



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6002

**Formulierung
und Integration
von Stoffgesetzen
zur Beschreibung
großer Deformationen
in der Thermoplastizität
und -viskoplastizität**

W. Jansohn

Institut für Materialforschung

Oktober 1997

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6002

Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur
Beschreibung großer Deformationen in der
Thermoplastizität und -viskoplastizität

Wolfgang Jansohn

Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1997

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Gegenstand des vorliegenden Berichts ist die Formulierung und Integration von Materialmodellen in der Thermomechanik. Basierend auf dem Konzept der dualen Variablen werden Materialmodelle der Plastizität und Viskoplastizität mit nichtlinearer kinematischer und nichtlinearer isotroper Verfestigung vorgestellt. Die Evolutionsgleichungen erfüllen die innere Dissipationsungleichung in jedem zulässigen Prozeß.

Im Hinblick auf eine effektive numerische Integration werden vereinfachte Versionen dieser Materialmodelle vorgestellt. In ihnen werden die thermoelastischen Dehnungen als klein angenommen und eine vereinfachte kinematische Verfestigungsregel zugrunde gelegt. Weiterhin wird zur Implementierung in das Finite Elemente Programm ABAQUS das Elastizitätsgesetz durch ein Hypoelastizitätsgesetz approximiert.

Für die vereinfachten Materialmodelle wird ein impliziter Zeitintegrationsalgorithmus vorgestellt. Um einen numerisch objektiven Algorithmus zu erhalten, wird zunächst der HUGHES-WINGET-Algorithmus angewandt. Innerhalb des resultierenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen können drei Operatoren unterschieden werden, die unterschiedliche physikalische Effekte repräsentieren. Die Anwendung eines Operator-Split-Verfahrens, welches diese Struktur des gegebenen Differentialgleichungssystems ausnutzt, liefert ein effektives Integrationsverfahren für die betrachteten Materialmodelle. Die quadratische Konvergenz bei der Lösung der Grundgleichungen der Finite Elemente Methode (den zugrundeliegenden, diskretisierten, thermomechanischen Feldgleichungen) wird durch konsistente Linearisierung des Integrationsalgorithmus gesichert.

Das vorgestellte Integrationsverfahren ist als User-Subroutine UMAT in ABAQUS implementiert. Die Eigenschaften des Algorithmus werden zunächst anhand von Testrechnungen an einem einzelnen Element unter vorgegebener Zug-Druck-Belastung untersucht. Zur weiteren Verifikation der konstitutiven Theorie wird die Berechnung des Einschnürvorgangs einer Zugprobe sowie die Simulation eines Stauchversuchs betrachtet.

Formulation and Integration of Constitutive Models Describing Large Deformations in Thermoplasticity and Thermoviscoplasticity

Abstract

This report deals with the formulation and numerical integration of constitutive models in the framework of finite deformation thermomechanics. Based on the concept of dual variables, plasticity and viscoplasticity models exhibiting nonlinear kinematic hardening as well as nonlinear isotropic hardening rules are presented. Care is taken that the evolution equations governing the hardening response fulfill the intrinsic dissipation inequality in every admissible process.

In view of the development of an efficient numerical integration procedure, simplified versions of these constitutive models are supposed. In these versions, the thermoelastic strains are assumed to be small and a simplified kinematic hardening rule is considered. Additionally, in view of an implementation into the ABAQUS finite element code, the elasticity law is approximated by a hypoelasticity law.

For the simplified constitutive models, an implicit time-integration algorithm is developed. First, in order to obtain a numerical objective integration scheme, use is made of the HUGHES-WINGET-Algorithm. In the resulting system of ordinary differential equations, it can be distinguished between three differential operators representing different physical effects. The structure of this system of differential equations allows to apply an operator split scheme, which leads to an efficient integration scheme for the constitutive equations. By linearizing the integration algorithm the consistent tangent modulus is derived. In this way, the quadratic convergence of Newton's method used to solve the basic finite element equations (i.e. the finite element discretization of the governing thermomechanical field equations) is preserved.

The resulting integration scheme is implemented as a user subroutine UMAT in ABAQUS. The properties of the applied algorithm are first examined by test calculations on a single element under tension-compression-loading. For demonstrating the capabilities of the constitutive theory the necking of a tensile specimen and the upsetting of a billet is simulated.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Gegenstand der Arbeit	1
1.2	Notation und Operatoren	3
2	Grundgleichungen der Thermomechanik	9
2.1	Kinematik	9
2.2	Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und Konzept der Dualen Variablen	11
2.3	Bilanzgleichungen	15
2.3.1	Erhaltungssatz der Masse	16
2.3.2	Impulssatz	16
2.3.3	Drallsatz	16
2.3.4	Bilanz der Energie	17
2.3.5	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung	17
2.4	Materialgleichungen in der Thermomechanik	18
2.4.1	Fließregel	20
2.4.2	Verfestigungsregeln	21
2.5	Wärmeleitungsgleichung	26
2.6	Vereinfachtes Materialmodell	30
2.6.1	Kleine thermoelastische Deformationen	30

2.6.2	Vereinfachte kinematische Verfestigungsvariable	31
2.6.3	Approximation der Elastizitäts- durch eine Hypoelastizitätsbeziehung	32
2.6.4	Thermoelastische Kopplung beim vereinfachten Materialmodell	33
2.6.5	Zusammenfassung	34
3	Finite Elemente Methode bei thermomechanischen Problemen	37
3.1	Schwache Formulierung der Feldgleichungen	37
3.2	Allgemeine Vorgehensweise bei der Berechnung thermomechanischer Probleme	39
3.3	Zustandsvektorberechnung – Allgemeine Beschreibung	40
3.4	Gleichgewichtsiteration und Tangentensteifigkeitsmatrix	42
3.5	Implementierung eines konstitutiven Modells in ein Finite Elemente Programm	44
4	Materialroutine	45
4.1	Problembeschreibung	45
4.2	Zustandsvektorberechnung	46
4.2.1	Bar-Transformation	46
4.2.2	Bar-transformierte Form der Materialgleichungen	47
4.2.3	Anforderungen aus der Konsistenzbedingung	49
4.2.4	Inkrementelle Objektivität	50
4.2.5	Bestimmung der unabhängigen Variablen $\dot{\theta}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{W}}$	52
4.2.6	Integration bzgl. \mathbf{R}_t und bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$	58
4.2.7	Operator-Split für die Materialgleichungen	59
4.2.8	Integration des Teilproblems 1	61
4.2.9	Integration des Teilproblems 2	63
4.2.10	Integration des Teilproblems 3	67
4.2.11	Ergebnis der Zustandsvektorberechnung	68
4.2.12	Zusammenfassung	69
4.3	Berechnung der thermoelastischen Kopplung und der dissipierten Spannungsleistung	72

4.4	Beiträge zur Tangentensteifigkeit	74
4.4.1	Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{S}}$	75
4.4.2	Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta \theta} \tilde{\mathbf{S}}$	76
4.4.3	Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta u} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$	76
4.4.4	Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta \theta} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$	77
5	Numerische Beispiele	78
5.1	Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialroutine	78
5.2	Simulation eines Zugversuchs	84
5.3	Simulation eines Stauchversuchs	97
6	Abschließende Bemerkungen	106
6.1	Integrationsverfahren bei Elastizität	106
6.2	Zusammenfassung	107
A	Transformationstabellen	114
A.1	Familie 1: Verzerrungstensoren	114
A.2	Familie 1: Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren	115
A.3	Familie 2: Verzerrungstensoren	116
A.4	Familie 2: Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren	117
A.5	Familie 1: Spannungs- und Spannungsgeschwindigkeitstensoren	118
A.6	Familie 2: Spannungs- und Spannungsgeschwindigkeitstensoren	119
B	Grundgleichungen der Finite Elemente Methode	120
C	Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen	122
C.1	Einschrittverfahren	122
C.2	Ein Operator-Split-Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen	123

D Zur Tangentensteifigkeitsberechnung	125
D.1 Berechnung von $\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T$ und $\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T$	125
D.2 Bestimmung der partiellen Ableitungen der Zustandsvariablen	126
D.2.1 Ableitungen für Operator 1	127
D.2.2 Ableitungen für Operator 2	129
D.2.3 Ableitungen für Operator 3	133
D.3 Ableitungen zur Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta u} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$	135
D.4 Ableitungen zur Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta \theta} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$	137

1 Einleitung

1.1 Gegenstand der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Formulierung von Stoffgesetzen zur Beschreibung inelastischen Materialverhaltens von metallischen Werkstoffen im Rahmen einer Theorie großer Deformationen sowie deren numerische Umsetzung in eine UMAT-Subroutine des kommerziellen Finite Elemente Programms ABAQUS. Diese Subroutine stellt ein Werkzeug zur Analyse von materiell und geometrisch nichtlinearen, thermomechanisch gekoppelten Problemen dar.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die Grundgleichungen der Thermomechanik angegeben und das in ABAQUS zu implementierende Materialmodell vorgestellt. Zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen wird das Konzept der dualen Variablen angewandt [1], [2], [3]. Es stellt die benötigten Tensorvariablen und Tensorgeschwindigkeiten zur Verfügung. Durch die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil wird eine fiktive, spannungsfreie Zwischenkonfiguration definiert [4], [5], [6]. Diese bietet sich in natürlicher Weise zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen an, da der Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration additiv in einen rein thermoelastischen und einen rein inelastischen Anteil aufgespalten werden kann. Basierend auf der Vorgehensweise der rationalen Thermomechanik [7], [8] [9] hat TSAKMAKIS ein Materialmodell mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung zur Beschreibung isothermer Deformationen formuliert [10]. Zur wirklichkeitsnahen Materialbeschreibung nichtisothermer Prozesse wird in dieser Arbeit zusätzlich die Temperaturabhängigkeit aller Materialparameter zugrunde gelegt. Im Anschluß daran werden im Hinblick auf eine effiziente numerische Umsetzung kleine thermoelastische Deformationen und eine vereinfachte kinematische Verfestigung angenommen. Bei kleinen thermoelastischen Verzerrungen bleibt insbesondere die Struktur des bzgl. der Zwischenkonfiguration formulierten Materialmodells bei einer Vortransformation in die Momentankonfiguration erhalten. Zusätzlich erfordert die Implementierung in ABAQUS die Hyperelastizitätsbeziehung durch ein Hypoelastizitätsgesetz zu ersetzen [11]. Das resultierende Materialmodell wird vereinfachtes Materialmodell genannt.

Im dritten Kapitel werden die Impulsbilanz und die Wärmeleitungsgleichung in eine schwache Form überführt. Diese bilden den Ausgangspunkt bei der Formulierung der Grundgleichun-

gen der Finite Elemente Methode (Anhang B) (siehe auch [12], [13]). Innerhalb einer Finite Elemente Rechnung wird eine Zeitdiskretisierung vorgenommen. An jeder Zeitstützstelle ist der Verformungs- und Temperaturzustand gesucht, der bei vorgegebenen Randbedingungen die Grundgleichungen der Finite Elemente Methode befriedigt. Dieser Zustand wird Gleichgewichtslage genannt. In einer Materialroutine müssen die Zustandsvariablen an jeder Zeitstützstelle anhand der konstitutiven Gleichungen berechnet werden. Ferner ist bei impliziten Finite Elemente Programmen (z. B. ABAQUS) der konstitutive Anteil der Funktionalmatrix der Grundgleichungen der Finite Elemente Methode (häufig Tangentensteifigkeitsmatrix genannt) zu bestimmen [14], [15]. Anhand der allgemeinen Beschreibung des Berechnungsablaufes einer Finite Elemente Rechnung werden im Kapitel 3 die in der Schnittstelle UMAT zu berechnenden Größen identifiziert.

Die numerische Umsetzung des vereinfachten Materialmodells in eine UMAT-Subroutine zum Finite Elemente Programm ABAQUS wird im 4. Kapitel beschrieben. Bei der inelastischen Bauteilanalyse kann die erfolgreiche Anwendung eines Stoffgesetzes nur durch die Verwendung effizienter numerischer Verfahren gesichert werden. Aufgrund des Rechenaufwandes können keine hochgenauen Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen (z. B. Mehrschritt- oder Extrapolationsverfahren) innerhalb von Materialroutinen angewandt werden. Hier stehen leistungsfähige Algorithmen im Vordergrund, die jeweils die spezielle Struktur des zugrunde gelegten Materialmodells ausnutzen. Die Forderung nach inkrementeller Objektivität des verwendeten Integrationsverfahrens stellt einen weiteren Aspekt bei der Implementierung von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in Materialroutinen dar [16]. Dabei können unterschiedliche Grade von inkrementeller Objektivität gefordert werden [17, S. 73]. Der in ABAQUS angewandte HUGHES-WINGET-Algorithmus [18], [19] gewährleistet einen schwachen Grad an inkrementeller Objektivität. Bei diesem Verfahren werden die konstitutiven Gleichungen mittels der sogenannten *bar-Transformation* [20], [17] in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt. Das resultierende Anfangswertproblem ist mit einem geeigneten Integrationsverfahren zu lösen. Hier haben sich vielfach Operator-Split-Verfahren bewährt [21], [22], [23], [17], [24], [25]. Dabei sind Splits anzustreben, die der physikalischen Bedeutung der einzelnen Terme in den Materialgleichungen Rechnung tragen [26, S. 662]. In dieser Arbeit werden in den *bar-transformierten* Gleichungen des vereinfachten Materialmodells bei Viskoplastizität drei, bei Plastizität zwei Operatoren unterschieden. Der erste Operator repräsentiert die Thermoelastizität, der zweite die einer Fallunterscheidung unterworfenen inelastischen Terme (dynamische Erholungsterme) und der dritte kennzeichnet bei Viskoplastizität die statischen Erholungsterme. Das im Anhang C beschriebene Operator-Split-Verfahren wird mit der Mittelpunktsregel für Operator 1 und dem impliziten Euler-

Verfahren für Operator 2 und Operator 3 durchgeführt. Durch diesen Split müssen innerhalb der Materialroutine lediglich eine nichtlineare skalarwertige Gleichung bei Plastizität bzw. drei nichtlineare skalarwertige Gleichungen bei Viskoplastizität iterativ gelöst werden. Im Anschluß an die Zustandsvariablenberechnung werden die konstitutiven Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix ermittelt.

Im fünften Kapitel werden Berechnungsbeispiele vorgestellt, anhand derer die Merkmale der Materialroutine diskutiert werden. Zunächst wird eine Untersuchung des Konvergenzverhaltens an einem einzelnen Element durchgeführt. Im Anschluß daran wird ein Zugexperiment simuliert. Der gezeigte Einschnürvorgang ist eine Folge der dissipativen Aufheizung und der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter. Den Abschluß bildet die Berechnung eines Stauchversuchs, wobei unterschiedliche Ansätze für die Selbstaufheizung des Materials durch Dissipation betrachtet werden.

1.2 Notation und Operatoren

Tensoren erster und zweiter Stufe werden in Fettdruck dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden zusätzlich durch kalligrafische Buchstaben gekennzeichnet. Alle Komponentendarstellungen tensorieller Größen beziehen sich auf kartesische Koordinatensysteme mit zugehörigem Basissystem e_i , $i = 1, 2, 3$, wobei die Einsteinsche Summationskonvention gilt. Die verwendeten Rechenregeln können den Lehrbüchern von DE BOER [27] und KLINGBEIL [28] entnommen werden.

Bei den Bezeichnungen wurde eine weitestgehende Übereinstimmung mit der Literatur (siehe z.B. [11], [29], [24], [1], [30], [31], [32], [10], [17]) angestrebt. Dadurch treten bei einigen Größen Doppelbezeichnungen auf, beispielsweise für die Entropie und die Viskosität (η). Da diese Größen jedoch in unterschiedlichen Abschnitten benutzt werden, können sie eindeutig identifiziert werden.

Für eine Funktion und deren Funktionswert an einer Stelle werden unterschiedliche Symbole verwendet, falls die Gefahr von Mißverständnissen besteht.

Notation

A	Almansi Verzerrungstensor bzgl. der Momentankonfiguration
B	materieller Körper

c_ε	spezifische Wärmekapazität
\mathbf{C}	Elastizitätstensor
\mathbf{D}	Deformationsgeschwindigkeitstensor ($\mathbf{D} = \text{sym}\mathbf{L}$)
e	innere Energie
E	Euklidischer Punktraum
\mathbf{E}	Greenscher Verzerrungstensor bzgl. der Referenzkonfiguration
\mathcal{E}	Einheitstensor vierter Stufe ($\mathcal{E} = \delta_{ij}\delta_{mn}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n$)
f	spezifische Volumenkraft
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{F}_t	inkrementeller Deformationsgradient
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
k	Radius der Fließfläche im Spannungsraum der Deviatoren
\mathbf{K}	Wärmeleittensor
\mathbf{L}	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
\mathcal{M}	reziproker Elastizitätstensor ($\mathbf{C}\mathcal{M} = \mathcal{E}$)
\mathbf{n}	Normalenvektor
$\hat{\mathbf{P}}$	Mandelscher Spannungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration
q	Wärmefluß
\mathbf{Q}	orthogonaler Transformationstensor
r	innere Variable vom Dehnungstyp
r_{st}	Wärmestrahlung (Wärmefluß ins Volumen)
R_0	Bildbereich des mat. Körpers \mathcal{B} bzgl. der Referenzkonfiguration
\hat{R}_τ	Bildbereich des mat. Körpers \mathcal{B} bzgl. der Zwischenkonfiguration zur Zeit τ
R_τ	Bildbereich des mat. Körpers \mathcal{B} bzgl. der Konfiguration zur Zeit τ
R	isotrope Verfestigung
\mathbf{R}	orthogonaler Rotationstensor
s	plastische Bogenlänge
\mathbf{S}	gewichteter Cauchyscher Spannungstensor ($\mathbf{S} = (\det\mathbf{F})\mathbf{T}$)
t	Zeitpunkt am Inkrementanfang
Δt	Zeitinkrement
$t + \Delta t$	Zeitpunkt am Inkrementende
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{T}	Cauchyscher Spannungstensor
$\hat{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor der Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor der Referenzkonfiguration

\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\Delta \mathbf{u}$	Verschiebungsinkrement
\mathbf{U}	Rechts-Strecktensor
\mathbf{v}	Geschwindigkeit eines materiellen Punktes
\mathbf{V}	Links-Strecktensor
w	spezifische Spannungsleistung
\mathbf{W}	Wirbeltensor ($\mathbf{W} = \text{skwL}$)
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in R_0
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in R_τ
$\hat{\mathbf{Y}}$	innere Variable vom Dehnungstyp bzgl. der Zwischenkonfiguration
\mathbf{Z}	Kinematische Verfestigung (beim vereinfachten Materialmodell)
(VP)	bei Viskoplastizität
(PL)	bei Plastizität
α	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Piola Verzerrungstensor bzgl. der Referenzkonfiguration
γ	Entropieproduktion
$\boldsymbol{\alpha}$	Finger Verzerrungstensor bzgl. der Momentankonfiguration
$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$	Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration
$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$	Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungsinkrement (HUGHES-WINGET)
ζ	Zeitvariable im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$
ζ	plastischer Multiplikator
η	Entropie
θ	Temperatur
$\Delta \theta$	Temperaturinkrement (Temperaturänderung im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$)
θ_R	Referenztemperatur des Wärmeausdehnungskoeffizienten α und der spezifischen Wärmekapazität c_e
$\hat{\boldsymbol{\xi}}$	Translationstensor der kinematische Verfestigung relativ zur Zwischenkonfiguration
ρ	Dichte in der Momentankonfiguration
τ	Zeit
χ	skalarwertige Testfunktion

χ	vektorwertige Testfunktion
ψ	freie Energie
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe ($\delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$)
$\mathbf{0}$	tensorielle Null zweiter Stufe ($\mathbf{0} = 0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$)
\mathcal{O}	tensorielle Null vierter Stufe ($\mathcal{O} = 0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$)

Materialparameter

λ, μ	Lamésche Konstanten
b, c, p, w	Materialparameter der kinematischen Verfestigung
$\varphi, \beta, \gamma, \pi, \omega, Y, y$	Materialparameter der isotropen Verfestigung
η, m	Viskosität, Exponent bei Viskoplastizität

Indizes

$(\cdot)_e$	elastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_{et}$	thermoelastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_p$	inelastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_0$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) am Zeitpunkt t
$(\cdot)_{1/2}$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) am Zeitpunkt $t + \Delta t/2$
$(\cdot)_1$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) am Zeitpunkt $t + \Delta t$

Akzente

$\overline{(\cdot)}$	bar-transformierte Variable (\cdot)
$\overline{\overline{(\cdot)}}$	bar-transformierte Variable $\overline{(\cdot)}$, vortransformiert mit \mathbf{Q}_1
$\tilde{(\cdot)}$	Funktion der Größen $(a, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \theta, \mathbf{Q}_1)$, a repräsentiert einen Skalar
$\check{(\cdot)}$	Funktion der Größen $(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \theta, \mathbf{Q}_1)$
$\check{\check{(\cdot)}}$	Funktion der Größen $(\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \theta)$

$\widehat{(\cdot)}$ Funktion der Größen $(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, k, \theta, \Lambda)$

Operatoren

grad	Gradient (bezüglich der Momentankonfiguration)
$(\cdot)^T$	Transponierte von (\cdot)
Sp \mathbf{A}	Spur des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
sym \mathbf{A}	symmetrischer Anteil des Tensors \mathbf{A} ($\text{sym}\mathbf{A} = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$)
skw \mathbf{A}	schiefsymmetrischer Anteil des Tensors \mathbf{A} ($\text{skw}\mathbf{A} = 1/2(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$)
det \mathbf{A}	Determinante des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{Sp } \mathbf{A}) \mathbf{1}$	Deviator des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
$(\cdot)^\cdot$	Materielle Zeitableitung von (\cdot)
$\langle \cdot \rangle$	Mc-Cauly-Klammer (Föppel-Symbol)
$(\cdot)^{-1}$	Inverse von (\cdot)
$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W}$	Jaumann-Ableitung des Tensors \mathbf{A}
$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}$	untere Oldroyd-Ableitung des Tensors \mathbf{A} ; siehe Anhang A
$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}$	obere Oldroyd-Ableitung des Tensors \mathbf{A} ; siehe Anhang A
$\mathcal{A}[\mathbf{B}]$	Anwendung des Tensors vierter Stufe \mathcal{A} auf den Tensor zweiter Stufe \mathbf{B}
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Dyadisches Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Dyadisches Produkt zweier Vektoren
$\mathbf{A} \mathbf{B}$	Multiplikative Verknüpfung zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$	Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\mathcal{D}_{\Delta \mathbf{u}}(\cdot)$	Gateaux-Differential $\mathcal{D}_{\Delta \mathbf{u}}(\cdot)(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i)[\delta \mathbf{u}]$, siehe Abschnitt 4.4
$\mathcal{D}_{\Delta \theta}(\cdot)$	Gateaux-Differential $\mathcal{D}_{\Delta \theta}(\cdot)(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i)[\delta \theta]$, siehe Abschnitt 4.4

Einige wichtige Rechenregeln

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \text{Sp}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \text{Sp}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{C}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T [\mathbf{B}] + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T [\mathbf{A}]$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) [\mathbf{C}] = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) [\mathbf{A}] = (\text{Sp } \mathbf{A}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}^T)^{T_{14}} [\mathbf{B}]$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}) [\mathbf{A}] = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) [\mathbf{B}]$$

2 Grundgleichungen der Thermomechanik

2.1 Kinematik

Gegeben sei ein materieller Körper \mathcal{B} mit Bildbereich R_0 im dreidimensionalen Euklidischen Punktraum E bzgl. einer Referenzkonfiguration. Nach Wahl eines Ursprungs in E kann jedes Element von \mathcal{B} , genannt materieller Punkt oder materielles Partikel, durch den Ortsvektor \mathbf{X} zu seinem Bildpunkt X_0 in R_0 identifiziert werden. Ferner sei \mathbf{x} der Ortsvektor zum Bildpunkt X_τ des materiellen Elementes bzgl. der Momentankonfiguration zur Zeit τ und $R_\tau \subset E$ der Bildbereich der Momentankonfiguration. Eine Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B} ist eine mit der Zeit parametrisierte einparametrische Schar von Konfigurationen

$$\mathbf{x} : (\mathbf{X}, \tau) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), \quad (2.1)$$

wobei für festgehaltenes τ die Inverse $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau)$ existiert. Sei

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

der Verschiebungsvektor. Für festgehaltenes τ ergibt sich der Deformationsgradient, der die Deformation in der Umgebung eines materiellen Punktes charakterisiert, mit (2.1) zu

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.3)$$

Es wird $\det \mathbf{F} > 0$ angenommen, so daß eine eindeutige polare Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.4)$$

existiert, mit den symmetrischen rechten und linken Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} sowie dem eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} .

Zwischen dem Deformationsgradient \mathbf{F} und dem Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}$ gilt die Beziehung

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1}. \quad (2.5)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines materiellen Punktes ergibt sich aus (2.1) zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau). \quad (2.6)$$

Für die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten gilt

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (2.7)$$

Der Tensor \mathbf{L} heißt räumlicher Geschwindigkeitsgradient. Seine additive Zerlegung

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.8)$$

definiert den symmetrischen Dehnungsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.9)$$

und den antisymmetrischen Wirbeltensor

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.10)$$

Sei $\mathbf{X} = \mathbf{C}(\lambda)$ eine Linie aus materiellen Punkten, materielle Linie genannt, in R_0 und $d\mathbf{X} = \partial \mathbf{C}(\lambda) / \partial \lambda|_{\lambda_0} d\lambda$ der Tangentenvektor an $\mathbf{C}(\lambda)$, materielles Linienelement genannt, an der Stelle λ_0 . Ferner sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{C}(\lambda), \tau) = \mathbf{c}(\lambda, \tau)$ dieselbe materielle Linie in R_τ und $d\mathbf{x} = \partial \mathbf{x}(\mathbf{C}(\lambda), \tau) / \partial \lambda|_{\lambda_0} d\lambda$ das materielle Linienelement an $\mathbf{c}(\lambda, \tau)$ an der Stelle λ_0 . Anhand der Beziehung

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau)}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{C}(\lambda_0)} \frac{\partial \mathbf{C}(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0} d\lambda = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.11)$$

erkennt man, daß der Deformationsgradient materielle Linienelemente aus dem Bildbereich der Referenzkonfiguration in den Bildbereich der Momentankonfiguration transformiert.

Sei $\Phi(\mathbf{X}) = k = \text{konst.}$ eine Fläche aus materiellen Punkten, materielle Fläche genannt, in R_0 . Dieselbe materielle Fläche in R_τ , $\tau = \text{konst.}$, erhält man mit

$$\Phi(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau)) = \varphi(\mathbf{x}, \tau) = k, \quad k = \text{konst.} \quad (2.12)$$

Ferner folgt aus dem vollständigen Differential dk

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Wird (2.11) in (2.13) eingesetzt, erkennt man, daß die Inverse des transponierten Deformationsgradienten Normalen an materiellen Flächen aus dem Bildbereich der Referenzkonfiguration in den Bildbereich der Momentankonfiguration gemäß

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{T-1} \boldsymbol{\Lambda} \quad (2.14)$$

transformiert, wobei in dieser Gleichung $\boldsymbol{\Lambda} = \partial\Phi/\partial\mathbf{X}$ und $\boldsymbol{\lambda} = \partial\varphi/\partial\mathbf{x}$ gilt.

Sei $dV_0 = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 > 0$ ein mit Hilfe von drei materiellen Linienelementen aufgespanntes Volumenelement in R_0 und $dV = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3$ das mit denselben materiellen Linienelementen aufgespannte Volumenelement in R_τ . Dann gilt mit (2.11) die Transformationsbeziehung [33]

$$dV = \det\mathbf{F} dV_0. \quad (2.15)$$

2.2 Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und Konzept der Dualen Variablen

Bei der Formulierung der in dieser Arbeit betrachteten Stoffgesetze wird von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_{et} \mathbf{F}_p = \hat{\mathbf{V}}_{et} \hat{\mathbf{R}}_{et} \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p \quad (2.16)$$

in einen reversiblen thermoelastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_{et}$ und einen irreversiblen Anteil \mathbf{F}_p ausgegangen. Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten definiert eine spannungsfreie, lokal entlastete Konfiguration, Zwischenkonfiguration genannt. Der Bildbereich der Zwischenkonfiguration \hat{R}_τ ist nichteuklidisch, da die vollständige Entlastung des Körpers i.a. nur durch Aufheben der Kompatibilität erreicht werden kann. Die Tensorfelder $\hat{\mathbf{F}}_{et}(\mathbf{X}, \tau)$ und $\mathbf{F}_p(\mathbf{X}, \tau)$ stellen somit keine Gradientenfelder dar. Eine weitere spannungsfreie Zwischenkonfiguration ist mit

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_{et}^* \mathbf{F}_p^* \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{et}^* = \hat{\mathbf{F}}_{et} \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{V}}_{et} \hat{\mathbf{R}}_{et} \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{V}}_{et} \hat{\mathbf{R}}_{et}^* \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F}_p^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_p = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{R}_p^* \mathbf{U}_p \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}, \det \mathbf{Q} = 1 \quad (2.20)$$

gegeben, wobei \mathbf{Q} ein beliebiger, eigentlich orthogonaler Tensor ist. Der Bildbereich der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_r$ ist somit durch die Zerlegung (2.16) lokal nur bis auf eine Starrkörperrotation bestimmt. Diese Eigenschaft begründet das Invarianzpostulat von GREEN & NAGHDI [4], welches die Invarianz von konstitutiven Beziehungen gegen beliebige Rotationen der Zwischenkonfiguration fordert und somit eine Restriktion an die Materialgleichungen darstellt. Der Tensor \mathbf{F}_p bildet das materielle Linienelement $d\mathbf{X}$ auf einen Vektor $d\hat{\mathbf{x}}$, der Tensor \mathbf{F}_p^{T-1} die Normale $\mathbf{\Lambda}$ einer materiellen Fläche auf einen Vektor $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ ab. Durch Einsetzen der multiplikativen Zerlegung von \mathbf{F} in die Transformationsbeziehungen (2.11) und (2.14) zeigt man, daß der Tensor $\hat{\mathbf{F}}_{et}$ den Vektor $d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p d\mathbf{X}$ auf das materielle Linienelement $d\mathbf{x}$, der Tensor $\hat{\mathbf{F}}_{et}^{T-1}$ den Vektor $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{\Lambda}$ auf die Normale $\boldsymbol{\lambda}$ der materiellen Fläche abbildet. Somit gelten die Beziehungen

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{F}}_{et} \mathbf{F}_p d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{F}}_{et} d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{\Lambda} = \hat{\mathbf{F}}_{et}^{T-1} \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{\Lambda} = \hat{\mathbf{F}}_{et}^{T-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (2.22)$$

Im Rahmen finiter Deformationen gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, Verzerrungstensenoren und Spannungstensenoren zu verknüpfen, sowie deren Geschwindigkeiten zu definieren. Eine systematische Vorgehensweise ist durch das Konzept der dualen Variablen gegeben (siehe TSAKMAKIS [34], HAUPT & TSAKMAKIS [1]). Hier werden alle Tensenoren von skalaren Größen, die als forminvariant bzgl. der gewählten Konfiguration definiert werden, hergeleitet. Betrachtet man ein materielles Linienelement $d\mathbf{X}$ an einer materiellen Linie \mathbf{C} im Bildbereich der Referenzkonfiguration \mathbf{R}_0 , das infolge der Deformation gemäß (2.11) in das materielle Linienelement $d\mathbf{x}$ transformiert wird, dann ist ein mögliches Verzerrungsmaß zur Definition von Verzerrungstensenoren mit

$$\Delta = \frac{1}{2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \quad (2.23)$$

gegeben. Ein weiteres Verzerrungsmaß stellt die Differenz

$$\delta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}) \quad (2.24)$$

dar, wobei $\mathbf{\Lambda}$ die Normale an einer materiellen Fläche im Bildbereich der Referenzkonfiguration und $\boldsymbol{\lambda}$ die mit (2.14) vortransformierte Normale bezeichnet.

Die Forderung der Forminvarianz der Verzerrungsgrößen Δ , δ und deren Zeitableitungen $\dot{\Delta}$, $\dot{\delta}$ definiert die Verzerrungstensoren \mathbf{E} (Greenscher Verzerrungstensor bzgl. der Referenzkonfiguration), \mathbf{A} (Almansi Verzerrungstensor bzgl. der Momentankonfiguration) und $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ (Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration) bzw. die Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ (Piola Verzerrungstensor bzgl. der Referenzkonfiguration), $\boldsymbol{\alpha}$ (Finger Verzerrungstensor bzgl. der Momentankonfiguration) und $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ (Verzerrungstensor bzgl. der Zwischenkonfiguration)

$$\Delta = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.25)$$

$$\delta = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (2.26)$$

sowie die zugeordneten Zeitableitungen dieser Tensoren

$$\dot{\Delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \dot{\hat{\mathbf{A}}} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}} d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

$$\dot{\delta} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \hat{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (2.28)$$

Analog dazu können alle höheren Zeitableitungen der Verzerrungstensoren aus den entsprechenden Ableitungen der Verzerrungsgrößen Δ und δ gewonnen werden.

Die Menge aller möglichen, auf der Basis von Δ definierten Verzerrungsgrößen wird mit Familie 1, die Menge aller möglichen, auf der Basis von δ definierten Verzerrungsgrößen mit Familie 2 bezeichnet. Die Transformationsbeziehungen zwischen den Verzerrungstensoren einer Familie sowie zwischen deren Geschwindigkeiten erhält man durch Einsetzen der Transformationsbeziehungen (2.21), (2.22) in (2.25), (2.26) bzw. (2.27), (2.28).

Die Verzerrungsmaße Δ , δ lassen sich in einen reversiblen Anteil Δ_{et} , δ_{et} und einen irreversiblen Anteil Δ_p , δ_p gemäß

$$\Delta = \Delta_{et} + \Delta_p \quad (2.29)$$

$$\Delta_{et} = \frac{1}{2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.30)$$

$$\Delta_p = \frac{1}{2}(d\hat{\mathbf{x}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \quad (2.31)$$

$$\delta = \delta_{et} + \delta_p \quad (2.32)$$

$$\delta_{et} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \quad (2.33)$$

$$\delta_p = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \quad (2.34)$$

aufspalten (vgl. TSAKMAKIS [10]). Aufgrund der Forminvarianzanforderungen lassen sich analog zu den bisher definierten Verzerrungsmaßen Dehnungstensoren definieren, die den reversiblen bzw. irreversiblen Anteil der Deformation charakterisieren. Man erhält beispielsweise die thermoelastischen Verzerrungstensoren aus

$$\Delta_{et} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_{et} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_{et} d\mathbf{x} = d\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{et} d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.35)$$

$$\delta_{et} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{et} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{et} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} \hat{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (2.36)$$

Diese Definition der thermoelastischen und inelastischen Verzerrungstensoren impliziert die additive Zerlegung der Verzerrungstensoren in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil.

Jedem mit Δ bzw. δ definierten Verzerrungstensor kann mit der spezifischen Spannungsleistung pro Volumeneinheit in R_0

$$\rho_0 w = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\dot{\boldsymbol{\Gamma}}} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \quad (2.37)$$

ein Spannungstensor eindeutig zugeordnet werden. Hier und im folgenden bezeichnet \mathbf{T} den Cauchy Spannungstensor, $\mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\mathbf{T}$ den gewichteten Cauchy Spannungstensor und $\tilde{\mathbf{T}}$ den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor der Referenzkonfiguration.

Wird \dot{w} invariant vorausgesetzt und werden die zweiten Ableitungen der Verzerrungstensoren mit den aus $\ddot{\Delta}$ bzw. $\ddot{\delta}$ definierten Ableitungen gebildet und die zugeordneten Spannungstensoren in \dot{w} eingesetzt, ist $\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$ bzw. $\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ invariant (siehe Haupt & Tsakmakis [3]). Die zugeordneten Spannungsgeschwindigkeiten können somit durch

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \overset{\nabla}{\tilde{\mathbf{S}}} \cdot \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{A}}} = \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{T}}} \cdot \overset{\nabla}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}} \quad (2.38)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \overset{\nabla}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \overset{\nabla}{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \overset{\nabla}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \quad (2.39)$$

definiert werden. Die Transformationsbeziehungen zwischen den Spannungstensoren ergeben sich, indem man die Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren in (2.38) und (2.39) durch Geschwindigkeiten transformierter Verzerrungstensoren ersetzt.

Die Tabellen in Anhang A geben zusammenfassend die bzgl. R_0 , \hat{R}_τ und R_τ definierten Verzerrungs- und Spannungstensoren, die zugeordneten Geschwindigkeiten dieser Tensoren sowie die Transformationen für diese Tensoren wieder.

Im Falle kleiner thermoelastischer Verzerrungen gilt für den thermoelastischen Strecktensor [35]

$$\hat{V}_{et} \approx 1, \quad (2.40)$$

was für den thermoelastischen Anteil des Deformationsgradienten

$$\hat{F}_{et} \approx \hat{R}_{et} \quad (2.41)$$

impliziert. Dann ist die Vortransformation der tensoriellen Variablen aus der Zwischen- in die Momentankonfiguration durch eine Rotation mit \hat{R}_{et} gegeben. Beispielsweise gelten dann die Transformationsbeziehungen

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} = \hat{R}_{et} \hat{\mathbf{T}} \hat{R}_{et}^T \quad (2.42)$$

$$\mathbf{A} = \hat{R}_{et} \hat{\mathbf{\Gamma}} \hat{R}_{et}^T \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = -(\det \mathbf{F}) \mathbf{T} = \hat{R}_{et} \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{R}_{et}^T \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \hat{R}_{et} \hat{\mathbf{\Gamma}} \hat{R}_{et}^T. \quad (2.45)$$

2.3 Bilanzgleichungen

Die Erhaltungssätze oder auch Bilanzgleichungen der Mechanik beschreiben die Wechselwirkung eines betrachteten materiellen Körpers mit seiner Umgebung. Sie werden aus integralen Bilanzaussagen hergeleitet (LEIGH [36, S.120 ff.]). Für ein einfach zusammenhängendes Teilvolumen $V \subset R_\tau$ des materiellen Körpers mit Umrandung S ist die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe φ gleich der Zufuhr Σ in V und der Zufuhr σ über S

$$\frac{d}{d\tau} \int_V \varphi \, dV = \int_V \Sigma \, dV + \int_S \sigma \, dS. \quad (2.46)$$

Tabelle 2.1 gibt die in den Erhaltungssätzen auftretenden Größen wieder. Dabei bezeichnet $k = 1/2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ die kinetische Energie und \mathbf{n} kennzeichnet die nach außen zeigende Normale auf der Umrangungsfläche S . Alle sonstigen in Tabelle 2.1 auftretenden Größen sind in den folgenden Abschnitten erklärt. Die äquivalente lokale Form dieser Axiome erhält man durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und des Lokalisationstheorems (GURTIN [37, S.38 ff.]). Diese Form der Bilanzgleichungen ist in den Abschnitten 2.3.1-2.3.5 angegeben.

Tab. 2.1: Bilanzaussagen der Thermomechanik

$\frac{d}{d\tau} \int_V \varphi dV = \int_V \Sigma dV + \int_S \sigma dS$	φ	Σ	σ
Erhaltungssatz der Masse	ρ	0	0
Impulssatz	$\rho \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{f}$	\mathbf{t}
Drallsatz	$\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}$	$\mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}$	$\mathbf{x} \times \mathbf{t}$
1. HS d. Thermodynamik	$\rho(e + k)$	$\rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r_{st})$	$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$
Bilanz der Entropie	$\rho \eta$	$\rho(\gamma + r/\theta)$	$-(\mathbf{q}/\theta) \cdot \mathbf{n}$

2.3.1 Erhaltungssatz der Masse

Der Erfahrungssatz von der Erhaltung der Masse lautet: *Die Masse eines materiellen Körpers bleibt stets unverändert* (LEIGH [36, S.118]). Ist $\rho = \rho(\mathbf{X}, \tau)$ die Dichte eines materiellen Punktes in R_τ und $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ die Dichte dieses materiellen Punktes in R_0 , dann lautet das Axiom von der Erhaltung der Masse in lokaler Form, Kontinuitätsgleichung genannt,

$$\rho dV = \rho_0 dV_0. \quad (2.47)$$

2.3.2 Impulssatz

Das Axiom von der Erhaltung des Impulses lautet: *Die zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Körpers ist gleich der Summe der auf diesen Körper einwirkenden Kräfte* (LEIGH [36, S.124]). Mit der spezifischen Volumenkraft $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \tau)$ und dem Spannungsvektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{X}, \tau)$ erhält man unter Verwendung des Cauchy-Theorems $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ die Impulsbilanz in lokaler Form

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.48)$$

2.3.3 Drallsatz

Der Erfahrungssatz von der Erhaltung des Drehimpulses lautet: *Die zeitliche Änderung des Dralles eines Körpers ist gleich der Summe der auf den Körper wirkenden Momente der äußeren Kräfte* (LEIGH [36, S.124]). Die lokale Form ergibt die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.49)$$

2.3.4 Bilanz der Energie

Der Energieerhaltungssatz, auch erster Hauptsatz der Thermodynamik genannt, lautet: *Die zeitliche Änderung der gesamten Energie eines Körpers ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte und der pro Zeiteinheit von außen zugeführten Energie* (LEIGH [36, S.135 ff.]). Dieses Axiom, welches mechanische und thermische Größen verknüpft, lautet in lokaler Form

$$\frac{de}{d\tau} = w + r_{st} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (2.50)$$

Die zeitliche Änderung der spezifischen inneren Energie e wird somit von der spezifischen Spannungsleistung w , der Wärmestrahlung r_{st} und dem Wärmefluß \mathbf{q} beeinflusst.

2.3.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung

Zur Formulierung von diesem Postulat setzt man die Existenz einer absoluten Temperatur $\theta > 0$ voraus. Ferner wird angenommen, daß der Entropiefluß über die Umrandung S und die Entropiezufuhr in das Volumen V jeweils durch \mathbf{q}/θ bzw. r_{st}/θ gegeben sind. Unter dieser Annahme lautet der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung (LEIGH [36, S.137]): *Die Entropieproduktion γ ist nicht negativ.* Bezeichnet man die spezifische Entropie mit η gilt zunächst

$$\rho \dot{\eta} = \rho \frac{r_{st}}{\theta} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \rho \gamma. \quad (2.51)$$

Mit der Definition der freien Energie

$$\psi = e - \theta \eta \quad (2.52)$$

und der Energiebilanz (2.50) folgt wegen $\gamma \geq 0$ die Ungleichung

$$\theta \gamma = -\dot{\psi} - \eta \dot{\theta} + w - \theta \gamma_{con} \geq 0 \quad (2.53)$$

mit ¹

$$\gamma_{con} = \frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{g} = \operatorname{grad} \theta. \quad (2.54)$$

Im folgenden beschränken sich alle Betrachtungen auf Verzerrungs- und Spannungstensoren der Familie 1. Für Familie 2 ist die konstitutive Modellbildung sowie die numerische Umsetzung analog möglich (siehe JANSOHN, RITTER & TSAKMAKIS [38]).

¹Zur Bedeutung des Index *con* siehe Seite 19.

2.4 Materialgleichungen in der Thermomechanik

Das Postulat von der positiven Entropieproduktion fordert, daß jeder zulässige thermomechanische Prozeß die Ungleichung (2.53) zu jedem Zeitpunkt τ an jedem materiellen Punkt \mathbf{X} erfüllen muß. Im Rahmen der rationalen Thermomechanik werden auf der Basis dieser Forderung Materialgleichungen formuliert, die sicherstellen, daß alle möglichen Prozesse auch thermomechanisch zulässige Prozesse sind (siehe hierzu COLEMAN & NOLL [7], COLEMAN & GURTIN [8], KRATOCHVIL & DILLON [9], KAMLAH [31, S.68 ff.]).

Im folgenden wird die rein mechanisch formulierte konstitutive Theorie von TSAKMAKIS [10] übernommen und gleichzeitig auf thermomechanische Prozesse erweitert. In der Theorie großer inelastischer Deformationen werden die Stoffgesetze üblicherweise zunächst bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ formuliert. Die Clausius–Duhem–Ungleichung ausgedrückt mit Variablen bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ ist dann durch

$$-\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{\Gamma}}} - \theta\gamma_{con} \geq 0 \quad (2.55)$$

gegeben. Für die freie Energie wird zunächst die Materialfunktion

$$\psi = \hat{\psi}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \theta, \hat{\mathbf{Y}}, r) = \hat{\psi}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \theta, \hat{\mathbf{Y}}, r) \quad (2.56)$$

angenommen, wobei $\hat{\mathbf{Y}}$ eine tensorwertige Variable bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ vom Dehnungstyp und r eine skalarwertige innere Variable vom Dehnungstyp kennzeichnet. Ferner liegt (2.56) die Annahme zugrunde, daß die Verzerrungen $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ und $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ nur über die Differenz $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} = \hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ in alle Materialfunktionen und Evolutionsgleichungen eingehen und die Variable $\hat{\mathbf{Y}}$ die gleichen Transformationseigenschaften wie $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}$ aufweist. Bedingt durch das Invarianzpostulat von GREEN & NAGHDI [4] muß die freie Energiefunktion $\hat{\psi}$ eine isotrope Funktion sein. Aus der Clausius–Duhem–Ungleichung (2.55) folgt dann unter Einbeziehung der Definition der unteren Oldroyd–Ableitung und der Zerlegung der Deformation

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \right) \cdot \hat{\dot{\mathbf{\Gamma}}}_{et} - \left(\eta + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{\Gamma}}}_p + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \cdot (\mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \mathbf{L}_p) \\ & - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{Y}}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \dot{r} - \theta\gamma_{con} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Diese Gleichung muß für alle möglichen thermomechanischen Prozesse erfüllt sein.

Betrachtet man nun einen rein elastischen Prozeß mit $\dot{\mathbf{F}}_p = 0$, $\dot{\mathbf{Y}} = 0$, $\dot{r} = 0$ und homogen verteilter Temperatur, d.h. $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, verbleiben nur die ersten zwei Terme auf der linken Seite von (2.57). Die Spannung $\hat{\mathbf{T}}$ und die Entropie η sind bei Anwendung des Grundsatzes

der Vorurteilsfreiheit bei der Definition der unabhängigen Variablen der Materialgleichungen (Äquipräsenzprinzip [32, S. 359]) analog zu (2.56) Funktionen von $\hat{\Gamma}_{et}, \theta, \hat{Y}, r$. Somit ist bei einem rein elastischen Prozeß die Ungleichung (2.57) nur dann für beliebige $\hat{\Gamma}_{et}, \hat{\theta}$ erfüllt, wenn Spannung und Entropie jeweils die Potentialeigenschaften

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_{et}} \quad (2.58)$$

$$\eta = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad (2.59)$$

aufweisen. Im folgenden wird angenommen, daß diese Potentialbeziehungen auch bei inelastischen Deformationen gelten. Analog zu (2.58) und (2.59) werden \hat{Y} und r thermodynamisch konjugierte Variablen vom Spannungstyp durch

$$\hat{\mathbf{Z}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{Y}} \quad (2.60)$$

$$R = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \quad (2.61)$$

zugeordnet. Desweiteren wird die Unabhängigkeit der Evolutionsgleichungen für $\hat{\Gamma}_p, \hat{Y}$ und r vom Temperaturgradient \mathbf{g} sowie die Unabhängigkeit des Wärmeleitgesetzes (d.h. des Wärmeflusses) von $\hat{\Gamma}_p, \hat{Y}$ und r vorausgesetzt. Dies ermöglicht ein Aufspalten der Dissipationsungleichung (2.57) in

$$\gamma = \gamma_{loc} + \gamma_{con} \geq 0, \quad (2.62)$$

wobei dann beide Summanden in (2.62) stets nie negativ sind. In Analogie zu TRUESDELL & NOLL [32] kennzeichnet γ_{loc} die lokale Entropieproduktion, γ_{con} die Entropieproduktion infolge des Wärmeflusses. Aufgrund der Isotropie der freien Energiefunktion $\hat{\psi}$ und der Potentialbeziehung (2.58) kommutiert $\hat{\mathbf{T}} \hat{\Gamma}_{et}$, so daß die innere Dissipation $\theta \gamma_{loc}$ mit der Definition des Mandelschen Spannungstensors

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\Gamma}_{et})\hat{\mathbf{T}} \quad (2.63)$$

durch

$$\theta \gamma_{loc} = \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\dot{\Gamma}}_p - \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{Y}} - \frac{1}{\rho_0} R \dot{r} \geq 0, \quad (2.64)$$

die thermische Dissipation durch

$$\theta \gamma_{com} = \frac{1}{\rho_0 \theta} \text{grad} \theta \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.65)$$

gegeben ist. Die Materialgleichung für den Wärmefluß hat aufgrund der Zerlegung (2.62) keinen weiteren Einfluß auf die thermodynamische Konsistenz der restlichen Materialgleichungen und kann unabhängig von allen anderen Gleichungen des Materialmodells diskutiert werden. In Analogie zu CHABOCHE [29] wird die Gültigkeit des Fourierschen Wärmeleitgesetzes

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \mathbf{g} \quad (2.66)$$

angenommen, wobei \mathbf{K} der symmetrische, positiv definite Wärmeleitensor ist.

Die Zerlegung der freien Energie

$$\psi = \hat{\psi}_{et}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) + \hat{\psi}_p(\hat{\mathbf{Y}}, r, \theta) \quad (2.67)$$

führt auf die Elastizitätsbeziehung

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\hat{\mathbf{T}}}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_{et}}{\partial \hat{\Gamma}_{et}}. \quad (2.68)$$

Insbesondere ist $\hat{\hat{\mathbf{T}}}$ unabhängig von inneren Variablen und damit unabhängig von der inelastischen Vorgeschichte. Zu Anfang eines thermomechanischen Prozesses wird weiterhin angenommen, daß alle inneren Variablen verschwinden. Wird die Gültigkeit aller bisher getroffenen Annahmen vorausgesetzt, dann müssen alle möglichen thermomechanischen Prozesse der Restungleichung

$$\hat{\hat{\mathbf{P}}} \cdot \hat{\hat{\Gamma}}_p - \hat{\hat{\mathbf{Z}}} \cdot \hat{\hat{\mathbf{Y}}} - R \dot{r} \geq 0 \quad (2.69)$$

genügen. Gleichung (2.69) stellt somit eine Restriktion an die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen $\hat{\hat{\mathbf{Z}}}$ und R dar.

2.4.1 Fließregel

Zunächst werden die Betrachtungen auf geschwindigkeitsunabhängige Plastizität beschränkt. Zur Definition einer Fließregel wird das Postulat von Ill'iushin betrachtet. Für rein elastische

Prozesse ist die Gültigkeit dieses Postulats äquivalent zur Annahme der Hyperelastizitätsbeziehung (2.58).

Ein geschlossener Verzerrungszyklus wird als klein bezeichnet, wenn der Anfangszustand während des Deformationszyklus sich stets innerhalb oder auf dem Rand des elastischen Bereichs im Dehnungsraum befindet. Ein kleiner Verzerrungszyklus, der zum Zeitpunkt t_0 beginnt und zur Zeit t_e endet wird mit $C_s[t_0, t_e]$ bezeichnet. Die schwache Form des Postulats von Ill'iushin besagt, daß die Spannungsarbeit bei jedem zulässigen kleinen Verzerrungszyklus nie negativ ist, d.h. es gilt

$$\int_{t_0}^{t_e} w \, d\tau = \int_{t_0}^{t_e} \hat{\mathbf{T}}(\tau) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau) \, d\tau \geq 0 \quad (2.70)$$

für jeden möglichen Zyklus $C_s[t_0, t_e]$. TSAKMAKIS [39] hat gezeigt, daß die Gültigkeit der schwachen Form des Postulats von Ill'iushin eine Normalenregel

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \begin{cases} \dot{s} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{P}}}, & \dot{s} > 0 & \text{für Belastung} \\ 0 & & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.71)$$

sowie die Konvexität der Fließfläche $F(t) = \hat{F}(\hat{\mathbf{P}}(t), \dots) = 0$ bedingt. Die Fließfunktion \hat{F} wird als stetige, hinreichend glatte Funktion ihrer Variablen angenommen.

In Plastizitätsmodellen liegt Belastung vor, wenn $F = 0 \wedge \dot{F}|_{F=0} \geq 0$ gilt. In diesem Fall ist der Proportionalitätsfaktor \dot{s} durch die Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bestimmt.

Im weiteren wird angenommen, daß (2.71) auch im Falle von Viskoplastizität gilt. Viskoplastizität kann durch eine Materialgleichung der Form

$$\dot{s} = \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m \quad (2.72)$$

definiert werden, wodurch Belastung für den Fall $F > 0$ gilt.

2.4.2 Verfestigungsregeln

Da die Fließfunktion \hat{F} eine Funktion des Mandelschen Spannungstensors ist, wird analog zur Definition von $\hat{\mathbf{P}}$ der Translationstensor der kinematischen Verfestigung $\hat{\mathbf{\xi}}$ mit Hilfe der inneren Variablen $\hat{\mathbf{Y}}$ und deren thermodynamisch konjugierten Variablen $\hat{\mathbf{Z}}$ gemäß

$$\hat{\mathbf{\xi}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{Y}})\hat{\mathbf{Z}} \quad (2.73)$$

eingeführt. Die bisher noch unbestimmte innere Variable R wird im folgenden mit der isotropen Verfestigung identifiziert, so daß die Fließspannung k durch

$$k = R + y \quad (2.74)$$

gegeben ist, wobei $y = y(\theta)$ einen positiven, temperaturabhängigen Materialparameter repräsentiert.

Es verbleibt unter Beachtung der Restungleichung (2.69)

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \hat{\dot{\mathbf{Z}}} + \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{Z}}} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial r} \dot{r} \geq 0 \quad (2.75)$$

Evolutionsgleichungen für $\hat{\mathbf{Z}}$ und R zu bestimmen. Bei der Wahl des inelastischen Anteils der freien Energie $\hat{\psi}_p$ wird als einfachst mögliche Approximation einer Funktion die quadratische Form gewählt, wobei die Variablen $\hat{\mathbf{Y}}$ und r in $\hat{\psi}_p$ in jeweils verschiedenen Summanden auftreten

$$\hat{\psi}_p(\hat{\mathbf{Y}}, r, \theta) = \hat{\psi}_{p1}(\hat{\mathbf{Y}}, \theta) + \hat{\psi}_{p2}(r, \theta). \quad (2.76)$$

Insbesondere ermöglicht der Ansatz (2.76) die thermodynamische Konsistenz der Evolutionsgleichungen beider Verfestigungsmechanismen voneinander getrennt zu diskutieren.

Kinematische Verfestigung

Für die freie Energiefunktion $\hat{\psi}_{p1}$ wird die quadratische Form

$$\hat{\psi}_{p1}(\hat{\mathbf{Y}}, \theta) = \frac{c}{2\rho_0} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (2.77)$$

angenommen, wobei $c = c(\theta)$ einen positiven, temperaturabhängigen Materialparameter kennzeichnet. Die zu $\hat{\mathbf{Y}}$ thermodynamisch konjugierte Variable $\hat{\mathbf{Z}}$ berechnet man mit (2.60) zu

$$\hat{\mathbf{Z}} = c \hat{\mathbf{Y}} \quad (2.78)$$

und $\dot{\hat{\mathbf{Y}}}$ sowie $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ können in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{Z}}$, $\dot{\hat{\mathbf{Z}}}$ und $\dot{\theta}$ durch

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{c} \dot{\hat{\mathbf{Z}}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{\mathbf{Z}} \quad (2.79)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \left(\mathbf{1} + \frac{2}{c} \hat{\mathbf{Z}} \right) \hat{\mathbf{Z}} \quad (2.80)$$

dargestellt werden. Dem Tensor $\hat{\mathbf{Z}}$ wird aufgrund seiner zum Spannungstensor $\hat{\mathbf{T}}$ gleichartigen Struktur die objektive Zeitableitung

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \dot{\hat{\mathbf{Z}}} - \mathbf{L}_p \hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{L}_p^T \quad (2.81)$$

zugeordnet. Im Falle reiner kinematischer Verfestigung erhält man dann nach einigen algebraischen Umformungen aus (2.75)

$$\left(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p + \hat{\mathbf{Z}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p - \frac{1}{c} \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{\mathbf{Z}} \right) \geq 0. \quad (2.82)$$

Infolge der Normalenregel ist der erste Term in (2.82) nie negativ. Die Ungleichung (2.82) ist sicher immer erfüllt, wenn im zweiten Summanden beide Faktoren koaxial sind, d.h. wenn

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p - \frac{1}{c} \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{\mathbf{Z}} = v \hat{\mathbf{Z}}, \quad v \geq 0 \quad (2.83)$$

gilt. Somit ist man bei der Wahl des Proportionalitätsfaktors v nur durch sein Vorzeichen eingeschränkt, so daß eine Fülle von Möglichkeiten bestehen, thermodynamisch konsistente Evolutionsgleichungen für die innere Variable $\hat{\mathbf{Z}}$ zu formulieren. Wird

$$v = \begin{cases} \frac{b}{c} \dot{s} + \frac{p}{c} \|\hat{\mathbf{Z}}\|^{w-1} & \text{(VP)} \\ \frac{b}{c} \dot{s} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (2.84)$$

gesetzt, wobei $b = b(\theta)$, $p = p(\theta)$ und $w = w(\theta)$ nichtnegative, temperaturabhängige Materialparameter sind, dann ist

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \begin{cases} c \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p - b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} - p \|\hat{\mathbf{Z}}\|^{w-1} \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{\mathbf{Z}} & \text{(VP)} \\ c \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p - b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{\mathbf{Z}} & \text{(PL)}. \end{cases} \quad (2.85)$$

Für $\dot{\theta} = 0$ und $p = 0$ ist dies eine Evolutionsgleichung vom ARMSTRONG-FREDERICK-Typ [40] für die innere Variable $\hat{\mathbf{Z}}$. Die kinematische Verfestigung $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ stellt zusammen mit der Evolutionsgleichung (2.85) für die innere Variable $\hat{\mathbf{Z}}$ eine mögliche Verallgemeinerung von kleinen auf große Deformationen der von CHABOCHE [29] vorgeschlagenen Materialgleichungen zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung dar. Zur physikalischen Interpretation der einzelnen Terme sei deshalb auf CHABOCHE [29] verwiesen (siehe auch AKTAA [41], SCHWERTEL [42]).

Isotrope Verfestigung

Für reine isotrope Verfestigung ($\hat{\xi} = 0$) als auch für isotrope und kinematische Verfestigung folgt unter Beachtung der vorangegangenen Betrachtungen, daß die Summe des zweiten und dritten Terms auf der linken Seite von (2.75) nie negativ ist. Somit stellen alle Evolutionsgleichungen zur Beschreibung der isotropen Verfestigung, die der Ungleichung

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p - \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_{p2}}{\partial r} \dot{r} \geq 0 \quad (2.86)$$

genügen, thermodynamisch konsistente Materialgleichungen dar. Im folgenden wird eine v.-Mises-Fließfunktion mit

$$F = \hat{F}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\xi}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D \right\| - k \quad (2.87)$$

zugrunde gelegt, so daß für Belastung

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \dot{s} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D}{\left\| (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D \right\|} = \dot{s} \hat{\mathbf{R}}_p = \Lambda \hat{\mathbf{N}}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \quad (2.88)$$

$$F \geq 0 \Leftrightarrow \left\| (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi})^D \right\| \geq \sqrt{\frac{2}{3}} (R + y) \geq \sqrt{\frac{2}{3}} R \quad (2.89)$$

folgt. Damit die zu bestimmende Evolutionsgleichung auch den Fall $F = 0$, $y = 0$ einschließt, wird der Wertebereich der isotropen Verfestigung durch

$$R \geq 0 \quad (2.90)$$

beschränkt. (2.61), (2.88), (2.89) in (2.86) eingesetzt liefert unter Beachtung von (2.90) die hinreichende Bedingung

$$\dot{s} - \dot{r} \geq 0 \quad (2.91)$$

an die Bestimmungsgleichung von \dot{r} . Für die freie Energiefunktion $\hat{\psi}_{p2}$ wird wiederum eine quadratische Form gewählt. Dabei werden hier zwei Ansätze betrachtet, die zwar auf dieselbe Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigungsvariable R führen, jedoch wegen der unterschiedlichen Definition der freien Energiefunktion $\hat{\psi}_{p2}$ Unterschiede im Energiehaushalt des Materials bewirken. Für beide Ansätze seien $\beta = \beta(\theta)$, $\gamma = \gamma(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, $\pi = \pi(\theta)$ und

$\omega = \omega(\theta)$ nichtnegative, temperaturabhängige Materialparameter.

Der erste, von CHABOCHE [29] vorgeschlagene, mit hochgestelltem (A) gekennzeichnete Ansatz für die freie Energiefunktion $\hat{\psi}_{p2}$ lautet

$$\psi_{p2}^{(A)} = \hat{\psi}_{p2}^{(A)}(\tau, \theta) = \frac{1}{2\rho_0} \beta \gamma r^2, \quad (2.92)$$

so daß sich mit (2.61) die Zeitableitung der isotropen Verfestigungsvariablen zu

$$\dot{R} = \dot{k} - \dot{y} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \gamma + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} r + \beta \gamma \dot{r} \quad (2.93)$$

berechnet. Um später zu einer einheitlichen Darstellung der Evolutionsgleichungen für beide Ansätze der freien Energie zu gelangen, wird an dieser Stelle $Y = y$ gesetzt. Für die innere Variable \dot{r} wird unter Beachtung der Restriktion (2.91) eine Materialgleichung formuliert, die zusammen mit (2.93) die gesuchte Evolutionsgleichung zur Beschreibung der isotropen Verfestigung definiert. In diesem Sinne wird in Anlehnung an CHABOCHE [29]

$$\dot{r} = \begin{cases} \varphi \left(1 - \frac{(k-Y)}{\gamma} \right) \dot{s} - \frac{\pi}{\beta \gamma} (k-Y)^\omega & \text{(VP)} \\ \varphi \left(1 - \frac{(k-Y)}{\gamma} \right) \dot{s} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (2.94)$$

mit $\varphi = \varphi(\theta)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ gesetzt, was auf die Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{k} - \dot{Y} &= & (2.95) \\ &= \begin{cases} \varphi \beta (\gamma - (k-Y)) \dot{s} - \pi (k-Y)^\omega + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k-Y) & \text{(VP)} \\ \varphi \beta (\gamma - (k-Y)) \dot{s} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k-Y) & \text{(PL)} \end{cases} \end{aligned}$$

führt. Da am Anfang des thermomechanischen Prozesses $k - Y = 0$ ist und wegen (2.95)

$$\dot{k} - \dot{Y} \geq 0 \quad \text{für} \quad k - Y = 0 \quad (2.96)$$

gilt, genügt die Evolutionsgleichung (2.95) immer der vorausgesetzten Restriktion (2.90) und es folgt

$$k \geq Y. \quad (2.97)$$

Eine zweite, mit (B) bezeichnete Möglichkeit diese Evolutionsgleichung einzuführen, ist mit

$$\psi_{p2}^{(B)} = \hat{\psi}_{p2}^{(B)}(r, \theta) = \frac{1}{2\rho_0} \beta \gamma r^2 + \frac{1}{\rho_0} Y r \quad (2.98)$$

gegeben (TSAKMAKIS [43]). In diesem Fall wird $y = 0$ gesetzt, so daß aus (2.61)

$$k = R = \beta \gamma r + Y \quad (2.99)$$

folgt. Wie vorher wird in Anlehnung an CHABOCHE [29] für \dot{r} (2.94) gesetzt, woraus wiederum für $\dot{k} - \dot{Y}$ die Evolutionsgleichung (2.95) resultiert.

Auch hier sei für die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme in (2.95) auf [29] verwiesen. Zusammenfassend sind die konstitutiven Gleichungen in Tabelle 2.2 wiedergegeben.

2.5 Wärmeleitungsgleichung

Mit den bisher gewonnenen Beziehungen läßt sich die Feldgleichung für die Temperatur, die Wärmeleitungsgleichung, angeben. Ausgehend von der Zeitableitung der freien Energie, dargestellt durch (2.52) und der Zeitableitung der freien Energiefunktion (2.56) sowie der Zeitableitung der Entropiebeziehung (2.59) erhält man zunächst

$$\theta \dot{\eta} = \dot{e} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_{et}} \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_{et} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{Y}} \cdot \dot{\hat{Y}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \dot{r}, \quad (2.111)$$

woraus mit der Zeitableitung der Entropiebeziehung (2.59), dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (2.50), der Spannungsleistung (2.37), der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit, dem Elastizitätsgesetz (2.58) sowie der Definition der spezifischen Wärmekapazität $c_\epsilon = -\theta(\partial^2 \hat{\psi} / \partial \theta^2) = \theta(\partial \eta / \partial \theta)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} c_\epsilon \dot{\theta} - \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_{et} \partial \theta} \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_{et} &= \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p + r_{st} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \mathbf{L}_p) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \hat{Y}} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{Y}} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r} \end{aligned} \quad (2.112)$$

folgt. Diese Gleichung bestimmt die zeitliche Entwicklung des Temperaturfeldes $\theta = \theta(\mathbf{X}, \tau)$. Mit der Zerlegung der freien Energie (2.67) und der Definition

$$w_{et} = w_{et}(\theta, \hat{\Gamma}_{et}, \dot{\hat{\Gamma}}_{et}) = \frac{\partial^2 \hat{\psi}_{et}}{\partial \hat{\Gamma}_{et} \partial \theta} \theta \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_{et} \quad (2.113)$$

Tab. 2.2: Thermodynamisch konsistente Materialmodelle der Viskoplastizität und der Plastizität

<u>freie Energie:</u>	
$\psi = \hat{\psi}_{et}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) + \hat{\psi}_{p1}(\hat{Y}, \theta) + \hat{\psi}_{p2}(r, \theta)$	(2.100)
$\hat{\psi}_{p1}(\hat{Y}, \theta) = \frac{c}{2\rho_0} \hat{Y} \cdot \hat{Y}, \quad \hat{\psi}_{p2} = \begin{cases} \hat{\psi}_{p2}^{(A)} = \frac{1}{2\rho_0} \beta \gamma r^2 & \text{Ansatz (A)} \\ \hat{\psi}_{p2}^{(B)} = \frac{1}{2\rho_0} \beta \gamma r^2 + \frac{1}{\rho_0} Y r & \text{Ansatz (B)} \end{cases}$	(2.101)
<u>Spannung:</u>	
$\hat{P} = (1 + \hat{\Gamma}_{et}) \hat{T}, \quad \hat{T} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_{et}}{\partial \hat{\Gamma}_{et}}$	(2.102)
<u>Fließfunktion:</u>	
$F = \hat{F}(\hat{P}, \hat{\xi}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ (\hat{P} - \hat{\xi})^D \right\ - k$	(2.103)
<u>Fließregel:</u>	
$\hat{\Gamma}_p = \dot{s} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{P}} = \dot{s} \hat{R}_p = \Lambda \hat{N}, \quad \dot{s} = \Lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$	(2.104)
<u>Lastfaktor:</u>	
a) Viskoplastizität (VP)	b) Plastizität (Pl)
$\dot{s} = \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m$	$\dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \quad \text{für } F = 0 \wedge \dot{F} \Big _{F_p = \text{konst.}} \geq 0$
	$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}$
<u>kinematische Verfestigung:</u>	
$\hat{\xi} = (1 + 2\hat{Y}) \hat{Z}, \quad \hat{Z} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_{p1}}{\partial \hat{Y}}$	(2.106)
$\dot{\hat{Z}} = \begin{cases} c \hat{\Gamma}_p - b \dot{s} \hat{Z} - p \ \hat{Z}\ ^{w-1} \hat{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{Z} & \text{(VP)} \\ c \hat{\Gamma}_p - b \dot{s} \hat{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \hat{Z} & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.107)
<u>isotrope Verfestigung:</u>	
$R = k - y \left. \vphantom{\begin{matrix} R = k - y \\ y = Y \end{matrix}} \right\} \text{für Ansatz (A)}, \quad R = k \left. \vphantom{\begin{matrix} R = k \\ y = 0 \end{matrix}} \right\} \text{für Ansatz (B)}, \quad R = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}_{p2}}{\partial r}$	(2.108)
$\dot{k} - \dot{Y} = \begin{cases} \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \dot{s} - \pi (k - Y)^w + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) & \text{(VP)} \\ \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \dot{s} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.109)
<u>Wärmefluß:</u>	
$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \mathbf{g}$	(2.110)

sowie mit der Definition des Mandelschen Spannungstensor (2.63) folgt daraus

$$c_\varepsilon \dot{\theta} - w_{et} = r_{st} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + w_d \quad (2.114)$$

$$w_d = w_p - \dot{e}_s = \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r}. \quad (2.115)$$

In (2.114) beschreiben die Terme mit r_{st} und \mathbf{q} die Wärmezufuhr, w_{et} die thermoelastische Kopplung und w_d die dissipierte Spannungsleistung. In den runden Klammern in (2.115) tritt die innere Energie

$$e = \hat{e}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \eta, \hat{\mathbf{Y}}, r) = \hat{e}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \eta, \hat{\mathbf{Y}}, r) = \psi + \eta \theta \quad (2.116)$$

auf (vgl. dazu (2.52) und (2.56)). Mit der Elastizitätsbeziehung (2.68), der additiven Zerlegung der Verzerrung und den in Anhang A angegebenen objektiven Verzerrungsgeschwindigkeiten bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ ist die thermoelastische Kopplung durch

$$w_{et} = \frac{\theta}{\rho_0} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \theta} \cdot \left(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_p - \mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \mathbf{L}_p \right) \quad (2.117)$$

ausdrückbar.

Aus (2.114) und (2.115) wird ersichtlich, daß bei inelastischen Deformationen nicht die gesamte plastische Spannungsleistung

$$w_p = \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (2.118)$$

in Wärme umgesetzt wird. Die Beiträge der inneren Variablen r und $\hat{\mathbf{Y}}$ in der Wärmeleitungsgleichung (2.114) bewirken die Speicherung eines Teils von w_p im Material. Diese gespeicherte Spannungsleistung ist durch

$$\dot{e}_s = \dot{e}_{sY} + \dot{e}_{sr} \quad (2.119)$$

gegeben. Sie beschreibt die Änderung der inneren Energie in Abhängigkeit der inneren Variablen $\hat{\mathbf{Y}}$ und r . Unter Beachtung der Zerlegung der freien Energie (2.67) und (2.76) gilt für \dot{e}_{sY} mit (2.77), (2.60), (2.78) und (2.79)

$$\begin{aligned} \dot{e}_{sY} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \theta \right) \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \theta \right) \hat{\mathbf{Z}} \cdot \frac{1}{c} \left(\hat{\mathbf{Z}} + 2\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{\Gamma}}_p - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \theta \hat{\mathbf{Z}} \right), \end{aligned} \quad (2.120)$$

woraus mit der Fließregel (2.88) und der Evolutionsgleichung für $\hat{\mathbf{Z}}$ (2.85)

$$\dot{e}_{sY} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta}\right) \hat{\mathbf{Z}} \cdot (c\dot{s}\hat{\mathbf{R}}_p - b\dot{s}\hat{\mathbf{Z}} - p\|\hat{\mathbf{Z}}\|^{w-1}\hat{\mathbf{Z}} + 2\dot{s}\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{R}}_p) & \text{(VP)} \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta}\right) \hat{\mathbf{Z}} \cdot (c\dot{s}\hat{\mathbf{R}}_p - b\dot{s}\hat{\mathbf{Z}} + 2\dot{s}\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{R}}_p) & \text{(PL)} \end{cases} \quad (2.121)$$

folgt.

Mit (2.92) bzw. (2.98), (2.61) und (2.74) folgt

$$\dot{e}_{sr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r} = \frac{\partial \hat{e}}{\partial r} \cdot \dot{r} = \begin{cases} \dot{e}_{sr}^{(A)} & \text{für Ansatz (A)} \\ \dot{e}_{sr}^{(B)} & \text{für Ansatz (B)} \end{cases} \quad (2.122)$$

$$\dot{e}_{sr}^{(A)} = \frac{1}{\rho_0} (A - Y) \dot{r} \quad (2.123)$$

$$\dot{e}_{sr}^{(B)} = \frac{1}{\rho_0} \left(A - \frac{\partial Y}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r} \quad (2.124)$$

$$A = k - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \theta (k - Y), \quad (2.125)$$

so daß zusammen mit der Evolutionsgleichung für r (2.94) \dot{e}_{sr} bestimmt ist. Man erkennt, daß die beiden Ansätze für die freie Energiefunktion $\hat{\psi}_{p2}^{(A)}$ bzw. $\hat{\psi}_{p2}^{(B)}$ einen unterschiedlichen Energiehaushalt des Materials bewirken.

Häufig wird der dissipierte Anteil an der plastischen Spannungsarbeit vereinfachend zu

$$w_d = \eta_d w_p = \eta_d \frac{1}{\rho_0} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (2.126)$$

angenommen, wobei $\eta_d = \eta_d(\theta)$ ein i. a. temperaturabhängiger Materialparameter mit Wertebereich $[0, 1]$ ist. Somit wird bei $\eta_d = 0$ die gesamte plastische Spannungsleistung im Material gespeichert, bei $\eta_d = 1$ die gesamte plastische Spannungsleistung dissipiert. Solche konstitutiven Beziehungen für die dissipierte Spannungsleistung finden sich beispielsweise bei BROWN, KWON, & ANAND [44], LEHMANN [45] und im ABAQUS THEORY MANUAL [11].

2.6 Vereinfachtes Materialmodell

2.6.1 Kleine thermoelastische Deformationen

Bei kleinen thermoelastischen Deformationen ist das elastische Verhalten eines Materials und sein thermisches Ausdehnungsverhalten mit linearen Materialgleichungen hinreichend genau beschreibbar. Deshalb wird in diesem Fall für die freie Energiefunktion der quadratische Ansatz

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\psi}_{et}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) = & \mu \hat{\Gamma}_{et} \cdot \hat{\Gamma}_{et} + \frac{\lambda}{2} (\text{Sp} \hat{\Gamma}_{et})^2 - 3\alpha \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\text{Sp} \hat{\Gamma}_{et}) (\theta - \theta_R) - \\ & - \frac{\rho_0 \kappa}{2 \theta_R} (\theta - \theta_R)^2 \end{aligned} \quad (2.127)$$

gewählt. Die ersten zwei Summanden auf der rechten Seite stellen sicher, daß die Elastizitätsbeziehung mit dem Hookeschen Gesetz kompatibel ist, der dritte charakterisiert das thermische Ausdehnungsverhalten. In (2.127) sind $\mu = \mu(\theta)$ und $\lambda = \lambda(\theta)$ die Laméschen Konstanten, $\alpha = \alpha(\theta)$ der Wärmeausdehnungskoeffizient, $\kappa = \kappa(\theta)$ eine temperaturabhängige Materialfunktion und θ_R die Referenztemperatur von κ und α . Somit erhält man aus (2.68) und (2.127)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \hat{\mathbf{T}}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) = 2\mu \hat{\Gamma}_{et} + \lambda (\text{Sp} \hat{\Gamma}_{et}) \mathbf{1} - \alpha (3\lambda + 2\mu) (\theta - \theta_R) \mathbf{1} = \\ &= \mathbf{C} [\hat{\Gamma}_{et}] - \alpha (3\lambda + 2\mu) (\theta - \theta_R) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.128)$$

wobei

$$\mathbf{C} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{C}^T \quad (2.129)$$

der Elastizitätstensor ist. Durch die Beziehung

$$\mathbf{C} \mathcal{M} = \mathcal{M} \mathbf{C} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.130)$$

wird der reziproke Elastizitätstensor zu

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathcal{M}^T \quad (2.131)$$

bestimmt. Auflösen von (2.128) nach $\hat{\Gamma}_{et}$ zeigt, daß der thermoelastische Verzerrungstensor additiv gemäß

$$\hat{\Gamma}_{et} = \hat{\Gamma}_e + \hat{\Gamma}_t \quad (2.132)$$

$$\hat{\Gamma}_e = \mathcal{M} [\hat{\mathbf{T}}] \quad (2.133)$$

$$\hat{\Gamma}_t = \alpha (\theta - \theta_R) \mathbf{1} \quad (2.134)$$

in einen elastischen Anteil $\hat{\Gamma}_e$ und einen thermischen Anteil $\hat{\Gamma}_t$ zerlegt werden kann. Infolge der Annahme der freien Energiefunktion in der Form (2.127) resultiert das Hyperelastizitätsgesetz

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{C} [\hat{\Gamma}_e] = \mathbf{C} [\hat{\Gamma}_{et} - \hat{\Gamma}_t] . \quad (2.135)$$

Bei kleinen thermoelastischen Deformationen entspricht die Vortransformation von Variablen formuliert bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ nach \mathbf{R}_τ näherungsweise einer Starrkörperrotation. In diesem Fall bleibt die Struktur des bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$ formulierten Materialmodells in Tabelle 2.2 bei einer Vortransformation der Variablen nach \mathbf{R}_τ erhalten. Ferner fällt wegen $\hat{\mathbf{V}}_{et} \approx \mathbf{1}$ der Mandelsche Spannungstensor mit dem rotierten gewichteten Cauchy-Spannungstensor zusammen

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + 2\hat{\Gamma}_{et}) \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{V}}_{et} \hat{\mathbf{V}}_{et} \hat{\mathbf{T}} \approx \hat{\mathbf{R}}_{et}^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{R}}_{et} . \quad (2.136)$$

Weiterhin gilt (2.41), so daß aus (2.132)-(2.134)

$$\mathbf{A}_{et} = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_t \quad (2.137)$$

$$\mathbf{A}_e = \mathcal{M} [\mathbf{S}] \quad (2.138)$$

$$\mathbf{A}_t = \alpha (\theta - \theta_R) \mathbf{1} \quad (2.139)$$

folgt. Für kleine thermoelastische Verzerrungen resultiert somit bei Vorgabe des elastischen Anteils der freien Energie nach (2.127) das Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} [\mathbf{A}_e] = \mathbf{C} [\mathbf{A}_{et} - \mathbf{A}_t] . \quad (2.140)$$

2.6.2 Vereinfachte kinematische Verfestigungsvariable

Motiviert durch (2.136) wird für kleine elastische Deformationen die Bestimmungsgleichung der kinematischen Verfestigung vereinfachend zu

$$\hat{\xi} = \hat{\mathbf{Z}} \quad \text{in } \hat{\mathbf{R}}_\tau, \quad \xi = \mathbf{Z} \quad \text{in } \mathbf{R}_\tau \quad (2.141)$$

angenommen. Es sei darauf hingewiesen, daß (2.141) nicht aus der Voraussetzung kleiner thermoelastischer Deformationen resultiert, sondern vielmehr eine zusätzliche Annahme zur Vereinfachung des Materialmodells in Tabelle 2.2 darstellt. KAMLAH [31] hat gezeigt, daß das mit (2.141) vereinfachte Materialmodell weiterhin thermodynamisch konsistent ist, wenn der Wertebereich des Materialparameters b durch

$$b \geq \sqrt{6} \quad (2.142)$$

beschränkt wird. Ferner zeigen numerische Untersuchungen von HÄUSLER & TSAKMAKIS [46] und TSAKMAKIS [47] für einfache Scherung und einfache Torsion, daß die Vereinfachung (2.141) lediglich quantitative Unterschiede im Verlauf von Effekten zweiter Ordnung bewirkt, jedoch die Form aller berechneten Kurven (auch für Spannungsverläufe außerhalb der Hauptbelastungsrichtung) erhalten bleibt.

2.6.3 Approximation der Elastizitäts- durch eine Hypoelastizitätsbeziehung

Mit der Zeitableitung von (2.134) und der $\hat{\Gamma}_{et}$ zugeordneten Oldroyd-Ableitung läßt sich die Ableitung

$$\hat{\Gamma}_t = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{1} + \mathbf{L}_p^T \hat{\Gamma}_t + \hat{\Gamma}_t \mathbf{L}_p \quad (2.143)$$

definieren. Im folgenden werden kleine thermische Verzerrungen in dem Sinne angenommen, daß neben der Bedingung

$$\|\hat{\Gamma}_t\| \ll 1 \quad (2.144)$$

auch die letzten zwei Terme auf der rechten Seite von (2.143) vernachlässigt werden können. Unter Einbeziehung der $\hat{\mathbf{T}}$ und $\hat{\Gamma}_{et}$ zugeordneten Oldroyd-Ableitungen erhält man dann aus der Zeitableitung von (2.135) die Beziehung

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{T}}} - \mathbf{c} \left[\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_{et} - \overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_t \right] &= \\ &= \dot{\theta} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_e] - \mathbf{c} [\mathbf{L}_p^T \hat{\Gamma}_e + \hat{\Gamma}_e \mathbf{L}_p] - \mathbf{L}_p \mathbf{c} [\hat{\Gamma}_e] - \mathbf{c} [\hat{\Gamma}_e] \mathbf{L}_p^T. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Im weiteren werden kleine elastische Verzerrungen in dem Sinne angenommen, daß neben der Bedingung

$$\|\hat{\Gamma}_e\| \ll 1 \quad (2.146)$$

auch alle Terme auf der rechten Seite von (2.145) vernachlässigt werden können, so daß die Hyperelastizitätsbeziehung (2.135) durch das Hypoelastizitätsgesetz

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \mathbf{c} \left[\hat{\Gamma}_e \right] = \mathbf{c} \left[\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_t - \hat{\Gamma}_p \right] \quad (2.147)$$

approximiert werden kann. Aufgrund der Gültigkeit von (2.41) lauten die Beziehungen (2.143) und (2.147) formuliert mit Variablen bzgl. R_r

$$\hat{\mathbf{A}}_t = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (2.148)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{S}} = \mathbf{c} \left[\hat{\mathbf{A}}_e \right] = \mathbf{c} \left[\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}_t - \hat{\mathbf{A}}_p \right] = \mathbf{c} \left[\mathbf{D} - \hat{\mathbf{A}}_t - \hat{\mathbf{A}}_p \right]. \quad (2.149)$$

2.6.4 Thermoelastische Kopplung beim vereinfachten Materialmodell

In Anlehnung an die lineare Thermoelastizität (siehe beispielsweise NOWACKI [48, S. 10]) wird vereinfachend

$$c_\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} \frac{\theta_R}{\theta} \kappa \quad (2.150)$$

angenommen. Ferner wird bei der Berechnung der thermoelastischen Kopplung die Gültigkeit der im Abschnitt 2.6.1 für $\hat{\Gamma}_e$ und $\hat{\Gamma}_t$ getroffenen Annahmen vorausgesetzt. Mit diesen erhält man zunächst aus (2.135)

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \theta} \left[\hat{\Gamma}_{et} - \hat{\Gamma}_t \right] - \mathbf{c} \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}_t}{\partial \theta} \right]. \quad (2.151)$$

Wird im weiteren zusätzlich die Gültigkeit der für (2.145) getroffenen Annahmen vorausgesetzt, ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \theta} = -(2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \mathbf{1}. \quad (2.152)$$

Einsetzen von (2.152) in (2.117) bei nochmaliger Anwendung der im Abschnitt 2.6.3 für $\hat{\Gamma}_e$ und $\hat{\Gamma}_t$ getroffenen Annahmen liefert

$$\begin{aligned}
 w_{et} &= -\frac{\theta}{\rho_0} (2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \mathbf{1} \cdot \left(\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_p - \mathbf{L}_p^T \hat{\Gamma}_{et} - \hat{\Gamma}_{et} \mathbf{L}_p \right) = & (2.153) \\
 &= -\frac{\theta}{\rho_0} (2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \mathbf{1} \cdot \hat{\Gamma} .
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (2.41) erhält man die in Tabelle 2.4 angegebene Beziehung für die thermoelastische Kopplung.

2.6.5 Zusammenfassung

Das vereinfachte Materialmodell ist sowohl für Elastizität als auch für Hypoelastizität in Tabelle 2.3 angegeben. Weiterhin sind die beim vereinfachten Materialmodell resultierenden Terme in der Wärmeleitungsgleichung in Tabelle 2.4 zusammengestellt.

Tab. 2.3: Vereinfachte Materialmodelle der Viskoplastizität und der Plastizität

<u>Spannung:</u>	
a) Elastizität	b) Hypoelastizität
$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{A}_e]$	$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \left[\hat{\mathbf{A}}_e \right]$
(2.154)	
<u>thermische Dehnung:</u>	
$\mathbf{A}_t = \alpha(\theta - \theta_R) \mathbf{1}$	$\hat{\mathbf{A}}_t = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{1}$
(2.155)	
<u>Fließfunktion:</u>	
$F = \bar{F}(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ (\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D \right\ - k$	(2.156)
<u>Fließregel:</u>	
$\hat{\mathbf{A}}_p = \dot{s} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{S}} = \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D}{\ (\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D\ } = \dot{s} \mathbf{R}_p = \Lambda \mathbf{N}, \quad \dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda$	(2.157)
<u>Lastfaktor:</u>	
a) Viskoplastizität (VP)	b) Plastizität (Pl)
$\dot{s} = \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m$	$\dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \quad \text{für } F = 0 \wedge \dot{F} \Big _{F_p = \text{konst.}}$
	$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}$
(2.158)	
<u>kinematische Verfestigung:</u>	
$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{cases} c \hat{\mathbf{A}}_p - b \dot{s} \mathbf{Z} - p \ \mathbf{Z}\ ^{w-1} \mathbf{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \mathbf{Z} & \text{(VP)} \\ c \hat{\mathbf{A}}_p - b \dot{s} \mathbf{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \mathbf{Z} & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.159)
<u>isotrope Verfestigung:</u>	
$\left. \begin{array}{l} R = k - y \\ y = Y \end{array} \right\} \text{für Ansatz (A)}$	$\left. \begin{array}{l} R = k \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{für Ansatz (B)}$
(2.160)	
$\dot{k} - \dot{Y} = \begin{cases} \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \dot{s} - \pi (k - Y)^\omega + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) & \text{(VP)} \\ \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \dot{s} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.161)
<u>Wärmefluß:</u>	
$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \mathbf{g}$	(2.162)

Tab. 2.4: Zur Berechnung der thermoelastischen Kopplung und der dissipierten Spannungsleistung beim vereinfachten Materialmodell

<u>thermoelastische Kopplung:</u>	
$w_{et} = \check{w}_{et}(\mathbf{D}, \theta) = -\frac{\theta}{\rho_0} (2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \text{Sp} \mathbf{D}$	(2.163)
<u>dissipierte Spannungsleistung (aus Ansatz für die freie Energie):</u>	
$w_d = \widehat{w}_d(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, k, \theta) = w_p - \dot{e}_s$	(2.164)
$w_p = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{\rho_0} \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}$	(2.165)
$\dot{e}_s = \dot{e}_{sY} + \dot{e}_{sr}$	(2.166)
$\dot{e}_{sY} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \theta \right) \mathbf{Z} \cdot \left(c \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} - b \dot{s} \mathbf{Z} - p \ \mathbf{Z}\ ^{w-1} \mathbf{Z} + 2 \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{Z} \mathbf{N} \right) & \text{(VP)} \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \theta \right) \mathbf{Z} \cdot \left(c \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} - b \dot{s} \mathbf{Z} + 2 \dot{s} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{Z} \mathbf{N} \right) & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.167)
$\dot{e}_{sr} = \begin{cases} \dot{e}_{sr}^{(A)} = \frac{1}{\rho_0} (A - Y) \dot{r} & \text{für Ansatz (A)} \\ \dot{e}_{sr}^{(B)} = \frac{1}{\rho_0} \left(A - \frac{\partial Y}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r} & \text{für Ansatz (B)} \end{cases}$	(2.168)
$A = k - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \theta (k - Y)$	(2.169)
$\dot{r} = \begin{cases} \varphi \left(1 - \frac{(k - Y)}{\gamma} \right) \dot{s} - \frac{\pi}{\beta \gamma} (k - Y)^\omega & \text{(VP)} \\ \varphi \left(1 - \frac{(k - Y)}{\gamma} \right) \dot{s} & \text{(PL)} \end{cases}$	(2.170)
<u>dissipierte Spannungsleistung (vereinfachte konstitutive Beziehung):</u>	
$w_d = \eta_d \frac{1}{\rho_0} w_p = \eta_d \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{A}}_p = \eta_d \frac{1}{\rho_0} \Lambda \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}$	(2.171)

3 Finite Elemente Methode bei thermo- mechanischen Problemen

3.1 Schwache Formulierung der Feldgleichungen

Für ein Gebiet V mit Rand A ist für jeden festgehaltenen Zeitpunkt τ durch die Impulsbilanz (2.48)

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad (3.1)$$

zusammen mit den Verschiebungsrandbedingungen auf A^u und den Spannungsrandbedingungen auf A^σ

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^u \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^\sigma \quad (3.3)$$

sowie durch die Wärmeleitungsgleichung (2.114) (vgl. [12, S.61] und [13, S.423])

$$c_\varepsilon \dot{\theta} - w_{et} = r_{st} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + w_d \quad (3.4)$$

zusammen mit den Temperaturrendbedingungen auf A^θ und den Wärmeflußrandbedingungen auf A^q

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^\theta \quad (3.5)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^q \quad (3.6)$$

ein Randwertproblem gegeben. A^u , A^σ , A^θ und A^q sind Teilflächen vom Rand A des Gebiets V , die den Bedingungen

$$A^u \cup A^\sigma = A \quad \wedge \quad A^u \cap A^\sigma = \emptyset \quad (3.7)$$

$$A^\theta \cup A^q = A \quad \wedge \quad A^\theta \cap A^q = \emptyset \quad (3.8)$$

genügen. Dieses Randwertproblem wird im folgenden in eine Variationsformulierung, auch schwache Formulierung genannt, überführt. Dazu werden die Differentialgleichungen (3.1) und (3.4) zunächst jeweils mit einer Testfunktion $\chi(\mathbf{x})$ bzw. $\chi(\mathbf{x})$ multipliziert und anschließend über das Volumen integriert. Die Testfunktionen χ und χ sind im Volumen V stetige, der homogenen Verschiebungs- bzw. Temperaturreandbedingung

$$\chi = 0 \quad \text{auf } A^u \quad (3.9)$$

$$\chi = 0 \quad \text{auf } A^\theta \quad (3.10)$$

genügende, jedoch ansonsten frei wählbare Funktionen des Ortes. Man erhält die integrale Form der Differentialgleichungen

$$\int_V \chi \cdot (-\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{x}}) dV = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_V \chi \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r_{st} + w_d + w_{et} - c_\epsilon \dot{\theta} \right) dV = 0, \quad (3.12)$$

woraus mit den Identitäten

$$\chi \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \chi) - \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \chi \quad (3.13)$$

$$\chi \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\chi \mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \chi \quad (3.14)$$

und dem Gaußschen Satz unter Beachtung der Randbedingungen der Testfunktionen (3.9) und (3.10) die schwachen Formen der Differentialgleichungen (3.1) und (3.4) mit den natürlichen Randbedingungen (3.2) und (3.5) folgen. Die schwache Form der Impulsbilanz und die schwache Form der Wärmeleitungsgleichung mit den Verschiebungs- und Temperaturreandbedingungen (natürliche Randbedingungen) zur Zeit τ ergibt sich zu

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \theta, \chi) = \int_V \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \chi dV - \int_V \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \chi dV - \int_{A^\sigma} \mathbf{t} \cdot \chi dA = 0 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^u, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta, \chi) = \int_V \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \chi dV - \int_V \rho \chi (r_{st} + w_d + w_{et} - c_\epsilon \dot{\theta}) dV - \int_{A^q} \chi q dA = 0 \quad (3.17)$$

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{auf } A^\theta. \quad (3.18)$$

Durch Anwendung der Identitäten (3.13) und (3.14) und Einarbeitung der Spannungs- (3.3) und Temperaturrandbedingungen(3.6) erniedrigt sich die Differenzierbarkeitsanforderung an das Spannungsfeld \mathbf{T} bzw. an das Wärmeflussfeld \mathbf{q} , erhöht diese jedoch an die Testfunktionen χ und χ . Somit muß das Verschiebungsfeld denselben Differenzierbarkeitsanforderungen wie die Testfunktion χ , das Temperaturfeld denselben Differenzierbarkeitsanforderungen wie die Testfunktion χ genügen.

3.2 Allgemeine Vorgehensweise bei der Berechnung thermomechanischer Probleme

In einer nichtlinearen Finite Elemente Berechnung wird neben der räumlichen Diskretisierung des betrachteten Körpers (siehe Anhang B) eine zeitliche Diskretisierung vorgenommen. Betrachtet wird ein materieller Körper mit Bildbereich R_{t_0} bzgl. der Ausgangskonfiguration zur Zeit t_0 . Am Beginn der Deformation sind Impuls- und Energiebilanz erfüllt. Weiterhin sind alle Zustandsvariablen bekannt. In dieser Arbeit wird ein solcher Zustand Gleichgewichtslage genannt. ¹

Mit zunehmender Zeit werden sukzessive an jeder Zeitstützstelle $t_0, t_1, \dots, t, t + \Delta t, \dots$ Gleichgewichtslagen des materiellen Körpers und alle Zustandsvariablen in diesen Zeitpunkten bestimmt. Gleichgewichtslagen werden somit nur an endlich vielen Zeitstützstellen ermittelt. Diese inkrementelle Vorgehensweise trägt der Geschichtsabhängigkeit der Materialantwort sowie einer eventuell auftretenden Deformationsabhängigkeit der äußeren Lasten Rechnung. Die Nichtlinearität des Stoffgesetzes bedingt weiterhin, daß Gleichgewichtslagen des materiellen Körpers von Inkrement zu Inkrement iterativ bestimmt werden müssen.

Ausgehend von der bereits berechneten Gleichgewichtslage R_t zur Zeit t wird für ein gegebenes Zeitinkrement Δt die nächste Gleichgewichtslage $R_{t+\Delta t}$ iterativ bestimmt. Dabei wird in jedem Iterationsschritt i dem Zeitpunkt $t + \Delta t$ eine deformierte Lage $R_{t+\Delta t}^i$ zugeordnet, welche durch das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^i(\mathbf{X}, t + \Delta t) = \mathbf{x}^i(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \mathbf{X}$ eindeutig bestimmt ist. Weiterhin ist das Temperaturfeld $\theta^i(\mathbf{X}, t + \Delta t)$ in $R_{t+\Delta t}^i$ gegeben. In $R_{t+\Delta t}^i$ kann der Deformationsgradient $\mathbf{F}^i = \partial \mathbf{x}^i(\mathbf{X}, t + \Delta t) / \partial \mathbf{X}$ sowie der inkrementelle Deformationsgradient $\mathbf{F}_t = \partial \mathbf{x}^i(\mathbf{X}, t + \Delta t) / \partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ unmittelbar bestimmt werden.

Anhand der schwachen Form der Impulsbilanz und der schwachen Form der Wärmeleitungsgleichung (3.15)-(3.18) (genauer gesagt anhand deren räumlich diskretisierten Formen – den

¹Der Begriff Gleichgewichtslage sollte jedoch nicht mit dem Begriff Gleichgewicht der Statik verwechselt werden.

Grundgleichungen der Finite Elemente Methode (B.9), (B.10)) wird entschieden, ob $R_{t+\Delta t}^i$ eine Gleichgewichtslage darstellt. Dazu müssen alle Zustandsvariablen für diese Lage bekannt sein.

Diese werden durch Auswerten der Stoffgesetze innerhalb einer Materialroutine berechnet. Da lediglich Lage und Temperatur des Körpers am Inkrementanfang zur Zeit t und am Inkrementende zur Zeit $t + \Delta t$ gegeben sind, ist in der Materialroutine ein dehnungsgesteuertes Zweipunktproblem zu lösen ². In Abbildung 3.1 ist der Verlauf einer Finite Elemente Rechnung skizziert. Die gestrichelten Lagen kennzeichnen iterierte Nichtgleichgewichtslagen, i bezeichnet den Iterationszähler.

3.3 Zustandsvektorberechnung – Allgemeine Beschreibung

Zur symbolischen Darstellung des Materialverhaltens werden alle in $R_{t+\Delta t}^i$ gesuchten Zustandsvariablen in einem Vektor, Zustandsvektor \mathbf{z} genannt, zusammengefaßt. Er enthält alle skalaren Zustandsvariablen und alle Komponenten tensorieller Zustandsvariablen, für die Materialgleichungen formuliert wurden. Für das Materialmodell in Tabelle 2.3 ist der Zustandsvektor durch

$$\mathbf{z} = \begin{cases} (\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{A}}_p, \underline{\mathbf{Z}}, k)^T & \text{für Elastizität} \\ (\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{Z}}, k)^T & \text{für Hypoelastizität} \end{cases} \quad (3.19)$$

gegeben, wobei unterstrichene tensorielle Variablen als Spaltenvektor geschrieben werden. Aufgrund der Geschichtsabhängigkeit der Materialantwort ist der Zustandsvektor am materiellen Punkt \mathbf{X} für $R_{t+\Delta t}^i$ durch ein Funktional

$$\mathbf{z}^i = \underset{\zeta \leq t + \Delta t}{\mathcal{F}} \left(\mathbf{F}^i(\mathbf{X}, \zeta), \theta^i(\mathbf{X}, \zeta) \right) \quad (3.20)$$

bestimmt. Diese Darstellung des Materialverhaltens beruht auf den Prinzipien des Determinismus und der lokalen Wirkung ([33, S.65], [32, S.56]).

²Ein Anfangswertproblem heißt Zweipunktproblem, wenn nur der Anfangs- und der Endwert der unabhängigen Variablen gegeben ist.

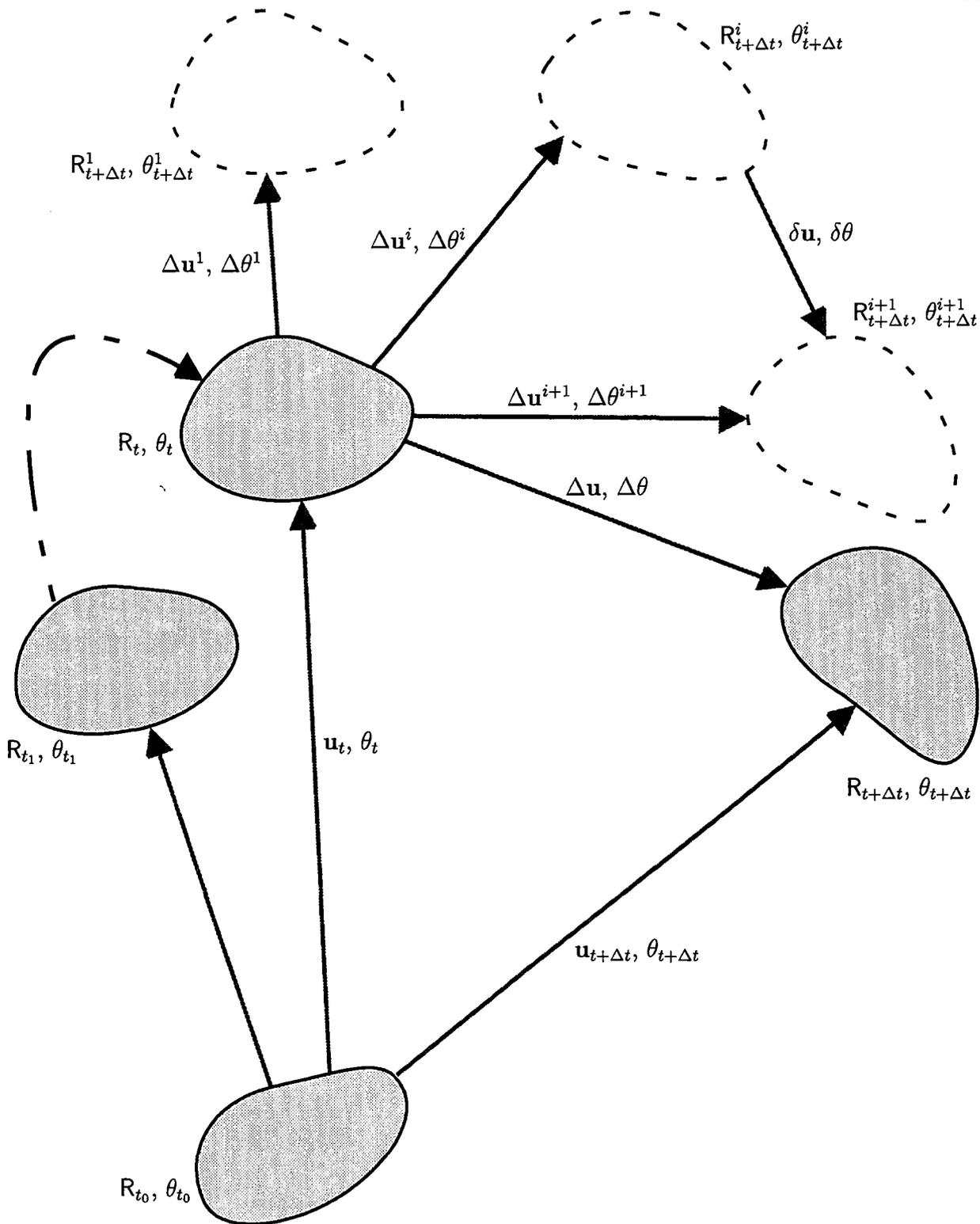


Abb. 3.1: Finite Elemente Berechnungsablauf in der Thermomechanik.

Innerhalb der Materialroutine wird der gesuchte Zustandsvektor $\mathbf{z}(t + \Delta t)$ bei vorgegebenem Zeitschritt Δt und bekanntem Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ berechnet. Durch die numerische Auswertung des Funktionals \mathcal{F} innerhalb der Materialroutine wird der Zustandsvektor durch die Funktion

$$\mathbf{z}^i = \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \\ \tilde{\mathbf{A}}_p(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \\ \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \\ \tilde{k}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^i(t + \Delta t) \\ \mathbf{A}_p^i(t + \Delta t) \\ \mathbf{Z}^i(t + \Delta t) \\ k^i(t + \Delta t) \end{pmatrix} & \text{für Elastizität} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \\ \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \\ \tilde{k}(\mathbf{F}_t, \Delta\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^i(t + \Delta t) \\ \mathbf{Z}^i(t + \Delta t) \\ k^i(t + \Delta t) \end{pmatrix} & \text{für Hypoelastizität} \end{cases} \quad (3.21)$$

approximiert.

3.4 Gleichgewichtsiteration und Tangentensteifigkeitsmatrix

Zur Zeit t am Beginn des Inkrements sind die Lage des materiellen Körpers, seine Temperatur und alle Zustandsvariablen bekannt. Gesucht ist die Lage des materiellen Körpers, seine Temperatur und alle Zustandsvariablen zur Zeit $t + \Delta t$, so daß die schwachen Formen (3.15) und (3.17) für die Randbedingungen (3.16) und (3.18) zur Zeit $t + \Delta t$ erfüllt sind. In das durch (3.15) und (3.17) für die Zeit $t + \Delta t$ gegebene Nullstellenproblem werden die durch das Material bestimmten Größen durch die in der Materialroutine bestimmten Näherungen ersetzt. Das so entstehende Gleichungssystem wird iterativ gelöst und es folgt für eine Näherungslösung $\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i$ ³

$$\mathcal{G}^*(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) = R_{\mathcal{G}^*}^i \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}^*(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) = R_{\mathcal{L}^*}^i, \quad (3.23)$$

wobei bei konvergentem Iterationsverfahren

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(R_{\mathcal{G}^*}^i, R_{\mathcal{L}^*}^i \right)^T = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

³Es gilt: $\mathcal{G}^*(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) = \mathcal{G}(\mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}^i, \theta(t) + \Delta\theta^i, \chi)$, $\mathcal{L}^*(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}^i, \theta(t) + \Delta\theta^i, \chi)$.

gilt. $R_{\mathcal{G}^*}$ und $R_{\mathcal{L}^*}$ bezeichnen die durch die Näherung entstehenden Residuen. Aufgrund seiner quadratischen Konvergenz wird meist das Newton-Verfahren angewandt, so daß die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) \\ \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) & D_{\Delta \theta} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) \\ D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) & D_{\Delta \theta} \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \theta^{i+1} - \Delta \theta^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (3.25)$$

lautet. Die Iteration wird nach einem Schritt k beendet, falls das berechnete Ergebnis eine vorgegebene Genauigkeitsschranke unterschreitet oder falls eine aufgrund der lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens vorgegebene maximale Anzahl zulässiger Iterationen im Inkrement erreicht ist [49, S.151]. Die im Newton-Verfahren (3.25) auftretende Funktionalmatrix wird Tangentensteifigkeitsmatrix genannt.

Die Komponenten der Tangentensteifigkeitsmatrix angewandt auf die zugehörigen Inkremente der Verschiebung bzw. der Temperatur berechnen sich mit (3.15) und (3.17) unter Verwendung der Definitionen

$$P = \int_V \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \chi \, dV + \int_{A^\sigma} \mathbf{t} \cdot \chi \, dA \quad (3.26)$$

$$K = \int_V \mathbf{q} \cdot \text{grad} \chi \, dV - \int_V \rho \chi (r_{st} - c_\epsilon \dot{\theta}) \, dV - \int_{A^q} \chi \, q \, dA \quad (3.27)$$

$$\delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i, \quad (3.28)$$

$$\delta \theta = \Delta \theta^{i+1} - \Delta \theta^i = \theta^{i+1} - \theta^i \quad (3.29)$$

zu

$$\begin{aligned} D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) [\delta \mathbf{u}] &= \int_{V_0} \{ D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \mathbf{u}] \cdot \text{grad} \chi + \\ &+ \mathbf{S} \cdot D_{\Delta \mathbf{u}}(\text{grad} \chi)(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \mathbf{u}] \} \, dV_0 - D_{\Delta \mathbf{u}} P(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) [\delta \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$D_{\Delta \theta} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) [\delta \theta] = \int_{V_0} D_{\Delta \theta} \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \theta] \cdot \text{grad} \chi \, dV_0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) [\delta \mathbf{u}] &= D_{\Delta \mathbf{u}} K(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \chi) [\delta \mathbf{u}] - \\ &- \int_{V_0} \rho_0 \chi \, D_{\Delta \mathbf{u}} \{ w_d + w_{et} \} (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \mathbf{u}] \, dV_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$D_{\Delta\theta}\mathcal{L}^*(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) [\delta\theta] = D_{\Delta\theta}K(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i, \chi) [\delta\theta] - \int_{V_0} \rho_0 \chi D_{\Delta\theta} \{w_d + w_{et}\} (\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i) [\delta\theta] dV_0. \quad (3.33)$$

3.5 Implementierung eines konstitutiven Modells in ein Finite Elemente Programm

Die Implementierung eines konstitutiven Modells in ein Finite Elemente Programm erfordert [19]

1. ein effizientes, genaues und numerisch stabiles Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Zustandsvektors
2. die Definition des vom Zustandsvektor abhängigen Beitrags zur Tangentensteifigkeitsmatrix des Newton-Verfahrens (3.25).

Die Genauigkeit des Ergebnisses ist dabei ausschließlich durch die Genauigkeit bestimmt, mit der in der Materialroutine der Zustandsvektor berechnet wird. Die Tangentensteifigkeitsmatrix beeinflusst wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens.⁴

Im folgenden Kapitel wird die Implementierung des in Tabelle 2.3 angegebenen vereinfachten Materialmodells in die Schnittstelle UMAT des Finite Elemente Programms ABAQUS vorgestellt. Innerhalb dieser Schnittstelle werden gemäß Punkt 1 alle Zustandsvariablen und gemäß Punkt 2 Beiträge zu den Termen

- $D_{\Delta\mathbf{u}}\mathbf{S}(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i) [\delta\mathbf{u}] \quad (3.34)$

- $D_{\Delta\theta}\mathbf{S}(\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i) [\delta\theta] \quad (3.35)$

- $D_{\Delta\mathbf{u}} \{w_d + w_{et}\} (\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i) [\delta\mathbf{u}] \quad (3.36)$

- $D_{\Delta\theta} \{w_d + w_{et}\} (\Delta\mathbf{u}^i, \Delta\theta^i) [\delta\theta] \quad (3.37)$

der Tangentensteifigkeitsmatrix bestimmt.

⁴Eine fehlerhaft berechnete Tangentensteifigkeitsmatrix kann jedoch, insbesondere bei anfänglich homogenen Problemen, zu unrealistischen Deformationen führen (vgl. dazu Abschnitt 5.2).

4 Materialroutine

4.1 Problembeschreibung

In diesem Kapitel wird die Integration des in Tabelle 2.3 angegebenen Materialmodells beschrieben, wie sie als UMAT-Routine in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementiert wurde. Dabei wird für die Spannung die Hypoelastizitätsbeziehung gewählt, da ABAQUS eine solche Beziehung voraussetzt. Somit ist durch die Materialgleichungen

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{c} \left[\mathbf{D} - \Lambda \mathbf{N} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{1} \right] \quad (4.1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = c \Lambda \mathbf{N} - b \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \mathbf{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \mathbf{Z} - p \|\mathbf{Z}\|^{w-1} \mathbf{Z} \quad (4.2)$$

$$\dot{k} - \dot{Y} = \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) - \pi (k - Y)^\omega \quad (4.3)$$

$$F = \bar{F}(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S} - \mathbf{Z}\|^D - k \quad (4.4)$$

a) Viskoplastizität

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m \quad (4.5)$$

b) Plastizität

$$p = 0, \quad \pi = 0 \quad (4.6)$$

$$\Lambda : \begin{cases} \dot{F} = 0 \Rightarrow \Lambda & \text{für } F = 0 \wedge \dot{F} \Big|_{F_p=\text{konst.}} \geq 0 \\ \Lambda = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.7)$$

zusammen mit den Werten

$$\mathbf{S}(t), \mathbf{Z}(t), k(t) \quad (4.8)$$

am Inkrementanfang und dem Zeitinkrement Δt , dem Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}$ sowie dem Temperaturinkrement $\Delta \theta$ das in der Materialroutine zu lösende Anfangswertproblem gegeben.

Weiterhin ist in diesem Kapitel die Berechnung des in UMAT zu bestimmenden Anteils an der Tangentensteifigkeitsmatrix angegeben.

4.2 Zustandsvektorberechnung

Zur Notation: In der Materialroutine wird für ein im Zeitinkrement Δt vorgegebenes Verschiebungs- und Temperaturinkrement bei bekanntem Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ der Zustandsvektor $\mathbf{z}^i(t + \Delta t)$ am Inkrementende für die Lage $\mathbf{R}_{t+\Delta t}^i$ bestimmt (siehe Abbildung 3.1). Da der Iterationsindex i der Iteration (3.25) zugeordnet ist und innerhalb der Materialroutine unverändert bleibt, wird der Index i in diesem Kapitel weggelassen.

Wie in der Literatur allgemein üblich (so z. B. in [50], [51], [52], [30]), wird der Wert einer Größe g zum Zeitpunkt τ durch $g(\tau)$ gekennzeichnet, der numerisch bestimmte Näherungswert für $g(\tau)$ wird mit g_τ bezeichnet.

Insbesondere werden numerisch bestimmten Näherungen am Inkrementanfang zur Zeit t mit rechts tiefgestelltem Index 0, in der Inkrementmitte zur Zeit $t + \Delta t/2$ mit rechts tiefgestelltem Index $1/2$ und am Inkrementende zur Zeit $t + \Delta t$ mit rechts tiefgestelltem Index 1 gekennzeichnet.

Desweiteren bezeichnet ζ die Zeit innerhalb des betrachteten Inkrements, d.h. $\zeta \in [t, t + \Delta t]$.

4.2.1 Bar-Transformation

Sei $\mathbf{Q}(\zeta)$ ein durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{Q}}(\zeta) = \mathbf{W}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) \tag{4.9}$$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{1} \tag{4.10}$$

definierter orthogonaler Tensor, wobei \mathbf{W} der Wirbeltensor ist. Mit Hilfe des Tensors $\mathbf{Q}(\zeta)$ wird durch (4.11) die *bar-Transformation* (WEBER et. al. [53]) eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe $\mathbf{X}(\zeta)$ durch

$$\bar{\mathbf{X}}(\zeta) = \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) \tag{4.11}$$

definiert. Differenzieren dieser Beziehung zeigt, daß durch eine bar-Transformation die Jaumann-Ableitung $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{W}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{W}^T$ in die materielle Zeitableitung $\overset{\nabla}{\mathbf{X}}$ überführt wird

$$\begin{aligned}\overset{\nabla}{\mathbf{X}}(\zeta) &= \dot{\mathbf{Q}}^T(\zeta) \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) + \mathbf{Q}^T(\zeta) \dot{\mathbf{X}}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) + \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{X}(\zeta) \dot{\mathbf{Q}}(\zeta) \\ &= \mathbf{Q}^T(\zeta) \overset{\circ}{\mathbf{X}}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta).\end{aligned}\quad (4.12)$$

Da für Familie 1 die Oldroyd-Ableitung $\overset{\nabla}{\mathbf{X}}$ zu

$$\overset{\nabla}{\mathbf{X}}(\zeta) = \overset{\circ}{\mathbf{X}}(\zeta) - \mathbf{D}(\zeta) \mathbf{X}(\zeta) - \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{D}(\zeta) \quad (4.13)$$

geschrieben werden kann, erhält man

$$\dot{\overset{\nabla}{\mathbf{X}}}(\zeta) = \mathbf{Q}^T(\zeta) \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{X}}}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) + \overline{\mathbf{D}}(\zeta) \overline{\mathbf{X}}(\zeta) + \overline{\mathbf{X}}(\zeta) \overline{\mathbf{D}}(\zeta). \quad (4.14)$$

4.2.2 Bar-transformierte Form der Materialgleichungen

Mit der zu (4.1)-(4.7) äquivalenten, bar-transformierten Form der Materialgleichungen, die eine für die numerische Integration günstige Struktur aufweist, lautet das in der Materialroutine zu lösende Anfangswertproblem

$$\dot{\overline{\mathbf{S}}} = \overline{\mathbf{D}} \overline{\mathbf{S}} + \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{D}} + \mathbf{c} \left[\overline{\mathbf{D}} - \Lambda \overline{\mathbf{N}} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{1} \right] \quad (4.15)$$

$$\dot{\overline{\mathbf{Z}}} = \overline{\mathbf{D}} \overline{\mathbf{Z}} + \overline{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{D}} + c \Lambda \overline{\mathbf{N}} - b \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \overline{\mathbf{Z}} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \overline{\mathbf{Z}} - p \|\overline{\mathbf{Z}}\|^{w-1} \overline{\mathbf{Z}} \quad (4.16)$$

$$\dot{k} - \dot{Y} = \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) - \pi (k - Y)^w \quad (4.17)$$

$$F = \overline{F}(\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{Z}}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| (\overline{\mathbf{S}} - \overline{\mathbf{Z}})^D \right\| - k \quad (4.18)$$

a) Viskoplastizität

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m \quad (4.19)$$

b) Plastizität

$$p = 0, \quad \pi = 0 \quad (4.20)$$

$$\Lambda : \begin{cases} \dot{F} = 0 \Rightarrow \Lambda & \text{für } F = 0 \wedge \dot{F}|_{F_p=\text{konst.}} \geq 0 \\ \Lambda = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\dot{Q} = WQ \quad (4.22)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\bar{S}_0 = S(t), \quad \bar{Z}_0 = Z(t), \quad k_0 = k(t) \quad (4.23)$$

$$Q_0 = 1. \quad (4.24)$$

In (4.15) wurde die Isotropie des Elastizitätstensors ausgenutzt (für Anisotropie siehe beispielsweise HUGHES[19]).

Man erkennt, daß durch die bar-Transformation der Materialgleichungen das gesamte Anfangswertproblem in zwei unabhängige Anfangswertprobleme zerlegt wird:

- Anfangswertproblem I
ist durch die Differentialgleichung (4.22) mit der unabhängigen Variable W und der Anfangsbedingung (4.24) gegeben.
- Anfangswertproblem II
ist durch (4.15)-(4.21) mit den unabhängigen Variablen \bar{D} , $\dot{\theta}$ und den Anfangsbedingungen (4.23) gegeben. Für Viskoplastizität ist (4.15)-(4.21) ein Differentialgleichungssystem, für Plastizität ein Algebro-Differentialgleichungssystem.

Die unabhängigen Variablen \bar{D} und W sind durch den Verschiebungsverlauf, die unabhängige Variable $\dot{\theta}$ durch den Temperaturverlauf im Zeitinkrement bestimmt.

4.2.3 Anforderungen aus der Konsistenzbedingung

Bei der Integration der Materialgleichungen ist ein dehnungsgesteuertes Zweipunktproblem zu lösen, bei dem lediglich Ort und Temperatur am Inkrementende gegeben sind. Mit diesen Größen müssen die unabhängigen Variablen $\dot{\theta}(\zeta)$, $\bar{\mathbf{D}}(\zeta)$, $\mathbf{W}(\zeta)$ des Anfangswertproblems (4.15)-(4.24) im Zeitinkrement zur Zeit ζ durch $\dot{\theta}_\zeta$, $\bar{\mathbf{D}}_\zeta$, \mathbf{W}_ζ angenähert werden.

Die aus der Konsistenzbedingung (C.3) resultierende Beziehung (C.4) fordert, daß die Verfahrensfunction für $\Delta t \rightarrow 0$ gleich der rechten Seite der Differentialgleichung ist. Die Approximationen $\dot{\theta}_\zeta$, $\bar{\mathbf{D}}_\zeta$, \mathbf{W}_ζ müssen somit auch für $\Delta t \rightarrow 0$ gegen ihren Wert zur Zeit t streben, d.h. es muß

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \dot{\theta}_\zeta = \dot{\theta}(t) \quad (4.25)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{D}(t) = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}}_t(t)) \quad (4.26)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{W}_\zeta = \mathbf{W}(t) = \text{skw}(\dot{\mathbf{F}}_t(t)) \quad (4.27)$$

gelten, wobei $\mathbf{F}_t = \partial \mathbf{x}(\zeta) / \partial \mathbf{x}(t)$ den inkrementellen Deformationsgradienten (siehe Abbildung 3.1) bezeichnet. Erfüllt die Approximation \mathbf{W}_ζ die Forderung (4.27) und wird das Anfangswertproblem I (4.22), (4.24) numerisch mit einem konsistenten Integrationsverfahren gelöst, dann gilt für den berechneten Transformationstensor \mathbf{Q}_1 aufgrund der Anfangsbedingung (4.24)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{1}. \quad (4.28)$$

Sei R_ζ der Raumbereich des materiellen Körpers zur Zeit ζ und ferner \mathbf{Q}_ζ bzw. $\mathbf{Q}_{\zeta,1}$ die Transformation zwischen R_t und R_ζ bzw. R_ζ und $R_{t+\Delta t}$, dann gilt

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_{\zeta,1} \mathbf{Q}_\zeta \quad (4.29)$$

und wegen (4.28)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{1}. \quad (4.30)$$

Für (4.26) kann mit (4.11) und (4.30)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{D}}_\zeta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{Q}_\zeta^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{D}_\zeta \quad (4.31)$$

geschrieben werden, so daß die Forderung (4.26) durch

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{D}_\zeta = \mathbf{D}(t) \quad (4.32)$$

ersetzt werden kann.

Bei der Lösung eines Zweipunktproblems ist es üblich den unbekanntem Verlauf der unabhängigen Variablen als konstant im Inkrement anzunehmen. Anhand von (C.4) und (4.30) erkennt man, daß diese vereinfachende Annahme bei Gültigkeit von (4.31) keinen Einfluß auf die Konsistenz des Integrationsverfahrens hat.

4.2.4 Inkrementelle Objektivität

Bei der Integration des Materialmodells wird neben den fundamentalen mathematischen Anforderungen nach Konsistenz und Stabilität (was bei Einschrittverfahren eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens ist) gefordert, daß der Integrationsalgorithmus inkrementelle Objektivität sichert. Inkrementelle Objektivität ist eine aufgrund physikalischer Überlegungen anzustrebende Eigenschaft eines Integrationsverfahrens, die sich bei rein mathematischer Betrachtung lediglich im Grenzfall verschwindender Zeitschrittweite Δt wegen der Konsistenzforderung ergeben muß.

Für den Begriff inkrementelle Objektivität existieren in der Literatur unterschiedliche Definitionen (siehe hierzu beispielsweise HUGHES & WINGET [18], RUBINSTEIN & ATLURI [16], REED & ATLURI [54, S.271 ff.], WEBER et. al. [53]). Hier wird die von HUGHES & WINGET gegebene Definition des Begriffs inkrementelle Objektivität benutzt.

Gegeben sei ein Integrationsalgorithmus zur Lösung des Anfangswertproblems (4.1)-(4.8) und ein Zeitschritt Δt , ein Verzerrungsinkrement $\Delta \varepsilon$ und ein Temperaturinkrement $\Delta \theta$. Ferner seien $\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, k_1$ die mit dem Integrationsalgorithmus berechneten Approximationen für eine durch $\mathbf{F}_{t_1} = \mathbf{1}$ vorgegebene Starrkörperbewegung (siehe Abbildung 4.1); $\mathbf{S}_1^*, \mathbf{Z}_1^*, k_1^*$ die mit dem Integrationsalgorithmus berechneten Approximationen bei Vorgabe einer Starrkörperbewegung mit $\mathbf{F}_{t_1} = \mathbf{R}_{t_1}$.

Ein Verfahren zur Integration der Materialgleichungen (4.1)-(4.7) heißt im Sinne von HUGHES & WINGET inkrementell objektiv, wenn

- a) im Falle einer durch $\mathbf{F}_{t_1} = \mathbf{R}_{t_1}$ gekennzeichneten Starrkörperbewegung die Beziehungen

$$\mathbf{S}_1^* = \mathbf{R}_{t_1} \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_{t_1}^T \quad (4.33)$$

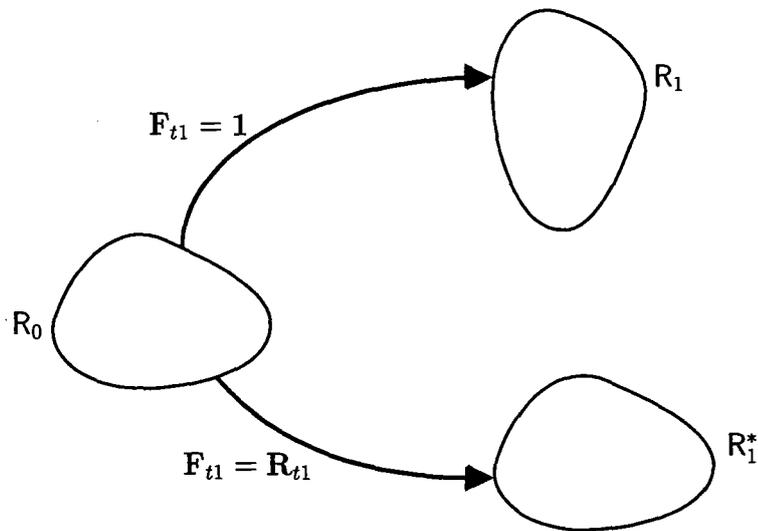


Abb. 4.1: Zur Definition der inkrementellen Objektivität.

$$\mathbf{Z}_1^* = \mathbf{R}_{t1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{R}_{t1}^T \quad (4.34)$$

$$k_1^* = k_1 \quad (4.35)$$

gelten,

- b) weiterhin im Falle $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{R}_{t1}$ der Deformationsgeschwindigkeitstensor innerhalb des Zeitinkrements verschwindet

$$\bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{D}_\zeta = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

und

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_{t1} \quad (4.37)$$

gilt und

- c) im Falle einer durch $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{U}_{t1}$ gekennzeichneten reinen Deformation der Transformationstensor zur Zeit $t + \Delta t$ identisch $\mathbf{1}$ ist, d. h.

$$\bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{D}_\zeta \quad (4.38)$$

und

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{1} \quad (4.39)$$

gilt. Die Forderungen b) und c) sind notwendig, da in der Materialroutine ein Zweipunktproblem gelöst wird, bei dem die unabhängigen Variablen Ort und Temperatur nur zur Zeit t am Beginn und zur Zeit $t + \Delta t$ am Ende des Inkrements vorgegeben sind. Ein Integrationsverfahren muß somit anhand von $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{R}_{t1}$ eine Starrkörperbewegung, anhand von $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{U}_{t1}$ eine reine Deformation erkennen und bei der Interpolation der unabhängigen Variablen der Materialgleichungen die Bedingungen b) und c) sicherstellen.

4.2.5 Bestimmung der unabhängigen Variablen $\dot{\theta}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{W}}$

Unter Beachtung der im Abschnitten 4.2.3 und 4.2.4 angegebenen Restriktionen können nun die zeitlichen Verläufe der unabhängigen Variablen der Anfangswertprobleme I und II im Zeitinkrement interpoliert werden.

Temperaturgeschwindigkeit

Der Temperaturverlauf im Zeitinkrement wird zwischen $\theta(t)$ und $\theta(t + \Delta t)$ linear interpoliert, so daß die Forderung (4.25) erfüllt ist. Mit

$$\xi = \frac{\zeta - t}{\Delta t} \quad (4.40)$$

erhält man die Temperatur im Inkrement zu

$$\theta_\zeta = (1 - \xi)\theta_0 + \xi\theta_1 \quad (4.41)$$

$$\theta_0 = \theta(\mathbf{x}(t), t), \quad \theta_1 = \theta(\mathbf{x}(t), t + \Delta t). \quad (4.42)$$

Gleichbedeutend dazu ist die Annahme einer konstanten Temperaturgeschwindigkeit im Zeitinkrement, so daß

$$\frac{d\theta_\zeta}{d\zeta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.43)$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 \quad (4.44)$$

gilt.

Kinematische Größen

Bei der Interpolation kinematischer Größen müssen die Bedingungen (4.33) und (4.39) beachtet werden.

WEBER [17] hat gezeigt, daß die Bedingung (4.36) im Falle $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{R}_{t1}$ bei einer linearen Interpolation der Bewegung

$$\mathbf{x}_\zeta = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t), \zeta) = (1 - \xi) \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_1 \quad (4.45)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) \quad (4.46)$$

verletzt wird:

Für den angenommenen Pfad der Bewegung (4.45) berechnet sich der auf \mathbf{R}_t bezogene relative Deformationsgradient sowie dessen materielle Zeitableitung innerhalb des Zeitinkrements unter Beachtung von (4.40) zu

$$\mathbf{F}_{t\zeta} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \zeta) = \frac{\partial \mathbf{x}_\zeta}{\partial \mathbf{x}_0} = (1 - \xi) \mathbf{1} + \xi \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_0} = (1 - \xi) \mathbf{1} + \xi \mathbf{F}_{t1} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) = \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.48)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{t\zeta}}{d\zeta} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} - \mathbf{1}) \quad (4.49)$$

und der Geschwindigkeitsgradient im Zeitinkrement zu

$$\mathbf{L}_\zeta = \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), \zeta) = \frac{d\mathbf{F}_{t\zeta}}{d\zeta} \mathbf{F}_{t\zeta}^{-1} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} - \mathbf{1}) ((1 - \xi) \mathbf{1} + \xi \mathbf{F}_{t1})^{-1}. \quad (4.50)$$

Forderung (4.36) verlangt, daß für $\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{R}_{t1}$ der Dehnungsgeschwindigkeitstensor zu jedem Zeitpunkt im Zeitinkrement verschwindet, d.h. $\mathbf{D}_\zeta = \mathbf{0}$ gilt. Durch die lineare Interpolation des Ortes berechnet man jedoch mit (4.50) für die Zeiten t und $t + \Delta t$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{t1} + \mathbf{R}_{t1}^T) - \mathbf{1} \right) \quad (4.51)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{t1} + \mathbf{R}_{t1}^T) + \mathbf{1} \right), \quad (4.52)$$

so daß Bedingung (4.36) für die Formulierung eines inkrementell objektiven Algorithmus verletzt ist. Der Bedingung (4.36) kann lediglich durch Erhöhen der Interpolationsordnung genügt werden. Da jedoch nur zwei Stützstellen für den Ort gegeben sind, ist dies ohne Annahmen über zusätzliche Stützstellen ausgeschlossen.

Eine Möglichkeit diese Schwierigkeit zu umgehen ist durch das Einführen von unabhängigen Interpolationen für verschiedene kinematische Größen gegeben.

Beim von HUGHES & WINGET [18] vorgeschlagenen Verfahren zur Integration von Materialgleichungen, was hier angewandt wird, werden unter Beachtung von (4.36) Ort und Geschwindigkeitsgradient unabhängig voneinander interpoliert. Dabei wird die Bewegung im Zeitinkrement durch (4.45) interpoliert und unabhängig von (4.45) der Geschwindigkeitsgradient im Zeitinkrement als konstant angenommen. Der Wert von \mathbf{L} wird aus (4.50) zusammen mit der für Starrkörperbewegungen zu erfüllenden Beziehung (4.36) bestimmt. Insgesamt ist diese Interpolation durch

$$\mathbf{x}_\zeta = (1 - \xi) \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_1 \quad (4.53)$$

$$\mathbf{L}_\zeta = \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), \zeta) = \mathbf{L}_{\zeta_*} = \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), \zeta_*) = \frac{d}{d\zeta} (\mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \zeta))|_{\zeta=\zeta_*} \quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x}(t), \zeta_*) = \text{konst.} \quad (4.54)$$

gegeben, wobei ζ_* durch

$$\mathbf{D}_{\zeta_*} = \mathbf{D}(\mathbf{x}(t), \zeta_*) = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{F}_{t1} = \mathbf{R}_{t1} \quad (4.55)$$

bestimmt ist.

Mit

$$\mathbf{D}_\zeta = \text{sym} \mathbf{L}_\zeta = \text{sym} \left(\frac{d \mathbf{F}_{t\zeta}}{d\zeta} \mathbf{F}_{t\zeta}^{-1} \right) \Leftrightarrow 2 \mathbf{F}_{t\zeta}^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{F}_{t\zeta} = \mathbf{F}_{t\zeta}^T \frac{d \mathbf{F}_{t\zeta}}{d\zeta} + \frac{d \mathbf{F}_{t\zeta}^T}{d\zeta} \mathbf{F}_{t\zeta} \quad (4.56)$$

folgt zusammen mit (4.47), (4.49)

$$2 \Delta t \mathbf{F}_{t\zeta}^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{F}_{t\zeta} = (1 - 2\xi) (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{F}_{t1}^T) + 2\xi \mathbf{F}_{t1}^T \mathbf{F}_{t1} - 2(1 - \xi) \mathbf{1}, \quad (4.57)$$

so daß ζ_* wegen der Forderung (4.55) und unter Beachtung der Definition (4.40) durch

$$(1 - 2\xi) (\mathbf{R}_{t1} + \mathbf{R}_{t1}^T) + 2\xi \mathbf{R}_{t1}^T \mathbf{R}_{t1} + 2(1 - \xi) \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \zeta_* = t + \frac{\Delta t}{2} \quad (4.58)$$

bestimmt ist. Man erhält

$$\mathbf{L}_\zeta = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} - \mathbf{1}) (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} = \mathbf{L}_k = \text{konst.}, \quad (4.59)$$

was mit

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (4.60)$$

$$\mathbf{x}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) \quad (4.61)$$

zu

$$\Delta t \mathbf{L}_\zeta \frac{\partial \mathbf{x}_{1/2}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{L}_\zeta = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1/2}} = \text{konst.} \quad (4.63)$$

umgeschrieben werden kann. Der Deformationsgeschwindigkeitstensor und der Wirbeltensor sind zu jedem Zeitpunkt im Inkrement durch

$$\mathbf{D}_\zeta = \text{sym} \mathbf{L}_\zeta = \frac{1}{\Delta t} \text{sym} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1/2}} = \mathbf{D}_k = \text{konst.} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{W}_\zeta = \text{skw} \mathbf{L}_\zeta = \frac{1}{\Delta t} \text{skw} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1/2}} = \mathbf{W}_k = \text{konst.} \quad (4.65)$$

gegeben. Wegen

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \mathbf{v}_0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{x}_{1/2} = \mathbf{x}_0 \quad (4.66)$$

ist

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{D}_\zeta = \text{sym} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{D}(t) \quad (4.67)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{W}_\zeta = \text{skw} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{W}(t), \quad (4.68)$$

so daß (4.32), (4.27) gilt und die Formulierung eines konsistenten Integrationsverfahrens für das Anfangswertproblem (4.15)-(4.24) möglich ist.

Orthogonaler Transformationstensor

Mit dem durch (4.65) bestimmten Wirbeltensor \mathbf{W}_k kann das Anfangswertproblem I, gegeben durch die Differentialgleichung (4.22) mit Anfangsbedingung (4.24), gelöst werden. Neben der Orthogonalität muß der berechnete Transformationstensor \mathbf{Q}_1 den Restriktionen (4.37) und (4.39) genügen.

Die Integration mit der verallgemeinerten Mittelpunktsregel liefert unter Beachtung der Anfangsbedingung (4.24)

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{1} + \Delta t \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_\varphi \quad (4.69)$$

$$\mathbf{Q}_\varphi = (1 - \varphi) \mathbf{1} + \varphi \mathbf{Q}_1 \quad (4.70)$$

$$\varphi \in [0, 1], \quad \varphi = \text{konst.} \quad (4.71)$$

Der Transformationstensor am Inkrementende ist somit in Abhängigkeit des Integrationsparameters φ durch

$$\mathbf{Q}_1(\varphi) = (1 - \Delta t \varphi \mathbf{W}_k)^{-1} (1 + \Delta t (1 - \varphi) \mathbf{W}_k) \quad (4.72)$$

gegeben. Der Integrationsparameter muß derart gewählt werden, daß \mathbf{Q}_1 eine Starrkörperrotation beschreibt. Somit ist ein φ_* zu bestimmen, daß der Bedingung

$$\mathbf{Q}_1^T(\varphi_*) \mathbf{Q}_1(\varphi_*) = \mathbf{1} \quad (4.73)$$

genügt. Einsetzen von (4.72) in (4.73) liefert

$$(1 - \Delta t (1 - \varphi_*) \mathbf{W}_k) (1 - \Delta t^2 \varphi_*^2 \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k)^{-1} (1 + \Delta t (1 - \varphi_*) \mathbf{W}_k) = \mathbf{1} \quad (4.74)$$

$$\Rightarrow (1 - \Delta t^2 \varphi_*^2 \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k)^{-1} = (1 - \Delta t^2 (1 - \varphi_*)^2 \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k)^{-1}, \quad (4.75)$$

woraus

$$\varphi_*^2 = (1 - \varphi_*)^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_* = \frac{1}{2} \quad (4.76)$$

folgt. Somit ist lediglich bei Anwendung der Mittelpunktsregel der berechnete Transformationstensor orthogonal. Er ist durch

$$\mathbf{Q}_1 = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right) \quad (4.77)$$

gegeben und genügt den Bedingungen (4.37) und (4.39):

- Für Starrkörperbewegungen ist $\mathbf{D}_\zeta = \mathbf{0}$, $\mathbf{W}_\zeta = \mathbf{L}_\zeta$ und mit (4.59), (4.65) folgt

$$\mathbf{W}_k = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{R}_{t_1} - \mathbf{1}) (\mathbf{R}_{t_1} + \mathbf{1})^{-1}. \quad (4.78)$$

Auflösen nach \mathbf{R}_{t_1} und Vergleich mit (4.77) zeigt, daß bei Starrkörperbewegungen

$$\mathbf{R}_{t_1} = \mathbf{Q}_1 \quad (4.79)$$

gilt, so daß die Bedingung (4.37) erfüllt ist.

- Für reine Deformation ist $\mathbf{W}_k = \mathbf{0}$, woraus mit (4.77) unmittelbar

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{1} \quad (4.80)$$

folgt und somit die Gültigkeit von (4.39) gezeigt ist.

Verzerrungsinkrement

Durch (4.64) ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D}_ζ für jeden Zeitpunkt ζ im Inkrement konstant, der bar-transformierte Tensor

$$\bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{D}_\zeta \mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{D}_k \mathbf{Q}(\zeta) \quad (4.81)$$

wegen (4.11) jedoch zeitabhängig. Zur Integration des bar-transformierten Materialmodells wird ein konstanter Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\bar{\mathbf{D}}$ im Zeitinkrement zugrunde gelegt, d.h. es wird vereinfachend in (4.81) der zeitabhängige Tensor $\mathbf{Q}(\zeta)$ durch den aus dem Anfangswertproblem I numerisch bestimmten Transformationstensor \mathbf{Q}_ϑ zur festgehaltenen Zeit $\zeta_k = t + \vartheta \Delta t$, $\vartheta \in [0, 1]$ ersetzt.

HUGHES und WINGET [18] bilden den bar-transformierten Verzerrungsgeschwindigkeitstensor mit $\zeta_k = t + \Delta t$, $\vartheta = 1$

$$\bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_1 = \bar{\mathbf{D}}_{\text{HW}} = \text{konst.} \quad \text{für } \zeta \in [t, t + \Delta t], \quad (4.82)$$

HUGHES [19] mit $\zeta_k = t + 1/2 \Delta t$, $\vartheta = 1/2$

$$\bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{Q}_{1/2}^T \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_{1/2} = \bar{\mathbf{D}}_{\text{H}} = \text{konst.} \quad \text{für } \zeta \in [t, t + \Delta t], \quad (4.83)$$

wobei der Tensor $\mathbf{Q}_{1/2}$ durch

$$\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{Q}_{1/2} - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{0} \quad (4.84)$$

bestimmt ist.

In ABAQUS ist das Verzerrungsinkrement auf der Basis von $\bar{\mathbf{D}}_{\text{HW}}$ bestimmt, so daß das bar-transformierte Verzerrungsinkrement durch

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_t^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{D}}_\zeta d\zeta = \Delta t \bar{\mathbf{D}}_\zeta = \mathbf{Q}_1^T \Delta t \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_1, \quad (4.85)$$

das Verzerrungsinkrement durch

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t \mathbf{D}_k = \text{sym} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1/2}} \right) \quad (4.86)$$

bestimmt ist.

4.2.6 Integration bzgl. \mathbf{R}_t und bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$

Nachdem der Transformationstensor \mathbf{Q}_1 und die unabhängigen Variablen $\bar{\mathbf{D}}$ und $\dot{\theta}$ bestimmt sind, kann das Anfangswertproblem Π gelöst werden. Man erhält die gesuchten Zustandsgrößen \mathbf{S}_1 , \mathbf{Z}_1 , k_1 , indem die Lösungen des Anfangswertproblems Π mit \mathbf{Q}_1 nach $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäß

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad (4.87)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad (4.88)$$

$$k_1 = k_1 \quad (4.89)$$

vortransformiert werden. Eine solche Vorgehensweise zur Bestimmung der gesuchten Zustandsgrößen wird *Integration bzgl. der letzten Gleichgewichtskonfiguration* genannt. Dadurch wird ausgedrückt, daß die Integration mit bzgl. \mathbf{R}_t formulierten Variablen ausgeführt wird.

Eine *Integration bzgl. der Momentankonfiguration* liegt vor, wenn Tensoren 2. Stufe und deren Zeitableitungen im Anfangswertproblem Π sowie das Verzerrungsinkrement $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (4.85) zunächst mit \mathbf{Q}_1 nach $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäß

$$\bar{\dot{\mathbf{S}}} = \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{Q}}_1^T \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{Q}_1 \dot{\bar{\mathbf{S}}} \mathbf{Q}_1^T \quad (4.90)$$

$$\vec{\bar{Z}} = \mathbf{Q}_1 \bar{Z} \mathbf{Q}_1^T \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\bar{Z}}} = \mathbf{Q}_1 \dot{\bar{Z}} \mathbf{Q}_1^T \quad (4.91)$$

$$\vec{\bar{D}} = \mathbf{Q}_1 \bar{D} \mathbf{Q}_1^T \quad \Rightarrow \quad \Delta \varepsilon = \mathbf{Q}_1 \Delta \bar{\varepsilon} \mathbf{Q}_1^T \quad (4.92)$$

vortransformiert werden. Anschließend wird das daraus resultierende Anfangswertproblem $\vec{\bar{\Pi}}$ gelöst, wobei wegen (4.90) und (4.91)

$$\vec{\bar{S}}_1 = \mathbf{S}_1 \quad \vec{\bar{Z}}_1 = \mathbf{Z}_1 \quad (4.93)$$

gilt, so daß die Lösungen von $\vec{\bar{\Pi}}$ die gesuchten Zustandsgrößen darstellen.

Beide Möglichkeiten $\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, k_1$ zu berechnen sind äquivalent. Bei der Berechnung der Tangensteifigkeitsmatrix ist, falls eine Integration bzgl. der Momentankonfiguration durchgeführt wird, keine Transformation durchzuführen. Im Vergleich zu einer Integration bzgl. der letzten Gleichgewichtskonfiguration bedingt dies einen kleinen numerischen Vorteil.

Die Anfangswertprobleme $\bar{\Pi}$ und $\vec{\bar{\Pi}}$ unterscheiden sich lediglich in ihren Variablen, weisen jedoch die gleiche Struktur auf, so daß für $\bar{\Pi}$ und $\vec{\bar{\Pi}}$ das gleiche Lösungsverfahren angewandt wird.

In den Abschnitten 4.2.7-4.2.10 wird ein Operator-Splitverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $\vec{\bar{\Pi}}$ vorgestellt. Soll eine Integration bzgl. R_t durchgeführt werden, so sind die mit (4.90)-(4.92) vortransformierten Variablen durch die bar-transformierten Größen zu ersetzen, die Vorgehensweise bei der Lösung bleibt unbeeinflusst. Im Anschluß an die Verfahrensbeschreibung werden beide Möglichkeiten nochmals im Abschnitt 4.2.12 zusammengefaßt dargestellt.

4.2.7 Operator-Split für die Materialgleichungen

Bei der Anwendung des in Anhang C.2 allgemein beschriebenen Operator-Split-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems $\vec{\bar{\Pi}}$ werden bei Plastizität zwei, bei Viskoplastizität drei Operatoren in den Differentialgleichungen (4.15)-(4.17) unterschieden. Operator 1 berücksichtigt *rein thermoelastische Anteile* in den Materialgleichungen, Operator 2 die durch den Lastfaktor Λ einer Fallunterscheidung unterworfenen *inelastischen Anteile (dynamische Erholungsterme)* und bei Viskoplastizität Operator 3 die verbleibenden, die *statische Erholung* [29] kennzeichnenden Terme. Während für Viskoplastizität durch (4.18), (4.19) lediglich die Größe Λ auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (4.15)-(4.17) definiert wird und somit ein Differentialgleichungssystem bei Viskoplastizität vorliegt, wird bei Plastizität durch (4.18), (4.21) eine algebraische Nebenbedingung formuliert, d.h. bei Plastizität ist ein

Algebro-Differentialgleichungssystem gegeben. Die Gleichungen des Differentialgleichungssystems (Viskoplastizität) bzw. des Algebro-Differentialgleichungssystems (Plastizität) in der Darstellung (C.7) ergeben sich dann für das Anfangswertproblem $\bar{\mathbf{I}}$ zu

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = {}^{(1)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} + {}^{(2)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} + {}^{(3)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} \quad (4.94)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = {}^{(1)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} + {}^{(2)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} + {}^{(3)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} \quad (4.95)$$

$$\dot{k} = {}^{(1)}\dot{k} + {}^{(2)}\dot{k} + {}^{(3)}\dot{k} \quad (4.96)$$

mit:

Teilproblem 1

Differentialgleichungssystem definiert durch Operator 1

$${}^{(1)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{c} \left[\bar{\mathbf{D}} \right] - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} (\theta - \theta_R) + \alpha \right) \dot{\theta} \mathbf{c} [1] \quad (4.97)$$

$${}^{(1)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{Z}} + \bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \dot{\theta} \bar{\mathbf{Z}} \quad (4.98)$$

$${}^{(1)}\dot{k} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} (k - Y) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (4.99)$$

Teilproblem 2

Viskoplastizität: Differentialgleichungssystem definiert durch Operator 2

Plastizität: Algebro-Differentialgleichungssystem definiert durch Operator 2

$${}^{(2)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} = -\mathbf{c} \left[\Lambda \bar{\mathbf{N}} \right] \quad (4.100)$$

$${}^{(2)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = c \Lambda \bar{\mathbf{N}} - b \Lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\mathbf{Z}} \quad (4.101)$$

$${}^{(2)}\dot{k} = \varphi \beta (\gamma - (k - Y)) \Lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.102)$$

$$F = \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Z}}, k) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{Z}})^D \right\| - k \quad (4.103)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{F}{\eta} \right\rangle^m \quad (\text{VP}) \quad (4.104)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{F} = 0 \Rightarrow \Lambda \quad \text{für } F = 0 \wedge \dot{F}|_{F_p=\text{konst.}} \geq 0 \\ \Lambda = 0 \quad \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{PL}) \quad (4.105)$$

Teilproblem 3

Differentialgleichungssystem definiert durch Operator 3 (nur bei Viskoplastizität)

$${}^{(3)}\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{0} \quad (4.106)$$

$${}^{(3)}\dot{\bar{\mathbf{Z}}} = -p \left\| \bar{\mathbf{Z}} \right\|^{w-1} \bar{\mathbf{Z}} \quad (4.107)$$

$${}^{(3)}\dot{k} = -\pi (k - Y)^\omega ; \quad (4.108)$$

die vortransformierten **Anfangsbedingungen** von (4.94)-(4.96) zu

$$\bar{\mathbf{S}}_0 =: \mathbf{S}_0, \quad \bar{\mathbf{Z}}_0 =: \mathbf{Z}_0, \quad k_0, \quad (4.109)$$

wobei in (4.109) gleichzeitig eine vereinfachte Notation für die tensoriellen Anfangswerte definiert ist.

4.2.8 Integration des Teilproblems 1

Zur Integration des durch Operator 1 definierten Differentialgleichungssystems wird die Mittelpunktregel angewandt. Man erhält unter Beachtung von (4.23), (4.90), (4.91), (4.109) mit den gemäß (C.11), (C.12) durch

$${}^1\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0, \quad {}^1\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0, \quad {}^1k_0 = k_0 \quad (4.110)$$

gegebenen Anfangswerten als Ergebnis der numerischen Integration von (4.97)-(4.99) mit (4.85), (4.92)

$${}^1\mathbf{S}_1 = {}^1\mathbf{S}_0 + \Delta \varepsilon {}^1\mathbf{S}_{1/2} + {}^1\mathbf{S}_{1/2} \Delta \varepsilon + \mathbf{C}_{1/2} [\Delta \varepsilon] - C_{M_{1/2}} \Delta \theta \mathbf{C}_{1/2} [\mathbf{1}] \quad (4.111)$$

$$C_{M_{1/2}} = \left(\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right|_{1/2} (\theta_{1/2} - \theta_R) + \alpha_{1/2} \right) \quad (4.112)$$

$${}^1\mathbf{Z}_1 = {}^1\mathbf{Z}_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^1\mathbf{Z}_{1/2} + {}^1\mathbf{Z}_{1/2} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{c_{1/2}} \left. \frac{\partial c}{\partial \theta} \right|_{1/2} \Delta\theta {}^1\mathbf{Z}_{1/2} \quad (4.113)$$

$${}^1k_1 = {}^1k_0 + \left(\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right|_{1/2} \frac{1}{\beta_{1/2}} + \frac{1}{\gamma_{1/2}} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|_{1/2} \right) \Delta\theta ({}^1k_{1/2} - Y_{1/2}) + \left. \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right|_{1/2} \Delta\theta \quad (4.114)$$

mit

$${}^1\mathbf{S}_{1/2} = \frac{1}{2} ({}^1\mathbf{S}_0 + {}^1\mathbf{S}_1) \quad (4.115)$$

$${}^1\mathbf{Z}_{1/2} = \frac{1}{2} ({}^1\mathbf{Z}_0 + {}^1\mathbf{Z}_1) \quad (4.116)$$

$${}^1k_{1/2} = \frac{1}{2} ({}^1k_0 + {}^1k_1), \quad (4.117)$$

woraus mit den Definitionen

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \Delta\boldsymbol{\varepsilon})^{T_{14}} - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{1})^{T_{14}} \quad (4.118)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = (1 - C_{\mathbf{Z}_{1/2}} \Delta\theta) \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \Delta\boldsymbol{\varepsilon})^{T_{14}} - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{1})^{T_{14}} \quad (4.119)$$

$$C_{\mathbf{Z}_{1/2}} = \frac{1}{2 c_{1/2}} \left. \frac{\partial c}{\partial \theta} \right|_{1/2} \quad (4.120)$$

$$\mathbf{M} = {}^1\mathbf{S}_0 + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^1\mathbf{S}_0 + {}^1\mathbf{S}_0 \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{C}_{1/2} [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}] - C_{M_{1/2}} \Delta\theta \mathbf{C}_{1/2} [\mathbf{1}] \quad (4.121)$$

$$\mathbf{K} = (1 + C_{\mathbf{Z}_{1/2}} \Delta\theta) {}^1\mathbf{Z}_0 + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^1\mathbf{Z}_0 + {}^1\mathbf{Z}_0 \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.122)$$

$$C_{r_{1/2}} = \left(\left. \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right|_{1/2} \frac{1}{\beta_{1/2}} + \frac{1}{\gamma_{1/2}} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right|_{1/2} \right) \quad (4.123)$$

für (4.111)-(4.117)

$${}^1\mathbf{S}_1 = \boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1} [\mathbf{M}] \quad (4.124)$$

$${}^1\mathbf{Z}_1 = \boldsymbol{\mathcal{Z}}^{-1} [\mathbf{K}] \quad (4.125)$$

$${}^1k_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}C_{r_{1/2}}\Delta\theta} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}C_{r_{1/2}}\Delta\theta\right) {}^1k_0 - C_{r_{1/2}}\Delta\theta Y_{1/2} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \Big|_{1/2} \Delta\theta \right\} \quad (4.126)$$

folgt. ${}^1\mathbf{S}_1$, ${}^1\mathbf{Z}_1$, 1k_1 können durch (4.124)-(4.126) unter Verwendung von (4.118)-(4.123) ohne Iteration berechnet werden, da hier das Ergebnis der impliziten Mittelpunktintegration nach den gesuchten Variablen zur Zeit $t + \Delta t$ auflösbar ist.

4.2.9 Integration des Teilproblems 2

Im Teilproblem 2 ist das durch Operator 2 definierte Differentialgleichungssystem (Viskoplastizität) bzw. Algebra-Differentialgleichungssystems (Plastizität) gegeben. Die Differentialgleichungen (4.100)-(4.102) sind gemäß (C.11) mit den durch die Lösung des Teilproblems 1 gegebenen Anfangswerten

$${}^2\mathbf{S}_0 = {}^1\mathbf{S}_1, \quad {}^2\mathbf{Z}_0 = {}^1\mathbf{Z}_1, \quad {}^2k_0 = {}^1k_1 \quad (4.127)$$

zu integrieren.

Für Plastizität ist die algebraische Nebenbedingung durch die Konsistenzbedingung bestimmt, d.h. bei andauerndem plastischen Fließen muß stets die Fließbedingung $F = 0$ erfüllt sein. Bei der Berechnung des Zustandsvektors in der Materialroutine wird diese Forderung durch

$$\begin{aligned} F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1) &= 0 \quad \text{für} \quad F({}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{Z}_0, {}^2k_0) > 0 \quad \text{und} \\ \Lambda &= 0 \quad \text{für} \quad F({}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{Z}_0, {}^2k_0) < 0 \end{aligned} \quad (4.128)$$

ersetzt, so daß die Fließbedingung am Inkrementende die Bestimmungsgleichung für den Lastfaktor Λ ist. Diese Vorgehensweise ist durch das den Zustandsvektor bestimmende Zweipunktproblem, bei dem nur \mathbf{R}_t und $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ bekannt sind, bedingt.

Bei Viskoplastizität ist die Größe Λ auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (4.100)-(4.102) am Inkrementende gemäß (4.104) durch

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1)}{\eta_1} \right\rangle^{m_1} \quad (4.129)$$

bestimmt. Gleichung (4.129) definiert für Belastung die dynamische Fließfläche

$$F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1) - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_1 \right)^{\frac{1}{m_1}} \eta_1 = 0, \quad F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1) > 0 \quad (4.130)$$

am Inkrementende.

Die implizite Integration der Differentialgleichungen des Teilproblems 2 führt unter Verwendung der Beziehungen

$$\zeta = \Lambda_1 \Delta t \quad (4.131)$$

$$\mathbf{N}_1 = \frac{({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D}{\|({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D\|} \quad (4.132)$$

$$\mathbf{C}_1[\mathbf{N}_1] = 2\mu_1 \mathbf{N}_1 \quad (4.133)$$

und unter Beachtung von (4.128) bei Plastizität bzw. (4.129) oder (4.130) bei Viskoplastizität einerseits auf

$${}^2\mathbf{S}_1 = {}^2\mathbf{S}_0, \quad {}^2\mathbf{Z}_1 = {}^2\mathbf{Z}_0, \quad {}^2k_1 = {}^2k_0, \quad (4.134)$$

falls die Spannung ${}^2\mathbf{S}_0$ innerhalb des durch die Fließbedingung definierten elastischen Bereichs liegt, d.h.

$$F({}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{Z}_0, {}^2k_0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|({}^2\mathbf{S}_0 - {}^2\mathbf{Z}_0)^D\| - {}^2k_0 \leq 0 \quad (4.135)$$

gilt, und andererseits auf das ${}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1, \zeta$ bestimmende Gleichungssystem

$${}^2\mathbf{S}_1 = {}^2\mathbf{S}_0 - \zeta 2\mu_1 \mathbf{N}_1 \quad (4.136)$$

$${}^2\mathbf{Z}_1 = {}^2\mathbf{Z}_0 + \zeta \left(c_1 \mathbf{N}_1 - b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} {}^2\mathbf{Z}_1 \right) \quad (4.137)$$

$${}^2k_1 = {}^2k_0 + \zeta \varphi_1 \beta_1 (\gamma_1 - ({}^2k_1 - Y_1)) \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad (4.138)$$

$$\Rightarrow \quad {}^2k_1 = \frac{1}{1 + \zeta \varphi_1 \beta_1 \sqrt{\frac{2}{3}}} \left({}^2k_0 + \zeta \varphi_1 \beta_1 (\gamma_1 + Y_1) \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \quad (4.139)$$

$$F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1) - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m_1}} \eta_1 = 0, \quad (\text{VP}) \quad (4.140)$$

$$F({}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1) = 0, \quad (\text{PL}), \quad (4.141)$$

falls die Spannung ${}^2\mathbf{S}_0$ außerhalb des elastischen Bereichs liegt und somit

$$F({}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{Z}_0, {}^2k_0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| ({}^2\mathbf{S}_0 - {}^2\mathbf{Z}_0)^D \right\| - {}^2k_0 > 0 \quad (4.142)$$

gilt. Im ersten Fall (4.135) ist die Berechnung des zweiten Teilproblems mit (4.134) abgeschlossen, im zweiten Fall (4.142) wird ${}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{Z}_1, {}^2k_1$ aus (4.136)-(4.141) bestimmt.

HARTMANN [24] hat gezeigt, daß bei Plastizität das iterativ zu lösende Gleichungssystem auf eine skalare Gleichung für den plastischen Multiplikator ζ reduziert werden kann. Dieses Lösungsverfahren wurde von HARTMANN, LÜHRS & HAUPT [55] für Viskoplastizität erweitert und wird im folgenden angewandt.

Ausgehend von einer Idee von SIMO & TAYLOR [14], die in ihrer Arbeit jedoch lediglich lineare kinematische Verfestigung zugrunde legten, wird die Differenz aus Spannungsdeviator und Deviator des Verfestigungstensors am Inkrementende mit (4.136) und (4.137) durch

$$({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D = {}^2\mathbf{S}_0^D - \zeta 2\mu_1 \mathbf{N}_1 - {}^2\mathbf{Z}_0^D - \zeta \left(c_1 \mathbf{N}_1 - b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} {}^2\mathbf{Z}_1^D \right) \quad (4.143)$$

ausgedrückt. Addition einer Null der Form $\zeta b_1 \sqrt{2/3} ({}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{S}_1^D)$ führt bei nochmaliger Anwendung von (4.136) auf

$$\begin{aligned} ({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D &= \left(1 + \zeta \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \right) {}^2\mathbf{S}_0^D - {}^2\mathbf{Z}_0^D - \zeta \left(2\mu_1 + c_1 + b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} 2\mu_1 \zeta \right) \mathbf{N}_1 - \\ &\quad - \zeta b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} ({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D, \end{aligned} \quad (4.144)$$

woraus mit den Definitionen

$$h_1 = 1 + \zeta b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.145)$$

$$\Xi^D = \left(1 + \zeta b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) {}^2\mathbf{S}_0^D - {}^2\mathbf{Z}_0^D = h_1 {}^2\mathbf{S}_0^D - {}^2\mathbf{Z}_0^D \quad (4.146)$$

$$g_1 = \zeta \left(2\mu_1 + c_1 + b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} 2\mu_1 \zeta \right) \quad (4.147)$$

und der Identität

$${}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{Z}_1^D = \left\| {}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{Z}_1^D \right\| \frac{{}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{Z}_1^D}{\left\| {}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{Z}_1^D \right\|} = \left\| {}^2\mathbf{S}_1^D - {}^2\mathbf{Z}_1^D \right\| \mathbf{N}_1 \quad (4.148)$$

die Beziehung

$$h_1 \left\| ({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D \right\| \mathbf{N}_1 = \Xi^D - g_1 \mathbf{N}_1 \quad (4.149)$$

resultiert. Mit der Fließbedingung (4.141) bei Plastizität bzw. der dynamischen Fließfläche (4.140) bei Viskoplastizität ist $\left\| ({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D \right\|$ unter Verwendung von (4.138), (4.139) in Abhängigkeit des plastischen Multiplikators ζ durch

$$\left\| ({}^2\mathbf{S}_1 - {}^2\mathbf{Z}_1)^D \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{k}_1 \quad (4.150)$$

$$\bar{k}_1 = \begin{cases} {}^2k_1 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m_1}} \eta_1 & \text{(VP)} \\ {}^2k_1 & \text{(PL)} \end{cases} \quad (4.151)$$

darstellbar. Wird (4.150) in (4.149) eingesetzt ergibt sich

$$\left(h_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{k}_1 + g_1 \right) \mathbf{N}_1 = \Xi^D, \quad (4.152)$$

woraus man erkennt, daß die Fließflächennormale \mathbf{N}_1 koaxial zu Ξ^D ist und wegen $\|\mathbf{N}_1\| = 1$

$$\Xi^D = \left\| \Xi^D \right\| \mathbf{N}_1 \quad (4.153)$$

gilt. Somit führt (4.153) zusammen mit (4.152) auf eine nichtlineare Gleichung für den plastischen Multiplikator ζ

$${}^2\Gamma_1 = \left\| \Xi^D \right\| - h_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{k}_1 - g_1 = 0, \quad (4.154)$$

die iterativ mit dem Startwert $\zeta = 0$ gelöst wird.

Mit dem berechneten plastischen Multiplikator können anschließend schrittweise die im zweiten Teilproblem gesuchten Größen berechnet werden. Man bestimmt nacheinander unter Beachtung von (4.124)-(4.126) die Fließflächennormale gemäß (4.153) mit (4.146) zu

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\Xi^D}{\left\| \Xi^D \right\|} = \frac{h_1 ({}^2\mathbf{S}_0^D - {}^2\mathbf{Z}_0^D)}{\left\| (h_1 ({}^2\mathbf{S}_0^D - {}^2\mathbf{Z}_0^D)) \right\|}, \quad (4.155)$$

die Spannung nach (4.136) zu

$${}^2\mathbf{S}_1 = {}^2\mathbf{S}_0 - \zeta 2\mu_1 \mathbf{N}_1, \quad (4.156)$$

den Translationstensor der kinematischen Verfestigung mit (4.137) und (4.145) zu

$${}^2\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{h_1} ({}^2\mathbf{Z}_0 + \zeta c_1 \mathbf{N}_1) \quad (4.157)$$

und die isotrope Verfestigungsvariable anhand von (4.139). Der einzige Unterschied bei der Berechnung des Teilproblems 2 zwischen Viskoplastizität und Plastizität ist die Bestimmungsgleichung (4.151) der Funktion \bar{k} : Bei viskoplastischem Materialverhalten wird diese mit der dynamischen Fließfläche, bei plastischem Materialien mit der Fließbedingung definiert.

4.2.10 Integration des Teilproblems 3 (nur bei Viskoplastizität)

Im Teilproblem 3 ist ein Anfangswertproblem bestehend aus dem Differentialgleichungssystem (4.106)-(4.108) mit den gemäß (C.11) durch die Lösung des Teilproblems 2 gegebenen Anfangswerten

$${}^3\mathbf{S}_0 = {}^2\mathbf{S}_1, \quad {}^3\mathbf{Z}_0 = {}^2\mathbf{Z}_1, \quad {}^3k_0 = {}^2k_1 \quad (4.158)$$

zu lösen. Die implizite Integration der Differentialgleichungen liefert die algebraischen Bestimmungsgleichungen für ${}^3\mathbf{S}_1$, ${}^3\mathbf{Z}_1$, 3k_1 zu

$${}^3\mathbf{S}_1 = {}^3\mathbf{S}_0 \quad (4.159)$$

$${}^3\mathbf{Z}_1 = {}^3\mathbf{Z}_0 - \Delta t p_1 \left\| {}^3\mathbf{Z}_1 \right\|^{\omega_1 - 1} {}^3\mathbf{Z}_1 \quad (4.160)$$

$${}^3k_1 = {}^3k_0 - \Delta t \pi_1 \left({}^3k_1 - Y_1 \right)^{\omega_1}. \quad (4.161)$$

Man erkennt, daß die Spannung im dritten Teilproblem unverändert bleibt und die Verfestigungsvariablen unabhängig voneinander durch lösen von nichtlinearen Gleichungen bestimmt werden können. Aus (4.161) folgt die Bestimmungsgleichung für die isotrope Verfestigung 3k_1 unter Beachtung von (2.90) zu

$${}^3_2\Gamma_1 = \left\{ {}^3k_1 + \Delta t \pi_1 \left| {}^3k_1 - Y_1 \right|^{\omega_1 - 1} \left({}^3k_1 - Y_1 \right) \right\} - {}^3k_0 = 0 \quad (4.162)$$

und aus (4.160) die Gleichung

$$\left\{1 + \Delta t p_1 \left\| {}^3\mathbf{Z}_1 \right\|^{w_1-1} \right\} {}^3\mathbf{Z}_1 - {}^3\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.163)$$

Da die Terme in geschweiften Klammern in (4.162) und (4.163) stets größer null sind, gilt

$${}^3k_1 = 0 \quad \text{für} \quad {}^3k_0 = 0 \quad (4.164)$$

$${}^3\mathbf{Z}_1 = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad {}^3\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.165)$$

Gleichung (4.163) kann für ${}^3\mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}$ zu

$$\left\{ \left(1 + \Delta t p_1 \left\| {}^3\mathbf{Z}_1 \right\|^{w_1-1} \right) \left\| {}^3\mathbf{Z}_1 \right\| - \left\| {}^3\mathbf{Z}_0 \right\| \right\} \frac{{}^3\mathbf{Z}_0}{\left\| {}^3\mathbf{Z}_0 \right\|} = 0 \quad (4.166)$$

umgeformt werden. Für ${}^3k_0 > 0$ bestimmt sich die isotrope Verfestigungsvariable 3k_1 iterativ mit Startwert 3k_0 aus (4.162). Analog dazu bestimmt sich für ${}^3\mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}$ der Translationstensor der kinematischen Verfestigung iterativ aus (4.166). Zunächst wird $\varsigma = \left\| {}^3\mathbf{Z}_1 \right\|$ aus der nichtlinearen Gleichung

$${}^3\Gamma_1 = \left(1 + \Delta t p_1 \varsigma^{(w_1-1)} \right) \varsigma - \left\| {}^3\mathbf{Z}_0 \right\| = 0 \quad (4.167)$$

iterativ mit Startwert $\varsigma = \left\| {}^3\mathbf{Z}_0 \right\|$ berechnet und anschließend ${}^3\mathbf{Z}_1$ mit (4.163) aus

$${}^3\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \varsigma^{(w_1-1)}} {}^3\mathbf{Z}_0 \quad (4.168)$$

bestimmt.

4.2.11 Ergebnis der Zustandsvektorberechnung

Bei der Integration bzgl. der Momentankonfiguration sind gemäß (C.11) die Zustandsgrößen zur Zeit $t + \Delta t$ gleich dem Ergebnis des Teilproblems 3 und es gilt

$$\mathbf{S}_1 = {}^3\mathbf{S}_1, \quad \mathbf{Z}_1 = {}^3\mathbf{Z}_1, \quad k_1 = {}^3k_1. \quad (4.169)$$

Im Falle einer Integration bzgl. der letzten Gleichgewichtskonfiguration erhält man als Lösung des Teilproblems 3 die bar-transformierten Zustandsgrößen ${}^3\bar{\mathbf{S}}_1$, ${}^3\bar{\mathbf{Z}}_1$, 3k_1 . Gemäß (C.11), (C.13) sind die bar-transformierten Größen zur Zeit $t + \Delta t$ durch

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = {}^3\bar{\mathbf{S}}_1, \quad \bar{\mathbf{Z}}_1 = {}^3\bar{\mathbf{Z}}_1, \quad k_1 = {}^3k_1, \quad (4.170)$$

bestimmt, so daß die mit \mathbf{Q}_1 in den Raumbereich $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ transformierten tensoriellen Größen durch

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad (4.171)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad (4.172)$$

gegeben sind.

4.2.12 Zusammenfassung

Die Berechnung des Zustandsvektors in der Materialroutine kann bzgl. \mathbf{R}_t oder bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ ausgeführt werden. Dabei können die folgenden Schritte unterschieden werden:

- a) Integration bzgl. \mathbf{R}_t
 1. Materialgleichungen in bar-transformierte Form überführen; dadurch wird das Anfangswertproblem (4.1)-(4.8) in das Anfangswertproblem I (4.22), (4.24) und das Anfangswertproblem II (4.15)-(4.21), (4.23) aufgespalten.
 2. aus dem Anfangswertproblem I \mathbf{Q}_1 berechnen
 3. bestimme \mathbf{D} , $\dot{\theta}$ durch Interpolation und $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\Delta\theta$ durch Integration
 4. Integration der Differentialgleichungen im Anfangswertproblem II mit geeignet gewähltem Verfahren und berechnen der bar-transformierten Zustandsvariablen
 5. Transformation der berechneten tensoriellen Variablen nach $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäß (4.171)-(4.172)

Die Berechnung der bar-transformierten Zustandsgrößen (Schritt 4) kann durch

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = \check{\check{\mathbf{S}}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \quad (4.173)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \check{\check{\mathbf{Z}}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \quad (4.174)$$

$$k_1 = \check{\check{k}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \quad (4.175)$$

dargestellt werden, wodurch die Zustandsvektorberechnung insgesamt durch

$$\mathbf{S}_1 = \check{\check{\mathbf{S}}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \mathbf{Q}_1 \check{\check{\mathbf{S}}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \mathbf{Q}_1^T \quad (4.176)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \check{\check{\mathbf{Z}}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \mathbf{Q}_1 \check{\check{\mathbf{Z}}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \mathbf{Q}_1^T \quad (4.177)$$

$$k_1 = \check{\check{k}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \check{\check{k}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\theta) \quad (4.178)$$

gegeben ist.

• b) Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$

1. Materialgleichungen in bar-transformierte Form überführen; dadurch wird das Anfangswertproblem (4.1)-(4.8) in das Anfangswertproblem I (4.22), (4.24) und das Anfangswertproblem II (4.15)-(4.21), (4.23) aufgespalten.
2. aus dem Anfangswertproblem I \mathbf{Q}_1 berechnen
3. bestimme \mathbf{D} , $\dot{\theta}$ durch Interpolation und $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\Delta\theta$ durch Integration
4. Transformation der tensoriellen Variablen in den bar-transformierten Materialgleichungen im Anfangswertproblem II nach $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäß (4.90)-(4.92); es resultiert das Anfangswertproblem $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$
5. Integration der Differentialgleichungen im Anfangswertproblem $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ mit geeignet gewähltem Verfahren und berechnen der Zustandsvariablen zur Zeit $t + \Delta t$

Bei einer Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ ist die Lösung des Teilproblems 3 wegen (4.169) gleich den gesuchten Zustandsvariablen. Berechnungsschritt 5 kann zusammenfassend durch

$$\mathbf{S}_1 = \check{\check{\mathbf{S}}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \check{\check{\mathbf{S}}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \check{\check{\mathbf{S}}}(\mathbf{Q}_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.179)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \check{\check{\mathbf{Z}}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \check{\check{\mathbf{Z}}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \check{\check{\mathbf{Z}}}(\mathbf{Q}_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.180)$$

$$k_1 = \check{\check{k}}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) = \check{\check{k}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \check{\check{k}}(\mathbf{Q}_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.181)$$

dargestellt werden.

Für beide Vorgehensweisen sind die Funktionen $\check{\check{\mathbf{S}}}$ und $\check{\check{\mathbf{S}}}$, $\check{\check{\mathbf{Z}}}$ und $\check{\check{\mathbf{Z}}}$ identisch, lediglich die Argumente unterscheiden sich.

In den Abschnitten 4.2.8, 4.2.9 und 4.2.10 wurde eine Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ durchgeführt, wobei man die folgenden Abhängigkeiten erkennt:

Teilproblem 1

$${}^1\mathbf{S}_1 = {}^1\check{\mathbf{S}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.182)$$

$${}^1\mathbf{Z}_1 = {}^1\check{\mathbf{Z}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.183)$$

$${}^1k_1 = {}^1\check{k}(\Delta\theta) \quad (4.184)$$

$$\mathcal{T} = \check{\mathcal{T}}(\Delta\varepsilon) \quad (4.185)$$

$$\mathcal{Z} = \check{\mathcal{Z}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta) \quad (4.186)$$

$$\mathbf{M} = \check{\mathbf{M}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.187)$$

$$\mathbf{K} = \check{\mathbf{K}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.188)$$

Teilproblem 2

$${}^2\mathbf{S}_1 = {}^2\check{\mathbf{S}}(\zeta, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = {}^2\check{\mathbf{S}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.189)$$

$${}^2\mathbf{Z}_1 = {}^2\check{\mathbf{Z}}(\zeta, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = {}^2\check{\mathbf{Z}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.190)$$

$${}^2k_1 = {}^2\check{k}(\zeta, \Delta\theta) = {}^2\check{k}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.191)$$

$$\zeta = \check{\zeta}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \check{\zeta}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\theta) \quad (4.192)$$

$$\mathbf{N}_1 = \check{\mathbf{N}}(\zeta, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \check{\mathbf{N}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.193)$$

$$h_1 = \check{h}(\zeta, \Delta\theta) \quad (4.194)$$

$$\Xi^D(\zeta) = \check{\Xi}^D(\zeta, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.195)$$

$$g_1 = \check{g}(\zeta, \Delta\theta) \quad (4.196)$$

$$\bar{k}_1 = \check{\bar{k}}(\zeta, \Delta\theta) \quad (4.197)$$

$$\bar{\bar{k}}_1 = \check{\bar{\bar{k}}}(\zeta, \Delta\theta) \quad (4.198)$$

$${}^2\mathbf{T}_1 = {}^2\check{\mathbf{T}}(\zeta, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.199)$$

Teilproblem 3

$${}^3\mathbf{Z}_1 = {}^3\check{\mathbf{Z}}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = {}^3\check{\mathbf{Z}}(\varsigma, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.200)$$

$${}^3k_1 = {}^3\check{k}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.201)$$

$${}^3_2\Gamma_1 = {}^3_2\check{\Gamma}({}^3k_1, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.202)$$

$$\|{}^3\mathbf{Z}_1\| = \varsigma = \check{\varsigma}(\Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (4.203)$$

$${}^3_1\Gamma_1 = {}^3_1\check{\Gamma}(\varsigma, \Delta\varepsilon, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) . \quad (4.204)$$

4.3 Berechnung der thermoelastischen Kopplung und der dissipierten Spannungsleistung

Die thermoelastische Kopplung w_{et} und die dissipierte Spannungsleistung w_d sind durch die isotropen Tensorfunktionen (2.163) und (2.164) gegeben und müssen bei thermomechanisch gekoppelten Berechnungen von der Schnittstelle UMAT bereitgestellt werden. Aufgrund der Isotropie von (2.163), (2.164) kann die Bestimmung von w_{et} und w_d sowohl mit den bar-transformierten Größen $\Delta\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mathbf{S}}$, $\bar{\mathbf{Z}}$ und k als auch mit den Größen $\Delta\varepsilon$, \mathbf{S} , \mathbf{Z} und k erfolgen. Mit (4.85), (4.86) und (4.92) gilt

$$\text{SpD}_1 = \frac{1}{\Delta t} \text{Sp}\Delta\varepsilon = \frac{1}{\Delta t} \text{Sp}\Delta\bar{\varepsilon} \quad (4.205)$$

und somit

$$w_{et1} = \frac{1}{\rho_0} C_{\kappa_1} \text{SpD}_1 \quad (4.206)$$

$$C_{\kappa_1} = -\theta_1 (2\mu_1 + 3\lambda_1) \left(\left. \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \right|_1 (\theta_1 - \theta_R) + \alpha_1 \right) . \quad (4.207)$$

Aus (4.131) folgt zunächst

$$\Lambda = \frac{\zeta}{\Delta t} . \quad (4.208)$$

Die dissipierte Spannungsleistung w_{d_1} ist mit (2.164) und (2.166) durch die Differenz von plastischer und gespeicherter Spannungsleistung gegeben

$$w_{d_1} = w_{p_1} - \dot{e}_{sY_1} - \dot{e}_{sr_1}. \quad (4.209)$$

Die plastische Spannungsleistung am Inkremende berechnet sich mit (2.165) zu

$$w_{p_1} = \frac{1}{\rho_0} \Lambda \mathbf{S}_1 \cdot \frac{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D}{\|(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D\|} = \frac{1}{\rho_0} \Lambda \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{N}_1, \quad (4.210)$$

der Anteil \dot{e}_{sY} an der gespeicherten Spannungsleistung am Inkrementende mit (2.167) zu

$$\dot{e}_{sY_1} = \frac{1}{\rho_0} C_{Y_1} \mathbf{Z}_1 \cdot \left(c_1 \Lambda \mathbf{N}_1 - b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \mathbf{Z}_1 - p_1 \|\mathbf{Z}_1\|^{w_1-1} \mathbf{Z}_1 + 2 \Lambda \mathbf{Z}_1 \mathbf{N}_1 \right) \quad (4.211)$$

$$C_{Y_1} = \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{1}{c_1} \frac{\partial c}{\partial \theta} \Big|_1 \theta_1 \right) \quad (4.212)$$

mit $p = 0$ für Plastizität

und der Anteil \dot{e}_{sr} der gespeicherten Spannungsleistung am Inkrementende mit (2.168)-(2.170) zu

$$\dot{e}_{sr_1} = \begin{cases} \dot{e}_{sr_1}^{(A)} = \frac{1}{\rho_0} (A_1 - Y_1) \dot{r}_1 & \text{für Ansatz (A)} \\ \dot{e}_{sr_1}^{(B)} = \frac{1}{\rho_0} \left(A_1 - \frac{\partial Y}{\partial \theta} \Big|_1 \theta_1 \right) \dot{r}_1 & \text{für Ansatz (B)} \end{cases} \quad (4.213)$$

$$A_1 = k_1 - C_{r_1} \theta_1 (k_1 - Y_1) \quad (4.214)$$

$$C_{r_1} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \Big|_1 \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \Big|_1 \right) \quad (4.215)$$

$$\dot{r}_1 = \varphi_1 \left(1 - \frac{(k_1 - Y_1)}{\gamma_1} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda - \frac{\pi_1}{\beta_1 \gamma_1} (k_1 - Y_1)^{\omega_1} \quad (4.216)$$

mit $\pi = 0$ für Plastizität.

Bei der Berechnung der thermoelastischen Kopplung und der dissipierten Spannungsleistung erkennt man die folgenden Abhängigkeiten:

$$w_{et1} = \tilde{w}_{et}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta) = \check{w}_{et}(\mathbf{D}_1, \theta_1) = \check{w}_{et}\left(\frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t}, \theta_1\right) = \check{w}_{et}\left(\frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\Delta t}, \theta_1\right) \quad (4.217)$$

$$w_{d1} = \tilde{w}_d(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta) = \check{w}_d(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \theta, \mathbf{Q}_1) = \check{w}_d(\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \theta) = \widehat{w}_d(\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, k_1, \theta_1, \Lambda) \quad (4.218)$$

$$w_{p1} = \tilde{w}_p(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta) = \widehat{w}_p(\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \Lambda) \quad (4.219)$$

$$\dot{e}_{sY1} = \tilde{e}_{sY}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta) = \widehat{e}_{sY}(\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \theta_1, \Lambda) \quad (4.220)$$

$$\dot{e}_{sr1} = \tilde{e}_{sr}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta) = \widehat{e}_{sr}(k_1, \theta_1, \Lambda) . \quad (4.221)$$

4.4 Beiträge zur Tangentensteifigkeit

In der Schnittstelle UMAT müssen die Ableitungen

$$\frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta}, \quad \frac{\partial (\check{w}_{et} + \check{w}_d)}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \frac{\partial (\check{w}_{et} + \check{w}_d)}{\partial \Delta \theta} \quad (4.222)$$

am Inkrementende bereitgestellt werden (ABAQUS USER MANUAL [15, Abschnitt 5.2.21]). Mit Hilfe dieser Terme berechnet ABAQUS intern die von der Materialroutine bestimmten Beiträge (3.34)-(3.37) an der Tangentensteifigkeitsmatrix. Dieses von NAGTEGAAL & VELDPAUS [20] entwickelte Konzept zur Berechnung von (3.34)-(3.37) ist in diesem Abschnitt vorgestellt. Die berechneten Ableitungen (4.222) für die im Abschnitt 4.2 beschriebene Zustandsvektorberechnung sind im Anhang D.2, D.3 und D.4 angegeben.

Zur Notation: In Anlehnung an ABAQUS THEORY MANUAL [11, Abschnitt 3.1.1] wird zur Vereinfachung für die Gateaux-Differentiale einer Größe (\cdot) an der Stelle $(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i)$ die Schreibweise

$$\mathcal{D}_{\Delta \mathbf{u}}(\cdot) = D_{\Delta \mathbf{u}}(\cdot) (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \mathbf{u}] \quad (4.223)$$

$$\mathcal{D}_{\Delta \theta}(\cdot) = D_{\Delta \theta}(\cdot) (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i) [\delta \theta] \quad (4.224)$$

eingeführt. Alle Variablen und alle partiellen Ableitungen in diesem Abschnitt sind mit der in der Iteration i zugrunde gelegten Verschiebung \mathbf{u}^i und der zugrunde gelegten Temperatur θ^i (bzw. mit den daraus abgeleiteten Größen) zu bilden.

4.4.1 Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}}$

Mit (4.92) ergibt sich zunächst

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T. \quad (4.225)$$

Für den Term (3.34) berechnet man anhand von (4.176)

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbf{Q}_1^T \quad (4.226)$$

oder anhand von (4.179)

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T + \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} [\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T] + \mathcal{A}_1 [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}] \quad (4.227)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}] &= \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T] + \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\mathbf{Q}} [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}] - \\ &\quad - \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T. \end{aligned} \quad (4.228)$$

Durch Koeffizientenvergleich zwischen (4.226) und (4.227) folgt

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}. \quad (4.229)$$

Der Term (3.34) ist somit bei einer Integration bzgl. \mathbf{R}_t durch (4.226), bei einer Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ gemäß (4.227) unter Beachtung von (4.228) durch

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1 \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}^T + \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} [\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T] \quad (4.230)$$

bestimmt.

In ABAQUS wird der Term $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}}$ (3.34) auf der Grundlage von (4.230) berechnet, wobei die Schnittstelle UMAT den Term $\partial\tilde{\mathbf{S}}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ am Inkrementende bereitstellen muß. Die Größen $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Q}}$ und $\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T$ werden in ABAQUS intern mit den in Anhang D.1 gegebenen Beziehungen (D.8) und (D.11) bestimmt.

4.4.2 Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}}$

Im Falle einer Integration bzgl. \mathbf{R}_t erhält man den Term (3.35) wegen Term $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}(\Delta\mathbf{u})$ mit (4.176) aus

$$\mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\theta} \mathbf{Q}_1^T \delta\theta, \quad (4.231)$$

im Falle einer Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ mit (4.179) aus

$$\mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\theta} \delta\theta. \quad (4.232)$$

Die Schnittstelle UMAT muß zur Berechnung von $\mathcal{D}_{\Delta\theta}\tilde{\mathbf{S}}$ den Term $\partial\tilde{\mathbf{S}}/\partial\Delta\theta$ am Inkrementende bereitstellen.

4.4.3 Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}(\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$

Der von der thermoelastischen Kopplung bestimmte Beitrag am Term (3.36) ergibt sich mit (4.206), (4.217), (4.225) zu

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{w}_{et} = \frac{\partial\tilde{w}_{et}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \quad (4.233)$$

$$= \frac{\partial\tilde{w}_{et}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial\tilde{w}_{et}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T, \quad (4.234)$$

der von der dissipierten Spannungsleistung bestimmte Beitrag an (3.36) mit (4.176)-(4.181), (4.218), (4.226), (4.192) und (4.230) zu

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{w}_d = \frac{\partial\tilde{w}_d}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \quad (4.235)$$

$$= \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{S}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{S}} + \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{Z}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{Z}} + \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial k} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{k} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\Lambda} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\tilde{\zeta} = \quad (4.236)$$

$$= \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbf{Q}_1^T + \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{\mathbf{Z}}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} [\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbf{Q}_1^T + \quad (4.237)$$

$$+ \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial k} \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{k}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\Lambda} \mathbf{Q}_1 \frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{S}} \right] + \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{Z}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\mathbf{Z}} \right] + \frac{\partial\tilde{k}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial k} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\Lambda} \right) \cdot \quad (4.238)$$

$$\cdot (\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T).$$

In (4.234), (4.238) wurde die Isotropie der Funktionen \check{w}_{et} und \widehat{w}_d (wodurch jeweils die Faktoren in $(\partial\check{w}_{et}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $(\partial\widehat{w}_d/\partial\mathbf{S}) \mathbf{S}_1$, $(\partial\widehat{w}_d/\partial\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_1$ kommutieren) und die Antisymmetrie von $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \check{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T$ (siehe dazu (D.10)) ausgenutzt.

Bei einer Integration bzgl. \mathbf{R}_t wird $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}(\check{w}_{et} + \check{w}_d)$ mit (4.233) und (4.237), bei einer Integration bzgl. $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ mit (4.234) und (4.238) bestimmt.

In ABAQUS muß die Schnittstelle UMAT zur Berechnung von $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}}(\check{w}_{et} + \check{w}_d)$ den Term

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\check{w}_{et} + \check{w}_d)}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} &= \tag{4.239} \\ &= \left(\frac{\partial\check{w}_{et}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial\check{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial\widehat{w}_d}{\partial\mathbf{S}} \right] + \left(\frac{\partial\check{\mathbf{Z}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial\widehat{w}_d}{\partial\mathbf{Z}} \right] + \frac{\partial\check{k}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\widehat{w}_d}{\partial k} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\widehat{w}_d}{\partial\Lambda} \right) \end{aligned}$$

bereitstellen.

4.4.4 Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta\theta}(\check{w}_{et} + \check{w}_d)$

Der von der thermoelastischen Kopplung bestimmte Beitrag am Term (3.37) bestimmt sich mit(4.217) zu

$$\mathcal{D}_{\Delta\theta}\check{w}_{et} = \frac{\partial\check{w}_{et}}{\partial\Delta\theta} \delta\theta, \tag{4.240}$$

der von der dissipierten Spannungsleistung bestimmte Beitrag an (3.37) mit (4.218) zu

$$\mathcal{D}_{\Delta\theta}\check{w}_d = \frac{\partial\check{w}_d}{\partial\Delta\theta} \delta\theta. \tag{4.241}$$

Die Schnittstelle UMAT muß zur Berechnung von $\mathcal{D}_{\Delta\theta}(\check{w}_{et} + \check{w}_d)$ den Term $\partial(\check{w}_{et} + \check{w}_d)/\partial\Delta\theta$ am Inkrementende bereitstellen.

5 Numerische Beispiele

Die im Kapitel 4 beschriebene Materialroutine wird im Abschnitt 5.1 anhand von weggesteuerten Finite Elemente Berechnungen verifiziert. Im Anschluß an diese Untersuchungen wird ein Zugversuch simuliert. Infolge der dissipierten Wärme und der angenommenen Temperaturabhängigkeit der Materialparameter resultiert eine Einschnürung des betrachteten Zugstabs ohne Vorgabe von thermischen oder geometrischen Imperfektionen. Als letztes Beispiel wird die Simulation eines Stauchversuchs vorgestellt, wobei hier der Unterschied zwischen einer thermomechanisch gekoppelten und einer vollkommen adiabaten Berechnung näher untersucht wird.

Für die isotrope Verfestigung wird in diesem Kapitel ausschließlich der Ansatz (A) betrachtet.

5.1 Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialroutine

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialroutine werden adiabate dehnungsgesteuerte Zugversuche mit einem einzelnen Element des Typs CAX8RT ¹ simuliert. Da keine geschlossene Lösung der konstitutiven Gleichungen existiert, werden die Ergebnisse der Finite Elemente Rechnungen mit der Lösung eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens mit Schrittweitenkontrolle verglichen ². Den Berechnungen in diesem Abschnitt wird das vereinfachte viskoplastische Materialmodell mit den in Tabelle 5.1 angegebenen Materialparametern zugrunde gelegt, wobei für die Materialparameter der statischen Erholung p, π, w, ω verschiedene Parametersätze vorgegeben sind.

Wahl der Materialparameter der statischen Erholung

Zur Auswahl der Materialparameter p, π, w, ω wird exemplarisch der exakte Verlauf der isotropen Verfestigung im Falle eines dehnungsgesteuerten adiabaten Zugversuchs betrachtet.

¹ABAQUS-8-Knoten-Element für Axialsymmetrie bei thermomechanisch gekoppelten Berechnungen

²Die Lösungen der Berechnungen mit dem Runge–Kutta–Verfahren werden im folgenden als exakt bezeichnet. Ist von Berechnungen die Rede, sind ausschließlich die durchgeführten Finite Elemente Simulationen gemeint.

Tab. 5.1: Materialparameter (temperaturunabhängig); Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl werden innerhalb der UMAT-Subroutine in die Laméschen Konstanten umgerechnet.

für alle Parametersätze		für Parametersatz 0	
ρ	$7.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	π	$0 \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$
c_e	540 J/(kgK)	ω	1
K	$45.0 \cdot \text{W/(mK)}$	p	$0 \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$
E	200000 MPa	w	1
ν	0.3	für Parametersatz 1	
α	10^{-5} 1/K	π	$10^{-4} \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$
θ_R	293 K	ω	1.5
η	$464.159 \text{ MPa s}^{1/m}$	p	$10^{-4} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$
m	3	w	1.5
b	45	für Parametersatz 2	
c	2500 MPa	π	$10^{-2} \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$
Y	400 MPa	ω	1.5
β	38	p	$10^{-2} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$
γ	170 MPa	w	1.5
φ	1		

Innerhalb von 25s wird eine axiale Verlängerung von 5% aufgebracht und anschließend gehalten (Relaxation). Anhand des Verlaufs der isotropen Verfestigung für $p = \pi = 0$ wird deutlich, daß keine nennenswerte Überspannung auftritt. Die in den Abbildungen 5.1, 5.2, 5.3 zu beobachtende Änderung der isotropen Verfestigung in der Haltephase ist somit fast ausschließlich durch die statische Erholung bedingt.

Aus den Evolutionsgleichungen der Verfestigungsvariablen erkennt man, daß die Nichtlinearität der statischen Erholung bei konstanter Temperatur einzig durch die Abnahme der Verfestigungsvariablen selbst bedingt ist. Für $w > 1$ bzw. $\omega > 1$ wird diese Nichtlinearität verstärkt, für $w < 1$ bzw. $\omega < 1$ abgeschwächt. Dies verdeutlichen die exakten Verläufe der isotropen Verfestigung in den Abbildungen 5.1, 5.2, 5.3. Anhand von Abbildung 5.2 werden zwei Parametersätze, in Tabelle 5.1 mit Parametersatz 1 bzw. 2 bezeichnet, ausgewählt. Zum einen werden die Materialparameter der statischen Erholung $p = 10^{-4} \text{ MPa}^w \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-4} \text{ MPa}^\omega \text{ s}^{-1}$,

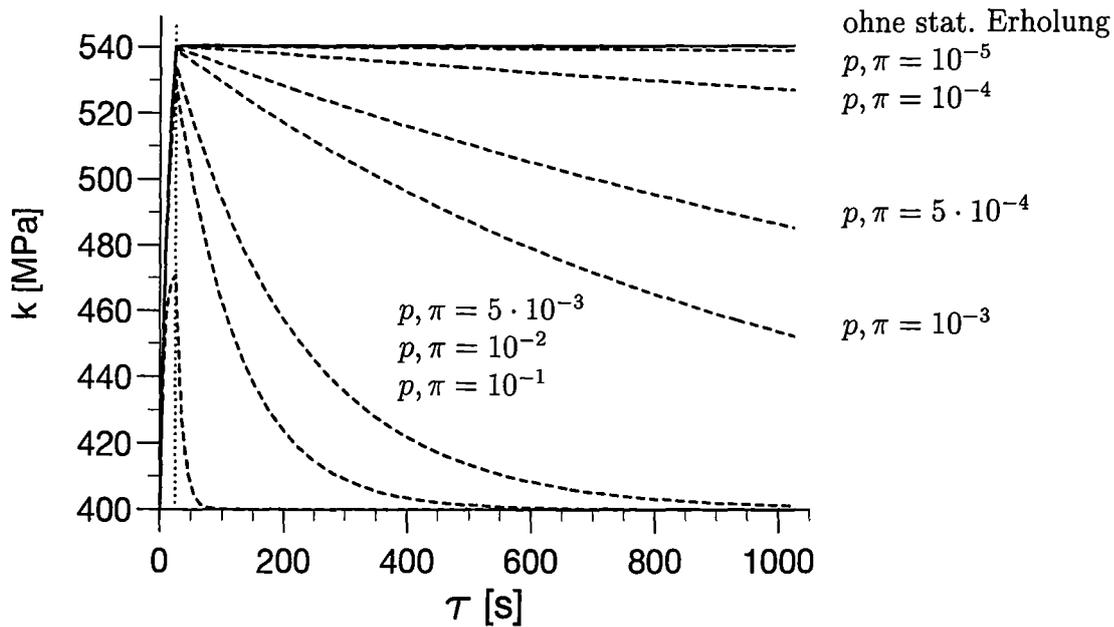


Abb. 5.1: Einfluß der Recovery-Parameter p [$\text{MPa}^{1-w}\text{s}^{-1}$] und π [$\text{MPa}^{1-w}\text{s}^{-1}$] auf die isotrope Verfestigung k (Runge-Kutta); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ für $\tau = [0, 25) \text{ s}$, $\dot{\epsilon}_t = 0$ für $\tau = [25, 1025) \text{ s}$; $w = \omega = 1.0$.

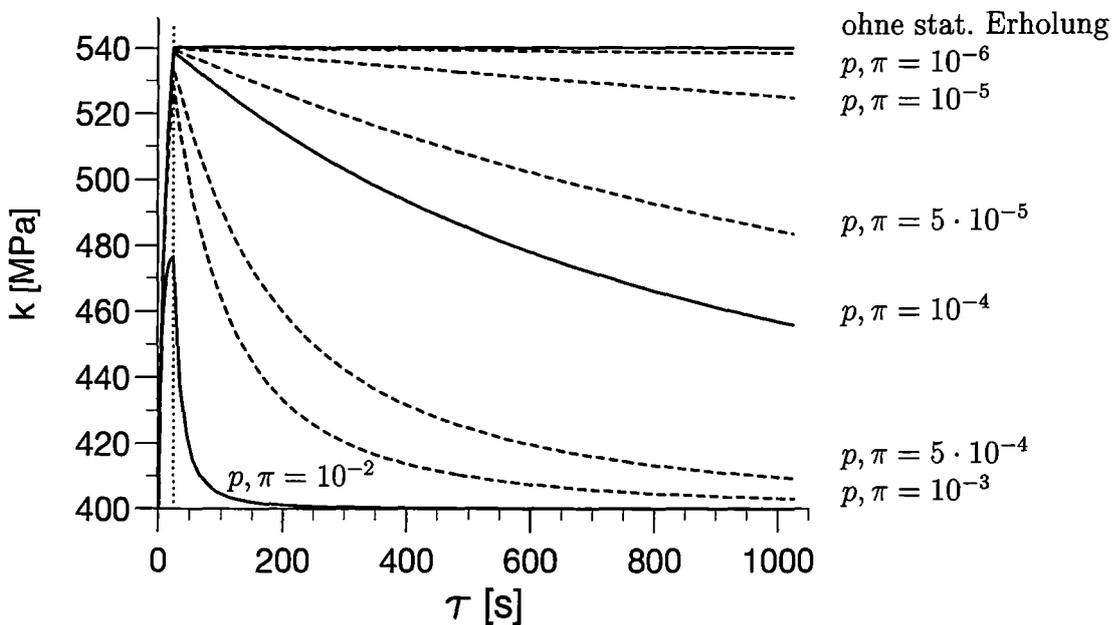


Abb. 5.2: Einfluß der Recovery-Parameter p [$\text{MPa}^{1-w}\text{s}^{-1}$] und π [$\text{MPa}^{1-w}\text{s}^{-1}$] auf die isotrope Verfestigung k (Runge-Kutta); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ für $\tau = [0, 25) \text{ s}$, $\dot{\epsilon}_t = 0$ für $\tau = [25, 1025) \text{ s}$; $w = \omega = 1.5$.

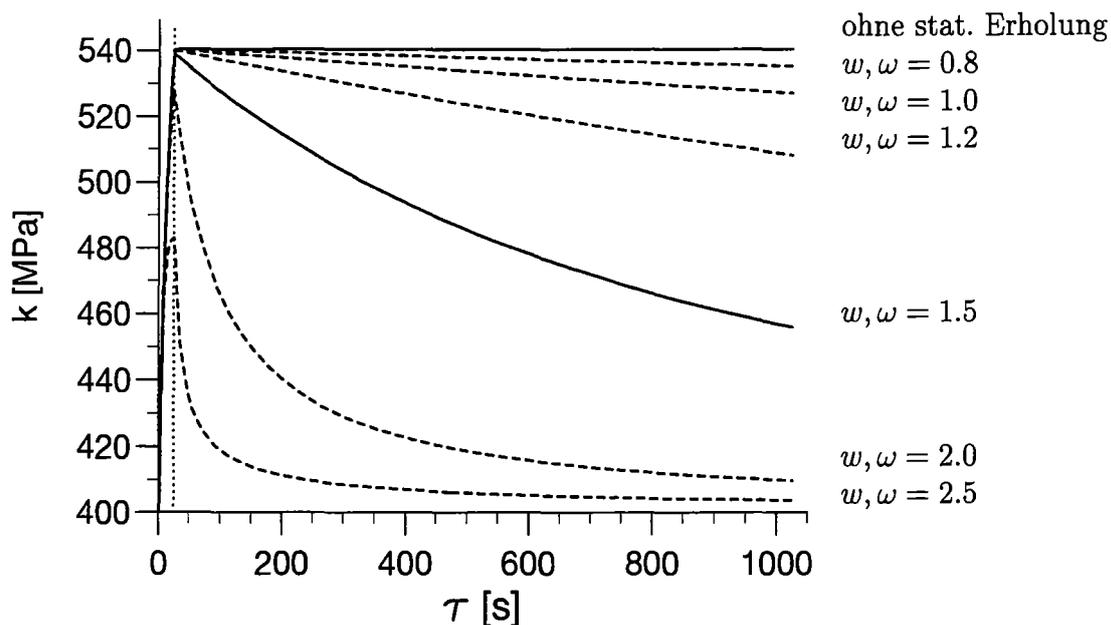


Abb. 5.3: Einfluß der Recovery-Parameter w und ω auf die isotrope Verfestigung k (Runge-Kutta); $\dot{\varepsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ für $\tau = [0, 25) \text{ s}$, $\dot{\varepsilon}_t = 0$ für $\tau = [25, 1025) \text{ s}$; $p = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$.

$w = \omega = 1.5$ ausgewählt, da hier in der Belastungsphase noch kein Einfluß der statischen Erholung auf den Verlauf der isotropen Verfestigung zu erkennen ist, jedoch in der Haltephase der größte Abfall der Verfestigung zu beobachten ist; zum anderen wird $p = 10^{-2} \text{ MPa}^w \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-2} \text{ MPa}^\omega \text{ s}^{-1}$, $w = \omega = 1.5$ untersucht, um die Materialroutine anhand einer Extremsituation zu verifizieren.

Schrittweitereinfluß auf die berechneten Ergebnisse in der Belastungsphase

Zur Untersuchung des Schrittweitereinflusses auf die berechneten Ergebnisse wird ein adiabater dehnungsgesteuerter Zugversuch mit einer Maximaldehnung von $\varepsilon_t = \Delta l/l = 5\%$ simuliert, wobei hier wieder exemplarisch der berechnete und der exakte zeitliche Verlauf der isotropen Verfestigung gezeigt ist.

Zunächst wird das Materialmodell ohne statische Erholung (Parametersatz 0) betrachtet. Bei Vorgabe eines Zeitinkrements von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ (entspricht $\varepsilon_t = 0.02\%$) ist der berechnete zeitliche Verlauf der isotropen Verfestigung annähernd deckungsgleich mit dem exakten Verlauf; für $\Delta t = 1 \text{ s}$ (entspricht $\varepsilon_t = 0.2\%$) beträgt die maximale Abweichung des berechneten Ergebnisses 2 MPa , was einem relativen Fehler von 1.5% entspricht. (Der Zeitpunkt des maximalen

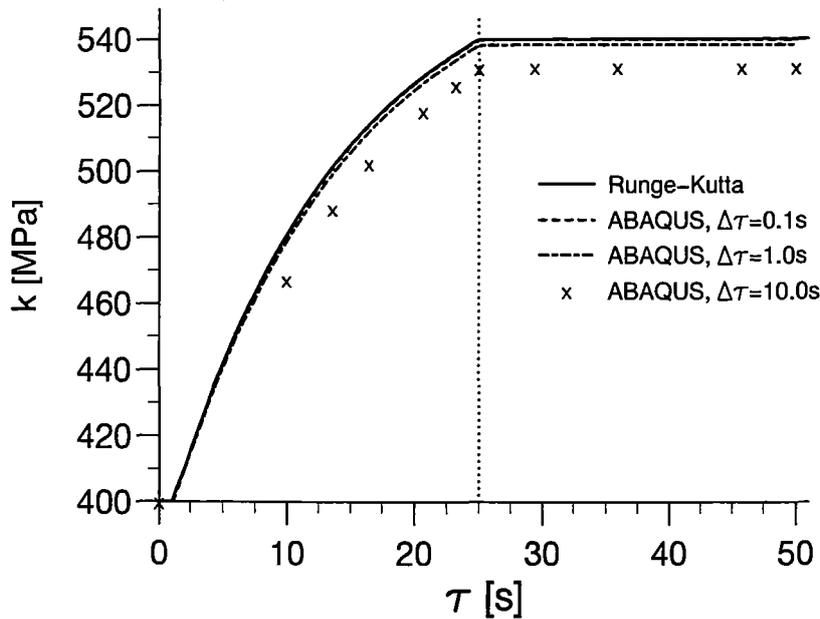


Abb. 5.4: Einfluß der Schrittweite $\Delta\tau$ auf die isotrope Verfestigung k (ABAQUS); $\dot{\varepsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ für $\tau = [0, 25) \text{ s}$, $\dot{\varepsilon}_t = 0$ für $\tau = [25, 1025) \text{ s}$; ohne stat. Erholung

absoluten Fehlers ist hier gleich dem Zeitpunkt des maximalen relativen Fehlers).

Wird ein maximal zulässiges Zeitinkrement von $\Delta t_{\text{max.}} = 10 \text{ s}$ (entspricht $\varepsilon_t = 2\%$) vorgegeben, erfolgt eine Reduzierung des Zeitinkrements durch die automatische Schrittweitenkontrolle von ABAQUS (siehe hierzu ABAQUS THEORY MANUAL [11, Abschnitt 3.2.1]). Zur Verdeutlichung der Zeitdiskretisierung sind die berechneten Werte der isotropen Verfestigung bei Vorgabe von $\Delta t_{\text{max.}} = 10 \text{ s}$ in Abbildung 5.4 mit "x" gekennzeichnet. Mit dem ersten Zeitschritt wird eine Dehnung von $\varepsilon_t = 2\%$ erreicht, so daß an der ersten Zeitstützstelle der Zeitpunkt des Beginns der inelastischen Deformation bereits weit überschritten ist. Obwohl das maximal zulässige Zeitinkrement von $\Delta t_{\text{max.}} = 10 \text{ s}$ der Problemstellung nicht angepaßt ist, wird der qualitative Verlauf der isotropen Verfestigung gut approximiert; jedoch bei einem absoluten Fehler von maximal 9MPa (was an gleicher Stelle einem relativen Fehler von 6.5% entspricht).

Schrittweiteneinfluß auf die berechneten Ergebnisse in der Haltephase

Bei der numerischen Simulation von Haltephasen müssen größere Zeitschritte als in der Belastungsphase zulässig sein, um in solchen Fällen den Berechnungsaufwand auf ein sinnvolles Maß zu beschränken. Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialroutine beim

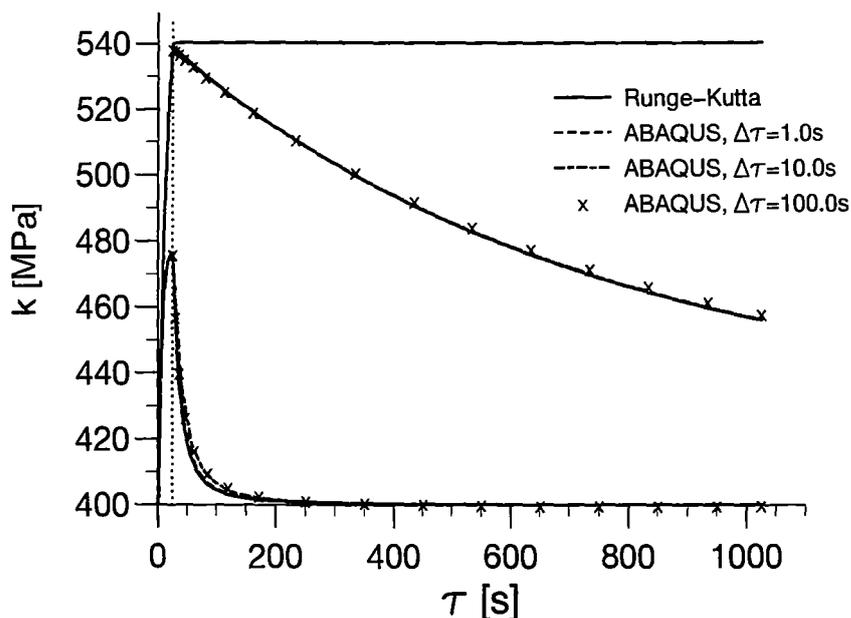


Abb. 5.5: Einfluß der Schrittweite $\Delta\tau$ auf die isotrope Verfestigung k während der Haltephase (ABAQUS); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $\Delta\tau = 0.1 \text{ s}$ für $\tau = [0, 25] \text{ s}$, $\dot{\epsilon}_t = 0$ für $\tau = [25, 1025] \text{ s}$; $w = \omega = 1.5$; $p [\text{MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}]$; $\pi [\text{MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}]$.

Auftreten statischer Erholung (Parametersätze 1 und 2) wird deshalb im Zugexperiment nach Erreichen der technischen Dehnung von $\epsilon_t = 5\%$ eine Haltephase von 1000s betrachtet. Dabei wird in der Belastungsphase mit einer Schrittweite von 0.1s gerechnet, für die Haltephase Schrittweiten von 1s, 10s, 100s vorgegeben. Im Falle einer Schrittweite von 100s erfolgt eine Reduktion der Schrittweite durch die automatische Schrittweitenkontrolle von ABAQUS. Deshalb sind zur Verdeutlichung der Zeitdiskretisierung die berechneten Werte der isotropen Verfestigung bei einer maximalen Zeitschrittweite von 100s in Abbildung 5.5 mit "x" gekennzeichnet.

Bei Berechnungen mit dem Parametersatz 1 ergeben sich für die Schrittweiten von 1s und 10s keine nennenswerten Unterschiede der berechneten Werte vom exakten Ergebnis, lediglich bei einer Schrittweite von $\Delta t_{\text{max.}} = 100 \text{ s}$ beträgt die maximale Abweichung vom exakten Ergebnis 3MPa (max. relativer Fehler tritt an gleicher Stelle auf und beträgt ca 5%).

Wird den Berechnungen der Parametersatz 2 zugrunde gelegt, bedingt der starke Abfall der isotropen Verfestigung zu Beginn der Haltephase (bereits nach 25s ist mehr als die Hälfte der isotropen Verfestigung abgebaut) einen deutlichen Schrittweiteeinfluß. Hier liefert lediglich die Berechnung mit $\Delta t = 1 \text{ s}$ ein mit der exakten Lösung annähernd übereinstimmendes Er-

gebnis. Mit zunehmender Schrittweite erhält man einen im Vergleich zum exakten Ergebnis etwas verlangsamten Abbau der isotropen Verfestigung. Für $\Delta t = 10\text{s}$ ist der maximale absolute Fehler stets kleiner 2MPa (maximaler relativer Fehler ca. 10%), für $\Delta t_{\text{max.}} = 100\text{s}$ stets kleiner 4MPa (maximaler relativer Fehler ca. 20%). Der große relative Fehler für $\Delta t = 10\text{s}$ bzw. $\Delta t_{\text{max.}} = 100\text{s}$ resultiert aus der leichten Verzögerung des Verfestigungsabbaus während des starken Abfalls der isotropen Verfestigung.

Simulation einer zyklischen Belastung

Durch die bisher vorgestellten Untersuchungen, wurde die Materialroutine lediglich bei monotoner Belastung verifiziert. Die Zulässigkeit des dreifachen Operator-Splits kann anhand der Simulation einer zyklischen Belastung überprüft werden. Die Abbildungen 5.6–5.8 zeigen die berechneten und exakten Ergebnisse eines adiabaten dehnungsgesteuerten zyklischen Zug-Druck Experiments mit einer Dehnungsschwingbreite von 10% sowie eingebauten Haltephasen. Die Lastgeschichte ε_t ist in allen Abbildungen gestrichelt dargestellt.

Bei Vorgabe des Parametersatzes 1 (Abbildung 5.6) wird der Verlauf der wahren Axialspannung S_{11} , der kinematischen Verfestigung Z_{11} , der isotropen Verfestigung k , der plastischen Bogenlänge s sowie der Temperaturänderung $\Delta\theta$ mit hinreichender Genauigkeit approximiert. Insbesondere ist der absolute Fehler aller spannungsartigen Variablen von der gleichen Größenordnung ³.

Wird den Berechnungen der Parametersatz 2 zugrunde gelegt, ergeben sich für eine maximal zulässige Schrittweite von $\Delta t_{\text{max.}} = 5\text{s}$ (entspricht einem technischen Dehnungsinkrement von 1% in der Belastungsphase) unbefriedigende Resultate (Abbildung 5.7). Durch eine Reduktion der Schrittweite auf $\Delta t_{\text{max.}} = 1\text{s}$ (entspricht einem technischen Dehnungsinkrement von 0.2% in der Belastungsphase) erhält man für alle Variablen eine gute Übereinstimmung der berechneten und der exakten Werte (Abbildung 5.8) ⁴.

5.2 Simulation eines Zugversuchs

Betrachtet wird die Simulation eines Zugversuchs ohne detaillierte Modellierung der Einspannung. Mit einer thermomechanisch ungekoppelten Berechnung kann der Einschnürvorgang nur

³In den Abbildungen 5.6–5.8 ist die kinematische Verfestigung Z_{11} mit dem Faktor 10 gewichtet worden, so daß hier leicht der falsche Eindruck eines größeren absoluten Fehlers entstehen kann.

⁴Ist in den Abbildungen 5.6–5.8 nur eine durchgezogene Linie erkennbar, dann stimmen die berechneten und die exakten Ergebnisse annähernd überein.

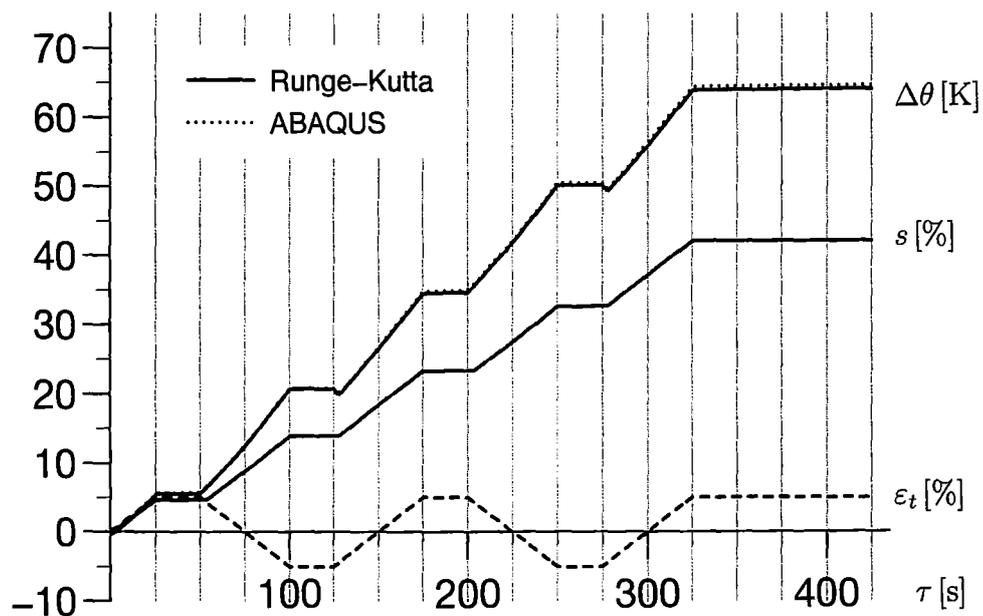
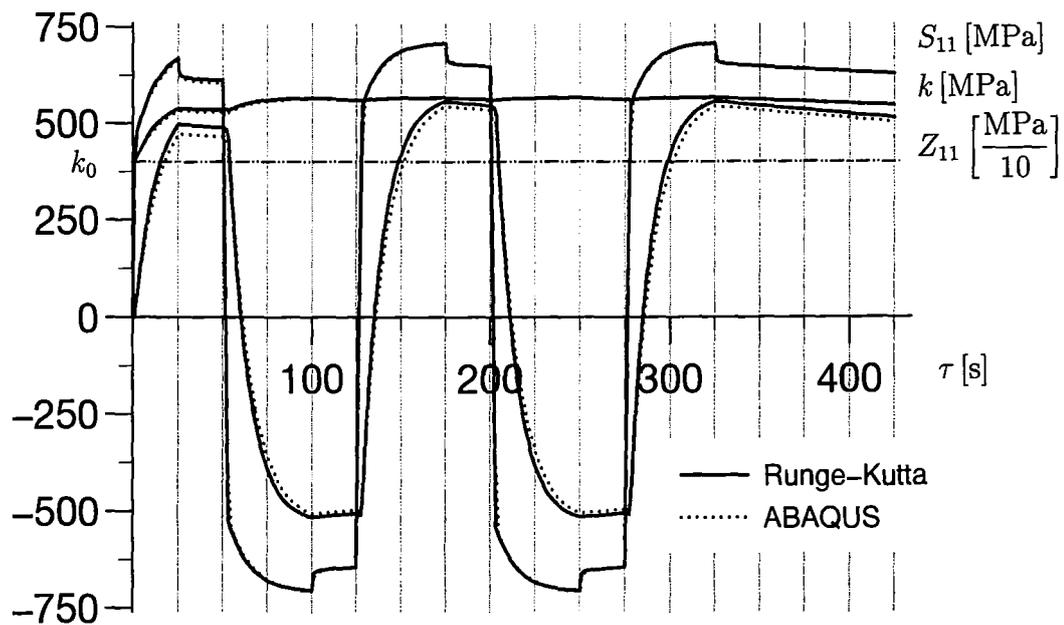


Abb. 5.6: Die mit ABAQUS und dem Runge-Kutta-Verfahren berechneten Spannungsantworten (oben) sowie die Entwicklung der Temperatur $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ und der plastischen Bogenlänge s (unten) bei Vorgabe der technischen Dehnung $\dot{\epsilon}_t$ (gestrichelt); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} / 0 / -2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $p = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $w = \omega = 1.5$, $\Delta\tau_{max} = 5 \text{ s}$ (ABAQUS).

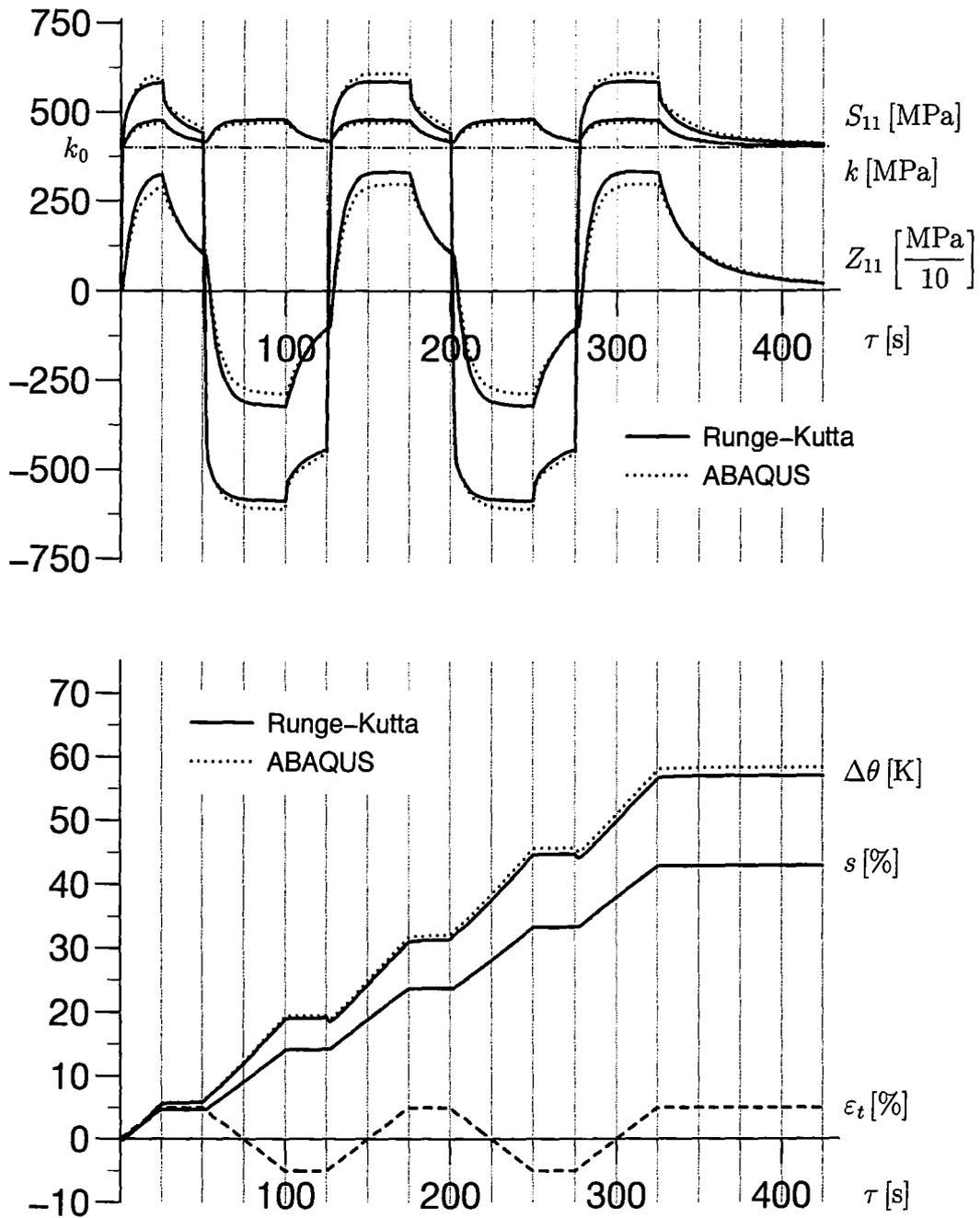


Abb. 5.7: Die mit ABAQUS und dem Runge-Kutta-Verfahren berechneten Spannungsantworten (oben) sowie die Entwicklung der Temperatur $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ und der plastischen Bogenlänge s (unten) bei Vorgabe der technischen Dehnung $\dot{\epsilon}_t$ (gestrichelt); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} / 0 / -2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $p = 10^{-2} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-2} \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$, $w = \omega = 1.5$, $\Delta\tau_{max} = 5 \text{ s}$ (ABAQUS).

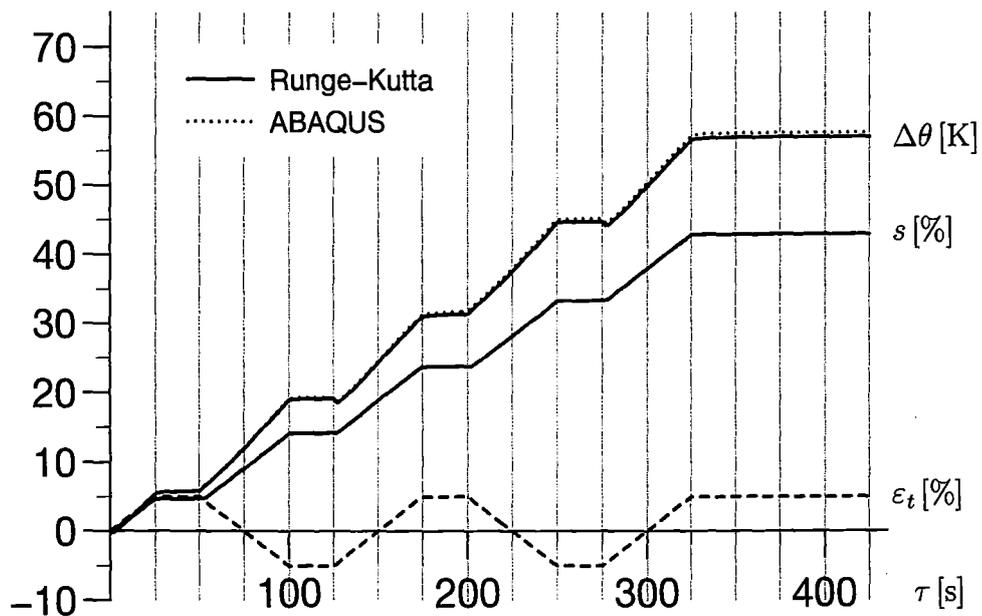
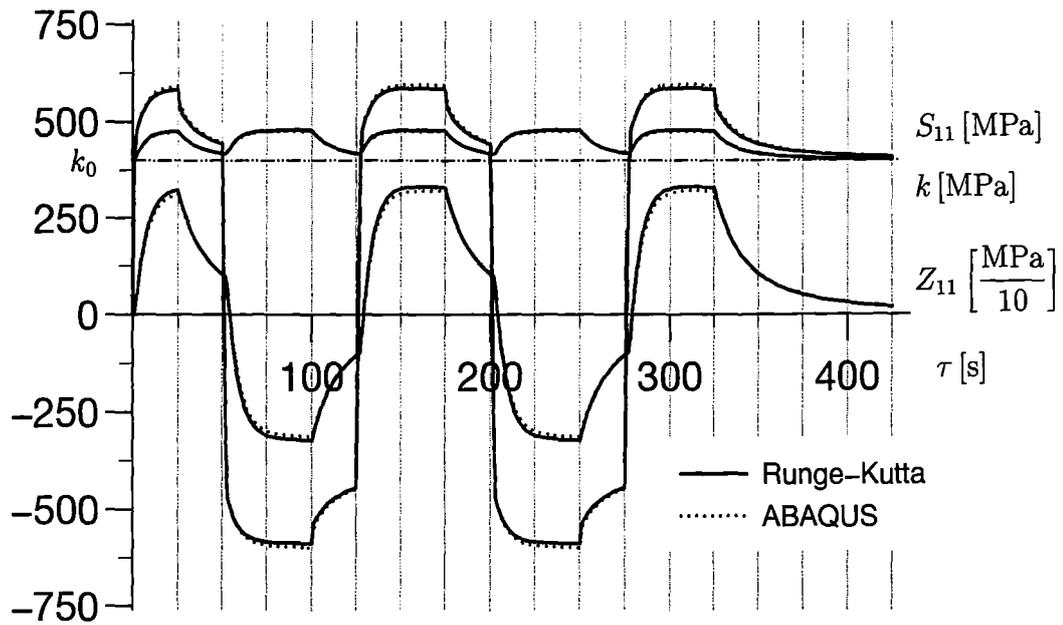


Abb. 5.8: Die mit ABAQUS und dem Runge-Kutta-Verfahren berechneten Spannungsantworten (oben) sowie die Entwicklung der Temperatur $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ und der plastischen Bogenlänge s (unten) bei Vorgabe der technischen Dehnung $\dot{\epsilon}_t$ (gestrichelt); $\dot{\epsilon}_t = 2 \cdot 10^{-3} / 0 / -2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $p = 10^{-2} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $\pi = 10^{-2} \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$, $w = \omega = 1.5$, $\Delta\tau_{max} = 1 \text{ s}$ (ABAQUS).

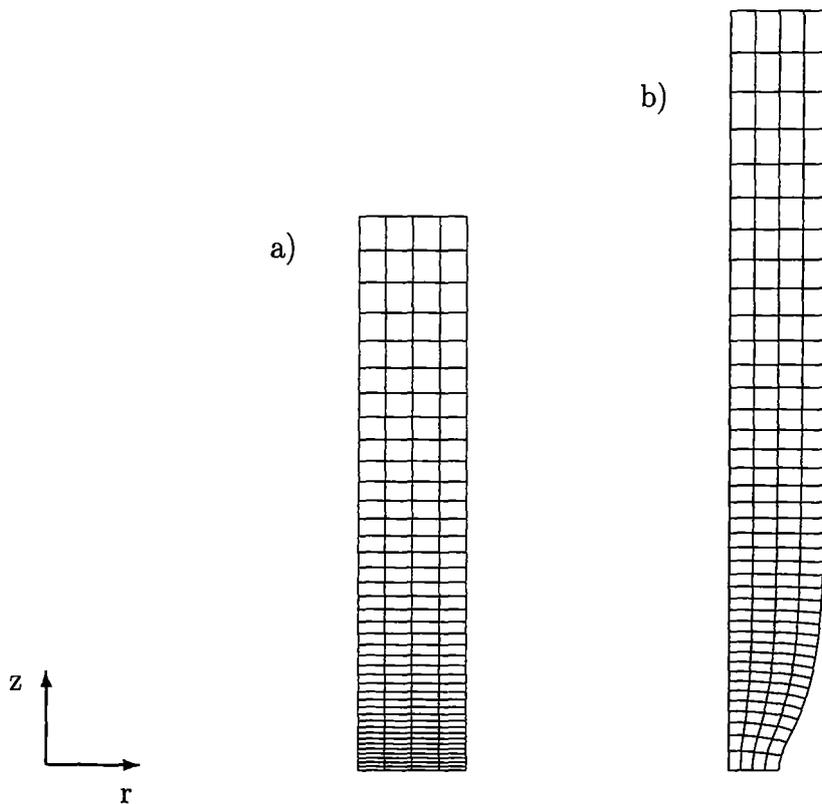


Abb. 5.9: Thermisch ausgelöste Einschnürung eines runden Zugstabes, Geometrie und FE-Netz der unverformten und verformten Struktur:
Ausgangslänge 40.0mm, Endlänge 54.73mm.

durch eine geometrische oder thermische Imperfektion ausgelöst werden. Thermomechanisch gekoppelte Berechnungen erlauben jedoch die Simulation des Einschnürvorgangs ohne Imperfektion. Hier resultiert im Verlauf der Deformation als Folge der dissipativen Aufheizung und der thermischen Randbedingungen eine Inhomogenität in der Temperaturverteilung, wodurch bei temperaturabhängigen Materialparametern der Einschnürvorgang ausgelöst werden kann (siehe LEHMANN & BLIX [45], SIMO & MIEHE [56] und MIEHE [57]).

Geometrie und Finite Elemente Modell

In der hier vorgestellten, thermomechanisch gekoppelten Berechnung des Einschnürvorgangs wird eine zylindrische Probe mit Länge $l = 40\text{mm}$ und Radius $r = 4\text{mm}$ betrachtet. Das Finite Elemente Modell, gezeigt in Abbildung 5.9 a), ist axialsymmetrisch und berücksichtigt

Tab. 5.2: Materialparameter; Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl werden innerhalb der UMAT-Subroutine in die Laméschen Konstanten umgerechnet.

temperaturunabhängig		temperaturabhängige Verfestigungsparameter					
ρ	$7.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	bei 293K:	bei 393K:				
c_ε	496.82 J/(kgK)	b	45	b	40		
K	$43.2 \cdot \text{W/(mK)}$	1	1	c	2500 MPa	c	1800 MPa
E	200000 MPa	Y	400 MPa	Y	340 MPa		
ν	0.3	β	10	β	8		
α	10^{-5} 1/K	γ	170 MPa	γ	130 MPa		
θ_R	293 K	π	$0 \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$	π	$0 \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$		
η	$215.443 \text{ MPa s}^{1/m}$	ω	1	ω	1		
m	3.0	p	$0 \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$	p	$0 \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$		
φ	1	w	1	w	1		

aufgrund der Symmetrie des Problems nur die obere Hälfte des Zugstabs. Es besteht aus 160 Elementen des Typs CAX8RT⁵. Um eine übermäßige Verzerrung von Elementen auszuschließen erfolgt eine sukzessive Verminderung des Höhe:Breite-Verhältnisses der Elemente von 1:1 auf 1:10 in Richtung Zugstabmitte bei konstanter Elementbreite.

Material

Die Zugprobe besteht aus einem viskoplastischen Material mit den in Tabelle 5.2 angegebenen Materialparametern. Die Verfestigungsparameter sind temperaturabhängig und an den Stützstellen 293K und 393K gegeben. Für Temperaturen zwischen diesen Stützstellen werden die Materialparameter durch lineare Interpolation ermittelt, unterhalb von 293K die an der Stützstelle 293K gegebenen Materialparameter der Rechnung zugrunde gelegt.

Randbedingungen und Belastung

Als geometrische Randbedingung in axialer Richtung wird die Querschnittsfläche in der Mitte des Zugstabs (untere Seite im Finite Elemente Modell) festgehalten. Die Stirnfläche wird mit

⁵ABAQUS-8-Knoten-Element für Axialsymmetrie bei thermomechanisch gekoppelten Berechnungen

konstanter Geschwindigkeit nach oben verschoben, so daß sich eine globale Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\varepsilon}_t = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$ einstellt ($\varepsilon_t = \Delta l/l$).

Im gesamten Zugstab ist eine freie Querkontraktion möglich.

Die Ausgangs- und Umgebungstemperatur beträgt 293K. An Mantel- und Stirnfläche der Zugprobe wird eine konstante Wärmeübergangszahl von $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ vorgegeben.

Bei der Formulierung der thermischen Randbedingungen könnte der Einfluß der Einspannung durch Vorgabe einer wesentlich größeren Wärmeübergangszahl im oberen Bereich des Zugstabes berücksichtigt werden. Dadurch würde im Verlauf der Deformation in der Probe ein größerer Temperaturgradient resultieren. Im Gegensatz dazu wird bei den hier vorgegebenen gleichmäßigen Wärmeübergangsbedingungen lediglich eine sehr geringe Inhomogenität im Verlauf der Deformation induziert. Dies erlaubt es die Güte der berechneten Tangentensteifigkeitsmatrix zu beurteilen, denn bereits geringe Abweichungen von der exakten Tangentensteifigkeitsmatrix führen zu unrealistischen Deformationen.

Ergebnis und Diskussion

In Abbildung 5.9 ist das undeformierte und das deformierte Netz nach Erreichen der endgültigen technischen Dehnung von $\varepsilon_t = \Delta l/l = 36.825\%$ dargestellt. Aufgrund der Lokalisierung der Deformation wird im Einschnürbereich eine Dehnung $> 500\%$ erreicht. In radialer Richtung beträgt die Verschiebung der Mantelfläche im Einschnürbereich 2.15mm (53.75% des Ausgangsradius), an den Enden der Zugprobe nur 0.4033mm (10.1% des Ausgangsradius).

Die Finite Elemente Rechnung zeigt eine anfängliche, nahezu gleichmäßige Abkühlung des Zugstabes infolge der thermoelastischen Kopplung ($\theta < 293\text{K}$ für $t < 2.1\text{s}$, bzw. $\varepsilon_t = 5.25 \cdot 10^{-3}$). Mit dem Einsetzen der inelastischen Deformation erwärmt sich der Zugstab annähernd gleichmäßig. Der Übergang von der Stelle der maximalen Abkühlung zum Zustand der Erwärmung ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Trotz der äußerst geringen Temperaturunterschiede in der Zugprobe wird hier deutlich, daß die Materialroutine die Temperaturentwicklung wirklichkeitsgetreu beschreiben kann. Bei rein elastischem Materialverhalten ist bedingt durch die Wärmezufuhr über den Rand die Mantel- und Stirnfläche der Zugprobe im Vergleich zum Inneren der Probe geringfügig wärmer. Durch das Auftreten der dissipierten Wärme infolge der inelastischen Deformation wird dieser Zustand umgekehrt; über den Rand fließt Wärme ab und in der Mitte des Zugstabes stellt sich die größte Temperatur ein. Bis zu einer Dehnung von $\varepsilon_t = 13.75 \cdot 10^{-2}$ bzw. bis $t=55\text{s}$ ist die Temperatur in der Zugprobe nahezu gleichförmig verteilt. Die maximale Temperaturdifferenz in der Probe beträgt hier 0.045K.

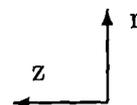
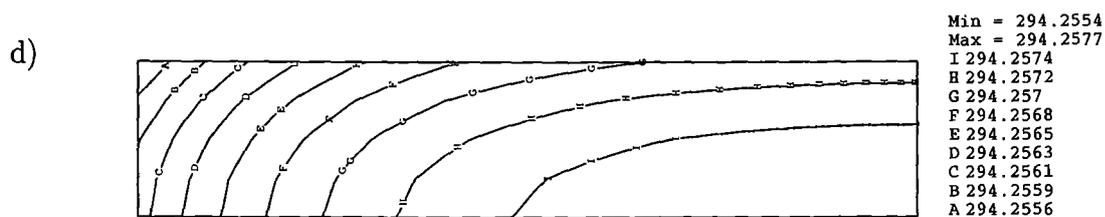
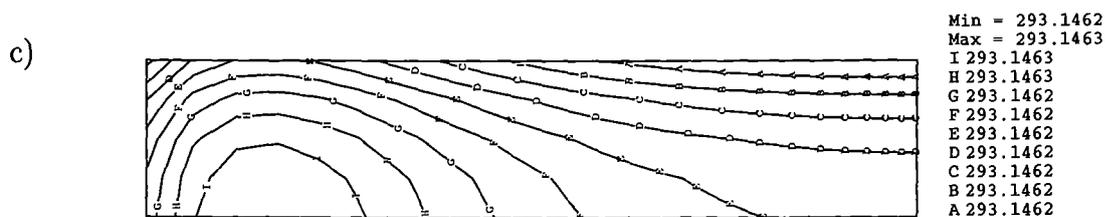
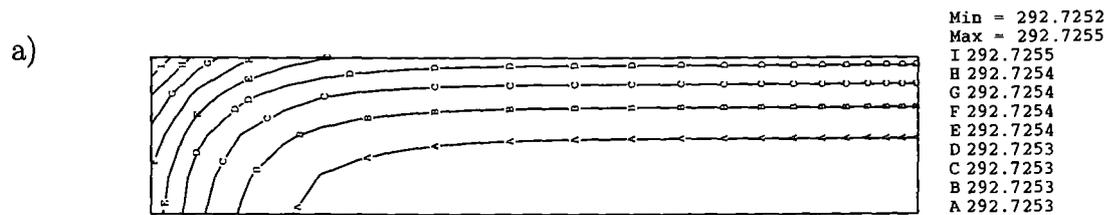


Abb. 5.10: Temperaturverteilung im Zugstab (in K):

- a) nach 0.74s; $\varepsilon_t = 1.85 \cdot 10^{-3}$ (rein elastisch), b) nach 2.08s; $\varepsilon_t = 5.2 \cdot 10^{-3}$,
c) nach 2.67s; $\varepsilon_t = 6.68 \cdot 10^{-3}$, d) nach 7.18s; $\varepsilon_t = 17.95 \cdot 10^{-3}$.

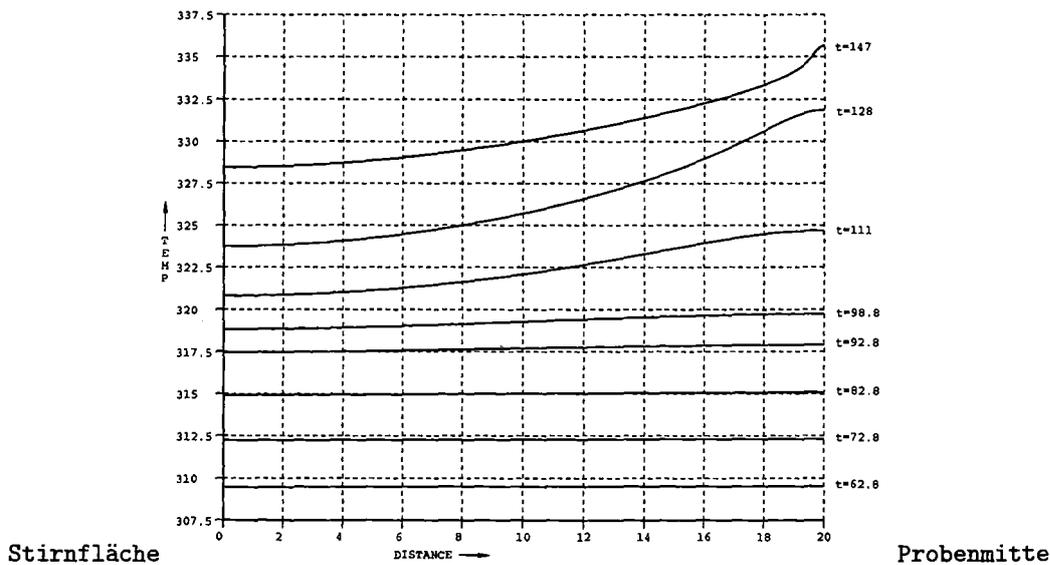


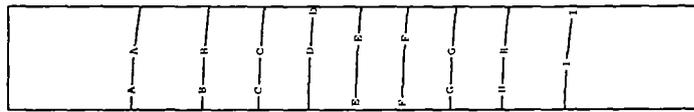
Abb. 5.11: Temperatur an der Mantelfläche des Zugstabes.

Die leicht erhöhte Temperatur in der Zugstabmitte bewirkt über die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter eine Lokalisierung der Deformation. Dies verdeutlichen u.a. die in Abbildung 5.12 gezeigte zeitliche Entwicklung der Temperaturprofile. Die maximale Temperaturdifferenz in der Zugprobe nach 96.76s bzw. einer Dehnung von $\varepsilon_t = 24.19 \cdot 10^{-2}$ ist lediglich 0.94K, während sie nach 122.3s bzw. $\varepsilon_t = 30.58 \cdot 10^{-2}$ auf 8.04K angestiegen ist.

Die im Experiment meßbare Temperatur an der Mantelfläche der Probe ist in Abbildung 5.11 über die Ausgangslänge der Probe aufgetragen. Auch hier wird die zunehmende Inhomogenität deutlich sichtbar. Die Rechnung zeigt auch, daß aufgrund der nahezu axialen Richtung des Temperaturgradienten von dem im Experiment meßbaren Temperaturverlauf an der Mantelfläche auf die Temperaturverteilung im Probekörper geschlossen werden kann. Dies verdeutlichen die in Abbildung 5.12 gezeigten Temperaturprofile. Die maximale Temperaturdifferenz in radialer Richtung ist zu keinem Zeitpunkt der Deformation größer 0.4K. In Abbildung 5.13 ist die Spannungsverteilung im Zugstab, in Abbildung 5.14 sind die Hauptspannungen im Einschnürbereich im Endzustand dargestellt. Abbildung 5.14 zeigt deutlich, daß an den Enden des Zugstabes nach der Deformation ein annähernd eindimensionaler Spannungszustand gegeben ist. In der Einschnürzone hingegen liegt ein mehrachsiger Spannungszustand vor. Bedingt durch die Drehung der Hauptspannungsrichtung im Einschnürbereich resultiert die in Abbildung 5.13 erkennbare große Schubspannung bzgl. des Koordinatensystems der Ausgangslage.

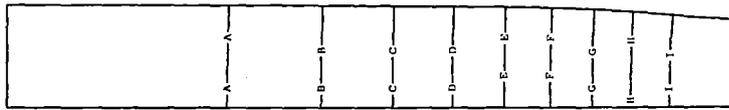
In der Zugstabmitte wird das Material in Richtung Zugstabachse hineingezogen. Dadurch

a)



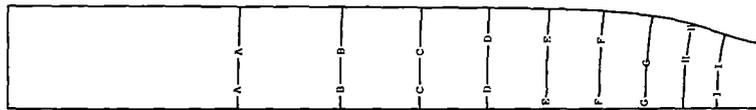
Min = 318.3164
 Max = 319.2534
 I 319.1598
 H 319.0661
 G 318.9725
 F 318.8788
 E 318.7851
 D 318.6915
 C 318.5978
 B 318.5042
 A 318.4105

b)



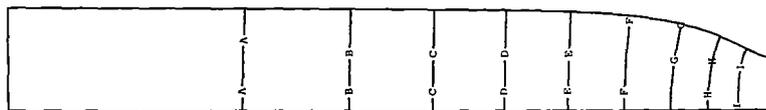
Min = 322.8036
 Max = 330.8448
 I 330.0407
 H 329.2366
 G 328.4325
 F 327.6283
 E 326.8242
 D 326.0201
 C 325.216
 B 324.4118
 A 323.6077

c)



Min = 326.847
 Max = 334.6943
 I 333.9096
 H 333.1249
 G 332.3401
 F 331.5554
 E 330.7707
 D 329.9859
 C 329.2012
 B 328.4165
 A 327.6317

d)



Min = 328.136
 Max = 335.149
 I 334.4477
 H 333.7464
 G 333.0451
 F 332.3438
 E 331.6425
 D 330.9412
 C 330.2399
 B 329.5386
 A 328.8373

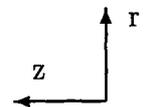
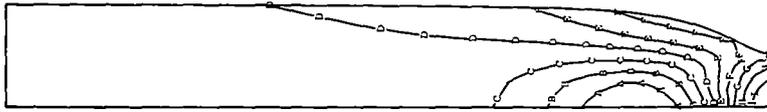


Abb. 5.12: Temperaturverteilung im Zugstab (in K):

a) nach 96.76s; $\epsilon_t = 24.19 \cdot 10^{-2}$, b) nach 122.26s; $\epsilon_t = 30.57 \cdot 10^{-2}$,
 c) nach 141.01s; $\epsilon_t = 35.25 \cdot 10^{-2}$, d) nach 147.30s; $\epsilon_t = 36.83 \cdot 10^{-2}$.

94

a)



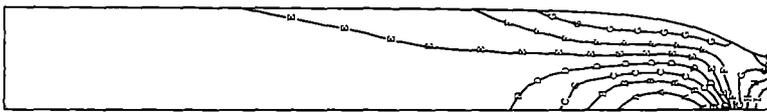
Min = -384.2682
 Max = 1216.233
 I 1056.183
 H 896.133
 G 736.0829
 F 576.0327
 E 415.9826
 D 255.9324
 C 95.88224
 B -64.16792
 A -224.2181

b)



Min = -494.2255
 Max = 515.8156
 I 414.8115
 H 313.8074
 G 212.8032
 F 111.7991
 E 10.79502
 D -90.20909
 C -191.2132
 B -292.2173
 A -393.2214

c)



Min = -487.5411
 Max = 514.754
 I 414.5245
 H 314.295
 G 214.0655
 F 113.836
 E 13.60645
 D -86.62305
 C -186.8526
 B -287.0821
 A -387.3116

d)



Min = -56.50869
 Max = 311.9157
 I 275.0732
 H 238.2308
 G 201.3884
 F 164.5459
 E 127.7035
 D 90.86105
 C 54.01861
 B 17.17618
 A -19.66626

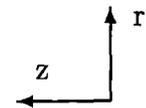


Abb. 5.13: Spannungsverteilung im Zugstab nach der Deformation (in MPa):
 a) Axialspannung, b) Radialspannung, c) Tangentialspannung, d) Schubspannung.

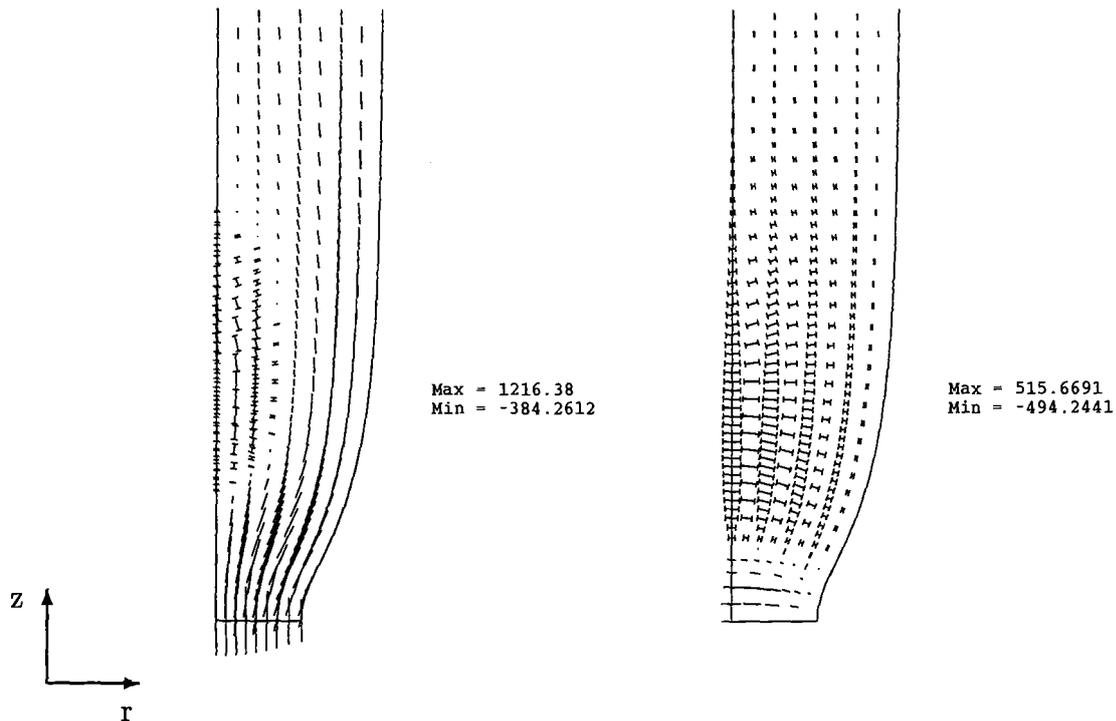


Abb. 5.14: 1. und 2. Hauptspannung nach der Deformation (in MPa):

Die Größe der Richtungslinien entspricht dem Betrag der Spannung, Druckspannung werden zusätzlich durch senkrechte Striche am Linienende gekennzeichnet.

stellt sich in der Mitte der Probe ein Spannungszustand mit großen hydrostatischen Zugspannungsanteilen ein (Abbildung 5.15). Am Beginn der Einschnürzone zeigt sich als Ausgleich ein Bereich mit zur Stabachse hin zunehmenden hydrostatischem Druck.

Das inelastische Materialverhalten wird im hier zugrunde gelegtem Materialmodell nicht durch den hydrostatischen Spannungsanteil beeinflusst. Vielmehr ist das Auftreten von inelastischen Deformationen von der Größe der v.-Mises-Norm der Differenz $S - Z$ relativ zur isotropen Verfestigung bestimmt ⁶. Die Lokalisation der inelastischen Deformation belegt auch das in Abbildung 5.15 d) gezeigte Profil der plastischen Bogenlänge s .

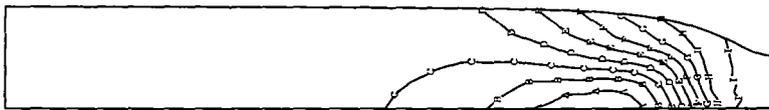
⁶Für die kleine elastische Deformationen ist $T \approx S$.

a)



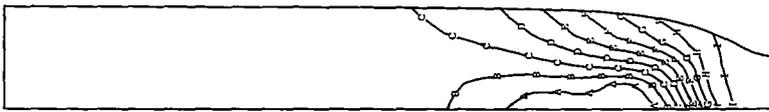
Min = -440.5079
 Max = 748.9343
 I -321.1345
 H -202.2379
 G -83.34141
 F 35.55512
 E 154.4517
 D 273.3482
 C 392.2447
 B 511.1412
 A 630.0378

b)



Min = 20.1279
 Max = 721.9789
 I 651.7938
 H 581.6087
 G 511.4236
 F 441.2385
 E 371.0534
 D 300.8683
 C 230.6832
 B 160.4981
 A 90.313

c)



Min = .463
 Max = 621
 I 559
 H 497
 G 435
 F 373
 E 311
 D 249
 C 187
 B 125
 A 62.5

d)



Min = .213
 Max = 1.77
 I 1.62
 H 1.46
 G 1.3
 F 1.15
 E .993
 D .837
 C .681
 B .525
 A .369

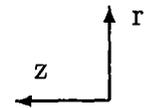


Abb. 5.15: Spannungsverteilung (in MPa) und plastische Bogenlänge im Zugstab nach der Deformation:

- a) hydrostatische Spannung b) v.-Mises-Norm des Cauchy Spannungstensors
 c) v.-Mises-Norm von $S - Z$ d) pl.Bogenlänge s .

5.3 Simulation eines Stauchversuchs

In diesem Abschnitt werden anhand der Simulation eines Stauchversuchs unterschiedliche Berechnungsmodelle verglichen. Es wird eine gekoppelte Berechnung unter Einbeziehung aller aus der freien Energie herrührenden Leistungsterme (2.163)-(2.170) (im folgenden Berechnung 1 genannt) sowie eine gekoppelte Berechnung mit der vereinfachten konstitutiven Beziehung für die dissipierte Spannungsleistung (2.171) (hier Berechnung 2 genannt) vorgestellt.

Desweiteren wird diesen gekoppelten Berechnungen das Ergebnis einer adiabaten ungekoppelten Finite Elemente Simulation (im folgenden Berechnung 3 genannt) (siehe ABAQUS USER MANUAL [15, Abschnitt 2.4.3]) gegenübergestellt, wobei hier wieder alle aus der freien Energie herrührenden Leistungsterme berücksichtigt werden. Eine adiabate ungekoppelte Berechnung liegt vor, wenn die Wärmeflüsse r_{st} und \mathbf{q} in der Wärmeleitungsgleichung (2.114) vernachlässigt werden. Dadurch reduziert sich die Wärmeleitungsgleichung auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\theta} = \frac{1}{c_\varepsilon} (w_{et} + w_d) , \quad (5.1)$$

d. h. in diesem Fall ist die Temperaturentwicklung am materiellen Punkt unabhängig von der Temperaturverteilung im Körper.

Implizite Integration dieser Differentialgleichung liefert

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta t \frac{1}{c_\varepsilon} (w_{et1} + w_{d1}) . \quad (5.2)$$

Somit kann bei einer adiabaten ungekoppelten Berechnung die Temperatur innerhalb der Materialroutine direkt nach der Berechnung von w_{et1} und w_{d1} bestimmt werden. Die Zustandsvariablenberechnung im nächsten Zeitinkrement erfolgt auf der Grundlage der durch (5.1) bestimmten Temperaturgeschwindigkeit.

In einer adiabaten ungekoppelten Berechnung herrscht Gleichgewicht, wenn die Impulsbilanz (3.15) für die Verschiebungsrandbedingungen (3.16) erfüllt ist.

Geometrie und Finite Elemente Modell

Allen Berechnungen in diesem Abschnitt liegt die gleiche Problemstellung zugrunde. Sie ist dem ABAQUS EXAMPLE PROBLEMS MANUAL [58, Abschnitt 4.2.11] entnommen. Betrachtet wird eine zylindrische Probe mit Länge $l=30\text{mm}$ und Radius $r=10\text{mm}$. Das Finite Elemente Modell, gezeigt in Abbildung 5.16, ist axialsymmetrisch und berücksichtigt aufgrund

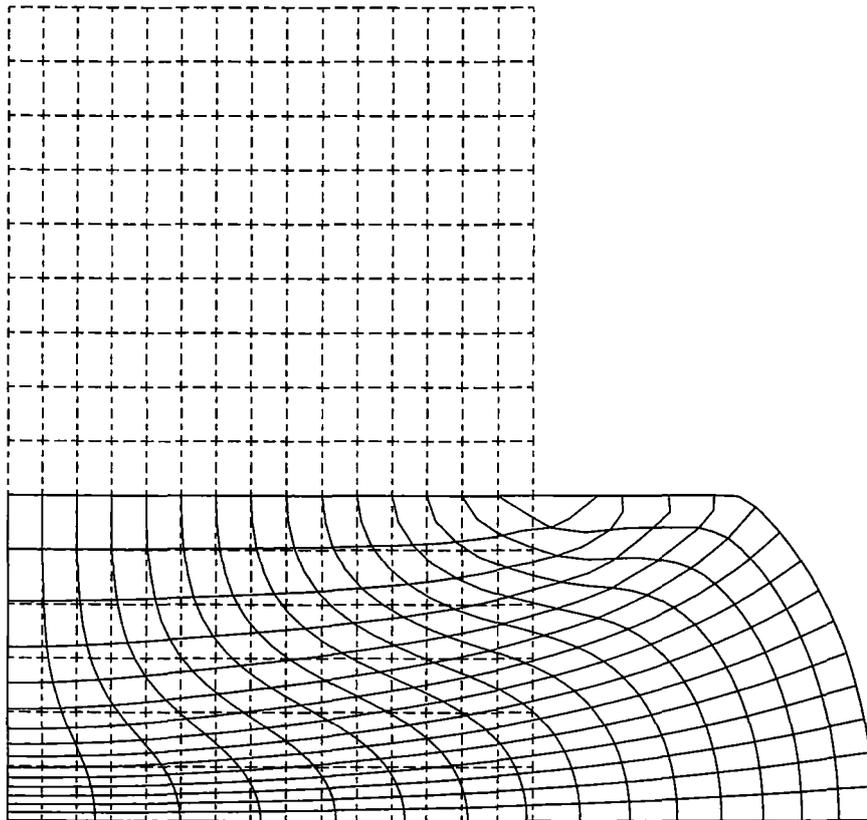


Abb. 5.16: Stauchen einer zylindrischen Probe, Geometrie und FE-Netz der unverformten und verformten Struktur: Ausgangslänge 30mm, Endlänge 12mm.

der Symmetrie des Problems nur die obere Hälfte der Probe. Die Elementierung der Probe ist regelmäßig. Das Modell besteht aus 225 Elementen des Typs CAX8RT ⁷ bzw. des Typs CAX8R ⁸.

Material

Die Probe besteht aus einem viskoplastischen Material mit den in Tabelle 5.3 angegebenen temperaturunabhängigen Materialparametern.

⁷ABAQUS-8-Knoten-Element für Axialsymmetrie bei thermomechanisch gekoppelten Berechnungen

⁸ABAQUS-8-Knoten-Element für Axialsymmetrie

Tab. 5.3: Materialparameter (temperaturunabhängig); Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl werden innerhalb der UMAT-Subroutine in die Laméschen Konstanten umgerechnet.

ρ	$7.833 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	b	45
c_ϵ	586.0 J/(kgK)	c	2500 MPa
K	$52.0 \cdot \text{W}/(\text{mK})$	Y	700 MPa
E	200000 MPa	β	0.5
ν	0.3	γ	600 MPa
α	10^{-5} 1/K	φ	1
θ_R	293 K	π	$0 \text{ MPa}^{1-\omega} \text{ s}^{-1}$
η	$464.159 \text{ MPa s}^{1/m}$	ω	1
m	3	p	$0 \text{ MPa}^{1-w} \text{ s}^{-1}$
		w	1

Randbedingungen und Belastung

Als geometrische Randbedingung in axialer Richtung wird die Querschnittsfläche in der Mitte der Probe (untere Seite im Finite Elemente Modell) festgehalten. Aufgrund der Axialsymmetrie ist eine Verschiebung von Punkten auf der Probenachse in radialer Richtung ausgeschlossen.

Die Probe wird von einer starren Platte mit einer konstanten Geschwindigkeit von 4.5mm/s ($\epsilon_t = \Delta l/l = -1.5 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$) in axialer Richtung zusammengedrückt. Der Kontakt zwischen starrer Platte und Probe ist ideal rau, d. h. es findet keine Relativbewegung zwischen den Kontaktflächen der Körper statt. Für alle restlichen materiellen Punkte der Probe werden keine einschränkenden Randbedingungen formuliert.

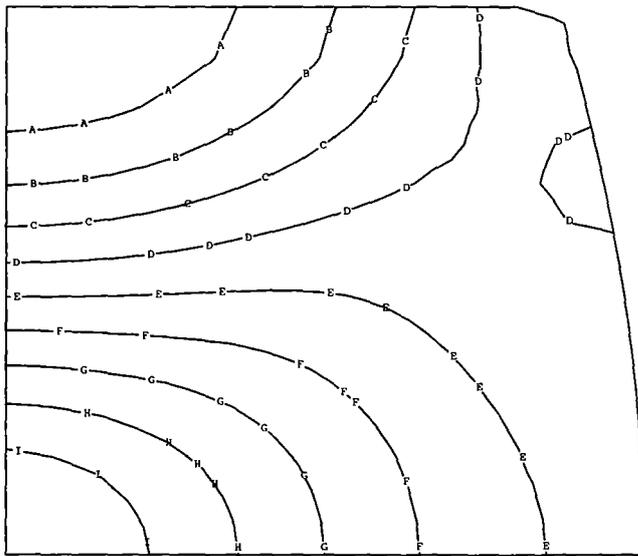
Die Ausgangstemperatur beträgt 293K. In der thermomechanisch gekoppelten Berechnung wird der Probekörper vollkommen adiabat modelliert, d. h. es findet kein Wärmefluß über die Außenfläche der Probe statt. Dies ermöglicht einen Vergleich zwischen thermomechanisch gekoppelter und adiabat ungekoppelter Berechnung ohne einen Einfluß der Umgebungstemperatur.

Ergebnis und Diskussion

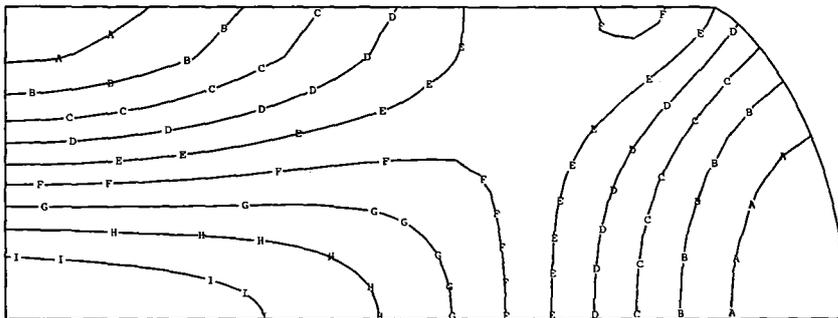
Abbildung 5.16 zeigt das Finite Elemente Netz vor und nach der Deformation, wobei die Form der deformierten Struktur bei allen drei Berechnungen nahezu identisch ist. Die Verformungsbehinderung an der Stirnfläche durch den zugrunde gelegten rauhen Kontakt bestimmt wesentlich das Deformationsverhalten der betrachteten Struktur. An der Stirnfläche bedingt sie in der Nähe der Probenachse eine weitgehend undeformierte Zone. Ebenso erkennt man in der Mitte der Probe (Modellunterseite) nach außen hin einen Bereich, in der die Elemente zwar stark gestaucht sind, jedoch ihre Gestalt beibehalten. Das deformierte Netz läßt weiterhin einen stärker deformierten Bereich von der Probenmitte zur Oberkante des Probenzylinders erkennen.

Ein Vergleich der in den Abbildungen 5.17 und 5.18 dargestellten Profile läßt zunächst erkennen, daß Berechnung 1 und Berechnung 2 fast identische Ergebnisse liefern. Eine Beschreibung der dissipierten Leistungsterme durch die vereinfachte konstitutive Beziehung mit $\eta_d = 0.95$ ist somit in der hier betrachteten Problemstellung möglich. In allen Fällen ist eine Zone deutlich erhöhter Temperatur von der Probenmitte zur oberen Kante erkennbar (Schmiedekreuz).

Aufgrund der Temperturunabhängigkeit der Materialparameter hat die thermische Belastung lediglich über die thermische Ausdehnung einen Einfluß auf die Entwicklung der mechanischen Zustandsgrößen. Dies ist deutlich an der weitestgehenden Übereinstimmung der Verteilungen der plastischen Bogenlänge in Abbildung 5.20 zu erkennen. Auch die in Abbildung 5.21 über die Zeit aufgetragene Druckkraft ist in allen Berechnungen fast identisch. Die Unebenheiten im Verlauf der Kraft sind durch den Kontakt bedingt. Das Fehlen der Wärmeleitung in der adiabaten ungekoppelten Berechnung ist jedoch in Abbildung 5.19 zu erkennen. Der fehlende Temperatenausgleich zwischen den einzelnen Bereichen des Körpers macht sich deutlich bemerkbar. Zonen geringer plastischer Verformung weisen eine sehr niedrige, Zonen starker plastischer Verformung eine hohe Temperatur auf.

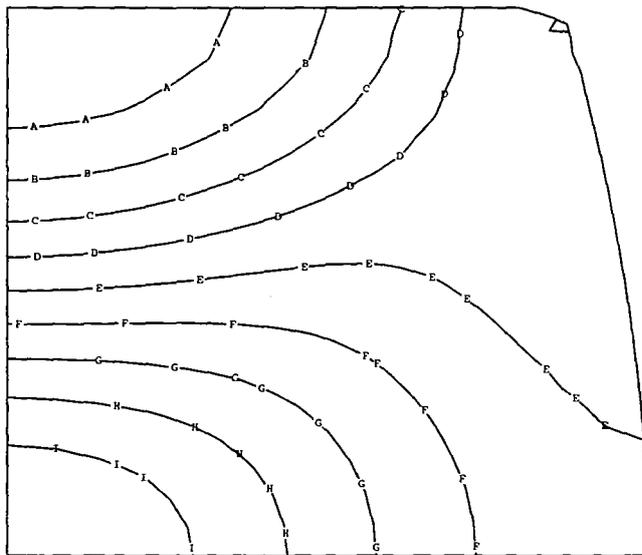


Max = 416
 Min = 340
 I 408
 H 401
 G 393
 F 385
 E 378
 D 370
 C 363
 B 355
 A 348

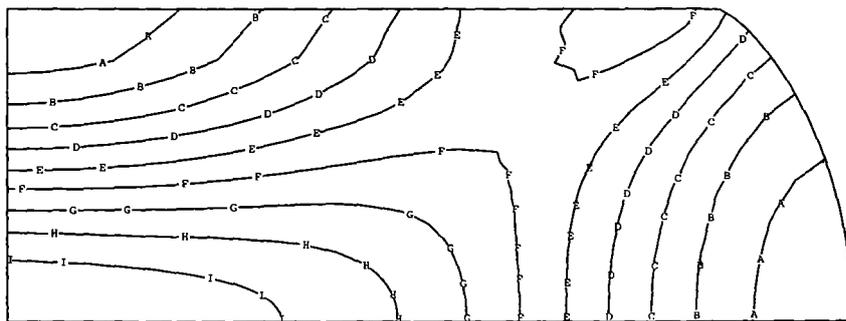


Max = 553
 Min = 485
 I 546
 H 539
 G 532
 F 526
 E 519
 D 512
 C 505
 B 499
 A 492

Abb. 5.17: Temperaturverteilung in der Probe (in K) bei gekoppelter Berechnung unter Einbeziehung aller aus der freien Energie herrührenden Leistungsterme;
 oben: nach 2s bzw. $\varepsilon_t = -3.0 \cdot 10^{-1}$
 unten: nach 4s bzw. $\varepsilon_t = -6.0 \cdot 10^{-1}$.

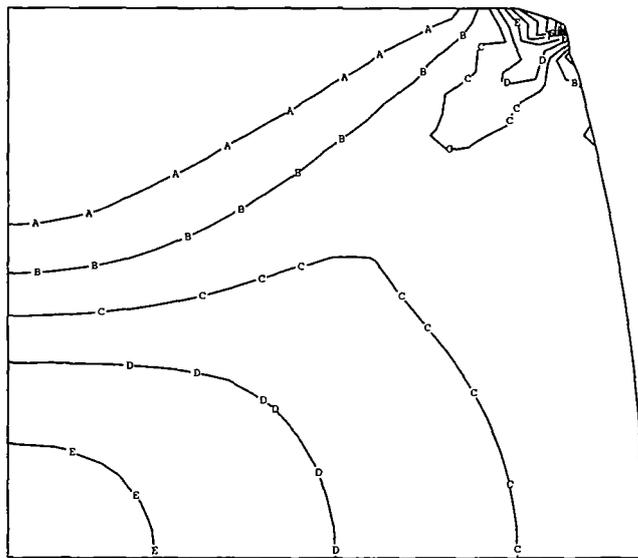


Max = 408
 Min = 338
 I 401
 H 394
 G 387
 F 380
 E 373
 D 366
 C 359
 B 352
 A 345

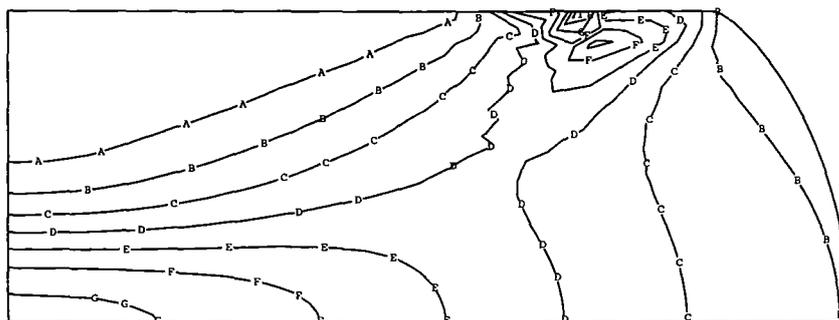


Max = 555
 Min = 487
 I 549
 H 542
 G 535
 F 528
 E 521
 D 514
 C 507
 B 501
 A 494

Abb. 5.18: Temperaturverteilung in der Probe (in K) bei gekoppelter Berechnung auf Grundlage der vereinfachten konstitutiven Beziehung mit $\eta_d = 0.95$ für die dissipierte Spannungsleistung;
 oben: nach 2s bzw. $\varepsilon_t = -3.0 \cdot 10^{-1}$
 unten: nach 4s bzw. $\varepsilon_t = -6.0 \cdot 10^{-1}$.



Max = 603
 Min = 288
 I 572
 H 540
 G 509
 F 477
 E 446
 D 414
 C 382
 B 351
 A 319



Max = 978
 Min = 296
 I 909
 H 841
 G 773
 F 705
 E 637
 D 568
 C 500
 B 432
 A 364

Abb. 5.19: Temperaturverteilung in der Probe (in K) bei adiabatisch ungekoppelter Berechnung;

oben: nach 2s bzw. $\varepsilon_t = -3.0 \cdot 10^{-1}$

unten: nach 4s bzw. $\varepsilon_t = -6.0 \cdot 10^{-1}$.

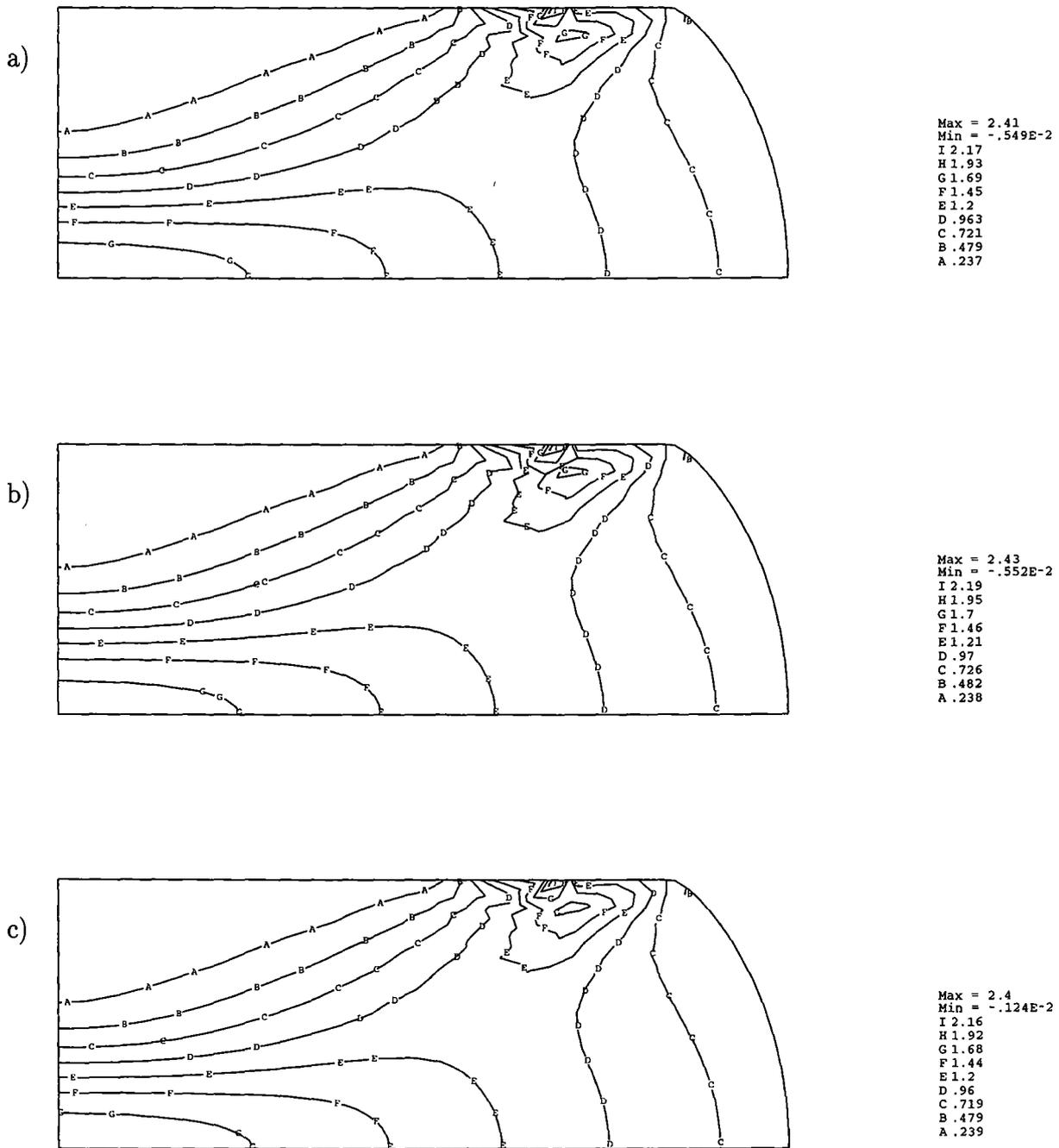


Abb. 5.20: Verteilung der plastischen Bogenlänge s
 a): für Berechnung 1, b): für Berechnung 2, c): für Berechnung 3.

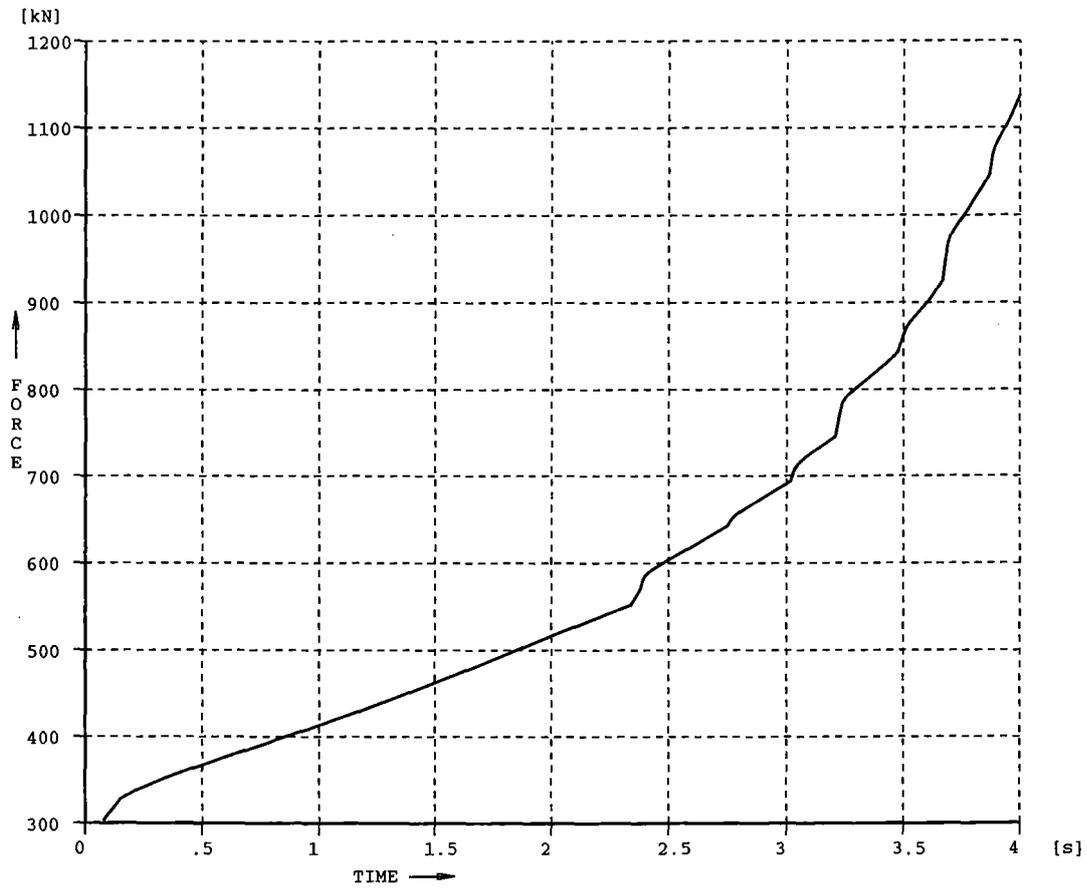


Abb. 5.21: Kraft-Zeitverlauf im weggesteuerten Stauchversuch.

6 Abschließende Bemerkungen

6.1 Integrationsverfahren bei Elastizität

Aufgrund seiner weiten Verbreitung wurde zur Implementierung des hier vorgestellten Materialmodells das Finite Elemente Programm ABAQUS ausgewählt. In ABAQUS kann eine konsistente Linearisierung der Materialroutine und somit die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens im Falle großer Deformationen nur durch die Verwendung des HUGHES-WINGET-Algorithmus gesichert werden. Dieser, lediglich einen schwachen Grad an inkrementeller Objektivität gewährleistende Algorithmus (siehe WEBER [17], [53], REED & ATLURI [54], [59]), setzt Materialgleichungen formuliert mit Jaumann-Ableitungen voraus. Insbesondere ist ein Hypoelastizitätsgesetz formuliert mit Jaumann-Ableitung vorzugeben.

Integrationsverfahren, die auf einer mit Oldroyd-Ableitungen formulierten Materialtheorie basieren, sind in SIMO & ORTIZ [23], SIMO & MIEHE [56], SIMO [60], AURICCHIO & TAYLOR [61] und LÜHRS, HARTMANN & HAUPT [25] vorgestellt. Bei diesen Verfahren werden im Gegensatz zum HUGHES-WINGET-Algorithmus keine Annahmen über den Verlauf der unabhängigen Variablen im Zeitinkrement benötigt. Die Transformation der tensorwertigen Variablen erfolgt mit dem inkrementellen Deformationsgradient und der Almansi Verzerrungstensor läßt sich explizit aus dem Deformationsgradienten berechnen.

Trotz dieser Vorzüge wurde hier das HUGHES-WINGET-Verfahren angewandt, um die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens in ABAQUS zu gewährleisten. Abschließend sei jedoch noch kurz die Vorgehensweise bei Verwendung eines auf Oldroyd-Ableitungen basierenden Integrationsverfahrens skizziert. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit dieser Verfahren wird hier ein Modell ohne isotrope Verfestigung betrachtet.

Das zu integrierende Anfangswertproblem ist durch die bzgl. $R_{t+\Delta t}^i$ formulierten konstitutiven Gleichungen (2.154)₁, (2.155)₁, (2.156)-(2.159) zusammen mit dem inkrementellen Deformationsgradienten F_t , dem Temperaturinkrement $\Delta\theta$ und dem Zeitinkrement Δt sowie den Anfangsbedingungen tS_0 , ${}^tA_{p_0}$, tZ_0 gegeben ¹. Wird analog zur im Abschnitt 4.2.7 beschriebenen Vorgehensweise ein Operator-Split durchgeführt, erhält man nach einer Rücktransformation der konstitutiven Gleichungen nach R_t und deren impliziter Integration mit anschließender

¹Der links hochgestellte Index t zeigt an, daß die Anfangsbedingungen bzgl. R_t vorliegen.

Vortransformation als Lösung des Teilproblems 1

$${}^1\mathbf{S}_1 = \mathbf{C} \left[\mathbf{A} - {}^1\mathbf{A}_{p_1} - \alpha_1 (\theta - \theta_R) \mathbf{1} \right] \quad (6.1)$$

$${}^1\mathbf{A}_{p_1} = \mathbf{F}_t^{T-1} {}^t\mathbf{A}_{p_0} \mathbf{F}_t^{-1} \quad (6.2)$$

$${}^1\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \theta} \Big|_1 \Delta \theta} \mathbf{F}_t {}^t\mathbf{Z}_0 \mathbf{F}_t^T. \quad (6.3)$$

Implizite Integration des Teilproblems 2 mit den durch die Lösung des Teilproblems 1 gegebenen Anfangswerten führt nach Einsetzen des plastischen Verzerrungstensors ${}^2\mathbf{A}_{p_1}$ in die Bestimmungsgleichung von ${}^2\mathbf{S}_1$ auf die Beziehungen (4.131)-(4.142).

Somit ergeben sich bei Verwendung eines auf Oldroyd–Ableitungen basierenden Integrationsverfahrens nur Unterschiede bei der Lösung des Teilproblems 1. Hier vereinfacht sich die Berechnung erheblich, da keine Inversen von Tensoren 4. Stufe berechnet werden müssen.

6.2 Zusammenfassung

Es verbleibt an dieser Stelle die Ergebnisse dieser Arbeit nochmals kurz zusammenzufassen. In dieser Arbeit wurden thermodynamisch konsistente Materialmodelle der Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit nichtlinearer isotroper und kinematischer Verfestigung vorgestellt. Für eine vereinfachte Version dieser Modelle wurde eine Materialroutine entwickelt. Die Anwendung eines Operator–Split–Verfahrens ermöglichte eine sehr effiziente numerische Integration der Materialgleichungen. Ferner sei hervorgehoben, daß durch eine konsistente Linearisierung der Materialroutine die quadratische Konvergenz der Gleichgewichtsiteration gesichert wurde. Diese Materialroutine wurde als UMAT–Subroutine in das Finite–Elemente–Programm ABAQUS implementiert.

Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialroutine an einem einzelnen Element rechtfertigt die gewählte Integration der Materialgleichungen. Den Abschluß dieser Arbeit bildet die numerische Berechnung zweier Strukturen. Als erstes wurde der Einschnürvorgang eines zylindrischen Zugstabes betrachtet. Die thermomechanisch gekoppelte Berechnung wurde ohne thermische oder geometrische Imperfektion durchgeführt. Der Einschnürvorgang ist eine Folge der dissipativen Aufheizung und der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter. Als zweites Beispiel wurde die Simulation eines Stauchversuchs vorgestellt. Hier wurden unterschiedliche Ansätze für die Selbstaufheizung des Materials durch Dissipation betrachtet.

Literaturverzeichnis

- [1] HAUPT, P. and CH. TSAKMAKIS: *On the application of dual variables in continuum mechanics*. Continuum Mech. Thermodyn., 1, 165–196, (1989).
- [2] SVENDSEN, B. and CH. TSAKMAKIS: *A local differential geometric formulation of stress–strain pairs and time derivatives*. Arch. Mech., 46, 49–91, (1994).
- [3] HAUPT, P. and CH. TSAKMAKIS: *Stress tensors associated with deformation tensors via duality*. Arch. Mech., 48, 347–384, (1996).
- [4] GREEN, A.E. and P.M. NAGHDI: *Some remarks on elastic–plastic deformations at finite strains*. Int. J. Eng. Sci., 9, 1219–1229, (1971).
- [5] LUBLINER, J.: *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York, (1990).
- [6] MAUGIN, G.A.: *The thermodynamics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, New York etc., (1992).
- [7] COLEMAN, B.D. and W. NOLL: *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 13, 167–178, (1963).
- [8] COLEMAN, B.D. and M.E. GURTIN: *Thermodynamics with internal state variables*. J. Chem. Phys., 47, 597–613, (1967).
- [9] KRATOCHVIL, J. and O.W. DILLON: *Thermodynamics of elasto–plastic materials as a theory with internal state variables*. J. Appl. Phys., 40, 597–613, (1969).
- [10] TSAKMAKIS, CH.: *Kinematic hardening rules in finite plasticity, part 1: A constitutive approach*. Continuum Mech. Thermodyn., (1996).
- [11] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS theory, version 5.2*.
- [12] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method*. Prentice–Hall International, (1987).

- [13] ZIENKIEWIC, O.C.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, 3. edition, (1977).
- [14] SIMO, J.C. and R.L. TAYLOR: *Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48, 101–118, (1985).
- [15] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS user's manual version, 5.2*.
- [16] RUBINSTEIN, R. and S.N. ATLURI: *Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analysis*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 36, 277–290, (1983).
- [17] WEBER, G.G.: *Computational Procedures for a new Class of Finite Deformation Elastic-Plastic Constitutive Equations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1988).
- [18] HUGHES, T.J.R. and J. WINGET: *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations in large-deformation analysis*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1862–1867, (1980).
- [19] HUGHES, T.J.R.: *Numerical implementation of constitutive models: Rate-independent deviatoric plasticity*. In S., NEMAT-NASSER, ASARO R.J., and HEGEMEIER G.A. (editors): *Theoretical Foundations for Large Scale Computation of Nonlinear Material Behaviour*. Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht, (1984).
- [20] NAGTEGAAL, J.C. and F.E. VELDPAUS: *On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model*. In PITTMAN, J.F.T., O.C. ZIENKIEWICZ, R.D. WOOD, and J.M. ALEXANDER (editors): *Numerical Analysis of Forming Processes*. John Wiley & Sons Ltd., (1984).
- [21] PINSKY, P. M., M. ORTIZ, and R. L. TAYLOR: *Operator split methods in the numerical solution of the finite deformation elastoplastic dynamic problem*. *Comp. & Structures*, 17, 345–359, (1983).
- [22] ORTIZ, M., P. M. PINSKY, and R. L. TAYLOR: *Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 39, 137–157, (1983).
- [23] SIMO, J.C. and M. ORTIZ: *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49, 221–245, (1985).

- [24] HARTMANN, S.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, (1993).
- [25] LÜHRS, G., S. HARTMANN, and P. HAUPT: *On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 144, 1–21, (1997).
- [26] PRESS, W. H., B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, and W. T. VETTERLING: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, (1986).
- [27] BOER, R. DE: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1982).
- [28] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wissenschaftsverlag, (1989).
- [29] CHABOCHE, J.-L.: *Cyclic viscoplastic constitutive equations, part 1: A thermodynamically consistent formulation*. *Transaction of the ASME, J. Appl. Mech.*, 60, 813–821, (1993).
- [30] HENRICI, P.: *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, INC., (1968). 1. korr. Nachdruck.
- [31] KAMLAH, M.: *Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik*. Dissertation, Report 3/1994, Universität Gesamthochschule Kassel, (1994).
- [32] TRUESDELL, C. and W. NOLL: *The non-linear field theories of mechanics*. In S., FLÜGGE (editor): *Handbuch der Physik*, volume III/3. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1965).
- [33] HAUPT, P.: *Foundation of continuum mechanics*. In HUTTER, K. (editor): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses And Lectures No. 337. Springer-Verlag, Wien, New York, (1993).
- [34] TSAKMAKIS, CH.: *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, (1987).
- [35] HAUPT, P. and CH. TSAKMAKIS: *On the principle of virtual work and rate independent plasticity*. *Arch. Mech.*, 40, 403–414, (1988).
- [36] LEIGH, D.C.: *Nonlinear Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, INC., (1968).

- [37] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, INC., 1. edition, (1981).
- [38] JANSOHN, W., B. RITTER, and CH. TSAKMAKIS: *Theory and numerical integration of coupled finite deformation thermoplasticity and -viscoplasticity*. wird veröffentlicht.
- [39] TSAKMAKIS, CH.: *Remarks on Ill'iusin's postulate*. Arch. Mech., 49, 677–695, (1997).
- [40] ARMSTRONG, P.J. and C.O. FREDERICK: *A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect*. General Electricity Generating Board, Report No. RD/B/N/731, (1966).
- [41] AKTAA, J.: *Kontinuumsmechanische Modellierung der zeitabhängigen Schädigung bei hohen Temperaturen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1994).
- [42] SCHWERTEL, J.: *Modellierung des einachsigen mechanischen Verhaltens von Werkstoffen durch viskoplastische Stoffmodelle*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1992).
- [43] TSAKMAKIS, CH.: *Ansätze für die freie Energie bei Materialmodellen mit isotroper Verfestigung*. unveröffentlichtes Manuskript, (1995).
- [44] BROWN, S.B., H.K. KWON, and L. ANAND: *An internal variable constitutive model for hot working of metals*. Int. J. Plasticity, 5, 95–130, (1989).
- [45] LEHMANN, TH. and U. BLIX: *On the coupled thermo-mechanical process in the necking problem*. Int. J. Plasticity, 40, 175–188, (1985).
- [46] HÄUSLER, O. und CH. TSAKMAKIS: *Torsion eines Kreiszyinders bei großen Deformationen und inkompressiblem Materialverhalten*. FZKA-Bericht 5598, Forschungszentrum Karlsruhe, (1995).
- [47] TSAKMAKIS, CH.: *Kinematic hardening rules in finite plasticity, part 2: Some examples*. Continuum Mech. Thermodyn., 8, 233–246, (1996).
- [48] NOWACKI, W.: *Thermoelasticity*. Pergamon Press, (1986).
- [49] ENGELN-MÜLLGES, G.: *Numerik-Algorithmen mit Fortran 77 Programmen*. BI-Wissenschaftsverlag, 7. Auflage, (1993).
- [50] TÖRNIG, W. und P. SPELLUCCI: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, Band 2. Springer-Verlag, Berlin, etc., 2. Auflage, (1990).

- [51] HAIRER, E., S.P. NØRSETT, and G. WANNER: *Solving Ordinary Differential Equations 2*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, etc., first edition, (1991).
- [52] LAMBERT, J.D.: *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Ltd., (1983). korr. Nachdruck.
- [53] WEBER, G.G., A.M. LUSH, A. ZAVALIANGOS, and L. ANAND: *An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent and rate-dependent elastic-plastic constitutive equations*. *Int. J. Plasticity*, 6, 701–704, (1990).
- [54] REED, K.W. and S.N. ATLURI: *Analysis of large quasistatic deformations of inelastic bodies by a new hybrid-stress finite element algorithm*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 39, 245–295, (1983).
- [55] HARTMANN, S., G. LÜHRS, and P. HAUPT: *An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40, 991–1013, (1997).
- [56] SIMO, J.C. and CH. MIEHE: *Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 98, 41–104, (1992).
- [57] MIEHE, C.: *Kanonische Modelle Multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*. Habilitation, Universität Hannover, (1992).
- [58] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS example problems manual, version 5.2*.
- [59] REED, K.W. and S.N. ATLURI: *Constitutive modelling and computational implementation for finite strain plasticity*. *Int. J. Plasticity*, 1, 63–87, (1985).
- [60] SIMO, J.C.: *Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 99, 61–112, (1992).
- [61] AURICCHIO, F. and R. L. TAYLOR: *Two material models for cyclic plasticity: Nonlinear kinematic hardening and generalized plasticity*. *Int. J. Plasticity*, 11, 65–98, (1995).
- [62] REDDY, J.N.: *An Introduction To The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, (1984).

- [63] LUTHER, W., K. NIEDERDRENK, F. REUTTER und H. YSERENTANT: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1987).
- [64] GEAR, C.W.: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1971).

A Transformationstabellen

A.1 Familie 1: Verzerrungstensoren

R_0

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ \mathbf{E}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p) \\ \mathbf{E}_p &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{1}) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{et}} + \mathbf{E}_p \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1}() \mathbf{F}^{-1}}$$

R_τ

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \\ \mathbf{A}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{T-1} \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{-1}) \\ \mathbf{A}_p &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{T-1} \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{-1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\text{et}} + \mathbf{A}_p \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_p^{T-1}() \mathbf{F}_p^{-1} \downarrow$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{T-1}() \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{-1} \uparrow$$

\hat{R}_τ

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^T \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p^{-1}) \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^T \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}} - \mathbf{1}) \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_p &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p^{-1}) \\ \hat{\mathbf{\Gamma}} &= \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\text{et}} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \end{aligned}$$

A.2 Familie 1: Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \mathbf{C}_{et} = \hat{\mathbf{F}}_{et}^T \hat{\mathbf{F}}_{et}, \mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p,$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \mathbf{L}_{et} = \dot{\hat{\mathbf{F}}}_{et} \hat{\mathbf{F}}_{et}^{-1}, \mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1},$$

$()^\cdot$: bzgl. \mathbf{R}_0

$()^\Delta = ()^\cdot + \mathbf{L}_p^T () + () \mathbf{L}_p$: bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_\tau$

$()^\Delta = ()^\cdot + \mathbf{L}^T () + () \mathbf{L}$: bzgl. \mathbf{R}_τ

$\boxed{\mathbf{R}_0}$		$\boxed{\mathbf{R}_\tau}$
$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \\ \dot{\mathbf{E}}_{et} &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}_p) \\ \dot{\mathbf{E}}_p &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_p \\ \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_{et} + \dot{\mathbf{E}}_p \end{aligned}$	$\xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1}() \mathbf{F}^{-1}}$	$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} \\ &= \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_{et} &= \dot{\mathbf{A}}_{et} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_{et} + \mathbf{A}_{et} \mathbf{L} \\ \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p &= \dot{\mathbf{A}}_p + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p \mathbf{L} \\ \overset{\Delta}{\mathbf{A}} &= \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_{et} + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \end{aligned}$
$\downarrow \mathbf{F}_p^{T-1}() \mathbf{F}_p^{-1}$		$\uparrow \hat{\mathbf{F}}_{et}^{T-1}() \hat{\mathbf{F}}_{et}^{-1}$
$\boxed{\hat{\mathbf{R}}_\tau}$		$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}} &= \dot{\hat{\mathbf{I}}} + \mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{I}} \mathbf{L}_p \\ \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}}_{et} &= \dot{\hat{\mathbf{I}}}_{et} + \mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{I}}_{et} + \hat{\mathbf{I}}_{et} \mathbf{L}_p \\ \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}}_p &= \dot{\hat{\mathbf{I}}}_p + \mathbf{L}_p^T \hat{\mathbf{I}}_p + \hat{\mathbf{I}}_p \mathbf{L}_p \\ &= \mathbf{D}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T) \\ \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}} &= \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}}_{et} + \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{I}}}_p \end{aligned}$

A.3 Familie 2: Verzerrungstensoren

 $\boxed{R_0}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{\text{T}^{-1}} - \mathbf{1}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{\text{T}^{-1}} - \mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_p^{\text{T}^{-1}}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_p^{\text{T}^{-1}} - \mathbf{1}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{et}} + \boldsymbol{\varepsilon}_p\end{aligned}$$

 $\boxed{R_\tau}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}\mathbf{F}^{\text{T}}) \\ \boldsymbol{\alpha}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{\text{T}}) \\ \boldsymbol{\alpha}_p &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{F}^{\text{T}}) \\ \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}_{\text{et}} + \boldsymbol{\alpha}_p\end{aligned}$$

 $\xrightarrow{\mathbf{F}()\mathbf{F}^{\text{T}}}$
 $\mathbf{F}_p()\mathbf{F}_p^{\text{T}}$

 $\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}()\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{\text{T}}$
 $\boxed{\hat{R}_\tau}$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\gamma}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{\text{T}^{-1}} - \mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^{\text{T}}) \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^{\text{T}^{-1}} - \mathbf{1}) \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^{\text{T}}) \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}} &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p\end{aligned}$$

A.4 Familie 2: Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren

$()^\cdot$: bzgl. R_0

$()^\Delta = ()^\cdot - L_p() - ()L_p^T$: bzgl. \hat{R}_r

$()^\Delta = ()^\cdot - L() - ()L^T$: bzgl. R_r

R_0		R_r
$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1})^\cdot$ $\dot{\mathbf{e}}_{\text{et}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1})^\cdot$ $\dot{\mathbf{e}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_p^{-1})^\cdot$ $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}_{\text{et}} + \dot{\mathbf{e}}_p$	$\xrightarrow{\mathbf{F}() \mathbf{F}^T}$	$\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\cdot - \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{L}^T$ $= -\mathbf{D} = -\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{et}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{et}}^\cdot - \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{et}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{et}} \mathbf{L}^T$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p^\cdot - \mathbf{L} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p \mathbf{L}^T$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{et}} + \hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p$

$$\mathbf{F}_p() \mathbf{F}_p^T \downarrow$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}() \hat{\mathbf{F}}_{\text{et}}^T \uparrow$$

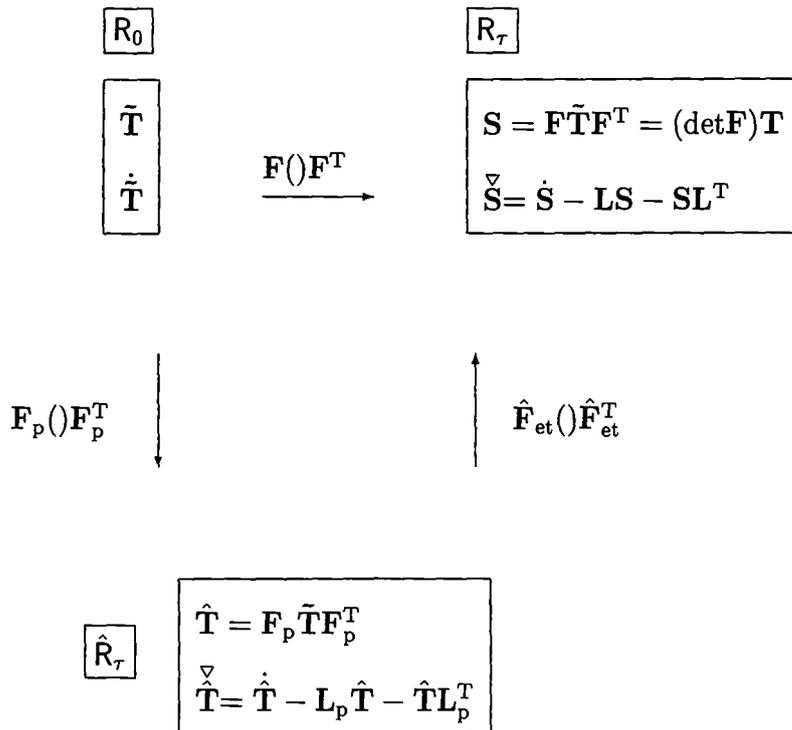
\hat{R}_r	$\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^\cdot - \mathbf{L}_p \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \hat{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{L}_p^T$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}}^\cdot - \mathbf{L}_p \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} \mathbf{L}_p^T$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p^\cdot - \mathbf{L}_p \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \mathbf{L}_p^T$ $= -\mathbf{D}_p = -\frac{1}{2}(\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T)$ $\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{et}} + \hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p$
-------------	---

A.5 Familie 1: Spannungs- und Spannungsgeschwindigkeitstensoren

$()^\cdot$: bzgl. R_0

$()^\nabla = ()^\cdot - L_p() - ()L_p^T$: bzgl. \hat{R}_τ

$()^\nabla = ()^\cdot - L() - ()L^T$: bzgl. R_τ

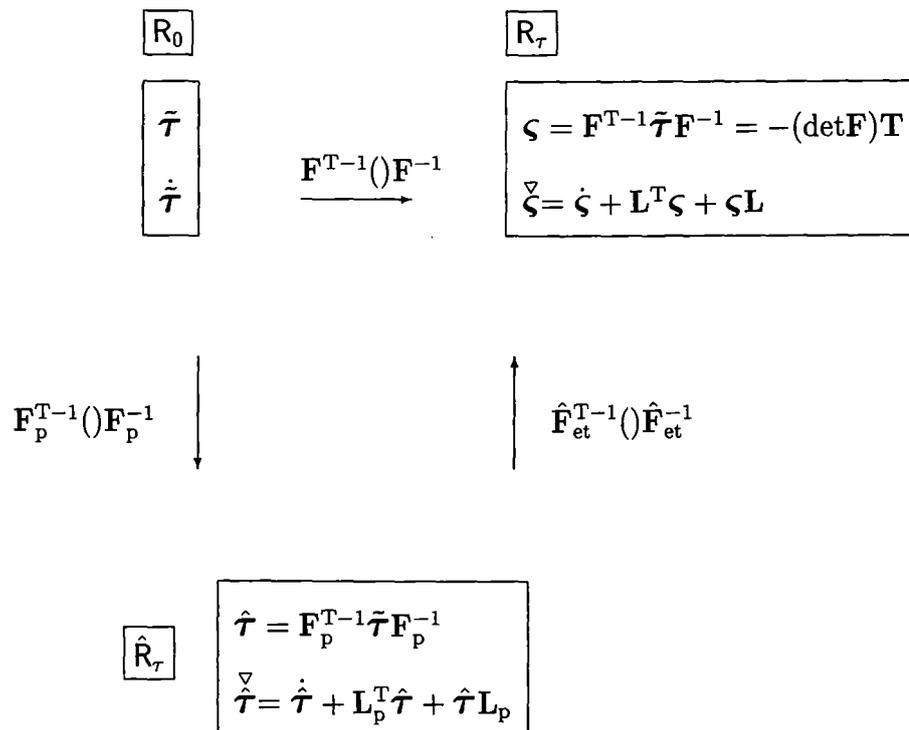


A.6 Familie 2: Spannungs- und Spannungsgeschwindigkeitstensoren

$()'$: bzgl. R_0

$()^\nabla = ()' + L_p^T() + ()L_p$: bzgl. \hat{R}_τ

$()^\nabla = ()' + L^T() + ()L$: bzgl. R_τ



B Grundgleichungen der Finite Elemente Methode

Die Finite Elemente Interpolationen des Ortes, der Verschiebung, der Temperatur und der Testfunktionen χ und χ sind durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_a(\mathbf{r})x_a \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_a(\mathbf{r})u_a \quad (\text{B.2})$$

$$\chi = \mathbf{N}_b(\mathbf{r})\chi_b \quad (\text{B.3})$$

$$\theta = M_\alpha(\mathbf{r})\theta_\alpha \quad (\text{B.4})$$

$$\chi = M_\beta(\mathbf{r})\eta_\beta \quad (\text{B.5})$$

gegeben, wobei hier und im folgenden für die Indizes

$$a, b, c, d = 1, \dots, n \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m \quad (\text{B.6})$$

gilt. In (B.1)-(B.6) ist n gleich der Anzahl der Verschiebungs- und m gleich der Anzahl der Temperaturfreiheitsgrade des Finite Elemente Modells, \mathbf{r} ist der Ortsvektor im Einheitsselement und $x_a, u_a, \chi_a, \theta_\beta, \eta_\beta$ repräsentieren jeweils die diskreten Knotenkoordinaten, -verschiebungen etc.. Weiterhin ist \mathbf{N}_a der Vektor der Formfunktionen zur Interpolation des Ortes, M_α der Vektor der Formfunktionen zur Interpolation der Temperatur. Zur Beschreibung des Ortes und der Verschiebung wurde dieselbe Formfunktion angewandt, wodurch eine isoparametrische Elementformulierung gegeben ist (HUGHES [12, S.109 ff.]). Da die Testfunktionen χ bzw. χ denselben Differenzierbarkeitsanforderung genügen wie die Verschiebung \mathbf{u} bzw. die Temperatur θ ist sichergestellt, daß die Interpolationen (B.3) und (B.5) zulässig sind (REDDY [62]).

Mit den Interpolationen (B.1)-(B.5) erhält man weiterhin die Beziehungen

$$\text{grad}\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{N}_a}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{r}} \right)^{-1} \chi_a = \frac{\partial\mathbf{N}_a}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial\mathbf{N}_b x_b}{\partial\mathbf{r}} \right)^{-1} \chi_a = \boldsymbol{\beta}_a(\mathbf{r}) \chi_a \quad (\text{B.7})$$

$$\text{grad}\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial M_\alpha}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{r}} \right)^{-1} \eta_\alpha = \frac{\partial M_\alpha}{\partial\mathbf{r}} \left(\frac{\partial\mathbf{N}_b x_b}{\partial\mathbf{r}} \right)^{-1} \eta_\alpha = \boldsymbol{\vartheta}_\alpha(\mathbf{r}) \eta_\alpha \quad (\text{B.8})$$

Einsetzen der Finite Elemente Interpolationen (B.1)-(B.8) in (3.15), (3.17)¹ liefert die Grundgleichungen der Finite Elemente Methode

$$\mathcal{G}_a^*(\Delta u_c, \Delta \theta_\gamma) = \int_{V_0} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_a \, dV - \int_{V_0} \rho_0 (\mathbf{f} + \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{N}_a \, dV - \int_{A^\sigma} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{N}_a \, dA \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{L}_\alpha^*(\Delta u_c, \Delta \theta_\gamma) = \int_V \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_\alpha \, dV - \int_{V_0} \rho_0 M_\alpha (r + w_d + w_{et} - c_\varepsilon \dot{\theta}) \, dV_0 - \int_{A^q} M_\alpha q \, dA \quad (\text{B.10})$$

mit

$$\chi_a \mathcal{G}_a^* = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\eta_\alpha \mathcal{L}_\alpha^* = 0, \quad (\text{B.12})$$

wobei in (B.9) und (B.10) teilweise der Integrationsbereich V durch V_0 ersetzt wurde. Da (χ_a, η_α) beliebig ist, wird nacheinander eine Komponente dieses Vektors gleich eins und alle übrigen Komponenten gleich null gesetzt, so daß durch (B.11) und (B.12) $a + \alpha$ diskrete Gleichungen gegeben sind.

¹Es gilt: $\mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}(t) + \Delta \mathbf{u}^i, \theta(t) + \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi})$, $\mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(t) + \Delta \mathbf{u}^i, \theta(t) + \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi})$.

C Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen

C.1 Einschrittverfahren

Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP) der Form

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta), \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0, \quad (\text{C.1})$$

wobei die vektorwertige Funktion \mathbf{f} des Vektors $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)^T$ und der skalaren Variablen ζ die Voraussetzungen

- (i) $\mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta)$ ist stetig im Gebiet Ω
 $\Omega = \{(\zeta, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{s+1} \mid \zeta \in [t_a, t_e]; q_k \in (-\infty, \infty), k = 1, 2, \dots, s\}$
- (ii) $\mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta)$ erfüllt in Ω eine Lipschitzbedingung
 $\|\mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}(\zeta), \zeta)\| \leq L \|\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}\|$

erfüllt und (C.1) somit eine eindeutige Lösung besitzt (HENRICI [30, S.112,113], LUTHER et. al. [63, S.46], LAMBERT [52, S.2], GEAR [64, S.54,55]).

Ein Algorithmus zur Lösung des Anfangswertproblems (C.1), indem die Näherungslösung $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ der exakten Lösung $\mathbf{q}(t + \Delta t)$ zur Zeit $t + \Delta t$ einzig aus der Näherungslösung \mathbf{q}_t , der Stützstelle t und der Schrittweite Δt berechnet wird heißt Einschrittverfahren. Es ist üblich die funktionale Abhängigkeit der Lösung $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ von $t, \mathbf{q}_t, \Delta t$ in der Notation von HENRICI [30, S.64,117] (siehe auch TÖRNIG [50, S.151,161], HAIRER et. al. [51, S.159], [63, S.58]) durch

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t = \Delta t \Phi(t, \mathbf{q}_t, \Delta t) \quad (\text{C.2})$$

darzustellen. Die Inkrementfunktion Φ (HENRICI [30]) – oder auch Verfahrensfunktion (LUTHER et. al. [63]) – ist dabei u. U. nicht explizit bekannt, sondern nur implizit definiert (TÖRNIG [50, S.151]).

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Inkrementfunktion Φ bzgl. all ihrer Variablen $t, \mathbf{q}, \Delta t$ im Gebiet Ω für alle Zeitinkremente $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$ stetig ist ([50, S.161], [30, S.71,124]), wobei Δt_0 ein hinreichend kleines, konstantes, positives Zeitinkrement ist.

Das Gleichungssystem (C.2) heißt zum Anfangswertproblem (C.1) konsistent, wenn

$$\Phi(t, \mathbf{q}_t, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_t, t) \quad (\text{C.3})$$

gilt. Ist die Konsistenzbedingung (C.3) erfüllt, nennt man das Verfahren (C.2) konsistent. Für ein konsistentes Verfahren genügt jede Lösung des Systems (C.1) asymptotisch dem Differenzgleichungssystem (C.2)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \Phi(t, \mathbf{q}_t, \Delta t) \right\} = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

und der lokale Abschneidefehler ist durch

$$\rho(t, \mathbf{q}(t), \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) - \Phi(t, \mathbf{q}_t, \Delta t) \quad (\text{C.5})$$

gegeben.

Das Verfahren (C.2) heißt konsistent von der Ordnung p oder Verfahren von p -ter Ordnung, wenn für jede hinreichend oft diffenzierbare Lösung von (C.1)

$$\rho(t, \mathbf{q}_t, \Delta t) = O((\Delta t)^p), \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (\text{C.6})$$

gilt und somit der Fehler bei Verkleinerung der Schrittweite Δt mit $(\Delta t)^p$ abnimmt ([50, S.162]).

C.2 Ein Operator–Split–Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP) der Form

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta) = \sum_{i=1}^n {}^{(i)}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta), \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0, \quad (\text{C.7})$$

wobei der i. a. nichtlineare Operator \mathbf{f} als Summe von n Operatoren ${}^{(i)}\mathbf{f}$, $i = 1, \dots, n$ darstellbar ist. Ferner sei für jedes Teilproblem

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\zeta} = \dot{\mathbf{q}} = {}^{(i)}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\zeta), \zeta), \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{C.8})$$

ein geeignetes Integrationsschema der verallgemeinerten Mittelpunktsregel mit der Anfangsbedingung $\mathbf{q}(t)$ und dem Zeitschritt Δt gemäß

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \Delta t {}^{(i)}\mathbf{f}(\mathbf{q}(t + \vartheta_i \Delta t), t + \vartheta_i \Delta t) \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{q}(t + \vartheta_i \Delta t) = (1 - \vartheta_i) \mathbf{q}(t) + \vartheta_i \mathbf{q}(t + \Delta t), \quad \vartheta_i = \text{konst.} \in [0, 1] \quad (\text{C.10})$$

gegeben. Ein Einschrittverfahren zur Lösung von (C.7) aus der Gruppe der Operator-Split-Verfahren ist dann durch die Verfahrensvorschrift

$${}^i \mathbf{q} = {}^{i-1} \mathbf{q} + \Delta t {}^{(i)} \mathbf{f} \left((1 - \vartheta_i) {}^{i-1} \mathbf{q} + \vartheta_i {}^i \mathbf{q}, t + \vartheta_i \Delta t \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{C.11})$$

mit dem Wert am Beginn des Inkrements

$${}^0 \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t) \quad (\text{C.12})$$

und dem Wert am Ende des Inkrements

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = {}^n \mathbf{q} \quad (\text{C.13})$$

definiert.

D Zur Tangentensteifigkeitsberechnung

D.1 Berechnung von $\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T$ und $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T$

Da in ABAQUS das Verfahren von HUGHES & WINGET bei der Integration der Materialgleichungen angewandt wird, ist der Verzerrungstensor $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ durch (4.85) mit (4.82), der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D}_k durch den symmetrischen Anteil von \mathbf{L}_k (4.59) und der Transformationstensor \mathbf{Q}_1 durch (4.77) in Abhängigkeit des antisymmetrischen Anteils von \mathbf{L}_k (4.59) gegeben. Auf der Grundlage dieser Beziehungen berechnet ABAQUS intern die Größen $\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T$ und $\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T$ (vgl. [17]):

- aus (4.59) folgt

$$\mathbf{L}_k (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1}) = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} - \mathbf{1}) \quad (\text{D.1})$$

- differenzieren von (D.1) liefert

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{L}} (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1}) + \mathbf{L}_k \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{F}}_t = \frac{2}{\Delta t} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{F}}_t \quad (\text{D.2})$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{L}} = \frac{4}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{F}}_t (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \quad (\text{D.3})$$

- somit ist

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{D}}_k = \text{sym} \left(\frac{4}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{F}}_t (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{W}}_k = \text{skw} \left(\frac{4}{\Delta t} (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \mathcal{D}_{\Delta\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{F}}_t (\mathbf{F}_{t1} + \mathbf{1})^{-1} \right) \quad (\text{D.5})$$

- aus (4.77)

$$\left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k \right) \mathbf{Q}_1 = \left(\mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k \right) \quad (\text{D.6})$$

- differenzieren von (D.6) liefert

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right) \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k \mathbf{Q}_1 = \frac{\Delta t}{2} \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k \quad (\text{D.7})$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} = \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{-1} \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{-1} \quad (\text{D.8})$$

- mit (4.77) folgt

$$\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T = \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{-1} \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{T-1} \quad (\text{D.9})$$

die Antisymmetrie von $\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T$ erkennt man anhand von

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}}^T &= \\ &= \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{-1} \left(\mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k + \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{W}}_k^T\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_k\right)^{T-1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

- mit (4.82) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \Delta \tilde{\tilde{\mathbf{E}}} \mathbf{Q}_1^T &= \Delta t \mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\tilde{\mathbf{D}}} \mathbf{Q}_1^T = \\ &= \Delta t \left(\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{D}_k + \mathbf{D}_k \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T + \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{D}}_k\right) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

woraus folgt

$$\mathbf{Q}_1 \mathcal{D}_{\Delta u} \Delta \tilde{\tilde{\mathbf{E}}} \mathbf{Q}_1^T = \Delta t \left(2 \text{sym}(\mathbf{D}_k \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_1^T) + \mathcal{D}_{\Delta u} \tilde{\mathbf{D}}_k\right) \quad (\text{D.12})$$

D.2 Bestimmung der partiellen Ableitungen der Zustandsvariablen

Alle Variablen und alle partiellen Ableitungen in diesem Abschnitt sind mit der in der Iteration i zugrunde gelegten Verschiebung \mathbf{u}^i und der zugrunde gelegten Temperatur θ^i (bzw. mit den daraus abgeleiteten Größen) zu bilden.

Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen (4.222) betrachtet man das totale Differential der durch die Zustandsvektorberechnung bestimmten Zustandsgrößen (4.179), (4.180), (4.181).

Zusammen mit (4.169) unter Beachtung von (4.159), (4.182)-(4.184), (4.189)-(4.191), (4.200)-(4.201) erhält man

$$dS_1 = \frac{\partial \check{S}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial \check{S}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial \check{S}}{\partial Q_1} [dQ_1] = \frac{\partial^2 \check{S}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial^2 \check{S}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^2 \check{S}}{\partial Q_1} [dQ_1] \quad (D.13)$$

$$dZ_1 = \frac{\partial \check{Z}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial \check{Z}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial \check{Z}}{\partial Q_1} [dQ_1] = \frac{\partial^3 \check{Z}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial^3 \check{Z}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^3 \check{Z}}{\partial Q_1} [dQ_1] \quad (D.14)$$

$$dk_1 = \frac{\partial \check{k}}{\partial \Delta \epsilon} \cdot d\Delta \epsilon + \frac{\partial \check{k}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial \check{k}}{\partial Q_1} \cdot dQ_1 = \frac{\partial^3 \check{k}}{\partial \Delta \epsilon} \cdot d\Delta \epsilon + \frac{\partial^3 \check{k}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^3 \check{k}}{\partial Q_1} \cdot dQ_1, \quad (D.15)$$

woraus durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial \check{S}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^2 \check{S}}{\partial \Delta \epsilon}, \quad \frac{\partial \check{S}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^2 \check{S}}{\partial \Delta \theta} \quad (D.16)$$

$$\frac{\partial \check{Z}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^3 \check{Z}}{\partial \Delta \epsilon}, \quad \frac{\partial \check{Z}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^3 \check{Z}}{\partial \Delta \theta} \quad (D.17)$$

$$\frac{\partial \check{k}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^3 \check{k}}{\partial \Delta \epsilon}, \quad \frac{\partial \check{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^3 \check{k}}{\partial \Delta \theta} \quad (D.18)$$

folgt. Aufgrund der Struktur des Operator-Split-Verfahrens (wegen (4.127), (4.158), (4.169)) ermittelt man diese Ableitungen, indem man sukzessive die totalen Ableitungen der Resultate der einzelnen Teilprobleme berechnet und die jeweiligen Ergebnisse in das nächste Differential einsetzt.

D.2.1 Ableitungen für Operator 1 (mit (4.182)-(4.188))

a) Spannung
aus (4.124) folgt:

$$d^1 S_1 = \frac{\partial^1 \check{S}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial^1 \check{S}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^1 \check{S}}{\partial Q_1} [dQ_1] \quad (D.19)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^1 \check{S}}{\partial \Delta \epsilon} = \mathcal{A} + \mathcal{D} \quad (D.20)$$

$$A_{ijrs} = \frac{\partial \check{T}_{ijkl}^{-1}}{\partial \Delta \epsilon_{rs}} M_{kl} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{T}_{ijsn}^{-1} {}^1 S_{1rn} + \mathcal{T}_{ijns}^{-1} {}^1 S_{1nr} \right) \quad (D.21)$$

$$\mathcal{D}_{ijrs} = \mathcal{T}_{ijkl}^{-1} \frac{\partial \check{M}_{kl}}{\partial \Delta \epsilon_{rs}} = \mathcal{T}_{ijkl}^{-1} \left(c_{1/2klrs} + \frac{1}{2} \left(\delta_{kr} {}^1 S_{0sl} + {}^1 S_{0kr} \delta_{sl} \right) \right) \quad (D.22)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial^1 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} &= \mathcal{T}^{-1} \frac{\partial \check{\mathbf{M}}}{\partial \Delta \theta} = & (D.23) \\
&= \mathcal{T}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{C}_{1/2}}{\partial \Delta \theta} [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] - \left(\frac{\partial C_{M_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta + C_{M_{1/2}} \right) \mathbf{c}_{1/2} [1] - C_{M_{1/2}} \frac{\partial \mathbf{C}_{1/2}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta [1] \right)
\end{aligned}$$

b) kinematische Verfestigung
aus (4.125) folgt:

$$d^1 \mathbf{Z}_1 = \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} [d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{Q}_1} [d\mathbf{Q}_1] \quad (D.24)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{P} + \mathcal{Q} \quad (D.25)$$

$$P_{ijrs} = \frac{\partial \check{\mathbf{Z}}_{ijkl}^{-1}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} K_{kl} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{Z}_{ijsn}^{-1} {}^1 Z_{1rn} + \mathbf{Z}_{ijns}^{-1} {}^1 Z_{1nr} \right) \quad (D.26)$$

$$Q_{ijrs} = \mathbf{Z}_{ijkl}^{-1} \frac{\partial \check{K}_{kl}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_{ijkl}^{-1} \left(\delta_{kr} {}^1 Z_{0sl} + {}^1 Z_{0kr} \delta_{sl} \right) \quad (D.27)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \check{\mathbf{Z}}^{-1}}{\partial \Delta \theta} [\mathbf{K}] + \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \check{\mathbf{K}}}{\partial \Delta \theta} \quad (D.28)$$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{Z}}^{-1}}{\partial \Delta \theta} = - \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \mathbf{Z}^{-1} \quad (D.29)$$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \left(- \frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta - C_{Z_{1/2}} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (D.30)$$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{K}}}{\partial \Delta \theta} = \left(\frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta + C_{Z_{1/2}} \right) {}^1 \mathbf{Z}_0 \quad (D.31)$$

mit (4.125) dann

$$\frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \left(\frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta + C_{Z_{1/2}} \right) \mathbf{Z}^{-1} [{}^1 \mathbf{Z}_0 + {}^1 \mathbf{Z}_1] \quad (D.32)$$

c) isotrope Verfestigung
aus (4.126) folgt:

$$d^1 k_1 = \frac{\partial^1 \check{k}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta \quad (D.33)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial^1 \check{k}}{\partial \Delta \theta} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} C_{r_{1/2}} \Delta \theta} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{r_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta + C_{r_{1/2}} \right) ({}^1 k_1 + {}^1 k_0 - 2Y_{1/2}) - \right. \\
&\quad \left. - C_{r_{1/2}} \Delta \theta \frac{\partial Y_{1/2}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial}{\partial \Delta \theta} \left(\frac{\partial Y}{\partial \Delta \theta} \Big|_{1/2} \right) \Delta \theta + \frac{\partial Y_{1/2}}{\partial \Delta \theta} \right)
\end{aligned} \tag{D.34}$$

D.2.2 Ableitungen für Operator 2 (mit (4.189)-(4.199))

a) Spannung
aus (4.156) folgt:

$$d^2 \mathbf{S}_1 = \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{Q}_1} [d\mathbf{Q}_1] = \tag{D.35}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \right) [d\Delta \epsilon] + \left(\frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{Q}_1} + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \mathbf{Q}_1} \right) [d\mathbf{Q}_1]
\end{aligned} \tag{D.36}$$

Koeffizientenvergleich zwischen (D.35) und (D.36) zeigt:

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \tag{D.37}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \tag{D.38}$$

mit (4.156), (4.127), (4.124), (4.155) erhält man:

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^1 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} - \zeta 2\mu_1 \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \epsilon} \tag{D.39}$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \zeta} = -2\mu_1 \left(\mathbf{N}_1 + \zeta \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \zeta} \right) \tag{D.40}$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^1 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} - \zeta 2 \frac{\partial \mu_1}{\partial \Delta \theta} \mathbf{N}_1 - \zeta 2\mu_1 \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} \tag{D.41}$$

- die Terme $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \Delta \theta$, $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \zeta$ sind im Unterpunkt d) angegeben
- die Terme $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \theta$ sind im Unterpunkt e) angegeben

b) kinematische Verfestigung
aus (4.157) folgt:

$$d^2 \mathbf{Z}_1 = \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} [d\Delta \epsilon] + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{Q}_1} [d\mathbf{Q}_1] = \quad (\text{D.42})$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \right) [d\Delta \epsilon] + \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \quad (\text{D.43})$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{Q}_1} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \mathbf{Q}_1} \right) [d\mathbf{Q}_1]$$

Koeffizientenvergleich zwischen (D.42) und (D.43) zeigt:

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \quad (\text{D.44})$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.45})$$

mit (4.157), (4.127), (4.125), (4.155), (4.145) erhält man:

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} + \zeta c_1 \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \epsilon} \right) \quad (\text{D.46})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} = \frac{1}{h_1} \left(-b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} {}^2 \mathbf{Z}_1 + c_1 \mathbf{N}_1 + c_1 \zeta \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{D.47})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{h_1} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \zeta \frac{\partial b_1}{\partial \Delta \theta} {}^2 \mathbf{Z}_1 + \frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} + \zeta \frac{\partial c_1}{\partial \Delta \theta} \mathbf{N}_1 + \zeta c_1 \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} \right) \quad (\text{D.48})$$

- die Terme $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \Delta \theta$, $\partial \check{\mathbf{N}} / \partial \zeta$ sind im Unterpunkt d) angegeben
- die Terme $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \theta$ sind im Unterpunkt e) angegeben

c) isotrope Verfestigung
aus (4.139) folgt:

$$d^2 k_1 = \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \epsilon} \cdot d\Delta \epsilon + \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \mathbf{Q}_1} \cdot d\mathbf{Q}_1 = \quad (\text{D.49})$$

$$= \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \cdot d\Delta \epsilon + \left(\frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \mathbf{Q}_1} \cdot d\mathbf{Q}_1 \quad (\text{D.50})$$

Koeffizientenvergleich zwischen (D.49) und (D.50) zeigt:

$$\bullet \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \epsilon} \quad (\text{D.51})$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} \frac{\partial \check{\zeta}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.52})$$

mit (4.139), (4.127), (4.126) erhält man:

$$\circ \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \zeta} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 \varphi_1}{1 + \zeta \varphi_1 \beta_1 \sqrt{\frac{2}{3}}} (-{}^2 k_1 + \gamma_1 + Y_1) \quad (\text{D.53})$$

$$\circ \frac{\partial^2 \check{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{1 + \zeta \varphi_1 \beta_1 \sqrt{\frac{2}{3}}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \Delta \theta} \beta_1 + \varphi_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \Delta \theta} \right) (-{}^2 k_1 + \gamma_1 + Y_1) + \frac{\partial^1 \check{k}}{\partial \Delta \theta} + \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta \varphi_1 \beta_1 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial Y_1}{\partial \Delta \theta} \right) \right\} \quad (\text{D.54})$$

◦ die Terme $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \theta$ sind im Unterpunkt e) angegeben

d) Normale

aus (4.155) folgt:

$$\bullet \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{1}{\|\check{\Xi}^D(\zeta)\|} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \left[\frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \Delta \epsilon} \right] \quad (\text{D.55})$$

$$\bullet \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\|\check{\Xi}^D(\zeta)\|} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \left[\frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \zeta} \right] \quad (\text{D.56})$$

$$\bullet \frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{\|\check{\Xi}^D(\zeta)\|} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \left[\frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \Delta \theta} \right] \quad (\text{D.57})$$

mit (4.146), (4.127), (4.124), (4.125)

$$\circ \frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \Delta \epsilon} = \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \left[h_1 \frac{\partial^1 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \epsilon} - \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} \right] \quad (\text{D.58})$$

$$\circ \frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \zeta} = \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 {}^1 \mathbf{S}_1^D \quad (\text{D.59})$$

$$\circ \frac{\partial \check{\Xi}^D}{\partial \Delta \theta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta \frac{\partial b_1}{\partial \Delta \theta} {}^1 \mathbf{S}_1^D + \left(\boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \left[h_1 \frac{\partial^1 \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial^1 \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \right] \quad (\text{D.60})$$

◦ die Terme $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \epsilon$, $\partial \check{\zeta} / \partial \Delta \theta$ sind im Unterpunkt e) angegeben

e) plastischer Multiplikator
aus (4.154) folgt

$$\begin{aligned} d^2\tilde{\Gamma}_1 = & \left(\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Delta\epsilon} + \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\Delta\epsilon} \right) \cdot d\Delta\epsilon + \left(\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Delta\theta} + \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\Delta\theta} \right) d\Delta\theta + \\ & + \left(\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\mathbf{Q}_1} + \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\mathbf{Q}_1} \right) \cdot d\mathbf{Q}_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

aus (D.61) folgt:

$$\bullet \quad \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\Delta\epsilon} = - \left(\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} \right)^{-1} \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Delta\epsilon} \quad (\text{D.62})$$

$$\bullet \quad \frac{\partial\check{\zeta}}{\partial\Delta\theta} = - \left(\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} \right)^{-1} \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Delta\theta} \quad (\text{D.63})$$

$\partial^2\tilde{\Gamma} / \partial\zeta$ ist bei Verwendung des Newtonalgorithmus zur Lösung von (4.154) bereits bestimmt, ansonsten berechnet man:

$$\circ \quad \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\zeta} = b_1\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{N}_1 \cdot {}^2\mathbf{S}_0^D - \frac{2}{3}b_1\bar{k}_1 - h_1\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial\bar{k}}{\partial\zeta} - 2\mu_1h_1 - c_1 - \zeta 2\mu_1b_1\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{D.64})$$

$$\frac{\partial\bar{k}}{\partial\zeta} = \begin{cases} \frac{\partial^2\bar{k}}{\partial\zeta} + \frac{1}{m_1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m_1}} \frac{1}{\zeta} \eta_1 & (\text{VP}) \\ \frac{\partial^2\bar{k}}{\partial\zeta} & (\text{PL}) \end{cases} \quad (\text{D.65})$$

$$\frac{\partial^2\bar{k}}{\partial\zeta} = \frac{1}{1 + \zeta\varphi_1\beta_1\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(\varphi_1\beta_1\sqrt{\frac{2}{3}} (\gamma_1 + Y_1 - \bar{k}_1) \right) \quad (\text{D.66})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Delta\epsilon} = \left(\frac{\partial\Xi^D}{\partial\Delta\epsilon} \right)^T \left[\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Xi^D} \right] \quad (\text{D.67})$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial\Xi^D} = \frac{\Xi^D}{\|\Xi^D\|} = \mathbf{N}_1 \quad (\text{D.68})$$

$$\frac{\partial\Xi^D}{\partial\Delta\epsilon} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \left(h_1 \frac{\partial^1\check{\mathbf{S}}}{\partial\Delta\epsilon} - \frac{\partial^1\check{\mathbf{Z}}}{\partial\Delta\epsilon} \right) \quad (\text{D.69})$$

einsetzen von (D.68), (D.69) in (D.67) liefert wegen $\text{Sp}\mathbf{N}_1 = 0$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(h_1 \frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T [\mathbf{N}_1] \quad (\text{D.70})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \Xi^D} \cdot \frac{\partial \tilde{\Xi}^D}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial h_1} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial g_1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.71})$$

mit

$$\diamond \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \Xi^D} = \mathbf{N}_1 \quad (\text{D.72})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial \tilde{\Xi}^D}{\partial \Delta \theta} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \left[\zeta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \beta_1}{\partial \Delta \theta} \mathbf{S}_0 + h_1 \frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial^1 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \right] \quad (\text{D.73})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial h_1} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Delta \theta} = -\frac{2}{3} \bar{k}_1 \zeta \frac{\partial b_1}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.74})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial g_1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \Delta \theta} = -\zeta \left(2\mu_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta \frac{\partial b_1}{\partial \Delta \theta} + 2 \frac{\partial \mu_1}{\partial \Delta \theta} h_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \Delta \theta} \right) \quad (\text{D.75})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{k}} = -h_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{D.76})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \Delta \theta} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial \Delta \theta} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m_1}} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \Delta \theta} \right. & (\text{VP}) \\ \left. - \eta_1 \frac{1}{m_1^2} \frac{\partial m_1}{\partial \Delta \theta} \ln \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta}{\Delta t} \right) \right) & (\text{D.77}) \\ \frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial \Delta \theta} & (\text{PL}) \end{cases}$$

D.2.3 Ableitungen für Operator 3 (mit (4.200)-(4.204))

a) kinematische Verfestigung
aus (4.168) folgt:

$$d^3 \mathbf{Z}_1 = \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} [d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{Q}_1} [d\mathbf{Q}_1] = \quad (\text{D.78})$$

$$= \left(\frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \varsigma} \otimes \frac{\partial \varsigma}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) [d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \left(\frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \varsigma} \frac{\partial \varsigma}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \quad (\text{D.79})$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{Q}_1} + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \varsigma} \otimes \frac{\partial \varsigma}{\partial \mathbf{Q}_1} \right) [d\mathbf{Q}_1]$$

Koeffizientenvergleich zwischen (D.78) und (D.79) zeigt:

$$\bullet \quad \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \otimes \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{D.80})$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.81})$$

mit (4.168), (4.158)

$$\circ \quad \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} = - \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \zeta^{w_1 - 1}} \Delta t p_1 (w_1 - 1) \zeta^{(w_1 - 2)} \mathbf{Z}_1 \quad (\text{D.82})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \zeta^{(w_1 - 1)}} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{D.83})$$

$$\circ \quad \frac{\partial^3 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \zeta^{(w_1 - 1)}} \left(- \Delta t \zeta^{(w_1 - 1)} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \Delta \theta} + p_1 (\ln \zeta) \frac{\partial w_1}{\partial \Delta \theta} \right) \mathbf{Z}_1 + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \right) \quad (\text{D.84})$$

o Bestimmung der Terme $\partial \zeta / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \zeta / \partial \Delta \theta$ aus (4.167)

$$\begin{aligned} d \mathbf{1}_{\Gamma_1}^3 &= \left(\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot d \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \theta} \right) d \Delta \theta + \\ &+ \left(\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \mathbf{Q}_1} + \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{Q}_1} \right) \cdot d \mathbf{Q}_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

aus (D.85) folgt

$$\diamond \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = - \left(\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} \right)^{-1} \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{D.86})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \Delta \theta} = - \left(\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} \right)^{-1} \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.87})$$

o $\partial^3 \tilde{\Gamma} / \partial \zeta$ ist bei Verwendung des Newtonalgorithmus zur Lösung von (4.167) bereits bestimmt, ansonsten berechnet man

$$\frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \zeta} = 1 + \Delta t p_1 w_1 \zeta^{(w_1 - 1)} \quad (\text{D.88})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{1}{\|\mathbf{Z}_0\|^3} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T [\mathbf{Z}_0] \quad (\text{D.89})$$

$$\diamond \quad \frac{\partial^3 \tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} = \Delta t \zeta^{w_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \Delta \theta} + p_1 (\ln \zeta) \frac{\partial w_1}{\partial \Delta \theta} \right) - \frac{1}{\|\mathbf{Z}_0\|^3} \mathbf{Z}_0 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.90})$$

b) isotrope Verfestigung
aus (4.162) folgt:

$$\begin{aligned} d {}^3_2\tilde{\Gamma}_1 &= \left(\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} \frac{\partial {}^3\check{k}_1}{\partial \Delta \epsilon} \right) \cdot d\Delta \epsilon + \left(\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} \frac{\partial {}^3\check{k}_1}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\ &+ \left(\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \mathbf{Q}_1} + \frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} \frac{\partial {}^3\check{k}_1}{\partial \mathbf{Q}_1} \right) \cdot d\mathbf{Q}_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

aus (D.91) folgt

$$\bullet \quad \frac{\partial {}^3\check{k}_1}{\partial \Delta \epsilon} = - \left(\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} \right)^{-1} \frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \epsilon} \quad (\text{D.92})$$

$$\bullet \quad \frac{\partial {}^3\check{k}_1}{\partial \Delta \theta} = - \left(\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} \right)^{-1} \frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{D.93})$$

- $\partial {}^3_2\tilde{\Gamma} / \partial \varsigma$ ist bei Verwendung des Newtonalgorithmuses zur Lösung von (4.162) bereits bestimmt, ansonsten berechnet man:

$$\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial {}^3k_1} = 1 + \Delta t \pi_1 \left((\omega_1 - 1) |{}^3k_1 - Y_1|^{(\omega_1-2)} ({}^3k_1 - Y_1) + |{}^3k_1 - Y_1|^{(\omega_1-1)} \right) \quad (\text{D.94})$$

- $\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \epsilon} = - \frac{\partial {}^2\check{k}}{\partial \Delta \epsilon}$ (D.95)

- $\frac{\partial {}^3_2\tilde{\Gamma}}{\partial \Delta \theta} = \Delta t |{}^3k_1 - Y_1|^{\omega_1-1} \left\{ ({}^3k_1 - Y_1) \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial \Delta \theta} + \right. \right.$ (D.96)

$$\left. + \pi_1 (\ln |{}^3k_1 - Y_1|) \frac{\partial \omega_1}{\partial \Delta \theta} \right\} - \pi_1 \omega_1 \frac{\partial Y_1}{\partial \Delta \theta} \left. \right\} - \frac{\partial {}^2\check{k}}{\partial \Delta \theta}$$

D.3 Ableitungen zur Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta u} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$

mit (4.217)-(4.221)

a) aus (4.206) folgt:

$$\frac{\partial \dot{w}_{et}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\rho_0} C_{\kappa_1} \mathbf{1} \quad (\text{D.97})$$

b) aus (4.209)-(4.211)

$$\frac{\partial \widehat{w}_d}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{S}} \quad (\text{D.98})$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_d}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{Z}} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{Z}} \quad (\text{D.99})$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_d}{\partial k} = - \frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial k} \quad (\text{D.100})$$

c) Ableitungen nach Λ in (D.98)-(D.100)

$$\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{N}_1 \quad (\text{D.101})$$

$$\frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\rho_0} C_{Y1} \mathbf{Z}_1 \cdot \left(c_1 \mathbf{N}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \mathbf{Z}_1 + 2 \mathbf{Z}_1 \mathbf{N}_1 \right) \frac{1}{\Lambda} \quad (\text{D.102})$$

$$\frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial \Lambda} = \frac{\dot{e}_{sr1}}{\dot{r}_1} \varphi_1 \left(1 - \frac{k_1 - Y_1}{\gamma_1} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{D.103})$$

d) Ableitungen nach \mathbf{S} in (D.98)-(D.100)

$$\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\rho_0} \Lambda \left(\mathbf{N}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{S}} \right)^T [\mathbf{S}_1] \right) \quad (\text{D.104})$$

$$\frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\rho_0} C_{Y1} \Lambda \left(c_1 \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{S}} \right)^T [\mathbf{Z}_1] + 2 \mathbf{B} \right) \quad (\text{D.105})$$

mit

$$(\mathbf{B})_{mn} = (\mathbf{Z}_1)_{ij} (\mathbf{Z}_1)_{ir} \frac{\partial (\mathbf{Z}_1)_{rj}}{\partial (\mathbf{S}_1)_{mn}} \quad (\text{D.106})$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\|(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D\|} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} - \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) - (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \right\} \quad (\text{D.107})$$

e) Ableitungen nach \mathbf{Z} in (D.98)-(D.100)

$$\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{1}{\rho_0} \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{Z}} \right)^T [\mathbf{S}_1] \quad (\text{D.108})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{Z}} = & \frac{1}{\rho_0} C_{Y_1} \left\{ \Lambda c_1 \left(\mathbf{N}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{Z}} \right)^T [\mathbf{Z}_1] \right) - \right. \\ & \left. - \left(2\Lambda \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 + (w_1 + 1) \|\mathbf{Z}_1\|^{w_1-1} \right) \mathbf{Z}_1 + 4\Lambda \mathbf{Z}_1 \mathbf{N}_1 - 2\Lambda \mathbf{B} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.109})$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{Z}} = - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{S}} \quad (\text{D.110})$$

f) Ableitung nach k in (D.98)-(D.100)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{e}_{sr}}{\partial k} = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial A}{\partial k} \dot{r}_1 + \frac{\dot{e}_{sr1}}{\dot{r}_1} \frac{\partial \dot{r}}{\partial k} = \\ = & \frac{1}{\rho_0} (1 - C_{r_1} \theta_1) \dot{r}_1 - \frac{\dot{e}_{sr1}}{\dot{r}_1} \left(\frac{\varphi_1}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda + \frac{\pi_1}{\beta_1 \gamma_1} \omega_1 (k_1 - Y_1)^{\omega_1-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.111})$$

Die Berechnung der durch die Zustandsvektorberechnung bestimmten Terme $\partial \Delta \check{\mathbf{S}} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \Delta \check{\mathbf{Z}} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \Delta \check{k} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \Delta \Lambda / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, ist in (4.239) dargestellt.

D.4 Ableitungen zur Bestimmung von $\mathcal{D}_{\Delta\theta} (\tilde{w}_{et} + \tilde{w}_d)$

mit (4.217)-(4.221)

a) aus (4.206) folgt:

$$\frac{\partial \dot{w}_{et}}{\partial \Delta\theta} = \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial C_{\kappa_1}}{\partial \Delta\theta} \text{Sp} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{D.112})$$

b) aus (4.217)-(4.221) unter Beachtung von (4.209)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}_d}{\partial \Delta\theta} = & \left(\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\theta} + \left(\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \mathbf{Z}} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \mathbf{Z}} \right) \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta\theta} - \\ & - \frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial k} \frac{\partial \check{k}}{\partial \Delta\theta} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \Delta\theta} - \frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial \Delta\theta} + \left(\frac{\partial \widehat{w}_p}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial \Lambda} \right) \frac{\partial \check{\Lambda}}{\partial \Delta\theta} \end{aligned} \quad (\text{D.113})$$

c) Die Ableitungen nach Λ in (D.113) sind bereits im Abschnitt 4.4.3 durch (D.101)-(D.103) angegeben.

d) Ableitungen nach $\Delta\theta$ in (D.113)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{e}_{sY}}{\partial \Delta\theta} &= \frac{\partial C_{Y_1}}{\partial \Delta\theta} \frac{\dot{e}_{sY_1}}{C_{Y_1}} + \frac{1}{\rho_0} C_{Y_1} \mathbf{Z}_1 \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial \Delta\theta} \Lambda \mathbf{N}_1 - \left\{ \frac{\partial b}{\partial \Delta\theta} \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda + \left(\frac{\partial p}{\partial \Delta\theta} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + p_1 \frac{\partial w}{\partial \Delta\theta} \ln \|\mathbf{Z}_1\| \right) \|\mathbf{Z}_1\|^{w_1-1} \right\} \mathbf{Z}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.114})$$

$$\frac{\partial \widehat{e}_{sr}}{\partial \Delta\theta} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta\theta} - \varrho \right) \dot{r}_1 + \frac{\dot{e}_{sr_1}}{\dot{r}_1} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \Delta\theta} \quad (\text{D.115})$$

$$\varrho = \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \Delta\theta} & \text{für Ansatz (A)} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \Delta\theta^2} \theta_1 + \frac{\partial Y}{\partial \Delta\theta} & \text{für Ansatz (B)} \end{cases} \quad (\text{D.116})$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Delta\theta} = C_{r_1} \theta_1 \frac{\partial Y}{\partial \Delta\theta} - (k_1 - Y_1) \left(C_{r_1} + \frac{\partial C_{r_1}}{\partial \Delta\theta} \theta_1 \right) \quad (\text{D.117})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \Delta\theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta\theta} \left(1 - \frac{k_1 - Y_1}{\gamma_1} \right) \frac{\varphi_1}{\gamma_1} \left(\frac{\partial Y}{\partial \Delta\theta} + \left(1 - \frac{k_1 - Y_1}{\gamma_1} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\theta} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi_1}{\beta_1 \gamma_1} (k_1 - Y_1)^{\omega_1} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial \beta}{\partial \Delta\theta} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\theta} - \frac{1}{\pi_1} \frac{\partial \pi}{\partial \Delta\theta} - \ln(k_1 - Y_1) \frac{\partial \omega}{\partial \Delta\theta} \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi_1}{\beta_1 \gamma_1} (k_1 - Y_1)^{\omega_1-1} \omega_1 \frac{\partial Y}{\partial \Delta\theta} \end{aligned} \quad (\text{D.118})$$