Morphismen zwischen Modulräumen von Kurven mit verallgemeinerter Teichmüller-Markierung

Zur Erlangung des akademischen
Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Jan Mayer
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:	Mittwoch, den 29. November 2000
Referent:	Prof. Dr. Frank Herrlich
Korreferent:	Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt

Es ist mir eine besondere Freude mich an dieser Stelle bei den Menschen zu bedanken, die mir beim Gelingen der vorliegenden Arbeit geholfen haben.

Besonderen Dank möchte ich dem Referenten Herrn Prof. Dr. Herrlich ausdrücken, ohne dessen Hilfe diese Arbeit unmöglich gewesen wäre. Er war stets für mich ansprechbar und hat mich nach Kräften unterstützt. Herrn Prof. Schmidt danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Der letzte und größte Dank gilt meinen Eltern, die mich auf meinem Weg immer wohlwollend und unterstützend begleitet haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die kompakten n-fach punktierten Riemannschen Flächen von festem Geschlecht $g \geq 2$ werden bis auf Isomorphie klassifiziert durch eine algebraische Varietät $M_{g,n}$, die über $\mathbb{C}$ definiert ist. Wählen wir nun zu einem Vertreter C aus einer Isomorphieklasse $[C] \in M_{g,n}$ eine Überlagerung $C' \longrightarrow C$, so dass C' eine n'-fach punktierte Riemannsche Fläche von Geschlecht g' ist, so stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen, $[C] \mapsto [C']$ einen Morphismus algebraischer Varietäten $M_{g,n} \longrightarrow M_{g',n'}$ definiert. In dieser Allgemeinheit ist dies nicht der Fall, denn die Wahl von C' ist nicht wohldefiniert. Um dieses Problem genauer zu untersuchen, wählen wir eine feste topologische (evtl. verzweigte) Überlagerung $C_{g'} \longrightarrow C_g$ einer festen, orientierten, kompakten topologischen Fläche C_g von Geschlecht g durch eine ebensolche von Geschlecht g'. Diese Überlagerung sei außerhalb von n markierten Punkten auf C_g unverzweigt, induziert also eine unverzweigte Überlagerung $C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$. Dabei geht $C_{g,n}$ bzw. $C_{g',n'}$ aus C_g bzw. $C_{g'}$ durch das Entfernen von n bzw. n' Punkten hervor. Um nun einer Riemannschen Fläche C eine holomorphe Überlagerung C' zuzuordnen, wählen wir einen Homöomorphismus $\alpha : C_g \longrightarrow C$. Dann existiert aber auch eine Riemannsche Fläche C' von Geschlecht g' und ein Homöomorphismus $\alpha' : C_{g'} \longrightarrow C'$, so dass

$$\begin{tikzcd} C_{g'} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\ C_g \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

kommutiert und $C' \longrightarrow C$ holomorph ist. C' ist nun zwar noch immer nicht wohldefiniert, jedoch hängt die komplexe Struktur, also die Isomorphieklasse von C' nur noch von C und von α ab. Diese letzte Abhängigkeit muss nun genauer untersucht werden, um festzustellen, für welche Wahl von $C_{g'} \longrightarrow C_g$ bzw. von $C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ ein Morphismus $M_{g,n} \longrightarrow M_{g',n'}$ existiert. Durch diese Sichtweise sind die Homöomorphismen α nun zentral in dem Versuch, die Morphismen $M_{g,n} \longrightarrow M_{g',n'}$ zu konstruieren. Dies hat allerdings weitreichende Folgen, denn α können wir nun als Teichmüller-Struktur zu C auffassen, so dass wir die Teichmüller-Theorie als weiteres Hilfsmittel auf natürliche Weise heranziehen können. Dann wird aber auch sofort die Frage aufgeworfen, die sich sowieso als natürliche Verallgemeinerung obiger Frage gestellt hätte, inwiefern sich auch Morphismen (also holomorphe Abbildungen) zwischen Teichmüller-Räumen oder anderen Modulräumen konstruieren lassen. Um diese Frage etwas präzisieren zu können, benötigen wir, dass auf dem Teichmüller-Raum $T_{g,n}$ die Teichmüller-Modulgruppe $\Gamma_{g,n}$ diskontinuierlich operiert und $M_{g,n}$ als Quotient hat. Mit dieser Sichtweise stellt sich die Frage, für welche Untergruppen $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ der Quotient ${}_{\Gamma}T_{g,n} := T_{g,n}/\Gamma$ ein Modulraum von Kurven C mit einer durch α gegebenen Zusatzstruktur ist und für welche $\Gamma' \leq \Gamma_{g',n'}$ ein Morphismus ${}_{\Gamma}T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ existiert, der durch

Überlagerungen obiger Bauart induziert wird. Eine vollständige Antwort auf diese Frage liefert Satz 4.1. Etwas überraschend vielleicht ist dabei, dass zu jedem $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ Kurven mit einer geeigneten *verallgemeinerten Teichmüller-Markierung zu* Γ oder kürzer mit einer Γ-*Markierung* existieren, so dass ${}_{\Gamma}T_{g,n}$ ein grober Modulraum dieser Kurven ist, und dass zu passenden Überlagerungen $C_{g'} \longrightarrow C_g$ auch stets Morphismen ${}_{\Gamma}T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ existieren. In [Nag] wurde schon angedeutet, dass gewisse Γ grobe Modulräume ${}_{\Gamma}T_{g,n}$ liefern, ohne dieser Frage jedoch systematisch nachzugehen. Insofern ist dieses Ergebnis zwar neu, aber nicht unerwartet. Für den Fall $n = 0$ wird in [HL] zu einer festen Überlagerung $P : C_{g'} \longrightarrow C_g$ die Konstruktion eines Morphismus $M(P) \longrightarrow M_{g'}$ angedeutet, wobei $M(P)$ ein geeigneter grober Modulraum, endlich über M_g ist, welcher die Überlagerungen einer Kurve C, die topologisch isomorph zu P sind, klassifiziert. Dies stellt somit einen Anfang zu unserer Untersuchung dar. Neu in dieser Arbeit ist jedoch nicht nur, dass es gelungen ist, weitaus mehr Morphismen zu konstruieren, sondern auch dass eine Antwort darauf gefunden wurde, in welcher Beziehung die gewählte Untergruppe Γ und die gewählte Überlagerung $C_{g'} \longrightarrow C_g$ stehen müssen, damit ein geeignetes $\Gamma' \leq \Gamma_{g',n'}$ existiert, so dass ein Morphismus ${}_{\Gamma}T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ induziert wird. Mit einer ähnliche Konstruktion für stabile Kurven wird gezeigt, dass diese Morphismen sich unter günstigen Bedingungen auf den Rand von ${}_{\Gamma}T_{g,n}$ fortsetzen, vgl. Satz 4.14. Dies führt dazu, dass diese Morphismen sogar Morphismen algebraischer Varietäten sind, vgl. Satz 4.16.

Um diese Sätze zu beweisen, werden zunächst im folgenden Abschnitt die notwendigen algebraischen und topologischen Überlegungen durchgeführt, die zur Konstruktion der Morphismen benötigt werden. Im Abschnitt danach wird dann bewiesen, dass ${}_{\Gamma}T_{g,n}$ zu jedem $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ein grober Modulraum für einen geeigneten Funktor ist. Die Hauptergebnisse werden dann im letzten Abschnitt bewiesen. Die wichtigsten Resultate der Teichmüller-Theorie und der Theorie von Modulräumen, die benötigt werden, sind zwar im dritten Abschnitt zusammengefasst, doch sind umfangreiche Kenntnisse dieser Bereiche der Mathematik sicherlich hilfreich. Vorausgesetzt wird ebenfalls eine gewisse Vertrautheit mit der Theorie analytischer Räume, auch wenn für die meisten Zwecke Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ausreichen dürfte. In Algebra und Topologie werden hingegen nur Grundkenntnisse benötigt.

2 Vorbereitende Untersuchungen

In diesem Abschnitt befinden sich sämtliche Überlegungen, die benötigt werden, um in den folgenden Abschnitten die Morphismen von Funktoren $\Phi_P : {}_{\Gamma}\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'}$ bzw. $\Phi_P : \overline{{}_{\Gamma}\mathcal{T}_{g,n}} \longrightarrow \overline{{}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'}}$ zu konstruieren und zu studieren, die dort jedoch den logischen Fluss zu sehr unterbrechen würden, und damit sinnvollerweise hier vorangestellt werden. Naturgemäß handelt es sich in den folgenden Abschnitten um Überlegungen innerhalb der Teichmüller-Theorie, so dass hier hauptsächlich algebraische Eigenschaften der Teichmüller-Modulgruppe und allgemeine topologische Untersuchungen von Überlagerungen zusammengefasst werden. Die folgenden Definitionen und Sätze jedoch aus sich selbst zu motivieren, ohne Blick auf die darauf folgende Anwendung, ist leider schwer möglich, so dass es durchaus sinnvoll ist, sich zunächst mit diesem Abschnitt nur oberflächlich vertraut zu machen, um dann bei Bedarf an die geeignete Stelle zurückzukommen.

2.1 Ausgangssituation und Notation

Sei C_g eine geschlossene, orientierbare topologische Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ mit fester Orientierung. Sei $n \geq 0$, $N := \{1, \ldots, n\}$ und $x_1, \ldots, x_n \in C_g$ fest gewählte, paarweise verschiedene Punkte. Des weiteren sei $C_{g,n} := C_g - \{x_1, \ldots, x_n\}$ die zugehörige punktierte Fläche. Sei $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ eine fest gewählte, normale, unverzweigte topologische Überlagerung. Damit ist $C_{g',n'}$ ebenfalls eine Fläche, auch mit einzelnen Löchern, d.h. $C_{g',n'}$ wird überdeckt von offenen Mengen, die entweder homöomorph zur Kreisscheibe oder zur punktierten Kreisscheibe sind. Sei $C_{g'}$ die kompakte, geschlossene, orientierbare topologische Fläche, die $C_{g',n'}$ umfasst und aus dieser hervorgeht durch die Hinzunahme einzelner Punkte, d.h. lokal wird solch eine punktierte Kreisscheibe abgeschlossen durch die Hinzunahme des Nullpunktes. Dann setzt sich P fort zu einer (evtl. verzweigten) Überlagerung $P : C_{g'} \longrightarrow C_g$. Seien nun Punkte $x_{ij} \in C_{g'}$ mit $(i,j) \in N'$ für ein passend gewähltes $N' \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ so gewählt, dass $P(x_{ij}) = x_i$ und $C_{g'} - C_{g',n'} = \{x_{ij} : (i,j) \in N'\}$ gilt. Dabei bezeichne nun g' das Geschlecht von $C_{g'}$ und $n' := |N'|$ die Anzahl der Punkte in $C_{g'} - C_{g',n'}$.

Für einen beliebigen weiteren Punkt $x \in C_{g,n}$ und ein x' über x sei $\pi_{g,n}^{x} := \pi_1(C_{g,n}, x)$ bzw. $\pi_{g',n'}^{x'} := \pi_1(C_{g',n'}, x')$ die Fundamentalgruppe von $C_{g,n}$ im Basispunkt x bzw. von $C_{g',n'}$ in x'. Da P eine normale Überlagerung ist, existiert ein Gruppenmonomorphismus $\pi_1(P) : \pi_{g',n'}^{x'} \hookrightarrow \pi_{g,n}^{x}$, der es erlaubt $\pi_{g',n'}^{x'}$ mit einem Normalteiler von $\pi_{g,n}^{x}$ zu identifizieren.

Sei $\Gamma_{g,n}$ die Teichmüller-Modulgruppe zu $(C_g; x_1, \ldots x_n)$, d.h. die Gruppe der orientierungstreuen Homöomorphismen $\varphi : C_g \longrightarrow C_g$ mit $\varphi(x_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$

modulo Isotopien, welche die x_i fest lassen. Sei $\Gamma^x_{g,n+1}$ die Teichmüller-Modulgruppe zu $(C_g; x_1, \ldots x_n, x)$ und seien $\Gamma_{g',n'}$ und $\Gamma^{x'}_{g',n'+1}$ analog definiert.

Zur allgemeinen Notation sei angemerkt, dass $\star$ stets die Verknüpfung von Wegen bzw. von Wegeklassen in der Fundamentalgruppe bezeichnet. Oft wird jedoch nicht zwischen Wegen und ihren Klassen bzw. zwischen Homöomorphismen und ihren Klassen in der Modulgruppe unterschieden. Wenn diese Unterscheidung ausnahmsweise notwendig sein sollte, dann wird die Klasse stets mit $[\ \ ]$ bezeichnet.

2.2 Die Teichmüller-Modulgruppe $\Gamma_{g,n}$ und ihre Homomorphismen

In der Situation von Abschnitt 2.1 haben wir folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Inn}\left(\pi^x_{g,n}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}", "\wr"'] & \Gamma^x_{g,n+1} \arrow[r, "q_1^x"] \arrow[d, hook, "i_a^x"] & \Gamma_{g,n} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_o^x"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Inn}\left(\pi^x_{g,n}\right) \arrow[r] & \mathrm{Aut}\left(\pi^x_{g,n}\right) \arrow[r, "q_2^x"] & \mathrm{Out}\left(\pi^x_{g,n}\right) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Die Hauptreferenz hierzu ist [HL] S. 3-4. Im folgenden wird an die einzelnen Gruppenhomomorphismen erinnert:

$i_a^x : \Gamma^x_{g,n+1} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,n})$

Sei $[\varphi] \in \Gamma^x_{g,n+1}$ mit Vertreter $\varphi : C_g \longrightarrow C_g$ und mit $\varphi(x_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\varphi(x) = x$. Da $\varphi(x_i) = x_i$ ist, induziert φ einen Homöomorphismus $C_{g,n} \longrightarrow C_{g,n}$, welcher wiederum einen Automorphismus $\pi_1(\varphi) : \pi^x_{g,n} \longrightarrow \pi^x_{g,n}$ induziert, da $\varphi(x) = x$ ist. Dies liefert obigen Morphismus.

$i_o^x : \Gamma_{g,n} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$

Sei $[\varphi] \in \Gamma_{g,n}$ mit Vertreter $\varphi : C_g \longrightarrow C_g$ und mit $\varphi(x_i) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Für jedes $[w] \in \pi^x_{g,n}$ mit geschlossenem Weg w als Vertreter ist $\varphi(w)$ ebenfalls geschlossener Weg mit Start- und Endpunkt $\varphi(x)$. Sei nun v ein beliebiger Weg von x nach $\varphi(x)$. So haben wir einen Automorphismus

$$\varphi_v : \pi^x_{g,n} \longrightarrow \pi^x_{g,n},\ [w] \mapsto [v \star \varphi(w) \star v^{-1}].$$

Die Wahl eines anderen Weges $\overline{v}$ von x nach $\varphi(x)$ liefert ein $\varphi_{\overline{v}}$, das sich von φ_v um einen inneren Automorphismus von $\pi^x_{g,n}$ unterscheidet. Damit erhalten wir den gesuchten Gruppenhomomorphismus

$$i_o^x : \Gamma^x_{g,n} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,n}),\ [\varphi] \mapsto \left(\varphi_v \mod \mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n})\right),$$

da unterschiedliche Vertreter von $[\varphi]$ dasselbe Element in $\mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$ liefern. Zur Injektivität vgl. [HL].

<u>$q^x_1 : \Gamma^x_{g,n+1} \longrightarrow \Gamma_{g,n}$</u>

Dieser Morphismus vergisst einfach, dass $\varphi : C_{g,n} \longrightarrow C_{g,n}$ den Punkt x festlässt und hat einen Kern, der kanonisch isomorph zu $\mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n})$ ist, vgl. [HL]. Damit ist die erste Zeile exakt.

<u>$q^x_2 : \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$</u>

Dies ist der kanonische Morphismus und somit ist die zweite Zeile ebenfalls exakt.

<u>Die Kommutativität des Diagramms</u>

Nur die Kommutativität des rechten Quadrats ist nicht trivial. Sei $[\varphi] \in \Gamma^x_{g,n+1}$ mit $\varphi : C_g \longrightarrow C_g$ wie oben, so ist $i^x_a(\varphi) : [w] \mapsto [\varphi(w)]$ und $(q^x_2 \circ i^x_a)([\varphi]) = ([w] \mapsto [\varphi(w)]) \mod \mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n})$. Umgekehrt hat $q^x_1([\varphi])$ ebenfalls φ als Vertreter und somit ist $(i^x_o \circ q^x_1)([\varphi]) = ([w] \mapsto [\varphi(v \star w \star v^{-1})]) \mod \mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n})$. Da jedoch $\varphi(x) = x$ gilt, ist $v = 0$ wählbar und es folgt $(q^x_2 \circ i^x_a) = (i^x_o \circ q^x_1)$.

<u>Beachte:</u> Wählt man statt x einen anderen Punkt $\overline{x} \in C_{g,n}$, so erhält man wieder solch ein Diagramm, jedoch ändert sich $\Gamma_{g,n}$ nicht, und im Gegensatz zu den anderen Gruppen ist $\mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$ <u>kanonisch</u> isomorph zu $\mathrm{Out}(\pi^{\overline{x}}_{g,n})$.

Aufgrund dieses Diagramms fassen wir die $\Gamma_{g,n}$ auf als Untergruppe von $\mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$, wobei diese Inklusion unabhängig von der Wahl des Basispunktes x ist, so dass wir auch oft $\mathrm{Out}(\pi_{g,n})$ schreiben. Ebenso fassen wir $\Gamma^x_{g,n+1}$ als Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\pi^x_{g,n})$ auf, so dass wir auch q^x_1 und q^x_2 identifizieren und nur q^x bzw. q schreiben und i^x_a und i^x_o gar nicht mehr notieren.

2.3 Induzieren von Untergruppen von $\Gamma_{g,n}$ nach $\Gamma_{g',n'}$

Ziel dieses Abschnitts ist es, in der Situation von Abschnitt 2.1 zu einer Untergruppe $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ein geeignetes Pendant, also eine von Γ induzierte Untergruppe $\Gamma' \leq \Gamma_{g',n'}$ zu finden.

Definition 2.1 Sei $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$, $x \in C_{g,n}$ und $x' \in C_{g',n'}$ mit $P(x') = x$, wie in Abschnitt 2.1. Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ eine Untergruppe. Γ heißt *verträglich mit P bzgl. x und x'* falls $\pi^{x'}_{g',n'}$ invariant ist unter $(q^x)^{-1}(\Gamma) \leq \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,n})$. Dies soll heißen, dass zwar die ganze Untergruppe fix bleibt, aber nicht notwendigerweise elementweise. Dabei sei $q^x : \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_{g,n}^x)$ der kanonische Morphismus und Γ sei identifiziert mit einer Untergruppe von $\mathrm{Out}(\pi_{g,n}^x)$, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben.

Lemma 2.2 Der Begriff der Verträglichkeit von Γ mit P ist unabhängig von der Wahl von x und x'.

Beweis: Ist $\overline{x}'$ über $\overline{x} \in C_{g,n}$, so existiert ein Isomorphismus $\pi_{g,n}^x \longrightarrow \pi_{g,n}^{\overline{x}}$, der bis auf Konjugation mit einem Element in $\pi_{g,n}^x$ eindeutig ist. Da $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ eine normale Überlagerung ist, führt dieser Isomorphismus $\pi_{g',n'}^{x'}$ in $\pi_{g',n'}^{\overline{x}'}$ über, so dass die eine Untergruppe genau dann unter Γ invariant ist, wenn die andere es ist. $\square$

Proposition 2.3 Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ist verträglich mit P (bzgl. x und x').

(b) Zu jedem Vertreter $\varphi : C_{g,n} \longrightarrow C_{g,n}$ von $[\varphi] \in \Gamma$ mit $\varphi(x) = x$ existiert genau ein $\varphi' : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',n'}$ mit $\varphi'(x') = x'$, so dass

$$\begin{tikzcd} C_{g',n'} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "P"'] & C_{g',n'} \arrow[d, "P"] \\ C_{g,n} \arrow[r, "\varphi"] & C_{g,n} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(c) Zu jedem Vertreter $\varphi : C_{g,n} \longrightarrow C_{g,n}$ von $[\varphi] \in \Gamma$ existiert ein $\varphi' : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',n'}$, so dass obiges Diagramm kommutiert.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Aus der Verträglichkeit folgt, dass $\pi_1(\varphi)(\pi_{g',n'}^{x'}) = \pi_{g',n'}^{x'}$ gilt, dass sich also $\varphi \circ P$ liften lässt zu einer stetigen Abbildung $\varphi' : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',n'}$, die aus Symmetriegründen ein Homöomorphismus ist. Durch die Festlegung $\varphi'(x') = x'$ ist sie eindeutig.
(b)$\Rightarrow$(a): Die Behauptung folgt durch Anwenden des Funktors π_1 auf obiges kommutative Diagramm.
(c)$\Rightarrow$(a): wieder durch Anwenden von π_1. Dies geht genauer, wenn man einen Weg von $\varphi'(x')$ nach x' wählt und den Isomorphismus $\pi_{g',n'}^{\varphi'(x')} \longrightarrow \pi_{g',n'}^{x'}$ betrachtet, der von diesem Weg induziert wird, bzw. den Isomorphismus $\pi_{g,n}^{P(\varphi'(x'))} \longrightarrow \pi_{g,n}^x$ betrachtet, der vom Bild unter P von diesem Weg induziert wird.
(a)$\Rightarrow$ (c): Sei $\overline{x'}$ ein beliebiger Punkt über $\varphi(x)$. Da P normal ist und wegen der Verträglichkeit von P mit Γ folgt, dass $\pi_1(\varphi)(\pi_{g',n'}^{x'}) = \pi_{g',n'}^{\overline{x'}}$ gilt, dass sich also $\varphi \circ P$ liften lässt zu einer stetigen Abbildung $\varphi' : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',n'}$, die aus Symmetriegründen ein Homöomorphismus ist. Dieser ist allerdings nur eindeutig bis auf eine Decktransformation, da die Wahl von $\overline{x'}$ nicht eindeutig war. $\square$

Bemerkung 2.4 Da wir im letzten Abschnitt die Gruppe $\Gamma_{g,n}$ als Untergruppe von $\mathrm{Out}(\pi_{g,n}^x)$ bzw. $\Gamma_{g,n+1}^x$ als Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x)$ aufgefasst haben, ist es sinnvoll obige Aussagen (b) und (c) unter diesem Aspekt zu verstehen. Die Aussage in der Situation von (b) besagt nun wegen $\varphi(x) = x$, dass wir sogar eine Zuordnung $q^{-1}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_{g',n'+1}^{x'}$, $[\varphi] \mapsto [\varphi']$ haben. Fassen wir dies nun auf als Abbildung $j_{n,n'}^{x,x'}$: $\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x) \geq q^{-1}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_{g',n'}^{x'})$, so ist dies nichts anderes als die Abbildung, die einem $\varphi \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x)$, welches $\pi_{g',n'}^{x'}$ invariant lässt, wenn wir $\pi_{g',n'}^{x'}$ als Normalteiler von $\pi_{g,n}^x$ auffassen, die Einschränkung $\varphi|_{\pi_{g',n'}^{x'}}$ zuordnet. In Situation (c) haben wir im Grunde dieselbe Situation wie in (b), jedoch wird hier die Abbildung $j_{n,n'}^{x,x'}$: $\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x) \geq \Gamma_{g,n+1}^x \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_{g',n'}^{x'})$ noch nach $\mathrm{Inn}(\pi_{g',n'}^{x'})$ faktorisiert. Dies liefert dann einen Homomorphismus nach $\Gamma_{g',n'}$. Da jedes $[\varphi] \in \Gamma$ in $\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x)/\mathrm{Inn}(\pi_{g',n'}^{x'})$ genau $[C_{g',n'} : C_{g,n}]$ Urbilder hat und $j_{n,n'}^{x,x'}$ injektiv ist, ist die Zuordnung $[\varphi] \mapsto [\varphi']$ nicht eindeutig. Dies stört zwar nicht, sollte aber auch nicht vernachlässigt werden. Es ist vermutlich direkt mittels kombinatorischer Gruppentheorie möglich, einzusehen, dass $j_{n,n'}^{x,x'}$ injektiv ist, jedoch folgt dies sehr viel leichter, wenn man die Teichmüller-Modulgruppen mittels quasi-konformer Abbildungen beschreibt, vgl. [Nag]. Da wir dieses Ergebnis nicht benötigen, und dieser Beweis doch einen recht großen Umweg bedeuten würde, verzichten wir darauf. Insgesamt können wir die Situation in folgendem kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x) \arrow[d, "q'"] & \supseteq & q^{-1}(\Gamma) \arrow[d, "q'"'] \arrow[r, "j_{n,n'}^{x,x'}"] & j_{x,x'}(q^{-1}(\Gamma)) \arrow[d, "q'"] & \subseteq & \mathrm{Aut}(\pi_{g',n'}^{x'}) \arrow[d, "q'"'] \\
\mathrm{Aut}(\pi_{g,n}^x)/\mathrm{Inn}(\pi_{g',n'}^{x'}) \arrow[d, "q^*"] & \supseteq & (q^*)^{-1}(\Gamma) \arrow[d, "q^*"'] \arrow[r] & \Gamma' & \subseteq & \mathrm{Out}(\pi_{g',n'}^{x'}) \\
\mathrm{Out}(\pi_{g,n}^x) & \supseteq & \Gamma & & &
\end{tikzcd}$$

q, q' und q^* sind dabei stets die kanonischen Abbildungen mit $q = q^* \circ q'$. Des weiteren sind sämtliche vertikalen Pfeile surjektiv und sämtliche horizontalen Pfeile injektiv.

Definition 2.5 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ verträglich mit P bzgl. x und x'. Zu $[\varphi] \in \Gamma$ mit Vertreter $\varphi : C_g \longrightarrow C_g$ sei $\varphi' : C_{g'} \longrightarrow C_{g'}$ wie oben definiert. Dann heißt

$$\Gamma' := \{[\varphi'] \in \Gamma_{g',n'} : [\varphi] \in \Gamma\}$$

die von Γ *induzierte Untergruppe* von $\Gamma_{g,n}$. Nach obiger Bemerkung gilt dann $\Gamma' = q'(j_{n,n'}^{x,x'}(q^{-1}(\Gamma)))$.

Lemma 2.6 Γ' ist abhängig nur von Γ und P, nicht aber von x und x'.

Beweis: Dies ist eine einfache aber mühselige Rechnung, die sofort aus den Definitionen folgt. $\square$

2.4 Die algebraische Beschreibung des kanonischen Homomorphismus $\Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$

Seien nun $0 \leq m \leq n$ und es bezeichne $t = t^x_{n,m} : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$, $[\varphi] \mapsto [\varphi]$ die kanonische Abbildung, die "vergisst", dass φ die Punkte $x_{m+1}, \dots, x_n$ festlässt. Ziel dieses Abschnitts ist es, t als Abbildung $\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m})$ zu verstehen, wobei $\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n})$ eine geeignete Untergruppe von $\mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$ ist, die $\Gamma_{g,n}$ umfasst. Sei dazu wie immer $C_{g,n} := C_g - \{x_1, \dots, x_n\}$ und $C_{g,m} := C_g - \{x_1, \dots, x_m\}$ für feste Punkte $x_1, \dots, x_n \in C_g$ und $i : C_{g,n} \hookrightarrow C_{g,m}$ die Inklusion. Sei $r : \pi^x_{g,n} \longrightarrow \pi^x_{g,m}$ der durch i induzierte Epimorphismus. Setze nun $K := \mathrm{Kern}(r)$ und

$$\mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) := \left\{ f \in \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,n}) : f(K) = K \right\}.$$

Damit gilt $\mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n})$, so dass wir

$$\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) := \mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) / \mathrm{Inn}(\pi^x_{g,n})$$

definieren können. Unter der kanonischen Einbettung $\Gamma_{g,n} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,n})$ gilt offenbar auch $\Gamma_{g,n} \hookrightarrow \mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n})$.

Lemma 2.7 Es existiert ein Gruppenhomomorphismus

$$\overline{t} = \overline{t}^x_{n,m} : \mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,m}), \quad f \mapsto \overline{f},$$

so dass

$$\begin{tikzcd}
\pi^x_{g,n} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \pi^x_{g,n} \arrow[d, "r"] \\
\pi^x_{g,m} \arrow[r, "\overline{f}"] & \pi^x_{g,m}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Klar, denn die Abbildung $r \circ f$ faktorisiert über $\pi^x_{g,m}$ genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(r \circ f) \supseteq \mathrm{Kern}(r)$ gilt. Nun gilt aber $\mathrm{Kern}(r \circ f) = \left\{ [w] \in \pi^x_{g,n} : r(f([w])) = 1 \right\}$ $= \left\{ [w] \in \pi^x_{g,n} : f([w]) \in K \right\} = f^{-1}(K) = K$, da nach Voraussetzung f ein Automorphismus mit $f(K) = K$ ist. Damit folgt, dass $r \circ f$ zu $\overline{f}$ faktorisiert, und dieselbe Überlegung mit f^{-1} statt f liefert, dass $\overline{f}$ ein Automorphismus ist. □

Lemma 2.8 Es kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^x_{g,n+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{t}^x_{n,m}"'] & \mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[d, "\overline{t}^x_{n,m}"] \\
\Gamma^x_{g,m+1} \arrow[r, hook] & \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,m})
\end{tikzcd}$$

wobei $\overline{t}^x_{n,m} : \Gamma^x_{g,n+1} \longrightarrow \Gamma^x_{g,m+1}$ die Abbildung ist, die "vergisst", dass $[\varphi] \in \Gamma^x_{g,n+1}$ die $x_{m+1}, \dots, x_n$ festlässt. Des weiteren faktorisiert

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[r, "\overline{t}^x_{n,m}"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,m}) \arrow[d] \\
\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[r, dashed, "t^x_{n,m}"] & \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m})
\end{tikzcd}
$$

so dass insgesamt

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[rr, "\overline{t}^x_{n,m}"] \arrow[dd, "q_n"] & & \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,m}) \arrow[dd, "q_m"] \\
\Gamma^x_{g,n+1} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\overline{t}^x_{n,m}"] \arrow[dd, "q_n"'] & & \Gamma^x_{g,m+1} \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "q_m"] & \\
& \mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[rr, "t^x_{n,m}"] & & \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m}) \\
\Gamma_{g,n} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "t^x_{n,m}"'] & & \Gamma_{g,m} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Dabei ist die Abbildung $\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m})$ von x unabhängig in dem Sinne, dass für alle x, $\overline{x}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[r, "t^x_{n,m}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Out}^m(\pi^{\overline{x}}_{g,n}) \arrow[r, "t^{\overline{x}}_{n,m}"'] & \mathrm{Out}(\pi^{\overline{x}}_{g,m})
\end{tikzcd}
$$

kommutiert, wobei die senkrechten Pfeile die kanonischen Isomorphismen sind.

Beweis: Die Kommutativität des ersten Diagramms folgt sofort aus den Definitionen der Abbildungen. Ähnlich leicht folgt, dass das zweite Diagramm faktorisiert. Im dritten (großen) Diagramm ist nur noch zu zeigen, dass das "untere" Quadrat kommutiert; dies rechnet sich aber leicht nach, denn alle senkrechten Abbildungen sind surjektiv. Um zu zeigen, dass $\mathrm{Out}^m(\pi^x_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi^x_{g,m})$ von x unabhängig ist, bzw. um die Kommutativität des letzten Diagramms zu zeigen, nimmt man einen festen Weg von x nach $\overline{x}$ und erhält so ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}^m(\pi^x_{g,n}) \arrow[r, "\overline{t}^x_{n,m}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Aut}(\pi^x_{g,m}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Aut}^m(\pi^{\overline{x}}_{g,n}) \arrow[r, "\overline{t}^{\overline{x}}_{n,m}"'] & \mathrm{Aut}(\pi^{\overline{x}}_{g,m})
\end{tikzcd}
$$

in welchem die senkrechten Pfeile nun aus dem gewählten Weg hervorgehen. Dieses Diagramm liefert aber sofort das gesuchte Diagramm. □

Bemerkung 2.9 Da wir uns im Folgenden fast nur für die Teichmüller-Modulgruppe und feste Überlagerungen interessieren, ist es aufgrund der Ergebnisse dieser Abschnitte klar, dass der Basispunkt x auf $C_{g,n}$ (bzw. x' auf $C_{g',n'}$) unwichtig ist, und wir werden ihn ab jetzt häufig in der Notation unterschlagen.

2.5 Induzierte Überlagerungen

Sei nun $0 \leq m \leq n$, $M := \{1, \ldots, m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = N$. Sei $C_{g,n}$, $C_{g,m}$, $i : C_{g,n} \hookrightarrow C_{g,m}$ und $r : \pi_{g,n} \longrightarrow \pi_{g,m}$ wie im letzten Abschnitt. Zusätzlich sei $P_m : C_{g',m'} \longrightarrow C_{g,m}$ eine feste normale Überlagerung und $\pi_{g',m'}$ der von P_m induzierte Normalteiler in $\pi_{g,m}$.

Definition 2.10 In obiger Situation heißt die Überlagerung $P_n : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ die von $r^{-1}(\pi_{g',m'}) \trianglelefteq \pi_{g,n}$ bestimmt wird, die *von P_m induzierte Überlagerung.*

Bemerkung 2.11 In diesem Fall gilt kanonisch

$$\mathrm{Gal}\left(C_{g',n'}/C_{g,n}\right) \cong \pi_{g,n}/r^{-1}\left(\pi_{g',m'}\right) \cong \pi_{g,m}/\pi_{g',m'} \cong \mathrm{Gal}\left(C_{g',m'}/C_{g,m}\right).$$

Sei nun $M' := \{(i,j) \in N' : i \in M\} \subset N'$. Dann gilt

$$\begin{array}{lcccl} C_{g,m} & = & C_g & - & \{x_i : i \in M\} \\ C_{g,n} & = & C_g & - & \{x_i : i \in N\} \\ C_{g',m'} & = & C_{g'} & - & \left\{x'_{ij} : (i,j) \in M'\right\} \\ C_{g',n'} & = & C_{g'} & - & \left\{x'_{ij} : (i,j) \in N'\right\} \end{array}$$

und

$$\begin{tikzcd} C_{g',n'} \arrow[r, "P_n"] \arrow[d, hook, "i'"'] & C_{g,n} \arrow[d, hook, "i"] \\ C_{g',m'} \arrow[r, "P_m"'] & C_{g,m} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei sei $i' : C_{g',n'} \hookrightarrow C_{g',m'}$ die Inklusion.

Proposition 2.12 Seien P_n, P_m, i, und r wie in der obigen Definition. Seien $t : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$ und $t' : \Gamma_{g',n'} \longrightarrow \Gamma_{g',m'}$ die kanonischen Homomorphismen. Dabei soll t' passend zum kommutativen Diagramm in obiger Bemerkung gewählt werden, d.h. t' "vergisst", dass $\varphi : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',n'}$ die Punkte in $C_{g',n'}$ über $x_{m+1}, \ldots, x_n$, festlässt. Sei nun $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ verträglich mit P_n und $\Delta \leq \Gamma_{g,m}$ verträglich mit P_m. So gilt:

$$t(\Gamma) \leq \Delta \implies t'(\Gamma') \leq \Delta'.$$

Beweis: Wir haben folgende Situation, in welcher alle Quadrate kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_{g,n} \arrow[dd, "t_{n,m}"] & & \Gamma_{g',n'} \arrow[dd, "t'_{n',m'}"] \\
\Gamma^x_{g,n+1} \supseteq q_n^{-1}(\Gamma) \arrow[ur, "q_n"] \arrow[rr, "j_{n,n'}"] \arrow[dd, "\overline{t}_{n,m}"'] & & \Gamma^{x'}_{g',n'+1} \arrow[ur, "q'_{n'}"] \arrow[dd, "\overline{t'}_{n',m'}"] & \\
& \Gamma_{g,m} & & \Gamma_{g',m'} \\
\Gamma^x_{g,m+1} \supseteq q_m^{-1}(\Delta) \arrow[ur, "q_m"] \arrow[rr, "j_{m,m'}"] & & \Gamma^{x'}_{g',m'+1} \arrow[ur, "q'_{m'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nur die Kommutativität des vorderen Quadrats ist noch nicht gezeigt worden. Dafür genügt aber wegen Lemma 2.8 die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
O := \mathrm{Aut}_{\pi_{g',n'}}(\pi_{g,n}) \cap \mathrm{Aut}^m(\pi_{g,n}) \arrow[r, "j_{n,n'}"] \arrow[d, "\overline{t}_{n,m}"'] & \mathrm{Aut}^{m'}(\pi_{g',n'}) \arrow[d, "\overline{t'}_{n',m'}"'] \\
\mathrm{Aut}_{\pi_{g',m'}}(\pi_{g,m}) \arrow[r, "j_{m,m'}"] & \mathrm{Aut}(\pi_{g',m'})
\end{tikzcd}$$

nachzurechnen. Dabei sei $\mathrm{Aut}_{\pi_{g',n'}}(\pi_{g,n}) := \{f \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}) : f(\pi_{g',n'}) = \pi_{g',n'}\}$ und $\mathrm{Aut}_{\pi_{g',m'}}(\pi_{g,m})$ analog definiert. Für die Kommutativität des obigen Diagramms sei $f \in O$ und $w \in \pi_{g',m'}$, etwa mit $w = r(v)$, $v \in \pi_{g',n'}$. So gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\overline{t'} \circ j_{n,n'}\right)(f)\right)(w) &= \left(\overline{t'} \circ \left(f|_{\pi_{g',n'}}\right)\right)(r(v)) \\
&= r\left(f|_{\pi_{g',n'}}(v)\right) \quad \text{wegen Lemma 2.7} \\
&= r\left(f\left(v\right)\right) \\
&= \left(\overline{t}\left(f\right)\right)\left(r\left(v\right)\right) \quad \text{wieder wegen Lemma 2.7} \\
&= \overline{t}\left(f\right)\left(w\right) \\
&= \left(\left(j_{m,m'} \circ \overline{t}\right)(f)\right)(w)
\end{aligned}$$

und damit folgt die Kommutativität. Nun folgt die Behauptung durch Diagrammjagd im großen kommutativen Diagramm: Sei $t(\Gamma) \subseteq \Delta$, so gilt $q_m^{-1}\, t(\Gamma) \subseteq q_m^{-1}(\Delta)$. Daraus folgt

$$\overline{t}\, q_n^{-1}\left(\Gamma\right) \subseteq \left(\overline{t}\, q_n^{-1}\, t^{-1}\, t\right)\left(\Gamma\right) = q_m^{-1}\, t\left(\Gamma\right) \subseteq q_m^{-1}\left(\Delta\right).$$

Dabei gilt die erste Inklusion wegen $\Gamma \subseteq t^{-1}\, t(\Gamma)$ und die Gleichheit wegen folgender Bemerkung unter Verwendung der Tatsache, dass $\overline{t}$ surjektiv ist:

Bemerkung 2.13 In jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "w"'] & B \arrow[d, "y"] \\ C \arrow[r, "z"'] & D \end{tikzcd}$$

gilt $w^{-1}\,z^{-1}(K) = x^{-1}\,y^{-1}(K)$ für alle $K \subseteq D$. Dann gilt aber auch $w\,w^{-1}\,z^{-1}(K) = w\,x^{-1}\,y^{-1}(K)$. Falls w surjektiv ist, gilt dann $L = w\,w^{-1}(L)$ für alle $L \subset C$ und somit folgt $z^{-1}(K) = w\,x^{-1}\,y^{-1}(K)$.

Dann haben wir

$$j_{m,m'}\overline{t}\,q_n^{-1}(\Gamma) \subseteq j_{m,m'}q_m^{-1}(\Delta)$$

und wegen der Kommutativität des großen Diagramms

$$\overline{t'}\,j_{n,n'}q_n^{-1}(\Gamma) \subseteq j_{m,m'}q_m^{-1}(\Delta)\,.$$

Damit gilt auch

$$\left(q'_{m'} \circ \overline{t'} \circ j_{n,n'}\right)\left(q_n^{-1}(\Gamma)\right) \subseteq \left(q'_{m'} \circ j_{m,m'}\right)\left(q_m^{-1}(\Delta)\right).$$

Wieder wegen der Kommutativität folgt nun

$$\left(t' \circ q'_{n'} \circ j_{n,n'}\right)\left(q_n^{-1}(\Gamma)\right) \subseteq \left(q'_{m'} \circ j_{m,m'}\right)\left(q_m^{-1}(\Delta)\right).$$

Dies besagt aber $t'(\Gamma') \leq \Delta'$ □

2.6 Verzweigte Überlagerungen von normalen komplexen Räumen

Definition 2.14 Sei $\eta : Y \longrightarrow X$ eine stetige, surjektive, eigentliche Abbildung topologischer Räume mit endlichen Fasern. η heißt *verzweigte Überlagerung*, falls es eine nirgends dichte Teilmenge $A \subseteq X$ gibt, so dass $\eta|_{Y-\eta^{-1}(A)}$ lokal topologisch ist. Falls zudem X ein normaler analytischer Raum und Y lokal-kompakt ist, so heißt η *(verzweigte) analytische Überlagerung*, vgl. [GR] Definition 37 auf Seite 298.

Bemerkung 2.15 Eine solche Abbildung ist auch stets offen, vgl. [GR], Seite 259.

Satz 2.16 Ist X ein normaler analytischer Raum und $\eta : Y \longrightarrow X$ eine verzweigte analytische Überlagerung, so hat Y eine kanonische Struktur als normaler analytischer Raum, so dass η eine endliche holomorphe Abbildung ist.

Beweis: In [GR] wird ein α-Raum als ein topologischer Raum definiert, der lokal eine verzweigte Überlagerung über einer komplexen Mannigfaltigkeit ist. Es wird des weiteren dort gezeigt, dass die Kategorie solcher topologischen Räume äquivalent zur Kategorie der normalen komplexen Räume ist, vgl. insbesondere die Einleitung von [GR]. Da nun X ein normaler komplexer Raum ist, hat X lokal die Struktur einer verzweigten analytischen Überlagerung über einer Mannigfaltigkeit. Ohne Einschränkung existiert also eine holomorphe verzweigte Überlagerung $X \longrightarrow Z$ auf eine Mannigfaltigkeit Z. Da die Verkettung verzweigter Überlagerungen wieder eine solche ist, ist Y$\xrightarrow{\eta} X \longrightarrow Z$ eine verzweigte Überlagerung über einer Mannigfaltigkeit und somit ist nach der Überlegung oben Y ein normaler komplexer Raum. □

Satz 2.17 Seien $\eta : Y \longrightarrow X$ und $\overline{\eta} : \overline{Y} \longrightarrow X$ verzweigte analytische Überlagerungen eines normalen komplexen Raums X und $\xi : Y \longrightarrow \overline{Y}$ ein Homöomorphismus mit $\overline{\eta} \circ \xi = \eta$. Dann ist ξ biholomorph.

Beweis: Dies ist klar außerhalb der kritischen Punkte. Dies genügt aber auch schon, vgl. Definitionen 8 und 11 und dann Abschnitt 2 mit Definition 17 auf Seite 273 in [GR]. Zur Motivation vgl. zusätzlich Definition 4 auf Seite 259 in [GR]. Alternativ folgt dies auch aus einem Korollar zum Riemannschen Hebbarkeitssatz für normale Räume, vgl. [KK] Theorem 72.2 auf Seite 310. □

3 Kurven mit verallgemeinerter Teichmüller-Markierung und ihre Modulräume

Das Material dieses Abschnitts ist größtenteils in der Literatur nur andeutungsweise vorhanden, dürfte aber den Experten weitgehend bekannt sein. Mangels geeigneter Referenz, schon gar keiner umfassenden, ist es jedoch notwendig, diesen Stoff etwas ausführlicher zu behandeln.

3.1 Verallgemeinerte Teichmüller-Markierungen

Sei C_g, $x_1, \ldots, x_n$, $C_{g,n}$ usw. wie in Abschnitt 2.1.

Definition 3.1 Sei $\pi : C \longrightarrow S$ eine surjektive, eigentliche, glatte (also flache und submersive) holomorphe Abbildung komplexer Räume. $\pi : C \longrightarrow S$ heißt *Familie (glatter) analytischer Kurven von Geschlecht* g, falls jede Faser $C_s := \pi^{-1}(s)$ für $s \in S$ eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g ist, d.h. wenn jede Faser homöomorph zu C_g ist. Als Kurzsprechweise heißt $\pi : C \longrightarrow S$ auch nur *(glatte) Kurve.*

Definition 3.2 Sei $\pi : C \longrightarrow S$ Kurve und seien $\sigma_i : S \longrightarrow C$ für $i = 1, \ldots, n$ holomorphe Schnitte (d.h. es gilt $\pi \circ \sigma_i = \mathrm{id}_S$) mit $\sigma_i(s) \neq \sigma_j(s)$ für alle $s \in S$ und $i \neq j$. Dann heißen die σ_i *Punktierungen* und $(\pi : C \longrightarrow S; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ heißt *n-fach punktierte Kurve.*

Bemerkung 3.3 Eine n-fach punktierte Kurve $(\pi : C \longrightarrow S; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ist topologisch lokal trivial, d.h. es existiert eine offene Überdeckung $S = \cup_{l \in L} S_l$ von S und Homöomorphismen $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l} := \pi^{-1}(S_l)$ für alle $l \in L$, so dass für alle $l \in L$ und alle $i = 1, \ldots, n$ folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C_g \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & C_{S_l} \arrow[d, "\pi"] \\ S_l \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S_l \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_{g,n} \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & C^\bullet_{S_l} \arrow[d, "\pi"] \\ S_l \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S_l \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{x_i\} \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"] & C_{S_l} \\ S_l \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "(x_i, \mathrm{id})"] & S_l \arrow[u, "\sigma_i"'] \end{tikzcd}$$

Dabei sei pr_2 die Projektion auf die zweite Komponente und $C^\bullet_{S_l} := C_{S_l} - \cup_{i=1}^n \sigma_i(S_l)$ die zugehörige gelochte Kurve. Dies folgt für Kurven, für die S eine Mannigfaltigkeit ist aus [Nag], Seite 346, allgemein aus [Ehr]. Für unsere Zwecke hätten wir diese Eigenschaft genauso gut in der Definition für Kurven fordern können oder uns auf Kurven beschränken können, für die S eine Mannigfaltigkeit ist, und für die dieses Ergebnis dann leichter folgt.

Sei von nun an C_g und jede Kurve mit einer Orientierung versehen und jeder lokaler Homöomorphismus α_l sei orientierungstreu.

Definition 3.4 Sei Γ eine feste Untergruppe der Teichmüller-Modulgruppe $\Gamma_{g,n}$. Sei des weiteren $\pi : C \longrightarrow S$ analytische Kurve evtl. mit Punktierungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, $(S_l)_{l\in L}$ eine offene Überdeckung und $(\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l})_{l\in L}$ lokale orientierungstreue Trivialisierungen wie in obiger Bemerkung. $(S_l, \alpha_l)_{l\in L}$ heißt *verallgemeinerte Teichmüller-Struktur zu* Γ oder kürzer Γ-*Struktur* von π, falls für alle $l, \bar{l} \in L$ und alle $s \in S_l \cap S_{\bar{l}}$ gilt, dass die Isotopieklasse der Homöomorphismen

$$\beta_{l\bar{l}}(s) : C_g \xrightarrow{\sim} C_g \times \{s\} \xrightarrow{\alpha_l} C_s \xrightarrow{\alpha_{\bar{l}}^{-1}} C_g \times \{s\} \xrightarrow{\sim} C_g$$

stets in Γ liegt. Dabei ist der erste und der letzte Pfeil der kanonische und es sind nur Isotopien zugelassen, die die x_i fest lassen. Seien nun zwei Γ-Strukturen ohne Einschränkung auf derselben Überdeckung definiert (gegebenenfalls zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergehen), etwa (S_l, α_l) und $(S_l, \overline{\alpha_l})$. Dann heißen (S_l, α_l) und $(S_l, \overline{\alpha_l})$ Γ-*äquivalent*, falls für alle $l \in L$ und für alle $s \in S_l$ der Homöomorphismus

$$C_g \xrightarrow{\sim} C_g \times \{s\} \xrightarrow{\alpha_l} C_s \xrightarrow{(\overline{\alpha}_l)^{-1}} C_g \times \{s\} \xrightarrow{\sim} C_g$$

die x_i fest lässt und seine Isotopieklasse in Γ liegt. Eine Äquivalenzklasse solcher lokalen Trivialisierungen heißt *verallgemeinerte Teichmüller-Markierung zu* Γ oder Γ-*Markierung* von $\pi : C \longrightarrow S$. In der Sprechweise werden wir häufig nicht zwischen Γ-Strukturen und Γ-Markierungen unterscheiden, denn aus dem Zusammenhang ist klar, ob die Klasse oder ein Vertreter dieser Klasse gemeint ist. Die obige Äquivalenzrelation wird mit $\overset{\Gamma}{\sim}$ geschrieben.

Bemerkung 3.5 (a) $\Gamma = 1$ liefert die gewöhnlichen Teichmüller-Markierungen, vgl. [Nag] S. 346.
(b) Jede Kurve hat genau eine $\Gamma_{g,n}$-Markierung, denn wenn die lokalen Trivialisierungen orientierungstreu gewählt werden, so erfüllen sie automatisch die obige Verträglichkeitsbedingung und alle $\Gamma_{g,n}$-Strukturen sind $\Gamma_{g,n}$-äquivalent. Somit ist eine $\Gamma_{g,n}$-markierte Kurve nichts anderes als eine gewöhnliche unmarkierte Kurve.

Definition 3.6 Seien $(\pi : C \longrightarrow S; \sigma_1, \ldots, \sigma_n; (S_l, \alpha_l)_{l\in L})$ und $(\overline{\pi} : \overline{C} \longrightarrow \overline{S}; \overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n; (\overline{S}_{\bar{l}}, \overline{\alpha}_{\bar{l}})_{\bar{l}\in\overline{L}})$ Kurven mit Γ-Struktur und $\phi : C \longrightarrow \overline{C}$ und $\psi : S \longrightarrow \overline{S}$ Isomorphismen. (ϕ, ψ) heißt *Isomorphismus von (punktierten) Kurven mit* Γ-*Struktur*, falls

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\phi} & \overline{C} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\pi}} \\ S & \xrightarrow[\psi]{} & \overline{S} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\phi} & \overline{C} \\ {\scriptstyle\sigma_i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\overline{\sigma}_i} \\ S & \xrightarrow[\psi]{} & \overline{S} \end{array}$$

kommutieren und falls die Γ-Strukturen verträglich sind. Genauer: Seien ohne Einschränkung (eventuell verfeinern) die Überdeckungen so gewählt, dass $L = \overline{L}$ und $\psi(S_l) = \overline{S}_l$ für alle $l \in L$ gilt. Dann gilt für alle $l \in L$ und $s \in S_l$ mit $\overline{s} := \psi(s)$, dass die Isotopieklasse der eindeutig bestimmten Homöomorphismen $\beta_l(s) : C_g \longrightarrow C_g$, die

$$\begin{tikzcd} C_g \times \{s\} \arrow[r, "(\beta_l(s),\psi)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & C_g \times \{\overline{s}\} \arrow[d, "\overline{\alpha}_i"'] \\ C_s \arrow[r, "\phi"'] & C_{\overline{s}} \end{tikzcd}$$

kommutativ machen, in Γ liegen.

Lemma 3.7 Ist $f_S : C \longrightarrow S$ eine Kurve mit Γ-Markierung und n-facher Punktierung, und $\nu : T \longrightarrow S$ ein Morphismus komplexer Räume, so ist die Kurve $f_T : C \times_S T \longrightarrow T$, die aus dem Basiswechsel mit ν hervorgeht, ebenfalls eine Kurve mit Γ-Markierung und n-facher Punktierung und diese Punktierungen erfüllen dieselben Verträglichkeitbedingungen.

Beweis: Wir haben folgendes kartesische Diagramm:

$$\begin{tikzcd} C \times_S T \arrow[r, "\nu_C"] \arrow[d, "f_T"'] & C \arrow[d, "f_S"] \\ T \arrow[r, "\nu"'] & S \end{tikzcd}$$

Die Eigenschaft einer Kurve glatt und eigentlich zu sein ist stabil unter Basiswechsel, so dass sofort klar ist, dass $C \times_S T \longrightarrow T$ wieder eine Kurve ist. Hat man eine Überdeckung $S = \cup S_l$ und lokale Trivialisierungen $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l}$, so liefert $T_l := \nu^{-1}(S_l) = T \times_S S_l$ eine Überdeckung von T. Des weiteren haben wir

$$\begin{aligned} (C \times_S T)_{T_l} &= C \times_S T \times_T T_l \\ &= C \times_S T_l \\ &= C \times_S (T \times_S S_l) \\ &= (C \times_S S_l) \times_S T \\ &= C_{S_l} \times_S T \end{aligned}$$

und auch

$$C_g \times T_l = C_g \times T \times_S S_l = C_g \times S_l \times_S T$$

so dass wir insgesamt

$$C_g \times T_l = (C_g \times S_l) \times_S T \xrightarrow{(\alpha_l,\mathrm{id})} C_{S_l} \times_S T = (C \times_S T)_{T_l}$$

haben. Dies ist aber eine Γ-Struktur für $C \times_S T \longrightarrow T$. Zu einem Schnitt $\sigma_i : S \longrightarrow C$ von $C \longrightarrow S$ haben wir durch Basiswechsel sofort einen Schnitt $\overline{\sigma_i} : T = S \times_S T \longrightarrow C \times_S T$ von $C \times_S T \longrightarrow T$. Die lokale Verträglichkeit von σ_i und α_l liefert die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \{x_i\} \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"] & C_{S_l} \\ S_l \arrow[u, "(\mathrm{id}, x_i)"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S_l \arrow[u, "\sigma_i"'] \end{tikzcd}$$

Durch Basiswechsel erhält man, dass

$$\begin{tikzcd} \{x_i\} \times T_l \arrow[r, "(\alpha_l, \mathrm{id})"] & C_{T_l} \\ T_l \arrow[u, "(\mathrm{id}, x_i)"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & T_l \arrow[u, "\overline{\sigma_i}"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert — dies ist aber nichts anderes als die lokale Verträglichkeit von (α_l, id) mit $\overline{\sigma_i}$. □

3.2 Modulräume von Kurven mit verallgemeinerter Teichmüller-Markierung

3.2.1 Grobe und feine Modulräume

Um die Hauptergebnisse dieser Arbeit zu beweisen, benötigen wir den gewöhnlichen Teichmüller-Raum. Um diesen und seine wesentlichen Eigenschaften genauer beschreiben zu können, ist es jedoch notwendig, einige Begriffe einzuführen. Ausführlicher werden diese in [Dol] und [GIT] behandelt.

Sei **(KompRm)** die Kategorie der endlich dimensionalen komplexen Räume. Der Begriff des analytischen Raums wird hierfür synonym verwendet. Sei des weiteren **(Mengen)** die Kategorie der Mengen und $\mathcal{F}$ ein Funktor von **(KompRm)** (oder alternativ einer passenden algebraischen Kategorie) nach **(Mengen)**.

Definition 3.8 Sei X ein fester analytischer Raum. Sei $\mathrm{Mor}(\cdot, X)$ der kontravariante Funktor von **(KompRm)** nach **(Mengen)**, welcher jedem analytischen Raum S die Menge $\mathrm{Mor}(S, X)$ der holomorphen Abbildungen von S nach X zuordnet und jeder analytischen Abbildung $\theta : T \longrightarrow S$ die Abbildung $\mathrm{Mor}_X(\theta) : \mathrm{Mor}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Mor}(T, X)$ mit $\psi \mapsto \psi \circ \theta$ zuordnet. Ist nun Y ein weiterer analytischer Raum und $\theta : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Mor}(\theta)$ den Morphismus von Funktoren $\mathrm{Mor}(\cdot, X) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\cdot, Y)$, welcher aus der Verkettung mit θ hervorgeht. Für jeden analytischen Raum S ist also $\mathrm{Mor}(\theta)(S) : \mathrm{Mor}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Mor}(S, Y)$ durch $\phi \mapsto \theta \circ \phi$ gegeben.

Definition 3.9 Sei $\mathcal{F} : \mathbf{(KompRm)} \longrightarrow \mathbf{(Mengen)}$ kontravarianter Funktor. Ein analytischer Raum X heißt *feiner Modulraum für $\mathcal{F}$*, falls ein Isomorphismus von Funktoren

$$\Omega : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{Mor}(\cdot, X)$$

existiert. Dann heißt der Funktor $\mathcal{F}$ *darstellbar*. Das Urbild in $\mathcal{F}(X)$ von $\mathrm{id} \in \operatorname{Mor}(X, X)$ heißt *universelles Objekt* und wird mit $\mathcal{U}(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.10 Sei $\mathcal{F} : \mathbf{(KompRm)} \longrightarrow \mathbf{(Mengen)}$ ein Funktor mit feinem Modulraum X und universellem Objekt $\mathcal{U}$. Für jeden komplexen Raum S und jedes $C \in \mathcal{F}(S)$ existiert dann ein eindeutig bestimmter Morphismus $t : S \longrightarrow X$, so dass $C = \mathcal{F}(t)(\mathcal{U})$ gilt, vgl.[Dol].

Definition 3.11 Sei $\mathcal{F}$ wie oben. Ein analytischer Raum X heißt *grober Modulraum* zu $\mathcal{F}$, falls ein Morphismus von Funktoren

$$\Omega : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{Mor}(\cdot, X)$$

existiert, der folgenden Eigenschaften genügt:

(a) Für jeden analytischen Raum Y und Morphismus von Funktoren $\Omega' : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{Mor}(\cdot, Y)$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\omega : X \longrightarrow Y$ mit $\operatorname{Mor}(\omega) \circ \Omega = \Omega'$.

(b) Sei $*$ die analytische Varietät, die aus einem Punkt besteht. So ist die Abbildung

$$\Omega(*) : \mathcal{F}(*) \longrightarrow \operatorname{Mor}(*, X)$$

bijektiv.

Lemma 3.12 Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ Funktoren mit groben Modulräumen X, X' und zugehörigen $\Omega : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{Mor}(\cdot, X)$, $\Omega' : \mathcal{F}' \longrightarrow \operatorname{Mor}(\cdot, X')$. Dann induziert jeder Morphismus von Funktoren $\Theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ einen Morphismus $\theta : X \longrightarrow X'$, so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\Omega"] \arrow[d, "\Theta"'] & \operatorname{Mor}(\cdot, X) \arrow[d, "\operatorname{Mor}(\theta)"] \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "\Omega'"'] & \operatorname{Mor}(\cdot, X')
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Definiere $\overline{\Theta} : \mathcal{F} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{F}' \xrightarrow{\Omega'} \operatorname{Mor}(\cdot, X')$. Da X grober Modulraum ist, existiert ein eindeutiges $\theta : X \longrightarrow X'$ so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\Omega"] \arrow[d, "\Theta"'] \arrow[dr, "\overline{\Theta}"'] & \operatorname{Mor}(\cdot, X) \arrow[d, "\operatorname{Mor}(\theta)"] \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "\Omega'"'] & \operatorname{Mor}(\cdot, X')
\end{tikzcd}$$

kommutiert. □

3.2.2 Der gewöhnliche Teichmüller-Raum

In diesem Abschnitt fassen wir die wichtigsten Eigenschaften des gewöhnlichen Teichmüller-Raums, die wir im folgenden benötigen, zusammen, vgl. etwa [Nag].

- Sei $\mathcal{T}_{g,n}$ der Funktor, der jedem analytischen Raum S die Menge der Isomorphieklassen von glatten n-fach punktierten Kurven über S von Geschlecht g mit gewöhnlicher Teichmüller-Struktur (d.h. Γ-markierten Kurven mit $\Gamma = 1$) zuordnet und jedem Morphismus analytischer Räume $\nu : T \longrightarrow S$ den Basiswechsel mit ν zuordnet. Dieser Funktor ist darstellbar durch einen glatten komplexen Raum $T_{g,n}$, den *gewöhnlichen Teichmüller-Raum*.

- Sei $\mathcal{M}_{g,n}$ der Funktor, der jedem analytischen Raum S die Menge der Isomorphieklassen von glatten n-fach punktierten Kurven über S von Geschlecht g zuordnet und wie oben jedem Morphismus analytischer Räume $\nu : T \longrightarrow S$ den Basiswechsel mit ν zuordnet. Dieser Funktor ist nicht darstellbar, jedoch existiert ein normaler komplexer Raum $M_{g,n}$, der ein grober Modulraum für $\mathcal{M}_{g,n}$ ist.

- Für jeden analytischen Raum S operiert auf $\mathcal{T}_{g,n}(S)$ die Teichmüller-Modulgruppe $\Gamma_{g,n}$ durch

  $$(\pi : C \longrightarrow S;\ \sigma_i : i \in N;\ (S_l, \alpha_l)_{l\in L})$$
  $$\mapsto (\pi : C \longrightarrow S;\ \sigma_i : i \in N; (S_l, (\alpha_l \circ (\gamma, \mathrm{id}_{S_l}))_{l\in L})$$

  für $[\gamma] \in \Gamma_{g,n}$. Insbesondere haben wir eine Operation mittels biholomorpher Abbildungen auf dem Teichmüller-Raum $T_{g,n}$. Diese Aktion ist diskontinuierlich und der Quotient $T_{g,n}/\Gamma_{g,n}$ ist isomorph zu $M_{g,n}$.

- Die universelle Überlagerung der universellen Kurve $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ ist kanonisch isomorph zu $T_{g,n+1}$. Da es eine exakte Sequenz

  $$1 \longrightarrow \pi_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,n+1} \longrightarrow \Gamma_{g,n} \longrightarrow 1$$

  gibt vgl. Abschnitt 2.2, operiert $\pi_{g,n}$ ebenfalls auf $T_{g,n+1}$. Beachte dabei, dass $\pi_{g,n} \cong \mathrm{Inn}(\pi_{g,n})$ ist, vgl.[LS], Seite 108. Dann gilt $T_{g,n+1}/\pi_{g,n} \cong \mathcal{U}(T_{g,n})$ und wegen $\Gamma_{g,n} \cong \Gamma_{g,n+1}/\pi_{g,n}$ haben wir insgesamt, dass

$$\begin{tikzcd}
T_{g,n+1} \arrow[d, "/\pi_{g,n}"'] & \\
\mathcal{U}(T_{g,n}) \arrow[r] \arrow[d, "/\Gamma_{g,n}"'] & T_{g,n} \arrow[d, "/\Gamma_{g,n}"] \\
M_{g,n+1} \arrow[r] & M_{g,n}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

- Der Teichmüller-Raum ist zusammenziehbar und deshalb ist die universelle Kurve $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ sogar global topologisch trivial, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $\alpha : C_g \times T_{g,n} \longrightarrow \mathcal{U}(T_{g,n})$. Damit sind auch alle Kurven mit gewöhnlicher Teichmüller-Struktur global topologisch trivial und somit lässt sich jede Teichmüller- Struktur zu $C \longrightarrow S$ als Homöomorphismus $C_g \times S \longrightarrow C$ beschreiben. Dies ist allerdings falsch für $\Gamma \neq 1$, vgl. [Nag], Seite 350.

3.2.3 Die komplexen Räume ${}_\Gamma T_{g,n}$ als grobe Modulräume von ${}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n}$

Definition 3.13 Zu einer beliebigen Untergruppe $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ sei ${}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n} :$ **(KompRm)** $\longrightarrow$ **(Mengen)** der Funktor, welcher einem analytischen Raum S die Menge der Isomorphieklassen der n-punktierten, Γ-markierten glatten Kurven von Geschlecht g über S und jedem Morphismus $\nu : T \longrightarrow S$ analytischer Räume den Basiswechsel mit ν zuordnet.

Definition 3.14 Zu einer Untergruppe $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ sei ${}_\Gamma T_{g,n} := T_{g,n}/\Gamma$.

Satz 3.15 ${}_\Gamma T_{g,n}$ ist grober Modulraum für ${}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n}$. ${}_\Gamma T_{g,n}$ ist ein feiner Modulraum genau dann, wenn Γ kein Element endlicher Ordnung enthält.

Nach folgender Bemerkung werden wir den Satz beweisen.

Bemerkung 3.16 Falls ${}_\Gamma T_{g,n}$ ein feiner Modulraum für ${}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n}$ ist, so existiert ein universelles Objekt $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n})$. Dieses universelle Objekt ist eine Kurve $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$ und heißt *universelle Kurve*. Wegen Bemerkung 3.10 folgt, dass dann zu jeder punktierten Kurve $C \longrightarrow S$ mit Γ-Struktur ein eindeutiger Morphismus $S \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$ existiert, so dass $C \cong \mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) \times_{{}_\Gamma T_{g,n}} S$ gilt.

Beweis von Satz 3.15: Wir überprüfen der Reihe nach die in Definition 3.11 geforderten Eigenschaften an einen groben Modulraum:

(1) Konstruktion des Morphismus von Funktoren

$$\Omega : {}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Mor}(\cdot, {}_\Gamma T_{g,n})$$

(a) Sei S analytischer Raum. Wir ordnen nun der Isomorphieklasse der Kurve $(\pi : C \longrightarrow S;\ \sigma_i : i \in N;\ (S_l, \alpha_l)_{l \in L})$ in ${}_\Gamma \mathcal{T}_{g,n}(S)$ einen Morphismus $\lambda : S \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$ wie folgt zu: $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l}$ fassen wir als gewöhnliche Teichmüller-Struktur auf $\pi|_{C_{S_l}} : C_{S_l} \longrightarrow S_l$ auf; damit existiert ein Morphismus λ_l :

$S_l \xrightarrow{\kappa_l} T_{g,n} \longrightarrow T_{g,n}/\Gamma \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$. Diese Morphismen verkleben sich zu dem gesuchten Morphismus $\lambda : S \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$, denn sie stimmen auf $S_l \cap S_{\bar{l}}$ überein: Für alle $s \in S_l \cap S_{\bar{l}}$ bezeichne $\gamma_{l\bar{l}}(s)$ die Isotopieklasse von

$$\beta_{l\bar{l}}(s) : C_g \longrightarrow C_g \times \{s\} \xrightarrow{\alpha_l} C_s \xrightarrow{\alpha_{\bar{l}}^{-1}} C_g \times \{s\} \longrightarrow C_g.$$

Dann liegt $\gamma_{l\bar{l}}(s)$ nach Voraussetzung in Γ, was nichts anderes besagt, als dass $\gamma_{l\bar{l}}(s)$ die Teichmüller-Struktur α_l von $(C_{S_l})_s$ in die Teichmüller-Struktur $\alpha_{\bar{l}}$ von $(C_{S_{\bar{l}}})_s$ überführt, also $\gamma_{l\bar{l}}(s)(\kappa_l(s)) = \kappa_{\bar{l}}(s)$ und somit $\lambda_l(s) = \lambda_{\bar{l}}(s)$ gilt.

(b) Es kommutiert zu jedem $\nu : T \longrightarrow S$

$$\begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) \arrow[r, "\Omega(S)"] \arrow[d, "\times_S T"'] & \mathrm{Mor}(S, {}_\Gamma T_{g,n}) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{{}_\Gamma T_{g,n}}(\nu)"] \\ {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(T) \arrow[r, "\Omega(T)"'] & \mathrm{Mor}(T, {}_\Gamma T_{g,n}) \end{tikzcd}$$

denn dies gilt für jedes $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ aufgrund der gewöhnlichen Teichmüller-Theorie.

<u>(2) Es existiert kein feinerer Modulraum</u>

Gegeben sei nun ein weiterer Morphismus von Funktoren $\Omega' : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Mor}(\cdot, Y)$.

(a) Konstruktion von $\omega : {}_\Gamma T_{g,n} \longrightarrow Y$: Fasse die universelle Teichmüller-Kurve $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ auf als Kurve mit Γ-Struktur. Dies liefert einen Morphismus $\phi = (\Omega'(T_{g,n}))(\mathcal{U}(T_{g,n})) : T_{g,n} \longrightarrow Y$.
<u>Behauptung:</u> ϕ faktorisiert über ${}_\Gamma T_{g,n}$.
Seien $u, \overline{u} \in T_{g,n}$ mit $u \overset{\Gamma}{\sim} \overline{u}$, etwa $\psi : * \longrightarrow T_{g,n}$ mit $\psi(*) = \{u\}$ und $\overline{\psi} : * \longrightarrow T_{g,n}$ mit $\overline{\psi}(*) = \{\overline{u}\}$ für den ein-punktigen Raum $*$, so haben wir folgende kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(T_{g,n}) \arrow[r] \arrow[d, "\times_{T_{g,n}}\{u\}"'] & \mathrm{Mor}(T_{g,n}, Y) \arrow[d, "\circ\psi"] \\ {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(*) \arrow[r] & \mathrm{Mor}(*, Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(T_{g,n}) \arrow[r] \arrow[d, "\times_{T_{g,n}}\{\overline{u}\}"'] & \mathrm{Mor}(T_{g,n}, Y) \arrow[d, "\circ\overline{\psi}"] \\ {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(*) \arrow[r] & \mathrm{Mor}(*, Y) \end{tikzcd}$$

Betrachten wir nun speziell diese Diagramme für $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$, so erhalten wir:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \phi \arrow[d, mapsto] \\ (\mathcal{U}(T_{g,n})_u \longrightarrow \{u\}) \arrow[r, mapsto] & \phi \circ \psi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \phi \arrow[d, mapsto] \\ (\mathcal{U}(T_{g,n})_{\overline{u}} \longrightarrow \{\overline{u}\}) \arrow[r, mapsto] & \phi \circ \overline{\psi} \end{tikzcd}$$

Da nun $(\mathcal{U}(T_{g,n})_u \longrightarrow \{u\}) \overset{\Gamma}{\sim} (\mathcal{U}(T_{g,n})_{\overline{u}} \longrightarrow \{\overline{u}\})$ sind, folgt $\phi \circ \psi = \phi \circ \overline{\psi}$. Da nun aber $\psi(*) = \{u\}$ und $\overline{\psi}(*) = \{\overline{u}\}$ gilt, gilt also $\phi(u) = \phi(\overline{u})$ und somit faktorisiert ϕ über ${}_\Gamma T_{g,n}$. Sei $\omega : {}_\Gamma T_{g,n} \longrightarrow Y$ dieser Morphismus.

(b) Für alle analytischen Räume S kommutiert

$$\begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) \arrow[r, "\Omega(S)"] \arrow[dr, "\Omega'(S)"'] & \mathrm{Mor}(S, {}_\Gamma T_{g,n}) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\omega)(S)"] \\ & \mathrm{Mor}(S, Y) \end{tikzcd}$$

Dies gilt, weil eine Kurve $C \longrightarrow S$ mit Γ-Struktur lokal eben eine Kurve $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ mit gewöhnlicher Teichmüller-Struktur ist, und somit ein Morphismus $S_l \longrightarrow T_{g,n}$ existiert. Dies liefert einen Morphismus $S_l \longrightarrow T_{g,n} \xrightarrow{\phi} Y$. Beim Verkleben faktorisiert dieser über ${}_\Gamma T_{g,n}$ und liefert einen Morphismus $S \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n} \xrightarrow{\omega} Y$. Dies ist einerseits nach Konstruktion jener Morphismus, der aus der Verkettung $\mathrm{Mor}(\omega)(S) \circ \Omega(S)$ hervorgeht, andererseits auch der Morphismus, welcher aus der Definition von $\Omega'(S)$ hervorgeht, denn wenn $S_l \longrightarrow Y$ der Morphismus ist, der von $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ unter $\Omega'(S)$ induziert wird, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} S_l \arrow[r] \arrow[dr] & T_{g,n} \arrow[d, "\phi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

<u>(3) $\Omega(*)$ ist bijektiv.</u>

Hier ist zu zeigen, dass

$${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(*) \xrightarrow{\Omega(*)} \mathrm{Mor}(*, {}_\Gamma T_{g,n}) = {}_\Gamma T_{g,n}$$

bijektiv ist. Dies ist aber klar, denn diese Bijektion existiert für den gewöhnlichen Teichmüller-Funktor mit dem gewöhnlichen Teichmüller-Raum und überträgt sich auf den Teichmüller-Funktor und -Raum mit Γ-Struktur, da die Γ-Operation mit dieser Bijektion verträglich ist.

Zum Schluss folgt noch der Beweis des Zusatzes:

($\Longleftarrow$): Falls Γ kein Element endlicher Ordnung enthält, so operiert kein Element von Γ auf einer Faser von $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ als Automorphismus. Damit ist $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) := \mathcal{U}(T_{g,n})/\Gamma \longrightarrow T_{g,n}/\Gamma = {}_\Gamma T_{g,n}$ die universelle Kurve und somit ${}_\Gamma T_{g,n}$ feiner Modulraum. Genauer ist nachzurechnen, dass $\Omega(S)$ für jedes S bijektiv ist.

Zu einem Morphismus in $\mathrm{Mor}(S, {}_\Gamma T_{g,n})$ ist $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) \times_{{}_\Gamma T_{g,n}} S$ ein Urbild von diesem Morphismus. Damit ist $\Omega(S)$ surjektiv. Für die Injektivität genügt es zu zeigen, dass jede Kurve $C \longrightarrow S$ mit Γ-Struktur isomorph ist zu $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) \times_{{}_\Gamma T_{g,n}} S$. Da jedoch $T_{g,n}$ feiner Modulraum ist, ist $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ zu $S_l \times_{T_{g,n}} \mathcal{U}(T_{g,n})$ isomorph. Da lokal $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ zu $\mathcal{U}({}_\Gamma T_{g,n}) \longrightarrow {}_\Gamma T_{g,n}$ isomorph ist, folgt die Behauptung.

($\Longrightarrow$): [Nag] Abschnitt 2.8.2 auf Seite 161 zusammen mit Abschnitt 2.3.5 besagt, dass ein Element endlicher Ordnung in Γ einen Automorphismus auf einer Faser von $\mathcal{U}(T_{g,n}) \longrightarrow T_{g,n}$ induziert. Somit ist der Quotient $\mathcal{U}(T_{g,n})/\Gamma \longrightarrow T_{g,n}/\Gamma$ keine universelle Kurve und somit ${}_\Gamma T_{g,n}$ nicht fein. □

3.2.4 Die Morphismen ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_\Delta\mathcal{T}_{g,m}$

Seien nun $0 \leq m \leq n$, N, M, $C_{g,n}$ und $C_{g,m}$ wie in Abschnitt 2.5. Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$, $\Delta \leq \Gamma_{g,m}$ und $t = t_{n,m} : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$ die kanonische Abbildung. Zu einer n-fach punktierten, Γ-markierten Kurve $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N;\ (S_l, \alpha_l)_{l\in L})$ haben wir auf kanonische Weise eine m-fach punktierte Kurve, die ebenfalls mit den α_l markiert ist. Γ-äquivalente Markierungen liefern auf diese Art offenbar genau dann Δ-äquivalente Markierungen, wenn $t(\Gamma) \leq \Delta$ gilt. Damit haben wir folgende

Proposition 3.17 Ein Morphismus von Funktoren

$$ {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_\Delta\mathcal{T}_{g,m} $$

mit

$$ \begin{array}{ccc} {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) & \longrightarrow & {}_\Delta\mathcal{T}_{g,m}(S) \\ \big(C \longrightarrow S; \sigma_1, \ldots, \sigma_n; (S_l, \alpha_l)_{l\in L}\big)_\Gamma & \mapsto & \big(C \longrightarrow S; \sigma_1, \ldots, \sigma_m; (S_l, \alpha_l)_{l\in L}\big)_\Delta . \end{array} $$

existiert genau dann, wenn $t(\Gamma) \leq \Delta$ gilt. In diesem Fall existiert auch ein Morphismus grober Modulräume.

3.2.5 Die groben Modulräume ${}_\Gamma T_{g,n}$ und ${}_G M_{g,n}$ im Vergleich

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie die Kurven mit Γ-Struktur verwandt sind mit Kurven mit Teichmüller-Niveaustrukturen zum Niveau G im Sinne von Deligne und Mumford, vgl. [DM], Seite 108, ausgearbeitet in [PJ], Seiten 489-493 und [Pik], Seiten 32-33. An dieser Stelle sei an die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Niveau-G-Strukturen erinnert. Sei dazu $(C \longrightarrow S;\ \sigma_i : i \in N)$ eine n-fach punktierte Kurve von Geschlecht $g \geq 2$ und G eine endliche Gruppe.

Proposition 3.18 Zu jedem (weiteren) Schnitt $\sigma : S \longrightarrow C$ existiert eine lokalkonstante Garbe von Gruppen $\pi_1((C;\sigma_i : i \in N)/S, \sigma)$, so dass für alle $s \in S$

$$\pi_1\left((C;\sigma_i : i \in N)/S,\sigma\right)_s \cong \pi_1\left(C_s - \{\sigma_i(s) : i \in N\}, \sigma(s)\right)$$

gilt. Des weiteren existiert eine Garbe $Hom_S^{ext}(\pi_1(C;\sigma_i : i \in N)/S, G)$ unabhängig von σ, so dass für jedes $s \in S$ und jedes $x \in C_s$

$$\begin{aligned} &Hom_S^{ext}(\pi_1(C;\sigma_i : i \in N)/S, G)_s \\ &\quad\cong \operatorname{Hom}\left(\left(\pi_1\left(C_s - \{\sigma_i(s) : i \in N\}\right), x\right), G\right) / \operatorname{Inn}\left(\pi_1\left(C_s - \{\sigma_1(s) : i \in N\}, x\right)\right) \end{aligned}$$

ist.

Definition 3.19 Sei G eine endliche Gruppe. Ein surjektiver äußerer Homomorphismus $\zeta \in \Gamma(S, Hom_S^{ext}(\pi_1(C;\sigma_1,\ldots,\sigma_n)/S, G))$ heißt *Teichmüller-Struktur von Niveau* G. Somit ist ζ lokal gegeben durch einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1((C;\sigma_i : i \in N)/S, s) \longrightarrow G$. Sei ${}_G\mathcal{M}_{g,n}$ der Funktor, der jedem analytischen Raum S die Menge von Isomorphieklassen n-punktierter Kurven mit Teichmüller-Struktur von Niveau G zuordnet und ${}_GM_{g,n}$ der zugehörige grobe Modulraum.

Bemerkung 3.20 Genau dann ist ${}_GM_{g,n}$ nicht leer, wenn G isomorph zu einem Quotienten von $\pi_{g,n}$ ist.

Satz 3.21 Sei $H \trianglelefteq \pi_{g,n}$ ko-endlich, $G := \pi_{g,n}/H$, $q : \operatorname{Aut}(\pi_{g,n}) \longrightarrow \operatorname{Out}(\pi_{g,n})$ der kanonische Morphismus. Wie üblich fassen wir $\Gamma_{g,n}$ als Untergruppe von $\operatorname{Out}(\pi_{g,n})$ auf. Setze

$$\Gamma_0 := \left\{ f \in q^{-1}\left(\Gamma_{g,n}\right) : \exists g \in \pi_{g,n}\, \forall v \in \pi_{g,n} : \left(\operatorname{inn}(g)(v)\right)^{-1} \cdot f(v) \in H \right\},$$

und $\Gamma := q(\Gamma_0)$. Wegen $\operatorname{Inn}(\pi_{g,n}) \trianglelefteq \Gamma_0$ gilt dann $\Gamma_0 = q^{-1}(\Gamma)$. In dieser Situation existiert ein Morphismus von Funktoren

$$\Psi_H : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_G\mathcal{M}_{g,n}$$

welcher ${}_\Gamma T_{g,n}$ isomorph auf eine Zusammenhangskomponente von ${}_GM_{g,n}$ abbildet.
<u>Zusatz:</u> (1) Zu $H, \overline{H} \trianglelefteq \pi_{g,n}$ seien Γ und $\overline{\Gamma}$ wie oben definiert. So gilt, wenn $\Psi_{\overline{H}}$ den entsprechenden Morphismus zwischen den zugehörigen groben Modulräumen bezeichnet, $\Psi_H({}_\Gamma T_{g,n}) = \Psi_{\overline{H}}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})$ genau dann, wenn es ein $h \in q^{-1}(\Gamma_{g,n}) \leq \operatorname{Aut}(\pi_{g,n})$ mit $h(H) = \overline{H}$ gibt.
(2) Ist H sogar charakteristisch, so gilt einfacher $\Gamma = \operatorname{Kern}(\Gamma_{g,n} \longrightarrow \operatorname{Out}(\pi_{g,n}/H))$.

Beweis: Sei $(\pi : C \longrightarrow S; \sigma_1,\ldots,\sigma_n;\ (S_l,\alpha_l)_{l\in L})$ gegeben mit $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l}$. Zu einem beliebigen lokalen Schnitt $s_l : S_l \longrightarrow C_{S_l}$ und $s \in S_l$ setzen wir noch $\pi(C_s^\bullet) := \pi_1(C_s - \{\sigma_1(s),\ldots,\sigma_n(s)\}, s_l(s))$. Dann haben wir, wenn wir $(S_l)_{l\in L}$ hinreichend fein wählen, einen Epimorphismus

$$f_l : \pi_1\left((C_{S_l};\sigma_1,\ldots,\sigma_n)/S_l, s_l\right)(S_l) = \pi(C_s^\bullet)$$
$$\xrightarrow{\pi_1(\alpha_l)^{-1}} \pi_1\left(C_{g,n}, x\right) = \pi_{g,n}^x \xrightarrow{u} \pi_{g,n} \longrightarrow G$$

mit $x = \alpha_l^{-1}(s_l(s))$ und $u : \pi_{g,n}^x \longrightarrow \pi_{g,n}$ eindeutig bis auf einen inneren Automorphismus. Des weiteren ist f_l unabhängig vom gewählten Schnitt s_l, so dass f_l eine Niveau-G-Struktur induziert.

Für die Wohldefiniertheit und Injektivität ist noch zu zeigen, dass $(\alpha_l) \overset{\Gamma}{\sim} (\overline{\alpha}_l)$ gilt, genau dann wenn die (f_l) und $(\overline{f}_l)$ sich nur um einen inneren Automorphismus von $\pi(C_s^\bullet)$ unterscheiden. Der Einfachheit halber identifizieren wir $\pi_{g,n}^x$ und $\pi_{g,n}$ und fassen f_l ($\overline{f}_l$ analog) nun auf als folgenden Homomorphismus:

$$\pi(C_s^\bullet) \xrightarrow{\pi_1(\alpha_l)^{-1}} \pi_{g,n} \longrightarrow \pi_{g,n}/H$$

Seien nun also (α_l) und $(\overline{\alpha}_l)$ gegeben, so gilt:

$$\begin{array}{ll}
 & (f_l) \text{ und } (\overline{f}_l) \text{ unterscheiden sich nur um einen inneren Automorphismus.} \\
\Longleftrightarrow & \exists g \in \pi(C_s^\bullet)\, \forall w \in \pi(C_s^\bullet) : f(gwg^{-1}) = \overline{f}(w) \\
\Longleftrightarrow & \exists g \in \pi(C_s^\bullet)\, \forall w \in \pi(C_s^\bullet) : [(\pi_1(\alpha_l)^{-1})(gwg^{-1})]H = (\pi_1(\overline{\alpha_l})^{-1}(w))H \\
\Longleftrightarrow & \exists h \in \pi_{g,n}\, \forall w \in \pi(C_s^\bullet) : h \cdot (\pi_1(\alpha_l)^{-1}(w)) \cdot h^{-1}H = (\pi_1(\overline{\alpha}_l)^{-1}(w))H \\
 & \qquad (\text{wähle } h = \pi_1(\alpha_l)^{-1}(g)) \\
\Longleftrightarrow & \exists h \in \pi_{g,n}\, \forall v \in \pi_{g,n} : hvh^{-1}H = (\pi_1(\overline{\alpha}_l)^{-1} \circ \pi_1(\alpha_l))(v)H \\
 & \qquad (\text{setze } v = (\pi_1(\alpha_l)^{-1}(w))) \\
\Longleftrightarrow & \exists h \in \pi_{g,n}\, \forall v \in \pi_{g,n} : hvh^{-1}H = \pi_1(\beta_l(s))(v)H \\
 & \qquad (\beta_l(s) = \overline{\alpha}_l^{-1} \circ \alpha_l, \text{ vgl. Definition von } \Gamma\text{-Äquivalenz}) \\
\Longleftrightarrow & \exists h \in \pi_{g,n}\, \forall v \in \pi_{g,n} : hvh^{-1}[\pi_1(\beta_l(s))(v)]^{-1} \in H \\
\Longleftrightarrow & \beta_l(s) \in \Gamma_0 \\
\Longleftrightarrow & \text{Die Isotopieklasse von } \beta_l(s) \in \Gamma_0 \text{ liegt in } \Gamma \\
\Longleftrightarrow & (\alpha_l) \overset{\Gamma}{\sim} (\overline{\alpha}_l)
\end{array}$$

Für die Surjektivität auf eine Komponente, vgl. [DM], Seite 108 und für den Beweis des ersten Zusatzes ebenfalls [DM], Theorem 5.13 auf Seite 107.

Um den zweiten Zusatz zu beweisen, setze nun $K := \mathrm{Kern}(\Gamma_{g,n} \xrightarrow{h} \mathrm{Out}(\pi_{g,n}/H))$. Sei $K_0 := q^{-1}(K) \leq \Gamma_{g,n+1} \leq \mathrm{Aut}(\pi_{g,n})$. Es genügt $K_0 = \Gamma_0$ zu zeigen. Dabei kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{g,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}) \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}/H) \arrow[d, "q"] \\
\Gamma_{g,n} \arrow[r] & \mathrm{Out}(\pi_{g,n}) \arrow[r] & \mathrm{Out}(\pi_{g,n}/H)
\end{tikzcd}$$

Es gilt: $\gamma \in K_0 \Leftrightarrow h(q(\gamma)) = 1_{\mathrm{Out}(\pi_{g,n}/H)} \Leftrightarrow \gamma \in \mathrm{Inn}(\pi_{g,n}/H) \Leftrightarrow \exists g \in \pi_{g,n} \forall w \in \pi_{g,n} : gwg^{-1}H = \gamma(w)H \Leftrightarrow \gamma \in \Gamma_0$. $\square$

4 Die Morphismen $\Phi_P : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'}$

4.1 Die Konstruktion der Morphismen

Sei die Situation wie in Abschnitt 2.1, d.h. insbesondere sei C_g eine geschlossene, orientierte topologische Fläche von Geschlecht $g \geq 2$; für $n \geq 0$ sei $N := \{1, \ldots, n\}$ und für $i \in N$ seien $x_i \in C_g$ paarweise verschiedene, fest gewählte Punkte. Sei $C_{g,n} := C_g - \{x_i : i \in N\}$ und $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ eine fest gewählte normale unverzweigte Überlagerung. Sei $C_{g'}$ die eindeutige Kompaktifizierung von $C_{g',n'}$, so dass $C_{g'}$ eine geschlossene topologische Fläche ist. Es bezeichne g' das Geschlecht von $C_{g'}$ und n' die Anzahl von Punkten in $C_{g'} - C_{g',n'}$. Ebenfalls mit P sei die Fortsetzung als verzweigte Überlagerung $P : C_g \longrightarrow C_{g'}$ bezeichnet. Seien die Punkte x'_{ij} über x_i, so nummeriert, dass $\{x'_{ij} : (i,j) \in N'\} = C_{g'} - C_{g',n'}$ für geignetes N' mit $|N'| = n'$ gilt.

4.1.1 Der Hauptsatz

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis dieser Arbeit. Zu obiger Überlagerung P liefert er zu jedem mit P verträglichen $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ einen Morphismus grober Modulräume. Dieser Morphismus ordnet jeder Isomorphieklasse einer Kurve C die Isomorphieklasse einer überlagerten Kurve C' so zu, dass $C' \longrightarrow C$ topologisch äquivalent zu P ist. Die wesentliche Voraussetzung um diesen Satz zu beweisen ist die Verträglichkeit von Γ mit P. Insbesondere lässt sich diese Voraussetzung auch nicht abschwächen, wie wir leicht am Beweis dieses Satzes sehen können. Da die Motivation und das ursprüngliche Ziel für diese Arbeit die Konstruktion von Morphismen $M_g \longrightarrow M_{g'}$ war, sollte noch angemerkt werden, dass derartige Morphismen nur dann existieren, wenn P verträglich mit $\Gamma_{g,n}$ ist. Diese Bedingung ist aber nur geringfügig schwächer als die Forderung, dass $\pi_{g',n'}$ charakteristisch in $\pi_{g,n}$ ist, also dass $\pi_{g',n'}$ invariant unter allen Automorphismen von $\pi_{g,n}$ ist, denn $\Gamma_{g,n}$ hat in $\mathrm{Out}(\pi_{g,n})$ stets endlichen Index, im Falle $n = 0$ gar den Index 2.

Satz 4.1 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ verträglich mit $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ und $\Gamma' \leq \Gamma_{g',n'}$ die von Γ induzierte Untergruppe. Dann existiert ein Morphismus von Funktoren

$$\Phi_P : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'},$$

so dass für jeden analytischen Raum S für den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \Phi_P(S) : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) & \longrightarrow & {}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'}(S), \\ \left(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l \in L}\right) & \mapsto & \left(C' \longrightarrow S; \sigma'_{ij} : (i,j) \in N'; (S_l, \alpha'_l)_{l \in L}\right) \end{array}$$

gilt:

(a) σ'_{ij} ist ein Schnitt, der zu x'_{ij} gehört, d.h. es gilt $\sigma'_{ij}(s) = \alpha'_l(x'_{ij}, s)$ für alle $l \in L$.

(b) Für alle $s \in S$ gilt

$$\mathrm{Gal}\left(C'^{\bullet}_s / C^{\bullet}_s\right) \cong \mathrm{Gal}\left(C_{g',n'} / C_{g,n}\right),$$

wobei $C'^{\bullet}_s$ bzw. $C^{\bullet}_s$ stets die entsprechende punktierte Kurve bedeutet.

Des weiteren induziert Φ_P einen entsprechenden Morphismus grober Modulräume

$$\Phi_P : {}_\Gamma T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'} T_{g',n'}.$$

Beweis:

1. Schritt: Konstruktion von $\Phi_P(S)$ für glatte S:

Zunächst wollen wir $\Phi_P(S)$ konstruieren für den Fall, wenn S glatt ist. Dann ist auch C glatt für sämtliche Kurven $C \longrightarrow S$ in ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S)$.

(a) Lokale Konstruktion der Zuordnung $\Phi_P(S)$
Sei $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l \in L})$ Vertreter eines Elements in ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S)$, d.h. es gilt insbesondere $\alpha_l : C_g \times S_l \xrightarrow{\sim} C_{S_l}$, $\alpha_l : C_{g,n} \times S_l \xrightarrow{\sim} C^{\bullet}_{S_l}$ und $\alpha_l^{-1} \circ \sigma_i : S_l \longrightarrow S_l \times C_g$ ist (id, x_i). Da $C_{g'} \longrightarrow C_g$ eine verzweigte Überlagerung ist, ist $C_{g'} \times S \longrightarrow C_g \times S$ ebenfalls eine. Weil nun $C_g \times S_l$ mittels α_l zu C_{S_l} homöomorph ist, existiert ebenfalls eine verzweigte Überlagerung $C'_{S_l} \longrightarrow C_{S_l}$ und ein Homöomorphismus $\alpha'_l : C_{g'} \times S_l \longrightarrow C'_{S_l}$, so dass

$$\begin{tikzcd} C_{g'} \times S_l \arrow[r, "\alpha'_l"] \arrow[d] & C'_{S_l} \arrow[d] \\ C_g \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"'] & C_{S_l} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $C'^{\bullet}_{S_l} := \alpha'_l(C_{g',n'} \times S_l)$. Dann ist $C'^{\bullet}_{S_l} \longrightarrow C^{\bullet}_{S_l}$ eine unverzweigte Überlagerung und

$$\begin{tikzcd} C_{g',n'} \times S_l \arrow[r, "\alpha'_l"] \arrow[d] & C'^{\bullet}_{S_l} \arrow[d] \\ C_{g,n} \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"'] & C^{\bullet}_{S_l} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Da C_{S_l} glatt ist, ist nach Satz 2.16 C'_{S_l} ein normaler analytischer Raum und $C'_{S_l} \longrightarrow C_{S_l}$ eine verzweigte analytische Überlagerung. Insbesondere ist $C'_{S_l} \longrightarrow C_{S_l}$ offen, vgl. Bemerkung 2.15, und somit auch $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$. Da S_l eine Mannigfaltigkeit ist, folgt, dass $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$ flach, vgl. [BS] Theorem 2.13, Seite 181, und submersiv, vgl. [Fi], Abschnitt 3.1, Seite 159, insgesamt also glatt ist. Dies liefert insgesamt zumindest lokal das gesuchte Bild von $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l \in L})$.

(b) Wohldefiniertheit: Unabhängigkeit der Vertreterwahl einer Γ-Struktur:
Sei $\alpha_l \overset{\Gamma}{\sim} \overline{\alpha_l}$ und C'_{S_l} bzw. $\overline{C}'_{S_l}$ die mittels α_l bzw. $\overline{\alpha_l}$ konstruierte verzweigte Überlagerung von C_{S_l}. Gesucht ist nun ein Isomorphismus $\psi'_l : C'_{S_l} \longrightarrow \overline{C}'_{S_l}$, so dass

$$\begin{tikzcd}
C'_{S_l} \arrow[r, "\psi'_l"] \arrow[d] & \overline{C}'_{S_l} \arrow[d] \\
C_{S_l} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & C_{S_l}
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Setzen wir dazu $\beta_l := \overline{\alpha}_l^{\,-1} \circ \alpha_l$ und betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & C_{g',n'} \times S_l \arrow[rr, dashed, "\beta'_l"] \arrow[dl, "\alpha'_l"'] \arrow[dd] & & C_{g',n'} \times S_l \arrow[dl, "\overline{\alpha}'_l"'] \arrow[dd] \\
C'^{\bullet}_{S_l} \arrow[rr, dashed, "\psi'_l"] \arrow[dd] & & \overline{C}'^{\bullet}_{S_l} \arrow[dd] & \\
 & C_{g,n} \times S_l \arrow[rr, "\beta_l"] \arrow[dl, "\alpha_l"'] & & C_{g,n} \times S_l \arrow[dl, "\overline{\alpha}_l"] \\
C^{\bullet}_{S_l} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & C^{\bullet}_{S_l} &
\end{tikzcd}$$

Zunächst ist es das Ziel die Existenz von β'_l und ψ'_l zu zeigen, so dass das ganze Diagramm kommutiert. Da nun

$$\begin{tikzcd}
\beta_l : C_{g,n} \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"] \arrow[dr] & C^{\bullet}_{S_l} \arrow[r, "(\overline{\alpha}_l)^{-1}"] \arrow[d] & C_{g,n} \times S_l \arrow[dl] \\
 & S_l &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und da für $s \in S_l$ Homöomorphismen $\beta_l(s) : C_{g,n} \longrightarrow C_{g,n}$ existieren, so dass β_l die Form $\beta_l(x,s) = ((\beta_l(s))(x), s)$ für $x \in C_{g,n}$ und $s \in S_l$ hat, kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\beta_l) : \pi_1(C_{g,n}) \times \pi_1(S_l) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_1(C_{g,n}) \times \pi_1(S_l) \arrow[dl] \\
& \pi_1(S_l) &
\end{tikzcd}$$

und es gilt $\pi_1(\beta_l) = (\pi_1(\beta_l(s)), \mathrm{id}_{\pi_1(S_l)})$. Da nun $P : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ mit Γ verträglich ist, gilt (wenn man $\pi_{g',n'} = \pi_1(C_{g',n'})$ als Untergruppe von $\pi_{g,n} = \pi_1(C_{g,n})$ auffasst):

$$\pi_1\left(\beta_l\right)\left(\pi_1\left(C_{g',n'}\right) \times \pi_1\left(S_l\right)\right) = \pi_1\left(C_{g',n'}\right) \times \pi_1\left(S_l\right).$$

Damit existiert nach der topologischen Überlagerungstheorie ein Homöomorphismus β'_l, der eindeutig bis auf ein Element in $\mathrm{Deck}(C_{g',n'}/C_{g,n})$ und Hochhebung von β_l ist. Mindestens einer von diesen möglichen β'_l lässt sich fortsetzen zu einem Homöomorphismus $\beta'_l : C_{g'} \times S_l \longrightarrow C_{g'} \times S_l$ mit $\beta'_l(x'_{ij}, s) = (x'_{ij}, s)$. Damit existiert auch ein Homöomorphismus $\psi'_l : C'_{S_l} \longrightarrow \overline{C}'_{S_l}$. Dieser Homöomorphismus schränkt sich auf einen Homöomorphismus $\psi'_l : C'^{\bullet}_{S_l} \longrightarrow \overline{C}'^{\bullet}_{S_l}$ ein, der zugleich biholomorph ist, denn $C'^{\bullet}_{S_l}$ und $\overline{C}'^{\bullet}_{S_l}$ tragen die induzierte holomorphe Struktur. Dann kommutiert auch das große Diagramm und wegen Satz 2.17 ist $\psi'_l : C'_{S_l} \longrightarrow \overline{C}'_{S_l}$ biholomorph.

(c) Verkleben der lokalen Konstruktion:
Analog zum vorigen Teilbeweis: Unter Verwendung der Tatsache, dass die Isotopieklasse von $\alpha_{\overline{l}}^{-1} \circ \alpha_l$ in Γ liegt, folgt, dass $C'_{S_l}|_{S_l \cap S_{\overline{l}}}$ biholomorph zu $C'_{S_{\overline{l}}}|_{S_l \cap S_{\overline{l}}}$ ist. Die restlichen Verklebungsbedingungen folgen leicht.

(d) Die α'_l bilden eine Γ'-Struktur:
Wir haben folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C_{g',n'} \times (S_l \cap S_{\overline{l}}) \arrow[r, "\alpha'_l"] \arrow[d] & C'^{\bullet}_{S_l \cap S_{\overline{l}}} \arrow[d] & C_{g',n'} \times (S_l \cap S_{\overline{l}}) \arrow[l, "\alpha'_{\overline{l}}"'] \arrow[d] \\
C_{g,n} \times (S_l \cap S_{\overline{l}}) \arrow[r, "\alpha_l"'] & C^{\bullet}_{S_l \cap S_{\overline{l}}} & C_{g,n} \times (S_l \cap S_{\overline{l}}) \arrow[l, "\alpha_{\overline{l}}"]
\end{tikzcd}$$

Nun liegt für jedes $s \in S_l \cap S_{\overline{l}}$ die Isotopieklasse von $\beta_{l\overline{l}}(s) = (\alpha_{\overline{l}}^{-1} \circ \alpha_l)|_{C_g \times \{s\}}$ in Γ. Da $\beta'_{l\overline{l}} := \alpha'^{-1}_{\overline{l}} \circ \alpha'_l$ nun aber auch Hochhebung von $\beta_{l\overline{l}}$ ist, folgt, dass die Isotopieklasse von $\beta'_{l\overline{l}}(s)$ in Γ' für alle $s \in S_l \cap S_{\overline{l}}$ liegt, vgl. dazu Abschnitt 2.3.

(e) Konstruktion der Schnitte σ'_{ij}:
Lokal definieren wir zu jedem x'_{ij} einen Schnitt $\sigma'_{ij}|_{S_l}(s) := \alpha'_l(x'_{ij}, s)$ für alle $s \in S_l$. Diese Schnitte verkleben, denn für $s \in S_l \cap S_{\overline{l}}$ gilt

$$\sigma'_{ij}|_{S_l}(s) = \alpha'_l(x'_{ij}, s) = (\alpha'_{\overline{l}} \circ \alpha'^{-1}_{\overline{l}} \circ \alpha'_l)(x'_{ij}, s) = \alpha'_{\overline{l}}(x'_{ij}, s) = \sigma'_{ij}|_{S_{\overline{l}}}(s).$$

Diese Gleichheit gilt, da die $\alpha_l'^{-1} \circ \alpha_l'$ nach Konstruktion die x_{ij}' fest lassen. Da $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$ submersiv ist, sind die Schnitte automatisch holomorph, vgl. [Nag], Seite 89.

2. Schritt: Verträglichkeit mit Basiswechsel für glattes S:

Zu jedem Morphismus analytischer Räume $T \longrightarrow S$ liefert der Basiswechsel mit diesem Morphismus eine Abbildung ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(T)$ und eine Abbildung ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g',n'}(S) \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{T}_{g',n'}(T)$. Nun ist zu zeigen, dass

$$\begin{tikzcd}
{}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S) \arrow[r, "\Phi_P(S)"] \arrow[d] & {}_\Gamma\mathcal{T}_{g',n'}(S) \arrow[d] \\
{}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(T) \arrow[r, "\Phi_P(T)"'] & {}_\Gamma\mathcal{T}_{g',n'}(T)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei dazu $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l \in L})$ gegeben. Ohne Einschränkung sei $|L| = 1$, $\alpha = \alpha_l$ und $S = S_l$. Dies genügt, da wir verkleben können. Das Bild von $(C \longrightarrow S)$ unter $\Phi_P(S)$ ist $(C' \longrightarrow S; \sigma'_{ij} : (i,j) \in N'; (S, \alpha'))$. Dann liefert der Basiswechsel $(C' \times_S T \longrightarrow T, \overline{\sigma'_{ij}} : (i,j) \in N'; (S, \overline{\alpha'}))$, vgl. Lemma 3.7. Dabei kommutieren folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
C_{g'} \times S \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
C_g \times S \arrow[r, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_{g'} \times T = C_{g'} \times S \times_S T \arrow[r, "\overline{\alpha'}"] \arrow[d] & C' \times_S T \arrow[d] \\
C_g \times T = C_g \times S \times_S T \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & C \times_S T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{x'_{ij}\} \times S \arrow[r, "\sigma'_{ij}"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
\{x_i\} \times S \arrow[r, "\sigma_i"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{x'_{ij}\} \times T \arrow[r, "\overline{\sigma'_{ij}}"] \arrow[d] & C' \times_S T \arrow[d] \\
\{x_i\} \times T \arrow[r, "\overline{\sigma_i}"'] & C \times_S T
\end{tikzcd}$$

Führen wir zuerst den Basiswechsel durch, so erhalten wir $(C \times_S T \longrightarrow T;\ \overline{\sigma_i} : i \in N; (T, \overline{\alpha}))$. Anschießendes Anwenden von $\Phi_P(S)$ liefert $((C \times_S T)' \longrightarrow T; (\overline{\sigma})'_{ij} : (i,j) \in N'; (T, (\overline{\alpha})')$. Dabei kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
C_{g'} \times S \times_S T = C_{g'} \times T \arrow[r, "(\overline{\alpha})'"] \arrow[d] & (C \times_S T)' \arrow[d] \\
C_g \times S \times_S T = C_g \times T \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & C \times_S T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{x'_{ij}\} \times T \arrow[r, "(\overline{\sigma}_{ij})'"] \arrow[d] & (C \times_S T)' \arrow[d] \\
\{x_i\} \times T \arrow[r, "\overline{\sigma_i}"'] & C \times_S T
\end{tikzcd}$$

Setzen wir nun die Diagramme zusammen, so haben wir

$$\begin{array}{ccccc}
(C' \times_S T)^\bullet & \xrightarrow{(\overline{\alpha'})^{-1}} & C_{g',n'} \times T & \xrightarrow{(\overline{\alpha})'} & (C \times_S T)'^\bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(C \times_S T)^\bullet & \xrightarrow[(\overline{\alpha})^{-1}]{} & C_{g,n} \times T & \xrightarrow[\overline{\alpha}]{} & (C \times_S T)^\bullet
\end{array}$$

und damit, dass $(C' \times_S T)^\bullet$ und $(C \times_S T)'^\bullet$ biholomorph sind, weil dort die Projektionen unverzweigte Überlagerungen sind und $(C' \times_S T)^\bullet$ und $(C \times_S T)'^\bullet$ jeweils die dadurch induzierte komplexe Struktur tragen. Des weiteren ist $(\overline{\alpha})' \circ (\overline{\alpha'})^{-1}$ als Verkettung von Homöomorphismen ebenfalls ein Homöomorphismus, also nach Satz 2.17 sogar biholomorph. Identifizieren wir nun $(C' \times_S T)$ und $(C \times_S T)'$, so sind aufgrund der anderen Diagramme die Schnitte $\overline{\sigma'_{ij}}$ und $(\overline{\sigma}_{ij})'$ offenbar gleich. Als letztes folgt nun trivialerweise $\overline{\alpha'} \overset{\Gamma'}{\sim} (\overline{\alpha})'$.

3. Schritt: Konstruktion von $\Phi_P(S)$ für allgemeines S:

Bevor wir diese Konstruktion durchführen können, benötigen wir noch einige allgemeine Überlegungen. Falls keine andere Referenz angegeben ist, sind sämtliche hier nicht bewiesenen Behauptungen in [Nag] Abschnitt 2.8 zu finden. Es existiert ein $\widehat{\Gamma} \leq \Gamma_{g,n}$ ko-endlich, so dass ${}_{\widehat{\Gamma}}T_{g,n}$ eine Mannigfaltigkeit und ein feiner Modulraum für Kurven mit $\widehat{\Gamma}$-Struktur ist, vgl. etwa [Pik] Theorem 3.3.1. $\widehat{\Gamma}$ hat nach Satz 3.15 keine Elemente endlicher Ordnung und operiert daher fixpunktfrei auf $T_{g,n}$. Dann ist $T_{g,n} \longrightarrow {}_{\widehat{\Gamma}}T_{g,n}$ eine unverzweigte Überlagerung. Da $\Gamma_{g,n}$ endlich erzeugt ist, ist $\widetilde{\Gamma} := \cap_{\gamma \in \Gamma_{g,n}} \gamma \widehat{\Gamma} \gamma^{-1}$ ko-endlich und normal in $\Gamma_{g,n}$, vgl. [LS] Theorem 4.7 in Kapitel IV. Nun ist $\overline{\Gamma} := \widetilde{\Gamma} \cap \Gamma$ ebenfalls ko-endlich und normal in Γ. Wegen $\overline{\Gamma} \leq \widehat{\Gamma}$ ist ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}$ ebenfalls glatt und ein feiner Modulraum. Da $\overline{\Gamma}$ Normalteiler von Γ ist, induziert die Operation von $\Gamma_{g,n}$ auf $T_{g,n}$ eine Operation der endlichen Gruppe $\Gamma/\overline{\Gamma}$ auf ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}$. Der Quotient nach dieser Gruppe ist ${}_\Gamma T_{g,n}$. In dieser Situation können wir nun den Funktor Φ_P konstruieren.

Sei dazu S ein beliebiger analytischer Raum und $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l \in L})$ Vertreter einer Isomorphieklasse in ${}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}(S)$. Für jedes $l \in L$ ist dann $(C_{S_l} \longrightarrow S_l; \sigma_i|_{S_l} : i \in N; (S_l, \alpha_l))$ ebenfalls eine Kurve und wir können nun $\alpha_l : C_g \times S_l \xrightarrow{\sim} C_{S_l}$ als $\overline{\Gamma}$-Struktur auffassen. Damit existiert ein Morphismus $f_{\alpha_l} : S_l \longrightarrow {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}$ und es gilt $C_{S_l} \cong \mathcal{U}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}) \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}} S_l$. Da nun ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}$ glatt ist, existiert nach dem ersten Schritt dieses Beweises ein Bild unter $\Phi_P({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})$ von $\mathcal{U}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})$, etwa $\mathcal{U}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})'$. Sei nun $C'_{S_l} := \mathcal{U}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})' \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}} S_l$. Dann ist $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$ auch eine glatte Kurve, da sie aus einem Basiswechsel hervorgeht. Durch Basiswechsel erhalten wir ebenfalls eine Γ'-Struktur für $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$, also ein $\alpha'_l : C_{g'} \times S_l \longrightarrow C'_{S_l}$ und die evtl. benötigten Schnitte, vgl. Lemma 3.7.

Nun müssen wir noch einsehen, dass ein anderer Vertreter $\overline{\alpha_l}$ der Γ-Struktur eine Kurve $\overline{C'_{S_l}} \longrightarrow S_l$ liefert, die isomorph zu $C'_{S_l} \longrightarrow S_l$ ist. Sei $f_{\alpha_l} : S_l \longrightarrow {}_{\overline{\Gamma}}T^{(1)}_{g,n}$

bzw. $f_{\overline{\alpha_l}} : S_l \longrightarrow {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}$ der von $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ mit α_l bzw. der von $C_{S_l} \longrightarrow S_l$ mit $\overline{\alpha_l}$ induzierte Morphismus. Dabei sind die Räume ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}$ und ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}$ dasselbe wie ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}$; die Exponenten (1) und (2) deuten lediglich an, welche Morphismen in diese Räume gehen. $S_l \xrightarrow{f_{\alpha_l}} {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)} \longrightarrow {}_{\Gamma}T_{g,n}$ und $S_l \xrightarrow{f_{\overline{\alpha_l}}} {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)} \longrightarrow {}_{\Gamma}T_{g,n}$ sind nun dieselbe Abbildung, so dass ein $\gamma \in \Gamma/\overline{\Gamma}$ mit $\gamma \circ f_{\alpha_l} = f_{\overline{\alpha_l}}$ existiert, falls die Überdeckung $(S_l)_{l \in L}$ nur fein genug gewählt wird. Da $\Gamma_{g,n}$ nicht nur auf $T_{g,n}$ operiert, sondern auch auf $\mathcal{U}(T_{g,n})$, operiert auch $\Gamma/\overline{\Gamma}$ auf $\mathcal{U}({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n})$. In obiger Schreibweise haben wir damit folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}\right) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}\right) \arrow[d] \\
{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)} \arrow[r, "\gamma"'] & {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}
\end{tikzcd}$$

Da ${}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}$ ein feiner Modulraum ist, gilt

$$\mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}\right) \cong \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}\right) \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}} {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}.$$

Da wir schon gezeigt haben, dass die Konstruktion von Φ_P mit Basiswechsel verträglich ist, wenn alle auftretenden Räume glatt sind, gilt offenbar

$$\mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}\right)' \cong \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}\right)' \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}} {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}.$$

Insgesamt haben wir somit

$$\begin{aligned}
C'_{S_l} &= \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}\right)' \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}} S_l \\
&\cong \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}\right)' \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}} {}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)} \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(1)}} S_l \\
&\cong \mathcal{U}\left({}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}\right)' \times_{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}^{(2)}} S_l \\
&= \overline{C'_{S_l}}.
\end{aligned}$$

Der Beweis, dass die so konstruierten $(C'_{S_l} \longrightarrow S_l)_{l \in L}$ zu einer Kurve $C' \longrightarrow S$ verkleben, geht analog. Auch folgt die Verträglichkeit dieser Konstruktion mit weiterem Basiswechsel ähnlich. Zuletzt ist noch zu zeigen, dass eine andere Wahl von $\overline{\Gamma}$ dieselbe Kurve $C' \longrightarrow S$ geliefert hätte. Dies folgt leicht durch Übergang zu einer gemeinsamen ko-endlichen Untergruppe. $\square$

Bemerkung 4.2 Zu beachten ist noch, dass aus der Definition der induzierten Untergruppe (Definition 2.5) folgt, dass Γ' immer Elemente endlicher Ordnung enthält. Insbesondere folgt mit Satz 3.15, dass ${}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ niemals ein feiner Modulraum ist.

4.1.2 Beispiele

Um Beispiele zu konstruieren genügt es zu gegebenem $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ eine Γ-invariante Untergruppe von $\pi_{g,n}$ anzugeben:

- In [Pik] sind auf Seite 30 einige $\Gamma_{g,n}$-invariante Untergruppen angegeben. Da jede $\Gamma_{g,n}$-invariante Untergruppe von $\pi_{g,n}$ auch invariant ist unter Γ für ein beliebiges $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$, erhalten wir Morphismen ${}_\Gamma T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ für jedes $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$, speziell also auch Morphismen $M_{g,n} \longrightarrow M_{g',n'}$. Für $n = 0$ sind zum Beispiel die Untergruppen $\pi_g^{(i),j} := \pi_g^{(i)} \cdot \pi_g^j$ charakteristisch und ko-endlich, vgl. [PJ]. Dabei ist $\pi_g^{(i)}$ die Kommutatoruntergruppe i-ter Ordnung in der absteigenden Zentralreihe von π_g und π_g^j ist die von den j-ten Potenzen in π_g erzeugte Untergruppe. Insbesondere ist das einfachste nicht-triviale Beispiel eines solchen Morphismus ${}_\Gamma T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'}$ bzw. $M_g \longrightarrow M_{g'}$ gegeben durch $\pi_{g'} := \pi_g^{(2),2} = \pi_g^2 \cdot [\pi_g, \pi_g] = \pi_g^2$. Hier gilt $[\pi_g : \pi_{g'}] = 2^{2g}$ und somit $g' = 2^{2g}(g-1)+1$, also zum Beispiel $M_2 \longrightarrow M_{17}$.

- Im Gegensatz zu obigem Beispiel, in dem wir Morphismen $M_g \longrightarrow M_{g'}$ konstruiert haben, erhalten wir, wenn wir eine Untergruppe $\pi_{g',n'} \leq \pi_{g,n}$ von Index 2 wählen, dass diese Untergruppe zwar normal und somit invariant unter Γ für $\Gamma = 1$ ist, aber nicht invariant unter $\Gamma_{g,n}$ ist. Dies liefert uns Morphismen $T_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g',n'} \longrightarrow M_{g',n'}$ mit $\Gamma' \cong \pi_{g,n}/\pi_{g',n'}$ und $g' = 2(g-1)+1$, die allerdings nicht nach $M_{g,n}$ faktorisieren. Diese Konstruktion liefert als einfachstes Beispiel einen Morphismus $T_2 \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_3 \longrightarrow M_3$.

- Ist im Fall $n = 0$ die Untergruppe $\Gamma \leq \Gamma_g$ so gewählt, dass ${}_\Gamma T_g$ der gewöhnliche Schottky-Raum S_g ist, vgl. [GH] und sind $\{a_i, b_i : i = 1, \ldots, g\}$ Standarderzeuger von π_g, so ist jede normale ko-endliche Untergruppe, die von den a_i und von Produkten der b_i erzeugt wird, Γ-invariant. Sei nun F_g die freie Gruppe über $\{b_i : i = 1, \ldots, g\}$. So liefert jede ko-endliche normale Untergruppe von F_g auf eine kanonische Weise eine ko-endliche normale Untergruppe der obigen Bauart von π_g vom gleichen Index. Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass es besonders einfach ist, ko-endliche Untergruppen einer freien Gruppe zu konstruieren. Des weiteren sind diese Untergruppen wieder frei. Falls solch eine Gruppe von g' Elementen frei erzeugt wird und von Index μ in F_g ist, so gilt $g' - 1 = \mu(g-1)$, vgl. etwa [LS] Abschnitt 1.3. Mit dieser Methode erhalten wir also Morphismen $S_g \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_{g'} \longrightarrow M_{g'}$, wobei wie üblich Γ' die von Γ induzierte Untergruppe ist. Diese Untergruppe genau zu bestimmen ist im allgemeinen schwierig, allerdings ist es nicht schwer zu zeigen, dass der Modulraum ${}_{\Gamma'}T_{g'}$ ein echter endlicher Quotient von $S_{g'}$ ist. Um einzusehen, das ${}_{\Gamma'}T_{g'}$ niemals gleich $S_{g'}$ sein kann, genügt obige Bemerkung, dass ${}_{\Gamma'}T_{g'}$ nie ein feiner Modulraum ist, denn der Schottky-Raum ist fein. Für $g = 3$ wollen wir ein konkretes Beispiel angeben: F_3 wird erzeugt von b_1, b_2, b_3. Dann folgt leicht, dass eine Untergruppe von Index 3 existiert, die frei erzeugt wird von $b_1^3, b_2^3, b_3^3, b_1b_2^2, b_1^2b_2, b_2b_3^2, b_2^2b_3$ und auch $b_3b_1^2$ und $b_3^2b_1$ enthält. Dies liefert einen Morphismus $S_3 \longrightarrow {}_{\Gamma'}T_7 \longrightarrow M_7$ und $\pi_7 \leq \pi_3$ wird erzeugt von $a_1, a_2, a_3, b_1^3, b_2^3, b_3^3, b_1b_2^2, b_1^2b_2, b_2b_3^2, b_2^2b_3$.

4.2 Fortsetzung der Morphismen Φ_P auf den Rand

4.2.1 Stabile Kurven mit verallgemeinerter Teichmüller-Struktur

Definition 4.3 Sei $\pi : C \longrightarrow S$ ein surjektiver, eigentlicher, flacher Morphismus komplexer Räume, derart dass jede Faser C_s für $s \in S$ eine zusammenhängende projektive algebraische Kurve über $\mathbb{C}$ von arithmetischem Geschlecht g ist, die nur gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten hat. Des weiteren seien $\sigma_i : S \longrightarrow C$ für $i \in N$ holomorphe Schnitte mit $\sigma_i(s) \neq \sigma_j(s)$ für alle $s \in S$ und $i \neq j$ und so, dass $\sigma_i(s)$ glatter Punkt auf C_s für alle $s \in S$ und alle i ist. Falls nun jede Faser C_s nur endlich viele Automorphismen besitzt, so heißt $(C \longrightarrow S, \sigma_i : i \in N)$ *n-fach punktierte stabile Kurve von Geschlecht g.*

Bemerkung 4.4 In obiger Definition ist zu beachten, dass aufgrund des Existenzsatzes von Riemann, in der Form des Corollaire zu Proposition 15 in [Ser] auf Seite 431, die Forderung, dass C_s ein kompakter, reduzierter komplexer Raum ist, äquivalent ist zur Bedingung, dass C_s eine projektive algebraische Varietät ist.

Definition 4.5 Sei $\pi : C \longrightarrow S$ eine stabile Kurve und seien Dann heißen die σ_i *Punktierungen* und $(\pi : C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N)$ heißt *n-fach punktierte Kurve.*

Bemerkung 4.6 Für stabile Kurven existiert ebenfalls ein grober Modulraum, welcher mit $\overline{M_{g,n}}$ bezeichnet wird, vgl. [GIT].

Definition 4.7 Sei $\pi : C \longrightarrow S$ eine stabile Kurve. Eine stetige Abbildung $\alpha : C_g \times S \longrightarrow C$ heißt *Deformation*, falls

$$\begin{tikzcd} C_g \times S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & C \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S \end{tikzcd}$$

kommutiert und für alle $s \in S$ für die stetige Abbildung $\alpha_s : C_g \times \{s\} \longrightarrow C_s$ gilt:

(a) Das Urbild unter α_s jedes gewöhnlichen Doppelpunktes ist eine einfach geschlossene Schlaufe.

(b) Außerhalb der Doppelpunkte ist α ein Homöomorphismus.

Definition 4.8 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$, $\pi : C \longrightarrow S$ eine stabile Kurve, $(S_l)_{l \in L}$ eine offene Überdeckung von S und für alle $l \in L$ seien $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_S$ Deformationen. $(S_l, \alpha_l)_{l \in L}$ heißt *verallgemeinerte Teichmüller-Struktur zu* Γ oder Γ-*Struktur* von $\pi : C \longrightarrow S$, falls für alle $l, \bar{l} \in L$ und alle $s \in S_l \cap S_{\bar{l}}$ ein Homöomorphismus $\beta_{l\bar{l}}(s) : C_g \longrightarrow C_g$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} C_g \times \{s\} \arrow[rr, "(\beta_{l\bar{l}}(s),\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\alpha_l"'] & & C_g \times \{s\} \arrow[dl, "\alpha_{\bar{l}}"] \\ & C_s & \end{tikzcd}$$

kommutiert, $\beta_{l\bar{l}}(s)$ die x_i für $i \in N$ fest lässt und die Isotopieklasse von $\beta_{l\bar{l}}(s)$ in Γ liegt. Die *Äquivalenz von* Γ-*Strukturen* und die *Isomorphieklassen stabiler Kurven* seien wie bei glatten Kurven definiert. $\overline{{}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}}$ bezeichne den Funktor, welcher einem komplexen Raum die Menge der Isomorphieklassen stabiler Kurven mit n-fachen Punktierungen und Γ-Markierung für $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ zuordnet und Morphismen analytischer Räume den Basiswechsel zuordnet.

Bemerkung 4.9 $\Gamma = 1$ liefert die Teichmüller-Struktur für stabile Kurven im Sinne von [He], und da für diese Kurven der feine Modulraum $\overline{T_{g,n}}$ (als $\mathbb{C}$-geringter Raum) existiert und darauf ebenfalls $\Gamma_{g,n}$ diskontinuierlich operiert, folgt analog zum glatten Fall, dass $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}} := \overline{T_{g,n}}/\Gamma$ ein grober Modulraum für stabile n-fach punktierte Kurven mit Γ-Struktur ist, vgl. Satz 3.15. Beachte dabei, dass in [He] nur explizit die Existenz von $\overline{T_{g,n}}$ für $n = 0$ bewiesen wird. Allerdings ist aufgrund von [He] Abschnitt 3.4 klar, dass $\overline{T_{g,n}}$ für alle n existiert. Im allgemeinen ist $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ nur ein $\mathbb{C}$-geringter Raum und kein komplexer Raum. Für ko-endliches $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ist jedoch die kanonische Abbildung $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}} = \overline{T_{g,n}}/\Gamma \longrightarrow \overline{T_{g,n}}/\Gamma_{g,n} = \overline{M_{g,n}}$ eine endliche verzweigte Überlagerung über einem normalen komplexen Raum. Somit ist $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ ebenfalls ein normaler komplexer Raum nach Satz 2.16 und sogar eine projektive algebraische Varietät nach dem Existenzsatz von Riemann, vgl. [Har] Seite 442 bzw. [SGA] Abschnitt XII Proposition 5.3 auf Seite 337. Auch für andere Γ ist $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ ein komplexer Raum, z.B. wenn Γ so gewählt wird, dass $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ der erweiterte Schottky-Raum ist, vgl. [GH] und [He], denn dann ist $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ sogar eine Mannigfaltigkeit. In dieser allgemeineren Situation, also für den Fall, in welchem Γ nicht ko-endlich ist, ist es jedoch sehr viel schwieriger, Bedingungen für Γ anzugeben, so dass $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ ein analytischer Raum wird. Da jedoch die Fortsetzung auf den Rand gerade für algebraische Untersuchungen interessant ist, ist der Spezialfall der ko-endlichen Γ sicherlich der wichtigste.

4.2.2 Die Beziehung zwischen $\overline{T_{g,n}}/\Gamma$ und $\overline{T_{g,n}/\Gamma}$

Definition 4.10 Ist $\chi : X \longrightarrow Y$ ein endlicher dominanter Morphismus algebraischer Varietäten, so heißt der ganze Abschluss von Y im Funktionenkörper von X

die *Normalisierung von Y in X*. Da χ endlich ist, existieren affine Überdeckungen von X und Y, so dass χ algebraisch lokal gegeben ist als Inklusion von Ringen $R \longrightarrow S$. Bezeichnet nun $N_S(R)$ die Normalisierung, also den ganzen Abschluss von R im Quotientenkörper von S, so verkleben die Spektra der $N_S(R)$ zu einer normalen Varietät, eben der Normalisierung von Y in X, vgl. etwa [EGA] Kapitel IV, Abschnitt 6.3. Es ist ebenfalls möglich, diese Konstruktion analytisch durchzuführen, vgl. etwa [KK] §71, allerdings ist diese Konstruktion in der algebraischen Situation leichter und dieser Fall genügt uns.

Definition 4.11 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ eine ko-endliche Untergruppe. Die Normalisierung von $\overline{M_{g,n}}$ in $T_{g,n}/\Gamma$ heißt *Deligne-Mumford-Kompaktifizierung* von $T_{g,n}/\Gamma$ und wird mit $\overline{T_{g,n}/\Gamma}$ bezeichnet, vgl. [Pik], Seite 43.

Proposition 4.12 Für eine ko-endliche Untergruppe $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\overline{T_{g,n}/\Gamma} \longrightarrow \overline{T_{g,n}}/\Gamma.$$

Damit identifizieren wir beide komplexe Varietäten und schreiben dafür stets $\overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}}$.

Beweis: Wir folgen der Beweisidee in [Pik], Seite 44-45: Da $\overline{T_{g,n}/\Gamma}$ eine Normalisierung ist, existiert nach der universellen Eigenschaft für Normalisierungen ein endlicher Morphismus $\overline{T_{g,n}/\Gamma} \longrightarrow \overline{T_{g,n}}/\Gamma$, welcher offenbar birational ist, und somit ein Isomorphismus ist, da sowohl $\overline{T_{g,n}/\Gamma}$ als auch $\overline{T_{g,n}}/\Gamma$ normal sind, vgl. dazu folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
T_{g,n}/\Gamma \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & \overline{T_{g,n}/\Gamma} \arrow[dl, dashed] \arrow[dd] \\
& \overline{T_{g,n}}/\Gamma \arrow[dr] & \\
M_{g,n} \arrow[rr, hook] & & \overline{M_{g,n}}
\end{tikzcd}$$

□

Satz 4.13 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ eine ko-endliche Untergruppe. Dann existiert eine ko-endliche Untergruppe $\overline{\Gamma} \leq \Gamma$, so dass $\overline{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}}$ glatter feiner Modulraum und die universelle Kurve ein normaler analytischer Raum ist.

Beweis: Aus dem Beweis von Corollary 3.3.5 in [Pik] folgt, dass ein $\overline{\Gamma}$ existiert, so dass $\overline{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}}$ glatt ist. Aus der Diskussion auf Seite 33 und aus Proposition 3.3.6 wieder in [Pik], folgt nun, dass $\overline{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}}$ sogar ein feiner Modulraum ist. Ebenfalls folgt aus Proposition 3.3.6, dass die universelle Kurve über $\overline{{}_{\overline{\Gamma}}T_{g,n}}$ normal ist □

4.2.3 Fortsetzen der Morphismen auf den Rand

Satz 4.14 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ko-endlich. Dann setzt sich der Morphismus von Funktoren

$$\Phi_P : {}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow {}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'},$$

aus Satz 4.1 fort zu einem Morphismus von Funktoren stabiler Kurven

$$\Phi_P : \overline{{}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}} \longrightarrow \overline{{}_{\Gamma'}\mathcal{T}_{g',n'}}$$

und induziert ein Morphismus grober Modulräume

$$\Phi_P : \overline{{}_\Gamma T_{g,n}} \longrightarrow \overline{{}_{\Gamma'} T_{g',n'}}$$

mit denselben Eigenschaften wie im Fall der glatten Kurven.

Beweis: 1. Schritt: Ohne Einschränkung ist S glatt und C normal:
Wegen Satz 4.13 folgt dies völlig analog wie im Beweis von Satz 4.1.

Sei nun also $(C \longrightarrow S; \sigma_i : i \in N; (S_l, \alpha_l)_{l\in L})$ der Vertreter einer Isomorphieklasse in $\overline{{}_\Gamma\mathcal{T}_{g,n}}(S)$ mit glattem S und normalen C. Analog zum Beweis von Satz 4.1 konstruieren wir nun eine verzweigte Überlagerung $C' \longrightarrow C$, Punktierungen und eine Γ'-Markierung.

2. Schritt: Lokale Konstruktion der Zuordnung $\Phi_P(S)$:
Sei $l \in L$ fest. Zur Deformation $\alpha_l : C_g \times S_l \longrightarrow C_{S_l}$ betrachten wir die (verzweigte) Überlagerung $(P, \mathrm{id}) : C_{g'} \times S_l \longrightarrow C_g \times S_l$. Zu jedem $s \in S_l$ und jedem singulären Punkt $x \in C_s$ ist $\alpha_l^{-1}(x)$ eine einfach geschlossene Schlaufe auf $C_g \times \{s\}$, die allerdings disjunkt von den Verzweigungspunkten $x_1, \ldots, x_n$ ist, da die Schnitte stets so gewählt sind, dass sie singuläre Punkte vermeiden. Damit ist (P, id) in einer Umgebung von $\alpha_l^{-1}(x)$ eine unverzweigte Überlagerung und $(P, \mathrm{id})^{-1}(\alpha_l^{-1}(x))$ ist disjunkte Vereinigung einfacher geschlossener Schlaufen auf $C_{g'} \times \{s\}$. Sei nun $C'_{S_l} := C_{g'} \times S_l / \sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die alle Punkte einer dieser Schlaufen identifiziert. α'_l sei die kanonische Abbildung $C_{g'} \times S_l \longrightarrow C'_{S_l}$. Nach dieser Konstruktion faktorisiert $\alpha_l \circ (P, \mathrm{id})$ über C'_{S_l}:

$$\begin{tikzcd}
C_{g'} \times S_l \arrow[r, "\alpha'_l"] \arrow[d, "(P,\mathrm{id})"'] & C'_{S_l} \arrow[d, "P_{S_l}"] \\
C_g \times S_l \arrow[r, "\alpha_l"'] & C_{S_l}
\end{tikzcd}$$

Nun versehen wir C'_{S_l} mit einer Topologie wie folgt: Sei $a \in C_{S_l}$ beliebig und $P_{S_l}^{-1}(a)$ bestehe aus den Punkten $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq C'_{S_l}$. Sei nun V eine Umgebung von a so klein gewählt, dass $(P_{S_l} \circ \alpha'_l)^{-1}(V)$ in r Zusammenhangskomponenten $U_1, \ldots, U_r$ zerfällt. Für jedes $k = 1, \ldots, r$ sei nun $\alpha'_l(U_k)$ mit der Initialtopologie bzgl. $P_{S_l}|_{\alpha'_l(U_k)} : \alpha'_l(U_k) \longrightarrow V$ versehen. Dies liefert Umgebungsbasen für die a_k und somit eine Topologie auf C'_{S_l}.

P_{S_l} ist eigentlich, denn P_{S_l} hat endliche Fasern und ist abgeschlossen, wie sich z.B. leicht mit dem Folgenkriterium nachrechnet. Somit ist $P_{S_l} : C'_{S_l} \longrightarrow C_{S_l}$ eine endliche verzweigte Überlagerung und somit auch eine offene Abbildung, vgl. Bemerkung 2.15. Daraus folgt leicht, dass α'_l stetig und damit auch offenbar eine Deformation ist. A priori wäre es auch möglich gewesen, C'_{S_l} mit der Initialtopologie bzgl. P_{S_l} oder mit der Quotiententopologie bzgl. α'_l zu versehen. Die Initialtopologie ist jedoch nicht Hausdorffsch, denn die Urbilder eines Punktes $a \in C_{S_l}$ lassen sich in der Initialtopologie nicht trennen, wohl aber mit dieser etwas umständlicheren Konstruktion. Auch die Quotiententopologie ist ungeeignet, weil diese eine feinere Topologie geliefert hätte, so dass α'_l offen und P_{S_l} nicht eigentlich wäre. Damit ist die oben beschriebene Topologie die richtige Wahl, denn nur dann ist P_{S_l} eine verzweigte Überlagerung. Da nun C_{S_l} nach Voraussetzung normal ist, ist nun nach Satz 2.16 C'_{S_l} auf kanonische Weise ebenfalls ein normaler komplexer Raum und P_{S_l} eine verzweigte analytische Überlagerung. Die Konstruktion der Schnitte geht völlig analog zum glatten Fall, da die Schnitte von $C \longrightarrow S$ die singulären Punkte vermeiden.

<u>3. Schritt: Verkleben der lokalen Konstruktion:</u>
Wir müssen hier zeigen, dass $C'_{S_l}|_{S_l \cap S_{\bar{l}}}$ isomorph zu $C'_{S_{\bar{l}}}|_{S_l \cap S_{\bar{l}}}$ mittels einer mit den Schnitten verträglichen biholomorphen Abbildung ist. Sei dazu $s \in S_l \cap S_{\bar{l}}$ fest. Nach Voraussetzung existiert ein Homöomorphismus $\beta'_{l\bar{l}}(s)$ wie in Definition 4.8. Sei nun $\beta'_{l\bar{l}}(s)$ die Hochhebung von $\beta_{l\bar{l}}(s)$, wie im glatten Fall, so dass $\beta'_{l\bar{l}}(s)$ sich wieder fortsetzen lässt und die Punkte x'_{ij} fest hält, d.h es kommutiert

$$\begin{tikzcd} C_{g'} \arrow[r, "\beta'_{l\bar{l}}(s)"] \arrow[d, "P"'] & C_{g'} \arrow[d, "P"] \\ C_g \arrow[r, "\beta_{l\bar{l}}(s)"'] & C_g \end{tikzcd}$$

Insgesamt haben wir somit folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (C'_{S_l})_s \arrow[rr, dashed, "\xi"] \arrow[dd, "P_{S_l}"'] & & (C'_{S_{\bar{l}}})_s \arrow[dd, "P_{S_{\bar{l}}}"] \\ C_{g'} \arrow[ur, "\alpha'_l"] \arrow[rr, "\beta'_{l\bar{l}}(s)"] \arrow[dd, "P"'] & & C_{g'} \arrow[ur, "\alpha'_{\bar{l}}"'] \arrow[dd, "P"] & \\ & C_s \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & C_s \\ C_g \arrow[ur, "\alpha_l"] \arrow[rr, "\beta_{l\bar{l}}(s)"'] & & C_g \arrow[ur, "\alpha_{\bar{l}}"'] & \end{tikzcd}$$

in dem jedes Quadrat kommutiert. Wir zeigen nun die Existenz einer Abbildung $\xi : (C'_{S_l})_s \longrightarrow (C'_{S_{\bar{l}}})_s$, so dass obiges Diagramm insgesamt kommutiert. Dies erfolgt wie üblich durch Diagrammjagd. Seien nun dazu $x, \overline{x} \in C_{g'}$ mit $\alpha'_l(x) = \alpha'_l(\overline{x})$. Falls nun $\alpha'_l(x)$ nicht-singulär ist, so ist $x = \overline{x}$ und somit $\alpha_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(x)) = \alpha_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(\overline{x}))$. Das besagt aber, dass hier $\alpha'_{\bar{l}} \circ \beta'_{l\bar{l}}(s)$ über $(C'_{S_l})_s$ faktorisiert, dass also ξ zumindest auf den glatten Punkten existiert. Ist hingegen $\alpha'_l(x)$ singulär, so liegen x und $\overline{x}$ auf einer gemeinsamen Schlaufe $Z \subseteq C_g$. Dann ist nach Konstruktion $P(Z)$ ebenfalls eine Schlaufe und $\alpha_l(P(Z))$ ist wieder ein singulärer Punkt. Wegen der Kommutativität des unteren Quadrats ist somit auch $\beta_{l\bar{l}}(s)(P(Z))$ eine Schlaufe und $\mathrm{id}(\alpha_l(P(Z))) = \alpha_{\bar{l}}(\beta_{l\bar{l}}(s)(P(Z)))$ ein singulärer Punkt. Wegen der Kommutativität des vorderen Quadrats gilt $\alpha_{\bar{l}}(\beta_{l\bar{l}}(s)(P(Z))) = \alpha_{\bar{l}}(P(\beta'_{l\bar{l}}(s)(Z)))$ und ist singulärer Punkt. Wegen der Kommutativität des rechten Quadrats ist dieser Punkt auch gegeben durch $P_{S_{\bar{l}}}(\alpha'_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(Z)))$. Da nun aber das Urbild eines einzigen Punktes von $P_{S_{\bar{l}}}$ nach Konstruktion dieser Abbildung aus isolierten Punkten besteht und $\alpha'_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(Z))$ zusammenhängend ist, ist $\alpha'_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(Z))$ ebenfalls genau ein Punkt. Insbesondere ist $\alpha'_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(x) = \alpha'_{\bar{l}}(\beta'_{l\bar{l}}(s)(\overline{x})$, und somit faktorisiert $\alpha'_{\bar{l}} \circ \beta'_{l\bar{l}}(s)$ über $(C'_{S_l})_s$. Dies liefert ξ. Analog erhält man eine Umkehrabbildung. Da dies in jeder Faser gilt, erhalten wir auf diese Art eine bijektive Abbildung $C'_{S_l}|_{S_l \cap S_{\bar{l}}} \longrightarrow C'_{S_l}|_{S_l \cap S_{\bar{l}}}$. Diese ist offenbar lokal biholomorph in den glatten Punkten, denn da sind P_{S_l} und $P_{S_{\bar{l}}}$ lokal biholomorph. Da P_{S_l} und $P_{S_{\bar{l}}}$ offen sind, folgt leicht, dass diese Abbildung auch topologisch in den singulären Punkten ist, somit wegen Satz 2.17 sogar biholomorph überall ist.

4. Schritt: $C' \longrightarrow S$ ist stabile Kurve:

Aus der Konstruktion folgt sofort, dass $C' \longrightarrow S$ eigentlich und surjektiv ist. Die Fasern sind nach Konstruktion auch offenbar stabile Kurven von Geschlecht g', denn eine rationale Komponente wird wieder von einer rationalen Komponente überlagert, die andere Komponenten in mindestens genauso vielen Punkten trifft, oder sie wird von einer Komponente höheren Geschlechts überlagert. $C' \longrightarrow S$ ist als Komposition offener Abbildungen selbst offen und nach [BS] Theorem 2.13 auf Seite 181 ein flacher Morphismus. Damit ist $C' \longrightarrow S$ eine stabile Kurve.

5. Schritt: Wohldefiniertheit, Γ'-Struktur und Schnitte:

Äquivalente Γ-Strukturen liefern isomorphe Kurven. Dies folgt wie im Fall glatter Kurven daraus, dass die lokalen Konstruktionen verkleben. Die weiteren Eigenschaften, die noch zu zeigen sind, wie die Wohldefiniertheit der Γ'-Struktur oder die Konstruktion der Schnitte auf C', gehen völlig analog wie der Beweis im Fall glatter Kurven. □

Bemerkung 4.15 Dieser Beweis zeigt, dass dieser Satz auch für $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ gilt, die nicht ko-endlich sind, für die aber $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ von einem glatten feinen Modulraum endlich überlagert wird. Dies ist zum Beispiel gegeben, falls $\overline{{}_\Gamma T_{g,n}}$ endlicher Quotient des erweiterten Schottky-Raumes ist, vgl. [GH].

4.3 Algebraische Eigenschaften der Morphismen Φ_P

Satz 4.16 Sei $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$ ko-endlich. Dann sind sämtliche Morphismen grober Modulräume

$$\Phi_P : \overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}} \longrightarrow \overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}}$$

eigentliche Morphismen algebraischer Varietäten.

Beweis: Die Abbildung

$$\Phi_P : \overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}} \longrightarrow \overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}}$$

hat endliche Fasern. Um dies einzusehen, sei die Isomorphieklasse von $C' \longrightarrow S$ in Bild Φ_P. Die Isomorphieklasse einer Kurve $C \longrightarrow S$ kann nach der Konstruktion von Φ_P nur dann im Urbild von $C' \longrightarrow S$ liegen, wenn es eine normale Überlagerung $C' \longrightarrow C$ gibt, d.h. eine Überlagerung, so dass C Quotient von C' durch Automorphismen von C' ist. Da C' jedoch nur endlich viele Automorphismen hat, kann es nur endlich viele solche Kurven $C \longrightarrow S$ gegen. Ebenfalls ist nach Definition von Γ' klar, dass es zu einer Γ'-Struktur nur endlich viele Γ-Strukturen geben kann. Damit sind die Fasern endlich. Da $\overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}}$ und $\overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}}$ kompakt sind, ist Φ_P eigentlich im topologischen Sinne und somit endlich. Nach dem Existenzsatz von Riemann, vgl. [Har] Seite 442 bzw. [SGA] Abschnitt XII, Proposition 5.3 auf Seite 337 folgt nun, dass Φ_P algebraisch ist. Mit [SGA] Abschnitt XII, Proposition 3.2 auf Seite 322 folgt nun, dass Φ_P auch eigentlich im Sinne algebraischer Morphismen ist.

Alternativ folgt auch aus der Konstruktion, dass wenn $C \longrightarrow S$ eine algebraische Kurve ist, dass dann $C' \longrightarrow C$ ebenfalls algebraisch ist, eben wieder mit dem Existenzsatz von Riemann, und somit ist $C' \longrightarrow S$ auch algebraisch. Dann muss aber auch der Morphismus Φ_P ein Morphismus algebraischer Modulräume sein, d.h. er ist selbst algebraisch, vgl. [PJ], Seite 491. □

Bemerkung 4.17 Da wir nun wissen, dass Φ_P Morphismen algebraischer Varietäten sind, stellt sich die Frage, ob sie bzw. die zugehörigen Morphismen von Funktoren auch über allgemeineren Körpern definiert sind, bzw. ob sie sich dort konstruieren lassen. Auf diese Frage ist es bisher erst gelungen eine sehr unvollständige Antwort zu finden — nämlich nur für Morphismen der Bauart $M_g \longrightarrow M_{g'}$ und den Fall, in dem sämtliche auftretenden Überlagerungen unverzweigt, also étale sind. In diesem Fall ist es möglich Morphismen von Funktoren über $\overline{\mathbb{Q}}$ zu definieren und damit existieren auch Morphismen grober Modulräume über $\overline{\mathbb{Q}}$. Die Bedingung, dass alle auftretenden Überlagerungen étale sind, ist insbesondere dann erfüllt, wenn die Kurven nicht punktiert und glatt sind. Um einzusehen, dass Φ_P dann über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, sei $C \longrightarrow S$ nun eine glatte Kurve, die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist. Dann ist $C \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \longrightarrow S \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ eine glatte Kurve, die über $\mathbb{C}$ definiert ist. Zu dieser Kurve erhalten wir nun wie in Satz 4.1 eine étale Überlagerung $\overline{C}' \longrightarrow C \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \longrightarrow S \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$. Nun wissen wir aber aufgrund von Corollaire 1.8 in

[SGA] auf Seite 266, dass eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte étale Überlagerung $C' \longrightarrow C$ mit $C' \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \cong \overline{C}'$ existiert. Dies genügt auch schon für die Konstruktion des Funktors und somit auch für die Konstruktion des Morphismus grober Modulräume. Dabei ist zu beachten, dass Corollaire 1.8 zunächst nur für eigentliche C gilt. Mit Hilfe von Proposition 4.6 in [SGA] auf Seite 421 folgt jedoch sofort, dass im Fall der Charakteristik 0 diese Voraussetzung überflüssig ist.

4.4 Ergänzen von Diagrammen

Proposition 4.18 Sei $0 \leq m \leq n$ und $P_m : C_{g',m'} \longrightarrow C_{g,m}$ eine Überlagerung verträglich mit $\Delta \leq \Gamma_{g,m}$. Sei $i : C_{g,n} \longrightarrow C_{g,m}$ die Inklusion, $r : \pi_{g,n} \longrightarrow \pi_{g,m}$ der zugehörige Epimorphismus auf den Fundamentalgruppen und $P_n : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ die induzierte Überlagerung. Dann ist P_n verträglich mit $\Gamma := t^{-1}(\Delta)$, wobei $t : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$ die kanonische Abbildung ist, und es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\overline{{}_\Gamma T_{g,n}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{{}_{\Gamma'} T_{g',n'}} \arrow[d] \\
\overline{{}_\Delta T_{g,m}} \arrow[r] & \overline{{}_{\Delta'} T_{g',m'}}
\end{tikzcd}$$

Beweis: (1) P_n ist verträglich mit Γ:
Zeige $\pi_{g',n'} := r^{-1}(\pi_{g',m'})$ ist Γ-invariant. Sei dazu $f \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,n})$ mit $q_n(f) \in \Gamma$, vgl. Abschnitt 2.5. Für $w \in \pi_{g',n'}$ ist nun nachzurechnen, dass $f(w)$ in $\pi_{g',n'}$ liegt. Wegen $f \in q_n^{-1}(\Gamma) = q_n^{-1}(t^{-1}(\Delta)) = (\overline{t})^{-1}(q_m^{-1}(\Delta))$ gilt $\overline{t}(f) \in q_m^{-1}(\Delta)$ und wegen $r(w) \in \pi_{g',m'}$ haben wir mit Lemma 2.7 $r(f(w)) = (\overline{t}(f))(r(w)) \in \pi_{g',m'}$, da $\pi_{g',m'}$ Δ-invariant ist. Damit gilt aber $f(w) \in r^{-1}(\pi_{g',m'}) = \pi_{g',n'}$.

(2) Existenz von $\overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}} \longrightarrow \overline{{}_{\Delta'}T_{g',m'}}$
Diese Abbildung existiert wegen Proposition 2.12 zusammen mit Proposition 3.17, da $t(\Gamma) = t(t^{-1}(\Delta)) = \Delta$ ist.

(3) Die Kommutativität des Diagramms
Dies folgt sofort aus der Konstruktion und der Tatsache, dass ein entsprechendes Diagramm für Überlagerungen kommutiert, vgl. Bemerkung 2.11. $\square$

Proposition 4.19 Sei $0 \leq m \leq n$ und $P_n : C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n}$ eine normale Überlagerung verträglich mit $\Gamma \leq \Gamma_{g,n}$. Sei $\pi_{g',n'} \trianglelefteq \pi_{g,n}$ der von P_n induzierte Normalteiler, $r : \pi_{g,n} \longrightarrow \pi_{g,m}$ und $t : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,m}$ die kanonischen Morphismen. Falls $\mathrm{Kern}(r) \leq \pi_{g',n'}$ und $\mathrm{Kern}(t) \leq \Gamma$ gilt, so definiert $\pi_{g',m'} := r(\pi_{g',n'}) \trianglelefteq \pi_{g,m}$ eine normale Überlagerung $P_m : C_{g',m'} \longrightarrow C_{g,m}$, so dass

$$\begin{tikzcd}
C_{g',n'} \arrow[r, "P_n"] \arrow[d, hook] & C_{g,n} \arrow[d, hook] \\
C_{g',m'} \arrow[r, "P_m"'] & C_{g,m}
\end{tikzcd}$$

kommutiert und

$$\mathrm{Gal}\,(C_{g',n'}/C_{g,n}) \cong \pi_{g,n}/\pi_{g',n'} \cong \pi_{g',m'}/\pi_{g',m'} \cong \mathrm{Gal}\,(C_{g',m'}/C_{g,m})$$

kanonisch gilt. Des weiteren ist $\Delta{:=}t(\Gamma)$ mit P_m verträglich und

$$\begin{tikzcd}
\overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}} \arrow[d] \\
\overline{{}_{\Delta}T_{g,m}} \arrow[r] & \overline{{}_{\Delta'}T_{g',m'}}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Für den Beweis benötigen wir folgende

Bemerkung 4.20 Sei $f : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus mit $K :=$ Kern(f) und $H \leq G$ eine Untergruppe, so gilt:

(a) $f^{-1}(f(H)) = HK$, insbesondere gilt $f^{-1}(f(H)) = H$ genau dann, wenn $K \leq H$ gilt.

(b) Falls f surjektiv und H normal ist, so ist auch $f(H)$ normal in G'.

Wir wollen nun die Proposition beweisen. Nach dieser Bemerkung ist $\pi_{g',m'} \trianglelefteq \pi_{g,m}$, also haben wir eine Überlagerung $P_m : C_{g',m'} \longrightarrow C_{g,m}$. Die Komposition $C_{g',n'} \longrightarrow C_{g,n} \longrightarrow C_{g,m}$ liftet nach dem Hochhebungssatz für Überlagerungen zu einer stetigen Abbildung $C_{g',n'} \longrightarrow C_{g',m'}$, die nicht eindeutig ist, die es aber durch die Festlegung $x' \mapsto x'$ wird und dann als Inklusion aufgefasst werden kann. Dabei ist x' ein beliebiger Punkt, auf den es im weiteren nicht ankommt. Wegen obiger Bemerkung und Kern$(r) \leq \pi_{g',n'}$ gilt $r^{-1}(\pi_{g',m'}) = r^{-1}(r(\pi_{g',n'})) = \pi_{g',n'}$, d.h. P_n ist die von P_m induzierte Überlagerung. Wegen Kern$(q) \leq \Gamma$ gilt analog mit obiger Bemerkung $t^{-1}(\Delta) = t^{-1}(t(\Gamma)) = \Gamma$, so dass die Behauptung dieser Proposition aus der letzten Proposition folgt, wenn wir gezeigt haben, dass Δ mit P_m verträglich ist. Sei dazu $w = r(v) \in \pi_{g',m'}$ mit $v \in \pi_{g',n'}$ und $f \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,m})$ mit $q_m(f) \in \Delta = t(\Gamma)$, d.h. $f \in q_m^{-1}(\Delta)$. Wegen $q_n^{-1}(\Gamma) = q_n^{-1}(\Gamma \cdot \mathrm{Kern}(q)) = (q_n^{-1}t^{-1}t)(\Gamma) = (q_n^{-1}t^{-1}(\Delta)) = ((\bar{t})^{-1}q_m^{-1})(\Delta)$ existiert ein $g \in q_n^{-1}(\Gamma)$ mit $\bar{t}(g) = f$. Da $g \in q_n^{-1}(\Gamma)$ und $\pi_{g',n'}$ Γ-invariant ist, ist $g(v) \in \pi_{g',n'}$, also auch $r(g(v)) \in \pi_{g',m'}$. Nun gilt wieder mit Lemma 2.7 $f(w) = (\bar{t}(g))(r(v)) = r(g(v)) \in \pi_{g',m'}$. Somit ist $\pi_{g',m'}$ Δ-invariant. $\square$

Bemerkung 4.21 Die erste Proposition ergänzt Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r] \arrow[d] & \square \arrow[d] \\ \overline{{}_{\Delta}T_{g,m}} \arrow[r] & \overline{{}_{\Delta'}T_{g',m'}} \end{tikzcd}$$

die zweite Proposition Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} \overline{{}_{\Gamma}T_{g,n}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{{}_{\Gamma'}T_{g',n'}} \arrow[d] \\ \square \arrow[r] & \square \end{tikzcd}$$

Literatur

[BS] Bănica, C., Stănăsilă, O. *Algebraic Methods in Global Theory of Complex Spaces*, John Wiley and Sons, London, 1976.

[DM] Deligne, P., Mumford, D., *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus*, Publications Mathématiques 36, Institute des Hautes Études Scientifiques, Le Bois-Marie, 1969, S. 75-109.

[Dol] Dolgachev, I., *Introduction to Geometric Invariant Theory*, Seoul National University, Seoul, 1994.

[EGA] Grothendieck, A., *Éléments de Géometrie Algébrique*, Institute des Hautes Études Scientifiques, 1961.

[Ehr] Ehresmann, C., *Les Connexions Infinitésimales dans un Espace Fibré Différentiable* in *Œvres Complètes et Commentées*, parties I-1, I-2: suppléments au volume 24: Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Amiens, 1983, S. 179-205.

[Fi] Fischer, G., *Complex Analytic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[GIT] Mumford, D., Fogarty, J., Kirwan, F., *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[GH] Gerritzen, L., Herrlich, F., *The Extended Schottky Space*, Journal für reine und angewandte Mathematik 389, 1988, S. 190-208.

[GR] Grauert, H.; Remmert, R., *Komplexe Räume*, Mathematische Annalen 136, 1958, S. 245-318

[Har] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[He] Herrlich, F., *The Extended Teichmüller Space*, Mathematische Zeitschrift 203, 1990, S. 279-291.

[HL] Hain, R.; Looijenga, E., *Mapping Class Groups and the Moduli Space of Curves*, Algebraic Geometry: Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA, July 9-29, 1995, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 62 (Part 2), American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, S. 97-142.

[Hol] Holmann, H., *Konstruktion und Theorie komplexer Räume* in Behnke, H.; Thullen, P., *Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Springer-Verlag, Berlin, 1970, S. 37-48.

[KK] Kaup, L.; Kaup, B.; *Holomorphic Functions of Several Variables*, Walter de Gruyter, Berlin, 1983.

[LS] Lyndon, R.; Schupp, P., *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Nag] Nag, S., *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[Pik] Pikaart, M., *Moduli Spaces of Curves: Stable Cohomology and Galois Covers*, Dissertation, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Rijks Universiteit Utrecht, Utrecht, 1997.

[PJ] Pikaart, M; de Jong, A. J., *Moduli Space of Curves with Non-Abelian Level Structure* in *The Moduli Space of Curves: Proceedings of the Conference Held on Texel Island, Netherlands*, Birkhäuser, Basel, 1995, S. 483-509.

[Ser] Serre, J.-P., *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique* in *Œvres, Collected Papers*, Volume I: 1949-1959, Springer Verlag, Berlin, 1986, S. 402-443.

[SGA] Grothendieck, A., *Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1960/61 SGA 1: Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Jan Dirk Mayer
Geburtstag und -ort:	11. Januar 1971 in Stuttgart Bad-Canstatt

Schulausbildung:

1977-1980	Grundschule „De Kattenbosch“ in Rosmalen, Niederlande
1980-1981	Grundschule „Ravenscroft“ in Raleigh, North Carolina, U.S.A.
1981-1982	Grundschule „North Ridge“ in Raleigh
1982-1985	„Martin Middle School“ in Raleigh
1985-1989	„Enloe High School“ in Raleigh
1989	High School Abschluss
1990	Anerkennung der amerikanischen Ausbildung als dem Abitur gleichwertig.

Studium:

1988-1990	North Carolina State University in Raleigh mit Hauptfächern Mathematik und Physik, z.T. gleichzeitig mit Enloe High School
1990-1996	Universität Karlsruhe mit Hauptfach Diplom Mathematik und Nebenfach Wirtschaftswissenschaften
1992	Vordiplom in Mathematik
1995	Diplomarbeit zum Thema „Kohomologie der entfalteten reellen Lie-Algebra vom Typ G_2 “
1996	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften

Zivildienst:

1996-1997	Zivildienst im Städtischen Klinikum Karlsruhe.

Promotion:

1997-2000	Promotion an der Universität Karlsruhe zum Thema „Morphismen zwischen Modulräumen von Kurven mit verallgemeinerter Teichmüller-Markierung“.