

1. DFG-Forschungsbericht

*Eigenstressen bei viskoelastischen
Verbundwerkstoffen*

Schn 245/18-1, ES-COMP

E. Schnack / R. Meske
Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre
Universität Karlsruhe

15. Oktober 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Stand des Forschungsprojekts	1
1.2 Einleitung	2
2 Entstehung von Eigenspannung in faserverstärkten Kunststoffen	4
2.1 Aufbau und Herstellung von faserverstärkten Kunststoffen . .	4
2.2 Chemische Eigendehnungen	6
2.3 Thermische Eigendehnung	7
2.4 Hygroskopische Eigendehnungen	8
3 Materialeigenschaften faserverstärkter Kunststoffe	12
3.1 Grundlagen der Visokoelastizität	13
3.1.1 Stieltjes-Integral und Stieltjes-Inverse	13
3.1.2 Integraltransformationen	14
3.1.3 Materialgleichungen der linearen Visokoelastizität	14
3.1.4 Visokoelastisches Korrespondenzprinzip	18
3.1.5 Zeit-Temperatur Korrespondenzprinzip	19
3.1.6 Berechnung der inversen Carson-Transformation	20
3.2 Nichtlineare Visokoelastizität	22
3.3 Rekursive Formulierung der visokoelastischen Materialgleichungen	24

4	Mechanisches Verhalten von Faserverbundwerkstoffen	27
4.1	Makromechanik einzelner Laminatschichten	27
4.2	Klassische Laminattheorie	28
4.3	Viskoelastische Laminattheorie	32
4.3.1	Beispielrechnung	36
4.4	Viskoelastische Finite Elemente Methode	40
5	Mikromechanik	42
5.1	Schranken für die Elastizitätskonstanten eines Verbundes . . .	42
5.2	Das Eshelby-Modell	44
5.2.1	Der homogene, ellipsoidförmige Einschluß	44
5.2.2	Ellipsoidförmige Inhomogenität	46
5.2.3	Inhomogener Einschluß	47
5.3	Die selbst-konsistente Methode	48
5.4	Viskoelastische Verbundwerkstoffe	57
5.5	Definition von Eigenspannungen für mehrphasige Verbunde . .	69
5.6	Berechnung der Eigendehnung einen Verbundes	70
6	Nachweis von Eigenspannungen	73
6.1	Krümmung antisymmetrischer Lamine	73
6.2	Bestimmung der hygrothermischen Eigendehnung mit Dehnungsmeßstreifen	76
6.3	Röntgenographische Spannungsermittlung	82
6.3.1	Grundlagen	82
6.3.2	Messung bei faserverstärkten Kunststoffen	83
6.3.3	Definition der Meßrichtung	83
6.3.4	Auswertung des Dehnungszustandes	85

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	iii
7 Zusammenfassung	89
A Materialkennwerte eines faserverstärkten Epoxidharzes	91
B Programm zur viskoelastischen Laminattheorie	95
C Berechnung der viskoelastischen Verbundeigenschaften mit MAPLE	103

Notation

a	Verschiebungsfaktor der Viskoelastizität
c	Feuchtekonzentration
c_i	Volumenanteil der Phase i in einem Verbund
d	Knotenverschiebungen
f	Volumenkräfte
g_0, g_1, g_2	Parameter der nichtlinearen Viskoelastizität
$h(t)$	Sprungfunktion
h, k, l	Miller-Indices
m	Masse
s	Parameter der Laplace- und Carson-Transformation
$s_1, 1/2s_2$	röntgenographische Elastizitätskonstanten
t	Zeit
u	Verschiebungsvektor
u, v, w	Komponenten des Verschiebungsvektors
x, y, z	Koordinatenachsen des globalen Koordinatensystems
A	Dehnsteifigkeitsmatrix der Laminattheorie
$A(t)$	Dehnrelaxationsmatrix der viskoelastischen Laminattheorie
A_i	Phasenkonzentrationsfaktor der Dehnung
B	Koppelsteifigkeitsmatrix der Laminattheorie
$B(t)$	Koppelrelaxationsmatrix der viskoelastischen Laminattheorie
B_i	Phasenkonzentrationsfaktor der Spannung
B_m	Differentiationsmatrix der Formfunktionen (FEM)
C	Steifigkeitstensor
$C(t)$	Relaxationsfunktion
C^*	<i>constraint</i> -Tensor
C^*	Übertragungsmatrix (röntgenographische Spannungsermittlung)
D	Biegesteifigkeitsmatrix der Laminattheorie
$D(t)$	Biegerelaxationsmatrix der viskoelastischen Laminattheorie
D	Diffusionskonstante
E	Elastizitätsmodul
F	Knotenkraftvektor (FEM)
G	Schubmodul
G^*	skalierter Schubmodul
$G(r - r')$	Green'sche-Funktion
H	freigesetzte Wärme bei der Polymerisation
H	Erinnerungsterm der nichtlinearen Viskoelastizität
HS^N	<i>Heaviside</i> -Raum

I	Einheitstensor
K	Kompressionsmodul
K	Steifigkeitsmatrix (FEM)
M	Feuchtegrad
M	resultierender Momentenvektor der Laminattheorie
M^*	equivalenter hygrothermischer Momentenvektor
N	resultierender Kraftvektor der Laminattheorie
N	equivalenter hygrothermischer Kraftvektor
N_m	Matrix der Formfunktionen (FEM)
P, Q	Tensoren bei der selbst-konsistenten Methode
Q	reduzierte Steifigkeitsmatrix des ebenen Spannungszustandes
S	Nachgiebigkeitstensor
$S(t)$	Kriechfunktionfunktion
$S^{(E)}$	Eshelby-Tensor
S^*	<i>constraint</i> -Tensor
T	Temperatur
T_φ	Transformationsmatrix
\mathcal{C}	Carson-Transformation
\mathcal{L}	Laplace-Transformation
α	Polymerisationsgrad
α	Kompressionsanteil der Kriechfunktion
α^{th}, α^{mo}	thermischer und hygroskopischer Ausdehnungskoeffizient
β	Schubanteil der Kriechfunktion
ϵ	Dehnung
$\epsilon^{(ht)}, \epsilon^{(mo)}, \epsilon^{(ch)}$	thermische, hygroskopische und chemische Eigendehnung
λ	Retardierungsparameter der Kriechfunktion
κ	Krümmung
ν	Querkontraktionszahl
μ	Relaxationsparameter der Relaxationsfunktion
φ	Faserrichtungswinkel
φ, ψ	Azimutal- und Polarwinkel (Röntgenographie)
ω, χ	angepaßte Winkel (Röntgenographie)
Θ	Bragg'scher Reflexionswinkel
ρ	Dichte
σ	Spannung
τ	Zeit
τ_{oct}	Oktaederschubspannung
ξ	reduzierte Zeit

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Stand des Forschungsprojekts

Am Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre wird das Gebiet der modernen Werkstoffe mit analytischen, numerischen und experimentellen Methoden untersucht. Besonders durch die Arbeiten von WÖRTLER [79, 80, 81] und PRINZ [65] wurde es ermöglicht, mit Hilfe der röntgenographischen Dehnungsmessung an kristallinen Füllstoffen die interlaminaren Spannungen in Kohlefaserverbunden zu messen. Diese Arbeiten konzentrierten sich hauptsächlich auf die Messung von Lastspannungen.

Zielsetzung des hier vorgestellten Forschungsprojekts ist es, die bei der Herstellung oder durch Umgebungseinflüsse entstehenden Eigenspannungen in Laminaten aus Kohlefaser-verstärktem Kunststoff experimentell bestimmen und durch numerische Simulationen berechnen zu können. Dabei wird der Eigenspannungszustand in Makroeigenspannungen im Verbund und Mikro-eigenspannungen zwischen den einzelnen Phasen unterteilt.

Die Entstehung der Eigenspannungen wird in Kapitel 2 dargestellt. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Verwendung eines geeigneten Materialgesetzes zur Beschreibung des zeit-, temperatur- und spannungsabhängigen mechanischen Verhaltens von faserverstärkten Kunststoffen, durch Anwendung des nicht-linearen viskoelastischen Materialgesetzes nach SCHAPERLY, was in Kapitel 3 behandelt wird. In Kapitel 4 wird das makromechanische Verhalten von Faserverbundwerkstoffen, insbesondere durch die Laminattheorie erläutert. Dabei wird die klassische Laminattheorie zur Beschreibung nichtlinearer Vis-koelastizität erweitert. Kapitel 5 ist ein Exkurs in die Mikromechanik mehr-phasiger Systeme, basierend auf den Erkenntnissen von ESHELBY und HILL,

und stellt einen zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Da zur Messung der Eigenspannungen in diesem Projekt hauptsächlich die röntgenographische Spannungsanalyse verwendet wird, ist es notwendig, das Spannungsübertragungsverhalten auf die einlamierten Reflexionspartikel genau zu kennen. Dieses wird mit der viskoelastischen, selbst-konsistenten Methode berechnet. Die experimentellen Methoden zum Messen von Eigenspannungen in Laminaten werden in Kapitel 6 vorgestellt.

1.2 Einleitung

Faserverbundwerkstoffe sind aufgrund ihrer herausragenden Eigenschaften ein unverzichtbarer Konstruktionswerkstoff der modernen Leichtbautechnik geworden. Die hohe spezifische Festigkeit und Steifigkeit führte zum verbreiteten Einsatz in der Luft- und Raumfahrttechnik. Ein weiterer interessanter Aspekt dieser Werkstoffklasse ist die Fähigkeit, die Struktur des Werkstoffes gezielt den im Betrieb auftretenden Belastungen anzupassen. Die relativ hohen Herstellungskosten und der im Vergleich zu metallischen Werkstoffen noch geringe Erfahrungshorizont stehen der universellen Anwendung zur Zeit noch im Weg. Ein weiteres Problem ist das Recycling von Verbundwerkstoffen. Die Verwendung und Entdeckung neuer technischer Kunststoffe als Matrixmaterialien läßt hier jedoch auf Verbesserung hoffen.

Um das volle Potential von Verbundwerkstoffen ausschöpfen zu können, sind genaue Kenntnisse über das mechanische Verhalten des Verbundes und seiner Bestandteile nötig. Weiterhin braucht der Konstrukteur zuverlässige Berechnungsverfahren und Konstruktionshilfen, um die Belastung und Festigkeit eines Bauteils zu ermitteln, ohne eine unnötig hohe Zahl an Prototypen fertigen zu müssen. Gerade die Möglichkeit bei Faserverbundwerkstoffen nicht nur die äußere Form, sondern auch den inneren Aufbau zu variieren, erfordert es, in der Konstruktionsphase mit Rechnerunterstützung ein nahezu optimales Design zu entwerfen. Dieses bereits teilweise optimierte Design kann im Anschluß daran über die (kostenintensive) Fertigung eines Prototyps experimentell überprüft und eventuell weiter verbessert werden.

Ein besonders wichtiger Punkt bei der Konstruktion mit Faserverbundwerkstoffen sind die im Material aufgrund des Herstellungsverfahrens vorhandenen inneren Spannungen (Eigenspannungen). Diese Spannungen ergeben sich aus den unterschiedlichen Eigenschaften der einzelnen Bestandteile des

Verbundes und daraus resultierenden, richtungsabhängigen Eigenschaften einer Verbundschicht. Diese Eigenspannungen sind sowohl auf der makroskopischen Ebene zwischen den Lagen eines multidirektionalen Laminats, als auch auf der mikroskopischen Ebene zwischen Fasern und umgebender Matrix vorhanden. Im Gegensatz zu Metallen können diese herstellungsbedingten Spannungen nicht durch eine nachfolgende Wärmebehandlung abgebaut werden. Wie später gezeigt wird, können diese Spannungen jedoch durch eine sinnvolle Wahl der Herstellungsparameter minimiert werden.

Da die Eigenspannungen im Material mit Spannungen aus äußeren Belastungen additiv überlagert werden, ist es unbedingt notwendig, bei der Berechnung und Dimensionierung von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen diese Eigenspannungen mit zu berücksichtigen. Besonders auf mikromechanischer Ebene können diese Spannungen eine Mikroschädigung des Materials hervorrufen, wodurch die gesamte Festigkeit des Bauteils reduziert wird.

Es werden demnach Berechnungsverfahren benötigt, welche eine zuverlässige Aussage über den im Bauteil vorhandenen Eigenspannungszustand auf mikro- und makromechanischer Ebene liefern und welche damit auch auf die besonderen Materialeigenschaften des Verbundes und seiner Bestandteile eingehen. In Ergänzung dazu benötigt der Konstrukteur experimentelle Verfahren, die nicht nur eine Aussage über den Makroeigenspannungszustand machen können, sondern auch eine sinnvolle Abschätzung des Eigenspannungszustandes auf der Ebene der Mikromechanik liefern.

Kapitel 2

Entstehung von Eigenspannung in faserverstärkten Kunststoffen

2.1 Aufbau und Herstellung von faserverstärkten Kunststoffen

Faserverstärkte Kunststoffe bestehen aus hochfesten, steifen Carbon- oder Glasfasern, die in einer duroplastischen oder thermoplastischen Polymermatrix eingebettet sind. Die Faserverbundwerkstoffe werden meistens in Form von sogenannten *prepreg-tapes* verwendet. Dies sind Einzelschichten aus unidirektionalen Fasern in einer noch nicht verfestigten (= nicht polymerisierten) Matrix. Diese Prepregs werden auf die gewünschte Länge zurechtgeschnitten und in Lagen mit verschiedenen Orientierungen übereinandergelagt. Diese geschichteten Prepregs werden dann in einem Autoklaven unter erhöhtem Druck und erhöhter Temperatur ausgehärtet. Die Polymerisation der Harzmatrix bei faserverstärkten Duroplasten ist ein exothermer Prozeß und ist mit einer Schrumpfung der Matrix verbunden. Während dieses Vorgangs ist jedoch aufgrund der hohen Temperatur die Steifigkeit und die Viskosität der Matrix sehr gering, so daß die aus diesen sogenannten chemischen Eigendehnungen hervorgehenden Spannungen durch Relaxation vermindert werden.

Nach Ende des Aushärtezyklus (*cure cycle*) läßt wird das Bauteil abgekühlt. Dabei nimmt die Viskoelastizität ab, die Steifigkeit steigt und die Matrix versucht, sich aufgrund der Abkühlung zusammenzuziehen. Da der thermische

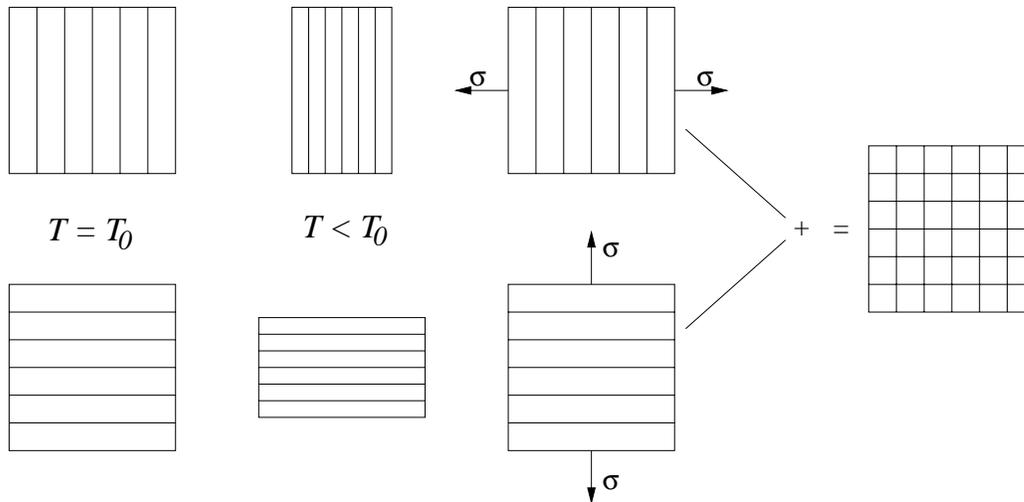


Abbildung 2.1: Kontraktionsbehinderung beim Abkühlen eines multidirektionalen Laminats

Ausdehnungskoeffizient von Carbon-Fasern nahezu Null ist und das Verhalten der Fasern aufgrund ihrer Steifigkeit das Verhalten der Laminatschicht in Faserrichtung dominiert, zieht sich eine Laminatschicht nur quer zur Faserrichtung zusammen. Besteht ein Laminat aus mehreren Laminatae unterschiedlicher Orientierung, behindern die Fasern der einen Schicht jeweils die transversale Kontraktion der anderen Schicht. Diese Kontraktionsbehinderung erzeugt in den Laminatschichten Zugeigenspannungen quer zur Faserrichtung.

Die Höhe dieser Eigenspannungen ist in der Größenordnung der Querkzugfestigkeit der Laminatschicht und kann bereits die Bildung von Mikrorissen in der Matrix verursachen, bevor das Bauteil mechanisch belastet wird. Diese Mikrorisse stellen eine signifikante Vorschädigung dar und begünstigen die Schädigung durch Umwelteinflüsse (Feuchtigkeitsaufnahme, Chemikalien).

Es ist demnach offensichtlich, daß Aushärtetemperatur und Druck, Aushärtezeit, Abkühlrate und eine eventuelle thermische Nachbehandlung (*postcuring*) die bestimmenden Parameter der im Material nach der Abkühlung vorhandenen Eigenspannungen sind.

Die Entstehung und Auswirkungen herstellungsbedingter Eigenspannungen bei Faserverbundwerkstoffen wurde erstmals von HAHN & PAGANO [24] und HAHN [21, 22] ausführlich dargestellt.

2.2 Chemische Eigendehnungen

Während des Aushärtevorgangs (*cure*) kontrahiert ein übliches Epoxidharz aufgrund der Polymerisation um durchschnittlich 5% [50]. Da diese Kontraktion bei der Aushärtetemperatur stattfindet, wurde in den ersten, grundlegenden Arbeiten über prozeßbedingte Eigenspannungen davon ausgegangen, daß diese Eigenspannungen durch viskoelastische Relaxationsvorgänge nahezu vollständig abgebaut werden ([24], [21]). HARPER ET. AL. haben jedoch gezeigt, daß dies nur der Fall ist, wenn das Epoxidharz bei einer Temperatur, die oberhalb der Glasübergangstemperatur T_G liegt, ausgehärtet wird [26]. Bei einem Harz (Hercules 3502), welches bei 180°C unterhalb der Glasübergangstemperatur $T_G = 230^\circ\text{C}$ ausgehärtet wurde, betrug der Anteil der chemischen Eigenspannungen nach geometrisch restringierter Abkühlung auf Raumtemperatur 30 %.

Zur Bestimmung der Auswirkungen der chemischen Eigendehnung ist demnach die genaue Kenntnis der Materialkennwerte während des Aushärtevorgangs notwendig. Da die Polymerisation ein exothermer Vorgang ist, kann der Polymerisationsgrad (*degree of cure*) α als Verhältnis von freigesetzter Wärme $H(t)$ zur gesamten Reaktionswärme H_u definiert werden:

$$\alpha(t) = \frac{H(t)}{H_u} \quad (2.1)$$

Die freigesetzte Wärme während der Reaktion wird üblicherweise über ein *Differential Scanning Calorimetry (DSC)*-Verfahren gemessen. WHITE & HAHN haben mit diesem Verfahren den Reaktionsablauf (*cure kinetics*) des Verbundwerkstoffes IM6/3100 (Kohlefasern/BMI-Matrix) gemessen und die wichtigsten Materialkennwerte in Abhängigkeit des Polymerisationsgrades bestimmt ([77],[78]). Die chemische Eigendehnung, der transversale Elastizitätsmodul und die transversale Zugfestigkeit verblieben bis zur Reaktionsrate von $\alpha = 0.8$ nahe ihres Anfangsniveaus, um dann stark bis zum Endniveau anzusteigen. Da andererseits für diesen Aushärteverlauf (*cure cycle*) die Reaktion nach der Hälfte der Aushärtezeit schon fast vollendet war ($\alpha = 0.9$), konnten die chemischen Eigendehnungen in der verbleibenden Zeit bis auf einen Bestandteil von 4% an den verbleibenden Eigenspannungen nach Abkühlung auf Raumtemperatur relaxieren.

PENN ET. AL. reduzierten die chemische Eigendehnung durch Zugabe eines molekularen Additivs zur Harzmatrix [59]. Dies bewirkte eine Reduktion der Eigenspannungen bei Raumtemperatur, führte jedoch nicht zu einer Erhöhung

der Querkzugfestigkeit, da das Vorhandensein von Fremdkörpern in der Matrix die Bruchfestigkeit erniedrigte.

Werden teilkristalline thermoplastische Kunststoffe (zum Beispiel Polyetheretherketon, PEEK) als Matrixmaterial in einem Verbundwerkstoff verwendet, ergeben sich chemische Eigendehnungen aufgrund des Kristallisationsgrades der Matrix. Der Kristallisationsgrad hängt hauptsächlich von der Abkühlgeschwindigkeit bei der Herstellung ab, kann aber durch eine anschließende Wärmebehandlung (*annealing*) erhöht werden. Da die Herstellungstemperatur thermoplastischer Verbundwerkstoffe mit über 300°C wesentlich über der Glasübergangstemperatur liegt, besitzen viskoelastische Relaxationsvorgänge eine noch größere Bedeutung als bei duroplastischen Verbundwerkstoffen. Detaillierte Untersuchungen zur Reduktion prozeßbedingter Eigenspannungen bei thermoplastischen Verbundwerkstoffen wurden von BOGETTI & GILLESPIE [6], CHAPMAN ET. AL. [8] und UNGER & HANSEN [75] veröffentlicht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Auswirkungen der chemischen Eigendehnungen stark vom Aushärteverlauf und von dem verwendeten Matrixmaterial abhängen und nur nach vorangegangener Überprüfung vernachlässigt werden können.

2.3 Thermische Eigendehnung

Die thermischen Eigendehnungen sind die primäre Quelle von Eigenspannungen in einem Laminat. Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, besitzt eine Laminatschicht aufgrund ihres Aufbaus und der Eigenschaften von Faser und Matrix einen stark anisotropen thermischen Ausdehnungskoeffizienten. Während dieser bei mit Carbon-Fasern verstärktem Epoxidharz in Faserrichtung nahezu Null ist, hat er in transversaler Richtung mit ungefähr $30\mu\text{m}/(\text{mK})$ einen dreifach höheren Wert als der thermische Ausdehnungskoeffizient von Stahl. Bei der Herstellung und Abkühlung multidirektionaler Lamine behindern die Fasern einer Laminatschicht die transversale Kontraktion einer in einem anderen Winkel angeordneten anderen Schicht. Diese Kontraktionsbehinderung erzeugt hohe Eigenspannungen im Material. Bei einer Abkühlung um $\Delta T = 100\text{K}$ und einem transversalen Steifigkeitsmodul von $E_2 = 8500\text{N}/\text{mm}^2$ [9] ergibt sich eine Eigenspannung durch eine vollständige Kontraktionsbehinderung von:

$$\sigma = E_2 \alpha_2^{(th)} \Delta T = 25.5\text{N}/\text{mm}^2 \quad (2.2)$$

Bei einer transversalen Zugfestigkeit von 60 N/mm^2 ist dies eine beträchtliche Vorbelastung, die bei Festigkeitsbetrachtungen unbedingt berücksichtigt werden muß.

Zur einfachen Berechnung der thermisch verursachten Eigenspannungen ist die Definition einer spannungsfreien Temperatur T_0 gebräuchlich. Bei dieser Temperatur soll das Laminat frei von thermischen Eigenspannungen sein. Dieser Zustand kann gut über das Verschwinden der Krümmung eines antisymmetrischen Laminates gemessen werden (siehe Abschnitt 6.1). Aufgrund von viskoelastischen Relaxationsvorgängen ist die spannungsfreie Temperatur in der Regel niedriger als die Herstellungstemperatur. Die im Bauteil vorliegende Spannung kann dann in guter Näherung gemäß Gleichung (2.2) berechnet werden.

2.4 Hygroskopische Eigendehnungen

Die Harzmatrix eines Faserverbundwerkstoffes nimmt in einer feuchten Umgebung aufgrund von Diffusion Feuchtigkeit auf. Die eingelagerte Feuchtigkeit bewirkt eine sogenannte hygroskopische Dehnung der Matrix. Da die Fasern keine Feuchtigkeit aufnehmen und sich nicht ausdehnen, wird der Mikroeigenspannungszustand zwischen Faser und Matrix signifikant geändert. Dies kann zur Mikrorißbildung führen, wodurch die Diffusion beschleunigt wird. Weiterhin kann die Grenzfläche zwischen Faser und Matrix geschädigt werden, wodurch die Festigkeit herabgesetzt wird. Eine umfangreiche Zusammenfassung der Einflüsse von Feuchtigkeit und Temperatur auf Zugfestigkeit, Steifigkeit, Kriechen und Ermüdung von Laminaten unterschiedlicher Orientierung haben SHEN & SPRINGER [70] und SPRINGER [72] gegeben.

Der Diffusionsprozeß kann in den meisten Fällen durch das eindimensionale Fick'sche Gesetz für eine unendlich ausgedehnte Platte angegeben werden [11]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.3)$$

mit der Diffusionskonstante D und der Feuchtekonzentration c . Die Diffusionskonstante D ist von Spannungszustand oder Feuchtekonzentration unabhängig, hängt aber von der Temperatur ab:

$$D = D_0 e^{-E_d/RT} \quad (2.4)$$

wobei D_0 eine Konstante, E_d die Aktivierungsenergie der Diffusion und R die Gaskonstante ist.

Von praktischem Interesse ist der dimensionslose Feuchtegrad M , der die Masse der aufgenommenen Feuchtigkeit m_{H_2O} auf die Masse des trockenen Laminats $m_{L,dry}$ bezieht:

$$M = \frac{m_{H_2O}}{m_{L,dry}} = \frac{c}{\rho_L} \quad (2.5)$$

Der Sättigungsfeuchtegrad M_∞ nach Erreichen des Gleichgewichtszustandes ist eine Funktion der relativen Luftfeuchtigkeit RH in Prozent des umgebenden Mediums:

$$M_\infty = a (RH/100)^b \quad (2.6)$$

wobei a und b von Feuchtegrad und Temperatur unabhängige Materialkonstanten sind. Der Exponent b nimmt Werte zwischen 1 und 1.5 an [72].

Es wurde beobachtet, daß das Diffusionsverhalten einige Composites besonders bei hohen Temperaturen und hohen relativen Feuchtigkeiten vom Fick'schen Gesetz abweicht ([5], [23] und [72]). Die Feuchtekonzentration erreicht keinen Gleichgewichtszustand, sondern nimmt nach Erreichen der Fick'schen Sättigungskonzentration langsam stetig zu. Dieser Effekt wird meist durch eine Schädigung des Materials durch Mikrorisse und Faser-Matrix-Debonding erklärt. Springer wies außerdem darauf hin, daß Polymere nahe der Glasübergangstemperatur vom Fick'schen Diffusionsverhalten abweichen können [72]. Zu den mathematischen Hintergründen nicht-Fick'scher Diffusion siehe CRANK [11].

Die hygroskopische Dehnung ϵ^{mo} ist bei den meisten Matrixmaterialien eine lineare Funktion des Feuchtegrades M mit dem hygroskopischen Ausdehnungskoeffizienten α^{mo} :

$$\epsilon^{mo} = \alpha^{mo} M \quad (2.7)$$

Bei vielen Verbundwerkstoffen wird beobachtet, daß eine Querdehnung erst einsetzt, nachdem die Feuchtekonzentration einen Schwellwert c_v überschritten hat [23]. Bei Desorption (Feuchteabgabe) tritt eine Kontraktion der Matrix bei diesen Materialien auch erst nach Unterschreiten dieses Schwellwertes ein. Es entsteht demnach eine Hysterese-Schleife bei einem Absorptions-Desorptions Zyklus. Dieses Phänomen wird durch die Existenz von Mikroporen (*microvoids*) erklärt, die zuerst Feuchtigkeit aufnehmen, ohne eine Ausdehnung zu bewirken und die diese Feuchtigkeit bei Desorption auch zuerst wieder abgeben.

Bei unidirektional-faserverstärkten Kunststoffen ist die hygroskopische Dehnung in Faserrichtung aufgrund der Restriktionswirkung der Fasern vernachlässigbar. Die Dehnung ϵ_T^{mo} in transversaler Richtung kann (hier ohne Hysterese-Effekte) über einen mikromechanischen Ansatz aus der Poisson-Zahl ν_m , der Dichte ρ_m und des hygroskopischen Ausdehnungskoeffizienten α_m^{mo} der Matrix und der Gesamtdichte ρ bestimmt werden [23]:

$$\epsilon_T^{mo} = \alpha_T^{mo} M \quad (2.8)$$

$$\alpha_T^{mo} = (1 - \nu_m) \alpha_m^{mo} \rho_m / \rho \quad (2.9)$$

Hahn gibt experimentell ermittelte Werte zwischen 0.54 und 0.59 für den Ausdehnungskoeffizienten α_T^{mo} [23].

Die Auswirkung hygroskopischer Dehnungen auf den Mikroeigenspannungszustand auf Faser-Matrix-Ebene wurde von TSOTSIS & WEITSMAN [73] mit einer Finiten-Element Berechnung einer Einheitszelle gezeigt. Bei nicht-restringierter Abkühlung einer Laminatschicht herrscht in den Punkten auf dem Faserumfang mit dem geringsten Abstand zu den benachbarten Fasern ein Druckeigenspannungszustand, welcher sich positiv auf die Faser/Matrix-Haftung auswirkt. Durch Querdehnung der Matrix wird dieser Spannungszustand in einen Zugspannungszustand umgewandelt, was die Bildung von Mikrorissen entlang der Faser-Matrix-Grenzfläche (*interface*) begünstigt. Eine Berechnung des J -Integrals zeigte, daß zur Bildung dieser Interface-Risse nur relativ geringe Energien nötig sind. Eine mikromechanische FE-Analyse von Zugfestigkeit und Elastizitätsmodul in Faserquerrichtung mehrerer Verbundwerkstoffe wurde von POMIES & CARLSSON [60] durchgeführt.

Ein wichtiger Schädigungsfall von Verbundwerkstoffen unter hygrothermischer Belastung ist das schnelle Aufheizen in den Bereich der Glasübergangstemperatur und anschließendes schnelles Abkühlen von feuchten Laminaten

(*thermal spiking*). Diese Belastung tritt durch Verdichtungsstöße im Überschallflug auf. Dabei entstehen Mikrorisse und Mikroporen aufgrund von überhitzter, eingeschlossener Feuchtigkeit und Temperatur- und Feuchtigkeitsgradienten. Durch die schnelle Aufheizung des Laminats entsteht in der wärmeren Oberfläche durch die Behinderung des kühleren Kerns ein Druckspannungszustand, der aufgrund der hohen Temperatur relaxieren kann. Die anschließende Abkühlung erzeugt dann in der Laminatoberfläche einen starken Zugeigenspannungszustand (siehe [23], [10]).

Kapitel 3

Materialeigenschaften faserverstärkter Kunststoffe

Unidirektional faserverstärkte Kunststoffe gehören zur Klasse der anisotropen Werkstoffe, d. h. ihr Materialverhalten ist stark richtungsabhängig. Wird eine einzelne Laminatschicht betrachtet, so ist diese transversal-isotrop. In Richtung der Fasern werden die Eigenschaften von den Fasereigenschaften dominiert, das Material ist linear-elastisch, sehr steif (hoher Elastizitätsmodul) und sehr fest (hohe Zugfestigkeit). Weiterhin sind die Materialeigenschaften in Faserrichtung sehr schwach von den Umgebungsbedingungen (Temperatur und Feuchtigkeit) abhängig.

Quer zur Faserrichtung hingegen wird das Materialverhalten durch die Eigenschaften der Matrix bestimmt. Die Laminatschicht ist in diese Richtung sehr weich, besitzt nur eine geringe Zugfestigkeit und zeigt aufgrund der Polymernatur der Matrix ein viskoelastisches Verhalten. Außerdem sind die Materialeigenschaften in diese Richtung sehr stark von den Umgebungsparametern abhängig.

Daraus läßt sich schließen, daß zur vollständigen Beschreibung der Materialeigenschaften faserverstärkter Kunststoffe ein von Temperatur und Feuchtigkeit abhängiges, viskoelastisches Materialmodell gewählt werden muß.

3.1 Grundlagen der Viskoelastizität

3.1.1 Stieltjes-Integral und Stieltjes-Inverse

Zur Behandlung der Materialgleichungen der Viskoelastizität hat sich das Stieltjes-Integral als einfache und elegante Formulierung herausgestellt. Eine detaillierte Zusammenfassung zur Theorie des Stieltjes-Integrals und seiner Anwendung in der linearen Viskoelastizität wurde von GURTIN & STERNBERG 1962 [20] gegeben.

Die *Heaviside*-Sprungfunktion soll mit h bezeichnet werden. Sie ist definiert als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in (-\infty, 0) \\ 1 & \forall t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (3.1)$$

Definition 1 (Heaviside-Raum HS^N) Eine Funktion f gehört zum Raum HS^N , wenn $f(t)$ für alle t in $(-\infty, \infty)$ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} f &= 0 & \forall t \in (-\infty, 0), \\ f &\in C^N([0, \infty)). \end{aligned}$$

Definition 2 (Stieltjes-Integral) Es seien f eine Funktion aus HS^0 und g eine Funktion aus HS^1 . Dann ist das Stieltjes-Integral definiert als

$$f * dg = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) \frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.2)$$

Definition 3 (Stieltjes-Inverse) Es sei f eine Funktion aus HS^1 . Gibt es eine Funktion g aus HS^1 für die gilt

$$f * dg = h, \quad (3.3)$$

dann nennt man g die Stieltjes-Inverse von f und schreibt $g = f^{-1}$.

Es kann gezeigt werden, daß zu einer Funktion f aus HS^2 die Stieltjes-Inverse f^{-1} existiert, wenn der Anfangswert $f(0) \neq 0$ ist.

3.1.2 Integraltransformationen

Definition 4 (Laplace-Transformation)

Die Funktion $f(t)$ sei für $t \geq 0$ definiert, über $(0, \infty)$ integrierbar und durch $|f(t)| \leq Ke^{s_0 t}$ beschränkt. Man bezeichnet die Funktion

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \forall \quad s | \operatorname{Re}(s) \geq s_0 \quad (3.4)$$

als Laplace-Transformierte von $f(t)$ und bezeichnet sie mit $\bar{f}(s)$.

Definition 5 (Carson-Transformation)

Die Funktion $f(t)$ sei für $t \geq 0$ definiert, über $(0, \infty)$ integrierbar und durch $|f(t)| \leq Ke^{s_0 t}$ beschränkt. Man bezeichnet die Funktion

$$\mathcal{C}(f) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \forall \quad s | \operatorname{Re}(s) \geq s_0 \quad (3.5)$$

als Carson-Transformierte von $f(t)$ und bezeichnet sie mit $\hat{f}(s)$. Es gilt $\hat{f} = s\bar{f}$.

Theorem 1 (Endwert-Theorem)

Existiert der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow 0} \hat{f}(s)$, dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{f}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (3.6)$$

Zu weiteren Eigenschaften der Integraltransformationen siehe [7].

3.1.3 Materialgleichungen der linearen Viskoelastizität

Werkstoffe, die ganz oder teilweise aus Polymeren bestehen, haben in der Regel ein zeitabhängiges mechanisches Verhalten. Dieses sogenannte viskoelastische Materialverhalten hat folgende Auswirkungen:

- Kriechen (zunehmende Dehnung) des Werkstoffes unter konstanter Last
- Relaxation der Spannung im Werkstoff unter konstanter Dehnung
- Dämpfung von Schwingungen

- Abhängigkeit der Spannung von der aufgetragenen Dehnungsgeschwindigkeit

Die mechanische Antwort $R(t)$ (Spannung oder Dehnung) eines Materials sei ein Funktional der aufgetragenen Belastungsfunktion $I(t)$ (Dehnung oder Spannung):

$$R(t) = R\{I(t)\} \quad (3.7)$$

Die geschweiften Klammern geben die Abhängigkeit von der gesamten Belastungsfunktion und nicht nur vom momentanen Wert der Belastungsfunktion an. Dieses Funktional soll linear sein, das heißt, die Bedingungen der Homogenität und der Superposition müssen erfüllt sein:

$$R\{cI\} = cR\{I\} \quad (3.8)$$

$$R\{I_1 + I_2\} = R\{I_1\} + R\{I_2\} \quad (3.9)$$

Die Antwort auf eine Belastung des Materials zum Zeitpunkt t' mit der Sprungfunktion h sei:

$$R_h = R_h(t, t') \quad (3.10)$$

Ist dieses Funktional nur von der seit der Belastung abgelaufenen Zeitspanne $t - t'$ abhängig, spricht man von einem nicht-alternden (*non-aging*) Material (im folgenden sollen nur noch nicht-alternde Materialien betrachtet werden):

$$R_h = R_h(t - t') \quad (3.11)$$

Die Sprungantwort R_h wird bei Belastung mit einer konstanten Spannung als *Kriechfunktion* und bei Belastung mit einer konstanten Dehnung als *Relaxationsfunktion* bezeichnet.

Die Antwort auf eine zeitabhängige Belastungsfunktion $I(t)$ kann durch Grenzwertbildung einer Summe von Belastungsschritten unter Verwendung der Linearität (Gl. 3.8 und 3.9) berechnet werden:

$$R = \int_{-\infty}^t R_h(t-t') \frac{\partial I(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.12)$$

Unter Verwendung der Kriechfunktion $S(t)$ und der Relaxationsfunktion $C(t)$ ¹ läßt sich das Materialgesetz der linearen Viskoelastizität in folgender dualer Formulierung angeben:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t S(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} (\sigma(t')) dt' + \epsilon^{ht}(t) \quad (3.13)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t C(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} (\epsilon(t')) dt' + \sigma^{ht}(t) \quad (3.14)$$

Wenn die Belastung nur für $t \geq 0$ auftritt ($\{\sigma, \epsilon\} \in HS^1$), kann das Integral auf die positive reelle Zeitachse beschränkt werden:

$$\epsilon(t) = S(t)\sigma(0) + \int_0^t S(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} (\sigma(t')) dt' + \epsilon^{ht}(t) \quad (3.15)$$

$$\sigma(t) = C(t)\epsilon(0) + \int_0^t C(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} (\epsilon(t')) dt' + \sigma^{ht}(t) \quad (3.16)$$

Mit Verwendung des Stieltjes-Integrals ergibt sich folgende Formulierung:

$$\epsilon = S * d\sigma + \epsilon^{ht} \quad (3.17)$$

$$\sigma = C * d\epsilon + \sigma^{ht} \quad (3.18)$$

Bei anisotropen Materialverhalten sind die Kriech- und Relaxationsfunktion $S(t)$, bzw. $C(t)$ zeitabhängige Tensoren vierter Stufe:

¹In der Literatur werden Kriech- und Relaxationsfunktion auch mit $M(t)$, bzw. $L(t)$ bezeichnet. Zur konsistenten Darstellung, zur Unterscheidung von der Feuchte M und um die Verwandtschaft zu Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmodul C , bzw. S hervorzuheben, wurde diese Darstellung gewählt.

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} * d\sigma_{kl} + \epsilon_{ij}^{ht} \quad (3.19)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * d\epsilon_{kl} + \sigma_{ij}^{ht} \quad (3.20)$$

Die Kriech- und Relaxationsfunktionen werden in thermodynamischer Konsistenz als Exponentialsumme formuliert [69]:

$$S_{ijkl}(t) = S_{ijkl}^{(0)} + \sum_{(r)} S_{ijkl}^{(r)} (1 - e^{-\lambda_{ijkl}^{(r)} t}) \quad (3.21)$$

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^{\infty} + \sum_{(r)} C_{ijkl}^{(r)} e^{-\mu_{ijkl}^{(r)} t} \quad (3.22)$$

Die einzelnen Koeffizienten und die Retardierungs- und Relaxationsparameter $\lambda^{(r)}$, bzw. $\mu^{(r)}$ werden aus Kriech- bzw. Relaxationsexperimenten bestimmt. Zur Beschreibung der meisten Materialien sind 10 Summanden ausreichend. Experimentell motiviert ist die Beschreibung der Kriech, bzw. Relaxationsfunktion über ein Exponentialgesetz (*power-law*). Dieses Gesetz kann jedoch schlechter algebraisch umgeformt werden, so daß es in dieser Arbeit nicht verwendet wird.

Die hygrothermisch-chemische Eigendehnung des Materials bei Änderung der Temperatur T oder des Feuchtegrades M im Vergleich zum Referenzzustand (T_0, M_0) wird mit ϵ^{ht} bezeichnet. Unter Verwendung der thermischen und hygroskopischen Ausdehnungskoeffizienten α^{th} , bzw α^{mo} ergibt sich:

$$\epsilon^{ht}(t) = \epsilon^{ch}(t) + \int_{T_0}^{T(t)} \alpha^{th}(T) dT + \int_{M_0}^{M(t)} \alpha^{mo}(M) dM \quad (3.23)$$

Analog zur hygrothermisch-chemischen Eigendehnung ϵ^{ht} läßt sich eine hygrothermisch-chemische Eigenspannung σ^{ht} definieren. Diese ist die viskoelastische Wirkung der Eigendehnung ϵ^{ht} :

$$\begin{aligned} \sigma(t)^{ht} &= - \left(C(t) \epsilon^{ht}(0) + \int_0^t C(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} (\epsilon^{ht}(t')) dt' \right) \\ &= -C(t) * d\epsilon^{ht}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aus Gleichung (3.17) und (3.18) erkennt man, daß die Relaxationsfunktion $C(t)$ die Stieltjes-Inverse zur Kriechfunktion $S(t)$ ist:

$$C = S^{-1} \quad (3.25)$$

Diese Inverse existiert, sofern $S \in HS^2$ und $S(0) \neq 0$ ist, d.h. das Material muß bei Belastung eine spontane elastische Reaktion aufweisen.

Weiterhin gelten die von der linearen Elastizität bekannten Gleichung für die lineare Verzerrung und die Gleichgewichtsbedingungen

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.26)$$

$$\sigma_{ij,j} = f_i \quad (3.27)$$

3.1.4 Viskoelastisches Korrespondenzprinzip

Anwendung der Laplace-, beziehungsweise Carson-Transformation auf die Materialgleichungen (3.15), bzw. (3.16) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= s\bar{S}\bar{\sigma} + \bar{\epsilon}^{ht} \\ &= \hat{S}\bar{\sigma} + \bar{\epsilon}^{ht} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= s\bar{C}\bar{\epsilon} + \bar{\sigma}^{ht} \\ &= \hat{C}\bar{\epsilon} + \bar{\sigma}^{ht} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Durch Transformation der Verzerrungsgleichung (3.26) und Gleichgewichtsbedingung (3.27) erhält man

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (3.30)$$

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = \bar{f}_i \quad (3.31)$$

Die Lösung eines viskoelastischen Problems kann demnach auf die Lösung eines elastischen Problems im Bildraum zurückgeführt werden. Dabei müssen

die Nachgiebigkeitsmatrix S , bzw. Steifigkeitsmatrix C durch die Carson-transformierte Kriechfunktion $\hat{S}(s)$, bzw. Relaxationsfunktion $\hat{C}(s)$ und alle anderen Größen durch ihre Laplace-Transformierten ersetzt werden. Nach Lösung des korrespondierenden elastischen Problems im Bildraum muß das Ergebnis durch eine inverse Laplace- oder Carson-Transformation in der Originalraum zurücktransformiert werden.

Beispielsweise kann die Relaxationsfunktion durch Invertierung der Kriechfunktion erhalten werden:

Aus (3.19) und (3.20) folgt

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{s^2} \bar{S}(s)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{C}(s) = \hat{S}(s)^{-1} \quad (3.32)$$

3.1.5 Zeit-Temperatur Korrespondenzprinzip

Da die Materialeigenschaften der meisten Polymere sehr stark von der Temperatur abhängen, muß eine Form gefunden werden, die Temperaturabhängigkeit in die Materialgleichungen einzubinden. Unter der Voraussetzung, daß die Temperatur im Bauteil nicht vom Ort, sondern nur von der Zeit abhängt, kann man für eine bestimmte Klasse von Materialien die Temperatur durch Einführung einer *reduzierten Zeit* ξ implizit berücksichtigen. Diese Materialien nennt man *thermorheologisch-einfache Materialien* (MORLAND & LEE) [56].

Damit ergibt sich erneut ein lineares, temperaturabhängiges Materialgesetz:

$$\epsilon(\xi) = S(\xi)\sigma(0) + \int_0^\xi S(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial \xi'} (\sigma(\xi')) d\xi' + \epsilon^{ht}(\xi) \quad (3.33)$$

$$= S(\xi) * d\sigma(\xi) + \epsilon^{ht}(\xi) \quad (3.34)$$

mit der *reduzierten Zeit*

$$\xi = \xi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_T(T(t))} \quad (3.35)$$

wobei a_T als Verschiebungsfaktor bezeichnet wird.

Bei isothermen Kriechversuchen gilt:

$$\xi = t/a_T \quad \Longleftrightarrow \quad \log \xi = \log t - \log a_T \quad (3.36)$$

Eine Temperaturänderung entspricht demnach einer horizontale Verschiebung der Kriechkurve um $\log a_T$ im $\log \xi$ -Diagramm.

Für den Verschiebungsfaktor a_T gilt unterhalb der Glasübergangstemperatur T_g die Arrhenius-Gleichung [18]:

$$\log a_T(T) = \frac{\Delta F}{2.303R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_R} \right) \quad (3.37)$$

wobei ΔF eine Aktivierungsenergie und R die ideale Gaskonstante ist.

Oberhalb der Glasübergangstemperatur wird die sogenannte Williams-Landel-Ferry-Gleichung verwendet (siehe FERRY [18]).

Das temperaturabhängige Materialverhalten kann demnach durch eine einzige Kriechkurve bei einer Referenztemperatur beschrieben werden. Aufgrund der linearen Form des Materialgesetzes können die Integraltransformationen weiterhin angewandt werden. Als Ausgangsvariable im Originalraum wird jetzt jedoch die reduzierte Zeit ξ verwendet.

3.1.6 Berechnung der inversen Carson-Transformation

Bei Anwendung des viskoelastischen Korrespondenzprinzips wird eine Lösung im Bildraum berechnet. Diese Lösung muß dann in den Originalraum zurücktransformiert werden. Aufgrund der Komplexität der Lösung ist die Transformation in den meisten Fällen nicht mehr analytisch zu bewältigen und muß durch ein numerisches Näherungsverfahren erfolgen.

Ein zur Behandlung von viskoelastischen Problemen aufgrund der ähnlichen Ansatzfunktionen sehr gut geeignetes Verfahren ist das Kollokations-Verfahren (*collocation method*) nach Schapery [69].

Gegeben sei eine Carson-transformierte Funktion $\hat{f}(s)$ im Bildraum. Ansatz einer Funktion $g(t)$ in Form einer Dirichlet-Serie als Näherung zur gesuchten Funktion $f(t)$ im Originalraum:

$$g(t) = g_0 + \sum_{j=1}^n g_j e^{-\lambda_j t} \quad (3.38)$$

mit frei wählbaren Retardierungszeiten λ_j und zu bestimmenden Koeffizienten g_j .

Die Carson-Transformierte von $g(t)$ ist:

$$\hat{g}(s) = g_0 + \sum_{j=1}^n g_j \frac{s}{s + \lambda_j} \quad (3.39)$$

Aus dem *Endwert-Theorem* folgt:

$$g_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{f}(s) \quad (3.40)$$

Bestimmung der Koeffizienten g_i über Minimierung des Fehlerintegrals

$$E^2 = \int_0^{\infty} [f(t) - g(t)]^2 dt \quad (3.41)$$

Differentiation nach den einzelnen Koeffizienten g_i ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^2}{\partial g_i} &= -2 \int_0^{\infty} [f(t) - g(t)] \frac{\partial g(t)}{\partial g_i} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i t} [g(t) - f(t)] dt \\ &= 2 [\bar{g}(\lambda_i) - \bar{f}(\lambda_i)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Im Minimum von E^2 verschwinden die Ableitungen $(\partial E^2 / \partial g_i)$, damit gilt:

$$\bar{g}(\lambda_i) = \bar{f}(\lambda_i) \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{g}(\lambda_i) = \hat{f}(\lambda_i) \quad (3.43)$$

Die Minimierung des Fehlerintegrals ist demnach gleichbedeutend mit einer Kollokation der Carson-transformierten Dirichlet-Serie $\hat{g}(s)$ an n reellen Zahlen λ_i . Auflösen der Gleichung (3.43) ergibt ein lineares Gleichungssystem für g_j :

$$\sum_{j=1}^n (1 + (\lambda_j / \lambda_i))^{-1} g_j = \hat{f}(\lambda_i) - g_0 \quad (i = 1 \dots n) \quad (3.44)$$

$$A_{ij} g_j = b_i \quad (3.45)$$

3.2 Nichtlineare Viskoelastizität

Die Matrix faserverstärkter Kunststoffe wird unter realen Umgebungsbedingungen häufig in einem Spannungsbereich belastet, in dem das Materialverhalten durch die lineare Theorie nicht mehr ausreichend beschrieben wird. Zur effektiven Bauteildimensionierung muß demnach ein nichtlineares, viskoelastisches Modell verwendet werden. Die Parameter dieses Modells müssen jedoch mit einem verhältnismäßigen Aufwand eindeutig bestimmbar sein.

Schapery hat 1969 eine Theorie der nichtlinearen Viskoelastizität entwickelt, die auf Prinzipien der irreversiblen Thermodynamik basiert [68].

Die Materialgleichungen können weiterhin entweder in Abhängigkeit der Spannung oder der Dehnung formuliert werden:

$$\epsilon = g_0 S^{(0)} + g_1 \int_{0^-}^t \Delta S(\xi_\sigma - \xi'_\sigma) \frac{\partial(g_2 \sigma)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.46)$$

$$\sigma = h_0 C^\infty + h_1 \int_{0^-}^t \Delta C(\xi_\epsilon - \xi'_\epsilon) \frac{\partial(h_2 \epsilon)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.47)$$

mit der linearen Kriechfunktion $S(t)$ und der linearen Relaxationsfunktion $C(t)$:

$$S(t) = S^{(0)} + \Delta S(t) \quad (3.48)$$

$$C(t) = C^\infty + \Delta C(t) \quad (3.49)$$

und den reduzierten Zeiten ξ_σ , bzw. ξ_ϵ :

$$\xi_\sigma = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma(\sigma(t))} \quad (3.50)$$

$$\xi_\epsilon = \int_0^t \frac{dt'}{a_\epsilon(\epsilon(t))} \quad (3.51)$$

Die Integralgrenze $0-$ bedeutet, daß eine eventuelle Diskontinuität der Belastungsfunktion bei $t = 0$ in die Integration miteinbezogen werden muß.

Die Materialparameter g_0, g_1, g_2 und a_σ sind Funktionen der Spannung und stellen die Abhängigkeit dritter und höherer Ordnung der Gibb'schen freien Energie von der anliegenden Spannung dar. Die Parameter h_0, h_1, h_2 und a_ϵ geben in ähnlicher Weise eine Abhängigkeit höherer Ordnung der Helmholtz'schen freien Energie von der Dehnung an.

Eine Temperaturänderung kann in der linearen Theorie durch Änderung des Verschiebungsfaktors a_σ , bzw. a_ϵ berücksichtigt werden (siehe beispielsweise HENRIKSEN [36]).

Die Sprungantwort auf eine Belastung mit einer konstanten Spannung, bzw. mit einer konstanten Dehnung ergibt die folgenden nichtlinearen Kriech- bzw. Relaxationsfunktion $S_n(t)$ und $C_n(t)$:

$$S_n(t) = \frac{\epsilon}{\sigma} = g_0 S^{(0)} + g_1 g_2 \Delta S(t/a_\sigma) \quad (3.52)$$

$$C_n(t) = \frac{\sigma}{\epsilon} = h_0 C^\infty + h_1 h_2 \Delta C(t/a_\epsilon) \quad (3.53)$$

Bei kleinen Spannungen und Dehnungen sind diese Parameter gleich Eins und der lineare Grenzfall ist erreicht. Die gesuchten Parameter können aus zweistufigen Kriech- bzw. Relaxationsexperimenten bei verschiedenen anliegenden Spannungen, bzw. Dehnungen eindeutig bestimmt werden [68].

LOU & SCHAPERY haben dieses Modell zur Beschreibung von nichtlinearen, faserverstärkten Kunststoffen weiterentwickelt [51]. Experimente haben gezeigt, daß die nichtlinearen Parameter g_0, g_1, g_2 und a_σ im mehrachsigen Spannungszustand in erster Näherung nur von der Oktaederschubspannung τ_{oct} abhängen. Die Oktaederschubspannung (*octahedral shear stress*) ist die Schubspannung, die im Hauptspannungsraum in der Ebene mit Normale in Richtung der Raumdiagonalen herrscht. Sie ist definiert als:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (3.54)$$

TUTTLE & BRINSON untersuchten mit diesem Modell das viskoelastische Verhalten des Graphit/Epoxy Systems T300/5208 [74]. Sie gaben ein nicht-lineares Verhalten an, wenn die Oktaederschubspannung größer als 6.5 MPa wurde.

3.3 Rekursive Formulierung der viskoelastischen Materialgleichungen

Ein Hauptmerkmal der viskoelastischen Materialgleichungen (3.15) und (3.15), bzw. im nichtlinearen Fall (3.46) und (3.47), ist das Integral über den gesamten Belastungsverlauf. Insbesondere bei einer Diskretisierung der Gleichungen mit Finiten Elementen würden zur Auswertung des Integrals die Werte von Spannung und Dehnung für jedes Element über den gesamten Belastungszeitraum benötigt. Weiterhin steigt die Rechenzeit für jeden Zeitschritt an, da alle vorherigen Zeitschritte erneut durchlaufen werden müssen.

HENRIKSEN [36] hat ein Integrationsverfahren vorgeschlagen, bei dem das Integral lediglich aus dem vorigen und dem aktuellen Zeitschritt berechnet werden kann. Dieses Verfahren für isotrope viskoelastische Werkstoffe wurde von KENNEDY & WANG [47] auf Faserverbundwerkstoffe angewandt.

Das Verfahren wird im folgenden für die nichtlineare Kriechgleichung (3.46) angegeben. Es kann ebenfalls für die Relaxationsfunktion aufgestellt werden. Der lineare Fall wird erhalten, indem die nichtlinearen Koeffizienten auf Eins gesetzt werden. Zur einfachen Schreibweise wird die ingenieurmäßige Schreibweise mit Spannung und Dehnung als Vektoren verwendet. Es wird nicht über gleiche Indizes summiert.

Die Dehnung zum Zeitpunkt t sei gegeben durch:

$$\epsilon_i^t = \sum_{j=1}^6 \left[g_{0ij}^t S_{0ij} \sigma_j^t + g_{1ij}^t g_{2ij}^t \sigma_j^t \sum_{(r)} S_{rij} - g_{1ij}^t \int_0^t \sum_{(r)} S_{rij} e^{-\lambda_{rij}(\xi_{ij}^t - \xi_{ij}^\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (g_{2ij}^\tau \sigma_j^\tau) d\tau \right] + \epsilon_i^{ht} \quad (3.55)$$

mit

$$\xi_{ij}^t = \int_0^t \frac{du}{a_{ij}} \quad \xi_{ij}^\tau = \int_0^\tau \frac{du}{a_{ij}} \quad (3.56)$$

Das Integral wird in zwei Teilintegrale aufgespalten:

$$\begin{aligned}
q_{rij}^t &= \int_0^t e^{-\lambda_{rij}(\xi_{ij}^t - \xi_{ij}^\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (g_{2ij}^\tau \sigma_j^\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t-\Delta t} e^{-\lambda_{rij}(\xi_{ij}^t - \xi_{ij}^\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (g_{2ij}^\tau \sigma_j^\tau) d\tau \\
&+ \int_{t-\Delta t}^t e^{-\lambda_{rij}(\xi_{ij}^t - \xi_{ij}^\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (g_{2ij}^\tau \sigma_j^\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Definition von

$$\Delta \xi_{ij}^t = \int_{t-\Delta t}^t \frac{du}{a_{ij}} \tag{3.58}$$

und Umformung des ersten Integrals I_1 in Gleichung (3.57) ergibt die rekursive Relation

$$I_1 = e^{-\lambda_{rij} \Delta \xi_{ij}^t} q_{rij}^{t-\Delta t}. \tag{3.59}$$

Das zweite Integral I_2 in Gleichung (3.57) kann für genügend kleine Zeitschritte durch partielle Integration folgendermaßen angenähert werden:

$$I_2 = \Gamma_{rij} (g_{2ij}^t \sigma_j^t - g_{2ij}^{t-\Delta t} \sigma_j^{t-\Delta t}) \tag{3.60}$$

mit

$$\Gamma_{rij} = \frac{1 - e^{-\lambda_{rij} \Delta \xi_{ij}^t}}{\lambda_{rij} \Delta \xi_{ij}^t} \tag{3.61}$$

Damit berechnet sich der Integralausdruck q_{rij} zu

$$q_{rij} = e^{-\lambda_{rij} \Delta \xi_{ij}^t} q_{rij}^{t-\Delta t} + \Gamma_{rij} (g_{2ij}^t \sigma_j^t - g_{2ij}^{t-\Delta t} \sigma_j^{t-\Delta t}). \tag{3.62}$$

Einsetzen in Gleichung (3.55) und umordnen der Terme ergibt folgende Vektorgleichung:

$$\epsilon = \tilde{S}\sigma + H + \epsilon^{ht} \tag{3.63}$$

mit der *momentanen Nachgiebigkeitsmatrix* \tilde{S}

$$\tilde{S}_{ij} = g_{0ij} S_{0ij} + g_{1ij} g_{2ij} \sum_{(r)} S_{rij} (1 - \Gamma_{rij}^t) \quad (3.64)$$

und dem *Erinnerungsterm* H

$$H_i = \sum_{j=1}^6 \left[-g_{1ij}^t \sum_{(r)} S_{rij} \left(e^{-\lambda_{rij} \Delta \xi_{ij}^t} - \Gamma_{rij} g_{2ij}^{t-\Delta t} \sigma_j^{t-\Delta t} \right) \right] \quad (3.65)$$

Auflösen der Gleichung (3.63) nach der Spannung ergibt:

$$\sigma = \tilde{S}^{-1} \epsilon - \tilde{S}^{-1} (H + \epsilon^{ht}) \quad (3.66)$$

Dabei ist zu beachten, daß im nichtlinearen Fall die Koeffizienten g_0, g_1, g_2 und a_{ij} von der Spannung σ abhängen können. In diesem Fall muß diese Gleichung iterativ gelöst werden.

Kapitel 4

Mechanisches Verhalten von Faserverbundwerkstoffen

4.1 Makromechanik einzelner Laminatschichten

Eine einzelne Laminatschicht (Lamina) verhält sich als transversal-isotropes Material, d. h. es gibt eine Vorzugsrichtung entlang der Fasern und eine Symmetrieebene senkrecht dazu.

Das linear-elastische Materialgesetz für transversal-isotrope Materialien lautet:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

mit $C_{66} = (C_{22} - C_{23})/2$

4.2 Klassische Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie (CLT) betrachtet ein dünnes, mehrschichtiges Laminat als eine spezielle, orthotrope Platte. Unter ebenen Belastungen wird ein ebener Spannungszustand jeder Schicht gefordert. Als Materialgesetz wird lineare Elastizität angenommen. Die Spannungs-/Dehnungsbeziehungen einer Schicht vereinfacht sich dann zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix S_{ij}

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (4.4)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (4.5)$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad (4.6)$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (4.7)$$

und der reduzierten Steifigkeitsmatrix Q_{ij} der orthotropen Schicht in den Materialhauptachsen 1 und 2:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.8)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.9)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.10)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (4.11)$$

Bezeichnet φ_k den Faserorientierungswinkel der k -ten Einzelschicht, bezogen auf die x -Achse des globalen (x, y, z) -Koordinatensystems, so ergibt sich die transformierte, reduzierte Steifigkeitsmatrix der k -ten Schicht im globalen Koordinatensystem zu:

$$\bar{Q}_k = T_\sigma(\varphi_k)^{-1} Q_k T_\epsilon(\varphi_k) \quad (4.12)$$

mit den Transformationsmatrizen

$$T_\sigma = T(\varphi_k) = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_k & \sin^2 \varphi_k & 2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k \\ \sin^2 \varphi_k & \cos^2 \varphi_k & -2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k \\ -\sin \varphi_k \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \cos \varphi_k & \cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

und

$$T_\epsilon = (T_\sigma^{-1})^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_k & \sin^2 \varphi_k & \sin \varphi_k \cos \varphi_k \\ \sin^2 \varphi_k & \cos^2 \varphi_k & -\sin \varphi_k \cos \varphi_k \\ -2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k & 2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k & \cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Die linear-elastische Spannungs-/Dehnungsbeziehung im globalen (x, y, z) -Koordinatensystem lautet dann:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Unter Annahme der Kirchhoff'sche Plattenhypothese, (Geradenschnitte in Normalenrichtung bleiben bei Zug und Biegung gerade und senkrecht zu Platte) ergibt sich eine lineare Verteilung der Dehnung entlang der Dickenrichtung des Laminats:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

mit der Dehnung in der Mittelebene ϵ^0 :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

und der Krümmung der Mittelebene κ :

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Die resultierenden Kräfte und Momente in der Laminatenebene werden durch Integration der Spannungen in den einzelnen Laminatschichten in Dickenrichtung erhalten:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (4.20)$$

wobei t die Dicke des Laminats und z_k die z -Koordinate der Grenzfläche zwischen der k -ten und $k + 1$ -ten Schicht ist.

Unter Verwendung der Gleichungen (4.15) und (4.15) ergibt sich das folgende Gleichungssystem für Kräfte und Momente:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Mit der Dehnsteifigkeitsmatrix A_{ij}

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad (4.23)$$

der Koppelsteifigkeitsmatrix B_{ij}

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (4.24)$$

und der Biegesteifigkeitsmatrix D_{ij}

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4.25)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich auch mit Blockmatrizen als eine Gleichung formulieren:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Die Kopplungsmatrix B verbindet Ausdehnung und Biegung eines Laminats. Ein Laminat mit nicht-verschwindenden Termen in B_{ij} wird sich bei einer reinen Zugbelastung zusätzlich verdrehen. Die Kopplungsmatrix verschwindet jedoch bei allen symmetrischen Laminaten (siehe [46]). Bei asymmetrischen Laminaten wird dieser Effekt gezielt genutzt, um hygrothermische Eigenspannungen zu messen (siehe Abschnitt 6.1).

Bei Auftreten hygrothermischer Eigendehnungen ϵ^{ht} wird ein zusätzlicher äquivalenter Kraft- und Momentenvektor N^* , bzw. M^* gebildet:

$$N^* = \sum_{k=1}^N T_k^{-1} Q_k \epsilon_k^{ht} (z_k - z_{k-1}) \quad (4.27)$$

$$M^* = \sum_{k=1}^N T_k^{-1} Q_k \epsilon_k^{ht} (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \quad (4.28)$$

mit der transversal-isotropen, hygrothermischen Eigendehnung ϵ^{ht} in den Materialhauptachsen 1 und 2:

$$\epsilon_k^{ht} = \int_{T_0}^{T(t)} \begin{bmatrix} \alpha_1^{th} \\ \alpha_2^{th} \\ 0 \end{bmatrix} dT + \int_{M_0}^{M(t)} \begin{bmatrix} \alpha_1^{mo} \\ \alpha_2^{mo} \\ 0 \end{bmatrix} dM \quad (4.29)$$

Das Gleichungssystem (4.21,4.22) kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$A \epsilon_0 + B \kappa = N + N^* \quad (4.30)$$

$$B \epsilon_0 + D \kappa = M + M^* \quad (4.31)$$

4.3 Viskoelastische Laminattheorie

In der viskoelastischen Laminattheorie (VLT) wird weiterhin ein ebener Spannungszustand für alle Laminatschichten vorausgesetzt. Das Materialgesetz für Spannungen und Dehnungen innerhalb einer Laminatschicht im Materialhauptachsensystem lautet:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} (t) = \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} (t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} (\tau) d\tau \quad (4.32)$$

Die Matrix Q ist jetzt die für den ebenen Spannungszustand reduzierte Relaxationsmatrix. Zu beachten ist, daß alle Größen Funktionen der Zeit sind. Bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen kann jedoch davon ausgegangen werden, daß das Verhalten in Faserrichtung (Q_{11}) aufgrund der dominierenden Eigenschaften der Fasern rein linear-elastisch ist.

Unter der Voraussetzung, daß eine Belastung erst ab $t \geq 0$ stattfindet ($\sigma(t), \epsilon(t) \in H^1$), kann die Gleichung (4.32) unter Verwendung des Stieltjes-Integrals folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sigma_{(12)}(t) = Q(t) * d\epsilon_{(12)}(t) \quad (4.33)$$

Sind im Material zusätzliche hygrothermische Eigendehnungen vorhanden, muß die Dehnung als Summe aus elastischer Dehnung und chemischer, thermischer und hygroskopischer Eigendehnung geschrieben werden:

$$\epsilon_{(12)}(t) = \epsilon_{(12)}^{el}(t) + \epsilon_{(12)}^{ht}(t) = \epsilon_{(12)}^{el}(t) + \epsilon^{ch}(t) + \epsilon^{th}(t) + \epsilon^{mo}(t) \quad (4.34)$$

Da nur die elastische Dehnung einen Beitrag zur Spannung liefert, lautet die Materialgleichung im Materialhauptachsensystem:

$$\begin{aligned} \sigma_{(12)}(t) &= Q(t) * d(\epsilon_{(12)}(t) - \epsilon_{(12)}^{ht}(t)) \\ &= Q(t) * d\epsilon_{(12)}(t) - Q(t) * d\epsilon_{(12)}^{ht}(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Durch Transformation dieser Gleichung erhält man den Zusammenhang zwischen den Spannungen $\sigma_{(xy)}$ und den Dehnungen $\epsilon_{(xy)}$ im globalen (x, y) -Koordinatensystem:

$$\sigma_{(xy)}(t) = \bar{Q}(t) * d\epsilon_{(xy)}(t) - T^{-1}Q(t) * d\epsilon_{(12)}^{ht}(t) \quad (4.36)$$

mit der analog zur Gleichung (4.12) definierten reduzierten Relaxationsmatrix $\bar{Q}(t)$ im globalen Koordinatensystem und der in Gleichung (4.14) definierten inversen Transformationsmatrix T^{-1} .

Die Kirchhoff'sche Plattenhypothese wird wie in der klassischen Laminattheorie verwendet. Die Definition der Dehnung ϵ im Laminat kann demnach aus Gleichungen (4.16), (4.17) und (4.18) übernommen werden:

$$\epsilon = \epsilon^0 + z\kappa \quad (4.37)$$

Definition der resultierenden Kraft- und Momentenvektoren N und M analog zu Gleichung (4.19) und (4.20) durch Integration der Spannungen in den einzelnen Laminatschichten in Dickenrichtung ergibt unter Verwendung der Kirchhoff'schen Plattenhypothese ein Gleichungssystem (im globalen (x, y) -Koordinatensystem) analog zur CLT:

$$N(t) = A(t) * d\epsilon(t) + B(t) * d\kappa(t) - N^*(t) \quad (4.38)$$

$$M(t) = B(t) * d\epsilon(t) + D(t) * d\kappa(t) - M^*(t) \quad (4.39)$$

Mit der Dehnrelaxationsmatrix $A_{ij}(t)$

$$A_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k(t) (z_k - z_{k-1}), \quad (4.40)$$

der Koppelrelaxationsmatrix $B_{ij}(t)$

$$B_{ij}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k(t) (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (4.41)$$

der Biegerelaxationsmatrix $D_{ij}(t)$

$$D_{ij}(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k(t) (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4.42)$$

und den äquivalenten Kraft- und Momentenvektoren $N^*(t)$ und $M^*(t)$ der hygrothermischen Eigendehnung $\epsilon^{ht}(t)$

$$N^*(t) = \sum_{k=1}^N T_k^{-1} Q_k(t) * d\epsilon_k^{ht} (z_k - z_{k-1}) \quad (4.43)$$

$$M^*(t) = \sum_{k=1}^N T_k^{-1} Q_k(t) * d\epsilon_k^{ht} (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \quad (4.44)$$

Die viskoelastische Laminattheorie kann auch für ein nichtlineares Material (Gl. (3.46) und (3.47)) angegeben werden. Weiterhin kann die Zeitintegration durch die rekursive Formulierung (siehe Kapitel 3.3) auf eine Berechnung aus der aktuellen Last und den Werten des vorigen Zeitschritts vereinfacht werden.

Die Spannung in der k -ten Laminatschicht werden nach Gleichung (3.66) in globalen Koordinaten wie folgt berechnet:

$$\sigma_k = (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1} (T_\epsilon)_k \epsilon_k - \tilde{S}_k^{-1} (H_k + \epsilon_k^{ht}) \quad (4.45)$$

Da die experimentelle Bestimmung der Parameter der nichtlinearen Relaxationsgleichung wesentlich aufwendiger ist, als die der nichtlinearen Kriechgleichung, wird in den meisten Fällen bei nichtlinearem Materialverhalten nur die Kriechgleichung verwendet. Daher mußte in der obigen Gleichung die momentane Nachgiebigkeitsmatrix \tilde{S} invertiert werden, um die momentane Steifigkeitsmatrix zu erhalten.

Integration der Gleichung (4.45) in Dickenrichtung des Laminats unter Verwendung des bereits bekannten Ansatzes für die Dehnung $\epsilon = \epsilon_0 + z\kappa$ (Gl. 4.16) ergibt ein zur klassischen Laminattheorie ähnliches Gleichungssystem:

$$N(t) = \tilde{A}(t)\epsilon(t) + \tilde{B}(t)\kappa(t) - \tilde{N}^*(t) \quad (4.46)$$

$$M(t) = \tilde{B}(t)\epsilon(t) + \tilde{D}(t)\kappa(t) - \tilde{M}^*(t) \quad (4.47)$$

Mit der momentanen Dehnsteifigkeitsmatrix $\tilde{A}(t)$

$$\tilde{A}(t) = \sum_{k=1}^N (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1}(t) (T_\epsilon)_k (z_k - z_{k-1}), \quad (4.48)$$

der momentanen Koppelsteifigkeitsmatrix $\tilde{B}(t)$

$$\tilde{B}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1}(t) (T_\epsilon)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (4.49)$$

und der momentanen Biegesteifigkeitsmatrix $\tilde{D}(t)$

$$\tilde{D}(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1}(t) (T_\epsilon)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4.50)$$

Die äquivalenten Kraft- und Momentenvektoren $\tilde{N}^*(t)$ und $\tilde{M}^*(t)$ enthalten jetzt nicht nur die Anteile der hygrothermischen Eigendehnung $\epsilon^{ht}(t)$, sondern auch den Erinnerungsterm H , in dem die Information aus dem vorigen Zeitschritt enthalten ist (siehe Gl. 3.65):

$$\tilde{N}^*(t) = \sum_{k=1}^N (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1}(t) (H_k + \epsilon_k^{ht}) (z_k - z_{k-1}) \quad (4.51)$$

$$\tilde{M}^*(t) = \sum_{k=1}^N (T_\sigma)_k^{-1} \tilde{S}_k^{-1}(t) (H_k + \epsilon_k^{ht}) (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \quad (4.52)$$

Im nichtlinearen Fall sind die Matrizen \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{D} , \tilde{N}^* und \tilde{M}^* von der Spannung in den einzelnen Laminatschichten abhängig, die aus Gleichung (4.45) berechnet werden kann. Das oben angegebene Gleichungssystem muß dann für jeden Zeitschritt iterativ bis zum Erreichen der gewünschten Konvergenz berechnet werden.

4.3.1 Beispielrechnung

Für die viskoelastische Laminattheorie wurde ein Berechnungsprogramm unter Verwendung der rekursiven Formulierung des Zeitintegrals geschrieben. Als Materialdaten wurden die Daten von TUTTLE & BRINSON für das Graphit/Epoxy System T300/5208 aus der Literatur übernommen [74] (siehe Anhang A). Es wurde der zeitliche Verlauf der Eigenspannungen ermittelt, die sich bei der Herstellung durch eine Abkühlung um $100K$ ergeben. Abbildung 4.1 zeigt die Relaxation der transversalen Eigenspannung in einem $[0, 90]_s$ -Laminat. Die Abbildungen 4.2 bis 4.5 zeigen den zeitlichen Verlauf von Dehnung und Spannung in der 90° -Lage eines $[90, +45, -45, 90]_s$ -Laminats. Da in Faserrichtung keine Relaxation stattfindet, erzwingt die steife 90° -Richtung eine Umlagerung der Dehnung aus der 0° - in die 90° -Richtung. Gleichzeitig relaxiert die Spannung in transversaler Richtung (x - oder 0° -Richtung) und nimmt in 90° -Richtung geringfügig zu.

Das in der objektorientierten Programmiersprache C++ geschriebene Programm `vlt.cc` ist im Anhang B aufgeführt.

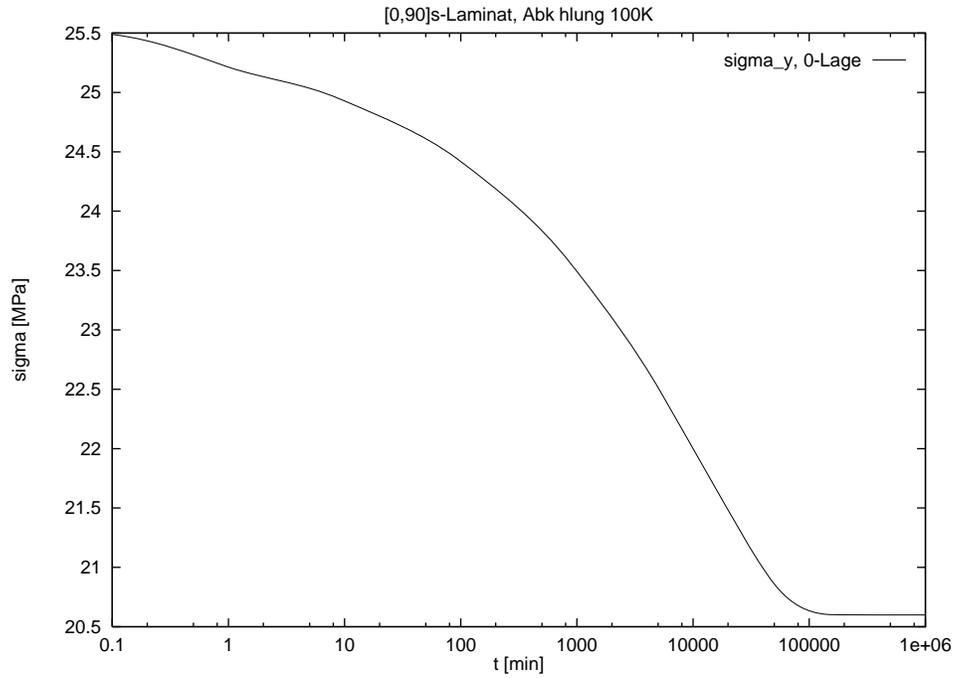


Abbildung 4.1: Transversale Eigenspannungen eines $[0, 90]_s$ -Laminats, $\Delta T = -100K$

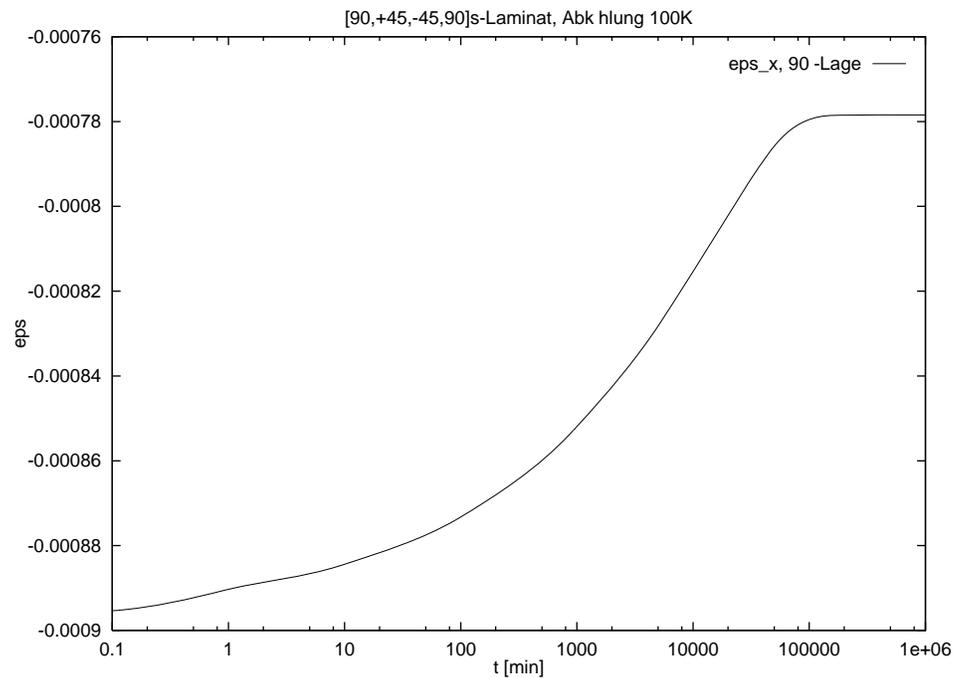


Abbildung 4.2: Dehnung ϵ_x eines $[90, +45, -45, 90]_s$ -Laminats, $\Delta T = -100K$

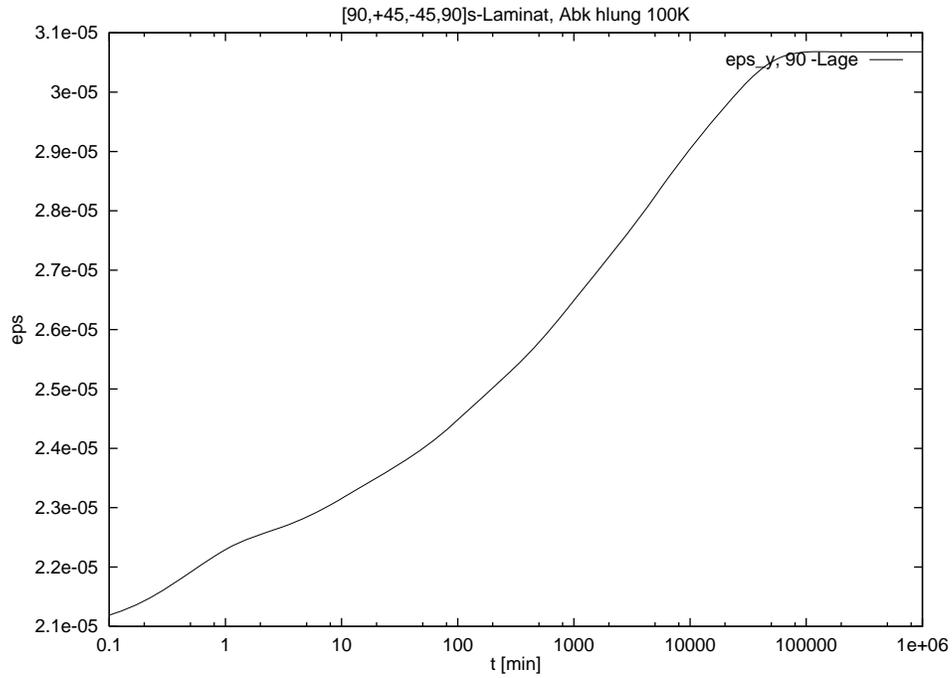


Abbildung 4.3: Dehnung ϵ_y eines $[90, +45, -45, 90]_s$ -Laminats, $\Delta T = -100K$

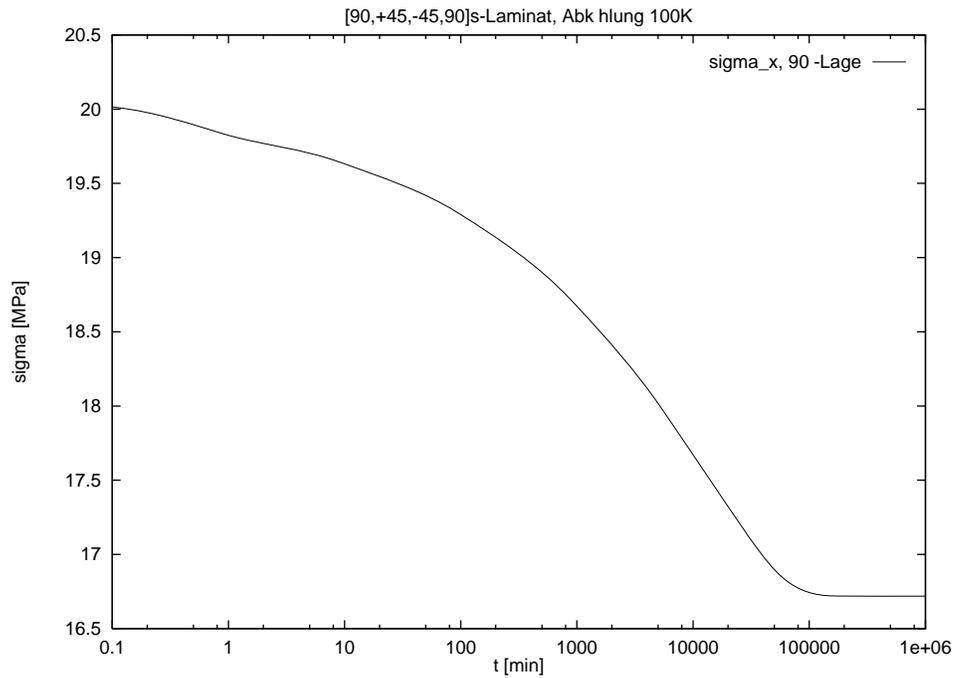


Abbildung 4.4: Spannung σ_x eines $[90, +45, -45, 90]_s$ -Laminats, $\Delta T = -100K$

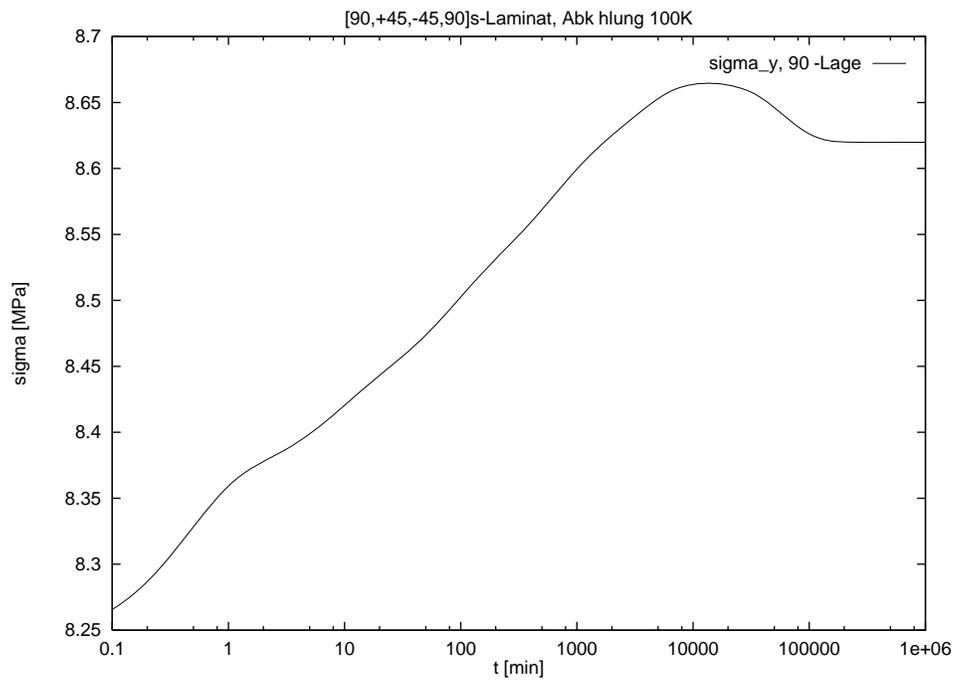


Abbildung 4.5: Spannung σ_x eines $[90,+45,-45,90]_s$ -Laminats, $\Delta T = -100K$

4.4 Viskoelastische Finite Elemente Methode

Bei vielschichtigen Laminaten, Laminaten mit Kerben oder Bohrungen und bei der Untersuchung des dreidimensionalen, interlaminaren Spannungsfeld am Rand eines Laminats sind die Vereinfachungen der klassischen Laminattheorie nicht mehr zutreffend. Das Problem muß dann mit einem Diskretisierungsverfahren, wie zum Beispiel der Finiten Element Methode berechnet werden (siehe beispielsweise ZIENKIEWICZ [82]).

Das viskoelastische Materialverhalten soll weiterhin durch die rekursive Formulierung der Zeitintegration nach KENNEDY & WANG (siehe [47], bzw. Kapitel 3.3) dargestellt werden. Es wird das nichtlineare Modell verwendet, aus dem das lineare Modell durch Definition der nichtlinearen Koeffizienten zu eins erhalten werden kann. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung lautet nach Gleichung (3.66):

$$\sigma = (T_\sigma)^{-1} \tilde{S}^{-1}(T_\epsilon) \epsilon - \tilde{S}^{-1}(H + \epsilon^{ht}) \quad (4.53)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta u \, f \, ds \quad (4.54)$$

wobei $\delta \epsilon$ die Dehnung aus der virtuellen Verschiebung δu , σ die Spannung im Gebiet Ω und f die Randspannung auf dem Gebietsrand $\partial\Omega$ ist. Das Gebiet Ω wird in einzelne Elemente e_m unterteilt. Die Verschiebung u_m im Element wird durch die Matrix der Formfunktionen N_m auf den Vektor der Knotenverschiebungen d zurückgeführt:

$$u_m = N_m d \quad (4.55)$$

Aus den Verschiebungen im Element wird die Dehnung ϵ_m bestimmt:

$$\epsilon_m = B_m d \quad (4.56)$$

Einsetzen der Gleichungen (4.55) und (4.56) in (4.54) ergibt:

$$\sum_{(m)} \int_{e_m} B_m^T \sigma_m d\Omega = \sum_{(m)} \int_{(\partial\Omega)_m} N_m^T f_m ds \quad (4.57)$$

Aus der viskoelastischen Materialgleichung (4.53) folgt:

$$\left(\sum_{(m)} \int_{e_m} B_m^T (T_\sigma)_m^{-1} \tilde{S}_m^{-1} (T_\epsilon)_m B_m d\Omega_m \right) d - \sum_{(m)} \int_{e_m} B_m^T (T_\sigma)_m^{-1} \tilde{S}_m^{-1} (H + \epsilon^{ht}) d\Omega = \sum_{(m)} \int_{(\partial\Omega)_m} N_m^T f_m ds \quad (4.58)$$

Definiert man

$$K = \sum_{(m)} \int_{e_m} B_m^T (T_\sigma)_m^{-1} \tilde{S}_m^{-1} (T_\epsilon)_m B_m d\Omega_m \quad (4.59)$$

$$F = \sum_{(m)} \int_{e_m} B_m^T (T_\sigma)_m^{-1} \tilde{S}_m^{-1} (H + \epsilon^{ht}) d\Omega + \sum_{(m)} \int_{(\partial\Omega)_m} N_m^T f_m ds \quad (4.60)$$

erhält man eine zur linearen Elastizität korrespondierende Formulierung:

$$Kd = F \quad (4.61)$$

mit der momentanen Steifigkeitsmatrix K , dem Vektor der Knotenverschiebungen d und dem Vektor der modifizierten Knotenkräfte F . Im linearen Fall können aus dieser Gleichung direkt die Knotenverschiebungen berechnet werden, beim nichtlinearen Fall müssen diese iterativ bestimmt werden.

Kapitel 5

Mikromechanik

Die Mikromechanik versucht, daß mechanische Verhalten eines Werkstoffes, der aus mehreren unterschiedlichen Phasen besteht, aus den mechanischen Eigenschaften, der Geometrie und der Verteilung der einzelnen Bestandteile zu berechnen. Im Gegensatz zur Makromechanik, die das Werkstoffverhalten phänomenologisch aus experimentellen Daten beschreibt, beruht die Mikromechanik auf verschiedenen theoretischen Modellen zur Wechselwirkung der einzelnen Phasen im Werkstoff. Im folgenden wird häufig die Bezeichnung *Verbundwerkstoff* verwendet. Damit ist nicht notwendigerweise ein faserverstärkter Werkstoff gemeint, die verstärkende Phase darf eine allgemeine Form haben.

5.1 Schranken für die Elastizitätskonstanten eines Verbundes

Die ersten Ansätze zur Berechnung der mechanischen Eigenschaften eines Verbundwerkstoffes wurden von VOIGT (1889) [76] und REUSS (1929) [67] aufgestellt.

VOIGT nahm eine homogene Dehnung im Material an. Die Elastizitätskonstanten K und G berechnen sich dann als das gewichtete Mittel der Phasenkonstanten:

$$G = \sum_{(r)} c_r G_r \quad (5.1)$$

$$K = \sum_{(r)} c_r K_r \quad (5.2)$$

Bei dieser Annahme wird das Kräftegleichgewicht an den Phasengrenzen verletzt, da der Wert der Spannung einen Sprung an der Grenzfläche durchführt.

REUSS hingegen setzte eine homogene Spannungsverteilung im Material voraus, wodurch die Elastizitätskonstanten als inverses Mittel berechnet werden:

$$\frac{1}{G} = \sum_{(r)} \frac{c_r}{G_r} \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{K} = \sum_{(r)} \frac{c_r}{K_r} \quad (5.4)$$

Mit dieser Annahme wird die Kompatibilitätsbedingung verletzt, da an den Phasengrenzen Hohlräume bzw. Überlappungen entstehen.

HILL zeigt, daß die nach den Annahmen von VOIGT und REUSS berechneten Werte obere bzw. untere Schranken für die Elastizitätskonstanten des Verbundes darstellen [38]. Er schlug vor, den Mittelwert der beiden Schranken als eine einfache Näherung der Verbundkonstanten zu verwenden.

Genauere Schranken für die Verbundkonstanten werden durch Anwendung des Variationsprinzips von HASHIN & SHTRIKMAN erhalten [27]. Die Schranken für Kompressionsmodul K und Schubmodul G eines zweiphasigen Materials sind damit ($K_2 > K_1, G_2 > G_1$):

$$K_{\min} = K_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3c_1}{3K_1 + 4G_1}} \quad (5.5)$$

$$K_{\max} = K_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3c_2}{3K_2 + 4G_2}} \quad (5.6)$$

$$G_{\min} = G_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)c_1}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \quad (5.7)$$

$$G_{\max} = G_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)c_2}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}} \quad (5.8)$$

Die Schranken nach VOIGT & REUSS und HASHIN & SHTRIKMAN für den Schubmodul eines zweiphasigen Verbundes sind in Abhängigkeit der Phasenkonzentration für ein Schubmodulverhältnis $G_2/G_1 = 10$ zusammen mit dem mit der selbst-konsistenten Methode berechneten Verbundschubmodul in Abbildung 5.4 dargestellt.

5.2 Das Eshelby-Modell

5.2.1 Der homogene, ellipsoidförmige Einschuß

Eshelby begründete 1957 [13] und 1961 [14] in seiner Arbeit über einen homogenen, ellipsoidförmigen Einschuß ein neues Kapitel in der Mikromechanik. Eine umfassende Darstellung zur Mikromechanik findet sich in [57].

Der Einschuß sei aus dem gleichen Material wie die umgebende Matrix und habe den Steifigkeitstensor C . Er besitze eine Eigendehnung (*eigenstrain*) ϵ^* , die er ohne die äußere Behinderung der Matrix annehmen würde. Aufgrund der Störwirkung des Einschlusses entsteht in Matrix und Einschuß ein Stördehnungsfeld e_{ij} . Die Gesamtverzerrung im Einschuß ist nun:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.9)$$

Daraus ergibt sich eine Spannungsverteilung

$$\sigma_{kl} = C_{klij}e_{ij} = C_{klij}(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*). \quad (5.10)$$

Die Feldlösung der Verschiebung u kann folgendermaßen berechnet werden:

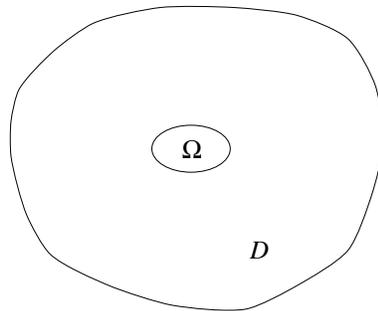


Abbildung 5.1: Der ellipsoidförmige Einschuß

- Man entferne den Einschuß und lasse ihn die Eigenverzerrung ϵ_{ij}^* durchführen. Die Spannung $s_{kl} = C_{kl ij} \epsilon_{ij}^*$ sei die zu ϵ_{ij}^* korrespondierende Spannung. Der Einschuß ist noch spannungsfrei.
- Man belaste den Einschuß mit der Oberflächenspannung $-s_{kl} n_l$ auf $\partial\Omega$. Dadurch erhält er wieder seine ursprüngliche Form. Dann wird der Einschuß zurück in die Matrix gesetzt.
- Man lasse die Oberflächenkräfte auf $\partial\Omega$ relaxieren, wodurch der Einschuß seine Form ändert. Dies ist gleichbedeutend mit einer zusätzlichen Kräfteverteilung $+s_{kl} n_l$ auf $\partial\Omega$.

Sei $G_{ij}(r-r')$ die Green'sche Funktion der Verschiebung $u_i(r)$ aufgrund einer Einheitskraft in x_j -Richtung an der Stelle r' , dann ist die Verschiebung $u_i(r)$ gegeben durch die Integration der Feldwirkungen der Kräfte auf dem Rand des Einschlusses:

$$u_i(r) = \int_{\partial\Omega} G_{ij}(r-r') s_{jl}(r') n_l dr' \quad (5.11)$$

Nach partieller Integration und unter Verwendung von $s_{kl} = C_{kl ij} \epsilon_{ij}^*$ ergibt sich

$$u_i(r) = - \int_{\Omega} G_{ij,l}(r-r') C_{jlmn} \epsilon_{mn}^* dr' \quad (5.12)$$

Die Verzerrung ϵ ist:

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{klmn} \epsilon_{mn}^* (G_{ik,lj}(r-r') + G_{jk,li}(r-r')) dr' \quad (5.13)$$

Unter Voraussetzung einer konstanten Eigenverzerrung ϵ^* läßt sich der Eshelby-Tensor $S^{(E)}$ einführen ¹:

$$S_{ijkl}^{(E)} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{klmn} (G_{ik,lj}(r-r') + G_{jk,li}(r-r')) dr' \quad (5.14)$$

Damit ist

¹Eshelby bezeichnete diesen Tensor mit S [13]. Zur Unterscheidung von der Nachgiebigkeit wird der Eshelby-Tensor durch den hochgestellten Index (E) gekennzeichnet.

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}^{(E)} \epsilon_{kl}^* \quad (5.15)$$

Es kann gezeigt werden, daß $S^{(E)}$ bei einem ellipsoidförmigen Einschuß konstant ist. Dies gilt auch bei Entartung einer der Hauptachsen des Ellipsoids (Faser: $a \rightarrow \infty$, penny-shape: $a \rightarrow 0$).

5.2.2 Ellipsoidförmige Inhomogenität

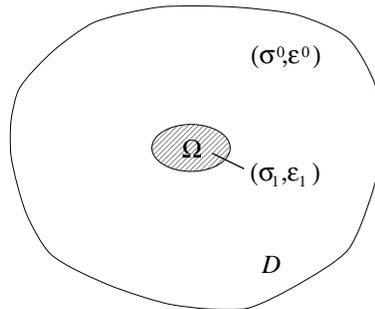


Abbildung 5.2: Die ellipsoidförmige Inhomogenität

In der Matrix sei ein Einschuß aus einem anderen Material mit Steifigkeit C_1 enthalten. Dieser wird als Inhomogenität bezeichnet.

Im Unendlichen sei ein Spannungs-/Dehnungszustand (ϵ^0, σ^0) vorgegeben mit $\sigma^0 = C\epsilon^0$. Der Spannungs-/Dehnungszustand in der Inhomogenität Ω sei (ϵ_1, σ_1) .

Die Inhomogenität bewirkt eine Störwirkung in der Matrix $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon^0$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma^0$

Es wird jetzt das Konzept einer äquivalenten Eigendehnung ϵ^* eingeführt, so daß die Inhomogenität wie ein Einschuß aus dem gleichen Material wie die umgebende Matrix mit der Steifigkeit C behandelt werden kann.

Die Spannung in der Inhomogenität Ω ist dann:

$$\sigma_1 = \sigma^0 + \sigma = C_1(\epsilon^0 + \epsilon) = C(\epsilon^0 + \epsilon - \epsilon^*) \quad (5.16)$$

mit

$$\epsilon = S^{(E)} \epsilon^* \quad (5.17)$$

folgt:

$$C_1(\epsilon^0 + S^{(E)}\epsilon^*) = C(\epsilon^0 + S^{(E)}\epsilon^* - \epsilon^*) \quad (5.18)$$

daraus wird die unbekannte Eigendehnung ϵ^* bestimmt:

$$\epsilon^* = ((C_1 - C)S^{(E)} - C)^{-1} (C - C_1)\epsilon^0 \quad (5.19)$$

zur späteren Verwendung wird ein *constraint*-Tensors C^* definiert, der die Störspannung mit der Stördehnung verbindet:

$$\sigma = -C^*\epsilon \quad \iff \quad \sigma_1 - \sigma^0 = -C^*(\epsilon_1 - \epsilon^0) \quad (5.20)$$

mit $\sigma = C(\epsilon - \epsilon^*)$ und $\epsilon = S^{(E)}\epsilon^*$ folgt:

$$C^*S^{(E)} = C(I - S^{(E)}) \quad (5.21)$$

bzw.

$$S^{(E)} = (C^* + C)^{-1}C = PC \quad (5.22)$$

5.2.3 Inhomogener Einschluß

Besitzt die Inhomogenität Ω eine zusätzliche Eigendehnung ϵ^p gegenüber der umgebenden Matrix, wird sie als inhomogener Einschluß bezeichnet und kann in ähnlicher Weise behandelt werden.

Die Spannung im inhomogenen Einschluß ist

$$C_1(\epsilon^0 + \epsilon - \epsilon^p) = C(\epsilon^0 + \epsilon - \epsilon^p - \epsilon^*) \quad (5.23)$$

Unter Verwendung einer resultierenden äquivalenten Eigendehnung ϵ^{**} und des Eshelby-Tensors $S^{(E)}$

$$\begin{aligned} \epsilon &= S^{(E)}\epsilon^{**} \\ \epsilon^{**} &= (\epsilon^p + \epsilon^*) \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$C_1(\epsilon^0 + S^{(E)}\epsilon^{**} - \epsilon^p) = C(\epsilon^0 + S^{(E)}\epsilon^{**} - \epsilon^*) \quad (5.24)$$

daraus wird wiederum die unbekannte äquivalente Eigendehnung ϵ^* bestimmt.

5.3 Die selbst-konsistente Methode

Die selbst-konsistente Methode (*self-consistent-method*) basiert auf dem Ansatz von Eshelby des ellipsoidförmigen Einschlusses einer zweiten Phase in einer homogenen Matrix. Die Grundidee des selbst-konsistenten Ansatzes ist, daß die umgebende Matrix bereits die noch zu bestimmenden Eigenschaften des gesamten Verbundes besitzen soll. Dieses Verfahren wurde ursprünglich von HERSHEY [37] und KRÖNER [48] zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten von quasiisotropen Vielkristalle aus den Werten der kubischen Einkristalle vorgeschlagen. HILL erweiterte das Verfahren auf allgemeine Verbundwerkstoffe aus voneinander unabhängigen Phasen [39]. (Bei dem System kubisches Einkristall - Vielkristall bleibt der Kompressionsmodul gleich).

Es sei ein Verbundwerkstoff aus einer statistisch homogenen Verteilung von ähnlichen, ellipsoidförmigen Partikeln der Steifigkeit C_1 und Volumenkonzentration c_1 in einer Matrix der Steifigkeit C_2 und Volumenkonzentration c_2 gegeben.

Die volumetrisch gemittelten Eigenschaften der Phase r sollen mit geschweifte Klammern gekennzeichnet werden: $\{\epsilon_r\}$, $\{\sigma_r\}$.

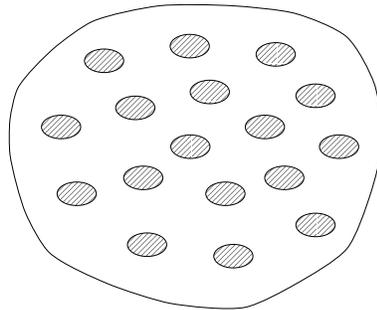


Abbildung 5.3: Verbundwerkstoff mit 2 Phasen

Damit ergeben sich die volumetrisch gemittelte Größen des Verbundwerkstoffes zu:

$$c_1\{\epsilon_1\} + c_2\{\epsilon_2\} = \{\epsilon\} \quad (5.25)$$

$$c_1\{\sigma_1\} + c_2\{\sigma_2\} = \{\sigma\} \quad (5.26)$$

Es soll die Steifigkeitsmatrix C des Verbundwerkstoffes ermittelt werden, mit

$$\{\sigma\} = C\{\epsilon\} \quad (5.27)$$

Die selbst-konsistente Methode postuliert, daß ein *constraint*-Tensor C^* existiert, der die gemittelten Störspannung und Stördehnung in den eingeschlossenen Phasen analog des Problems der einzelnen Inhomogenität miteinander verbindet:

$$\{\sigma_1\} - \{\sigma\} = -C^* (\{\epsilon_1\} - \{\epsilon\}) \quad (5.28)$$

daraus folgt mit Gleichung (5.25) und (5.26):

$$\{\sigma_2\} - \{\sigma\} = -C^* (\{\epsilon_2\} - \{\epsilon\}) \quad (5.29)$$

Das bedeutet, daß beide Phasen in gleicher Weise in die Berechnung eingehen! Die Steifigkeit eines Verbundwerkstoffes mit Einschlüssen der Volumenkonzentration c_1 und der Steifigkeit C_1 in einer Matrix der Steifigkeit C_2 ist also gleich der eines Verbundwerkstoffes aus Einschlüssen der Volumenkonzentration $c_2 = 1 - c_1$ der Steifigkeit C_2 in einer Matrix der Steifigkeit C_1 , vorausgesetzt, daß die Form der Einschlüsse jeweils gleich ist.

Aus Gleichung (5.28) und (5.29) folgt mit $\{\sigma_1\} = C_1\{\epsilon_1\}$ und $\{\sigma_2\} = C_2\{\epsilon_2\}$:

$$(C^* + C_1)\{\epsilon_1\} = (C^* + C_2)\{\epsilon_2\} = (C^* + C)\{\epsilon\} \quad (5.30)$$

aus Gleichung (5.25) folgt:

$$c_1(C^* + C_1)^{-1} + c_2(C^* + C_2)^{-1} = (C^* + C)^{-1} = P \quad (5.31)$$

mit $C^* = P^{-1} - C$ ergibt sich:

$$c_1 [(C_1 - C)^{-1} + P]^{-1} + c_2 [(C_2 - C)^{-1} + P]^{-1} = 0 \quad (5.32)$$

oder nach Invertierung:

$$c_1(C - C_2)^{-1} + c_2(C - C_1)^{-1} = P \quad (5.33)$$

woraus die gesuchte Verbundsteifigkeit C bestimmt werden kann. Eine duale Formulierung läßt sich auch für die Verbundnachgiebigkeit S herleiten:

$$c_1(S - S_2)^{-1} + c_2(S - S_1)^{-1} = Q \quad (5.34)$$

Es können sogenannte Phasenkonzentrationsfaktoren definiert werden, mit denen die Dehnung bzw. Spannung in den einzelnen Phasen aus der Dehnung bzw. Spannung im gesamten Verbund bestimmt werden kann.

$$\{\epsilon_1\} = A_1\{\epsilon\} \quad \{\epsilon_2\} = A_2\{\epsilon\} \quad (5.35)$$

$$\{\sigma_1\} = B_1\{\sigma\} \quad \{\sigma_2\} = B_2\{\sigma\} \quad (5.36)$$

mit Gleichung (5.30) folgt:

$$A_1^{-1} = P(C^* + C_1) = I + P(C_1 - C) \quad (5.37)$$

$$A_2^{-1} = P(C^* + C_2) = I + P(C_2 - C) \quad (5.38)$$

$$B_1^{-1} = Q(S^* + S_1) = I + Q(S_1 - S) \quad (5.39)$$

$$B_2^{-1} = Q(S^* + S_2) = I + Q(S_2 - S) \quad (5.40)$$

wobei gilt:

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 = I = c_1 B_1 + c_2 B_2 \quad (5.41)$$

unter Verwendung von Gleichung (5.33) und (5.34) folgt:

$$A_1 = \frac{1}{c_1}(C_1 - C_2)^{-1}(C - C_2) \quad (5.42)$$

$$A_2 = \frac{1}{c_2}(C_2 - C_1)^{-1}(C - C_1) \quad (5.43)$$

$$B_1 = \frac{1}{c_1}(S_1 - S_2)^{-1}(S - S_2) \quad (5.44)$$

$$B_2 = \frac{1}{c_2}(S_2 - S_1)^{-1}(S - S_1) \quad (5.45)$$

Für den Fall isotroper, kugelförmiger Einschlüsse in einer isotropen Matrix hat HILL [39] diese Gleichungen zu einer Gleichung 4. Ordnung für den Schubmodul G und eine davon abhängige Gleichung für den Kompressionsmodul K zusammengefaßt:

$$\frac{c_1 K_1}{K_1 + \frac{4}{3}G} + \frac{c_2 K_2}{K_2 + \frac{4}{3}G} + 5 \left(\frac{c_1 G_2}{G - G_2} + \frac{c_2 G_1}{G - G_1} \right) + 2 = 0 \quad (5.46)$$

$$K = \frac{K_1 K_2 + \frac{4}{3}G(c_1 K_1 + c_2 K_2)}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \frac{4}{3}G} \quad (5.47)$$

Alternativ dazu können die Gleichungen auch nach der Schubnachgiebigkeit $\beta = 1/(4G)$ und der Kompressionsnachgiebigkeit $\alpha = 1/(9K)$ aufgelöst werden [49]:

$$\frac{c_1 \alpha_1}{\alpha_1 + \frac{1}{3}\beta} + \frac{c_2 \alpha_2}{\alpha_2 + \frac{1}{3}\beta} + 5 \left(\frac{c_1 \beta_2}{\beta - \beta_2} + \frac{c_2 \beta_1}{\beta - \beta_1} \right) + 2 = 0 \quad (5.48)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{3}\beta(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)}{c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1 + \frac{1}{3}\beta} \quad (5.49)$$

Mit diesen Gleichungen wurde der Verlauf des Schubmoduls eines zweiphasigen Verbundes in Abhängigkeit der Phasenkonzentration c_2 berechnet. Es wurde angenommen, daß die Querkontraktion beider Phasen gleich 0.35 ist. Das Verhältnis der Elastizitätsmodulen E_2/E_1 wird mit x bezeichnet. Die Phase 2 soll die steifere Phase sein. Zur Skalierung wird der Schubmodul der Phase 1 auf den Wert 1 gesetzt.

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \nu_2 = 0.35 \\
E_2/E_1 &= G_2/G_1 = K_2/K_1 = x \\
G_1 &= 1 \quad K_1 = 3 \\
G_2 &= x \quad K_2 = 3x
\end{aligned}$$

Der skalierte Schubmodul G^* ist so definiert, daß für $G = G_1$ der Wert 0 und für $G = G_2$ der Wert 1 erhalten wird:

$$G^* = \frac{G - G_1}{G_2 - G_1} \quad (5.50)$$

Der skalierte Schubmodul G^* für das Schubmodulverhältnis $x = 10$ ist zusammen mit den Schranken nach VOIGT & REUSS und HASHIN & SHTRIKMAN in Abbildung 5.4 dargestellt. Der Grenzfall geringer Konzentrationen kugelförmiger Partikel in einer Matrix wird, wenn die zweite Phase die Einschlußphase ist, sehr gut durch die unteren HASHIN & SHTRIKMAN Schranken angegeben. Im anderen Fall (erste Phase ist kugelförmige Einschlußphase geringer Konzentration) stellt die obere Schranke eine sehr gute Näherung dar.

Der nichtskalierte Schubmodul G ist für $x = 10^{(i/5)}$, $i = 1 \dots 5$ in Abbildung 5.5 dargestellt. Abbildung 5.6 zeigt den skalierten Schubmodul G^* für Werte von $x = 10^{(i/2)}$, $i = 1 \dots 6$. Bemerkenswert ist der Grenzfall für $E_2/E_1 \rightarrow \infty$. Bis ungefähr $c = 0.5$ überwiegt die Eigenschaft der Matrix, danach steigt der skalierte Schubmodul linear an. Die Grenze 0.52 ist der Wert, bei dem sich kugelförmige Einschlüsse in einer kubischen Anordnungen gegenseitig berühren.

Die Phasenkonzentrationsfaktoren $A_{1111}^{(2)}$ für die Dehnung

$$\epsilon_{11}^{(2)} = A_{1111}^{(2)} \epsilon_{11}$$

und $B_{1111}^{(2)}$ für die Spannung

$$\sigma_{11}^{(2)} = B_{1111}^{(2)} \sigma_{11}$$

sind in den Abbildungen 5.7 und 5.8 für die E-Modul Verhältnisse $x = 10^{(i/2)}$, $i = 1 \dots 6$ wiedergegeben.

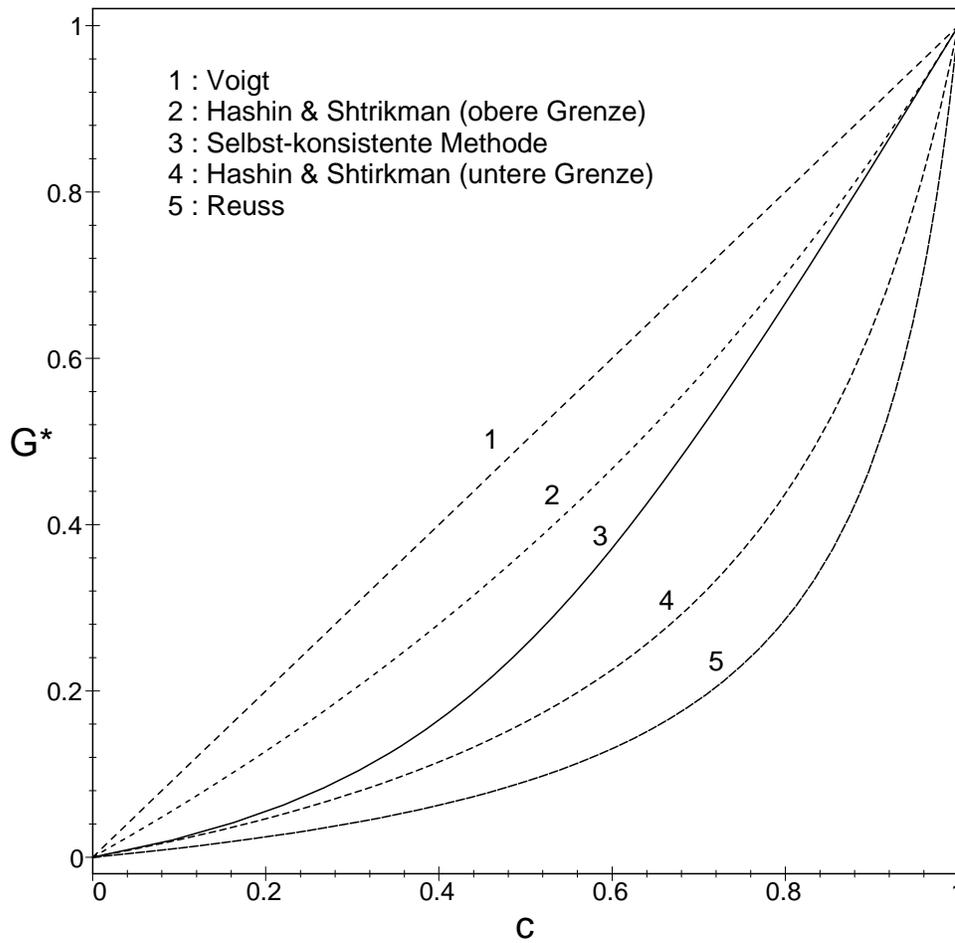


Abbildung 5.4: Skalierter Schubmodul (kugelförmige Einschlüsse, $x = 10$) nach der selbst-konsistenten Methode und Schranken nach VOIGT & REUSS und HASHIN & SHTRIKMAN

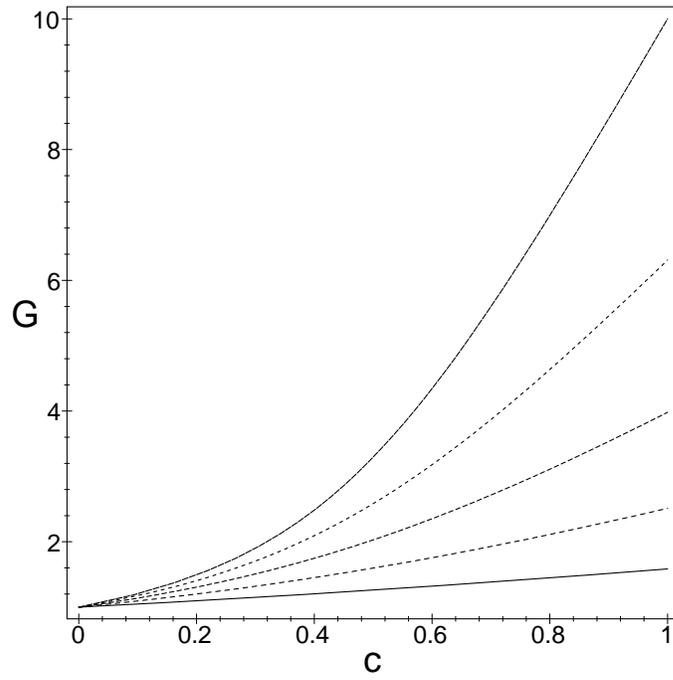


Abbildung 5.5: Schubmodul (kugelförmige Einschlüsse)

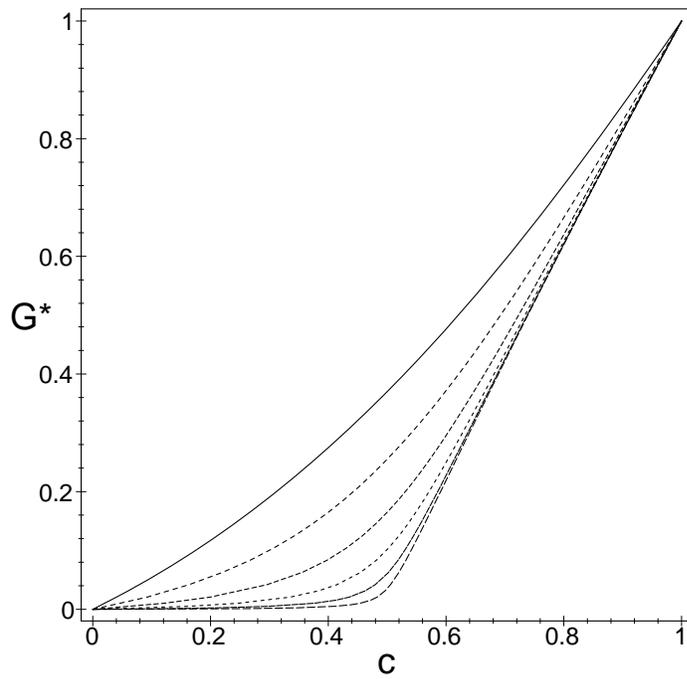


Abbildung 5.6: Skalierter Schubmodul (kugelförmige Einschlüsse)

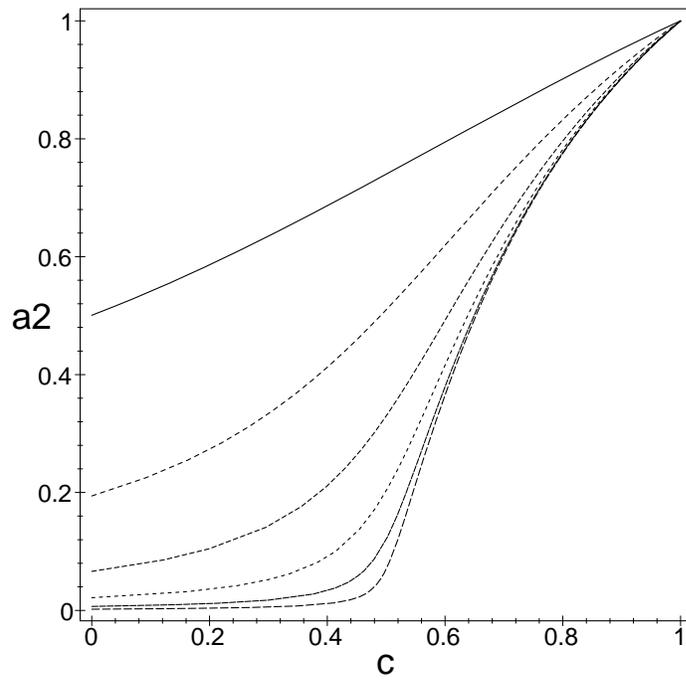


Abbildung 5.7: Phasenkonzentrationsfaktor $A_{1111}^{(2)}$

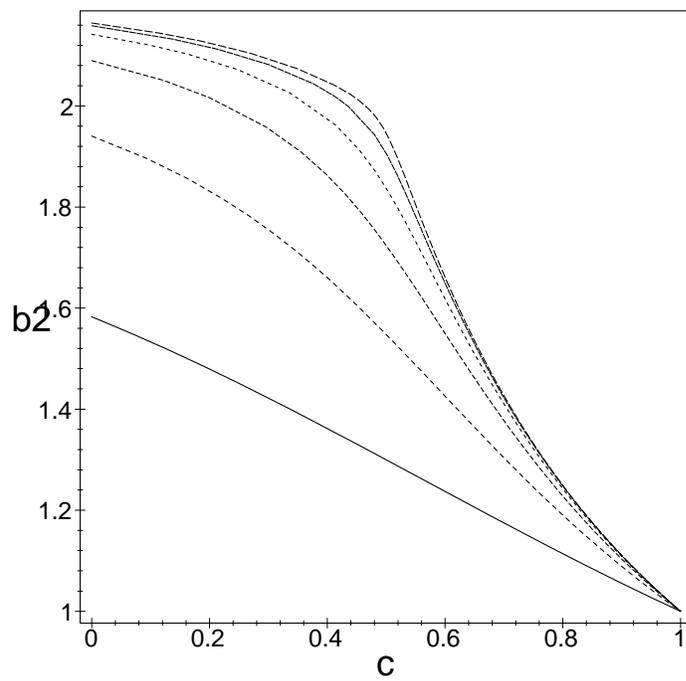


Abbildung 5.8: Phasenkonzentrationsfaktor $B_{1111}^{(2)}$

Bei steifen Einschlüssen ($x \rightarrow \infty$) wird bei geringen Konzentrationen die Dehnung durch die Matrix durchgeführt. Trotzdem erhöht sich die Spannung in den Einschlüssen um etwas mehr als das Doppelte. Ab der Konzentration 0.5 vermischt der Einschlußcharakter der zweiten Phase, und sie wird stärker belastet.

5.4 Viskoelastische Verbundwerkstoffe

Die selbst-konsistente Methode kann ebenso auf linear-viskoelastische Verbundwerkstoffe angewandt werden [49]. Bei der Herleitung der Gleichungen wird ein Tensorprodukt zweier elastischer Größen durch das Stieltjes-Integral zweier viskoelastischer Tensorfunktionen und eine tensorielle Inverse durch eine Stieltjes-Inverse ersetzt. Die Relaxationsfunktion ist die zeitabhängige Steifigkeit und die Kriechfunktion die zeitabhängige Nachgiebigkeit. Gleichung (5.28), (5.29) und (5.30) ergeben dann für die Relaxationsfunktion C und die Kriechfunktion S eines viskoelastischen Verbundwerkstoffes:

$$C = \sum_{r=1}^n c_r C_r * dA_r \quad S = \sum_{r=1}^n c_r S_r * dB_r \quad (5.51)$$

$$A_r = [h + P * d(C_r - C)]^{-1} \quad (5.52)$$

$$B_r = [h + Q * d(S_r - S)]^{-1}, \quad (5.53)$$

wobei alle Größen Funktionen der Zeit sind.

Zur weiteren Behandlung wird das viskoelastische Korrespondenzprinzip verwendet, womit beispielsweise für einen viskoelastischen Verbundwerkstoff mit kugelförmigen Einschlüssen aus Gleichung (5.48) und (5.49) die Carson-transformierte Kompressionsanteile α und der Schubanteile β der Kriechfunktion S bestimmt werden können:

$$\frac{c_1 \hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1 + \frac{1}{3} \hat{\beta}} + \frac{c_2 \hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{3} \hat{\beta}} + 5 \left(\frac{c_1 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta} - \hat{\beta}_2} + \frac{c_2 \hat{\beta}_1}{\hat{\beta} - \hat{\beta}_1} \right) + 2 = 0 \quad (5.54)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 + \frac{1}{3} \hat{\beta} (c_1 \hat{\alpha}_1 + c_2 \hat{\alpha}_2)}{c_1 \hat{\alpha}_2 + c_2 \hat{\alpha}_1 + \frac{1}{3} \hat{\beta}} \quad (5.55)$$

Es ist zu beachten, daß sowohl die gegebenen Größen $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, als auch die gesuchten Größen $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ keine Konstanten, sondern Funktionen von s sind. Daher ist eine analytische Auflösung der Gleichungen (5.54) und (5.55) nur mit Hilfe eines Computeralgebrasystem möglich. Als Ergebnis erhält man

die Carson-transformierten der Schub- und Kompressionsanteile der Kriechfunktion. Diese müssen über ein Näherungsverfahren (z.B. Kollokationsverfahren von SCHAPERY [69], siehe Abschnitt 3.1.6) in den Originalraum zurück transformiert werden.

Dieses Verfahren wurde für einen Verbund aus Aluminiumpartikeln in einer Epoxidharzmatrix für verschiedene Partikelkonzentrationen angewandt. Da die viskoelastischen Eigenschaften der Harzmatrix des in diesem Projekt verwendeten Verbundwerkstoffes noch nicht vollständig bestimmt sind, wurden stellvertretend Schätzwerte für die Matrixeigenschaften nach den Messungen von TUTTLE & BRINSON ([74], Anhang A) für den Verbundwerkstoff T300/5208 angenommen. Um die Gleichungen dennoch analytisch auflösen zu können, wurde die Anzahl der Retardierungszeiten im Materialgesetz von sechs auf drei reduziert. Im einzelnen wurde für die Kompressionsanteile α und die Schubanteile β der beiden Werkstoffe folgende Funktionen angenommen:

Harz (Index 1):

$$\alpha_1(t) = [20 + 1.2(1 - e^{-0.4t/\text{min}}) + 2.4(1 - e^{-0.005t/\text{min}}) + 8(1 - e^{-0.0001t/\text{min}})] \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1} \quad (5.56)$$

$$\beta_1(t) = [200 + 15(1 - e^{-0.5t/\text{min}}) + 25(1 - e^{-0.004t/\text{min}}) + 80(1 - e^{-0.0001t/\text{min}})] \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1} \quad (5.57)$$

Aluminium (Index 2):

$$\alpha_2 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1} \quad (5.58)$$

$$\beta_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1} \quad (5.59)$$

Im Anhang C ist die Berechnung der Verbundeigenschaften mit Hilfe des Computeralgebrasystems MAPLE wiedergegeben. Die berechnete Carsontransformierte des Schubanteils der Kriechfunktion $\hat{\beta}$ wird numerisch mit dem Kollokationsverfahren nach SCHAPERY [69] in den Originalraum zurücktransformiert. Dazu werden 16 Retardierungszeiten im logarithmisch gleichem Abstand gewählt. Theoretisch wird die Genauigkeit der Rücktransformation mit

steigender Anzahl an Retardierungszeiten erhöht. Das zu lösende Gleichungssystem wird dann jedoch fast singulär, so daß aufgrund numerischer Rechenungenauigkeit das Gleichungssystem nicht mehr aufgelöst werden kann.

Aus dem transformierten Schubanteil der Kriechfunktion wird dann der transformierte Kompressionsanteil $\hat{\alpha}$ nach Gleichung (5.55) berechnet. Anschließend werden die zeitabhängigen Phasenkonzentrationsfaktoren A_i und B_i ($i = 1, 2$) ermittelt.

Abbildung 5.9 bis Abbildung 5.12 zeigen die Kompressions- und Schubanteile der Kriechfunktionen der einzelnen Phasen und des Verbundes für die Partikelkonzentrationen $c_2 = 0.2$ und $c_2 = 0.5$ mit logarithmischer Darstellung der Zeitachse. Bei der geringen Partikelkonzentration überwiegt die viskoelastische Eigenschaft der Matrix, bei der hohen Konzentration (einzelne Partikel kommen miteinander in Kontakt) dominiert der elastische Charakter der Partikel.

Die viskoelastischen Phasenkonzentrationsfaktoren A_i und B_i sind in Abbildung 5.13 bis 5.20 dargestellt. Sie geben die Verteilung einer im gesamten Verbund bestehenden Dehnung oder Spannung auf die einzelnen Phasen an:

$$\{\epsilon_1(t)\} = A_1(t)\{\epsilon\} \quad \{\epsilon_2(t)\} = A_2(t)\{\epsilon\} \quad (5.60)$$

$$\{\sigma_1(t)\} = B_1(t)\{\sigma\} \quad \{\sigma_2(t)\} = B_2(t)\{\sigma\} \quad (5.61)$$

bei sprunghaft aufgebrachtener mittlerer Dehnung $\{\epsilon\}$ bzw. mittlerer Spannung $\{\sigma\}$ im Verbund, oder als:

$$\{\epsilon_1(t)\} = A_1(t) * d\{\epsilon(t)\} \quad \{\epsilon_2(t)\} = A_2(t) * d\{\epsilon(t)\} \quad (5.62)$$

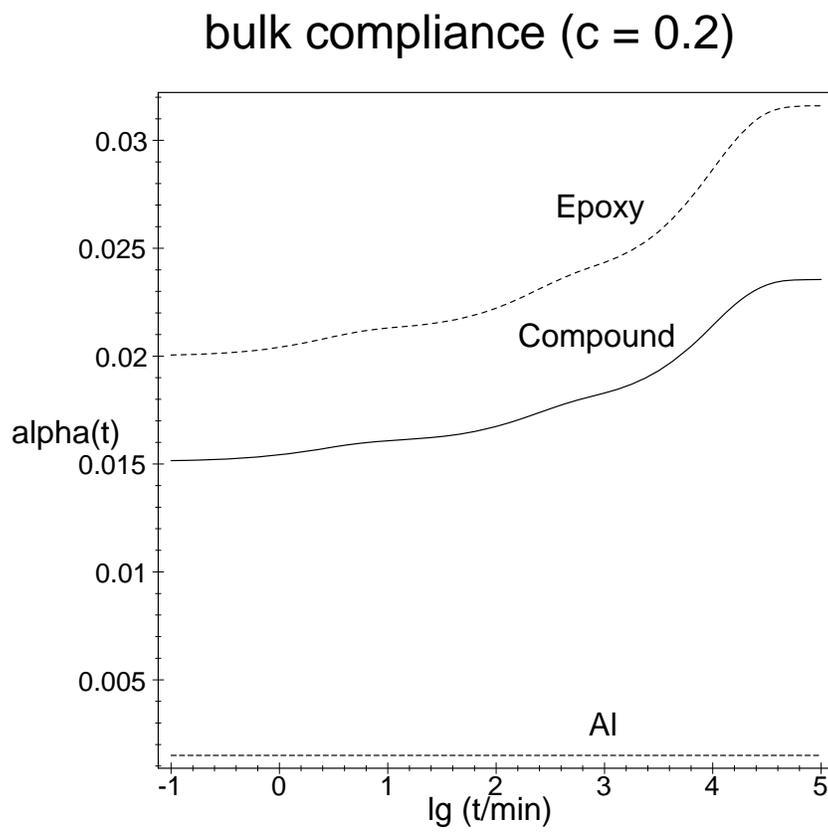
$$\{\sigma_1(t)\} = B_1(t) * d\{\sigma(t)\} \quad \{\sigma_2(t)\} = B_2(t) * d\{\sigma(t)\} \quad (5.63)$$

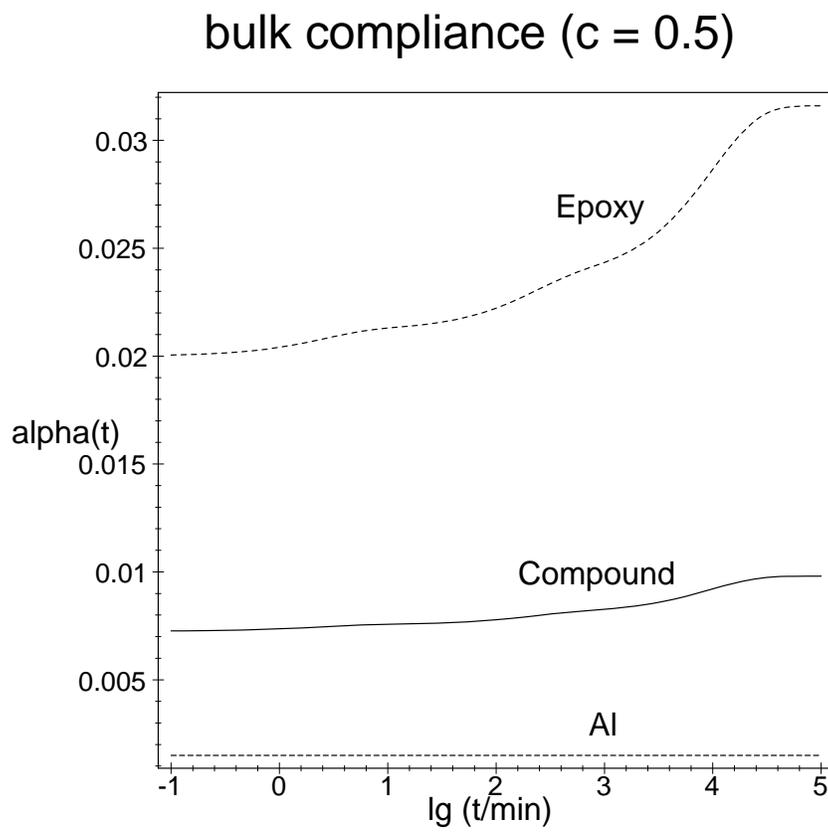
bei zeitabhängiger mittlerer Verbunddehnung $\{\epsilon(t)\}$ bzw. mittlerer Verbundspannung $\{\sigma(t)\}$.

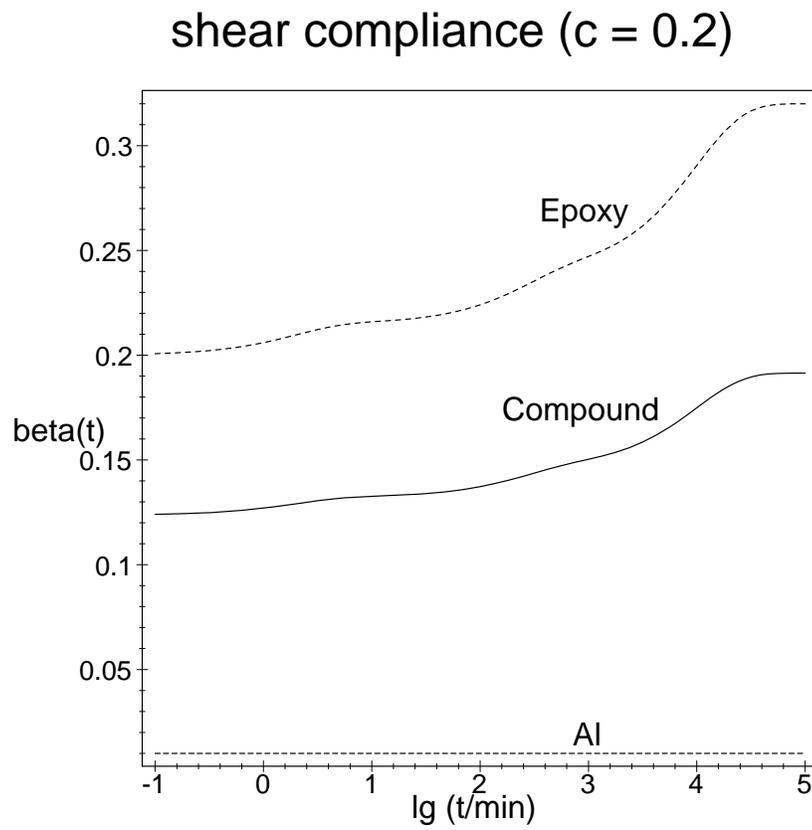
Während der Dehnungskonzentrationsfaktor der Harzmatrix nahezu konstant ist, zeigt der Dehnungskonzentrationsfaktor der Aluminiumpartikel ein starkes zeitliches Abnehmen. Eine sprunghafte, äußere Dehnung wird demnach von der Matrix nahezu simultan ausgeführt (im Mittel über die gesamte Phase), die Dehnung in den eingeschlossenen Partikeln (und damit auch die

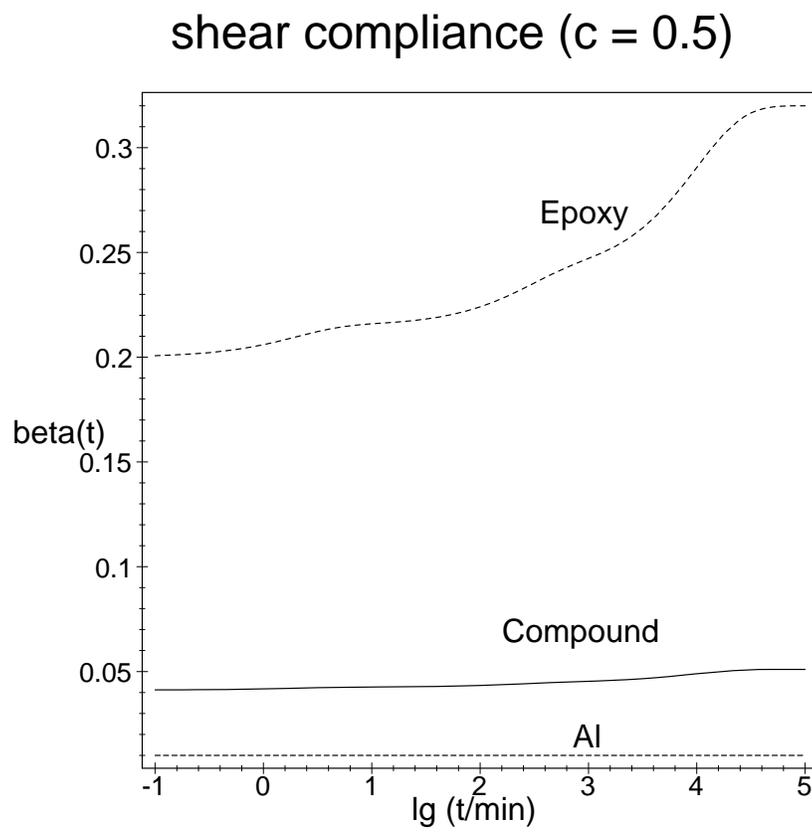
Spannung) nimmt jedoch aufgrund von Relaxation der Matrix in der Umgebung der Partikel ab. Selbst bei der Partikelkonzentration von $c_2 = 0.5$ findet mit den gewählten Materialparametern noch eine Relaxation der Dehnung in den Partikeln um 15% statt.

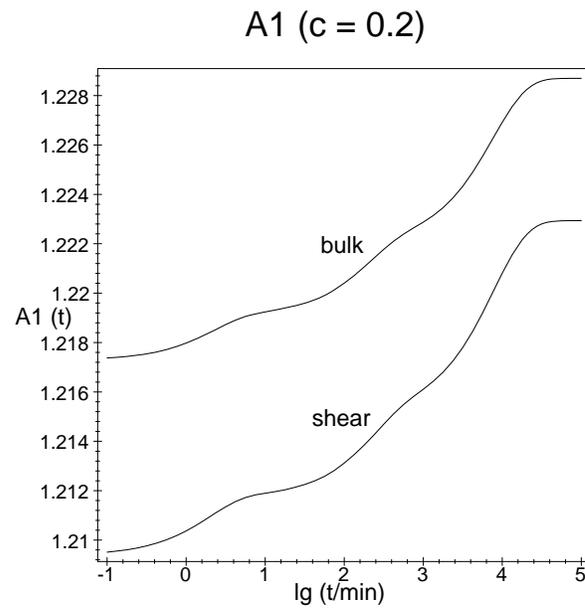
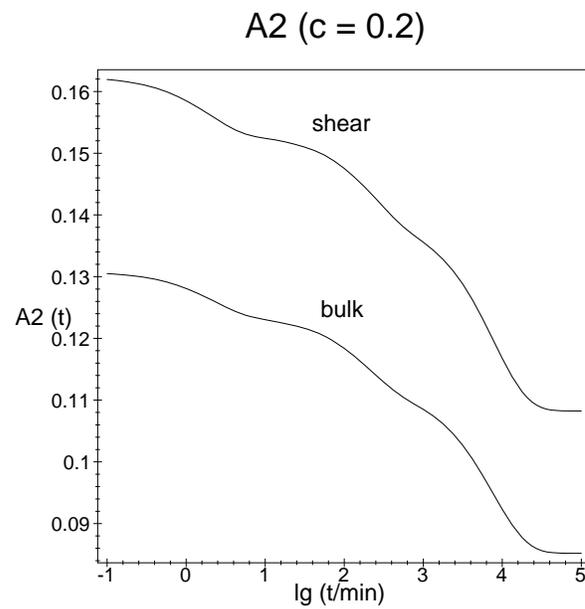
Die Spannungskonzentrationsfaktoren bleiben nahezu konstant, was bedeutet, daß eine konstante, äußere Spannung von beiden Phasen anteilmäßig gleichmäßig getragen wird. Lediglich bei der höheren Partikelkonzentration findet eine Umlagerung der Spannung aus der Matrix auf die Partikel statt. Gleichzeitig nimmt selbstverständlich die gesamte mittlere Dehnung im Verbund durch Kriechen unter der aufgebrachten Last zu.

Abbildung 5.9: Kompressionsanteil der Kriechfunktionen, $c_2 = 0.2$

Abbildung 5.10: Kompressionsanteil der Kriechfunktionen, $c_2 = 0.5$

Abbildung 5.11: Schubanteil der Kriechfunktionen, $c_2 = 0.2$

Abbildung 5.12: Schubanteil der Kriechfunktionen, $c_2 = 0.5$

Abbildung 5.13: Phasenkonzentrationsfaktor A_1 , $c_2 = 0.2$ Abbildung 5.14: Phasenkonzentrationsfaktor A_2 , $c_2 = 0.2$

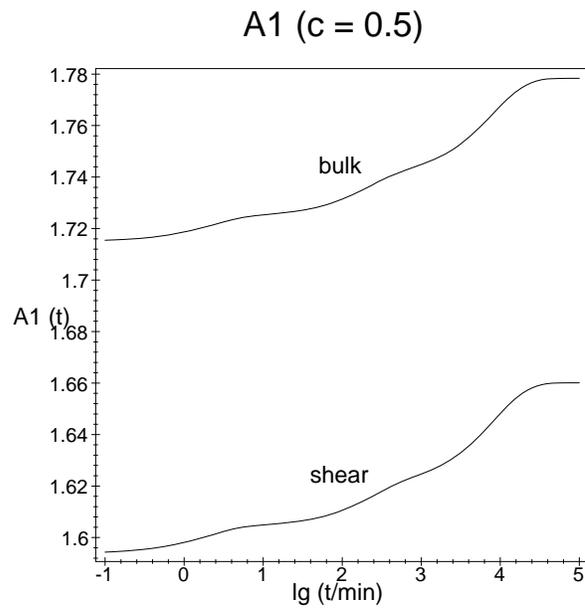


Abbildung 5.15: Phasenkonzentrationsfaktor A_1 , $c_2 = 0.5$

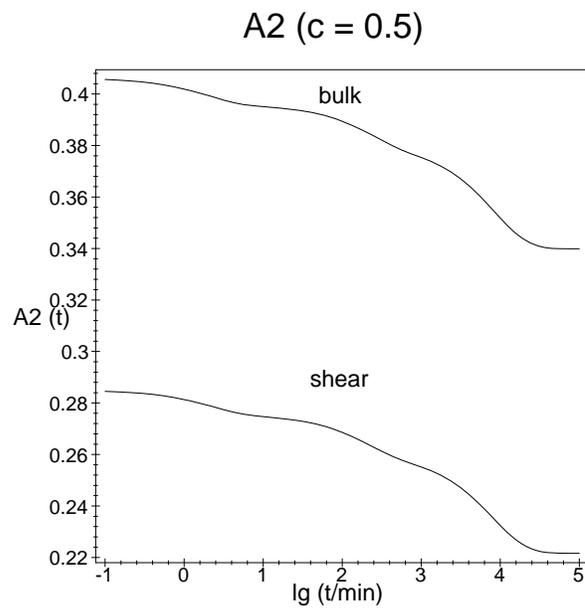


Abbildung 5.16: Phasenkonzentrationsfaktor A_2 , $c_2 = 0.5$

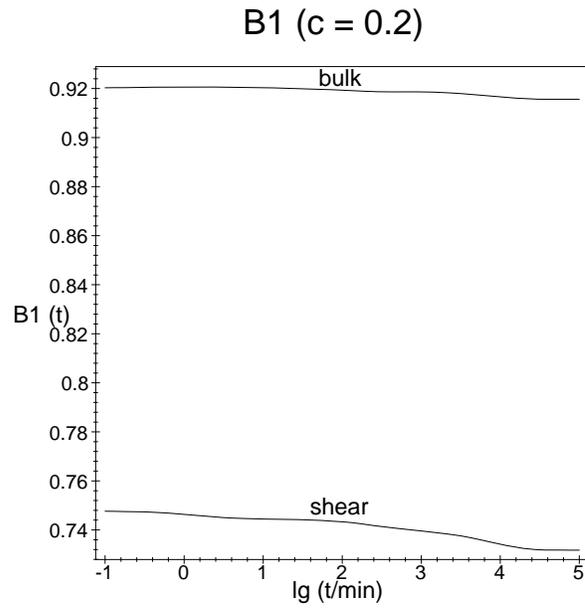


Abbildung 5.17: Phasenkonzentrationsfaktor B_1 , $c_2 = 0.2$

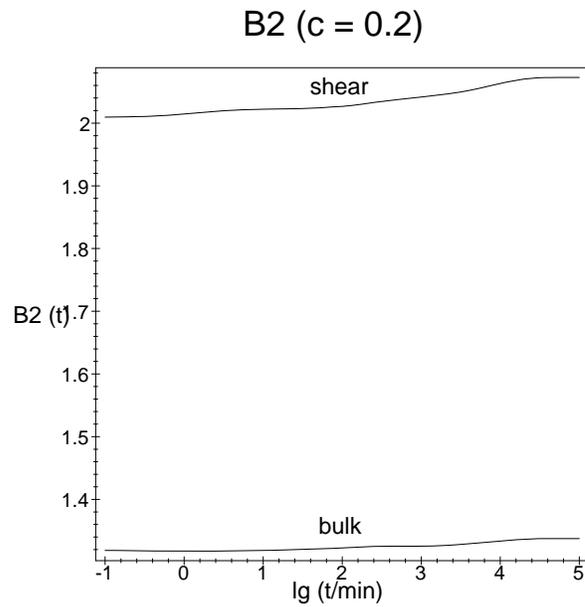


Abbildung 5.18: Phasenkonzentrationsfaktor B_2 , $c_2 = 0.2$

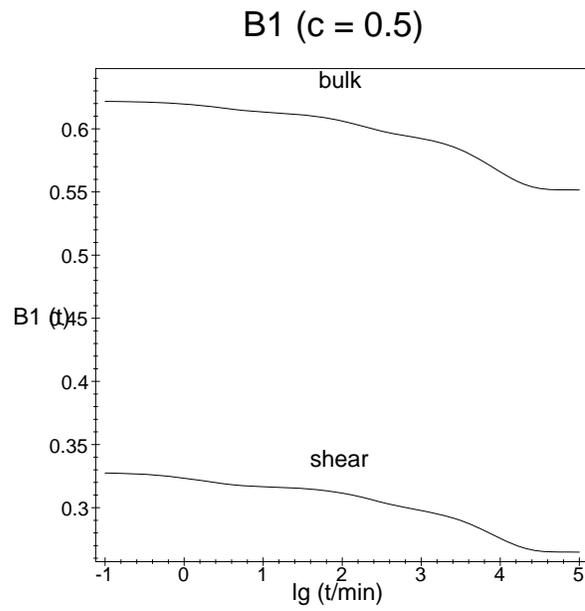


Abbildung 5.19: Phasenkonzentrationsfaktor B_1 , $c_2 = 0.5$

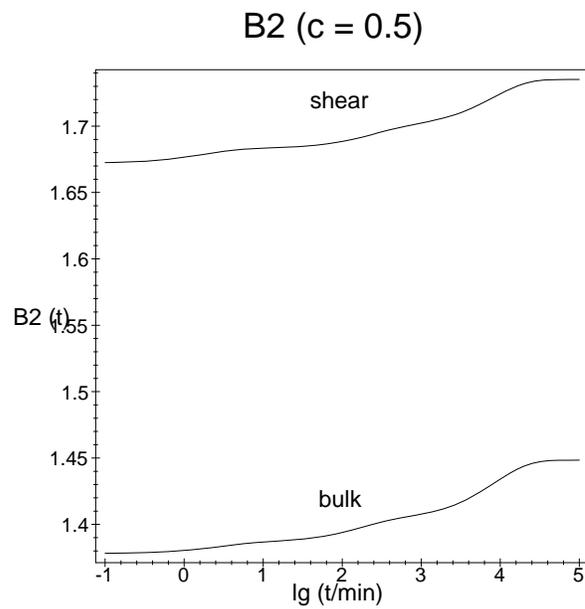


Abbildung 5.20: Phasenkonzentrationsfaktor B_2 , $c_2 = 0.5$

5.5 Definition von Eigenspannungen für mehrphasige Verbunde

Der Spannungszustand σ in einem Körper wird unterteilt in Lastspannungen σ^L und Eigenspannungen σ^{ES} . Eigenspannungen (ES) sind definiert als Spannungen, die in einem Körper vorliegen, die unabhängig von einer äußeren Belastung sind. Diese Spannungen müssen sich über jede Schnittfläche durch einen Körper, der sich im Gleichgewicht befindet, kompensieren.

Eigenspannungen werden nach [54] in ES I. Art (Makro eigenspannungen) σ^I und ES II. und III. Art (Mikro eigenspannungen) σ^{II} und σ^{III} unterteilt.

Unter den Eigenspannungen I. Art σ^I versteht man den Volumenmittelwert der ortsabhängigen Eigenspannungen $\sigma^{ES}(x)$ über alle Phasen in einem repräsentativen Volumenelement ΔV des Verbundes.

Die Eigenspannung II. Art σ^{II} ist der Mittelwert von $\sigma^{ES}(x) - \sigma^I$ über ein Phasenbestandteil (ein Korn bei Metallen). Der verbleibende, ortsabhängige Spannungsanteil $\sigma^{ES}(x) - \sigma^I - \sigma^{II}$ wird mit σ^{III} bezeichnet. Die mittlere Spannung in einer Phase i soll im folgenden in geschweiften Klammern geschrieben werden:

$$\{\sigma_i\} = \sigma^L + \sigma^I + \sigma_i^{II} \quad (5.64)$$

Die Mikrospannung σ^{II} stellt die gegenseitige mittlere Verspannung der Phasen dar und verschwindet nach Definition im volumetrischen Mittel über den gesamten Körper

$$\sum_{(i)} c_i \sigma_i^{II} = 0 \quad (5.65)$$

Die Mikrospannung besteht aus einem lastunabhängigen Anteil $\sigma^{II,0}$ und einem lastabhängigen Anteil $\sigma^{II,L}$. Der lastunabhängige Teil kann aufgrund von Herstellungsbedingungen (unterschiedlicher thermischer Ausdehnungskoeffizient der einzelnen Phasen) oder plastischer Verformung im Körper vorliegen.

Die Makrospannungen $\sigma^m = \sigma^L + \sigma^I$ werden in einem mehrphasigen Werkstoff je nach Wert der mechanischen Eigenschaften und Form der einzelnen Phasen unterschiedlich auf die Phasen verteilt. Die Theorie zu Teilchen-Matrix-Verbunden mit dem selbst-konsistenten Ansatz wurde in Kapitel 5.3

behandelt. Die mittlere lastabhängige Spannung in der Phase i ist demnach über den Phasenkonzentrationstensor B_i gegeben:

$$\{\sigma_i^L\} = B_i \sigma^m \quad (5.66)$$

Abweichungen der Phasenspannung von den Makrospannungen sind definitionsgemäß Eigenspannungen II. Art. Da es lastabhängige Eigenspannungen sind, werden sie mit $\sigma^{II,L}$ bezeichnet. Die gesamte mittlere Spannung der Phase i ist hiermit:

$$\begin{aligned} \{\sigma_i\} &= \sigma_i^L + \sigma_i^{II,0} = B_i (\sigma^L + \sigma^I) + \sigma_i^{II,0} \\ &= \sigma^L + \sigma^I + (B_i - I) (\sigma^L + \sigma^I) + \sigma_i^{II,0} \end{aligned} \quad (5.67)$$

In der Arbeit von BEHNKEN [4] wurde die mittlere Phasenspannung $\{\sigma_i\}$ mit Σ^α und der Phasenkonzentrationstensor B_i mit $(L^\alpha)_{ijkl}$ bezeichnet.

5.6 Berechnung der Eigendehnung einen Verbundes

Ein linear-elastischer Verbund bestehe aus Einschlüssen der Steifigkeit C_1 und der Konzentration c_1 in einer Matrix der Steifigkeit C_2 und der Konzentration $c_2 = 1 - c_1$. Einschlüsse und Matrix würden im isolierten Zustand eine Eigendehnung ϵ_1^p bzw. ϵ_2^p durchführen. Durch die gegenseitige Störwirkung wird eine tatsächliche Dehnung ϵ_1 bzw. ϵ_2 durchgeführt. Die volumetrisch gemittelte Dehnung des Verbundes ist

$$c_1 \{\epsilon_1\} + c_2 \{\epsilon_2\} = \{\epsilon\} \quad (5.68)$$

Der Körper sei frei von äußeren Kräften. Dadurch muß das volumetrische Mittel der Spannungen verschwinden:

$$c_1 \{\sigma_1\} + c_2 \{\sigma_2\} = 0 \quad (5.69)$$

In den einzelnen Phasen gilt aufgrund der Eigendehnungen folgender Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen:

$$\sigma_1 = C_1(\epsilon_1 - \epsilon_1^p) \quad (5.70)$$

$$\sigma_2 = C_2(\epsilon_2 - \epsilon_2^p) \quad (5.71)$$

Gemäß dem selbst-konsistenten Ansatz existiert ein Tensor C^* , der die Störung der Spannung mit der Störung der Dehnung verbindet:

$$\{\sigma_1\} = -C^* (\{\epsilon_1\} - \{\epsilon\}) \quad (5.72)$$

$$\{\sigma_2\} = -C^* (\{\epsilon_2\} - \{\epsilon\}) \quad (5.73)$$

Mit den Gleichungen (5.70) und (5.71) folgt daraus:

$$(C_1 + C^*)\{\epsilon_1\} = C_1\{\epsilon_1^p\} + C^*\{\epsilon\} \quad (5.74)$$

$$(C_2 + C^*)\{\epsilon_2\} = C_2\{\epsilon_2^p\} + C^*\{\epsilon\} \quad (5.75)$$

Einsetzen in Gleichung (5.68) ergibt:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= c_1 (C_1 + C^*)^{-1} (C_1\{\epsilon_1^p\} + C^*\{\epsilon\}) \\ &\quad + c_2 (C_2 + C^*)^{-1} (C_2\{\epsilon_2^p\} + C^*\{\epsilon\}) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Definition von

$$P_1 = (C_1 + C^*)^{-1} \quad P_2 = (C_2 + C^*)^{-1} \quad (5.77)$$

und Auflösen nach ϵ ergibt:

$$\epsilon = [I - (c_1 P_1 + c_2 P_2) C^*]^{-1} [c_1 P_1 C_1 \epsilon_1^p + c_2 P_2 C_2 \epsilon_2^p] \quad (5.78)$$

mit

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 = P = (C^* + C)^{-1} \quad (5.79)$$

folgt

$$\epsilon = [PC]^{-1} [c_1 P_1 C_1 \epsilon_1^p + c_2 P_2 C_2 \epsilon_2^p] \quad (5.80)$$

aus Gleichung (5.74) und (5.75) können dann die resultierenden Dehnungen der einzelnen Phasen berechnet werden:

$$\{\epsilon_1\} = P_1 (C_1 \{\epsilon_1^p\} + C^* \{\epsilon\}) \quad (5.81)$$

$$\{\epsilon_2\} = P_2 (C_2 \{\epsilon_2^p\} + C^* \{\epsilon\}) \quad (5.82)$$

Kapitel 6

Nachweis von Eigenspannungen

Der Nachweis von Makro- und Mikroeigenspannungen wird dadurch erschwert, daß diese Art von Spannungen nur entsteht, wenn die Durchführung von Eigendehnungen aufgrund von Temperatur- oder Feuchteänderungen eines Bauteils behindert wird. Daher wird meist die Eigendehnung in einem nicht restringierten Bauteil gemessen und mit der durchgeführten Eigendehnung in einem restringierten Bauteil unter gleichen Umgebungsbedingungen verglichen. Die Differenz dieser Dehnungen korrespondiert dann mit einer Eigenspannung.

6.1 Krümmung antisymmetrischer Laminat

Ein klassisches Verfahren zur Quantifizierung der Eigendehnungen eines Faserverbundwerkstoffes ist die Messung der Krümmung eines antisymmetrischen Laminats nach Herstellung und Abkühlung auf Raumtemperatur. Über die klassische Laminattheorie (CLT) kann dann die hygrothermische Eigendehnung ϵ^{ht} aus der Krümmung bestimmt werden. Die Berechnung mit der CLT vereinfacht sich bei antisymmetrischen Kreuzlagenlaminaten (Laminat, die nur aus 0° - und 90° -Lagen bestehen), da die Kopplungsmatrix B aufgrund der Orientierung der Laminae nur schwach besetzt ist. Aufgrund der momenten- kräftefreien Lagerung verschwinden im Gleichungssystem (4.30,4.31) der resultierende Kraftvektor N und der Momentenvektor M . Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\begin{bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Invertierung des Gleichungssystems in Blockmatrixschreibweise und Auflösen nach der Krümmung κ ergibt:

$$\kappa = \left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \right)^{-1} (-BN^* + AM^*) \quad (6.3)$$

Die aus der hygrothermischen Eigendehnung ϵ_1^{ht} und ϵ_2^{ht} hervorgehenden äquivalenten Kraft- und Momentenvektoren ergeben sich bei einem antisymmetrischen $[0^\circ, 90^\circ]$ Kreuzlagenlaminat der Dicke t zu:

$$N^* = \begin{bmatrix} N_1^* \\ N_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad M^* = \begin{bmatrix} M_1^* \\ -M_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

mit

$$N_1^* = [(Q_{11} + Q_{12})\epsilon_1^{ht} + (Q_{12} + Q_{22})\epsilon_2^{ht}] t/2 \quad (6.5)$$

$$M_1^* = [(-Q_{11} + Q_{12})\epsilon_1^{ht} + (-Q_{12} + Q_{22})\epsilon_2^{ht}] t^2/8 \quad (6.6)$$

Aufgrund der Struktur der Matrizen A und B ergibt sich dann die Krümmung des Laminats zu:

$$\kappa_x = -\kappa_y \quad \kappa_{xy} = 0 \quad (6.7)$$

Das Laminat nimmt demnach beim Abkühlen eine Sattelform an, wobei die Krümmungsradien von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Orientierung sind und die Krümmungsachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen ($\kappa_{xy} = 0$). Der Wert von κ hängt linear von der Temperaturdifferenz der Abkühlung ab und kann nach längere Rechnung aus Gleichung 6.3 bestimmt werden.

Experimente haben jedoch gezeigt, daß ab einem bestimmten Längen/Dicken-Verhältnis eines antisymmetrischen Laminats die Krümmung keine Sattelform, sondern eine Zylinderform entlang einer der beiden Materialhauptachsen annimmt. Weiterhin existiert nicht nur eine stabile Gleichgewichtslage, sondern eine zweite Zylinderform mit entgegengesetzter Krümmung und Krümmungsachse entlang der anderen Materialhauptachse, in die das Laminat durch Durchdrücken gebracht werden konnte. Hyer erklärte 1981 [44], [43], [45] als Erster dieses Phänomen, indem er die Existenz mehrerer Lösungen auf das Auftreten von geometrischen Nichtlinearitäten zurückführte. Hyer erweiterte die Definition der Verzerrung ϵ um die in der nichtlinearen Plattentheorie üblichen Terme:

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (6.8)$$

$$\epsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (6.9)$$

$$\epsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad (6.10)$$

Mit diesem Ansatz ergeben sich drei mögliche Zustände des Laminats: die aus der linearen Theorie bekannte Sattelform und die beiden Zylinderformen. Bis zu einem bestimmten Längen/Dicken-Verhältnisse ist die Sattelform die stabile Gleichgewichtslage (Grenzfall zur linearen Theorie), danach ist dieser Zustand instabil und die beiden Zylinderformen stellen beide einen stabilen Zustand dar.

Für einen dünnen Streifen unendlicher Länge eines antisymmetrischen [0/90]-Laminats ergibt sich folgende Krümmung [25]:

$$\kappa = \left(\frac{24(E_2/E_1 - \nu_{21}^2)(\epsilon_1^{ht} - \epsilon_2^{ht})}{1 + 14(E_2/E_1) + (E_2/E_1)^2 - 16\nu_{21}^2} \right) \left(\frac{1 + E_2/E_1 - 2\nu_{21}}{1 + E_2/E_1} \right) \quad (6.11)$$

mit den Elastizitätsmodulen E , der Querkontraktionszahl ν und den hygrothermischen Eigendehnungen ϵ^{ht} . Die Indizes 1 und 2 bedeuten Faserrichtung und transversale Richtung. Da der rechte Term in Gleichung 6.11 nahezu 1 ist und das Quadrat der Poissonzahl ν_{21} vernachlässigt werden kann, vereinfacht sich Gleichung (6.11) zu:

$$\kappa = \frac{24}{14 + (E_2/E_1) + (E_1/E_2)} (\epsilon_1^{ht} - \epsilon_2^{ht}) \quad (6.12)$$

6.2 Bestimmung der hygrothermischen Eigendehnung mit Dehnungsmeßstreifen

Das am häufigsten zur Bestimmung von Dehnungen verwendete Verfahren ist die Messung mit Dehnungsmeßstreifen (DMS). Durch Aufbringen der DMS auf die Prepreg-Platten und Aufnahme des Meßsignals während Herstellung und Abkühlung könnte der thermische Schrumpfungsprozeß gemessen werden. Aufgrund der chemischen Umwandlung der Harzmatrix und den Umgebungsbedingungen während der Herstellung ist jedoch keine zuverlässige Messung möglich. Durch das Erhitzen wird das Harz stark viskos. Eine Haftung des DMS am Material ist demnach nicht mehr gewährleistet. Der hohe Druck im Autoklaven erzeugt ein Fließen des dann viskosen Harzes. Die chemische Umwandlung bewirkt wiederum eine Kontraktion des Harzes. Es würden also durch direkte Messungen mit DMS eher die Verformung des DMS aufgrund der Umgebung als die Verformung der Umgebung gemessen werden.

Aus diesen Gründen wurde bei der Bestimmung der Eigendehnung mit Dehnungsmeßstreifen ein anderer Weg gewählt. Die DMS wurden nach Herstellung des Laminats appliziert. Danach wurde ausgehend von Raumtemperatur bis nahe zur Herstellungstemperatur die thermische Dehnung gemessen.

Damit kann der thermische Ausdehnungskoeffizient α^{th} als grundlegender Materialparameter bestimmt und mit einer elastischen Rechnung eine Abschätzung der thermischen Eigenspannungen im Laminat erhalten werden.

Es wurden verschiedene Messungen für 8-lagige unidirektionale Laminare ($[0^\circ]_8$) und für 8-lagige Kreuzlagenlaminare ($[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]_s$) durchgeführt. Die Laminare hatten quadratische Abmessungen mit 10cm Seitenlänge, um eventuelle Längen/Breiten-Effekte zu vermeiden und wurden jeweils in der

Mitte mit DMS (Measurement Group CEA-06-125UT-120) bestückt. Die Temperatur der Proben wurde ebenfalls auf der Oberfläche mit einem Thermowiderstand (Pt100) gemessen. Das Meßergebnis wurde mit dem vom Hersteller angegebenen Polynom von Temperatureinflüssen auf den DMS bereinigt.

Abbildung 6.2 zeigt eine Messung einer unidirektionalen Probe. In Faserichtung (DMS 1) wird nahezu keine thermische Ausdehnung beobachtet. In transversaler Richtung kann eine Hysterese beim Aufheizen und Abkühlen beobachtet werden. Dieser Effekt ist auf ein Ausdiffundieren von Feuchtigkeit und damit verbundener Kontraktion (siehe Kapitel 2.4) während der Erwärmung zurückzuführen. Der Effekt konnte noch nicht quantifiziert werden, da eine geeignete Waage zur Bestimmung des Feuchtgrades im Laminat noch nicht zur Verfügung stand. Bei einer folgenden Messung (Abbildung 6.3) war die Probe bereits getrocknet, so daß keine Hysterese auftrat. Die Messungen ergeben eine Nichtlinearität der transversalen, thermischen Ausdehnungskoeffizienten, der mit steigender Temperatur zunimmt. Abbildung 6.1 zeigt den thermischen Ausdehnungskoeffizienten in Abhängigkeit der Temperatur. Eine lineare Regression der Meßergebnisse ergibt folgende Gleichung für den transversalen thermischen Ausdehnungskoeffizienten:

$$\alpha_T^{th}(T) = [22.4587 + 0.180715(T/K - 273.15)] \frac{\mu\text{m}}{\text{m K}} \quad (6.13)$$

Die thermische Ausdehnung eines Kreuzlagenlaminats ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Dabei wurde die Probe in zwei Zyklen aufgeheizt und wieder abgekühlt. Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist jetzt durch die Restriktionswirkung der Fasern um eine Größenordnung niedriger, dadurch sind die Abweichungen aufgrund von Meßungenauigkeiten deutlicher sichtbar. Sehr gut kann in dieser Abbildung der Feuchtigkeitsverlust beim Aufheizen beobachtet werden. Nach dem ersten Aufheizen verlaufen die Kurven der Abkühlphasen und der zweiten Aufheizphase aufeinander, was keine weitere Feuchtigkeitsabgabe bedeutet. Die Diskrepanz zwischen den Werten der beiden Dehnungsmeßstreifen ist wahrscheinlich auf Oberflächeneffekte zurückzuführen.

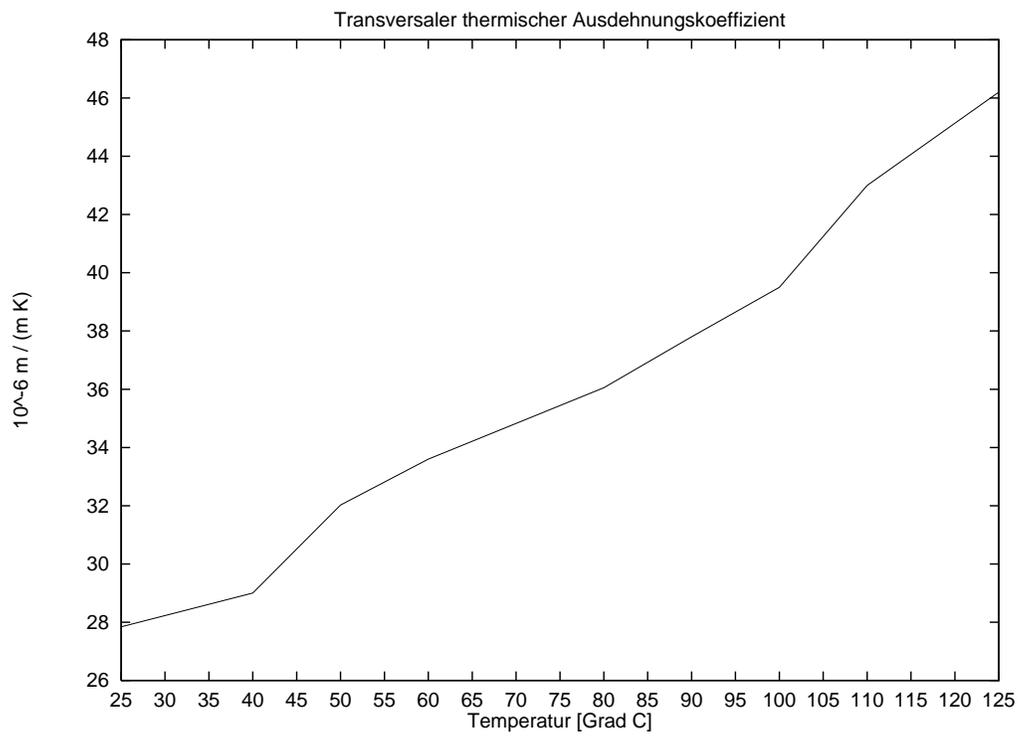
Abbildung 6.1: Thermischer Ausdehnungskoeffizient, $[0^0]_8$ -Laminat

Abbildung 6.2: Thermische Ausdehnung, $[0^\circ]_8$ -Laminat

Abbildung 6.3: Thermische Ausdehnung, $[0^\circ]_8$ -Laminat

Abbildung 6.4: Thermische Ausdehnung, $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]_s$ -Laminat

6.3 Röntgenographische Spannungsermittlung

6.3.1 Grundlagen

Die röntgenographische Spannungsermittlung ist ein klassisches Verfahren zur Bestimmung der Gitterabstände kristalliner Materialien mittels Röntgenbeugung. Durch Vergleich des Gitterabstandes im belasteten und im unbelasteten Zustand kann die elastische Verzerrung berechnet werden. Nach dem Bragg'schen Reflexionsgesetz

$$\lambda = 2d_{hkl} \sin(\Theta_{hkl}) \quad (6.14)$$

bewirkt eine Veränderung des Abstandes d_{hkl} der durch die Millerindices (hkl) gekennzeichneten Netzebenenchar bei fester Wellenlänge λ eine Verschiebung des Bragg'schen Interferenzwinkels Θ_{hkl} . Entwicklung der Gleichung (6.14) in einer Taylor-Reihe und Abbruch nach dem linearen Glied ergibt die Gitterverzerrung ϵ_{hkl} in Richtung der Normalen der zugehörigen Gitterebene

$$\epsilon_{hkl} = \frac{\Delta d_{hkl}}{d_{hkl}^0} = -\Delta \Theta_{hkl} \cot(\Theta_{hkl}^0), \quad (6.15)$$

wobei d_{hkl}^0 der Netzebenenabstand und Θ_{hkl}^0 der zugehörige Interferenzwinkel im unverspannten Zustand ist.

Da die gemessene Gitterdehnung der elastischen Dehnung entspricht, kann daraus direkt in geeigneter Weise der Spannungszustand berechnet werden. Durch Vergleich mit den Lastspannungen ist eine genaue Ermittlung der im bestrahlten Volumen vorhandenen Eigenspannungen möglich. Ein weiterer Vorteil der röntgenographischen Spannungsermittlung sind die Möglichkeit der zerstörungsfreien Prüfung und die hohe Ortsauflösung. Eine ausführliche Darstellung der röntgenographischen Spannungsermittlung und ihrer Anwendungen, insbesondere zur Messung von Eigenspannungen bei Stählen findet der Leser in den Quellen [19, 34, 52, 58].

6.3.2 Messung bei faserverstärkten Kunststoffen

Die RSA ist nur bei Materialien mit kristalliner oder teilkristalliner Struktur anwendbar. HAUKE ET. AL. [34, 30, 32, 28] und HOFFMANN ET. AL. [40, 41, 42] nutzten die kristallinen Phasen teilkristalliner Polymere zur röntgenographischen Messung der Eigenspannungen. Die meisten Polymere sind jedoch amorph und ergeben keine definierten Beugungsinterferenzen.

BARRETT & PREDECKI hatten den herausragenden Einfall, durch Einlagerung von Metallpartikeln eine zusätzliche kristalline Phase zu erzeugen, die der RSA zugänglich ist. Aus dem Dehnungszustand der eingelagerten Phase kann anschließend der Spannungszustand der umgebenden Matrix bestimmt werden. Das zuerst für unverstärkte Polymere eingeführte Verfahren [1] wurde zur Untersuchung von faserverstärkten Kunststoffen [2, 61, 62, 63] und Klebeverbindungen [3, 64] erweitert.

HAUKE ET. AL. [34, 33, 31, 28] und HOFFMANN ET. AL. [42] verwendeten dieses Verfahren zur Untersuchung der Eigenspannungen in mit Aluminiumpulver gefüllten Polymeren. FENN & JONES [15, 16, 17] wendeten das Verfahren auf mit Nickel gefüllte Kohlefaserlaminat an. WÖRTLER [80, 81, 79] untersuchte die Randspannungskonzentration belasteter CfK-Proben, in die Niob-Pulver als Reflexgeber einlaminiert wurde. PRINZ [65, 66] erweiterte diese Arbeit und führte detaillierte Untersuchungen zu verschiedenen metallischen und nichtmetallischen Geberpulvern durch. Abbildung 6.5 zeigt eine 500-fach vergrößerte lichtmikroskopische Aufnahme eines Schliffs durch ein mit Cadmiumoxid dotiertes Laminat. Eine Zusammenfassung zur röntgenographischen Spannungsanalyse an polymeren Werkstoffen findet sich in der Quelle [29].

6.3.3 Definition der Meßrichtung

Die Meßrichtung wird in einem probenfesten (x, y, z) -Koordinatensystem, dessen Achsen mit der Längs-, Quer- und Dickenrichtung einer Flachprobe (Laminat) übereinstimmen, gemäß Abbildung 6.6 definiert.

Die Meßrichtung wird üblicherweise in der Literatur über die Orientierung des Einheitsvektors \vec{n} mit den Azimutal- und Polarwinkel (φ, ψ) angegeben [71]. In Anlehnung an WÖRTLER [79] und PRINZ [65] wird jedoch das Winkelpaar (ω, χ) verwendet, da es für das vorhandenen Diffraktometer besser geeignet ist. Die Definitionen und Zählrichtungen von ω und χ entsprechen der Konvention für Drei- und Vierkreisdiffraktometer [55].

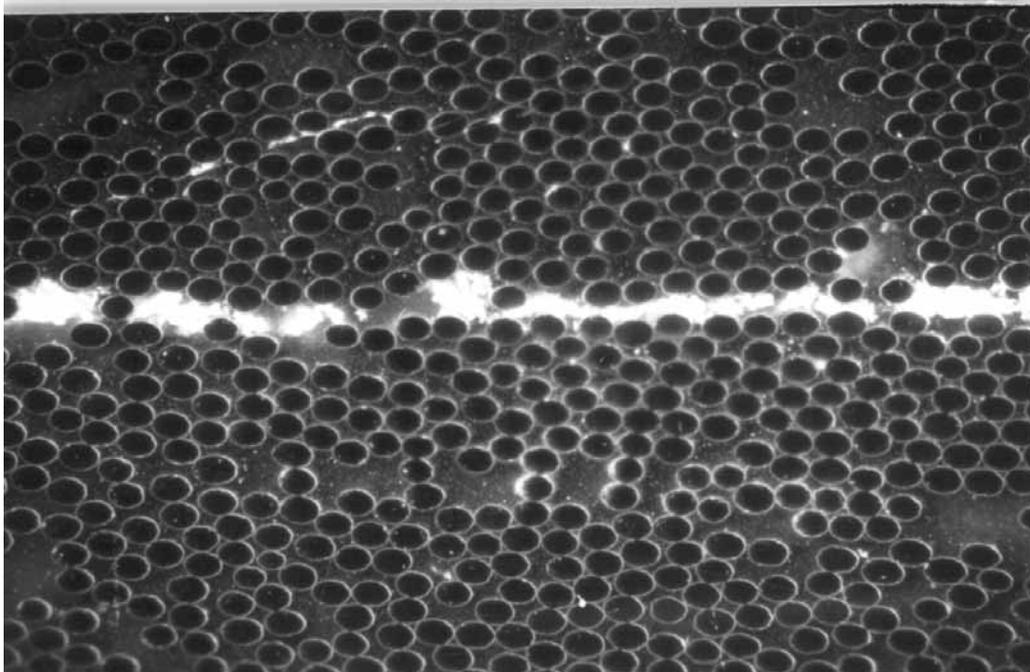


Abbildung 6.5: Schliff durch ein mit CdO dotiertes Laminat (aus PRINZ [65])

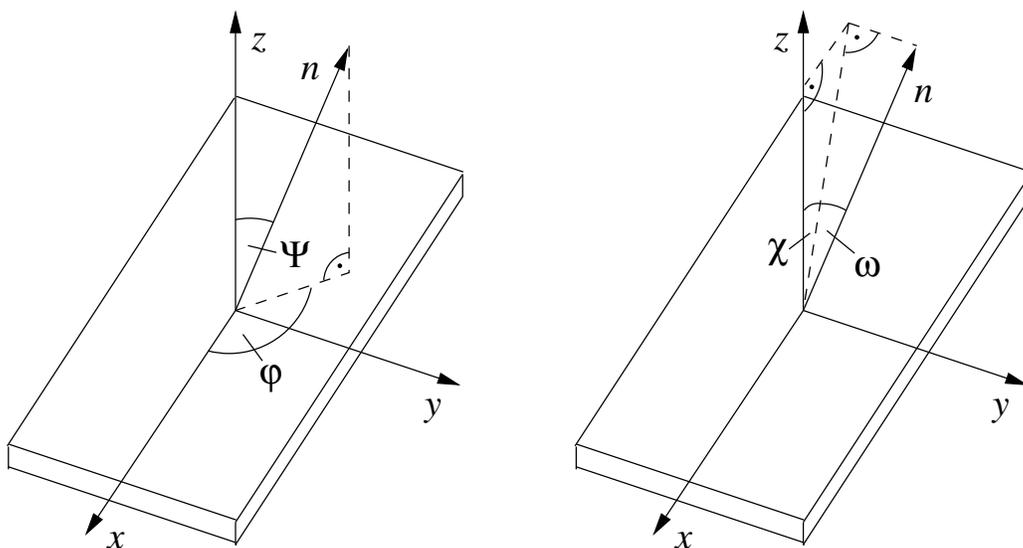


Abbildung 6.6: Definition der Meßwinkelpaare (φ, ψ) und (ω, χ)

Der Einheitsvektor \vec{n} in Koordinatenschreibweise lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \omega \sin \chi \\ \sin \omega \\ \cos \omega \cos \chi \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Zwischen der in Richtung des Einheitsvektors \vec{n} gemessenen Dehnung $\epsilon(\vec{n})$ und dem Komponenten des Dehnungstensors ϵ_{ij} im globalen Koordinatensystem besteht folgender Zusammenhang:

$$\epsilon(\vec{n}) = \epsilon_{ij} n_i n_j \quad \text{mit} \quad i, j = x, y, z \quad (6.17)$$

Einsetzen der Komponenten des Einheitsvektors ergibt:

$$\begin{aligned} \epsilon(\varphi, \psi) &= \epsilon_{xx} \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \epsilon_{yy} \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \epsilon_{zz} \cos^2 \psi \\ &+ \epsilon_{xy} \sin 2\varphi \sin^2 \psi + \epsilon_{xz} \cos \varphi \sin 2\psi + \epsilon_{yz} \sin \varphi \sin 2\psi \end{aligned} \quad (6.18)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \chi) &= \epsilon_{xx} \cos^2 \omega \sin^2 \chi + \epsilon_{yy} \sin^2 \omega + \epsilon_{zz} \cos^2 \omega \cos^2 \chi \\ &+ \epsilon_{xy} \sin 2\omega \cos \chi - \epsilon_{xz} \cos^2 \omega \sin 2\chi + \epsilon_{yz} \sin 2\omega \sin \chi \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.3.4 Auswertung des Dehnungszustandes

Unter der Voraussetzung, daß in dem beleuchteten Volumen die Dehnung konstant ist, können die 6 Komponenten des Dehnungstensor aus den Gleichung (6.18) bzw. (6.19) berechnet werden, wenn die Dehnung $\epsilon(\varphi, \psi)$ bzw. $\epsilon(\omega, \chi)$ in mindestens 6 unabhängige Richtungen (φ, ψ) bzw. (ω, χ) ermittelt wurde. Aufgrund der Abweichung der Meßwerte, ist es jedoch empfehlenswert, die Dehnung in mehr als 6 Richtungen zu messen und den Dehnungstensor aus dem dann überbestimmten Gleichungssystem über eine Ausgleichsrechnung nach DÖLLE & HAUKE [12] zu berechnen.

Das $\sin^2 \psi$ Verfahren

Bei bestimmten Versuchsanordnungen können vereinfachende Annahmen hinsichtlich des Dehnungszustandes in der Probe aufgestellt werden. Stimmen die Hauptachsen des Verzerrungstensors ϵ mit den Achsen des Koordinatensystems überein, verschwinden in den Gleichungen (6.18) und (6.19) die Nebendiagonalelemente von ϵ :

$$\epsilon(\omega, \chi) = (\epsilon_{xx} \sin^2 \chi + \epsilon_{zz} \cos^2 \chi) \cos^2 \omega + \epsilon_{yy} \sin^2 \omega \quad (6.20)$$

Für die Winkel $\omega = 0$, bzw. $\chi = 0$ erhält man:

$$\epsilon(0, \chi) = \epsilon_{zz} + (\epsilon_{xx} - \epsilon_{zz}) \sin^2 \chi \quad (6.21)$$

$$\epsilon(\omega, 0) = \epsilon_{zz} + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz}) \sin^2 \omega \quad (6.22)$$

Durch Auftragen der Meßwerte $\epsilon(0, \chi)$ und $\epsilon(\omega, 0)$ über $\sin^2 \chi$ bzw. $\sin^2 \omega$ und Bestimmung der Steigung und Ordinatenabschnitte lassen sich demnach die Hauptdehnungen ϵ_{xx} , ϵ_{yy} und ϵ_{zz} bestimmen. Die Gleichungen (6.21) und (6.22) sind gleichwertig zu einer Formulierung im (φ, ψ) -Koordinatensystem für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$, wodurch ähnliche Gleichungen in Abhängigkeit von $\sin^2 \psi$ erhalten werden. Diese Gleichungen stellen einen Spezialfall des bekannten $\sin^2 \psi$ -Verfahrens dar [35, 53].

Ermittlung des Spannungszustandes

Mit der röntgenographischen Spannungsanalyse bei Faserverbundwerkstoffen wird der Dehnungszustand ϵ^p der einlamierten Partikel gemessen. Dieser ist bei linear-elastischem Materialverhalten beider Phasen und idealer Grenzflächenhaftung linear vom makroskopischen Spannungszustand σ^m abhängig. Nach WÖRTLER kann folgende effektive Spannungs-Dehnungs-Beziehung angegeben werden [79]:

$$\sigma^m = C^* \epsilon^p \quad (6.23)$$

Für eine homogene Verteilung der Reflexionspartikel in einem isotropen Werkstoff (Abb. 6.7a) ist die Übertragungsmatrix C^* ein isotroper Tensor mit zwei

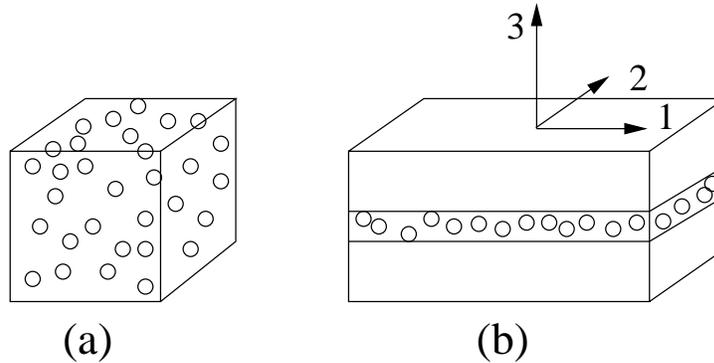


Abbildung 6.7: Geberpulververteilung in isotropen Kunststoff (a) und zwischen zwei Lagen eines Verbundes (b) (nach [79])

unabhängigen Konstanten. Bei der Untersuchung von Faserverbundwerkstoffen wird das Geberpulver zwischen zwei Laminatschichten einlaminiert (Abb. 6.7b). Durch diese flächigen Verteilung wird die Symmetrie in Dickenrichtung aufgehoben, wodurch die Übertragungsmatrix eine transversal-isotrope Gestalt bekommt (fünf unabhängige Konstanten). Besitzt das Laminat aufgrund seines Aufbaus unterschiedliche mechanische Eigenschaften in Richtung der 1- und 2-Achse tritt der allgemeine orthotrope Fall auf. Die Übertragungsmatrix hat dann neun unabhängige Konstanten.

Bei der röntgenographischen Spannungsermittlung wird gewöhnlich die inverse Darstellung der Gleichung (6.23) verwendet. Dabei wird die gemessene Dehnung als Funktion der makroskopischen Spannung angegeben. Bei isotropen Werkstoffen lautet diese Beziehung:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}s_2\{hkl\}\sigma_{ij}^m + \delta_{ij}s_1\{hkl\}\sigma_{kk}^m \quad (6.24)$$

Die Koeffizienten s_1 und $1/2s_2$ werden als *röntgenographische Elastizitätskonstanten (REK)* bezeichnet. Die Miller-Indices $\{hkl\}$ geben eine mögliche Abhängigkeit von der reflektierenden Netzschar an, die aus der mechanischen Anisotropie der Einkristalle hervorgeht. Da bei den verwendeten Materialien in dieser Arbeit nur ein Reflex ausgewertet wird, kann die Kennzeichnung entfallen.

Handelt es sich bei dem untersuchten Werkstoff um einen linear-elastischen, homogenen, isotropen Körper, kann die Gleichung (6.24) auf das Hook'sche Gesetz mit den sogenannten *makroskopischen* Elastizitätskonstanten s_1^m und $1/2s_2^m$ zurückgeführt werden.

$$\frac{1}{2}s_2^m = \frac{1 + \nu}{E} \quad s_1^m = -\frac{\nu}{E} \quad (6.25)$$

Für einen anisotropen Werkstoff (Werkstoff mit Textur) können in ähnlicher Weise *röntgenographische Spannungsfaktoren* F_{ij} definiert werden (siehe [4]).

Besteht der Werkstoff aus mehreren Phasen, so wird zwischen den sogenannten *Verbund-REK* und den *Phasen-REK* unterschieden. Die Verbund-REK $s_i^{V,\alpha}$ geben den Zusammenhang zwischen der makroskopischen Spannung im gesamten Verbund und der in der Phase α gemessenen Dehnung an:

$$\epsilon_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}s_2^{V,\alpha}\sigma_{ij}^m + \delta_{ij}s_1^{V,\alpha}\sigma_{kk}^m \quad (6.26)$$

Im Unterschied dazu stellen die Phasen-REK s_i^α weiterhin den Zusammenhang zwischen Spannung- und Dehnung innerhalb einer Phase da.

Die röntgenographischen Elastizitätskonstanten können entweder experimentell ermittelt oder durch geeignete mikromechanische Modelle analytisch aus den mechanischen Eigenschaften der Bestandteile des Verbundes berechnet werden. Eine umfassende Darstellung dieses Gebietes wurde in der Arbeit von BEHNKEN gegeben [4].

Kapitel 7

Zusammenfassung

Dieser Forschungsbericht behandelt die experimentelle und numerische Untersuchung der bei der Herstellung oder durch Umgebungseinflüsse entstehenden Eigenspannungen in Laminaten aus Kohlefaser-verstärktem Kunststoff. Der Eigenspannungszustand wird dabei in Makroeigenspannungen im gesamte Verbund und Mikro eigenspannungen zwischen den einzelnen Phasen unterteilt.

Nach einem einleitenden Kapitel wird in dieser Arbeit die Entstehung und die Auswirkungen von Eigenspannungen bei Laminaten aus faserverstärkten Kunststoffen aufgrund chemischer, thermischer oder hygroskopischer Eigen- dehnung beschrieben.

Im dritten Kapitel wird die Verwendung eines physikalisch korrekten Materialgesetzes zur Beschreibung des zeit-, temperatur-, und spannungsabhängigen mechanischen Verhaltens des Verbundwerkstoffes durch Anwendung der nichtlinearen Viskoelastizität nach SCHAPERY behandelt. Weiterhin sind die Vorarbeiten zur effizienten Umsetzung des Materialgesetzes in ein numerisches Simulationsprogramm (Laminattheorie oder Finite Elemente Methode) dargestellt.

Das makromechanische Verhalten von Laminaten wird im folgenden Kapitel erläutert. Dabei wird die klassische Laminattheorie auf die Anwendung nichtlinearen viskoelastischen Materialverhaltens erweitert. Die herstellungsbedingten Makroeigenspannungen in zwei unterschiedlich aufgebauten, symmetrischen Laminaten wurden durch eine Simulationsrechnung mit der viskoelastischen Laminattheorie berechnet. Anschließend ist die Erstellung eines Finite Elemente Algorithmus beschrieben.

Das fünfte Kapitel stellt mit einer Behandlung der Mikromechanik mehrphasiger, viskoelastischer Systeme einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit dar. Da zum experimentellen Nachweis der Eigenspannungen im Laminat in diesem Projekt in erster Linie die röntgenographische Spannungsermittlung an einlamierten Reflexionspartikeln verwendet wird, ist es unerlässlich, das Spannungsübertragungsverhalten unter Berücksichtigung des viskoelastischen Materialgesetzes genau zu kennen. Dieses Übertragungsverhalten wird mit dem analytischen Modell der viskoelastischen, selbst-konsistenten Methode dargestellt. Dafür werden zuerst die theoretischen Voraussetzungen erläutert, anschließend wird für bestimmte Partikelkonzentrationen das Übertragungsverhalten berechnet und interpretiert.

Die experimentellen Methoden zur Untersuchung von Eigenspannungen bei Faserverbundwerkstoffen werden im folgenden Kapitel aufgeführt. Neben der klassischen Methode zur Bestimmung des Makroeigenspannungszustandes aus der Krümmung antisymmetrischer Lamine wird die röntgenographische Spannungsermittlung ausführlich erläutert. Weiterhin werden Meßergebnisse für das thermische Ausdehnungsverhalten von unidirektionalen Laminaten und Kreuzlagenlaminaten wiedergegeben.

Anhang A

Materialkennwerte eines faserverstärkten Epoxidharzes

Aufgrund der bisher noch nicht vollständig durchgeführten Experimente zu den viskoelastischen Eigenschaften des in dieser Arbeit verwendeten Materials wurden für die Berechnung der Verbundkennwerte und zur Simulation der Relaxation der Eigenspannungen Materialkennwerte eines ähnlichen Materials aus der Literatur übernommen.

TUTTLE & BRINSON ermittelten das nichtlineare Kriechverhalten des Graphit/Epoxy Systems T300/5208 [74]. Da diese Autoren die Kriechfunktion über ein Potenzgesetz darstellten, welches zur rekursiven Formulierung der viskoelastischen Gleichungen nicht geeignet ist, wandelten KENNEDY & WANG in ihrer Arbeit diese Kriechfunktion in eine Exponentialsumme um [47]. Sie gaben folgende Materialeigenschaften an:

- Elastische Eigenschaften

$$\begin{aligned} E_{11} &= 132.2\text{GPa}, & E_{22} &= 9.434\text{GPa} \\ \nu_{12} &= \nu_{23} = 0.273, & G_{12} &= 6.41\text{GPa} \end{aligned}$$

- Transversale Kriechfunktion

$$\begin{aligned}
D_{1T} &= 0.001381 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{1T} &= 1.861 \text{min}^{-1} \\
D_{2T} &= 0.001371 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{2T} &= 0.1128 \text{min}^{-1} \\
D_{3T} &= 0.002380 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{3T} &= 0.01184 \text{min}^{-1} \\
D_{4T} &= 0.003887 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{4T} &= 0.001523 \text{min}^{-1} \\
D_{5T} &= 0.005995 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{5T} &= 0.0002430 \text{min}^{-1} \\
D_{6T} &= 0.01293 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{6T} &= 0.0000368 \text{min}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{0T} &= 1 \\
g_{1T} &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 6.43 \text{MPa} \\ 1 + 0.0875(\tau_{oct} - 6.43) & \forall \tau_{oct} > 6.43 \text{MPa} \end{cases} \\
g_{2T} &= 1 \\
a_T &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 6.43 \text{MPa} \\ \exp[-0.247(\tau_{oct} - 6.43)] & \forall \tau_{oct} > 6.43 \text{MPa} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Schubkriechfunktion

$$\begin{aligned}
D_{1s} &= 0.003331 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{1s} &= 2.097 \text{min}^{-1} \\
D_{2s} &= 0.002661 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{2s} &= 0.1251 \text{min}^{-1} \\
D_{3s} &= 0.004229 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{3s} &= 0.01309 \text{min}^{-1} \\
D_{4s} &= 0.006303 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{4s} &= 0.001682 \text{min}^{-1} \\
D_{5s} &= 0.009136 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{5s} &= 0.000267 \text{min}^{-1} \\
D_{6s} &= 0.001815 \text{GPa}^{-1} & \lambda_{6s} &= 0.00003955 \text{min}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{0s} &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 12.05 \text{MPa} \\ 1 + 0.00513(\tau_{oct} - 12.05) & \forall \tau_{oct} > 12.05 \text{MPa} \end{cases} \\
g_{1s} &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 7.23 \text{MPa} \\ 1 + 0.00979(\tau_{oct} - 7.23) & \forall \tau_{oct} > 7.23 \text{MPa} \end{cases} \\
g_{2s} &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 7.23 \text{MPa} \\ 1 + 0.124(\tau_{oct} - 7.23) & \forall \tau_{oct} > 7.23 \text{MPa} \end{cases} \\
a_s &= \begin{cases} 1 & \forall \tau_{oct} \leq 14.5 \text{MPa} \\ \exp[-0.0340(\tau_{oct} - 14.5)] & \forall \tau_{oct} > 14.5 \text{MPa} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die nichtlinearen Koeffizienten g_{0s} , g_{1s} und g_{2s} scheinen bei KENNEDY & WANG fehlerhaft angegeben zu sein, so daß die Originalwerte von TUTTLE & BRINSON verwendet wurden. Die Versuche von TUTTLE & BRINSON

wurden zur Reduktion der Meßzeit bei erhöhten Temperaturen durchgeführt. Bedauerlicherweise wurde die Abhängigkeit des Verschiebungsfaktors von der Temperatur nicht angegeben. In der Veröffentlichung von HENRIKSEN [36] über nichtlineare FE-Untersuchung von viskoelastischen Klebeverbindungen (FM-73) wurde der folgende Verschiebungsfaktor für Temperaturänderungen angegeben:

$$a_T = \exp\left(-12.12 \frac{T - T_0}{T_0}\right)$$

Dieser kann durch Multiplikation zu den spannungsabhängigen Verschiebungsfaktoren bei der Berechnung berücksichtigt werden.

Die Kriechfunktion für Belastung in transversaler Richtung im linearen Bereich ist in Abbildung A.1 dargestellt. Abbildung A.2 zeigt die einzelnen Bestandteile der Exponentialsumme der Kriechfunktion.

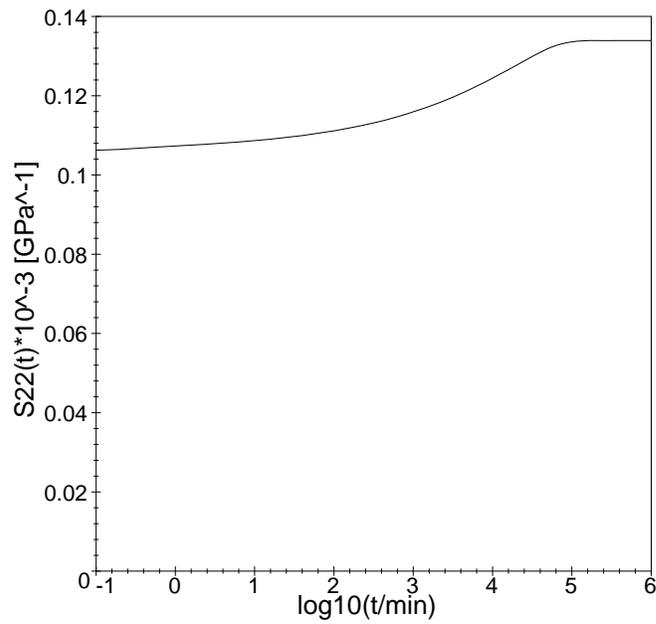


Abbildung A.1: transversale Kriechfunktion für T300/5208

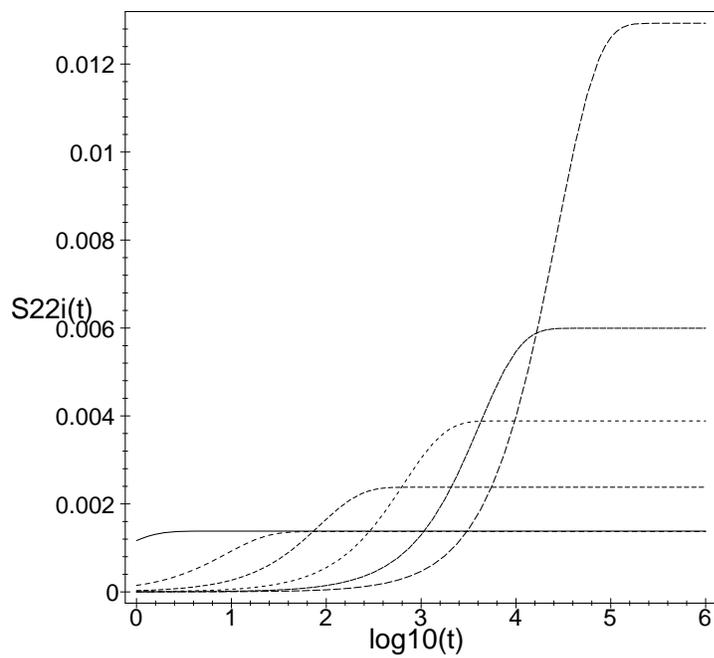


Abbildung A.2: Bestandteile der transversalen Kriechfunktion

Anhang B

Programm zur viskoelastischen Laminattheorie

```

/*****
/* program:      vlt.cc
/* author:      Ralf Meske, IMF, Uni Karlsruhe
/* date:       1.10.96
/* description: program for the calculation with the
/*             viscoelastic lamination theorie
/* includes:    Matrix.h: matrix/vector manipulations [(c) R. Meske]
*****/

#include <stdio.h>

#include "Matrix.h"

// Laminate structure

const int      n_k = 4;                // number of layers
#define MAT3_NK {Matrix(3,3), Matrix(3,3), Matrix(3,3), Matrix(3,3)}
#define VEC3_NK {Vector(3), Vector(3), Vector(3), Vector(3)}

const double   z_k[n_k+1] = {-2.0, -1.0, 0.0, 1.0, 2.0}; // layer coordinates [mm]
const double   theta[n_k] = {0.0, M_PI/2.0, M_PI/2.0, 0.0}; // layer orientation

Matrix         T_sigma[n_k] = MAT3_NK,
               T_sigma_inv[n_k] = MAT3_NK,
               T_eps[n_k] = MAT3_NK;
               // transformation matrices

// stress & strain

```

```

Vector      eps(3);                // strain in xy-direction
Vector      sigma[n_k] = VEC3_NK,  // stress in xy-Richtung
            sigma_12[n_k] = VEC3_NK, // stress in 12-Richtung
            sigma_12_old[n_k] = VEC3_NK;

Matrix      S[n_k] = MAT3_NK,
            S_inv[n_k] = MAT3_NK;    // compliance Matrix

Vector      H[n_k] = VEC3_NK,
            H_b[n_k] = VEC3_NK;     // hereditary vectors
Matrix      H_a[n_k] = MAT3_NK;     // hereditary matrix

// traverse creep properties

const       int nn = 6;

const double D_t[nn] = {1.381e-6, 1.371e-6, 2.380e-6,
                       3.887e-6, 5.995e-6, 12.93e-6}, // [MPa]^-1
            D_ft = 1.03e-10, // [MPa]^-1
            lambda_t[nn] = {1.861, 0.1128, 0.01184, 0.001523,
                           0.0002430, 0.0000368};

double      Gamma_t[nn];

// shear creep properties

const double D_s[nn] = {3.331e-6, 2.661e-6, 4.229e-6,
                       6.303e-6, 9.136e-6, 18.15e-6}, // [MPa]^-1
            D_fs = 1.362e-10, // [MPa]^-1
            lambda_s[nn] = {2.097, 0.1251, 0.01309,
                           0.001682, 0.000267, 0.00003955};

double      Gamma_s[nn];

// elastic properties

const double E_1 = 132200;          // [MPa]
const double E_2 = 9434;            // [MPa]
const double nu_12 = 0.273;         // []
const double nu_23 = 0.273;         // []
const double G = 6410;              // [MPa]

// auxiliary values for viscoelasticity

double      q_r[n_k][nn][2], q_f[n_k][nn][2],
            q_r_old[n_k][nn][2], q_f_old[n_k][nn][2];

// hygrothermal properties

```

```

Vector      alpha(3);           // thermal expansion coefficient
Vector      eps_T(3);          // thermal strain
double      delta_T;           // temperature load

Vector      beta(3);           // hygroscopic expansion coefficient
Vector      eps_M(3);          // moisture strain
double      delta_M;           // moisture load

Vector      Theta(3);          // hygrothermal strain

// CLT values

Vector      kappa(3);          // curvature

Vector      N(3), N_star(3);    // in-plane forces
Vector      M(3), M_star(3);    // moments

Matrix      A(3,3), B(3,3), D(3,3); // CLT matrices

// time

double      t, t_old, xi, dt, dxi, xi_t, xi_s, dxi_t, dxi_s, log_t;
const double TMAX = 10.0, LOGTMIN = -1.0, LOGTMAX = 6.0, DLOG_T = 0.01;

// dummies
double      s, sum, d, cc, sc, ss;
int         i, j, l, k, r;
Matrix      mat1(3,3), mat2(3,3), mat3(3,3);
Vector      vec1(3), vec2(3), vec3(3);

main()
{
    // dt = 0.001;
    // dxi = dxi_t = dxi_s = dt;

    // transformation matrices from laminate topology

    for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
    {
        cc = cos(theta[k]) * cos(theta[k]);
        sc = sin(theta[k]) * cos(theta[k]);
        ss = sin(theta[k]) * sin(theta[k]);

        T_sigma[k].SetElem(0, 0, cc);           // T_11
        T_sigma[k].SetElem(0, 1, ss);           // T_12
        T_sigma[k].SetElem(0, 2, 2.0 * sc);     // T_16

        T_sigma[k].SetElem(1, 0, ss);           // T_21
        T_sigma[k].SetElem(1, 1, cc);           // T_22
    }
}

```

```

    T_sigma[k].SetElem(1, 2, - 2.0 * sc);          // T_26

    T_sigma[k].SetElem(2, 0, - sc);              // T_61
    T_sigma[k].SetElem(2, 1, sc);                // T_62
    T_sigma[k].SetElem(2, 2, cc - ss);          // T_66

    T_sigma_inv[k] = T_sigma[k].Inverse();

    T_eps[k].SetElem(0, 0, cc);                  // T_11
    T_eps[k].SetElem(0, 1, ss);                  // T_12
    T_eps[k].SetElem(0, 2, sc);                  // T_16

    T_eps[k].SetElem(1, 0, ss);                  // T_21
    T_eps[k].SetElem(1, 1, cc);                  // T_22
    T_eps[k].SetElem(1, 2, - sc);                // T_26

    T_eps[k].SetElem(2, 0, - 2.0 * sc);         // T_61
    T_eps[k].SetElem(2, 1, 2.0 * sc);           // T_62
    T_eps[k].SetElem(2, 2, cc - ss);           // T_66
}

alpha.SetElem(0, 0.0);
alpha.SetElem(1, 3.0e-5);
alpha.SetElem(2, 0.0);

delta_T = - 100.0;

eps_T = alpha * delta_T;
eps_M.Clear();

Theta = eps_T + eps_M;

for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
{
    sigma_12_old[k].Clear();

    for (r = 0; r < nn; r++)
    {
        q_r_old[k][r][0] = q_r_old[k][r][1] = 0.0;
    }
}

// logarithmic time scale

t = pow(10, LOGTMIN - DLOG_T);
for (log_t = LOGTMIN; log_t < LOGTMAX; log_t += DLOG_T)
{
    t_old = t;
    t = pow(10, log_t);
}

```

```

dt = t - t_old;

// xi (t)

xi = xi_t = xi_s = t;
dxi = dxi_t = dxi_s = dt;

for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
{
    // Gamma

    for (r = 0; r < nn; r++)
    {
        Gamma_t[r] = (1 - exp(- lambda_t[r] * dxi_t)) /
            (lambda_t[r] * dxi_t);

        Gamma_s[r] = (1 - exp(- lambda_s[r] * dxi_s)) /
            (lambda_s[r] * dxi_s);
    }

    // S

    S[k].SetElem(0, 0, 1.0 / E_1);           // S_11
    S[k].SetElem(0, 1, -nu_12 / E_1);       // S_12
    S[k].SetElem(1, 0, -nu_12 / E_1);       // S_21

    sum = 0.0;
    if (t > 0.0)
    {
        for (r = 0; r < nn; r++)
        {
            sum += D_t[r] * (1 - Gamma_t[r]);
        }
    }
    S[k].SetElem(1, 1, 1.0 / E_2 + sum);     // S_22

    S[k].SetElem(2, 0, 0.0);               // S_61
    S[k].SetElem(0, 2, 0.0);               // S_16
    S[k].SetElem(2, 1, 0.0);               // S_62
    S[k].SetElem(1, 2, 0.0);               // S_26

    sum = 0.0;
    if (t > 0.0)
    {
        for (r = 0; r < nn; r++)
        {
            sum += D_s[r] * (1 - Gamma_s[r]);
        }
    }
}

```

```

    }
    S[k].SetElem(2, 2, 1.0 / G + sum);           // S_66

    S_inv[k] = S[k].Inverse();

    // H_a

    H_a[k].SetElem(0, 0, 0.0);                 // H_a_11
    H_a[k].SetElem(0, 1, 0.0);                 // H_a_12
    H_a[k].SetElem(0, 2, 0.0);                 // H_a_16

    H_a[k].SetElem(1, 0, 0.0);                 // H_a_21
    H_a[k].SetElem(1, 2, 0.0);                 // H_a_26

    H_a[k].SetElem(2, 0, 0.0);                 // H_a_61
    H_a[k].SetElem(2, 1, 0.0);                 // H_a_62

    for (sum = 0.0, r = 0; r < nn; r++)
    {
        sum += D_t[r] * Gamma_t[r];
    }
    H_a[k].SetElem(1, 1, sum);                 // H_a_22

    for (sum = 0.0, r = 0; r < nn; r++)
    {
        sum += D_s[r] * Gamma_s[r];
    }
    H_a[k].SetElem(2, 2, sum);                 // H_a_66

    // H_b

    H_b[k].SetElem(0, 0.0);                     // H_b_1
    for (sum = 0.0, r = 0; r < nn; r++)
    {
        sum += D_t[r] * exp(- lambda_t[r] * dxi_t)
            * q_r_old[k][r][0];
    }
    H_b[k].SetElem(1, - sum);                   // H_b_2
    for (sum = 0.0, r = 0; r < nn; r++)
    {
        sum += D_s[r] * exp(- lambda_s[r] * dxi_s)
            * q_r_old[k][r][1];
    }
    H_b[k].SetElem(2, - sum);                   // H_b_6

    // H

```

```

        H[k] = H_a[k] * sigma_12_old[k] + H_b[k];
    }

    // CLT-matrices

    A.Clear();
    B.Clear();
    D.Clear();

    N_star.Clear();
    M_star.Clear();

    N.Clear();      // No external force
    M.Clear();      // No external moment

    kappa.Clear();

    for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
    {
        mat1 = T_sigma_inv[k] * S_inv[k];

        mat2 = mat1 * T_eps[k];

        A += mat2 * (z_k[k+1] - z_k[k]);

        B += mat2 * ((z_k[k+1]*z_k[k+1] - z_k[k]*z_k[k]) / 2.0);

        vec1 = mat1 * (H[k] + Theta);

        N_star += vec1 * (z_k[k+1] - z_k[k]);

        D += mat2 * ((z_k[k+1]*z_k[k+1]*z_k[k+1]
                    - z_k[k]*z_k[k]*z_k[k]) / 3.0);

        M_star += vec1 * ((z_k[k+1]*z_k[k+1] - z_k[k]*z_k[k]) / 2.0);
    } // end k

    // solve:
    // A * eps + B * kappa = N + N_star
    // B * eps + D * kappa = M + M_star
    //
    // here:
    // kappa = N = M = M_star = 0

    eps = A.Inverse() * (N + N_star);

    for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
    {

```

```

mat1 = T_sigma_inv[k] * S_inv[k];
mat2 = mat1 * T_eps[k];

sigma[k] = mat2 * (eps + (z_k[k+1] + z_k[k])/2.0 * kappa)
           - mat1 * (H[k] + Theta);

sigma_12[k] = T_sigma[k] * sigma[k];

for (r = 0; r < nn; r++)
{
    q_r[k][r][0] = exp(- lambda_t[r] * dxi_t)
                  * q_r_old[k][r][0] + Gamma_t[r] *
                  (sigma_12[k].Elem(1) - sigma_12_old[k].Elem(1)); // q_r_2

    q_r[k][r][1] = exp(- lambda_s[r] * dxi_s)
                  * q_r_old[k][r][1] + Gamma_s[r] *
                  (sigma_12[k].Elem(2) - sigma_12_old[k].Elem(2)); // q_r_6
}
}

cout << t << '\t' << eps[0] << '\t' << eps[1] << '\t' << eps[2] << '\t';

for (k = 0; k < n_k; k++) // for each layer
{
    sigma_12_old[k] = sigma_12[k];

    for (r = 0; r < nn; r++)
    {
        q_r_old[k][r][0] = q_r[k][r][0];
        q_r_old[k][r][1] = q_r[k][r][1];
    }
}

cout << sigma[0].Elem(0) << '\t' << sigma[0].Elem(1)
      << '\t' << sigma[0].Elem(2) << '\n';
} // end log_t
}

```

Anhang C

Berechnung der viskoelastischen Verbundeigenschaften mit MAPLE

Exemplarische Berechnung der Verbundkennwerte mit der Self-Consistent-Method fuer Al-Partikel in einer Harzmatrix

```
> readlib(laplace):
```

shear-compliance des Harzes

```
> bt[1] := 200 + 15 * (1 - exp(- 0.5 * t)) +  
> 25 * (1 - exp(- 0.004 * t)) + 80 * (1 - exp(- 0.0001 * t));  
bt1 := 320 - 15 e(-0.5 t) - 25 e(-0.004 t) - 80 e(-0.0001 t)
```

Carson-transformierte der shear-compliance des Harzes

```
> beta[1] := laplace(bt[1],t,s) * s;  
β1 := 40.  $\frac{.25000000 10^8 s^3 + .13553500 10^8 s^2 + 61859. s + 8.}{(2. s + 1.) (250. s + 1.) (10000. s + 1.)}$ 
```

bulk-compliance des Harzes

```
> at[1] := 20 + 1.2 * (1 - exp(- 0.4 * t)) +  
> 2.4 * (1 - exp(- 0.005 * t)) + 8 * (1 - exp(- 0.0001 * t));  
at1 := 31.6 - 1.2 e(-0.4 t) - 2.4 e(-0.005 t) - 8 e(-0.0001 t)
```

Carson-transformierte der bulk-compliance des Harzes

```
> alpha[1] := laplace(at[1],t,s) * s;
alpha_1 := .8000000000  $\frac{.2500000000 10^9 s^3 + .1074350000 10^9 s^2 + 604790. s + 79.}{(5. s + 2.) (200. s + 1.) (10000. s + 1.)}$ 
```

shear-compliance des Aluminiums

```
> bt[2] := 10; beta[2] := bt[2];
      bt_2 := 10
      beta_2 := 10
```

Kompressionsmodul des Aluminiums

```
> at[2] := 1.5; alpha[2] := at[2];
      at_2 := 1.5
      alpha_2 := 1.5
```

Volumenkonzentrationen

```
> c[1] := 0.8; c[2] := 1- c[1];
      c_1 := .8
      c_2 := .2
```

Gleichung fuer Self-Consistent-Method

```
> f := '(c[1] * alpha[1] ) / ( alpha[1] + 1/3 * beta[0](s) ) +
> (c[2] * alpha[2] ) / ( alpha[2] + 1/3 * beta[0](s) ) +
> 5 * ( (c[1] * beta[2] ) / (beta[0](s) - beta[2]) +
> (c[2] * beta[1] ) / (beta[0](s) - beta[1]) ) + 2';
      f :=  $\frac{c_1 \alpha_1}{\alpha_1 + \frac{1}{3} \beta_0(s)} + \frac{c_2 \alpha_2}{\alpha_2 + \frac{1}{3} \beta_0(s)} + 5 \frac{c_1 \beta_2}{\beta_0(s) - \beta_2} + 5 \frac{c_2 \beta_1}{\beta_0(s) - \beta_1} + 2$ 
```

```

> g := numer(f);
g := (5. s + 2.) (200. s + 1.) (10000. s + 1.) (2. s + 1.) (250. s + 1.) (
- .1425294520 1017 s3 - .3776823466 1014 s2 - .9336173760 1010 s
- 216993.3332 β0(s) - .6000000000 1019 s6 - .5831280000 1019 s5
- .1427236581 1019 s4 - 14096.53334 β0(s)2 - 5.48000000 β0(s)3
+ .4444444444 β0(s)4 - .5173107281 1016 β0(s) s3 - .1367115509 1014 β0(s) s2
- .3359513288 1010 β0(s) s - .3493209816 1015 β0(s)2 s3
- .9171084799 1012 β0(s)2 s2 - .2218834064 109 β0(s)2 s
- .1503833333 1018 β0(s)2 s6 - .1455369266 1018 β0(s)2 s5
- .3538764020 1017 β0(s)2 s4 - .2191666667 1019 β0(s) s6
- .2127158000 1019 β0(s) s5 - .5196661970 1018 β0(s) s4
- .11666666 1014 β0(s)3 s6 - .298766670 1014 β0(s)3 s5
- .8077109180 1013 β0(s)3 s4 - .7348428785 1011 β0(s)3 s3
- .290790288 109 β0(s)3 s2 - 83152.260 β0(s)3 s + .1111111111 1014 β0(s)4 s6
+ .1010222222 1014 β0(s)4 s5 + .2314464554 1013 β0(s)4 s4
+ .2066258988 1011 β0(s)4 s3 + .4850756888 108 β0(s)4 s2
+ 9090.888888 β0(s)4 s - 606720.0000)

```

Auflösen der Gleichung nach beta[0]

```

> lsg := solve(g = 0, beta[0](s));
lsg := -.2500000000 %4 + .1666666667  $\frac{\sqrt{\%2}}{\%3}$  + .1666666667 ((
.1253232725 1051 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s12 + .1703299660 1029 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s
- .6944444443 1046  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s12 - .2656217202 1046  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s9
- .8633668467 1046  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s10 - .1262777777 1047  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s11
- .5435208801 1043  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s7 - .3248606400 1045  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s8
- .1536032339 1036  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s4 - .3665612274 1041  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s6
- .1151254161 1039  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s5 - .5064303287 1032  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s3
- .7074118112 1028  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s2 - .4545444444 1024  $\sqrt{\%2}$  %12/3 s
+ .2334223301 1033 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s2 + .1467398812 1037 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s3
+ .4437506408 1062 %11/3 s7 + .2065375762 1065 %11/3 s8
+ .2755989876 1043 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s5 + .5733831214 1052 %11/3 s4
+ .6636234432 1049 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s8 + .2784237451 1040 %11/3 s
+ .8752061332 1069 %11/3 s10 + .2346989339 1056 %11/3 s5
+ .8298309631 1045 %11/3  $\sqrt{\%2}$  s6 + .5540515099 1067 %11/3 s9

```

$$\begin{aligned}
 & + .3924877964 10^{40} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^4 + .6413449956 10^{44} \%1^{1/3} s^2 \\
 & + .5066710016 10^{35} \%1^{1/3} + .7977906245 10^{48} \%1^{1/3} s^3 \\
 & + .5261281104 10^{50} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^9 + .7756579616 10^{71} \%1^{1/3} s^{11} \\
 & + .4975450889 10^{59} \%1^{1/3} s^6 + .3257966224 10^{73} \%1^{1/3} s^{12} \\
 & + .1658928507 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{10} + .1167353480 10^{48} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & + .2352408176 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{11} - .2503597717 10^{40} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .5038425186 10^{75} \%1^{1/3} s^{15} + .7969954154 10^{75} \%1^{1/3} s^{16} \\
 & + .6732155465 10^{75} \%1^{1/3} s^{17} + .3550381252 10^{74} \%1^{1/3} s^{13} \\
 & + .1806240999 10^{75} \%1^{1/3} s^{14} + .2365228666 10^{75} \%1^{1/3} s^{18} \\
 & - .1111111111 10^{20} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} - .1499349611 10^{51} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & - .8111813897 10^{52} \sqrt{\%2} s^8 - .5982829535 10^{43} \sqrt{\%2} s^4 \\
 & - .3941402124 10^{46} \sqrt{\%2} s^5 - .1122855846 10^{49} \sqrt{\%2} s^6 \\
 & - .3768895249 10^{32} \sqrt{\%2} s - .4516447162 10^{36} \sqrt{\%2} s^2 \\
 & + .4707290496 10^{24} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} - .1906163801 10^{54} \sqrt{\%2} s^{10} \\
 & - .1358652413 10^{54} \sqrt{\%2} s^{12} - .6230207757 10^{53} \sqrt{\%2} s^9 \\
 & - .2624806417 10^{54} \sqrt{\%2} s^{11} - .1199431511 10^{28} \sqrt{\%2}) / \left(\sqrt{\%2} \%1^{1/3} \right)^{1/2} / (\%3 \\
 &), - .2500000000 \%4 + .1666666667 \frac{\sqrt{\%2}}{\%3} - .1666666667 ((\\
 & .1253232725 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{12} + .1703299660 10^{29} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s \\
 & - .6944444443 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{12} - .2656217202 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^9 \\
 & - .8633668467 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{10} - .1262777777 10^{47} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{11} \\
 & - .5435208801 10^{43} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^7 - .3248606400 10^{45} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^8 \\
 & - .1536032339 10^{36} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^4 - .3665612274 10^{41} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^6 \\
 & - .1151254161 10^{39} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^5 - .5064303287 10^{32} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^3 \\
 & - .7074118112 10^{28} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^2 - .4545444444 10^{24} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s \\
 & + .2334223301 10^{33} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^2 + .1467398812 10^{37} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .4437506408 10^{62} \%1^{1/3} s^7 + .2065375762 10^{65} \%1^{1/3} s^8 \\
 & + .2755989876 10^{43} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^5 + .5733831214 10^{52} \%1^{1/3} s^4 \\
 & + .6636234432 10^{49} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^8 + .2784237451 10^{40} \%1^{1/3} s \\
 & + .8752061332 10^{69} \%1^{1/3} s^{10} + .2346989339 10^{56} \%1^{1/3} s^5 \\
 & + .8298309631 10^{45} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^6 + .5540515099 10^{67} \%1^{1/3} s^9 \\
 & + .3924877964 10^{40} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^4 + .6413449956 10^{44} \%1^{1/3} s^2 \\
 & + .5066710016 10^{35} \%1^{1/3} + .7977906245 10^{48} \%1^{1/3} s^3 \\
 & + .5261281104 10^{50} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^9 + .7756579616 10^{71} \%1^{1/3} s^{11} \\
 & + .4975450889 10^{59} \%1^{1/3} s^6 + .3257966224 10^{73} \%1^{1/3} s^{12} \\
 & + .1658928507 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{10} + .1167353480 10^{48} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & + .2352408176 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{11} - .2503597717 10^{40} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .5038425186 10^{75} \%1^{1/3} s^{15} + .7969954154 10^{75} \%1^{1/3} s^{16} \\
 & + .6732155465 10^{75} \%1^{1/3} s^{17} + .3550381252 10^{74} \%1^{1/3} s^{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + .1806240999 10^{75} \%1^{1/3} s^{14} + .2365228666 10^{75} \%1^{1/3} s^{18} \\
 & - .1111111111 10^{20} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} - .1499349611 10^{51} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & - .8111813897 10^{52} \sqrt{\%2} s^8 - .5982829535 10^{43} \sqrt{\%2} s^4 \\
 & - .3941402124 10^{46} \sqrt{\%2} s^5 - .1122855846 10^{49} \sqrt{\%2} s^6 \\
 & - .3768895249 10^{32} \sqrt{\%2} s - .4516447162 10^{36} \sqrt{\%2} s^2 \\
 & + .4707290496 10^{24} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} - .1906163801 10^{54} \sqrt{\%2} s^{10} \\
 & - .1358652413 10^{54} \sqrt{\%2} s^{12} - .6230207757 10^{53} \sqrt{\%2} s^9 \\
 & - .2624806417 10^{54} \sqrt{\%2} s^{11} - .1199431511 10^{28} \sqrt{\%2}) / (\sqrt{\%2} \%1^{1/3})^{1/2} / (\%3 \\
 &), -.2500000000 \%4 - .1666666667 \frac{\sqrt{\%2}}{\%3} + .1666666667 (- 1. (\\
 & - .1253232725 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{12} - .1703299660 10^{29} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s \\
 & + .6944444443 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{12} + .2656217202 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^9 \\
 & + .8633668467 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{10} + .1262777777 10^{47} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{11} \\
 & + .5435208801 10^{43} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^7 + .3248606400 10^{45} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^8 \\
 & + .1536032339 10^{36} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^4 + .3665612274 10^{41} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^6 \\
 & + .1151254161 10^{39} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^5 + .5064303287 10^{32} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^3 \\
 & + .7074118112 10^{28} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^2 + .4545444444 10^{24} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s \\
 & - .2334223301 10^{33} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^2 - .1467398812 10^{37} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .4437506408 10^{62} \%1^{1/3} s^7 + .2065375762 10^{65} \%1^{1/3} s^8 \\
 & - .2755989876 10^{43} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^5 + .5733831214 10^{52} \%1^{1/3} s^4 \\
 & - .6636234432 10^{49} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^8 + .2784237451 10^{40} \%1^{1/3} s \\
 & + .8752061332 10^{69} \%1^{1/3} s^{10} + .2346989339 10^{56} \%1^{1/3} s^5 \\
 & - .8298309631 10^{45} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^6 + .5540515099 10^{67} \%1^{1/3} s^9 \\
 & - .3924877964 10^{40} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^4 + .6413449956 10^{44} \%1^{1/3} s^2 \\
 & + .5066710016 10^{35} \%1^{1/3} + .7977906245 10^{48} \%1^{1/3} s^3 \\
 & - .5261281104 10^{50} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^9 + .7756579616 10^{71} \%1^{1/3} s^{11} \\
 & + .4975450889 10^{59} \%1^{1/3} s^6 + .3257966224 10^{73} \%1^{1/3} s^{12} \\
 & - .1658928507 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{10} - .1167353480 10^{48} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & - .2352408176 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{11} + .2503597717 10^{40} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .5038425186 10^{75} \%1^{1/3} s^{15} + .7969954154 10^{75} \%1^{1/3} s^{16} \\
 & + .6732155465 10^{75} \%1^{1/3} s^{17} + .3550381252 10^{74} \%1^{1/3} s^{13} \\
 & + .1806240999 10^{75} \%1^{1/3} s^{14} + .2365228666 10^{75} \%1^{1/3} s^{18} \\
 & + .1111111111 10^{20} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} + .1499349611 10^{51} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & + .8111813897 10^{52} \sqrt{\%2} s^8 + .5982829535 10^{43} \sqrt{\%2} s^4 \\
 & + .3941402124 10^{46} \sqrt{\%2} s^5 + .1122855846 10^{49} \sqrt{\%2} s^6 \\
 & + .3768895249 10^{32} \sqrt{\%2} s + .4516447162 10^{36} \sqrt{\%2} s^2 \\
 & - .4707290496 10^{24} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} + .1906163801 10^{54} \sqrt{\%2} s^{10} \\
 & + .1358652413 10^{54} \sqrt{\%2} s^{12} + .6230207757 10^{53} \sqrt{\%2} s^9 \\
 & + .2624806417 10^{54} \sqrt{\%2} s^{11} + .1199431511 10^{28} \sqrt{\%2}) / (\sqrt{\%2} \%1^{1/3})^{1/2} / (
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \%3), -.2500000000 \%4 - .1666666667 \frac{\sqrt{\%2}}{\%3} - .1666666667 (-1. (\\
 & -.1253232725 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{12} - .1703299660 10^{29} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s \\
 & + .6944444443 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{12} + .2656217202 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^9 \\
 & + .8633668467 10^{46} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{10} + .1262777777 10^{47} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^{11} \\
 & + .5435208801 10^{43} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^7 + .3248606400 10^{45} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^8 \\
 & + .1536032339 10^{36} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^4 + .3665612274 10^{41} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^6 \\
 & + .1151254161 10^{39} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^5 + .5064303287 10^{32} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^3 \\
 & + .7074118112 10^{28} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s^2 + .4545444444 10^{24} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} s \\
 & - .2334223301 10^{33} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^2 - .1467398812 10^{37} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .4437506408 10^{62} \%1^{1/3} s^7 + .2065375762 10^{65} \%1^{1/3} s^8 \\
 & - .2755989876 10^{43} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^5 + .5733831214 10^{52} \%1^{1/3} s^4 \\
 & - .6636234432 10^{49} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^8 + .2784237451 10^{40} \%1^{1/3} s \\
 & + .8752061332 10^{69} \%1^{1/3} s^{10} + .2346989339 10^{56} \%1^{1/3} s^5 \\
 & - .8298309631 10^{45} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^6 + .5540515099 10^{67} \%1^{1/3} s^9 \\
 & - .3924877964 10^{40} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^4 + .6413449956 10^{44} \%1^{1/3} s^2 \\
 & + .5066710016 10^{35} \%1^{1/3} + .7977906245 10^{48} \%1^{1/3} s^3 \\
 & - .5261281104 10^{50} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^9 + .7756579616 10^{71} \%1^{1/3} s^{11} \\
 & + .4975450889 10^{59} \%1^{1/3} s^6 + .3257966224 10^{73} \%1^{1/3} s^{12} \\
 & - .1658928507 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{10} - .1167353480 10^{48} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & - .2352408176 10^{51} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} s^{11} + .2503597717 10^{40} \sqrt{\%2} s^3 \\
 & + .5038425186 10^{75} \%1^{1/3} s^{15} + .7969954154 10^{75} \%1^{1/3} s^{16} \\
 & + .6732155465 10^{75} \%1^{1/3} s^{17} + .3550381252 10^{74} \%1^{1/3} s^{13} \\
 & + .1806240999 10^{75} \%1^{1/3} s^{14} + .2365228666 10^{75} \%1^{1/3} s^{18} \\
 & + .1111111111 10^{20} \sqrt{\%2} \%1^{2/3} + .1499349611 10^{51} \sqrt{\%2} s^7 \\
 & + .8111813897 10^{52} \sqrt{\%2} s^8 + .5982829535 10^{43} \sqrt{\%2} s^4 \\
 & + .3941402124 10^{46} \sqrt{\%2} s^5 + .1122855846 10^{49} \sqrt{\%2} s^6 \\
 & + .3768895249 10^{32} \sqrt{\%2} s + .4516447162 10^{36} \sqrt{\%2} s^2 \\
 & - .4707290496 10^{24} \%1^{1/3} \sqrt{\%2} + .1906163801 10^{54} \sqrt{\%2} s^{10} \\
 & + .1358652413 10^{54} \sqrt{\%2} s^{12} + .6230207757 10^{53} \sqrt{\%2} s^9 \\
 & + .2624806417 10^{54} \sqrt{\%2} s^{11} + .1199431511 10^{28} \sqrt{\%2}) / (\sqrt{\%2} \%1^{1/3})^{1/2} / (\\
 & \%3) \\
 & \%1 := -.1851851852 10^{11} (.9450182206 10^{68} s^{18} + .2740858099 10^{69} s^{17} \\
 & + .3316990850 10^{69} s^{16} + .2150591270 10^{69} s^{15} + .7934169328 10^{68} s^{14} \\
 & + .1611226719 10^{68} s^{13} + .1536407589 10^{67} s^{12} + .3887560335 10^{65} s^{11} \\
 & + .4663946256 10^{63} s^{10} + .3134107262 10^{61} s^9 + .1238816980 10^{59} s^8 \\
 & + .2827332999 10^{56} s^7 + .3404792202 10^{53} s^6 + .1802726714 10^{50} s^5 \\
 & + .5027274965 10^{46} s^4 + .8055264792 10^{42} s^3 + .7502222904 10^{38} s^2 \\
 & + .3791138828 10^{34} s + .8063419577 10^{29} - 3.(-.5402205400 10^{70} s^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - .1967191930 10^{66} s^2 - .4361924771 10^{61} s - .1335688794 10^{83} s^6 \\
 & - .1349827245 10^{79} s^5 - .1007970349 10^{75} s^4 - .2726229533 10^{120} s^{18} \\
 & - .1902871851 10^{110} s^{14} - .2549421201 10^{107} s^{13} - .1210840718 10^{118} s^{17} \\
 & - .4065716475 10^{115} s^{16} - .1023831739 10^{113} s^{15} - .5517995363 10^{90} s^8 \\
 & - .9903018543 10^{86} s^7 - .1550894448 10^{101} s^{11} - .7035488627 10^{97} s^{10} \\
 & - .2296613460 10^{94} s^9 - .2395454183 10^{104} s^{12} - .6589948231 10^{133} s^{26} \\
 & - .7014681012 10^{132} s^{25} - .1412560273 10^{136} s^{30} - .5925092459 10^{135} s^{29} \\
 & - .1836302464 10^{135} s^{28} - .4141455571 10^{134} s^{27} - .4447862674 10^{56} \\
 & - .3226998843 10^{136} s^{32} - .1223721432 10^{135} s^{36} - .4586586496 10^{131} s^{24} \\
 & - .1659765462 10^{130} s^{23} - .3701668045 10^{128} s^{22} - .5920003825 10^{124} s^{20} \\
 & - .4640492505 10^{122} s^{19} - .5552373813 10^{126} s^{21} - .7043878851 10^{135} s^{35} \\
 & - .2494025485 10^{136} s^{31} - .1859502276 10^{136} s^{34} - .2978611850 10^{136} s^{33})^{1/2}) / (\\
 & .1371742112 10^{28} + .2660165842 10^{52} s^6 + .1125374703 10^{49} s^5 \\
 & + .2447845395 10^{45} s^4 + .3030457406 10^{41} s^3 + .2170899589 10^{37} s^2 \\
 & + .8417489709 10^{32} s + .2685814640 10^{67} s^{13} + .5846193413 10^{68} s^{17} \\
 & + .6654748260 10^{68} s^{16} + .4058411004 10^{68} s^{15} + .1267351346 10^{58} s^8 \\
 & + .2558675010 10^{55} s^7 + .5497936913 10^{64} s^{11} + .5946996319 10^{62} s^{10} \\
 & + .3588943445 10^{60} s^9 + .2395824037 10^{66} s^{12} + .1407967728 10^{68} s^{14} \\
 & + .2143347050 10^{68} s^{18}) \\
 \%2 := (.2503597717 10^{40} s^3 + .5836767401 10^{47} \%1^{1/3} s^7 + .4516447162 10^{36} s^2 \\
 & + .3768895249 10^{32} s + .7074118112 10^{28} \%1^{2/3} s^2 + .3318117216 10^{49} \%1^{1/3} s^8 \\
 & + .1962438982 10^{40} \%1^{1/3} s^4 + .1122855846 10^{49} s^6 + .3941402124 10^{46} s^5 \\
 & + .5982829535 10^{43} s^4 + .8516498301 10^{28} \%1^{1/3} s + .5064303287 10^{32} \%1^{2/3} s^3 \\
 & + .8294642534 10^{50} \%1^{1/3} s^{10} + .1377994938 10^{43} \%1^{1/3} s^5 \\
 & + .1111111111 10^{20} \%1^{2/3} + .8111813897 10^{52} s^8 + .1499349611 10^{51} s^7 \\
 & + .2624806417 10^{54} s^{11} + .1906163801 10^{54} s^{10} + .6230207757 10^{53} s^9 \\
 & + .1358652413 10^{54} s^{12} + .2630640552 10^{50} \%1^{1/3} s^9 \\
 & + .5435208801 10^{43} \%1^{2/3} s^7 + .1167111650 10^{33} \%1^{1/3} s^2 + .1199431511 10^{28} \\
 & + .1262777777 10^{47} \%1^{2/3} s^{11} + .2353645248 10^{24} \%1^{1/3} \\
 & + .7336994058 10^{36} \%1^{1/3} s^3 + .1151254161 10^{39} \%1^{2/3} s^5 \\
 & + .3248606400 10^{45} \%1^{2/3} s^8 + .6944444443 10^{46} \%1^{2/3} s^{12} \\
 & + .8633668467 10^{46} \%1^{2/3} s^{10} + .2656217202 10^{46} \%1^{2/3} s^9 \\
 & + .3665612274 10^{41} \%1^{2/3} s^6 + .4545444444 10^{24} \%1^{2/3} s \\
 & + .1176204088 10^{51} \%1^{1/3} s^{11} + .4149154815 10^{45} \%1^{1/3} s^6 \\
 & + .1536032339 10^{36} \%1^{2/3} s^4 + .6266163626 10^{50} \%1^{1/3} s^{12}) / \%1^{1/3} \\
 \%3 := .2777777778 10^{23} s^6 + .2525555555 10^{23} s^5 + .5786161385 10^{22} s^4 \\
 & + .5165647470 10^{20} s^3 + .1212689222 10^{18} s^2 + .2272722222 10^{14} s \\
 & + .1111111111 10^{10} \\
 \%4 := (-5.480000000 - .1166666600 10^{14} s^6 - .2987666700 10^{14} s^5 \\
 & - .8077109180 10^{13} s^4 - .7348428785 10^{11} s^3 - .290790288 10^9 s^2 \\
 & - 83152.26000 s) / (.4444444444 + .1111111111 10^{14} s^6 + .1010222222 10^{14} s^5
 \end{aligned}$$

```

+ .2314464554 1013 s4 + .2066258988 1011 s3 + .4850756888 108 s2
+ 9090.888888 s)

```

Feststellen der positiven Loesung

```

> seq(subs(s = 0, lsg[i]), i=1..4);
191.4815274 + .785970908 10-9 I, -3.66883845 - .9356153570 10-8 I,
-11.87730082 - .2194421177 10-8 I, -163.6053881 + .1076460384 10-7 I

```

```

> u := lsg[1]:

```

Definition von 16 Retardierungszeiten

```

> l := [seq( evalf(10^((i-14)/3)), i=0..15)];
l := [.00002154434690, .00004641588834, .00010000000000, .0002154434690,
.0004641588834, .00100000000000, .002154434690, .004641588834,
.010000000000, .02154434690, .04641588834, .100000000000, .2154434690,
.4641588834, 1., 2.154434690]

```

```

> with(linalg):
Warning: new definition for norm
Warning: new definition for trace

```

Berechnung der Matrix zur inversen Carson-Transformation

```

> A := matrix(16,16, (n,m) -> l[n] / (l[n] + l[m] ));

```

Berechnung des Grenzwertes fuer t gegen Unendlich

```

> bt0 := Re(subs(s = 0, u));
bt0 := 191.4815274

```

Berechnung der rechten Seite

```

> r := vector(16, (n) -> evalf(Re(subs (s = l[n], u)) - bt0));
r := [-8.0791374 - 14.4785657 - 22.9306447 - 31.5825579 - 38.6531046
-43.9208708 - 48.1620128 - 51.9003093 - 55.0077376 - 57.2685486
-58.8530947 - 60.1829701 - 61.6361614 - 63.3104246 - 64.9438219
-66.1976147]

```

Berechnung der Koeffizienten zur Dirichlet-Serie

```
> x := linsolve(A,r);
x := [-.00453715 .0320078004 - 45.14429791 - .093541433 - .113448682
      .50181864 - 2.049912598 - 14.39227548 3.17948670 - 2.377664309
      2.138667511 - 2.071406423 2.197665980 - 9.593407623 .103728494
      -.1376387170]
```

Aufstellen der Naehungsfunktion im Originalraum

```
> bt[0] := bt0 + sum (x['i'] * exp( - l['i'] * t ), 'i' = 1..16);
bt0 := 191.4815274 - .00453715 e(-.00002154434690 t) + .0320078004 e(-.00004641588834 t)
      - 45.14429791 e(-.0001000000000 t) - .093541433 e(-.0002154434690 t)
      - .113448682 e(-.0004641588834 t) + .50181864 e(-.001000000000 t)
      - 2.049912598 e(-.002154434690 t) - 14.39227548 e(-.004641588834 t)
      + 3.17948670 e(-.01000000000 t) - 2.377664309 e(-.02154434690 t)
      + 2.138667511 e(-.04641588834 t) - 2.071406423 e(-.1000000000 t)
      + 2.197665980 e(-.2154434690 t) - 9.593407623 e(-.4641588834 t) + .103728494 e(-1. t)
      - .1376387170 e(-2.154434690 t)
```

```
> v := laplace(bt[0],t,s)*s;
v := .2000000000 10-8(.1455604424 10122 s3 + .1415774893 10118 s2
      + .5430373160 10113 s + .1398243144 10132 s6 + .1421624648 10129 s5
      + .6693456594 10125 s4 + .1013708824 10144 s14 + .5333183911 10143 s13
      + .1932137066 10143 s16 + .7836785553 10143 s15 + .1327936593 10137 s8
      + .6341783463 10134 s7 + .1258268255 10142 s11 + .5943746243 10140 s10
      + .1301539298 10139 s9 + .1220107782 10143 s12 + .6445850707 10108) / (
      (.1000000000 1014 s + .215443469 109)
      (.5000000000 1014 s + .2320794417 1010) (10000. s + 1.)
      (.1000000000 1013 s + .215443469 109)
      (.5000000000 1013 s + .2320794417 1010) (1000. s + 1.)
      (.1000000000 1012 s + .215443469 109)
      (.5000000000 1012 s + .2320794417 1010) (100. s + 1.)
      (.1000000000 1011 s + .215443469 109)
      (.5000000000 1011 s + .2320794417 1010) (10. s + 1.)
      (.1000000000 1010 s + .215443469 109)
      (.5000000000 1010 s + .2320794417 1010) (s + 1.)
      (.1000000000 109 s + .215443469 109))
```

Berechnung der Carson-transformierten des Kompressionsmodul

```
> alpha[0] := '( alpha[1] * alpha[2] +
> 1/3 * v * (c[1] * alpha[1] + c[2] * alpha[2] ) ) /
> ( c[1] * alpha[2] + c[2] * alpha[1] + 1/3 * v )';
```

$$\alpha_0 := \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{3} v (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)}{c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1 + \frac{1}{3} v}$$

```
> at0 := Re(subs (s=0, alpha[0]));
at0 := 23.54822231
```

```
> alpha[0] := normal(alpha[0]);
```

$$\begin{aligned} \alpha_0 := & (.8986671990 10^{25} s^3 + .6449408792 10^{21} s^2 + .2081253793 10^{17} s \\ & + .4683536235 10^{36} s^6 + .2390532907 10^{33} s^5 + .6377769844 10^{29} s^4 \\ & + .9834522032 10^{53} s^{18} + .7502598819 10^{52} s^{14} + .7121791361 10^{51} s^{13} \\ & + .1531914261 10^{54} s^{17} + .1099994774 10^{54} s^{16} + .4003925724 10^{53} s^{15} \\ & + .2453300386 10^{42} s^8 + .4718210550 10^{39} s^7 + .8098318347 10^{48} s^{11} \\ & + .1008901637 10^{47} s^{10} + .6757448206 10^{44} s^9 + .3379266794 10^{50} s^{12} \\ & + .2193338945 10^{53} s^{19} + .2262289942 10^{12}) / ((.2216146867 10^{24} s^3 \\ & + .2128334414 10^{20} s^2 + .8115399004 10^{15} s + .2522686014 10^{34} s^6 \\ & + .2328182335 10^{31} s^5 + .1044200784 10^{28} s^4 + .1450591377 10^{48} s^{18} \\ & + .2547890018 10^{48} s^{14} + .4724577383 10^{47} s^{13} + .6468447349 10^{48} s^{17} \\ & + .9986691526 10^{48} s^{16} + .7086938581 10^{48} s^{15} + .3922130267 10^{39} s^8 \\ & + .1374047426 10^{37} s^7 + .2089153803 10^{45} s^{11} + .4938013836 10^{43} s^{10} \\ & + .6025034946 10^{41} s^9 + .4445309716 10^{46} s^{12} + .9607051911 10^{10}) \\ & (10000. s + 1.)) \end{aligned}$$

```
> at[0] := invlaplace(eval(alpha[0]/s), s, t);
```

$$\begin{aligned} at_0 := & -5.784913928 e^{(-.0001000000000 t)} + 23.54822232 - .001172574359 e^{(-2.1566040182812 t)} \\ & + .0009068651600 e^{(-.99920867575527 t)} - .04130813428 e^{(-.49656263158141 t)} \\ & - .8532605081 e^{(-.40135822771470 t)} + .01923374273 e^{(-.21242286207619 t)} \\ & - .01762079544 e^{(-.10138991637880 t)} + .01804458424 e^{(-.045747604727629 t)} \\ & - .01953712766 e^{(-.021899535845604 t)} + .02498096014 e^{(-.0097659864076680 t)} \\ & - .2712791924 e^{(-.0052407283210075 t)} - 1.474798874 e^{(-.0049241208328057 t)} \\ & - .01791283055 e^{(-.0021798807654280 t)} + .004245228028 e^{(-.00099695010428915 t)} \\ & - .0009568787967 e^{(-.00046450555932453 t)} - .0007074586225 e^{(-.00021560899145545 t)} \\ & - .01213083253 e^{(-.00013030403643481 t)} + .0003179427714 e^{(-.000046410118971953 t)} \\ & - .00004378217920 e^{(-.000021544776008593 t)} \end{aligned}$$

Spannungskonzentrationsfaktoren: $\text{signal} = B1 * \text{sigma}$

```
> B1[1] := normal(1/c[1] * (alpha[0] - alpha[2]) / (alpha[1] - alpha[2]));
```

$$\begin{aligned}
 B1_1 := & 1.250000000(200. s + 1.) (5. s + 2.) (.8334999798 10^{25} s^3 \\
 & + .6008427645 10^{21} s^2 + .1945112230 10^{17} s + .4296468595 10^{36} s^6 \\
 & + .2198980054 10^{33} s^5 + .5888717696 10^{29} s^4 + .8864233171 10^{53} s^{18} \\
 & + .6793530028 10^{52} s^{14} + .6454286217 10^{51} s^{13} + .1382104185 10^{54} s^{17} \\
 & + .9936757152 10^{53} s^{16} + .3621635917 10^{53} s^{15} + .2241310077 10^{42} s^8 \\
 & + .4319196936 10^{39} s^7 + .7354482541 10^{48} s^{11} + .9177854107 10^{46} s^{10} \\
 & + .6160091114 10^{44} s^9 + .3065226927 10^{50} s^{12} + .2118184163 10^{12} \\
 & + .1975750238 10^{53} s^{19}) / (\\
 & (.185000000 10^9 s^3 + .79871500 10^8 s^2 + 453224.5000 s + 60.20000000) (\\
 & .2216146867 10^{24} s^3 + .2128334414 10^{20} s^2 + .8115399004 10^{15} s \\
 & + .2522686014 10^{34} s^6 + .2328182335 10^{31} s^5 + .1044200784 10^{28} s^4 \\
 & + .1450591377 10^{48} s^{18} + .2547890018 10^{48} s^{14} + .4724577383 10^{47} s^{13} \\
 & + .6468447349 10^{48} s^{17} + .9986691526 10^{48} s^{16} + .7086938581 10^{48} s^{15} \\
 & + .3922130267 10^{39} s^8 + .1374047426 10^{37} s^7 + .2089153803 10^{45} s^{11} \\
 & + .4938013836 10^{43} s^{10} + .6025034946 10^{41} s^9 + .4445309716 10^{46} s^{12} \\
 & + .9607051911 10^{10})
 \end{aligned}$$

```
> B1[2] := normal(1/c[1] * (v - beta[2]) / (beta[1] - beta[2]));
```

```
> B2[1] := normal(1/c[2] * (alpha[0] - alpha[1]) / (alpha[2] - alpha[1]));
```

```
> B2[2] := normal(1/c[2] * (v - beta[1]) / (beta[2] - beta[1]));
```

```
> B1t[1] := invlaplace(eval(B1[1] / s), s, t);
```

$$\begin{aligned}
 B1t_1 := & .9156238502 + .6955442214 10^{-7} e^{(-.42598862736129 t)} \\
 & + .1221522816 10^{-6} e^{(-.0056131217032655 t)} - .1978681077 10^{-6} e^{(-.00013608877328124 t)} \\
 & - .00008044452430 e^{(-2.1566040182812 t)} + .00006410500354 e^{(-.99920867575527 t)} \\
 & - .003823994163 e^{(-.49656263158141 t)} + .003184433690 e^{(-.40135822771470 t)} \\
 & + .001145007033 e^{(-.21242286207619 t)} - .001102674699 e^{(-.10138991637880 t)} \\
 & + .001154163725 e^{(-.045747604727629 t)} - .001283804748 e^{(-.021899535845604 t)} \\
 & + .001822963681 e^{(-.0097659864076680 t)} + .01119565715 e^{(-.0052407283210075 t)} \\
 & - .01037449571 e^{(-.0049241208328057 t)} - .0009496829225 e^{(-.0021798807654280 t)} \\
 & + .0002433070157 e^{(-.00099695010428915 t)} - .00005933831157 e^{(-.00046450555932453 t)} \\
 & - .00005785633890 e^{(-.00021560899145545 t)} + .003580906818 e^{(-.00013030403643481 t)} \\
 & + .00001072674833 e^{(-.000046410118971953 t)} - .1693799165 10^{-5} e^{(-.000021544776008593 t)}
 \end{aligned}$$

```
> B1t[2] := invlaplace(eval(B1[2] / s), s, t):
```

```
> B2t[1] := invlaplace(eval(B2[1] / s), s, t);
B2t1 := 1.337504599 + .00002114119973 e(- .42598862736129 t)
+ .4603547793 10-5 e(- .0056131217032655 t) + .1113854926 10-6 e(- .00013608877328124 t)
+ .0003217284233 e(-2.1566040182812 t) - .0002562097162 e(- .99920867575527 t)
+ .01529043130 e(- .49656263158141 t) - .01275417104 e(- .40135822771470 t)
- .004579574572 e(- .21242286207619 t) + .004410661043 e(- .10138991637880 t)
- .004616706294 e(- .045747604727629 t) + .005135258049 e(- .021899535845604 t)
- .007291834508 e(- .0097659864076680 t) - .04479445012 e(- .0052407283210075 t)
+ .04150475019 e(- .0049241208328057 t) + .003798706854 e(- .0021798807654280 t)
- .0009733069030 e(- .00099695010428915 t) + .0002373951415 e(- .00046450555932453 t)
+ .0002315301471 e(- .00021560899145545 t) - .01432307341 e(- .00013030403643481 t)
- .00004288087682 e(- .000046410118971953 t) + .6769861985 10-5 e(- .000021544776008593 t)
```

```
> B2t[2] := invlaplace(eval(B2[2] / s), s, t):
```

Dehnungskonzentrationsfaktoren: $\epsilon_1 = A_1 * \epsilon$

```
> A1[1] := normal(simplify(eval((alpha[1] / alpha[0]) * B1[1])));
A1_1 := 5. ( .250000000 109 s3 + .107435000 109 s2 + 604790. s + 79. ) (
.8334999798 1023 s3 + .6008427645 1019 s2 + .1945112230 1015 s
+ .4296468595 1034 s6 + .2198980054 1031 s5 + .5888717696 1027 s4
+ .8864233171 1051 s18 + .6793530028 1050 s14 + .6454286217 1049 s13
+ .1382104185 1052 s17 + .9936757152 1051 s16 + .3621635917 1051 s15
+ .2241310077 1040 s8 + .4319196936 1037 s7 + .7354482541 1046 s11
+ .9177854107 1044 s10 + .6160091114 1042 s9 + .3065226927 1048 s12
+ .2118184163 1010 + .1975750238 1051 s19) / ((.4493335995 1023 s3
+ .3224704396 1019 s2 + .1040626897 1015 s + .2341768118 1034 s6
+ .1195266454 1031 s5 + .3188884922 1027 s4 + .4917261016 1051 s18
+ .3751299410 1050 s14 + .3560895681 1049 s13 + .7659571305 1051 s17
+ .5499973870 1051 s16 + .2001962862 1051 s15 + .1226650193 1040 s8
+ .2359105275 1037 s7 + .4049159174 1046 s11 + .5044508185 1044 s10
+ .3378724103 1042 s9 + .1689633397 1048 s12 + .1096669473 1051 s19
+ .1131144971 1010)
(.1850000000 1010 s3 + .798715000 109 s2 + .4532245 107 s + 602. ) )
```

```
> A1t[1] := invlaplace(eval(A1[1] / s), s, t);
```

```
A1t1 := 1.228700548 - .00001070716457 e(-2.1567736077332 t)
+ .8785992068 10-5 e(-.99914619906402 t) - .0006354605705 e(-.49833382221239 t)
- .001248329824 e(-.42360381280746 t) + .0001347291763 e(-.21218176034648 t)
- .0001352971840 e(-.10150024114320 t) + .0001442931202 e(-.045695681662428 t)
- .0001640196158 e(-.021927117952306 t) + .0002545183267 e(-.0097487613469060 t)
- .001949738890 e(-.0055605129270265 t) - .001107242951 e(-.0051519820366577 t)
- .0001006611454 e(-.0021819548100568 t) + .00002758094472 e(-.00099670907398632 t)
- .7187441393 10-5 e(-.00046453276851861 t) - .8942530865 10-5 e(-.00021562089090298 t)
- .003015806063 e(-.00013344238458245 t) - .003596230989 e(-.00012944714585990 t)
+ .7680407508 10-6 e(-.000046409603029972 t) - .1394298098 10-6 e(-.000021544813452676 t)
+ .6955405795 10-7 e(-.42598862736129 t) + .1221512368 10-6 e(-.0056131217032655 t)
- .1978725389 10-6 e(-.00013608877328124 t)
```

```
> A1[2] := normal(simplify(eval((beta[1] / v) * B1[2]))):
```

```
> A1t[2] := invlaplace(eval(A1[2] / s), s, t):
```

```
> A2[1] := normal(simplify(eval((alpha[2] / alpha[0]) * B2[1])));
```

```
A21 := 150.(10000. s + 1.)(.1534699368 1023 s3 + .1100677420 1019 s2
+ .3555205563 1014 s + .8552163900 1033 s6 + .4186623428 1030 s5
+ .1096288645 1027 s4 + .1391166648 1054 s18 + .2737331493 1051 s14
+ .1294252570 1050 s13 + .6864105140 1053 s17 + .1938053705 1053 s16
+ .3105628503 1052 s15 + .5616636828 1039 s8 + .9353577275 1036 s7
+ .4714806055 1046 s11 + .3914209063 1044 s10 + .1929868745 1042 s9
+ .3304178193 1048 s12 + .8652061700 1053 s20 + .1558347975 1054 s19
+ .1769609520 1053 s21 + .386769231 109) / ((.4493335995 1023 s3
+ .3224704396 1019 s2 + .1040626897 1015 s + .2341768118 1034 s6
+ .1195266454 1031 s5 + .3188884922 1027 s4 + .4917261016 1051 s18
+ .3751299410 1050 s14 + .3560895681 1049 s13 + .7659571305 1051 s17
+ .5499973870 1051 s16 + .2001962862 1051 s15 + .1226650193 1040 s8
+ .2359105275 1037 s7 + .4049159174 1046 s11 + .5044508185 1044 s10
+ .3378724103 1042 s9 + .1689633397 1048 s12 + .1096669473 1051 s19
+ .1131144971 1010)
(.1850000000 1010 s3 + .798715000 109 s2 + .4532245 107 s + 602.)
```

```

> A2t[1] := invlaplace(eval(A2[1] / s), s, t);
A2t1 := .08519780693 + .00004280297686 e(-2.1567736077332 t)
- .00003505876543 e(-.99914619906402 t) + .002540855456 e(-.49833382221239 t)
+ .004970041824 e(-.42360381280746 t) - .0005388787974 e(-.21218176034648 t)
+ .0005411887238 e(-.10150024114320 t) - .0005771941971 e(-.045695681662428 t)
+ .0006561032046 e(-.021927117952306 t) - .001018081990 e(-.0097487613469060 t)
+ .007797101925 e(-.0055605129270265 t) + .004429120401 e(-.0051519820366577 t)
+ .0004026943735 e(-.0021819548100568 t) - .0001103992098 e(-.00099670907398632 t)
+ .00002888103803 e(-.00046453276851861 t) + .00003552551296 e(-.00021562089090298 t)
+ .01206717846 e(-.00013344238458245 t) + .01438241196 e(-.00012944714585990 t)
- .3035791032 10-5 e(-.000046409603029972 t) + .5428794679 10-6 e(-.000021544813452676 t)
+ .00002389256082 e(-.42598862736129 t) + .1193647657 10-5 e(-.0056131217032655 t)
- .5115303681 10-6 e(-.00013608877328124 t)

```

```

> A2[2] := normal(simplify(eval((beta[2] / v) * B2[2]))):

```

```

> A2t[2] := invlaplace(eval(A2[2] / s), s, t):

```

Literaturverzeichnis

- [1] C. S. Barrett and P. Predecki. Stress measurement in polymeric materials by x-ray diffraction. *Polymer Engineering and Science*, 16:602–608, 1976.
- [2] C. S. Barrett and P. Predecki. Stress measurement in graphite/epoxy uniaxial composites by x-rays. *Polymer Composites*, 1:2–6, 1980.
- [3] C. S. Barrett and P. Predecki. X-ray diffraction evaluation of adhesive bonds and stress measurements with diffracting paint. *Adv. X-Ray Anal.*, 24:231–238, 1983.
- [4] H. Behnken. *Berechnung und Ermittlung der röntgenographischen Elastizitätskonstanten sowie der Mikro- und Makro-Spannungen heterogener und texturierter Werkstoffe*. Dissertation, RWTH Aachen, 1992.
- [5] M. Blikstad, P. O. W. Sjöblom, and T. R. Johannesson. Long-term moisture absorption in graphite/epoxy angle-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, 18:32–46, 1984.
- [6] T. A. Bogetti and J. W. Gillespie. Process-induced stress and deformation in thick-section thermoset composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 26(5):626–660, 1992.
- [7] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Leipzig, 24th edition, 1989.
- [8] T. J. Chapman, J. W. Gillespie, R. B. Pipes, J-A. E. Manson, and J. C. Seferis. Prediction of process-induced residual stresses in thermoplastic composites. *Journal of Composite Materials*, 24:616–643, 1990.
- [9] CIBA-GEIGY, Cambridge, UK. *Fibredux 913*.

- [10] G. Clark, D. S. Saunders, T. J. van Blaricum, and M. Richmond. Moisture absorption in graphite/epoxy laminates. *Composites Science and Technology*, 39:355–375, 1990.
- [11] J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Claredon Press, 2nd edition, 1975.
- [12] H. Dölle and V. Hauk. Röntgenographische Spannungsermittlung für Eigenspannungssysteme allgemeiner Orientierung. *HTM*, 31:165–168, 1976.
- [13] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings Royal Society London A*, 241:376–396, 1957.
- [14] J. D. Eshelby. *Elastic Inclusions and Inhomogenities*, volume 2 of *Progress in solid mechanics*, chapter III, pages 89–140. Nort-Holland, Amsterdam, 1961.
- [15] R. H. Fenn and A. M. Jones. AERO Report R12901, Harwell Laboratory, Oxfordshire, UK, 1988.
- [16] R. H. Fenn and A. M. Jones. Measurements of residual stress in carbon fibre composite materials using x-ray diffraction. In G. Beck, S. Denis, and A. Simon, editors, *Proceedings ICRS2*, London and New York, 1989. Elsevier Applied Science. 160-165.
- [17] R. H. Fenn, A. M. Jones, and G. M. Wells. X-ray diffraction investigation of triaxial residual stresses in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 27(14):1338–1351, 1993.
- [18] J. D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, New York, 2nd edition, 1970.
- [19] R. Glocker. *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*. Springer, Berlin u.a., 5th edition, 1971.
- [20] M. E. Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:291–356, 1962.
- [21] H. T. Hahn. Residual stresses in polymer composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 10:266–278, 1976.
- [22] H. T. Hahn. Effects of residual stresses in polymer matrix composites. *Journal of the Astronautical Sciences*, 32(3):253–267, 1984.

- [23] H. T. Hahn. Hygrothermal damage in graphite/epoxy laminates. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109:3–11, 1987.
- [24] H. T. Hahn and N. J. Pagano. Curing stresses in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 9:91–106, 1975.
- [25] A. Hamamoto and M. W. Hyer. Temperature-curvature relationship for unsymmetric graphite-epoxy laminates. Technical Report VPI-E-85-08, VPI & SU, Blacksburg, VA, March 1985.
- [26] B. Harper, D. Peretz, and Y. Weitsman. Assessment of chemical cure-shrinkage stresses in two technical resins. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 29–35, Lake Tahoe, NV., May 2–4 1983. AIAA-83-0799-CP.
- [27] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach of the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:127–140, 1963.
- [28] V. Hauk. Prüfung von Halbzeugen aus Polymerwerkstoffen mit Hilfe der röntgenographischen Spannungsanalyse. In *Vorträge der Tagung Werkstoffprüfung*, pages 153–163, Bad Nauheim, 1989. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e. V.
- [29] V. Hauk. Entwicklung und Anwendung der röntgenographischen Spannungsanalyse an polymeren Werkstoffen und deren Verbunden. *Z. Metallkd.*, 83:276–282, 1992.
- [30] V. Hauk, A. Troost, and D. Ley. Röntgenographische Ermittlung von Eigenspannungen in Polypropylen. *Materialprüfung*, 27:98–100, 1985.
- [31] V. Hauk, A. Troost, and D. Ley. Correlation between manufacturing parameters and residual stresses on injection-molded polypropylene, an x-ray diffraction study. In P. Höller, V. Hauk, G. Dobmann, C. O. Rud, and R. E. Green, editors, *destructive Characterisation of Materials*, pages 207–214. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [32] V. Hauk, A. Troost, and D. Ley. Evaluation of (residual) stresses in semicrystalline polymers by x-rays. *Advances in Polymer Technology*, 7:389–396, 1987.
- [33] V. Hauk, A. Troost, and D. Ley. Lattice strain measurements and evaluation of residual stresses on polymeric materials. In E. Macherauch and V. Hauk, editors, *Residual Stresses in Science and Technology*, volume 1, pages 117–125. DGM Informationsgesellschaft, 1987.

- [34] V. M. Hauk and E. Macherauch. The suitable performance of x-ray stress evaluations (xse). In V. Hauk and E. Macherauch, editors, *Eigenspannungen und Lastspannungen, Moderne Ermittlung – Ergebnisse – Bewertung*, Härtereitechn. Mitt. – Beiheft. Carl Hanser, München, Wien, 1982.
- [35] V. M. Hauk and E. Macherauch. A useful guide for x-ray stress evaluation. *Adv. X-Ray Anal.*, 27:81–99, 1984.
- [36] M. Henriksen. Nonlinear viscoelastic stress analysis. *Computers and Structures*, 18(1), 133–139 1984.
- [37] A. V. Hershey. *Journal of Applied Mechanics*, 21:236, 1954.
- [38] R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceedings Royal Society London A*, 65:349–354, 1952.
- [39] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13:213–222, 1965.
- [40] H. Hoffmann and H. Kausche. Anwendung der röntgenographischen Gitterdehnungs- und Spannungsmessung auf teilkristalline Polymerwerkstoffe. *Wiss. Zeitschr. THLM*, 28:473–488, 1986.
- [41] H. Hoffmann and H. Kausche. Messung der Eigenspannungen in Spritzgußteilen. *Kunststoffe*, 78:520–524, 1988.
- [42] H. Hoffmann and H. Kausche. Röntgenographische Gitterdehnungs- und Spannungsmessung an Polymermatrix-Teilchen-Verbunden. *Plaste und Kautschuk*, 12:427–431, 1989.
- [43] M. W. Hyer. Calculations of the room-temperature shapes of unsymmetric laminates. *Journal of Composite Materials*, 15:296–310, 1981.
- [44] M. W. Hyer. Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates. *Journal of Composite Materials*, 15:175–188, 1981.
- [45] M. W. Hyer. The room-temperature shapes of four-layer unsymmetric cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, 16:318–340, 1982.
- [46] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Hemisphere Publ. Corp., New York, 1975.
- [47] T. C. Kennedy and M. Wang. Three-dimensional, nonlinear viscoelastic analysis of laminated composites. *Journal of Composite Materials*, 28(10):902–924, 1994.

- [48] E. Kröner. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Komponenten des Einkristalls. *Z. f. Physik*, 151:504–518, 1958.
- [49] N. Laws and R. McLaughlin. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliance of composite materials. *Proceedings Royal Society London A*, 359:251–273, 1978.
- [50] H. Lee and K. Neville. *Handbook of Epoxy Resins*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [51] Y. C. Lou. Viscoelastic characterization of a nonlinear fiber-reinforced plastic. *Journal of Composite Materials*, 5:208–234, 1971.
- [52] E. Macherauch. *Praktikum in Werkstoffkunde*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 7th edition, 1987.
- [53] E. Macherauch and P. Müller. Das $\sin^2 \psi$ -Verfahren der röntgenographischen Spannungsmessung. *Z. angew. Physik*, 13:305–312, 1961.
- [54] E. Macherauch, H. Wohlfahrt, and U. Wolfenstiegl. Zur zweckmäßigen Definition von Eigenspannungen. *Härterei-Tech. Mitt.*, 1973.
- [55] C. H. McGillivray and G. D. Rieck. *International Tables for X-Ray Crystallography*. Kynoch Press, 1965.
- [56] L. W. Morland and E. H. Lee. *Trans. Soc. Rheol.*, IV:233, 1960.
- [57] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*, volume 3 of *Mechanics of elastic and inelastic solids*. Martinus Nijhoff Publisher, The Hague, Boston, London, 1982.
- [58] H. Neff. *Grundlagen und Anwendung der Röntgenfeinstrukturanalyse*. Oldenbourg, München, 2nd edition, 1962.
- [59] L. S. Penn, R. C. T. Chou, A. S. D. Wang, and W. K. Binienda. The effect of matrix shrinkage on damage accumulation in composites. *Journal of Composite Materials*, 23:570–586, 1989.
- [60] F. Pomies and L. A. Carlsson. Analysis of modulus and strength of dry and wet thermoset and thermoplastic composites loaded in transverse tension. *Journal of Composite Materials*, 28(1):22–35, 1994.
- [61] P. Predecki and C. S. Barrett. Stress measurement in graphite/epoxy composites by x-ray diffraction from fillers. *Journal of Composite Materials*, 13:61–71, 1979.

- [62] P. Predecki and C. S. Barrett. Residual stresses in resin matrix composites. In E. Kula, editor, *28th Sagamore Army Materials Research Conference*, pages 409–424, Lake Placid, July 13–17 1981.
- [63] P. Predecki and C. S. Barrett. Detection of moisture in graphite/epoxy laminates by x-ray diffraction. *Journal of Composite Materials*, 16:260–267, 1982.
- [64] P. Predecki and C. S. Barrett. Stress determination in an adhesive bonded joint by x-ray diffraction. *Adv. X-Ray Anal.*, 27:251–260, 1984.
- [65] B. Prinz. *Experimentelle Ermittlung und numerische Simulation interlaminarer Spannungskonzentrationen in kohlefaserverstärkten Polymeren*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1994.
- [66] B. Prinz and E. Schnack. Determination of stress gradients in fibrous composites by x-ray diffraction from fillers. *Journal of Composite Materials*, (11), 1996.
- [67] A. Reuss. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. Angew. Math. u. Mech.*, 9:49–58, 1929.
- [68] R. A. Schapery. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering and Science*, 9(4):295–310, 1969.
- [69] R. A. Schapery. *Mechanics of Composite Materials*, volume 2 of *Composite Materials*, chapter 4, pages 86–168. Academic Press, 1974.
- [70] C.-H. Shen and G. S. Springer. Effects of moisture and temperature on the tensile strength of composite materials. *Journal of Composite Materials*, 11, 1977.
- [71] V. Speicher. Symbole und Formeln - Empfehlung des Fachausschusses Spannungsmeßtechnik. *HTM*, 31:4–6, 1976.
- [72] G. S. Springer. Environmental effects on epoxy matrix composites. In S. W. Tsai, editor, *Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)*, pages 291–312. American Society for Testing and Materials, March 20–22 1979.
- [73] T. K. Tsotsis and Y. Weitsman. Energy release rate for cracks caused by moisture absorption in graphite/epoxy composites. *Journal of Composite Materials*, 24(5):483–496, 1990.

- [74] M. E. Tuttle and H. F. Brinson. Prediction of the long-term creep compliance of general composite laminates. *Experimental Mechanics*, pages 89–102, 1986.
- [75] W. J. Unger and J. S. Hansen. The effect of thermal processing on residual strain development in unidirectional graphite fibre reinforced peek. *Journal of Composite Materials*, 27(1):59–82, 1993.
- [76] W. Voigt. Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Ann. Phys. u. Chem.*, 38, 1889.
- [77] S. R. White and H. T. Hahn. Process modelling of composite materials: Residual stress development during cure. Part I. Model formulation. *Journal of Composite Materials*, 26(16):2402–2422, 1992.
- [78] S. R. White and H. T. Hahn. Process modelling of composite materials: Residual stress development during cure. Part II. Experimental validation. *Journal of Composite Materials*, 26(16):2423–2453, 1992.
- [79] M. Wörtler. *Interlaminare Spannungskonzentrationen in Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1988.
- [80] M. Wörtler and E. Schnack. Röntgenographische Spannungsmessung an faserverstärkten Kunststoffen. *VDI-Berichte*, 1987.
- [81] M. Wörtler and E. Schnack. Untersuchung von Randeffekt-Spannungskonzentrationen in CfK-Laminaten mittels röntgenographischer Spannungsmessung. *VDI-Berichte*, 1988.
- [82] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1988.