmark-Zeitintegrationsverfahren	50
5.7	Konvergenz und Genauigkeit der Lösung einer FE-Analyse	52
6	Das neue Userelement SUPRA105	53
7	Simulation vertikaler und horizontaler Bewegungen im FE-Modell	61
7.1	Simulation vertikaler Bewegungen	62
7.1.1	Zylinderförmiger Permanentmagnet	63
7.1.2	Ringförmiger Permanentmagnet	66
7.2	Simulation horizontaler Bewegungen	69
8	Verifikation des Userelements SUPRA105	73
8.1	Wirbelstromberechnungen	75
8.2	Verwendung des Modells des kritischen Zustands	78
8.3	Verwendung des Modells des eingefrorenen Flusses	83
8.4	Vergleich der Leistungsfähigkeit der integrierten Modelle	87
9	Modellierung und Berechnung eines Schwungrades	89
9.1	Berechnung der maximalen Hubkraft des Schwungradlagers	93
9.2	Berechnung der vertikalen Steifigkeit des Schwungradlagers	95
9.3	Berechnung der horizontalen Steifigkeit des Schwungradlagers	96
10	Geometrieoptimierung eines Schwungradenergiespeichers	99
10.1	Kontinuierliche Anordnung der Supraleiter	101
10.2	Variation der Anordnung und der Anzahl der Ringmagnete	102
10.3	Grundsätzliche Überlegungen zur Optimierung der Lagerparameter .	104
11	Zusammenfassung	107
	Anhang	109
A	Der gyroskopische Effekt	111
B	Herleitung der Matrixgleichungen	117
C	Zeitabhängige Koerzitivfeldstärke beim Zylindermagneten	125
	Literaturverzeichnis	129

Erläuterung der verwendeten Abkürzungen

3D	dreidimensional
BCS-Theorie	Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie
CS-Modell	critical state model
fc-Gebiet	flux-creep Gebiet
FE	finite Elemente
FEM	Methode der finiten Elemente
ff-Gebiet	flux-flow Gebiet
FF-Modell	frozen field model
FFC-Modell	flux-flow-creep model
FZK	Forschungszentrum Karlsruhe
GLAG-Theorie	Ginzburg-Landau-Abrikosov-Gorkov-Theorie
HTSL	Hochtemperatursupraleiter
LN2	flüssiger Stickstoff
MPC	multi point constraint
MPMG	melt powder melt growth
NR	Newton-Raphson
PM	Permanentmagnet
SMES	supraleitender magnetischer Energiespeicher
SQUID	supraleitendes Quanteninterferometer
YBCO	$Y_1Ba_2Cu_3O_7$

Kapitel 1

Einleitung

Für den Betrieb rotierender Maschinen und Schwungräder sind mechanische Lager erforderlich. Diese haben die Aufgabe, Kräfte zwischen den relativ zueinander bewegten Komponenten zu übertragen und Lageveränderungen dieser Komponenten, außer in vorgesehenen Bewegungsrichtungen, zu begrenzen. Hierbei treten durch den Kontakt der sich bewegenden Komponenten unerwünschte Eigenschaften wie Reibungsverluste und Abrieb auf. Dies führte in einigen Bereichen zum Einsatz von Magnetlagern, welche die magnetischen Kräfte zwischen Permanentmagneten für eine berührungsfreie Lagerung nutzen.

Nach dem Satz von Earnshaw [1] kann ein Permanentmagnet jedoch im Feld anderer Permanentmagnete keinen stabilen Gleichgewichtszustand einnehmen. Neben der Verwendung von Spulen, die über eine Regelelektronik angesteuert werden (\rightarrow aktive magnetische Lager), bieten sich Supraleiter zur Sicherung einer stabilen Gleichgewichtslage in Magnetlagern an, bei deren Einsatz die aufwendige Steuer- und Regeltechnik aktiver magnetischer Lager entfällt (\rightarrow passive oder selbststabilisierende magnetische Lager).

Neben der allgemein bekannten Eigenschaft, daß der elektrische Widerstand eines Supraleiters bei Unterschreitung einer bestimmten, materialabhängigen Temperatur (Sprungtemperatur T_c) plötzlich auf Null abfällt, weisen Supraleiter noch ein weiteres Phänomen - bekannt als Meissner-Ochsenfeld Effekt - auf. Ein Supraleiter ist demnach in der Lage, im supraleitenden Zustand ein äußeres Magnetfeld aus seinem Inneren zu verdrängen. Die aus dieser Feldverdrängung resultierende magnetische Kraft kann für die Konstruktion eines supraleitenden Magnetlagers genutzt werden. Die seit 1986 entdeckten keramischen Supraleiter, die aufgrund ihrer hohen Sprungtemperatur mit flüssigem Stickstoff (77 K) gekühlt werden können, verdrängen ein

äußeres Magnetfeld $H_a > H_{c1}$ - ebenso wie konventionelle Supraleiter 3. Art - nicht vollständig aus ihrem Innern. Sie sind jedoch in der Lage, eingedrungene magnetische Flußfäden an sogenannten Haftzentren festzuhalten. Dies resultiert in einer magnetischen Steifigkeit, sowohl in vertikaler, als auch in horizontaler Richtung, wodurch der Aufbau eines supraleitenden Magnetlagers erst ermöglicht wird. Unter der magnetischen Steifigkeit versteht man den Kraftgradienten der zwischen Permanentmagnet und Supraleiter wirkenden magnetischen Kräfte.

Auf die für supraleitende Magnetlager entscheidenden Eigenschaften von Supraleitern wird in Kapitel 2 eingegangen. In Kapitel 3 werden der Aufbau und die wichtigsten Parameter supraleitender Magnetlager besprochen.

Der Einsatz supraleitender magnetischer Lager wird insbesondere bei Apparaturen mit schnelldrehenden Achsen, im Einsatzbereich tiefkalter Temperaturen und zur Lagerung von Schwungrädern favorisiert. Die Entwicklung solcher Lager macht jedoch die Berechnung wichtiger Lagerparameter wie Hubkraft, horizontaler und vertikaler Lagersteifigkeit erforderlich.

Solche Berechnungen können aufgrund der oft komplizierten Geometrie solcher Lager und der, in Kapitel 4 ausführlich behandelten, nichtlinearen Materialmodelle der Supraleiter nur numerisch durchgeführt werden. Aufgrund ihrer universellen Einsatzmöglichkeiten sowie der Möglichkeit nichtlineare und anisotrope Materialeigenschaften berücksichtigen zu können bietet sich hierbei insbesondere die Methode der finiten Elemente (Kapitel 5) als Rechenwerkzeug an. Allerdings können die nichtlinearen Beziehungen zwischen Stromdichte und elektrischem Feld, wie sie in Supraleitern existieren, mit kommerziellen FE-Programmen nicht berücksichtigt werden. Es war daher notwendig, ein spezielles Element zu entwickeln, das, eingebunden in ein kommerzielles FE-Programm, die Berechnung der makroskopischen elektromagnetischen Eigenschaften der hier interessierenden Hochtemperatursupraleiter erlaubt. Der Aufbau dieses neuen Elements wird in Kapitel 6 erläutert.

Um wichtige Größen supraleitender Magnetlager, wie beispielsweise deren maximale Hubkraft oder ihre Steifigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung, mittels der Methode der finiten Elemente zu berechnen, ist neben der Verwendung des neu entwickelten Elements, welches die elektromagnetischen Eigenschaften supraleitender Materialien erfassen kann, auch die Simulation größerer Bewegungen eines Permanentmagneten innerhalb des FE-Netzes notwendig. Solche Simulationsmöglichkeiten werden in Kapitel 7 diskutiert.

Zur Verifikation, sowohl der Programmierung des neuen Elements, als auch der

zugrundegelegten Materialmodelle, wurden die in Kapitel 8 beschriebenen Rechnungen durchgeführt und die Ergebnisse mit entsprechenden Meßergebnissen verglichen.

Nachdem nun ein geeignetes Rechenwerkzeug zur Verfügung stand, wurde ein im Forschungszentrum Karlsruhe gebautes Schwungrad modelliert und berechnet (Kapitel 9). Die so gewonnenen Daten dienen als Ausgangspunkt für eine Optimierung der Lagerparameter dieses Schwungrades, welche, zusammen mit den daraus hervorgegangenen Ergebnissen, in Kapitel 10 diskutiert werden. Hierbei geht es nicht darum, exakte Werte für die optimierten Lagerparameter zu berechnen, sondern vielmehr darum qualitativ aufzuzeigen, welche Verbesserungen durch entsprechende Änderungen der Lagergeometrie - nicht der Materialien - erzielt werden können. Exakte Werte anzugeben wäre nicht sinnvoll, da diese viel zu stark von den verwendeten Materialien bzw. vom gewählten Herstellungsprozeß der supraleitenden Massivkörper abhängen.



Kapitel 2

Supraleitung

In diesem Kapitel sollen physikalische Grundlagen der Supraleitung, die essentiell für das Verständnis supraleitender Magnetlager sowie der in Kapitel 4 vorgestellten mathematisch-physikalischen Modelle sind, besprochen werden.

Im ersten Abschnitt werden, nach einem kurzen historischen Überblick über die Entdeckung der Supraleitung, die Theorie und die wichtigsten Eigenschaften konventioneller Supraleiter vorgestellt.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich speziell mit den Eigenschaften der 1986 entdeckten Hochtemperatursupraleiter (HTSL), welche beim Bau supraleitender Magnetlager Verwendung finden.

Für eine detaillierte physikalische Betrachtung des Phänomens Supraleitung und deren technischen Anwendungen sei jedoch auf [2] bzw. [3] verwiesen.

2.1 Konventionelle Supraleiter

Nachdem es H.K. Onnes 1908 gelang, Helium zu verflüssigen und damit der Temperaturbereich von 1 K bis 10 K erschlossen war, untersuchte er den elektrischen Widerstand von Metallen bei tiefen Temperaturen. Hierbei entdeckte er 1911 beim Element Quecksilber, daß bei Unterschreitung von 4.2 K (etwa -269°C), der Sprungtemperatur oder kritischen Temperatur T_c des Elements Quecksilber, der elektrische Widerstand unmeßbar klein wurde. Das Bemerkenswerte dieser Entdeckung war jedoch, daß diese Widerstandsänderung in einem Temperaturintervall von nur wenigen Hundertsteln eines Grades erfolgte. H.K. Onnes nannte diese Phänomen "Supraleitung".

Auch mit modernsten Methoden ist es bislang nicht gelungen, im supraleitenden Zustand einen Restwiderstand zu messen. Mit den heutigen Meßmethoden kann man - beim Eintritt der Supraleitung - von einem Abfall des elektrischen Widerstands um mindestens 14 Zehnerpotenzen ausgehen, weswegen man - für Gleichstrom - im allgemeinen von einem "Verschwinden" des elektrischen Widerstandes spricht [2].

Die Supraleitung ist ein quantenmechanisches Phänomen und kann nach J. Bardeen [4] mittels der Wechselwirkung der Elektronen über die Polarisation des Gitters der Atomrümpfe beschrieben werden. Die auf diese Vorstellung aufbauende *BCS-Theorie* (benannt nach J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer) [5] stellte 1957 die erste atomistische (mikroskopische) Theorie der Supraleitung dar: Die Elektronen können demnach untereinander wechselwirken, indem sie Schallquanten - sogenannte Phononen - austauschen. Diese Wechselwirkung kann - im supraleitenden Zustand - die aufgrund der elektrostatischen Kräfte auftretende Abstoßung der Elektronen überwiegen. Dies führt zur Bildung von Cooper-Paaren, die aus zwei Elektronen mit entgegengesetzten, gleich großen Impulsen und entgegengesetzten Eigendrehimpulsen (Spin) bestehen. Alle Cooper-Paare befinden sich im gleichen Quantenzustand und stimmen somit in allen physikalischen Größen überein. Um ein Cooper-Paar aus der Gesamtheit aller Cooper-Paare herauszulösen und aufzubrechen, muß man mindestens die Bindungsenergie der Paarkorrelation aufwenden. Steht diese Energie nicht zur Verfügung, können die Cooper-Paare nicht mit dem Gitter wechselwirken. Dies erklärt das Fließen eines elektrischen Stroms ohne resistive Energiedissipation. Bei einer Steigerung des Impulses der Cooper-Paare, und damit ihrer kinetischen Energie, kann das Paar aufbrechen; das Material geht vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand über.

Im Zusammenhang mit den hier betrachteten supraleitenden Magnetlagern ist jedoch ein weiteres Phänomen von Bedeutung:

1933 zeigten W. Meissner und R. Ochsenfeld, daß der supraleitende Zustand neben dem Verschwinden des elektrischen Widerstands noch eine weitere Eigenschaft aufweist: Im supraleitenden Zustand wird ein Magnetfeld - unabhängig von der Versuchsführung - aus dem Inneren eines Supraleiters verdrängt [6]. Die aus dieser *Feldverdrängung* resultierende magnetische Kraft kann für magnetischen Lager, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt werden, genutzt werden.

Eine quantitative Beschreibung dieses Phänomens erlaubte bereits 1935 die *Londonsche Theorie* [7]. Deren beiden Grundgleichungen erfassen die charakteristischen

Eigenschaften eines Supraleiters:

$$\frac{d(\Lambda \vec{J}_s)}{dt} = \vec{E} \quad \text{1. Londonsche Gleichung} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}(\Lambda \vec{J}_s) = -\mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{2. Londonsche Gleichung} \quad (2.2)$$

mit

$$\Lambda = \frac{m_s}{n_s \cdot e_s^2} \quad ,$$

wobei m_s , n_s und e_s Masse, Anzahldichte und Ladung der supraleitenden Ladungsträger bezeichnen. Die 1. Londonsche Gleichung beschreibt den verschwindenden Widerstand im supraleitenden Zustand (für $|\vec{E}| = 0$ tritt keine Änderung der Abschirmstromdichte \vec{J}_s auf). Die 2. Londonsche Gleichung beschreibt das Abklingen eines äußeren Magnetfelds \vec{H} in einer dünnen Oberflächenschicht - und damit den Meissner-Ochsenfeld Effekt. Diese beiden Gleichungen, die im Supraleiter das ohmsche Gesetz $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ ersetzen, findet man, in etwas veränderter Form, auch in den in Kapitel 4 vorgestellten mathematisch-physikalischen Modellen für das makroskopische elektromagnetische Verhalten von HTSL wieder.

Man unterscheidet bezüglich des Verhaltens im Magnetfeld zwischen drei Arten von Supraleitern:

- *Supraleiter 1. Art* zeigen den Feldverdrängungseffekt (idealer Diamagnetismus) bis zum thermodynamisch kritischen Magnetfeld $H_{c\,th}$, bei dessen Überschreitung ein Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand eintritt.
- *Supraleiter 2. Art* zeigen für kleine Felder $H < H_{c1}$ (H_{c1} : unteres kritisches Feld) den Feldverdrängungseffekt, gehen aber für Felder $H_{c1} < H < H_{c2}$ (H_{c2} : oberes kritisches Feld) in einen Zustand, den man als Shubnikov-Phase bezeichnet, über, in dem das Magnetfeld, in Form sogenannter Flußfäden, teilweise in den Supraleiter eindringt. Dieser, in den Supraleiter eindringende magnetische Fluß, ist quantisiert, tritt also nur als ganzzahliges Vielfaches eines Flußquants ϕ_0 auf ($\phi_0 = \frac{h}{2e} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$). Jeder in den Supraleiter eingedrungene Flußfaden enthält genau ein Flußquant.

- Bei *Supraleitern 3. Art* - oft auch als "harte Supraleiter" bezeichnet - werden (zusätzlich zu den Eigenschaften der Supraleiter 2. Art) die eingedrungenen Flußfäden an sogenannten Haftzentren gebunden. Diese *Flußverankerung* ermöglicht erst den verlustfreien Stromtransport in der Shubnikov-Phase.

Die entsprechenden Magnetisierungskurven für Supraleiter 1. und 2. Art sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Hierbei ist die Magnetisierung $|\vec{M}|$ in Abhängigkeit von einem äußeren Magnetfeld $|\vec{B}_a|$ dargestellt.

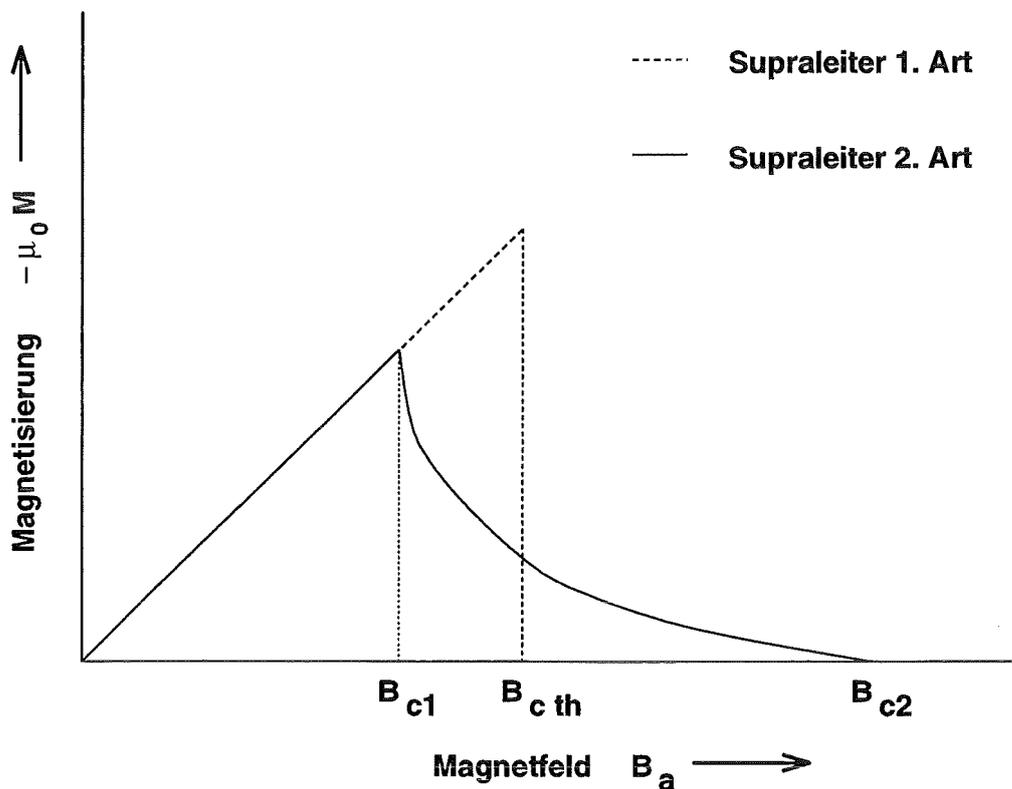


Abbildung 2.1: Magnetisierungskurven für Supraleiter 1. und 2. Art.

Die Londonsche Theorie ist beschränkt auf Zustände, in denen die Dichte der supraleitenden Ladungen (Cooper-Paardichte) im gesamten Volumen der Probe als konstant angenommen werden darf. Der Zwischenzustand - die Shubnikov-Phase -, in dem normaleitende Gebiete neben supraleitenden Gebieten existieren, kann demnach nicht erfaßt werden.

Quantitativ werden Supraleiter 2. Art durch die *GLAG-Theorie* (benannt nach V.L. Ginzburg, L.D. Landau, A.A. Abrikosov und L.P. Gorkov) beschrieben, die aus

der Londonschen Theorie hervorgegangen ist. Der Übergang vom normalleitenden in den supraleitenden Zustand wird hierbei als Phasenübergang 2. Ordnung betrachtet [2].

Die bei Supraleitern 3. Art auftretenden *Haftzentren* für Flußfäden können beispielsweise normalleitende Ausscheidungen (Verunreinigungen) im Supraleiter oder Fehler in dessen kristallinen Aufbau sein. Die Bildung eines Flußschlauches im Supraleiter erfordert eine bestimmte Energie, die proportional zur Länge des Flußschlauches ist. Für die Flußschläuche ist es daher energetisch günstig, ihre Länge in der supraleitenden Phase zu minimieren, indem sie beispielsweise durch eine normalleitende Ausscheidung verlaufen. Solch ein Haftzentrum kann daher physikalisch auch als Potentialmulde beschrieben werden (Abbildung 2.2).

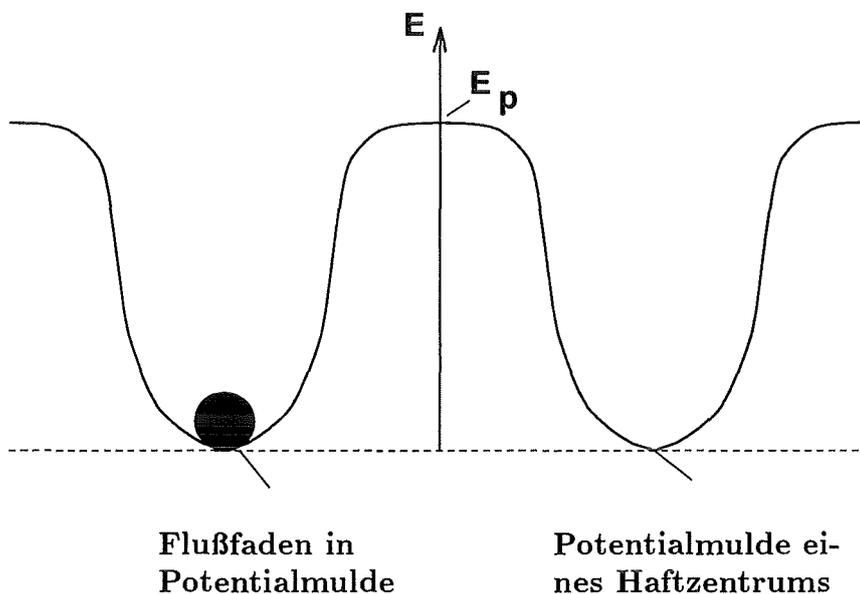


Abbildung 2.2: Potentialdarstellung von Haftzentren.

Um einen Flußschlauch zu bewegen und den Potentialwall (Bindungsenergie E_p) zum nächsten Haftzentrum zu überwinden, ist eine Kraft (die Haft- oder Volumenverankerungskraft F_p) nötig. Die Existenz einer solchen "kritischen Kraft" weist auf ein irreversibles magnetisches Verhalten hin [8].

Wird solch ein dissipativer Prozeß allein durch thermische Schwankungen im Supraleiter ausgelöst (was bei Supraleitern 3. Art und bei endlicher Temperatur praktisch immer auftritt), spricht man von thermisch aktiviertem **Flußkriechen**. Spielt hingegen die an den Flußfäden angreifende Lorentzkraft $\vec{F}_l = \vec{J} \times \vec{B}$ die entscheidende Rolle, so spricht man von **Flußfließen**.

Die Grenze zwischen supraleitendem und normalleitendem Zustand wird zum einen durch die Temperatur (kritische Temperatur T_c), zum anderen aber auch durch den im Supraleiter fließenden Strom (mit der kritischen Stromdichte J_c) und durch das äußere Magnetfeld (kritisches Feld H_c) bestimmt.

Die Übergangstemperaturen der konventionellen Supraleiter liegen unter 23 K [9], was eine aufwendige Kühlung mit flüssigem Helium erforderlich macht.

2.2 Hochtemperatursupraleiter

1986 beobachteten J.G. Bednorz und K.A. Müller vom IBM Forschungslabor Zürich Supraleitung oberhalb von 30 K [10]. Bei dem untersuchten Material handelte es sich um ein Mischoxid aus Lanthan, Barium und Kupfer ($Ba_xLa_{5-x}Cu_5O_{5(3-x)}$). Diese Entdeckung löste eine stürmische Suche nach weiteren supraleitenden Kupraten aus.

Bereits 1987 wurden die supraleitenden Eigenschaften des $Y_1Ba_2Cu_3O_7$ (kurz als YBCO bezeichnet) entdeckt [11]. Dieses Material weist eine Übergangstemperatur von 92 K auf und kann daher mit flüssigem Stickstoff (LN2), dessen Siedetemperatur 77 K beträgt, gekühlt werden. Diese Art der Kühlung ist nicht nur wesentlich billiger als die Kühlung mit flüssigem Helium, sondern ist auch technisch leichter handhabbar. Da die neuen keramischen Supraleiter bereits bei 77 K supraleitend sind, werden sie auch als Hochtemperatursupraleiter (HTSL) bezeichnet. Sie sind ausgeprägte Supraleiter 3. Art und weisen prinzipiell alle charakteristischen Eigenschaften auf, die man auch von den klassischen Supraleitern kennt. Das untere kritische Feld B_{c1} liegt bei einigen mT [12].

Die entscheidenden Strukturelemente im HTSL sind CuO_2 -Ebenen in Form von Sauerstoffoktaedern mit zentralem Cu -Ion. Diese Ebenen werden auch als kristallographische a-b-Ebenen bezeichnet; die Normale dazu als c-Achse.

Die polykristallinen HTSL sind granularer Natur. Sie bestehen aus einzelnen supraleitenden Körnern, die in eine normalleitende oder nur schwach supraleitende Matrix eingebettet sind, so daß zwischen *intergranularen Strömen*, zwischen den einzelnen Körnern, und *intragranularen Strömen*, in den Körnern selbst, unterschieden werden muß (Abbildung 2.3). Aufgrund dieser Granularität dringt magnetischer Fluß schon bei sehr kleinen Außenfeldern entlang der Korngrenzen in den Supraleiter ein. Der Wert des oberen kritischen Feldes B_{c2} liegt - bei 77 K und bei heutigen Präparationsmethoden - bei etwa 8 Tesla. Die Granularität macht den

Werkstoff YBCO für die Leitertechnik uninteressant, da die Transportströme, die durch die relativ geringen intergranularen Ströme geprägt werden, im Vergleich zu den in konventionellen Supraleitern erreichbaren Strömen gering sind.

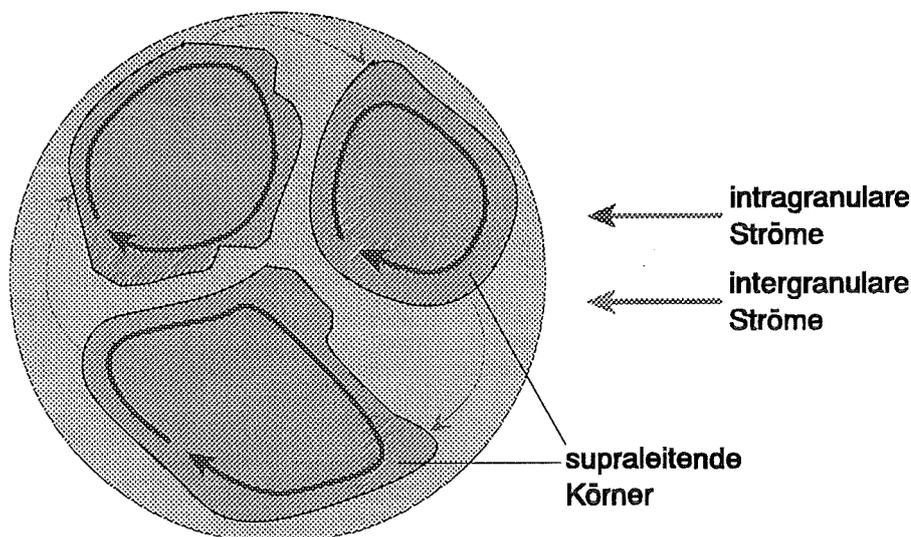


Abbildung 2.3: Inter- und intragranulare Ströme in HTSL.

Die hohen intragranularen Stromdichten¹ machen das Material YBCO jedoch sehr attraktiv für Anwendungen in supraleitenden Magnetlagern. Die intragranularen Stromdichten konnten, durch spezielle Herstellungsprozesse wie das Schmelztexturverfahren [13] und das weiterentwickelte MPMG-Verfahren (**m**elt **p**owder **m**elt **g**rowth) [14], noch gesteigert werden. Durch diese Herstellungsprozesse kann die Zahl der Korngrenzen im Material verringert, die Korngröße somit erhöht werden. Desweiteren können schmelztexturierte Proben sehr effektiv magnetischen Fluß verankern, so daß kritische Stromdichten (intragranulare Stromdichten!) von $3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$ bei 77 K und 1 T in MPMG-YBCO-Massivkörpern erzielt werden können [14, 15]. Aufgrund größerer Körner ergeben sich größere Strompfade für die Abschirmströme. Das magnetische Moment \vec{m} des Supraleiters wird damit ebenfalls größer [16]:

$$\vec{m} = \vec{M} \cdot V \quad (2.3)$$

¹Die in den einzelnen Körnern fließenden Ringströme werden im allgemeinen auf die von ihnen durchflossene Fläche, die sich aus dem Produkt aus Radius der Ringströme und der Ausdehnung der Körner senkrecht zur stromtragenden Ebene ergibt, bezogen.

und

$$\vec{M} \sim \vec{J}_c \times \vec{r} \quad (2.4)$$

Hierbei ist V das Volumen des Supraleiters, J_c die kritische Stromdichte und r der Radius des Strompfades der induzierten Abschirmströme.

Die in den Körnern induzierten Abschirmströme bewirken eine starke abstoßende Kraft (Hubkraft) $\vec{F} = \vec{m} \cdot \frac{d\vec{H}}{dz}$ ($\frac{d\vec{H}}{dz}$: vom Magnet produzierter Feldgradient) auf einen in der Nähe befindlichen Permanentmagneten. Hierbei ist jedoch die Orientierung des äußeren Feldes relativ zu den Schichten der Sauerstoffoktaeder (a-b-Ebene) der Kristalle entscheidend. Abschirmströme fließen in diesen Schichten wesentlich besser als senkrecht dazu (c-Achse). Die daraus resultierende starke Anisotropie der kritischen Stromdichte macht sich auch in den orientierungsabhängigen Maximalwerten der Hubkraft bemerkbar. J_c in der a-b-Ebene von YBCO ist etwa um den Faktor 3 höher als in c-Achsenrichtung [15].

Das im vorhergehenden Abschnitt angesprochene thermisch aktivierte Flußkriechen und die damit verbundene Energiedissipation stellt in HTSL ein wesentlich größeres Problem dar, als bei den klassischen Supraleitern. Das Flußkriechen bewirkt beispielsweise in schmelztexturiertem YBCO eine Stromabnahme von etwa 10 % in 24 h (bei 77 K) [9].

Zur Zeit existieren nur makroskopische, jedoch keine akzeptierten mikroskopischen Theorien zur Erklärung der Supraleitung in HTSL [17]. Insbesondere ist es bisher nicht geklärt, ob in HTSL die Elektron-Phonon-Kopplung für die sehr hohen Übergangstemperaturen von bis zu 125 K verantwortlich ist [9].

In Tabelle 2.1 sind die T_c - und B_c - bzw. B_{c2} -Werte für einige technisch interessante Supraleiter zusammengestellt.

Material	T_c (K)	B_c bzw. B_{c2} (T)
Nb	9.25	0.288
Ti	0.4	einige mT
Sn	3.72	einige mT
Nb_xTi_{1-x}	0.6 – 9.8	12.0 bei 4.2 K
Nb_3Sn	18.0	21.5 bei 4.2 K
$Y_1Ba_2Cu_3O_7$	92	$\sim 70 T$ für $\vec{B} \perp$ ab-Ebene bei 4.2 K $\sim 300 T$ für $\vec{B} \parallel$ ab-Ebene
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125	
$Bi(2212)$	~ 80	~ 100 bei 4.2 K
$Bi(2223)$	~ 110	~ 100 bei 4.2 K

Tabelle 2.1: Wichtige Parameter einiger technisch interessanter Supraleiter.

Kapitel 3

Supraleitende magnetische Lager und ihr Einsatz in Schwungrädern

3.1 Supraleitende magnetische Lager

Lager sollen Kräfte zwischen relativ zueinander bewegten Komponenten aufnehmen und übertragen, sowie Lageveränderungen der Komponenten relativ zueinander, außer in vorgesehenen Bewegungsrichtungen (Freiheitsgraden), beschränken. Lager lassen sich dabei, entsprechend der jeweils eingeschränkten Freiheitsgrade, in Axiallager und in Radiallager unterteilen (Abbildung 3.1). Beim Bau der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Schwungräder kommen in erster Linie Axiallager zum Einsatz, die die Gewichtskraft der Schwungradscheibe aufnehmen sollen. Radiallager können jedoch zusätzlich, zur Erhöhung der radialen Lagersteifigkeit, verwendet werden.

Bei Verwendung konventioneller mechanischer Lager (Kugellager, Rollenlager, Gleitlager oder Gaslager) treten durch den Kontakt der sich bewegenden Komponenten unerwünschte Effekte wie Reibung und Abrieb auf. Die Reibung begrenzt die maximal zulässige Umdrehungszahl und führt zu einem Temperaturanstieg im Lager. Insbesondere bei Hochgeschwindigkeitslagern treten zusätzlich Probleme wie starke Geräuscentwicklung und Vibrationen auf [18]. Der Abrieb reduziert hingegen die Lebensdauer des Lagers. Desweiteren sind bei konventionellen Lagern Gleit- und Schmiermittel nötig, die den bei Schwungrädern zwecks Reduktion der Luftreibung angestrebten Einsatz im Vakuum, sowie den Einsatz bei sehr tiefen Temperaturen erschweren [19]. Insbesondere zur Lagerung schnelldrehender Maschinen und Schwungräder sind daher andere Lagerkonzepte vorzuziehen.

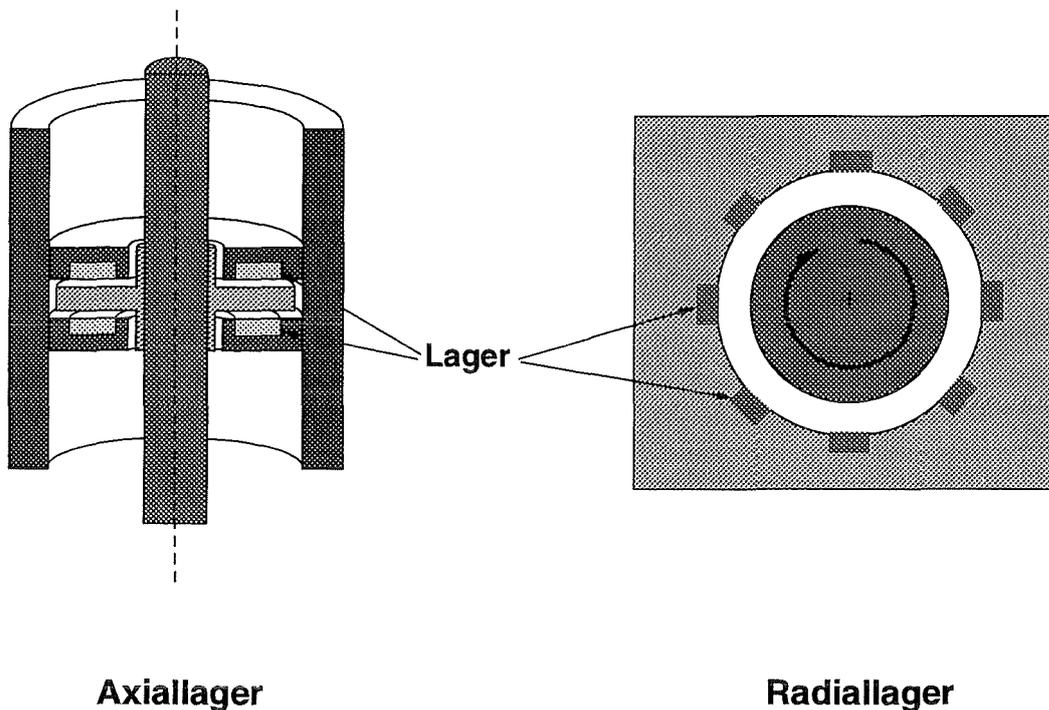


Abbildung 3.1: Axial- und Radiallager.

Nutzt man beispielsweise die magnetischen Kräfte zwischen Permanentmagneten, so kann man Lagerkonfigurationen erstellen, die die oben genannten Nachteile nicht aufweisen, da sich die relativ zueinander bewegten Komponenten nicht länger berühren. Allerdings sind solche, nur aus Permanentmagneten bestehende Konfigurationen nicht stabil: Nach dem Satz von Earnshaw [1] kann ein in einem statischen Magnetfeld oder elektrischen Feld platzierter Körper mit konstanter Ladung, Magnetisierung oder konstantem Strom allein durch elektrische oder magnetische Kräfte nicht in einer stabilen Gleichgewichtslage gehalten werden. Dies kann am Beispiel eines wirbelfreies Magnetfeldes leicht gezeigt werden:

Ein wirbelfreies Magnetfeld \vec{H} kann mittels des magnetischen Skalarpotentials φ_m ausgedrückt werden durch

$$\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m \quad (3.1)$$

Durch Bildung der Divergenz

$$\text{div} \vec{H} = \text{div}(-\text{grad } \varphi_m) = -\Delta \varphi_m \quad (3.2)$$

und unter Berücksichtigung der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

erhält man schließlich die Laplacesche Differentialgleichung für das magnetische Skalarpotential φ_m in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

Ein stabiles Gleichgewicht ist nur am Ort eines Potentialminimums möglich. Die notwendige Bedingung für solch ein Minimum ist, daß die ersten Ableitungen des Potentials nach den Ortskoordinaten identisch verschwinden:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Die hinreichende Bedingung für ein Potentialminimum - die zweiten Ableitungen des Potentials müssen größer als Null sein - läßt sich bei Betrachtung von Gleichung (3.4) jedoch nur für maximal zwei Raumrichtungen gleichzeitig erfüllen! Demzufolge muß ein Magnetlager in mindestens einer Raumrichtung aktiv unterstützt werden.

Der Satz von Earnshaw setzt voraus, daß die Feldstärke der Permanentmagnete konstant ist. Wenn es für einen Magneten möglich wäre, seine Feldstärke als Funktion des Abstandes zu den anderen Permanentmagneten zu verändern, würde der Satz von Earnshaw ein stabiles Schweben nicht länger verbieten.

Bei den sogenannten **aktiven magnetischen Lagern** sorgt eine von einer Steuer- und Regelelektronik angesteuerte Spule für solch eine Feldstärkeänderung. Diese Steuer- und Regelelektronik ist jedoch aufwendig und verringert, im direkten Vergleich mit der konventionellen Technik, die Zuverlässigkeit des Lagers. Insbesondere für Anwendungen, bei denen es auf eine möglichst geringe Reibung ankommt, wie z.B. bei Schwungradenergiespeichern, ist eine aktive Stabilisierung unerwünscht, da sie zu den systeminhärenten Verlusten beiträgt.

Nutzt man dagegen die im vorigen Kapitel beschriebenen elektromagnetischen Eigenschaften von Hochtemperatursupraleitern aus, so kann auf die aufwendige Steuer- und Regelelektronik verzichtet werden. Bereits 1933 zeigte Braunbeck [20], daß Earnshaw's Theorie für Materialien mit $\mu_r > 1$ richtig ist, daß jedoch Materialien mit $\mu_r < 1$ (Feldverdrängung!) Stabilität erlauben. Man bezeichnet supraleitende magnetische Lager daher auch als selbststabilisierende oder **passive Lager**. Weitere

Vorteile passiver Magnetlager sind ihr geringeres Gewicht, die geringeren Kosten, sowie ein variabler Arbeitsluftspalt (siehe auch Kapitel 8.2). Aktive Magnetlager erreichen hingegen höhere Hubdrücke und axiale Steifigkeiten ($\simeq 10^6 N/m$ bei aktiven Magnetlagern; derzeit etwa $10^3 - 10^4 N/m$ bei passiven Magnetlagern [21]).

Beim Einsatz von HTSL in Magnetlagern unterscheidet man zwischen rein supraleitenden Magnetlagern und Hybridlagern (siehe Abbildung 3.2).

Beim supraleitenden Magnetlager resultiert die Hubkraft auf den Magneten allein aus der, durch die Volumenverankerungskräfte im HTSL hervorgerufenen, teilweisen Verdrängung eines äußeren Magnetfelds aus dem Inneren des HTSL.

Beim Hybridlager tragen dagegen fast ausschließlich die abstoßenden magnetischen Kräfte zwischen zwei entgegengesetzt polarisierten Permanentmagneten (PM) zur Hubkraft bei. Der Supraleiter dient lediglich der Stabilisierung dieser Anordnung, da er durch die Volumenverankerungskräfte die in ihn eingedrungenen bzw. die ihn durchsetzenden magnetischen Flußfäden an einem Ort festhält, sie beim Abkühlen unter T_c quasi im Supraleiter "einfriert". Alle nachträglichen Feldveränderungen werden hierdurch erschwert. Die Instabilität in radialer Richtung wird somit durch den HTSL beseitigt [22]. Die mit solch einer Anordnung erzielbaren Hubdrücke ($\simeq 60 \times 10^4 N/m^2$ [23]) liegen im Bereich der aktiven Magnetlager und sind damit wesentlich höher als die supraleitender Magnetlager (derzeit $1 - 15 \times 10^4 N/cm^2$ [23, 19]). Neben der höheren Hubkraft hat das Hybridlager gegenüber dem supraleitenden Magnetlager den Vorteil, daß der Supraleiter im Magnetfeld abgekühlt werden kann, ohne daß dabei eine Reduktion der maximalen Hubkraft hingenommen werden muß. Dies ist insbesondere für praktische Anwendungen interessant, da beim Abkühlen des HTSL auf eine Demontage des Lagers verzichtet werden kann. Allerdings besitzt das Hybridlager eine wesentlich geringere radiale Steifigkeit als das supraleitende Magnetlager [24], da die Volumenverankerungskräfte im HTSL bereits die inhärente Instabilität der Anordnung kompensieren müssen. Ist man also nicht auf einen möglichst hohen Lagerdruck angewiesen, so ist das supraleitende Magnetlager dem Hybridlager vorzuziehen. Alternativ wäre jedoch auch der Einsatz eines Hybridlagers und zusätzlicher Radiallager denkbar.

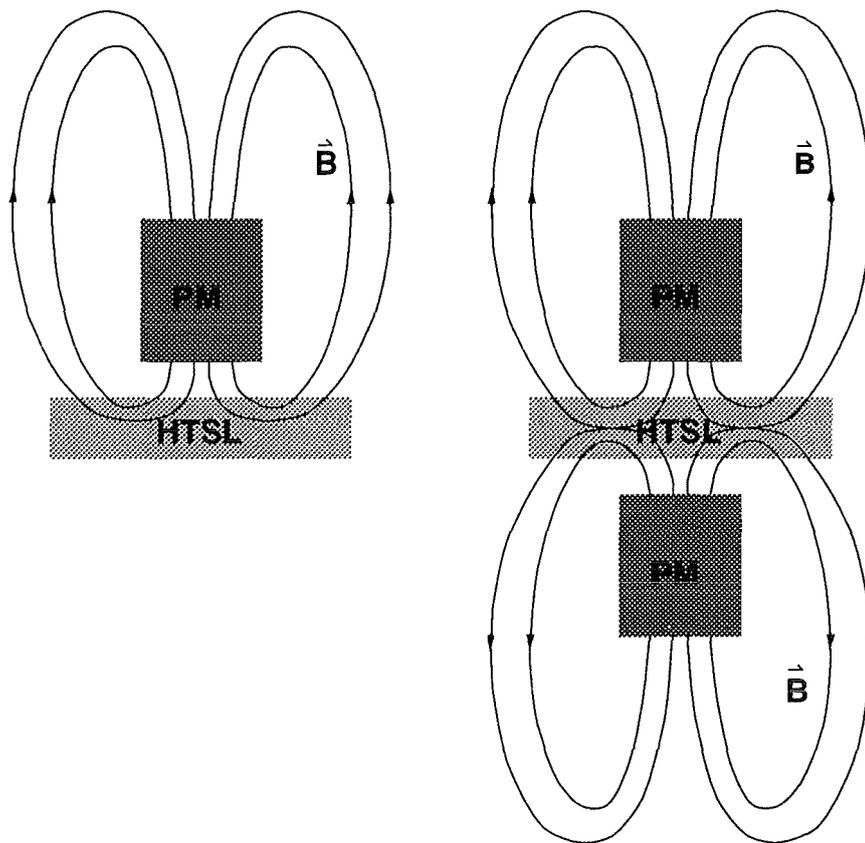


Abbildung 3.2: Supraleitendes Magnetlager und Hybridlager.

Die beiden Lagertypen werden in Tabelle 3.1 bezüglich ihrer axialen Steifigkeit und ihrer Hubkraft mit aktiven Magnetlagern verglichen.

Lagertyp	axiale Steifigkeit (N/m)	Hubdrücke (N/m^2)
supraleitendes Magnetlager	$10^3 - 10^4$	$1 - 15 \times 10^4$
Hybridlager	$< 10^3$	60×10^4
aktive Magnetlager	$\simeq 10^6$	$\geq 60 \times 10^4$

Tabelle 3.1: Vergleich unterschiedlicher Lagertypen.

Beim Bau supraleitender magnetischer Lager verwendet man meist LN₂-gekühlte MPMG-YBCO-Massivkörper, die aufgrund der höheren kritischen Stromdichten und der größeren Kornradien wesentlich höhere Hubkräfte liefern, als gesinteres YBCO [25, 26]. Als Permanentmagnete kommen Magnete aus Seltenen Erden wie Nd-Fe-B und Sm-Co zum Einsatz, die sich durch hohe Energiedichten

($200 - 300 \text{ kJ/m}^3$ [27]) und remanente Magnetisierungen (bis zu 1.3 T [27]) auszeichnen. Im praktischen Einsatz ist sowohl für die Permanentmagnete, als auch für die Supraleiter eine Beschichtung notwendig. Diese soll den Permanentmagneten vor Rost schützen [28] und beim Supraleiter eine Verschlechterung seiner magnetischen Eigenschaften aufgrund von Vereisung während der Abkühl- und Aufwärmphase, bzw. durch Feuchtigkeitsaufnahme verhindern [29, 30].

Von der Verwendung eines magnetisierten Supraleiters als Ersatz für den Permanentmagneten [31] sollte trotz der wesentlich höheren erzielbaren Magnetisierung abgesehen werden, da diese Magnetisierung zeitlich nicht konstant bleibt¹.

Wichtige Lagereigenschaften sind neben der maximalen Hubkraft die Lagersteifigkeit in horizontaler und in vertikaler Richtung, die Dämpfung und schließlich die Lagerverluste.

Die *Hubkraft* ist hierbei, wie in Kapitel 2 diskutiert, zum einen von den charakteristischen Materialeigenschaften des Supraleiters (Korngröße, kritische Stromdichte, Volumenverankerungskraft) sowie von dessen Orientierung im Magnetfeld, zum anderen vom Feldgradienten und damit von der Magnetkonfiguration abhängig.

Auch die (statische) magnetische *Lagersteifigkeit* $k_m = \frac{dF}{dx}$ hängt sowohl vom supraleitenden Material (Volumenverankerungskraft), als auch von der Magnetkonfiguration ab. In horizontaler Richtung wird, insbesondere bei einem Schwungrad, das Lager zusätzlich durch den *gyroskopischen Effekt* stabilisiert (siehe Anhang A) - die Lagersteifigkeit dadurch erhöht.

Sowohl die Hubkraft, als auch die Steifigkeit sind vom Arbeitsluftspalt des Lagers und, zusammen mit der *Dämpfung*, vom Einkühlabstand² zwischen Magnet und Supraleiter abhängig. Je größer der Einkühlabstand ist, desto kleiner werden Eigenfrequenzen, Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizient des Lagers [32]. Allerdings wird die Hubkraft für großen Einkühlabstand größer ("zero-field-cooling").

Mögliche Ursachen für *Lagerverluste* supraleitender Magnetlager sind magnetische Reibung, Luftreibung, Wirbelstromverluste und Energiedissipation in den Supraleitern aufgrund dynamischer Effekte von Schlingerbewegungen des Rotors

¹Da durch eine Relativbewegung zwischen dem magnetisierten Supraleiter im Rotor und den HTSL im Stator einer Lageranordnung Abschirmströme sowohl in den Stator-HTSLs als auch im magnetisierten Supraleiter des Rotors induziert werden, wird die Magnetisierung des im Feld abgekühlten Supraleiters geschwächt.

²Unter dem Einkühlabstand versteht man den Abstand zwischen der Unterseite des Permanentmagneten und der Oberseite des Supraleiters während der Abkühlphase des Supraleiters unter dessen Sprungtemperatur T_c .

in einer Ebene senkrecht zur Rotationsebene [33]. Diese Lagerverlustmechanismen werden im folgenden Abschnitt anhand der dort diskutierten Schwungräder eingehender betrachtet.

3.2 Schwungräder

Regenerative Energiequellen, wie beispielsweise die Sonnen- und Windenergie, sind stark von Umwelteinflüssen abhängig und somit nicht konstant verfügbar. Um diese Energien wirtschaftlich nutzbar zu machen, sind Energiespeicher notwendig, die in der Lage sind, zeitlich begrenzte Überangebote an Energie zu speichern, bis sie zu Spitzenlastzeiten abgerufen werden. Solch ein Energiespeicher zur Glättung der Gangkurven regenerativer Energiequellen sollte möglichst effizient sein, d.h. möglichst geringe Verluste aufweisen.

Energie kann chemisch, thermisch, elektromagnetisch oder mechanisch gespeichert werden. Zu den mechanischen Energiespeichern zählen neben Pumpspeicherkraftwerken auch Schwungräder. Letztere - ausgestattet mit supraleitenden Magnetlagern - sind insbesondere als Energiespeicher in Verbindung mit kleineren Sonnen- oder Windkraftwerken interessant, da sie, trotz einfachen Aufbaus, relativ hohe gespeicherte Energiedichten aufweisen. Das typische Speichervermögen eines Schwungrades liegt bei etwa 100 J/g . Im Vergleich dazu kommt man beim konkurrierenden magnetischen Energiespeichersystem SMES auf eine gespeicherte Energiedichte von etwa 6.6 J/g , wenn man von einer magnetischen Induktion von 10 T und einer mittleren Dichte des Magnetsystems von 6 t/m^3 ausgeht.

Insbesondere besitzen Schwungräder gegenüber konventionellen Akkumulatoren (chemische Energiespeicher) die Vorteile einer längeren Lebensdauer, geringerer Verluste bei Langzeitspeicherung, höherer Abgabeleistung bei Kurzzeitspeicherung und einer besseren Umweltverträglichkeit [19].

Da der insbesondere durch Lagerreibung hervorgerufene Energieverlust konventionell gelagerter Schwungräder relativ hoch ist, werden Schwungradenergiespeicher momentan noch hauptsächlich zur Kurzzeitspeicherung, also beispielsweise zum kurzzeitigen Treiben von Kurzschlußströmen in Versuchsanlagen oder bei Plasmaexperimenten, verwendet [34].

Um den Einsatz eines Schwungrades zur Langzeitenergiespeicherung zu ermöglichen, müssen die Verluste - insbesondere die Lagerverluste - minimiert werden. Hier bietet sich daher, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, die Verwendung der im vorher-

gehenden Abschnitt diskutierten supraleitenden magnetischen Lager an.

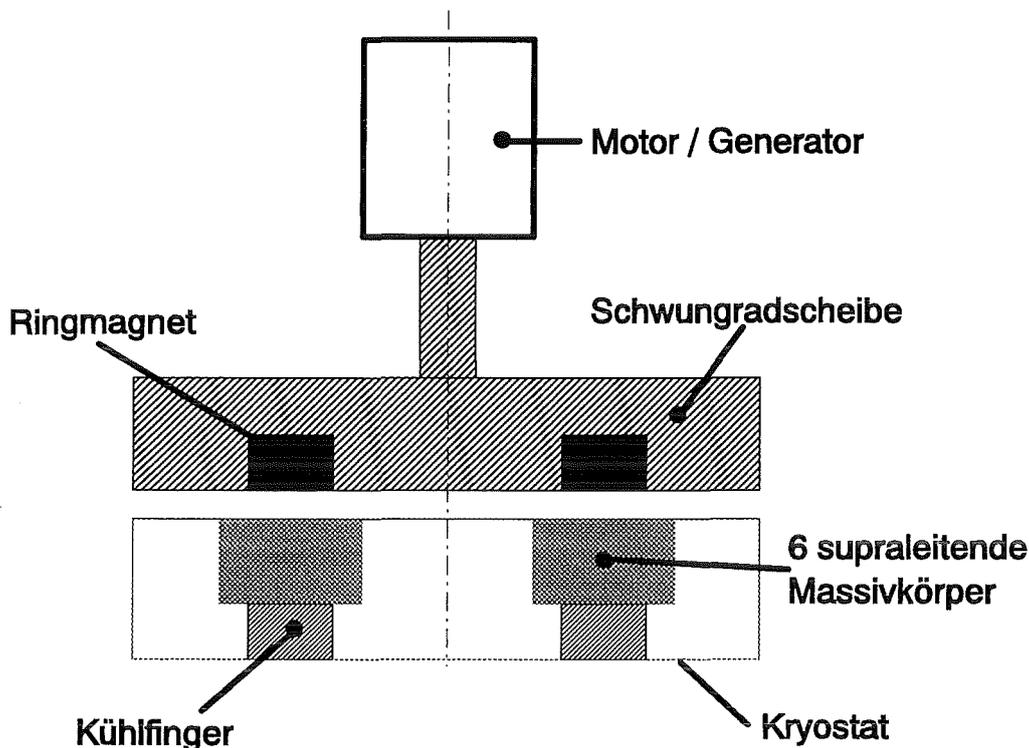


Abbildung 3.3: Prinzipbild eines mittels supraleitender Magnetlager gelagerten Schwungrads.

Elektrische Energie wird hierbei über eine elektrische Maschine im Motorbetrieb in Rotationsenergie umgewandelt und im Schwungrad gespeichert. Bei Bedarf kann diese Energie über die elektrische Maschine im Generatorbetrieb ausgekoppelt und wieder in elektrische Energie umgewandelt werden. Die dargestellte Verbindung zwischen elektrischer Maschine (Motor/Generator) und Schwungradscheibe muß hierbei nicht notwendigerweise fest sein, sondern kann auch durch eine Kupplung (mechanisch oder elektromagnetisch) trennbar ausgeführt werden.

Die im Schwungrad gespeicherte Energie W ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit ω der Schwungradscheibe und, über das Trägheitsmoment J ($J = \int r^2 dm$), auch von dessen Massenverteilung:

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \omega d\omega \quad (3.6)$$

Bei einer Beschleunigung von 0 auf die Winkelgeschwindigkeit ω wird dem Schwungrad somit die Energie $W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$ zugeführt. Drehzahländerungen bewirken ein "Aufladen", bzw. "Entladen" des Schwungradenergiespeichers [35].

Das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe bzw. einer zylinderförmigen Schwungradscheibe bezüglich einer senkrecht auf ihr stehenden und durch den Schwerpunkt verlaufenden Drehachse ist $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$. Das Trägheitsmoment erhöht sich, je weiter man die Masse m auf die Peripherie der Kreisscheibe konzentrieren kann [3]. Daher wäre auch eine Anordnung entsprechend Abbildung 3.4 - ein Schwungring - denkbar.

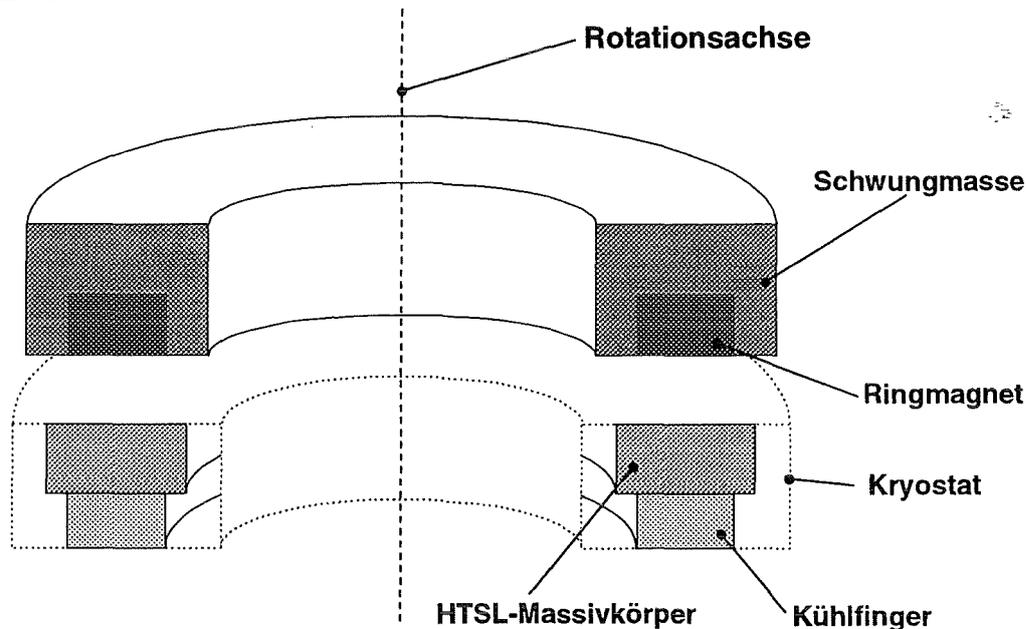


Abbildung 3.4: Mittels supraleitender Magnetlager gelagerter Schwungring.

Der Motor/Generator sollte dann evtl. als Außenläufer konzipiert werden, womit der Rotor Teil der Schwungmasse werden würde.

Die supraleitenden Massivkörper stehen auf Kühlköpfen in einem von LN₂ durchflossenen Kryostaten.

Trotz des Einsatzes supraleitender Magnetlager kommt es auch bei diesen Schwungradenergiespeichern zu Verlusten. Ursachen hierfür sind [33]:

- Luftreibung (etwa 20% der Gesamtverluste)
- Wirbelströme in leitenden Teilen des Lagers
- Wirbelströme im Ringmagneten
- Magnetische Reibung bei Bewegung des im HTSL eingefrorenen Flusses (mindestens 60% der Gesamtverluste)

Wirbelstromverluste können entweder durch Induktion von Wirbelströmen in leitenden Teilen des Lagers oder speziell durch Induktion von Wirbelströmen im Ringmagneten hervorgerufen werden. Letzteres tritt auf, da der Ringmagnet aufgrund der diskreten Anordnung der supraleitenden Massivkörper und dem in ihnen eingefrorenen magnetischen Fluß während der Rotation einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld ausgesetzt ist.

Bei Bewegung des im Supraleiter eingefrorenen magnetischen Flusses kommt es zu Hystereseverlusten im Supraleiter, die sich in den hier betrachteten magnetischen Lagern in Form einer magnetischen Reibung bemerkbar machen. Eine Bewegung der eingefrorenen Flußfäden kann auftreten, wenn leichte Asymmetrien im Feld des Ringmagneten (typischerweise etwa $0.001\ T$ Inhomogenität bei $0.4\ T$ magnetischer Induktion [36]) bei der Rotation durch den Supraleiter quasi "hindurchgeschleift" werden. Die magnetische Reibung würde demzufolge sehr stark ansteigen, wenn man statt eines Ringmagneten mehrere Einzelmagnetsegmente aneinanderreihen würde, wie dies in einigen Veröffentlichungen zur Konstruktion großer Schwungräder vorgeschlagen wird [37, 38]. Will man verlustarme Schwungradenergiespeicher herstellen, so ist man daher durch die maximale Größe kommerziell erhältlicher Ringmagnete aus Seltenen Erden in der radialen Ausdehnung des Schwungrades limitiert. Um trotzdem hohe Energiedichten zu erzielen, muß daher die Winkelgeschwindigkeit ω möglichst hoch gewählt werden (siehe Gleichung (3.6)). Diese wird wiederum limitiert durch die maximal zulässige mechanische Belastung (durch die Zentrifugalkraft!) von Ringmagnet und Schwungradscheibe. Moderne Schwungräder bestehen daher aus Kohlefaser-/Epoxidverbunden, womit Energiedichten bis zu $0.2\ \frac{kWh}{kg}$ erreicht werden können [3].

Mögliche Maßnahmen zur Reduktion der oben angeführten Verlustmechanismen in mit supraleitenden Magnetlagern ausgestatteten Schwungrädern werden in Kapitel 10 diskutiert.

Kapitel 4

Modelle zur makroskopischen Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften von HTSL

4.1 Analytische Modelle

Um die Hubkraft, die auf einen über einem Supraleiter schwebenden Permanentmagneten wirkt, zu berechnen, führten Hellman et al [39] 1988 ein neues, sogenanntes Modell des vollständigen Flußeindringens ("complete flux penetration model") ein. Die dabei zugrundeliegende Idee ist die folgende: Nimmt man an, daß der magnetische Fluß vollständig in den Supraleiter eindringt, dann kann man als Ursache für die Hubkraft die Änderung des Energiebedarfs im Supraleiter durch die Formierung einzelner Flußfäden, die jeweils genau ein Flußquant beinhalten, annehmen. Die Gesamtenergie, die benötigt wird, um Flußfäden im Supraleiter zu bilden,

$$E = N \cdot \varepsilon_l \cdot L \tag{4.1}$$

mit

ε_l : Energie eines Flußfadens pro Längeneinheit

N : Anzahl der Flußfäden (von der Schwebehöhe abhängig!)

L : Dicke des Supraleiters

muß gerade der potentiellen Energie eines (hier kugelförmig angenommenen) Permanentmagneten entsprechen, der sich in einer stabilen Schwebehöhe h befindet:

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h = E = N \cdot \varepsilon_l \cdot L \quad (4.2)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich dann die Schwebehöhe h berechnen. Demzufolge wäre die Hubkraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Magnet und Supraleiter (beim perfekt diamagnetischen Modell umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Abstands!), was durch quantitative Experimente jedoch nicht bestätigt werden konnte [40].

Yang et al [40, 41, 42, 43] verwendet die Vektorpotentialmethode, gekoppelt mit der London-Theorie zur Berechnung der Hubkraft. Desweiteren basieren seine Berechnungen auf einem Dipolmodell für den Magneten. Dies ist allerdings nur dann zulässig, wenn die Schwebehöhe des hier kugelförmig angenommenen Magneten sehr viele größer ist als dessen Durchmesser. Diese Voraussetzung ist jedoch für technische Anwendungen normalerweise nicht erfüllt. Desweiteren ist die London-Theorie, auf der die Berechnungen basieren, nicht in der Lage, das irreversible Verhalten der magnetischen Eigenschaften des Supraleiters (Flußverankerung) zu beschreiben.

Analytische Berechnungen versagen völlig bei komplizierterer Geometrie (\rightarrow Schwungrad) und sind weder in der Lage, die dynamischen Eigenschaften der magnetischen Kräfte zu erfassen, noch die magnetischen Steifigkeiten der Lager zu bestimmen.

4.2 Perfekt diamagnetisches Modell

Vor der Entdeckung der Hoch- T_c Supraleitung basierte die Theorie zur Berechnung der Hubkraft auf der Modellvorstellung eines perfekten Diamagnetismus (vollständiger Meissner Effekt). Dieses Modell ist für Typ-I Supraleiter korrekt, solange das anliegende Magnetfeld kleiner als das kritische Feld B_c ist und stimmt auch für Typ-II Supraleiter für Felder unterhalb von B_{c1} . In den meisten denkbaren technischen Anwendungsfällen wird B_{c1} (einige mT) jedoch überschritten und die Hubkraft wird, insbesondere bei geringer Schwebehöhe des Magneten, wenn also mehr und mehr Flußlinien in den Supraleiter eindringen und die Permeabilitätszahl demzufolge ansteigt, zu groß berechnet. Trotz dieser Einschränkungen kann das diamagnetische Modell zum qualitativen Vergleich unterschiedlicher Magnetfeldkonfigurationen verwendet werden [44].

4.3 Nicht perfekt diamagnetisches Modell

Bessere Ergebnisse erzielt man, wenn man dem Supraleiter leicht diamagnetische Eigenschaften (z.B. $\mu_r = 0.8$) sowie einen sehr geringen spezifischen elektrischen Widerstand von beispielsweise $1.2 \times 10^{-10} \Omega m$ zuordnet. Abbildung 4.1 zeigt die mit diesem Modell berechnete Kraft-Abstandskurve bei einer simulierten Annäherungsgeschwindigkeit von 35 mm/s im direkten Vergleich mit der entsprechenden Meßkurve [45]. Der Magnet wurde dabei, beginnend in einem Abstand von 50 mm , an den Supraleiter herangefahren und anschließend wieder in seine Ausgangslage zurückbewegt. Die Bewegung des Magneten wurde mittels einer zeitabhängigen Koerzitivfeldstärke simuliert. Dies wird in Kapitel 7 näher diskutiert.

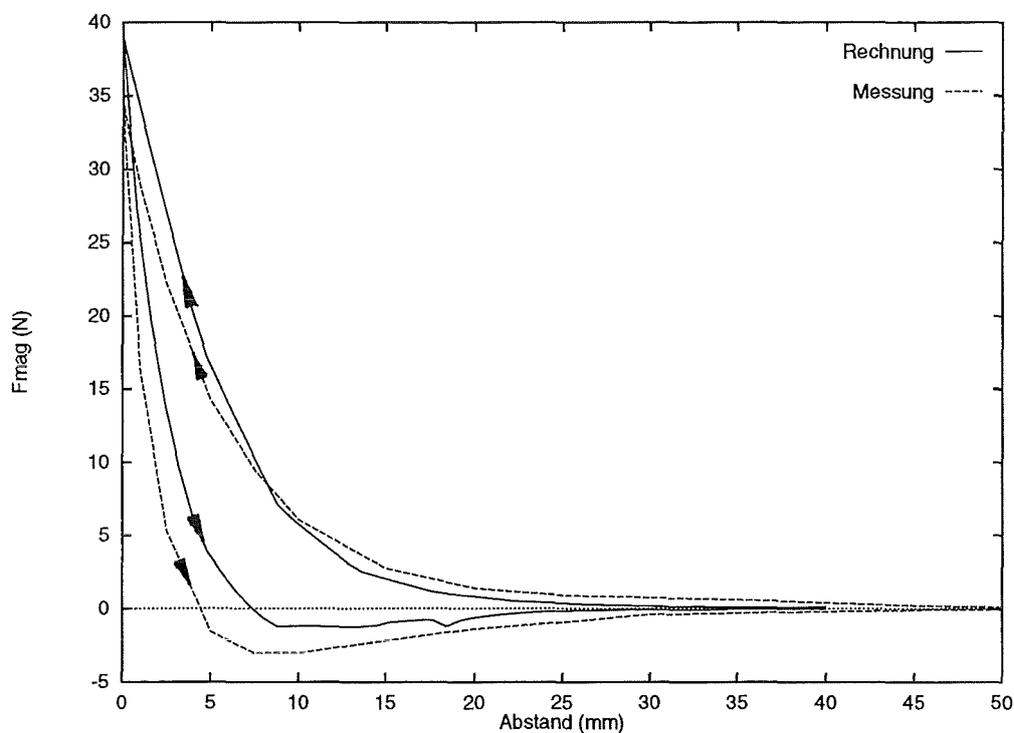


Abbildung 4.1: Berechnete und gemessene Kraft-Abstandskurve bei einer Annäherungsgeschwindigkeit von 35 mm/s .

Das in der berechneten Kurve erkennbare "Zucken" ist numerisch bedingt. Der berechnete Kurvenverlauf (durchgezogene Kurve) stimmt sowohl für die Annäherung als auch für das Wegbewegen des Magneten in etwa mit dem experimentell ermittelten Verlauf der Kraft-Abstandskurve (gestrichelte Kurve) überein. Dieses

einfache Modell ist jedoch nicht in der Lage, die experimentell festgestellte Hysterese der Kraft-Abstandskurve unabhängig von der Annäherungsgeschwindigkeit zu simulieren (die Wahl des spezifischen elektrischen Widerstands ist bei diesem Modell abhängig von der zu simulierenden Annäherungsgeschwindigkeit!). Desweiteren würde die Kraft bei einem Stop des Magneten sofort auf einen Wert, der allein durch den diamagnetischen Kraftanteil erzielt wird, abfallen, was den praktischen Erfahrungen, daß die Hubkraft in diesem Fall nämlich nahezu konstant bleibt, widerspricht.

In Abbildung 4.2 ist der Betrag der magnetischen Induktion $|\vec{B}|$ für einen simulierten Abstand zwischen Magnet (in der oberen Bildhälfte) und Supraleiter (unterhalb des modellierten Luftspalts) von $s = 0 \text{ mm}$ als Konturplot dargestellt, wobei die unterschiedlichen Graustufen unterschiedliche Feldbereiche symbolisieren. Deutlich zu erkennen ist hierbei die teilweise Feldverdrängung durch den HTSL.

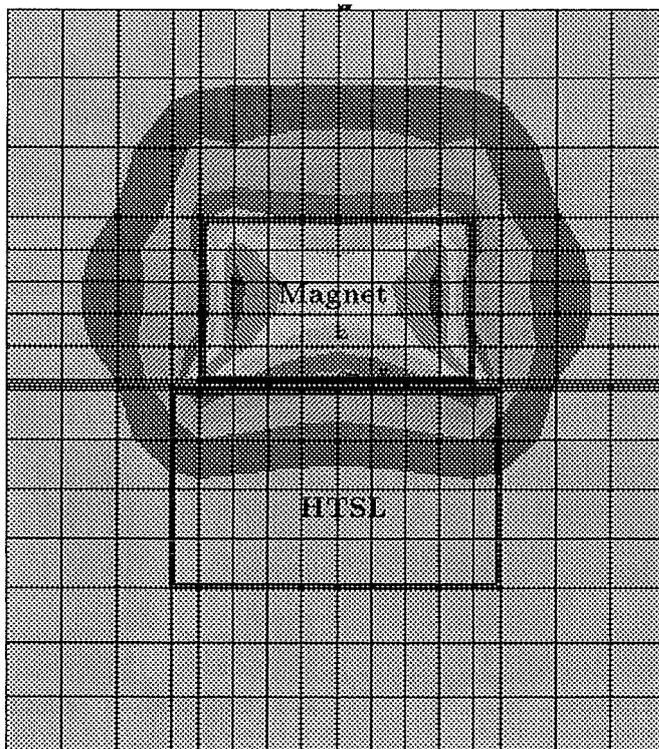


Abbildung 4.2: $|\vec{B}|$ bei einem simulierten Abstand von $s = 0 \text{ mm}$ zwischen Magnet und HTSL.

Wesentlich vielversprechender als das nicht perfekt diamagnetische Modell sind die drei im folgenden vorgestellten numerischen Modelle, die jedoch aufgrund ihrer

nichtlinearen Materialgleichungen zusammen mit kommerziellen FE-Programmen nicht direkt anwendbar sind.

4.4 Modell des kritischen Zustands

Die hysteresebehafteten Kräfte zwischen einem Permanentmagneten und einem HTSL können mit Hilfe des Modells des kritischen Zustands [46] berechnet werden. Das Gleichgewicht zwischen der am Flußfaden angreifenden Lorentzkraft F_l und der Volumenverankerungskraft F_p definiert hierbei die kritische Stromdichte $J_c = \frac{F_p}{B}$. Aus der Kräftebilanz an den Flußfäden lassen sich die folgenden beiden Gleichungen ableiten:

$$\vec{J} = J_c(|\vec{B}|) \cdot \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \quad \text{für } |\vec{E}| \neq 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{für } |\vec{E}| = 0 \quad (4.4)$$

Gleichung (4.3) sagt aus, daß die Stromdichte im Supraleiter immer der kritischen Stromdichte entspricht, sobald ein elektrisches Feld im Supraleiter induziert wird.

Gleichung (4.4) besagt, daß sich die Verteilung der induzierten Abschirmströme nicht ohne die Induktion eines elektrischen Feldes ändern kann. Dies beschreibt die experimentell festgestellte Hysterese in Kraft-Abstandskurven zwischen Permanentmagneten und Supraleitern.

Diese beiden Gleichungen ersetzen im Supraleiter das Ohm'sche Gesetz $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit σ . Als magnetische Materialgleichung kann im Supraleiter $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ verwendet werden, wenn $H_{c1} < H < H_{c2}$ ist. H_{c2} ist hierbei die obere kritische Feldstärke, oberhalb der der supraleitende Zustand zusammenbricht. Für $H < H_{c1}$ sollte der Effekt des aufgrund von Oberflächenströmen auftretenden Diamagnetismus berücksichtigt werden.

Das Modell des kritischen Zustands wird häufig zur numerischen Berechnung der Hubkraft zwischen Permanentmagneten und HTSL eingesetzt, wobei die berechnete Kraft-Abstandskurven gute Übereinstimmung mit entsprechenden Meßkurven aufweisen [47, 48, 49, 50].

In Abbildung 4.3 ist die J-E-Kurve des Modells des kritischen Zustands der J-E-Kurve des Ohm'schen Gesetzes gegenübergestellt.

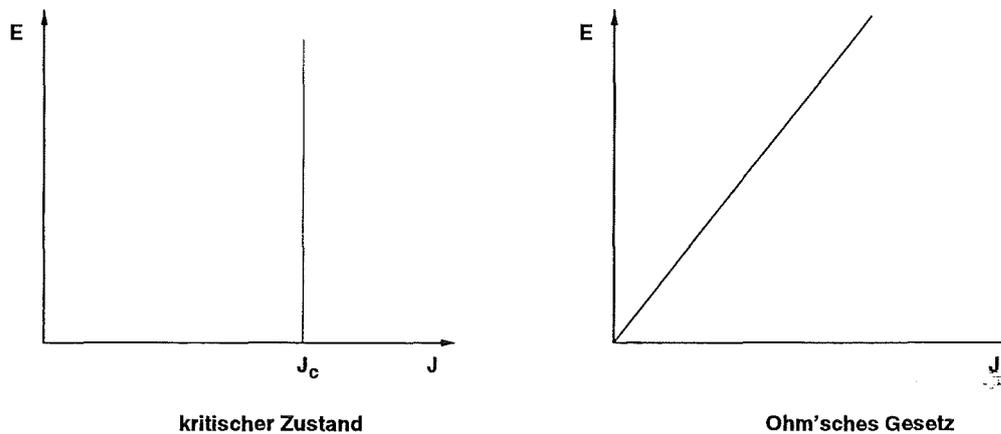


Abbildung 4.3: Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte beim Modell des kritischen Zustands und beim Ohm'schen Gesetz.

4.5 Modell des eingefrorenen Flusses

Das Modell des eingefrorenen Flusses [51] stellt im Prinzip eine Weiterentwicklung des Modells des kritischen Zustands dar. Es basiert auf der Annahme, daß Flußlinien in HTSL durch starke Haftkräfte quasi im Supraleiter "eingefroren" werden und trotz einer auf sie einwirkenden Lorentzkraft an ihrem Haftzentrum gebunden bleiben. Erst wenn die lokale, am Flußfaden angreifende Kraft F_l stärker als die Volumenverankerungskraft F_p ist, wird ein Abschirmstrom induziert, so daß die elektrischen Materialgleichungen die folgende Form annehmen:

$$\vec{J} = J_c(|\vec{B}|) \cdot \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \quad \text{für } |\vec{F}_l| > F_p \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{für } |\vec{F}_l| \leq F_p \quad (4.6)$$

Mit diesem Modell kann neben der Hubkraft auch die horizontale Rückstellkraft eines supraleitenden Magnetlagers berechnet werden.

4.6 Modell des Flußkriechens und des Flußfließens

Will man die dynamischen Eigenschaften von Supraleitern berücksichtigen, so muß man zwischen Bereichen, in denen die Bewegung der Flußfäden durch thermische

Aktivierung hervorgerufen wird ("flux creep") und Bereichen, in denen die Lorentzkraft größer als die Volumenverankerungskraft ist ("flux flow"), unterscheiden [52].

Für den Bereich des Flußkriechens gilt hierbei:

$$E = 2\rho_c J_c \cdot \sinh\left(\frac{U_0}{k\Theta} \cdot \frac{J}{J_c}\right) \cdot \exp\left(-\frac{U_0}{k\Theta}\right) \quad (0 \leq J \leq J_c) \quad (4.7)$$

Im Bereich des Flußfließens gilt dagegen:

$$E = E_c + \rho_f J_c \left(\frac{J}{J_c} - 1\right) \quad (J > J_c) \quad (4.8)$$

Hierbei ist E das elektrische Feld, J die Stromdichte, U_0 das Haftpotential, ρ_c der Driftwiderstand, $E_c \simeq \rho_c \cdot J_c$, ρ_f der Flußwiderstand, k die Boltzmannkonstante, Θ die Temperatur und J_c die kritische Stromdichte ohne thermische Aktivierung.

In Abbildung 4.4 ist die J-E-Kurve des Modells des Flußkriechens und des Flußfließens dargestellt.

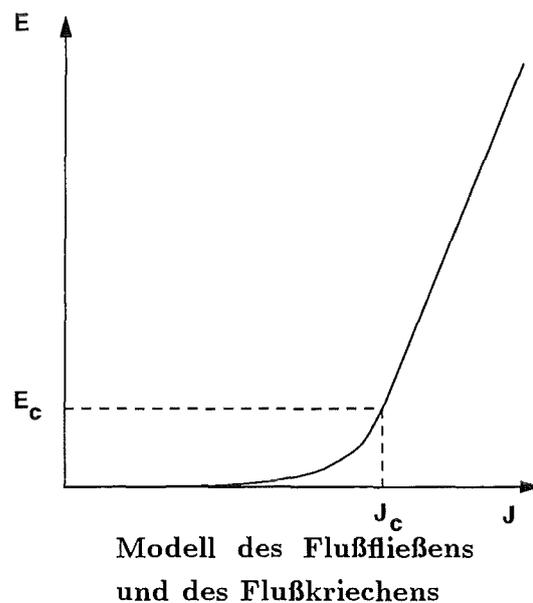


Abbildung 4.4: Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte beim Modell des Flußkriechens und des Flußfließens.

Die wichtigsten mathematisch-physikalischen Modelle zur Beschreibung der makroskopischen elektromagnetischen Eigenschaften supraleitender Materialien sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Modell	Kurzbeschreibung	Einschränkungen	Vorteile	mit kommerz. FE-Programm berechenbar
perfekt diamagnetisches Modell	$\mu_r = 0$ → Magnetfeld wird vollständig verdrängt (vollständiger Meissner Effekt)	Gilt für Typ-II Supraleiter nur wenn $B < B_{c1}$! Nur die Hubkraft kann berechnet werden!	sehr einfach	ja
nicht perfekt diamagnetisches Modell	$0 < \mu_r < 1$ + Wirbelströme	Nur die Hubkraft kann berechnet werden! Abhängigkeit von der Bewegungsgeschwindigkeit.	einfach	ja
Modell des kritischen Zustands	Induktion von Abschirmströmen nur bei Ungleichgewicht zwischen Lorentz- und Haftkraft	kein Pinning; gilt streng nur innerhalb der Körner. Konvergenzprobleme.	Hubkraft mit Hysterese berechenbar!	nein
Modell des eingefrorenen Flusses	Die Flußlinien werden im HTSL durch starke Haftkräfte eingefroren. Erst wenn die lokale, am Flußfaden angreifende Kraft stärker als die Haftkraft ist, wird ein Abschirmstrom induziert	gilt streng nur innerhalb der Körner	Hubkraft + Rückstellkräfte berechenbar!	nein
Modell des Flußkriechens und des Flußfließens	Berücksichtigung der thermischen Aktivierung der Flußfadenbewegung	gilt streng nur innerhalb der Körner	Hubkraft + Rückstellkräfte + Berechnung der dynamischen Eigenschaften der Kräfte möglich	nein

Tabelle 4.1: Gegenüberstellung der wichtigsten Modelle zur Beschreibung der makroskopischen elektromagnetischen Eigenschaften von HTSL.

Aus den beschriebenen Modellen kristallisierten sich das Modell des kritischen Zustands und das Modell des eingefrorenen Flusses als am geeignetsten heraus, um die Wechselwirkung zwischen einem Hochtemperatursupraleiter und einem Permanentmagneten zu beschreiben. Das Modell des Flußkriechens und des Flußfließens wird nur benötigt, wenn beispielsweise die Zeitabhängigkeit der Hubkraft bei konstantem Abstand zwischen Magnet und Supraleiter bestimmt werden soll.

4.7 Modelle zur Berücksichtigung der Feldabhängigkeit der kritischen Stromdichte

In der Bean'schen [53, 54] und London'schen Theorie (siehe Kapitel 2.1) wird $J_c = \text{const}$ angenommen. Im allgemeinen ist der Wert der kritischen Stromdichte in einem Supraleiter jedoch abhängig vom Betrag des äußeren Magnetfelds. Diese Feldabhängigkeit kann beispielsweise mit Hilfe eines der folgenden Modelle angenähert werden (vergleiche auch [78, 56]):

$J_c(B) = C$	Bean-Modell
$J_c(B) \cdot (B_0 + B) = C$	Kim-Modell
$J_c(B) \cdot B = C$	Silcox-Modell
$J_c(B) = J_{c0} \cdot B^{-1/2}$	Matsushita-Modell
$J_c(B) = C_1 \exp(-B/C_2) + C_3$	Fietz-Modell

Hierbei sind C , C_1 , C_2 , C_3 und B_0 Konstanten. Die im Matsushita-Modell auftauchende Konstante J_{c0} entspricht dem Wert der kritischen Stromdichte J_c für $B = 0$ T. Bei numerischen Simulationen des makroskopischen elektromagnetischen Verhaltens kommen im allgemeinen das Bean-Modell, das Kim-Modell und stellenweise (meist bei Verwendung des Modells des Flußkriechens und des Flußfließens) das Matsushita-Modell zum Einsatz.

Alle diese Modelle gelten streng genommen nur innerhalb der einzelnen supraleitenden Körner der keramischen Supraleiter. Eine Adaption der Modelle an die realen Verhältnisse in HTSL-Proben wird im allgemeinen durch Einführung einer künstlichen Leitfähigkeit (siehe Kapitel 6) vorgenommen.

Kapitel 5

Beschreibung des Problems mit Hilfe der Methode der finiten Elemente

Im Bereich wissenschaftlicher Untersuchungen ist es im allgemeinen nicht möglich, stark verflochtene Zusammenhänge in komplizierten Systemen unmittelbar und als Ganzes zu erfassen. Es ist daher notwendig solche komplexe Systeme zunächst in mathematisch einfacher zu beschreibende Teilsysteme - in Elemente - zu unterteilen und dann, unter Beachtung der Kontinuität bzw. des Gleichgewichts, die Verhältnisse des gesamten Systems zu erfassen. Dies ist der Grundgedanke der Methode der finiten Elemente (FEM) [57].

Bei der Anwendung der FEM auf ein räumliches Problem wird das dreidimensionale Objekt bzw. das Problemvolumen diskretisiert, d.h. in eine endliche Anzahl einzelner, geometrisch einfacher Körper - in Elemente - unterteilt und somit als Verbund von Elementen idealisiert. Die einzelnen Elemente werden aufgespannt durch die ihre Form bestimmenden Knoten, welche die Elemente auch untereinander verbinden. Es wird somit eine Reduktion eines kontinuierlichen Systems auf ein diskretes, numerisches System vorgenommen, wodurch die die Lösung beschreibenden Differentialgleichungen numerisch berechenbar werden. Es handelt sich dabei um eine Approximation der Lösung, von der jedoch erwartet wird, daß sie mit zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung gegen die exakte Lösung strebt.

In der Strukturmechanik - für die die FEM ursprünglich entwickelt wurde - führt die Einführung der Methode der finiten Elemente über die Ermittlung von Appro-

ximationsfunktionen für die einzelnen Elemente (Kapitel 5.1) und die Aufstellung eines Ansatzes mittels des Prinzips der virtuellen Arbeit bzw. der Galerkin-Methode (Kapitel 5.2) auf die bekannte Vektordifferentialgleichung

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{f(t)\} \quad (5.1)$$

mit

- $\{\ddot{u}\}$: Spaltenvektor der Knotenpunktbeschleunigungen
- $\{\dot{u}\}$: Spaltenvektor der Knotenpunktgeschwindigkeiten
- $\{u\}$: Spaltenvektor der Knotenpunktverschiebungen
- $\{f(t)\}$: Spaltenvektor der angreifenden Kräfte
- $[M]$: Massenmatrix des Gesamtsystems
- $[C]$: Dämpfungsmatrix des Gesamtsystems
- $[K]$: Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems

Um dieses Differentialgleichungssystem zu lösen, werden zunächst die Elementmatrizen jedes einzelnen Elements und danach die Systemmatrizen aufgestellt (Kapitel 5.3).

Die Vorgehensweise der Einführung der FEM in der Elektrodynamik ist analog und führt zu einer Vektordifferentialgleichung gleicher Form, wobei die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix durch die Dielektrizitäts-, Leitfähigkeits- und Reluktanzmatrix und der Vektor der Knotenpunktverschiebungen durch den Vektor der elektrischen und magnetischen Potentialfunktionen ersetzt werden.

Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten langsam veränderlichen Felder kann die Dielektrizitätsmatrix jedoch vernachlässigt werden (vergleiche Kapitel 5.2).

Im Gegensatz zu mechanischen Problemen, bei denen lediglich die Struktur vernetzt werden muß, ist für eine Betrachtung elektromagnetischen Felder auch die Modellierung des die Struktur umgebenden Luftraums notwendig. Dies ist, neben auftretenden Schwierigkeiten bei Problemen mit offenem Rand, der Hauptnachteil beim Einsatz der FEM zur Lösung elektromagnetischer Feldprobleme. Die FEM ist jedoch sehr gut zur Berechnung komplizierter Geometrien sowie für die Berücksichtigung nichtlinearer und anisotroper Materialeigenschaften (Kapitel 5.4) geeignet und wurde daher gegenüber anderen numerischen Verfahren, wie beispielsweise dem Differenzenverfahren oder dem Boundary Element Verfahren [58], in der vorliegenden Arbeit bevorzugt.

In Kapitel 5.5 wird das prinzipielle Lösungsverfahren für ein FE-Gleichungssystem diskutiert. Die hierbei für transiente Berechnungen zum Einsatz kommende Zeitintegrationsmethode nach Newmark wird in Kapitel 5.6 beschrieben. In Kapitel 5.7 wird schließlich die Konvergenz des Lösungsverfahrens sowie die Genauigkeit der hiermit ermittelten Lösung betrachtet.

5.1 Lokale Ansatzfunktionen

Ziel der FEM ist es, die Vektordifferentialgleichung (5.1) zu lösen, d.h. eine Funktion (beispielsweise $u(x, y, z, t)$) zu bestimmen, die diese Vektordifferentialgleichung erfüllt.

Die unbekannte Funktion - in der vorliegenden Arbeit meist die zeit- und ortsabhängige elektrische und magnetische Potentialfunktion - wird durch Ansätze, bestehend aus Formfunktionen N_i , multipliziert mit den Knotenunbekannten (Verschiebungen bzw. Potentiale) approximiert. Der Lösungsansatz ist hierbei in der Regel ein Produktansatz, der aus den Formfunktionen und freien Koeffizienten besteht und jeweils nur ein Teilgebiet - ein Element - abdeckt. Diese lokalen Ansatzfunktionen (meist linear oder quadratisch) müssen dabei so gewählt werden, daß sie an den Übergängen der Bereiche kontinuierlich an die Nachbarbereiche anschließen [59, 58].

Betrachtet man beispielsweise die magnetische Vektorpotentialverteilung $\vec{A}(x, y)$ über einem Dreieckelement mit drei Knoten, so kann diese mittels der Knotenpotentiale \vec{A}_1 , \vec{A}_2 und \vec{A}_3 wie folgt ausgedrückt werden:

$$A_x(x, y) = N_1 \cdot A_{x1} + N_2 \cdot A_{x2} + N_3 \cdot A_{x3} \quad (5.2)$$

$$A_y(x, y) = N_1 \cdot A_{y1} + N_2 \cdot A_{y2} + N_3 \cdot A_{y3} \quad (5.3)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\vec{A}(x, y) = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{x2} \\ A_{y2} \\ A_{x3} \\ A_{y3} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

oder kurz

$$\{A(x, y)\} = [N]^T \cdot \{A\} \quad (5.5)$$

Die Formfunktionen N_i der Knoten i sind dabei nur von der Geometrie des jeweiligen Elements abhängig. Sie verschwinden identisch für alle Knoten $k \neq i$.

Die zeitlichen und örtlichen Ableitungen der Potentialfunktionen erhält man analog. Da die Zeitabhängigkeit vollständig im Zeilenvektor $\{A\}$ enthalten ist, ergibt sich beispielsweise für die erste zeitliche Ableitung des magnetischen Vektorpotentials

$$\left\{ \frac{\partial A(x, y)}{\partial t} \right\} = [N]^T \cdot \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} \quad (5.6)$$

Die Matrix der Formfunktionen bleibt also konstant. Entsprechend wirken sich Ableitungen nach dem Ort nur auf die Matrix der Formfunktionen, nicht jedoch auf den Zeilenvektor $\{A\}$ aus.

5.2 Aufstellung der Vektordifferentialgleichung

Die Maxwellschen Gleichungen und Nebengleichungen in Differenzialform lauten:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{el} \quad (5.10)$$

Hierbei ist \vec{D} die Verschiebungsstromdichte und ρ_{el} die elektrische Raumladung. Führt man, um zunächst Gleichung (5.9) zu erfüllen, das magnetische Vektorpotential \vec{A} mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.11)$$

und das zeitintegrierte elektrische Skalarpotential Ψ mit

$$\Psi = \int \varphi dt \quad (\varphi: \text{elektrisches Skalarpotential}) \quad (5.12)$$

ein, so erhält man aus Gleichung (5.8) für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \nabla\dot{\Psi} \quad (5.13)$$

Gleichung (5.11) in Gleichung (5.7) eingesetzt ergibt

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \quad (5.14)$$

wobei $[\nu]$ die Permittivitätsmatrix ist. Die Stromdichte \vec{J} setzt sich hierbei aus den folgenden Komponenten zusammen [60]:

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_{pmg} + [\sigma] \cdot \vec{E} \quad (5.15)$$

$$= \vec{J}_s + \nabla \times \vec{H}_c - [\sigma] \dot{\vec{A}} - [\sigma] \nabla \dot{\Psi} \quad (5.16)$$

\vec{J}_s : Quellenströme

\vec{J}_{pmg} : Ströme, die einen Permanentmagneten beschreiben

\vec{H}_c : Koerzitivfeldstärke eines Permanentmagneten

Somit erhält man schließlich

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A} - \vec{J}_s - \nabla \times \vec{H}_c + [\sigma] \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \dot{\Psi} \right) + [\epsilon] \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \nabla \dot{\Psi}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (5.17)$$

Betrachtet man jedoch, wie in der vorliegenden Arbeit, lediglich langsam veränderliche Felder ($\dot{\vec{D}} \ll \vec{J}$), so reduziert sich Gleichung (5.17) auf

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A} - \vec{J}_s - \nabla \times \vec{H}_c + [\sigma] \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \dot{\Psi} \right) = \vec{0} \quad (5.18)$$

Desweiteren sind Raumladungen in Wirbelstromproblemen nicht von Bedeutung und können daher während der Berechnung vernachlässigt werden [58], so daß Gleichung (5.10) durch

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (5.19)$$

ersetzt werden kann.

Durch Gleichung (5.11) ist bisher nur die Rotation des Vektors \vec{A} festgelegt; \vec{A} ist somit bis auf den Gradienten einer willkürlich wählbaren Skalarfunktion definiert. Um \vec{A} eindeutig zu definieren, muß diese Willkürlichkeit beseitigt werden. Dies

wird durch zusätzliche Definition der Divergenz von \vec{A} erreicht. Allgemeingültig ist hierbei die Lorentz-Eichung [61]:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu\dot{\varphi} = 0, \quad (5.20)$$

die hauptsächlich bei der Berechnung von Wellenausbreitungsvorgängen verwendet wird. Da hier jedoch langsam veränderliche, induktive Felder betrachtet werden, gelangt man über $\dot{\varphi} = 0$ zu der, für die FEM am häufigsten verwendeten [58], Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.21)$$

Um die Eindeutigkeit von \vec{A} in einem geschlossenen Gebiet zu garantieren, sind weiterhin geeignete Randbedingungen für \vec{A} selbst notwendig [62]. Schwierigkeiten macht dabei in erster Linie die Erfüllung der hier verwendeten Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Man fügt der linken Seite der Gleichung (5.18) den Term $-\nabla[\nu]\nabla \cdot \vec{A}$ hinzu und ersetzt somit den *rotrot*-Operator durch den *Laplace*-Operator ($\nabla \times [\nu]\nabla \times \vec{A} = \nabla([\nu]\nabla \cdot \vec{A}) - [\nu]\Delta \vec{A}$), womit sich das Vorzeichen des hinzugefügten Terms erklärt [62]. Nun muß jedoch die sich aus der Kontinuitätsgleichung der elektrischen Stromdichte [61] ergebende Divergenzfreiheit der Stromdichte explizit erklärt werden, so daß man folgenden Gleichungen erhält:

$$\nabla \times [\nu]\nabla \times \vec{A} - \nabla[\nu]\nabla \cdot \vec{A} - \vec{J}_s - \nabla \times \vec{H}_c + [\sigma]\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\sigma]\nabla\dot{\Psi} = \vec{0} \quad (5.22)$$

$$\nabla \cdot \left(-[\sigma]\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma]\nabla\dot{\Psi} \right) = 0 \quad (5.23)$$

Zusätzlich müssen die folgenden Randbedingungen erfüllt sein [62]:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} \times \vec{A} = \vec{0} \\ [\nu]\nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \text{bzw.} \\ [\nu]\nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \text{ auf dem Rand des betrachteten Gebietes} \quad (5.24)$$

Hierbei ist \vec{n} der Flächennormalenvektor auf dem Rand des betrachteten Gebiets.

Die Einführung des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials Ψ und des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} als Lösungsvariablen bewirkt eine Reduktion von sechs (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y und H_z) auf vier Freiheitsgrade pro Knoten (A_x, A_y, A_z und Ψ). Primäres Ziel ist es diese vier Freiheitsgrade zu bestimmen. Alle anderen gewünschten Größen, wie z.B. das elektrische und magnetische Feld, können dann aus den Potentialfunktionen abgeleitet werden.

Wird, wie im Falle der Modellierung eines Supraleiters, μ_r unabhängig von der Raumrichtung auf 1.0 gesetzt, so wird aus der Materialmatrix $[\nu]$ die Konstante $\frac{1}{\mu_0}$.

Eine Möglichkeit, um die Gleichungen (5.22) und (5.23) in eine Vektordifferentialgleichung der Form von Gleichung (5.1) zu überführen, ist die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit (Forderung nach einem Minimum der potentiellen Energie) [63]. Da im elektromagnetischen Feld nicht für alle vorkommenden Randwertprobleme auch das äquivalente Variationsintegral bekannt ist, kann statt dessen jedoch auch die Methode der gewichteten Residuen verwendet werden, die den Vorteil hat, für alle Randwertprobleme herangezogen werden zu können [58].

Die Galerkin Form der gewichteten Residuen, angewandt auf ein Wirbelstromproblem, ist ausführlich in [62] dargestellt und in Anhang B wiedergegeben. Man erhält die folgende Vektordifferentialgleichung:

$$\begin{bmatrix} [C^{AA}] & [C^{A\Psi}] \\ [C^{A\Psi}]^T & [C^{\Psi\Psi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{ \dot{A} \} \\ \{ \dot{\Psi} \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{AA}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{ A \} \\ \{ \Psi \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ J_i \} \\ \{ I \} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

mit

$$\{ J_i \} = \{ J_i^{nd} \} + \{ J^s \} + \{ J^{pm} \} \quad (5.26)$$

$$\{ I \} = \{ I^{nd} \} \quad (5.27)$$

- $[C^{AA}]$: Magnetische Dämpfungsmatrix
- $[C^{A\Psi}]$: Elektromagnetische Dämpfungsmatrix
- $[C^{\Psi\Psi}]$: Elektrische Dämpfungsmatrix
- $[K^{AA}]$: Koeffizientenmatrix bzgl. des magnetischen Vektorpotentials
- $\{ J_i^{nd} \}$: An den Knoten angreifender Quellenstromvektor (bzgl. $\{ A \}$)
- $\{ J^s \}$: Quellenstromdichtenvektor
- $\{ J^{pm} \}$: Vektor der Koerzitivfeldstärke (Permanentmagnet)

- $\{I^{nd}\}$: angelegter Gesamtstromvektor
 $\{A\}$: Vektor des magnetischen Vektorpotentials
 $\{\Psi\}$: Vektor des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials

Die einzelnen Matrizen und Vektoren werden dabei wie folgt berechnet (Herleitung siehe Anhang B):

$$[C^{AA}] = \int_{vol} \{N\}[\sigma]\{N\}^T d(vol) \quad (5.28)$$

$$[C^{A\Psi}] = \int_{vol} \{N\}[\sigma](\nabla \cdot \{N\}^T) d(vol) \quad (\text{nach [64] und damit von [60] abweichend!}) \quad (5.29)$$

$$[C^{\Psi\Psi}] = \int_{vol} (\nabla\{N\}^T)^T[\sigma]\nabla\{N\}^T d(vol) \quad (5.30)$$

$$[K^{AA}] = [K^L] + [K^G] \quad (\text{für } [\nu] = const) \quad (5.31)$$

$$[K^L] = \int_{vol} (\nabla \times \{N\}^T)^T[\nu](\nabla \times \{N\}^T) d(vol) \quad (5.32)$$

$$[K^G] = \int_{vol} (\nabla\{N\}^T)^T[\nu](\nabla\{N\}^T) d(vol) \quad (5.33)$$

$$\{J^s\} = \int_{vol} \{J_s\}\{N\}^T d(vol) \quad (5.34)$$

$$\{J^{pm}\} = \int_{vol} (\nabla \times \{N\}^T)^T \{H_c\} d(vol) \quad (5.35)$$

Die Spaltenvektoren der Potentiale und ihrer Ableitungen setzen sich für ein Quaderelement mit acht Knoten - also etwa das in Kapitel 6 beschriebene neue Element SUPRA105 - wie folgt zusammen:

$$\{\dot{A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_{x1}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{y1}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{z1}}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial A_{x8}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{y8}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{z8}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (\text{Vektor der Ableitungen des magnetischen Vektorpotentials})$$

$$\{\dot{\Psi}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi_8}{\partial t} \end{Bmatrix} \text{ (Vektor der Ableitungen des zeitintegrierten elektr. Skalarpotentials)}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{z1} \\ \vdots \\ A_{x8} \\ A_{y8} \\ A_{z8} \end{Bmatrix} \text{ (Vektor des magnetischen Vektorpotentials)}$$

$$\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_8 \end{Bmatrix} \text{ (Vektor des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials)}$$

5.3 Aufstellen der Element- und Systemmatrizen

Die Matrizen und Belastungsvektoren aus Gleichung (5.25) werden zunächst für jedes einzelne Element separat aufgestellt. Hierbei werden eventuelle Belastungen und Randbedingungen sowie an einzelnen Knoten angreifende Anregungen berücksichtigt. Die einzelnen Elementmatrizen werden dann zur Systemmatrix zusammengesetzt, indem die jeweils zum selben Knoten gehörenden Elementmatrixkomponenten addiert werden.

Hier soll nun kurz auf eine Besonderheit des verwendeten FE-Programms ANSYS [60] eingegangen werden:

Beim Programmpaket ANSYS erfolgt die Gleichungsauflösung nach dem sogenannten *Wavefront-Verfahren*. Diesem Verfahren liegt die Gauß'sche Eliminationsmethode zugrunde, jedoch werden die Gleichungen zum frühest möglichen Zeitpunkt eliminiert. Da somit zu keiner Zeit das gesamte Gleichungssystem aufgebaut werden muß, kann bei Verwendung dieser Methode Speicherplatz eingespart werden [59].

5.4 Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und anisotropen Materialeigenschaften

Die FEM ist sehr gut zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte geeignet. So ist im FE-Programm ANSYS beispielsweise die Berücksichtigung der Feldabhängigkeit der magnetischen Permeabilität $\mu = \mu(|\vec{H}|)$ bereits fest implementiert. Aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskurve ferromagnetischer Materialien wird die Matrix $[K]$ des Gleichungssystems (5.1) (bzw. $[K^{AA}]$ in Gleichung (5.25)) ergebnisabhängig. Die in die Matrix eingehende magnetische Permeabilität μ ist von der magnetischen Feldstärke und damit von der Lösung des Gleichungssystems abhängig ($\mu = \mu(\vec{H}) = \mu(\vec{A})$). Damit geht das lineare Gleichungssystem

$$[K] \cdot \{A\} + \{F\} = \{0\} \quad (5.36)$$

für das magnetische Vektorpotential in das nichtlineare System

$$[K](\{A\}) \cdot \{A\} + \{F\} = \{0\} \quad (5.37)$$

über.

Das Newton-Raphson Verfahren verändert den Lösungsvektor $\{A\}$ nun so lange iterativ, bis die Differenz zwischen Elementbelastung $[K] \cdot \{A\}$ und Belastungsvektor $\{F\}$ kleiner als eine bestimmte Schranke ε ist [58].

Auf die hier notwendige Berücksichtigung der in einem Supraleiter vorhandenen Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit σ von der elektrischen Feldstärke \vec{E} wird in Kapitel 6 ausführlich eingegangen.

Auch anisotrope Materialien können mit der FEM einfach behandelt werden, indem man beispielsweise statt skalarer Werte für die magnetische Permeabilität μ und die elektrische Leitfähigkeit σ Materialmatrizen verwendet:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

und

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

5.5 Lösungsverfahren für das FE-Gleichungssystem

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Lösung des FE-Gleichungssystems ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

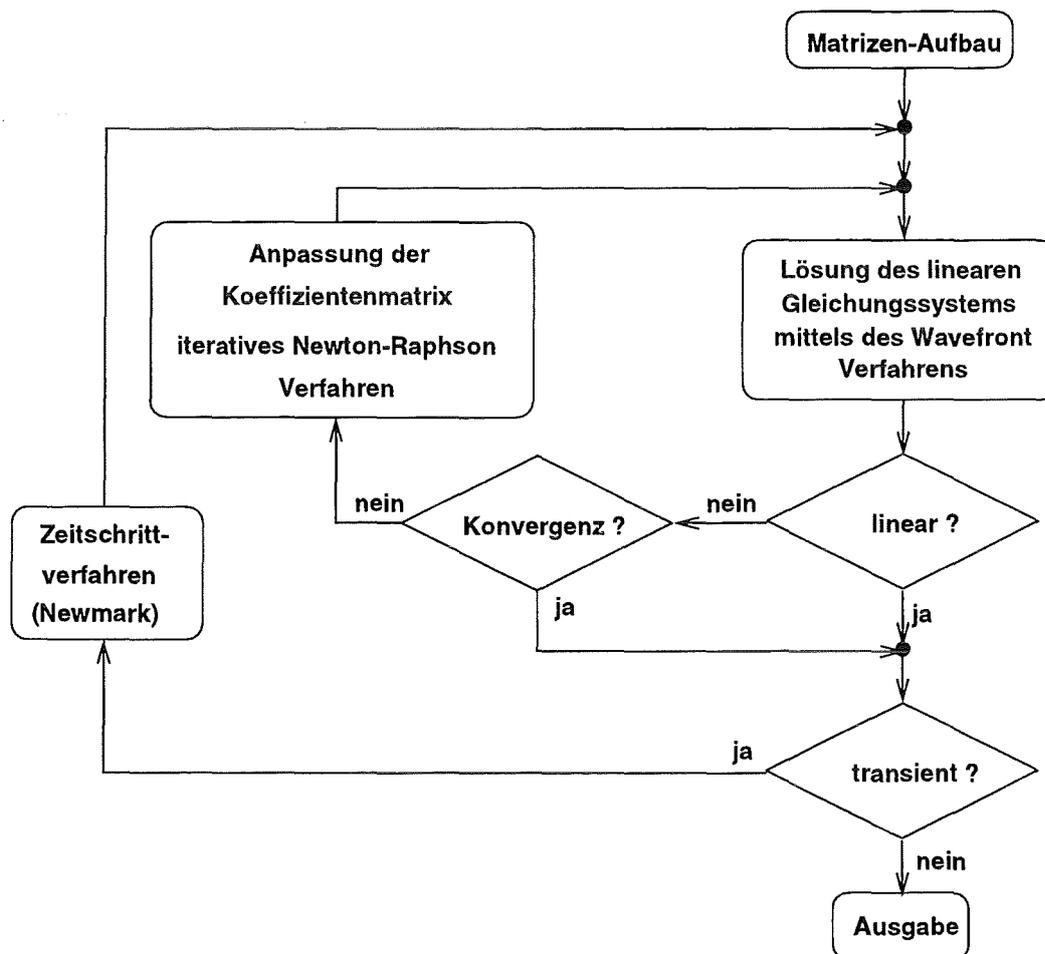


Abbildung 5.1: Lösung des FE-Gleichungssystems.

Nach dem Aufbau sämtlicher notwendiger Matrizen und Belastungsvektoren wird das Gleichungssystem für den ersten Zeit- oder Lastschritt gelöst. Zur Lösung eines solchen Gleichungssystems stehen zwei grundsätzliche Lösungsmethoden - die direkte Integrationsmethode und die Modenüberlagerungsmethode - zur Verfügung [66]. Während bei der Modenüberlagerungsmethode die Vektordifferentialgleichung

(5.1) zunächst in eine andere Form transformiert wird um die anschließende schrittweise Lösung zu vereinfachen, wird bei der vom FE-Programm ANSYS verwendeten direkten Integrationsmethode das Gleichungssystem (5.1) direkt, also ohne vorherige Transformation, mit Hilfe des in Kapitel 5.6 beschriebenen Newmark Verfahrens numerisch integriert. Handelt es sich um die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems, so werden die Matrizen mittels des Newton-Raphson Verfahrens modifiziert und das lineare Gleichungssystem wird erneut gelöst. Dieser Prozeß wird so lange fortgesetzt, bis das Newton-Raphson Verfahren konvergiert.

5.6 Transiente Berechnungen und das Zeitintegrationsverfahren nach Newmark

Entsprechend Gleichung (5.1) werden bei der FEM partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachtet:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (5.40)$$

Hierbei ist $u = u(t)$ eine Funktion der Zeit.

Das FE-Programm ANSYS verwendet die Zeitintegrationsmethode nach Newmark um Gleichung (5.40) zu diskreten Zeitpunkten zu lösen. Das Zeitinkrement Δt zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten wird Integrationszeitschritt genannt.

Bei einer transienten Analyse wird das vollständige Differentialgleichungssystem (5.40) zur Berechnung der transienten Antwort verwendet. Diese Berechnungsmethode erlaubt die Berücksichtigung jeder Art von Nichtlinearität.

Die Genauigkeit einer transienten Analyse hängt von der Größe der Integrationszeitschritte ab: je kleiner die Zeitschritte gewählt werden, desto größer ist die Genauigkeit.

Eine Verwendung von etwa 20 Schritten pro Wellenlänge der höchsten interessanten Frequenz liefert bei der Newmark Zeitintegrationsmethode genügend genaue Ergebnisse.

Zu kleine Zeitschritte können numerische Probleme verursachen; Zeitschritte, die kleiner sind als 10^{10} mal die verwendete Zeiteinheit, sollten daher vermieden werden.

Die grundlegenden Gleichungen der Newmark-Methode lauten [65]:

$$\{u\}_{n+1} = \{u\}_n + \Delta t \{\dot{u}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\{\ddot{u}\}_n + 2\beta\{\ddot{u}\}_{n+1}] \quad (5.41)$$

$$\{\dot{u}\}_{n+1} = \{\dot{u}\}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\{\ddot{u}\}_n + \gamma\{\ddot{u}\}_{n+1}] \quad (5.42)$$

Die Parameter β und γ beschreiben die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften des Algorithmus. Newmark schlägt hierbei $\gamma = 1/2$ vor, um eine künstliche Dämpfung zu vermeiden. Der Wert für den Parameter β hängt vom Zeitverlauf von \ddot{x} während des Zeitintervalls $[t, t + \Delta t]$ ab und kann Abbildung 5.2 entnommen werden.

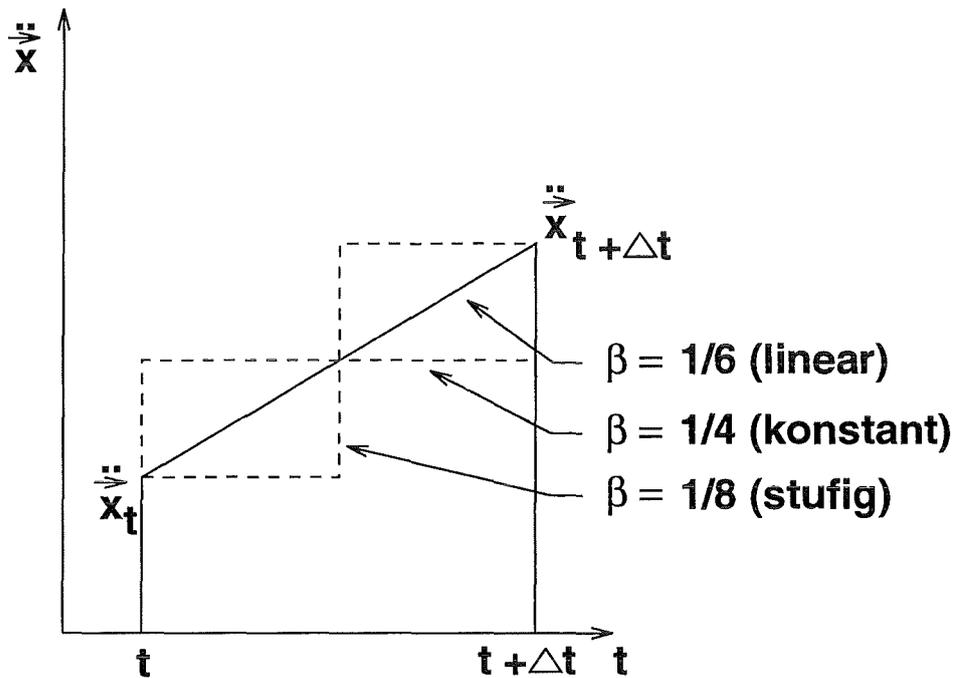


Abbildung 5.2: Mögliche Werte für den Stabilitätsparameter β .

β ist nur dann gleich Null zu setzen, wenn $\ddot{x}_t = \ddot{x}_{t+\Delta t} = const$ zwischen t und $t + \Delta t$.

Neben den Gleichungen (5.41) und (5.42) soll auch Gleichung (5.40) zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ erfüllt sein, so daß gilt:

$$[M]\ddot{\vec{x}}_{t+\Delta t} + [C]\dot{\vec{x}}_{t+\Delta t} + [K]\vec{x}_{t+\Delta t} = \vec{F}_{t+\Delta t} \quad (5.43)$$

Um eine Lösung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu finden, löst man zunächst Gleichung (5.42) um $\ddot{\vec{x}}_{t+\Delta t}$ in Abhängigkeit von $\vec{x}_{t+\Delta t}$ zu erhalten. $\ddot{\vec{x}}_{t+\Delta t}$ wird dann in (5.41) eingesetzt um $\dot{\vec{x}}_{t+\Delta t}$ zu erhalten. Danach findet man mit Gleichung (5.43) die Lösung $\vec{x}_{t+\Delta t}$. Ist $\vec{x}_{t+\Delta t}$ bekannt, so können $\dot{\vec{x}}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{\vec{x}}_{t+\Delta t}$ mittels der beiden Gleichungen (5.41) und (5.42) berechnet werden [66].

5.7 Überlegungen zur Konvergenz und Genauigkeit der Lösung einer FE-Analyse

Da die FEM eine numerische Technik ist, erhält man, wenn man die Elementgröße sukzessive reduziert, eine Reihe von Approximationen. Diese Reihe konvergiert gegen die exakte Lösung, wenn das Interpolationspolynom die folgenden Konvergenzkriterien erfüllt [66]:

- Die Lösungsvariablen müssen innerhalb der Elemente kontinuierlich verlaufen. Diese Bedingung wird durch Wahl kontinuierlicher Funktionen (Polynome) als Interpolationsfunktionen erfüllt.
- Alle konstanten Zustände der Lösungsvariablen, sowie ihrer partieller Ableitungen müssen durch das Interpolationspolynom repräsentiert werden können, wenn die Elementgröße gegen Null geht.
- Die Lösungsvariablen und deren partielle Ableitungen bis $n - 1$ (n ist die höchste, im Funktional auftauchende Ordnung der Lösungsvariablen) müssen an Rändern oder Grenzflächen kontinuierlich sein.

Um numerische Probleme zu vermeiden, sollte darauf geachtet werden, daß die Elemente möglichst gleiche Kantenlängen besitzen (maximal zulässiges Seitenverhältnis ist 1:5) und daß weder besonders spitze noch besonders stumpfe Winkel α ($45^\circ < \alpha < 135^\circ$) auftreten.

Prinzipiell erhält man mit zunehmender Elementdichte genauere Ergebnisse, da der Diskretisierungsfehler kleiner wird. Der numerische Fehler steigt jedoch mit zunehmender Elementdichte an, so daß man nur im Bereich zu erwartender starker Gradienten ein dichtes Elementnetz wählen sollte. Als Faustregel bei der Diskretisierung gilt weiterhin, daß i.a. ästhetische Netze (z.B. hochsymmetrische Netze oder der voraussichtlichen Problemlösung angepaßte Netze) die besten Ergebnisse liefern, wobei sich der Kantenverlauf der Elemente nicht nur an der zu modellierenden Kontur, sondern auch am zu erwartenden Feldverlauf orientieren sollte [59].

Kapitel 6

Das neue Userelement SUPRA105

Die Berücksichtigung der in Kapitel 4 vorgestellten nichtlinearen Materialgleichungen für supraleitende Materialien ist mit einem kommerziellen FE-Programm nicht ohne weiteres möglich, da das Ohm'sche Gesetz - mit konstanter Leitfähigkeit - bereits implizit in den elektrischen und magnetischen Dämpfungsmatrizen der Elemente enthalten ist.

Das FE-Programm ANSYS kristallisierte sich schließlich als das geeignetste Programm zur Implementierung der mathematisch-physikalischen Modelle für HTSL heraus, da es - im Gegensatz zu den sonst üblichen "Blackbox"-Programmen, bei denen der Anwender meist nur Zugriff auf die Eingabedatei und die Lösungsausgabe hat - unter anderem die Programmierung eigener Elemente, sogenannter Userelemente gestattet (siehe Abbildung 6.1). Solche Userelemente können vom Anwender in der Programmiersprache FORTRAN77 geschrieben und in das Hauptprogramm eingebunden werden. Das so programmierte Element kann dann, wie jedes andere ANSYS-Element auch, zur Modellierung und Berechnung mit ANSYS eingesetzt werden.

Aufsetzend auf dem Quellcode eines bereits existierenden ANSYS-Elements wurde ein neues Element entwickelt (SUPRA105), bei dem zwischen einer normalen Wirbelstromberechnung und der Verwendung des Modells des kritischen Zustands, des Modells vom eingefrorenen Fluß und des Modells vom Flußfließen und Flußkriechen gewählt werden kann [67, 68]. Desweiteren sind mehrere Modelle zur Berücksichtigung der Feldabhängigkeit der kritischen Stromdichte implementiert.

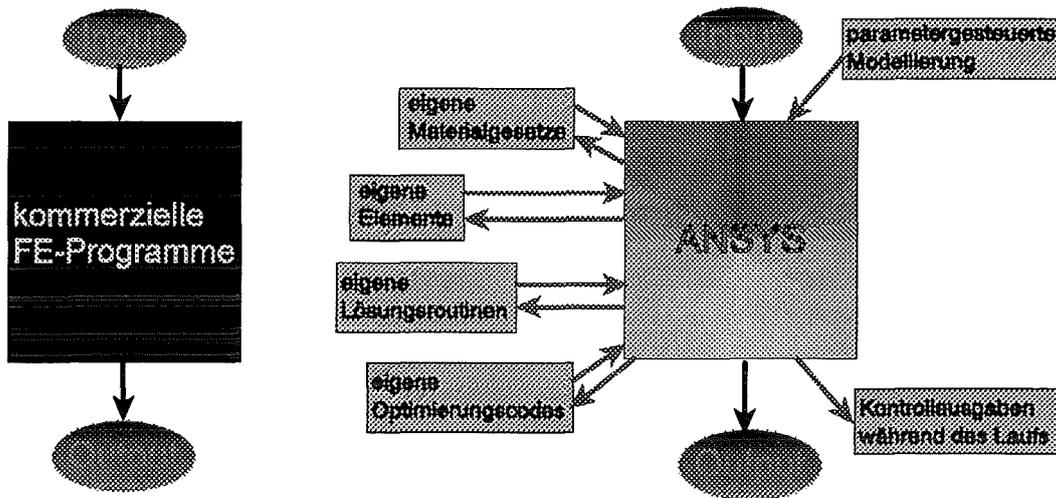


Abbildung 6.1: Vergleich üblicher kommerzieller FE-Programme mit ANSYS.

Das als Ausgangspunkt dienende, bereits existierende ANSYS-Element - das 3D-Multifeldelement SOLID5 - erlaubt die Berechnung magnetischer, thermischer, elektrischer, piezoelektrischer und mechanischer Größen. Die Elementmatrizen des ANSYS-Elements SOLID5 haben die folgende Form:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{T}\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} [C] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [C^t] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \\ \{\dot{\varphi}\} \\ \{\dot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} [K] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K^t] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K^\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [K^m] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \\ \{\varphi\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \\ \{I\} \\ \{J_f\} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Hierbei ist $[M]$ die Massenmatrix, $[C]$ die Dämpfungsmatrix und $[K]$ die Steifigkeitsmatrix. $[K^\varphi]$ und $[K^m]$ sind die elektrische und magnetische Steifigkeitsmatrix,

wohingegen $[C^t]$ und $[K^t]$ die thermischen Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen bezeichnen.

Das Multifieldelement SOLID5 verwendet bei der Berechnung elektrischer und magnetischer Felder das elektrische bzw. magnetische Skalarpotential als Lösungsvariablen und ist somit nicht für dynamische Berechnungen geeignet. Daher wurden zunächst das magnetische Vektorpotential \vec{A} und das zeitintegrierte elektrische Skalarpotential Ψ als Lösungsvariablen eingeführt. Das Gleichungssystem des neuen Userelements SUPRA105 hat, nach Entfernen der hier nicht benötigten thermischen ($T = const < T_c$ wird vorausgesetzt!) und bei Vernachlässigung der mechanischen Felder, die folgende Form:

$$\begin{bmatrix} [C^{AA}] & [C^{A\Psi}] \\ [C^{A\Psi}]^T & [C^{\Psi\Psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}\} \\ \{\dot{\Psi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{AA}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{J_i\} \\ \{I\} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Die elektrische Leitfähigkeit σ ist hierbei in der magnetischen Dämpfungsmatrix $[C^{AA}]$, in der elektrischen Dämpfungsmatrix $[C^{\Psi\Psi}]$ und in der elektromagnetischen Kopplungsmatrix $[C^{A\Psi}]$ bzw. $[C^{A\Psi}]^T$ enthalten [60]. Um eine Integration der in Kapitel 4 beschriebenen Modelle in dieses Element zu ermöglichen, wurde eine künstliche Leitfähigkeit σ_n eingeführt.

Die Funktion dieser künstlichen Leitfähigkeit soll anhand des Ablaufdiagramms (Abbildung 6.2) erläutert werden. Hierbei werden die folgenden Abkürzungen verwendet: *CS-Modell* für das Modell des kritischen Zustands ("critical state model"), *FF-Modell* für das Modell des eingefrorenen Flusses ("frozen field model") und *FFC-Modell* für das Modell des Flußkriechens und des Flußfließens ("flux-flow-creep model").

In diesem Diagramm ist auf der linken Seite der Ablauf einer mit diesem Element möglichen normalen Wirbelstromanalyse dargestellt. Zu Beginn eines jeden Lastschritts wird hierbei die Leitfähigkeit σ aus der ANSYS-Eingabedatei eingelesen und das elektrische Feld \vec{E} , die Stromdichte \vec{J} , die magnetische Flußdichte \vec{B} sowie das Magnetfeld \vec{H} berechnet. Die Matrizen und Belastungsvektoren werden aufgestellt. Danach wird das Gesamtgleichungssystem aufgestellt und gelöst. Der Lastschritt ist damit für eine lineare Berechnung beendet. Ist nichtlineares Materialverhalten ($\mu = \mu(|\vec{H}|)$) zu berücksichtigen, so ist der Lastschritt an dieser Stelle nur dann beendet, wenn das Newton-Raphson Verfahren konvergiert. Ansonsten wird der Lastschritt - mit entsprechend variierten Startwerten - erneut berechnet, wobei auch die Matrizen verändert werden.

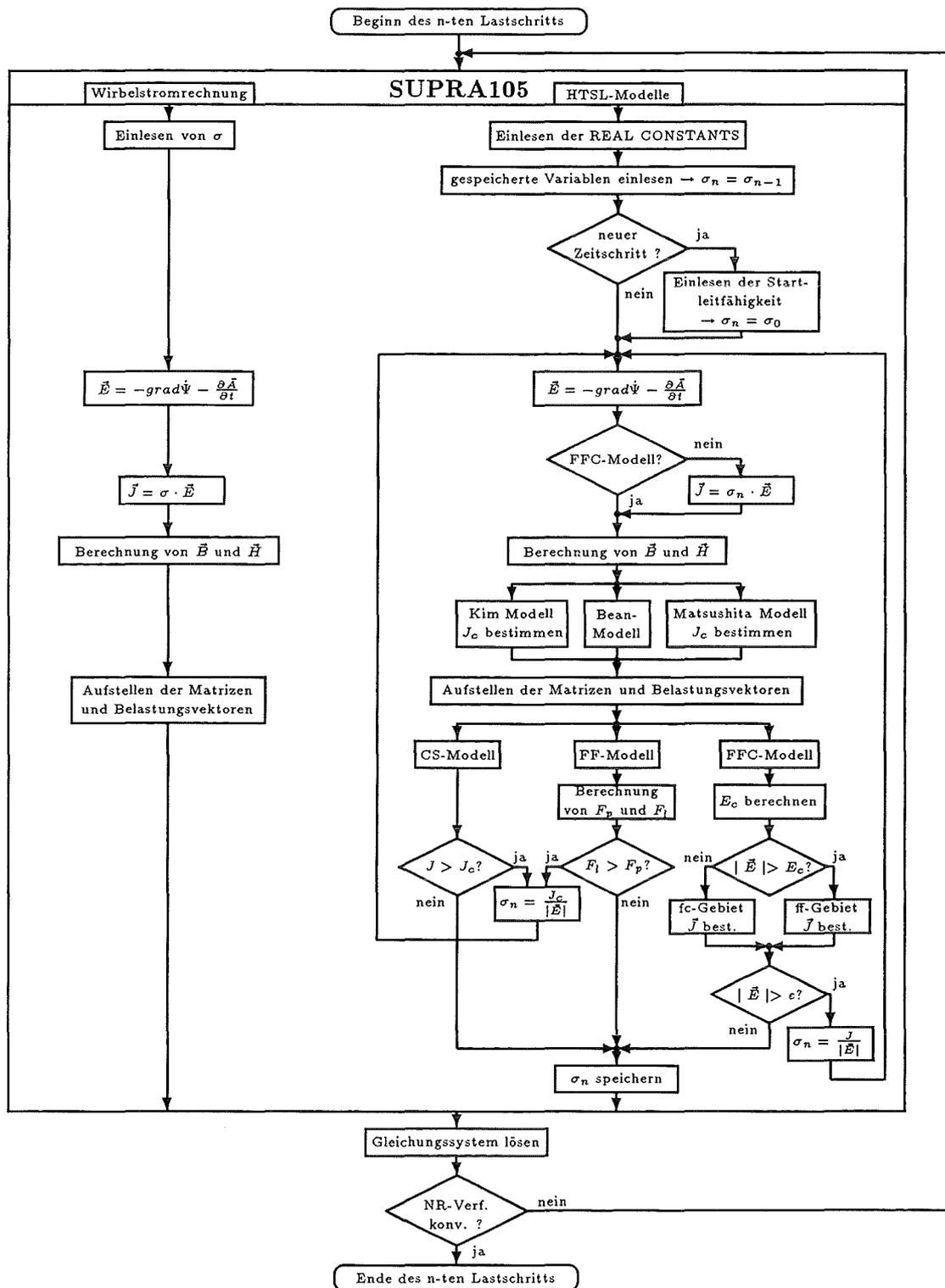


Abbildung 6.2: Funktionsweise des Elements SUPRA105.

Hat man über die Wahl der sogenannten Keyoptions des Elements eines der Supraleitermodelle gewählt, so wird zu Beginn des n -ten Lastschritts, nach dem Einlesen der modellabhängigen Konstanten (real constants), die Leitfähigkeit jedes SUPRA105-Elements auf den Wert der im vorhergehenden Lastschritt berechneten Leitfähigkeit σ_{n-1} gesetzt. Handelt es sich bei diesem Lastschritt um den ersten Lastschritt eines neuen Zeitschritts, so wird die Leitfähigkeit durch einen sehr hohen Startwert σ_0 überschrieben. Nach der Bestimmung der elektrischen Feldstärke \vec{E} wird, wenn nicht das FFC-Modell gewählt wurde, die Stromdichte \vec{J} in jedem Element berechnet. Dies geschieht unter Verwendung des aktuellen Wertes der künstlichen Leitfähigkeit. Es schließt sich die Berechnung der Magnetfeldvariablen \vec{B} und \vec{H} , sowie - wahlweise nach dem Kim-, Bean- oder Matsushita-Modell - der feldabhängigen kritischen Stromdichte $\vec{J}_c(|\vec{B}|)$ an. Nach der Aufstellung der Elementmatrizen und der Belastungsvektoren werden die Bedingungen für eine Änderung der künstlichen Leitfähigkeit entsprechend des gewählten Modells überprüft.

Beim CS-Modell erfolgt eine Verringerung der künstlichen Leitfähigkeit, wenn die berechnete Stromdichte im Element den Wert der kritischen Stromdichte überschreitet.

Bei Verwendung des FF-Modells wird dagegen geprüft, ob die Lorentzkraft F_l im Element größer als die Volumenverankerungskraft F_p ist, was dann ebenfalls zur Verringerung der künstlichen Leitfähigkeit führt.

Beim FFC-Modell wird der Betrag der berechneten elektrischen Feldstärke mit dem Wert der kritischen elektrischen Feldstärke E_c verglichen und die im Element fließende elektrische Stromdichte dementsprechend, also entweder für den Bereich des Flußkriechens oder für den Bereich des Flußfließens, berechnet. Eine Änderung der künstlichen Leitfähigkeit σ_n erfolgt jedoch nur, wenn die induzierte elektrische Feldstärke einen bestimmten Schwellenwert ε überschreitet.

Wurde der Wert der künstlichen Leitfähigkeit σ_n verändert, so werden die Matrizen $[C^{AA}]$, $[C^{\Psi\Psi}]$ und $[C^{A\Psi}]$ erneut berechnet und die Bedingungen für eine Änderung der künstlichen Leitfähigkeit erneut geprüft.

Erst wenn σ_n nach Überprüfung der jeweiligen Modellbedingungen unverändert bleibt, wird der aktuelle Wert der Leitfähigkeit gespeichert, um im nächsten Lastschritt als Ausgangswert zur Verfügung zu stehen.

Das Verhalten des Elements SUPRA105 kann über die bereits erwähnten Keyoptions - in der ANSYS-Sprache kurz als KEYOPT bezeichnet - wie folgt gesteuert werden:

KEYOPT(1) = 0 → Lösungsvariablen: UX, UY, UZ, AX, AY, AZ, VOLT
 = 1 → Lösungsvariablen: AX, AY, AZ, VOLT
 KEYOPT(2) = 0 → normale Wirbelstromberechnung ($\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, $\sigma = const.$)
 = 1 → CS-Modell
 = 2 → FF-Modell
 = 3 → FFC-Modell
 KEYOPT(3) = 0 → ohne Funktion
 = 1 → Bean-Modell
 = 2 → Kim-Modell
 = 3 → Matsushita-Modell

Möchte man beim Einsatz des Elements SUPRA105 beispielsweise das FF-Modell zusammen mit dem Bean-Modell verwenden und dabei als Lösungsvariablen lediglich die drei Komponenten des magnetischen Vektorpotentials sowie das zeitintegrierte elektrische Skalarpotential zulassen, so lautet der entsprechende Abschnitt in der ANSYS-Eingabedatei:

```

!
ET,1,105,1,2,1 ! Elementtyp 1: SUPRA105
!               Keyoption 1: AX, AY, AZ, VOLT
!               Keyoption 2: frozen field model
!               Keyoption 3: Bean model
!
R,1,2.8e+7,2.8e+7,1e+7 ! Definition der real constants
!
MP,murx,1,1          ! mu_r = 1 im Supraleiter (Material 1)
!
MP,rsvx,1,1e-14      ! spez. Widerstand in x-Richtung (Supraleiter)
MP,rsvy,1,1e-14      ! spez. Widerstand in y-Richtung (Supraleiter)
MP,rsvz,1,1e-14      ! spez. Widerstand in z-Richtung (Supraleiter)
!

```

Mittels des *R*-Kommandos werden dem Element die Werte der “real constants“, hier also der kritischen Stromdichten in x-, y- und z-Richtung, übergeben. Mit Hilfe des

MP-Komandos werden dem Supraleiter (Material 1) die entsprechenden Materialeigenschaften (**m**aterial **p**roperties), also beispielsweise die relative Permeabilitätszahl und die Startwerte für die künstliche elektrische Leitfähigkeit σ_0 zugewiesen.

Das in ANSYS implementierte Newton-Raphson Verfahren berücksichtigt lediglich in der Reluktanzmatrix auftretende Nichtlinearitäten. Die variable künstliche Leitfähigkeit σ_n ist jedoch in der Leitfähigkeitsmatrix des Gleichungssystems (6.2) enthalten. Da eine Änderung des Newton-Raphson Verfahrens in ANSYS nicht möglich ist, sind bei der Verwendung des Elements SUPRA105 zusammen mit einem der implementierten Supraleitermodelle kleine Zeitschritte zu wählen um dennoch eine Konvergenz des Newton-Raphson Verfahrens zu erreichen. Hierdurch bedingt werden die Rechenzeiten sehr lang (bei der in dieser Arbeit verwendeten HP 715/50 bis zu 10 Tage für eine vollständige Kraft-Abstandskurve).

Kapitel 7

Simulation vertikaler und horizontaler Bewegungen im FE-Modell

Bei einem supraleitenden magnetischen Lager muß zunächst der im Rotor des Lagers integrierte Permanentmagnet in unmittelbare Nachbarschaft des oder der Supraleiter gebracht werden, bevor das Lager seinen eigentlichen Betrieb aufnehmen kann. Wie bereits in Kapitel 3 kurz angesprochen, unterscheidet man hier zwischen zwei Einkühlarten des Supraleiters:

1. Abkühlen des Supraleiters im Feld des Permanentmagneten (“field cooling“): Hier befindet sich der Permanentmagnet bereits in unmittelbarer Nachbarschaft des Supraleiters, wenn dieser unter die kritische Temperatur abgekühlt und somit supraleitend wird. Bei HTSL führt das dazu, daß bereits in das Material eingedrungener magnetischer Fluß bei Unterschreitung der kritischen Temperatur T_c an Haftstellen festgehalten und somit quasi “eingefroren“ wird.
2. Abkühlen des Supraleiters im feldfreien Raum (“zero field cooling“): Der Permanentmagnet befindet sich in “großer“ Entfernung vom Supraleiter und wird erst nach dessen Abkühlen unter die Sprungtemperatur T_c an den Supraleiter heranbewegt.

Insbesondere wenn man den zweiten Fall betrachtet, in dem der Permanentmagnet erst nach dem Abkühlvorgang an den Supraleiter angenähert wird, muß man

sich Gedanken über Möglichkeiten zur Simulation solch eines vertikalen Bewegungsvorgangs innerhalb eines FE-Netzes machen (Kapitel 7.1).

Ein wichtiger Parameter eines supraleitenden Magnetlagers ist seine horizontale bzw. radiale Steifigkeit. Um diese zu ermitteln, muß der Permanentmagnet in horizontaler Richtung verschoben werden. Auch dieser Bewegungsvorgang muß in der FE-Rechnung in irgend einer Weise simuliert werden (Kapitel 7.2).

7.1 Simulation vertikaler Bewegungen

Die Annäherung eines Magneten an einen supraleitenden Massivkörper kann in einer FE-Rechnung auf zweierlei Arten simuliert werden:

- Neuvernetzung (“remeshing“) nach jedem Lösungsschritt, um den Abstand zwischen dem Magneten und dem Supraleiter im FE-Modell zu verändern.
- Änderung der Koerzitivfeldstärke des Magneten bei konstantem Abstand zwischen Magnet und Supraleiter im FE-Modell.

Die Methode der **Neuvernetzung** nach jedem Lösungsschritt bietet den Vorteil, daß die reale Bewegung des Magneten nachgebildet werden kann, womit die Änderung des Magnetfelds am Ort des Supraleiters automatisch der eines entsprechenden, realen Experiments entspricht. Dieser Vorteil wird jedoch erkauft durch einen hohen Diskretisierungsaufwand: Es muß zunächst ein Modell der Ausgangsposition diskretisiert und die zugehörige magnetische Feldverteilung berechnet werden. Nach der Speicherung der berechneten Daten ist eine Änderung des Modells erforderlich, da sich der Abstand zwischen Magnet und Supraleiter und somit die Modellgeometrie ändert. Die magnetische Feldverteilung in diesem neuen FE-Modell muß nun wiederum berechnet, die berechneten Daten gespeichert und das Modell, entsprechend der zu simulierenden Bewegung, erneut neu aufgebaut werden. Diese Prozedur läßt sich durch parametergesteuerte Diskretisierung automatisieren. Neben dem Nachteil des hohen Diskretisierungsaufwands ist eine Darstellung der Werte der Lösungsvariablen über der Zeit, aufgrund der separaten Lösungsfiles, nur mit erhöhtem Aufwand möglich. Desweiteren können auf diese Weise nur quasistationäre Rechnungen durchgeführt werden, nicht aber dynamische Rechnungen, wie sie für eine Wirbelstromanalyse notwendig sind.

Simuliert man dagegen die Annäherung eines Magneten an einen Supraleiter durch zeitliche **Änderung seiner Koerzitivfeldstärke**, so hat man die oben genannten Nachteile nicht. Der Abstand zwischen Magnet und Supraleiter im FE-Modell bleibt während der gesamten Rechnung konstant; eine Neuvernetzung ist also nicht notwendig. Die Annäherung wird allein durch eine zeitliche Änderung der Koerzitivfeldstärke des Permanentmagneten simuliert. Hier stellt sich jedoch das folgende Problem:

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer zu simulierenden Annäherungsgeschwindigkeit und der zu deren Simulation nötigen Zeitfunktion der Koerzitivfeldstärke?

Bei der Beantwortung dieser Frage muß zwischen der Verwendung eines zylinderförmigen Permanentmagneten zusammen mit einem HTSL (Kapitel 7.1.1) und der Verwendung eines ringförmigen Permanentmagneten in Verbindung mit mehreren HTSL (Kapitel 7.1.2) unterschieden werden.

7.1.1 Zylinderförmiger Permanentmagnet

Bei Verwendung eines zylinderförmigen Permanentmagneten läßt sich für die Zeitabhängigkeit der Koerzitivfeldstärke die folgende Gleichung herleiten (siehe Anhang C):

$$H_c(t) = \frac{H_{cmax}}{\frac{d+l}{\sqrt{b^2+(l+d)^2}} - \frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}} \cdot \left(\frac{s_{start} - v \cdot t + l}{\sqrt{b^2 + (l + s_{start} - v \cdot t)^2}} - \frac{s_{start} - v \cdot t}{\sqrt{b^2 + (s_{start} - v \cdot t)^2}} \right) \quad (7.1)$$

Diese Gleichung wurde in einem Fortran-Programm implementiert, welches nach Angabe der Annäherungsgeschwindigkeit v , des zu simulierenden Anfangsabstands s_{start} und Endabstandes zwischen Magnet und Supraleiter, des tatsächlich modellierten Luftspaltabstands d , der Höhe l und des Radius b des Magneten sowie dessen Koerzitivfeldstärke H_{cmax} die Anregungsfunktion für ein entsprechendes ANSYS-Datenfile liefert. Schreibt man allgemein

$$H_c(t) = \frac{H_{cmax}}{\frac{d+l}{\sqrt{b^2+(l+d)^2}} - \frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}} \cdot \left(\frac{z(t) + l}{\sqrt{b^2 + (l + z(t))^2}} - \frac{z(t)}{\sqrt{b^2 + z^2(t)}} \right), \quad (7.2)$$

so können auch Abstände zwischen Magnet und Supraleiter, die kleiner sind als die modellierte Luftspaltbreite d , berücksichtigt werden. Ebenso können beispielsweise vertikale Vibrationen des Magneten um seine Gleichgewichtslage simuliert werden.

Zur Verifikation dieser Gleichung wurden zwei Vergleichsrechnungen durchgeführt [67]: Ein Permanentmagnet (Höhe 3.2 mm , Radius 3.0 mm , Koerzitivfeldstärke 905000 A/m) und ein Supraleiter (Höhe 1.5 mm , Radius 6.0 mm) wurden diskretisiert. Dem Supraleiter wurden dabei die Materialeigenschaften von Luft zugewiesen, da es bei dieser Vergleichsrechnung lediglich darum ging nachzuweisen, daß sich am Ort des Supraleiters die, entsprechend der Annäherung des Magneten zu erwartende und in beiden Fällen gleiche, magnetische Flußdichte einstellt. Die nichtlineare $B(H)$ -Abhängigkeit des Magnetmaterials wurde mittels eines Fortran-Programms, in Anlehnung an die $B(H)$ -Kurve des Werkstoffes VACODYM335HR [27], aus den Werten der intrinsischen Koerzitivfeldstärke, sowie der remanenten Magnetisierung berechnet.

Abbildung 7.1 zeigt die diskretisierte Anordnung in ihrer Endlage bzw. mit modellierter Luft

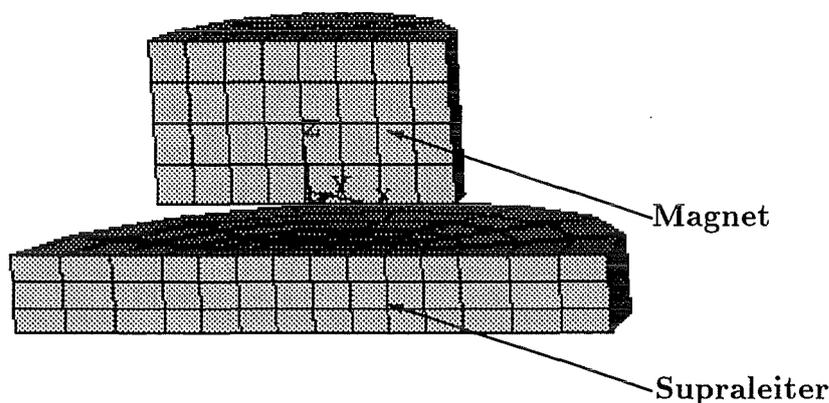


Abbildung 7.1: Endlage der diskretisierten Anordnung.

Simuliert wurde eine Annäherung des Permanentmagneten an den Supraleiter mit einem Anfangsabstand von 20.0 mm und einer verbleibenden Luftspaltbreite von 1.0 mm . Die Annäherungsgeschwindigkeit beträgt 10 mm/s . Die Berechnung wurde einmal mittels Neuvernetzung der Geometrie und einmal unter Verwendung einer zeitabhängigen Koerzitivfeldstärke des Magneten durchgeführt.

In Abbildung 7.2 sind die berechneten Zeitverläufe der magnetischen Flußdichte

beider Rechnungen, jeweils im Zentrum der Oberfläche des Supraleiters, gemeinsam dargestellt. Man erkennt nur sehr geringe Unterschiede. Die hier aufgestellte Gleichung kann somit zur Simulation der Annäherung eines zylinderförmigen Permanentmagneten an einen Supraleiter verwendet werden.

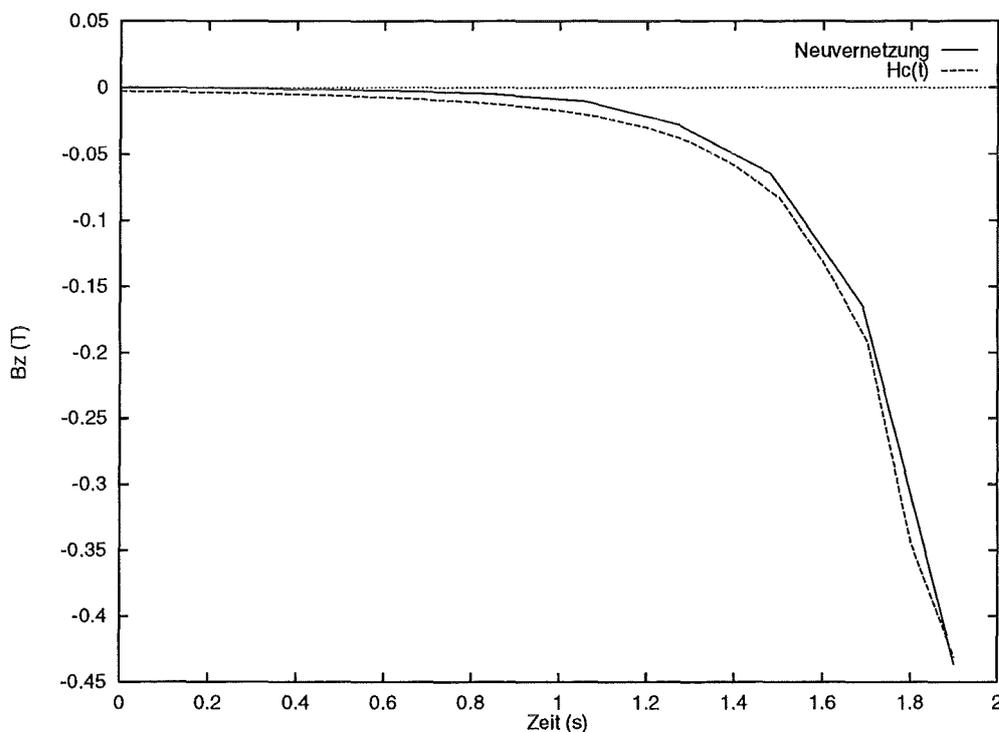


Abbildung 7.2: $B_z(t)$ bei Simulation durch Neuvernetzung bzw. durch $H_c(t)$.

Berücksichtigt werden muß bei dieser Simulationsmethode, daß Gleichung (7.1) streng nur in Raumpunkten entlang der Mittelachse des zylinderförmigen Permanentmagneten gültig ist. Jedoch wird im FE-Modell der Permanentmagnet in unmittelbarer Nähe des Supraleiters modelliert. Hierdurch werden die Abweichungen des Magnetfelds, etwa an den Rändern des Supraleiters, immer kleiner, je geringer der simulierte Abstand zwischen Permanentmagnet und Supraleiter ist, um schließlich zu verschwinden, wenn der simulierte Abstand dem modellierten Abstand entspricht und $H_c(t)$ auf 100% des Wertes der Koerzitivfeldstärke des Permanentmagneten angestiegen ist. Dieser Sachverhalt ist auch Abbildung 7.2 zu entnehmen. Die anfangs (für kleine Zeiten t) vorhandenen, sehr geringen Abweichungen zwischen den unterschiedlich berechneten z -Komponenten der magnetischen Flußdichte verschwinden gänzlich gegen Ende der Simulation, wenn also der simulierte Abstand zwischen

Permanentmagnet und Supraleiter etwa dem tatsächlich modellierten Abstand entspricht.

7.1.2 Ringförmiger Permanentmagnet

Aufgrund auftretender elliptischer Integrale ist es bei der Betrachtung eines Ringmagneten (Abbildung 7.3) nicht mehr möglich, einen geschlossenen Ausdruck für die magnetische Feldstärke in Raumpunkten, die nicht auf seiner Mittelachse liegen, anzugeben.

Da jedoch, für die in dieser Arbeit notwendigen Simulationen, die z-Komponente des Magnetfeldes unmittelbar unterhalb des Rings an der Stelle $r_m = r_i + \frac{r_a - r_i}{2}$ von Interesse ist, muß nach einer anderen Möglichkeit gesucht werden, um die z-Komponente der magnetischen Feldstärke zunächst in Abhängigkeit vom Abstand des Magneten zum Testpunkt $P(x, y, z)$ zu beschreiben. Hierzu wurde der Ringmagnet, zusammen mit dem ihn umgebenden Luftraum, diskretisiert. Aus einer statischen Magnetfeldberechnung wurde die in Abbildung 7.4 dargestellte $B_z(s)$ -Kurve ermittelt. Mittels des Programms ORIGIN [69] wurde diese Kurve durch die folgenden Funktion approximiert ("gefittet"):

$$f(s) = A_1 \cdot \exp\left(-\frac{s - s_0}{t_1}\right) + A_2 \cdot \exp\left(-\frac{s - s_0}{t_2}\right) \quad (7.3)$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.42082 \\ A_2 &= -0.00437 \\ s_0 &= -0.0002 \\ t_1 &= 0.00786 \\ t_2 &= 0.02907 \end{aligned}$$

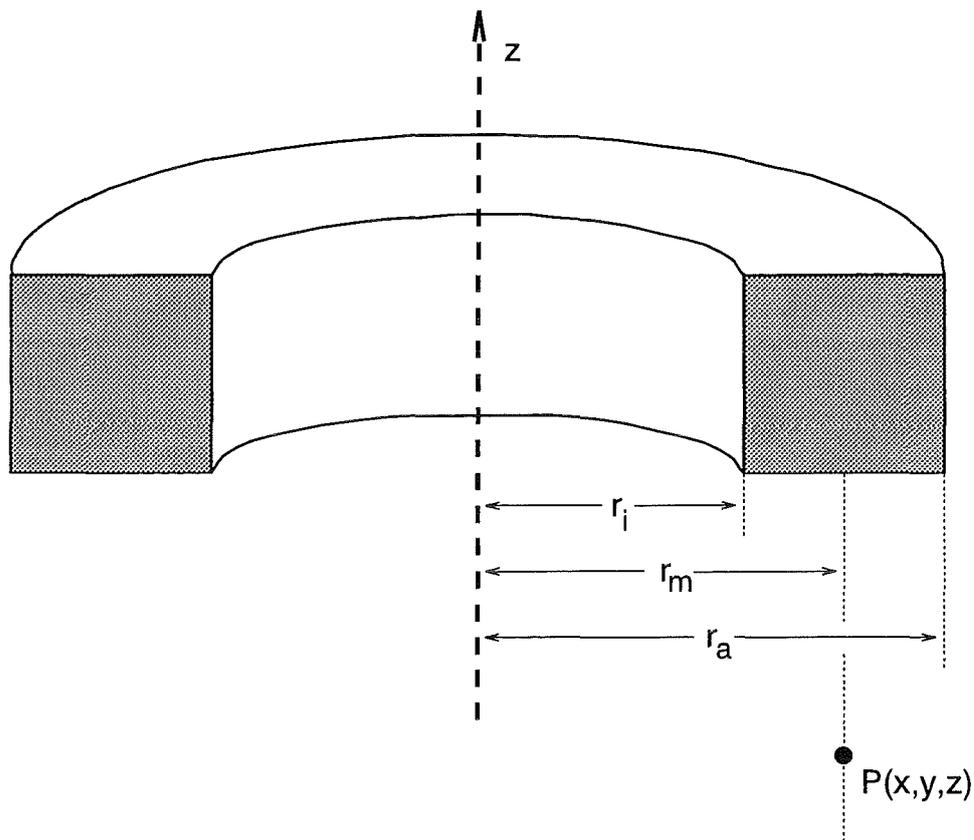


Abbildung 7.3: Ringmagnet.

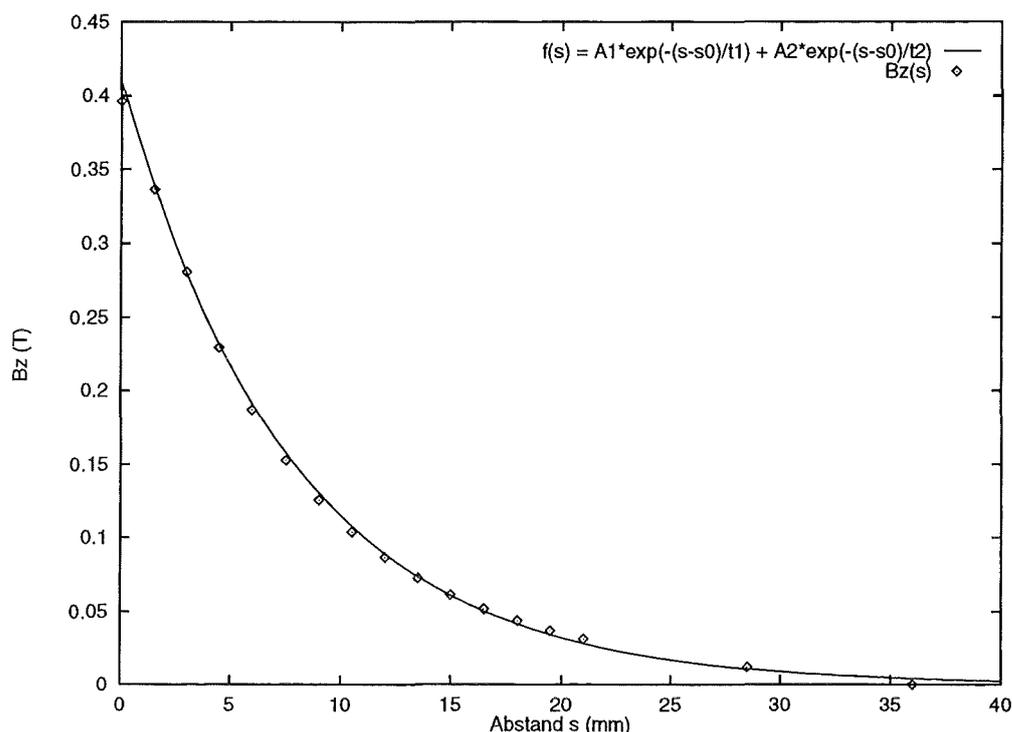
Die Approximationsfunktion $f(s)$ - multipliziert mit der Einheit Tesla - ist zusammen mit der $B_z(s)$ -Kurve in Abbildung 7.4 dargestellt. Die Übereinstimmung beider Kurven ist sehr gut.

$H_z(s)$ läßt sich somit wie folgt anschreiben:

$$H_z(s) = \frac{A_1}{\mu_0} \cdot \exp\left(-\frac{s-s_0}{t_1}\right) \cdot 1 T + \frac{A_2}{\mu_0} \cdot \exp\left(-\frac{s-s_0}{t_2}\right) \cdot 1 T \quad (7.4)$$

Setzt man für s die modellierte Luftspaltbreite d ein, so muß die Koerzitivfeldstärke H_c an dieser Stelle den, vom Material vorgegebenen, maximalen Wert H_{cmax} annehmen und es gilt:

$$H_{cmax} = C_n \cdot H_z(s = d) \quad (7.5)$$

Abbildung 7.4: $B_z(s)$ -Kurve und Approximationsfunktion.

Setzt man nun $s = s_{start} - v \cdot t$, sowie die ermittelte Normierungskonstante C_n in Gleichung (7.4) ein, so erhält man die gesuchte Zeitabhängigkeit der Koerzitivfeldstärke:

$$H_c(t) = C_n \cdot \left[\frac{A_1}{\mu_0} \cdot \exp\left(-\frac{s_{start} - v \cdot t - s_0}{t_1}\right) + \frac{A_2}{\mu_0} \cdot \exp\left(-\frac{s_{start} - v \cdot t - s_0}{t_2}\right) \right] \cdot 1 \text{ T} \quad (7.6)$$

Zur Verifikation von Gleichung (7.6) wurde eine dynamische Magnetfeldberechnung durchgeführt, bei der die Annäherung des Ringmagneten an einen bestimmten Punkt im Raum mittels der hergeleiteten Gleichung (7.6) für die Zeitabhängigkeit der Koerzitivfeldstärke simuliert wurde. Wandelt man die so erhaltene $B_z(t)$ -Kurve in diesem Raumpunkt in eine entsprechende $B_z(s)$ -Kurve um, so erzielt man eine sehr gute Übereinstimmung mit der in der statischen Magnetfeldberechnung ermittelten $B_z(s)$ -Kurve. Beide Kurven sind in Abbildung 7.5 dargestellt. Aufgrund der sehr guten Übereinstimmung kann Gleichung (7.6) zur Simulation der Annäherung

eines Ringmagneten an kreisförmig verteilte HTSL unterhalb des Ringmagneten verwendet werden.

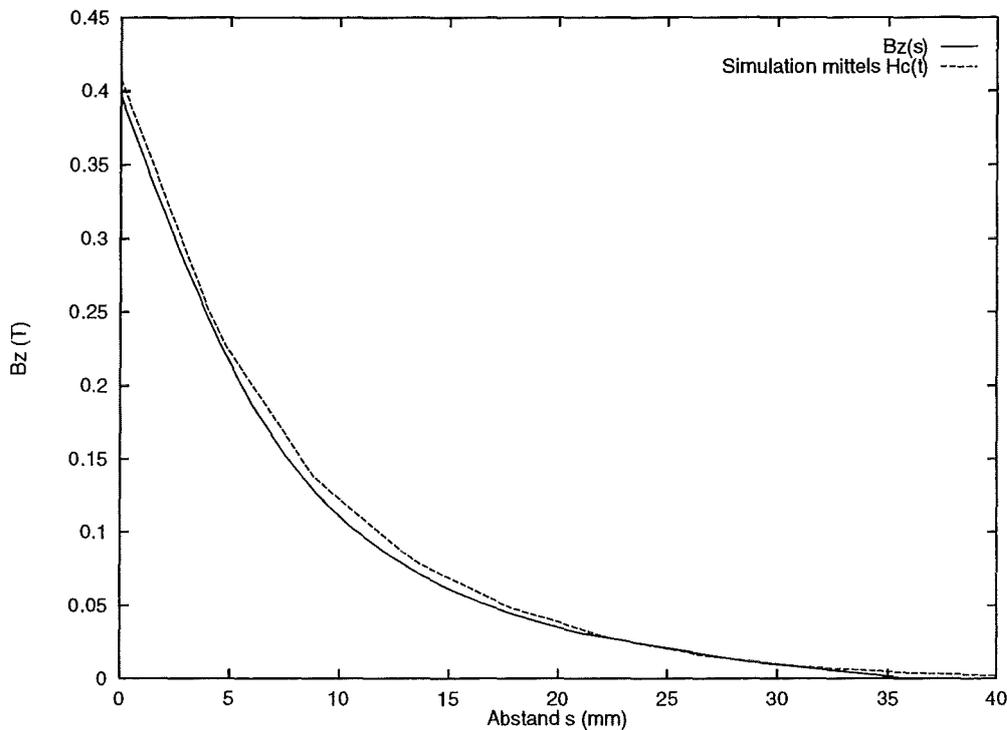


Abbildung 7.5: $B_z(s)$ -Kurven bei statischer Berechnung und bei simulierter Annäherung mittels zeitabhängiger Koerzitivfeldstärke.

7.2 Simulation horizontaler Bewegungen

Zur Berechnung der horizontalen Rückstellkräfte muß der Permanentmagnet, nach der Annäherung an den Supraleiter, bzw. nach Abkühlen des Supraleiters unter T_c , bei konstantem vertikalem Abstand in horizontaler Richtung ausgelenkt werden.

Da bei der Bestimmung der Rückstellkräfte nur sehr geringe Auslenkungen erforderlich sind, könnte man diese horizontale Bewegung des Magneten ohne Neuvernetzung der Geometrie simulieren, solange die hierbei auftretenden Änderungen der Elementwinkel α nicht zu groß (maximal zulässiger Winkel $\alpha_{max} \simeq 135^\circ$) werden. Wie Abbildung 7.6 zu entnehmen ist, entspricht die maximal zulässige Auslenkung a ohne Neuvernetzung des Luftspaltes somit der modellierten Luftspalthöhe d .

Die hierzu nötige Verschiebung der Knoten und Elemente des Permanentmagneten sowie des Arbeitsluftspaltes d ist jedoch während einer transienten elektromagne-

tischen Analyse mit dem FE-Programm ANSYS nicht mit vertretbarem Aufwand durchführbar.

Auch eine in [70] vorgeschlagene Bewegungssimulation, bei der Rotor und Stator zwar unabhängig voneinander vernetzt werden, das Potential eines sich bewegenden Rotorknotens jedoch mittels der Knotenpotentiale der unmittelbar benachbarten Statorknoten und der entsprechenden Formfunktionen ermittelt wird, scheidet in diesem Fall aus, da die hierzu nötigen MPC's (multi point constraints) [71] in der vorliegenden ANSYS-Version 5.0A für das magnetische Vektorpotential nicht verfügbar sind.

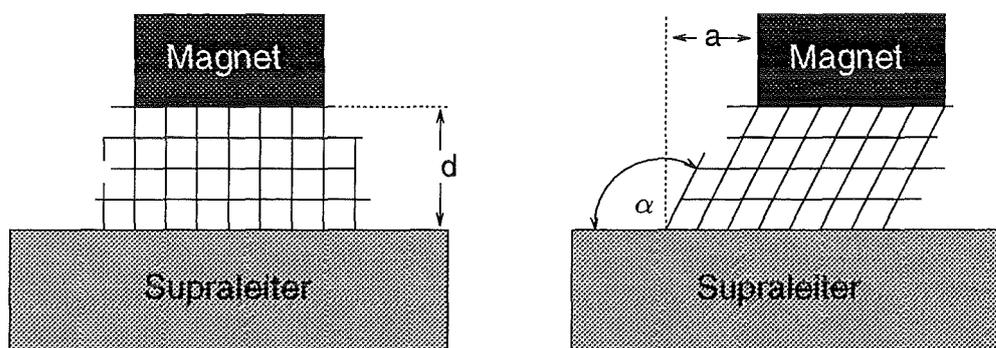


Abbildung 7.6: Horizontalbewegung ohne Neuvernetzung des Luftspalts.

Daher wurde in der vorliegenden Arbeit zur Simulation horizontaler Bewegungen ein anderer Weg beschritten:

Es wurde ein stark vereinfachtes FE-Modell verwendet, welches die Anordnung Zylindermagnet-HTSL bzw. Ringmagnet-HTSL's im Prinzip durch eine zweidimensionale Anordnung nachbildet (siehe Abbildung 7.7). Da der HTSL mittels des neu entwickelten Elements SUPRA105 modelliert werden soll und es sich hierbei um ein Volumenelement handelt, wurde dieser zweidimensionalen Anordnung durch Ausdehnung in y-Richtung eine dritte Dimension verliehen.

Sowohl die Hubkraft, als auch die horizontalen und vertikalen Rückstellkräfte sind von der aktiven Fläche des Permanentmagneten bzw. des Supraleiters abhängig. Durch die Transformation der üblicherweise modellierten Kreissegmente (siehe Kapitel 8 und 9) auf rechteckige Flächen, ändert sich die aktive Fläche des Lagers und somit auch die mit diesem einfachen Modell berechnete horizontale Rückstellkraft. Bei der in Kapitel 10 versuchten Optimierung der Lagergeometrie geht es jedoch weniger darum, exakte Werte für die magnetische Steifigkeit eines optimierten Lagersystems anzugeben, da diese Werte sehr stark von den verwendeten Materialien

abhängen, sondern vielmehr darum, qualitativ aufzuzeigen, welche Verbesserungen der Lagerparameter durch entsprechende Veränderung der Lagergeometrie zu erzielen sind. Die Verwendung eines vereinfachten Modells zur Berechnung der horizontalen Rückstellkräfte ist daher im vorliegenden Fall zulässig.

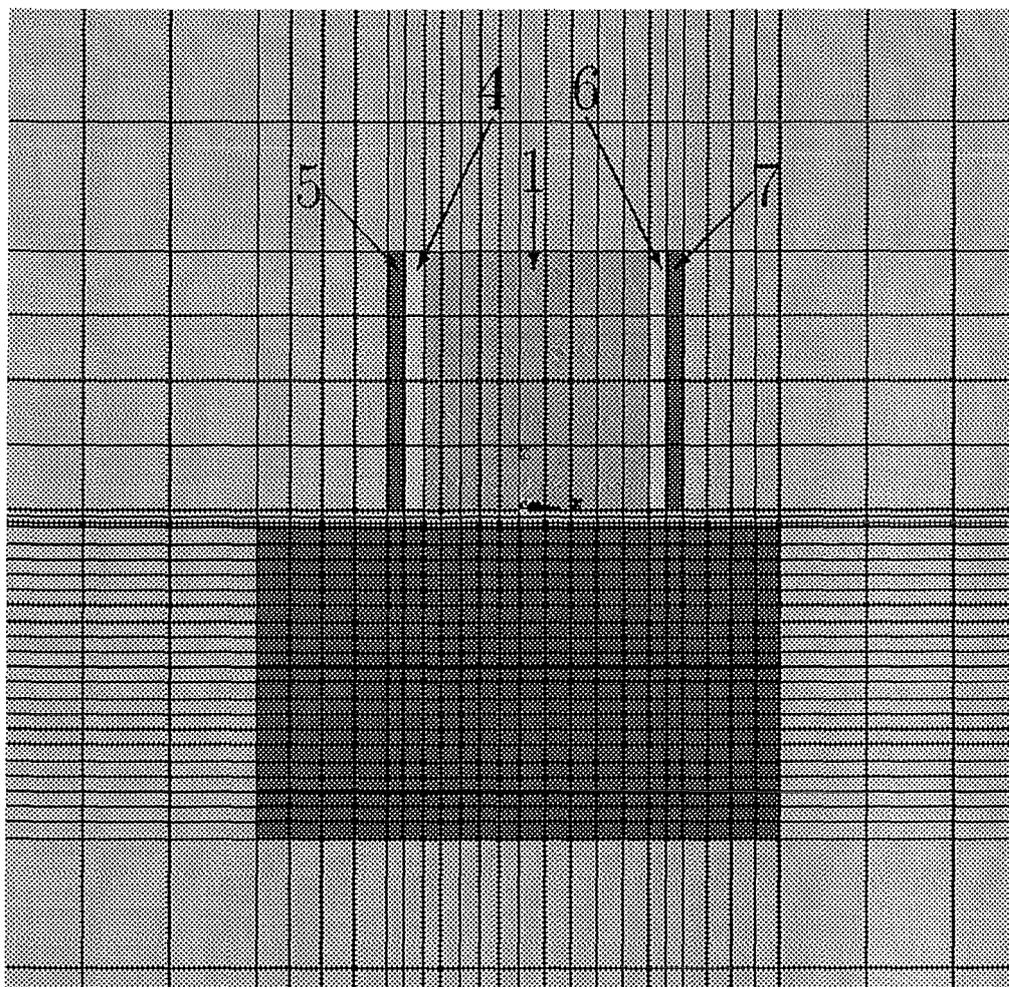


Abbildung 7.7: Vereinfachtes FE-Modell zur Berechnung der horizontalen Rückstellkräfte.

Soll mit dem in Abbildung 7.7 dargestellten FE-Modell (zu sehen ist die x-z-Ebene) eine horizontale Verschiebung des Permanentmagneten in x-Richtung simuliert werden, so werden die Koerzitivfeldstärken der Materialien 1, 4, 5, 6 und 7 entsprechend Abbildung 7.8 variiert.

Dem Material 1 wird - als "unbeweglicher" Teil - dauerhaft die Koerzitivfeldstärke H_c zugewiesen. Die Koerzitivfeldstärken der Materialien 4 und 5 auf der

linken Seite des Materials 1 werden, ausgehend vom Wert H_c , bis auf Null verringert, wohingegen die Koerzitivfeldstärken der Materialien 6 und 7 zur gleichen Zeit von Null auf H_c erhöht werden. Der Magnet wird somit in der Zeit $\Delta t = t_{stop} - t_{start}$ um die Breite der Materialschichten 4 und 5 bzw. 6 und 7 "verschoben".

Die Simulation der horizontalen Bewegung mehrerer Ringmagnete (siehe Kapitel 10) erfordert entsprechend eine weitere Unterteilung des "Magnetraums" in "unbewegliche" und "bewegliche" Teilräume.

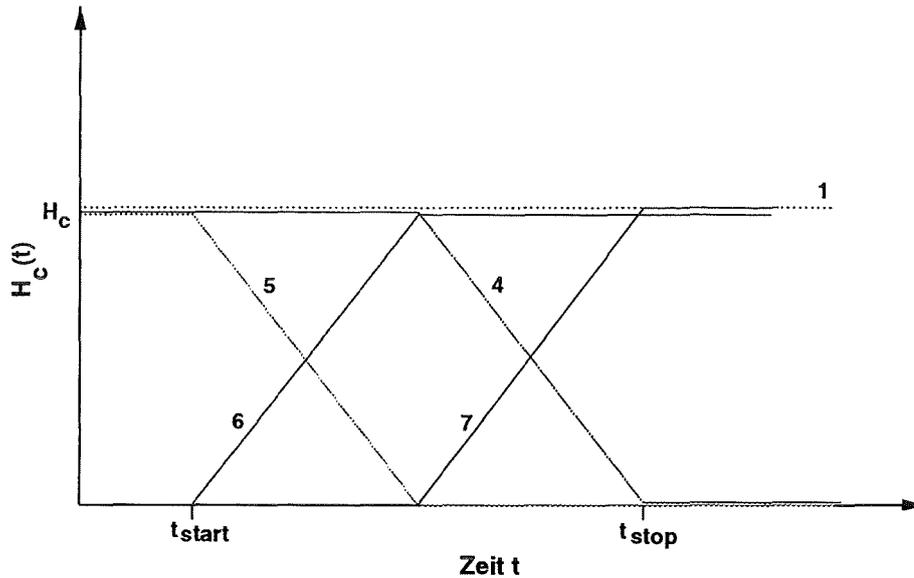


Abbildung 7.8: Variation der Koerzitivfeldstärken der Materialien 1, 4, 5, 6 und 7 zur Simulation einer horizontalen Bewegung des Magneten in x-Richtung.

Kapitel 8

Verifikation des Userelements

SUPRA105

Bevor das neu entwickelte ANSYS-Userelement zur Berechnung supraleitender Magnetlager und Schwunräder eingesetzt werden kann, muß zunächst sichergestellt sein, daß keine Programmierfehler vorliegen und daß die mittels des Userelements in das FE-Programm ANSYS integrierten Modelle auch tatsächlich in der Lage sind, die in Verbindung mit supraleitenden Magnetlagern relevanten Eigenschaften von HTSL zu beschreiben.

Im ersten Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse einer einfachen Wirbelstromanalyse, einmal bei Verwendung des neuen Elements SUPRA105 und einmal bei Verwendung des dafür geeigneten ANSYS-Elements SOLID96, diskutiert. Diese Berechnungen sollen der Überprüfung der, durch die Einführung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} und des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials Ψ , veränderten Aufstellung der Elementmatrizen und Belastungsvektoren dienen.

In den Abschnitten zwei und drei werden einfache Berechnungen mit einer Anordnung, bestehend aus einem Permanentmagneten und einem HTSL, durchgeführt. Hierbei kommen die im Element SUPRA105 integrierten Modelle zur Berücksichtigung der elektromagnetischen Eigenschaften der HTSL zum Einsatz. Die Rechenergebnisse werden mit entsprechenden experimentell ermittelten Werten verglichen.

In der vorliegenden Arbeit sollen vorrangig die statischen Parameter (Hubkraft und magnetische Steifigkeiten) von supraleitenden Magnetlagern berechnet und optimiert werden. Da die Verwendung des Modells des Flußkriechens und des Flußfließens jedoch nur dann Vorteile bietet, wenn dynamische Vorgänge, wie beispielsweise die durch das Flußfließen bedingte zeitliche Abnahme der Hubkraft, untersucht

werden sollen, wurde das Modell des Flußkriechens und des Flußfließens zwar in das Element SUPRA105 integriert; auf eine ausführliche Verifikation wurde jedoch, aufgrund der sehr langen Rechenzeiten deren Ursache bereits in Kapitel 6 erläutert wurde, zu Gunsten der beiden anderen Modelle verzichtet.

Alle zur Verifikation herangezogenen Messungen wurden im Forschungszentrum Karlsruhe am Institut für Nukleare Festkörperphysik durchgeführt und in [45] veröffentlicht.

Die Leistungsfähigkeit sowie die weitere Verwendung der im Element SUPRA105 integrierten Modelle wird im vierten Abschnitt diskutiert.

Das für alle vorgestellten Verifikationsrechnungen verwendete FE-Modell ist in Abbildung 8.1 dargestellt. Der zylinderförmige Magnet besteht aus $SmCo$, hat einen Durchmesser von 25 mm , eine Höhe von 15 mm und eine maximale magnetische Flußdichte von 0.45 T^1 . Der ebenfalls zylinderförmige Supraleiter besteht aus $Y_1Ba_2Cu_3O_7$, hat einen Durchmesser von 30 mm , eine Höhe von 18 mm und wird mittels flüssigem Stickstoff auf 77 K gekühlt. Bei der Modellierung der Anordnung wurden - zwecks Reduktion der Rechenzeit - zwei Symmetrieebenen ausgenutzt. Die jeweils parallel zu den Symmetrieebenen liegenden Komponenten des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} wurden auf Null gesetzt, womit der magnetische Fluß tangential zur Symmetrieebene verlaufen muß, was physikalisch einsichtig ist.

¹Der Maximalwert der Flußdichte eines zylinderförmigen Permanentmagneten wird im allgemeinen auf dessen Rotationsachse bestimmt. Der Abstand zwischen der Oberfläche des Permanentmagneten und dem Meßpunkt wird dann nur von der Höhe der Meßapparatur (z.B. SQUID) bestimmt.

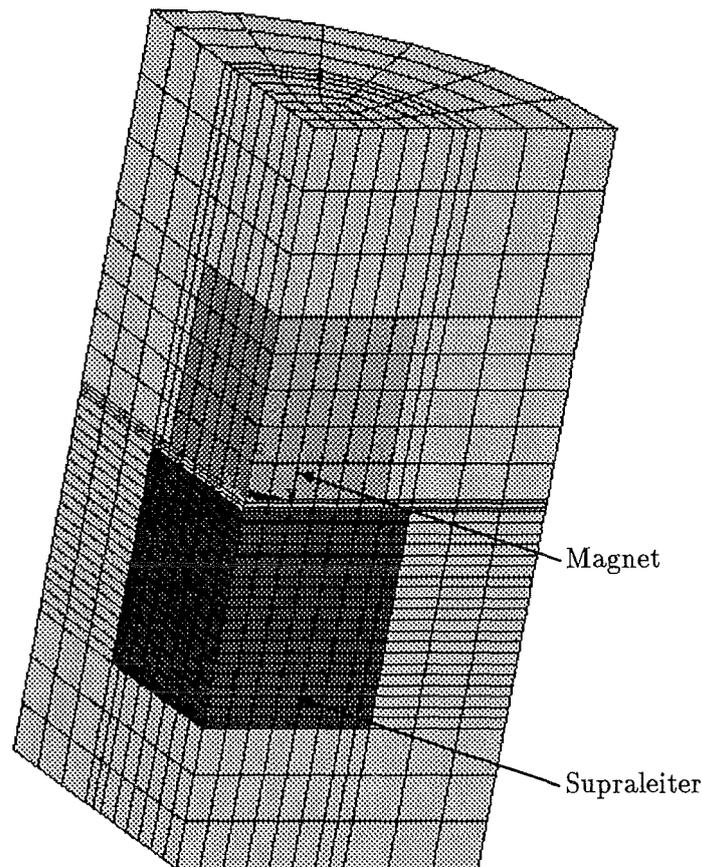


Abbildung 8.1: Bei allen Verifikationsrechnungen verwendetes FE-Modell (Magnet über HTSL).

8.1 Wirbelstromberechnungen

Beim Userelement SUPRA105 wurden das magnetische Vektorpotential \vec{A} und das zeitintegrierte elektrische Skalarpotential Ψ als Lösungsvariablen eingeführt. Um zunächst zu überprüfen, ob die hiermit einhergegangene Umstellung der Matrizen-gleichungen korrekt programmiert wurde, erfolgte eine Vergleichsrechnung mit dem ANSYS-Standardelement SOLID96, welches dieselben Lösungsvariablen verwendet.

Simuliert wurde die vertikale Annäherung eines Permanentmagneten an einen Supraleiter und das darauffolgende Zurückbewegen des Magneten in seine Ausgangsposition. Die simulierte Bewegungsgeschwindigkeit beträgt 35 mm/s . Die

Bewegungssimulation erfolgt - entsprechend Kapitel 7.1 - mittels einer zeitabhängigen Koerzitivfeldstärke.

Die jeweiligen ANSYS-Eingabedateien unterscheiden sich lediglich in der entsprechenden Elementdefinition:

```
ET,3,96,,2 ! Elementtyp 3
           ! SOLID96 fuer die Modellierung des Supraleiters
           ! KEYOPT(2)=2 : AX,AY,AZ,VOLT
```

bzw.

```
ET,3,105,1,0 ! Elementtyp 3
             ! SUPRA105 fuer die Modellierung des Supraleiters
             ! KEYOPT(1)=1: AX,AY,AZ,VOLT
             ! KEYOPT(2)=0: einfache Wirbelstromberechnung
```

In beiden Fällen wurden dem Supraleiter dieselben willkürlich gewählten Materialeigenschaften ($\mu_r = 1$, $\sigma = 1.0 \times 10^{12} \frac{1}{\Omega m}$) zugewiesen.

Die in beiden Fällen errechneten Kraft-Abstandskurven sind völlig identisch und entsprechen Abbildung 8.2.

Auch der Vergleich der von ANSYS aufgestellten Elementmatrizen und Belastungsvektoren deckte keine Abweichungen auf. Somit kann von einer korrekten Formulierung der Elementmatrizen im ANSYS-Userelement SUPRA105 ausgegangen werden.

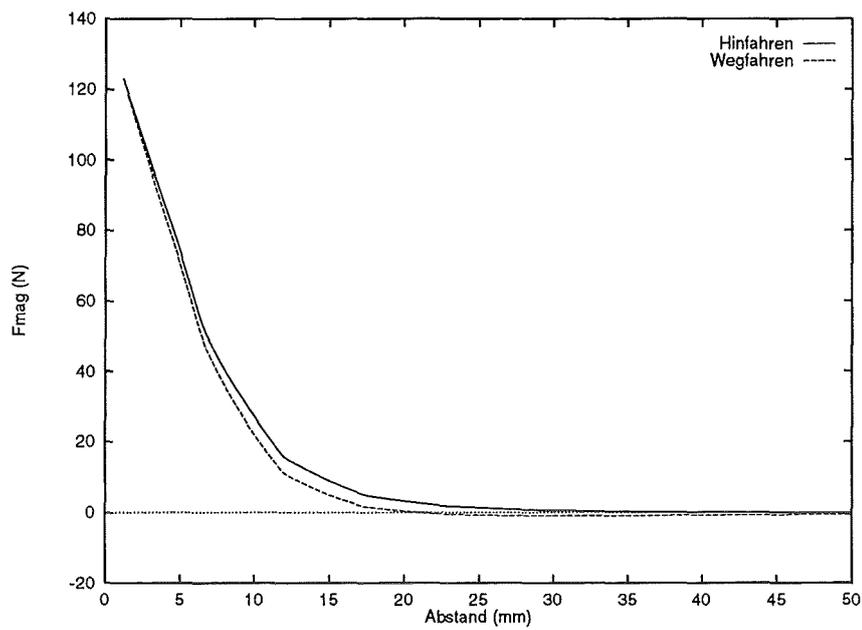
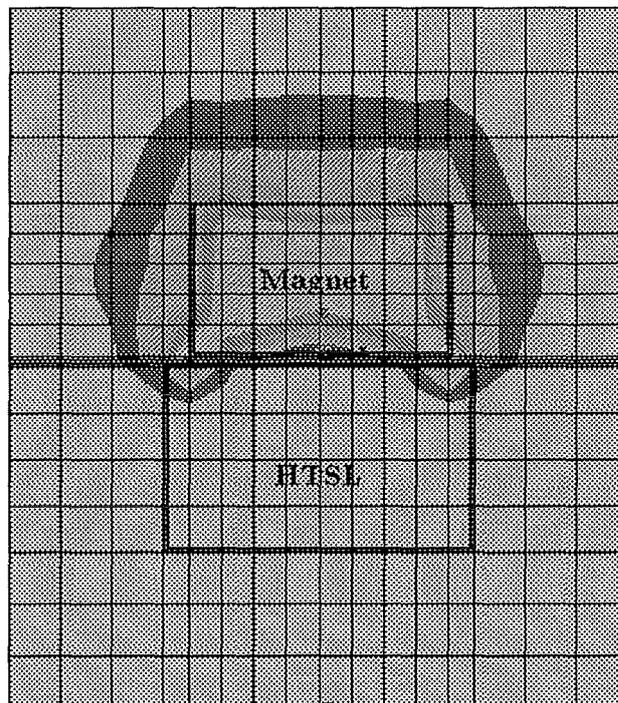


Abbildung 8.2: Berechnete Kraft-Abstandskurven.

Ein $|\vec{B}|$ -Konturplot zum Zeitpunkt des geringsten Abstands zwischen Permanentmagnet und Supraleiter ist in Abbildung 8.3 dargestellt.

Abbildung 8.3: $|\vec{B}|$ -Konturplot zum Zeitpunkt des geringsten Abstands zwischen Magnet und HTSL.

Die aus Abbildung 8.2 ersichtliche hohe maximale Hubkraft von über 120 N resultiert aus der in Abbildung 8.3 erkennbaren starken Feldverdrängung.

8.2 Verwendung des Modells des kritischen Zustands

Zur Verifikation des im Element SUPRA105 implementierten Modells des kritischen Zustands wurde die Kraft-Abstandskurve zwischen einem Permanentmagneten und einem supraleitenden Massivkörper berechnet. Simuliert wurde wiederum eine Annäherung des Magneten an den Supraleiter mit einer Annäherungsgeschwindigkeit von 35 mm/s . Der Magnet wurde bis zum Kontakt an den Supraleiter angenähert und anschließend wieder in die Ausgangsposition zurückbewegt.

Die Modellierung des Supraleiters erfolgte mittels des neuen Elements SUPRA105, wobei über die Keyoptions das Modell des kritischen Zustands sowie das Bean-Modell ausgewählt wurden. Dem Supraleiter wurden die folgenden Materialeigenschaften zugewiesen:

$$\begin{aligned}\mu_r &= 1 \\ \sigma_0 &= 1.0 \times 10^{14} \frac{1}{\Omega m} \\ J_{cx} = J_{cy} &= 2.8 \times 10^7 \frac{A}{m^2}, J_{cz} = 1.0 \times 10^7 \frac{A}{m^2}\end{aligned}$$

Die verwendeten Werte für J_{cx} , J_{cy} und J_{cz} entsprechen hierbei nicht einem physikalisch ermittelten Wert der kritischen Stromdichte des verwendeten Supraleiters, sondern wurden als "Fitparameter" derart ermittelt, daß die maximale berechnete Hubkraft etwa der maximalen experimentell bestimmten Hubkraft für die untersuchte Anordnung entspricht. Dieses Angleichen der berechneten Werte an die Meßdaten ist notwendig, da bei der FE-Simulation Korngrenzen und Risse in den Körnern, welche die effektiven Radien der Abschirmströme und damit die Hubkräfte verringern, nicht berücksichtigt werden können. Sind die Werte für J_{cx} , J_{cy} und J_{cz} jedoch einmal ermittelt, können auch andere Anordnungen - mit dem selben Supraleiter - berechnet werden.

In Abbildung 8.4 ist die berechnete Kraft-Abstandskurve zusammen mit der als Referenz dienenden Meßkurve dargestellt. Um Rechenzeit und Speicherplatz einzusparen, wurde die Simulation bei einem Abstand von 40 mm gestartet. Im Gegensatz dazu begann die Messung bei einem Abstand von 50 mm zwischen Per-

manentmagnet und Supraleiter. Die hieraus entstehenden Abweichungen sind jedoch vernachlässigbar, da sich das Magnetfeld am Ort des Supraleiters - und damit auch die Hubkraft - im Bereich zwischen 40 mm und 50 mm kaum ändert.

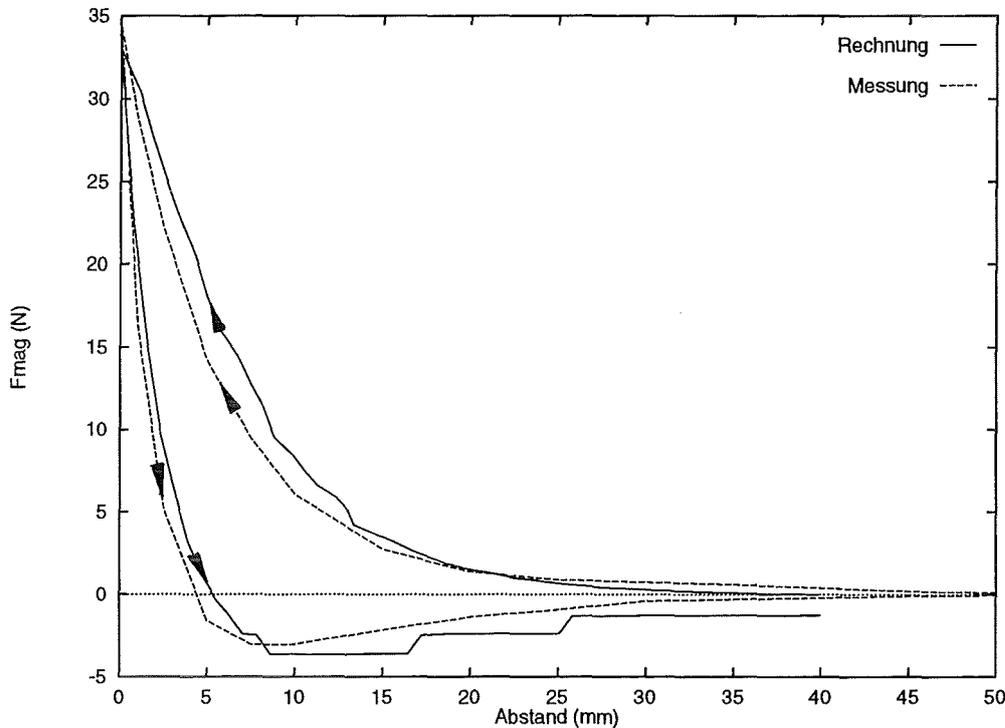


Abbildung 8.4: Berechnete und gemessene Kraft-Abstandskurven (Modell des kritischen Zustands + Bean-Modell).

Die Abweichungen zwischen Rechnung und Messung sind wesentlich geringer als bei der in Kapitel 4 vorgestellten, unter Verwendung des nicht perfekt diamagnetischen Modells durchgeführten, Berechnung.

Die in Abbildung 8.4 zu erkennende Hysterese der Kraft-Abstandskurve ist der Grund für den bereits in Kapitel 3 erwähnten variablen Arbeitsluftspalt bei supraleitenden Magnetlagern. Der Permanentmagnet bzw. der Rotor eines supraleitenden Magnetlagers besitzt eine bestimmte Masse m . Der Rotor des Magnetlagers wird genau dann von den magnetischen Kräften in der Schwebe gehalten, wenn die Gewichtskraft $m \cdot g$ des Rotors von den magnetischen Kräften F_{mag} ausgeglichen wird. Nähert man den Permanentmagneten dem Supraleiter an, so steigt die auf den Magneten einwirkende Kraft F_{mag} an, bis sie der Gewichtskraft des Rotors entspricht. Der Rotor schwebt nun über dem Supraleiter. Wird der Rotor nun durch eine äußere Kraft weiter in Richtung Supraleiter bewegt, so steigt die Kraft F_{mag} an, bis sich

Permanentmagnet und Supraleiter berühren. Nimmt man nun die äußere Kraft weg, so bewegt sich der Permanentmagnet nach oben, solange bis F_{mag} wieder der Gewichtskraft $m \cdot g$ des Rotors entspricht. Aufgrund der Hysterese entspricht diese neue Schwebehöhe s_2 nicht der anfänglichen Schwebehöhe s_1 . Die Schwebehöhe kann, je nach Auslenkung des Magneten aus seiner anfänglichen Schwebehöhe, zwischen s_1 und s_2 stufenlos variiert werden. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8.5 nochmals verdeutlicht.

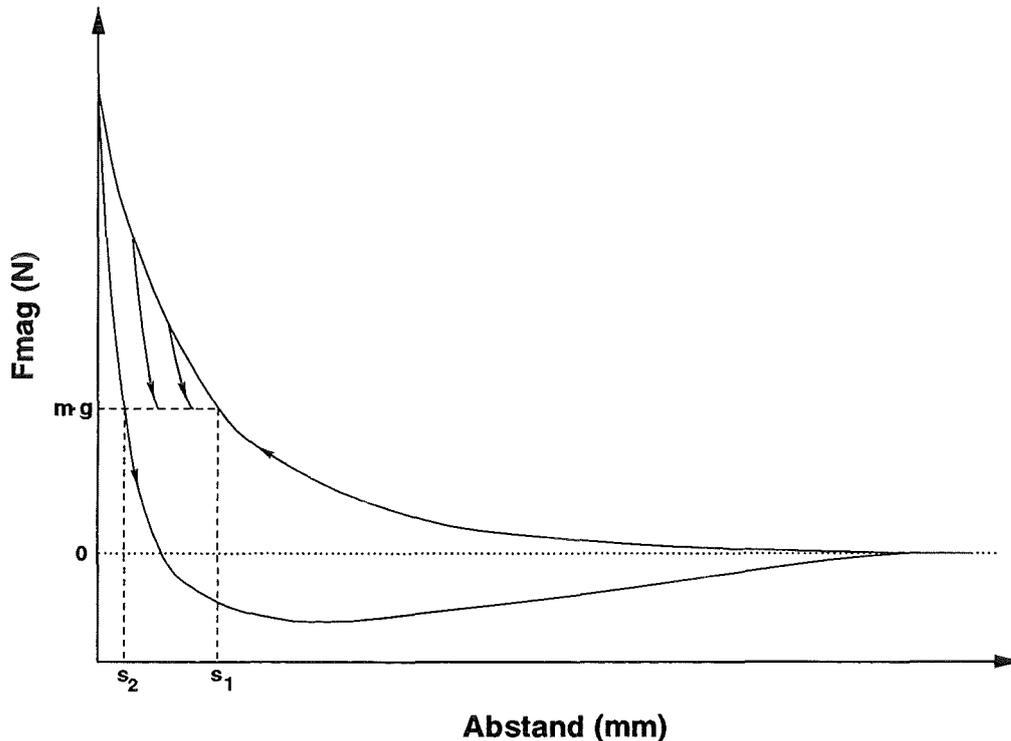


Abbildung 8.5: Variabler Arbeitsluftspalt bei supraleitenden Magnetlagern.

Die Verteilung der magnetischen Induktion für minimalen Abstand zwischen Permanentmagnet und Supraleiter ist in Abbildung 8.6 als $|\vec{B}|$ -Konturplot dargestellt.

Ein Vergleich mit Abbildung 8.3 macht deutlich, daß die Feldverdrängung weit weniger ausgeprägt ist als bei einer normalen Wirbelstromberechnung mit sehr hoher elektrischer Leitfähigkeit. Dies liegt darin begründet, daß der Maximalwert der Abschirmströme begrenzt wird durch den Wert der kritischen Stromdichte J_c . Ist diese Stromdichte in einer HTSL-Schicht (entsprechend der modellierten Elementschicht) erreicht, so werden - bei genügend großem Außenfeld \vec{B} - auch in den darunterliegenden Schichten Abschirmströme angeworfen.

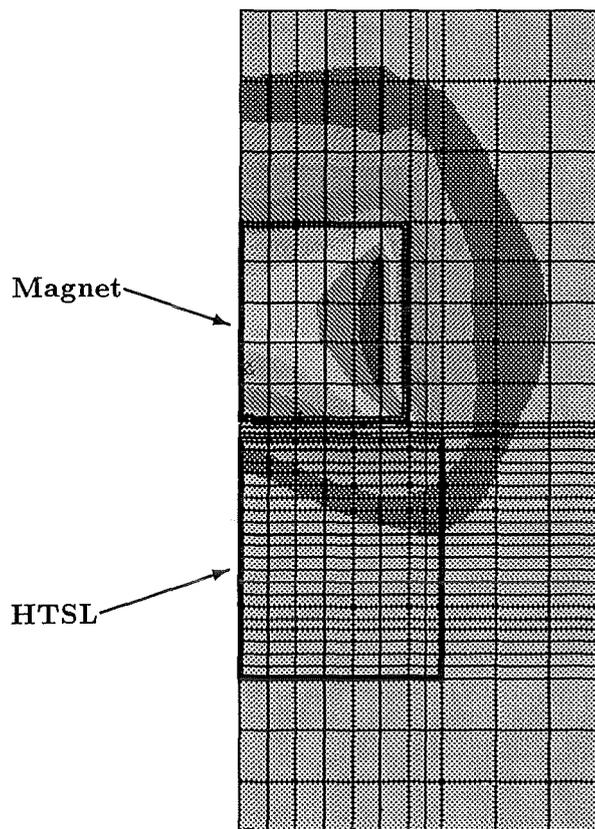


Abbildung 8.6: $|\vec{B}|$ -Konturplot für minimalen Abstand zwischen Magnet und HTSL (Modell des kritischen Zustands + Bean-Modell).

Dieser Sachverhalt ist auch Abbildung 8.7 zu entnehmen. Hier ist die Verteilung der Abschirmströme im HTSL für minimalen Abstand zwischen Permanentmagnet und HTSL dargestellt, wobei man im dunkel schattierten Bereich genau die vorgegebene kritische Stromdichte von $2.8 \times 10^7 \frac{A}{m^2}$ (a-b-Ebene) erhält. Die Abschirmstromverteilung folgt der Verteilung der magnetischen Induktion aus Abbildung 8.6.

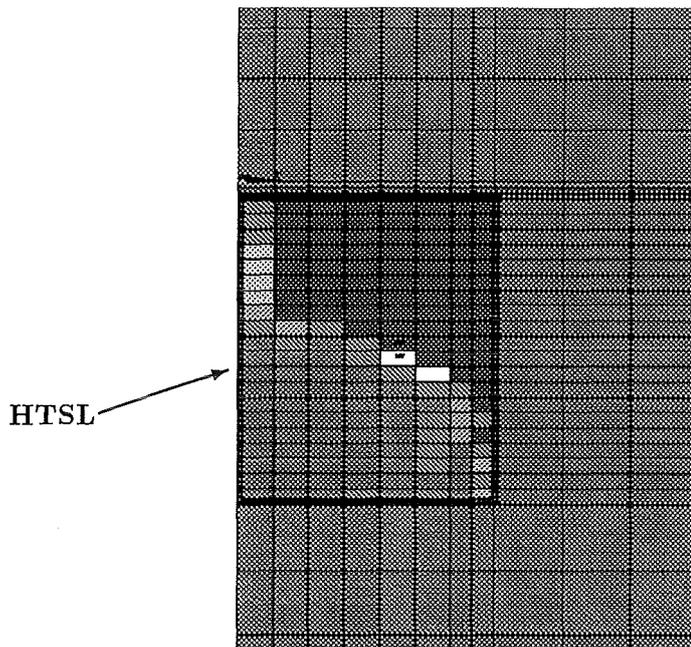


Abbildung 8.7: Verteilung der Abschirmströme im HTSL (Modell des kritischen Zustands + Bean-Modell).

In Abbildung 8.8 ist der elektrische Feldvektor \vec{E} im HTSL im Umkehrpunkt der simulierten Bewegung ($s = 0 \text{ mm}$) dargestellt.

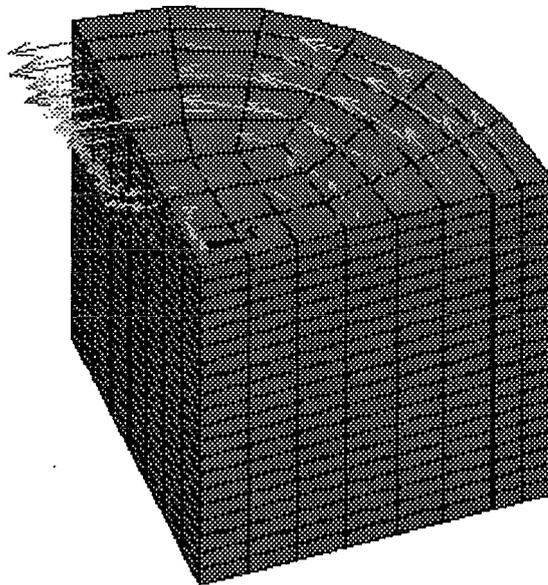


Abbildung 8.8: Elektrischer Feldvektor \vec{E} im HTSL im Umkehrpunkt der simulierten Bewegung.

In Abbildung 8.9 ist die berechnete Kraft-Abstandskurve für kleine vertikale Auslenkungen um die Einkühltdistanz $s = 1 \text{ mm}$ ("field cooling") dargestellt. Aus ihr läßt sich für die vertikale Steifigkeit der Wert $7860 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ermitteln. Der gemessene Wert läßt sich aus [45] zu $7920 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ bestimmen. Auch hier zeigt sich, daß das Modell des kritischen Zustands mit dem einfachen Bean-Modell bereits in der Lage ist, das makroskopische elektromagnetische Verhalten eines HTSL sehr gut zu simulieren.

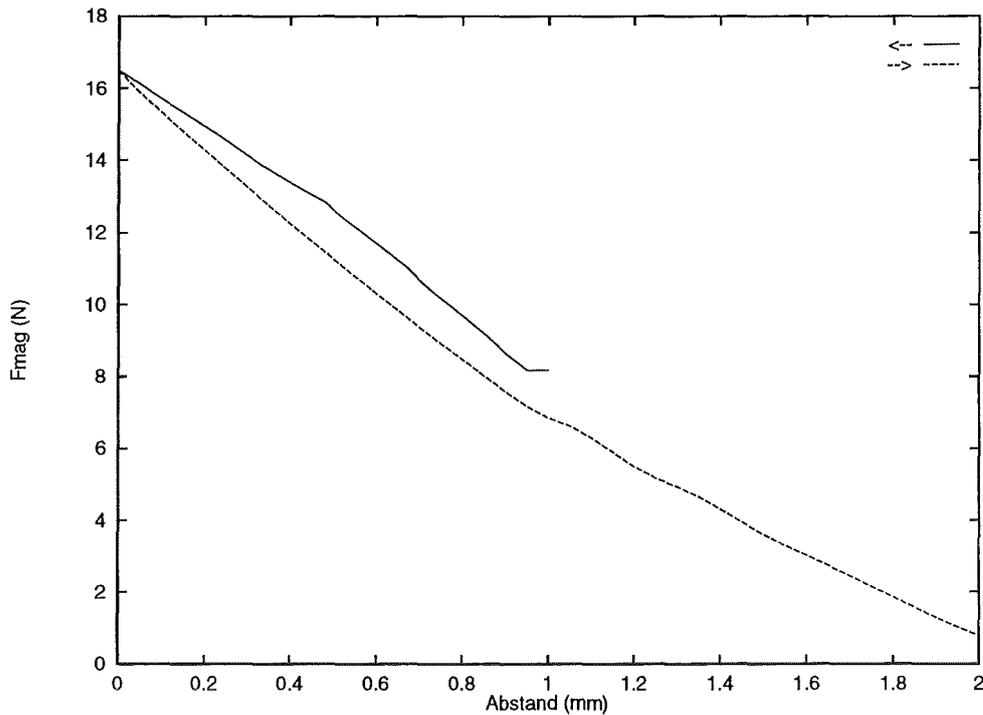


Abbildung 8.9: Berechnete Kraft-Abstandskurve für kleine vertikale Auslenkungen um die Einkühltdistanz, $s = 1 \text{ mm}$.

8.3 Verwendung des Modells des eingefrorenen Flusses

Auch mit dem Modell des eingefrorenen Flusses wurde die Annäherung eines Permanentmagneten an einen HTSL simuliert. Die simulierte Bewegungsgeschwindigkeit beträgt wiederum 35 mm/s .

In Abbildung 8.10 sind neben der gemessenen Kraft-Abstandskurve zwei mit dem Modell des eingefrorenen Flusses berechnete Kraft-Abstandskurven aufgezeichnet, einmal bei Verwendung des Bean- und einmal bei Verwendung des Kim-Modells zur Berücksichtigung der Feldabhängigkeit der kritischen Stromdichte $\vec{J}_c(|\vec{B}|)$.

Bei Verwendung des Bean-Modells wurden dem HTSL folgende Materialeigenschaften zugewiesen:

$$\mu_r = 1$$

$$\sigma_0 = 1.0 \times 10^{14} \frac{1}{\Omega m}$$

$$J_{cx} = J_{cy} = 2.8 \times 10^7 \frac{A}{m^2}, J_{cz} = 1.0 \times 10^7 \frac{A}{m^2}$$

Wird das Kim-Modell verwendet, so muß man in der Simulation die Werte für die kritische Stromdichte heraufsetzen, um den berechneten Maximalwert der Hubkraft an den gemessenen Wert anzupassen:

$$J_{cx} = J_{cy} = 5.5 \times 10^7 \frac{A}{m^2}, J_{cz} = 1.8 \times 10^7 \frac{A}{m^2}$$

B_0 wurde auf $0.25 T$ gesetzt.

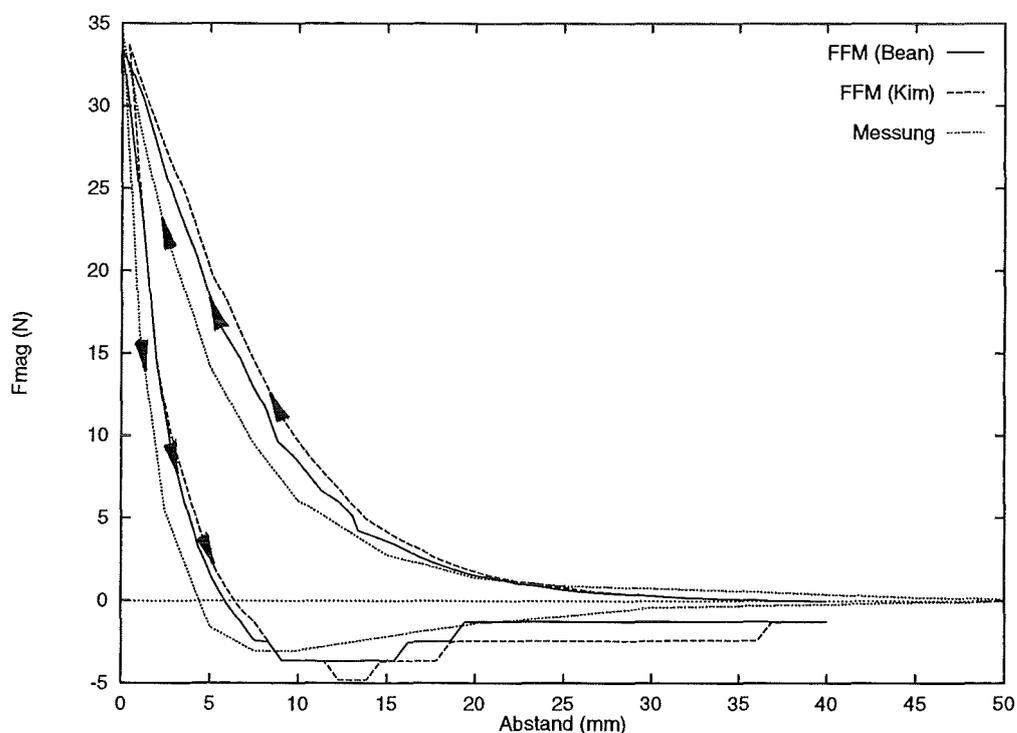


Abbildung 8.10: Berechnete und gemessene Kraft-Abstandskurven (Modell des eingefrorenen Flusses).

In Abbildung 8.11 ist wiederum die Verteilung der magnetischen Induktion bei minimalem Abstand zwischen Permanentmagnet und HTSL in Form eines $|\vec{B}|$ -Konturplots dargestellt. Sie entspricht weitgehend der in Abbildung 8.6 dargestellten Magnetfeldverteilung bei Verwendung des Modells des kritischen Zustands.

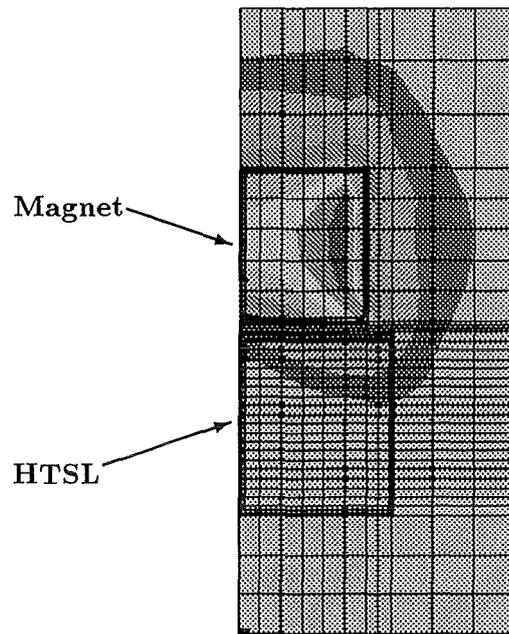


Abbildung 8.11: $|\vec{B}|$ -Konturplot bei minimalem Abstand zwischen Permanentmagnet und HTSL (Modells des eingefrorenen Flusses + Bean-Modell).

Zum direkten Vergleich zeigt Abbildung 8.12 die Verteilung der Abschirmströme im HTSL für minimalen Abstand zwischen Permanentmagnet und HTSL.

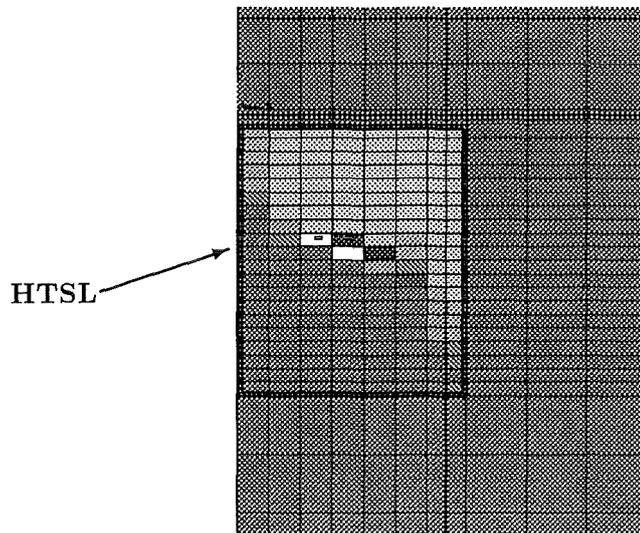


Abbildung 8.12: Verteilung der Abschirmströme im HTSL.

Im hellgrauen Bereich, in den nach Abbildung 8.11 das Magnetfeld eindringt, werden hierbei Stromdichten von etwa $4.0 \times 10^7 \frac{A}{m^2}$ erreicht, wobei in den dunkel schraffierten Bereichen die kritische Stromdichte von $5.5 \times 10^7 \frac{A}{m^2}$ (a-b-Ebene) fließt. Die weißen Felder bezeichnen Elemente, in denen ein Abschirmstrom in entgegengesetzter Richtung fließt. Dies wird dadurch hervorgerufen, daß im hier dargestellten Moment der maximalen Annäherung des Permanentmagneten an den Supraleiter die zeitliche Ableitung der magnetischen Induktion \vec{B} - aufgrund der Änderung der Bewegungsrichtung des Magneten - einen Sprung macht.

In Abbildung 8.13 ist der elektrische Feldvektor \vec{E} im HTSL im Umkehrpunkt der simulierten Bewegung dargestellt.

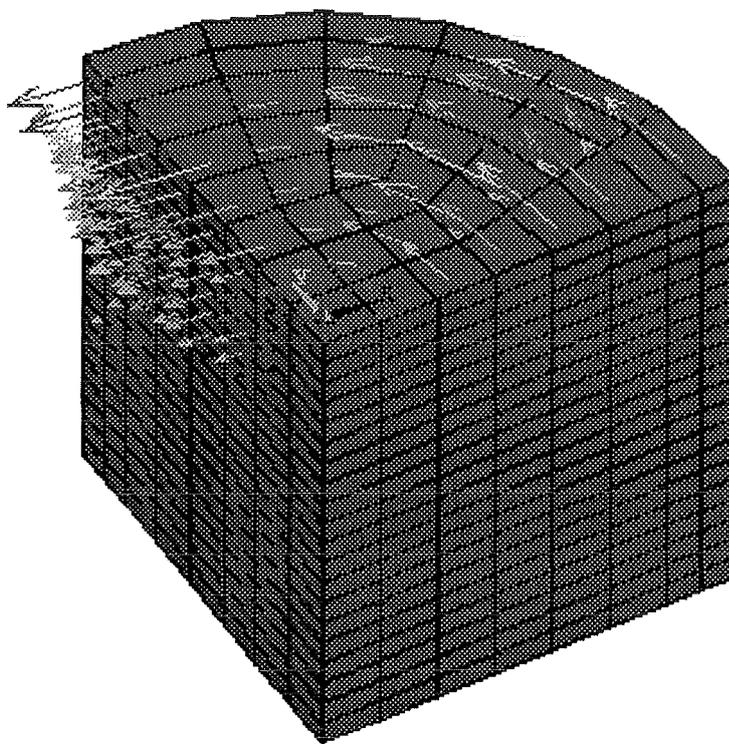


Abbildung 8.13: Elektrischer Feldvektor \vec{E} im HTSL im Umkehrpunkt der simulierten Bewegung.

Auch mit dem Modell des eingefrorenen Flusses wurde die Kraft-Abstandskurve für kleine vertikale Auslenkungen des Magneten um die Einkühltdistanz $s = 1 \text{ mm}$ durchgeführt. Dieser, in Abbildung 8.14 dargestellten Kurve ist eine vertikale Steifigkeit von etwa $8680 \frac{N}{m}$ zu entnehmen (gemessener Wert: $7920 \frac{N}{m}$). Auch das

Modell des eingefrorenen Flusses liefert somit gute Werte (Abweichung: 9.5%) für die vertikale Steifigkeit einer Magnet-HTSL-Anordnung.

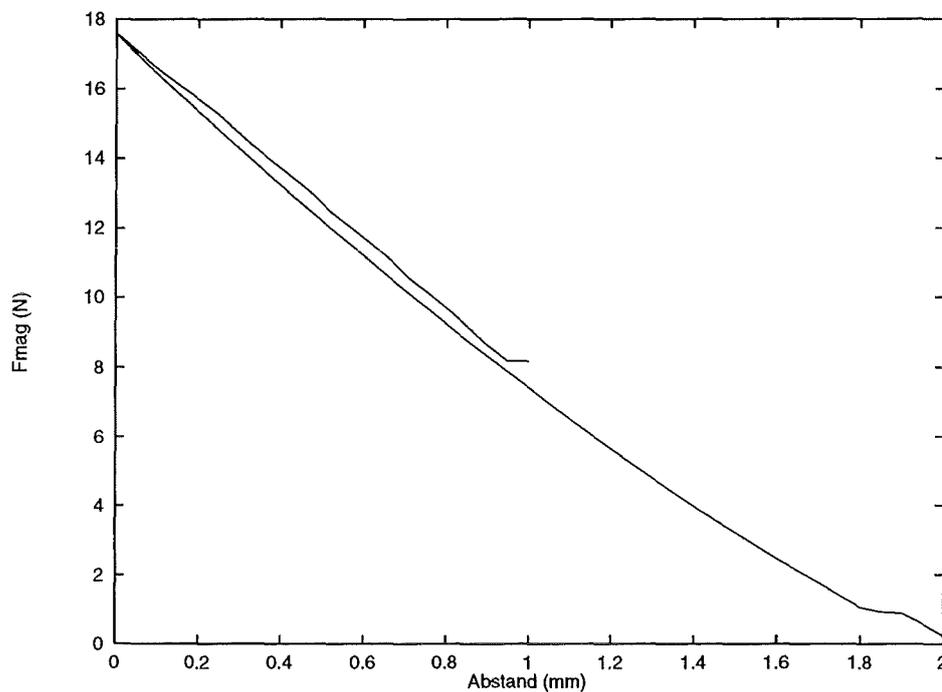


Abbildung 8.14: Berechnete Kraft-Abstandskurve für kleine vertikale Auslenkungen um die Einkühltdistanz, $s = 1 \text{ mm}$.

8.4 Vergleich der Leistungsfähigkeit der integrierten Modelle

In den vorangegangenen beiden Abschnitten wurde gezeigt, daß sowohl das Modell des kritischen Zustands, als auch das Modell des eingefrorenen Flusses sehr gute Ergebnisse bei der Berechnung der abstandsabhängigen Hubkraft zwischen einem Permanentmagneten und einem HTSL liefern. In Abbildung 8.15 werden nochmals die Ergebnisse bei Verwendung des Modells des kritischen Zustands und des Modells des eingefrorenen Flusses, jeweils zusammen mit dem Bean-Modell, mit der Meßkurve verglichen.

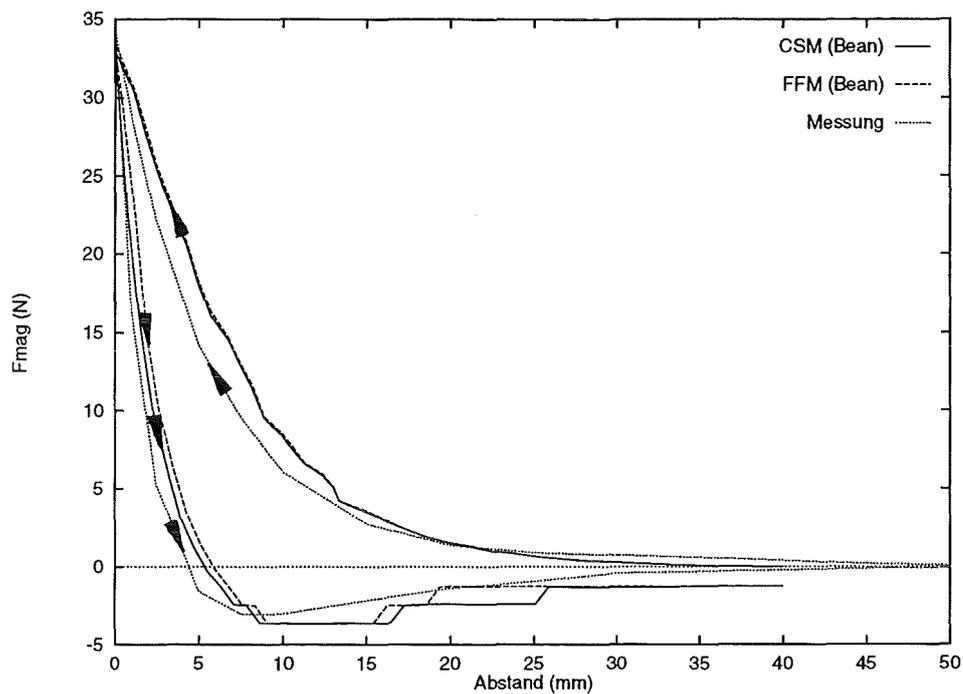


Abbildung 8.15: Vergleich der unterschiedlichen numerisch ermittelten Kraft-Abstandskurven mit der als Referenz dienenden Meßkurve.

Unterschiede treten hierbei im wesentlichen nur für die zweite Bewegungsphase - das Wegbewegen des Magneten vom HTSL - auf. Hier liefert das Modell des eingefrorenen Flusses (FFM) etwas genauere Werte.

Kapitel 9

Modellierung und Berechnung des im FZK konstruierten Schwungrades

Das im Forschungszentrum Karlsruhe (FZK) konstruierte Schwungrad besitzt eine 2.8 kg schwere Schwungradscheibe (inklusive Ringmagnet) aus $AlMg_3$ mit einem Durchmesser von 200 mm. Hiermit können, bei einer maximalen Umdrehungszahl von 15000 U/min , etwa 4.8 Wh elektrische Energie gespeichert werden. Die Schwungradscheibe wird durch ein supraleitendes Axiallager in der Schwebe gehalten, welches aus einem Nd-Fe-B-Ringmagneten ($90 \times 60 \times 15$ mm) und 6 schmelztexturierten YBCO-Massivkörpern von je 30 mm Durchmesser und 18 mm Höhe besteht. Das eigentliche Lager ist in Abbildung 9.1 in drei unterschiedlichen Perspektiven dargestellt.

Die maximale Hubkraft dieses Lagers beträgt 65 N (gemessen bei Kontakt zwischen Ringmagnet und den HTSL)¹. Die vertikale Steifigkeit beträgt 44000 N/m, die horizontale Steifigkeit 13000 N/m - jeweils gemessen bei einer Luftspaltbreite von 1 mm [74].

Dieses Schwungrad dient lediglich Studien- und Demonstrationszwecken, ist also bezüglich der Lagerparameter Hubkraft und Steifigkeit noch nicht optimiert. Desweiteren entsprechen die verwendeten YBCO-Massivkörper nicht dem letzten Stand der Materialforschung, was aus dem relativ geringen Wert von nur 65 N (oder

¹Da sich die supraleitenden Massivkörper in einem Kryostaten befinden, bedeutet "Kontakt", daß sich zwischen Ringmagnet und den HTSL nur noch die Kryostatwand befindet, die an dieser Stelle jedoch nur 0.4 mm dick ist [73]

etwa 10.8 N pro YBCO-Massivkörper) für die experimentell ermittelte Hubkraft ersichtlich ist (vergleiche hierzu: Fast 35 N Hubkraft bei einem YBCO-Massivkörper gleicher Größe in Kapitel 8).

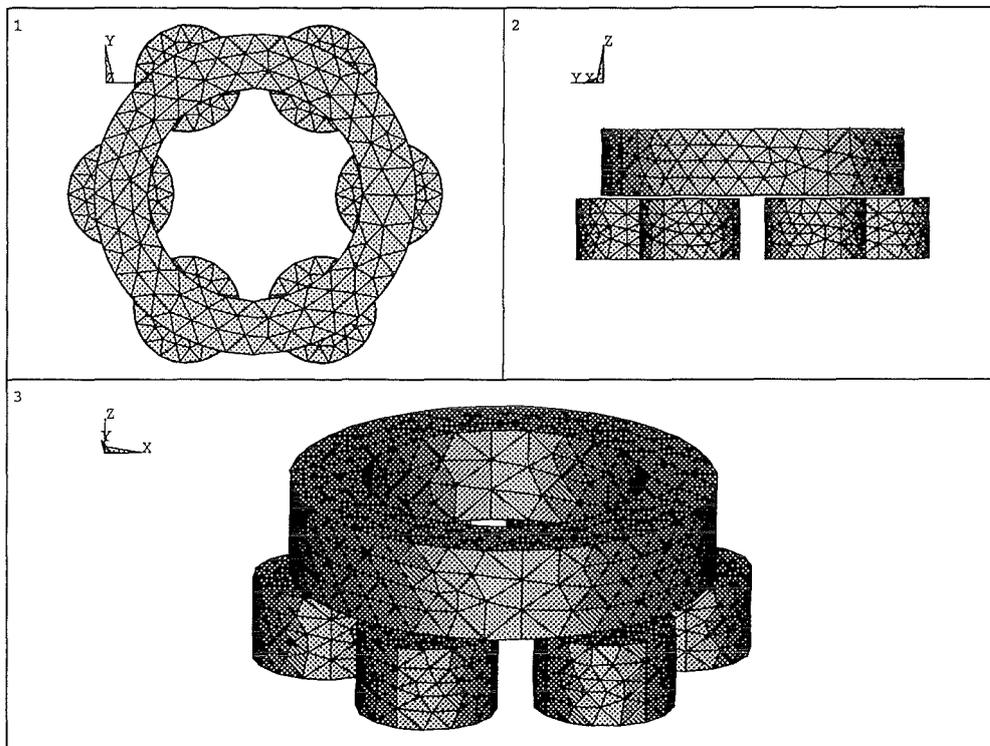


Abbildung 9.1: 3D-Darstellung des Schwungradlagersystems.

Bei der Modellierung der Schwungradlagerung wurden vorhandene Symmetrieebenen ausgenutzt, um das FE-Modell - und damit die Rechenzeit und den benötigten Speicherplatz - möglichst klein zu halten. Das FE-Modell gibt daher nur einen 30°-Ausschnitt der Schwungradlagerung wieder. Die Seitenansicht des Modells in Abbildung 9.2 zeigt den über dem zylinderförmigen HTSL schwebenden Ringmagneten, sowie den mitmodellierten umgebenden Luftraum. Die Abmessungen des Modells sind ebenfalls Abbildung 9.2 zu entnehmen.

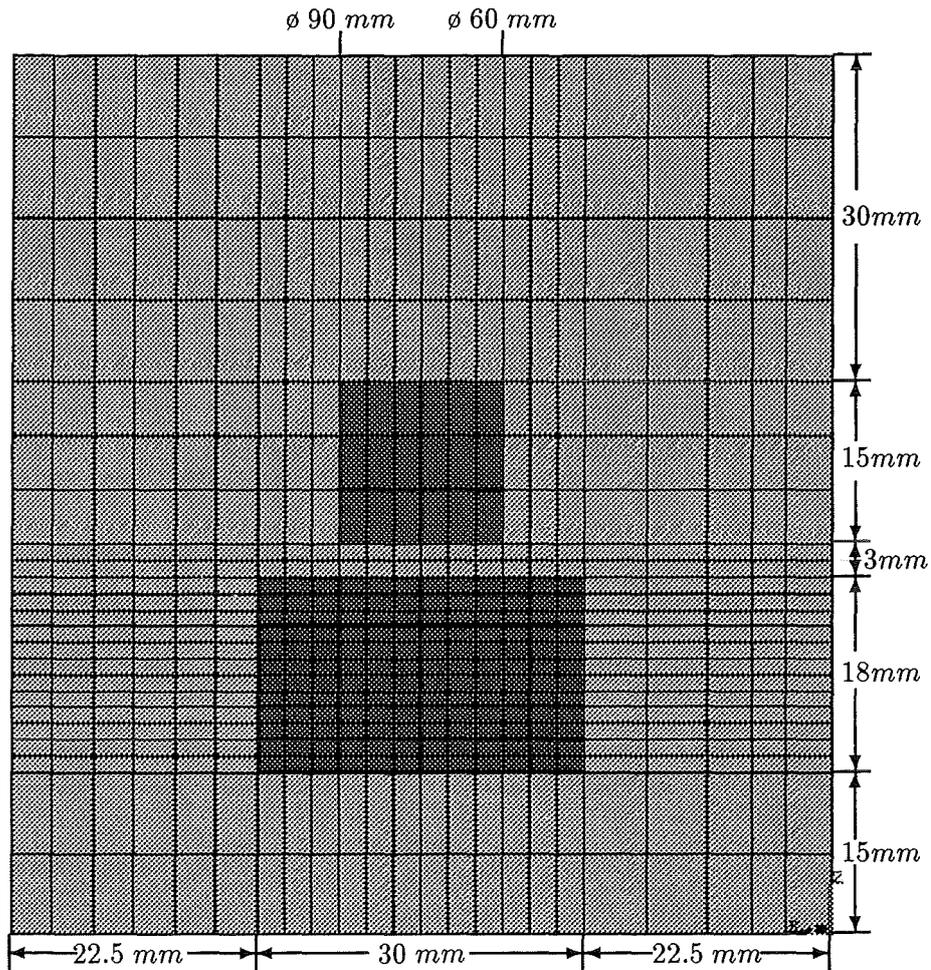


Abbildung 9.2: Seitenansicht des FE-Modells mit Bemaßung.

Die Hauptschwierigkeit einer solchen Modellierung ist ein Netz zu finden, das sowohl den modellierten Halbzylinder des HTSL, als auch das 30°-Segment des Ringmagneten genügend genau nachbildet. Das resultierende FE-Netz ist in Abbildung 9.3 in der Draufsicht zu erkennen. Weitere Modellierungs-Randbedingungen sind die Vermeidung von Elementwinkeln $> 135^\circ$, sowie die Einhaltung eines maximalen Elementseitenverhältnisses von 1 : 5. Bei Nichteinhaltung dieser Bedingungen können numerische Fehler in der Berechnung auftreten [60].

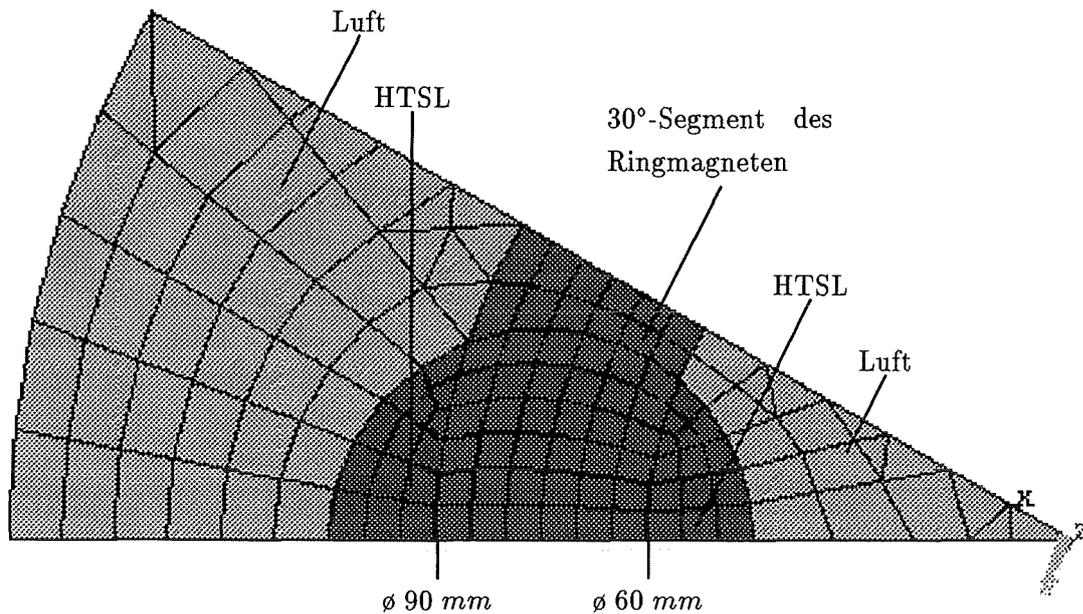


Abbildung 9.3: FE-Modell des Schwungradlagers in der Draufsicht.

Die Symmetrieebenen werden berücksichtigt, indem nur für die Komponente des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} , die senkrecht auf der Symmetrieebene steht, von Null verschiedene Werte zugelassen werden. Die magnetischen Feldlinien verlaufen demzufolge tangential zur Symmetrieebene.

Für die modellierten Materialien wurden die folgenden Materialparameter verwendet:

$$\text{Luft: } \mu_r = 1, \quad \sigma = 1 \times 10^{-16} \frac{1}{\Omega m}$$

$$\begin{aligned} \text{HTSL: } \mu_r = 1, \quad \sigma = f(E), \quad \sigma_0 = 1 \times 10^{14} \frac{1}{\Omega m}, \\ J_{cx} = J_{cy} = 2.8 \times 10^7 \frac{A}{m^2}, \\ J_{cz} = 1.0 \times 10^7 \frac{A}{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Magnet: } \mu_r = f(B) \quad \sigma = 6.7 \times 10^5 \frac{1}{\Omega m} \\ (H_c = 905 \frac{kA}{m}, \\ B_r = 1.26 T), \end{aligned}$$

Das Modell besteht aus insgesamt 3082 Elementen und 3576 Knoten. Hierbei entfallen allein auf die Modellierung des HTSL 768 Elemente. Hierfür verantwortlich

ist die hohe Zahl der nötigen Elementschichten, um einerseits genaue Ergebnisse und andererseits konvergierende Lösungen zu erhalten. Der HTSL-Bereich wurde mittels des neu entwickelten Elements SUPRA105 modelliert. Der Luft- und Magnetbereich wurde mit dem ANSYS-Element SOLID96 nachgebildet.

9.1 Berechnung der maximalen Hubkraft des Schwungradlagers

Zur Berechnung der maximalen Hubkraft des modellierten Schwungradlagers, wurde eine Annäherung des Ringmagneten an die HTSL's simuliert (simulierte Bewegungsgeschwindigkeit des Ringmagneten: 35 mm/s). Der Anfangsabstand beträgt hierbei 30 mm , der Endabstand 0 mm . Über die Keyoptions des Elements SUPRA105 wurde das Modell des eingefrorenen Flusses, sowie das Bean-Modell aktiviert.

Die berechnete Kraft-Abstandskurve (in diesem Fall nur die Annäherung des Ringmagneten) ist in Abbildung 9.4 dargestellt. Ihr ist der Wert 239.5 N als maximale Hubkraft zu entnehmen. Dieser Wert ist um ein Vielfaches höher als der experimentell ermittelte Wert. Dies liegt zum einen daran, daß der experimentell ermittelte Maximalwert der Hubkraft bei einem minimalen Abstand zwischen Ringmagnet und HTSL's von 0.4 mm gemessen wurde, zum anderen daran, daß die Parameter des Supraleitermodells einer wesentlich besseren YBCO-Volumenprobe angepaßt wurden. Betrachtet man den Wert der berechneten Hubkraft für einen Abstand von 0.4 mm zwischen Ringmagnet und HTSL's, so reduziert sich der ursprünglich ermittelte Wert bereits um 9% auf 217 N . Damit entfallen auf jeden HTSL etwa 36 N , was etwa der berechneten und gemessenen Hubkraft für einen Massivkörper aus MPMG-YBCO in Kapitel 8 entspricht.

In Abbildung 9.5 ist die Verteilung der magnetischen Flußdichte, für minimalen Abstand ($s = 0 \text{ mm}$) zwischen Ringmagnet und HTSL's als $|\vec{B}|$ -Konturplot dargestellt. Die zur Modellierung des Ringmagneten verwendeten Elemente sind hierbei, der Übersicht halber, ausgeblendet.

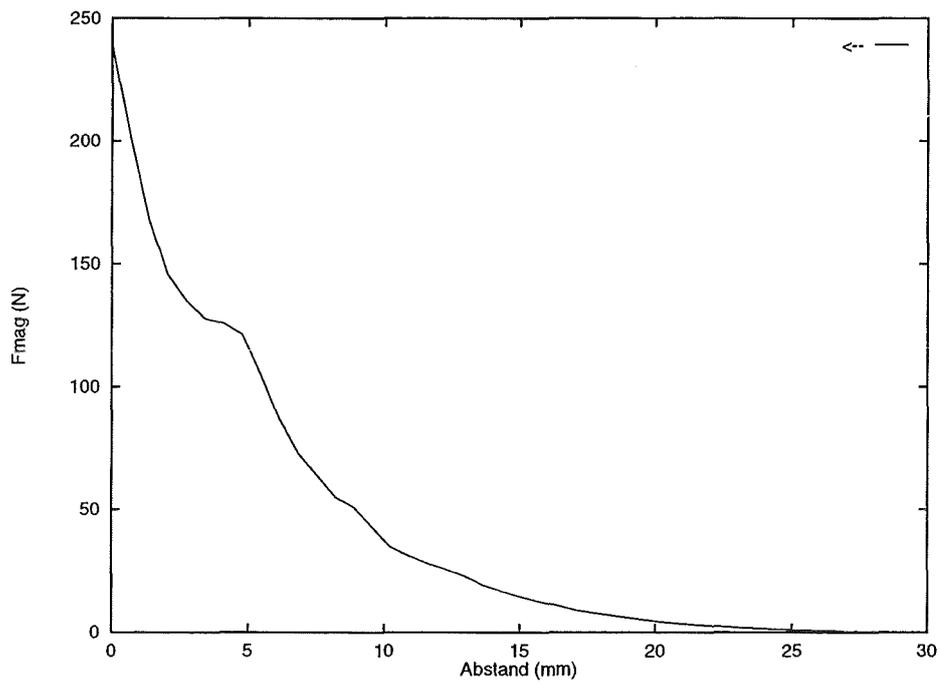
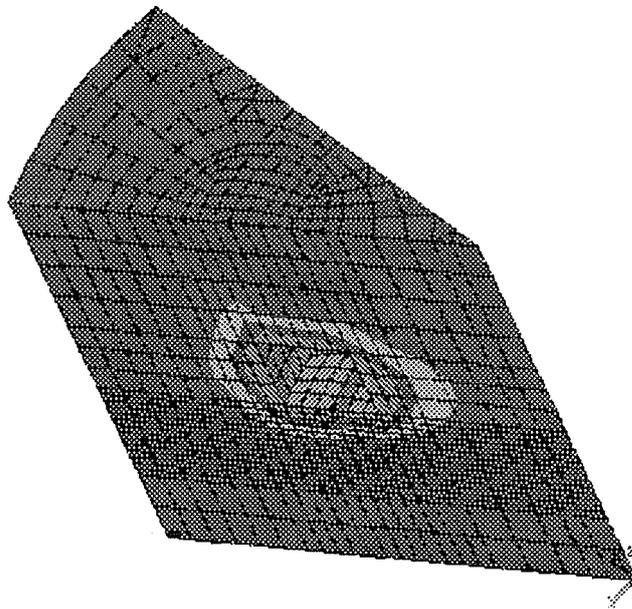


Abbildung 9.4: Berechnete Kraft-Abstandskurve.

Abbildung 9.5: $|\vec{B}|$ -Konturplot für minimalen Abstand zwischen Ringmagnet und HTSL's.

9.2 Berechnung der vertikalen Steifigkeit des Schwungradlagers

Zur Berechnung der vertikalen Steifigkeit des modellierten Schwungradlagers wurde das Modell des kritischen Zustands zusammen mit dem Bean-Modell verwendet. Entsprechend dem realen Experiment wurde ein Abkühlen der HTSL's unter T_c bei einem Abstand von nur 1 mm zwischen Ringmagnet und HTSL's simuliert ("field cooling"). Dazu wurde dem Supraleiter zunächst eine sehr geringe elektrische Leitfähigkeit zugeordnet. Erst nach der Berechnung der Anfangsverteilung des magnetischen Feldes wurde den HTSL's die sehr hohe Anfangsleitfähigkeit von $1.0 \times 10^{14} \frac{1}{\Omega m}$ zugewiesen.

Die vertikale Bewegung des Magneten um seine Einkühldistanz zum HTSL ($s = 1 \text{ mm}$) wurde, entsprechend Gleichung (7.6), durch zeitliche Änderung der Koerzitivfeldstärke simuliert. Die berechnete Kraft-Abstandskurve ist in Abbildung 9.6 dargestellt. Ihr ist eine vertikale Steifigkeit von 32160 N/m zu entnehmen. Die gemessene vertikale Steifigkeit des Schwungrads beträgt im Vergleich dazu 44000 N/m.

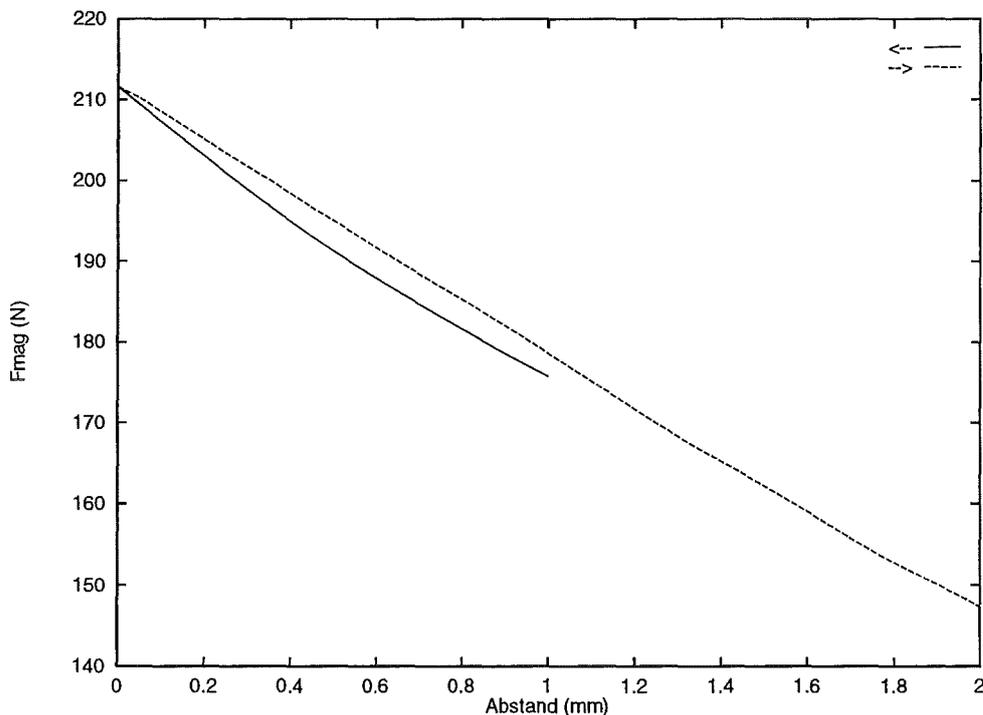


Abbildung 9.6: Kraft-Abstandsdiagramm für kleine vertikale Auslenkungen um die Einkühldistanz $s = 1 \text{ mm}$.

9.3 Berechnung der horizontalen Steifigkeit des Schwungradlagers

Um die horizontale Steifigkeit des Schwungradlagers zu berechnen wurde das in Kapitel 7.2 vorgestellte vereinfachte FE-Modell verwendet (siehe auch Abbildung 7.7).

In den beiden Abbildungen 9.7 und 9.8 ist der Betrag der zu den Zeitpunkten $t = t_{start}$ bzw. $t = t_{stop}$ berechneten magnetischen Flußdichte dargestellt.

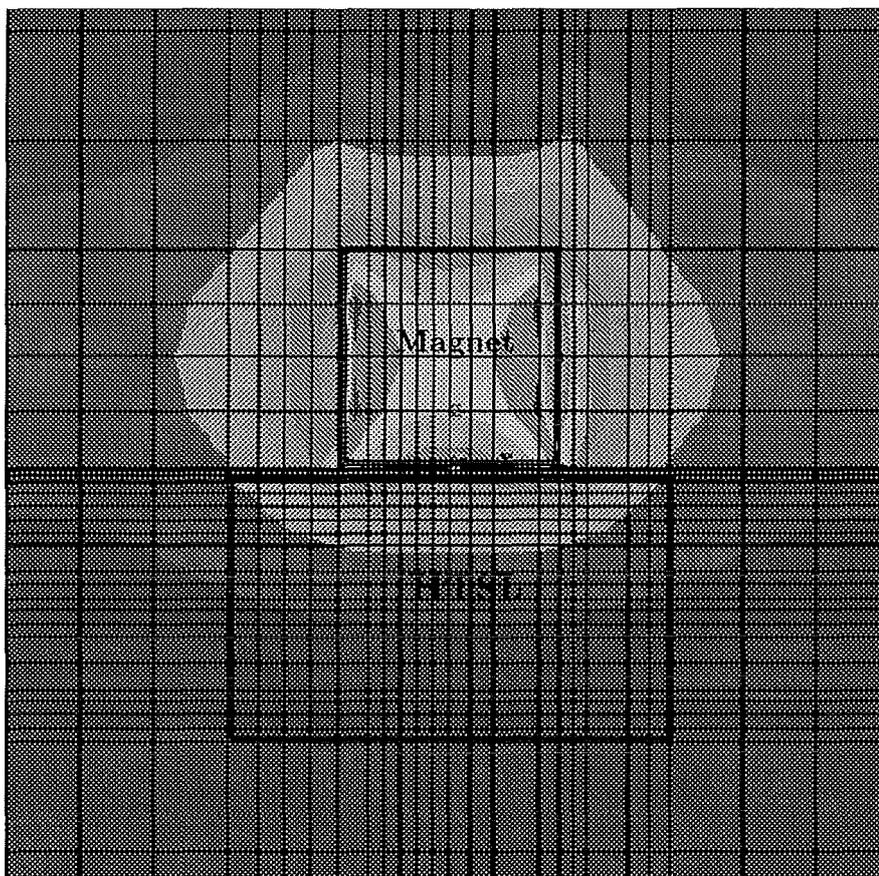


Abbildung 9.7: $|\vec{B}|$ zur Zeit $t = t_{start}$.

Der Magnet wurde während der Simulation um 1 mm nach rechts “verschoben“. Deutlich zu erkennen ist in beiden Abbildungen die teilweise Verdrängung des Magnetfelds durch den - mittels des neuen Elements SUPRA105 modellierten - HTSL.

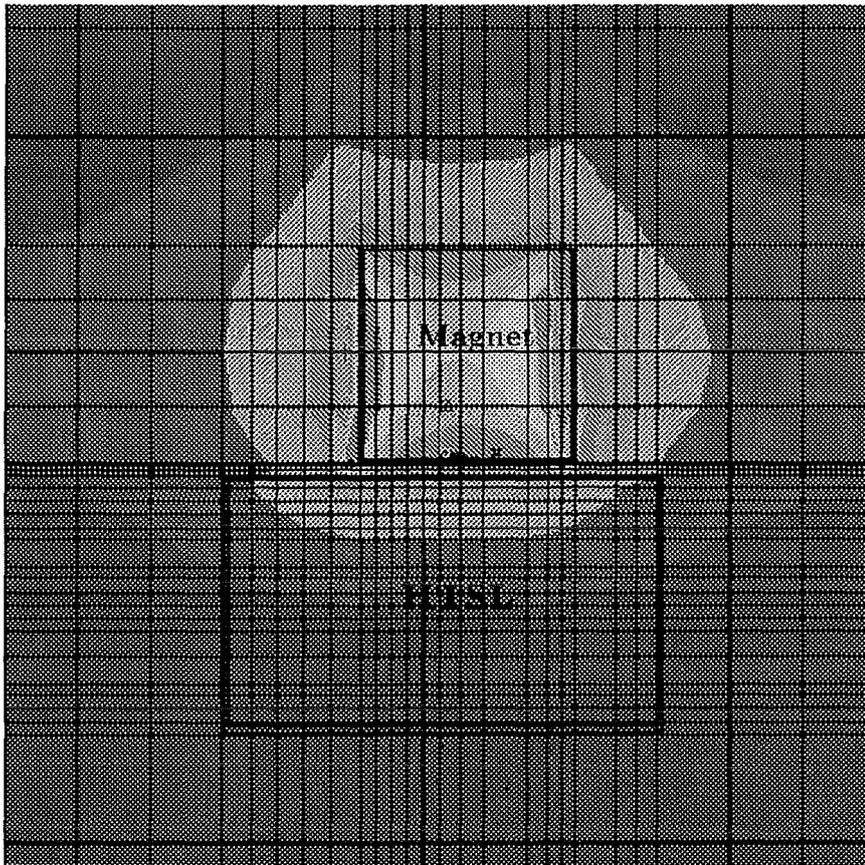


Abbildung 9.8: $|\vec{B}|$ zur Zeit $t = t_{stop}$.

In Abbildung 9.9 ist die mittels des vorgestellten Modells berechnete, in x -Richtung auf den Permanentmagneten wirkende Kraft F_x über der Auslenkung s dargestellt. Das negative Vorzeichen der Kraft F_x weist auf eine Rückstellkraft hin, die der auslenkenden Kraft auf den Magneten entgegenwirkt. Aus dieser Kurve lässt sich eine horizontale Steifigkeit von 3360 N/m ermitteln. Das am Institut für Nukleare Festkörperphysik betriebene Schwungrad weist im Vergleich hierzu eine horizontale Steifigkeit von 13000 N/m auf.

Wie bereits erwähnt, ist dieser Unterschied zwischen berechneter und gemessener horizontaler Steifigkeit nicht verwunderlich, jedoch auch nicht entscheidend, da es bei der in Kapitel 10 versuchten Geometrieoptimierung lediglich darum geht, eine Aussage über eine Verbesserung oder Verschlechterung der horizontalen Steifigkeit bei Verwendung unterschiedlicher Magnetfeldkonfigurationen zu machen.

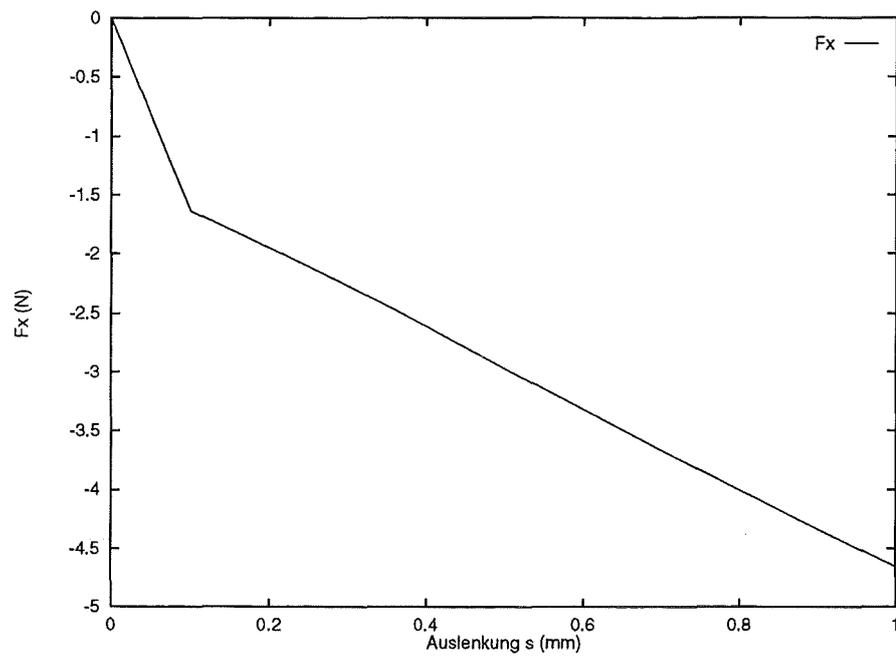


Abbildung 9.9: Rückstellkraft-Auslenkungskurve für horizontale Auslenkungen.

Kapitel 10

Geometrieoptimierung eines Schwungradenergiespeichers

Will man einen Schwungradenergiespeicher als Langzeitspeicher betreiben, so muß man zunächst dessen Verluste minimieren. Wie bereits in Kapitel 3 dargelegt, kann dies durch Verwendung supraleitender Magnetlager geschehen. Doch auch diese Lager arbeiten nicht völlig verlustfrei. Die wichtigsten Verlustmechanismen wurden hierbei bereits in Kapitel 3.2 diskutiert.

Eine Optimierung des Schwungradsystems bedeutet daher in erster Linie, Maßnahmen gegen die in Kapitel 3.2 aufgeführten Verlustmechanismen zu ergreifen.

So werden bis zu 20 % der Lagerverluste eines supraleitenden Magnetlagers durch Luftreibung verursacht, weswegen das gesamte Schwungradsystem unbedingt im Vakuum betrieben werden sollte.

Die diskrete Anordnung der supraleitenden Massivkörper bewirkt während des Betriebs des Lagers eine Induktion von Wirbelströmen im leitenden Magnetmaterial. Dies trägt nicht unerheblich zu den Lagerverlusten bei. Eine weitere Maßnahme zur Reduktion der Lagerverluste ist daher der Übergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Verteilung der supraleitenden Massivkörper unterhalb des Ringmagneten. Der Einfluß solch einer Veränderung auf die Hubkraft des Lagers wird in Abschnitt 10.1 untersucht.

Wie bereits in Kapitel 3.2 dargelegt, sollte zum Aufbau eines supraleitenden Magnetlagers ein möglichst homogen magnetisierter Ringmagnet verwendet werden. Die Verwendung vielfach propagierter einzelner Ringmagnetsegmente verbietet sich aufgrund des hohen Verlustanteils der hierdurch verstärkt auftretenden magnetischen Reibung von bis zu 60% an den Gesamtverlusten von selbst, so daß die radiale

Ausdehnung eines supraleitenden Magnetlagers zum Einsatz in Schwungradenergiespeichern immer durch die Radien verfügbarer Ringmagnete beschränkt sein wird.

Neben möglichst geringen Verlusten sind bei der technischen Anwendung supraleitender Magnetlager jedoch insbesondere auch die hiermit erzielbaren Hubkräfte und die magnetischen Steifigkeiten in horizontaler und in vertikaler Richtung entscheidend. Hier soll daher der Versuch unternommen werden, mittels des neu entwickelten Elements SUPRA105 Vorschläge für eine Optimierung der für die praktische Anwendung wichtigen Lagerparameter Hubkraft und magnetische Steifigkeiten zu machen.

Die hier versuchte Optimierung beschränkt sich dabei bewußt auf die Geometrie des Lagersystems bzw. auf die Anordnung der HTSL und Permanentmagnete.

Selbstverständlich könnte auch die Oberflächenkontur der supraleitenden Massivkörper Ziel einer Optimierung sein. Jedoch ist eine entsprechende mechanische Verformung der HTSL nur sehr schwer durchführbar. Desweiteren würde der Übergang von einer glatten Oberfläche zu einer muldenförmigen Oberfläche sicherlich eine höhere horizontale Steifigkeit bewirken; es ist dann jedoch nicht mehr zulässig von einem reinen Axiallager zu reden, da man durch solch eine Muldenform dem Axiallager bereits implizit ein Radiallager hinzufügen würde.

Entscheidend für die Größen Hubkraft und magnetische Steifigkeiten ist - neben den in Kapitel 2 diskutierten Materialeigenschaften der HTSL - die Feldkonfiguration, die durch den oder die Permanentmagnete erzeugt wird. Wie sich eine Änderung der Magnetanordnung und -anzahl auf die Hubkraft und auf die Lagersteifigkeiten auswirkt, wird daher in Abschnitt 10.2 diskutiert.

In Abschnitt 10.3 werden die in den beiden vorangegangenen Abschnitten gewonnenen Erfahrungen nochmals gegenübergestellt um schließlich eine fundierte Aussage zu den Möglichkeiten einer Optimierung des vorliegenden supraleitenden Magnetlagers machen zu können.

Optimierung heißt jedoch auch, die im Schwungrad vorhandenen Materialien - hier in erster Linie den HTSL - optimal auszunutzen. Auch hierauf wird in Abschnitt 10.3 eingegangen.

10.1 Kontinuierliche Anordnung der Supraleiter

In den meisten bisher konstruierten Schwungradenergiespeichern mit supraleitenden Magnetlagern wird eine diskrete Anordnung der supraleitenden Massivkörper verwendet. Wie in Kapitel 3.2 dargelegt, bewirkt eine solche Anordnung jedoch die Induktion von Wirbelströmen im leitenden Material des rotierenden Permanentmagneten, was nicht unerheblich zu den Lagerverlusten beiträgt.

Bei der Entwicklung zukünftiger Schwungradenergiespeicher sollte man daher - entsprechend Abbildung 10.1 - von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Verteilung der supraleitenden Massivkörper unterhalb des Ringmagneten übergehen. Aufgrund der dann noch immer vorhandenen Grenzen zwischen den einzelnen supraleitenden Massivkörpern sowie der in den Massivkörpern vorhandenen Korngrenzen wird man auch durch solch eine Anordnung die Induktion von Wirbelströmen im rotierenden Permanentmagneten nicht völlig vermeiden, jedoch wesentlich reduzieren können.

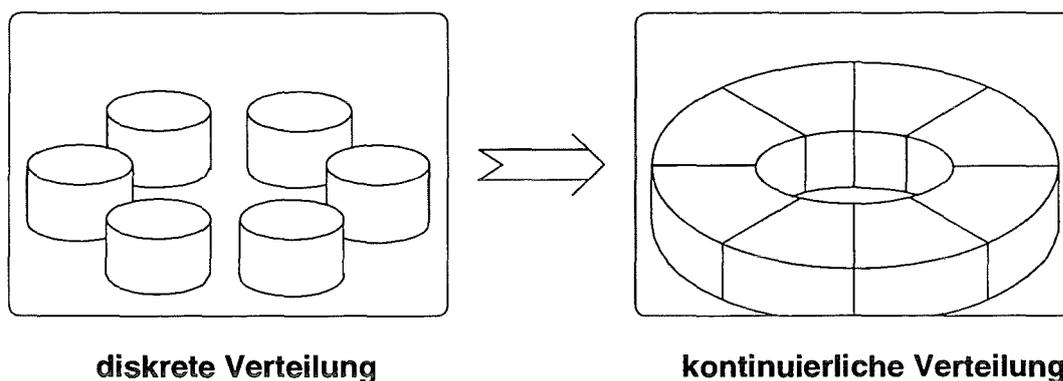


Abbildung 10.1: Übergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Anordnung der HTSL.

Die maximale Hubkraft einer derart veränderten Anordnung kann der berechneten Kraft-Abstandskurve in Abbildung 10.2 entnommen werden. Sie beträgt etwa 289 N und ist damit um 49.5 N oder etwa 20% höher als bei einer - in Kapitel 9 berechneten - diskreten Anordnung der HTSL ($F_{max} = 239.5\text{ N}$).

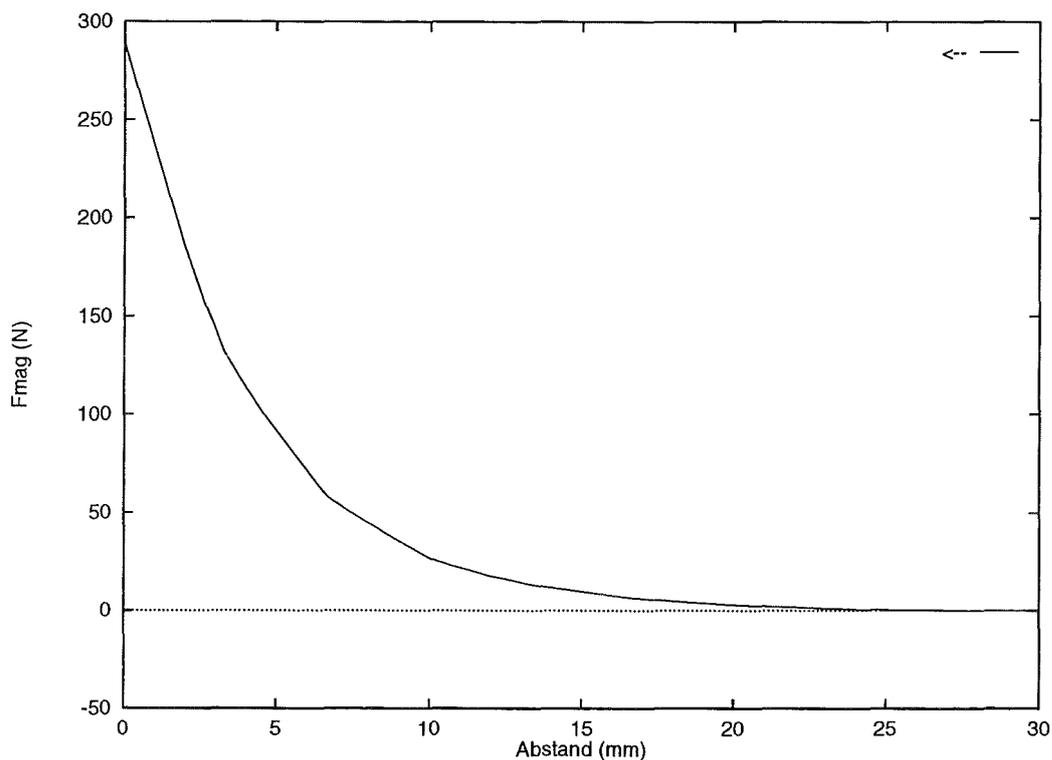


Abbildung 10.2: Berechnete Kraft-Abstandskurve für eine kontinuierliche Anordnung der HTSL.

10.2 Variation der Anordnung und der Anzahl der Ringmagnete

Sowohl die Hubkraft, als auch die horizontale und vertikale magnetische Steifigkeit eines supraleitenden Magnetlagers sind sehr stark vom Gradienten des magnetischen Feldes und damit von der Magnetfeldkonfiguration abhängig. Diese kann beispielsweise dadurch beeinflusst werden, daß man den im ursprünglich betrachteten supraleitenden Magnetlager vorhandenen Ringmagneten aufteilt in zwei oder drei Einzelringmagnete, die dann mit abwechselnder Orientierung ihrer Magnetisierung in die Schwungradscheibe eingebaut werden.

In Abbildung 10.3 sind die entsprechenden berechneten Kraft-Abstandskurven für kleine vertikale Auslenkungen um die Einkühldistanz $s = 1 \text{ mm}$ dargestellt [68].

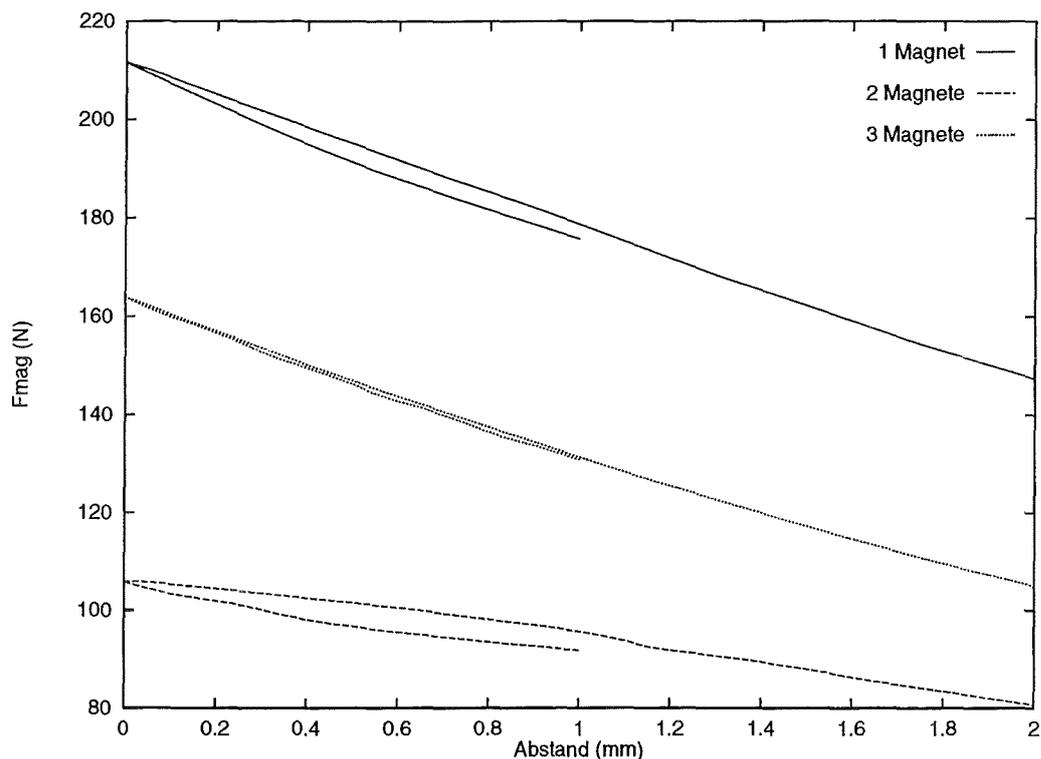


Abbildung 10.3: Kraft-Abstandskurven für kleine vertikale Bewegungen bei Verwendung von ein, zwei oder drei Ringmagneten mit wechselnder Polarisierung.

Entsprechend der hier durchgeführten Berechnungen erkaufte man einen - auch in der Literatur [75, 76] belegten - Anstieg der horizontalen Steifigkeit durch Verwendung mehrerer, abwechselnd polarisierter Ringmagnete durch eine starke Verringerung der Hubkraft; zumindest dann, wenn man, entgegen den meisten Veröffentlichungen zu dieser Thematik, das Magnetvolumen konstant hält. Die vertikale Steifigkeit ändert sich bei Verwendung von drei Ringmagneten (29495 N/m) im Vergleich zu deren Wert bei Verwendung nur eines Ringmagneten (32160 N/m) nur wenig. Die Verwendung von zwei Ringmagneten führt jedoch zu einem drastischen Abfall der vertikalen Steifigkeit auf nur noch 12660 N/m was einer Verringerung der vertikalen Steifigkeit um etwa 60 % gegenüber der Anordnung mit nur einem Ringmagneten entspricht.

In Kapitel 9 wurde eine horizontale Steifigkeit von 3360 N/m bei Verwendung eines einzelnen Ringmagneten berechnet. Auf ähnliche Weise wurde bei Verwendung von zwei entgegengesetzt polarisierten Ringmagneten eine horizontale Steifigkeit von 8569 N/m ermittelt. Dies entspricht einer Steigerung der horizontalen Steifigkeit

um etwa 155% gegenüber einer Anordnung mit nur einem Ringmagneten. Die Verwendung dreier Ringmagnete mit wechselnder Polarisierung steigert die horizontale Steifigkeit nur noch um wenige Prozent gegenüber der Anordnung mit zwei Ringmagneten [49] (berechnet wurde eine horizontale Steifigkeit von 9801 N/m , was einer Steigerung von etwa 14% gegenüber der Anordnung mit zwei Ringmagneten entspricht).

10.3 Grundsätzliche Überlegungen zur Optimierung der Lagerparameter

Faßt man die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Abschnitte nochmals kurz zusammen, so ist zunächst ein Übergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Anordnung der HTSL unbedingt zu empfehlen, da er - neben einer allgemeinen Verringerung der Lagerverluste - eine Steigerung der maximal möglichen Hubkraft von etwa 20 % bewirkt.

Schwieriger wird die Bewertung des in Abschnitt 10.2 untersuchten Einflusses unterschiedlicher Magnetfeldkonfigurationen auf die maximale Hubkraft und die horizontale sowie vertikale Steifigkeit eines supraleitenden Magnetlagers.

Am ungünstigsten erscheint auf jeden Fall eine Anordnung bestehend aus zwei entgegengesetzt polarisierten Ringmagneten, da sie sowohl die geringste Hubkraft, als auch die geringste vertikale Steifigkeit aller drei untersuchten Anordnungen aufweist. Dies liegt daran, daß sich die z-Komponenten der Magnetfelder beider Ringmagnete durch Überlagerung teilweise aufheben.

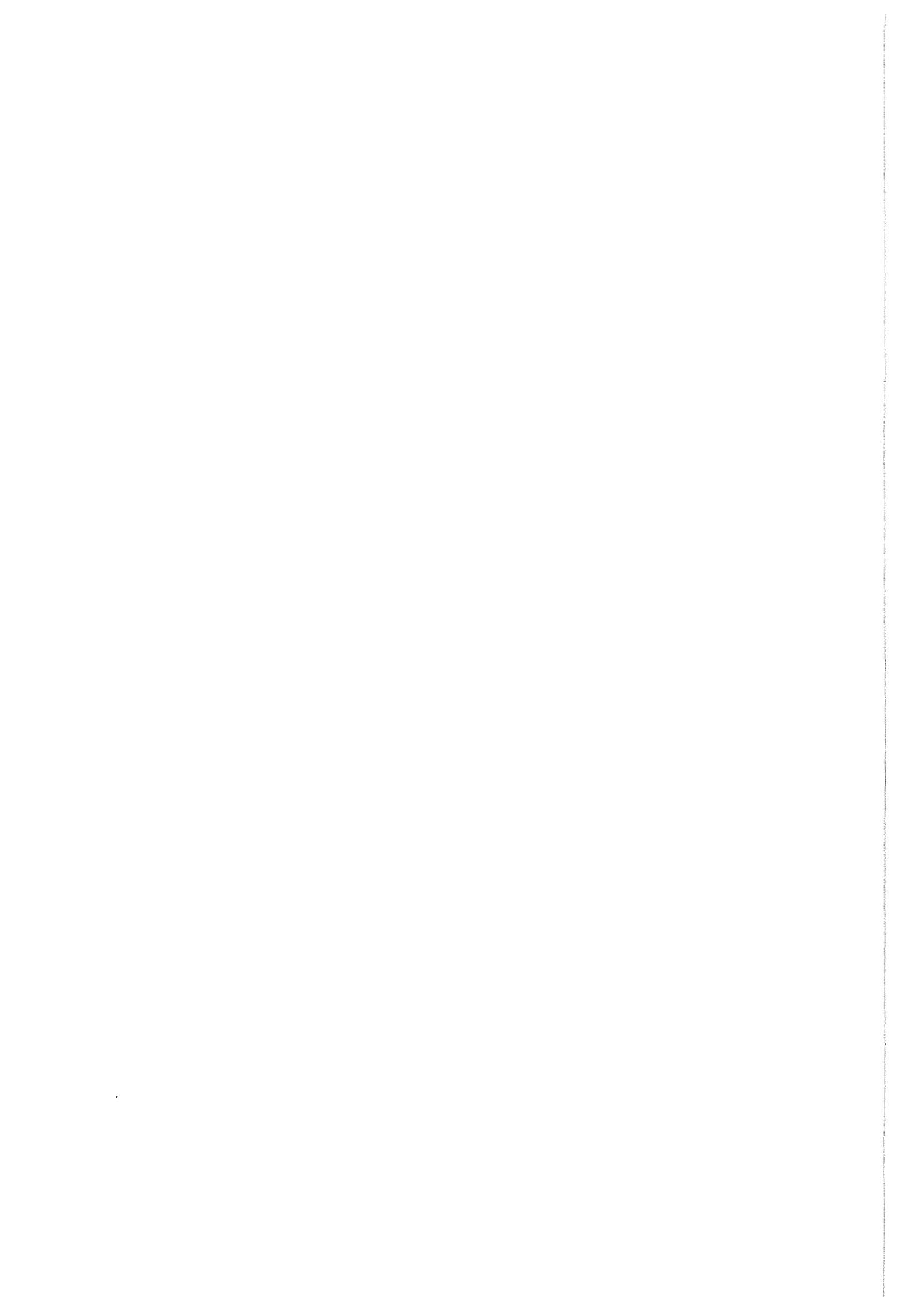
Ob man jedoch die Verwendung eines einzigen oder dreier abwechselnd polarisierter Ringmagnete favorisiert, hängt sehr stark vom Anforderungsprofil des jeweils zu konstruierenden supraleitenden magnetischen Lagers ab. Ist eine hohe magnetische Steifigkeit in horizontaler Richtung wichtiger als die maximal erzielbare Hubkraft, so ist eine Anordnung bestehend aus drei Ringmagneten vorzuziehen.

Kommt es jedoch auch auf eine möglichst hohe Hubkraft des Lagers an, so sollte über die Verwendung eines Hybridlagers (Kapitel 3.1) nachgedacht werden, dessen geringe horizontale Steifigkeit durch zusätzliche supraleitende Radiallager ausgeglichen werden könnte.

In der Literatur findet man diverse experimentelle und numerische Untersuchungen über die Abhängigkeit der maximalen Hubkraft von der Dicke des HTSL. Be-

trachtet wurde jeweils eine Anordnung, bestehend aus einem zylinderförmigen HTSL und einem ebenfalls zylinderförmigen Permanentmagneten. Alle Arbeiten kommen zu dem Schluß, daß die Hubkraft zunächst linear mit wachsender Dicke des HTSL ansteigt, dann jedoch ab einer gewissen Dicke d_s in die Sättigung geht. Lediglich in der Angabe des Wertes von d_s unterscheiden sich die Aussagen dieser Veröffentlichungen. So findet man beispielsweise den Wert $d_s = 5 \text{ mm}$ in [18, 77], $d_s = 5 - 10 \text{ mm}$ in [76] und $d_s = 10 - 15 \text{ mm}$ in [78, 79, 80]. Der Wert von 5 mm bezieht sich hierbei jedoch in beiden Arbeiten auf eine gesinterte YBCO-Probe, wohingegen in den anderen Arbeiten Proben aus MPMG-YBCO betrachtet werden.

Aus den in Kapitel 8 durchgeführten Berechnungen ergibt sich für d_s ein Wert von 12 mm (nach Abbildung 8.12) bis 15 mm (nach Abbildung 8.7), was in guter Übereinstimmung mit den in der Literatur zu findenden Werten für die minimal notwendige Dicke eines Supraleiters aus MPMG-YBCO steht. In Schichten, deren Abstand zur Oberfläche größer als d_s ist, werden keine Abschirmströme mehr induziert - der HTSL wird dort also nicht ausgenutzt. Die für das hier betrachtete supraleitende Magnetlager optimale Dicke der HTSL liegt somit bei 15 mm . Bei dieser Dicke wird die maximal mögliche Hubkraft bei minimalem Aufwand für die Kühlung der HTSL erreicht.



Kapitel 11

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, zunächst ein Werkzeug zu entwickeln, mit dessen Hilfe die magnetischen Kräfte in supraleitenden Magnetlagern berechnet werden können. Mit Hilfe dieses Werkzeuges sollte dann ein im Forschungszentrum Karlsruhe entwickeltes Schwungrad berechnet und hinsichtlich seiner Lagerparameter Hubkraft und magnetische Steifigkeiten optimiert werden.

Da bei der Lösung dieses Problems in erster Linie die elektromagnetische Feldverteilung im Hochtemperatursupraleiter sowie im umgebenden Luftraum von Bedeutung ist, bot sich die Verwendung der Methode der finiten Elemente als numerisches Lösungsverfahren an. Hierzu wurde ein neues finites Element erfolgreich entwickelt und getestet. Die Elementformulierung berücksichtigt das makroskopische elektromagnetische Verhalten von Hochtemperatursupraleitern. Mittels dieses Elements wird die Berechnung und Optimierung komplexer Systeme, wie beispielsweise mit supraleitenden Magnetlagern ausgestattete Schwungradenergiespeicher, möglich, wobei auf ein kommerziell erhältliches FE-Programm - in diesem Falle das FE-Programm ANSYS - mit all seinen Tools zurückgegriffen werden kann.

Aufbauend auf den in den ersten Kapiteln gelegten Grundlagen wurde der Aufbau und die Programmierung dieses neuen Elements eingehend beschrieben. Die Elementformulierung sowie die integrierten Modelle zur makroskopischen Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene in Hochtemperatursupraleitern wurden mittels Vergleich durchgeführter Rechnungen mit vorhandenen Meßdaten verifiziert. Das neu entwickelte Element SUPRA105 lieferte dabei sehr gute Ergebnisse. Mittels dieses Elements wurde ein im Forschungszentrum Karlsruhe vorhandenes Schwungradenergiesystem nachgebildet und berechnet. Die berechneten Daten dienen als Ausgangspunkt für eine Optimierung der Lagergeometrie hinsichtlich der technisch

wichtigen Lagerparameter Hubkraft, horizontale und vertikale Steifigkeit.

Es wird vorgeschlagen von der gängigen diskreten Anordnung der supraleitenden Massivkörper zu einer kontinuierlichen Aneinanderreihung der Hochtemperatursupraleiter überzugehen, um Verluste durch im Ringmagneten induzierte Wirbelströme zu verringern. Für Anwendungen, bei denen es auf eine sehr hohe Hubkraft ankommt, bietet sich der Einsatz eines Hybridlagers zusammen mit einem Radiallager an. Die Verwendung unterschiedlicher Magnetkonfigurationen ist sehr stark vom Anforderungsprofil des zu erstellenden supraleitenden Magnetlagers abhängig und sollte für jeden Anwendungsfall neu geprüft werden. Die Verwendung zweier entgegengesetzt polarisierter Ringmagnete sollte jedoch vermieden werden, da diese Anordnung die geringste Hubkraft sowie die geringste vertikale Steifigkeit aller untersuchten Konfigurationen aufweist. Für die meisten Anwendungen wird die Verwendung von drei Ringmagneten mit abwechselnder Polarisierung optimal sein, da solch eine Anordnung eine sehr große horizontale Steifigkeit bei immer noch akzeptabler Hubkraft aufweist.

Anhang

Anhang A

Beitrag des gyroskopischen Effekts zur Stabilität eines Schwungrads

Eine rotierende Schwungradscheibe entspricht einem abgeplatteten Kreisel, d.h. die geometrische Figurenachse entspricht der Achse des größten Trägheitsmoments. Unter der Figurenachse versteht man hierbei eine Hauptträgheitsachse durch den Schwerpunkt. Ein solcher Kreisel ist nutationsfrei, da Impuls- und Figurenachse zusammenfallen.

Ein rotierender Kreisel ist bestrebt, seine Drehachsenrichtung im Raum beizubehalten, wobei sich die Kreiselachse in Richtung des resultierenden Drehimpulses einstellt.

Ein Schwungrad, bestehend aus ringförmigen Permanentmagneten und der eigentlichen Schwungradscheibe, wird somit nicht nur durch die zwischen den Supraleitern und den Ringmagneten wirkenden magnetischen Kräfte stabilisiert, sondern auch durch den sogenannten *gyroskopischen Effekt*.

Die auf eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende Scheibe einwirkenden Drehimpulse sind in Abbildung A.1 dargestellt.

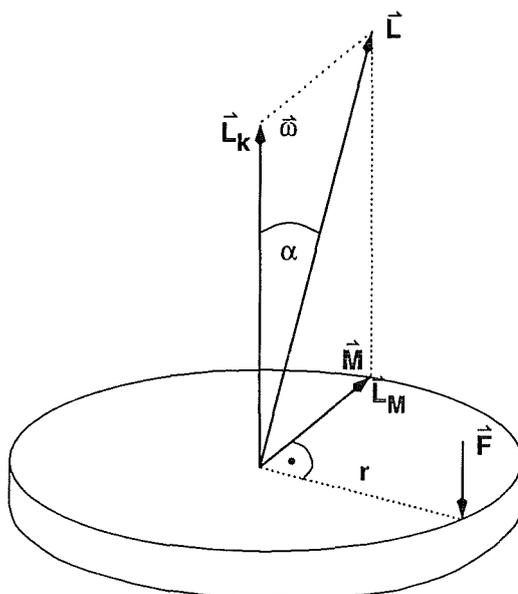


Abbildung A.1: Drehimpuls einer rotierenden Scheibe.

Das durch eine äußere Kraft verursachte Drehmoment \vec{M} ergibt sich hierbei aus

$$\vec{M} = r \cdot \vec{F} = J \cdot \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

Der Drehimpuls \vec{L} kann aufgespalten werden in

$$\vec{L}_k = J \cdot \vec{\omega} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\vec{L}_M = \int_0^t \vec{M} dt \quad (\text{A.3})$$

(\vec{L} : Drehimpuls, \vec{M} : Drehmoment, J : Trägheitsmoment)

Der notwendige Kraftstoß, um beispielsweise eine Auslenkung der Drehachse eines mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Ringmagneten um den Winkel α zu erreichen, berechnet sich wie folgt:

$$\tan \alpha = \frac{L_M}{L_k} = \frac{\int_0^t \vec{M} dt}{J \cdot \omega} \quad (\text{A.4})$$

$$J \cdot \omega \cdot \tan \alpha = \int_0^t r \cdot F dt \quad (\text{A.5})$$

für $r = \text{const}_t$ gilt

$$\frac{J \cdot \omega \cdot \tan \alpha}{r} = \int_0^t F dt \quad (\text{A.6})$$

und mit $F = \text{const}_t$

$$\frac{J \cdot \omega \cdot \tan \alpha}{r} = t \cdot F \quad (\text{A.7})$$

wobei

$$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{A.8})$$

Beim Übergang zu einem Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung geht die Summe in das Integral über:

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(r) dV \quad (\text{A.9})$$

und die kinetische Energie eines rotierenden Körpers ergibt sich zu

$$W_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (\text{A.10})$$

Die Angabe des Trägheitsmoments muß stets auch die Angabe der Drehachse, auf die es sich bezieht, enthalten. Ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse (Schwerpunktachse) bekannt, so läßt sich daraus das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf eine von dieser Schwerpunktachse parallel verlaufenden Achse mit Hilfe des *Steinerschen Satzes* ermitteln:

$$J_A = J_s + M \cdot a^2 \quad (\text{A.11})$$

(a : Abstand der beiden Achsen, J_s : Trägheitsmoment um den Schwerpunkt)

Beispiel nach [33]:

NdFeB-Ringmagnet:

$$r_i = 30 \text{ mm}$$

$$r_a = 45 \text{ mm}$$

$$h = 15 \text{ mm}$$

$$m_{\text{Magnet}} = 397 \text{ g}$$

$$\rho = 7.4 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{ALMg}_3\text{-Schwungradscheibe: } r_s = 95 \text{ mm}$$

$$h_s = 30 \text{ mm}$$

$$m_s = 2.3 \text{ kg}$$

$$J_s = 0.011 \text{ kgm}^2$$

$$15000 \text{ U/min} \rightarrow \omega = 2\pi f = 1570.79 \text{ Hz}$$

$$J_{\text{Magnet}} = \frac{1}{2}m_1r_a^2 - \frac{1}{2}m_2r_i^2 \quad (\text{A.12})$$

$$m_1 = \int \rho dV_1 = \rho \cdot \pi \cdot r_a^2 \cdot h \quad (\text{A.13})$$

$$m_2 = \int \rho dV_2 = \rho \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot h \quad (\text{A.14})$$

$$J_{\text{Magnet}} = 5.736 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (\text{A.15})$$

Das im FZK betriebene Schwungrad ist in Abbildung A.2 schematisch dargestellt.

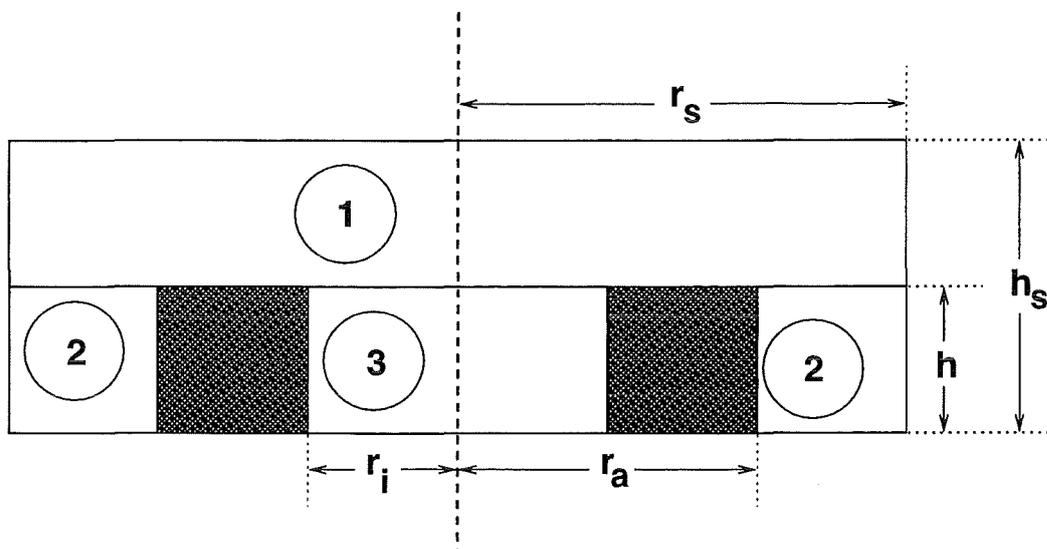


Abbildung A.2: Schwungradscheibe mit integriertem Ringmagnet.

Das Trägheitsmoment der Schwungradscheibe läßt sich dementsprechend in drei Anteile zerlegen:

$$J_s = J_1 + J_2 + J_3 \quad (\text{A.16})$$

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_s^2 \quad (\text{A.17})$$

mit

$$m_1 = \int \rho dV_1 = \rho \cdot \pi \cdot r_s^2 \cdot (h_s - h) \quad (\text{A.18})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} m_{21} r_s^2 - \frac{1}{2} m_{22} r_a^2 \quad (\text{A.19})$$

mit

$$m_{21} = \int \rho dV_{21} = \rho \cdot \pi \cdot r_s^2 \cdot h \quad (\text{A.20})$$

und

$$m_{22} = \int \rho dV_{22} = \rho \cdot \pi \cdot r_a^2 \cdot h \quad (\text{A.21})$$

$$J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_i^2 \quad (\text{A.22})$$

mit

$$m_3 = \int \rho dV_3 = \rho \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot h \quad (\text{A.23})$$

Das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung (bezogen auf die Rotationsachse des Schwungrads) ergibt sich nun aus der Summe der Trägheitsmomente von Schwungradscheibe und Ringmagnet:

$$J_{ges} = J_s + J_{Magnet} = 0.02783 \text{ kgm}^2 + 5.736 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2 = 0.0284 \text{ kgm}^2 \quad (\text{A.24})$$

$$t \cdot F = \frac{J_{ges} \cdot \omega \cdot \tan(1^\circ)}{r_s} = 8.1966 \text{ Ns} \quad (\text{A.25})$$

Das heißt, um die Rotationsachse des mit 15000 U/min rotierenden Schwungrades um 1° gegen die Vertikale zu verdrehen, muß ein Kraftstoß von etwa 8.2 Ns aufgewandt werden, also beispielsweise eine Sekunde lang eine Kraft von 8.2 N .

Anhang B

Herleitung der Matrizengleichungen

Zur Lösung der in Kapitel 5.2 hergeleiteten Gleichungen

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A} - \nabla[\nu] \nabla \cdot \vec{A} - \vec{J}_s - \nabla \times \vec{H}_c + [\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\sigma] \nabla \varphi = \vec{0} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \cdot \left(-[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma] \nabla \varphi \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

bietet sich die FEM an. Die numerische Approximation der Potentiale basiert hierbei auf einem Finite Elemente Netzwerk (Mesh), wobei die Potentiale mittels der Formfunktionen N_j durch die Knotenpotentiale der Elemente ausgedrückt werden:

$$\vec{A} \approx \sum_j (A_{xj} N_j \vec{e}_x + A_{yj} N_j \vec{e}_y + A_{zj} N_j \vec{e}_z) = \sum_k A_k \vec{N}_k \quad (\text{B.3})$$

$$\psi = \sum_k \psi_k N_k \quad (\text{B.4})$$

A_{xj} , A_{yj} und A_{zj} sind die kartesischen Komponenten des magnetischen Vektorpotentials am Knoten j , und N_j ist die Formfunktion am Knoten j .

Wendet man die Galerkinsche Form der Methode der gewichteten Residuen [83] auf die Gleichungen (B.1) und (B.2) an, so erhält man:

$$\int_{vol} \vec{N} \cdot \left(\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A} - \nabla[\nu] \nabla \cdot \vec{A} - \vec{J}_s \right. \\ \left. - \nabla \times \vec{H}_c + [\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\sigma] \nabla \psi \right) d(vol) = \vec{0} \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{vol} \vec{N} \cdot \left(\nabla \cdot (-[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma] \nabla \psi) \right) d(vol) = \vec{0} \quad (\text{B.6})$$

Gleichung (B.5) läßt sich zunächst in sechs Einzelterme zerlegen:

$$\underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A}) d(vol)}_I \\ - \underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla[\nu] \nabla \cdot \vec{A}) d(vol)}_{II} \\ - \underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot \vec{J}_s d(vol)}_{III} \\ - \underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla \times \vec{H}_c) d(vol)}_{IV} \\ + \underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot ([\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) d(vol)}_V \\ + \underbrace{\int_{vol} \vec{N} \cdot ([\sigma] \nabla \psi) d(vol)}_{VI} = \vec{0} \quad (\text{B.7})$$

Zerlegung von *Term I*:

Mit Hilfe des Satzes über die Divergenz eines Kreuzprodukts

$$\nabla(\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{D}(\nabla \times \vec{C}) - \vec{C}(\nabla \times \vec{D}) \quad (\text{B.8})$$

erhält man

$$\vec{N}(\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A}) = [\nu] \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{N} - \nabla(\vec{N} \times ([\nu] \nabla \times \vec{A})) \quad (\text{B.9})$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A}) \, d(vol) &= \\
 \int_{vol} [\nu] \nabla \times \vec{N} \cdot \nabla \times \vec{A} \, d(vol) - \underbrace{\int_{vol} \nabla \cdot (\vec{N} \times ([\nu] \nabla \times \vec{A})) \, d(vol)}_{= \oint_{\Gamma} (\vec{N} \times ([\nu] \nabla \times \vec{A})) \cdot \vec{n} \, d\Gamma} & \quad (B.10) \\
 & \quad \text{(Gauß'scher Integralsatz)}
 \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
 (\vec{N} \times ([\nu] \nabla \times \vec{A})) \cdot \vec{n} &= \vec{N} \cdot ([\nu] \nabla \times \vec{A} \times \vec{n}) & (B.11) \\
 \uparrow & \\
 \text{Spatprodukt} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla \times [\nu] \nabla \times \vec{A}) \, d(vol) &= \\
 \int_{vol} [\nu] \nabla \times \vec{N} \cdot \nabla \times \vec{A} \, d(vol) - \underbrace{\oint_{\Gamma} (\vec{N} \times ([\nu] \nabla \times \vec{A})) \cdot \vec{n} \, d\Gamma}_{= 0} & \quad (B.12) \\
 & \quad \text{wg. der Randbedingungen} \\
 & \quad \text{(5.24) auf } \Gamma
 \end{aligned}$$

Zerlegung von Term II:

Aus

$$\frac{d}{du} (\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{du} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{du} \quad (B.13)$$

folgt

$$\int_{vol} \frac{d}{du} (\vec{F} \cdot \vec{G}) \, d(vol) = \int_{vol} \frac{d\vec{F}}{du} \cdot \vec{G} \, d(vol) + \int_{vol} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{du} \, d(vol) \quad (B.14)$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla[\nu] \nabla \cdot \vec{A}) \, d(vol) &= \\
 \underbrace{\int_{vol} \nabla \cdot (\vec{N} \cdot [\nu] \nabla \cdot \vec{A}) \, d(vol)} &- \int_{vol} \nabla \cdot \vec{N} \cdot [\nu] \cdot \nabla \cdot \vec{A} \, d(vol) \quad (\text{B.15}) \\
 = \oint_{\Gamma} \vec{N} \cdot [\nu] \nabla \cdot \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\Gamma & \\
 \text{(Gauß'scher Integralsatz)} & \\
 = 0 &
 \end{aligned}$$

wg. der Randbedingungen
(5.24) auf Γ

In gleicher Weise wie *Term II* läßt sich Gleichung (B.6) zerlegen in

$$\begin{aligned}
 \int_{vol} \vec{N} \cdot \left(\nabla \cdot \left(-[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma] \nabla \dot{\Psi} \right) \right) \, d(vol) &= \\
 \int_{vol} \left(\nabla \vec{N} \cdot [\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \vec{N} [\sigma] \nabla \dot{\Psi} \right) \, d(vol) & \\
 + \underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{N} \left(-[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - [\sigma] \nabla \dot{\Psi} \right) \cdot \vec{n} \, d\Gamma}_{= 0} &= 0 \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

da $[\sigma] \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\sigma] \nabla \dot{\Psi} = \vec{J}$, \vec{J}
jedoch nicht aus dem be-
trachteten Gebiet Ω austre-
ten darf und $\vec{J} \cdot \vec{n}$ daher auf
dem Rand Γ identisch ver-
schwinden muß.

Die Gleichungen (B.5) und (B.6) können somit wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \int_{vol} \nabla \times \vec{N}[\nu] \nabla \times \vec{A} \, d(vol) \\
& + \int_{vol} \nabla \cdot \vec{N}[\nu] \nabla \cdot \vec{A} \, d(vol) \\
& \quad + \int_{vol} \vec{N}[\sigma] \dot{\vec{A}} \, d(vol) \\
& + \int_{vol} \vec{N}[\sigma] \nabla \dot{\Psi} \, d(vol) = \int_{vol} \vec{N} \cdot \vec{J}_s \, d(vol) \\
& \quad + \int_{vol} \vec{N} \cdot (\nabla \times \vec{H}_c) \, d(vol) \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$\int_{vol} \nabla \cdot \vec{N}[\sigma] \dot{\vec{A}} \, d(vol) + \int_{vol} \nabla \cdot \vec{N}[\sigma] \nabla \dot{\Psi} \, d(vol) = 0 \tag{B.18}$$

Betrachtet man die Gleichungen (B.17) und (B.18) zunächst für ein Element und berücksichtigt

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \sum_i \vec{N}_i \cdot A_i = \vec{N}^T \cdot \vec{A}_n & \dot{\vec{A}} &= \sum_i \vec{N}_i \cdot \dot{A}_i = \vec{N}^T \cdot \dot{\vec{A}}_n \\
\Psi &= \sum_i \vec{N}_i \cdot \Psi_i = \vec{N}^T \cdot \vec{\Psi}_n & \dot{\Psi} &= \sum_i \vec{N}_i \cdot \dot{\Psi}_i = \vec{N}^T \cdot \dot{\vec{\Psi}}_n \, , \tag{B.19}
\end{aligned}$$

wobei der Index n anzeigt, daß es sich um die Potentialwerte an Elementknoten handelt, so können die Gleichungen (B.17) und (B.18) in Matrixschreibweise wie folgt zusammengefaßt werden [60]:

$$\begin{bmatrix} [C^{AA}] & [C^{A\Psi}] \\ [C^{A\Psi}]^T & [C^{\Psi\Psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \dot{A} \} \\ \{ \dot{\Psi} \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{AA}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ A \} \\ \{ \Psi \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ J_i \} \\ \{ I \} \end{Bmatrix} \tag{B.20}$$

mit

$$\{ J_i \} = \{ J_i^{nd} \} + \{ J^s \} + \{ J^{pm} \} \tag{B.21}$$

$$\{ I \} = \{ I^{nd} \} \tag{B.22}$$

$[C^{AA}]$	Magnetische Dämpfungsmatrix
$[C^{A\Psi}]$	Elektromagnetische Dämpfungsmatrix
$[C^{\Psi\Psi}]$	Elektrische Dämpfungsmatrix
$[K^{AA}]$	Koeffizientenmatrix bzgl. des magnetischen Vektorpotentials
$\{ J_i^{nd} \}$	An den Knoten angreifender Quellenstromvektor (bzgl. A)
$\{ J^s \}$	Quellenstromdichtenvektor

$\{J^{pm}\}$	Vektor der Koerzitivfeldstärke (Permanentmagnet)
$\{I^{nd}\}$	Angelegter Gesamtstromvektor
$\{A\}$	Vektor des magnetischen Vektorpotentials
$\{\Psi\}$	Vektor des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials

Hierbei werden die einzelnen Matrizen und Vektoren wie folgt berechnet:

$$[C^{AA}] = \int_{vol} \{N\}[\sigma]\{N\}^T d(vol) \quad (\text{B.23})$$

$$[C^{A\Psi}] = \int_{vol} \{N\}[\sigma](\nabla \cdot \{N\}^T) d(vol) \quad (\text{wie nach Biro [64]!}) \quad (\text{B.24})$$

$$[C^{\Psi\Psi}] = \int_{vol} (\nabla\{N\}^T)^T[\sigma]\nabla\{N\}^T d(vol) \quad (\text{B.25})$$

$$[K^{AA}] = [K^L] + [K^G] \quad (\text{für } [\nu] = \text{const}) \quad (\text{B.26})$$

$$[K^L] = \int_{vol} (\nabla \times \{N\}^T)^T[\nu](\nabla \times \{N\}^T) d(vol) \quad (\text{B.27})$$

$$[K^G] = \int_{vol} (\nabla\{N\}^T)^T[\nu](\nabla\{N\}^T) d(vol) \quad (\text{B.28})$$

$$\{J^s\} = \int_{vol} \{J_s\}\{N\}^T d(vol) \quad (\text{B.29})$$

$$\{J^{pm}\} = \int_{vol} (\nabla \times \{N\}^T)^T \{H_c\} d(vol) \quad (\text{B.30})$$

$$\{\dot{A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_{x1}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{y1}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{z1}}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial A_{x8}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{y8}}{\partial t} \\ \frac{\partial A_{z8}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (\text{Vektor der Ableitungen des magnetischen Vektorpotentials})$$

$$\{\dot{\Psi}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi_8}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (\text{Vektor der Ableitungen des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials})$$

$$\{A\} = \left\{ \begin{array}{c} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{z1} \\ \vdots \\ A_{x8} \\ A_{y8} \\ A_{z8} \end{array} \right\} \text{ (Vektor des magnetischen Vektorpotentials)}$$

$$\{\Psi\} = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_8 \end{array} \right\} \text{ (Vektor des zeitintegrierten elektrischen Skalarpotentials)}$$

Anhang C

Herleitung der Funktion einer zeitabhängigen Koerzitivfeldstärke für einen zylinderförmigen Permanentmagneten

Betrachtet man die magnetische Flußdichte \vec{B} einer zylinderförmigen Spule, so findet man für deren z -Komponente (die z -Achse entspricht hier der Symmetrieachse) in der Literatur [82] die folgende Funktion:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \cdot I \cdot n \left(-\frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{z+l}{\sqrt{b^2 + (l+z)^2}} \right) \quad (\text{C.1})$$

Hierbei ist I der in der Spulenwicklung fließende Strom, n die Anzahl der Spulenwindungen, z der Abstand des Testpunktes zum Spulenende, b der Radius der Spule und l die Spulenlänge.

Betrachtet man nun einen zylinderförmigen Permanentmagneten der Dicke l mit örtlich konstanter Magnetisierung \vec{M} , so ist dessen Magnetfeld gleich dem, welches von einem, längs seines Randes verlaufenden, stromführenden Band mit der Flächendichte $J = M$ erzeugt wird. Hierbei gilt:

$$I = l \cdot M \quad (\text{C.2})$$

Der Radius des stromführenden Bandes entspricht dem Radius des Permanentmagneten b . Bestimmt man mittels Gleichung C.2 den Strom I , so kann man unter

Verwendung der Gleichung C.1 die z-Komponente der magnetischen Flußdichte \vec{B} entlang der Mittelachse berechnen (n wird auf $1/m$ gesetzt!). Entmagnetisierungseffekte werden hierbei jedoch nicht berücksichtigt! Wenn die Magnetisierung \vec{M} in einem bestimmten Volumen eines Materials nicht homogen ist, sondern sich von Ort zu Ort ändert, d.h. $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$, ist die äquivalente Stromverteilung einfach durch $\vec{J} = \text{rot}\vec{M}$ gegeben.

Für einen zylinderförmigen Permanentmagneten mit Dicke l , Radius b und homogener Magnetisierung \vec{M} ergibt sich somit mit Gleichung C.1:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \cdot l \cdot M \cdot n \left(\frac{z+l}{\sqrt{b^2 + (l+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \quad (\text{C.3})$$

Bewegt man sich nun, beginnend in einer Entfernung s_{start} vom Magneten, mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} auf der Mittelachse des Magneten auf diesen zu, so ergibt sich die folgende Zeitabhängigkeit der magnetischen Flußdichte:

$$B_z(t) = \frac{\mu_0}{2} \cdot l \cdot M \cdot n \left(\frac{s_{start} - v \cdot t + l}{\sqrt{b^2 + (l + s_{start} - v \cdot t)^2}} - \frac{s_{start} - v \cdot t}{\sqrt{b^2 + (s_{start} - v \cdot t)^2}} \right) \quad (\text{C.4})$$

Der Zeitparameter t läuft von 0 bis $\frac{s_{start}-d}{v}$, wobei d die Breite des letztendlich verbleibenden Luftspalts zwischen Permanentmagnet und Luftspalt ist.

Setzt man beispielsweise

$$\frac{\mu_0}{2} \cdot l \cdot M = 1$$

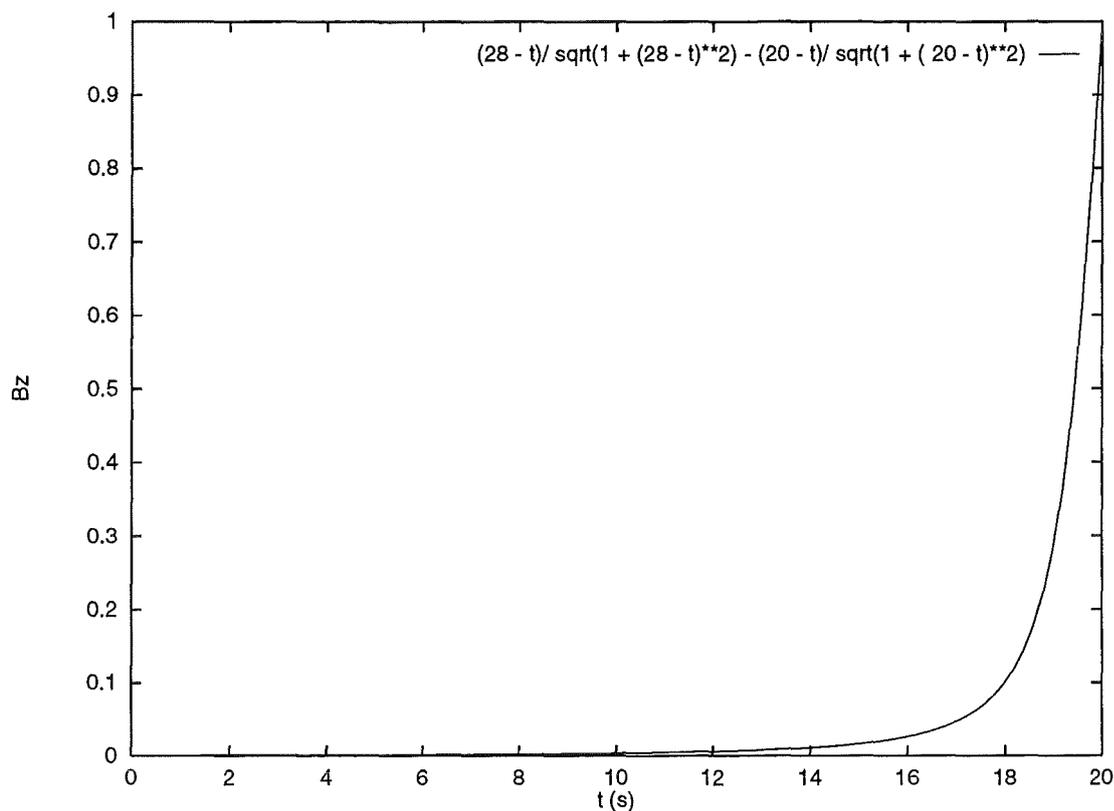
$$l = 8$$

$$b = 1$$

$$s_{start} = 20$$

$$v = 1$$

so läuft t von 0 bis 20 Sekunden und man erhält den in Abbildung C.1 dargestellten zeitlichen Verlauf der magnetischen Flußdichte.

Abbildung C.1: $B_z(t)$.

Die gesuchte Zeitfunktion der Koerzitivfeldstärke zur Simulation der Annäherung eines Permanentmagneten an einen Supraleiter mit konstanter Annäherungsgeschwindigkeit ist

$$H_c(t) = \frac{l \cdot M \cdot n}{2} \left(\frac{s_{start} - v \cdot t + l}{\sqrt{b^2 + (l + s_{start} - v \cdot t)^2}} - \frac{s_{start} - v \cdot t}{\sqrt{b^2 + (s_{start} - v \cdot t)^2}} \right) \quad (C.5)$$

Da, neben den Abmessungen des Magneten, meist nur dessen Remanenzflußdichte B_r und seine Koerzitivfeldstärke H_c bekannt sind, kann Gleichung C.5 mittels des Terms $\frac{l \cdot M \cdot n}{2}$ einfach so skaliert werden, daß für $t = \frac{s_{start} - d}{v}$, also $z = d$, die Koerzitivfeldstärke H_c ihren maximalen Wert erreicht hat:

$$H_c\left(t = \frac{s_{start} - d}{v}\right) = \frac{l \cdot M \cdot n}{2} \left(\frac{s_{start} - v \cdot \frac{s_{start} - d}{v} + l}{\sqrt{b^2 + (l + d)^2}} - \frac{s_{start} - v \cdot \frac{s_{start} - d}{v}}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right) \equiv H_{cmax} \quad (C.6)$$

$$\rightarrow \frac{l \cdot M \cdot n}{2} = H_{cmax} \cdot \frac{1}{\frac{d+l}{\sqrt{b^2+(l+d)^2}} - \frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}} \quad (C.7)$$

Hiermit ergibt sich für die gesuchte Zeitfunktion der Koerzitivfeldstärke:

$$H_c(t) = \frac{H_{cmax}}{\frac{d+l}{\sqrt{b^2+(l+d)^2}} - \frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}} \cdot \left(\frac{s_{start} - v \cdot t + l}{\sqrt{b^2 + (l + s_{start} - v \cdot t)^2}} - \frac{s_{start} - v \cdot t}{\sqrt{b^2 + (s_{start} - v \cdot t)^2}} \right) \quad (C.8)$$

Literaturverzeichnis

- [1] S. EARNSHAW: *On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society, 97 (1839).
- [2] W. BUCKEL: *Supraleitung*, 5. Auflage, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1993).
- [3] P. KOMAREK: *Hochstromanwendungen der Supraleitung*, Teubner (1995).
- [4] J. BARDEEN: *Wave functions for superconducting electrons*, Phys. Rev. 80, 567 (1950).
- [5] J. BARDEEN, L.N. COOPER, J.R. SCHRIEFFER: *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
- [6] W. MEISSNER, R. OCHSENFELD: *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit*, Naturwissenschaften 21, 787 (1933).
- [7] F. LONDON, H. LONDON: *Zur Theorie der Supraleitung*, Z. Phys. 96, 359 (1935)
- [8] H. ULLMAIER: *Irreversible properties of type II superconductors*, Springer-Verlag (1975).
- [9] *Supraleitung: Forschung, Entwicklung, Anwendung*, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1993).
- [10] J.G. BEDNORZ, K.A. MÜLLER: *Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system*, Z. Phys. B, 189 (1986).

- [11] M.K. WU, J.R. ASBURN, C.J. TORNG, P.H. HOR, R.L. MENG, L. GAO, Z.J. HUANG, Y.Q. WANG, C.W. CHU: *Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure*, Phys. Rev. Lett. 58, 908 (1987).
- [12] K. MATSUMOTO, H. KIKUCHI, N. UNO, Y. TANAKA: *Magnetic flux pinning properties of oxide superconductors produced by melt processes*, Cryogenics, Vol. 30, 5 (1990).
- [13] S. JIN, R.C. SHERWOOD, E.M. GYORGY, T.H. TIEFEL, R.B. VAN DOVER, S. NAKAHARA, L.F. SCHNEEMEYER, R.A. FASTNACHT, M.E. DAVIS: *Large magnetic hysteresis in a melt-textured Y-Ba-Cu-O superconductor*, Appl. Phys. Lett. 54, 584 (1989).
- [14] M. MURAKAMI, H. FUJIMOTO, T. OYAMA, S. GOTOH, Y. SHIOHARA, N. KOSHIZUKA, S. TANAKA: *Melt processing of high-temperature superconductors*, ICMC'90, 13 (1990).
- [15] N. SAKAI, M. MURAKAMI, H. TAKAICHI, A. KONDOH, N. KOSHIZUKA: *Growth of MPMG processed Y123 superconductor with controlled crystal orientation*, Bando, Yamauchi: *Advances in Superconductivity V*, ISS '92, 569 (1992).
- [16] M. MURAKAMI, T. OYAMA, H. FUJIMOTO, T. TAGUCHI, S. GOTOH, Y. SHIOHARA, N. KOSHIZUKA, S. TANAKA: *Large levitation force due to flux pinning in YBaCuO superconductors fabricated by melt-powder-melt-growth process*, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 29, 1991 (1990).
- [17] J.R. CLEM: *Magnetic properties of the high-temperature superconductors*, Physics and Material Science of High Temperature Superconductors, 79 (1990).
- [18] F.C. MOON, R. RAJ: *Superconducting rotating assembly*, United States Patent Number 4, 939, 120 (1990).
- [19] H.J. BORNEMANN, T. BURGHARDT, W. HENNING, H. RIETSCHEL, T. RITTER, U. SCHMITT, A. STÖCHLIN, N. STEGEL, C. URBAN: *Hochtemperatur-supraleiter(HTSL)-Massivkörper und ihre Anwendung*, VDI Berichte, Nr. 1187, 43 (1995).

- [20] W. BRAUNBECK: *Free suspension of bodies in electric and magnetic fields*, Z. für Physik 112, 753 (1939).
- [21] F.C. MOON: *Superconducting levitation*, John Wiley & Sons, Inc. (1994).
- [22] Z. XIA, Q.Y. CHEN, K.B. MA, C.K. MCMICHAEL, M. LAMB, R.S. COOLEY, P.C. FOWLER, W.K. CHU: *Design of superconducting magnetic bearings with high levitation force for flywheel energy storage systems*, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Preprint No. 94:121 (1995).
- [23] F.C. MOON, G. GOLKOWSKI, D. KUPPERMAN: *Superconducting bearings for high load applications*, Appl. Supercond., Vol. 1, 1175 (1993).
- [24] K.B. MA, C.K. MCMICHAEL, M.A. LAMB, W.K. CHU: *Application of high temperature superconductors on levitation bearings, torque transmissions and vibration dampers*, IEEE Trans. on Appl. Superconductivity, Vol. 3, 388 (1993).
- [25] C.K. MCMICHAEL, K.B. MA, M.W. LIN, M.A. LAMB, R.L. MENG, Y.Y. XUE, P.H. HOR, W.K. CHU: *Effects of material processing in high temperature superconducting magnetic bearings*, Appl. Phys. Lett. 59, 2442 (1991).
- [26] L. CARLSON: *Bullish on bearings*, Superconductor Industry (1991).
- [27] Vacuumschmelze GmbH Hanau, sales prospect: *Rare-earth permanent magnet materials*, M 054, Edition 10/88 (1988).
- [28] P.-Z. CHANG: *Mechanics of superconducting magnetic bearings*, Ph.D. Dissertation, Cornell University, Ithaca, New York (1991).
- [29] H. FUKUYAMA, K. SEKI, T. TAKIZAWA, S. AIHARA, M. MURAKAMI, H. TAKAICHI, S. TANAKA: *Superconducting magnetic bearing using MPMG YBaCuO*, Advances in Superconductivity IV, 1991, H. Hayakawa, N. Koshizuka, Springer-Verlag (1992).
- [30] A. GLADUN, P. STOYE, P. VERGES, W. GAWALEK, T. HABISREUTHER, P. GÖRNERT: *A motor with superconducting magnetic bearings*, Appl. Supercond., Vol. 2, EUCAS 1993, Göttingen (1993).

- [31] M. TSUCHIMOTO, T. KOJIMA, H. WAKI, T. HONMA: *Numerical analysis of field-cooled HTSC magnet and stable levitation region of HTSC*, CEFC 94, Aix-les-Bains (1994).
- [32] H. FUKUYAMA, T. TAKIZAWA, N. SAKAI, M. MURAKAMI: *Stiffness and damping coefficients for superconducting magnetic bearings using MPMG2-YBaCuO*, Yamafuji, Morishita (Ed.): *Advances in Superconductivity VII*, Proceedings of the ISS'94, Kitakyushu, 1297 (1994).
- [33] H.J. BORNEMANN, C. URBAN, P. BOEGLER, T. RITTER, O. ZAITSEV, K. WEBER, H. RIETSCHEL: *Schwungradenergiespeicher mit passiven supra-leitenden magnetischen Lagern*, KfK-STML Pap: 0694_1 / KfK Bericht (KfK Nachrichten 3/94) (1994).
- [34] S. NAGAYA, N. HIRANO, M. TAKENAKA, M. MINAMI, H. KOWASHIMA: *Fundamental study on high T_c superconducting magnetic bearings for flywheel system*, IEEE Trans. on Applied Superconductivity, Vol. 5, No. 2, 643 (1995).
- [35] J. VOGEL: *Grundlagen der elektrischen Antriebstechnik mit Berechnungsbeispielen*, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg (1985).
- [36] M. UESAKA, A. TAKESHITA, Y. YOSHIDA, K. MIYA: *A.C. magnetic property in high T_c superconducting flywheel*, Yamafuji, Morishita (Eds.): *Advances in Superconductivity VII*, Vol. 2, Springer-Verlag, Tokyo, 1285 (1995).
- [37] T. SUZUKI, H. SUZUKI, M. ENDO, Y. YASAKA, H. MORIMOTO, H. TAKAICHI, M. MURAKAMI: *Fundamental characteristics of prototype ring-shaped flywheel generator with superconducting levitated magnetic bearing*, Fujita, Shiohara (Eds.): *Advances in Superconductivity VI*, Vol. 2, Springer-Verlag, Tokyo, 1237 (1994).
- [38] L.R. TURNER: *Fields and forces in flywheel energy storage with high-temperature superconducting bearings*, CEFC'96, Okayama, Japan, 480 (1996).
- [39] F. HELLMAN, E.M. GYORGY, D.W. JOHNSON, H.M. O'BRYAN, R.C. SHERWOOD: *Levitation of a magnet over a flat type II superconductor*, J. Appl. Phys. 63 (2), 447 (1988).

- [40] Z.J. YANG, T.H. JOHANSEN, H. BRATSBERG, A. BATHNAGAR, A.T. SKJELTORP: *Lifting forces acting on a cylindrical magnet above a superconducting plane*, Physica C 197: Superconductivity, 136 (1992).
- [41] Z.J. YANG, T.H. JOHANSEN, H. BRATSBERG, G. HELGESEN: *Vibrations of a magnet levitated over a flat superconductor*, Physica C 160, 461 (1989).
- [42] Z.J. YANG: *Thickness dependence of levitation forces acting on magnets over a thin superconducting sheet*, Jpn. J. Appl. Phys. 31, Pt. 2, 936 (1992).
- [43] Z.J. YANG: *Forces acting on a magnet placed over a superconducting plane*, Jpn. J. Appl. Phys. 31, 477 (1992).
- [44] M.-C. MARION-PÉRA, J.-P. YONNET: *Axial bearings with superconductors and permanent magnets*, CEFC'94, Aix-les-Bains, 137 (1994).
- [45] P. BOEGLER, C. URBAN, H. RIETSCHER, H.J. BORNEMANN: *Standardized measurements of interaction forces in autostable superconducting magnetic bearings*, Appl. Supercond., Vol. 2, No. 5, 315 (1994).
- [46] T. SUGIURA, H. HASHIZUME, K. MIYA: *Numerical electromagnetic field analysis of type-II superconductors*, Int. J. Appl. Electromag. in Materials 2, 183 (1991).
- [47] M. UESAKA, Y. YOSHIDA, N. TAKEDA, K. MIYA: *Experimental and numerical analysis of three-dimensional high- T_c superconducting levitation systems*, Int. J. Appl. Electromag. in Materials 4, 13 (1993).
- [48] M. TSUCHIMOTO, T. HONMA, N. TAKEDA, M. UESAKA, K. MIYA: *An axisymmetric boundary element analysis of levitation force on high- T_c superconductor*, Engineering Analysis with Boundary Elements 11, 171 (1993).
- [49] M. UESAKA, Y. YOSHIDA, N. TAKEDA, K. MIYA: *Experimental and numerical analysis of three-dimensional high- T_c superconducting levitation systems*, Int. J. of Appl. Electromag. in Materials 4, 13, Elsevier (1993).
- [50] N. TAKEDA, M. UESAKA, K. MIYA: *Computation and experiments on the static and dynamic characteristics of high T_c superconducting levitation*, Cryogenics, Vol. 34, No. 9, 745 (1994).

- [51] M. TSUCHIMOTO, T. KOJIMA, T. HONMA: *A stable levitation region of HTSC on a permanent magnet*, CEFC'94, Aix-les-Bains, 242 (1994).
- [52] Y. YOSHIDA, M. UESAKA, K. MIYA: *Magnetic field and force analysis of high T_c superconductor with flux flow and creep*, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 30, No. 5 (1994).
- [53] C.P. BEAN: *Magnetization of hard superconductors*, Phys. Rev. Lett. 8, 250 (1962).
- [54] C.P. BEAN: *Rotational hysteresis loss in high-field superconductors*, J. Appl. Phys. 41, 2482 (1970).
- [55] M. MURAKAMI: *Melt processed high temperature superconductors*, World Scientific Publishing (1992).
- [56] T. MATSUSHITA, ET AL: *Critical current characteristics in superconducting Y-Ba-Cu-O prepared by the melt process*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 30, No. 3A (1991).
- [57] O.C. ZIENKIEWICZ: *Methoden der finiten Elemente*, Carl Hanser Verlag, München, Wien (1984).
- [58] A. KOST: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest (1994).
- [59] Seminar ANSYS/FEM Schnupperkurs der Firma CADFEM (1994).
- [60] ANSYS Theory Manual, Rev. 5.0, Swanson Analysis System Inc., Houston (1993).
- [61] D.A. MLYNSKI: *Manuskript zur Vorlesung Elektrodynamik*, Universität Karlsruhe (1985).
- [62] O. BIRO, K. PREIS: *On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, 3145 (1989).

- [63] A.O. HAUSER: *Berechnung der dreidimensionalen elektrischen Feldverteilung im Wickelraum eines dreiphasigen, ölsolierten Hochspannungsleistungstransformators inklusive Regelwicklung bei Beaufschlagung mit einer impulsförmigen Spannung*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1993).
- [64] O. BIRO, persönliche Mitteilung (1994).
- [65] T. BELYTSCHKO, T.J.R. HUGHES: *Computational methods for transient analysis*, Elsevier Science Publisher B.V. (1983).
- [66] S.S. RAO: *The finite element method in engineering*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, New York, Beijing, Frankfurt, Sao Paulo, Sydney, Tokyo, Toronto (1989).
- [67] A.O. HAUSER: *Entwicklung eines ANSYS-Userelements zur Berechnung der elektromagnetischen Wechselwirkungen in supraleitenden Magnetlagern*, CAD-FEM User's Meeting, Bad Wildungen (1995).
- [68] A.O. HAUSER: *Calculation of superconducting magnetic bearings using a commercial FE-program (ANSYS)*, CEF'96, Okayama, Japan, 269 (1996).
- [69] Origin 3.0, Micro Cal Software, Inc.
- [70] R. PERRIN-BIT, J.L. COULOMB: *A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 31, No. 3, 1920 (1995).
- [71] A.M. MIRI, A.O. HAUSER: *Method for the calculation of transient phenomena in systems with multi-turn windings (FE-Method)*, T. Honma (Ed.): *Advanced Computational Electromagnetics*, Elsevier Science, 161 (1995).
- [72] M. UESAKA, A. SUZUKI, N. TAKEDA, Y. YOSHIDA, K. MIYA: *A.c. magnetic properties of YBaCuO bulk superconductor in high T_c superconducting levitation*, Cryogenics 35, 243 (1995).
- [73] H.J. BORNEMANN, A. TONOLI, T. RITTER, C. URBAN, O. ZAITSEV, K. WEBER, H. RIETSCHEL: *Engineering prototype of a superconducting flywheel for long term energy storage*, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 5, No. 2, 618 (1995).

- [74] H.J. BORNEMANN, P. BOEGLER, C. URBAN, R. ZABKA, H. RIETSCHEL, P. DE RANGO, X. CHAUD, P. GAUTIER-PICARD, R. TOURNIER: *YBCO texturation and applications of superconducting magnetic bearings in flywheels for energy storage*, H.C. Freyhardt (Ed.): Applied Superconductivity, Vol. 1, DGM Informationsgesellschaft mbH, 277 (1993).
- [75] M. TSUCHIMOTO, T. HONMA: *Numerical evaluation of levitation force of HTSC flywheel*, IEEE Trans. on Appl. Supercond., Vol. 4, No. 4, 211 (1994).
- [76] M. TSUCHIMOTO, H. TAKEUCHI, T. HONMA: *Analysis of levitation force on HTSC for magnetic field configuration*, 3rd Japan-Hungary Joint Seminar on Appl. Electromag. in Materials and Computational Technology, Budapest (1994).
- [77] J. WANG, M.M. YANOVIK, R. RAJ: *Type II magnetic levitation on sinter-forged $YBa_2Cu_3O_x$ superconductor*, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 72, 846 (1989).
- [78] M. MURAKAMI: *Melt processed high temperature superconductors*, World Scientific Publishing (1992).
- [79] R. TAKAHATA, H. UEYAMA, A. KUBO: *Characterization of superconducting magnetic bearings (runout performance at high speed rotation)*, Bando, Yamauchi: Advances in Superconductivity V, ISS '92, 1309 (1992).
- [80] H. TAKAICHI, M. MURAKAMI, N. SAKAI, A. KONDOH, N. KOSHIZUKA: *Magnetic levitation using MPMG YBaCuO*, Bando, Yamauchi: Advances in Superconductivity V, ISS '92, 775 (1992).
- [81] D.S. WILSON, H.M. CHEN: *The application of magnetic bearings to electric motors*, 25th IECEC, Vol. 3, 460 (1990).
- [82] E.M. PURCELL: *Elektrizität und Magnetismus*, Berkeley Physik Kurs 2, 2. Auflage, Vieweg Verlag (1979).
- [83] D.W. PEPPER, J.C. HEINRICH: *The finite element method: Basic concepts and applications*, Hemisphere Publishing Corporation, London, UK (1992).