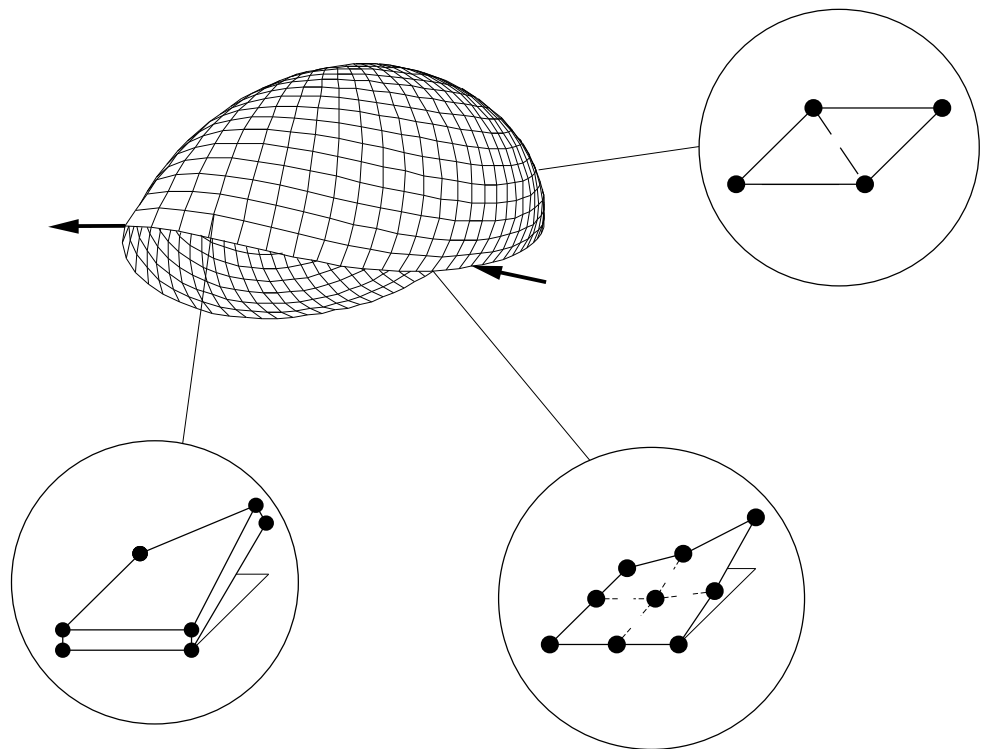


## Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke





## **Bericht-Nr. M97/3**

### **Herausgeber:**

Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof, Prof. Dr.-Ing. P. Vielsack

Hefte können bezogen werden über:

Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe (TH),

Kaiserstraße 12, D-76131 Karlsruhe

Postanschrift: D-76128 Karlsruhe

Telefon (0721) 608 2070

Telefax (0721) 608 2071

E-Mail: [mechanik@bau-verm.uni-karlsruhe.de](mailto:mechanik@bau-verm.uni-karlsruhe.de)

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikroskopie) zu vervielfältigen.



# Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Ralf Hauptmann

aus Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 1997

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. P. Wriggers

Karlsruhe 1997



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe.

Meinem geschätzten Lehrer und Hauptreferenten, Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine großzügige Förderung, kompetente wissenschaftliche Unterstützung und die angenehme Arbeitsatmosphäre an seinem Institut.

Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Wriggers danke ich für die Übernahme des Korreferats, die zügige Durchsicht dieser Arbeit und seine wertvollen Hinweise.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Vielsack für viele fachliche Diskussionen und für das auch von ihm geprägte, dem wissenschaftlichen Arbeiten sehr zuträgliche Arbeitsklima.

Schließlich danke ich allen Kollegen und Kolleginnen des Instituts für die gute Zusammenarbeit. Besonders hervorheben möchte ich Herrn Dipl.-Ing. S. Doll und Herrn Dipl.-Ing. Th. Rottner, denen ich für ihre Hilfsbereitschaft und für viele wertvolle Fachdiskussionen danke.

Karlsruhe, im Juli 1997

Ralf Hauptmann





# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gleichungen des verformten Kontinuums	4
2.1	Die Kinematik	4
2.2	Die Erhaltungssätze der Mechanik	5
2.3	Materielle Verzerrungen und zugehörige Spannungsmaße	7
2.4	Die schwache Form des Gleichgewichts	7
2.5	Linearisierung der Grundgleichungen	9
2.6	Das isotrope, linear elastische Materialgesetz	10
3	Schalenformulierung mittels des Degenerationskonzeptes	11
3.1	Das Degenerationskonzept	11
3.2	Versteifungseffekte bei degenerierten Schalenelementen	13
3.2.1	Querschubversteifung	14
3.2.2	Membranversteifung	15
3.3	Methoden zur Vermeidung der Versteifungseffekte	15
3.3.1	Die Methode der angenommenen Verzerrungen	16
3.3.2	Die Methode der angenommenen Spannungen	18
3.3.3	Die Methode der erweiterten Verzerrungen	19
4	Lineare Plattenformulierungen als Sonderfall der Schalen	25
4.1	Wesentliche Aspekte der Reissner-Mindlin Theorie	25
4.2	Wesentliche Aspekte der Kirchhoff-Theorie	28
4.3	Versteifungseffekte bei Plattenelementen und Methoden, diese zu vermeiden	29
4.3.1	Versteifungsfreie Plattenelemente – Stand der Entwicklung	29
4.3.2	Versteifungsfreie Plattenelemente – Neuere Entwicklungen	30
5	FE-Diskretisierung: Lineare Plattenelemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung	33
5.1	Zur Diskretisierung materiell und geometrisch linearer Plattenelemente	33
5.1.1	Geometrie- und Verschiebungsapproximation	33
5.1.2	Verzerrungen und Spannungen in globalen kartesischen Koordinaten	33
5.1.3	Die Elementsteifigkeitsmatrix	35
5.2	Wahl der Ansatzfunktionen bei Dreieckelementen	36
5.3	Wahl der Ansatzfunktionen bei Viereckelementen	36
5.4	Diskrete Kirchhoff Plattenelemente	37
5.4.1	DKT und DKQ Plattenelement	37
5.4.2	DKQ4 Plattenelement	39
5.4.3	DST Element	39
5.4.4	DST-BK Element	40
5.4.5	DKMT und DKMQ Element	40
5.5	Plattenelemente mit angenommenen Querschubverzerrungen	41

5.5.1	DRM und TLQL Plattenelement . . . . .	42
5.5.2	DRM3 Plattenelement . . . . .	42
5.5.3	Q4BL und T4BL Plattenelement . . . . .	43
5.5.4	ANS4 und QUAD9 Plattenelement . . . . .	43
5.5.5	QUAD8 Plattenelement . . . . .	44
5.6	Direkte Kirchhoff Plattenelemente . . . . .	45
5.6.1	BPT Element . . . . .	45
5.7	Anderen Methoden zuzuordnende, versteifungsfreie Plattenelemente . .	46
5.7.1	Allmann Viereckelement . . . . .	46
5.7.2	MXD Plattenelement . . . . .	47
6	Numerischer Vergleich der verschiedenen Plattenelementformulierungen	48
6.1	Eingespannte Quadratplatte unter gleichförmiger Last . . . . .	48
6.1.1	Dünne Platte . . . . .	49
6.1.2	Mäßig dicke Platte . . . . .	54
6.2	Gelenkig gelagerte Rhombusplatte nach Morley . . . . .	56
6.3	Zusammenfassung der Erkenntnisse für lineare Plattenelemente . . . . .	58
7	FE-Diskretisierung: Degenerierte Schalenelemente mit Ansatzfunktionen niede- rer Ordnung	60
7.1	Zur Diskretisierung degenerierter Schalenelemente . . . . .	60
7.1.1	Geometrie- und Verschiebungsinterpolation . . . . .	60
7.1.2	Berechnung der Direktoren in der verformten Konfiguration . .	61
7.1.3	Verzerrungen und Spannungen bezogen auf konvektive Koordi- naten . . . . .	63
7.1.4	Vorabintegration in Dickenrichtung und Definition von Schnitt- größen . . . . .	66
7.1.5	Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementresi- dualvektor . . . . .	67
7.1.6	Berücksichtigung einer verformungsabhängigen Druckbelastung .	70
7.1.7	Vereinfachungen bei der Geometrieeingabe . . . . .	72
7.2	Bilineare degenerierte Schalenelemente . . . . .	74
7.2.1	ANS4 Element . . . . .	74
7.2.2	EAS4 Element . . . . .	75
7.3	Biquadratische degenerierte Schalenelemente . . . . .	76
7.3.1	QUAD9 Element . . . . .	76
7.3.2	MITC9 Element . . . . .	79
7.3.3	SHEL9N Element . . . . .	80
7.4	Bikubische degenerierte Schalenelemente . . . . .	81
7.4.1	MITC16 Element . . . . .	82
8	Numerischer Vergleich der verschiedenen degenerierten Schalenelementformu- lierungen	84
8.1	Lineare Berechnungen . . . . .	84
8.1.1	Eigenwertuntersuchungen . . . . .	84
8.1.2	Einfach gelagerte Platte unter Flächenlast . . . . .	85

8.1.3	Tonnendach nach Scordelis und Lo . . . . .	87
8.1.4	Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften . . . . .	89
8.1.5	Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften . . . . .	91
8.1.6	Konditionszahlen . . . . .	93
8.2	Geometrisch nichtlineare Berechnungen . . . . .	94
8.2.1	Flache Zylinderschale unter Einzellast . . . . .	94
8.2.2	Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften . . . . .	96
8.2.3	Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften . . . . .	98
8.2.4	Konditionszahlen . . . . .	102
8.3	Zusammenfassung der Erkenntnisse für degenerierte Schalenelemente . . . . .	102
9	Schalenformulierung mittels des Solid-Shell Konzeptes . . . . .	104
9.1	Das Solid-Shell Konzept . . . . .	104
9.2	Versteifungseffekte bei Solid-Shell Schalenelementen . . . . .	107
9.2.1	Dickenversteifung . . . . .	107
9.3	Methoden zum Vermeiden der Versteifungseffekte . . . . .	108
9.3.1	Den ebenen Spannungszustand beinhaltende Solid-Shell Formulierungen . . . . .	109
9.3.2	Solid-Shell Formulierung mit linearem Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung . . . . .	111
9.4	Anmerkungen zur Erweiterung auf große Verzerrungen . . . . .	115
10	FE-Diskretisierung: Solid-Shell Schalenelemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung . . . . .	117
10.1	Zur Diskretisierung von Solid-Shell Schalenelementen . . . . .	117
10.1.1	Geometrie- und Verschiebungsinterpolation . . . . .	117
10.1.2	Verzerrungen und Spannungen bezogen auf konvektive Koordinaten . . . . .	119
10.1.3	Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor . . . . .	121
10.1.4	Vereinfachungen bei der Geometrieingabe . . . . .	123
10.1.5	Behandlung von Schalenverschneidungen . . . . .	123
10.1.6	Behandlung geschichteter Strukturen . . . . .	124
10.2	Bilineare Solid-Shell Schalenelemente . . . . .	125
10.2.1	ANS3DL Element . . . . .	125
10.2.2	ANS6z Element . . . . .	126
10.2.3	ANS3DLr Element . . . . .	126
10.2.4	ANS3Dq Element . . . . .	127
10.2.5	ANS3DEAS Element . . . . .	128
11	Numerischer Vergleich der verschiedenen Solid-Shell Schalenelementformulierungen . . . . .	129
11.1	Lineare Berechnungen . . . . .	129
11.1.1	Eigenwertuntersuchungen . . . . .	129

11.1.2	Einfach gelagerte Platte unter Flächenlast . . . . .	130
11.1.3	Tonnendach nach Scordelis und Lo . . . . .	132
11.1.4	Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüber- liegenden Einzelkräften . . . . .	134
11.1.5	Quader unter Flächenlast . . . . .	135
11.1.6	Konditionszahlen . . . . .	135
11.2	Geometrisch nichtlineare Berechnungen . . . . .	136
11.2.1	Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften . . . .	136
11.2.2	Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüber- liegenden Einzelkräften . . . . .	138
11.2.3	Dünne, flache Zylinderschale unter Einzellast . . . . .	140
11.2.4	Aus drei Schichten aufgebauter Kragarm . . . . .	142
11.2.5	Konditionszahlen . . . . .	144
12	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	146
	Schrifttum . . . . .	150
A	Mathematische Grundlagen . . . . .	156
A.1	Rechenregeln für Vektoren . . . . .	156
A.2	Rechenregeln für Tensoren . . . . .	157
A.3	Die Variation . . . . .	159
A.4	Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	160
A.5	Zur Lösbarkeit und Stabilität von Funktionalen . . . . .	160
B	Umformung der Spannung-Dehnungs Beziehung . . . . .	163
C	Ausführliche Darstellung der Verzerrungsinterpolationen bei den 9-Knoten Schalenelementen . . . . .	165
C.1	Verzerrungsinterpolation des QUAD9 Elementes . . . . .	165
C.2	Verzerrungsinterpolation des MITC9 Elementes . . . . .	165

# Übersicht über die verwendeten Bezeichnungen

Matrizen, Tensoren und Vektoren werden in dieser Arbeit mit Fettschrift dargestellt. Des weiteren kennzeichnet eine Tilde über der betreffenden Größe angenommene Felder, ein Strich oben, Werte an einem Knoten und der Index  $e$  wird an Größen angehängt, die nur auf Elementebene definiert sind. Im folgenden sind die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet.

## Lateinische Buchstaben:

$B$	...	Matrix zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen
$B, B_0$	...	Körper in der verformten bzw. unverformten Konfiguration
$b$	...	Volumenkraftvektor pro Masseneinheit
$C$	...	Materialgesetz in Matrizendarstellung
$C_{red}$	...	reduziertes Materialgesetz in Matrizendarstellung
$C^{iv}$	...	vierstufiger Materialtensor
$D$	...	Direktor in der unverformten Konfiguration
$D_b, D_{qs}$	...	Biege- und Querschubanteil des reduzierten und über die Dicke integrierten Materialgesetzes in Matrizendarstellung
$d$	...	Direktor in der verformten Konfiguration
$d_e$	...	generalisierter Elementknotenverschiebungsvektor
$E$	...	Green-Lagrange bzw. linearisierter Green-Lagrange Verzerrungstensor
$E_{ij}$	...	Komponenten des Verzerrungstensors in einem kontravarianten Basissystem
$E$	...	Elastizitätsmodul
$e_1, e_2, e_3$	...	Einheitsvektoren des globalen kartesischen Koordinatensystems
$F$	...	Deformationsgradient
$f$	...	Lastvektor
$f_{ext}$	...	Lastvektor der äußeren Belastung
$f_{int}$	...	innerer Lastvektor
$G_i, G^i$	...	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren in der unverformten Konfiguration
$G_{ij}, G^{ij}$	...	ko- bzw. kontravariante Metrikkoeffizienten
$g_i, g^i$	...	ko- bzw. kontravariante Basisvektoren in der verformten Konfiguration
$G$	...	schwache Form des Gleichgewichts
$h$	...	Platten- bzw. Schalendicke
$I$	...	Metrik der unverformten Konfiguration
$i$	...	Impuls
$J$	...	Jacobimatrix der isoparametrischen Abbildung

$\mathbf{K}_{tang}$	...	tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{L}$	...	Ableitungsoperator
$L(\xi, \eta)$	...	zweidimensionale Ansatzfunktionen bei Dreieckelementen
$\mathbf{m}$	...	Vektor mit den Biegemomenten
$m$	...	Masse
$N(\xi, \eta)$	...	zweidimensionale Ansatzfunktionen bei Viereckelementen
$\mathbf{n}$	...	Normale
$\mathbf{P}$	...	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$q_0, q_1, q_2, q_3$	...	Quaternionen
$\mathbf{R}$	...	orthogonaler Drehtensor
$\mathbf{S}$	...	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$S^{ij}$	...	Komponenten des Spannungstensors in einem kovarianten Basissystem
$\mathbf{T}$	...	Cauchyscher Spannungstensor
$\mathbf{t}$	...	Cauchyscher Spannungsvektor
$t_0, t, T$	...	Zeiten zur Kennzeichnung der Konfiguration
$\mathbf{U}$	...	rechter Strecktensor
$\mathbf{u}$	...	Verschiebungsvektor eines Punktes der Schale
$\mathbf{u}_R$	...	Verschiebungsvektor eines Punktes der Referenzfläche der Schale
$u, v, w; u_1, u_2, u_3$	...	Verschiebungsfreiheitsgrade der Referenzfläche
$\mathbf{V}$	...	linker Strecktensor
$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$	...	Kartesische Koordinatenachsen parallel zur Referenzfläche in der unverformten Konfiguration
$V, v$	...	Volumen des Elements in der unverformten bzw. verformten Konfiguration
$\mathbf{v}, \dot{\mathbf{x}}$	...	Geschwindigkeitsvektor
$W$	...	Energiedichtefunktion
$\mathbf{X}$	...	Ortsvektor zu einem Punkt der Schale in der unverformten Konfiguration
$\mathbf{x}$	...	Ortsvektor zu einem Punkt der Schale in der verformten Konfiguration
$\ddot{\mathbf{x}}$	...	Beschleunigungsvektor
$\mathbf{X}_R$	...	Ortsvektor zu einem Punkt der Referenzfläche der Schale in der unverformten Konfiguration
$\mathbf{x}_R$	...	Ortsvektor zu einem Punkt der Referenzfläche der Schale in der verformten Konfiguration
$\mathbf{X}_o, \mathbf{X}_u$	...	Ortsvektor zu einem Punkt der Ober- bzw. Unterfläche der Schale in der unverformten Konfiguration
$\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$	...	Einheitsvektoren eines lokalen kartesischen Koordinatensystems in der unverformten Konfiguration

$\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$	...	Einheitsvektoren eines lokalen kartesischen Koordinatensystems in der verformten Konfiguration
$X, Y, Z; X_1, X_2, X_3$	...	Koordinaten der Referenzfläche der Schale in der unverformten Konfiguration
$x, y, z; x_1, x_2, x_3$	...	Koordinaten der Referenzfläche der Schale in der verformten Konfiguration
$\mathbf{Z}$	...	Shifternsors

### Griechische Buchstaben:

$\varepsilon$	...	Vektor mit den Komponenten des Verzerrungstensors
$\epsilon_{ij}$	...	Membranverzerrungen
$\gamma$	...	Vektor mit den Querschubverzerrungen
$\theta$	...	Vektor mit den Rotationsfreiheitsgraden
$\theta_1, \theta_2, \theta_x, \theta_y$	...	Rotationsfreiheitsgrade
$\kappa$	...	Vektor mit den Krümmungen
$\kappa$	...	Schubkorrekturfaktor
$\lambda, \mu$	...	Lamé Konstanten
$\nu$	...	Querkontraktionszahl
$\xi, \eta, \zeta$	...	natürliche Koordinaten
$\Pi$	...	Potential
$\Pi_{ext}$	...	Potential der äußeren Lasten
$\Pi_{int}$	...	Potential der inneren Kräfte
$\rho$	...	Dichte
$\rho_{ij}$	...	Krümmungen zweiter Art
$\sigma$	...	Vektor mit den Komponenten des Spannungstensors
$\chi$	...	Abbildungsvorschrift

### Mathematische Symbole:

$\det$	...	Determinante
$\operatorname{div}, \operatorname{Div}$	...	Divergenz bezüglich der verformten bzw. unverformten Konfiguration
$\operatorname{grad}, \operatorname{Grad}$	...	Gradient bezüglich der verformten bzw. unverformten Konfiguration
$\nabla$	...	Nabla Operator
$\Delta$	...	Inkrementelle Größen
$\delta$	...	Variation
$\delta_i^j, \delta_{ij}, \delta^{ij}$	...	Kroneckersymbol
$(\cdot)_{,a}$	...	erste Ableitung nach $a$
$(\cdot)_{,aa}$	...	zweite Ableitung nach $a$

### Abweichend in Kapitel 3 und 7:

$\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$	...	Koeffizientenvektoren
$\mathbf{D}, \mathbf{D}^i, \mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta \mathbf{D}_\zeta$	...	Operatormatrizen
$\mathbf{G}, \mathbf{H}$	...	Matrizen bei der Methode der angenommenen Spannungen
$\mathbf{H}_i$	...	Operatormatrix
$\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{P}$	...	Matrizen bei der Methode der erweiterten Verzerrungen
$\mathbf{M}$	...	Matrix mit den erweiterten Verzerrungen
$\mathbf{P}$	...	Matrix mit den angenommenen Spannungen
$\mathbf{p}_\xi, \mathbf{p}_\eta$	...	Polynomansätze in Vektorform
$\mathbf{Q}$	...	Matrix mit den angenommenen Verzerrungen
$\mathbf{V}_\xi^i, \mathbf{V}_\eta^i$	...	Tangentenvektoren am Knoten $i$
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	...	unbekannte Parametervektoren

$\Theta$  ... Transformationsmatrix zwischen einem lokalen konvektiven und lokalen kartesischen Koordinatensystem

### Abweichend in Kapitel 9 und 10:

$\mathbf{D}, \mathbf{D}^i, \mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta \mathbf{D}_\zeta$	...	Operatormatrizen
$\mathbf{H}_i$	...	Operatormatrix
$\mathbf{M}$	...	Matrix mit den erweiterten Verzerrungen
$\mathbf{Q}$	...	Matrix mit den angenommenen Verzerrungen
$\mathbf{T}$	...	Transformationsmatrix zwischen einem globalen und lokalen Koordinatensystem
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	...	unbekannte Parametervektoren
$\Theta$	...	Matrix mit der Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung



# 1 Einleitung

Die Berechnung von Flächentragwerken – z.B. beliebig geformte Dachkonstruktionen, Kühltürme und auch Fahrzeugkarosserien – führt aufgrund der zunehmend detaillierteren Modellierung zu immer aufwendigeren Aufgabenstellungen. Erheblicher, zusätzlicher Aufwand ergibt sich auch durch die immer weiter verbreitete Verwendung von geschichteten Leichtbaumaterialien, die teilweise sogar bei der Simulation von Umformprozessen mit hochgradig nichtlinearem Materialverhalten berücksichtigt werden müssen. Dennoch soll die Berechnung solcher allgemeinen Schalenstrukturen, die aus ebenen, wenig und stark gekrümmten Schalen und Stellen mit zwei- oder dreidimensionalen Spannungszuständen bestehen, möglichst genau und gleichzeitig effizient erfolgen. Daher besteht das langfristige Ziel darin, automatisch eine Kombination verschiedener Elementtypen so einzusetzen, daß für die einzelnen Teile jeweils die genaueste und effizienteste Berechnungsmöglichkeit gewählt wird.

Als Vorarbeit werden in der vorliegenden Arbeit verschiedene aktuelle Plattenelemente und aktuelle, degenerierte Schalenelemente für ebene, beziehungsweise gekrümmte Bereiche mit zweidimensionalen Spannungszuständen miteinander verglichen. Dabei wird auf eine Variation der Ordnung der verwendeten Interpolationsfunktionen und auf verschiedene Elementformen eingegangen. Ein wesentlicher Aspekt ist der Übergang von zweidimensionalen Spannungszuständen zu dreidimensionalen Spannungszuständen, d.h. der Übergang von Platten- oder Schalenelementen auf Volumenelemente. Denn Schalen und Platten haben auch Verdrehungen als kinematische Freiheitsgrade, was bei Kontinuumelementen im allgemeinen nicht der Fall ist. Ein kombinierter Einsatz dieser grundlegend verschiedenen Elementarten erfordert deshalb spezielle Übergangselemente. Zusätzlich bereitet es erhebliche Schwierigkeiten die Bedingung des ebenen Spannungszustandes, auf dem die Platten- und die degenerierten Schalenelemente basieren, in die für die Berechnung großer Deformationen – bei Umformprozessen etwa – notwendigen dreidimensionalen Materialgesetze einfließen zu lassen. Daher wird abschließend eine eigens entwickelte Schalenkinematik vorgestellt, die mit wenigen Annahmen aus der Kinematik von Kontinuumelementen hervorgeht und somit die oben angesprochene Probleme umgeht.

Begonnen wird mit einer Gegenüberstellung aktueller Plattenelemente, deren Kinematik sich durch wesentliche Vereinfachungen aus dem Degenerationskonzept für Schalen ergibt. Gerade bei Plattenelementen liegen zahlreiche Neuentwicklungen vor, die aufgrund vieler spezieller Annahmen nicht systematisch erfaßt werden können und dann oft lediglich als Dreieckelement formuliert sind. Im ersten Teil der Arbeit soll die Frage geklärt werden, ob einige der neueren Elemente wesentliche Vorteile gegenüber Standardelementen bieten, für die bereits entsprechende Schalenelementformulierungen existieren. Weiterhin wird mittels einer Gegenüberstellung der Berechnungen mit Dreieckelementen und der Berechnungen mit den entsprechenden Viereckelementen untersucht, ob durch die theoretischen Vorteile der Dreieckelemente der etwas einfacheren automatischen Vernetzung und der vollständigen Ansatzfunktionen eine effizientere Berechnung als mit Viereckelementen erzielt werden kann.

Anhand von Schalenelementen, die auf dem Degenerationskonzept [5] basieren, soll vor allem der Einfluß verschiedener Interpolationsordnungen in den Ansätzen auf das Elementverhalten bei linearen und geometrisch nichtlinearen Berechnungen herausge-

arbeitet werden. Als Vergleich dienen Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen und Modifikationen, wie z.B. der Methode der in natürlichen Koordinaten angenommenen Verzerrungen (ANS) [23], die sich seit längerem im Einsatz bei ebenen oder wenig gekrümmten Schalen bewährt haben. Für die Berechnung stark gekrümmter Schalen soll untersucht werden, ob Elemente mit quadratischen oder kubischen Ansatzfunktionen bei größerer Zahl der Freiheitsgrade ein besseres Konvergenzverhalten aufweisen. Hierzu werden verschiedene Schalenelementformulierungen diskutiert: Zum einen das von Huang und Hinton [33] vorgeschlagene biquadratische Lagrange Element mit angenommenen Querschub- und Membranverzerrungen sowohl für lineare als auch in Erweiterung für geometrisch nichtlineare Berechnungen. Zum anderen die neun und sechzehn Knoten Elemente von Bathe und Bucalem [20], die auf einer geringfügig anderen Interpolation der angenommenen Verzerrungen basieren. Für lineare Berechnungen wird außerdem ein von Rhiu und Lee [57] entwickeltes neun Knoten Element untersucht, das auf dem Hellinger-Reissner Funktional basiert.

Allen diesen Schalenelementformulierungen liegt das auf einer Kinematik mit Rotationsfreiheitsgraden beruhende Degenerationskonzept zugrunde. Trotz der entscheidenden bekannten Nachteile des Degenerationskonzeptes – die Normalverzerrungen und -spannungen in Dickenrichtung werden nicht erfaßt, die vorgegebenen Randbedingungen sind teilweise schwierig zu erfüllen, bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen sind komplexe Aufdatierungen der Verdrehungen notwendig – ist ihr Einsatz bei vielen Berechnungen unproblematisch.

Wie bereits angesprochen, erfordert die zunehmend verlangte Erweiterung der auf dem Degenerationskonzept basierenden Schalenelemente auf große Deformationen mit allgemeinen dreidimensionalen Materialgesetzen komplexe, ineffiziente Modifikationen, um die Annahme des ebenen Spannungszustandes zu erfüllen. Deshalb wird im letzten Teil dieser Arbeit eine spezielle Schalenkinematik, das Solid-Shell Konzept, vorgestellt, mit dem obige Nachteile vermieden werden und das trotzdem auf ähnlich gute Ergebnisse wie die sogenannten degenerierten Schalen führt. Die wesentlichen Annahmen, die ausgehend von der Kinematik der Kontinuumelemente zur lediglich auf Verschiebungsfreiheitsgraden beruhenden Kinematik des Solid-Shell Konzeptes führen, sind der Multidirektor Theorie (s. [28]) und dem Konzept der Verwendung eines extensiblen Direktors bei degenerierten Schalenelementen [77], [16], [60], [19] entnommen. Ein weitgehend identisches Konzept mit dem Degenerationskonzept als Ausgangspunkt wurde bereits 1986 von Schoop [61] unter der Bezeichnung Doppelknotenmodell vorgestellt, 1995 von Parisch [50] und 1996 von Seifert [64] wieder aufgegriffen.

Ausgehend von der Grundkinematik des Solid-Shell Konzeptes werden systematisch unterschiedliche, durch Modifikationen erhaltene Schalenelementformulierungen vorgestellt. Das Ziel besteht darin, ein effizientes, versteifungsfreies Solid-Shell Element zu entwickeln, für das keine Reduktion des Materialgesetzes erforderlich ist und das somit auch bei materiell nichtlinearen Problemstellungen ohne weitere Vereinfachungen eingesetzt werden kann.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** werden die benötigten kontinuumsmechanischen Grundlagen bereitgestellt, die entsprechende schwache Form des Gleichgewichts linearisiert und die allgemeine Form des hier ausschließlich betrachteten isotropen

linear elastischen Materialgesetzes angeben.

**Kapitel 3** befaßt sich mit dem Degenerationskonzept. Zusätzlich werden Probleme, die bei der Verwendung von degenerierten Schalenelementen mit niedriger Ansatzordnung entstehen, diskutiert und Methoden zur Abhilfe vorgestellt.

In **Kapitel 4** werden die bekannten Reissner-Mindlin und Kirchhoff Plattentheorien aus dem Degenerationskonzept entwickelt. Des weiteren wird ein Überblick über die bisher bewährten Plattenelementformulierungen gegeben und die Grundgedanken neuerer Entwicklungen kurz angesprochen.

In **Kapitel 5** werden die Aspekte bei der Diskretisierung der Plattenelemente erläutert und die neueren Elemententwicklungen in diskretisierter Form dargestellt.

**Kapitel 6** zeigt anhand numerischer Beispiele die Eigenschaften der einzelnen Plattenelementformulierungen.

**Kapitel 7** befaßt sich ausführlich mit der Diskretisierung degenerierter Schalenelemente. Des weiteren wird auf die diskrete Form der einzelnen degenerierten Schalenelemente eingegangen.

In **Kapitel 8** werden die einzelnen degenerierten Schalenelementformulierungen an numerischen Beispielen miteinander verglichen.

In **Kapitel 9** wird die Kinematik des Solid-Shell Konzeptes vorgestellt, die zusätzlichen zu den bei degenerierten Schalen auftretenden Versteifungseffekte erläutert und verschiedene Variationen des Solid-Shell Konzeptes beschrieben, die zu einer versteifungsfreien Formulierung führen.

In **Kapitel 10** wird ausführlich auf die Diskretisierung der Solid-Shell Schalenelemente eingegangen und die verschiedenen Varianten in diskreter Form dargestellt.

**Kapitel 11** zeigt anhand numerischer Beispiele das Verhalten der einzelnen Solid-Shell Schalenelementformulierungen.

**Kapitel 12** gibt eine zusammenfassende Bewertung der in dieser Arbeit verwendeten Formulierungen und Anregungen für weiterführende Entwicklungen.

## 2 Gleichungen des verformten Kontinuums

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik dargestellt. Dabei findet eine Beschränkung auf Aspekte statt, die für die in dieser Arbeit untersuchten Finite Elementformulierungen benötigt werden. Ausführlichere Darstellungen können der Literatur (z.B. Truesdell und Noll [76], de Boer [15], Green und Zerna [27], Becker und Bürger [11], Betten [14]) entnommen werden.

### 2.1 Die Kinematik

Zur Beschreibung der Deformation wird eine materielle Formulierung bezogen auf eine raumfeste kartesische Basis ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) in dem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum zugrunde gelegt. Dann läßt sich die Lage eines Punktes des Körpers B in der unverformten Konfiguration, die auch mit Referenzkonfiguration bezeichnet wird, durch den Ortsvektor

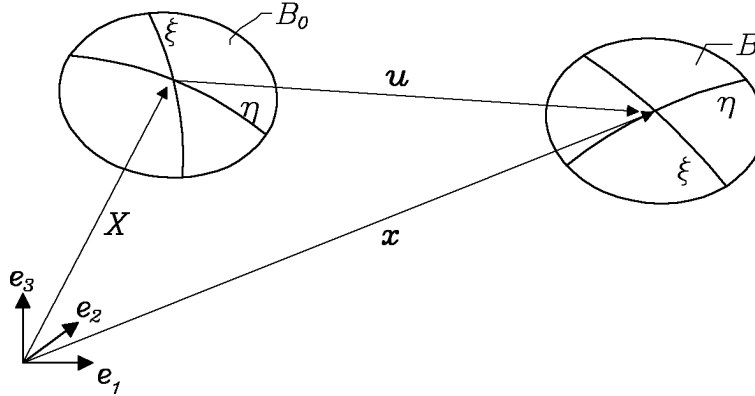


Bild 2.1: Kinematik des Kontinuums

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T = [X, Y, Z]^T \quad (2.1)$$

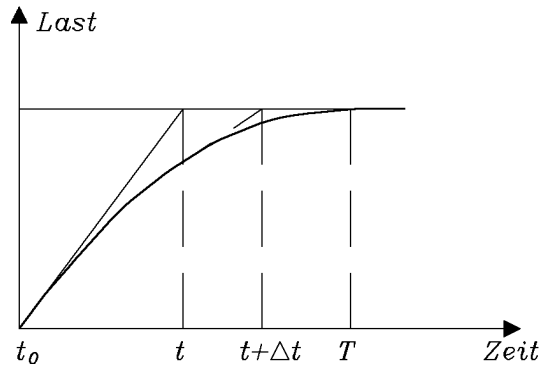
und in der verformten oder Momentankonfiguration durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [x, y, z]^T \quad (2.2)$$

beschreiben. Dabei ist die Bewegung  $\chi$  des Körpers B als stetige und eindeutige Abbildung der Körperpunkte von B auf den Bereich des dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes definiert:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.3)$$

Die "Zeit  $t$ " wird verwendet, um die statischen, somit zeitunabhängigen, Bewegungsabläufe in einer aufeinanderfolgenden Reihenfolge anzuordnen. Im Sinne des iterativen Newton Lösungsalgorithmus (s. Bild 2.2) wird mit  $t_0$  die unverformte Konfiguration, mit  $t$  eine bekannte Näherungslösung, mit  $t + \Delta t$  eine im folgenden Schritt zu bestimmende noch unbekannte Näherungslösung und mit  $T$  die gesuchte Lösung bei vorgegebener



**Bild 2.2:** Zeiten zur Kennzeichnung der Konfiguration

Laststufe gekennzeichnet. Die Verschiebung eines Körperpunktes bei der Verformung wird durch die Differenz der Ortsvektoren zu einem Punkt der Momentankonfiguration  $\mathbf{x}$  und demselben Punkt in der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.4)$$

beschrieben. Durch Einführen eines Verzerrungsmaßes über die Definition eines Tensors zweiter Stufe

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \mathbf{x} = \mathbf{1} + \text{Grad} \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

der als Deformationsgradient bezeichnet wird, entsteht eine Beziehung zwischen der verformten und unverformten Konfiguration. Den Algorithmen für große Deformationen liegt die polare Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.6)$$

in einen eigentlich orthogonalen Drehtensor  $\mathbf{R}$  sowie die symmetrischen rechten und linken Strecktensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  zugrunde.

## 2.2 Die Erhaltungssätze der Mechanik

### Massenerhaltung

Entsprechend dem Postulat der Massenerhaltung ändert sich die Masse eines Körpers während der Deformation nicht. Mit Hilfe der Dichte, die zu jeder Konfiguration angegeben werden kann, ergibt sich die Masse des Körpers zu

$$m = \int_{B_0} \rho_0 dV = \int_B \rho dv = \text{konstant}, \quad (2.7)$$

wobei der Index 0 oder große Buchstaben die Referenzkonfiguration und kein Index beziehungsweise kleine Buchstaben die Momentankonfiguration kennzeichnen. Die Anwendung der Transformationsvorschrift für ein Volumenelement

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad (2.8)$$

führt auf die lokale Form der Massenerhaltung:

$$\rho_0 = \det \mathbf{F} \rho. \quad (2.9)$$

## Impulserhaltung

Mit der Definition des Impulses eines Körpers  $B$  in der verformten Konfiguration

$$\mathbf{i} = \int_B \mathbf{v} \, dm = \int_B \rho \mathbf{v} \, dv = \int_B \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.10)$$

läßt sich der Impulserhaltungssatz angeben, der besagt, daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Dabei beinhaltet die resultierende Kraft

$$\mathbf{f} = \int_B \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{t} \, da \quad (2.11)$$

den Volumenkraftvektor pro Masseneinheit  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{t}$  die auf die Flächenelemente  $da$  bezogenen Spannungsvektoren, die sich über das Cauchy-Theorem  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  aus dem Normalenvektor der Fläche  $\mathbf{n}$  und dem Cauchy Spannungstensor  $\mathbf{T}$  ergeben. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (A.27) auf die lokale Form der Impulsbilanz in der materiellen Darstellung ergibt die erste Cauchysche Bewegungsgleichung

$$\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

mit dem unsymmetrischen 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.13)$$

In der vorliegenden Arbeit werden lediglich statische Probleme betrachtet, so daß der Trägheitsterm  $\rho \ddot{\mathbf{x}}$  in Gleichung (2.12) im weiteren nicht berücksichtigt wird.

## Drall- oder Drehimpulserhaltung

Der Satz von der Drehimpulserhaltung besagt, daß die Zeitableitung des auf den raumfesten Punkt  $\mathbf{X}_0$  bezogenen Dralls

$$\mathbf{L} = \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \rho \mathbf{v} \, dv \quad (2.14)$$

dem aus den Oberflächen- und Volumenkräften resultierenden Moment

$$\mathbf{m} = \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{t} \, dv \quad (2.15)$$

entspricht

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{m}. \quad (2.16)$$

Durch weitere Umformungen erhält man die zweite Cauchysche Bewegungsgleichung, die auf die Symmetrie des Cauchy Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.17)$$

hinweist. Für eine ausführliche Herleitung wird auf die Literatur verwiesen.

## 2.3 Materielle Verzerrungen und zugehörige Spannungsmaße

Der Verzerrungstensor für infinitesimale Deformationen mit den Komponenten

$$E_{ij}^{lin} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

ist bei linearen Problemstellungen arbeitskonform zum Cauchy Spannungstensor  $\mathbf{T}$ . Größere Starrkörperbewegungen rufen aber Verzerrungen hervor, damit ist dieses Verzerrungsmaß zur Beschreibung geometrisch nichtlinearer Probleme ungeeignet.

Ein geeignetes Verzerrungsmaß besteht in der Änderung der Abstände zweier Körperpunkte beim Übergang von der unverformten in die verformte Konfiguration. Der Green-Lagrange Verzerrungstensor, der sich mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  (2.5) und der Metrik der unverformten Konfiguration  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.19)$$

berechnen läßt, stellt ein Maß für die Änderung des Abstandes zweier Körperpunkte zum Quadrat dar und ist somit auch zur Beschreibung geometrisch nichtlinearer Probleme geeignet.

Das zum Green-Lagrange Verzerrungstensor energetisch äquivalente Spannungsmaß stellt der 2. Piola Kirchhoff Spannungstensor dar, der sich durch die Transformation

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.20)$$

aus dem 1. Piola Kirchhoff Spannungstensor  $\mathbf{P}$  (2.13) beziehungsweise aus dem Cauchy Spannungstensor  $\mathbf{T}$  ergibt. Der 2. Piola Kirchhoff Spannungstensor, der nicht anschaulich interpretiert werden kann, ist symmetrisch, da mit Gleichung (2.20) aus dem symmetrischen Cauchy Spannungstensor wiederum ein symmetrischer Tensor folgt.

## 2.4 Die schwache Form des Gleichgewichts

Die Integralform oder schwache Form des Gleichgewichts entsteht aus der Impulserhaltung (2.12) durch Multiplikation mit den Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}$  und anschließender Integration über das Volumen

$$G(\mathbf{P}, \delta \mathbf{u}) = \int_{B_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}) \delta \mathbf{u} dV = 0. \quad (2.21)$$

Dabei müssen die Testfunktionen zulässige Funktionen sein, das heißt sie müssen bei vorgegeben Randbedingungen den Wert null annehmen. Die anschließende Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (A.27) zusammen mit weiteren Umformungen führt auf die schwache Form

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{B_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV - \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial B_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0. \quad (2.22)$$

Wesentlich ist, daß die Gleichgewichtsbedingung nur im Mittel erfüllt wird, während die Randbedingungen, die Kinematik und das Materialgesetz exakt erfüllt werden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Integrationsgebiete  $B_0$  und  $\partial B_0$  durch das Volumen  $V$  und die Fläche  $A$  ersetzt. Unter der Voraussetzung, daß eine Energiedichtefunktion  $W(\mathbf{E})$  existiert, und nur konservative Lasten zugelassen sind, ergibt sich ein anderer Zugang über das Potential

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} = \int_V W(\mathbf{E}) dV - \int_V \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_A \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} dA. \quad (2.23)$$

Mit dem Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \Pi_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta \Pi_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0, \quad (2.24)$$

und nach Einsetzen des inneren Potentials  $\Pi_{int} = \int_V W(\mathbf{E}) dV$  und des äußeren Potentials  $\Pi_{ext}$  gilt:

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} dV - \int_V \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_A \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0. \quad (2.25)$$

Da für die in der vorliegenden Arbeit ausschließlich betrachteten elastischen Materialien die Beziehung  $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}$  gilt, entspricht die schwache Form nach Gleichung (2.22) der Variation des Potentials (2.25)  $G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ .

Neben dem reinen Verschiebungsfunktional (2.25) wird das Zweifeldfunktional von Hellinger-Reissner

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) &= \int_V \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) dV + \int_V \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \int_V \left( \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \right) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

betrachtet, das jedoch auf spezielle Materialklassen beschränkt ist, da die Gleichung (2.26) auf einem linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen  $\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E}$  und auf der Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{C}$  basiert. Dagegen läßt sich das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{S}, \mathbf{E}) = \int_V W(\mathbf{E}) dV + \int_V \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (2.27)$$

ohne Einschränkungen auf allgemeine Problemstellungen anwenden. Bei dem Hu-Washizu Funktional wird zusätzlich zum Gleichgewicht und der Kinematik, die bereits durch das Hellinger-Reissner Funktional lediglich im Mittel erfüllt werden, auch das Materialgesetz nur im Mittel erfüllt.

Beide Funktionale liefern einen guten Zugang für weitere gemischte FE-Formulierungen. Eine ausführliche Diskussion zur Lösbarkeit und Stabilität der verschiedenen Funktionale kann z.B. Haußer [31] entnommen werden und ist im Anhang A.5 kurz zusammengefaßt.



## 2.5 Linearisierung der Grundgleichungen

Die nichtlineare schwache Form des Gleichgewichtes (2.25) muß zur Einbettung in eine iterative Lösungsprozedur mit z.B. dem Newton-Verfahren linearisiert werden. Dazu wird Gleichung (2.22) in eine Taylorreihe um den Punkt  $\bar{\mathbf{u}}$

$$G(\bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}) = G(\bar{\mathbf{u}}) + DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} + R(\Delta \mathbf{u}) \quad (2.28)$$

entwickelt (s. Bild 2.3). Die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung  $R(\mathbf{u})$  und

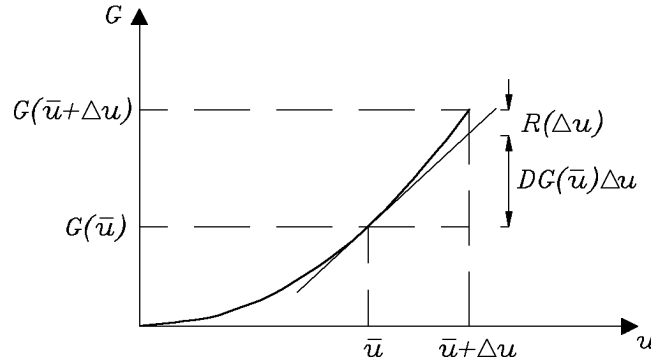


Bild 2.3: Taylorreihenentwicklung

die Anwendung der Gateaux Ableitung

$$DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} := \frac{d}{d\varepsilon} [G(\bar{\mathbf{u}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial G(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.29)$$

führen auf das stückweise lineare Gleichungssystem

$$DG(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} = -G(\bar{\mathbf{u}}). \quad (2.30)$$

Nach Einsetzen des Potentials unter Voraussetzung verformungsunabhängiger Lasten  $D\delta\Pi_{ext} = 0$  ergibt sich folgende Darstellung

$$D\delta\Pi_{int} \cdot \Delta \mathbf{u} = -(\delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext}) \quad (2.31)$$

mit der Definition

$$D\delta\Pi_{int} = \int_V \left( \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} D\mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot D\delta \mathbf{E} \right) dV. \quad (2.32)$$

Weitere Umformungen durch die Einführung der Diskretisierung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d})$  mit dem generalisierten Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{d}$ , durch die wiederholten Anwendungen der Gateaux Ableitung (Richtungsableitung)

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int}(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) &= \delta\mathbf{d} \cdot \frac{\partial \Pi_{int}}{\partial \mathbf{d}} = \delta\mathbf{d} \cdot (\Pi_{int})_{,\mathbf{d}} \\ \delta\Pi_{ext}(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) &= \delta\mathbf{d} \cdot \frac{\partial \Pi_{ext}}{\partial \mathbf{d}} = \delta\mathbf{d} \cdot (\Pi_{ext})_{,\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

und durch die Auswertung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (s. Anhang A.3) führen auf die Beziehung

$$(\Pi_{int})_{,d} \Delta \mathbf{d} = - \left( (\Pi_{int})_{,d} + (\Pi_{ext})_{,d} \right). \quad (2.34)$$

Der Übergang auf eine zur programmtechnischen Umsetzung besser geeigneten Schreibweise wird durch die formale Darstellung des Matrizenproduktes (s. Anhang B)

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.35)$$

durch eine Umordnung der Komponenten des Green-Lagrange Verzerrungs- und 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors in Form von Spaltenmatrizen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  erreicht. Nach Diskretisierung enthalten die Dehnungen  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d})$  den generalisierten Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  und nach Durchführen der notwendigen Ableitungen läßt sich Gleichung (2.34) wie folgt angeben

$$\mathbf{K}_{tang} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \quad (2.36)$$

mit der tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,d}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,d} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,dd}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \quad (2.37)$$

dem inneren Lastvektor

$$\mathbf{f}_{int} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{,d}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.38)$$

sowie dem Vektor mit der äußeren Belastung  $\mathbf{f}_{ext}$ . Dabei wird die Beziehung zwischen den Green-Lagrange Verzerrungen und den energetisch äquivalenten 2. Piola-Kirchhoff Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$  des isotropen linear elastischen Materialgesetzes eingeführt.

## 2.6 Das isotrope, linear elastische Materialgesetz

Bei Zugrundelegung des isotropen, linear elastischen Materialgesetzes nach St. Venant-Kirchhoff werden die 2. Piola-Kirchhoff Spannungen mit den Green-Lagrange Verzerrungen über die Beziehung

$$\mathbf{S} = \lambda (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \mathbf{C}^{iv} \mathbf{E} \quad (2.39)$$

verknüpft. Die Lamé Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.40)$$

beinhalten den Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  und der hochgestellte Index  $iv$  kennzeichnet einen vierstufigen Tensor. In kartesischen Koordinaten lassen sich die Komponenten des vierstufigen Materialtensors  $\mathbf{C}^{iv}$  wie folgt angeben:

$$C^{abcd} = \lambda \delta^{ab} \delta^{cd} + \mu (\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}), \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}. \quad (2.41)$$

Dann sind im Falle des St. Venant-Kirchhoff Materialgesetzes alle konstitutiven Beziehungen bekannt, die in den folgenden Kapiteln zum Aufstellen der jeweiligen FE-Formulierungen herangezogen werden.

### 3 Schalenformulierung mittels des Degenerationskonzeptes

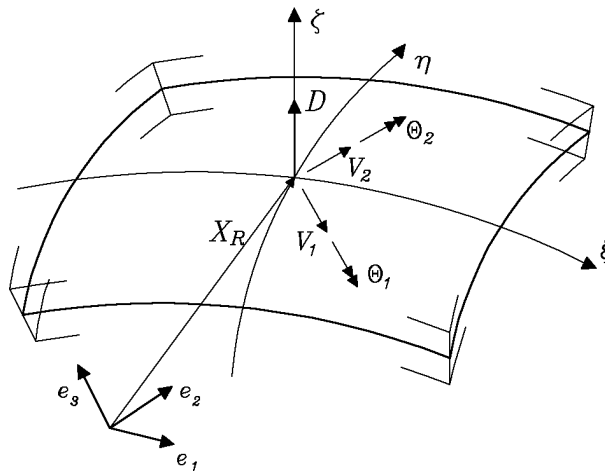
Die klassische Schalenformulierung, mit deren Einsatz seit langem bei rein analytischen Untersuchungen gute Ergebnisse erzielt werden, führt bei Anwendung auf numerische Untersuchungen mittels der Finite Element Methode bekanntermaßen zu einer unnötig komplexen Darstellung mit zu hohem Aufwand. Im Gegensatz dazu kann eine effiziente Schalenformulierung, die hervorragend zu einer Implementierung in FE-Programmen geeignet ist, durch Anwendung des Degenerationskonzeptes erzielt werden. Daher basieren auch die meisten in Anwendungsprogrammen verwendeten Schalenelemente auf dem Degenerationskonzept.

#### 3.1 Das Degenerationskonzept

Diesem Konzept liegen die drei Annahmen

1. Geradebleiben der Normalen der Mittelfläche in der unverformten Konfiguration bei der Verformung
2. Keine Längenänderung der Normalen während der Verformung
3. Vernachlässigung der Normalspannung in Dickenrichtung

zugrunde, die zu einer Degeneration des dreidimensionalen Kontinuums führen. Die



**Bild 3.1:** Geometrie eines degenerierten Schalenelementes

Anwendung der ersten und zweiten Degenerationsannahme ergibt die Approximation der Geometrie in der unverformten Konfiguration

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{X}_R(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\zeta h(\xi, \eta)\mathbf{D}(\xi, \eta), \quad (3.1)$$

in der verformten Konfiguration

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_R(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\zeta h(\xi, \eta)\mathbf{d}(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

sowie die Approximation des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{u}_R(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\zeta h(\xi, \eta) (\mathbf{d}(\xi, \eta) - \mathbf{D}(\xi, \eta)). \quad (3.3)$$

Hierin kennzeichnen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  die Koordinaten eines natürlichen Koordinatensystems mit den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auf einer Referenzfläche, die meist der Schalenmittelfläche entspricht. Die Koordinate  $\zeta$  steht dann senkrecht auf dieser Referenzfläche. Damit lassen sich die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  zu und die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  von jedem Punkt der Schale durch die Position  $\mathbf{X}_R$  und die Verformung  $\mathbf{u}_R$  dieser Referenzfläche sowie durch die Lage und die Verschiebung der restlichen Schalenpunkte relativ zu der Referenzfläche beschreiben. Dazu wird in der unverformten Konfiguration ein Direktor  $\mathbf{D}$  eingeführt, der senkrecht auf der Referenzebene steht und zur Definition eines kartesischen Koordinatensystems mit den beiden Achsen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$ , die eine Tangentialfläche zu der Referenzebene aufspannen, herangezogen wird. Somit kann die Deformation außerhalb der Referenzfläche mittels des Direktors in der verformten Konfiguration

$$\mathbf{d}(\xi, \eta) = \theta_2(\xi, \eta)\mathbf{V}_1(\xi, \eta) - \theta_1(\xi, \eta)\mathbf{V}_2(\xi, \eta) + \mathbf{D}(\xi, \eta) \quad (\text{kleine Rotationen}) \quad (3.4)$$

beschrieben werden, der sich durch eine Drehung  $\theta_2$  um die  $\mathbf{V}_1$ -Achse und eine Drehung  $\theta_1$  um die  $\mathbf{V}_2$ -Achse ergibt.

Allerdings können aufgrund der lokalen kartesischen Koordinatensysteme ( $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{D}$ ) Schwierigkeiten mit der Erfüllung der durch die zu diskretisierende Struktur vorgegebenen Randbedingungen entstehen. Lediglich durch das aufwendige Einführen lokaler Koordinaten an den betreffenden Rändern sind diese Randbedingungen leicht darstellbar. Zusätzlich führt bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen die Verwendung von Rotationsfreiheitsgraden, die bei großen Rotationen nicht invariant gegenüber der Reihenfolge sind, auf komplexe Berechnungsvorschriften zur Bestimmung des Direktors in der verformten Konfiguration.

Zur Erfüllung der dritten Degenerationsannahme wird das Materialgesetz auf ein Koordinatensystem mit zwei Achsen tangential zur Referenzfläche und der dritten Achse senkrecht dazu transformiert. Dann kann die Normalverzerrung in Dickenrichtung  $E_{33}$  durch die Annahme verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung  $S^{33}$  berechnet und somit das Materialgesetz kondensiert werden. Im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit ausschließlich verwendeten, linear elastischen, isotropen Materialgesetz läßt sich die Kondensation nicht bei allgemeinen dreidimensionalen Materialgesetzen, insbesondere bei Plastizität für große Deformationen, ohne weitere Vernachlässigungen durchführen.

Durch die Voraussetzung, daß die lokale Koordinate in Dickenrichtung senkrecht auf den lokalen Koordinaten parallel zur Referenzfläche steht, leisten die auf dieses Koordinatensystem transformierten Membran- und Biegeverzerrungen zusammen mit den Querschubspannungen bei Annahme des isotropen, linear elastischen Materialgesetzes (2.39) keine Arbeit:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{mb}^T \boldsymbol{\sigma}_{qs} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \boldsymbol{\sigma}_{mb} dV = 0. \quad (3.5)$$

In obiger Gleichung wurde bereits von der in der Finite Element Methode üblichen Anordnung der Komponenten des Green-Lagrange Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  beziehungsweise 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors  $\mathbf{S}$  in Vektorform (s. Gl. (B.4),(B.5))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{mb}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{22} & 2E_{12} & | & 2E_{23} & 2E_{31} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{mb}^T & \boldsymbol{\sigma}_{qs}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S^{11} & S^{22} & S^{12} & | & S^{23} & S^{31} \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (3.6)$$

Gebrauch gemacht. Dabei wird der Verzerrungstensor mit den Komponenten  $E_{ij}$  in einem lokalen kontravarianten Koordinatensystem und der Spannungstensor  $S^{ij}$  in dem zugehörigen kovarianten Koordinatensystem aufgestellt, damit die Basisvektoren keinen Beitrag zur Energie leisten. Bei Verwendung eines lokalen kartesischen statt des lokalen konvektiven Koordinatensystems gilt für die Verzerrungen  $E_{ij} = E^{ij}$  und die Spannungen  $S_{ij} = S^{ij}$ .

Somit kann das Potential der Verzerrungen und Spannungen parallel zur Referenzfläche unabhängig von dem Potential der Querschubverzerrungen und Spannungen

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \Pi_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{mb}^T \boldsymbol{\sigma}_{mb} dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \boldsymbol{\sigma}_{qs} dV + \Pi_{ext}\end{aligned}\quad (3.7)$$

aufgestellt und ausgewertet werden. Allerdings kann diese Trennung nur für spezielle Materialgesetze durchgeführt werden, ergibt dann aber eine sehr effiziente Formulierung, da unnötige Nullmultiplikationen vermieden werden, und ist für einige Formulierungen zwingend notwendig (siehe Kapitel 3.3)

Offensichtlich weisen degenerierte Schalenelemente drei globale Verschiebungsfreiheitsgrade und zwei lokale Rotationsfreiheitsgrade auf. Aus diesem Grund sind spezielle Übergangselemente notwendig, wenn degenerierte Schalenelemente zusammen mit Kontinuumelementen verwendet werden sollen, die lediglich globale Verschiebungsfreiheitsgrade besitzen. Besonders im Hinblick auf den Einsatz degenerierter Schalenelemente bei der neueren Entwicklung der Dimensions- bzw. Modelladaptivität — Übergang von z.B. einer zweidimensionalen zu einer dreidimensionalen Beschreibung in Teilen des Berechnungsgebietes — stellt diese Notwendigkeit einen gravierenden Nachteil der mit Rotationsfreiheitsgraden formulierten Elemente dar.

## 3.2 Versteifungseffekte bei degenerierten Schalenelementen

Obwohl degenerierte Schalenelemente mit Ansätzen hoher Ordnung sehr gute Konvergenzeigenschaften aufweisen und ab siebter Ordnung keinerlei Versteifungserscheinungen zeigen [29], wird eine einfache Netzeingabe und Nachbearbeitung nur mit Elementen niedriger Ansatzordnung erzielt, welche außerdem bei nichtlinearen Problemen als sehr robust gelten. Zusätzlich erhöht sich der Aufwand für die Lösung des globalen Gleichungssystems erheblich, da die Bandbreite der globalen Steifigkeitsmatrix beträchtlich größer ist als bei Elementen mit Formfunktionen niedriger Ordnung.

Jedoch gewinnen Elemente mit hohen Ansatzordnungen, die auf Legendre Polynomen basieren, im Zusammenhang mit der p-Adaptivität [54] — Anpassung der Ansatzordnung an die unterschiedlichen Bereiche des Berechnungsgebietes — an Bedeutung,

da Legendre Polynome eine besonders einfache Kopplung von Elementen mit unterschiedlichen Ansatzordnungen erlauben. Hierbei ist aufgrund der Tatsache, daß den Freiheitsgraden von Legendre Polynomen keine physikalische Bedeutung mehr zugeordnet werden kann, eine spezielle Geometrieinterpolation notwendig.

Dadurch sind Elemente hoher Ordnung auch wenn sie auf Legendre Polynomen basieren, vor allem bei nichtlinearen Berechnungen nicht annähernd so effizient wie Elemente niedriger Ansatzordnung. Zusätzlich sind degenerierte Schalenelemente mit Formfunktionen niedriger Ordnung bei größeren Deformationen robuster, neigen bei einer reinen Verschiebungsformulierung jedoch zum Versteifen. Des weiteren wird die Forderung, daß die Koordinate  $\zeta$  senkrecht auf der Referenzfläche steht, von Elementen mit linearen Verschiebungsansätzen nur exakt erfüllt, wenn alle Elementseitenflächen in der Ausgangskonfiguration senkrecht zur Referenzfläche ausgerichtet sind. In der Anwendung zeigt sich jedoch, daß auch mit Elementen mit linearen Ansatzfunktionen im Einsatz bei der Berechnung gekrümmter Strukturen gute Resultate erzielt werden, da dieses Manko im Gegensatz zu der ungenauen Geometrie- und Verschiebungsapproximation an Bedeutung verliert.

### 3.2.1 Querschubversteifung

Dieses Phänomen, das üblicherweise mit “Transverse Shear Locking“ bezeichnet wird, tritt dann auf, wenn bei Schalenelementen mit Ansätzen niedriger Ordnung reine Biegezustände nicht ohne eine Aktivierung der Querschubverzerrungen darstellbar sind. Diese Tatsache ist an dem Beispiel eines Elementes mit linearen Ansatzfunktionen unter reiner Biegebeanspruchung (siehe Bild 3.2) leicht zu erkennen. Hierbei zeigt sich,



**Bild 3.2:** Schalenelement unter Biegebeanspruchung

daß die Normalen der Referenzfläche in der Ausgangskonfiguration bei der Verformung nicht senkrecht zur aktuellen Referenzfläche bleiben. Durch die Schrägstellung der Normalen treten Querschubverzerrungen auf, die zu dem Querschubterm im Potential (3.7) beitragen, der bei reiner Biegung identisch null sein sollte. Da gleichzeitig bei dünnen Schalen die Querschubsteifigkeit um ein Vielfaches höher ist als die Biegesteifigkeit, ergeben sich eine viel zu hohe Formänderungsenergie und somit zu geringe Verschiebungen.

Eine weitere, weniger anschauliche Diskussion der Querschubversteifung beschreibt Andelfinger [2]. Mit Hilfe dieser tabellarischen Untersuchung können systematisch für beliebige Ansatzordnungen diejenigen Verzerrungsanteile ermittelt werden, die die Versteifung bewirken.

### 3.2.2 Membranversteifung

Bei gekrümmten Schalenelementen, die erst durch die Verwendung quadratischer oder höherer Ansatzordnungen entstehen, sind reine Biegezustände nicht ohne eine Aktivierung der Membranverzerrungen darstellbar. Entsprechend der Querschubverzerrung wird dadurch die Formänderungsenergie zu hoch approximiert. Dadurch entsteht wiederum eine Versteifung, die mit Membranversteifung oder meist mit “Membrane Locking“ bezeichnet wird.

Die entsprechende tabellarische Untersuchung ist wie bereits bei der Querschubversteifung von Andelfinger [2] ausführlich beschrieben.

## 3.3 Methoden zur Vermeidung der Versteifungseffekte

Erste Erfolge degenerierte Schalenelemente mit Formfunktionen niedriger Ordnung ohne störende Versteifungseffekte zu formulieren, wurden durch reduzierte Integration [1] der auftretenden Integrale erzielt. Allerdings weisen diese Formulierungen den Nachteil auf, daß abhängig von den gewählten Randbedingungen Kinematiken auftreten können, die dann das Berechnungsergebnis verfälschen. Deutlich weniger verschiedene Kinematiken enthalten Formulierungen, bei denen nur die Anteile im Potential reduziert integriert werden, die zu einer zu hohen Formänderungsenergie führen. Diese Vorgehensweise wird mit selektiv reduzierter Integration bezeichnet und kann lediglich bei degenerierten Schalenelementen, bei denen das verwendete Materialgesetz eine Entkopplung der Biege- und Membranpotentiale vom Querschubpotential erlaubt, angewendet werden.

Am Beispiel des Schalenelementes mit linearen Ansatzfunktionen unter reiner Biegebeanspruchung (s. Bild 3.2), bei dem nur die Querschubversteifung auftritt, ist der Vorteil dieser selektiv reduzierten Integration leicht zu erkennen. Wird das Integral mit den Querschubverzerrungen und -spannungen nur am Elementmittelpunkt ausgewertet, so werden nur die Normalen berücksichtigt, die senkrecht zur aktuellen Referenzfläche stehen, und die Querschubverzerrungen werden im ganzen Element zu null angenommen.

Um Elementformulierungen zu erhalten, die trotz reduzierter Integration frei von Kinematiken sind, werden seit langem sogenannte Stabilitätsmatrizen zur selektiv reduziert integrierten Steifigkeitsmatrix hinzugefügt ([13], [78], [51], [10]). Der Grundgedanke dabei ist, eine zusätzliche Steifigkeit in Form einer Stabilitätsmatrix einzuführen, die lediglich durch die unerwünschten Kinematiken angesprochen wird. Da Verschiebungsformen, die auf Kinematiken hinweisen, jedoch auch in dem gesuchten Verschiebungsfeld enthalten sein können, ist jede Stabilisierung auf einen justierbaren Wichtungsfaktor angewiesen, der seinerseits die Ergebnisse teilweise wesentlich verfälschen kann. Zusätzlich läßt sich der Einfluß der Kinematiken und der Stabilisierung an den Ergebnissen nicht abschätzen, so daß die stabilisierten Elemente letztendlich unzuverlässig sind. Aktuelle Versuche diesen Mangel zu umgehen, führen zu komplexen und weniger effizienten Elementformulierungen [10].

In der vorliegenden Arbeit werden lediglich die im folgenden beschriebenen neueren Entwicklungen betrachtet, die sich auch in kommerziellen FE-Programmpaketen zunehmend durchsetzen. Der wesentliche Aspekt der folgenden Methoden zum Vermei-

den der Versteifungseffekte besteht darin, die Verzerrungs- bzw. Spannungsfelder, so zu reduzieren, daß die versteifenden Anteile entfernt werden ohne Kinematiken zu erzeugen, oder aber sie so zu erweitern, daß vollständige Ansätze entstehen und dadurch keine Verformungsbehinderung mehr auftritt.

### 3.3.1 Die Methode der angenommenen Verzerrungen

Diese erstmals von Hughes und Tezduyar [35] entwickelte und anschließend von Bathe und Dvorkin [23] über ein Funktional formal begründete Methode zur Vermeidung der unerwünschten Versteifungseffekte hat sich aufgrund ihrer im folgenden beschriebenen positiven Eigenschaften zur Vermeidung der Querschubversteifung bei degenerierten Schalenelementen durchgesetzt.

Bei der Methode der angenommenen Verzerrungen (assumed strains) werden die Verzerrungen nur an einzelnen Punkten im Element aus den Verschiebungen berechnet, um dann als Stützwerte für angenommene Verzerrungsverläufe zu dienen. Die Verzerrungen werden durch Entfernen unerwünschter Anteile so approximiert, daß keine Verzerrungen entstehen, die Versteifungen hervorrufen, und auch Kinematiken vermieden werden.

Wird wieder das Beispiel des Elementes mit linearen Ansatzfunktionen unter reiner Biegebeanspruchung herangezogen, so führt die Annahme der Verzerrung  $E_{\xi\xi}$  konstant in  $\xi$ - und linear in  $\eta$ -Richtung mit Stützstellen in der Mitte der gegenüberliegenden Seiten  $\eta = -1$  und  $\eta = 1$  zu dem gewünschten Ergebnis, siehe Bild 7.4. Des weiteren wird deutlich, daß auch die zuvor erwähnte Methode der selektiv reduzierten Integration in der Methode der angenommenen Verzerrungen enthalten ist. Dazu müssen bei obigem Beispiel nur beide Querschubverzerrungen konstant im ganzen Element angenommen werden.

Für degenerierte Schalenelemente kann die Methode der angenommenen Verzerrungen wie folgt zusammengefaßt werden. Im vorliegenden Potential

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mb}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{mb} dV + \frac{1}{2} \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{qs}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{qs} dV + \Pi_{ext} \quad (3.8)$$

werden die linearisierten Green-Lagrange Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  durch die angenommenen Verzerrungen

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mb} = \mathbf{Q}_{mb} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mb}; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{qs} = \mathbf{Q}_{qs} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{qs} \quad (3.9)$$

und die Cauchy Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  aus den mit Hilfe der angenommenen Verzerrungen ermittelten Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  ersetzt. In den Vektoren  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mb}$  und  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{qs}$  sind die Elemente der Verzerrungsvektoren  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mb}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_{qs}$  angeordnet, die an den Stützstellen der angenommenen Polynome ausgewertet werden. Die angenommenen Polynome, die lediglich für ein Element ungleich null sind, sind entsprechend in den Matrizen  $\mathbf{Q}_{mb}$  und  $\mathbf{Q}_{qs}$  angeordnet. In obiger Darstellung wurde ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, daß das Materialgesetz eine Trennung des Membran- und Biege- vom Querschubpotential erlaubt.

Erst 1986 wurde von Simo [65] eine variationelle Basis dieser von Hughes und Tezduyar [35] hierarchisch formulierten Methode angegeben. Ausgangspunkt dazu ist



die additive Trennung der Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = f(\mathbf{E}(\mathbf{u}))$ , die aus den Verschiebungen resultieren, in einen erwünschten  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  und einen unerwünschten, versteifenden Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_s. \quad (3.10)$$

Die unabhängigen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  des Hu-Washizu Funktionals (2.27) werden dann so angenommen, daß sie lediglich die erwünschten Verzerrungen beinhalten

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_a, \quad (3.11)$$

und anschließend zusammen mit den kompatiblen Verzerrungen (3.10) in das Funktional eingesetzt:

$$\Pi_{HW} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_a dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s dV + \Pi_{ext}. \quad (3.12)$$

Da die versteifenden Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  keinen Beitrag zur Gesamtenergie leisten dürfen, muß das unabhängige Spannungsfeld  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  so gewählt werden, daß das Integral

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s dV = 0 \quad (3.13)$$

verschwindet. Somit ergibt sich das der Methode der angenommenen Verzerrungen zugrunde liegende Funktional

$$\Pi_{ANS} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_a dV + \Pi_{ext} \quad (3.14)$$

aus den angenommenen Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (3.15)$$

mit den in dem Vektor  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  angeordneten, an einzelnen Stützstellen ausgewerteten kompatiblen Verzerrungen.

Zur Erweiterung der Methode der angenommenen Verzerrungen auf nichtlineare Problemstellungen mit Beschränkung auf kleine Verzerrungen werden bis auf das Ersetzen der linearisierten Green-Lagrange Verzerrungen durch die Green-Lagrange Verzerrungen und der Cauchy Spannungen durch die 2. Piola-Kirchhoff Spannungen keine weiteren Zusatzüberlegungen benötigt.

Da dem Berechnungsalgorithmus für große Verzerrungen jedoch anstatt der Verzerrungen der Deformationsgradient zugrunde liegt, kann die Methode der angenommenen Verzerrungen in der oben dargestellten Form nicht mehr angewendet werden. Aktuelle Entwicklungen von Dvorkin und Mitarbeitern [24], [25] führen auf eine der Methode der angenommenen Verzerrungen verwandten Vorgehensweise, bei der günstigerweise die Matrizen mit den angenommenen Verläufen  $\mathbf{Q}_{mb}$  und  $\mathbf{Q}_{qs}$  unverändert übernommen werden können. Somit ist die Grundlage für den Einsatz dieser bei kleinen Verzerrungen sehr erfolgreichen Methode auch bei großen Verzerrungen gegeben. Für eine ausführliche Darstellung mit Verallgemeinerung auf dreidimensionale Materialgesetze wird auf Kapitel 9.4 verwiesen.

### 3.3.2 Die Methode der angenommenen Spannungen

Diese erstmals von Pian und Sumihara [52] für Scheibenelemente vorgeschlagene Vorgehensweise für lineare Problemstellungen basiert auf dem Hellinger-Reissner Funktional (2.26)

$$\Pi_{HR} = \int_V \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}). \quad (3.16)$$

Ausschließlich bei einer geometrisch linearen Formulierung können die in dem Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  angeordneten Komponenten des linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensors mittels der Operatormatrix  $\mathbf{B}$  aus den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  gewonnen werden

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.17)$$

bei einer geometrisch nichtlinearen Formulierung jedoch bezieht sich die Operatormatrix  $\mathbf{B}$  auf die Verknüpfung der Variationen der Verzerrungen  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  mit den variierten Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}. \quad (3.18)$$

Der Spannungsvektor  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  wird wie folgt approximiert

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \quad (3.19)$$

wobei  $\boldsymbol{\beta}$  Freiwerte sind, die wie im folgenden beschrieben, auf Elementebene auskondensiert werden können. Dazu müssen, um eine effiziente Elementformulierung zu erhalten, die angenommenen Spannungen (3.19) so gewählt werden, daß sie lediglich für das gerade betrachtete Element ungleich null sind.

Durch Einsetzen der Verzerrungen (3.17) und der angenommenen Spannungen (3.19) läßt sich das Hellinger-Reissner Funktional

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= \boldsymbol{\beta}^T \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} dV \boldsymbol{\beta} + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}\mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{H} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} dV \quad (3.21)$$

umformulieren. Die Forderung nach Verschwinden der ersten Variation des Potentials

$$\delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}\mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}\delta\mathbf{u} - \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \delta\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.22)$$

führt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dabei wurde von einer verformungsunabhängigen Belastung ausgegangen, die in dem Lastvektor  $\mathbf{f}_{ext}$  zusammengefaßt ist. Einfache Umformungen der Gleichungen (3.23) führen schließlich auf die resultierende tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}. \quad (3.24)$$

Wie zuvor kann von der Eigenschaft degenerierter Schalenelemente, daß der Biege- und Membrananteil von dem Querschubanteil entkoppelt ist, Gebrauch gemacht werden und die Biege- und Membranspannungen unabhängig von den Querschubspannungen approximiert werden.

Entsprechend der Methode der angenommenen Verzerrungen basiert auch die Methode der angenommenen Spannungen auf einer Reduktion, jetzt aber des Spannungsfeldes. Einschränkend müssen die Spannungen so gewählt werden, daß die zur Sicherstellung der Stabilität und Lösbarkeit des Hellinger-Reissner Funktionals notwendige Babuska-Brezzi Bedingung (A.38) erfüllt wird (s. Anhang A.5).

Jedoch kann die Methode der angenommenen Spannungen aufgrund der notwendigen Invertierung der Materialmatrix  $\mathbf{C}$  ohne größeren Aufwand lediglich auf spezielle Materialgesetze angewendet werden und ist somit bezüglich einer materiell nichtlinearen Berechnung stark eingeschränkt. Deshalb wird auch auf eine Entwicklung für geometrisch nichtlineare Fragestellungen verzichtet, die ohnehin die wesentlichen Entwicklungsschritte mit der im folgenden Abschnitt beschriebenen Formulierung gemeinsam hätte.

### 3.3.3 Die Methode der erweiterten Verzerrungen

Eine neuere Entwicklung zur Erzeugung versteifungsfreier Elemente geht auf Arbeiten von Simo und Rifai [69] zurück. Um die komplexe, als Methode der erweiterten Verzerrungen (**Enhanced Assumed Strain**) bezeichnete Vorgehensweise verständlicher darzustellen, wird mit einer rein linearen Formulierung begonnen. Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird die EAS Methode dann allgemein für materiell, wie auch geometrisch nichtlineare Probleme formuliert.

#### Lineare Formulierung der EAS Methode

Das zugrunde liegende Dreifeldfunktional von Hu-Washizu (2.27)

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (3.25)$$

ist bereits für lineare Problemstellungen mit der Beziehung  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$  zwischen den Cauchy Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und den linearisierten Green-Lagrange Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dargestellt. Die wesentliche Annahme in diesem Konzept stellt die Erweiterung der aus den Verschiebungen berechneten kompatiblen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  mit angenommenen Verzerrungen  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  dar:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.26)$$

Zusätzlich treten im zweiten Integral angenommene Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  in Form von Lagrange Parametern auf. Das Einsetzen der Beziehung (3.26) in das Hu-Washizu Funktional (3.25) führt auf das folgende reparametrisierte Funktional:

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV - \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}). \quad (3.27)$$

Da die erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  und unabhängigen Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  keinen Beitrag zur Gesamtenergie leisten dürfen, muß die Bedingung

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \quad (3.28)$$

gelten. Das heißt die unabhängigen Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  müssen so gewählt werden, daß sie orthogonal zu den erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sind.

Die erste Variation des verbleibenden Funktionals führt nach Einführen der Diskretisierungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{B}\delta\mathbf{d}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}, \quad \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}\delta\boldsymbol{\alpha} \quad (3.29)$$

und kleineren Umformungen auf die schwache Form

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} = & \delta\mathbf{d}^T \underbrace{\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T \underbrace{\int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} dV}_{\mathbf{D}} \boldsymbol{\alpha} + \delta\mathbf{d}^T \underbrace{\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{M} dV}_{\mathbf{L}^T} \boldsymbol{\alpha} \\ & + \delta\boldsymbol{\alpha}^T \underbrace{\int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV}_{\mathbf{L}} \mathbf{d} + \delta\Pi_{ext}(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei  $\mathbf{d}$  wiederum der Knotenverschiebungsvektor ist und  $\boldsymbol{\alpha}$  unabhängige Parameter sind. Die Forderung nach Verschwinden der ersten Variation des Potentials (3.30) zusammen mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{d} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{L}\mathbf{d} + \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

in dem entsprechend dem vorangegangenen Abschnitt von einer im Lastvektor  $\mathbf{f}_{ext}$  zusammengefaßten verformungsunabhängigen Belastung ausgegangen wurde. Die weitere Umformung der Gleichungen (3.31) ergibt die Berechnungsvorschrift für die unbekannt Parameter  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}\mathbf{d} \quad (3.32)$$

und schließlich die tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}. \quad (3.33)$$

Bei einer stückweisen konstanten Approximation der unabhängigen Spannungen entsprechend Gleichung (3.47) müssen die Matrizen  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{D}$  lediglich auf Elementebene ausgewertet werden. Da die Dimension der Matrix  $\mathbf{D}$  der Zahl der unabhängigen Parameter  $\boldsymbol{\alpha}$  entspricht und besonders bei Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen eine Verbesserung des Membranverhaltens mit wenigen Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  erzielt werden kann, wird durch Aufstellen der zusätzlichen Integrale und vor allem durch die notwendige Invertierung der Matrix  $\mathbf{D}$  die Effizienz lediglich geringfügig verschlechtert.

### Nichtlineare Formulierung der EAS Methode

Das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu weist für allgemeine nichtlineare Berechnungen folgende Form auf:

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (3.34)$$

Analog zu der linearen Formulierung führt eine Erweiterung der kompatiblen Green-Lagrange Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  durch angenommene Verzerrungen  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.35)$$

und Annahme eines unabhängigen Spannungsfeldes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  auf eine Reparametrisierung des ursprünglichen Funktionals (3.34)

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}). \quad (3.36)$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung (siehe Gl.(3.28))

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \quad (3.37)$$

wird das Dreifeldfunktional auf ein Zweifeldfunktional

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (3.38)$$

reduziert. Durch Anwendung der ersten Variation ergibt sich folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_k + \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV + \delta \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_k + \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \delta \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \delta \Pi_{int} + \delta \Pi_{ext}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

wobei davon ausgegangen wird, daß die Ableitung der Energiedichtefunktion  $W$  nach dem Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  den Spannungstensor  $\mathbf{S}$  ergibt, der von den kompatiblen Verzerrungen  $\mathbf{E}_k$  und den erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  abhängt. Die Linearisierung läßt

sich wiederum einfacher darstellen, wenn zuvor über eine Diskretisierung die Abhängigkeiten der kompatiblen Verzerrungen  $\mathbf{E}_k(\mathbf{d})$  von dem Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{d}$ , der erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})$  linear von den unbekanntem Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  und der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$  von dem Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  und den Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  eingeführt werden. Dann kann mit der Variation des inneren Potentials

$$\delta \Pi_{int} = \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,\mathbf{d}} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}} = \delta \mathbf{d}^T \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.40)$$

und des äußeren Potentials

$$\delta \Pi_{ext} = \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{ext})_{,\mathbf{d}} = \delta \mathbf{d}^T (-\mathbf{f}_{ext}) \quad (3.41)$$

die linearisierte Form der variationellen Gleichung (3.39)

$$\begin{aligned} & \left( \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,\mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} \right) \Delta \mathbf{d} + \left( \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,\mathbf{d}} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} \right) \Delta \boldsymbol{\alpha} = \\ & - (\delta \Pi_{ext}(\mathbf{d}) + \delta \Pi_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})) = \\ & - \left( \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{ext})_{,\mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,\mathbf{d}} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

ermittelt werden. Die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\mathbf{d}} \right) dV}_{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{d} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\boldsymbol{\alpha}} dV}_{\mathbf{L}^T} \Delta \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{f}_{ext} - \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{R}} \\ \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\mathbf{d}} dV}_{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{d} + \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\boldsymbol{\alpha}} dV}_{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\alpha} &= - \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Auflösung der zweiten Gleichung in (3.43) nach den unbekanntem Parametern  $\Delta \boldsymbol{\alpha}$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{P}) \quad (3.44)$$

und das anschließende Einsetzen in die erste Gleichung führt zu der tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad (3.45)$$

und dem Residualvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} - (\mathbf{R} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}). \quad (3.46)$$

Somit ist die linearisierte Form der EAS Methode allgemein beschrieben.

Allerdings sind für eine FE-Formulierung mit notwendiger Aufdatierung der unabhängigen Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  bei jeder Gleichgewichtssiteration weitere, im folgenden Abschnitt beschriebene Überlegungen erforderlich.

### Nichtlinearer Lösungsalgorithmus

Das Ziel ist, die nichtlinearen Gleichungen des vorangegangenen Abschnitts in eine iterative Lösungsprozedur nach dem Newton-Verfahren einzubetten. Der für eine effiziente Elementformulierung erforderliche Übergang auf Elementebene wird durch eine Approximation der unabhängigen Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}_e \quad (3.47)$$

durch stückweise konstante Funktionen erreicht, die in der Matrix  $\mathbf{P}$  zusammengefaßt sind. Dann lassen sich die Spannungen  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  aus dem Integral (3.28) herausziehen und die Orthogonalitätsbedingung nimmt die Form

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_V \mathbf{M} dV = 0 \quad (3.48)$$

an. Für die erweiterten Verzerrungen wird auf Elementebene ein inkompatibler Ansatz

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k,\boldsymbol{\alpha}_e} \boldsymbol{\alpha}_e = \mathbf{M}(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{\alpha}_e \quad (3.49)$$

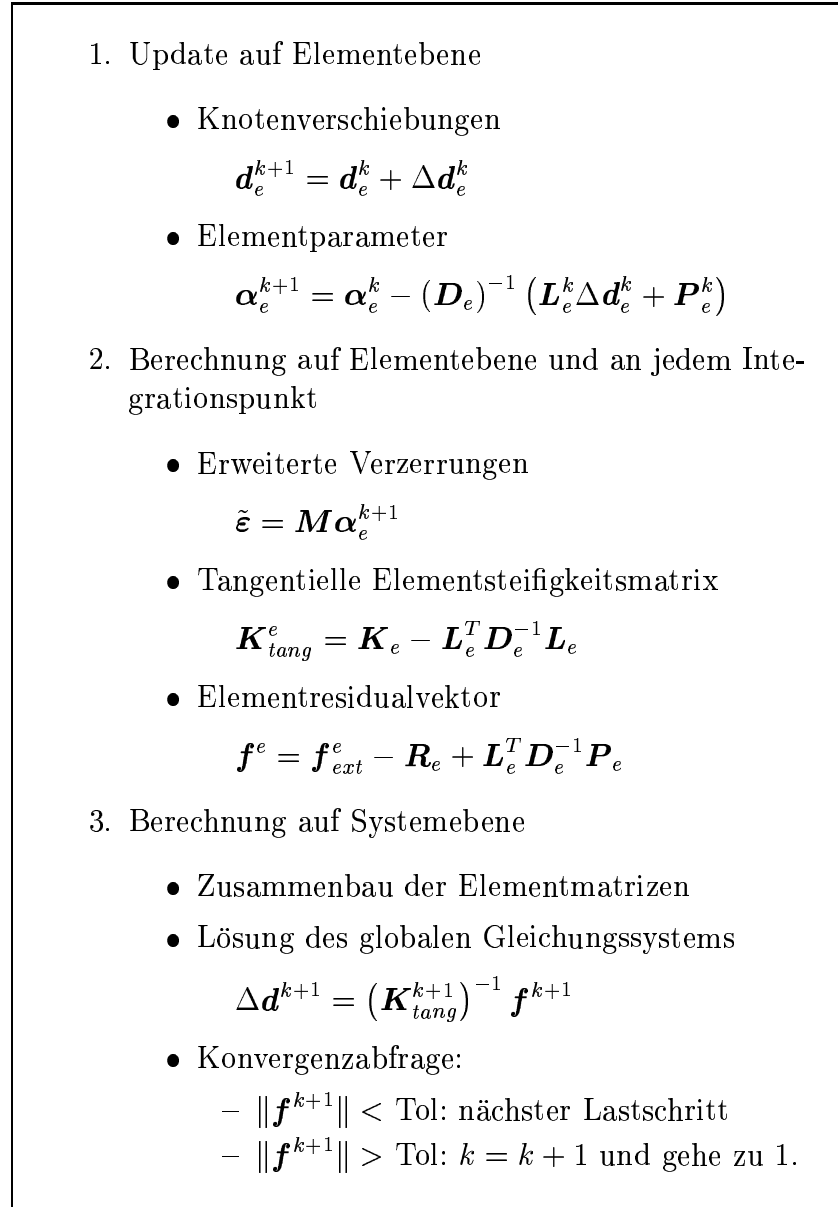
gewählt. Da die erweiterten Verzerrungen in den natürlichen krummlinigen Koordinaten approximiert werden, muß die Matrix  $\mathbf{M}$  auf ein von  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  unabhängiges Basissystem bezogen werden. Ansonsten würden die nur noch pro Element unbekannt Parameter  $\boldsymbol{\alpha}_e$  von der betrachteten Stelle abhängen und für jeden Punkt der Schale einen anderen Wert annehmen. Als unabhängiges Basissystem bietet sich das kontravariante Basissystem am Elementmittelpunkt an. Eine weitere Einschränkung für die Wahl der unabhängigen Verzerrungen ergibt sich durch die Bedingung, daß Anteile der erweiterten Verzerrungen nicht in den kompatiblen Verzerrungen enthalten sein dürfen.

Mit diesen Überlegungen können die Beziehungen des vorherigen Abschnitts verwendet werden, wenn formal im Gleichungssystem (3.43) die globalen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  durch die Elementknotenverschiebungen  $\mathbf{d}_e$  ersetzt und zu den Abkürzungen  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{f}_{ext}$ ,  $\mathbf{K}_{tang}$  und  $\mathbf{f}$  der Index  $e$  hinzugefügt wird. Dann ergibt sich der Algorithmus, der auf einer aufeinanderfolgenden Lösung linearer Problemstellungen basiert und in Bild 3.3 zusammengefaßt ist. Entsprechend der Bemerkung am Ende des Kapitels 3.3.1 ist auch bei der in diesem Abschnitt beschriebenen Darstellung der EAS Methode eine Beschränkung auf geometrisch und materiell nichtlineare Problemstellungen mit kleinen Verzerrungen notwendig.

In weiterführenden Arbeiten von Simo und Armero [71] wird eine Vorgehensweise vorgestellt, bei der abweichend von dem ursprünglichen EAS Konzept der Deformationsgradient erweitert wird, somit wird eine Erweiterung auch auf große Verzerrungen erreicht.

Jedoch zeigen Beobachtungen von Wriggers und Reese [81], daß bei einem konstantem Spannungszustand mit großen elastischen Deformationen ab einer bestimmten Verformung Kinematiken auftreten können. Der Grund hierfür liegt nach [81] an den bei konstanten Spannungszuständen nicht benötigten erweiterten Verzerrungen. Daher sollten die unabhängigen Parameter  $\boldsymbol{\alpha}$  verschwinden, das die Blockelimination (3.44) aber nicht zuläßt. Eine einfache Abhilfe besteht darin, bei Spannungszuständen, die korrekt durch die kompatiblen Verzerrungen beschrieben werden, das Gleichungssystem (3.43) wie folgt zu reduzieren:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{R}. \quad (3.50)$$



**Bild 3.3:** Iterativer Lösungsalgorithmus für die EAS Methode bei nichtlinearen Problemen



## 4 Lineare Plattenformulierungen als Sonderfall der Schalen

Eine sehr effiziente Berechnung ebener Schalenstrukturen kann mit der Verwendung von Facettenelementen durchgeführt werden. Facettenelemente sind Elemente zur Faltwerksberechnung, die durch die Kombination eines ebenen Scheibenelementes mit einem ebenen Plattenelement entstehen [31]. Da für aktuelle Scheibenelemente bereits ausführliche Untersuchungen ([31], [62]) existieren, findet im folgenden eine Beschränkung auf die Betrachtung von Plattenelementen mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung statt, für die weit mehr verschiedene Formulierungen als für Schalen erhältlich sind. Zusätzlich ist die Frage, ob Dreieckelemente gegenüber Viereckelementen zu einer effizienteren Formulierung führen, von Interesse. Ein bedeutender Vorteil von Dreieckelementen ist die Vollständigkeit der Ansatzfunktionen, wogegen Viereckelemente der Ansatzordnung  $m$  zusätzlich unvollständige Anteile bis zur Ordnung  $2m$  enthalten. Vollständige Ansatzfunktionen erleichtern vor allem analytische Untersuchungen und des weiteren weisen Scheibenelemente mit vollständigen Ansatzfunktionen keine Versteifungseffekte auf. Deshalb werden in der vorliegenden Arbeit zuerst sowohl dreieckige als auch viereckige Plattenelemente für materiell und geometrisch lineare Fragestellungen einander gegenübergestellt.

Im Gegensatz zu analytischen Untersuchungen von Platten basieren bei einer numerischen Untersuchung mittels der Finite Element Methode die meisten Plattenelemente auf der sogenannten Reissner-Mindlin Theorie. Begründet wird diese Tatsache dadurch, daß bei dieser Plattentheorie lediglich eine  $C^0$ -Stetigkeit der Ansatzfunktionen gefordert wird, die mit den üblichen Finite Element Ansatzfunktionen leicht erfüllt werden kann.

### 4.1 Wesentliche Aspekte der Reissner-Mindlin Theorie

Eine Theorie zur Berechnung von Platten unter Berücksichtigung der Querschubverformung wurde erstmals 1945 von Eric Reissner (1913 bis 1996) formuliert. Unabhängig davon entwickelte Raymond D. Mindlin (1906 bis 1987) 1950 die eigentliche, heute unter der Bezeichnung Reissner-Mindlin Theorie bekannte Plattentheorie. Die beiden von Reissner und Mindlin vorgeschlagenen Theorien basieren auf der gleichen Kinematik, im Gegensatz zu Reissner führte Mindlin jedoch die Annahme des ebenen Spannungszustandes ein. Erst später wurde bekannt, daß der Schweizer L. Bolle bereits 1947 eine Plattentheorie vorgestellt hat, die mit der Reissner-Mindlin Theorie identisch ist.

Da Platten als Spezialfall ebener Schalen ohne Berücksichtigung der Membranverzerrungen aufgefaßt werden können, kann auch die Reissner-Mindlin Theorie formal aus dem im Abschnitt 3.1 dargestellten Degenerationskonzept durch Einführen der beiden Annahmen

1. Wahl des globalen Koordinatensystems so, daß die globalen Achsen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  parallel zur Plattenmittelfläche und die dritte Achse  $\mathbf{e}_3$  senkrecht dazu verlaufen
2. Keine Verschiebung der Plattenmittelfläche in Richtung der  $\mathbf{e}_1$  oder  $\mathbf{e}_2$  Achsen

abgeleitet werden. Mit diesen Annahmen ergibt sich die Geometrie in der unverformten Konfiguration

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, Z) = \mathbf{X}_R + Z\mathbf{D}(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

mit

$$\mathbf{X}_R(\xi, \eta) = [X, Y, 0]^T, \quad \mathbf{D}(\xi, \eta) = [0, 0, 1]^T \quad (4.2)$$

und das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, Z) = \mathbf{u}_R(\xi, \eta) + Z(\mathbf{d}(\xi, \eta) - \mathbf{D}(\xi, \eta)) \quad (4.3)$$

mit

$$\mathbf{u}_R(\xi, \eta) = [0, 0, w]^T. \quad (4.4)$$

In den beiden Gleichungen (4.1) und (4.3) beschreibt die Variable  $Z$  den Verlauf in Dickenrichtung der Platte ( $\mathbf{e}_3$  Achse) und nimmt Werte zwischen  $Z = -h/2$  und  $Z = h/2$  an, wobei  $h$  die Plattendicke ist. Das Verschiebungsfeld (4.3) kann durch Auswerten von Gleichung (3.4) mit den Achsen des lokalen Koordinatensystems parallel zur globalen  $\mathbf{e}_1$  beziehungsweise  $\mathbf{e}_2$  Achse

$$\mathbf{V}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{V}_2 = [0, 1, 0]^T \quad (4.5)$$

in die Form

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w(\xi, \eta) \end{pmatrix} + Z \left( \theta_2(\xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \theta_1(\xi, \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (4.6)$$

überführt werden. Um eine der Reissner-Mindlin Plattentheorie entsprechende Formulierung zu erhalten, wird in den folgenden Gleichungen die Verdrehung um die  $\mathbf{e}_1$  Achse durch  $\theta_y = -\theta_1$  und um die  $\mathbf{e}_2$  Achse durch  $\theta_x = \theta_2$  ersetzt.

Analog zu der Formulierung für das Degenerationskonzept mit isotropen, linear elastischen Materialgesetz kann das Potential in zwei Teile getrennt werden

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{\sigma}_b dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \boldsymbol{\sigma}_{qs} dV + \Pi_{ext}, \quad (4.7)$$

wobei im Gegensatz zur Schalenformulierung im ersten Integral nur Biegeverzerrungen und -spannungen enthalten sind. Die Anordnung der Biegeverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial X} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial Y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial X} \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} = Z\boldsymbol{\kappa}, \quad (4.8)$$

der Querschubverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{qs} = \begin{pmatrix} 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial Y} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial X} + \theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_y \\ \gamma_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma} \quad (4.9)$$

und der zugehörigen Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{C}_{red}^b \boldsymbol{\varepsilon}_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_{qs} = \mathbf{C}_{red}^{qs} \boldsymbol{\varepsilon}_{qs} \quad (4.10)$$

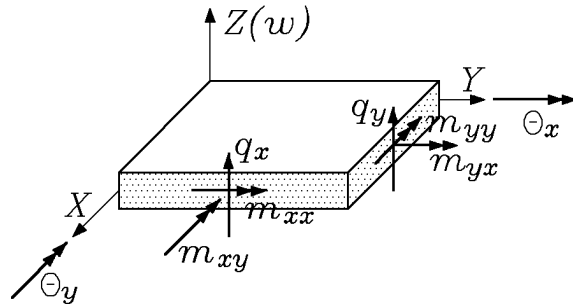
in Vektoren führt auf folgende Form des Potentials

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V Z^2 \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_{red}^b \boldsymbol{\kappa} dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_{red}^{qs} \boldsymbol{\gamma} dV + \Pi_{ext}. \quad (4.11)$$

Weitere Umformungen mit analytischer Vorabintegration über die Plattendicke ergibt die bei der Reissner-Mindlin Theorie übliche Darstellung in Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} Z^2 \mathbf{C}_{red}^b dZ \right\} \boldsymbol{\kappa} dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{red}^{qs} dZ \right\} \boldsymbol{\gamma} dA + \Pi_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_{qs} \boldsymbol{\gamma} dA + \Pi_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{m} dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{s} dA + \Pi_{ext}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

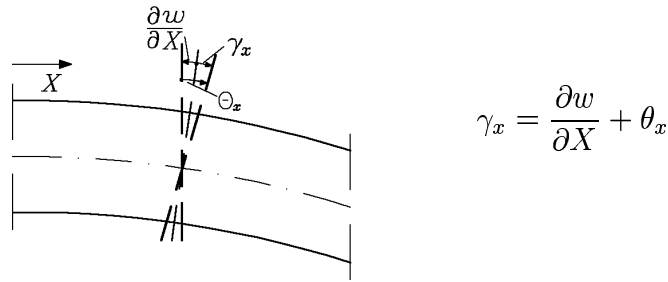
wobei mit  $\mathbf{m}$  die Biegemomente und mit  $\mathbf{s}$  die Querkräfte bezeichnet werden. Anschaulich können die kinematischen Annahmen so interpretiert werden, daß sich



**Bild 4.1:** Vorzeichenkonvention für Plattenanalysen

die Querschnittsverdrehung aus der Neigung der Plattenmittelfläche und einer Querschubverzerrung zusammensetzt, Bild 4.2.

Wie aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, sind zur Beschreibung der Plattendeformation mit den Reissner-Mindlin Annahmen drei Freiheitsgrade erforderlich, die Verschiebung in Dickenrichtung  $w(\xi, \eta)$ , die Verdrehung um die  $\mathbf{e}_1$  Achse  $\theta_y(\xi, \eta)$  und



$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial X} + \theta_x$$

**Bild 4.2:** Kinematische Annahme nach Reissner–Mindlin

die Verdrehung um die  $e_2$  Achse  $\theta_x(\xi, \eta)$ . Für die Verschiebung und die Verdrehungen wird damit lediglich eine  $C^0$ -Stetigkeit vorausgesetzt, da in der Kinematik nur erste Ableitungen auftreten (s. Gl.(4.8), (4.9)). Das heißt die Finite Element Ansatzfunktionen müssen über die Elementgrenzen stetig, jedoch nicht differenzierbar sein – sie können Knicke aufweisen.

## 4.2 Wesentliche Aspekte der Kirchhoff-Theorie

Bereits etwa hundert Jahre vor der Reissner-Mindlin Theorie hat 1850 der deutsche Physiker Gustav Kirchhoff (1824 bis 1887) eine nach ihm benannte Theorie zur Berechnung dünner Platten formuliert. Die Kirchhoff Theorie wird auch heute noch zur analytischen Berechnung dünner Platten, bei denen die Querschubdeformation vernachlässigt werden kann, eingesetzt.

Angewendet auf die Finite Element Methode, enthalten Plattenelemente, die auf der Kirchhoff Theorie basieren, lediglich die Verschiebung  $w(\xi, \eta)$  in Dickenrichtung als Freiheitsgrad. Zusätzlich zu den Annahmen, auf der die Reissner-Mindlin Theorie beruht, wird bei der Kirchhoff Plattentheorie die Annahme verschwindender Querschubverzerrung  $\gamma = 0$  eingebracht. Somit entsteht eine Beziehung zwischen der Verschiebung in Dickenrichtung und den Verdrehungen um die beiden Achsen:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial X}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial Y}, \quad (4.13)$$

so daß die Biegeverzerrungen nach Gleichung (4.8) den Krümmungen bzw. Verwindungen entsprechen und zweite Ableitungen der Verschiebungen auftreten. Die dadurch erforderliche  $C^1$ -Stetigkeit der Verschiebung  $w(\xi, \eta)$  zwischen den Elementen kann jedoch nur für spezielle Geometrien sichergestellt werden. Aus diesem Grund hat sich die Kirchhoff Plattentheorie im Einsatz mit der Finite Element Methode für allgemeine Elementformen nicht durchgesetzt.

Als Folge der Annahme verschwindender Querschubverzerrungen enthält das Kirchhoffschen Platten zugrundeliegende Potential neben dem Potential der äußeren Lasten nur noch den Biegeanteil

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{m} \, dV + \Pi_{ext}. \quad (4.14)$$

### 4.3 Versteifungseffekte bei Plattenelementen und Methoden, diese zu vermeiden

Dünne Reissner-Mindlin Platten mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung, die zu effizienten Formulierungen führen, tendieren zum Versteifen wegen des Querschubanteils, sofern sie auf einer reinen Verschiebungsformulierung basieren. Dieser Defekt, der bereits in Kapitel 3.2 ausführlich erläutert wurde, läßt sich durch die im folgenden beschriebenen Vorgehensweisen beheben.

#### 4.3.1 Versteifungsfreie Plattenelemente – Stand der Entwicklung

Im Buch von Zienkiewicz und Taylor [84] wird ein guter Überblick über vorhandene Elemente bis zum Jahr 1991 gegeben. In der vorliegenden Arbeit wird um den Kontext für weitere Diskussionen zu geben, auf einige wesentliche Elemente eingegangen, die auch zum Teil die Grundlage neuerer Entwicklungen bilden. Dies sind für die **Kirchhoff Theorie**, d.h. nur für dünne Platten,

- a) die Hybriden Trefftz Elemente nach Jirousek [36] bzw. Jirousek und Lan Guex [37]
- b) die Diskreten Kirchhoff Elemente, deren Entwicklung wesentlich von Batoz und Koautoren [6] vorangetrieben wurde, die aber im Prinzip bereits von Stricklin [72] und Dhatt [22] vorgeschlagen wurden.

Bei den Hybriden Trefftz Elementen werden die Differentialgleichungen im Gebiet exakt erfüllt, während für die Randbedingungen ein integraler Fehlerabgleich durchgeführt wird. Die Verschiebungsansätze, die die Plattendifferentialgleichung exakt erfüllen, werden von Jirousek unter Ansatz einer unabhängigen Zwischenelementverschiebung mit den Rändern gekoppelt. Dies erfolgt über ein erweitertes Energiefunktional und führt zu hochgenauen Elementen, die unempfindlich gegenüber stark von der Rechteckform bzw. optimalen Dreieckform abweichenden Elementgeometrien sind. Die Elemente – Dreiecke und Vierecke – konvergieren sehr gut; eine Verbesserung von Ergebnissen kann sowohl durch Netzverfeinerung als auch durch Erhöhung der Ansatzordnung erreicht werden. Im ersten Fall werden sinnvollerweise nur Eckknotenvariable verwendet, während im letzteren Fall zusätzlich Zwischenknoten erforderlich sind. Als Nachteile sind zu nennen, daß die Rechenzeiten auf Elementebene höher sind, eventuell größere Bandbreiten der Steifigkeitsmatrizen vorliegen und nichtlineare Formulierungen nur sehr eingeschränkt möglich sind.

Die Diskreten Kirchhoff Elemente werden aus einer Reissner-Mindlin Formulierung entwickelt. Wesentlich für die Entwicklung dieser versteifungsfreien Elementformulierung ist die Annahme verschwindender Querschubverzerrungen an diskreten Punkten und das Vernachlässigen der Querschubterme im Potential.

Für die **Reissner-Mindlin Theorie**, d.h. für mäßig dicke und dünne Platten, ist die Entwicklung hauptsächlich von der Einführung von Ansätzen für die Schubverzerrung entsprechend der bereits in Kapitel 3.3.1 beschriebenen Methode der angenommenen Verzerrungen geprägt. Die rein auf Verschiebungsansätzen basierenden Serendipity [1] und Heterosis Viereckelemente [34] sind zum einen wegen der hohen Variablenzahl

(Seitenmittenknoten) relativ ineffizient und neigen außerdem zur Querschubversteifung (Serendipity Element) bei dünnen Platten bzw. sind teilweise kinematisch (Heterosis Element). Das Viereckelement von Bathe und Dvorkin [5] mit ausschließlich Eckknotenvariablen beruht auf einem bilinearen Ansatz für die Verschiebungen und Rotationen sowie auf der oben erwähnten Methode der angenommenen Verzerrungen. Das entsprechende Element mit quadratischen Ansätzen für Verschiebungen, Rotationen und Querschubverzerrungen von Huang und Hinton [32] zeigt ein ausgezeichnetes Verhalten, ist allerdings infolge der erforderlichen numerischen Operationen im Element sowie der deutlich höheren Bandbreite nicht sehr effizient.

Von den bis 1989 vorliegenden Dreieckelementen sind drei Elemente hervorzuheben:

Das sehr robuste Element von Xu [82] besitzt nur Eckknotenvariable und beruht auf einem gemischten Ansatz für Verschiebungen, Rotationen und Schubverzerrungen, letzteres infolge reduzierter Integration des Schubterms. Dieses Element wurde bei einigen Neuentwicklungen 1993 erneut aufgegriffen.

Das Element von Arnold und Falk [4] beruht ebenfalls auf einem gemischten Ansatz, linear in  $w$ , quadratisch in  $\theta$  und konstant in  $\tilde{\gamma}$ . Es ist sehr robust aber ineffizient und schlecht handhabbar, da als Knotenvariable an den Eckknoten nur Rotationen bzw. an den Seitenmittenknoten Rotationen und die Verschiebung vorliegen.

Das gemischte Element von Zienkiewicz und Lefebvre [83] weist den letzteren Mangel nicht auf. Dies wird durch eine Erhöhung der Ansatzordnung für Verschiebungen, Rotationen und Schubverzerrungen erreicht. Das Element ist zwar robust, aber infolge der hohen Variablenzahl sehr ineffizient.

Von den sonstigen Dreieckelementen ist noch das nicht sehr robuste Element von Tessler und Hughes [74] zu erwähnen, mit dem nur durch eine Modifikation des Schubkorrekturfaktors zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden können.

Aus den obenstehenden Erläuterungen wird deutlich, daß für dünne Platten mit den Diskreten Kirchhoff Elementen für die Praxis gut brauchbare und effiziente Elemente vorlagen, daß aber für dicke Platten in dieser Hinsicht noch Bedarf bestand. Das Ziel der Forschung war daher die Entwicklung von robusten und effizienten Dreieck- und Viereckelementen, die sowohl im Bereich der dünnen als auch der dicken Platten einsetzbar sind und damit auch gleichzeitig Informationen über Querkräfte liefern können.

#### 4.3.2 Versteifungsfreie Plattenelemente – Neuere Entwicklungen

Im Gegensatz zu den Ausführungen, die die bekannten, lediglich in Kapitel 4.3.1 kurz beschriebenen Plattenelementformulierungen betreffen, wird in diesem Abschnitt versucht, die neueren Entwicklungen in drei wesentliche Richtungen einzuteilen, um eine den degenerierten Schalen entsprechende, systematische Darstellung zu erhalten. Eine genauere Beschreibung der einzelnen Plattenelemente erfolgt dann in den Kapiteln 5.4, 5.5 und 5.6.

Allerdings stellt sich aufgrund der eher hierarchischen Natur bei der Elemententwicklung heraus, daß sich einige Elemente mehreren Entwicklungsrichtungen zuordnen lassen.

### **Auf der "Direkten Kirchhoff Methode" basierende Entwicklungen**

Da bei der Kirchhoff-Theorie kein Querschubanteil im Potential (4.14) auftritt, besteht hier das Problem der Querschubversteifung nicht. Wie zuvor erwähnt, benötigen Kirchhoff Plattenelemente jedoch eine  $C^1$ -stetige Verschiebung in Dickenrichtung, die durch eine Einbeziehung von Nachbarelementen indirekt erreicht werden kann. Diese von Oñate und Cervera [47] erstmals vorgeschlagene Vorgehensweise ist dem Differenzenverfahren entnommen und führt bei der Anwendung auf die Finite Element Methode zu einer komplexen Formulierung mit zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Behandlung der Randbedingungen. Solche Plattenelemente weisen zwar lediglich einen Verschiebungsfreiheitsgrad auf, haben sich aber in der Anwendung als wenig robust erwiesen.

### **Auf der "Diskreten Kirchhoff Methode" basierende Entwicklungen**

Einige neuere Plattenelementformulierungen haben ihren Ausgangspunkt in der Diskreten Kirchhoff Methode und werden in der vorliegenden Arbeit unter diesem Begriff eingeordnet, obwohl sie von der ursprünglichen Form teilweise deutlich abweichen.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt ausgeführt, liegt der Diskreten Kirchhoff Methode die Reissner-Mindlin Plattentheorie zugrunde mit der zusätzlichen Annahme verschwindender Querschubverzerrungen an diskreten Punkten. Dabei führt eine geeignete Wahl dieser diskreten Stellen zu einer versteifungsfreien Plattenelementformulierung.

Bei der "Diskreten Schub Methode", die hier als Unterfall der Diskreten Kirchhoff Methode betrachtet wird, werden überzählige Freiheitsgrade durch Gleichsetzen der Querschubverzerrungen aus der Kinematik (4.9) mit den Querschubverzerrungen aus den konstitutiven Gleichungen an diskreten Punkten eliminiert. Abweichend von der Diskreten Kirchhoff Methode findet im Potential keine Beschränkung auf die Biegeterme statt.

Eine weitere Modifikation dieser Diskreten Schub Methode wird durch eine zusätzliche Approximation der Querschubverzerrungen entsprechend der Methode der angenommenen Verzerrungen erreicht und könnte auch der im folgenden beschriebenen Forschungsrichtung zugeordnet werden.

### **Auf der Methode der angenommenen Verzerrungen basierende Entwicklungen**

Bisher lagen Plattenelementformulierungen, bei denen die Methode der angenommenen Verzerrungen auf die Querschubverzerrungen angewendet wird, lediglich für Viereckelemente vor [5], [32]. Aufgrund des ausgezeichneten Verhaltens dieser Viereckelemente und der relativ einfachen Erweiterungsmöglichkeit auf degenerierte Schalenelemente wurde auch versucht, entsprechende Dreieckelemente zu entwickeln. Allerdings scheitert die Übertragung der bei dem Viereckelement mit bilinearen Ansatzfunktionen sehr erfolgreichen Kopplung der angenommenen Verzerrungen mit den Verzerrun-

gen aus der Kinematik an den Seitenmitten daran, daß unvollständig lineare Ansätze entstehen. Somit sind jedoch konstante Verzerrungszustände nicht mehr darstellbar. Für eine ausführliche Darstellung wird auf die Literatur verwiesen, z.B. [31]. Selbst bei der Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die Verschiebungen und Verdrehungen entsteht eine Elementformulierung, die gegenüber den Diskreten Schub Plattenelementen keine erkennbaren Vorteile bietet. Erst eine bereits am Ende des vorherigen Abschnitts angesprochene Interpolation der Querschubverzerrungen zusammen mit den aus der Diskreten Schub Methode entnommenen Modifikationen führt zu einer sehr effizienten, durchgängig für dicke bis dünne Platten empfehlenswerten Dreieck- wie auch Viereckelementformulierung.



## 5 FE-Diskretisierung: Lineare Plattenelemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung

### 5.1 Zur Diskretisierung materiell und geometrisch linearer Plattenelemente

#### 5.1.1 Geometrie- und Verschiebungsapproximation

Da bei der Entwicklung der Reissner-Mindlin Plattentheorie bereits eine Integration über die Plattendicke erfolgt ist, muß lediglich die Geometrie der Referenzfläche

$$\mathbf{X}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

diskretisiert werden, die hier abweichend von den restlichen Kapiteln mit  $\mathbf{X}$  ohne Index  $R$  bezeichnet wird. Das Verschiebungsfeld (4.3) kann unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.8) und (4.9) in einen generalisierten Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_d(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} w(\xi, \eta) \\ \theta_x(\xi, \eta) \\ \theta_y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_x^i \\ \bar{\theta}_y^i \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

überführt werden. Da bei den untersuchten Plattenelementen oft hierarchisch vorgegangen wird und die Interpolation der Verschiebung in Dickenrichtung eventuell eine andere Ansatzordnung als die Interpolation der Verdrehungen aufweist, wird für die diskretisierten generalisierten Verschiebungen (5.2) folgende Schreibweise eingeführt:

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_w} N_{w_i}(\xi, \eta) \bar{w}_i, \quad \boldsymbol{\theta}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n_\theta} N_{\theta_i}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \bar{\theta}_x^i \\ \bar{\theta}_y^i \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Dabei ist  $n$  die Zahl der Knoten pro Element,  $N_i(\xi, \eta)$  sind die zweidimensionalen Interpolationsfunktionen und die Indizes  $w$  und  $\theta$  deuten auf eine Approximation der Verschiebung in Dickenrichtung beziehungsweise der Verdrehungen hin.

#### 5.1.2 Verzerrungen und Spannungen in globalen kartesischen Koordinaten

Bei der Reissner-Mindlin Theorie sind zur Bestimmung des Biegepotentials die Krümmungen (s. Gl. (4.8))

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}]^T = \left[ \frac{\partial \theta_x}{\partial X}, \frac{\partial \theta_y}{\partial Y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial X} \right]^T \quad (5.4)$$

und für das Querschubpotential die Querschubverzerrungen

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_x, \gamma_y]^T = \left[ \frac{\partial w}{\partial X} + \theta_x, \frac{\partial w}{\partial Y} + \theta_y \right]^T \quad (5.5)$$

notwendig, die ohne Schwierigkeiten aus der diskretisierten Verschiebung und den diskretisierten Verdrehungen (5.3) ermittelt werden können.

Zur Berechnung der bezogenen Biegemomente

$$\mathbf{m} = [m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}]^T = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} \quad (5.6)$$

und der bezogenen Querkräfte

$$\mathbf{s} = [q_x, q_y]^T = \mathbf{D}_{qs} \boldsymbol{\gamma} \quad (5.7)$$

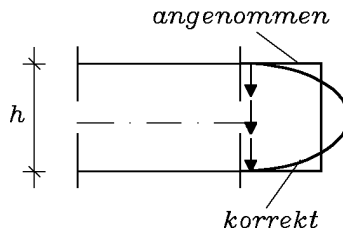
muß zuerst die allgemeine Form des vierstufigen, isotropen, linear elastischen Materialtensors (2.41) in eine den Verzerrungs- und Spannungsvektoren entsprechende Matrixdarstellung überführt und mit der Annahme verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung  $S^{33} = 0$  reduziert werden. Auf eine Darstellung des Materialgesetzes wird hier verzichtet, da eine auf eine natürliche Basis transformierte Form dieses Materialgesetzes für degenerierte Schalen notwendig und deshalb ausführlich in Kapitel 7.1.3 beschrieben ist. Für kartesische Koordinatensysteme läßt sich die Materialmatrix dann durch Einsetzen der Beziehung  $G^{ij} = \delta^{ij}$  in Gleichung (7.29) angeben. Die anschließende Integration über die Plattendicke (s. Gl. (4.12)) führt auf die gesuchte konstitutive Biegematrix

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

und auf die konstitutive Querschubmatrix

$$\mathbf{D}_{qs} = \kappa \mu h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Dabei gleicht der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  die Abweichungen der über die Dicke konstanten Querschubverzerrungen, die sich durch die Kinematik des Degenerationskonzeptes beziehungsweise der Reissner-Mindlin Theorie ergeben, gegenüber dem realen parabelförmigen Verlauf im Mittel aus, siehe Bild 5.1. Für Rechteckquerschnitte mit



**Bild 5.1:** Verteilung der Querschubspannungen  $S^{13}$  und  $S^{23}$  über den Querschnitt

isotropem Materialverhalten ergibt sich der Wert  $\kappa = 5/6$ .

### 5.1.3 Die Elementsteifigkeitsmatrix

Eine lineare Formulierung erhält man, wenn die schwache Form des Gleichgewichts (2.22) um den Punkt  $\bar{u} = 0$  entwickelt wird. Sie lautet in diskretisierter Form

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} \quad (5.10)$$

wobei sich die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  durch den Zusammenbau der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA + \int_A \mathbf{B}_{qs}^T \mathbf{D}_{qs} \mathbf{B}_{qs} dA \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \det \mathbf{J} d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{qs}^T \mathbf{D}_{qs} \mathbf{B}_{qs} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.11)$$

ergibt. Dabei verbindet die Operatormatrix  $\mathbf{B}_b$  die Variation der Krümmungen  $\delta \boldsymbol{\kappa}$  und die Operatormatrix  $\mathbf{B}_{qs}$  die Variation der Querschubverzerrungen  $\delta \boldsymbol{\gamma}$  mit dem variierten, generalisierten Elementknotenverschiebungsvektor  $\delta \mathbf{d}_e$ :

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \delta \mathbf{d}_e, \quad \delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_{qs} \delta \mathbf{d}_e, \quad (5.12)$$

mit

$$\delta \mathbf{d}_e = [\delta \bar{w}_1, \delta \bar{\theta}_x^1, \delta \bar{\theta}_y^1, \dots, \delta \bar{w}_n, \delta \bar{\theta}_x^n, \delta \bar{\theta}_y^n]^T. \quad (5.13)$$

Bei einer reinen Verschiebungsformulierung mit isoparametrischen Ansätzen nehmen nach Auswerten der Gleichungen (5.3) die Operatormatrix  $\mathbf{B}_b$  die Form

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial X} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial Y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_1}{\partial X} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial Y} & \frac{\partial N_n}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

und analog die Operatormatrix  $\mathbf{B}_{qs}$  die Form

$$\mathbf{B}_{qs} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & 1 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial X} & 1 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & 0 & 1 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial Y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

an.

In Gleichung (5.11) ist  $\det \mathbf{J}$  die Determinante der Jacobimatrix der isoparametrischen Abbildung

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Des Weiteren werden zur Bildung der Ableitungen der zweidimensionalen Interpolationsfunktionen über die Kettenregel

$$\frac{\partial N_i}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \quad (5.17)$$

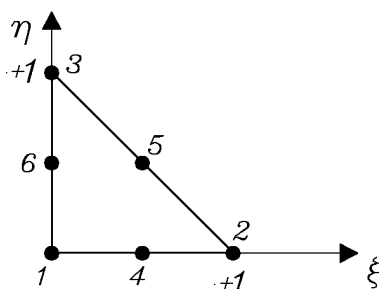
die Elemente der invertierten Jacobimatrix

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X} & \frac{\partial \eta}{\partial X} \\ \frac{\partial \xi}{\partial Y} & \frac{\partial \eta}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

benötigt.

## 5.2 Wahl der Ansatzfunktionen bei Dreieckelementen

Die Ansatzfunktionen von Dreieckelementen werden durch die natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  mit dem Ursprung in einer Elementecke (s. Bild 5.2) beschrieben und mit



**Bild 5.2:** Einheitsdreieck

$L_i(\xi, \eta)$  statt  $N_i(\xi, \eta)$  bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit werden lediglich Dreieckelemente mit vollständigen linearen

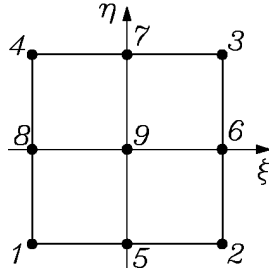
$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi, \eta) = \xi, \quad L_3(\xi, \eta) = \eta \quad (5.19)$$

aber auch mit unvollständigen quadratischen Ansatzfunktionen untersucht. Aufgrund der hierarchischen Natur dieser unvollständigen Ansatzfunktionen kann hier keine allgemeine Darstellung angegeben werden. Diese wird direkt für die betreffenden Elementbeschreibungen in den folgenden Unterkapiteln definiert.

## 5.3 Wahl der Ansatzfunktionen bei Viereckelementen

Die bei Viereckelementen üblichen Interpolationsfunktionen sind auf das Bi-Einheitselement mit den natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  in Elementmitte bezogen, Bild 5.3. In diesem Abschnitt werden nur Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad i = 1 \dots 4 \quad (5.20)$$



**Bild 5.3:** Bi-Einheitsquadrat

biquadratischen Serendipity Ansatzfunktionen

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) (\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i = 1 \dots 4$$

$$N_i = \frac{1}{2} \xi_i^2 (1 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{1}{2} \eta_i^2 (1 + \eta\eta_i) (1 - \xi^2) \quad i = 5 \dots 8$$
(5.21)

und biquadratischen Lagrange Ansatzfunktionen

$$N_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi\xi_i (1 + \xi\xi_i) + (1 - \xi^2) (1 - \xi_i^2) \\ \frac{1}{2} \eta\eta_i (1 + \eta\eta_i) + (1 - \eta^2) (1 - \eta_i^2) \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 9$$
(5.22)

betrachtet, wobei die Variablen  $\xi_i$  und  $\eta_i$  mit den natürlichen Koordinatenwerten des jeweiligen Knotens  $i$  übereinstimmen.

Im folgenden wird versucht, eine systematische Entwicklung der verschiedenen neueren Plattenelementformulierungen mit der in Kapitel 4.3.2 vorgenommenen Einteilung zu geben. Da für viele der in dieser Arbeit untersuchten Elemente bereits ausführliche Beschreibungen erhältlich sind, wird auf zur programmtechnischen Umsetzung notwendige Einzelheiten verzichtet und dazu auf die jeweils angegebene Literatur verwiesen.

## 5.4 Diskrete Kirchhoff Plattenelemente

Wie zuvor erwähnt, liegt allen sogenannten Diskreten Kirchhoff Plattenelementen die Reissner-Mindlin Theorie zugrunde. In Erweiterung werden in der vorliegenden Arbeit auch die Diskreten Schub Plattenelemente unter diesem Begriff eingeordnet, obwohl sie im Gegensatz zu den Diskreten Kirchhoff Elementen Deformationen durch Querschub berücksichtigen können. Da jedoch die beiden Methoden zugrunde liegenden Annahmen weitgehend identisch sind, erscheint diese Vorgehensweise gerechtfertigt.

### 5.4.1 DKT und DKQ Plattenelement

Die ursprüngliche Idee der Diskreten Kirchhoff Methode, die Kirchhoff Bedingung verschwindenden Querschubs an diskreten Stellen auszuwerten, wurde erstmals 1980

von Batoz [6] bei der Entwicklung des DKT Dreieck- beziehungsweise DKQ Viereck- elements einbezogen. Beide Elemente haben sich seither wegen ihrer ausgezeichneten Fähigkeiten bei der Berechnung dünner Platten auch im Einsatz in kommerziellen FE- Programmen etabliert. Eine detaillierte Herleitung kann z.B. [6] und [84] entnommen werden.

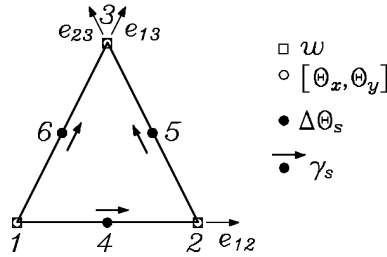
Ausgangspunkt der Entwicklung des Dreieckelements (DKT) ist die lineare Inter- polation der Geometrie (4.1) und der Verschiebung in Dickenrichtung

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 L_i(\xi, \eta) \bar{w}_i \quad (5.23)$$

sowie der unvollständige quadratische Ansatz für die Verdrehungen

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^3 L_i(\xi, \eta) \bar{\boldsymbol{\theta}}_i + 4L_1L_2 \mathbf{e}_{12} \Delta\theta_{s4} + 4L_2L_3 \mathbf{e}_{23} \Delta\theta_{s5} + 4L_3L_1 \mathbf{e}_{13} \Delta\theta_{s6}. \quad (5.24)$$

Die Richtung der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{ij}$  und die Definition der Verdrehungen  $\Delta\theta_{sk}$  um die Elementkanten  $k$  in Seitenmitte als Freiheitsgrade kann Bild 5.4 entnommen werden. Die Verdrehungsinterpolation (5.24) ist so gewählt, daß die Verdrehung um ei-



**Bild 5.4:** Freiheitsgrade des DKT Dreieckelements

ne Kantennormale linear und die Verdrehung um die zugehörige Kante quadratisch entlang dieser Kante verläuft. Mit der Bedingung, daß die Querschubverzerrung  $\gamma_{sk}$  entlang der Elementkante  $k$  an den Seitenmitten verschwindet, werden die Seitenfreiheitsgrade  $\Delta\theta_{sk}$  eliminiert:

$$\begin{aligned} \gamma_{sk} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_s = 0 \\ \rightsquigarrow \Delta\theta_{sk} &= \frac{3}{2l_{ij}} (\bar{w}_j - \bar{w}_i) - \frac{3}{4} \mathbf{e}_{ij}^T (\bar{\boldsymbol{\theta}}_i + \bar{\boldsymbol{\theta}}_j) \quad k = 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Damit gehen in die Funktion für die Rotationen nach Gleichung (5.24) auch die Knotenverschiebungen  $\bar{w}_i$  ein. Da dabei auch vor den Verschiebungstermen quadratische Funktionen stehen und die Rotationen als Verschiebungsableitungen aus der Kirchhoff Bedingung an den Eckknoten

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial X} + \theta_x = 0, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial Y} + \theta_y = 0 \quad (5.26)$$

hervorgehen, kann die DKT Formulierung als Resultat kubischer Verschiebungsansätze gedeutet werden, obwohl ein kubischer Ansatz explizit nicht vorliegt. Nach Einsetzen der neuen Funktionen für die Verdrehungen in Gleichung (4.8) und (4.9) kann die zugehörige Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor entwickelt werden. Das entsprechende Viereckelement (DKQ) beruht auf völlig analogen Überlegungen.

Beide Elemente haben sich in der Anwendungspraxis bewährt, sind sehr unempfindlich gegenüber Abweichungen von regelmäßigen Elementformen und lassen sich sehr effizient programmieren. Allerdings werden im Gegensatz zur Steifigkeitsmatrix sowohl der Lastvektor als auch die Massenmatrix mit der Annahme einer linearen Verschiebung nicht konsistent aufgestellt.

#### 5.4.2 DKQ4 Plattenelement

Zu einem konsistenten Lastvektor und einer konsistenten Massenmatrix führt ein 1994 von Zhang und Krätzig [41] vorgestelltes Viereckelement, das die gleiche Steifigkeitsmatrix wie das DKQ Element aufweist.

Bei der Herleitung des DKQ4 Plattenelementes werden für die Verschiebung und die Verdrehungen unvollständige quadratische Interpolationsfunktionen gewählt. Entsprechend dem DKQ Element wird gefordert, daß die Querschubverzerrung  $\gamma_{sk}$  entlang jeder Elementkante verschwindet. Diese Bedingung läßt sich durch Kollokation an jeweils zwei Gaußpunkten auf der Kante erfüllen. Die beim DKQ Element in den Verdrehungsansätzen enthaltene lineare Variation der Verdrehung um die Kantennormale  $\theta_n$  entlang jeder Seite ergibt sich hier durch Anwenden der Beziehung  $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf die quadratischen Anteile mit der Kantennormalen  $\mathbf{n}$ .

Somit wird eine gegenüber der ursprünglichen DKQ Formulierung konsistente Herleitung erhalten, die es erlaubt, auch in dem Lastvektor und in der Massenmatrix die quadratischen Ansätze zu berücksichtigen.

#### 5.4.3 DST Element

Da das DKT und das DKQ Element keine Querschubdeformationen darstellen können und deren Einsatz somit nur auf dünne Platten beschränkt ist, wurde von Batoz und Lardeur [8] 1989 das **D**iskrete **S**hear **T**riangle (DST) Dreieckelement entwickelt und damit die Diskrete Schub Methode begründet.

Die Wahl der Interpolationsfunktionen entspricht der des DKT Elementes. Abweichend davon wird die Querschubverzerrung an den Eckknoten und Seitenmittenknoten nicht identisch null gesetzt, sondern mit den Querkräften aus dem Gleichgewicht

$$q_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial Y}, \quad q_y = \frac{\partial m_{yy}}{\partial Y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial X}, \quad (5.27)$$

$$q_s = f(q_x, q_y) \quad \text{mittels Transformation}$$

wie folgt gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial w}{\partial X} + \theta_x = \frac{q_x}{\kappa \mu h}, & \gamma_y &= \frac{\partial w}{\partial Y} + \theta_y = \frac{q_y}{\kappa \mu h}, \\ \gamma_s &= \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_s = \frac{q_s}{\kappa \mu h}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Das DST Element ist bei dünnen Platten fast identisch mit dem DKT Element und kann zusätzlich Querschubdeformationen berücksichtigen. Allerdings entsteht aufgrund der Beziehung (5.28)<sub>3</sub> bei zunehmendem Einfluß der Querschubverzerrungen eine inkompatible Interpolation der Verdrehungen um die jeweilige Kante  $s$ . Somit erfüllt das DST Element den Patch-Test für konstante Krümmung für mäßig dicke Platten (ab einem Verhältnis der Länge einer Plattenseite zur Plattendicke  $L/h < 10$ ) nicht.

#### 5.4.4 DST-BK Element

Um dieses Manko des DST Elementes zu beheben, erweitern Batoz und Katili [7] 1992 den quadratischen Ansatz für die Rotationen um lineare und konstante Anteile. Die konstanten Anteile sind zunächst beliebig angenommen und werden dann an typischen numerischen Beispielen justiert. Da hier die Verschiebung linear statt kubisch entlang der Kanten interpoliert wird, genügt es, die Verdrehungen mit der Verschiebung an den Seitenmitten zu koppeln (Gl. (5.28)<sub>3</sub>).

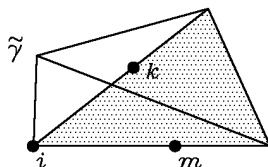
Das daraus resultierende DST-BK Dreieckelement erfüllt nun den Patch-Test für konstante Krümmung auch bei dicken Platten, somit ist dieses Plattenelement durchgängig zur Berechnung dünner und dicker Platten einsetzbar.

#### 5.4.5 DKMT und DKMQ Element

Eine weitere Variation des DST Elementes stellt die DKMT Dreieck- beziehungsweise DKMQ Viereckelementformulierung von Katili [38], [39] dar, die im Gegensatz zum DST-BK Element ohne eine Justierung von Parametern an numerischen Beispielen auskommt.

Basierend auf dem modifizierten Hu-Washizu Funktional mit einer Verschiebungs- und Verdrehungsinterpolation entsprechend dem DST Element ergibt sich eine Elementformulierung, der die Idee der Methode der angenommenen Verzerrungen zugrunde liegt. Die Interpolation der Querschubverzerrungen hat beim DKMT Dreieckelement die Form (s. Bild 5.5)

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x \\ \tilde{\gamma}_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 L_i(\xi, \eta) \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{sk} \\ \tilde{\gamma}_{sm} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$



**Bild 5.5:** Querschubverzerrungsinterpolation des DKMT Elementes

Das Viereckelement (DKMQ) beruht auf den klassischen Interpolationsfunktionen (7.78) von Hughes und Tezduyar [35], die in Kapitel 7.2.1 im Zusammenhang mit degenerierten Schalenelementen beschrieben sind. Analog zur Vorgehensweise bei den



DST Elementen werden anschließend die interpolierten Querschubverzerrungen  $\tilde{\gamma}$  den Querschubverzerrungen, die sich aus den konstitutiven Gleichungen (5.27) ergeben, an den Seitenmitten gleichgesetzt  $\tilde{\gamma}_s - \gamma_s = 0$ .

Das DKMT Dreieckelement und das DKMQ Viereckelement können Querschubdeformationen darstellen, sind durchgängig für dünne und dicke Platten einsetzbar und führen bei der Berechnung dünner Platten zu identischen Ergebnissen wie das DKT beziehungsweise DKQ Element.

## 5.5 Plattenelemente mit angenommenen Querschubverzerrungen

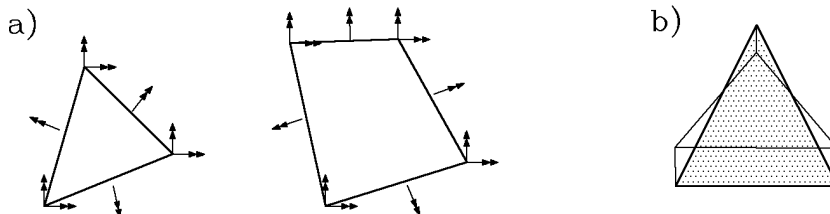
Die neuentwickelten Dreieck- und Viereckelemente basieren alle auf vier Bausteinen:

1. Linearer Verschiebungsansatz:  $w = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{w}_i$  bzw.  $w = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{w}_i$ .
2. Unvollständiger quadratischer Ansatz für die Rotationen  $\boldsymbol{\theta}$ .
3. Ansatz  $\tilde{\gamma}$  für die Querschubverzerrungen, linear oder konstant.
4. Kopplung der Querschubverzerrungen aus Ansatz  $\tilde{\gamma}$  mit den Querschubverzerrungen  $\boldsymbol{\gamma}$ , ermittelt aus Verschiebungen und Verdrehungen.

Der unvollständige quadratische Ansatz für die Rotationen wird hierarchisch formuliert, Bild 5.6, ist für Dreiecke in Gleichung (5.24) dargestellt und lautet für Vierecke:

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{\boldsymbol{\theta}}_i + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \mathbf{e}_{12} \Delta \theta_{s5} + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \mathbf{e}_{23} \Delta \theta_{s6} + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \mathbf{e}_{43} \Delta \theta_{s7} + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \mathbf{e}_{14} \Delta \theta_{s8}. \quad (5.30)$$

Die Querschubverzerrungen werden bei linearem Ansatz jeweils entlang einer Seite konstant gehalten.



**Bild 5.6:** a) Interpolationsvariable für Rotationen bei Drei- und Vierecken  
b) lineare Interpolation der Querschubverzerrungen für Dreiecke

Die Unterschiede der einzelnen Neuentwicklungen liegen im wesentlichen in der unterschiedlichen Vorgehensweise bei Punkt 3 und 4.

### 5.5.1 DRM und TLQL Plattenelement

Oñate und Zienkiewicz [48] verwenden für ihr Diskretes Reissner-Mindlin Element (DRM), im englischen Schrifttum auch unter der Bezeichnung TLQL Element (**T**riangle, **L**inear  $w$ , **Q**uadratic  $\theta$ , **L**inear  $\tilde{\gamma}$ ) bekannt, eine lineare Querschubinterpolation

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_\xi \\ \tilde{\gamma}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \eta & -\eta\sqrt{2} & \eta \\ \xi & \xi\sqrt{2} & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{s4} \\ \bar{\gamma}_{s5} \\ \bar{\gamma}_{s6} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

mit  $\bar{\gamma}_{sk}$  als den tangentialen Querschubverzerrungen entlang der Seite  $ij$  an den Seitenmittenknoten  $k$ . Die Kopplung nach Punkt 4 erfolgt über das Integral  $\int_0^{l_{ij}} (\tilde{\gamma}_s - \gamma_s) ds = 0$  entlang der Seite  $ij$  mit dem Ergebnis

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{\bar{w}_i - \bar{w}_j}{l_{ij}} + \frac{1}{2} (\bar{\theta}_{si} + \bar{\theta}_{sj}) + \frac{2}{3} \Delta\theta_{sk}. \quad (5.32)$$

Das Element besitzt demnach 12 Freiheitsgrade, d.h. neben den jeweils drei Freiheitsgraden an den Eckknoten auch jeweils einen Rotationsfreiheitsgrad an den Seitenmitten. Die Effizienz und Handhabbarkeit sind dadurch stark beeinträchtigt; das Element ist ansonsten robust und konvergiert gut.

Wird  $\bar{\gamma}_{sk} = 0$  gesetzt, so ergibt sich direkt das Diskrete Kirchhoff Dreieck (DKT) Element; dies bedeutet auch, daß das TLQL Element für dünne Platten zu identischen Ergebnissen wie das DKT Element führt.

Analog zum TLQL Dreieckelement läßt sich ein viereckiges Element, das QLQL Element von Oñate u. a. [85], entwickeln, das auch bezüglich seiner Eigenschaften – Robustheit, Konvergenz und Effizienz – gleich wie das entsprechende Dreieckelement zu beurteilen ist.

Auch bei den in Kapitel 5.4.5 beschriebenen DKMT und DKMQ Plattenelementen werden die Querschubverzerrungen entsprechend Gleichung (5.31) angenommen [38]. Dann werden die Rotationsfreiheitsgrade  $\Delta\theta_{sk}$  über Querkräfte an den Seitenmitten eliminiert, die sich in der üblichen Form aus den Querkraft–Momentenbeziehungen und den Momenten–Krümmungsbeziehungen ermitteln lassen. Somit ergibt sich

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{q_s}{\kappa\mu h} = -\frac{4}{3\kappa(1-\nu)} \left(\frac{h}{l_{ij}}\right)^2 \Delta\theta_{sk}. \quad (5.33)$$

Damit lassen sich auch beim DKMT/DKMQ Element die Krümmungen sowie die Querschubverzerrungen  $\tilde{\gamma}$  ausschließlich als Funktion der Knotenvariablen darstellen.

### 5.5.2 DRM3 Plattenelement

Eine Verbesserung des TLQL Elements mit den gleichen Knotenfreiheitsgraden wird von Papadopoulos und Taylor [49] dadurch erzielt, daß die Verschiebungen unvollständig kubisch interpoliert werden. Die dadurch zusätzlich eingeführten Variablen werden im Zuge der Kopplung nach Punkt 4, die hier durch Punktkollokation an den

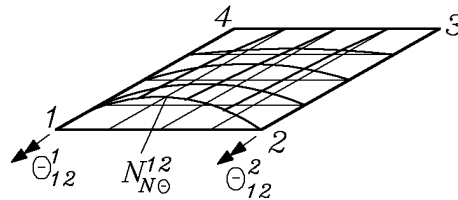
Seitenmittenknoten und den Eckknoten erfolgt, eliminiert. Das entwickelte DRM3 (3  $\hat{=}$  kubisch) Element besitzt eine zum TLQL Element identische Steifigkeitsmatrix aber einen anderen Lastvektor, in dem sich der kubische Ansatz bemerkbar macht, der bei groben Netzen zu leicht verbesserten Ergebnissen führt.

### 5.5.3 Q4BL und T4BL Plattenelement

Eine weitere Variante der Entwicklung wird von Zienkiewicz und Xu und Mitautoren [86] mit dem Q4BL Viereckelement sowie von Taylor und Auricchio [73] mit dem T3BL Dreieckelement vorgestellt. L (Linking) steht dafür, daß im Verschiebungsansatz

$$w = \mathbf{N}_w \cdot \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{N}_{w\theta} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} \quad \bar{\mathbf{w}}, \bar{\boldsymbol{\theta}} \dots \text{Eckknotenwerte} \quad (5.34)$$

neben den linearen Ansätzen  $\mathbf{N}_w$  auch unvollständige quadratische Ansätze  $\mathbf{N}_{w\theta}$  enthalten sind, die die Variablen  $\bar{\mathbf{w}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  verbinden.  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  wird (siehe Bild 5.7) jeweils



**Bild 5.7:** Unvollständiger quadratischer Ansatz für den Verbindungsanteil  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$

entlang der Seiten quadratisch und in der anderen Richtung linear interpoliert. Dies wird dadurch erreicht, daß die Rotationen linear mit einer zusätzlichen zum Elementmittelpunkt gehörigen quadratischen Funktion approximiert werden. Der Verlauf der Querschubverzerrungen  $\tilde{\gamma}$  wird im Element konstant angenommen. Die Funktionen  $\boldsymbol{\theta}$  werden so angepaßt, daß entlang jedes Randes die Bedingung  $\gamma_s = \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_s = \text{konstant}$  gesichert ist. Während das Q4BL Element geringfügig kinematisch ist, ist das T3BL Element robust. Wird das T3BL Element reduziert integriert, so ist es identisch mit dem Element von XU [82] und für dicke und dünne Platten gut geeignet.

### 5.5.4 ANS4 und QUAD9 Plattenelement

Die ersten Elemente der Elementfamilie, die auf der Methode der angenommenen Verzerrungen basiert, das ANS4 Plattenelement von Bathe und Dvorkin [5] und das QUAD9 Element von Huang und Hinton [32], sind seit längerem für ihre guten Eigenschaften bekannt und werden deshalb in dieser Arbeit zum Vergleich mit den neueren Elementformulierungen herangezogen.

Das 4-Knoten (ANS4) und das 9-Knoten Viereckelement weisen bilineare bzw. bi-quadratische Lagrange Interpolationen für die Verschiebung und die Verdrehungen auf, basieren auf einer Interpolation der Querschubverzerrungen entsprechend der Methode angenommenen Verzerrungen und benötigen ansonsten keine weitere Annahmen. Da beide Elemente direkt aus entsprechenden degenerierten Schalenelementen abgeleitet werden können, wird an dieser Stelle auf eine ausführliche Beschreibung verzichtet

und auf die in Kapitel 7.2.1 bzw. Kapitel 7.3.1 zugehörige vollständig beschriebene Schalenformulierung verwiesen.

Eine Verbesserung des Querschubverhaltens des ANS4 Elementes, das im englischen Schrifttum auch mit QLLL (**Q**uadrilateral, **L**inear  $w$ , **L**inear  $\theta$ , **L**inear  $\tilde{\gamma}$ ) bezeichnet wird, durch Modifikation des Schubkorrekturfaktors  $\kappa^*$  nach Gleichung (5.35) wird von Lyly und Stenberg [42] vorgeschlagen.

$$\kappa^* = \frac{1}{1 + \alpha \frac{l_{char}^2}{h^2}} \kappa \quad \begin{array}{ll} l_{char} & \dots \text{ charakteristische Länge im Element} \\ h & \dots \text{ Plattendicke} \end{array} \quad (5.35)$$

$\alpha$  ist ein frei wählbarer Faktor. Damit wird erreicht, daß der Querschubanteil an der Energie für dünne Platten weiter reduziert und das Element bei dünnen Platten flexibel wird. Der Faktor  $\alpha$  wird an wesentlichen Beispielen numerisch justiert. Mit  $\alpha \approx 0.1$  lassen sich üblicherweise gute Resultate für dünne Platten erzielen. Für dicke Platten ergeben sich dann nur unwesentliche Abweichungen von der korrekten Lösung, die mit zunehmender Netzverfeinerung verschwinden.

### 5.5.5 QUAD8 Plattenelement

Um den Unterschied zwischen Serendipity und Lagrange Interpolationsfunktionen beurteilen zu können, wird auch das von Huang und Hinton [32] vorgeschlagene 8-Knoten Plattenelement untersucht.

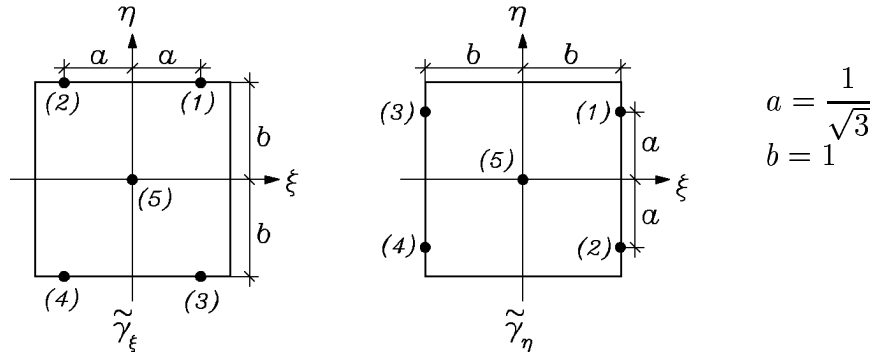
Dieses mit QUAD8 bezeichnete Element basiert auf den biquadratischen Serendipity Ansatzfunktionen (5.21) für die Verschiebung und Verdrehungen und weist für die Querschubverzerrung folgende Interpolation in natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auf:

$$\tilde{\gamma}_\xi = \sum_{i=1}^5 R_i(\xi, \eta) \bar{\gamma}_\xi^i, \quad \tilde{\gamma}_\eta = \sum_{i=1}^5 S_i(\xi, \eta) \bar{\gamma}_\eta^i \quad (5.36)$$

mit den Funktionen  $R_i(\xi, \eta)$  und  $S_i(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} R_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \sqrt{3}\xi) (1 + \eta) - \frac{1}{4} R_5(\xi, \eta) \\ R_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3}\xi) (1 + \eta) - \frac{1}{4} R_5(\xi, \eta) \\ R_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \sqrt{3}\xi) (1 - \eta) - \frac{1}{4} R_5(\xi, \eta) \\ R_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3}\xi) (1 - \eta) - \frac{1}{4} R_5(\xi, \eta) \\ R_5(\xi, \eta) &= (1 - 3\xi^2) (1 - \eta^2) \\ S_i(\eta, \xi) &= R_i(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Bei der angenommenen Querschubverzerrungsverteilung nach Gleichung (5.36) stellen  $\bar{\gamma}_\xi^i$  und  $\bar{\gamma}_\eta^i$  die auf das natürliche Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  transformierten Querschubverzerrungen aus der Kinematik (4.9) an den Stützstellen ( $i$ ) dar, siehe Bild 5.8.



**Bild 5.8:** Stützpunkte der angenommenen Verzerrungen beim Serendipity Element

## 5.6 Direkte Kirchhoff Plattenelemente

### 5.6.1 BPT Element

Ein vom Ansatz her sehr einfaches Dreieckelement, das das Differenzenverfahren mit- einbezieht, wird von Oñate und Cervera [47] vorgeschlagen. Hierbei werden die Verschiebungen nur mit Eckknotenwerten interpoliert und die Krümmungen  $\tilde{\kappa}$  konstant im Element angenommen. Als zentraler Punkt der Entwicklung ist die Einbringung der Krümmungs-Verschiebungsbeziehung in gewichteter Form zu betrachten:

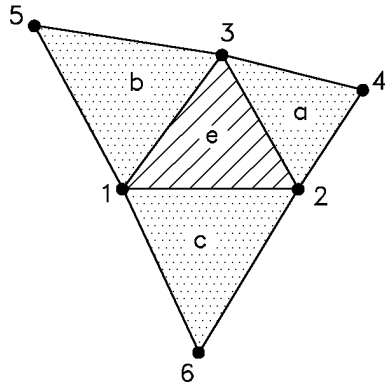
$$\int \int_A (\tilde{\kappa} - \mathbf{L}w) dA = 0, \quad \mathbf{L} = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial X^2}, -\frac{\partial^2}{\partial Y^2}, -2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \right]^T. \quad (5.38)$$

Wird der zweite Term auf ein Umfangsintegral transformiert, so gilt

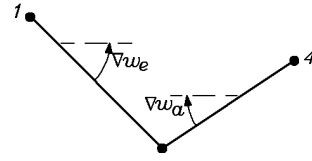
$$\int \int_A \tilde{\kappa} dA = \int_U \mathbf{T} \nabla w dU \quad (5.39)$$

mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  und den Verschiebungsableitungen  $\nabla w$  am Rand. Diese werden nun aus der Verschiebungsableitung des Elements sowie des an die betrachtete Seite angrenzenden Elements gemittelt, siehe Bild 5.9. Für die weitere Entwicklung wird auf [47] verwiesen.

Das BPT Elements besitzt zwar nur drei Freiheitsgrade, die Steifigkeitsmatrix ist aber nicht nur von den Freiheitsgraden des Elements, sondern auch von den Freiheitsgraden der Nachbarelemente abhängig. Das ansonsten einfache Prinzip ist im Rahmen eines Finite Element Programms nur umständlich zu verwirklichen und führt auch beim Einbau von Randbedingungen zu Schwierigkeiten. Wesentlich ist, daß das Element den Patch-Test für beliebige Elementformen nicht erfüllt und damit die Konvergenz für beliebige Elementformen nicht gesichert ist.



Zum Beispiel:



$$\nabla w = \frac{1}{2} (\nabla w_e|_2^3 + \nabla w_a|_2^3) \quad (5.40)$$

Bild 5.9: Mittelung von  $\nabla w$  am Rand für das Umfangsintegral

## 5.7 Anderen Methoden zuzuordnende, versteifungsfreie Plattenelemente

Zwei weitere erwähnenswerte Elemente, die jedoch nicht in die in dieser Arbeit vorgenommene Einteilung passen, sind die von Rust und Stein [58] und von Baumann und Schweizerhof [9] entwickelten Viereckelemente.

### 5.7.1 Allmann Viereckelement

Das von Rust und Stein [58] vorgeschlagene sogenannte Allmann Viereckelement ist ein reines Verschiebungselement basierend auf einem linearen Ansatz für die Verdrehungen und einem unvollständigen hierarchischen quadratischen Ansatz für die Verschiebungen, siehe Bild 5.10. Die Seitenmittenverschiebungen der Ränder lassen sich durch die

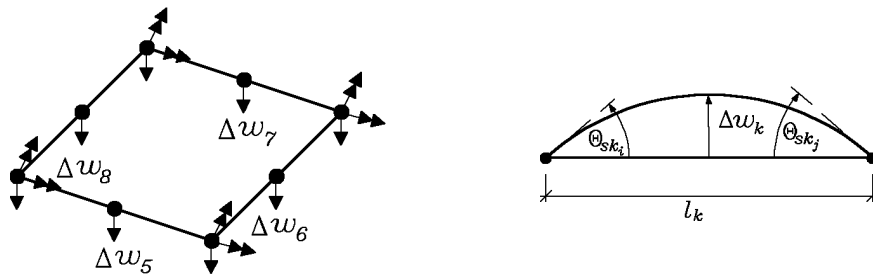


Bild 5.10: Unvollständiger quadratischer Verschiebungsansatz und Elimination der Seitenmittenfreiheitsgrade

Verdrehungen an den Eckknoten ausdrücken:

$$\Delta w_k = \frac{l_k}{8} (\theta_{skj} - \theta_{ski}) \quad (5.41)$$

Da das Element bei nicht regelmäßigen Formen zur Querschubversteifung neigt, ist hierfür die Verwendung eines modifizierten Schubkorrekturfaktors wie bereits für das ANS4 Element eingeführt (Gl. (5.35)) unumgänglich. Dieses Element ist besonders für das Multigradverfahren geeignet, da sich hierfür die Transferoperatoren gut entwickeln lassen.

### 5.7.2 MXD Plattenelement

Eine Verbesserung des Biegeverhaltens des QLL Elementes wird durch Einführung eines zusätzlichen bilinearen Ansatzes für die Biegespannungen im Sinne der Methode der angenommenen Spannungen (s. Kapitel 3.3.2) erreicht [68]. Baumann und Schweizerhof [9] erweitern den Spannungsansatz auch für den Querschubanteil und erhalten ein gemischt hybrides Element (MXD), das nur die Verschiebungen und Rotationen der Eckknoten als Freiheitsgrade enthält. Somit besitzt dieses Element einen bilinearen Ansatz für die Verschiebung, Verdrehungen, Biegespannungen und Querschubspannungen.

Eine sehr effiziente Formulierung läßt sich durch eine Ein-Punkt-Integration mit Rang zwei Aufdatierung gewinnen. Infolge der Spannungsansätze ist das Verhalten bei unregelmäßigen Elementformen besser als das des QLL Elementes.

## 6 Numerischer Vergleich der verschiedenen Plattenelementformulierungen

Der numerische Vergleich der Elemente erfolgt an zwei einfachen Beispielen. Hierbei stellt der Fall der rundum eingespannten Quadratplatte unter gleichförmiger Belastung einen kritischen Fall für Reissner-Mindlin Elemente dar, die bei diesem Beispiel infolge der Einschränkung der Verformungsmöglichkeiten eine ausgeprägte Neigung zur Querschubversteifung haben. Der zweite Fall der rhombusförmigen Platte besitzt eine Singularität in der stumpfen Ecke, außerdem weisen die Viereckelemente eine speziell verzerrte Gestalt auf. Wesentlich ist hierbei, monotone Konvergenz zu erzielen.

Vierecke		Dreiecke	
Typ	Autor	Typ	Autor
DKQ	Batoz [6]	DKT	Batoz [6]
DKQ4	Krätzig/Zhang [41]	BPT	Oñate/Cervera [47]
DKMQ	Katili [38]	DKMT	Katili [38]
ALL	Rust/Stein [58]	DST	Batoz/Lardeur [8]
MXD	Baumann/Schweizerhof [9]	DST-BK	Batoz/Katili [7]
ANS4	Bathe/Dvorkin [5]	SRI-X	Xu [82]
QUAD8	Huang/Hinton [32]	TLQL	Oñate/Zienkiewicz [85]
QUAD9	Huang/Hinton [32]	DRM3	Papadopoulos/Taylor [49]

Tabelle 6.1: Verwendete Plattenelemente

### 6.1 Eingespannte Quadratplatte unter gleichförmiger Last

In der FE-Berechnung wird aus Symmetriegründen nur ein Viertel der Platte diskretisiert, d.h. für zwei Ränder werden Symmetriebedingungen angesetzt. Die grundsätzli-

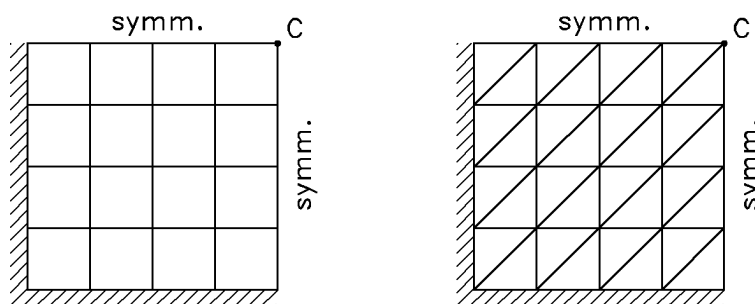


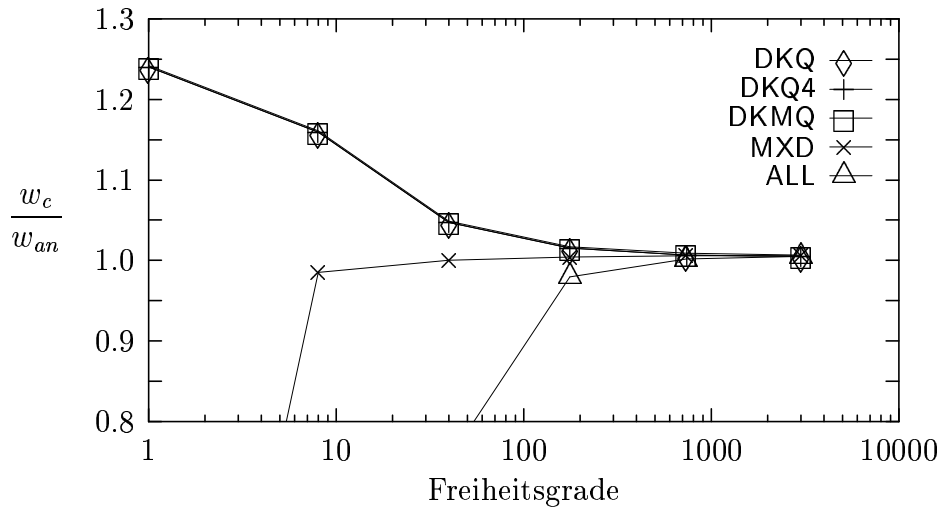
Bild 6.1: Regelmäßige FE-Netze für die Quadratplatte, hier  $N=8$

che Form der Netze für Viereck- bzw. Dreieckelemente ist in Bild 6.1 gegeben. Bei den Konvergenzuntersuchungen wird jeweils die Zahl der Elemente durch Halbierung der Seiten erhöht, wobei bei den Dreiecknetzen dann jeweils zwei Dreieckelemente einem Viereckelement entsprechen. Sofern nur Eckknotenfreiheitsgrade vorhanden sind, ist die Größe der Gleichungssysteme für beide Netze identisch.

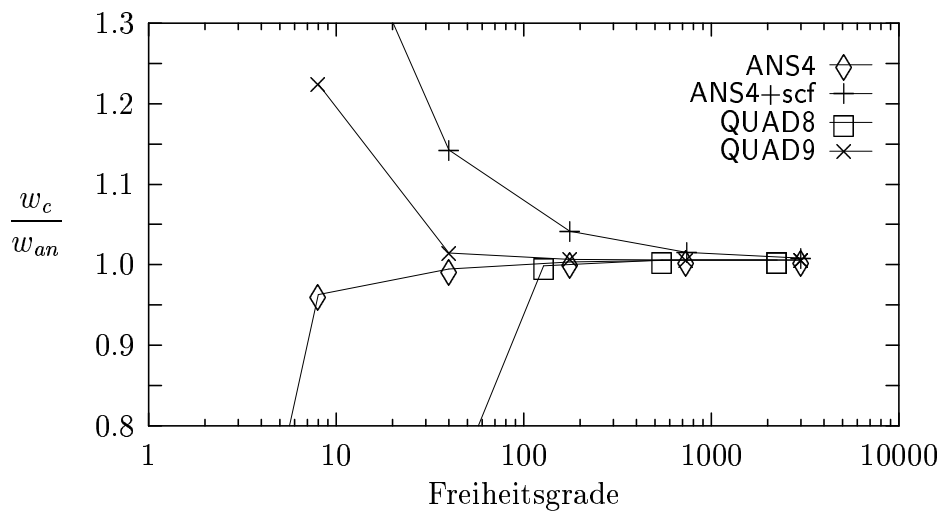


### 6.1.1 Dünne Platte

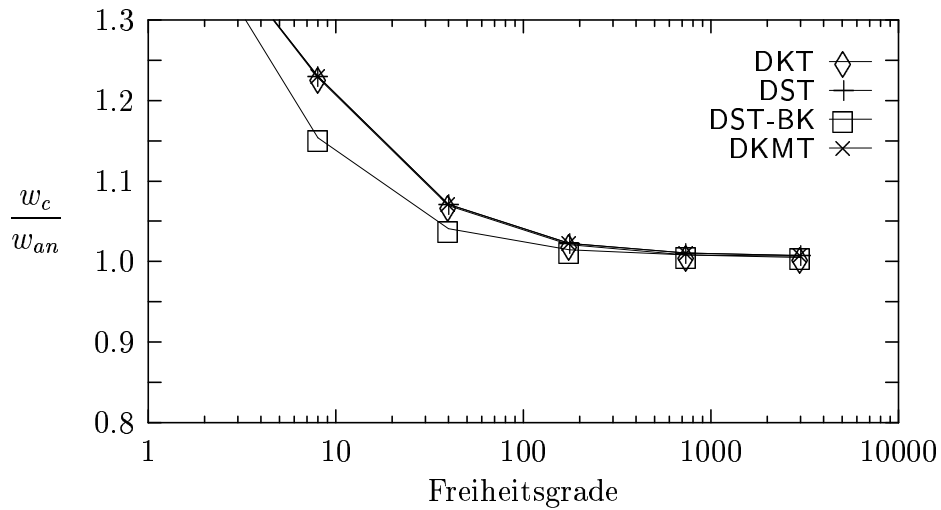
Verglichen wird zuerst die Konvergenz der Verschiebung des Mittelpunktes einer dünnen Platte mit  $l/h = 100$  für alle vorgestellten Elemente bei den dargestellten regelmäßigen Netzen (Bild 6.2 – 6.5). Die Mittendurchbiegung wird bezüglich der analytischen Lösung nach Timoshenko [75] normiert.



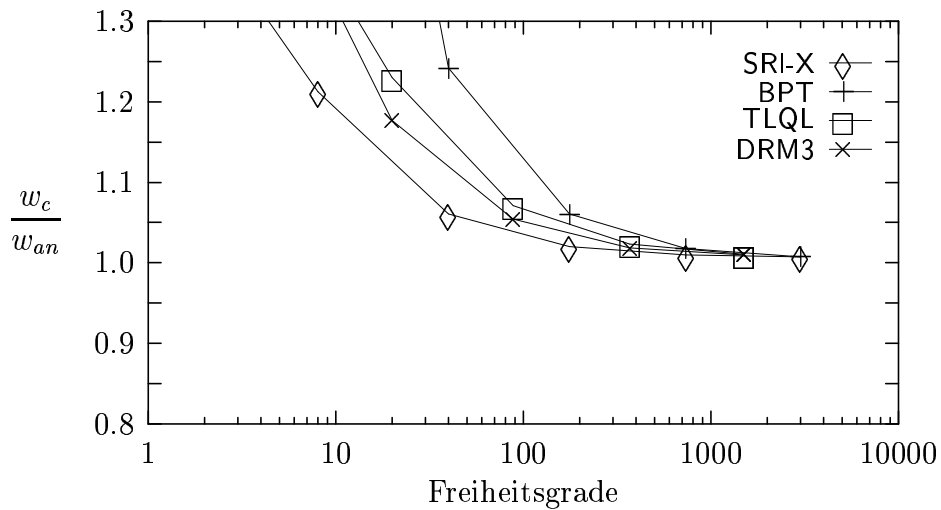
**Bild 6.2:** Konvergenz der Viereckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 100$



**Bild 6.3:** Konvergenz der Viereckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 100$

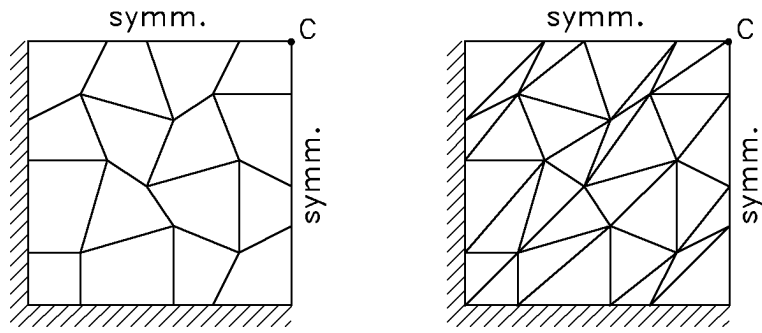


**Bild 6.4:** Konvergenz der Dreieckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 100$

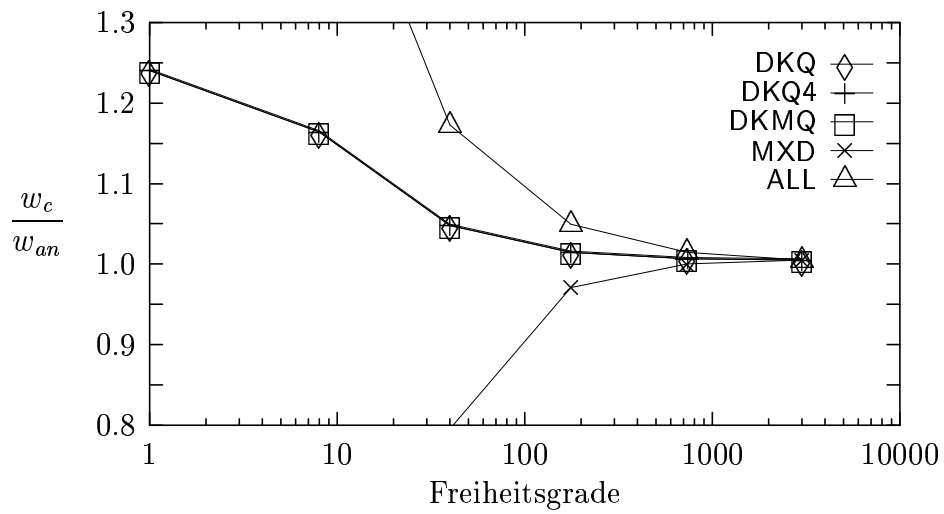


**Bild 6.5:** Konvergenz der Dreieckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 100$

Um die Robustheit der Elemente bei nicht regelmäßigen Elementformen zu untersuchen, werden die in Bild 6.6 dargestellten Netze mit entsprechender Verfeinerung verwendet. In den Bildern 6.7 - 6.10 ist das Konvergenzverhalten für alle diskutierten Plattenelemente dargestellt.



**Bild 6.6:** Unregelmäßige FE-Netze für die Quadratplatte, hier  $N=8$



**Bild 6.7:** Konvergenz der Viereckelemente für unregelmäßige Netze,  $l/h = 100$

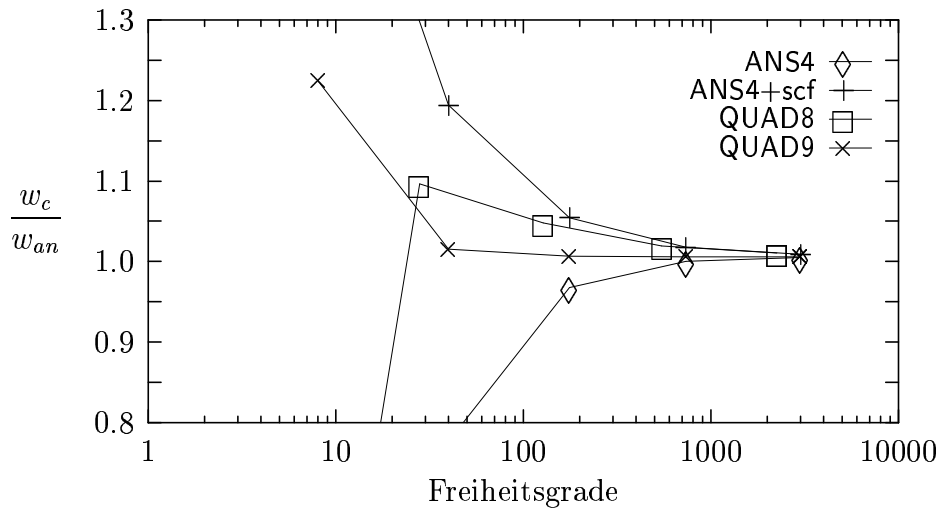


Bild 6.8: Konvergenz der Viereckelemente für unregelmäßige Netze,  $l/h = 100$

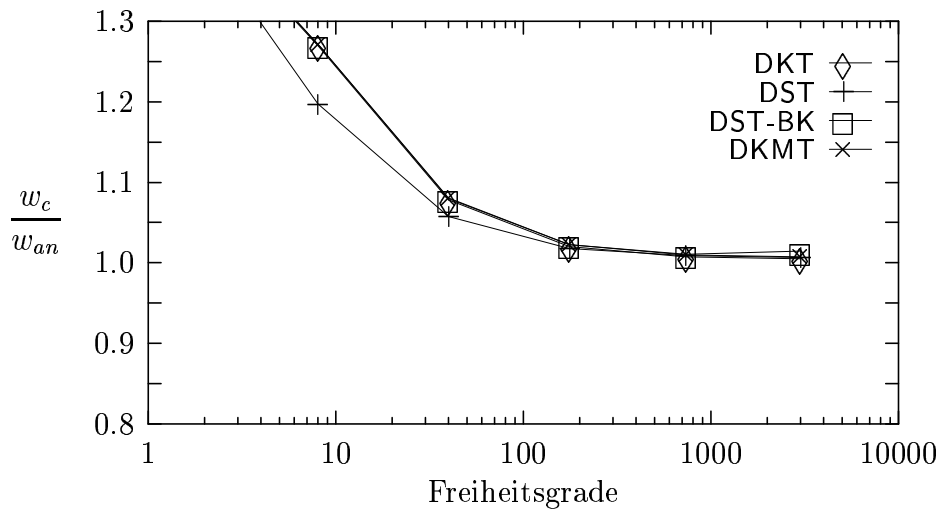
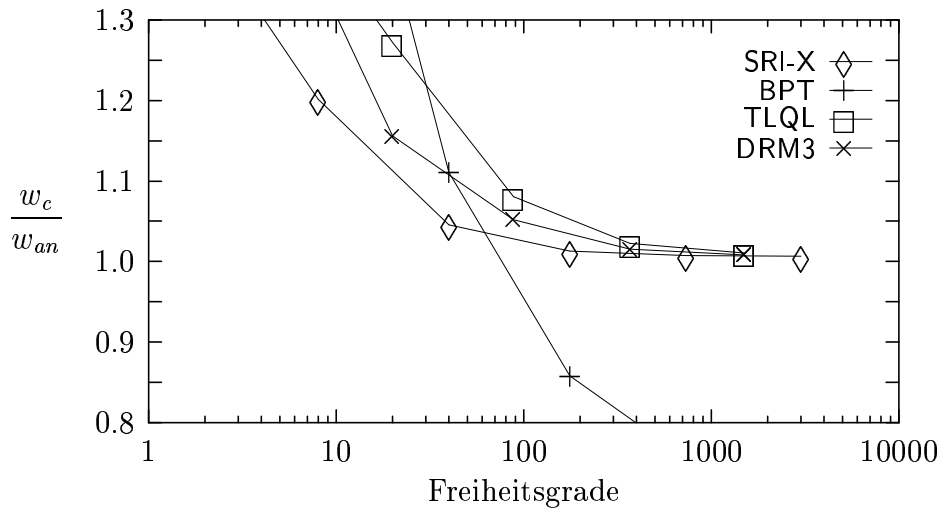
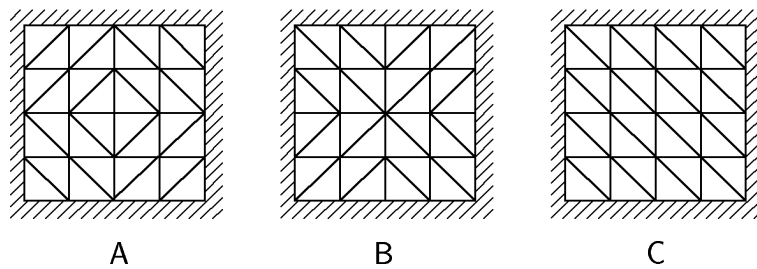


Bild 6.9: Konvergenz der Dreieckelemente für unregelmäßige Netze,  $l/h = 100$



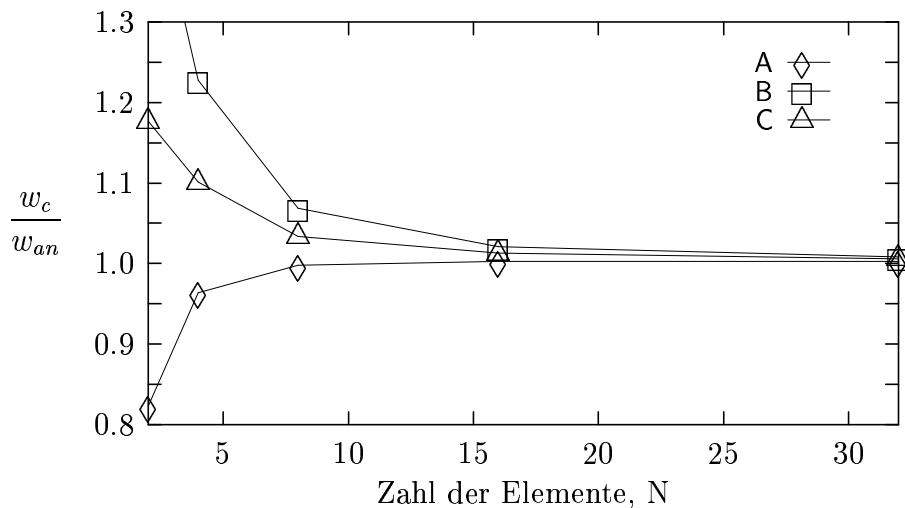
**Bild 6.10:** Konvergenz der Dreieckelemente für unregelmäßige Netze,  $l/h = 100$

Bei der Diskretisierung der Platte mit Dreieckelementen ergeben sich drei verschiedene Möglichkeiten, die Platte zu vernetzen, Bild 6.11. Die einzige Vernetzung, bei der



**Bild 6.11:** Verschiedene Netze bei Dreieckelementen

die gesamte Platte belastet wird, ist in Bild 6.11 (B) dargestellt. Bei den beiden anderen Vernetzungen werden die Elemente in den vier (A) bzw. zwei (C) Ecken nicht berücksichtigt, da alle Freiheitsgrade dieser Elemente festgehalten sind, und somit wird eine kleinere Platte mit entsprechend steiferen Ergebnissen berechnet. Der Einfluß der verschiedenen Diskretisierungen am Beispiel des DKT Elementes ist in dem folgenden Diagramm dargestellt, Bild 6.12.



**Bild 6.12:** Konvergenz der Dreieckelemente bei verschiedenen Elementausrichtungen,  $l/h = 100$

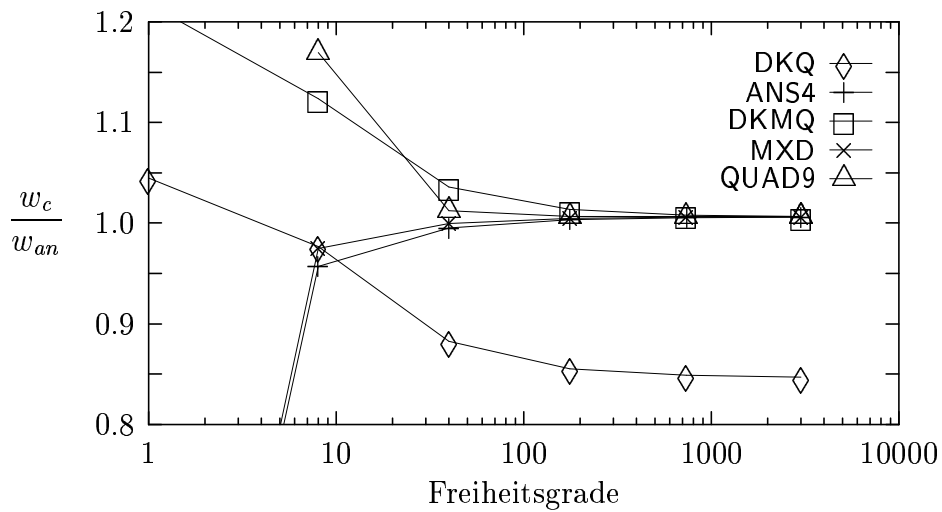
Aus den Konvergenzdiagrammen kann festgehalten werden, daß alle Elemente bis auf das BPT Element unabhängig von der Elementform zur korrekten Lösung konvergieren. Wie erwartet, ist das BPT Dreieckelement für beliebige Netzformen ungeeignet und wird daher in den folgenden Untersuchungen nicht weiter betrachtet. Bei regelmäßigen Netzen zeigen das ANS4 und das MXD Element das beste Konvergenzverhalten, beide sind aber etwas empfindlich gegenüber unregelmäßigen Elementformen. Alle Diskreten Kirchhoff Elemente bzw. Diskreten Kirchhoff-Mindlin Elemente DKQ, DKQ4, DKMQ, DST, DST-BK, DKT, DKMT, TLQL, DRM3 und das SRI-X Element von Xu sind fast völlig unempfindlich gegenüber unregelmäßigen Elementformen und zeigen ein sehr gutes Konvergenzverhalten.

Bei einer Erhöhung der Ansatzordnung stellt sich heraus, daß die Dreieckelemente mit Seitenmittenknoten TLQL und DRM3 deutlich ineffizienter als alle sonstigen Elemente sind und kaum bessere Ergebnisse bieten. Das dabei zu beobachtende leicht bessere Verhalten des DRM3 Elements gegenüber dem TLQL Element ist ausschließlich auf den besseren Lastvektor zurückzuführen. Aufgrund ihrer schlechten Eigenschaften werden diese Elemente bei den folgenden Untersuchungen nicht weiter berücksichtigt. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Viereckelemente, bei denen das quadratische Serendipity Element (QUAD8) mit Freiheitsgraden auf den Elementseiten deutlich schlechter konvergiert als das quadratische Lagrange Element (QUAD9) mit zusätzlichem Elementmittelknoten. Selbst das lineare Element mit angenommenen Querschubverzerrungen (ANS4) konvergiert besser als das quadratische Serendipity mit angenommenen Querschubverzerrungen (QUAD8).

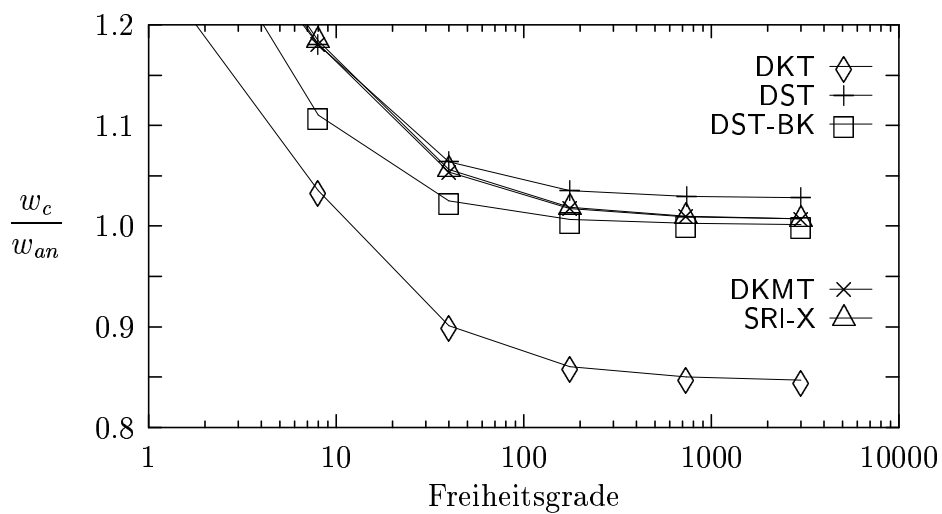
### 6.1.2 Mäßig dicke Platte

Analog zur dünnen Platte wird ein Vergleich der Elemente für eine mäßig dicke Platte mit  $l/h = 10$  für die wesentlichen Viereck- und Dreieckelemente mit ausschließlich Eckknotenfreiheitsgraden durchgeführt. Die Lösung wird zur Durchbiegung der dicken

Platte normiert. Zum Vergleich sind auch jeweils die Kurven für die Kirchhoff Lösung eingetragen. Diese liegt ca. 15% unterhalb der Lösung für die dicke Platte.



**Bild 6.13:** Konvergenz der Viereckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 10$

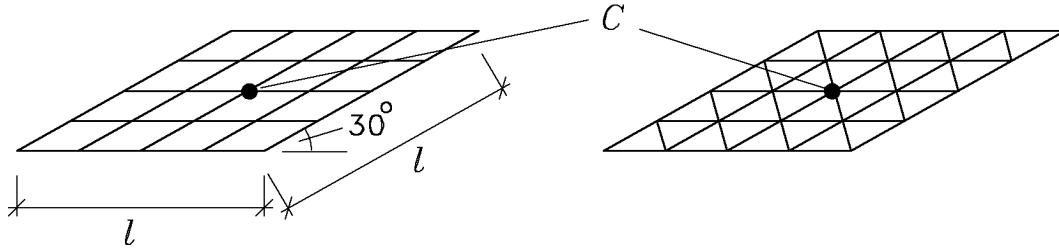


**Bild 6.14:** Konvergenz der Dreieckelemente für regelmäßige Netze,  $l/h = 10$

Wie bereits bei der Herleitung angesprochen, konvergiert das DST Element beim regelmässigen Netz zu einem ca. 2-3% und beim unregelmäßigen Netz zu einem ca. 7% höheren Wert. Dagegen konvergieren alle anderen Reissner-Mindlin Elemente sehr schnell. Es ist auch kein qualitativer Unterschied zwischen den ANS4, MXD Elementen und dem DKMQ Element zu bemerken, das biquadratische Lagrange Element (QUAD9) hingegen konvergiert etwas schneller.

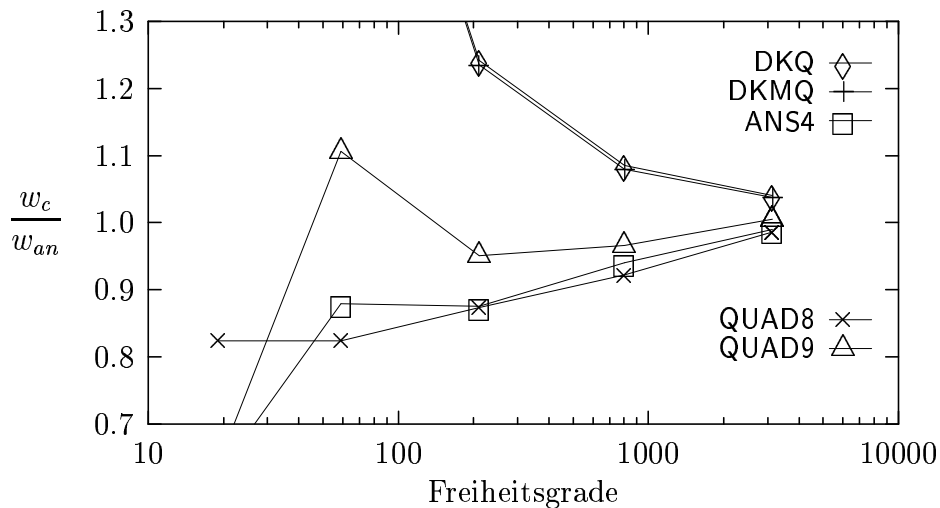
## 6.2 Gelenkig gelagerte Rhombusplatte nach Morley

Die Platte ist rundum gelenkig gelagert, dünn ( $l/h = 100$ ), besitzt eine Querdehnzahl  $\nu = 0.3$  und wird mit Netzen entsprechend den in Bild 6.15 dargestellten Formen berechnet. Hierbei ist festzustellen, daß die Vierecke stark von der optimalen Rechteck-



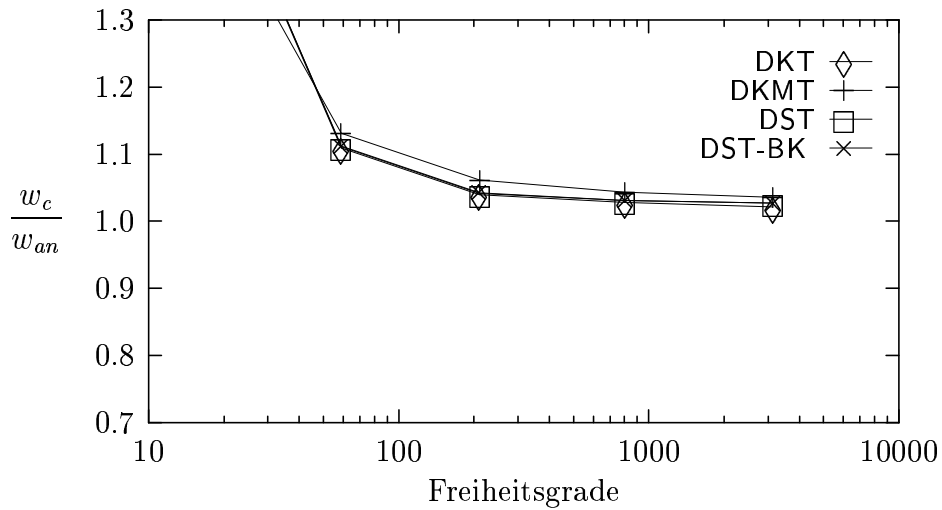
**Bild 6.15:** Geometrie und Vernetzung der Morley Platte, hier  $N=4$

form abweichen, während die Dreiecke nahezu optimal gleichseitig sind. In den Bildern 6.16 - 6.19 sind die Konvergenzkurven für die Mittendurchbiegung und das maximale Moment in Feldmitte bei Verwendung von Vier- und Dreieckelementen aufgetragen. Die Normierung erfolgt jeweils zur analytischen Lösung von Morley [45].

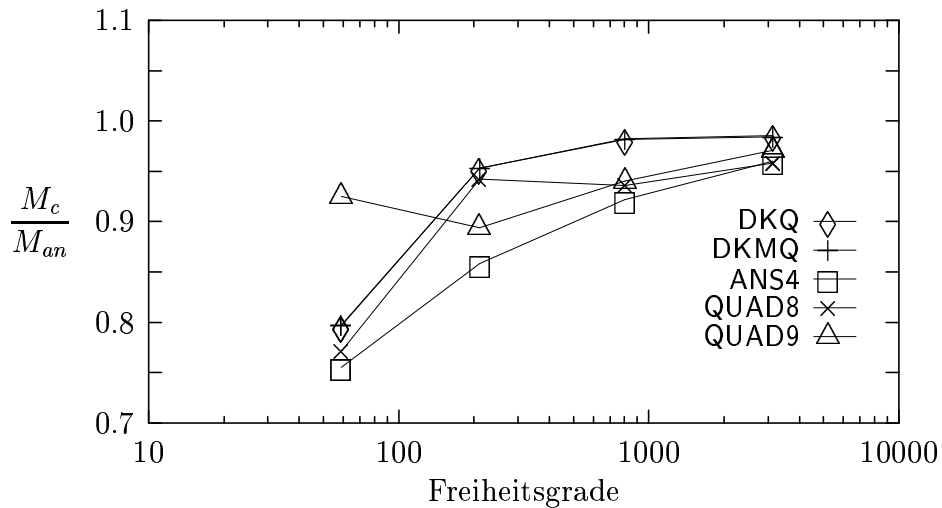


**Bild 6.16:** Konvergenz der Verschiebungen in Feldmitte für Viereckelemente



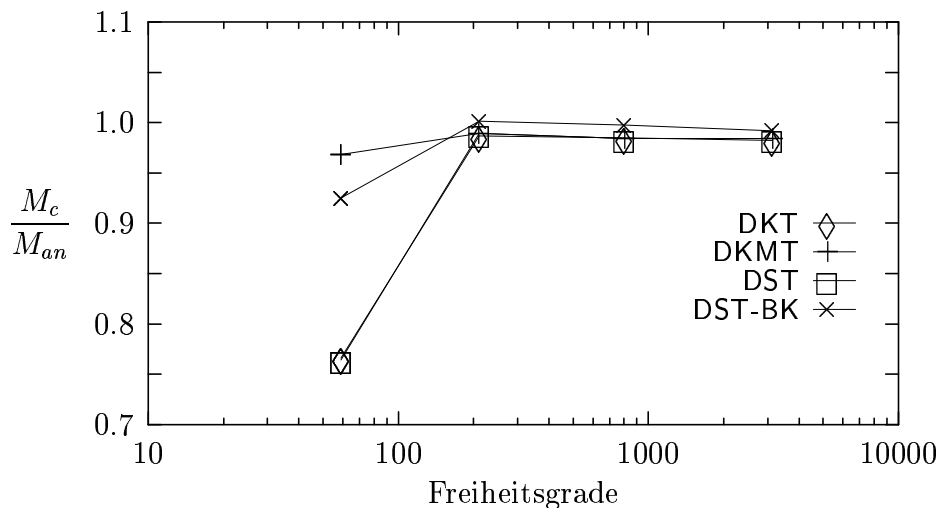


**Bild 6.17:** Konvergenz der Verschiebungen in Feldmitte für Dreieckelemente



**Bild 6.18:** Konvergenz der maximalen Momente in Feldmitte für Viereckelemente

Dabei zeigt sich, daß alle Dreieckelemente infolge der sehr guten Elementformen sehr schnell konvergieren. Dies gilt sowohl für die Verschiebungen als auch für die Momente. Allerdings muß beachtet werden, daß die Momente nicht durch eine Interpolation an den Elementknoten, sondern direkt an den Barlow Punkten ermittelt werden. Somit wird der besseren Verschiebungsapproximation bei einer Verfeinerung der Effekt überlagert, daß auch die Stelle, an der die Momente berechnet werden, gegen den Plattenmittelpunkt konvergiert. Da bei linearen Elementen der Barlow Punkt zur Ermittlung der Schnittgrößen in der Elementmitte liegt und demnach bei Dreieckelementen näher an der Plattenmitte, ist allein deswegen die Konvergenz der Momente bei Dreiecken besser als bei Vierecken.



**Bild 6.19:** Konvergenz der maximalen Momente in Feldmitte für Dreieckelemente

Wie zuvor zeigen die DKQ, DKMQ und ANS4 Elemente qualitativ ähnliche Konvergenzeigenschaften für die Verschiebungen, dagegen ist das ANS4 Element bei den Momenten deutlich schlechter. Es sei noch angemerkt, daß eine Modifikation des Schubkorrekturfaktors zu einer größeren Flexibilität des ANS4 Elements und keiner Verbesserung des Verhaltens bei den Verschiebungen führt, während die Konvergenz der Momente deutlich verbessert wird.

Eine Erhöhung der Ansatzordnung bei den Elementen mit angenommenen Querschubverzerrungen ANS4, QUAD8 und QUAD9 zahlt sich nur bei einer Verwendung von Lagrange Interpolationsfunktionen aus, was der Vergleich der Verschiebungen und Momente beim QUAD8 und QUAD9 Element deutlich belegt. Allerdings haben beide Elemente kein monotonen Konvergenzverhalten.

### 6.3 Zusammenfassung der Erkenntnisse für lineare Plattenelemente

Es hat sich gezeigt, daß das einzige Direkte Kirchhoff Element (BPT), das auf einer Vorgehensweise entsprechend dem Differenzenverfahren beruht, nur bei regelmäßigen Netzen zu brauchbaren Ergebnissen, bei unregelmäßigen Elementformen jedoch zu falschen Ergebnissen führt.

Sollen nur dünne Platten ohne Berücksichtigung der Querschubdeformationen untersucht werden, kann eine genaue und effiziente Berechnung mit den beiden Diskreten Kirchhoff Elementen (DKT, DKQ) durchgeführt werden. Eine Erweiterung des Diskreten Kirchhoff Dreieckelementes (DKT) zum Diskreten Schub Element (DST) führt bei einer dem DKT Element entsprechenden Interpolation der Verdrehungen zu kleinen Ungenauigkeiten bei der Berechnung mäßig dicker Platten. Dieser Mangel ist beim DST-BK Element behoben, indem zu der Interpolation der Verdrehungen konstante und lineare Anteile hinzugefügt werden, die dann einmalig an numerischen Beispielen justiert werden. Weitere, durchgängig für die Berechnung dünner und dicker

Platten einsetzbare Elemente sind das DKMT Dreieckelement und das entsprechende DKMQ Viereckelement, die zusätzlich zu angenommenen Querschubverzerrungen auf Annahmen der Diskreten Schub Methode basieren. Diese beiden Elemente sind einfach handhabbar, robust und effizient.

Die Übertragung der für Viereckelemente seit längerem erfolgreich angewandte Methode der angenommenen Verzerrungen auf Dreieckelemente, führt zu Elementen, die Freiheitsgrade auch an den Seitenmitten aufweisen (TLQL, DRM, DRM3). Somit sind diese Elemente schlecht handhabbar, weniger effizient und zusätzlich ist das Konvergenzverhalten nicht besser als das des DKMT Elementes mit Freiheitsgraden ausschließlich an den drei Eckknoten.

Demnach zeigt der Vergleich der verschiedenen Dreieckelemente, daß das DKMT Element am besten geeignet erscheint, ebene Schalenstrukturen zu berechnen, bei denen auch Deformationen durch den Querschub entstehen können. Da Facettenelemente, die aus einer Kombination einiger der hier untersuchten dreieckigen Plattenelementen mit dreieckigen Scheibenelementen entstehen, bereits von Haußer [31] ausführlich diskutiert wurden, wird an dieser Stelle lediglich auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Eine Gegenüberstellung der verschiedenen Dreieckelemente mit den entsprechenden Viereckelementen (DKT und DKQ, DKMT und DKMQ) zeigt, daß dreieckige Plattenelemente trotz des Vorteils vollständiger Ansatzfunktionen Viereckelementen hinsichtlich der Konvergenzeigenschaften und der Effizienz klar unterlegen sind. Zusätzlich weisen sie eine Vorzugsrichtung auf und reagieren daher sehr empfindlich gegenüber einer Änderung der Elementausrichtung bei der Diskretisierung.

Bei der Untersuchung der verschiedenen Reissner-Mindlin Viereckelementen mit dem Ziel, eine effiziente, einfach handhabbare und robuste Elementformulierung zu finden, die dann auf ein degeneriertes Schalenelement erweitert werden kann, stellt sich heraus, daß das auf der Methode der angenommenen Spannungen (MXD) und die auf der Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS4, QUAD8, QUAD9) basierende Elemente Ergebnisse aufweisen, die lediglich in wenigen Fällen durch eine Modifikation des Schubkorrekturfaktors geringfügig verbessert werden können. Auch das dem DKMT Dreieckelement entsprechende Viereckelement (DKMQ) führt lediglich auf ähnlich gute Ergebnisse.

Der Vergleich der beiden Elemente mit biquadratischen Ansatzfunktionen zeigt die wesentlich besseren Konvergenzeigenschaften des Lagrange Elementes (QUAD9) gegenüber dem Serendipity Element (QUAD8), das sogar noch schlechter als das entsprechende bilineare Element (ANS4) ist.

Aufgrund dieser Erkenntnisse werden bei der weiteren Untersuchung degenerierter Schalenelemente lediglich viereckige Elemente mit Lagrange Ansatzfunktionen betrachtet, denen entweder die Methode der angenommenen Verzerrungen oder die Methode der angenommenen Spannungen zum Vermeiden der Querschubversteifung zugrunde liegt.

## 7 FE-Diskretisierung: Degenerierte Schalenelemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung

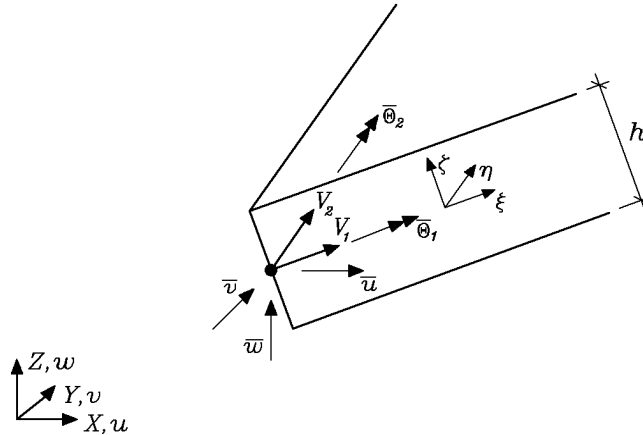
Am Anfang dieses Kapitels werden die Grundlagen für eine Finite Element Diskretisierung aller untersuchten degenerierten Schalenelemente dargestellt.

Anschließend wird die Diskretisierung ausgewählter, versteifungsfreier degenerierter Schalenelemente mit bilinearen, biquadratischen oder bikubischen Interpolationsfunktionen ausführlich beschrieben. Wie bereits in Kapitel 3.2 angesprochen, kann die Forderung, daß die Elementseiten in der unverformten Konfiguration senkrecht zur Referenzfläche ausgerichtet sein müssen, von Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen bei der Berechnung gekrümmter Strukturen nicht erfüllt werden. Deshalb soll der Vergleich von bilinear interpolierten mit biquadratisch interpolierten Schalenelementen klären, wie sich dieser Mangel zusammen mit der besseren Geometrie- und Verschiebungsapproximation des quadratisch interpolierten Elementes auf das Konvergenzverhalten und die Effizienz auswirkt. Zusätzlich sollen anhand verschiedener Schalenelementformulierungen mit bilinearen bzw. biquadratischen Ansatzfunktionen, die jeweils auf einer der in Kapitel 3.3 vorgestellten Methoden zum Vermeiden der Versteifungseffekte basieren, die Vorteile und Nachteile dieser einzelnen Methoden diskutiert werden. Die Diskretisierung bikubisch interpolierter Schalenelemente wird abschließend beschrieben, um zu untersuchen, ob eine weitere Erhöhung der Ansatzordnung von Vorteil ist.

### 7.1 Zur Diskretisierung degenerierter Schalenelemente

#### 7.1.1 Geometrie- und Verschiebungsinterpolation

Die unverformte Schalengeometrie (3.1) geht nach Diskretisierung in



**Bild 7.1:** Diskrete Geometrie eines degenerierten Schalenelementes

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \left\{ N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \zeta h_i N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} D_{1i} \\ D_{2i} \\ D_{3i} \end{pmatrix} \right\} \quad (7.1)$$

und das Verschiebungsfeld der degenerierten Schale (3.3) in

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= [u \ v \ w]^T \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \zeta h_i N_i(\xi, \eta) \left[ \begin{pmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ d_{3i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{1i} \\ D_{2i} \\ D_{3i} \end{pmatrix} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

über. Hierin kennzeichnen Größen mit Strich oben und Index  $i$  die Koordinaten und Verschiebungen,  $h_i$  ist die Dicke der Schale und  $D_{ji}$  bzw.  $d_{ji}$  sind die Komponenten  $j$  des jeweiligen Direktorvektors an jedem Knoten  $i$ . In dieser Arbeit sollen nur isoparametrische Formulierungen betrachtet werden, bei denen die Zahl der Knoten pro Element  $n$  und die zweidimensionalen Ansatzfunktionen  $N_i(\xi, \eta)$  in der Schalenebene für die Geometrieapproximation (7.1) identisch mit denen für die Verschiebungsapproximation (7.2) sind.

Bei der Zugrundelegung kleiner Rotationen, die bei linearen Problemstellungen immer und bei nichtlinearen manchmal auftreten, kann der Differenzvektor der Direktoren in der verformten und unverformten Konfiguration (Gl. (3.4))

$$\mathbf{d}_i - \mathbf{D}_i = \bar{\theta}_2^i \mathbf{V}_1^i - \bar{\theta}_1^i \mathbf{V}_2^i \quad (7.3)$$

durch eine Drehung  $\bar{\theta}_2^i$  um die Achse  $\mathbf{V}_1^i$  und  $\bar{\theta}_1^i$  um die Achse  $\mathbf{V}_2^i$  ermittelt werden. Aufgrund der Interpolation der längenbehafteten Vektoren  $h\mathbf{d} = f(\xi, \eta)$  und  $h\mathbf{D} = f(\xi, \eta)$  müssen die kartesischen Koordinatensysteme mit den Achsen  $\mathbf{V}_1^i$  und  $\mathbf{V}_2^i$  tangential an die Referenzfläche und dem unverformten Direktor  $\mathbf{D}_i$  als dritter Achse in Dickenrichtung nur an jedem Knoten nach dem in Bild 7.2 beschriebenen Algorithmus berechnet werden.

### 7.1.2 Berechnung der Direktoren in der verformten Konfiguration

Aus Gründen einer besseren Übersichtlichkeit wird im folgenden der den Knoten kennzeichnenden Index  $i$  weggelassen.

Die Annahmen, auf denen die Berechnung des verformten Direktors mit Beschränkung auf kleine Rotationen basiert,  $\sin \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1$ ,  $\sin \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2$  und  $\cos \bar{\theta}_1 = \cos \bar{\theta}_2 = 1$  können nicht beim Auftreten großer Rotationen verwendet werden. Dann tritt das Problem auf, daß die Berechnung des verformten Direktors nicht invariant gegenüber der Reihenfolge der beiden Drehungen um die Achsen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  ist. In dieser Arbeit wurden folgende Möglichkeiten betrachtet, den Direktor  $\mathbf{d}$  in der verformten Konfiguration zu ermitteln:

1. Drehung zuerst um die  $\mathbf{V}_1$ - und dann um die  $\mathbf{V}_2$ -Achse:

$$\mathbf{d} = \sin \bar{\theta}_2 \mathbf{V}_1 - \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 \mathbf{V}_2 + \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 \mathbf{D}. \quad (7.4)$$

2. Drehung zuerst um die  $\mathbf{V}_2$ - und dann um die  $\mathbf{V}_1$ -Achse:

$$\mathbf{d} = \cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2 \mathbf{V}_1 - \sin \bar{\theta}_1 \mathbf{V}_2 + \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 \mathbf{D}. \quad (7.5)$$

1. Bestimmung des Winkels zwischen dem unverformten Direktor und der globalen  $\mathbf{e}_3$ -Achse:

$$\varphi = \cos^{-1}(D_3)$$

2. Einführen eines Rotationsvektors:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}}{\|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}\|}$$

(Falls  $\mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{D}$  kollinear sind, wird  $\mathbf{r} = 0$  gesetzt)

3. Berechnung der Euler Parameter

$$q_0 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad q_i = r_i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

4. Bestimmung der Drehachsen als gedrehte globale  $\mathbf{e}_1$ - und  $\mathbf{e}_2$ -Achsen:

$$\mathbf{V}_1 = 2 \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - \frac{1}{2} \\ q_2 q_1 \\ -q_2 q_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = 2 \begin{pmatrix} q_1 q_2 \\ q_0^2 + q_2^2 - \frac{1}{2} \\ q_1 q_0 \end{pmatrix}$$

**Bild 7.2:** Algorithmus zur Bestimmung der lokalen kartesischen Koordinatensysteme

3. Mittelung aus den beiden obigen Verfahren:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \sin \bar{\theta}_2 (1 + \cos \bar{\theta}_1) \mathbf{V}_1 - \frac{1}{2} \sin \bar{\theta}_1 (1 + \cos \bar{\theta}_2) \mathbf{V}_2 + \cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 \mathbf{D}. \quad (7.6)$$

4. Bestimmung über einen Drehvektor nach Marsden und Hughes [43] :

$$\mathbf{d} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \bar{\theta}_2 \mathbf{V}_1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \bar{\theta}_1 \mathbf{V}_2 + \cos \varphi \mathbf{D} \quad (7.7)$$

$$\text{mit } \varphi = \sqrt{\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_2^2}.$$

Aufgrund der ausgeprägten Richtungsabhängigkeit, die bei einer Bestimmung des deformierten Direktors nach Verfahren 1 und 2 auftritt, sind diese beiden Verfahren nicht empfehlenswert. Auch die Mittelung dieser beiden Verfahren entsprechend der dritten Möglichkeit führt zu keinem vollständig zufriedenstellenden Ergebnis, so daß hier allein die Verwendung des Drehvektors, der im Bereich  $0 \leq \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2 \leq 2\pi$  singularitätenfrei ist, vorgeschlagen wird.

### 7.1.3 Verzerrungen und Spannungen bezogen auf konvektive Koordinaten

Eine getrennte Betrachtung der Verzerrungen und Spannungen in Dickenrichtung und parallel zur Referenzfläche erlaubt bei degenerierten Schalenelementen die Transformation der Verzerrungen und Spannungen auf ein lokales Koordinatensystem mit zwei Achsen tangential zur Referenzfläche und einer senkrecht dazu in Dickenrichtung. Dieses Koordinatensystem, das bei einer numerischen Integration an jedem Gaußpunkt aufgestellt werden muß, kann ein kartesisches oder ein schiefwinkliges sein. Da fast alle untersuchten Elemente auf angenommenen Verzerrungs- oder Spannungsfeldern in den natürlichen Koordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  basieren, wird ein konvektives Koordinatensystem mit im allgemeinen schiefwinkligen Basisvektoren gewählt, die in dem betrachteten Punkt tangential zu den krummlinigen natürlichen Koordinaten sind. Zur einfachen Darstellung der kovarianten konvektiven Basisvektoren in der unverformten

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} \quad (7.8)$$

und verformten Konfiguration

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \quad (7.9)$$

wird die Schreibweise  $\xi^1 = \xi$ ,  $\xi^2 = \eta$  und  $\xi^3 = \zeta$  eingeführt. Da zwischen den ko- und kontravarianten konvektiven Basisvektoren die Bedingung

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (7.10)$$

gilt, lassen sich die kontravarianten Basisvektoren mit Hilfe der kovarianten Metrikoeffizienten

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad (7.11)$$

und kontravarianten Metrik

$$[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1} \quad (7.12)$$

aus der Beziehung

$$\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j \quad (7.13)$$

berechnen. Weil bei der Herleitung des Degenerationskonzeptes davon ausgegangen wird, daß die natürliche Koordinate  $\zeta$  senkrecht auf der von den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  aufgespannten Fläche steht, ist der kovariante Basisvektor  $\mathbf{G}_3$  kollinear zu dem kontravarianten Basisvektor  $\mathbf{G}^3$  und dem Direktor  $\mathbf{D}$ . Deshalb verschwinden auch die Metrikoeffizienten

$$G^{\alpha 3} = G^{3\alpha} = G_{\alpha 3} = G_{3\alpha} = 0, \quad \text{mit } \alpha = 1, 2. \quad (7.14)$$

Zweckmäßig zur Auswertung des Potentials (3.7) ist der auf kontravariante konvektive Koordinaten transformierte Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (7.15)$$

und die zugehörigen 2. Piola-Kirchhoff Spannungen in dem entsprechenden kovarianten Koordinatensystem

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad (7.16)$$

da dann die konvektiven Basisvektoren aufgrund der Bedingung (7.10) keinen Beitrag zum Potential liefern.

### Der Green-Lagrange Verzerrungstensor in einer kontravarianten Basis

Zur Bestimmung der Verzerrungen in kontravarianten konvektiven Koordinaten wird von der allgemeinen Definition des Green-Lagrange Verzerrungstensors (2.3)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (7.17)$$

ausgegangen, wobei  $\mathbf{F}$  der Deformationsgradient (2.5) und  $\mathbf{I}$  die Metrik der unverformten Konfiguration ist. Die Transformation des Deformationsgradienten auf konvektive Koordinaten führt mit Hilfe des Deformationsgradienten in globalen Koordinaten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (7.18)$$

über einen Wechsel der Basis

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}^k) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{G}_l) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^l \quad (7.19)$$

und nach Einsetzen der entsprechenden Basisvektoren mit kleineren Umformungen auf die einfache Darstellung

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i. \quad (7.20)$$

Der zugehörige transponierte Deformationsgradient erhält dann die Form:

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i. \quad (7.21)$$

Durch Einsetzen des Deformationsgradienten (7.20) und des transponierten Deformationsgradienten (7.21) erhält man schließlich eine Darstellung des Green-Lagrange Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (7.22)$$

in der kontravarianten konvektiven Basis.

Für die spätere programmtechnische Umsetzung erscheint folgende weitere Umformung zweckmäßig, die durch Ausnutzen der Beziehung

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} = \mathbf{G}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i}, \quad (7.23)$$



den Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \mathbf{G}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \right) \quad (7.24)$$

und den linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \mathbf{G}_j \right) \quad (7.25)$$

jeweils in einer lokalen kontravarianten konvektiven Basis ergibt.

### Das linear elastische Materialgesetz in einer kovarianten Basis

Der Zusammenhang zwischen den kontravarianten Verzerrungen und kovarianten Spannungen lautet

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}, \quad (7.26)$$

wobei  $C^{ijkl}$  die Komponenten des auf das kovariante Basissystem transformierten vierstufigen linear elastischen isotropen Materialgesetzes (2.41) sind:

$$\mathbf{C}^{iv} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (7.27)$$

Bei den oben auftretenden Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.28)$$

bezeichnet  $E$  den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionszahl. Wird die Bedingung verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung  $S^{33} = 0$  eingebracht, kann die Normalverzerrung  $E_{33}$  als Funktion der Normalverzerrungen  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  berechnet werden. Damit lassen sich dann die Normalverzerrung und -spannung in Dickenrichtung aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung eliminieren, wodurch eine Reduktion des Materialgesetzes erreicht wird. Durch die bei degenerierten Schalen gewählte Anordnung der Komponenten des Verzerrungs- und Spannungstensors in Vektoren und unter Vernachlässigung der Metrikkoeffizienten  $G^{\alpha 3}$  und  $G^{3\alpha}$  folgt die Anordnung der Elemente des reduzierten vierstufigen Materialtensors in einer Matrix mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{red} = & \left( \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \begin{bmatrix} G^{11}G^{11} & G^{11}G^{22} & G^{11}G^{12} & 0 & 0 \\ G^{22}G^{11} & G^{22}G^{22} & G^{22}G^{12} & 0 & 0 \\ G^{12}G^{11} & G^{12}G^{22} & G^{12}G^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \mu \begin{bmatrix} 2G^{11}G^{11} & 2G^{12}G^{12} & 2G^{11}G^{12} & 0 & 0 \\ 2G^{12}G^{12} & 2G^{22}G^{22} & 2G^{21}G^{22} & 0 & 0 \\ 2G^{12}G^{11} & 2G^{22}G^{21} & G^{12}G^{12} + G^{11}G^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa G^{22}G^{33} & \kappa G^{21}G^{33} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa G^{33}G^{21} & \kappa G^{33}G^{11} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Der in obiger Gleichung auftretende Faktor  $\kappa$  ist ein Schubkorrekturfaktor, der dem durch die beim Degenerationskonzept angenommenen konstanten Querschubverzerrungen in Dickenrichtung gegenüber dem realen parabelförmigen Verlauf Rechnung trägt, und bei Rechteckquerschnitten den Wert  $\kappa = 5/6$  annimmt, siehe Bild 5.1.

#### 7.1.4 Vorabintegration in Dickenrichtung und Definition von Schnittgrößen

Eine effiziente, rein zweidimensionale degenerierte Schalenformulierung ergibt sich durch eine analytische Vorabintegration in Dickenrichtung. Dazu werden die Verzerrungen in einer kontravarianten konvektiven Basis (7.22) unter Berücksichtigung der Geometrie in der unverformten (3.1) und verformten (3.2) Konfiguration nach Potenzen der natürlichen Koordinate in Dickenrichtung  $\zeta$  angeordnet:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta} + \zeta\kappa_{\alpha\beta} + \zeta^2\rho_{\alpha\beta} \\ 2E_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha} \\ E_{33} &= \frac{1}{2}h^2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = 0. \end{aligned} \tag{7.30}$$

In obiger Gleichung nehmen griechische Indizes die Werte  $\alpha, \beta = 1, 2$ , lateinische Indizes die Werte  $i, j = 1, 2, 3$  an und

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{R,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{R,\beta} - \mathbf{X}_{R,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{R,\beta}) \tag{7.31}$$

sind die Membranverzerrungen,

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{h}{2}(\mathbf{x}_{R,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{R,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{R,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{R,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}) \tag{7.32}$$

die Krümmungen,

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{h^2}{2}(\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}) \tag{7.33}$$

die Krümmungen zweiter Art, die bei der Vorabintegration vernachlässigt werden, und

$$\gamma_{\alpha} = \mathbf{x}_{R,\beta} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{R,\beta} \cdot \mathbf{D} \tag{7.34}$$

die Querschubverzerrungen. Die Vernachlässigung der Krümmungen zweiter Art  $\rho_{\alpha\beta}$  ist bei dünnen Schalen erlaubt, führt bei dicken, gekrümmten Schalen jedoch auf falsche Ergebnisse und ist bei einer numerischen Integration in Dickenrichtung nicht erforderlich.

Damit geht die schwache Form des Gleichgewichts

$$\delta\Pi = \int_V \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{E} dV + \delta\Pi_{ext} = \int_V S^{ij} \delta E_{ij} dV + \delta\Pi_{ext} \tag{7.35}$$

in die Darstellung

$$\delta\Pi = \int_V [S^{\alpha\beta} (\delta\epsilon_{\alpha\beta} + \zeta\delta\kappa_{\alpha\beta}) + S^{\alpha 3} \delta\gamma_{\alpha}] dV + \delta\Pi_{ext} \tag{7.36}$$

über. Die notwendige Integration über das Volumen läßt sich mit den kovarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration (7.8)

$$dV = [(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3] d\xi d\eta d\zeta \quad (7.37)$$

nach Einführen eines Shiftertensors

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_R^i \quad \mathbf{G}_R^i \dots \text{Basisvektoren der Referenzfläche} \quad (7.38)$$

und weiteren komplexen Umformungen wie folgt angeben

$$dV = \mu \zeta dA. \quad (7.39)$$

Mit der Abkürzung  $\mu = \det \mathbf{Z}$  wird die Determinante des Shiftertensors bezeichnet, die vereinfachend bei dünnen Schalen meist zu eins gesetzt wird. Mit Hilfe der Definitionen der Normalkräfte

$$n^{\alpha\beta} = \int_{\zeta} S^{\alpha\beta} \mu d\zeta, \quad (7.40)$$

der Biegemomente

$$m^{\alpha\beta} = \int_{\zeta} S^{\alpha\beta} \zeta \mu d\zeta \quad (7.41)$$

und der Querkräfte

$$s^\alpha = \int_{\zeta} S^{\alpha 3} \mu d\zeta \quad (7.42)$$

ergibt sich schließlich die entsprechende Darstellung der schwachen Form

$$\delta\Pi = \int_A (n^{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta} + s^\alpha \delta\gamma_\alpha) dA + \delta\Pi_{ext}. \quad (7.43)$$

Allerdings sind bei mäßig dicken, stark gekrümmten Schalen und bei über die Elementdicke veränderlichen Materialgesetzen aufwendige Zusatzüberlegungen notwendig [17]. Da das langfristige Ziel einer materiell nichtlinearen Formulierung angestrebt ist, wird in dieser Arbeit lediglich der allgemeingültige Fall einer numerischen Integration in Dickenrichtung betrachtet.

### 7.1.5 Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor

Entsprechend Kapitel 2.5 lautet die diskrete Form des für den Einsatz bei einem Newton Lösungsalgorithmus linearisierten inkrementellen Gleichungssystems:

$$\mathbf{K}_{tang} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}. \quad (7.44)$$

Hierbei wird die globale Steifigkeitsmatrix durch Zusammenbau der einzelnen tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tang}^e &= \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (7.45)$$

und der globale Residualvektor durch Zusammenbau der Elementresidualvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} &= \mathbf{f}_{ext} - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \mathbf{f}_{ext} - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (7.46)$$

erhalten. In Gleichung (7.45) und (7.46) ist  $\det \mathbf{J}$  die Determinante der Jacobimatrix der isoparametrischen Abbildung

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

Für die weitere formale Darstellung ist es zweckmäßig, die Abkürzungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^1 & \dots & \mathbf{D}^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_e^1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_e^n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_e^i = \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_1^i \\ \bar{\theta}_2^i \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

und

$$\mathbf{D}^i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{21}^i & \frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{11}^i \\ 0 & N_i & 0 & -\frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{22}^i & \frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{12}^i \\ 0 & 0 & N_i & -\frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{23}^i & \frac{1}{2}\zeta h_i N_i V_{13}^i \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

für die Verschiebung und entsprechend für die Verschiebungsableitungen nach den natürlichen Koordinaten

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \quad (7.50)$$

einzuführen. Die Gleichungen (7.48) bis (7.50) sind lediglich für kleine Rotationen  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$  gültig, dann kann jedoch die aufgrund der sonst auftretenden Nichtlinearitäten

komplexe weitere Vorgehensweise kompakt beschrieben werden. Damit nimmt der Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die einfache Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \end{pmatrix}, \quad (7.51)$$

die zweistufige Operatormatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}$  die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\xi \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

und die dreistufige Operatormatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}$  die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} = [ \mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_3 \quad \mathbf{H}_4 \quad \mathbf{H}_5 ]^T \quad (7.53)$$

an. Die zweistufigen Untermatrizen  $\mathbf{H}_i$  ergeben sich in der lokalen kontravarianten Basis durch Auswerten der Matrizenprodukte zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi, & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta, & \mathbf{H}_3 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\eta & \mathbf{H}_5 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\xi. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Um bei großen Rotationen mit den Direktoren in der verformten Konfiguration nach Gleichung (7.4), (7.5), (7.6) oder (7.7) eine entsprechende Darstellung zu erzielen, werden abweichend die Abkürzungen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}_\xi$ ,  $\mathbf{D}_\eta$  und  $\mathbf{D}_\zeta$  über die Ableitung der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nach den generalisierten Elementknotenverschiebungen  $\mathbf{d}_e$  definiert:

$$\mathbf{D} = [ \mathbf{D}^1 \quad \dots \quad \mathbf{D}^n ] = \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^n} \right] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e} \quad (7.55)$$

und

$$\mathbf{D}_\xi = \frac{\partial \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e} \right)}{\partial \xi} \quad \mathbf{D}_\eta = \frac{\partial \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e} \right)}{\partial \eta} \quad \mathbf{D}_\zeta = \frac{\partial \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e} \right)}{\partial \zeta} \quad (7.56)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{D}^i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{1i}}{\partial \theta_1^i} & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{1i}}{\partial \theta_2^i} \\ 0 & N_i & 0 & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{2i}}{\partial \theta_1^i} & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{2i}}{\partial \theta_2^i} \\ 0 & 0 & N_i & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{3i}}{\partial \theta_1^i} & \frac{1}{2} \zeta h_i N_i \frac{\partial d_{3i}}{\partial \theta_2^i} \end{bmatrix}. \quad (7.57)$$

Die Auswertung der Verzerrungen erfolgt jetzt nach Gleichung (7.22), die zweistufige Operatormatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}$  lautet

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{g}_2^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{g}_1^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{g}_2^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{g}_2^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{g}_3^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{g}_1^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{g}_3^T \mathbf{D}_\xi \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

und die dreistufige Operatormatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}$  entspricht Gleichung (7.53). Allerdings enthalten die zweistufigen Untermatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{g}_1^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \xi} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{g}_2^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \eta} \\ \mathbf{H}_3 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{g}_1^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \eta} + \mathbf{g}_2^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \xi} \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{g}_2^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \zeta} + \mathbf{g}_3^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \eta} \\ \mathbf{H}_5 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{g}_1^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \zeta} + \mathbf{g}_3^T \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e^2} \right)}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (7.59)$$

zusätzlich zweite Ableitungen des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  nach den generalisierten Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}_e$ . Da sich diese dreifach indizierten zweiten Ableitungen nicht übersichtlich angeben lassen und bei nicht zu großen Rotationen ohnehin vernachlässigt werden können, wird in der vorliegenden Arbeit auf eine ausführliche Darstellung verzichtet und lediglich auf die Literatur verwiesen, z.B. Gebhardt [26].

Somit sind mit der Materialmatrix  $\mathbf{C}_{red}$  (7.29) aus dem vorangegangenen Abschnitt alle Größen zum Aufstellen der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementresidualvektors bei kleinen wie auch bei großen Rotationen bekannt.

### 7.1.6 Berücksichtigung einer verformungsabhängigen Druckbelastung

Die zu der Elementsteifigkeitsmatrix und zu dem Elementlastvektor durch eine verformungsabhängige Belastung mit einer konstanter Druckbeaufschlagung hinzukommenden Anteile werden beschrieben, da dies vor allem viele Referenzbeispiele [55]

der langfristig angestrebten Berechnungen mit nichtlinearen Materialgesetzen erfordern. Da verformungsabhängige Lasten im allgemeinen auch nicht konservative Lasten beinhalten können, die kein Potential besitzen, wird im Gegensatz zu den restlichen Abschnitten als Ausgangspunkt die Darstellung der schwachen Form nach Gleichung (2.22) gewählt. Dann erhält die linearisierte schwache Form nach einer Aufspaltung in innere und äußere Anteile entsprechend Gleichung (2.23) und Berücksichtigung der Anteile aus den äußeren Lasten bei der anschließenden Linearisierung die folgende Darstellung:

$$(DG_{int} + DG_{ext}) \cdot \Delta \mathbf{u} = -(G_{int} + G_{ext}), \quad (7.60)$$

die durch eine Trennung des Anteils aus der äußeren Belastung in einen verformungsabhängigen Anteil  $G_{ext}^p$  und verformungsunabhängigen Anteil  $G_{ext}^u$

$$G_{ext} = G_{ext}^p + G_{ext}^u \quad (7.61)$$

und mit der Bedingung  $DG_{ext}^u = 0$  weiter umgeformt werden kann

$$(DG_{int} + DG_{ext}^p) \cdot \Delta \mathbf{u} = -(G_{int} + G_{ext}^p + G_{ext}^u). \quad (7.62)$$

Im weiteren Verlauf werden lediglich die zusätzlichen, druckabhängigen Anteile  $G_{ext}^p$  und  $DG_{ext}^p$  betrachtet.

Der Vektor aus einer Druckbelastung mit konstantem Druck  $p_0$  ergibt sich wie folgt

$$\mathbf{p} = p_0 \mathbf{n} \quad (7.63)$$

mit dem Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}|} \quad (7.64)$$

der Schalenober- bzw. -unterfläche in der verformten Konfiguration. Der dadurch erhaltene, druckabhängige Anteil der schwachen Form

$$G_{ext}^p = -p_0 \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (7.65)$$

läßt sich durch den Übergang von globalen Koordinaten auf konvektive Koordinaten  $dA = |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| \, d\xi \, d\eta$  wie folgt darstellen:

$$G_{ext}^p = -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta. \quad (7.66)$$

Daraus ergibt sich auch der zusätzlich benötigte Linearisierungsoperator

$$DG_{ext}^p \cdot \Delta \mathbf{u} = -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \Delta \mathbf{u}_{,\eta} + \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta. \quad (7.67)$$

Durch den anschließend notwendigen Übergang auf eine diskretisierte Form mit der Einführung der Abkürzungen (7.48) und (7.50)

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}_e \quad \Delta \mathbf{u}_{,\xi} = \mathbf{D}_\xi \Delta \mathbf{d}_e \quad \Delta \mathbf{u}_{,\eta} = \mathbf{D}_\eta \Delta \mathbf{d}_e \quad (7.68)$$

und der bekannten Ableitungen der verformten Geometrie nach den  $\xi$  und  $\eta$  Koordinaten

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi} \quad \mathbf{x}_{,\eta} = \mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta} \quad (7.69)$$

erhält man den verformungsabhängigen äußeren Anteil der schwachen Form in diskreter Darstellung

$$\begin{aligned} G_{ext}^p &= -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \\ &= -\delta \mathbf{d}_e^T p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \quad (7.70)$$

und den zugehörigen Linearisierungsoperator

$$\begin{aligned} DG_{ext}^p \cdot \Delta \mathbf{u} &= -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \Delta \mathbf{u}_{,\eta} + \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \\ &= -\delta \mathbf{d}_e^T p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{D}_\eta + \mathbf{D}_\xi \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \, \Delta \mathbf{d}_e. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Somit sind die durch eine konstante Druckbelastung hinzukommenden, im allgemeinen unsymmetrischen Anteile zur Elementsteifigkeitsmatrix (7.45)

$$\mathbf{K}_e^p = -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{D}_\eta + \mathbf{D}_\xi \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \quad (7.72)$$

und zum Elementlastvektor (7.46)

$$\mathbf{f}_{ext}^p = -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) \, d\xi \, d\eta \quad (7.73)$$

bekannt.

### 7.1.7 Vereinfachungen bei der Geometrieingabe

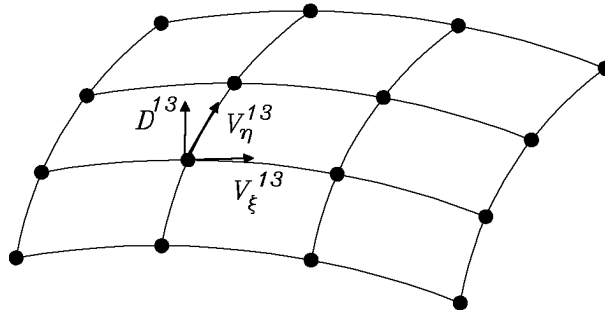
Der ursprünglichen Formulierung des Schalenelementes von Gebhardt [26] liegt zugrunde, daß an jedem Knoten der Referenzfläche die Koordinaten von der Schalenober- und -unterseite eingegeben werden müssen. Daraus lassen sich dann die Koordinaten der Referenzfläche und der Direktor des jeweiligen Knotens bestimmen. Eine deutlich einfachere Geometrieingabe beruht auf der direkten Eingabe der Koordinaten der Referenzfläche und der Dicke an jedem Knoten.



Zur Bestimmung der Direktoren eines einzelnen Elementes werden entlang der beiden natürlichen Koordinaten der Referenzfläche Polynomansätze in Vektorform

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\xi^i &= [\mathbf{a}_{n+1}\xi^n + \mathbf{a}_n\xi^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_1]_{\eta=\eta_i} \\ \mathbf{p}_\eta^i &= [\mathbf{b}_{n+1}\eta^n + \mathbf{b}_n\eta^{n-1} + \dots + \mathbf{b}_1]_{\xi=\xi_i} \end{aligned} \quad (7.74)$$

der Ordnung  $n$  definiert, die der Ansatzordnung des betrachteten Elementes entspricht. Die Koeffizientenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{b}_j$  werden mit Hilfe der Ortsvektoren zu den Knoten, die auf den Kurven  $\xi = \xi_i$  und  $\eta = \eta_i$  liegen, angepaßt. Dann lassen sich an jedem Knoten zwei Vektoren berechnen, die tangential an die von den natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  aufgespannten Ebene verlaufen, indem man die Polynomansätze  $\mathbf{p}_\xi^i$  und  $\mathbf{p}_\eta^i$  zuerst nach  $\xi$  beziehungsweise  $\eta$  ableitet und anschließend die Position des Knotens  $(\xi_i, \eta_i)$  einsetzt. Der Direktor des entsprechenden Knotens  $\mathbf{D}_i$  ergibt sich schließlich durch das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren, Bild 7.3. Allerdings muß darauf geachtet



**Bild 7.3:** Ermittlung der Direktoren am Beispiel eines 16 Knoten Elementes

werden, daß die Direktoren eines Elementes alle die gleiche Orientierung besitzen.

Diese Vorgehensweise soll kurz an dem Beispiel eines Elementes mit kubischen Ansatzfunktionen für den Knoten 13 mit der Position in natürlichen Koordinaten  $\xi = -1/3$  und  $\eta = -1/3$  verdeutlicht werden, Bild 7.7. Die Polynomansätze

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\xi &= \mathbf{a}_4\xi^3 + \mathbf{a}_3\xi^2 + \mathbf{a}_2\xi + \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{p}_\eta &= \mathbf{b}_4\eta^3 + \mathbf{b}_3\eta^2 + \mathbf{b}_2\eta + \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

mit den Koeffizientenvektoren  $\mathbf{a}_i$  aus den Gleichungen

$$\mathbf{p}_\xi(\xi = -1) = \mathbf{X}_R^{12}, \quad \mathbf{p}_\xi(\xi = -1/3) = \mathbf{X}_R^{13}, \quad \mathbf{p}_\xi(\xi = 1/3) = \mathbf{X}_R^{14}, \quad \mathbf{p}_\xi(\xi = 1) = \mathbf{X}_R^7$$

und den Koeffizientenvektoren  $\mathbf{b}_i$  aus

$$\mathbf{p}_\eta(\eta = -1) = \mathbf{X}_R^5, \quad \mathbf{p}_\eta(\eta = -1/3) = \mathbf{X}_R^{13}, \quad \mathbf{p}_\eta(\eta = 1/3) = \mathbf{X}_R^{16}, \quad \mathbf{p}_\eta(\eta = 1) = \mathbf{X}_R^{10}$$

ergeben die Tangentenvektoren der natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\xi^{13} &= \left. \frac{d\mathbf{p}_\xi}{d\xi} \right|_{\xi=-1/3} = \frac{1}{27}\mathbf{a}_4 - \frac{1}{6}\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{V}_\eta^{13} &= \left. \frac{d\mathbf{p}_\eta}{d\eta} \right|_{\eta=-1/3} = \frac{1}{27}\mathbf{b}_4 - \frac{1}{6}\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

Der gesuchte Direktor des Knotens 13 wird dann über das Kreuzprodukt

$$\mathbf{D}_{13} = \mathbf{V}_{\xi}^{13} \times \mathbf{V}_{\eta}^{13}$$

erhalten.

Natürlich könnte die Bestimmung der Direktoren auch direkt aus den zugrundeliegenden zweidimensionalen Ansatzfunktionen für die Geometrieapproximation erfolgen, jedoch mit größerem Berechnungsaufwand, d.h. die resultierende Elementformulierung ist ineffizienter.

Anschließend müssen auf globaler Ebene alle zu den verschiedenen an einem Knoten angrenzenden Elemente gehörende Direktoren gemittelt werden, um auch bei gekrümmten Strukturen eine Diskretisierung ohne Unstetigkeiten an den Elementgrenzen zu gewährleisten.

## 7.2 Bilineare degenerierte Schalenelemente

Degenerierte Schalenelemente mit bilinearen Ansatzfunktionen werden seit vielen Jahren intensiv untersucht, siehe z.B. Gebhardt [26]. Deshalb wird in diesem Abschnitt lediglich ein lang bekanntes Element beschrieben, daß sich durch seine herausragenden Eigenschaften bewährt hat. Zusätzlich wird eine bekannte Verbesserung dieses Elementes dargestellt.

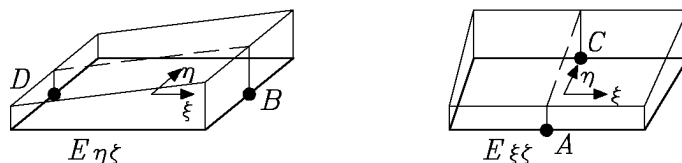
Degenerierte Schalenelemente mit bilinearen Lagrange Ansatzfunktionen

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 \pm \xi) (1 \pm \eta) \quad i = 1 \dots 4 \quad (7.75)$$

und einer reinen Verschiebungsformulierung neigen, wie schon in Kapitel 3.2.1 ausführlich erläutert wurde, zur Querschubversteifung.

### 7.2.1 ANS4 Element

Deshalb wurde die Methode der angenommenen Verzerrungen erstmals von Hughes und Tezduyar [35] auf ein degeneriertes Schalenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen angewendet. Da hierbei die transversalen Schubverzerrungskomponenten in dem



**Bild 7.4:** Angenommene Querschubverzerrungen

natürlichen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  Koordinatensystem angenommen werden und die restlichen Verzerrungen unverändert bleiben, hat sich die englische Bezeichnung „Assumed Natural Shear Strain“ durchgesetzt, die meist mit ANS abgekürzt wird. Der bilinearen

ANS Elementformulierung liegt eine in  $\xi$ -Richtung konstante und in  $\eta$ -Richtung linear veränderliche Approximation der angenommenen Querschubverzerrung  $E_{\xi\zeta}$

$$E_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}(1 - \eta)E_{\xi\zeta}^A + \frac{1}{2}(1 + \eta)E_{\xi\zeta}^C, \quad (7.76)$$

zugrunde. Dagegen wird die Verzerrung  $E_{\eta\zeta}$  konstant in  $\eta$ - und linear in  $\xi$ -Richtung

$$E_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}(1 - \xi)E_{\eta\zeta}^D + \frac{1}{2}(1 + \xi)E_{\eta\zeta}^B \quad (7.77)$$

angenommen, siehe Bild 7.4. Entsprechend der Darstellung in Kapitel 3.3.1 liegen dieser Approximation die Matrizen

$$\mathbf{Q}_{mb} = \mathbf{1}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{Q}_{qs} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \\ 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 \end{bmatrix} \quad (7.78)$$

und die Vektoren

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mb} = [ E_{\xi\xi} \quad E_{\eta\eta} \quad 2E_{\xi\eta} ]^T, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{qs} = [ E_{\eta\zeta}^A \quad E_{\zeta\xi}^B \quad E_{\eta\zeta}^C \quad E_{\zeta\xi}^D ]^T \quad (7.79)$$

zugrunde. Ein Vergleich der beiden Bilder 3.2 und 7.4 zeigt, daß diese Modifikation des bilinearen 4-Knoten Schalenelementes eine versteifungs- und kinematikenfreie Formulierung ergibt. Des weiteren zeigt sich, daß in  $\xi$  und  $\eta$  konstant angenommene Querschubverzerrungen mit Stützstelle am Elementmittelpunkt auf eine der selektiv reduzierten Integration des Querschubanteils entsprechende Formulierung führt.

Dieses degenerierte Schalenelement eignet sich sehr gut für effiziente, lineare und nichtlineare Berechnungen von Schalenstrukturen.

### 7.2.2 EAS4 Element

Obwohl bei bilinearen Schalenelementen lediglich eine leichte Versteifung bei linearem Verlauf der Membrannormalverzerrungen auftritt, kann das Verhalten des ANS4 Elementes bei Problemen, bei denen Membranspannungen dominieren, weiter verbessert werden. Die Anwendung der EAS Methode auf die Membran- und Biegeverzerrungen des bilinearen Schalenelementes wurde erstmals von Simo und Rifai [69] vorgestellt. Dabei werden nur die Membran- und Biegeverzerrungen entsprechend Gleichung (3.49) wie folgt erweitert:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} E_{\xi\xi} \\ E_{\eta\eta} \\ 2E_{\xi\eta} \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \tilde{E}_{\xi\xi} \\ \tilde{E}_{\eta\eta} \\ 2\tilde{E}_{\xi\eta} \end{pmatrix} \quad (7.80)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{12}^2 & t_{11}t_{12} \\ t_{21}^2 & t_{22}^2 & t_{21}t_{22} \\ 2t_{11}t_{21} & 2t_{12}t_{22} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{M}}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}_e. \quad (7.81)$$

Aufgrund der in die Orthogonalitätsbedingung (3.48) eingehenden Beziehung  $dV = \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta$  muß bei unregelmäßigen Elementformen die Determinante der Jacobimatrix  $\det \mathbf{J}$  bei der Interpolation berücksichtigt werden. Die Matrix  $\mathbf{T}$  als Ergebnis einer Transformation eines zweistufigen Tensors mit den Komponenten

$$t_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_\alpha^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{G}^\beta(0, 0, 0) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (7.82)$$

ist notwendig, damit die unabhängigen Parameter  $\alpha_e$  nicht von der Basis abhängen und an jeder Stelle im Element die gleichen Werte annehmen. Somit sind diese Parameter, die keinen Einfluß auf andere Elemente haben, auf den Elementmittelpunkt bezogen.

Der Matrix  $\hat{\mathbf{M}}$  liegt die Idee zugrunde, die Verzerrungen bilinear zu erweitern. Dann würde sich entsprechend dem bekannten inkompatiblen Scheibenelement von Wilson [79] folgende Matrix ergeben:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix}. \quad (7.83)$$

Nach Untersuchungen von Simo und Rifai [69] und Andelfinger und Ramm [3] sind die Verbesserungen durch die drei gemischten Terme  $\xi\eta$  jedoch unwesentlich, so daß die durch die Vernachlässigung dieser Terme erzielte Rechenzeitersparnis aufgrund der dann notwendigen Invertierung einer vierstufigen Matrix anstatt einer siebenstufigen Matrix deutlich dominiert [69], [3]. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß die mit der Matrix  $\hat{\mathbf{M}}$  erweiterten Verzerrungen die Orthogonalitätsbedingung (3.48) erfüllen und nicht in den kompatiblen Verzerrungen enthalten sind.

### 7.3 Biquadratische degenerierte Schalenelemente

Bei der Untersuchung von Platten hat sich bereits gezeigt, daß deutliche Verbesserungen des Elementverhaltens gegenüber dem bilinearen Schalenelement nur durch die Verwendung von biquadratischen Lagrange mit neun Knoten pro Element statt Serendipity Ansatzfunktionen mit acht Knoten erzielt werden können. Die Lage der neun Knoten, die als Stützstellen für die biquadratischen Lagrange Ansätze

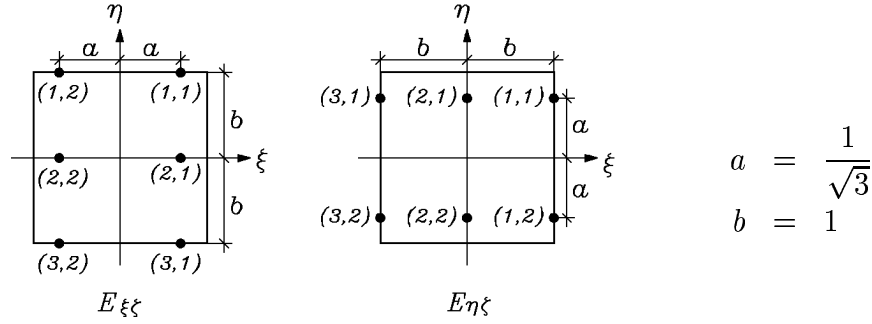
$$N_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi \xi_i (1 + \xi \xi_i) + (1 - \xi^2) (1 - \xi_i^2) \\ \frac{1}{2} \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i) + (1 - \eta^2) (1 - \eta_i^2) \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 9 \quad (7.84)$$

dienen, sind in Bild 5.3 dargestellt. Wie bereits in Kapitel 3.2.2 ausführlich erläutert, treten bei einer reinen Verschiebungsformulierung Membran- und Querschubversteifungseffekte auf, die durch Ansätze für Dehnungen und/oder Spannungen behoben werden können.

#### 7.3.1 QUAD9 Element

Eine vielversprechende, isoparametrische, degenerierte Schalenelementformulierung mit biquadratischen Lagrange Ansatzfunktionen wurde von Huang und Hinton [33] entwickelt.

Zur Vermeidung der Querschubversteifung wird die Methode der angenommenen Verzerrungen angewendet, wobei die von Bathe und Dvorkin [23] für das 4-Knoten Element verwendete Vorgehensweise zur Approximation der Querschubverzerrungen in natürlichen Koordinaten für biquadratische Elemente erweitert wird. Die Querschubversteifung läßt sich beim bilinearen Element vermeiden, indem die entlang ihrer Wirkungsrichtung linear veränderlichen, kompatiblen Verzerrungsanteile vernachlässigt, demnach die Verzerrungen konstant angenommen werden. Zusammengefaßt ergibt sich der approximierte Verlauf der Verzerrungen durch die Reduktion der kompatiblen Verzerrungsverläufe in Richtung ihrer Wirkung um eine Ordnung. Folglich werden bei



**Bild 7.5:** Stützstellen der Verzerrungsinterpolation des QUAD9 Elementes

biquadratischen Verschiebungsansätzen die Verzerrungen  $E_{\xi\xi}$  linear in  $\xi$  Richtung und quadratisch in  $\eta$  Richtung

$$E_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) E_{\xi\xi}^{(i,j)} \quad (7.85)$$

und die  $E_{\eta\eta}$  Komponente linear in  $\eta$  Richtung und quadratisch in  $\xi$  Richtung

$$E_{\eta\eta} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) E_{\eta\eta}^{(i,j)} \quad (7.86)$$

angenommen. Die Funktionen  $P_i$  und  $Q_i$  der obigen Verzerrungsfelder sind so gewählt, daß sie jeweils an einer Stützstelle den Wert eins und an den anderen den Wert null annehmen:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{z}{2} (z + 1) & Q_1(z) &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}z) \\ P_2(z) &= 1 - z^2 & Q_2(z) &= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}z) & z = \xi, \eta \\ P_3(z) &= \frac{z}{2} (z - 1). \end{aligned} \quad (7.87)$$

Im Gegensatz zu den Querschubverzerrungen werden die Membranverzerrungen  $E_{mx'x'}$  und  $E_{my'y'}$  in lokalen kartesischen Koordinaten, die parallel zur Referenzfläche ausgerichtet sind, ausgewertet. Dieses lokale kartesische Koordinatensystem in der unverformten Konfiguration kann wie folgt gewählt werden:

$$\mathbf{X}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right|}, \quad \mathbf{Z}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right|}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{X}' \times \mathbf{Z}'. \quad (7.88)$$

Somit muß in den Gleichungen (7.85) und (7.86)  $\xi$  und  $\eta$  formal durch  $x'$  und  $y'$  ausgetauscht werden. Zusätzlich wird die Membranschubverzerrung  $E_{mx'y'}$  als quadratische Funktion angenommen

$$E_{mx'y'} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_j(\xi) P_i(\eta) E_{mx'y'}^{(i,j)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) E_{mx'y'}^{(i,j)} \quad , \quad (7.89)$$

die aus einer Kombination der  $E_{mx'x'}$  und  $E_{my'y'}$  Interpolation hervorgeht. Allerdings wäre es der tabellarischen Untersuchung von Andelfinger [2] folgend besser, die Membranschubverzerrungen lediglich bilinear zu approximieren.

Auch hier kann auf die in Kapitel 3.3.1 eingeführte Matrixscheibweise übergegangen werden. Dann lassen sich die Verzerrungen durch die Matrizen mit den angenommenen Verzerrungsverläufen

$$\mathbf{Q}_{mb} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \frac{1}{2} \mathbf{Q}^1 & \frac{1}{2} \mathbf{Q}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{qs} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^2 \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

mit den im Anhang C.1 dargestellten Abkürzungen  $\mathbf{Q}^1$  und  $\mathbf{Q}^2$  und den Vektoren mit den Werten der Verzerrungen an den Stützstellen  $\bar{\epsilon}_{mb}$  und  $\bar{\epsilon}_{qs}$  berechnen.

Jedoch ist es im Gegensatz zu linearen Analysen bei geometrisch nichtlinearen Problemstellungen nicht möglich, die Verzerrungen in der Referenzebene in einen Membran- und Biegeanteil aufzuspalten. Doch tritt kein erkennbares Fehlverhalten bezüglich Konvergenzrate oder Effizienz auf, wenn die Biegeverzerrungen entsprechend den Membranverzerrungen angenommen werden.

Allerdings ist aufgrund der Approximation der Querschubverzerrung und der Verzerrungen parallel zur Referenzfläche an jedem Gaußpunkt und zusätzlich an jeder Stützstelle eine Transformation der Art

$$\mathbf{E}|_{x',y',z'} = \Theta \mathbf{E}|_{\xi,\eta,\zeta} \Theta^T \quad (7.91)$$

nicht vermeidbar. Die Transformationsmatrix

$$\Theta = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad (7.92)$$

setzt sich dabei aus der Transformationsmatrix vom globalen ins lokale kartesische Koordinatensystem

$$\mathbf{T} = [\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}']^T \quad (7.93)$$

und der inversen Jacobimatrix  $\mathbf{J}^{-1}$  zusammen. Mit der Orthogonalitätseigenschaft der Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (7.94)$$

nimmt die Transformationsmatrix für die Rücktransformation folgende Form an:

$$\Theta_R = \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}. \quad (7.95)$$

Da diese Transformationen sehr aufwendig sind, ist diese Elementformulierung besonders bei nichtlinearen Berechnungen recht ineffizient.

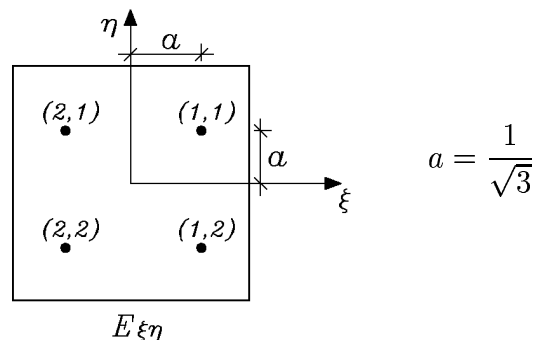
Diese Einschränkung läßt sich einerseits dadurch umgehen, indem statt der Approximation der Membranverzerrungen der Membrananteil reduziert integriert wird. Jedoch entstehen bei dieser Vorgehensweise unerwünschte Kinematiken und somit wird diese Variante nicht weiter in Betracht gezogen. Auch die beschriebene Vorgehensweise kann effizienter formuliert werden, wenn die notwendigen Transformationen vorab durchgeführt werden. Das heißt, der Anteil aus den Membran- und Biegespannungen und -verzerrungen muß in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem ausgewertet werden und im Gegensatz dazu der Anteil aus dem Querschub in lokalen konvektiven Koordinaten.

### 7.3.2 MITC9 Element

Eine weitere Möglichkeit, zu einer effizienten Formulierung zu gelangen, wurde von Bathe und Bucalem [20] vorgeschlagen und basiert wiederum auf der Methode der angenommenen Verzerrungen. Dabei wird die Approximation der Querschubverzerrungen unverändert von Huang und Hinton übernommen. Die Membran- und Biegeverzerrungen werden im Gegensatz zu der oben beschriebenen Vorgehensweise [33] entsprechend den Querschubverzerrungen in dem natürlichen Koordinatensystem approximiert. Dadurch werden die sehr rechenzeitintensiven Transformationen vermieden. Zusätzlich wird die Schubverzerrung  $E_{\xi\eta}$  parallel zur Referenzfläche so modifiziert

$$E_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Q_i(\xi) Q_j(\eta) E_{\xi\eta}^{(i,j)}, \quad (7.96)$$

daß sie jetzt bilinear über das Element verläuft und damit entsprechend der tabellarischen Untersuchung von Andelfinger [2] zu einer vollständig versteifungsfreien Elementformulierung führt.



**Bild 7.6:** Stützstellen der Verzerrungsinterpolation  $E_{\xi\eta}$  des MITC9 Elementes

Damit ändert sich in der Matrizendarstellung nur die Matrix

$$Q_{mb} = \begin{bmatrix} Q^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & Q^2 & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & Q^3 \end{bmatrix} \quad (7.97)$$

mit einer neu eingeführten Abkürzung  $\mathbf{Q}^3$  und dem Vektor mit den Werten an den Stützstellen  $\bar{\mathbf{e}}_{mb}$ , die beide im Anhang C.2 beschrieben sind.

### 7.3.3 SHEL9N Element

Eine andere Vorgehensweise basiert auf der in Kapitel 3.3.2 beschriebenen Methode der angenommenen Spannungen und wurde von Rhiu und Lee [57] auf degenerierte 9-Knoten Schalenelemente angewendet.

Der wesentliche Schritt in der Entwicklung eines Elementes mit angenommenen Spannungen besteht in der Wahl der Interpolationsmatrix  $\mathbf{P}$ , die bei Zugrundelegung eines linear elastischen Materialgesetzes in einen Membran- und Biegeanteil  $\mathbf{P}_{mb}$  und einen Querschubanteil  $\mathbf{P}_{ts}$  aufgespalten werden kann. Hier werden die Spannungsverläufe  $S^{\xi\xi}$  und  $S^{\eta\eta}$  in lokalen konvektiven Koordinaten durch unvollständige quadratische Funktionen und die Spannung  $S^{\xi\eta}$  durch eine bilineare Funktion approximiert. Damit ergibt sich durch Vernachlässigung der für die Versteifung verantwortlichen Spannungsanteile äquivalent zu dem MITC9 Element folgende Interpolationsmatrix für den Membran- und Biegeanteil

$$\mathbf{P}_{mb} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.98)$$

Die Querschubverzerrungen werden entsprechend durch die gleichen unvollständigen quadratischen Funktionen approximiert. Somit sind der Querschubanteil  $\mathbf{P}_{qs}$  und der Membran- und Biegeanteil  $\mathbf{P}_{mb}$  der Interpolationsmatrix  $\mathbf{P}$  bis auf das Fehlen der dritten Zeile identisch. Sowohl die Approximation der Membran- und Biegeverzerrungen als auch die Querschubverzerrungsinterpolation erfüllen die Babuska-Brezzi Bedingung (A.39) und somit ist eine kinematikenfreie Elementformulierung gewährleistet. Allerdings sind bei obiger Wahl der Interpolationsmatrix die Invertierung einer Matrix vierzehnter Ordnung auf Elementebene erforderlich, d.h. diese Formulierung ist sehr rechenzeitintensiv.

Eine deutlich effizientere Formulierung wird erhalten, wenn die angenommenen Spannungen ähnlich der EAS Methode in einen Anteil niederer und höherer Ordnung aufgespalten werden

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_k + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d} + \bar{\mathbf{P}}\boldsymbol{\beta}, \quad (7.99)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}_k$  die aus den Verschiebungen ermittelten kompatiblen Spannungen niederer Ordnung und  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  die erweiterten oder Spannungen höherer Ordnung sind. Das Einsetzen in das Hellinger-Reissner Funktional (3.16)

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \int_L \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B} dV\mathbf{d} - \boldsymbol{\beta}^T \int_L \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} dV\mathbf{d} + \boldsymbol{\beta}^T \int_H \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} dV\mathbf{d} \\ &\quad - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T \int_H \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{P}} dV\boldsymbol{\beta} + \Pi_{ext}(\mathbf{d}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{K}\mathbf{d} + \boldsymbol{\beta}^T \bar{\mathbf{G}}\mathbf{d} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T \bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\beta} + \Pi_{ext}(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (7.100)$$



mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_L \mathbf{BCB} \, dV, & \bar{\mathbf{H}} &= \int_H \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{P}} \, dV \\ \bar{\mathbf{G}} &= \int_H \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} \, dV - \int_L \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} \, dV \end{aligned} \quad (7.101)$$

führt nach Variation, Anwenden des Fundamentallemmas der Variationsrechnung und Kondensation der unbekannt Parameter  $\boldsymbol{\beta}$  zu der tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \mathbf{K} + \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \bar{\mathbf{G}}. \quad (7.102)$$

In obigen Gleichungen deuten die an den Integralen auftretenden Indizes auf eine reduzierte Integration mit 2x2x2 Gauß Punkten niedriger Ordnung (L) beziehungsweise auf eine volle Integration mit 3x3x2 Gauß Punkten höherer Ordnung (H) hin.

Auch die gewählte Interpolationsmatrix kann wieder in einen Membran- und Biegeanteil

$$\bar{\mathbf{P}}_{mb} = \begin{bmatrix} \xi\eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2\eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

und in einen Querschubanteil getrennt werden, der sich wieder nur durch das Fehlen der dritten Zeile unterscheidet. Diese Vorgehensweise, bei der nur noch die Inversion einer Matrix zweiter Ordnung notwendig ist, kann als reduzierte Integration mit Rang zwei Aufdatierung interpretiert werden.

Jedoch sind für die geometrisch nichtlineare Formulierung aufwendige Überlegungen notwendig, die hier nicht vorgestellt werden, da aufgrund der Notwendigkeit der Invertierung der Materialmatrix die Verwendung des Elementes bei allgemeinen Materialgesetzen – einem langfristigen Ziel – ohnehin stark eingeschränkt ist.

## 7.4 Bikubische degenerierte Schalenelemente

Um beurteilen zu können, wie sich eine weitere Erhöhung der Ordnung der Ansatzfunktionen auf das Verhalten degenerierter Schalenelemente auswirkt, werden in diesem Abschnitt zwei Elemente, die auf bikubischen Lagrange Ansatzfunktionen basieren

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{81}{256} \left( \xi^2 - \frac{1}{9} \right) \left( \eta^2 - \frac{1}{9} \right) (1 \pm \xi) (1 \pm \eta) & i = 1, 2, 3, 4 \\ N_i &= -\frac{243}{256} (\xi^2 - 1) \left( \eta^2 - \frac{1}{9} \right) \left( \frac{1}{3} \pm \xi \right) (1 \pm \eta) & i = 5, 6, 9, 10 \\ N_i &= -\frac{243}{256} (\eta^2 - 1) \left( \xi^2 - \frac{1}{9} \right) \left( \frac{1}{3} \pm \eta \right) (1 \pm \xi) & i = 7, 8, 11, 12 \\ N_i &= \frac{729}{256} (\xi^2 - 1) (\eta^2 - 1) \left( \frac{1}{3} \pm \xi \right) \left( \frac{1}{3} \pm \eta \right) & i = 13, 14, 15, 16 \end{aligned} \quad (7.104)$$

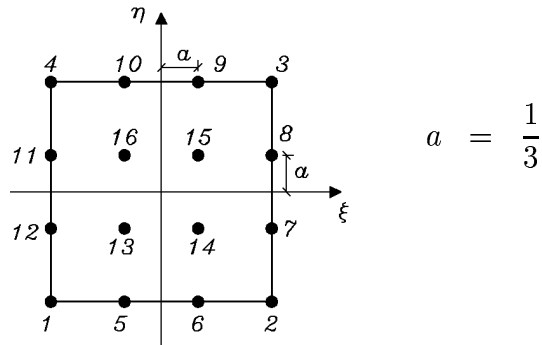


Bild 7.7: Lage der Knoten bikubischer Lagrange Formfunktionen

vorgestellt, siehe Bild 7.7. Im Gegensatz zu den Elementen mit niedrigeren Ansatzfunktionen weisen Berechnungen, die mit einem auf einer reinen Verschiebungformulierung basierenden 16-Knoten Schalelement (z.B. Ramm [53]) durchgeführt werden, nur bei stark gekrümmten Strukturen zu steife Ergebnisse, d.h. eine geringe Schubversteifung auf. Ansonsten zeigt dieses Element in den meisten Fällen ein gutes Konvergenzverhalten und ist aufgrund keiner weiteren Annahmen recht effizient.

#### 7.4.1 MITC16 Element

Um eine Elementformulierung zu entwickeln, die keinerlei Anzeichen zum Versteifen erkennen läßt, wird die Methode der angenommenen Verzerrungen in natürlichen Koordinaten auf das bikubische Element von Bathe und Bucalem [20] mit der gleichen Entstehungsidee der Interpolationsfunktionen wie bei den entsprechenden bilinearen oder biquadratischen Elementen übertragen. Dann lauten die angenommenen Quer-

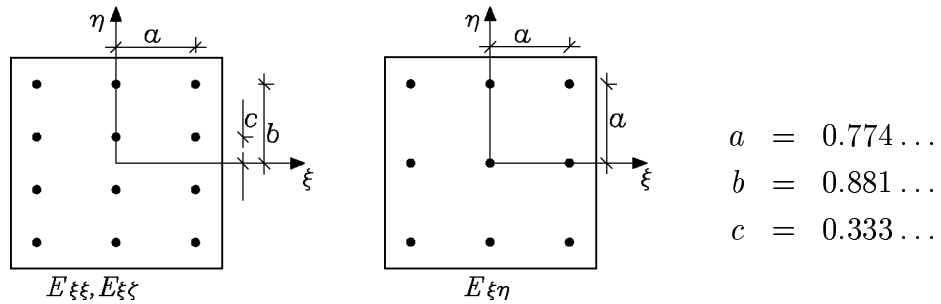


Bild 7.8: Stützstellen der Verzerrungsinterpolation des MITC16 Elementes

schubverzerrungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 E_{\xi\xi} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P_i(\eta) Q_j(\xi) E_{\xi\xi}^{(i,j)} & E_{\eta\eta} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P_i(\xi) Q_j(\eta) E_{\eta\eta}^{(i,j)} \\
 E_{\xi\zeta} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P_i(\eta) Q_j(\xi) E_{\xi\zeta}^{(i,j)} & E_{\eta\zeta} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P_i(\xi) Q_j(\eta) E_{\eta\zeta}^{(i,j)} \\
 E_{\xi\eta} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_i(\xi) Q_j(\eta) E_{\xi\eta}^{(i,j)} & &
 \end{aligned} \quad (7.105)$$

Wie zu erkennen ist, werden die Querschubverzerrungen und die normalen Membran- und Biegeverzerrungen quadratisch entlang der einen natürlichen Koordinate und kubisch entlang der anderen interpoliert. Entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 7.3.1 werden die Membran- und Biegeschubverzerrungen eine Ordnung niedriger als die Verschiebungsapproximation angenommen, also hier biquadratisch. Die Funktionen  $P_i(\xi, \eta)$  und  $Q_i(\xi, \eta)$  sind wiederum so gewählt, daß sie entlang einer Linie  $\xi = \text{konstant}$  beziehungsweise  $\eta = \text{konstant}$  an einer Stützstelle den Wert eins und an den restlichen den Wert null annehmen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier auf eine Darstellung der angenommenen Verzerrungen in Matrixnotation verzichtet.

## 8 Numerischer Vergleich der verschiedenen degenerierten Schalenelementformulierungen

Die linearen und geometrisch nichtlinearen Berechnungen werden in diesem Kapitel mit den in der Tabelle 8.1 aufgelisteten Elementen durchgeführt.

Linear		Geometrisch nichtlinear	
Typ	Autor	Typ	Autor
ANS4	Bathe/Dvorkin [23]	ANS4	Bathe/Dvorkin [23]
EAS4	Simo/Rifai [69]	EAS4	Simo/Rifai [69]
QUAD9	Huang/Hinton [33]	QUAD9	Huang/Hinton [33]
MITC9	Bathe/Bucalem [20]	MITC9	Bathe/Bucalem [20]
SHEL9N	Rhiu/Lee [57]		
LAG16	Ramm [53]	LAG16	Ramm [53]
MITC16	Bathe/Bucalem [20]	MITC16	Bathe/Bucalem [20]

**Tabelle 8.1:** Verwendete degenerierte Schalenelemente

### 8.1 Lineare Berechnungen

Für die linearen Berechnungen werden die beiden 4-Knoten ANS Elementen mit (EAS4) und ohne (ANS4) Anwendung der EAS Methode auf den Membrananteil verwendet. Dem gegenübergestellt werden Untersuchungen mit den ANS Elementen mit 9-Knoten (MITC9) und 16-Knoten (MITC16), dem 9-Knoten Element mit angenommenen Spannungen (SHEL9N) und dem 16-Knoten Element, das auf einer reinen Verschiebungsformulierung basiert (LAG16). Zusätzlich werden drei Variationen des 9-Knoten Elementes mit angenommenen Verzerrungen betrachtet, die ursprüngliche Formulierung (QUAD9), eine Formulierung mit reduzierter Integration des Querschubanteils (QUAD9R) und eine Formulierung, bei der Biege- und Membrananteil angenommen werden (QUAD9A).

#### 8.1.1 Eigenwertuntersuchungen

Um bei den verschiedenen Elementformulierungen ein kinematisches Verhalten oder eine Tendenz zum Versteifen erkennen zu können, werden Eigenwerte der Steifigkeitsmatrizen eines quaderförmigen Elementes berechnet, das dem Beispiel der quadratischen Platte mit regelmäßiger Vernetzung entnommen ist. Das Dicke zu Längenverhältnis des Elementes wird zu  $h/l = 1/3$  gewählt, was einer Diskretisierung mit 16 Elementen pro Seite entspricht (256 Elemente insgesamt). Bei dieser Netzdichte sind die Ergebnisse bei dem Beispiel der quadratischen Platte und dem Tonnendach auskonvergiert.

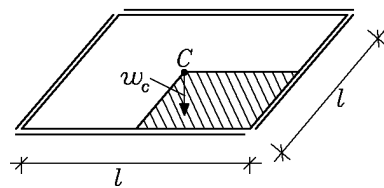
Es zeigt sich, daß keine Elementformulierung bei der gewählten Geometrie eine Tendenz zum Versteifen aufweist. Wie erwartet besitzt das reduziert integrierte 9-Knoten Element (QUAD9R) fünf Kinematiken und überraschend das 9-Knoten Element mit angenommenen Spannungen (SHEL9N) eine Kinematik.

Element	Starrkörper- bewegung	Kinematik	Eigenwerte		
			< 0.1	< 1.0	max
ANS4	1.-6.	-	7.-12.	13.-19.	1.56
EAS4	1.-6.	-	7.-12.	13.-19.	1.56
QUAD9	1.-6.	-	7.-22.	23.-37.	5.80
QUAD9A	1.-6.	-	7.-22.	23.-37.	5.80
QUAD9R	1.-6.	7.-11.	12.-25.	26.-37.	5.15
MITC9	1.-6.	-	7.-22.	23.-37.	5.74
SHEL9N	1.-6.	7.	8.-23.	24.-37.	5.39
LAG16	1.-6.	-	7.-36.	37.-56.	13.72
MITC16	1.-6.	-	7.-36.	37.-56.	12.73

**Tabelle 8.2:** Eigenwerte einer quadratischen Platte; Dicke zu Längenverhältnis  $h/l = 1/3$

### 8.1.2 Einfach gelagerte Platte unter Flächenlast

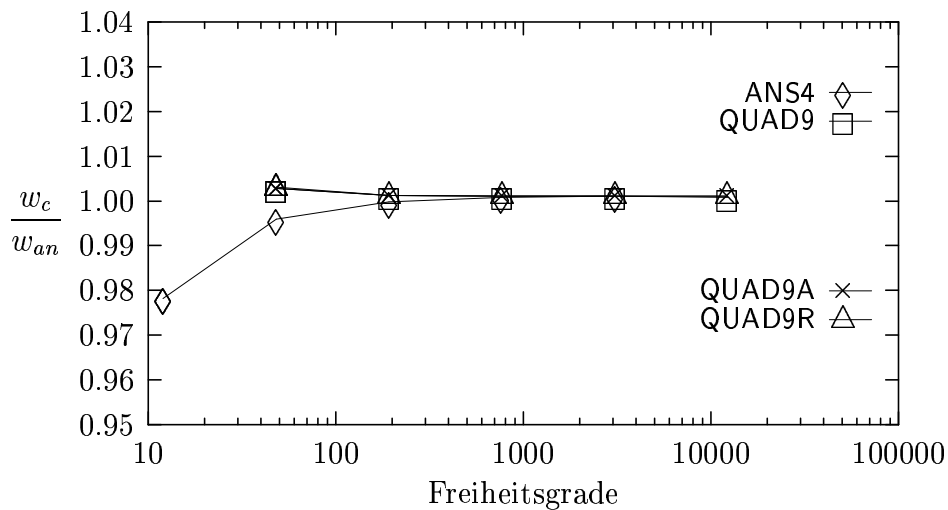
Im Gegensatz zu Kapitel 6.1 wird um festzustellen, ob das zur Berechnung verwendete Element zum Versteifen durch den Querschubanteil neigt, das Beispiel der einfach gelagerten, dünnen quadratischen Platte unter Flächenlast herangezogen. Durch



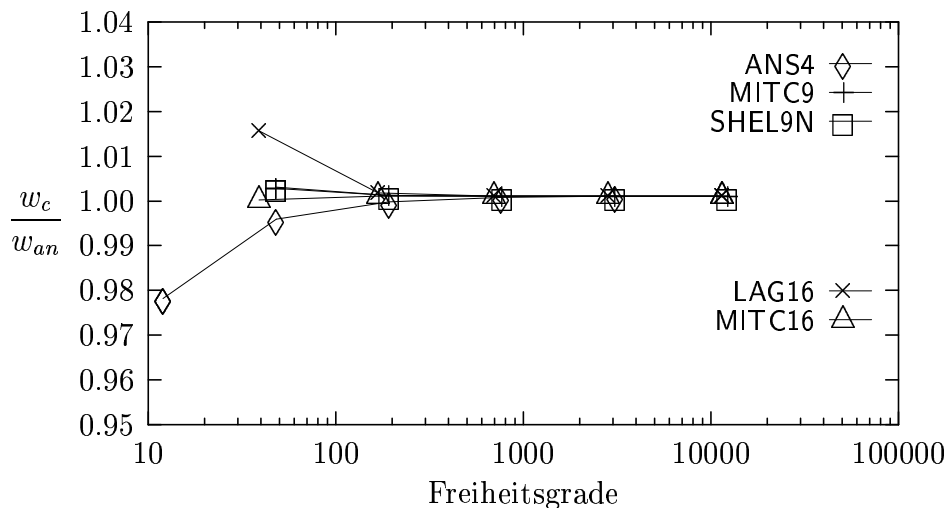
$$\begin{aligned}
 l &= 10 \\
 h &= 0.1 \\
 q &= 0.1 \text{ pro Fläche} \\
 E &= 10.92 \\
 \nu &= 0.3
 \end{aligned}$$

**Bild 8.1:** Geometrie und Materialeigenschaften der einfach gelagerten Platte

Ausnutzen der Symmetrie kann der Berechnungsaufwand deutlich verringert werden, indem nur ein Viertel der Platte diskretisiert wird. Für die maximale Durchbiegung in der Mitte der Platte existiert eine analytische Lösung basierend auf der Theorie dünner Platten, die mit der gewählten Geometrie und den Materialeigenschaften nach Timoshenko [75] den Wert  $4.06 \cdot 10^3$  annimmt.



**Bild 8.2:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Dünne quadratische Platte mit regelmäßiger Vernetzung

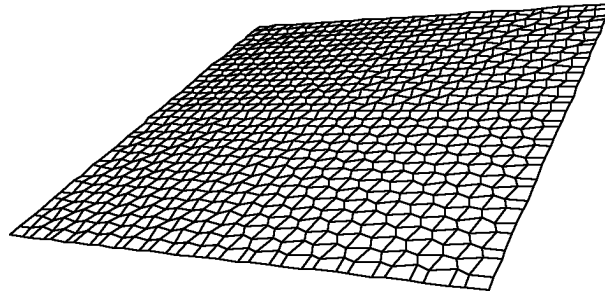


**Bild 8.3:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Dünne quadratische Platte mit regelmäßiger Vernetzung

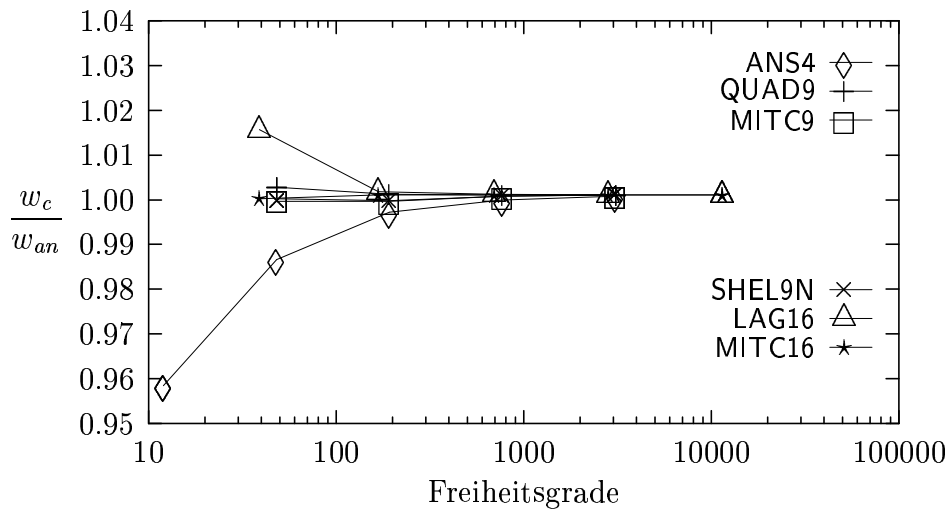
Auf diesen Wert wurden die berechneten Durchbiegungen in Plattenmitte normiert und in den Diagrammen in Bild 8.2 und 8.3 über der Zahl der Freiheitsgrade aufgetragen.

Dabei zeigen sich in Bild 8.2 und 8.3 Verbesserungen – allerdings nur geringfügige – bei Verwendung von Elementen mit einer höheren Ansatzordnung und da der Membrananteil bei Platten bekanntermaßen nicht angesprochen wird, liefern das ANS4 und das EAS4 Element identische Ergebnisse.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das Verhalten der verschiedenen Elementformulierungen bei der Berechnung mit Diskretisierungen, die unregelmäßige Elementformen beinhalten. Dazu wird die vertikale Verschiebung des Mittelpunktes der quadratischen Platte mit einer in Bild 8.4 oder 6.6 dargestellten Diskretisierung berechnet.



**Bild 8.4:** Diskretisierung der quadratischen Platte mit unregelmäßigen Elementformen



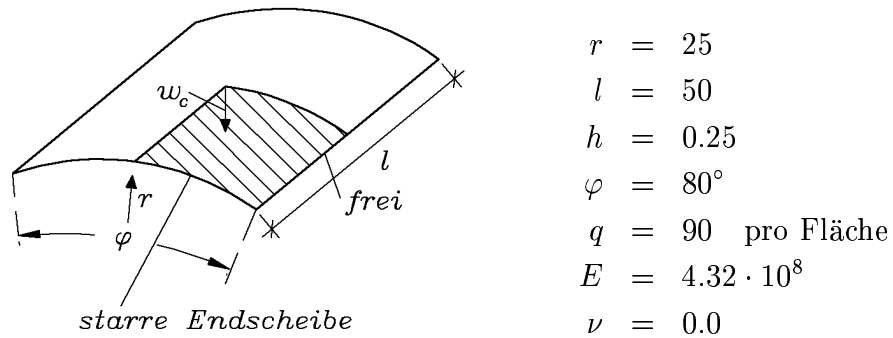
**Bild 8.5:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Dünne quadratische Platte mit unregelmäßiger Vernetzung

Obwohl ebene unregelmäßige Elementformen einen deutlichen Einfluß auf das Verhalten von Elementen mit bilinearen Interpolationsfunktionen haben, verändern sie das Verhalten der Elemente mit biquadratischen oder bikubischen Ansätzen kaum. Das heißt, es kann eine deutliche Verbesserung der Konvergenz bei der Verwendung von Ansätzen höherer Ordnung festgestellt werden.

### 8.1.3 Tonnendach nach Scordelis und Lo

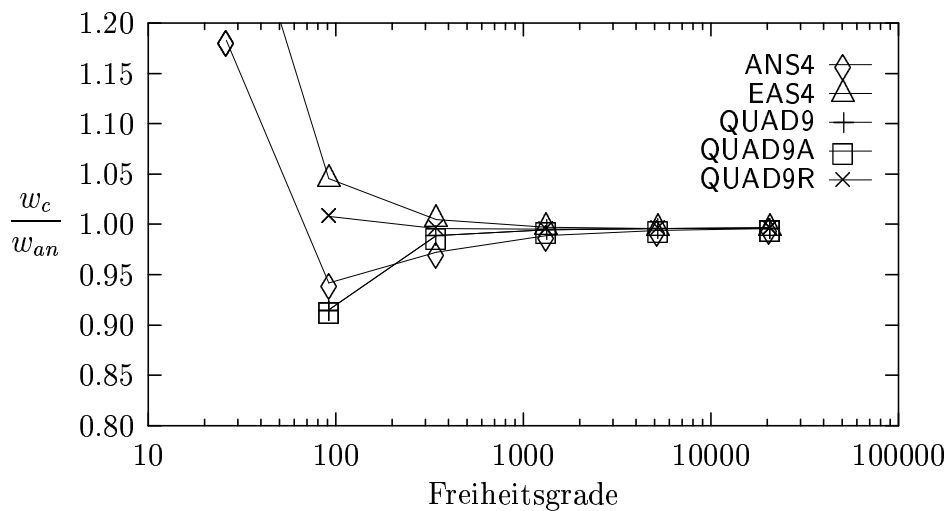
Die Berechnung dieser wenig gekrümmten Schale wurde ursprünglich von Scordelis und Lo [63] vorgeschlagen, um festzustellen, wie gut verschiedene Elementformulierungen Membranspannungszustände erfassen können. Im Gegensatz zur zuvor berechneten Platte, bei der die Geometrie mit allen untersuchten Elementen exakt erfaßt werden konnte, treten bei einer Verfeinerung dieser gekrümmten Schale zwei Effekte auf. Zusätzlich zu einer besseren Verschiebungsapproximation wird die Geometrie besser approximiert, d.h. auch das berechnete Modell ändert sich mit zunehmender Verfeinerung. Dieser Effekt ist vor allem bei Elementen mit bilinearen Interpolationsfunktionen

stark ausgeprägt, bei denen zudem die Bedingung, daß die Elementseiten senkrecht auf der Referenzfläche stehen, verletzt ist. Diesmal zeigt sich – siehe Bild 8.7 und 8.8 – eine



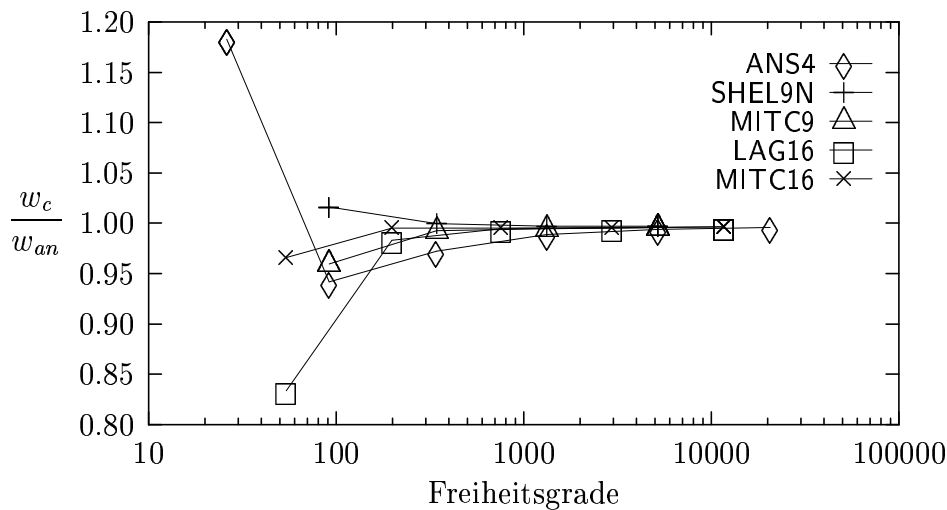
**Bild 8.6:** Geometrie und Materialeigenschaften des Tonnendachs nach Scordelis und Lo

klar erkennbare Verbesserung durch die Verwendung von Elementen höherer Ordnung. Aufgrund des bei diesem Beispiel dominierenden Membranspannungszustandes, werden jetzt Verbesserungen durch Anwenden der EAS Methode erzielt, wie ein Vergleich der Konvergenzraten der ANS4 und EAS4 Elemente zeigt.



**Bild 8.7:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Tonnendach mit regelmäßiger Vernetzung



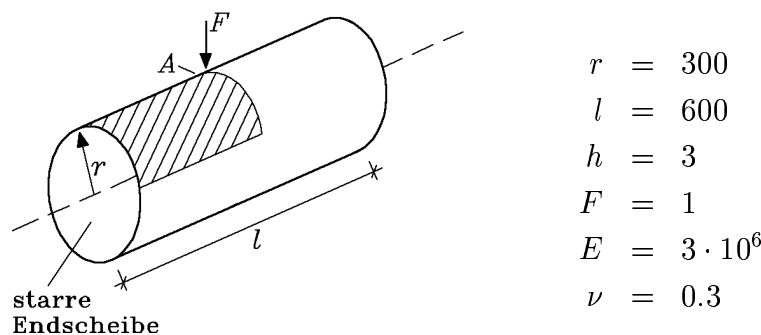


**Bild 8.8:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Tonnendach mit regelmäßiger Vernetzung

Da sich bei der Untersuchung unregelmäßiger Elementformen gegenüber den zuvor betrachteten Plattenberechnungen keine neuen Erkenntnisse ergeben, werden die gewonnenen Untersuchungsergebnisse hier nicht ausführlich dargestellt. Es zeigt sich lediglich, daß wiederum die Konvergenz bei einer Diskretisierung mit unregelmäßigen Elementformen weit weniger bei Verwendung von 9- oder 16-Knoten Elementen als bei Verwendung von 4-Knoten Elementen beeinflusst wird.

#### 8.1.4 Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften

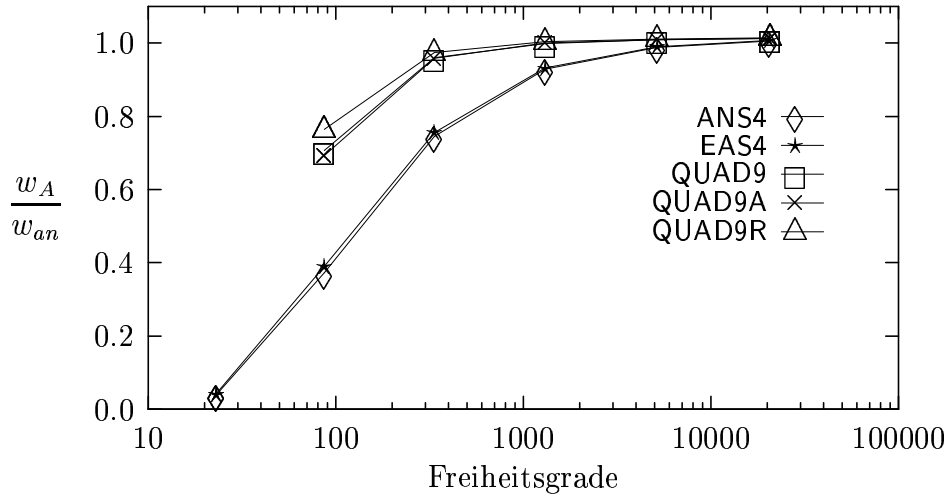
Damit der Einfluß der unterschiedlichen Geometrieinterpolationen auf das Ergebnis ermittelt werden kann, wird ein Zylinder mit starren Endscheiben berechnet. Der Zylinder ist in der Mitte durch zwei gegenüberliegende Einzelkräfte belastet. Von dieser stark gekrümmten Struktur ist bekannt, daß sie besonders bei einer bilinearen Verschiebungsinterpolation eine schlechte Konvergenzrate hervorruft. Als Vergleichswert



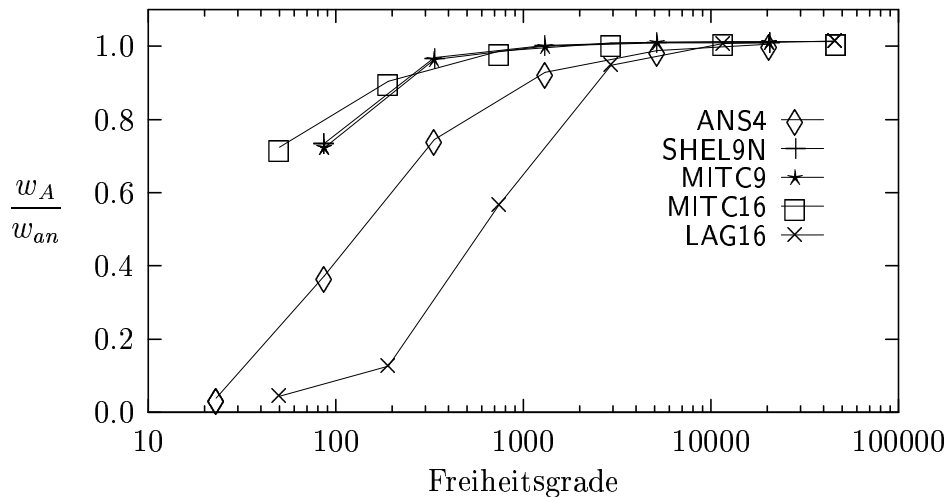
**Bild 8.9:** Geometrie und Materialeigenschaften des beidseits gedrückten Zylinders

steht die vertikale Verschiebung der beiden Kraftangriffspunkte zur Verfügung. Eine

analytische Berechnung ergibt bei den gewählten Material- und Geometrieparametern den Wert  $1.8248 \cdot 10^{-5}$  [12]. In den beiden Diagrammen in Bild 8.10 und 8.11 ist auf der vertikalen Achse die mittels des obigen Wertes normierten Verschiebungen und auf der horizontalen Achse die Zahl der Freiheitsgrade aufgetragen. Auch bei diesem Beispiel handelt es sich um ein symmetrisches System und es genügt, nur ein Achtel zu diskretisieren.



**Bild 8.10:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Beidseitig gedrückter Zylinder mit regelmäßiger Vernetzung



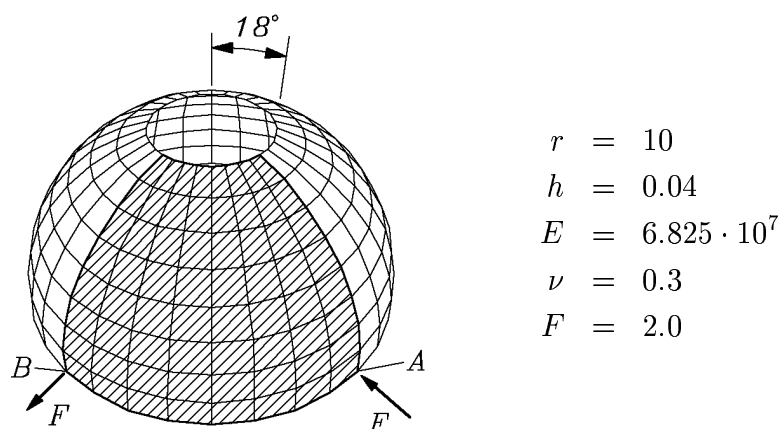
**Bild 8.11:** Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Elementformulierungen; Beidseitig gedrückter Zylinder mit regelmäßiger Vernetzung

Offensichtlich ergibt sich bei der Berechnung stark gekrümmter Strukturen eine deutliche Verbesserung bei Verwendung von Schalenelementen mit Interpolationen höherer

Ordnung. Bemerkenswert ist, daß das auf einer reinen Verschiebungsformulierung basierende 16-Knoten Element (LAG16) zu Ergebnissen führt, die sogar noch schlechter als die des 4-Knoten ANS Elementes (ANS4) sind. Zusätzlich wird deutlich, daß der Einfluß der erweiterten Verzerrungen des EAS4 Elementes bezüglich einer Verbesserung gering ist.

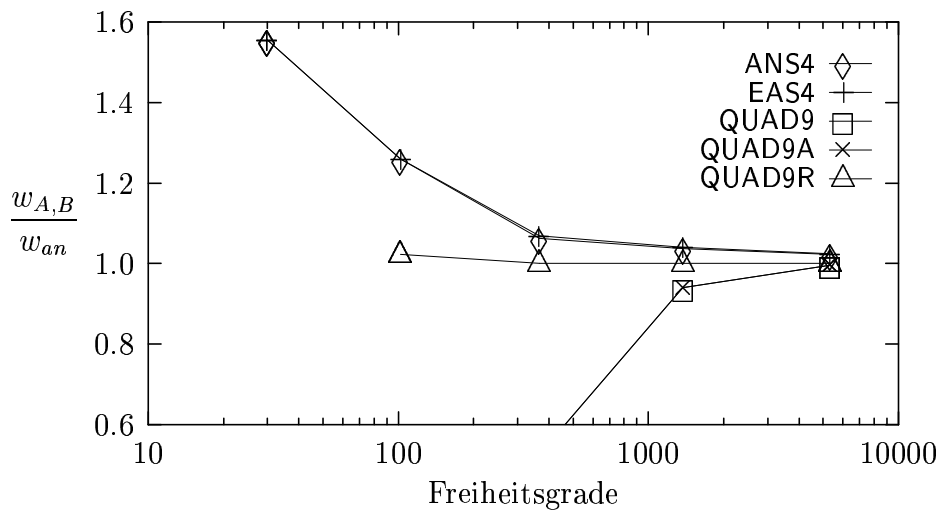
### 8.1.5 Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften

Das Verhalten einer durch vier Einzelkräfte gezogenen und gedrückten Halbkugel mit den in Bild 8.12 dargestellten Abmessungen und Materialwerten ist dadurch geprägt, daß große Bereiche der Schale fast unbeansprucht sind und nur große Starrkörperbewegungen ausführen. Zusätzlich sind im Gegensatz zu den 4-Knoten Elementen, die auch bei diesem Beispiel eben sind, 9-Knoten und 16-Knoten Elemente doppelt gekrümmt. Aus Symmetriegründen genügt es wiederum, nur ein Viertel dieser doppelt gekrümmten Struktur zu berechnen. Bei der linearen Berechnung sind die Verschie-

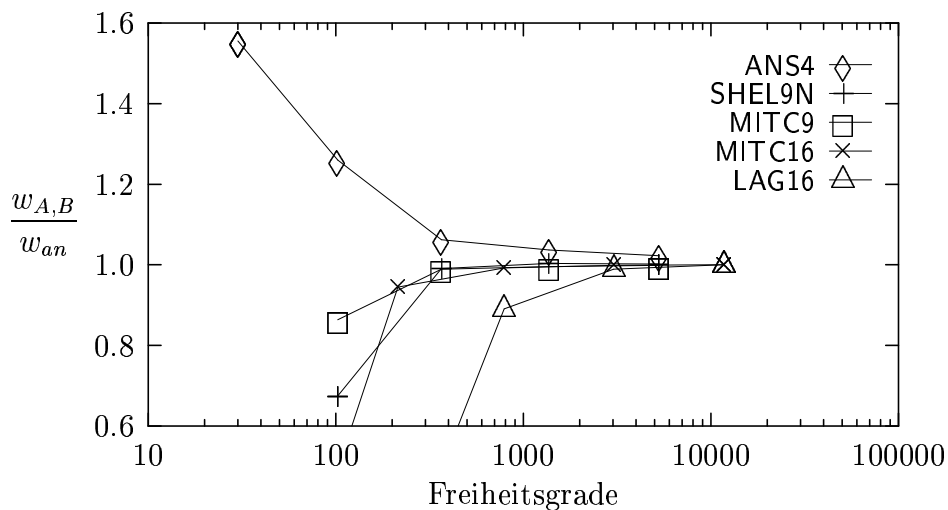


**Bild 8.12:** Geometrie und Materialeigenschaften der Halbkugel mit Loch

bungen der Punkte A und B betragsmäßig gleich und als Referenzlösung wird hier der in [68] angegebene Wert 0.0930 für die horizontalen, radialen Verschiebungen der Lastangriffspunkte A und B verwendet. Auf diesen Wert sind die in den Diagrammen in Bild 8.13 und 8.14 über der Zahl der Freiheitsgrade aufgetragenen Verschiebungen normiert.



**Bild 8.13:** Konvergenzuntersuchungen an verschiedenen Elementformulierungen; Halbkugel mit Loch



**Bild 8.14:** Konvergenzuntersuchungen an verschiedenen Elementformulierungen; Halbkugel mit Loch

Obwohl die beiden 4-Knoten Elemente anfangs noch recht schnell konvergieren, sind sie bei der feinsten betrachteten Diskretisierung noch nicht ganz auskonvergiert, wobei die erweiterten Membranverzerrungen des EAS4 Elementes gegenüber dem ANS4 Element zu keinen erkennbaren Verbesserungen führen. Erwartungsgemäß weist auch das auf einer reinen Verschiebungsformulierung basierende 16-Knoten Element (LAG16) bei der Berechnung dieser stark doppelt gekrümmten Struktur ein zu steifes Verhalten auf. Im Gegensatz dazu zeigen die beiden 9-Knoten Elemente mit angenommenen Verzerrungen in natürlichen Koordinaten (MITC9) beziehungsweise angenommenen Spannungen (SHEL9N) ausgezeichnete Konvergenzeigenschaften. Des weiteren ist zu

beobachten, daß die geringfügig besseren Konvergenzeigenschaften des MITC16 Elementes gegenüber dem MITC9 Element den deutlich höheren Aufwand beim MITC16 Element nicht rechtfertigen.

Trotz der guten Ergebnisse, die bei den vorherigen linearen Berechnungen mit den 9-Knoten Elementen mit in unterschiedlichen Koordinaten angenommenen Membran- und Querschubverzerrungen erzielt wurden, ergeben sich bei der Berechnung dieser doppelt gekrümmten Struktur deutlich zu steife Ergebnisse, die durch Beobachtungen von Bathe und Bucalem [20] bestätigt werden. Ein Vergleich mit den Konvergenzeigenschaften des 9-Knoten Elementes mit angenommenen Querschubverzerrungen und reduziert integriertem Membrananteil (QUAD9R) weist deutlich auf die schlecht gewählte Approximation der Membranverzerrungen bei den QUAD9, QUAD9A Elementen hin.

### 8.1.6 Konditionszahlen

Bekanntermaßen stellt die Konditionszahl eines Gleichungssystems, das heißt der Quotient aus dem größten und dem kleinsten Eigenwert, ein gutes Maß zur Beurteilung dar, ob ein iterativer Gleichungslöser eingesetzt werden kann. Beim Vergleich der Konditionszahlen, die sich bei der Berechnung mit den verschiedenen Elementformulierungen ergeben, sollten zur besseren Beurteilbarkeit der einzelnen Elementformulierungen möglichst große Abweichungen auftreten. Deshalb wird als Beispiel der Zylinder mit starren Endscheiben unter Einzellast herangezogen (siehe Bild 8.9), bei dem große Abweichungen in den Konvergenzdiagrammen der einzelnen Elemente auftreten.

Um die verschiedenen Konditionszahlen miteinander vergleichen zu können, werden alle Berechnungen mit der gleichen Knotenanzahl durchgeführt. Somit wird die Struktur bei Verwendung von 4-Knoten Elementen mit 24x24 (576), von 9-Knoten Elementen mit 12x12 (144) und von 16-Knoten Elementen mit 8x8 (64) Elementen diskretisiert. Obwohl die Konditionszahl – siehe Tabelle 8.3 – tendenziell geringfügig

Elementformulierung	Konditionszahl
ANS4	$0.1944 \cdot 10^7$
EAS4	$0.1946 \cdot 10^7$
QUAD9	$0.2565 \cdot 10^7$
MITC9	$0.2564 \cdot 10^7$
SHEL9N	$0.2452 \cdot 10^7$
LAG16	$0.4118 \cdot 10^7$
MITC16	$0.3546 \cdot 10^7$

**Tabelle 8.3:** Konditionszahlen der globalen Steifigkeitsmatrix bei verschiedenen Elementformulierungen; Beidseits gedrückter Zylinder; Lineare Berechnungen

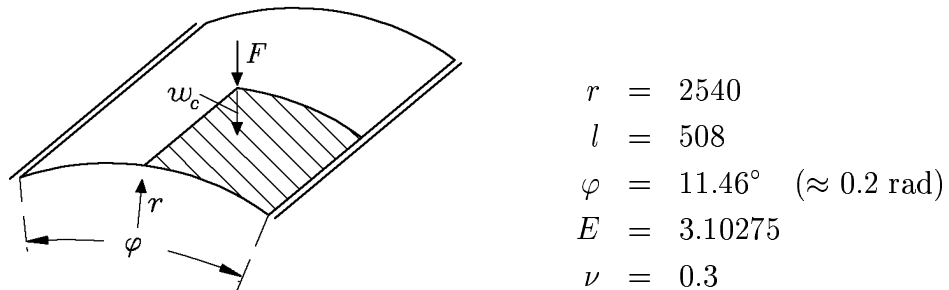
mit der Knotenanzahl pro Element beim degenerierten Kontinuumskonzept steigt, bleiben alle Elementformulierungen in einem Bereich, in dem iterative Löser ohne Schwierigkeiten eingesetzt werden können.

## 8.2 Geometrisch nichtlineare Berechnungen

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt finden mit den 4-Knoten ANS Elementen mit erweiterten Membranverzerrungen (EAS4) oder ohne (ANS4), dem 9-Knoten Element mit angenommenen Verzerrungen (QUAD9), den ANS Elementen mit 9- (MITC9) und 16-Knoten (MITC16) und der reinen Verschiebungsformulierung mit 16-Knoten (LAG16) statt.

### 8.2.1 Flache Zylinderschale unter Einzellast

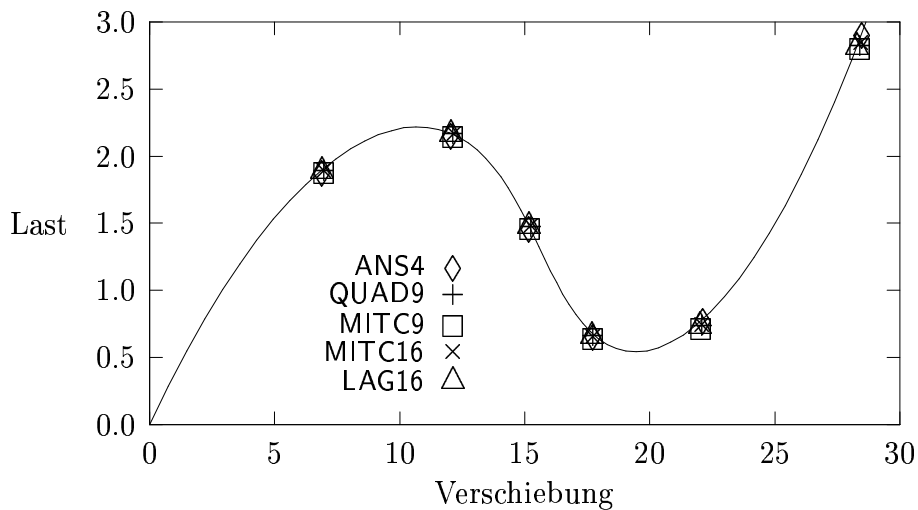
Das Verformungsverhalten der flachen an den beiden geraden Seiten unverschieblich gelagerten Zylinderschale nach Sabir und Lock [59] ist nicht von großen Rotationen geprägt, so daß der lineare Drehtensor ausreicht. Diskretisiert wird unter Einbeziehung der Symmetrie nur ein Viertel der Struktur mit einem Elementnetz, das bei den 4-Knoten Elementen aus 6x6 Elementen besteht. Um miteinander vergleichbare Er-



**Bild 8.15:** Geometrie und Materialeigenschaften der flachen Zylinderschale

gebnisse zu erhalten, wird die Struktur so diskretisiert, daß die Anzahl der gesamten Freiheitsgrade für alle untersuchten Elemente gleich ist. Das heißt, bei den 9-Knoten Elementen wird ein Elementnetz bestehend aus 3x3 Elementen und bei den beiden 16-Knoten Elementen eine aus 2x2 Elementen bestehende Diskretisierung verwendet. Allerdings stellt die Zahl der Freiheitsgrade kein geeignetes Maß dar, um den tatsächlichen Rechenaufwand zu beschreiben. Deshalb werden im folgenden zusätzlich die bis zum Erreichen des letzten Lastschrittes benötigten Rechenzeiten mit Normierung auf den Wert des 4-Knoten Elementes ohne erweiterte Membranverzerrungen (ANS4) angegeben. Das Beispiel wird mit zwei verschiedenen Dicken gerechnet, um auch den Einfluß der Empfindlichkeit des Durchschlagverhaltens erfassen zu können.

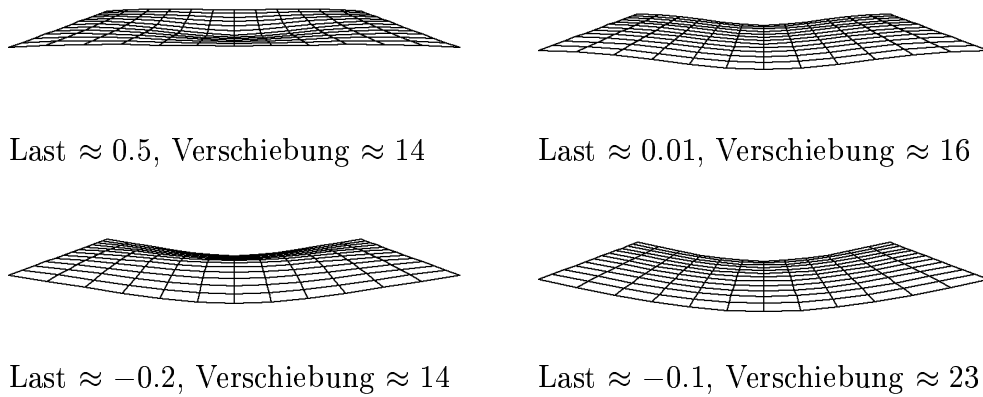
Zuerst wird die Dicke der Schale auf  $h = 12.7$  gesetzt, was in den folgenden Last-Verschiebungskurven des Lastangriffspunktes in einer für Durchschlagprobleme typischen Form resultiert. Dabei werden die wesentlichen Punkte der Last-Verschiebungskurve für die Mittendurchbiegung erhalten, wenn die Berechnungen mit sechs Lastschritten gleicher Bogenlänge durchgeführt werden. Die folgenden Last-Verschiebungskurven zeigen bei dieser recht groben Diskretisierung erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung, da die bessere Geometrieapproximation der 9-Knoten und 16-Knoten Elemente hier nicht zum Tragen kommt.



**Bild 8.16:** Flache Zylinderschale der Dicke  $h = 12.7$ ; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen

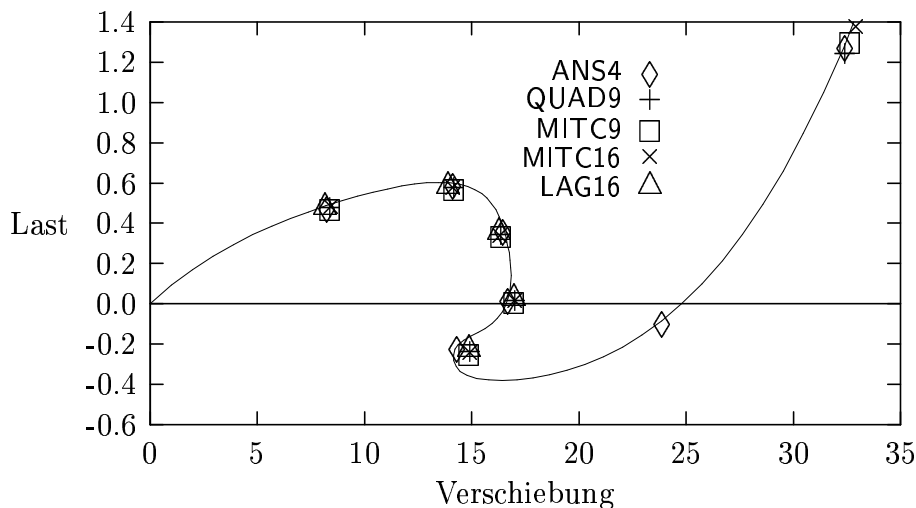
Dabei benötigen alle untersuchten Elemente im ersten Lastschritt sechs Gleichgewichtssiterationen und für jeden weiteren Lastschritt nur noch maximal vier.

Nach Halbierung der ursprünglichen Schalendicke auf  $h = 6.35$  entwickelt die Struktur ein empfindliches Durchschlagverhalten, bei dem im Nachbeulbereich ein lokaler Rückgang bei Verminderung der Last auftritt. Dieses Verhalten ist gut in den Verformungsfiguren zu erkennen, siehe Bild 8.17. Jedoch zeigen auch bei der dünnen flachen



**Bild 8.17:** Verformungsverhalten der flachen Zylinderschale der Dicke  $h = 6.35$

Zylinderschale die Last-Verschiebungskurven der einzelnen Elemente keine deutlichen Abweichungen.



**Bild 8.18:** Flache Zylinderschale der Dicke  $h = 6.35$ ; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen

Allerdings unterscheiden sich die benötigten Rechenzeiten der einzelnen Elementformulierungen deutlich voneinander, obwohl die Zahl der Freiheitsgrade und der benötigten Gleichgewichtssiterationen für alle Elemente fast identisch ist. Ein Grund dafür ist der Einfluß der steigenden Bandbreite, der beobachtet werden kann, indem die Rechenzeit des linearen ANS Elementes (ANS4) mit der des kubischen Verschiebungselementes (LAG16) verglichen wird, die ungefähr drei mal so groß ist. Wird beim 4-Knoten Element zusätzlich zu der Methode der angenommenen Verzerrungen die EAS Methode für die Membranverzerrungen eingeführt (EAS4), so steigt die Rechenzeit lediglich um acht Prozent. Wegen der aufwendigeren Verzerrungsannahmen zusammen mit der gestiegenen Bandbreite betragen die Rechenzeiten der QUAD9R und MITC9 Elemente das fünffache des ANS4 Elementes. Wenn wie beim QUAD9 Element zusätzliche Transformationen notwendig sind oder wenn die Methode der angenommenen Verzerrungen auf das bikubische Element angewendet wird, steigt die Rechenzeit sogar um den Faktor fünfundzwanzig. Allerdings muß beachtet werden, daß eine effizientere Implementierung durch Vermeiden der Transformationen die Rechenzeit des biquadratischen Elementes mit angenommenen Verzerrungen (QUAD9) so verringert, daß sie ungefähr der des MITC9 Elementes entspricht.

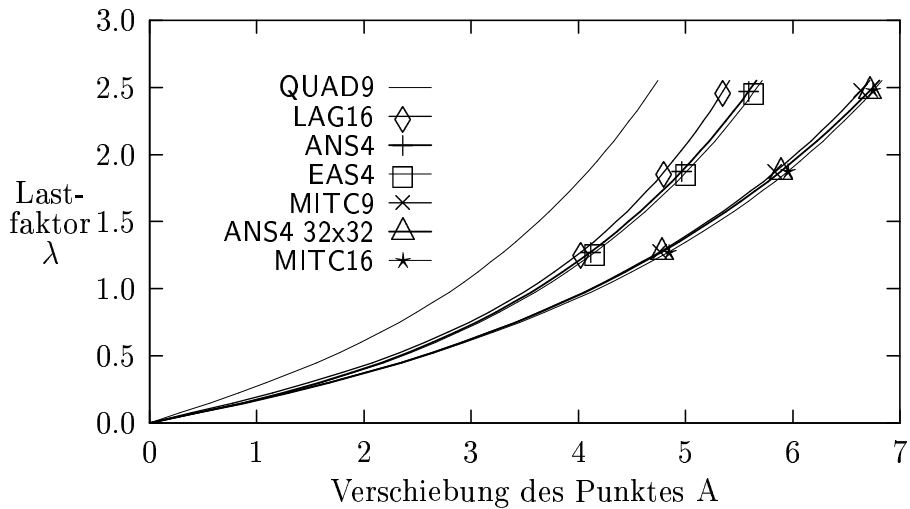
### 8.2.2 Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften

Im Gegensatz zu der linearen Berechnung der in Bild 8.12 dargestellten Halbkugel mit Loch wird bei der geometrisch nichtlinearen Berechnung die Dicke auf  $h = 0.01$  reduziert. Eine wesentliche Eigenschaft dieses Beispiels ist, daß von den untersuchten Elementen eine doppelt gekrümmte Geometrie dargestellt werden muß und daß große Bereiche der Schale bei der gewählten Belastung Starrkörperbewegungen ausführen.

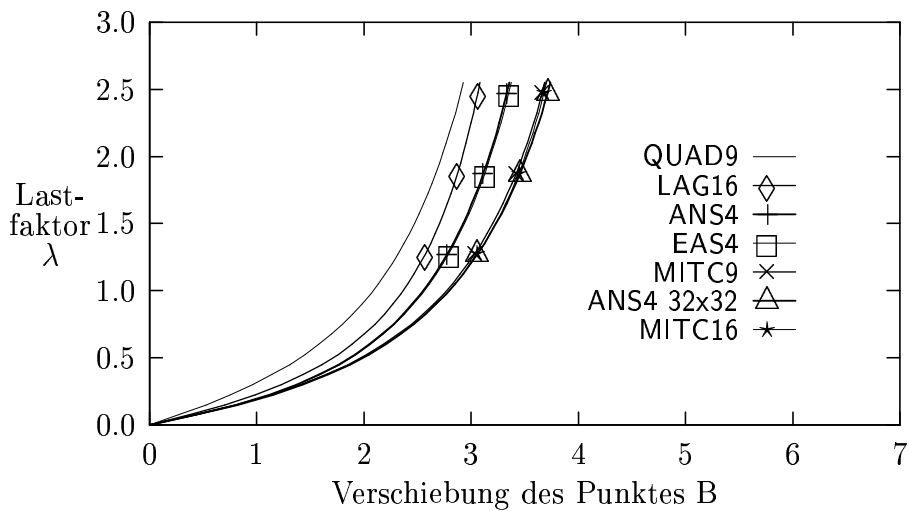
Durch Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften genügt es, ein Viertel der Halbkugel mit einer Diskretisierung mit  $18 \times 18$  4-Knoten,  $9 \times 9$  9-Knoten und  $6 \times 6$  16-Knoten Elementen zu berechnen. Dabei ist die Diskretisierung so gewählt, daß bei einer linearen



Berechnung annähernd auskonvergierte Ergebnisse erzielt werden. In den Diagrammen in Bild 8.19 und 8.20 sind die Last-Verschiebungskurven der beiden Kraftangriffspunkte aufgetragen.



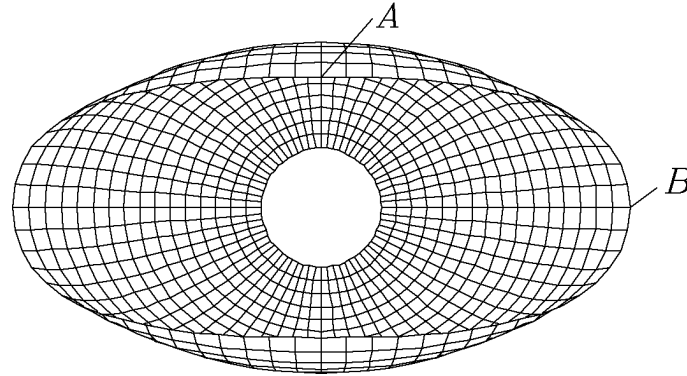
**Bild 8.19:** Halbkugel mit Loch; 1726 Freiheitsgrade; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A



**Bild 8.20:** Halbkugel mit Loch; 1726 Freiheitsgrade; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A

Da die Ergebnisse der 4-Knoten Elemente bei einer linearen Berechnung mit einer Diskretisierung von 18x18 Elementen nicht auskonvergiert waren, muß das Netz für die ANS4 und EAS4 Elemente weiter verfeinert werden. Auch eine Verbesserung des Membrananteils des ANS4 Elementes durch erweiterte Membranverzerrungen (EAS4) wirkt sich kaum auf die Last-Verschiebungskurven aus. Jedoch steigt dann die Zahl

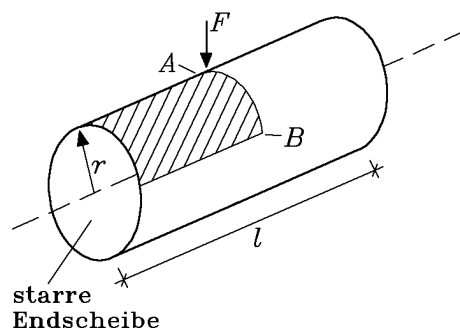
der notwendigen Gleichgewichtssiterationen erheblich. Dagegen liefert das 9-Knoten ANS Element (MITC9) bereits bei der den 4-Knoten Elementen entsprechenden Diskretisierung der Halbkugel, die auch während der Verformung glatt bleibt (siehe Bild 8.21), auskonvergierte Last-Verschiebungskurven. Der Einfluß der unterschiedlichen



**Bild 8.21:** Verformte Geometrie der Halbkugel mit Loch beim letzten Lastschritt

Interpolationen der Membranverzerrungen beim QUAD9 und beim MITC9 Element auf die Last-Verschiebungskurven weist wie zuvor auf die bei doppelt gekrümmten Elementen schlecht gewählte Interpolation der Membranverzerrungen beim QUAD9 Element hin. Eine weitere, allerdings nur geringfügige Verbesserung kann durch eine weitere Erhöhung der Ansatzordnung bei gleichbleibender Zahl der Freiheitsgrade lediglich beim 16-Knoten ANS Element (MITC16) beobachtet werden. Allerdings ist das MITC16 Element aufgrund der höheren Bandbreite der Steifigkeitsmatrix und der gestiegenen Anzahl der Operationen auf Elementebene deutlich ineffizienter als das MITC9 Element. Mit dem 16-Knoten Element, das auf einer reinen Verschiebungsformulierung basiert (LAG16), werden erwartungsgemäß zu steife Ergebnisse erzielt.

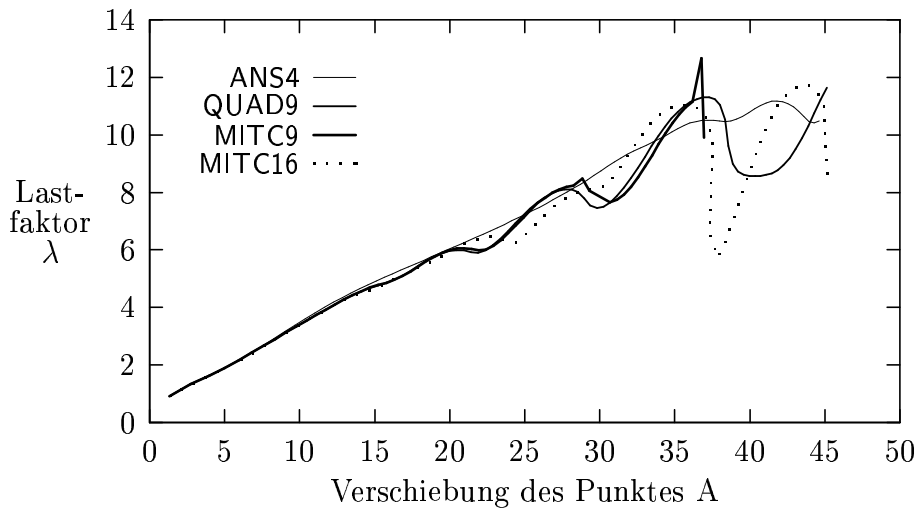
### 8.2.3 Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften



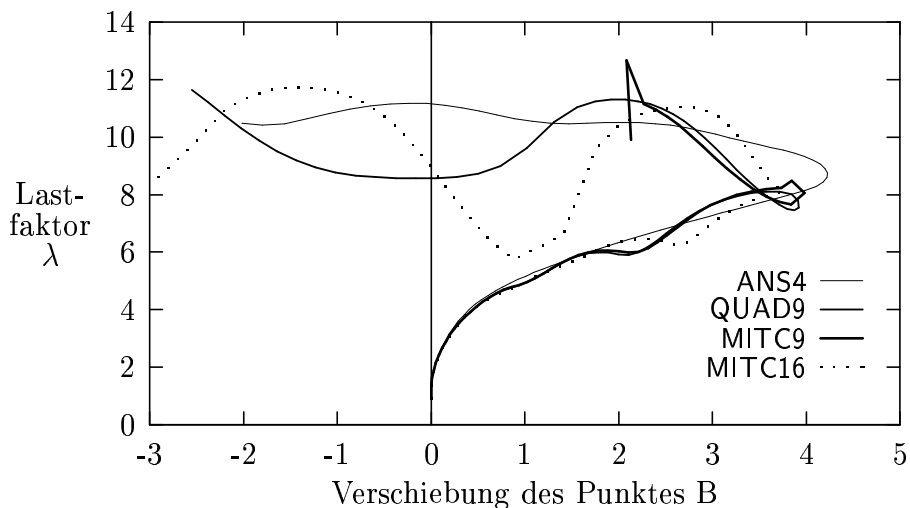
$$\begin{aligned}
 r &= 100 \\
 l &= 200 \\
 h &= 1 \\
 F &= 182.66 \\
 E &= 3 \cdot 10^4 \\
 \nu &= 0.3
 \end{aligned}$$

**Bild 8.22:** Geometrie und Materialeigenschaften des beidseits gedrückten Zylinders

Wiederum wird aufgrund der Symmetrie nur ein Achtel des Zylinders diskretisiert. Nach Auswerten der zugehörigen linearen Berechnungen (siehe Kapitel 8.1.4) ist mindestens eine Diskretisierung mit 24x24 4-Knoten Elementen erforderlich, um einigermaßen auskonvergierte Ergebnisse zu erhalten. Wenn die Zahl der gesamten Freiheitsgrade (2927) für alle verschiedenen Approximationen gleich sein soll, muß bei 9-Knoten Elementen eine Diskretisierung mit 12x12 Elementen und bei 16-Knoten Elementen mit 8x8 Elementen verwendet werden.



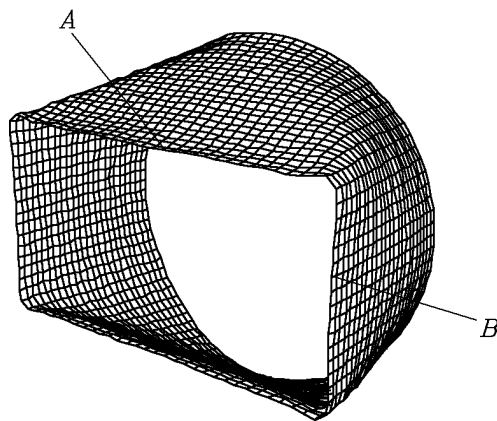
**Bild 8.23:** Beidseits gedrückter Zylinder; 2927 Freiheitsgrade; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A



**Bild 8.24:** Beidseits gedrückter Zylinder; 2927 Freiheitsgrade; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes B

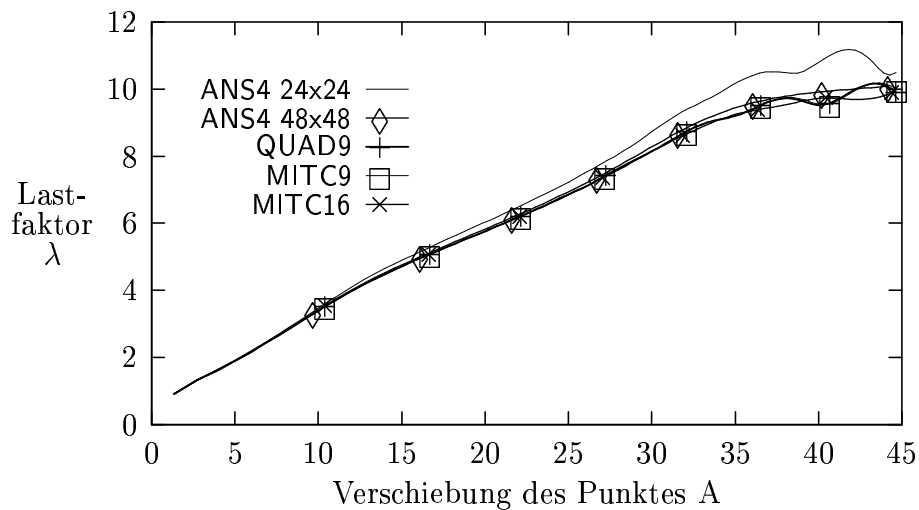
Da das 16-Knoten Verschiebungselement (LAG16) schon bei der linearen Berechnung dieser stark gekrümmten Struktur eine sehr enttäuschende Konvergenzrate aufweist, wird es hier nicht weiter untersucht. Die Last-Verschiebungskurve des EAS4 Elementes weist nur geringfügige Abweichungen gegenüber der des ANS4 Elementes auf und ist deswegen in den Diagrammen in Bild 8.23 und 8.24 nicht dargestellt.

Für die verbleibenden Elementformulierungen ergeben sich trotz des bisher erhaltenen, weitgehend identischen Verhaltens gänzlich verschiedene Last-Verschiebungskurven mit teilweise stark oszillierenden Formen. Die Ursache hierfür liegt wie zahlreiche numerische Untersuchungen insbesondere Netzverfeinerungen ergeben haben an dem Auftreten der Knicke in der verformten Geometrie, siehe Bild 8.25. Aufgrund der quadratischen oder kubischen Verläufe der zu den Elementen höherer

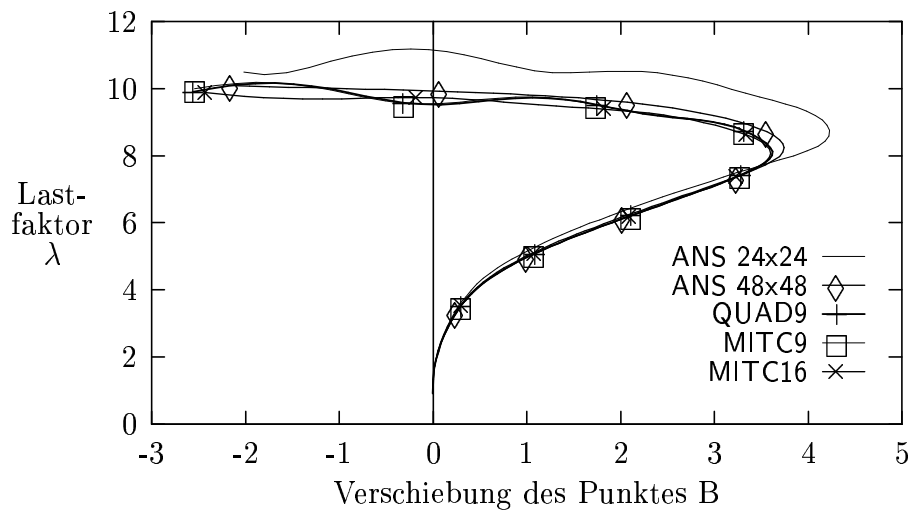


**Bild 8.25:** Verformte Geometrie des beidseits gedrückten Zylinders beim letzten Lastschritt

Ansatzordnung gehörenden Seiten können derartige Knicke nur dargestellt werden, wenn sie an den Eckknoten der Elemente auftreten beziehungsweise wenn sehr feine Netze verwendet werden. Als Folge ist in dem kleinen Gebiet, das die Knicke umgibt, die wahre Gestalt der Zylinderschale im Zuge der Berechnung mit dem groben Netz oft nicht richtig modelliert. Um dieses Problem weiter zu untersuchen, werden zusätzliche Berechnungen durchgeführt, bei denen eine Diskretisierung mit entweder 24x24 9-Knoten oder 16-Knoten Elementen zugrunde gelegt wird. Des weiteren wird ein Netz mit 48x48 4-Knoten Elementen berechnet.



**Bild 8.26:** Beidseits gedrückter Zylinder; 24x24 Elemente; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A



**Bild 8.27:** Beidseits gedrückter Zylinder; 24x24 Elemente; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes B

Damit werden die Last-Verschiebungskurven der biquadratischen und bikubischen Elemente wesentlich glatter. Jedoch ist festzustellen, daß sogar die ersten Berechnungen mit einer groben Diskretisierung, die 9- oder 16-Knoten Elemente enthält, genauer bezüglich des globalen Verhaltens sind als die Berechnungen mit dem feinsten 4-Knoten-Element-Netz.

## 8.2.4 Konditionszahlen

Um im geometrisch nichtlinearen Fall möglichst gute Kriterien für die Güte einzelner Elementformulierungen bezüglich der Gleichungslösung zu erhalten, werden die Konditionszahlen an dem Beispiel der flachen Zylinderschale der Dicke  $h = 6.35$  mit Snap Back Verhalten miteinander verglichen. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Konditi-

Lastschritt	Elementformulierung					
	ANS4	EAS4	QUAD9	MITC9	MITC16	LAG16
1	0.3368	0.3372	0.4708	0.4708	0.6104	0.7337
2	1.139	1.140	1.652	1.652	2.156	2.511
3	7.890	7.586	7.590	7.535	9.139	12.88
4	1.288	1.283	1.999	1.900	2.477	2.950
5	1.060	1.060	1.593	1.595	2.088	2.437
6	1.480	1.441	2.179	2.190	2.782	3.557
7	1.846	1.782	1.298	1.293	1.539	2.395
8	0.3685	0.3669	0.4498	0.4495	0.5716	0.7296

**Tabelle 8.4:** Konditionszahlen verschiedener Elementformulierungen normiert mit  $1 \cdot 10^7$ ; Dünne, flache Zylinderschale; Geometrisch nichtlineare Berechnungen

onszahlen aller untersuchten Elemente in dem Bereich des Snap Back – 3. Lastschritt – um ca. eine Potenz ansteigen. Wie im linearen Fall steigen aber die Konditionszahlen bei Erhöhung der Ansatzordnung degenerierter Schalenelemente lediglich unwesentlich. Wiederum bleiben die Konditionszahlen aller untersuchter Elemente in einem für iterative Löser gut bearbeitbaren Bereich. Somit ist auch bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen der Einsatz iterativer Gleichungslöser bei allen untersuchten Elementformulierungen ohne Schwierigkeiten möglich.

## 8.3 Zusammenfassung der Erkenntnisse für degenerierte Schalenelemente

An den wenigen, sehr einfachen linearen und geometrisch nichtlinearen Berechnungen ließen sich bereits die wesentlichen in diesem Abschnitt zusammengefaßten Unterschiede zwischen den einzelnen degenerierten Schalenelementformulierungen übersichtlich herausarbeiten, so daß auf die Berechnung aufwendigerer Geometrien verzichtet werden kann.

Ein Vergleich der beiden 4-Knoten Elemente untereinander zeigt, daß nur in speziellen Fällen – Geometrie und/oder Belastung – Verbesserungen durch zusätzliche Anwendung der EAS Methode auf die Membranverzerrungen (EAS4) erzielt werden können.

Deutliche Vorteile gegenüber 4-Knoten Elementen bieten 9- oder 16-Knoten Elemente besonders bei der linearen Berechnung gekrümmter Schalen und von Schalen, die mit unregelmäßigen Elementformen diskretisiert sind. Hierbei zeigt sich auch, daß alle vorgestellten Methoden zum Vermeiden der Querschub- und Membranversteifung

Ergebnisse liefern, die sich nicht signifikant voneinander unterscheiden. Lediglich das auf einer reinen Verschiebungsformulierung basierende 16-Knoten Element weist bei Berechnungen stark gekrümmter Schalen im Gegensatz zu den Berechnungen ebener oder schwach gekrümmter Strukturen ein ausgeprägtes Versteifungsverhalten auf.

Bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen von Strukturen, die während der Verformung glatt bleiben, ergibt der Übergang von linearen auf quadratische Interpolationsfunktionen eine deutliche Verbesserung der Effizienz. Eine weitere Erhöhung der Ordnung der Ansatzfunktionen ist jedoch nicht empfehlenswert. Dagegen zeigt sich bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen, bei denen in der verformten Geometrie Knicke auftreten, daß diese Knicke von biquadratischen oder bikubischen Elementen nur dargestellt werden können, wenn in deren Umgebung eine so feine Diskretisierung verwendet wird, wie sie auch für bilineare Elemente notwendig ist. Jedoch verliert diese Einschränkung durch die zunehmende Verwendung von adaptiven Netzverfeinerungen auch bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen an Bedeutung und es ergeben sich dann deutliche Vorteile für Elemente mit quadratischen oder kubischen Interpolationsfunktionen.

Bei einem Vergleich der 9-Knoten Elemente untereinander stellt sich heraus, daß das ANS Element (MITC9) zwar etwas weniger robust dafür aber auch bei doppelt gekrümmten Elementen hervorragende Konvergenzeigenschaften aufweist und zusätzlich wesentlich effizienter als das Element mit in unterschiedlichen Koordinatensystemen angenommenen Verzerrungen (QUAD9) ist. Die 16-Knoten Elemente sind generell weniger effizient als die 9-Knoten Elemente, wobei das reine Verschiebungselement (LAG16) zwar effizienter als das ANS Element (MITC16) aber in der Anwendung auf schwach gekrümmte Strukturen beschränkt ist.

Folglich kann abschließend festgehalten werden, daß das 9-Knoten ANS Element (MITC9) von allen untersuchten Elementen die besten Konvergenzeigenschaften aufweist und auch das effizienteste ist, wobei es nur in speziellen Fällen – Berechnung mit gleichmäßiger Netzverfeinerung, bei der Knicke während der Verformung auftreten – den beiden 4-Knoten Elementen hinsichtlich Robustheit und Effizienz unterlegen ist.

## 9 Schalenformulierung mittels des Solid-Shell Konzeptes

Obwohl degenerierte Schalenelemente bei der Berechnung von Schalenstrukturen in den meisten Fällen sehr gute Ergebnisse liefern, erfordern sie im Einsatz bei Problemstellungen, die neuere Entwicklungen mit gestiegenen Berechnungsanforderungen beinhalten, oft aufwendige Zusatzüberlegungen.

Soll beispielsweise ein allgemeines Materialgesetz implementiert werden, so ist eine aufwendige Kondensation notwendig, um die Schalenannahme verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung zu erfüllen. Andererseits führt die Vernachlässigung der Spannung in Dickenrichtung dazu, daß auch keine Spannungen in Dickenrichtung ermittelt werden können, die jedoch z.B. bei Laminaten für die Beurteilung der Delamination erforderlich sind. Sollten außerdem im Zuge einer Dimensionsadaptivität degenerierte Schalenelemente zusammen mit Kontinuumelementen verwendet werden, so sind aufgrund der Rotationsfreiheitsgrade spezielle Übergangselemente notwendig. Zusätzlich sind durch diese Rotationsfreiheitsgrade die natürlichen Randbedingungen oft schwer zu erfüllen und bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen mit großen Starrkörperbewegungen tritt das Problem der Berechnung des Direktors in der verformten Konfiguration auf (siehe Kapitel 7.1.2).

Deshalb wird in anfangs dieses Kapitels eine Schalenformulierung beschrieben, die oben angeführte Nachteile des Degenerationskonzeptes nicht aufweist, und anschließend wird die systematische Entwicklung darauf basierender versteifungsfreier Schalenelementformulierungen detailliert vorgestellt.

### 9.1 Das Solid-Shell Konzept

Bei diesem Konzept wird nur die eine Annahme des Degenerationskonzeptes

1. Geradebleiben der Normalen zur Tangentialebene der Schale in der unverformten Konfiguration während der Verformung

übernommen. Durch die Einschränkung, daß die Normalen zur Tangentialebene in der Referenzkonfiguration gerade sind, ergibt sich die Approximation der Geometrie in der unverformten Konfiguration

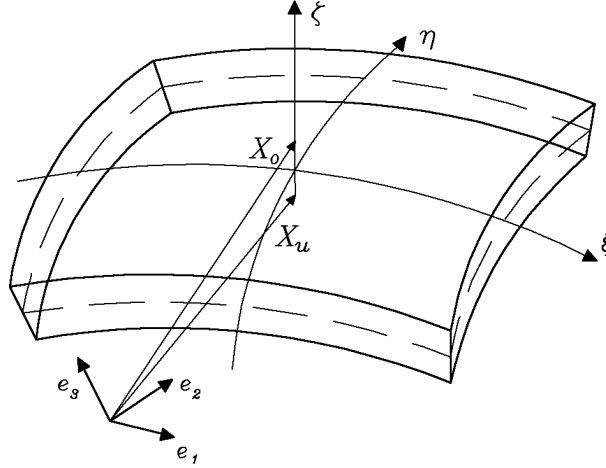
$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} ((1 + \zeta) \mathbf{X}_o(\xi, \eta) + (1 - \zeta) \mathbf{X}_u(\xi, \eta)). \quad (9.1)$$

Das zugehörige Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{T}(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \bar{\mathbf{T}}(\xi, \eta) \mathbf{u}_{ip}(\xi, \eta) \quad (9.2)$$

kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit multiplikativ aus den Verschiebungsapproximationen in Dickenrichtung  $\zeta$  und in der Ebene  $\xi, \eta$  zusammengefügt werden. Die einzige Annahme des Solid-Shell Konzeptes gegenüber einer dreidimensionalen Kontinuumsbeschreibung wird dann dadurch erfüllt, daß die Verschiebungen parallel zur Referenzfläche  $u', v'$  linear in Dickenrichtung angenommen werden. Dagegen kann die Verschiebung in Dickenrichtung  $w'$  beliebig über die Dicke variieren.





**Bild 9.1:** Geometrie eines Solid Shell Schalenelementes

Der einfachste Fall einer linear von  $\zeta$  abhängenden Verschiebung  $w'$  dient in der vorliegenden Arbeit als Ausgangspunkt der Verschiebungsapproximation des Solid-Shell Konzeptes, die mit der Interpolationsmatrix der Verschiebungen in Dickenrichtung

$$\Theta(\zeta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta \end{bmatrix}, \quad (9.3)$$

der Transformationsmatrix

$$\bar{\mathbf{T}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

und dem ausschließlich von den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  abhängenden Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_{ip}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_o(\xi, \eta) \\ \mathbf{u}_u(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

die Darstellung

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{T}(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_o(\xi, \eta) \\ \mathbf{u}_u(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

annimmt. Wie beim Degenerationskonzept kennzeichnen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  die Koordinaten eines natürlichen Koordinatensystems mit den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auf der Schalenmittelfläche und der Koordinate  $\zeta$  senkrecht dazu. Dann werden die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  zu und die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  von jedem Punkt der Schale durch die Position  $\mathbf{X}_o$  und die Verformung  $\mathbf{u}_o$  der Schalenoberseite und die Position  $\mathbf{X}_u$  und die Verformung  $\mathbf{u}_u$  der Schalenunterseite beschrieben. In den Gleichungen (9.2), (9.4) und (9.6) ist  $\mathbf{T}$  eine Transformationsmatrix von einem lokalen kartesischen oder lokalen konvektiven Koordinatensystem in der verformten Konfiguration zu dem globalen kartesischen Koordinatensystem. Dabei sind zwei Achsen des lokalen Koordinatensystems parallel zur

Schalenober- und -unterseite ausgerichtet und die dritte Achse verläuft in Dickenrichtung.

Über die Beziehung  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  läßt sich dann die Geometrie in der verformten Konfiguration ermitteln, die vor allem zur Bestimmung des Deformationsgradienten notwendig ist.

Wie bei degenerierten Schalenelementen leisten bei Verwendung des St. Venant-Kirchhoffschen Materialgesetzes die auf ein lokales kartesisches oder schiefwinkliges Koordinatensystem transformierten Membran-, Biege- und Normalverzerrungen in Dickenrichtung zusammen mit den Querschubspannungen keine Arbeit, und umgekehrt:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{mbd}^T \boldsymbol{\sigma}_{qs} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \boldsymbol{\sigma}_{mbd} dV = 0. \quad (9.7)$$

Dabei wurde wiederum von der in der Finite Element Methode üblichen Anordnung der Komponenten des Green-Lagrange Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  beziehungsweise 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors  $\mathbf{S}$  in Vektorform (Gl. (B.4), (B.5))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_{mbd}^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \right]^T = \left[ E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12} \quad E_{33} \quad | \quad 2E_{23} \quad 2E_{31} \right]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \left[ \boldsymbol{\sigma}_{mbd}^T \quad \boldsymbol{\sigma}_{qs}^T \right]^T = \left[ S^{11} \quad S^{22} \quad S^{12} \quad S^{33} \quad | \quad S^{23} \quad S^{31} \right]^T \end{aligned} \quad (9.8)$$

Gebrauch gemacht. Die Auswertung der Spannungen und Verzerrungen in kovarianten beziehungsweise kontravarianten konvektiven Koordinaten erfolgt in Analogie zum Degenerationskonzept, mit der dort eingeführten Forderung, daß die lokale Koordinatenachse in  $\zeta$  Richtung senkrecht auf den beiden anderen lokalen Koordinatenachsen steht. Somit weisen Solid-Shell Schalenelemente im Gegensatz zu degenerierten Schalenelementen sechs globale Verschiebungsfreiheitsgrade auf und sind dadurch etwas ineffizienter. Weiterhin unterliegen Solid-Shell Schalenelemente der gleichen Einschränkung wie degenerierte Schalenelemente, daß die Elementseiten senkrecht zur Mittelfläche ausgerichtet sein müssen. Auch hier wird durch Elemente mit linearen Ansatzfunktionen bei der Berechnung von Strukturen mit gekrümmter Geometrie die zugrundeliegende Theorie nicht exakt erfüllt.

Eine alternative, bei linearen Berechnungen geringfügig effizientere Formulierung ergibt sich, wenn zur Interpolation der Verschiebungen (9.6) statt lokaler kartesischen Koordinaten lokale konvektive Koordinaten mit den in Kapitel 7.1.3 beschriebenen Basisvektoren der verformten Konfiguration verwendet werden. Dann kann in Gleichung (9.6) die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  zur Rücktransformation nicht einfach transponiert werden sondern sie muß aufwendig invertiert werden, somit ist die Matrix  $\mathbf{T}^T$  durch  $\mathbf{T}^{-1}$  zu ersetzen. Die Invertierung ist notwendig, da bei einer Transformation zwischen schiefwinkligen Koordinatensystemen nicht mehr die Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$  gilt. Bei einer Beschränkung auf lineare Probleme, bei denen nicht zwischen verformter und unverformter Konfiguration unterschieden wird, ist diese Vorgehensweise deshalb effizienter, da dann die Transformationsmatrix durch die ohnehin benötigte Jacobimatrix  $\mathbf{J}$  der isoparametrischen Abbildung ersetzt werden kann  $\mathbf{T} = \mathbf{J}^T$ .

Jedoch ist die Transformation der globalen Verschiebungen auf ein lokales Koordinatensystem mit anschließender Rücktransformation nicht notwendig, solange die

Matrix mit der Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung (9.3) nicht modifiziert wird. Somit kann die Transformationsmatrix in diesem Fall der Einheitsmatrix  $\mathbf{T} = \mathbf{1}_{3 \times 3}$  gleichgesetzt werden. Diese noch effizientere Formulierung führt bei Zugrundelegung einer bilinearen Variation der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in  $\xi$  und  $\eta$  Richtung nicht nur auf die Geometrieapproximation sondern auch auf das Verschiebungsfeld eines trilinearen Kontinuumelementes.

Eine etwas andere, direkt von der Kinematik des Degenerationskonzepts (3.1), (3.2) ausgehende Darstellung der Geometrieapproximation in der unverformten

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{X}_o(\xi, \eta) + \mathbf{X}_u(\xi, \eta))}_{\mathbf{X}_R(\xi, \eta)} + \frac{1}{2} \zeta \underbrace{(\mathbf{X}_o(\xi, \eta) - \mathbf{X}_u(\xi, \eta))}_{h(\xi, \eta) \mathbf{D}(\xi, \eta)} \quad (9.9)$$

und verformten Konfiguration

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{x}_o(\xi, \eta) + \mathbf{x}_u(\xi, \eta))}_{\mathbf{x}_R(\xi, \eta)} + \frac{1}{2} \zeta \underbrace{(\mathbf{x}_o(\xi, \eta) - \mathbf{x}_u(\xi, \eta))}_{h(\xi, \eta) \mathbf{d}(\xi, \eta)} \quad (9.10)$$

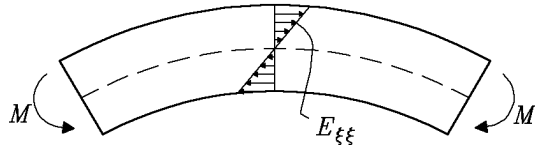
liegt dem von Schoop [61] entwickelten und von Parisch [50] und Seifert [64] aufgegriffenen Doppelknotenmodell zugrunde und führt auch zu der Geometrie- und Verschiebungsapproximation des Solid-Shell Konzeptes mit linearer Interpolation aller drei Verschiebungen in Dickenrichtung.

## 9.2 Versteifungseffekte bei Solid-Shell Schalenelementen

Analog zu den degenerierten Schalenelementen weisen Solid Shell Schalenelemente, die sehr effiziente Berechnungen erlauben, nur Ansatzordnungen niedriger Ordnung in den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auf. Dann treten auch hier die schon in Kapitel 3.2 ausführlich erläuterten Querschub- und Membranversteifungseffekte auf. Zusätzlich zeigt sich noch eine Versteifung aufgrund der Normalspannungen und -verzerrungen in Dickenrichtung.

### 9.2.1 Dickenversteifung

Dieser unerwünschte Versteifungseffekt entsteht, da die Normalverzerrung in Dickenrichtung  $E_{\zeta\zeta}$  durch die gewählte Kinematik (9.6) konstant über die Dicke angenommen wird und nicht wie erforderlich linear veränderlich ist. Eine lineare Variation der Normalverzerrung  $E_{\zeta\zeta}$  wird jedoch zur Beschreibung von Biegebeanspruchungen gefordert, damit die durch die Querkontraktion erzeugte Kopplung der linear veränderlichen Normalverzerrungen parallel zur Mittelfläche  $E_{\xi\xi}$ ,  $E_{\eta\eta}$  mit den Normalverzerrungen  $E_{\zeta\zeta}$  erfüllt werden kann. Dieser Sachverhalt kann an dem Beispiel des auf Biegung beanspruchten Balkens leicht nachvollzogen werden, siehe Bild 9.2. Zum einfacheren Verständnis wird dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, daß die konvektiven Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  einen rechten Winkel einschließen. Ansonsten müßten die Metrikkoeffizienten entsprechend der zur Elementformulierung herangezogenen Darstellung des Materialgesetzes (10.11) auch in dem Bild 9.2 berücksichtigt werden.



$$S^{\zeta\zeta} = \lambda E_{\xi\xi} + (\lambda + 2\mu)E_{\zeta\zeta} = 0$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

**Bild 9.2:** Balken unter Momentenbelastung

### 9.3 Methoden zum Vermeiden der Versteifungseffekte

Zur Vermeidung der Querschub- und Membranversteifung können alle bei degenerierten Schalenelementen zum Erfolg führenden Methoden, insbesondere die in Kapitel 3.3 beschriebene Methode der angenommenen Verzerrungen, die Methode der angenommenen Spannungen oder die Methode der erweiterten Verzerrungen angewendet werden. Aus Gründen der Überschaubarkeit findet hier bei der Untersuchung der Solid-Shell Schalen eine Beschränkung auf die Methode der angenommenen Verzerrungen statt.

In diesem Abschnitt werden verschiedene Vorgehensweisen zur Unterdrückung der bei Solid-Shell Elementen gegenüber degenerierten Schalenelementen zusätzlichen Dickenversteifung erläutert.

Generell gibt es zwei Möglichkeiten die Versteifung zu beheben, indem erstens der versteifende Verzerrungsanteil entfernt wird oder alternativ die Verzerrungen beziehungsweise Spannungen so erweitert werden, daß keine Verformungsbehinderung mehr besteht. Jedoch ist eine Reduktion der Verzerrungen um den versteifenden Anteil entsprechend der Methode der angenommenen Verzerrungen hier nicht möglich, da nach Entfernen der in Dickenrichtung linearen Anteile der Normalverzerrungen  $E_{\xi\xi}$  und  $E_{\eta\eta}$  keine Biegebeanspruchung mehr beschrieben werden kann. Eine Erweiterung der Verzerrung um den fehlenden linear in Dickenrichtung variierenden Anteil der Normalverzerrung  $E_{\zeta\zeta}$  läßt sich einerseits durch Einbringung des ebenen Spannungszustandes  $S^{\zeta\zeta} = 0$  erreichen. Dadurch ist die im Funktional berücksichtigte Normalverzerrung in Dickenrichtung unabhängig von der gewählten Kinematik und lediglich eine Funktion der Normalverzerrungen parallel zur Tangentialebene, folglich linear über die Dicke veränderlich. Andererseits wird die aus dem ebenen Spannungszustand resultierende Einschränkung bei der Wahl der Materialgesetze mittels einer direkten Annahme einer in Dickenrichtung linearen Normalverzerrung  $E_{\zeta\zeta}$  über eine entsprechende Modifikation der Interpolationsmatrix (9.3) oder aber durch Anwendung der Methode der erweiterten Verzerrungen umgangen.

Eine erste Entwicklung, die auf einer Reduktion des Materialgesetzes zur Erfüllung des ebenen Spannungszustandes entsprechend dem Degenerationskonzept basiert, führt auf eine Formulierung, die Kinematiken aufweist. Abhilfe verspricht die Annahme einer konstanten Verschiebung in Dickenrichtung über die Dicke, d.h. die Verschiebung der Oberseite sei identisch mit der Verschiebung der Unterseite in Dickenrichtung

$$w'(\xi, \eta, 1) = w'(\xi, \eta, -1). \quad (9.11)$$

Obige Bedingung kann direkt durch Kondensation in die Interpolationsmatrix (9.3) eingebracht werden und führt zu einer Elementformulierung mit fünf Freiheitsgraden. Allerdings ist diese Formulierung nicht allgemeingültig, da die Schale z.B. nicht so ausgerichtet sein darf, daß die Dickenrichtung mit der globalen x- oder y-Achse zusammenfällt. Eine erste uneingeschränkt verwendbare Formulierung wird erzielt, wenn ad hoc die Bedingung (9.11) nach Multiplikation mit einem frei wählbaren Wichtungsfaktor zur Steifigkeitsmatrix hinzuaddiert wird. Jedoch ergibt sich dann eine unsymmetrische Steifigkeitsmatrix und somit eine sehr ineffiziente Elementformulierung, die zudem stark von der Wahl des Wichtungsfaktors beeinflusst wird. Weitere, empfehlenswerte Formulierungen werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

### 9.3.1 Den ebenen Spannungszustand beinhaltende Solid-Shell Formulierungen

#### Hinzufügen einer Steifigkeit in Dickenrichtung

Eine effiziente Vorgehensweise, die Kinematiken zu vermeiden, die entstehen, wenn das Materialgesetz mit der Forderung nach Verschwinden der Normalspannung in Dickenrichtung reduziert wird, ergibt sich durch Hinzufügen eines Potentials aus den Normalverzerrungen und -spannungen in Dickenrichtung. Um bei dem daraus resultierenden linearen Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung keine Dickenversteifung zu erhalten, wird der Einfluß der Querkontraktion vernachlässigt. Mit diesen Annahmen erhält man folgendes modifiziertes Potential

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V E_{\zeta\zeta}^T S^{\zeta\zeta} dV + \Pi_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V E_{\zeta\zeta}^T \bar{E} E_{\zeta\zeta} dV + \Pi_{ext}.\end{aligned}\tag{9.12}$$

Dabei enthält das erste Integral nur Membran-, Biege- und Querschubverzerrungen und -spannungen. Das zweite Integral, das auch als Penalty Formulierung mit dem auf das entsprechende Koordinatensystem transformierten Elastizitätsmodul  $\bar{E}$  gedeutet werden kann, besteht aus der Normalverzerrungskomponente des Green-Lagrange Verzerrungstensors in Dickenrichtung und der entsprechenden 2. Piola-Kirchhoff Spannungskomponente.

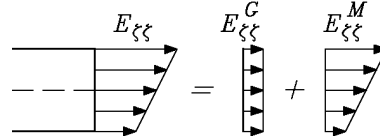
Ein anderer Zugang, der letztendlich auf die gleiche Elementformulierung führt, basiert auf der Trennung der Normalverzerrung  $E_{\zeta\zeta}$  und -spannung  $S^{\zeta\zeta}$  in sogenannte „geometrische“  $E_{\zeta\zeta}^G, S_G^{\zeta\zeta}$  und „materielle“ Anteile  $E_{\zeta\zeta}^M, S_M^{\zeta\zeta}$

$$E_{\zeta\zeta} = E_{\zeta\zeta}^G + E_{\zeta\zeta}^M, \quad S^{\zeta\zeta} = S_G^{\zeta\zeta} + S_M^{\zeta\zeta}.\tag{9.13}$$

Zum besseren Verständnis wird für den weiteren Verlauf der Entwicklung ohne Einschränkung der Allgemeinheit das St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz zugrunde gelegt und davon ausgegangen, daß die im allgemeinen schiefwinkligen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  einen rechten Winkel einschließen. Damit ergibt sich nach Vernachlässigung des

Einflusses der Querkontraktion beim geometrischen Anteil der Normalspannung  $S_G^{\zeta\zeta}$  folgende Spannung-Dehnungs-Beziehung:

$$\begin{pmatrix} S^{\xi\xi} \\ S^{\eta\eta} \\ S_M^{\zeta\zeta} \\ S_G^{\zeta\zeta} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\xi\xi} \\ E_{\zeta\zeta} \\ E_{\zeta\zeta}^M \\ E_{\zeta\zeta}^G \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (9.14)$$



**Bild 9.3:** Trennung der Normalverzerrungen  $E_{\zeta\zeta}$  in einen geometrischen und materiellen Teil

wobei der geometrische Teil der Verzerrung  $E_{\zeta\zeta}^G$  der Green-Lagrange Verzerrungskomponente in Dickenrichtung entspricht und somit konstant über die Elementdicke ist. Der materielle Teil der Normalverzerrung wird so gewählt, daß der Einfluß der Membran- und Biegeverzerrungen ausgeglichen wird und die Normalspannung  $S_M^{\zeta\zeta}$  verschwindet. Dann enthält die resultierende Normalverzerrung

$$E_{\zeta\zeta}^M = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (E_{\xi\xi} + E_{\eta\eta}) \quad (9.15)$$

einen konstanten und linear veränderlichen Verlauf über die Dicke (siehe Bild 9.3). Schließlich erhält man folgende modifizierte Materialmatrix

$$\begin{pmatrix} S^{\xi\xi} \\ S^{\eta\eta} \\ S_G^{\zeta\zeta} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & \cdots \\ \nu & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 - \nu^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\xi\xi} \\ E_{\eta\eta} \\ E_{\zeta\zeta}^G \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

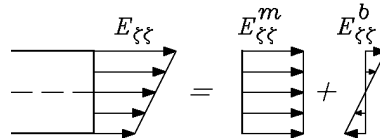
die auf eine Elementformulierung führt, die identisch mit der zuvor beschriebenen Vorgehensweise ist.

Allerdings bleibt weiterhin der Nachteil degenerierter Schalenelemente bestehen, daß das Materialgesetz mit der Bedingung verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung kondensiert werden muß und somit Schwierigkeiten bei der Implementierung allgemeiner Materialgesetze aufkommen.

Eine geringfügige Modifikation wird durch die Annahme erreicht, daß die Verschiebung in Dickenrichtung bei der Berechnung der Querschubverzerrung konstant statt entsprechend der Berechnung der Normalverzerrung in Dickenrichtung linear veränderlich angenommen wird. Allerdings bietet diese Formulierung keine nennenswerten Vorteile, ist aufgrund der jetzt notwendigen Transformation der Verschiebungen deutlich ineffizienter und hier nur aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt.

## Trennung der Membran- und Biegeverzerrungen und -spannungen

Eine weitere versteifungsfreie Formulierung mit dem zusätzlichen Vorteil einer konsistenten Dickenverzerrung durch Berücksichtigung der Querkontraktion wird erhalten, indem die Normalverzerrung in Dickenrichtung in einen über die Dicke konstanten – den Membran – und linear veränderlichen – den Biege – Anteil getrennt wird, siehe Bild 9.4. Nach der Anwendung einer 1-Punkt-Integration über die Dicke auf die



**Bild 9.4:** Trennung der Normalverzerrungen  $E_{\zeta\zeta}$  in einen konstanten und linear veränderlichen Teil

Koppelterme der Biege- und Membranverzerrungen und -spannungen

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{\sigma}_m dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\sigma}_b dV = 0, \quad (9.17)$$

kann das Potential in folgender Form dargestellt werden:

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{\sigma}_b dV}_{\text{Biegeanteil}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m dV}_{\text{Membrananteil}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{qs}^T \boldsymbol{\sigma}_{qs} dV}_{\text{Querschubanteil}}. \quad (9.18)$$

Um eine lineare Verteilung der Normalspannung in Dickenrichtung zu erzeugen, die zur Vermeidung der Dickenversteifung unerlässlich ist, wird wiederum die Bedingung verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung auf den Biegeanteil  $S_b^{\zeta\zeta} = 0$  angewendet. Deshalb ergibt sich für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Biegeanteils wieder eine Reduktion des Materialgesetzes. Im Gegensatz dazu ist eine Reduktion des Materialgesetzes bei der Berechnung der Membran- und Querschubspannungen nicht erforderlich.

Jedoch soll vermerkt werden, daß die angenommene Verteilung der Normalverzerrung und -spannung in Dickenrichtung über die Dicke nur für ebene Schalen exakt ist. Bei stark gekrümmten Schalen kann man ein etwas zu weiches Verhalten beobachten.

### 9.3.2 Solid-Shell Formulierung mit linearem Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung

Den Erkenntnissen aus Kapitel 9.2 folgend, besteht die offensichtlichste Art, die Dickenversteifung zu verhindern, in einer direkten linearen Interpolation der Normalverzerrung in Dickenrichtung über die Dicke.

## Annahme einer quadratischen Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung

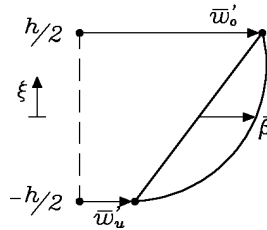
Um eine quadratische Interpolation der Verschiebung in Dickenrichtung über die Dicke zu erzielen, muß die anfangs dieses Kapitels eingeführte, lineare Verschiebungsapproximation (9.3) wie folgt modifiziert werden:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{T}(\xi, \eta) \bar{\Theta}(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_o(\xi, \eta) \\ \mathbf{u}_u(\xi, \eta) \\ \beta(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

wobei  $\beta(\xi, \eta)$  eine zusätzliche Verschiebung der Schalenmittelfläche entsprechend Bild 9.5 ist und in der Matrix  $\bar{\Theta}(\zeta)$  die Interpolationen der Verschiebungen über die Dicke

$$\bar{\Theta}(\zeta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & \boxed{1 - \zeta^2} \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

angeordnet sind. Dann kann auf eine Transformation der globalen Verschiebungen auf ein lokales Koordinatensystem nicht mehr verzichtet werden. Für die Verschiebung in Dickenrichtung  $w'$  wird eine auch in ähnlichem Zusammenhang von Parisch [50] und Gruttmann [28] verwendete, hierarchische quadratische Interpolation gewählt, da dadurch keine Schwierigkeiten bei der Kombination mit üblichen „linearen“ Kontinuumelementen entstehen. Hierbei muß lediglich der siebte Freiheitsgrad  $\beta$  an den Schnittflächen behindert werden, dann ergibt sich aufgrund der hierarchischen Struktur eine lineare Interpolation, siehe Bild 9.5.



**Bild 9.5:** Hierarchische quadratische Formfunktionen

Somit ist das resultierende Solid-Shell Element leicht zusammen mit Kontinuumelementen einzusetzen, führt auf keine Schwierigkeiten bei der Erfüllung der natürlichen Randbedingungen und kommt ohne aufwendige Algorithmen bei nichtlinearen Problemstellungen und ohne weitere Modifikationen allgemeiner dreidimensionaler Materialgesetze aus. Allerdings steht den Vorteilen der Nachteil gegenüber, daß diese Formulierung aufgrund der sieben Freiheitsgrade weniger effizient als die Formulierungen mit sechs Freiheitsgraden ist.

Parisch [50] und Seifert [64] führen eine entsprechende Modifikation des Doppelknotenmodells ein, so daß die Geometrie in der verformten Konfiguration die bereits von Verhoeven [77] für degenerierte Schalen vorgeschlagene Form

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_o(\xi, \eta) + \mathbf{x}_u(\xi, \eta)) + \frac{1}{2} (\zeta + \lambda(\xi, \eta)\zeta^2) (\mathbf{x}_o(\xi, \eta) - \mathbf{x}_u(\xi, \eta)) \quad (9.21)$$



mit dem zusätzlichen Freiheitsgrad  $\lambda(\xi, \eta)$  annimmt, während die Geometrie in der unverformten Konfiguration (9.10) unverändert bleibt. Eine Gegenüberstellung beider Konzepte führt auf die Approximationen der Verschiebungen

$$\mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}'_o(\xi, \eta) + \mathbf{u}'_u(\xi, \eta)) + \frac{1}{2} \zeta (\mathbf{u}'_o(\xi, \eta) - \mathbf{u}'_u(\xi, \eta)) + \mathbf{h}(\xi, \eta) \quad (9.22)$$

in lokalen kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$  parallel zur Mittelfläche und  $\mathbf{z}'$  in Dickenrichtung, die lediglich in den quadratischen Anteilen  $\mathbf{h}(\xi, \eta)$  voneinander abweichen. Für die neu vorgestellte Solid-Shell Schalenformulierung weist  $\mathbf{h}$  die Form

$$\mathbf{h}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} h'_x \\ h'_y \\ h'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) \beta(\xi, \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

und beim Doppelknotenmodell nach [50] und [64] die Form

$$\mathbf{h}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} h'_x \\ h'_y \\ h'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{f}(\zeta) \lambda(\xi, \eta) \begin{pmatrix} u'_o - u'_u \\ v'_o - v'_u \\ w'_o - w'_u \end{pmatrix}, \quad \hat{f}(\zeta) = \begin{cases} \zeta^2, & [64] \\ 1 - \zeta^2, & [50] \end{cases} \quad (9.24)$$

auf. Somit basiert die Solid-Shell Formulierung auf einem ausschließlich in Dickenrichtung quadratischen Verlauf der Verschiebung  $w'$ , während beim Doppelknotenmodell je nach Verformungszustand alle drei Verschiebungen über die Dicke quadratisch interpoliert werden. Da bei letzterem der quadratische Term von nur einem Freiheitsgrad für alle drei Richtungen gesteuert wird, tritt immer ein bei dünnen Schalen vernachlässigbares verwölbungsähnliches Verhalten auf. Hierzu ist zu bemerken, daß dann wieder eine – zwar nur milde – Versteifung auftritt, da quadratisch variierende Normalverzerrungen parallel zur Mittelfläche mit einer linear veränderlichen Normalverzerrung in Dickenrichtung gekoppelt werden. Der Unterschied zwischen den beiden Konzepten ist allerdings nur bei der Berechnung dickerer Flächentragwerke, bei denen Biege- und Querschubverformungen dominieren, von Bedeutung.

Eine abschließende Diskussion der von Seifert [64] gewählten Interpolation zeigt, daß diese ursprünglich von Verhoeven [77] für das Degenerationskonzept vorgeschlagene Interpolation nur dort gerechtfertigt ist, da der Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung bei den Freiheitsgraden degenerierter Schalen – drei Verschiebungen der Mittelfläche und drei Komponenten des Direktorvektors – nicht nach außen in Erscheinung tritt. Jedoch entsteht durch die Anwendung auf das Doppelknotenmodell mit jeweils drei Verschiebungsfreiheitsgraden der Schalenober- und -unterseite eine inkompatible Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung. Dies kann leicht nachgewiesen werden, indem vereinfachend alle Verschiebungen parallel zur Mittelfläche  $u'_o(\xi, \eta) = v'_o(\xi, \eta) = u'_u(\xi, \eta) = v'_u(\xi, \eta) = 0$  gesetzt werden und zusätzlich die Verschiebung der Unterseite in Dickenrichtung festgehalten wird  $w'_u(\xi, \eta) = 0$ . Dann folgt aus (9.22) das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w'_o(\xi, \eta) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w'_o(\xi, \eta) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \zeta^2 \lambda(\xi, \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w'_o(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad (9.25)$$

das mit obigen Überlegungen an der Oberseite  $\zeta = 1$  die Verschiebung in Dickenrichtung  $w'_o(\xi, \eta)$  ergeben sollte:

$$w'(\xi, \eta, \zeta = 1) = w'_o(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\lambda(\xi, \eta)w'_o(\xi, \eta) \neq w'_o(\xi, \eta) \quad \text{für} \quad \lambda(\xi, \eta) \neq 0. \quad (9.26)$$

Somit können mit der von Seifert [64] gewählten quadratischen Verschiebungsinterpolation weder eine Kraftübertragung in Dickenrichtung korrekt dargestellt noch geschichtete Strukturen berechnet werden. Im Gegensatz dazu führt mit den gleichen Überlegungen die beim Solid-Shell Konzept (9.20) und von Parisch [50] gewählte Interpolation auf die in Dickenrichtung kompatible Verschiebung

$$w'(\xi, \eta, \zeta = 1) = w'_o(\xi, \eta) + \frac{1}{2}(1 - 1^2)\beta(\xi, \eta)w'_o(\xi, \eta) = w'_o(\xi, \eta). \quad (9.27)$$

Eine weitere Abweichung des Vorgehens von Parisch gegenüber der Solid-Shell Elementformulierung mit quadratischer Verschiebungsinterpolation besteht darin, daß Parisch die zusätzlichen Freiheitsgrade entsprechend der Methode der erweiterten Verzerrungen auf Elementebene auskondensiert.

### **Einführen der linearen Normalverzerrung in Dickenrichtung mit Hilfe der EAS Methode**

Um einen linearen Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung über die Dicke zu gewährleisten, wird entsprechend der in Kapitel 3.3.3 beschriebenen EAS Methode die kompatible Green-Lagrange Verzerrung in Dickenrichtung  $E_{\zeta\zeta}^k$  durch eine inkompatible, in Dickenrichtung linear angenommene Verzerrung  $\tilde{E}_{\zeta\zeta}$

$$E_{\zeta\zeta} = E_{\zeta\zeta}^k + \tilde{E}_{\zeta\zeta} \quad (9.28)$$

erweitert. Die erweiterte Normalverzerrung in Dickenrichtung

$$\tilde{E}_{\zeta\zeta} = \zeta \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}_e \quad (9.29)$$

mit den unbekanntenen Parametern  $\boldsymbol{\alpha}_e$  pro Element wird Darstellungen von Büchter [18], Braun [16] und Seifert [64] folgend so gewählt, daß die in der auf ein konstantes Basissystem bezogene Matrix  $\mathbf{M}$  enthaltenen Interpolationen in Richtung der natürlichen  $\xi$  und  $\eta$  Koordinaten der Ordnung des Verschiebungsansatzes entspricht.

Somit bietet eine auf dieser Vorgehensweise basierende Elementformulierung die gleichen Vorteile wie die Formulierung mit direkter quadratischer Interpolation der Verschiebung, benötigt jedoch nur sechs Freiheitsgrade, da die ursprüngliche Verschiebungsapproximation des Solid-Shell Konzeptes (9.6) unverändert bleibt. Allerdings steigt die Zahl der Operationen auf Elementebene bei der EAS Methode erheblich und bei einer nichtlinearen Berechnung mit sehr großen Lastschritten kann es aufgrund der zusätzlichen Freiwerte  $\boldsymbol{\alpha}_e$  zu Konvergenzproblemen kommen.

## 9.4 Anmerkungen zur Erweiterung auf große Verzerrungen

Nur die beiden zuletzt beschriebenen Formulierungen, die auf einer linearen Normalverzerrung in Dickenrichtung beruhen, eignen sich zur Erweiterung auf große Verzerrungen, da keine Einschränkungen bezüglich der Verwendung allgemeiner dreidimensionaler Materialgesetze vorausgesetzt werden.

Die zur Vermeidung der Querschubversteifung eingeführte Methode der angenommenen Verzerrungen kann entsprechend den Bemerkungen in Kapitel 3.3.1 auf große Verzerrungen erweitert werden, indem einer Idee von Dvorkin [25] folgend Teile des Deformationsgradienten ähnlich den Verzerrungen angenommen werden. Dazu wird der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (9.30)$$

in globalen Koordinaten, den man aus der Geometrie (9.1) und Verschiebung (9.6) erhält, durch eine polare Dekomposition in einen eigentlich orthogonalen Drehtensor  $\mathbf{R}$  und symmetrischen, rechten Strecktensor  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (9.31)$$

zerlegt. Damit ergibt sich der symmetrische Henky Verzerrungstensor

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{U}, \quad (9.32)$$

der anschließend auf das kontravariante konvektive Basissystem in der unverformten Konfiguration transformiert werden muß

$$\mathbf{H} = \overline{H}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (9.33)$$

Dann erfolgt die Interpolation der Komponenten des Henky Verzerrungstensors

$$\tilde{H}_{11} = H_{11}, \quad \tilde{H}_{22} = H_{22}, \quad \tilde{H}_{12} = H_{12}, \quad \tilde{H}_{33} = H_{33} \quad (9.34)$$

und

$$\tilde{\mathbf{H}}_{qs} = \mathbf{Q}_{qs} \bar{\mathbf{H}}_{qs}, \quad (9.35)$$

wobei dem bilinearen Element die Matrix  $\mathbf{Q}_{qs}$  (7.78) und der Vektor (7.79) zugrunde liegt, in dem noch die Green-Lagrange Verzerrungen  $E_{ij}$  durch die Henky Verzerrungen  $H_{ij}$  ersetzt werden müssen. Rücktransformation und Zusammenbau

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \exp(\tilde{\mathbf{H}}) \quad (9.36)$$

führen auf einen Deformationsgradienten in globalen Koordinaten, in dem dann die Maßnahmen zur Vermeidung der Querschubversteifung eingeflossen sind.

Im Fall der Formulierung basierend auf der quadratischen Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung ist mit obiger Überlegung der Deformationsgradient in globalen Koordinaten bekannt und man kann den von Simo [66], [67], [70] vorgestellten Algorithmus zur Behandlung großer Deformationen ohne weitere Vereinfachungen einsetzen.

Bei der Annahme einer linearen Normalverzerrung durch die EAS Methode führt die ursprünglich von Simo und Armero [71] auf große Verzerrungen erweiterte EAS Methode mit einer von Büchter, Ramm und Roehl [18] vorgeschlagenen Erweiterung des Deformationsgradienten in Dickenrichtung auf den benötigten Deformationsgradienten. Hierbei wird der kompatible Deformationsgradient  $\mathbf{F}_k$  (9.30) um den Anteil

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{M} \quad (9.37)$$

additiv erweitert

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \tilde{\mathbf{F}}, \quad (9.38)$$

wobei  $\mathbf{J}_0$  die Jacobimatrix der isoparametrischen Abbildung am Elementmittelpunkt,  $\det \mathbf{J}_0$  die zugehörige Determinante und  $\det \mathbf{J}$  die Determinante der Jacobimatrix an einem beliebigen Punkt der Schale darstellt.

Allerdings erfordern die beiden zuvor beschriebenen Vorgehensweisen eine vollständige Neuprogrammierung. Eine Vorgehensweise, die auf einer Erweiterung der bereits bestehenden Elementformulierungen beruht, basiert auf einer Idee von Eberlein [80] und wird im folgenden vorgestellt. Ausgangspunkt ist der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  (9.30), der sich aus der Geometrie- und Verschiebungsapproximation ergibt, und der durch eine polare Dekomposition (9.31) erhaltene zugehörige Drehtensor  $\mathbf{R}$ . Weiterhin bekannt ist der Green-Lagrange Verzerrungstensor  $\tilde{\mathbf{E}}$ , in dem bereits alle zuvor eingeführten Änderungen durch die Methode der angenommenen Verzerrungen oder die EAS Methode enthalten sind. Daraus kann der zu den Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  gehörende rechte Cauchy-Green Tensor

$$\tilde{\mathbf{C}} = 2\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{1} \quad (9.39)$$

ermittelt werden. Bei der formalen Ermittlung des rechten Cauchy-Green Tensors aus einem zu den Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  konsistenten Deformationsgradienten  $\tilde{\mathbf{F}}$  zeigt sich, daß der eigentlich orthogonale Drehtensor  $\mathbf{R}$  herausfällt:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{U}}. \quad (9.40)$$

Durch diese Feststellung kann eindeutig der benötigte Deformationsgradient  $\tilde{\mathbf{F}}$  aufgestellt werden, indem der durch angenommene Verzerrungen oder erweiterte angenommene Verzerrungen modifizierte rechte Strecktensor  $\tilde{\mathbf{U}}$  über eine Spektralzerlegung aus der Beziehung (9.40)

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}} \quad (9.41)$$

mit dem Drehtensor des ursprünglichen Deformationsgradienten  $\mathbf{R}$  multipliziert wird

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{U}}. \quad (9.42)$$

Bisherige Untersuchungen, die jedoch den Rahmen der vorliegenden Arbeit übersteigen, führen bei der Solid-Shell Schale mit einer quadratischen Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung und der Schale mit einer linearen Normalverzerrung in Dickenrichtung über die EAS Methode bei Zugrundelegung des um kompressible Anteile erweiterten Ogden Materialgesetzes zu brauchbaren Ergebnissen. Allerdings muß die von Kontinuumelementen bekannte Problematik der volumetrischen Versteifung bei inkompressiblen Materialien noch betrachtet werden.

## 10 FE-Diskretisierung: Solid-Shell Schalenelemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung

Zu Beginn dieses Abschnitts werden die wesentlichen für eine Finite Element Diskretisierung notwendigen Grundlagen der im Anschluß daran detailliert dargestellten Solid-Shell Schalenelementformulierungen beschrieben.

### 10.1 Zur Diskretisierung von Solid-Shell Schalenelementen

#### 10.1.1 Geometrie- und Verschiebungsinterpolation

Die unverformte Schalengeometrie (9.1) geht nach Diskretisierung mit Bezug auf das globale kartesische Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  in die folgende Darstellung über

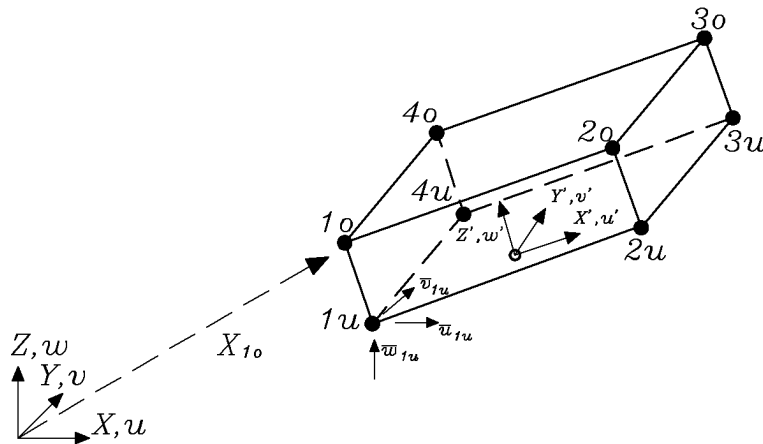


Bild 10.1: Diskretisierte Geometrie eines Solid-Shell Schalenelementes

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) &= [X \ Y \ Z]^T \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \left\{ (1 + \zeta) \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{pmatrix}_o + (1 - \zeta) \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{pmatrix}_u \right\}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

die mit der Geometrieapproximation linearer Kontinuumelemente übereinstimmt. In Gleichung (10.1) sind  $\xi$  und  $\eta$  wie zuvor die lokalen natürlichen Koordinaten auf der Mittelfläche,  $\zeta$  die Koordinate in Dickenrichtung und  $n$  ist die Zahl der Kanten pro Element. Dabei bezeichnet der Begriff Kante die Verbindungslinie eines Knotens auf der Schalenseite mit dem entsprechenden Knoten auf der Schalenunterseite. Des weiteren werden mit  $N_i(\xi, \eta)$  die zweidimensionalen Ansatzfunktionen und mit  $\bar{\mathbf{X}}_{io} = [\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i]_o^T$  die Ortsvektoren in globalen Koordinaten zu dem Knoten  $i$  auf der Ober- und  $\bar{\mathbf{X}}_{iu} = [\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i]_u^T$  Unterseite des Schalenelementes bezeichnet. Die Verwendung der gleichen zweidimensionalen Ansatzfunktionen für die Verschiebung

(9.6) im Sinne eines isoparametrischen Konzeptes, führt auf die Verschiebungsapproximation in diskreter Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= [u \ v \ w]^T \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ N_i(\xi, \eta) \mathbf{T}(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) \end{bmatrix} \mathbf{d}_e^i \right\} \end{aligned} \quad (10.2)$$

mit dem Kantenverschiebungsvektor

$$\mathbf{d}_e^i = [\bar{\mathbf{u}}_{io}^T, \bar{\mathbf{u}}_{iu}^T]^T = [\bar{u}_{io}, \bar{v}_{io}, \bar{w}_{io}, \bar{u}_{iu}, \bar{v}_{iu}, \bar{w}_{iu}]^T. \quad (10.3)$$

Hierin kennzeichnen die Größen mit Strich oben und Index  $i$  die Verschiebungen an jeder Kante  $i$ . Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'] \quad (10.4)$$

der Transformation von einem verformten lokalen kartesischen auf das globale kartesische Koordinatensystem muß bei der numerischen Integration an jedem Gaußpunkt aufgestellt werden. Eine Möglichkeit ein lokales kartesisches Koordinatensystem mit zwei Achsen parallel zur Tangentialebene der Schale in der verformten Konfiguration zu wählen ist:

$$\mathbf{x}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \right|}, \quad \mathbf{z}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \eta} \right|}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{z}', \quad (10.5)$$

mit der verformten Geometrie der Mittelfläche

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_o(\xi, \eta) + \mathbf{x}_u(\xi, \eta)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_o(\xi, \eta) + \mathbf{u}_o(\xi, \eta) + \mathbf{X}_u(\xi, \eta) + \mathbf{u}_u(\xi, \eta)). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Schon in Kapitel 9.1 wurde auf eine alternative Formulierung hingewiesen, die entsteht, wenn die Verschiebungen statt auf ein lokales kartesisches Koordinatensystem auf ein lokales konvекtives Koordinatensystem transformiert werden. Dann sind in der entsprechenden Transformationsmatrix zur Transformation der Verschiebungen von dem lokalen kontravarianten konvекtiven auf das globale kartesische Koordinatensystem die Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  (Gl. (7.9)) als Spalten angeordnet:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{g}_1(\xi, \eta, 0), \mathbf{g}_2(\xi, \eta, 0), \mathbf{g}_3(\xi, \eta, 0)]. \quad (10.7)$$

Diese Transformationsmatrix entspricht im linearen Fall der transponierten Jacobi-matrix  $\mathbf{J}^T$  von der isoparametrischen Abbildung auf das Einheitselement und muß ohnehin an jedem Gaußpunkt ausgewertet werden. Wie bereits erwähnt, kann auf die Transformation der Verschiebungen ganz verzichtet werden, wenn die Matrix mit der Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung (9.3) die gleichen Interpolationen für alle drei Richtungen enthält.

### 10.1.2 Verzerrungen und Spannungen bezogen auf konvektive Koordinaten

Entsprechend der Vorgehensweise bei degenerierten Schalelementen und der Bemerkung am Ende des vorherigen Abschnitts ist es auch bei Solid-Shell Schalelementen zweckmäßig, die Verzerrungen und Spannungen in einem lokalen konvektiven Koordinatensystem zu berechnen. Wiederum ergibt sich dann der auf das kontravariante konvektive Koordinatensystem transformierte Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (10.8)$$

und die zugehörigen 2. Piola-Kirchhoff Spannungen in kovarianten Koordinaten

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (10.9)$$

Die weitere Vorgehensweise zur Ermittlung des Green-Lagrange Verzerrungstensors aus den Verschiebungen kann man direkt aus Kapitel 7.1.3 übernehmen.

#### Das linear elastische Materialgesetz in einer kovarianten Basis

Zusätzlich zu der Darstellung des bereits mit der Bedingung des ebenen Spannungszustandes kondensierten Materialgesetzes (7.29) wird bei den Solid-Shell Elementen noch das auf das kovariante Basissystem transformierte ansonsten aber unveränderte Materialgesetz benötigt. Ausgangspunkt ist die bereits transformierte Darstellung des isotropen, linear elastischen Materialgesetzes als vierstufiger Tensor

$$\mathbf{C}^{iv} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l, \quad (10.10)$$

wobei  $\lambda$  und  $\mu$  Lamé Konstanten (7.28) sind. Durch die bei Solid-Shell Schalen gewählte Anordnung der Komponenten des Verzerrungs- und Spannungstensors in Vektoren (9.8) und unter Vernachlässigung der Metrikkoeffizienten  $G^{\alpha 3}$  und  $G^{3\alpha}$  lassen sich die Elemente des vierstufigen Materialtensors in einer Matrix wie folgt anordnen:

$$\mathbf{C} = \lambda \begin{bmatrix} G^{11}G^{11} & G^{11}G^{22} & G^{11}G^{12} & G^{11}G^{33} & 0 & 0 \\ G^{11}G^{22} & G^{22}G^{22} & G^{22}G^{12} & G^{22}G^{33} & 0 & 0 \\ G^{12}G^{11} & G^{12}G^{22} & G^{12}G^{12} & G^{12}G^{33} & 0 & 0 \\ G^{11}G^{33} & G^{22}G^{33} & G^{12}G^{33} & G^{33}G^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

$$+ \mu \begin{bmatrix} 2G^{11}G^{11} & 2G^{12}G^{12} & 2G^{11}G^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 2G^{12}G^{12} & 2G^{22}G^{22} & 2G^{12}G^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 2G^{11}G^{12} & 2G^{12}G^{22} & G^{12}G^{12} + G^{11}G^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G^{33}G^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa G^{22}G^{33} & \kappa G^{21}G^{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa G^{33}G^{12} & \kappa G^{33}G^{11} \end{bmatrix}.$$

Der in obiger Gleichung auftretende Faktor  $\kappa$  ist der auch für Platten und degenerierten Schalen gebräuchliche Schubkorrekturfaktor, der je nach verwendetem Konzept zur Anpassung des angenommenen an den wahren Verlauf der Querschubverzerrungen in Dickenrichtung notwendig ist.

### Diskussion des Schubkorrekturfaktors

Abweichend von der Kinematik der Reissner-Mindlin Platten und der degenerierten Schalen führt die Kinematik des Solid-Shell Konzeptes mit linearem Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung  $w'$  über die Dicke zu linear veränderlichen Querschubverzerrungen  $E_{23}$  und  $E_{31}$  in Dickenrichtung. Zur Erfüllung der Spannungsrandbedingungen  $E_{23}(\zeta = 1) = 0$ ,  $E_{31}(\zeta = 1) = 0$  und  $E_{23}(\zeta = -1) = 0$ ,  $E_{31}(\zeta = -1) = 0$  an der Elementober- beziehungsweise -unterseite ist jedoch ein quadratischer Verlauf erforderlich. Entsprechend der Reissner-Mindlin Theorie und dem Degenerationskonzept ist auch beim Solid-Shell Konzept ein Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  erforderlich, der jetzt im Mittel die Abweichungen des linearen Verlaufs vom wahren quadratischen Verlauf ausgleicht. Da die gemittelten Abweichungen von einem konstanten zu einem quadratischen Verlauf den gemittelten Abweichungen von einem linearen zu einem quadratischen Verlauf entsprechen, kann auch beim Solid-Shell Konzept für Rechteckquerschnitte der Wert  $\kappa = 5/6$  verwendet werden.

Einzig die Solid-Shell Schalenformulierung mit quadratischer Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung muß gesondert betrachtet werden. Der in Dickenrichtung quadratische Verlauf der Querschubverzerrungen, der durch die quadratische Approximation der Verschiebung  $w'$  in Dickenrichtung entsteht, kann jeweils in einen konstanten Anteil  $E_{23}^k$ ,  $E_{31}^k$  und quadratisch veränderlichen Anteil  $E_{23}^q$ ,  $E_{31}^q$  aufgespalten werden:

$$E_{23} = E_{23}^k + E_{23}^q \quad E_{31} = E_{31}^k + E_{31}^q, \quad (10.12)$$

wobei der konstante Anteil

$$E_{23}^k = \frac{\partial v'}{\partial z'} \quad E_{31}^k = \frac{\partial u'}{\partial z'} \quad (10.13)$$

und der quadratisch veränderliche Anteil

$$E_{23}^q = \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad E_{31}^q = \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (10.14)$$

eindeutig den jeweiligen Verschiebungen mit den unterschiedlichen Interpolationen zugeordnet werden kann. Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit liegt den Gleichungen (10.13) und (10.14) der linearisierte Green-Lagrange Verzerrungstensor zugrunde,  $u'$ ,  $v'$ ,  $x'$  und  $y'$  sind die Verschiebungen beziehungsweise Koordinaten in der Tangentialebene und  $w'$  und  $z'$  ist die Verschiebung beziehungsweise Koordinate in Dickenrichtung. Dann lassen sich die Querschubspannungen

$$\begin{aligned} S_{23} &= G^{22}G^{33} (\kappa_k E_{23}^k + \kappa_q E_{23}^q) + G^{21}G^{33} (\kappa_k E_{31}^k + \kappa_q E_{31}^q) \\ S_{31} &= G^{33}G^{12} (\kappa_k E_{23}^k + \kappa_q E_{23}^q) + G^{33}G^{11} (\kappa_k E_{31}^k + \kappa_q E_{31}^q) \end{aligned} \quad (10.15)$$



korrekt berechnen, indem der Schubkorrekturfaktor  $\kappa_k$  der konstanten Querschubverzerrungsanteile gleich  $\kappa_k = 5/6$  gesetzt wird. Bei der gewählten hierarchischen quadratischen Verschiebungsinterpolation (9.20) entsteht ein quadratischer Verlauf der Querschubverzerrungen entsprechend Bild 9.5. Dieser Verlauf erfüllt aber nicht die Spannungsrandbedingungen und somit stimmt er auch nicht mit dem wahren Verlauf der Querschubverzerrungen (s. Bild 5.1) überein. Das heißt, je nachdem ob ein linearer oder quadratischer Verlauf überwiegt, nimmt der Schubkorrekturfaktor der quadratischen Anteile einen Wert zwischen  $5/6 \leq \kappa_q \leq 1$  an.

Allerdings zeigen die bisherigen numerischen Beispielrechnungen, daß die Vereinfachung  $\kappa_k = \kappa_q = 5/6$  ebenso wie die Vereinfachung  $\kappa_k = \kappa_q = 1$  lediglich einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Ergebnisse ausübt.

### 10.1.3 Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor

Da im Gegensatz zu dem Degenerationskonzept bei dem Solid-Shell Konzept immer ein linearer Zusammenhang zwischen den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und den diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}_e$  gewährleistet ist, ergeben sich die Verschiebungen  $\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{d}_e$  und die zugehörigen Variationen  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{D}\delta\mathbf{u}$  mit Hilfe der gleichen Matrix

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_e}. \quad (10.16)$$

Somit ändern sich gegenüber den degenerierten Schalenelementen beim Aufstellen der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tang}^e &= \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{d}_e \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{d}_e \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (10.17)$$

und des Elementresidualvektors

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} &= \mathbf{f}_{ext} - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \mathbf{f}_{ext} - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (10.18)$$

die Abkürzungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{d}_e = \left[ \mathbf{D}^1 \quad \dots \quad \mathbf{D}^n \right] \begin{pmatrix} \mathbf{d}_e^1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_e^n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_e^i = \begin{pmatrix} \bar{u}_{io} \\ \bar{v}_{io} \\ \bar{w}_{io} \\ \bar{u}_{iu} \\ \bar{v}_{iu} \\ \bar{w}_{iu} \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

und

$$\mathbf{D}^i = \frac{1}{2} N_i \left( (1 + \zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}_i \end{bmatrix} \right), \quad \text{wobei} \quad (10.20)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} T_{11}T_{11} + T_{12}T_{12} + T_{13}T_{13} & T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} + T_{13}T_{23} \\ T_{21}T_{11} + T_{22}T_{12} + T_{23}T_{13} & T_{21}T_{21} + T_{22}T_{22} + T_{23}T_{23} \\ T_{31}T_{11} + T_{32}T_{12} + T_{33}T_{13} & T_{31}T_{21} + T_{32}T_{22} + T_{33}T_{23} \\ \\ T_{11}T_{31} + T_{12}T_{32} + T_{13}T_{33} \\ T_{21}T_{31} + T_{22}T_{32} + T_{23}T_{33} \\ T_{31}T_{31} + T_{32}T_{32} + T_{33}T_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Ermittlung der Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \quad (10.21)$$

erfordert lediglich eine entsprechende Ableitung der  $\mathbf{D}$  Matrix (10.20). In Gleichung (10.20) sind  $T_{ij}$  die Komponenten der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  der Transformation von globalen auf lokale Koordinaten. Damit nimmt der Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die einfache Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\eta \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta \mathbf{d}_e \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

die zweistufige Matrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}$  die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\zeta \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\eta \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_\xi + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\xi \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

und die dreistufige Matrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}$  die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 & \mathbf{H}_5 & \mathbf{H}_6 \end{bmatrix}^T \quad (10.24)$$

an. Die zweistufigen Untermatrizen  $\mathbf{H}_i$  ergeben sich in der lokalen kontravarianten Basis durch Auswerten der Matrizenprodukte zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\xi, & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\eta, & \mathbf{H}_3 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\eta + \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\xi, & \mathbf{H}_4 &= \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\zeta, \\ \mathbf{H}_5 &= \mathbf{D}_\eta^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\eta, & \mathbf{H}_6 &= \mathbf{D}_\xi^T \mathbf{D}_\zeta + \mathbf{D}_\zeta^T \mathbf{D}_\xi. \end{aligned} \quad (10.25)$$

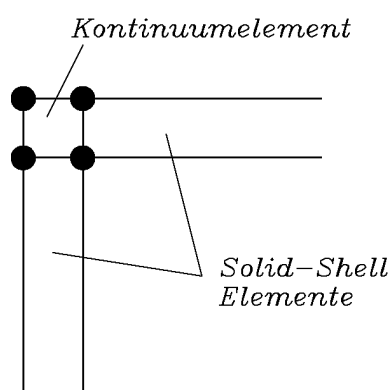
Dann sind mit den Materialmatrizen aus dem vorangegangenen Abschnitt alle Größen zum Aufstellen der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementresidualvektors beim Solid-Shell Konzept bekannt. Auch die bei der Berücksichtigung einer verformungsabhängigen Druckbelastung zusätzlichen Anteile zur Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e^p$  (10.17) und zum Elementlastvektor  $\mathbf{f}_{int}^p$  (10.18) können entsprechend Kapitel 7.1.6 mit Hilfe oben angegebener Matrizen ausgewertet werden.

#### 10.1.4 Vereinfachungen bei der Geometrieingabe

Die gewählte Geometrieapproximation (10.1) verlangt in der ursprünglichen Form, daß an jeder Kante die Koordinaten von der Schalenober- und -unterseite eingegeben werden. Somit entspricht die eigentliche Geometrieingabe der eines Kontinuumelementes. Um bereits bestehende Diskretisierungen von Berechnungen mit degenerierten Schalenelementen übernehmen zu können, besteht zusätzlich die Möglichkeit der Geometrieingabe entsprechend den degenerierten Schalenelementen durch Angabe der Mittelflächenkoordinaten und der Länge jeder Kante. Die hierzu notwendigen Algorithmen wurden bereits in Kapitel 7.1.7 ausführlich erläutert und können unverändert übernommen werden.

#### 10.1.5 Behandlung von Schalenverschneidungen

Um Schalenverschneidungen exakt erfassen zu können, ist es notwendig, an der Stelle der Verschneidung Solid-Shell Schalenelemente, mit denen die restliche Struktur diskretisiert ist, mit einem Kontinuumelement entsprechend Bild 10.2 zu koppeln. Die

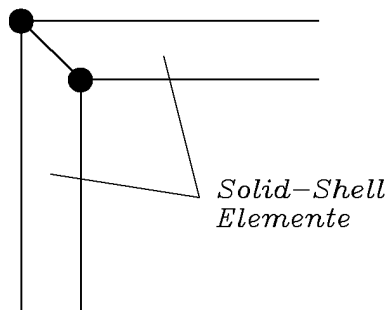


**Bild 10.2:** Schalenverschneidung mit einem Kontinuumelement diskretisiert

bei Verschneidungen zwangsläufig auftretenden dreidimensionalen Spannungszustände

lassen sich mit dieser Art der Diskretisierung beschreiben, jedoch mit recht hohem Diskretisierungsaufwand.

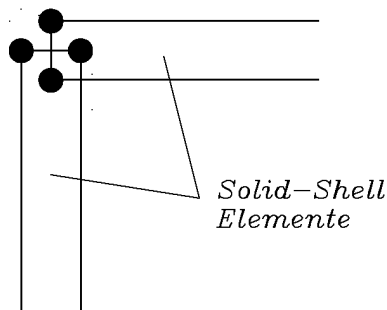
Eine andere Möglichkeit, von der allerdings abgeraten wird, besteht darin, die Solid-Shell Schalenelemente an der Verschneidung direkt miteinander zu verbinden, siehe Bild 10.3. Abgeraten wird darum, weil die den Solid-Shell Elementen zugrunde



**Bild 10.3:** Schalenverschneidung direkt mit Solid-Shell Elementen

liegende Annahme, daß die Elementseitenflächen senkrecht zur Ober- und Unterseite stehen, bei der Verwendung linearer Ansatzfunktionen verletzt wird und somit deutlich schlechtere Ergebnisse erzielt werden.

Ein wesentlich geringerer Fehler entsteht bei dünnen Schalen, wenn an der Verschneidungsstelle die Mittelflächen der jeweiligen Solid-Shell Elemente miteinander verbunden werden und die Seitenflächen weiterhin senkrecht zur Ober- und Unterseite ausgerichtet bleiben, siehe Bild 10.4. Zwar befinden sich dann die miteinander



**Bild 10.4:** Schalenverschneidung mit Verbindung der Mittelflächen

gekoppelten Freiheitsgrade an unterschiedlichen Positionen, mit der daraus folgenden Einschränkung, daß Starrkörperrotationen des Verschneidungsknotens stark behindert werden.

### 10.1.6 Behandlung geschichteter Strukturen

Ein wesentlicher Vorteil von Solid-Shell Elementen gegenüber degenerierten Schalenelementen besteht in der Möglichkeit auch geschichtete Strukturen zu berechnen, indem mehr Elemente über die Dicke mit entsprechend dem zu untersuchenden Problem

verschiedenen Materialeigenschaften angeordnet werden. Zur Darstellung von Delaminationen genügt es, eine nichtlineare Feder zwischen den Schichten einzuführen oder bei Überschreiten einer vorgegebenen Spannung die tangentielle Steifigkeitsmatrix und den Residualvektor des betreffenden Solid-Shell Elementes identisch null zu setzen.

Allerdings weisen Verbundwerkstoffe oft Materialeigenschaften auf, die eine stark ausgeprägte Richtungsabhängigkeit zeigen. Zur Implementierung solcher anisotroper Materialgesetze muß das Potential statt in konvektiven in lokalen kartesischen Koordinaten aufgestellt werden, siehe z.B. Klarmann [40]. Ein solches Koordinatensystem kann entsprechend Gleichung (7.88) ermittelt und anschließend um die  $\mathbf{Z}'$ -Achse so gedreht werden, daß die Achsen in der  $\mathbf{X}'$ - $\mathbf{Y}'$ -Ebene mit der Vorzugsrichtung des verwendeten Materials zusammenfallen. Durch die Interpolation der Querschubverzerrungen in natürlichen Koordinaten sind an jedem Gaußpunkt und an jeder Stützstelle rechenzeitintensive Transformationen von den lokalen konvektiven auf die lokalen kartesischen Koordinatensysteme (7.91) notwendig. Eine einfache Darstellung ergibt sich durch Einsetzen der aus der kartesischen Basis folgenden Bedingung

$$G^{ij} = \delta^{ij} \quad (10.26)$$

für das St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz (10.11) und das zugehörige reduzierte Materialgesetz (7.29).

## 10.2 Bilineare Solid-Shell Schalenelemente

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Solid-Shell Schalenelemente mit vier Kanten, d.h. acht Knoten, und den bilinearen Lagrange Ansatzfunktionen

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 \pm \xi) (1 \pm \eta) \quad i = 1 \dots 4 \quad (10.27)$$

untersucht. Zur Vermeidung der bei einer reinen Verschiebungsformulierung auftretende Querschubversteifung wird die Methode der angenommenen Verzerrungen mit den bereits in Kapitel 7.2.1 vorgestellten Verzerrungsinterpolationen nach Bathe und Dvorkin [23] auf die verschiedenen bilinearen Solid-Shell Schalenelemente angewendet. Die einzelnen in diesem Abschnitt vorgestellten Solid-Shell Elementformulierungen unterscheiden sich lediglich in der Vorgehensweise zum Vermeiden der Versteifung in Dickenrichtung.

### 10.2.1 ANS3DL Element

Bis auf die angenommenen Querschubverzerrungen basiert diese Elementformulierung ohne weitere Annahmen auf der unveränderten Geometrie- (10.1) und Verschiebungsapproximation (10.2) des Solid-Shell Konzeptes.

Demnach tritt bei Problemstellungen, die Querkontraktionseffekte beinhalten, die zuvor beschriebene sogenannte Dickenversteifung auf. Im Gegensatz dazu führt das ANS3DL Element bei Problemstellungen ohne Querkontraktionseffekte zu einer sehr effizienten Berechnung. Ein durch Versteifungseffekte verfälschtes Ergebnis kann aber vermieden werden, wenn die zu untersuchende Struktur mit etwa acht Elementen über die Dicke diskretisiert wird. Jedoch spricht hiergegen der bei weitem zu hohe Aufwand.

### 10.2.2 ANS6z Element

Dem ANS6z Element liegt das modifizierte Funktional (9.12) zugrunde, das in den konvektiven Koordinaten ausgewertet wird. Die zur Berechnung der Biege-, Membran- und Querschubspannungen notwendige Spannung-Dehnungs-Beziehung entspricht dem auf das kovariante konvektive Basissystem transformierten reduzierten Materialgesetz (7.29). Einzig der verallgemeinerte Elastizitätsmodul muß mit Hilfe der kontravarianten Metrikkoeffizienten  $G^{ij}$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  wie folgt bestimmt werden:

$$\bar{E} = G^{33} G^{33} E. \quad (10.28)$$

Die bei einer geometrisch nichtlinearen Problemstellung notwendige Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta E_{\zeta\zeta}^T \bar{E} E_{\zeta\zeta} dV + \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (10.29)$$

führt auf die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tang}^e &= \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{d}_e \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \\ &\quad + \int_V \left( E_{\zeta\zeta,\mathbf{d}_e}^T \bar{E} E_{\zeta\zeta,\mathbf{d}_e} + E_{\zeta\zeta,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{d}_e \bar{E} E_{\zeta\zeta} \right) dV \end{aligned} \quad (10.30)$$

und den inneren Elementlastvektor

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbf{C}_{red} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V E_{\zeta\zeta,\mathbf{d}_e}^T \bar{E} E_{\zeta\zeta} dV \quad (10.31)$$

in diskreter Form.

Die ANS6z Elementformulierung kann überall statt degenerierter Schalenelemente eingesetzt werden, mit den Vorteilen, daß keine Schwierigkeiten aufgrund von Rotationsfreiheitsgraden entstehen und sogar eine grobe Abschätzung der Normalverzerrungen und -spannungen in Dickenrichtung erhalten wird. Jedoch liegt der wesentliche Nachteil des ANS6z Elementes in der notwendigen Reduktion des Materialgesetzes, die nur für wenige einfache Materialien durchführbar ist.

### 10.2.3 ANS3DLr Element

Diese Elementformulierung basiert auf der Idee, die Membranverzerrungen und -spannungen von den Biegeverzerrungen und -spannungen zu trennen mit dem Vorteil gegenüber dem ANS6z Element einer im Mittel korrekten Normalverzerrung und -spannung in Dickenrichtung. Somit werden zur Ermittlung der Membran- und Querschubspannungen ein allgemeines dreidimensionales Materialgesetz, im linear elastischen Fall (10.11), und zur Ermittlung der Biegespannungen das zugehörige reduzierte Materialgesetz, hier Gleichung (7.29), jeweils in kovarianten konvektiven Koordinaten zugrunde gelegt.

Damit wird deutlich, daß auch beim ANS3DLr Element keine allgemeinen dreidimensionalen Materialgesetze implementiert werden können und aufgrund der getrennten Behandlung des Membran- und Biegeanteils die Zahl der Operationen auf Elementebene beträchtlich steigt. Hinzu kommt noch der bereits in Kapitel 9.3.1 erwähnte Nachteil, daß wegen der reduzierten Integration der Koppelterme lediglich ebene Strukturen exakt erfaßt werden.

#### 10.2.4 ANS3Dq Element

Im Gegensatz zu den drei zuvor vorgestellten Solid-Shell Elementen beruht das ANS3Dq Element auf der modifizierten Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung (9.19). Die zugehörige diskretisierte Verschiebungsinterpolation in globalen Koordinaten ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= [ u \quad v \quad w ]^T \\ &= \sum_{i=1}^4 \left\{ N_i(\xi, \eta) \mathbf{T}(\xi, \eta) \bar{\Theta}(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e^i \right\} \end{aligned} \quad (10.32)$$

mit der Matrix der Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung  $\bar{\Theta}$  (9.20) und dem Kantenverschiebungsvektor

$$\mathbf{d}_e^i = [\bar{\mathbf{u}}_{io}^T, \bar{\mathbf{u}}_{iu}^T, \beta_i]^T = [\bar{u}_{io}, \bar{v}_{io}, \bar{w}_{io}, \bar{u}_{iu}, \bar{v}_{iu}, \bar{w}_{iu}, \beta_i]^T, \quad (10.33)$$

der jetzt sieben statt zuvor sechs Freiheitsgrade pro Elementkante aufweist. Somit erfordert eine Netzeingabe entsprechend Kontinuumelementen aufgrund der dann notwendigen Kantenmittelknoten (s. Bild 9.5) eine aufwendigere Geometrieingabe. Abweichend von der Verschiebungsapproximation wird zur Ermittlung der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  ein linearer Verlauf aller Verschiebungen in Dickenrichtung analog zu Gleichung (10.5) angenommen.

Entscheidend für das Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementresidualvektors ist die veränderte Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^i &= \frac{1}{2} N_i ((1 + \zeta) [ \mathbf{A}_l \quad \mathbf{0}_{3 \times 4} ] + (1 - \zeta) [ \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{A}_l \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} ]) \\ &\quad + \frac{1}{2} N_i (1 - \zeta^2) [ \mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \mathbf{A}_q ] \end{aligned} \quad (10.34)$$

wobei  $\mathbf{A}_l$  der Gleichung (10.20) entnommen werden kann und

$$\mathbf{A}_q = \begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix}$$

ist.

Zusätzlich zur aufwendigeren Geometrieingabe ist das ANS3Dq Element wegen der größeren Bandbreite der resultierenden Steifigkeitsmatrix ineffizienter. Wird wiederum eine Auswertung in lokalen konvektiven Koordinaten zugrunde gelegt, muß das Materialgesetz mittels der kontravarianten Metrikkoeffizienten  $G^{ij}$  transformiert werden. Im Fall des hier betrachteten isotropen, linear elastischen Materialgesetzes ergibt sich dann die Matrizendarstellung (10.11) aus Kapitel 10.1.2.

### 10.2.5 ANS3DEAS Element

Auch bei dem ANS3DEAS Element wird analog zum ANS3Dq Element ein linearer Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung über die Dicke angenommen. Diesmal wird der lineare Verlauf jedoch nicht durch eine Erhöhung der Ordnung der Verschiebungsapproximation sondern durch Anwenden der EAS Methode nach Kapitel 3.3.3 erreicht. Bei der gewählten bilinearen Interpolation der Verschiebungen in den natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ergibt sich die Interpolationsmatrix  $\mathbf{M}$  der inkompatiblen Normalverzerrung in Dickenrichtung (9.29)

$$\mathbf{M} = [ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta ] \quad (10.35)$$

und der Vektor  $\boldsymbol{\alpha}_e$  mit den vier unbekanntenen Parametern

$$\boldsymbol{\alpha}_e = [ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 ]^T, \quad (10.36)$$

die anschließend auf Elementebene auskondensiert werden. Im Gegensatz zu Elementen mit Ansätzen höherer Ordnung in  $\xi$  und  $\eta$  kann beim Aufstellen der Interpolationsmatrix  $\mathbf{M}$  der Faktor

$$t_{33} = \mathbf{G}_3^T(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{G}^3(0, 0, 0), \quad (10.37)$$

der den Bezug zu einer konstanten Basis herstellt, vernachlässigt werden, da bei Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen die Achsen  $\mathbf{G}_3(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{G}^3(\xi, \eta, \zeta)$  ohnehin meistens an jedem Punkt der Schale in die gleiche Richtung zeigen.

Das ANS3DEAS Element sollte von allen vorgestellten Solid-Shell Schalenelementen bevorzugt werden, da es zusätzlich zu den bereits beim ANS3Dq Element beobachteten Vorteilen der Verwendungsmöglichkeit allgemeiner dreidimensionaler Materialgesetze noch eine einfache Geometrieingabe durch nur sechs Freiheitsgrade pro Kante erlaubt. Allerdings sind aufgrund der EAS Methode vor allem bei nichtlinearen Berechnungen viele zusätzliche Operationen notwendig und bei großen Lastschritten kann es aufgrund der mitaufdatierten zusätzlichen Elementfreiwerte  $\boldsymbol{\alpha}_e$  (Bild 3.3) zu Konvergenzproblemen kommen.

Eine weitere Variante dieses Elementes mit acht Elementfreiwerten  $\boldsymbol{\alpha}_e$  entsteht, wenn zusätzlich die Membranverzerrungen entsprechend dem in Kapitel 7.2.2 beschriebenen degenerierten Schalenelement erweitert werden.



# 11 Numerischer Vergleich der verschiedenen Solid-Shell Schalenelementformulierungen

## 11.1 Lineare Berechnungen

Die folgenden geometrisch und materiell linearen Berechnungen werden mit den in dem vorherigen Kapitel beschriebenen 4-Kanten Elementen, d.h. mit 4 bzw. 8 Knoten, durchgeführt. Zusätzlich zu den ANS6z, ANS3DL, ANS3DLr, ANS3DEAS und ANS3Dq Elementen, wird zum Vergleich das degenerierte 4-Knoten Schalenelement mit angenommenen Querschubverzerrungen herangezogen. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Abschnitten, in denen dieses Element mit ANS4 bezeichnet wurde, wird es hier aufgrund seiner fünf Freiheitsgrade pro Knoten ANS5 genannt.

### 11.1.1 Eigenwertuntersuchungen

Um bei Elementen Kinematiken oder eine Tendenz zum Versteifen feststellen zu können, werden die Eigenwerte jedes untersuchten Solid-Shell Elementes berechnet. Die dabei verwendete Elementform ist typisch für Elemente, die in einer regelmäßig diskretisierten quadratischen Platte enthalten sind.

Zuerst wird eine Elementform mit Dicke zu Längenverhältnis von  $h/l = 2/100$  betrachtet, die einer sehr groben Diskretisierung oder einer sehr dünnen Platte bzw. Schale entspricht. Anschließend wird das Dicke zu Längenverhältnis auf  $h/l = 1/3$

Element	Starrkörperbewegung	Kinematik	Eigenwerte			
			< 0.1	< 1.0	< 1000	max
ANS5	1.-6.	-	7.-11.	12.-17.	18.-20.	2.54
ANS6z	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	17.-23.	1365
ANS3DLr	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	17.-23.	1838
ANS3DL	1.-6.	-	7.	8.-16.	17.-23.	1838
ANS3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	17.-26.	1838
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	17.-23.	1838

**Tabelle 11.1:** Eigenwerte einer quadratischen Platte; Dicke zu Längenverhältnis  $h/l = 2/100$

angehoben. Dieses Verhältnis entspricht einer Vernetzung mit 16x16 Elementen in der Mittelebene und führt bei der Berechnung von ebenen oder wenig gekrümmten Schalen zu auskonvergierten Ergebnissen. Schließlich wird noch das Dicke zu Längenverhältnis  $h/l = 1$  untersucht. Solche Elementformen sind notwendig, um auch bei stark gekrümmten Schalen wie z.B. dem beidseits gedrückten Zylinder (s. Kapitel 11.1.4) oder an Stellen mit nahezu dreidimensionalen Spannungszuständen auskonvergierte Ergebnisse zu erhalten. Die wichtigste Erkenntnis aus den Tabellen 11.1 – 11.3 ist, daß keine der Elementformulierungen weder Kinematiken noch eine deutliche Tendenz zum Versteifen aufweist. Jedoch zeigt sich, daß bei einer sehr groben Vernetzung aufgrund der großen Steifigkeit in Dickenrichtung alle vorgeschlagenen Solid-Shell Schalenelemente

Element	Starrkörper- bewegung	Kinematik	Eigenwerte		
			< 0.1	< 1.0	max
ANS5	1.-6.	-	7.-12.	13.-19.	1.56
ANS6z	1.-6.	-	7.-9.	10.-19.	4.91
ANS3DLr	1.-6.	-	7.-9.	10.-19.	6.92
ANS3DL	1.-6.	-	7.	8.-18.	6.92
ANS3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-20.	6.92
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-19.	6.92

**Tabelle 11.2:** Eigenwerte einer quadratischen Platte; Dicke zu Längenverhältnis  $h/l = 1/3$

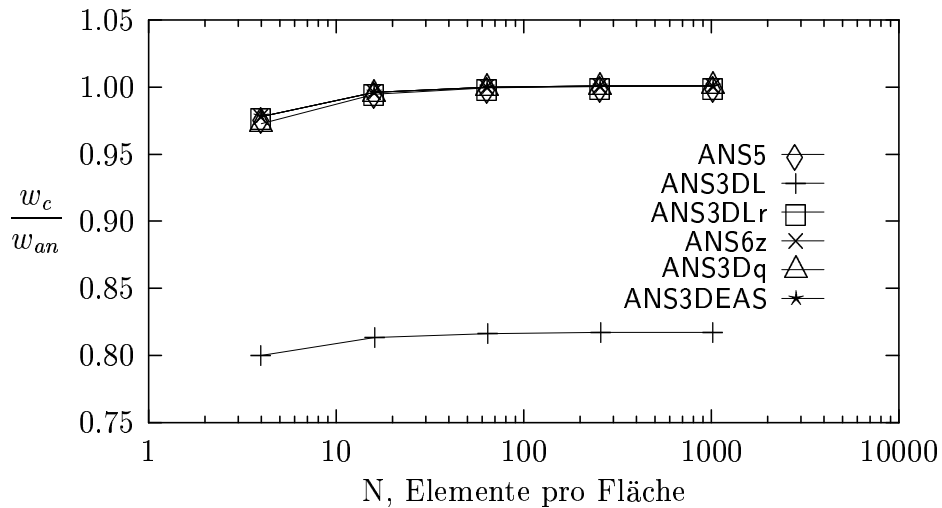
Element	Starrkörper- bewegung	Kinematik	Eigenwerte		
			< 0.1	< 1.0	max
ANS5	1.-6.	-	7.-12.	13.-18.	1.56
ANS6z	1.-6.	-	7.-11.	12.-24.	0.78
ANS3DLr	1.-6.	-	7.-10.	11.-23.	1.36
ANS3DL	1.-6.	-	7.-8.	9.-23.	1.36
ANS3Dq	1.-6.	-	7.-11.	12.-27.	1.36
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.-10.	11.-23.	1.36

**Tabelle 11.3:** Eigenwerte einer quadratischen Platte; Dicke zu Längenverhältnis  $h/l = 1$

wesentlich höhere Eigenwerte als das degenerierte Schalenelement besitzen. Allerdings ist kein deutlicher Unterschied der Eigenwerte der einzelnen Schalen- und Elementformulierungen zu finden, wenn feinere Diskretisierungen, die für auskonvergierte Ergebnisse notwendig sind, betrachtet werden. Weiterhin ist bemerkenswert, daß bei einer zur Berechnung stark gekrümmter Strukturen notwendigen, sehr feinen Vernetzung, die Eigenwerte der degenerierten Schale sogar größer sind als die der Solid-Shell Schalen.

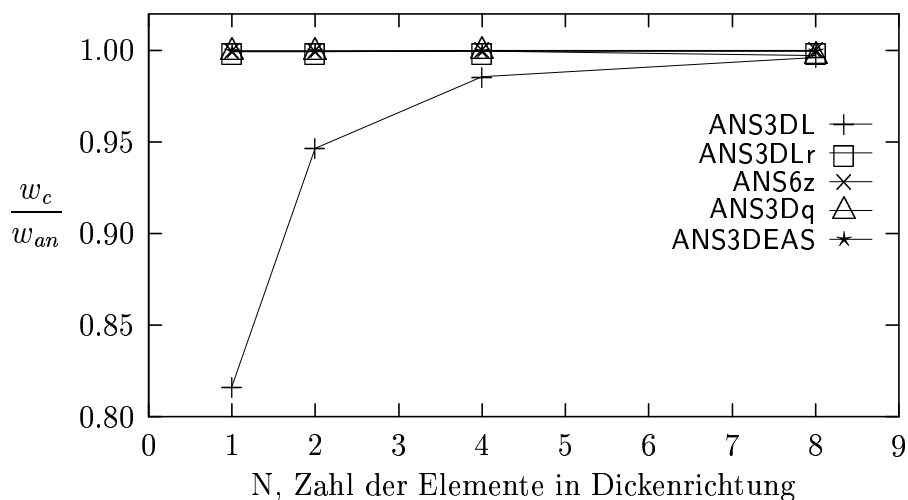
### 11.1.2 Einfach gelagerte Platte unter Flächenlast

Die bereits in Kapitel 8.1.2 untersuchte quadratische Platte wird hier mit einer Diskretisierung mit einem Element über die Plattendicke berechnet. In den folgenden drei Diagrammen wird die vertikale Verschiebung in Plattenmitte, die entsprechend der analytischen Lösung von Timoshenko [75] normiert ist, über der Zahl der Elemente pro Fläche aufgetragen.



**Bild 11.1:** Konvergenzuntersuchung verschiedener Elementformulierungen;  
Dünne quadratische Platte mit regelmäßiger Vernetzung

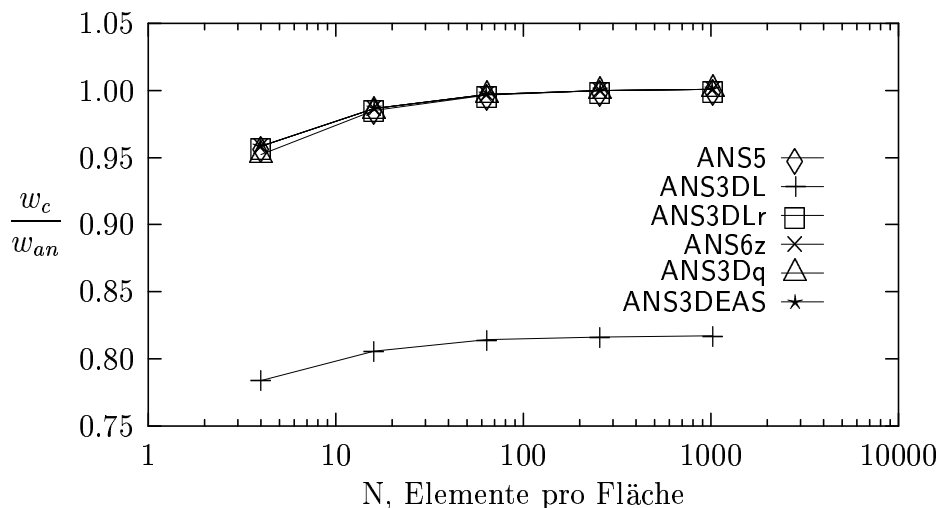
Aufgrund der ebenen Struktur sind die vertikalen Verschiebungen auf der Plattenoberseite und -unterseite identisch und die ANS5, ANS6z, ANS3DEAS und ANS3DLr Elemente führen zu den gleichen Ergebnissen. Offensichtlich konvergiert das ANS3DL Element im Gegensatz zu den restlichen Elementformulierungen nicht zu der analytischen Lösung, sondern zeigt deutlich eine Tendenz zum Versteifen. Dieser Defekt wurde bereits in Kapitel 9.2 erwähnt und kann auf die Kopplung der Normalspannung in Dickenrichtung mit den Spannungen parallel zur Mittelfläche zurückgeführt werden. Um diesen unerwünschten Effekt weiter zu untersuchen, wird die quadratische Platte bei einer Variation der Zahl der Elemente in Dickenrichtung mit  $8 \times 8$  Elementen in der Ebene diskretisiert.



**Bild 11.2:** Konvergenzuntersuchung verschiedener Elementformulierungen;  
Variation der Zahl der Elemente in Dickenrichtung

Bild 11.2 entsprechend führen die ANS6z, ANS3DEAS und ANS3Dq Elemente bereits mit einem Element über die Dicke zu der analytischen Lösung. Im Gegensatz dazu wird mit dem ANS3DL Element die analytische Lösung erst bei einer Diskretisierung mit acht Elementen über die Dicke erreicht. Bei dieser Diskretisierung ist interessanterweise auch beim ANS3Dq Element ein dreidimensionaler Effekt zu beobachten.

Der letzte wichtige Aspekt, der Einfluß unregelmäßiger Elementformen auf das Verhalten der verschiedenen Elementformulierungen, wird mittels der Berechnung der vertikalen Verschiebung einer Platte untersucht, die entsprechend Bild 8.4 vernetzt ist.

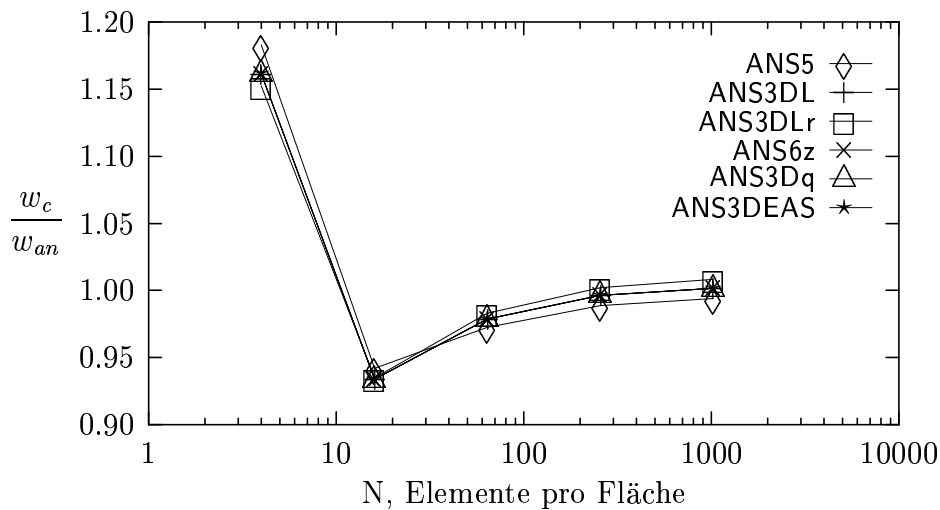


**Bild 11.3:** Konvergenzuntersuchung verschiedener Elementformulierungen; Dünne quadratische Platte mit unregelmäßiger Vernetzung

Bei einer groben Diskretisierung sind die Ergebnisse im Vergleich mit denen der regelmäßigen Vernetzung geringfügig schlechter, jedoch bleibt das charakteristische Verhalten der einzelnen Elemente erhalten.

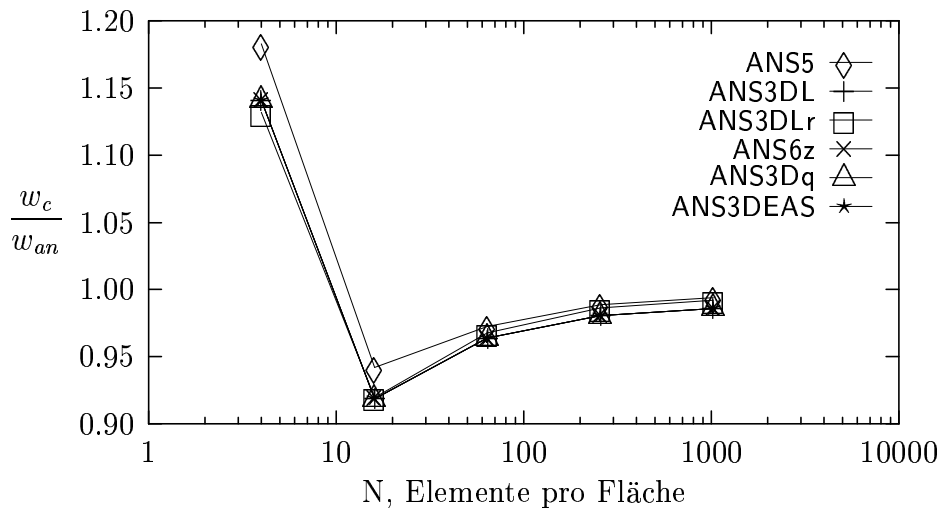
### 11.1.3 Tonnendach nach Scordelis und Lo

Auch dieses Beispiel wurde in einem vorhergehenden Kapitel bereits vorgestellt und wird zur Klärung der Fragestellung herangezogen, wie sich die Solid-Shell Schalenelemente bei der Berechnung von gekrümmten Strukturen verhalten.



**Bild 11.4:** Konvergenzuntersuchung des Tonnendachs nach Scordelis und Lo; Verschiebungen der Oberseite

Erfolgt eine Diskretisierung mit nur einem Element über die Dicke, so ist es nicht mehr möglich die Randbedingungen des degenerierten Schalenelementes ANS5 exakt auf die Solid-Shell Elemente zu übertragen. Das Tonnendach kann dann entweder an der Oberseite oder Unterseite jedoch nicht in der Mitte gelagert werden. Deshalb unterscheiden sich die vertikalen Verschiebungen an der Ober- und Unterseite bei den Berechnungen mit den ANS6z, ANS3DL, ANS3DEAS, ANS3DLr und ANS3Dq Elementen.

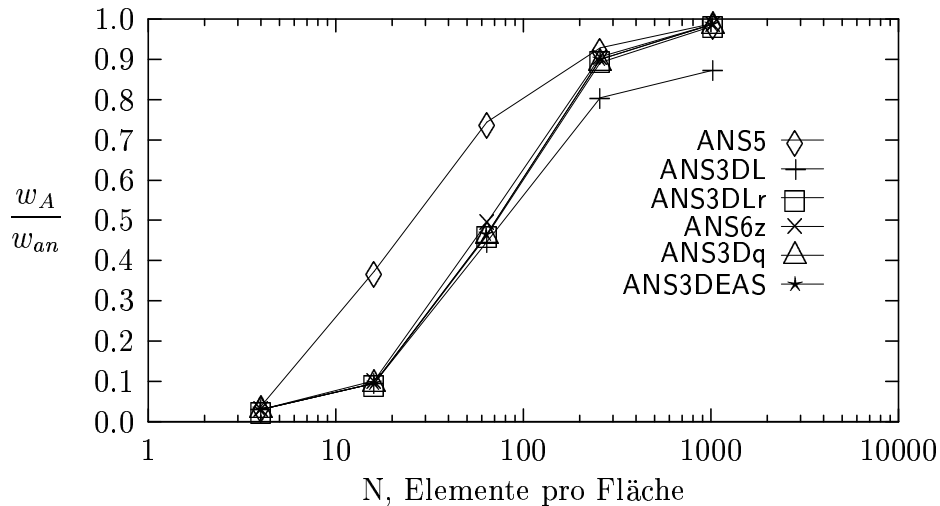


**Bild 11.5:** Konvergenzuntersuchung des Tonnendachs nach Scordelis und Lo; Verschiebungen der Unterseite

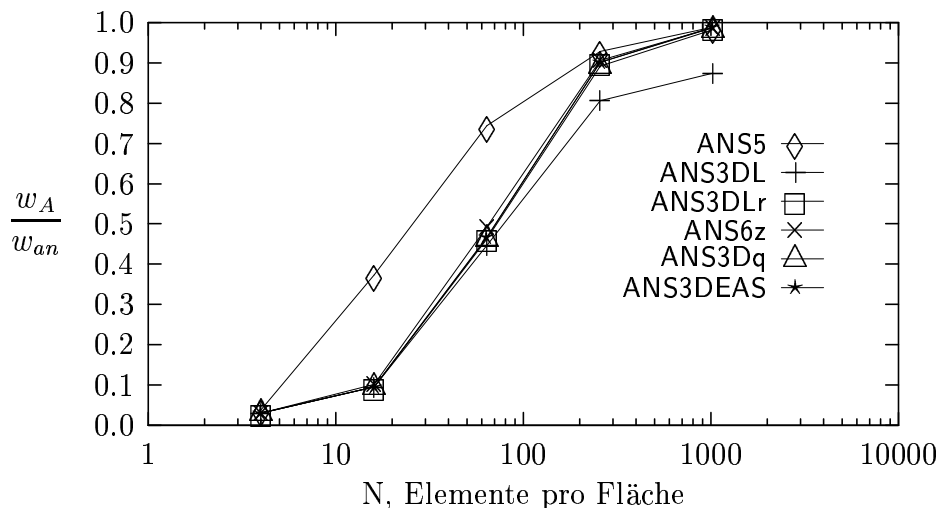
Allerdings zeigen alle Elemente ein durchgängig gutes, robustes Verhalten. Zu bemerken ist, daß aufgrund der bei diesem Beispiel verwendeten Querkontraktionszahl  $\nu = 0.0$  das ANS3DL Element kein zu steifes Verhalten aufweist.

### 11.1.4 Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften

Diese in Bild 8.9 dargestellte, stark gekrümmte Struktur ist dafür bekannt, daß bei Netzkonvergenzuntersuchungen besonders Elemente mit niedriger Ordnung der Ansatzfunktionen eine schlechte Konvergenzrate aufweisen. In den folgenden Berechnungen wird aufgrund der Symmetrie nur ein Achtel des Zylinders diskretisiert mit der Einschränkung, daß die Ergebnisse damit auch nur symmetrisch sein können. Für die Lastangriffsstelle werden die Verschiebungen der Ober- und Unterseite berechnet.



**Bild 11.6:** Konvergenzuntersuchung des beidseits gedrückten Zylinders; Verschiebungen der Oberseite



**Bild 11.7:** Konvergenzuntersuchung des beidseits gedrückten Zylinders; Verschiebungen der Unterseite

Wie schon beim vorherigen Beispiel treten Unterschiede aufgrund der Randbedingungen auf. Obwohl die vertikalen Verschiebungen der vorgeschlagenen Elemente bei einer groben Vernetzung deutlich von der des degenerierten Schalenelementes ANS5 abweichen, stimmen sie bei feinen Netzen, die für auskonvergierte Ergebnisse ohnehin notwendig sind, weitgehend überein. Diese bei einer groben Diskretisierung auftretenden Unterschiede rühren daher, daß die Randbedingungen an der Längsseite, die bei den Solid-Shell Elementen von der des degenerierten Schalenelementes abweichen, bei groben Netzen deutlicher zum Tragen kommen. Wie erwartet verhält sich das ANS3DL Element geringfügig zu steif.

### 11.1.5 Quader unter Flächenlast

Um die zusätzliche Fähigkeit der Solid-Shell Schalenelemente zu untersuchen, Normalspannungen und -verzerrungen in Dickenrichtung darzustellen, wird ein Quader unter Flächenlast betrachtet. Der Quader ist an seiner Unterseite fest eingespannt, die

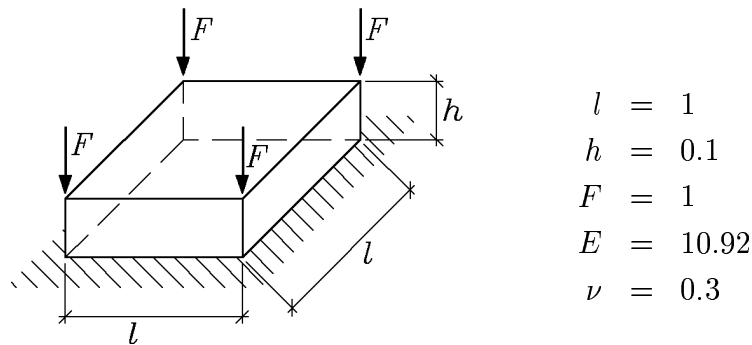


Bild 11.8: Geometrie und Materialeigenschaften des Quaders

Flächenlast in Dickenrichtung wird an der Oberseite eingeleitet und die Berechnung wird mit einer Vernetzung mit nur einem Element durchgeführt, siehe Bild 11.8. In der folgenden Tabelle sind die resultierenden Verschiebungen in Dickenrichtung und parallel zur Mittelfläche sowie die Normalspannungen dargestellt. Die ANS3DLr, ANS3Dq und ANS3DEAS Elemente führen allen Voraussetzungen entsprechend direkt auf die Ergebnisse einer analytischen Berechnung. Dagegen ergibt eine Berechnung mit dem ANS3DL Element zu kleine Verschiebungen aufgrund der Kopplung der konstanten Normalspannung in Dickenrichtung und der linear variierenden Normalspannungen in der Ebene. Das ANS6z Element weist jedoch ein zu weiches Verhalten auf, da hier diese Kopplung vollständig vernachlässigt wird.

### 11.1.6 Konditionszahlen

Da auch bei Solid-Shell Schalenelementen die Fragestellung von Bedeutung ist, ob iterative Gleichungslöser problemlos eingesetzt werden können, werden die Konditionszahlen wie in Kapitel 8.1.6 an dem Beispiel des beidseits gedrückten Zylinders miteinander verglichen, siehe Tabelle 11.5. Es kann festgestellt werden, daß der Übergang vom Degenerationskonzept auf das Solid-Shell Konzept eine unwesentliche Erhöhung

	ANS3DL	ANS6z	ANS3DLr/ANS3Dq/ANS3DEAS
Verschiebungen der Oberseite			
vertikal	0.0337126	0.0366300	0.0342752
horizontal	0.0758534	0.0	0.0824176
vertikale Normalspannung			
Oben	-4.956	-4.000	-4.000
Mitte	-4.000	-4.000	-4.000
Unten	-3.044	-4.000	-4.000
horizontale Normalspannungen			
Oben	-2.124	0.0	-1.714
Mitte	-0.531	0.0	-0.428
Unten	1.062	0.0	0.857

**Tabelle 11.4:** Verschiebungen und Spannungen des Quaders unter Flächenlast

Elementformulierung	Konditionszahl
ANS5	$0.1944 \cdot 10^7$
ANS6z	$0.2498 \cdot 10^7$
ANS3DLr	$0.3375 \cdot 10^7$
ANS3DL	$0.3032 \cdot 10^7$
ANS3Dq	$0.3366 \cdot 10^7$
ANS3DEAS	$0.3382 \cdot 10^7$

**Tabelle 11.5:** Konditionszahlen der verschiedenen Solid-Shell Elementformulierungen; Beidseits gedrückter Zylinder; Lineare Berechnungen

der Konditionszahl mit sich bringt. Auch bei der Verwendung von sieben (ANS3Dq) statt sechs Freiheitsgraden pro Knoten wächst die Konditionszahl nur leicht.

## 11.2 Geometrisch nichtlineare Berechnungen

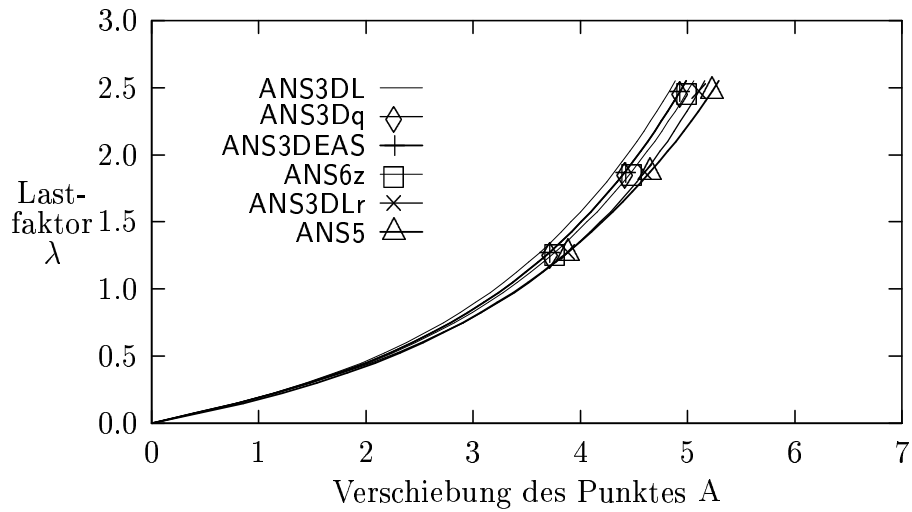
In diesem Kapitel werden die Berechnungen mit dem degenerierten 4-Knoten Schalenelement (ANS5) und dem auf dem modifizierten Funktional basierenden 4-Kanten Element (ANS6z) durchgeführt. Zusätzlich werden die Solid-Shell Schalen mit einem konstanten (ANS3DL, ANS3DLr) und linearen Verlauf (ANS3DEAS, ANS3Dq) der Normalverzerrung in Dickenrichtung zum Vergleich herangezogen.

### 11.2.1 Halbkugel mit Loch und Belastung mit vier Einzelkräften

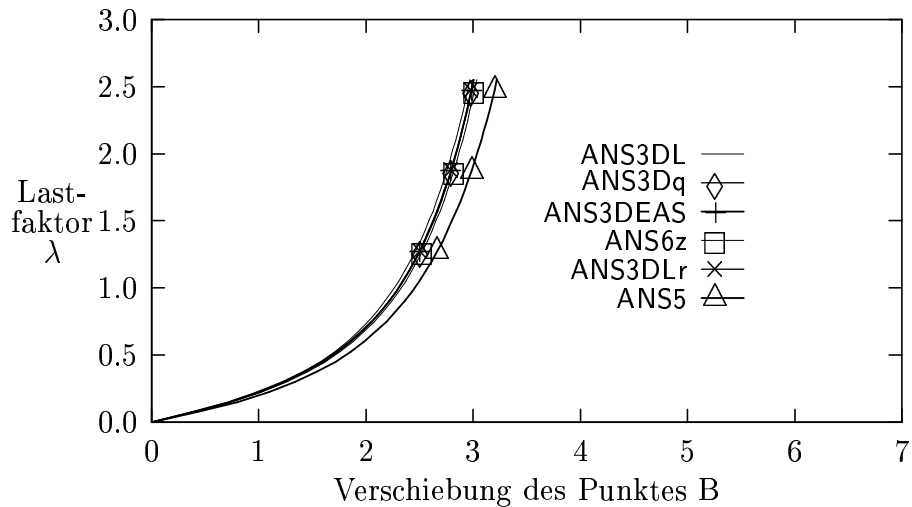
Die bereits in Kapitel 8.2.2 berechnete Halbkugel mit Loch (siehe Bild 8.12) wird untersucht, um bereits vorhandene Ergebnisse für Schalen ohne Rotationsfreiheitsgrade von Parisch [50] mit den hier vorgestellten Solid-Shell Schalenelementen vergleichen zu können. Begonnen wird mit der von Parisch verwendeten Diskretisierung mit 16x16x1



Solid-Shell Schalenelementen, die jedoch nach den Erkenntnissen aus Kapitel 8.2.2 für 4-Knoten Elemente nicht zu auskonvergierten Last-Verschiebungskurven führt.



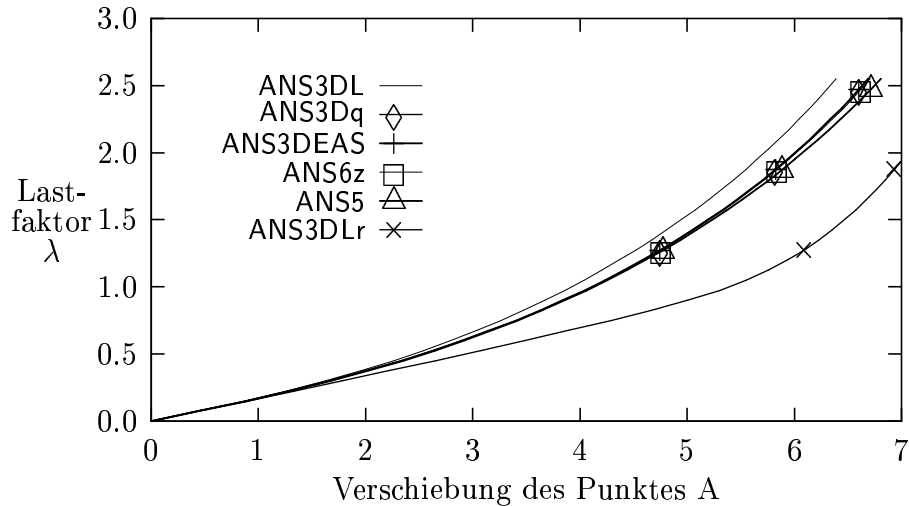
**Bild 11.9:** Halbkugel mit Loch; 16x16x1 Elemente; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A



**Bild 11.10:** Halbkugel mit Loch; 16x16x1 Elemente; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes B

In den Diagrammen in Bild 11.9 und 11.10 ist ersichtlich, daß die Last-Verschiebungskurven der ANS3Dq und ANS3DEAS Elemente übereinstimmen. Dagegen zeigen sich bereits von Parisch festgestellte, große Abweichungen zwischen den Last-Verschiebungskurven der restlichen Elementformulierungen, die auf die grobe Diskretisierung zurückgeführt werden können. Da die Lastabtragung bei dieser dünnen Struktur ( $h/l \approx 1/1000$ ) offensichtlich durch Membranwirkung geprägt

ist, sind im Rahmen der Ablesegenauigkeit keine Unterschiede zwischen der Last-Verschiebungskurve des ANS3Dq Elementes und des Elementes von Parisch festzustellen. Eine anschließende Berechnung mit einer feineren Diskretisierung mit  $32 \times 32 \times 1$  Elementen führt zu wesentlich geringeren Abweichungen der einzelnen Last-Verschiebungskurven, siehe Bild 11.11.

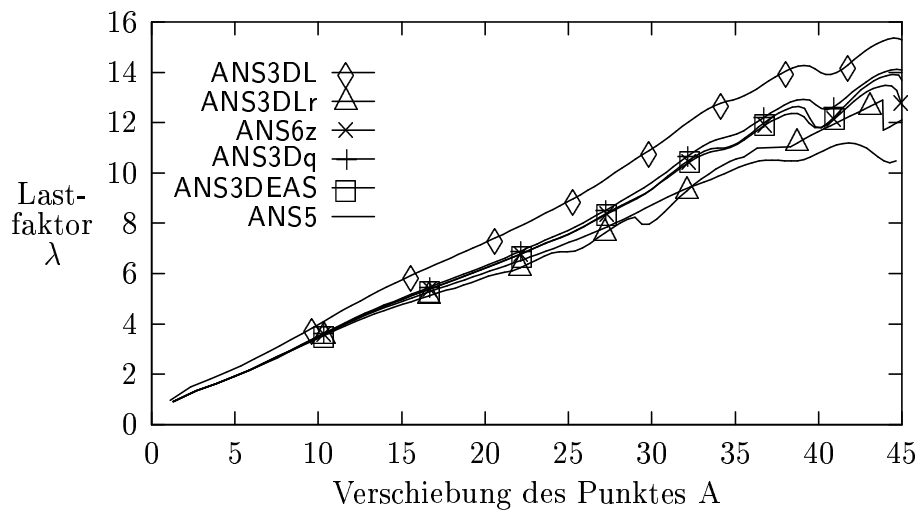


**Bild 11.11:** Halbkugel mit Loch;  $32 \times 32 \times 1$  Elemente; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A

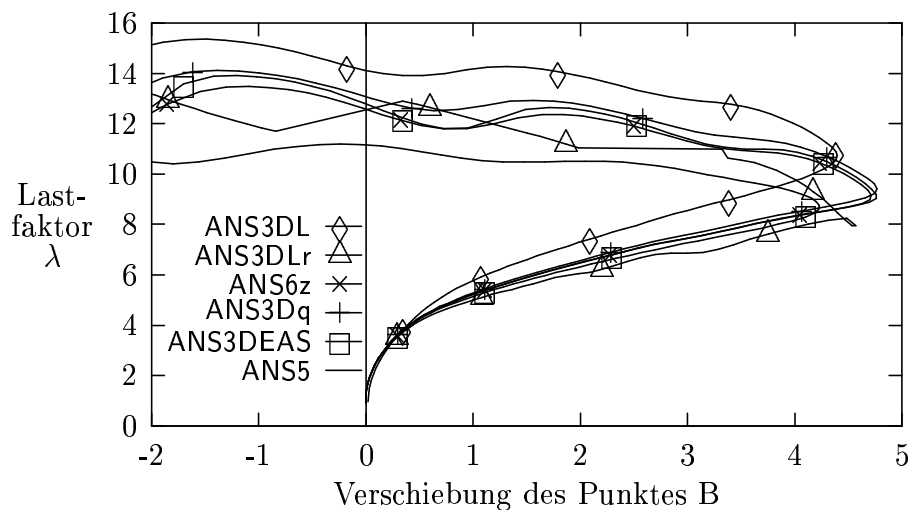
Wie erwartet, weist das ANS3DL Element ein zu steifes Verhalten auf und das ANS3DLr Element führt aufgrund der vernachlässigten Kopplung zwischen Biege- und Membranverzerrungen zu zu weichen Ergebnissen.

### 11.2.2 Zylinder mit starren Endscheiben und Belastung mit gegenüberliegenden Einzelkräften

Für die Geometrie und das Material werden die in Bild 8.22 angegebenen Werte verwendet, die zuvor auch dem Vergleich der verschiedenen degenerierten Schalenelemente zugrunde lagen. Aufgrund der vorhandenen Symmetrie wird wiederum lediglich ein Achtel des Zylinders mit  $24 \times 24$  Elementen in der Ebene und einem Element in Dickenrichtung diskretisiert.



**Bild 11.12:** Beidseits gedrückter Zylinder; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes A



**Bild 11.13:** Beidseits gedrückter Zylinder; Last-Verschiebungskurven diverser Elementformulierungen; Verschiebung des Punktes B

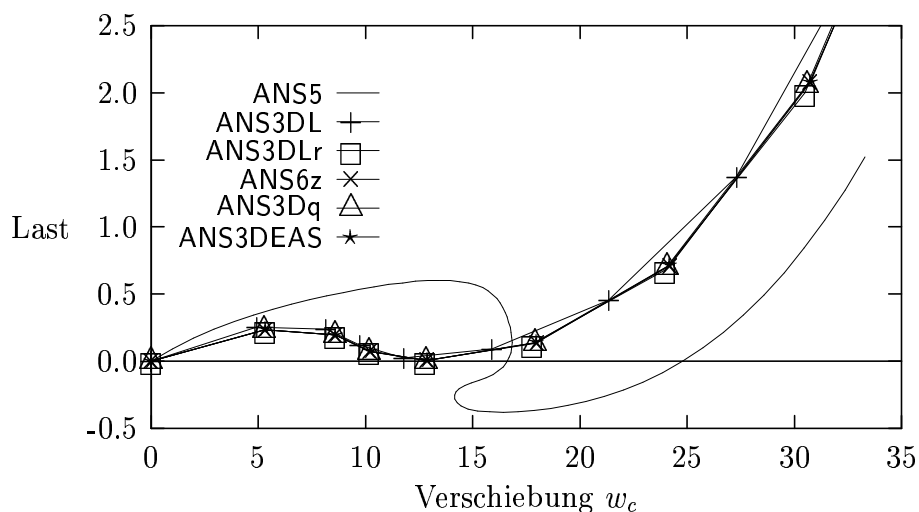
Obwohl es nicht möglich ist die Randbedingungen der degenerierten Schalenelemente exakt zu erfüllen, sind die Unterschiede in den Last-Verschiebungskurven der ANS6z, ANS3DEAS, ANS3Dq und ANS5 Elemente besonders bei kleineren Verschiebungen nur gering. Wenn jedoch die Verschiebungen größer werden, ist der Einfluß der Randbedingungen aufgrund der recht groben Diskretisierung dafür verantwortlich, daß die Last-Verschiebungskurven der Solid-Shell Elemente deutlich von der des degenerierten Schalenelementes abweichen. Wie schon in Kapitel 11.1.2 tendiert das ANS3DL Element zum Versteifen. Dieses Verhalten läßt sich schon bei kleineren Verschiebungen beobachten, mit anwachsenden Verschiebungen vergrößern sich die Unterschiede

der entsprechenden Last-Verschiebungskurven deutlich. Wie bereits bei der Berechnung der Halbkugel mit Loch führt das ANS3DLr Element trotz der guten Resultate bei den Berechnungen von ebenen oder wenig gekrümmten Schalen hier aufgrund der fehlenden Koppelterme zu einem zu weichen Verhalten. Zusätzlich treten bei dieser groben Vernetzung der stark gekrümmten Struktur an einigen Stellen der Last-Verschiebungskurve Konvergenzprobleme auf, die allerdings durch eine feinere Diskretisierung behoben werden können. Dabei zeigt sich, daß das ANS3DLr Element nicht so robust wie die ANS6z, ANS3DEAS oder ANS3Dq Elemente ist, speziell bei der Berechnung stark gekrümmter Schalen.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die leicht oszillierenden Kurven, die bei den Last-Verschiebungskurven für größere Verschiebungen beobachtet werden können und ein für Durchschlagprobleme typisches Verhalten andeuten, aus der eher groben Diskretisierung resultieren. Wie in Kapitel 8.2.3 gezeigt, verschwinden sie bei einer feiner werdenden Vernetzung. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß bewußt das relativ grobe Netz zur Diskussion der Unterschiede zwischen den Elementformulierungen gewählt wurde, da sich eben bei groben Netzen die Differenzen deutlicher zeigen.

### 11.2.3 Dünne, flache Zylinderschale unter Einzellast

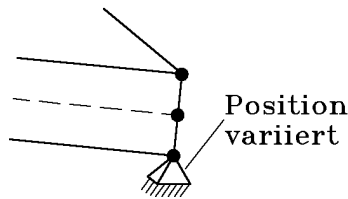
Im Gegensatz zu Kapitel 8.2.1 wird hier lediglich die flache Zylinderschale der Dicke  $h = 6.35$  untersucht, um den Einfluß der Randbedingungen auf das nichtlineare Durchschlag- bzw. Rückschlagverhalten zu untersuchen. Aus Symmetriegründen wird wieder nur ein Viertel der Zylinderschale (s. Bild 8.15) mit einem Element in Dickenrichtung und 6x6 Elementen in der Ebene vernetzt.



**Bild 11.14:** Dünne flache Zylinderschale; Last-Verschiebungskurven; Lagerung an der Schalenoberseite

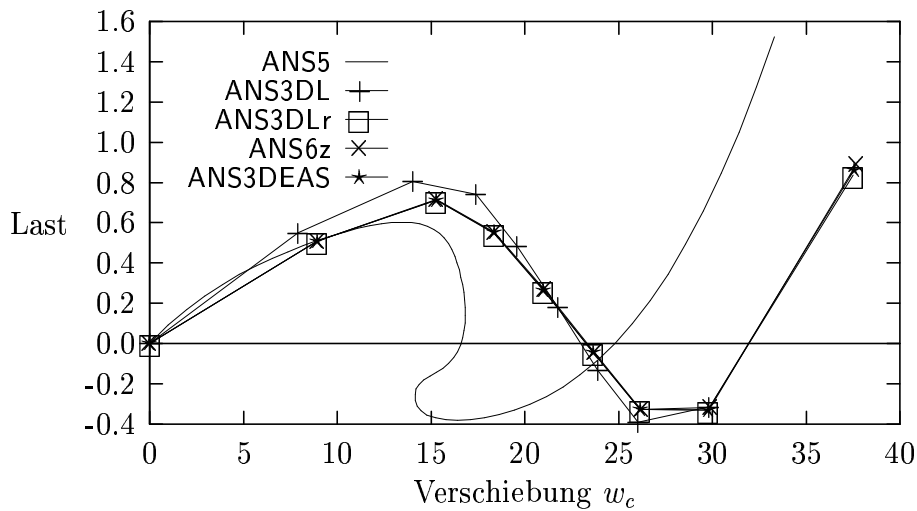
Obwohl die Last-Verschiebungskurven aller vorgeschlagener Solid-Shell Elementformulierungen nur vernachlässigbare Differenzen aufweisen, unterscheiden sie sich deutlich von der Last-Verformungskurve des degenerierten Schalenelementes.

Zur genaueren Untersuchung wird die flache Zylinderschale statt an der Oberseite an der Unterseite gelagert, siehe Bild 11.15. Es sei kurz angemerkt, daß bei degenerierten Schalen jedoch die Mittelfläche gelagert wird. Dadurch ergibt sich eine deutlich



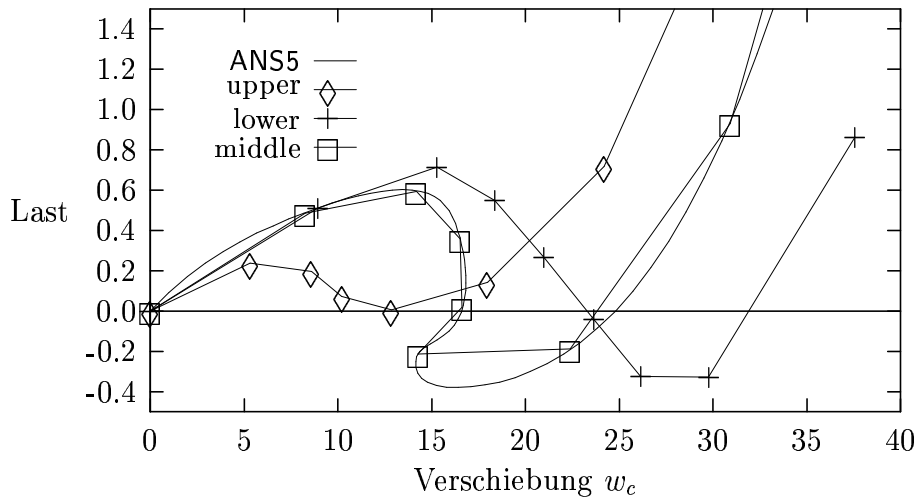
**Bild 11.15:** Position der Lagerung

andere Antwort der mit Solid-Shell Elementen modellierten Struktur, die jetzt wesentlich steifer erscheint.



**Bild 11.16:** Dünne flache Zylinderschale; Last-Verschiebungskurven; Lagerung an der Schalenunterseite

Abschließend wird die flache Zylinderschale mit einer Diskretisierung mit zwei Elementen über die Dicke berechnet, wodurch die vom degenerierten Kontinuumskonzept vorgegebenen Randbedingungen genau erfüllt werden können. Aufgrund der geringen Unterschiede in den Last-Verschiebungskurven der Solid-Shell Schalenelemente wird nur die Kurve des ANS6z Elementes dargestellt, siehe Bild 11.17. Wie erwartet stimmen die erhaltenen Ergebnisse vollständig mit der Lösung des degenerierten Schalenelementes überein.

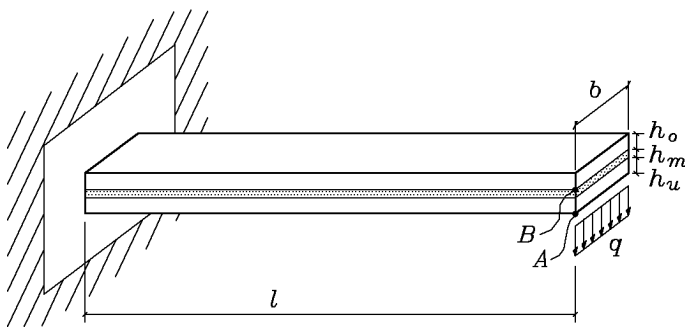


**Bild 11.17:** Dünne flache Zylinderschale; Last-Verschiebungskurven; Verschiedene Lagerungen

Zusätzliche Untersuchungen bezüglich der Lasteinleitungsstelle zeigen, daß es für das Verhalten der Schale trotz der großen Sensibilität bezüglich der Randbedingungen weitgehend unwesentlich ist, wo die Last eingeleitet wird – an der Ober-, Unter-, Ober- und Unterseite oder in der Mitte.

#### 11.2.4 Aus drei Schichten aufgebauter Kragarm

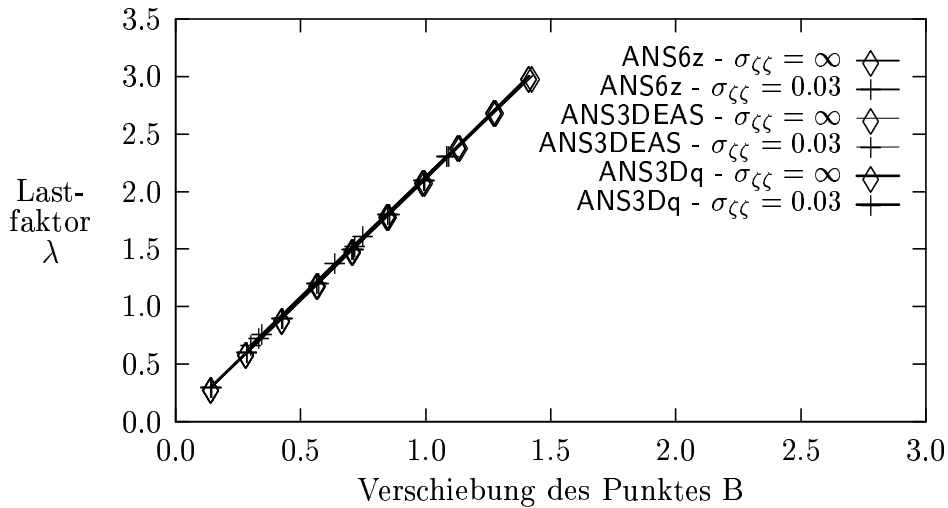
Um die Möglichkeit der Berechnung geschichteter Strukturen mit Delaminationseffekten unter Verwendung von Solid-Shell Schalenelementen zu demonstrieren, wird ein Kragarm untersucht, der aus drei Schichten mit unterschiedlichen Materialeigenschaften besteht und auf seiner Unterseite am Kragarmende mit einer Linienlast beaufschlagt wird, siehe Bild 11.18. Die mittlere Schicht wird als Klebeschicht so modelliert,



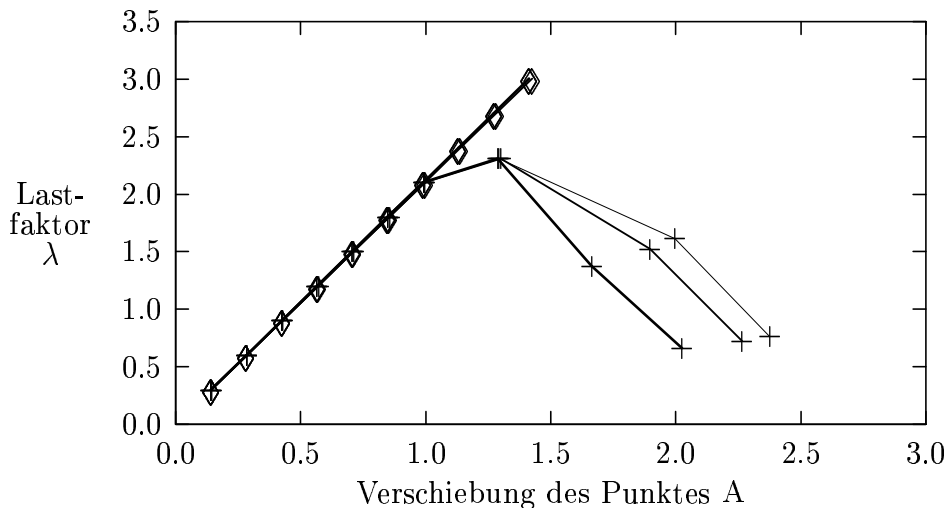
$$\begin{aligned}
 l &= 100 \\
 b &= 10 \\
 h_u &= h_o = 2 \\
 h_m &= 1 \\
 E_u &= 10 \cdot 10^2 \\
 E_m &= 10 \cdot 10^5 \\
 E_o &= 10 \cdot 10^3 \\
 \nu_u &= \nu_o = 0.3 \\
 \nu_m &= 0.0 \\
 q &= 0.2
 \end{aligned}$$

**Bild 11.18:** Geometrie und Materialeigenschaften des Kragarms

daß sie beim Überschreiten der Spannung in Dickenrichtung  $\sigma_{\zeta\zeta}^{krit} = 0.03$  versagt. Begonnen wird mit einer Diskretisierung dieses rein akademischen Beispiels mit lediglich zehn Elementen in Richtung der Kragarmlängsachse, einem Element über die Breite und jeweils einem Element pro Schicht in Dickenrichtung. Diese relativ grobe Vernetzung reicht aus, um bei der quasistatischen Berechnung des Kragarms ohne Aufreißen der mittleren Schicht auskonvergierte Ergebnisse zu erzielen. Der gewünschte Effekt des Aufreißen der Klebeschicht kann beim Vergleich der Verschiebungen der Punkte A und B beobachtet werden.



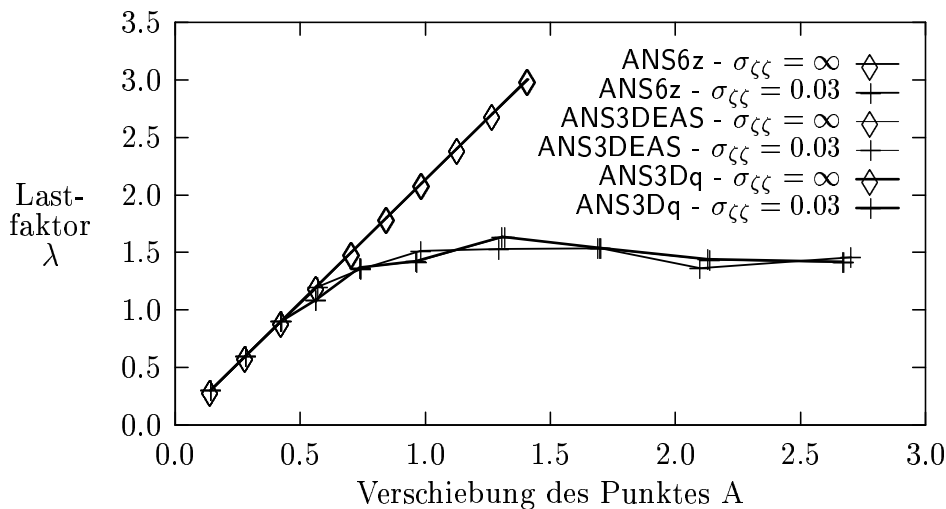
**Bild 11.19:** Aus drei Schichten aufgebauter Kragarm; Last-Verschiebungskurven; Verschiebung des Punktes B; 10x1x1 Elemente pro Schicht



**Bild 11.20:** Aus drei Schichten aufgebauter Kragarm; Last-Verschiebungskurven; Verschiebung des Punktes A; 10x1x1 Elemente pro Schicht

Bei den Berechnungen werden nur die Elemente berücksichtigt, die bei den bisherigen Beispielen ein ausgezeichnetes Verhalten aufgewiesen haben (ANS6z, ANS3DEAS, ANS3Dq).

Es zeigt sich, daß bei einer Versagensspannung  $\sigma_{\zeta\zeta}^{krit} = 0.03$  die mittlere Schicht für alle drei untersuchten Elementformulierungen ab dem siebenten Lastschritt versagt. Damit kann selbstverständlich keine weitere Last aufgenommen werden. Die dabei auftretenden großen Unterschiede in den Last-Verschiebungskurven des Punktes A der einzelnen Elemente und die Verringerung der Last sind auf die grobe Diskretisierung zurückzuführen. Eine Berechnung mit einer feineren Diskretisierung mit  $30 \times 3 \times 1$  Elementen pro Schicht ergibt lediglich vernachlässigbare Veränderungen der Last-Verschiebungskurven des Punktes B (Bild 11.19), während sich die verschiedenen Last-Verschiebungskurven des Punktes A deutlich annähern und aufgrund der kleineren Elemente die mittlere Schicht bereits ab dem vierten Lastschritt versagt und die Verschiebungen bei gleichbleibender Last nun kontinuierlich anwachsen, siehe Bild 11.21.



**Bild 11.21:** Aus drei Schichten aufgebauter Kragarm; Last-Verschiebungskurven; Verschiebung des Punktes A;  $30 \times 3 \times 1$  Elemente pro Schicht

Bei allen Berechnungen fällt auf, daß die Ergebnisse des Solid-Shell Schalenelementes mit erweiterten Verzerrungen in Dickenrichtung (ANS3DEAS) kaum von denen des Elementes mit quadratischen Verschiebungen in Dickenrichtung (ANS3Dq) abweichen.

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß es sich hier lediglich um ein rein akademisches Beispiel handelt, bei dem vereinfachend alle bei dem Aufreißvorgang auftretenden dynamischen Effekte vernachlässigt werden und bei dem die Berechnung lediglich quasistatisch erfolgt.

### 11.2.5 Konditionszahlen

Auch hier sollen noch die Konditionszahlen ausgewählter Elemente angegeben werden, die sich bei der geometrisch nichtlinearen Berechnung der dünnen, flachen Zylinderschale ergeben. Aufgrund der geringen Abweichungen zwischen den ANS6z, ANS3DLr,



ANS3DEAS und ANS3Dq Elementen bei der Berechnung mit der flachen Zylinderschale werden nur die Konditionszahlen des ANS6z, des ANS3DL und des ANS3Dq Elementes mit sieben Kantenfreiheitsgraden ermittelt. Die Bemerkungen zum Verhalten der Struktur hinsichtlich der Konditionszahlen können direkt Kapitel 8.2.4 entnommen werden. Da die Last-Verschiebungskurven bei einer Lagerung an der Oberseite

Last-schritt	Elementformulierung					
	ANS5	ANS6z 1x	ANS3DL 1x	ANS3Dq 1x	ANS6z 2x	ANS3Dq 2x
1	0.3368	0.2549	0.3264	0.3428	0.4829	0.6490
2	1.139	0.9311	1.423	1.267	1.554	2.204
3	7.890	7.219	4.384	10.96	9.676	14.92
4	1.288	0.1676	0.2581	0.2301	1.721	2.453
5	1.060	0.08080	0.1223	0.1106	1.508	2.022
6	1.480	0.04878	0.07344	0.06664	1.999	2.785
7	1.846	0.03348	0.04993	0.04565	3.110	5.385
8	0.3685	0.02460	0.03671	0.03351	0.5414	0.7600

**Tabelle 11.6:** Konditionszahlen verschiedener Solid-Shell Elementformulierungen dividiert durch  $10^7$ ; Dünne, flache Zylinderschale; Geometrisch nicht-lineare Berechnungen

gutmütiger sind, sind auch die Konditionszahlen der ANS6z, ANS3DL, und ANS3Dq Elemente bei dieser Lagerungsart und Diskretisierung mit einem Element über die Dicke niedriger. Jedoch sind bei einer Diskretisierung mit zwei Elementen über die Dicke trotz doppelter Anzahl von Elementen die Differenzen zwischen dem ANS5 und dem ANS6z Element vernachlässigbar gering. Wiederum führt das ANS3Dq Element mit sieben Freiheitsgraden pro Knoten trotz identischer Last-Verschiebungskurve immer auf höhere Konditionszahlen gegenüber dem ANS6z Element mit sechs Freiheitsgraden pro Knoten.

## 12 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, Finite Elemente zur Berechnung dünnwandiger Strukturen unter den Aspekten Effizienz, Handhabbarkeit und, besonders im nichtlinearen Bereich, Robustheit zu diskutieren und in Teilbereichen eigene Entwicklungen beizutragen. Im Sinne der weiter fortschreitenden Anwendung der adaptiven Netzverfeinerung erscheint es auch sinnvoll, eine Struktur in flache, wenig gekrümmte und stark gekrümmte Gebiete und in Bereiche mit zwei- oder dreidimensionalen Spannungszuständen zu unterteilen. Dann ist es möglich, verschiedene Elementtypen so miteinander zu kombinieren, daß die Berechnung jedes einzelnen Gebietes so genau wie nötig und mit möglichst geringem Rechenaufwand erfolgt. Ein Schwerpunkt der Arbeit ist, den Übergang von Volumenelementen zu Schalenelementen aufzuzeigen, da damit auch im Rechenmodell der Übergang von der Kontinuumsberechnung auf die Flächentragwerksberechnung und umgekehrt einfach handhabbar wird. Zudem ergibt sich die Möglichkeit, mit diesen Elementen auch beliebige Flächentragwerke mit Schichtaufbau zu untersuchen.

Begonnen wird in der vorliegenden Arbeit mit der Gegenüberstellung von verschiedenen Plattenelementen, die die Berechnung ebener Flächentragwerke erlauben und somit als Sonderfall in Schalen enthalten sind. Im Hinblick auf Effizienz und Handhabbarkeit findet dabei eine Beschränkung auf Plattenelemente mit möglichst wenigen Knoten, d.h. Ansatzfunktionen niedriger Ordnung, statt. Bei der analytischen Untersuchung dünner, ebener Flächentragwerke hat sich als Berechnungsgrundlage die Kirchhoff Theorie durchgesetzt, bei der die Querschubdeformationen vernachlässigt werden. Allerdings setzt die Kirchhoff Theorie  $C^1$ -Stetigkeit voraus, die von den in der Finite Element Methode üblichen Interpolationsfunktionen nicht bei beliebigen Geometrien erfüllt werden können. Deshalb basieren die meisten Plattenelemente auf der Reissner-Mindlin Theorie, die Querschubdeformationen berücksichtigt. Jedoch führt eine reine Verschiebungsformulierung mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung zu einem ausgeprägten Versteifen durch den Querschub. Daher entstanden im Laufe der letzten fünfzehn Jahre so viele neue Reissner-Mindlin Plattenelemente mit unterschiedlichen Vorgehensweisen zum Vermeiden des zu steifen Verhaltens, daß es selbst den mit der Materie Vertrauten schwerfällt, den Überblick zu behalten. Die in dieser Arbeit gegebene Übersicht soll auch in dieser Hinsicht Klarheit schaffen.

Bereits länger bekannt ist die Diskrete Kirchhoff Methode, bei der die Kirchhoff Bedingung des verschwindenden Querschubs nur an einzelnen Punkten ausgewertet wird und die somit als Basis der Entwicklung versteifungsfreier Elemente zur Berechnung dünner Platten dient. Eine Erweiterung auf die Berechnung mäßig dicker Platten wird durch eine Kopplung der Querschubverzerrungen aus der Kinematik mit den Querschubverzerrungen aus dem Gleichgewicht an diskreten Punkten erreicht. Diese Vorgehensweise wird als Diskrete Schub Methode bezeichnet. Ein anderer Zugang zu einer versteifungsfreien Reissner-Mindlin Plattenelementformulierung ergibt sich durch die Vernachlässigung der Verzerrungsanteile, die zu einer Versteifung führen, über die Anwendung der Methode der angenommenen Verzerrungen. Da die auf den einzelnen Methoden basierenden Plattenelemente im Rahmen ihrer Gültigkeit – dünne, mäßig dicke, dicke Platten – bereits ein zufriedenstellendes Konvergenzverhalten aufweisen, lassen aktuelle, sehr komplexe Entwicklungen, die im wesentlichen auf einer Kombina-

tion der einzelnen Methoden beruhen, lediglich geringfügige Verbesserungen erkennen.

Dreieckelemente mit linearen Ansatzfunktionen bleiben im Gegensatz zu Viereckelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen immer eben, und somit können alle untersuchten Dreieckplattenelemente durch Hinzufügen einer MembranstEIFigkeit leicht zu Schalen erweitert werden. Die bei Viereckelementen auftretende Krümmung und die damit verbundene Kopplung der Membran- und Biegeverformungen verhindert diese einfache Entwicklung eines viereckigen Schalenelementes. Aufgrund der teilweise aufwendigen Annahmen obiger Vorgehensweisen zum Vermeiden der Querschubversteifung kann bei viereckigen Schalenelementen lediglich die Methode der angenommenen Verzerrungen effizient angewendet werden. Dann waren Dreieckelemente gegenüber Viereckelementen auch bezüglich der automatischen Netzgenerierung lange Zeit im Vorteil. Deshalb sind unter den neuentwickelten Plattenelementen auch zahlreiche Dreieckelemente zu finden. Jedoch ist dieser Mangel aus heutiger Sicht behoben, so daß die in dieser Arbeit herausgearbeiteten Nachteile der Dreieckelemente trotz des theoretischen Vorteils vollständiger Ansatzfunktionen überwiegen. Ein wesentlicher Nachteil ist dabei die Sensitivität gegenüber einer Änderung der Elementausrichtung bei der Diskretisierung und die im Vergleich zu den zugehörigen Viereckelementen schlechteren Konvergenzeigenschaften, da z.B. dem linearen Ansatz bei Dreiecken ein bilinearer und somit entlang der Diagonalen quadratischer Ansatz bei Vierecken gegenübersteht. Auch führt die Diskretisierung einer gekrümmten Struktur durch ebene Schalenelemente zu einer unnötig ungenauen Beschreibung der Geometrie und des Verformungsverhaltens.

Weiterhin wird an Plattenelementen mit biquadratischen Interpolationsfunktionen untersucht, inwiefern sich das Verhalten bei Verwendung von Serendipity oder Lagrange Ansatzfunktionen voneinander unterscheidet. Es zeigt sich, daß lediglich Elemente mit biquadratischen Lagrange Ansatzfunktionen gegenüber Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen erkennbare Verbesserungen erzielen. Obwohl Serendipity Elemente weniger Freiheitsgrade als die entsprechenden Lagrange Elemente aufweisen und somit zu einer geringeren Bandbreite der Steifigkeitsmatrix führen, weisen sie ein wesentlich schlechteres Konvergenzverhalten auf, und wegen des fehlenden Mittelknotens sind sie in der Praxis eher weniger gut zu handhaben.

Aufgrund der bei der Untersuchung von Plattenelementen gewonnenen Erkenntnisse wird sich bei der folgenden Gegenüberstellung von degenerierten Schalenelementen auf viereckige Elemente mit Lagrange Interpolationsfunktionen niedriger Ansatzordnung beschränkt. Zusätzlich zur bei Reissner-Mindlin Plattenelementen auftretenden Querschubversteifung tritt bei degenerierten Schalenelementen ab Interpolationsfunktionen zweiter Ordnung eine ausgeprägte Versteifung durch den Membrananteil hinzu. Erst bei Verwendung von allerdings eher schlecht handhabbaren degenerierten Schalenelementen mit Interpolationsfunktionen ab siebter Ordnung, d.h. Elemente mit mindestens vierundsechzig Knoten beziehungsweise dreihundertundzwanzig Freiheitsgraden pro Element, treten diese Versteifungseffekte nicht mehr auf.

Zur Vermeidung dieser Versteifungen bei degenerierten Schalenelementen niedriger Ansatzordnung haben sich die Methode der angenommenen Spannungen für lineare, die Methode der angenommenen Verzerrungen für allgemeine nichtlineare Problemstellungen und die neuere Entwicklung der EAS Methode für den Einsatz bei großen

Deformationen durchgesetzt. Die Gegenüberstellung von Schalenelementen mit Interpolationsfunktionen bis dritter Ordnung, die auf jeweils einem dieser drei Konzepte basieren, führt zu der Erkenntnis, daß alle drei Methoden die Versteifungen zuverlässig unterbinden und sich kaum bezüglich der Konvergenzeigenschaften voneinander unterscheiden.

Eine – allerdings nur geringfügige – Verbesserung des 4-Knoten Elements mit angenommenen Querschubverzerrungen kann bei Problemstellungen mit überwiegenden Membranspannungen durch die zusätzliche Anwendung der EAS Methode erreicht werden, wodurch allerdings der Speicherplatzbedarf steigt und die Robustheit etwas leidet. Vor allem bei linearen oder geometrisch nichtlinearen Berechnungen einfach oder doppelt gekrümmter Strukturen oder/und bei der Verwendung von Diskretisierungen mit unregelmäßigen Elementformen sind die Ergebnisse, die mit 9- oder 16-Knoten Elementen erzielt werden, deutlich besser gegenüber denen von 4-Knoten Elementen. Hierbei zeigt sich auch, daß die Verbesserungen, die sich bei einer Berechnung mit 16-Knoten anstatt mit 9-Knoten Elementen ergeben, den zusätzlich erforderlichen Aufwand nicht rechtfertigen. Jedoch können bei nichtlinearen Berechnungen von Strukturen, bei denen im Verlauf der Deformation Knicke auftreten, Elemente mit biquadratischen oder bikubischen Ansätzen diese nur darstellen, wenn sie an Knoten parallel zur Elementkante auftreten. Da diese Einschränkung mit der zunehmenden Verbreitung adaptiver Netzverfeinerungen an Bedeutung verliert, ist den Vergleich der verschiedenen degenerierten Schalenelemente abschließend festzuhalten, daß das 9-Knoten Schalenelement mit angenommenen Verzerrungen in natürlichen Koordinaten bei den meisten nichtlinearen Berechnungen hinsichtlich Effizienz, Robustheit und Handhabbarkeit den besten Kompromiß darstellt.

Allen degenerierten Schalenelementen gemein sind jedoch die Nachteile, die durch die Mittelflächenformulierung mit Rotationsfreiheitsgraden entstehen. Im Wesentlichen sind die vorgegebenen natürlichen Randbedingungen teilweise nur schwer zu erfüllen, und die Kombination mit Kontinuumelementen erfordert spezielle Übergangselemente. Zusätzlich liegt dem Degenerationskonzept eine Kondensation des Materialgesetzes zur Erfüllung des ebenen Spannungszustandes zugrunde, so daß große Schwierigkeiten bei der Implementierung allgemeiner dreidimensionaler Materialgesetze auftreten.

Deshalb wird im dritten Teil dieser Arbeit eine sogenannte Solid-Shell Schalenformulierung vorgeschlagen, die die Lücke zwischen degenerierten Schalen und Kontinuumelementen füllt. Obwohl prinzipiell auch bei diesem Konzept Interpolationsfunktionen beliebiger Ansatzordnung verwendet werden können, findet eine Beschränkung auf bilineare Interpolationsfunktionen in der Tangentialebene statt. Damit entspricht die Geometrie und das Verschiebungsfeld dem eines Kontinuumelementes mit linearen Verschiebungsansätzen. Im Unterschied dazu wird gefordert, daß die Koordinate in Dickenrichtung senkrecht auf der Mittelfläche steht und die Seiten der Solid-Shell Schale demnach rechtwinklig zur Ober- und Unterseite verlaufen. Dann kann entsprechend den degenerierten Schalenelementen die Methode der angenommenen Querschubverzerrungen zum Vermeiden der auch hier auftretenden Querschubversteifung angewendet werden. Jedoch weisen – wie alle Solid-Shell Schalen beliebiger Ansatzordnung in der Tangentialebene auch – die 4-Knoten ANS Solid-Shell Schalenelementformulierung

ohne weitere Modifikationen eine Versteifungstendenz in Dickenrichtung aufgrund der Kopplung der Normalspannungen auf.

In der vorliegenden Arbeit werden systematisch Modifikationen untersucht, die zu versteifungsfreien Elementformulierungen führen, und die folgenden drei empfehlenswerten Solid-Shell Schalenelemente entwickelt:

Die effizienteste Formulierung entsteht durch eine Reduktion des Materialgesetzes zur Erfüllung des ebenen Spannungszustandes entsprechend dem Degenerationskonzept und durch Hinzufügen einer Steifigkeit in Dickenrichtung, um sonst entstehende Kinematiken zu vermeiden. Dieses Element zeigt ein ähnlich gutes Verhalten wie degenerierte Schalenelemente, kann Normalverzerrungen und -spannungen in Dickenrichtung erfassen, und damit sind geschichtete Strukturen mit unterschiedlichen Materialien leicht zu modellieren. Allerdings verbleiben die Nachteile, daß beim Ermitteln der Normalverzerrungen in Dickenrichtung die Querkontraktion nicht berücksichtigt wird und allgemeine dreidimensionale Materialgesetze schwierig zu implementieren sind.

Die zweite, weit weniger effiziente versteifungsfreie Solid-Shell Elementformulierung basiert auf einer der Multidirektorthorie entnommenen hierarchischen quadratischen Interpolation der Verschiebung in Dickenrichtung über die Dicke. Diese Formulierung ist relativ ineffizient, da aufgrund der unterschiedlichen Verschiebungsapproximationen über die Dicke Hin- und Rücktransformationen der globalen Verschiebungen auf lokale Koordinaten notwendig sind und zusätzlich pro Kante ein Freiheitsgrad mehr auftritt. Die Vorteile bestehen vor allem in der einfachen Implementierungsmöglichkeit allgemeiner dreidimensionaler Materialgesetze, der genauen Berechnung der Normalverzerrungen und -spannungen in Dickenrichtung ohne Vernachlässigungen und dem einem degenerierten Schalenelement vergleichbar gutem Konvergenzverhalten.

Die letzte, in den meisten Fällen zu bevorzugende Solid-Shell Schalenelementformulierung erhält den geforderten linearen Verlauf der Normalverzerrung in Dickenrichtung durch die Anwendung der EAS Methode auf diese Verzerrung. Dieses Element ist kaum weniger effizient als die erste Solid-Shell Elementformulierung, beinhaltet jedoch die Vorteile des Elementes mit quadratischen Ansätzen in Dickenrichtung hinsichtlich des Materialgesetzes und der Normalverzerrung in Dickenrichtung. Allerdings treten geringfügige Nachteile durch einen höheren Speicherplatzbedarf und die bei nichtlinearen Berechnungen mit sehr großen Lastschritten manchmal entstehenden Konvergenzschwierigkeiten auf, die auf die zusätzlichen Parameter zurückzuführen sind.

Bisher zeigen Arbeiten an weiteren Beispielen, daß alle drei Solid-Shell Schalenelemente im Einsatz bei sehr großen und komplexen Strukturen zu hervorragenden Ergebnissen führen. Die nächsten Schritte wären einerseits die Entwicklung von Solid-Shell Schalenelementformulierungen mit biquadratischen Ansatzfunktionen in der Tangentialebene und andererseits eine Erweiterung der beiden Solid-Shell Elemente mit linearem Verlauf der Normalspannung in Dickenrichtung auf große Deformationen.

## Schrifttum

- [1] S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz.: Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **2** (S. 419-451), 1970.
- [2] U. Andelfinger.: Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke. *Bericht Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart*, 1991.
- [3] U. Andelfinger, A. Matzenmiller, E. Ramm.: Hybrid-mixed four-node shell elements, different two field assumptions and a stability test. *Proc. Analytical and Computational Models for Shells, ASME Winter Annual Meeting, San Fransisco, California*, 1989.
- [4] D.N. Arnold, R.S. Falk.: A unifomly accurate finite element method for Mindlin-Reissner plate. *IMA Preprint Series No. 307, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota*, 1987.
- [5] K.J. Bathe.: *Finite-Element-Methoden. Springer Verlag, Berlin*, 1986.
- [6] J.L. Batoz, K.J. Bathe, L.W. Ho.: A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **15** (S. 1771-1812), 1980.
- [7] J.L. Batoz, I. Katili.: On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constrains. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **35** (S. 1603-1632), 1992.
- [8] J.L. Batoz, P.Lardeur.: A discrete shear triangle nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **28** (S. 533-560), 1989.
- [9] M. Baumann, K. Schweizerhof, S. Andrussow.: An efficient mixed hybrid 4-node shell element with assumed stresses for membrane, bending and shear parts. *Eng. Comp.* **11** (S. 69-80), 1994.
- [10] M. Baumann.: *Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalentragwerken. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe*, 1994.
- [11] E. Becker, W. Bürger.: *Kontinuumsmechanik. Teubner, Stuttgart*, 1975.
- [12] T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter, J.S.J. Ong.: Stress projection for membrane and shear locking in shell Finite Elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **51** (S. 221-258), 1985.
- [13] T. Belytschko, C.S. Tsay.: A stabilization procedure for the quadrilateral plte element with one-point quadrature. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **19**, (S. 405-419), 1983.
- [14] J. Betten.: *Kontinuumsmechanik. Springer Verlag, Berlin*, 1993.
- [15] R. de Boer.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer Verlag*, 1982.
- [16] M. Braun.: *Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken. Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart*, 1995.
- [17] N. Büchter, E. Ramm.: Shell theory versus degeneration – A comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **34**, (S. 39-59), 1992.

- [18] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl.: Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **37**, (S. 2551-2568), 1994.
- [19] N. Büchter.: Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. *Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart*, 1992.
- [20] E.N. Bucelem, K.J. Bathe.: Higher-order MITC general shell elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **36**, (S. 3729-3754), 1993.
- [21] M.A. Crisfield.: Non-linear Finite Element analysis of solids and structures. *John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore*, 1991.
- [22] G. S. Dhatt.: Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis. *Proc. Sym. on Applications of FEM in Civil Engineering*, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1969.
- [23] E.N. Dvorkin, K.J. Bathe.: A continuum mechanics based four node shell element for general nonlinear analysis. *Eng. Comp.* **1** (S. 77-88), 1989.
- [24] E.N. Dvorkin, D. Pantuso, E.A. Repetto.: A finite element formulation for finite strain elasto-plastic analysis based on mixed interpolation of tensorial components. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg.* **114** (S. 35-54), 1994.
- [25] E.N. Dvorkin, D. Pantuso, E.A. Repetto.: A formulation of the MITC4 shell element for finite strain elasto-plastic analysis. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg.* **125** (S. 17-40), 1995.
- [26] H. Gebhardt.: Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen. *Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe*, 1990.
- [27] A.E. Green, W. Zerna.: Theoretical Elasticity. *Clarendon Press, second edition*, 1968.
- [28] F. Gruttmann.: Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen. *Bericht Nr. F96/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover*, 1996.
- [29] H. Hakula, Y. Leino, J. Pitkäranta.: Scale resolution, locking, and high-order finite element modelling of shells. *J. Comp. Appl. Math.* **133** (S. 157-182), 1996.
- [30] J.O. Hallquist.: Latest developments in LS-DYNA3D vs. 910. *Livermore Software Technology Corporation*, 1991.
- [31] C. Haußer.: Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke. *Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart*, 1996.
- [32] H.C. Huang, E. Hinton.: A nine node Lagrangian Mindlin element with enhanced shear interpolation. *Eng. Comp.* **1** (S. 369-380), 1984.
- [33] H.C. Huang, E. Hinton.: A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **22**, (S. 73-92), 1986.

- [34] T.J.R. Hughes, M. Cohen.: The "heterosis" finite element for plate bending. *Comp. Struct.* **9** (S. 445-450), 1978.
- [35] T.J.R. Hughes, T.E. Tezduyar.: Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *J. Appl. Mech.* **48** (S. 587-596), 1981.
- [36] J. Jirousek.: Improvement of computational efficiency of the 9 DOF triangular hybrid-Trefftz plate bending element. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **23** (S. 2167-2168), 1986.
- [37] J. Jirousek, Lan Guex.: The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **23** (S. 651-693), 1986.
- [38] I. Katili.: A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields — Part I: An extended DKT Element for thick-plate bending analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36** (S. 1859-1883), 1993.
- [39] I. Katili.: A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields — Part II: An extended DKQ Element for thick-plate bending analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36** (S. 1885-1908), 1993.
- [40] R. Klarmann.: Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt. *Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe*, 1991.
- [41] W.B. Krätzig, J.W. Zhang.: A simple four-node quadrilateral finite element for plates. *J. Comp. Appl. Math.* **50** (S. 361-373), 1994.
- [42] M. Lyly, R. Stenberg.: A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Engng.* **110** (S. 343-357), 1993.
- [43] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes.: Mathematical foundations of elasticity. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, 1983.
- [44] R.D. Mindlin.: Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* **18**, (S. 31-38), 1951.
- [45] L.S.D. Morley.: On the constant moment plate bending element. *J. Strain Anal.* **6** (S. 20-24), 1971.
- [46] E. Oñate.: A review of some finite element families for thick and thin plate and shell analysis. *Recent Developments in Finite Element Analysis*, CIMNE, Barcelona, 1994.
- [47] E. Oñate, M. Cervera.: A general procedure for deriving thin plate bending elements with one degree of freedom per node. *Technical report, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Catalunya*, 1993.
- [48] E. Oñate, O.C. Zienkiewicz, B. Suarez, R.L. Taylor.: A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **33** (S. 345-367), 1992.
- [49] P. Papadopoulos, R.L. Taylor.: A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **30** (S. 1029-1049), 1988.



- [50] H. Parisch.: A continuum-based shell theory for non-linear applications. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **38** (S. 1855-1883), 1995.
- [51] K.C. Park, G.M. Stanley, D.L. Flaggs.: A uniformly reduced, four noded  $C^0$ -Shell Element with consistent rank corrections. *Comp & Struct.* **20** (S. 129-139), 1985.
- [52] T.H.H. Pian, K. Sumihara.: Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **20**, (S. 1685-1695), 1984.
- [53] E. Ramm.: A plate/shell element for large deflections and rotations. *In: K. J. Bathe et al., Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.*
- [54] E. Rank.: A zooming-technique using hierarchical hp-version of the finite element method. *In: Proc. of MAFELAP 1993, J. Whiteman (ed.), Uxbridge, 1993.*
- [55] S. Reese.: Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper. *Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, 1994.*
- [56] E. Reissner.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* **12**, (S. 69-76), 1945.
- [57] J.L. Rhiu, S.W. Lee.: A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **24**, (S. 581-604), 1987.
- [58] W. Rust.: Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken. *Bericht Nr. F91/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1991.*
- [59] A.B. Sabir, A.C. Lock.: The application of Finite Elements to the large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells. *In: Variational Methods in Engineering, Southampton, University Press, 7/66-7/75, 1972.*
- [60] C. Sansour.: A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change. *Archive of Applied Mechanics* **65**, (S. 194-216), 1995.
- [61] H. Schoop.: Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. *Ingenieur-Archiv* **56**, (S. 427-437), 1986.
- [62] K. Schweizerhof, S. Andrussow, M. Baumann.: Moderne Finite Elementkonzepte für ebene und achsensymmetrische Probleme. *In: Finite Elemente, Anwendungen in der Baupraxis, Ersnt & Sohn, Berlin, 1991.*
- [63] A.C. Scordelis, K.S. Lo.: Computer Analysis of Cylindrical Shells. *J. Amer. Concr. Inst.* **61**, (S. 539-561), 1969.
- [64] B. Seifert.: Zur Theorie und Numerik Finiter Elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen. *Bericht Nr. F96/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1996.*
- [65] J.C. Simo, T.J.R. Hughes.: On variational foundations of assumed strains methods. *J. Appl. Mech.* **53** (S. 51-54), 1986.

- [66] J.C. Simo.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **66** (S. 199-219), 1988.
- [67] J.C. Simo.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **68** (S. 1-31), 1988.
- [68] J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **73** (S. 53-92), 1989.
- [69] J.C. Simo, M.S. Rifai.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **29** (S. 1595-1638), 1990.
- [70] J.C. Simo.: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **99** (S.61-112), 1992.
- [71] J.C. Simo, F. Armero.: Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **33** (S. 1413-1449), 1992.
- [72] J.H. Stricklin, W. Haisler, P. Tisdale, K. Gunderson.: A rapidly converging triangle plate element. *JAI AA* **7** (S. 180-181), 1969.
- [73] R.L. Taylor, F. Auricchio.: Linked interpolation for Reissner–Mindlin plate elements. Part II: A simple triangle. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36** (S. 3057-3066), 1993.
- [74] A. Tessler, T.J.R. Hughes.: A three node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Comp. Math. Appl. Eng.* **50** (S. 71-101), 1985.
- [75] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger.: Theory of Plates and Shells. *2nd. edn. McGraw-Hill, New York*, 1959.
- [76] C. Truesdell, W. Noll.: The nonlinear field theories of mechanics. In S. Flügge, Hrsg., *Handbuch der Physik III/3, Springer Verlag*, 1965.
- [77] H. Verhoeven.: Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung. *Dissertation, Reihe Maschinenbau, Technische Universität Berlin*, 1992.
- [78] L. Vu-Quoc, J.A. Mora.: A class of simple and efficient degenerated shell elements. *Report No. UCB/SEMM-87/05, Department of Civil Engineering, University of California, Berkley, California*, 1987.
- [79] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty, J. Ghaboussi.: Incompatible displacement models. In: *Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics, S.T. Fenves et al. eds., Academic Press*, (S. 43-57), 1973.
- [80] P. Wriggers, R. Eberlein, S. Reese.: A comparison of 3-dimensional continuum and shell elements for finite plasticity. *Int. J. Solids Struct.* **33** (S. 3309-3326), 1996.

- [81] P. Wriggers, S. Reese.: A note on enhanced strain method for large deformations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **135** (S. 201-210), 1996.
- [82] Z. Xu.: A thick–thin triangular plate element. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **33** (S. 963-973), 1992.
- [83] O.C. Zienkiewicz, D. Lefebvre.: A robust triangular plate bending element of the Reissner–Mindlin type. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **26** (S. 1169-1184), 1988.
- [84] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor.: The Finite Element Method. *McGraw Hill, Vol. I, 1989, Vol. II*, 1991.
- [85] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos, E. Oñate.: Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements. *Comp. Struct.* **35** (S. 505-522), 1990.
- [86] O.C. Zienkiewicz, Z. Xu, L.F. Zeng, A. Samuelsson, N.E. Wiberg.: Linked interpolation for Reissner–Mindlin plate elements. Part I: A simple quadrilateral. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36** (S. 3034-3056), 1993.

# A Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen kurz die wesentlichen verwendeten mathematischen Grundlagen erläutert werden. Für ausführlichere Darstellungen wird auf die Literatur verwiesen (z.B. de Boer [15]).

## A.1 Rechenregeln für Vektoren

Zur Erklärung der Rechenregeln für Vektoren werden die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

und der Skalar  $\alpha$  eingeführt.

### Der Betrag eines Vektors

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} \tag{A.1}$$

### Das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\varphi \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \alpha \end{aligned} \tag{A.2}$$

In obiger Gleichung ist  $\varphi$  der Winkel, der von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeschlossen wird. Wird das Skalarprodukt zweier gleicher Vektoren gebildet, ergibt sich mit der Bedingung  $\cos\varphi = 1$  folgende Darstellung für den Betrag eines Vektors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \quad \rightsquigarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \tag{A.3}$$

In dieser Arbeit werden Vektoren oft als Spaltenmatrizen aufgefaßt, was zu der zweckmäßigen einfachen Darstellung des Skalarproduktes führt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ &= [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{a} = \alpha. \end{aligned} \tag{A.4}$$

### Das Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \tag{A.5}$$

## Das Dyadische Produkt

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (\text{A.6})$$

oder durch die Darstellung in Form von Spaltenmatrizen

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \mathbf{A} \quad (\text{A.7})$$

An dieser Stelle soll noch die wichtige Rechenregel

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (\text{A.8})$$

angegeben werden, die auch in die Form

$$(\mathbf{a} \mathbf{b}^T) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b}^T \mathbf{c}) \quad (\text{A.9})$$

gebracht werden kann.

## Der Gradient eines Vektors

Voraussetzung ist, daß der Vektor  $\mathbf{a}$  eine Funktion eines anderen Vektors ist:  $\mathbf{a}(\mathbf{b})$ . Dann lautet der Gradient eines Vektors, der auch als Frechet Ableitung bezeichnet wird, mit der Abkürzung  $(\cdot)_i = \frac{\partial}{\partial b_i}(\cdot)$

$$\text{grada}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{b}). \quad (\text{A.10})$$

## Die Divergenz eines Vektors

$$\text{diva}(\mathbf{b}) = \text{trace}(\text{grada}(\mathbf{b})) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Rechenregeln für Tensoren

Ein Tensor  $\mathbf{T}$  ist über das Dyadische Produkt zweier Vektoren definiert:

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}. \quad (\text{A.12})$$

Speziell für Tensoren zweiter Stufe gilt, daß sie eine lineare Abbildung sind, die jedem Vektor  $\mathbf{u}$  einen anderen Vektor  $\mathbf{c} = \mathbf{T}\mathbf{u}$  zuordnet. Die Abbildungsvorschrift lautet dann:

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{u} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}. \quad (\text{A.13})$$

## Darstellung eines Tensors in einer Vektorbasis

In der vorliegenden Arbeit wird oft die Darstellung eines zweistufigen Tensors in einer Vektorbasis benötigt. Dabei wird von der Darstellung der Vektoren  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$  und  $\mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i$  mit den linear unabhängigen kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  ausgegangen.

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \otimes b^k \mathbf{g}_k = a^i b^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k = T^{ik} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k \quad (\text{A.14})$$

Als spezieller Tensor sei der Metrik- oder Fundamentaltensor

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (\text{A.15})$$

erwähnt, mit den ko-  $\mathbf{g}_i$  und kontravarianten  $\mathbf{g}^i$  Basisvektoren.

## Symmetrie und Schiefsymmetrie eines Tensors

Jeder Tensor  $\mathbf{T}$  kann in einen symmetrischen Anteil

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s^T \quad (\text{A.16})$$

und schiefsymmetrischen (antisymmetrischen)

$$\mathbf{T}_a = -\mathbf{T}_a^T \quad (\text{A.17})$$

zerlegt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_a \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_s &= \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \\ \mathbf{T}_a &= \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

## Spur eines Tensors

Die Spur eines Tensor wurde bereits in Gleichung (A.11) benötigt, ist wie folgt definiert

$$\text{trace} \mathbf{T} = \text{trace} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.19})$$

und entspricht der Summe der Hauptdiagonalelemente.

## Das Tensorprodukt

Mit den beiden Tensoren  $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  und  $\mathbf{S} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$  ergibt sich das Tensorprodukt

$$\mathbf{ST} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}), \quad (\text{A.20})$$

das bei zweistufigen Tensoren, die formal als Matrizen aufgefaßt werden können, dem Matrizenprodukt (Zeile mal Spalte) entspricht. Entsprechend der Matrizenmultiplikation ist das Tensorprodukt nicht kommutativ, d.h.  $\mathbf{ST} \neq \mathbf{TS}$ .

## Das Innere Produkt zweier Tensoren

Entsprechend dem Skalarprodukt bei Vektoren kann auch eine Verknüpfung zweier Tensoren mit einem Skalar als Ergebnis, das Innere Produkt, definiert werden:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{trace} (\mathbf{ST}^T) = \alpha. \quad (\text{A.21})$$

## Die Divergenz eines Tensors

Mit dem Tensor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}$$

und dem Ableitungsoperator  $(\cdot)_i = \frac{\partial}{\partial c_i}(\cdot)$  ist die Divergenz eines Tensors definiert

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{,1}^{11} + T_{,2}^{12} + T_{,3}^{13} \\ T_{,1}^{21} + T_{,2}^{22} + T_{,3}^{23} \\ T_{,1}^{31} + T_{,2}^{32} + T_{,3}^{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Eine wichtige Rechenregel sei hier noch ergänzt:

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\operatorname{div} \mathbf{T}^T) + \mathbf{T}^T \operatorname{grad} \mathbf{a}. \quad (\text{A.23})$$

## A.3 Die Variation

### Die Variation einer Funktion von einer Variablen

Die Variation einer Funktion  $f(\mathbf{u})$  ist wie folgt definiert

$$\delta f(\mathbf{u}) = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}, \quad (\text{A.24})$$

wobei die Ableitung zuerst ausgeführt und dann  $\varepsilon$  identisch null gesetzt wird. Dabei sind  $\delta \mathbf{u}$  zulässige Funktionen, d.h. sie erfüllen die geometrischen (wesentlichen) Randbedingungen. Soll die Variation einer Funktion, die formal die Form

$$\delta f(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}$$

annimmt, identisch verschwinden  $\delta f = 0$ , ergibt sich durch Auswerten des Fundamentallemmas der Variationsrechnung, das besagt, daß  $\delta f = 0$  für alle zulässigen Funktionen gelten muß – also auch für  $\delta \mathbf{u} \neq 0$ , die Bedingung  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0$ .

### Die Variation einer Funktion mehrerer Variablen

Als Beispiel wird die Variation einer von zwei Variablen abhängigen Funktion  $f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  betrachtet, die wie folgt definiert ist

$$\delta f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \left[ \frac{\partial f((\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}), (\boldsymbol{\alpha} + \varepsilon \delta \boldsymbol{\alpha}))}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}, \quad (\text{A.25})$$

wobei wieder zuerst die Ableitung ausgeführt und dann  $\varepsilon$  identisch null gesetzt wird. Dabei sind  $\delta \mathbf{u}$  und  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  zulässige Funktionen. Formal nimmt die Variation durch Anwenden der Kettenregel folgende Darstellung an:

$$\delta f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \delta \boldsymbol{\alpha}.$$

Die übliche Forderung nach Verschwinden der Variation  $\delta f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$  führt mit dem Fundamentalemma der Variationsrechnung auf die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0.$$

Die hier beschriebene Vorgehensweise für die Ermittlung der Variation einer Funktion, die von zwei Veränderlichen abhängt, kann entsprechend auf die Variation einer Funktion mehrerer Variablen übertragen werden.

## A.4 Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz wird auch als Divergenztheorem bezeichnet, lautet in seiner ursprünglichen Form

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV = \int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{A.26})$$

und in der hier benötigten Darstellung

$$\int_V \operatorname{Div} \mathbf{T} \, dV = \int_A \mathbf{T} \mathbf{n} \, dA, \quad (\text{A.27})$$

mit dem nach außen gerichteten Flächennormalenvektor  $\mathbf{n}$ .

An dieser Stelle sei auf die Notation hingewiesen, das die Divergenz oder der Gradient bezüglich der unverformten Konfiguration groß und bezüglich der verformten Konfiguration klein geschrieben wird.

## A.5 Zur Lösbarkeit und Stabilität von Funktionalen

In diesem Abschnitt werden lediglich die wichtigsten Bedingungen für die Existenz eines stationären Wertes des Funktionals, auf dem eine Finite Elementformulierung basiert, in kurzer Form angegeben. Für ausführlichere Darstellungen wird z.B. auf Haußer [31] verwiesen.

### Einfeldfunktional

Die der schwachen Form des Gleichgewichts (2.22) entsprechende Darstellung als Einfeldfunktional

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{u}) \quad (\text{A.28})$$

kann durch die Einführung der Operatoren  $a(\cdot, \cdot)$  und  $g(\cdot)$  angegeben werden. Damit eine eindeutige und stabile Lösung existiert, muß das Funktional stetig und streng konvex sein und der Stationärwert darf nicht im unendlichen liegen. Die Kontinuität oder Stetigkeit

$$|a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\| \|\delta \mathbf{u}\| \quad (\text{A.29})$$



und die Elliptizität oder Koerzitivität

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{A.30})$$

sind die entsprechenden mathematischen Bedingungen, die dann beide erfüllt sein müssen. Dabei ist  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm, d.h. die Länge, und für die Grenzwerte gilt  $\alpha, \beta > 0$ . In diskreter Form nimmt die Kontinuität die Form

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \alpha \|\mathbf{d}\| \|\delta \mathbf{d}\| \quad (\text{A.31})$$

an und die Koerzitivität geht in die Darstellung

$$\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \geq \beta \|\mathbf{d}\|^2 \quad (\text{A.32})$$

über.

Verletzt ist die Kontinuität z.B. bei der Inkompressibilität, da eine Volumenänderung unendlich große Spannungen hervorruft. Die Elliptizität wird beispielsweise nicht bei einer reduzierten Integration erfüllt, da große Verschiebungen in diesem Fall nur zu endlichen stationären Werten führen. Da es auch für allgemeine Elementformulierungen sehr aufwendig ist, die Erfüllung der Kontinuität und Koerzitivität nachzuweisen, wird auf diesen analytischen Nachweis oft verzichtet.

### Hellinger-Reissner Funktional

Mit den Operatoren  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  und  $g(\cdot)$  geht das Hellinger-Reissner Funktional in die Darstellung als Zweifeldfunktional

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{u}) \quad (\text{A.33})$$

über, das nach Variation und Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -a(\delta \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + b(\delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= 0 \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \delta \mathbf{u}) &= g(\delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

führt. Wiederum müssen die Kontinuität

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\sigma})| &\leq \alpha_1 \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\delta \boldsymbol{\sigma}\| \\ |b(\boldsymbol{\sigma}, \delta \mathbf{u})| &\leq \alpha_2 \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\delta \mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

und die Elliptizität

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})| &\geq \beta_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \\ |b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})| &\geq \beta_2 \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

zur Gewährleistung der Existenz des stationären Wertes erfüllt sein. Allerdings ist die Bedingung (A.36)<sub>2</sub> zu streng, da die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  orthogonal zu den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  sein können. Die abgeschwächte Form

$$\sup_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{|b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})|}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \geq \beta_2 \|\mathbf{u}\|, \quad (\text{A.37})$$

die ausreichend zur Gewährleistung der Elliptizität ist, führt mit weiteren Umformungen auf die bekannte Babuska-Brezzi Bedingung

$$\inf_{\mathbf{u}} \sup_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{|b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})|}{\|\boldsymbol{\sigma}\| \|\mathbf{u}\|} \geq \beta_2. \quad (\text{A.38})$$

In der Babuska-Brezzi Bedingung (A.38) steht inf (infimum) für den unteren Grenzwert und sup (supremum) für den oberen Grenzwert.

Zur Wahl einer geeigneten Spannungsapproximation bei Elementen, die auf der Methode der angenommenen Spannungen basieren, ist die diskrete Form der Babuska-Brezzi Bedingung

$$\inf_{\mathbf{d}} \sup_{\boldsymbol{\beta}} \frac{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d}}{\|\boldsymbol{\beta}\| \|\mathbf{d}\|} \geq \beta_2 \quad (\text{A.39})$$

entscheidend, die anschaulich so interpretiert werden kann, daß für jeden Verschiebungsmode ein Spannungsmode existieren muß.

## B Umformung der Spannung-Dehnungs Beziehung

Das Ziel ist die innere Arbeit

$$\Pi_{int} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} dV \quad (\text{B.1})$$

aus dem Green-Lagrange Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und dem energetisch äquivalenten 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor  $\mathbf{S}$  zu ermitteln. Auswerten des Inneren Produktes (A.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = & E_{11}S^{11} + E_{22}S^{22} + E_{33}S^{33} + E_{12}S^{12} + E_{21}S^{21} \\ & + E_{23}S^{23} + E_{32}S^{32} + E_{31}S^{31} + E_{13}S^{13} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

mit Berücksichtigung der Symmetrie der Verzerrungen und Spannungen

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = E_{11}S^{11} + E_{22}S^{22} + E_{33}S^{33} + 2E_{12}S^{12} + 2E_{23}S^{23} + 2E_{31}S^{31} \quad (\text{B.3})$$

legt eine programmiertechnisch einfachere Darstellung über die Definition eines Verzerrungsvektors

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{31}]^T \quad (\text{B.4})$$

und Spannungsvektors

$$\boldsymbol{\sigma} = [S^{11}, S^{22}, S^{33}, S^{12}, S^{23}, S^{31}]^T \quad (\text{B.5})$$

nahe. Das innere Potential lautet dann

$$\Pi_{int} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{B.6})$$

oder, wenn die Vektoren als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden

$$\Pi_{int} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (\text{B.7})$$

Durch diese Anordnung der Komponenten der Spannungs- und Verzerrungstensoren in Vektoren entsteht die Notwendigkeit den vierstufigen Materialtensor  $\mathbf{C}^{iv}$ , der die Spannungen mit den Verzerrungen verbindet

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}, \quad (\text{B.8})$$

in Form einer Matrix darzustellen. Für weitere Umformungen ist die Abhängigkeit der Spannungen  $S^{ij}$  von einer Energiedichtefunktion  $W$  und den Verzerrungen  $E_{ij}$

$$S^{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (\text{B.9})$$

und die Beziehung zwischen den Elementen des Materialtensors  $C^{ijkl}$  mit den Spannungen und Verzerrungen beziehungsweise mit der Energiedichtefunktion und den Verzerrungen

$$C^{ijkl} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (\text{B.10})$$

zweckmäßig. Werden dann die Symmetrieeigenschaften der Spannungen und Verzerrungen

$$C^{ijkl} = C^{ijlk} = C^{jikl} = C^{jilk} \quad (\text{B.11})$$

und die Vertauschbarkeit der Ableitungen

$$C^{ijkl} = C^{klij} \quad (\text{B.12})$$

berücksichtigt, ergibt sich folgende Anordnung der Komponenten des vierstufigen Materialtensors in einer Materialmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1123} & C^{1131} \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2223} & C^{2231} \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & C^{3312} & C^{3323} & C^{3331} \\ C^{1112} & C^{2212} & C^{3312} & C^{1212} & C^{1223} & C^{1231} \\ C^{1123} & C^{2223} & C^{3323} & C^{1223} & C^{2323} & C^{2331} \\ C^{1131} & C^{2231} & C^{3331} & C^{1231} & C^{2331} & C^{3131} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

mit im allgemeinen 21 verschiedenen Materialparametern. Durch weitere, hier nicht näher erläuterte Vereinfachungen werden beim isotropen linear elastischen Materialgesetz lediglich zwei Materialparameter benötigt.

## C Ausführliche Darstellung der Verzerrungsinterpolationen bei den 9-Knoten Schalenelementen

Wie in Kapitel 3.3.1 beschrieben, sind zur formalen Angabe der Verzerrungsinterpolation von degenerierten Schalenelementen mit angenommenen Verzerrungen die Matrizen  $\mathbf{Q}_{mb}$  und  $\mathbf{Q}_{qs}$  und die Vektoren  $\bar{\mathbf{e}}_{mb}$  und  $\bar{\mathbf{e}}_{qs}$  notwendig.

### C.1 Verzerrungsinterpolation des QUAD9 Elementes

Dieses in Kapitel 7.3.1 beschriebene Element basiert auf folgenden Matrizen

$$\mathbf{Q}_{mb} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \frac{1}{2}\mathbf{Q}^1 & \frac{1}{2}\mathbf{Q}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{qs} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^2 \end{bmatrix}$$

mit den aus den Interpolationsfunktionen (7.87) bestehenden Abkürzungen

$$\mathbf{Q}^1 = [ P_1(\eta)Q_1(\xi) \quad P_1(\eta)Q_2(\xi) \quad P_2(\eta)Q_1(\xi) \quad P_2(\eta)Q_2(\xi) \quad P_3(\eta)Q_1(\xi) \quad P_3(\eta)Q_2(\xi) ]$$

$$\mathbf{Q}^2 = [ P_1(\xi)Q_1(\eta) \quad P_1(\xi)Q_2(\eta) \quad P_2(\xi)Q_1(\eta) \quad P_2(\xi)Q_2(\eta) \quad P_3(\xi)Q_1(\eta) \quad P_3(\xi)Q_2(\eta) ]$$

und auf den Vektoren mit den Werten der Verzerrungen an den Stützstellen (s. auch Bild 7.5)  $\mathbf{E}(\xi = \xi_i, \eta = \eta_i)$

$$\bar{\mathbf{e}}_{mb} =$$

$$\begin{bmatrix} E_{x'x'}(a, 1) & E_{x'x'}(-a, 1) & E_{x'x'}(a, 0) & E_{x'x'}(-a, 0) & E_{x'x'}(a, -1) & E_{x'x'}(-a, -1) \\ E_{y'y'}(1, a) & E_{y'y'}(1, -a) & E_{y'y'}(0, a) & E_{y'y'}(0, -a) & E_{y'y'}(-1, a) & E_{y'y'}(-1, -a) \\ E_{x'y'}(a, 1) & E_{x'y'}(-a, 1) & E_{x'y'}(a, 0) & E_{x'y'}(-a, 0) & E_{x'y'}(a, -1) & E_{x'y'}(-a, -1) \\ E_{x'y'}(1, a) & E_{x'y'}(1, -a) & E_{x'y'}(0, a) & E_{x'y'}(0, -a) & E_{x'y'}(-1, a) & E_{x'y'}(-1, -a) \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{qs} =$$

$$\begin{bmatrix} E_{\xi\xi}(a, 1) & E_{\xi\xi}(-a, 1) & E_{\xi\xi}(a, 0) & E_{\xi\xi}(-a, 0) & E_{\xi\xi}(a, -1) & E_{\xi\xi}(-a, -1) \\ E_{\eta\xi}(1, a) & E_{\eta\xi}(1, -a) & E_{\eta\xi}(0, a) & E_{\eta\xi}(0, -a) & E_{\eta\xi}(-1, a) & E_{\eta\xi}(-1, -a) \end{bmatrix}^T,$$

$$\text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

### C.2 Verzerrungsinterpolation des MITC9 Elementes

Gegenüber der zuvor dargestellten Verzerrungsinterpolation wird beim 9-Knoten ANS Element lediglich eine andere Interpolation der Membran- und Biegeverzerrungen

durch die Matrix

$$\mathbf{Q}_{mb} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{Q}^3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

mit der zusätzlichen Abkürzung

$$\mathbf{Q}^3 = [ Q_1(\xi)Q_1(\eta) \quad Q_1(\xi)Q_2(\eta) \quad Q_2(\xi)Q_1(\eta) \quad Q_2(\xi)Q_2(\eta) ]$$

und durch den Vektor

$$\bar{\mathbf{e}}_{mb} = \begin{bmatrix} E_{\xi\xi}(a, 1) & E_{\xi\xi}(-a, 1) & E_{\xi\xi}(a, 0) & E_{\xi\xi}(-a, 0) & E_{\xi\xi}(a, -1) & E_{\xi\xi}(-a, -1) \\ E_{\eta\eta}(1, a) & E_{\eta\eta}(1, -a) & E_{\eta\eta}(0, a) & E_{\eta\eta}(0, -a) & E_{\eta\eta}(-1, a) & E_{\eta\eta}(-1, -a) \\ E_{\xi\eta}(a, a) & E_{\xi\eta}(a, -a) & E_{\xi\eta}(-a, a) & E_{\xi\eta}(-a, -a) & & \end{bmatrix}^T$$

verwendet.