

Über Kegel, welche einer Bedingung von Lemmert genügen

Peter Volkmann

Zusammenfassung. Ein Banachraum E sei durch einen Kegel K geordnet. Wir sagen, K genügt der Bedingung (B), falls für Norm-beschränkte Ketten $P \subseteq E$ stets $\xi = \sup P$ existiert. Es wird gezeigt, daß eine von Lemmert [5] gegebene Bedingung (H) charakterisiert werden kann durch (B) zusammen mit einer stetigen Abhängigkeit des Supremums ξ von der Kette P . Offen bleibt, ob (H) bereits aus (B) folgt.

1. Die Lemmertsche Bedingung (H). Ist in einer Menge M eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation \leq gegeben, so nennen wir M eine geordnete Menge (vgl. Bourbaki [1]); ist ferner $\emptyset \neq N \subseteq M$ und gilt für $x, y \in N$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$, so nennen wir N kurz eine Kette.

In einem reellen Banachraume E sei K ein Kegel im Sinne von Kreĭn und Rutman [4], d.h. K ist eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E mit $\lambda x \in K$ für $\lambda \geq 0$, $x \in K$, und es gilt

$$x, -x \in K \Leftrightarrow x = \theta,$$

wobei θ das Nullelement von E bezeichnet. Der Raum E wird geordnet, indem man (für $x, y \in E$) $x \leq y$ setzt, falls $y - x \in K$ gilt. Es sei

$$(1) \quad C = C([0, 1], E)$$

der Banachraum der stetigen Funktionen $\omega : [0, 1] \rightarrow E$ (mit $\|\omega\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\omega(t)\|$). Wir ordnen ihn durch

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1(t) \leq \omega_2(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(für $\omega_1, \omega_2 \in C$). Mit Hilfe der Menge

$$\Lambda = \{\omega \mid \omega : [0, 1] \rightarrow E, \omega(0) = \theta, \|\omega(s) - \omega(t)\| \leq |s - t|(s, t \in [0, 1])\}$$

(also $\Lambda \subseteq C$) formulieren wir die Lemmertsche Bedingung wie folgt:

(H) Zu jeder Kette $\Delta \subseteq \Lambda$ existiert $\sup \Delta \in C$.

Gilt (H), so kann für Ketten $\Delta \subseteq \Lambda$ durchaus $\sup \Delta \notin \Lambda$ eintreten.

2. Bemerkungen zu (H). Im Folgenden bezeichnet $\text{Int } K$ das Innere des Kegels K .

2.1. Bei der Abfassung von (H) wurden Ketten im Funktionenraume (1) herangezogen. Es ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung, (H) bereits mit Hilfe von Ketten im Ausgangsraume E zu charakterisieren. Ist z.B. K normal (im Sinne von Kreĭn [3]) und ist $\text{Int } K \neq \emptyset$, so ist (H) nach [9] äquivalent zur folgenden Bedingung:

(C) *Zu jeder Ordnungs-beschränkten Kette $P \subseteq E$ existiert $\sup P \in E$.*

2.2. Ist $\text{Int } K \neq \emptyset$, so folgt nach Uhl [8] aus (C) die Normalität von K (dabei genügt es, in (C) wachsende Folgen an Stelle von Ketten zu nehmen).

Betrachtet man den Banachraum $E = BV[0, 1]$ der Funktionen $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation (vgl. Heuser [2]; $\|x\| = |x(0)| + \text{var } x$) mit dem Kegel $K = \{x \mid x \in E, x(\tau) \geq 0 \text{ (} 0 \leq \tau \leq 1)\}$, so ist K nicht normal, $\text{Int } K \neq \emptyset$, also gilt nicht (C) (das bestätigt man auch leicht direkt). Andererseits kann für K die Bedingung (H) nachgewiesen werden, und somit sind (C), (H) keine zueinander äquivalenten Bedingungen; selbst dann nicht, wenn $\text{Int } K \neq \emptyset$ vorausgesetzt wird.

2.3. Ist K normal und $\text{Int } K \neq \emptyset$, so ist eine Teilmenge des Banachraumes E genau dann Ordnungs-beschränkt, wenn sie Norm-beschränkt ist. Also ist in diesem Falle (C) (und nach Nr. 2.1 auch (H)) äquivalent zu der in der Zusammenfassung beschriebenen Bedingung (B). Im Gegensatz zu (C) ergibt sich (B) für beliebige Kegel aus (H); der Beweis ist einfach, man vergleiche weiter unten Nr. 5.

2.4. Schließlich sei erwähnt, daß Lemmert [5] die Bedingung (H) eingeführt hatte, um gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen zu studieren. Er bewies zwei Existenzsätze; diese konnten anschließend von Schmidt [6] vereinheitlicht werden. Hinsichtlich solcher Bedingungen wie (H), (C), (B) vergleiche man noch Uhl [8] und den Übersichtsartikel [10]; Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen in Banachräumen findet man in [7].

3. Ergebnisse. Es ist jetzt zweckmäßig, Ketten N in geordneten Mengen M als verallgemeinerte Folgen zu schreiben: Wir nennen $N = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in M , wenn A eine (abstrakte) Kette im vorhergehenden Sinne ist und wenn für $\alpha, \beta \in A$ stets $x_\alpha \in M$ gilt mit $x_\alpha \leq x_\beta$ für $\alpha \leq \beta$; dabei ist $x_\alpha = x_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ zugelassen. Bedingung (B) aus der Zusammenfassung kann dann wie folgt beschrieben werden:

(B) Zu jeder Norm-beschränkten Kette $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Elementen $x_\alpha \in E$ existiert $\sup P = \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ in E .

Wir beweisen nachstehenden Satz und die anschließende Folgerung.

Satz. Ein Kegel K in einem reellen Banachraum E genügt der Bedingung (H) genau dann, wenn er sowohl (B) als auch die folgende Bedingung erfüllt:

(S) Zu jeder Norm-beschränkten Kette $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für Ketten $Q = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E mit $\|y_\alpha - x_\alpha\| \leq \delta$ ($\alpha \in A$) die Abschätzung $\|\sup P - \sup Q\| \leq \varepsilon$ gilt.

Folgerung. Ein Kegel K in einem reellen Banachraum E genüge der Bedingung (H), und es sei $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in E mit $\|x_\alpha\| \leq 1$ ($\alpha \in A$). Dann gilt $\|\sup P\| \leq \kappa$ mit einer nur von K, E, A abhängigen Konstanten $\kappa \geq 0$.

Wir wollen für $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ noch zeigen, daß diese Konstanten κ nicht nach oben beschränkt sein können: Es sei $E = l_\infty$ der Banachraum der beschränkten reellen Folgen $x = (x^1, x^2, x^3, \dots)$, zunächst mit $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x^k|$. Der natürliche Kegel $K = l_\infty^+ = \{x \mid x \in l_\infty, x^k \geq 0 \ (k \in \mathbb{N})\}$ genügt (H) (und zwar auch dann, wenn man l_∞ äquivalent umnormiert). Ferner ist der Raum c_0 der reellen Nullfolgen ein abgeschlossener Unterraum von l_∞ , und es gilt

$$p = (1, 1, 1, \dots) \in l_\infty \setminus c_0.$$

Es sei $\mu > 0$ beliebig gewählt; nach dem Satze von Hahn und Banach gibt es ein lineares, stetiges $\varphi : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(p) = \mu, \quad \varphi(x) = 0 \text{ für } x \in c_0.$$

Nun liefert

$$(2) \quad \|x\| = \|x\|_\infty + |\varphi(x)| \quad (x \in l_\infty)$$

eine zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalente Norm auf l_∞ . Für die Kette $P = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$p_n = (1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots) \in c_0 \quad (n \text{ Einsen})$$

gilt $\sup P = p$, und bezüglich der Norm (2) wird

$$\|p_n\| = 1, \quad \|p\| = 1 + \mu,$$

also ist hier $\kappa \geq 1 + \mu$. (Dieses Beispiel führt auch zu der am Ende der Nr. 1 anschließend an (H) gemachten Bemerkung: Man nehme $E = l_\infty$ mit der Norm (2) und $\Delta = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $\omega_n(t) = tp_n$ ($0 \leq t \leq 1$).)

In den folgenden Nummern wird der Beweis des Satzes und der Folgerung gegeben. Dabei wird in einem Zwischenschritte aus (H) die nachstehende Bedingung hergeleitet:

(J) Es sei $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Norm-beschränkte Kette in $C = C([0, 1], E)$ mit

$$(3) \quad \|\omega_\alpha(s) - \omega_\alpha(t)\| \leq |s - t| \quad (\alpha \in A; s, t \in [0, 1]).$$

Dann existiert $\omega = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ in C , und es gilt (in E)

$$(4) \quad \omega(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

4. Herleitung von (H) aus (B), (S) und Beweis der Folgerung. Es werden (B), (S) vorausgesetzt. Zum Nachweise von (H) sei $\Delta = (\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in Λ . Wegen (B) existieren in E die Suprema

$$\omega(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

und sie definieren eine Funktion $\omega : [0, 1] \rightarrow E$. Wir zeigen, daß ω stetig ist (dann ergibt sich $\omega = \sup \Delta$ in C): Dazu sei $s \in [0, 1]$. Zur Kette $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $x_\alpha = \omega_\alpha(s)$ ($\alpha \in A$) und zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ gemäß Bedingung (S) gewählt. Für $t \in [0, 1]$ mit $|t - s| \leq \delta$ wird dann $\|\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(s)\| \leq |t - s| \leq \delta$ ($\alpha \in A$), und mit (S) folgt $\|\omega(t) - \omega(s)\| \leq \varepsilon$. Hier ist $\varepsilon > 0$ beliebig, also ist die Funktion ω stetig im (beliebigen) Punkte s aus $[0, 1]$.

Zum Beweise der Folgerung wenden wir den Satz auf die Kette $P = (\theta)_{\alpha \in A}$ in E und auf $\varepsilon = 1$ an. Nach (S) gibt es ein $\delta > 0$, so daß für Ketten $Q = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E mit $\|y_\alpha\| \leq \delta$ ($\alpha \in A$) stets $\|\sup Q\| \leq 1$ ausfällt. Somit gilt die Folgerung, wenn $\kappa = 1/\delta$ genommen wird.

5. Herleitung von (B) aus (H). Es wird (H) vorausgesetzt. Zum Nachweise von (B) sei $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Norm-beschränkte Kette in E , ohne Einschränkung sei

$$\|x_\alpha\| \leq 1 \quad (\alpha \in A).$$

Die Funktionen $\omega_\alpha : [0, 1] \rightarrow E$ seien erklärt durch

$$\omega_\alpha(t) = tx_\alpha \quad (0 \leq t \leq 1, \alpha \in A).$$

Dann ist $\Delta = (\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in Λ , und wegen (H) existiert $\omega = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ in C . Damit ist $\omega(1)$ obere Schranke der Elemente $\omega_\alpha(1) = x_\alpha$, also eine obere Schranke von P . Ist x irgendeine obere Schranke von P , so erkläre man $w : [0, 1] \rightarrow E$ durch $w(t) = tx$ ($0 \leq t \leq 1$). Dann ist w eine obere Schranke von Δ , also $\omega \leq w$, und das liefert $\omega(1) \leq w(1) = x$. Somit ist

$\omega(1)$ die kleinste obere Schranke von P , d.h. $\omega(1) = \sup P$. Die Existenz von $\sup P$ ist gezeigt, also gilt (B).

6. Herleitung von (J). Wir setzen wieder (H) voraus; wegen Nr. 5 gilt dann auch (B). Wir wollen hier (J) für den geordneten Banachraum $D = C([\frac{1}{2}, 1], E)$ an Stelle von C beweisen (dann gilt (J) auch so, wie oben beschrieben): Es sei $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Norm-beschränkte Kette in D mit

$$\|\omega_\alpha(s) - \omega_\alpha(t)\| \leq |s - t| \quad (\alpha \in A; s, t \in [\frac{1}{2}, 1]).$$

Unser Ziel ist, die Existenz von $\omega = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ in D und die Formeln

$$(5) \quad \omega(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t) \quad (\frac{1}{2} \leq t \leq 1)$$

in E nachzuweisen. Da $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ Norm-beschränkt ist, können wir ohne Einschränkung

$$\|\omega_\alpha(\frac{1}{2})\| \leq \frac{1}{2} \quad (\alpha \in A)$$

voraussetzen. Wir definieren $u_\alpha : [0, 1] \rightarrow E$ durch

$$(6) \quad u_\alpha(t) = \begin{cases} 2t\omega_\alpha(\frac{1}{2}) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \omega_\alpha(t) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}.$$

Dann ist $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Kette in Λ , und wegen (H) existiert

$$(7) \quad u = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha$$

in C . Wir bilden die Einschränkung

$$(8) \quad \omega = u|_{[\frac{1}{2}, 1]},$$

und durch eine ähnliche Schlußweise wie in Nr. 5 erhalten wir

$$(9) \quad \omega = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$$

in D : Die Funktion ω ist eine obere Schranke der Kette $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$, und für jede obere Schranke w dieser Kette liefert

$$v(t) = \begin{cases} 2tw(\frac{1}{2}) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ w(t) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

eine obere Schranke der Kette $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ in C . Es folgt $u \leq v$, also (durch Einschränkung auf $[\frac{1}{2}, 1]$) $\omega \leq w$.

Für die Funktion (9) wird nun (5) gezeigt, und zwar zunächst für $t = \frac{1}{2}$ (dann gilt (5) auch für den anderen Randpunkt $t = 1$; man transformiere

das Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ durch $t \rightarrow \frac{3}{2} - t$ in sich selbst): Wegen (B) existiert $\eta = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(\frac{1}{2})$, und wegen (9) haben wir

$$(10) \quad \eta = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(\frac{1}{2}) \leq \omega(\frac{1}{2}).$$

Für $0 < \tau < \frac{1}{2}$ werde die stetige Funktion $w_\tau : [0, 1] \rightarrow E$ erklärt durch

$$w_\tau(t) = \begin{cases} 2t\eta & (0 \leq t \leq \tau) \\ 2 \frac{t-\tau}{1-2\tau} (\omega(\frac{1}{2}) - \eta) + 2t\eta & (\tau \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \omega(t) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) . \end{cases}$$

Für die Funktionen (6) gilt dann $u_\alpha(t) \leq w_\tau(t)$, und mit (7) folgt $u(t) \leq w_\tau(t)$, speziell für $t = \tau$ also

$$u(\tau) \leq 2\tau\eta \quad (0 < \tau < \frac{1}{2}).$$

Der Grenzübergang $\tau \rightarrow \frac{1}{2}$ liefert $u(\frac{1}{2}) \leq \eta$, und mit (8), (10) ergibt sich die gewünschte Formel

$$\omega(\frac{1}{2}) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(\frac{1}{2}).$$

Somit ist (5) für die Randpunkte $t = \frac{1}{2}$ und $t = 1$ erledigt (wir benötigen gleich beide Fälle), und es bleibt übrig, diese Formel für $\frac{1}{2} < t < 1$ zu beweisen. Wir fixieren ein solches t , und wir übertragen Resultate vom Funktionenraume D sinngemäß auf die Räume $D_1 = C([\frac{1}{2}, t], E)$, $D_2 = C([t, 1], E)$: Für unsere Kette $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ in D wissen wir dann, in D_1 existiert

$$\omega^1 = \sup_{\alpha \in A} \left(\omega_\alpha \Big|_{[\frac{1}{2}, t]} \right) \quad \text{mit} \quad \omega^1(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t)$$

(denn t ist rechter Randpunkt von $[\frac{1}{2}, t]$), und in D_2 existiert

$$\omega^2 = \sup_{\alpha \in A} \left(\omega_\alpha \Big|_{[t, 1]} \right) \quad \text{mit} \quad \omega^2(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t)$$

(t ist linker Randpunkt von $[t, 1]$). Durch

$$w(s) = \begin{cases} \omega^1(s) & (\frac{1}{2} \leq s \leq t) \\ \omega^2(s) & (t \leq s \leq 1) \end{cases}$$

wird also eine stetige Funktion $w : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow E$ erklärt, und sie ist eine obere Schranke der Kette $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$. Mit (9) folgt $\omega \leq w$, also wird

$$\omega(t) \leq w(t) = \omega^1(t) = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha(t) \leq \omega(t)$$

(die letzte Ungleichung ergibt sich wieder aus (9)).

7. Herleitung von (S). Es werde (H) (und damit jetzt auch (B) und (J)) vorausgesetzt. Wir nehmen an, (S) sei falsch: Dann gibt es eine Norm-beschränkte Kette $P = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E , und es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta = 1/2^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) eine Kette $Q^n = (y_\alpha^n)_{\alpha \in A}$ existiert mit

$$\|y_\alpha^n - x_\alpha\| \leq 1/2^{n+1} \quad (\alpha \in A)$$

und

$$(11) \quad \|\eta^n - \xi\| = \|\sup Q^n - \sup P\| \geq \varepsilon.$$

(Hier wurde $\eta^n = \sup Q^n$, $\xi = \sup P$ gesetzt.) Wir definieren $\omega_\alpha : [0, 1] \rightarrow E$ durch

$$(12) \quad \omega_\alpha(t) = \begin{cases} x_\alpha & (t = 0) \\ x_\alpha + (2^{n+1}t - 2)(y_\alpha^n - x_\alpha) & \left(\frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{3}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}\right) \\ x_\alpha + (4 - 2^{n+1}t)(y_\alpha^n - x_\alpha) & \left(\frac{3}{2^{n+1}} \leq t \leq \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}\right). \end{cases}$$

Dann ist $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine der Bedingung (3) genügende Norm-beschränkte Kette in $C = C([0, 1], E)$. Nach (J) existiert in C die Funktion $\omega = \sup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$, und für sie gilt (4). Mit (4) folgt aus (12)

$$\omega(0) = \xi, \quad \omega(3/2^{n+1}) = \eta^n,$$

und $n \rightarrow \infty$ liefert wegen (11) einen Widerspruch zur Stetigkeit von ω im Punkte Null.

Literatur

[1] N. Bourbaki: *Éléments de mathématique, livre I: théorie des ensembles, chapitre III: ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers*. Hermann Paris 1956.

[2] Harro Heuser: *Funktionalanalysis*. Teubner Stuttgart 1975.

[3] M. G. Kreĭn: *Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach*. Doklady Akad. Nauk SSSR **28**, 13-17 (1940).

[4] — und M. A. Rutman: *Lineĭnye operatory, ostavljajuščie invariantnym konus v prostranstve Banaha*. Uspehi mat. Nauk **3**, Nr. 1 (23), 3-95 (1948).

[5] Roland Lemmert: *Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen in geordneten Banachräumen*. Funkcialaj Ekvac. **32**, 243-249 (1989).

[6] Sabina Schmidt: *Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen*. Diss. Univ. Karlsruhe 1989; erschienen in Funkcialaj Ekvac. **35**, 199-222 (1992).

[7] Alice Simon und Peter Volkmann: *Equations elliptiques dans les espaces de Banach ordonnés*. C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. I **315**, 1245-1248 (1992).

[8] Roland Uhl: *Beiträge zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in Banachräumen*. Diss. Univ. Karlsruhe 1993.

[9] Peter Volkmann: *Quelques résultats récents sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*. Pitman Research Notes in Mathematics Series 252, Longman Harlow, 447-452 (1991).

[10] —: *Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*. Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, herausgegeben von Andrzej Granas und Marlène Frigon, Kluwer Dordrecht, 501-520 (1995).

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland.