

jk

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5602

**Numerische Untersuchung
der turbulenten Strömung
durch parallele Kanäle, die
durch einen Spalt miteinan-
der verbunden sind**

M. Biemüller

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

November 1995

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5602

**Numerische Untersuchung der turbulenten
Strömung durch parallele Kanäle, die durch
einen Spalt miteinander verbunden sind**

Marcus Biemüller

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte
Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

In Stabbündelgeometrien, die in axialer Richtung von einem Fluid durchströmt werden, werden großskalige, quasiperiodische Strömungsbewegungen zwischen Unterkanälen beobachtet. Entstehung und Ursache der Pulsationen sind noch nicht ganz verstanden.

Eine verallgemeinerte Geometrie, bestehend aus zwei parallelen, durch einen Spalt verbundenen Rechteckkanälen, wurde experimentell mit der Hitzdrahtmeßtechnik untersucht. Die Ergebnisse dieser Messungen werden dargestellt. Die charakteristischen Phänomene von Spaltströmungen, wie sie aus ähnlichen Geometrien bekannt sind, können auch für den hier untersuchten Querschnitt nachgewiesen werden. Es handelt sich dabei um ungewöhnlich hohe Werte für Turbulenzintensitäten, Reynolds-Schubspannungen und spektrale Leistungsdichten in bestimmten Bereichen des Spaltes.

Eine entsprechende Geometrie wurde numerisch untersucht. Dazu wurde die Methode der Grobstruktursimulation verwendet. Nach der Darstellung der theoretischen Grundlagen der Methode werden die zur Behandlung des speziellen Problems erforderlichen methodischen Erweiterungen des Programms TURBIT erklärt.

Der Einfluß bestimmter Parameter, wie etwa der Reynolds-Zahl, der Gittergröße und der Periodenlänge auf die Resultate der Simulation wird beschrieben. Bei einer Variation dieser Parameter unterscheiden sich die Simulationsergebnisse qualitativ nur unwesentlich voneinander. Verkleinerungen der Reynolds-Zahl und Verfeinerungen des Gitters bewirken eine Glättung der Kurvenverläufe von Isoliniendarstellungen. Die Periodenlänge hat Auswirkungen auf die Anzahl der Wirbelpaare im Kanal.

Anhand eines Simulationsfalls werden die Ergebnisse der Messungen und der Rechnung miteinander verglichen. Es besteht eine gute qualitative Übereinstimmung, insbesondere im Spaltbereich. Die Simulation reproduziert alle aus der Messung bekannten charakteristischen Effekte.

Das Strömungsmodell für den Spaltbereich, das nach Auswertung der Meßdaten aufgestellt wurde, wird durch die Simulation bestätigt. Das grundlegende Phänomen, das für die charakteristischen Effekte im Spaltbereich verantwortlich ist, ist eine Folge von Wirbelpaaren, die in Hauptströmungsrichtung durch den Spalt transportiert werden. Der Antrieb dieser Wirbel ergibt sich aus dem Unterschied zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten im Kanal und im Spalt. Das Auftreten des charakteristischen Phänomens in der Rechnung, in der eine eingelaufene Strömung simuliert wird, zeigt, daß dieser Effekt nicht durch die Einströmbedingungen verursacht wird, sondern ein Merkmal der besonderen Geometrie ist.

Numerical Investigation of Turbulent Flow through Parallel Channels connected by a Gap

Abstract

Large-scale quasi-periodic flow motions between subchannels are observed for axial turbulent flow through rod bundles. The origin and source of the pulsations are not yet completely understood.

A more general geometry consisting of two parallel rectangular channels connected by a gap has been experimentally investigated using hot wire anemometry. The results of these measurements are presented. The characteristic phenomena of flows through gaps known from similar geometries were also found for the cross-section investigated here. This concerns unusually high values for turbulence intensities, Reynolds shear stresses and spectral power densities in certain regions of the gap.

An appropriate geometry has been numerically investigated. For that purpose the large eddy simulation method (LES) has been used. After the presentation of the theoretical basis of the LES methodical modifications and adaptations of the code TURBIT necessary for the treatment of the special problem are explained.

The influence of parameters like Reynolds number, mesh size and periodicity length on the results of the simulation is also described. After a variation of these parameters the simulation results qualitatively differ only negligibly. Decreasing the Reynolds number and refinement of the grid lead to a smoothing of the contour-lines. A variation of the periodicity length affects the number of pairs of vortices in the channel.

The results of the measurements and of the simulation are compared for one simulation case. A good qualitative agreement is observed, especially in the gap region. The simulation reproduces all characteristic effects known from the measurement.

The flow model for the gap region which was proposed after the evaluation of the measurement is confirmed by the simulation. The fundamental phenomenon responsible for the characteristic effects in the gap region is a sequence of pairs of vortices which are transported through the gap in the main flow direction. The driving mechanism of these vortices results from the difference between the flow velocities in the channel and in the gap. The appearance of the characteristic phenomenon in the calculation, where a developed flow is simulated, shows that this effect is not caused by the inlet conditions but is a characteristic of the particular geometry.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	viii
Nomenklatur	ix
1 Einleitung	1
1.1 Einführung	1
1.2 Zielsetzung	4
1.3 Untersuchte Geometrie	5
2 Grundgleichungen	8
2.1 Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichungen	8
2.2 Energiegleichung	10
3 Diskretisierung der Grundgleichungen	11
3.1 Mittelungsoperation	11
3.2 Approximationen für Differenzenquotienten	14
4 Feinstrukturmodellierung	16
4.1 Prinzip der Modellierung	16
4.2 Feinstrukturenergie	18
4.3 Konstanten des isotropen Modells	20
4.4 Modellierte Feinstrukturenergiegleichung	23

5	Zeitintegration	27
5.1	Integrationsverfahren	27
5.2	Zeitschrittweite	28
6	Druckberechnung	29
6.1	Bestimmungsgleichung für den Druck	29
6.2	Numerische Methode	31
7	Rand- und Anfangsbedingungen	35
7.1	Randbedingungen	35
7.1.1	Freie Ränder	35
7.1.2	Feste Wände	36
7.2	Anfangsbedingungen	38
8	Methodische Erweiterungen	40
8.1	Anpassung an die spezielle Geometrie	40
8.1.1	Erweiterung der periodischen Randbedingungen	40
8.1.2	Einführen neuer Mittelwertbildungen	41
8.1.3	Neugestaltung der Wandschubspannungsberechnung	43
8.2	Differenzenformen für nichtäquidistante Maschennetze	44
8.3	Verbesserung des Preprocessing	47
8.4	Erstellung von Analysemodulen	48
8.4.1	Auswertung während der Integration	50
8.4.2	Auswertung nach abgeschlossener Integration	51
9	Experimentelle Untersuchungen	55
9.1	Beschreibung der Versuche	55
9.2	Ergebnisse der Messungen	57
9.2.1	Mittlere Geschwindigkeit	58
9.2.2	Turbulenzintensitäten und Reynolds-Spannungen	58
9.2.3	Turbulente kinetische Energie	59
9.2.4	Symmetrietest	59

9.2.5	Spektrale Leistungsdichten	59
9.2.6	Korrelationsfunktionen	60
9.2.7	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen	60
9.2.8	Strömungsmodell für den Spaltbereich	61
9.2.9	Ergänzende Untersuchungen	61
10	Numerische Untersuchungen	77
10.1	Voruntersuchungen zu Parametereinflüssen	77
10.1.1	Einfluß der Periodenlänge X_1	79
10.1.2	Untersuchungen zu Gittergröße und Reynolds-Zahl	81
10.1.3	Einfluß des Feinstrukturmodells und Zusammenfassung	84
10.2	Verifikation	85
10.2.1	Mittlere Geschwindigkeit	87
10.2.2	Turbulenzintensitäten und Reynolds-Spannungen	87
10.2.3	Turbulente kinetische Energie	88
10.2.4	Symmetrietest	89
10.2.5	Spektrale Leistungsdichten	89
10.2.6	Korrelationsfunktionen	90
10.2.7	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen	91
10.3	Bestätigung des Strömungsmodells	105
10.4	Ergänzende Auswertungen	110
10.4.1	Produktionsterm $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$	110
10.4.2	Reynolds-Schubspannung $\langle v'w' \rangle$	110
10.4.3	Sekundärströmungen	110
11	Zusammenfassung und Ausblick	115
	Literaturverzeichnis	119
A	Normierung	124

Abbildungsverzeichnis

1.1	Auswahl von Querschnitten experimentell untersuchter Geometrien . . .	3
1.2	Geometrie des Plattenkanals	7
1.3	Geometrie des Spaltes im Kanal	7
3.1	Volumenelement mit Notation der Maschenkanten und Maschenflächen	13
3.2	Definition eines versetzten Gitters	13
4.1	Turbulentes Energiespektrum	21
6.1	Preprocessing-Zeit für die Kapazitätsmatrix	33
8.1	Maschennetz: Bezeichnungen zur Definition des Spaltes	42
8.2	Gebietszerlegung zur Lösung der Poissongleichung	49
8.3	Definition der Symmetrie bezüglich des Einbaus in x_2 -Richtung	51
9.1	Querschnitt des experimentell untersuchten Kanals	55
9.2	Relative mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ in Hauptströmungsrichtung	63
9.3	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung	64
9.4	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente durch den Spalt	65
9.5	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Spalt	66
9.6	Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$	67
9.7	Reynoldssche Schubspannung $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$	68
9.8	Turbulente kinetische Energie $\langle k' \rangle / u^{*2}$	69

9.9	Symmetrietest $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$	70
9.10	Autospektrale Leistungsdichten Φ_u und Φ_v sowie kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} an vier Positionen im Spalt	71
9.11	Autokorrelationsfunktionen R_{uu} und R_{vv} sowie Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} an vier Positionen im Spalt	72
9.12	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u')$ und $p(v')$ an vier Positionen im Spalt	73
9.13	Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ an vier Positionen im Spalt	74
9.14	Strömungsmodell für den Spaltbereich. Schema der Wirbelbewegung .	75
9.15	Wirbelstruktur in einer Spaltströmung	76
10.1	Querschnitt des numerisch untersuchten Kanals	78
10.2	Richtungsplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Spaltmittelebene für den Fall G4 1	82
10.3	Veranschaulichung der periodischen Randbedingungen in y -Richtung .	86
10.4	Relative mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u \rangle}$ in Hauptströmungsrichtung	92
10.5	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung	93
10.6	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente durch den Spalt	94
10.7	Turbulenzintensität $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Spalt	95
10.8	Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$	96
10.9	Reynoldssche Schubspannung $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$	97
10.10	Turbulente kinetische Energie $\langle k' \rangle / u^{*2}$	98
10.11	Symmetrietest $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$	99
10.12	Autospektrale Leistungsdichten Φ_u und Φ_v sowie kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} an vier Positionen im Spalt	100
10.13	Autokorrelationsfunktionen R_{uu} und R_{vv} sowie Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} an vier Positionen im Spalt	101
10.14	Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{u_1 u_2}$ und $R_{v_1 v_2}$ an vier Positionen im Spalt	102

10.15	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u')$ und $p(v')$ an vier Positionen im Spalt	103
10.16	Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ an vier Positionen im Spalt	104
10.17	Richtungsplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $K=20$	107
10.18	Vektorplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $K=20$	108
10.19	Ausschnittbild der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren	109
10.20	Produktionsterm $(-\langle u'v' \rangle \cdot \partial \langle u \rangle / \partial y) / (u^{*3} / D)$	112
10.21	Reynoldssche Schubspannung $\langle v'w' \rangle / u^{*2}$	113
10.22	Vektorplot der Sekundärströmung	114

Tabellenverzeichnis

9.1 Übersicht über die durchgeführten Messungen	57
10.1 Übersicht über die durchgeführten Rechnungen	79

Nomenklatur

Allgemeine Kennzeichnung einer beliebigen Größe y

y	dimensionslose Größe
\hat{y}	dimensionsbehaftete Größe
y_0	Bezugsgröße
$\langle y \rangle$	zeitlicher Mittelwert
$V \langle y \rangle$	Mittelwert über das Kanalvolumen
y''	Abweichung vom zeitlichen Mittelwert
$V_{\bar{y}}$	Mittelwert über ein Maschenvolumen
\bar{y}	Mittelwert über eine Maschenfläche F
y'	Feinstrukturgröße, Abweichung von einem Grobstrukturwert
\bar{y}^j	arithmetischer Mittelwert über in x_j -Richtung benachbarte Werte
\tilde{y}^j	Mittelwert über in x_j -Richtung benachbarte Werte mit Gewichtung durch Maschenweiten
$\frac{\partial y}{\partial x_i}$	partielle Ableitung von y nach x_i
$\delta_j y$	zentraler Differenzenquotient in x_j -Richtung, oder auch Differenzenform durch Parabelnäherung in nichtäquidistanten Maschennetzen
y_i	Komponente der Größe y in Richtung x_i

Einsteinsche Summationskonvention

Summation über rechts unten doppelt vorkommende, nicht in eckigen Klammern stehende Indizes. Zum Beispiel

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^3 y_{[j][j]}$$

$$\delta_i u_i = \sum_{j=1}^3 \delta_{[j]} u_{[j]}$$

Symbole

Es werden die verwendeten dimensionslosen Größen angegeben. In Anhang A ist beschrieben, wie diese aus den dimensionsbehafteten Größen hervorgehen. Nur für die Größen, die auch direkt im Kapitel über die experimentellen Untersuchungen auftreten, ist zusätzlich in eckigen Klammern die zugehörige Dimension aufgeführt.

α	Kolmogorov-Konstante (= 1, 5)
b	= $X_2 - B$, freie Kanalbreite
B	Breite des Kanaleinbaus (Spaltlänge)
C_{11}	Koeffizient bei der Modellierung eines Energiegradienten
C_2	Koeffizient im isotropen Feinstrukturmodell
$C_{2,inh}$	Koeffizient im inhomogenen Feinstrukturmodell
C_3, C_{31}, C_{32}	Koeffizienten im Dissipationsmodell der Feinstrukturenergiegleichung
C_4	= $C_2 \cdot C_{20}$, Koeffizient im Produktionsmodell der Feinstrukturenergiegleichung
${}^j C_5, {}^{ij} C, C_{20}$	Koeffizienten im isotropen Feinstrukturmodell
${}^j C_6, C_7$	Koeffizienten im Diffusionsmodell der Feinstrukturenergiegleichung
d	Spaltbreite [m]
D	Plattenabstand (= 1)
\hat{D}_h	hydraulischer Durchmesser [m]
\overline{D}_{ij}	= $\delta_j \overline{u}_i + \delta_i \overline{u}_j$, Deformationstensor

${}^2\overline{D}_{ij}^2, {}^3\overline{D}_{ij}^2$

verschiedene Darstellungen des Deformationsgeschwindigkeitsquadrats
in Differenzenform

$${}^2\overline{D}_{ij}^2 = \overline{(\delta_j \overline{u}_i + \delta_i \overline{u}_j)^j} \delta_j \overline{u}_i ,$$

$${}^3\overline{D}_{ij}^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \overline{(\delta_i \overline{u}_j + \delta_j \overline{u}_i)^2}^{i,j} , & i \neq j \\ 2(\delta_j \overline{u}_i)^2 & , \quad i = j \end{cases}$$

δ_{ij}	Kroneckersymbol
Δt	Zeitschrittweite
Δx_i	Maschenweite in x_i -Richtung
$E(\mathbf{k})$	Energiespektrum
${}^j\overline{E}_{i,so}^i$	flächengemittelte Feinstrukturenergie (isotroper Anteil)
${}^v\overline{E}_{i,so}^i$	volumengemittelte Feinstrukturenergie (isotroper Anteil)
ε	$= \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, Dissipation
η	Kolmogorov-Länge
f	Frequenz [Hz]
f_P	charakteristische Peak-Frequenz [Hz]
jF	Maschenfläche mit Normalen in positiver x_j -Richtung
γ_1, γ_2	Korrekturfaktoren im isotropen Feinstrukturmodell
Γ	Gamma-Funktion
h	$= (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$, charakteristische Maschenweite
i	Maschenindex in x_1 -Richtung
IM	Anzahl der Maschen in x_1 - Richtung
j	Maschenindex in x_2 -Richtung
JLK, JRK	Index der Maschen in x_2 -Richtung direkt links bzw. rechts am Einbau (gegen Strömungsrichtung)
JM	Anzahl der Maschen in x_2 - Richtung

JS	$= (\text{JLK} + \text{JRK} - \text{J})$, bezüglich des Einbaus in x_2 -Richtung symmetrischer Index zu J
JG	$= (\text{JRK} - \text{JLK} - 1)$, Anzahl der Maschen in x_2 -Richtung im Spalt
k	Maschenindex in x_3 -Richtung
\underline{k}	$= 2\pi/\lambda$, skalare Wellenzahl
k'	$= \frac{1}{2}u_i'^2$, turbulente kinetische Energie $[\text{m}^2/\text{s}^2]$
KM	Anzahl der Maschen in x_3 -Richtung
KTK	Index der Masche direkt über dem Kanaleinbau in x_3 -Richtung
KG	$= (\text{KM} - \text{KTK} + 1)$, Anzahl der Maschen in x_3 -Richtung im Spalt direkt über dem Einbau
κ	von Kármán-Konstante ($= 0,4$)
\hat{L}	Einlauflänge im Kanal [m]
l_{inh}	Mischungsweg im inhomogenen Feinstrukturmodell
l_{mix}	Prandtlscher Mischungsweg
λ	Wellenlänge [m]
μ	$= \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho} \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}}$, dynamische Viskosität
${}^{ij}\mu_{inh}$	inhomogene turbulente Feinstrukturfähigkeit
${}^{ij}\mu_{iso}$	isotrope turbulente Feinstrukturfähigkeit
n	Zeitschrittzähler (n_0, n_1, n_2)
$ n_W $	kürzester senkrechter Wandabstand
ν	$= \frac{\hat{\nu}}{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}} = \mu$, kinematische Viskosität $[\text{m}^2/\text{s}]$
p	Druck
P_x	mittlerer Druckgradient in x_1 -Richtung
$p(u')$	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung von u'
$p(u', v')$	Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilung von u' und v'
ψ	Hilfspotential zur Druckberechnung

$\{\Psi_1, \Psi_2\}$	Vektorpotential zur Bestimmung von Anfangswerten der Geschwindigkeiten
R_{uu}	Autokorrelationsfunktion von u'
R_{uv}	Kreuzkorrelationsfunktion von u' und v'
$R_{u_1 u_2}$	Kreuzkorrelationsfunktion von u' an den Positionen 1 und 2
Re	$= \frac{v \langle \hat{u}_1 \rangle \hat{D}_h}{\nu}$, Reynolds-Zahl im Experiment
Re_m	$= \frac{v \langle \hat{u}_1 \rangle \hat{D}}{\nu} = \frac{v \langle u_1 \rangle D}{\nu}$, Reynolds-Zahl
Re_τ	$= \frac{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}}{\nu} = \frac{1}{\nu} = \frac{Re_m}{\langle u_1 \rangle}$, Reynolds-Zahl
ρ	Dichte
τ_W	Wandschubspannung [Pa]
τ_{W0}	mittlere Wandschubspannung [Pa]
u	$= u_1$, Geschwindigkeit in x_1 -Richtung [m/s]
u^+	$= \frac{u}{u_\tau}$, dimensionslose Geschwindigkeit
u^*	$= u_{\tau 0}$, mittlere Wandschubspannungsgeschwindigkeit [m/s]
u_C	Transportgeschwindigkeit der Wirbel [m/s]
u_i	Geschwindigkeit in x_i -Richtung
u_m	mittlere Geschwindigkeit
u_τ	$= \sqrt{\tau_W / \rho}$, Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$u_{\tau 0}$	$= u^*$, mittlere Wandschubspannungsgeschwindigkeit [m/s]
v	$= u_2$, Geschwindigkeit in x_2 -Richtung [m/s]
Φ_u	Autospektrale Leistungsdichte von u [m ² /s]
Φ_{uv}	Kreuzspektrale Leistungsdichte von u und v [m ² /s]
w	$= u_3$, Geschwindigkeit in x_3 -Richtung [m/s]
W_1, W_2, W_T	untere und obere Kanalwand bei $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ sowie Spaltwand bei $x_3 = x_{3T}$.

W_L, W_R	linke und rechte Wand des Einbaus bei $x_2 = x_{2L}$ und $x_2 = x_{2R}$.
x	$= x_1$, Koordinate [m]
x_1, x_2, x_3	Koordinaten (x_1 : in Hauptströmungsrichtung; x_2 : parallel zu den Kanalwänden W_1 und W_2 ; x_3 : senkrecht zu W_1 und W_2)
x_{2L}, x_{2R}	x_2 -Koordinaten der linken und rechten Wand des Einbaus ($x_{2R} - x_{2L} = B$)
x_{3T}	x_3 -Koordinate der unteren Spaltberandung ($x_{3T} = D - d$)
X_1, X_2	Periodenlängen in x_1 - und x_2 -Richtung
y	$= x_2$, Koordinate [m]
y^+	$= \frac{y \langle u_\tau \rangle}{\nu}$, dimensionsloser Wandabstand; allgemein verwendet oder auch speziell für Wände normal zur y -Richtung
y_d	lokale y -Koordinate im Spalt. $y_d = 0$ im Zentrum des Spalts [m]
z	$= x_3$, Koordinate [m]
z^+	$= \frac{z \langle u_\tau \rangle}{\nu}$, dimensionsloser Wandabstand für Wände normal zur z -Richtung

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Eine in Wärmetauschern unterschiedlichster Anwendungsbereiche häufig verwendete Geometrie sind zu Bündeln zusammengefaßte Rohre. Am Beispiel eines Brennelements für Kernreaktoren sind dies regelmäßige dreiecksförmige oder quadratische Anordnungen von Stäben, die in Längsrichtung parallel zueinander ausgerichtet sind. Die in den Brennstäben freigesetzte thermische Energie wird durch das Kühlmittel, das die Stäbe in axialer Richtung umspült, abgeführt. Diese Strömung verläuft im allgemeinen turbulent. Bedingt durch die Anordnung der Stäbe und deren gegenseitigen Abstand ist die Temperaturverteilung am Stabumfang nicht konstant. Lokale Temperaturmaxima treten an den Stellen geringen Stababstands auf und Temperaturminima entsprechend dort, wo die Stäbe zusammen einen Unterkanal einschließen.

Zur Auslegung von Brennelementen ist die Kenntnis der Temperaturverteilung und des Strömungszustands erforderlich. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie gelöst. Für die Stabbündelgeometrie ist dies nur mit Vereinfachungen möglich. Zur Unterstützung und Absicherung der Rechenverfahren wurden viele experimentelle Untersuchungen an Stabbündeln durchgeführt. Einen Überblick über diesbezügliche Arbeiten gibt Rehme [1]. An verschiedenen Anordnungen unterschiedlich vieler Stäbe wurden dabei die Turbulenzstrukturen in Wand- und Zentralkanälen gemessen. Eine Auswahl von Geometrien zeigt Abbildung 1.1 auf Seite 3. An dieser Stelle sei hauptsächlich auf die Arbeiten von Rehme [2, 3] (Übersicht zu durchgeführten Messungen in [1]), Hooper [4], Hooper und Rehme [5, 6] und Möller [7] verwiesen. Die jüngsten verfügbaren Meßdaten liegen von Krauss und Meyer [8] vor, die isotherme und beheizte Strömungen in einem 37-Stab-Bündel für verschiedene Stababstandsverhältnisse untersucht haben.

Diese Untersuchungen zeigten, daß die Turbulenzintensitäten in Stabbündelgeometrien stark anisotrop und viel höher als in Kreisrohren sind. Die Intensitäten nehmen zu, wenn der Stababstand verringert wird. Es wurde eine quasiperiodische Strömungsbewegung durch den Spalt zwischen benachbarten Unterkanälen entdeckt. Diese Pulsation äußert sich durch Peaks in den Leistungsdichtespektren der Schwankungsgeschwindigkeiten. Die Spitzen in den Spektren für die axiale und azimutale Geschwindigkeitskomponente zeigen sich in der Nähe der engen Spalte zwischen zwei Stäben oder zwischen Wand und Stab. Hooper und Rehme [6] haben an einer Geometrie gezeigt, daß die zugehörige signifikante Frequenz linear von der Reynolds-Zahl abhängt.

Die Pulsationen verstärken den Queraustausch zwischen den Unterkanälen. Der Mischungsprozeß führt zu einem Temperatenausgleich benachbarter Kanäle sowie auf der Stabwand. Als weiterer Effekt wird eine Verminderung der Variation der Wandschubspannungen am Stabumfang beobachtet.

Gelingt es, die Ursachen derartiger Pulsationen zu erforschen, so können diese Kenntnisse dazu genutzt werden, die Auslegung von Brennelementen zu optimieren. Wurden bisher die Auslegungs-Betriebsbedingungen mit entsprechend hohen Sicherheitsfaktoren beaufschlagt (sog. *hot channel factors*), um auch nicht-nominelle Betriebsbedingungen sicher erfassen zu können, so könnten diese Faktoren aufgrund der Optimierung verkleinert werden. Bei gleichem oder sogar höherem Sicherheitsstandard hätte dies eine Senkung von Kosten und eine Verlängerung der Standzeiten zur Folge.

Mit dem Ziel, den prinzipiellen Mechanismus der Pulsationen zu verstehen, wurden die untersuchten Geometrien stark vereinfacht. Einige Kanalquerschnitte sind in Abbildung 1.1 dargestellt. Es handelt sich vor allem um Kanäle mit ebenen, rechtwinklig angeordneten Wänden. Allen diesen Geometrien ist gemeinsam, daß sie ein oder zwei Hauptströmungsgebiete mit großem Querschnitt und daran anschließend einen oder zwei Nebenkanäle mit relativ kleinem Querschnitt besitzen. Es wurden sowohl geschlossene Strömungskanäle untersucht als auch Strömungen mit offener Oberfläche, so zum Beispiel von Knight und Hamed [9] (Abbildung 1.1f) und Shiono und Knight [10] (Abbildung 1.1g). Letzterer Strömungstyp kann als Modell für eine Flußströmung mit flachem Uferbereich angesehen werden.

Die Geometrie der durch einen engen Spalt verbundenen Unterkanäle in Stabbündeln läßt sich abstrahieren zu zwei Rechteckkanälen, die ebenfalls durch einen engen Spalt in Verbindung stehen (Abbildung 1.1i). Parallel dazu wurden Messungen an Rechteckkanälen mit einem Schlitz in einer Wand vorgenommen (Abbildung 1.1j). Meyer und Rehme [11] konnten in diesen Kanälen ebenfalls großskalige, quasiperiodische Bewegungen feststellen, falls die Spaltlänge („-tiefe“) mindestens doppelt so groß wie die Spaltbreite war. In diesen Geometrien wurden mit Hitzdrahtsonden Geschwindigkeitskomponenten gemessen und daraus die Verteilungen von Reynolds-Spannungen, auto-

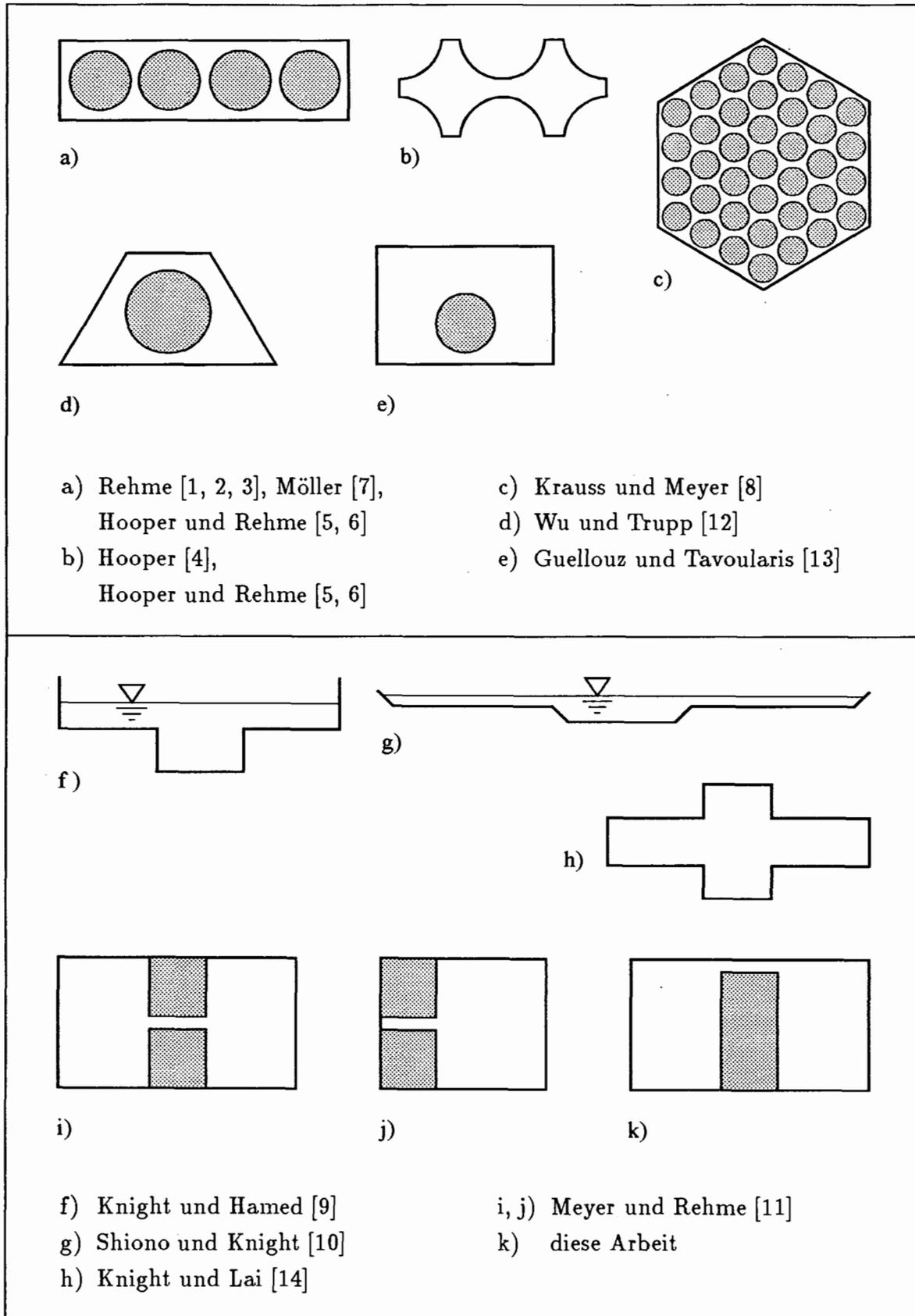


Abbildung 1.1: Auswahl von Querschnitten experimentell untersuchter Geometrien

und kreuzspektrale Leistungsdichten sowie Zweipunktkorrelationen bestimmt. Die erhaltenen Resultate sind mit denen in Stabbündelgeometrien vergleichbar. Beispielsweise zeigen die Leistungsdichtespektren in den Spalten beziehungsweise im Kanal in Spaltnähe Peaks bei einer charakteristischen Frequenz.

Parallel zu den hier durchgeführten theoretischen Arbeiten wurde ein Kanal experimentell untersucht, bei welchem der verbindende Spalt nicht in den Wandmitten, sondern, wie in Bild 1.1k dargestellt, an der Außenwand des Gesamtkanals liegt. Diese aus dem Kanalquerschnitt gemäß Abbildung 1.1i abgeleitete Geometrie wurde gewählt, weil sich das hier zur numerischen Untersuchung verwendete Rechenprogramm günstig an diesen Querschnitt anpassen ließ.

Neben den vielen experimentellen Untersuchungen wurden auch numerische Simulationen von Strömungen in ähnlichen Geometrien durchgeführt. Thomas und Williams [15] haben mittels Large Eddy Simulation eine Kanalströmung mit offener Oberfläche analysiert. Die Geometrie bestand aus einem rechteckförmigen Hauptströmungsquerschnitt, der mit einem kleineren, ebenfalls rechteckförmigen „Uferbereich“ verbunden war – analog zu Abbildung 1.1f, wenn dort einer der beiden Uferkanäle entfernt wird. Die Untersuchungen konzentrierten sich in jener Arbeit auf die Bestimmung der Sekundärströmung.

1.2 Zielsetzung

Nach Auswertung aller zur Verfügung stehenden Meßdaten für die Strömung in verbundenen Rechteckgeometrien wurde von Meyer und Rehme [11] ein Modell vorgeschlagen, das die Strömung im Bereich des verbindenden Spaltes beschreiben und damit die beobachteten Phänomene erklären soll. Im Rahmen dieser Arbeit soll mit Hilfe der numerischen Simulation das Strömungsmodell – ein Wirbelpaar, bestehend aus zwei gegensinnig rotierenden Einzelwirbeln – bestätigt werden.

Ferner sollen, neben dem Vergleich mit dem Experiment, Größen ausgewertet werden, die meßtechnisch nicht oder nur sehr schwer zugänglich sind. Interessant sind in diesem Zusammenhang vor allem die Reynoldssche Schubspannung $\langle v'w' \rangle$ der beiden Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Hauptströmungsrichtung sowie der Produktionsterm der kinetischen Energie $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$, welcher zur Übertragung von Energie aus der Hauptströmung in die turbulente Bewegung beiträgt.

Es soll der Nachweis erbracht werden, daß die für die Spaltströmung typische Pulsation kein Effekt ist, der durch Einlaufeinflüsse im Kanal hervorgerufen wird. Diese Untersuchung ist im Experiment nur schwer durchzuführen, da hierfür extrem lange

Meßstrecken erforderlich sind. Numerisch kann jedoch ein eingelaufener Zustand simuliert werden.

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

An einer Kanalgeometrie, welche der später numerisch zu untersuchenden Geometrie entspricht, werden Messungen durchgeführt. Damit werden Vergleichsdaten für die Simulation bereitgestellt.

Der verwendete Code muß so erweitert werden, daß die spezielle Geometrie behandelt werden kann. Neue Analysemodule müssen entwickelt werden.

Mit der neuen Code-Version werden Vergleichsrechnungen durchgeführt, um den Code mit Hilfe der Meßdaten zu verifizieren. Zur Überprüfung des Strömungsmodells werden die numerisch erzeugten Geschwindigkeitsdaten analysiert. Mit den vorhandenen Daten können nun auch die gesuchten Größen wie Reynolds-Schubspannungen und Produktionsterme ausgewertet werden, und es lassen sich Aussagen zu der Frage machen, ob das Pulsationsphänomen durch Einlaufeffekte verursacht wird.

1.3 **Untersuchte Geometrie**

Im folgenden wird die Kanalgeometrie beschrieben, die zur numerischen Untersuchung der Strömung in verbundenen Rechteckkanälen herangezogen wurde. Die Längenbezeichnungen sind in der im Programm benützten dimensionslosen Form aufgeführt.

Der in der Simulation verwendete Querschnitt entspricht der Kanalgeometrie in Abbildung 1.1k. Der Unterschied zum experimentell untersuchten Kanal besteht darin, daß hier die beiden verbundenen Hauptkanäle an der dem Spalt gegenüberliegenden Seite keine geschlossenen Wände besitzen, sondern praktisch offen sind. Dies wird erreicht durch das Ansetzen periodischer Randbedingungen.

Die Geometrie wurde aus einem offenen, zweiseitig unendlich ausgedehnten Plattenkanal entwickelt. In Abbildung 1.2 ist er schematisch dargestellt. Die Bezeichnung erfolgt in kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) beziehungsweise (x, y, z) . Die Hauptströmungsrichtung verläuft in Richtung der Koordinate x_1 . x_2 ist die wandparallele Richtung, x_3 gibt die wandnormale Richtung an. Die Länge des Plattenkanals in Richtung der Koordinate x_1 ist X_1 . Durch die Verwendung periodischer Randbedingungen ergibt sich eine praktisch unendliche Ausdehnung des Kanals: nach der Periodenlänge X_1 wiederholt sich das komplette Strömungsfeld. Entsprechendes gilt für die Querrichtung x_2 : dort werden periodische Randbedingungen mit der Periodenlänge X_2 angesetzt.

In diesen Plattenkanal wird ein quaderförmiger Körper der Breite B und der Höhe $D-d$ auf der unteren Platte eingesetzt (deswegen im folgenden oft auch die Bezeichnung

„Einbau“). Dessen Ausdehnung in Hauptströmungsrichtung x_1 entspricht der gesamten Kanallänge X_1 . Damit verbleibt an der oberen Platte ein Spalt der Breite d und Länge oder Tiefe B . Diese Geometrie ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

Als Randbedingungen in den Richtungen x_1 und x_2 werden wie im Plattenkanal periodische Randbedingungen mit den Längen X_1 und X_2 verwendet. Das bedeutet, daß auch für den Einbau in x_1 -Richtung solche Randbedingungen angesetzt werden. Das gesamte Strömungsgebiet kann man sich also als eine sich in x_2 -Richtung wiederholende Anordnung unendlich langer längs umströmter Rippen vorstellen. Die absolute Positionierung des Einbaus in x_2 -Richtung ist für die Problemlösung, bedingt durch die periodischen Randbedingungen, unerheblich. Für die programmtechnische Realisierung muß der Einbau natürlich genau spezifiziert werden.

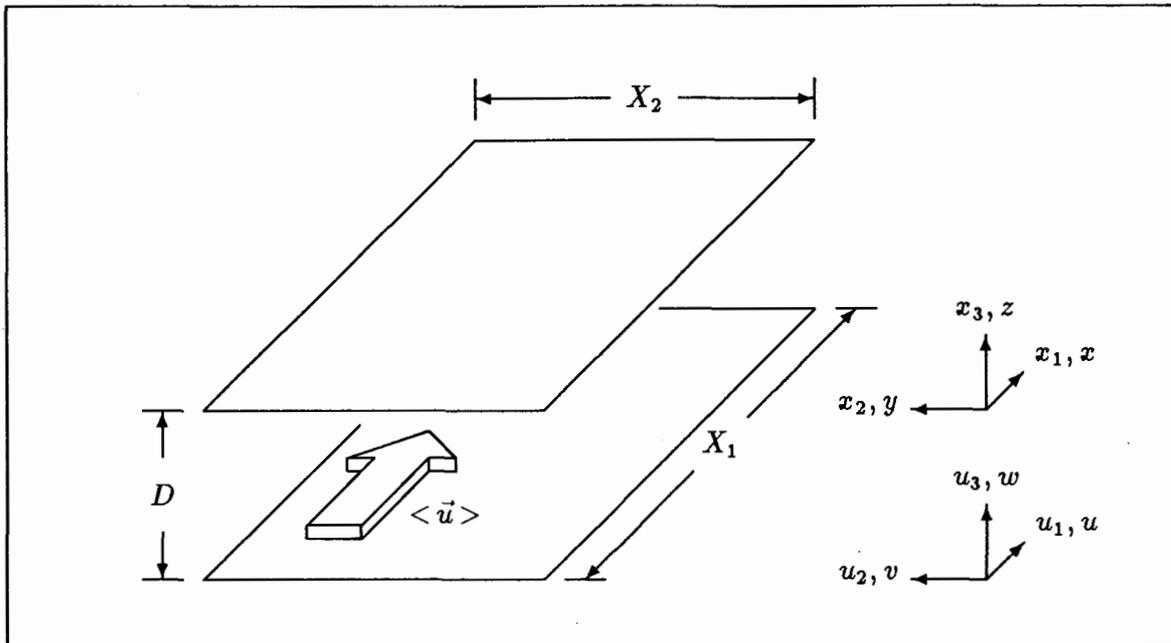


Abbildung 1.2: Geometrie des Plattenkanals: Abmessungen und Hauptströmungsrichtung

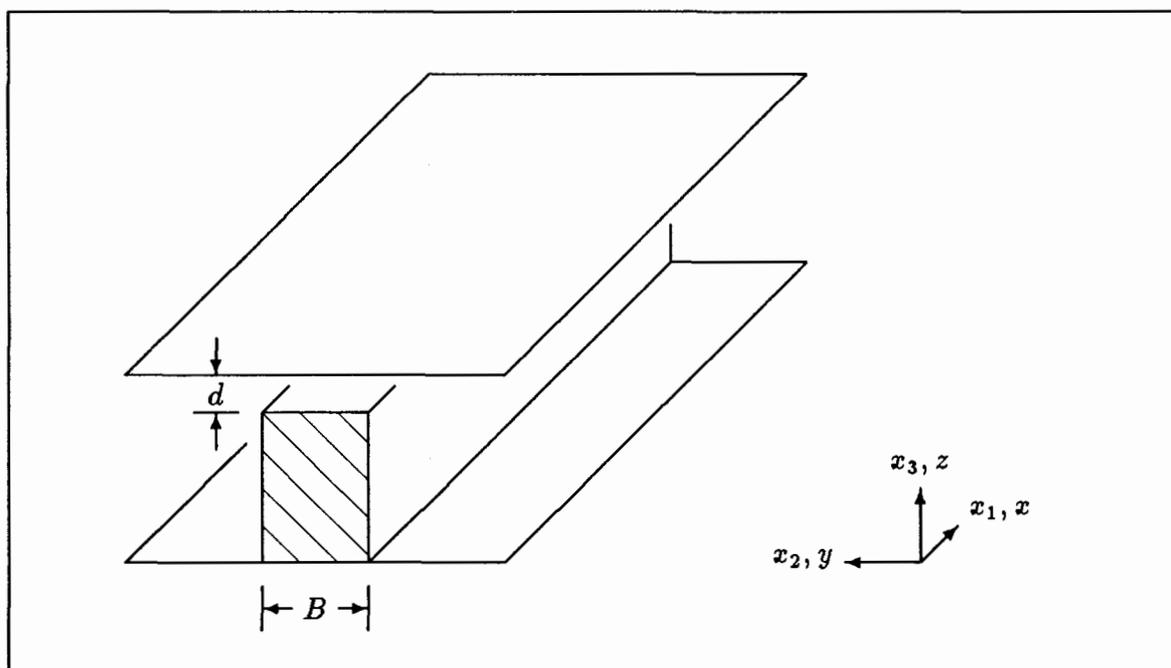


Abbildung 1.3: Geometrie des Spaltes im Kanal: ergänzende Bezeichnungen zu Abbildung 1.2

Kapitel 2

Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die zur vollständigen mathematischen Beschreibung von Strömungen eines inkompressiblen, zähen Fluids erforderlichen Gleichungen angegeben. Auf eine Herleitung wird dabei verzichtet. Diese ist an vielen Stellen in der Literatur nachzulesen, wie zum Beispiel in Wieghardt [16, Kap. 1.4.4.], Schlichting [17, Kap. III] oder Rotta [18, Kap. 1.3.].

Anschließend wird eine aus den Grundgleichungen abgeleitete Gleichung der kinetischen Energie aufgeführt.

2.1 Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichungen

Strömungen von Kontinua lassen sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben. Unter bestimmten Voraussetzungen bilden diese vier Gleichungen ein geschlossenes Gleichungssystem, das heißt, die vier Gleichungen genügen zur Beschreibung des Strömungszustands. Die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich aus Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls herleiten. Durch geeignete Annahmen, die den untersuchten Strömungszuständen entsprechen, lassen sich die Gleichungen stark vereinfachen. Bezüglich des Fluids setzt man voraus, daß ein inkompressibles Medium mit konstanten Stoffwerten (speziell die Dichte ρ) und Newtonschen Zähigkeitseigenschaften vorliegt. Die Gleichungen lauten dann in Eulerscher, also ortsfester, Formulierung in einem kartesischen Koordinatensystem:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3} = 0,$$

Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{t}} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\hat{\nu} 2 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_1} \right) \right) + \hat{f}_1 \\ \frac{d\hat{u}_2}{d\hat{t}} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(\hat{\nu} 2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_2} \right) \right) + \hat{f}_2 \\ \frac{d\hat{u}_3}{d\hat{t}} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_3} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\hat{\nu} 2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3} \right) + \hat{f}_3.\end{aligned}$$

Die Gleichungen gelten sowohl für den laminaren als auch für den turbulenten Strömungsfall. Eine Vereinfachung der Schreibweise ergibt sich mit Verwendung der Einsteinschen Summationskonvention¹:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0, \quad (2.1)$$

Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{d\hat{u}_i}{d\hat{t}} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right) + \hat{f}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Darin bezeichnet \hat{u}_i die Geschwindigkeitskomponente in \hat{x}_i -Richtung, \hat{p} den Druck, $\hat{\rho}$ die Dichte und $\hat{\nu}$ die kinematische Viskosität des Fluids. Die \hat{f}_i geben (äußere) Massenkräfte an. Das Dach „ $\hat{}$ “ soll anzeigen, daß es sich um dimensionsbehaftete Größen (im Gegensatz zu den später einzuführenden dimensionslosen Größen) handelt. Mit den vier Gleichungen (2.1), (2.2) hat man ein geschlossenes Gleichungssystem für die vier Unbekannten \hat{u}_1 , \hat{u}_2 , \hat{u}_3 und \hat{p} .

Mit charakteristischen Kraft-, Längen- und Zeitgrößen werden die Grundgleichungen normiert, also dimensionslos gemacht. Dies hat zum einen den Vorteil, im Programm selbst nicht auf Dimensionen achten zu müssen, erlaubt aber vor allem den Vergleich geometrisch ähnlicher Strömungen durch die Verwendung von dimensionslosen Kenngrößen. Als wichtigste Kennzahl tritt hier die Reynolds-Zahl auf, gebildet aus der mittleren volumetrischen Geschwindigkeit $\langle \hat{u}_1 \rangle$, dem Plattenabstand \hat{D} und der kinematischen Viskosität $\hat{\nu}$ zu $Re_m = \frac{\langle \hat{u}_1 \rangle \hat{D}}{\hat{\nu}}$.

Angepaßt an das Strömungsproblem im Rechteck- oder Plattenkanal ohne äußere Kräfte \hat{f}_i und nur mit dem Druckgradienten \hat{P}_x in Hauptströmungsrichtung \hat{x}_1 ergeben sich aus (2.1) und (2.2) die normierten Grundgleichungen² für Massen- und Impulserhaltung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.3)$$

¹das bedeutet, es wird über Indizes, die rechts unten doppelt vorkommen, summiert; siehe dazu Nomenklatur, Seite x.

²zur Normierung siehe auch Anhang A

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \delta_{i1} P_x. \quad (2.4)$$

Dabei ist der Druckterm der zu $i = 1$ gehörenden Gleichungskomponente aufgespalten in eine lokale Druckänderung $-\frac{\partial p}{\partial x_1}$ und einen aufgeprägten, treibenden, zeitlich konstanten Druckgradienten P_x .

Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, werden im folgenden für die Grundgleichungen und alle weiteren anzugebenden Gleichungen nur noch die normierten Formen verwendet.

2.2 Energiegleichung

Aus den Grundgleichungen lassen sich weitere Gleichungen ableiten, beispielsweise eine Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie $E = \frac{1}{2}u_i^2$ des Fluids. Sie wird bei der Herleitung der Feinstrukturenergiegleichungen von Nutzen sein.

Multipliziert man den Geschwindigkeitsvektor mit seiner partiellen zeitlichen Ableitung (Skalarprodukt!), ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.4)

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_1 P_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_i \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (2.3) folgt für eine beliebige Größe y

$$\frac{\partial (u_i y)}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial y}{\partial x_i}. \quad (2.6)$$

Zusammen mit den Beziehungen

$$\frac{\partial E}{\partial t} = u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.7)$$

sowie der Definition der Dissipation ε als

$$\varepsilon \equiv \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.8)$$

erhält man dann aus Gleichung (2.5) eine Bilanzgleichung für die kinetische Energie:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial E}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right) \right) + u_1 P_x - \varepsilon. \quad (2.9)$$

Kapitel 3

Diskretisierung der Grundgleichungen

Beim Verfahren der Grobstruktursimulation (auch *Large Eddy Simulation*, LES) werden die Strömungsgleichungen durch Filterung oder Glättung so verändert, daß man eine Aufspaltung der einzelnen Strömungsgrößen in zwei verschiedene Anteile erreicht. Der erste Anteil, der sogenannte Grobstrukturanteil, repräsentiert die großen Skalen der simulierten Strömung. Das sind die Anteile, die vom Strömungstyp, von der Geometrie abhängig sind. Die kleinen, vom Maschennetz nicht auflösbaren Skalen werden modelliert. Dabei wird angenommen, daß diese kleinen Skalen vom Strömungstyp unabhängig und die verwendeten Modellannahmen also universell gültig sind. Die Trennung der großen von den kleinen Skalen erreicht man durch Filterung der Grundgleichungen. Der hier verwendete Box-Filter entspricht einer Integration der Grundgleichungen über Volumenelemente, die durch das Maschennetz definiert werden (vgl. Abbildung 3.1).

In dieser Arbeit wird das von Schumann [19] in seiner Dissertation hergeleitete und später von Grötzbach [20] und Mauch [21] erweiterte Modell sowie dessen Umsetzung in Form des Programmes TURBIT verwendet.

Die Grobstruktursimulation erscheint auch besonders geeignet, das vorliegende Problem der Spaltströmung zu untersuchen, da die Pulsationsbewegung durch den Spalt ein niederfrequenter, großskaliger Effekt und damit ein Grobstrukturphänomen ist.

3.1 Mittelungsoperation

Eine Grobstrukturgröße $\overline{v_{u_1}}$ (hier am Beispiel der Geschwindigkeitskomponente u_1 in x_1 -Richtung) erhält man dann durch folgende Integration:

$$\overline{u_1}^V = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \quad (3.1)$$

Dabei stellen (x_1, x_2, x_3) den Mittelpunkt des Maschenelements und die Δx_i die zugehörigen Maschenweiten dar¹. Durch obige Operation läßt sich eine Größe y , wie z.B. der Druck, in einen Grobstrukturanteil \overline{y}^V und einen Feinstrukturanteil y' aufspalten. Dieser Feinstrukturanteil ergibt sich aus der Differenz der tatsächlichen Größe und der Grobstrukturgröße zu $y' = y - \overline{y}^V$.

Die Anwendung der Operation der Volumenmittelung auf die partiellen Ableitungen einer Größe liefert folgendes Ergebnis: Da eine der drei Integrationen formal ausgeführt werden kann, reduziert sich die Volumenmittelung bei den meisten Termen der Grundgleichungen auf eine Flächenmittelung. Am Beispiel der partiellen Ableitung $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ ausgeführt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)}^V &= \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\Delta x_1} \int_{\Delta x_2} \int_{\Delta x_3} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\Delta x_2} \int_{\Delta x_3} \left(u_1\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - u_1\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \right) d\xi_3 d\xi_2 \\ &= \frac{1}{\Delta x_1} \left(\overline{u_1}\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \overline{u_1}\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \right) = \delta_1 \overline{u_1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Durch \overline{y}^i wird ein Flächenmittelwert der Größe y auf der Maschenfläche F^i , also mit der Normalen in positiver i -Richtung, definiert (siehe auch Abbildung 3.1). $\delta_i y$ bezeichnet den Differenzenquotienten von y in x_i -Richtung.

Den Vorteil dieser Art von Mittelung erkennt man bei Verwendung eines versetzten Maschennetzes, auch *staggered grid* genannt. Dort lassen sich ohne weitere Definitionen die Flächenmittelwerte $\overline{u_i}$ genau den Maschenflächen an den Orten $x_i + \frac{\Delta x_i}{2}$ zuordnen, wohingegen die Volumenmittelwerte \overline{y}^V zentriert sind, wie dies in Abbildung 3.2 dargestellt ist.

Wird der Mittelungsoperator \overline{y}^V auf die Grundgleichungen (2.3–2.4) angewandt, erhält man mit (3.2) im einzelnen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)}^V = \delta_i \overline{u_i} = 0, \quad (3.3)$$

¹Schumann hat in seiner Arbeit [19] sogar ein erweitertes Raum-Zeit-Volumenelement verwendet, indem er zusätzlich über das Zeitintervall Δt integriert hat. Die oben definierte Grobstrukturgröße kann dennoch als Mittelwert in einem bestimmten Zeitintervall interpretiert werden.

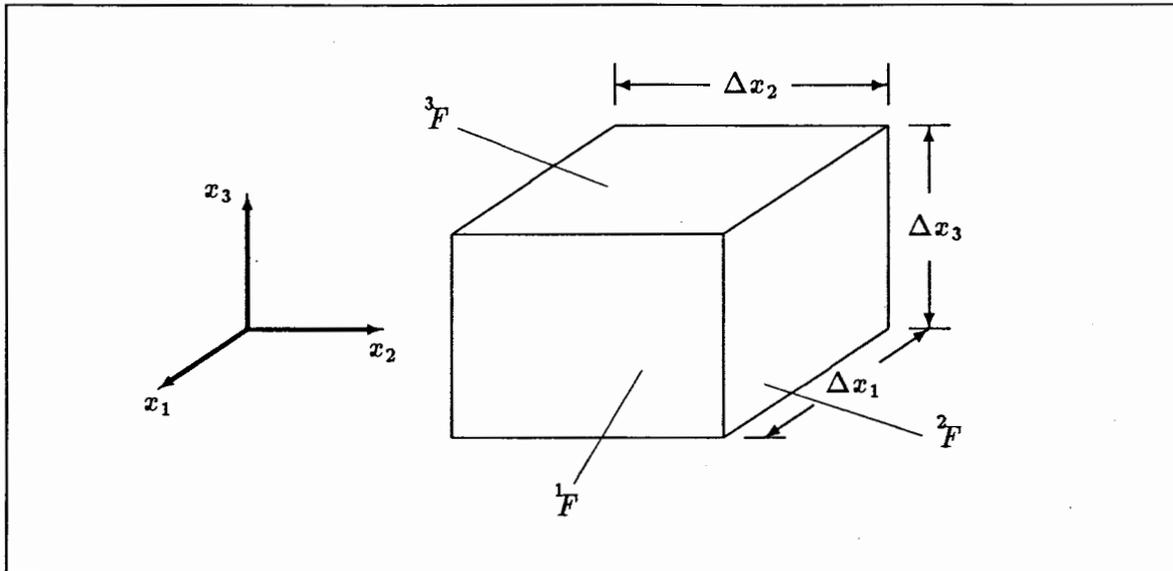


Abbildung 3.1: Volumenelement mit Notation der Maschenkanten und Maschenflächen

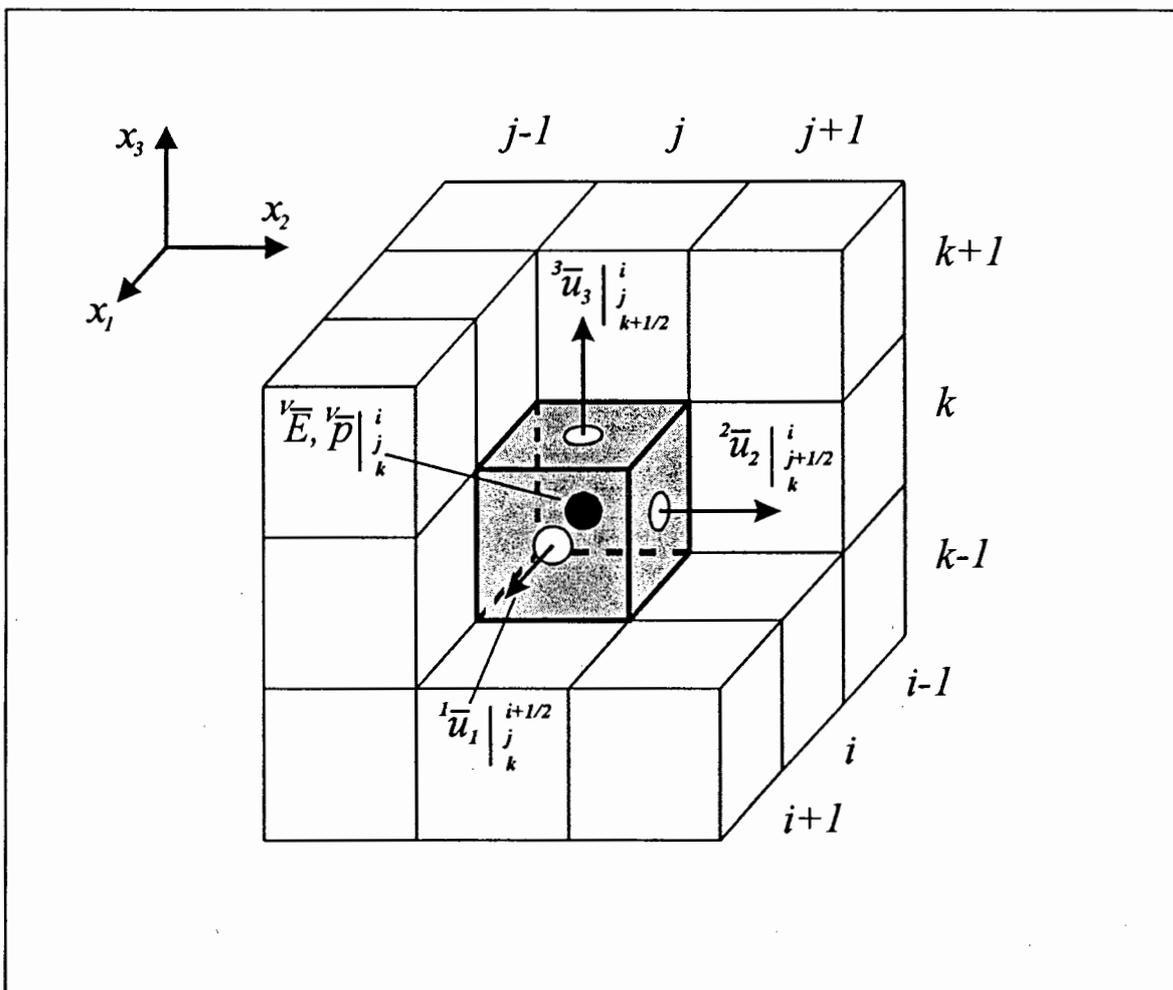


Abbildung 3.2: Definition eines versetzten Gitters (staggered grid).

Impulserhaltungsgleichungen:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} = -\delta_j \overline{(u_i u_j)} - \delta_i \overline{p} + \delta_j \overline{\left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)} + \delta_{1i} P_x. \quad (3.4)$$

Hier läßt sich ein weiterer Vorteil obiger Notation in Verbindung mit einem versetzten Maschennetz erkennen: Die Kontinuitätsgleichung ist numerisch exakt erfüllbar. Außerdem können auch anisotrope Maschengitter verwendet werden.

In obiger Form ist die Kontinuitätsgleichung aber nichts anderes als der Gaußsche Integralsatz (siehe z.B. [22, S. 349]), wenn man noch mit dem Volumen $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ multipliziert. Gleichung (3.3) sagt dann nur aus, daß die Summe der Flüsse über die Grenzen eines Volumenelements gleich Null ist (unter der Voraussetzung konstanter Dichte ρ).

Nicht alle Terme der Impulsgleichung (3.4) lassen sich wie in der Kontinuitätsgleichung in Differenzenformen umwandeln. Für diese Terme müssen Näherungen eingeführt werden (siehe Abschnitt 3.2).

Die konvektiven Anteile der Gleichungen (3.4) können weiter aufgespalten werden. Mit der Definition der Schwankungsgröße y' als Differenz zwischen der tatsächlichen Größe y und dem Flächenmittel \overline{y}

$$y' = y - \overline{y}, \quad (3.5)$$

erhält man für die konvektiven Terme

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(j\overline{u_i} + u'_i)(j\overline{u_j} + u'_j)} = j\overline{u_i} j\overline{u_j} + \overline{u'_i u'_j}. \quad (3.6)$$

Für die Grundgleichungen ergeben sich damit die Differenzenformen

$$\delta_i \overline{u_i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} = -\delta_j (j\overline{u_i} j\overline{u_j}) - \delta_i \overline{p} + \delta_j \overline{\left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - j\overline{u'_i u'_j}\right)} + \delta_{1i} P_x. \quad (3.8)$$

Als nicht berechenbare Anteile bleiben in (3.8) die Feinstrukturspannungen $\overline{u'_i u'_j}$. Die Volumenmittelung der Grundgleichungen „erzeugt“ also neun zusätzliche Unbekannte. Damit ist das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen. Dieser Mangel kann näherungsweise beseitigt werden, indem zur Bestimmung der Feinstrukturspannungen ein Feinstrukturmodell eingeführt wird.

3.2 Approximationen für Differenzenquotienten

Wie in Abschnitt (3.1) gezeigt, können Differenzenformeln der Art $\delta_1 \overline{u_i}$ direkt mit den auf einem versetzten Maschennetz definierten Größen $\overline{u_i}$ aufgestellt werden. Zur

Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung genügen diese Differenzenformeln. Für die Impulsgleichung und die Energiegleichung werden jedoch auch Größen y und Ableitungen derselben an Orten benötigt, an denen sie nicht von vornherein zur Verfügung stehen. Man kann sich dadurch behelfen, daß Näherungen für die gesuchten Werte verwendet werden. Durch Einführung eines arithmetischen Mittelwertes

$$\bar{y}^{-1} \equiv \frac{1}{2} \left(y\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) + y\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) \right) \quad (3.9)$$

lassen sich dann auch Ausdrücke der Art \bar{u}_i , $\delta_j \bar{u}_i$ oder $\delta_j \bar{u}_i$ approximieren.

Zur Bildung dieser Werte wird ein Bezugsvolumen verwendet, das nicht dem durch das staggered grid festgelegten Volumenelement entspricht, sondern diesem gegenüber in der zu mittelnden Richtung verschoben ist. Die Begrenzungsflächen in dieser Richtung werden gebildet durch die Mittelflächen zwischen den eigentlichen Maschennetzflächen, und enthalten damit die Maschennittelpunkte $(x_1|_i, x_2|_j, x_3|_k)$ und $(x_1|_{i+1}, x_2|_j, x_3|_k)$, falls x_1 die zu mittelnde Richtung ist (siehe Schumann [19], S. 29).

Mit den Beziehungen (für $i \neq j$)

$$\bar{u}_i \approx \bar{u}_i^j \approx v_{\bar{u}_i} \approx \bar{u}_i^i \quad (3.10)$$

lassen sich explizit Differenzenformen (zunächst für äquidistante Maschennetze) herleiten (siehe auch Mauch [21], S. 24 f.), nämlich

$$\left. \begin{array}{l} \delta_j \bar{u}_i \\ \delta_j \bar{u}_i \end{array} \right\} \approx \delta_j \bar{u}_i^i \approx \delta_j \bar{u}_i^j \quad (3.11)$$

Um auch nichtäquidistante Maschennetze behandeln zu können, müssen die Mittelwertbildungen und Differenzenformen angepaßt werden. Dies geschieht durch Einführen von Gewichtungsfaktoren für die Mittelwerte beziehungsweise Verwendung von Parabelansätzen für die Differenzen. Die sich damit ergebenden Gleichungen sind in Kapitel 8.2 dargestellt.

Kapitel 4

Feinstrukturmodellierung

Die heute verfügbaren Rechnerkapazitäten sind noch nicht ausreichend, um vollständige direkte Turbulenzsimulationen auch bei hohen Reynolds-Zahlen durchführen zu können. „Direkt“ bedeutet, daß alle Skalen der turbulenten Bewegung, also von den größten bis zu den kleinsten Wirbeln, die um 3 oder mehr Größenordnungen kleiner als die größten Wirbel sind, durch das Maschennetz vollständig aufgelöst werden. Um mit größeren Maschennetzen rechnen zu können, muß also ein Ersatz für die kleinen, nicht darstellbaren Wirbel gefunden werden. Eine Nichtberücksichtigung der kleinen Skalen würde den Energiehaushalt der turbulenten Strömung verzerren. Denn der Transport von Energie von den großen Wirbeln zu immer kleineren Wirbeln (Energiekaskade) wird, falls das Maschennetz nicht fein genug ist, bei einer bestimmten Wirbelgröße (oder Wellenzahl) unterbrochen. Da die Energiedissipation aber hauptsächlich bei hohen Frequenzen stattfindet, muß nun das Feinstrukturmodell die Rolle der hochfrequenten kleinen Wirbel übernehmen. Feinstrukturmodelle sind daher im allgemeinen dissipativ (Ferziger [23], Herring [24], Leslie [25], Love [26]).

4.1 Prinzip der Modellierung

In unserem Fall wird der Impulsaustausch der kleinen Wirbel durch die Oberflächen- oder Feinstrukturspannungen $\overline{u'_i u'_j}$ dargestellt. Durch die Modellierung dieser Größen kann das Gleichungssystem (3.7, 3.8) geschlossen werden. Dazu wird ein Gradienten-Ansatz (Boussinesq-Ansatz) verwendet (Hinze [27], Schumann [19]):

$$\overline{u'_i u'_j} = -^{ij}\mu (\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k}. \quad (4.1)$$

Der Faktor $^{ij}\mu$ stellt eine turbulente scheinbare Zähigkeit dar. Obiger Ansatz entspricht formal dem Newtonschen Ansatz für die gradientenabhängigen Schubspannungen $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ in viskosen Fluiden. Der Term $\frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k}$ wird hinzugefügt, um für $\delta_{ij} \overline{u'_i u'_j}$

einen von Null verschiedenen Wert zu erreichen, obwohl ja

$$\delta_{ij} (\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) = 2 \delta_i \overline{u_i} = 0 \quad (4.2)$$

ist (Kontinuitätsgleichung) und wird, da er eine Normalspannungskomponente darstellt, dem Druck zugeordnet (Hinze [27, Kap. 1-2.]).

Die Feinstrukturspannungen werden nun in zwei Teile aufgespalten und diese mit Hilfe unterschiedlicher Theorien modelliert:

$$\overline{u_i' u_j'} = \underbrace{(\overline{u_i' u_j'} - \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle)}_{(I)} + \underbrace{\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle}_{(II)}. \quad (4.3)$$

Term (I) stellt den instationären, lokalisotropen Anteil und Term (II) den stationären, inhomogenen Anteil der Spannungen dar. Die Aufteilung erlaubt, zwei verschiedene Ansätze für die unterschiedlichen Effekte oder Phänomene in turbulenter Strömung zu verwenden. Speziell die hier untersuchte Kanalströmung zeigt in der Nähe der Wände starke Inhomogenitäten in den Turbulenzgrößen. Der Wandeinfluß ermöglicht es also nicht, die Theorie isotroper Turbulenz universell auf das gesamte Strömungsfeld und alle Größen anzuwenden. Mit der Aufspaltung nach (4.3) kann jedoch versucht werden, Teil (I) mit Ansätzen für isotrope Strömungsverhältnisse und Teil (II) mit Ansätzen, die den Wandeinfluß berücksichtigen, zu modellieren.

Für beide Anteile wird ein Boussinesq-Ansatz eingeführt:

$$\overline{u_i' u_j'} = \underbrace{-{}^{ij}\mu_{iso}(\overline{D_{ij}} - \langle \overline{D_{ij}} \rangle)}_{(I)} \underbrace{-{}^{ij}\mu_{inh} \langle \overline{D_{ij}} \rangle}_{(II)}. \quad (4.4)$$

$D_{ij} = \delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}$ ist der sogenannte Deformationstensor. Das Problem der Bestimmung der Feinstrukturspannungen $\overline{u_i' u_j'}$ ist nun verlagert auf die Bestimmung der beiden Zähigkeiten ${}^{ij}\mu_{iso}$ und ${}^{ij}\mu_{inh}$. Schumann und Grötzbach ([19], [20]) verwenden für die isotrope Zähigkeit das Prandtlsche Energiemodell und für die inhomogene Zähigkeit das Prandtlsche Mischungswegmodell:

$${}^{ij}\mu_{iso} = C_2 {}^{ij}C \left({}^jF {}^jC_5 \sqrt{\overline{E_{i,so}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

$${}^{ij}\mu_{inh} = l_{inh}^2 |\delta_j \langle \overline{u_i} \rangle + \delta_i \langle \overline{u_j} \rangle|. \quad (4.6)$$

In obigen Gleichungen gibt

jF die Maschenoberfläche normal zur x_j -Richtung an,

C_2 ist die bestimmende Modellkonstante.

${}^{ij}C$ und jC_5 bringen Korrekturen gegen die Maschennetzanisotropie in das Modell ein.

$\sqrt{\overline{E_{i,so}}}$ ist die Energie der Geschwindigkeitsschwankungen, die durch das Maschennetz nicht aufgelöst werden.

Aus Gleichung (4.5) folgt zusammen mit der Definition von $\overline{E'}$ sofort, daß der Einfluß der Feinstrukturenergie gegen Null geht, wenn $\overline{E'}$ beliebig klein wird. Mit anderen Worten: je feiner das Maschennetz wird, desto geringer wird der Anteil der Feinstruktur.

Da die von Schumann und Grötzbach untersuchten Kanalströmungen durch stärkere Inhomogenitäten nur in der Geschwindigkeitskomponente u_1 und nur in x_3 -Richtung gekennzeichnet waren, berücksichtigte deren inhomogenes Modell nur die Viskosität ${}^{13}\mu_{inh}$. Mauch [21] hat dieses Modell in alle drei Dimensionen erweitert, um damit Gebäudeumströmungen simulieren zu können.

Die inhomogene Wirbelviskosität ${}^j\mu_{inh}$ hängt nach Ansatz (4.6) vom Geschwindigkeitsgradienten und von der Mischungsweglänge l_{inh} ab. Für diesen Längenmaßstab verwendet Mauch [21, S. 36] einen Ansatz der Form

$$\frac{1}{l_{inh}} = \frac{1}{C_{2,inh} h} + \frac{1}{l_{mix}}. \quad (4.7)$$

Hierin bezeichnen

$C_{2,inh} = 0,1$ die Smagorinsky-Konstante,

$h = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$ eine charakteristische Maschenweite und

$l_{mix} = \kappa |n_W|$ eine Mischungsweglänge, die sich ihrerseits zusammensetzt aus der von Kármán-Konstanten $\kappa = 0,4$ und dem kürzesten senkrechten Wandabstand $|n_W|$.

4.2 Feinstrukturenergie

Zur Bestimmung von $\overline{E'}$ wird im folgenden gemäß den Ansätzen von Schumann [19, Kap. 3.4] eine Erhaltungsgleichung hergeleitet. Ausgehend von der Definition der kinetischen Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten innerhalb eines Maschenvolumens, nämlich

$$\overline{E'} \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_i - \overline{u_i})^2} = \frac{1}{2} \left(\overline{u_i^2} - (\overline{u_i})^2 \right), \quad (4.8)$$

erhält man als partielle Ableitung nach der Zeit

$$\overline{\frac{\partial E'}{\partial t}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u_i^2}{\partial t}} - \overline{u_i} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}}. \quad (4.9)$$

Mit der Energiegleichung (2.9) ergibt sich daraus zunächst

$$\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u_i^2}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial E}{\partial t}} = -\delta_j \overline{j(u_j E)} - \delta_i \overline{(u_i p)} + \delta_j \overline{\left(\nu \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right) \right)} - \overline{v_{\varepsilon}} + \overline{v_{u_1}} P_x. \quad (4.10)$$

Zusammen mit

$$\overline{E} \equiv \frac{1}{2} (\overline{u_i})^2 \quad \text{und} \quad \overline{E'} \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_i - \overline{u_i})^2} \quad (4.11)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{\partial E}{\partial t}} &= -\delta_j \left(\overline{jE} \overline{j u_j} + \overline{j u_j} \overline{j E'} + \frac{1}{2} \overline{j (u_i')^2 u_j'} \right) - \delta_j \left(\overline{j u_i} \overline{j u_i' u_j'} \right) \\
 &\quad - \delta_i \left(\overline{j u_i} \overline{j p} \right) - \delta_i \left(\overline{j p' u_i'} \right) - \overline{v \varepsilon} + \overline{v u_1} P_x \\
 &\quad + \delta_j \left(\overline{j v} \left(\overline{\frac{\partial E}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial E'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i}} \right) \right) \\
 &\quad + \delta_j \left(\overline{j v'} \left(\overline{\frac{\partial E}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i}} \right)' \right).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Das Skalarprodukt des Geschwindigkeitsvektors mit seiner Zeitableitung liefert (vergleiche (3.8))

$$\begin{aligned}
 \overline{v u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -\overline{v u_i} \delta_j \left(\overline{j u_i} \overline{j u_j} + \overline{j u_i' u_j'} \right) - \overline{v u_i} \delta_i \overline{j p} + \overline{v u_1} P_x \\
 &\quad + \overline{v u_i} \delta_j \left(\overline{j v} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) + \overline{j v'} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right)' \right).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Für die arithmetische Mittelung gemäß Definitionsgleichung (3.9) gelten folgende Beziehungen:

$$\delta_i (ab) = \overline{a}^i \delta_i b + \overline{b}^i \delta_i a, \quad \frac{1}{2} \delta_i a^2 = \overline{a}^i \delta_i a. \tag{4.14}$$

Beachtet man außerdem die mit (3.10) eingeführten Näherungen, um Volumenmittel in Flächenmittel und arithmetische Mittelwerte umzurechnen, läßt sich obige Gleichung (4.13) auch schreiben als

$$\begin{aligned}
 \overline{v u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -\delta_j \left(\overline{j E} \overline{j u_j} + \overline{j u_i} \overline{j u_i' u_j'} \right) + \overline{j u_i' u_j'}^j \delta_j \overline{j u_i} - \delta_i \left(\overline{j u_i} \overline{j p} \right) + \overline{v u_1} P_x \\
 &\quad + \delta_j \left(\overline{j v} \left(\overline{\frac{\partial E}{\partial x_j}} + \overline{j u_i} \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) \right) - \overline{v v} \left(\delta_j \overline{j u_i} \left(\delta_j \overline{j u_i} + \delta_i \overline{j u_j} \right)^j \right) \\
 &\quad + \overline{v u_i} \delta_j \left(\overline{j v'} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right)' \right).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Eine Feinstrukturenergiegleichung erhält man nun nach Gleichung (4.9) durch Sub-

traktion der Gleichung (4.15) von (4.12):

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \overline{\nu \frac{\partial E'}{\partial t}} = \\
\text{(II)} \quad & - \delta_j \left(\overline{j u_j} \overline{j E'} \right) \\
\text{(III)} \quad & - \overline{j u_i' u_j'} \delta_j \overline{j u_i} \\
\text{(IVa)} \quad & + \delta_j \left\{ \overline{j \nu} \left(\overline{j \frac{\partial E'}{\partial x_j}} + \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{j u_i} \overline{j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) - \overline{j u_j' E'} - \overline{j u_j' p'} \right\} \\
\text{(IVb)} \quad & + \delta_j \left\{ \overline{\nu' \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right)'} \right\} - \overline{\nu u_i} \delta_j \left\{ \overline{\nu' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)'} \right\} \\
\text{(V)} \quad & - \underbrace{\overline{\nu \varepsilon}}_{\text{(Va)}} + \overline{\nu} \underbrace{\left\{ \delta_j \overline{j u_i} (\delta_j \overline{j u_i} + \delta_i \overline{j u_j})^j \right\}}_{\text{(Vb)}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die Bezeichnung und Bedeutung der Terme (I) – (V) ist wie folgt:

- I zeitliche Änderung der gemittelten Schwankungsenergie
- II Konvektion an Schwankungsenergie
- III Produktionsterm
- IV Diffusionsterme (Teil IVb kann i.a. vernachlässigt werden, da die Zähigkeitschwankungen klein und nach Schumann nicht mit den anderen Termen korreliert sind)
- V Dissipation an Schwankungsenergie
 - Va Gesamtdissipation
 - Vb Dissipation aufgrund der gemittelten Geschwindigkeiten.

4.3 Konstanten des isotropen Modells

Die in der Bestimmungsgleichung (4.5) für die isotrope Wirbelviskosität ${}^{ij}\mu_{i,so}$ auftretenden Modellkonstanten C_2 , ${}^{ij}C$ und jC_5 können mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz bestimmt werden. Im folgenden werden nur die wichtigsten Schritte zur Herleitung dieser Größen gezeigt. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in den Arbeiten von Schumann [19] und Grätzbach [20].

jC_5 ist definiert durch

$${}^j\overline{E'_{i,so}} = {}^jC_5 \overline{\nu E'_{i,so}}. \tag{4.17}$$

Bildet man die zeitlichen Mittelwerte, so erhält man

$$jC_5 = \frac{\langle \overline{E'_{i,so}} \rangle}{\langle \overline{v'_{i,so}} \rangle} \quad (4.18)$$

Die flächen- und volumengemittelten Feinstrukturenergien $\langle \overline{E'_{i,so}} \rangle$ und $\langle \overline{v'_{i,so}} \rangle$ lassen sich aus Autokorrelationen $R_{ii}(\tau)$ der Geschwindigkeitsschwankungen mit Hilfe des Energiespektrums berechnen. Das Energiespektrum $E(k)$ beschreibt die Verteilung der kinetischen Energie der Geschwindigkeitsschwankungen über der Wellenzahl k . Die Gesamtenergie ist damit das Integral über den gesamten Wellenzahlenbereich:

$$\langle E_{i,so} \rangle = \int_0^{\infty} E(k) dk \quad (4.19)$$

Den grundsätzlichen Verlauf eines solchen Energiespektrums zeigt Abbildung 4.1.

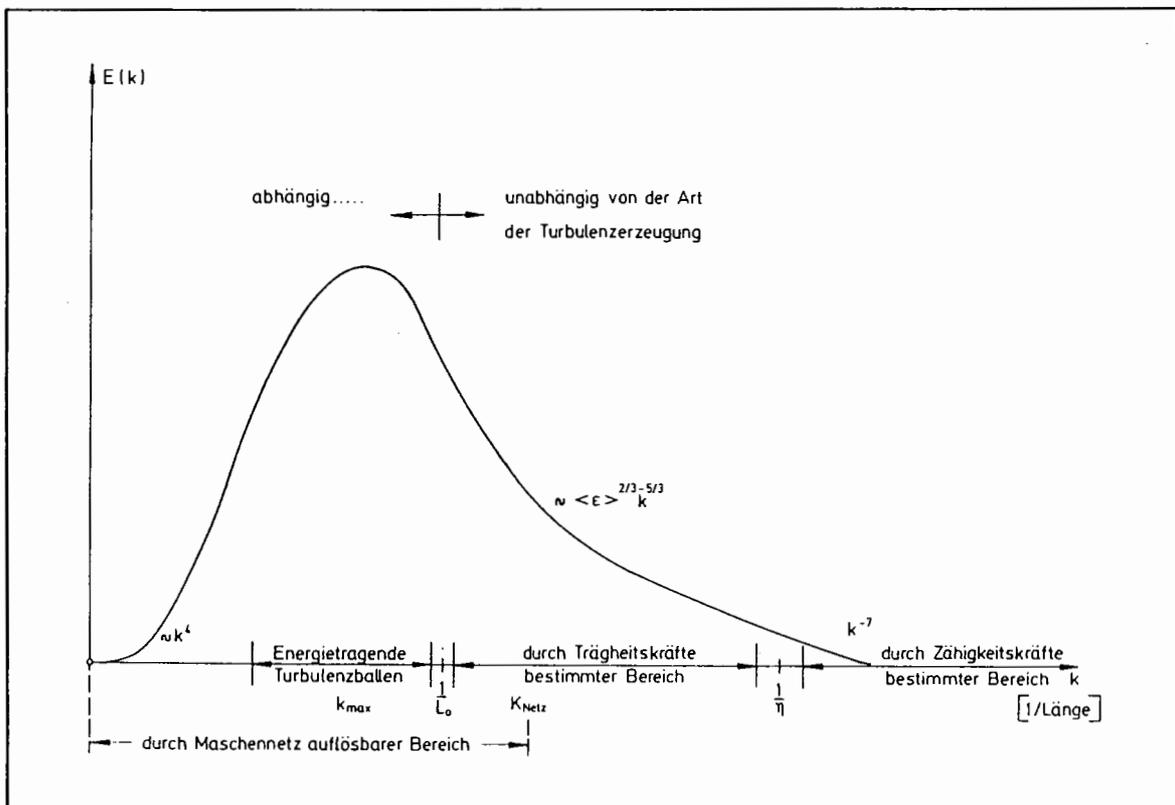


Abbildung 4.1: Turbulentes Energiespektrum (entnommen aus Schumann [19])

Der für die Feinstrukturenergiemodellierung wichtige Bereich ist der sogenannte Trägheitsunterbereich (*inertial subrange*), der durch die Beziehung

$$\frac{1}{L_0} < k < \frac{1}{\eta} \quad (4.20)$$

gekennzeichnet ist. Dabei stellt L_0 einen integralen Längenmaßstab in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^{-1} dar. η ist die sogenannte „Kolmogorov-Länge“; durch die

Beziehung $\underline{k} \approx \frac{1}{\eta}$ ist der Bereich gekennzeichnet, in dem Trägheits- und Zähigkeitskräfte von gleicher Größenordnung sind.

Im durch Ungleichung (4.20) eingegrenzten Trägheitsunterbereich kann das Energiespektrum durch das Kolmogorov-Spektrum beschrieben werden:

$$E(\underline{k}) = \alpha < \varepsilon >^{\frac{2}{3}} \underline{k}^{-\frac{5}{3}} . \quad (4.21)$$

α ist die Kolmogorov-Konstante, für welche der Wert 1,5 verwendet wird.

Als Ergebnis erhält Schumann (vgl. [19, Kap. 3.4, A2.2])

$${}^j C_5 = \frac{\text{ENERG2}(j)}{\text{ENERG3}} . \quad (4.22)$$

Die Funktionen $\text{ENERG}n$ repräsentieren Anteile der zwei- oder dreidimensionalen Energieintegrale und lauten (Beispiel $j = 1$)

$$\begin{aligned} \text{ENERG2}(j) &= 2^2 \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} (h_2 - \tau_2)(h_3 - \tau_3)(\tau_2^2 + \tau_3^2)^{\frac{1}{3}} d\tau_3 d\tau_2 , \\ \text{ENERG3} &= 2^3 \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} (h_1 - \tau_1)(h_2 - \tau_2)(h_3 - \tau_3)(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{\frac{1}{3}} d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dabei ist h die charakteristische Maschenweite und $h_i = \frac{\Delta x_i}{h}$.

Der Maschennetzanisotropiefaktor ${}^{ij}C$ wird nach Grötzbach [20] wie folgt bestimmt:

$${}^{ij}C = \frac{\langle {}_3\overline{D}_{ij}^2 \rangle}{\langle {}_3\overline{D}_{[i][j]}^2 \rangle} \cdot \frac{\langle {}_0D_{[i][j]}^2 \rangle}{\langle {}_0D_{ij}^2 \rangle} . \quad (4.24)$$

${}_0D_{ij}^2$ ist das Deformationsgeschwindigkeitsquadrat, welches durch die Gleichung

$${}_0D_{ij}^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.25)$$

definiert ist. ${}_3\overline{D}_{ij}^2$ gibt eine Differenzendarstellung an, wie sie im Code auch verwendet wird:

$${}_3\overline{D}_{ij}^2 = \begin{cases} \overline{\frac{1}{2}(\delta_i^j u_j + \delta_j^i u_i)^2}^j , & i \neq j \\ 2(\delta_j^i \overline{u_i})^2 , & i = j \end{cases} . \quad (4.26)$$

Bei isotroper Turbulenz und wiederum unter Voraussetzung des Kolmogorov-Spektrums ergeben sich (wie oben für $\langle {}^j E_{i..o} \rangle$) Gleichungen für $\langle {}_3\overline{D}_{ij}^2 \rangle$. Für den differentiellen Teil aus (4.24) gilt, ebenfalls unter der Voraussetzung isotroper Turbulenz,

$$\frac{\langle {}_0D_{[i][j]}^2 \rangle}{\langle {}_0D_{ij}^2 \rangle} = \begin{cases} \frac{2}{15} , & i \neq j \\ \frac{1}{10} , & i = j \end{cases} . \quad (4.27)$$

Für den Differenzenteil ergeben sich Integrale ähnlich zu (4.23), die numerisch ausgewertet werden.

Die bestimmende Konstante für die isotrope Wirbelviskosität ${}^{ij}\mu_{i,so}$ ist C_2 . Eine Bestimmungsgleichung für C_2 erhält Schumann durch Einsetzen der Gleichungen (4.5) und (4.4 I) in den Produktionsterm der Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie (4.16). Nach Mittelung über die Zeit und das Kanalvolumen ergibt sich

$$C_2 = \frac{\langle v_{\bar{\varepsilon}} \rangle - \nu_{\bar{\nu}} \langle {}_2\bar{D}^2 \rangle}{\langle {}^{ij}C \left({}^jF {}^jE^i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\delta_j {}^i\bar{u}_i + \delta_i {}^j\bar{u}_j \right) \delta_j {}^i\bar{u}_i \rangle} . \quad (4.28)$$

${}_2\bar{D}^2$ ist eine weitere Differenzendarstellung des Deformationsgeschwindigkeitsquadrats, und zwar

$${}_2\bar{D}^2 = \overline{\left(\delta_j {}^i\bar{u}_i + \delta_i {}^j\bar{u}_j \right)^j} \delta_j {}^i\bar{u}_i, \quad (4.29)$$

in welcher Form sie auch im Programm verwendet wird. Die im Nenner der rechten Seite von (4.28) auftretenden Tripelkorrelationen lassen sich nicht auf einfache Weise mit der Theorie isotroper Turbulenz berechnen. Mit einem Korrekturfaktor γ_1 jedoch läßt sich folgende Vereinfachung erreichen:

$$C_2 = \frac{\langle \varepsilon \rangle - \nu \langle {}_2\bar{D}^2 \rangle}{\gamma_1 {}^{ij}C {}^jF^{\frac{1}{2}} \langle {}^jE^i \rangle^{\frac{1}{2}} \langle {}_2\bar{D}^2 \rangle} . \quad (4.30)$$

Wieder lassen sich unter der Voraussetzung isotroper Turbulenz Formeln für $\langle {}_2\bar{D}^2 \rangle$ ableiten. Unter Annahme des Kolmogorov-Spektrums schreibt Grötzbach

$$\langle {}_2\bar{D}^2 \rangle = -\frac{18}{55} \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \langle \varepsilon \rangle^{\frac{2}{3}} h^{-\frac{4}{3}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D2_{ij} . \quad (4.31)$$

Als endgültige Bestimmungsgleichung für C_2 hat man damit dann

$$C_2 = \frac{1 - \nu \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{18}{55} h^{-\frac{4}{3}} \langle \varepsilon \rangle^{-\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D2_{ij} \right)}{\gamma_1 \left(\alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{\frac{3}{2}} \frac{18}{55} \left(\frac{9}{20} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ {}^{ij}C \left({}^jF \text{ENERG2}(j) \right)^{\frac{1}{2}} D2_{ij} \right\}} . \quad (4.32)$$

α und h sind wiederum die Kolmogorov-Konstante und die charakteristische Maschenweite, und Γ bezeichnet die Gamma-Funktion. Für den Korrekturfaktor γ_1 wird der von Grötzbach bestimmte Wert 1,4 verwendet.

4.4 Modellierte Feinstrukturenergiegleichung

Um die isotrope Zähigkeit ${}^{ij}\mu_{i,so}$ nach Gleichung (4.5) vollständig zu bestimmen, fehlt noch die isotrope Feinstrukturenergie ${}^V\bar{E}'_{i,so}$. Sie kann mit Hilfe der Feinstrukturener-

gleichung (4.16) bestimmt werden, wenn man diese auf die Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{u_i}''$ anstatt auf die Geschwindigkeiten $\overline{u_i}$ selbst anwendet. Für diese Schwankungen kann in gewissen Grenzen Isotropie vorausgesetzt werden. Damit kann für weitere Aussagen auf den Grundlagen isotroper Turbulenz aufgebaut werden.

Schwankungsgrößen sind definiert als Differenz zwischen der ursprünglichen Größe und dem zeitlichen Mittelwert derselben:

$$\begin{aligned}\overline{u_i}'' &= \overline{u_i} - \langle \overline{u_i} \rangle, \\ \overline{p}'' &= \overline{p} - \langle \overline{p} \rangle.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Für diese Schwankungen ist die Feinstrukturenergiegleichung genauso erfüllt. $\overline{E'}^v$ repräsentiert dann die Feinstrukturenergie der Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{E'_{i,so}}^v$.

Um auch die inhomogenen Anteile turbulenter Strömungen zu berücksichtigen, sind Erweiterungen im Produktionsterm der Energiegleichung nötig. Laut Grötzbach ist es jedoch auch wichtig, gleichzeitig Anpassungen im Dissipationsmodell vorzunehmen.

Schreibt man weiterhin $\overline{E'}$, $\overline{u_i}$ und \overline{p} anstelle von $\overline{E'_{i,so}}$, $\overline{u_i}''$ und \overline{p}'' , so erhält man folgende Feinstrukturenergiegleichung (Grötzbach [20, Kap. 3.4], Mauch [21, Kap. 5.3]):

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial E'}}{\partial t} &= -\delta_j \left(\overline{u_j}^j C_5 \overline{E'}^v \right) \\ &+ C_4 h^{ij} C_3 \overline{D}^2 \overline{E'}^{\frac{1}{2}} + {}^{ij}\mu_{inh} \left\{ \delta_j \langle \overline{u_i}^j \rangle + \delta_i \langle \overline{u_j}^j \rangle \right\} \delta_j \overline{u_i} \\ &+ \delta_j \left\{ \left(\nu C_5 + {}^j C_6 \left({}^j F \overline{E'}^v \right)^{\frac{1}{2}} \right) \delta_j \overline{E'}^v \right\} \\ &- \underbrace{C_3 \frac{\overline{E'}^{\frac{3}{2}}}{\min(h, C_{31} l_{mix})}}_{\overline{\epsilon'_I}} - \underbrace{C_{32} \frac{\nu \overline{E'}^v}{\min(h, C_{31} l_{mix})^2}}_{\overline{\epsilon'_{II}}} - \underbrace{2\nu \left(\delta_3 \overline{E'}^{\frac{1}{2}} \right)^2}_{\overline{\epsilon'_{III}}}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Die Koeffizienten C_4 , ${}^j C_6$, C_3 sowie C_{31} und C_{32} bedürfen noch der Erklärung. Bestimmungsgleichungen für diese Koeffizienten erhält man, indem man zunächst die beiden Energiegleichungen (4.16) und (4.34) zeitlich mittelt und sodann vergleicht.

C_4 läßt sich mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz unter Voraussetzung des Kolmogorov-Spektrums berechnen:

$$C_4 = \frac{\langle {}^j F {}^j \overline{E'}^v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle {}_2 \overline{D}^2 \rangle}{h \langle \overline{E'}^v \rangle^{\frac{1}{2}} \langle {}_3 \overline{D}^2 \rangle} \cdot C_2 = C_{20} \cdot C_2.\quad (4.35)$$

Die Einzelfaktoren, aus denen C_{20} aufgebaut ist, werden wie in Abschnitt 4.3 berechnet.

${}^j C_6$ ergibt sich zunächst zu

$${}^j C_6 = \frac{\langle \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{u_i} \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{u'_j E'} - \overline{u'_j p'} \rangle}{\langle ({}^j F \overline{E'})^{\frac{1}{2}} \delta_j \overline{E'} \rangle}. \quad (4.36)$$

Da allerdings $\overline{u'_j E'}$ nicht berechnet werden kann (Schließungsproblem), wird ${}^j C_6$ stattdessen angenähert über die Beziehung

$${}^j C_6 \approx C_7 {}^j C_5. \quad (4.37)$$

Für die turbulente Prandtl-Zahl C_7 wird der Wert 0,3 verwendet.

Die Tripelkorrelationen $\langle \overline{E'^{\frac{3}{2}}} \rangle$ sind nicht direkt berechenbar. Daher wird die Näherung

$$\langle \overline{E'^{\frac{3}{2}}} \rangle \approx \gamma_2 \langle \overline{E'} \rangle^{\frac{3}{2}} \quad (4.38)$$

eingeführt. Für C_3 ergibt sich somit

$$C_3 = h \frac{\langle \overline{v \varepsilon} \rangle}{\langle \overline{E'^{\frac{3}{2}}} \rangle} \approx \frac{h}{\gamma_2} \frac{\langle \overline{v \varepsilon} \rangle}{\langle \overline{E'} \rangle^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.39)$$

Grötzbach verwendet für den Korrekturfaktor γ_2 den Wert 1,0.

Für den Dissipationsanteil der Feinstrukturenergiegleichung hat Grötzbach drei Korrekturen angegeben, die verschiedenen Situationen Rechnung tragen sollen. Term $\overline{\varepsilon'_I}$ gilt für hohe Reynolds-Zahlen und berücksichtigt Anisotropieeffekte durch den Wandeinfluß. Der zweite Anteil $\overline{\varepsilon'_II}$ kommt bei kleinen Reynolds-Zahlen und bei sehr feinen Maschen zum Tragen. Eine Korrektur für den Fall, daß durch das Maschennetz die laminare Unterschicht $y^+ < 5$ aufgelöst wird, liefert Term $\overline{\varepsilon'_III}$.

Die Konstante C_{31} ergibt sich aus (4.34), wenn man sich auf den Wandbereich beschränkt und zeitlich mittelt, zu

$$C_{31} = C_3 \frac{\gamma_2 \langle \overline{E'} \rangle^{\frac{3}{2}}}{\langle \overline{\varepsilon'_I} \rangle l_{mix}}. \quad (4.40)$$

Die Dissipation wird dabei durch die Gesamtdissipation angenähert. Das Endergebnis lautet nach Grötzbach

$$C_{31} = \gamma_2 \cdot 0,74 \quad (4.41)$$

Analog läßt sich eine Bestimmungsgleichung für C_{32} angeben:

$$C_{32} = \frac{\langle \overline{\varepsilon'_II} \rangle h^2}{\nu \langle \overline{E'} \rangle}, \quad (4.42)$$

wobei wie oben wieder die Dissipation durch die Gesamtdissipation approximiert wird. Das Verhältnis des Dissipationsterms zum Feinstrukturenenergieterm kann durch Integration bekannter Energiespektren berechnet werden. Man bekommt damit schließlich

$$C_{32} \approx 20. \quad (4.43)$$

Kapitel 5

Zeitintegration

5.1 Integrationsverfahren

Die Zeitintegration erfolgt über ein explizites Verfahren. Schumann [19] verwendet ein gemischtes *Euler-Leapfrog*-Verfahren. Dazu wird zuerst ein einzelner Eulerschritt durchgeführt. Am Beispiel der Geschwindigkeiten heißt das, die Geschwindigkeit $v_{\bar{u}}^{(n_2)}$ zum neuen Zeitpunkt (n_2) ergibt sich aus der Geschwindigkeit $v_{\bar{u}}^{(n_1)}$ zum vorhergehenden Zeitpunkt (n_1) durch Vorwärtsintegration über ein Zeitintervall Δt . Danach folgt eine bestimmte Anzahl von Leapfrog-Schritten. Diese unterscheiden sich vom Euler-Verfahren dadurch, daß zur Berechnung des neuen Wertes die Informationen zweier vorangehender Zeitschritte verwendet werden:

$$v_{\bar{u}}^{(n_2)} = v_{\bar{u}}^{(n_0)} + 2 \Delta t \left(D^{(n_0)} - K^{(n_1)} \right). \quad (5.1)$$

Für die konvektiven Anteile K werden die Werte aus dem direkt vorangehenden Zeitschritt (n_1) herangezogen. Die diffusiven Anteile D gehen mit den Werten aus dem vorletzten Zeitpunkt (n_0) ein.

Der Grund für die Verwendung des Leapfrog-Verfahrens liegt darin, daß das einfache Euler-Verfahren von erster Ordnung ist und daher zu einer numerischen Dämpfung führt. Allerdings können sich wegen der fehlenden Dämpfung im Leapfrog-Verfahren $2\Delta t$ -Oszillationen aufbauen. Um diese zu glätten, wird nach einer festen Zahl von Leapfrog-Schritten ein gemischter Euler-Leapfrog-Schritt durchgeführt.

Diese drei verschiedenen Zeitschrittverfahren lassen sich folgendermaßen einheitlich darstellen:

$$v_{\bar{u}}^{(n_2)} = F_1 v_{\bar{u}}^{(n_0)} + F_2 v_{\bar{u}}^{(n_1)} + F_3 \Delta t \left(D^{(n_0)} - K^{(n_1)} \right). \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten F_i sind dabei gegeben durch

	F_1	F_2	F_3	
Euler	1	0	1	mit $n_0 = n_1$
Leapfrog	1	0	2	
E-L gemischt	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	

5.2 Zeitschrittweite

Die Zeitschrittweite Δt muß aus Stabilitätsgründen beschränkt werden. Zur Bestimmung einer maximalen Zeitschrittweite werden Stabilitätsanalysen durchgeführt. Dabei werden im allgemeinen die Fälle reiner Diffusion und reiner Konvektion getrennt betrachtet. Die maximal zulässige Zeitschrittweite Δt_{max} wird dann aus dem Minimum der beiden einzelnen Grenz-Zeitschrittweiten ermittelt.

Schumann [19] führt eine lineare Stabilitätsanalyse durch und gibt schließlich ein Stabilitätskriterium für den allgemeinen Fall mit Konvektion und Diffusion an. Ein zusätzlicher Sicherheitsfaktor C_K , der etwa im Bereich von 0,5 bis 0,7 gewählt wird, verkleinert die Zeitschrittweite nochmals. Als Stabilitätskriterium ergibt sich

$$\Delta t_{max} = C_K \left(\frac{|\langle \vec{u}_i \rangle|}{\Delta x_i} + 4\mu \frac{1}{\Delta x_i^2} \right)^{-1}. \quad (5.3)$$

Man erkennt den direkten Einfluß, welchen die Größe der Geschwindigkeiten, die Maschenweiten und die Zähigkeit auf die maximal zulässige Zeitschrittweite haben: Größere Geschwindigkeiten und eine größere Zähigkeit führen zu einer Verkleinerung von Δt_{max} , was sich anschaulich so erklären läßt, daß sich die Strömungszustände schneller ändern. In dieselbe Richtung wirkt sich auch eine Verfeinerung des Maschennetzes aus.

Kapitel 6

Druckberechnung

6.1 Bestimmungsgleichung für den Druck

Die Berechnung des Druckes ist bei inkompressiblen Strömungen im allgemeinen schwieriger als bei kompressiblen Strömungen. Der Versuch der direkten Lösung des Druckfeldes führt letztlich zu einer Bestimmungsgleichung, die nur sehr aufwendig zu lösen ist.

Ausgehend vom Vektor der Impulserhaltungsgleichungen (2.4) ergibt sich durch Bildung der Divergenz

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}, \quad (6.1)$$

wenn man gleichzeitig berücksichtigt, daß wegen der Kontinuitätsgleichung (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

gilt. Eine Randbedingung für feste Wände ergibt sich durch Beachtung der Wandhaftbedingung für das Geschwindigkeitsfeld. Damit hat man für den Druck eine Poissongleichung mit inhomogener Neumannscher Randbedingung. Schwierigkeiten ergeben sich durch die Tatsache, daß neben der aufwendigen Behandlung der inhomogenen rechten Seite der Differentialgleichung auch für die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes gesorgt werden muß.

Schumann [19] wählt daher in Anlehnung an ein Verfahren von Chorin [28] eine andere Vorgehensweise. Dabei wird zunächst ein Hilfspotential ψ und daraus dann erst der Druck p berechnet. Das Prinzip ist wie folgt:

Gegeben sind die Impulserhaltungsgleichungen, die abgekürzt etwa

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + R_i \quad (6.3)$$

geschrieben werden können. In R_i seien die restlichen Terme gemäß den Gleichungen (2.4) zusammengefaßt. Im ersten Schritt wird eine Näherungslösung \tilde{u}_i bestimmt, welche obige Gleichung (6.3), allerdings ohne das Druckglied $-\frac{\partial p}{\partial x_i}$ erfüllen soll. Zwischen der exakten Lösung u_i und der approximativen Lösung \tilde{u}_i besteht dann folgender Zusammenhang:

$$\frac{\partial(u_i - \tilde{u}_i)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (6.4)$$

Beginnend am Startzeitpunkt (n_1) mit der Anfangsbedingung $u_i^{(n_1)} = \tilde{u}_i^{(n_1)}$ führt die Integration über ein Zeitintervall Δt zu

$$u_i^{(n_2)} = \tilde{u}_i^{(n_2)} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (6.5)$$

Dabei bezeichnet (n_2) den neuen Zeitpunkt und ψ das Hilfspotential

$$\psi = \int_t^{t+\Delta t} p \, d\tau. \quad (6.6)$$

Divergenzbildung ergibt dann

$$\frac{\partial u_i^{(n_2)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i^{(n_2)}}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}. \quad (6.7)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung, welche für die exakte Lösung $u_i^{(n_2)}$ erfüllt ist, erhält man schließlich

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \tilde{u}_i^{(n_2)}}{\partial x_i}, \quad (6.8)$$

also eine Poissongleichung. An den festen Wänden hat man eine homogene Randbedingung vom Neumannschen Typ. Am Beispiel der oberen oder unteren Kanalwand heißt das

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right|_W = 0, \quad (6.9)$$

was mit der Haftbedingung für die Geschwindigkeiten sofort aus Gleichung (6.5) folgt.

Das praktische Vorgehen zur Bestimmung von $u_i^{(n_2)}$ ist damit klar:

Man berechnet zunächst die Näherungslösung nach

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = R_i, \quad (6.10)$$

bestimmt damit über Gleichung (6.8) das Potential ψ und korrigiert hiermit gemäß Gleichung (6.5) schließlich die Näherungslösung zur exakten Lösung.

Die numerische Lösung der Poissongleichung wird mit Hilfe der Fast-Fourier-Transformation (FFT), bei welcher die periodischen Randbedingungen günstig verwendet werden können, und des Gaußschen Eliminationsalgorithmus' berechnet.

Das Hilfspotential ψ ist jetzt zwar bekannt, der Druck p jedoch noch nicht. Schumann [19] zeigt, daß dieser ohne Aufwand direkt aus dem Hilfspotential berechnet werden kann. Ausgehend von der Bestimmungsgleichung für den Druck (6.1) läßt sich ableiten, daß gilt

$$p = \frac{\psi}{\Delta t} . \quad (6.11)$$

Diese Beziehung ist für die Maschen im Inneren des Strömungsfeldes gültig. An den Wänden hat man (wieder am Beispiel der oberen und unteren Kanalwand)

$$p_w = \pm \frac{\Delta x_3}{2} \left. \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} \right|_w + \left. \frac{\psi}{\Delta t} \right|_w , \quad (6.12)$$

wobei „+“ für die untere und „-“ für die obere Berandung gilt. $\psi|_w$ bezeichne den Wert von ψ in der wandnächsten Masche.

Obige Gleichungen wurden für den Fall einer Zeitintegration über ein Zeitintervall Δt mittels des einfachen expliziten Eulerverfahrens angegeben. Analoge Beziehungen ergeben sich für das Leapfrog- und das gemischte Verfahren. Gleichung (6.11) lautet dann allgemein

$$p = \frac{\psi}{(n_2 - n_0) \Delta t} . \quad (6.13)$$

Die n_i sind dabei die Indizes der Zeitschritte, wie sie in Kapitel 5.1 beschrieben werden.

6.2 Numerische Methode

Als effiziente Lösungsmethode für die elliptische Differentialgleichung (6.8) hat sich die Anwendung der Fast-Fourier-Transformation in Verbindung mit der Gauß-Elimination bewährt. Das Prinzip beruht auf einer Summendarstellung der ortsabhängigen Funktionen ψ und $q = \frac{\partial \tilde{u}_i^{(n_2)}}{\partial x_i}$. Das Potential und die rechte Seite q werden dabei in x_1 - und x_2 -Richtung in Reihen komplexer trigonometrischer Eigenfunktionen entwickelt. Die Fourierkoeffizienten dieser Reihen werden mit Fouriertransformationen bestimmt, die sehr aufwendig und damit rechenzeitintensiv sein können. Eine Verbesserung erhält man durch Verwendung der FFT-Methode. Dabei werden die Periodizitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ausgenutzt¹, was schließlich zu einer Verminderung der Anzahl notwendiger Multiplikationen führt. Möglich wird dies durch die Verwendung periodischer Randbedingungen in x_1 - und x_2 -Richtung.

In dieser einfachen Form läßt sich die Fast-Fourier-Transformation jedoch nur auf ein quaderförmiges Rechengebiet anwenden, wie es beim Plattenkanal ohne Einbau gegeben ist. Durch die Veränderung der Kanalgeometrie zur Modellierung des Spaltes

¹mit i als komplexer Einheit $i = \sqrt{-1}$

treffen diese Voraussetzungen nicht mehr zu. Über einen Umweg ist es aber trotzdem möglich, die Vorteile der FFT zur Lösung der Poissongleichung zu nutzen. Dies gelingt durch die Anwendung der Kapazitätsmatrix-Technik (*Capacitance matrix technique*, CMT), die auch als Einflußmatrix-Technik (*Influence-matrix-technique*) bezeichnet wird.

Die Lösung der Poissongleichung mittels Fast-Fourier-Transformation beschreibt Schumann in seiner Dissertation [19]. Dort, sowie in der Arbeit von Schmidt et al. [31], sind auch Details der Herleitung nachzulesen. Die Kapazitätsmatrix-Technik wird in den Arbeiten von Buzbee et al. [29, 30] und Schmidt et al. [31] beschrieben. Stiller [32] verwendet die CMT als Poissonlöser im nullten Level eines Mehrgitterverfahrens, um ein quaderförmiges Rechengebiet mit ebenfalls quaderförmigem Hindernis zu behandeln.

Das zur numerischen Lösung der Poissongleichung aufgestellte Gleichungssystem kann in der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (6.14)$$

geschrieben werden. \mathbf{p} repräsentiert den Vektor des Potentials ψ für alle Maschenelemente (i, j, k) und \mathbf{f} entsprechend den Vektor der rechten Seite von (6.8). \mathbf{A} ist die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. Mit der Methode der CMT wird nun ein Ersatzproblem konstruiert, das sich schreiben läßt als

$$\mathbf{B} \mathbf{p}' = \mathbf{F}. \quad (6.15)$$

Der Vektor \mathbf{F} wird zusammen mit der Matrix \mathbf{B} so bestimmt, daß die Lösungen \mathbf{p} und \mathbf{p}' aus (6.14) und (6.15) übereinstimmen (beziehungsweise einfach ineinander umgerechnet werden können) und außerdem das Ersatzproblem mit der schnellen Fourier-Transformation behandelt werden kann. Entscheidender Nachteil bei dieser Methode ist der Rechenzeitbedarf für die Erstellung der Kapazitätsmatrix \mathbf{C} . \mathbf{C} setzt sich (im Falle eines regulären \mathbf{B}) zusammen aus der Matrix \mathbf{A}_1 der regulären Zeilen von \mathbf{A} , der Inversen der Matrix \mathbf{B} und einer Selektionsmatrix \mathbf{W} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{W}. \quad (6.16)$$

Die benötigte CPU-Zeit hängt stark von der Anzahl der irregulären Gleichungen im System (6.14), oder mit anderen Worten von der Größe des Einbaus im Plattenkanal ab.

Der Aufwand zur Berechnung von \mathbf{C} kann abgeschätzt werden. n_W bezeichne die Anzahl der Gittermaschen, die direkt an den quaderförmigen Einbau im Plattenkanal angrenzen. A_B sei der Aufwand zur Lösung von System (6.15). Mit gewissen Vorfaktoren c_1 und c_2 ergibt sich dann der Gesamtaufwand A_C zu

$$A_C = c_1 A_B + c_2 n_W^3. \quad (6.17)$$

Damit ist klar, daß der Gesamtaufwand bei „großen“ Einbauten schnell in Bereiche vorstoßen kann, die bei mehreren Stunden CPU-Zeit liegen. In Abbildung 6.1 ist für vier verschiedene Fälle die Preprocessingzeit t_P – also die CPU-Zeit zur Berechnung der Kapazitätsmatrix – angegeben. Die Anzahl n_W der Oberflächenmaschen des Einbaus wurde dabei, beginnend mit $n_W = 320$, jeweils verdoppelt. Die Symbole repräsentieren die gemessenen t_P . Ausgehend von den ersten drei Meßwerten wurde versucht, mittels eines Ansatzes der Form $\tilde{t}_P(n_W) = an_W^3 + bn_W^2 + cn_W$ den Aufwand $t_P(n_W = 2560)$ abzuschätzen. Die Kurve $\tilde{t}_P(n_W)$ ist als durchgezogene Linie in Bild 6.1 dargestellt. Die Rechenzeiten t_P gelten für die auf dem Vektorrechner VP400-EX durchgeführten Rechnungen.

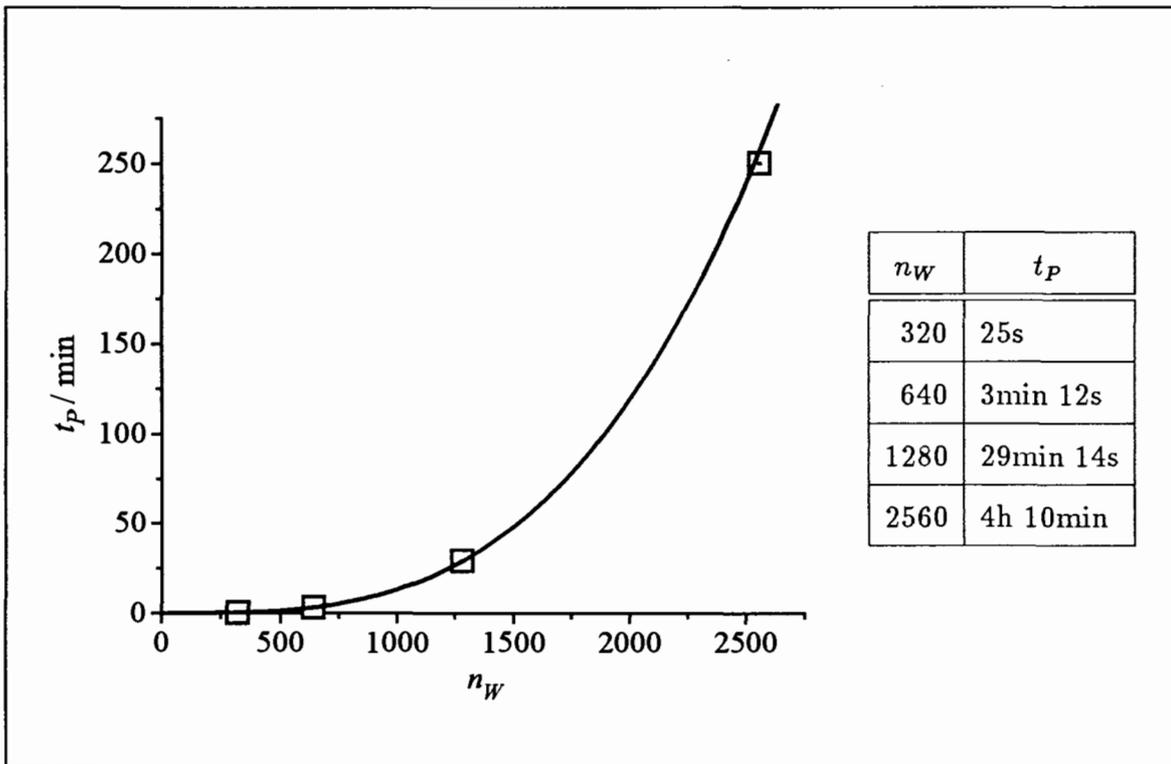


Abbildung 6.1: Preprocessing-Zeit t_P für den Aufbau der Kapazitätsmatrix C in Abhängigkeit von der Anzahl n_W der Oberflächenmaschen. (Symbole und Tabelle: Rechnungen; Kurve: Abschätzung)

Da die Kapazitätsmatrix aber nur von der Geometrie abhängig ist, also von den Maschenweiten Δx_i und der Größe und Lage des Einbaus im Plattenkanal, kann sie für Rechnungen in derselben Geometrie mit verschiedenen Strömungsparametern wie der Reynolds-Zahl verwendet werden. Zur Speicherung von C benötigt man n_W^2 Speicherplätze, was im obigen Fall für $n_W = 2560$ immerhin 6.553.600 Speichereinheiten oder etwa 50 MB sind.

Rechnungen mit noch viel höheren Werten für n_W , wie sie zum Beispiel durch Verfei-

nerung der Maschennetze oder Vergrößerung der Periodenlänge X_1 entstehen, scheinen also mit obiger Methode nicht mehr effizient genug durchführbar zu sein. Als Ausweg könnte sich ein Verfahren anbieten, wie es etwa Buzbee et al. [29, 30] vorstellen und das in Kapitel 8.3 erläutert wird. Dabei wird das Rechengebiet in zwei getrennte Bereiche zerlegt, die ihrerseits Rechteck- beziehungsweise Quaderform haben. Dies erlaubt dann, mit bekannten Methoden die beiden Gebiete praktisch getrennt zu behandeln. Der Vorteil dieser Methode liegt in der enormen Reduktion der Unbekannten, die zur Lösung des Originalproblems nicht gebraucht werden.

Kapitel 7

Rand- und Anfangsbedingungen

Zur Integration der Grundgleichungen werden für die Geschwindigkeits- und Energiefelder Randbedingungen an den physikalischen und virtuellen Rändern sowie zeitliche Anfangsbedingungen benötigt. Für die Berechnung des Druckfeldes sind nur Randbedingungen erforderlich, wie sich aus dem elliptischen Typ der Bestimmungsgleichung ergibt.

7.1 Randbedingungen

7.1.1 Freie Ränder

In der vorliegenden Geometrie existieren vier freie Schnittländer (bei $x_1 = 0$, $x_1 = X_1$, $x_2 = 0$ und $x_2 = X_2$), an denen geeignete Randbedingungen vorgegeben werden müssen. Dabei erweist es sich im allgemeinen als schwierig, explizit Vorgaben für die turbulenten Felder in den Randbereichen zu machen, da sich diese Werte auf die Berechnung des gesamten Strömungsgebiets stark auswirken. Als Ausweg bietet sich die Verwendung periodischer Randbedingungen an. Die Berechnungsvorschriften für die Randbereiche werden also so formuliert, daß sich an den jeweils gegenüberliegenden Rändern in x_1 - und x_2 -Richtung gleiche Werte für die physikalischen Größen ergeben. Für eine beliebige Größe y lautet die Periodizitätsbeziehung damit

$$y(x_1 + iX_1, x_2 + jX_2, x_3) = y(x_1, x_2, x_3), \quad i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (7.1)$$

Dadurch kann man sich das Strömungsgebiet jetzt in x_1 - und x_2 -Richtung als unendlich ausgedehnt vorstellen, wobei sich die Geometrie und der Strömungszustand jeweils periodisch nach den Längen X_1 beziehungsweise X_2 wiederholen. Dies bietet auch numerisch erhebliche Vorteile. Zum einen müssen die Randmaschen nicht gesondert behandelt werden, was durch die Programmierung einer geeigneten Schleifentechnik eine

Rechenzeiterparnis bringt. Zum anderen können zur Lösung der Poissongleichung für den Druck schnelle Poissonlöser auf Basis der Fast-Fourier-Transformation verwendet werden. Allerdings muß darauf geachtet werden, daß die Periodenlängen X_1 und X_2 groß genug sind, um eine Kopplung der Größen weitgehend auszuschließen. Schumann [19] und Grötzbach [20] empfehlen für den Plattenkanal Mindestlängen von 4 (in x_1 -Richtung) beziehungsweise 2 (in x_2 -Richtung).

7.1.2 Feste Wände

Geschwindigkeiten

An festen Wänden gilt für alle Geschwindigkeitskomponenten die Haftbedingung

$$u_i|_W = 0. \quad (7.2)$$

Für die wandnormale Komponente des Geschwindigkeitsvektors läßt sich diese Bedingung exakt umsetzen. Durch die Definition des versetzten Maschennetzes und die Lokalisierung der Geschwindigkeiten als Flächenmittelwert auf der Maschenoberfläche in Richtung der Geschwindigkeitskomponente gelten

$$\overline{u_3}|_{W_1} = \overline{u_3}|_{W_2} = \overline{u_3}|_{W_T} = 0 \quad (7.3)$$

und

$$\overline{u_2}|_{W_L} = \overline{u_2}|_{W_R} = 0. \quad (7.4)$$

Zur Bezeichnung der Wände vergleiche Abbildung 8.1: W_1 und W_2 sind die obere und untere Kanalwand bei $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$. W_T ist die Spaltwand bei $x_3 = x_{3T}$. W_L und W_R bezeichnen die Seitenwände des Einbaus bei $x_2 = x_{2L}$ und $x_2 = x_{2R}$.

Die Behandlung der Randbedingungen für die wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten, wie sie etwa in den diffusiven Termen in (3.8) in der Form $\delta_j \left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$ auftreten, ist aufwendiger. Eine Berechnungsmöglichkeit ergibt sich über die Wandschubspannungen. Am Beispiel der unteren Kanalwand und der Geschwindigkeitskomponente u_1 gezeigt, gilt

$$\tau_{W_1} = \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}. \quad (7.5)$$

Da das turbulente Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe stark variiert und nur in der laminaren Unterschicht ein linearer Verlauf angenommen werden kann, genügt es nicht, die Wandschubspannung aus einer Approximation $\tau|_{W_1} = \frac{\overline{u_1}}{\Delta x_3|_{W_1}/2}$ zu bestimmen. Schumann [19] stellt den Ansatz

$$\tau_{W_1} = \overline{u_1} \frac{\langle \tau_{W_1} \rangle}{\langle \overline{u_1} \rangle} \quad (7.6)$$

auf. Unter der Annahme eines logarithmischen Geschwindigkeitsprofils lassen sich die gesuchten Wandschubspannungen berechnen. Die Vorgehensweise bei dieser Berechnung wird in Abschnitt 8.1.3 beschrieben.

Energie

Für die Feinstrukturenergie E' gilt, da an der Wand alle Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsschwankungen Null sind, ebenfalls

$${}^j\overline{E'}|_W = 0, \quad (7.7)$$

wenn x_j die zur Wand W normale Richtung bezeichnet. Damit läßt sich der konvektive Teil der Feinstrukturenergiegleichung (4.34) unter Berücksichtigung der Beziehung (4.17) berechnen.

Der im diffusiven Teil derselben Gleichung auftretende Term $\delta_j \overline{v E'}$ muß in Wandnähe gesondert behandelt werden, da die Energie $\overline{v E'}$ in direkter Nachbarschaft der Wand ihr Maximum annimmt (z.B. Comte-Bellot [33]). Ableitungen von $\overline{v E'}$ in Richtung senkrecht zur Wand sollten deswegen nicht linear approximiert werden. Schumann [19] setzt daher an

$$\frac{\partial \overline{v E'}}{\partial x_j} \Big|_W = C_{11} \frac{\overline{v E'}}{\Delta x_j / 2}. \quad (7.8)$$

Für den Korrekturfaktor C_{11} wird ein Wert von 0,2 verwendet.

Druck

Zur Berechnung der Druckwerte an der Wand müssen nach Gleichung (6.12) die zeitlichen Ableitungen $\frac{{}^j\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_W$ bekannt sein, wobei x_j die wandnormale Richtung bezeichne. \tilde{u}_j ist dabei wie in Kapitel 6.1 der Geschwindigkeitsanteil, der sich aus den Grundgleichungen ergibt, wenn man den Druck vernachlässigt. Aus den Impulsgleichungen läßt sich schließlich für ein Wandelement die Beziehung

$$\frac{{}^j\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_W = \nu \frac{{}^j\partial}{\partial x_{[j]}} \frac{\partial u_{[j]}}{\partial x_{[j]}} \Big|_W + \delta_{1j} P_x|_W \quad (7.9)$$

ableiten. Da in der vorliegenden Geometrie keine Wände mit der Normalenrichtung x_1 existieren, kann der Term $\delta_{1j} P_x|_W$ in obiger Gleichung weggelassen werden. Mit der Kontinuitätsgleichung (2.3) kann man eine Gleichung für die zeitliche Ableitung der wandnormalen Geschwindigkeit \tilde{u}_j angeben, welche lautet

$$\frac{{}^j\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_W = \mp \frac{\nu}{\Delta x_j / 2} (\delta_i \tilde{u}_i - \delta_{[j]} \overline{{}^j u_{[j]}}). \quad (7.10)$$

Zusammen mit den Gleichungen (6.12) und (6.13) ergeben sich dann folgende Bestimmungsgleichungen für den Druck p an den Wänden des Kanals:

$$p|_W = \frac{\psi}{(n_2 - n_0) \Delta t} \Big|_W - \begin{cases} \nu (\delta_1 \overline{u}_1 + \delta_2 \overline{u}_2) & \text{für } W \in \{W_1, W_2, W_T\}, \\ \nu (\delta_1 \overline{u}_1 + \delta_3 \overline{u}_3) & \text{für } W \in \{W_L, W_R\}. \end{cases} \quad (7.11)$$

7.2 Anfangsbedingungen

Die Geschwindigkeitsfelder und das Feld der Feinstrukturenergie müssen zu Integrationsbeginn mit Werten belegt sein. Prinzipiell sollte es für das statistische Endergebnis (aber nicht für die Einzelgrößen!) unerheblich sein, aus welchem Zustand heraus die Integration begonnen wird. Es ist jedoch offensichtlich, daß es in bezug auf die Rechenzeit günstig ist, diese Anfangswerte möglichst nahe am zu simulierenden Endzustand zu wählen. Dabei bietet es sich auch an, als Startwerte die Ergebnisse vorangegangener Simulationen zu verwenden, wenn beispielsweise nur wenige Parameter abgeändert werden, oder unter Beibehaltung der Geometrie das Maschennetz verfeinert wird. In diesem Fall lassen sich durch Interpolation der Werte aus dem groben Gitter die Anfangswerte für das feinere Gitter bestimmen.

Geschwindigkeiten

Schumann [19] bestimmt das Startfeld der Geschwindigkeiten in zwei Schritten. Zuerst wird ein mittleres Geschwindigkeitsprofil $\langle \overline{u}_1 \rangle$ vorgegeben (die beiden anderen Komponenten $\langle \overline{u}_2 \rangle$ und $\langle \overline{u}_3 \rangle$ sind im statistischen Mittel klein und werden zu Null gesetzt). Dann werden Ableitungen eines Vektorpotentials $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ überlagert. Man hat dann

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= -\delta_2 \Psi_2 - \delta_3 \Psi_1 + \langle \overline{u}_1 \rangle \\ \overline{u}_2 &= \delta_1 \Psi_2 \\ \overline{u}_3 &= \delta_1 \Psi_1. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Damit ist auch die Kontinuitätsgleichung in allen Maschen erfüllt. Die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2 werden mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators so erzeugt, daß die mittlere kinetische Energie bekannten Meßwerten entspricht und außerdem für die Geschwindigkeitsschwankungen angenähert ein Kolmogorov-Spektrum erreicht wird.

Energie

Eine Anfangsbelegung für die Feinstrukturenergie \overline{E}^V kann man aus Gleichung (4.34) herleiten. Nimmt man einen stationären Zustand an und vernachlässigt die konvek-

tiven und diffusiven Anteile, so ergibt sich, wenn man ferner nur die Dissipation $\overline{\varepsilon_I^v}$ berücksichtigt,

$$C_4 h^{ij} C_3 \overline{D}^2 \overline{E^v}^{\frac{1}{2}} - \frac{C_3}{h} \overline{E^v}^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (7.13)$$

Auflösung nach $\overline{E^v}$ führt zu

$$\overline{E^v} = \frac{C_4}{C_3} h^2 {}^{ij} C_3 \overline{D}^2, \quad (7.14)$$

was als Startwert für die Integration der Feinstrukturenergiegleichung gewählt wird. In die Berechnung der $\overline{E^v}(t=0)$ gehen über \overline{D}^2 die zuvor gewählten Geschwindigkeitsanfangswerte ein.

Kapitel 8

Methodische Erweiterungen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die methodischen Erweiterungen des Simulationsprogramms TURBIT, die zur Behandlung des speziellen Problems der verbundenen Rechteckkanäle erforderlich waren. Ausgangsbasis war die Programmversion, die Mauch [21] für die Berechnung der Gebäudeumströmung im Kanal verwendet hat. Die Umgestaltungen des Source-Code wurden mit Hilfe des Versionsführungs-Tool HISTORIAN [34] vorgenommen.

8.1 Anpassung an die spezielle Geometrie

8.1.1 Erweiterung der periodischen Randbedingungen

Als Simulationsprogramm zur Untersuchung der Spaltströmung wurde die TURBIT-Version gewählt, die Mauch [21] für seine Arbeit modifiziert hat. In diesem Zustand konnten Umströmungen quaderförmiger Körper im Plattenkanal numerisch behandelt werden, was für Untersuchungen zur Bauwerksaerodynamik von Interesse ist. Zu diesem Zweck wurde auf der unteren Wand des Plattenkanals (Abbildung 1.2) ein quaderförmiges Hindernis eingebracht. Die Größe und Position des „Gebäudes“ läßt sich wie folgt beschreiben: IFK und IBK geben die in x_1 -Richtung direkt vorne und hinten an den Körper angrenzenden Maschenindizes an („front“, „back“). JLK und JRK markieren entsprechend die in x_2 -Richtung links und rechts anliegenden Maschen (es ist $JLK < JRK$ und daher sind „links“ und „rechts“ für die Ansicht in Gegenstromrichtung, also nach $-x_1$, gültig). Die unmittelbar über dem Einbau liegende Ebene hat den Index $k = KTK$ („top“).

Ausgehend von dieser Geometrie mußte der Code so weiterentwickelt werden, daß er für die Behandlung der Spaltströmung geeignet war. Es war zunächst eine Veränderung der Randbedingungen notwendig, um die neue Geometrie gemäß Abbildung 1.3

herzustellen. Der Einbau der Länge $IBK - IFK - 1$ mußte in x_1 -Richtung eine Ausdehnung über die gesamte Kanallänge von $i=1$ bis $i=IM$ erfahren. Es genügte jedoch nicht, nur die Variablen IFK und IBK entsprechend zu setzen, das heißt $IFK = 0$ und $IBK = IM + 1$. Durch die neue Geometrie entfallen jetzt zwar die Routinen zur Behandlung der Körpervorder- und -rückfläche, aber am Anfang des numerischen Kanals bei $i = 1$ und am Ende bei $i = IM$ müssen jetzt auch auf den verbleibenden drei Seiten des Einbaus periodische Randbedingungen in x_1 -Richtung angesetzt werden, so wie sie bisher nur für die obere und untere Kanalwand implementiert waren. Dies erforderte umfangreiche Änderungen in vielen Routinen, so zum Beispiel in den Unterprogrammen zur Berechnung der Geschwindigkeiten an den verbleibenden Körperoberflächen.

Nach diesen Erweiterungen stellt sich die Geometrie des Kanals wie folgt dar (vergleiche dazu Abbildung 8.1): Das Rechengebiet der Ausdehnungen X_1, X_2, D in den drei Koordinatenrichtungen wird durch ein Maschennetz in einzelne Volumenelemente aufgeteilt. In x_1 -Richtung wird das Maschennetz äquidistant mit der Maschenweite Δx_1 eingeteilt. Die Anzahl der Maschen in dieser Richtung ist IM , also gilt $IM \cdot \Delta x_1 = X_1$. Die x_2 -Richtung wird ebenfalls äquidistant diskretisiert: die Zerlegung erfolgt mit dem Abstand Δx_2 , die Anzahl der Elemente in dieser Richtung ist JM . Mit der Kanalbreite X_2 folgt also $JM \cdot \Delta x_2 = X_2$. In wandnormaler Richtung kann die Aufteilung nichtäquidistant sein. Die Maschenweiten werden mit $\Delta x_3(k)$ bezeichnet, wenn k der laufende Index in x_3 -Richtung mit $1 \leq k \leq KM$ ist. (Auf die Problematik der nichtäquidistanten Maschennetzeinteilung wird im folgenden noch genauer eingegangen.) Die in Gegenstromrichtung gesehene „linke“ und „rechte“ Berandung des Einbaus wird durch die Koordinaten $x_2 = x_{2L}$ und $x_2 = x_{2R}$ festgelegt. Die zugehörigen Maschenindizes sind $j = JLK$ und $j = JRK$, mit $JLK \cdot \Delta x_2 = x_{2L}$ und $(JRK - 1) \cdot \Delta x_2 = x_{2R}$. In wandnormaler Richtung reicht der Einbau von der „unteren“ Platte bei $x_3 = 0$ bis $x_3 = x_{3T}$, wobei die erste Masche im Spalt über dem Einbau den Index $k = KTK$ trägt.

Der Poissonsolver, der zur Lösung der Druckgleichung verwendet wird, läßt die Bearbeitung einer solchen Geometrie zu. Es mußten jedoch in den Preprocessing-Routinen die Geometrieparameter angepaßt werden, um die Ausdehnung des Körpers über die ganze Kanallänge zu erreichen.

8.1.2 Einführen neuer Mittelwertbildungen

Weitere Änderungen waren notwendig, um die vielen im Programm verwendeten Mittelwerte neu zu definieren. Bei der Simulation der Gebäudeumströmung wurden die Fehler in Kauf genommen, die entstanden, wenn man bei Mittelwertbildungen den relativ kleinen Einbau nicht berücksichtigte und die im Einbau liegenden, oft zu Null gesetzten Maschengrößen mit aufsummierte. In der vorliegenden Geometrie mit dem

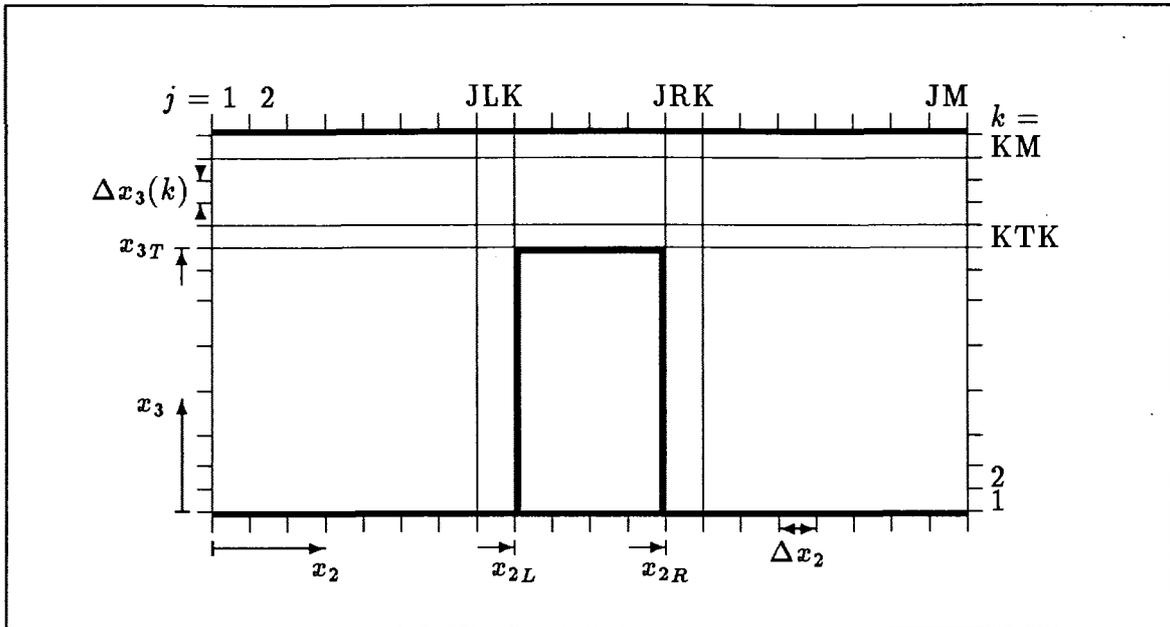


Abbildung 8.1: Maschennetz: Bezeichnungen zur Definition des Spaltes in der x_2 - x_3 -Ebene

großen Einbau sind mit dieser Methode jedoch größere Fehler zu erwarten, da das Volumen des eingesetzten Körpers in typischen Fällen 18% des gesamten Kanalvolumens betrug. Beschränkt man sich auf eine Maschenebene $k < \text{KTK}$ normal zur x_3 -Richtung, so wächst der Anteil der Maschenelemente, die im Einbau liegen, sogar auf 20%, wenn man vergleichbare Simulationsfälle heranzieht. Die neue Art der Mittelung über das durchströmte Kanalvolumen oder einzelne Ebenen erhöht den Aufwand bei der Berechnung dieser Mittelwerte durch die Aufspaltung großer Schleifen in zwei Teilschleifen und zusätzliche Abfragen auf $k < \text{KTK}$. Als weitere Konsequenz ergeben sich längere Simulationszeiten im Vergleich zum freien Plattenkanal, wenn man vergleichbare statistische Aussagen machen will. Im Plattenkanal ohne Einbau existiert nur eine inhomogene Richtung, nämlich x_3 . Damit sind alle zu einer bestimmten Strömungsgröße gehörenden Daten einer Ebene $k = K_0$ gleichwertig, das heißt, sie können alle zur Bildung eines Mittelwertes herangezogen werden. Durch den Aufbau der Spaltgeometrie wird die Homogenität ausschließlich auf die Hauptströmungsrichtung x_1 reduziert. Als Folge daraus ergibt sich, daß diese Ebenenmittelwerte nicht mehr verwendet werden können und nur noch Mittelung in der homogenen x_1 -Richtung möglich ist. Es läßt sich jedoch eine Verbesserung erzielen, wenn man die Symmetrie der Geometrie berücksichtigt. In einer Ebene $k = K_0$ sind damit die Maschen mit den Indizes $j = \text{JLK} - J_0$ und $j = \text{JRK} + J_0$ für alle Indizes i gleichwertig. Das heißt, zusätzlich zur Mittelung in x_1 -Richtung in der Reihe J kann auch noch die symmetrische Reihe $\text{JS} = \text{JLK} + \text{JRK} - J$ herangezogen werden.

8.1.3 Neugestaltung der Wandschubspannungsberechnung

Zur Berechnung von Gradienten wandparalleler Geschwindigkeitskomponenten an festen Wänden müssen gemäß Kapitel 7.1.2 die Wandschubspannungen bekannt sein. Wird für die Geschwindigkeiten das logarithmische Wandgesetz vorausgesetzt, so lassen sich die Wandschubspannungen mit Hilfe der Geschwindigkeit in der wandnächsten Masche bestimmen. Das logarithmische Wandgesetz lautet:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{für } y^+ \leq 5, \\ 5 \ln y^+ - 3,05 & \text{für } 5 < y^+ \leq 30, \\ 2,5 \ln y^+ + 5,5 & \text{für } 30 < y^+. \end{cases} \quad (8.1)$$

$u^+ = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_r} = \frac{u}{u_r}$ ist die dimensionslose Geschwindigkeit und $y^+ = \frac{y \hat{u}_r}{\nu}$ der dimensionslose Wandabstand. Eine Möglichkeit, das Wandgesetz zur Schubspannungsberechnung anzuwenden, besteht über die Darstellungsform nach Reichhardt. Das Wandgesetz nach Reichhardt approximiert die drei Bereiche des logarithmischen Wandgesetzes durch eine einzige Funktion der Form

$$u^+ = 2,5 \ln(1 + 0,4y^+) + 7,8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0,33y^+} \right). \quad (8.2)$$

Mauch verwendet diese Form, um die Wandschubspannungen iterativ zu bestimmen. Die Methode wird auch für diese Arbeit übernommen. Eine genaue Beschreibung des Verfahrens ist bei Mauch [21, Kap. 6.2.4] zu finden.

Bei den in dieser Arbeit verwendeten Maschennetzen und Reynolds-Zahlen liegen die wandnächsten Maschen in einzelnen Bereichen des Kanals vollständig im logarithmischen Übergangsbereich. Es sind daher leichte Ungenauigkeiten bei der Wandschubspannungsberechnung zu erwarten, da das Gesetz nach Reichhardt mit einer Geschwindigkeit im Mittelpunkt der ersten Masche und nicht einem Mittelwert über die Maschenfläche verwendet wird. Gerade im Übergangsbereich mit einer starken Krümmung des Geschwindigkeitsprofils sind größere Unterschiede zwischen dem Mittelwert der Geschwindigkeit in der ersten Masche und dem Wert der Geschwindigkeit im Maschenmittelpunkt gegeben. Deshalb wurde in dieser Arbeit auch ein weiterer Ansatz zur Berechnung der Wandschubspannung untersucht. Dabei sollten die Geschwindigkeiten in den wandnächsten Maschen korrekt als Mittelwerte berücksichtigt werden. Dazu muß das Wandgesetz über die erste Masche integriert werden. Da dies mit der Form nach Reichhardt nicht möglich ist, wurde die ursprüngliche Definition des logarithmischen Wandgesetzes gewählt.

y_W^+ sei die Weite der wandnächsten Masche in wandnormaler Richtung. Aus Glei-

chung 8.1 folgt dann für die mittlere Geschwindigkeit $\overline{u_1^+}$, falls $y_W^+ \leq 5$ ist:

$$\overline{u_1^+} = \frac{1}{y_W^+} \int_0^{y_W^+} u_1^+ dy^+ = \frac{y_W^+}{2}. \quad (8.3)$$

Für den Fall $5 < y_W^+ \leq 30$ ergibt sich

$$\overline{u_1^+} = \frac{1}{y_W^+} \int_0^{y_W^+} u_1^+ dy^+ = \frac{1}{y_W^+} \left(\int_0^5 u_1^+ dy^+ + \int_5^{y_W^+} u_1^+ dy^+ \right) = \frac{1}{y_W^+} 12,514 + 5 \ln y_W^+ - 8,05, \quad (8.4)$$

und weiter für $30 < y_W^+$

$$\overline{u_1^+} = \frac{1}{y_W^+} \left(\int_0^5 u_1^+ dy^+ + \int_5^{30} u_1^+ dy^+ + \int_{30}^{y_W^+} u_1^+ dy^+ \right) = -\frac{1}{y_W^+} 63,896 + 2,5 \ln y_W^+ + 3. \quad (8.5)$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann nun die Wandschubspannung bestimmt werden. Dies geschieht iterativ, da nicht direkt nach der gesuchten Größe τ_{W_1} aufgelöst werden kann. Dazu werden die obigen Gleichungen mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u}{u_\tau}, \\ y^+ &= u_\tau y Re_\tau \end{aligned} \quad (8.6)$$

und

$$u_\tau = \frac{\hat{u}_\tau}{\hat{u}_{\tau 0}} = \sqrt{\frac{\hat{\tau}_W}{\hat{\tau}_{W0}}} = \sqrt{\frac{\hat{\tau}_W}{\hat{\rho} \hat{u}_{\tau 0}^2}} = \sqrt{\tau_W} \quad (8.7)$$

entsprechend umgeformt.

8.2 Differenzenformen für nichtäquidistante Maschennetze

Zur Diskretisierung des Strömungsvolumens mittels eines Maschennetzes ist es möglich, in den drei Raumrichtungen unterschiedliche Maschenweiten Δx_i zu verwenden. Desweiteren wäre es von Vorteil, auch innerhalb einer gewählten Richtung variable Weiten benutzen zu können, um besonders interessierende oder kritische Bereiche feiner aufzulösen und gleichzeitig den Gesamtaufwand zur numerischen Untersuchung in vertretbaren Grenzen zu halten. Bei der Anwendung auf die Spaltgeometrie bieten sich zur nichtäquidistanten Diskretisierung die Querrichtung x_2 sowie die wandnormale Richtung x_3 an. Die feiner aufzulösenden Bereiche sind dabei der Spalt sowie dessen Umgebung und auch die unmittelbaren Wandbereiche. In diesen Gebieten sind

die größten Gradienten zu erwarten, während im Hauptströmungsgebiet in Kanalmitte die Strömungsgrößen schwächer variieren und damit dort ein gröberes Maschennetz gewählt werden kann. Damit kann das Strömungsfeld im interessierenden Bereich genauer untersucht werden, und gleichzeitig der Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf durch die grobe Diskretisierung im unteren Kanalbereich stark eingeschränkt werden. In der homogenen x_1 -Richtung ist kein Bereich ausgezeichnet; hier ist eine äquidistante Maschennetzeinteilung sinnvoll.

Der Aufwand zur Lösung der Poissongleichung ist stark abhängig von der Größe des eingebauten Körpers. Wie bereits in Kapitel 6.2 ausgeführt wurde, kann der Aufwand A_C zur Aufstellung und Zerlegung der Kapazitätsmatrix C abgeschätzt werden zu $A_C = c_1 A_B + c_2 n_W^3$. Das heißt, A_C wird dominiert von der dritten Potenz der Anzahl n_W der am Einbau angrenzenden Maschenelemente. Damit wird klar, daß versucht werden muß, n_W klein zu halten. An einigen Beispielen soll die Größenordnung von A_C aufgezeigt werden. Zur Berechnung der Preprocessingzeit t_P wird die auf Seite 33 beschriebene Näherung $\tilde{t}_P(n_W)$ herangezogen. Eine zur Simulation der Gebäudeumströmung typisch verwendete Körpergröße war $10 \times 10 \times 10$ Maschen in den drei Raumrichtungen (Mauch [21, S. 80]). Das ergibt $n_W = 500$ und eine Preprocessingzeit $\tilde{t}_P \approx 89$ s. Die Modellierung der Spaltgeometrie führt zu größeren Werten für n_W . Für die in Tabelle 10.1 aufgeführten Fälle G21 bis G23 ist $n_W = 1280$ und damit $\tilde{t}_P \approx 29$ min. In diesen Fällen wurde in x_3 -Richtung eine nichtäquidistante Netzauflösung gewählt, mit 8 Maschen im Spalt und 16 Maschen von der unteren Wand bis zur Kante des Einbaus. Versucht man, dieselbe Auflösung im Spaltbereich mit einer äquidistanten Maschenweite für Δx_3 zu erreichen, ergibt das 72 Maschenelemente im Bereich des Einbaus. Zusammen mit der Maschenzahl $IM = 32$ in Hauptströmungsrichtung und der Spaltauflösung von 8 Maschen in x_2 -Richtung führt dies zu $n_W = 4860$ Oberflächenmaschen. Als Preprocessingzeit erhält man $\tilde{t}_P > 30$ h. Verdoppelt man zusätzlich noch in Hauptströmungsrichtung die Maschenanzahl IM auf 64, so ergibt sich $\tilde{t}_P \approx 4$ h 10min für die variable Auflösung (wie Fall G31 aus Tabelle 10.1) und $\tilde{t}_P > 10$ d für eine konstante Einteilung in x_3 -Richtung.

Der in TURBIT verwendete Poissonlöser läßt nur eine nichtäquidistante Diskretisierung in der wandnormalen Richtung x_3 zu. In den von Schumann und Grötzbach entwickelten Versionen wurde von dieser Möglichkeit auch Gebrauch gemacht. Die Version von Mauch basiert in allen neuen Erweiterungen auf der Annahme äquidistanter Gitter. Um für diese Arbeit auch nichtäquidistante Gitter nutzen zu können, mußten daher sämtliche Unterprogramme daraufhin überprüft werden, ob mit ihnen die Verarbeitung variabler $\Delta x_3(k)$ möglich ist. Einige Routinen konnten unverändert übernommen werden. In vielen Unterprogrammen mußten Anpassungen vorgenommen werden. Diese Änderungen bestanden zum einen aus der Einführung eindimensionaler

Felder für maschennetzabhängige Größen. Die Hauptarbeit mußte in die Neu- und Umformulierung von Differenzenquotienten investiert werden. Speziell in den Routinen zur Geschwindigkeitsberechnung treten viele Differenzenformeln auf, die je nach Position im Maschennetz und Richtung der Ableitung anzupassen waren.

Analog zu Gleichung (3.9) lassen sich Mittelwerte in nichtäquidistanten Gittern definieren, wenn man zusätzlich Gewichtungsfaktoren entsprechend den Maschenweiten berücksichtigt. Für ein Maschennetz mit variablen Δx_1 erhält man damit nach Schumann [19, S. 73]:

$$\tilde{y}^1 = \left(\Delta x_1^+ y\left(x_1 + \frac{\Delta x_1^+}{2}, x_2, x_3\right) + \Delta x_1^- y\left(x_1 - \frac{\Delta x_1^-}{2}, x_2, x_3\right) \right) / (\Delta x_1^+ + \Delta x_1^-). \quad (8.8)$$

Dabei bezeichnen Δx_i^+ und Δx_i^- die Maschenweiten der an x_i in positiver beziehungsweise negativer Koordinatenrichtung angrenzenden Maschenelemente. Für $\Delta x_1^+ = \Delta x_1^-$ geht Gleichung (8.8) in (3.9) über.

Zur Bildung von Differenzenformen in nichtäquidistanten Maschennetzen empfiehlt sich folgendes Vorgehen nach Schumann:

Das Gitter habe in x_3 -Richtung unterschiedliche Maschenweiten; gesucht sei die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x_3}$ einer Größe y an der Stelle $x_3|_{k+\frac{1}{2}}$, wobei von y jeweils die Mittelwerte in den benachbarten Intervallen gegeben sein sollen. Ein Parabelansatz $y = ax^2 + bx + c$ liefert dann ([19, S. 73])

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_3} \right|_{k+\frac{1}{2}} \approx (\delta_3 y)|_{k+\frac{1}{2}} \equiv a_{+1} \bar{y}|_{k+1} + a_0 \bar{y}|_k + a_{-1} \bar{y}|_{k-1}. \quad (8.9)$$

Die Koeffizienten $a_{-1} \dots a_{+1}$ sind festgelegt durch

$$a_{+1} = (6\Delta x_{k-1} \Delta x_k + 2\Delta x_{k-1}^2 + 4\Delta x_k^2) / d$$

$$a_0 = (-6\Delta x_{k-1} \Delta x_k - 6\Delta x_k^2 + 2\Delta x_{k+1}^2 - 2\Delta x_{k-1}^2) / d$$

$$a_{-1} = (2\Delta x_k^2 - 2\Delta x_{k+1}^2) / d$$

$$\text{und } d = (\Delta x_{k-1} + \Delta x_k)(\Delta x_k + \Delta x_{k+1})(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k + \Delta x_{k+1}).$$

Der Grund für die Asymmetrie dieses Operators besteht darin, daß Ableitungen beziehungsweise Differenzenapproximationen meist paarweise an den zwei Stellen $x_3|_{k+\frac{1}{2}}$ und $x_3|_{k-\frac{1}{2}}$ gebraucht werden.

Um eine Differenzenapproximation im Mittelpunkt $x_3|_k$ eines Volumens oder einer Fläche zu entwickeln, wurde ein ähnlicher Ansatz verwendet. Unter Annahme einer Parabelfunktion für y erhält man (Bezeichnungen wie oben):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_3} \right|_k \approx (\delta_3 y)|_k \equiv b_{+1} \bar{y}|_{k+1} + b_0 \bar{y}|_k + b_{-1} \bar{y}|_{k-1}, \quad (8.10)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} b_{+1} &= (\Delta x_k \Delta x_{k-1} + 2\Delta x_k \Delta x_{k+1} + 2\Delta x_{k-1} \Delta x_{k+1} + \Delta x_k^2) / d \\ b_0 &= (3\Delta x_k \Delta x_{k+1} - 3\Delta x_k \Delta x_{k-1} + 2\Delta x_{k+1}^2 - 2\Delta x_{k-1}^2) / d \\ b_{-1} &= (-2\Delta x_k \Delta x_{k-1} - \Delta x_k \Delta x_{k+1} - 2\Delta x_{k-1} \Delta x_{k+1} - \Delta x_k^2) / d, \end{aligned}$$

mit d wie oben, gegeben sind.

8.3 Verbesserung des Preprocessing

Zur Lösung der Poissongleichung, welche bei der Bestimmung des Druckfeldes auftritt, wird die in Kapitel 6.2 beschriebene Kapazitätsmatrixtechnik verwendet. Dieses Verfahren ist bei großen Kanaleinbauten sehr rechenzeitintensiv, wie in Kapitel 6.2 und im obigen Abschnitt schon erläutert wurde. Da bei der Simulation von Gebäudeumströmungen die CPU-Zeiten für die Berechnung der Kapazitätsmatrix C im Bereich von Sekunden bis zu wenigen Minuten lagen, konnte die Bestimmung von C bei jedem Integrations-Restart von neuem erfolgen. Für die neue Geometrie ist diese Methode nicht mehr vertretbar. Allein schon deswegen, weil die Rechenzeiten pro Job auf dem Vektorrechner VP400-EX üblicherweise auf 120min beschränkt sind. Diese Zeit wäre mit der Berechnung von C ab einer bestimmten Einbaugröße bereits ausgeschöpft. Deshalb wurde die Bestimmung der Kapazitätsmatrix als eigenständiger Preprocessingsschritt so angepaßt, daß sie nur einmal zu Beginn einer neuen Simulationsreihe durchgeführt werden muß. Durch anschließende Auslagerung der Matrix kann diese dann bei jedem Restart wieder eingelesen werden. Als Beispiel sei der Simulationsfall G31 (vergleiche Tabelle 10.1) angeführt, bei welchem zur Berechnung von C 4h 10min CPU-Zeit benötigt wurden, und das Einlesen der Matrix beim zweiten und allen weiteren Integrationsläufen nur 0,92s in Anspruch nahm. Da die Kapazitätsmatrix nur geometrieabhängig ist, das heißt, nur Gittergröße und Maschenweiten etc. in die Berechnung eingehen, kann diese auch für verschiedene Simulationsreihen verwendet werden, solange nur das gleiche Maschennetz zugrunde liegt.

Ferner wurde in Erwägung gezogen, die prinzipielle Behandlung der Poissongleichung neu zu organisieren, um auch Rechnungen mit noch höheren Werten für n_W , als sie in dieser Arbeit auftreten, mit vertretbarem Aufwand durchführen zu können. Buzbee et al. [29, 30] stellen eine Methode vor, bei der das ursprüngliche Rechengebiet, auf welchem die Poissongleichung gelöst werden muß, in zwei getrennte rechteck- beziehungsweise quaderförmige Bereiche zerlegt wird. Diese beiden Gebiete können dann praktisch getrennt behandelt werden, wobei auf den gemeinsamen Rändern Verträglichkeitsbedingungen angesetzt werden. Mit dieser Methode kann die Anzahl der Unbekannten,

die zur Lösung des Ursprungsproblems nicht gebraucht werden, die aber bei Verwendung der bisherigen Form der Kapazitätsmatrixtechnik weiter mitgeführt werden, stark eingeschränkt werden.

Abbildung 8.2a zeigt das Rechengebiet, wie es bei der Anwendung der Kapazitätsmatrix-Technik vorliegt. Dargestellt ist die Sicht auf die x_2 - x_3 -Ebene. Der Grundbereich ist ein Rechteck, an welchem oben und unten (durchgezogene Linien) Neumann-Randbedingungen und an den Schnitträndern (äußere gestrichelte Linien) periodische Randbedingungen vorgegeben werden. Der durch den Einbau erzeugte irreguläre Bereich ist durch Schraffur gekennzeichnet. Entfernt man diesen Bereich aus dem eigentlichen Rechengebiet, ergibt sich die Situation, wie sie in Abbildung 8.2b dargestellt ist. Durch die periodischen Randbedingungen ist es nun leicht möglich, dieses Gebiet für eine Zerlegung günstiger darzustellen. Die Schnittlinien A—A und B—B geben an, wie das Gebiet in Bild 8.2c aus dem Gebiet in Bild 8.2b hervorgeht. Wieder stellen die äußeren gestrichelten Linien die Schnittränder mit den periodischen Randbedingungen dar. Es ist jetzt einfach möglich, eine Zerlegung in zwei Teilgebiete $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ durchzuführen. Die $R^{(i)}$ haben Rechteckform und erlauben daher, wie oben verdeutlicht, eine Aufteilung des Lösungsalgorithmus' für die Poissongleichung.

Die Realisierung dieser Überlegungen im Code konnte jedoch wegen des dafür nötigen hohen Zeitbedarfs für die Programmneuentwicklungen und -änderungen im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Hier bietet sich ein Ansatz für zukünftige Arbeiten, um den Code effizienter zu machen.

8.4 Erstellung von Analysemodulen

Die Behandlung des speziellen Problems der Spaltströmung erforderte eine Vielzahl von Änderungen und Ergänzungen in den Auswertungsmodulen des Code. Einige Veränderungen beschränkten sich auf die Anpassung von Analyse- und Plotroutinen an die neue Geometrie. Beispielsweise werden jetzt bei Isoliniendarstellungen die Werte auf den Konturen des Kanaleinbaus korrekt wiedergegeben. Auch die in Abschnitt 1 dieses Kapitels beschriebenen Modifikationen zu Mittelwertbildungen seien hier nochmals erwähnt. Der quasiperiodische Charakter der Spaltströmung erforderte außerdem eine Reihe neuer Analysemodule, um die zeitabhängige Auswertung von Daten zu ermöglichen.

Zur Auswertung der Daten wurden zwei grundsätzlich verschiedene Methoden gewählt. Die erste Möglichkeit besteht in der Verarbeitung während des Integrationslaufs und die zweite in der getrennten Auswertung nach Abschluß der Integration. Um auswerten zu können, muß die Simulation einen quasistationären Zustand erreicht haben. Das

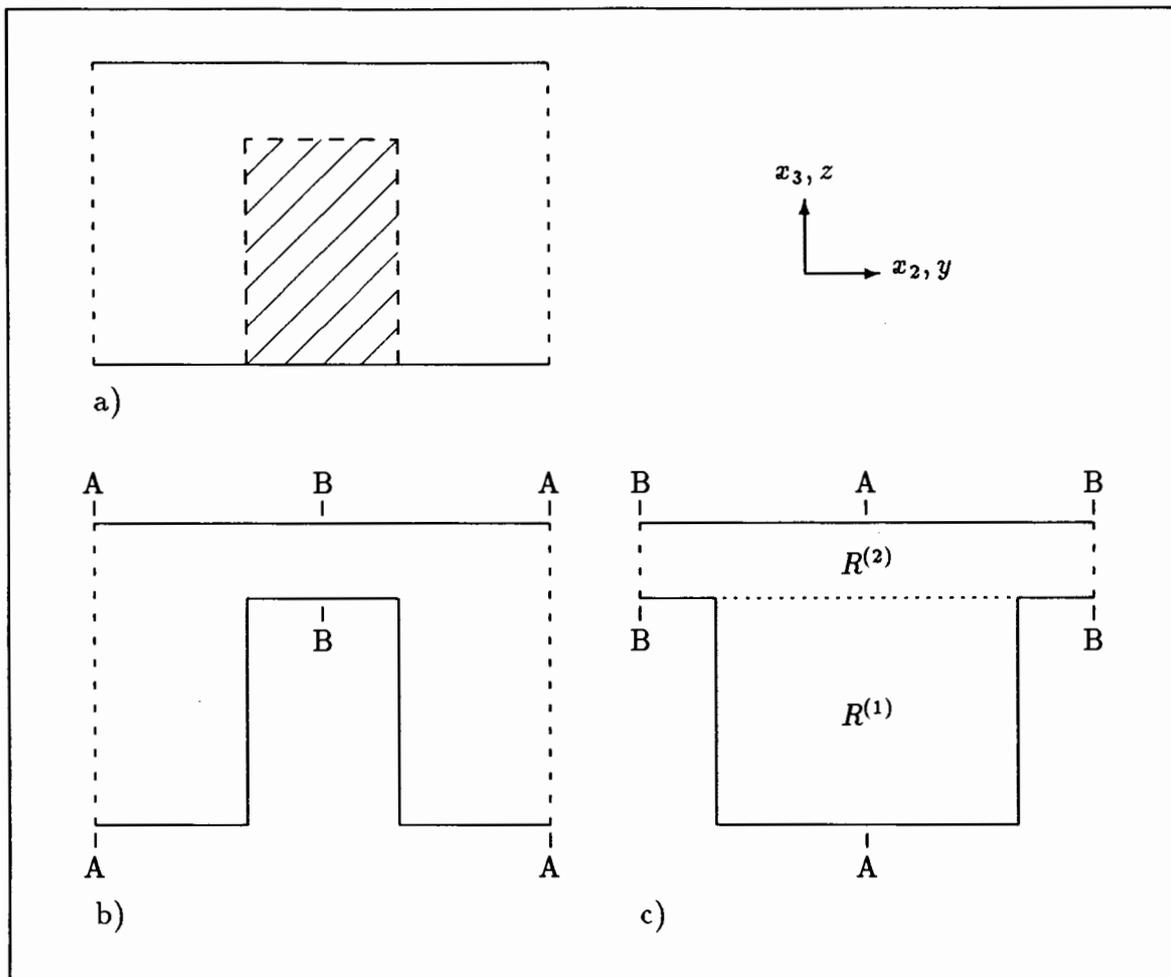


Abbildung 8.2: Gebietszerlegung zur Lösung der Poisson-Gleichung

heißt, die statistischen Mittelwerte sollen sich im Verlauf der weiteren Rechnung nicht mehr stark ändern, oder mit anderen Worten, der Einfluß der Startwerte der Simulation muß so weit abgeklungen sein, daß er vernachlässigt werden kann. Der Zeitpunkt, wann dieser Zustand erreicht wird, hängt stark davon ab, wie gut die Anfangswerte den Endzustand bereits approximieren. („Den“ Endzustand kann es nicht geben. Mit diesem Begriff soll nur der mittlere quasistationäre Zustand beschrieben werden.) Als Kriterium für die Quasistationarität kann man die volumetrischen Mittelwerte der Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung $\langle u_1 \rangle$ und der Grobstruktur- und Feinstrukturenergie $\langle E \rangle$ und $\langle E' \rangle$ im zeitlichen Verlauf wählen: sobald diese praktisch konstant bleiben, kann angenommen werden, daß die Simulation den gewünschten Zustand erreicht hat.

8.4.1 Auswertung während der Integration

Die oben erwähnte erste Methode der zeitabhängigen Auswertung, also die Verarbeitung während der Integration, ist grundsätzlich für diejenigen Größen geeignet, die als Mittelwerte über der Zeit definiert sind. Das sind zum einen die Mittelwerte von Grundgrößen wie den Geschwindigkeiten $\langle u_i \rangle$ usw., zum anderen aber auch kombinierte Größen, wie etwa die Turbulenzintensitäten $\sqrt{\langle u'_{[i]}{}^2 \rangle}$. Zur Zeitmittelung während der Integration wird die Methode der gleitenden Mittelwertbildung verwendet. Dabei wird der Zeitmittelwert $\langle y \rangle^{(n)}$ einer Größe y zum neuen Zeitschritt (n) berechnet als

$$\langle y \rangle^{(n)} = \frac{(n - n_E) \cdot \langle y \rangle^{(n-1)} + y^{(n)}}{n - n_E + 1}, \quad (n \geq n_E), \quad (8.11)$$

wenn n_E den Zeitschritt bezeichnet, ab welchem mit der Auswertung begonnen wird. Das Programm wurde ergänzt um die Möglichkeit, zusätzlich zu den Turbulenzintensitäten $\sqrt{\langle u'_{[i]}{}^2 \rangle}$ auch die Reynolds-Schubspannungen $\langle u'_i u'_j \rangle$ kontinuierlich während der Integration bestimmen zu können. Dazu mußten weitere Felder der Größe $IM \times JM \times KM$ eingeführt werden, in denen die drei Reynolds-Spannungen für jeden Gitterpunkt gespeichert werden.

Durch die Homogenität der Geometrie bezüglich der Richtung x_1 ist es möglich, Größen in dieser Raumrichtung zu mitteln, um eine Verbesserung der Statistik zu erreichen. Für einen gewählten Punkt (J,K) der x_2 - x_3 -Ebene heißt das, es werden nacheinander die auszuwertenden Größen in den Maschenpunkten $(1,J,K)$, $(2,J,K)$, \dots , (IM,J,K) bestimmt und anschließend ein arithmetischer Mittelwert darüber gebildet, der dann als Wert im Punkt (J,K) gilt. Zusätzlich zu diesem Verfahren bietet sich an, auch die zu (J,K) symmetrische Maschenreihe $(1,JS,K)$, $(2,JS,K)$, \dots , (IM,JS,K) zur Mittelung heranzuziehen. Dadurch wird die Anzahl der Werte, über die gemittelt wird, verdoppelt. Der zum Index $j = J$ gehörende symmetrische Index $j = JS$ berechnet sich durch Spiegelung an der x_1 - x_3 -Symmetrieebene des Kanals zu $JS = JLK + JRK - J$. In Abbildung 8.3 ist die gegenseitige Lage von J und JS schematisch dargestellt. Es muß bei Verwendung dieser Symmetriebeziehung darauf geachtet werden, daß die Werte in den Maschenpunkten (i,JS,K) mit dem richtigen Vorzeichen in die Mittelwertbildung eingehen. Bezogen auf die Turbulenzintensitäten und die Reynolds-Schubspannungen heißt das, die $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ und $\langle u'_2 u'_3 \rangle$ mit dem Maschenindex JS müssen mit negativem Vorzeichen zu den Werten mit Index J addiert werden:

$$\langle u'_1 u'_2 \rangle_{|(J,K)} := \left(\sum_{i=1}^{IM} \langle u'_1 u'_2 \rangle_{|(i,J,K)} - \sum_{i=1}^{IM} \langle u'_1 u'_2 \rangle_{|(i,JS,K)} \right) / (2 \cdot IM). \quad (8.12)$$

Grund dafür ist die Orientierung der x_2 -Koordinate, welche durch den Spalt weist. Bei $\langle u'_1 u'_3 \rangle$ sowie den Intensitäten $\sqrt{\langle u'_{[i]}{}^2 \rangle}$, $i = 1, 2, 3$, müssen die positiven Vorzeichen beibehalten werden.

Dabei ist

$$U_i(f, T) = \int_0^T u_i(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (8.15)$$

die Fouriertransformierte der Geschwindigkeitskomponente u_i bezüglich des Zeitintervalls $[0, T]$. \bar{U}_j bezeichne die komplex Konjugierte zu U_j . Φ_{u_i, u_j} ist eine komplexe Größe; im folgenden wird deren Betrag als kreuzspektrale Leistungsdichte bezeichnet und ebenfalls das Symbol Φ_{u_i, u_j} verwendet. Zur Bestimmung der auto- und kreuzspektralen Leistungsdichten wurden Routinen erstellt. Der prinzipielle Ablauf ist dabei wie folgt: für den gewählten Maschenpunkt (J,K) in der x_2 - x_3 -Ebene werden die gespeicherten Geschwindigkeitsdaten für die Indizes (i, J, K) und (i, JS, K) für alle $i=1 \dots IM$ eingelesen. $JS = JLK + JRK - J$ ist der zu J bezüglich des Einbaus symmetrische Maschenindex. Es wird für jeden dieser $2 \cdot IM$ Punkte Φ_{u_i} und Φ_{u_i, u_j} mit Hilfe der vorhandenen FFT-Routinen berechnet. Danach können die Leistungsdichtespektren über alle $2 \cdot IM$ Punkte gemittelt werden, da jeder dieser Gitterpunkte geometriebedingt gleichwertig ist. Durch diese Mittelungen können die eckigen Verläufe der Einzelkurven gut geglättet und die statistische Qualität der Auswertung erhöht werden.

Ferner wurden Unterprogramme zur Berechnung und Darstellung der Einzel- und Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u'_i)$ und $p(u'_i, u'_j)$ erstellt. Dazu müssen wie oben zunächst die Daten in einem Gitterpunkt im Zeitverlauf betrachtet werden. Für die Wahrscheinlichkeitsdichten müssen die gelesenen Geschwindigkeitsdaten entsprechend ihrem Wert sortiert werden. Zuerst wird durch Einsortierung der (u'_i, u'_j) -Geschwindigkeitspaare in ein zweidimensionales Feld und anschließende Gewichtung der erhaltenen Zählerstände die Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(u'_i, u'_j)$ bestimmt. Aus den Daten des zweidimensionalen Feldes können durch Summation über den entsprechenden Index die Einzelwahrscheinlichkeiten $p(u'_i)$ und $p(u'_j)$ berechnet werden. Analog zur Bestimmung der Spektren erfolgt auch für die Wahrscheinlichkeitsdichten eine Mittelung über die IM Gitterpunkte in x_1 -Richtung und die zum symmetrischen Index JS gehörenden Punkte, wobei im zweiten Fall die Geschwindigkeitskomponente u'_2 mit gewechseltem Vorzeichen beachtet werden muß.

Desweiteren mußten neue Module zur Berechnung von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen in den Code eingefügt werden. Die Autokorrelationsfunktion $R_{uu}^*(\tau)$ der Geschwindigkeit u' und die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{uv}^*(\tau)$ der Geschwindigkeitskomponenten u' und v' sind wie folgt definiert:

$$R_{uu}^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u'(t) u'(t + \tau) dt, \quad (8.16)$$

$$R_{uv}^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u'(t) v'(t + \tau) dt. \quad (8.17)$$

Dabei werden u' und v' an derselben Position im Raum verwendet. Normiert man die Funktion $R_{uu}^*(\tau)$ mit ihrem Wert für $\tau=0$, so erhält man die Funktion des Autokorrelationskoeffizienten

$$R_{uu}(\tau) = \frac{R_{uu}^*(\tau)}{R_{uu}^*(0)}. \quad (8.18)$$

Analog wird definiert

$$R_{uv}(\tau) = \frac{R_{uv}^*(\tau)}{\sqrt{R_{uu}^*(0) R_{vv}^*(0)}}. \quad (8.19)$$

Diese Funktionen werden im folgenden wieder als Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen bezeichnet. Die Vorgehensweise zur Berechnung der Korrelationen ist die bereits bekannte: die Auswertungen werden zunächst für die Einzelpunkte (i,J,K) und (i,JS,K) für $i=1 \dots IM$ durchgeführt. Danach erfolgt die Mittelung über die Einzelfunktionen. Bei den Kreuzkorrelationsfunktionen muß das Vorzeichen der Querkomponente v getauscht werden, wenn der zu J symmetrische Index JS in die Mittelung eingeht.

Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen Geschwindigkeitskomponenten an zwei räumlich verschiedenen Orten sind analog zu den Gleichungen (8.17) und (8.19) definiert:

$$R_{u_1 u_2}^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_1'(t) u_2'(t + \tau) dt, \quad (8.20)$$

und

$$R_{u_1 u_2}(\tau) = \frac{R_{u_1 u_2}^*(\tau)}{\sqrt{R_{u_1 u_1}^*(0) R_{u_2 u_2}^*(0)}}. \quad (8.21)$$

Dabei bezeichnet u_1 die Geschwindigkeitskomponente u an der Position 1 und entsprechend u_2 die Geschwindigkeit u an Position 2. $R_{v_1 v_2}(\tau)$ und $R_{w_1 w_2}(\tau)$ sind die räumlichen Kreuzkorrelationsfunktionen der Geschwindigkeitskomponenten v' und w' . Die Möglichkeit der Mittelung in x_1 -Richtung ist auch hier gegeben, ebenso die der Mittelung mit den symmetrischen Gitterwerten. Zur Berechnung und Darstellung dieser Korrelationen mußten neue Unterprogramme entworfen werden. Sie wurden hauptsächlich verwendet, um Korrelationen zwischen Geschwindigkeiten an verschiedenen Stellen im Spalt auszuwerten.

Um die Struktur der Spaltströmung deutlich zu machen, wurde ein Modul zur Bestimmung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsvektoren im Spalt und deren grafischer Darstellung erstellt. Ziel war, die im Spalt vermutete Wirbelbewegung sichtbar zu machen. Mit Momentaufnahmen der Geschwindigkeitsvektoren (u_1, u_2) in den x_1 - x_2 -Ebenen ist dies nicht möglich. Auch die Darstellung der zeitlich gemittelten Vektoren $(\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle)$ führt nicht zum Ziel, da die Zeitmittelung immer ortsgebunden für die einzelnen Maschen erfolgt, die Strömung sich aber mit einer mittleren Geschwindigkeit $V_{\langle u_1 \rangle}$ in x_1 -Richtung fortbewegt. Als Lösung bietet sich ein lokales Koordinatensystem an, das mit einer noch näher zu bestimmenden mittleren Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$

mit der Strömung mitgeführt wird. Eine in der Ursprungsversion des TURBIT-Code vorhandene Option, mittels einer Galileitransformation alle Gleichungen der Simulation in einem bewegten Koordinatensystem zu lösen, war in der übernommenen Version nicht mehr gegeben. Daher wurde folgendes Verfahren gewählt: beginnend mit einem Zeitschritt n_E wird in der Ebene $k = (KTK + KM)/2$ eine mittlere Hauptströmungsgeschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ im Spaltbereich gebildet, und werden die Geschwindigkeitsfelder $u_1 - \langle u_C \rangle$ und u_2 dieser Ebene gespeichert. Für den nächsten Zeitschritt ($n_E + 1$) wird nun über das neu bestimmte $\langle u_C \rangle$ und die Zeitschrittweite Δt die Strecke $\Delta s = \langle u_C \rangle \Delta t$ ermittelt, welche das Fluid im Spaltbereich in dieser Zeit zurückgelegt hat. Danach werden die x_1 -Koordinaten der momentanen Geschwindigkeiten im Maschennetz um Δs vermindert, wobei noch interpoliert werden muß, um der diskreten Maschennetzeinteilung Rechnung zu tragen. Durch diesen Schritt erreicht man ein Festhalten der mittleren Strömung, was der Mitbewegung eines Betrachters mit der Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ entspricht. Um eine zeitgemittelte Darstellung zu erhalten, werden schließlich noch die Geschwindigkeitsfelder $u_1 - \langle u_C \rangle$ und u_2 des neuen Zeitschritts über die Beziehung (8.11) mit den alten Werten verrechnet und abgespeichert. Was hier am Beispiel des Zeitschritts ($n_E + 1$) erklärt wurde, gilt genauso für alle weiteren Schritte, wenn man die Strecke Δs ersetzt durch die Summe der Wege $\Delta s^{(n)}$ aus den einzelnen Zeitschritten. Als Beispiele für die Resultate dieser Methode mögen die Abbildungen 10.17, 10.18 und 10.19 dienen.

Kapitel 9

Experimentelle Untersuchungen

9.1 Beschreibung der Versuche

Zur Gewinnung von Vergleichsdaten für die numerische Simulation wurden im Rahmen dieser Arbeit Messungen an verbundenen Kanälen durchgeführt. Es wurde ein Querschnitt gewählt, wie er bereits in Abbildung 1.1k vorgestellt wurde. Die genauen Abmessungen können Abbildung 9.1 entnommen werden.

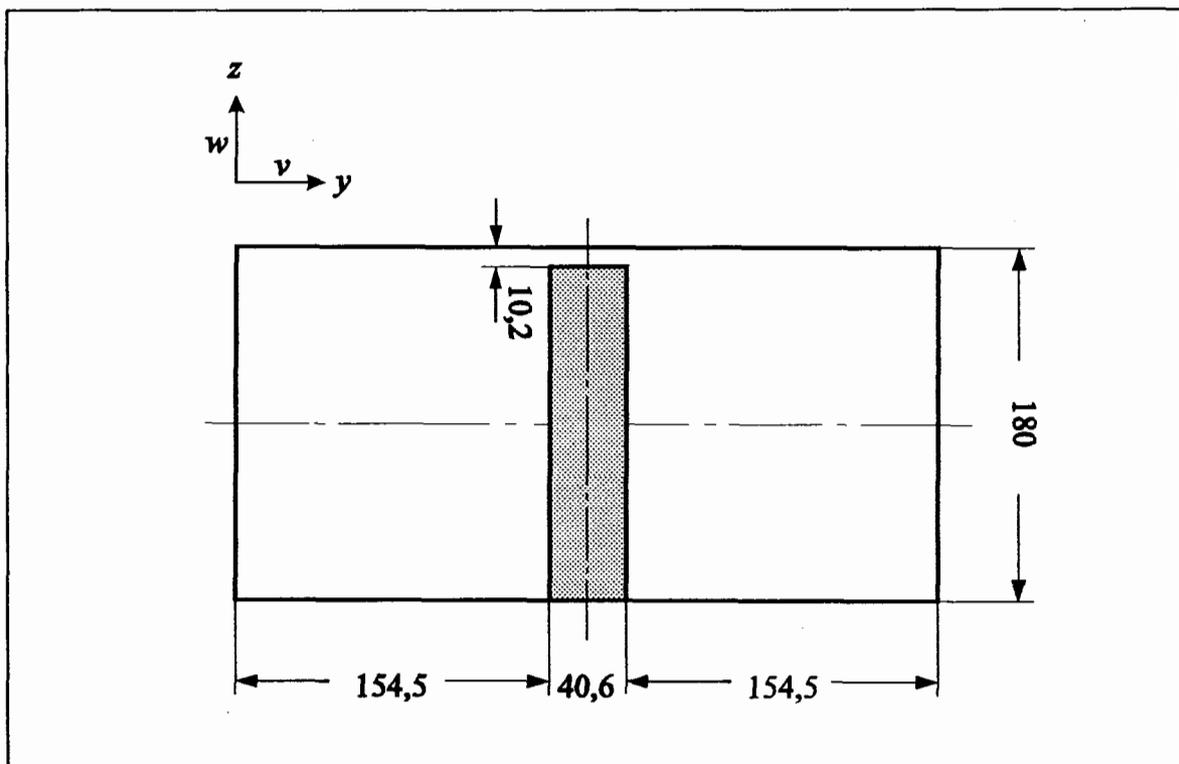


Abbildung 9.1: Querschnitt des experimentell untersuchten Kanals. Alle Längenangaben in Millimeter

Im Anschluß an die Messungen in verbundenen Kanälen mit Mittenspalt (Querschnitt nach Abbildung 1.1i, Meyer und Rehme [11]) wurde die jetzige Geometrie mit dem verbindenden Spalt direkt an der Wand des Gesamtkanals für Untersuchungen gewählt, weil sich das vorhandene Simulationsprogramm TURBIT schneller an diesen Querschnitt anpassen ließ. Für die Strömungsphänomene selbst wurde erwartet, daß sie qualitativ mit den aus dem Kanal mit Mittenspalt bekannten vergleichbar sind. Die direkte Nachbarschaft mit der Kanalwand mußte allerdings zu einer Dämpfung der Effekte im Spaltbereich und in der direkten Umgebung des Spaltes führen. Diese Vermutungen wurden durch die Meßergebnisse bestätigt.

Beim Kanal handelt es sich um einen 7m langen, vertikalen Rechteckkanal aus Plexiglas mit eingesetzten Blöcken desselben Materials zur Herstellung der gewünschten Geometrie. Der transparente Werkstoff ermöglicht einen Einblick in den kompletten Strömungsbereich. Strömungsmedium ist Luft bei Atmosphärendruck und Raumtemperatur. Sie wird durch ein Zentrifugalgebläse angetrieben. Vor dem Eintritt in den Kanal sorgt ein Filter dafür, daß Partikel mit einer Größe über $1\mu\text{m}$ zurückgehalten werden. Mit speziellen Maßnahmen wie zum Beispiel dem Einsatz von Wabengittern und Lochplatten wird eine gleichmäßige Strömungsverteilung am Kanaleintritt erreicht.

Die Meßebeine befindet sich etwa 30mm vor dem Austritt am oberen Ende des Kanals. Mit der Kanallänge $\hat{L} = 7000\text{mm}$ und dem hydraulischen Durchmesser $\hat{D}_h = 166\text{mm}$ ergibt sich somit eine relative Einlaufänge von $\hat{L}/\hat{D}_h \geq 40$. Der hydraulische Durchmesser \hat{D}_h wird dabei mit den Abmessungen des Kanalquerschnitts unter Vernachlässigung des Spaltes gebildet.

Die Zeitmittelwerte der Hauptströmungsgeschwindigkeiten und der Wandschubspannungen wurden mit Pitot- beziehungsweise Preston-Rohren bestimmt. Die Messung der Schwankungsanteile der Geschwindigkeiten und somit der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen erfolgte mit Hitzdrahtsonden mit α -förmiger Anordnung der Drähte. Zur Bestimmung von räumlichen Kreuzkorrelationen wurden zwei α -Drahtsonden gleichzeitig verwendet. Bei den Sonden handelte es sich um modifizierte Dantec-Sonden mit Drahtlängen von 1,2mm, Drahtdurchmessern von $5\mu\text{m}$ und einem gegenseitigen Drahtabstand von 0,35mm. Zur Eichung der Hitzdrahtsonden und Auswertung der Anemometersignale während der Messung wurde die Methode der Look-up-Tabellen verwendet, wie sie von Lueptow et al. [35] vorgestellt wird. Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens gibt Meyer [36].

Die Eichungen und Messungen sowie die Auswertungen laufen vollautomatisch ab. Es wurde die bereits vorhandene Steuerungs- und Auswertungs-Software verwendet, nachdem sie an den aktuellen Kanalquerschnitt angepaßt war. Zur Messung der auto- und kreuzspektralen Leistungsdichten sowie zur Bestimmung der Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wurde für die Di-

gitalisierung eine Abtastrate von 1,3kHz gewählt. Tiefpaßfilter wurden auf eine Frequenz von 500Hz gesetzt. Für die Messung der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen wurde eine Samplingrate von 2kHz verwendet mit Tiefpaßfiltern bei 10kHz. Die Berechnung der Spektren und Korrelationen erfolgte on-line mittels Fast-Fourier-Transformation. Für eine detailliertere Beschreibung der Datenerfassung und Auswertung sei nochmals auf die Arbeiten von Meyer [36] sowie Meyer und Rehme [11] verwiesen.

Gemessen wurde bei fünf verschiedenen Massendurchsätzen. In Tabelle 9.1 sind die durchgeführten Messungen angegeben, unterschieden nach der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $v_{\langle \hat{u} \rangle}$. Sie umfassen einen Bereich von 14,5m/s bis 29,3m/s.

Bezeichnung	mittlere Geschw. $v_{\langle \hat{u} \rangle}/(\text{m/s})$	Reynolds-Zahl $\frac{v_{\langle \hat{u} \rangle} \hat{D}_h}{\hat{\nu}}$
S3	21,8	$2,3 \cdot 10^5$
S4	14,5	$1,5 \cdot 10^5$
S5	18,1	$1,9 \cdot 10^5$
S6	25,0	$2,6 \cdot 10^5$
S7	29,3	$3,1 \cdot 10^5$

Tabelle 9.1: Übersicht über die durchgeführten Messungen

9.2 Ergebnisse der Messungen

Die im folgenden präsentierten Ergebnisse werden nur für eine Hälfte des Kanalquerschnitts gezeigt. Wegen der Symmetrie des Kanals bezüglich der x - z -Mittalebene und der daraus resultierenden Symmetrie des Strömungszustandes im statistischen Mittel liefert die andere Hälfte keine zusätzlichen Informationen. Die Daten stammen dabei aus der Messung S3, mit welcher der mittlere Bereich der Strömungsgeschwindigkeiten gewählt wurde.

In den Abbildungen 9.2 bis 9.9 auf den Seiten 63 ff. sind die Meßdaten jeweils einmal als Isolinienplot über dem Kanalquerschnitt aufgetragen und einmal als 3D-Konturplot dargestellt. Die Blickrichtung ist dabei immer über den Spalt hinweg Richtung Ursprung des y - z -Koordinatensystems. Zur Vereinfachung der Schreibweise sind im folgenden die Kennzeichnungen „ $\hat{}$ “ für dimensionsbehaftete Größen weggelassen.

9.2.1 Mittlere Geschwindigkeit

Abbildung 9.2 zeigt die Isotachen der zeitgemittelten Hauptströmungsgeschwindigkeit, normiert mit dem volumetrischen Mittelwert derselben Geschwindigkeit, also $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u \rangle}$. Die Isolinien zeigen die für Sekundärströmungen typischen Ausbuchtungen. Als Sekundärströmungen bezeichnet man die von der prinzipiellen Hauptströmungsrichtung abweichende Strömungsbewegung, die bei Rechteckkanälen bekanntermaßen längs der Winkelhalbierenden in die Ecke des Kanals hinein und zu beiden Seiten davon wieder heraus führt. In der an den Spalt grenzenden Ecke des Kanals ist der Einfluß der Spaltströmung deutlich zu sehen, was sich in einer insgesamt höheren mittleren Geschwindigkeit in diesem Bereich, verglichen mit den anderen drei Ecken des Querschnitts, äußert. Im Spalt werden Werte von 0,7 erreicht, wohingegen die relative Maximalgeschwindigkeit bei etwa 1,37 liegt.

9.2.2 Turbulenzintensitäten und Reynolds-Spannungen

In den Abbildungen 9.3 bis 9.5 sind die Turbulenzintensitäten der drei Geschwindigkeitskomponenten, bezogen auf die mittlere Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$, dargestellt. Die Wandschubspannung wird als Mittelwert der mit Preston-Rohren im Hauptquerschnitt gemessenen Wandschubspannungsverteilung bestimmt. Alle drei Intensitäten zeigen in den Bereichen abseits des Spaltes die für Rechteckquerschnitte typischen Erscheinungsbilder. Die Intensität der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$ weist am Spaltende an der Kante des Einbaus einen großen Peak mit $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^* \approx 3,3$ auf. Zur Spaltmitte hin findet ein Abfall auf einen mittleren Wert von ungefähr 1,1 statt (Abbildung 9.3). Ähnliches gilt für $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$, die Turbulenzintensität der Geschwindigkeit in y -Richtung durch den Spalt. Allerdings fallen die Werte von der Spitze am Spaltanfang mit $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^* \approx 2,0$ nur leicht zur Spaltmitte hin ab (Abbildung 9.4). Erwartungsgemäß sind die Werte von $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ im Spalt sehr klein, da die Richtung der Geschwindigkeit w senkrecht zum Spalt weist und damit die Geschwindigkeiten $\langle w \rangle$ und w' stark gedämpft werden (Abbildung 9.5).

Die Abbildungen 9.6 und 9.7 zeigen die Reynolds-Schubspannungen $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$ und $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$, jeweils normiert mit dem Quadrat der mittleren Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Auch diese Größen weichen nur in der näheren Umgebung des Spaltes von den bekannten Bildern für Rechteckkanäle ab. In Abbildung 9.6 ist für $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$ ein ungewöhnlich hoher Peak zu erkennen, dessen Maximum bei etwa 3,9 liegt, während im restlichen Querschnitt nur Werte im Bereich von etwa -1 bis $+1$ erreicht werden. Zur Spaltmitte hin gibt es einen Abfall bis zur Null, damit auf der anderen Seite der

Symmetrieebene die entsprechenden negativen Werte erreicht werden können. Abbildung 9.7 zeigt die Reynolds-Spannungen $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$. Zum Spalt hin erhöhen sich die Werte bis auf etwa 1,7 an der Kante des Einbaus, während im Hauptströmungsquerschnitt die Werte zwischen -1 und $+1$ variieren. Im Spalt selbst werden Werte zwischen $-0,4$ und $+0,4$ erreicht.

9.2.3 Turbulente kinetische Energie

Die mit dem Quadrat der mittleren Wandschubspannungsgeschwindigkeit normierte turbulente kinetische Energie $k' = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) / u^{*2}$ ist in Abbildung 9.8 dargestellt. Vom Minimum 1,25 in der Mitte des Hauptkanals über 3,9 in Wandnähe werden die Werte zum Spaltanfang hin größer, um dort einen Spitzenwert von 7,8 zu erreichen. Im Spalt kommt es zu einem Abfall auf etwa 3,5.

9.2.4 Symmetrietest

Schließlich ist in Abbildung 9.9 noch die Größe $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$ dargestellt. Sie ist ein Maß für die Symmetrie der Strömung im Hauptkanal. Dabei muß natürlich die Umgebung des Spaltes vernachlässigt werden. Die Symmetrie der Strömung kann als gut bezeichnet werden. Die großen Werte im Spalt resultieren aus den hohen Werten für die Intensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ und den sehr kleinen Werten für $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$.

9.2.5 Spektrale Leistungsdichten

In den Abbildungen 9.10a und 9.10b auf Seite 71 sind die autospektralen Leistungsdichten Φ_u und Φ_v der Geschwindigkeiten u und v dargestellt. Ausgehend von Kurve 1 wurden die folgenden Kurven um jeweils eine weitere Zehnerpotenz nach oben verschoben. Alle Meßpositionen liegen auf der x - y -Mittalebene des Spaltes. Die Positionen 1 bis 4 sind in der Legende zu Abbildung 9.10 genau definiert. Dabei bezeichnet y_d die lokale y -Koordinate im Spalt, mit $y_d = 0$ im Spaltzentrum. Ausgehend von der Spaltmitte mit Position 1 bildet sich bis zur Position 4 ein deutlicher Peak im Spektrum Φ_u der Geschwindigkeitskomponente u aus. Noch ausgeprägter sind die Spitzen in den Spektren Φ_v . Die Höhe der Peaks ist dort unabhängig von der Position im Spalt sehr groß und nimmt nach außen hin nur leicht ab. Außerdem liegen sie alle bei der Frequenz von etwa $f_P = 74\text{Hz}$, derselben Frequenz, bei der auch Φ_u Peaks zeigt. In Abbildung 9.10c schließlich ist noch die kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} dargestellt. Auch hier gibt es eine deutliche Spitze, die von der Spaltmitte zum Spaltanfang hin höher wird. Für die signifikante Frequenz f_P gilt das oben für Φ_u und Φ_v Gesagte. Diese eindeutigen

und hohen Spitzen in den Leistungsdichtespektren bei der Frequenz von 74Hz deuten auf eine niederfrequente, langwellige, quasiperiodische Erscheinung hin.

9.2.6 Korrelationsfunktionen

An den selben Meßpositionen wie oben wurden auch Autokorrelationsfunktionen R_{uu} und R_{vv} der Geschwindigkeiten u' und v' sowie die Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} ausgewertet. Abbildung 9.11 zeigt die zugehörigen Kurven. Die Ergebnisse spiegeln den Peak in den Leistungsdichtespektren wider: Die Inverse der signifikanten Frequenz von 74Hz ergibt eine Zeitverzögerung von $\Delta\tau = 0,0135\text{s}$, was dem zweiten Maximum in den Funktionen R_{uu} und R_{vv} entspricht. Die stärkste Dämpfung erfährt die u' -Komponente in der Mitte des Spaltes, wohingegen v' dort am schwächsten gedämpft wird. Die Abweichung der Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} vom Wert 0 im Nullpunkt ist mit einer leichten Asymmetrie der Strömung im Spalt zu erklären. Die Symmetrieebene der Stömungsgrößen im Spalt dürfte etwa in der Mitte zwischen den Positionen 1 und 2 liegen und fällt damit nicht mit der geometrischen Symmetrieebene zusammen. Außerdem ist eine leichte Phasenverschiebung zwischen u' und v' , abhängig von der Position, zu erkennen.

9.2.7 Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen

Desweiteren wurden Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Schwankungsgeschwindigkeiten u' und v' bestimmt. Die Abbildungen 9.12a und 9.12b zeigen die Einzelwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u')$ und $p(v')$ an den Meßpositionen 1 bis 4. Für die Positionen 1 und 2 haben die Verteilungen $p(u')$ etwa die Form einer Normalverteilung und beschreiben damit eine stochastisch verteilte Variable u' . Zum Anfang des Spaltes bei 3 und weiter in den Kanal bei 4 flachen die Verteilungen leicht ab und werden breiter. Für die Querkomponente v' sind die Verteilungen stark asymmetrisch. Beginnend außerhalb des Spaltes verschiebt sich mit Annäherung an das Spaltzentrum die Stelle des Maximums in $p(v')$ zu etwas größeren positiven Werten bei gleichzeitiger Abnahme des Maximalwertes. Außerdem deutet sich im negativen v' -Bereich ein zweites Maximum der Verteilung an, wie es bei Messungen in der Geometrie i aus Abbildung 1.1 deutlicher nachgewiesen wurde (Meyer und Rehme [11]).

Auch in den Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ in den Abbildungen 9.13a bis 9.13d ist deutlich zu erkennen, daß die jeweiligen Maxima außerhalb des Nullpunkts der u' - v' -Ebene liegen. Am Beispiel der Abbildung 9.13c heißt das, daß das am häufigsten auftretende Einzelereignis ein positives Vorzeichen sowohl der u' - als auch der v' -Komponente beinhaltet.

9.2.8 Strömungsmodell für den Spaltbereich

Die Deutung aller im vorigen Unterabschnitt präsentierten Daten kann genauso erfolgen, wie es Meyer und Rehme [11] für die verbundenen Kanäle mit Mittenspalt gezeigt haben: Aus den Korrelationen läßt sich ableiten, daß eine Geschwindigkeitskomponente v in den Spalt mit einer überdurchschnittlich hohen Hauptströmungsgeschwindigkeit u gekoppelt ist. Umgekehrt gehören zu Geschwindigkeiten v aus dem Spalt heraus unterdurchschnittlich große u . Ferner kann aus den Frequenzmessungen abgeleitet werden, daß die großskalige Oszillation mit einer Transportgeschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ durch den Spalt bewegt wird. Diese Geschwindigkeit ergibt sich mit der signifikanten Frequenz f_P und der Periodenlänge λ zu $\langle u_C \rangle = \lambda f_P$ und stellt natürlich eine mittlere Hauptströmungsgeschwindigkeit im Spalt dar. Als Strömungsmodell, das diese Daten erklären kann, wird folglich ein Wirbelpaar vorgeschlagen, dessen einzelne Wirbel gegensinnig drehen und durch die höheren Geschwindigkeiten außerhalb des Spaltes angetrieben werden. Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ längs des Spaltes, wobei die Wirbelzentren beiderseits der Mittellinie, aber noch innerhalb des Spaltes liegen. Der mittlere Abstand der Zentren in x -Richtung ist gleich der halben Periodenlänge, also $\lambda/2$. In Abbildung 9.14 ist das Wirbelpaar schematisch dargestellt.

9.2.9 Ergänzende Untersuchungen

Ähnliche Strömungsphänomene treten auch in Geometrien auf, die nur aus einem Hauptkanal mit einem Schlitz in einer Wand bestehen, wie sie in Abbildung 1.1j und Abbildung 9.15a dargestellt sind. Dort können aufgrund des fehlenden zweiten Hauptkanals keine symmetrischen Wirbelpaare auftreten, aber die Meßdaten lassen auf Wirbel schließen, die in Hauptströmungsrichtung durch den Spalt „rollen“, bis an den Boden des Schlitzes reichen und teilweise in den Hauptkanal ragen (Meyer und Rehme [11]). Während der Durchführung der vorliegenden Arbeit wurden an einem Kanal diesen Querschnitts Visualisierungen der Strömungsbewegung durchgeführt (Meyer und Rehme [37]). Als Medium wurde Wasser verwendet, dem Flitter mit einer ähnlichen spezifischen Dichte beigefügt wurden. Die Aufnahmen wurden mit einer Videokamera gemacht, die neben dem Kanal mit der Strömung mitbewegt wurde. Abbildung 9.15b zeigt eine solche Aufnahme. Blickrichtung ist in negativer z -Richtung des in 9.15a und b angegebenen x - y - z -Koordinatensystems. Die Hauptströmungsrichtung ist von links nach rechts in positiver x -Richtung. Der untere, dunkle Bereich zeigt den Spalt in der Kanalwand über die vollständige Tiefe in y -Richtung. Im hellen Bereich in der oberen Bildhälfte ist ein Teil des Hauptkanals zu sehen. Die vier im Bild zu erkennenden ellipsenförmigen Wirbel rollen auf dem Spaltboden ab, während sie von

der Hauptströmung angetrieben werden. Der mittlere Abstand λ zweier Wirbelzentren ist an einem Beispiel verdeutlicht.

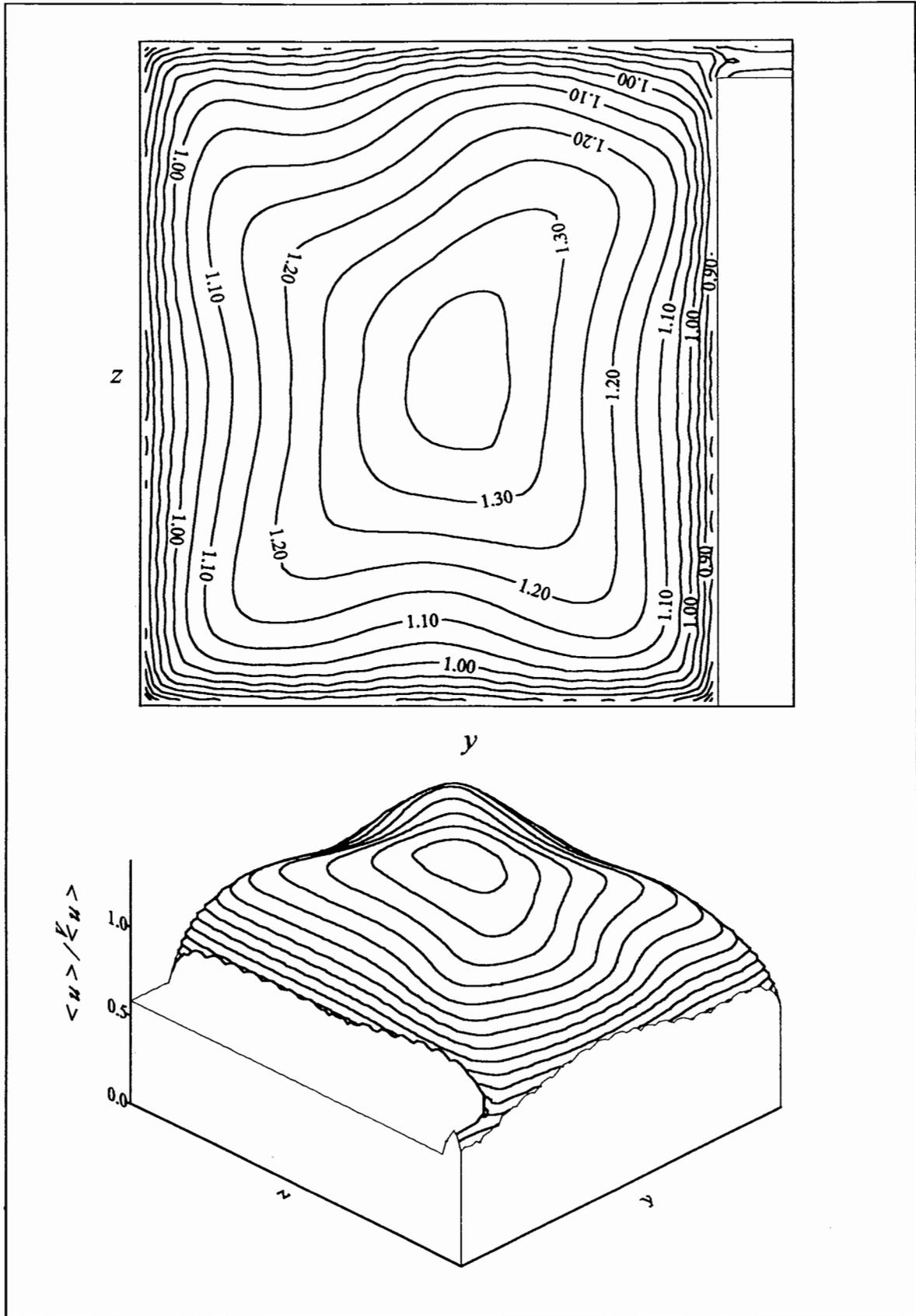


Abbildung 9.2: Relative mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle / \langle u \rangle_{\text{max}}$ in Hauptströmungsrichtung

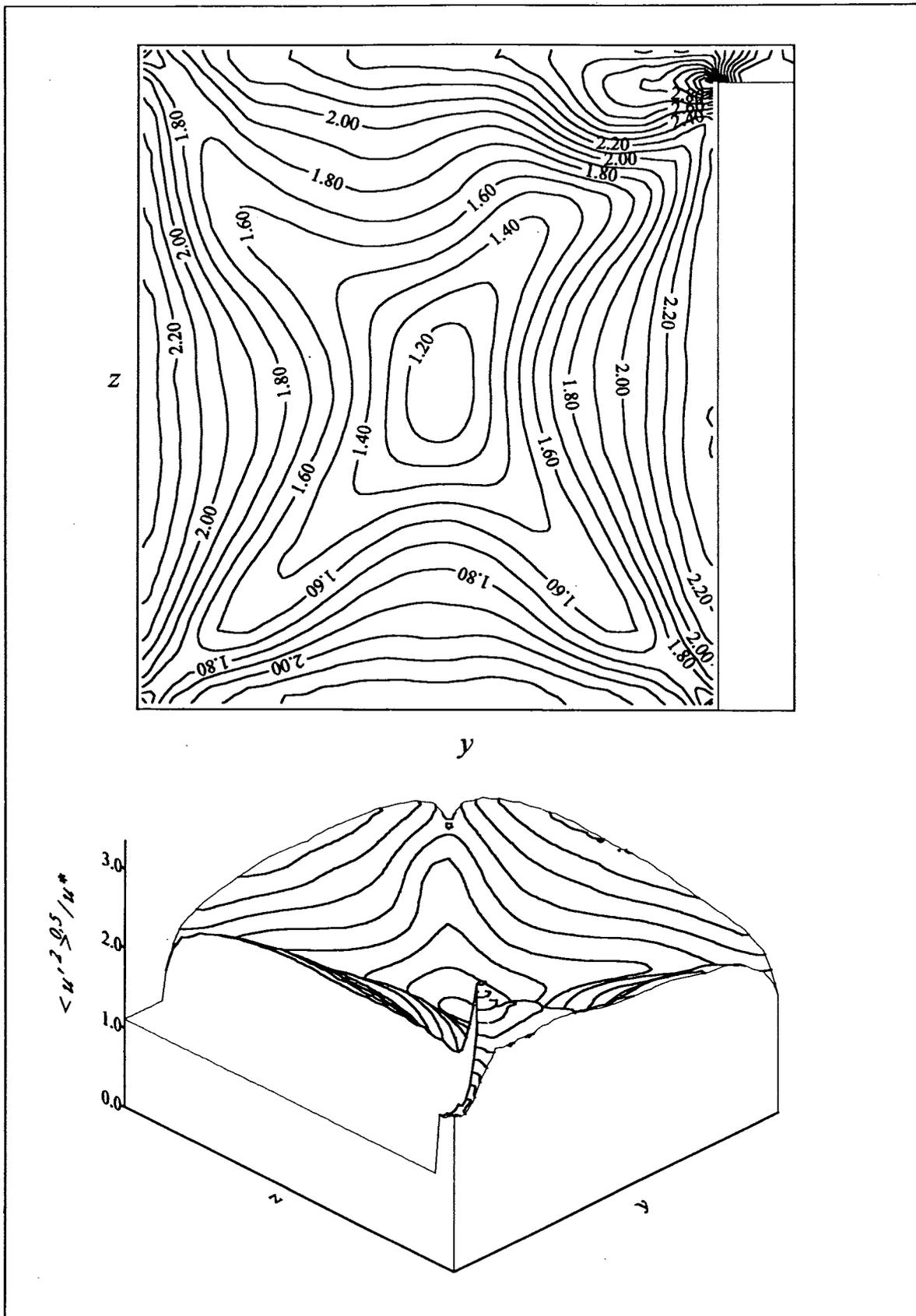


Abbildung 9.3: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung

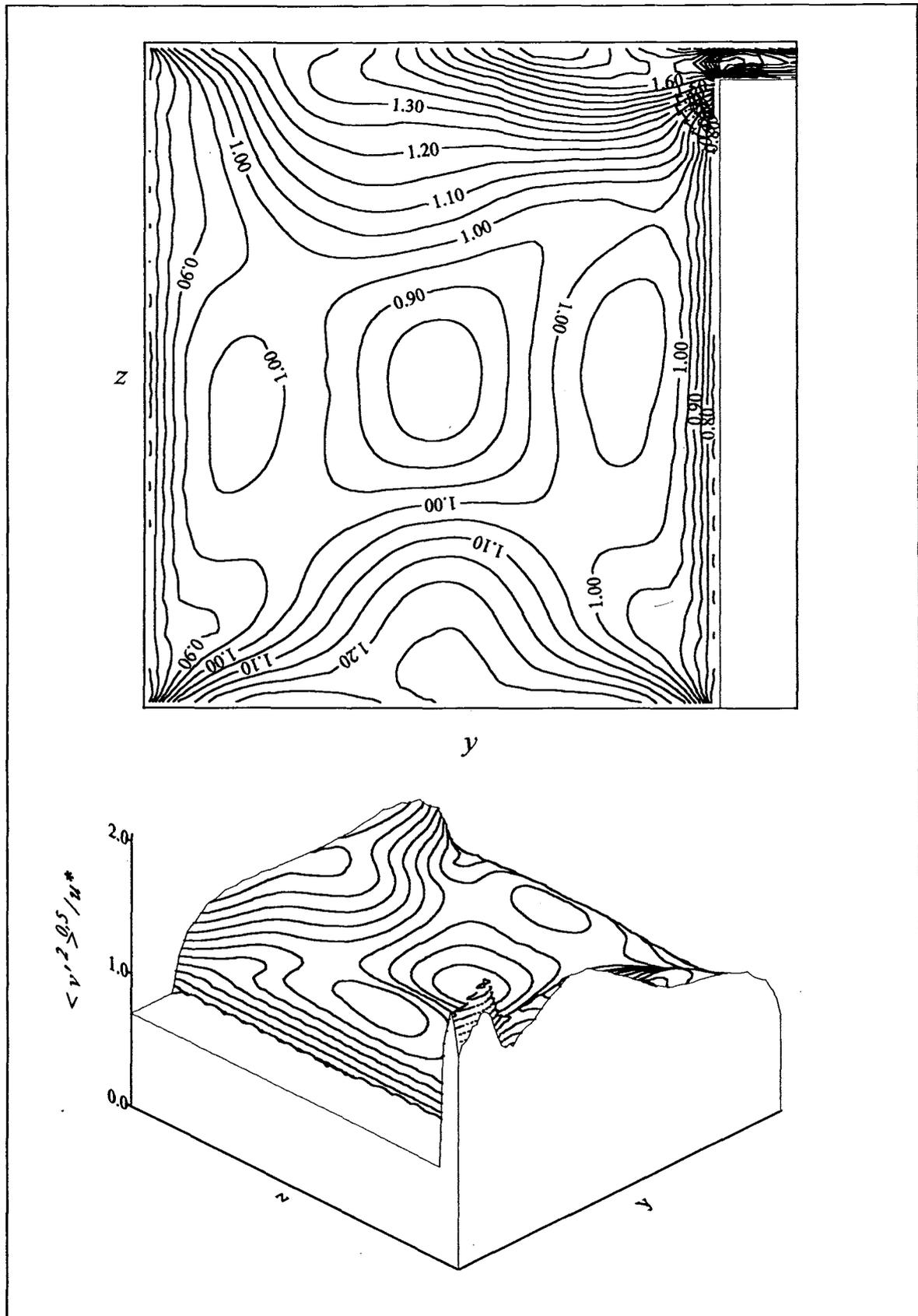


Abbildung 9.4: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente durch den Spalt

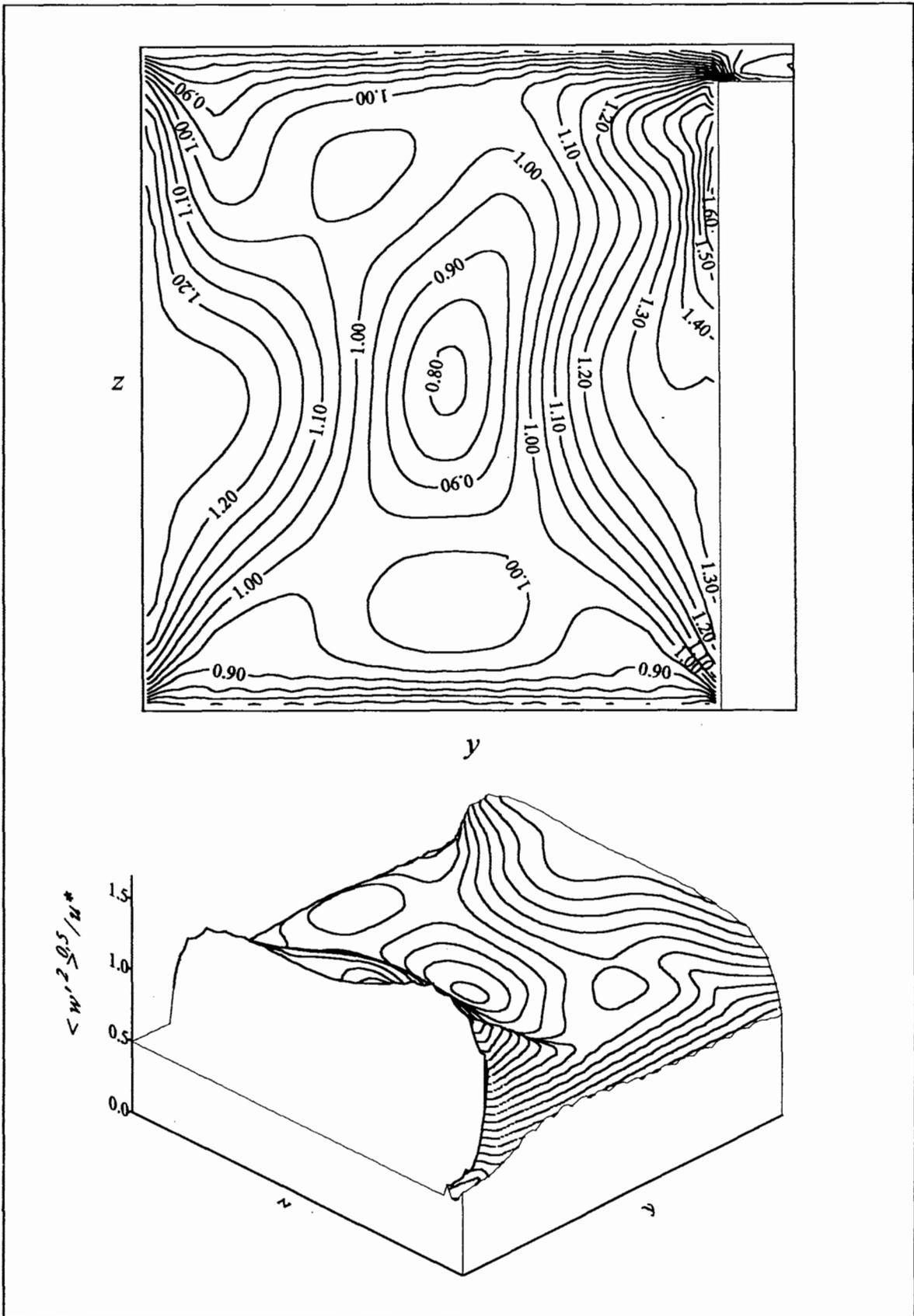


Abbildung 9.5: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Spalt

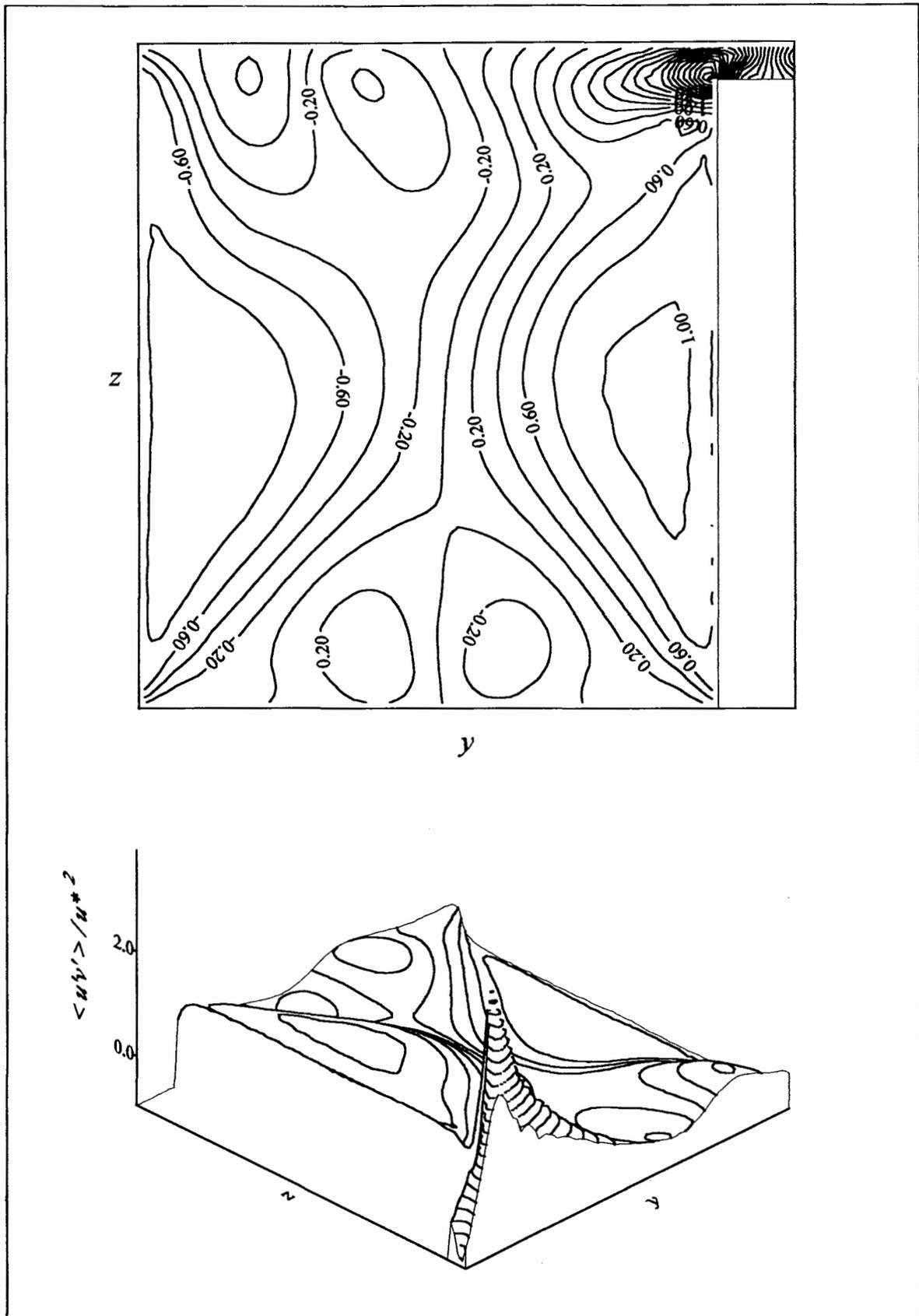
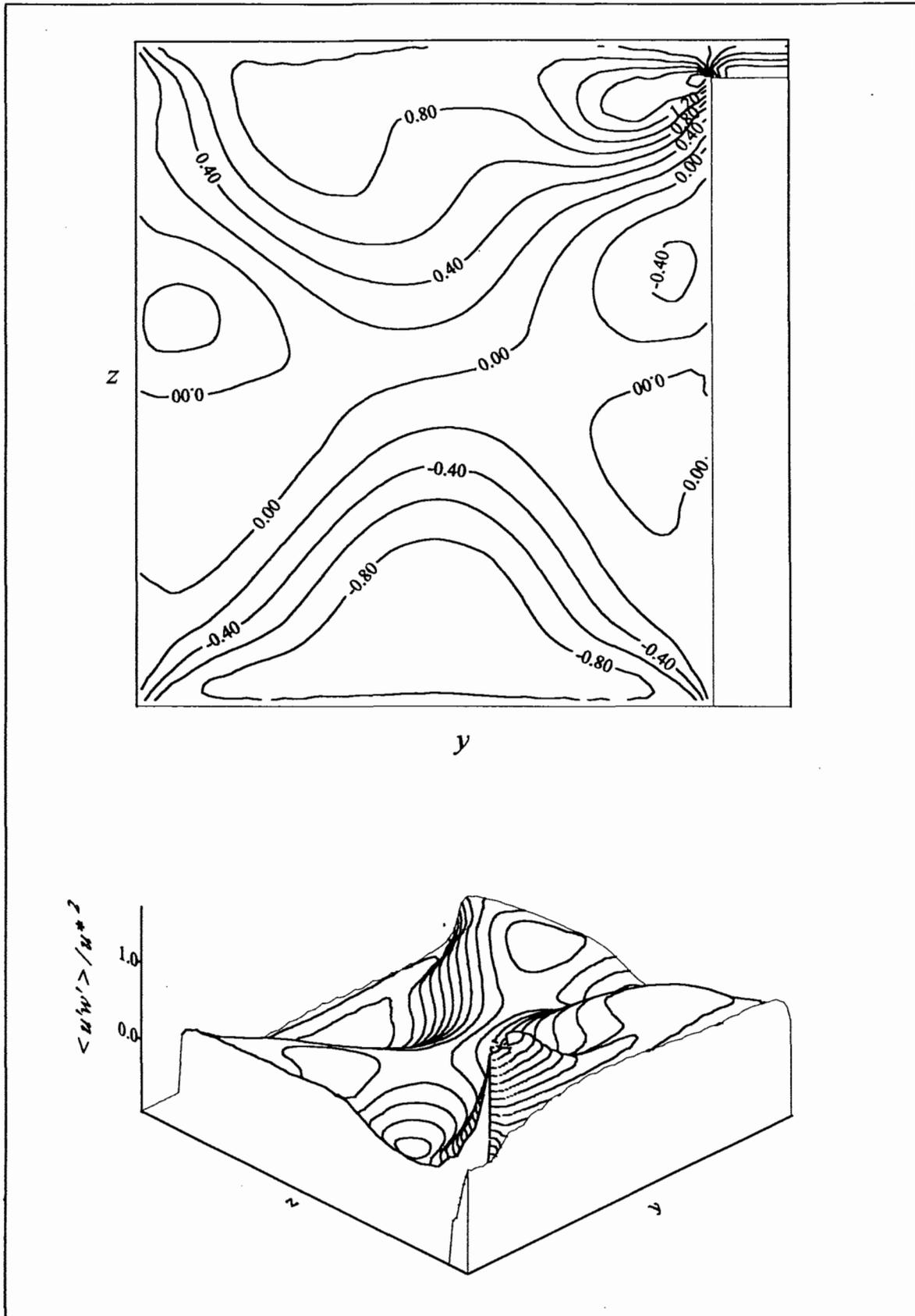


Abbildung 9.6: Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle / u_*^2$

Abbildung 9.7: Reynoldssche Schubspannung $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$

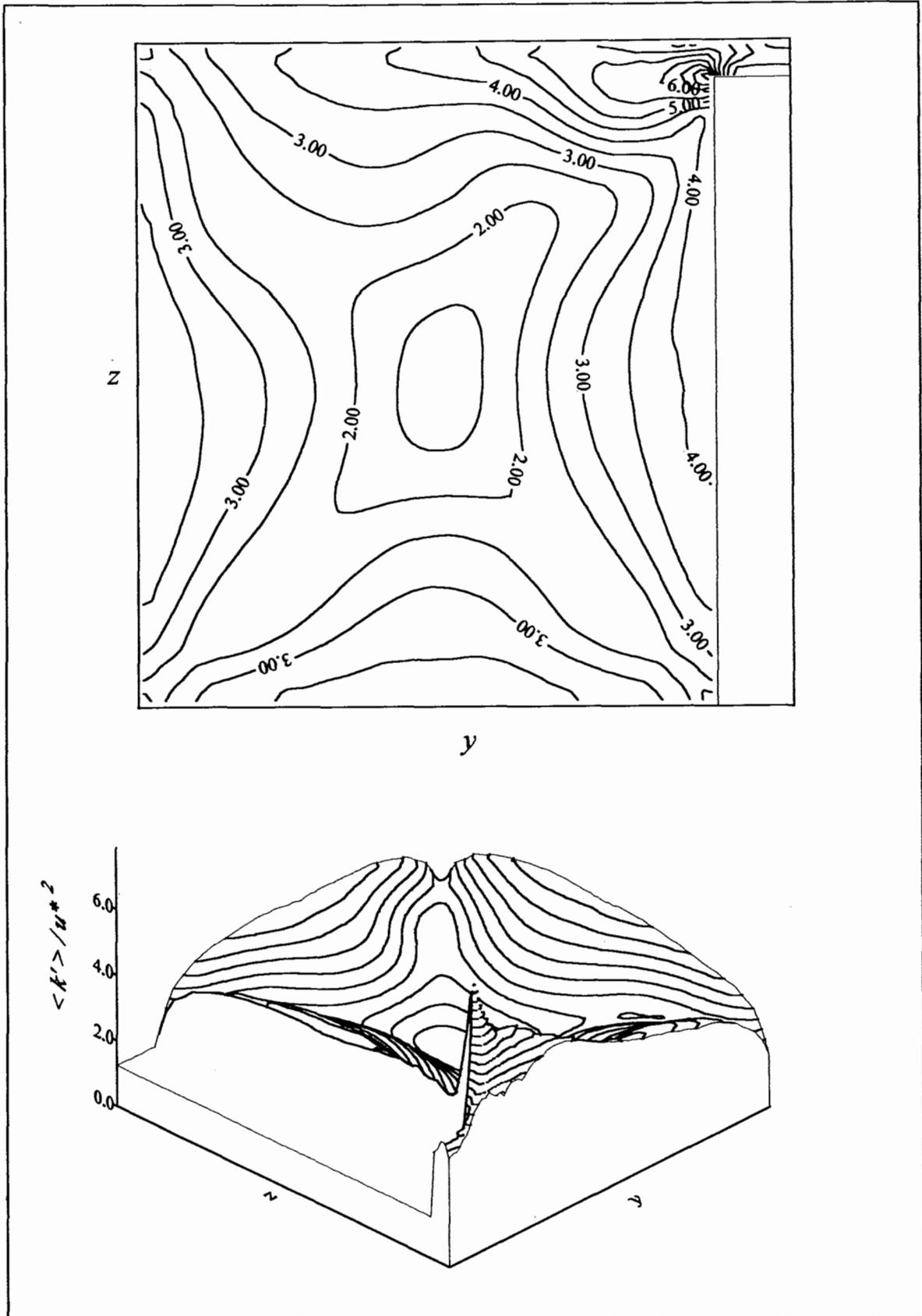
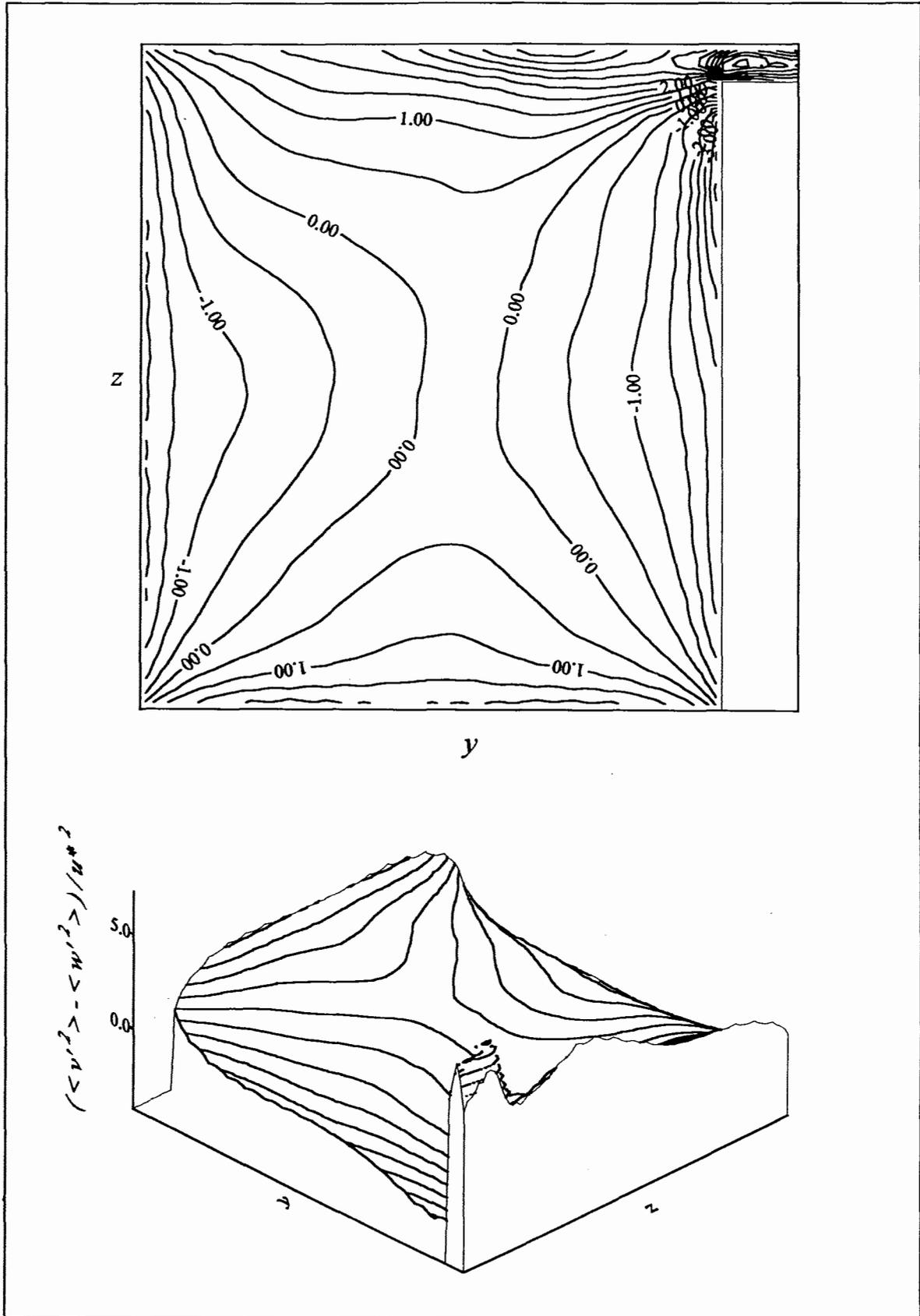


Abbildung 9.8: Turbulente kinetische Energie $\langle k' \rangle / u^{*2}$

Abbildung 9.9: Symmetrietest $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$

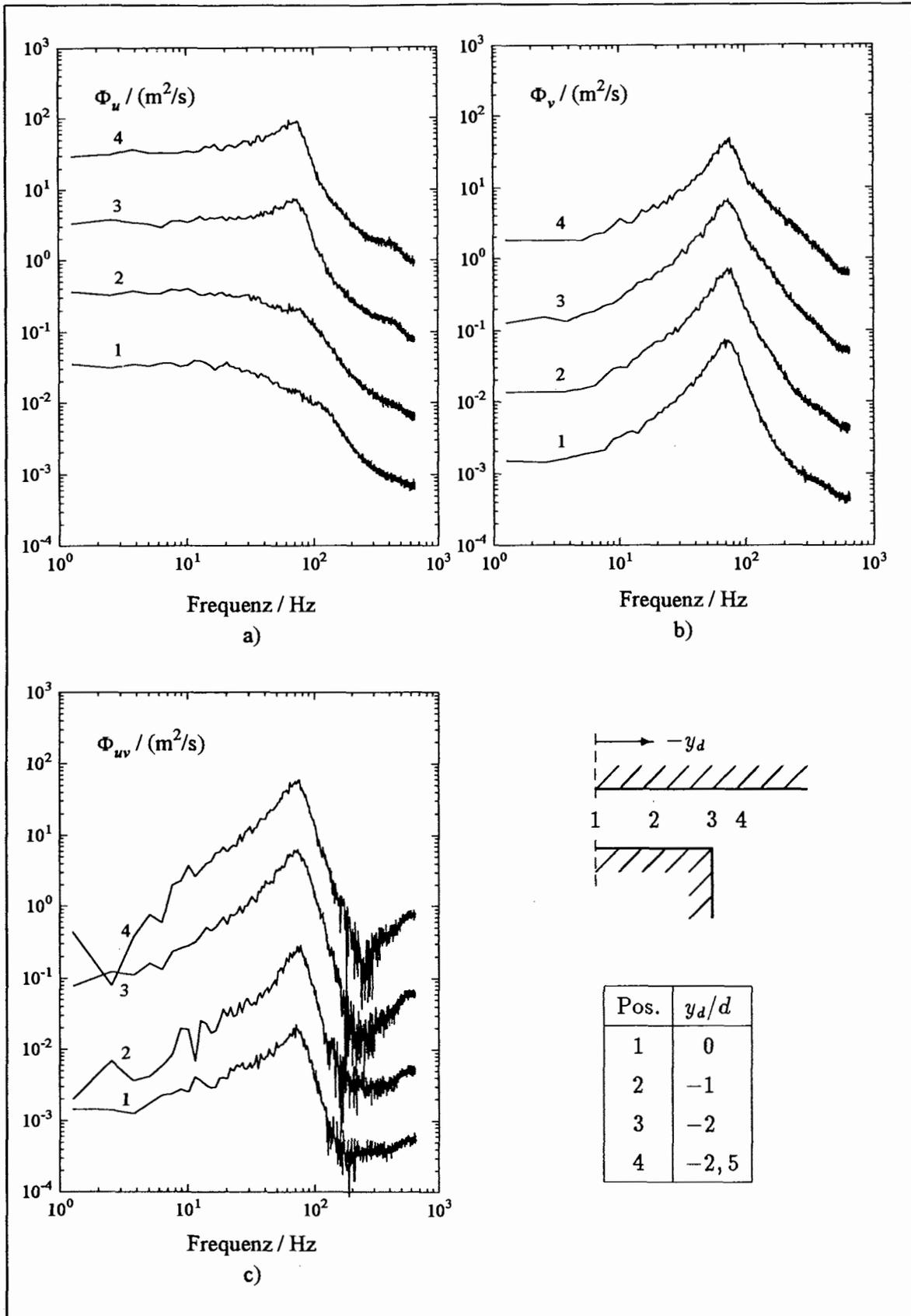


Abbildung 9.10: Autospektrale Leistungsdichten Φ_u (a) und Φ_v (b) sowie kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} (c) an vier Positionen im Spalt. Kurven sind um eine Zehnerpotenz gegeneinander verschoben

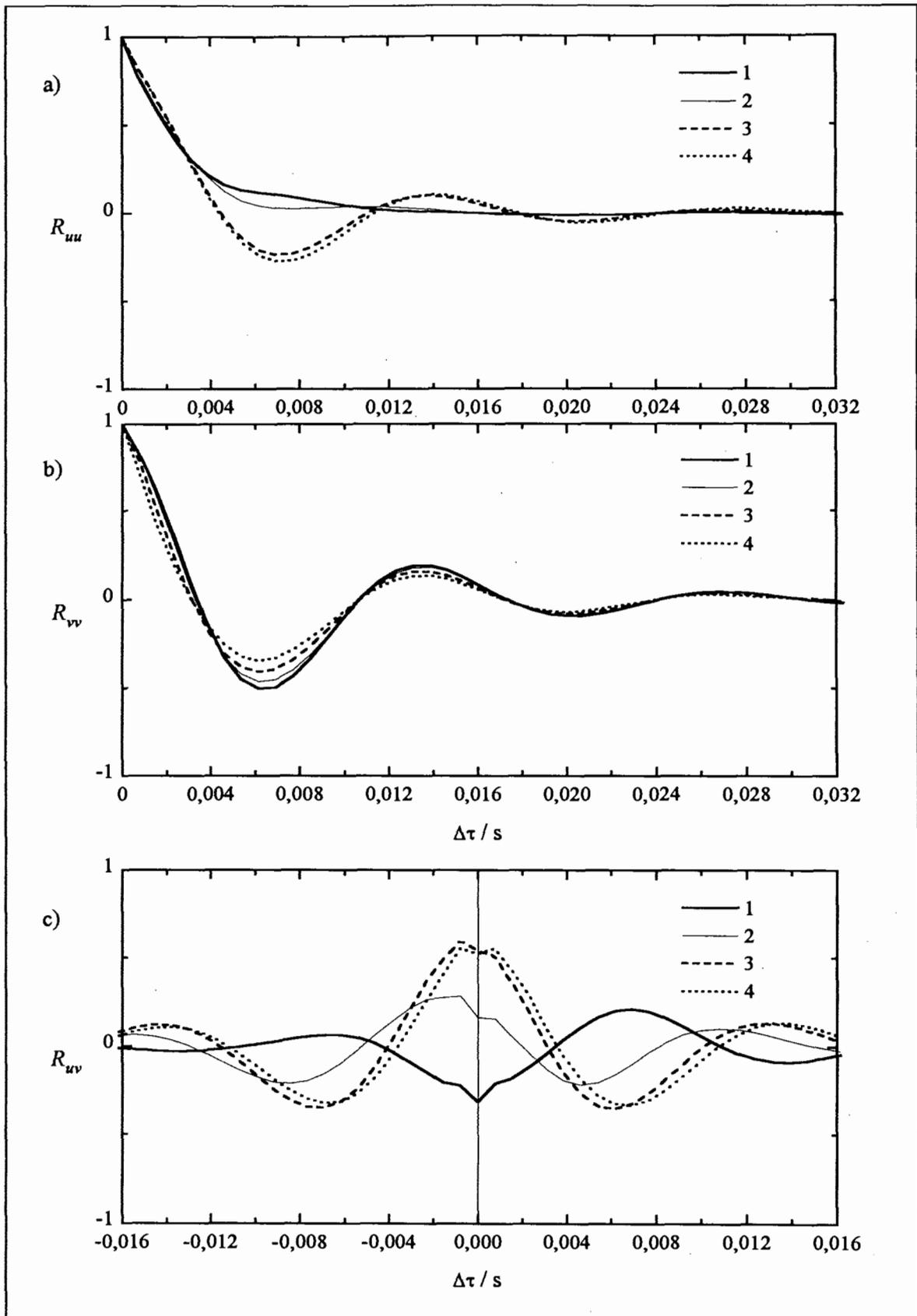


Abbildung 9.11: Autokorrelationsfunktionen R_{uu} (a) und R_{vv} (b) sowie Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} (c) an vier Positionen im Spalt. (Legende wie Abb. 9.10)

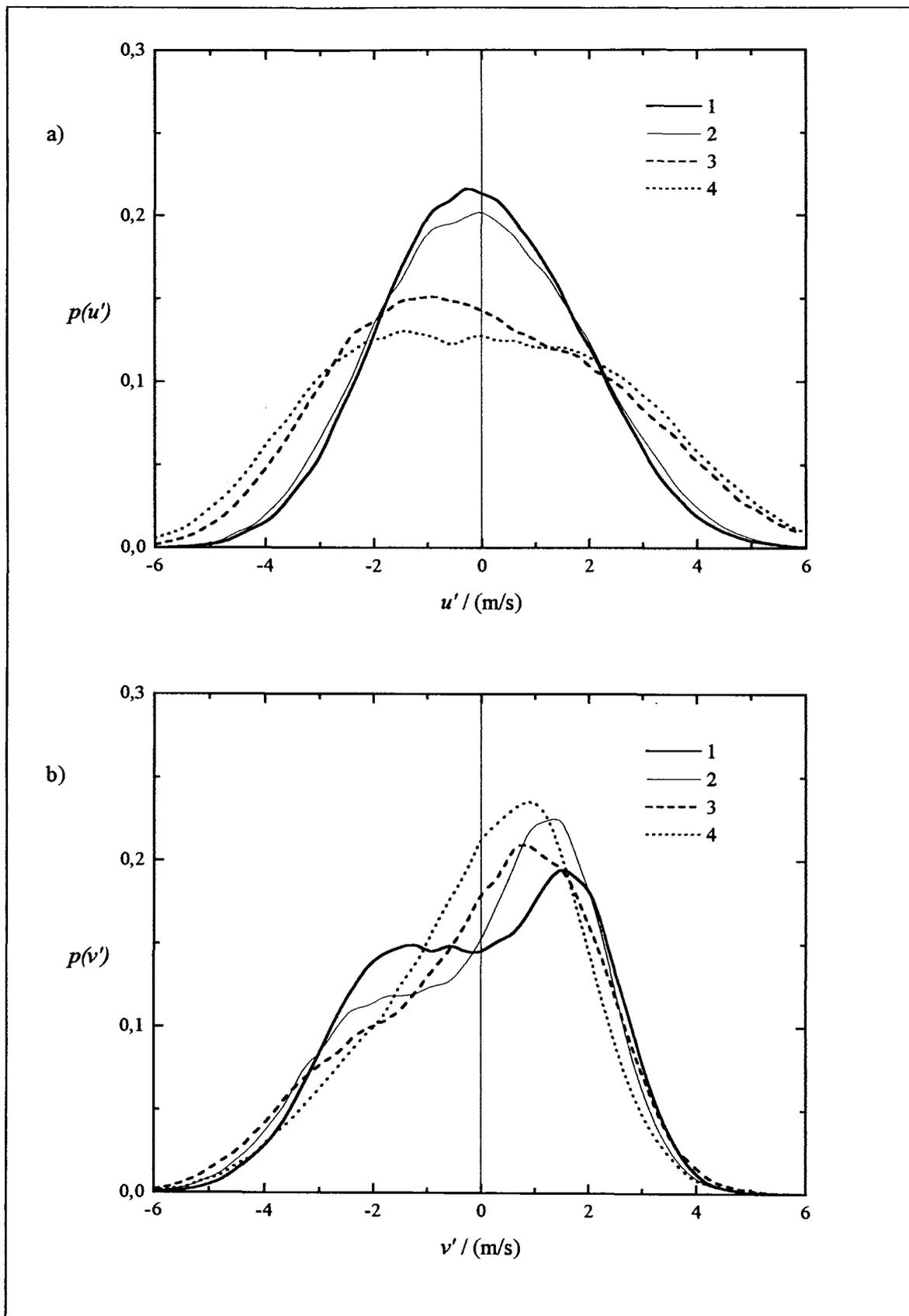


Abbildung 9.12: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u')$ (a) und $p(v')$ (b) an vier Positionen im Spalt. (Legende wie Abb. 9.10)

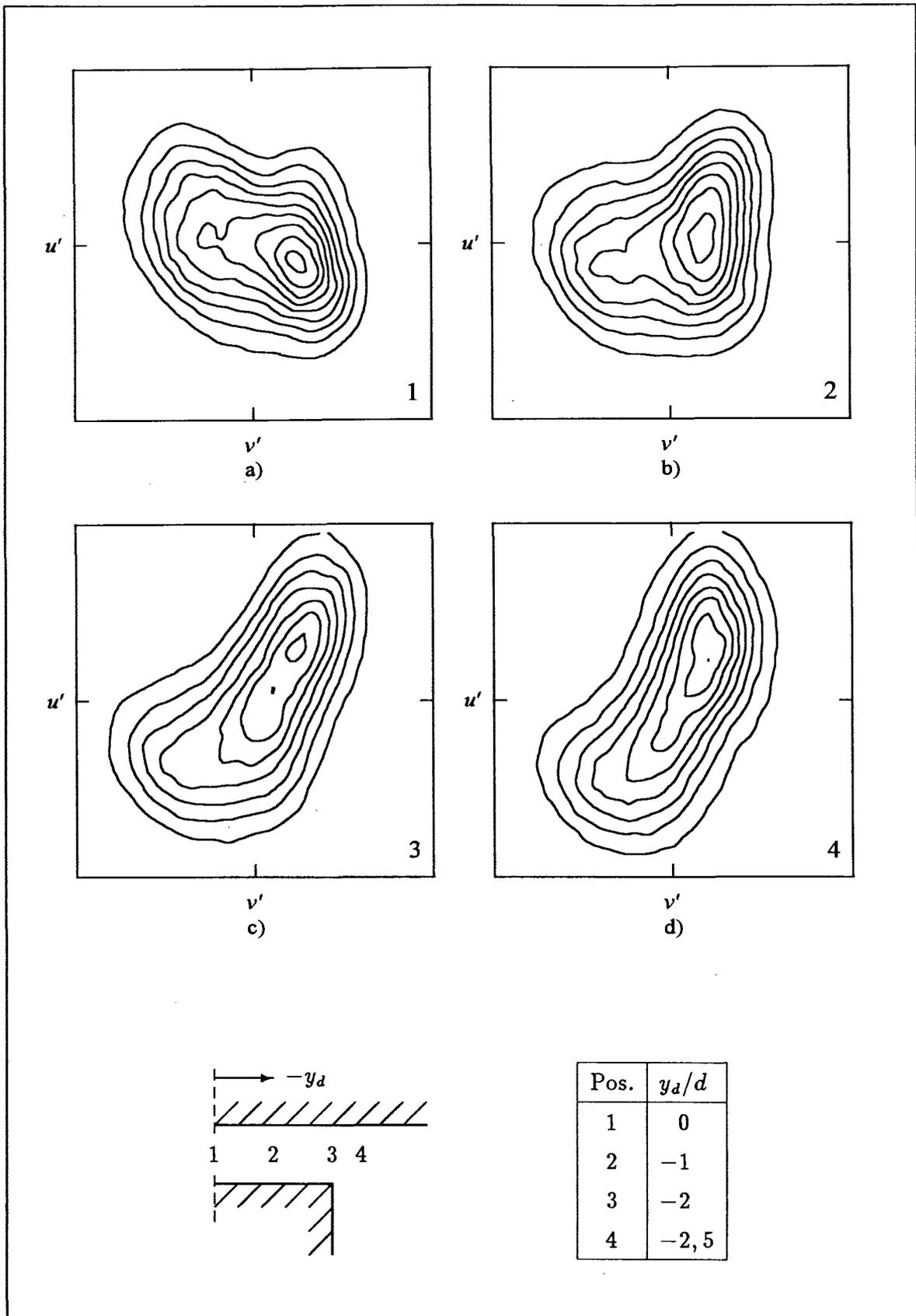


Abbildung 9.13: Qualitative Isolinienplots der Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ an vier Positionen im Spalt. (u' und v' jeweils von -6m/s bis $+6\text{m/s}$. Isolinien beginnend bei 0 mit Abstand 0,005)

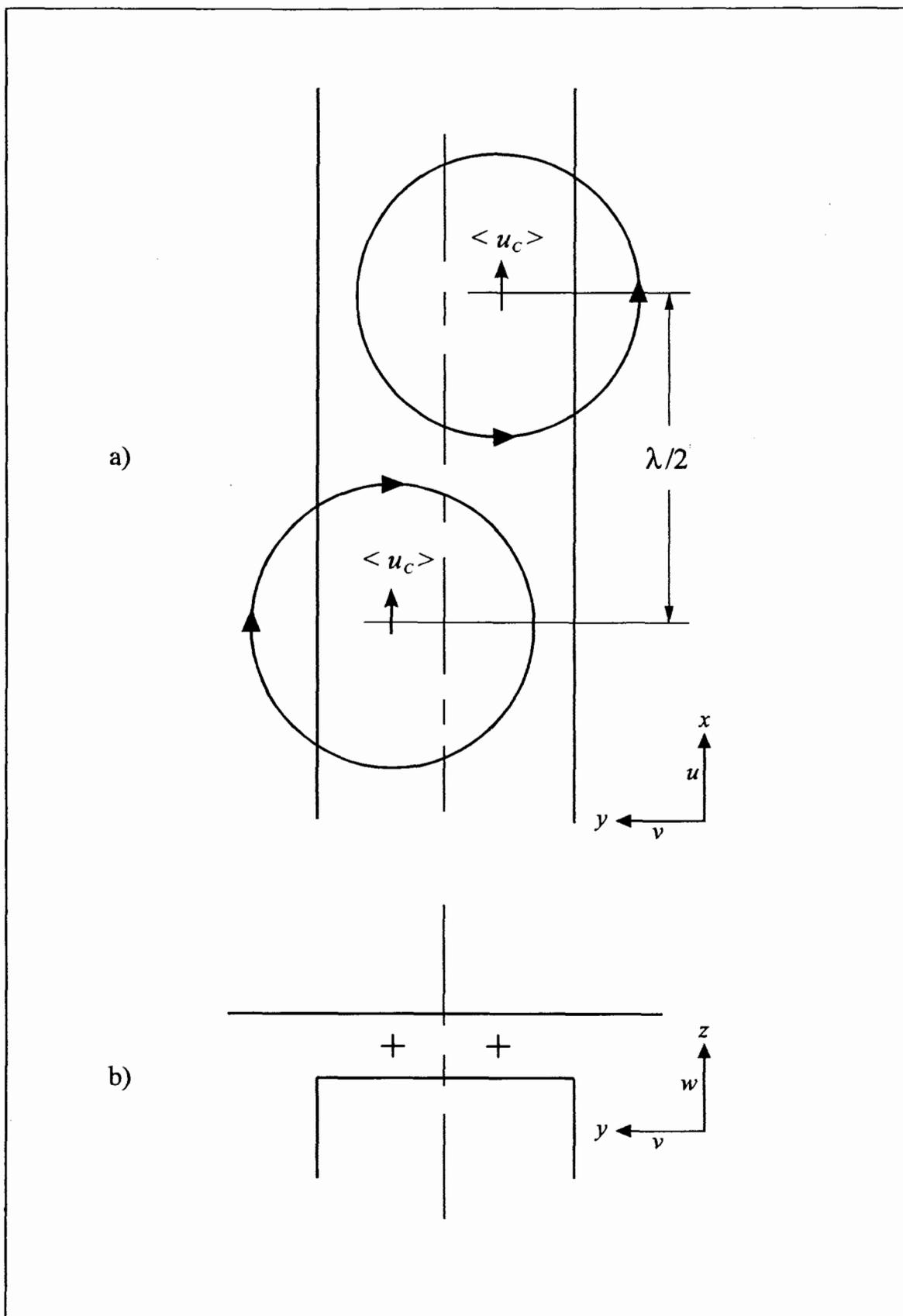


Abbildung 9.14: Strömungsmodell für den Spaltbereich. Schema der Wirbelbewegung: a) Aufsicht, b) Sicht in Hauptströmungsrichtung mit Markierung der Wirbelzentren. $\langle u_c \rangle$: Transportgeschwindigkeit der Wirbel

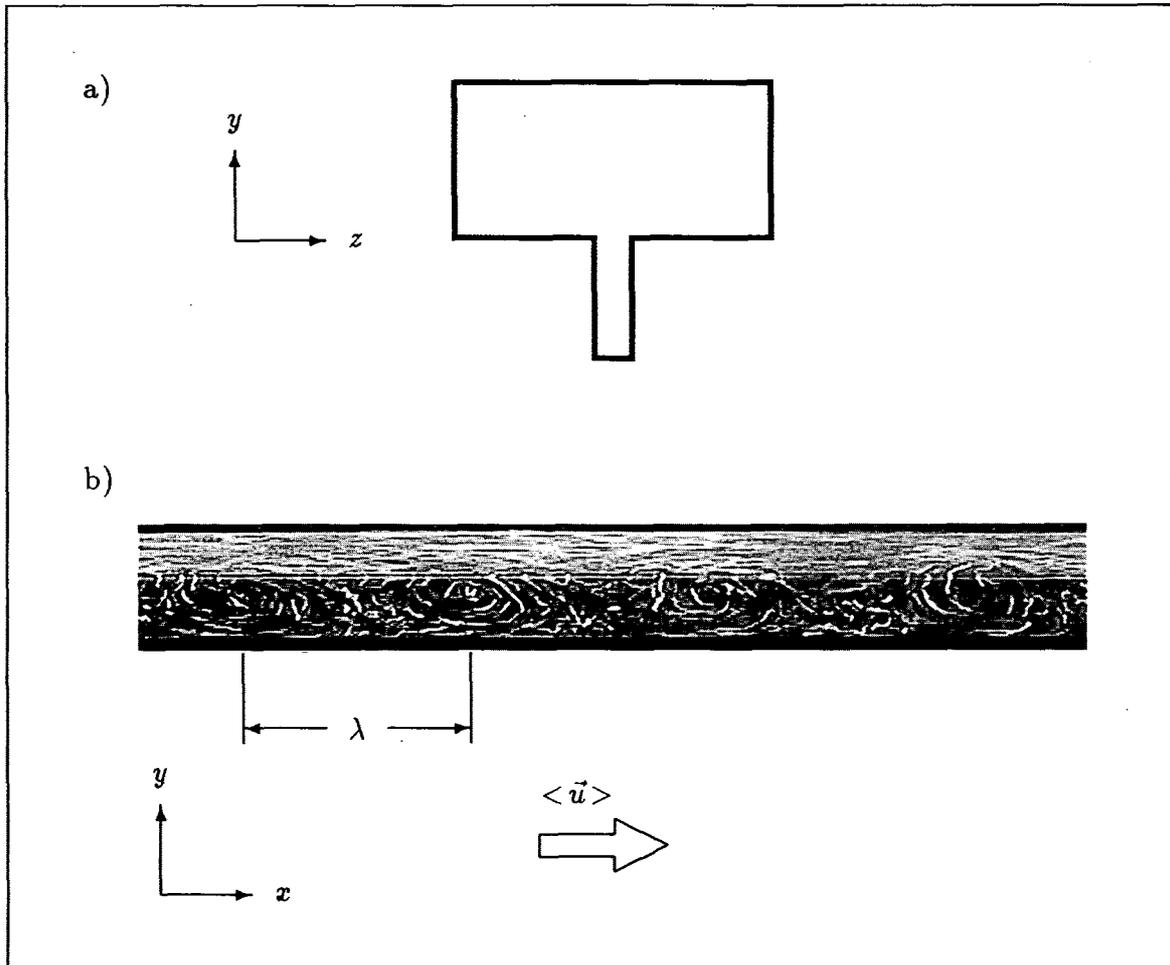


Abbildung 9.15: Wirbelstruktur in einer Spaltströmung. a) Querschnitt der Kanalgeometrie, b) Einzelbild einer Videoaufnahme, entnommen aus Meyer und Rehme [37]

Kapitel 10

Numerische Untersuchungen

In diesem Kapitel werden die Untersuchungen beschrieben, die mit dem neuen Code durchgeführt wurden. Dabei handelt es sich zunächst um Voruntersuchungen zum Einfluß verschiedener Parameter. Anschließend wird der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen beschrieben. Anhand der Geschwindigkeitsdaten im Spaltbereich wird das nach Auswertung der Meßdaten aufgestellte Strömungsmodell überprüft. Den Abschluß bilden ergänzende Untersuchungen zu Größen wie der Reynolds-Schubspannung $\langle v'w' \rangle$, dem Produktionsterm $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ und zu Sekundärströmungen.

10.1 Voruntersuchungen zu Parametereinflüssen

Abbildung 10.1 zeigt den Querschnitt der für die Simulationen verwendeten Kanalgeometrie. Die durchgezogenen Linien markieren die festen Wände, die unterbrochenen Linien senkrecht zur y -Richtung geben die Berandungen an, an denen periodische Randbedingungen angesetzt wurden. Die Geometrie des experimentell untersuchten Kanals, wie sie in Abbildung 9.1 dargestellt ist, wurde nicht exakt nachgebildet. Der wichtige Bereich des Spaltes mit seinem \hat{B}/\hat{d} -Verhältnis von 40,6mm/10,2mm wurde für die Simulation mit einem B/d -Verhältnis von 0,4/0,1 übernommen. Zur Erklärung der Bezeichnungen siehe Abbildung 1.3 auf Seite 7. Diese Geometrie wurde für alle Untersuchungen beibehalten, auch wenn die Diskretisierung durch das Maschennetz geändert wurde.

Ein direkter, quantitativer Vergleich mit den Meßdaten ist schon aufgrund der unterschiedlichen Randbedingungen in y -Richtung nicht möglich. Durch die periodischen Randbedingungen kann man sich das gesamte Strömungsfeld als eine sich in y -Richtung unendlich oft wiederholende Anordnung von längs umströmten Rippen vorstellen. Der Originalkanal hingegen ist in y -Richtung geschlossen. Auch in x -Richtung, der Hauptströmungsrichtung, erzeugen die periodischen Randbedingungen einen praktisch un-

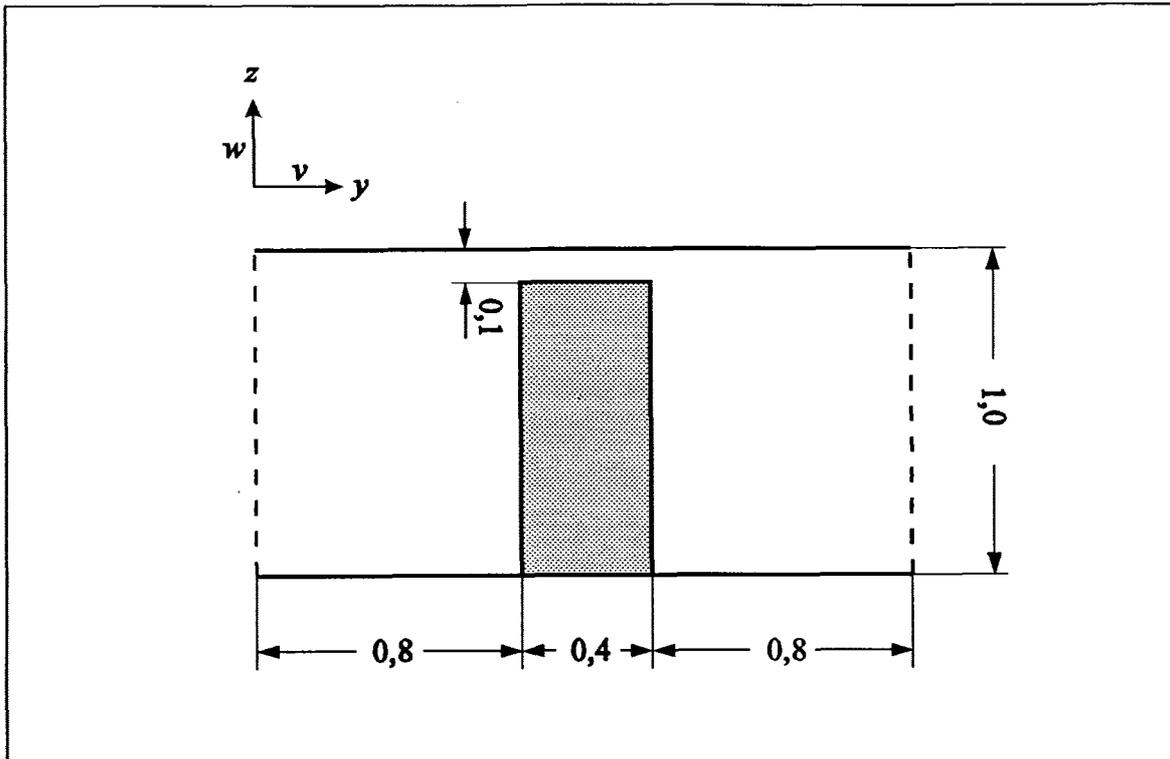


Abbildung 10.1: Querschnitt des numerisch untersuchten Kanals. Dimensionslose Längenangaben

endlich langen Kanal, in dem auf kompletter Länge ein eingelaufener Strömungszustand simuliert wird. Im Originalkanal mit endlicher Länge kann nur im Bereich des Austritts angenommen werden, daß die Einströmeffekte weitgehend abgeklungen sind. Dennoch konnten die für die Strömung in verbundenen Kanälen experimentell gefundenen Phänomene gut reproduziert werden, wie in Kapitel 10.2 gezeigt werden wird.

In Tabelle 10.1 sind die untersuchten Fälle aufgeführt. Neben der Bezeichnung der Einzelfälle sind die verwendeten Gittergrößen in x -, y - und z -Richtung und die Auflösung des Spaltbereichs in y - und z -Richtung angegeben. Ferner sind die Periodenlängen, also die „Länge“ und „Breite“ des Kanals in x - und y -Richtung, sowie die Reynolds-Zahlen Re_m beschrieben. Für alle diese Simulationen wurde das einfache Feinstrukturmodell verwendet. Bei diesem Modell wird die Feinstrukturenergie über die einfache algebraische Beziehung 7.14 bestimmt. Zu Vergleichszwecken wurde Fall G01C02 zusätzlich auch mit dem ausführlichen Feinstrukturmodell gerechnet. In diesem Fall wird eine Transportgleichung für die Feinstrukturenergie gelöst, nämlich Gleichung 4.34.

Wie im folgenden gezeigt wird, unterschieden sich die Resultate der einzelnen Simulationen qualitativ nur sehr wenig voneinander. Um Beispiele für die Darstellung der untersuchten Größen zu zeigen, wird daher immer auf den speziellen Fall G31 verwiesen, der im Anschluß ausführlicher beschrieben wird.

Bezeichnung	Gittergröße IM×JM×KM	Spaltbereich JG×KG	Periodenlängen $X_1 \times X_2$	Reynolds-Zahl Re_m
G01C02	40×50×28	10×10	2,8×2,0	$2,6 \cdot 10^5$
G01C11	40×50×28	10×10	2,8×2,0	$5,8 \cdot 10^5$
G02	40×50×28	10×10	2,8×2,0	$3,3 \cdot 10^3$
G21	32×40×24	8×8	2,8×2,0	$1,7 \cdot 10^4$
G22	32×40×24	8×8	2,8×2,0	$1,3 \cdot 10^4$
G23	32×40×24	8×8	2,8×2,0	$7,6 \cdot 10^3$
G31	64×40×24	8×8	5,6×2,0	$1,3 \cdot 10^4$
G41	64×40×24	8×8	7,0×2,0	$1,3 \cdot 10^4$

Tabelle 10.1: Übersicht über die durchgeführten Rechnungen

10.1.1 Einfluß der Periodenlänge X_1

Die auto- und kreuzspektralen Leistungsdichten Φ_u , Φ_v und Φ_{uv} sind gemäß Gleichungen (8.13) und (8.14) definiert. Sie beschreiben die Verteilung der Quadrate der Geschwindigkeitsschwankungen oder im Fall von Φ_{uv} die Verteilung von uv auf die einzelnen Frequenzen. Existieren hohe Peaks, wie sie etwa in Abbildung 9.10 zu erkennen sind, so läßt sich daraus auf Strömungseffekte schließen, die mit einer bevorzugten Frequenz auftreten, wie etwa Wirbel bestimmter Größen. Wie im realen Kanal ist die Ausprägung dieser Effekte auch in der numerischen Simulation von den Randbedingungen beeinflusst. Durch die periodischen Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung wiederholt sich der komplette Strömungszustand jeweils nach der Periodenlänge X_1 . Das hat Folgen für die Wiederholfrequenz beziehungsweise den Abstand der Strömungseffekte. Das Verhältnis von Periodenlänge und Abstand Δs in x_1 -Richtung zwischen solchen lokalen Effekten kann dann im Mittel nur ganzzahlig sein:

$$\frac{X_1}{\Delta s} = n, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10.1)$$

Für die charakteristische Wiederholfrequenz f_P gilt entsprechend

$$f_P = \frac{\langle u_C \rangle}{\Delta s} = n \cdot \frac{\langle u_C \rangle}{X_1}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10.2)$$

Dabei ist Δs wie oben der mittlere Abstand zwischen den Effekten und $\langle u_C \rangle$ die Transportgeschwindigkeit im betrachteten Bereich. Daraus folgt, daß die Simulation den realen Strömungszustand umso exakter nachbilden kann, je größer X_1 und damit auch der Faktor n ist. Als Beispiel sei der Simulationsfall G22 angeführt: im Spaltbereich wurde eine charakteristische Peakfrequenz $f_P = 4,07$ ermittelt. Die verwendete

Periodenlänge beträgt $X_1 = 2,8$. Mit Gleichung (10.2) folgt damit für die mittlere Geschwindigkeit

$$\langle u_C \rangle = 4,07 \cdot 2,8 \cdot \frac{1}{n} = 11,4 \cdot \frac{1}{n}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10.3)$$

Durch Vergleich mit den vorhandenen Strömungsdaten im Spaltbereich läßt sich $\langle u_C \rangle = 11,4$ ermitteln, was zum Faktor $n = 1$ führt. Das heißt, die im Spaltbereich mit der Frequenz $f_P = 4,07$ erscheinenden Effekte können innerhalb der verwendeten Kanallänge X_1 genau einmal auftreten. Dies konnte anhand von Vektorplots der mittleren Geschwindigkeiten in der Spaltmittelebene bestätigt werden. Dort war auch zu erkennen, daß es sich wie vermutet um Wirbelpaare handelt. Um den Einfluß der Periodenlänge auf die charakteristischen Frequenzen zu untersuchen, wurden auch Simulationen mit vergrößertem X_1 durchgeführt. Die Reynolds-Zahlen wurden jeweils gleich gewählt. Es handelt sich um die Fälle G31 und G41, wobei im einen Fall die Periodenlänge gegenüber G22 verdoppelt und im zweiten Fall eine 2,5-fache Länge gewählt wurde (siehe Tabelle 10.1). Für G31 wurde im Vergleich zu G22 die doppelte Maschenzahl in Hauptströmungsrichtung unter Beibehaltung der Maschenweite Δx_1 verwendet. Aus Kapazitätsgründen wurde für G41 dieselbe Maschenzahl IM in x_1 -Richtung gewählt und die Vergrößerung der Periodenlänge $X_1 = IM \cdot \Delta x_1$ über eine Vergrößerung von Δx_1 erreicht. Im Fall G31, welcher im folgenden Abschnitt noch genauer diskutiert wird, ergaben sich im Vergleich zu G22 nahezu identische Resultate. Die signifikante Frequenz im Spalt betrug wie in Fall G22 $f_P = 4,07$ (vergleiche dazu Abbildung 10.12), was mit obiger Beziehung zu einer mittleren Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle = 11,4$ und damit zu einem Faktor $n = 2$ führt. Durch Verdoppeln der Periodenlänge konnte hier also erreicht werden, daß der zu f_P gehörende Effekt über der Kanallänge zweimal auftritt. Abbildung 10.17 zeigt für den Fall G31 die Darstellung der Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren in der Spaltmittelebene. Die vier Einzelwirbel sind deutlich zu erkennen. Ein interessantes Ergebnis lieferte Fall G41. Es wurde die zweieinhalbfache Periodenlänge wie in G22 verwendet. Damit sollte getestet werden, ob die zusätzliche Länge gegenüber G31 ausreicht, ein weiteres Wirbelpaar entstehen zu lassen, oder ob die zwei Wirbelpaare aus G31 nur gestreckt werden beziehungsweise ganz verschwinden. Die Leistungsdichtespektren zeigten neben dem Hauptpeak einen kleineren Peak bei der doppelten Frequenz. Als Verursacher werden weitere, kleinere Effekte zwischen den Hauptwirbeln angenommen. Es zeigte sich, daß im Fall G41 drei Wirbelpaare entstehen, die bedingt durch die Periodenlänge X_1 einen geringeren Abstand als in den beiden anderen Fällen aufweisen. Abbildung 10.2 zeigt die Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren in der Mittelebene durch den Spalt für den Fall G41. Weiter läßt sich aus den Spektren schließen, daß mit den gewählten Periodenlängen aus G22 und G31 die physikalische Grundfrequenz des Strömungsphänomens stärker angeregt wird als im Fall G41, was sich dort (G41) durch den weniger deutlich aus-

geprägten Hauptpeak und das Auftreten eines Nebenpeaks äußert.

Als Erkenntnis aus den durchgeführten Untersuchungen läßt sich festhalten, daß die periodisch auftretenden Phänomene nicht durch die periodischen Randbedingungen erzeugt werden. Anhand der Ergebnisse des Falles G22 war das noch nicht eindeutig feststellbar, denn der signifikante Peak in den Leistungsdichtespektren fiel direkt mit der aus der mittleren Geschwindigkeit im Spaltbereich und der Periodenlänge gebildeten Frequenz zusammen. Auch die Tatsache, daß die Peaks nur im Spaltbereich auftreten, deutet darauf hin, daß sie durch lokale Effekte verursacht werden. Die Periodenlänge hat dennoch einen Einfluß auf die Ausprägung der Effekte und zwar dergestalt, daß die Effekte immer nur „ganzzahlig“ im Kanal auftreten können. Für die charakteristische Frequenz f_P heißt das, daß sie nur ein ganzzahliges Vielfaches einer Grundfrequenz sein kann, die sich aus der Periodenlänge X_1 und der Transportgeschwindigkeit im Spalt ergibt. Um die unverfälschte, physikalische Peakfrequenz zu erhalten, müßte man X_1 beliebig lang wählen können.

Der Vergleich der Resultate aus den Simulationen G22 und G31, welche sich nur in der verwendeten Periodenlänge X_1 in Hauptströmungsrichtung unterschieden, läßt sich sehr allgemein gestalten. Alle untersuchten Größen stimmten in beiden Simulationen sehr gut überein. Ein Hauptunterschied fiel auf: Die Kurvenverläufe in sämtlichen ausgewerteten Leistungsdichtespektren und Korrelationen sowie die Verläufe der Isolinien in den Plots der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen waren im Fall G31 glatter als im Fall G22. Das ist hauptsächlich auf die Auswertemethode zurückzuführen. Wie bereits in Kapitel 8 ausführlich beschrieben, wurden soweit möglich Mittelungen über die Maschenelemente (i,J,K) und (i,JS,K) für alle $i=1 \dots IM$ vorgenommen. Damit kann im Fall G31 für alle Auswertungen über doppelt so viele Elemente gemittelt werden wie in G22. Die statistische Qualität ist damit entsprechend höher. Lokale Einzeleffekte werden geglättet. Die Abbildungen 10.5 bis 10.21 zeigen den grundsätzlichen Verlauf der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen anhand der Daten aus der Simulation G31.

10.1.2 Untersuchungen zu Gittergröße und Reynolds-Zahl

Weitere Simulationen dienten vor allem der Untersuchung des Einflusses von Reynolds-Zahl und Maschennetz auf die Ergebnisse. Die Maschenweiten und die Gittergröße wurden bei vergleichbarer Reynolds-Zahl in engen Bereichen variiert. Die Auswirkungen auf die Resultate können wie folgt beschrieben werden: Die ausgewerteten Daten, wie etwa Turbulenzintensitäten, Reynolds-Schubspannungen, Leistungsdichtespektren und unterschiedliche Korrelationen, stimmen für die untersuchten Fälle qualitativ und auch quantitativ gut überein. Auch mit den gröberen Gittern konnten die

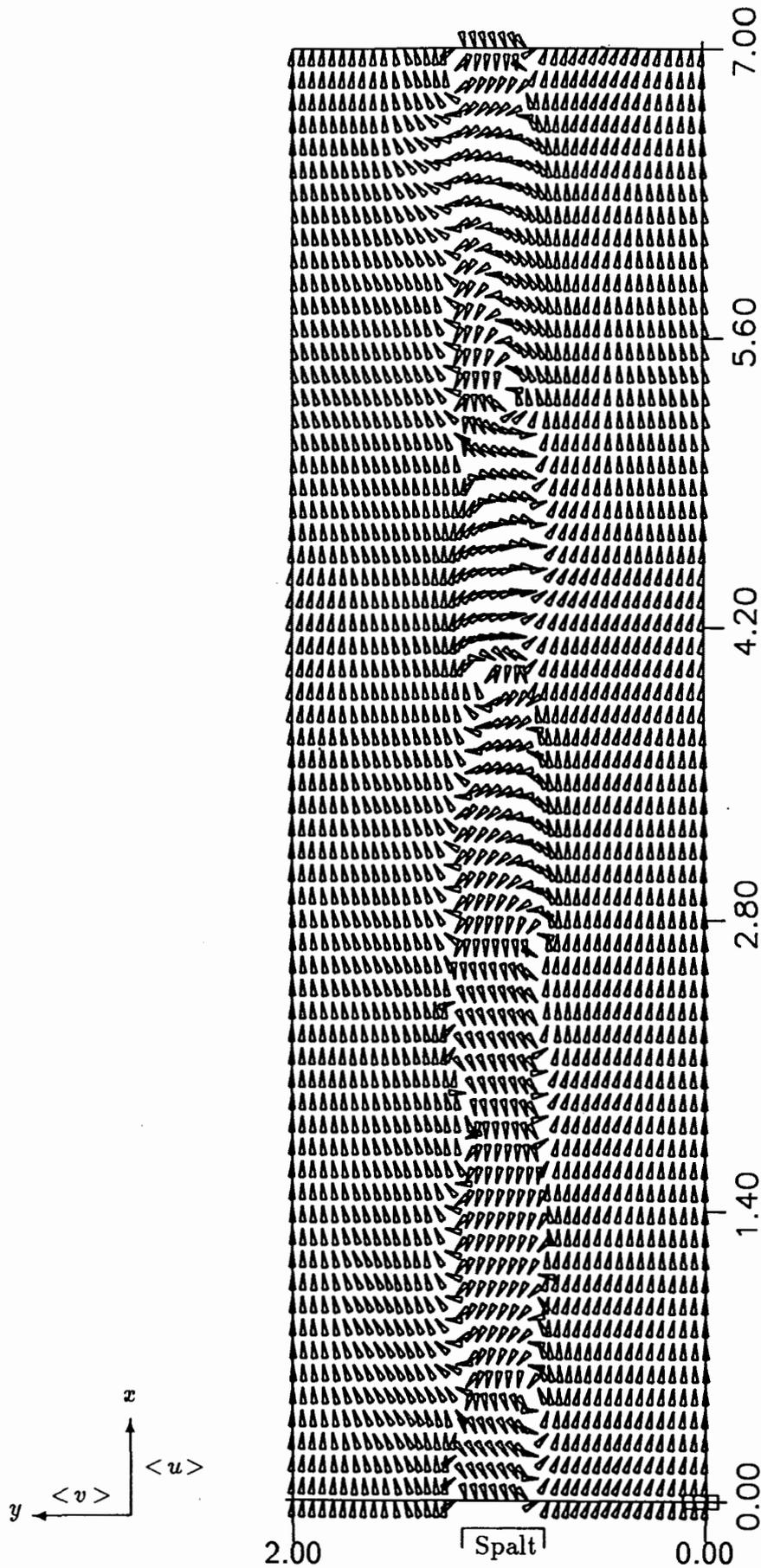


Abbildung 10.2: Richtungsplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Spaltmittelebene für den Fall G41. Mittelung im in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ mitbewegten Koordinatensystem

lokalen Effekte, die im feinen Gitter zu erkennen waren, gut nachgebildet werden. Als Unterschied fiel im wesentlichen nur der glattere Verlauf der Kurven für den feineren Diskretisierungsfall auf. Das galt sowohl für die Spektren und Korrelationen, als auch für die Isoliniendarstellungen der Schubspannungen und Intensitäten. Für diese Tatsache können zwei Gründe angeführt werden. Zum einen treten in den Simulationen mit größerem Maschennetz größere Maschen-Reynolds-Zahlen auf. Dies gilt unabhängig davon, ob die Maschen-Reynolds-Zahl mit der mittleren Kanalgeschwindigkeit als $Re_c = Re_m \cdot h$ oder mit der mittleren lokalen Geschwindigkeit als $Re_c = Re_m \cdot \langle u_1 \rangle / \sqrt{\langle u_1 \rangle} \cdot h$ gebildet wird. Bedingt durch die größeren charakteristischen Maschenweiten $h = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$ ergibt dies höhere Werte für Re_c im Vergleich zum feineren Maschennetz. Laut Roache [38] kann das zu Oszillationseffekten zwischen benachbarten Maschen führen. Einen zweiten Grund für die glatteren Kurven- und Isolinienverläufe im feinen Diskretisierungsfall liefert die einfache Tatsache, daß hier die Maschenzahl IM in x_1 -Richtung größer ist. Unter Beibehaltung der Periodenlänge X_1 folgt dies aus den kleineren Werten für Δx_1 . Damit stehen für die Mittelungen der Strömungsgrößen in x_1 -Richtung mehr Maschen zur Verfügung, was ebenfalls eine Glättung bewirkt.

Ferner wurde der Einfluß der Reynolds-Zahl Re_m auf die Spaltströmung untersucht. Beim Vergleich der Fälle G01C02 und G02 mit Reynolds-Zahlen von $Re_m = 2,6 \cdot 10^5$ und $Re_m = 3,3 \cdot 10^3$ wurde festgestellt, daß die Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen über den Kanalquerschnitt qualitativ gut übereinstimmen. Bei den Turbulenzintensitäten $\sqrt{\langle u'_{[i]} \rangle^2}$ ist auch die quantitative Übereinstimmung gut. Die Betrachtung der Reynolds-Spannungen $\langle u'_i u'_j \rangle$ zeigte, daß der Verlauf der Isolinien im Kanalquerschnitt in beiden Fällen gut vergleichbar war, der quantitative Vergleich zeigte aber Unterschiede auf. Wie im folgenden Abschnitt 10.2 noch gezeigt werden wird, treten bei den drei Reynolds-Spannungen $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'w' \rangle$ und $\langle v'w' \rangle$ jeweils am Spaltanfang an der Kante des Einbaus deutliche Peaks auf (als Beispiel siehe Abbildungen 10.8 bis 10.21). Beim Vergleich der beiden Simulationen G01C02 und G02 ergaben sich für den Fall G02 mit der kleineren Reynolds-Zahl $Re_m = 3,3 \cdot 10^3$ jeweils die höheren Peakwerte. Im einzelnen heißt das: Die Reynolds-Spannung $\langle u'v' \rangle$ der Schwankungskomponenten in Hauptströmungsrichtung und spaltparalleler Richtung erreichte für Fall G01C02 am Spaltanfang einen Spitzenwert von etwa 0,8, während für G02 ein Maximalwert von etwa 3,0 erreicht wurde. Ein ähnliches Bild ergibt sich für $\langle v'w' \rangle$, die Reynolds-Spannung der spaltparallelen und spaltnormalen Schwankungskomponenten: Dort stand einem Peakwert von 0,2 für den Fall $Re_m = 2,6 \cdot 10^5$ ein Wert von 0,6 für den Fall $Re_m = 3,3 \cdot 10^3$ gegenüber. Für $\langle u'w' \rangle$ schließlich traten die beiden Maximalwerte 0,5 und 1,5 für G01C02 und G02 auf. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Maximalwerte der am Spaltanfang auftretenden Peaks in den Reynolds-Schubspannungen jeweils in einem Verhältnis von ungefähr 3:1 standen, wo-

bei die größeren Werte zum Fall G02 mit der kleineren Reynolds-Zahl gehörten. Ein bereits mehrfach beobachteter Unterschied trat auch beim Vergleich dieser beiden Fälle auf: Der Verlauf der Isolinien in den Plots der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen war für den „langsamen“ Fall G02 jeweils glatter. Als Grund dafür kann wie oben der Unterschied in den Maschen-Reynolds-Zahlen Re_c vermutet werden, da für beide Simulationen dasselbe Maschennetz verwendet wurde.

Der Vergleich der Leistungsdichtespektren zeigte nur einen signifikanten Unterschied: Im Fall der hohen Reynolds-Zahl war die dimensionslose charakteristische Peakfrequenz f_P etwa doppelt so hoch wie im anderen Simulationsfall, was auf die unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten in diesem Bereich zurückzuführen ist. Die Daten sind auch konsistent bezüglich der oben angegebenen Beziehung (10.2) zwischen der Peakfrequenz f_P , der Periodenlänge X_1 und der Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$: es konnte für beide Fälle genau ein Wirbelpaar pro Periodenlänge ermittelt werden. Desweiteren wurden die Autokorrelationsfunktionen R_{uu} und R_{vv} , die Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} und die räumlichen Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{u_1 u_2}$ und $R_{v_1 v_2}$ aus den beiden Fällen G01C02 und G02 verglichen. Als Beispiel für diese Funktionen können die Abbildungen 10.13 und 10.14 dienen, die zwar dem Fall G31 entstammen, aber auch den Funktionsverlauf der hier untersuchten Fälle gut darstellen. Für alle diese Korrelationen konnte zwischen den beiden Simulationsfällen eine gute qualitative Übereinstimmung festgestellt werden. Das oben angesprochene Verhältnis der charakteristischen Frequenzen f_P von etwa 2 spiegelte sich auch in den Korrelationsfunktionen wider. Dort zeigen die Abstände zwischen je zwei Nulldurchgängen der Korrelationsfunktionen dieses Verhältnis. Außerdem konnte festgestellt werden, daß die Amplituden dieser Funktionen für den Fall G01C02 mit der höheren Reynolds-Zahl deutlich kleiner waren als für G02.

10.1.3 Einfluß des Feinstrukturmodells und Zusammenfassung

Das Simulationsprogramm TURBIT bietet die Möglichkeit, die Feinstrukturenergie $\overline{vE'}$, welche zur Bestimmung der Feinstrukturkonstanten benötigt wird, auf zwei verschiedene Arten zu berechnen. Die ausführliche Methode, welche in Kapitel 4 beschrieben wird, besteht in der Berechnung der Einzelanteile wie Konvektion, Produktion, Diffusion und Dissipation. Eine einfachere Methode bietet sich über die Beziehungen (7.13) und (7.14). Sie werden in Kapitel 7.2 benützt, um Anfangswerte für die Feinstrukturenergie zu bestimmen. Um zu untersuchen, ob die Art der Bestimmung von $\overline{vE'}$ Einfluß auf die Ergebnisse hat, wurde der Fall G01C02 einmal mit dem einfachen und ein zweites Mal mit dem ausführlichen Feinstrukturenergiemodell gerechnet. Die ver-

glichenen Größen wie Leistungsdichtespektren, Turbulenzintensitäten und Reynolds-Schubspannungen zeigten eine sehr gute quantitative Übereinstimmung. Deshalb wurde beschlossen, alle anderen Simulationen mit dem einfachen Modell durchzuführen, was auch eine enorme Rechenzeiterparnis brachte: die beanspruchte CPU-Zeit für dieselbe Anzahl von Iterationen ist für Simulationen mit dem ausführlichen Modell etwa 3,2-mal so hoch.

Die obigen Ausführungen haben gezeigt, daß die qualitative Ausprägung der Strömungsphänomene in der untersuchten Spaltgeometrie nur sehr wenig von Größen wie der Reynolds-Zahl oder den Maschenweiten abhängt. Auch in Maschennetzen mit relativ kleinen Periodenlängen können die Effekte dargestellt werden, ohne davon ausgehen zu müssen, daß die Effekte nur durch die periodischen Randbedingungen „erzeugt“ werden. Um die Ergebnisse detailliert darzustellen, genügt es deshalb, dies anhand eines exemplarischen Falls zu tun. Dafür wird im nächsten Abschnitt der Simulationsfall G31 herangezogen.

10.2 Verifikation

Im folgenden werden die Ergebnisse des Falls G31 dargestellt. Diese Resultate werden benützt, um durch einen Vergleich mit den Meßergebnissen die Zuverlässigkeit der Rechnungen zu bestätigen. Für die Simulation wurde ein Maschennetz der Größe $64 \times 40 \times 24$ verwendet (siehe Tabelle 10.1). Die Periodenlängen betragen $X_1 = 5,6$ in Hauptströmungsrichtung und $X_2 = 2,0$ in der spaltparallelen y -Richtung. Damit ergeben sich die Maschenweiten in diesen Richtungen zu $\Delta x_1 = 0,0875$ und $\Delta x_2 = 0,05$. In x_3 -Richtung wurde eine nichtäquidistante Einteilung gewählt, mit $\Delta x_3 = 0,0125$ im Spaltbereich an der oberen Kanalwand über $\Delta x_3 = 0,0942$ in Kanalmitte bis $\Delta x_3 = 0,0187$ an der unteren Kanalwand. Der Einbau der Breite $8 \cdot \Delta x_2$ wurde bezüglich der x_2 -Koordinate in der Mitte des Kanals positioniert, was für die Simulation nicht notwendig wäre, aber Erleichterungen für die Auswertungen bringt.

Wie bereits zu Anfang des Kapitels erwähnt, wurde die Spaltgeometrie im gleichen Verhältnis wie im realen Kanal modelliert: das B/d -Verhältnis beträgt 4:1. Es ist jedoch kein direkter Vergleich mit den vorliegenden Meßdaten möglich, da aufgrund der periodischen Randbedingungen in x - und in y -Richtung die Kanalgeometrie nicht genau reproduziert werden kann. Außerdem wurde für die Simulation eine kleinere Reynolds-Zahl als im Experiment gewählt, da sich erstens, wie in 10.1.2 beschrieben wurde, für die kleinere Reynolds-Zahl die glatteren Kurvenverläufe ergaben und zweitens die Ergebnisse für unterschiedliche Reynolds-Zahlen dennoch gut vergleichbar waren. Für die Simulation wurde die Reynolds-Zahl $Re_m = 1,3 \cdot 10^4$ verwendet, während das Experiment S3, mit dem hier verglichen werden soll, bei einer Reynolds-Zahl $Re = 2,3 \cdot 10^5$

durchgeführt wurde. Die Reynolds-Zahl Re_m der Simulation wird mit dem Plattenabstand D , die Reynolds-Zahl Re des Experiments mit dem hydraulischen Durchmesser \hat{D}_h eines Hauptkanals gebildet.

Wie bereits mehrfach beschrieben wurde, ergibt sich in y -Richtung durch die periodischen Randbedingungen eine Gesamtgeometrie, die man sich als Wiederholung von in x -Richtung zeigenden Rippen vorstellen kann. Abbildung 10.3 zeigt einen Ausschnitt der Länge $2 \cdot X_2$. Die gestrichelten Linien geben dabei die Grenzen eines Basiskanals an. Die Linie $y=0$ teilt gleichzeitig den durch die beiden Einbauten begrenzten Kanal in der Mitte. Damit entspricht die Stelle $y=0$ in der Simulation etwa der Koordinate \hat{y} im realen Kanal, welche in der Mitte zwischen der Außenwand bei $\hat{y}=0$ und der linken Wand des Einbaus bei $\hat{y}=154,5\text{mm}$ liegt (siehe dazu Abbildung 9.1).

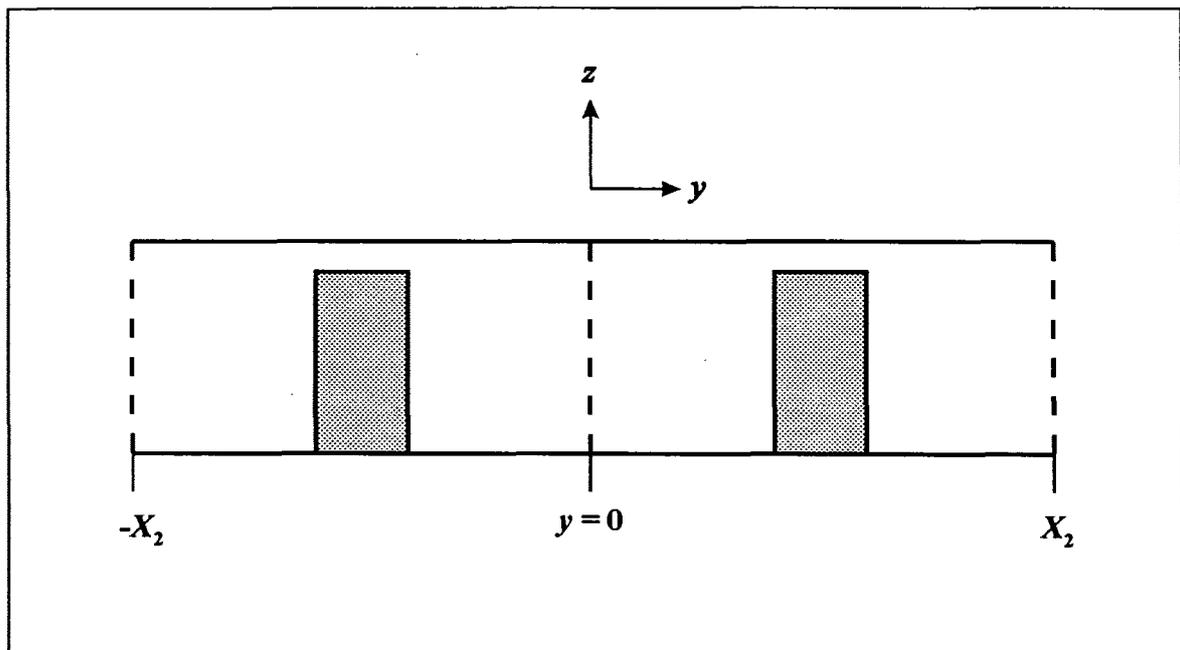


Abbildung 10.3: Veranschaulichung der periodischen Randbedingungen in y -Richtung

Die Abbildungen 10.4 bis 10.11 zeigen Ergebnisse der numerischen Simulation als Isolinenplots über einer Hälfte des Kanalquerschnitts und darunter zusätzlich eine 3D-Darstellung derselben Daten. Die Blickrichtung für diese 3D-Plots ist wie bei der Darstellung der experimentellen Daten jeweils über den Spalt hinweg in Richtung des Koordinatenursprungs. Zur Auswertung der numerischen Daten wurde dabei jeweils die in Kapitel 8.4 beschriebene Methode der Mittelung über die x -Richtung und die bezüglich des Einbaus symmetrischen Gitterpunkte angewandt.

10.2.1 Mittlere Geschwindigkeit

Abbildung 10.4 zeigt die mittlere Geschwindigkeit in x -Richtung, bezogen auf den volumetrischen Mittelwert derselben Größe: $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u \rangle}$. Der Maximalwert von 1,28 wird in der Mitte des Hauptquerschnitts bei $y = 0$ erreicht. Zur Spaltmitte hin fällt die relative Geschwindigkeit auf etwa 0,56 ab. In den Ecken des Kanals sind keine so deutlichen Ausbuchtungen wie in der Darstellung der experimentellen Daten in Abbildung 9.2 zu erkennen. Diese Deformationen des Profils in den Ecken des Querschnitts sind auf Sekundärströmungen zurückzuführen. In der Simulation konnten ebenfalls Sekundärströmungen nachgewiesen werden. Gegen Ende des Kapitels wird darauf noch genauer eingegangen werden.

10.2.2 Turbulenzintensitäten und Reynolds-Spannungen

Abbildung 10.5 zeigt die Turbulenzintensität $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$. Die Darstellung der entsprechenden experimentellen Größe liefert Abbildung 9.3. Am Spaltanfang wird mit etwa 3,2 der Maximalwert durch einen kleinen Peak erreicht, was mit dem experimentell ermittelten Spitzenwert von 3,3 sehr gut übereinstimmt. Zur Spaltmitte hin findet ein kontinuierlicher Abfall auf einen Wert von 1,6 statt. Die Übereinstimmung mit den Meßdaten ist insbesondere in der Umgebung des Spaltes und der Wand des Kanaleinbaus gut. Zur Kanalmitte hin wird ein Minimalwert von etwa 0,9 erreicht (Experiment: 1,1).

Die Turbulenzintensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ der spaltparallelen Geschwindigkeit ist in Abbildung 10.6 dargestellt. Der Maximalwert wird im Spalt erreicht, wobei fast über die gesamte Länge des Spaltes ein konstantes Niveau von 1,63 beibehalten wird. Zum Hauptquerschnitt hin fallen die Werte ab. Hier ist ein Unterschied zu den Meßdaten zu erkennen. Dort ist $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ über die Spaltlänge hinweg mit 1,9 auch relativ hoch, aber am Spaltanfang wird mit Werten, die etwas größer als 2,0 sind, noch ein kleiner Peak erreicht.

Die Turbulenzintensität $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ der wandnormalen Schwankungskomponente zeigt Abbildung 10.7. Zum Vergleich mit den Meßdaten kann Abbildung 9.5 herangezogen werden. Die Maximalwerte von Simulation und Experiment stimmen mit 1,60 und 1,65 sehr gut überein. Allerdings wird dieser Wert in der Simulation an der Wand des Einbaus etwa auf halber Kanalhöhe erreicht, während er im Experiment näher zur oberen Wand hin verschoben ist. Der minimale numerische Wert im Hauptströmungsfeld ergibt sich zu etwa 0,5; die zugehörige Position befindet sich nahe der Mitte des Hauptquerschnitts. Der experimentelle Minimalwert ist ungefähr 0,8 und wird ebenfalls in Kanalmitte erreicht. Ein größerer Unterschied in den Werten tritt im Spaltinneren

auf. Im Spaltzentrum wurden Werte um 0,5 gemessen, während die Simulation dort nur Werte bis 0,15 liefert. Der Verlauf der Isolinien im Bereich der Wand des Kanaleinbaus stimmt dennoch für Rechnung und Messung relativ gut überein, wenn man das unterschiedliche Seitenverhältnis der Strömungsquerschnitte in Betracht zieht.

Abbildung 10.8 zeigt die Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$. Wie in Abbildung 9.6 ist auch hier ein sehr hoher Peak am Spaltanfang zu erkennen, welcher einen Wert von etwa 2,4 erreicht. Dagegen liegt mit 3,9 der experimentell ermittelte Wert deutlich höher, was allerdings auch eine Folge der höheren Reynolds-Zahl im Experiment sein kann. Die im Hauptquerschnitt zu 1,07 für die Simulation und 0,95 für die Messung erreichten Maximalwerte stimmen dagegen wieder sehr gut überein. Auch die Positionen dieser Werte liegen in beiden Darstellungen eng beieinander. Für den gesamten Bereich in der Nähe des Einbaus und im Spaltbereich werden die Verläufe der Isolinien der experimentellen Daten gut durch die Simulation reproduziert.

Der Vergleich der Reynoldsschen Schubspannungen $\langle u'w' \rangle / u^{*2}$, welche in den Abbildungen 10.9 und 9.7 für die Simulation und das Experiment dargestellt sind, zeigt in der Umgebung des Spaltes gute Übereinstimmung. In beiden Fällen tritt an der Kante des Einbaus ein deutlicher Peak auf, wobei beide einen Maximalwert von 1,7 annehmen. Der Minimalwert der numerischen Daten beträgt $-0,91$ und wird nahe der unteren Wand erreicht. Dies gilt auch für den experimentellen Minimalwert, der aber mit $-0,96$ um 5,5% kleiner ist. Größere Unterschiede existieren im Spalt. Dort schwanken die rechnerisch ermittelten Daten minimal um 0, während das Experiment einen Wertebereich von $-0,4$ bis $+0,4$ aufweist.

10.2.3 Turbulente kinetische Energie

Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Werten für die turbulente kinetische Energie $\langle k' \rangle / u^{*2}$ kann wieder als gut bezeichnet werden. Der prinzipielle Verlauf der Isolinien stimmt speziell in der Nähe des Einbaus und in der weiteren Umgebung des Spaltes zufriedenstellend überein. In Abbildung 10.10 ist am Spaltanfang ein Peak mit Maximalwert 6,2 zu erkennen. Diesem steht ein Peakwert von 7,8 im Experiment gegenüber (siehe Abbildung 9.8). Der Vergleich der Werte in Spaltmitte liefert mit 2,7 für die Simulation wiederum einen kleineren Wert als für das Experiment, wo 3,5 erreicht werden. Bildet man jedoch das Verhältnis vom Maximalwert am Spaltanfang zum Wert in Spaltmitte, so erhält man etwa 2,3 für die Rechnung und 2,2 für die Messung. Die etwas größeren Werte für das Experiment werden auch in Kanalmitte bestätigt: dort beträgt das Minimum der turbulenten kinetischen Energie etwa 1,25, während die Simulation 0,83 liefert.

10.2.4 Symmetrietest

Wie bei der Beschreibung der experimentellen Ergebnisse schon erwähnt wurde, kann die Größe $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$ zur Beurteilung der Symmetrie der Strömung im Hauptkanal herangezogen werden. Deren Verteilung ist in Abbildung 10.11 dargestellt. Ein direkter Vergleich mit den Daten aus dem Experiment erscheint nicht sinnvoll. Die Untersuchung dieser Größe bestätigt die schon in den vorangehenden Isolinenbildern zu beobachtende Tatsache, daß die Strömungsverteilung bezüglich der wandnormalen z -Koordinate nicht ganz symmetrisch ist. Die „Null-Linie“ der Größe $\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle$ bezüglich der z -Richtung liegt, von der unteren Kanalwand aus gerechnet, auf etwa 40% der Kanalhöhe.

10.2.5 Spektrale Leistungsdichten

In Abbildung 10.12 sind die dimensionslosen Autospektralen Leistungsdichten Φ_u und Φ_v und die kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} dargestellt. Wie im Experiment erfolgte auch hier die Auswertung an vier Positionen im Spalt. Position 1 liegt direkt im Spaltzentrum. Die Leistungsdichte Φ_u in Abbildung 10.12a zeigt an dieser Stelle keinen auffälligen Verlauf. Mit zunehmender Verschiebung der Auswerteposition gegen das Spaltende zu bildet sich ein deutlicher Peak aus, der für die Position 4 etwas außerhalb des Spaltes maximal ist. Die dimensionslose Peakfrequenz ist für alle vier Kurven die selbe: $f_P = 4,07$. Dieses Verhalten ist mit den Beobachtungen aus dem Experiment identisch. Zum Vergleich kann Abbildung 9.10a herangezogen werden. Auch dort ist für Position 1 ein glatter Spektrumsverlauf zu sehen, während zum Spaltanfang hin ein Peak sichtbar wird. In den Leistungsdichtespektren Φ_v in Abbildung 10.12b ist für alle vier Positionen ein hoher Peak erkennbar. Die Höhe dieser Spitze ist in Spaltmitte bei 1 maximal und nimmt bis zur Position 4 hin schwach ab. Die charakteristische Peakfrequenz beträgt für alle vier Kurven $f_P = 4,07$. Das ist dieselbe Frequenz, die bereits für Φ_u beobachtet wurde. Die Simulation reproduziert auch hier dasselbe prinzipielle Verhalten, wie es schon für Φ_v im Experiment erkennbar war: hohe Peaks bei einer bestimmten Frequenz, die zum Spaltanfang hin etwas schwächer werden. Die Auswertung der kreuzspektralen Leistungsdichten Φ_{uv} in Abbildung 10.12c führt die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment fort. Wie in Abbildung 9.10c gilt auch hier: Für alle vier Positionen treten deutliche Peaks an derselben charakteristischen Frequenz wie für die autospektralen Leistungsdichten auf, und die Höhe dieser Spitzen nimmt von der Spaltmitte zum Spaltanfang hin zu.

10.2.6 Korrelationsfunktionen

Der Verlauf der in Abbildung 10.13 dargestellten Autokorrelationsfunktionen ist konsistent mit den Ergebnissen der Leistungsdichtespektren. Der Peak in den Kurven von Φ_u entspricht hier einem gedämpften periodischen Kurvenverlauf von R_{uu} . Die Inverse der charakteristischen Frequenz $f_P = 4,07$ ergibt die Zeitverzögerung, bei welcher das zweite Maximum auftritt: $\Delta\tau = 0,246$. Wie im Experiment, dessen zugehörige Korrelationsfunktionen in Abbildung 9.11 dargestellt sind, erfährt die u -Komponente an Position 1 die stärkste und an Position 4 die schwächste Dämpfung. Die insgesamt höheren Amplituden und das im Zeitverlauf schwächere Abklingen von R_{uu} in der Simulation ist eine Folge der periodischen Randbedingungen. Dasselbe gilt für die Autokorrelationsfunktion R_{vv} der spaltparallelen Geschwindigkeit v in Abbildung 10.13b. Der prinzipielle Verlauf der Kurve stimmt dennoch mit den experimentellen Daten in Abbildung 9.11b überein. Die Kurven für die vier Positionen liegen relativ eng beieinander, wobei R_{vv} in Spaltmitte am stärksten variiert. Die Inverse der charakteristischen Frequenz aus Φ_v liefert wiederum das $\Delta\tau$, für welches das zweite Maximum von R_{vv} auftritt. Die Übereinstimmung der Kreuzkorrelationsfunktionen R_{uv} in Simulation und Experiment (Abbildungen 10.13c und 9.11c) ist zufriedenstellend, wenn man von der Kurve für die Position 1 absieht. Dies liegt, wie bereits in Kapitel 9.2 angedeutet wurde, an der Asymmetrie der gemessenen Strömung in Spaltmitte.

Ferner wurden Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{u_1 u_2}$ und $R_{v_1 v_2}$ im Spalt untersucht. Die Stelle „1“, an der u_1 und v_1 bestimmt wurden, war immer der Spaltanfang bei Position 0. Die Stelle „2“ für u_2 und v_2 wurde von den Positionen 1 bis 4 variiert. Zur Definition der Positionen 0 bis 4 siehe die Skizze in Abbildung 10.14. Die Geschwindigkeiten u' an den Positionen 0 und 1 sind gleichphasig korreliert, wie man an der Kurve 1 in Abbildung 10.14a erkennt. Die entsprechende Korrelation für die Positionen 0 und 2 ist relativ schwach. Position 2 liegt im Spaltzentrum. Wird zur Bestimmung von u_2 schließlich Position 4 gewählt, was genau dem gegenüberliegenden Spaltanfang entspricht, so sind die Geschwindigkeiten u' gegenphasig korreliert. Mit überwiegend positiven Werten für u' an Position 0 korrespondieren überwiegend negative Werte an Position 4 und umgekehrt. Die Kreuzkorrelationen $R_{v_1 v_2}$ für die vier Positionen sind alle stark gleichphasig. Die Verschiebungen der Maxima aus dem Nullpunkt lassen nur geringe Phasenunterschiede erkennen. Für die Geschwindigkeitskomponente v' durch den Spalt gilt also, daß vorwiegend positive Werte an Position 0 mit ebenfalls überwiegend positiven Werten auf der gesamten Spaltlänge gekoppelt sind und umgekehrt. Das kann man sich so vorstellen, daß das im Spalt strömende Fluid immer als Ganzes durch den Spalt hindurchgeschoben wird.

Zu diesen Kreuzkorrelationen liegen keine entsprechenden Meßdaten vor. Es existieren jedoch Vergleichsdaten aus der Kanalgeometrie mit Mittenspalt entsprechend Abbil-

dung 1.1i. Der Verlauf dieser Korrelationen stimmt qualitativ gut mit den hier präsentierten Simulationsergebnissen überein (Meyer und Rehme [11]).

10.2.7 Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen

Die Übereinstimmung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u')$ und $p(v')$ zwischen Rechnung und Messung kann als gut bezeichnet werden. Die Verteilungen für u' in Abbildung 10.15a entsprechen für die Positionen 1 und 2 etwa einer Normalverteilung, was auf eine stochastisch verteilte Variable deutet. An den Positionen 3 und 4 wird die Verteilung $p(u')$ breiter und flacher. Abbildung 9.12a zeigt das gleiche Verhalten für die Meßdaten. Für die Verteilungen $p(v')$ in Abbildung 10.15b ist zu erkennen, daß die Maximalwerte jeweils für positives v' erreicht werden. Außerdem ist diese Stelle umso weiter vom Nullpunkt entfernt, je näher die Auswerteposition am Spaltzentrum liegt. Auch die Maximalwerte nehmen mit Annäherung an die Spaltmitte bei Position 1 ab. Dort ergibt sich eine symmetrische Verteilung mit zwei Peaks. Diese Form ist typisch für die Überlagerung eines stochastischen mit einem periodischen Prozeß und spiegelt daher den quasiperiodischen Charakter der Spaltströmung wider.

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ in Abbildung 10.16 zeigen die charakteristischen Formen, die bereits mit den experimentellen Daten in Abbildung 9.13 auftraten. Die Verteilung in Spaltmitte bei Position 1 ist praktisch symmetrisch. An der Stelle $v'=0$ ist im positiven und negativen u' -Bereich eine Einbuchtung zu erkennen. Die leichte Tendenz zu Werten ungleich 0 für v' wurde bereits in der Einzelverteilung $p(v')$ deutlich. Verschiebt man die Auswerteposition aus dem Spaltzentrum heraus, so werden die Verteilungen asymmetrisch und gestreckter. Die Richtung einer gedachten Längsachse durch die Verteilungen dreht sich von horizontaler Lage für Position 1 immer mehr in den ersten Quadranten. Der überwiegende Anteil der Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen liegt damit im ersten und dritten Quadranten, was mit dem hohen positiven Wert für $\langle u'v' \rangle / u^{*2}$ an diesen Positionen konsistent ist. Wie im Experiment auch wird das Maximum der Verteilungen 3 und 4 im ersten Quadranten erreicht.

Die in Kapitel 9 beschriebenen Meßergebnisse konnten damit alle qualitativ gut reproduziert werden. Unterschiede sind auf die periodischen Randbedingungen, das Verhältnis von Spaltbreite d zu Kanalweite D und die verwendete Reynolds-Zahl zurückzuführen.

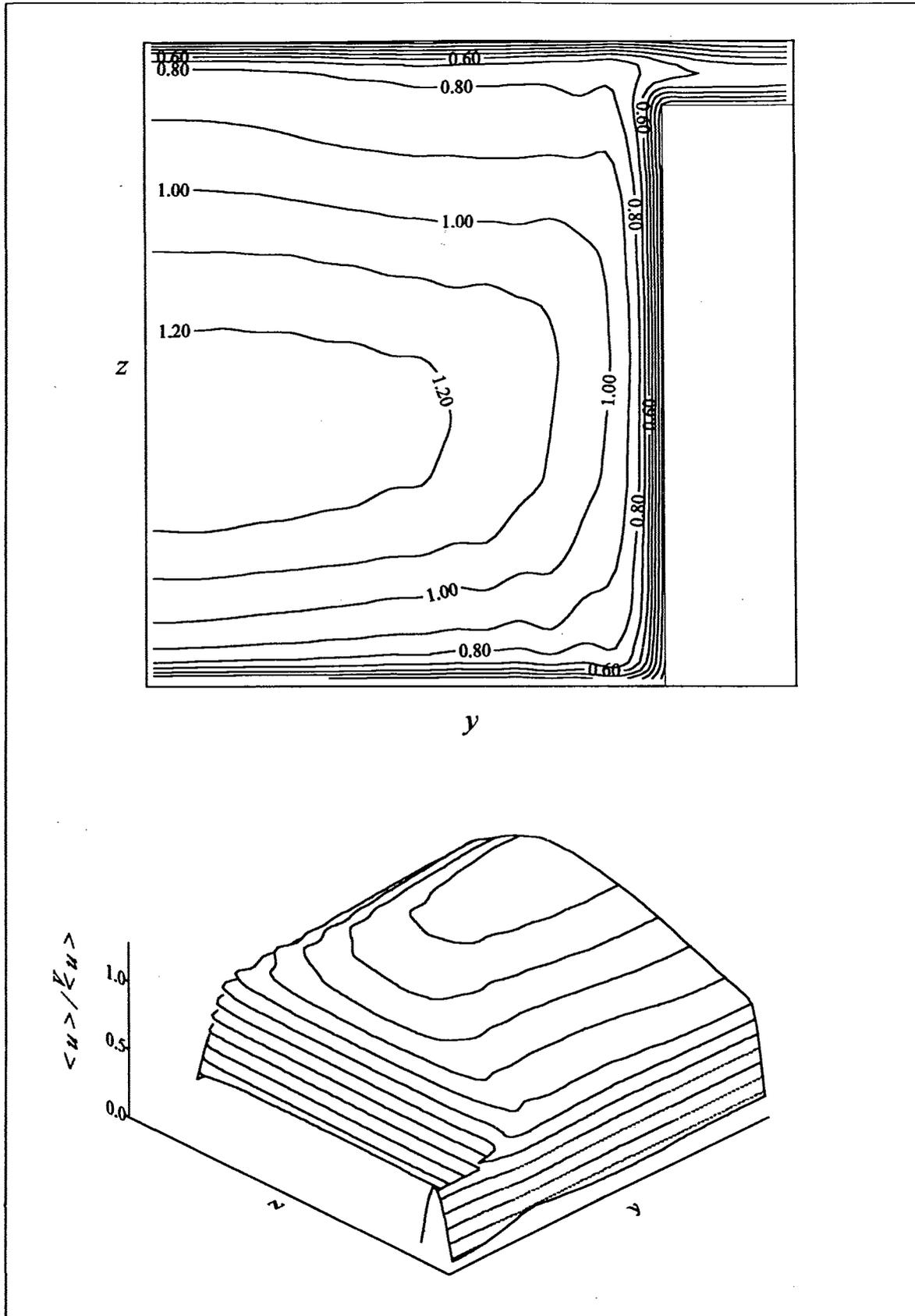


Abbildung 10.4: Relative mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u \rangle}$ in Hauptströmungsrichtung

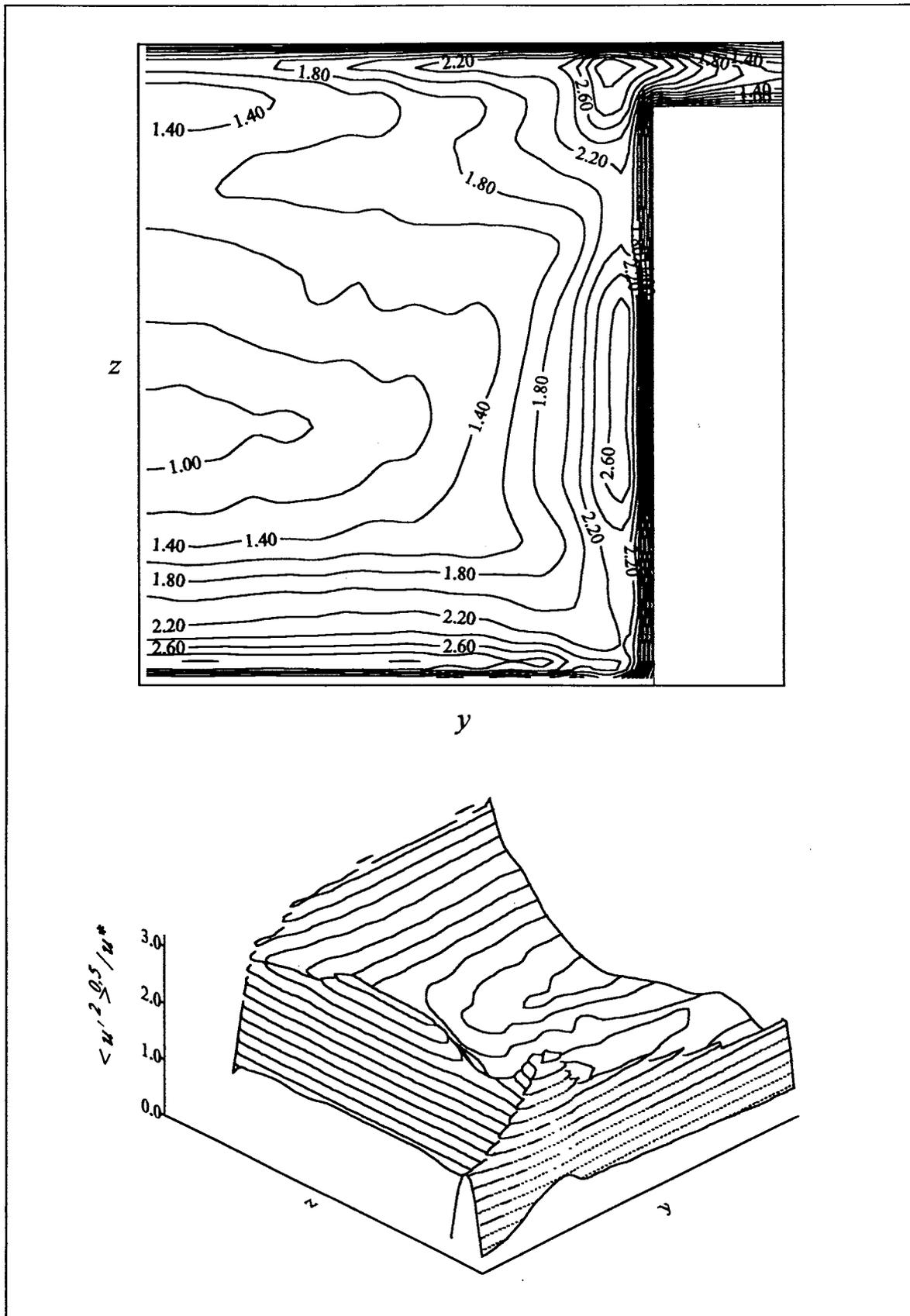


Abbildung 10.5: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung

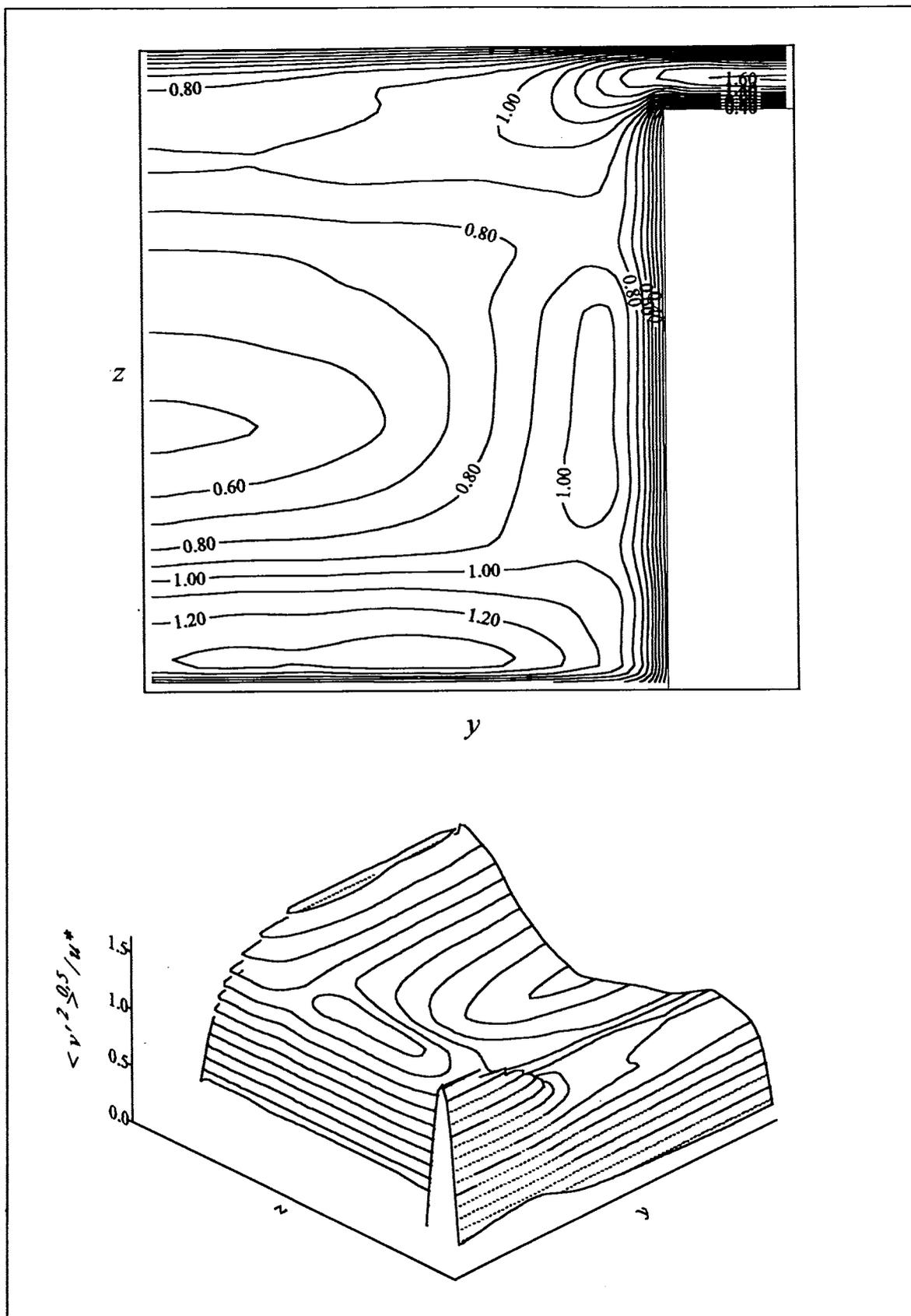


Abbildung 10.6: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente durch den Spalt

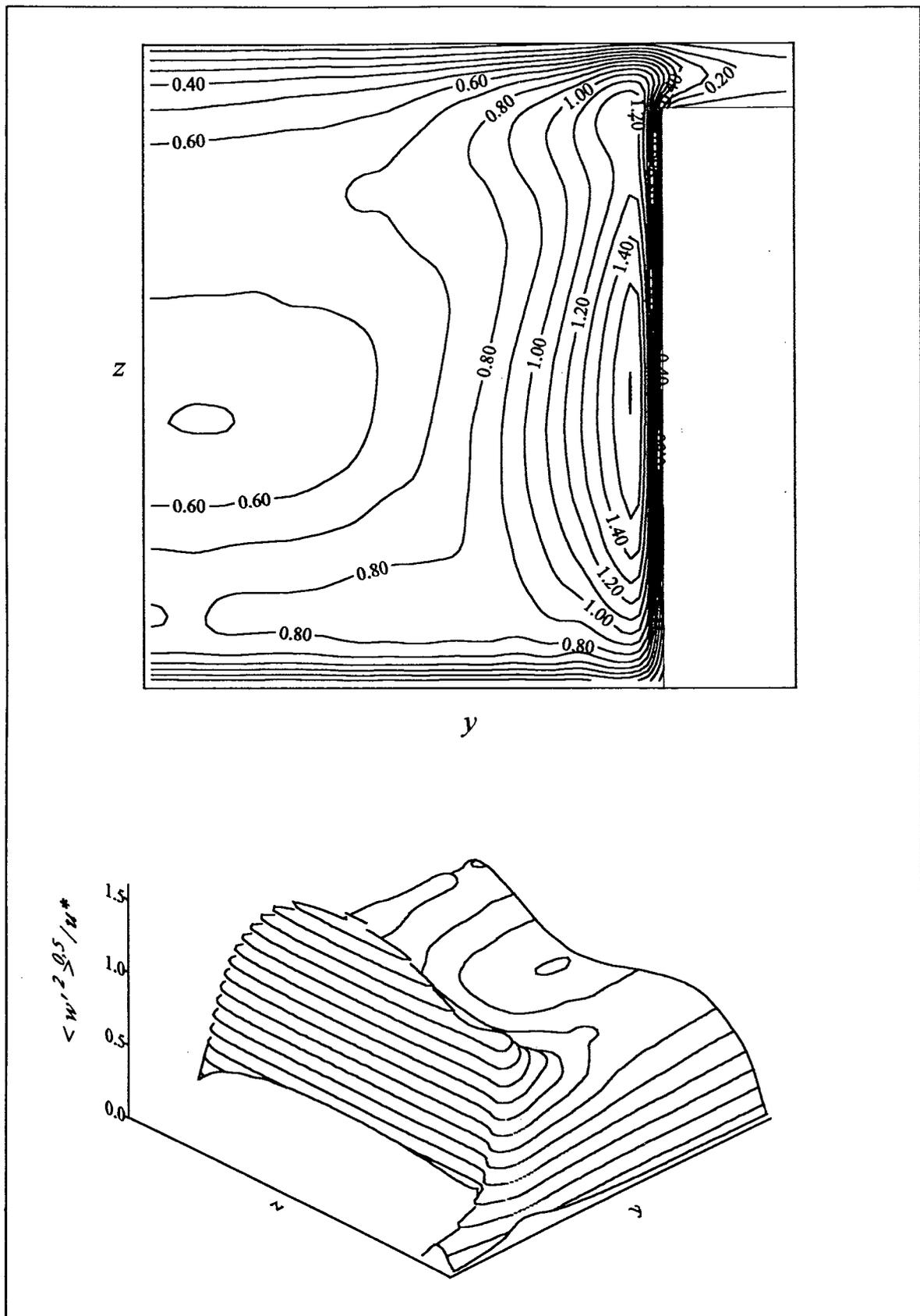
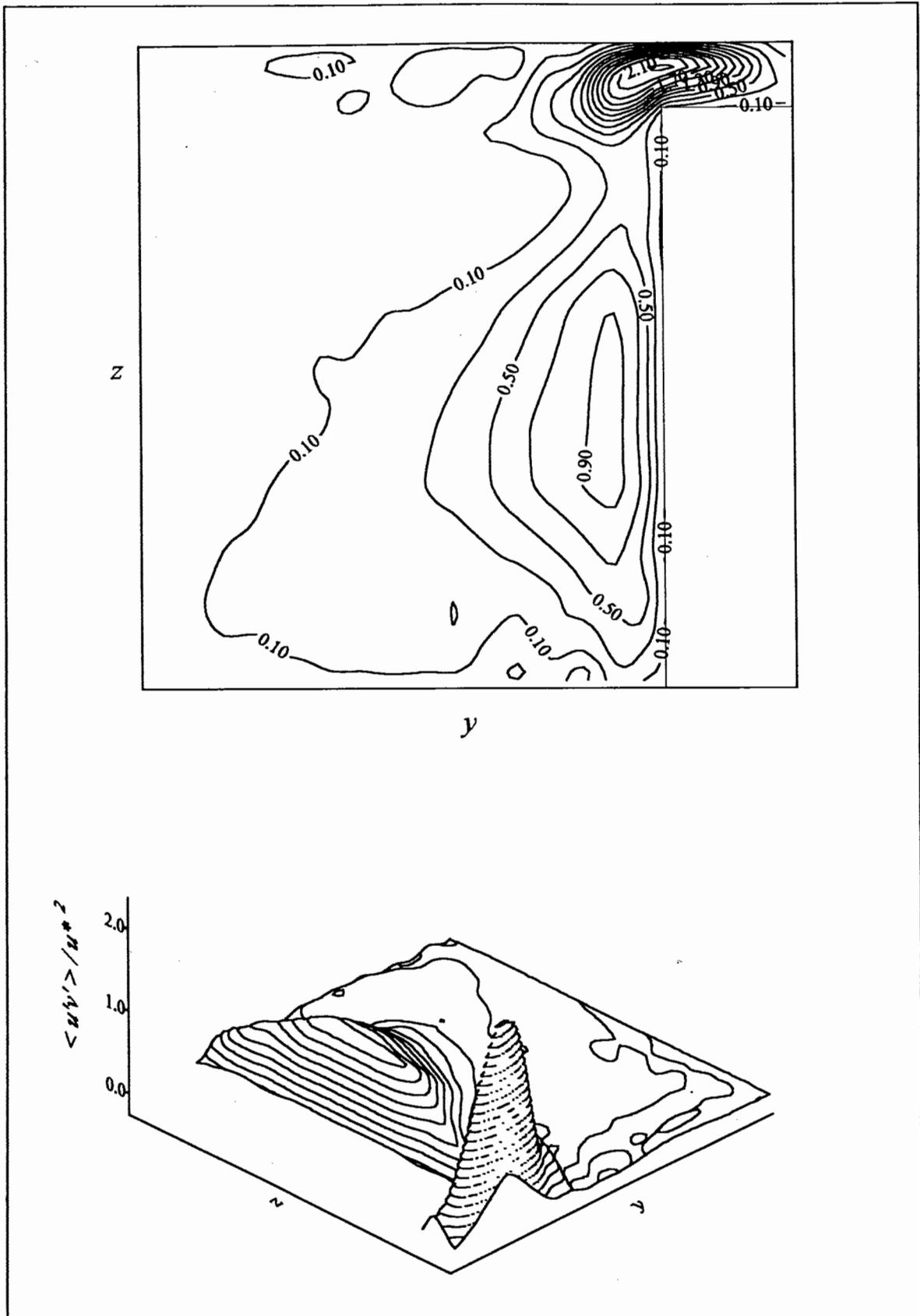
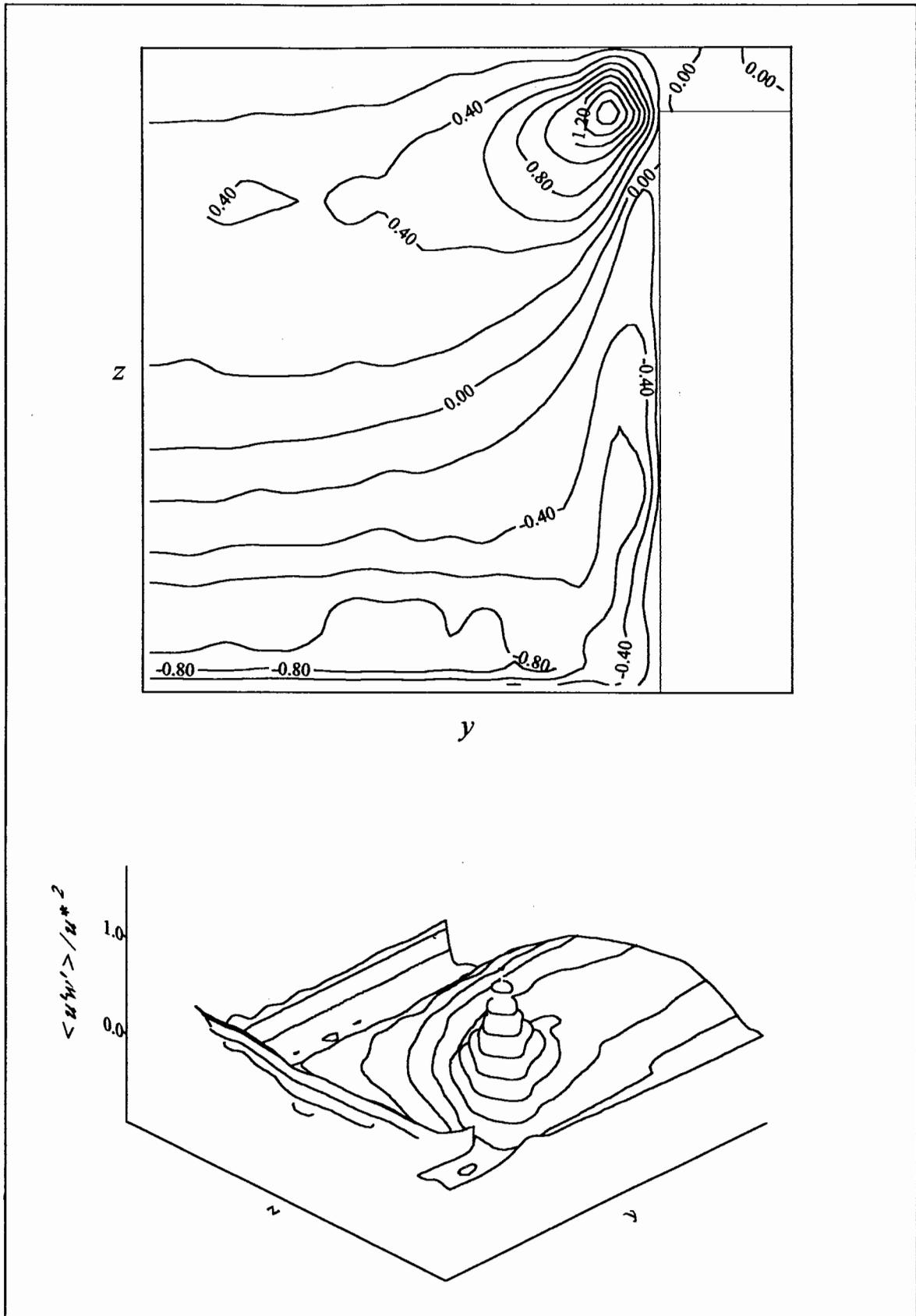
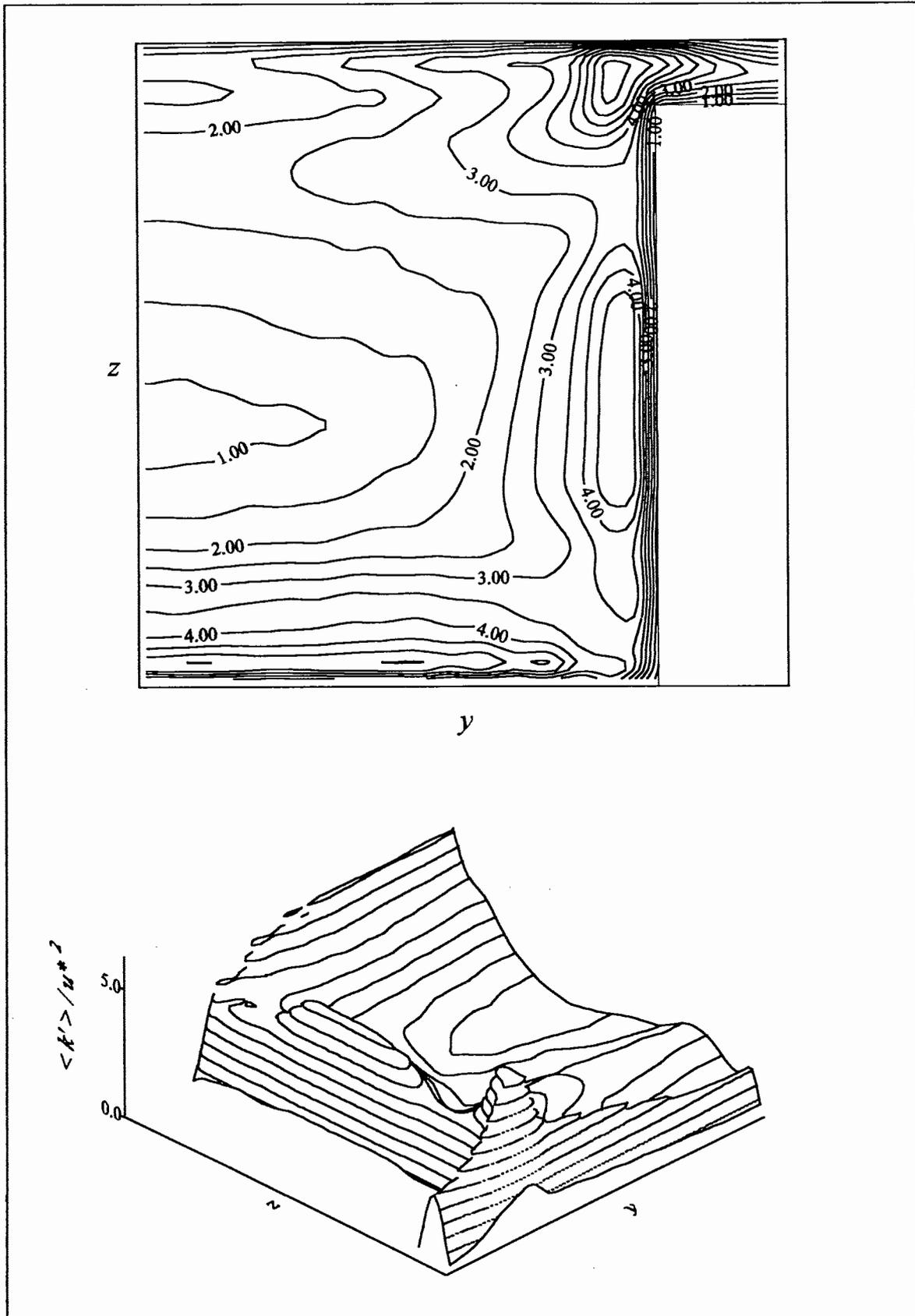


Abbildung 10.7: Turbulenzintensität $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / u^*$ der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Spalt

Abbildung 10.8: Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle / u_*^2$

Abbildung 10.9: Reynoldssche Schubspannung $\langle u'w' \rangle / u_*^2$

Abbildung 10.10: Turbulente kinetische Energie $\langle k' \rangle / u_*^2$

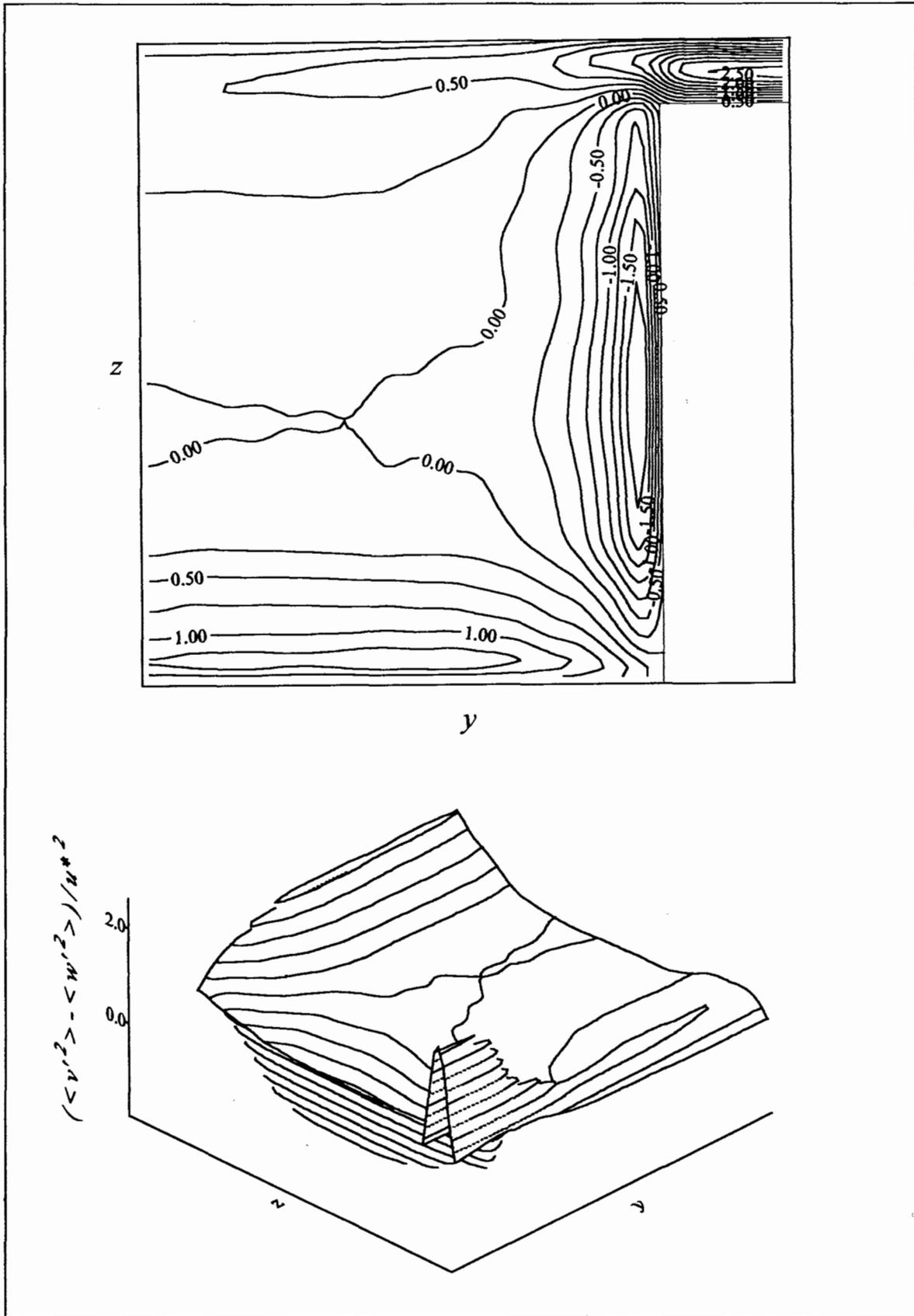


Abbildung 10.11: Symmetrietest $(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) / u^{*2}$

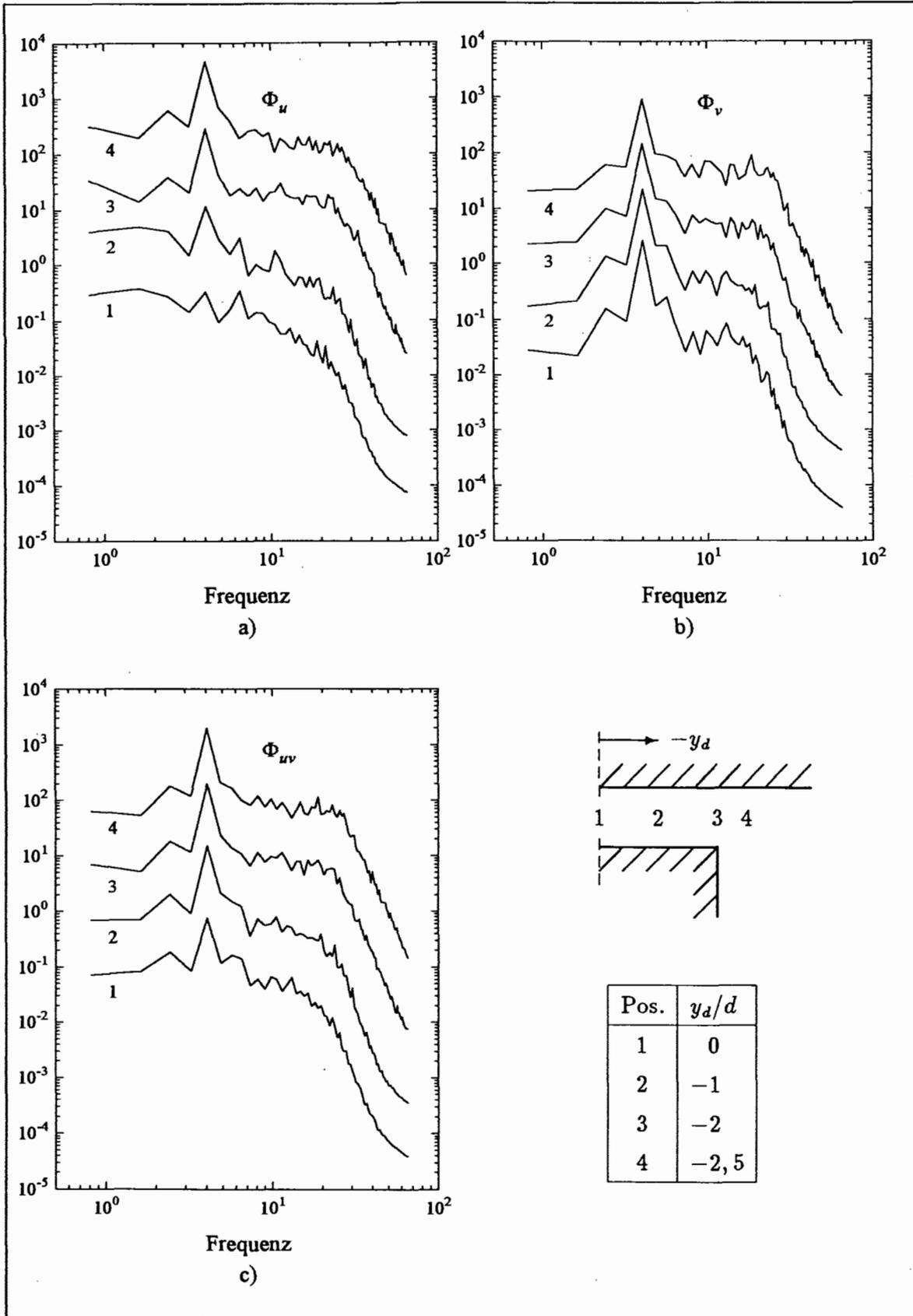


Abbildung 10.12: Autospektrale Leistungsdichten Φ_u (a) und Φ_v (b) sowie kreuzspektrale Leistungsdichte Φ_{uv} (c) an vier Positionen im Spalt. Kurven sind um eine Zehnerpotenz gegeneinander verschoben

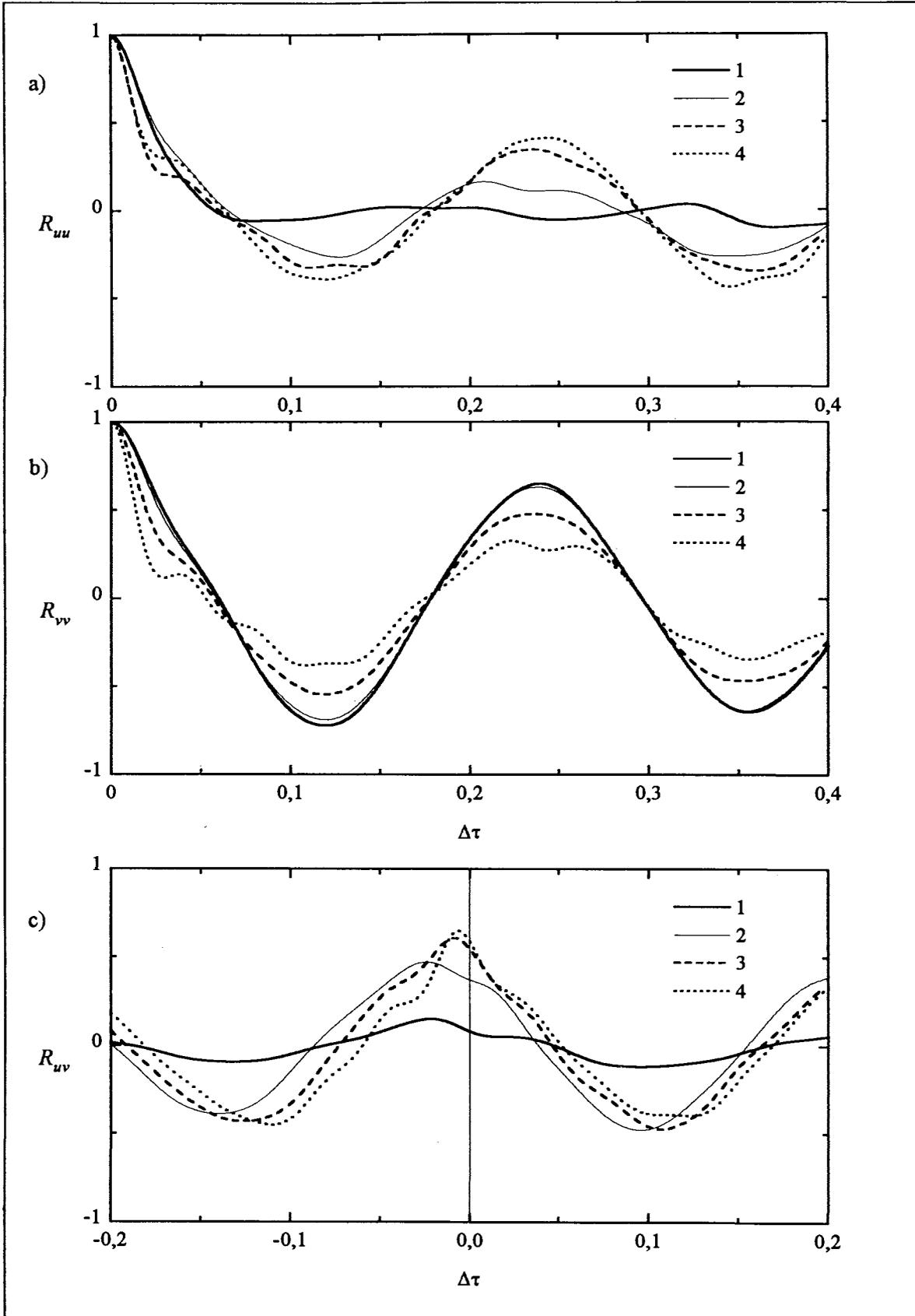


Abbildung 10.13: Autokorrelationsfunktionen R_{uu} (a) und R_{vv} (b) sowie Kreuzkorrelationsfunktion R_{uv} (c) an vier Positionen im Spalt. (Legende wie Abb. 10.12)

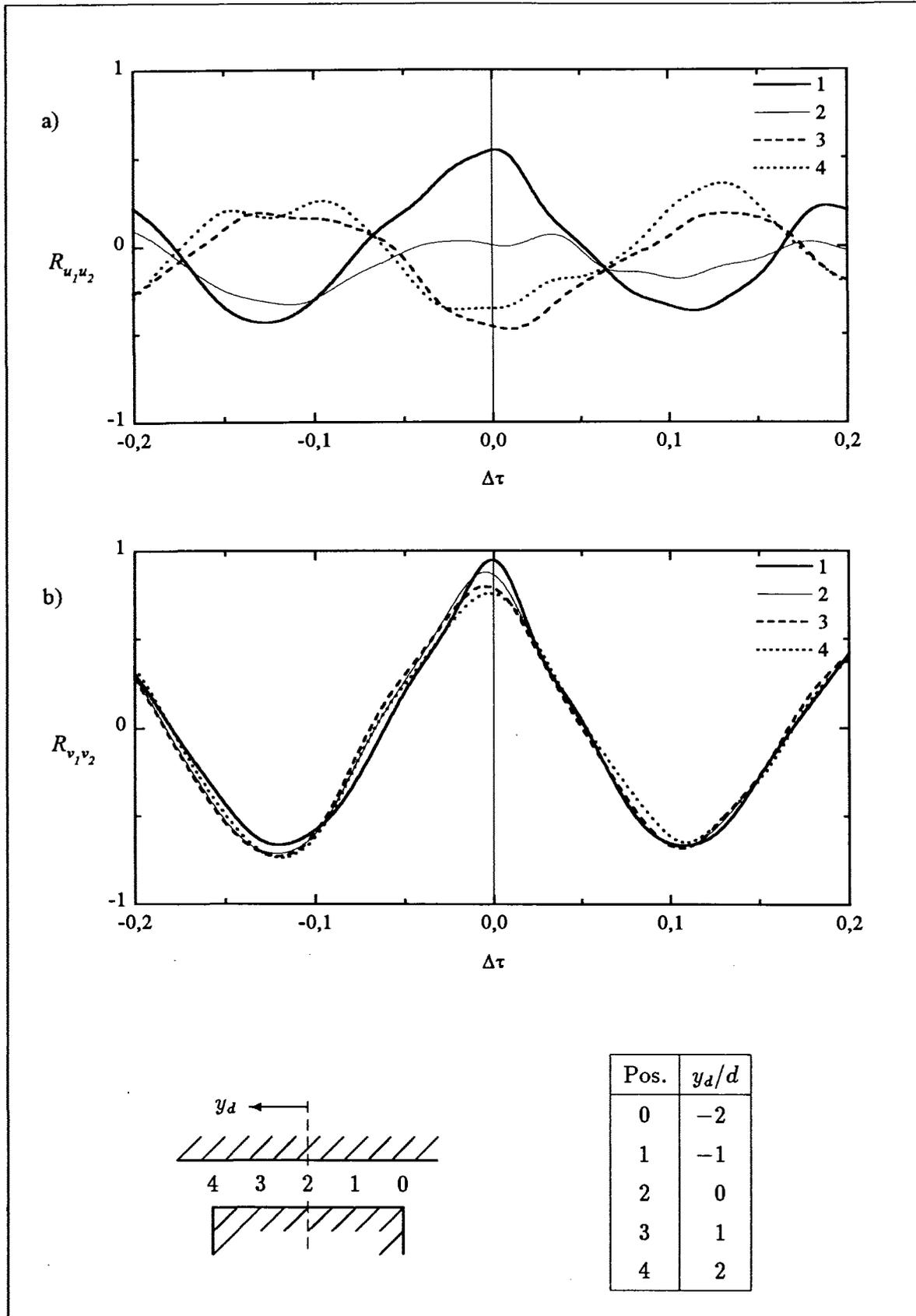


Abbildung 10.14: Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{u_1 u_2}$ (a) und $R_{v_1 v_2}$ (b) an vier Positionen im Spalt. u_1, v_1 an Position 0; u_2, v_2 an den Positionen 1 bis 4

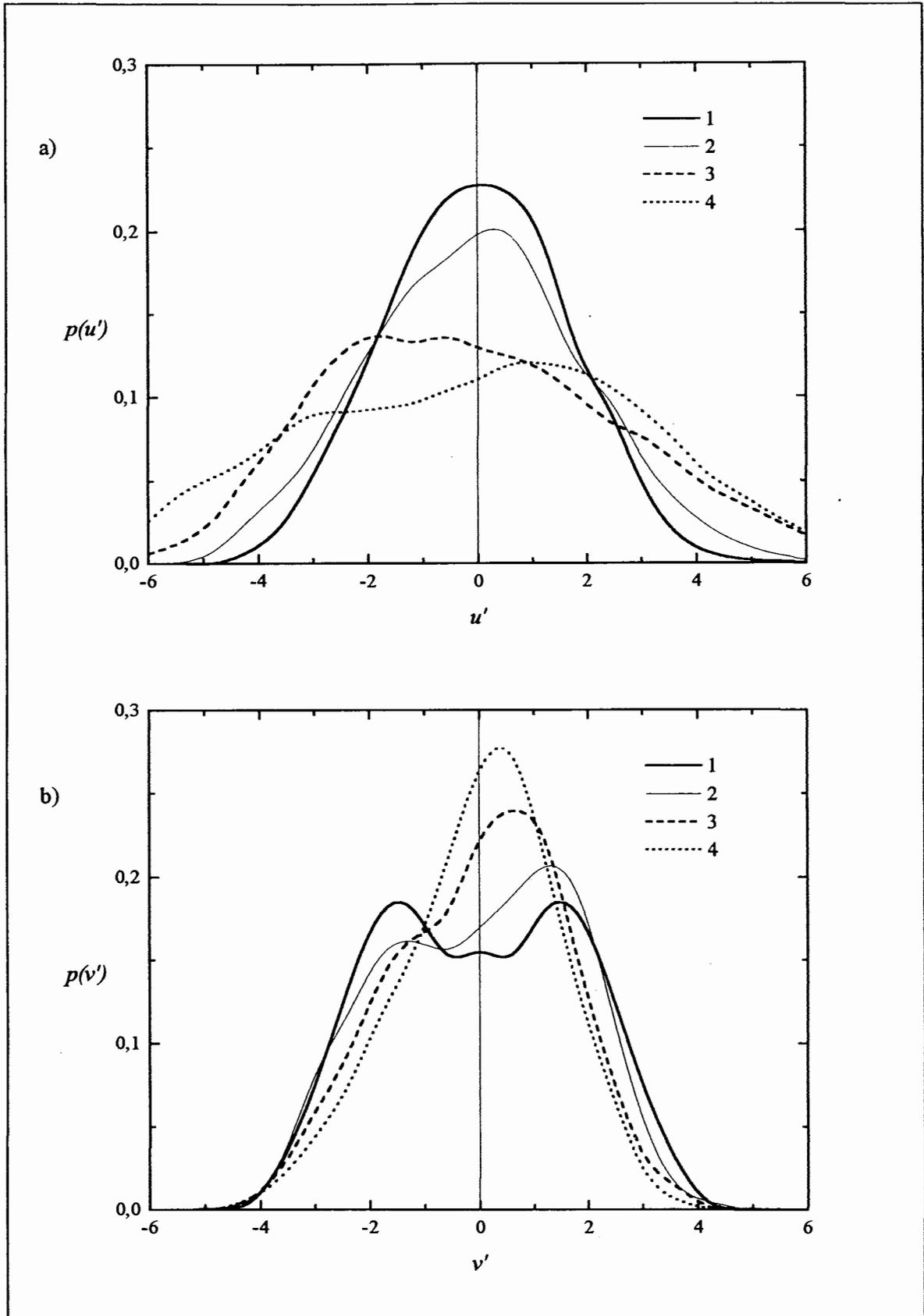


Abbildung 10.15: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(u')$ (a) und $p(v')$ (b) an vier Positionen im Spalt. (Legende wie Abb. 10.12)

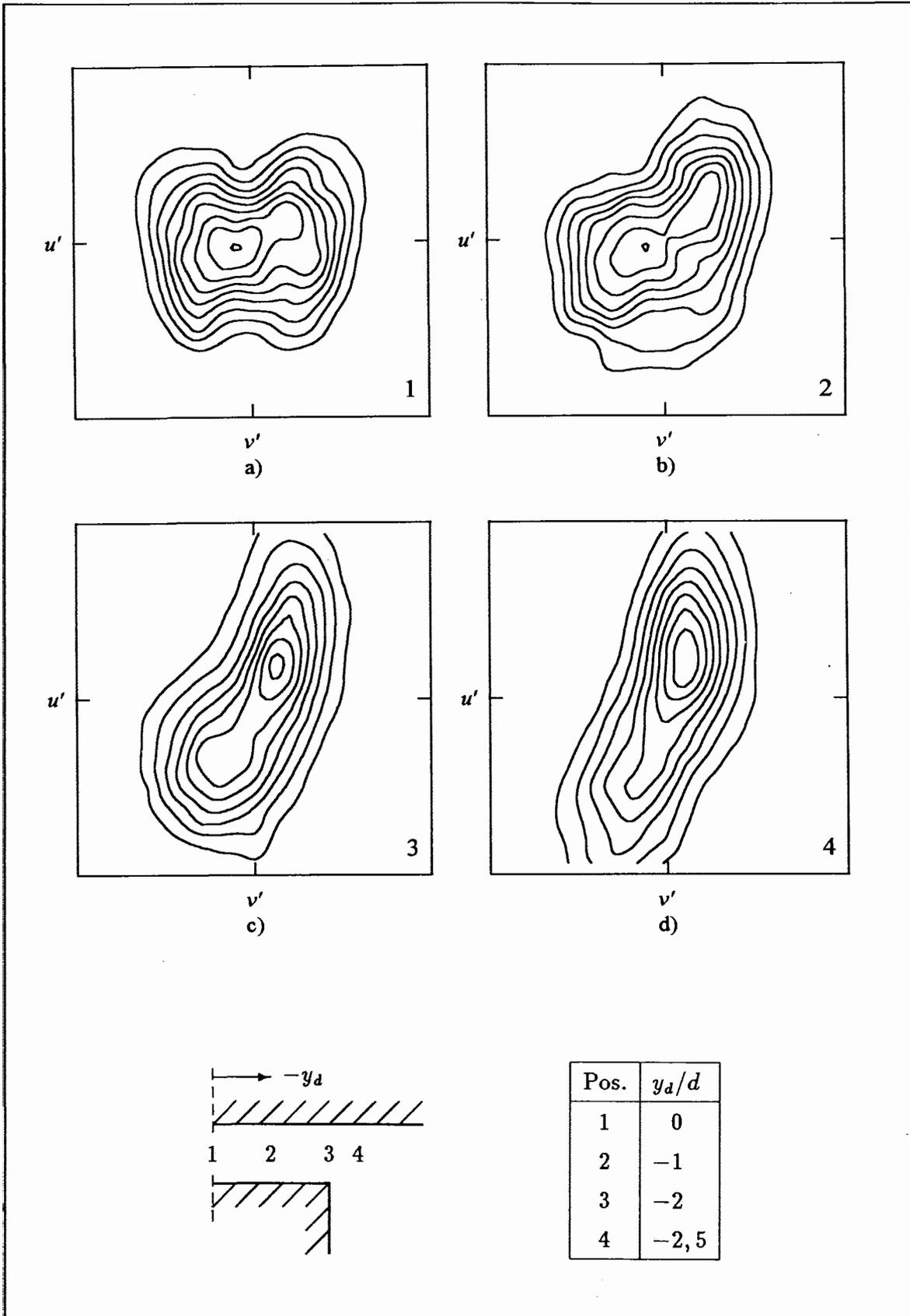


Abbildung 10.16: Qualitative Isolinienplots der Verbundwahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p(u', v')$ an vier Positionen im Spalt. (u' und v' jeweils von -6 bis $+6$. Isolinien beginnend bei 0 mit Abstand $0,005$)

10.3 Bestätigung des Strömungsmodells

Die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erlaubt nun, die Ergebnisse der Simulation im Hinblick auf ein Strömungsmodell so zu deuten, wie es bereits am Ende des Kapitels 9 erklärt wurde: Das Strömungsphänomen im Spaltbereich besteht aus Wirbelpaaren, die sich mit einer mittleren Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ entlang des Spaltes bewegen. Die Wirbel drehen gegensinnig und werden durch die höheren Geschwindigkeiten im Hauptkanal angetrieben. Der mittlere Abstand der Wirbelzentren in Hauptströmungsrichtung ist $\lambda/2$, wobei mit der charakteristischen Peakfrequenz die Beziehung $\langle u_C \rangle = \lambda f_P$ gilt. Die Bestätigung dieses Modells erfolgt durch die Untersuchung der Geschwindigkeiten im Spalt. Mit der in Kapitel 8.4 beschriebenen Methode wurden Vektorplots der zeitgemittelten (u, v) -Geschwindigkeitskomponenten in der Spaltnitteebene erstellt. Darin sind die vermuteten Strömungseffekte deutlich zu erkennen. Abbildung 10.17 zeigt eine solche Darstellung, wobei nur die Richtungen der $(\langle u \rangle, \langle v \rangle)$ -Vektoren angegeben sind. Über die Periodenlänge $X_1 = 5,6$ sind vier gegensinnig drehende Wirbel sichtbar. Die Wirbelzentren liegen links und rechts der Spaltnitteebene, aber noch innerhalb des Spaltes. Die genauen Positionen des Zentrums sind sehr empfindlich gegen Veränderung von $\langle u_C \rangle$. Diese mittlere Geschwindigkeit muß zur Erstellung der Vektorplots aus den Rechendaten bestimmt werden. Wird $\langle u_C \rangle$ zu groß angesetzt, so verschieben sich die Wirbelzentren näher zur Spaltmitte hin, und falls $\langle u_C \rangle$ zu klein bestimmt wird, entfernen sich die Zentren weiter von der Spaltmitte. Ob die mittlere Geschwindigkeit gut getroffen wird, zeigt sich aber schon an den Wirbeln selbst: Mit größeren Abweichungen in $\langle u_C \rangle$ „verschmieren“ die Wirbel immer mehr und sind dann nicht mehr eindeutig zu erkennen. Das entspricht auch genau dem Problem, für Videoaufnahmen der Spaltströmung, wofür Abbildung 9.15 ein Beispiel liefert, die passende Geschwindigkeit des Kameraschlittens zu bestimmen.

Abbildung 10.18 zeigt die Darstellung derselben Daten wie Abbildung 10.17, wobei diesmal die Längen der Geschwindigkeitsvektoren betont wurden. Zusammen mit dem Ausschnittbild 10.19, welches den in Hauptströmungsrichtung zweiten Wirbel aus Abbildung 10.18 zeigt, ist zu erkennen, daß die Geschwindigkeiten von 0 im Zentrum nach außen stetig größer werden. In dem Bereich, in welchem der Wirbel in die Außenströmung ragt und von dieser angetrieben wird, sind die Geschwindigkeiten größer als auf der Gegenseite. Dort ist ein schmaler Bereich zu erkennen, in dem die Hauptströmungsgeschwindigkeiten u ihr Vorzeichen ändern und dann in dieselbe Richtung wie die äußere Hauptströmung zeigen. In den Zonen zwischen den Wirbeln weisen die Vektoren einmal in positive und in der nächsten Zone in negative y -Richtung. Dies erklärt die hohen gleichphasigen Kreuzkorrelationen R_{u,v_2} in Abbildung 10.14b.

Zudem können die Abbildungen 10.17 bis 10.19 auch als Bestätigung dafür dienen, daß die Grobstruktursimulation eine passende Methode zur numerischen Untersuchung dieses speziellen Problems ist. Die nachgewiesenen Wirbelerscheinungen im Spalt erstrecken sich in Querrichtung über mehr als zehn Maschen und sind damit fein genug aufgelöst, um der Grobstruktur zugeordnet werden zu können.

Die Ergebnisse der durchgeführten Simulationen verifizieren also das Strömungsmodell, das nach Auswertung der experimentellen Daten aufgestellt wurde. Das in Abbildung 9.14 dargestellte Wirbelpaar, das gegensinnig rotierend durch den Spalt bewegt wird, erklärt die charakteristischen Effekte der Spaltströmung.

Das Auftreten der Wirbelpaare in der Simulation kann als Bestätigung dafür gelten, daß dieses Phänomen nicht durch Einlaufeffekte verursacht wird. Denn durch die Verwendung periodischer Randbedingungen und die Auswertung der Daten nach Erreichen eines quasistationären Zustands wird durch die Rechnung ein vollständig eingelaufener Zustand beschrieben. Damit ist auch gezeigt, daß die charakteristischen Effekte der Spaltströmung durch die spezielle Geometrie hervorgerufen werden.

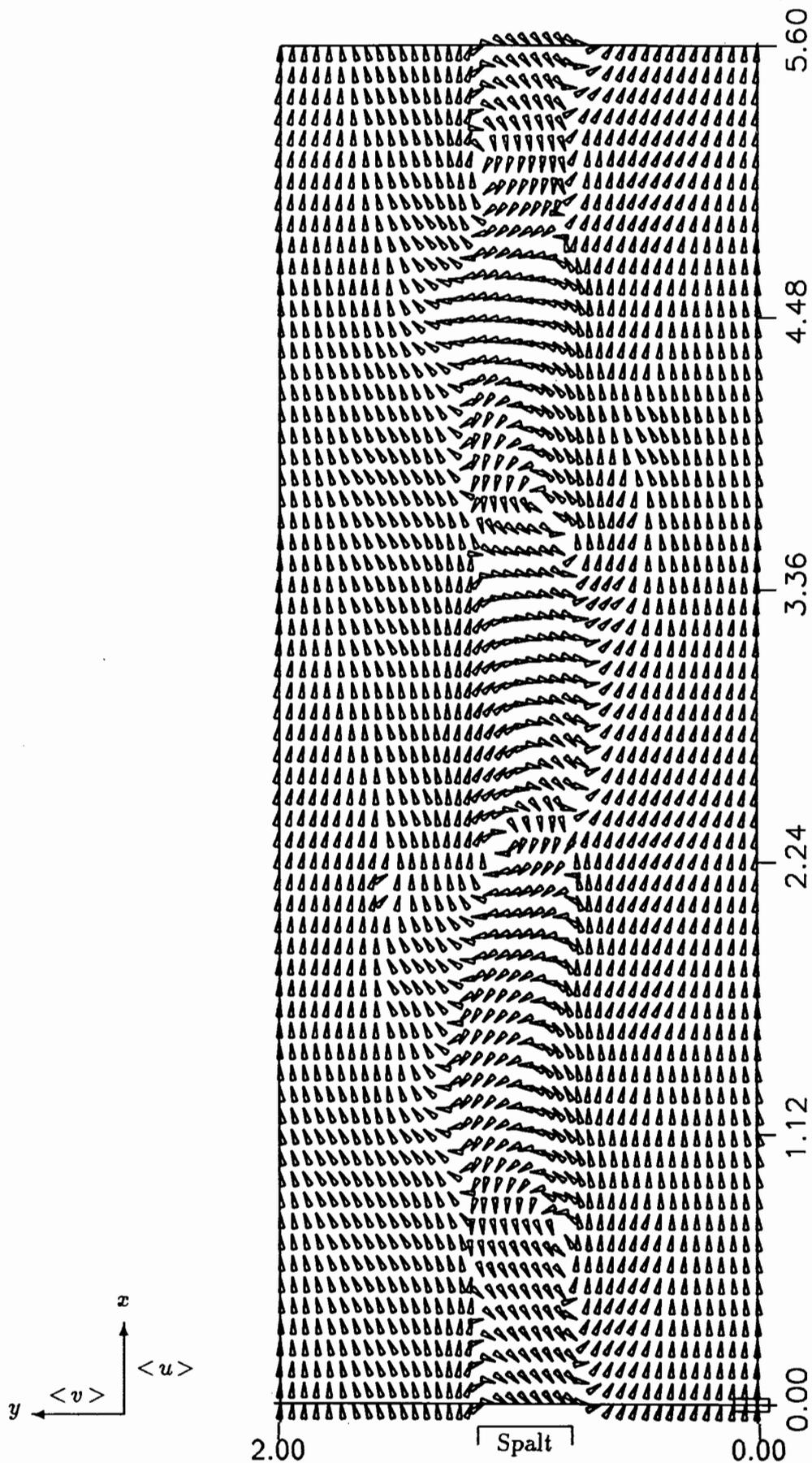


Abbildung 10.17: Richtungsplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $K=20$ (Spaltmitte). Mittelung im in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $\langle u_c \rangle$ mitbewegten Koordinatensystem

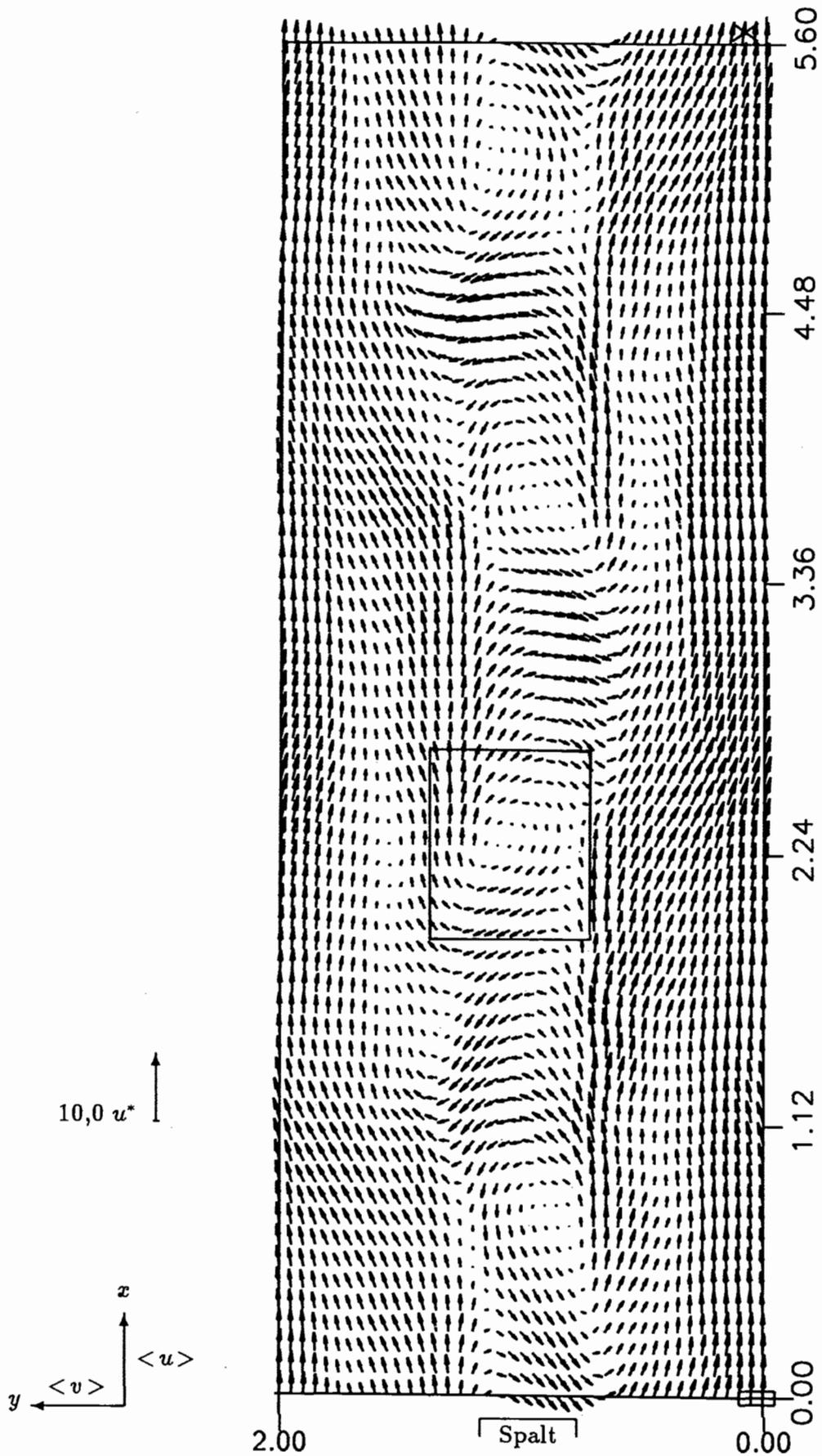


Abbildung 10.18: Vektorplot der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $K=20$ (Spaltmitte). Mittelung im in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $\langle u_C \rangle$ mitbewegten Koordinatensystem

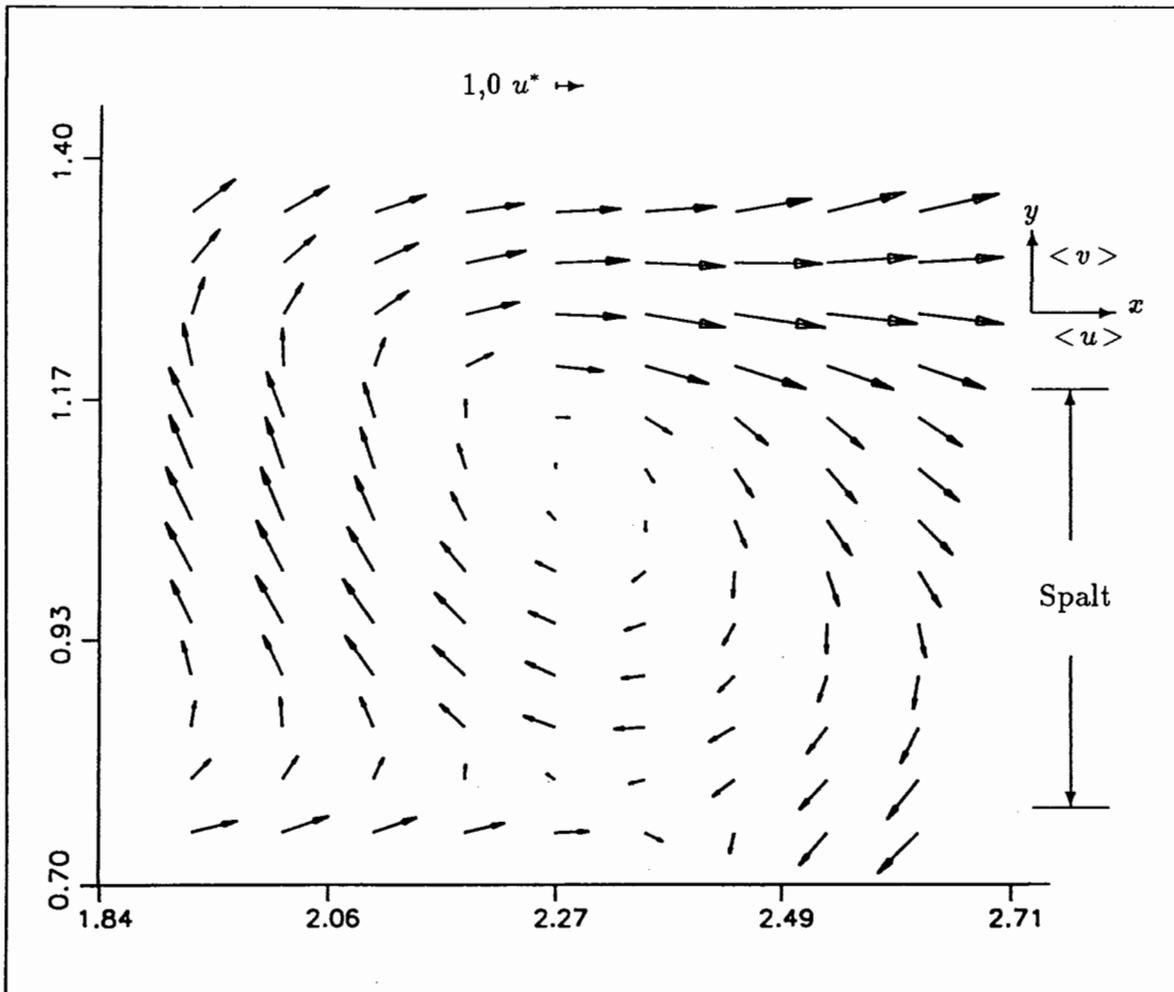


Abbildung 10.19: Ausschnittbild der zeitlich gemittelten (u, v) -Geschwindigkeitsvektoren in der Ebene $K=20$ (Spaltmitte). Plot gegenüber Abb. 10.18 um -90° gedreht (siehe Ausschnittmarkierung dort)

10.4 Ergänzende Auswertungen

10.4.1 Produktionsterm $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$

Der Antrieb der Wirbel erfolgt durch den Unterschied der Hauptströmungsgeschwindigkeiten $\langle u \rangle$ zwischen Hauptkanal und Spalt. In Abbildung 10.4 sind im Bereich des Spaltanfangs große negative Gradienten $\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ zu erkennen. Die Reynoldssche Schubspannung $\langle u'v' \rangle$ zeigt im selben Bereich einen hohen positiven Peak, wie Abbildung 10.8 verdeutlicht. Daher ergeben sich am Spaltanfang große Werte für den Ausdruck $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$, während im restlichen Kanalquerschnitt abseits der Wand des Einbaus nur relativ kleine Werte erreicht werden. Abbildung 10.20 zeigt die mit u^{*3}/D normierte Größe für den interessierenden Kanalbereich, nämlich den Spalt und dessen unmittelbare Umgebung. Die Darstellung erfolgt einmal als Isolinienplot und einmal als 3D-Plot, wobei hierfür die Blickrichtung von der Spaltmitte aus in Richtung Hauptkanalmitte gewählt wurde. Der Term $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ liefert damit einen positiven Beitrag zum turbulenten Energiehaushalt (Hinze [27, S. 65]). Dieser Produktionsterm beschreibt die Übertragung von Energie aus der Hauptströmung in die turbulente Bewegung mittels der Reynolds-Spannungen. Das bedeutet, am Spaltanfang findet Turbulenzerzeugung statt, wie sie vom unmittelbaren Wandbereich her bekannt ist.

10.4.2 Reynolds-Schubspannung $\langle v'w' \rangle$

Abbildung 10.21 zeigt die Darstellung der Reynolds-Spannung $\langle v'w' \rangle / u^{*2}$. Im Hauptströmungskanal sind diese Spannungen praktisch 0. In der Ecke zwischen unterer Kanalwand und Einbau ist eine leichte Abweichung davon festzustellen. Am Spaltanfang ist wiederum ein Peak zu erkennen, der aber mit 0,52 nicht die Werte der anderen beiden Reynolds-Spannungen erreicht. Weiter in den Spalt hinein fallen die Werte in den negativen Bereich ab, um mit $-0,18$ einen Minimalwert zu erreichen. Die Position dieser negativen Spitze liegt bezüglich der y -Richtung etwa bei 20% der Spaltlänge. Aus dem Experiment liegen keine Daten für $\langle v'w' \rangle / u^{*2}$ vor. Die Messung dieser Größe ist problematisch.

10.4.3 Sekundärströmungen

Neben dem quasiperiodischen Wirbelphänomen konnten in der Simulation auch Sekundärströmungen aufgezeigt werden. In Abbildung 10.22a ist ein Ausschnitt des Kanalquerschnitts in der Umgebung des Spaltes dargestellt, in welchem die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitskomponenten dieser Ebene, $\langle v \rangle$ und $\langle w \rangle$, als Vektoren

aufgetragen sind. An der oberen Kanalwand ist eine Strömung in negativer y -Richtung zu erkennen, die vom Spalt weg in den Hauptquerschnitt zeigt. Die $\langle v \rangle$ -Komponenten haben dort einen maximalen Betrag von etwa 1,15 (durch die Normierung aller Größen im Programm entspricht das dem Verhältnis zur mittleren Wandschubspannungsgeschwindigkeit u^*) oder mit der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle = -0,066 \cdot V \langle u \rangle$. In größerem Abstand von der oberen Wand ist ein Gebiet sichtbar, in dem die Strömung in Gegenrichtung, also von der Kanalmitte zum Einbau hin orientiert ist. Dieser Bereich erstreckt sich in z -Richtung etwa bis zur Mitte des Kanals, wobei die zugehörigen Geschwindigkeiten viel schwächer ausgeprägt sind. Auch im Spalt zeigen sich Sekundärströmungseffekte. An der oberen Kanalwand strömt Fluid mit einer maximalen Geschwindigkeit $\langle v \rangle = 0,82$ in den Spalt bis fast zur Mitte und an der unteren Spaltberandung wieder zurück in Richtung des Hauptkanals. Der dadurch in der y - z -Ebene gebildete wirbelförmige Effekt reicht aus dem Spalt heraus und dreht gegensinnig zum entsprechenden Effekt im Hauptkanal. Thomas und Williams [15] haben Grobstruktursimulationen für einen Kanal mit offener Oberfläche durchgeführt. Die Geometrie bestand aus einem Hauptkanal mit anschließendem flachem Nebkanal, um Flußströmungen im Uferbereich zu untersuchen. Thomas und Williams erhielten mit ihrer Simulation Sekundärströmungseffekte, welche gut mit experimentellen Daten übereinstimmten. In Abbildung 10.22b ist ein Ausschnitt des numerisch untersuchten Kanals gezeigt. Auch hier sind zwei gegensinnig drehende Strömungsgebiete zu erkennen. Beim Vergleich mit Abbildung 10.22a ist zu beachten, daß dort durch die feste Wand andere Randbedingungen vorliegen als bei der simulierten Flußströmung.

Vergleicht man für die Spaltströmung die Größen der Geschwindigkeitsanteile, die durch die beiden Strömungsphänomene – quasiperiodischer Wirbeleffekt und Sekundärströmung – verursacht werden, so sind die größeren Werte bei den Wirbelpaaren zu erkennen. Die maximale $\langle v \rangle$ -Komponente, die in Abbildung 10.19 auftritt, hat den Wert 1,9. Dies entspricht etwa auch einem mittleren Wert für die Beträge aller Geschwindigkeitsvektoren in diesem Ausschnittbild. Dagegen beträgt die größte $\langle v \rangle$ -Komponente der in Abbildung 10.22a dargestellten Sekundärströmung im Hauptquerschnitt etwa 1,15 und im Spaltbereich nur ungefähr 0,82. Als Verhältnis der durch die beiden Effekte verursachten Geschwindigkeiten erhält man im Spalt einen Wert von $1,9/0,82 \approx 2,3$, das heißt, die durch die Wirbelpaare verursachten Quergeschwindigkeiten sind mehr als doppelt so groß wie die Geschwindigkeiten aufgrund der Sekundärströmung. Überträgt man die Erkenntnisse auf Flußströmungen, so wird deutlich, daß die Erklärungen, welche den Sedimenttransport in Uferbereichen ausschließlich auf Sekundärströmungseffekte zurückführen, unvollständig sind. Wie groß die einzelnen Beiträge von Sekundärströmung und Pulsationseffekt bei solchen offenen Kanalströmungen sind, bleibt zu untersuchen.

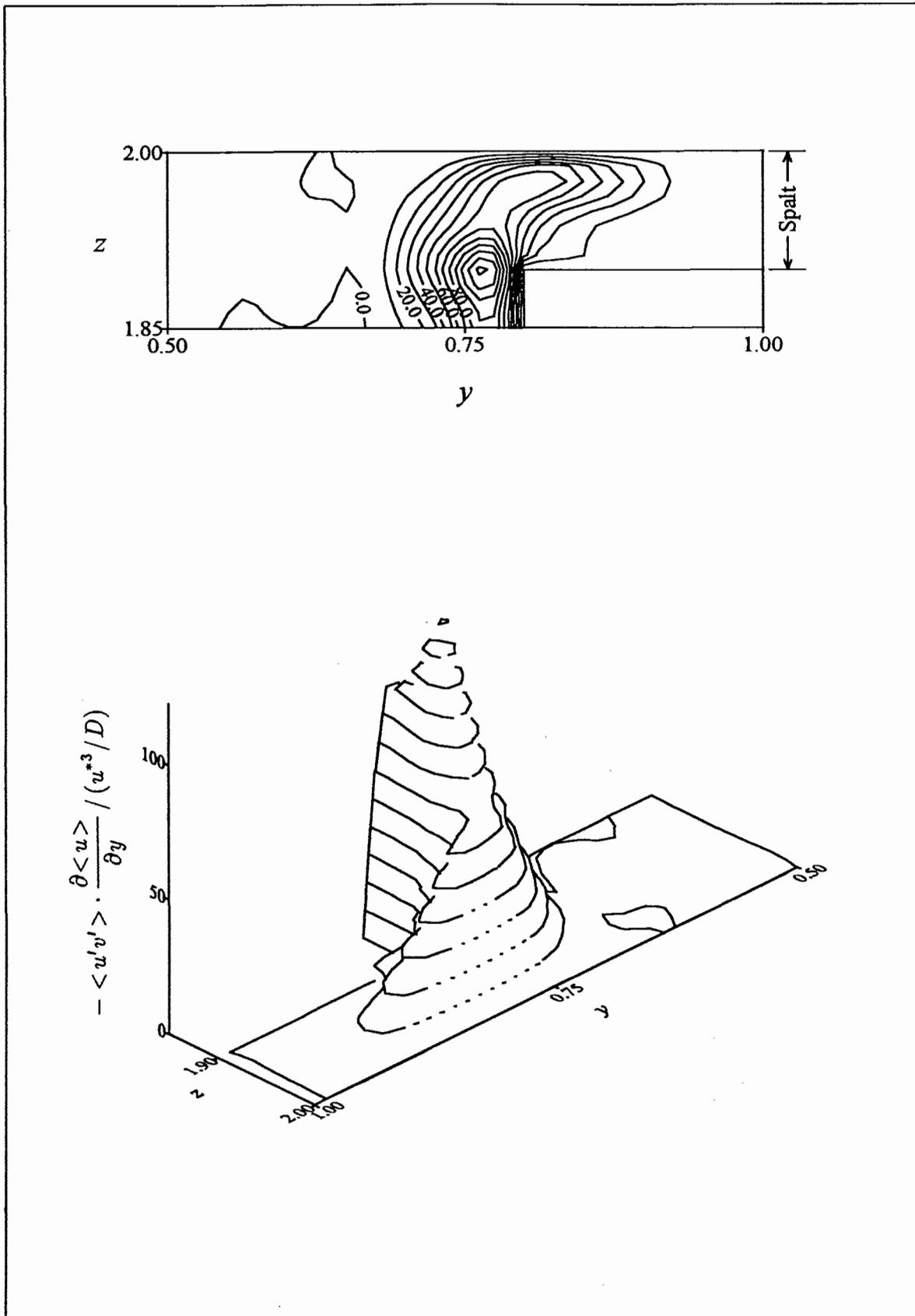
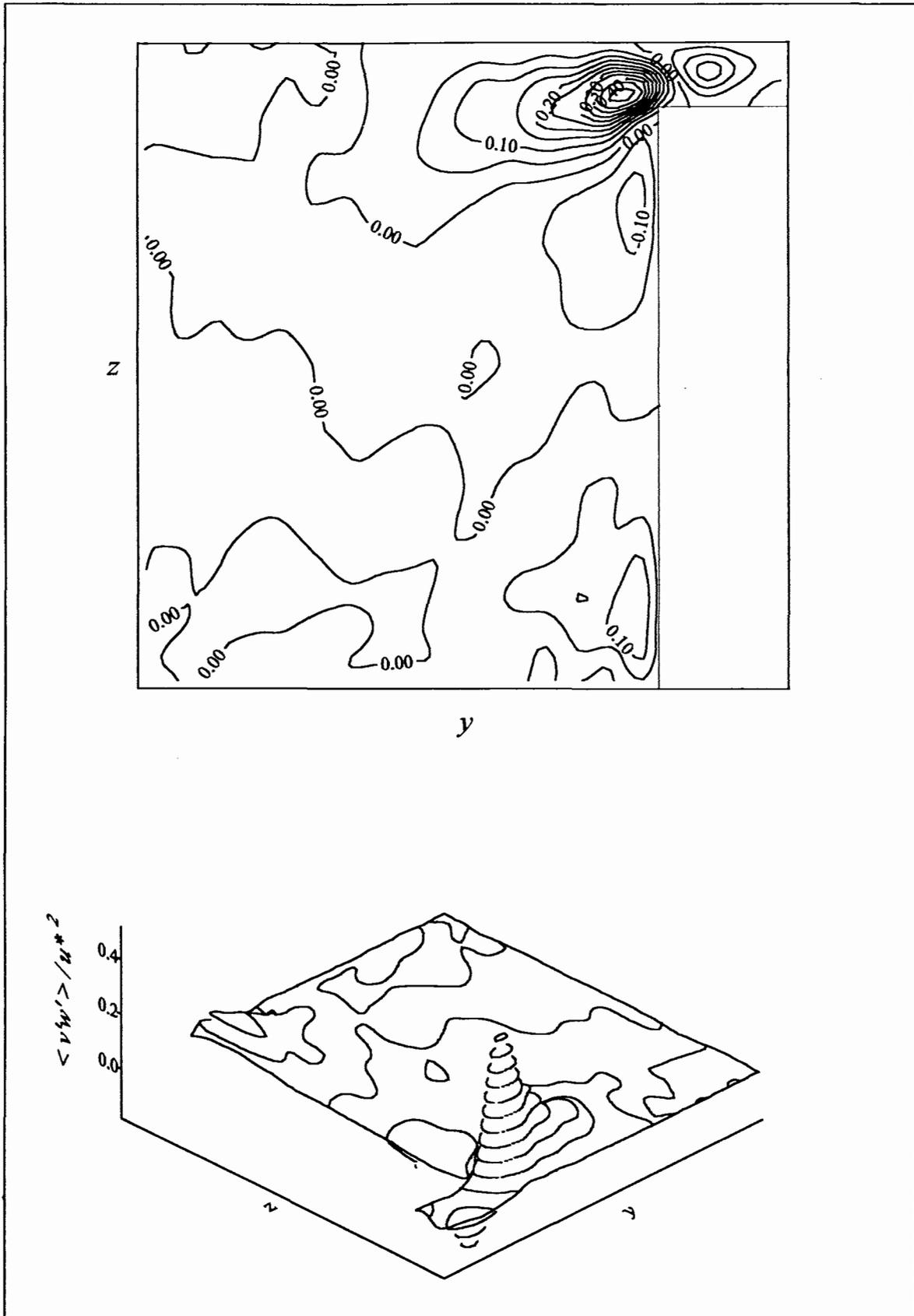


Abbildung 10.20: Produktionsterm $(-\langle u'v' \rangle \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}) / (u^{*3}/D)$ – Ausschnitt im Spaltbereich

Abbildung 10.21: Reynoldssche Schubspannung $\langle v'w' \rangle / u_*^2$

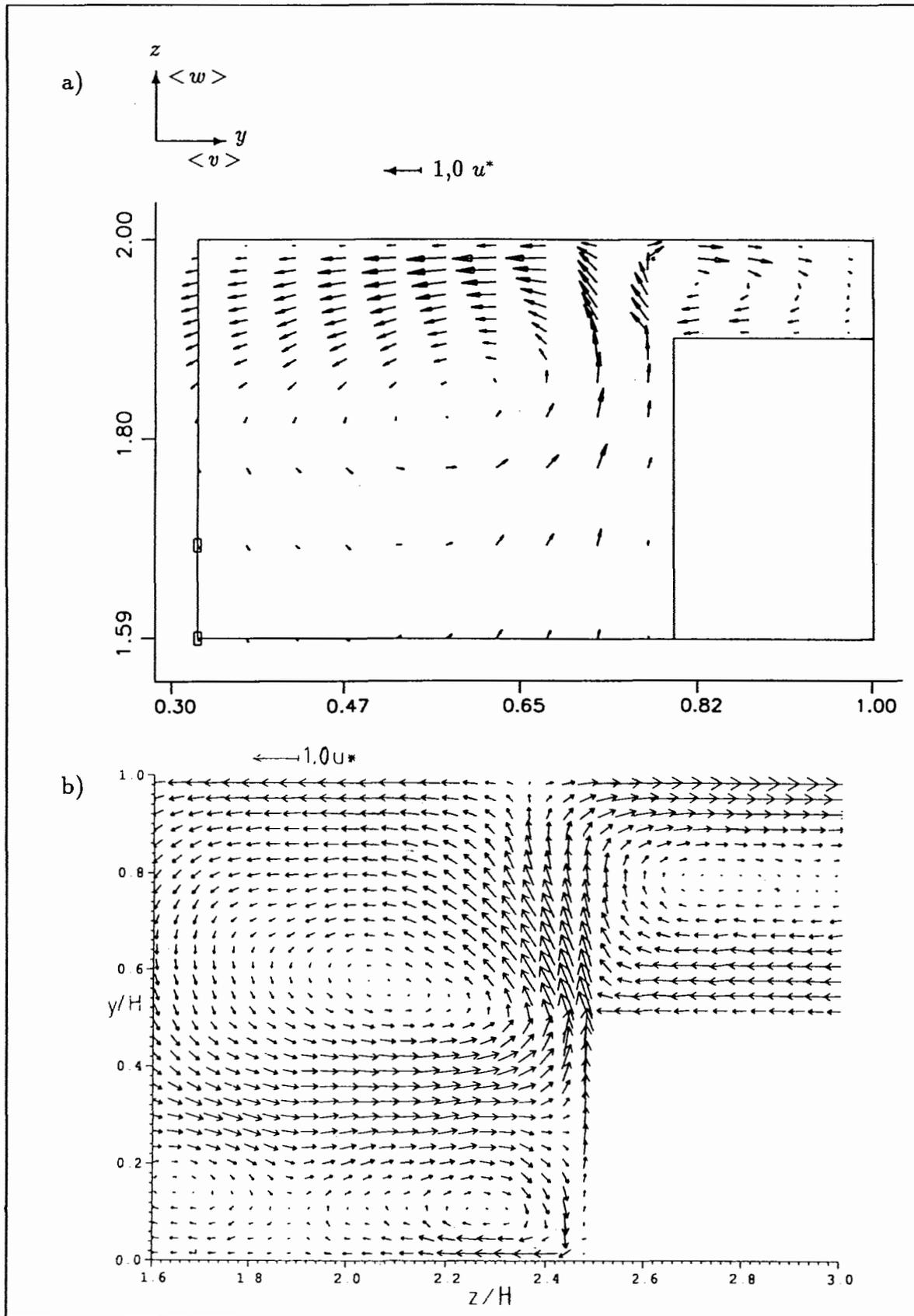


Abbildung 10.22: Vektorplot der Sekundärströmung in der Umgebung des Spaltes. a) Fall G31 (Ausschnitt), b) Simulation von Thomas und Williams [15]

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

Die erstmals in Stabbündelgeometrien festgestellten großskaligen, quasiperiodischen Strömungsphänomene sind noch nicht vollständig erforscht. Um dem Ziel des Verständnisses dieser Pulsationen näherzukommen, wurden experimentelle und numerische Untersuchungen an Rechteckgeometrien durchgeführt.

Zur Gewinnung von Vergleichsdaten für die numerische Simulation wurde ein Kanal, bestehend aus zwei parallelen Kanälen rechteckförmigen Querschnitts und einem verbindenden Spalt, experimentell untersucht. Die mittels Hitzdrahtanemometrie gemessenen Strömungsgrößen, wie zum Beispiel Turbulenzintensitäten, Reynoldssche Schubspannungen, spektrale Leistungsdichten und Korrelationen, zeigen die für diese Geometrie erwarteten charakteristischen Effekte, wie sie in ähnlicher Form aus anderen Rechteckgeometrien bekannt sind. Auffallendste Merkmale sind hohe, schmale Peaks, die für einige der oben genannten Größen speziell am Spaltanfang auftreten.

Zur numerischen Berechnung der Spaltströmung wurde die Methode der Grobstruktursimulation gewählt. Diese erscheint besonders geeignet, die großskalige, niederfrequente Pulsationsströmung im Spaltbereich zu untersuchen. Die großen Wirbel werden direkt durch das Maschennetz erfaßt. Eine Auflösung der kleinen Turbulenzskalen, wie dies in der direkten numerischen Simulation geschieht, ist nicht notwendig und wäre bei den verwendeten Reynolds-Zahlen auf heutigen Rechnern auch nicht durchführbar.

Der zur Verfügung stehende Simulations-Code TURBIT wurde methodisch erweitert, um die spezielle Geometrie der verbundenen Rechteckkanäle verarbeiten zu können. Dabei konnte auf einer von der Universität Karlsruhe zu Untersuchungen von Gebäudeumströmungen weiterentwickelten Version aufgebaut werden. Die neuartige Geometrie erforderte eine Reihe von Änderungen und Neuentwicklungen. Sämtliche relevanten Unterprogramme, wie etwa die Routinen zur Bestimmung der Feinstrukturkonstanten, der Wandschubspannungen oder Geschwindigkeiten, mußten so gestaltet werden, daß sie zur die Behandlung des neuen Kanalquerschnitts eingesetzt werden können. Da-

neben erfolgte eine Um- und Neugestaltung der Unterprogramme bezüglich der neuen Randbedingungen. Der quaderförmige Körper auf der unteren Wand des Plattenkanals, welcher bisher das umströmte Gebäude repräsentierte, mußte in Hauptströmungsrichtung über die komplette Kanallänge ausgedehnt werden. In allen Programmteilen, in denen Wandwerte an den Berandungen des Körpers berechnet werden, sei es für die Wandschubspannungen, die verschiedenen Energieanteile oder die Geschwindigkeitsanteile, mußten periodische Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung implementiert werden.

Die Größe des Maschennetzes muß aus Rechenzeit- und Kapazitätsgründen sinnvoll gewählt werden. Speziell die Verwendung der Kapazitätsmatrixtechnik bei der Lösung der Poissongleichung schränkt die Gittergröße stark ein, da der Aufwand zur Aufstellung und Zerlegung dieser Matrix in dritter Potenz von der Anzahl der Gittermaschen direkt am Kanaleinbau abhängt. Deshalb wurde der Code so erweitert, daß Maschennetze mit in wandnormaler x_3 -Richtung nichtäquidistanter Einteilung verwendbar sind. Dies erforderte umfangreiche Ergänzungen. Besonders die Bildung von Differenzenquotienten in wandnormaler Richtung mußte neu gestaltet werden. Es mußten die unterschiedlichen Maschenweiten mit korrekten Gewichtungen berücksichtigt werden, ebenso wie bei den neu zu definierenden Mittelwerten. Für viele maschenweitenabhängige Konstanten, die bisher als einzelne, globale Werte vereinbart waren, wurden eindimensionale Felder eingeführt. Zur Einsparung von Rechenzeit wurde die Berechnung der Kapazitätsmatrix optional als getrennter Preprocessingschritt gestaltet. Die Matrix kann separat gespeichert werden. Damit ist es nun möglich, diese nur geometrieabhängigen Daten für viele verschiedene Simulationen einzulesen. Die benötigte CPU-Zeit für das Lesen der Matrix lag für die untersuchten Fälle im Bereich von Sekunden, während die Berechnung, je nach Größe des Problems, bis zu mehreren Stunden dauerte.

Zur Auswertung der Simulationsdaten wurden die vorhandenen Analysemodule erweitert sowie zahlreiche neue eingeführt. Um die bereits existierenden Auswerterroutinen verwenden zu können, mußten sie an die neue Geometrie und die Randbedingungen angepaßt werden. In diesem Zusammenhang mußte vor allem das Konzept der Mittelwertbildungen erweitert werden. Die Wichtigkeit dieser Mittelungen für die statistische Qualität der Ergebnisse hat sich in den durchgeführten Rechnungen und Analysen bestätigt. Neue Unterprogramme zur zeitabhängigen Auswertung und grafischen Darstellung von Strömungsgrößen wurden entwickelt. Dabei wurden zwei unterschiedliche Ansätze verwirklicht: zum einen die Auswertung während der Integration, zum anderen die getrennte Analyse nach Abschluß der Integration. Als wichtigste neue Module sind diejenigen zur Bestimmung der Reynoldsschen Schubspannungen, der auto- und kreuzspektralen Leistungsdichten, der Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen, der räumlichen Kreuzkorrelationsfunktionen sowie der Einzel- und Verbundwahrscheinlich-

keitsdichteverteilungen zu nennen. Zur Veranschaulichung der Strömungsstruktur im Spalt wurden Module bereitgestellt, um die Darstellung der zeitgemittelten Geschwindigkeitsvektoren relativ zu einem bewegten Koordinatensystem zu ermöglichen.

Es wurden verschiedene Simulationen mit dem geänderten Code durchgeführt. Vorbereitende Vergleichsrechnungen dienten der Untersuchung des Einflusses von Größen wie Reynolds-Zahl, Maschennetz und Periodenlänge auf die Ergebnisse. Es wurde festgestellt, daß sich die Resultate bei Verwendung des einfachen oder ausführlichen Feinstrukturmodells nur unwesentlich unterscheiden. Die Periodenlänge des numerischen Kanals hat insofern einen Einfluß auf die Ergebnisse, als aufgrund der periodischen Randbedingungen Einzeleffekte immer nur ganzzahlig auf der Kanallänge auftreten können. Durch Variation der Periodenlänge in Hauptströmungsrichtung wurde gezeigt, daß die Entstehung der Wirbelpaare kein numerischer Effekt ist. Eine Verdoppelung der Periodenlänge äußerte sich in glatteren Kurvenverläufen für Spektren, Korrelationen und Isolinien, was auf die Verbesserung der statistischen Qualität durch Erhöhung der Anzahl der Mittelungen zurückzuführen ist. Derselbe Effekt zeigte sich bei Verkleinerung der Reynolds-Zahl sowie bei Verfeinerung des Maschennetzes.

An einem ausgewählten Fall wurden die Ergebnisse der Simulation mit den Resultaten der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Messungen verglichen. Ein direkter Vergleich war aufgrund der unterschiedlichen Randbedingungen nicht möglich. Dennoch kann die qualitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment als gut bezeichnet werden. Speziell die zeitabhängige Auswertung der Turbulenzintensitäten, der Reynolds-Spannungen, der spektralen Leistungsdichten, der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen und verschiedener Korrelationsfunktionen zeigten, daß mit der Rechnung alle charakteristischen Effekte aus der Messung reproduziert werden konnten. Als Beispiele seien die Peaks in den Verteilungen der Turbulenzintensitäten und Reynolds-Spannungen und die Spitzen in den Leistungsdichtespektren angeführt. Die Simulation lieferte außerdem die nur schwer zu messende Verteilung der Schubspannung $\langle v'w' \rangle$ der beiden zur Hauptströmungsrichtung normalen Schwankungskomponenten.

Als Verursacher der signifikanten Peaks und der anderen charakteristischen Effekte konnten Wirbelpaare ausgemacht werden, die im Spalt mit der Hauptströmung fortbewegt werden. Die Einzelwirbel eines solchen Paares drehen in entgegengesetzter Richtung; ihre Zentren liegen versetzt links und rechts der Spaltmitte, aber noch innerhalb des Spaltes. Ihren Antrieb erhalten sie aus der Strömung in den Hauptkanälen. Das zu Beginn der hier durchgeführten Arbeiten vorliegende Modell für die Spaltströmung konnte damit bestätigt werden. Die großen Geschwindigkeitsgradienten in Richtung durch den Spalt und die hohen Werte für die Reynolds-Spannung $\langle u'v' \rangle$ führen im Bereich des Spaltanfangs zu ebenfalls hohen Werten für den Produktions-term $-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}$ der kinetischen Energie. In der Rechnung wurde, bedingt durch

die periodischen Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung und die Auswertung nach Erreichen eines quasistationären Zustands, eine eingelaufene Strömung simuliert. Daraus ergibt sich der Nachweis, daß das Wirbelphänomen kein Einlaufeffekt, sondern ein Charakteristikum der speziellen Geometrie ist.

Für weitere Arbeiten lassen sich einige Ansatzpunkte aufzeigen. Aufbauend auf den jetzt vorhandenen Datensätzen können zahlreiche zusätzliche Auswertungen vorgenommen werden. Hier kann die Stärke der Simulation im Vergleich zum Experiment ausgenutzt werden: Es stehen für viele aufeinanderfolgende Zeitpunkte Daten in einem großen räumlichen Bereich zur Verfügung. Damit lassen sich viele Arten von Korrelationen oder andere schwer meßbare Größen berechnen.

Zur Steigerung der Effizienz des Programmes bietet es sich außerdem an, den Poissonlöser so umzugestalten, wie es in Kapitel 8.3 bereits beschrieben wurde. Nach einer Gebietszerlegung in Rechteckbereiche wären auch noch feinere Maschennetauflösungen bei vernünftigem Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf möglich.

Eine Anwendung des Programmes auf die Rechteckgeometrie mit Mittenspalt (Abbildung 1.1i) könnte weitere Aussagen zum Pulsationsphänomen liefern. In dieser Geometrie sind die Effekte deutlicher ausgeprägt als in der hier untersuchten, wo die Wand einen stark dämpfenden Einfluß ausübt.

Literaturverzeichnis

- [1] Rehme, K.
The Structure of Turbulent Flow Through Rod Bundles
Nucl. Engrg. Des., Vol. 99, S. 141–154 (1987)
- [2] Rehme, K.
Turbulenzstruktur in einem Wandkanal eines Stabbündels
KfK 3177, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1981)
- [3] Rehme, K.
Experimental Observations of Turbulent Flow Through Subchannels of Rod Bundles
Exp. Thermal Fluid Sci., Vol. 2, S. 341–349 (1989)
- [4] Hooper, J. D.
Fully Developed Turbulent Flow Through a Rod Cluster
Ph. D. Thesis, University of New South Wales, Australia (1980)
- [5] Hooper, J. D., and Rehme, K.
The Structure of Single-phase Turbulent Flows Through Closely Spaced Rod Arrays
KfK 3467, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1983)
- [6] Hooper, J. D., and Rehme, K.
Large-scale Structural Effects in Developed Turbulent Flow Through Closely-spaced Rod Arrays
J. Fluid Mech., Vol. 145, S. 305–337 (1984)
- [7] Möller, S. V.
Experimentelle Untersuchung der Vorgänge in engen Spalten zwischen den Unterkämen von Stabbündeln bei turbulenter Strömung
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH),
KfK 4501, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1989)

- [8] Krauss, T., and Meyer, L.
Measurements of Turbulent Velocity and Temperature in a Wall Channel of a Heated Rod Bundle
FZKA 5582, Forschungszentrum Karlsruhe (1995)
- [9] Knight, D. W., and Hamed, M. E.
Boundary Shear in Symmetrical Compound Channels
J. Hydraulic Engrg., Vol. 110, S. 1412–1430 (1984)
- [10] Shiono, K., and Knight, D. W.
Transverse and Vertical Reynolds Stress Measurements in a Shear Layer Region of a Compound Channel
7th Int. Symp. on Turbulent Shear Flows, August, Stanford, CA, Paper 28-1 (1989)
- [11] Meyer, L., and Rehme, K.
Large-Scale Turbulence Phenomena in Compound Rectangular Channels
Exp. Thermal Fluid Sci., Vol. 8, S. 286–304 (1994)
- [12] Wu, X., and Trupp, A. C.
Experimental Study on the Unusual Turbulence Intensity Distributions in Rod-to-Wall Gap Regions
Exp. Thermal Fluid Sci., Vol. 6, S. 360–370 (1993)
- [13] Guellouz, M. S., and Tavoularis, S.
Large-Scale Transport Across Narrow Gaps in Rod Bundles
Submitted to NURETH7, Saratoga Springs (1995)
- [14] Knight, D. W., and Lai, C. J.
Turbulent Flow in Compound Channels and Ducts
Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Iowa, S. I2-1–I2-10 (1985)
- [15] Thomas, T. G., and Williams, J. J. R.
Large Eddy Simulation of Turbulent Flow in an Asymmetric Compound Open Channel
J. Hydraulic Res., Vol. 33, No. 1, S. 27–41 (1995)
- [16] Wieghardt, K.
Theoretische Strömungslehre
Teubner Studienbücher, B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage (1974)

- [17] Schlichting, H.
Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 8. Auflage (1982)
- [18] Rotta, J. C.
Turbulente Strömungen
B. G. Teubner, Stuttgart (1972)
- [19] Schumann, U.
Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH),
KfK 1854, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1973)
- [20] Grötzbach, G.
Direkte numerische Simulation turbulenter Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder bei Kanalströmungen
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH),
KfK 2426, Kernforschungszentrum Karlsruhe (1977)
- [21] Mauch, H.
Berechnung der 3-D Umströmung eines quaderförmigen Körpers im Kanal
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) (1991)
- [22] Bronstein, I. N., und Semendjajew, K. A.
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 22. Auflage (1985)
- [23] Ferziger, J. H.
Higher-level Simulations of Turbulent Flows
Technical Report Number TF-16, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California (1981)
- [24] Herring, J. R.
Subgrid Scale Modeling – An Introduction and Overview
In: Durst, F., Launder, B. E., Schmidt, F. W., Whitelaw, J. H. (eds.), *Turbulent Shear Flows I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, S. 347–352 (1979)
- [25] Leslie, D. C.
Simulation Methods for Turbulent Flows
In: Morton, K. W., and Baines, M. J. (eds.), *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic Press, London, S. 63–80 (1982)

- [26] Love, M. D.
An Introduction to the Large Eddy Simulation Technique
J. Inst. Nuc. Eng., Vol. 20, No. 2 (1979)
- [27] Hinze, J. O.
Turbulence
McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering (1959)
- [28] Chorin, A. J.
Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations
Math. Comp. 22, S. 745–762 (1968)
- [29] Buzbee, B. L., Dorr, F. W., George, J. A., and Golub, G. H.
The Direct Solution of the Discrete Poisson Equation on Irregular Regions
SIAM J. Numer. Anal., Vol. 8 No. 4, S. 722–736 (1971)
- [30] Buzbee, B. L., Golub, G. H., and Nielson, C. W.
On Direct Methods for Solving Poisson's Equations
SIAM J. Numer. Anal., Vol. 7, No. 4, S. 627–656 (1970)
- [31] Schmidt, H., Schumann, U., Ulrich, W., and Volkert, H.
Three-Dimensional, Direct and Vectorized Elliptic Solvers for Various Boundary Conditions
DFVLR-Mitt. 84-15, DFVLR, Oberpfaffenhofen (1984)
- [32] Stiller, J.
Ein Programmsystem für die numerische Lösung der Poisson-Gleichung auf lokal verfeinerten kartesischen Gittern
SFB210/T/76, Universität Karlsruhe (TH) (1991)
- [33] Comte-Bellot, G.
Écoulement turbulent entre deux parois parallèles
Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, France, No. 419 (1965)
- [34] *HISTORIAN Plus, Release 4.3.108 – User's Manual*
Opcode, Inc., Austin, Texas (1990)
- [35] Lueptow, R. M., Breuer, K. S., and Haritonidis, J. H.
Computer-Aided Calibration of X-Probes using a Look-up Table
Exp. Fluids, Vol. 6, S. 115–118 (1988)

- [36] Meyer, L.
Calibration of a Three-Wire Probe for Measurements in Nonisothermal Flow
Exp. Thermal Fluid Sci., Vol. 5, S. 260–267 (1992)
- [37] Meyer, L., and Rehme, K.
Periodic Vortices in Flow Through Channels with Longitudinal Slots or Fins
Tenth Symposium on Turbulent Shear Flows, The Pennsylvania State University,
Pennsylvania (1995)
- [38] Roache, P. J.
Computational Fluid Dynamics
Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico (1972)

Anhang A

Normierung

Wie in Kapitel 2 bereits deutlich gemacht wurde, sind die in dieser Arbeit auftretenden Größen und Gleichungen normiert. Dies erlaubt einerseits, Ähnlichkeitsbetrachtungen durchführen zu können, bietet aber andererseits auch (programm-)technische Erleichterungen, sowie – bei geeigneter Normierung – auch eine Steigerung der numerischen Genauigkeit.

Zur Normierung beziehungsweise „Entdimensionierung“ werden die üblichen Basisgrößen *Länge*, *Zeit* und *Kraft* oder Kombinationen aus diesen verwendet.

Eine Bezugsgröße ist die Wandschubspannungsgeschwindigkeit, die mit der mittleren Wandschubspannung $\langle \hat{\tau}_{w0} \rangle$ und der Dichte $\hat{\rho}$ definiert wird als

$$\langle \hat{u}_{r0} \rangle = \sqrt{\frac{\langle \hat{\tau}_{w0} \rangle}{\hat{\rho}}} . \quad (\text{A.1})$$

Als Basislänge wird der Plattenabstand \hat{D} verwendet. Damit läßt sich eine charakteristische Zeit festlegen zu

$$\hat{t}_0 = \frac{\hat{D}}{\langle \hat{u}_{r0} \rangle} . \quad (\text{A.2})$$

Diese Größen genügen, um zusammen mit der Dichte $\hat{\rho}$ sämtliche hier vorkommenden physikalischen Größen dimensionslos zu machen. Im einzelnen heißt das:

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{\hat{D}} \quad (\text{A.3})$$

$$t = \frac{\hat{t}}{\hat{t}_0} \quad (\text{A.4})$$

$$u_i = \frac{\hat{u}_i}{\langle \hat{u}_{r0} \rangle} \quad (\text{A.5})$$

$$(\equiv u^+ \text{ bei } \langle \hat{u}_r \rangle = \langle \hat{u}_{r0} \rangle)$$

$$v_{\langle u_1 \rangle} = \frac{v_{\langle \hat{u}_1 \rangle}}{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle} \quad (\text{A.6})$$

$$p = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\nu = \frac{\hat{\nu}}{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}} \equiv \frac{1}{Re_\tau} \quad (\text{A.8})$$

$$Re_m = \frac{v_{\langle \hat{u}_1 \rangle} \hat{D}}{\hat{\nu}} = Re_\tau v_{\langle u_1 \rangle} \quad (\text{A.9})$$

$$Re_\tau = \frac{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}}{\hat{\nu}} = \frac{Re_m}{v_{\langle u_1 \rangle}} \quad (\text{A.10})$$

Der mittlere Druckabfall in Hauptströmungsrichtung ist

$$\hat{P}_x = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \langle \hat{p} \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Sein dimensionsloses Pendant ist dann

$$P_x = \frac{\hat{P}_x \hat{D}}{\hat{\rho} \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle^2}. \quad (\text{A.12})$$

Dieser Druckgradient treibt die Strömung an. Im Programm muß daher ein Wert für ihn vorgegeben werden. Dieser Wert läßt sich einfach über eine Kräftebilanz über den gesamten Kanal ermitteln. Betrachtet man zunächst den einfachen Plattenkanal, so lautet das Gleichgewicht zwischen den Druckkräften einerseits und den Reibungskräften an den Wänden andererseits (vgl. Abbildung 1.2; dort sind dimensionslose Größen angegeben):

$$- (\hat{P}_x \hat{X}_1) \cdot \hat{X}_2 \cdot \hat{D} = - (\langle \hat{\tau}_{W1} \rangle + \langle \hat{\tau}_{W2} \rangle) \cdot \hat{X}_1 \cdot \hat{X}_2. \quad (\text{A.13})$$

Mit $\langle \hat{\tau}_{W0} \rangle$ als Mittelwert der Wandschubspannungen $\langle \hat{\tau}_{W1} \rangle$ und $\langle \hat{\tau}_{W2} \rangle$ an den beiden Kanalwänden und der Definition der Wandschubspannungsgeschwindigkeit $\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle$ aus (A.1) ergibt sich mit (A.11) und (A.12):

$$P_x = \frac{\hat{P}_x \hat{D}}{\langle \hat{\tau}_{W0} \rangle} \equiv 2. \quad (\text{A.14})$$

Für den Plattenkanal mit Einbau kann man nach einer Vereinfachung eine ähnliche Beziehung herleiten. Die Vereinfachung bezieht sich auf die Annahme, daß die Spaltbreite \hat{d} klein im Vergleich zur Kanalhöhe \hat{D} sei. Damit erhält man quasi einen geschlossenen Rechteckkanal der Höhe \hat{D} und der Breite $\hat{b} = \hat{X}_2 - \hat{B}$. \hat{B} ist die Breite des Einbaus, wie in Abbildung 1.3 dargestellt. Bezeichnet ferner $\langle \hat{\tau}_{WS} \rangle$ die mittlere Wandschubspannung an den Seitenwänden, so ergibt sich folgende Kräftebilanz:

$$- (\hat{P}_x \hat{X}_1) \cdot \hat{b} \cdot \hat{D} = - (\langle \hat{\tau}_{W1} \rangle \hat{b} + \langle \hat{\tau}_{W2} \rangle \hat{b} + 2 \langle \hat{\tau}_{WS} \rangle \hat{D}) \cdot \hat{X}_1. \quad (\text{A.15})$$

Die mittlere Wandschubspannung ist

$$\langle \hat{\tau}_{w_0} \rangle = \frac{\langle \hat{\tau}_{w_1} \rangle \hat{b} + \langle \hat{\tau}_{w_2} \rangle \hat{b} + 2 \langle \hat{\tau}_{w_s} \rangle \hat{D}}{2\hat{b} + 2\hat{D}} . \quad (\text{A.16})$$

Damit folgt wie oben

$$P_x = \frac{\hat{P}_x \hat{D}}{\langle \hat{\tau}_{w_0} \rangle} = 2 \left(1 + \frac{\hat{D}}{\hat{b}} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{b} \right) . \quad (\text{A.17})$$