

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6365

**Modellierung zur Ausbreitung von Schmelzen bei
gleichzeitiger Erstarrung**

M. Bunk

Institut für Kern- und Energietechnik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1999

Modellierung zur Ausbreitung von Schmelzen bei gleichzeitiger Erstarrung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Michael Bunk

aus

Friedrichshafen

Tag der mündlichen Prüfung: 01. Juli 1999

Hauptreferent: Dr.-Ing. habil. P. Ehrhard
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. U. Müller
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Diese Arbeit erscheint deckungsgleich als Bericht des
Forschungszentrums Karlsruhe FZKA 6365

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF), jetzt Institut für Kern- und Energietechnik (IKET), des Forschungszentrums Karlsruhe.

Zunächst möchte ich mich besonders bei meinem Hauptreferenten Herrn Dr. P. Ehrhard bedanken, der mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte und mich während meiner Tätigkeit am Institut mit Rat und Tat unterstützte.

Des weiteren gilt mein Dank unserem Institutsleiter Herrn Prof. U. Müller, zum einen für die Aufnahme als Doktorand am Institut, zum anderen für die Übernahme eines Korreferats.

Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Prof. H. Oertel vom Institut für Strömungslehre der Universität Karlsruhe für die Übernahme eines weiteren Korreferats bedanken.

Herrn Prof. D. Riley und Herrn Prof. J. King von der University of Nottingham (UK), Division of Theoretical Mechanics, möchte ich für die gute Zusammenarbeit während zweier Aufenthalte in Nottingham danken.

Weiterhin gilt mein Dank allen Mitgliedern des Instituts. Nicht zuletzt die angenehme Arbeitsatmosphäre, die Bereitschaft zur Diskussion sowie die Hilfestellung bei kleineren und größeren Problemen haben mir die Durchführung dieser Arbeit wesentlich erleichtert.

Modellierung zur Ausbreitung von Schmelzen bei gleichzeitiger Erstarrung

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Ausbreitung viskoser, schlecht wärmeleitender Schmelzen unter dem Einfluß erstarrender dünner Krusten. Die Arbeit gliedert sich in eine separate Betrachtung der Phänomene durch (a) Krustenbildung auf einer horizontalen Bodenplatte und durch (b) Krustenbildung an der freien Grenzfläche zwischen Schmelze und umgebendem Gas.

Basierend auf einer nichtisothermen Dünnschichtapproximation wird die Lösung von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld für eine durch Schwer- und Reibungskräfte dominierte Ausbreitungsströmung hergeleitet. Für das Volumen der Schmelze gilt $V \propto \tau^\alpha$. Typische Ausbreitungsströmungen werden durch verschiedene Exponenten α charakterisiert. Zur Lösung werden Ähnlichkeitstransformationen und alternativ numerische Verfahren verwendet.

Bei der Modellierung einer Kruste auf der Bodenplatte erfolgt die Erstarrung bei einer konstanten Erstarrungstemperatur, die Freisetzung von Latentwärme kann für die betrachteten Schmelzen vernachlässigt werden. Für schlecht wärmeleitende Schmelzen zeigt sich für kurze Zeiten lediglich ein schwacher Einfluß der Kruste auf die Ausbreitung der Schmelze. In erster Linie führt die Bodenkruste zu einer Reduzierung der antreibenden Druckdifferenz und somit zu einer Verlangsamung der Schmelze. Für große Zeiten teilt sich der Einfluß einer erstarrenden Bodenkruste in zwei Bereiche auf. Für $\alpha < 7/4$ kann mit einem Anhalten der Schmelze gerechnet werden, wohingegen für $\alpha \geq 7/4$ mit keinen limitierenden Bedingungen für die Ausbreitung der Schmelze zu rechnen ist.

Die Modellierung einer erstarrenden Kruste an der freien Grenzfläche erfolgt entkoppelt von der Lösung des Temperaturfeldes. Für zwei verschiedene Modelle, horizontal fixierte Krusten und freischwimmende Krusten, wird der kinematische Einfluß einer erstarrten dünnen Kruste an der freien Grenzfläche untersucht. Fixierte Krusten führen zu einer Erhöhung der viskosen Reibung und verzögern die Ausbreitung wesentlich. Für freischwimmende Krusten finden sich zwei unterschiedliche Bereiche. Für $\alpha < 4/3$ führt eine freischwimmende Kruste an der freien Grenzfläche zu einer leichten Verzögerung der Ausbreitung, während die Ausbreitung für $\alpha > 4/3$ leicht beschleunigt wird.

Spreading of solidifying melts

Abstract

In the present report an analytical model is presented which captures the influence of thin solidified crusts onto the spreading flow of a viscous melt of poor thermal conductivity. In the report we separately discuss (a) crust formation on the horizontal bottom plate and (b) crust formation at the free interface between melt and ambient gas.

Based on nonisothermal lubrication theory we derive solutions for the velocity and temperature fields of a spreading flow in the viscous/gravitational regime. For the volume we use the general law $V \propto \tau^\alpha$. Thus, typical spreading flows are characterized by the exponent α . Solutions are found either by similarity transformation or numerically by engaging the method of lines.

In the model for crusting on a horizontal bottom plate, solidification occurs at a constant solidification temperature and liberation of latent heat remains negligible for these particular melts. Bottom crusting of melts with poor thermal conductivity for short times shows a weak influence onto the spreading. With increasing crust thickness we find a retardation of the spreading, essentially caused by the reduced driving pressure head. For long times the spreading approaches a complete stop for $\alpha < 7/4$. For $\alpha \geq 7/4$, in contrast, the influence of bottom crusting will not lead to a stop of the spreading.

Top crusting at the free interface between melt and ambient gas is modeled decoupled from the temperature field. For two models, namely fixed and free drifting crusts, the kinematic influence of the top crust onto the spreading is discussed. Fixed crusts will lead to increased viscous dissipation and subsequently result in a significant slow down of the spreading. For free drifting crusts the influence is weak. For $\alpha < 4/3$ we find a retardation of the spreading flow, whereas for $\alpha > 4/3$ free drifting crusts will lead to a slight acceleration of the spreading.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	2
1.3	Problemstellung	3
1.4	Stand des Wissens	4
1.5	Vorgehensweise bei der Modellierung erstarrender Krusten	10
2	Grundgleichungen	11
2.1	Dimensionsbehaftete Darstellung	11
2.2	Dimensionslose Darstellung	11
2.3	Dünnschichtapproximation	13
2.4	Volumenbedingung	14
3	Die isotherme Ausbreitung	15
3.1	Kinematische und dynamische Randbedingungen	15
3.2	Geschwindigkeits- und Druckfeld	16
3.3	Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$	17
3.3.1	Ähnlichkeitstransformation	17
3.3.1.1	Analytische Lösungen für $\tilde{H}(\xi)$	18
3.3.1.2	Numerische Lösung für $\tilde{H}(\xi)$	19
3.3.1.3	Approximationen für $\tilde{H}(\xi)$	19
3.4	Ergebnisse	20
3.4.1	Position der freien Grenzfläche - $H(X, \tau)$	21
3.4.1.1	Lösung für $\tilde{H}(\xi)$	21
3.4.1.2	Lösung für $H(X, \tau)$	23
3.4.2	Geschwindigkeitsfeld	23

4	Die nichtisotherme Ausbreitung - keine Krustenbildung	28
4.1	Thermische Randbedingungen	28
4.2	Angepaßte asymptotische Entwicklung	29
4.2.1	Äußere Lösung	30
4.2.2	Innere Lösung	31
4.3	Numerische Lösung des Temperaturfeldes	33
4.3.1	Transformation $(X, Z) \rightarrow (\xi, \zeta)$	34
4.3.2	Lösung der transformierten Energiegleichung	34
4.4	Ergebnisse	37
4.4.1	Angepaßte asymptotische Entwicklung	37
4.4.2	Gültigkeitsbereich der angepaßten asymptotischen Entwicklung . . .	39
4.4.3	Vergleich numerische Lösung - angepaßte asymptotische Entwicklung	39
4.4.4	Wärmeverluste an der freien Grenzfläche	42
5	Krustenbildung an der Bodenplatte	46
5.1	Grundidee	46
5.2	Modellierung der Kruste $S(X, \tau)$	47
5.3	Kinematische und dynamische Randbedingungen	50
5.4	Geschwindigkeits- und Druckfeld	50
5.5	Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$ - allgemeine Formulierung	50
5.6	Strategien zur Formulierung von $S(X, \tau)$	51
5.7	Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$	52
5.7.1	Ähnlichkeitstransformation	53
5.7.1.1	Numerische Lösung für $\tilde{H}_1(\xi_1)$ und $\tilde{G}_1(\xi_1)$	54
5.7.2	Numerische Lösung der Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$	55
5.7.2.1	Transformation $(X, \tau) \rightarrow (\xi, \tau)$	55
5.7.2.2	Lösung der transformierten Evolutionsgleichung	57
5.7.2.3	Shooting-Methode für $A_1(\tau)$	59
5.8	Ergebnisse	59
5.8.1	Position der freien Grenzfläche - $H_1(X, \tau)$	60
5.8.1.1	Lösung für $\tilde{H}_1(\xi_1)$	60

5.8.1.2	Einfluß des Parameters C_{mS}	60
5.8.1.3	Lösung für $H_1(X, \tau)$	62
5.8.2	Geschwindigkeitsfeld	63
5.8.3	Konvergenz der iterativen Lösung	66
5.8.4	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	70
5.8.5	Wärmeabfuhr in die Bodenplatte	72
6	Krustenbildung an der freien Grenzfläche	74
6.1	Ausbreitungsszenarien	75
6.2	Kinematische und dynamische Randbedingungen	76
6.3	Geschwindigkeits- und Druckfeld	79
6.4	Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$	80
6.4.1	Ähnlichkeitstransformation	80
6.4.1.1	Analytische Lösungen für $\tilde{H}(\xi)$	81
6.4.1.2	Numerische Lösung für $\tilde{H}(\xi)$	82
6.4.1.3	Approximation für $\tilde{H}(\xi)$	82
6.5	Ergebnisse	83
6.5.1	Position der freien Grenzfläche - $H(X, \tau)$	83
6.5.1.1	Lösung für $\tilde{H}(\xi)$	83
6.5.1.2	Lösung für $H(X, \tau)$	87
6.5.2	Geschwindigkeitsfeld	88
7	Zusammenfassung und Ausblick	97
A	Gültigkeitsbereich der verwendeten Dünnschichtapproximation	101
B	Abschätzung des Fehlers der quasistationären Näherung $\Theta_\tau = 0$	103
C	Einfluß der Latentwärme	108
D	Anmerkungen zum verwendeten numerischen Verfahren	110
	Literaturverzeichnis	111

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Ausbreitung flüssiger Schmelzen unter dem Einfluß gleichzeitiger Erstarrung hat einen weiten Anwendungsbereich in der Geophysik und der Reaktortechnik. Beispiele hierfür sind zum einen die Ausbreitung flüssiger Lava nach einem Vulkanausbruch, zum anderen die Ausbreitung einer Kernschmelze nach einem schweren Kernschmelzunfall. Bezüglich der Ausbreitung einer Lavaschmelze stellt sich die Frage, ob ein Lavastrom Städte oder Dörfer in der Nähe des Vulkans erreicht, oder ob die Erstarrung der Schmelze die Ausbreitung rechtzeitig stoppt. Im Gegensatz dazu stellt sich bei der Anwendung in der Reaktortechnik die umgekehrte Frage. Hier muß eine ausreichend große Ausbreitungsfläche bedeckt werden, um nach der Erstarrung die Kühlung der Kernschmelze und die sichere Abfuhr der Nachzerfallswärme zu gewährleisten. Gelingt dies nicht, können Anhäufungen von Schmelze zur Erosion des Fundaments und damit zum Austritt des Inventars aus dem Containment führen. Abbildung 1.1 zeigt die Skizze eines sogenannten Core-catchers. Er besteht im wesentlichen aus einer Auffangeinrichtung unterhalb des Reaktordruckbehälters (RDB). Sie dient zunächst zur Rückhaltung der flüssigen Schmelze nach einem schweren Kernschmelzunfall. Durch die freigesetzte Nachzerfallswärme heizt sich dort die Schmelze auf und führt zum Durchschmelzen des Tores. Auf der Ausbreitungsfläche soll sich die Schmelze dann möglichst vollständig ausbreiten, um dadurch eine effiziente Kühlung zu gewährleisten.

Abhängig von der Temperatur, der Viskosität und der Zusammensetzung der Schmelze beim Öffnen des Tores kann die Ausbreitung durch drei verschiedene Effekte bestimmt sein:

- durch Trägheitskräfte dominierte Ausbreitung,
- durch Reibungskräfte dominierte Ausbreitung,
- durch Krustenbildung dominierte Ausbreitung.

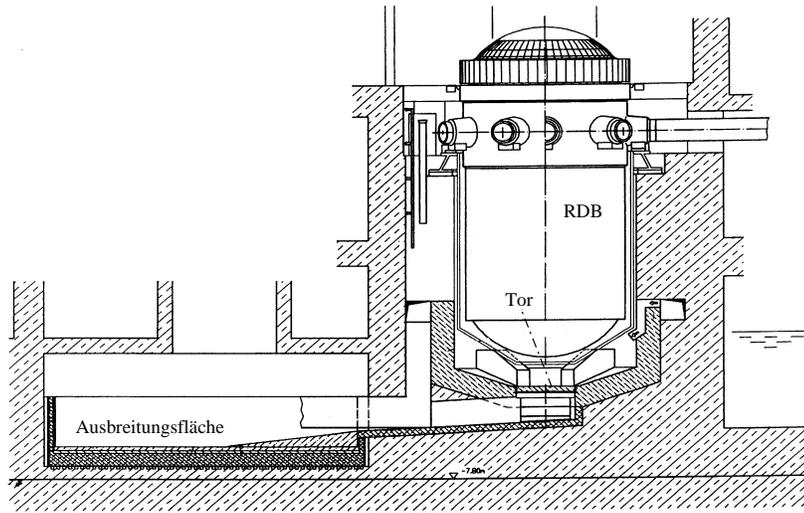


Abbildung 1.1: Skizze eines Core-catchers.

Die durch Trägheitskräfte dominierte Ausbreitung führt hinsichtlich einer sicheren Kühlbarkeit der Schmelze zu keinen kritischen Bedingungen. Die Schmelze wird die gesamte Ausbreitungsfläche bedecken und somit eine effektive Kühlung ermöglichen. Im Gegensatz dazu muß bei der durch Reibungskräfte oder Krustenbildung dominierten Ausbreitung mit einer Verzögerung der Schmelze gerechnet werden. Dies kann zu einer nur teilweisen Bedeckung der Ausbreitungsfläche führen, wodurch die sichere Kühlbarkeit der Schmelze in Frage gestellt wird.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Ausbreitung von Schmelzen bei gleichzeitiger Erstarrung. Es geht somit um den Übergang von der durch Reibungskräfte dominierten Ausbreitung zur durch Krustenbildung dominierten Ausbreitung. Es wird eine vorwiegend analytische Beschreibung des Problems gewählt, um einen Einblick in die zugrundeliegende Physik zu erhalten. Für die Auslegung eines Reaktors werden numerische Codes verwendet, welche die Ausbreitung bei Berücksichtigung der dreidimensionalen Reaktorgeometrie simulieren. Zur Verifikation solcher Codes sind zuverlässige Aussagen zur Ausbreitung in einfachen Geometrien unerlässlich. Dies gilt insbesondere für schlecht wärmeleitende Schmelzen, da hier die numerische Auflösung des thermischen Feldes nur mit enormem Aufwand möglich ist. Die vorliegende Modellierung soll deshalb einerseits die Verifikation der Codes ermöglichen. Andererseits kann das Modell auch zur vereinfachten, analytischen Behandlung erstarrender Schmelzen in den Code implementiert werden.

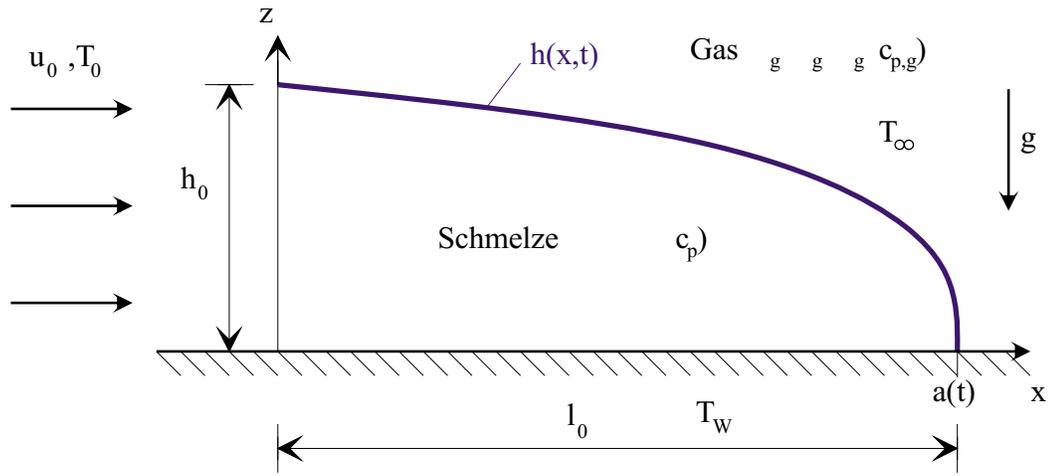


Abbildung 1.2: Skizze einer Ausbreitungsströmung ohne Krustenbildung.

1.3 Problemstellung

Die Modellierung der Ausbreitung erstarrender Schmelzen trägt im wesentlichen dem kinematischen Einfluß einer erstarrten Kruste auf die Ausbreitung der flüssigen Schmelze Rechnung. In Abbildung 1.2 ist die Skizze einer Ausbreitungsströmung ohne Krustenbildung dargestellt. Die geometrische Form der Ausbreitungsströmung wird durch die Funktion $h(x, t)$ beschrieben. Sie kennzeichnet die Position der freien Grenzfläche. Die Funktion $h(x, t)$ ist nicht explizit bekannt, sondern ist Teil der Lösung des Ausbreitungsproblems. An der Stelle $a(t)$ befindet sich die Kontaktlinie, welche die Front der Ausbreitungsströmung kennzeichnet. Durch die ortsabhängige Schmelzenhöhe $h(x, t)$ entsteht im Schwerfeld g ein horizontaler Gradient des (hydrostatischen) Druckes. Dieser Druckgradient dient als Antrieb für die Ausbreitung der Schmelze. Die Schmelze selbst wird charakterisiert durch die Dichte ρ , die dynamische Viskosität μ , die spezifische Wärmekapazität c_p und die Wärmeleitfähigkeit λ . Im umgebenden Gas herrscht die Temperatur T_∞ . An der Stelle $x = 0$ erfolgt die Zuströmung von heißer Schmelze mit einer charakteristischen Geschwindigkeit u_0 und der Temperatur T_0 . In der horizontalen Richtung erstreckt sich die Ausbreitungsströmung auf einer Bodenplatte der Temperatur T_W über eine charakteristische Länge l_0 , während die vertikale Abmessung durch einen Längenmaßstab h_0 gekennzeichnet ist.

Im Vergleich zur Ausbreitung ohne Krusteneinfluß zeigt Abbildung 1.3 eine Ausbreitungsströmung mit einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche $h(x, t)$. Der Einfluß der Bodenkruste führt in erster Linie zu einer Abnahme der antreibenden hydrostatischen Druckdifferenz. Dieser Einfluß ist für schlecht wärmeleitende Schmelzen schwach. Hinsichtlich einer reaktortechnischen Anwendung kann dies trotzdem zu si-

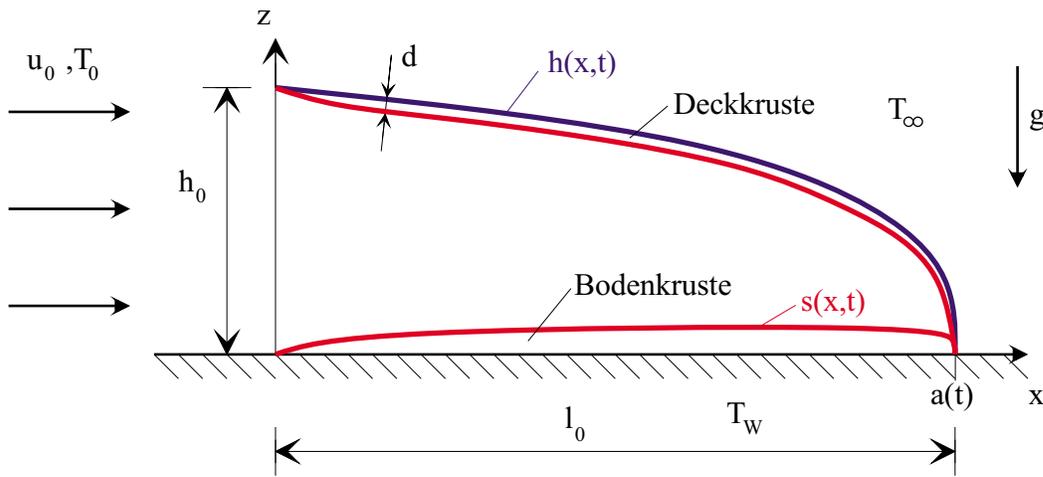


Abbildung 1.3: Skizze einer Ausbreitungsströmung mit Krustenbildung.

cherheitsrelevanten Einflüssen führen. Der wesentliche Einfluß der Krustenbildung an der freien Grenzfläche ist eine Änderung der kinematischen Randbedingungen. Während die freie Grenzfläche bei der Ausbreitung ohne Krusteneinfluß nahezu schubspannungsfrei ist, siehe Abbildung 1.2, führt die Bildung einer erstarrten Kruste zum Anhaften von flüssiger Schmelze an die erstarrte Kruste. In Abhängigkeit von der Wechselwirkung zwischen Kruste und Umgebung sowie von den mechanischen Eigenschaften der Kruste kann dies zu einer deutlichen Beeinflussung der Ausbreitung führen.

1.4 Stand des Wissens

Die Ausbreitung eines Fluids unter dem Einfluß des Schwerfeldes läßt sich in Natur und Technik anhand zahlreicher Beispiele beobachten (Simpson 1997). Erste Untersuchungen beziehen sich auf die Ausbreitung von schwerem Salzwasser in leichtem Frischwasser (O'Brien und Chernov 1934). In jüngster Zeit gewinnt das Problem der Ausbreitung flüssiger Schmelzen im Zusammenhang mit Sicherheitsaspekten für neue Reaktorkonzepte zunehmend an Bedeutung (Ehrhard 1996).

Als Ausgangspunkt für die Untersuchungen zur Ausbreitung flüssiger Schmelzen unter dem Einfluß gleichzeitiger Erstarrung dient die Arbeit von Huppert (1982). Er betrachtet das isotherme, durch Reibungskräfte dominierte Ausbreitungsproblem eines Fluids auf einer ebenen horizontalen Platte in ebenen und achsensymmetrischen Koordinaten. Basierend auf einer Dünnschichtapproximation löst Huppert (1982) die Grundgleichungen als Funktion der freien Grenzfläche $h(x,t)$. Für die Funktion $h(x,t)$ selbst löst er eine nichtlineare

Diffusionsgleichung mittels einer Ähnlichkeitstransformation. Daraus resultiert das Geschwindigkeitsfeld u, w , die Position der freien Grenzfläche $h(x, t)$ sowie die Position der Kontaktlinie $a(t)$. Zusätzlich zu den theoretischen Ergebnissen zeigt Huppert (1982) experimentelle Ergebnisse für die Ausbreitung von zwei Silikonölen unterschiedlicher Viskosität. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist für die achsensymmetrische Ausbreitung sehr gut, für die ebene Ausbreitung führt der Einfluß der Seitenwände zu leichten Abweichungen.

Didden und Maxworthy (1982) untersuchen experimentell die Ausbreitung eines Fluids in ebenen und achsensymmetrischen Koordinaten für den Fall eines konstanten Volumens bzw. eines konstanten Volumenstroms. Didden und Maxworthy (1982) leiten charakteristische Gesetzmäßigkeiten für die Ausbreitung anhand einer Größenordnungsabschätzung der relevanten Kräfte ab. Die verbleibenden Proportionalitätskonstanten werden aus den experimentellen Ergebnissen bestimmt und zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen von Huppert (1982).

Blake (1990) untersucht die achsensymmetrische Ausbreitung eines Kaolin-Breis, welcher eine Bingham-Rheologie besitzt. Er findet aus einer Größenordnungsabschätzung der relevanten Kräfte für die Domhöhe

$$H = 1.4 \left(\frac{Q\tau_0^2}{\rho^2 g^2} \right)^{1/5} t^{\alpha/5} ,$$

und für den Radius der Ausbreitungsströmung

$$R = 0.65 \left(\frac{Q^2 \rho g}{\tau_0} \right)^{1/5} t^{2\alpha/5} .$$

Blake (1990) betrachtet hierbei die Ausbreitung eines Volumens $V = Qt^\alpha$. ρ kennzeichnet die Dichte des Fluids, τ_0 die Fließspannung und g die Erdbeschleunigung. Für den Fall einer konstanten Zuströmung ($\alpha = 1$) zeigt dieses Ergebnis eine befriedigende Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Ein typisches Ergebnis für die Ausbreitung von Bingham-Medien zeigt die Ausbreitung eines konstanten Volumens ($\alpha = 0$). Sobald ein statisches Gleichgewicht zwischen dem antreibenden horizontalen Druckgradient und der im Fluid herrschenden Fließspannung des Bingham-Mediums erreicht wird, breitet sich das Fluid nicht weiter aus. Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht für Partikel an der freien Grenzfläche der Ausbreitungsströmung. Während bei der Ausbreitung Newtonscher Fluide alle Partikel an der freien Grenzfläche in endlicher Zeit zur Kontaktlinie transportiert werden, erreichen Partikel für die achsensymmetrische Ausbreitung eines Bingham-Mediums selbst für lange Zeiten nicht die Kontaktlinie.

Stasiuk, Jaupart und Sparks (1993) finden experimentell für die achsensymmetrische Ausbreitung von Sirup, welcher eine stark temperaturabhängige Viskosität besitzt, daß Effekte

durch Änderung der Viskosität wesentlich die Ausbreitung beeinflussen. Für die Form der freien Grenzfläche finden sie

$$\frac{h}{h_0} = \left(1 - \frac{r}{r_N}\right)^\gamma \quad .$$

Hierbei ist h_0 die Schichthöhe in der Mitte, r_N die Position der Kontaktlinie und h die Schichthöhe an der Position r . Zu Anfang der Ausbreitung finden die Autoren einen Exponenten $\gamma = 1/3$ in Übereinstimmung mit der Arbeit von Huppert (1982). Im Laufe der Ausbreitung stellt sich die Front der Strömung infolge der Viskositäts-erhöhung immer weiter auf. Dies führt zu einem flacheren Verlauf in der Mitte. Als Grenzfall beobachten die Autoren einen Verlauf der durch $\gamma = 1/20$ charakterisiert wird und schließen daraus auf eine deutliche Zunahme der Viskosität in der Nähe der Kontaktlinie. Aus dem zeitlichen Verlauf der Position der Kontaktlinie schließen Stasiuk et al. (1993), daß die Ausbreitung durch eine modifizierte Viskosität μ_b anhand

$$\left(\frac{\mu_b}{\mu_e} - 1\right) = 40 \left(\frac{\mu_s/\mu_e - 1}{Pe}\right)^{0.6} \quad ,$$

beschrieben werden kann. μ_e bezeichnet die Viskosität bei der Anfangstemperatur T_e , μ_s die Viskosität an der kalten Grenzfläche der Temperatur T_s zwischen Schmelze und umgebendem Fluid. Die Pécelet-Zahl Pe kennzeichnet das Verhältnis aus konvektiv übertragener Wärme zum Anteil der Wärmeleitung. Die obige Beziehung ist gültig für $\mu_s/\mu_e \geq 1$ und $Pe \gg 1$.

Für Schmelzen, deren Viskosität während der Erstarrung mit wachsendem Feststoffanteil stark zunimmt, modellieren Sakimoto und Zuber (1995) sowie Foit (1997) die Ausbreitung mit Hilfe einer zeitabhängigen Viskosität der Form

$$\nu = kt^\beta \quad .$$

Die mathematische Formulierung baut auf dem Modell von Huppert (1982) auf. Als Ergebnis finden Sakimoto und Zuber (1995) für $\alpha = 0$ sowie Foit (1997) für $\alpha \geq 0$ selbstähnliche Lösungen, die dem Anstieg der Viskosität in der Zeit Rechnung tragen. Der Viskositätsanstieg führt letztendlich zum Stillstand der Schmelze. Die Autoren betrachten die Schmelze als Newtonsches Medium, mit dem Hintergrund, daß der Anstieg der Viskosität gegenüber dem Anwachsen Nicht-Newtonscher Effekte dominiert. Für lange Zeiten, d.h. für hohe Feststoffanteile, versagt diese Betrachtungsweise. In der Folge verliert die Modellierung der Schmelze als Newtonsches Medium seine Gültigkeit. Eine weitere ernste Einschränkung hinsichtlich temperaturbedingter Effekte besteht in der Tatsache, daß Sakimoto und Zuber (1995) sowie Foit (1997) das Temperaturfeld nicht berechnen. Die Autoren gehen von der Annahme aus, daß die Temperatur innerhalb der Schmelze homogen ist und lediglich von der Zeit abhängt. Diese Vorgehensweise ist für schlecht wärmeleitende Schmelzen, die

wesentlich durch die Ausbildung dünner thermischer Grenzschichten bestimmt sind, nicht zulässig.

Bercovici (1994) betrachtet die Ausbreitung einer Schmelze, deren Viskosität durch

$$\nu(\theta) = \frac{\nu_h \nu_c}{\nu_h + (\nu_c - \nu_h)\theta} \quad ,$$

gekennzeichnet ist. ν_h und ν_c kennzeichnen die Viskosität an der kältesten bzw. wärmsten Stelle. θ steht für die dimensionslose Temperatur. Bercovici (1994) findet für die Profile der freien Grenzfläche kein selbstähnliches Verhalten, wie z.B. Huppert (1982), Sakimoto und Zuber (1995) sowie Foit (1997). Ausgehend von ähnlichen Profilen (Huppert 1982) findet Bercovici (1994), daß die Form der freien Grenzfläche mit fortschreitender Zeit nicht erhalten bleibt. Vielmehr steilt sich analog zu den experimentellen Ergebnissen von Stasiuk et al. (1993) die Front auf, was zu sogenannten 'Pfannkuchen'-Profilen führt. Zusammenfassend findet Bercovici (1994), daß Ausbreitungsströmungen mit konstanter Zuströmung und temperaturabhängiger Viskosität in erster Linie in der vertikalen Richtung fortschreiten, während isotherme Ausbreitungsströmungen hauptsächlich einen Fortschritt in horizontaler Richtung zeigen. Bercovici (1994) verwendet eine quadratische Ansatzfunktion für die Temperatur

$$\theta = 6\Theta \frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad ,$$

um nicht die vollständige Wärmetransportgleichung zu lösen. Somit wird ein parabolischer Verlauf der Temperatur zwischen der Bodenplatte ($z = 0$) und der freien Grenzfläche ($z = H$) angenommen. Im weiteren muß lediglich eine Transportgleichung für die Amplitudenfunktion Θ gelöst werden. Diese Vorgehensweise ist zulässig für $Pe \sim 1$, führt aber im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen von Stasiuk et al. (1993), $Pe \gg 1$, zu einer Überschätzung des Temperatureinflusses auf die Ausbreitung der Schmelze (Bercovici und Lin 1996).

Fink und Griffiths (1990) untersuchen experimentell die achsensymmetrische Ausbreitung von Polyethylenglykol unter dem Einfluß erstarrender Krusten an der freien Grenzfläche der Schmelze. Für fehlenden Krusteneinfluß stimmen die experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Ergebnissen von Huppert (1982) überein. Mit zunehmendem Krusteneinfluß beobachten die Autoren eine Verlangsamung der Ausbreitung. Zur theoretischen Abschätzung für den Einsatz der Krustenbildung nutzen Fink und Griffiths (1990) die Lösung der zeitabhängigen Wärmeleitungsgleichung für einen vorgegebenen zeitabhängigen Wärmestrom an der freien Grenzfläche der Schmelze (Carslaw und Jaeger 1959). Zur Charakterisierung der beobachteten Phänomene leiten sie daraus einen dimensionslosen Parameter

$$\Psi = \frac{t_s U}{H} \quad ,$$

ab. t_s bezeichnet die Zeit bei welcher die Schmelze die Erstarrungstemperatur erreicht, H ist die charakteristische Länge in vertikaler Richtung und U die charakteristische Geschwindigkeit der Ausbreitung. Der Radius an dem die Krustenbildung einsetzt ($r = r_s$), wird von den Autoren als

$$\frac{r_s}{H} \propto \Psi^{1/2} \quad ,$$

angegeben. Für $\Psi < 3$ bildet sich über nahezu die gesamte Ausbreitungslänge eine unregelmäßige Kruste, die durch vereinzelt Aufbrechen und Wiedererstarren gekennzeichnet ist. Die Autoren bezeichnen diesen Bereich als 'pillow-regime'. Im Bereich $3 < \Psi < 13$ bilden sich Risse in radialer Richtung. Es entstehen keilförmige Platten die eine ebene Form besitzen, 'rifting-regime'. Mit wachsenden Werten $13 < \Psi < 30$ wird die entstehende Kruste dünner. Durch die in radialer Richtung abnehmende Strömungsgeschwindigkeit, $u \propto r^{-1}$, und den daraus resultierenden Druckspannungen innerhalb der Kruste entstehen zunehmend Falten, 'folding-regime'. Für sehr große Austrittsraten, $\Psi > 30$, ist Krustenbildung nur noch nahe der Kontaktlinie zu beobachten. Dort bildet die erstarrte Kruste einen Damm, der teilweise aufbricht oder von nachfolgender Schmelze überströmt wird, 'leeve-regime'. Für $\Psi > 35$ ist während der Experimente keine Krustenbildung zu beobachten.

In einer weiterführenden Arbeit untersuchen Fink und Griffiths (1992) die achsensymmetrische und ebene Ausbreitung von Polyethylenglykol auf einer glatten oder rauhen horizontalen Platte. Die Morphologie der sich an der freien Grenzfläche bildenden Kruste kann wiederum anhand des Parameters Ψ charakterisiert werden. Für die achsensymmetrische Ausbreitung finden Fink und Griffiths (1992) eine ähnliche Krustenmorphologie für die glatte und raue Platte. Dies deutet darauf hin, daß die Morphologie der Kruste für die achsensymmetrische Ausbreitung in erster Linie durch die gewählte Geometrie, d.h. durch die azimuthale Dehnung der Kruste beeinflußt wird. Effekte durch eine Wechselwirkung zwischen Kruste und Bodenplatte scheinen von untergeordneter Bedeutung zu sein.

Bei ebener Ausbreitung finden Fink und Griffiths (1992), daß der Ort an dem Krustenbildung einsetzt ($x = x_s$) durch

$$\frac{x_s}{H} \propto \Psi \quad ,$$

beschrieben wird. Für kleine Werte von Ψ finden die Autoren lediglich für die raue Bodenplatte stark unregelmäßige Krustenbildung, 'pillow-regime'. Dies deutet auf eine starke Wechselwirkung zwischen Kruste und Bodenplatte hin. Für die glatte Platte beobachten Fink und Griffiths (1992) bei kleinen Werten von Ψ Rißbildung oberhalb der Zuspießung der heißen Schmelze. Mit wachsendem Ψ finden Fink und Griffiths (1992) sowohl für die raue als auch für die glatte Bodenplatte Rißbildung. Diese Risse sind im Vergleich zur achsensymmetrischen Ausbreitung nicht radial orientiert, sondern quer zur Ausbreitungsrichtung. Dies deutet darauf hin, daß die Rißbildung für den Fall der achsensymmetrischen

Ausbreitung durch azimutale Dehnung der Kruste hervorgerufen wird, während im Fall der ebenen Ausbreitung die Dehnung der Kruste in Ausbreitungsrichtung zur Reißbildung führt. Mit weiter wachsenden Werten von Ψ ist auch für die ebene Ausbreitung ein Auffalten der Kruste, 'folding-regime' und mit weiter wachsenden Ψ Dammbildung an der Kontaktlinie, 'leeve-regime', zu beobachten. Im Vergleich zu den Experimenten mit der glatten Platte sind die Übergangsbereiche durch den Einfluß der rauhen Platte zu kleineren Werten Ψ verschoben.

Griffiths und Fink (1993) versuchen die Ergebnisse von Fink und Griffiths (1990), Fink und Griffiths (1992) anhand einer Größenordnungsabschätzung der relevanten Kräfte zu charakterisieren. Diese Betrachtung führt wegen der komplizierten Wechselwirkung zwischen Kruste, Schmelze und Bodenplatte zu keinen eindeutigen Aussagen bezüglich der zu erwartenden Morphologie. Es wird aber eine Abschätzung der bei der Ausbreitung dominierenden Kräfte gewonnen.

Als Ergänzung zu früheren Arbeiten betrachten Griffiths und Fink (1997) die achsensymmetrische Ausbreitung einer Schmelze mit Bingham-Rheologie unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der freien Grenzfläche. Im Vergleich zur Ausbreitung einer Newtonschen Schmelze (Fink und Griffiths 1990) finden die Autoren eine andere Morphologie der entstehenden Kruste. Die Einteilung der verschiedenen Phänomene erfolgt hier durch einen modifizierten Parameter Ψ_B .

Einen anderen Weg zur Modellierung der Ausbreitung einer erstarrenden Schmelze, unabhängig von der Rheologie des betrachteten Mediums, geht Iverson (1990). Er modelliert das Wachstum eines Lavadoms als Zweikomponenten-Modell. Er betrachtet einen flüssigen, unter Druck stehenden Kern und eine äußere feste Schale. Bedingung für das Wachstum ist ein Gleichgewicht zwischen Überdruck innerhalb der Schale und den in der Schale wirkenden Tangentialkräften. Dadurch spielt die Rheologie der betrachteten Schmelze bei dieser Modellierung keine Rolle. Diese Annahme ist gültig für langsames Wachstum des Lavadoms. Iverson (1990) findet als charakteristischen Parameter

$$D = \sqrt{\frac{\sigma t \varrho g}{p_0}} \quad .$$

σ bezeichnet die Zugfestigkeit, t die Dicke der Kruste, ϱ die Dichte der Schmelze, g die Erdbeschleunigung und p_0 den Vordruck. Für Werte von $D \sim 1$ findet Iverson (1990) eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messungen des Domwachstums am Mount St. Helens.

1.5 Vorgehensweise bei der Modellierung erstarrender Krusten

Wegen der geometrisch bedingten Unterschiede zwischen dem achsensymmetrischen und ebenen Ausbreitungsproblem (Fink und Griffiths 1992) ist eine allgemeine analytische Betrachtung der Ausbreitung unter dem Einfluß erstarrender Krusten nur schwer möglich. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich deshalb auf die Untersuchung der ebenen Ausbreitung.

Bedingt durch die komplexe Wechselwirkung zwischen Kruste und Schmelze soll die Krustenbildung an der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche getrennt untersucht werden. Ausgangspunkt sind die in Kapitel 2 vereinfachten Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für den Fall der durch Reibungs- und Schwerkkräfte bestimmten Ausbreitung.

Die Ausbreitung der Schmelze unter dem Einfluß einer Bodenkruste wird in erster Linie durch eine Abnahme der antreibenden Druckdifferenz zwischen freier Grenzfläche und Bodenkruste bestimmt, siehe Abbildung 1.3. Dies setzt, insbesondere für schlecht wärmeleitende Schmelzen, die Kenntnis der Krustendicke $s(x, t)$ voraus. In Kapitel 3 und 4 wird deshalb das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld für die Ausbreitung einer schlecht wärmeleitenden Schmelze ohne Krusteneinfluß berechnet. In Kapitel 5 wird aus der Lösung dieses Temperaturfeldes ein formaler Zusammenhang zwischen der Position der freien Grenzfläche $h(x, t)$ und der entstehenden Krustendicke $s(x, t)$ hergeleitet. Diese Ergebnisse dienen als Ausgangsbasis zur Modellierung der Ausbreitung von flüssigen Schmelzen über eine an der Bodenplatte erstarrende Kruste. Mit Hilfe eines iterativen Verfahrens gelingt es die Wirkung der Kruste auf das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld korrekt wiederzugeben.

In Kapitel 6 wird der Einfluß einer Kruste an der freien Grenzfläche betrachtet. Hierbei spielt die Krustendicke eine untergeordnete Rolle und die Lösung des Temperaturfeldes erscheint deshalb nicht notwendig. In erster Linie wird die Ausbreitung durch einen Wechsel der kinematischen Randbedingungen an der freien Grenzfläche beeinflusst. Für zwei Modelle, fixierte und freischwimmende Krusten, wird dieser Einfluß auf die Ausbreitung der Schmelze betrachtet.

Kapitel 2

Grundgleichungen

2.1 Dimensionsbehaftete Darstellung

Ausgangsbasis zur Beschreibung der Ausbreitung flüssiger Schmelzen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie (Schlichting und Gersten 1997). Die Schmelze wird als inkompressibles, Newtonsches Fluid behandelt. Temperaturbedingte Auftriebs-
effekte werden vernachlässigt. Für ein ebenes Problem in (x, z) -Koordinaten ergibt sich folgender Satz von Erhaltungsgleichungen:

- Kontinuitätsgleichung

$$u_x + w_z = 0 \quad , \quad (2.1)$$

- Impulsgleichungen

$$\varrho (u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + \mu (u_{xx} + u_{zz}) \quad , \quad (2.2)$$

$$\varrho (w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \mu (w_{xx} + w_{zz}) - \varrho g \quad , \quad (2.3)$$

- Energiegleichung

$$\varrho c_p (T_t + uT_x + wT_z) = \lambda (T_{xx} + T_{zz}) \quad . \quad (2.4)$$

2.2 Dimensionslose Darstellung

Die dimensionslose Darstellung der Erhaltungsgleichungen (2.1-2.4) erlaubt eine Abschätzung der Größenordnung einzelner Terme. Aus Abbildung 1.2 wird deutlich, daß es sich bei der Ausbreitungsströmung um eine dünne Schicht handelt. Es bietet sich deshalb eine

Skalierung mittels separater Skalen h_0, l_0 an. Das dimensionslose Verhältnis beider Skalen ist

$$\epsilon = \frac{h_0}{l_0} \ll 1 \quad . \quad (2.5)$$

Für die Längen x, z folgt,

$$X = \frac{x}{l_0} \quad , \quad (2.6)$$

$$Z = \frac{z}{h_0} \quad . \quad (2.7)$$

Für die Geschwindigkeiten steht nur eine typische Geschwindigkeit u_0 zur Verfügung. Die Geschwindigkeitsskala w_0 folgt aus der Skalierung der Kontinuitätsgleichung. Es ergibt sich

$$U = \frac{u}{u_0} \quad , \quad (2.8)$$

$$W = \frac{w}{\epsilon u_0} \quad . \quad (2.9)$$

Die im Problem vorhandene Zeitskala ist die horizontale Transportzeit

$$\tau = \frac{t}{l_0/u_0} \quad . \quad (2.10)$$

Die Druckskala ergibt sich aus der Skalierung der Impulsgleichungen. Für die durch Reibungskräfte dominierte Ausbreitung wird durch Gravitationskräfte ein Druckgradient erzeugt, der die Strömung beschleunigt. Diese Beschleunigung wird durch Reibungskräfte bilanziert, so daß Reibungs- und Druckkräfte im Gleichgewicht stehen. Die Grundgleichungen in dimensionsloser Form müssen somit für Reibungs- und Druckterme die gleiche Größenordnung ergeben. Aus dieser Forderung ergibt sich für den Druck

$$P = \frac{p}{\mu u_0 l_0 / h_0^2} \quad . \quad (2.11)$$

Die Temperaturskala ist aufgebaut aus der Anfangstemperatur T_0 und der Temperatur der Bodenplatte T_W

$$\Theta = \frac{T - T_W}{T_0 - T_W} \quad . \quad (2.12)$$

Durch diese Skalierung ändert sich die dimensionslose Temperatur, für Wärmeverluste an die Bodenplatte, im Intervall $0 \leq \Theta \leq 1$.

Durch Einführen der dimensionslosen Größen (2.6-2.12) in die Grundgleichungen (2.1-2.4) folgt:

- Kontinuitätsgleichung

$$U_X + W_Z = 0 \quad , \quad (2.13)$$

- Impulsgleichungen

$$\epsilon Re (U_\tau + UU_X + WU_Z) = -P_X + U_{ZZ} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad , \quad (2.14)$$

$$\epsilon^3 Re (W_\tau + UW_X + WW_Z) = -P_Z - \frac{\epsilon Re}{Fr} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad , \quad (2.15)$$

- Energiegleichung

$$\epsilon Re Pr (\Theta_\tau + U\Theta_X + W\Theta_Z) = \Theta_{ZZ} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad . \quad (2.16)$$

Die dimensionslosen Kennzahlen sind

$$\epsilon = \frac{h_0}{l_0} \quad , \quad (2.17)$$

$$Re = \frac{u_0 h_0}{\nu} \quad , \quad (2.18)$$

$$Fr = \frac{u_0^2}{gh_0} \quad , \quad (2.19)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad . \quad (2.20)$$

Der Parameter ϵ kennzeichnet das Verhältnis der separaten Längenskalen h_0 und l_0 . Die Reynolds-Zahl Re bildet ein dimensionsloses Kräfteverhältnis aus Trägheits- zu Reibungskräften. Die Froude-Zahl Fr stellt das dimensionslose Kräfteverhältnis aus Trägheits- zu Schwerkraften dar. Die Prandtl-Zahl Pr , als Verhältnis der Transportkoeffizienten von Impuls und Wärmeenergie, charakterisiert die Eigenschaften der Schmelze.

2.3 Dünnschichtapproximation

Für die durch Reibungskräfte dominierte Ausbreitungsströmung gilt

$$\epsilon \ll 1 \quad , \quad \epsilon Re \ll 1 \quad .$$

Unter diesen Voraussetzungen können die konvektiven Terme in den Impulsgleichungen (2.14,2.15) vernachlässigt werden (Reynolds 1886). Lediglich in der Energiegleichung (2.16) kann wegen der Prandtl-Zahl Pr die Größenordnung der konvektiven Terme noch nicht abgeschätzt werden. Das Gleichungssystem (2.13-2.16) vereinfacht sich somit zu

$$U_X + W_Z = 0 \quad , \quad (2.21)$$

$$0 = -P_X + U_{ZZ} \quad , \quad (2.22)$$

$$0 = -P_Z - \frac{\epsilon Re}{Fr} \quad , \quad (2.23)$$

$$\epsilon Re Pr (\Theta_\tau + U\Theta_X + W\Theta_Z) = \Theta_{ZZ} \quad . \quad (2.24)$$

Anmerkungen zum Gültigkeitsbereich dieser Dünnschichtapproximation finden sich im Anhang A.

2.4 Volumenbedingung

Zur Charakterisierung des Volumens gilt in dimensionsbehafteten Größen

$$b \int_0^{a(t)} h(x, t) dx = bqt^\alpha \quad . \quad (2.25)$$

Der Parameter α kennzeichnet den Typ, b die Breite der Ausbreitungsströmung. Es ergibt sich für

- $\alpha = 0$: die Ausbreitung eines konstanten Volumens,
- $\alpha = 1$: die Ausbreitung mit einem konstanten Volumenstrom an der Stelle $x = 0$.

In dimensionsloser Form, Gleichungen (2.6,2.7,2.10), folgt für die zeitliche Entwicklung des Volumens pro Tiefeneinheit (Y -Richtung)

$$V = \int_0^{A(\tau)} H(X, \tau) dX = C_V \tau^\alpha \quad , \quad (2.26)$$

mit

$$C_V = \frac{q}{h_0 l_0} \left(\frac{l_0}{u_0} \right)^\alpha \quad . \quad (2.27)$$

In dimensionsloser Form bezeichnet $A(\tau)$ die Position der Kontaktlinie, $H(X, \tau)$ die Position der freien Grenzfläche. Für den Volumenstrom pro Tiefeneinheit an der Stelle $X = 0$ folgt

$$\dot{V} = \int_0^{H(0, \tau)} U(X, Z, \tau) dZ = \alpha C_V \tau^{\alpha-1} \quad . \quad (2.28)$$

An der Kontaktlinie selbst gilt

$$X \geq A(\tau) : \quad H(X, \tau) = 0 \quad . \quad (2.29)$$

Kapitel 3

Die isotherme Ausbreitung

Die Lösung des isothermen Ausbreitungsproblems stellt den Ausgangspunkt für die spätere Modellierung der Krustenbildung an der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche dar. Basierend auf einer Dünnschichtapproximation findet Huppert (1982) die Lösung dieses Problems mittels einer Ähnlichkeitstransformation.

3.1 Kinematische und dynamische Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung des Ausbreitungsproblems sind Randbedingungen sowohl für den Druck P als auch für die Geschwindigkeiten U und W notwendig (Kistler und Schweizer 1997).

An der Bodenplatte gilt die Haftbedingung, d.h.

$$X, Z = 0: \quad U = W = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Die kinematische Grenzflächenbedingung für eine undurchlässige Grenzfläche $dH/d\tau = W$ ergibt

$$X, Z = H(X, \tau): \quad W = H_X U + H_\tau \quad . \quad (3.2)$$

Wegen $\mu_g/\mu \ll 1$ und $\varrho_g/\varrho \ll 1$ können Wechselwirkungen zwischen Schmelze und Gas vernachlässigt werden. An der freien Grenzfläche ergibt eine Kräftebilanz in normaler und tangentialer Richtung

$$\text{normal:} \quad p - (\vec{n} \cdot \tau) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{R_m} \quad , \quad (3.3)$$

$$\text{tangential:} \quad (-\vec{n} \cdot \tau + \nabla_{II} \sigma) \cdot \vec{t} = 0 \quad . \quad (3.4)$$

p bezeichnet den Druck an der freien Grenzfläche, σ die Oberflächenspannung, R_m den Krümmungsradius der freien Grenzfläche und τ den viskosen Spannungstensor. \vec{n}, \vec{t} kennzeichnen den Normalen- und Tangentenvektor an der freien Grenzfläche. ∇_{II} steht für den

Divergenzoperator der Tangentialebene

$$\nabla_{II} = \nabla - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla) \quad . \quad (3.5)$$

In dimensionslosen Größen ergibt sich hieraus für $\sigma = \textit{konstant}$

$$X, Z = H(X, \tau) :$$

normal :

$$P = \frac{2\epsilon^2}{(1 + (\epsilon H_X)^2)} \left(\epsilon^2 H_X (H_X U_X - W_X) - H_X U_Z + W_Z \right) - \frac{\epsilon^3}{Ca} \frac{H_{XX}}{(1 + (\epsilon H_X)^2)^{3/2}} \quad , \quad (3.6)$$

tangential :

$$0 = (1 - (\epsilon H_X)^2)(U_Z + \epsilon^2 W_X) - 2\epsilon^2 H_X (U_X - W_Z) \quad . \quad (3.7)$$

Die Kapillaritäts-Zahl $Ca = (\mu u_0)/\sigma$ stellt das dimensionslose Kräfteverhältnis von Reibungs- zu Kapillarkräften dar.

Unter der Annahme separater Längenskalen $\epsilon \ll 1$ und vernachlässigbarer Kapillarkräfte $Ca = \mu u_0/\sigma \gg \epsilon^2$ vereinfachen sich die Randbedingungen (3.1,3.2, 3.6,3.7) zu

$$X, Z = 0 : \quad U = W = 0 \quad , \quad (3.8)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad W = H_X U + H_\tau \quad , \quad (3.9)$$

$$P = 0 \quad , \quad (3.10)$$

$$U_Z = 0 \quad . \quad (3.11)$$

3.2 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Die Lösung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes erfolgt durch einfache Integration der Gleichungen (2.21-2.23). Wegen den Randbedingungen an der freien Grenzfläche sind die Lösungen abhängig von der noch unbekanntem Funktion $H(X, \tau)$.

Die Integration der vertikalen Impulsgleichung (2.23) liefert unter Berücksichtigung der Randbedingung (3.10)

$$P = \frac{\epsilon Re}{Fr} (H - Z) \quad . \quad (3.12)$$

Zusammen mit Gleichung (3.12) und den Randbedingungen (3.8,3.11) folgt aus der horizontalen Impulsgleichung (2.22)

$$U = \frac{\epsilon Re}{Fr} H_X \left(\frac{Z^2}{2} - H Z \right) \quad . \quad (3.13)$$

Die Lösung für die Vertikalgeschwindigkeit W folgt aus der Integration der Kontinuitätsgleichung (2.21). In Verbindung mit der Haftbedingung (3.8) folgt

$$W = \frac{1}{6} \frac{\epsilon Re}{Fr} Z^2 \left(3H_X^2 + H_{XX}(3H - Z) \right) . \quad (3.14)$$

Für die Stromfunktion Ψ

$$U = \Psi_Z \quad , \quad W = -\Psi_X \quad ,$$

folgt zusammen mit den Geschwindigkeiten (3.13,3.14)

$$\Psi = \frac{\epsilon Re}{Fr} H_X \frac{Z^2}{6} (Z - 3H) . \quad (3.15)$$

Hierbei ist die Stromfunktion auf der Bodenplatte ($Z = 0$) zu $\Psi = 0$ normiert.

3.3 Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$

Im vorherigen Abschnitt wurde die Lösung für die Geschwindigkeiten U, W und für den Druck P bestimmt. Alle drei Lösungen sind abhängig von der Funktion $H(X, \tau)$, der Position der freien Grenzfläche. Zur Bestimmung von $H(X, \tau)$ ist die Lösung einer Evolutionsgleichung notwendig. Durch Einsetzen der Geschwindigkeiten (3.13,3.14) in die kinematische Grenzflächenbedingung (3.9) folgt

$$H_\tau - \frac{\epsilon Re}{3Fr} H^2 \left(3H_X^2 + H H_{XX} \right) = 0 .$$

Die notwendigen Rand- und Integralbedingungen folgen aus den Gleichungen (2.26,2.28, 2.29) zusammen mit Gleichung (3.13) für die Horizontalgeschwindigkeit U . Zusammenfassend folgt das System

$$H_\tau - \frac{\epsilon Re}{3Fr} \left(H^3 H_X \right)_X = 0 \quad , \quad (3.16)$$

$$X = 0 : \quad -\frac{\epsilon Re}{3Fr} H^3 H_X = \alpha C_V \tau^{\alpha-1} \quad , \quad (3.17)$$

$$X \geq A(\tau) : \quad H = 0 \quad , \quad (3.18)$$

$$\int_0^{A(\tau)} H dX = C_V \tau^\alpha . \quad (3.19)$$

3.3.1 Ähnlichkeitstransformation

Die Lösung der Evolutionsgleichung (3.16) erfolgt mittels einer Ähnlichkeitstransformation. Die daraus resultierende gewöhnliche Differentialgleichung kann für spezielle Werte $\alpha = 0, 4/3$ analytisch gelöst werden, andernfalls dient ein numerisches Verfahren zur Lösung der

Gleichung. Alternativ können für $\alpha > 0$ Approximationen zur Darstellung der ähnlichen Lösung abgeleitet werden.

Mittels einer neuen Variablen

$$\eta = \frac{X}{C_0} \tau^{-(3\alpha+1)/5} \quad , \quad (3.20)$$

mit $0 \leq \eta \leq \eta_N$, kann $H(X, \tau)$ dargestellt werden als

$$H(X, \tau) = C_1 \tau^{(2\alpha-1)/5} \tilde{H}(\eta/\eta_N) \quad . \quad (3.21)$$

Der Wert η_N beschreibt die Position der Kontaktlinie $A(\tau)$.

In der normierten Ähnlichkeitsvariable

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_N} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad (3.22)$$

folgt für die Gleichungen (3.16-3.18)

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi)_\xi + \frac{3\alpha+1}{5} \xi \tilde{H}_\xi - \frac{2\alpha-1}{5} \tilde{H} = 0 \quad , \quad (3.23)$$

$$\xi = 0 : \quad \tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi = -\frac{\alpha}{\eta_N^{5/3}} \quad , \quad (3.24)$$

$$\xi = 1 : \quad \tilde{H} = 0 \quad . \quad (3.25)$$

Der Wert für η_N , der Position der Kontaktlinie, folgt aus Gleichung (3.19)

$$\eta_N = \left(\int_0^1 \tilde{H} d\xi \right)^{-3/5} \quad . \quad (3.26)$$

Die Konstanten C_0, C_1 ergeben sich zu

$$C_0 = \left(\frac{\epsilon R e}{3 F r} \right)^{1/5} C_V^{3/5} \quad , \quad (3.27)$$

$$C_1 = \left(\frac{3 F r}{\epsilon R e} \right)^{1/5} C_V^{2/5} \eta_N^{2/3} \quad . \quad (3.28)$$

3.3.1.1 Analytische Lösungen für $\tilde{H}(\xi)$

Zur Bestimmung analytischer Lösungen der Gleichung (3.23) dient der folgende Lösungsansatz

$$\tilde{H}(\xi) = c(1 - \xi^a)^b \quad . \quad (3.29)$$

Für spezielle Werte von α ergeben sich zwei analytische Lösungen

$$\alpha = 0 : \quad \tilde{H}(\xi) = \left(\frac{3}{10} \right)^{1/3} (1 - \xi^2)^{1/3} \quad , \quad (3.30)$$

$$\alpha = 4/3 : \quad \tilde{H}(\xi) = 3^{1/3} (1 - \xi)^{1/3} \quad . \quad (3.31)$$

3.3.1.2 Numerische Lösung für $\tilde{H}(\xi)$

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt existieren zwei analytische Lösungen für $\alpha = 0, 4/3$. Für allgemeine Werte von α muß Gleichung (3.23) numerisch gelöst werden. Bei der numerischen Lösung treten nun zwei Schwierigkeiten auf. Zum einen lösen gebräuchliche Integrationsroutinen in der Regel Anfangswertprobleme (Wolfram 1996), zum anderen zeigen die analytischen Lösungen (3.30,3.31) singuläres Verhalten für $\xi \rightarrow 1$. Dies führt bei der numerischen Integration zu zusätzlichen Schwierigkeiten. Zur Lösung beider Probleme kommt eine Shooting-Methode zum Einsatz. Hierdurch wird das Randwertproblem (3.23-3.25) in ein Anfangswertproblem überführt. Zudem erfolgt die numerische Integration innerhalb des Lösungsintervalls $\xi \in [0, \xi_{max}]$ mit $\xi_{max} \rightarrow 1$. Die Randbedingungen an der Stelle $\xi = \xi_{max}$ werden approximiert durch

$$\tilde{H}(\xi) = c(1 - \xi)^{1/3} \quad .$$

Mittels der Shooting-Methode ergibt sich folgendes Anfangswertproblem

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi)_\xi + \frac{3\alpha + 1}{5} \xi \tilde{H}_\xi - \frac{2\alpha - 1}{5} \tilde{H} = 0 \quad , \quad (3.32)$$

$$\tilde{H}(\xi_{max}) = c(1 - \xi_{max})^{1/3} \quad , \quad (3.33)$$

$$\tilde{H}_\xi(\xi_{max}) = -\frac{c}{3} (1 - \xi_{max})^{-2/3} \quad . \quad (3.34)$$

Der Shootingparameter c wird durch die Bedingung

$$\tilde{H}(0)^3 \tilde{H}_\xi(0) = -\alpha \int_0^{\xi_{max}} \tilde{H} d\xi \quad , \quad (3.35)$$

festgelegt.

3.3.1.3 Approximationen für $\tilde{H}(\xi)$

Im Vergleich zu der numerischen Lösung von Gleichung (3.23) bieten Approximationen oft eine ausreichende Genauigkeit und erlauben eine analytische Darstellung der Lösung. Zwei verschiedene Approximationen sollen zur Lösung der Gleichung (3.23) angewandt werden.

Potenzreihenentwicklung um $\xi \rightarrow 1$

Eine Entwicklung der Form

$$\tilde{H}_{exp}(\xi) = c(1 - \xi)^{1/3} \left(1 + c_1(1 - \xi) + c_2(1 - \xi)^2 + \dots \right) \quad , \quad (3.36)$$

liefert eine Approximation für $\xi \rightarrow 1$. Eingesetzt in Gleichung (3.23) ergibt sich in den verschiedenen Ordnungen

$$\mathcal{O}(1) : \quad c \left(\frac{c^3}{9} - \frac{1}{5} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right) = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((1-\xi)^1): \quad & c_1 \left(\frac{28}{9}c^4 - \frac{4c}{5} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right) + \frac{c}{5} \left(\frac{4}{3} - \alpha \right) = 0 \quad , \\ \mathcal{O}((1-\xi)^2): \quad & 7c_2 \left(\frac{10}{9}c^4 - \frac{c}{5} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right) + \frac{35}{3}c^4c_1^2 + \frac{1}{5}cc_1 \left(2\alpha + \frac{7}{3} \right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Parameter

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{3}{5} \right)^{1/3} (1+3\alpha)^{1/3} \quad , \\ c_1 &= \frac{3\alpha - 4}{24(3\alpha + 1)} \quad , \\ c_2 &= -\frac{153\alpha^2 - 288\alpha + 112}{4032(3\alpha + 1)^2} \quad . \end{aligned}$$

Methode der gewichteten Residuen

Eine weitere Approximation, gültig im Intervall $\xi \in [0, 1]$, erfolgt mittels der Methode der gewichteten Residuen (WRM). Die Ansatzfunktion

$$\tilde{H}_{WRM}(\xi) = c(1-\xi)^b \quad , \quad (3.37)$$

ergibt für das Residuum der Gleichung (3.23)

$$R = b(4b-1)c^4(1-\xi)^{4b-2} - \frac{c}{5}(1-\xi)^{b-1}(-1 + \xi(1+b) + \alpha(2 + (3b-2)\xi)) \quad . \quad (3.38)$$

Mit Hilfe der Gewichtungsfunktionen $w_1(\xi) = 1$, $w_2(\xi) = c(1-\xi)^b$ und der Bedingung

$$\int_0^1 (Rw_i) d\xi = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{WRM}(\xi) &= c(1-\xi)^b \quad , \\ b &= \frac{4\alpha - 2 + \sqrt{9 + \alpha(44 + 151\alpha)}}{5 + 45\alpha} \quad , \\ c &= \left(\frac{-347\alpha^2 + 42\alpha - 3 + (1 + 53\alpha)\sqrt{9 + \alpha(44 + 151\alpha)}}{50(1 + 3\alpha)} \right)^{1/3} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4 Ergebnisse

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, stellt die Lösung der Evolutionsgleichung (3.16) das Kernproblem bei der Behandlung der isothermen Ausbreitungsströmung dar. Basierend auf der Lösung für $H(X, \tau)$ können alle weiteren Strömungsgrößen (3.12-3.15) berechnet werden.

3.4.1 Position der freien Grenzfläche - $H(X, \tau)$

Durch die Ähnlichkeitstransformation der Evolutionsgleichung (3.16) reduziert sich die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung (3.23). Die Koeffizienten hängen nicht mehr von den dimensionslosen Kennzahlen ϵ, Re, Fr , sondern ausschließlich von dem Parameter α ab. Die Lösung für $\tilde{H}(\xi)$ charakterisiert also den Typ der Ausbreitungsströmung, während erst bei der Rücktransformation die dimensionslosen Kennzahlen und somit quantitative Aussagen zur betrachteten Strömung eine Rolle spielen.

3.4.1.1 Lösung für $\tilde{H}(\xi)$

Abbildung 3.1 zeigt die Lösung $\tilde{H}(\xi)$ für verschiedene Werte α . Zusätzlich zur numerischen Lösung, siehe Abschnitt 3.3.1.2, sind die analytischen Lösungen (3.30,3.31) und die beiden Approximationen (3.36,3.39) aufgetragen. Der Vergleich zwischen analytischen und numerischen Lösungen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Zudem zeigen die beiden Approximationen (3.36,3.39) eine sehr gute Übereinstimmung für $\alpha > 0$. Für den Wert $\alpha = 0$ scheitern beide Approximationen (3.36,3.39) an den im Vergleich zur analytischen Lösung (3.30) unpassenden Ansatzfunktionen. Der Einfluß des Parameters α auf die Lösung $\tilde{H}(\xi)$ ist deutlich zu erkennen. Für $\alpha = 0$ ergibt sich das Profil für die Ausbreitung eines konstanten Volumens. An der Stelle $\xi = 0$ verschwindet die Horizontalgeschwindigkeit und die Bedingung (3.24) führt auf $\tilde{H}_\xi = 0$. Mit wachsenden Werten α nimmt der Volumenstrom am Eintritt zu. Dadurch bedingt stellt sich das Profil für $\tilde{H}(\xi)$ mit wachsenden Werten α auf, siehe Gleichung (3.24).

Wie in Abbildung 3.1 deutlich wird, liefern für $\alpha > 0$ alle Lösungen $\tilde{H}(\xi)$ annähernd identische Ergebnisse. Eine eindeutigere Bewertung der Genauigkeit kann anhand des Wertes für η_N , Gleichung (3.26), erfolgen. Durch die Integration werden Abweichungen der Approximationen summiert und führen zu einer klareren Darstellung der Genauigkeit der Lösungen. Abbildung 3.2 zeigt η_N für die numerische Lösung, siehe Abschnitt 3.3.1.2, sowie für die beiden Approximationen (3.36,3.39). Die Abweichung für die Potenzreihenentwicklung (3.36) liegt für $\alpha > 0$ in der Größenordnung 10^{-5} . Die Abweichung für (3.39), die Lösung mittels der Methode der gewichteten Residuen, liegt für $\alpha \geq 1$ in der Größenordnung 10^{-4} . Beide Approximationen (3.36,3.39) liefern somit ausreichend genaue Lösungen für die transformierte Evolutionsgleichung (3.23). Die Abweichung der numerischen zur analytischen Lösung für $\alpha = 0, 4/3$ liegt in der Größenordnung 10^{-8} und ist in Abbildung 3.2 nicht dargestellt.

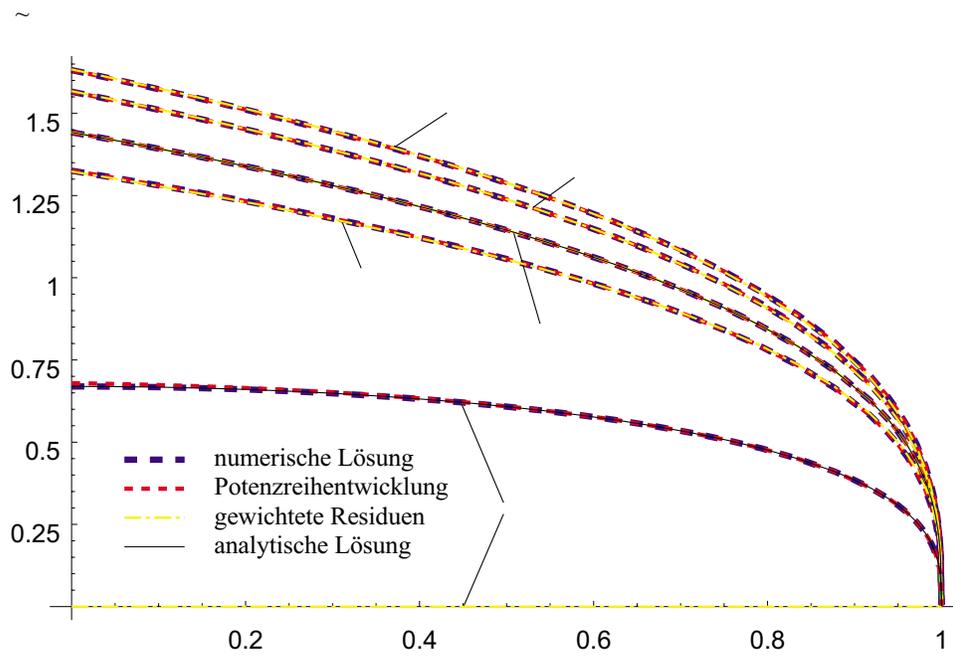


Abbildung 3.1: Lösungen für $\tilde{H}(\xi)$, $\alpha = 0, 1, 4/3, 7/4, 2$.

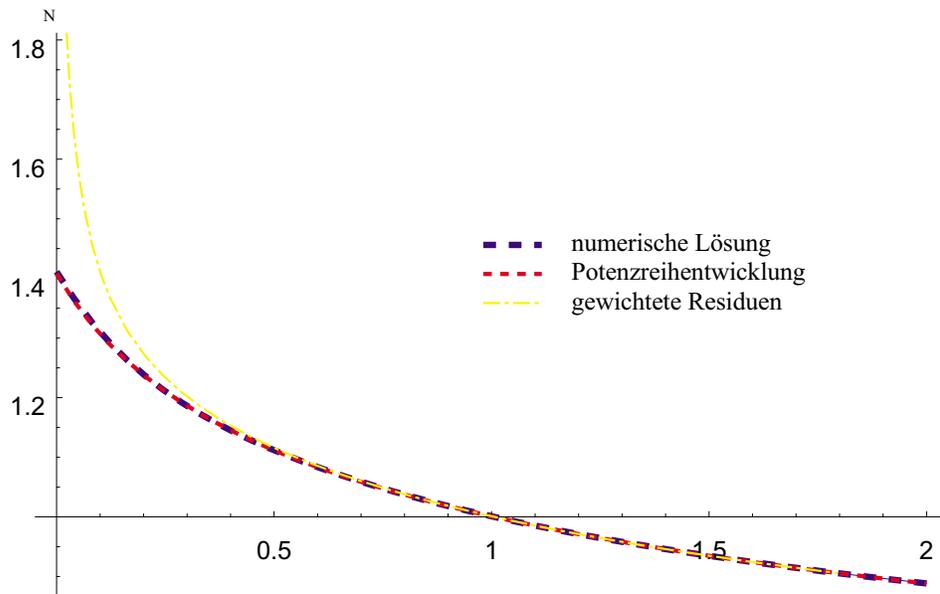


Abbildung 3.2: Werte für η_N basierend auf der numerischen Lösung oder Approximationen für $\tilde{H}(\xi)$.

3.4.1.2 Lösung für $H(X, \tau)$

Im vorherigen Abschnitt wurde deutlich, daß die Lösung für die Formfunktion $\tilde{H}(\xi)$ nur vom Parameter α abhängt. Der Einfluß der dimensionslosen Größen (2.17-2.19) kommt erst bei der Rücktransformation von ξ - nach X, τ -Koordinaten zum tragen.

Der Ansatz (3.21) für die Ähnlichkeitstransformation der Gleichung (3.16) liefert zusammen mit den Längenskalen (3.27, 3.28) und dem Ansatz (3.20) für die Ähnlichkeitsvariable η

$$H(X, \tau) = \left(\frac{3Fr}{\epsilon Re} \right)^{1/5} C_V^{2/5} \eta_N^{2/3} \tau^{(2\alpha-1)/5} \tilde{H} \left(\left(\frac{3Fr}{\epsilon Re} \right)^{1/5} \frac{X}{\tau^{(3\alpha+1)/5} C_V^{3/5} \eta_N} \right) , \quad (3.40)$$

für die Position der Kontaktlinie ergibt sich

$$A(\tau) = \left(\frac{\epsilon Re}{3Fr} \right)^{1/5} C_V^{3/5} \eta_N \tau^{(3\alpha+1)/5} . \quad (3.41)$$

In Abhängigkeit von der geforderten Genauigkeit können für die Formfunktion $\tilde{H}(\xi)$ die in Abschnitt 3.4.1.1 erläuterten Lösungen verwendet werden.

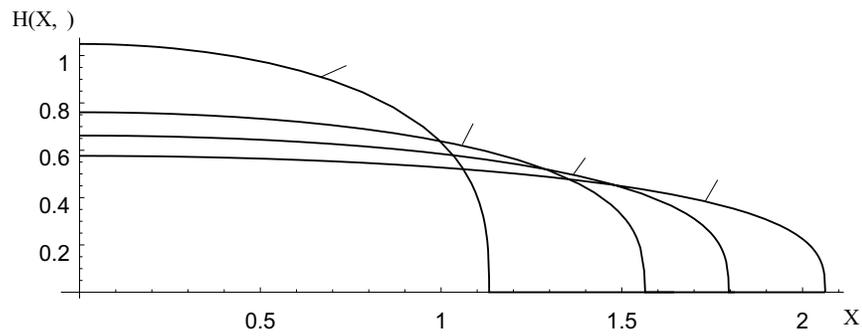
Die Abbildung 3.3 zeigt die Ergebnisse für die Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ für verschiedene Werte des Parameters α . Als Formfunktion $\tilde{H}(\xi)$ wurde die numerische Lösung, siehe Abschnitt 3.4.1.1, verwendet. Ein charakteristisches Ergebnis liefert der Fall $\alpha = 0$, die Ausbreitung eines konstanten Volumens. Während für $\alpha = 1, 7/4, 2$ die Schichthöhe $H(0, \tau)$ in der Zeit zunimmt, sinkt $H(0, \tau) \propto \tau^{-1/5}$ für $\alpha = 0$ in der Zeit ab, Gleichung (3.40). Erst für $\alpha > 1/2$ ist eine Zunahme der Schichthöhe an der Stelle $X = 0$ möglich. Aus Abbildung 3.4 für die Position der Kontaktlinie $A(\tau)$ wird der zeitliche Verlauf $A(\tau) \propto \tau^{(3\alpha+1)/5}$ deutlich.

3.4.2 Geschwindigkeitsfeld

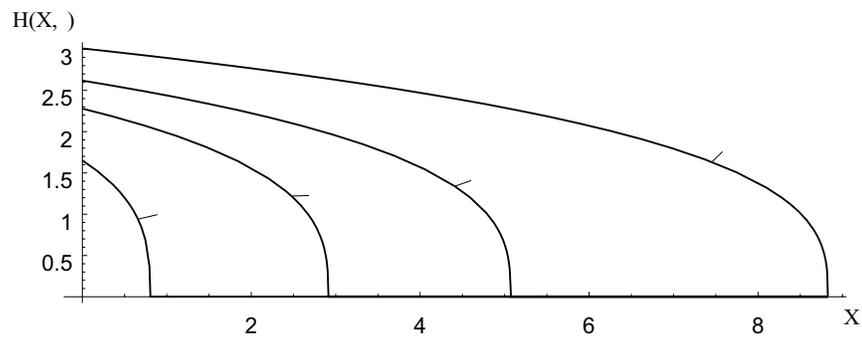
In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, daß sowohl der Druck, der die Ausbreitungsströmung antreibt, als auch die Geschwindigkeiten U, W und die Stromfunktion Ψ von der Funktion $H(X, \tau)$ abhängen. Basierend auf der ähnlichen Lösung für $H(X, \tau)$ können nun alle Strömungsgrößen berechnet werden.

Abbildung 3.5 zeigt Profile der Geschwindigkeiten U, W für verschiedene Werte von α . Für $\alpha = 0$ ergibt sich die Ausbreitung eines konstanten Volumens. Der Volumenstrom (2.28) ist für diesen Fall Null, in der Folge verschwindet die horizontale Geschwindigkeitskomponente U . Für alle weiteren Werte $\alpha > 0$ zeigt sich für $X = 0$ ein dem Volumenstrom entsprechendes Geschwindigkeitsfeld. Für $X = 0.9A(\tau)$ zeigt sich ein in erster Näherung von α unabhängiges Verhältnis von U zu W . Lediglich die Amplitude beider Geschwindigkeiten

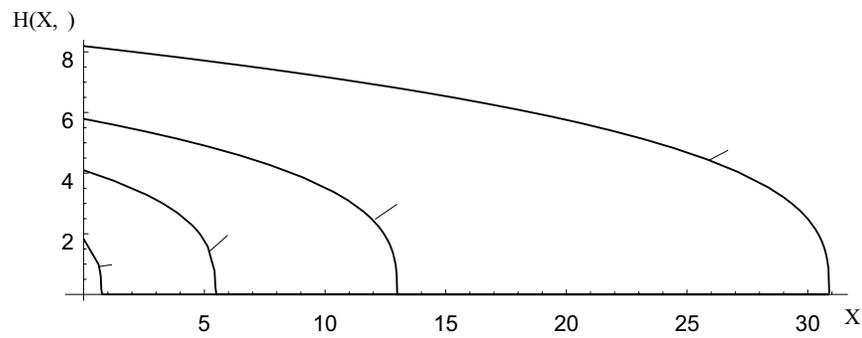
$\alpha = 0$



$\alpha = 1$



$\alpha = 7/4$



$\alpha = 2$

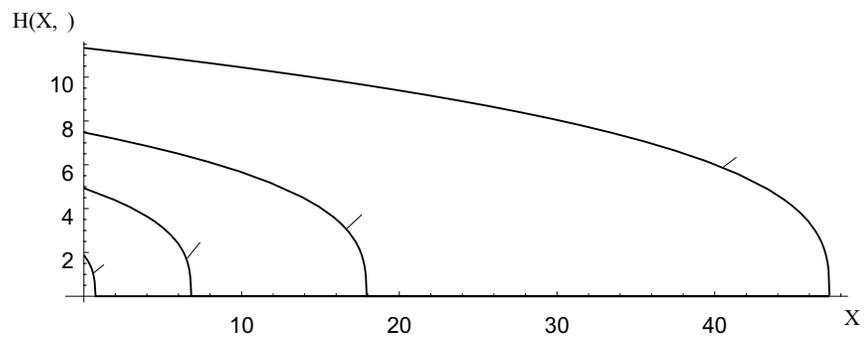


Abbildung 3.3: Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$, ähnliche Lösungen, $\alpha = 0, 1, 7/4, 2$.
Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

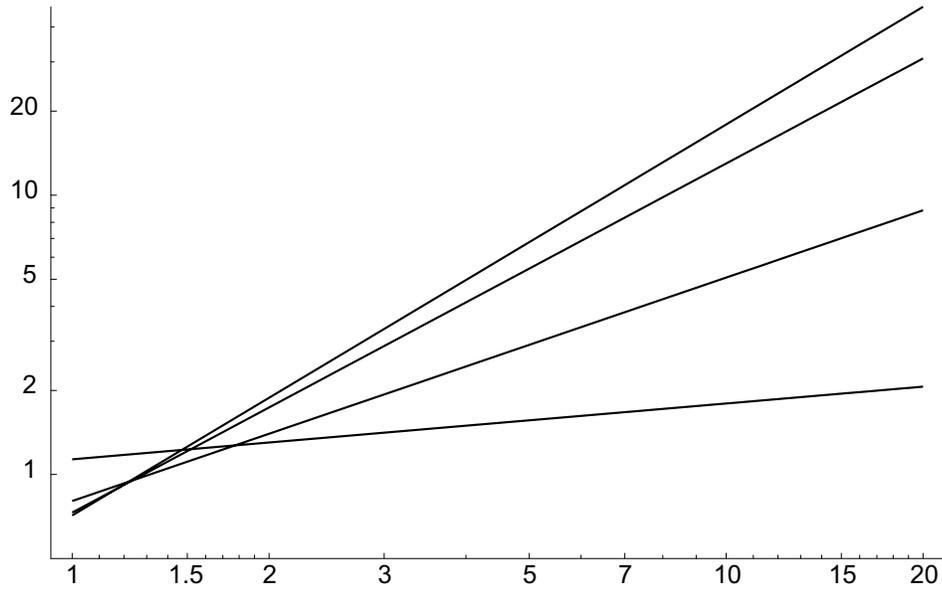


Abbildung 3.4: Position der Kontaktlinie $A(\tau)$, ähnliche Lösungen, $\alpha = 0, 1, 7/4, 2$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

nimmt mit wachsenden Werten von α zu. Weiter wird die Schubspannungsfreiheit $U_Z = 0$ für $Z = H(X, \tau)$ deutlich. Es stellt sich für U ein typisches parabolisches Profil ein.

Abbildung 3.6 zeigt den Verlauf der Stromlinien für verschiedene Werte von α . Wiederum wird der Einfluß des Parameters α deutlich. Für die Ausbreitung eines konstanten Volumens, $\alpha = 0$, verschwindet der Volumenstrom bei $X = 0$, die Stromlinien verlaufen parallel zur Z -Achse. Alle weiteren Abbildungen für $\alpha > 0$ zeigen näherungsweise zur X -Achse parallele Stromlinien für $X = 0$. In diesem Fall dominiert die horizontale Geschwindigkeit U das Stromfeld, siehe auch Abbildung 3.5. Nahe der Kontaktlinie, $X \rightarrow A(\tau)$, gleichen sich die Stromfelder qualitativ einander an. Dieses Verhalten zeigt auch Abbildung 3.5 für $X = 0.9A(\tau)$. Eine weitere auffällige Eigenschaft des Stromfeldes sind Stromlinien die an der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ enden. Sie sind in der Zeitabhängigkeit der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ begründete. Physikalisch gesehen wird der Volumenstrom, der zwischen zwei Linien $\Psi = \textit{konstant}$ fließt, zum Anheben/Absenken der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ benötigt.

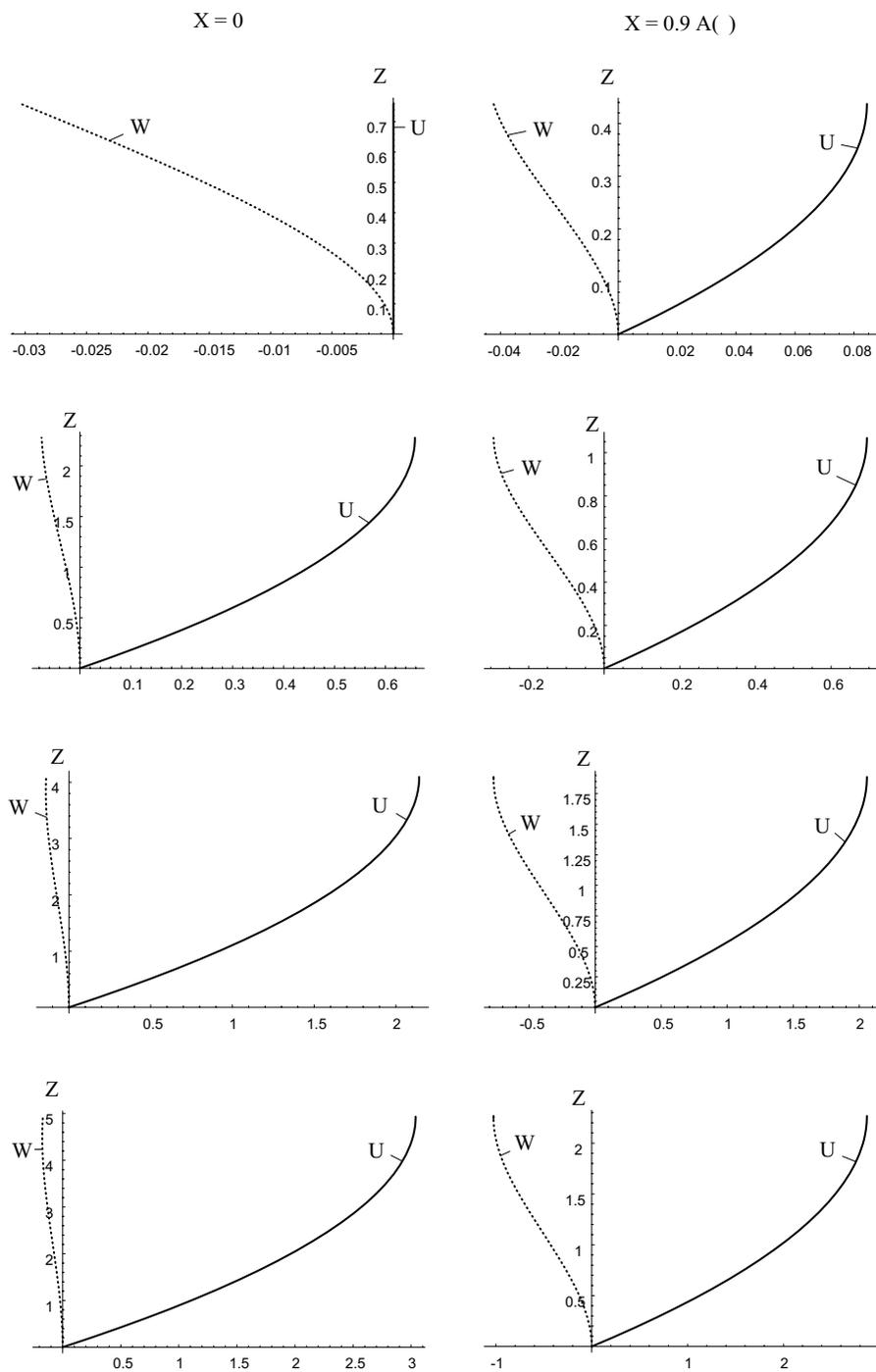


Abbildung 3.5: Geschwindigkeiten U, W an der Stelle $X = 0$ und $X = 0.9A(\tau)$, $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

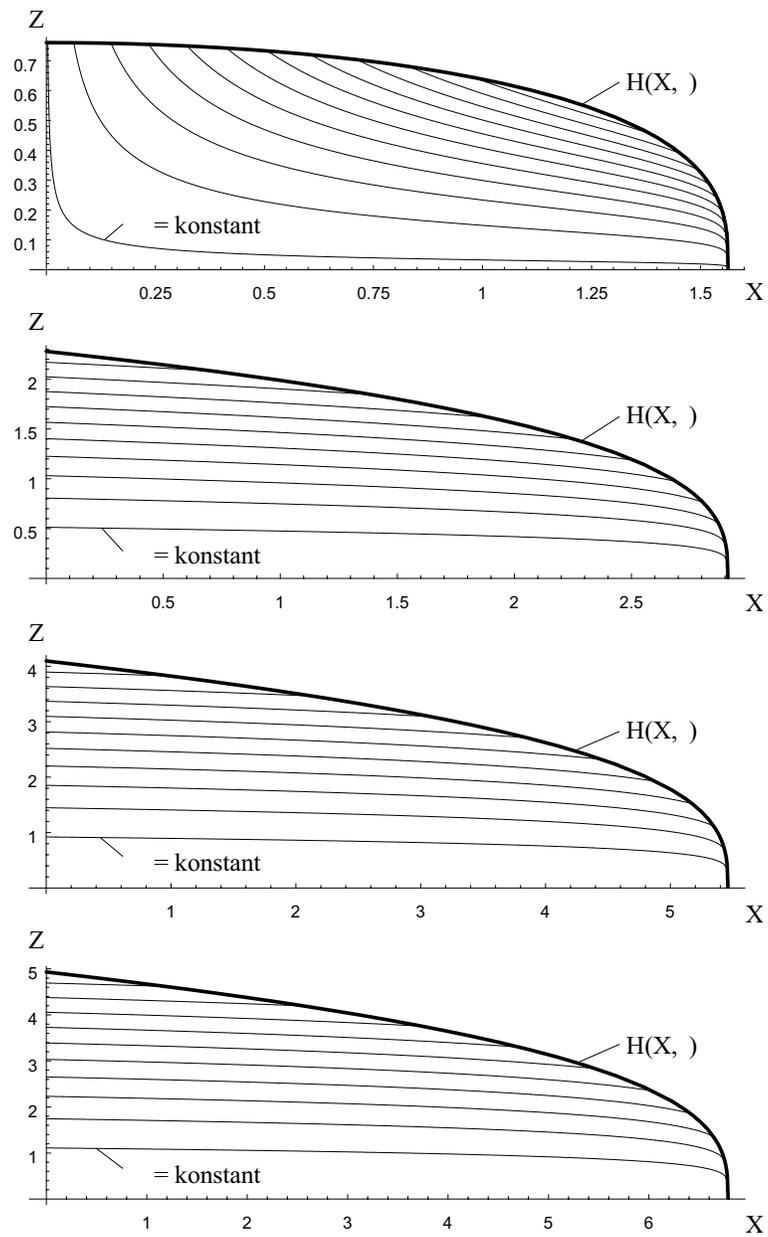


Abbildung 3.6: Stromlinien zur isothermen Ausbreitungsströmung, $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

Kapitel 4

Die nichtisotherme Ausbreitung - keine Krustenbildung

Unter der Voraussetzung temperaturunabhängiger Stoffwerte kann die Lösung des Temperaturfeldes entkoppelt vom Geschwindigkeitsfeld erfolgen. Für spezielle thermische Randbedingungen ist zudem eine analytische Lösung des Temperaturfeldes möglich.

4.1 Thermische Randbedingungen

Die allgemeine Formulierung der thermischen Randbedingungen erfolgt durch Randbedingungen der dritten Art (Özişik 1980). In dimensionsloser Form ergibt sich

$$X, Z, \tau = \tau_0 \quad \Theta = 1 \quad , \quad (4.1)$$

$$X = 0, Z : \quad \Theta_X = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad , \quad (4.2)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \quad , \quad (4.3)$$

$$X, Z = 0 : \quad \Theta = \frac{1}{Bi_l} \Theta_Z \quad , \quad (4.4)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad \Theta - \Theta_\infty = -\frac{1}{Bi_u} \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon H_X)^2}} (\Theta_Z - \epsilon^2 H_X \Theta_X) \quad , \quad (4.5)$$

$$\Theta_\infty = \frac{T_\infty - T_W}{T_0 - T_W} \quad . \quad (4.6)$$

Zum Zeitpunkt $\tau_0 \rightarrow 0$ ist die Schmelze auf der Anfangstemperatur $\Theta = 1$. Bezüglich des Parameters α ist an der Stelle $X = 0$ eine Fallunterscheidung zu treffen. Für $\alpha = 0$ verschwindet die Zuströmung heißer Schmelze, siehe Gleichung (2.28). Wegen der bei $X = 0$ verschwindenden Geschwindigkeit U , siehe auch Abbildung 3.5 und 3.6, ist dort eine

adiabate Randbedingung zu stellen. Im Gegensatz dazu strömt für $\alpha > 0$ kontinuierlich heiße Schmelze der Temperatur $\Theta = 1$ zu. Die beiden Biot-Zahlen

$$Bi_l = \frac{h_l h_0}{\lambda} \quad , \quad (4.7)$$

$$Bi_u = \frac{h_u h_0}{\lambda} \quad , \quad (4.8)$$

kennzeichnen den Wärmeübergang an der Bodenplatte (Bi_l) und an der freien Grenzfläche (Bi_u). Für $Bi \rightarrow 0$ und $Bi \rightarrow \infty$ ergeben sich die Grenzfälle einer adiabaten oder perfekt wärmeleitenden Berandung.

Unter der Voraussetzung separater Längenskalen, $\epsilon \ll 1$, vereinfachen sich die thermischen Anfangs- und Randbedingungen (4.1-4.5) zu

$$X, Z, \tau = \tau_0 \quad \Theta = 1 \quad , \quad (4.9)$$

$$X = 0, Z : \quad \Theta_X = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad , \quad (4.10)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \quad , \quad (4.11)$$

$$X, Z = 0 : \quad \Theta = \frac{1}{Bi_l} \Theta_Z \quad , \quad (4.12)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad \Theta - \Theta_\infty = -\frac{1}{Bi_u} \Theta_Z \quad . \quad (4.13)$$

4.2 Angepaßte asymptotische Entwicklung

Für große Prandtl-Zahlen, $Pr \gg 1$, deutet sich eine Lösungsmöglichkeit mittels einer koordinatenangepaßten asymptotischen Entwicklung an. Abbildung 4.1 zeigt die Skizze einer Ausbreitungsströmung für den Fall einer isothermen Randbedingung an der Bodenplatte $Bi_l \rightarrow \infty$ sowie einer adiabaten Randbedingung an der freien Grenzfläche $Bi_u = 0$. Die thermischen Anfangs- und Randbedingungen (4.9-4.13) vereinfachen sich zu

$$X, Z, \tau = \tau_0 \quad \Theta = 1 \quad , \quad (4.14)$$

$$X = 0, Z : \quad \Theta_X = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad , \quad (4.15)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \quad , \quad (4.16)$$

$$X, Z = 0 : \quad \Theta = 0 \quad , \quad (4.17)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad \Theta_Z = 0 \quad . \quad (4.18)$$

Aus Abbildung 4.1 wird deutlich, daß der Temperaturanstieg von $\Theta = 0$ an der Bodenplatte auf den Wert $\Theta = 1$ der Kernströmung innerhalb einer sehr dünnen thermischen Grenzschicht erfolgt. Weitergehend erfolgt der Geschwindigkeitsanstieg der horizontalen

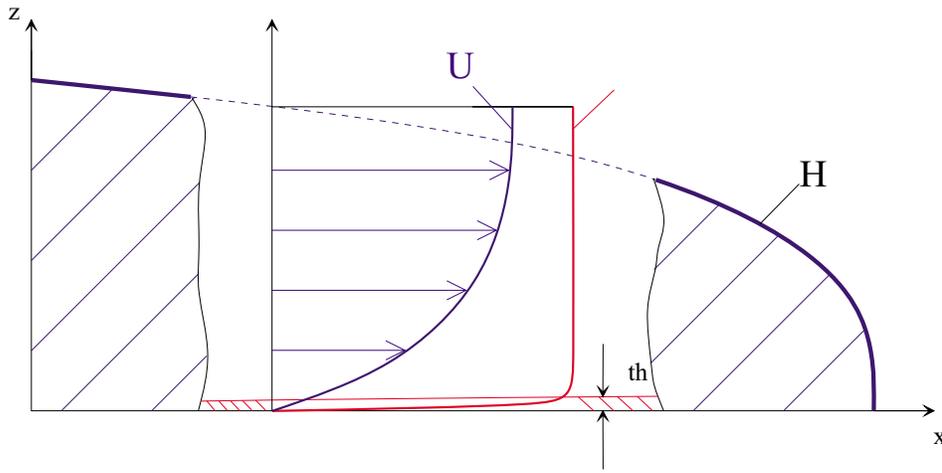


Abbildung 4.1: Skizze zur Ausbreitung einer Schmelze großer Prandtl-Zahl, $Pr \gg 1$.

Geschwindigkeitskomponente U innerhalb der thermischen Grenzschicht in ersten Näherung linear. Als weitere Vereinfachung soll bei der folgenden Betrachtung lediglich das quasistationäre Problem untersucht werden,

$$\Theta_\tau = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Diese Betrachtungsweise liefert hinsichtlich einer reaktortechnischen Anwendung eine konservative Betrachtung des Problems. Der Fehler dieser Approximation wird in Anhang B anhand der Dicke der thermischen Grenzschicht abgeschätzt.

4.2.1 Äußere Lösung

Ausgangspunkt der angepaßten asymptotischen Entwicklung ist die dimensionslose Energiegleichung (2.16) in Verbindung mit der quasistationären Näherung (4.19),

$$\epsilon RePr (U\Theta_X + W\Theta_Z) = \Theta_{ZZ} \quad . \quad (4.20)$$

Innerhalb des Kernbereichs der Ausbreitungsströmung gilt

$$U\Theta_X + W\Theta_Z = \epsilon_1 \Theta_{ZZ} \quad ,$$

mit

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\epsilon RePr} \ll 1 \quad .$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung beinhaltet den konvektiven Wärmetransport innerhalb des Kernbereichs und liefert unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen (4.14-4.16,4.18) in der führenden Ordnung

$$\Theta = \Theta_0 = 1 + \mathcal{O}(\epsilon_1) \quad . \quad (4.21)$$

Die Randbedingung (4.17) kann wegen der Vernachlässigung des diffusiven Terms in der führenden Ordnung nicht eingehalten werden. Innerhalb der thermischen Grenzschicht ist deshalb eine Koordinatenreskalierung zur korrekten Abschätzung der Größenordnung des diffusiven Terms notwendig.

4.2.2 Innere Lösung

Innerhalb der thermischen Grenzschicht ist es notwendig den diffusiven Wärmetransport in Gleichung (4.20) zu berücksichtigen. Nur so kann die Randbedingung (4.17) eingehalten werden. Für diesen Fall ist die Skalierung der Z -Koordinate mit dem Längenmaßstab h_0 nicht relevant, denn für die thermische Grenzschichtdicke gilt

$$\delta_{th0} \ll h_0 \quad .$$

Zur korrekten Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme in Gleichung (4.20) wird die vertikale Koordinate Z mit der thermischen Grenzschichtdicke gestreckt. Wie in Abbildung 3.5 deutlich wird verläuft die Horizontalgeschwindigkeit U innerhalb der dünnen thermischen Grenzschicht $\delta_{th0} \ll h_0$ in erster Näherung linear. Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.21) ergibt sich damit für die Längen und Geschwindigkeiten in reskalierten Koordinaten

$$\hat{X} = X \quad , \quad (4.22)$$

$$\hat{Z} = \frac{h_0}{\delta_{th0}} Z \quad , \quad (4.23)$$

$$\hat{U} = \frac{h_0}{\delta_{th0}} U \quad , \quad (4.24)$$

$$\hat{W} = \left(\frac{h_0}{\delta_{th0}} \right)^2 W \quad . \quad (4.25)$$

Durch Festlegung der Skala

$$\delta_{th0} = \frac{h_0}{(\epsilon Re Pr)^{1/3}} \quad , \quad (4.26)$$

wird Gleichung (4.20) überführt in

$$\hat{U} \hat{\Theta}_{\hat{X}} + \hat{W} \hat{\Theta}_{\hat{Z}} = \hat{\Theta}_{\hat{Z}\hat{Z}} \quad . \quad (4.27)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\hat{X} = 0, \hat{Z} : \quad \hat{\Theta}_{\hat{X}} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0 \quad , \quad (4.28)$$

$$\hat{\Theta} = 1 \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \quad , \quad (4.29)$$

$$\hat{X}, \hat{Z} = 0 : \quad \hat{\Theta} = 0 \quad , \quad (4.30)$$

$$\hat{X}, \hat{Z} \rightarrow \infty : \quad \hat{\Theta} \rightarrow 1 \quad . \quad (4.31)$$

Die Randbedingung (4.31) stellt die Anpassung an die äußere Lösung (4.21) dar.

Für die Stromfunktion (3.15) ergibt sich in reskalierten Koordinaten

$$\hat{\Psi} = \frac{(\epsilon Re)^{1/3}}{6FrPr^{2/3}} \hat{H}_{\hat{X}} \hat{Z}^2 (\hat{Z} - 3\hat{H}) \quad . \quad (4.32)$$

Wegen der dünnen thermischen Grenzschichten kann $\hat{\Psi}$ in eine Taylor-Reihe um $\hat{Z} = 0$ entwickelt werden,

$$\hat{\Psi} \simeq \hat{\Psi}|_{\hat{Z}=0} + \hat{Z} \cdot \hat{\Psi}_{\hat{Z}}|_{\hat{Z}=0} + \frac{\hat{Z}^2}{2} \cdot \hat{\Psi}_{\hat{Z}\hat{Z}}|_{\hat{Z}=0} \quad . \quad (4.33)$$

Aus

$$\hat{U} = \hat{\Psi}_{\hat{Z}} \quad , \quad \hat{W} = -\hat{\Psi}_{\hat{X}} \quad ,$$

folgt damit für die Geschwindigkeiten \hat{U}, \hat{W}

$$\hat{U} \simeq -\frac{(\epsilon Re)^{1/3}}{FrPr^{2/3}} \hat{H}_{\hat{X}} \hat{Z} \quad , \quad (4.34)$$

$$\hat{W} \simeq \frac{(\epsilon Re)^{1/3}}{FrPr^{2/3}} \frac{\hat{Z}^2}{2} (\hat{H}_{\hat{X}}^2 + \hat{H}_{\hat{X}\hat{X}}) \quad . \quad (4.35)$$

Substitution der Geschwindigkeiten (4.34) und (4.35) in Gleichung (4.27) liefert

$$\frac{(\epsilon Re)^{1/3}}{FrPr^{2/3}} \hat{Z} \left(-\hat{H}_{\hat{X}} \hat{\Theta}_{\hat{X}} + \frac{1}{2} (\hat{H}_{\hat{X}\hat{X}})_{\hat{X}} \hat{Z} \hat{\Theta}_{\hat{Z}} \right) = \hat{\Theta}_{\hat{Z}\hat{Z}} \quad . \quad (4.36)$$

Durch die Reskalierung wird die thermische Randbedingung (4.13) an der freien Grenzfläche nach $\hat{Z} \rightarrow \infty$ verschoben. Dies ermöglicht einen Lösungsansatz mittels einer Ähnlichkeitstransformation. Durch den Ansatz

$$\hat{\Theta} = F(\varphi) \quad , \quad (4.37)$$

mit

$$\varphi = \left(\frac{(\epsilon Re)^{1/3}}{3FrPr^{2/3}} \right)^{1/3} \hat{Z} \left(\frac{\int_0^{\hat{X}} \sqrt{(-\hat{H}_{\hat{X}})} d\hat{X}^*}{(-\hat{H}_{\hat{X}})^{3/2}} \right)^{-1/3} \quad , \quad (4.38)$$

wird Gleichung (4.36) transformiert in

$$F_{\varphi\varphi} + \varphi^2 F_{\varphi} = 0 \quad .$$

Die Randbedingungen (4.30, 4.31) lauten in transformierter Form

$$\varphi = 0 : F = 0 \quad , \quad (4.39)$$

$$\varphi \rightarrow \infty : F = 1 \quad . \quad (4.40)$$

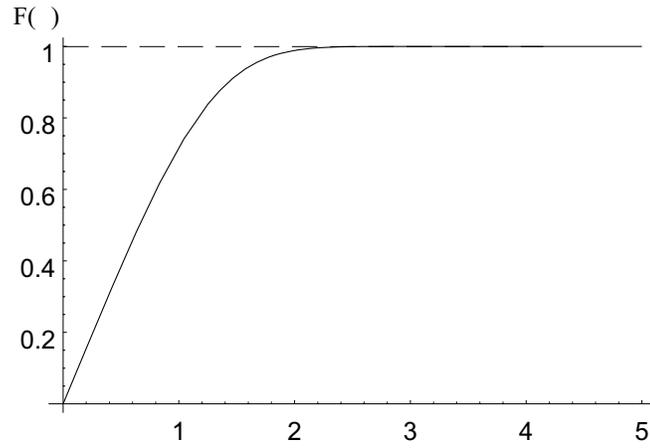


Abbildung 4.2: Ähnliche Lösung des Temperaturfeldes $\Theta = F(\varphi)$.

Unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen lautet die Lösung

$$F(\varphi) = 1 - \frac{\Gamma(1/3, \varphi^3/3)}{\Gamma(1/3)} \quad , \quad (4.41)$$

sie ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Die verbleibenden Randbedingungen (4.28,4.29) an der Stelle $\hat{X} = 0$ können nur in Verbindung mit der Funktion \hat{H} beurteilt werden. Mit den Testfunktionen

$$\alpha = 0 : \quad \hat{H} = (1 - \hat{X}^2)^{1/3} \quad , \quad (4.42)$$

$$\alpha > 0 : \quad \hat{H} = (1 - \hat{X})^{1/3} \quad , \quad (4.43)$$

siehe Abschnitt 3.3, ergibt sich

$$\alpha = 0 : \quad \lim_{\hat{X} \rightarrow 0} \hat{\Theta} = 0 \quad , \quad (4.44)$$

$$\alpha > 0 : \quad \lim_{\hat{X} \rightarrow 0} \hat{\Theta} = 1 \quad . \quad (4.45)$$

Somit sind die beiden Randbedingungen (4.28,4.29) erfüllt.

4.3 Numerische Lösung des Temperaturfeldes

Die asymptotischen Entwicklung des Temperaturfeldes gilt lediglich für die Anfangs- und Randbedingungen (4.14-4.18). Für eine allgemeine Formulierung der thermischen Randbedingungen an der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche ist eine numerische Lösung des Temperaturfeldes notwendig. Zudem erlaubt die numerische Lösung eine Überprüfung der der asymptotischen Entwicklung zugrundeliegenden Vereinfachungen.

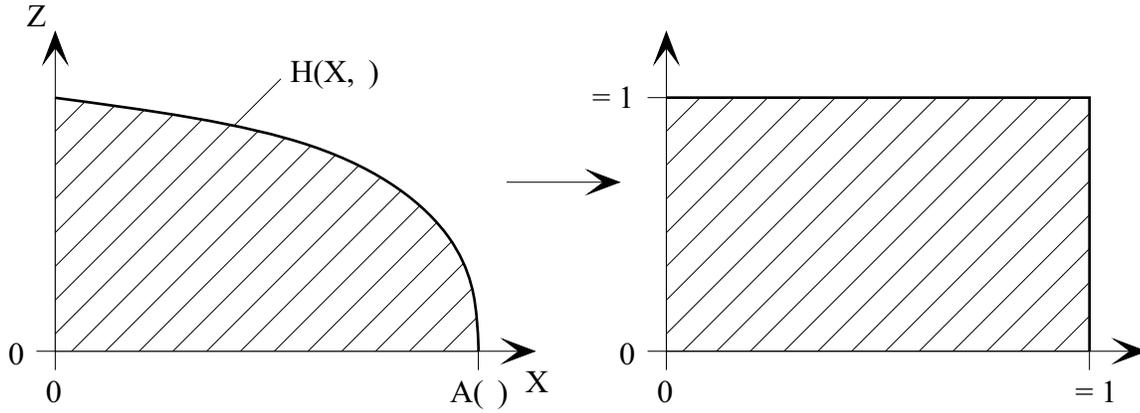


Abbildung 4.3: Koordinatentransformation $(X, Z) \rightarrow (\xi, \zeta)$.

4.3.1 Transformation $(X, Z) \rightarrow (\xi, \zeta)$

Bei der numerischen Lösung für Θ treten zwei Schwierigkeiten auf. Sowohl die freie Grenzfläche als auch die Position der Kontaktlinie variieren in der Zeit. Dadurch wäre zur direkten Lösung des Problems ein numerisches Verfahren basierend auf einem bewegten Gitter notwendig. Abhilfe schafft eine Koordinatentransformation auf eine in der Zeit konstant bleibende Geometrie. Abbildung 4.3 zeigt die verwendete Transformation. Durch den Ansatz

$$\xi = \frac{X}{A(\tau)} \quad , \quad (4.46)$$

$$\zeta = \frac{Z}{H(X, \tau)} \quad , \quad (4.47)$$

wird aus dem anfänglich zeitabhängigen Lösungsgebiet ein Quadrat konstanter Seitenlänge, welches nicht mehr zeitlich variiert. Lediglich der Punkt $\xi = 1$ führt wegen $H(A(\tau), \tau) = 0$ zu einer Singularität $\zeta \rightarrow \infty$ und muß deshalb bei der numerischen Lösung ausgenommen werden.

In transformierten ξ, ζ -Koordinaten lautet die quasistationäre Energiegleichung (4.20)

$$\epsilon Re Pr \left(\frac{H}{A} U (H \Theta_\xi - \zeta H_\xi \Theta_\zeta) + HW \Theta_\zeta \right) = \Theta_{\zeta\zeta} \quad . \quad (4.48)$$

4.3.2 Lösung der transformierten Energiegleichung

Die Grundlage des numerischen Lösungsverfahrens zur Integration der transformierten Energiegleichung (4.48) ist die sogenannte 'method of lines', siehe Abbildung 4.4. Die Integration

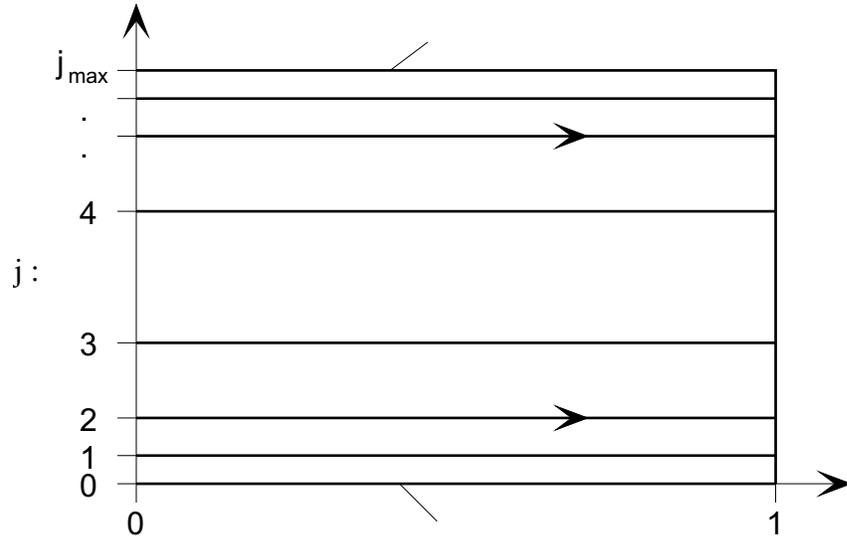


Abbildung 4.4: Skizze zur Lösung des quasistationären Temperaturfeldes $\Theta(\xi, \zeta)$ mittels 'method of lines'.

wird in ξ -Richtung entlang Linien $\zeta = \textit{konstant}$ durchgeführt. Ableitungen in ζ -Richtung werden durch finite Differenzen approximiert. Dies überführt die partielle Differentialgleichung (4.48) in ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Lösung dieses verbleibenden Systems erfolgt mit Standardintegrationsroutinen, siehe Anhang D.

Für den betrachteten Fall $\epsilon Re Pr \gg 1$ werden sich dünne thermische Grenzschichten einstellen, deshalb kommt eine nicht-äquidistante Diskretisierung in ζ -Richtung zum Einsatz,

$$\Delta\zeta_j = \zeta_j - \zeta_{j-1} \quad , \quad j = 1, \dots, j_{max} \quad . \quad (4.49)$$

Dadurch ergibt sich eine Approximation der ursprünglich kontinuierlichen Lösung an diskreten Stellen $\zeta = \zeta_j$

$$\Theta_j(\xi) \simeq \Theta(\xi, \zeta_j) \quad . \quad (4.50)$$

Wegen der Singularität $\zeta \rightarrow \infty$ an der Stelle $\xi = 1$, siehe Gleichung (4.47), erfolgt die Lösung im Intervall $\xi \in [0, 1[$.

Die Approximation der ersten und zweiten Ableitungen mittels zentraler Differenzen liefert

$$\Theta_\zeta(\xi, \zeta_j) \simeq \frac{\Theta_{j+1} - \Theta_{j-1}}{\Delta\zeta_{j+1} + \Delta\zeta_j} \quad , \quad j = 1, \dots, j_{max} - 1 \quad , \quad (4.51)$$

$$\Theta_{\zeta\zeta}(\xi, \zeta_j) \simeq 2 \frac{\Delta\zeta_j \Theta_{j+1} - (\Delta\zeta_{j+1} + \Delta\zeta_j) \Theta_j + \Delta\zeta_{j+1} \Theta_{j-1}}{\Delta\zeta_{j+1} \Delta\zeta_j (\Delta\zeta_{j+1} + \Delta\zeta_j)} \quad , \quad j = 1, \dots, j_{max} - 1 \quad . \quad (4.52)$$

Die diskrete Formulierung der ersten und zweiten Ableitungen ist für eine nicht-äquidistante Diskretisierung von erster Ordnung genau und geht für $\Delta\zeta_{j+1} \rightarrow \Delta\zeta_j$ in eine Approximation zweiter Ordnung über. Die Lösung der $(j_{max} - 1)$ gekoppelten Differentialgleichungen kann nun unter Berücksichtigung der Randbedingungen an den Stellen $\xi = 0$, $\zeta_0 = 0$ und $\zeta_{j_{max}} = 1$ integriert werden.

Die verwendete Lösungsmethode 'method of lines' ergibt ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen in ξ . Für den Fall $\alpha = 0$, der Ausbreitung eines konstanten Volumens, verschwindet an der Stelle $X = 0$ die Horizontalgeschwindigkeit U , siehe Abbildung 3.5. In der Folge entfällt in Gleichung (4.48) die Ableitung Θ_ξ . Dies führt zum Versagen des verwendeten Algorithmus. Deshalb wird der Fall $\alpha = 0$ bei der numerischen Lösung nicht betrachtet.

Die thermischen Randbedingungen (4.11-4.13) für $\alpha > 0$ lauten in transformierten Koordinaten

$$\xi = 0, \zeta : \quad \Theta = 1 \quad , \quad (4.53)$$

$$\xi, \zeta = 0 : \quad \Theta = \frac{1}{Bi_l H} \Theta_\zeta \quad , \quad (4.54)$$

$$\xi, \zeta = 1 : \quad \Theta - \Theta_\infty = -\frac{1}{Bi_u H} \Theta_\zeta \quad . \quad (4.55)$$

Wegen der quasistationären Approximation (4.19) entfällt die Randbedingung (4.9) für $\tau = \tau_0$.

Die diskrete Formulierung der Randbedingungen (4.54-4.55) erfolgt mittels einer Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenz. Somit ergeben sich die diskreten Randbedingungen zu

$$\Theta(0, \zeta) = 1 \quad (4.56)$$

$$\Theta(\xi, 0) = \frac{(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2)^2 \Theta_1 - \Delta\zeta_1^2 \Theta_2}{\Delta\zeta_2(2\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 + Bi_l H \Delta\zeta_1(\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2))} \quad , \quad (4.57)$$

$$\Theta(\xi, 1) = \frac{Bi_u H \Delta\zeta_j \Delta\zeta_{j-1} (\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1}) \Theta_\infty}{\Delta\zeta_{j-1} (2\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1} + Bi_u H \Delta\zeta_j (\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1}))} + \frac{(\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1})^2 \Theta_{j-1} - \Delta\zeta_j^2 \Theta_{j-2}}{\Delta\zeta_{j-1} (2\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1} + Bi_u H \Delta\zeta_j (\Delta\zeta_j + \Delta\zeta_{j-1}))} \quad , \quad j = j_{max} \quad . \quad (4.58)$$

Beide Randbedingungen (4.57,4.58) sind in der diskreten Formulierung von zweiter Ordnung genau.

4.4 Ergebnisse

Basierend auf der angepaßten asymptotischen Entwicklung wird es möglich die Lösung des Temperaturfeldes analytisch darzustellen. Dabei wird erstmals von einer in Abschnitt 3.3.1.3 hergeleiteten Approximation für die Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ Gebrauch gemacht. Zur Beurteilung der Genauigkeit der verwendeten asymptotischen Entwicklung dient die numerische Lösung des Temperaturfeldes. Es wird sich zeigen, daß die Übereinstimmung beider Lösungen sehr gut ist. Im weiteren wird eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der asymptotischen Lösung hergeleitet, die eine einfache Beurteilung der zulässigen Parameterintervalls zuläßt. Desweiteren zeigen numerische Lösungen des Temperaturfeldes ergänzend den Einfluß unterschiedlicher thermischer Randbedingungen an der freien Grenzfläche.

4.4.1 Angepaßte asymptotische Entwicklung

Ausgehend von der koordinatenangepaßten asymptotischen Entwicklung des Temperaturfeldes ergibt sich die Lösung für Θ in ähnlicher Darstellung zu

$$\Theta(X, Z, \tau) = F(\varphi) = 1 - \frac{\Gamma(1/3, \varphi^3/3)}{\Gamma(1/3)} \quad . \quad (4.59)$$

Die Rücktransformation (4.22,4.23) ergibt die Lösung in X, Z, τ -Koordinaten. Für die Ähnlichkeitsvariable (4.38) folgt

$$\varphi = \left(\frac{(\epsilon Re)^2 Pr}{3Fr} \frac{(-HH_X)^{3/2} Z^3}{\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^*} \right)^{1/3} \quad . \quad (4.60)$$

An dieser Stelle stellt sich die Frage nach einer geschickten Darstellung der Funktion $H(X, \tau)$. In Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, daß die Lösung für $H(X, \tau)$ zum einen numerisch mit nahezu beliebiger Genauigkeit erfolgen kann. Desweiteren existieren aber auch Approximationen, die eine ausreichende Genauigkeit der Lösung für $H(X, \tau)$ liefern. Der Vorteil einer approximativen Lösung für $H(X, \tau)$ liegt in der analytischen Lösung des Integrals $\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^*$. Eine numerische Lösung des Integrals würde an dieser Stelle eine weitere analytische Betrachtung des Problems zunichte machen. Gleichung (3.40) zusammen mit Gleichung (3.30) für den Fall $\alpha = 0$ und Gleichung (3.39) für $\alpha > 0$ liefert in normierten ξ, ζ -Koordinaten (4.46,4.47)

$$\alpha = 0 : \varphi = \left(\frac{19683}{16000} \right)^{1/15} \left(\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \right)^{4/15} \left(\frac{C_V^2 Fr}{\pi} \right)^{2/15} \cdot (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} \tau^{-7/15} \frac{(1 - \xi^2)^{1/6} \zeta}{{}_2F_1(3/4, 1/6, 7/4, \xi^2)^{1/3}} \quad , \quad (4.61)$$

$$\alpha > 0 : \varphi = \left(\frac{9}{32}\right)^{1/15} (1+b)^{4/15} (b(1+2b))^{1/3} c^{7/5} (C_V^2 Fr)^{2/15} \cdot (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} \tau^{(4\alpha-7)/15} \frac{(1-\xi)^{2b-1/2} \zeta}{(1-(1-\xi)^{b+1/2})^{1/3}}, \quad (4.62)$$

$$b = \frac{4\alpha - 2 + \sqrt{9 + \alpha(44 + 151\alpha)}}{5 + 45\alpha},$$

$$c = \left(\frac{-347\alpha^2 + 42\alpha - 3 + (1 + 53\alpha)\sqrt{9 + \alpha(44 + 151\alpha)}}{50(1 + 3\alpha)} \right)^{1/3}.$$

${}_2F_1$ stellt die hypergeometrische Funktion dar (Abramowitz und Segun 1972).

Diese Darstellung der Ähnlichkeitsvariable φ zeigt ein erstes wichtiges Ergebnis. Für $\xi = \textit{konstant}$ und $\zeta = \textit{konstant}$ ergibt sich ein Punkt, der sich zwar mit der Ausbreitungsströmung mitbewegt, siehe Gleichungen (4.46,4.47), relativ zur freien Grenzfläche aber unverändert bleibt. Für einen solchen, in normierten ξ, ζ -Koordinaten festen Punkt, entwickelt sich die Ähnlichkeitsvariable $\varphi \propto \tau^{(4\alpha-7)/15}$, siehe Gleichung (4.62). Für $\alpha = 7/4$ ergibt sich daraus $\varphi = \textit{konstant}$. Dies bedeutet, daß für $\alpha = 7/4$ Geschwindigkeits- und Temperaturfeld zueinander ähnlich sind. In anderen Worten, eine Isotherme $\Theta = \textit{konstant}$ behält für $\alpha = 7/4$ ihre relative Lage innerhalb der Ausbreitungsströmung für alle Zeiten. Für $\alpha < 7/4$ nimmt φ in der Zeit ab. Aus Abbildung 4.2 folgt daraus, daß die Temperatur $\Theta = F(\varphi)$ in der Zeit abnimmt und die thermische Grenzschichtdicke somit relativ zur freien Grenzfläche wächst. Im Gegensatz dazu nimmt φ für $\alpha > 7/4$ in der Zeit zu. Dies führt zu einem Ansteigen der Temperatur und somit zur Abnahme der thermischen Grenzschichtdicke.

Die Abbildungen 4.5-4.8 zeigen Temperaturfelder für verschiedene Zeiten τ und verschiedene Parameter α in X, Z -Koordinaten. Es zeigt sich für den Fall $\alpha = 0$, daß die angepaßte asymptotische Entwicklung zu unrealistischen Ergebnissen führt. Lediglich für kurze Zeiten τ bilden sich dünne thermische Grenzschichten, die an einen Kernbereich der Temperatur $\Theta = 1$ anschließen. Für $\tau = 5$ erreicht die thermische Grenzschicht bereits die freie Grenzfläche. Die adiabate Randbedingung (4.13) kann wegen der Anpassung der inneren Lösung an die äußere Lösung für $\hat{Z} \rightarrow \infty$, siehe Gleichung (4.31), nicht mehr eingehalten werden. Grund für das Versagen der asymptotischen Entwicklung ist in erster Linie die zeitliche Entwicklung der thermischen Grenzschicht im Vergleich zur Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$. Während die freie Grenzfläche $H(0, \tau) \propto \tau^{-1/5}$ in der Zeit absinkt, wächst die thermische Grenzschichtdicke $\delta_{th} \propto \tau^{4/15}$ in der Zeit an. Diese gegenläufige Entwicklung führt letztendlich zum Versagen der asymptotischen Entwicklung für $\alpha = 0$. Für alle anderen Werte $\alpha > 0$ zeigen sich typische thermische Grenzschichten, die an einen Kernbereich der Temperatur $\Theta = 1$ anschließen. Für $\alpha = 1$ wächst die thermische Grenz-

schichtdicke relativ zur Position der freien Grenzfläche in der Zeit an, dies führt aber erst für große Zeiten zu einer limitierenden Bedingung für die Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung. Eine Abschätzung für die obere Schranke τ_{max} , den Gültigkeitsbereich der asymptotischen Entwicklung, folgt im nächsten Abschnitt. Für $\alpha = 7/4$ zeigt sich das ähnliche Verhalten von freier Grenzfläche und dem Profil der Isothermen $\Theta = konstant$. Zu beiden Zeitpunkten $\tau = 5, 20$ sind die Isothermen relative zur freien Grenzfläche zeitlich unverändert. Für $\alpha = 2$ ergeben sich keine einschränkenden Kriterien bezüglich des Zeitintervalls, denn die thermische Grenzschicht wächst in der Zeit langsamer als die Position der freien Grenzfläche.

4.4.2 Gültigkeitsbereich der angepaßten asymptotischen Entwicklung

Die Gültigkeit der angepaßten asymptotischen Entwicklung wird lediglich dadurch eingeschränkt, daß durch die Anpassung von innerer und äußerer Entwicklung, siehe Gleichung (4.31), die adiabate Randbedingung an der freien Grenzfläche (4.13) nicht eingehalten werden kann. Als notwendige Bedingung zur Bestimmung des Gültigkeitsbereichs dient deshalb folgendes Kriterium:

$$\varphi(\xi = 0.8, \zeta = 0.9) > 2 \quad . \quad (4.63)$$

Diese Forderung stellt sicher, daß der Rand der thermischen Grenzschicht $\varphi = 2$ an der Stelle $X = 0.8A(\tau)$ im höchsten Fall 90% der Höhe der Schmelze beträgt.

Aus den Gleichungen (4.61,4.62) für die Ähnlichkeitsvariable φ folgt damit als notwendiges Kriterium

$$\alpha = 0 : \quad 0.51 (C_V^2 Fr)^{2/15} (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} \tau^{-7/15} > 2 \quad , \quad (4.64)$$

$$\alpha = 1 : \quad 0.93 (C_V^2 Fr)^{2/15} (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} \tau^{-1/5} > 2 \quad , \quad (4.65)$$

$$\alpha = 7/4 : \quad 1.15 (C_V^2 Fr)^{2/15} (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} > 2 \quad , \quad (4.66)$$

$$\alpha = 2 : \quad 1.22 (C_V^2 Fr)^{2/15} (\epsilon Re)^{1/5} Pr^{1/3} \tau^{1/15} > 2 \quad . \quad (4.67)$$

4.4.3 Vergleich numerische Lösung - angepaßte asymptotische Entwicklung

Im vorigen Abschnitt wurde ein notwendiges Kriterium für den Gültigkeitsbereich der asymptotischen Entwicklung hergeleitet. Dies gewährleistet die Gültigkeit der Anpassung einer inneren Lösung an den isothermen Kernbereich der Temperatur $\Theta = 1$. Eine zweite Vereinfachung innerhalb der asymptotischen Entwicklung war die Entwicklung der Stromfunktion in eine Taylor-Reihe an der Stelle $\hat{Z} = 0$. Abbildung 4.9 zeigt einen Vergleich zwischen der numerischen Lösung basierend auf Gleichung (4.48) und der asymptotischen Entwicklung.

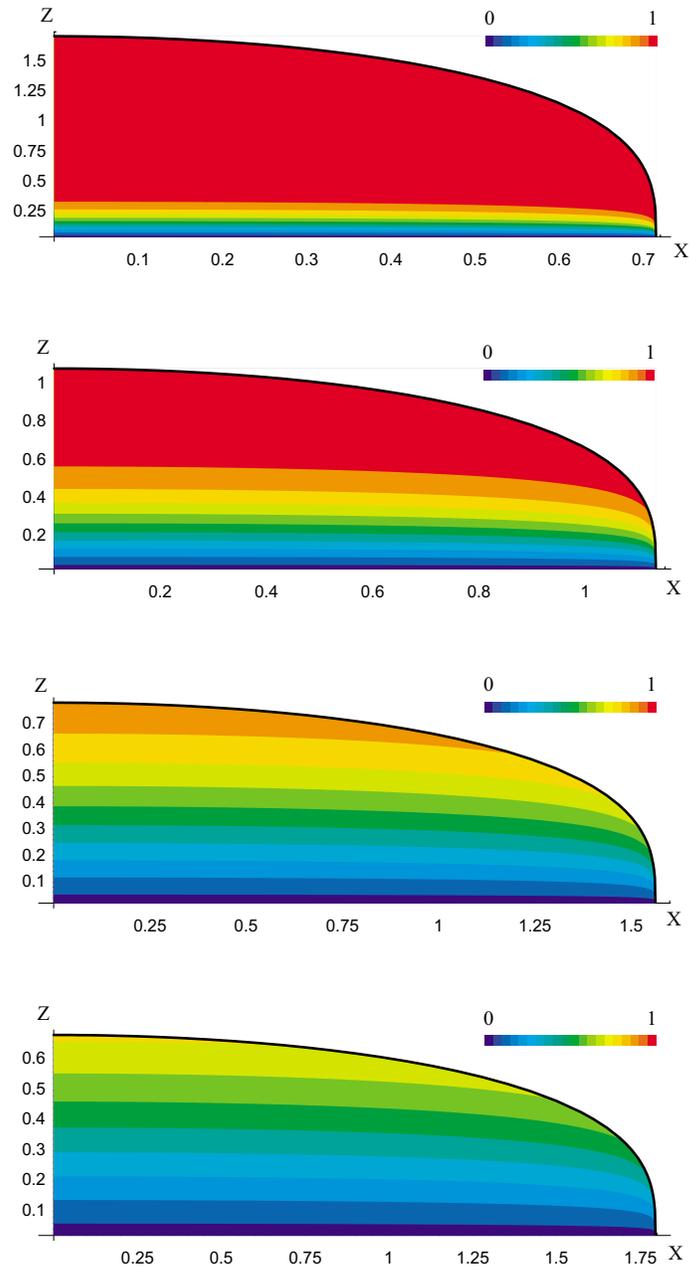


Abbildung 4.5: Temperaturfeld - asymptotische Entwicklung.

Parameter: $\alpha = 0$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

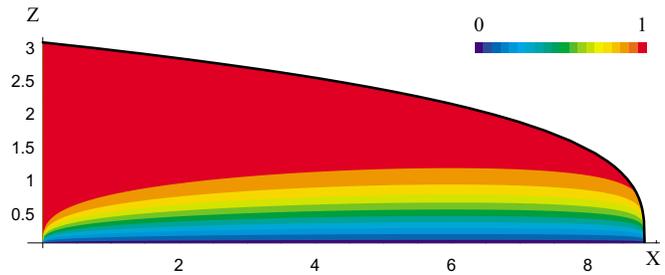
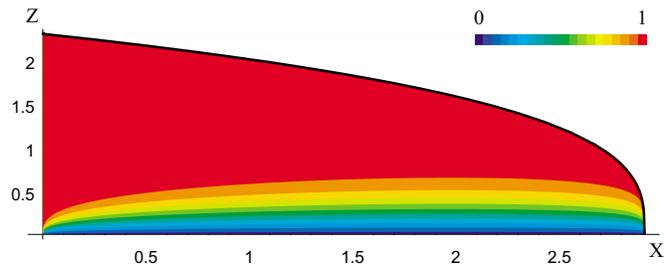


Abbildung 4.6: Temperaturfeld - asymptotische Entwicklung.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

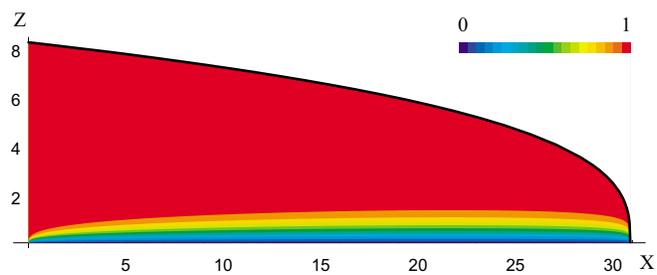
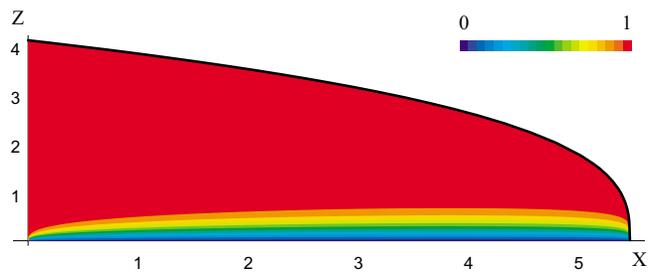


Abbildung 4.7: Temperaturfeld - asymptotische Entwicklung.

Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

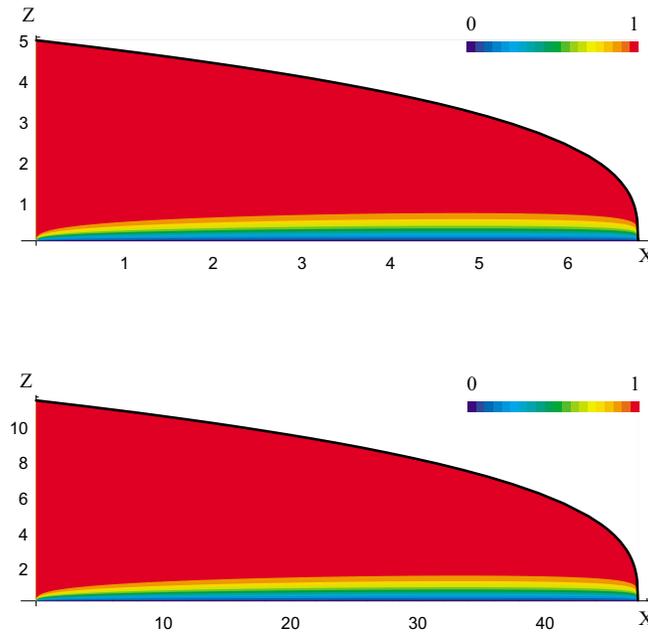


Abbildung 4.8: Temperaturfeld - asymptotische Entwicklung.

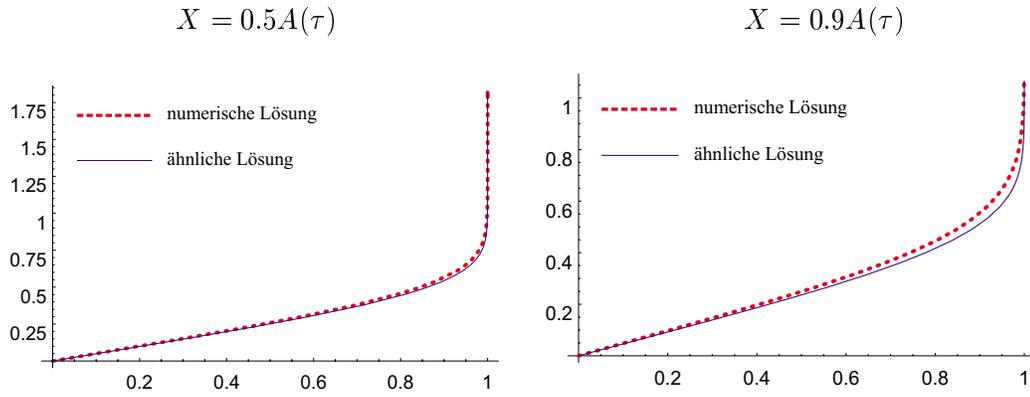
Parameter: $\alpha = 2$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

Für alle Werte α wird durch die Taylor-Entwicklung der konvektive Wärmetransport leicht überschätzt. Dies führt dazu, daß die thermische Grenzschicht etwas dünner im Vergleich zur numerischen Lösung ausfällt. Mit wachsendem Abstand von der Bodenplatte wird dieser Effekt deutlicher, siehe $\alpha = 1$ an der Stelle $X = 0.9A(\tau)$. Nichtsdestotrotz ist die Übereinstimmung zwischen numerischer Lösung und asymptotischer Entwicklung sehr gut, somit ist die Vereinfachung der Geschwindigkeiten U, W mit Hilfe der Taylor-Entwicklung um $\hat{Z} = 0$ zulässig.

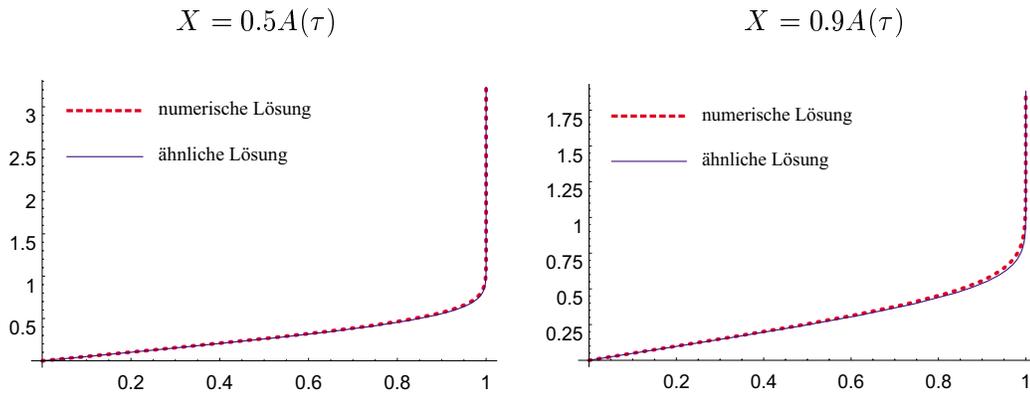
4.4.4 Wärmeverluste an der freien Grenzfläche

Wärmeverluste an der freien Grenzfläche können durch verschiedene Mechanismen bedingt sein. Zum einen kann durch Zwangskonvektion eine nahezu isotherme Randbedingung erreicht werden, $Bi_u \rightarrow \infty$. Zum anderen führen freie Konvektion im umgebenden Gas oder Wärmeverluste durch Strahlung zu einem temperaturabhängigen Wärmestrom an der freien Grenzfläche, $0 < Bi_u < \infty$. In diesem Abschnitt wird für $\Theta_\infty = 0$, ($T_W = T_\infty$), der Einfluß verschiedener Biot-Zahlen Bi_u an der freien Grenzfläche auf die numerische Lösung des Temperaturfeldes, siehe Abschnitt 4.3, untersucht. An der Bodenplatte gilt $\Theta_Z = 0$, ($Bi_l = 0$).

$\alpha = 1$



$\alpha = 7/4$



$\alpha = 2$

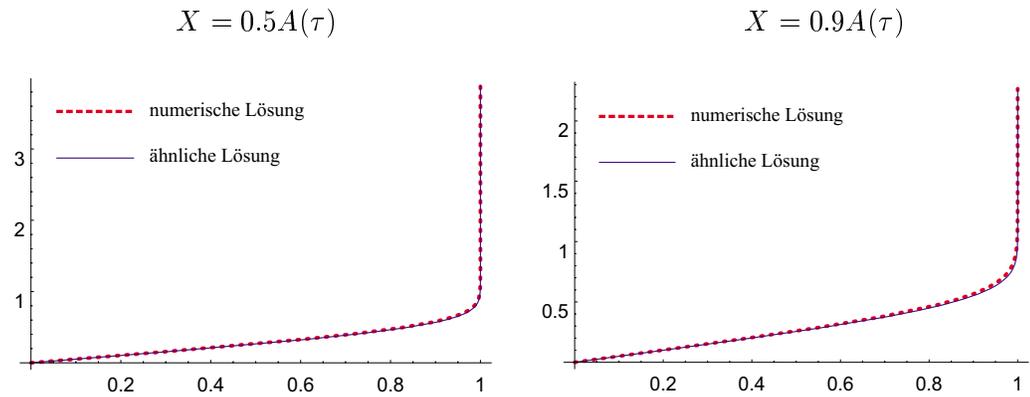


Abbildung 4.9: Vergleich zwischen numerischer Lösung und asymptotischer Entwicklung für die Temperatur Θ , $\tau = 5$.

Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

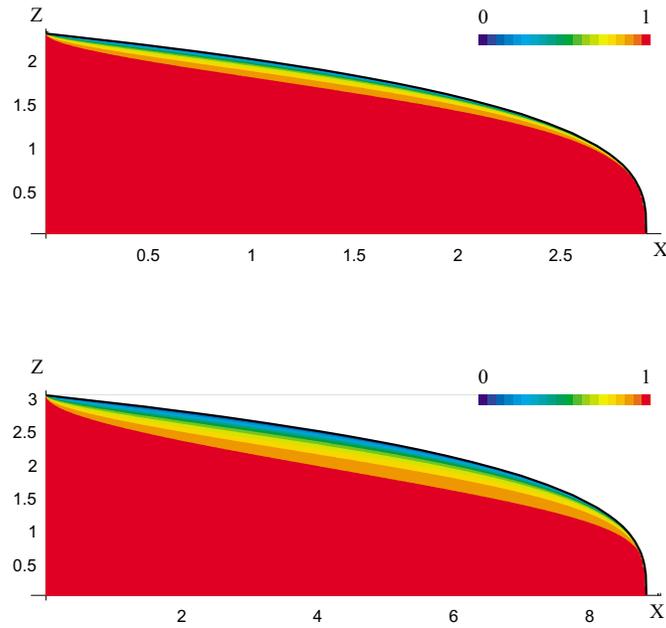


Abbildung 4.10: Temperaturfeld, Wärmeverluste an der freien Grenzfläche.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$,
 $Bi_u \rightarrow \infty$, $Bi_l = 0$, $\Theta_\infty = 0$.

Abbildung 4.10 zeigt Temperaturfelder für $Bi_u \rightarrow \infty$ zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $\tau = 5, 20$. Somit wird an der freien Grenzfläche die isotherme Randbedingung $\Theta(X, H, \tau) = 0$ gestellt. Es bildet sich im Vergleich zu einer isothermen Randbedingung an der Bodenplatte, siehe Abbildung 4.6, eine deutlich dünnere thermische Grenzschicht aus. Nahe der Kontaktlinie $X \rightarrow A(\tau)$ nimmt der konvektive Wärmetransport durch die heiße Schmelze aus dem isothermen Kernbereich $\Theta = 1$ zu. In der Folge verschwindet die thermische Grenzschichtdicke für $X \rightarrow A(\tau)$. In Abbildung 4.11 sind Temperaturprofile über die Schichthöhe an der Stelle $X = 0.5A(\tau)$ dargestellt. Mit abnehmender Biot-Zahl nimmt einerseits die thermische Grenzschichtdicke ab. Andererseits nehmen durch den temperaturabhängigen Wärmestrom $\Theta_Z = -Bi_u \Theta$, Gleichung (4.13), die Temperaturen an der freien Grenzfläche mit abnehmender Biot-Zahl zu. Temperaturprofile entlang der freien Grenzfläche im Intervall $0 \leq X < A(\tau)$, siehe Abbildung 4.12, bestätigen dies.

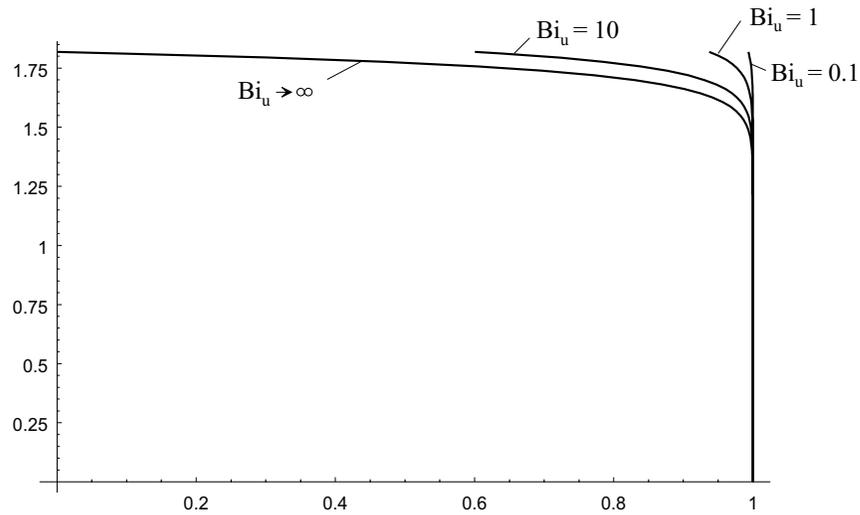


Abbildung 4.11: Temperaturprofile Θ an der Stelle $X = 0.5A(\tau)$, Wärmeverluste an der freien Grenzfläche, $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$, $Bi_l = 0$, $\Theta_\infty = 0$.

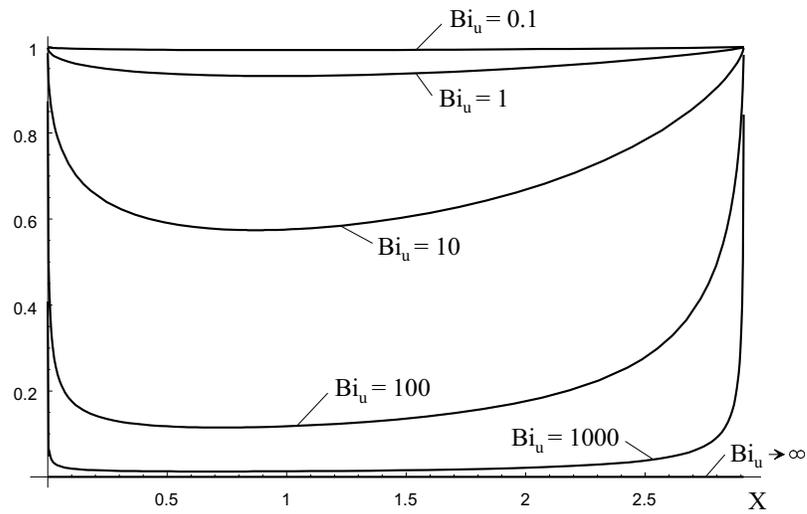


Abbildung 4.12: Temperatur Θ entlang der freien Grenzfläche, $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$, $Bi_l = 0$, $\Theta_\infty = 0$.

Kapitel 5

Krustenbildung an der Bodenplatte

5.1 Grundidee

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, stellen sich für Schmelzen mit großer Prandtl-Zahl $Pr \gg 1$ dünne thermische Grenzschichten ein. In der Folge kann der Einfluß einer erstarrenden Kruste auf der Bodenplatte nur einen schwachen Einfluß auf die Ausbreitung der darüberliegenden Schmelze haben. Unter dieser Voraussetzung ist es näherungsweise möglich Geschwindigkeits- und Temperaturfeld entkoppelt zu lösen. Dies ermöglicht eine wesentlich einfachere mathematische Formulierung des Problems und läßt eine weitgehend analytische Lösung zu. Von der Betrachtung ausgenommen wird der Fall $\alpha = 0$. Wie in Abschnitt 4.4.1 gezeigt, gilt die asymptotische Lösung hier nur für kurze Zeiten τ . Darüberhinaus ist die Annahme dünner thermischer Grenzschichten für diesen Fall verletzt.

Die Grundidee der Modellierung erstarrender Krusten auf der Bodenplatte gliedert sich in folgende Schritte:

1. Ausgangspunkt bei der Modellierung erstarrender Krusten an der Bodenplatte ist die Lösung des isothermen Ausbreitungsproblems, siehe Abschnitt 3.
2. Basierend auf der isothermen Lösung des Geschwindigkeitsfeldes folgt die Lösung des Temperaturfeldes mittels einer Ähnlichkeitstransformation für die Fälle $\alpha > 0$, siehe Abschnitt 4.
3. Anhand der Lösung des Temperaturfeldes kann nun die Krustendicke $S(X, \tau)$ bestimmt werden. Sie stellt die Isotherme $\Theta = \Theta_S$ dar. Die Freisetzung von Latentwärme wird hierbei vernachlässigt, siehe Anhang C. Die Dichte ρ , die spezifische

Wärmekapazität c_p und die Wärmeleitfähigkeit λ in der festen und flüssigen Phase werden gleich und konstant angenommen.

4. Mit dieser Lösung für $S(X, \tau)$ wird nun die Ausbreitung der Schmelze über die erstarrende Kruste $S_1(X, \tau)$ berechnet. Somit folgt eine erste Lösung für die Ausbreitung flüssiger Schmelzen unter dem Einfluß erstarrender Krusten an der Bodenplatte.
5. Ausgehend von diesem durch die Kruste $S_1(X, \tau)$ gestörten Geschwindigkeitsfeld wird wiederum das zugehörige Temperaturfeld numerisch berechnet, vergleiche Abschnitt 4.3. Dieses wird nun durch einen konvektiven und diffusiven Wärmetransport innerhalb der flüssigen Schmelze und durch Wärmeleitung innerhalb der erstarrten Kruste bestimmt.
6. Mittels der neuen Lösung für Θ wird eine neue Krustendicke $S_2(X, \tau)$ anhand der Isotherme $\Theta = \Theta_S$ festgelegt. Aus dem Verhältnis

$$E_i = \frac{S_{i+1}(X, \tau)}{S_i(X, \tau)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad , \quad (5.1)$$

kann auf die Güte der gewählten Approximation geschlossen werden. Die Schritte 4-6 sind gegebenenfalls zu wiederholen bis sich $E \rightarrow 1$ einstellt.

5.2 Modellierung der Kruste $S(X, \tau)$

Da bei der Modellierung die Freisetzung von Latentwärme vernachlässigt wird, kann $S(X, \tau)$ direkt aus dem Temperaturfeld, siehe Abschnitt 4, bestimmt werden. Aus Gleichung (4.60) für die Ähnlichkeitsvariable φ folgt

$$\varphi = \varphi_S = \left(\frac{(\epsilon Re)^2 Pr}{3Fr} \frac{(-HH_X)^{3/2} Z^3}{\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^*} \right)^{1/3} . \quad (5.2)$$

φ_S kennzeichnet die dimensionslose Erstarrungstemperatur $\Theta_S = F(\varphi_S)$, siehe Gleichung (4.59). Aufgelöst nach $S(X, \tau) = Z$ ergibt sich für die Krustendicke

$$S(X, \tau) = \varphi_S \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \frac{\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^*}{(-HH_X)^{3/2}} \right)^{1/3} . \quad (5.3)$$

Wie später gezeigt wird hängt das Geschwindigkeitsfeld unter dem Einfluß erstarrender Krusten an der Bodenplatte nicht nur von der Funktion $S(X, \tau)$, sondern auch von der Ableitung $S_X(X, \tau)$ ab. Aus Gleichung (5.3) folgt

$$S_X(X, \tau) = \varphi_S \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \right)^{1/3} \frac{\left(2 - \frac{3 \int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^* (-H_X^2 - HH_{XX})}{(-HH_X)^{3/2}} \right)}{6 \left(\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^* \right)^{2/3}} .$$

An der Stelle $X = 0$ stellt sich eine Singularität $S_X \rightarrow \infty$ ein. Dies führt zu einem unbegrenzten Geschwindigkeitsanstieg in der vertikalen Richtung und somit zu unphysikalischen Ergebnissen. Wegen der verwendeten Dünnschichtapproximation werden die Reibungsterme in der vertikalen Richtung vernachlässigt. Somit kann dieser Geschwindigkeitsanstieg nicht durch Reibungseffekte begrenzt werden. Dieser Schwachpunkt wird durch die Einführung einer Glättungsfunktion $(1 - e^{-C_{mS}X/A(\tau)})$ ausgeglichen. Für die Krustendicke ergibt sich

$$S(X, \tau) = \varphi_S(1 - e^{-C_{mS}X/A(\tau)}) \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \frac{\int_0^X \sqrt{-HH_X} dX^*}{(-HH_X)^{3/2}} \right)^{1/3}, \quad (5.4)$$

mit $C_{mS} \gg 1$.

Der Einfluß der Glättungsfunktion $(1 - e^{-C_{mS}X/A(\tau)})$ sollte die Ausbreitung der Schmelze nicht wesentlich beeinflussen. Zur Überprüfung dienen deshalb Testfunktionen der Form

$$H = (1 - X)^{1/3}, \quad A = 1,$$

wie sie typisch für die isotherme Ausbreitung der Schmelze sind, siehe Abschnitt 3.4.1.2. Eine Taylor-Entwicklung um die Stelle $X = 0$ ergibt für Gleichung (5.3) in der führenden Ordnung

$$X \rightarrow 0: \quad S \propto X^{1/3}, \quad S_X \propto X^{-2/3}.$$

Für die modifizierte Gleichung (5.4) wird demhingegen die führende Ordnung um eine Potenz in X angehoben. Es ergibt sich

$$X \rightarrow 0: \quad S \propto X^{4/3}, \quad S_X \propto X^{1/3},$$

somit ist die Singularität an der Stelle $X = 0$ behoben.

Abschließend ist noch eine Abschätzung für den Parameter C_{mS} notwendig. Abbildung 5.1 zeigt Profile $S(X, \tau)$ für verschiedene Werte von C_{mS} für $X \rightarrow 0$. Für $C_{mS} \geq 500$ ist der Einfluß der Modifikation auf den Bereich $0 \leq X \leq 0.01A(\tau)$ beschränkt. Für das Limit $C_{mS} \rightarrow \infty$ ergibt sich die ursprüngliche Form der Kruste (5.3). Da der Einfluß der Glättungsfunktion nur auf den Bereich in der unmittelbaren Umgebung $X = 0$ beschränkt ist, werden die wesentlichen Effekte bei der Ausbreitung der flüssigen Schmelze über die Bodenkruste von dieser Modifikation unberührt bleiben.

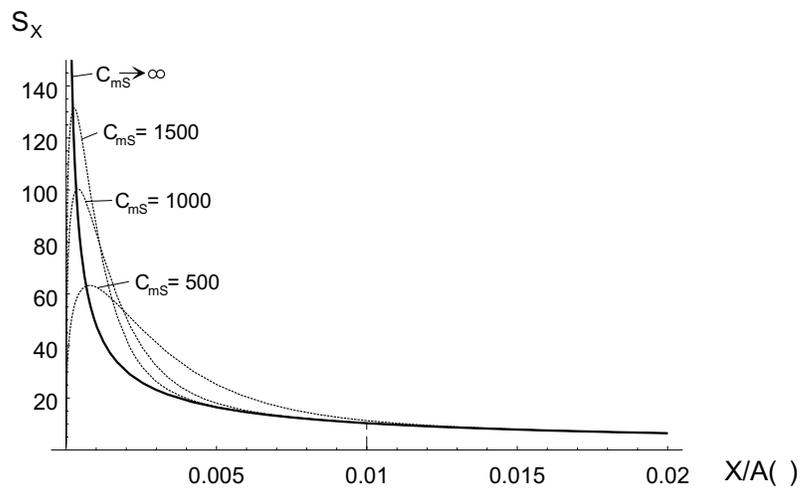
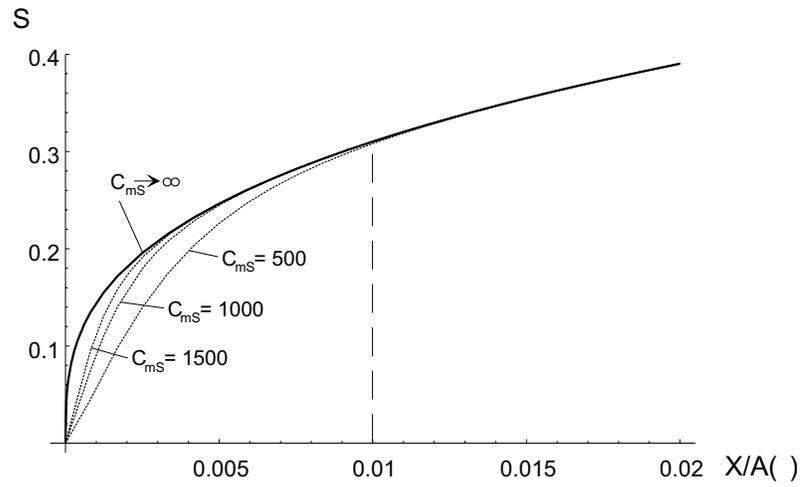


Abbildung 5.1: Profile der Kruste S und deren Ableitung S_x , basierend auf Gleichung (5.4), für verschiedene Werte C_{mS} im Bereich $0 \leq X \leq 0.02A(\tau)$.

5.3 Kinematische und dynamische Randbedingungen

Zur Formulierung der Ausbreitung erstarrender Schmelzen bei gleichzeitiger Krustenbildung an der Bodenplatte gelten im wesentlichen die gleichen Randbedingungen (3.8-3.11) wie für die Ausbreitung ohne Krustenbildung. Lediglich die Haftbedingung der Schmelze an der erstarrten Kruste unterscheidet beide Fälle. Es ergibt sich

$$X, Z = S(X, \tau) : \quad U = W = 0 \quad , \quad (5.5)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad W = H_X U + H_\tau \quad , \quad (5.6)$$

$$P = 0 \quad , \quad (5.7)$$

$$U_Z = 0 \quad . \quad (5.8)$$

5.4 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Die Berechnung von Geschwindigkeits- und Druckfeld erfolgt analog zu Abschnitt 3.2. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (5.5-5.8) ergibt sich für den Druck

$$P = \frac{\epsilon Re}{Fr} (H - Z) \quad . \quad (5.9)$$

Die beiden Geschwindigkeiten U und W lauten

$$U = \frac{\epsilon Re}{2Fr} (Z - S) H_X (Z - 2H + S) \quad , \quad (5.10)$$

$$W = -\frac{\epsilon Re}{6Fr} (Z - S) \left(6(H - S) H_X S_X + (Z - S)(Z - 3H + 2S) H_{XX} - 3(Z - S) H_X^2 \right) . \quad (5.11)$$

Für die Stromfunktion folgt

$$\Psi = \frac{\epsilon Re}{6Fr} (Z - S)^2 (Z - 3H + 2S) H_X \quad . \quad (5.12)$$

Die Strömungsgrößen (5.9-5.12), sowie die Funktion $S(X, \tau)$, sind wiederum von der unbekannt Schichthöhe $H(X, \tau)$ abhängig. Zur Bestimmung von $H(X, \tau)$ ist die Lösung einer Evolutionsgleichung für die freien Grenzfläche notwendig.

5.5 Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$ - allgemeine Formulierung

Die Substitution der beiden Geschwindigkeiten U und W , Gleichungen (5.10,5.11), in der kinematischen Grenzflächenbedingung (5.6) ergibt

$$H_\tau - \frac{\epsilon Re}{3Fr} \left((H - S)^3 H_X \right)_X = 0 \quad . \quad (5.13)$$

Gleichung (5.13) beschreibt die Entwicklung der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte $S(X, \tau)$.

5.6 Strategien zur Formulierung von $S(X, \tau)$

Aus Gleichung (5.4) wird deutlich, daß die Funktion $S(X, \tau)$ vom Geschwindigkeitsfeld, d.h. von der Funktion $H(X, \tau)$ abhängt. Bezüglich einer iterativen Lösung ist es jetzt möglich, zwei Wege zur Modellierung der Funktion $S(X, \tau)$ zu wählen.

1. das schwach gekoppelte Problem

$$S_1(X, \tau) = f(H_0(X, \tau)) \quad , \quad (5.14)$$

2. das stark gekoppelte Problem

$$S_1(X, \tau) = f(H_1(X, \tau)) \quad . \quad (5.15)$$

Abbildung 5.2 zeigt eine Skizze beider Modelle. Für das schwach gekoppelte Problem erfolgt die Modellierung der erstarrenden Kruste $S_1(X, \tau)$ aus der Lösung der Ausbreitung ohne Erstarrung $H_0(X, \tau)$. Dies führt dazu, daß sich die Schmelze über eine bereits vorhandene Kruste ausbreitet. Durch den hemmenden Einfluß der Bodenkruste erfolgt die Ausbreitung langsamer, wodurch die Kontaktlinie $A_1(\tau)$ in diesem Fall auf der Kruste liegt. Im Gegensatz dazu modelliert das stark gekoppelte Problem die Ausbreitung der Schmelze und die Bildung der Kruste $S_1(X, \tau)$ simultan. Die Kruste $S_1(X, \tau)$ hängt ab von der sich einstellenden Schichthöhe $H_1(X, \tau)$. Es wird deutlich, daß durch die Kopplung von $H_1(X, \tau)$ und $S_1(X, \tau)$ der Einfluß der erstarrenden Kruste auf die Ausbreitung direkt berücksichtigt wird. Durch diese Art der Modellierung wird zudem erreicht, daß die Kontaktlinie $A_1(\tau)$ auf der Bodenplatte liegt. Voraussetzung beider Modelle ist, daß das Temperaturfeld durch die Bildung einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte nur unwesentlich gestört wird. Dadurch behält Gleichung (5.4) zur Beschreibung von $S_1(X, \tau)$ ihre Gültigkeit. Mathematisch gesehen erfordert die Lösung des schwach gekoppelten Problems einen wesentlich geringeren Aufwand, als es die Lösung des stark gekoppelten Problems bedarf. Für $S_1 = f(H_0)$ gilt Gleichung (4.62) zur Beschreibung des Temperaturfeldes. Somit ist lediglich die Lösung einer nichtlinearen Diffusionsgleichung erforderlich. Demhingegen resultiert aus $S_1 = f(H_1)$ die Lösung einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung durch das Integral in Gleichung (5.4). Wegen der unphysikalischen Modellierung der Position der Kontaktlinie A_1 bei Verwendung des schwach gekoppelten Problems wird im weiteren nur noch das stark gekoppelte Problem betrachtet. Details zum schwach gekoppelten Problem sind in Bunk (1999) zu finden.

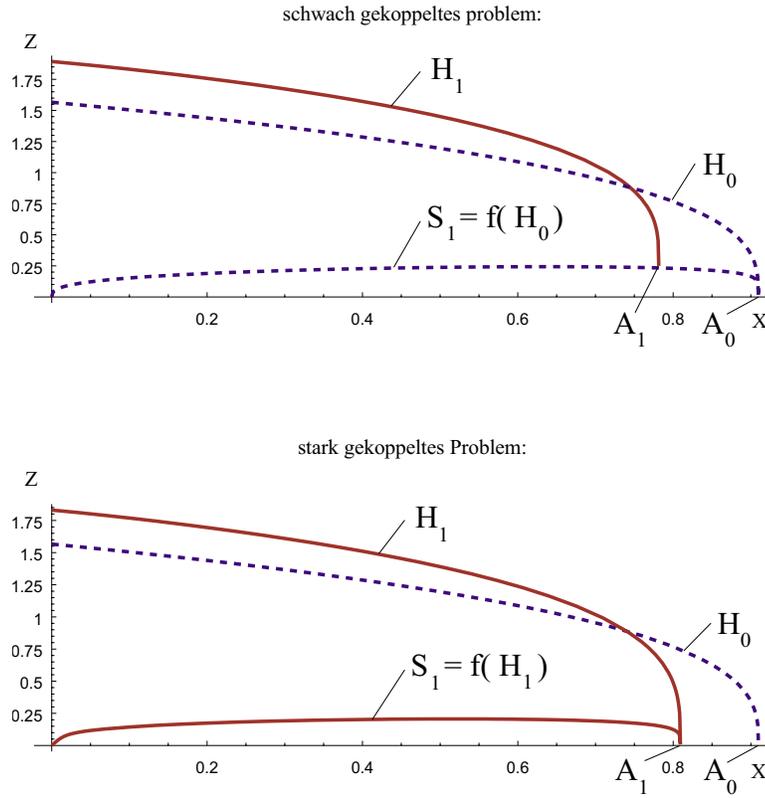


Abbildung 5.2: Zwei Möglichkeiten zur Modellierung der erstarrten Kruste $S(X, \tau)$.

5.7 Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$

Aus den Gleichungen (5.4,5.13) folgt die Evolutionsgleichung

$$H_{1,\tau} - \frac{\epsilon Re}{3Fr} \left(\left(H_1 - \varphi_S (1 - e^{-\frac{c_{mS} X}{A_1(\tau)}}) \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \frac{\int_0^X \sqrt{-H_1 H_{1,X}} dX^*}{(-H_1 H_{1,X})^{3/2}} \right)^{1/3} \right)^3 H_{1,X} \right) = 0. \quad (5.16)$$

Sie beschreibt die Entwicklung der freien Grenzfläche $H_1(X, \tau)$ unter dem Einfluß einer erstarrten Kruste an der Bodenplatte. Die Rand- und Integralbedingungen zur Lösung dieser Evolutionsgleichung lauten

$$X = 0 : -\frac{\epsilon Re}{3Fr} H_1^3 H_{1,X} = \alpha C_V \tau^{\alpha-1} \quad , \quad (5.17)$$

$$X \geq A_1(\tau) : H_1 = 0 \quad , \quad (5.18)$$

$$\int_0^{A_1(\tau)} H_1 dX = C_V \tau^\alpha \quad . \quad (5.19)$$

5.7.1 Ähnlichkeitstransformation

In Abschnitt 4.4.1 wurde deutlich, daß für $\alpha = 7/4$ die Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ als auch die Isothermen $\Theta = \textit{konstant}$ zueinander ähnliches Verhalten zeigen. Es sollte deshalb möglich sein, auch für die Ausbreitung der Schmelze unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte Lösungen mittels einer Ähnlichkeitstransformation zu finden.

Die Ähnlichkeitstransformation

$$\eta = \frac{X}{C_0} \tau^{-5/4} \quad , \quad (5.20)$$

mit $0 \leq \eta \leq \eta_{N,1}$, zusammen mit

$$H_1(X, \tau) = C_1 \tau^{1/2} \tilde{H}_1(\eta/\eta_{N,1}) \quad , \quad (5.21)$$

und den Konstanten

$$C_0 = \left(\frac{\epsilon Re}{3Fr} \right)^{1/5} C_V^{3/5} \quad , \quad (5.22)$$

$$C_1 = \left(\frac{3Fr}{\epsilon Re} \right)^{1/5} C_V^{2/5} \eta_{N,1}^{2/3} \quad , \quad (5.23)$$

liefert für $\alpha = 7/4$ eine Transformation basierend auf derselben Ähnlichkeitsvariable wie bei der Ausbreitung ohne Krustenbildung, siehe Abschnitt 3.3.1. Der Einfluß erstarrender Krusten wird somit sofort durch den Quotient

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\eta_{N,1}}{\eta_{N,0}} \quad , \quad (5.24)$$

deutlich, vergleiche Abbildung 5.2 - stark gekoppeltes Problem.

Zur Elimination des Integrals in Gleichung (5.16) dient die Funktion

$$G_1 = \int_0^X \sqrt{-H_1 H_{1,X}} dX^* \quad . \quad (5.25)$$

Dadurch wird die anfängliche Integro-Differentialgleichung (5.16) überführt in ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen

$$H_{1,\tau} - \frac{\epsilon Re}{3Fr} \left(\left(H_1 - \varphi_S (1 - e^{-\frac{c_{mS} X}{A_1(\tau)}}) \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \frac{G_1}{(-H_1 H_{1,X})^{3/2}} \right)^{1/3} \right)^3 H_{1,X} \right)_X = 0 \quad , \quad (5.26)$$

$$G_{1,X} = \sqrt{-H_1 H_{1,X}} \quad . \quad (5.27)$$

Zusätzlich zu den Rand- und Integralbedingungen (5.17-5.19) für die Funktion $H_1(X, \tau)$ gilt

$$X = 0 : \quad G_1 = 0 \quad . \quad (5.28)$$

In der normierten Ähnlichkeitsvariable

$$\xi_1 = \frac{\eta}{\eta_{N,1}} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad (5.29)$$

ergibt die Ähnlichkeitstransformation (5.20-5.23) für die Funktion G_1

$$G_1 = \left(\frac{3Fr}{\epsilon Re} \right)^{1/10} C_V^{7/10} \eta_{N,1}^{7/6} \tau^{9/8} \tilde{G}_1 \quad , \quad (5.30)$$

$$\tilde{G}_1 = \int_0^{\xi_1} \sqrt{-\tilde{H}_1 \tilde{H}_{1,\xi_1}} d\xi^* \quad . \quad (5.31)$$

Für die Evolutionsgleichung (5.26) liefert die Ähnlichkeitstransformation

$$\left(\left(\tilde{H}_1 - \frac{P}{\eta_{N,1}^{4/9}} (1 - e^{-C_{ms}\xi_1}) \frac{\tilde{G}_1^{1/3}}{\sqrt{-\tilde{H}_1 \tilde{H}_{1,\xi_1}}} \right)^3 \tilde{H}_{1,\xi_1} \right)_{\xi_1} + \frac{5}{4} \xi_1 \tilde{H}_{1,\xi_1} - \frac{1}{2} \tilde{H}_1 = 0 \quad , \quad (5.32)$$

$$\tilde{G}_{1,\xi} = \sqrt{-\tilde{H}_1 \tilde{H}_{1,\xi_1}} \quad , \quad (5.33)$$

mit

$$P = \varphi_S \left(9C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 Pr^5 \right)^{-1/15} \quad . \quad (5.34)$$

Die Rand- und Integralbedingungen zur Lösung der Gleichungen (5.32,5.33) lauten

$$\xi_1 = 0 : \quad \tilde{H}_1^3 \tilde{H}_{1,\xi_1} = -\frac{7}{4} \eta_{N,1}^{-5/3} \quad , \quad (5.35)$$

$$\tilde{G}_1 = 0 \quad , \quad (5.36)$$

$$\xi_1 = 1 : \quad \tilde{H}_1 = 0 \quad , \quad (5.37)$$

$$\eta_{N,1} = \left(\int_0^1 \tilde{H}_1 d\xi_1 \right)^{-3/5} \quad . \quad (5.38)$$

5.7.1.1 Numerische Lösung für $\tilde{H}_1(\xi_1)$ und $\tilde{G}_1(\xi_1)$

Zur numerischen Lösung der Funktionen \tilde{H}_1 und \tilde{G}_1 wird, wie in Abschnitt 3.3.1.2 beschrieben, das Randwertproblem mittels einer Shooting-Methode in ein Anfangswertproblem überführt.

Als Randbedingungen zur Lösung der beiden Gleichungen (5.32,5.33) wird für $\xi_{1,max} \rightarrow 1$ die Approximation

$$\xi_1 = \xi_{1,max} : \quad \tilde{H}_1 = c(1 - \xi_1)^{1/3} \quad , \quad (5.39)$$

$$\tilde{H}_{1,\xi_1} = -\frac{c}{3}(1 - \xi_1)^{-2/3} \quad , \quad (5.40)$$

$$\tilde{G}_1 = d \quad , \quad (5.41)$$

verwendet. Als weitere Shootingparameter kommen bei der numerischen Lösung der Funktionen \tilde{H}_1 , \tilde{G}_1 die Parameter d und $\eta_{N,1}$ hinzu. Die Bedingungen zur Bestimmung der Shootingparameter c , d , $\eta_{N,1}$ lauten

$$c : \quad \tilde{H}_1(0)^3 \tilde{H}_{1,\xi_1}(0) = -\frac{7}{4} \int_0^{\xi_{1,max}} \tilde{H}_1 d\xi_1 \quad , \quad (5.42)$$

$$d : \quad \tilde{G}_1(0) = 0 \quad , \quad (5.43)$$

$$\eta_{N,1} : \quad \eta_{N,1} = \left(\int_0^{\xi_{1,max}} \tilde{H}_1 d\xi_1 \right)^{-3/5} \quad . \quad (5.44)$$

5.7.2 Numerische Lösung der Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$

In Abschnitt 5.7.1 wurde gezeigt, daß für den Fall $\alpha = 7/4$ die Lösung der Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$ mittels einer Ähnlichkeitstransformation gefunden werden kann. Für alle anderen Werte $\alpha \neq 7/4$ ist aber eine numerische Lösung für die freie Grenzfläche $H_1(X, \tau)$ notwendig, denn die erstarrende Kruste $S_1(X, \tau)$ und die Funktion $H_1(X, \tau)$ selbst entwickeln sich unterschiedlich in der Zeit. Dies verletzt die notwendige Voraussetzung zur Existenz ähnlicher Lösungen. Nichtsdestotrotz dient der Fall $\alpha = 7/4$ als Verifikationsbeispiel für das sich anschließende numerische Verfahren.

5.7.2.1 Transformation $(X, \tau) \rightarrow (\xi, \tau)$

Bei der numerischen Lösung der Evolutionsgleichung für $H_1(X, \tau)$ treten wie auch bei der numerischen Lösung des Temperaturfeldes, siehe Abschnitt 4.3, Probleme durch die zeitliche Variation des Integrationsgebiets auf. Abbildung 5.3 zeigt eine Skizze der zu erwartenden Lösung für den Sonderfall $S_1 = 0$. Zur Lösung wäre ein sich mit der Ausbreitungsströmung mitbewegendes Gitter oder alternativ die Diskretisierung des gesamten Gebietes $0 \leq X \leq X_{max}$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_{max}$ notwendig. Dies bedeutet in der Folge einen enormen numerischen Aufwand. Eine effizientere Methode bietet die Verwendung der Variable

$$\xi_1 = \frac{X}{A_1(\tau)} \quad . \quad (5.45)$$

Somit ergibt sich die Lösung innerhalb einer rechteckigen ξ_1, τ Geometrie, analog zur Lösung des Temperaturfeldes, siehe Abbildung 5.4.

In der transformierten Koordinate (5.45) lautet die Evolutionsgleichung (5.16)

$$H_{1,\tau} - \xi_1 \frac{A_{1,\tau}}{A_1} H_{1,\xi_1} \quad (5.46)$$

$$- \frac{\epsilon Re}{3Fr} \frac{1}{A_1^2} \left(\left(H_1 - \varphi_S (1 - e^{-C_{ms} \xi_1}) \left(\frac{3Fr}{(\epsilon Re)^2 Pr} \frac{A_1^2 \int_0^{\xi_1} \sqrt{-H_1 H_{1,\xi_1}} d\xi_1}{(-H_1 H_{1,\xi_1})^{3/2}} \right)^{1/3} \right)^3 H_{1,\xi_1} \right)_{\xi_1} = 0 \quad .$$

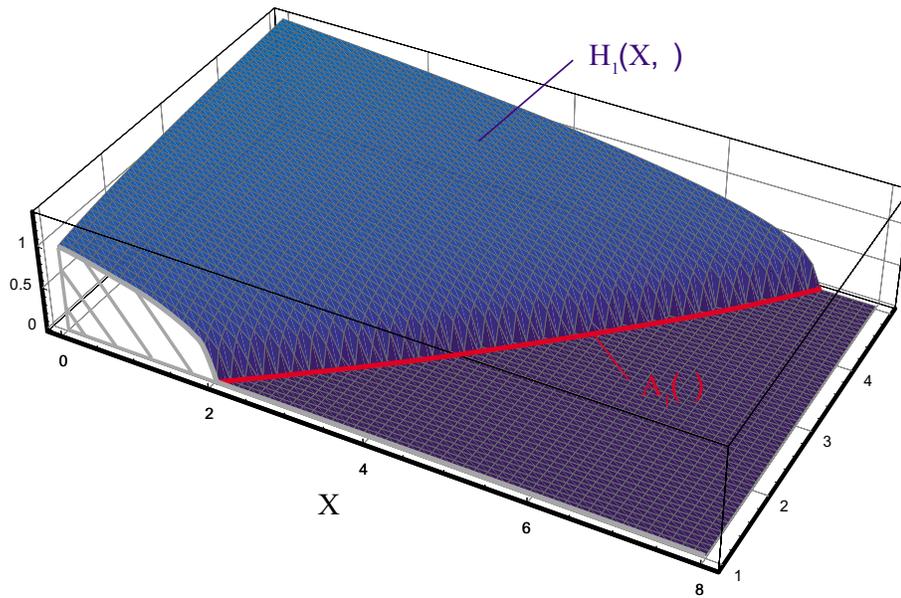


Abbildung 5.3: Skizze der Lösung $H_1(X, \tau)$ für den Sonderfall $S_1 = 0$.

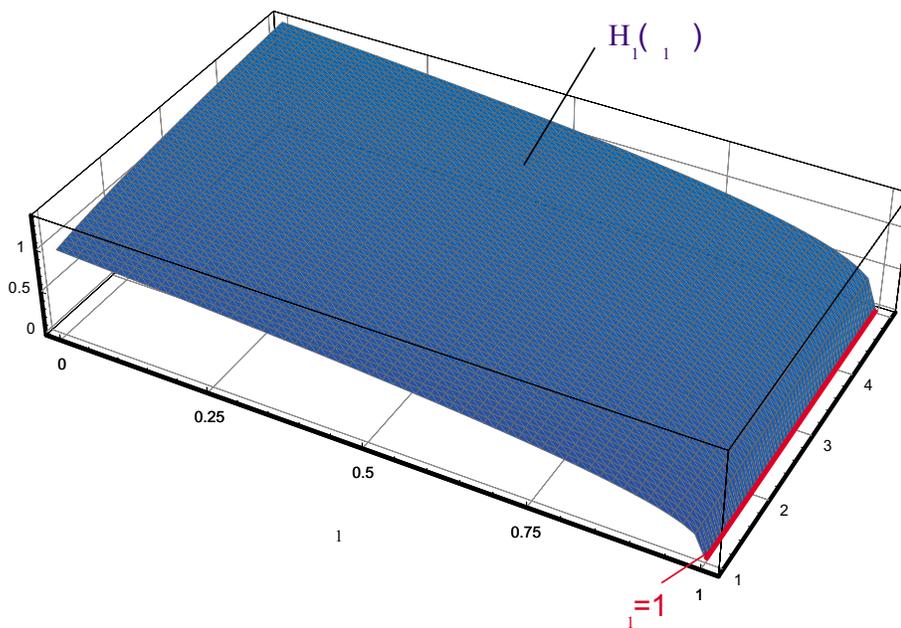


Abbildung 5.4: Skizze des transformierten Ausbreitungsproblems $H_1(\xi_1, \tau)$ für den Sonderfall $S_1 = 0$.

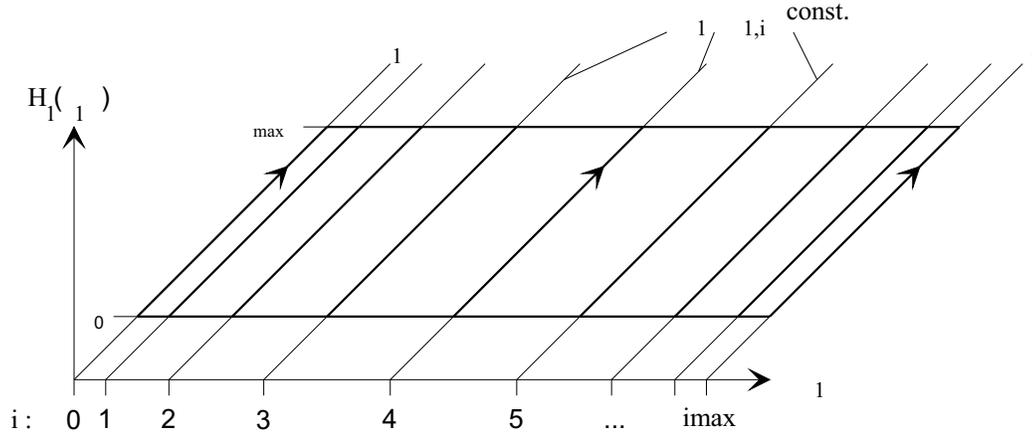


Abbildung 5.5: Skizze zur Lösung der Evolutionsgleichung für $H_1(\xi, \tau)$ mittels 'method of lines'.

Die Rand- und Integralbedingungen lauten in transformierter Form

$$\xi_1 = 0 : -\frac{1}{3} \frac{\epsilon Re}{Fr} \frac{1}{A_1} H_1^3 H_{1,\xi_1} = \alpha C_V \tau^{\alpha-1} \quad , \quad (5.47)$$

$$\xi_1 = 1 : H_1 = 0 \quad , \quad (5.48)$$

$$\int_0^1 H_1 d\xi_1 = \frac{C_V \tau^\alpha}{A_1} \quad . \quad (5.49)$$

5.7.2.2 Lösung der transformierten Evolutionsgleichung

Zur numerischen Lösung von Gleichung (5.46) bietet sich wiederum die sogenannte 'method of lines' an. Die Lösung erfolgt in der Zeit τ entlang Linien $\xi_1 = \text{konstant}$. Ableitungen in ξ_1 -Richtung werden durch finite Differenzen approximiert. Daraus resultiert ein System gekoppelter Differentialgleichungen in der Zeit, die mit Standardintegrationsroutinen gelöst werden, siehe Anhang D. Mit der nicht-äquidistanten Diskretisierung

$$\Delta \xi_{1,i} = \xi_{1,i} - \xi_{1,i-1} \quad , \quad i = 1, \dots, i_{max} \quad , \quad (5.50)$$

siehe Abbildung 5.5, ergibt sich eine diskrete Darstellung

$$H_{1,i}(\tau) \simeq H_1(\xi_{1,i}, \tau) \quad , \quad (5.51)$$

an den Stellen $\xi_1 = \xi_{1,i}$ im Intervall $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_{max}$.

Zur Diskretisierung der Ableitungen in der ξ_1 -Richtung dienen zentrale Differenzen für die ersten Ableitungen

$$H_{1,\xi_1}(\xi_{1,i}, \tau) \approx \frac{H_{1,i+1} - H_{1,i-1}}{\Delta \xi_{1,i+1} + \Delta \xi_{1,i}} \quad , \quad i = 1, \dots, i_{max} - 2 \quad , \quad (5.52)$$

sowie für die zweiten Ableitungen

$$H_{1,\xi_1\xi_1}(\xi_{1,i}, \tau) \approx 2 \frac{\Delta\xi_{1,i}H_{1,i+1} - (\Delta\xi_{1,i+1} + \Delta\xi_{1,i})H_{1,i} + \Delta\xi_{1,i+1}H_{1,i-1}}{\Delta\xi_{1,i+1}\Delta\xi_{1,i}(\Delta\xi_{1,i+1} + \Delta\xi_{1,i})}, \quad i = 1, \dots, i_{max} - 2. \quad (5.53)$$

Beide Approximationen sind für $\Delta\xi_{1,i+1} \neq \Delta\xi_{1,i}$ von erster Ordnung und gehen für $\Delta\xi_{1,i+1} \rightarrow \Delta\xi_{1,i}$ in eine Approximation zweiter Ordnung über. Nahe der Kontaktlinie, an der Stelle $\xi_{i,max-1}$, werden zur Erhöhung der Genauigkeit finite Differenzen dritter Ordnung verwendet.

Wegen der Integration in der Zeit τ kann für das Integral in Gleichung (5.46), im Gegensatz zu Abschnitt 5.7.1, keine zweite Differentialgleichung gelöst werden. Es erfolgt deshalb eine diskrete Formulierung des Integrals mittels der Trapezregel

$$\int_0^{\xi_1} \sqrt{-H_1 H_{1,\xi_1}} d\xi_1 = \sum_{i^*=0}^i \frac{1}{2} (\xi_{i^*} - \xi_{i^*-1}) \left(\sqrt{-H H_\xi} \Big|_{\xi=\xi_{i^*}} + \sqrt{-H H_\xi} \Big|_{\xi=\xi_{i^*-1}} \right) \quad (5.54)$$

Zur diskreten Formulierung der Randbedingung (5.47) dient eine Vorwärtsdifferenz für die Ableitung

$$H_{1,\xi_1}(0, \tau) \approx \frac{-\Delta\xi_{1,2}(2\Delta\xi_{1,1} + \Delta\xi_{1,2})H_{1,0} + (\Delta\xi_{1,1} + \Delta\xi_{1,2})^2 H_{1,1} - \Delta\xi_{1,1}^2 H_{1,2}}{\Delta\xi_{1,1}\Delta\xi_{1,2}(\Delta\xi_{1,1} + \Delta\xi_{1,2})} \quad (5.55)$$

Zur Vermeidung mehrdeutiger Lösungen für den Wert $H_1(0, \tau)$ wird der Term H_1^3 an der Stelle $\xi_{1,1}$ in eine Taylor-Reihe entwickelt. Mit Hilfe einer Vorwärtsdifferenz für die erste Ableitung ergibt sich

$$H_1(0, \tau)^3 \approx 3H_{1,1}^2 \frac{\Delta\xi_{1,1} \left(\Delta\xi_{1,3}(2\Delta\xi_{1,2} + \Delta\xi_{1,3})H_{1,1} - (\Delta\xi_{1,2} + \Delta\xi_{1,3})^2 H_{1,2} + \Delta\xi_{1,2}^2 H_{1,3} \right)}{\Delta\xi_{1,2}\Delta\xi_{1,3}(\Delta\xi_{1,2} + \Delta\xi_{1,3})} + H_{1,1}^3 \quad (5.56)$$

Eingesetzt in Randbedingung (5.47) ergeben die beiden Gleichungen (5.55,5.56) die diskrete Formulierung der Randbedingung für $H_{1,0}(\tau)$. Die diskrete Formulierung der Randbedingungen (5.47) ist somit von zweiter Ordnung. An der Kontaktlinie gilt

$$H_{1,i_{max}}(\tau) = H_1(1, \tau) = 0 \quad (5.57)$$

Durch die diskrete Formulierung stellt die Evolutionsgleichung (5.46) ein Differentialgleichungssystem von $(i_{max} - 1)$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen zusammen mit zwei Randbedingungen an den Stellen $\xi_{1,0} = 0$ und $\xi_{1,i_{max}} = 1$ dar. Auf die noch verbleibende Formulierung der Anfangsbedingungen an der Stelle $\tau = \tau_0$ wird auf Abschnitt 5.8.1.3 verwiesen. Anmerkungen zum verwendeten Lösungsalgorithmus finden sich in Anhang D.

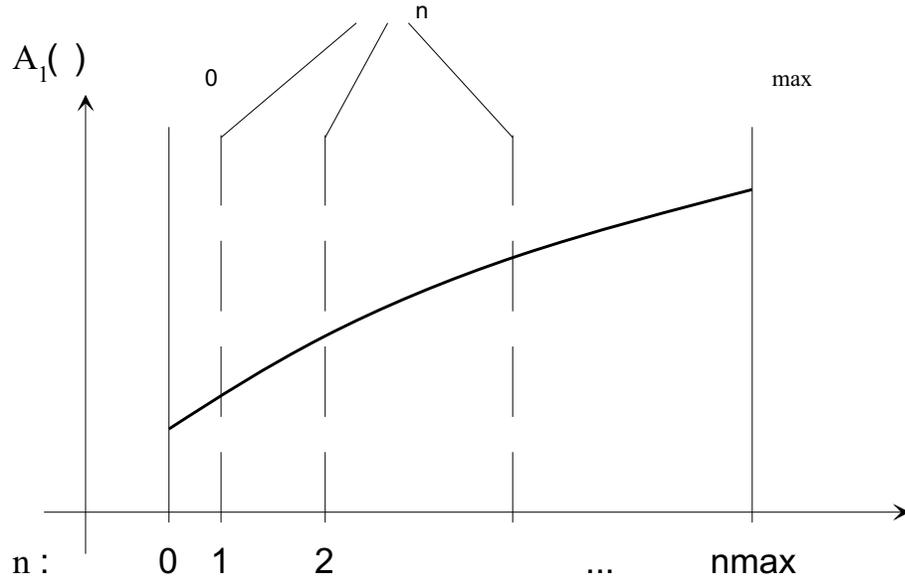


Abbildung 5.6: Intervalle der Shooting-Methode für $A(\tau)$.

5.7.2.3 Shooting-Methode für $A_1(\tau)$

Die Position der Kontaktlinie $A_1(\tau)$ ist bisher noch unbekannt und stellt sich als Teil der Lösung der Evolutionsgleichung (5.46) ein. Zur Verbesserung der Performance des gewählten Verfahrens dient eine Taylor-Entwicklung

$$A_1(\tau) = A_{n-1} + c_n \cdot (\tau - \tau_{n-1}) \quad , \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, n_{max} \quad , \\ \tau_{n-1} \leq \tau \leq \tau_n \quad , \end{array} \quad (5.58)$$

innerhalb eines Intervalls $\tau_{n-1} \leq \tau \leq \tau_n$, siehe Abbildung 5.6. Als Shooting-Bedingung zur Bestimmung des Koeffizienten c_n dient die Integralbedingung

$$\tau = \tau_n : \quad \int_0^1 H_1 d\xi_1 = \frac{C_V \tau^\alpha}{A_1} \quad . \quad (5.59)$$

5.8 Ergebnisse

Mit der Lösung für die Funktion $H_1(X, \tau)$ sind alle Strömungsgrößen (5.9-5.12) sowie das Profil der Kruste $S_1(X, \tau)$, Gleichung (5.4), bekannt. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse für die Ausbreitung einer Schmelze unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte eingehend diskutiert.

5.8.1 Position der freien Grenzfläche - $H_1(X, \tau)$

Für den Fall $\alpha = 7/4$ kann die Lösung der Evolutionsgleichung (5.16) mittels einer Ähnlichkeitstransformation gefunden werden. Für $\alpha \neq 7/4$ wird die numerische Lösung für $H_1(X, \tau)$ betrachtet. Zusätzlich zur Entwicklung der Funktion $H_1(X, \tau)$ unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte wird die Auswirkung der Glättungsfunktion in Gleichung (5.4) bezüglich der Ausbreitungslänge untersucht.

5.8.1.1 Lösung für $\tilde{H}_1(\xi_1)$

Wie in Abschnitt 4.4.1 erläutert, zeigt das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld lediglich für den Sonderfall $\alpha = 7/4$ ähnliches Verhalten. Die ähnliche Lösung der Ausbreitung unter dem Einfluß erstarrender Krusten an der Bodenplatte für den Fall $\alpha = 7/4$ dient deshalb als Testbeispiel zur Verifikation der numerischen Lösungen für $H_1(X, \tau)$, siehe Abschnitt 5.8.1.3, für beliebige Werte von $\alpha > 0$.

Die Abbildung 5.7 zeigt Profile der Formfunktion $\tilde{H}_1(\xi_1)$ für verschiedene dimensionslose Erstarrungstemperaturen Θ_S . Durch die mit Θ_S ansteigende Krustendicke nimmt die Verdrängungswirkung der Bodenkruste zu, wodurch die freie Grenzfläche nach oben verschoben wird. Dies äußert sich in einem Anstieg der Formfunktion $\tilde{H}_1(\xi_1)$. Aus dem Verlauf der Formfunktion $\tilde{H}_1(\xi_1)$, zusammen mit Gleichung (5.38), wird deutlich, daß $\eta_{N,1}$, der horizontalen Längenmaßstab der ähnlichen Lösungen, mit wachsenden Erstarrungstemperaturen abnimmt. Somit läßt der Anstieg der Formfunktion $\tilde{H}_1(\xi_1)$ direkt auf eine Reduzierung der Ausbreitungsgeschwindigkeit und somit auf den hemmenden Einfluß der Bodenkruste schließen. Der Quotient A_1/A_0 , siehe Gleichung (5.24), welcher das Verhältnis der Kontaktlinien mit/ohne Erstarrung kennzeichnet, ist in Abbildung 5.8 in Abhängigkeit von der dimensionslosen Erstarrungstemperatur Θ_S dargestellt. Für $A_1/A_0 = \eta_{N,1}/\eta_{N,0} < 1$ zeigt sich sowohl die Reduzierung der Ausbreitungslänge als auch die Reduzierung der Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der dimensionslosen Erstarrungstemperatur Θ_S , vergleiche Gleichung (3.41).

5.8.1.2 Einfluß des Parameters C_{mS}

Eine letzte Unsicherheit besteht in der Wahl des Parameters C_{mS} . Durch diesen Parameter wird der Einfluß der Glättungsfunktion in Gleichung (5.4) bestimmt. Die Abbildung 5.9 zeigt den Einfluß von C_{mS} auf den Wert $\eta_{N,1}$. Für $C_{mS} > 300$ ist die relative Abweichung von $\eta_{N,1}$ kleiner $3 \cdot 10^{-6}$. Somit ist für $C_{mS} > 300$ keine Rückwirkung der Glättungsfunktion auf die Ausbreitung der Schmelze zu erwarten.

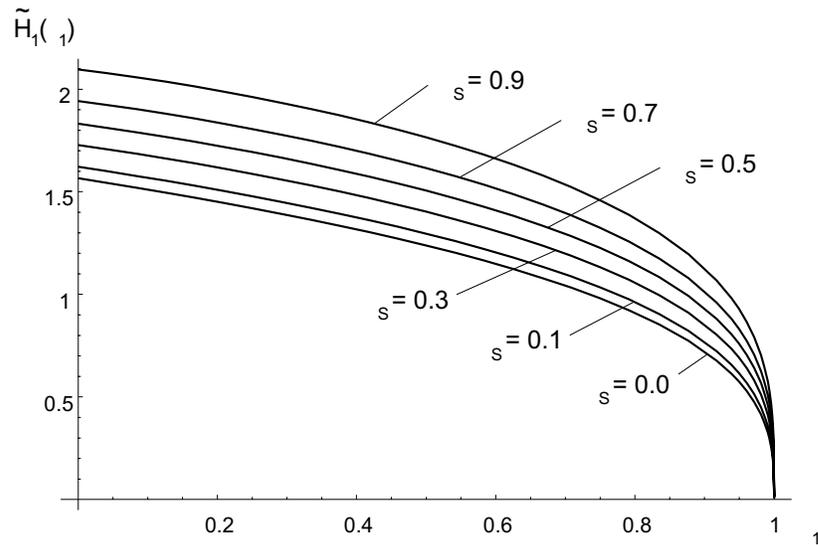


Abbildung 5.7: Formfunktion $\tilde{H}_1(\xi)$ für verschiedene dimensionslose Erstarrungstemperaturen Θ_S .

Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$, $C_{mS} = 500$.

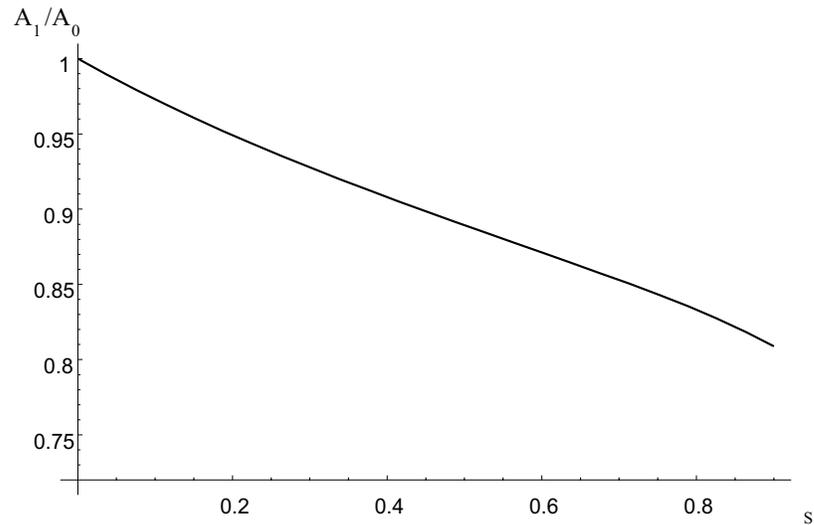


Abbildung 5.8: Einfluß verschiedener dimensionsloser Erstarrungstemperaturen Θ_S auf das Verhältnis $A_1/A_0 = \eta_{N,1}/\eta_{N,0}$.

Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$, $C_{mS} = 500$.

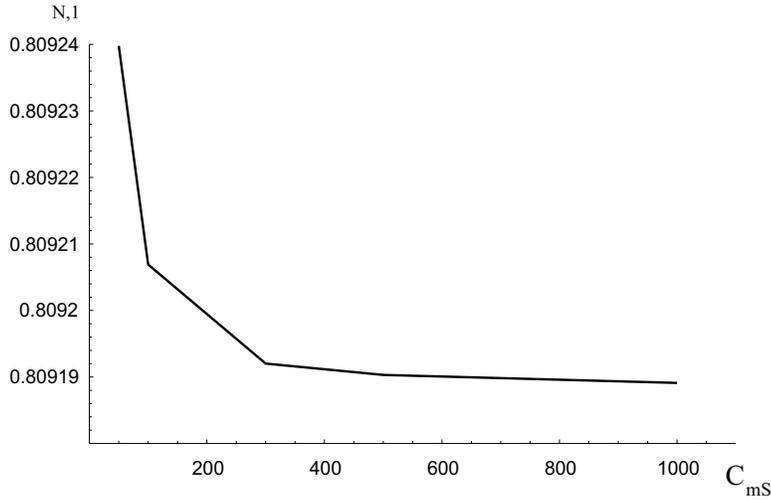


Abbildung 5.9: Einfluß des Parameters C_{mS} auf die Ausbreitungslänge $A_1 \propto \eta_{N,1}$.

Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$, $\Theta_S = 0.5$.

5.8.1.3 Lösung für $H_1(X, \tau)$

Für beliebige Werte α ist die Evolutionsgleichung (5.16) zur Beschreibung der Position der freien Grenzfläche numerisch zu lösen. In Abschnitt 5.7.2 wurde das hierbei verwendete Verfahren vorgestellt. Die ähnlichen Lösungen für den Fall $\alpha = 7/4$ sollen hier zur Verifikation herangezogen werden.

Im Gegensatz zur ähnlichen Lösung für $\alpha = 7/4$ bleibt bei der numerischen Lösung eine letzte Frage nach der Formulierung von Anfangsbedingungen zur Zeit $\tau = \tau_0$ offen. In Anlehnung an die Ausbreitung ohne Krustenbildung, siehe Abschnitt 3.3.1.3, dient in normierten ξ_1, τ -Koordinaten der Ansatz

$$H_1(\xi_1, \tau_0) = c(1 - \xi_1)^{1/3} \quad , \quad (5.60)$$

als Anfangsbedingung für die numerische Integration. Durch die Substitution von Gleichung (5.60) in den Gleichungen (5.47,5.49) ergeben sich zwei Bedingungen zur Bestimmung des Koeffizienten c und der Position der Kontaktlinie $A_1(\tau_0)$. Durch Variation der Ansatzfunktion (5.60) hat sich gezeigt, daß die Lösung $H_1(X, \tau)$ nur für kurze Zeiten $\tau \rightarrow \tau_0$ von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt. Für $\tau > \tau_0$ stellt sich Lösung unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingungen ein. Dies steht in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von Huppert (1982).

Die Abbildung 5.10 zeigt einen Vergleich zwischen numerischen und ähnlichen Lösungen für $A_1(\tau)$ und $H_1(\xi_1, \tau = 20)$ in ξ_1, τ -Koordinaten. Die Übereinstimmung beider Lösungen ist sehr gut. Dies kann als Verifikation des numerischen Verfahrens angesehen werden, denn für beliebige Werte $\alpha > 0$ bleibt sowohl der Typ der Evolutionsgleichung als auch die Formulierung der Randbedingungen erhalten.

In Abbildungen 5.11 ist die Position der Kontaktlinie $A_1(\tau)$ sowie der Verlauf der Funktion $H_1(X, \tau)$ für den technisch relevanten Fall $\alpha = 1$ und verschiedene dimensionslose Erstarrungstemperaturen $\Theta_S = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ in X, τ -Koordinaten dargestellt. Alle Profile zeigen den signifikanten Einfluß der erstarrenden Kruste an der Bodenplatte. Mit steigender Erstarrungstemperatur nimmt die Dicke der Kruste $S_1(X, \tau)$ zu. Dies führt zu einer Verlangsamung der Ausbreitung. Hervorgerufen wird dies durch die Reduktion der hydrostatischen Druckdifferenz zwischen $H_1(X, \tau)$ und $S_1(X, \tau)$, die als Antrieb der Strömung dient. Ein weiteres, für den Fall $\alpha = 1$, typisches Merkmal ist die relative zu $H_1(X, \tau)$ zunehmende Krustendicke $S_1(X, \tau)$. Dies hat sich bereits bei der Lösung des Temperaturfeldes, siehe Abschnitt 4.4.1, gezeigt. $\alpha = 7/4$ stellt eine Grenze bezüglich der Wechselwirkung Kruste-Ausbreitung dar. Während im Bereich $\alpha < 7/4$ für $\tau \rightarrow \infty$ mit einem Stoppen der Ausbreitung zu rechnen ist, da die Krustendicke $S_1(X, \tau)$ schneller in der Zeit anwächst als die Position $H_1(X, \tau)$ der freien Grenzfläche, stellt die Erstarrung für $\alpha \geq 7/4$ keine limitierende Bedingung für die Ausbreitung dar. In diesem Fall entwickelt sich die Kruste $S_1(X, \tau)$ langsamer im Vergleich zur Funktion $H_1(X, \tau)$.

5.8.2 Geschwindigkeitsfeld

Einen genaueren Einblick bezüglich der Wechselwirkung Kruste-Schmelze liefern Bilder des Geschwindigkeitsfeldes. In Abbildung 5.12 sind Stromlinien für $\alpha = 7/4$ und die dimensionslose Erstarrungstemperatur $\Theta_S = 0.5$ dargestellt, die gestrichelten Linien zeigen die Position der freien Grenzfläche ohne Krusteneinfluß. An der Bodenkruste verlaufen die Stromlinien wegen der Haftbedingung (5.5) parallel zur Kruste $S_1(X, \tau)$ die selbst die Stromlinie $\Psi = 0$ darstellt. An der instationären freien Grenzfläche $H_1(X, \tau)$ verlaufen die Stromlinien nicht parallel, sondern sie enden dort. Der Volumenstrom der zwischen zwei an der freien Grenzfläche endenden Stromlinien transportiert wird, wird zum Anheben/Absenken der zeitabhängigen freien Grenzfläche $H_1(X, \tau)$ benötigt, siehe Gleichung (5.6). Dies ist ein charakteristisches Merkmal bei Strömungen mit zeitabhängigen Berandungen.

Die Abbildung 5.13 zeigt Geschwindigkeitsprofile für die beiden Geschwindigkeiten U, W für $\Theta_S = 0.5$. Deutlich ist der Einfluß der Haftbedingung (5.5) zu erkennen. Für $Z < S$ verschwinden innerhalb der Bodenkruste beide Geschwindigkeitskomponenten U, W . Durch den Verdrängungseffekt der Kruste nimmt die Geschwindigkeitsamplitude U_{max} signifikant

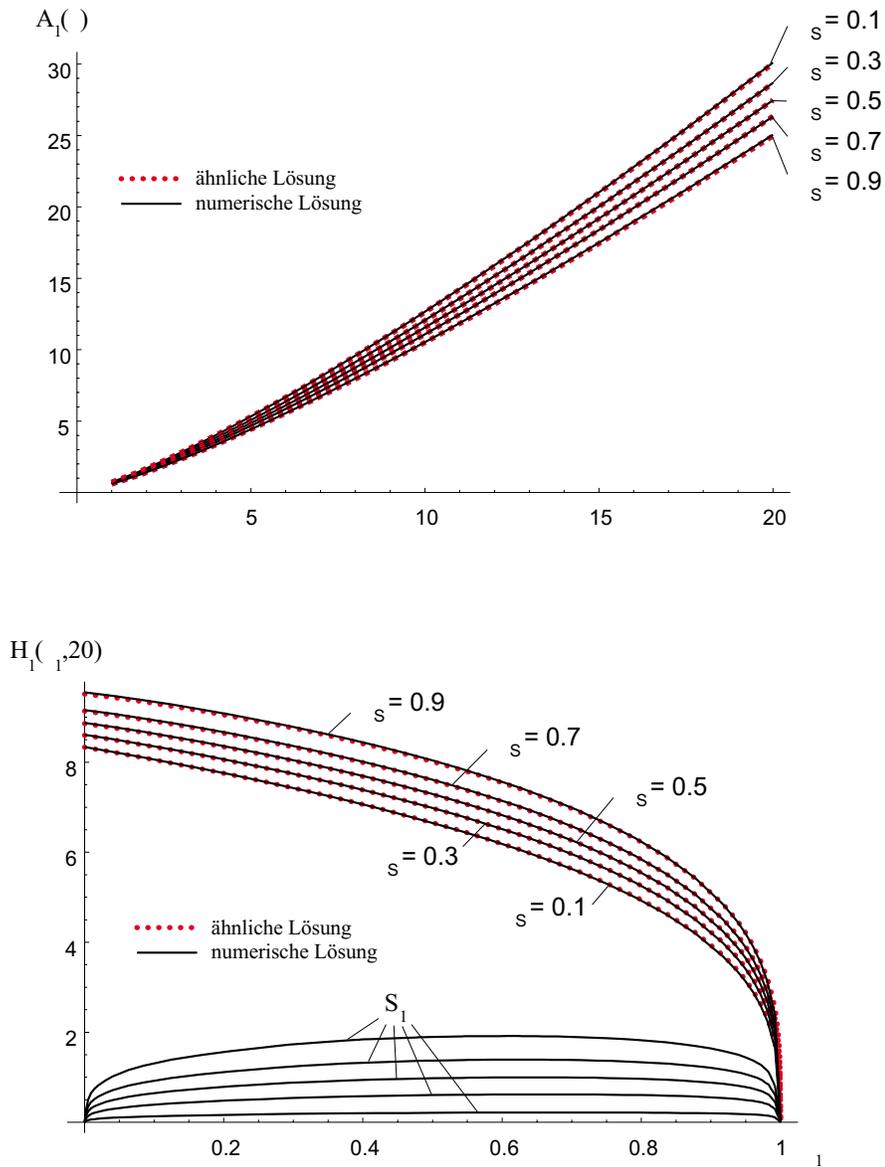


Abbildung 5.10: Vergleich von numerischer und ähnlicher Lösung für $A_1(\tau)$ und $H_1(\xi_1, 20)$ für verschiedene dimensionslose Erstarrungstemperaturen Θ_S .
 Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$,
 $C_{mS} = 500$.

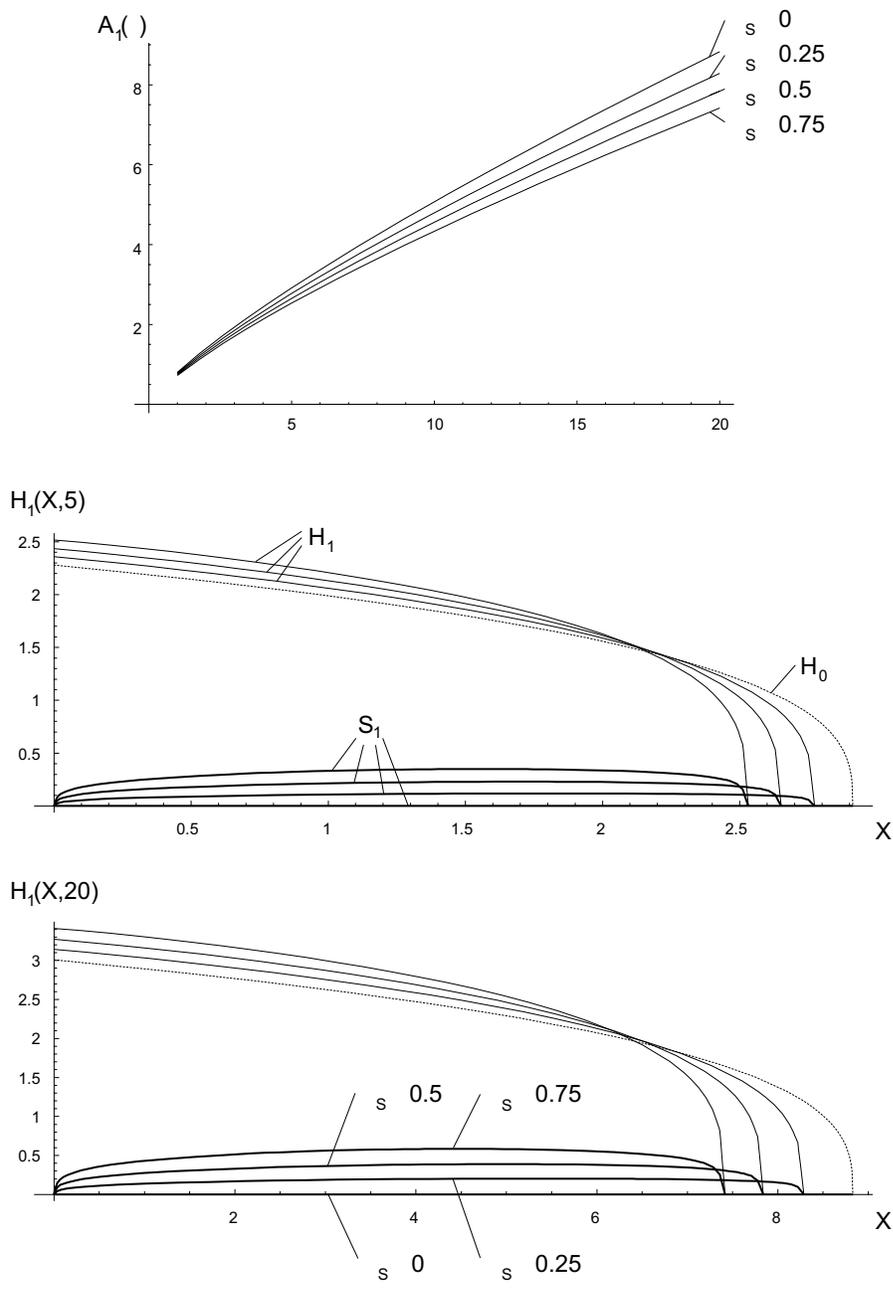


Abbildung 5.11: Numerische Lösung für $A_1(\tau)$, $H_1(X,5)$ und $H_1(X,20)$ für verschiedene dimensionslose Erstarrstemperaturen Θ_S .
 Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$, $C_{mS} = 500$.

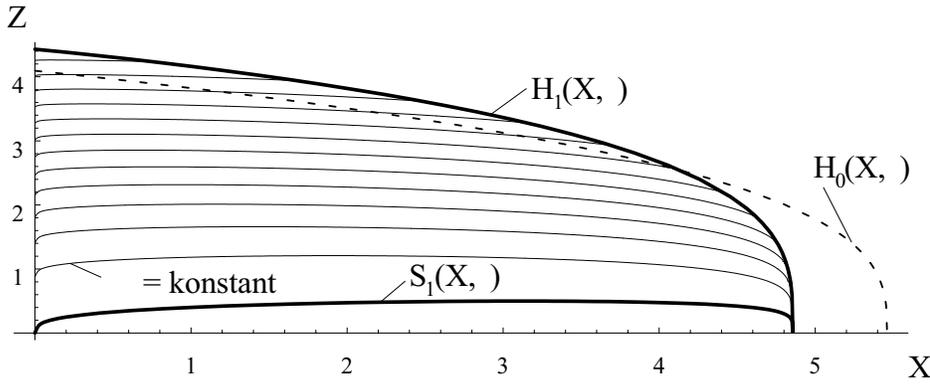


Abbildung 5.12: Stromlinien $\Psi = \text{konstant}$, $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$,
 $C_{mS} = 500$, $\Theta_S = 0.5$.

zu. Noch deutlicher wird dieser Effekt für die Vertikalgeschwindigkeit W . Während für die Ausbreitung ohne Kruste stets $W < 0$ gilt, erzeugt die Umströmung für Bereiche $S_{1,X} > 0$ in der Nähe der Kruste positive Vertikalgeschwindigkeiten. Der Anstieg der Geschwindigkeitssamplitude W_{max} für wachsende Werte X resultiert aus dem steileren Verlauf der Funktion $H_1(X, \tau)$, siehe Abbildung 5.10.

5.8.3 Konvergenz der iterativen Lösung

Die Bildung einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte führt zusätzlich zum konvektiv/diffusiven Wärmetransport innerhalb der flüssigen Schmelze zu einem rein diffusiven Wärmetransport innerhalb der erstarrten Kruste. Dieser Effekt wird bei der Modellierung der Kruste $S_1(X, \tau)$, Gleichung (5.4), nicht berücksichtigt und muß im nachhinein abgeschätzt werden. Eine iterative Anpassung der Funktion $S_1(X, \tau)$ trägt dem Einfluß der isolierenden Wirkung der Kruste auf das Temperaturprofil Rechnung und wird in diesem Abschnitt näher diskutiert.

Durch den innerhalb der Kruste verschwindenden konvektiven Anteil am Wärmetransport verschlechtert sich die Wärmeabfuhr von flüssiger Schmelze zur Bodenplatte. Innerhalb der Kruste wird sich wegen

$$\Theta_{ZZ} = 0 \quad , \quad (5.61)$$

ein lineares Temperaturprofil einstellen. Wegen der Vernachlässigung der Latentwärme, siehe Abschnitt 5.1, geht dieses lineare Temperaturprofil stetig in das Temperaturprofil der flüssigen Schmelze über. Aus den Ergebnissen für die Ausbreitung ohne

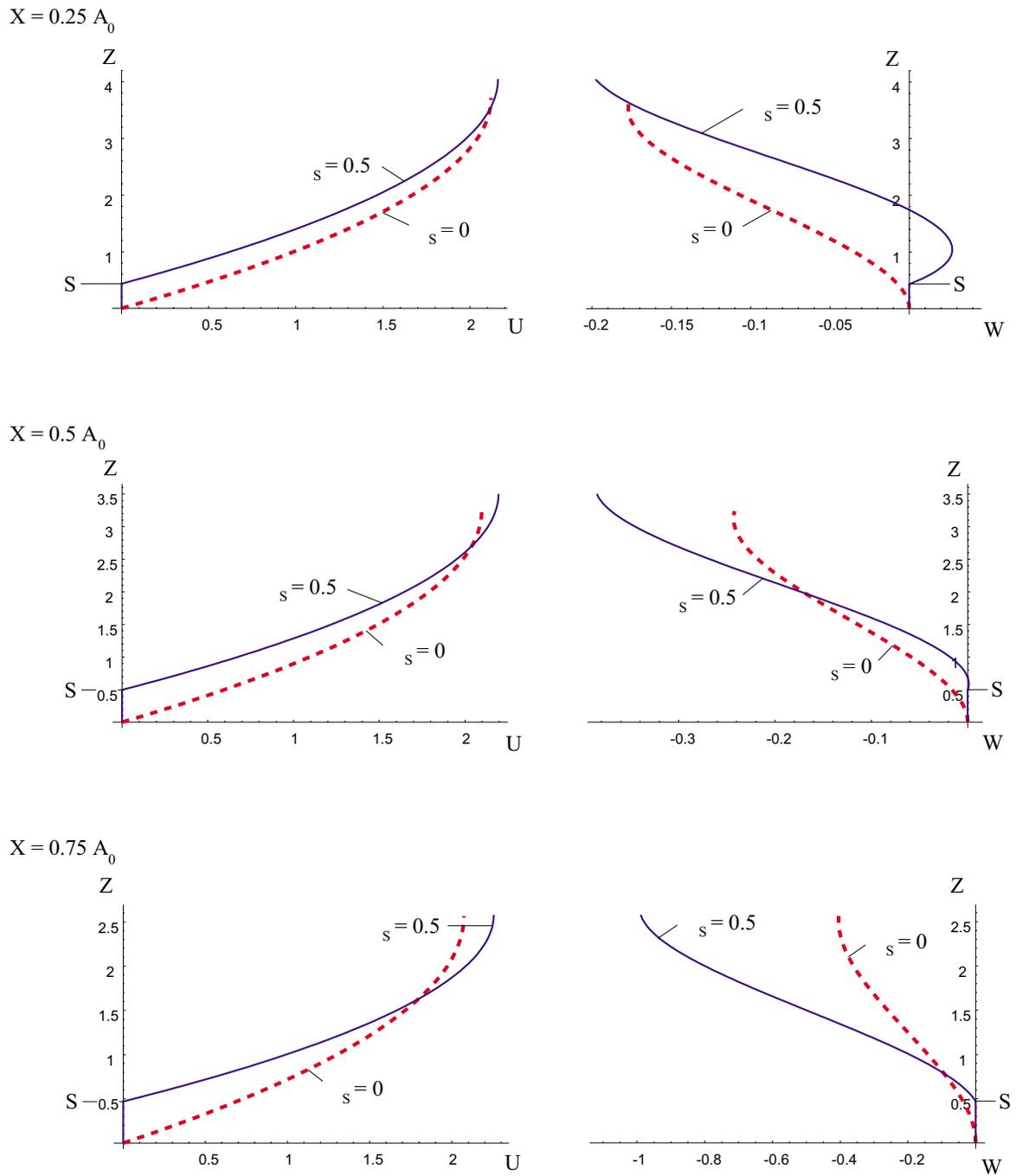


Abbildung 5.13: Geschwindigkeitsprofile U und W an den Stellen $X = 0.25, 0.5, 0.75 A_0(\tau)$,
 $\tau = 5$.
 Parameter: $\alpha = 7/4$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 1000$,
 $C_{mS} = 500$.

Krustenbildung, siehe Abbildung 4.9, zeigt sich, daß das Temperaturprofil innerhalb der flüssigen Schmelze für $Z \rightarrow 0$ ebenfalls linear ansteigt. Somit sollte es möglich sein, durch Streckung der angepaßten asymptotischen Lösung für Θ , siehe Abschnitt 4.4.1, die isolierende Wirkung der Bodenkruste zu erfassen. Für die Funktion $S_1(X, \tau)$ bedeutet dies, daß durch eine Streckung $S_{i+1} = E_i S_i$ eine sukzessive Anpassung der Kruste an das Temperaturfeld stattfindet und für $E_i \rightarrow 1$ der isolierende Effekt der Kruste miterfaßt wird.

Die zur Iteration verwendete Anpassungsvorschrift lautet

$$S_{i+1}(1/2A_1(\tau), \tau) = E_i S_i(1/2A_1(\tau), \tau) \quad . \quad (5.62)$$

Abbildung 5.14 zeigt für die ersten zwei Iterationen Temperaturprofile vor und nach der Streckung der angepaßten asymptotischen Lösung für Θ . Aus der 0. Iteration, der Ausbreitung ohne Krustenbildung, stellt sich ein relativ steiles Temperaturprofil in Wandnähe ein. Im Gegensatz dazu zeigt die numerische Lösung für Θ , unter Berücksichtigung der Bodenkruste, einen wesentlich flacheren Temperaturanstieg. Durch Streckung der asymptotischen Lösung entsteht die korrigierte Lösung der 1. Iteration. Es wird deutlich, daß durch den Geschwindigkeitsanstieg unter dem Einfluß der Bodenkruste, siehe Abbildung 5.13, die thermische Grenzschichtdicke im Vergleich zur korrigierten asymptotischen Lösung dünner ausfällt. In Wandnähe stimmen beide Lösungen überein, was hinsichtlich der Modellierung der Kruste S_{i+1} ausreichend ist. Für die zweite Iteration wird die notwendige Korrektur der asymptotischen Lösung geringer. Es ist deshalb zu erwarten, daß mit steigender Zahl der Iterationsschritte i die Kruste $S(X, \tau)$ korrekt beschrieben wird, wenn auch in der flüssigen Schmelze die thermische Grenzschichtdicke durch die Streckung der asymptotischen Lösung überschätzt wird. Zur Festlegung des Streckungsfaktors wird E_i^* zu drei typischen Zeitpunkten bestimmt. Es zeigt sich, daß die Abhängigkeit von der Zeit nur schwach ist, E_i kann deshalb aus dem arithmetischen Mittel

$$E_i = 1/3 (E_i^*(\tau_0) + E_i^*(1/2(\tau_0 + \tau_{max})) + E_i^*(\tau_{max})) \quad , \quad (5.63)$$

bestimmt werden. Abbildung 5.15 zeigt die Entwicklung der Funktion $S_i(X, \tau)$. Obwohl die Anpassung von S_{i+1} an S_i nur an der Stelle $X = 1/2A_1(\tau)$ vorgenommen wurde, stimmt S_{i+1} mit der numerisch berechnete Position der Schmelzisotheime $\Theta = \Theta_S$ über die gesamte Ausbreitungslänge $0 \leq X \leq A_1(\tau)$ sehr gut überein. Somit hängt der Streckungsfaktor nur unmerklich von X ab.

Abbildung 5.16 zeigt zusammenfassend die Entwicklung des Streckungsfaktors E_i für verschiedene Prandtl-Zahlen Pr und verschiedene Erstarrungstemperaturen Θ_S . Die Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr ist schwach. Dennoch führen größere Werte für Pr zu etwas besseren Konvergenzraten. Mit zunehmender Erstarrungstemperatur Θ_S nimmt die Anzahl

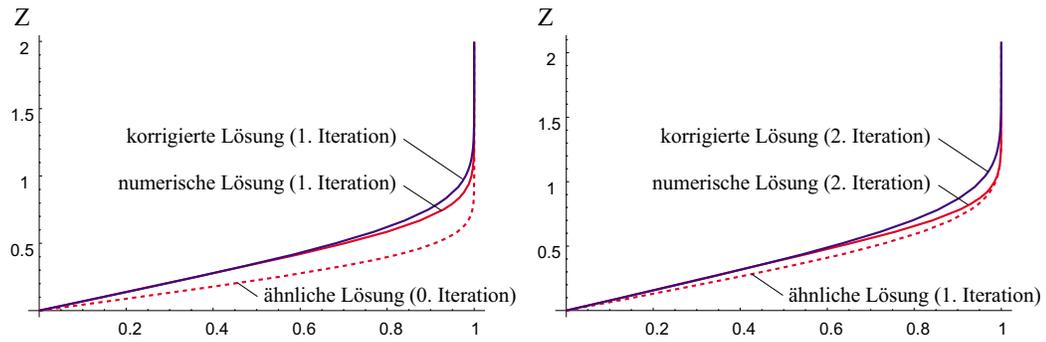


Abbildung 5.14: Streckung der ähnlichen Lösung für Θ zur Anpassung der ähnlichen an die numerische Lösung, $X = 1/2A(\tau)$, $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$, $\Theta_S = 0.5$, $C_{mS} = 500$.

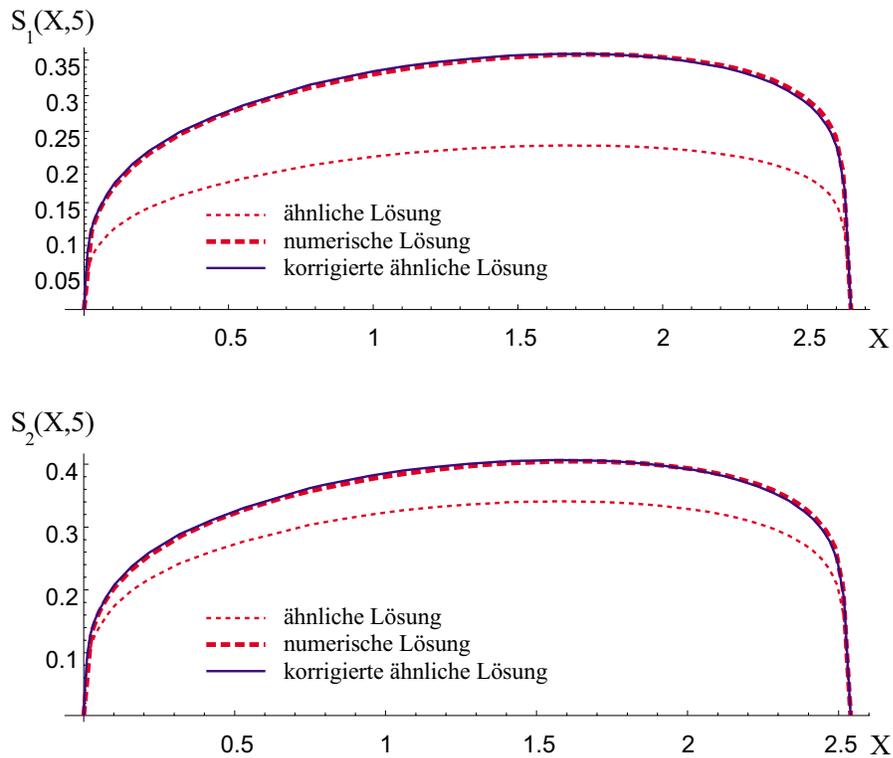


Abbildung 5.15: Streckung der Funktion $S_i(X, \tau)$ zur Anpassung der ähnlichen an die numerische Lösung, $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$, $\Theta_S = 0.5$, $C_{mS} = 500$.

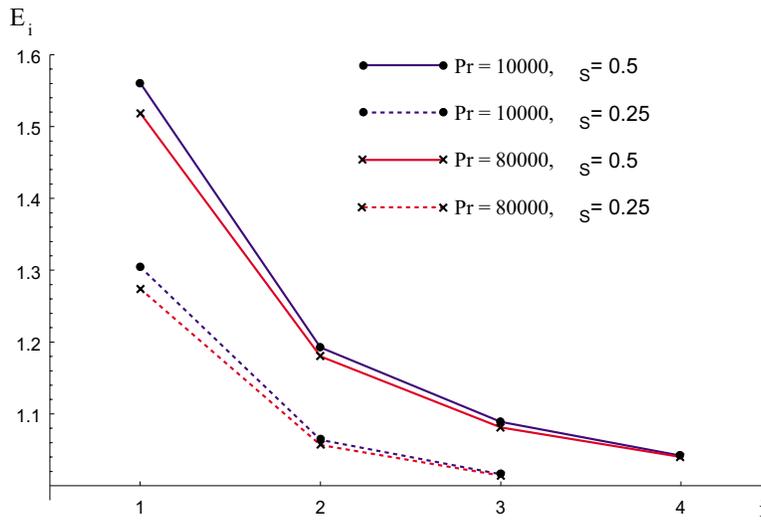


Abbildung 5.16: Entwicklung des Fehlers E_i bei der iterativen Bestimmung der Kruste $S_i(X, \tau)$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $C_{mS} = 500$.

der notwendigen Iterationsschritte zu. Dies ist eine Folge der im Vergleich zur thermischen Grenzschichtdicke zunehmenden Krustendicke.

5.8.4 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Ein letztes Kriterium zur Bewertung des hier vorgestellten Modells zur Beschreibung der Ausbreitung einer flüssigen Schmelze unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte ist der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen.

Zur experimentellen Untersuchung dieses Problems wurden von Ehrhard und Huber (1999) Modellexperimente mit Carnauba-Wachs ($Pr = 594$) durchgeführt. Auf einer horizontalen Fläche der Abmessung $800 \cdot 200mm$ wird flüssiges Carnauba-Wachs der Temperatur $T_0 = 90^\circ$ mit einem konstanten Volumenstrom eingebracht und ausgebreitet. Die Ausbreitungsfläche selbst wird während der Ausbreitung auf einer konstanten Temperatur $20^\circ \leq T_W \leq 90^\circ$ gehalten. Dadurch ergeben sich verschiedene dimensionslose Erstarrungstemperaturen $\Theta_S = (T_S - T_W)/(T_0 - T_W)$.

Ehrhard und Huber (1999) messen mittels eines optischen Verfahrens die Position der über die Breite der Ausbreitungsfläche gemittelten Kontaktlinie $a(t)$ als Funktion der Zeit. Die Abbildungen 5.17 und 5.18 zeigen die Versuchsergebnisse für zwei verschiedene Reynolds-Zahlen, zusammen mit den theoretischen Ergebnissen. Die zur Simulation verwendeten

	$Re = 0.56$	$Re = 5.1$	Stoffwerte
h_0	$10^{-3}m$	$5 \cdot 10^{-3}m$	$\nu = 5.287 \cdot 10^{-5}m^2/s$
l_0	$5 \cdot 10^{-3}m$	$8 \cdot 10^{-2}m$	$\kappa = 8.901 \cdot 10^{-8}m^2/s$
q	$2.960 \cdot 10^{-5}m^2/s$	$2.696 \cdot 10^{-4}m^2/s$	$g = 9.81m/s^2$
u_0	$2.960 \cdot 10^{-2}m/s$	$5.392 \cdot 10^{-2}m/s$	$T_S = 81^\circ C$

Tabelle 5.1: Parameter zur Simulation der Ausbreitungsexperimente von Ehrhard und Huber (1999) für $Re = 0.56$ und $Re = 5.1$.

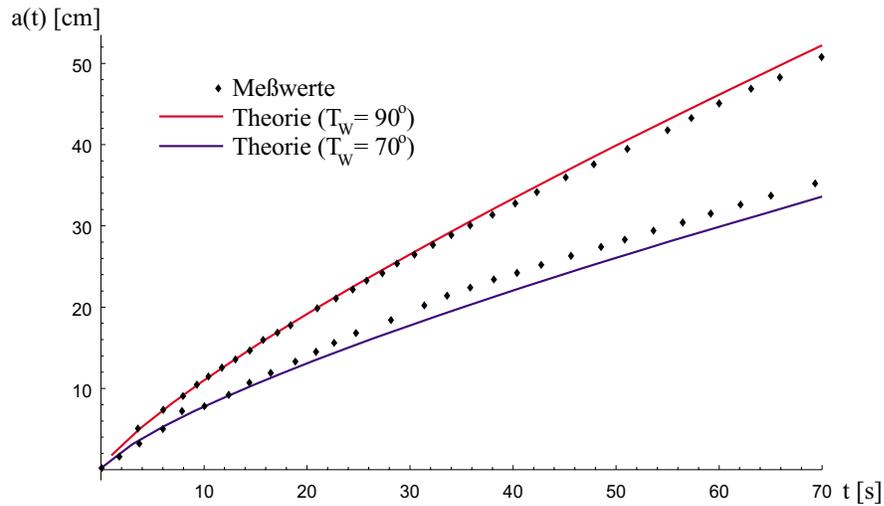


Abbildung 5.17: Position der Kontaktlinie $a(t)$, Vergleich Experiment und Theorie. $Re = 0.56, T_W = 70^\circ C$.

Parameter sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Für beide Fälle überschätzen die theoretischen Ergebnisse den Einfluß der Bodenkruste auf die Ausbreitung der Schmelze. Dies liegt in erster Linie an der zur Bestimmung der Krustendicke $S(X, \tau)$ zugrundeliegenden quasi-stationären Näherung, siehe Anhang B. Hinsichtlich einer reaktortechnischen Anwendung liefern die theoretischen Ergebnisse jedoch eine konservative Abschätzung. Die relative Abweichung bei der Bestimmung der Frontposition $a(t)$ liegt, bezogen auf die experimentellen Ergebnisse, für den Fall $Re = 0.56, T_W = 70^\circ C$ bei etwa 5% und für $Re = 5.1, T_W = 60^\circ C$ bei etwa 13%.

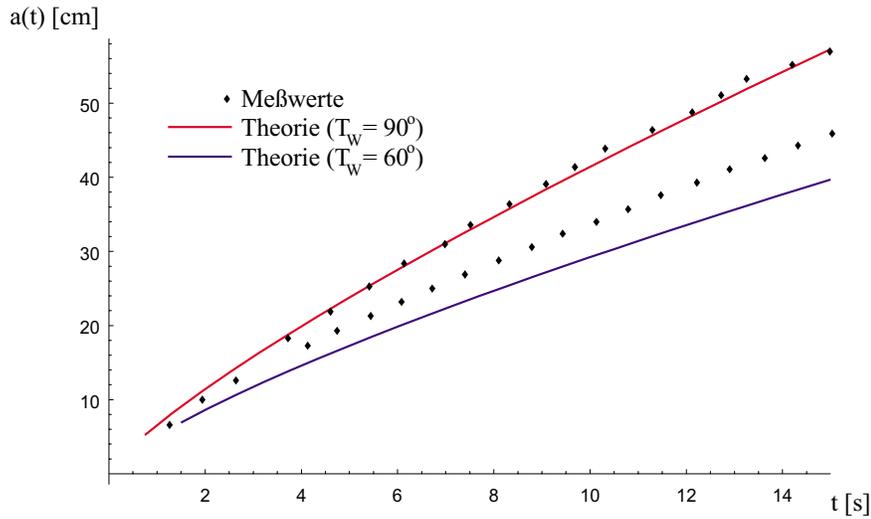


Abbildung 5.18: Position der Kontaktlinie $a(t)$, Vergleich Experiment und Theorie.
 $Re = 5.1, T_W = 60^\circ C$.

5.8.5 Wärmeabfuhr in die Bodenplatte

Nicht nur die Ausbreitung der Schmelze wird durch die Bildung einer erstarrenden Bodenkruste beeinträchtigt, sondern auch die Wärmeabfuhr in die Bodenplatte. Die schlechtere Wärmeabfuhr beruht zum einen auf der Abnahme der lokalen Wandwärmeströme $q_W = -\lambda T_z(z = 0)$ durch die isolierende Wirkung der Bodenkruste. Zum anderen führt der langsamere Fortschritt der Kontaktlinie $a(t)$ für die Ausbreitung über die Bodenkruste, siehe Abbildungen 5.17 und 5.18, zu einer kleineren wärmeübertragenden Fläche $a(t)b$. b ist die Breite der Ausbreitungsfläche.

Für den in die Ausbreitungsfläche übertragenen Wärmestrom ergibt sich

$$Q = b \int_0^{a(t)} q_W dx = -b\lambda \int_0^{a(t)} T_z(z = 0) dx \quad . \quad (5.64)$$

Mit Hilfe eines gemittelten Wärmeübertragungskoeffizienten $k(t)$ kann dieser Wärmestrom auch gemäß

$$Q = -a(t)b k(t)(T_0 - T_W) \quad , \quad (5.65)$$

ausgedrückt werden.

Für die über die Ausbreitungsfläche gemittelte Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{k(t)h_0}{\lambda} \quad , \quad (5.66)$$

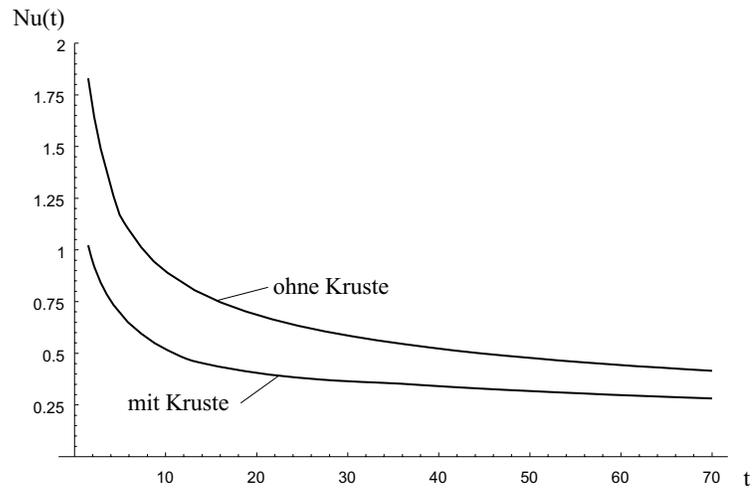


Abbildung 5.19: Nusselt-Zahlen Nu mit und ohne Krusteneinfluß. $Re = 0.56, T_W = 70^\circ C$.

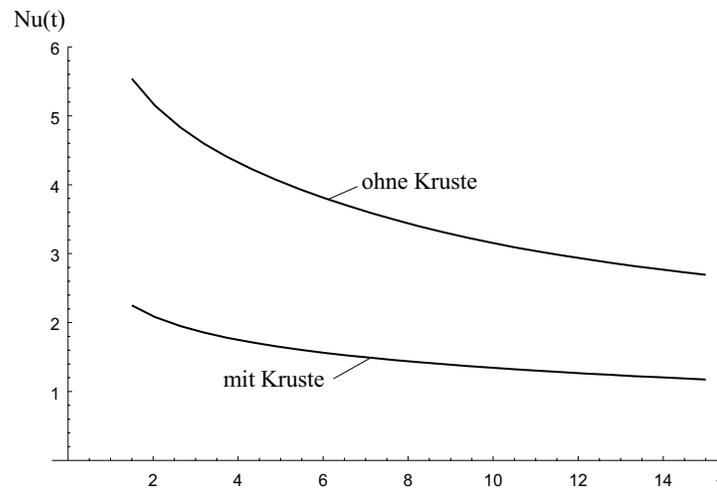


Abbildung 5.20: Nusselt-Zahlen Nu mit und ohne Krusteneinfluß. $Re = 5.1, T_W = 60^\circ C$.

folgt aus den beiden Gleichungen (5.64,5.65)

$$Nu = \frac{1}{A(\tau)} \int_0^{A(\tau)} \Theta_Z(Z=0) dX \quad . \quad (5.67)$$

Für die beiden im vorherigen Abschnitt betrachteten Simulationen sind in den Abbildungen 5.19 und 5.20 die Nusselt-Zahlen (5.67) für die Ausbreitung mit und ohne Krusteneinfluß dargestellt. Hierbei bestätigt sich die durch die Bildung der Bodenkruste deutliche Verschlechterung der Wärmeabfuhr an die Bodenplatte.

Kapitel 6

Krustenbildung an der freien Grenzfläche

Die Ausbreitung von Schmelzen großer Prandtl-Zahl $Pr \gg 1$ ist gekennzeichnet durch dünne thermische Grenzschichten, siehe Abschnitt 4.4.4. Dadurch bedingt können sich an der freien Grenzfläche nur dünne Krusten bilden. Zur Beschreibung der Wechselwirkung Kruste-Schmelze werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Temperatur an der freien Grenzfläche sei durch entsprechende Kühlung stets unterhalb der Erstarrungstemperatur, d.h. $T(z = h) = T_\infty < T_S$.
- Durch diese Wahl der thermischen Randbedingung an der freien Grenzfläche ist stets die gesamte freie Grenzfläche der Schmelze in einer dünnen Zone erstarrt.
- Aus den Ergebnissen für das Temperaturfeld für Wärmeverluste an der freien Grenzfläche, siehe Abschnitt 4.4.4, zeigt sich, daß die thermische Grenzschichtdicke nahe der Kontaktlinie nahezu verschwindet. Somit können Wechselwirkungen zwischen Kruste und Bodenplatte wegen der ebenfalls verschwindenden Krustendicke vernachlässigt werden.
- Die Dicke d der entstehenden Kruste ist wegen $Pr \gg 1$ sehr dünn, d.h. die Kruste kann als Membran betrachtet werden. Zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften können Biegemomente und Querkräfte vernachlässigt werden (Axelrad 1983).
- Zur Vereinfachung des Problems sollen Effekte durch elastische Dehnung der Kruste tangential zur freien Grenzfläche bei der Betrachtung des kinematischen Einflusses der Kruste auf die darunterliegende Ausbreitungsströmung vernachlässigt werden. Dies führt für reaktorspezifische Anwendungen zu einer konservativen Abschätzung des

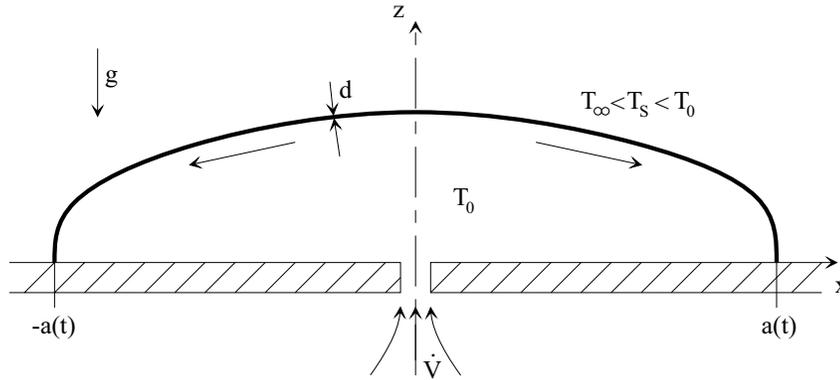
Krusteneinflusses an der freien Grenzfläche. Zur Berechnung der Dehnungen wäre die Kenntnis der exakten Krustendicke d erforderlich. Dies setzt zum einen die Lösung des Temperaturfeldes voraus und zieht zusätzlich die Kopplung von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld nach sich.

6.1 Ausbreitungsszenarien

Je nach Zusp eisung der flüssigen Schmelze können zwei mögliche Ausbreitungsszenarien beobachtet werden. Diese unterscheiden sich im wesentlichen durch die kinematischen Randbedingungen an der Kruste, vergleiche Abbildung 6.1:

- Modell 1 - fixierte Krusten: Die Zusp eisung durch eine linienförmige Quelle in der Bodenplatte führt zu einer symmetrisch zur z -Achse verlaufenden Ausbreitung der Schmelze. Als Sonderfall gehört hierzu auch die Ausbreitung eines konstanten Volumens $\alpha = 0$. Durch die Symmetrie zur z -Achse erfährt die Kruste an der freien Grenzfläche bei $x = 0$ keine resultierende Scherkraft durch die Schmelze. Durch die symmetrische Verteilung aller auf die Kruste wirkenden Effekte ist die Horizontalgeschwindigkeit der Kruste an der Stelle $x = 0$ stets Null, d.h sie ist an dieser Stelle horizontal fixiert. Die Bildung neuer Kruste erfolgt nahe der Kontaktlinie $x \rightarrow a(t)$, wo heiße Schmelze unter der schon vorhandenen Kruste austritt und aufgrund der vorgegebenen thermischen Randbedingungen erstarrt.
- Modell 2 - freischwimmende Krusten: Die Zusp eisung parallel zur Bodenplatte führt im Gegensatz zum vorigen Modell zu einer bewegten Kruste. Weder an der Stelle $x = 0$ noch nahe der Kontaktlinie $x \rightarrow a(\tau)$ kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen Kruste und Umgebung. Es handelt sich somit um eine freischwimmende Kruste. Die Geschwindigkeit der Kruste wird durch die Verteilung der Schubspannungen an der Kruste bestimmt. Durch die fehlende Wechselwirkung Kruste-Umgebung sind die Enden der Kruste kräftefrei. Unter diesen Voraussetzungen erfolgt die Bildung neuer Kruste an der Stelle $x = 0$. Durch die Geschwindigkeitsverteilung in der Schmelze wird sich eine Krustengeschwindigkeit $u_c > \dot{a}(t)$ einstellen, d.h ein festes Partikel auf der Kruste erreicht in endlicher Zeit die Kontaktlinie $a(\tau)$. Nahe der Kontaktlinie verschwindet die Kruste mit der dort verschwindenden thermischen Grenzschichtdicke, siehe Abschnitt 4.4.4.

Modell 1 - fixierte Krusten:



Modell 2 - freischwimmende Krusten:

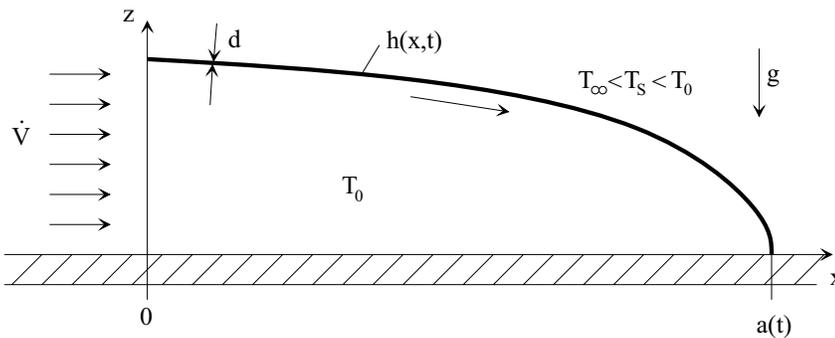


Abbildung 6.1: Mögliche Ausbreitungsszenarien für Schmelzen großer Prandtl-Zahl.

6.2 Kinematische und dynamische Randbedingungen

An der Bodenplatte, siehe Abbildung 1.3, gilt die Haftbedingung

$$X, Z = 0 : \quad U = W = 0 \quad . \quad (6.1)$$

Wichtigstes Unterscheidungsmerkmal zwischen der Ausbreitung mit und ohne Krusteneinfluß an der freien Grenzfläche ist die Haftbedingung

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad U = U_c \quad , \quad (6.2)$$

der flüssigen Schmelze an der erstarrten Kruste, vergleiche Gleichung (3.11). Zur weiteren Beschreibung der kinematischen Verhältnisse an der Kruste ist ein Zusammenhang zwischen der horizontalen Krustengeschwindigkeit U_c und dem Profil der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ notwendig.

In dimensionsbehafteten Größen zeigt Abbildung 6.2 Profile der freien Grenzfläche $h(x, t)$ zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. An der Stelle $x = 0$ bilden sich Krusten mit einer

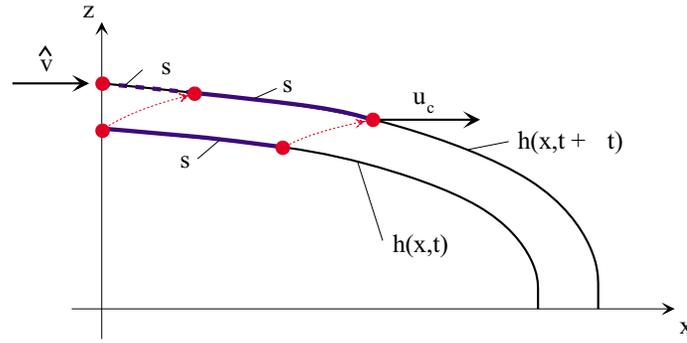


Abbildung 6.2: Kinematische Bedingungen der Kruste.

Krustenbildungsrate $\hat{v}(t)$. Wegen der Vernachlässigung elastischer Dehnung der Kruste gilt für die Länge s zwischen $x = 0$ und einem festen Punkt auf der Kruste

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + h_x^2} dx^* \quad .$$

Für die Krustenbildungsrate gilt

$$\hat{v}(t) = \frac{ds}{dt} = s_t + u_c s_x \quad .$$

Hieraus ergibt sich durch Auflösen nach u_c und Einführen dimensionsloser Größen (2.6-2.10) für die horizontale Geschwindigkeitskomponente U_c eines festen Punktes auf der Kruste

$$U_c = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon H_X)^2}} \left(\hat{V} - \epsilon^2 \int_0^X \frac{H_X H_{X\tau}}{\sqrt{1 + (\epsilon H_X)^2}} dX \right) \quad . \quad (6.3)$$

Für die kinematische Grenzflächenbedingung, vergleiche Gleichung (3.2), gilt

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad W = H_X U_c + H_\tau \quad . \quad (6.4)$$

Zusätzlich zu den kinematischen Randbedingungen an der freien Grenzfläche unter dem Einfluß einer erstarrenden dünnen Kruste müssen die dynamischen Bedingungen an der Kruste betrachtet werden. Wegen der dünnen Kruste können sowohl Biegemomente und Querkräfte normal zur Kruste als auch Trägheitskräfte der Kruste vernachlässigt werden (Axelrad 1983). In Abbildung 6.3 ist ein Element der Kruste dargestellt. Die tangential zur Kruste wirkende Kraft \vec{f} hat eine ähnliche Wirkung wie die Oberflächenspannung σ , siehe Abschnitt 3.1. Jedoch ist der Einfluß der Kraft \vec{f} nicht ausschließlich von den lokalen Bedingungen an der Kruste abhängig, sondern beinhaltet den integralen Einfluß der Schubspannungen entlang der Kruste. Durch die Wechselwirkung Kruste-Schmelze herrscht an

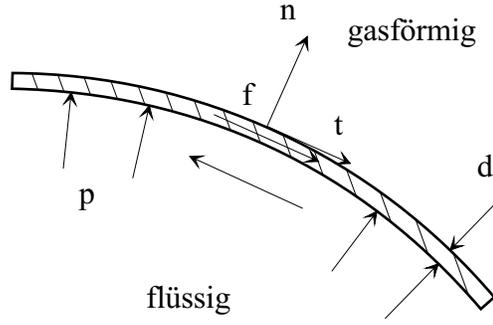


Abbildung 6.3: Kräfteverhältnisse an der freien Grenzfläche unter dem Einfluß einer dünnen erstarrten Kruste.

der freien Grenzfläche ein Kräftegleichgewicht zwischen der Kraft \vec{f} tangential zur Kruste, den Schubspannungen τ und dem Druck p . Eine Kräftebilanz in normaler und tangentialer Richtung mit $\sigma \rightarrow f(x, t)$, Gleichungen (3.3,3.4), liefert in dimensionslosen Größen (2.6-2.11) mit

$$F = \frac{\epsilon f}{\mu u_0} \quad , \quad (6.5)$$

$Z = H(X, \tau)$:

normal :

$$P = \frac{2\epsilon^2}{(1 + (\epsilon H_X)^2)} \left(\epsilon^2 H_X (H_X U_X - W_X) - H_X U_Z + W_Z \right) - \epsilon^2 \frac{F H_{XX}}{(1 + (\epsilon H_X)^2)^{3/2}} \quad , \quad (6.6)$$

tangential :

$$F_X = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon H_X)^2}} \left((1 - (\epsilon H_X)^2) (U_Z + \epsilon^2 W_X) - 2\epsilon^2 H_X (U_X - W_Z) \right) \quad . \quad (6.7)$$

An der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche folgt aus den Randbedingungen (6.1-6.4,6.6) für separate Längenskalen $\epsilon \ll 1$

$$X, Z = 0 : \quad U = W = 0 \quad , \quad (6.8)$$

$$X, Z = H(X, \tau) : \quad U = U_c \quad , \quad (6.9)$$

$$W = H_X U_c + H_\tau \quad , \quad (6.10)$$

$$P = 0 \quad , \quad (6.11)$$

vergleiche Gleichungen (3.8-3.11).

Für die tangential zur Kruste wirkende Kraft F folgt aus Gleichung (6.7) für $\epsilon \ll 1$, zusammen mit $ds/l_0 = \sqrt{1 + (\epsilon H_X)^2} dX$,

$$F(X, \tau) - F(0, \tau) = \int_0^X U_Z(X, H, \tau) dX \quad . \quad (6.12)$$

Die verbleibende Unbekannte U_c hängt ab vom betrachteten Ausbreitungsszenario. Unter der Voraussetzung $\epsilon \ll 1$ ergibt sich aus Gleichung (6.3)

$$U_c = \hat{V}(\tau) \quad , \quad (6.13)$$

d.h. die Geschwindigkeit der Kruste ist über die Ausbreitungslänge konstant und nur noch eine Funktion der Zeit.

- Fixierte Krusten (Modell 1): Die Kruste ist fixiert bei $X = 0$, daraus folgt unmittelbar

$$\hat{V} = U_c = 0 \quad . \quad (6.14)$$

- Freischwimmende Krusten (Modell 2): Die Kruste schwimmt frei auf der flüssigen Schmelze, die Enden sind jeweils kräftefrei, d.h. $F(0, \tau) = F(A, \tau) = 0$. Aus Gleichung (6.12) folgt damit

$$\int_0^{A(\tau)} U_Z(X, H, \tau) dX = 0 \quad , \quad (6.15)$$

als notwendige Bedingung zur Bestimmung von U_c . Die Geschwindigkeit U_c stellt sich als Teil der Lösung derart ein, daß das Integral über die Schubspannungen entlang der Kruste verschwindet.

6.3 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Für den Druck ergibt die Integration der vertikalen Impulsgleichung (2.23) zusammen mit Gleichung (6.11)

$$P = \frac{\epsilon Re}{Fr} (H - Z) \quad . \quad (6.16)$$

Die zweifache Integration der horizontalen Impulsgleichung (2.22) ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingungen (6.8,6.9) für die Horizontalgeschwindigkeit

$$U = \frac{U_c}{H} Z + \frac{\epsilon Re}{2Fr} H_X (Z^2 - HZ) \quad . \quad (6.17)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (2.21) folgt mit Gleichung (6.8) für die Vertikalgeschwindigkeit

$$W = \frac{U_c H_X}{2H^2} Z^2 + \frac{\epsilon Re}{12Fr} Z^2 (3H_X^2 + H_{XX} (3H - 2Z)) \quad . \quad (6.18)$$

Durch Einführen der Stromfunktion $U = \Psi_Z, W = -\Psi_X$ folgt

$$\Psi = \frac{U_c}{2H} Z^2 + \frac{\epsilon Re}{12Fr} H_X Z^2 (2Z - 3H) \quad . \quad (6.19)$$

6.4 Evolutionsgleichung für $H(X, \tau)$

Die Geschwindigkeiten U und W , die Stromfunktion Ψ sowie der Druck P hängen noch von der unbekannt Schichthöhe $H(X, \tau)$ ab. Analog zu Abschnitt 3 ist zur Bestimmung von $H(X, \tau)$ die Lösung einer Evolutionsgleichung notwendig.

Die Substitution der Vertikalgeschwindigkeit W , Gleichung (6.18), in der kinematischen Grenzflächenbedingung (6.10) führt auf die Gleichung

$$H_\tau + \frac{1}{2} U_c H_X - \frac{\epsilon Re}{12Fr} (H^3 H_X)_X = 0 \quad , \quad (6.20)$$

zur Bestimmung der Unbekannten $H(X, \tau)$. Die Rand- und Integralbedingungen für das Volumen (2.26), den Volumenstrom (2.28) und die Position der Kontaktlinie (2.29) ergeben

$$X = 0 : \quad \frac{1}{2} U_c H - \frac{\epsilon Re}{12Fr} H^3 H_X = \alpha C_V \tau^{\alpha-1} \quad , \quad (6.21)$$

$$X \geq A(\tau) : \quad H = 0 \quad , \quad (6.22)$$

$$\int_0^{A(\tau)} H dX = C_V \tau^\alpha \quad . \quad (6.23)$$

Zusammen mit den Gleichungen (6.14-6.15) zur Bestimmung von U_c ist das Problem vollständig beschrieben.

Im Vergleich zur Evolutionsgleichung (3.16) der isothermen Ausbreitung handelt sich es bei Gleichung (6.20) um eine nichtlineare Konvektions-Diffusionsgleichung durch den zusätzlichen Term $1/2 U_c H_X$. Er charakterisiert den Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche.

6.4.1 Ähnlichkeitstransformation

Mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation läßt sich Gleichung (6.20) in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführen. Diese kann für spezielle Werte $\alpha = 0, 4/3$ analytisch gelöst werden. Für allgemeine Werte von α kommt ein numerisches Verfahren analog zu Abschnitt 3.3.1.2 zum Einsatz. Basierend auf der Ähnlichkeitstransformation des isothermen Problems, siehe Abschnitt 3.3.1, folgt

$$H(X, \tau) = C_1 \tau^{(2\alpha-1)/5} \tilde{H}(\eta/\eta_N) \quad , \quad (6.24)$$

mit

$$\eta = \frac{X}{C_0} \tau^{-(3\alpha+1)/5} \quad . \quad (6.25)$$

Für die Krustengeschwindigkeit U_c gilt

$$U_c = C_2 \dot{A} = \frac{3\alpha + 1}{5} C_0 C_2 \eta_N \tau^{(3\alpha-4)/5} . \quad (6.26)$$

Die Konstante C_2 kennzeichnet das Verhältnis von Krustengeschwindigkeit U_c zur Ausbreitungsgeschwindigkeit \dot{A} .

Für Gleichung (6.20) ergibt sich damit unter Verwendung der Konstanten (3.27,3.28) in der normierten Koordinate

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_N} , \quad 0 \leq \xi \leq 1 , \quad (6.27)$$

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi)_\xi + \frac{12\alpha + 4}{5} \xi \tilde{H}_\xi - \frac{8\alpha - 4}{5} \tilde{H} - \frac{6\alpha + 2}{5} C_2 \tilde{H}_\xi = 0 . \quad (6.28)$$

Aus den Randbedingungen (6.21,6.22) folgt

$$\xi = 0 : \quad \tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi - \frac{6\alpha + 2}{5} C_2 \tilde{H} = -\frac{4\alpha}{\eta_N^{5/3}} , \quad (6.29)$$

$$\xi = 1 : \quad \tilde{H} = 0 . \quad (6.30)$$

Für η_N ergibt die Integralbedingung (6.23)

$$\eta_N = \left(\int_0^1 \tilde{H} d\xi \right)^{-3/5} . \quad (6.31)$$

Aus den Gleichungen (6.14,6.15) folgt zur Bestimmung der Konstanten C_2 :

- Fixierte Krusten (Modell 1):

$$C_2 = 0 , \quad (6.32)$$

- Freischwimmende Krusten (Modell 2):

$$\int_0^1 \left(\frac{6\alpha + 2}{15} \frac{C_2}{\tilde{H}} + \tilde{H}' \tilde{H} \right) d\xi = 0 . \quad (6.33)$$

6.4.1.1 Analytische Lösungen für $\tilde{H}(\xi)$

In Anlehnung an Abschnitt 3.3.1.1 dient zur Lösung von Gleichung (6.28) der Lösungsansatz

$$\tilde{H}(\xi) = c(1 - \xi^a)^b . \quad (6.34)$$

Für spezielle Werte von α und C_2 ergeben sich zwei analytische Lösungen,

$$\alpha = 0, C_2 = 0 : \quad \tilde{H} = \left(\frac{6}{5} \right)^{1/3} (1 - \xi^2)^{1/3} , \quad (6.35)$$

$$\alpha = \frac{4}{3}, C_2 = \frac{3}{2} : \quad \tilde{H} = 3^{1/3} (1 - \xi)^{1/3} . \quad (6.36)$$

Gleichung (6.35) beschreibt die freie Grenzfläche bei der Ausbreitung eines konstanten Volumens mit fixierter Kruste (Modell 1, siehe Seite 75). Im Gegensatz dazu stellt Gleichung (6.36) die Lösung für eine freischwimmende Kruste (Modell 2, siehe Seite 75) mit $V \propto \tau^{4/3}$ dar.

6.4.1.2 Numerische Lösung für $\tilde{H}(\xi)$

Für beliebige Werte α muß Gleichung (6.28) numerisch gelöst werden. Zur Lösung wird das in Abschnitt 3.3.1.2 beschriebene Shooting-Verfahren verwendet. Für das resultierende Anfangswertproblem ergibt sich mit $\xi_{max} \rightarrow 1$

$$(\tilde{H}^3 \tilde{H}_\xi)_\xi + \frac{12\alpha + 4}{5} \xi \tilde{H}_\xi - \frac{8\alpha - 4}{5} \tilde{H} - \frac{6\alpha + 2}{5} C_2 \tilde{H}_\xi = 0 \quad , \quad (6.37)$$

$$\tilde{H}(\xi_{max}) = c(1 - \xi_{max})^{1/3} \quad , \quad (6.38)$$

$$\tilde{H}_\xi(\xi_{max}) = -\frac{c}{3} (1 - \xi_{max})^{-2/3} \quad . \quad (6.39)$$

Der Shooting-Parameter c wird durch die Bedingung

$$\tilde{H}(0)^3 \tilde{H}_\xi(0) - \frac{6\alpha + 2}{5} C_2 \tilde{H}(0) = -4\alpha \int_0^1 \tilde{H} d\xi \quad , \quad (6.40)$$

festgelegt. Die Konstante C_2 erhält für fixierte Krusten (Modell 1) den Wert $C_2 = 0$, Gleichung (6.32), oder wird für den Fall der freischwimmenden Kruste (Modell 2) iterativ aus Gleichung (6.33) bestimmt.

6.4.1.3 Approximation für $\tilde{H}(\xi)$

Zur Lösung von Gleichung (6.28) bieten sich neben exakten analytischen und numerischen Lösungen auch approximative Lösungen an. Eine Entwicklung der Form

$$\tilde{H}(\xi) = d(1 - \xi)^{1/3} \left(1 + d_1(1 - \xi) + d_2(1 - \xi)^2 \right) \quad , \quad (6.41)$$

liefert

$$d = \left(\frac{6}{5} (2 - C_2) (3\alpha + 1) \right)^{1/3} \quad , \quad (6.42)$$

$$d_1 = \frac{3\alpha - 4}{12(2 - C_2)(3\alpha + 1)} \quad , \quad (6.43)$$

$$d_2 = \frac{-153\alpha^2 + 288\alpha - 112}{1008(2 - C_2)^2(3\alpha + 1)^2} \quad . \quad (6.44)$$

Für $C_2 = 0$ stimmen d_1 und d_2 mit dem Koeffizienten von Gleichung (3.36) überein. Lediglich der führende Term unterscheidet sich und beinhaltet den Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche. Für $\alpha = 4/3$ und $C_2 = 3/2$ geht die approximative Lösung in die analytische Lösung (6.36) über.

6.5 Ergebnisse

Für die Ausbreitung einer viskosen Schmelze unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der freien Grenzfläche stellt, wie auch in Abschnitt 3.4 und 5.8, die Lösung der Funktion $H(X, \tau)$ das zentrale Problem zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes dar. Im Gegensatz zur Ausbreitung unter dem Einfluß einer Bodenkruste ist hierbei für beliebige Werte von α die Lösung für $H(X, \tau)$ mittels einer Ähnlichkeitstransformation zu finden. Somit sind alle weiteren Strömungsgrößen (6.16-6.19) bekannt.

6.5.1 Position der freien Grenzfläche - $H(X, \tau)$

Analog zu Abschnitt 3.4 gliedert sich die ähnliche Lösung der Evolutionsgleichung (6.20) in zwei Teile. Durch die Ähnlichkeitstransformation entsteht eine gewöhnliche Differentialgleichung in der normierten Ähnlichkeitsvariable ξ . Diese Lösung ist zum einen abhängig vom Parameter α , der den Typ der Ausbreitungsströmung charakterisiert, zum anderen von der Lösung der Konstanten C_2 , siehe Gleichungen (6.32,6.33), die den Einfluß der Kruste an der Grenzfläche beschreibt. Durch die Rücktransformation in X, τ -Koordinaten geht schließlich der Einfluß der dimensionslosen Kennzahlen ϵ, Re, Fr in die Lösung ein.

6.5.1.1 Lösung für $\tilde{H}(\xi)$

In den Abbildungen 6.4 und 6.5 sind die Lösungen für die Funktion $\tilde{H}(\xi)$ für fixierte Krusten (Modell 1) und freischwimmende Krusten (Modell 2) dargestellt.

Für fixierte Krusten (Modell 1) ist die Übereinstimmung zwischen der numerischen Lösung, siehe Abschnitt 6.4.1.2, und der Approximation (6.41) für $\alpha > 0$ sehr gut. Für den Wert $\alpha = 0$ führt die verwendete Ansatzfunktion für $\tilde{H}(\xi)$, Gleichung (6.41), zu einer leichten Abweichung für $\xi \rightarrow 0$. Die Übereinstimmung zwischen der numerischen Lösung und der analytischen Lösung (6.35) für $\alpha = 0$ verifiziert das verwendete numerische Verfahren.

Für freischwimmende Krusten (Modell 2) zeigt sich für $\alpha > 0$ ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der Approximation (6.41) und der numerischen Lösung. Für $\alpha = 0$ führt die Ansatzfunktion (6.41) für $\xi < 1$ zu einer deutlichen Abweichung im Vergleich zur numerischen Lösung. Die Übereinstimmung von numerischer Lösung und analytischer Lösung (6.36) für den Fall $\alpha = 4/3$ verifiziert auch für diesen Fall das numerische Verfahren, siehe Abschnitt 6.4.1.2.

Die Lösung für die Konstante C_2 , die das Verhältnis der Krustengeschwindigkeit U_c zur Ausbreitungsgeschwindigkeit $\dot{A}(\tau)$ darstellt, folgt für den Fall freischwimmender Krusten aus Gleichung (6.33). Fixierte Krusten haben die triviale Lösung $C_2 = 0$ und sollen in

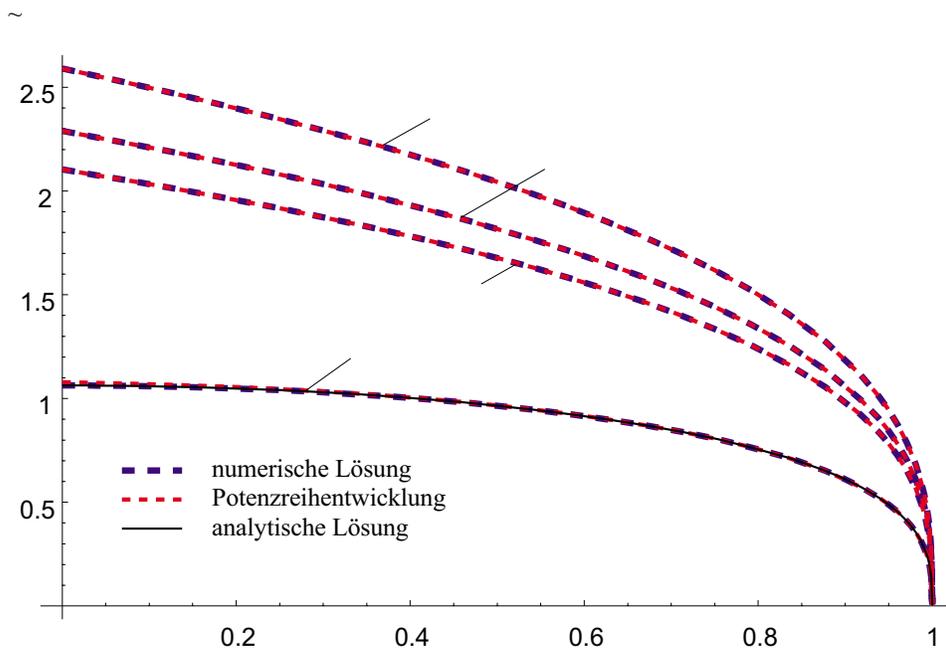


Abbildung 6.4: Lösung für $\tilde{H}(\xi)$, fixierte Krusten (Modell 1).
 Parameter : $\alpha = 0, 1, 4/3, 2$.

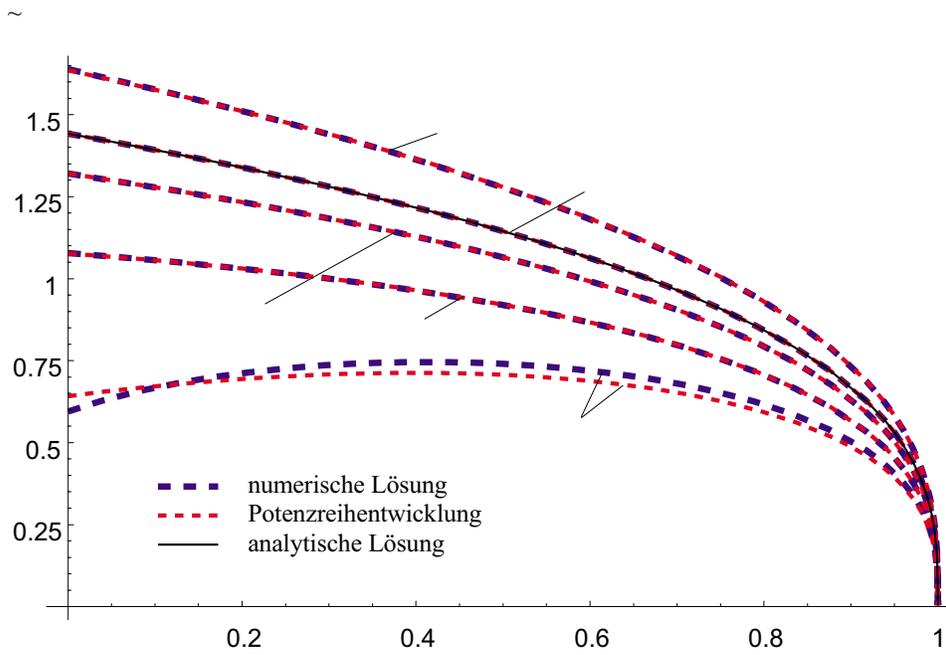


Abbildung 6.5: Lösung für $\tilde{H}(\xi)$, freischwimmende Krusten (Modell 2).
 Parameter : $\alpha = 1/2, 1, 4/3, 2$.

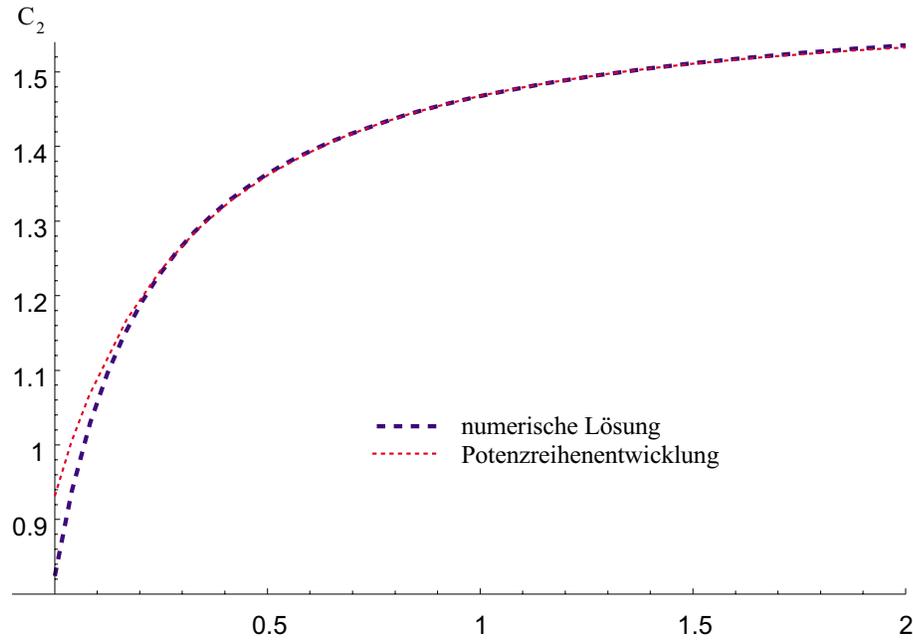


Abbildung 6.6: Lösung für C_2 , freischwimmende Krusten (Modell 2).

diesem Abschnitt nicht betrachtet werden. In Abbildung 6.6 sind die Ergebnisse basierend auf der numerischen Lösung für $\tilde{H}(\xi)$, siehe Abschnitt 6.4.1.2, sowie die Ergebnisse für die approximative Lösung für $\tilde{H}(\xi)$, Gleichung (6.41), dargestellt. Für $\alpha \leq 1/2$ wird die Geschwindigkeit der Kruste durch die approximative Lösung (6.41) im Vergleich zur numerischen Lösung leicht überschätzt, während für $1/2 < \alpha \leq 2$ eine gute Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen besteht.

Letzte Klarheit über den Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche auf den Frontfortschritt liefern die Ergebnisse für den Wert η_N , den horizontalen Längenmaßstab der ähnlichen Lösungen. In den Abbildungen 6.7 und 6.8 sind die Ergebnisse für die beiden betrachteten Ausbreitungsmodelle zusammengefaßt. Für fixierte Krusten (Modell 1) zeigt die approximative Lösung (6.41) für $\alpha > 0$ eine sehr gute Übereinstimmung mit der numerischen Lösung. Die Werte für η_N mit Krusteneinfluß liegen deutlich unterhalb der Werte für η_N ohne Krusteneinfluß. Dies zeigt den hemmenden Einfluß der erstarrten Kruste an der freien Grenzfläche, der zu einer Reduzierung von η_N und somit zu einer Verlangsamung der Ausbreitungsgeschwindigkeit führt. Im Fall freischwimmender Krusten (Modell 2) ist der Einfluß der Kruste in zwei Bereichen unterschiedlich. Aus der Definition des Wertes η_N , Gleichung (3.26,6.31), zeigt sich zusammen mit den Gleichungen (3.36,6.41), daß das Verhältnis

$$\frac{\eta_{N,mitKruste}}{\eta_{N,ohneKruste}} \approx (2(2 - C_2))^{-1/5} \quad , \quad (6.45)$$

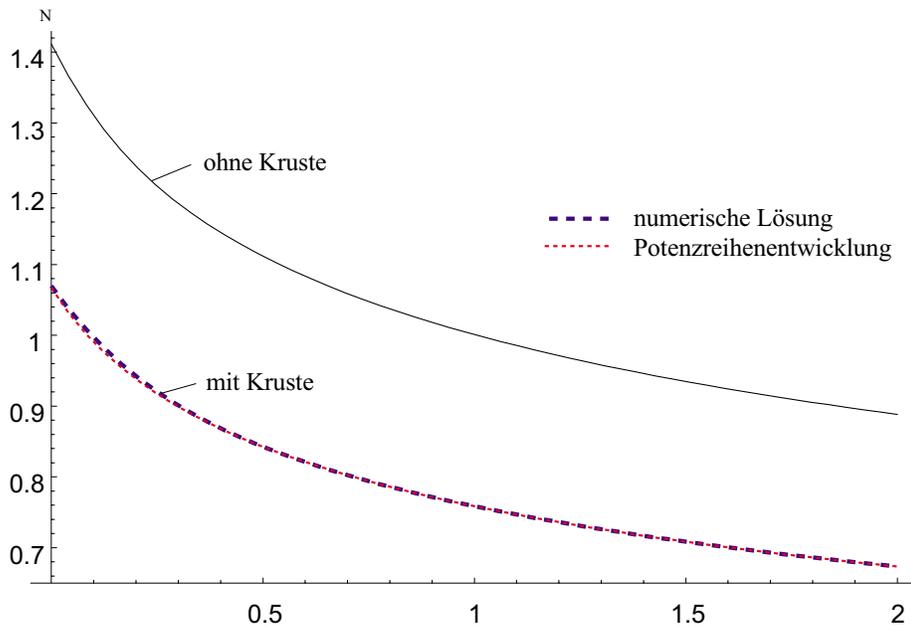


Abbildung 6.7: Lösung für η_N , fixierte Krusten (Modell 1).

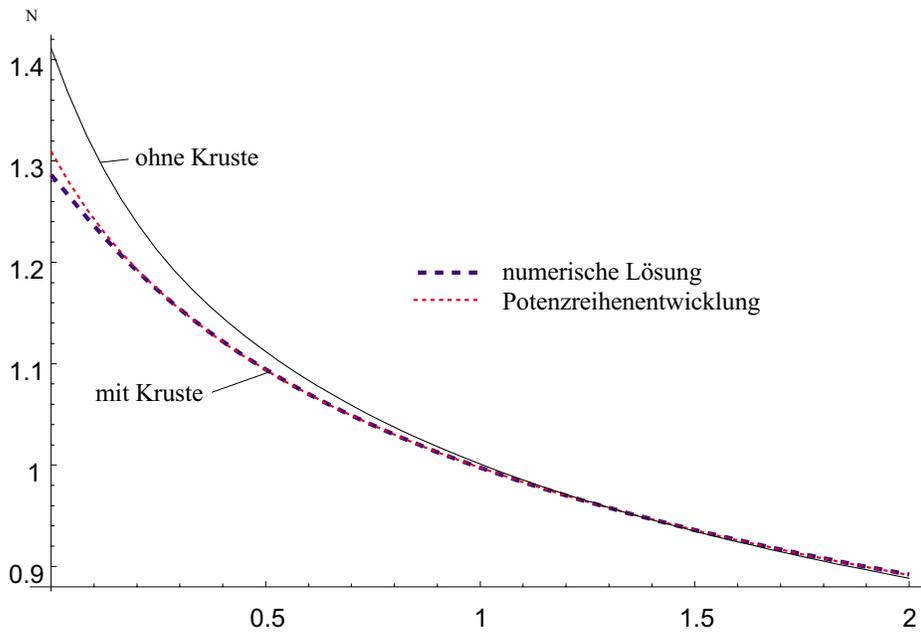


Abbildung 6.8: Lösung für η_N , freischwimmende Krusten (Modell 2).

bestimmend für die Wechselwirkung Kruste-Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Für $C_2 = 3/2$ verschwindet der Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schmelze. Dies entspricht dem Fall $\alpha = 4/3$, siehe Gleichung (6.36). Für Werte $C_2 < 3/2$ ($\alpha < 4/3$) führt die Wirkung der Kruste zu einer Reduzierung der Ausbreitungsgeschwindigkeit, während für $C_2 > 3/2$ ($\alpha > 4/3$) die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Kruste an der freien Grenzfläche leicht erhöht wird.

6.5.1.2 Lösung für $H(X, \tau)$

Der Einfluß einer erstarrenden Kruste an der freien Grenzfläche soll für fixierte und freischwimmende Krusten anhand der Profile $H(X, \tau)$ und der Position der Kontaktlinie $A(\tau)$ für zwei typische Fälle diskutiert werden.

Der Ansatz (6.24) für die Ähnlichkeitstransformation der Gleichung (6.20) liefert zusammen mit den Längenskalen (3.27, 3.28) und dem Ansatz (6.25) für die Ähnlichkeitsvariable η

$$H(X, \tau) = \left(\frac{3Fr}{\epsilon Re}\right)^{1/5} C_V^{2/5} \eta_N^{2/3} \tau^{(2\alpha-1)/5} \tilde{H} \left(\left(\frac{3Fr}{\epsilon Re}\right)^{1/5} \frac{X}{\tau^{(3\alpha+1)/5} C_V^{3/5} \eta_N} \right) , \quad (6.46)$$

für die Position der Kontaktlinie ergibt sich

$$A(\tau) = \left(\frac{\epsilon Re}{3Fr}\right)^{1/5} C_V^{3/5} \eta_N \tau^{(3\alpha+1)/5} . \quad (6.47)$$

Der Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche ist in η_N enthalten.

Abbildung 6.9 zeigt für den für fixierte Krusten (Modell 1) typischen Fall $\alpha = 0$ zwei Profile $H(X, \tau)$ zu den Zeitpunkten $\tau = 5, 20$ zusammen mit der Position der Kontaktlinie $A(\tau)$. Zum Zeitpunkt $\tau = 20$ entspricht das Profil $H(X, \tau)$ unter dem Einfluß der Kruste exakt dem Profil $H(X, \tau)$ ohne Krusteneinfluß zum Zeitpunkt $\tau = 5$. Dies bedeutet, daß die Form des Profils $H(X, \tau)$ für $\alpha = 0$ vom Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche unberührt bleibt. Anhand des Verlaufs der Kontaktlinie $A(\tau)$ wird allerdings der hemmende Einfluß auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit deutlich.

Für den technisch relevanten Fall $\alpha = 1$ zeigt Abbildung 6.10 Profile für $H(X, \tau)$ sowie die Position der Kontaktlinie $A(\tau)$ unter dem Einfluß freischwimmender Krusten an der freien Grenzfläche (Modell 2) zum Zeitpunkt $\tau = 5, 20$. Es zeigt sich ein verschwindend kleiner Einfluß der Kruste auf die Ausbreitung der Schmelze. Sowohl die Position der freien Grenzfläche als auch die Position der Kontaktlinie ändern sich durch die Kruste nur unmerklich. Einen genaueren Einblick zur Wechselwirkung Kruste-Ausbreitung gibt hierzu die Analyse des Geschwindigkeitsfeldes im folgenden Abschnitt.

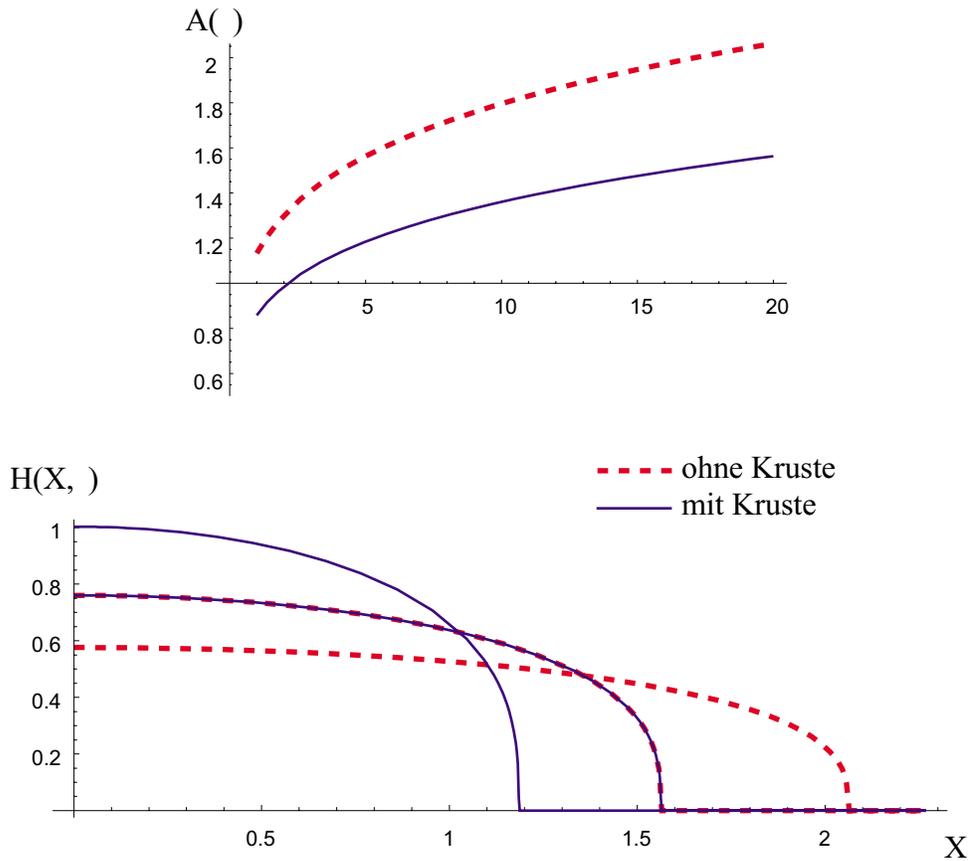


Abbildung 6.9: Lösung für die Kontaktlinie $A(\tau)$ und die Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$, fixierte Krusten (Modell 1), $\tau = 5, 20$.
 Parameter: $\alpha = 0$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

6.5.2 Geschwindigkeitsfeld

Details zum Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche zeigen Geschwindigkeitsprofile der beiden Geschwindigkeiten U und W .

Abbildung 6.11 zeigt typische Geschwindigkeitsprofile für fixierte Krusten (Modell 1). Durch die Haftbedingung an der Kruste, Gleichung (6.9), ergibt sich zusammen mit Gleichung (6.14) eine Poiseuille Strömung zwischen der Kruste und der Bodenplatte. Die dadurch entstehende viskose Grenzschicht an der freien Grenzfläche führt zu zusätzlicher viskoser Reibung in der Schmelze und bedingt dadurch einen drastischen Abfall der Ausbreitungsgeschwindigkeit, siehe Abbildung 6.9. Die Vertikalgeschwindigkeit W stimmt für den Sonderfall einer fixierten Kruste ($U_c = 0$) mit der Geschwindigkeit der freien Grenzfläche H_τ überein, siehe Gleichung (6.10).

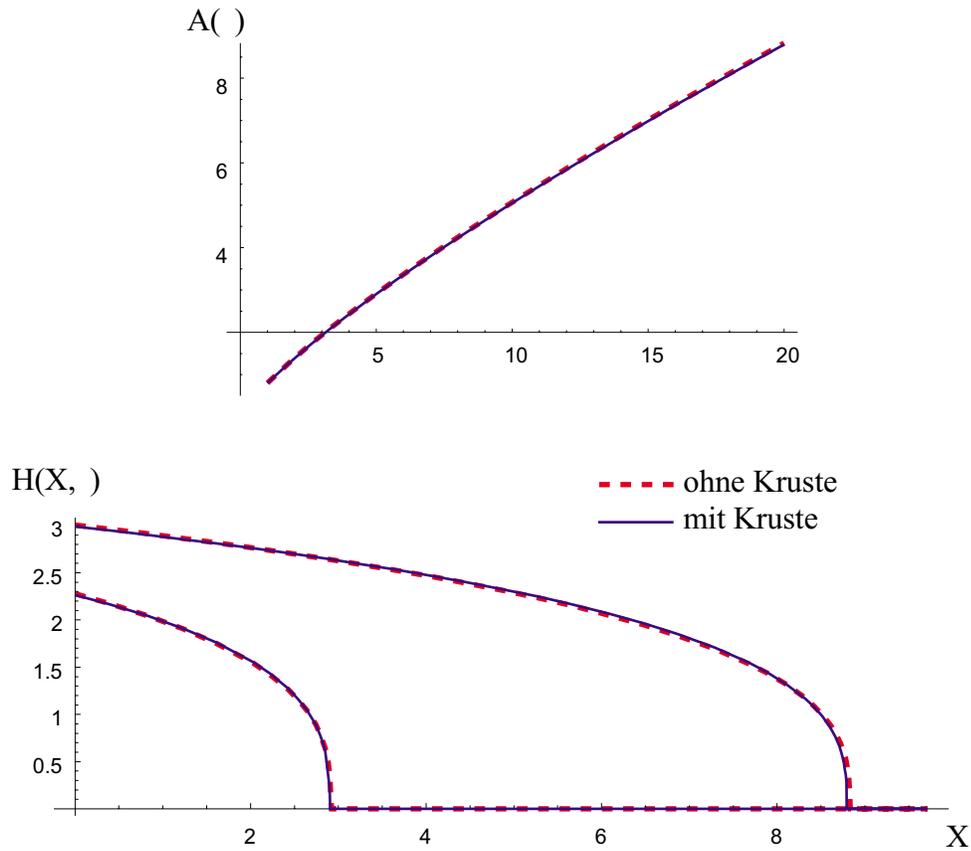
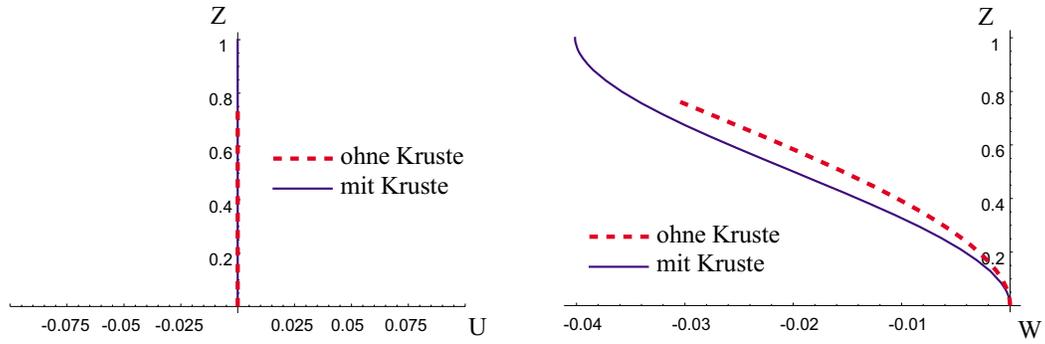


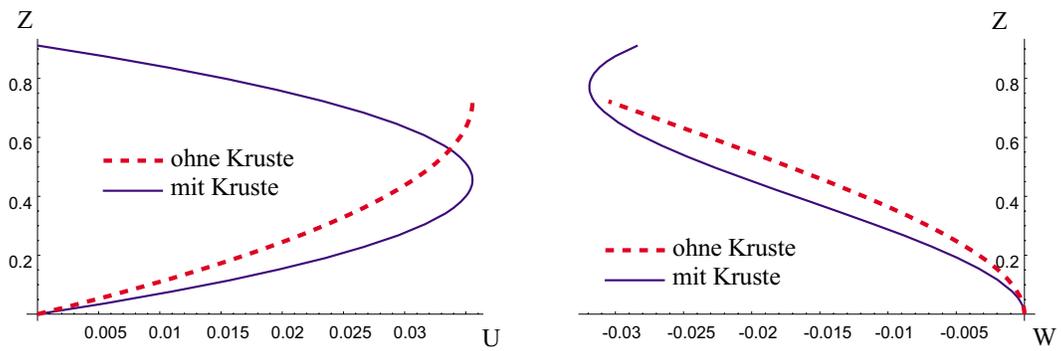
Abbildung 6.10: Lösung für die Kontaktlinie $A(\tau)$ und die Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$, freischwimmende Krusten (Modell 2), $\tau = 5, 20$.
 Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

Der unterschiedliche Einfluß der Kruste an der freien Grenzfläche für den Fall freischwimmender Krusten (Modell 2) wird anhand der beiden Abbildungen 6.12 und 6.13 deutlich. Für $\alpha = 1$ stellt sich an der Stelle $X = 0, Z = H$ ein positiver Geschwindigkeitsgradient $U_Z > 0$ ein, d.h. die Schmelze wird durch die Einwirkung der Kruste beschleunigt. Im Gegensatz dazu ist nahe der Kontaktlinie für $X = 0.9A, Z = H$ die Situation umgekehrt. Durch den negativen Gradienten $U_Z < 0$ kommt es dort zu einer Verzögerung der Schmelze. In der Summe führt die Verteilung der Schubspannungen an der Kruste zu einer Verlangsamung der Ausbreitung, siehe Abbildung 6.8 zusammen mit Gleichung (6.47). Für den Fall $\alpha = 2$ stellt sich die umgekehrte Wirkung der Kruste auf die Schmelze ein. Für $X \rightarrow 0$ wird die Schmelze durch die Einwirkung der Kruste an der freien Grenzfläche verzögert ($U_Z < 0$), während nahe der Kontaktlinie beschleunigende Kräfte auf die Schmelze wirken ($U_Z > 0$). Die Verteilung der Schubspannungen an der Kruste führt in diesem Fall zu einer leichten

$X = 0.0 \text{ A}$



$X = 0.5 \text{ A}$



$X = 0.9 \text{ A}$

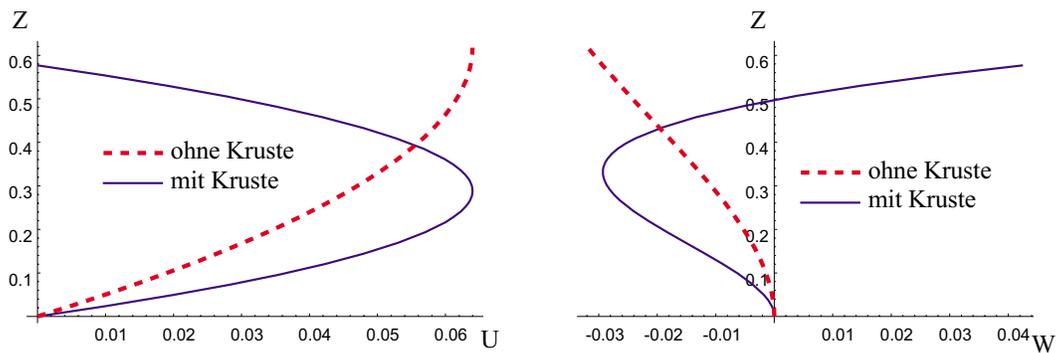


Abbildung 6.11: Geschwindigkeiten U, W , fixierte Krusten (Modell 1), $\tau = 5$.

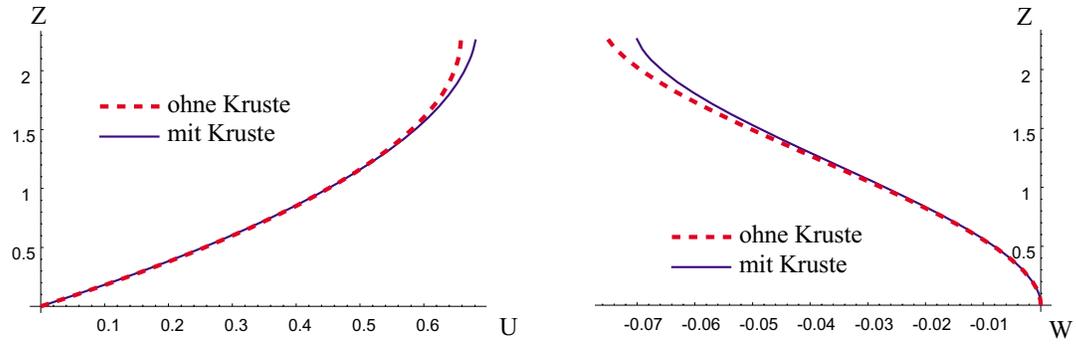
Parameter: $\alpha = 0$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

Beschleunigung der Ausbreitung, siehe Abbildung 6.8 zusammen mit Gleichung (6.47).

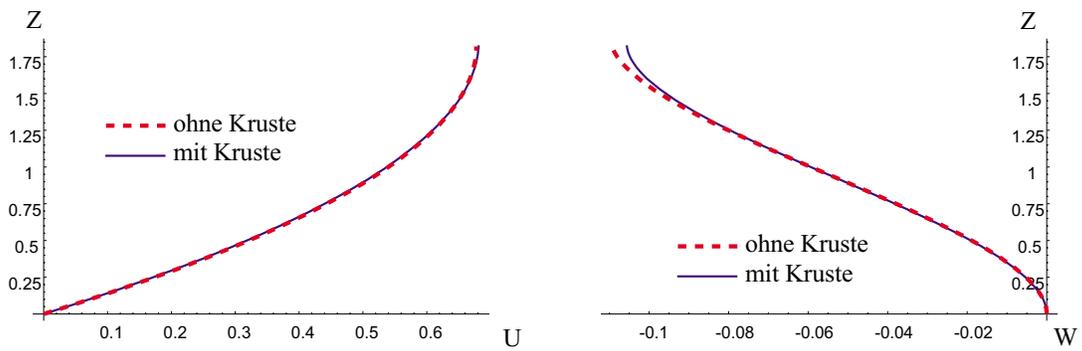
Die durch die Schubspannungen an der Kruste hervorgerufene Kräfteverteilung innerhalb der Kruste, siehe Gleichung (6.12), ist in den Abbildungen 6.14 und 6.15 dargestellt. Für fixierte Krusten (Modell 1), Abbildung 6.14, stellen sich ausschließlich Zugkräfte in der Kruste ein. Sie erreichen ihr Maximum an der Stelle $X = 0$. Aus einem Vergleich der Amplitude ist zu erkennen, daß die Rückwirkung Kruste-Schmelze für dieses Modell weit größer ist, als es sich für den Fall der freischwimmenden Kruste (Modell 2) darstellt, siehe Abbildung 6.15. Die Forderung nach kräftefreien Enden, Gleichung (6.15), führt für freischwimmende Krusten zu kleineren Amplituden der Kraft F . Zudem zeigt sich für den Wert $\alpha = 4/3$, daß die Kruste über die gesamte Länge kräftefrei ist und deshalb kein Einfluß auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu erwarten ist, vergleiche Abschnitt 6.5.1.1. Für $\alpha < 4/3$ herrschen ausschließlich Zugkräfte innerhalb der Kruste. Sie führen zur Verlangsamung der Ausbreitung für $\alpha < 4/3$. Für $\alpha > 4/3$ herrschen hingegen Druckkräfte innerhalb der Kruste. Dadurch bedingt kommt es zu einer Beschleunigung der Ausbreitung. Die in der Kruste herrschenden Druck- und Zugkräfte führen für reale Anwendungen zu einem Stabilitätsproblem, denn unter der Voraussetzung dünner Krusten können Druck- und Zugkräfte nur bedingt übertragen werden. Beide Effekte werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet.

Abschließend sind in den Abbildungen 6.16 und 6.17 Stromlinien $\Psi = \textit{konstant}$ für die beiden Ausbreitungsmodelle dargestellt. Nahe $X = 0$ zeigt sich für den Fall fixierter Krusten (Modell 1) ein ähnlicher Verlauf wie bei der Ausbreitung ohne Krusteneinfluß, siehe Abbildung 3.6. Lediglich an der freien Grenzfläche werden die Stromlinien wegen der Haftbedingung an der Kruste nach oben ausgelenkt. Für freischwimmende Krusten (Modell 2) zeigen sich für $\alpha = 1, 4/3, 2$ kaum Unterschiede im Vergleich zur Ausbreitung ohne Kruste an der freien Grenzfläche. Die freischwimmende Kruste an der Grenzfläche führt für den Fall $\alpha = 0$ jedoch zu deutlich unterschiedlichen Ergebnissen. Die durch die Kruste induzierte Geschwindigkeit an der Stelle $X = 0$ führt zu einer Anstauung der Schmelze für $X \approx 1/2A(\tau)$. Dieses Verhalten begründet letztendlich auch den deutlichen Unterschied für den Wert η_N , siehe Abbildung 6.8, der auf eine langsamere Ausbreitung unter dem Einfluß einer Kruste an der freien Grenzfläche schließen läßt.

$X = 0.0 \text{ A}$



$X = 0.5 \text{ A}$



$X = 0.9 \text{ A}$

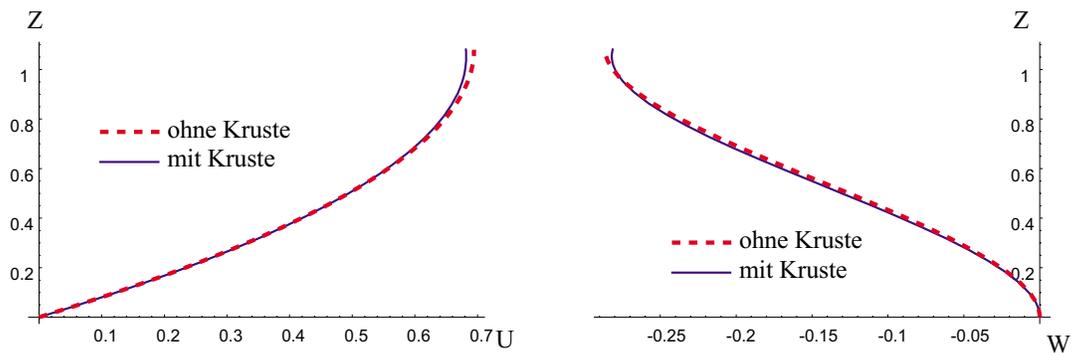
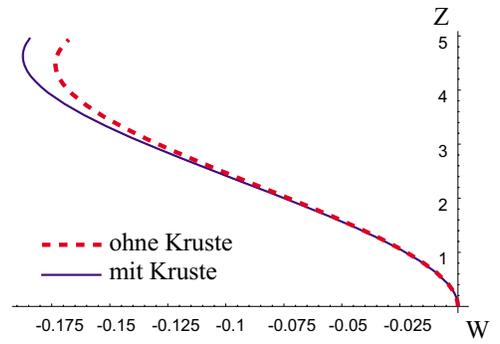
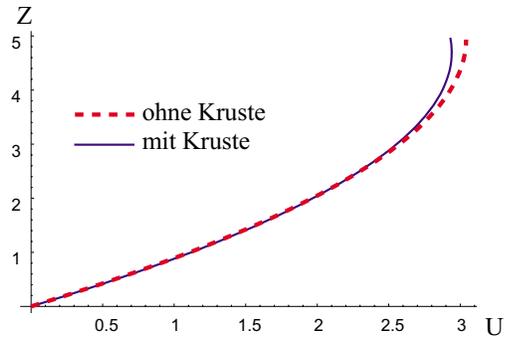


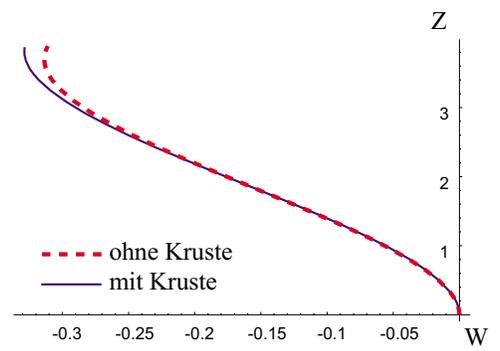
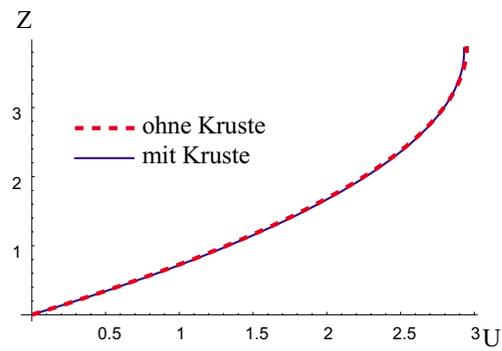
Abbildung 6.12: Geschwindigkeiten U, W , freischwimmende Krusten (Modell 2), $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

X = 0.0 A



X = 0.5 A



X = 0.9 A

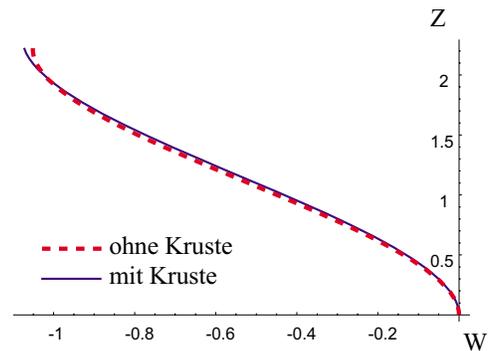
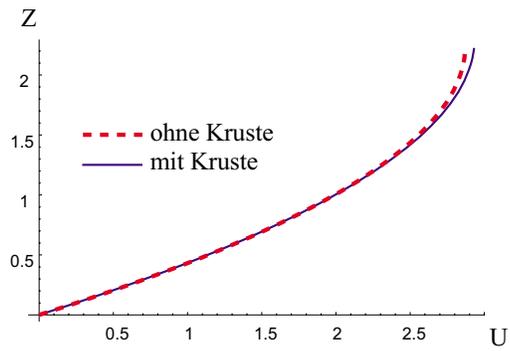


Abbildung 6.13: Geschwindigkeiten U, W , freischwimmende Krusten (Modell 2), $\tau = 5$.

Parameter: $\alpha = 2$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

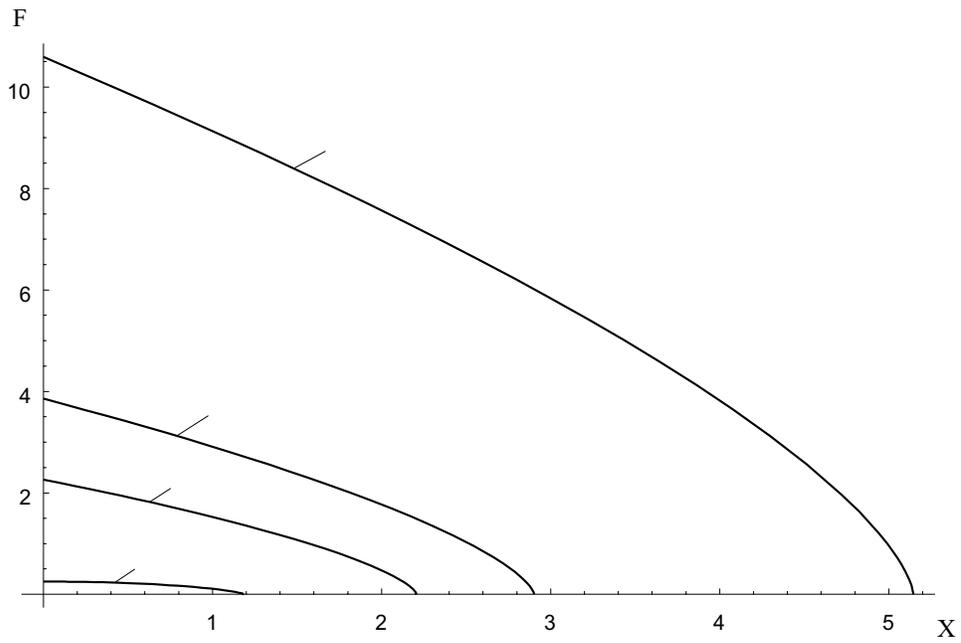


Abbildung 6.14: Kraft F , fixierte Krusten (Modell 1), $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

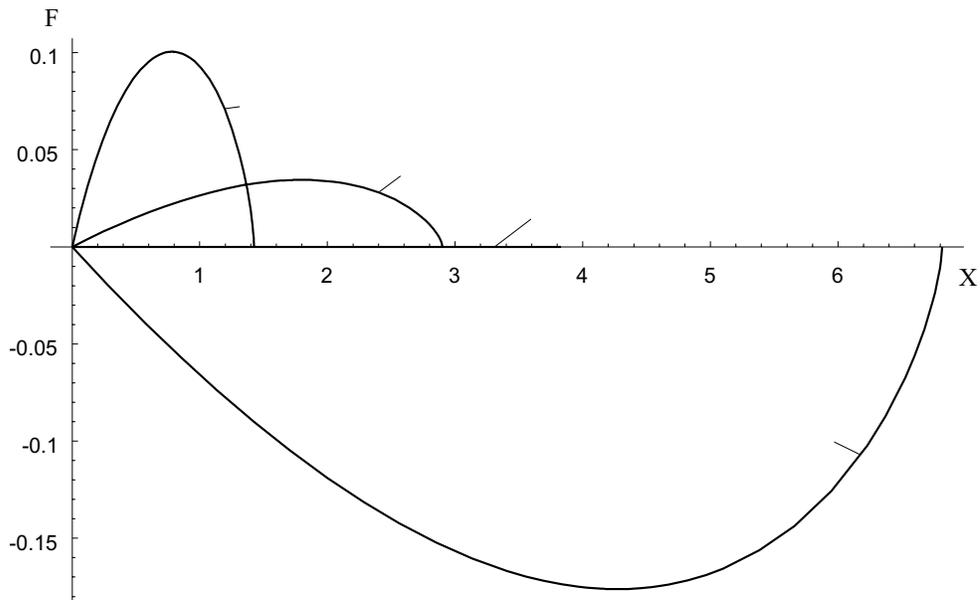


Abbildung 6.15: Kraft F , freischwimmende Krusten (Modell 2), $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

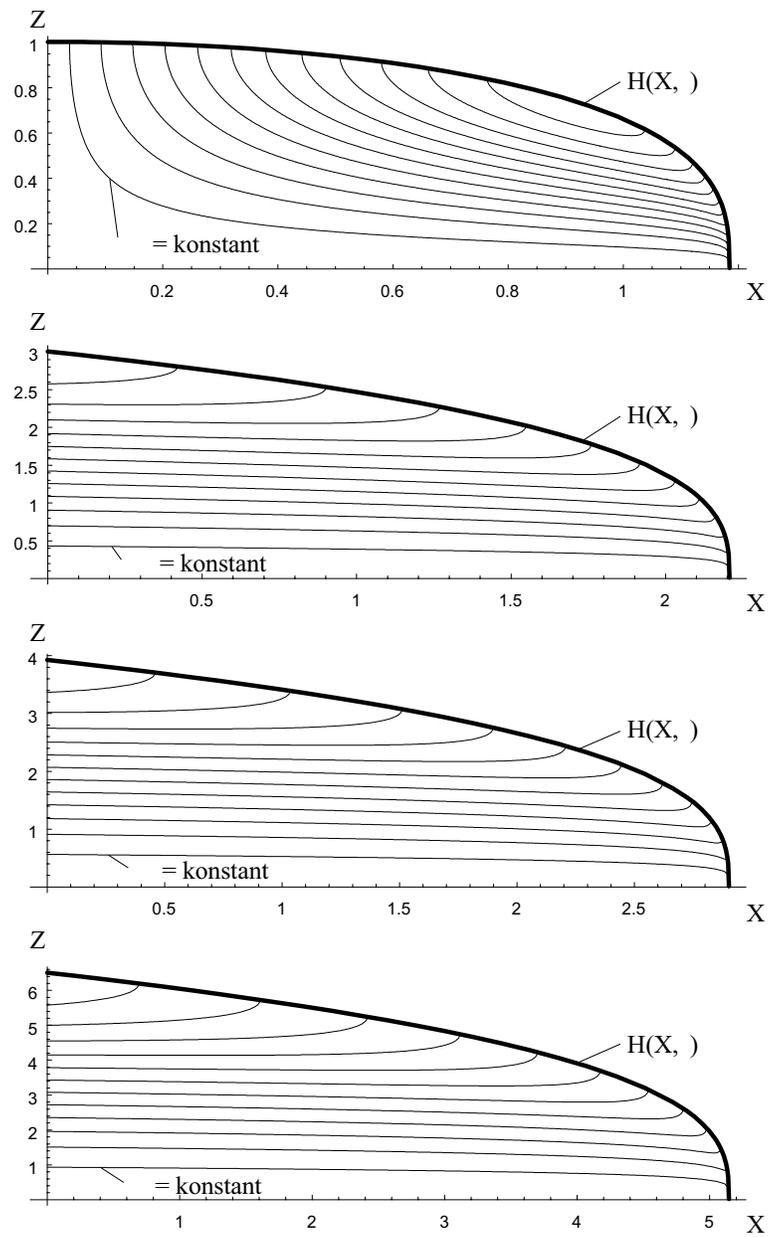


Abbildung 6.16: Stromlinien $\Psi = \text{konstant}$, fixierte Krusten (Modell 1), $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

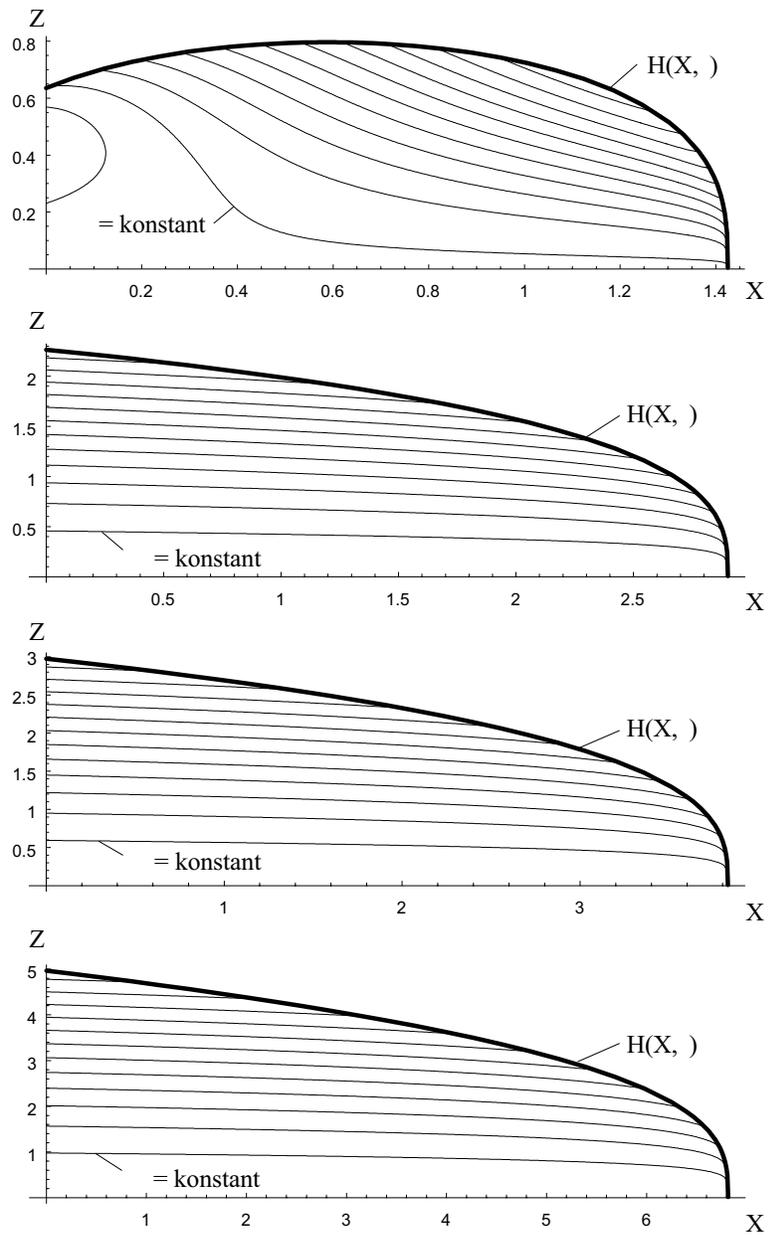


Abbildung 6.17: Stromlinien $\Psi = \textit{konstant}$, freischwimmende Krusten (Modell 2), $\tau = 5$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befaßt sich erstmalig in einer vorwiegend analytischen Betrachtungsweise mit der Ausbreitung schlecht wärmeleitender Schmelzen unter dem Einfluß erstarrender dünner Krusten. Die Arbeit gliedert sich in eine separate Betrachtung der Phänomene durch Krustenbildung auf einer horizontalen Bodenplatte und durch Krustenbildung an der freien Grenzfläche zwischen Schmelze und dem umgebenden Gas. Ziel der Untersuchungen ist die Wechselwirkung zwischen der Ausbreitung der Schmelze und der gleichzeitigen Krustenbildung. Dies ermöglicht die Simulation erstarrender Krusten durch einfache analytische Modelle und andererseits eine Verifizierung numerischer Computercodes.

Charakterisiert wird das Problem der nichtisothermen Ausbreitung erstarrender viskoser Schmelzen durch die Reynolds-Zahl Re , die Froude-Zahl Fr , die Prandtl-Zahl Pr und ein Längenverhältnis ϵ . Für das Volumen der Schmelze gilt $V \propto \tau^\alpha$. Typische Ausbreitungsprobleme werden durch verschiedene Exponenten α charakterisiert. So führt $\alpha = 0$ zur Ausbreitung eines konstanten Volumens, während $\alpha = 1$ den technisch relevanten Fall der Ausbreitung einer Schmelze bei konstantem Volumenstrom darstellt.

Die Lösung des Geschwindigkeitsfeldes erfolgt mittels einer Dünnschichtapproximation für eine durch Schwer- und Reibungskräfte dominierte Ausbreitung. Der Einfluß von Kapillarkräften kann bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden. Hieraus resultieren analytische Lösungen für die Geschwindigkeitskomponenten U und W sowie für den Druck P , welche durchweg von der Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ abhängen. Zur Bestimmung von $H(X, \tau)$ ist die Lösung einer nichtlinearen Evolutionsgleichung notwendig. Für den isothermen Fall sowie für die Ausbreitung unter dem Einfluß einer Kruste an der freien Grenzfläche ist die Lösung für beliebige Werte α mittels einer Ähnlichkeitstransformation möglich. Für die Ausbreitung unter dem Einfluß einer Kruste an der Bodenplatte existieren lediglich für $\alpha = 7/4$ ähnliche Lösungen. Für $\alpha \neq 7/4$ erfolgt die Lösung mittels eines numerischen Verfahrens ('method of lines').

Aufbauend auf dem Geschwindigkeitsfeld erfolgt die Lösung des Temperaturfeldes für $Pr \gg 1$. Die Behandlung des Temperaturfeldes erfolgt quasistationär. Diese Approximation führt für den betrachteten Parameterbereich zu einer Überschätzung der thermischen Grenzschichtdicke um bis zu 20%. Bezüglich einer reaktorspezifischen Anwendung stellt dies eine konservative Betrachtung nichtisothermer Effekte auf die Ausbreitung der Schmelze unter dem Einfluß erstarrender Krusten dar. Mittels einer angepaßten asymptotischen Entwicklung und einer Ähnlichkeitstransformation wird für eine isotherme Randbedingung an der Bodenplatte und eine adiabate Randbedingung an der freien Grenzfläche eine analytische Lösung für das Temperaturfeld ohne Krusteneinfluß gefunden. Für allgemeine thermische Randbedingungen, sowohl an der Bodenplatte als auch an der freien Grenzfläche, erfolgt die Lösung des Temperaturfeldes mittels eines numerischen Verfahrens ('method of lines'). Der Vergleich zwischen numerischer und analytischer Lösung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Die Lösung des Temperaturfeldes zeigt für schlecht wärmeleitende Schmelzen mit $Pr \gg 1$ dünne thermische Grenzschichten an der Bodenplatte und an der freien Grenzfläche. Diese Ergebnisse dienen als Ausgangsbasis zur Modellierung erstarrender Krusten.

Bei der Modellierung einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte wird die Kruste durch die Schmelzisotheime $\Theta = \Theta_S$ festgelegt. Die Freisetzung der Latentwärme ist für die betrachteten Schmelzen von untergeordneter Bedeutung und kann deshalb vernachlässigt werden. Die analytische Lösung des Temperaturfeldes liefert einen analytischen Zusammenhang zwischen der Position der freien Grenzfläche $H(X, \tau)$ und der Position der erstarrten Kruste $S(X, \tau)$. Durch ein iteratives Verfahren wird der zunächst vernachlässigte isolierende Effekt der Bodenkruste korrigiert. Nach $i = 5 \dots 10$ Iterationsschritten wird eine konvergierte Lösung für die Krustendicke $S(X, \tau)$ erreicht. Zur Vereinfachung des Problems werden die Dichte und die Temperaturleitfähigkeit in der flüssigen und festen Phase jeweils gleich und konstant angenommen.

Für Schmelzen mit $Pr \gg 1$ ist der Einfluß erstarrender Krusten an der Bodenplatte erwartungsgemäß schwach. Die Ausbildung der dünnen Bodenkruste führt in erster Linie zu einer Reduzierung des antreibenden Druckgradienten und damit zu einer Verlangsamung der Ausbreitung. Für große Zeiten teilt sich der Einfluß einer erstarrenden Kruste an der Bodenplatte in zwei typische Bereiche auf. Für $\alpha < 7/4$ wächst die Krustendicke $S(X, \tau)$ schneller als die Dicke der Schmelze $H(X, \tau)$. Dies führt für $\tau \rightarrow \infty$ zu einem Anhalten der Schmelze. Für $\alpha \geq 7/4$ hingegen wächst die Krustendicke langsamer und so kommt es nicht zum Anhalten der Ausbreitung. Die Ergebnisse zeigen neben der Verlangsamung der Ausbreitung auch eine deutliche Verringerung des in die Bodenplatte übertragenen Wärmestroms. Für eine reaktorspezifische Anwendung liefert die hier vorgestellte konservative Betrachtungsweise hinsichtlich nichtisothermer Einflüsse auf die Ausbreitung einer erstarrenden Schmelze wichtige Schlüsselstellen für eine numerische Simulation der Ausbreitung

in einer realen Reaktorgeometrie.

Die Modellierung der Ausbreitung einer Schmelze unter dem Einfluß einer erstarrenden Kruste an der freien Grenzfläche erfolgt entkoppelt von der Lösung des Temperaturfeldes. Eine Betrachtung der numerischen Lösung für das Temperaturfeld ohne Krusteneinfluß zeigt eine dünne thermische Grenzschicht über die gesamte Ausbreitungslänge. Die Modellierung der Kruste erfolgt deshalb als Membran, d.h. Biegemomente und Querkräfte innerhalb der Kruste werden vernachlässigt. An der Kontaktlinie verschwindet die thermische Grenzschichtdicke gänzlich. Deshalb spielt die Wechselwirkung zwischen Kruste und Bodenplatte eine untergeordnete Rolle.

Bei der Modellierung werden somit in erster Linie die Effekte durch die Änderung der kinematischen Randbedingungen an der freien Grenzfläche betrachtet. Die Ausbreitung ohne Krustenbildung ist gekennzeichnet durch einen schubspannungsfreien Rand an der freien Grenzfläche, wohingegen eine erstarrende Kruste zum Anhaften der flüssigen Schmelze führt. Bezüglich dieser Wechselwirkung werden zwei Ausbreitungsszenarien betrachtet. Zum einen die symmetrische Ausbreitung, die zu einer in der horizontalen Richtung fixierten Kruste führt, zum anderen die Ausbreitung unter dem Einfluß einer freischwimmenden Kruste.

Für die symmetrische Ausbreitung führt die Ausbildung einer horizontal fixierten Kruste an der freien Grenzfläche zu einer deutlichen Verlangsamung der Ausbreitung. Es stellt sich zwischen Kruste und Bodenplatte ein Poiseuille Profil für die Horizontalgeschwindigkeit ein, welches zur Erhöhung der viskosen Reibung innerhalb der Schmelze führt.

Für die freischwimmende Kruste ist der Einfluß auf die Ausbreitung gering. Die Geschwindigkeit der Kruste stellt sich aus der Verteilung der Schubspannungen entlang der Kruste ein. Durch diese mittlere Geschwindigkeit ist der Einfluß der Kruste auf die Ausbreitung nur schwach. Es zeigen sich zwei typische Bereiche. Für $\alpha < 4/3$ führt die Kruste zu einer Verlangsamung der Ausbreitung, während für $\alpha > 4/3$ die Ausbreitung beschleunigt wird. Charakteristisch für beide Bereiche sind die Kräfte in der Kruste. Für $\alpha < 4/3$ herrschen innerhalb der Kruste nur Zugkräfte, für $\alpha > 4/3$ hingegen Druckkräfte. Der Fall $\alpha = 4/3$ ist durch eine kräftefreie Kruste gekennzeichnet, die zu keiner Beeinflussung der Ausbreitung führt.

Letztendlich wirft diese Kräfteverteilung die Frage nach der Stabilität der Kruste auf. Sowohl Druckkräfte als auch Zugkräfte können von dünnen Krusten nur bedingt übertragen werden. Ein weiterer Aspekt ist das Verhalten für moderate Prandtl-Zahlen mit entsprechend größerer Krustendicke. Hier stellt sich die Frage nach dem Einfluß von Querkräften und Biegemomenten innerhalb der Kruste. Diese Phänomene werden in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet. Gleiches gilt für Effekte wie das Rutschen der Kruste auf der

Bodenplatte, oder das Einrollen der Kruste an der Kontaktlinie. Speziell Effekte an der Kontaktlinie können mit der hier vorgestellten Theorie nicht betrachtet werden, da für diese Betrachtung lokale Bedingungen an der Kontaktlinie berücksichtigt werden müssen. Der wegen $\epsilon \ll 1, Ca \gg \epsilon^2$ vernachlässigte Drucksprung an der freien Grenzfläche, zum einen bedingt durch kapillare Kräfte und zum anderen durch die Wirkung einer erstarrten Kruste, führt zur Reduktion der Ordnung der Evolutionsgleichung. Somit können keine lokalen Bedingungen an der Kontaktlinie gestellt werden.

Es wird gezeigt, daß die vorliegende Arbeit Antworten auf einige Fragen bezüglich der Wechselwirkung zwischen Ausbreitung einer viskosen Schmelze und der Krustenbildung, entweder an der Bodenplatte oder an der freien Grenzfläche, geben kann. Zugleich werden aber auch neue interessante Fragestellungen aufgeworfen, für die im Rahmen der hier benutzten, vereinfachten Theorie keine Lösungsmöglichkeit besteht. Hier wäre die Hinzunahme des Drucksprungs an der freien Grenzfläche, mit entsprechender Erhöhung der Ordnung der Evolutionsgleichung, notwendig oder aber die Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften der Kruste. Diese Modifikation der Theorie erscheinen als die wichtigsten, um eine Ausweitung der Gültigkeit zu erreichen. Die Ausweitung des Modells auf Schmelzen kleiner Prandtl-Zahl $Pr \leq 1$ ist wegen der entkoppelten Lösung von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld prinzipiell nicht möglich.

Anhang A

Gültigkeitsbereich der verwendeten Dünnschichtapproximation

Wegen der zeitlich variierenden Zuströmung (2.28) ist die Gültigkeit der verwendeten Dünnschichtapproximation, Abschnitt 2.3, durch die Vorgabe $\epsilon Re = h_0^2 u_0 / l_0 \nu \ll 1$ noch nicht eindeutig bestimmt, denn die Skalierungsgrößen h_0, l_0, u_0 beziehen sich auf einen typischen Zeitpunkt t_0 . Durch den zeitlich veränderlichen Volumenstrom ändert sich gegebenenfalls die Größenordnung einzelner Terme. Somit ist eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs unumgänglich. Der Einfluß der zeitabhängigen Zuströmung auf die gewählte Dünnschichtapproximation soll deshalb näher untersucht werden (Huppert 1982).

In dimensionsbehafteten Größen ergibt sich für den antreibenden Druckgradient

$$p_x = (\varrho - \varrho_g)gh_x \quad . \quad (\text{A.1})$$

Für den integralen Antrieb in einem Volumen $b \int_0^a h dx = bqt^\alpha \sim bha$ der Tiefe b , Gleichung (2.25), folgt mit $u \sim a/t$ und $\varrho \gg \varrho_g$ für die Druckkraft

$$F_p \sim \varrho gh^2 b \sim \varrho g q^2 a^{-2} t^{2\alpha} b \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die integrale Trägheitskraft wird zu

$$F_t \sim \varrho u^2 hb \sim \varrho q a t^{\alpha-2} b \quad , \quad (\text{A.3})$$

aus der über die Ausbreitungsfläche integrierten Wandschubspannung folgt für die integrale viskose Widerstandskraft

$$F_v \sim \mu u \frac{a}{h} b \sim \mu q^{-1} a^3 t^{-\alpha-1} b \quad . \quad (\text{A.4})$$

Aus $F_p/F_v \sim 1$, Gleichungen (A.2,A.4), folgt für die Position der Kontaktlinie

$$a(t) \sim \left(\frac{gq^3}{\nu} \right)^{1/5} t^{(3\alpha+1)/5} \quad , \quad (\text{A.5})$$

und mit $ah \sim qt^\alpha$, Gleichung (2.25), ergibt sich für die Höhe der Schmelze

$$h \sim \left(\frac{q^2 \nu}{g} \right)^{1/5} t^{(2\alpha-1)/5} . \quad (\text{A.6})$$

Für das Verhältnis F_t/F_v ergibt sich aus den Gleichungen (A.3-A.5)

$$\frac{F_t}{F_v} \sim \left(\frac{q^4}{\nu^3 g^2} \right)^{1/5} t^{(4\alpha-7)/5} . \quad (\text{A.7})$$

In dimensionsloser Form, Gleichungen (2.10,2.17-2.19,2.27), folgt daraus

$$\frac{F_t}{F_v} \sim \left(C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 \right)^{1/5} \tau^{(4\alpha-7)/5} . \quad (\text{A.8})$$

Für

$$\frac{F_t}{F_v} \ll 1 , \quad (\text{A.9})$$

können die Trägheitskräfte gegenüber den viskosen Kräften vernachlässigt werden. Aus den Gleichungen (A.8,A.9) folgt somit für die Gültigkeit der gewählten Dünnschichtapproximation (2.21-2.24)

$$\alpha < 7/4 : \quad \tau \gg (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3)^{1/(7-4\alpha)} , \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha = 7/4 : \quad (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3)^{1/5} \ll 1 , \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha > 7/4 : \quad \tau \ll (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3)^{1/(7-4\alpha)} . \quad (\text{A.12})$$

Für die Ausbreitung eines konstanten Volumens verschwindet die Zuströmung von Fluid an der Stelle $x = 0$. Somit steht keine von außen aufgeprägte Geschwindigkeitsskala u_0 zur Verfügung. Der Antrieb der Strömung resultiert ausschließlich aus dem antreibenden Druckgradient. Aus der Forderung

$$\frac{\epsilon Re}{Fr} = 1 , \quad (\text{A.13})$$

siehe Gleichung (2.23), ergibt sich somit

$$\alpha = 0 : \quad u_0 = \frac{h_0^3 g}{l_0 \nu} . \quad (\text{A.14})$$

Durch diese Festlegung der Geschwindigkeitsskala u_0 wird die Einhaltung der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ innerhalb der Gleichungen (2.21-2.24) gewährleistet.

Anhang B

Abschätzung des Fehlers der quasistationären Näherung $\Theta_{\mathcal{T}} = 0$

Für Fragen der nuklearen Sicherheitsforschung liefert die quasistationäre Näherung (4.19) eine konservative Abschätzung des Einflusses nichtisothermer Effekte auf die Ausbreitung einer erstarrenden Schmelze. Im folgenden Abschnitt soll der zu erwartende Fehler dieser Näherung bezüglich der thermischen Grenzschichtdicke δ_{th} abgeschätzt werden. Betrachtet wird hierbei

$$\Upsilon = \frac{\delta_{th,instat}}{\delta_{th,quasi}} \quad , \quad (\text{B.1})$$

das Verhältnis der instationären zur quasistationären Grenzschichtdicke.

Lokale Betrachtung

Eine erste qualitative Abschätzung ergibt sich aus Gleichung (2.4)

$$\rho c_p (T_t + uT_x + wT_z) = \lambda (T_{xx} + T_{zz}) \quad ,$$

für die Entwicklung einer thermischen Grenzschicht in einer vorgegebenen Strömung. Für ein lineares Geschwindigkeitsprofil $u \sim (a/t)(\delta_{th}/h)$, gebildet mit der Geschwindigkeit der Kontaktlinie a/t , der Höhe der Schmelze h und der thermischen Grenzschichtdicke δ_{th} , ergibt sich mit

$$T_t \sim \frac{\delta_{th,t}}{\delta_{th}} (T_0 - T_W) \quad , \quad (\text{B.2})$$

$$uT_x + wT_z \sim \frac{\delta_{th}}{ht} (T_0 - T_W) \quad , \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} (T_{xx} + T_{zz}) \sim \kappa \frac{(T_0 - T_W)}{\delta_{th}^2} \quad , \quad (\text{B.4})$$

für die zeitliche Entwicklung der thermischen Grenzschicht

$$\frac{\delta_{th,t}}{\delta_{th}} + \frac{\delta_{th}}{ht} \sim \frac{\kappa}{\delta_{th}^2} \quad . \quad (\text{B.5})$$

Zusammen mit Gleichung (A.6) für die Höhe der Schmelze folgt

$$\delta_{th,t}\delta_{th} + \left(\frac{g}{q^2\nu}\right)^{1/5} t^{-(2\alpha+4)/5} \delta_{th}^3 - \kappa \sim 0 \quad . \quad (\text{B.6})$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$t = 0: \quad \delta_{th} = 0 \quad . \quad (\text{B.7})$$

Für die quasistationäre Lösung mit $\delta_{th,t} = 0$ folgt aus Gleichung (B.6) direkt

$$\delta_{th,quasi} \sim \left(\frac{q^2\nu}{g}\right)^{1/15} \kappa^{1/3} t^{(2\alpha+4)/15} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Zur Lösung des instationären Problems (B.6,B.7) bietet sich eine Skalierung der Variablen zur Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme an. Aus Gleichung (4.26) folgt für die thermische Grenzschichtdicke

$$\hat{\delta}_{th} = \frac{\delta_{th}}{(l_0 h_0 \kappa / u_0)^{1/3}} \quad , \quad (\text{B.9})$$

und mit δ_{th0}^2 / κ für die Zeit

$$\hat{\tau} = \frac{t}{(l_0^2 h_0^2 / u_0^2 \kappa)^{1/3}} \quad . \quad (\text{B.10})$$

In dimensionsloser Form folgt aus den Gleichungen (B.6,B.7)

$$\hat{\delta}_{th,\hat{\tau}} \hat{\delta}_{th} + \beta \hat{\tau}^{-(2\alpha+4)/5} \hat{\delta}_{th}^3 \sim 1 \quad , \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{\tau} = 0: \quad \hat{\delta}_{th} = 0 \quad , \quad (\text{B.12})$$

mit

$$\beta = \left(\frac{(\epsilon Re Pr)^{-(2\alpha+4)/3}}{C_V^2 Fr}\right)^{1/5} \ll 1 \quad . \quad (\text{B.13})$$

Eine Entwicklung für $\beta \ll 1$ ergibt für die instationärer Grenzschichtdicke

$$\hat{\delta}_{th,instat} \sim \sqrt{2\hat{\tau}} - \beta \frac{20}{17-4\alpha} \hat{\tau}^{2(3-\alpha)/5} + \beta^2 \frac{25\sqrt{2}(39-8\alpha)}{(17-4\alpha)^2(3-\alpha)} \hat{\tau}^{(19-8\alpha)/10} + \dots \quad . \quad (\text{B.14})$$

Diese Lösung ist gültig im Intervall $0 \leq \hat{\tau} \leq 1$.

Für das Verhältnis aus instationärer zu quasistationärer thermischer Grenzschichtdicke Υ , gebildet mit den Gleichungen (B.8,B.14), folgt in X, Z, τ -Koordinaten, Gleichungen (2.6,2.7,2.10),

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\delta_{th}} \sim & \sqrt{2} \left(\frac{\epsilon Re}{C_V^2 Fr}\right)^{1/15} \frac{1}{(\epsilon Re Pr)^{1/6}} \tau^{(7-4\alpha)/30} \\ & - \frac{20}{17-4\alpha} \left(\frac{\epsilon Re}{C_V^2 Fr}\right)^{4/15} \frac{1}{(\epsilon Re Pr)^{2/3}} \tau^{(14-8\alpha)/15} + \dots \quad . \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Diese Approximation ist gültig im Intervall $0 \leq \tau \leq (\epsilon Re Pr)^{1/3}$.

Integrale Betrachtung

Eine integrale Betrachtung des Gleichungsresiduums der zeitabhängigen Energiegleichung (2.24) soll eine quantitative Abschätzung des zu erwartenden Fehlers liefern. Durch Streckung der Ähnlichkeitsvariable (4.60) in Gleichung (4.59) mit

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\Upsilon_\varphi} \quad , \quad (\text{B.16})$$

kann die Dicke der thermischen Grenzschicht für $\Upsilon_\varphi < 1$ gestaucht oder für $\Upsilon_\varphi > 1$ gestreckt werden, siehe Abbildung 4.2. Durch Bestimmung der Funktion Υ_φ ist damit eine quantitative Abschätzung des Fehlers der quasistationären Näherung bezüglich der thermischen Grenzschichtdicke möglich.

Der Ansatz

$$\Theta(X, Z, \tau) = F(\tilde{\varphi}) = 1 - \frac{\Gamma(1/3, \tilde{\varphi}^3/3)}{\Gamma(1/3)} \quad , \quad (\text{B.17})$$

liefert eingesetzt in Gleichung (2.24) das Gleichungsresiduum R der zeitabhängigen Energiegleichung. Die notwendige Bedingung zur Bestimmung der Funktion Υ_φ lautet

$$\int_{0.1A}^{0.9A} \int_0^H R dZ dX = 0 \quad . \quad (\text{B.18})$$

Für $X \rightarrow 0$ und $X \rightarrow A$ wird streng genommen die Gültigkeit der dem Temperaturfeld zugrundeliegenden Dünnschichtapproximation verletzt, deshalb erfolgt die Integration im Intervall $0.1A \leq X \leq 0.9A$.

In Abbildung B.1 ist das mit R_0 normierte Gleichungsresiduum R/R_0 an der Stelle $X = 1/2A(\tau)$ für verschiedene Werte Υ_φ aufgetragen. R_0 ist hierbei das Maximum des Gleichungsresiduums R für $\Upsilon_\varphi = 1$. Für $\Upsilon_\varphi = 0.83$ verschwindet der integrale Fehler an der Stelle $X = 1/2A(\tau)$. Der Maximalwert des Residuums sinkt auf $R/R_0 \approx 40\%$.

Einfluß der quasistationären Näherung

Gleichung (B.15) zeigt ein erstes signifikantes Ergebnis. Für $\alpha = 7/4$ wird $\Upsilon_{\delta_{th}}$ unabhängig von τ , Geschwindigkeits- und Temperaturfeld entwickeln sich für diesen Fall gleich in der Zeit, vergleiche Abschnitt 4.4.1. Abbildung B.2 zeigt die Funktion $\Upsilon_{\delta_{th}}$ für verschiedene Parameter. $\Upsilon_{\delta_{th}}$ ist hierbei mit der numerischen Lösung der Gleichung (B.11) gebildet. Für alle Werte α gilt im betrachteten Parameterbereich $\Upsilon_{\delta_{th}} < 1$, d.h. die quasistationäre Näherung liefert eine konservative Abschätzung der thermischen Grenzschichtdicke. Für wachsende Prandtl-Zahlen Pr nimmt $\Upsilon_{\delta_{th}} \propto Pr^{-1/6}$ ab.

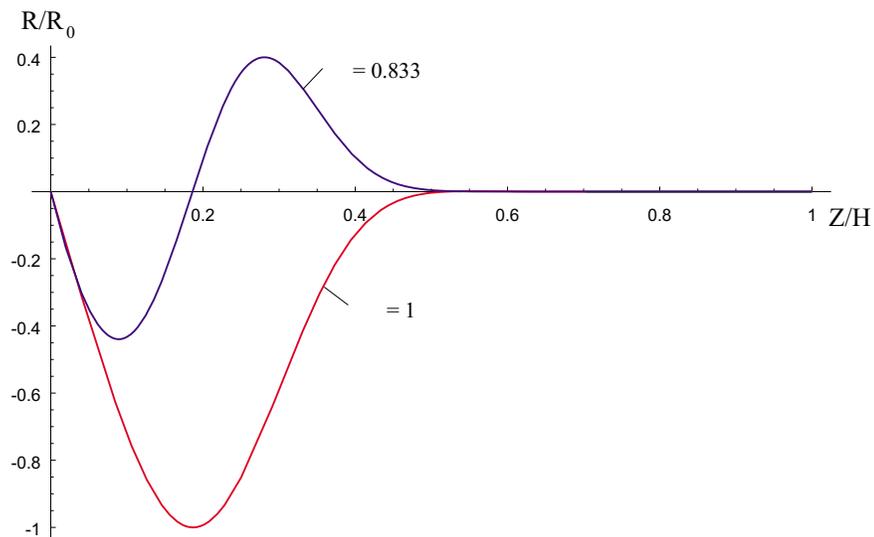


Abbildung B.1: Normiertes Gleichungsresiduum R/R_0 , $X = 1/2A(\tau)$, $\tau = 5$.
 Parameter: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$, $Pr = 10000$.

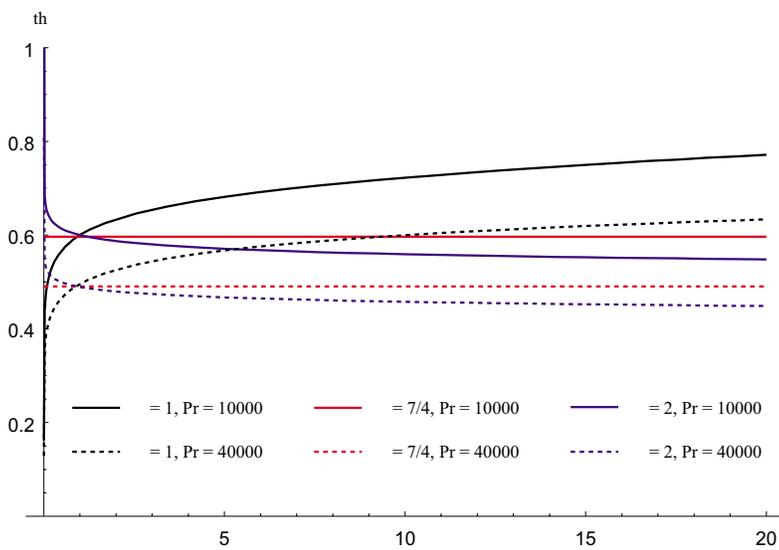


Abbildung B.2: Zeitliche Entwicklung der Funktion $\Upsilon_{\delta_{th}}$.
 Parameter: $\epsilon = 0.01$, $Re = 1$, $Fr = 0.01$, $C_V = 1$.

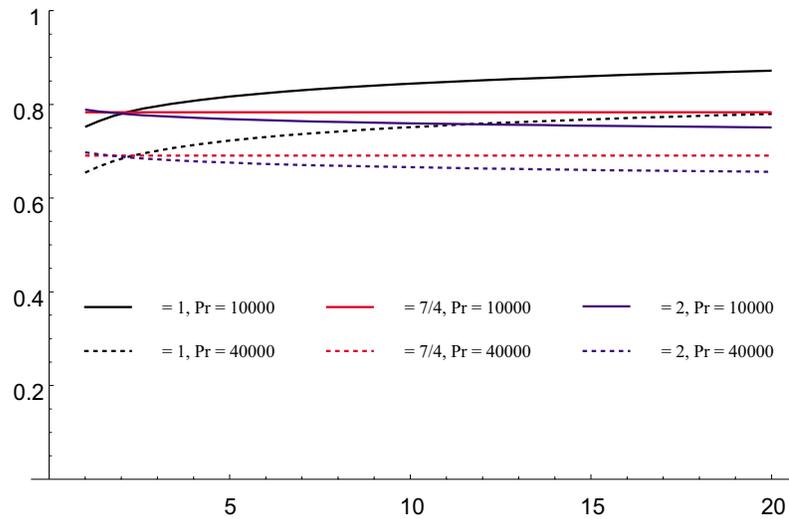


Abbildung B.3: Zeitliche Entwicklung der Funktion Υ_φ .

Parameter: $\epsilon = 0.01, Re = 1, Fr = 0.01, C_V = 1$.

Die zeitliche Entwicklung von Υ_φ ist in Abbildung B.3 für verschiedene Parameter dargestellt. Bezüglich des Parameters α zeigt sich ein zu Abbildung B.2 konsistentes Ergebnis. Es gilt jedoch für alle betrachteten Parameter $1 > \Upsilon_\varphi > \Upsilon_{\delta_{th}}$. Für wachsende Prandtl-Zahlen Pr nimmt $\Upsilon_\varphi \propto Pr^{-1/11}$ ab. Somit zeigt sich eine schwache Abhängigkeit der Funktion Υ_φ von der Prandtl-Zahl. Begründet ist der Unterschied zwischen Υ_φ und $\Upsilon_{\delta_{th}}$ in der Behandlung des Geschwindigkeitsfeldes. Während $\Upsilon_{\delta_{th}}$ ein lineares, in der horizontalen Richtung konstantes Geschwindigkeitsfeld zugrundeliegt, wird bei der Bestimmung der Funktion Υ_φ das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld der Ausbreitungsströmung berücksichtigt. $\Upsilon_{\delta_{th}}$ ist deshalb nur als eine erste grobe Abschätzung anzusehen. Für den technisch relevanten Fall $\alpha = 1$ liegt die Abschätzung der instationären thermischen Grenzschichtdicke ca. 20% unter der quasistationären Lösung. Somit ist für die quasistationäre Lösung eine konservative Abschätzung der thermischen Grenzschichtdicke erreicht.

Anhang C

Einfluß der Latentwärme

Für die Ausbreitung flüssiger Schmelzen kann die Freisetzung der Latentwärme unter bestimmten Voraussetzungen vernachlässigt werden. Eine Größenordnungsabschätzung liefert für die durch Wärmeleitung über die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} übertragene Wärmemenge

$$Q_{WL} \sim \int_0^t \int_0^{a(t)} \lambda \frac{(T_0 - T_W)}{\delta_{th}} dx dt \quad . \quad (C.1)$$

Für die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} , Gleichung (B.8), gilt

$$\delta_{th} \sim \left(\frac{q^2 \nu}{g} \right)^{1/15} \kappa^{1/3} t^{(2\alpha+4)/15} \quad .$$

Damit folgt für die durch Wärmeleitung über die thermische Grenzschicht δ_{th} übertragene Wärmemenge

$$Q_{WL} \sim \lambda(T_0 - T_W) \left(\frac{g^4 q^7}{\nu^4 \kappa^5} \right)^{1/15} t^{(7\alpha+14)/15} \quad . \quad (C.2)$$

Die im gleichen Zeitraum freigesetzte Latentwärme ergibt sich zu

$$\begin{aligned} Q_L &\sim \frac{(T_S - T_W)}{(T_0 - T_W)} \delta_{th} \rho L a(t) \\ &\sim \frac{(T_S - T_W)}{(T_0 - T_W)} \rho L \left(\frac{g^2 q^{11} \kappa^5}{\nu^2} \right)^{1/15} t^{(11\alpha+7)/15} \quad , \end{aligned} \quad (C.3)$$

L kennzeichnet die massenspezifische Latentwärme der Schmelze. Für das Verhältnis beider Anteile resultiert

$$\frac{Q_L}{Q_{WL}} \sim \frac{(T_S - T_W)}{(T_0 - T_W)^2} \frac{L}{c_p} \left(\frac{q^4 \nu^2}{g^2 \kappa^5} \right)^{1/15} t^{(4\alpha-7)/15} \quad . \quad (C.4)$$

In dimensionsloser Form, Gleichungen (2.10,2.17-2.20,2.27), folgt daraus

$$\frac{Q_L}{Q_{WL}} \sim \frac{\Theta_S}{St} \left(C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 Pr^5 \right)^{1/15} \tau^{(4\alpha-7)/15} \quad . \quad (C.5)$$

Die Stefan-Zahl

$$St = \frac{c_p(T_0 - T_W)}{L} \quad , \quad (C.6)$$

stellt das Verhältnis von sensibler Wärme zur Latentwärme dar.

Für

$$\frac{Q_L}{Q_{WL}} \ll 1 \quad , \quad (C.7)$$

kann die Freisetzung der Latentwärme vernachlässigt werden. Aus Gleichung (C.5) folgt mit Gleichung (C.7)

$$\alpha < 7/4 : \quad \tau \gg \left(\frac{\Theta_S}{St} \right)^{15/(7-4\alpha)} (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 Pr^5)^{1/(7-4\alpha)} \quad , \quad (C.8)$$

$$\alpha = 7/4 : \quad \frac{\Theta_S}{St} (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 Pr^5)^{1/15} \ll 1 \quad , \quad (C.9)$$

$$\alpha > 7/4 : \quad \tau \ll \left(\frac{\Theta_S}{St} \right)^{15/(7-4\alpha)} (C_V^4 Fr^2 (\epsilon Re)^3 Pr^5)^{1/(7-4\alpha)} \quad , \quad (C.10)$$

als ausreichendes Kriterium zur Vernachlässigung der freigesetzten Latentwärme im Vergleich zur durch Wärmeleitung über die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} übertragenen Wärmemenge.

Anhang D

Anmerkungen zum verwendeten numerischen Verfahren

Die numerische Lösung des Temperaturfeldes Θ , siehe Abschnitt 4.3, als auch die numerische Lösung zur Bestimmung der Funktion H , siehe Abschnitt 5.7.2, basiert auf der sogenannten 'method of lines'. Die Idee dieser Methode ist die Überführung einer partiellen Differentialgleichung in ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen das anschließend mittels Standardintegrationsverfahren gelöst wird. Für die Genauigkeit der numerischen Lösung spielen in erster Linie das verwendete Integrationsverfahren, sowie die Ordnung der finiten Differenzenapproximation eine Rolle.

Zur Lösung des aus der Methode 'method of lines' resultierenden Differentialgleichungssystems wird die Funktion **NDSolve** des Programmpakets MATHEMATICA verwendet. Diese Funktion basiert auf einer Adams Predictor-Corrector Methode der Ordnung 1 bis 12 für nicht steife Differentialgleichungssysteme, bzw. auf einer Gear Methode der Ordnung 1 bis 5 mittels einer Rückwärtsdifferenzenformulierung für steife Systeme (Wolfram 1996, Hindmarsh 1983). Die Auswahl eines der beiden Verfahren erfolgt während der Lösung des Problems anhand der Steifigkeit des Systems (Petzold 1983). Als Konvergenzkriterium benutzt **NDSolve** jeweils den relativen und absoluten Fehler. Die Lösung erfolgt typischerweise bis zu einer Genauigkeit von 10^{-6} für den relativen oder absoluten Fehler. Dies wird durch eine adaptive Anpassung der Schrittweite während der Rechnung erreicht.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. und Segun, I.: 1972, *Handbook of mathematical functions*, Dover publications, Inc., New York.
- Axelrad, E.: 1983, *Schalentheorie*, B. G. Teubner Stuttgart.
- Bercovici, D.: 1994, A theoretical model of cooling viscous gravity currents with temperature-dependent viscosity, *Geophysical Research Letters* **21**, 1117–1180.
- Bercovici, D. und Lin, J.: 1996, A gravity current model of cooling mantle plume heads with temperature-dependent buoyancy and viscosity, *Journal of Geophysical Research* **101**, 3291–3309.
- Blake, S.: 1990, Viscoplastic models of lava domes, in J. Fink (ed.), *Lava Flows and Domes*, Springer, pp. 88–126.
- Bunk, M.: 1999, Spreading with basal solidification, *Wissenschaftliche Berichte FZKA 6197*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Carslaw, H. und Jaeger, J.: 1959, *Conduction of heat in solids*, Oxford at the clarendon press.
- Didden, N. und Maxworthy, T.: 1982, The viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents, *Journal of Fluid Mechanics* **121**, 27–42.
- Ehrhard, P.: 1996, Spreading of melts in presence of solidification, in A. Rao, R. Duffey und D. Elias (eds.), *Proceedings of the ASME-JSME 4th International Conference on Nuclear Engineering*, pp. 935–941.
- Ehrhard, P. und Huber, M.: 1999, Experimentelle Untersuchung zur Ausbreitung von oxidischen Schmelzen bei gleichzeitiger Erstarrung auf der Bodenplatte, private Mitteilung, noch unveröffentlichtes Forschungsergebnis.
- Fink, J. H. und Griffiths, R. W.: 1990, Radial spreading of viscous-gravity currents with solidifying crust, *Journal of Fluid Mechanics* **221**, 485–509.

- Fink, J. H. und Griffiths, R. W.: 1992, A laboratory analog study of the surface morphology of lava flows extruded from point and line sources, *Journal of Volcanology and Geothermal Research* **54**, 19–32.
- Foit, J.: 1997, Spreading with variable viscosity, *Wissenschaftliche Berichte FZKA 6006*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Griffiths, R. W. und Fink, J. H.: 1993, Effects of surface cooling on the spreading of lava flows and domes, *Journal of Fluid Mechanics* **252**, 667–702.
- Griffiths, R. W. und Fink, J. H.: 1997, Solidifying Bingham extrusions: a model for the growth of silicic lava domes, *Journal of Fluid Mechanics* **347**, 13–36.
- Hindmarsh, A.: 1983, ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers, in R. Stepleman (ed.), *Scientific computing : applications of mathematics and computing to the physical sciences; 10th IMACS world congress on systems simulation and scientific computation*, pp. 55–64.
- Huppert, H. E.: 1982, The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface, *Journal of Fluid Mechanics* **121**, 43–58.
- Iverson, R.: 1990, Lava domes modeled as brittle shells that enclose pressurized magma, with application to Mount St. Helens, in J. Fink (ed.), *Lava Flows and Domes*, Springer, pp. 47–69.
- Kistler, S. und Schweizer, P.: 1997, *Liquid film coating*, Chapman & Hall.
- O'Brien, M. und Chernow, J.: 1934, Model law for motion of salt water through fresh, *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **99**, 576–594.
- Özişik, M.: 1980, *Heat conduction*, John Wiley and Sons.
- Petzold, L.: 1983, Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **4**(1), 136–148.
- Reynolds, O.: 1886, On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser.A* **177**, 157–234.
- Sakimoto, S. E. H. und Zuber, M. T.: 1995, The spreading of variable-viscosity axisymmetric radial gravity currents: applications to the emplacement of Venusian 'pancake' domes, *Journal of Fluid Mechanics* **301**, 65–77.
- Schlichting, H. und Gersten, K.: 1997, *Grenzschicht-Theorie*, Springer.

Simpson, J.: 1997, *Gravity currents*, Cambridge University Press.

Stasiuk, M., Jaupart, C. und Sparks, R.: 1993, Influence of cooling on lava-flow dynamics, *Geology* **21**, 335–338.

Wolfram, S.: 1996, *The MATHEMATICA Book*, Wolfram Media, Inc.; Cambridge University Press.

Lebenslauf

Michael Bunk

Geburtsdatum	22.03.1969
Geburtsort	Friedrichshafen / Bodensee
Nationalität	deutsch
Familienstand	ledig
1975 - 1979	Besuch der Grundschule in Nonnenhorn
1979 - 1985	Besuch der Realschule in Kressbronn
1985 - 1988	Besuch des Technischen Gymnasiums in Friedrichshafen
1988 - 1989	Grundwehrdienst in Engstingen und Füssen
1989 - 1995	Studium des theoretischen Maschinenbaus an der Universität (TH) Karlsruhe Abschluß: Diplom-Ingenieur Hauptfächer: Strömungslehre Technische Mechanik
1991 - 1994	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebstechnik an der Universität (TH) Karlsruhe
1995	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Technische Mechanik an der Universität (TH) Karlsruhe
1996	Verleihung des 'Carl-Benz-Preises' für das Studienjahr 1995/96 der Fakultät für Maschinenbau der Universität (TH) Karlsruhe
1996 - 1998	Doktorand am Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF), jetzt Institut für Kern- und Energietechnik (IKET)
1997 - 1998	11-wöchiger Aufenthalt an der University of Nottingham (UK), Division of Theoretical Mechanics
seit 1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Universität (TH) Karlsruhe, Fachgebiet Strömungsmaschinen

