

**Institut für  
Wasserwirtschaft und Kulturtechnik  
Universität Karlsruhe (TH)**

---

**Zur hydraulischen Systemanalyse von  
Wasserversorgungsnetzen**

**J. Deuerlein**

**Heft 214**

---

Mitteilung des Instituts für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik  
der Universität Karlsruhe (TH)      technik  
mit "Theodor-Rehbock-Wasserbaulaboratorium"  
Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Franz Nestmann,      Ordinarius

---

**2002**

# Zur hydraulischen Systemanalyse von Wasserversorgungsnetzen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Jochen Deuerlein

aus Neuendettelsau

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 2002

Hauptreferent: Priv.-Doz. Dr. habil. Ralf G. Cembrowicz

Korreferent: Prof. Dr. Stephan Dempe

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Franz Nestmann

Karlsruhe 2002

... . Strive to be happy.

(Desiderata)

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik der Universität Karlsruhe (TH) im Bereich Systemanalyse, wo seit mehreren Jahren die Entwicklung des Programmpakets KANET im Mittelpunkt steht. Dieses beinhaltet Module zur Entwurfsoptimierung von Wasserversorgungsnetzen und Simulation des hydraulischen Verhaltens sowie der Ausbreitung von Qualitätsparametern. Entwicklungen im Bereich der Kalibrierung befinden sich noch im Anfangsstadium. Der Datenaustausch zwischen den einzelnen Modulen ist durch eine Schnittstelle innerhalb der Datenbank möglich, die Visualisierung erfolgt über eine separat implementierte 'Visual-Basic'-Anwendung.

Während seiner knapp fünfjährigen Tätigkeit am Institut konnte Herr Deuerlein die unterschiedlichen Teilbereiche kennen lernen und zur Weiterentwicklung in verschiedenen Anwendungen beitragen sowie den Einsatz des Modells innerhalb eines von der *Deutschen Bundesstiftung Umwelt* geförderten Projektes am Beispiel der Stadt Erfurt erproben.

Insbesondere bei der Implementierung rückgekoppelter Kontrollarmaturen im Simulationsmodell zeigten sich Konvergenzschwierigkeiten, die auch von anderen Programmpaketen, wie z.B. EPANET der *US Environmental Protection Agency*, bestätigt werden und somit auf Defizite der zu Grunde liegenden mathematischen Modellierungen zur Simulation derartiger Anlagen schließen ließen. Die meisten Aussagen beruhten auf Heuristiken, rigorose mathematische Beweise der Eindeutigkeit des stationären Fließzustandes unter Berücksichtigung der unterschiedlichen, in Wasserversorgungsnetzen vorhandenen Armaturen konnten von verschiedenen Forschergruppen bisher nicht erbracht werden.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht deshalb die Entwicklung des mathematischen Modells der hydraulischen Simulation von Wasserversorgungsnetzen unter gleichzeitiger Berücksichtigung unterschiedlicher Kontrollarmaturen sowie von der Regel abweichenden hydraulischen Verhaltens, wie es z.B. durch Leckagen verursacht werden kann. Neben der realitätsnahen Simulation des täglichen Betriebs bestehen Anwendungsmöglichkeiten in der Kalibrierung und zur Mängelidentifikation. Zusätzlicher Vorteil des allgemeinen mathematischen Modells ist die Verfügbarkeit über Sensitivitätsaussagen und Algorithmen zur Lösung der Aufgabe.

Ideen zum Einsatz des Modells und Entwicklung weiterer Module zur automatisierten Kalibrierung und Mängelidentifikation werden innerhalb dieser Arbeit umrissen und sind Gegenstand weiterer Forschung.

Karlsruhe, im November 2002

Franz Nestmann

# Danksagung

All jenen, die mich bei dem Vorhaben unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle danken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv.-Doz. Dr. habil. Cembrowicz<sup>1</sup>, der mit großem Engagement die Weiterentwicklung des Modells KANET verfolgt, für die Übernahme des Referats und die Betreuung über die gesamte Zeit der Arbeit, Herrn Prof. Dr. Dempe<sup>2</sup> für die große fachliche Unterstützung, die Übernahme des Korreferats und wertvolle Ratschläge, ohne die der mathematische Teil der Arbeit nicht möglich gewesen wäre, sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. hc. mult. Nestmann<sup>1</sup> für die Förderung der Arbeit und ihre Begutachtung.

Weiter danken möchte ich den Mitarbeitern vom Institut für Wissenschaftliches Rechnen und Mathematische Modellbildung der Universität Karlsruhe (TH), insbesondere dem Leiter des Instituts Herrn Prof. Dr. Rentrop, für die Möglichkeit, die mathematische Problemstellung der vorliegenden Arbeit im Rahmen eines Vortrags darzustellen. Bei Herrn HDoz. Dr. Hettlich<sup>3</sup>, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Vielsack<sup>4</sup>, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Wagner<sup>5</sup>, Herrn Dr.-Ing. Caglar<sup>6</sup>, Herrn Prof. Dr. Outrata<sup>7</sup>, Herrn Dr. Kocvara<sup>8</sup> bedanke ich mich für ihre Unterstützung und wertvolle Hinweise, die sie mir im Rahmen von Sprechstunden gegeben haben sowie bei Herrn Prof. Dr. Pallaschke<sup>9</sup> und Herrn Dr. Meinhardt<sup>9</sup> für Tipps und Literaturhinweise zum Themengebiet *Spieltheorie*.

Für die finanzielle Unterstützung danke ich der *Deutschen Bundesstiftung Umwelt* und der *Landesgraduiertenförderung Baden-Württemberg* sowie dem *DFG-Graduiertenkolleg Ökologische Wasserwirtschaft* unter der Koordination von Frau Dr.rer.nat. Kämpf für die Bereitstellung von Mitteln zur technischen Ausstattung. Weiterhin danke ich Herrn Heiko Kröner für seinen großen Einsatz bei der Implementierung und kritischen Anmerkungen zum Thema, Frau Nicole Armbruster für orthografische Hinweise sowie den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, den Herrn Tobias Getrost, Hayati Ayguen, Daniel Rings, Markus Schulze und Frau Iris Dominguez für die gute Zusammenarbeit und allen übrigen Institutsangehörigen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Katja und meinen Eltern danke ich für das mir entgegengebrachte Verständnis und Hannah bitte ich um Verzeihung dafür, dass sie zu viel Zeit ohne mich verbringen musste.

Karlsruhe im April 2002

Jochen Deuerlein

---

<sup>1</sup>Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik, Universität Karlsruhe (TH)

<sup>2</sup>Institut für Angewandte Mathematik II, TU Bergakademie Freiberg

<sup>3</sup>Mathematisches Institut II, Universität Karlsruhe (TH)

<sup>4</sup>Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe (TH)

<sup>5</sup>Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)

<sup>6</sup>Fachgebiet Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH)

<sup>7</sup>Inst. of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prag

<sup>8</sup>Institut für Angewandte Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg

<sup>9</sup>Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie, Universität Karlsruhe (TH)

## Kurzfassung

Städtische Wasserversorgungssysteme stellen einen komplexen Bestandteil der technischen Infrastruktur dar. In den vergangenen Jahrzehnten fand, bedingt durch die Verbreitung immer leistungsfähigerer Rechenanlagen, eine rasante Entwicklung unterschiedlicher mathematischer Modelle auf dem Gebiet der Systemanalyse städtischer Druckrohrnetze statt. Die Haupteinsatzbereiche können grob in *Entwurf kostenoptimaler Netze* bei Neuplanung und Erweiterung, *Simulation* des täglichen Betriebs und *Kalibrierung* der mathematischen Abbildung eingeteilt werden. Dabei lassen sich keine klaren Abgrenzungen vornehmen, besonders Methoden der beiden zuletzt genannten gehen teilweise nahtlos ineinander über. Im Rahmen dieser Arbeit steht die Simulation des stationären Fließzustandes im Mittelpunkt der Betrachtung. Beschleunigungseffekte sind wegen der geringen Fließgeschwindigkeit in städtischen Wasserversorgungssystemen zu vernachlässigen, 'dynamische' Berechnungen (Simulation des zeitabhängigen Betriebs) finden als Sequenz einzelner stationärer Simulationsrechnungen statt.

Reale Wasserversorgungsnetze beinhalten eine Vielzahl unterschiedlicher Armaturen, die der Kontrolle und Steuerung dienen. Ihr Einsatz reicht von Rehabilitation defekter Netzteile über den energiesparenden Betrieb der Anlagen und Minimierung von Leckageverlusten bis zur optimierten Datenerhebung in Messkampagnen zur Mängelidentifikation und Kalibrierung. Mit Bezug auf die Durchführung stationärer Simulationsrechnungen lässt sich das hydraulische Verhalten der Anlagen drei Gruppen zuordnen:

- i) Hydraulisches Verhalten und Betriebszustand vor Simulation bekannt,
- ii) hydraulisches Verhalten bekannt, Betriebszustand vor Simulation unbekannt,
- iii) Betriebszustand und hydraulisches Verhalten vor Simulation unbekannt (Anlagen mit Rückkoppelung).

Es werden, zunächst ohne Berücksichtigung der oben genannten Kontrollarmaturen, die zur Beschreibung des stationären Fließzustandes notwendigen Gleichgewichtsbedingungen angegeben (synthetische Methode). Danach wird eine alternative Vorgehensweise, deren Ziel die Herleitung eines äquivalenten mathematischen Modells, das zweckmäßig die Form einer Optimierungsaufgabe besitzt, besprochen (analytische Methode). Der Vorteil der zweiten Variante liegt in der Möglichkeit, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen treffen zu können, des Weiteren sind Sensitivitätssätze und Algorithmen aus der Optimierung auf das Problem anwendbar. Das entwickelte Modell besitzt die Gestalt einer konvexen, nichtlinearen Minimierungsaufgabe ohne Nebenbedingungen (Minimierung des System- 'Content'). Es gibt den Stand der mathematischen Entwicklungen auf

dem Gebiet der analytischen Methoden in der stationären Flussberechnung von vermaschten Druckrohrnetzen wieder und gestattet die Berücksichtigung von Behältern, Drosselklappen und Pumpen mit gegebener Formulierung des hydraulischen Verhaltens.

Im nächsten Schritt werden Kontrollarmaturen nach Punkt i) und ii) eingeführt. Als Konsequenz kommen lineare Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen hinzu. Die mathematische Umgebung des Aufgabengebietes werden definiert und allgemeine Bedingungen an die hydraulischen Beziehungen der Systemelemente formuliert, welche hinreichend für die Konvexität der Aufgabe sind. Diese Erweiterung des mathematischen Modells gestattet die Berücksichtigung von Durchflusskontrollschiebern, Rückflussverhinderungsventilen, zeitweise geschlossenen Schiebern, aber auch die realistische Simulation unterschiedlicher Systemmängel wie druckabhängige Leckagen und unzureichende Versorgung. Die Anwendung von Sensitivitätssätzen der Nichtlinearen Programmierung liefert Aussagen über die Änderung der Systemvariablen infolge von Parameteränderungen.

In realen Versorgungssystemen finden zusätzlich Armaturen nach Typ iii) Anwendung, deren hydraulisches Verhalten über Rückkoppelung zwischen Steuerparameter und Systemvariable - in der vorliegenden Anwendung über den Druck an gegebener Stelle im Netz - bestimmt ist. Bisher war kein geschlossenes mathematisches Modell bekannt, welches die Berücksichtigung dieser Anlagen gestattete. Ein rigoroser Beweis der Eindeutigkeit von Systemzuständen stand aus. Unter diese Kategorie fallen z.B. Druckminderungsventile (PRVs), die selbsttätig (ohne Fremdenergie) den Prozess über eine Sollwertfeder regeln. Das Gleichgewicht, das sich zwischen der Feder und dem Wasserdruck einstellt, wird hier als Minimierungsproblem eines hydrostatischen Potentials formuliert. Insgesamt ist der stationäre Punkt durch die Lösungen der sich gegenseitig beeinflussenden Minimierungsprobleme des hydrostatischen Potentials und des System-*'Content'* beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, das sogenannte Nash-Konzept der Spieltheorie auf ein technisches Problem anzuwenden. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit eines Gleichgewichts werden gegeben. Die Eindeutigkeit der Lösung ermöglicht Aussagen über Parametersensitivitäten entsprechend denen der Nichtlinearen Optimierung.

Schließlich werden Beispiele für Anwendungsmöglichkeiten des entwickelten Modells gegeben und der Einsatz innerhalb des Kalibrierungsprozesses zur Modelleichung oder Mängelanalyse skizziert.

## Abstract

Water supply networks represent an important part of the urban technical infrastructure. As a consequence of the capacity increase of personal computers over the last decades, also research and development of water supply network systems analysis was enhanced. This refers, in particular, to specific areas such as *Network design optimization* including rehabilitation and extension, *Simulation* of the daily operation and *Calibration* of simulation models. A distinct separation of those subject areas is difficult to define, especially, the two last mentioned subjects are related and intertwine. This study is to focus upon the simulation of the steady state flow in reticulate water supply networks. Non-steady state hydraulics are not considered due to the existing low velocities in water supply networks. Time extended analysis is taken into account by assuming a sequence of steady state approximations.

In reality, water supply networks contain a multitude of control devices. The objectives of their application vary from supporting rehabilitation of deficient network components, working towards energy-saving, helping with leak detection and control, data collection, allocation of gauging points for model calibration, etc. Three categories may be identified as to the hydraulics of those control devices:

- i) hydraulics and operating state are known prior to simulation
- ii) hydraulics are known, operating state is unknown prior to simulation
- iii) hydraulics and operating state are unknown prior to simulation (feedback devices).

In this study, first, without referring to specific devices, the equilibrium conditions of the steady state flow are described for a reticulate system (synthesis approach). Second, an alternative approach is discussed representing an equivalent mathematical model formulated as an optimization problem (analysis approach). This second approach offers the advantage to answering questions as to the existence and uniqueness of the hydraulic equilibrium. Also, available optimization algorithms can be applied, sensitivity analyses can be conducted. The resulting model turns out to be a convex nonlinear minimization problem without constraints (minimization of the 'system-content'). It reflects the state of the art of analytical methods with respect to the definition of sufficient and necessary conditions of the hydraulic equilibrium of reticulate pipe networks, allowing to include control devices like tanks, throttle control valves and pumps with known hydraulics.

The subsequent step of this study is devoted to including control devices of type i) and ii). Thus, linear equality and inequality constraints are added to the model, and the concept of sub-gradients is introduced. The resulting mathematical framework of the problem is analyzed yielding, again, general necessary and sufficient conditions required to define convexity of the problem. This extension of the model allows to account for flow control valves, check valves, temporary closed valves. Simulation of certain system's deficiencies, e.g. of pressure dependent leakage and intermittend supply, is made possible. Sensitivity analyses via Parametric Nonlinear Programming can be employed to assess the impact of parameter changes upon systems variables.

The final section of the study treats devices of type iii) whose hydraulic behaviour is characterised by a feedback between control parameters and systems variables, the latter being, e.g., the pressure at given points of the network. So far, a mathematical approach was not available to include these devices. A rigorous proof of the uniqueness of resulting system states had not been derived. An example of this category are pressure reducing valves (PRVs) operated 'self-acting' by a set-value spring. It is shown that the equilibrium between spring force and water pressure can be formulated as a minimization problem of a hydrostatic potential. The equilibrium point is reached by solving mutually interacting minimization problems of the hydrostatic potential and the 'system-content'. The approach applies the so called Nash-concept of Game Theory to a technical system. This way, again, necessary and sufficient conditions for uniqueness of the hydraulic equilibrium are determined. The model also delivers parameter sensitivities as a result of uniqueness of the Nash-equilibrium according methods of Parametric Nonlinear Programming.

Examples of model application are presented, eventually, and special reference is given to the model's capacity in the realm of network deficiency analysis and network calibration.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Aufgabenstellung . . . . .	1
1.2	Zielsetzung und Inhalt der Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>7</b>
2.1	Überblick . . . . .	7
2.2	Hydraulische Rohrnetzberechnung . . . . .	8
2.2.1	Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	8
2.2.2	Überblick - Modellierung des Wasserversorgungsnetzes . . . . .	15
2.2.3	Hydraulische Grundgleichung . . . . .	17
2.2.4	Kontinuität der Flüsse . . . . .	20
2.2.5	Kompatibilität der Druckhöhenverluste und Knotenpotenzialhöhen	21
2.2.6	Stationäre Rohrnetzberechnung . . . . .	21
2.2.7	Simulation des dynamischen hydraulischen Verhaltens . . . . .	24
2.3	Variationsprinzip in der hydraulischen Simulation . . . . .	25
2.3.1	Nichtlineare Optimierung ohne Nebenbedingungen . . . . .	25
2.3.2	Variationsprinzip für nichtlineare Netzwerke nach Birkhoff (1963)	26
2.3.3	Minimierung der ' <i>Content</i> ' - und ' <i>Co-Content</i> ' -Funktionen . . .	27
2.3.4	Dualität zwischen $\Pi$ und $\Pi^c$ . . . . .	30
2.4	Zusammenfassung . . . . .	30

---

<b>3</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>32</b>
3.1	Überblick . . . . .	32
3.2	Konvexe Mengen . . . . .	33
3.3	Konvexe Funktionen . . . . .	35
3.3.1	Eigenschaften konvexer Funktionen . . . . .	35
3.3.2	Differenzierbarkeit . . . . .	37
3.4	Monotone Abbildungen . . . . .	39
3.5	Grundaufgabe der konvexen Optimierung . . . . .	41
3.5.1	Allgemein . . . . .	41
3.5.2	Der Satz von Karush-Kuhn-Tucker . . . . .	47
3.5.3	Variationsungleichung . . . . .	49
3.5.4	Verallgemeinertes Komplementaritätsproblem . . . . .	51
3.5.5	Verallgemeinerte Gleichung (Inklusion) . . . . .	52
3.6	Parametrische Nichtlineare Optimierung . . . . .	53
3.6.1	Sensitivitätsanalyse in der Nichtlinearen Optimierung . . . . .	53
3.6.2	Globale Eigenschaften der Optimalwertabbildung . . . . .	57
3.7	Strenge Regularität von Inklusionen . . . . .	58
3.8	Zusammenfassung . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Kontrollarmaturen</b>	<b>60</b>
4.1	Klassifikation von Kontrollarmaturen . . . . .	60
4.2	Erweitertes mathematisches Modell . . . . .	62
4.2.1	Voraussetzungen . . . . .	62
4.2.2	Kontrollarmaturen mit subdifferenziellen hydraulischen Gesetzen	63
4.2.3	Variationsungleichungen . . . . .	71
4.2.4	Anwendung der Nichtlinearen Optimierung . . . . .	75
4.3	Sensitivität des hydraulischen Gleichgewichts . . . . .	79
4.3.1	Überblick . . . . .	79

---

4.3.2	Sensitivitätsanalyse bei der Minimierung des System-' <i>Content</i> ' $\Pi$ . . . . .	79
4.3.3	Sensitivitätsanalyse bei der Minimierung des System-' <i>Content</i> ' $\Pi^c$ . . . . .	81
4.4	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Armaturen mit Druckrückkoppelung</b>	<b>85</b>
5.1	Überblick . . . . .	85
5.2	Nash-Gleichgewicht . . . . .	86
5.2.1	Existenz eines Nash-Gleichgewichts . . . . .	88
5.2.2	Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts . . . . .	89
5.3	Variationsprinzip in der Hydrostatik . . . . .	91
5.3.1	Potenzielle hydrostatische Energie . . . . .	91
5.3.2	Funktionsweise von Druckminderungsanlagen . . . . .	93
5.3.3	Modellierung druckregulierender Kontrollarmaturen . . . . .	94
5.4	Nash-GGW zwischen $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ und $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$ . . . . .	98
5.4.1	Formulierung des Nash-Gleichgewichts . . . . .	98
5.4.2	Existenz eines Nash-Gleichgewichts . . . . .	99
5.4.3	Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts . . . . .	100
5.4.4	Anwendung des Modells auf Beispiel nach Simpson (1999) . . . . .	118
5.5	Zusammenfassung . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Kalibrierung des Simulationsmodells</b>	<b>124</b>
6.1	Überblick . . . . .	124
6.2	Kalibrierungsmethoden . . . . .	128
6.2.1	Probierversfahren . . . . .	128
6.2.2	Explizite Verfahren . . . . .	129
6.2.3	Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen . . . . .	130
6.2.4	Implizite Verfahren . . . . .	131
6.3	Erweiterte Anwendung des Modells . . . . .	133

6.3.1	Modellierung unzureichender Versorgung . . . . .	133
6.3.2	Modellierung druckabhängiger Leckagen . . . . .	136
6.3.3	Bestimmung einzelner Steuer- und Entwurfsparameter . . . . .	139
6.4	Optimales Messprogramm . . . . .	139
6.5	Kalibrierungsmodell . . . . .	143
6.5.1	Überblick . . . . .	143
6.5.2	Grobkalibrierung . . . . .	143
6.5.3	Feinkalibrierung . . . . .	152
6.6	Zusammenfassung . . . . .	154
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>156</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	156
7.2	Ausblick . . . . .	157
<b>A</b>	<b>Zulässige Anfangsflussverteilung</b>	<b>159</b>
A.1	Überblick . . . . .	159
A.2	Zulässige Flussverteilung in den Pfaden . . . . .	159
A.3	Zulässige Flussverteilung in den Schleifen . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Algorithmus zur Hydraulischen Simulation</b>	<b>166</b>
B.1	Kurzübersicht . . . . .	166
B.2	Algorithmus zur Berechnung des Nash-GGWs . . . . .	168
B.2.1	Bezeichnungen . . . . .	168
B.2.2	Numerische Berechnung des Nash-Gleichgewichts . . . . .	169
<b>C</b>	<b>Simulation - Beispiel Stadt Erfurt</b>	<b>174</b>
C.1	Überblick . . . . .	174
C.2	Berechnungsergebnisse . . . . .	177
	Literaturverzeichnis . . . . .	179
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	192

## Nomenklatur

### Physikalische Größen

$A$	$[m^2]$	: Rohrquerschnittsfläche
$C$	$[-]$	: Hazen-Williams-Koeffizient
$g$	$[m/s^2]$	: Erdbeschleunigung
$k$	$[m]$	: Rohrrauheit
$L$	$[m]$	: Rohrlänge
$\lambda$	$[-]$	: Reibungsbeiwert
$\mu$	$[Ns/m^2]$	: Dynamische Viskosität
$Re$	$[-]$	: Reynoldszahl
$\rho$	$[kg/m^3]$	: Dichte
$v$	$[m/s]$	: Fließgeschwindigkeit
$V$	$[m^3]$	: Volumen

### Abkürzungen

Abb.	: Abbildung
Abk.	: Abkürzung
Def.	: Definition
Gl.	: Gleichung
Kap.	: Kapitel
s.	: siehe
Tab.	: Tabelle
vgl.	: vergleiche
z.B.	: zum Beispiel
hydr.	: hydraulisch
unbek.	: unbekannt

### Mathematik

LP	: Lineare Optimierungsaufgabe ( <b>L</b> ineare <b>P</b> rogrammierung)
NLP	: Nichtlineare Optimierungsaufgabe ( <b>N</b> icht <b>L</b> ineare <b>P</b> rogrammierung)
(LICQ)	: Anforderung an lineare Nebenbedingungen von Optimierungsaufgaben ( <b>L</b> inear <b>C</b> onstrained <b>Q</b> ualification) (Def. 3.20 auf Seite 42)
MPEC	: Mathematische Optimierungsaufgabe unter Gleichgewichtsnebenbedingungen ( <b>M</b> athematical <b>P</b> rogramming with <b>E</b> quilibrium <b>C</b> onstraints)
(CS)	: Konvexe Menge (Def. 3.1 auf Seite 33, Abk. <b>C</b> )
(PS)	: Polyhedrale Menge (vgl. Satz 3.2 auf Seite 34)
$CO(\mathbf{C}, f)$	: Grundaufgabe der konvexen Optimierung (Def. 3.19 auf Seite 41)
$VI(\mathbf{C}, F)$	: Variationsungleichung (Def. 3.21 auf Seite 49)
$GCP(\mathbf{C}, F)$	: Verallgemeinertes Komplementaritätsproblem (Def. 3.23 auf Seite 51)
$GE(\mathbf{C}, F)$	: Verallgemeinerte Gleichung (Inklusion) (Gl. 3.23 auf Seite 52)

### Modelltechnische Größen

**Vektoren und Matrizen** sind in der Arbeit fettgedruckt dargestellt, ebenso Vektorräume und Teilmengen von Vektorräumen. Dementsprechend sind auch der Nullvektor und Nullmatrizen durch Fettdruck gekennzeichnet. Dagegen erfolgt die Bezeichnung von Funktionsvorschriften vektorwertiger Funktionen im Normaldruck.

## Skalare

$d$	: Anzahl der zeitweise geschlossenen Schieber (Gleichungsnebenbedingungen)
$l$	: Anzahl der Schleifen
$m$	: Anzahl der Stränge
$n$	: Anzahl der Bedarfsknoten
$q$	: Anzahl der Stränge mit unbekanntem hydraulischen Gesetz (entspricht Anzahl der Druckschleifen)
$r$	: Anzahl der Potenzialknoten
$s$	: Anzahl der Stränge mit Ungleichungsnebenbedingungen
$n_p$	: Anzahl der Pfade im Graphen des Gitters
$n_t$	: Anzahl der Bäume im Graphen des Waldes

## Matrizen und Vektoren

$\mathbf{A}$	: $(m \times n)$ - Inzidenzmatrix der Bedarfsknoten (Def. 2.2 auf Seite 9)
$\mathbf{A}_R$	: $(m \times r)$ - Inzidenzmatrix der Potenzialknoten
$\mathbf{A}_{HG}$	: $(m \times q)$ - Inzidenzmatrix der Solldruckknoten
$\mathbf{A}_t$	: Inzidenzmatrix der im Graphen enthaltenen Baumstruktur
$\mathbf{C}$	: $(m \times l)$ - Matrix der Flusschleifen (Def. 2.7 auf Seite 11)
$\mathbf{C}_{j,i}$	: $(j, i)$ -tes Element der Matrix $\mathbf{C}$
$\mathbf{C}_{k,\bullet}$	: $k$ -te Zeile der Matrix $\mathbf{C}$
$\mathbf{C}_{\bullet,k}$	: $k$ -te Spalte der Matrix $\mathbf{C}$
$\mathbf{C}_{\bullet,\setminus k}$	: Matrix $\mathbf{C}$ ohne Spalte $k$
$\mathbf{C}_v$	: $(m \times q)$ - Matrix der virtuellen Druckschleifen, $C_{v,j,i}$ analog $C_{j,i}$
$\mathbf{D}$	: $(m \times m)$ - Diagonalmatrix der nichtlinearen Druckverlustbeiwerte
$\mathbf{H}$	: $n$ - Vektor der Potenzialhöhen der Bedarfsknoten
$\mathbf{H}_R$	: $r$ - Vektor der konstanten Potenzialhöhen
$\mathbf{H}_{HG}$	: $q$ - Vektor der gegebenen Solldruckhöhen
$H_{ref}$	: Bezugspotenzialhöhe ( $n$ -Vektor $\mathbf{H}_{ref}$ )
$\mathbf{H}_v$	: $n$ - Vektor der Potenzialverluste $\mathbf{H}_v = \mathbf{H}_{ref} - \mathbf{H}$
$\mathbf{q}_t$	: $m$ - Vektor der Flussverteilung aus Baumstruktur
$\mathbf{u}$	: $l$ - Vektor der Schleifenkorrekturflüsse
$\mathbf{z}$	: $q$ - Vektor der zusätzlichen Druckverluste (-erhöhungen)

## Armaturen

BOR	: Reglergesteuerte Pumpanlage ( <b>BO</b> oster <b>R</b> egulated)
CHV	: Rückflussverhinderer ( <b>CH</b> eck <b>V</b> alve)
FCV	: Durchflusskontrollschieber ( <b>F</b> low <b>C</b> ontrol <b>V</b> alve)
PRV	: Druckminderungsventil ( <b>P</b> ressure <b>R</b> educing <b>V</b> alve)
PSV	: Druckunterstützendes Ventil ( <b>P</b> ressure <b>S</b> ustaining <b>V</b> alve)
PUMP	: Druckerhöhungsanlage (Einspeisepumpe oder Booster)
TDV	: Zeitweise geschlossener Schieber ( <b>T</b> ime dependent <b>D</b> ynamic <b>V</b> alve)
UHF	: Strang mit unbek. hydr. Gesetz ( <b>U</b> nknown <b>H</b> eadloss <b>F</b> unction)

### Indikatormatrizen der Strangmengen mit Armaturen:

$\mathbf{I}_{BOR}$	: $(m \times n_{BOR})$ - Matrix,	Reglergesteuerte Druckerhöhungsanlagen
$\mathbf{I}_{CHV}$	: $(m \times n_{CHV})$ - Matrix,	Rückflussverhinderer
$\mathbf{I}_{FCV}$	: $(m \times n_{FCV})$ - Matrix,	Durchflusskontrollschieber
$\mathbf{I}_{PRV}$	: $(m \times n_{PRV})$ - Matrix,	Druckminderungsventile
$\mathbf{I}_{PSV}$	: $(m \times n_{PSV})$ - Matrix,	Druckunterstützende Ventile
$\mathbf{I}_{PUMP}$	: $(m \times n_{PUMP})$ - Matrix,	Druckerhöhungsanlagen
$\mathbf{I}_{TDV}$	: $(m \times d)$ - Matrix,	Zeitweise geschlossene Schieber
$\mathbf{I}_{UHF}$	: $(m \times n_{UHF})$ - Matrix,	Stränge mit unbek. hydr. Gesetz
$\mathbf{I}_{HG}$	: $(m \times q)$ - Matrix,	Stränge mit 'Head Generator'

## Sonstiges

$CO(\mathbf{M}_H, \Pi)$	: Minimierung des System- 'Co-Content' $\Pi$ über der Menge $\mathbf{M}_H$ der zulässigen Potenzialhöhen $\mathbf{H}$ (Def. s. Gl. (4.41) auf Seite 75)
$CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$	: Minimierung des System- 'Content' $\Pi^c$ über der Menge $\mathbf{U}$ der zulässigen Schleifenkorrekturflüsse $\mathbf{u}$ (Def. s. Gl. (4.46) auf Seite 76)
$CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$	: Minimierung der potenziellen hydrostatischen Energie $\Pi^{pot}$ über der Menge $\mathbf{Z}$ der zulässigen Potenzialdifferenzen $\mathbf{z}$ (Def. s. Gl. (5.19) auf Seite 97)
$I_m$	: Indexmenge aller Stränge
$I_q$	: Indexmenge der Stränge mit unbekanntem hydraulischen Gesetz: $I_q = \{i \in I_m   \text{Strang } i \text{ beinhaltet Armatur m. unbek. hydr. Gesetz}\}$
$\mathbf{M}_H$	: Menge der zulässigen Potenzialhöhen an den Bedarfsknoten
$\mathbf{U}$	: Menge der hydraulisch zulässigen Schleifenkorrekturflüsse
$\mathbf{Z}$	: Menge der zulässigen Druckreduktionen (-erhöhungen)

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Aufgabenstellung

Aufgabe der Wasserversorgung ist die Lieferung einer ausreichenden Menge qualitativ einwandfreien Trinkwassers. Darüber hinaus müssen Gewerbe und Industrie versorgt werden und im Katastrophenfall genügend Wasser mit ausreichendem Druck für Löscharbeiten zur Verfügung stehen. Das Aufgabengebiet erstreckt sich von der Gewinnung mit anschließender Trinkwasseraufbereitung über die Speicherung bis hin zur Verteilung durch das Versorgungsnetz, wobei zwischen regionaler und städtischer Wasserversorgung unterschieden wird (Cembrowicz, 1988).

Im Rahmen dieser Arbeit stehen städtische Verteilungsnetze im Mittelpunkt. Diese beinhalten neben Rohrsystem und Speicherbauwerken auch Armaturen, z.B. Druckregler, Absperrschieber, Durchflusskontrollschieber und Pumpanlagen. Damit die Wasserunternehmen ihrem Versorgungsauftrag auch bei Störfällen, z.B. Rohrbrüchen, gerecht werden können, sind die Rohrsysteme in der Regel als vermaschte Netzwerke ausgebildet, so dass im Falle eines Rohrbruchs die Verteilung über einen alternativen Weg gewährleistet wird.

Während die Versorgung in den Industrieländern für die meisten Menschen selbstverständlich, die Bereitstellung von Trinkwasser auch zum wöchentlichen Autowaschen, Rasensprengen, usw. obligatorisch ist, können in den Entwicklungsländern zum Teil nicht einmal die Grundbedürfnisse der Menschen nach Wasser als wichtigstes Lebensmittel befriedigt werden. Ursachen sind neben fehlenden Ressourcen hohe Verluste und Fehlmengen des Wassers sowie Qualitätsmängel durch Verunreinigung, welche häufig in der unzureichenden Funktionsfähigkeit des Versorgungssystems begründet sind.

Auch in Ländern Mitteleuropas sind zukünftig unterschiedliche Probleme in der Wasserversorgung zu bewältigen. In einigen Ländern der EU sind vergleichsweise hohe Wasserverluste zu beklagen, in den 'neuen' Ländern der Bundesrepublik gehört die Rehabilitation der stark überalterten Rohrnetze zu den Hauptproblemen der Versorger. Abnehmende Bevölkerungszahlen und steigende Wasserkosten führen zu einer Verringerung des Verbrauchs. Die daraus resultierende größere Verweildauer des Wassers im Netz führt immer häufiger zur Verkeimung. Des Weiteren finden kontinuierliche Umstrukturierungen in der Verteilung durch Zusammenschlüsse kleinerer Wasserversorgungsunternehmen statt. Die Deregulierung der öffentlichen Wasserversorgung wird innerhalb der EU angestrebt.

Zur Bearbeitung der verschiedenen Aufgaben bietet sich der Einsatz rechnergestützter Verfahren an. Wasserversorgungssysteme sind ein wichtiger Bestandteil der Infrastruktur. Die Investitionskosten neu zu verlegender Wasserver- und Abwasserentsorgungssysteme stellen einen Hauptkostenpunkt bei der Neuerschließung von Siedlungsgebieten dar. Aufgabe von Optimierungsrechnungen ist die Bestimmung des kostenoptimalen Entwurfs des Leitungsnetzes, wobei Energiekosten, die sich durch den Einsatz von Pumpen während des Betriebs der Anlage ergeben, ebenfalls zu berücksichtigen sind. Mathematisch formuliert lässt sich die Kostenoptimierung als nichtkonvexe, multimodale Minimierungsaufgabe darstellen. Zur Lösung des komplexen Problems bieten sich Evolutionsstrategien (Cembrowicz, 1994; Cembrowicz u. a., 1996) oder Genetische Algorithmen (Savic und Walters, 1997) an.

Simulationsmodelle dienen u.a. der Verifikation von Entwürfen unter verschiedenen Lastfällen und Betriebszuständen. Durch Einbeziehen von Bedingungen, die sich aus der Struktur des Netzes, dem Belastungsfall und dem Betriebszustand der einzelnen Pumpen und Kontrollarmaturen ergeben, ermöglichen sie die Bestimmung der Druck- und Flussverteilung im Netz. Mit Simulationsmodellen durchgeführte Berechnungen sind damit Grundlage von Entscheidungen, insbesondere solcher, die bei Störfällen zu treffen sind. Sie tragen zur Mängelidentifikation bei und ermöglichen die Darstellung der Konzentrationsverteilung von Qualitätsparametern im Netz.

Grundlage des erfolgreichen Einsatzes von Simulationsrechnungen ist die sorgfältige Bestimmung der Parameter des mathematischen Modells. Die Wahl der das Modellverhalten bestimmenden physikalischen Größen sowie der Verbrauchswerte ist Gegenstand der Kalibrierung des Simulationsmodells. Während ein Teil der benötigten Parameter aus Aufzeichnungen und Plänen direkt bestimmt werden kann (z.B. Durchmesser von Rohren, geodätische Höhen, usw.) müssen Parameter wie Rauheit der Rohre, stündliche

Verbrauchsmengen indirekt über Messungen von Druckhöhen oder Rohrdurchflussmengen im Netz identifiziert werden.

## 1.2 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit

Der tägliche Betrieb von Wasserversorgungssystemen wird über Regelarmaturen gesteuert. Diese werden teils manuell vor Ort teils ferngesteuert betrieben oder reagieren, wie z.B. Rückflussverhinderer, Durchflusskontrollschieber und Druckminderungsanlagen, auf die aktuelle Fluss- oder Druckverteilung.

Obwohl die Entwicklung von Simulationsmodellen, die der Abbildung des hydraulischen Verhaltens vermaschter Netze dienen, einen Stand erreicht hat, der die algorithmische Berücksichtigung der meisten Kontrollarmaturen gestattet, sind Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen unter allgemeinem Einsatz von Steuerelementen nicht zufriedenstellend geklärt. Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung eines mathematischen Modells, welches die ausnahmslose Berücksichtigung der verschiedenen Armaturen gestattet sowie erweiterte Anwendungen für den Einsatz in der Kalibrierung, Steuerung, Mängelidentifikation und Optimierung ermöglicht.

Die Formulierung als Optimierungsproblem ist in diesem Rahmen zweckmäßig, da hierzu bereits vorhandene, allgemeine Aussagen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit, Parametersensitivitäten und nicht zuletzt implementierfertige Algorithmen zur Lösung der Aufgabe anwendbar sind. Außerdem bietet sich der Einsatz hierarchischer Optimierungsverfahren zur Lösung von Kontrollproblemen an, wie sie z.B. bei der Optimierung von Steuerentscheidungen, kostenoptimalem Neuentwurf und verschiedenen Kalibrierungsmethoden Anwendung finden. In diesem Zusammenhang wird von 'Mathematischen Optimierungsaufgaben unter Gleichgewichtsnebenbedingungen' (Ouatrata u. a., 1998) gesprochen, allgemeinere Bezeichnungen derartiger Aufgaben lauten 'Zweistufen-Optimierung' oder 'Zwei-Personen Stackelberg Spiele' (s. z.B. Bard, 1988; Dempe, 1992). Die Entwicklung von Algorithmen zur Lösung hierarchischer Probleme ist Gegenstand aktueller Forschung in der Angewandten Mathematik (Dempe und Bard, 2001). Die vorliegende Arbeit, die sich hauptsächlich auf die Formulierung des Gleichgewichts und die eindeutige Lösbarkeit der unteren Ebene sowie Sensitivität der Lösungsvariablen bezüglich Kontrollparameterabweichungen bezieht, könnte Voraussetzung für den Einsatz der genannten Verfahren sein.

Daraus ergibt sich folgende Gliederung der Arbeit:

Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen der hydraulischen Simulation von Wasserversorgungsnetzen vorgestellt. Als erstes werden graphentheoretische Begriffe definiert (Kap. 2.2.1), wobei eine Strukturierung (Kap. 2.2.2) des Graphen eingeführt wird, die von den Darstellungen der Fachliteratur abweicht und sich im Folgenden zweckmäßig erweist. Zusammen mit der Forderung nach Kontinuität (Kap. 2.2.4) und Kompatibilität (Kap. 2.2.5) ergeben die Formulierungen zur Hydraulik in Druckrohren (Kap. 2.2.3) das mathematische Modell der stationären Rohrnetzrechnung in der Darstellung als nichtlineares Gleichungssystem (Kap. 2.2.6). Alternativ zur erläuterten synthetischen Methode wird der analytische Zugang vorgestellt (Kap. 2.3). Über ein Variationsprinzip erfolgt die Ableitung von zwei dualen, nichtlinearen Optimierungsaufgaben zur Beschreibung des stationären Fließzustandes. An dieser Stelle werden nur solche Netzbestandteile berücksichtigt, deren hydraulisches Verhalten durch eine monotone Funktion beschrieben wird, so dass die Aufgabe mit Methoden der Nichtlinearen Programmierung ohne Nebenbedingungen (Kap. 2.3.1) gelöst werden kann.

Die Modellierung bestimmter Kontrollarmaturen führt zu mehrdeutigen Abbildungen in den hydraulischen Gesetzen. In der Regel handelt es sich dabei um Flußrestriktionen, die durch Rückflussverhinderer und Durchflusskontrollschieber verursacht werden. Das vierte Kapitel beinhaltet die notwendigen Erweiterungen des mathematischen Modells zur Berücksichtigung derartiger Armaturen. Als Konsequenz treten Nebenbedingungen in der nichtlinearen Optimierungsaufgabe auf.

Zur Definition der mathematischen Umgebung, in der das Modell erstellt wird, werden zunächst im dritten Kapitel Grundbegriffe aus der Konvexen Analysis erläutert und alternative Darstellungsmöglichkeiten konvexer Optimierungsaufgaben - Variationsungleichungen und Inklusionen -, welche sich durch allgemeinere Anwendungsbereiche auszeichnen, gegeben. Generelle Resultate bezüglich eindeutiger Lösbarkeit dieser Aufgaben sowie Sensitivitätsresultate, d.h. Aussagen über die Existenz von Ableitungen der Lösungsvariablen bezüglich der Modellparameter und deren Darstellung, werden angeführt. Der Umfang der mathematischen Darstellung ergibt sich zum Teil aus dem Umstand, dass behandelte Inhalte über den Stoff mathematischer Grundlagen im Ingenieurwesen hinausgehen.

Im vierten Kapitel werden unterschiedliche Kontrollarmaturen von Wasserversorgungssystemen mit den mathematischen Abbildungen ihrer hydraulischen Funktionalität dargestellt (Kap. 4.2.2), bevor diese unter Anwendung der allgemeinen Aussagen zum erweiterten mathematischen Modell der hydraulischen Simulation als nichtlineares Op-

timierungsproblem mit Nebenbedingungen zusammengefasst werden. Es wird eine allgemeine Bedingung gegeben (Voraussetzung 4.1), unter deren Gültigkeit die Eindeutigkeit des hydraulischen Gleichgewichts garantiert ist. Die Bedeutung der Aussage geht über die Simulation von Kontrollarmaturen hinaus. Der Einsatz des erweiterten Modells zur Abbildung des hydraulischen Verhaltens, das vom Idealzustand abweicht (z.B. beim Auftreten von Leckagen), wird möglich. Die Formulierung der Aufgabe als Variationsungleichung (Kap. 4.2.3) oder restringiertes nichtlineares Optimierungsmodell (Kap. 4.2.4) besitzt neben Aussagemöglichkeiten, die Existenz und Eindeutigkeit des hydraulischen Gleichgewichts betreffen, den weiteren Vorteil, dass bestehende, vom Anwendungsfall unabhängige Algorithmen zur Lösung sowie Aussagen über Parametersensitivitäten aus der Nichtlinearen Programmierung (Kap. 4.3) auf die Aufgabe anwendbar werden.

Die Konvexität der Aufgabe geht verloren, wenn, wie im fünften Kapitel beschrieben, rückgekoppelte Anlagen, z.B. druckmindernde (PRV), druckunterstützende (PSV) Ventile oder reglergesteuerte Pumpen (BOR), zu berücksichtigen sind. Diesen ist gemeinsam, dass durch Modifikation des die Armaturen beschreibenden hydraulischen Gesetzes der Druck am Einlass oder Auslass der Armaturen möglichst einen vorgegebenen Wert erreichen soll. Da es sich z.B. bei PRVs um Anlagen handelt, die ohne Fremdenergie arbeiten, wird zunächst der einzustellende hydrostatische Gleichgewichtszustand als Minimierungsproblem eines hydrostatischen Potentials formuliert (Kap. 5.3). Zusammen mit dem im vierten Kapitel entwickelten Modell sind zur Beschreibung des stationären Fließzustandes des Gesamtsystems zwei sich überschneidende<sup>1</sup> parametrische Optimierungsaufgaben zu lösen. Mathematische Konzepte zur Lösung derart gekoppelter Optimierungsprobleme sind aus dem Gebiet der Spieltheorie bekannt. Zur Beschreibung eines Gleichgewichtszustandes in einem nichtkooperativen Spiel mit gleichberechtigten Teilnehmern bietet sich das Nash-Gleichgewicht (Nash, 1950, 1951) an.

Theoretische Grundlagen (Kap. 5.2) werden zu Beginn des fünften Kapitels gegeben und das Nash-Gleichgewicht sowie die zugehörige Variationsungleichung der hydraulischen Simulation unter Anwesenheit rückgekoppelter Anlagen formuliert (Kap. 5.4). Insbesondere werden Existenz (Kap. 5.4.2) und Eindeutigkeitsfragen (Kap. 5.4.3) behandelt. Die bisher im Fachgebiet bekannten Aussagen besitzen nicht die gewünschte und notwendige Allgemeingültigkeit. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit einer zusätzlichen anwendungsspezifischen Annahme werden die sehr restriktiven Vorausset-

---

<sup>1</sup>Variablen der einen Aufgabe sind Parameter der anderen und umgekehrt.

zungen für die Eindeutigkeit des Gleichgewichts in mehreren Schritten abgeschwächt bis schließlich eine graphentheoretisch relativ einfach zu überprüfende Aussage als hinreichende Bedingung für Eindeutigkeit angegeben werden kann. Durch die Eindeutigkeit der Lösung sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von Sensitivitätssätzen erfüllt, die für die dem Nash-Gleichgewicht äquivalenten Variationsungleichungen oder Inklusionen existieren und denen der Konvexen Minimierung von Kap. 4.3 ähnlich sind. Das Modell wird ausführlich an einem literaturbekannten Beispiel diskutiert (Kap. 5.4.4).

Im sechsten Kapitel wird ein Überblick über bestehende Modelle zur Kalibrierung von Simulationsmodellen gegeben (Kap. 6.2). Die Simulation unzureichender Versorgung (Kap. 6.3.1) und druckabhängiger Leckagen (Kap. 6.3.2) als Beispiele für Anwendungen der im vierten Kapitel entwickelten konvexen Optimierungsaufgabe zur Kalibrierung und Mängelidentifikation wird dargestellt. Ergebnisse des fünften Kapitels können auf die Bestimmung einzelner Kalibrierungsparameter angewandt werden. In ähnlicher Weise lassen sich Kontrollprobleme zur optimalen Steuerung von Wasserversorgungssystemen formulieren.

Die Verwendung von Parametersensitivitäten zum optimalen Entwurf von Messprogrammen wird angesprochen (Kap. 6.4) und schließlich eine Strukturierung des Kalibrierungsprozesses angegeben (Kap. 6.5), durch welche den Sensitivitäten der unterschiedlichen Parameter am besten Rechnung getragen wird. Dabei ist das vorgestellte Konzept nicht als 'Black-Box-Verfahren' zu verstehen. Im Einzelfall müssen die besonderen Gegebenheiten des zu kalibrierenden Systems und dessen Umgebung berücksichtigt und der Vorgang sukzessive an die jeweiligen Rahmenbedingungen angepasst werden.

# Kapitel 2

## Modellbildung

### 2.1 Überblick

Die Simulation eines realen Systems setzt dessen Abbildung durch ein mathematisches Modell voraus. Bestimmende Größen des Modells sind neben den Parametern, welche die Eigenschaften der Systembestandteile repräsentieren, die Systemvariablen. Diese beschreiben den momentanen Zustand des Systems unter definierten Randbedingungen. Während die Parameter im Allgemeinen für unterschiedliche Simulationsrechnungen als beschreibende Größen der physikalischen Komponenten für unterschiedliche Randbedingungen als konstant angesehen werden können, sind die Zustandsvariablen so zu bestimmen, dass sie die Randbedingungen und gewisse Systemgleichungen erfüllen.

In der Modellierung von Wasserversorgungsnetzen zählen zu den Parametern Eigenschaften der Rohre (Länge, Durchmesser, Rauheit) und der Graph des Netzes. Zur Simulation des stationären Fließzustandes werden als Randbedingungen an den Bedarfsknoten die Verbrauchswerte als bekannt vorausgesetzt und an Einspeiseknoten die Potenzialhöhen. Zu bestimmen sind die Flüsse in den Strängen und die Potenzialhöhen der Bedarfsknoten. Weiter wird vorausgesetzt, dass ein hydraulisches Gesetz existiert, durch das eine funktionale Abhängigkeit zwischen dem Potenzialverlust und dem Durchfluss in einem Strang gegeben ist.

In den nächsten Abschnitten stehen zunächst die Darstellung des Versorgungsnetzes als Graphen und die zur Beschreibung des hydraulischen Systemzustandes benötigten physikalischen Gesetzmäßigkeiten im Mittelpunkt der Betrachtung bevor die daraus ableitbaren Gleichungen zum mathematischen Modell der hydraulischen Simulation 'einfacher' Netze (d.h. ohne Berücksichtigung dynamischer und zustandsabhängiger Kontrollarmaturen) zusammengeführt werden. Für die Entwicklungen in diesem Kapitel soll folgende Voraussetzung gelten, deren Bedeutung sich im Weiteren ergeben wird:

**Voraussetzung 2.1** *Für jeden Strang des Modells existiert eine a) stetige, b) (strikt) monoton wachsende Beziehung der Form  $h = f(q)$ , im Folgenden als hydraulisches Gesetz und/oder hydraulische Grundgleichung bezeichnet, welche eine funktionale Abhängigkeit zwischen Durchfluss  $q$  und Druckverlust  $h$  repräsentiert.*

## 2.2 Hydraulische Rohrnetzberechnung

### 2.2.1 Graphentheoretische Grundlagen

Ausgangspunkt der mathematischen Modellierung von Wasserversorgungsnetzen bildet deren Abbildung als Graphen. Es werden für die weiteren Betrachtungen grundlegende Definitionen gegeben und an einem Beispiel erläutert. Jeweils kursiv in ()-Klammern sind englische Bezeichnungen der wichtigsten Elemente angegeben, da der größte Teil der Fachliteratur zur Systemanalyse von Wasserversorgungsnetzen in englischer Sprache verfasst ist. Für elementare Definitionen und Sätze aus der Graphentheorie wird z.B. auf Brandstädt (1994) und Volkmann (1991) verwiesen.

**Definition 2.1** *Gegeben sind die nichtleeren Mengen  $V$  und  $E$  mit  $V \cap E = \emptyset$  sowie die Abbildung  $H : E \mapsto V \times V$ . Dann bezeichnen das Tripel  $(V, E, H)$  den Digraphen (digraph)  $D = (V, E, H)$  sowie  $V$  die Menge der Knoten (vertex, node) und  $E$  die Menge der Kanten/Stränge<sup>1</sup> (edge, link) von  $D$ .*

Über die Abbildung  $H$  werden jedem Strang  $e_j \in E$  Anfangsknoten  $v_i \in V$  und Endknoten  $v_k \in V$  zugeordnet ( $h(e_j) = (v_i, v_k)$ ). Wird außerdem vorausgesetzt, dass  $D$  weder Schlingen noch parallele Kanten enthält, so heißt  $D$  schlichter Digraph (s. Abb. 2.1).

---

<sup>1</sup>in dieser Anwendung gerichteten

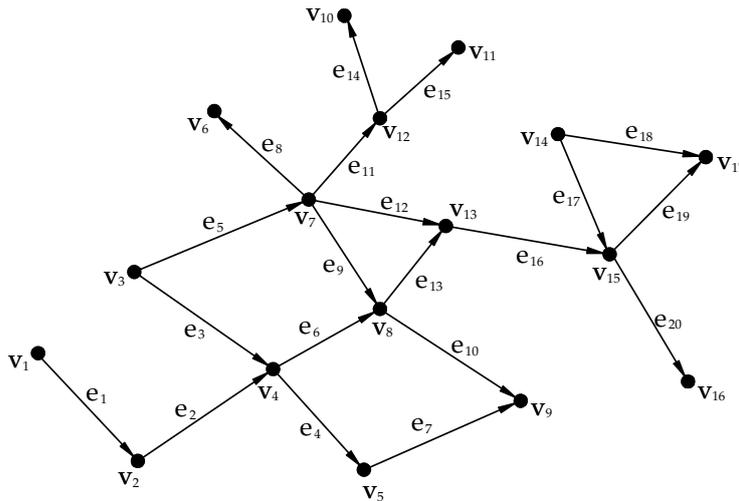
Eine geeignete Darstellungsmöglichkeit der Relation  $H$  bietet die Inzidenzmatrix.

**Definition 2.2** Gegeben sei der Digraph  $D = (V, E, H)$ . Die Matrix

$$A_{j,i} = \begin{cases} -1, & \text{falls Knoten } i \text{ Anfangsknoten von Strang } j, \\ 1, & \text{falls Knoten } i \text{ Endknoten von Strang } j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $j = 1, 2, \dots, m$  und  $i = 1, 2, \dots, n$  heißt Inzidenzmatrix des Digraphen  $D$ .

Dabei zu beachten ist, dass es sich bei der  $(m \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  im Allgemeinen nicht um eine quadratische Matrix handelt, sondern  $m > n$  gilt. In der Literatur wird teilweise auch die transponierte Darstellung der Matrix  $\mathbf{A}$  als Inzidenzmatrix bezeichnet (s. z.B. Cembrowicz, 1988).



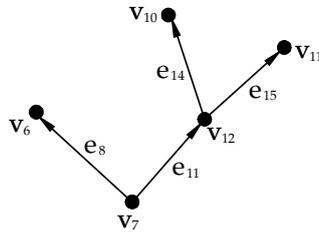
$$\begin{aligned} D &= (V, E, H), \\ V &= \{v_1, v_2, \dots, v_{17}\}, \\ E &= \{e_1, e_2, \dots, e_{20}\}, \\ H &= \{h(e_1) = (v_1, v_2), \\ & \quad h(e_2) = (v_2, v_4), \dots, \\ & \quad h(e_{20}) = (v_{15}, v_{16})\}. \end{aligned}$$

Abbildung 2.1: Beispielgraph D

Im Allgemeinen besteht ein Digraph aus unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten, zu deren Klassifizierung im Folgenden Definitionen gegeben werden.

**Definition 2.3** Sei  $E_i^t \subseteq E$ ,  $\bar{E} = E \setminus E_i^t$ ,  $V_i^t \subseteq V$ ,  $\bar{V} \subseteq V$ ,  $V_i^t \cap \bar{V} = R_i$  mit  $|R_i| = 1$  und  $R_i = \{r_i\}$ , weiter gelte:  $e$  ist Brücke<sup>2</sup>  $\forall e \in E_i^t$ . Dann heißen  $T_i = (V_i^t, E_i^t, H_i^t)$  'im Graphen  $D$  enthaltener Wurzelbaum  $i$ ' und  $r_i \in V_i^t \wedge r_i \in \bar{V}$  'Wurzel' von  $T_i$ .

<sup>2</sup>Strang, ohne den der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten zerfallen würde

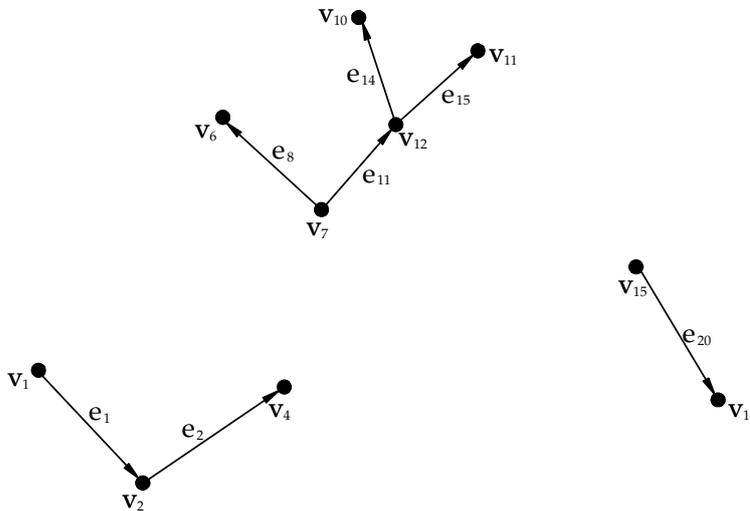


$$\begin{aligned}
 T_1 &= (V_1^t, E_1^t, H_1^t) \\
 V_1^t &= \{v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \\
 E_1^t &= \{e_8, e_{11}, e_{14}, e_{15}\} \\
 R_1 &= \{v_7\}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.2: Im Beispielgraph  $D$  enthaltener Wurzelbaum  $T_1$

Alle im Graphen  $D$  enthaltenen Wurzelbäume (z.B. Abb. 2.2) lassen sich zusammenfassen und bilden zusammen den Wald  $F \subseteq D$  (s. Abb. 2.3):

**Definition 2.4** Die Vereinigungsmenge  $F = (V^f, E^f, H^f) = (\cup V_i^t, \cup E_i^t, \cup H_i^t) = \cup T_i, i = 1, \dots, n_t$  (mit  $n_t :=$  Anzahl der im Graphen  $D$  enthaltenen Wurzelbäume) heißt 'im Graphen  $D$  enthaltener Wald' und  $R^f = \{r_1, \dots, r_{n_t}\}$  'Wurzelmenge von  $F$ '.

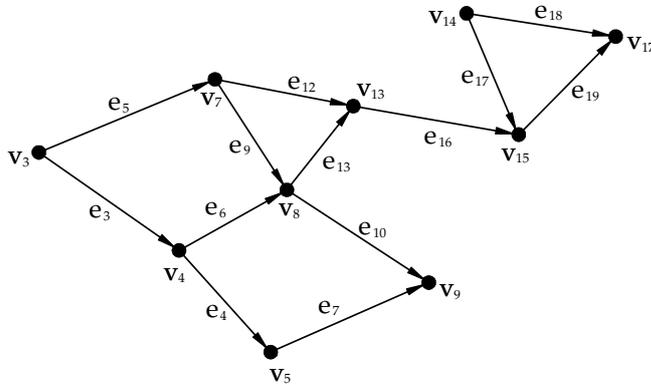


$$\begin{aligned}
 F &= (T_1 \cup T_2 \cup T_3) \subseteq D \\
 V^f &= \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, \\
 &\quad v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}\} \\
 E^f &= \{e_1, e_2, e_8, e_{11}, e_{14}, \\
 &\quad e_{15}, e_{20}\} \\
 R^f &= \{v_4, v_7, v_{15}\}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.3: Im Beispielgraph  $D$  enthaltener Wald  $F$

Nach Wegnahme des Waldes übrig bleibt der Graph des vermaschten Netzes (Gitter):

**Definition 2.5** Der Graph  $G = (V^g, E^g, H^g)$  mit  $V^g = (V \setminus V^f) \cup R^f$  und  $E^g = E \setminus E^f$  heißt 'im Graphen  $D$  enthaltenes Gitter' (s. Abb. 2.4).



$$\begin{aligned}
 G &= (V^g, E^g, H^g) \subseteq D \\
 V^g &= \{v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, \\
 &\quad v_9, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{17}\} \\
 E^g &= \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, \\
 &\quad e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, \\
 &\quad e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}\}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.4: Im Beispielgraph  $D$  enthaltenes Gitter  $G$

Aus obigen Definitionen folgen unmittelbar die Aussagen

$$\begin{aligned}
 E^g \cap E^f &= \emptyset, \quad V^g \cap V^f = R^f, \\
 \text{deg}(r) &> 2 \quad \forall \quad r \in R^f. \quad ^3
 \end{aligned}$$

Besonderes Kennzeichen des Gitters ist die Existenz von Schleifen im Graphen  $G$ .

**Definition 2.6** Gegeben seien der Graph des Gitters  $G = (V^g, E^g, H^g)$  und eine Kantenzug  $Z = (e_1^g, \dots, e_{nk}^g) \in E^g$  mit  $H(e_j^g) = (a_{j-1}, a_j)$  für  $j = 1, 2, \dots, nk$  und  $a_i \in V^g$ ,  $i = 0, 1, \dots, nk$ . Fallen Anfangsknoten  $a_0$  und Endknoten  $a_{nk}$  zusammen, so wird der geschlossene Kantenzug  $Z$  als Schleife  $C$  (circle, loop) bezeichnet.

Die Schleifen sind Merkmal der Vermaschung. Ähnlich der Orientierung der Stränge ist für die weiteren Untersuchungen eine positive Schleifenrichtung festzulegen. Als mathematische Abbildung der Schleifen wird die  $(m \times l)$ -Matrix  $\mathbf{C}$  mit  $l = m - n + 1$  eingeführt, die Informationen über die Stränge der Schleifen und deren Richtungen enthält:

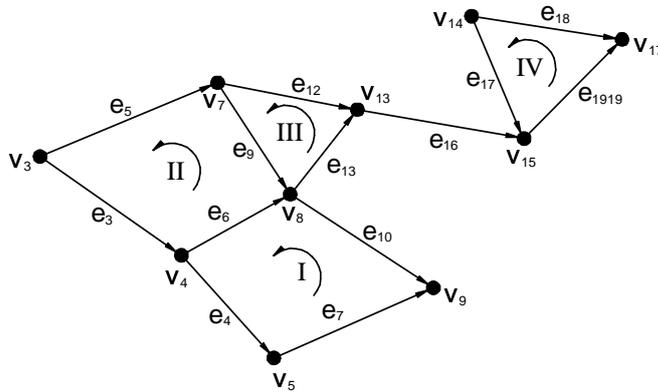
**Definition 2.7** Gegeben sei das Gitter  $G = (V^g, E^g, H^g)$ . Die Matrix

$$\mathbf{C}_{j,i} = \begin{cases} 1, & \text{falls Strang } j \text{ in Schleife } i \text{ mit übereinstimmender Richtung liegt,} \\ -1, & \text{falls Strang } j \text{ in Schleife } i \text{ mit entgegengesetzter Richtung liegt,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $j = 1, \dots, m$  und  $i = 1, \dots, l$  heißt Schleifenmatrix des Digraphen  $D$ .

<sup>3</sup>deg(v) = Anzahl der am Knoten  $v$  verbundenen Stränge

Es ist zu erwähnen, dass die Wahl der Schleifen nicht fest vorgegeben ist, die Anzahl der linear unabhängigen Schleifen jedoch durch  $l = m - n + 1$  eindeutig bestimmt ist. In Abb. 2.5 sind vier elementare Schleifen mit zugehöriger beliebig gewählter positiver Drehrichtung dargestellt. Die (transponierte) Schleifenmatrix der in Abb. 2.5



$$\begin{aligned}
 G &= (V^g, E^g, H^g) \\
 V^g &= \{v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, \\
 &\quad v_9, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{17}\} \\
 E^g &= \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, \\
 &\quad e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, \\
 &\quad e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}\} \\
 C_1 &= \{e_4, e_7, e_{10}, e_6\} \\
 C_2 &= \{e_3, e_6, e_9, e_5\} \\
 C_3 &= \{e_9, e_{13}, e_{12}\} \\
 C_4 &= \{e_{17}, e_{19}, e_{18}\}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.5: Im Gitter  $G$  enthaltene Schleifen  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$

definierten Schleifen und Drehrichtungen lautet:

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Da es sich bei den Schleifen in Matrix  $\mathbf{C}$  um fundamentale Schleifen handelt, kann durch Umsortieren der Spalten und Multiplikation mit  $-1$  die Schleifenmatrix stets in die Form  $\mathbf{C}^T = [\mathbf{S}|\mathbf{E}]$  überführt werden (vgl. Kesavan und Chandrashekar, 1972). Matrix  $\mathbf{S}$  beinhaltet die Spalten der zu einer im Gitter enthaltenen Baumstruktur gehörigen Stränge (branches), die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  repräsentiert die Spalten der zu den sogenannten Sehnen (chords) zählenden Stränge. Da  $\mathbf{C}^T$  in dieser Darstellung die Einheitsmatrix enthält, ist der Rang von  $\mathbf{C}$  gleich der Anzahl  $l$  der Schleifen. Die Spalten von Matrix  $\mathbf{C}$  sind damit linear unabhängig.

Für das Beispiel folgt nach der Umsortierung

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

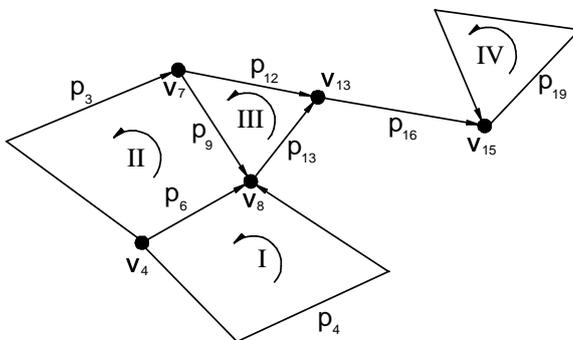
Innerhalb des Gitters haben diejenigen Knoten eine besondere Bedeutung, die mehr als zwei Stränge miteinander verbinden. Sie werden in der Menge  $V^p$  vereinigt:

**Definition 2.8** Die Knoten der Menge  $V^p = \{v : v \in V^g \wedge \text{deg}_{E^g}(v) > 2\} \subseteq V^g$  heißen 'Elementknoten', die übrigen Knoten von  $G$  heißen 'Zwischenknoten' und werden in  $V^{gi} = \{v : v \in V^g \wedge \text{deg}_{E^g}(v) = 2\} \subset V^g$  zusammengefasst. Unter  $\text{deg}_{E^g}(v)$  ist dabei die Anzahl aller Stränge aus  $E^g$ , die Knoten  $v$  verbindet, zu verstehen.

Die unverzweigten Strangfolgen, durch welche die Knoten aus  $V^p$  verbunden sind, werden als Pfade  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_p$  bezeichnet und sind wie folgt definiert:

**Definition 2.9**  $P_j = (V_j^p, E_j^p, H_j^p) \subseteq G$  mit  $V_j^p = \{v_{j,0}, v_{j,1}, \dots, v_{j,k}\}$ ,  $E_j^p \subset E_j^g$  und  $H_j^p \subset H^g$  heißt  $j$ -tes 'Pfadelement' (kurz: 'Pfad'), wenn  $\{v_{j,0}, v_{j,k}\} \in V^p \wedge \{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,k-1}\} \in V^{gi}$ .  $v_{j,0}$  heißt 'Anfangsknoten' von  $P_j$ ,  $v_{j,k}$  heißt 'Endknoten' von  $P_j$ . Es gilt  $j = 1, 2, \dots, n_p$ , wobei  $n_p$  die Anzahl der im Gitter enthaltenen Pfade bezeichnet.

Alle Pfade des Gitters sind in der Menge  $P$  zusammengefasst. Die einzelnen Pfad-elemente  $P_j$  werden mit der Nummer des ersten Elementes aus  $E_j^p$  benannt. Die Inzidenzrelation zwischen Pfadelement und seinen Anfangs- und Endknoten lässt sich



$$\begin{aligned} G^p &= (V^p, P, H^p) \\ V^p &= \{v_4, v_7, v_8, v_{13}, v_{15}\} \\ P &= \{p_3, p_4, p_6, p_9, p_{12}, \\ &\quad p_{13}, p_{16}, p_{19}\} \\ H^p &= \{h_p(p_3) = (v_4, v_7), \\ &\quad h_p(p_4) = (v_4, v_8), \dots, \\ &\quad h_p(p_{19}) = (v_{15}, v_{15})\}. \end{aligned}$$

Abbildung 2.6: Darstellung des Gitters in Pfaden  $G^p = (V^p, P, H^p)$

analog  $H$  bei den Strängen angeben. Durch  $H^p$  wird jedem Pfadelement  $P_j \in P$  ein Anfangsknoten  $v_i \in V^p$  und Endknoten  $v_k \in V^p$  zugeordnet  $v_i \xrightarrow{P_j} v_k$  (s. Abb. 2.6, z.B.  $h_p(p_4) = (v_4, v_8)$ ). Bleiben Zwischenknoten und Unterteilungen der Pfade in einzelne Stränge unberücksichtigt, ergibt sich die elementweise Darstellung des Gitters  $G^p = (V^p, P, H^p)$ . Abb. 2.6 zeigt den Graphen  $G$  des Gitters in der vereinfachten Darstellung in Pfaden.

Die zugehörige Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}_p$  besitzt ebensoviele Zeilen wie Pfade im Netz enthalten sind. Die Spalten von  $\mathbf{A}_p$  korrespondieren mit den Pfadverbindungsknoten. Genauso kann eine Schleifenmatrix  $\mathbf{C}_p$  angegeben werden, welche an Stelle der Stränge nur Pfade berücksichtigt. Der Zweck, den diese Unterteilung verfolgt, wird im weiteren Verlauf der Arbeit deutlich. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt ist, können die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  sowohl strang- als auch pfadbezogen verwendet werden.

Aus Abb. 2.6 ist zu erkennen, dass es sich bei  $G^p$  im Vergleich zu  $G$  nicht mehr um einen schlichten Graphen handelt. Es können sowohl parallele Pfade (z.B.  $v_4 \xrightarrow{p_4} v_8$  und  $v_4 \xrightarrow{p_6} v_8$ ) als auch Kreise ( $v_{15} \xrightarrow{p_{19}} v_{15}$ ) auftreten. Außerdem sind, wie auch schon bei Graph  $G$ , Brücken innerhalb des Gitters möglich ( $v_{13} \xrightarrow{p_{16}} v_{15}$ ). Eine Gliederung der Zusammenhangskomponenten zeigt Abb. 2.7.

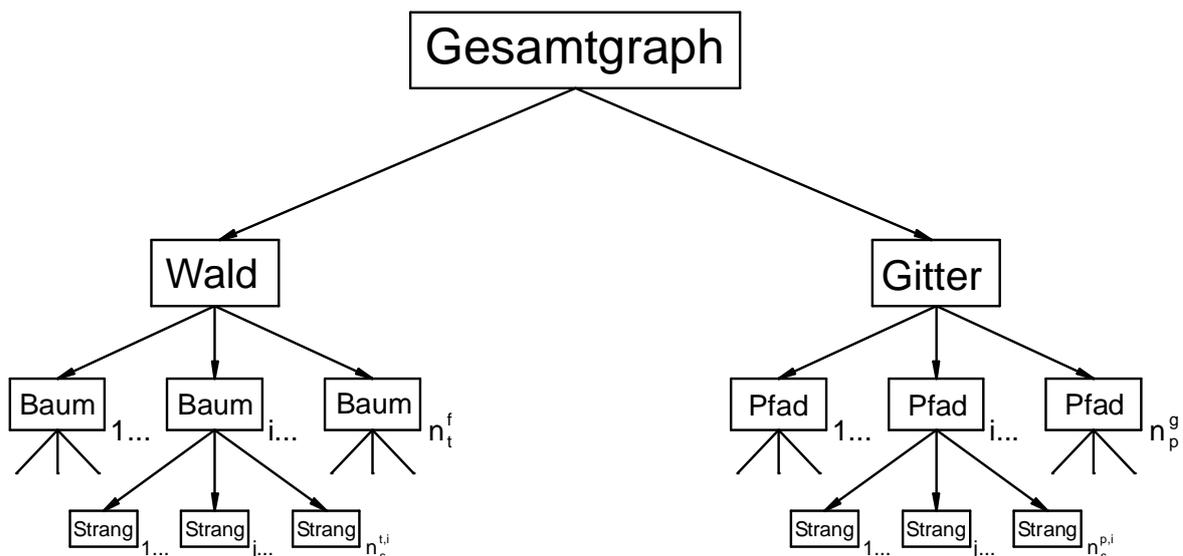


Abbildung 2.7: Zusammenhangskomponenten des Graphen

## 2.2.2 Überblick - Modellierung des Wasserversorgungsnetzes

### 2.2.2.1 Allgemein

Wasserversorgungsnetze haben die Aufgabe, den Verbraucher zu jeder Zeit mit Wasser einwandfreier Qualität unter ausreichendem Druck zu versorgen. Um diese Aufgabe zu erfüllen, werden verschiedene Netzelemente verwendet - z.B. Rohre, Pumpen, Armaturen, Speichervorrichtungen, etc.-, die spezifische Funktionen erfüllen. Die mathematische Abbildung ihres hydraulischen Verhaltens ist Gegenstand des vierten und des fünften Kapitels.

Zur graphentheoretischen Modellierung werden Entnahme- und Einspeisepunkte den Knoten eines Digraphen zugeordnet. Verbindungsrohre und Armaturen sind durch gerichtete Stränge modelliert. Zur Berücksichtigung druckabhängiger Einspeisungen werden zusätzlich virtuelle ('gedachte') Stränge zwischen den Potenzialknoten und einem virtuellen Bezugsknoten, welcher die Summe der druckabhängigen Einspeisungen repräsentiert, eingeführt. Jedem virtuellen Strang wird eine zusätzliche virtuelle Schleife zugeordnet.

Die einzelnen Bestandteile des Versorgungsnetzes weisen unterschiedliche Eigenschaften hinsichtlich der Berechenbarkeit einer eindeutigen Flussverteilung auf. Während diese für den Wald einfach aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht, müssen im vermaschten Netz zusätzliche Kompatibilitätsbetrachtungen angestellt werden. Zur Flussberechnung in den Pfaden sind der lineare Fluss, der sich aus den Bedarfswerten der Pfadzwischenknoten ergibt, und der Pfadfluss, der aus dem Systemzustand des Gesamtnetzes berechnet werden muss, zu überlagern.

Die Aufteilung in Pfade ist nicht zwingend. Sie dient der Vereinfachung des Graphen sowie der Speicherplatz- und Rechenzeiterparnis und erweist sich insbesondere im Hinblick auf die Kalibrierung des Simulationsmodells als sinnvoll. Bedarfswerte der Pfadzwischenknoten sind auf die Pfadverbindungsknoten geeignet<sup>4</sup> aufzuteilen, und es ist eine durchschnittliche Rauheit der Rohre im Pfad zu bestimmen. Das so vereinfachte Netz repräsentiert das Verhalten des ursprünglichen Netzes und bietet eine einfach zu implementierende Alternative zu Verfahren, die z.B. eine Reduktion der Anzahl der Netzbestandteile mit Hilfe von Optimierungsaufgaben vorschlagen (s. z.B. Anderson und Al-Jamal, 1995).

---

<sup>4</sup>z.B. über Berechnung der Einspeisemengen, die sich an den Pfadverbindungsknoten ergeben, wenn diese als Potenzialknoten angenommen werden.

Im Folgenden werden die hydraulischen Gleichungen der Komponenten Wald und Pfade des Graphen ohne Herleitung vorgestellt. Die Bedeutung der einzelnen Beziehungen folgt anschließend im allgemeinen Teil über die hydraulische Berechnung vermaschter Netzwerke, in denen Wald und Pfade als Sonderfall enthalten sind.

### 2.2.2.2 Simulation des Waldes

Der Vorteil der Aufteilung des Gesamtnetzes in die einzelnen Zusammenhangskomponenten nach Kap. 2.2.1 zeigt sich dadurch, dass die Berechnung der Flüsse in der durch Def. 2.4 auf Seite 10 charakterisierten Waldstruktur durch Lösung linearer Gleichungen erfolgt. Wegen seiner Einfachheit sei daher die zugehörige Berechnung des hydraulischen Verhaltens an dieser Stelle der Darstellung der grundlegenden Gleichungen zur Berechnung des Gitternetzes (Kap. 2.2.6) vorgezogen.

Gegeben sei die Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}_f$  der Knoten des Waldes abzüglich der Wurzelknoten ( $V_f \setminus R_f$ ) und der Stränge des Waldes ( $E_f$ ). Die quadratische  $n_{f_e} \times n_{f_e}$  Matrix  $\mathbf{A}_f$  ( $n_{f_e}$ : Anzahl der Stränge im Wald) ist nichtsingulär und kann damit invertiert werden. Die Flüsse in der Waldstruktur  $\mathbf{q}_f$  lassen sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_f^T \mathbf{q}_f = \mathbf{Q}_f \quad (2.3)$$

berechnen. Die Druckverluste in den Strängen  $\mathbf{h}_f$  folgen aus den hydraulischen Gleichungen (siehe späteres Kap. 2.2.3):

$$\mathbf{h}_f = f(\mathbf{q}_f). \quad (2.4)$$

Die Potenzialabsenkungen  $\Delta \mathbf{H}_f$  an den einzelnen Knoten bezüglich des Wurzelknotens sind, da  $\mathbf{A}_f$  invertierbar ist, ebenfalls durch ein lineares Gleichungssystem gegeben:

$$\Delta \mathbf{H}_f = \mathbf{A}_f^{-1} \mathbf{h}_f. \quad (2.5)$$

Die an den Wurzeln einzuspeisenden Gesamtbedarfswerte  $\mathbf{Q}_t$  der einzelnen Wurzelbäume entsprechen der Summe der Bedarfswerte aller Knoten des Baumes und sind mit Hilfe der Inzidenzmatrix der Wurzelknoten  $\mathbf{A}_r$  berechenbar:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A}_r^T \mathbf{q}_f. \quad (2.6)$$

### 2.2.2.3 Gleichungen des Gitternetzes

Die Berechnung des hydraulischen Verhaltens des Gitternetzes erfordert die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit nicht vergleichbarem mathematischem Aufwand, der im Folgenden behandelt wird. Auf eine besondere Kennzeichnung des Gitters

wird dabei verzichtet werden, ebenso wie auf die Unterscheidung zwischen strangbezogener und pfadbezogener Darstellung.

## 2.2.3 Hydraulische Grundgleichung

### 2.2.3.1 Überblick

Der Fluss eines Fluids durch ein Druckrohr ist mit Druckhöhenverlusten verbunden. Dabei lassen sich Verluste infolge Reibung entlang des gesamten Rohres von solchen, die lokal durch Einbauten verursacht werden, unterscheiden. Für beide verantwortlich ist die Wandlung der Energie der Flüssigkeit in thermische Energie, welche durch innere Reibung infolge Turbulenzen und der Viskosität realer Fluide sowie durch Reibung an der Rohrwandung verursacht wird. Unterschiedliche Formeln zur Berechnung der Druckverluste kommen zum Einsatz. Während in der Bundesrepublik die Berechnung nach Prandtl-Colebrook vorgeschrieben wird, ist in anderen Ländern die Formel nach Hazen-Williams verbreitet. Die wichtigsten werden im Folgenden kurz beschrieben (vgl. Bhave, 1991, Kapitel 2).

### 2.2.3.2 Druckverlustberechnung nach Darcy-Weisbach

Es besteht die Konvention, die Reibungsverluste inkompressibler Fluide in Druckrohren in Abhängigkeit verschiedener Parameter zu beschreiben. Als Fluideigenschaft ist neben Dichte  $\rho$  und Viskosität  $\mu$  der Flüssigkeit die im Rohrquerschnitt herrschende durchschnittliche Geschwindigkeit  $v$  von Bedeutung. Zu den Einflussparametern zählen ferner Länge  $L$ , innerer Durchmesser  $D$ , Rauheit  $k$  und Querschnittsform des Rohres, wobei im Folgenden ausschließlich kreisrunde Rohre berücksichtigt werden. Entsprechend der von Bernoulli formulierten Proportionalität von Druckverlust und Geschwindigkeitshöhe  $h \sim \frac{v^2}{2g}$  idealer Fluide kann eine nichtlineare Beziehung zwischen Druckverlust, Fließgeschwindigkeit und den Parametern angegeben werden:

$$h = \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \cdot \Phi\left(\frac{vD\rho}{\mu}, \frac{k}{D}\right). \quad (2.7)$$

Der Term  $\Phi\left(\frac{vD\rho}{\mu}, \frac{k}{D}\right)$  wird als Reibungsverlustbeiwert oder Widerstandsbeiwert  $\lambda$  bezeichnet, wobei  $\left(\frac{vD\rho}{\mu}\right)$  auch Reynoldszahl  $Re$  und  $k/D$  relative Rauheit genannt werden. Die Formel zur Berechnung des Reibungsverlustes nach Darcy-Weisbach mit kon-

stant angenommenem Reibungsbeiwert  $\lambda$  lautet:

$$h = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (2.8)$$

### 2.2.3.3 Druckverlustberechnung nach Prandtl-Colebrook

Von Nikuradse (1933) wurden Experimente zur genaueren Untersuchung des Einflusses der Reynoldszahl  $Re$  und der relativen Rauheit  $k/D$  auf den Verlustbeiwert  $\lambda$  an hydraulisch glatten und künstlich angerauten Rohren durchgeführt. Dabei stellte sich heraus, dass der jeweilige Fließzustand entscheidend für die Abhängigkeit der Reibungsbeiwerte  $\lambda$  von  $Re$  und  $k/D$  ist (siehe Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1: Abhängigkeit des Verlustbeiwerts bei unterschiedlichen Fließzuständen

Fließzustand	Abhängigkeit
laminar	$\lambda = \Phi(Re)$
turbulent	$\lambda = \Phi(k/D)$
Übergangsbereich laminar - turbulent	$\lambda = \Phi(Re, k/D)$

Die an Rohren mit künstlich hergestellter, gleichmäßiger Sandrauheit gewonnenen Ergebnisse waren jedoch nicht direkt auf das Verhalten handelsüblicher Rohre übertragbar. Erst die Einführung des Konzepts der 'äquivalenten Sandrauheit' ermöglichte die Anwendung der erzielten Resultate zur Druckverlustberechnung kommerzieller Rohre. Mit äquivalenter Sandrauheit wird dabei die Rauheit des Rohres im Versuch von Nikuradse bezeichnet, die für gegebenen Durchfluss im kommerziellen Rohr den gleichen Druckverlust hervorruft und für handelsübliche neue Rohre je nach Material angegeben werden kann. Im laminaren Fließzustand gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille (s. z.B. DVGW, 1981, Gl.(2)):

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (2.9)$$

Für hydraulisch raue Rohre ist  $\lambda$  bestimmt durch

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2.0 \log \frac{k}{D} \quad (2.10)$$

und wird als Gesetz von Prandtl-Kármán bezeichnet (DVGW, 1981, Gl.(5)).

Die Reynoldszahlen der Strömungen in Wasserversorgungsnetzen liegen gewöhnlich im hydraulischen Übergangsbereich. Der Druckverlustbeiwert  $\lambda$  ist in diesem Fall durch die Formel von Prandtl-Colebrook implizit definiert (DVGW, 1981, Gl.(3)):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3.71D} \right). \quad (2.11)$$

In den Tafeln von Arbeitsblatt W 302 DVGW (1981) wird an Stelle der äquivalenten Sandrauheit die 'integrale Rauheit'  $k_i$  verwendet, die alle den Druckhöhenverlust steigernden und mindernden Einflüsse umfassen soll (genauere Erläuterung der Anwendungsbereiche der Rauheit  $k_i$  in Abschnitt 3 DVGW (1981)). Eine Auswertung der Formeln aus Gl. (2.9) - Gl. (2.11) ist im Moody-Diagramm (DVGW, 1981, Bild 1.) dargestellt.

#### 2.2.3.4 Druckverlustberechnung nach Hazen-Williams

Neben der dimensionshomogenen Formel nach Darcy-Weisbach werden empirische Formeln zur Berechnung des Druckverlustes angewandt. Die weiteste Verbreitung besitzt die Druckverlustberechnung nach Hazen-Williams:

$$h = \frac{\omega}{C^{1.85}} \frac{L q^{1.85}}{D^{4.87}}. \quad (2.12)$$

Dabei werden mit  $q$  der Durchfluss,  $C$  der Hazen-Williams-Koeffizient und  $\omega$  ein Dimensionsfaktor bezeichnet.  $C$  ist eine die Rauheit kennzeichnende Größe und kann als solche entsprechend der Rauheit  $k$  für neue Rohre Tabellenwerken entnommen werden. Für alte Rohre ist der Hazen-Williams-Koeffizient  $C$  abzuschätzen und Gegenstand der Kalibrierung des Simulationsmodells.

#### 2.2.3.5 Verallgemeinerte Druckhöhenverlust-Durchflussbeziehung

Für die weiteren mathematischen Betrachtungen wird eine einheitliche Darstellung der Beziehung zwischen Druckverlust und Durchfluss in einem Druckrohr benötigt. Nach Nielsen (1989) soll folgende funktionale Abhängigkeit gelten:

$$h = d q \quad \text{mit:} \quad d = c |q|^{\alpha-1}. \quad (2.13)$$

Die zu Gl. (2.13) duale Formulierung stellt den Durchfluss als Funktion des Druckverlustes dar:

$$q = d^{-1} h \quad \text{mit:} \quad d^{-1} = c^{-\frac{1}{\alpha}} |h|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \quad (2.14)$$

Dabei beinhalten die Konstante  $c$  sämtliche Parameter (Rohrgeometrie, Viskosität,...) und  $\alpha$  einen konstanten Wert - etwa im Bereich zwischen 1.0 und 2.5 -, je nachdem welche der oben genannten hydraulischen Gleichungen oder Formulierungen nach Messwerten der Berechnung zu Grunde gelegt werden sollen.

## 2.2.4 Kontinuität der Flüsse

Das Prinzip der Massenerhaltung der klassischen Physik besagt allgemein, dass die zeitliche Änderung der Masse ( $\rho V$ ) innerhalb eines Kontrollvolumens (K.V.) dem Nettomassendurchfluss  $\rho v dA$  durch die Kontrolloberfläche (K.O.) entspricht:

$$\int_{K.V.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{K.O.} \rho v dA = 0. \quad (2.15)$$

Im Falle der stationären ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) Rohrströmung eines inkompressiblen ( $\rho = const$ ) Fluids entspricht das Kontrollvolumen einer vollgefüllten Stromröhre und die Kontrolloberfläche ist aus impermeabler Rohrwandung und zwei durchströmten Querschnitten  $A_1$  und  $A_2$  zusammengesetzt. Gl. (2.15) vereinfacht sich damit zu

$$v_1 A_1 = v_2 A_2. \quad (2.16)$$

Es besteht die Konvention, dass zur Simulation des hydraulischen Verhaltens von Wasserversorgungsnetzen Zu- und Abflüsse ( $Q$ ) des Gesamtsystems nur an den Knoten des Netzwerks zugelassen werden. Grundsätzlich können die Knoten in beliebiger Dichte angeordnet werden, so dass diese Annahme ausreichende Genauigkeit besitzt. Knoten mit vorgegebenen Entnahmen oder Einspeisungen werden als *Bedarfsknoten* und solche mit konstantem Potenzial als *Potenzialknoten* bezeichnet. Mit  $q_{j,i}$  sind der Fluss in den Rohren  $j$ , die am Knoten  $i$  miteinander verbunden sind, und mit  $Q_i$  die Einspeisung ( $Q_i < 0$ ) oder Entnahme ( $Q_i > 0$ ) am Knoten  $i$  benannt. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\sum_j^{deg(i)} q_{j,i} - Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.17)$$

wobei  $deg(i)$  die Anzahl der am Knoten  $i$  verbundenen Rohre bezeichnet (vgl. Kap. 2.2.1). Die Inzidenzmatrix (s. Def. 2.2 auf Seite 9) aller Knoten und Stränge (oder Pfade) des Gitters soll mit  $\mathbf{A}_G$  bezeichnet werden. Durch die Partitionierung  $\mathbf{A}_G = [\mathbf{A}|\mathbf{A}_R]$  wird der Unterscheidung zwischen Bedarfsknoten  $\mathbf{A}$  und Potenzialknoten  $\mathbf{A}_R$  Rechnung getragen. Die aus der Elektrotechnik als erstes Kirchhoffsches Gesetz oder

Knotensatz<sup>5</sup> bekannte Gl. (2.17) auf der vorherigen Seite kann in Matrixdarstellung kompakter geschrieben werden als

$$\mathbf{A}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (2.18)$$

Zu beachten ist, dass bei vermaschten Netzwerken für die Anzahl der Stränge  $m$  und Knoten  $n$  gilt:  $m > n$ . Damit ist  $\mathbf{A}$  im Allgemeinen keine quadratische Matrix, die Flüsse können nicht allein durch die Kontinuitätsbeziehung bestimmt werden.

## 2.2.5 Kompatibilität der Druckhöhenverluste und Knotenpotenzialhöhen

Die Kompatibilitätsbedingung stellt die Beziehung zwischen Reibungsverlusten in den Strängen, welche für das gesamte Netz im Vektor  $\mathbf{h}$  zusammengefasst sind, und Potenzialhöhen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_R$  der Knoten her:

$$\mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{H} = -\mathbf{A}_R\mathbf{H}_R. \quad (2.19)$$

Gl. (2.19) besagt, dass für alle Stränge der Druckverlust der Differenz der Potenzialhöhen von Anfangs- und Endknoten entsprechen muss.

## 2.2.6 Stationäre Rohrnetzrechnung

### 2.2.6.1 Allgemein

Zusammengefasst ergeben die Ausführungen der drei letzten Abschnitte die stationäre Rohrnetzrechnung eines vermaschten Druckrohrnetzes. Im Unterschied zu Nielsen (1989) sind knotenbezogene Vektoren mit Großbuchstaben ( $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{H}$ ) und strangbezogene ( $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{h}$ ) mit Kleinbuchstaben dargestellt. Mit gegebenen hydraulischen Gesetzen der Rohre nach Kap. 2.2.3 und Voraussetzung 2.1 auf Seite 8 sind sowohl Kontinuität der Flüsse an den Knoten (Kap. 2.2.4) als auch Kompatibilität der Druckverluste und Knotenpotenziale (Kap. 2.2.5) zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{q} &= \mathbf{Q}, \\ \mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{H} &= -\mathbf{A}_R\mathbf{H}_R, \\ \mathbf{D}\mathbf{q} &= \mathbf{h} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{D}_{jj} = c_j |q_j|^{\alpha-1}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.20)$$

<sup>5</sup>s. z.B. Lindner (1992, Gl. (38.4), S.365)

Durch Einführung des partitionierten Vektors  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$  lässt sich die Lösung der Gleichungen (2.20) auf der vorherigen Seite auf die Bestimmung der Nullstellen folgender Funktion zurückführen:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{x}) & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R \\ -\mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Gleichungssystem (2.21) für die  $m+n$  Unbekannten in  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{H}$  kann auf zwei unterschiedlichen Wegen reduziert werden, je nachdem, ob die in  $\mathbf{D}$  enthaltenen hydraulischen Gleichungen in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  oder  $\mathbf{h}$  gewählt werden. Im Weiteren soll für den ersten Fall die Bezeichnung  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{q})$  und für den zweiten  $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{h})$  gelten.

### 2.2.6.2 Maschengleichung

Auf Grund der Definitionen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  (Def. 2.2 auf Seite 9, Def. 2.7 auf Seite 11) gilt  $\mathbf{A}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}$  und damit  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$  (Nielsen, 1989). Multiplikation des oberen Teils von Gl. (2.21) mit  $\mathbf{C}^T$  ergibt das Gleichgewicht der Druckhöhenverluste entlang einer Schleife:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{q} + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{H} + \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C}^T (\mathbf{D} \mathbf{q} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R) = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Diese Formulierung ist unabhängig von  $\mathbf{H}$ , für die  $m$  Unbekannten in  $\mathbf{q}$  stehen  $l = m - n + 1$  Gleichungen zur Verfügung, was der Zahl der Schleifen entspricht. Das GLS ist unterbestimmt.

Die Flussverteilung  $\mathbf{q}$  kann als Summe aus der Flussverteilung einer beliebigen im Gitternetz enthaltenen Baumstruktur  $\mathbf{q}_t$  und dem Schleifenflussvektor  $\mathbf{u}$  angegeben werden:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}. \quad (2.23)$$

Zur Berechnung der Flüsse  $\mathbf{q}_t$  ist ein Knoten der Baumstruktur als Potenzialknoten (Bezugsknoten) zu wählen. Die Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}_t$  der Bedarfsknoten der Baumstruktur ist damit invertierbar. Der Vektor  $\mathbf{q}_t$  kann nach Gleichung (2.18) auf der vorherigen Seite berechnet werden:

$$\mathbf{q}_t = [\mathbf{A}_t^T]^{-1} \mathbf{Q}. \quad (2.24)$$

Die so bestimmten Flüsse  $\mathbf{q}$  erfüllen den unteren Teil von Gl. (2.21) unabhängig von der Wahl von  $\mathbf{u}$ . Die stationäre Berechnung reduziert sich damit auf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems in den Variablen  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{q}_t + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Gl. (2.25) auf der vorherigen Seite drückt die so genannte Maschenbedingung entsprechend dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz der Elektrotechnik<sup>6</sup>, auch Maschensatz genannt, aus: Die Summe der Druckverluste entlang einer Schleife muss den Wert Null ergeben.

### 2.2.6.3 Knotengleichung

Alternativ zu der Berechnung nach Kap. 2.2.6.2 kann die hydraulische Gleichung dazu verwendet werden, den Vektor der unbekanntes Flüsse  $\mathbf{q}$  aus Gl. (2.21) zu eliminieren. Beziehung  $\mathbf{A}\mathbf{H} = -\mathbf{D}\mathbf{q} - \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R$  aus Gl. (2.20) kann unter der Voraussetzung  $\mathbf{D}_{jj} \neq 0$  nach  $\mathbf{q}$  aufgelöst und in die Kontinuitätsgleichung (unterer Teil von Gl. (2.21)) eingesetzt werden. Als Resultat folgt die Gleichung der stationären Rohrnetzrechnung in den Variablen  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_R\mathbf{H}_R = -\mathbf{Q}. \quad (2.26)$$

### 2.2.6.4 Numerische Berechnung der nichtlinearen Gleichungen

Zahlreiche Autoren haben sich bislang mit der hydraulischen Simulation von vermaschten Wasserversorgungsnetzen beschäftigt. Ein für die Handrechnung geeignetes Verfahren zur Auflösung der nichtlinearen Gleichungen wird erstmals von Cross (1936) angegeben, bei dem basierend auf einer Anfangslösung, welche die Knotengleichungen erfüllt, schleifenweise Korrekturflüsse berechnet werden. Diese werden zur bisherigen Flussverteilung addiert und die Iteration solange durchgeführt bis Konvergenz erreicht ist. Alternativ können Anfangsschätzungen der Knotenpotenziale vorgenommen und diese mit Hilfe der Mengengleichgewichtsbedingungen an den Knoten bis zur Konvergenz korrigiert werden. Epp und Fowler (1970) führen zur simultanen Lösung der nichtlinearen Maschengleichungen das Newton-Verfahren ein. Berghout und Kuczera (1997) linearisieren stückweise die hydraulischen Beziehungen der einzelnen Rohre, wodurch die Berechnung der Lösung der ursprünglich nichtlinearen Aufgabe mit Hilfe der linearen Programmierung möglich wird. Weitere Literatur zum Thema ist unter anderen bei Martin und Peters (1963), Shamir und Howard (1968), Kesavan und Chandrashekar (1972), Lam und Wolla (1972a,b), Rahal (1994) und Wood und Funk (1993a) zu finden. Ein Teil der Autoren verwendet die Darstellung nach Kap. 2.2.6.2, während der andere die Alternative nach Kap. 2.2.6.3 bevorzugt.

<sup>6</sup>s. z.B. Lindner (1992, Gl. (38.11), S.367)

Bevor in Kap. 2.3 Fragen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichungen der stationären Rohrnetzrechnung beantwortet werden, soll kurz auf die den Tagesgang betreffende hydraulische Simulation eingegangen werden.

### 2.2.7 Simulation des dynamischen hydraulischen Verhaltens

Im Rahmen der bis hier beschriebenen stationären Rohrnetzrechnung wurde von konstanten Parametern des Modells ausgegangen. Im realen System existierende Tagesganglinien der Behälterfüllhöhen und Verbrauchswerte schwanken. Durch die dynamische<sup>7</sup> Rohrnetzrechnung wird versucht, diese Änderungen zu erfassen. In der Regel werden Simulationsrechnungen über Tages- oder Wochenzyklen durchgeführt, die in Zeitstufen, z.B. Stundenintervalle, diskretisiert sind.

Die Tagesganglinien der Verbrauchswerte werden zu Beginn der dynamischen Berechnung festgelegt. Damit ist für jede Zeitstufe  $t$  ein Vektor der Bedarfswerte  $\mathbf{Q}_t$  gegeben. Die Behälterfüllhöhen  $\mathbf{H}_{R,t}$  dagegen können nicht a priori angegeben werden, sondern erfordern zu ihrer Bestimmung Simulationsrechnungen. Zum Zeitpunkt  $t$  seien die Füllhöhen bekannt. Dann liefert die stationäre Rohrnetzrechnung Einspeise- und Füllmengen  $Q_{R,t}$  der einzelnen Behälter. Unter Berücksichtigung des Mengenausgleichs im Gesamtsystem über den Zeitraum  $\Delta t$

$$\Sigma V_{in} = \Sigma V_{out} + \Sigma V_R \quad (2.27)$$

und der Geometrie der einzelnen Behälter ergibt sich die Füllhöhe zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  z.B für einen quaderförmigen Speicher mit Grundfläche  $F$  zu:

$$H_{R,t+\Delta t} = H_{R,t} + \frac{Q_{in}}{F} \Delta t. \quad (2.28)$$

Der Fehler, der durch diese Diskretisierung der Differenzialgleichung der Füllkurve

$$\frac{\partial H_R}{\partial t} = \frac{Q_{in}(t)}{A(t)} \quad (2.29)$$

entsteht, wird entweder vernachlässigt<sup>8</sup> oder kann durch zusätzliche iterative Korrektur der Füllhöhe innerhalb der Zeitstufe verringert werden. Detaillierte Beschreibungen der Verfahren sind z.B. bei Bhawe (1988b, 1991) und Cembrowicz (1990) zu finden.

<sup>7</sup>Im technischen Sprachgebrauch impliziert das Wort 'Dynamik', dass Beschleunigungskräfte zu berücksichtigen sind. In dieser Anwendung sind diese wegen der geringen Fließgeschwindigkeiten in Versorgungsnetzen vernachlässigbar. Im Englischen wird in diesem Zusammenhang deshalb neben *dynamic simulation* auch von *extended time period simulation*, *extended time period analysis* gesprochen.

<sup>8</sup>z.B. EPANET

Weitere dynamische Änderungen der Modellparameter können durch Steuerentscheidungen bedingt sein. Davon sind hauptsächlich Schieberstellungen und Pumpendrehzahlen betroffen. Wie die Verbrauchswerte der Bedarfsknoten sind die entsprechenden Größen zu Beginn der Simulation für jede Zeitstufe einzeln anzugeben.

## 2.3 Variationsprinzipie in der hydraulischen Simulation

### 2.3.1 Nichtlineare Optimierung ohne Nebenbedingungen

Die stationäre Rohrnetzrechnung lässt sich alternativ zu den Gleichgewichtsbetrachtungen des vorherigen Abschnittes als Minimierungsproblem formulieren, dessen Herleitung über Variationsprinzipie in den Kapiteln 2.3.2 und 2.3.3 dargestellt ist. Die Minimierung erfolgt mit Methoden der Nichtlinearen Optimierung, deren Grundlagen hier kurz für den Fall ohne Nebenbedingungen angeführt sind.

Allgemein gilt:

Gegeben seien der normierte Raum  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  und das Funktional  $f(\mathbf{x})$  mit den Argumentfunktionen  $x_i = u(\xi_i)$ . Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Minimums  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$  von  $f(\mathbf{x})$  ist das Verschwinden der ersten Variation:

$$\delta f(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (2.30)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird es genügen, sich auf den Spezialfall  $x_i = u(\xi_i) = \text{const}$  zu beschränken. D.h. bei den Argumenten handelt es sich um Variablen, die nicht von einer weiteren Größe abhängig sind<sup>9</sup>. Dann sind  $\mathbf{X}$  ein Vektorraum,  $\mathbf{x}$  ein Vektor und  $f(\mathbf{x})$  eine Funktion.

Sei weiter  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  und  $f(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar in  $\mathbf{R}^n$ . Dann ist die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt  $\mathbf{x}^*$  gleichbedeutend mit der Variationsgleichung:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \delta \mathbf{x} = 0, \quad (2.31)$$

wobei  $\nabla f(\mathbf{x}^*)$  als Gradient von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}^*$  bezeichnet wird. Für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{x}$  ist die Bedingung in Gl. (2.31) nur dann erfüllt, wenn gilt:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

---

<sup>9</sup>In der hydraulischen Simulation wird der Gradient des Druckverlustes entlang eines Stranges als konstant angenommen.

Hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Minimums in  $\mathbf{x}^*$  bei zweimal stetig differenzierbarer Zielfunktion  $f(\mathbf{x})$  ist die positive Definitheit der Hessematrix  $H(\mathbf{x}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ . Ist die positive Definitheit der Hessematrix  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  gegeben, folgt daraus, dass  $f(\mathbf{x})$  strikt konvex<sup>10</sup> ist in ganz  $\mathbf{R}^n$ . Die notwendige Bedingung  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  ist für diesen Sonderfall hinreichend für ein globales Minimum von  $f(\mathbf{x})$ .

Falls die zweimalige Differenzierbarkeit von  $f(\mathbf{x})$  nicht gegeben ist, garantieren Stetigkeit und strikte Konvexität von  $f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  zusammen mit Koerzitivität ( $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \infty$ ) die Existenz einer globalen, eindeutigen Lösung des unrestringierten Minimierungsproblems:

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Variationsprinzip für nichtlineare Netzwerke nach Birkhoff (1963)

Birkhoff und Diaz (1956) (s. a. Birkhoff, 1963) zeigen, dass die Berechnung des stationären Gleichgewichtszustandes der hydraulischen Simulation vermaschter Druckrohrnetze unter Berücksichtigung des ersten und zweiten Kirchhoffschen Gesetzes der Minimierung eines konvexen Funktionals äquivalent ist. Die hydraulischen Gleichungen, welche die bilaterale Beziehung zwischen Druckverlust und Durchfluss in einem Rohr beinhalten, müssen dabei neben Monotonie (Voraussetzung 2.1 b)) die Eigenschaft der Stetigkeit (Teil a) in Voraussetzung 2.1 auf Seite 8) aufweisen, woraus die Differenzierbarkeit des oben genannten übergeordneten konvexen Funktionals folgt.

Drei unterschiedliche Typen von Randbedingungen an den Knoten werden von Birkhoff und Diaz (1956) unterschieden:

- I) An allen Knoten mit Zu- oder Abfluss ist die Potenzialhöhe konstant gegeben (Dirichlet-Problem),
- II) an allen Knoten mit Zu- oder Abfluss ist die Bedarfsmenge konstant gegeben (Neumann-Problem),
- III) Bedarfsmenge ist als Funktion der Potenzialhöhe  $Q = F_H(H)$  gegeben (gemischtes Problem, enthält als Sonderfall II)).

---

<sup>10</sup>siehe Def. 3.6 auf Seite 35

Betrachtet wird zunächst die Funktion  $\Pi$ :<sup>11</sup>

$$\Pi = \sum_{j=1}^m W_j + \sum_{i=1}^n V_i. \quad (2.34)$$

Die Größen  $W_j$  im Rohr  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) und  $V_i$  am Knoten  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit unbekannter Potenzialhöhe sind dabei definiert als die Integrale<sup>12</sup>

$$W_j = \int_0^{h_j} d_j^{-1} h_j = \int_0^{h_j} (c_j^{-1} |x|)^{1/\alpha} \text{sign}(x) dx = \frac{\alpha}{\alpha + 1} (c_j^{-1} |h_j|)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (2.35)$$

und

$$V_i = - \int_0^{H_i} F_{H,i}(x) dx. \quad (2.36)$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Minimalstelle  $\mathbf{H}^*$  von  $\Pi$  liefert die Variationsgleichung

$$\delta\Pi = \sum_{j=1}^m d_j^{-1} h_j \delta h_j - \sum_{i=1}^n F_{H,i} \delta H_i = 0. \quad (2.37)$$

Birkhoff (1963) zeigt (Theorem 1), dass die Bedingung  $\delta\Pi = 0$  den Knotengleichgewichtsbedingungen (entsprechend Gl. (2.18) auf Seite 21, wobei hier die Bedarfswerte  $\mathbf{Q}$  auch Funktionen des Potentials am Knoten sein dürfen) äquivalent ist. Sind die hydraulischen Gleichungen  $q_j = d_j^{-1} h_j, j = 1, 2, \dots, m$  monoton wachsend und  $F_{H,i}, i = 1, 2, \dots, n$  monoton fallend, ist  $\Pi$  konvex (Birkhoff, 1963, Theorem 2). Gilt für beide strikte Monotonie, so ist  $\Pi$  sogar strikt konvex (Birkhoff, 1963, Theorem 3). In diesem Fall existiert somit maximal eine Lösung des Problems (Birkhoff, 1963, Corollary Theorem 3).

Um die Existenz einer Lösung abzusichern, genügt es zu zeigen, dass  $\lim_{\|\mathbf{H}\| \rightarrow \infty} \Pi(\mathbf{H}) = +\infty$  gilt. Hinreichend dafür ist wiederum, dass für die einzelnen Anteile  $\lim_{|h_j| \rightarrow \infty} W_j(h_j) = +\infty, j = 1, 2, \dots, m$  und  $\lim_{|H_i| \rightarrow \infty} V_i(H_i) = +\infty, i = 1, 2, \dots, n$  gelten (die Druckverluste  $\mathbf{h}$  lassen sich mit Hilfe von Gl. (2.19) auf Seite 21 durch die Potenzialhöhen  $\mathbf{H}$  ausdrücken). Für die Existenz eines Minimums von  $\Pi$  genügt es damit, dass die monoton wachsenden hydraulischen Funktionen  $q_j = d_j^{-1} h_j, j = 1, 2, \dots, m$  und die monoton fallenden Funktionen  $F_{H,i}, i = 1, 2, \dots, n$  beide Vorzeichen annehmen (Birkhoff, 1963, Theorem 4). Sind die genannten Funktionen zudem stetig, so existiert eine Lösung der Aufgabe der stationären Rohrnetzrechnung (Birkhoff, 1963, Corollary Theorem 4).

<sup>11</sup>Die Bezeichnungen V und W sind im Gegensatz zu Birkhoff (1963) vertauscht.

<sup>12</sup>in Abb. 2.8 auf der nächsten Seite Fläche unterhalb der Kurve  $q_j = f(h_j)$

### 2.3.3 Minimierung der 'Content' - und 'Co-Content' -Funktionen

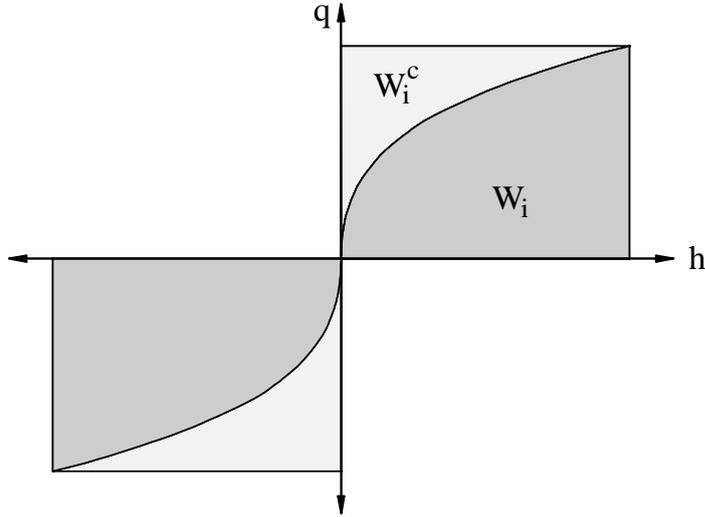


Abbildung 2.8: 'Co-Content'  $W$  und 'Content'  $W^c$  eines Druckrohres (Index  $j$ )

Aufbauend auf die Arbeiten von Cherry (1951) und Millar (1951), die sich mit der Berechnung elektrischer Netzwerke beschäftigen, übertragen Collins u. a. (1978) die Aufgabe der Minimierung der sogenannten 'Content' - und 'Co-Content' -Funktionen auf die hydraulische Simulation. Die Minimierung des 'Co-Content' entspricht dabei dem Variationsprinzip von Birkhoff (1963). Der 'Co-Content' der Netzbestandteile ist durch die Integrale  $W_j$  in Gl. (2.35) gegeben. In der Notation von Kap. 2.2.6 lautet die Aufgabe der Minimierung des 'Co-Content'  $\Pi : \mathbf{R}^n \mapsto R$ :

$$\min_{\mathbf{H}} \Pi(\mathbf{H}) \quad (2.38)$$

mit

$$\Pi = \frac{\alpha}{\alpha + 1} [\mathbf{H}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R)] + \mathbf{H}^T \mathbf{Q}.$$

Eine Minimalstelle  $\mathbf{H}^*$  von  $\Pi$  muss notwendig die Variationsgleichung

$$\delta \Pi = \nabla \Pi(\mathbf{H}^*)^T (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n \quad (2.39)$$

erfüllen, wobei  $\mathbf{H} - \mathbf{H}^*$  eine Variation  $\delta \mathbf{H}$  bezeichnet. Nach Kap. 2.3.1 ist die Bedingung in Gl. (2.39) für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{H}$  erfüllt, wenn

$$\nabla \Pi = \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H} + \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

gilt. Gleichung (2.40) entspricht dem Knotengleichgewicht (Gl. (2.26) auf Seite 23). Die Minimierung der 'Co-Content'-Funktion ist somit der stationären Rohrnetzrechnung äquivalent (vgl. Collins u. a., 1978, proposition 2). Voraussetzung 2.1 a) garantiert die Differenzierbarkeit der Zielfunktion  $\Pi(\mathbf{H})$ , Voraussetzung 2.1 b) ist hinreichend für die (strikte) Konvexität von  $\Pi(\mathbf{H})$  (vgl. Collins u. a., 1978).

Zur Berechnung der 'Content'-Funktion  $\Pi^c : \mathbf{R}^l \mapsto R$  werden die Integrale<sup>13</sup>  $W_j^c$  der einzelnen Rohre  $j = 1, \dots, m$  benötigt:

$$W_j^c = \int_0^{q_j} c_j |x|^{\alpha-1} x dx = \frac{1}{\alpha+1} c |q_j|^{\alpha-1} q_j^2. \quad (2.41)$$

Im Unterschied zu Collins u. a. (1978) wird in dieser Arbeit die Kontinuitätsbedingung Gl. (2.18) auf Seite 21 nicht als Nebenbedingung der Minimierungsaufgabe des 'Content' in den Variablen  $\mathbf{q}$  berücksichtigt, sondern es wird von einer Flussverteilung (z.B. die zu einer im Gitter enthaltenen Baumstruktur gehörige), welche die Kontinuität erfüllt, ausgegangen und die Minimierungsaufgabe in den Schleifenflussvariablen entsprechend Kap. 2.2.6.2 formuliert. Die Minimierungsaufgabe des System-'Content' kann damit angegeben werden:

$$\min_{\mathbf{u}} \Pi^c \quad (2.42)$$

mit

$$\Pi^c = \sum_{j=1}^m W_j^c + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R = \frac{1}{\alpha+1} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R.$$

Eine Lösung  $\mathbf{u}^*$  der Aufgabe muss notwendig die Variationsgleichung

$$\delta \Pi^c = \nabla \Pi^c(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l \quad (2.43)$$

erfüllen, was für beliebige Variationen  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$  bedeutet, dass  $\mathbf{u}^*$  Lösung des folgenden Gleichungssystems ist:

$$\nabla \Pi^c(\mathbf{u}) = \mathbf{C}^T [\mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

Gl. (2.44) entspricht der Maschenbedingung in Gl. (2.25) auf Seite 22. Die Minimierung des System-'Content' ist der Berechnung des stationären hydraulischen Gleichgewichts äquivalent (vgl. Collins u. a., 1978, proposition 1). Voraussetzungen 2.1 a) und b) garantieren die Differenzierbarkeit und (strikte) Konvexität von  $\Pi^c$  (Collins u. a., 1979).

<sup>13</sup>in Abb. 2.8 Fläche oberhalb der Kurve  $q = f(h)$

Sowohl die Aufgabe der Minimierung des System- 'Content' als auch die der Minimierung des System- 'Co-Content' besitzen eine eindeutige Lösung:

Wenn in Voraussetzung 2.1 b) strikte Monotonie der hydraulischen Gleichungen gefordert wird, garantiert die daraus resultierende strikte Konvexität von  $\Pi$  und  $\Pi^c$ , dass maximal eine Lösung existieren kann. Durch die Stetigkeit und Koerzitivität von  $\Pi$  ( $\lim_{\|\mathbf{H}\| \rightarrow \infty} \Pi = +\infty$ ) und  $\Pi^c$  ( $\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow \infty} \Pi^c = +\infty$ ) ist jeweils die Existenz einer eindeutigen Lösung der beiden Aufgaben sichergestellt.

### 2.3.4 Dualität zwischen $\Pi$ und $\Pi^c$

Befindet sich ein Rohrsystem in einem hydraulischen Gleichgewichtszustand  $(\Pi^*, \mathbf{H}^*, \Pi^{c*}, \mathbf{u}^*)$ , erfüllen 'Content' und 'Co-Content' nach Addition der Integrationskonstanten  $-\mathbf{H}_{ref}^T \mathbf{Q}$  zu  $\Pi$  in Gl. (2.38) auf Seite 28 die Bedingung

$$\begin{aligned} \Pi^{c*} + \Pi^* &= \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbf{H}^{*T} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{A} \mathbf{H}^* + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \mathbf{H}^{*T} \mathbf{Q} - \mathbf{H}_{ref}^T \mathbf{Q} + \\ &\quad \frac{1}{\alpha+1} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}^*) + \mathbf{u}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Gl. (2.45) drückt die Dualität zwischen den Minimierungsaufgaben von  $\Pi$  und  $\Pi^c$  aus und besagt, dass die dem System pro Zeiteinheit zugeführte Energie  $E_{in}$  verringert um die durch Reibung in Wärmeenergie umgewandelte 'Verlustenergie'  $E_v$  der dem System entnommenen Energie entsprechen muss:

$$E_v = E_{in} - E_{out}, \quad (2.46)$$

mit:

$$\begin{aligned} E_v &= \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbf{H}^{*T} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{A} \mathbf{H}^* + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \frac{1}{\alpha+1} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}^*) = \mathbf{h}^{*T} \mathbf{q}^*, \\ E_{in} - E_{out} &= \mathbf{H}_{ref}^T \mathbf{Q} - \mathbf{H}^{*T} \mathbf{Q} - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R. \end{aligned}$$

Für beliebige Zustände  $(\Pi, \mathbf{H}, \Pi^c, \mathbf{u})$  außerhalb des Gleichgewichts gilt die Ungleichung (Panagiotopoulos, 1976)

$$\Pi \geq \Pi^* = -\Pi^{c*} \geq -\Pi^c. \quad (2.47)$$

## 2.4 Zusammenfassung

Zunächst wurde die Abbildung eines Wasserversorgungsnetzes als Graphen erläutert. Eine Untergliederung in die Zusammenhangskomponenten Wald, Gitter und Pfade wurde vorgestellt und die Berechnung der Flussverteilung im Wald aus einem linearen

Gleichungssystem angegeben. Zur Berechnung der Flussverteilung im Gitter werden zusätzlich Kompatibilitätsbetrachtungen der Druckverluste benötigt, weshalb ein Überblick über die gebräuchlichsten Gleichungen zur Berechnung von Reibungsverlusten in hydraulisch rauen Rohren gegeben wurde.

Das Gleichungssystem - bestehend aus Kontinuität, Kompatibilität und hydraulischen Gleichungen - zur Flussberechnung des gesamten Gitternetzes wurde aufgestellt und zwei unterschiedliche Verfahren zur Reduzierung der Zahl der Unbekannten vorgestellt. Diese resultierten in den sogenannten Knoten- und Maschengleichungen zur Fluss- und Druckberechnung in Netzwerken.

Als Alternative wurde das mathematische Modell der stationären Durchflussberechnung vermaschter Druckrohrnetze als Minimierungsproblem entwickelt. Die Existenz einer eindeutigen Flussverteilung für Netze ohne Kontrollarmaturen unter der Voraussetzung 2.1 auf Seite 8 wurde gezeigt. Diese lässt sich als Lösung eines nichtlinearen, unrestringierten Minimierungsproblems mit streng konvexer Zielfunktion in den Variablen Potenzialhöhen  $\mathbf{H}$  (Gl. (2.38) auf Seite 28) oder Schleifenkorrekturflüssen  $\mathbf{u}$  (Gl. (2.42) auf Seite 29) formulieren. Zur numerischen Behandlung der Aufgabe bieten sich Methoden der Nichtlinearen Optimierung und Lösungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen nichtlinearer Funktionen (z.B. Newton-Raphson-Verfahren) an.

In realen Wasserversorgungsnetzen finden Kontrollarmaturen Anwendung, deren Berücksichtigung im Modell eine Abschwächung der Voraussetzung 2.1 auf Seite 8 erforderlich macht. Bevor im vierten Kapitel die gebräuchlichsten Armaturen beschrieben und eine Erweiterung des mathematischen Modells vorgestellt werden, definiert das folgende Kapitel die dazu benötigten mathematischen Grundlagen.

# Kapitel 3

## Mathematische Grundlagen

### 3.1 Überblick

Um die Berücksichtigung von Armaturen, die einseitigen Bindungen unterworfen sind oder deren hydraulische Gleichung nicht stetig ist, im mathematischen Modell der stationären hydraulischen Berechnung von Wasserversorgungsnetzen zu ermöglichen, wird die Subdifferenzialrechnung (Rockafellar, 1970; Rockafellar und Wets, 1998; Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993) verwendet. Die Berechnung des stationären Fließzustandes vermaschter Druckrohrnetze bei gegebenen hydraulischen Beziehungen, für die bestimmte Voraussetzungen gelten, aber nicht notwendig durch klassische Funktionsvorschriften gegeben sind, soll durch die Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe erreicht werden, die mit Methoden der Konvexen Analysis bearbeitet werden kann.

Wie bereits im zweiten Kapitel erläutert wurde, wird zur hydraulischen Simulation ein Druckrohrnetz als vermaschtes Netzwerk, bestehend aus Knoten und Strängen, abgebildet. Einspeisungen und Entnahmen finden nur an den Knoten statt. Durchfluss und Gradient des Druckverlustes in einem Rohr werden entlang der Verbindung zweier Knoten, dem Strang, als konstant angenommen. Eine Diskretisierung des Problems ist damit bereits gegeben. Im Unterschied zu analogen mechanischen Problemen (z.B. Panagiotopoulos, 1976, 1977), bei denen die gesuchten Größen<sup>1</sup> Funktionen des Ortes sind und damit die Behandlung auf abstrakten Räumen und Funktionalebene nötig ist, gilt in der hydraulischen Simulation die Minimierung einer vektorwertigen Funktion (vgl. Kap. 2.3.1). Der Arbeitsbereich ist der  $\mathbf{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>z.B. Spannungen und Dehnungen

Definitionen und Sätze, auf die verwiesen wird und die sich teilweise im Original auf Funktionale und abstrakte topologische Räume beziehen, wurden in der ursprünglichen allgemeineren Form übernommen. Der Begriff Funktional kann für die vorliegende Arbeit durch Funktion ersetzt werden. Umgekehrt gelten viele der auf Funktionen und den  $\mathbf{R}^n$  bezogenen Aussagen auch für Funktionale, wozu an dieser Stelle jedoch auf Literatur der Funktionalanalysis verwiesen wird.

Im Folgenden werden die für die weitere Arbeit wesentlichen Eigenschaften konvexer Mengen (Kap. 3.2) und Funktionen (Kap. 3.3) vorgestellt. Für eine ausführlichere Darstellung wird auf die Literatur verwiesen (Rockafellar, 1970; Rockafellar und Wets, 1998; Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993). Große Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang monotonen (mehrdeutigen) Abbildungen zu (Kap. 3.4). In Kap. 3.5 werden die Grundaufgabe der Konvexen Optimierung definiert und alternative Formulierungen gegeben. Notwendige und hinreichende Bedingungen für eine globale Lösung der Aufgabe folgen anschließend.

## 3.2 Konvexe Mengen

**Definition 3.1** *Eine Teilmenge  $\mathbf{C}$  des  $\mathbf{R}^n$  heißt konvex, wenn für zwei beliebige Punkte  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$  und  $0 < \lambda < 1$*

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in \mathbf{C}$$

gilt. Anschaulich bedeutet Definition 3.1, dass die Punkte der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte einer konvexen Menge ebenfalls zur konvexen Menge gehören. Beispiele für konvexe Mengen sind Punkte, Strecken, alle affinen Mengen  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\}$  und Halbräume  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \leq \beta\}$  mit gegebenen  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  und  $\beta \in \mathbf{R}$ . Im folgenden Satz werden Eigenschaften konvexer Mengen zusammengefasst, insbesondere Operationen auf konvexen Mengen, unter denen die Konvexität erhalten bleibt (zum Beweis siehe u.a. Rockafellar, 1970; Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, section 3,4; Kap. III).

**Satz 3.1** (a) *Die Schnittmenge  $\mathbf{C} = \bigcap_{i \in \mathbf{I}} \mathbf{C}_i$  konvexer Mengen  $\mathbf{C}_i$  ist konvex.*  
 (b) *Die Summe  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}_2\}$  zweier konvexer Mengen  $\mathbf{C}_1 \in \mathbf{R}^n, \mathbf{C}_2 \in \mathbf{R}^n$  ist konvex.*

(c) Skalarmultiplikation der konvexen Menge  $\mathbf{C}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  ergibt die konvexe Menge

$$\lambda\mathbf{C} = \{\lambda\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}.$$

□

Eine Menge, die aus der Schnittmenge endlich vieler Halbräume besteht, ist nach Teil a) von Satz 3.1 auf der vorherigen Seite konvex und wird polyhedrale Menge genannt. Wesentlich für die weiteren Betrachtungen wird die durch eine endliche Anzahl von linearen Gleichungen und Ungleichungen definierte Menge sein.

**Satz 3.2** Seien  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{s \times n}$  und  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d \times n}$  reelle Matrizen,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^s$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Die Menge

$$\mathbf{C}_{PS} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0}, \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{h} = \mathbf{0}\}$$

ist eine polyhedrale konvexe Menge.

**Beweis :**

Da jede lineare Gleichung  $ax - b = 0$  auch durch zwei Ungleichungen  $ax - b \leq 0$  und  $ax - b \geq 0$  ausgedrückt werden kann, ist jede affine Menge, insbesondere  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{h} = \mathbf{0}\}$  polyhedral. Wegen Satz 3.1 (a) ist dann  $\mathbf{C}_{PS}$  als Schnittmenge konvexer Mengen konvex. □

**Definition 3.2** Eine Menge  $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$  wird Kegel genannt, wenn für  $\lambda > 0$  gilt:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{K} \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in \mathbf{K}.$$

Folgt aus  $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{K}$  und  $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{K}$  zusätzlich  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbf{K}$ , dann heißt  $\mathbf{K}$  konvexer Kegel.

Ein Kegel ist die Vereinigung aller am Ursprung beginnenden Halbgeraden. Der Kegel muss dabei keine 'Spitze' am Ursprung bilden. So sind die Teilräume, welche aus durch den Ursprung verlaufenden Hyperebenen gebildet werden, zu den Kegeln zu zählen. Ein Beispiel für einen konvexen Kegel ist der nichtnegative Orthant  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .

Sind die Ungleichungen und Gleichungen, welche die Menge  $\mathbf{C}_{PS}$  aus Satz 3.2 definieren, homogen ( $g_i = 0, i = 1, \dots, s; h_j = 0, j = 1, \dots, d$ ), dann beschreibt die Menge  $\mathbf{C}_{PS}$  einen polyhedralen konvexen Kegel.

Oft ist die Approximation einer Menge  $\mathbf{M}$  in der Nähe eines Punktes  $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$  durch eine leichter darzustellende Menge hilfreich. Zur Repräsentation einer abgeschlossenen konvexen Menge  $\mathbf{C}$  im Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$  werden deshalb der Tangentenkegel  $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$  und der Normalenkegel  $\mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$  definiert.

**Definition 3.3** *Der Tangentenkegel  $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$  einer abgeschlossenen konvexen Menge  $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$  ist der Abschluss des Kegels, der durch alle zulässigen Richtungen  $\mathbf{C} - \mathbf{x}$  gebildet wird:*

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = cl \{ \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{d} = \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \alpha \geq 0 \}.$$

**Definition 3.4** *Sei  $\mathbf{K}$  ein konvexer Kegel. Der zu  $\mathbf{K}$  polare Kegel ist*

$$\mathbf{K}^\circ := \{ \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{K} \}.$$

Mit Definition 3.4 kann der zu  $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$  duale Kegel  $\mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})]^\circ$  angegeben werden:

**Definition 3.5** *Sei  $\mathbf{C}$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  und  $\mathbf{x} \in cl\mathbf{C}$ . Dann heißt*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leq 0 \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C} \}$$

*Normalenkegel an  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{x}$ .*

## 3.3 Konvexe Funktionen

### 3.3.1 Eigenschaften konvexer Funktionen

Nach der kurzen Abhandlung über konvexe Mengen werden nun konvexe Funktionen näher betrachtet.

**Definition 3.6** *Sei  $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$  nichtleer und konvex. Eine Funktion  $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}$  heißt konvex über  $\mathbf{C}$ , wenn für alle Paare  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$  und alle  $\alpha \in (0, 1)$*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

gilt. Die Menge aller konvexen Funktionen  $f : \mathbf{R}^n \mapsto R$  wird mit  $\text{Conv } \mathbf{R}^n$  bezeichnet.  $f$  heißt strikt konvex, wenn für  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$  strikte Ungleichheit ( $'<'$  statt  $'\leq'$ ) gilt. Wenn sogar

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{1}{2} c \alpha (1 - \alpha) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2$$

gilt mit  $c > 0$ , wird  $f$  streng konvex über  $\mathbf{C}$  genannt.

Wird der Wertebereich der Funktion  $f$  von  $R$  erweitert auf  $\bar{R} = R \cup +\infty$ , kann die Gültigkeit der Funktion  $f$  von  $\mathbf{C}$  auf den Gesamttraum  $\mathbf{R}^n$  erweitert werden, indem  $\forall \mathbf{x} \notin \mathbf{C}$  der Funktionswert  $f(\mathbf{x}) = +\infty$  gesetzt wird. Jede konvexe Menge  $\mathbf{C}$  ist so analytisch durch ihre Indikatorfunktion  $I_{\mathbf{C}} : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{R}$  mit

$$I_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n \\ \infty & \text{für } \mathbf{x} \notin \mathbf{C} \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (3.1)$$

darstellbar. Ebenso ist der umgekehrte Weg möglich. Jede konvexe Funktion kann durch ihren *Epigraphen* als konvexe Menge dargestellt werden.

**Definition 3.7** Sei  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{R}$  eine konvexe Funktion. Die Menge

$$\text{epi } f = \{(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times R \mid f(\mathbf{x}) \leq \lambda\}$$

heißt *Epigraph* von  $f(\mathbf{x})$ .

Für  $f \not\equiv -\infty$  gilt  $\text{epi } f$  ist konvex  $\Leftrightarrow f$  ist konvex (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, IV. Proposition 1.1.6).

**Definition 3.8** Die Projektion des Epigraphen  $\text{epi } f$  einer Funktion  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{R}$  auf  $\mathbf{R}^n$  wird effektives Definitionsgebiet von  $f$ , kurz  $\text{dom } f$ , genannt und ist folgendermaßen definiert:

$$\text{dom } f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < +\infty\}.$$

Die Menge  $\text{dom } f$  ist, als Abbildung über lineare Transformation aus der konvexen Menge  $\text{epi } f$  hervorgegangen, eine konvexe Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  (s. Rockafellar, 1970, Theorem 3.4).

Analog zur effektiven Definitionsmenge handelt es sich bei den Niveaumengen<sup>2</sup>  $\mathbf{S}_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$  um konvexe Mengen.

Funktionen mit nichtleerer effektiver Definitionsmenge werden zur Gruppe der *eigentlichen* Funktionen zusammengefasst.

<sup>2</sup>engl.: level-sets

**Definition 3.9** Eine konvexe Funktion  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{R}$  heißt *eigentlich*<sup>3</sup>, wenn  $f : \mathbf{R}^n \mapsto (-\infty, +\infty]$  und  $f(\mathbf{x}) \not\equiv \infty$  ist.

Bezüglich der Abgeschlossenheit der Epimenge einer Funktion  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \bar{R}$  spielt der Begriff der Unterhalbstetigkeit eine wichtige Rolle.

**Definition 3.10** Sei  $\mathbf{C}$  ein Vektorraum und  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$ . Ein Funktional  $f(\mathbf{x})$  heißt *unterhalbstetig*<sup>4</sup> im Punkt  $\mathbf{x}^*$ , wenn gilt (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, S. 388):

$$f(\mathbf{x}^*) \leq \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}).$$

**Satz 3.3** (Rockafellar, 1970, Theorem 7.1) Sei  $f$  eine beliebige Funktion  $\mathbf{R}^n \mapsto (-\infty, +\infty]$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $f(\mathbf{x})$  ist unterhalbstetig  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,
- (b)  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$  ist abgeschlossen  $\forall \alpha \in R$ ,
- (c) epi  $f$  ist eine abgeschlossene Menge in  $\mathbf{R}^{n+1}$ .  $f$  wird dann auch 'abgeschlossen' genannt.

Alle abgeschlossenen, konvexen Funktionen werden zur Menge  $\text{Conv } \mathbf{R}^n$  zusammengefasst. Für konvexe Funktionen kann eine Reihe von Operationen angegeben werden, unter welchen die Konvexität erhalten bleibt. Einige der wichtigsten sind im folgenden Satz zusammengefasst:

**Satz 3.4** (a) Die Summe  $f = f_1 + f_2$  zweier konvexer Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  ist konvex (Rockafellar, 1970, Theorem 5.2). (b) Das punktweise Supremum  $f(\mathbf{x}) = \sup \{f_i(\mathbf{x}) \mid i \in \mathbf{I}\}$  einer Menge  $\mathbf{I}$  konvexer Funktionen ist konvex.

### 3.3.2 Differenzierbarkeit

Zur Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriffs auf Funktionen, die nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind (Definition siehe z.B. Bronštejn und Semendjajew, 1987, S.274), werden verschiedene Konzepte der Differenzierbarkeit vorgestellt.

<sup>3</sup>engl.: proper

<sup>4</sup>engl.: lower semi-continuous, Abk.: l.s.c.

**Definition 3.11** Sei  $\mathbf{X}$  ein reeller Vektorraum und  $\bar{\mathbf{X}}$  ein reeller normierter Raum, sei weiter  $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S} \neq \emptyset$  und  $f : \mathbf{S} \mapsto \bar{\mathbf{X}}$  eine gegebene Abbildung. Wenn für zwei Elemente  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$  und  $\mathbf{d} \in \mathbf{X}$  der Grenzwert

$$f'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} \quad (3.2)$$

existiert, dann heißt  $f'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$  Richtungsableitung von  $f$  in  $\bar{\mathbf{x}}$  in Richtung  $\mathbf{d}$ . Existiert der Grenzwert für alle  $\mathbf{d} \in \mathbf{X}$ , heißt  $f$  richtungs-differenzierbar in  $\bar{\mathbf{x}}$  (Jahn, 1996, Definition 3.1).

Eine Aussage bezüglich der Existenz der Richtungsableitung von konvexen Funktionale liefert der folgende Satz:

**Satz 3.5** Sei  $\mathbf{X}$  ein reeller Vektorraum und  $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$  ein konvexes Funktional. Dann existiert in jedem  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$  und nach jeder Richtung  $\mathbf{d} \in \mathbf{X}$  die Richtungsableitung  $f'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$  (Beweis siehe Jahn, 1996, Theorem 3.4).

Eine strengere Differenzierbarkeitsaussage verkörpert die folgende Definition:

**Definition 3.12** Seien  $\mathbf{X}$  und  $\bar{\mathbf{X}}$  reelle normierte Räume,  $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S} \neq \emptyset$  und  $f : \mathbf{S} \mapsto \bar{\mathbf{X}}$  eine gegebene Abbildung. Wenn für beliebiges  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$  und alle  $\mathbf{d} \in \mathbf{X}$  der Grenzwert

$$f'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} \quad (3.3)$$

existiert, und wenn  $\mathbf{d} \mapsto f'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$  eine stetige, in  $\mathbf{d}$  lineare Abbildung von  $\mathbf{X}$  nach  $\bar{\mathbf{X}}$  ist, dann heißt  $f'(\bar{\mathbf{x}}, \cdot)$  Gâteaux-Ableitung von  $f$  in  $\bar{\mathbf{x}}$  und  $f$  Gâteaux-differenzierbar in  $\bar{\mathbf{x}}$  (Jahn, 1996, Definition 3.9).

Eine noch stärkere Aussage ist in der Fréchet-Ableitung enthalten:

**Definition 3.13** Seien  $\mathbf{X}$  und  $\bar{\mathbf{X}}$  reelle normierte Räume,  $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S} \neq \emptyset$  und  $f : \mathbf{S} \mapsto \bar{\mathbf{X}}$  eine gegebene Abbildung. Existiert eine lineare Abbildung  $f'(\bar{\mathbf{x}}) : \mathbf{X} \mapsto \bar{\mathbf{X}}$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0} \frac{\|f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - f'(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{h})\|_{\bar{\mathbf{X}}}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{X}}} = 0, \quad (3.4)$$

dann heißt  $f'(\bar{\mathbf{x}})$  Fréchet-Ableitung von  $f$  in  $\bar{\mathbf{x}}$  und  $f$  Fréchet-differenzierbar in  $\bar{\mathbf{x}}$  (Jahn, 1996, Definition 3.11).

Fréchet-Differenzierbarkeit beinhaltet die Gâteaux-Differenzierbarkeit. Ein weiteres Konzept, speziell für die Anwendung auf konvexe Funktionale entwickelt, stellt der Subdifferenzierbarkeitsbegriff dar:

**Definition 3.14** Ein Vektor  $\boldsymbol{\chi}$  heißt Subgradient der Funktion  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}$ , wenn  $f(\mathbf{x})$  endlich ist und die folgende Prämisse eingehalten ist:

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \geq \boldsymbol{\chi}^T(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n.$$

**Definition 3.15** Die Menge aller Subgradienten im Punkt  $\mathbf{x}$  wird Subdifferenzial  $\partial f(\mathbf{x})$  von  $f$  in  $\mathbf{x}$  genannt:

$$\partial f(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\chi} \mid f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \geq \boldsymbol{\chi}^T(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n\}.$$

Ist  $\partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ , dann heißt  $f$  subdifferenzierbar in  $\mathbf{x}$ .

Einen Zusammenhang zwischen Subdifferenzial und Richtungsableitung stellt der folgende Satz her:

**Satz 3.6** Sei  $\mathbf{X}$  ein reeller normierter Raum und  $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{R}$  ein stetiges, konvexes Funktional. Dann ist für beliebige  $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d} \in \mathbf{X}$  die Richtungsableitung von  $f$  in  $\bar{\mathbf{x}}$  in Richtung  $\mathbf{d}$  gegeben durch:

$$f'(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{d}) = \max \{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{d}) \mid \boldsymbol{\chi} \in \partial f(\bar{\mathbf{x}})\}. \quad (3.5)$$

Die Richtungsableitung im Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  ist gerade die kleinste obere Schranke für die Subgradienten. In Punkten  $\mathbf{x}$ , in denen  $f$  Gâteaux-differenzierbar ist, besteht das Subdifferenzial aus der einelementigen Menge (*singleton*)  $\partial f(\mathbf{x}) = \{\nabla f(\mathbf{x})\}$ . Enthält umgekehrt das Subdifferenzial nur ein Element  $\mathbf{s}$ , so ist  $f$  Fréchet-differenzierbar (und damit Gâteaux-differenzierbar) in  $\mathbf{x}$  mit  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{s}$ . In Punkten, in denen  $f$  nicht endlich ist ( $f(\mathbf{x}) = +\infty$ ), gilt  $\partial f(\mathbf{x}) = \emptyset$ ,  $f$  ist dann *nicht subdifferenzierbar* in  $\mathbf{x}$ .

## 3.4 Monotone Abbildungen

Bisher wurden Eigenschaften von Funktionalen erläutert, insbesondere unterschiedliche Differenzierbarkeitseigenschaften, die zur Charakterisierung eines Funktionals oder einer Funktion dienen und im Hinblick auf deren Minimierung von Bedeutung sind.

Mit der Konvexität einer Funktion verbunden sind stets gewisse Monotonieeigenschaften des Gradienten. Monotonie im eindimensionalen Fall  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  wird als monoton zunehmend bezeichnet, wenn  $f(y) \geq f(x) \forall y > x$  gilt. Entsprechende Charakteristika für mehrdimensionale Abbildungen sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

Oft wird in den Anwendungen, so auch in dieser Arbeit, der umgekehrte Weg zur Identifikation einer konvexen Funktion über die Monotonieeigenschaften des Gradienten (oder des Subdifferenzials) begangen. D.h. es sind monotone Abbildungen gegeben, denen ein konvexes Funktional zugeordnet werden kann. Besteht z.B. ein mechanisches System aus mehreren Komponenten, deren Spannungs-Verformungseigenschaften bestimmten Monotonieanforderungen genügen, können die somit konvexen Energiefunktionale der einzelnen Komponenten berechnet und wegen Teil a) in Satz 3.4 auf Seite 37 zum Gesamtpotenzial addiert werden. Die Gleichgewichtslage kann dann als Minimum des Gesamtpotenzials berechnet werden. Zusätzlich sind für nichtlineare Systeme Eindeutigkeitsaussagen möglich, wenn es sich um strikt konvexe Funktionale handelt.

**Definition 3.16** Sei  $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^n$  konvex. Die Abbildung  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbb{R}^n$  heißt pseudo-monoton wachsend in  $\mathbf{C}$ , wenn  $\forall \mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}$

$$\langle F(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0 \rightarrow \langle F(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0,$$

monoton wachsend in  $\mathbf{C}$ , wenn  $\forall \mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}$

$$\langle F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \geq 0,$$

strikt monoton wachsend in  $\mathbf{C}$ , wenn  $\forall \mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}$

$$\langle F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle > 0, \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2,$$

und streng monoton wachsend in  $\mathbf{C}$ , wenn  $\forall \mathbf{x}_1 \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbf{C}, c > 0$

$$\langle F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \geq c \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2$$

gelten.

Zur Übertragung des Begriffs monoton auf mehrdeutige Abbildungen werden die maximal monotonen Operatoren definiert.

**Definition 3.17** Ein Operator  $A$  mit Definitionsmenge  $D(A) = \{x | x \in X, A(x) \neq \emptyset\}$ , der im Allgemeinen eine mehrdeutige Abbildung  $A : X \mapsto P(X')$  bezeichnen soll, heißt maximal monoton, wenn

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D(A), \forall y_1 \in A(x_1) \forall y_2 \in A(x_2) \quad (3.6)$$

gilt, und wenn aus

$$\langle y - y_1, x - x_1 \rangle \geq 0 \quad \forall x_1 \in D(A), \forall y_1 \in A(x_1) \quad (3.7)$$

für  $x \in X, y \in X'$  die Beziehung  $y \in A(x)$  folgt (Panagiotopoulos, 1977; Rockafellar, 1970).

Im  $R^2$  hat Def. 3.17 folgende Bedeutung:

**Definition 3.18** Ein monotoner Operator  $\beta : R \mapsto R$  ist maximal monoton, wenn jede Parallele zur Winkelhalbierenden des 2. Quadranten genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen  $G(\beta)$  hat.

Weiter gilt für maximal monotone Operatoren  $\beta : R \mapsto R$  der folgende Satz:

**Satz 3.7** Zu jedem maximal monotonen Operator  $\beta : R \mapsto R$  kann ein konvexes halbstetig nach unten und eigentliches Funktional  $f : R \mapsto \bar{R}$  bis auf eine additive Konstante bestimmt werden, so dass gilt:  $\beta = \partial f$  (Panagiotopoulos (1977), Rockafellar (1970)).

(Beweis s. Rockafellar, 1970, Theorem 24.8). Umgekehrt ist das Subdifferenzial einer eigentlichen, unterhalbstetigen (abgeschlossenen), konvexen Funktion ein maximal monotoner Operator. Ein ähnliches Resultat zur Identifizierung subdifferenzierbarer konvexer Funktionen mit Hilfe der rechtsseitigen Ableitung, welche gerade dem größten Wert im Subdifferenzial entspricht (vgl. Satz 3.6 auf Seite 39), ist bei Hiriart-Urruty und Lemaréchal (1993) zu finden (Theorem 5.3.1, S. 34):

**Satz 3.8** Sei  $f$  stetig im offenen Intervall  $I$  und besitze eine monoton wachsende rechtsseitige Ableitung in  $I$ . Dann ist  $f$  konvex in  $I$ .

## 3.5 Grundaufgabe der konvexen Optimierung

### 3.5.1 Allgemein

Es wird die Grundaufgabe der konvexen Optimierung formuliert. Allgemeine Resultate werden vorgestellt und äquivalente Formulierungen gegeben.

**Definition 3.19** Die Grundaufgabe der konvexen Optimierung, kurz  $CO(\mathbf{C}, f)$ , lautet: Finde ein  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$ , für das

$$f(\mathbf{x}^*) = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\} \quad (3.8)$$

gilt, wobei  $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$  eine konvexe und abgeschlossene Menge und  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$  eine reellwertige konvexe Funktion sind.

Oft lässt sich der zulässige Bereich in der Form (CS) als System von Gleichungen und Ungleichungen darstellen:

$$(CS) \quad \mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (3.9)$$

Dabei sind  $g : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^s$  konvex und  $h : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^d$  affin. Der Sonderfall, dass die Funktion  $g(\mathbf{x})$  linear ist,  $\mathbf{C}$  damit nach Satz 3.2 auf Seite 34 eine polyhedrale Menge ist, soll mit (PS) bezeichnet werden. Eine wichtige Rolle in der Theorie der Optimierung spielen bestimmte Charakteristika der Nebenbedingungen (*constraint qualifications*), im Folgenden kurz mit (CQ) bezeichnet. Für polyhedrale zulässige Bereiche (PS) stellt die Forderung nach linearer Unabhängigkeit der aktiven Nebenbedingungen eine gültige (CQ) dar:

**Definition 3.20 (LICQ) = LI**near **C**onstraint **Q**ualifications: Seien  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  und  $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$  die Indexmenge aller bindenden Ungleichungsnebenbedingungen in  $\mathbf{x}^*$  und die Vektoren  $\{\nabla g_i(\mathbf{x}^*) : i \in I\} \cup \{\nabla h_j(\mathbf{x}^*) : 1 \leq j \leq d\}$  linear unabhängig, dann sind die (LICQ) im Punkt  $\mathbf{x}^*$  erfüllt.

Unter der Voraussetzung gültiger (CQ) liefert der folgende Satz zur Charakterisierung der Lösung von  $CO(\mathbf{C}, f)$  äquivalente Aussagen:

**Satz 3.9** Gegeben sei die konvexe Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  mit Nebenbedingungen der Form (CS). Für  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  sind unter Voraussetzung der Gültigkeit einer (CQ) die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathbf{x}^*$  ist Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$ ;
- (b) es existieren  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbf{R}^s$  und  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$ , so dass

$$\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^s \mu_i \partial g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^d \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*), \quad \mu_i \geq 0 \text{ und } \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, s;$$

- (c)  $f'(\mathbf{x}^*, \mathbf{d}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{d} \in T_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$ ;
- (d)  $\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$ .

**Beweis:**

siehe (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, Kap. VII, Theorem 2.1.4) mit  $\mathbf{N}'_{(a,b,c)}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$  und  $\mathbf{T}'_{(a,b,c)}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{T}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$  unter der Gültigkeit einer (CQ) (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, Kap. VII, Gl. (2.2.1)). Zu (d)  $\Leftrightarrow$  (a) (s. z.B. auch Rockafellar, 1970, Theorem 27.4).  $\square$

Nach Satz 3.9 sind die Bedingungen (b)-(d) notwendig und hinreichend für  $\mathbf{x}^*$ , lokale Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  zu sein. Der Übergang von einer lokalen zur globalen Lösung bereitet für konvexe Aufgaben keine Schwierigkeiten.

**Satz 3.10** *Jedes lokale Minimum von  $f$  ist auch globales Minimum. Die Menge der Minimalstellen ist eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von  $\mathbf{C}$  (Beweis siehe Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, Kap. VII, Lemma 1.0.1).*

Aus Satz 3.10 folgt, dass jede lokal eindeutige Minimalstelle der Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  global eindeutig ist. Beispielsweise besteht die Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  aus der Minimierung einer konvexen, Gâteaux-differenzierbaren Funktion  $f$  über der konvexen Menge  $\mathbf{C}$  mit  $F(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ . Notwendig und hinreichend für ein Minimum  $\mathbf{x}^*$  ist dann nach Satz 3.9:

$$\mathbf{0} \in F(\mathbf{x}^*) + N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*). \quad (3.10)$$

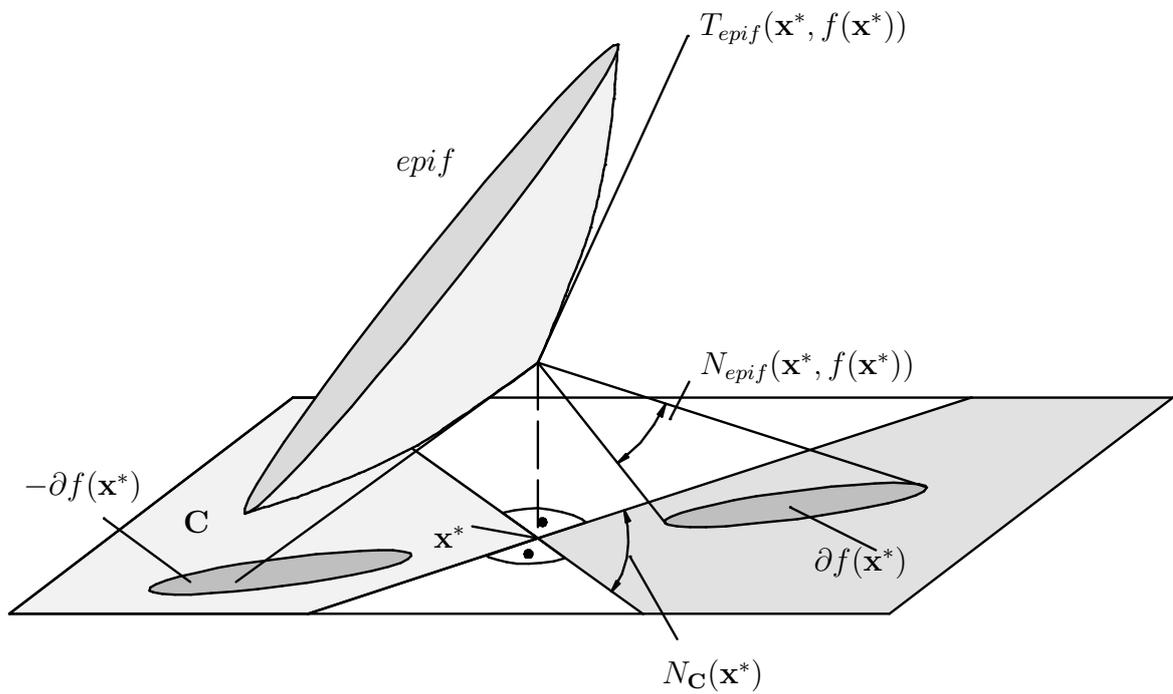
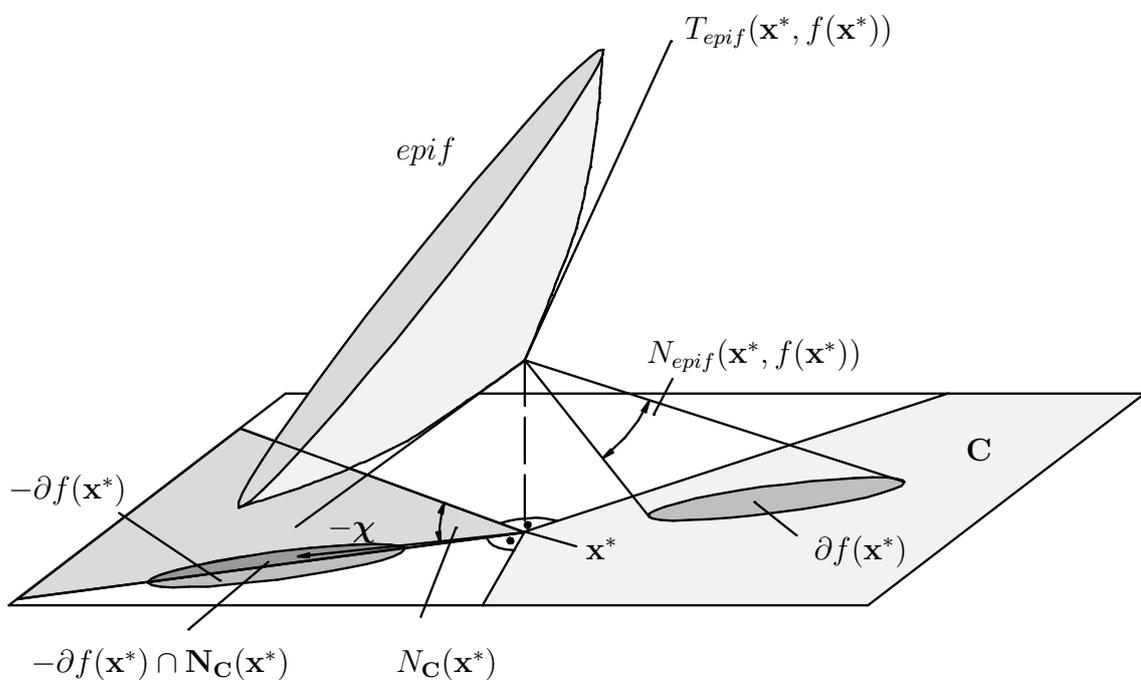
Anschaulich bedeutet Gl. (3.10), dass im Minimum  $\mathbf{x}^*$  der dem Gradienten entgegengesetzte Vektor  $-\nabla f(\mathbf{x}^*)$  in den Normalenkegel  $N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$  zeigt. Anders ausgedrückt, der Gradient  $\nabla f(\mathbf{x}^*)$  steht in  $\mathbf{x}^*$  im spitzen Winkel zu allen zulässigen Richtungen.

In ähnlicher Weise lassen sich die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen für den allgemeinen Fall subdifferenzierbarer - also nur einseitig Gâteaux-differenzierbarer - Funktionen unter Nebenbedingungen geometrisch interpretieren:

$$\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{x}^*) + N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*) \quad \text{oder} \quad -\partial f(\mathbf{x}^*) \cap N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*) \neq \emptyset. \quad (3.11)$$

In Worten ausgedrückt: Im Minimum  $\mathbf{x}^*$  gibt es mindestens einen Subgradienten  $\boldsymbol{\chi} \in \partial f(\mathbf{x}^*)$ , dessen entgegengesetzter Vektor  $-\boldsymbol{\chi}$  in den Normalenkegel  $N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$  zeigt (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, S. 295).

Abb. 3.1 auf der nächsten Seite zeigt den Fall, für den  $f$  nicht in  $\mathbf{x}^*$  ihr Minimum über  $\mathbf{C}$  annimmt. Es gilt  $-\partial f(\mathbf{x}^*) \cap N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*) = \emptyset$ . In Abb. 3.2 dagegen ist wegen  $-\partial f(\mathbf{x}^*) \cap N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$  der Punkt  $\mathbf{x}^*$  Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$ .

Abbildung 3.1: Bsp.: Punkt  $x^*$  ist nicht Lösung von  $\min_C f(x)$ Abbildung 3.2: Bsp.:  $f$  nimmt im Punkt  $x^*$  ihr Minimum über  $C$  an

Die bisherigen Ausführungen sollen anhand eines sehr einfachen Beispiels mit einer differenzierbaren Funktion  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  veranschaulicht und der Unterschied zwischen konvexer Minimierung mit und ohne Nebenbedingungen deutlich gemacht werden.

**Beispiel 3.1**

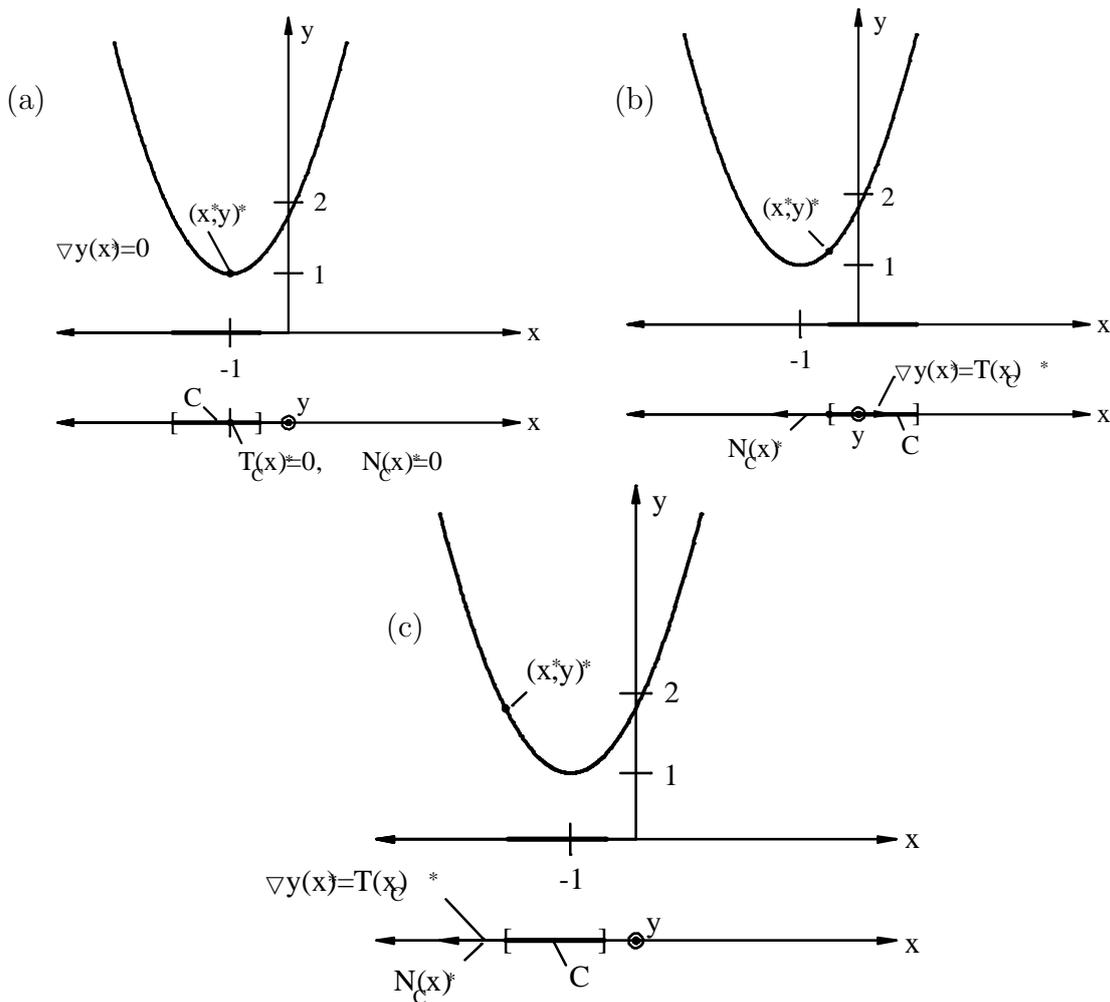


Abbildung 3.3: Minimum von  $y = 1 + (x + 1)^2$  für unterschiedliche zulässige Bereiche

Gegeben ist die differenzierbare konvexe Funktion  $y = f(x) = 1 + (x + 1)^2$ . Zu untersuchen sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Lösung der Aufgabe  $\min_{x \in C} y$  für verschiedene Mengen  $C$  und Punkte  $x \in C$ . Die Menge  $C \subset \mathbb{R}$  besteht in diesem Fall aus einem abgeschlossenen Intervall, der Gradient  $\nabla_x f(\bar{x}) = y'(\bar{x})$  gibt die

Richtung an, in der die  $f(x)$ -Werte von  $\bar{x}$  aus zunehmen. Abb. 3.3 auf der vorherigen Seite zeigt drei unterschiedliche Fälle:

(a)  $C = [-2; -0.5]$ ,  $\bar{x} = -1$ :

Es gilt  $N_C(\bar{x}) = T_C(\bar{x}) = 0$ , die Inklusion (d) aus Satz 3.9 auf Seite 42 lautet wegen  $\partial f(x) = \nabla_x y$  einfach  $\nabla_x y = 0$  und entspricht der in der unrestringierten Optimierung notwendigen Forderung nach einer horizontalen Tangente im Minimum. Damit nimmt  $f$  ihr Minimum in  $x^* = \bar{x} = -1 \in ri C$  an.

(b)  $C = [-0.5; 1]$ ,  $\bar{x} = -0.5$ :

Hier gilt  $\bar{x} \in bdry C$ . Der Tangentenkegel  $T_C(\bar{x})$  fällt im eindimensionalen Fall mit dem Gradienten  $\nabla_x y(\bar{x})$  zusammen. Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Normalenkegel  $N_C(x^*)$ , welcher ebenfalls nur aus dem Normalenvektor besteht, in zum Gradienten entgegengesetzte Richtung zeigt, ist erfüllt.  $x^* = \bar{x}$  ist Lösung der Aufgabe.

(c)  $C = [-2; -0.5]$ ,  $\bar{x} = -2$ :

$C$  entspricht dem zulässigen Intervall von Fall (a), jedoch wird ein Punkt auf dem Rand  $\bar{x} = -2 \in bdry C$  betrachtet. Gradient und Normale fallen zusammen, der Punkt  $\bar{x}$  kann nicht Lösung der Aufgabe sein. Außerdem wird der Unterschied der Aufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  (s. Def. 3.19) zur Maximierung einer konvexen Funktion über einer konvexen Menge ersichtlich, wenn die Bedingung  $\nabla_x y(x) \in -N_C(x)$  zur Bestimmung eines Maximums von  $f$  über  $C$  in  $\nabla_x y(x) \in N_C(x)$  umgewandelt wird. Es zeigt sich, dass der globale Charakter der notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Minimierung bei der Maximierung der konvexen Funktion  $f$  verlorenght. Beide Randpunkte  $x = -2$  und  $x = -0.5$  erfüllen die Bedingung. Globale Lösung der Aufgabe  $\max_{x \in C} y$  ist  $(-2, 2)$ , während in  $(-0.5, 1.25)$  ein lokales Maximum liegt.  $\square$

Während Bedingung (b) in Satz 3.9 auf Seite 42 den aus der Nichtlinearen Optimierung bekannten Satz von Kuhn/Tucker wiedergibt, kann (c) als Variationsungleichung aufgefasst werden, die Inklusion (d) schließlich wird in der Literatur häufig als verallgemeinerte Gleichung bezeichnet. Da die Anwendbarkeit der äquivalenten Formulierungen nicht auf konvexe Optimierungsaufgaben beschränkt ist, sondern vielmehr einem wesentlich allgemeineren Zugang dient, der auch über das Gebiet der Nichtlinearen Optimierung hinausgeht, werden im Folgenden die zu den einzelnen Formulierungen gehörigen Themengebiete knapp umrissen und jeweils Aussagen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen vorgestellt.

### 3.5.2 Der Satz von Karush-Kuhn-Tucker

Den traditionellen Zugang zur Lösung differenzierbarer, nichtlinearer Optimierungsaufgaben mit Restriktionen liefert der Satz von Karush-Kuhn-Tucker (Kuhn und Tucker, 1951). An dieser Stelle wird deshalb Differenzierbarkeit von Zielfunktion (nicht notwendig konvex) und Nebenbedingungen vorausgesetzt. Zu diesem Themengebiet existieren zahlreiche Veröffentlichungen. Für eine Einführung siehe z.B. Bomze und Grossmann (1993), Mangasarian (1969).

**Aufgabe 3.1 Nichtlineare Optimierung unter Nebenbedingungen:** Gegeben seien die nach  $\mathbf{x}$  stetig differenzierbaren Funktionen  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto R$ ,  $g(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^s$ ,  $h(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^d$ . Gesucht ist eine lokale Lösung  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$  des Minimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}. \quad (3.12)$$

Die bereits erwähnten Karush/Kuhn/Tucker-Bedingungen<sup>5</sup> gibt der folgende Satz wieder:

**Satz 3.11** Gegeben seien die nach  $\mathbf{x}$  stetig differenzierbaren Funktionen  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto R$ ,  $g(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^s$ ,  $h(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^d$ . Sei  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$  eine lokale Lösung des Minimierungsproblems

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Weiter seien  $I = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$  die Indexmenge aller bindenden Ungleichungsnebenbedingungen in  $\mathbf{x}^*$  und die Vektoren  $\{\nabla g_i(\mathbf{x}^*) : i \in I\} \cup \{\nabla h_j(\mathbf{x}^*) : 1 \leq j \leq d\}$  linear unabhängig, dann gibt es Zahlen  $\mu_i^* \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq s$  und  $\lambda_j^* \in R$ ,  $1 \leq j \leq d$ , mit

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^s \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^d \lambda_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

sowie

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.14)$$

**Beweis:** siehe z.B. (Bomze und Grossmann, 1993, Satz 6.19)  $\square$

<sup>5</sup>kurz: KKT-Bedingungen

Ein Punkt  $\mathbf{x}^*$ , der die Bedingungen von Satz 3.11 erfüllt, wird Karush/Kuhn/Tucker Punkt (KKT-Punkt) genannt. Die Faktoren  $\mu_i^*$  und  $\lambda_j^*$  heißen Lagrange-Multiplikatoren.

Zu bemerken ist, dass die Bedingung der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $\{\nabla g_i(\mathbf{x}^*) : 1 \leq i \leq s\} \cup \{\nabla h_j(\mathbf{x}^*) : 1 \leq j \leq d\}$  die Mangasarian/Fromovitz constraint qualification nach sich zieht (Bomze und Grossmann, 1993, Satz 6.20, S.294). Die Bedingungen nach Satz 3.11 sind damit notwendig für eine Lösung  $\mathbf{x}^*$  des Minimierungsproblems in Aufgabe 3.1.

Eine äquivalente Formulierung zu Satz 3.11 ergibt sich durch Einführung der zum Minimierungsproblem gehörigen Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \lambda_j h_j(\mathbf{x}). \quad (3.15)$$

**Satz 3.12** *Ein Punkt  $\mathbf{x}^* \in M$  mit  $M = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  ist genau dann Karush/Kuhn/Tucker-Punkt des Minimierungsproblems in Aufgabe 3.1, falls es Vektoren  $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbf{R}^s$  und  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{R}^d$  mit  $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$  gibt, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= \mathbf{0}, \\ \mu_i \nabla_{\mu_i} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \nabla_{\mu_i} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \nabla_{\lambda_j} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (3.16)$$

**Beweis:** Berechnung der Gradienten  $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ ,  $\nabla_{\mu_i} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  und  $\nabla_{\lambda_j} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  und Einsetzen in Gl. (3.16) gibt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^s \mu_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^d \lambda_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ h(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ \mu_i^* g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ g(\mathbf{x}^*) &\leq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Gl. (3.17) entspricht genau den Aussagen von Satz 3.11, wodurch sich die Behauptung ergibt.  $\square$

Bisher wurden nur notwendige Bedingungen für die Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen gegeben. Eine hinreichende Optimalitätsbedingung 2. Ordnung gibt der folgende Satz:

**Satz 3.13** *Seien  $\mathbf{x}^*$  KKT-Punkt der Optimierungsaufgabe aus Satz 3.11 und  $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  die zugehörigen Lagrangen Multiplikatoren. Wenn die Hessematrix  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  der zugehörigen Lagrangefunktion nach Gl. (3.15) positiv definit ist, dann ist  $\mathbf{x}^*$  lokale Lösung des Problems.*

**Beweis:** (Bomze und Grossmann, 1993, Satz 6.21)  $\square$ .

Wenn es sich um eine konvexe Optimierungsaufgabe vom Typ  $CO(\mathbf{C}, f)$  (s. Def. 3.19 auf Seite 41) mit strikt konvexer Zielfunktion  $f$  handelt, folgt unter der Voraussetzung, dass eine Lösung existiert, aus Satz 3.13 und Satz 3.10 auf Seite 43 die globale Eindeutigkeit der Lösung. Es kann gezeigt werden, dass der KKT-Punkt  $\mathbf{x}^*$  der konvexen Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  mit den zugehörigen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$  Sattelpunkt (Definition siehe Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, S.328) der Lagrangefunktion  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  ist (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, Theorem VII.4.4.3).

### 3.5.3 Variationsungleichung

Die Lösung der konvexen Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  lässt sich als Variationsungleichung (Variational Inequality) darstellen (Harker und Pang, 1990).

**Definition 3.21** *Sei  $\mathbf{C}$  eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  und  $F$  eine Selbstabbildung des  $\mathbf{R}^n$ . Die Aufgabe der Lösung einer Variationsungleichung, im Folgenden als  $VI(\mathbf{C}, F)$  bezeichnet, besteht darin, einen Vektor  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  zu finden, so dass gilt:*

$$F(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \quad (3.18)$$

Jede Optimierungsaufgabe vom Typ  $CO(\mathbf{C}, f)$  mit Gâteaux-differenzierbarer Zielfunktion kann als  $VI(\mathbf{C}, F)$  dargestellt werden. Sei  $F(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$  der Gradient von  $f(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{x} \in \mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$ , dann stellt  $VI(\mathbf{C}, F)$  notwendige und hinreichende Bedingungen an eine Lösung  $\mathbf{x}^*$  von  $CO(\mathbf{C}, f)$ :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} f(\mathbf{x}) \iff \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \quad (3.19)$$

Da es sich bei der (VI)-Formulierung um ein allgemeineres Konzept handelt, ist der umgekehrte Weg jedoch nur unter gewissen Voraussetzungen an  $F(\mathbf{x})$  möglich. Notwendig und hinreichend dafür, dass die Variationsungleichung  $VI(\mathbf{C}, F)$  mit stetig differenzierbarem  $F(\mathbf{x})$  als differenzierbare Optimierungsaufgabe dargestellt werden kann, ist die Symmetrie der Jacobimatrix von  $\nabla F(\mathbf{x})$ . Ist  $\nabla F(\mathbf{x})$  außerdem positiv definit  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}$ ,

kann für  $VI(\mathbf{C}, F)$  eine äquivalente differenzierbare Aufgabe vom Typ  $CO(\mathbf{C}, f)$  gefunden werden.

Ist die Zielfunktion  $f$  einer konvexen Optimierungsaufgabe subdifferenzierbar, aber nicht Gâteaux-differenzierbar, im Minimum  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$ , und ist der Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \in \partial f(\mathbf{x}^*)$  Subgradient im Punkt  $\mathbf{x}^*$ , dann lautet die  $CO(\mathbf{C}, f)$  entsprechende Variationsungleichung

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \quad (3.20)$$

Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung der Aufgabe  $VI(\mathbf{C}, F)$  sind:

$\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$  ist kompakt und konvex,  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}^n$  stetig (Harker und Pang, 1990, Theorem 3.1). Soll die Anforderung an  $\mathbf{C}$  abgeschwächt werden, kann der folgende Satz zur Bestätigung der Existenz einer Lösung herangezogen werden:

**Satz 3.14** *Sei  $\mathbf{C}$  nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$  und  $F : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$  stetig. Gibt es eine nichtleere, beschränkte Menge  $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ , so dass für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$  ein  $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$  gefunden werden kann mit*

$$F(\mathbf{x})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0,$$

dann besitzt das Problem  $VI(\mathbf{C}, F)$  eine Lösung (Harker und Pang, 1990, Corollary 3.1).

Die Voraussetzungen, die Eindeutigkeit einer Lösung<sup>6</sup> der Aufgabe  $VI(\mathbf{C}, F)$  garantieren, sind im nächsten Satz zusammengefasst. Zuvor ist der Begriff *P-Funktion* zu definieren:

**Definition 3.22** *Sei  $\mathbf{C}$  das kartesische Produkt von  $n$  eindimensionalen Intervallen und  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}^n$ . Dann heißt  $F$*

(a) *P-Funktion auf  $\mathbf{C}$ , wenn*

$$\max_{1 < i < n} [F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})] (x_i - y_i) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

(b) *gleichförmige P-Funktion auf  $\mathbf{C}$ , wenn es eine Zahl  $\alpha > 0$  gibt, so dass*

$$\max_{1 < i < n} [F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})] (x_i - y_i) > \alpha \|x - y\|_i^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

---

<sup>6</sup>falls mindestens eine Lösung existiert

**Satz 3.15** Sei  $\mathbf{C} \subset \mathbf{R}^n$  nichtleer, abgeschlossen und konvex und  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}^n$  stetig.

(a) Ist  $F$  außerdem pseudo-monoton in  $\mathbf{C}$ , dann ist  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  Lösung von  $VI(\mathbf{C}, F)$ , wenn und nur wenn

$$F(\mathbf{y})^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}$$

gilt. Falls eine Lösung existiert, ist die Lösungsmenge konvex (Harker und Pang, 1990, Proposition 3.1) .

(b) Ist  $F$  strikt monoton, dann hat die Aufgabe  $VI(\mathbf{C}, F)$  höchstens eine Lösung (Harker und Pang, 1990, Proposition 3.2) .

(c) Für  $F$  koerzitiv bezüglich  $\mathbf{C}$  hat  $VI(\mathbf{C}, F)$  eine nichtleere, kompakte Lösungsmenge (Harker und Pang, 1990, Theorem 3.2) .

(d) Wenn  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^n$  aus dem kartesischen Produkt von  $n$  eindimensionalen Intervallen besteht und  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}^n$  eine stetige, (gleichförmige) P-Funktion ist, dann besitzt  $VI(\mathbf{C}, F)$  höchstens (genau) eine Lösung (Harker und Pang, 1990, Definition 3.6, Definition 3.7, Theorem 3.9).

Jede über ein rechteckiges Gebiet strikt monotone Funktion besitzt auch die Eigenschaft, P-Funktion zu sein, jede streng monotone Funktion ist gleichförmige P-Funktion.

### 3.5.4 Verallgemeinertes Komplementaritätsproblem

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit bietet das verallgemeinerte Komplementaritätsproblem (Harker und Pang, 1990, Definition 2,3):

**Definition 3.23** Sei  $\mathbf{C}$  ein konvexer Kegel im  $\mathbf{R}^n$  und  $F$  eine Selbstabbildung des  $\mathbf{R}^n$ . Als verallgemeinertes Komplementaritätsproblem  $GCP(\mathbf{C}, F)$ <sup>7</sup> wird die Aufgabe bezeichnet, einen Vektor  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  zu finden, so dass

$$F(\mathbf{x}^*) \in \mathbf{C}^* \quad \text{und} \quad F(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (3.21)$$

gelten.  $\mathbf{C}^*$  bezeichnet dabei den Dualkegel zu  $\mathbf{C}$  mit  $\mathbf{C}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{y}^T \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$ .

Notwendig und hinreichend für eine Lösung  $\mathbf{x}^*$  von  $VI(\mathbf{C}, F)$  ist, dass  $\mathbf{x}^*$  Lösung von  $GCP(\mathbf{C}, F)$  ist (Harker und Pang, 1990, Proposition 2.1). Die allgemeinere Darstellung ist wieder die der Variationsungleichung, so dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht ohne weitere Bedingungen gefolgert werden kann. Ist jedoch  $\mathbf{C}$  in der Form

<sup>7</sup>GCP = Generalized Complementary Problem

(CS) gegeben und gelten außerdem für die Nebenbedingungen die (CQ) der Nichtlinearen Programmierung, kann  $VI(\mathbf{C}, F)$  als verallgemeinertes Komplementaritätsproblem dargestellt werden (Harker und Pang, 1990, Proposition 2.2):

**Satz 3.16** *Seien  $\mathbf{C}$  gegeben durch (CS) und  $g(\mathbf{x})$ ,  $h(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar.*

(a) *Ist  $\mathbf{x}^*$  Lösung von  $VI(\mathbf{C}, F)$ , und sind bestimmte (CQ) im Punkt  $\mathbf{x}^*$  erfüllt, dann gibt es Zahlen  $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbf{R}^s$  und  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{R}^d$ , so dass  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  Lösung von  $GCP(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^s \times \mathbf{R}^d, H)$  ist, wobei  $H : \mathbf{R}^{n+s+d} \mapsto \mathbf{R}^{n+s+d}$  gegeben ist durch:*

$$H \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}) \\ -g(\mathbf{x}) \\ h(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des  $GCP(\mathbf{C}, F)$  siehe z.B. (Harker und Pang, 1990, Theorem 3.5).

### 3.5.5 Verallgemeinerte Gleichung (Inklusion)

In Kap. 3.5 wurde gezeigt, dass die Inklusion Gl. (3.10) auf Seite 43 notwendig und hinreichend für die Lösung einer differenzierbaren, konvexen Optimierungsaufgabe ist. Allgemein kann jede Variationsungleichung  $VI(\mathbf{C}, F)$  als verallgemeinerte Gleichung, weiter mit  $GE(\mathbf{C}, F)$  bezeichnet, geschrieben werden (Outrata u. a., 1998):

$$\mathbf{0} \in F(\mathbf{x}) + N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Dabei sind  $F : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$  stetige Funktion und  $N_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$  die Normalkegelabbildung (Def. 3.5 auf Seite 35) der konvexen Menge  $\mathbf{C}$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Für die nichtlineare, differenzierbare Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{C}, f)$  ergibt sich beispielsweise eine Darstellung der KKT-Bedingungen in der Form von Gl. (3.23), wenn für  $F(\mathbf{x})$  der Gradient der Zielfunktion  $\nabla f(\mathbf{x})$  eingesetzt wird. Die zu Nebenbedingungen der Form (CS) gehörige Darstellung des Normalenkegels hat die allgemeine Form:

$$N_{(CS)}(\mathbf{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^s \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}_{0+}^s, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^d, \mu_i g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, s \right\}. \quad (3.24)$$

Eine einfachere Gestalt des Normalenkegels resultiert, wenn die Aufgabe als Bedingung für einen Sattelpunkt der Lagrangefunktion formuliert wird. Die zugehörige verallge-

meinerte Gleichung hat die Gestalt (Outrata u. a., 1998, Gl.(4.14)):

$$\mathbf{0} \in \begin{pmatrix} \nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ -g(\mathbf{x}) \\ h(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + N_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_{0+}^s \times \mathbf{R}^d}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}). \quad (3.25)$$

Kompaktheit der Menge  $\mathbf{C}$  garantiert die Existenz einer Lösung von  $GE(\mathbf{C}, F)$  (Outrata u. a., 1998, Theorem 4.1), während für die Eindeutigkeit gewisse Monotonieeigenschaften der Funktion  $F$  vorauszusetzen sind (Outrata u. a., 1998, Theorem 4.4, Theorem 4.8).

## 3.6 Parametrische Nichtlineare Optimierung

### 3.6.1 Sensitivitätsanalyse in der Nichtlinearen Optimierung

Bisher wurden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nichtlinearer restringierter Optimierungsprobleme und alternativer Darstellungen behandelt. Wenn eine optimale Lösung gefunden wurde, ist oft die Änderung von Zielfunktionswert und Lösungsvektor infolge von Störungen der Modellparameter von Interesse. Im Allgemeinen können solche Parameterabweichungen sowohl in der Zielfunktion als auch in den Nebenbedingungen auftreten. Differenzierbarkeitseigenschaften erster Ordnung der Optimalwertfunktion wurden von zahlreichen Autoren untersucht. Die Anwendung des klassischen Satzes über Implizite Funktionen auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung von nichtlinearen Optimierungsaufgaben ist ausführlich beschrieben bei Fiacco (1983). Ein wesentlicher Beitrag zur Sensitivitätsanalyse von Variationsungleichungen (Kap. 3.5.3) oder verallgemeinerten Gleichungen (Kap. 3.5.5) stammt von Robinson (1980). Voraussetzung der Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren ist bis dahin die lokale Eindeutigkeit der Lösung. Erweiterungen auf Differenzierbarkeitseigenschaften mehrdeutiger Lösungen sind z.B. bei Qiu und Magnanti (1989) und Kyparisis (1992) zu finden.

Gegeben sei die Aufgabe:

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}, \quad (3.26)$$

mit:  $f : \mathbf{R}^{n \times m} \mapsto R$  und  $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .

Im anschließenden Satz wird das Sensitivitätsresultat von Fiacco (1983) zur Anwendung auf nichtlineare Optimierungsprobleme mit konvexer Zielfunktion gegeben. Parameterabweichungen können dabei sowohl in der Zielfunktion als auch in den Nebenbedingungen auftreten.

**Satz 3.17** (Fiacco, 1983, Theorem 3.2.2) Für ein festes  $\mathbf{y}_0 \in R^m$  seien  $\mathbf{x}^*$  Lösung von Gl. (3.26) für  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$  sowie (i) sämtliche Voraussetzungen und Bedingungen von Satz 3.11 auf Seite 47 erfüllt und (ii)  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  streng konvex in  $\mathbf{x}$  mit positiv definiten Hessematrix  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 f$  in  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}_0)$ . Weiter seien (iii) die (LICQ) sowie (iv) die Forderung nach strenger Komplementarität in  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}_0)$  erfüllt.

1.) Dann ist  $[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$  lokaloptimale Lösung des Minimierungsproblems Gl. (3.26) für  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ . Es existiert für einen Parametervektor  $\mathbf{y}$  in der Umgebung von  $\mathbf{y}_0$  eine eindeutige, einmal stetig nach  $\mathbf{y}$  differenzierbare Vektorfunktion  $p(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})]^T$ , welche den hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für ein lokales Minimum des Problems aus Gl. (3.26) genügt mit  $p(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]^T = \mathbf{p}^*$ . Dann ist  $\mathbf{x}(\mathbf{y})$  eindeutiger Minimalpunkt des Problems  $NLP(\mathbf{y})$ ,  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})$  sind die entsprechenden Lagrange-Multiplikatoren.

2.) Für  $\mathbf{y}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{y}_0$  bleibt die Menge der aktiven Ungleichungsrestriktionen  $I(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}^* \in R^n | g_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}_0) = 0, i = 1, \dots, r, r < s\}$  des Problems in Gl. (3.26) auch beim Problem  $NLP(\mathbf{y})$  unverändert.

3.) Für  $\mathbf{y}$  in der Umgebung von  $\mathbf{y}_0$  gelten die strikte Komplementaritätsbedingung sowie die lineare Unabhängigkeit der Gradienten der in  $\mathbf{x}(\mathbf{y})$  aktiven Restriktionen (LICQ).

Im Allgemeinen lautet die Aufgabe der Parametrischen Nichtlinearen Optimierung:

$$\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) : g(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}. \quad (3.27)$$

Wird nun die funktionale Abhängigkeit der Lösung vom Parametervektor  $\mathbf{v} = p(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})]^T$  berücksichtigt, können die notwendigen Bedingungen Gl. (3.16) auf Seite 48 wegen Satz 3.17 1.) nach dem Parametervektor  $\mathbf{y}$  differenziert werden:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{xy}}^2 L(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \\ \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\lambda}^T \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \\ \mu_i \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x} + g_i(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mu_i + \mu_i \nabla_{\mathbf{y}} g_i(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x} + \lambda_j \nabla_{\mathbf{y}} h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die partiellen Ableitungen des KKT-Tripels  $\mathbf{v} = p(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})]$  nach den Parametern  $\mathbf{y}$  sind damit aus Gl. (3.28) berechenbar:

$$\nabla_{\mathbf{y}} p(\mathbf{v}) = [\mathbf{M}(\mathbf{y})]^{-1} \mathbf{N}(\mathbf{y})$$

mit :

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 L & \nabla_{\mathbf{x}} g_1^T, \dots, \nabla_{\mathbf{x}} g_s^T & \nabla_{\mathbf{x}} h_1^T, \dots, \nabla_{\mathbf{x}} h_d^T \\ \mu_1 \nabla_{\mathbf{x}} g_1 & g_1 & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mu_s \nabla_{\mathbf{x}} g_s & \mathbf{0} & g_s \\ \nabla_{\mathbf{x}} h_1 & & \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} h_d & & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{N}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{xy}}^2 L \\ -\mu_1 \nabla_{\mathbf{y}} g_1 \\ \vdots \\ -\mu_s \nabla_{\mathbf{y}} g_s \\ -\nabla_{\mathbf{y}} h_1 \\ \vdots \\ -\nabla_{\mathbf{y}} h_d \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Matrix  $\mathbf{M}$  kann vereinfacht werden, indem die zu nicht bindenden Ungleichungsnebenbedingungen gehörigen Zeilen entfernt werden. Sei die Anzahl der bindenden Nebenbedingungen  $r$ . Dann können die Zeilen von  $g$  so umsortiert werden, dass die ersten  $i = 1, \dots, r$  Zeilen zu  $\bar{g}$ , den bindenden Nebenbedingungen, gehören. Die restlichen  $k = r + 1, \dots, s$  Zeilen werden aus  $\mathbf{M}$  entfernt, da wegen der strengen Komplementarität für die Multiplikatoren der nichtbindenden Nebenbedingungen  $\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{0}$  und damit  $\nabla \boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{0}$  gelten. Die Matrix  $\bar{\mathbf{M}}$  des reduzierten Systems kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\mu}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 L & \nabla_{\mathbf{x}} \bar{g}^T & \nabla_{\mathbf{x}} h^T \\ \nabla_{\mathbf{x}} \bar{g} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} h & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Zur Berechnung von  $\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}$  wird die Inverse von  $\bar{\mathbf{M}}$  benötigt. Zunächst werden die Bezeichnungen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \bar{g} \\ \nabla_{\mathbf{x}} h \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 L & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

eingeführt.

Es gelte im weiteren  $r + d < n$ , die Anzahl der mit Gleichheit zu erfüllenden Nebenbedingungen ist also kleiner als die Anzahl der Variablen (Fiacco, 1983, S.97, case 4). Wegen Voraussetzung (iii) von Satz 3.17 auf Seite 53 (LICQ) besitzt die Matrix  $\mathbf{P}$  den

Rang  $r + d$ . Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass die Matrix  $\mathbf{P}$  in zwei Teile zerlegt wird  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b]$ , wobei  $\mathbf{P}_a$  eine nichtsinguläre  $(r + d) \times (r + d)$ -Matrix und  $\mathbf{P}_b$  eine  $(r + d) \times (n - (r + d))$ -Matrix sind.  $\mathbf{P}_a$  ist invertierbar, die Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  kann dazu benutzt werden, die ersten  $r + d$  Variablen durch die verbleibenden  $n - r - d$  auszudrücken:

$$\mathbf{x}_a = -\mathbf{P}_a^{-1}\mathbf{P}_b\mathbf{x}_b \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{z}_b, \quad \text{mit:} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_a^{-1}\mathbf{P}_b \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Wie gezeigt werden kann (Fiacco, 1983, S. 98f.) ist die Matrix  $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{T}^T \nabla_{\mathbf{x}}^2 L \mathbf{T}$  wegen der Voraussetzungen (ii) und (iv) von Satz 3.17 auf Seite 53 positiv definit und damit invertierbar. Die einzelnen Partitionen von  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \mathbf{T}\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{T}^T, \\ \mathbf{A}_{12} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{A}_{11}\nabla_{\mathbf{x}}^2 L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \mathbf{A}_{12}^T, \\ \mathbf{A}_{22} &= -\mathbf{A}_{21}\nabla_{\mathbf{x}}^2 L \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Matrix der rechten Seite  $\mathbf{N}(\mathbf{y})$  in Gl. (3.29) auf Seite 54 lautet allgemein:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\mu}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{N}}, \quad \text{mit:} \quad \hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{xy}}^2 L^T \\ -\nabla_{\mathbf{y}} \bar{g}^T \\ -\nabla_{\mathbf{y}} h^T \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Nach Einsetzen von  $\bar{\mathbf{M}}$  und  $\bar{\mathbf{N}}$  in Gl. (3.29) auf Seite 54 kürzt sich die Diagonalmatrix der Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}$  heraus, die Sensitivitätsmatrix lautet:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{11}\nabla_{\mathbf{yx}}^2 L + \mathbf{A}_{12} \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{y}} \bar{g} \\ -\nabla_{\mathbf{y}} h \end{pmatrix} \\ -\mathbf{A}_{21}\nabla_{\mathbf{yx}}^2 L + \mathbf{A}_{22} \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{y}} \bar{g} \\ -\nabla_{\mathbf{y}} h \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Big|_{[\mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{y}]}. \quad (3.35)$$

Für den Sonderfall, dass die Nebenbedingungen unabhängig sind von den Parametern  $\mathbf{y}$ , ergibt sich wegen  $\nabla_{\mathbf{y}} \bar{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  und  $\nabla_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  die Vereinfachung:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{11}\nabla_{\mathbf{yx}}^2 L \\ -\mathbf{A}_{21}\nabla_{\mathbf{yx}}^2 L \end{pmatrix} \Big|_{[\mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{y}]}. \quad (3.36)$$

Eine weitere Vereinfachung ist durchführbar, wenn die Parameter des Optimierungsproblems nur in der rechten Seite der Nebenbedingungen aber nicht in der Zielfunktion auftreten. Dann gilt  $\nabla_{\mathbf{y}}\bar{g} = \mathbf{E}$ ,  $\nabla_{\mathbf{y}}h = \mathbf{E}$  und  $\nabla_{\mathbf{y}\mathbf{x}}L = \mathbf{0}$ . Der Gradient der Optimalwertfunktion  $f(\mathbf{y})$  besteht aus den Multiplikatoren, die Hessematrix von  $f(\mathbf{y})$  aus deren Ableitungen bezüglich  $\mathbf{y}$ :

$$\nabla_{\mathbf{y}}f(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \\ -\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathbf{y}}^2f(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \\ -\nabla_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Der Gradient des KKT-Tripels reduziert sich zu

$$\nabla_{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{x}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}}\bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \Big|_{[\mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{y}]}. \quad (3.38)$$

### 3.6.2 Globale Eigenschaften der Optimalwertabbildung

Bisher wurden Aussagen über die lokale Eindeutigkeit des optimalen KKT-Tripels  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$  als Funktion vom Parameter  $\mathbf{y}$  sowie dessen Differenzierbarkeit unter hinreichend kleinen Abweichungen vom Nominalwert  $\mathbf{y}_0$  getroffen. Es stellt sich die Frage nach den globalen Eigenschaften der Optimalwertabbildung  $S(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C} | f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}\}$  in Abhängigkeit von den Parametern  $\mathbf{y}$ . Im Allgemeinen handelt es sich dabei um eine Punkt-Menge-Abbildung, auch Korrespondenz genannt.

**Definition 3.24** Seien  $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^m$  und eine Punkt-Menge-Abbildung  $f(\mathbf{x})$  definiert  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$  mit  $f(\mathbf{x}) \subset \mathbf{B}$ .  $f$  heißt oberhalbstetig, wenn für jeden beliebigen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}$  und jede Folge  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{A}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sowie jede Folge  $\mathbf{y}_k \in f(\mathbf{x}_k) \forall k$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , gilt  $\mathbf{y}_0 \in f(\mathbf{x}_0)$ .

**Satz 3.18** Ist  $f$  eine stetige reellwertige Funktion  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ , dann ist die Optimalmengenabbildung  $S(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C} | f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}\}$  oberhalbstetig (Friedman, 1986, Lemma 2.5).

Gilt zusätzlich die strenge Konvexität der Funktion  $f$ , folgt daraus, dass für gegebenes  $\mathbf{y}$  die Menge  $S(\mathbf{y})$  nur ein Element enthält (singleton). Damit existiert eine eindeutige stetige Funktion der Variablen  $\mathbf{x}$  in Abhängigkeit vom Parametervektor  $\mathbf{y}$  (Friedman, 1986, Lemma 2.7), wie der Beweis des folgenden Satzes zeigt.

**Satz 3.19** Seien  $\mathbf{C} \neq \emptyset$  eine kompakte konvexe Menge und  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  stetige Funktion. Sei weiterhin  $f(\cdot, \mathbf{y})$  streng konvex bezüglich  $\mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}$  für alle fixierten  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ . Dann gibt es eine stetige Funktion  $\mathbf{x} = r(\mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$ .

**Beweis** (vgl. Friedman, 1986, S.38):

Sei  $\{\mathbf{y}_k\}$  eine konvergente Folge und  $\mathbf{x}_k \in \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$ .  $\mathbf{x}_k$  existiert wegen der Kompaktheit von  $\mathbf{C}$  und ist eindeutig definiert wegen der Konvexitätsvoraussetzungen. Auf Grund der Kompaktheitsvoraussetzungen hat die Folge  $\{\mathbf{x}_k\}$  Häufungspunkte. Seien  $\bar{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$  und  $\mathbf{x}_0$  Häufungspunkt der Folge  $\{\mathbf{x}_k\}$ . Zunächst ist zu zeigen, dass  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0)$  gilt. Sofort auszuschließen ist  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) < f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0)$ , da  $\bar{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$  gilt. Weiter sei angenommen  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) > f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0)$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass gilt:  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) = \varepsilon > 0$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, für jedes  $\delta > 0$  gibt es ein  $k_\delta$ , so dass für  $k > k_\delta$  gilt:  $|f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)| < \delta$  und  $|f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) - f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_k)| < \delta$  und nach Berechnung des Betrags  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) < \delta$ ,  $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) < \delta$ ,  $f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) - f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_k) < \delta$ ,  $f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_k) - f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) < \delta$ . Sei nun  $\delta = \varepsilon/4$ . Dann gilt:  $f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_k) < f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) + \varepsilon/4 < f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) + 3\varepsilon/4 = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \varepsilon/4 < f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ . Daraus lässt sich  $f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_k) + \varepsilon/2 < f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$  folgern, was schließlich zum Widerspruch zur Voraussetzung  $\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$  führt. Jeder Häufungspunkt  $\mathbf{x}_0$  der Folge  $\{\mathbf{x}_k\}$  ist somit Lösung der Optimierungsaufgabe für  $\mathbf{y}_0 = \lim_k \mathbf{y}_k$ . Aus der strengen Konvexität von  $f$  bezüglich  $\mathbf{x}$  folgt die Eindeutigkeit des Häufungspunktes sowie von  $\bar{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) : \mathbf{x} \in \mathbf{C}\} = r(\mathbf{y}_0)$ . Es gilt  $f(\lim_k \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_0) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) = f(r(\lim_k \mathbf{y}_k), \mathbf{y}_0)$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  muss  $\lim_k \mathbf{x}_k = r(\lim_k \mathbf{y}_k)$  gelten, was aber genau der Definition der Stetigkeit von  $\mathbf{x} = r(\mathbf{y})$  in  $\mathbf{y}_0$  entspricht (siehe z.B. Marsden und Tromba, 1995, S. 101).  $\square$

### 3.7 Strenge Regularität von Inklusionen

Im letzten Abschnitt wurden Sensitivitätsaussagen für parametrische nichtlineare Optimierungsaufgaben gegeben. Nicht immer lässt sich jedoch ein Variationsproblem als Optimierungsaufgabe formulieren (vgl. Kap. 3.5.3). Ziel dieses Abschnittes ist es, für die allgemeineren Formulierungen der Variationsungleichungen und verallgemeinerten Gleichungen ähnliche Ergebnisse wie in Kap. 3.6.1 zu geben. Grundlegende Arbeiten zu diesem Thema unter Voraussetzung einer eindeutigen Lösung der Variationsungleichung sind u.a. bei Robinson (1980) und Tobin (1986) zu finden. Erweiterungen auf mehrdeutige Lösungen geben z.B. Kyparisis (1992) und Qiu und Magnanti (1989).

Von Tobin (1986) werden Sensitivitätsresultate für Variationsungleichungen parallel zu den von Fiacco (1983) für Optimierungsaufgaben entwickelten (vgl. Kap. 3.6.1) vorgestellt. Im allgemeinen Fall können die Störungen  $\mathbf{y}$  sowohl in der zu variierenden Funktion als auch in den Nebenbedingungen auftreten. Die gestörte Variationsungleichung hat die Gestalt

$$F(\mathbf{x}^*(\mathbf{y}), \mathbf{y})^T (\mathbf{v} - \mathbf{x}^*(\mathbf{y})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}(\mathbf{y}). \quad (3.39)$$

Dem Sensitivitätssatz 3.17 auf Seite 53 für nichtlineare Optimierungsprobleme entspricht die folgende Aussage (Tobin, 1986, Theorem 3.1):

**Satz 3.20** *Sei  $\mathbf{x}^*$  lokal eindeutige Lösung der nicht gestörten Variationsungleichung (3.39) mit  $F(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}), h(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}), g(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}), \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$ . Es gelte  $\mathbf{v}^T \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}) \mathbf{v} > 0$  für alle  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Weiter seien die (LICQ) sowie die Forderung nach strenger Komplementarität in  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{0})$  erfüllt. Dann sind die Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$  eindeutig, und es existiert in einer Umgebung von  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  eine einmal stetig differenzierbare Funktion  $[\mathbf{x}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y})]^T$ , wobei  $\mathbf{x}(\mathbf{y})$  lokal eindeutige Lösung der Variationsungleichung  $VI(\mathbf{C}(\mathbf{y}), \mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y})$  die zugehörigen eindeutigen Lagrange Multiplikatoren sind. In der Umgebung bleiben die Menge der bindenden Ungleichungsrestriktionen, strenge Komplementarität und lineare Unabhängigkeit der Gradienten der bindenden Nebenbedingungen erhalten.*

Die Berechnung des Gradienten der Lösungswerte des Variationsproblems kann damit entsprechend Gl. (3.35) oder Gl. (3.38) auf Seite 56 durchgeführt werden. Auf eine detaillierte Darstellung wird an dieser Stelle jedoch verzichtet.

## 3.8 Zusammenfassung

Konvexe Mengen und Funktionen wurden definiert sowie die Erweiterung der klassischen Differenzialrechnung auf die Subdifferenzialrechnung angesprochen. Die Aufgabe der konvexen Optimierung  $CO(\mathbf{C}, f)$  wurde definiert. Mit Variationsungleichung  $VI(\mathbf{C}, F)$  und Inklusion  $GE(\mathbf{C}, F)$  wurden alternative allgemeinere Darstellungsformen angegeben. Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Eindeutigkeit von Lösungen der Aufgaben wurden gegeben und schließlich auf die Untersuchung von Parametersensitivitäten in der Nichtlinearen Optimierung und mehr generell bei Variationsungleichungen und/oder Inklusionen eingegangen.

# Kapitel 4

## Kontrollarmaturen

### 4.1 Klassifikation von Kontrollarmaturen

Im Betrieb von Wasserversorgungsnetzen spielen Kontrollarmaturen eine wichtige Rolle. Diese besitzen unterschiedliche Funktionen und weisen hinsichtlich ihres Regelverhaltens spezifische hydraulische Eigenschaften auf. *Dynamische* (dyn.) Kontrollarmaturen haben zeitlich variable, aber während der einzelnen Zeitstufen als konstant angenommene Betriebszustände, die vom Systemoperator vorgegeben werden. Ein Beispiel sind Schieber, die der vollständigen Abriegelung eines Stranges zu gegebener Uhrzeit dienen. Die zweite Gruppe bilden Armaturen, deren Zustand *flussabhängig* (flabh.) ist - z.B. Rückflussverhinderungsventile. Die analytische Beschreibung des hydraulischen Verhaltens dieser Netzelemente<sup>1</sup> ist bekannt. Es handelt sich dabei um an Gleichungs- oder Ungleichungsnebenbedingungen gebundene mehrdeutige Abbildungen.

Schließlich treten *rückgekoppelte* (rückg.) Anlagen auf, deren hydraulisches Verhalten nicht durch eine gegebene Durchfluss-Druckverlust-Beziehung definiert werden kann. Die Kontrolle über ihr Verhalten wird vielmehr durch einen zugeordneten Kontrollknoten übernommen, an dem ein vorgegebenes Soll-Potenzial durch Regelung des hydraulischen Verhaltens der Anlagen zu erreichen ist<sup>2</sup>.

Tabelle 4.1 zeigt die in der Wasserversorgung verwendeten Armaturen und deren Zuordnung zu den drei beschriebenen Eigenschaften. Eine Vielzahl von Autoren beschäftigt sich mit der Modellierung derartiger Kontrollarmaturen. Shamir und Howard (1968) berücksichtigen bereits Pumpen und Schieber bei ihrer Modellentwicklung, Kesavan

---

<sup>1</sup>Ausführlich werden diese Armaturen in Kap. 4.2.1 behandelt.

<sup>2</sup>Einbauteile mit Rückkoppelung sind Gegenstand von Kap. 5.

Tabelle 4.1: Kontrollarmaturen in Wasserversorgungssystemen

<b>Kontrollarmatur</b>	<b>Abk.</b>	<b>dyn.</b>	<b>flabh.</b>	<b>rückg.</b>
Kontrollschieber (Time Dependent Valve)	TDV	X		
Rückflussverhinderer (Check Valve)	CHV		X	
Durchflusskontrollschieber (Flow Control Valve)	FCV		X	
Druckverlustregler (Pressure Breaker Valve)	PBV		X	
Pumpanlagen mit gegebener Drehzahl (Booster, Pumps)	BOOS, PUMP	X	X	
Druckminderungsventile (Pressure Reducing Valves)	PRV		X	X
Druckunterstützungsventile (Pressure Sustaining Valves)	PSV		X	X
Reglergesteuerte Pumpanlagen (variable speed Boosters)	BOR	X	X	X

und Chandrashekar (1972) geben ein auf graphentheoretischen Überlegungen basierendes Verfahren zur Berücksichtigung von FCVs und PBVs an. Von Donachie (1974) wird ein modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren zur hydraulischen Simulation von Wasserversorgungsnetzen unter Berücksichtigung von Pumpen und PRVs vorgestellt. Jeppson und Davis (1976) schlagen die Modellierung von PRVs durch Einführung eines virtuellen Reservoirknotens vor. Eine spätere Veröffentlichung von Chandrashekar (1980) bezieht die Modellierung von Pumpanlagen, PRVs und CHVs mit ein. Konvergenzprobleme unter Anwesenheit mehrerer CHVs und PRVs werden erwähnt und die Frage nach der Existenz einer eindeutigen Lösung gestellt. Ein Beispiel für die Existenz mehrdeutiger Lösungen, wenn zwei PRVs mit einem Kontrollknoten verbunden sind, ist bei Collins (1980) und Collins (1981) zu finden. In einer weiteren Veröffentlichung gibt der Autor Beispiele für mehrfache Betriebspunkte eines Systems, wenn Druckerhöhungsanlagen nicht monotone Pumpkurven besitzen (Collins u. a., 1979).

Ausführlich mit der Eindeutigkeit von Lösungen unter Anwesenheit rückgekoppelter Anlagen beschäftigen sich auch Berghout und Kuczera (1997). Die Autoren stellen fest, dass bei Rechnungen bisher keine mehrdeutigen Lösungen auftraten, wenn die Anlagen

lokal kontrolliert werden, d.h. die Kontrollknoten direkt mit den Anlagen verbunden sind. Als intuitiver 'Beweis' für die Eindeutigkeit der Lösung ist angeführt, dass PRVs ausgleichende Wirkung haben und der Ausgangsdruck konstant gehalten wird. Auch Andersen und Powell (1999) schlagen einen graphentheoretisch orientierten Ansatz zur Modellierung von PRVs vor.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Entwicklung eines umfassenden mathematischen Modells, welches die genannten Netzkomponenten einbezieht, noch nicht gelang. Insbesondere steht der Nachweis einer eindeutigen Lösung bei Netzwerken mit rückgekoppelten Einbauteilen aus. Die Schwierigkeiten ergeben sich zum einen dadurch, dass zu Armaturen mit Ungleichungsnebenbedingungen gehörende hydraulische Gesetze als mehrdeutige Abbildungen nicht differenzierbar im klassischen Sinne sind, zum anderen die Modellierung von rückgekoppelten Anlagen ganz auf die Kenntnis eines hydraulischen Gesetzes verzichten muss.

Im folgenden Abschnitt soll zunächst auf die Erweiterung des mathematischen Modells um subdifferenzielle hydraulische Gesetze eingegangen werden, der Behandlung rückgekoppelter Anlagen ist ein eigenes Kapitel (5) gewidmet.

## 4.2 Erweitertes mathematisches Modell

### 4.2.1 Voraussetzungen

Die Anwendung der Subdifferenzialrechnung (Kap. 3) erlaubt die Erweiterung des mathematischen Modells der hydraulischen Simulation auf hydraulische Beziehungen, die einem Subdifferenzial nach Def. 3.15 auf Seite 39 zuzuordnen sind. Derartige Beziehungen treten auf, wenn Kontrollarmaturen zu berücksichtigen sind. Die hydraulischen Gleichungen  $\mathbf{q} = f(\mathbf{h})$  und  $\mathbf{h} = f(\mathbf{q})$  nach Kap. 2.2.3 werden ersetzt durch die subdifferenziellen Formulierungen  $\mathbf{q} \in \partial W$  und  $\mathbf{h} \in \partial W^c$ . An Stelle von Voraussetzung 2.1 auf Seite 8 tritt:

**Voraussetzung 4.1** *Für jeden Strang des Modells existiert ein hydraulisches Gesetz in Form einer Abbildung  $\partial W^c : q \mapsto h$  ( $\partial W : h \mapsto q$ ), welche den Anforderungen eines maximal monotonen Operators nach Def. 3.17 auf Seite 40 genügt.*

Unter Voraussetzung 4.1 folgt dann nach Satz 3.7 und/oder Satz 3.8 auf Seite 41 die Konvexität der zugehörigen 'Content' - und 'Co-Content' -Funktionen. Die hydraulischen Gleichungen nach Kap. 2.2.3 sind in der subdifferenziellen Formulierung als

Spezialfall  $\partial W(\mathbf{H}) = \{\nabla W(\mathbf{H})\} \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n$  und  $\partial W^c(\mathbf{u}) = \{\nabla W^c(\mathbf{u})\} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l$  enthalten.

Im nächsten Abschnitt werden die in Wasserversorgungsnetzen verwendeten Armaturen behandelt, deren hydraulische Gesetzmäßigkeit dem Subdifferenzial einer konvexen Funktion entspricht, und schließlich zum erweiterten mathematischen Modell der hydraulischen Simulation zusammengeführt. Der 'Content' ('Co-Content') der Armaturen mit subdifferenziellen hydraulischen Beziehungen zusammen mit dem 'Content' ('Co-Content') 'herkömmlicher' (also nicht subdifferenzieller) hydraulischer Gleichungen und den Anteilen der äußeren Zu- und Abflüsse ergibt den 'Content'  $\Pi^c$  ('Co-Content'  $\Pi$ ) des Systems (analog Kap. 2.3.3).

Es wird gezeigt, dass die Minimierung von  $\Pi$ ,  $\Pi^c$  der Lösung der hydraulischen Gleichungen unter Beachtung der einseitigen Bindungen äquivalent ist.  $\Pi$ ,  $\Pi^c$  sind jeweils als Summe konvexer Funktionen konvex (s. Satz 3.4 auf Seite 37). Die Aufgabe kann mit den Methoden der konvexen Nichtlinearen Programmierung unter Nebenbedingungen behandelt werden.

Um Elemente<sup>3</sup> mit einer bestimmten Eigenschaft gegenüber der Gesamtmenge der Elemente abzugrenzen, wird für die weiteren Betrachtungen die Indikatormatrix  $\mathbf{I}_P$  von Elementen mit der Eigenschaft P bezüglich der Menge  $\mathbf{M}$  definiert:

**Definition 4.1** Gegeben sind die Indexmenge  $\mathbf{M}$  der Gesamtheit der Elemente mit  $|\mathbf{M}| = m$  und die Indexmenge  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{M}$  der Elemente mit Eigenschaft P mit  $|\mathbf{P}| = k$ . Die  $m \times k$  Matrix  $\mathbf{I}_P$  wird als Indikatormatrix der Menge  $\mathbf{P}$  bezüglich  $\mathbf{M}$  bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathbf{I}_P(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mathbf{M} \text{ und } j \in \mathbf{P} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 4.2.2 Kontrollarmaturen mit subdifferenziellen hydraulischen Gesetzen

### 4.2.2.1 Überblick

Im Folgenden werden zu verschiedenen Armaturen die zugehörigen subdifferenziellen Formulierungen der hydraulischen Gleichungen angegeben und die zugehörigen 'Co-Content'- und 'Content'-Funktionen vorgestellt. Die Variationsgleichungen (2.39) auf

<sup>3</sup>Hier sind die Elemente entweder Stränge oder Pfade des Graphen.

Seite 28 und (2.43) auf Seite 29 als notwendige Bedingungen für Minima der Funktionen  $\Pi$  und  $\Pi^c$  treten in diesem Fall in Ungleichungsform auf (vgl. Kap. 3.5.3).

#### 4.2.2.2 Rückflussverhinderer

Rückflussverhinderer (CHV = Check Valves) kommen vor allem in Verbindung mit Anlagen zum Einsatz, die nur in einer Richtung durchströmt werden dürfen, wie z.B. Pumpwerke. Sie werden als Rückschlagklappen, Rückschlagventile, Rückflusssperren und Membranrückflussverhinderer ausgeführt (Grombach u. a., 1985).

Ihre Bedeutung für die stationäre Rohrnetzrechnung liegt darin, dass der hydraulische Zustand, entweder geöffnet oder geschlossen, a priori nicht bekannt ist, sondern von den Zustandsvariablen des Systems abhängt. Der Fluss in dem Strang, in dem sich das CHV befindet, ist einer einseitigen Bindung unterworfen und hat der Ungleichung  $q_{CHV} \geq 0$  zu genügen. Für Systemzustände, in denen  $q_{CHV} > 0$  gilt, treten Reibungsverluste im Rohr und evtl. örtliche Verluste durch die Geometrie des Rückflussverhinderers auf, die denen 'herkömmlicher' Stränge entsprechen (s. Abb. 2.8 auf Seite 28). Steigt das Potenzial des Endknotens ( $\bar{H}_{EK}$ ) über das des Anfangsknotens ( $\bar{H}_{AK}$ ), so hätte dies eine Umkehr der Fließrichtung zur Folge, die durch Schließen des Ventils verhindert wird. Dabei kann sich eine beliebige Potenzialdifferenz  $h = \bar{H}_{AK} - \bar{H}_{EK} < 0$  einstellen. Die subdifferenzielle Darstellung

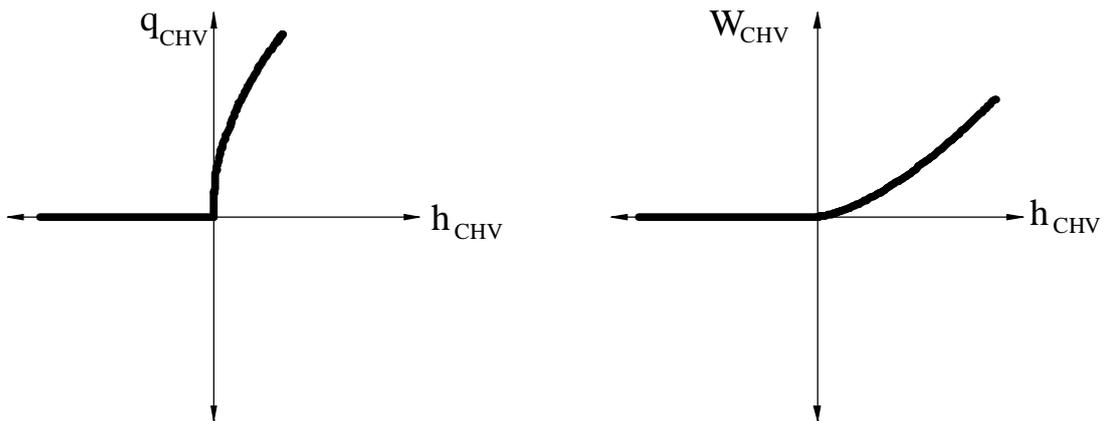


Abbildung 4.1: Hydraulisches Gesetz  $h_{CHV} \mapsto q_{CHV}$  und 'Co-Content'  $W_{CHV}$  für Rückflussverhinderer

der hydraulischen Funktion der Rückschlagklappe  $q_{CHV}(h) : R \mapsto R$  und zugehöriger 'Co-Content'  $W_{CHV}$  (vgl. Satz 3.7 auf Seite 41) lauten damit (s. dazu auch Abb. 4.1):

$$q_{CHV}(h) = \partial W_{CHV}(h) = \begin{cases} 0, & h \leq 0 \\ d^{-1}h, & h > 0 \end{cases}, \quad W_{CHV}(h) = \begin{cases} 0 & , h \leq 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha+1}d^{-1}h^2 & , h > 0 \end{cases}. \quad (4.1) \quad (4.2)$$

Die duale Formulierung für den 'Content'  $W_{CHV}^c$  ist aus der Umkehrung der hydraulischen Beziehung  $q = f(h)$  unter Berücksichtigung von  $q \geq 0$  ableitbar (s. Abb. 4.2):

$$h_{CHV}(q) = \partial W_{CHV}^c(q) = \begin{cases} \emptyset & , q < 0 \\ (-\infty, 0] & , q = 0 \\ dq & , q > 0 \end{cases}, \quad W_{CHV}^c(q) = \begin{cases} \infty & , q < 0 \\ \frac{1}{\alpha+1}dq^2 & , q \geq 0 \end{cases}. \quad (4.3) \quad (4.4)$$

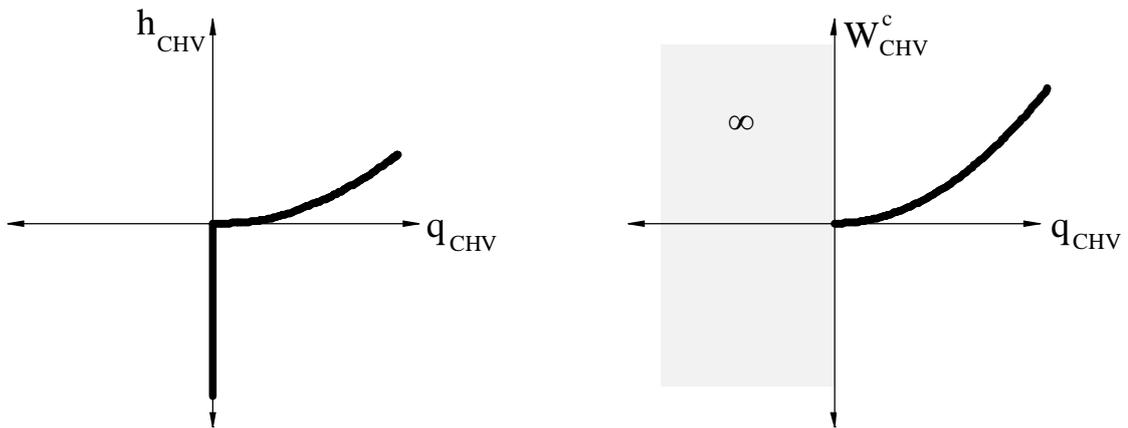


Abbildung 4.2: Hydraulisches Gesetz  $q_{CHV} \mapsto h_{CHV}$  und 'Content'  $W_{CHV}^c$  für Rückflussverhinderer

Im Gegensatz zur Funktion  $W_{CHV}$ , die auf ganz  $R$  definiert ist, gilt bei  $W_{CHV}^c$  für Flüsse  $q < 0$   $W_{CHV}^c = \infty$ . Damit ist  $dom W_{CHV}^c = [0; \infty)$  (vgl. Def. 3.8 auf Seite 36).

Wird mit  $\mathbf{I}_{CHV}$  die Indikatormatrix (s. Def. 4.1 auf Seite 63) der Menge  $\mathbf{M}_{CHV}$  der Stränge mit Rückflussverhinderern bezeichnet, lautet die Nebenbedingung im nichtlinearen Optimierungsmodell:

$$\mathbf{I}_{CHV}^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] \geq \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass positive Richtung des Pfades und Flussrichtung übereinstimmen.

### 4.2.2.3 Pumpen

Pumpen treten in Wasserversorgungsnetzen in Form von Einspeisepumpen (pumps) und Druckerhöhungsanlagen (boosters) im Netz auf. An dieser Stelle wird angenommen, dass die Pumpkurve bekannt ist und den Anforderungen eines maximal monotonen Operators genügt, während reale Pumpen auch nichtmonotone  $q$ - $h$ -Beziehungen aufweisen können<sup>4</sup>. Zum Schutz der Pumpe ist ein Rückflussverhinderer am Ausgang zu berücksichtigen, weshalb die hydraulische Beziehung der Pumpe der um eine Konstante  $h_0 < 0$  verschobenen des Rücklaufverhinderers (Kap. 4.2.2.2) gleicht. Dabei ist zu beachten, dass die Behandlung von Einspeisepumpen der von Druckerhöhungsanlagen im Netz (Boostern) entspricht. Der einzige Unterschied liegt in der Bedeutung der Konstanten  $h_0$ . Während diese bei Boostern den negativen Wert der maximalen Pumphöhe bei  $q = 0$  bezeichnet, gibt  $h_0$  bei Einspeisepumpen die Höhendifferenz zwischen Potenzialhöhe des Referenzknotens und maximalem Potenzial des Pumpknotens an. Das subdifferenzielle Gesetz der Pumpe sowie die daraus resultierende 'Co-Content'-Funktion (s. Abb. 4.3) einer Pumpe lauten allgemein (mit  $b$  etwa zwischen 1.5 und 2.5):

$$q_{PUMP}(h) = \begin{cases} 0 & , h \leq h_0 \\ \left(\frac{h-h_0}{a}\right)^{\frac{1}{b}} & , h > h_0 \end{cases}, \quad W_{PUMP}(h) = \begin{cases} 0 & , h \leq h_0 \\ \frac{ba}{b+1} \left(\frac{h-h_0}{a}\right)^{\frac{b+1}{b}} & , h > h_0 \end{cases}. \quad (4.6) \quad (4.7)$$

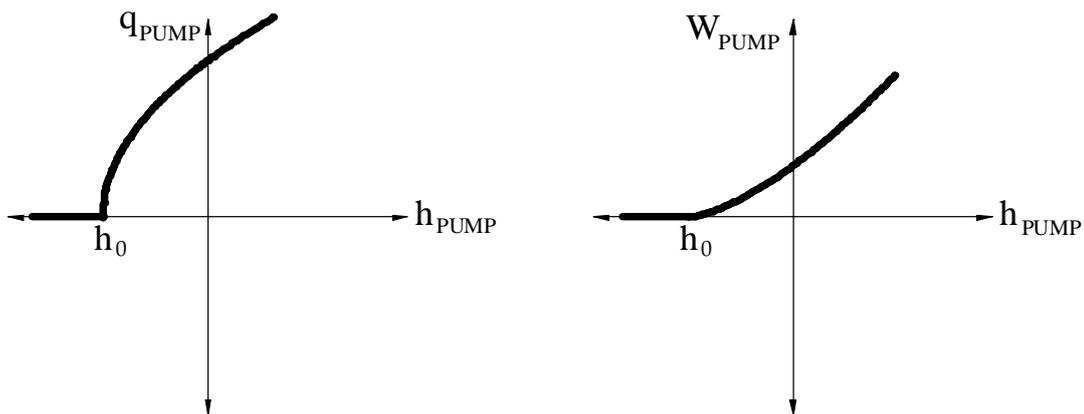


Abbildung 4.3: Hydraulisches Gesetz  $h_{PUMP} \mapsto q_{PUMP}$  und 'Co-Content'  $W_{PUMP}$  für Pumpe/Booster

<sup>4</sup>pers. Konversation mit Herrn Dr.-Ing Caglar, Fachgebiet Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe (TH), Literatur z.B. (Collins u. a., 1979)

Die duale Formulierung für den 'Content'  $W_{PUMP}^c$  (s. Abb. 4.4) ist:

$$h_{PUMP}(q) = \begin{cases} \emptyset & , q < 0 \\ (-\infty, h_0] & , q = 0 \\ h_0 + a \cdot q^b & , q > 0 \end{cases} , \quad (4.8) \quad W_{PUMP}^c(q) = \begin{cases} \infty & , q < 0 \\ h_0 \cdot q + \frac{a}{b+1} q^{b+1} & , q \geq 0 \end{cases} . \quad (4.9)$$

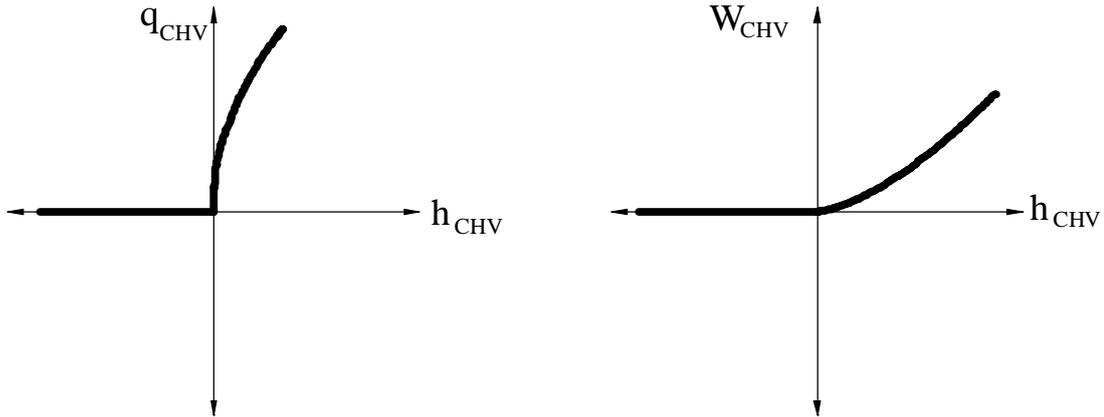


Abbildung 4.4: Hydraulisches Gesetz  $q_{PUMP} \mapsto h_{PUMP}$  und 'Content'  $W_{PUMP}^c$  für Pumpe/Booster

Mit der Indikatormatrix  $\mathbf{I}_{PUMP}$  (s. Def. 4.1 auf Seite 63) der Menge  $\mathbf{M}_{PUMP}$  der Stränge mit Pumpen/Boostern lautet die zu berücksichtigende Nebenbedingung:

$$\mathbf{I}_{PUMP}^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] \geq \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Die Menge  $\mathbf{M}_{PUMP}$  beinhaltet sowohl die realen Stränge der Boosterpumpen als auch die virtuellen der Einspeisepumpen.

#### 4.2.2.4 Durchflusskontrollschieber

Durchflusskontrollschieber<sup>5</sup> kommen zum Einsatz, wenn der Fluss durch einen bestimmten Strang auf einen Maximalwert  $q_{max}$  beschränkt werden soll. Unter Flüssen  $q < q_{max}$  entspricht das hydraulische Verhalten des FCVs bei vollständig geöffnetem Querschnitt dem eines gewöhnlichen Rohres. Im aktiven Betriebszustand wird dagegen der Fluss durch teilweises Schließen des Schiebers auf den Höchstwert  $q_{max}$  beschränkt. Je nachdem, ob das FCV in beiden Richtungen (Typ A) eingesetzt werden soll, mit einem CHV verbunden ist (TYP B) oder so verwendet wird, dass in einer Richtung keine

<sup>5</sup>FCV = Flow Control Valve

Flussregelung (TYP C) stattfindet, ergeben sich unterschiedliche hydraulische Gesetze. Die folgende Darstellung sowie Abb. 4.5 und Abb. 4.6 zeigen beispielhaft Subdifferenzial und (Co-)Content von Typ C:

$$q_{FCV-C}(h) = \begin{cases} d^{-1}h & , h \leq h_0 \\ q_{max} & , h > h_0 \end{cases} \quad , \quad W_{FCV-C}(h) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}d^{-1}h_0^2 & , h \leq h_0 \\ qh - \frac{1}{\alpha+1}d^{-1}h_0^2 & , h > h_0 \end{cases} \quad . \quad (4.11) \quad (4.12)$$

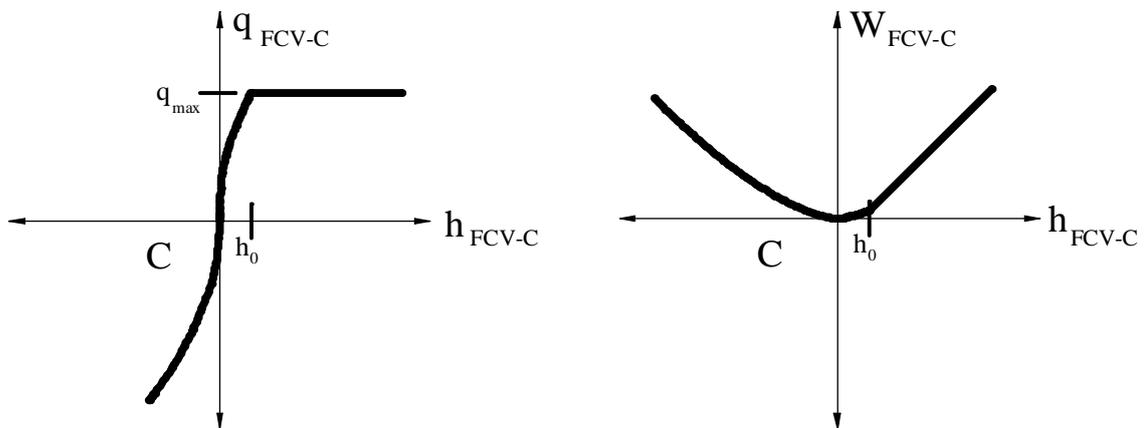


Abbildung 4.5: Hydraulisches Gesetz  $h_{FCV-C} \mapsto q_{FCV-C}$  und 'Co-Content'  $W_{FCV-C}$  für Durchflusskontrollschieber Typ C

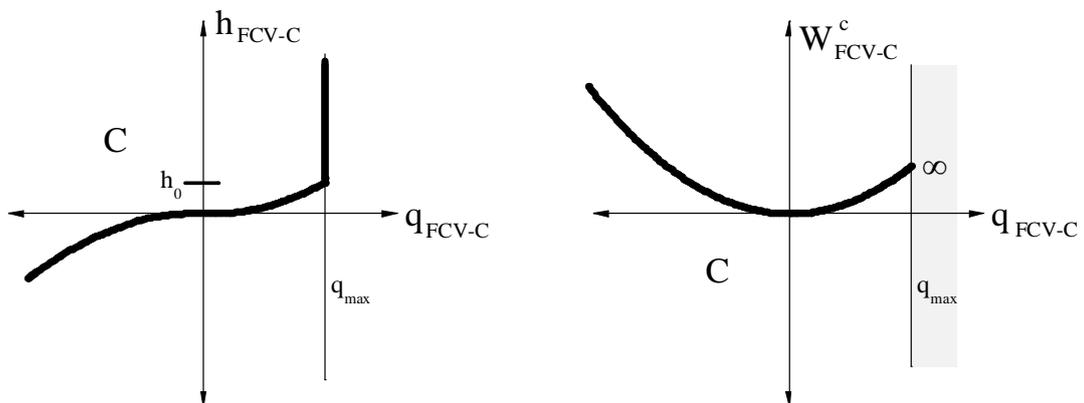


Abbildung 4.6: Hydraulisches Gesetz  $q_{FCV-C} \mapsto h_{FCV-C}$  und 'Content'  $W_{FCV-C}^c$  für Durchflusskontrollschieber Typ C

$$h_{FCV-C}(q) = \begin{cases} dq & , q < q_{max} \\ [h_0, \infty) & , q = q_{max} \\ \emptyset & , q > q_{max} \end{cases}, \quad W_{FCV-C}^c(q) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} dq^2 & , q \leq q_{max} \\ \infty & , q > q_{max} \end{cases}. \quad (4.13)$$

Bei der Minimierung des System-*'Content'* (siehe Abb. 4.6) sind folgende Nebenbedingungen für Typ C zu berücksichtigen ( $\mathbf{I}_{FCV}$ : Indikatormatrix der Menge  $\mathbf{M}_{FCV}$  (s. Def. 4.1 auf Seite 63) der Stränge mit FCVs):

$$\mathbf{I}_{FCV}^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] \leq \mathbf{q}_{max} \quad (4.15)$$

#### 4.2.2.5 Druckminderungsventile mit regelbarer Druckdifferenz

Durch den Einsatz von Druckminderungsventilen mit regelbarer Druckdifferenz (Abk.: PBV = Pressure Breaker Valve) lässt sich ein bestimmter, vorgegebener Druckunterschied zwischen Ein- und Auslass des Schiebers realisieren. Wie beim FCV sind unterschiedliche Kombinationen der Druckregelung denkbar. Abb. 4.7 zeigt das hydraulische Gesetz eines PBVs mit Rückflusssperre. Es wird angenommen, dass für Flüsse  $q > 0$  ein konstanter Druckunterschied  $z$  eingestellt wird, während Flüsse  $q < 0$  unzulässig sind. Bei Druckverhältnissen im Netz, die eine Flussumkehr im PBV bewirken würden, ist der Schieber geschlossen. Daraus ergeben sich die hydraulische Beziehung und zugehörige *'Co-Content'*-Funktion  $W_{PBV}$ :

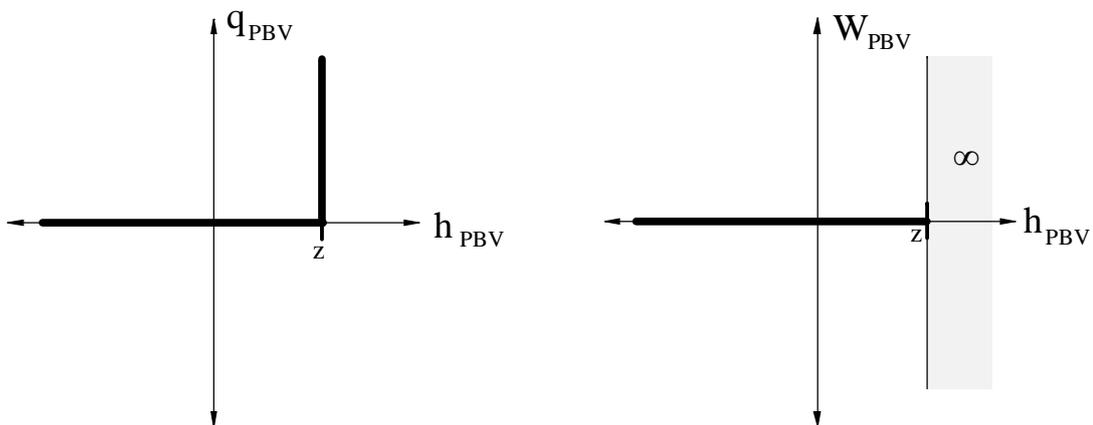


Abbildung 4.7: Hydraulisches Gesetz  $h_{PBV} \mapsto q_{PBV}$  und *'Co-Content'*  $W_{PBV}$  für Druckminderungsventil mit regelbarer Druckdifferenz

$$q_{PBV}(h) = \begin{cases} 0 & , h < z \\ [0, \infty) & , h = z \\ \emptyset, & , h > z \end{cases}, \quad W_{PBV}(h) = \begin{cases} 0 & , h \leq z \\ \infty & , h > z \end{cases}. \quad (4.17)$$

(4.16)

Die Nebenbedingungen zur Modellierung der PBV Stränge<sup>6</sup> stellen sich folgendermaßen dar:

$$-\mathbf{I}_{PBV}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \leq \mathbf{z}. \quad (4.18)$$

Das duale hydraulisches Gesetz und 'Content'  $W_{PBV}^c$  des PBVs sind

$$h_{PBV}(q) = \begin{cases} \emptyset & , q < 0 \\ (-\infty, z] & , q = 0 \\ z & , q > 0 \end{cases}, \quad W_{PBV}^c(q) = \begin{cases} \infty & , q < 0 \\ z q & , q \geq 0 \end{cases}. \quad (4.20)$$

(4.19)

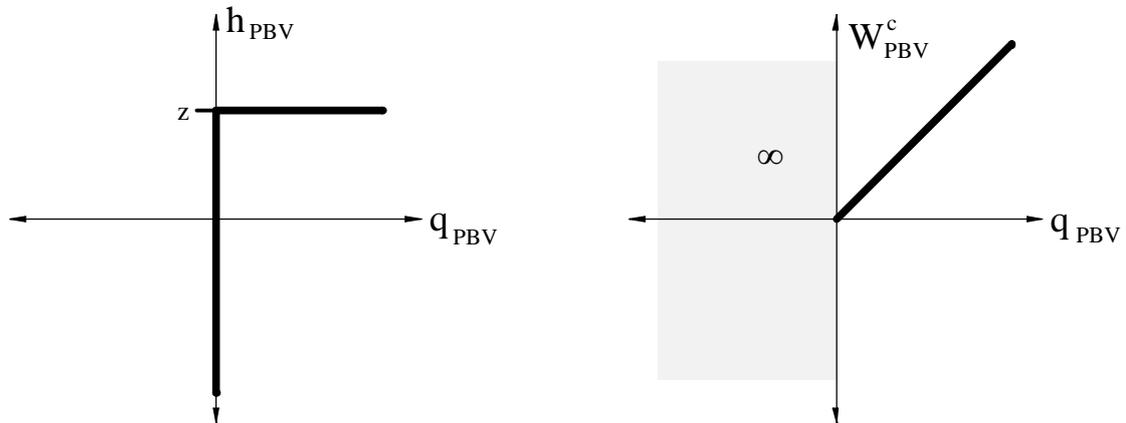


Abbildung 4.8: Hydraulisches Gesetz  $q_{PBV} \mapsto h_{PBV}$  und 'Content'  $W_{PBV}^c$  für Druckminderungsventil mit regelbarer Druckdifferenz

Wenn das PBV gleichzeitig als Rückflussverhinderer wirken soll, sind die entsprechenden Nebenbedingungen des CHVs bei der Minimierung des System-'Content' zu berücksichtigen:

$$\mathbf{I}_{PBV}^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}] \geq \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

<sup>6</sup>mit  $\mathbf{I}_{PBV}$ : Indikatormatrix der Menge  $\mathbf{M}_{PBV}$  (s. Def. 4.1 auf Seite 63) der Stränge mit PBVs

#### 4.2.2.6 Zeitweise geschlossene (dynamische) Schieber

Zu den bisher genannten Armaturen kommen solche Schieber, die zur vollständigen Abriegelung eines Rohres dienen. Dies kann zu Rehabilitationszwecken geschehen aber auch gezielt zur Steuerung der Anlage eingesetzt werden. Darüber hinaus können zu Kalibrierungszwecken durch zeitweises Schließen bestimmter Schieber unterschiedliche Flußverteilungen generiert und so die Information, die aus Druckmessungen erhältlich ist, vervielfältigt werden. Einzelheiten zur technischen Ausführung solcher Schieber sind z.B. Förster (2000) zu entnehmen.

Zur Modellierung sind die geschlossenen Stränge im jeweiligen Zeitschritt aus dem Graphen zu entfernen. Bei der Minimierung von  $\Pi$  kann dies sehr einfach durch Streichen der zugehörigen Spalten in der Inzidenzmatrix des Graphen realisiert werden. Bei der Darstellung als Optimierungsmodell von  $\Pi^c$  wäre jedoch der Aufwand durch Modifikation der Schleifenmatrix unverhältnismäßig größer. Hier ist es sinnvoll, die geschlossenen Stränge durch Gleichungsnebenbedingungen im mathematischen Modell zu berücksichtigen:

$$\mathbf{I}_{TDV}^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Matrix  $\mathbf{I}_{TDV}$  bezeichnet dabei wieder die Indikatormatrix der Menge der im Zeitschritt  $T$  geschlossenen Stränge.

### 4.2.3 Variationsungleichungen

Zusammenfassend sollen nun allgemein für hydraulische Gesetze vom subdifferenziellen Typ die Aufgaben der Minimierung der Funktionen des System-*'Content'* und *'Co-Content'* hergeleitet werden. Es wird vorausgesetzt, dass hydraulische Gleichungen vom subdifferenziellen Typ für Rohrstück oder Armatur  $j$  vorliegen. Seien  $s(h_j) \in \partial W_j(h_j)$ ,  $h_j \in R$  und  $M_{h_j}$  der zulässige Bereich der Druckverluste in Netzelement  $j$ . Dann ist der *'Co-Content'* gegeben durch (Hiriart-Urruty und Lemaréchal, 1993, Remark 4.2.5)

$$W_j(h_j) = \begin{cases} W_j(a) + \int_a^{h_j} s(x) dx & , h_j \in M_{h_j} \\ \infty & , h_j \notin M_{h_j} \end{cases} \quad (4.23)$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Entsprechend lässt sich die Funktion des *'Content'* des Rohres oder der Armatur  $j$  angeben. Seien  $t(q_j) \in \partial W_j^c(q_j)$ ,  $q_j \in R$  und  $Q_j$  die Menge der zulässigen

Flüsse für Netzelement  $j$ , folgt daraus

$$W_j^c(q_j) = \begin{cases} W_j^c(a) + \int_a^{q_j} t(x)dx & , q_j \in Q_j \\ \infty & , q_j \notin Q_j \end{cases} \quad (4.24)$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Weiter wird vorausgesetzt, dass die unilateralen hydraulischen Beziehungen die Anforderungen maximal monotoner Operatoren (nach Def. 3.17 auf Seite 40) erfüllen. Die Funktionen  $W_j^c$  (und  $W_j$ ) sind dann nach Satz 3.7 auf Seite 41 konvex, halbstetig nach unten und eigentlich. Unter diesen Voraussetzungen entsprechen den Gleichungen (4.23) und (4.24) wegen der Definition des Subdifferenzials (s. Def. 3.14 und 3.15 auf Seite 39) die Variationsungleichungen

$$\begin{aligned} \delta W_j &= W_j(h_j + \delta h_j) - W_j(h_j) \geq q_j \delta h_j \quad \forall q_j \in \partial W_j(h_j) \quad \text{und} \\ \delta W_j^c &= W_j^c(q_j + \delta q_j) - W_j^c(q_j) \geq h_j \delta q_j \quad \forall h_j \in \partial W_j^c(q_j). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die hydraulische Gleichung für das  $j$ -te Netzelement  $q_j = f_j(h_j)$  (s. Kap. 2.2.3), in der  $f_j : R \mapsto R$  eine stetige und monoton wachsende Funktion ist, wird durch die subdifferenziellen Bedingungen  $q_j \in \partial W_j(h_j)$  und  $h_j \in \partial W_j^c(q_j)$  ersetzt, was genau den Ungleichungen (4.25) entspricht. Dabei ist  $W_j(h_j)$  eine konvexe halbstetig nach unten und eigentliche Funktion (vgl. Satz 3.7 auf Seite 41),  $\partial W_j(h_j)$  das Subdifferenzial von  $W_j(h_j)$ .

Zur Beschreibung des stationären Fließzustandes, ausgedrückt durch den Vektor  $\mathbf{H}^*$  der Knotenpotenzialhöhen, soll nun eine Variationsungleichung abgeleitet werden, welche den hydraulischen Gesetzen sämtlicher Netzbestandteile Rechnung trägt. Dazu wird zunächst die Knotenbedingung (s. Gl. (2.18) auf Seite 21) mit einer Potenzialhöhenvariation  $\delta \mathbf{H} = (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*)$  multipliziert:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{A} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) = \mathbf{Q}^T (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*). \quad (4.26)$$

Dabei stellt  $\mathbf{A} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*)$  eine Variation der Potenzialverluste  $\delta \mathbf{h} = \mathbf{A} \delta \mathbf{H}$  dar. Die Flüsse der einzelnen Netzbestandteile  $j$  sind aus dem Subdifferenzial der zugehörigen 'Co-Content'-Funktionen zu wählen  $q_j \in \partial W_j$ . Wegen Gl. (4.25) gilt dann unter Beachtung der Kompatibilität (Gl. (2.19) auf Seite 21):

$$\sum_{j=1}^m W_j(\mathbf{A}\mathbf{H}) - \sum_{j=1}^m W_j(\mathbf{A}\mathbf{H}^*) \geq \mathbf{q}^T \mathbf{A} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n. \quad (4.27)$$

Wird mit  $W$  der Gesamt-'Co-Content' des Systems  $W = \sum_{j=1}^m W_j$  bezeichnet, folgt unter Berücksichtigung von Gl. (4.26) die Variationsungleichung

$$W(\mathbf{A}\mathbf{H}) - W(\mathbf{A}\mathbf{H}^*) - \mathbf{Q}^T (\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n, \quad (4.28)$$

oder umgeschrieben

$$W(\mathbf{A}\mathbf{H}) - \mathbf{Q}^T \mathbf{H} - [W(\mathbf{A}\mathbf{H}^*) - \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^*] \geq 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n. \quad (4.29)$$

Es wird nun die Funktion  $\tilde{\Pi} : \mathbf{R}^n \mapsto R \cup +\infty$  mit  $\tilde{\Pi} = W(\mathbf{A}\mathbf{H}) - \mathbf{Q}^T \mathbf{H}$  (vgl. Kap. 3.3.1) betrachtet, die als Summe konvexer Funktionen konvex ist (Teil a) in Satz 3.4 auf Seite 37). Nach Satz 3.9 auf Seite 42 muss in einem Minimum  $\mathbf{H}^*$  der Funktion die Bedingung  $\mathbf{0} \in \partial \tilde{\Pi} + \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{H}^*)$  erfüllt sein. Da bis hier die Menge  $\mathbf{C}$  der zulässigen Potenzialhöhen aus ganz  $\mathbf{R}^n$  besteht, gilt  $\mathbf{N}_{\mathbf{R}^n}(\mathbf{H}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n$ . Die Menge der zulässigen Potenzialhöhen  $\mathbf{M}_{\mathbf{H}} \subset \mathbf{R}^n$ , welche durch die Nebenbedingungen der PBVs (s. Gl. (4.18) auf Seite 70) gebildet wird, ist durch die Indikatorfunktion der konvexen Menge im 'Co-Content' enthalten (s. Gl. (4.17) auf Seite 70). Notwendig existiert dann im Minimum  $\mathbf{H}^*$  ein Subgradient  $\boldsymbol{\chi} \in \partial \tilde{\Pi}(\mathbf{H})$  mit  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$ . In die Definition der Subgradienten (Def. 3.14 auf Seite 38) eingesetzt folgt mit  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$ :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{H}) - \tilde{\Pi}(\mathbf{H}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{R}^n. \quad (4.30)$$

Die Variationsungleichung (4.30) stellt eine notwendige Bedingung für eine Lösung  $\mathbf{H}^*$  der Aufgabe

$$\min_{\mathbf{H} \in \mathbf{R}^n} \tilde{\Pi}(\mathbf{H}) \quad (4.31)$$

dar. Werden die Nebenbedingung Gl. (4.18) auf Seite 70 einbezogen ( $\mathbf{M}_{\mathbf{H}} = \{\mathbf{H} \mid -\mathbf{I}_{PBV}^T \mathbf{A}\mathbf{H} \leq \mathbf{z}\}$ ) und die Anteile der Indikatorfunktion der konvexen Menge der zulässigen Potenzialhöhen aus den 'Co-Content'-Funktionen der PBVs entfernt<sup>7</sup>, folgen die Gl. (4.29) äquivalente Variationsungleichung

$$W(\mathbf{A}\mathbf{H}) - \mathbf{Q}^T \mathbf{H} - [W(\mathbf{A}\mathbf{H}^*) - \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^*] \geq 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \quad (4.32)$$

und das zu Gl. (4.31) äquivalente Minimierungsproblem mit  $\Pi : \mathbf{R}^n \mapsto R$

$$\min_{\mathbf{H} \in \mathbf{M}_{\mathbf{H}}} \Pi(\mathbf{H}), \quad \text{mit: } \Pi(\mathbf{H}) = W(\mathbf{A}\mathbf{H}) - \mathbf{H}^T \mathbf{Q}. \quad (4.33)$$

Analog kann die Maschenbedingung  $\mathbf{C}^T \mathbf{h} = -\mathbf{C}^T [\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]$  (vgl. Gl. (2.25) auf Seite 22) mit allgemeinem Druckverlustvektor  $\mathbf{h}$  mit einer Schleifenflussvariation  $\delta \mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$  multipliziert werden:

$$\mathbf{h}^T \mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = -[\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]^T \mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*). \quad (4.34)$$

<sup>7</sup>Auf eine besondere Kennzeichnung der  $W_j, j \in \mathbf{M}_{PBV}$  und des Gesamt-'Co-Content' ohne Anteile der Indikatorfunktionen wird dabei verzichtet.

Mit  $h_j \in \partial W_j^c$ ,  $j = 1, \dots, m$  und  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{C} \delta \mathbf{u}$  folgt mit Gl. (4.25) unter Beachtung von Gl. (4.34) die Variationsungleichung:

$$\sum_{j=1}^m W_j^c(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^m W_j^c(\mathbf{u}^*) \geq -[\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]^T \mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l. \quad (4.35)$$

Die 'Content'-Funktionsanteile  $W_j^c$  der einzelnen Netzkomponenten lassen sich zum Gesamtsystem-'Content'  $W^c = \sum_{j=1}^m W_j^c$  addieren. Die Variationsungleichung (4.35) lautet damit:

$$W^c(\mathbf{u}) - W^c(\mathbf{u}^*) \geq -[\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]^T \mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l. \quad (4.36)$$

Aus den gleichen Überlegungen, die zur Herleitung des Minimierungsproblems in Gl. (4.31) führten, folgt, dass Gl. (4.36) die notwendige Bedingung zur Minimierung des System-'Content'  $\tilde{\Pi}^c$  darstellt (vgl. Gl. (2.43) auf Seite 29). Dabei bezeichnet  $\mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \mathbf{C} \delta \mathbf{u}$  eine hydraulisch zulässige Flußvariation  $\delta \mathbf{q} = \delta(\mathbf{q}_t + \mathbf{C} \mathbf{u}) = \mathbf{C} \delta \mathbf{u}$ . Mit  $\tilde{\Pi}^c = W^c + [\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]^T \mathbf{C} \mathbf{u}$  lautet die Gl. (4.36) äquivalente Minimierungsaufgabe:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l} \tilde{\Pi}^c(\mathbf{u}). \quad (4.37)$$

In dieser Form handelt es sich um eine nicht differenzierbare Aufgabe. Werden wie bei der Minimierung des System-'Co-Content' in Gl. (4.32) die Anteile der Indikatorfunktionen, die aus den Flussbeschränkungen der verschiedenen Armaturen aus Kap. 4.2.2 resultieren, aus den 'Content'-Anteilen  $W_j^c$  (auf besondere Kennzeichnung wird wieder verzichtet) entfernt und der zulässige Bereich auf die konvexe Menge  $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}^l$ , deren genaue Beschreibung in Gl. (4.45) folgt, begrenzt, kann die Variationsungleichung (4.36) in der Form

$$W^c(\mathbf{u}) - W^c(\mathbf{u}^*) \geq -[\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]^T \mathbf{C} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} \quad (4.38)$$

angegeben werden. Die zu Gl. (4.38) äquivalente differenzierbare Minimierungsaufgabe ist:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \Pi^c(\mathbf{u}), \quad \text{mit: } \Pi^c(\mathbf{u}) = W^c(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T [\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z}]. \quad (4.39)$$

Im Gegensatz zu  $\Pi$  ist aber die Funktion  $\Pi^c$  als Summe der 'Content'-Funktionen von Armaturen nach Kap. 4.2.2, Rohren und linearem Anteil der Zu- und Abflüsse ohne die Indikatorfunktionen der Flussnebenbedingungen zweimal stetig differenzierbar (damit gilt:  $\partial \Pi(\mathbf{u}) = \{\nabla \Pi(\mathbf{u})\}$ ). Die notwendige Bedingung für eine Lösung der Aufgabe aus Gl. (4.39) kann damit in Form der Variationsungleichung (s. Def. 3.21 auf Seite 49)

$$\nabla \Pi(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} \quad (4.40)$$

geschrieben werden (vgl. Harker und Pang, 1990, S.165).

## 4.2.4 Anwendung der Nichtlinearen Optimierung

### 4.2.4.1 Überblick

Zur Berechnung des hydraulischen Gleichgewichts unter Berücksichtigung von Kontrollarmaturen mit subdifferenziellem hydraulischem Gesetz werden die in Kap. 3.5.2 erläuterten Methoden der Nichtlinearen Optimierung unter Nebenbedingungen angewandt. Es wird sowohl die Minimierung des System-*'Co-Content'*  $\Pi$  als auch des System-*'Content'*  $\Pi^c$  behandelt. Beiden Aufgaben gemeinsam ist die Nichtlinearität der Zielfunktion, die unter polyhedralen Nebenbedingungen zu minimieren ist. Während die Zielfunktion der ersten Variante stückweise definiert und nur einmal stetig differenzierbar ist, kann für  $\Pi^c$  auch eine zweite stetige Ableitung berechnet werden.

### 4.2.4.2 Minimierung der *'Co-Content'*-Funktion

Der Gesamt-*'Co-Content'* des Systems setzt sich aus der Summe der einzelnen Anteile der Stränge und Knoten zusammen. Der wesentliche Unterschied zur Formulierung des System-*'Co-Content'* nach Kap. 2.3.3 liegt in der fehlenden Differenzierbarkeit (z.B. CHV, PUMP, ...) der *'Co-Content'*-Anteile, deren Subdifferenzial auch eine mehrdeutige Abbildung darstellen kann. Unter Berücksichtigung aller Kontrollarmaturen mit subdifferenziellem hydraulischem Gesetz ist der stationäre hydraulische Gleichgewichtszustand durch folgende nichtlineare Optimierungsaufgabe unter linearen Nebenbedingungen vollständig beschrieben:

$$CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi) : \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{H}} & \Pi(\mathbf{H}) \\ \text{s.t.} & -\mathbf{I}_{PBV}^T \mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{z} \leq \mathbf{0}, \end{array} \quad (4.41)$$

mit:

$$\Pi = \frac{\alpha}{\alpha + 1} (\mathbf{A}\mathbf{H})^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} [\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \mathbf{Q}^T \mathbf{H}.$$

Die Lagrangefunktion (vgl. Gl. (3.15) auf Seite 48) der Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)$  ist:

$$L_{CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} (\mathbf{A}\mathbf{H})^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} [\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \mathbf{Q}^T \mathbf{H} + \sum_{i=1}^{n_{PBV}} \mu_i (-\mathbf{I}_{PBV}^T \mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{z})_i. \quad (4.42)$$

Matrix  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$  ist dabei allgemeiner zu wählen als  $\mathbf{D}$  in Gl. (2.38) auf Seite 28 und beinhaltet neben den Anteilen der Rohre auch entsprechende Einträge für Pumpen. Im Gegensatz zur Formulierung des hydraulischen Gleichgewichts ohne Berücksichtigung

von Armaturen mit einseitigen hydraulischen Beziehungen in Kap. 2.3 sind auch stückweise definierte Funktionen  $d_i : R \mapsto R$ , die nicht auf ganz  $R$  stetig differenzierbar sind, in  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$  enthalten. (s. z.B. Beziehung  $q_{CHV}(h)$ , Gl. (4.1) auf Seite 64).

#### 4.2.4.3 Minimierung der 'Content'-Funktion

Wie in Kap. 4.2.2.2 bis Kap. 4.2.2.6 gezeigt wurde, weisen CHV, PUMP, FCV, PBV einseitige hydraulische Gesetze auf, welche zu Ungleichungsnebenbedingungen bei der Minimierung von  $\Pi^c$  führen:

$$g(\mathbf{u}) = [-\mathbf{I}_{CHV} - \mathbf{I}_{PUMP} - \mathbf{I}_{PBV} \quad \mathbf{I}_{FCV}]^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] - [\mathbf{I}_{FCV}]^T \mathbf{q}_{max} \leq \mathbf{0}. \quad (4.43)$$

Dynamisch geschlossene Schieber werden durch die Gleichungsnebenbedingung

$$h(\mathbf{u}) = [\mathbf{I}_{TDV}]^T [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

modelliert. Die Menge der zulässigen Punkte  $\mathbf{U}$  stellt einen konvexen polyedrischen Teilraum des  $\mathbf{R}^l$  dar und wird mit

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l \mid g(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{R}^l \quad (4.45)$$

bezeichnet.

Im Gegensatz zu  $\Pi$  ist  $\Pi^c$  für die oben beschriebenen Kontrollarmaturen zweimal stetig differenzierbar. Die Minimierung des System-'Content' nach Kap. 2.3.3 erweitert um die linearen Nebenbedingungen der Kontrollarmaturen entspricht der zu Gl. (4.41) dualen Formulierung (s. Gl. (4.39))

$$CO(\mathbf{U}, \Pi^c) : \quad \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \Pi^c, \quad (4.46)$$

mit:

$$\Pi^c = (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u})^T \frac{1}{\alpha + 1} \mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T [\mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R].$$

Matrix  $\mathbf{D}$  ist dabei wieder allgemeiner zu verstehen als in Gl. (2.42) auf Seite 29, Anteile aus den 'Content'-Funktionen von Pumpen sind zu berücksichtigen. Die Lagrangefunktion zu  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  ist:

$$L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)} = (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u})^T \frac{1}{\alpha + 1} \mathbf{D} (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T [\mathbf{I}_{PBV} \mathbf{z} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \sum_{i=1}^s \mu_i g_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^d \lambda_j h_j(\mathbf{u}). \quad (4.47)$$

Die zweimal stetige Differenzierbarkeit von  $\Pi^c$  bezüglich der Variablen  $\mathbf{u}$  ermöglicht die Berechnung von Gradient  $\nabla_{\mathbf{u}} L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}$  und Hessematrix  $\nabla_{\mathbf{u}}^2 L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}$  der Lagrangefunktion  $L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}$ . Dabei werden für die Gradienten der linearen Nebenbedingungen  $\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) = \mathbf{G}_1$  und  $\nabla_{\mathbf{u}} h(\mathbf{u}) = \mathbf{H}$  geschrieben:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)} &= \mathbf{C}^T [\mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{I}_{PBV}\mathbf{z} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R] + \mathbf{G}_1^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \nabla_{\mathbf{u}}^2 L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)} &= \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C}.\end{aligned}\quad (4.48)$$

**Satz 4.1** *Unter Gültigkeit der Voraussetzung 4.1 auf Seite 62 ist 1)  $\Pi^c$  strikt konvex. 2) Die Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  besitzt für  $\mathbf{U} \neq \emptyset$  eine eindeutige Lösung.*

**Beweis:**

1) Hinreichend für strikte Konvexität von  $\Pi^c$  ist die positive Definitheit der Hessematrix  $\nabla_{\mathbf{u}}^2 L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}$ :

$$\nabla_{\mathbf{u}}^2 L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)} \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l. \quad (4.49)$$

Mit  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{u}$  kann die Bedingung umgeformt werden zu:

$$(\Delta \mathbf{q})^T \mathbf{D}(\Delta \mathbf{q}) > 0 \quad \forall \Delta \mathbf{q} \neq 0. \quad (4.50)$$

Gl. (4.50) stellt die Bedingung für positive Definitheit der Matrix  $\mathbf{D}$  dar. Diese ist für  $\mathbf{D}$  wegen  $\mathbf{D}_{jj} > 0, j = 1, \dots, m$  (zur Berechnung der  $\mathbf{D}_{jj}$  siehe Gl. (2.13) auf Seite 19 und analoge Formulierung für Pumpen nach Gl. (4.9) auf Seite 67) wegen Voraussetzung 4.1 auf Seite 62 leicht nachzuweisen. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Spalten von Schleifenmatrix  $\mathbf{C}$  (s. Def. 2.7 auf Seite 11 und Erläuterungen) gilt  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  genau dann, wenn  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  ist. Demnach sind  $\mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  und damit  $\nabla_{\mathbf{u}}^2 L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}$  positiv definit, woraus die strikte Konvexität von  $\Pi^c$  folgt.

2) Aus der Konvexität von  $\Pi^c$  resultiert, dass jedes lokale Minimum gleichzeitig globales Minimum ist. Die positive Definitheit der Hessematrix von  $\Pi^c$  garantiert die lokale (und wegen Konvexität auch) globale Eindeutigkeit eines Minimums. Die Aufgabe besitzt damit maximal eine Lösung. Um die Existenz einer solchen sicherzustellen, genügt es zu fordern, dass  $\mathbf{U}$  eine kompakte nichtleere Teilmenge des  $\mathbf{R}^l$  ist. Kompaktheit von  $\mathbf{U}$  kann aber wegen der Koerzitivität von  $\Pi^c$  (vgl. Kap. 2.3.3) vorausgesetzt werden. Als praktische Gegebenheit kann ebenso die beschränkte Flusskapazität der Netzbestandteile als Begründung für die Annahme eines kompakten zulässigen Bereichs  $\mathbf{U}$  dienen.  $\square$

Für die Nebenbedingungen gelten die (LICQ). Dann ist nach Satz 3.11 auf Seite 47 die Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  KKT-Punkt. Die Berechnung des eindeutigen Minimums von  $\Pi^c$  in  $\mathbf{U}$  kann damit durch die Ermittlung eines KKT-Punktes der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  erfolgen. Ein solcher Punkt  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  ist nach Satz 3.12 auf Seite 48 Lösung des folgenden Systems:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \{[\mathbf{D}(\mathbf{u}^*)] (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^*) + \mathbf{I}_{PBVZ} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R\} + \sum_{i=1}^s \mu_i^* g_i(\mathbf{u}^*) + \sum_{j=1}^d \lambda_j^* h_j(\mathbf{u}^*) &= \mathbf{0}, \\ g(\mathbf{u}^*) &\leq \mathbf{0}, \\ h(\mathbf{u}^*) &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\mu}^* &\geq \mathbf{0}, \\ \mu_i^* g_i(\mathbf{u}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Voraussetzung  $\mathbf{U} \neq \emptyset$  unter Berücksichtigung von Gleichungsnebenbedingungen sind bei Altman und Boulos (1995) zu finden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Anfangsflussverteilung entwickelt, welches zusätzlich die Berücksichtigung von Ungleichungsnebenbedingungen gestattet. Generell kann für jeden Strang eine obere und untere Flussschranke vorgegeben werden. Die erste Aufgabe des Verfahrens besteht in der Auswahl der maßgebenden Bedingungen. Dazu erweist sich die Unterteilung des Graphen nach Kap. 2.2.1 als nützlich. Alle Stränge innerhalb eines Pfades besitzen den gleichen Freiheitsgrad bezüglich einer Flussvariation. Damit können für einen Pfad nur je eine obere und untere Flussschranke maßgebend sein. Schließen sich die Bedingungen aus, existiert keine zulässige Flussverteilung, es gilt  $\mathbf{U} = \emptyset$ .

Existieren für die Flüsse in den Pfaden zulässige obere und untere Schranken, werden diese in einem zweiten Schritt zu den Nebenbedingungen des Gesamtsystems zusammengefasst. Diese bestehen dann aus einem Satz von linearen Gleichungen und Ungleichungen in den Variablen  $\mathbf{u}$ . Zur Überprüfung  $\mathbf{U} \neq \emptyset$  und gleichzeitigen Bestimmung einer zulässigen Anfangsflussverteilung können Methoden der Linearen Programmierung (Phase I des Simplexverfahrens) eingesetzt werden. Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens in der vorliegenden Anwendung ist Anhang A zu entnehmen.

## 4.3 Sensitivität des hydraulischen Gleichgewichts

### 4.3.1 Überblick

Die Kenntnis von Parametersensitivitäten ist in unterschiedlichen Bereichen nützlich. Die Empfindlichkeit der Systemvariablen bezüglich einzelner Stellgrößen von Kontrollarmaturen ist für Steuerungsentscheidungen hilfreich. Verschiedene Verfahren zur Modellkalibrierung und Mängelidentifikation basieren auf der Kenntnis von Sensitivitätsaussagen. Shamir und Howard (1968) leiten aus den nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Kap. 2.2.6) Empfindlichkeitsaussagen ab.

In diesem Abschnitt werden die in Kap. 3.6.1 allgemein formulierten Methoden auf die Berechnung der Sensitivität der Optimalwerte der konvexen Optimierungsaufgaben zur Minimierung der System- 'Co-Content' - und System- 'Content' -Funktionen bezüglich unterschiedlicher Parameter angewandt. Im Unterschied zur Darstellung von Shamir und Howard (1968) werden einseitige Bindungen der Kontrollarmaturen durch Anwendung der Sensitivitätsanalyse nichtlinearer Optimierungsaufgaben berücksichtigt.

Je nach Parameter wird die zur Berechnung der Sensitivitätsmatrix einfachere Darstellung gewählt. Zu erwähnen ist, dass dies keinen Einfluss auf den zur Berechnung des Gleichgewichts verwendeten Algorithmus hat. Die aus der dualen Formulierung berechneten Größen entsprechen genau den gesuchten Variablen. Wird beispielsweise ein maschenorientiertes Verfahren eingesetzt, können aus den Flüssen die Druckverluste und damit die Potenzialabsenkungen an den Knoten berechnet werden, welche dann genau den Lösungsvariablen des dualen knotenorientierten Verfahrens entsprechen. Ebenso kann die Matrix  $\mathbf{D}^{-1}$  (in Gl. (4.42) auf Seite 75) aus den Kehrwerten von  $\mathbf{D}$  (in Gl. (4.47) auf Seite 76) bestimmt werden.

### 4.3.2 Sensitivitätsanalyse bei der Minimierung des System- 'Co-Content' $\Pi$

#### 4.3.2.1 Bestimmung der Jacobimatrix der KKT-Bedingungen von $CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)$ bezüglich $[\mathbf{H}, \boldsymbol{\mu}]$

Sei  $(\mathbf{H}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$  Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)$  in Gl. (4.41) auf Seite 75 und es gelte folgende Voraussetzung:

**Voraussetzung 4.2** Der System-*'Co-Content'*  $\Pi(\mathbf{H})$  der Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)$  sei zweimal stetig differenzierbar in  $(\mathbf{H}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ . In der Lösung der Aufgabe sei vorausgesetzt, dass neben der (LICQ) und strenger Komplementarität hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für ein lokales Minimum gelten.

Problematisch ist in diesem Fall die fehlende zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Zielfunktion in den zu Flussnebenbedingungen gehörigen Knickpunkten. Wird jedoch strenge Komplementarität in der dualen Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  für diese Nebenbedingungen angenommen, kann hier entsprechend verfahren werden: Ein Strang ist entweder geschlossen oder geöffnet. Bei geöffnetem Strang existiert dann eine Umgebung, in der die Zielfunktion zweimal stetig differenzierbar ist. Ist der Strang geschlossen, kann ebenfalls zweimal stetig differenziert werden. Der Strang kann dann aber auch ganz aus dem System entfernt werden, da er in diesem Zustand keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Im Folgenden sind die Teilmatrizen zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  angegeben, die bereits diese Vorauswahl beinhalten, d.h. in  $\mathbf{D}^{-1}$  und  $\mathbf{A}$  finden nur die tatsächlich geöffneten Stränge Berücksichtigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \mathbf{T} \left[ \frac{1}{\alpha} \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T, \\ \mathbf{A}_{12} &= \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T} \left[ \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \mathbf{A}_{12}^T, \\ \mathbf{A}_{22} &= - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T} \left[ \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right) \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

#### 4.3.2.2 Sensitivität bezüglich der Bedarfswerte

Zur Ermittlung der Sensitivitätsmatrix bezüglich der Bedarfswerte bietet sich an, Problem  $CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)$  zu betrachten, da hier im Gegensatz zu  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  der Parameter  $\mathbf{Q}$  nicht in den Nebenbedingungen enthalten ist. Die gemischte Ableitung der Lagrangefunktion ist in diesem Fall besonders einfach:

$$\nabla_{\mathbf{H}, \mathbf{Q}}^2 L_{CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}}, \Pi)} = \mathbf{E}. \quad (4.53)$$

Die Sensitivitätsmatrix setzt sich demnach nur aus den Blöcken  $\mathbf{A}_{11}$  und  $\mathbf{A}_{21}$  (s. Gl. (4.52)) zusammen:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H} \\ \nabla_{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T} \left[ \frac{1}{\alpha} \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T \\ - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T} \left[ \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

### 4.3.3 Sensitivitätsanalyse bei der Minimierung des System- 'Content' $\Pi^c$

#### 4.3.3.1 Bestimmung der Jacobimatrix der KKT-Bedingungen von $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$ bezüglich $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}]$

Für die weiteren Untersuchungen dieses Abschnittes gelte folgende Voraussetzung:

**Voraussetzung 4.3** Der System-'Content'  $\Pi^c(\mathbf{u})$  der Optimierungsaufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  (Gl. (4.46) auf Seite 76) sei zweimal stetig differenzierbar. In einer Lösung  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  der Aufgabe sei vorausgesetzt, dass neben der (LICQ) und strenger Komplementarität hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für ein lokales Minimum gelten.

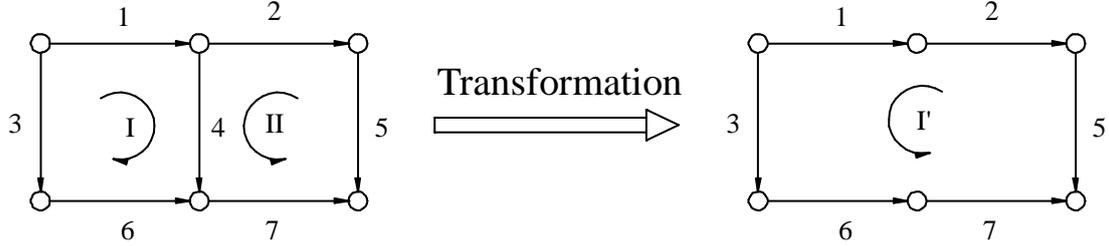
Mit Voraussetzung 4.3 sind die Bedingungen von Satz 3.17 auf Seite 53 erfüllt. Der Gradient der Optimalwerte bezüglich der Parameter der Aufgabe kann bestimmt werden. Dazu sind zunächst wie in Gl. (4.52) die Partitionen der Matrix  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  nach Gl. (3.33) auf Seite 56 zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{11} &= \mathbf{T}[\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T, \\
 \mathbf{A}_{12} &= \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{21} &= \mathbf{A}_{12}^T, \\
 \mathbf{A}_{22} &= - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \right) \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

In diesem Fall lässt sich eine anschauliche Bedeutung der Matrix  $\mathbf{T}$  ableiten. Durch die Multiplikation der Schleifenmatrix  $\mathbf{C}$  mit  $\mathbf{T}$  wird eine Transformation der Schleifen erreicht. Liegt beispielsweise ein Strang mit aktiver Flussnebenbedingung in zwei Schleifen, werden diese durch die Multiplikation zu einer Schleife zusammengefasst, so dass die gemeinsamen Stränge, insbesondere der Strang mit aktiver Flussnebenbedingung, nicht mehr in der modifizierten Schleifenmatrix  $\mathbf{C}\mathbf{T}$  enthalten sind.

#### Beispiel 4.1

Zur Veranschaulichung wird das Netz in Abb. 4.9 auf der nächsten Seite mit zwei Schleifen betrachtet. Soll z.B. Strang 4 geschlossen werden, ist die Nebenbedingung

Abbildung 4.9: Schleifentransformation durch Multiplikation mit  $T$ 

$q_4 = q_{t,4} + u_1 + u_2 = 0$  zu beachten. Die Matrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{CT}$  haben folgende Gestalt:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CT} = \begin{pmatrix} - & 1 \\ - & 1 \\ & 1 \\ 0 \\ - & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.3.3.2 Sensitivität bezüglich der PBV-Druckreduktion

Besonders im Hinblick auf Kap. 5 ist die Beziehung  $\mathbf{u}(\mathbf{z})$  von Interesse. Dazu ist die nach  $\mathbf{u}$  differenzierte Lagrangefunktion (Gl. (4.47) auf Seite 76) nach  $\mathbf{z}$  abzuleiten:

$$\nabla_{\mathbf{u}, \mathbf{z}}^2 L_{CO(\mathbf{u}, \Pi^c)} = \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{PBV}. \quad (4.56)$$

Durch Einsetzen der Resultate aus Gl. (4.55) und Gl. (4.56) in Gl. (3.35) auf Seite 56 folgt die Sensitivitätsmatrix des KKT-Tripels  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  bezüglich Parameter  $\mathbf{z}$  zu

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u} \\ \nabla_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\mu} \\ \nabla_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}[\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{PBV} \\ (-\mathbf{P}_a^{-1} \quad \mathbf{0})^T \left( \mathbf{E} \quad -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCC}^T \mathbf{I}_{PBV} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Auf die gleiche Weise kann die Sensitivität bezüglich der Behälterstände berechnet werden. In Gl. (4.57) ist dazu Matrix  $\mathbf{C}^T \mathbf{I}_{PBV}$  durch  $\mathbf{C}^T \mathbf{A}_R$  zu ersetzen:

$$\nabla_{\mathbf{u}, \mathbf{H}_R}^2 L_{CO(\mathbf{u}, \Pi^c)} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R. \quad (4.58)$$

Wird die duale Aufgabe betrachtet, tritt der Parameter  $\mathbf{z}$  nur in den Nebenbedingungen auf. In diesem Fall erfolgt die Berechnung der Sensitivitätsmatrix nach Gl. (3.38) auf Seite 56. Die Änderung der Druckhöhen an den Knoten infolge Änderung der Druckreduktionsparameter entspricht beispielsweise  $\mathbf{A}_{12}$  (Gl. (4.52) auf Seite 80):

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{H} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

### 4.3.3.3 Sensitivität bezüglich der Rauheit der Rohre

Die hydraulischen Gleichungen (Kap. 2.2.3) beinhalten unterschiedliche Abhängigkeiten der Druckverlustgleichung vom Rauheitsparameter. Deshalb wird für die Sensitivitätsbetrachtung der pauschale, die Rohreigenschaften kennzeichnende Faktor  $c$  aus der verallgemeinerten Beziehung Gl. (2.13) auf Seite 19 gewählt. Aus der linearen Abhängigkeit  $h_i = c_i|q_i|^{\alpha-1}q_i$  folgt:

$$\frac{\partial h_i}{\partial c_i} = |q_i|^{\alpha-1}q_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial q_i}{\partial c_i} = -\frac{1}{\alpha}c_i^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}|h_i|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \quad (4.60)$$

Die Matrizen der Ableitungen nach Gl. (4.60) werden mit  $\mathbf{F}_{\mathbf{u}}$  ( $F_{\mathbf{u}ij} = \frac{\partial h_i}{\partial c_i}$ , falls  $i = j$ , 0 sonst) und  $\mathbf{F}_{\mathbf{h}}$  ( $F_{\mathbf{h}ij} = \frac{\partial q_i}{\partial c_i}$ , falls  $i = j$ , 0 sonst) bezeichnet. Damit können die gemischten Ableitungen der Lagrangefunktionen von  $\mathbf{\Pi}$  und  $\mathbf{\Pi}^c$  angegeben werden:

$$\nabla_{\mathbf{u},\mathbf{c}}L_{CO(\mathbf{U},\mathbf{\Pi}^c)} = \mathbf{C}^T\mathbf{F}_{\mathbf{u}}, \quad \nabla_{\mathbf{H},\mathbf{c}}L_{CO(\mathbf{M}_{\mathbf{H}},\mathbf{\Pi})} = \mathbf{A}^T\mathbf{F}_{\mathbf{h}}. \quad (4.61)$$

Die Sensitivitätsmatrizen berechnen sich zu

$$\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{u} \\ \nabla_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\mu} \\ \nabla_{\mathbf{z}}\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}[\alpha\mathbf{T}^T\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{T}]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{C}^T\mathbf{F}_{\mathbf{u}} \\ \left(-\mathbf{P}_a^{-1} \quad \mathbf{0}\right)^T \left(\mathbf{E} \quad -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{T}]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{F}_{\mathbf{u}}\right) \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

und

$$\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{H} \\ \nabla_{\mathbf{c}}\boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}\left[\frac{1}{\alpha}\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{F}_{\mathbf{h}} \\ -\left(\mathbf{P}_a^{-1} \quad \mathbf{0}\right)^T \left(\mathbf{E} \quad -\mathbf{T}[\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}]^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{F}_{\mathbf{h}}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

## 4.4 Zusammenfassung

Das mathematische Modell der hydraulischen Simulation vermaschter Wasserversorgungsnetze wurde um Armaturen erweitert, deren hydraulische Gesetze dem Subdifferenzial einer konvexen Funktion entsprechen. Darunter waren vorrangig Einbauten mit Flussbeschränkungen zu verstehen. Deren 'Co-Content' - und 'Content' - Funktionen ergeben zusammen mit den Anteilen der Rohre nach Kap. 2.3 den gesamten System- 'Co-Content' und - 'Content' . Die zueinander dualen Aufgaben der Minimierung des System- 'Co-Content' und - 'Content' (vgl. Kap. 2.3) wurden in diesem allgemeineren Fall als nichtlineare Optimierungsaufgaben unter linearen Nebenbedingungen formuliert. Die strikte Konvexität der Zielfunktionen garantiert jeweils die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe auf einer nichtleeren kompakten Menge. Die Unterschiede zwischen Ausgangsmodell nach Birkhoff und Diaz (1956) und weiterentwickeltem 'Content' -Modell sind nochmals in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Schließlich wurde auf die

Tabelle 4.2: Übersicht Modellerweiterung

Formulierung	Modell (nach Birkhoff und Diaz, 1956)	erweitertes Modell
Gleichgewichtsbedingungen	$\mathbf{A}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ $\mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{H} = -\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R$ $\mathbf{h} = f(\mathbf{q})$	$\mathbf{A}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ $\mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{H} = -\mathbf{A}_R \mathbf{H}_R$ $\mathbf{h} \in \partial W^c(\mathbf{q})$
Minimierungsaufgabe	$\min_{\mathbf{u}} \{ \Pi^c : \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l \}$	$\min_{\mathbf{u}} \{ \Pi^c : \mathbf{u} \in \mathbf{U} \}$ $\mathbf{U} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l : g(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0},$ $h(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \}$
Variations(un)gleichung	$\nabla \Pi^c(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = 0$ $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l$	$\nabla \Pi^c(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \geq 0$ $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$

Anwendung von Sensitivitätssätzen der Nichtlinearen Programmierung - ein weiterer Vorteil der Modellierung des stationären hydraulischen Fließzustandes in vermaschten Druckrohrnetzen als Minimierungsaufgabe - eingegangen. Die Sensitivitätsmatrizen der Systemvariablen bezüglich der wichtigsten Parameter wurden angegeben.

# Kapitel 5

## Armaturen mit Druckrückkoppelung

### 5.1 Überblick

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Kontrollarmaturen, deren hydraulisches Verhalten unter Annahme bestimmter Parameter als bekannt vorausgesetzt wird und den Eigenschaften eines maximal monotonen Operators nach Def. 3.17 auf Seite 40 entspricht, ist bei rückgekoppelten Anlagen der das hydraulische Gesetz bestimmende Parameter unbekannt und als vom aktuellen Netzzustand abhängige Variable zu bestimmen. Derartige Anlagen sind in der Form von Druckminderungsventilen mit konstant zu haltendem Ausgangsdruck (PRV = Pressure Reducing Valve), druckunterstützenden Schiebern mit aufrecht zu haltendem konstantem Eingangsdruck (PSV = Pressure Sustaining Valve) und reglergesteuerten Pumpen, die den Ausgangsdruck durch Anpassen der Drehzahl der Pumpe auf einem vorgegebenen Niveau halten, in Wasserversorgungssystemen anzutreffen.

Die Funktionsweise eines PRVs besteht im Bestreben, einen hydrostatischen Gleichgewichtszustand zwischen der von einer Sollwertfeder ausgeübten Druckkraft und dem anstehenden Wasserdruck zu erreichen. Dieses Gleichgewicht kann ebenso wie der im vorherigen Kapitel beschriebene stationäre Fließzustand als Optimierungsaufgabe formuliert werden. Werden beide Optimierungsaufgaben zusammen betrachtet, zeigt sich, dass die Lösungsvariablen der einen Aufgabe Parameter der anderen sind und umgekehrt. Als Konsequenz lässt sich das stationäre Gleichgewicht nicht mehr als Minimie-

rungsproblem nur einer Zielfunktion<sup>1</sup> formulieren, vielmehr sind zwei sich gegenseitig beeinflussende Optimierungsprobleme zu lösen. Derartige Aufgaben sind dem Bereich der Spieltheorie (zur Einführung s. z.B. Holler und Illing, 1993) zuzuordnen, deren Inhalte vor allem in der Wirtschaftstheorie weite Anwendung finden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll nun erstmalig der Versuch unternommen werden, das stationäre hydraulische Gleichgewicht unter Anwesenheit rückgekoppelter Anlagen in einem mathematischen Modell, einem Spiel mit den 'Spielern' System- 'Content' (Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$ ) und potenzielle Energie (s. Kap. 5.3), zu formulieren. Da es sich bei beiden um Naturgesetze handelt, wird davon ausgegangen, dass bei dem zu erreichenden Gleichgewichtszustand keiner der Spieler einen 'Vorteil' gegenüber dem anderen besitzt<sup>2</sup> und keine Absprachen unter den Spielern möglich sind<sup>3</sup>.

Als Konzept zur Lösung nichtkooperativer Spiele besitzt das Nash-Gleichgewicht (Nash, 1950, 1951) eine herausragende Bedeutung. Die theoretischen Grundlagen (vgl. Rosen, 1965) zur Bestimmung eines Nash-Gleichgewichts<sup>4</sup> differenzierbarer konvexer Optimierungsaufgaben und Fragen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit eines solchen werden im folgenden Kap. 5.2 behandelt<sup>5</sup>. Danach wird in Kap. 5.3 das hydrostatische Gleichgewicht als Minimierungsproblem formuliert. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden das Nash-Gleichgewicht zwischen hydrostatischem Gleichgewicht und stationärem Fließzustand aufgestellt und notwendige und hinreichende Bedingungen für dessen Existenz und Eindeutigkeit gegeben.

## 5.2 Nash-Gleichgewicht

In diesem Abschnitt soll die Aufgabe der Bestimmung eines Gleichgewichts zwischen  $N$  nichtlinearen parametrischen Optimierungsaufgaben behandelt werden. Gegeben seien  $N$  Optimierungsprobleme  $[O_1, \dots, O_N]$  vom Typ  $CO(\mathbf{C}_i, f_i)$  (s. Def. 3.19 auf Seite 41)

$$f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}_i}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i} | g_i(\mathbf{x}_i) \leq \mathbf{0}, h_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>wie bisher System- 'Co-Content'  $\Pi$  und - 'Content'  $\Pi^c$

<sup>2</sup>Beide Spieler stehen auf derselben Hierarchiestufe.

<sup>3</sup>Kooperation der Spieler wird ausgeschlossen.

<sup>4</sup>Im Zusammenhang mit differenzierbaren Aufgaben wird häufig auch von Cournot-Nash-Gleichgewicht gesprochen.

<sup>5</sup>Es muss erwähnt werden, dass die Aussagen dieses Abschnittes nur einen Sonderfall darstellen. Der Anwendungsbereich des Konzepts ist wesentlich allgemeiner (s. z.B. van Damme, 1991).

Dabei seien  $f_i$  stetig und streng konvex in  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_{\setminus i} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N)^T$ . Zunächst wird ein orthogonaler zulässiger Bereich vorausgesetzt, der aus dem vollen kartesischen Produkt  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \dots \times \mathbf{C}_N$  der zulässigen Mengen der einzelnen Spieler besteht. Das bedeutet, dass jeder Spieler zwar auf die Zielfunktion der anderen Spieler Einfluss nehmen kann, nicht aber auf deren zulässige Mengen.  $\mathbf{C}$  sei kompakt, die Funktionen  $g_i$  konvex und  $h_i$  affin linear,  $\mathbf{C}$  somit konvex. Gesucht ist ein Gleichgewicht zwischen den  $N$  Optimierungsproblemen. Außerdem wird angenommen, dass die gleichberechtigten Spieler sich streng rational verhalten und keine Absprachen möglich sind. Unter den getroffenen Annahmen ist das Gleichgewicht eines nichtkooperativen Spiels in Standard-Normalform zu bestimmen. Gesucht ist für jeden Spieler die optimale Lösung der jeweiligen Minimierungsaufgabe unter gegebenen Variablen der übrigen Spieler.

**Definition 5.1** Ein Punkt  $(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{\setminus i}^*)$  heißt **Nash-Gleichgewicht** der Minimierungsprobleme  $CO(\mathbf{C}_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , wenn gilt:

$$f_i(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{\setminus i}^*) \leq f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}^*) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_i.$$

Das Nash-Gleichgewicht lässt sich als Variationsungleichung (s. Kap. 3.5.3) formulieren. Zunächst seien weiterhin orthogonale Nebenbedingungen vorausgesetzt. Die Aufgabe besteht nun darin, ein  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  zu finden, für das

$$F(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C} \quad (5.2)$$

gilt. Dabei wird, Differenzierbarkeit der Funktionen  $f_i$  vorausgesetzt, die Abbildung  $F : \mathbf{C} \mapsto \mathbf{R}^{\sum n_i}$  durch die Gradienten der Zielfunktionen gebildet:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_1} f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}_2} f_2(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_{\mathbf{x}_N} f_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Für den Fall allgemeiner, nicht orthogonaler Nebenbedingungen ist der zulässige Bereich durch die Punkt zu Menge Abbildung  $\mathbf{C} : \mathbf{R}^{\sum n_i} \mapsto \mathbf{R}^{\sum n_i}$  definiert. Die Spieler üben nicht nur auf die Zielfunktionen der anderen Teilnehmer des Spiels Einfluss aus, sondern können auch deren zulässigen Bereich beeinflussen. Das Lösungskonzept

wird dann als *verallgemeinertes Nash-Gleichgewicht* bezeichnet und kann als Quasi-Variationsungleichung (QVI = Quasi-Variational Inequality) formuliert werden (Harker, 1991). Gesucht wird ein  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}(\mathbf{x}^*)$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$F(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}(\mathbf{x}^*). \quad (5.4)$$

### 5.2.1 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Von Interesse ist, ob ein Spiel eine Lösung besitzt. Dazu werden die Abbildungen  $r_i(\mathbf{x}_{\setminus i}) = \arg \min_{\mathbf{x}_i} \{f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}), \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$  betrachtet, die in der Spieltheorie als *beste Antwort Korrespondenz* bezeichnet werden. Aus der Stetigkeit und Konvexität der Funktionen  $f_i$  folgt nach Satz 3.19 auf Seite 57, dass es sich bei den  $r_i$  um stetige Funktionen handelt. Den Zusammenhang zwischen den Funktionen  $r_i$  und einem Nash-Gleichgewicht stellt der folgende Satz her.

**Satz 5.1** *Ein Punkt  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}$  ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn und nur wenn der Punkt  $\mathbf{x}^*$  der Bedingung  $\mathbf{x}^* = r(\mathbf{x}^*)$  genügt.*

**Beweis** (vgl. Eichberger, 1993, S.90): Nach Def. 5.1 ist  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$  ein Nash-Gleichgewicht, wenn  $\forall i = 1, \dots, N$  gilt:  $f_i(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{\setminus i}^*) \leq f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}^*) \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_i$ . Daher muss  $\mathbf{x}_i^* = r_i(\mathbf{x}_{\setminus i}^*) \equiv \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_i} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}^*)$  für alle Optimierungsprobleme  $i$  in Gl. (5.1) erfüllt sein. Damit ist  $\mathbf{x}^* = r(\mathbf{x}^*)$ . Umgekehrt folgt aus  $\mathbf{x}^* = r(\mathbf{x}^*) \quad \forall i = 1, \dots, N$   $\mathbf{x}_i^* = r_i(\mathbf{x}_{\setminus i}^*) \equiv \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_i} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}^*)$  und daraus  $f_i(\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{\setminus i}^*) \leq f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{\setminus i}^*)$ , was jedoch genau der Definition des Nash-Gleichgewichts (Definition 5.1) entspricht.  $\square$

Wegen Satz 5.1 ist die Existenz eines Nash-Gleichgewichts gleichbedeutend mit der Existenz eines Fixpunktes  $\mathbf{x}^*$  der Reaktionsfunktion  $r(\mathbf{x})$ . Um Aussagen bezüglich der Existenz eines Gleichgewichts treffen zu können, bietet sich die Anwendung von Fixpunktsätzen an.

**Satz 5.2** (*Fixpunktsatz von Kakutani (s. z.B. Friedman, 1986)*) *Sei  $\gamma(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{A} \subset \mathbf{R}^n$  eine oberhalbstetige mengenwertige Abbildung mit  $\gamma(\mathbf{x}) \subset \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$ . Ist  $\mathbf{A}$  kompakt und konvex und ist für alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$   $\gamma(\mathbf{x})$  eine nichtleere, konvexe Menge, dann besitzt  $\gamma$  einen Fixpunkt. D.h. es existiert ein  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{A}$ , so dass gilt:  $\mathbf{x}^* \in \gamma(\mathbf{x}^*)$ .*

Der Fixpunktsatz von Kakutani wird zum Beweis des folgenden Satzes benötigt, der Aufschluss über die Existenz eines Gleichgewichts der Optimierungsaufgaben ( $O_i$ ),  $i = 1, \dots, N$  gibt.

**Satz 5.3** (vgl. Eichberger, 1993, Theorem 4.1): Gegeben seien die Optimierungsaufgaben  $(O_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , für die jeweils folgende Voraussetzungen gelten:

(i) Das effektive Definitionsgebiet  $\text{dom } f_i = \mathbf{C}_i$  ist eine kompakte und konvexe Untermenge des euklidischen Raumes.

(ii) Die Zielfunktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  sind stetig und streng konvex.

Dann gibt es mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

**Beweis:** Aus Satz 5.1 auf der vorherigen Seite folgt, dass ein Nash-Gleichgewicht ein Fixpunkt der Reaktionsfunktionen sein muss. Um zu zeigen, dass ein Nash-Gleichgewicht der Optimierungsprobleme  $(O_i)$  existiert, genügt es demnach zu prüfen, ob die Voraussetzungen von Satz 5.2 durch die Reaktionsfunktion  $r(\mathbf{x})$  erfüllt sind.

(1) Nach Voraussetzung (i) sind die Definitionsmengen der einzelnen Optimierungsprobleme  $\mathbf{C}_i$  kompakte und konvexe Teilmengen eines euklidischen Raums. Damit ist die gesamte Definitionsmenge  $\mathbf{C}$  als kartesisches Produkt der einzelnen Definitionsmengen  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \dots \times \mathbf{C}_N$  ebenso eine kompakte und konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes.

(2) Die beste Antwort Korrespondenz  $r(\mathbf{x})$  ist eine Abbildung von  $\mathbf{C}$  nach Untermengen von  $\mathbf{C}$ . Für jedes  $i \in (O_i)$  existiert wegen der Stetigkeit der Funktionen  $f_i$  und der Kompaktheit der Mengen  $\mathbf{C}_i$  die beste Antwort  $r_i = \arg \min_{\mathbf{x}_i} f_i(\mathbf{x})$  und ist per definitionem eine Teilmenge von  $\mathbf{C}_i$ . Damit existiert  $r(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}$  und es gilt:  $r(\mathbf{x}) \subset \mathbf{C}$ .

(3) Im vorliegenden Fall besteht die Menge  $r_i(\mathbf{x})$  wegen (ii) jeweils nur aus einem einzelnen Element. Bei der besten Antwort Korrespondenz handelt es sich um eine stetige Funktion. Mengen, die nur einen Punkt enthalten, sind konvex und damit ist  $r(\mathbf{x})$  konvex für alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ . Die Oberhalbstetigkeit von  $r(\mathbf{x})$  beinhaltet als Spezialfall die Stetigkeit, die in Satz 3.19 auf Seite 57 für ein  $r_i(\mathbf{x})$  nachgewiesen wird. Die gleiche Argumentationsweise gilt unter Erfüllung der Voraussetzungen von Satz 3.19 für alle  $r_i$ ,  $i \in (O_i)$ , woraus die Stetigkeit von  $r(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{C}$  folgt.

Alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Kakutani sind erfüllt. Damit ist die Existenz mindestens eines Fixpunktes  $\mathbf{x}^*$  von  $r(\mathbf{x})$  und damit eines Nash-Gleichgewichts nachgewiesen.  $\square$

### 5.2.2 Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts

Zum Nachweis der Eindeutigkeit eines Nash-Gleichgewichts wird die stetige Differenzierbarkeit der Funktionen  $f_i$  bezüglich der Variablen  $\mathbf{x}_i$  vorausgesetzt. Der Gradient einer Funktion  $f_i(\mathbf{x})$  bezüglich einer Variablen  $\mathbf{x}_i$  wird mit  $\nabla_{\mathbf{x}_i} f_i(\mathbf{x})$  bezeichnet. Die

mit einem beliebigen nichtnegativen Vektor  $\mathbf{w}$  gewichtete Summe der einzelnen Zielfunktionen wird mit  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  bezeichnet:

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i f_i(\mathbf{x}), \quad w_i > 0. \quad (5.5)$$

Für jeden festen nichtnegativen Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbf{R}_+^N$  wird

$$g_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_1 \nabla_{\mathbf{x}_1} f_1(\mathbf{x}) \\ w_2 \nabla_{\mathbf{x}_2} f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ w_N \nabla_{\mathbf{x}_N} f_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

als Pseudogradient von  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  bezeichnet, der eine Abbildung des zulässigen Bereichs  $\mathbf{C}$  nach  $\mathbf{R}^{\sum n_i}$  darstellt.

**Definition 5.2** Eine Funktion  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  wird diagonal streng konvex für  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$  genannt, wenn für feste  $w_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  und für alle  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbf{C}$  gilt:

$$(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)^T g_\sigma(\mathbf{x}^0, \mathbf{w}) + (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)^T g_\sigma(\mathbf{x}^1, \mathbf{w}) < 0. \quad (5.7)$$

Die Frage nach der Eindeutigkeit eines Gleichgewichts beantwortet der folgende Satz:

**Satz 5.4** Sei die gewichtete Summe der Zielfunktionen  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  diagonal streng konvex für beliebige  $w_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Dann gibt es höchstens ein Gleichgewicht.

**Beweis:** Siehe Rosen (1965, Theorem 2), wobei Maximierung durch Minimierung und daher konkav durch konvex zu ersetzen sind.  $\square$

Eine hinreichende Bedingung für die streng diagonale Konvexität von  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  liefert der nächste Satz:

**Satz 5.5** Mit  $\mathbf{J}_{g_\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  sei die Jacobimatrix des Pseudogradienten  $g_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  bezeichnet. Ist die symmetrische Matrix  $\mathbf{J}_{g_\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \mathbf{J}_{g_\sigma}^T(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  positiv definit für alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$  und feste  $w_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dann ist  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  diagonal streng konvex für alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ .

**Beweis:** (vgl. Rosen, 1965, Theorem 6)  $\square$

Ein ähnliches Resultat zum Nachweis der Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts kann z.B. aus der Anwendung von Teil (b) in Satz 3.15 auf Seite 50 auf die Variationsungleichung (5.2) auf Seite 87 gewonnen werden. Die der diagonal strengen Konvexität von  $\sigma$  in Satz 5.4 entsprechende Eigenschaft der Funktion  $F$  ist die strikte Monotonie.

## 5.3 Variationsprinzip in der Hydrostatik

### 5.3.1 Potenzielle hydrostatische Energie

Entsprechend dem Arbeitssatz der Festkörpermechanik (s. z.B. Betten, 1998) lassen sich auch für Fluide ähnliche Beziehungen ableiten. Betrachtet wird das in Abb. 5.1 gezeigte System bestehend aus einem Behälter mit freier Oberfläche, der über eine Rohrleitung mit einem, durch eine bewegliche Platte (Fläche  $A$ ), auf die die Kraft  $F$  (inklusive Gewichtskraft der Platte) lastet, dicht abgeschlossenen, Behälter verbunden ist. Nach Einführen eines beliebigen Bezugsniveaus ( $B.N.$ ), welches um  $h_0$  unterhalb

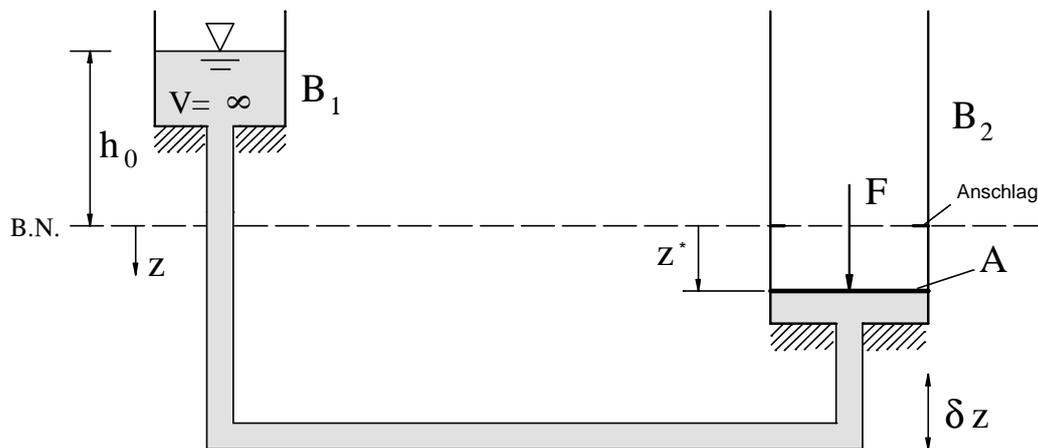


Abbildung 5.1: Beispielsystem

der Wasserspiegellage im Behälter  $B_1$  liegt, lautet die Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht zwischen äußerem Druck  $F/A$  und Wasserdruck an der Plattenunterseite (Lage  $z^*$ ):

$$\frac{F}{A\gamma} = z^* + h_0 \quad (5.8)$$

Wird eine virtuelle Änderung der Höhenlage  $\delta z$  des Wasserspiegels (virtuelle vertikale Verschiebung der Platte) im Behälter  $B_2$  aus der hydrostatischen Gleichgewichtslage unter Beibehalten der Wasserspiegellhöhe  $-h_0$  im Behälter  $B_1$  eingepreßt, so leisten äußerer Druck  $\frac{F}{A}$  und (innerer) Wasserdruck  $(h_0 + z_B)\gamma$  dieselbe (flächenbezogene) Arbeit  $W^a$

$$W_i^a = \delta z (z^* + h_0) \gamma = \delta z \frac{F}{A} = W_a^a. \quad (5.9)$$

Durch den Anschlag nach Abb. 5.1 auf der vorherigen Seite, welcher eine Bewegung der Platte in negative  $z$ -Richtung verhindert, soll zusätzlich die Nebenbedingung  $z \geq 0$  gegeben sein. Gl. (5.9) kann als Variationsungleichung in der Form nach Gl. (3.18) auf Seite 49 geschrieben werden:

$$\left[ \gamma (z^* + h_0) - \frac{F}{A} \right] (z - z^*) \geq 0 \quad \forall z \geq 0. \quad (5.10)$$

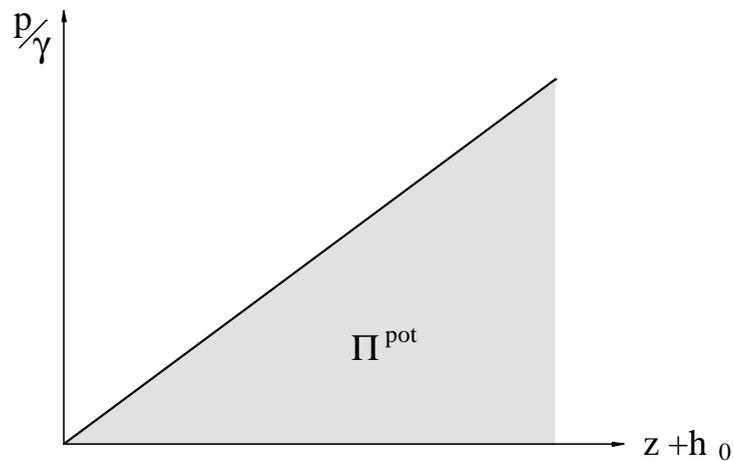
Nach Kap. 3.5.3 ist die Variationsungleichung (5.10) einer konvexen Minimierungsaufgabe vom Typ  $CO(\mathbf{C}, f)$  äquivalent<sup>6</sup>. Zu minimieren ist die flächenbezogene potenzielle Energie des Systems unter Berücksichtigung der maximalen Höhenlage der Platte:

$$\min_{z \geq 0} \Pi^{pot} \quad \text{mit: } \Pi^{pot} = \frac{1}{2} \gamma (z + h_0)^2 - \frac{F}{A} (z + h_0). \quad (5.11)$$

Die durch Aufbringen eines Druckes  $F/A$  entstandene Differenz zwischen den Höhenlagen der Flüssigkeitsoberflächen in den Behältern  $B_1$  und  $B_2$  speichert einen Teil der durch das Absenken der Angriffsfläche von  $F$  verlorengegangene Lageenergie als innere Energie. Diese entspricht der Lageenergie der (flächenbezogenen) Gewichtskraft  $\gamma(z+h_0)$  des über der Höhe  $z$  der Platte liegenden Flüssigkeitsvolumens. Der Angriffspunkt der Gewichtskraft liegt im Schwerpunkt  $SW$  des Flüssigkeitsvolumens. Auf das Bezugsniveau bezogen ist  $z_{SW} = (z + h_0)/2$ .

Die Lageenergie der auf eine Flächeneinheit wirkenden Gewichtskraft der Wassersäule ist mit der einer Feder mit linearem Federgesetz in der Festkörpermechanik zu vergleichen. Der Verlust an Lageenergie der äußeren Kräfte ist  $-\frac{F(z+h_0)}{A}$ . Im Gleichgewicht ist eine (flächenbezogene) Energie von  $\frac{1}{2}(z^* + h_0)^2 \gamma$  im System gespeichert. In Abb. 5.2 ist die potenzielle Energie als Fläche unter der durch Gl. (5.8) auf der vorherigen Seite definierten Geraden gezeigt.

<sup>6</sup>Die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen, symmetrische und positiv definite Jacobimatrix, sind hier erfüllt

Abbildung 5.2: Potenzielle Energie  $\Pi^{pot}$  der Wassersäule

### 5.3.2 Funktionsweise von Druckminderungsanlagen

Bei federbelasteten Druckminderern stellt sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der Kraft einer Sollwertfeder und der Kraft ein, die aus dem auf eine Membran wirkenden Wasserdruck resultiert. Zur Erzeugung des Membrandrucks wird der Ausgangsdruck der Anlage über einen Verbindungskanal abgegriffen. Steigt der Wasserdruck über den Sollwert, ist der Druck größer als die Federkraft, was zum weiteren Schließen des Schiebers führt bis sich schließlich wieder ein Gleichgewichtszustand einstellt. Sinkt der Druck unter den Sollwert, bewirkt die nun größere Federkraft ein Öffnen des Schiebers. Ein Systemzustand, bei dem der Ausgangsdruck größer oder gleich dem Eingangsdruck ist, führt zum vollständigen Schließen des Schiebers. Die Druckminderungsanlage wirkt deshalb in diesem Fall als Rückflussverhinderer.

Es liegt nahe, den beschriebenen Gleichgewichtszustand als Minimum der potenziellen Energie gemäß Kap. 5.3.1 zu formulieren. Dazu wird angenommen, dass das PRV aktiv ist und der Druck in den Membrankammern der jeweiligen Anlagen konstant auf dem Sollwert  $P_{PRV}$  ( $H_{PRV} = \frac{P_{PRV}}{\gamma} + h_g$ , mit  $h_g$ : Höhe der Anlage über Bezugsniveau) gehalten werden kann (Wenn der Eingangsdruck unter den Wert  $P_{PRV}$  sinkt, kann durch Druckreduktion der Sollwert nicht mehr erreicht werden.). Weiter wird vorausgesetzt, dass die Druckverluste  $z_{PRV} \geq 0$  in den Druckminderungsanlagen stufenlos regelbar sind. Die Potenzialhöhe am Einlass des PRVs, die sich aus dem Potenzial des Referenzknotens, verringert um die Summe der Druckverluste entlang des Verbindungspfades zwischen Referenzknoten und Einlassknoten des PRVs, ergibt, ist abhängig vom mo-

mentanen Systemzustand der Gesamtanlage.

Die Federkraft erzeugt einen konstanten Druck, der mit  $F/A$  zu vergleichen ist. Die Variationsmöglichkeit, die zum Erreichen des Gleichgewichts eingesetzt und vom Druckminderer kontrolliert werden kann, besteht in der Änderung des Druckverlustes  $z_{PRV}$  durch teilweises Schließen oder Öffnen des Schiebers. Die Änderung von  $z_{PRV}$  ist mit der Änderung der Höhenlage  $z$  in Kap. 5.3.1 zu vergleichen. Der Unterschied besteht darin, dass durch Rückkoppelung ein Ansteigen des Druckes am PRV-Solldruckknoten eine Vergrößerung von  $z_{PRV}$  bewirkt. Da es sich bei  $z_{PRV}$  um einen Druckverlust handelt, hat dies eine Verringerung des Druckes im PRV zur Folge (siehe nächstes Kap. 5.3.3). Im Gegensatz dazu führte eine Vergrößerung der Variablen  $z$  in Kap. 5.3.1 zu einer Erhöhung des Druckes auf die Platte (vgl. Abb. 5.1 auf Seite 91).

### 5.3.3 Modellierung druckregulierender Kontrollarmaturen

#### 5.3.3.1 Hydrostatisches Gleichgewicht bei PRVs

In Abb. 5.3 auf der nächsten Seite sind vereinfacht die Druckverhältnisse zwischen PRV und Referenzknoten (Knoten  $B_1$ ) dargestellt.  $H_{ref}$  bezeichnet die Bezugspotenzialhöhe über der geodätischen Höhe  $h_{g,2}$  der Lage des PRVs (Punkt 2). Unter  $h_v$  ist die Summe aller Druckverluste zwischen Behälter  $B_1$  und PRV-Knoten 2 zu verstehen,  $z_{PRV}$  repräsentiert den zusätzlichen durch die Druckminderungsanlage verursachten Druckverlust. Hydrostatisches Gleichgewicht zwischen Wasserdruck und Solldruck im PRV liefert

$$H_{ref} - h_v - z_{PRV} = \frac{P_{PRV}}{\gamma}, \quad (5.12)$$

wobei  $z_{PRV} \geq 0$  angenommen wird. Durch Multiplikation der inneren ( $H_{ref} - h_v - z_{PRV}$ ) und äußeren ( $\frac{P_{PRV}}{\gamma}$ ) Drückhöhen mit einer virtuellen Änderung  $\delta z_{PRV}$  des PRV-Druckhöhenverlustes und Anwendung des Arbeitssatzes gemäß Kap. 5.3.1 folgt mit  $\Delta H_{PRV} = H_{ref} - \frac{P_{PRV}}{\gamma}$  die dem Gleichgewicht äquivalente Minimierungsaufgabe:

$$\min_{z_{PRV} \geq 0} \Pi^{pot} \quad \text{mit: } \Pi^{pot} = \frac{1}{2}(z_{PRV} + h_v)^2 - \Delta H_{PRV} z_{PRV} + const. \quad (5.13)$$

Die für eine Lösung  $z_{PRV}^*$  der Minimierungsaufgabe in Gl. (5.13) (unter Voraussetzung  $z_{PRV} \geq 0$ ) notwendige Bedingung

$$\delta \Pi^{pot} = 0 \Leftrightarrow \Delta H_{PRV} = h_v + z_{PRV}^* \quad (5.14)$$

gibt die Forderung wieder, dass der Potenzialunterschied zwischen Referenzknoten und PRV-Solldruckknoten gleich der Summe der Druckverluste inklusive PRV-Druckverlust sein muss.

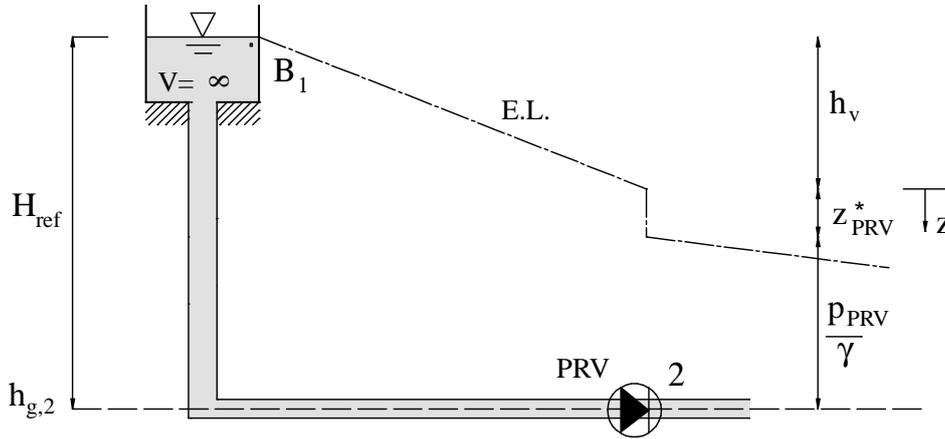


Abbildung 5.3: Hydrostatisches Gleichgewicht - System mit PRV

Zur Darstellung des hydrostatischen Druckgleichgewichts am Gesamtsystem wird die Indikatormatrix  $\mathbf{I}_{PRV}$  der Menge der Stränge mit PRVs sowie die Matrix der virtuellen Schleifen  $\mathbf{C}_v$  zwischen Solldruckknoten (mit Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}_{PRV}$ ) und Referenzknoten eingeführt. Druckgleichgewicht entlang der  $\mathbf{C}_v$ -Schleifen ergibt:

$$\mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{PRV} \mathbf{H}_{PRV} + \mathbf{I}_{PRV} \mathbf{z}_{PRV}] = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Dabei entsprechen  $-\mathbf{C}_v^T [\mathbf{A}_{PRV} \mathbf{H}_{PRV}]$  der Solldruckabsenkung  $\Delta H_{PRV}$  im eindimensionalen Fall in Gl. (5.14),  $\mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R]$  der Summe der Druckhöhenverluste zwischen Referenzknoten und Solldruckknoten  $h_v$  und  $\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{PRV} \mathbf{z}$  der (vom PRV zu kontrollierenden) Variablen  $z_{PRV}$ . Die Schleifenflussvariablen  $\mathbf{u}$  sind Parameter der Aufgabe und werden als konstant gegeben angenommen. Für die Darstellungen des Druckgleichgewichts in den Gleichungen (5.12) und (5.15) kann analog Kap. 5.3.1 durch Einprägung virtueller Druckverlusthöhenänderungen in den PRVs eine äquivalente konvexe Minimierungsaufgabe abgeleitet werden. Es ist zu beachten, dass die Druckverluste in den PRVs positiv sind, d.h die Nebenbedingung  $\mathbf{z}_{PRV} \geq \mathbf{0}$  ist zu berücksichtigen:

$$\min_{\mathbf{z}_{PRV} \geq \mathbf{0}} \Pi^{pot} \quad (5.16)$$

$$\text{mit: } \Pi^{pot} = \mathbf{z}_{PRV}^T \mathbf{C}_v^T \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{I}_{PRV} \mathbf{z}_{PRV} + \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{PRV} \mathbf{H}_{PRV} \right\} + const$$

Da der Funktionswert von  $\Pi^{pot}$  für die weiteren Betrachtungen nicht von Bedeutung ist, wird im Folgenden auf die Berücksichtigung der von der Wahl des Bezugsniveaus abhängigen Integrationskonstanten *const* verzichtet.

### 5.3.3.2 Erweiterung des Modells um zusätzliche Armaturen

Die Minimierung von  $\Pi^{pot}$  aus dem letzten Abschnitt kann verallgemeinert werden, wenn an Stelle der Druckhöhe am Auslass (Endknoten des PRVs) die am Einlass (Anfangsknoten) als Solldruckhöhe gegeben ist. Dementsprechend sind dann die Pfade vom Referenzknoten zum Anfangsknoten in der Matrix  $\mathbf{C}_v$  enthalten. Armaturen mit dieser Eigenschaft werden als druckunterstützende Ventile (PSV = Pressure Sustaining Valve) bezeichnet.

Die Modellierung von reglergesteuerten Pumpen mit gegebenem Ausgangsdruck (BOR= Boosters Regulated) erfolgt analog der von PRVs, mit dem einzigen Unterschied, dass in der Nebenbedingung negatives Vorzeichen für  $z_{BOR}$  (Druckerhöhung) zu fordern ist.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Modellierung besteht in der Bestimmung unbekannter hydraulischer Gleichungen (UHF = Unknown Headloss Function). Dann sind Fluss und Druckverlust im UHF-Strang zu berechnen. Ist die Druckhöhe eines beliebigen Bedarfsknotens bekannt, kann ein Parameter der hydraulischen Gleichung<sup>7</sup> bestimmt werden. Dazu wird analog der Modellierung der bisher genannten Armaturen vorgegangen. Der Unterschied besteht in der örtlichen Dispersion von UHF-Strang und Kontrollknoten. Soll neben Druckreduktion auch Druckerhöhung im UHF-Strang möglich sein, kann außerdem die Nebenbedingung  $\mathbf{z}_{UHF} \geq \mathbf{0}$  entfallen.

PRV-, PSV-, BOR- und UHF-Stränge werden zur Menge der HG-Stränge (HG = Head Generator, Bezeichnung nach Gofman und Rodeh (1981)) zusammengefasst. Zur eindeutigen Bestimmtheit der Zuordnung der Kontrollknoten zu den entsprechenden Strängen/Pfaden gilt für die Matrix  $\mathbf{C}_v$ .

**Voraussetzung 5.1** a) Zwischen zwei HG-Strängen in den Spalten von  $\mathbf{C}_v$  liegt genau ein Kontrollknoten.

<sup>7</sup>zur Modellkalibrierung z.B. die Rohrrauheit

b) Zu jedem HG-Strang existiert eine Schleife, welche den Referenzknoten und den HG-Strang enthält. Die übrigen Stränge der Schleife müssen so gewählt werden können, dass keine aktive Flussnebenbedingung in der Schleife enthalten ist.

Die Indikatormatrizen der unterschiedlichen HG-Stränge werden zu

$$\mathbf{I}_{HG} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{PRV} & \mathbf{I}_{PSV} & \mathbf{I}_{BOR} & \mathbf{I}_{UHF} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst. Wenn mit  $q = n_{PRV} + n_{PSV} + n_{BOR} + n_{UHF}$  die Gesamtzahl der HG-Stränge bezeichnet wird, ist  $\mathbf{I}_{HG}$  eine  $m \times q$ -Matrix. Entsprechend sind die Inzidenzmatrix aller Solldruckknoten  $\mathbf{A}_{HG}$  sowie der Vektor der zugehörigen Sollpotenzialhöhen  $\mathbf{H}_{HG}$  zu bilden. Zur Definition des zulässigen Bereichs, über dem die hydrostatische Energie zu minimieren ist, wird die Funktion

$$g_z(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_{PRV} & -\mathbf{I}_{PSV} & \mathbf{I}_{BOR} & -\mathbf{I}_{UHF} \end{pmatrix}^T \mathbf{I}_{HG} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{PRV} \\ \mathbf{z}_{PSV} \\ \mathbf{z}_{BOR} \\ \mathbf{z}_{UHF} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_2 \mathbf{z} \quad (5.17)$$

betrachtet. Der zulässige Bereich ist dann durch

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^q | g_z(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}\} \quad (5.18)$$

gegeben. Es wird zunächst angenommen, dass die Matrix  $\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}$  symmetrisch ist. Insgesamt lautet dann das hydrostatische Optimierungsproblem

$$CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot}) : \quad \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \Pi^{pot}. \quad (5.19)$$

Notwendig für das Vorliegen einer Minimalstelle  $\mathbf{z}^*$ ,  $\boldsymbol{\nu}^*$  müssen die KKT-Bedingungen (vgl. Gl. (3.17) auf Seite 48)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v^T [\mathbf{I}_{HG} \mathbf{z}^* + \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG}] + \sum_{i=1}^q \nu_i^* \nabla g_{z_i}(\mathbf{z}^*) &= \mathbf{0}, \\ g_z(\mathbf{z}^*) &\leq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nu}^* &\geq \mathbf{0}, \\ \nu_i^* g_{z_i}(\mathbf{z}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (5.20)$$

erfüllt sein. Die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  klärt der folgende Satz:

**Satz 5.6** Die Aufgabe  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  besitzt unter Voraussetzung 5.1 eine eindeutige Lösung.

**Beweis :** Die Lagrange-Funktion zu  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  lautet

$$L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I}_{HG} \mathbf{z} + \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG} \right] + \sum_{i=1}^q \nu_i g_{z_i}(\mathbf{z}). \quad (5.21)$$

Zweimalige Differentiation von  $L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu})$  liefert

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}} L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG} + \mathbf{I}_{HG} \mathbf{z}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \nu_i \nabla g_{z_i}(\mathbf{z}), \\ \nabla_{\mathbf{z}}^2 L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Wegen Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 gilt  $\mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} \mathbf{z} > 0 \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^q$ . Die Matrix  $\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}$  ist damit positiv definit  $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ , woraus die strikte Konvexität von  $\Pi^{pot}$  in den Variablen  $\mathbf{z}$  folgt. Die Nebenbedingung  $\mathbf{G}_2 \mathbf{z} \leq \mathbf{0}$  ist polyhedral, es existiert eine eindeutige Lösung der quadratischen Aufgabe.  $\square$

Ist die Matrix  $\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}$  unsymmetrisch, wird das Nash-Gleichgewicht des nächsten Kapitels 5.4 aus mehr als zwei Optimierungsaufgaben gebildet. Prinzipiell kann für jede HG-Armatur eine eigene hydrostatische Optimierungsaufgabe formuliert werden. Die Gültigkeit der notwendigen Bedingungen in Gl. (5.20) bleibt dabei erhalten. Die Formulierung erfolgt zunächst für zwei Minimierungsaufgaben (5.4.1). Für die anschließende Beweisführung ist diese Einschränkung jedoch nicht erforderlich. Die  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  entsprechende Aufgabe besteht dann aus den Optimierungsaufgaben für die einzelnen HG-Armaturen (s. z.B. Satz 5.12). Auf eine erneute detaillierte Darstellung des Nash-Gleichgewichts für mehr als zwei Minimierungsaufgaben wird verzichtet.

## 5.4 Nash-Gleichgewicht zwischen $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ und $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$

### 5.4.1 Formulierung des Nash-Gleichgewichts

Bisher wurden die Aufgaben der Berechnung des hydrostatischen (Kap. 5.3.3) und des stationären hydraulischen Gleichgewichtszustandes (Kap. 4.2.4) behandelt. Bei der Modellierung von Wasserversorgungsnetzen unter Berücksichtigung rückgekoppelter Kontrollarmaturen treten beide Probleme in Kombination auf. Parameter der einen Aufgabe sind dabei die Variablen der anderen und umgekehrt. Die Modellierung als nichtkooperatives Spiel der beiden Optimierungsaufgaben bietet sich an. Zur Berechnung eines

Gleichgewichtszustandes zwischen beiden Optimierungsproblemen, einer Lösung des Spiels, soll das in Kap. 5.2 allgemein formulierte Nash-Gleichgewichtskonzept (Def. 5.1 auf Seite 87) auf folgende Optimierungsaufgaben angewandt werden:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u})^T \left[ \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z} \right] + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R \right\}, \\ \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \left\{ \mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \left[ \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Gesucht ist ein Nash-Gleichgewicht der beiden Minimierungsprobleme. Die zulässigen Bereiche, die aus den polyhedralen Mengen  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l | g(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, h(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$  (s. Gl. (4.45) auf Seite 76) und  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^q | \mathbf{G}_2 \mathbf{z} \leq \mathbf{0}\}$  (s. Gl. (5.18)) bestehen, sind orthogonal.

### 5.4.2 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Seien die kompakte konvexe Menge  $\mathbf{U}$  zulässiger Bereich von  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  (s. Gl. (4.46) auf Seite 76, zur Kompaktheit von  $\mathbf{U}$  s. Beweis von Satz 4.1) und die konvexe Menge  $\mathbf{Z}$  zulässiger Bereich von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  nach Gl. (5.18). Dann sind mit der strikten Konvexität von  $\Pi^c$  bezüglich  $\mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$  und von  $\Pi^{pot}$  bezüglich  $\mathbf{z}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$  die Voraussetzungen von Satz 3.19 auf Seite 57 erfüllt, woraus die Existenz stetiger Funktionen  $\mathbf{u} = r_1(\mathbf{z})$  und  $\mathbf{z} = r_2(\mathbf{u})$  folgt.

Ein Punkt  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}^*)$  ist nach Satz 5.1 auf Seite 88 ein Nash-Gleichgewicht der Optimierungsaufgaben, wenn und nur wenn er der Bedingung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{z}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{z}^*) \\ r_2(\mathbf{u}^*) \end{pmatrix}$$

genügt, also Fixpunkt der Reaktionsfunktionen der beiden parametrischen Optimierungsaufgaben ist. Auf die hydraulische Simulation übertragen gilt der folgende Satz:

**Satz 5.7** *Unter der Voraussetzung  $\mathbf{U} \neq \emptyset, \mathbf{Z} \neq \emptyset$  existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht zwischen den Aufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ .*

**Beweis** : Um die Existenz eines Gleichgewichtspunktes zu zeigen, genügt es, zu prüfen, ob die Voraussetzungen von Satz 5.3 auf Seite 89 erfüllt sind.

- i)  $\mathbf{U}$  ist als polyhedrale Untermenge des euklidischen Raumes  $\mathbf{R}^l$  nach Satz 3.2 auf Seite 34 konvex. Die Kompaktheit kann ebenfalls vorausgesetzt werden, da in realen Systemen, wenn auch nicht explizit angegeben, für alle Flüsse untere und obere Schranken gegeben sind. Ebenso handelt es sich bei  $\mathbf{Z}$  um eine kompakte und konvexe Untermenge des  $\mathbf{R}^q$ .

- ii) Nach Satz 4.1 auf Seite 77 ist  $\Pi^c$  strikt konvex, ebenso  $\Pi^{pot}$  (vgl. Beweis von Satz 5.6). Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.3 auf Seite 89 erfüllt, es existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

□

### 5.4.3 Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts

#### 5.4.3.1 Überblick

Wesentlich schwieriger als die Existenz ist die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts zu beweisen. Gofman und Rodeh (1981) geben hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit des hydraulischen Gleichgewichts unter Anwesenheit von UHF-Strängen (s. Kap. 5.3.3.2) für den Spezialfall von Netzwerken mit nur einem Potenzialknoten.

Im Folgenden werden verschiedene formale Methoden angeführt, ein allgemeingültiger Beweis der Eindeutigkeit bei beliebigen Netzwerktopologien konnte jedoch damit nicht erreicht werden. Deshalb wird schließlich eine das spezielle Anwendungsproblem betreffende Annahme formuliert, auf deren Gültigkeit sich der Nachweis der Eindeutigkeit unter Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 aufbauen lässt.

#### 5.4.3.2 Diagonal strenge Konvexität

Nach Satz 5.4 auf Seite 90 hinreichend für die Eindeutigkeit des Gleichgewichts ist die strenge diagonale Konvexität der gewichteten Summe der Zielfunktionen  $\Pi^c$  und  $\Pi^{pot}$ . Werden die Gradienten der Zielfunktionen aus Gl. (5.23) in Def. 5.2 auf Seite 90 eingesetzt, folgt nach einigen Umformungen mit  $\mathbf{h} = \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u})$  die Bedingung für streng diagonale Konvexität der Funktionen  $\Pi^c$  und  $\Pi^{pot}$ :

$$\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{h} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \Delta \mathbf{z} + w \Delta \mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \Delta \mathbf{h} + w \Delta \mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} \Delta \mathbf{z} > 0, \quad (5.24)$$

mit  $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0$  und  $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^1) - \mathbf{D}^0(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^0) \forall \mathbf{z}^0, \mathbf{z}^1 \in \mathbf{Z}$  und  $\forall \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \in \mathbf{U}$ . Die Terme  $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{h}$  und  $w \Delta \mathbf{z}^T \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} \Delta \mathbf{z}$  sind dabei für beliebiges  $w > 0$  positiv. Die gemischten Terme dagegen können beide Vorzeichen annehmen. Es ist bisher nicht gelungen, ein  $w$  zu finden, welches die Bedingung Gl. (5.24) allgemein nur unter Gültigkeit der Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 erfüllt.

Eine hinreichende Bedingung für die streng diagonale Konvexität ist gegeben, wenn die Jacobimatrix  $\mathbf{J}_{g_\sigma}$  des Pseudogradienten positiv quasi-definit ist  $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$

(Satz 5.5 auf Seite 90). In der vorliegenden Anwendung ist die positive Quasi-Definitheit<sup>8</sup> der Matrix

$$\mathbf{J}_{g_\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \\ w \alpha \mathbf{C}_v^T \mathbf{D} \mathbf{C} & w \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

nachzuweisen (mit  $w > 0$ ). Im allgemeinen Fall ist diese Bedingung jedoch nicht erfüllt, vielmehr können einfache Beispiele angegeben werden, für die  $\mathbf{J}_{g_\sigma}$  nicht positiv quasi-definit ist.

### 5.4.3.3 Nachweis über Variationsungleichung

Eine weitere Möglichkeit des Nachweises der Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts besteht in der Betrachtung der zugehörigen Variationsungleichung:

$$F(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}^*)^T \begin{pmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y} - \mathbf{z}^* \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Z}. \quad (5.26)$$

Der zulässige Bereich  $\mathbf{U} \times \mathbf{Z}$  ist gegeben wie in Kap. 5.4.2. Mit Hilfe der Lagrange-funktionen der Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  kann Gl. (5.26) als Variationsungleichung der Lagrangefunktionen geschrieben werden:

$$F(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*)^T \begin{pmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{u}^* \\ \mathbf{y} - \mathbf{z}^* \\ \mathbf{m} - \boldsymbol{\mu}^* \\ \mathbf{l} - \boldsymbol{\lambda}^* \\ \mathbf{n} - \boldsymbol{\nu}^* \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^l, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^q, \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}_{0+}^s, \forall \mathbf{l} \in \mathbf{R}^d, \forall \mathbf{n} \in \mathbf{R}_{0+}^q \quad (5.27)$$

mit

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \nabla_{\mathbf{z}} L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) \\ -g(\mathbf{u}) \\ h(\mathbf{u}) \\ -g_z(\mathbf{z}) \end{pmatrix},$$

<sup>8</sup>Eine Matrix  $\mathbf{M}$  heißt positiv quasi-definit, wenn  $(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)$  positiv definit ist.

oder übersichtlicher als verallgemeinerte Gleichung:

$$\mathbf{0} \in \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} L_{CO(\mathbf{U}, \Pi^c)}(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \nabla_{\mathbf{z}} L_{CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})}(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}) \\ -g(\mathbf{u}) \\ h(\mathbf{u}) \\ -g_z(\mathbf{z}) \end{pmatrix} + N_{\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}_{0+}^s \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_{0+}^q} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Damit wird eine Vereinfachung der Normalkegelabbildung der Nebenbedingungen gegenüber Gl. (5.23) auf Seite 99 erreicht. Der zulässige Bereich besteht aus einem rechteckigen Raum. Die globalen Eindeutigkeitsresultate von Gale und Nikaidô (1965) (s.a. Nikaidô, 1968) sind anwendbar. Nach Teil (d) von Satz 3.15 auf Seite 50 besitzt die Variationsungleichung (5.27) (Inklusion Gl. (5.28)) höchstens eine (genau eine) Lösung, wenn  $F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$  (gleichförmige) P-Funktion ist.

Der Nachweis der Eigenschaft von  $F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ , P-Funktion zu sein, konnte aber in der gewünschten Allgemeinheit nicht erbracht werden.

#### 5.4.3.4 Nachweis über implizite Methode

Nach Kap. 5.4.2 existieren stetige Funktionen  $\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi^c(\mathbf{u}, \mathbf{z})$  und  $\mathbf{z}(\mathbf{u}) = \arg \min_{\mathbf{z}} \Pi^{pot}(\mathbf{z}, \mathbf{u})$ , welche die funktionale Beziehung zwischen Parametern und Variablen der Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  beschreiben. Damit kann das Nash-Gleichgewicht als Variationsungleichung der einzelnen Optimierungsaufgaben dargestellt werden:

$$F(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}(\mathbf{u}^*))^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad (5.29)$$

$$\bar{F}(\mathbf{z}^*, \mathbf{u}(\mathbf{z}^*))^T (\mathbf{y} - \mathbf{z}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Z}. \quad (5.30)$$

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass maximal eine (genau eine) Lösung existiert, ist nach Satz 3.15 auf Seite 50 die strikte (strenge) Monotonie der Funktionen  $F(\mathbf{u}, \mathbf{z}(\mathbf{u}))$  und  $\bar{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}(\mathbf{z}))$ . Mit Hilfe der Sensitivitätsresultate (vgl. Kap. 4.3.3.2<sup>9</sup>) kann der Gradient  $\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u}$  berechnet werden. Hinreichend für die strikte Monotonie in Gl. (5.30) ist die positive Quasi-Definitheit der Jacobimatrix:

$$\nabla_{\mathbf{z}} \bar{F} = \nabla_{\mathbf{z}} \bar{F} + \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F} \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u} = \mathbf{C}_v^T \left[ \mathbf{I}_{HG} - \mathbf{DCT} [\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \right] \quad (5.31)$$

<sup>9</sup>Die Druckreduktionen aller HG-Stränge sind für die Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  als konstante Parameter anzusehen und sind daher den PBV-Strängen aus Kap. 4.3.3.2 gleichzusetzen.

mit

$$\bar{F} = \mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{z})) (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}(\mathbf{z})) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z} + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG}\mathbf{H}_{HG}].$$

Voraussetzung 5.1 allein genügt jedoch auch in dieser Darstellung nicht, um mit Hilfe der angeführten Methoden Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts zu zeigen.

Aus diesem Grund werden zusätzliche Anforderungen an die Lage der HG-Stränge im Graphen nötig, die den Nachweis über die implizite Methode gestatten und für die meisten in der Praxis auftretenden Fälle erfüllt sein dürften. Grundlage für den Nachweis ist der folgende

**Satz 5.8** *Seien  $\mathbf{M}_{links}$  die Menge aller Stränge des Netzes,  $\mathbf{M}_{v,k} = \{j \in \mathbf{M}_{links} | \mathbf{C}_{v,j,k} \neq 0\}$  die Menge aller Stränge in Druckschleife  $k$  und  $\mathbf{M}_i = \{j \in \mathbf{M}_{links} | \mathbf{C}_{j,i} \neq 0\}$  Menge aller Stränge in Flusschleife  $i$ . Bestehen dann die Schnittmengen der Stränge in Druckschleife  $k$  mit den Strangmengen aller Flusschleifen entweder aus der vollständigen Menge  $\mathbf{M}_{v,k}$  oder aus der leeren Menge,*

$$\mathbf{M}_{v,k} \cap \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{v,k} \vee \mathbf{M}_{v,k} \cap \mathbf{M}_i = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, l, \forall k = 1, \dots, q,$$

so ist das Schur-Komplement der Jacobimatrix (Gl. (5.25)) positiv quasi-definit.

**Beweis:**

Das Schur-Komplement der  $2 \times 2$ -Blockmatrix  $\mathbf{J}_g$  bezüglich  $\mathbf{J}_{11}$

$$\mathbf{J}_{11}/\mathbf{J}_g = \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \alpha \mathbf{C}_v^T \mathbf{D} \mathbf{C} \quad (5.32)$$

ist wegen Voraussetzung 5.1 berechenbar. Mit der Matrix  $\mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{E} - \mathbf{I}_{HG} [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T$  gilt  $\mathbf{J}_{11}/\mathbf{J}_g = \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C}$ . Dabei beinhaltet  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T$  die ursprünglichen Flusschleifen ohne die Stränge der Druckschleifen. Wegen  $\mathbf{M}_{v,k} \cap \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{v,k} \vee \mathbf{M}_{v,k} \cap \mathbf{M}_i = \emptyset$  sind alle Nichtnullelemente von  $\mathbf{\Gamma} \mathbf{C}$  auch in  $\mathbf{C}$  von Null verschieden, es gilt:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}.$$

Matrix  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}$  stellt genau die Jacobimatrix des Graphen dar, welcher entsteht, wenn die Stränge der Druckschleifen durch je einen virtuellen Strang mit anschließendem virtuellen Potenzialknoten ersetzt werden. Die Matrix  $\mathbf{D}$  ist als Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen positiv definit. Damit ist  $\mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{u} > 0$  für alle  $\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Die 'Überbrückung' der Stränge innerhalb der Druckschleifen ist dabei nach Voraussetzung auf einen graphentheoretischen Pfad beschränkt. Damit

geht die lineare Unabhängigkeit der Spalten von Schleifenmatrix  $\mathbf{C}$  auch durch Multiplikation mit  $\mathbf{\Gamma}$  nicht verloren. Es gilt  $\mathbf{\Gamma C u} \neq \mathbf{0}$  genau dann, wenn  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  ist, woraus schließlich die positive Definitheit von  $\mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{\Gamma C u} \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$  und damit die positive Quasi-Definitheit von  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D C} \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$  folgen.  $\square$

Anschaulich bedeutet die Bedingung des letzten Satzes, dass innerhalb der Druckschleifen zwischen Referenzknoten und Solldruckknoten keine Verzweigungen auftreten.

**Satz 5.9** *Erfüllen sämtliche Druckschleifen die Voraussetzungen von Satz 5.8, dann existiert genau ein Nash-Gleichgewicht zwischen  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  und  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$ .*

**Beweis:**

Zunächst sei angenommen, es existieren zwei Gleichgewichtspunkte  $\mathbf{z}^0, \mathbf{u}^0$  und  $\mathbf{u}^1, \mathbf{z}^1$ . Dann müssen die KKT-Bedingungen der Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  für beide Punkte erfüllt sein. Die notwendigen Bedingungen in Gl. (5.20) auf Seite 97 für ein Minimum der Aufgabe  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  lassen sich unter der Annahme  $\nu_j = 0$  nach  $\tilde{z}_j$  auflösen für alle  $j = 1, \dots, q$ :

$$\tilde{z}_j = F_j(\mathbf{u}) = \left( - [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T (\mathbf{D} \mathbf{q} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG}) \right)_j, \quad j = 1, \dots, q. \quad (5.33)$$

Multiplikator  $\nu_j$  steht bei allen rückgekoppelten Armaturen (Index  $j = 1, \dots, q$ ) nur in der Zeile  $j$  der für eine Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  notwendigen Bedingungen in Gl. (5.20) auf Seite 97<sup>10</sup>. Wegen der strengen Komplementarität zwischen  $z_j$  und  $\nu_j$  kann  $z_j$  bei druckmindernden (PRV, PSV, UHF) als Maximum und bei druckerhöhenden Anlagen (BOR) als Minimum der beiden Zahlen  $\tilde{z}_j = F_j(\mathbf{u})$  und 0 geschrieben werden, wenn jede HG-Armatur mit dem Referenzknoten über einen Pfad ohne weitere HG-Armatur verbunden ist:

$$z_j = \max(\min) \{ \tilde{z}_j; 0 \}, \quad j = 1, \dots, q. \quad (5.34)$$

Sei weiter angenommen, dass  $\mathbf{z}^0$  und  $\mathbf{z}^1$  die KKT-Bedingungen von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  erfüllen, dann reduziert sich Gl. (5.24) auf Seite 100 zu der Bedingung  $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{h} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \Delta \mathbf{z} > 0$  für diagonal strenge Konvexität der Aufgabe. Mit Gl. (5.34) und der positiven Quasi-Definitheit von  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D C} \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$ , welche nach Satz 5.5 auf Seite 90 die streng diagonale Konvexität von  $(\mathbf{q}_t + \mathbf{C u})^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T [\mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C u}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG}]$  garantiert, ist die Abschätzung

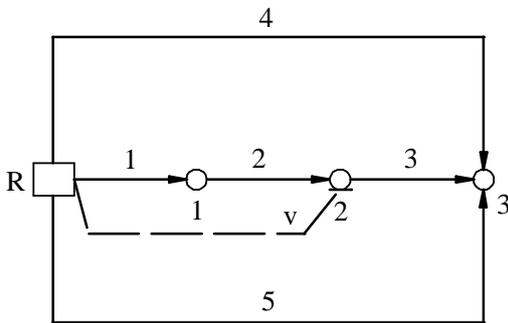
$$\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{h} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \Delta \mathbf{z} > \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \Delta \mathbf{h} > 0 \quad (5.35)$$

<sup>10</sup>Der Multiplikator gibt für jede Armatur die Abweichung vom Solldruck an, wenn dieser nicht erreicht werden kann, und tritt somit nur in der zugehörigen Spalte der Matrix  $\mathbf{C}_v$  auf.

möglich. Damit ist die Aufgabe diagonal streng konvex, es existiert nach Satz 5.4 auf Seite 90 maximal ein Nash-Gleichgewicht. Da die Existenz mindestens eines Gleichgewichts bereits gezeigt wurde (Kap. 5.4.2), folgt die Behauptung.  $\square$

### Beispiel 5.1

a)



b)

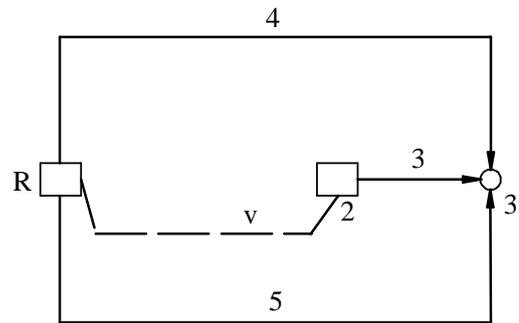


Abbildung 5.4: Druckschleife ist Teilmenge der Flusschleifen

Abb. 5.4 a) zeigt ein System, bei dem die Voraussetzungen von Satz 5.8 erfüllt sind. In Abb. 5.4 b) ist das durch 'Überbrücken' der Stränge der Druckschleife modifizierte System dargestellt. Die KKT-Bedingungen der zugehörigen Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  lauten:

$$\begin{aligned}
 d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3 - d_4 q_4 + z &= 0, \\
 d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3 - d_5 q_5 + z &= 0, \\
 d_1 q_1 + d_2 q_2 + z - \Delta H_{2,soll} - \nu &= 0, \\
 z &\geq 0, \\
 \nu &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Mit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}$  ergeben sich durch Differentiation nach  $u_1, u_2, z$  die zugehörige Jacobimatrix  $\mathbf{J}$  und deren Schurkomplement  $\mathbf{J}_{11}/\mathbf{J} = \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C}$  zu

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 & d_1 + d_2 + d_3 & 1 \\ d_1 + d_2 + d_3 & d_1 + d_2 + d_3 + d_5 & 1 \\ d_1 + d_2 & d_1 + d_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{11}/\mathbf{J} = \begin{pmatrix} d_3 + d_4 & d_3 \\ d_3 & d_3 + d_5 \end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

Wegen  $d_i > 0, \forall i = 1, \dots, 5$  (nach Voraussetzung 2.1 auf Seite 8 und 4.1 auf Seite 62 an die hydraulischen Gesetze der Rohre) ist die positive Definitheit  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C}$  sofort

ersichtlich. Wegen  $\Delta z \leq \Delta h_1 + \Delta h_2$ ,  $\Delta q_i \Delta h_i > 0$  und  $\Delta q_1 = \Delta q_2$  folgt die diagonal strenge Konvexität aus

$$\begin{aligned} \Delta q_1 \Delta h_1 + \Delta q_2 \Delta h_2 + \Delta q_3 \Delta h_3 + \Delta q_4 \Delta h_4 + \Delta q_5 \Delta h_5 + \Delta q_2 \Delta z &\geq \Delta q_3 \Delta h_3 \\ + \Delta q_4 \Delta h_4 + \Delta q_5 \Delta h_5 &> 0. \end{aligned}$$

□

### Beispiel 5.2

Ein Gegenbeispiel, bei dem die bisher gezeigten Methoden nicht zum Nachweis der Eindeutigkeit verwendbar sind, ist in Abb. 5.5 zu sehen. In diesem Fall ist nur ein Teil

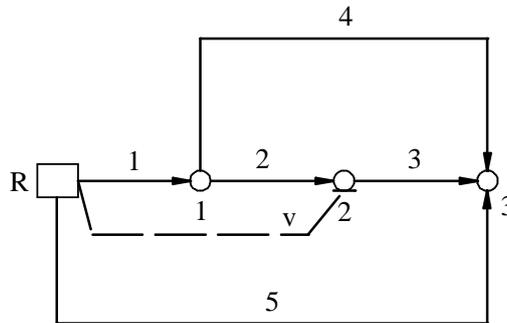


Abbildung 5.5: Druckschleife ist nicht Teilmenge der Flussschleifen

der Druckschleife mit beiden Flussschleifen gemeinsam. Je nach Wahl der Flussschleifen gilt z.B.  $\Delta q_1 = \Delta u_1 \neq \Delta u_1 + \Delta u_2 = \Delta q_2$ . Eine 'Überbrückung' der Stränge 1 und 2 wie in Bsp. 5.1 ist hier nicht möglich. Der Nachweis der positiven Quasi-Definitheit der Matrix  $\mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C}$  kann nicht erbracht werden, vielmehr lassen sich Parameterkonstellationen und Variablen  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^l$  finden, bei denen  $\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{x} < 0$  gilt. □

Bisher wurde für Sonderfälle bezüglich der Lage der HG-Stränge im Netz Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts gezeigt. Wünschenswert ist jedoch eine Lockerung der Bedingungen, so dass Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 hinreichend für die Eindeutigkeit ist. Da ein allgemeingültiger Beweis, aufbauend auf den oben angeführten Sätzen, nicht möglich ist, wie durch Gegenbeispiele leicht belegt werden kann, soll im folgenden Abschnitt zunächst ohne Beweis eine Heuristik bezüglich der Druckänderung an den Knoten infolge Änderung zusätzlicher Druckreduktion in einem PBV-Strang aufgestellt werden. Diese Annahme dient dann als Basis für den Eindeutigkeitsnachweis.

### 5.4.3.5 Nachweis der Eindeutigkeit unter zusätzlicher Annahme

Wird einem Druckrohrsystem, dessen Fließzustand sich im stationären hydraulischen Gleichgewicht befindet, eine Störung durch teilweises Schließen eines Schiebers zugeführt, dann müssen in allen Schleifen, die den Schieber enthalten, wegen der Kompatibilität die Änderung des Druckverlustes im Schieber durch Änderung der Summe der Druckverluste in den übrigen Strängen der Schleife aufgehoben werden.

**Annahme 5.1** *In allen Strängen  $j$  der Schleifen  $i$ , die den Strang  $k$  mit Störung  $\Delta z$  enthalten, gilt für die Fluss- ( $\Delta q_j$ ) und zusätzliche Druckverluständerung  $\Delta z$ :*

$$\text{sign}(\Delta q_j C_{j,i}) = -C_{k,i} \text{sign}(\Delta z).$$

Ziel dieses Abschnitts ist es, den Nachweis zu führen, dass Voraussetzung 5.1 unter der Annahme 5.1 notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts zwischen  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  ist. Dazu werden zunächst strengere Voraussetzungen an die Lage der HG-Stränge gestellt, welche dann im weiteren Verlauf Schritt für Schritt gelockert werden. Ausgangspunkt für den Nachweis ist Gl. (5.34). Der Vektor  $\mathbf{z}$  ist als Funktion von  $\mathbf{u}$  eindeutig bestimmt durch die notwendigen Bedingungen der Aufgabe  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ . Nach Satz 3.19 auf Seite 57 ist ebenso durch  $\mathbf{u} = \arg \min \Pi^c$  eine eindeutige Funktion  $\mathbf{u} = f(\mathbf{z})$  definiert. Unter Verwendung der Funktionen

$$F_j(\mathbf{u}(\mathbf{z})) = \left( - [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{z})) [\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}(\mathbf{z})] + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG}] \right)_j \quad (5.38)$$

mit  $F_j : \mathbf{R}^q \mapsto R$  und  $j = 1, \dots, q$  kann Gleichung (5.34) als Selbstabbildung  $\mathbf{R}^q \mapsto R$  geschrieben werden:

$$z_j = g_j(\mathbf{u}(\mathbf{z})) = \max(\min) \{F_j(\mathbf{u}(\mathbf{z})); 0\}, \quad j = 1, \dots, q. \quad (5.39)$$

Dabei ist wie in Gl. (5.34) 'max' einzusetzen, wenn es sich bei HG-Armatur  $j$  um PRV, PSV oder UHF handelt, 'min' steht für reglergesteuerte Pumpanlagen BOR. Diese Darstellung wird zum Nachweis der Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts herangezogen. Es gilt der folgende Satz:

**Satz 5.10 Banach'scher Fixpunktsatz** (Heuser, 1993, Satz 111.11): *Sei  $\mathbf{X}$  eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes und  $\mathbf{A}$  eine kontrahierende Selbstabbildung von  $\mathbf{X}$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$  gelte also*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y}\| \leq q \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

*mit festem positiven  $q < 1$ . Dann besitzt  $\mathbf{A}$  genau einen Fixpunkt  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{X}$ .*

In der vorliegenden Anwendung ist demnach zu zeigen, dass  $g(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$  kontrahierend ist. Für zwei Vektoren  $\mathbf{z}^0, \mathbf{z}^1 \in \mathbf{Z}$  kann in Gl. (5.39)  $g(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$  durch  $F(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$  nach oben abgeschätzt werden:

$$\frac{\|g(\mathbf{u}(\mathbf{z}^1)) - g(\mathbf{u}(\mathbf{z}^0))\|}{\|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0\|} \leq \frac{\|F(\mathbf{u}(\mathbf{z}^1)) - F(\mathbf{u}(\mathbf{z}^0))\|}{\|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0\|}. \quad (5.40)$$

Nach dem Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen (Heuser, 1993, Satz 167.4) gilt außerdem die Abschätzung

$$\|F(\mathbf{u}(\mathbf{z}^1)) - F(\mathbf{u}(\mathbf{z}^0))\| \leq \mathbf{M} \|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0\| \quad \text{mit } \mathbf{M} := \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \|F'(\mathbf{x})\|, \quad (5.41)$$

wobei  $\mathbf{S}$  die Menge der Punkte auf der Verbindungsstrecke von  $\mathbf{z}^1$  und  $\mathbf{z}^0$  bezeichnet und  $\|F'(\mathbf{x})\|$  irgendeine mit der Vektornorm  $\|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0\|$  verträgliche Matrixnorm ist. Kann also gezeigt werden, dass die Jacobimatrix  $\nabla_{\mathbf{z}} F(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$  existiert mit Norm  $< 1 \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}_+^q$ , so ist die Kontraktionseigenschaft der Funktion  $F(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$  bewiesen.

Die Funktion  $F$  aus Gl. (5.38) ist stetig nach  $\mathbf{u}$  differenzierbar  $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l$ :

$$\nabla_{\mathbf{u}} F = - [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T \mathbf{D} \mathbf{C}. \quad (5.42)$$

In einer Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  gelten nach Kap. 4.2.4.3 die (LICQ) für die aktiven Nebenbedingungen und strenge Komplementarität. Mit der positiven Definitheit der Hessematrix (s. Beweis von Satz 4.1 auf Seite 77) sind hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für eine lokal eindeutige Lösung und damit Voraussetzung 4.3 auf Seite 81 erfüllt. Nach Kap. 4.3.3.2 existiert dann die Ableitung

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u} = -\mathbf{T} [\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \quad (5.43)$$

Damit kann die Jacobimatrix

$$\nabla_{\mathbf{z}} F(\mathbf{u}(\mathbf{z})) = \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u}(\mathbf{z})) \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u} = [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T} [\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \quad (5.44)$$

berechnet werden. Weiter gelte folgende

**Voraussetzung 5.2** *Es existiert eine Schleife, welche neben dem Referenzknoten, dem HG-Strang sowie allen Strängen in Matrix  $[\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T$ , die vom HG-Strang aus nicht nur über den Referenzknoten erreichbar sind, mindestens einen weiteren Strang enthält. Dabei darf jeder Strang nur max. einmal in der Schleife enthalten sein.*

**Bemerkung 5.1** zu Voraussetzung 5.2:

Werden Stränge mit aktiven Flussrestriktionen vom Graphen entfernt, können bezüglich der Lage des Referenzknotens im reduzierten Netz zwei Fälle unterschieden werden:

RN 1) Der Referenzknoten liegt im Wald (s. Def. 2.4 auf Seite 10) des reduzierten Systems.

RN 2) Der Referenzknoten liegt im Gitter (s. Def. 2.5 auf Seite 10) des reduzierten Systems.

Im Fall RN 2) ist Voraussetzung 5.2 auf der vorherigen Seite erfüllt, da im Gitter jeder Knoten über zwei unterschiedliche Wege erreicht werden kann. Für RN 1) existiert keine Schleife, die Referenzknoten und HG-Strang enthält, ohne dass die Stränge des Baumes, in dem sich RN befindet, doppelt enthalten sind. Abhilfe schafft Verlegen des Referenzknotens ins Gitter. Da die Flüsse der Wald-Stränge bekannt sind, können auch die Druckverluste und damit ausgehend vom Referenzknoten das Potenzial der Wurzel des Baumes (s. Def. 2.3 auf Seite 9) berechnet werden. In den Anforderungen an Schleife  $L$  ist RN durch dessen Wurzel  $W_{RN}$  zu ersetzen, außerdem müssen nur die Stränge aus  $\mathbf{C}_v$ , welche zum Gitter gehören, in der Schleife enthalten sein<sup>11</sup>. Für die Änderung der Druckverluste in den Strängen des Waldes  $\mathbf{h}_f$  infolge Änderung der HG-Druckreduktion  $\mathbf{z}$  gilt:

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h}_f = \mathbf{0}.$$

Die Stränge des Waldes haben damit keinen Einfluss auf  $\frac{\partial g(z)}{\partial z}$  nach Gl. (5.38).

**Satz 5.11** Unter Voraussetzung 5.2 auf der vorherigen Seite existiert genau ein Nash-Gleichgewicht zwischen  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ .

**Beweis:**

Für den Vektor der Druckverluste infolge Reibung gilt:

$$\mathbf{h} = \mathbf{D}(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}).$$

In der Jacobimatrix der Funktion  $F$  aus Gl. (5.44) auf der vorherigen Seite ist der Gradient

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h} = -\mathbf{DCT}[\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \quad (5.45)$$

<sup>11</sup>Das entspricht der Wahl einer  $\mathbf{C}_v$ -Schleife, welche bei  $W_{RN}$  beginnt.

enthalten. Sei  $\mathbf{C}_L$  die Matrix einer Schleife, die der Voraussetzung 5.2 unter Beachtung von Bemerkung 5.1 genügt. Dann gilt  $\mathbf{C}_L^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h} = -1$ , denn die Änderung der Summe der Druckverluste in der Schleife muss der Änderung von  $\mathbf{z}$  entsprechen<sup>12</sup>. Wegen Annahme 5.1 gilt:  $(\mathbf{C}_L^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h})_i \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Mit  $\mathbf{M}_v$  sei die Menge der Stränge in  $\mathbf{C}_{vm}^T = [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T$  bezeichnet, bei denen in den zugehörigen Spalten in  $\mathbf{C}_{vm}$  nicht alle Einträge Null sind, und  $\mathbf{M}_L$  die Menge der Stränge in  $\mathbf{C}_L$ . Dann gilt voraussetzungsgemäß  $\mathbf{M}_v \subset \mathbf{M}_L$ . Es lässt sich zeigen, dass die Matrix  $\mathbf{C}_{vm}$  in jeder Zeile höchstens ein von Null verschiedenes Element besitzt. Dann folgt wegen  $\mathbf{C}_L^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h} = -1$  für die einzelnen Spalten in Gl. (5.44)

$$-1 < (\mathbf{C}_{vm}^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h})_{\bullet,j} < 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Da außerdem alle Elemente in  $\mathbf{C}_{vm}^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h}$  gleiches Vorzeichen haben, kann für die Summe der Beträge in den einzelnen Spalten

$$\sum_{i=1}^m |(\mathbf{C}_{vm}^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{h})_{i,j}| < 1, \quad j = 1, \dots, m \quad (5.46)$$

gefolgert werden. Somit ist gezeigt, dass für die Matrix-1-Norm der Jacobimatrix

$$\|\nabla_{\mathbf{z}} F\|_1 < 1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$$

gilt. Wegen Gl. (5.40) ist die Funktion  $g(\mathbf{z})$  kontrahierende Selbstabbildung von  $\mathbf{z}$ , woraus nach Satz 5.10 die Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $g(\mathbf{z})$  und damit die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts folgen.  $\square$

Zur Veranschaulichung von Voraussetzung 5.2 dient das folgende

### Beispiel 5.3

Betrachtet wird das System in Abb. 5.6 mit drei Druckreduzierungsanlagen (PRVs). Die Matrix der Druckschleifen sowie die Indikatormatrix der PRVs sind

$$\mathbf{C}_v^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_{HG}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>12</sup>Nachweis durch Multiplikation mit  $\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T$  von Gl. (5.45). Erfüllt z.B. eine der Schleifen in  $\mathbf{C}^T$  die Voraussetzung 5.2, folgt  $\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT} [\mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{DCT}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} = \mathbf{T}^T \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG}$ .

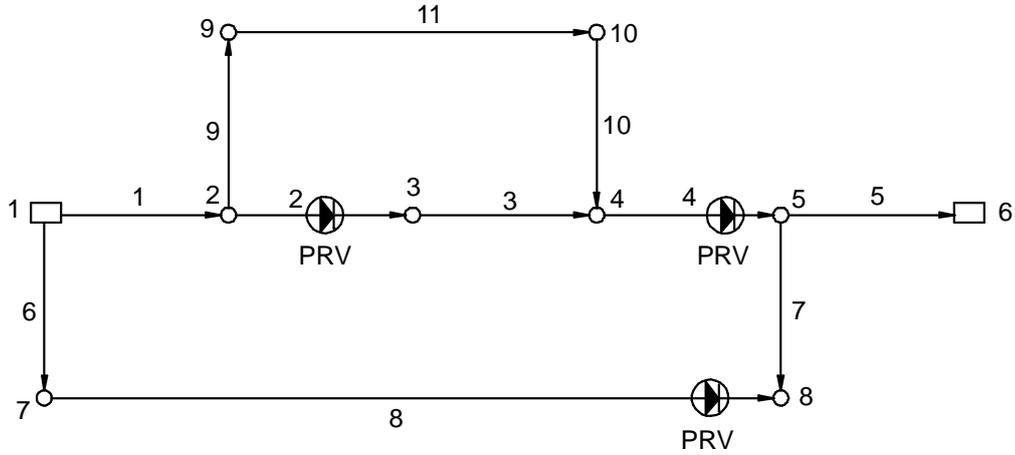


Abbildung 5.6: Beispiel mit drei PRVs, Voraussetzung 5.2 erfüllt

Multiplikation ergibt:

$$\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{v,m}^T = [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Schleife  $L : 1 - 2 - 3 - 4 - 7 - 8 - 6$  geht durch den Referenzknoten 1 und beinhaltet sämtliche PRV-Stränge. Es gilt  $\mathbf{M}_v = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \subset \mathbf{M}_L$ . Damit sind die Voraussetzungen 5.2 erfüllt, die Aufgabe der Berechnung eines hydraulischen Gleichgewichtszustandes besitzt nach Satz 5.11 eine eindeutige Lösung.  $\square$

Voraussetzung 5.2 stellt eine wesentlich schwächere Anforderung dar als die Voraussetzungen von Satz 5.8 auf Seite 103. Die meisten in der Praxis relevanten Fälle dürften damit abgedeckt sein. Insbesondere sind Systeme mit nur einer HG-Armatur enthalten, da bei diesen immer eine Schleife mit der geforderten Eigenschaft gefunden werden kann. Wünschenswert ist jedoch, allein unter Voraussetzung 5.1 die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts zu garantieren, da die enthaltenen Bedingungen einfacher nachzuprüfen sind als Voraussetzung 5.2.

**Satz 5.12** Die Gültigkeit der Annahme 5.1 sei vorausgesetzt. Dann existiert unter Voraussetzung 5.1 genau ein Nash-Gleichgewicht der Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ .

**Beweis :**

Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 5.11, mit dem Unterschied, dass die HG-Armaturen einzeln hinzugefügt werden (entspricht Nash-Gleichgewicht aus  $q + 1$  Minimierungsaufgaben).

**Induktionsanfang:**

Für eine HG-Armatur folgen die Eindeutigkeit sowie die Gültigkeit von (LICQ) und strenger Komplementarität für die Nebenbedingungen der Aufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  im Gleichgewicht sofort aus Satz 5.11.

**Induktionsannahme:**

Für  $k$  HG-Armaturen existiert genau ein Gleichgewicht, in dem die (LICQ) sowie strenge Komplementarität für die Nebenbedingungen der Aufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  gelten.

**Im Induktionsschritt**

bleibt zu zeigen, dass unter Voraussetzung der Gültigkeit der Induktionsannahme auch für  $(k + 1)$  HG-Armaturen genau ein Gleichgewicht existiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass zwischen dem Drucksollknoten des  $(k + 1)$ -ten Stranges und dem Referenzknoten ein Pfad ohne weitere HG-Stränge existiert. Denn von allen  $(k + 1)$  HG-Strängen kann immer einer gewählt werden, der diese Eigenschaft erfüllt. Für ein Netz ohne HG-Armaturen sind die Sensitivitätssätze nach Kap. 4.3 gegeben, in denen die Empfindlichkeit des stationären hydraulischen Gleichgewichtszustandes gegenüber Modellparameterabweichungen behandelt wird.

Im vorliegenden Fall werden ähnliche Resultate für die Sensitivität der Lösung des Nash-Gleichgewichts benötigt. Es ist in einer Umgebung des Gleichgewichts für  $k$  HG-Armaturen auf Grund der Induktionsannahme die Existenz einer Lipschitz-stetigen Funktion  $f : R \mapsto \mathbf{R}^{l+k}$  vorzusetzen, welche die Abhängigkeit der Variablen  $\mathbf{u}, \mathbf{z}_k$  von  $z_{k+1}$  wiedergibt. Die  $(k+1)$ -te Zeile der für eine Lösung der Aufgabe  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  notwendigen Bedingungen (s. Gl. (5.20) auf Seite 97) kann für  $\nu_{k+1} = 0$  nach  $\tilde{z}_{k+1} = F_{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{z}_k)$  aufgelöst werden (vgl. Gl. (5.38) und Gl. (5.39)) mit

$$F_{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{z}_k) = - \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T \left[ \mathbf{D}(\mathbf{u}(z_{k+1})) \mathbf{q}(z_{k+1}) + [\mathbf{I}_{HG}]_k \mathbf{z}_k(z_{k+1}) + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{PRV} \mathbf{H}_{PRV} \right]. \quad (5.47)$$

Der Vektor  $\left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]$  beinhaltet dabei die  $(k + 1)$ -te Spalte in Matrix  $\mathbf{C}_v$ . Es gilt

$$\left[ \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T [\mathbf{I}_{HG}]_{k+1} \right]^{-1} \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T = 1 \cdot \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Existenz einer Lipschitz-stetigen Funktion  $f : R \mapsto \mathbf{R}^{l+k}$  kann unter Berücksichtigung der strengen Komplementarität zwischen  $z_{k+1}$  und  $\nu_{k+1}$  die Potenzialdifferenz  $z_{k+1}$  mit Hilfe der Funktion  $g : R \mapsto R$  als Selbstabbildung dargestellt werden (vgl. Gl. (5.39)):

$$z_{k+1} = g(z_{k+1}) = \max(\min) \{F_{k+1}(\mathbf{u}(z_{k+1}), \mathbf{z}_k(z_{k+1})); 0\}. \quad (5.48)$$

Bei druckreduzierenden Armaturen (PRV, PSV, UHF) ist wieder 'max' einzusetzen, für BOR gilt 'min'. Das gewünschte Resultat zur Berechnung des Gradienten  $\nabla_{z_{k+1}} F_{k+1}(z_{k+1})$  liefert Satz 3.20 auf Seite 58. Durch die Induktionsannahme ist eine global eindeutige Lösung für  $k$  HG-Armaturen sowie die Gültigkeit der (LICQ) und strenger Komplementarität vorausgesetzt, so dass nach Satz 3.20 in einer Umgebung von Punkt  $(\mathbf{u}, \mathbf{z}_k)$  eine differenzierbare Funktion  $[\mathbf{u}(z_{k+1}), \mathbf{z}(z_{k+1})]$  existiert. Damit lässt sich der Gradient der Funktion  $F_{k+1}(z_{k+1})$  analog Gl. (5.44) berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla_{z_{k+1}} F_{k+1} = \\ \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T \left( \mathbf{DC} \quad \mathbf{I}_{HG} \right) \mathbf{T} \left[ \mathbf{T}^T \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{DC} & \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} \\ \alpha \mathbf{C}_v^T \mathbf{DC} & \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} \end{pmatrix} \mathbf{T} \right]^{-1} \mathbf{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T [\mathbf{I}_{HG}]_{\bullet, k+1} \\ \mathbf{C}_v^T [\mathbf{I}_{HG}]_{\bullet, k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 5.11 auf Seite 109 kann nun gefolgert werden, dass mit Hinweis auf Bemerkung 5.1 eine Schleife  $L$  existiert, welche den Referenzknoten oder dessen Wurzel, den zu  $z_{k+1}$  gehörigen HG-Strang mit Indikator  $[\mathbf{I}_{HG}]_{k+1}$  sowie alle Gitter-Stränge in  $[\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1}$  plus einen weiteren Strang enthält. Eine Vergrößerung von  $z_{k+1}$  führt zu einer Flussreduzierung in allen Strängen dieser Schleife in Richtung  $|\mathbf{C}_L z_{k+1}|$ , woraus  $\nabla_{z_{k+1}} h_j < 0, \forall j \in \mathbf{M}_L$  folgt. Im Allgemeinen kann nicht ausgeschlossen werden, dass Schleife  $L$  einen weiteren HG-Strang  $HG_2$  mit aktiver Armatur enthält. Dann ist zusätzlich  $\nabla_{z_{k+1}} \mathbf{z}_k$  zu berücksichtigen. In diesem Fall kann Schleife  $L$  um die Stränge der Schleife in  $[\mathbf{C}_v]_{\bullet, HG_2}$ , die zu  $HG_2$  gehört, reduziert werden. Denn bei aktiver Armatur ist der Druck des Kontrollknotens konstant, so dass

$$\left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, HG_2} \right]^T (\nabla_{z_{k+1}} \mathbf{h} + \nabla_{z_{k+1}} z_{HG_2}) = 0$$

gilt. Die Aussage kann ebenso auf beliebig viele in  $L$  enthaltene HG-Armaturen erweitert werden. Die modifizierte Schleife  $L$  muss lediglich einen Strang mehr als  $[\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1}$  enthalten. Da die Druckschleife  $k+1$  nach Voraussetzung keinen weiteren HG-Strang enthält, folgt für die Gesamtdruckänderung in Druckschleife  $(k+1)$  infolge Änderung

von  $z_{k+1}$  analog Gl. (5.46) (mit dem Unterschied, dass es sich hier innerhalb der Betragstriche nicht um eine Matrix sondern um eine Zahl handelt):

$$\left| \left[ [\mathbf{C}_v]_{\bullet, k+1} \right]^T \nabla_{z_{k+1}} \mathbf{h}(z_{k+1}) \right| < 1. \quad (5.50)$$

Wie im Beweis von Satz 5.11 ist damit die Kontraktionseigenschaft der Funktion  $F_{k+1} : R \mapsto R$  gezeigt, woraus die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts unter Voraussetzung 5.1 resultiert.  $\square$

Eine letzte Verallgemeinerung stellt die Konstellation dar, bei der die Schleifen der Matrix  $\mathbf{C}_v$  nicht so gewählt werden können, dass sie frei von Strängen mit Flussrestriktionen sind (Teil b) in Voraussetzung 5.1. Dazu wird zunächst der folgende Hilfssatz bewiesen:

**Hilfssatz 5.1** *Für den zulässigen Bereich gelte  $\mathbf{U} \neq \emptyset$ . Dann kann eine durch den HG-Strang verlaufende, sonst aber unter Beachtung von Bemerkung 5.1 beliebige Schleife (mit  $(m \times 1)$ -Matrix  $\mathbf{C}_L$ ) gefunden werden, die maximal eine aktive Flussrestriktion beinhaltet.*

**Beweis:**

Die Stränge mit aktiven Flussbedingungen können durch Einspeisung oder Entnahme der bekannten Flussmenge an End- und Anfangsknoten des jeweiligen Stranges ersetzt werden. Der HG-Strang liegt dann im *Wald* des modifizierten Graphen. Dabei kann der Graph maximal bis zu einer Baumstruktur reduziert werden<sup>13</sup>. Diese darf für  $\mathbf{U} \neq \emptyset$  keine weitere aktive Flussbedingung beinhalten. Damit existiert dann aber eine Folge von Pfaden ohne Flussrestriktion entweder 1) zwischen Anfangsknoten des Pfades mit HG-Armatur und Referenzknoten oder 2) zwischen Solldruckknoten des HG-Strangs und Referenzknoten. Ansonsten wäre der Anfangsknoten des HG-Pfades isoliert.  $\square$

Das Endresultat beinhaltet der folgende Satz:

**Satz 5.13** *Die Anforderung an die Lage der HG-Stränge und ihrer zugehörigen Solldruckknoten nach Teil a) von Voraussetzung 5.1 ist notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit eines Nash-Gleichgewichts der Aufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$ .*

**Beweis:**

Die Notwendigkeit ist sofort ersichtlich, wenn berücksichtigt wird, dass bei Verzicht

<sup>13</sup>Der entartete Fall, bei dem der Bedarf eines über FCV abgetrennten Gebietes genau dem FCV-Fluss entspricht, wird ausgeschlossen.

auf Teil a) in Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 bereits die Eindeutigkeit der Lösung von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  verlorengelassen. Aufbauend auf Satz 5.12 bleibt zu zeigen, dass ohne Teil b) von Voraussetzung 5.1 die Eindeutigkeit des Gleichgewichts erhalten bleibt.

Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

- 1) Die aktive Flussnebenbedingung (Index  $j$ ) liegt in Flussschleife  $L$  ( $[\mathbf{C}_L]_j \neq 0$ ), aber nicht in Druckschleife  $k+1$  ( $[\mathbf{C}_v]_{j,k+1} = 0$ ).
- 2) Die aktive Flussnebenbedingung (Index  $j$ ) liegt sowohl in Flussschleife  $L$  ( $[\mathbf{C}_L]_j \neq 0$ ) als auch in Druckschleife  $k+1$  ( $[\mathbf{C}_v]_{j,k+1} \neq 0$ ).

Zu 1):

Im Beweis von Satz 5.12 wurde bereits vorausgesetzt, dass der in  $\mathbf{C}_L$  enthaltene Pfad (zugehöriger Spaltenvektor  $[\mathbf{C}_v]_{\bullet,k+1}$ ) zwischen Solldruckknoten und Referenzknoten keinen weiteren HG-Strang enthält. Auf Grund der Tatsache, dass keine Schleife  $\mathbf{C}_L$  gefunden werden kann, die keine aktive Flussnebenbedingung enthält, folgt wegen der strengen Komplementarität zwischen Multiplikator und Flussbedingung (s. letzte Zeile in Gl. (4.51) auf Seite 78), dass durch eine Änderung von  $z_{k+1}$  keine Flussänderung und damit keine Änderung der Reibungsverluste möglich ist. Eine Änderung von  $z_{k+1}$  wirkt sich ausschließlich auf den Multiplikator  $\lambda$  der aktiven Flussrestriktion aus. Da der zugehörige Strang nicht in  $[\mathbf{C}_v]_{\bullet,k+1}$  enthalten ist, kann

$$\nabla_{z_{k+1}} F_{k+1}(z_{k+1}) = 0 \quad (5.51)$$

gefolgert werden. Damit ist die Aussage von Satz 5.12 ohne weiteres auch für Fall 1) gültig.

Zu 2.)

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Zielfunktion von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  nur  $\mathbf{u}$  aus der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  als Parameter besitzt. Werden zusätzlich zur Abhängigkeit von den Flüssen auch die Multiplikatoren der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  berücksichtigt, die zur Berechnung des Drucks am PRV-Anfangsknoten in diesem Fall nötig sind, lautet die Ableitung:

$$\nabla_{z_{k+1}} F_{k+1}(z_{k+1}) = 1. \quad (5.52)$$

Auf diese Weise wäre demnach die Kontraktionseigenschaft der Funktion  $F_{k+1}(z_{k+1})$  nicht nachweisbar. Die Jacobimatrix des zu lösenden nichtlinearen Gleichungssystems ist in diesem Fall singular. Daher soll die Abhängigkeit  $z_{k+1}(\lambda)$  weiterhin vermieden werden. Dann sind

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z_{k+1}} = \pm 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \left( [\mathbf{C}_v]_{\bullet,k+1} \mathbf{h}(\mathbf{u}(z_{k+1})) \right)}{\partial z_{k+1}} = 0,$$

woraus wie in 1) Gl. (5.51)  $\nabla_{z_{k+1}} F_{k+1}(z_{k+1}) = 0$  und damit Eindeutigkeit der Lösung folgen.  $\square$

Es bleibt zu untersuchen, wie das Ergebnis physikalisch zu interpretieren ist, wenn der Einfluss des Multiplikators (z.B. zu FCV gehörig) nicht in der Druckschleife der HG-Armatur berücksichtigt wird. Im realen System kann von den beiden Armaturen (HG-Armatur, FCV) nur eine den aktuellen Fließzustand kontrollieren. Das heißt, dass bei aktivem FCV ( $\lambda > 0$ ) die HG-Armatur in inaktivem Zustand sein muss. Es ist anzunehmen, dass die Druckreduktion in diesem Fall im realen System vollständig vom FCV geleistet wird, da die Sollwertfeder im PRV soweit entlastet wird, dass der Schieber vollständig geöffnet ist<sup>14</sup>.

Da der Multiplikator nicht in der Druckschleife berücksichtigt wurde, stellen sich im mathematischen Modell jedoch in diesem Fall Werte  $z_{k+1} > 0$  und  $\lambda > 0$  ein.  $z_{k+1}$  stellt dabei den Druckverlust dar, der bei gegebenem Fluss ohne zusätzliche Reduktion am (FCV) den gewünschten Druck am Solldruckknoten erzeugen würde. Der tatsächliche Druck liegt um  $\lambda$  unterhalb des Solldruckniveaus und ist damit ein Maß für die zusätzliche Kontrolle, die vom (FCV) ausgeht. Bei der Berechnung der Druckhöhen bleibt es dem Anwender überlassen, ob er von einer vollständigen Reduktion am (FCV) ausgeht. Dann ist beim (FCV)  $z_{k+1}$  zu  $\lambda$  zu addieren und am (PRV)  $z_{k+1} = 0$  zu setzen. Teil b) von Voraussetzung 5.1 ist somit aufgehoben. Die Berechnung liefert als Ergebnis, ob die Flussrestriktion aktiv ist oder der Fluss von der HG-Armatur kontrolliert wird. Unterschiedliche Fälle derartiger Armaturkonstellationen werden anhand des Beispiels in Kap. 5.4.4 ausführlich diskutiert.

Eine Berücksichtigung der Komplementarität zwischen  $z_{k+1}$  und  $\lambda$

$$\lambda \neq 0 \Leftrightarrow z_{k+1} = 0, \text{ und } \lambda = 0 \Leftrightarrow z_{k+1} \neq 0 \quad (5.53)$$

bei der mathematischen Formulierung des Gleichgewichts würde die Aufgabe erheblich erschweren, da durch die Bedingung  $\lambda z_{k+1} = 0$  die Orthogonalität des zulässigen Bereichs verloren ginge. Die Problemstellung ist dann dem Gebiet der Quasi-Variationellen-Ungleichungen (Verallgemeinertes Nash-Gleichgewicht) zuzuordnen (Harker, 1991).

### Bemerkung 5.2

Bei der Implementierung bereitet die Wahl der Schleifen in  $\mathbf{C}_v$  Schwierigkeiten. Diese werden zu Beginn einmal erstellt, unabhängig davon, welche der Flussrestriktionen

<sup>14</sup>Interessant wäre es, diesen Sachverhalt am Modell zu überprüfen.

aktiv sind. Im Allgemeinen kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Schleifen mehrere Pfade enthalten, für die gleichzeitig aktive Ungleichungsnebenbedingungen für die Flüsse gelten. Deshalb werden die Multiplikatoren im Gleichungssystem mit beliebigen  $\mathbf{C}_v$  Schleifen berücksichtigt. Um Singularität der Jacobimatrix zu verhindern, ist Fall 2) im Beweis von Hilfssatz 5.1 auf Seite 114 von Bedeutung.

Der Druckverlust in einem beliebigen HG-Strang, der die Voraussetzung von Fall 2) erfüllt, wäre unbestimmt, wenn alle Multiplikatoren berücksichtigt würden, die Jacobimatrix damit singulär. Problematisch ist im Allgemeinen, den mit der HG-Armatur korrespondierenden Multiplikator zu bestimmen, ohne dass eine erneute Schleifensuche durchgeführt werden muss. Zur Behebung des Problems dient folgende Überlegung:

Der Nicht-Solldruckknoten (NSKn) des HG-Pfades ist Wurzel eines Baumes, der über einen Pfad mit aktiver Flussnebenbedingung mit einem Knoten verbunden werden kann, der Bestandteil einer im Gesamtsystem enthaltenen Baumstruktur ist. Diese ist Teil des durch Entfernen von Pfaden mit aktiven Flussnebenbedingungen modifizierten Graphen. Auf Grund der Eigenschaften der Baumstruktur ist dieser Knoten über einen Weg ohne weitere Pfade mit aktiven Flussrestriktionen mit dem Referenzknoten verbunden. Daher sind nur die Multiplikatoren der flussregulierenden Armaturen, welche sich in demselben Pfad befinden wie die HG-Armatur oder in Pfaden liegen, die direkt an den Baum mit Wurzel im NSKn anschließen, zu untersuchen. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1) Im HG-Pfad ist eine Flussbedingung zwischen NSKn und HG-Armatur aktiv. Dann ist der NSKn über einen Ast der Baumstruktur des modifizierten Graphen (s. Beweis von Hilfssatz 5.1 auf Seite 114) mit dem Referenzknoten verbunden, der weder eine zusätzliche aktive Flussbedingung noch den HG-Strang enthält. Zur Modifikation des Gleichungssystems muss der zur aktiven Flussbedingung im HG-Pfad gehörige Multiplikator aus der  $\mathbf{C}_v$ -Schleife entfernt werden. Alle übrigen Multiplikatoren, die evtl. in der entsprechenden Zeile von  $\mathbf{C}_v$  enthalten sind, werden weiterhin berücksichtigt.

2) Im HG-Pfad befindet sich keine aktive Flussbedingung zwischen NSKn und HG-Armatur. Dann ist der NSKn Wurzel eines Baumes, der über eine aktive Flussnebenbedingung mit dem durch Entfernen von Pfaden mit aktiven Flussbeschränkungen modifizierten Graphen verbunden werden kann. (Begründung: Nach Voraussetzung von Fall 2) liegt der HG-Pfad im Baum des modifizierten Systems. Da der NSKn im Ausgangssystem Teil des Gitters ist, muss eine solche Verbindung bestehen, wenn keine isolierten Knoten vorhanden sind.) Der Multiplikator des Pfades, der in der  $\mathbf{C}_v$ -Schleife liegt, ist dann aus der entsprechenden Zeile des Gleichungssystems zu entfernen.

Eine weitere Alternative zur Vermeidung der Redundanz besteht darin, alle HG-Armaturen zu ermitteln, deren NSKn nach Entfernen des zugehörigen HG-Stranges und aller Stränge mit aktiven Flussnebenbedingungen isoliert ist. Ohne die Möglichkeit, den Durchfluss zu ändern, können diese Armaturen keine Kontrolle ausüben, die zugehörigen Druckschleifen führen zu linearer Abhängigkeit der Gleichungen. Deshalb werden die entsprechenden Spalten von  $\mathbf{C}_v$  bei der Berechnung in diesem Iterationsschritt aus dem zu lösenden Gleichungssystem entfernt.

#### 5.4.4 Anwendung des Modells auf Beispiel nach Simpson (1999)

Von Simpson (1999) werden verschiedene Anordnungen von Regelarmaturen für ein System mit zwei Behältern diskutiert, die durch eine Rohrleitung mit Durchflusskontrollschieber (FCV) und Druckminderungsventil (PRV) miteinander verbunden sind (Abb. 5.7). Unterschiedliche Simulationsmodelle, darunter z.B. EPANET, werden bezüglich ihres Konvergenzverhaltens untersucht. Die in dieser Arbeit entwickelte

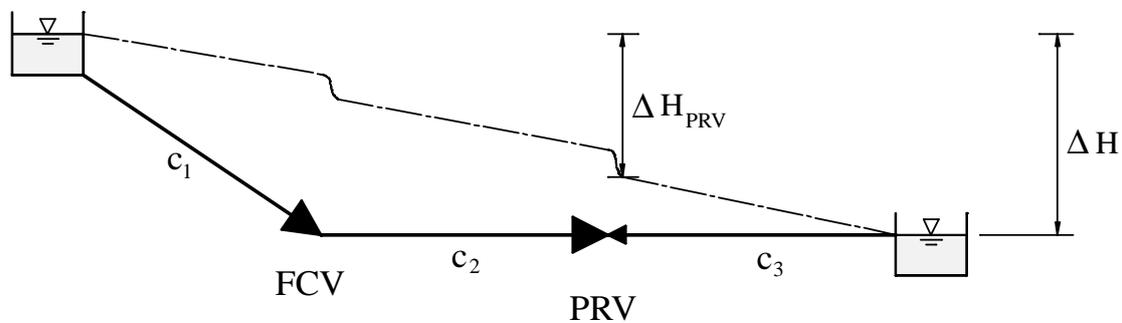


Abbildung 5.7: Beispiel aus Simpson (1999)

Formulierung des stationären hydraulischen Gleichgewichtszustandes des Systems als Nash-Gleichgewicht der Minimierungsprobleme  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  und  $CO(\mathbf{Q}, \Pi^c)$  soll an diesem Beispiel unter verschiedenen Nebenbedingungen gezeigt werden. Variable sind in  $\Pi^c$  der Fluss<sup>15</sup>  $q$  und die PRV-Druckreduktion  $z$  in  $\Pi^{pot}$ . Die Zielfunktionen  $\Pi^c$  und

<sup>15</sup>In diesem Fall sind der Schleifenfluss  $u$  in der virtuellen Schleife zwischen den Behältern und der Fluss in den drei Strängen  $q$  identisch, daher die abweichenden Bezeichnungen  $q$  und  $Q$  an Stelle von  $u$  und  $U$ .

$\Pi^{pot}$  lauten:

$$\begin{aligned}\Pi^c(q, z) &= \frac{1}{\alpha+1} (c_1 + c_2 + c_3) |q|^{\alpha-1} q^2 + zq - \Delta H q, \\ \Pi^{pot}(z, q) &= \frac{1}{2} z^2 + (c_1 + c_2) |q|^{\alpha-1} q z - \Delta H_{PRV} z.\end{aligned}\quad (5.54)$$

Zur Veranschaulichung werden die Reaktionsfunktionen  $r_1 = \arg \min_z \Pi^{pot}(z, q), q \in Q, z \in Z$  und  $r_2 = \arg \min_q \Pi^c(q, z), q \in Q, z \in Z$  der beiden Optimierungsprobleme berechnet. Für den Fall ohne Restriktionen ( $q \in R, z \in R$ ) lassen sich explizit Funktionen  $q(z)$  und  $z(q)$  angeben:

$$\begin{aligned}\text{aus } r_1 : \quad q(z) &= \left( \frac{\Delta H - z}{c_1 + c_2 + c_3} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{sign}(\Delta H - z) \quad \forall z \in R, \\ \text{aus } r_2 : \quad z(q) &= \Delta H_{PRV} - (c_1 + c_2) |q|^{\alpha-1} q \quad \forall q \in R.\end{aligned}\quad (5.55)$$

Im realen System sind durch FCV und PRV den Variablen  $q$  und  $z$  jedoch obere und untere Schranken aufgeprägt. Im Folgenden werden die Fälle 1) ohne FCV, 2) mit FCV nicht in  $C_v$ -Schleife und 3) mit FCV in  $C_v$ -Schleife unterschieden.

### 1) ohne FCV

Im vorliegenden zweidimensionalen Fall lässt sich das Nash-Gleichgewicht  $(q^*, z^*)$  gra-

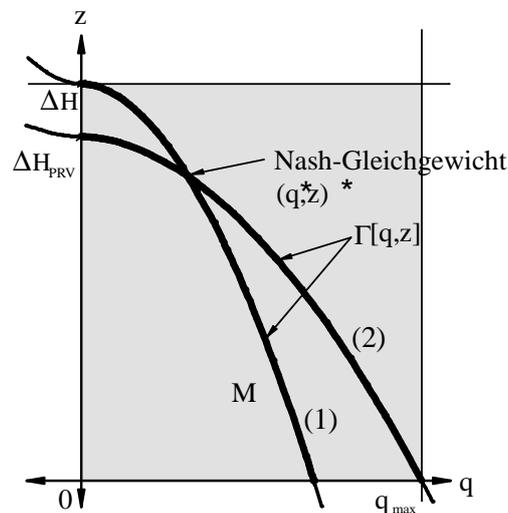


Abbildung 5.8: Nash-Gleichgewicht ohne zusätzliche Flussrestriktionen

fisch als Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen im zulässigen Bereich  $\mathbf{M} = Q \times Z$  deuten. Um Kompaktheit des zulässigen Bereichs zu gewährleisten, können z.B. als Flussbeschränkung der maximale Fluss  $q_{max}$ , der sich ohne Kontrollarmaturen einstellen würde als obere Schranke, und die Bedingung  $q \geq 0$  der Rückflussverhinderung

angegeben werden. Für den zusätzlichen Druckverlust gilt  $z \geq 0$ , da es sich bei der Armatur um ein PRV handelt. Außerdem kann  $z$  nicht größer sein als die Höhendifferenz der Behälter  $z \leq \Delta H$ . Das Gleichgewicht liegt dann im Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen im relativen Inneren von  $\mathbf{M} = Q \times Z$  (siehe Abb. 5.8). Das PRV befindet sich im aktiven Betriebszustand.

## 2) mit FCV nicht in $C_v$ Schleife<sup>16</sup>

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen  $q \geq 0, q \leq q_{FCV}, z \geq 0$  lauten die notwendigen Bedingungen für ein Nash-Gleichgewicht der Aufgabe:

$$\Delta H - (c_1 + c_2 + c_3) |q|^{\alpha-1} q - z + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad (5.56)$$

$$\Delta H_{PRV} - (c_1 + c_2) |q|^{\alpha-1} q - z + \lambda_1 + \mu = 0, \quad (5.57)$$

$$q \geq 0, \quad q \leq q_{FCV}, \quad z \geq 0, \quad (5.58)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad (5.59)$$

$$z\mu = 0, \quad q\lambda_1 = 0, \quad q\lambda_2 = 0. \quad (5.60)$$

Zum Fluss  $q_{FCV}$ , der durch das FCV im aktiven Betriebszustand ( $\lambda_1 = 0$ ) eingestellt wird, lässt sich aus der Druckschleife die zugehörige Druckreduktion im ebenfalls aktiven PRV ( $\mu = 0$ )

$$z_{FCV} = \Delta H_{PRV} - (c_1 + c_2) |q_{FCV}|^{\alpha-1} q_{FCV} \quad (5.61)$$

berechnen (vgl. Gl. (5.57)). Der Wert von  $z_{FCV}$  beinhaltet die Druckreduktion, die bei  $q_{FCV}$  eingestellt werden muss, um den Solldruck zu erreichen. Der zusätzliche vom FCV bewirkte Druckverlust bei aktivem PRV und aktivem FCV wird durch den Multiplikator

$$\lambda_2 = \Delta H - \Delta H_{PRV} - c_3 |q_{FCV}|^{\alpha-1} q_{FCV} \quad (5.62)$$

repräsentiert (Gl. (5.56) in Gl. (5.57) eingesetzt). Es sind die zwei Fälle zu unterscheiden:

a) PRV übernimmt Kontrolle:

Dann gilt  $\lambda_2 = 0$ . Am Drucksollknoten wird der gewünschte Wert erreicht. Der Sollfluss des FCVs mit zugehörigem Multiplikator  $\lambda_2$  wird wegen  $\lambda_2 = 0$  unterschritten ( $q^* < q_{FCV}, z^* > z_{FCV}$ ). Die Lösung liegt im Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen im relativen Inneren von  $\mathbf{M} = Q \times Z$  (s. Abb. 5.9(a)).

b) FCV und PRV übernehmen gleichzeitig die Kontrolle:

Da das FCV nicht in der Druckschleife liegt, kann das PRV für diesen Abschnitt die

<sup>16</sup>entspricht Fall 1) im Beweis von Satz 5.13 auf Seite 114.

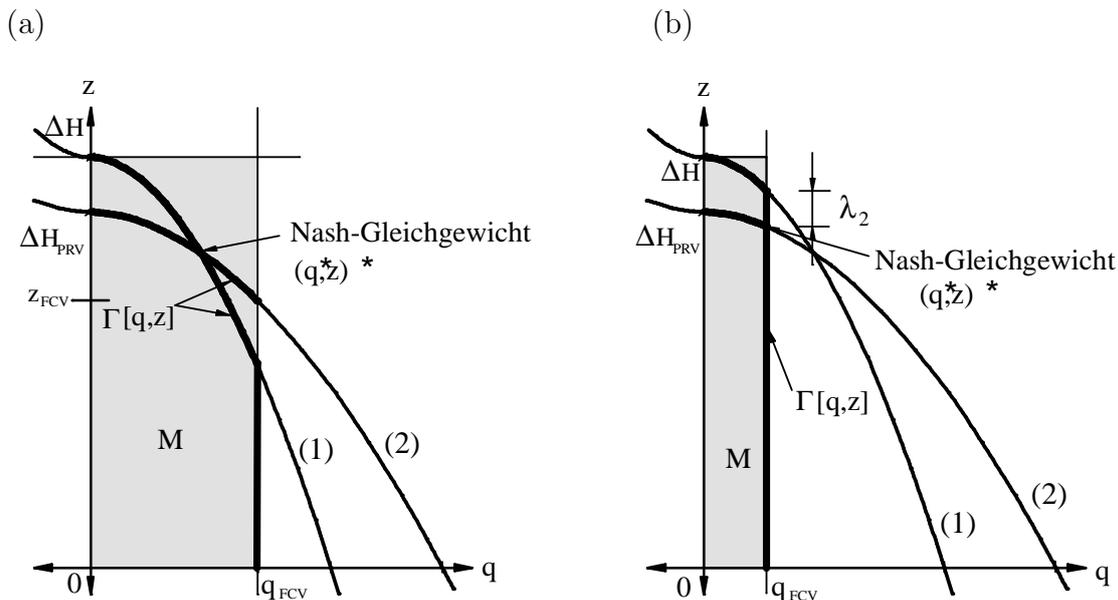


Abbildung 5.9: Nash-Gleichgewicht a) PRV aktiv, b) PRV und FCV aktiv

Kontrolle übernehmen. D.h. der Solldruck wird erreicht, es gilt  $z^* = z_{FCV}$ . Der Abschnitt zwischen Knoten 3 und 4 wird vom FCV kontrolliert ( $q^* = q_{FCV}$ ). Der Multiplikator  $\lambda_2$  gibt die zusätzlich durch das FCV bewirkte Druckreduktion wieder (s. Abb. 5.9(b)). Ohne FCV wäre der Fluss bei aktivem PRV größer als  $q_{FCV}$ . Bei Verzicht auf das PRV läge der Druck am Solldruckknoten bei aktivem FCV über dem Sollwert.

### 3) mit FCV in $C_v$ Schleife<sup>17</sup>

Für das Nash-Gleichgewicht gelten wieder die Gleichungen (5.56) bis (5.60) aus Fall 2). D.h. es wird dieselbe Lösung berechnet wie in Fall 2, die jedoch anders zu interpretieren ist (vgl. Beweis von Satz 5.13). Auch hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Kontrolle wird vom PRV übernommen:

Es gilt  $\lambda_2 = 0$ . Damit ist die Lösung für diesen Fall identisch mit 2a) (s. Abb. ??(a)). Die meisten Computermodelle, die knotenorientierte Verfahren verwenden, liefern bei dieser Konstellation keine oder eine falsche Lösung (z.B. EPANET).

b) FCV übernimmt Kontrolle:

Die Reduktion  $z$  reicht nicht aus, um im System den Fluss  $q_{FCV}$  zu gewährleisten. Es ist eine zusätzliche Reduktion  $\lambda_2 > 0$  nötig. D.h. es wird eigentlich Fall 2b) berechnet.

<sup>17</sup>entspricht Fall 2 im Beweis von Satz 5.13 auf Seite 114.

Ein Vergleich der Druckbedingungen für Knoten 3

$$\begin{aligned} H_3 &= H_{RN} - (c_1 + c_2)|q|^{\alpha-1}q - z, \\ H_3 &= H_{RN} - (c_1 + c_2)|q|^{\alpha-1}q - z - \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.63)$$

aus Druckschleife und realer Schleife liefert für  $\lambda_2 > 0$  in Strang 1 einen Widerspruch. Wie im Beweis von Satz 5.13 Teil 2) erwähnt, liegt die Ursache darin, dass bei aktivem FCV das PRV nicht gleichzeitig aktiv sein kann. Die Bedingung der Druckschleife ist zwar für das Nash-Gleichgewicht notwendig, darf aber nicht zur Berechnung der Druckhöhe an Knoten 3 herangezogen werden. Anhand dieses Beispiels kann die Problematik gezeigt werden, die durch beliebige<sup>18</sup> Wahl der Druckschleifen entsteht. Werden wie in Kap. 5.4.3.5 erwähnt die Multiplikatoren der Aufgabe  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  in die Zielfunktion von  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  aufgenommen, um eine spezielle Wahl der Druckschleifen in  $\mathbf{C}_v$  zu vermeiden<sup>19</sup>, führt dies im vorliegenden Fall zur angedeuteten Singularität in der Jacobimatrix des Gleichungssystems, wenn im k-ten Iterationsschritt PRV und FCV gleichzeitig aktiv werden:

$$\begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 & 1 & 1 \\ d_1 + d_2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta z \\ \Delta \lambda_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \Delta H - (d_1 + d_2 + d_3)q - z - \lambda_2 \\ \Delta H_{PRV} - (d_1 + d_2)q - z - \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}_k. \quad (5.64)$$

Das aktive FCV kann als zusätzliche HG-Armatur interpretiert werden, wenn dessen Multiplikator in der  $\mathbf{C}_v$ -Schleife berücksichtigt wird, so dass diese Konstellation gegen Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 verstößt. Das System besitzt unendlich viele Lösungen, beliebige Kombinationen von  $\lambda_2$  und  $z$  können gewählt werden.

## 5.5 Zusammenfassung

Das Nash-Gleichgewicht als Lösungskonzept nichtkooperativer Spiele wurde definiert. Allgemeine theoretische Grundlagen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Gleichgewichts zwischen nichtlinearen parametrischen Optimierungsproblemen wurden angeführt. Das Verhalten von Armaturen mit Rückkoppelung bei gegebener Flussverteilung wurde als Minimierungsaufgabe eines hydrostatischen Potentials formuliert. Es wurde gezeigt, dass es sich bei der hydrostatischen Minimierungsaufgabe und der Optimierungsaufgabe des System-*'Content'* um zwei nichtlineare konvexe Optimierungsaufgaben handelt, bei denen die Variablen der einen Aufgabe Parameter der

<sup>18</sup>im Sinne von Voraussetzung 5.1 auf Seite 96

<sup>19</sup>s. Teil 2 im Beweis von Satz 5.13 auf Seite 114

anderen sind und umgekehrt. Die Bereiche, aus denen die Variablen zu wählen sind, sind orthogonal. Zur Bestimmung eines Gleichgewichts zwischen den beiden Optimierungsproblemen wurde das Nash-Konzept angewandt.

Während Fragen nach der Existenz eines Nash-Gleichgewichts relativ einfach zu behandeln waren, konnten literaturbekannte Aussagen, die die Eindeutigkeit eines solchen betreffen, nicht in der erforderlichen Allgemeinheit angewandt werden. Daher wurde zunächst unter zusätzlichen, sehr einschränkenden Bedingungen an die Lage der Armaturen im Graphen Eindeutigkeit gezeigt. Diese Bedingungen wurden nachfolgend Schritt für Schritt gelockert bis schließlich unter Voraussetzung der Gültigkeit einer anschaulichen, die Flussänderung infolge einer Erhöhung des Fließwiderstandes betreffenden Annahme die Eindeutigkeit des Nash-Gleichgewichts in der gewünschten Allgemeinheit gezeigt werden konnte.

Zuletzt wurde zur Veranschaulichung die Problematik anhand eines Beispiels aus der Fachliteratur erörtert.

# Kapitel 6

## Kalibrierung des Simulationsmodells

### 6.1 Überblick

Gegenstand der Kalibrierung ist die Bestimmung der Parameter des in den vorangehenden Kapiteln entwickelten mathematischen Modells der Simulation des hydraulischen Verhaltens von Wasserversorgungsnetzen. Drei Klassen der zu kalibrierenden Parameter sind zu unterscheiden.

Ein Teil der Größen kann über Messungen mit relativ großer Zuverlässigkeit direkt bestimmt werden. Dazu sind z.B. die Behälterfüllhöhen  $\mathbf{H}_R$  oder Verbrauchswerte (einzelne  $Q_i$ ) von Großabnehmern zu zählen.

Die zweite Gruppe beinhaltet Parameter, die zwar direkt messbar sind, aber deren Ablesungen nur über einen längeren Zeitraum kumulierte Größen wiedergeben können. Tageszeitliche Schwankungen sind mit dieser Methode nicht direkt erfassbar. Zu diesem Komplex gehören die Verbrauchswerte der Haushalte, die innerhalb des Modells zu den Knotenbedarfswerten  $\mathbf{Q}$  zusammengefasst sind und z.B. im halbjährlichen Zyklus abgelesen werden. Simulationsrechnungen werden in der Regel für Stundenintervalle durchgeführt.

Der dritte Block wird aus Parametern gebildet, die nicht direkt messbar sondern von anderen messbaren Größen abzuleiten sind. Als wichtigstes Beispiel ist die Bestimmung der Rauheit der Rohre und ihrer Durchmesser zu nennen, welche nach Kap. 2.2.3.5 in die Matrix  $\mathbf{D}$  (und  $\mathbf{D}^{-1}$ ) eingehen. Diese sind keinen tageszeitlichen Schwankungen

unterworfen sondern können sich über längere Zeiträume je nach Material, Wasserbeschaffenheit, usw. unterschiedlich stark ändern (Echávez, 1997).

Als Messgrößen kommen Druckhöhen, Durchflüsse, Einspeisungen, aber auch Qualitätsparameter - z.B. zu Kalibrierungszwecken zugeführte Tracer (Kennedy u. a., 1991) - zum Einsatz. Flüsse werden gewöhnlich mit Hilfe von Ultraschall-Durchflussmessungen (Ostertag, 1999) bestimmt.

Bereits vor Mitte des letzten Jahrhunderts wurden Rechenmodelle in der Wasserversorgung eingesetzt. Bald stellte sich die Annahme zutreffender Rauheitswerte als eines der Hauptprobleme heraus, wenn Abweichungen zwischen berechneten und gemessenen Größen auftraten. In Deutschland wurde 1970 die erste Ausgabe des DVGW-Merkblattes GW 303 (DVGW, 1986) herausgegeben und erste Verfahren zur Berechnung der Rauheitsbeiwerte veröffentlicht (Kottmann, 1972; Hoke, 1978).

Das in den vorangehenden Kapiteln entwickelte mathematische Modell der hydraulischen Simulation findet in unterschiedlichen Bereichen Anwendung. Kontinuierlicher Einsatz bietet sich sowohl zur alltäglichen Überwachung des Betriebs von Versorgungssystemen als auch zur Untersuchung von Auswirkungen alternativer Steuerungsentscheidungen an. Ebenso ermöglichen Simulationsrechnungen die Verifikation der Entwürfe von neu zu planenden Netzen unter unterschiedlichen Belastungsfällen. Sie werden zur Bestimmung der Verteilung der Konzentration von Qualitätsparametern im Netz, wie z.B. Kalkgehalt oder Chlor, verwendet. Auswirkungen bei Änderung von Schieberstellungen, Anschluss eines Neubaugebietes oder das Verhalten des Netzes bei großer Entnahme an einem Hydranten im Brandfall sind nur ein Teil der Szenarien, die am Modell überprüft werden können.

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, das Modell gezielt zur Mängelidentifikation und Rehabilitation von bestehenden Wasserversorgungsnetzen mit unzureichender Versorgung und/oder hohen Verlusten einzusetzen, wie sie insbesondere in Entwicklungsländern anzutreffen sind.

Allen Anwendungsgebieten gemeinsam ist, dass die Qualität der Berechnungsergebnisse von der Qualität der Modellparameter abhängt. Der Prozess zur Ermittlung der Modellgrößen ist Gegenstand der Kalibrierung oder 'Parameterschätzung'. Um zuverlässige Aussagen treffen zu können, ist eine gute Übereinstimmung von am realen System gemessenen mit vom Modell simulierten Größen Voraussetzung. In der folgenden Auflistung sind die wichtigsten Parameter hydraulischer Simulationsmodelle zusammengestellt. Die Sammlung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie soll vielmehr einen Eindruck über die Komplexität der Aufgabe vermitteln.

- Netzwerktopologie - Erfassung der wichtigen Verbindungen und Entnahmestellen, korrekte Übernahme in den Plan des Versorgungsnetzes oder Datenbank.
- Eigenschaften der Rohre:
  - Geometrie - Länge, Durchmesser:  
Wenn bei Neuanschlüssen nicht sorgfältig gearbeitet wurde, sind teilweise Durchmesser und Verbindungen falsch oder überhaupt nicht kartiert.
  - Material - Rauheit, Dehnungseigenschaften:  
Da es sich bei Wasserversorgungsnetzen um 'historisch gewachsene Systeme' handelt, sind genaue Angaben z.B. der Rauheitsparameter nicht möglich. Die Rauheit erhöht sich im Laufe der Jahre durch Ablagerungen im Rohr je nach Wasserqualität in jedem Netz unterschiedlich stark.
- Eigenschaften der Knoten:
  - Geodätische Höhe,
  - Bedarfswerte und ihre tageszeitlichen Schwankungen:  
Tägliche Schwankungen im Verbrauch können durch die in größeren Abständen durchgeführten Zählerstandsablesungen (wenn vorhanden) nicht nachvollzogen werden.
  - Behälterfüllhöhen und ihre tageszeitlichen Schwankungen.
- Armaturen:
  - Schieberstellungen,
  - Stellwerte der Solldruck- oder Sollflusswerte für PRVs, PSVs, PBVs, FVCs,
  - Pumpen - Drehzahl, Leistung.
- Fehlmengen:  
Eine besondere Schwierigkeit stellt die Zuordnung und Lokalisierung von Fehlmengen dar, die in Entwicklungsländern über 50 % der Produktionsmenge betragen können. Mögliche Ursachen sind:
  - Leckagen mit unbekannter Form und Größe,
  - Tröpfchenverluste z.B. an Hausanschlüssen,
  - ungenaue Wasserzähler,
  - Buchhaltungsfehler und Diebstahl.

Die Auswirkungen von Parameterabweichungen überlagern sich gegenseitig, so dass nach Meinung des Autors ein auf jedes System anwendbares, allgemein konvergentes Kalibrierungsmodell nicht erreichbar ist. Vielmehr könnte der Einsatz einzelner Kalibrierungstools die teilweise detektivische Kleinarbeit unterstützen und qualitativ bessere Ergebnisse erzielen lassen. Dabei sind die besonderen Rahmenbedingungen des jeweils zu analysierenden Systems zu berücksichtigen und der Kalibrierungsprozess darauf abzustimmen. Besondere Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang dem Expertenwissen von Systembetreuern zu, welche über langjährige Tätigkeit mit dem Netz vertraut und über mögliche 'Schwachstellen' informiert sind.

Schätzfehler der oben genannten unbekannt Parameter haben mehr oder weniger stark ausgeprägte Abweichungen der am realen System gemessenen Größen, wie z.B. Druckhöhen, Durchflüsse und Behälterstände, von den mit dem Modell errechneten zur Folge. Bisher wurde die Aufgabe der Zuordnung der Ursachen innerhalb des Kalibrierungsprozesses zum größten Teil durch zeitaufwendige Probiervverfahren (Trial-and-Error-Verfahren) oder Optimierungsverfahren angegangen, die sich auf einzelne Größen beschränken und dadurch den Gesamtzustand des Systems zu wenig berücksichtigen.

In der Fachliteratur sind außerdem Verfahren zu finden, die mit Hilfe dynamischer Druckstoßberechnungen die Bestimmung von Rohrrauheit und Leckagen ermöglichen sollen (Liggett und Chen, 1994). Nash und Karney (1999) berechnen aus der Druckänderung, die sich infolge des Druckstoßes durch plötzliches Schließen eines Schiebers ergibt, die Rauheit der Rohre zwischen Einspeisung und Schieber. Die Praxisbezogenheit dieser Verfahren ist in Frage zu stellen.

In diesem Kapitel werden zunächst literaturbekannte Kalibrierungsmethoden vorgestellt und Möglichkeiten des effizienten Einsatzes des entwickelten mathematischen Modells, insbesondere der Sensitivitätsmatrizen, aufgezeigt. Dazu wird zunächst die Modellierung unzureichenden Bedarfs und druckabhängiger Leckagen (Kap. 6.3) als Beispiel für die Anwendung des erweiterten mathematischen Modells der hydraulischen Simulation vorgestellt. Die Vorteile der Strukturierung des Graphen (Kap. 2.2.2) hinsichtlich Geschwindigkeitssteigerung der innerhalb des Kalibrierungsprozesses häufig zu wiederholenden Simulationsrechnungen und 'Kalibrierbarkeit' bestimmter Größen werden erläutert. Es werden verschiedene Möglichkeiten der Kalibrierung einzelner Parameter (Kap. 6.2.2.2) angegeben, welche durch entsprechende Wahl der Messgrößen eindeutig bestimmbar sind. Schließlich wird ein Algorithmus zur Wahl eines optimalen Messprogramms vorgestellt, durch den näherungsweise auch Aussagen über die Qualität des Ergebnisses der Kalibrierung möglich sind (Kap. 6.4). Abschließend werden der

gezielte Einsatz von Stellgrößenänderungen zur Qualitätssteigerung der Berechnungsergebnisse diskutiert und eine Strukturierung des Kalibrierungsprozesses vorgeschlagen (Kap. 6.5).

## 6.2 Kalibrierungsmethoden

### 6.2.1 Probiervverfahren

Klassische Methoden zur Parameterschätzung sind die so genannten Probierv- oder 'Trial-and-Error'-Verfahren. Dabei werden auf Erfahrung und Kenntnis des Systems basierende Anfangsschätzungen der Modellgrößen vorgenommen und Simulationsrechnungen durchgeführt. Anschließend werden die Ergebnisse der Modellrechnung mit gemessenen Größen verglichen. Der Bearbeiter zieht auf Erfahrung gründende Schlüsse über mögliche Ursachen von Abweichungen und passt die Parameter dementsprechend an. Dieser Prozess wird solange wiederholt bis zufriedenstellende Übereinstimmung gerechneter und gemessener Größen erreicht ist.

Bei dieser Methode handelt es sich um einen sehr zeitaufwendigen Prozess. Die erzielbaren Ergebnisse liegen oft nicht im Bereich der geforderten Genauigkeit. Walski (1983) gibt ein formelmäßig aufbereitetes Verfahren zur Anpassung der Rauigkeitsparameter an. Zwei unterschiedliche Verbrauchslastfälle werden zu Grunde gelegt, gewöhnlicher Verbrauch und erhöhte Entnahme durch Öffnung eines Hydranten bei Löschwassertests. Es werden Formeln angegeben, über die mit Hilfe von Druckmessungen für beide Lastfälle die Rauigkeitswerte der Rohre zwischen Hydrant und Knoten mit bekanntem Potenzial<sup>1</sup> angepasst werden. In einer späteren Veröffentlichung (Walski, 1986) hebt derselbe Autor die Bedeutung der Qualität von Messdaten hervor und erläutert die Kalibrierung anhand eines Beispiels. Als wesentlich für den Erfolg der Kalibrierung wird hohe Sorgfalt bei der Ermittlung von Messdaten für unterschiedliche Betriebszustände und Belastungsfälle erachtet, die sich über einen möglichst großen Bereich erstrecken sollen (Walski, 1990).

Ein ähnliches Verfahren, bei dem Rauigkeiten und Verbrauchswerte kalibriert werden, ist einer Veröffentlichung von Bhave (1988a) zu entnehmen. Die Differenz zwischen Einspeisemenge und gemessener Verbrauchsmenge wird hier zunächst über eine Anfangsschätzung auf die Knoten verteilt und im Laufe des Kalibrierungsprozesses sukzessive verbessert.

---

<sup>1</sup>Behälter oder Druckknoten von PRVs

Die Vorteile der 'Trial-and-Error'-Verfahren liegen in ihrer universellen Anwendbarkeit. Neben Expertenwissen und Systemkenntnis muss der Bearbeiter über ein funktionsfähiges Simulationsmodell, wie es im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, verfügen. Um unterschiedliche Systemkonstellationen untersuchen zu können, ist insbesondere die Modellierung von Kontrollarmaturen (Kap. 4 und Kap. 5) mit verschiedenen Betriebszuständen nötig. Nachteilig wirkt der große Zeitaufwand und die nicht sehr hohe Qualität der erzielbaren Ergebnisse.

## 6.2.2 Explizite Verfahren

### 6.2.2.1 Überblick

Explizite Verfahren zur Parameterschätzung beinhalten die im Rahmen der Modellbildung exakte analytische Bestimmung einzelner Größen. Darunter sind z.B. pauschale Skalierungsfaktoren für die Rauheit unterschiedlicher Gruppen von Rohren zu verstehen. Ormsbee und Wood (1986) erweitern das nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung des hydraulischen Gleichgewichts Gl. (2.20) auf Seite 21 um zusätzliche Gleichungen. Das können Bedingungen für gemessene Einspeisemengen an Behältern, Flüsse durch Pumpen oder Knotenpotenziale sein. Die Methode erfordert, dass für jede dieser zusätzlichen Gleichungen genau eine unbekannte Größe angegeben wird. Wurden beispielsweise an fünf Knoten Druckmessungen durchgeführt, können die Rohre in fünf Gruppen aufgeteilt und für diese jeweils pauschale Skalierungsfaktoren der Rauigkeit berechnet werden. Es wird über gute Konvergenz des Verfahrens berichtet, Aussagen über Eindeutigkeit der Lösung werden nicht getroffen. Bei Wood und Funk (1993b) ist die direkte Berechnung unterschiedlicher Kalibrierungsparameter mit Hilfe von Druckmessungen beschrieben und die mögliche Anwendung des Verfahrens zur Bestimmung von Steuergrößen, wie z.B. Pumpleistung und Kontrollschiebereinstellung, dargestellt. Rahal u. a. (1980) verwenden die Sensitivitätsmatrix der gemessenen Größen bezüglich unbekannter Parameter zur Anpassung jener Größe, die für die kleinste Änderung des Parameters die größtmögliche Verbesserung der Übereinstimmung aller gemessenen und berechneten Werte erzielt. Danach wird mit dem verbesserten Parameter das Verfahren wiederholt und solange ausgeführt bis Konvergenz erreicht ist. Ferreri u. a. (1994) fügen zu den Gleichungen der hydraulischen Simulation Bedingungen aus Druck- und Durchflussmessungen hinzu, um so die gleiche Anzahl unbekannter Parameter bestimmen zu können. Die Frage der Sensitivität berechneter Fluss- und Druckverteilungen im Hinblick auf Kalibrierungsfehler wird gestellt und die Bestim-

mung der Einflussmatrix durch Variation der einzelnen Parameter und Vergleich der berechneten Größen durchgeführt.

### 6.2.2.2 Anwendung des Simulationsmodells bei expliziten Verfahren

Das in dieser Arbeit entwickelte Simulationsmodell kann direkt zur Bestimmung von Skalierungsfaktoren für die Rauigkeit von Rohren innerhalb eines Pfades verwendet werden. Dabei sind zunächst  $n$  Pfade als UHF-Pfade nach Kap. 5.3.3 sowie  $n$  Messknoten zu wählen, so dass Teil a) von Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 erfüllt ist. Nach Satz 5.13 auf Seite 114 existiert dann ein eindeutiges Gleichgewicht. Aus berechneter Druckreduktion und berechnetem Fluss im UHF-Pfad kann der Skalierungsfaktor der Rauheit der Rohre im Pfad berechnet werden. Darüber hinaus ist die Sensitivität der Lösung bezüglich Kalibrierungsfehlern (s. oben Ferreri u. a., 1994) direkt bestimmbar.

Die Einführung von Pfaden (Kap. 2.2.2) bietet sich zur Gruppierung von Rohren mit gleicher unbekannter Rauigkeit besonders an. Es ist anzunehmen, dass die Rohre innerhalb eines Pfades gleiche Rauigkeitswerte aufweisen. Denn die Pfade entsprechen meist Straßenzügen, deren Rohre gewöhnlich gleichzeitig verlegt wurden, sich in Material und Durchmesser ähneln und andererseits von Wasser gleicher Qualität durchflossen werden<sup>2</sup>. Pfade, bei denen das Alter der Rohre wesentlich variiert, sind vom Bearbeiter von der Anwendung der Methode auszuschließen.

Auch beim Einsatz von Verfahren zur Bestimmung unbekannter Verbrauchswerte bietet die Strukturierung des Graphen Vorteile. Gegenstand der Kalibrierung sind zunächst nur die Bedarfswerte der Pfadverbindungsknoten. Wenn Simulationsergebnisse hinreichend gute Übereinstimmung mit gemessenen Werten bieten, die Parameterschätzung am reduzierten Modell damit abgeschlossen ist, kann lokal, innerhalb der Pfade, eine Aufteilung der zusätzlichen Bedarfswerte erfolgen. Im Versorgungsnetz können Leckortungsverfahren (Eiswirth und Burn, 2001; Makar und Chagnon, 1999) eingesetzt oder die berechneten Ergebnisse mit Informationen von fest installierten Lecküberwachungssystemen (Moritz und Wagner, 2000) verglichen werden. Mit der Lokalisierung von Leckagen beschäftigen sich auch Liggett (1993) und Koelle u. a. (1996).

---

<sup>2</sup>Außer ein Pfadzwischenknoten ist als Knoten mit konstanter Einspeisung modelliert

### 6.2.3 Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen

Die Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen kann angewandt werden, wenn die Anzahl der gemessenen Größen die der gesuchten Parameter übersteigt. Dazu werden am realen System unterschiedliche Betriebszustände herbeigeführt. Diese können sowohl systemimmanent sein, wie sie z.B. durch unterschiedliche, über den Tag verteilte Belastungsfälle verursacht werden, oder aber nur während eines Messprogramms z.B. durch (teilweises) Schließen von Schiebern und/oder Manipulation der Stellgrößen von Kontrollarmaturen herbeigeführt werden.

Gegeben seien  $b = 1, \dots, n_b$  Betriebszustände und  $m = 1, \dots, n_m$  Messknoten. Die Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen besteht aus der Minimierung der Funktion

$$Z = \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_m} w_j (V_{ij}^M - V_{ij}^S)^2. \quad (6.1)$$

Dabei werden mit  $w_{ij}$  unterschiedliche Gewichtungsfaktoren, mit  $V_{ij}^M$  die Messwerte und mit  $V_{ij}^S$  die berechneten Werte der Größe  $j$  in Betriebszustand  $i$  bezeichnet. Datta und Sridharan (1994) liefern eine Prozedur, welche Sensitivitätsaussagen berücksichtigt. Zwei Verfahren zur Bestimmung der Einflussmatrizen werden genannt: Direkt über die Jacobimatrix des Newtonverfahrens oder iterativ durch Berechnen der Auswirkung einer Parameteränderung mit dem Simulationsmodell. Ein ähnliches Modell ist bei Reddy u. a. (1996) zu finden.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Sensitivitätsresultate (Kap. 4.3) ermöglichen die direkte Berechnung unter Berücksichtigung unterschiedlicher, durch gezielte Manipulation der Kontrollarmaturen verursachter Nebenbedingungen. Dadurch vergrößert sich der Anwendungsbereich der Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen.

Besondere Bedeutung hat bei diesem Verfahren die Generierung unterschiedlicher Betriebszustände, unter denen Redundanz der Systemgleichungen vermieden wird. Als wichtige Maßnahme ist das vorübergehende Schließen von Schiebern (s. Kap. 4.2.2.6) und Manipulation weiterer Kontrollarmaturen zu nennen. Das Modell bietet die Möglichkeit, geschlossene Stränge zu berücksichtigen, ohne dass die einmal durchgeführte Schleifenwahl geändert werden muss (s. Kap. 4.2), was erheblich zur Steigerung der Rechengeschwindigkeit bei den innerhalb der Kalibrierung sehr häufig zu wiederholenden Simulationsläufen beiträgt.

## 6.2.4 Implizite Verfahren

### 6.2.4.1 Überblick

Nachteilig bei den in Kap. 6.2.2 behandelten expliziten Verfahren ist die beschränkte Anwendungsmöglichkeit der Kalibrierung auf eine feste Zahl bestimmter Parameter. Die Methode der kleinsten quadratischen Abweichungen erfordert eine große Zahl von Messungen und Betriebszuständen, bei denen Redundanz in den hydraulischen Gleichungen nicht ohne Weiteres ausgeschlossen werden kann. Dagegen sind die im Folgenden vorgestellten impliziten Verfahren auf beliebige Messwerte, Lastfälle, Steuerungseinstellungen anwendbar, wobei aber nicht vergessen werden darf, dass die Güte des Kalibrierungsergebnisses direkt mit der Qualität des zu Grunde liegenden Messprogramms verbunden ist.

Der Kalibrierungsprozess wird als nichtlineare Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen formuliert (Ormsbee, 1989). Die optimal zu wählenden Größen  $\mathbf{P}$  beinhalten dabei die Parameter Rauigkeit, Bedarf, weitere Modellparameter oder beliebige Kombinationen. Die zu minimierende Zielfunktion  $Z(\mathbf{P})$  enthält die gewichtete Summe der Beträge der Differenzen zwischen gemessenen und gerechneten Werten aus unterschiedlichen Betriebszuständen. Die errechneten Größen sind durch die Nebenbedingungen  $h_S(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$ , welche das Systemgleichgewicht beinhalten, implizit als Funktionen der Variablen definiert. Dazu kommen implizite Nebenbedingungen  $\mathbf{l}_I \leq g_I(\mathbf{P}) \leq \mathbf{u}_I$ , z.B. zulässige Intervalle von Druckhöhen, und explizite Nebenbedingungen  $\mathbf{l}_E \leq g_E(\mathbf{P}) \leq \mathbf{u}_E$ , zulässige Bereiche von Rauheit, Verbrauch, usw., welche durch Netzkenntnis des Bearbeiters enger gewählt werden können und somit zu höherer Qualität des Kalibrierungsergebnisses beitragen. Insgesamt lautet das mathematische Modell der impliziten Kalibrierungsverfahren:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Z(\mathbf{P}) \\
 & h_S(\mathbf{P}) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{l}_I \leq g_I(\mathbf{P}) \leq \mathbf{u}_I \\
 & \mathbf{l}_E \leq g_E(\mathbf{P}) \leq \mathbf{u}_E.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Im Allgemeinen handelt es sich bei Gl. (6.2) um eine nichtlineare, nichtkonvexe und multimodale Optimierungsaufgabe. Zur Lösung des Problems eingesetzte Algorithmen sind bei Ormsbee (1989) zu finden. In den vergangenen Jahren erfreuten sich stochastische Verfahren zur Lösung multimodaler Optimierungsaufgaben immer größerer Beliebtheit. Dazu zählen Genetische Algorithmen, Evolutionsstrategien und Simulated-

Anealing-Methoden. Deren Anwendung zur Kalibrierung von Simulationsmodellen in der Wasserversorgung ist z.B. beschrieben bei Walters u. a. (1994).

Problematisch ist nach Meinung des Autors, dass diese Verfahren, bedingt durch ihre universelle Einsetzbarkeit, dem Bearbeiter ein gutes Kalibrierungsergebnis vortäuschen können, obwohl tatsächlich wesentlich mehr Aufwand z.B. bei der Datenerhebung nötig gewesen wäre. Bei den expliziten Methoden ist sich der Bearbeiter der Tatsache bewusst, dass nur bestimmte, von ihm gewählte Parameter Gegenstand der Kalibrierung sind. Falls kein Einfluss zwischen Messung und Parameter besteht, geht die Lösbarkeit des Systems verloren, das Problem wird somit offenkundig.

#### 6.2.4.2 Kalibrierbarkeit bestimmter Parameter

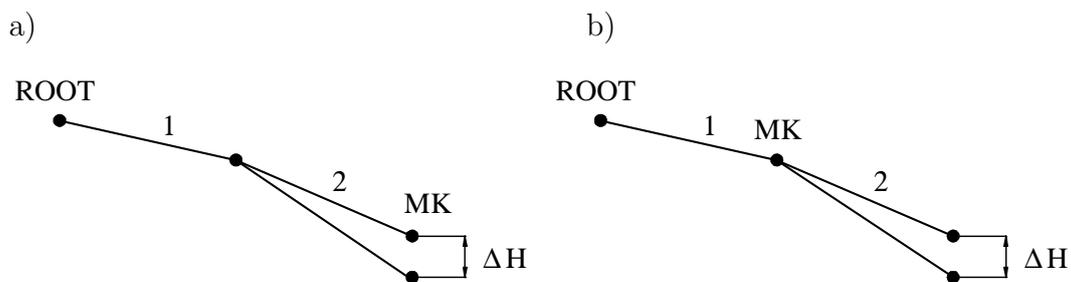


Abbildung 6.1: Rauheit von Rohr 2 a) kalibrierbar b) nicht kalibrierbar

Wie erwähnt wurde, bieten implizite Verfahren die Möglichkeit, sämtliche Modellparameter als zu bestimmende Größen zu definieren. Dabei wurden in bisherigen Veröffentlichungen aber keine Anforderungen an die 'Kalibrierbarkeit' der einzelnen Parameter gestellt. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell bietet eine einfache, auf graphentheoretischen Überlegungen (Kap. 2.2.1) basierende Möglichkeit, für jeden Betriebszustand die Kalibrierbarkeit der Rauigkeitswerte und Schieberstellungen der einzelnen Stränge zu überprüfen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Sensitivitätsmatrix Gl. (4.63) auf Seite 83 für den aktuellen Zustand zu betrachten. Stränge, die zu einer Nullspalte in der Matrix gehören, sind nicht kalibrierbar. Diese Stränge können aber auch direkt über die in Kap. 2.2.1 eingeführte Strukturierung des Graphen bestimmt werden. Druckverluständerungen in Strängen des Waldes, die von den Blättern ausgehend zur Wurzel vor einem Messknoten erreicht werden, haben keinen Einfluss auf die Druckhöhe des Messknotens, ihre Rauigkeit ist mit diesem Messprogramm nicht kalibrierbar. Genauso ist zu überprüfen,

ob die durch aktive Nebenbedingungen in zwei Bäume zerfallenen Pfade kalibrierbare Stränge beinhalten. Den einfachen Sachverhalt verdeutlicht Abb. 6.1.

## 6.3 Erweiterte Anwendung des Modells

### 6.3.1 Modellierung unzureichender Versorgung

Das bis hier entwickelte Modell der hydraulischen Simulation von Wasserversorgungsnetzen basiert auf der Annahme konstanter Verbrauchswerte. Der Anwendbarkeit der verbrauchsgesteuerten Analysemodelle, zu denen beinahe alle erhältlichen Programme zu zählen sind, sind jedoch Grenzen gesetzt. In Entwicklungsländern häufig anzutreffen ist der Fall, dass die Wasserversorgung unzureichend ist (intermittent supply), der Bedarf nicht gedeckt werden kann (Chandapillai, 1991). Darüber hinaus können Löschwasserentnahmen, Ausfall von Pumpen oder Rohrbrüchen zu Konstellationen mangelnder Versorgung in einzelnen Netzabschnitten führen (Gupta und Bhave, 1996). Durch verbrauchsgesteuerte Analyse kann diese Situation nicht korrekt modelliert werden, da die Bedarfswerte als Parameter des Modells auf jeden Fall eingehalten werden. Die Folge sind unrealistische Druckhöhen<sup>3</sup>, unter denen der angesetzte Verbrauch nie gewährleistet werden kann, da das errechnete Knotenpotenzial z.B. unter der geodätischen Höhe der Entnahmestelle liegen würde.

Das entwickelte Modell bietet die Möglichkeit, derartige Bedarfssituationen zu berücksichtigen. Kann eine maximal monotone Abbildung nach Def. 3.17 auf Seite 40 gefunden werden, die unzureichende Versorgungssituationen wiedergibt, lässt sich das Modell ohne Schwierigkeiten erweitern.

In diesem Fall ist zu berücksichtigen, dass unter einer gewissen Druckhöhe  $H_1$  keine Entnahme möglich ist, während bei Druckhöhen  $H > H_2$  der volle Bedarf gedeckt werden kann. Dazwischen schlägt Chandapillai (1991) zur Berücksichtigung der Abhängigkeit der möglichen Wasserentnahme vom anstehenden Druck eine Beziehung der Form

$$H = H_1 + kQ_{IS}^n \quad (6.3)$$

vor. Dabei sind  $k$ ,  $n$  Konstanten und  $Q_{IS}$  die erreichte Entnahme.  $H$  stellt die anstehende Druckhöhe als monotone Abbildung der Entnahme am Knoten dar.

---

<sup>3</sup>evtl. sogar negative

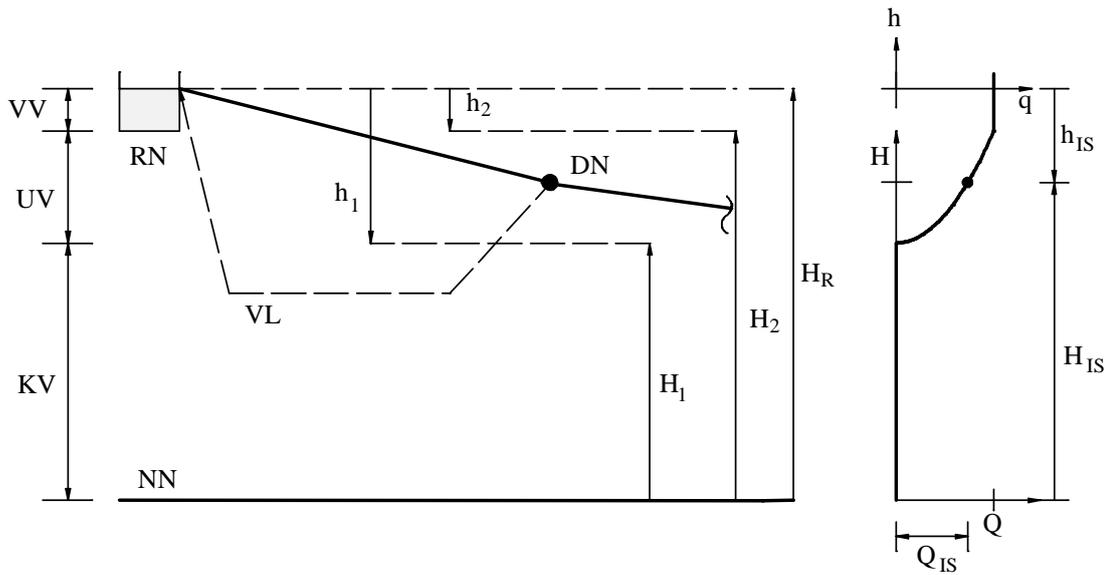


Abbildung 6.2: Darstellung der Druckverhältnisse bei unzureichender Versorgung

Da der maximale Bedarf  $Q$  als bekannt vorausgesetzt wird, kann dieser als obere Schranke für die tatsächlich erreichte Entnahme am Knoten angesetzt werden und geht somit als Parameter ins Modell ein. Zur Simulation der möglicherweise unzureichenden Versorgungssituation wird ein virtueller Strang (VL) zwischen Bedarfsknoten (DN) und Referenzknoten (RN) eingeführt. Der tatsächlich erreichbaren Entnahme  $Q_{IS}$  entspricht der Fluss  $q_{IS} \in [0; Q]$  im virtuellen Strang. Die Situation ist in Abb. 6.2 auf der nächsten Seite dargestellt. Die möglichen Entnahmeverhältnisse am Knoten (DN) lassen sich in die drei Bereiche einteilen:

VV:	volle Versorgung möglich	$q_{IS} = Q$
UV:	unzureichende Versorgung	$q_{IS} = f(H)$
KV:	keine Versorgung möglich	$q_{IS} = 0$

Die Umrechnung der Grenzpotenzialhöhen in Grenzdruckverluste ergibt sich aus der Parallelverschiebung des Achsensystems um  $H_R$  und ist aus Abb. 6.2 abzulesen:

$$h_1 = H_1 - H_R, \quad h_2 = H_2 - H_R, \quad h = H - H_R.$$

Das hydraulische Gesetz des virtuellen Stranges ist durch folgenden monotonen Operator (vgl. Kap. 4.2) gegeben (Abb. 6.3 auf der nächsten Seite):

$$q_{IS}(h) = \begin{cases} 0 & , h < h_1 \\ \left(\frac{h-h_1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} & , h_1 \leq h \leq h_2 \\ Q & , h > h_2 \end{cases} \quad (6.4)$$

Die zugehörige konvexe 'Co-Content'-Funktion lautet:

$$W_{IS}(h) = \begin{cases} 0 & , h < h_1 \\ Qh_2 + \frac{n}{n+1} \left[ \left(\frac{h-h_1}{k}\right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h_2-h_1}{k}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & , h_1 \leq h \leq h_2 \\ Qh & , h \geq h_2 \end{cases} \quad (6.5)$$

Entsprechend können die duale Formulierung

$$h_{IS}(q) = \begin{cases} \emptyset & , q < 0 \\ (-\infty, h_1] & , q = 0 \\ h_1 + kq^n & , 0 < q < Q \\ [h_2, +\infty) & , q = Q \\ \emptyset & , q > Q \end{cases} \quad (6.6)$$

und 'Content'

$$W^c_{IS}(q) = \begin{cases} \infty & , q < 0 \\ h_1q + \frac{k}{n+1}q^{n+1} & , 0 \leq q \leq Q \\ \infty & , q > Q \end{cases} \quad (6.7)$$

für unzureichende Versorgung angegeben werden.

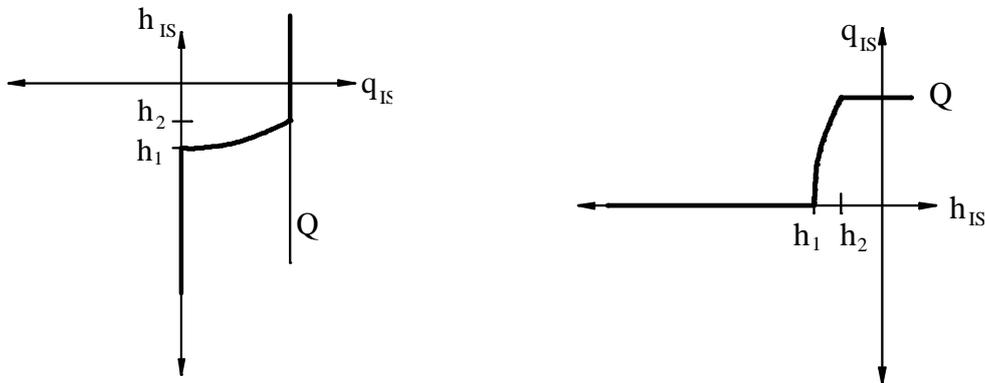


Abbildung 6.3: Operatoren  $h_{IS} \mapsto q_{IS}$  und  $q_{IS} \mapsto h_{IS}$

### 6.3.2 Modellierung druckabhängiger Leckagen

Wesentlicher Bestandteil von Kalibrierungsrechnungen ist die Zuordnung von Verlustmengen zu möglichen Ursachen. Dabei sind zeitweise auftretende Verluste infolge von falschen Zählerablesungen, Buchhaltungsfehlern oder unerlaubten Entnahmen von kontinuierlichen druckabhängigen Fehlmengen, die durch Beschädigungen am Rohrnetz oder an den Hausanschlüssen entstehen, zu unterscheiden. Zu deren Identifizierung müssen geeignete Annahmen über Lage und Größe der Leckagen getroffen werden, welche dann sukzessive im Kalibrierungsprozess verbessert werden. Voraussetzung dafür ist eine möglichst realitätsnahe Abbildung der Leckagen im Simulationsmodell.

Zur Implementierung druckabhängiger Leckagen bietet sich das in Abb. 6.4 auf der nächsten Seite dargestellte hydraulische Modell an. Der eigentliche Verbrauchsknoten (DN) wird über den virtuellen Strang (VL1) mit einem virtuellen Behälter verbunden, dessen Potenzialhöhe mit der geodätischen Höhe  $H_0$  der Geländeoberkante (GOK) übereinstimmt. Der gedachte Behälter ist über den virtuellen Strang (VL2) mit dem Referenzknoten (RN) verbunden.

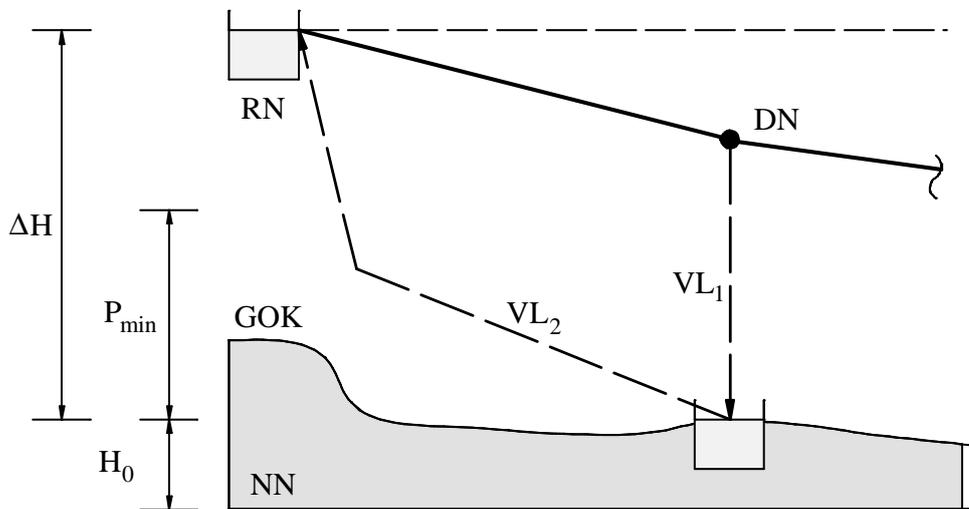


Abbildung 6.4: Hydraulisches Modell druckabhängiger Leckage

Die Abhängigkeit des Verlustes  $q_L$  vom anstehenden Druck  $P$ , welcher mit dem Druckverlust  $h_L$  im Strang (VL1) identisch ist, kann durch einen maximal monotonen Operator nach Def. 3.18 auf Seite 41 abgebildet werden. Im Allgemeinen ist dieser Zusammenhang unter anderem abhängig von Fläche und Größe des Lecks, vom Material des Rohres und seinen Dehnungseigenschaften, von der Beschaffenheit des Untergrundes,

in dem das schadhafte Rohr verlegt ist. Längsrisse im Rohr haben z.B. die Eigenschaft, dass sich die Leckfläche durch Dehnung des Rohres bei hohem Druck ausweitet oder sich erst ab einem gewissen Druck öffnet (May, 1994). Dadurch verstärkt sich der Einfluss der Druckabhängigkeit der Verlustmenge zusätzlich.

Es kann keine allgemein gültige Formel für die Abbildung angegeben werden. Vielmehr sind im Einzelfall die Einflussfaktoren zu untersuchen und eine geeignete Wahl des hydraulischen Gesetzes zu treffen. Evtl. können auch Versuche zur Klärung des Sachverhalts beitragen. Beliebige Steigerung der Genauigkeit ist möglich, aber auch für grobe Näherungen sind im Rahmen der Unsicherheit bezüglich der übrigen Modellparameter gute Ergebnisse zu erwarten. In Abb. 6.5 a) ist die Abbildung  $q_L \mapsto h_L$  für ein Leck, welches sich erst ab einer Druckhöhe  $P_{min}$  öffnet, angegeben. Die hydraulische Beziehung des zweiten virtuellen Stranges (Abb. 6.5b)) entspricht der eines virtuellen Stranges zwischen realen Behältern  $\Delta H = const$ . Die mathematische Formulierung kann gemäß der von Kap. 6.3.1 abgeleitet werden.

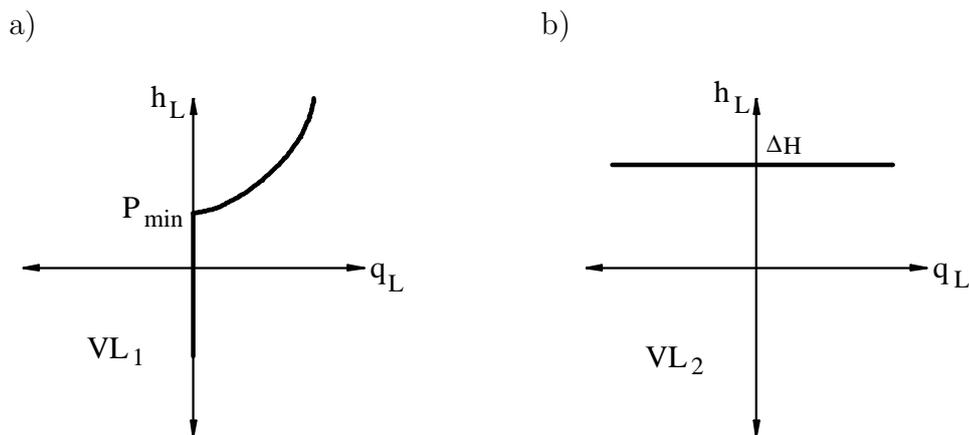


Abbildung 6.5: Bsp. für hydraulische Beziehung druckabhängiger Leckage

Neben der Anwendung des Modells zur Mängelidentifikation besteht die Möglichkeit, dass über einen längeren Zeitraum druckabhängige Lecks als Bestandteil des Versorgungssystems akzeptiert werden müssen, da eine vollständige Rehabilitation nur über den Zeitraum mehrerer Jahre hinweg durchführbar ist und eines immensen finanziellen Einsatzes bedarf. In solchen Fällen wird versucht, durch geeignete Wahl von Schieberstellungen oder anderen Kontrollarmaturen die Verluste so gering als möglich zu halten. Vairavamoorthy und Lumbers (1998) schlagen z.B. vor, die Abweichung der Druckhöhen von den Mindestdruckhöhen zu minimieren. Durch die hier vorgestellte

Erweiterung des Simulationsmodells ist eine direkte Berücksichtigung der Leckverluste und Differenzierung des Einflusses möglich, der durch den Druck ausgeübt wird.

Bei der gezeigten Methode zur Simulation unbekannter Entnahmen durch Einfügen virtueller Stränge handelt es sich um ein allgemeingültiges Verfahren, durch das sämtliche Randgrößen zu inneren Größen des Systems gemacht werden können. Jeder Randknoten ist mit dem virtuellen Bezugsknoten des Systems über einen zusätzlichen virtuellen Strang zu verbinden. Die Randbedingungen, z.B.  $Q = const$  oder  $H = const$  für Bedarfs- und Potenzialknoten, werden dann als hydraulisches Gesetz des zugehörigen virtuellen Stranges berücksichtigt. Der so modifizierte Graph beinhaltet nur Zwischenknoten, sämtliche die Hydraulik betreffende Gesetzmäßigkeiten sind strangbezogen. Diese können beliebig verallgemeinert werden und führen wie in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt wurde zu einer eindeutigen Flussverteilung, wenn sie den Anforderungen eines maximal monotonen Operators (Def. 3.18) genügen.

### 6.3.3 Bestimmung einzelner Steuer- und Entwurfparameter

Die in Kap. 6.2.2.2 kurz beschriebenen expliziten Verfahren zur Kalibrierung einzelner Modellparameter sind darüber hinaus zur Bestimmung unterschiedlicher Steuergrößen geeignet.

Sie können z.B. eingesetzt werden, wenn die zum Erreichen gewisser Druckhöhen benötigte Druckreduktion innerhalb eines Pfades gesucht ist. Auch Druckzufuhr im UHF-Strang ist denkbar. Damit können Pumpen dimensioniert werden, die an ausgezeichneten Punkten<sup>4</sup> unter gegebener Last einen gewünschten Druck erzeugen. Die Solldruckknoten müssen nicht direkt an die UHF-Stränge anschließen, solange Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 eingehalten ist.

## 6.4 Auswahl der Messknoten im optimalen Messprogramm

Entscheidend für den Kalibrierungsprozess ist die Wahl des Messprogramms. Während Einspeisekurven an Behältern als bekannt vorausgesetzt werden, setzen sich die während eines Messprogramms ermittelten Größen im wesentlichen aus Druckhöhen, Flüssen, Einspeisungen und Qualitätsparametern zusammen. Um ein Maximum an

<sup>4</sup>entsprechend den Messknoten bei der Kalibrierung

Information über den Zustand des Systems aus den Messdaten, deren Erhebung teilweise mit großem finanziellem Aufwand verbunden ist, zu gewinnen, soll die optimale Verteilung der Messungen im Netz gefunden werden. Dazu müssen unterschiedliche Anordnungen der Messarmaturen vergleichbar sein. Das Maß, bezüglich dessen der Vergleich durchgeführt wird, dient als quantitative Abschätzungen der Güte von Kalibrierungsergebnissen, die mit Hilfe des zu Grunde liegenden Messprogramms ermittelt werden.

In den USA werden zur Ermittlung von Messdaten verbreitet Löschwassertests eingesetzt. Durch Öffnen von Hydranten wird ein Systemzustand mit großen Fließgeschwindigkeiten in Pfaden zwischen Einspeisung und Hydrant erzeugt. Rauheiten der Rohre innerhalb dieser Pfade sind Gegenstand der Kalibrierung. Der Einsatz Genetischer Algorithmen zur optimalen Wahl der Löschwassertests wird von Meier und Barkdoll (2000) beschrieben.

Bush und Uber (1998) stellen ein Verfahren zum Entwurf eines optimalen Messprogramms unter wahrscheinlichkeitstheoretischer Berücksichtigung von Messfehlern vor. Die Sensitivität der Zustandsvariablen bezüglich der Modellparameter wird dabei aus der Lösung eines differenzialalgebraischen Gleichungssystems gewonnen. Drei Varianten zur Bestimmung der Qualität eines Messprogramms werden genannt:

- Max-Sum-Kriterium: Die normierte Summe der Sensitivität  $\frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial \mathbf{P}}$  der Messgrößen  $\mathbf{V}_m$  bezüglich der Parameter  $\mathbf{P}$  soll maximiert werden:

$$MS_i = \sum_{j=1}^{n_P} \left\| \frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial \mathbf{P}} \right\|_{i,j}.$$

Damit lassen sich die Knoten in der Reihenfolge der  $MS_i$ -Werte ordnen und so die geeignetsten auswählen.

- Max-Min-Kriterium:  $m$  Entwürfe für Messprogramme sollen der Qualität nach geordnet werden. Dazu wird für das  $k$ -te Messprogramm  $M_k$  die 'Kalibrierbarkeit'  $S_j^k$  der einzelnen Parameter  $j$  berechnet:

$$S_j^k = \sum_{i \in M_k} \left\| \frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial \mathbf{P}} \right\|_{i,j}, \quad j = 1, \dots, n_P.$$

Als nächstes wird  $P_u = \min \{S_j^k, j = 1, \dots, n_P\}$  bestimmt und das Messprogramm  $i$  mit größtem  $N_{i,u}$  an Rang  $k$  gesetzt. Diese Vorgehensweise wird für alle  $m$  Messprogramm-entwürfe wiederholt.

- Gewichtetes Summen Kriterium: iteratives Verfahren ähnlich wie Max-Min-Kriterium.

Nachteil der drei Methoden ist, dass sie entweder die Abhängigkeit der Wahl der Messgrößen nicht berücksichtigen (Max-Sum-Kriterium) oder wie bei den iterativen Methoden der Fokus in jeder Iteration auf einen Parameter gerichtet ist. Während z.B. das Max-Sum-Kriterium zur Wahl einer Messgröße, welche auf möglichst viele Parameterabweichungen reagiert, sehr gut geeignet ist, liefert es beim Einsatz mehrerer Messgeräte kein befriedigendes Ergebnis. Eine 'bedingte' Sensitivität an Stelle der absoluten ist zu berücksichtigen.

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein Verfahren vorzustellen, welches die genannten Probleme nicht aufweist. Einsatzmöglichkeiten der nach Kap. 4.3 gewonnenen Sensitivitätsresultate zur optimalen Auswahl eines Messprogramms werden aufgezeigt. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, vielmehr soll die Vorgehensweise exemplarisch dargestellt werden.

Zunächst sind auf Expertenwissen basierende Anfangsschätzungen  $\mathbf{p}_0$  der gesuchten Parameter (vgl. Kap. 6.5) durchzuführen, mit denen eine Simulationsrechnung durchgeführt wird. Die Sensitivitätsresultate nach Kap. 4.3 können dazu verwendet werden, die Abhängigkeit der Systemvariablen  $\mathbf{v}$  als lineare Funktion  $f$  der Modellparameter  $\mathbf{p}$  zu approximieren:

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0) + f'(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0). \quad (6.8)$$

Gl. (6.8) stellt eine Art Taylorreihenentwicklung unter Vernachlässigung des Restgliedinflusses dar. Der Satz von Taylor ist nicht direkt anwendbar, da zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion  $\mathbf{v} = f(\mathbf{p})$  gefordert wird, die Sensitivitätsresultate in Kap. 4.3 aber nur Aussagen über die Existenz der ersten Ableitung liefern.

Im Folgenden werden beispielhaft als gemessene Größen die Potenzialhöhen an ausgezeichneten Knoten (Messknoten) angenommen. Ebenso könnten Mengenmessungen in den Strängen erfolgen. Diese sind in der Regel jedoch aufwendiger und teurer durchzuführen. An den Verbrauchsknoten wird von einem Mindestbedarf  $\mathbf{Q}_0$  ausgegangen, zu bestimmende Parameter sind zusätzliche Bedarfswerte  $\Delta\mathbf{Q}$ .

Der Ansatz besteht darin, die Messknoten so zu wählen, dass die Summe der maximal möglichen Abweichungen der Potenzialhöhen an den Nicht-Messknoten möglichst gering wird. Die Potenzialhöhen an den Messknoten werden konstant gehalten und die Summe der zusätzlichen Bedarfswerte soll den Verlusten des Systems  $\Delta Q_{ges}$  entsprechen. Anschaulich bedeutet dies, dass die 'Steifigkeit' des Systems bei 'Festhalten' der Potenzialhöhen der Messknoten möglichst groß und die 'Beweglichkeit' klein werden sollen.

Sei  $\mathbf{M}_n$  die Menge und  $n$  die Anzahl der Nicht-Potenzialknoten sowie  $n_m$  die Anzahl der Messknoten und  $\mathbf{M}_m$  beliebige Teilmenge von  $\mathbf{M}_n$  mit Kardinalität  $n_m$ . Betrachtet wird folgendes Minimierungsproblem:

$$\min_{\mathbf{M}_m \subset \mathbf{M}_n} Z = \Sigma \Delta \mathbf{H}_n. \quad (6.9)$$

Bei Gl. (6.9) handelt es sich um eine diskrete Optimierungsaufgabe. Gesucht ist die Teilmenge  $\mathbf{M}_m^*$  von  $\mathbf{M}_n$ , für die der Zielfunktionswert  $Z$  minimal wird. Dabei ist  $\Sigma \Delta \mathbf{H}_n$  Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Q}} \{ \Sigma \Delta \mathbf{H}_n &= [\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_n]_{\mathbf{Q}_0}^T \Delta \mathbf{Q} \}, \\ \nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_m^T \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{Q} &\geq \mathbf{0}, \\ \sum_i^n \Delta Q_i &= \Delta Q_{ges} \end{aligned} \quad (6.10)$$

für gegebene Menge  $\mathbf{M}_m$ . Vorausgesetzt wird

$$[\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_n]_{i,j} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j, \dots, n, \quad (6.11)$$

d.h. eine Steigerung des Bedarfs an einem beliebigen Knoten  $i$  führt an allen übrigen Knoten, falls Einfluss besteht, zu einer Potenzialabnahme. Das Minimum der Summe kann daher an Stelle der maximalen Summe der Beträge der einzelnen Abweichungen verwendet werden (vgl. oben). Insgesamt handelt es sich bei Gl. (6.9) und Gl. (6.10) um eine hierarchische Optimierungsaufgabe<sup>5</sup>. Während durch das 'äußere' Optimierungsproblem Gl. (6.9) die beste Lage der Messknoten bestimmt werden soll, liefert das LP (6.10) der 'inneren' Aufgabe bei gegebener Wahl des Messprogramms eine Approximation des maximalen Fehlers (wegen Gl. (6.11) das Minimum der Summe der Potenzialabweichungen an Nichtmessknoten) als Maß für die Güte des Messprogramms.

Während zur Lösung der inneren Aufgabe Gl. (6.10) Standardverfahren der linearen Optimierung anwendbar sind, stehen für die Lösung der äußeren diskreten Optimierungsaufgabe praktisch keine Lösungsverfahren aus der angewandten Mathematik zur Verfügung. Die Anzahl der Möglichkeiten  $n_{mp}$  für ein Messprogramm entspricht dem Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{n_m}$ . Eine vollständige Enumeration der möglichen Messprogramme als Alternative ist nur bei relativ kleinem  $n$  und sehr großem oder kleinem Verhältnis  $\frac{n_m}{n}$  durchführbar (siehe Pascalsches Dreieck der Kombinatorik). Bei einem

<sup>5</sup>in der Spieltheorie als Stackelberg-Spiel bezeichnet

Netz mit 6 Knoten, von denen 3 als Messknoten zu identifizieren sind, müssen 20 mögliche Kombinationen untersucht werden. Zehn Messknoten aus 100 Knoten zu wählen, macht bereits  $1.731 \cdot 10^{13}$  Auswertungen des LPs erforderlich. Zum Einsatz kommen stochastische Optimierungsmethoden (Genetische Algorithmen, Evolutionsstrategien, Simulated-Annealing-Verfahren), die jedoch ähnlich einer vollständigen Enumeration sehr viele LP-Auswertungen benötigen. Eine global optimale Lösung kann in der praktischen Anwendung nicht garantiert werden. Dennoch ist ein Ergebnis zu erwarten, welches ohne Anwendung des Modells nicht erreichbar wäre (vgl. Anwendung stochastischer Verfahren zur Kostenoptimierung bei Neuentwürfen von Rohrnetzen (Cembrowicz, 1994)).

Das Ergebnis der hierarchischen Aufgabe liefert neben der Topologie der Messknoten eine Abschätzung der erreichbaren Qualität der Kalibrierungsergebnisse für dieses Programm. Die durchschnittliche maximale Abweichung des tatsächlichen Potenzials an den Verbrauchsknoten  $\Delta \mathbf{H}_d$  berechnet sich näherungsweise zu:

$$\Delta \mathbf{H}_d = \frac{\sum \Delta \mathbf{H}_n}{n - m}. \quad (6.12)$$

Liegen bereits Vermutungen über die Lage größerer Verlustmengen vor, kann es sinnvoll sein, über Annahmen eine Anfangsflussverteilung  $\mathbf{Q}_0$  zu wählen, die bereits die Gesamtfehlmenge beinhaltet  $\sum_{i=1}^n Q_{0,i} = Q_{ges}$ . Der Gradient  $\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}$  wird dann an dieser Stelle berechnet. In Aufgabe Gl. (6.10) ist die Vorzeichenbeschränkung  $\Delta \mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  durch  $\Delta \mathbf{Q} \geq \mathbf{Q}_{lb}$  zu ersetzen. Folgendes LP ist zu lösen:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Q}} \{ \sum \Delta \mathbf{H}_n &= [\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_n]_{\mathbf{Q}_0}^T (\Delta \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{lb}) \}, \\ \nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_m^T \Delta \mathbf{Q} &= \mathbf{0}, \\ \Delta \mathbf{Q} - \Delta \mathbf{Q}_{lb} &\geq \mathbf{0}, \\ \sum_{i=0}^n \Delta Q_i &= 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

In  $\Delta \mathbf{Q}_{lb}$  stehen die unteren Schranken der Bedarfswertabweichungen vom Nominalwert  $\mathbf{Q}_0$ . Es gilt  $\Delta \mathbf{Q}_{lb} = \mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_{lb}$ . Je nachdem, wie klein die Abstände  $\Delta \mathbf{Q}_{lb}$  gewählt werden können, verringert sich die 'Beweglichkeit' des Systems und erhöht sich die Zuverlässigkeit der Lösung.

In entsprechender Weise kann mit allgemeinen Parametern  $\mathbf{P}$ , Variablen und Messgrößen  $\mathbf{V}$  verfahren werden. Zu beachten ist, dass Gl. (6.11) auf Seite 141 nicht für beliebige  $P$  gilt. In solchen Fällen ist Gl. (6.9) zu ersetzen durch:

$$\min_{\mathbf{M}_m \subset \mathbf{M}_n} Z = (\max_{\mathbf{P}} \sum \Delta \mathbf{V}_n - \min_{\mathbf{P}} \sum \Delta \mathbf{V}_n), \quad (6.14)$$

$\max_{\mathbf{P}} \Sigma \Delta \mathbf{V}_n$  ( $\min_{\mathbf{P}} \Sigma \Delta \mathbf{V}_n$ ) ist dabei Maximum (Minimum) der Aufgabe:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{P}}(\min_{\mathbf{P}}) \{ \Sigma \Delta \mathbf{V}_n &= [\nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{V}_n]_{\mathbf{P}_0}^T (\Delta \mathbf{P}) \} \\ \nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{V}_m^T \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{P} &\geq \Delta \mathbf{P}_{lb} \\ \Delta \mathbf{P} &\leq \Delta \mathbf{P}_{ub}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

## 6.5 Kalibrierungsmodell

### 6.5.1 Überblick

Einsatzmöglichkeiten des entwickelten erweiterten Simulationsmodells innerhalb des gesamten Kalibrierungsprozesses sollen kurz dargestellt werden. Dabei werden die in Kap. 6.2 beschriebenen Verfahren berücksichtigt. Für die weiteren Betrachtungen wird es als zweckmäßig erachtet, zwischen Grob- und Feinkalibrierung zu unterscheiden.

### 6.5.2 Grobkalibrierung

Am Anfang des Kalibrierungsprozesses steht die Bestandsaufnahme des Systems. Es gilt zu klären, welche Mängel auftreten, wie hoch die Verluste sind, in welchen Zonen unzureichende Druckhöhen auftreten. Zur Bestandsaufnahme gehört aber auch, das Einbaualter der Rohre zu klären und falls vorhanden Schadensstatistiken über Rohrbrüche auszuwerten. Wertvolle Informationen stellen alle bereits durchgeführten Messungen von Durchflüssen und Druckhöhen im Netz dar. In der Regel liegen solche für die Einspeisemengen und Füllhöhen von Behältern und das Betriebsverhalten von Pumpen vor. Insgesamt gilt es, soviel Information als möglich aus bestehendem Datenmaterial und Befragung der Systemoperatoren einzuholen. Werden auf geschätzten Parametern basierende Berechnungsergebnisse des Simulationsmodells mit den gemessenen Daten verglichen, treten mehr oder weniger starke Abweichungen auf.

Aufgabe der Grobkalibrierung ist es, diese Abweichungen sowie die Fehlmengen bestimmten Ursachen zuzuordnen. Sie beinhaltet den Entwurf eines ersten Messprogramms, mit dessen Hilfe diese Zuordnung erreicht werden kann. Beispielsweise ist zu klären, ob Fehlmengen durch einzelne größere Leckagen verursacht werden oder sich aus mehr oder weniger über das gesamte Versorgungsnetz verteilten Tröpfchenverlusten aufsummieren. Leckagen bewirken außerdem größere Flüsse und damit höhere

Reibungsverluste, welche wie größere Rauheit der Rohre zu niedrigeren Druckhöhen an Messknoten führen.

Um eine Zuordnung *Wirkung*  $\rightarrow$  *Ursache* zu ermöglichen, sind die Parametersensitivitäten der Messgrößen bezüglich der möglichen Ursachen für Abweichungen zu berücksichtigen. Die einzelnen Mängel weisen unterschiedliche Charakteristika auf. Wie aus Kap. 4.3.3.3 leicht zu erkennen ist, reagieren die Druckhöhen bei großen Flüssen, wie sie z.B. in den Spitzenbelastungszeiten morgens, mittags und abends<sup>6</sup> auftreten, empfindlicher gegenüber Rauheitsabweichungen als bei geringen Durchflussmengen. Dagegen sind Leckverluste zu Zeiten minimalen Bedarfs infolge des höheren Druckniveaus am größten.

Der Gesamtverlustfaktor

$$f_v = \frac{\sum Q_a^{in}}{\sum Q_a^{reg}} \quad (6.16)$$

wird aus den jährlich registrierten Entnahmen<sup>7</sup>  $\sum Q_a^{reg}$  und Einspeisemengen<sup>8</sup>  $\sum Q_a^{in}$  berechnet:

Eine erste Abschätzung der Ursachen für die Verluste ist durch das Verhältnis  $f_{tn}$  der stündlichen Fehlmengen (Index h) in Spitzenbedarfszeiten (Index s) zu den minimalen nächtlichen (Index m) möglich:

$$f_{tn} = \frac{\sum Q_{h,s}^{in} - \sum Q_{h,s}^d}{\sum Q_{h,m}^{in} - \sum Q_{h,m}^d}. \quad (6.17)$$

Es wird angenommen, dass gemessene stündliche Werte der Einspeisemengen  $Q_h^{in}$  vorliegen. Die Entnahmen  $Q_h^d$  sind durch  $f_d \cdot Q_{h,a}^{reg}$  gegeben. Dabei bezeichnet  $f_d$  den stündlichen Skalierungsfaktor, der die Tagesganglinie der Verbräuche repräsentiert,  $Q_{h,a}^{reg}$  ist in diesem Fall der stündliche Durchschnittswert, der aus der jährlichen Gesamtverbrauchsmenge zu berechnen ist. Die exakte Bestimmung von  $f_d$  ist nicht möglich, eine möglichst gute Näherung Gegenstand der Feinkalibrierung. Im Rahmen der Grobkalibrierung genügt es, Standardannahmen über die Tagesganglinien (s. z.B. Grombach u. a., 1985, Tabelle 3.1.25) zu treffen. Zur genaueren Voraussage des häuslichen Verbrauchs und dessen tageszeitlicher Schwankung, wie sie zum Entwurf von Neuerschließungen benötigt wird, existieren statistische Modelle (Perry, 1981; Buchberger und Wu, 1995; Buchberger und Wells, 1996; Billings und Agthe, 1998).

<sup>6</sup>Die entsprechenden Tageszeiten sind vom jeweiligen Versorgungsgebiet abhängig.

<sup>7</sup>Daten liegen in der Regel aus Zählerablesungen der einzelnen Verbraucher vor.

<sup>8</sup>werden i.A. aufgezeichnet

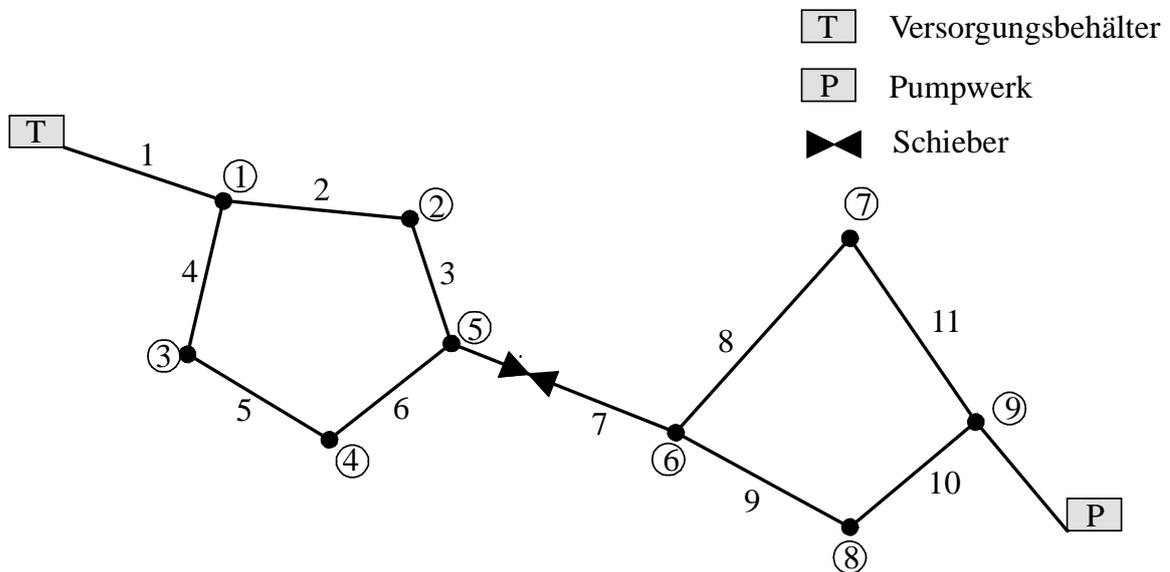


Abbildung 6.6: Beispiel für Wasserversorgungssystem

Sehr kleine Werte  $f_{tn} \rightarrow 0$  lassen auf druckabhängige Leckagen schließen, deren modelltechnische Berücksichtigung in Kap. 6.3.2 erklärt wurde. Ungenauigkeit der Zählarmaturen als Ursache der Verluste würde sich in großen  $f_{tn}$ -Werten niederschlagen. In diesem Fall wirken sich zu kleine  $Q_a$ -Werte in den Stunden mit den kleinsten Skalierungsfaktoren  $f_d$  weniger stark aus als in Spitzenbedarfszeiten. Dieselben Charakteristika zeigen unregistrierte Anschlüsse, 'geklautes Wasser', deren Entnahmen im Rhythmus üblicher Verbrauchsganglinien erfolgen. Die Anpassung der Modelldaten erfolgt in diesem Fall durch Vergrößerung der Grundbedarfswerte  $Q_a$  über einen pauschalen Skalierungsfaktor  $f_z$ . Die Aufzeichnungen sollten für mehrere Tage verglichen werden. Unregistrierte einmalige Entnahmen werden durch geringere Regelmäßigkeit der  $f_{tn}$ -Werte als bei druckabhängigen Leckagen, Tröpfchenverlusten, fehlerhaften Zählern verraten.

In Abb. 6.6 ist stark vereinfacht ein System mit zwei Versorgungsgebieten, die über Rohr 7, welches abgeschiebert werden kann, verbunden sind und durch einen Behälter und eine Pumpstation gespeist werden. Berechnungen wurden für einen Satz von Ausgangsparametern und alternative Szenarien 1) doppelte k-Werte in allen Rohren, 2) Schieber 7 geschlossen 3) Leck an Knoten 3, 4) Abweichungen 1) bis 3) gleichzeitig durchgeführt. Die Abbildungen 6.7 und 6.8 auf der nächsten Seite zeigen die unterschiedlichen Druckganglinien an Knoten 4 und 7.

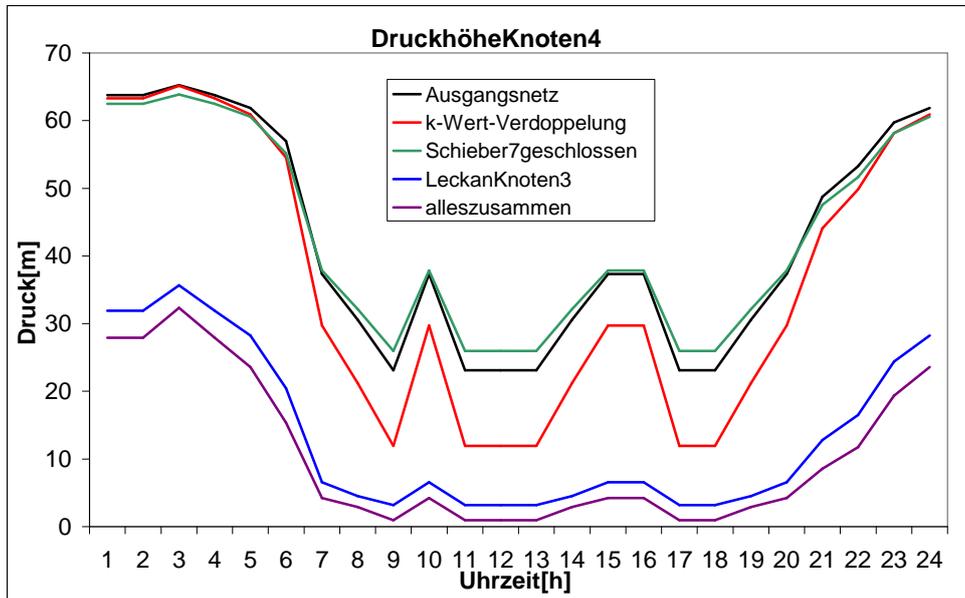


Abbildung 6.7: Druckganglinie Knoten 4

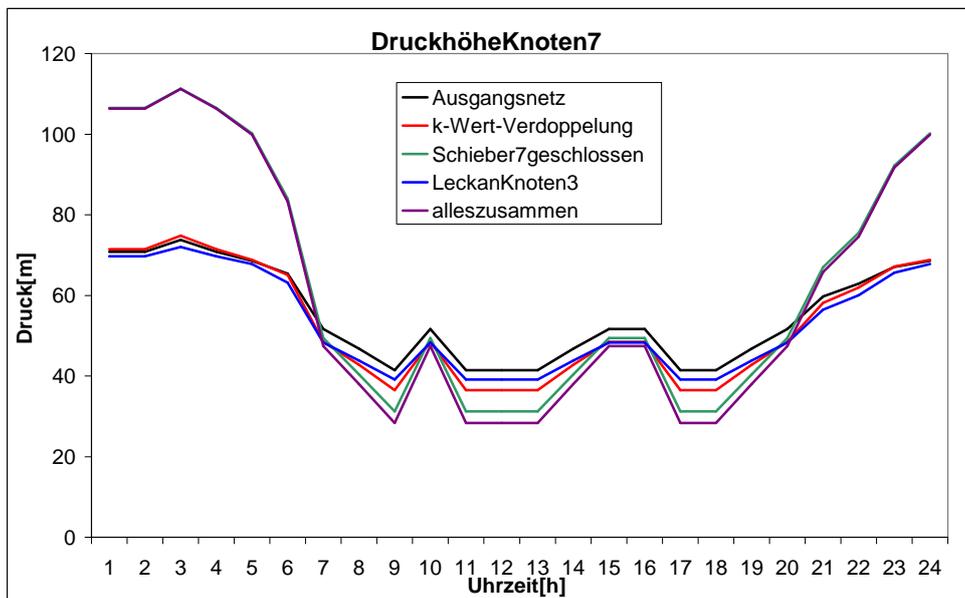


Abbildung 6.8: Druckganglinie Knoten 7

Es ist deutlich zu erkennen, dass eine Verdoppelung der k-Werte zu keiner nennenswerten Abweichung der Druckhöhen in den Nachtstunden beiträgt, während sich zu Spitzenbedarfszeiten Druckabfälle bis zu 50% des Ausgangsdrucks einstellen. Der große Einfluss des Lecks an Knoten 3 auf den Druck des benachbarten Knotens 4 ist zu er-

kennen. Am weiter entfernt liegenden Knoten 7 ist dagegen die Auswirkung beinahe abgeklungen.

Die vorangehenden Betrachtungen legen nahe, eine erste Zuordnung der Verluste nach Menge und Position für die Nachtstunden vorzunehmen. Hierfür sollte der Entwurf eines optimalen Messprogramms nach Kap. 6.4 erfolgen, wobei die Sensitivität bezüglich der Bedarfswerte ausschlaggebend ist. Die Diskretisierung nach Kap. 2.2.1 bietet sich an. Demzufolge sind nur die Bedarfswerte der Pfadverbindungsknoten zu berücksichtigen. Für das Gesamtsystem ist es von untergeordneter Bedeutung, an welchen Knoten des Pfades die Entnahme stattfindet. Im Idealfall werden die Drücke an allen Pfadverbindungsknoten gemessen. Dann ist der Vektor der Gesamtentnahme<sup>9</sup>  $\mathbf{Q}_g$  für das vereinfachte Netz eindeutig bestimmt. Die Summe der berechneten Entnahmen ist mit der gemessenen Einspeisemenge zu vergleichen. Ist der gemessene Wert niedriger als der berechnete, lässt dies auf größere Rauheit der Rohre schließen. Wegen des erheblichen Aufwands für die Messungen ist dies jedoch bei realen Systemen nicht zu verwirklichen.

Die Qualitätssteigerung erzielbarer Ergebnisse bei Messprogrammen mit weniger Messknoten ist durch folgende Überlegung zu erreichen. Der Informationsgehalt kann wesentlich gesteigert werden, wenn während der Druckaufzeichnungen gezielt Schieberstellungen manipuliert werden, so dass unterschiedliche Systemzustände erzeugt werden. Wenn mit  $n_P$  die Zahl der Pfadverbindungsknoten,  $n_M$  die Zahl der Messknoten und  $n_B$  die Zahl der unterschiedlichen erzeugten Betriebszustände bezeichnet werden, ist  $n_P \leq n_M \cdot n_B$  zu fordern. Dabei ist darauf zu achten, dass Redundanz zwischen den Szenarien vermieden wird und zwischen den Manipulationen der Kontrollarmaturen ausreichend Zeit ist, so dass sich jeweils ein Gleichgewichtszustand im System einstellen kann.

Die Effizienz einer Schiebermanipulation kann überschlägig durch den Fluss im entsprechenden Strang oder die Auswirkung einer Rauigkeitsänderung auf die einzelnen Druckhöhen aus der Sensitivitätsmatrix  $\nabla_c \mathbf{H}$  (Kap. 4.3.3.3) abgeschätzt werden. Wichtig dabei ist, dass die zu erwartenden Druckhöhen in den einzelnen Betriebszuständen vorher mit Hilfe des Simulationsmodells überprüft werden. Dadurch sind solche Konstellationen auszuschließen, die zu unzulässig hohen oder niedrigen Druckhöhen im Netz führen würden. Wenn vollständiges Absperrern eines Stranges zu starke Auswirkungen hat, kann teilweises Schließen eines Schiebers in Erwägung gezogen werden. Problematisch dabei ist, dass Annahmen über den Druckverlustbeiwert des teilgeschlossenen

---

<sup>9</sup> $\mathbf{Q}_g$  kann direkt mit dem Simulationsmodell berechnet werden, indem alle Messknoten als Potenzialknoten definiert werden.

Schiebers mit Unsicherheiten behaftet sind. Vollständiges Schließen von Schiebern stellt dagegen eine einfach durchzuführende und kontrollierbare Zustandsänderung dar. Des Weiteren sind das Öffnen von Hydranten, Änderung von Pumpensteuerung oder Parametern anderer Kontrollarmaturen zur gezielten Manipulation von Betriebszuständen möglich.

Ein Vergleich berechneter und gemessener Größen gibt einen ersten Eindruck über die Qualität der getroffenen Annahmen. Starke Abweichungen an einzelnen Knoten lassen auf grobe Fehler in den Annahmen schließen. Beispiele sind unerkannte größere Leckagen oder falsch angenommene Schieberstellungen. Grobe Fehler im Modell können auch entstehen, wenn bestimmte Rohre bei der Bestandsaufnahme vergessen wurden oder Durchmesser falsch angegeben sind. Ormsbee und Lingireddy (1997) geben Abweichungen von den Messwerten um 30% als Richtwert an, welcher die Vermutung derartiger grober Fehler bei der Modellbildung nahe legt.

Wenn die oben erläuterten groben Fehler in den Modellannahmen weitestgehend ausgeschlossen sowie unregistrierte Entnahmen und falsche Zählerablesungen ermittelt sind, ist als letzter Punkt der Grobkalibrierung eine Aufteilung der druckabhängigen Leckagen auf die Pfadverbindungsknoten vorzunehmen. Darunter sind Tröpfchenverluste an den Hausanschlüssen, Verluste durch Risse in Rohren, deren Einfluss bei hohem Druck durch Aufweitung des Risses besonders zum Tragen kommt (vgl. Kap. 6.3.2), und größere Schadstellen, die je nach Untergrund<sup>10</sup> unerkannt bleiben können, zu verstehen.

Zusätzliche Messungen einzelner Größen, wie sie durch den Einsatz von portablen Ultraschall-Durchflussmessgeräten und einfach zu installierenden Druckmessdosen relativ unproblematisch zu realisieren sind, können nötig werden. Es muss erwähnt werden, dass ein 'Pauschalrezept' über die Vorgehensweise nicht möglich ist. Vielmehr sind im Einzelfall alle möglichen Informationen auszuschöpfen und getroffene Annahmen in einem rückgekoppelten Prozess aus Messung und Rechnung zu verifizieren. Die weiter unten angeführten Methoden sind dabei als Werkzeuge zu verstehen, die diesen Prozess unterstützen sollen.

Folgende Vorgehensweise zur Lokalisierung der druckabhängigen Verluste wird vorgeschlagen:

1.) Aufteilen des berechneten Wasserverlustes auf die einzelnen Knoten des Simulati-

---

<sup>10</sup>Wasserdurchlässiger Boden in der Nähe eines Vorfluters kann zu unbemerktem Abfluss größerer Mengen führen, während bei ton- oder lehmhaltigem Boden das Wasser an die Oberfläche gedrückt wird und somit der Ort der Leckage leichter zu bestimmen ist.

onsmodells anhand von Schadensstatistiken, Alter und Material angrenzender Rohre, Annahmen aus Messungen, Netzkenntnis des Systemoperators, . . .

2.) Simulation und Berechnung der Sensitivitätsmatrizen  $\nabla_{\mathbf{Q}}\mathbf{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_B$  nach Kap. 4.3.2.2 für die angenommenen Bedarfswerte in allen Betriebszuständen<sup>11</sup>  $i = 1, \dots, n_B$ . Dabei wird angenommen, dass der Zustand von Kontrollarmaturen bekannt ist, d.h. keine Druck- oder Flusskontrollschieber aktiviert werden.

3.) Mit  $\mathbf{H}^{M,r}$  und  $\mathbf{H}^{M,m}$  sollen die Vektoren der berechneten und gemessenen Potenzialabsenkungen an den Messknoten<sup>12</sup> bezeichnet werden. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der zusätzlichen Verluste lautet:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_{1,1}^{M,m}}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_{1,1}^{M,m}}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_{1,1}^{M,m}}{\partial Q_{n_P}} \\ \frac{\partial H_{2,1}^{M,m}}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_{2,1}^{M,m}}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_{2,1}^{M,m}}{\partial Q_{n_P}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_{n_M,1}^{M,m}}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_{n_M,1}^{M,m}}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_{n_M,1}^{M,m}}{\partial Q_{n_P}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_{n_M,n_B}^{M,m}}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_{n_M,n_B}^{M,m}}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_{n_M,n_B}^{M,m}}{\partial Q_{n_P}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{n_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1,1}^{M,r} - H_{1,1}^{M,m} \\ H_{2,1}^{M,r} - H_{2,1}^{M,m} \\ \vdots \\ H_{n_M,1}^{M,r} - H_{n_M,1}^{M,m} \\ \vdots \\ H_{n_M,n_B}^{M,r} - H_{n_M,n_B}^{M,m} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \quad (6.18)$$

Idealerweise gilt  $n_P \leq n_M \cdot n_B$  mit  $n_P$  linear unabhängigen Gleichungen. Dann ist das lineare Gleichungssystem (6.18) überbestimmt, es existiert im Allgemeinen keine Lösung. Durch Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate nach Kap. 6.2.3 kann jedoch Vektor  $\Delta\mathbf{Q}$  berechnet werden, der eine Verbesserung der Schätzung der Bedarfswerte durch  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_a + \Delta\mathbf{Q}$  ermöglicht. Stehen nicht genügend Gleichungen zur Verfügung, so dass Gl. (6.18) unterbestimmt ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Das Verfahren wird dann mit einer beliebigen Lösung von Gl. (6.18) fortgesetzt.

4.) Falls  $\|\Delta\mathbf{Q}_n\| < \epsilon$ , ist das Verfahren beendet, ansonsten gehe zu 2.)

Für die so verteilten Verlustmengen sind Leckflüsse zu Spitzenbelastungszeiten abzuschätzen. Bei einzelnen, im Vergleich zu den übrigen sehr großen  $\Delta Q$ -Werten kann von größeren Leckagen in der Nähe des Knotens ausgegangen werden. Deren Einfluss ist auch zu Spitzenbelastungszeiten nicht zu vernachlässigen. Sind dagegen die berechneten zusätzlichen Bedarfswerte gleichmäßig verteilt und gilt zusätzlich  $f_{tn} \rightarrow 0$  (nach

<sup>11</sup>Diese sind alle während der Nachtstunden mit geringstem Verbrauch zu wählen.

<sup>12</sup>bezüglich Potenzial des Referenzknotens

Gl. (6.17)), ist von Tröpfchenverlusten und Rissen in Rohren auszugehen, die sich bei maximalem Bedarf kaum auswirken.

Zur weiteren Kalibrierung sind aus den so berechneten Leckverlusten der Nachtstunden entweder Tagesganglinien der Verluste zu ermitteln oder durch das in Kap. 6.3.2 beschriebene Modell in den weiteren Berechnungen zu berücksichtigen. Welche Methode sinnvoller ist, muss im Einzelfall, je nach Art der vermuteten Leckagen, entschieden werden.

Im ersten Fall kann in guter Näherung, unter Annahme quadratischer Abhängigkeit der Druckabnahme vom Leckverlust, folgende Formel zur Bestimmung der Leckverluste in Abhängigkeit von der gemessenen Einspeisemenge verwendet werden:

$$\sum Q_{Leck} = a + \sqrt{b - c \sum Q_{in}}. \quad (6.19)$$

Zur Bestimmung der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  wird  $\sum Q_{Leck}$  für drei unterschiedliche Belastungsfälle geschätzt. Einsetzen dieser Werte und der zugehörigen Messwerte  $Q_{in}$  in Gl. (6.19) liefert drei Gleichungen für die drei Unbekannten. Um Schätzfehler so gering als möglich zu halten, ist Minimalbedarf  $Q_{Leck} \rightarrow Q_{in}$ , Spitzenbedarf  $Q_{Leck} \rightarrow 0$  sowie ein weiterer Lastfall, bei dem die Entnahmen möglichst genau angegeben werden können, zu wählen. Mit Hilfe von Gl. (6.19) kann der Gesamtleckverlust zu allen Tageszeiten als Funktion der gemessenen Gesamteinspeisemenge berechnet werden. Die Tagesganglinie einer mit dieser Variante aufgeteilten Einspeisung in Verlust und Verbrauch ist in Abb. 6.9 auf der nächsten Seite zu sehen. Die Modifikation der stündlichen Leckverlustmenge  $Q_{h,i}$  am Knoten  $i$  erfolgt über die Formel

$$\Delta Q_{h,i} = \frac{\Delta Q_i}{\sum_{i=1}^{n_P} \Delta Q_i} Q_{Leck} = \frac{\Delta Q_i}{\sum_{i=1}^{n_P} \Delta Q_i} \left( a + \sqrt{b - c \sum Q_{h,in}} \right). \quad (6.20)$$

Diese Methode besitzt den Nachteil, dass alle Leckagen mit der gleichen Faustformel abgehandelt werden. Eine spezifische Aufteilung der Verluste ist durch die Simulation von Leckagen nach Kap. 6.3.2 möglich. Die mit Gl. (6.18) berechneten  $\Delta Q$ -Werte mit den zugehörigen Druckhöhen können dazu verwendet werden, für jedes Leck eine hydraulische Beziehung gemäß Abb. 6.5 auf Seite 138 zu bestimmen. Dabei ist im Einzelfall zu unterscheiden, ob die Leckage weiterhin nur am Pfadverbindungsknoten auftreten soll, oder auf umliegende Knoten verteilt wird. Die Gestalt der Abbildung kann dabei individuell nach Art des vermuteten Lecks, des Materials der Rohre und des Untergrundes gewählt werden. Um genauere Aussagen bezüglich der Gestalt der hydraulischen Beziehungen für unterschiedliche Konstellationen dieser Einflussparameter treffen zu können, sollten Modellversuche durchgeführt werden. Im Rahmen der

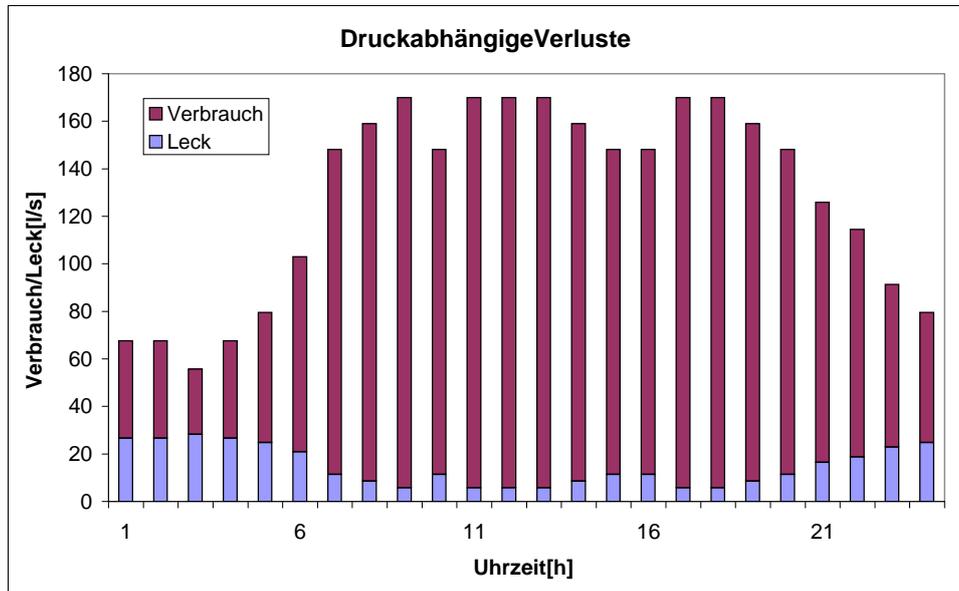


Abbildung 6.9: Tagesganglinie der gemessenen Einspeisung aufgeteilt in Verlust und Verbrauch

weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass eine Beziehung der Art

$$H = H_0 + \beta Q_{Leck}^\alpha \quad (6.21)$$

angenommen werden kann. Die Parameter  $H_0$ ,  $\beta$  und  $\alpha$  sind zu Beginn zunächst abzuschätzen. Die Mindestdruckhöhe  $h_0$ , ab der die Verluste auftreten, ist von der Gestalt der Leckage und dem Material des Rohres abhängig. Der Exponent  $\alpha$  wird zwischen 1 und 2 gewählt und schließlich der Koeffizient  $\beta$  durch Einsetzen des in Gl. (6.18) berechneten  $\Delta Q$ -Wertes und zugehöriger Druckhöhe bestimmt. Wird  $\Delta Q$  auf die umliegenden Pfadzwischenknoten z.B. mit Hilfe von Schadensstatistiken verteilt, ist mit allen betroffenen Knoten entsprechend zu verfahren.

Zum Abschluss der Grobkalibrierung sind Testrechnungen mit den modifizierten Parametern durchzuführen und die Ergebnisse mit den Messwerten zu vergleichen. Dazu sollte nun auch ein Spitzenbedarfsfall untersucht werden. Ist eine zufriedenstellende Übereinstimmung erreicht, kann zur Feinkalibrierung übergegangen werden. Treten dagegen noch unzulässig große Abweichungen auf, ist der Prozess zu wiederholen, wozu evtl. zusätzliche Messungen erforderlich werden.

### 6.5.3 Feinkalibrierung

Gegenstand der Feinkalibrierung ist die Bestimmung der Rauheit der Rohre und der Parameter der Gleichung druckabhängiger Leckagen. Es wird davon ausgegangen, dass die Zuordnung der Verluste zu den einzelnen Ursachen wie oben beschrieben innerhalb der Grobkalibrierung durchgeführt und falsche Modellannahmen bezüglich Lage der Rohre, geodätischer Höhen, Durchmesser, Schieberstellungen, usw. entdeckt wurden. Darüber hinaus sollten möglichst genaue Angaben über die Intervalle, aus denen die unbekanntes Größen zu wählen sind, existieren. Nach Kap. 6.2.4 bieten sich besonders implizite Verfahren zur Parameteroptimierung an.

Die Entscheidungsvariablen sind die zu bestimmenden Rauheitswerte der Rohre und die Parameter  $H_0, \alpha, \beta$  der hydraulischen Funktionen druckabhängiger Leckagen.

Für alle Rohre innerhalb eines Pfades wird ein pauschaler Skalierungsfaktor für die Rauheiten angenommen, falls sich diese nicht hinsichtlich Alter und Material wesentlich unterscheiden.

**Begründung:**

- Wie in Kap. 6.2.2.2 erläutert wurde, ist anzunehmen, dass die Rauheiten der Rohre innerhalb eines Pfades dieselben Abweichungen aufweisen.
- Rauheitsunterschiede von Rohren innerhalb eines Pfades werden von den Messgrößen kaum erfasst, wenn an den Pfadzwischenknoten nicht außergewöhnlich hohe Entnahmen auftreten, d.h. das Verhältnis der Flüsse infolge Bedarf der Pfadzwischenknoten zum Pfadfluss, der allen Rohren im Pfad gemeinsam ist, nicht übermäßig groß ist. Für den Gesamtdruckverlust im Pfad ist es damit unerheblich, in welchem Rohr die größte Rauheit auftritt. Eine Kalibrierung, welche alle Rohre einzeln berücksichtigt, würde eine Genauigkeit des Ergebnisses vortäuschen, die so nicht zutreffend ist. Beliebige andere Rauheitskombinationen innerhalb des Pfades könnten zu demselben Zielfunktionswert führen.
- Alle Rohre im Pfad werden von Wasser gleicher Qualität durchflossen, die ausschlaggebend ist für Ablagerungen (s. Kap. 6.2.2.2).
- Evtl. durchgeführte Netzspülungen betreffen die Rohre eines Pfades gleichermaßen.

Ausnahmen bestehen, wenn aus dem Datenmaterial ersichtlich ist, dass die Rohre innerhalb eines Pfades große Unterschiede bezüglich Material und Alter aufweisen. Au-

ßerdem ist die 'Kalibrierbarkeit' der einzelnen Parameter nach Kap. 6.2.4.2 festzustellen. Können  $H_0$  und  $\alpha$  in den Abbildungen der druckabhängigen Verluste vorab bestimmt werden, ist bei den Leckagen nur die 'Rauheit' der virtuellen Stränge zu ermitteln. Verfahren, die sich allein auf Kalibrierung der Rauheit beschränken, sind anwendbar.

Im Folgenden werden alle kalibrierbaren Größen im Vektor  $\mathbf{p}$  zusammengefasst. Wie in Kap. 6.5.2 sollen mit  $n_B$  die Zahl unterschiedlicher Betriebszustände bezeichnet werden mit dem Unterschied, dass diese sich nicht nur auf die Stunden minimalen Bedarfs, sondern möglicherweise auf alle Zeitstufen eines Messtages oder mehrerer Messtage beziehen können.

Als Messwerte kommen alle am realen System bestimmbaren und mit dem Modell berechneten Größen in Frage. Dazu zählen Druckhöhen  $\mathbf{H}^M$ , Rohrdurchflüsse  $\mathbf{q}^M$ , Einspeisungen  $\mathbf{Q}^{in,M}$ , Druckreduktionen  $\mathbf{z}^M$  in PRVs und PSVs, Pumpdruck in regelgesteuerten Pumpen und evtl. Qualitätsparameter oder Tracer-Konzentrationen  $\mathbf{Co}^M$ . Die zu minimierende Zielfunktion  $Z$  setzt sich aus der Summe der betragsmäßigen Abweichungen aller Messgrößen von den berechneten Werten in allen betrachteten Zeitstufen (Betriebszuständen) zusammen (vgl. Ormsbee, 1989):

$$Z = \sum_{i=1}^{n_B} \left\{ \sum_{j=1}^{n_{H_m}} \left| \frac{H_{i,j}^{M,r} - H_{i,j}^{M,m}}{H_{i,j}^{M,m}} \right| + \sum_{j=1}^{n_{q_m}} \left| \frac{q_{i,j}^{M,r} - q_{i,j}^{M,m}}{q_{i,j}^{M,m}} \right| + \sum_{j=1}^{n_{Q_{in}}} \left| \frac{Q_{i,j}^{in,r} - Q_{i,j}^{in,m}}{Q_{i,j}^{in,m}} \right| + \sum_{j=1}^{n_{z_m}} \left| \frac{z_{i,j}^{M,r} - z_{i,j}^{M,m}}{z_{i,j}^{M,m}} \right| + \sum_{j=1}^{n_{Co_m}} \left| \frac{Co_{i,j}^{M,r} - Co_{i,j}^{M,m}}{Co_{i,j}^{M,m}} \right| \right\}. \quad (6.22)$$

Als Nebenbedingung ist in allen Zeitstufen stationäres hydraulisches Gleichgewicht zu fordern. Im Allgemeinen handelt es sich dabei um das Nash-Gleichgewicht Gl. (5.23) auf Seite 99. Damit sind die berechneten Werte an den Messpunkten Funktionen der Variablen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}$ , für welche wiederum durch die Gleichgewichtsbedingungen implizit Funktionen  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{z}(\mathbf{p})$  definiert sind. Werden außerdem für die Entscheidungsgrößen  $\mathbf{p}$  zulässige Intervalle  $[\mathbf{p}_{lb}; \mathbf{p}_{ub}]$  angegeben, kann die Feinkalibrierung als restringiertes Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} Z &= f(\mathbf{u}_i(\mathbf{p}), \mathbf{z}_i(\mathbf{p})), \\ \mathbf{u}_i &= \arg \min_{\mathbf{u}_i} \Pi_c(\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_i), \mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i \quad \forall i = 1, \dots, n_B, \\ \mathbf{z}_i &= \arg \min_{\mathbf{z}_i} \Pi_{Pot}(\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_i), \mathbf{z}_i \in \mathbf{Z}_i \quad \forall i = 1, \dots, n_B, \\ \mathbf{p}_{lb} &\leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{ub} \end{aligned} \quad (6.23)$$

formuliert werden. Bei Gl. (6.23) handelt es sich um ein hierarchisches Optimierungsproblem, dessen untere Ebene aus den Nash-Gleichgewichten der hydraulischen Simulation in allen zu berücksichtigenden Betriebszuständen besteht. Die Aufgabe ist i.A.

nichtkonvex und multimodal. Auf Grund der Komplexität der mathematischen Aufgabe empfiehlt es sich, zur Lösung stochastische Optimierungsverfahren anzuwenden. Die Implementierung eines evolutionären Algorithmus wurde im Rahmen einer Diplomarbeit im Fachbereich Informatik vergeben (Aygün, 2001).

Durchgeführte Testrechnungen zeigten, dass eine hinreichend gute Grobkalibrierung Voraussetzung für die Zuverlässigkeit der mit Hilfe der Evolutionsstrategie erzielten Feinkalibrierungsergebnisse ist. Es ist anzumerken, dass ausschlaggebend für den erfolgreichen Einsatz genetischer<sup>13</sup> und evolutionärer<sup>14</sup> Verfahren die treffende Wahl der den Algorithmus kennzeichnenden Parameter ist. Diese bedürfen ihrerseits einer Optimierung.

Der Vorteil der Methode liegt in der algorithmischen Robustheit. Prinzipiell kann diese mit allen möglichen Daten 'gefüttert' werden. Redundanz zwischen den einzelnen Betriebszuständen wirkt sich zwar negativ auf Rechenzeit und Qualität der Ergebnisse aus, führt aber nicht zum Abbruch des Verfahrens. Besonders wichtig erscheint dem Autor, dass eine solche Optimierung nicht als 'Allheilmittel' angesehen wird, sondern der Anwender sehr viel Sorgfalt bei der Grobkalibrierung einsetzen sollte. Des Weiteren sind die Ergebnisse hinsichtlich ihrer Aussagekraft kritisch zu hinterfragen.

## 6.6 Zusammenfassung

Ein Überblick über den Ablauf des Prozesses zur Kalibrierung von Simulationsmodellen in der Wasserversorgung wurde gegeben und unterschiedliche in der Anwendung erprobte Verfahren kurz vorgestellt. Allen Methoden gemeinsam ist, dass einer großen Zahl von Unbekannten eine relativ kleine Zahl bekannter Größen gegenübersteht. Ziel der Entwicklung von Kalibrierungsmodellen muss es demnach sein, die vorhandene Information optimal auszuschöpfen und zusätzliche zu generieren.

Dazu gehört eine möglichst realitätsnahe Modellierung, insbesondere von vom Idealzustand abweichendem hydraulischem Verhalten in rehabilitationsbedürftigen Versorgungssystemen. Einsatzmöglichkeiten des entwickelten Modells zur Abbildung unzureichender Versorgung und Leckagen wurden beispielhaft aufgezeigt. Um ein Maximum an Information aus Messungen zu gewinnen, wurde ein Verfahren zur Bestimmung eines

---

<sup>13</sup>Beispiele der Anwendung zur Rehabilitation bei Halhal u. a. (1997) und Wu u. a. (2001), zur Kalibrierung bei Walters u. a. (1994) und zur Optimierung bei Walters und Lohbeck (1993); Dandy u. a. (1996); Savic und Walters (1997).

<sup>14</sup>Beispiele Entwurfsoptimierung sind Cembrowicz (1994); Cembrowicz u. a. (1996) zu entnehmen.

in dieser Hinsicht optimalen Messprogrammes vorgeschlagen, welches darüber hinaus näherungsweise Aussagen über die Qualität des erreichbaren Ergebnisses gestattet. Außerdem kann die Kalibrierbarkeit der einzelnen Parameter bestimmt werden.

Als vorteilhaft stellte sich eine Aufteilung des Kalibrierungsprozesses in Grob- und Feinkalibrierung heraus. Dazu ist das entwickelte Modell zur Simulation des hydraulischen Verhaltens von Wasserversorgungsnetzen an unterschiedlichen Stellen zweckmäßig einsetzbar.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das mathematische Modell der stationären hydraulischen Simulation von Druckrohrnetzen unter Berücksichtigung unterschiedlicher Kontrollarmaturen als nichtlineare Minimierungsaufgabe des System-'*Co-Content*' und System-'*Content*' unter linearen Nebenbedingungen formuliert. Die Forderung nach strikt monotonen hydraulischen Gleichungen als hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Flussverteilung in vermaschten Versorgungsnetzen wurde verallgemeinert auf das Postulat, dass die möglicherweise mehrdeutigen hydraulischen Gesetze aller Systembestandteile die Eigenschaft eines maximal monotonen Operators aufweisen müssen. Dieses für die einzelnen Komponenten leicht nachzuweisende Charakteristikum garantiert, dass maximal eine Lösung der Aufgabe existiert. Die Existenz mindestens einer Lösung kann, Kompaktheit der Menge zulässiger Flüsse vorausgesetzt, über eine lineare Optimierungsaufgabe nachgewiesen werden. Darüber hinaus sind Sensitivitätssätze der parametrischen Nichtlinearen Optimierung über die Änderungen erster Ordnung der Zustandsvariablen des Systems bei Parameterabweichungen anwendbar.

Kommen rückgekoppelte Anlagen wie Druckminderungsventile mit konstantem Sollwert für den Ausgangsdruck und reglergesteuerte Pumpen im System vor, geht die Konvexität der Aufgabe verloren. Die Berechnung des stationären Punktes erfolgt in diesem Fall als Nash-Gleichgewicht zwischen den beiden sich überschneidenden parametrischen Minimierungsproblemen von System-'*Content*' und hydrostatischem Potenzial. Auch in diesem Fall konnte eine relativ einfach kontrollierbare, graphentheoretische Bedingung an die Lage der Anlagen mit Rückkoppelung im Netz als hinreichend für

die Eindeutigkeit bestätigt werden. Das Nash-Gleichgewicht kann als Variationsungleichung (Inklusion) formuliert werden. Durch die globale Eindeutigkeit der Lösung sind Sensitivitätsaussagen, die denen der Nichtlinearen Optimierung entsprechen, für das allgemeinere Konzept der Variationsungleichungen möglich. Die algorithmische Umsetzung erfolgt über ein Newton-Verfahren mit Strategie der aktiven Mengen, durch welches die notwendigen Bedingungen der beiden Optimierungsaufgaben zu erfüllen sind.

Zuletzt wurden Beispiele für die Anwendung des Modells zum erweiterten Einsatz der Simulation bei Netzen mit Versorgungsdefiziten und zu Kalibrierungsrechnungen gegeben. Zusätzlich wurde der Prozess der Kalibrierung skizziert, wie er sich bei Voruntersuchungen der Modellentwicklung und Projektarbeit als sinnvoll erwiesen hatte. Damals hatte sich besonders der Bedarf nach einem allgemeinen mathematischen Modell der stationären hydraulischen Simulation vermaschter Druckrohrnetze herausgestellt, da zu Kalibrierungszwecken durchgeführte Systemänderungen oft zu Konvergenzschwierigkeiten führten, oder überhaupt keine Lösung berechnet werden konnte. Als Grund stellte sich die fehlende Allgemeingültigkeit der Implementierung heraus. Heuristiken, welche die Existenz und Eindeutigkeit des stationären Fließzustandes garantieren sollten, waren nur im Einzelfall anwendbar.

Das mathematische Modell der stationären hydraulischen Simulation vermaschter Druckrohrnetze wurde in der im Rahmen dieser Arbeit geschilderten Funktionalität in der Programmiersprache C++ implementiert und der bestehende Simulationsalgorithmus im Programmpaket KANET<sup>1</sup> ersetzt. Als Konsequenz der erweiterten Funktionalität wurden Datenbank und grafische Darstellung an die neue Version angepasst.

## 7.2 Ausblick

Der Einsatz der entwickelten Modelle zur Kalibrierung und Mängelidentifikation verspricht eine Qualitätssteigerung auf unterschiedlichen Gebieten. Zum einen ist eine realitätsnähere Darstellung unterschiedlicher Defizite möglich, zum anderen soll die gezielte Manipulation von Kontrollarmaturen einen Multiplikator für die aus Messungen gewonnene Information über den Netzzustand darstellen. Die Lokalisierung zu messender Größen, welche unter gegebenen Randbedingungen die für den Aufwand bestmögliche Aussage versprechen, erfolgt mit Hilfe der Sensitivitätsresultate. Die gra-

---

<sup>1</sup>s. Cembrowicz u. a. (1998)

phentheoretischen Überlegungen lassen die Identifikation kalibrierbarer Parameter zu und tragen somit zur besseren Einschätzung der Qualität des Kalibrierungsergebnisses bei. Während sich der Mangel an solchen Modellen bei der Projektstudie zu Beginn der Arbeit zeigte, ist deren Wirksamkeit an realen Systemen in einem interaktiven Prozess aus Messung und Anwendung noch zu überprüfen. Entsprechendes Datenmaterial und die Möglichkeit zur Erhebung lagen während der Entstehung der Arbeit nicht vor.

Das entwickelte Simulationsmodell ist aber auch Grundlage weiterführender theoretischer Untersuchungen. Wie bereits erwähnt sind oft die Modellparameter im Hinblick auf ein bestimmtes Ziel optimal zu wählen. Wasserversorgungsnetze bieten durch relativ einfache Modifikation der aktuellen Parametergrößen während des Betriebs die Möglichkeit, die unterschiedlichsten Zielvorgaben zu optimieren. Aber auch bei der Neuplanung von Netzteilen und ganzen Versorgungssystemen sind z.B. die Investitionskosten, welche eine Funktion der Parameter<sup>2</sup> sind, zu minimieren.

Diesen unterschiedlichen Anwendungen gemeinsam ist die mathematische Struktur der Aufgabe. Es gilt, eine Funktion zu minimieren, deren zulässiger Bereich neben üblichen Restriktionen eine Gleichgewichtsnebenbedingung enthält. Derartige hierarchische Optimierungsaufgaben werden unter der Bezeichnung MPEC (*Mathematical Programming with Equilibrium Constraints*) zusammengefasst.

Der wesentliche Vorteil des hier entwickelten Modells liegt darin, dass die Sensitivitätsresultate der Lösung der unteren Ebene bezüglich der unterschiedlichen Parameter zur Berechnung des Gradienten der hierarchisch höher gestellten Zielfunktion verwendbar und sehr einfach aus der Lösung des Simulationsmodells berechenbar sind. Detaillierte Untersuchungen unterschiedlicher MPEC-Aufgaben, welche auf den Gebieten Kalibrierung, Optimierung, Steuerung und Betrieb von Wasserversorgungssystemen formuliert werden, können zu einer Effizienzsteigerung bisheriger Methoden führen.

Wegen der Komplexität der Aufgaben werden derartige Kontrollprobleme im Bereich der Wasserversorgung meist mit globalen Optimierungsmethoden wie Genetischen Algorithmen, Evolutionsstrategien behandelt. Gerade hier scheint eine Koppelung mit MPEC-Algorithmen angebracht. In diesem Zusammenhang sei auf zahlreiche Veröffentlichungen und stetige Weiterentwicklung auf dem Gebiet der hierarchischen Optimierung und Algorithmen zur Lösung dieser Aufgaben verwiesen (Dempe, 1992; Dempe und Pallaschke, 1997; Dempe und Bard, 2001; Outrata u. a., 1998). Deren Einsatz kann zur Effizienzsteigerung unterschiedlicher systemanalytischer Aufgaben beitragen.

---

<sup>2</sup>z.B. Rohrdurchmesser, Pumpen

# Anhang A

## Zulässige Anfangsflussverteilung

### A.1 Überblick

Das im Folgenden ausführlich dargestellte Verfahren lässt eine Aussage über die Existenz hydraulisch zulässiger Lösungen unter Anwesenheit dynamisch geschlossener Schieber und einseitiger Bindungen der Flüsse zu und dient gleichzeitig zur Bestimmung einer Anfangsflussverteilung, die sowohl Kontinuität an den Knoten garantiert als auch die Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen erfüllt. Zunächst wird ein Verfahren angegeben, welches direkt mit dem Vektor der Flüsse  $\mathbf{q}$  arbeitet (Kap. A.2). Danach wird ausgehend von einer die Kontinuitätsbedingung erfüllenden Baumflussverteilung ein hydraulisch zulässiger Schleifenflussvektor bestimmt (Kap. A.3).

### A.2 Zulässige Flussverteilung in den Pfaden

Die Kontinuitätsbedingung lautet nach Gl. (2.18) auf Seite 21  $\mathbf{A}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ . Durch Multiplikation derjenigen Zeilen von  $\mathbf{A}^T$  und  $\mathbf{Q}$  mit  $-1$ , für die  $Q_i < 0$  gilt, gehen  $\mathbf{A}$  in  $\bar{\mathbf{A}}$  und  $\mathbf{Q}$  in  $\bar{\mathbf{Q}}$  über. Außerdem sollen für  $n_g$  und  $n_l$  Elemente von  $\mathbf{q}$  Nebenbedingungen der Form  $q_i \geq c_i$  und  $q_j \leq c_j$  gelten. Insgesamt ist folgendes System von Gleichungen und Ungleichungen mit gegebenem  $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbf{R}_+^n$  zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{Q}}, & \mathbf{q} &\in \mathbf{R}^m, \\ q_i &\geq c_i, & i, \dots, n_g, \\ q_j &\leq c_j, & j, \dots, n_l. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Nichtnegativität aller Variablen  $q_i$  wird durch die Substitution  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_-$ ,  $\mathbf{q}_+ \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{q}_- \geq \mathbf{0}$  erreicht. An Stelle von Gl. (A.1) ist dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}^T & -\bar{\mathbf{A}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_+ \\ \mathbf{q}_- \end{pmatrix} &= \bar{\mathbf{Q}}, \\ q_{+,i} - q_{-,i} &\geq c_i, & i, \dots, n_g, \\ q_{+,j} - q_{-,j} &\leq c_j, & j, \dots, n_l \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

zu fordern. Um die Nebenbedingungen in Standardform mit positiver rechter Seite zu überführen, sind die vier möglichen Fälle

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_g \geq \mathbf{c}_g &\begin{cases} \mathbf{c}_g \geq \mathbf{0} : & \mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_- \geq \mathbf{c}_g, \\ \mathbf{c}_g < \mathbf{0} : & \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+ \leq \mathbf{c}_g, \end{cases} \\ \mathbf{q}_l \leq \mathbf{c}_l &\begin{cases} \mathbf{c}_l \geq \mathbf{0} : & \mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_- \leq \mathbf{c}_l, \\ \mathbf{c}_l < \mathbf{0} : & \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+ \geq \mathbf{c}_l \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

zu unterscheiden, je nachdem, ob die Konstanten  $\mathbf{c}_g$  und  $\mathbf{c}_l$  in Gl. (A.2) positiv oder negativ sind. Durch Gl. (A.3) wird die Menge der hydraulisch zulässigen Flüsse  $\mathbf{S}$  definiert:  $\mathbf{S} = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \text{ erfüllt Gl. (A.3)}\}$ . Die Aufgabe, eine zulässige Flussverteilung zu finden, welche die Kontinuitätsbedingung und Nebenbedingungen nach Gl. (A.2) erfüllt, kann damit folgendermaßen formuliert werden:

**Aufgabe A.1** *Gesucht ist eine Flussverteilung  $\mathbf{q}$ , die das System*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{S} \quad (\text{A.4})$$

*löst.*

Nach Einführung der Schlupfvariablen  $\mathbf{q}_{s,g+}$ ,  $\mathbf{q}_{s,g-}$ ,  $\mathbf{q}_{s,l+}$  und  $\mathbf{q}_{s,l-}$  sowie  $\bar{\mathbf{c}}_{g-} = -\mathbf{c}_{g-}$  und  $\bar{\mathbf{c}}_{l-} = -\mathbf{c}_{l-}$  können die Ungleichungsnebenbedingungen in Gleichungen mit nichtnegativen Variablen und nichtnegativer rechter Seite umgeschrieben werden. Es gelten  $n_g = n_{g+} + n_{g-}$  und  $n_l = n_{l+} + n_{l-}$ :

$$\begin{aligned} \text{a): } & \mathbf{q}_{+,g+} - \mathbf{q}_{-,g+} - \mathbf{q}_{s,g+} = \mathbf{c}_{g+}, & \mathbf{c}_{g+}, \mathbf{q}_{s,g+} &\in \mathbf{R}_{0+}^{n_{g+}}, \\ \text{b): } & \mathbf{q}_{-,g-} - \mathbf{q}_{+,g-} + \mathbf{q}_{s,g-} = \bar{\mathbf{c}}_{g-}, & \bar{\mathbf{c}}_{g-}, \mathbf{q}_{s,g-} &\in \mathbf{R}_{0+}^{n_{g-}}, \\ \text{c): } & \mathbf{q}_{+,l+} - \mathbf{q}_{-,l+} + \mathbf{q}_{s,l+} = \mathbf{c}_{l+}, & \mathbf{c}_{l+}, \mathbf{q}_{s,l+} &\in \mathbf{R}_{0+}^{n_{l+}}, \\ \text{d): } & \mathbf{q}_{-,l-} - \mathbf{q}_{+,l-} - \mathbf{q}_{s,l-} = \bar{\mathbf{c}}_{l-}, & \bar{\mathbf{c}}_{l-}, \mathbf{q}_{s,l-} &\in \mathbf{R}_{0+}^{n_{l-}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Um die Existenz einer Lösung der Aufgabe zu garantieren, werden zusätzliche Variablen  $\mathbf{q}_S \in \mathbf{R}^n$  eingeführt. Eine Verletzung der Kontinuitätsbedingung sei nun durch Addition von  $\mathbf{q}_S$  erlaubt. Die so modifizierte Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^T & -\bar{\mathbf{A}}^T & \mathbf{E}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_+ \\ \mathbf{q}_- \\ \mathbf{q}_S \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{q}_+ \in \mathbf{R}_{0+}^m, \quad \mathbf{q}_- \in \mathbf{R}_{0+}^m, \quad \mathbf{q}_S \in \mathbf{R}_{0+}^n. \quad (\text{A.6})$$

Stränge, für die eine der Bedingungen in Gl. (A.5) gelten soll, werden zu den Mengen  $\mathbf{G}_+$ ,  $\mathbf{G}_-$ ,  $\mathbf{L}_+$  und  $\mathbf{L}_-$  zusammengefasst. Unter Verwendung der Indikatormatrizen  $\mathbf{I}^{g+}$ ,  $\mathbf{I}^{g-}$ ,  $\mathbf{I}^{l+}$  und  $\mathbf{I}^{l-}$  (nach Def. 4.1 auf Seite 63) bezüglich der Menge aller Stränge  $\mathbf{L}$  lassen sich Kontinuitätsbedingung und Ungleichungsnebenbedingungen zusammen durch folgendes Gleichungssystem darstellen:

$$(\#) \quad (\mathbf{B} \ \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

mit

$$\mathbf{x}^T = \left( \mathbf{q}_+ \quad \mathbf{q}_- \quad \mathbf{q}_{s,g+} \quad \mathbf{q}_{s,l-} \quad \mathbf{q}_S \quad \mathbf{q}_{S,g+} \quad \mathbf{q}_{S,g-} \quad \mathbf{q}_{s,g-} \quad \mathbf{q}_{s,l+} \right),$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}^T & -\bar{\mathbf{A}}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{I}^{g+} & -\mathbf{I}^{g+} & -\mathbf{E}_{g+} & 0 \\ -\mathbf{I}^{g-} & \mathbf{I}^{g-} & 0 & 0 \\ \mathbf{I}^{l+} & -\mathbf{I}^{l+} & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}^{l-} & \mathbf{I}^{l-} & 0 & -\mathbf{E}_{l-} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{c}_{g+} \\ \bar{\mathbf{c}}_{g-} \\ \mathbf{c}_{l+} \\ \bar{\mathbf{c}}_{l-} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Matrix  $(\mathbf{B} \ \mathbf{E})$  besitzt vollen Zeilenrang, es gilt  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Gl. (A.7) entspricht damit den Nebenbedingungen eines LPs in Standardform (Bomze und Grossmann, 1993, Definition 3.3). Da  $(\mathbf{B} \ \mathbf{E})$  außerdem die Einheitsmatrix enthält, existiert nach Lemma 3.12,

S.110 in Bomze und Grossmann (1993) eine zulässige Basislösung  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$  von Gl.

(A.7). Für den zulässigen Bereich  $\mathbf{M} = \{ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid (\mathbf{B} \ \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{b} \}$  gilt damit:  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ .

Ziel dieses Abschnittes ist es jedoch, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer zulässigen Lösung von Gl. (A.4) auf der vorherigen Seite zu finden. Dazu wird der Vektor  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{n_c}$  mit  $n_c = 2m + n + 2n_{g+} + n_{g-} + 2n_{l-} + n_{l+}$  und

$$c_i = \begin{cases} 1 & \forall i \in I, \\ 0 & \forall i \notin I, \end{cases} \quad I = [2m + n_{g+} + n_{l-} + 1; 2m + n + 2n_{g+} + 2n_{l-}] \subset N_+ \quad (\text{A.8})$$

eingeführt. Damit soll das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
 Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \\
 (*) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\
 \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

betrachtet werden, für das, wie gezeigt wurde,  $\mathbf{M} \neq \emptyset$  gilt, und somit ein zulässiger Punkt  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}$  existiert.

Aus dem Lösungsvektor  $\mathbf{x}^*$  von Gl. (A.9) kann der Flußvektor der Lösung

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & -\mathbf{E}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x}^* \tag{A.10}$$

berechnet werden. Die Frage, ob  $\mathbf{q}^*$  eine zulässige Lösung des Ausgangsproblems Gl. (A.4) ist, beantwortet der folgende Satz:

**Satz A.1** *Unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{x}^*$  Lösung von Gl. (A.9) ist und  $Z(\mathbf{x}^*) = 0$  gilt, löst  $\mathbf{q}^*$  nach Gl. (A.10) Aufgabe A.1. Gilt für den Zielfunktionswert der optimalen Lösung in Gl. (A.10)  $Z(\mathbf{x}^*) > 0$ , so gibt es keine zulässige Lösung der Aufgabe A.1.*

**Beweis:** Wenn  $Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$  gilt, folgt wegen  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$  sofort:  $x_i = 0 \forall i \in I$  mit  $I = \{i \mid c_i > 0, i \in N_+\}$ . Wegen Gl. (A.8) folgt unter Beachtung von Gl. (A.7) auf der vorherigen Seite  $\mathbf{q}_S = \mathbf{0}$  und damit  $q_{S,i} = 0 \forall i = 1 \dots n$ . Einsetzen in Gl. (A.7) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{q}_+^* - \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{q}_-^* &= \bar{\mathbf{Q}}, \\
 \mathbf{I}^{G+} \mathbf{q}_+^* - \mathbf{E}_{g+} \mathbf{q}_{s,g+} &= \mathbf{c}_{g+}, \\
 \mathbf{I}^{G-} \mathbf{q}_-^* + \mathbf{E}_{g-} \mathbf{q}_{s,g+} &= \mathbf{c}_{g-}, \\
 \mathbf{I}^{L+} \mathbf{q}_+^* + \mathbf{E}_{l+} \mathbf{q}_{s,g+} &= \mathbf{c}_{l+}, \\
 \mathbf{I}^{L-} \mathbf{q}_-^* - \mathbf{E}_{l-} \mathbf{q}_{s,g+} &= \mathbf{c}_{l-}.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Die erste Gleichung stellt genau die Kontinuitätsgleichung dar, die restlichen sind identisch mit Gl. (A.5), also mit der Bedingung  $\mathbf{q}^* \in \mathbf{S}$ .  $\square$

### A.3 Zulässige Flussverteilung in den Schleifen

Das LP in Gl. (A.9) kann ebenso in den Variablen  $\mathbf{u}$  der zur Bestimmung des stationären Fließzustandes zu minimierenden Funktion  $\Pi^c$  formuliert werden. Voraussetzung ist, dass eine Flussverteilung  $\mathbf{q}_t$ , welche die Kontinuitätsbedingung erfüllt, existiert. Werden die nichtnegativen Schleifenkorrekturflüsse  $\mathbf{u}_+ \in \mathbf{R}_{0+}^l$  und  $\mathbf{u}_- \in \mathbf{R}_{0+}^l$  eingeführt, ergeben sich beliebige durch Addition der Korrekturflüsse zu  $\mathbf{q}_t$  einstellbare Flüsse

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}_+ - \mathbf{C}\mathbf{u}_-. \quad (\text{A.12})$$

Damit lautet dann

**Aufgabe A.2** *Gesucht ist eine Schleifenflussverteilung  $\mathbf{u}$  für gegebenes  $\mathbf{q}_t \in \mathbf{R}^m$ , die das System*

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U} \quad (\text{A.13})$$

*löst.*

Dabei bezeichnet  $\mathbf{U}$  den zulässigen Bereich der Schleifenflüsse, der durch Einsetzen von Gl. (A.12) in die den Bereich  $\mathbf{S}$  bestimmenden Ungleichungen nach Gl. (A.3) festgelegt ist. Für die Nebenbedingungen nach Gl. (A.3) ergeben sich mit Gl. (A.12) die Fallunterscheidungen (vgl. Gl. (A.5)):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_g \geq \mathbf{c}_g & \begin{cases} \mathbf{c}_g - \mathbf{q}_t \geq 0 : & \mathbf{C}\mathbf{u}_+ - \mathbf{C}\mathbf{u}_- \geq \mathbf{c}_g - \mathbf{q}_t, \\ \mathbf{c}_g - \mathbf{q}_t < 0 : & \mathbf{C}\mathbf{u}_- - \mathbf{C}\mathbf{u}_+ \leq \mathbf{q}_t - \mathbf{c}_g, \end{cases} \\ \mathbf{q}_l \leq \mathbf{c}_l & \begin{cases} \mathbf{c}_l - \mathbf{q}_t \geq 0 : & \mathbf{C}\mathbf{u}_+ - \mathbf{C}\mathbf{u}_- \leq \mathbf{c}_l - \mathbf{q}_t, \\ \mathbf{c}_l - \mathbf{q}_t < 0 : & \mathbf{C}\mathbf{u}_- - \mathbf{C}\mathbf{u}_+ \geq \mathbf{q}_t - \mathbf{c}_l. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Nach Einführung von Schlupfvariablen  $\mathbf{q}_s \geq \mathbf{0}$  für die Ungleichungsnebenbedingungen und unter Verwendung der Indikatormatrizen gemäß Def. 4.1 auf Seite 63 geht Gl. (A.14) über in:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{g+} \mathbf{C} \mathbf{u}_+ - \mathbf{I}^{g+} \mathbf{C} \mathbf{u}_- - \mathbf{q}_{s,g+} &= \mathbf{c}_{g+} - \mathbf{q}_t, \\ \mathbf{I}^{g-} \mathbf{C} \mathbf{u}_+ - \mathbf{I}^{g-} \mathbf{C} \mathbf{u}_- + \mathbf{q}_{s,g-} &= \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{c}}_{g-}, \\ \mathbf{I}^{l+} \mathbf{C} \mathbf{u}_+ - \mathbf{I}^{l+} \mathbf{C} \mathbf{u}_- + \mathbf{q}_{s,l+} &= \mathbf{c}_{l+} - \mathbf{q}_t, \\ \mathbf{I}^{l-} \mathbf{C} \mathbf{u}_+ - \mathbf{I}^{l-} \mathbf{C} \mathbf{u}_- - \mathbf{q}_{s,l-} &= \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{c}}_{l-}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Um die Nebenbedingungen in die Form (\*) nach Gl. (A.7)<sup>1</sup> zu überführen, ist die Hinzunahme weiterer Schlupfvariablen  $\mathbf{q}_{S,g+}$  und  $\mathbf{q}_{S,l-}$ , nötig. Das LP (\*\*) entsprechend

<sup>1</sup>also mit Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen, die die Einheitsmatrix enthält

Gl. (A.7) kann damit angegeben werden, wobei  $\mathbf{q}_{S,g+}$  und  $\mathbf{q}_{S,l-}$  als einzige Variablen in der Zielfunktion enthalten sind<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{x}}}, \\
(**) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{E}} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{b}}, \\
\tilde{\mathbf{x}} &\geq 0,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}^T &= \left( \mathbf{u}_+ \quad \mathbf{u}_- \quad \mathbf{q}_{s,g+} \quad \mathbf{q}_{s,l-} \quad \mathbf{q}_{S,g+} \quad \mathbf{q}_{s,g-} \quad \mathbf{q}_{s,l+} \quad \mathbf{q}_{S,l-} \right), \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{g+} \mathbf{C} & -\mathbf{I}^{g+} \mathbf{C} & -\mathbf{E}_{g+} & 0 \\ -\mathbf{I}^{g-} \mathbf{C} & \mathbf{I}^{g-} \mathbf{C} & 0 & 0 \\ \mathbf{I}^{l+} \mathbf{C} & -\mathbf{I}^{l+} \mathbf{C} & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}^{l-} \mathbf{C} & \mathbf{I}^{l-} \mathbf{C} & 0 & -\mathbf{E}_{l-} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{g+} - \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{c}}_{g-} \\ \mathbf{c}_{l+} - \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{c}}_{l-} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

**Satz A.2** *Unter der Voraussetzung, dass  $\tilde{\mathbf{x}}^*$  optimale Lösung von (\*\*) ist und  $Z(\mathbf{x}^*) = 0$  gilt, löst  $\mathbf{u}^*$  nach Gl. (A.17) Aufgabe A.2. Gilt für den Zielfunktionswert der optimalen Lösung in Gl. (A.10)  $Z(\mathbf{x}^*) > 0$ , so gibt es keine zulässige Lösung der Aufgabe A.2.*

**Beweis:** Analog Beweis von Satz A.1. Die Nebenbedingungen von (\*\*) liegen in der Form (#) vor. Nach Bomze und Grossmann (1993) existiert eine zulässige Basislösung. Die Nebenbedingungen des Ausgangsproblems Gl. (A.14) sind eingehalten, wenn  $\tilde{Z} = 0$  gilt.  $\square$

Eine Erweiterung um Gleichungsrestriktionen kann leicht durchgeführt werden, indem die NB von (\*\*) um die Zeilen  $\mathbf{I}^e \mathbf{C} \mathbf{u}_+ - \mathbf{I}^e \mathbf{C} \mathbf{u}_- + \mathbf{q}_{S,e+} - \mathbf{q}_{S,e-} = \mathbf{c}_e - \mathbf{q}_e$  und die Zielfunktion um die Schlupfvariablen  $\mathbf{q}_{S,e+}$  und  $\mathbf{q}_{S,e-}$  ergänzt werden. Das hier sehr ausführlich geschilderte Verfahren wird in der Linearen Programmierung als Phase 1 des Simplexalgorithmus bezeichnet. Deshalb kann auf Standardbibliotheken der Linearen Optimierung zurückgegriffen werden. In der Regel kann einem solchen Paket das LP in allgemeiner Form (Darstellung der Restriktionen in der Form von Gl. (4.45) auf Seite 76) übergeben werden. Die Einführung von Schlupfvariablen, wie sie in der obigen Darstellung gezeigt ist, wird vom LP intern vorgenommen.

Neben der Aussage, ob  $\mathbf{U} \neq \emptyset$  gilt, liefert das LP (A.16) eine zulässige Anfangsschleifenflussverteilung  $\mathbf{u}^*$  für das nichtlineare Optimierungsmodell  $CO(\mathbf{U}, \Pi^e)$  (Gl. (4.46) auf Seite 76). Im Allgemeinen liegt diese auf dem Rand von  $\mathbf{U}$ . Zur Lösung der Aufgabe

<sup>2</sup> $c_i = 1 \mid i \in \mathbf{I}_{S,g+} \cup \mathbf{I}_{S,l-}$ ,  $c_i = 0$  sonst

$CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  muss überprüft werden, ob es sich bei Ungleichungsnebenbedingungen, die im Punkt  $u^*$  mit Gleichheit erfüllt sind, um 'aktive' Restriktionen handelt. Bedingung dafür ist, dass die zugehörigen Multiplikatoren größer als Null sind. Eine Alternative ist es, einen Startpunkt im relativen Inneren der Menge  $\mathbf{U}$  zu wählen. Um einen solchen Punkt zu finden, ist das folgende LP zu lösen<sup>3</sup>:

$$\min \kappa : g(\mathbf{u})_i \leq \kappa \forall i, h(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Existiert ein solcher Punkt, ist der Zielfunktionswert aus Gl. (A.18) negativ. Die Lösung  $\mathbf{u}^{**}$  dient als Startpunkt zur Lösung von  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$ .

Generell ist für jeden Strang eine Restriktion denkbar. Die Strukturierung des Graphen nach Kap. 2.2.1 macht eine sehr einfache erste Auswahl unzulässiger Konstellationen möglich. Der Fluss innerhalb eines Pfades kann jeweils nur durch max. zwei Ungleichungsnebenbedingungen kontrolliert sein. Werden für  $n > 2$  Stränge innerhalb des Pfades Bedingungen angegeben, existiert entweder keine zulässige Lösung oder  $n - 2$  Bedingungen können nie aktiv werden und sind damit überflüssig. Die maßgebende untere und obere Schranke für den Pfadfluss ist einfach zu bestimmen, so dass nur zwei Bedingungen zu  $g(\mathbf{u}) \leq 0$  hinzuzufügen sind. Fallen obere und untere Schranken zusammen, wird  $h(\mathbf{u}) = 0$  um eine Bedingung erweitert. Existieren auf diese Weise ermittelte Bedingungen  $g(\mathbf{u}) \leq 0$ , so ist sichergestellt, dass das relative Innere der Menge  $\mathbf{U}$  nicht leer ist.

---

<sup>3</sup>persönliche Kommunikaton mit Herrn Prof. Dr. Dempe, Institut für Angewandte Mathematik II, TU Bergakademie Freiberg

# Anhang B

## Algorithmus zur Hydraulischen Simulation

### B.1 Kurzübersicht

Die einzelnen Punkte der Simulationsrechnung werden stichpunktartig genannt und Bezüge zu den entsprechenden Stellen in vorliegender Arbeit hergestellt. Dabei beinhaltet das Iterationsverfahren zur Berechnung des Nash-Gleichgewichts (Punkt 9.) mehrere Unterpunkte, die in Kap. B.2 detailliert beschrieben werden.

1. Aufteilen des Graphen (Kap. 2.2.1) in Wald (Def. 2.4) und Gitter (Def. 2.5).
2. Bestimmung der Pfade (Def. 2.9), Schleifen (Def. 2.6) und einer beliebigen im Gitter enthaltenen Baumstruktur.
3. Setze Zeitschritt  $t_{step}=0$ .
  4. Setzen aller Parameter und Armaturzustände für Zeitschritt  $t_{step}$ .
  5. Berechnung der Flussverteilung im Wald über lineares Gleichungssystem (Gl. (2.3) auf Seite 16).
  6. Addition der berechneten Einspeisemengen zu den Bedarfswerten der Wurzelknoten der einzelnen Bäume des Waldes.
  7. Berechnung einer Baumflussverteilung im Gitter über lineares Gleichungssystem (Gl. (2.24) auf Seite 22).

8. Aufstellen der Nebenbedingungen aus Flussbeschränkungen der Armaturen für die Schleifenflüsse im Gitter (Kap. 4.2.2).
9. Berechnung des Nash-Gleichgewichts (s. nächstes Kap. B.2).
10. Berechnung der Druckverluste in den Strängen des Waldes (Gl. (2.4) auf Seite 16).
11. Berechnung der Potenzialhöhen der Knoten im Wald ausgehend von den Wurzelknoten mit Überprüfung der Zustände von Armaturen (Gl. (2.5) auf Seite 16). Bemerkung: Im Wald sind die Flüsse fest vorgegeben, flussregulierende Schieber damit nicht möglich. Druckregulierende Armaturen dagegen sind zu berücksichtigen.
12. Aktualisierung der Behälterfüllhöhen (Gl. (2.28) auf Seite 24).
13.  $tstep = tstep + 1$ .
14. Falls  $tstep < maxtstep$  gehe zu 4.) .
15. Ende.

## B.2 Algorithmus zur Berechnung des Nash-Gleichgewichts

### B.2.1 Bezeichnungen

#### Skalare Größen:

$l$	: Anzahl der Schleifenflüsse
$q$	: Anzahl der 'head generators'
$s$	: Anzahl der Ungleichungsnebenbedingungen für Schleifenflüsse
$d$	: Anzahl der Gleichungsnebenbedingungen für Schleifenflüsse
$m$	: Anzahl der Pfade
$r$	: Anzahl der Reservoirs
$nm_i$	: Anzahl der Stränge in Pfad $i$
$\alpha \in \mathbf{R}$	: $1 < \alpha < 2.5$

#### Matrizen und Vektoren (mit $B = \{-1, 0, 1\} \subset N$ ):

$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^s$	: Konstanter Vektor in Flussungleichungs-NB (Gl. (4.43) auf Seite 76)
$\mathbf{A}_R \in \mathbf{B}^{m \times r}$	: Inzidenzmatrix (Def. 2.2) der Potenzialknoten
$\mathbf{A}_{HG} \in \mathbf{B}^{m \times q}$	: Inzidenzmatrix der HG-Solldruckknoten
$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$	: Konstanter Vektor in Flussgleichungs-NB (Gl. (4.44) auf Seite 76)
$\mathbf{C} \in \mathbf{B}^{m \times l}$	: Schleifenmatrix der Flussschleifen (s. Def. 2.7 auf Seite 11)
$\mathbf{C}_v \in \mathbf{B}^{m \times q}$	: Schleifenmatrix der HG-Druckschleifen
$\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times m}$	: Matrix der Druckverlustbeiwerte (s. Gl. (2.20) auf Seite 21)
$\mathbf{G}_1 \in \mathbf{B}^{s \times l}$	: Matrix in Flussungleichungs-NB (Gl. (4.43) auf Seite 76)
$\tilde{\mathbf{G}}_1 \in \mathbf{B}^{s \times q}$	: Matrix der in $\mathbf{C}_v$ -Schleifen zu berücksichtigenden Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}$
$\mathbf{G}_2 \in \mathbf{B}^{q \times q}$	: Matrix in Druckverlustungleichungs-NB (Gl. (5.17) auf Seite 97)
$\mathbf{H} \in \mathbf{B}^{d \times l}$	: Matrix in Flussgleichungs-NB (Gl. 4.44 auf Seite 76)
$\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbf{B}^{d \times q}$	: Matrix der in $\mathbf{C}_v$ -Schleifen zu berücksichtigenden Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$
$\mathbf{H}_{HG} \in \mathbf{R}^q$	: Vektor der Sollpotenzialhöhen
$\mathbf{H}_R \in \mathbf{R}^r$	: Vektor der konstanten Potenzialhöhen
$\mathbf{I}_{HG} \in \mathbf{B}^{m \times q}$	: Indikatormatrix der HG-Pfade (s. Kap. 5.3.3.2)
$\mathbf{q}_t \in \mathbf{R}^m$	: Baumflussverteilung (s. Gl. (2.24) auf Seite 22)

### B.2.2 Numerische Berechnung des Nash-Gleichgewichts

Wird vorausgesetzt, dass die Druckschleifen in Matrix  $\mathbf{C}_v$  keine Pfade mit aktiven Flussnebenbedingungen enthalten (s. Teil b) in Voraussetzung 5.1 auf Seite 96), lauten die Karush/Kuhn/Tucker-Bedingungen erster Ordnung der beiden nichtlinearen restringierten Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$  (vgl. Gl. (4.51) auf Seite 78 und Gl. (5.20) auf Seite 97):

$\exists \bar{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{R}^s, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{R}^d, \bar{\boldsymbol{\nu}} \in \mathbf{R}^q$ , so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \{[\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})](\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{I}_{HG}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R\} + \mathbf{G}_1^T \bar{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{H}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_v^T \{[\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})](\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{I}_{HG}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG}\mathbf{H}_{HG}\} + \mathbf{G}_2^T \bar{\boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{z}} \leq \mathbf{0}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\boldsymbol{\nu}} \geq \mathbf{0}, \\ \bar{\mu}_i (\mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a})_i = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \bar{\nu}_i (\mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{z}})_i = 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Die Berechnung der pfadbezogenen Einträge in Matrix  $\mathbf{D}$  erfolgt dabei als Summe der Größen  $d_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, nm_i$  der Stränge innerhalb eines Pfades. Wird mit  $[\mathbf{q}_i]_k$  der Fluss im  $k$ -ten *link* des Pfades  $i$  bezeichnet, dann ist  $\mathbf{D}$  eine  $(m \times m)$ -Diagonalmatrix mit  $[\mathbf{D}(\mathbf{u})]_{ii} = \sum_k c_{ik} |[\mathbf{q}_i]_k|^{\alpha-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Da a priori nicht bekannt ist, welche der Flussbedingungen im Lösungspunkt aktiv sind, müsste zur Gewährleistung der Voraussetzung, dass keine aktiven Flussnebenbedingungen in den Druckschleifen enthalten sind, in jeder Iteration Matrix  $\mathbf{C}_v$  neu berechnet werden, was einen erheblichen algorithmischen Aufwand bedeuten würde. Im Folgenden soll auf diese Annahme verzichtet werden. Multiplikatoren sind generell in den Druckschleifen zu berücksichtigen mit Ausnahme der in Bemerkung 5.2 auf Seite 116 beschriebenen Fälle, die zur Singularität der Jacobimatrix führen (genauere Beschreibung weiter unten). Mit den zu Multiplikatoren in den Druckschleifen gehörigen Matrizen  $\tilde{\mathbf{H}}$  und  $\tilde{\mathbf{G}}_1$  lautet die Aufgabe:

Gesucht ist ein Punkt  $\mathbf{P}^* := (\mathbf{u}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*) \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}_{0+}^s \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_{0+}^q =: \mathbf{S}$ , der das folgende System löst:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T [\mathbf{D}^*(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^*) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z}^* + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R] + \mathbf{G}_1^T \boldsymbol{\mu}^* + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}^* &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}^*(\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^*) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z}^* + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG}\mathbf{H}_{HG}] + \tilde{\mathbf{G}}_1^T \boldsymbol{\mu}^* + \mathbf{G}_2^T \boldsymbol{\nu}^* + \tilde{\mathbf{H}}^T \boldsymbol{\lambda}^* &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_1 \mathbf{u}^* - \mathbf{a} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}\mathbf{u}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_2 \mathbf{z}^* \leq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\nu}^* \geq \mathbf{0}, \\ \mu_i^* (\mathbf{G}_1 \mathbf{u}^* - \mathbf{a})_i = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \nu_i^* (\mathbf{G}_2 \mathbf{z}^*)_i = 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

In Kap. 5.4.3 wurde gezeigt, dass unter Gültigkeit der Voraussetzung 4.1 auf Seite 62 und Teil a) in Voraussetzung 5.1 auf Seite 96 für  $\mathbf{U} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{Z} \neq \emptyset$  ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht zwischen den Optimierungsaufgaben  $CO(\mathbf{U}, \Pi^c)$  und  $CO(\mathbf{Z}, \Pi^{pot})$

existiert. Nachfolgend wird das implementierte Verfahren zur numerischen Berechnung von  $\mathbf{P}^*$  beschrieben. Es wird eine Folge  $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\nu}^k)\}^{k \in \mathbb{N}}$  konstruiert, die gegen  $\mathbf{P}^*$  konvergiert. Folgende Abkürzung wird verwendet:

$$\mathbf{P}^k := (\mathbf{u}^k, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\nu}^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad .$$

Die Konstruktion der Folge verläuft gemäß den Schritten:

1. Berechnung eines Anfangswertes  $\mathbf{P}^0$ ,
2.  $k := 0$ ,
3. Test ob Ungleichungen in  $\mathbf{P}^k$  aktiv oder passiv sind,
4. Modifikation der Einträge für Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}$  in Druckschleifen,
5. Durchführung eines Newtonschrittes,
6. Schrittweitenkontrolle,
7. Berechnung des neuen Iterationspunktes  $\mathbf{P}^{k+1}$ ,
8.  $k=k+1$ ,
9. Falls Konvergenztest nicht erfüllt, gehe zu 3.,
10. Stop.

## Beschreibung der einzelnen Schritte

### 1. Berechnung eines Anfangswertes $\mathbf{P}^0$

Für die folgenden Schritte wird die Existenz eines  $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{U}$  vorausgesetzt. Sei

$$\phi = \{(\mathbf{u}, \xi) \in \mathbf{R}^n \times R : [\mathbf{G}_1 \mathbf{u} - \mathbf{a}]_i \leq \xi, i = 1, \dots, s \wedge \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\}.$$

$\mathbf{u}^0$  wird als Lösung des folgenden linearen Optimierungsproblems berechnet:

$$\min_{(\mathbf{u}, \xi) \in \phi} \xi.$$

Existiert ein Punkt  $\mathbf{u}^0$  im relativen Inneren von  $\mathbf{U}$  ist der Zielfunktionswert negativ. Sämtliche Ungleichungsnebenbedingungen der Flüsse sind damit in  $\mathbf{P}^0$  inaktiv. Für

die zugehörigen Multiplikatoren gilt  $\boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}$ . Ebenso werden die zu Gleichungsnebenbedingungen gehörigen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}^0$  zu Null gesetzt. Anschließend erfolgt die Berechnung der Startwerte der Variablen  $\mathbf{z}$  und zugehörigen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\nu}$ . Mit

$$\tilde{\mathbf{z}}^0 = - [\mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG}]^{-1} \mathbf{C}_v^T \{ [\mathbf{D}(\mathbf{u})] (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}^0) + \mathbf{A}_{HG} \mathbf{H}_{HG} + \mathbf{A}_R \mathbf{H}_R \}$$

werden die Anfangswerte folgendermaßen gesetzt:

$$[\mathbf{z}^0]_i = \begin{cases} [\tilde{\mathbf{z}}^0]_i & , \text{ falls } [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{z}}^0]_i \leq 0, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases} \quad [\boldsymbol{\nu}^0]_i = \begin{cases} [\tilde{\mathbf{z}}^0]_i & , \text{ falls } [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{z}}^0]_i > 0, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

**2. Setze  $k := 0$**

**3. Test ob Ungleichungen in  $\mathbf{P}^k$  aktiv oder passiv sind**

Seien  $\mathbf{X}^k, \mathbf{E}_X \in \mathbf{R}^{s \times s}$  und  $\mathbf{Y}^k, \mathbf{E}_Y \in \mathbf{R}^{q \times q}$ . Für  $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq l$  setze

$$X_{ij}^k := \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } [\mathbf{G}_1 \mathbf{u}^k - \mathbf{a}]_i = 0 \text{ und } \neg (\mathbf{X}_{ii}^{k-1} = 1 \wedge \mu_i^k = 0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $X^{-1} := 0 \in \mathbf{R}^{s \times s}$  für  $k = 0$

und

$$(\mathbf{E}_X)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Für  $1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq q$  setze

$$Y_{ij}^k := \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } [\mathbf{G}_2 \mathbf{z}^k]_i = 0 \text{ und } \neg (\mathbf{Y}_{ii}^{k-1} = 1 \wedge \nu_i^k = 0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $Y^{-1} := 0 \in \mathbf{R}^{q \times q}$  für  $k = 0$  und

$$(\mathbf{E}_Y)_{ij} = \delta_{ij}.$$

**4. Modifikation der Einträge für Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}$  in Druckschleifen**

Als nächstes sind die Einträge für die Multiplikatoren aktiver Flussnebenbedingungen zu überprüfen. Zunächst gilt  $\tilde{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{I}_{FIC}^T \mathbf{C}_v$ , wobei mit  $\mathbf{I}_{FIC}$  die Indikatormatrix der Menge aller Pfade mit Flussungleichungsnebenbedingungen bezeichnet wird. Es ist zu überprüfen, ob (1) zwischen Nicht-Solldruckknoten (NSKn) und HG-Strang innerhalb des HG-Pfades eine aktive Flussnebenbedingung liegt, oder ob (2) es sich bei den NSKn

der HG-Pfade um isolierte Knoten handelt, wenn die Pfade mit aktiven Flussnebenbedingungen und HG-Pfade vom Graphen entfernt werden. Fall (1) und (2) schließen sich gegenseitig aus, da sonst der NSKn auch im Graphen mit HG-Strang isoliert wäre. Die Multiplikatoren der Flussnebenbedingungen zwischen NSKn und HG-Strang innerhalb desselben graphentheoretischen Pfadelementes sind generell von der Druckschleife auszuschließen. In Fall (2) ist der Multiplikator des Pfades zu entfernen, nach dessen Einfügen der sich im Baum des modifizierten Systems befindliche NSKn wieder Mitglied des Gitters ist. Dies geschieht durch Entfernen der entsprechenden Einträge in Matrix  $\mathbf{C}_v$ . Mit der so modifizierten Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}_v$  kann Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{I}_{FIC}^T \tilde{\mathbf{C}}_v$  berechnet werden. Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$  bleibt in allen Iterationsstufen konstant.

## 5. Durchführung eines Newtonschrittes

Betrachtet wird  $f^k : \mathbf{S} \mapsto \mathbf{R}^{l+q+s+d+q}$ , definiert durch:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T [[\mathbf{D}(\mathbf{u})] (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z} + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R] + \mathbf{G}_1^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{C}_v^T [[\mathbf{D}(\mathbf{u})] (\mathbf{q}_t + \mathbf{C}\mathbf{u}) + \mathbf{I}_{HG}\mathbf{z} + \mathbf{A}_R\mathbf{H}_R + \mathbf{A}_{HG}\mathbf{H}_{HG}] + \tilde{\mathbf{G}}_1^T \boldsymbol{\mu} + \tilde{\mathbf{H}}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_2^T \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{X}^k (\mathbf{G}_1 \mathbf{u} - \mathbf{a}) + (\mathbf{E}_X - \mathbf{X}^k) \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} \\ \mathbf{Y}^k \mathbf{G}_2 \mathbf{z} + (\mathbf{E}_Y - \mathbf{Y}^k) \boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}.$$

Dann sind

$$\nabla f^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\nu}^k) = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{C}^T [\mathbf{D}(\mathbf{u}^k)] \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{I}_{HG} & \mathbf{G}_1^T & \mathbf{H}^T & 0 \\ \alpha \mathbf{C}_v^T [\mathbf{D}(\mathbf{u}^k)] \mathbf{C} & \mathbf{C}_v^T \mathbf{I}_{HG} & \tilde{\mathbf{G}}_1^T & \tilde{\mathbf{H}}^T & \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{X}^k \mathbf{G}_1 & 0 & 0 & \mathbf{E}_X - \mathbf{X}^k & 0 \\ \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}^k \mathbf{G}_2 & 0 & 0 & \mathbf{E}_Y - \mathbf{Y}^k \end{pmatrix}$$

der Gradient im Iterationsschritt  $k$  und

$$\tilde{\mathbf{P}}^{k+1} = \mathbf{P}^k - [\nabla f^k(\mathbf{P}^k)]^{-1} f^k(\mathbf{P}^k)$$

Kandidat für den neuen Iterationspunkt  $\mathbf{P}^{k+1}$ .

## 6. Schrittweisenkontrolle

Sei

$$\Psi = \{(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbf{S} : \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{z} \in \mathbf{Z}, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^d, \boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{0}\}$$

der zulässige Bereich für Variablen und Multiplikatoren. Der maximal zulässige Schrittweitenfaktor  $\sigma$  in Richtung  $[\tilde{\mathbf{P}}^{k+1} - \mathbf{P}^k]$  wird bestimmt aus

$$\sigma = \min \left\{ 1, \sup \left\{ t \in R : \mathbf{P}^k + t \left( \tilde{\mathbf{P}}^{k+1} - \mathbf{P}^k \right) \in \Psi \right\} \right\}.$$

### 7. Berechnung des neuen Iterationspunktes $\mathbf{P}^{k+1}$

Setze

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \sigma \left( \tilde{\mathbf{P}}^{k+1} - \mathbf{P}^k \right).$$

### 8. Setze $k = k + 1$

### 9. Konvergenztest

Falls

$$\|\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^{k-1}\| > \varepsilon \vee \|f^k\| > \varepsilon$$

gehe zu 3.)

### 10. Stop

# Anhang C

## Simulation - Beispiel Stadt Erfurt

### C.1 Überblick

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte mathematische Modell wurde beispielhaft zur Simulation des hydraulischen Verhaltens des Wasserversorgungsnetztes der Stadt Erfurt eingesetzt. Abb. C.1 gibt einen Überblick über das modellierte Hauptverteilungsnetz mit insgesamt 1062 Knoten und 1267 Strängen (Rechennetz s Abb. C.2). Das Versorgungsgebiet ist durch insgesamt 74 Schieber in neun Druckzonen unterteilt. Die Behälter der Druckzonen ÜPW Steiger und ÜPW Cyriaksburg werden durch Druckerhöhungsanlagen aus dem Hauptversorgungsnetz zu bestimmten Tageszeiten gespeist. Die Druckzonen OFL06B und HB06 sind über eine Druckminderungsanlage (PRV) verbunden.

Zur Berücksichtigung tageszeitlicher Schwankungen der Verbrauchswerte wurden die Knoten zwei unterschiedlichen Bedarfsganglinien zugeordnet. Bei Großabnehmern mit vom Zyklus abweichenden Werten wurde der stündliche Bedarf an den entsprechenden Knoten einzeln vorgegeben. Die Einspeisepunkte wurden teils als Behälter (tageszeitliche Schwankung der Füllhöhe, die aus Zu- und Abflussmengen sowie Geometrie des Behälters nach Kap. 2.2.7 berechnet wird und Reservoirs (vorgegebene konstante Füllhöhe) teils als Einspeisepunkte mit gegebener Einspeisemenge modelliert.

Über den gesamten Simulationszeitraum geschlossene Schieber werden bereits beim Lesen der Daten aussortiert und bleiben in der weiteren Berechnung unberücksichtigt. Nach Entfernen dieser Stränge und Einfügen von sieben virtuellen Strängen zwischen

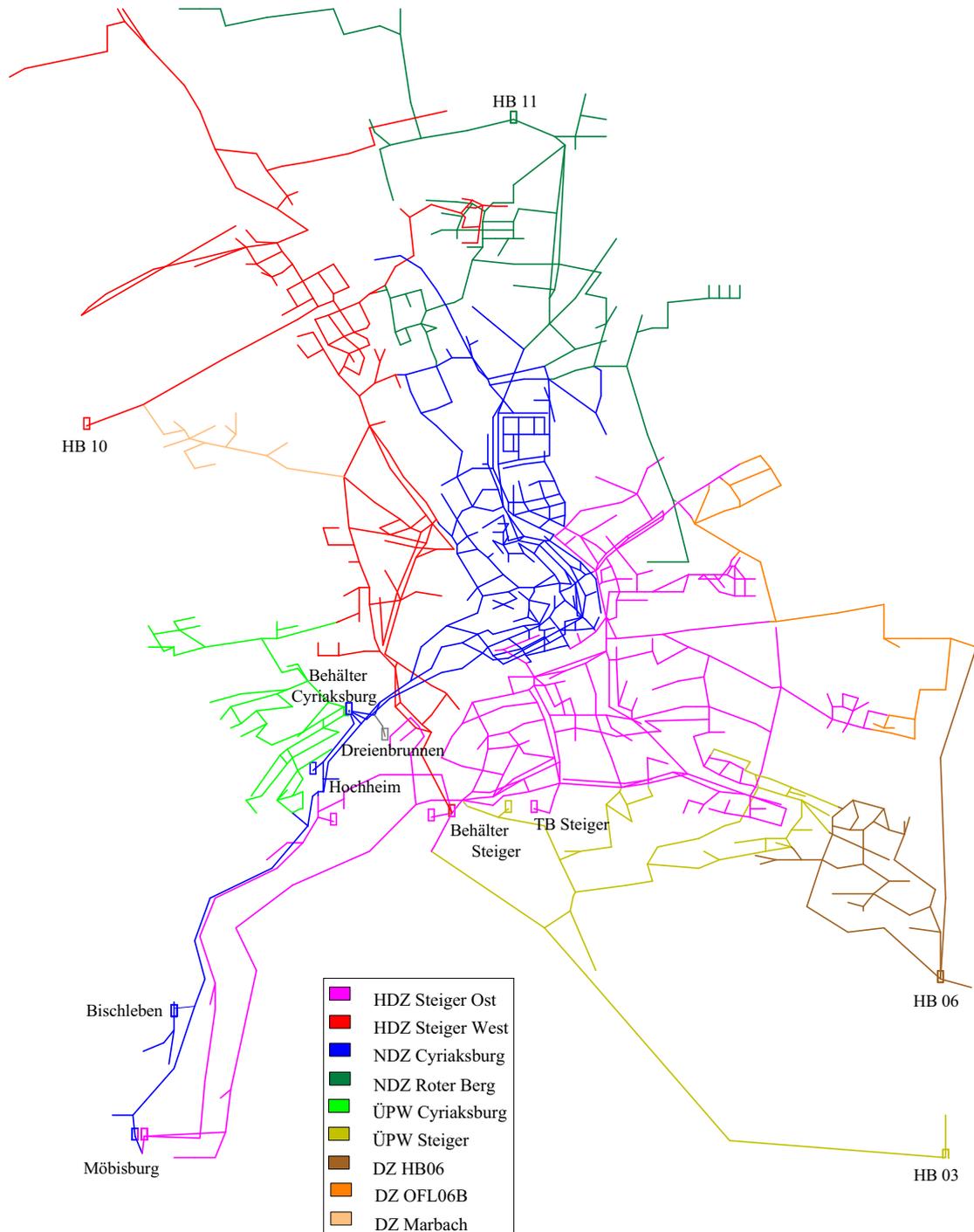


Abbildung C.1: Gesamtübersicht über Simulationsmodell der Stadt Erfurt

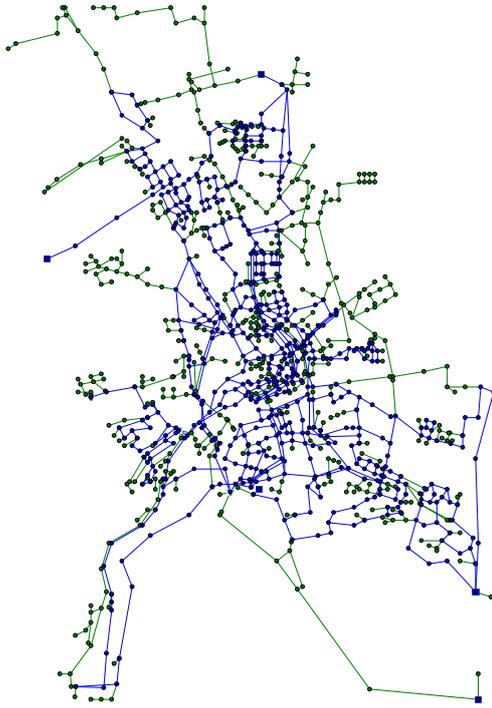


Abbildung C.2: Erfurt - Gesamtgraph

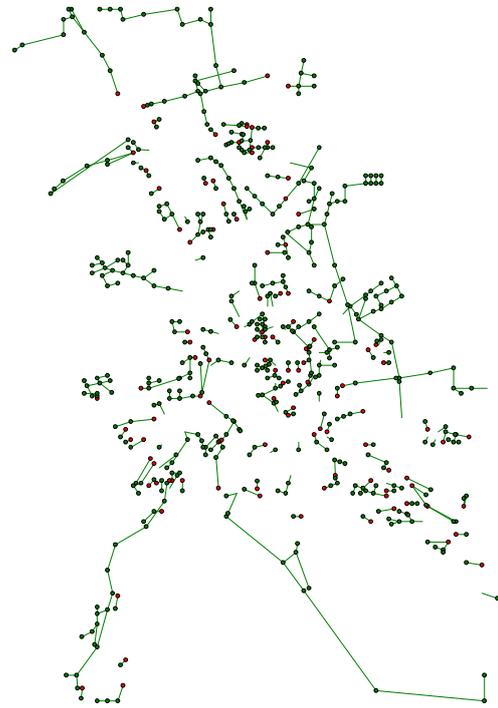


Abbildung C.3: Erfurt - Waldstruktur

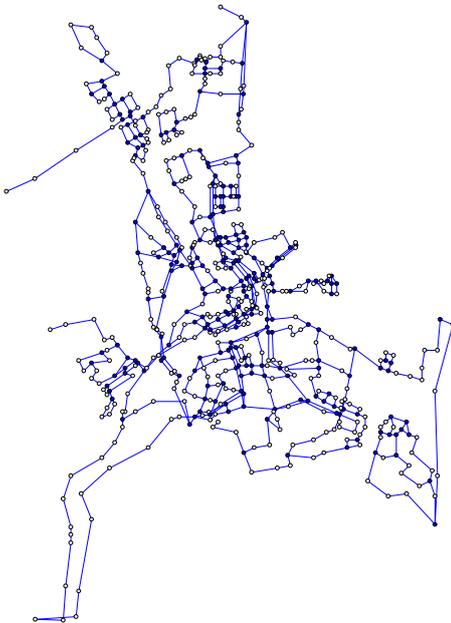


Abbildung C.4: Erfurt - Gitterstruktur

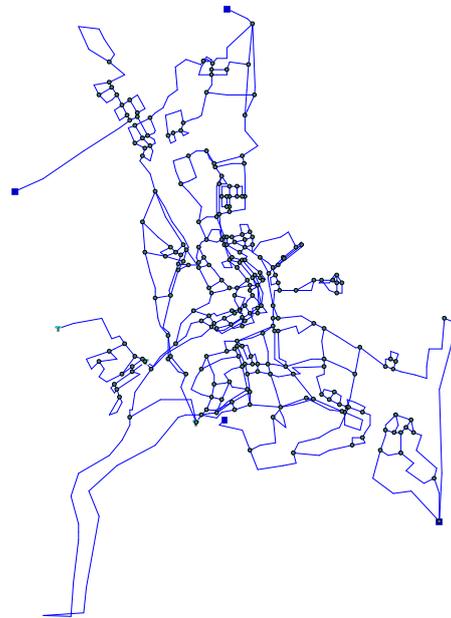


Abbildung C.5: Erfurt - Gitter mit Pfaden

Potenzialknoten (Durchlaufbehälter und Reservoirs) und Referenzknoten bleiben 1226 Stränge.

## C.2 Berechnungsergebnisse

Zur Unterteilung des Graphen waren zunächst die Wald- und Gitter-Struktur zu berechnen (s. Def. 2.4 und Def. 2.5 auf Seite 10). Als Ergebnis liefert der Algorithmus einen Wald mit 161 Bäumen und 161 Wurzelknoten. Der gesamte Wald besteht aus 473 Knoten und 473 Strängen und ist in Abb C.3 dargestellt. Einspeiseknoten der einzelnen Bäume sind die Wurzelknoten, welche zum Gitter gehören und mit roter Farbe gekennzeichnet sind. Das Gitter (Abb. C.4) umfasst 753 Stränge und 589 Knoten (inklusive Wurzelknoten), woraus sich die Anzahl der Schleifen zu  $753 - 589 + 1 = 165$  berechnen lässt.

Bemerkung: In der Darstellung des Gitters in Abb. C.4 sind immer noch Bäume zu erkennen. Deren Endknoten sind jedoch ausschließlich Potenzialknoten, die über virtuelle Stränge (in der Abbildung sind nur tatsächlich vorhandene Rohre und keine virtuellen Stränge dargestellt) mit dem Referenzknoten verbunden sind und daher zum Gitter gehören.

Die Flussverteilung in den Strängen des Waldes ist nach Kap. 2.2.2.2 Gl. (2.3) auf Seite 16 aus einem linearen Gleichungssystem berechenbar. Die Einspeisemengen der einzelnen Bäume werden zu den Bedarfswerten der Wurzelknoten addiert.

Zur weiteren Vereinfachung des Gitters erfolgt die Unterteilung in Pfadelemente nach Def. 2.9 auf Seite 13. Die Darstellung lässt sich schließlich auf einen Graphen mit 414 Pfaden, 249 Pfadverbindungsknoten und 165 Schleifen reduzieren (s. Abb. C.5). Die Berechnung wurde für die Spitzenbelastungszeit um acht Uhr morgens durchgeführt. Konvergenz des Algorithmus zur Berechnung des Nash-Gleichgewichts (s. Kap. B.2) wurde nach 25 Iterationsschritten erreicht. Um das Verfahren auf die bei Simpson (1999) beschriebenen Anordnungen von druck- und flussregulierenden Armaturen zu testen, wurde eine Modifikation des Versorgungssystems durchgeführt, die nicht den realen Gegebenheiten entspricht. Die Hauptleitung (DN 500) vom Behälter HB11 wurde mit FCV und PRV im selben graphentheoretischen Pfad versehen (s. Abb. C.6). Derartige Anordnungen von Kontrollarmaturen sind aber denkbar, wenn der Ausgangsdruck zum Schutz der unterstrom liegenden Druckzone auf einen Maximalwert beschränkt werden soll. Gleichzeitig kann für den Fluss eine Begrenzung nötig sein, um z.B. die Durchmi-

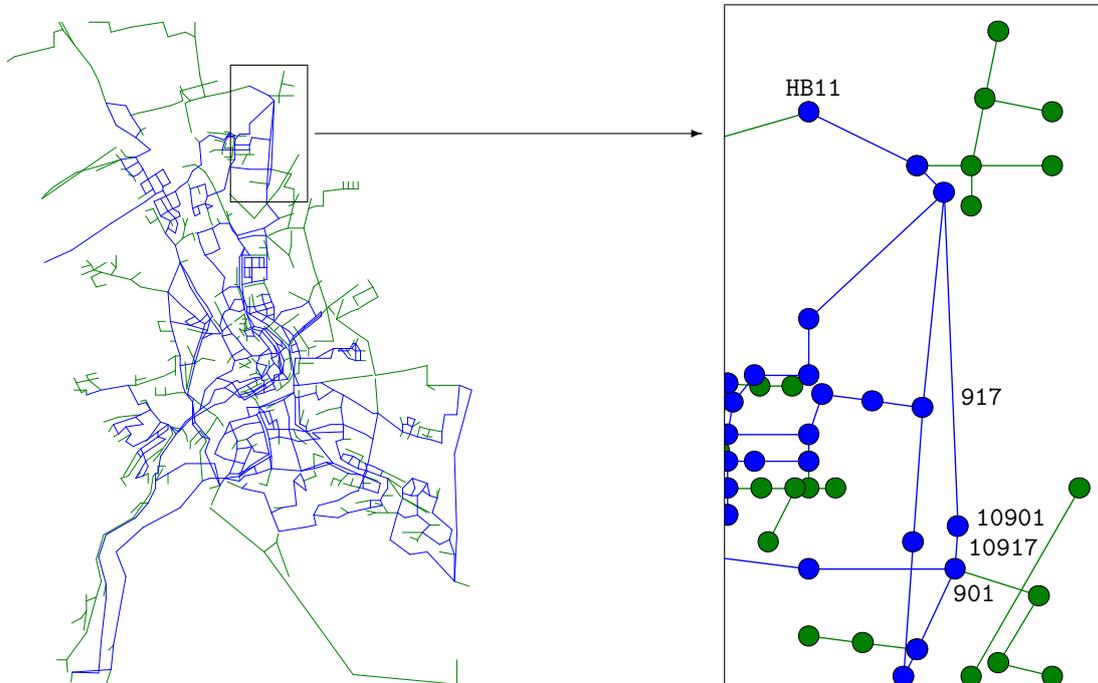


Abbildung C.6: Beispiel Erfurt - Anordnung von zusätzlichem PRV und FCV

schung von weichem Talsperrenwasser mit hartem Grundwasser zu kontrollieren.

Ohne die zusätzlichen Armaturen stellte sich im betrachteten Bedarfslastfall ein Durchfluss von 39,7 l/s in Strang 917 und ein Druck von 44,8 m am Knoten 901 ein. Durch Aktivieren des PRVs sollte der maximale Ausgangsdruck auf 43 m am Kontrollknoten (KN) beschränkt werden. Zwei alternative Anordnungen von PRV und FCV (entsprechend 'Network 2c' und 'Network 2d' bei Simpson (1999)) mit je zwei Maximalflüssen im FCV wurden untersucht:

I: FCV (Strang 917) vor PRV (Strang 10917, Solldruck 43 m an Knoten 901)

- a) maximaler Fluss im FCV: 15 l/s
- b) maximaler Fluss im FCV: 25 l/s

II: PRV (Strang 917, Solldruck 43 m an Knoten 10901) vor FCV (Strang 10917)

- a) maximaler Fluss im FCV: 15 l/s
- b) maximaler Fluss im FCV: 25 l/s

Das Ergebnis der Berechnungen ist in Tabelle C.1 zusammengefasst. Alle vier Szenarien konnten erfolgreich berechnet werden, die Grenzen für Druck und Durchfluss in den Kontrollarmaturen wurden eingehalten. Mit EPANET durchgeführte Vergleichsrechnungen zeigten, dass Fall Ib) zu ähnlich falschen Ergebnissen führt, wie sie von Simpson (1999) beschrieben werden. An Stelle der Aktivierung des PRVs ist bei EPANET der Durchflusskontrollschieber aktiv. Der Ausgangsdruck des PRVs liegt dabei aber über dem Sollwert.

Tabelle C.1: Kontrollarmaturen im Wasserversorgungssystem der Stadt Erfurt

Variante	FCV	PRV	Fluss FCV [l/s]	Druck an KN [m]
ohne PRV und FCV	inaktiv	inaktiv	39,7	44,8
I a)	aktiv	inaktiv	15,0	42,3
I b)	inaktiv	aktiv	20,5	43,0
II a)	aktiv	aktiv	15,0	43,0
II b)	inaktiv	aktiv	20,5	43,0

Im Hinblick auf die Kalibrierung des Simulationsmodells lassen sich wertvolle Informationen aus der Unterteilung des Graphen ziehen. Stränge, die in der Waldstruktur liegen, sind nur kalibrierbar, wenn sie sich zwischen Wurzelknoten und Druckmessknoten befinden. Des Weiteren darf kein Strang des Waldes (etwa zur Generierung unterschiedlicher Fließzustände während eines Messprogramms) zugeschiebert werden, da sonst die Versorgung unterbrochen wäre. Besonders geeignet für Druckmessknoten sind Pfadverbindungsknoten, deren Lage aus Abb. C.5 ersichtlich ist.

# Literaturverzeichnis

- [Altman und Boulos 1995] ALTMAN, Tom ; BOULOS, Paul F.: Solving flow-constrained networks: Inverse problem. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 121 (1995), Nr. 5, S. 427–431
- [Andersen und Powell 1999] ANDERSEN, J. H. ; POWELL, R. S.: Simulation of water networks containing controlling elements. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 125 (1999), Nr. 3, S. 162–169
- [Anderson und Al-Jamal 1995] ANDERSON, Edward J. ; AL-JAMAL, Khairy H.: Hydraulic-network simplification. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 121 (1995), Nr. 3, S. 235–240
- [Aygün 2001] AYGÜN, Hayati: *Entwurf und Implementierung von Evolutionsstrategien zur Parameteroptimierung hydraulischer Simulationsmodelle*. Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik, Universität Karlsruhe (TH), Diplomarbeit, 2001
- [Bard 1988] BARD, Jonathan F.: Convex two-level optimization. In: *Mathematical Programming* 40 (1988), Nr. 1, (Ser. A), S. 15–27
- [Berghout und Kuczera 1997] BERGHOUT, Brendan L. ; KUCZERA, George: Network linear programming as pipe network hydraulic analysis tool. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 123 (1997), Nr. 6, S. 549–559
- [Betten 1998] BETTEN, Josef: *Finite Elemente für Ingenieure*. Bd. 2: Variationsrechnung, Energiemethoden, Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1998. – ISBN 3-540-63240-9
- [Bhave 1988a] BHAVE, Pramod R.: Calibrating water distribution networks. In: *ASCE Journal of Environmental Engineering* 114 (1988), Nr. 1, S. 120–136

- [Bhave 1988b] BHAVE, Pramod R.: Extended period simulation of water systems - direct solution. In: *ASCE Journal of Environmental Engineering* 114 (1988), Nr. 5, S. 1146–1159
- [Bhave 1991] BHAVE, Pramod R.: *Analysis of flow in water distribution networks*. Lancaster - Basel : Technomic Publishing Company, 1991. – ISBN 87762-732-0
- [Billings und Agthe 1998] BILLINGS, Bruce R. ; AGTHE, Donald E.: State-space versus multiple regression for forecasting urban water demand. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 124 (1998), Nr. 2, S. 113–117
- [Birkhoff 1963] BIRKHOFF, Garrett: A variational principle for nonlinear networks. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 21 (1963), Nr. 2, S. 160–162
- [Birkhoff und Diaz 1956] BIRKHOFF, Garrett ; DIAZ, Joaquín B.: Non-linear network problems. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 13 (1956), Nr. 4, S. 431–443
- [Bomze und Grossmann 1993] BOMZE, Immanuel M. ; GROSSMANN, Wilfried: *Optimierung - Theorie und Algorithmen*. Mannheim : BI - Wissenschaftsverlag, 1993. – ISBN 3-411-15091-2
- [Brandstädt 1994] BRANDSTÄDT, Andreas: *Graphen und Algorithmen*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994. – ISBN 3-519-02131-5
- [Bronštejn und Semendjajew 1987] BRONŠTEJN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt/Main : Verlag Harri Deutsch, 1987 (23. Auflage). – ISBN 3-87144-492-8
- [Buchberger und Wells 1996] BUCHBERGER, Steven G. ; WELLS, Greg J.: Intensity, duration and frequency of residential water demands. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 122 (1996), Nr. 1, S. 11–19
- [Buchberger und Wu 1995] BUCHBERGER, Steven G. ; WU, Lin: Model for instantaneous residential water demands. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 121 (1995), Nr. 3, S. 232–246
- [Bush und Uber 1998] BUSH, Cheryl A. ; UBER, James G.: Sampling design methods for water distribution model calibration. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 124 (1998), Nr. 6, S. 334–344

- [Cembrowicz 1988] CEMBROWICZ, Ralf G.: *Siedlungswasserwirtschaftliche Planungsmodelle*. Berlin : Springer-Verlag, 1988. – ISBN 3-540-18442-2
- [Cembrowicz 1990] CEMBROWICZ, Ralf G.: Steuerungsoptimierung eines Wasserversorgungssystems. In: *GWF-Wasser/Abwasser* 131 (1990), Nr. 10, S. 550–562
- [Cembrowicz 1994] CEMBROWICZ, Ralf G.: Evolution strategies and genetic algorithms in water supply and waste water systems design. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.): *Water Resources and Distribution, Hydraulic Engineering Software V* Bd. 1. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1994, S. 27–39
- [Cembrowicz u. a. 1996] CEMBROWICZ, Ralf G. u. a.: Mathematical optimization of the main water distribution system city of Hanoi, Vietnam. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.): *Hydraulic Engineering Software VI*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1996, S. 163–172
- [Cembrowicz u. a. 1998] CEMBROWICZ, Ralf G. u. a.: The water supply network analysis tool KANET. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.): *Hydraulic Engineering Software VII*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1998, S. 91–100
- [Chandapillai 1991] CHANDAPILLAI, Jakob: Realistic simulation of water distribution system. In: *ASCE Journal of Transportation Engineering* 117 (1991), Nr. 2, S. 258–263
- [Chandrashekar 1980] CHANDRASHEKAR, M.: Extended set of components in pipe networks. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 106 (1980), Nr. 1, S. 133–149
- [Cherry 1951] CHERRY, C.: Some general theorems for non-linear systems possessing reactance. In: *The Philosophical Magazine* 42 (1951), Nr. 7, S. 1161–1177
- [Collins u. a. 1978] COLLINS, M. ; COOPER, L. ; HELGASON, R. ; KENNINGTON, J. ; LEBLANC, L.: Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques. In: *Management Science* 24 (1978), Nr. 7, S. 747–760
- [Collins 1980] COLLINS, Michael: Pitfalls in pipe network analysis techniques. In: *Transportation Engineering Journal of ASCE* 106 (1980), Nr. TE5, S. 507–521
- [Collins 1981] COLLINS, Michael: Discussion of 'Extended set of components in pipe networks'. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 107 (1981), Nr. HY1, S. 149–152

- [Collins u. a. 1979] COLLINS, Michael ; COOPER, Leon ; KENNINGTON, Jeff L.: Multiple operating points in complex pump networks. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 105 (1979), Nr. HY3, S. 229–244
- [Cross 1936] CROSS, Hardy: Analysis of flow in networks of conduits and conductors / University of Illinois , Engineering Experiment Station. Urbana, Illinois, 1936 (286). – Bulletin
- [van Damme 1991] DAMME, Eric van: *Stability and perfection of Nash equilibria*. 2. Aufl. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. – ISBN 0-387-53800-3
- [Dandy u. a. 1996] DANDY, Graeme C. ; SIMPSON, Angus R. ; MURPHY, Laurence J.: An improved genetic algorithm for pipe network optimization. In: *Water Resources Research* 32 (1996), Nr. 2, S. 449–458
- [Datta und Sridharan 1994] DATTA, R. S. N. ; SRIDHARAN, K.: Parameter estimation in water-distribution systems by least squares. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 120 (1994), Nr. 4, S. 405–422
- [Dempe 1992] DEMPE, Stephan: A necessary and a sufficient optimality condition for bilevel programming problems. In: *Optimization. A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* 25 (1992), Nr. 4, S. 341–354
- [Dempe und Bard 2001] DEMPE, Stephan ; BARD, Jonathan F.: Bundle trust-region algorithm for bilinear bilevel programming. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 110 (2001), Nr. 2, S. 265–288
- [Dempe und Pallaschke 1997] DEMPE, Stephan ; PALLASCHKE, Diethard: Quasi-differentiability of optimal solutions in parametric nonlinear optimization. In: *Optimization. A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* 40 (1997), Nr. 1, S. 1–24
- [Donachie 1974] DONACHIE, Roger P.: Digital program for water network analysis. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 100 (1974), Nr. HY3, S. 393–403
- [DVGW 1981] Hydraulische Berechnung von Rohrleitungen und Rohrnetzen; Druckverlust-Tafeln für Rohrdurchmesser von 40-2000 mm / DVGW. 8 1981 (W 302). – Arbeitsblatt
- [DVGW 1986] Berechnung von Rohrnetzen mit elektronischen Datenverarbeitungsanlagen / DVGW. 12 1986 (GW 303). – Arbeitsblatt

- [Echávez 1997] ECHÁVEZ, Gabriel: Increase in losses coefficient with age for small diameter pipes. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 123 (1997), Nr. 2, S. 157–160
- [Eichberger 1993] EICHBERGER, Jürgen: *Game theory for economists*. San Diego, CA : Academic Press, 1993. – ISBN 0-12-233620-8
- [Eiswirth und Burn 2001] EISWIRTH, M. ; BURN, L. S.: New methods for defect diagnosis of water pipelines. In: *Managing Pipeline Assets in an Evolving Market*. York, UK: 28-30 March 2001, 2001 (4th International Conference on Water Pipeline Systems)
- [Epp und Fowler 1970] EPP, Robert ; FOWLER, Alvin G.: Efficient code for steady-state flows in networks. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 96 (1970), Nr. HY1, S. 43–56
- [Ferreri u. a. 1994] FERRERI, G. B. ; NAPOLI, E. ; TUMBILOLO, A.: Calibration of roughness in water distribution networks. In: *2nd International Conference on Water Supply Systems, Adv. in Des., Operation and Perf.* U.K. : Mechanical Engineering Publications, 1994, S. 379–396
- [Fiacco 1983] FIACCO, Anthony V.: *Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming*. New York : Academic Press, 1983. – ISBN 0-12-254450-1
- [Förster 2000] FÖRSTER, Siegmund: Absperrschieber im Wasser-Rohrnetz. In: *GWF-Wasser/Abwasser* 141 (2000), Nr. 10, S. 688–693
- [Friedman 1986] FRIEDMAN, James W.: *Game theory with applications to economics*. Oxford : Oxford University Press, 1986. – ISBN 0-19-503660-3
- [Gale und Nikaidô 1965] GALE, David ; NIKAIÐÔ, Hukukane: The Jacobian matrix and global univalence of mappings. In: *Mathematische Annalen* 159 (1965), S. 81–93
- [Gofman und Rodeh 1981] GOFMAN, Emanuel ; RODEH, Michael: Loop equations with unknown pipe characteristics. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 107 (1981), Nr. HY9, S. 1047–1060
- [Grombach u. a. 1985] GROMBACH, P. ; HABERER, K. ; TRÜB, E. U.: *Handbuch der Wasserversorgungstechnik*. München - Wien : R. Oldenburg Verlag, 1985

- [Gupta und Bhave 1996] GUPTA, Rajesh ; BHAVE, Pramod R.: Comparison of methods for predicting deficient-network performance. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 122 (1996), Nr. 3, S. 214–217
- [Halhal u. a. 1997] HALHAL, D. ; WALTERS, G. A. ; OUAZAR, D. ; SAVIC, D. A.: Water network rehabilitation with Structured Messy Genetic Algorithm. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 123 (1997), Nr. 3, S. 137–146
- [Harker 1991] HARKER, Patrick T.: Generalized Nash games and quasi-variational inequalities. In: *European Journal of Operations Research* 54 (1991), S. 81–94
- [Harker und Pang 1990] HARKER, Patrick T. ; PANG, Jong-Shi: Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications. In: *Mathematical Programming* 48 (1990), Nr. 2, (Ser. B), S. 161–220
- [Heuser 1993] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. 8. Aufl. Stuttgart : B. G. Teubner, 1993. – ISBN 3-519-02232-9
- [Hiriart-Urruty und Lemaréchal 1993] HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste ; LEMARÉCHAL, Claude: *Convex analysis and minimization algorithms. I*. Berlin : Springer-Verlag, 1993. – Fundamentals. – ISBN 3-540-56850-6
- [Hoke 1978] HOKE, Gustav: Die Eichung und Berechnung vermaschter Rohrnetze. In: *GWF-Wasser/Abwasser* 119 (1978), Nr. 12, S. 586–589
- [Holler und Illing 1993] HOLLER, Manfred J. ; ILLING, Gerhard: *Einführung in die Spieltheorie*. 2. Aufl. Berlin : Springer-Verlag, 1993. – ISBN 3-540-56243-5
- [Jahn 1996] JAHN, Johannes: *Introduction to the theory of nonlinear optimization*. 2. Aufl. Berlin : Springer-Verlag, 1996. – ISBN 3-540-61407-9
- [Jeppson und Davis 1976] JEPPESSON, Roland W. ; DAVIS, Allen L.: Pressure reducing valves in pipe network analysis. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 102 (1976), Nr. HY7, S. 987–1001
- [Kennedy u. a. 1991] KENNEDY, Mark S. ; SARIKELLE, Simsek ; SURAVALLOP, Khis: Calibrating hydraulic analyses of distribution systems using fluoride tracer studies. In: *American Water Works Association Journal* 83 (1991), Nr. 7, S. 54–59

- [Kesavan und Chandrashekar 1972] KESAVAN, H. K. ; CHANDRASHEKAR, M.: Graph-theoretic models for pipe network analysis. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 98 (1972), Nr. HY2, S. 345–363
- [Koelle u. a. 1996] KOELLE, E. ; JR, E. L. ; ANDRADE, J. G. P.: Leak detection and monitoring in hydraulic networks. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.): *Hydraulic Engineering Software VI*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1996, S. 153–162
- [Kottmann 1972] KOTTMANN, Albrecht: Ermittlung der Rauigkeit von Versorgungsnetzen auf der Grundlage kurzzeitig gemessener Entnahmen. In: *GWF-Wasser/Abwasser* 113 (1972), Nr. 6, S. 249–253
- [Kuhn und Tucker 1951] KUHN, Harold W. ; TUCKER, Albert W.: Nonlinear Programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*. Berkeley and Los Angeles : University of California Press, 1951, S. 481–492
- [Kyparisis 1992] KYPARISIS, Jerzy: Parametric variational inequalities with multivalued solution sets. In: *Mathematics of Operations Research* 17 (1992), Nr. 2, S. 341–364
- [Lam und Wolla 1972a] LAM, Chan F. ; WOLLA, M. L.: Computer analysis of water distribution systems: Part I - formulation of equations. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 98 (1972), Nr. HY2, S. 335–343
- [Lam und Wolla 1972b] LAM, Chan F. ; WOLLA, M. L.: Computer analysis of water distribution systems: Part II - numerical solution. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 98 (1972), Nr. HY3, S. 447–460
- [Liggett 1993] LIGGETT, James A.: Network monitoring and the algorithmic location of leaks under steady and unsteady conditions. In: CABRERA, E. (Hrsg.) ; MARTÍNEZ, F. (Hrsg.): *Water Supply Systems - State of the art and future trends*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1993, S. 251–270
- [Liggett und Chen 1994] LIGGETT, James A. ; CHEN, Li-Chung: Inverse transient analysis in pipe networks. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 120 (1994), Nr. 8, S. 934–955

- [Lindner 1992] LINDNER, Helmut: *Physik für Ingenieure*. 13. Aufl. Leipzig - Köln : Fachbuchverlag, 1992. – ISBN 3-343-00772-2
- [Makar und Chagnon 1999] MAKAR, Jon ; CHAGNON, Nathalie: Inspecting systems for leaks, pits, and corrosion. In: *American Water Works Association Journal* 91 (1999), Nr. 7, S. 36–46
- [Mangasarian 1969] MANGASARIAN, Olvi L.: *Nonlinear Programming*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1969
- [Marsden und Tromba 1995] MARSDEN, Jerrold E. ; TROMBA, Anthony J.: *Vektoranalysis : Einführung, Aufgaben, Lösungen*. Heidelberg - Berlin - Oxford : Spektrum Akademischer Verlag, 1995. – ISBN 3-86025-149-X
- [Martin und Peters 1963] MARTIN, D. W. ; PETERS, G.: The Application of Newton's Method to Network Analysis by Digital Computer. In: *Journal of the Institute of Water Engineers* 17 (1963), S. 115–129
- [May 1994] MAY, J.: Pressure dependent leakage. In: *World Water and Environmental Engineering* (1994), Nr. 10, S. 10
- [Meier und Barkdoll 2000] MEIER, Roger W. ; BARKDOLL, Brian D.: Sampling design for network calibration using genetic algorithms. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 126 (2000), Nr. 4, S. 245–250
- [Millar 1951] MILLAR, W.: Some general theorems for non-linear systems possessing resistance. In: *The Philosophical Magazine* 42 (1951), Nr. 7, S. 1150–1160
- [Moritz und Wagner 2000] MORITZ, Thomas ; WAGNER, Robert: Permanente Lecküberwachung von Trinkwasserleitungen. In: *Wasser Abwasser Praxis (WAP)* (2000), Nr. 5, S. 20–22
- [Nash und Karney 1999] NASH, Garth A. ; KARNEY, Bryan W.: Efficient inverse transient analysis in series pipe systems. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 125 (1999), Nr. 7, S. 761–764
- [Nash 1950] NASH, John F.: Equilibrium points in  $n$ -person games. In: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 36 (1950), S. 48–49
- [Nash 1951] NASH, John F.: Non-cooperative games. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (1951), S. 286–295

- [Nielsen 1989] NIELSEN, Hans B.: Methods for analyzing pipe networks. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 115 (1989), Nr. 2, S. 139–157
- [Nikaidô 1968] NIKAIDÔ, Hukukane: *Convex structures and economic theory*. New York : Academic Press, 1968
- [Nikuradse 1933] NIKURADSE, Johann: Strömungsgesetze in Rauhen Rohren / Verein Deutscher Ingenieure. 1933 (Forschungsheft). – Forschungsbericht
- [Ormsbee 1989] ORMSBEE, Lindell E.: Implicit network calibration. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 115 (1989), Nr. 2, S. 243–257
- [Ormsbee und Lingireddy 1997] ORMSBEE, Lindell E. ; LINGIREDDY, Srinivasa: Calibrating hydraulic network models. In: *American Water Works Association Journal* 89 (1997), Nr. 2, S. 42–50
- [Ormsbee und Wood 1986] ORMSBEE, Lindell E. ; WOOD, Don J.: Explicit pipe network calibration. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 112 (1986), Nr. 2, S. 166–182
- [Ostertag 1999] OSTERTAG, Kurt: Ultraschall-Durchflussmessung im Wasserwerksbetrieb. In: *Wwt-awt* (1999), Nr. 8, S. 22–25
- [Outrata u. a. 1998] OUTRATA, Jiří V. ; KOČVARA, Michal ; ZOWE, Jochem: *Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1998. – Theory, applications and numerical results. – ISBN 0-7923-5170-3
- [Panagiotopoulos 1976] PANAGIOTOPOULOS, P. D.: Convex analysis and unilateral static problems. In: *Ingenieur-Archiv* 45 (1976), Nr. 1, S. 55–68
- [Panagiotopoulos 1977] PANAGIOTOPOULOS, P. D.: Ungleichungsprobleme in der Mechanik / Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1977. – Habilitationsschrift
- [Perry 1981] PERRY, Patrick F.: Demand forecasting in water supply networks. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 107 (1981), Nr. HY9, S. 1077–1087
- [Qiu und Magnanti 1989] QIU, Yuping ; MAGNANTI, Thomas L.: Sensitivity analysis for variational inequalities defined on polyhedral sets. In: *Mathematics of Operations Research* 14 (1989), Nr. 3, S. 410–432

- [Rahal u. a. 1980] RAHAL, C. M. ; STERLING, M. J. H. ; COULBECK, B.: Parameter tuning for simulation models of water distribution networks. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 69 (1980), Nr. 9, S. 751–762
- [Rahal 1994] RAHAL, H.: Water distribution network steady state simulation AQUA-NET model. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.) ; KATSIFARAKIS, K. L. (Hrsg.): *Hydraulic Engineering Software V* Bd. 1. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1994, S. 395–402
- [Reddy u. a. 1996] REDDY, P. V. N. ; SRIDHARAN, K. ; RAO, P. V.: WLS method for parameter estimation in water distribution networks. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 122 (1996), Nr. 3, S. 157–164
- [Robinson 1980] ROBINSON, Stephen M.: Strongly regular generalized equations. In: *Mathematics of Operations Research* 5 (1980), Nr. 1, S. 43–62
- [Rockafellar 1970] ROCKAFELLAR, R. T.: *Convex analysis*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1970. – ISBN 0-691-08069-0
- [Rockafellar und Wets 1998] ROCKAFELLAR, R. T. ; WETS, Roger J.-B.: *Variational analysis*. Berlin : Springer-Verlag, 1998. – ISBN 3-540-62772-3
- [Rosen 1965] ROSEN, J. B.: Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. In: *Econometrica* 33 (1965), Nr. 3, S. 520–534
- [Savic und Walters 1997] SAVIC, Dragan A. ; WALTERS, Godfrey A.: Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 123 (1997), Nr. 2, S. 67–77
- [Shamir und Howard 1968] SHAMIR, Uri ; HOWARD, Charles D. D.: Water distribution systems analysis. In: *ASCE Journal of the Hydraulics Division* 94 (1968), Nr. HY1, S. 219–234
- [Simpson 1999] SIMPSON, Angus R.: Modeling of pressure regulating devices - a major problem yet to be satisfactorily solved in hydraulic simulation. In: *Water Distribution Systems Conference*. Tempe, Arizona, 1999
- [Tobin 1986] TOBIN, Roger L.: Sensitivity analysis for variational inequalities. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 48 (1986), Nr. 1, S. 191–209

- [Vairavamoorthy und Lumbers 1998] VAIRAVAMOORTHY, Kalanithy ; LUMBERS, Jeremy: Leakage reduction in water distribution systems: Optimal valve control. In: *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 124 (1998), Nr. 11, S. 1146–1154
- [Volkman 1991] VOLKMANN, Lutz: *Graphen und Digraphen*. Wien : Springer-Verlag, 1991. – Eine Einführung in die Graphentheorie. – ISBN 3-211-82267-4
- [Walski 1983] WALSKI, Thomas M.: Technique for calibrating network models. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 109 (1983), Nr. 4, S. 34–38
- [Walski 1986] WALSKI, Thomas M.: Case study: Pipe network model calibration issues. In: *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 112 (1986), Nr. 2, S. 238–249
- [Walski 1990] WALSKI, Thomas M.: Sherlock Holmes meets Hardy-Cross. In: *American Water Works Association Journal* 82 (1990), Nr. 3, S. 34–38
- [Walters und Lohbeck 1993] WALTERS, Godfrey A. ; LOHBECK, Tilman: Optimal layout of tree networks using genetic algorithms. In: *Engineering Optimization* 22 (1993), S. 27–48
- [Walters u. a. 1994] WALTERS, Godfrey A. ; SAVIC, Dragan A. ; SCHAEZTEN, Werner de ; ATKINSON, Roger M.: Calibration of water distribution network models using Genetic Algorithms. In: BLAIN, W. R. (Hrsg.) ; KATSIFARAKIS, K. L. (Hrsg.): *Hydraulic Engineering Software VII* Bd. 1. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1994, S. 131–140
- [Wood und Funk 1993a] WOOD, D. J. ; FUNK, E.: Hydraulic analysis of water distribution systems, Part 1: Hydraulic network equations and reliability of solutions. In: CABRERA, E. (Hrsg.) ; MARTÍNEZ, F. (Hrsg.): *Water Supply Systems - State of the art and future trends*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1993, S. 43–68
- [Wood und Funk 1993b] WOOD, Don J. ; FUNK, James E.: Hydraulic analysis of water distribution systems, Part 2: Explicit calculation of pipe network parameters for regular and time varying conditions. In: CABRERA, E. (Hrsg.) ; MARTÍNEZ, F. (Hrsg.): *Water Supply Systems - State of the art and future trends*. Southampton, U.K. : Computational Mechanics Publications, 1993, S. 69–85

- [Wu u. a. 2001] WU, Zheng Y. ; BOULOS, Paul F. ; ORR, Chun H. ; RO, Jun J.:  
Using Genetic Algorithms to rehabilitate distribution systems. In: *American Water  
Works Association Journal* 93 (2001), Nr. 11, S. 74–85

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispielgraph $D$ . . . . .	9
2.2	Im Beispielgraph $D$ enthaltener Wurzelbaum $T_1$ . . . . .	10
2.3	Im Beispielgraph $D$ enthaltener Wald $F$ . . . . .	10
2.4	Im Beispielgraph $D$ enthaltenes Gitter $G$ . . . . .	11
2.5	Im Gitter $G$ enthaltene Schleifen $C_i, i = 1, \dots, 4$ . . . . .	12
2.6	Darstellung des Gitters in Pfaden $G^p = (V^p, P, H^p)$ . . . . .	13
2.7	Zusammenhangskomponenten des Graphen . . . . .	14
2.8	'Co-Content' $W$ und 'Content' $W^c$ eines Druckrohres (Index $j$ ) . . . . .	28
3.1	Bsp.: Punkt $\mathbf{x}^*$ ist nicht Lösung von $\min_{\mathbf{C}} f(\mathbf{x})$ . . . . .	44
3.2	Bsp.: $f$ nimmt im Punkt $\mathbf{x}^*$ ihr Minimum über $\mathbf{C}$ an . . . . .	44
3.3	Minimum von $y = 1 + (x + 1)^2$ für unterschiedliche zulässige Bereiche . . . . .	45
4.1	Hydraulisches Gesetz $h_{CHV} \mapsto q_{CHV}$ und 'Co-Content' $W_{CHV}$ für Rückflussverhinderer . . . . .	64
4.2	Hydraulisches Gesetz $q_{CHV} \mapsto h_{CHV}$ und 'Content' $W_{CHV}^c$ für Rückflussverhinderer . . . . .	65
4.3	Hydraulisches Gesetz $h_{PUMP} \mapsto q_{PUMP}$ und 'Co-Content' $W_{PUMP}$ für Pumpe/Booster . . . . .	66
4.4	Hydraulisches Gesetz $q_{PUMP} \mapsto h_{PUMP}$ und 'Content' $W_{PUMP}^c$ für Pumpe/Booster . . . . .	67
4.5	Hydraulisches Gesetz $h_{FCV-C} \mapsto q_{FCV-C}$ und 'Co-Content' $W_{FCV-C}$ für Durchflusskontrollschieber Typ C . . . . .	68

4.6	Hydraulisches Gesetz $q_{FCV-C} \mapsto h_{FCV-C}$ und 'Content' $W_{FCV-C}^c$ Durchflusskontrollschieber Typ C . . . . .	68
4.7	Hydraulisches Gesetz $h_{PBV} \mapsto q_{PBV}$ und 'Co-Content' $W_{PBV}$ für Druck- minderungsventil mit regelbarer Druckdifferenz . . . . .	69
4.8	Hydraulisches Gesetz $q_{PBV} \mapsto h_{PBV}$ und 'Content' $W_{PBV}^c$ für Druck- minderungsventil mit regelbarer Druckdifferenz . . . . .	70
4.9	Schleifentransformation durch Multiplikation mit $T$ . . . . .	82
5.1	Beispielsystem . . . . .	91
5.2	Potenzielle Energie $\Pi^{pot}$ der Wassersäule . . . . .	93
5.3	Hydrostatisches Gleichgewicht - System mit PRV . . . . .	95
5.4	Druckschleife ist Teilmenge der Flussschleifen . . . . .	105
5.5	Druckschleife ist nicht Teilmenge der Flussschleifen . . . . .	106
5.6	Beispiel mit drei PRVs, Voraussetzung ?? erfüllt . . . . .	110
5.7	Beispiel aus Simpson (1999) . . . . .	118
5.8	Nash-Gleichgewicht ohne zusätzliche Flussrestriktionen . . . . .	119
5.9	Nash-Gleichgewicht a) PRV aktiv, b) PRV und FCV aktiv . . . . .	120
6.1	Rauheit von Rohr 2 a) kalibrierbar b) nicht kalibrierbar . . . . .	133
6.2	Darstellung der Druckverhältnisse bei unzureichender Versorgung . . . . .	135
6.3	Operatoren $h_{IS} \mapsto q_{IS}$ und $q_{IS} \mapsto h_{IS}$ . . . . .	136
6.4	Hydraulisches Modell druckabhängiger Leckage . . . . .	137
6.5	Bsp. für hydraulische Beziehung druckabhängiger Leckage . . . . .	138
6.6	Beispiel für Wasserversorgungssystem . . . . .	145
6.7	Druckganglinie Knoten 4 . . . . .	146
6.8	Druckganglinie Knoten 7 . . . . .	147
6.9	Tagesganglinie der gemessenen Einspeisung aufgeteilt in Verlust und Verbrauch . . . . .	151
C.1	Gesamtübersicht über Simulationsmodell der Stadt Erfurt . . . . .	175
C.2	Gesamtgraph Erfurt . . . . .	176

C.3	Waldstruktur . . . . .	176
C.4	Gitterstruktur . . . . .	176
C.5	Gitter mit Pfaden . . . . .	176
C.6	Beispiel Erfurt - Anordnung von zusätzlichem PRV und FCV . . . . .	178

# Lebenslauf

**Name:** Deurerlein  
**Vorname:** Jochen  
**Familienstand:** ledig, 1 Kind  
**Geburtsdatum:** 10.1.1971  
**Geburtsort:** Neuendettelsau  
**Nationalität:** deutsch

## Schulbildung:

1977 - 1981 Grundschole Neuendettelsau  
1981 - 1990 Gymnasium Windsbach  
1990 Abitur in den Leistungskursen Latein/Griechisch

## Zwischentätigkeiten:

8/1990 - 2/1991 Arbeitertätigkeit  
3/1991 - 5/1991 Praktikum

## Studium:

10/1991-11/1997 Studium des Bauingenieurwesens  
an der Universität Karlsruhe (TH)  
11/1997 Abschluss (Diplom) in der Vertiefungs-  
richtung 'Konstruktiver Ingenieurbau'

## Nebentätigkeit:

7/1993 - 11/1997 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut  
für Baustatik der Universität Karlsruhe (TH)

## Zivildienst:

12/1997 - 12/1998 Zivildienst am Institut für Wasserwirtschaft und  
Kulturtechnik der Universität Karlsruhe (TH)

## Beruf:

seit 2/1999 Doktorand am Institut für Wasserwirtschaft und  
Kulturtechnik der Universität Karlsruhe (TH),  
2/99-9/00 Rektoratsstipendium  
seit 10/00 Landesgraduierföderung Baden-Württemberg

Karlsruhe, 10.04.2002

*Bisher erschienene Mitteilungen aus dem Institut für  
Wasserwirtschaft und Kulturtechnik*

*Bisher erschienene Mitteilungen aus dem Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik*

- Heft 154/1968 *Ein Beitrag zur Erforschung von örtlichen Auskolkungen hinter geneigten Befestigungsstrecken in Abhängigkeit der Zeit; E. Mosonyi, B. Schoppmann*
- Institutsberichte über die Modellversuche seit 1962*
- Institutsberichte über die Exkursionen des Lehrstuhls für Wasserbau und Wasserwirtschaft seit 1965; E. Mosonyi, B. Schoppmann*
- Heft 155/1969 *Kolkbildung in feinen oder leichten Sohlmaterialien bei strömendem Abfluß; J.W. Dietz*
- Heft 156/1969 *Widerstandskräfte und Energiedissipation bei Verteilerklötzen im Wechselsprung; R. Muser*
- Schwebstoffführung feinsandiger Wasserläufe; St. Bruk*
- Heft 157/1969 ◦ *Widerstand schräg angeströmter Rechengitter; J. Zimmermann*
- Untersuchungen zur Durchströmung des Kraghammer Sattels an der Biggetalsperre nach neuentwickelten Methoden der Felshydraulik; W. Wittke, Cl. Louis*
- Heft 158/1970 ◦ *Hydrodynamik der nichtstationären Dränung; G. Karadi, J. Gyuk, R.A. Williams*
- An Experimental Study of Thin-Sheet Flow over Inclined Surfaces; O.N. Wakhl*
- Schiffsträgheitskräfte als Indikator für die Güte von Schleusenfüllsystemen; E. Mosonyi, R. Muser*
- Schwall- und Sunkerscheinungen aus Schleusenbetrieb in Schiffahrtskanälen; Maßnahmen zur Sicherung des Schiffahrtsbetriebes; R. Muser, G. Meder*
- Beitrag zur Berechnung von Schleusenfüllungen; H.H. Bernhart*
- Spitzenmaßstab und L-O-Integrator, ein Gerät zur genauen Messung des Wasserspiegels in Modellversuchen; W. Götz, K. Schwedes*
- Turbulenzmessungen in Wasser mit Heißfilmanemometer; B. Schoppmann*
- Messung von Größe und Richtung der mittleren Geschwindigkeit in einem zweidimensionalen Strömungsfeld; K. Schwedes*
- Parameterfreie statistische Methoden zur Analyse von Datenreihen; H. Eggers*
- Dreidimensionale, anisotrope Kluftwasserströmung; W. Wittke*
- Heft 159/1972 ◦ *Ein Verfahren zur Richtungs- und Betragsbestimmung von Vektoren mittlerer Strömungsgeschwindigkeit einer turbulenten Strömung; K. Schwedes, H. Weiher*
- Hydraulische Stabilität bei Wasserkraftanlagen; H. Berge*
- Land Reclamation Projects as Essential Elements of Economic Development Programmes; G.E. Papadopoulos*

*Institutsberichte über die Modellversuche und Forschungsarbeiten seit 1969*

*Institutsberichte über die Exkursionen des Lehrstuhls für Wasserbau und Wasserwirtschaft seit 1969*

- Heft 160/1973*     *Das Widerstands-Kapazitätsnetzwerk zur Simulation instationärer Grundwasserströmungen; A. Widmer*
- Der elektrolytische Trog zur Lösung stationärer dreidimensionaler Grundwasserströmungsfälle; U. Stentzel, K. Schwedes*
- Standfiltermodelle mit und ohne Überströmung zur Untersuchung von Selbstdichtungsmechanismen an Gewässersohlen; S.G. van Riesen*
- Anhang: Veröffentlichungen, Vorträge, Dissertationen der Abteilung für Kulturtechnische Untersuchungen (Lehrgebiet Landwirtschaftlicher Wasserbau) auf dem Gebiet der Grundwasserforschung*
- Heft 161/1974*     *Strömungs- und Transportmechanismen einer fortschreitenden Auskolkung; B. Schoppmann*
- Water Resources Development in the U.A.R.; F. Nicola*
- Heft 162/1974* ◦   *Dünnschichtabfluß auf stark geneigter Ebene; G. Karantounias*
- Die Entwicklung der Sparschleusen des Main-Donau-Verbindungskanals mit besonderer Betrachtung der Sparschleuse Leerstetten; R. Muser*
- Neuere Methoden für die Analyse hydrologischer Systeme; G.M. Karadi*
- Die Impedanz eines axial oszillierenden Sphäroids in einem nicht zusammendrückbaren Medium; R.Y.S. Lai, G.M. Karadi*
- Heft 163/1975* ◦   *Sekundärströmungen in aufeinanderfolgenden Gerinnekrümmungen; W. Götz*
- Darstellung von skalaren Zustandsfeldern in beliebigen Kontrollräumen und ihre Nutzungsanwendung in der Hydrostatik mit Hilfe eines neuen Verfahrens der Vektoranalysis; M. Spielbauer*
- Die Berechnung der Hochwasserwahrscheinlichkeit für deutsche Flußgebiete; D. Koberg, H. Eggers, W. Buck*
- Drei Jahrzehnte operationelle Hydrologie; E. Walser*
- Heft 164/1976*     *Einfluß der Schließzeit auf die Druckstoßtransmission durch Wasserschläsler; H.H. Bernhart*
- Verstärkung und Erhöhung von Betonstauauern; E. Vallarino*
- Heft 165/1976*     *Die Auswahl des Bemessungshochwassers als ein Entscheidungsproblem unter Risiko und Ungewißheit; W. Buck*
- Heft 166/1977*     *Einfluß von Sickerströmungen auf den Geschiebetransport; K.E. Wedemann*
- Heft 167/1979*     *Der Einfluß seltener Ereignisse bei der Bestimmung der Hochwasserwahrscheinlichkeit; H. Eggers*
- Statistisch erzeugte Serien von Hochwasserwellen; S. Weingärtner*

- Heft 168/1982 *Strömungscharakteristiken in einem Kanal mit 180°-Krümmungen; W. Siebert*
- Bestimmung des Bemessungshochwassers mit Hilfe der Clusteranalyse; W. Kieffer*
- Heft 169/1982 *Entwurfskriterien zur Schleusenplanung; H.H. Bernhart*
- Heft 170/1984 *Druckerhöhungen durch instationäre Vorgänge in Schiffsschleusen mit großen Stufenhöhen; P.M. Schmelzle*
- Heft 171/1984 *Beitrag zur Hydromechanik von Schwall- und Sunkwellen; N. Göbel*
- Heft 172/1985 *Abschiedskolloquium zu Ehren von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.rer.techn., Dr.sc.h.c., Dr.-Ing. E.h., Dr.sc.h.c., Dr.sc.h.c. E. Mosonyi*
- Heft 173/1986 ◦ *Vor- und Nachteile des naturnahen Gewässerlaufes im Vergleich zu kanalisiertem Fließgewässern; H. Willy*
- Heft 174/1986 *Naturnahe Umgestaltung ausgebauter Fließgewässer. Beiträge zum Wasserbaulichen Kolloquium am 14.02.1986 in Karlsruhe*
- Heft 175/1986 ◦ *Naturnahe Umgestaltung ausgebauter Fließgewässer Projektstudie; K. Kern, I. Nadolny*
- Heft 176/1987 ◦ *Der Einfluß von Querströmungen auf ein Schiff bei beschränkten Fahrwassertiefen; F. Bakowies*
- Heft 177/1988 *Zur Bemessung von Geschiebeabzügen; G.M. Kley*
- Heft 178/1988 *Hydraulik der kontinuierlichen und intermittierenden Furchenbewässerung: ein hydrodynamisches Modell; M. Awwad*
- Heft 179/1990 *Sturzwasserbewässerung. Bewässerung mit Niederschlagswasser ohne Zwischenspeicherung im Sahel; W. Klemm*
- Heft 180/1991 *Beiträge zur naturnahen Umgestaltung von Fließgewässern*
- Heft 181/1991 ◦ *Naturgemäße Bauweisen von Sohlenbauwerken und Fischaufstiegen zur Vernetzung der Fließgewässer; R.-J. Gebler*
- Heft 182/1991 *Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten von Gerinnesohlen; A. Dittrich, M. Rosport, O. Badde*
- Heft 183/1993 *Der Einfluß der Belüftung auf die Kavitationserosion; N. Eisenhauer*
- Heft 184/1993 *Nicht als Institutsmitteilung erschienen, als Buch erhältlich beim Springer Verlag: Grundlagen naturnaher Gewässergestaltung. Geomorphologische Entwicklung von Fließgewässern; K. Kern*
- Heft 185/1993 *Ausbauoptimierung dezentraler Wasserkraftsysteme; H. Hildebrand*
- Heft 186/1994 *Turbulente, abgelöste Zweischichtenströmung über Sohlschwellen in einem offenen Rechteckgerinne; U. Kertzscher*
- Heft 187/1994 *Untersuchung des Niederschlags- und Abflußgeschehens im westafrikanischen Sahel. Abschätzung des Wasserdargebots aus kleinen Einzugsgebieten mittels stochastischer Methoden unter Verwendung von Satellitenbilddaten; W. Tauer*

- Heft 188/1994*      *Bedarfsprognosen als Basis der Steuerungsoptimierung von Wasserversorgungssystemen; S. Ates*
- Heft 189/1994*      *Morphologie und Hydrologie naturnaher Flachlandbäche unter gewässertypologischen Gesichtspunkten - Gewässermorphologische und hydrologische Grundlagen für naturgemäßen Wasserbau und ökologische Gewässerentwicklung; I. Nadolny*
- Heft 190/1994*      *Ein Erosionsmodell mit räumlich und zeitlich veränderlicher Rillensmorphologie; M. Schramm*
- Heft 191/1995*      *Oberflächenabfluß und Bodenerosion in Kleineinzugsgebieten mit Mergelböden unter einem semiariden mediterranen Klima; D. Gomer*
- Heft 192/1995*      *Typologische und morphologische Untersuchungen an Bergbächen im Buntsandstein-Odenwald; G. Humborg*
- Heft 193/1997*      *Die Oberrheinkorrektion in Baden - Zur Umweltgeschichte des 19. Jahrhunderts; T. Löbert*
- Heft 194/1997*      *Erosionsprozesse auf Lößböden: Experimente und Modellierung; K. Gerlinger*
- Heft 195/1997*      *Synthese von biologischer und wasserbaulicher Analyse zur Bewertung von renaturierten Fließgewässern der Oberrheinebene; S. Kiene*
- Heft 196/1997*      *Fließwiderstand und Sohlstabilität steiler Fließgewässer unter Berücksichtigung gebirgsbachtypischer Sohlstrukturen; M. Rosport*
- Heft 197/1997*      *Ein Finite-Punkte-Verfahren für stationäre zweidimensionale Strömungen mit freier Oberfläche; C.J. Du*
- Heft 198/1998*      *Wechselwirkung Morphologie/Strömung naturnaher Fließgewässer; A. Dittrich*
- Heft 199/1999*      *Entwicklung naturnaher Gewässerstrukturen - Grundlagen, Leitbilder, Planung; J. Scherle*
- Heft 200/1999*      *Zwei-Schichtenströmungen über Sohlenschwellen bei intern überkritischer Strömung; Y. Wang*
- Hydraulic Design Considerations for Low- and High-Head Gates; E. Naudascher*
- Heft 201/1999*      *Numerische Simulation von Staustufenketten mit automatisiertem Betrieb; S. Theobald*
- Heft 202/1999*      *Der Einfluß von kurzen Gehölzstreifen auf den Hochwasserabfluß in Flüssen mit gegliedertem Querschnitt; K. Becker*
- Heft 203/1999*      *Typisierungskonzept zur Festlegung einer ökologisch begründeten Mindestwasseremenge; M. Scherer*
- Heft 204/1999*      *Inseln und deren Widerstandsverhalten in Fließgewässern; A. Maryono*
- Heft 205/1999*      *Boden- und Wasserschutz in landwirtschaftlich genutzten Gebieten der Mata Atlântica Brasiliens; M. Kunzmann*

- Heft 206/2000*      *Nutzung von Landsat Thematic Mapper Daten zur Ermittlung hydrologischer Parameter; S. Belz*
- Heft 207/2000*      *Untersuchung der Rauheitsstruktur zur Bestimmung des Fließwiderstandes in Gebirgsbächen unter Klarwasserabfluß; J. Aberle*
- Heft 208/2000*○      *Three Dimensional Computation of Turbulent Flow in Meandering Channels; V. T. Nguyen*
- Heft 209/2001*      *Sedimenttransportprozesse im Himalaya-Karakorum und ihre Bedeutung für Wasserkraftanlagen; S. Palt*
- Heft 210/2002*      *Die Identifikation hydrologischer Prozesse im Einzugsgebiet des Dürreychbaches (Nordschwarzwald); M. Casper*
- Heft 211/2001*      *Einfluß von Regelungsbauwerken auf die Wasserspiegellagen in Flüssen; F. Ritzert*
- Heft 212/2001*      *Konzept für einen ganzheitlichen Gewässerschutz; W. Hauck*
- Heft 213/2002*      *A Hydrodynamic-Numerical Model of the River Rhine; P. T. Minh Thu*
- Heft 214/2002*      *Zur hydraulischen Systemanalyse von Wasserversorgungsnetzen; J. Deuerlein*

*Bestellungen an: Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik  
Bibliothek  
Universität Karlsruhe  
Kaiserstr. 12  
D-76128 Karlsruhe  
Tel.: (0721) 608 6389  
Fax: (0721) 60 60 46  
e-mail: raskob@iwk.uka.de*

---

○ *vergriffen*