



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5775

Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen

L. N. Carteciano

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

November 1996

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5775

Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen*

Luigi Natale Carteciano

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik

Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

*Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1996

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Bei der statistischen Betrachtungsweise der Turbulenz ist das System der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie nicht geschlossen, weil unbekannte nicht lineare Korrelationen bei der zeitlichen Mittelung der Gleichungen auftreten. Diese Korrelationen, genannt turbulente Spannungen und Wärmeflüsse, erfassen den Impuls- und Wärmetransport durch die Turbulenz. Es werden Turbulenzmodelle verwendet, die auf verschiedenen Ebenen und mit unterschiedlichem Aufwand versuchen, das Gleichungssystem zu schließen.

In dieser Arbeit wird ein Turbulenzmodell für Auftriebsströmungen (*Turbulence Model for Buoyant Flows -TMBF*) entwickelt, das aus einer Kombination eines Modells erster Ordnung mit zwei Gleichungen für den turbulenten Impulstransport und eines Modells zweiter Ordnung mit fünf Gleichungen für den turbulenten Wärmetransport besteht. Die turbulenten Spannungen werden durch die Verwendung des Prinzips der isotropen Wirbelviskosität und durch die Lösung der Transportgleichungen für die kinetische Energie der Turbulenz k und deren Dissipationsrate ϵ berechnet. Die drei turbulenten Wärmeflüsse $\overline{U_i' T'}$ werden direkt mit Hilfe von Transportgleichungen berechnet. Bei der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports werden auch die Transportgleichungen für die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und deren Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ gelöst. Eine neue Modellierung zur Erweiterung der Transportgleichungen für $\overline{U_i' T'}$ auf den Bereich von kleinen Peclet-Zahlen wird in dieser Arbeit entwickelt. Das TMBF enthält damit 7 Transportgleichungen und 18 empirische Koeffizienten.

Das TMBF wird in das thermohydraulische Programm FLUTAN implementiert und validiert. Die Validierungsarbeit wird mit Hilfe von Experimenten turbulenter Strömungen in Zwangs- und Mischkonvektion durchgeführt und konzentriert sich auf die folgenden Punkte:

- die im TMBF verwendete Kombination eines Modelles zweiter Ordnung für den turbulenten Wärmetransport mit dem k - ϵ Modell,
- die neue für kleine Peclet-Zahlen gültige Modellierung in den Transportgleichungen für $\overline{U_i' T'}$ und die Festlegung des Wertes des empirischen Koeffizienten,
- die Modellierung des Auftriebs im TMBF.

Die numerischen Ergebnisse des TMBF zeigen, daß alle drei Ziele der Validierung mit Erfolg erreicht wurden.

Development of a turbulence model for buoyant flows

Abstract

The conservation equations do not form any longer a closed set if the statistical theory of turbulence is used. In fact, in these equations unknown correlations, the turbulent stresses and heat fluxes, are present. They represent the turbulent transport of momentum and heat. A way of determining these correlations is to adopt turbulence models which introduce laws to simulate the turbulent transport.

A *Turbulence Model for Buoyant Flows* (TMBF) is developed in this work. TMBF is a combination of a first order 2-equation model for the turbulent transport of momentum and of a second order 5-equation model for the turbulent transport of heat. The turbulent stresses are calculated with an isotropic eddy viscosity solving the transport equation for turbulent kinetic energy k and for its dissipation rate ϵ . The three turbulent heat fluxes $\overline{U_i T'}$ are calculated by means of transport equations. The transport equations for the variance of temperature $\overline{T'^2}$ and its dissipation rate $\epsilon_{T'}$ are also used in the description of the turbulent transport of heat. In order to extend the range of the transport equations for $\overline{U_i T'}$ to low Peclet numbers a new modeling is developed in this work. TMBF contains seven transport equations and 18 empirical coefficients.

TMBF has been implemented in the FLUTAN computer code, and validated by means of experimental data from turbulent flows in forced and mixed convection. The following aspects are considered:

- the description of the turbulent transport of heat in combination to the k - ϵ Model ;
- the new modeling in the transport equations for $\overline{U_i T'}$ and the determination of its empirical coefficient;
- the description of buoyancy.

The numerical results of TMBF show that all three aims of the validation were reached successfully.

Inhaltsverzeichnis

1	Problemstellung	1
2	Überblick über Turbulenzmodelle	5
2.1	Statistische Betrachtungsweise	5
2.2.1	Reynoldssche Gleichungen	5
2.2.2	Statistische Turbulenzmodelle	7
2.2.3	Renormalisierungs-Gruppen Methode	12
2.3	Grobstruktursimulation	12
2.4	Direkte numerische Simulation	16
2.5	Dynamik nichtlinearer Systeme	16
3	TMBF, ein Turbulenzmodell für Auftriebsströmungen	19
3.1	Beschreibung des turbulenten Impulstransports	19
3.2	Beschreibung des turbulenten Wärmetransports	26
3.2.1	Die Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse	26
3.2.2	Die Modellierung für hohe Peclet-Zahlen	27
3.2.3	Das neue Modell für kleine Peclet-Zahlen	29
3.2.4	Die Transportgleichungen für $\overline{T'^2}$ und $\epsilon_{T'}$	32
3.4	Zusammenfassung	35
4	Implementierung des TMBF	41
4.1	Fragestellung	41
4.2	Das Rechenprogramm FLUTAN	42
4.3	Diskretisierung der Transportgleichungen des TMBF	44
4.4	Ablaufstruktur und Randbedingungen des TMBF	53
5	Validierung des TMBF für Zwangskonvektion	61
5.1	Einführung	61
5.2	Turbulente Rohrströmung in Wasser	63
5.2.1	Geometrie des Rechengebietes und Eintrittswerte	64
5.2.2	Ergebnisse	66
5.3	Der Freistrahle in Natrium	69
5.3.1	Geometrie des Rechengebietes und Eintrittswerte	70
5.3.2	Ergebnisse	72
5.4	Die beheizte horizontale Nachlaufströmung in Luft	75
5.4.1	Geometrie des Rechengebietes	76
5.4.2	Ergebnisse bei stabiler Temperaturschicht	77
5.4.3	Ergebnisse bei instabiler Temperaturschicht	83
5.5	Zusammenfassung	86

1. Problemstellung

Nichtisotherme turbulente Strömungen besitzen einen hohen Impuls- und Wärmeaustausch, die eine starke Durchmischung hervorrufen. In der Tat zeigen die Zustandsgrößen, Temperatur, Geschwindigkeit und Druck, im allgemeinen sehr vielfältige Abhängigkeiten von Ort und Zeit. Bei nichtisothermen turbulenten Strömungen in komplexen Konfigurationen stellt die numerische Lösung der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie den einzigen zuverlässigen Weg zur Simulation des Impuls- und Wärmeaustauschs mit angemessenen Mitteln dar. Numerische Lösungen der Bilanzgleichungen können auf verschiedene Weise erreicht werden: direkte numerische Simulation (DNS) für das ganze Frequenz- und Wellenlängen-Spektrum der Turbulenz; Grobstruktursimulation; statistische Betrachtungsweise auf der Basis der Reynoldsgleichungen (Reynolds, 1895); mathematische Modelle auf der Basis der Lorenzgleichungen, die im Rahmen der Theorie der Dynamik nichtlinearer Systeme eine Vereinfachung der Bilanzgleichungen darstellen. In Kapitel zwei werden diese Methoden mit dem Schwerpunkt der statistischen Betrachtungsweise beschrieben.

Für die Behandlung von komplexen Strömungskonfigurationen und für einen weiten Strömungs- und Energieaustauschbereich kommen wegen der geringen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit heutiger Computer nur die statistischen Betrachtungsweise in Frage.

In der statistischen Betrachtungsweise werden die zeitlich gemittelten Bilanzgleichungen zur Berechnung turbulenter Strömungen verwendet. Das resultierende Gleichungssystem ist unvollständig, weil unbekannte nicht lineare Korrelationen zwischen den Schwankungswerten der Zustandsgrößen auftreten. Diese Korrelationen, es handelt sich um turbulente Spannungen und Wärmeflüsse, erfassen den Impuls- und Wärmetransport durch die Turbulenz. Die Schließung des Gleichungssystems ist das Hauptproblem bei dieser Vorgehensweise. Es werden dabei Turbulenzmodelle verwendet, durch die die unbekanntes Korrelationen auf bekannte Größen zurückgeführt werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Turbulenzmodells für turbulente, auftriebsbehaftete Strömungen auf der Grundlage der statistischen Betrachtungsweise.

Die aus der Literatur bekanntesten Turbulenzmodelle können in drei Kategorien unterteilt werden: Modelle erster Ordnung, algebraische Spannungs- und Wärme-

flußmodelle und Modelle zweiter Ordnung. Diese Modelle werden detailliert in Kapitel zwei vorgestellt. Hier werden die Eigenschaften dieser Modelle bei der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports kurz diskutiert.

Das k - ϵ Modell wird am häufigsten unter den Modellen erster Ordnung angewendet. Es stützt sich auf das Konzept der Wirbelviskosität ν_t . Diese Größe wird im Boussinesq-Ansatz zur Beschreibung des turbulenten Impulstransports benötigt. Die Wirbelviskosität hängt von der Art und der Intensität der Turbulenz ab. Eine Verteilung von ν_t , die isotrop angenommen wird, wird durch die Lösung der Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und deren Dissipationsrate ϵ berechnet. Zur Beschreibung des turbulenten Wärmetransports wird das k - ϵ Modell oft mit der Verwendung einer i.a. als konstant angenommenen turbulenten Prandtl-Zahl σ_t erweitert. Diese Erweiterung stützt sich auf das Konzept der Wirbeldiffusivität Γ_t . Während das k - ϵ Modell mit Erfolg für unterschiedliche isotherme turbulente Strömungen verwendet wird, ist die Anwendung des k - ϵ - σ_t Modells auf nicht isotherme Fälle aber nicht so erfolgreich. In der Tat wird dabei die Beschreibung des turbulenten Wärmetransports durch folgende Annahmen stark eingeschränkt:

1. Die Wirbeldiffusivität wird als isotrop vorausgesetzt. Dies bedeutet, daß der Vorgang des turbulenten Wärmetransports isotrop sein soll.
2. Die Reynolds-Analogie liegt vor. Dies bedeutet, daß der turbulente Impuls- und Wärmetransport mit ähnlicher Gesetzmäßigkeit ablaufen.
3. Zur Berechnung der turbulenten Wärmeflüsse wird der einfache Fourier-Ansatz benutzt.

In turbulenten, stark auftriebsbehafteten Strömungen sind alle drei Annahmen nicht gültig. Der turbulente Wärmetransport wird wegen des Auftriebs anisotrop, die Reynolds-Analogie entfällt und der Fourier-Ansatz kann den Auftrieb nicht beschreiben. Zwei praktische Beispiele, in denen diese Annahmen verletzt werden, sollen das verdeutlichen:

- In einer Flüssigkeit mit anfänglich thermisch stabiler Stratifikation über einer waagerechten Wand bildet sich bei Beginn der Beheizung dieser Wand ein vertikaler turbulenter Wärmefluß aus, der sich entgegen der Richtung des Temperaturgradienten wendet. Dieser gegen den Gradienten laufende Wärmefluß kann unter der Verwendung des Fourier-Ansatzes nicht nachgebildet werden.
- Bei vertikaler, beheizter Wand liegt ein starker vertikaler turbulenter Wärmefluß vor, der vom Auftrieb verursacht wird. Dieser Wärmefluß wird unter Verwendung eines Fourier-Ansatzes wesentlich unterschätzt, da der vertikale Gradient der mittleren Temperatur sehr gering ist.

Einige der oben zitierten Annahmen werden auch in nicht auftriebsbehafteten Strömungen verletzt. So gilt zum Beispiel die Reynolds-Analogie nicht für turbulente

Strömungen im Bereich von kleinen molekularen Prandtl-Zahlen oder für Fälle, in denen das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld nicht ähnlich sind.

Die algebraischen Spannungs- und Wärmeflußmodelle benutzen algebraische Beziehungen zur Berechnung der turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse, die aus den entsprechenden Transportgleichungen hergeleitet werden. Dabei entfallen die oben eingeführten drei Annahmen der Modelle erster Ordnung. Diese Modelle könnten deshalb für turbulente, auftriebsbehaftete Strömungen anwendbar sein. Aber die diffusiven und konvektiven Effekte des turbulenten Wärmetransports, die bei den algebraischen Modellen vernachlässigt oder dem turbulenten Impulstransport ähnlich gesetzt werden, können jedoch in turbulenten auftriebsbehafteten Strömungen eine wesentliche Rolle spielen.

Das vollständige Modell zweiter Ordnung, das die Transportgleichungen für die sechs turbulenten Spannungen und für die drei turbulenten Wärmeflüsse löst, ist deshalb besser geeignet für Auftriebsströmungen. Dabei wird der Auftriebseinfluß auf die Turbulenz durch die Transportgleichungen automatisch berücksichtigt. Es hat jedoch den Nachteil, daß dieses Modell eine große Zahl von Transportgleichungen zu lösen hat und die Zahl der empirischen Koeffizienten hoch ist.

Dieser Aufwand kann reduziert werden, wenn der Anwendungsbereich des Modells definiert und beschränkt wird. Bei der Entwicklung eines Modells für Auftriebsströmungen sollte dieses nach der Auffassung des Autors unbedingt die Transportgleichungen für die Wärmeflüsse enthalten. Dagegen kann dieses Modell auf die Lösung von Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen verzichten, wenn man sich auf die Berechnung von Strömungen mit quasi-isotropem, turbulentem Impulstransport beschränkt.

Auf Grund dieser Überlegungen wurde die Entscheidung getroffen, ein neues Modell, genannt *Turbulence Model for Buoyant Flows (TMBF)*, zu entwickeln, das aus einer Kombination eines Modells erster Ordnung mit zwei Gleichungen für den turbulenten Impulstransport und eines Modells zweiter Ordnung mit fünf Gleichungen für den turbulenten Wärmetransport besteht. In diesem Modell werden die Transportgleichungen für die drei turbulenten Wärmeflüsse $\overline{U_i T'}$, für die im Auftriebsterm auftretende Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und deren Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ gelöst. Neben diesen Gleichungen enthält das Modell auch die Transportgleichungen der turbulenten kinetischen Energie k und deren Dissipationsrate ϵ zur Beschreibung des turbulenten Impulstransports.

Das erste Ziel dieser Entwicklung ist es, den vom klassischen k - ϵ Turbulenzmodell bekannten Anwendungsbereich auf die folgenden turbulenten Strömungen zu erweitern:

- Zwangskonvektionsströmungen, bei denen die Annahmen der Modelle erster Ordnung mit zwei Gleichungen nicht erfüllt sind;
- Auftriebsströmungen, in denen sich der turbulente Impulstransport noch quasi isotrop verhält.

Eine weitere Zielsetzung sieht die Entwicklung einer neuen Modellierung zur Erweiterung des Anwendungsbereichs der Transportgleichungen für die turbulenten

ten Wärmeflüsse auf kleine Peclet-Zahlen vor. Mit einem neuen Schließungsansatz, der als Zusatzterm in diesen Transportgleichungen auftritt, werden die bei kleinen Peclet-Zahlen zu betrachtenden Einflüsse auf die turbulenten Wärmeflüsse durch folgende Terme berücksichtigt:

- die molekulare Dissipation,
- die Wechselwirkung zwischen den Druck- und Temperaturfluktuationen.

Der erste Effekt, der bei hohen Peclet-Zahlen vernachlässigt werden kann, muß bei kleinen Peclet-Zahlen modelliert werden. Der zweite Effekt ist notwendig zur Anpassung der Druck-Temperatur Korrelation an kleine Peclet-Zahlen.

Das TMBF wird ins drei-dimensionale thermohydraulische Rechenprogramm FLUTAN implementiert und in zwei Schritten validiert:

- Im ersten Schritt werden vier Beispiele für turbulente Strömungen bei Zwangskonvektion ohne Auftriebseinfluß in verschiedenen Fluiden, wie Wasser, Luft und Natrium, nachgerechnet.
- Im zweiten Schritt wird eine Mischkonvektion in Luft mit Auftriebseinfluß numerisch simuliert.

Im ersten Schritt wird hauptsächlich die neue Kombination im TMBF zwischen den Modellen erster und zweiter Ordnung für die Beschreibung des turbulenten Impuls- und Wärmetransports validiert. Es werden Experimente ausgewählt, die die turbulenten Strömungen von Interesse darstellen und einen breiten Bereich der molekularen Prandtl-Zahl (von 0.006 bis 7.0) erfassen.

Im zweiten Schritt wird bei der Validierung des Modells auf zwei Punkte hingearbeitet: die sachgemäße Modellierung des Auftriebs; die Validierung des neuen Zusatzterms in den Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse und die Bestimmung des in diesem Term auftretenden empirischen Koeffizienten.

Die Ergebnisse der numerischen Simulationen mit dem TMBF werden nicht nur mit Meßwerten verglichen, sondern auch mit Rechnungen, die mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ -Modell durchgeführt werden. Damit können die Vorteile der detaillierten Beschreibung des turbulenten Wärmetransports gegenüber der Beschreibung mit Hilfe der turbulenten Prandtl-Zahl demonstriert werden.

2. Überblick über Turbulenzmodelle

2.1 Einführung

Dieser Überblick über Turbulenzmodelle befaßt sich schwerpunktmäßig mit der Beschreibung der statistischen Betrachtungsweise, da das in dieser Arbeit entwickelte TMBF zur Familie der statistischen Turbulenzmodelle gehört. Im Rahmen der Beschreibung der statistischen Turbulenzmodelle wird kurz auf die Renormalisierungs-Gruppen (RNG) Methode eingegangen, die seit zehn Jahren auch in der Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle angewendet wird.

Anschließend werden die Grobstruktursimulation und die direkte numerische Simulation beschrieben und deren Vorteile und Nachteile gegenüber der statistischen Betrachtungsweise vorgestellt. Zum Schluß werden die mathematischen Modelle kurz erläutert, die im Rahmen der Theorie der Dynamik nichtlinearer Systeme eine Möglichkeit darstellen, charakteristisches Turbulenzverhalten zu beschreiben.

2.2 Statistische Betrachtungsweise

2.2.1 Reynoldssche Gleichungen

Die für bewegte Fluide gültigen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie können auch zur Beschreibung turbulenter Strömungen verwendet werden. Nach dem Vorschlag vom Reynolds (1895) wird eine Aufspaltung der Momentanwerte der Zustandsgrößen in einen zeitlichen Mittelwert und einen Schwankungswert vorgenommen. Man setzt:

$$(2.1) \quad A(x, y, z, t) = \bar{A}(x, y, z) + A'(x, y, z, t) .$$

Der zeitliche Mittelwert ist dabei durch

$$(2.2) \quad \bar{A}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} A(x, y, z, t) dt$$

definiert. Das Zeitintervall Δt muß hier hinreichend groß sein, um eine genügend hohe Zahl von Fluktuationen zu enthalten. Es darf jedoch langzeitige Veränderungen der mittleren Größe bei zeitabhängigen Vorgängen nicht miteinschließen. Das zeitliche Mittel des Schwankungswertes über das Zeitintervall Δt wird zu null. Durch diese Aufspaltung werden die turbulenten Strömungen als Überlagerung einer regulären Hauptströmung und einer ungeordneten Schwankungsbewegung betrachtet. Geschwindigkeit, Temperatur und Druck schreiben sich somit als:

$$(2.3) \quad U_i = \bar{U}_i + U_i' ,$$

$$(2.4) \quad T = \bar{T} + T' ,$$

$$(2.5) \quad p = \bar{p} + p' .$$

Die zeitlich gemittelten Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Wärme, die sogenannten Reynoldsschen Gleichungen, für ein inkompressibles Fluid schreiben sich in Tensorschreibweise dann als:

$$(2.6) \quad \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 ,$$

$$(2.7) \quad \rho \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \rho \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{U_i' U_j'} \right) + \rho g_i ,$$

$$(2.8) \quad \rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c_p \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{U_j' T'} \right) .$$

Darin sind ρ die Dichte, ν die kinematische Viskosität, λ die Wärmeleitfähigkeit, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und g_i die Komponente der Erdschleunigung in der Richtung x_i .

Im allgemeinen führt man hier noch die Boussinesq-Näherung ein, die eine Dichteänderung nur im Auftriebsterm der Impulsgleichung annimmt. Die Dichte ist hier eine lineare Funktion der Temperatur:

$$(2.9) \quad \rho = \rho(\bar{T}) = \rho_0 \left(1 - \beta (\bar{T} - \bar{T}_0) \right) .$$

Hier bedeutet der Index 0 einen Bezugswert. In dieser Gleichung ist β der thermische Ausdehnungskoeffizient, der die Dichteänderungen infolge von Temperaturänderungen beschreibt:

$$(2.10) \quad \beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{T}} \right)_p .$$

Das Gleichungssystem (2.6-2.8) ist nicht geschlossen, weil unbekannt Korrelationen zwischen den Geschwindigkeits- und den Temperaturschwankungen auftreten. Diese Korrelationen beschreiben einen Transport durch die turbulente Bewegung, und zwar gilt:

- Die Korrelationen $-\rho \overline{U_i' U_j'}$ stellen in der in i -Richtung geltenden Impulsgleichung den Impulstransport durch Schwankungsbewegung in j -Richtung dar. Sie werden turbulente Spannungen genannt, weil sie auf das Fluid wie Spannungen wirken.

- Die Korrelationen $-\rho\overline{U_i'T'}$ stellen in der Energiegleichung den Wärmetransport durch die Turbulenzbewegung in i-Richtung dar und werden turbulente Wärmeflüsse genannt.

Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse wirken auf die Impuls- und Energiegleichungen wie ein zusätzlicher Beitrag zum Diffusionsanteil des Impuls- und Wärmetransports.

Das Hauptproblem bei der Berechnung turbulenter Strömungen ist die Bereitstellung geeigneter Beziehungen für diese Korrelationen zur Schließung des Gleichungssystems. Es werden dabei meistens analytische Modelle verwendet, die das Turbulenzverhalten der Strömung durch bekannte Annahmen beschreiben. Dadurch werden die unbekanntenen Korrelationen auf bekannte Größen zurückgeführt.

Die Bilanzgleichung der Energie (2.8) enthält im Gegensatz zur Bilanzgleichung des Impulses (2.7) keinen Druck-Gradienten- und Auftriebsterm, so daß der Turbulenzterm in der Energiegleichung in den meisten Fällen eine größere Bedeutung erhält, als in der Impulsgleichung. Deshalb ist eine realistische Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse stets wichtig.

2.2.2 Statistische Turbulenzmodelle

Eine heute gängige Methode zur Modellierung turbulenter Strömungen ist die Herleitung von Transportgleichungen für die unbekanntenen Korrelationen $\overline{U_i'U_j'}$ und $\overline{U_i'T'}$ durch geeignete Umformung der Impuls- und Energiegleichung. Allerdings treten in den Transportgleichungen für die zweifach Korrelationen neue Unbekannte auf, die die Form von dreifach Korrelationen, z.B. $\overline{U_i'U_j'U_k'}$, haben. Geht man einen Schritt weiter und leitet Transportgleichungen für die dreifach Korrelationen her, dann enthalten diese Transportgleichungen ihrerseits neue Unbekannte 4. Ordnung. Die Schlußfolgerung daraus ist, daß Unbekannte (n+1)-ter Ordnung bei der Herleitung der Transportgleichungen für die Unbekannten n-ter Ordnung entstehen und das Gleichungssystem deshalb im Prinzip nicht geschlossen werden kann.

Es wurden bereits eine ganze Reihe von Turbulenzmodellen entwickelt, die auf verschiedenen Ebenen und mit unterschiedlichem Aufwand versuchen, das Schließungsproblem zu lösen.

Die bisher verwendeten Turbulenzmodelle, die hier kurz beschrieben werden, können in drei Klassen eingeteilt werden:

- Modelle erster Ordnung, die keine Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse verwenden,
- Algebraische Modelle für die turbulenten Spannungen (ASM) und für die Wärmeflüsse (AFM), in denen algebraische Beziehungen für die unbekanntenen Korrelationen benutzt werden,
- Modelle zweiter Ordnung, die Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse verwenden.

Bevor die Turbulenzmodelle beschrieben werden, ist es hilfreich, einige Begriffe einzuführen und ihre Definitionen vorzunehmen:

Isotrope Turbulenz: Alle statistischen Eigenschaften der Geschwindigkeiten sind im Strömungsfeld gleich und richtungsunabhängig ($\overline{U'^2} = \overline{V'^2} = \overline{W'^2}$). Eine turbulente Strömung hinter einem Gitter kann als isotrop betrachtet werden.

Lokalisotrope Turbulenz: In technischen Anordnungen hängen die großskaligen Wirbelstrukturen i.a. von den Randbedingungen der Strömung ab. Dies bedeutet, daß die Bewegung der großskaligen Wirbelstrukturen dann richtungsabhängig sind. Während des Zerfalls von großskaligen Wirbelstrukturen zu kleinskaligen Wirbelstrukturen nimmt die Richtungsabhängigkeit der Wirbelstrukturen jedoch ab. Wenn das Spektrum der Längen der Wirbelstrukturen sehr breit wird, das ist bei hohen Reynolds-Zahlen der Fall, wird die Bewegung der kleinskaligen Wirbelstrukturen isotrop. Diese Eigenschaft wird als lokalisotrope Turbulenz bezeichnet. Anisotrope großräumige Turbulenzen besitzen bei hohen Reynolds-Zahlen i.a. eine lokalisotrope Turbulenzstruktur. Dies ist der Fall für Grenzschicht-, Freistrah-, Nachlauf-, Rohrströmungen usw.

Isotropie des turbulenten Impuls- und/oder Wärmetransports: Eine Richtungsabhängigkeit der physikalischen Vorgänge des Impuls- und/oder Wärmetransports durch die Turbulenzbewegung ist ausgeschlossen. Äußere Kräfte, wie z.B. der Auftrieb, können auf die Turbulenzbewegung einwirken und eine Anisotropie des Impuls- und/oder Wärmetransports bewirken.

Modelle erster Ordnung:

In diesen Modellen wird die Grundannahme verwendet, daß der turbulente Transport proportional dem Gradienten der transportierten Größe ist. Diese Ansätze entsprechen denen von Boussinesq und Fourier für die diffusiven molekularen Prozesse der Impuls- und Wärmeübertragung. Nach dieser Modellvorstellung gilt:

$$(2.11) \quad -\overline{U'_i U'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} ,$$

$$(2.12) \quad -\overline{U'_i T'} = \Gamma_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} .$$

Das Kronecker-Symbol δ_{ij} nimmt die Werte eins und null an, je nachdem ob $i=j$ oder $i \neq j$ ist. Da die Summe der Normal-Spannungen der kinetischen Energie der Turbulenz entspricht, ergibt sich ferner:

$$(2.13) \quad k = \frac{1}{2} \overline{U'_i U'_i} = \frac{1}{2} (\overline{U'^2} + \overline{V'^2} + \overline{W'^2}) .$$

Aus Konsistenzgründen muß deshalb der Term $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$ in der Gleichung (2.11) auftreten.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Verteilungen der Wirbelviskosität ν_t und der Wirbeldiffusivität Γ_t zu bestimmen, die ihrerseits von der Turbulenzstruktur abhängen.

Das bekannteste und am häufigsten verwendete Turbulenzmodell dieser Familie ist das k - ϵ - σ_t Turbulenzmodell. Die Wirbelviskosität ist aus Dimensionsbetrachtungen proportional zu einem Geschwindigkeitsmaßstab V und einem Längenmaß L :

$$(2.14) \quad \nu_t \propto VL .$$

Ein physikalischer Geschwindigkeitsmaßstab für Turbulenzstrukturen ergibt sich aus der turbulenten kinetischen Energie k durch die Beziehung:

$$(2.15) \quad V \propto k^{\frac{1}{2}} .$$

Das typische turbulente Längenmaß L wird nach Prandtl (1945) und Kolmogorov (1942) als eine Kombination aus kinetischer Energie der Turbulenz k und deren Dissipationsrate ϵ betrachtet:

$$(2.16) \quad L \propto \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} .$$

Diese Beziehung ist nur für hohe Reynolds-Zahlen gültig, bei denen ein breites Spektrum der Längenskalen der Wirbel existiert. Unter dieser Bedingung wird die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie durch die molekulare Wechselwirkungen in sehr kleinskaligen Wirbelstrukturen stattfinden. Der Energietransfer in diesen Wirbelstrukturen und die Dissipation werden dabei durch die großskaligen Wirbelstrukturen bestimmt. Das bedeutet, daß die Dissipation ϵ nicht von molekularen Eigenschaften des Fluides abhängig ist, sondern von den globalen Größen, wie k und L , die energetisch vor allem die großskaligen Wirbelstrukturen beschreiben. Werden die Gleichungen (2.15) und (2.16) in die Gleichung (2.14) eingesetzt, so ergibt sich die Wirbelviskosität ν_t zu:

$$(2.17) \quad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} .$$

c_μ ist ein dimensionsloser empirischer Faktor.

Der turbulente Wärmetransport wird durch eine Wirbeldiffusivität beschrieben. Sie wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$(2.18) \quad \Gamma_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} .$$

Dabei stellt σ_t die turbulente Prandtl-Zahl dar und wird i.a. als konstant angenommen. Der Standard-Wert für σ_t ist 0.6 bei freien turbulenten Scherschichten. Für turbulente Wandströmung wird der Standard-Wert auf 0.9 erhöht, um die Dämpfung des senkrecht zur Wand wirkenden turbulenten Wärmeflusses zu berücksichtigen. Diese Werte wurden aus experimentellen Versuchen in Wasser und Luft bestimmt.

Im k - ϵ - σ_t Modell werden die Wirbelviskosität und die Wirbeldiffusivität aus den Turbulenzparametern k und ϵ berechnet, wobei lokale Isotropie angenommen wird. Dieses Modell löst die Transportgleichungen von k und ϵ , in denen die Korrelationen höherer Ordnung mit Hilfe von sechs empirischen Koeffizienten modelliert werden. Es gilt für lokalisotrope Turbulenz, d.h. für hohe Reynolds-Zahlen. Bei der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports in diesem Modell treten wesentliche

Einschränkungen auf, die im Kapitel 1 erwähnt werden. Deshalb ist der Anwendungsbereich dieses Modells für nicht-isotherme Strömungen begrenzt.

Es sind bisher verschiedene Turbulenzmodelle von Jones und Launder (1972 und 1973), Lam und Bremhorst (1981), Nagano und Hishida (1987), Davidson (1990) und Rodi und Mansour (1993) vorgeschlagen worden, die das k - ϵ - σ_t -Modell auf den Bereich von kleinen Reynolds-Zahlen erweitern. Die meisten von ihnen modellieren nur die laminare Scherschicht in Wandnähe. Sie gehen von zusätzlichen Gliedern in den Transportgleichungen für k und ϵ aus, die die molekularen Effekte der Wandschicht berücksichtigen. Außerdem werden Korrekturen an den empirischen Koeffizienten vorgenommen, in denen vom Wandabstand abhängige Funktionen eingeführt werden. Nur wenige Modelle, darunter das von Davidson, besitzen eine Formulierung, die eine Relaminarisierung der turbulenten Strömung in wandfernen Bereichen zuläßt.

Um eine bessere Beschreibung des turbulenten Wärmetransports zu erreichen, sind Turbulenzmodelle entwickelt worden, die von Transportgleichungen für die Varianz der Temperatur T'^2 und deren Dissipation $\epsilon_{T'}$ ausgehen und daraus die Wirbel-diffusivität berechnen. Es ergibt sich so die Beziehung:

$$(2.19) \quad \Gamma_t = c_\lambda k \sqrt{\frac{k T'^2}{\epsilon \epsilon_{T'}}$$

Diese Beziehung wird dann anstelle der Gleichung (2.18) benutzt. In diesen Modellen, die selbstverständlich noch die Transportgleichungen für k und ϵ zur Beschreibung der Wirbelviskosität enthalten, entfällt die Annahme der Reynolds-Analogie. Hier besitzen der turbulente Impuls- und Wärmetransport getrennte Beschreibungen. Eine Erweiterung dieser Modelle auf den Bereich von kleinen Peclet-Zahlen werden von Nagano und Kim (1988), Soufiani et al. (1990) und Nagano et al. (1994) vorgeschlagen. Trotz dieser Verbesserung bleibt noch die einfache Beschreibung des turbulenten Wärmetransports durch den Fourier-Ansatz unter der Annahme der Isotropie für die Wirbel-diffusivität bestehen. Solche Modelle sind wenig geeignet für Strömungen mit starkem Auftriebseffekt, der zu einem stark anisotropen turbulenten Wärmetransport führt.

Algebraische Modelle:

Die modellierten Transportgleichungen für $\overline{U'_i U'_j}$ und $\overline{U'_i T'}$ können zu algebraischen Beziehungen vereinfacht werden, wenn der konvektive und diffusive Transport der turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse entweder dem Transport von k gleich gesetzt werden, Rodi (1976), oder einfach vernachlässigt werden. Im letzten Fall wird angenommen, daß lokales Gleichgewicht der transportierten Größe besteht. Der Vorteil dieser algebraischen Modelle besteht darin, daß die Beschränkung aus der Annahme der Isotropie für die Wirbelviskosität und die Wirbel-diffusivität entfällt, ohne daß die modellierten Transportgleichungen für $\overline{U'_i U'_j}$ und $\overline{U'_i T'}$ gelöst werden müssen. Allerdings ist dazu die Annahme des lokalen Gleichgewichts der Turbulenz Voraussetzung.

Es sind eine ganze Reihe von Turbulenzmodellen entwickelt worden, die diese algebraischen Beziehungen benutzen. Im einzelnen handelt es sich um:

- Algebraische Spannungsmodelle, die die algebraischen Beziehungen nur für die turbulenten Spannungen verwenden. Sie lösen zwei Transportgleichungen für k und ϵ . Die Wirbeldiffusivität Γ_t wird als isotrop angenommen.
- Algebraische Wärmeflußmodelle. Sie benutzen nach dem Vorschlag von Hanjalic (1994), Hanjalic und Vasic (1993) und Hanjalic et al. (1994) die algebraischen Beziehungen für die turbulenten Wärmeflüsse und lösen drei oder vier Transportgleichungen für k , ϵ , T'^2 und eventuell $\epsilon_{T'}$. Die Wirbelviskosität wird für alle Richtungen gleich angenommen.
- Volle algebraische Modelle von Gibson und Launder (1979), Bergstrom et al. (1990) und Tamanini (1978). Sie verwenden auch die Transportgleichungen für k , ϵ , T'^2 und eventuell $\epsilon_{T'}$ und berücksichtigen die Anisotropie des turbulenten Impuls- und Wärmetransports.

Die algebraischen Beziehungen vereinfachen sich erheblich, wenn eine Grenzschichtapproximation wie bei Hossain (1980) eingeführt wird. Die algebraischen Modelle für Grenzschichtströmungen enthalten zwar die Gleichungen (2.17) und (2.18) zur Berechnung der Wirbelviskosität und der Wirbeldiffusivität, aber der Koeffizient c_μ und die turbulente Prandtl-Zahl σ_t werden nicht mehr als konstant angesehen, sondern sie werden aus den algebraischen Beziehungen berechnet.

Fu et al. (1988) empfehlen ein Modell zweiter Ordnung für die turbulenten Spannungen, wenn das Konzept der Wirbelviskosität nicht anwendbar ist. Sie zeigen, daß auch die algebraischen Modelle in diesen Fällen keine entscheidenden Vorteile bringen, da der Einfluß des von ASM vernachlässigten diffusiven und konvektiven Impulstransports auf die turbulenten Größen wesentlich sein kann.

Modelle zweiter Ordnung:

Die Turbulenzmodelle zweiter Ordnung gehen von einem vollständigen Satz von Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen und die turbulenten Wärmeflüsse aus. Solche Modelle sind von Malin und Younis (1990), Jones und Musonge (1988) und Launder et al. (1976) hergeleitet worden.

Dank einer detaillierten Beschreibung des Turbulenztransports sind diese Modelle besser geeignet für komplexe Strömungen, in denen die Annahme der Modelle erster Ordnung zu grob sind. Außerdem werden besondere Einflüsse, wie z.B. der Auftrieb, automatisch berücksichtigt.

Gegen eine breitere Anwendung der Modelle zweiter Ordnung spricht bisher der Sachverhalt, daß eine große Zahl von Transportgleichungen zu lösen ist und daß die Zahl der durch Experimente zu validierenden empirischen Koeffizienten sehr groß ist. So enthalten die vollständigen Modelle zweiter Ordnung 12 Transportgleichungen und 27 oder mehr empirische Koeffizienten.

2.2.3 Renormalisierungs-Gruppen Methode

Die RNG Methode ist ein allgemeingültiges Gerüst zur Entwicklung von physikalischen Modellen. Mit dieser Methode wird eine komplizierte Dynamik von physikalischen Problemen durch sogenannte 'coarse-grained' Gleichungen beschrieben, denen das großskalige und langzeitliche Verhalten des physikalischen Systems unterworfen werden. Die RNG Methode wird auch zur Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle angewendet, siehe V. Yakhot und S.A. Orszag (1986). Die Grundidee der RNG Methode besteht dabei aus der Beseitigung kleinskaliger Wirbelstrukturen. Dies geschieht auf folgende Weise. Das gesamte Wellenzahl-Spektrum der Schwankungen in einer turbulenten Strömung erstreckt sich von kleinen Wellenzahlen $\tilde{k}_0=2\pi/L$ für die großskaligen Wirbelstrukturen bis zu großen Wellenzahlen Λ für die kleinsten Wirbelstrukturen, die durch die viskosen Kräfte vernichtet werden. Mit der RNG Methode wird eine schmale Bandbreite in der Nähe von Λ beseitigt, so daß sich das Spektrum in den Bereich $\tilde{k}_0 \leq \tilde{k} \leq \Lambda e^{-\ell}$ mit $\ell \ll 1$ reduziert. Die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen für den reduzierten Bereich des Spektrums sind ein modifiziertes System der Navier-Stokes-Gleichungen mit einer modifizierten Wirbelviskosität, mit modifizierter Kraft und mit modifizierter nicht-linearen Kopplung. Das Eliminationsverfahren der Bandbreite wird iterativ wiederholt. Werden die kleinskaligen Wirbelstrukturen mit der RNG-Methode beseitigt, nimmt die effektive Reynolds-Zahl des Systems ab. Gleichzeitig nimmt die effektive Wirbelviskosität von dem molekularen Wert ν aus zu. Die Turbulenzinformation der Wirbelstrukturen, die mit dieser Methode eliminiert werden, wird durch die Zunahme der effektiven Wirbelviskosität berücksichtigt. So behandelt, können mit den Navier-Stokes-Gleichungen turbulente Strömungen mit hohen Reynolds-Zahlen auf groben Gittern numerisch berechnet werden. Ein Beispiel für die Anwendung der RNG Methode bei statistischen Turbulenzmodellen ist die Entwicklung eines RNG k- ϵ Modells, siehe Orszag et al. (1993). Das RNG k- ϵ Modell unterscheidet sich damit vom Standard k- ϵ Modell und bringt folgende Vorteile:

- Die Koeffizienten und die Funktionen im RNG Modell werden durch die Theorie und nicht durch Empirismus hergeleitet, deshalb kann das Modell für einen weiteren Bereich als der des statistischen k- ϵ Modells ohne Anpassungen der Koeffizienten verwendet werden.
- Modifizierungen für kleine Reynolds-Zahlen sind in der RNG-Theorie schon berücksichtigt. Deshalb sind ad hoc eingeführte Korrekturfunktionen, wie bei konventionellen k- ϵ Modellen für kleine Reynolds-Zahlen, nicht erforderlich.
- Die Transportgleichung für ϵ enthält neue Terme im Vergleich zum Standard k- ϵ Modell. Diese Terme erlauben eine bessere Simulation von abgelösten Strömungen, Staupunkt-Strömungen und wirbelbehafteten Strömungen.

2.3 Grobstruktursimulation

Im Rahmen der Grobstruktursimulation (*Large-Eddy Simulation* - LES) werden die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie mit Hilfe eines Filteroperators im Volumen gemittelt. Dies stellt den Hauptunterschied gegenüber der stati-

stischen Betrachtungsweise dar, in denen die Grundgleichungen zeitlich gemittelt werden. Verschiedene Operatoren werden im Rahmen der Grobstruktursimulation benutzt, darunter nichtlineare Operatoren, wie der von Leonard (1974) angewendete Gauss-Operator, und lineare Operatoren, wie Box-Filter, siehe dazu Schumann (1973). Unter Anwendung eines linearen Operators werden die Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen mit Wellenlängen größer als die Maschenweite direkt aufgelöst. Bei der Mittelung der Fluktuationen mit Wellenlängen kleiner als die Maschenweite, die den kleinskaligen Wirbelstrukturen entsprechen und die sogenannte Feinstruktur bilden, treten unbekannte Terme auf. Die in der Feinstruktur enthaltenen Turbulenzinformationen muß modelliert werden. Die mit Hilfe eines linearen Operators im Volumen gemittelten Bilanzgleichungen enthalten mit der Anwendung des Gauss-Theorems die folgenden Terme, Grötzbach (1987):

$$(2.20) \quad \overline{^j U_i U_j} = \overline{^j U_i} \overline{^j U_j} + \overline{^j U_i' U_j'}$$

$$(2.21) \quad \overline{^j U_i T} = \overline{^j U_i} \overline{^j T} + \overline{^j U_i' T'}$$

Dabei bedeutet $\overline{^j U_i U_j}$ den Mittelwert der turbulenten Spannung gebildet über die Maschenfläche mit der Normalen in j-Richtung. Die ersten Terme auf der rechten Seite stellen die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse dar, die direkt aus dem aufgelösten Geschwindigkeitsfeld berechnet werden können. Die zweiten Terme stellen den entsprechenden Beitrag der Feinstruktur dar und sind zu modellieren. Die Turbulenzinformation der Feinstruktur hängt nicht nur von der Maschenweite ab, sondern auch von Reynolds- und Prandtl-Zahlen. Diese Aussage beruht auf einer Analyse des Energie-Spektrums der turbulenten kinetischen Energie sowie der Temperaturfluktuationen über der Wellenzahl \tilde{k} für unterschiedliche Reynolds- und Prandtl-Zahlen, siehe Abbildung 2.1.

Die großskaligen Wirbelstrukturen mit der Wellenlänge ungefähr L beinhalten hohe kinetische Energie. L ist ein charakteristisches makroskopisches Längenmaß der Turbulenz, das von der Geometrie und den Randbedingungen abhängt. In diesem Bereich der Wellenlänge wird die Turbulenz durch Instabilitäten der Hauptströmung erzeugt. Beim Zerfall der großskaligen Wirbelstrukturen in kleinskalige wird das Längenmaß der Wirbel unabhängig von L und von der Geometrie. Der Zwischenbereich des Energiespektrums, der Trägheitsbereich genannt wird, kann durch das Kolmogorov Spektrum beschrieben werden:

$$(2.22) \quad E(\tilde{k}) = \alpha \epsilon^{2/3} \tilde{k}^{-5/3}$$

Hier ist α ein Koeffizient, der von der Strömung unabhängig angesehen werden kann. Der Energie-Zerfall endet bei den kleinskaligen Wirbelstrukturen, in denen die mechanische Energie durch die molekularen Wechselwirkungen dissipiert wird. Der Bereich der Wellenlänge der Wirbel ist hier ungefähr:

$$(2.23) \quad \eta = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$$

Da das Spektrum der turbulenten Schubspannungen steiler als das der turbulenten kinetischen Energie abfällt, enthalten die kleinskaligen Wirbelstrukturen nur

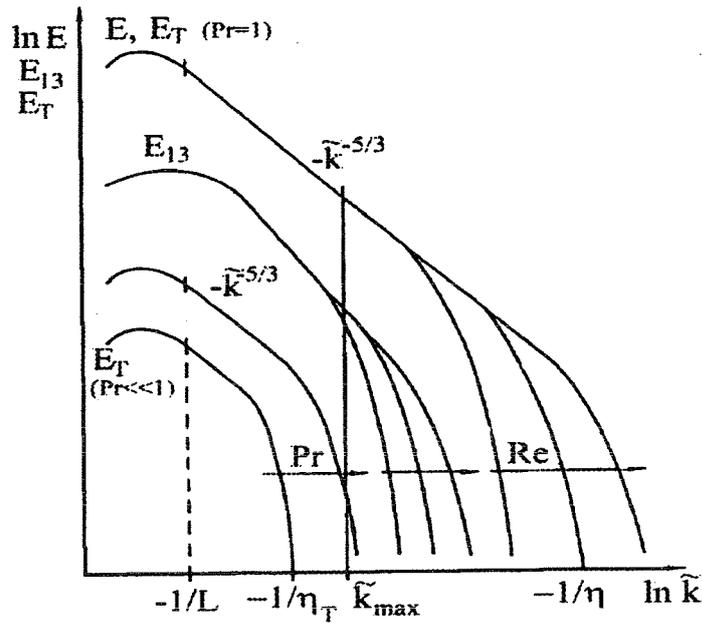


Abbildung 2.1: Spektren der turbulenten kinetischen Energie E , der turbulenten Schubspannung E_{13} und der Temperaturfluktuationen E_T über der Wellenzahl \tilde{k} für unterschiedliche Reynolds- und Prandtl-Zahlen.

Energie ohne Schubspannungskräfte. Dies bedeutet, daß das Geschwindigkeitsfeld im Bereich der großen Wellenzahlen lokal isotrop ist.

Das Spektrum der Temperaturfluktuationen zeigt für Prandtl-Zahl ungefähr eins eine ähnliche Abhängigkeit von der Wellenzahl \tilde{k} , die durch das Batchelor Spektrum beschrieben werden kann:

$$(2.24) \quad E_T(\tilde{k}) = \beta \epsilon^{-1/3} \epsilon_T \tilde{k}^{-5/3}$$

Hier ist β ein empirischer Koeffizient. Die Vernichtung der Temperaturfluktuationen finden im Bereich der kleinen Wellenlänge η_T statt:

$$(2.25) \quad \eta_T = (\Gamma^3 / \epsilon)^{1/4}$$

Die unterschiedliche Wichtigkeit der Modellierung bei der Grobstruktursimulation von der Maschenweite Δx , der Reynolds- und Prandtl-Zahl kann durch eine Analyse der oben beschriebenen Energie-Spektren untersucht werden. Die Maschenweite bestimmt die Trennung der Spektren in zwei Teile zwischen den Fluktuationen mit Wellenzahl kleiner als $\tilde{k}_{\max} = \pi / \Delta x$, die direkt gelöst werden, und den Fluktuationen mit Wellenzahl größer als \tilde{k}_{\max} , die die zu modellierenden Feinstruktur nachbilden. In der Abbildung 2.1 ist die Feinstruktur nicht lokal isotrop, da ein Teil des Spektrums der turbulenten Schubspannungen im Bereich der Feinstruktur liegt. Eine Abnahme der Maschenweite reduziert sowohl die zu modellierende Turbulenzinformation als auch den Aufwand für die Modellierung, weil ein höherer Anteil der

Feinstruktur lokal isotrop wird und ein immer größerer Teil der Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen direkt simuliert wird.

Die Breite der Energie-Spektren der turbulenten kinetischen Energie und der turbulenten Schubspannungen nimmt mit der Reynolds-Zahlen in Richtung höhere Wellenzahlen zu. Deshalb nimmt die Breite des Spektrums besonders bei hohen Frequenzen, also in der Feinstruktur, zu. Dies bedeutet, daß der Beitrag der Turbulenzmodelle für die Feinstruktur wichtiger wird.

Die Prandtl-Zahl beeinflußt das Spektrum der Temperaturfluktuationen. Bei kleinen Prandtl-Zahlen werden die Temperaturfluktuationen durch hohe molekulare Wärmeleitfähigkeit schnell gedämpft. Das Spektrum der Temperaturfluktuationen kann so schmal werden, daß ein Modell für den turbulenten Wärmetransport nicht mehr erforderlich ist, da die turbulenten Wärmeflüsse direkt gelöst werden.

Obwohl die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse in der Feinstruktur formal gleich den turbulenten Spannungen und Wärmeflüssen in der statistischen Betrachtungsweise sind, unterscheiden sie sich in der physikalischen Bedeutung. Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse, die in der Grobstruktursimulation zu modellieren sind, stellen nicht die gesamte Turbulenzinformation dar, wie bei der statistischen Betrachtungsweise, sondern nur die Informationen der Feinstruktur. Deshalb ist der Beitrag der Turbulenzmodelle zur numerischen Simulation in der Grobstruktursimulation weniger wichtig als in den statistischen Modellen. Außerdem ist auch der Aufwand der Modellierung in der Grobstruktursimulation niedriger, weil ein großer Anteil der Feinstruktur lokal isotrop ist. Diese zwei Aspekte stellen den Vorteil der Grobstruktursimulation gegenüber der statistischen Betrachtungsweise dar.

Die Turbulenzmodelle für die Feinstruktursimulation sind formal ähnlich wie die statistischen Turbulenzmodelle. Eines der am meisten benutzten Turbulenzmodelle ist das Smagorisky Modell (1963). Dieses Modell entspricht dem statistischen Prandtl'schen Mischungswegmodell. Es benutzt das Konzept der Wirbelviskosität, die mit Hilfe algebraische Beziehung berechnet wird.

Turbulenzmodelle erster Ordnung wurden auch für die Grobstruktursimulation entwickelt. Es wird nur die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie gelöst, Schumann (1973). In der Tat wird die Filterlänge als Längenmaß der Turbulenz in der Feinstruktur benutzt, deshalb ist die Anwendung einer Transportgleichung für die Dissipationsrate ϵ nicht notwendig.

Turbulenzmodelle zweiter Ordnung, wie das Spannungsmodell, wurden im Rahmen der Grobstruktursimulation versuchsweise verwendet, Deardoff (1974). Ihre Anwendung bringt keinen entscheidend Vorteil gegenüber den Modellen erster Ordnung, weil die Annahme der lokalen Isotropie im großen Teil der Feinstruktur gültig ist. Deshalb würde die Benutzung eines Turbulenzmodells, wie das TMBF, mit einer Beschreibung zweiter Ordnung des turbulenten Wärmetransports keinen besonderen Vorteil für die Simulationen turbulenter Strömungen bringen.

Grobstruktursimulationen wurden zuerst für große Reynolds-Zahlen von Deardoff (1970) und Schumann (1973) durchgeführt. Bei hohen Reynolds-Zahlen werden die Turbulenzmodelle für die Feinstruktur zwar wichtiger aber universeller, also einfacher. Der Einfluß von kleinen Reynolds-Zahlen auf die Spektren wurde

von Grötzbach (1977) untersucht. Dabei wurden entsprechende Modellerweiterungen durchgeführt. Für die Simulation einiger Phänomene, wie Stratifikation, Rotation, Kompressibilität und Verbrennung, ist die Entwicklung neuer Modelle für die Grobstruktursimulation erforderlich. Der Aufwand dieser Entwicklungen ist bei der Simulation von Kompressibilität und Verbrennung höher, weil diese Phänomene besonders für die Feinstruktur dargestellt werden müssen, siehe Chollet et al. (1994).

2.4 Direkte numerische Simulation

In den direkten numerischen Simulationen (DNS) werden sowohl die großskaligen als auch die kleinskaligen Wirbelstrukturen direkt berechnet, siehe Kim et al. (1987). Die DNS können als ein Fall der Grobstruktursimulation angesehen werden, wenn die Maschenweite so klein und \tilde{k}_{\max} in der Abbildung 2.1 so groß wird, daß alle Energiespektren direkt berechnet werden. Die turbulenten Spannungen und Wärmeflüsse der Feinstruktur werden gleich null.

Die Auflösung der kleinskaligen Wirbelstrukturen erfordert eine sehr feine Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen. Je größer die Reynolds-Zahl der Strömung wird, desto breiter wird das Spektrum der Längen- und Zeitskalen der Wirbelstrukturen. Deshalb hängt der Diskretisierungsaufwand von der Reynolds-Zahl ab. Eine Quantifizierung dieses Aufwands kann folgenderweise abgeschätzt werden. Das Rechengebiet muß bei direkten numerischen Simulationen die größte Wirbelstruktur mit Längenmaß L enthalten und die kleinste Wirbelstruktur mit Längenmaß η auflösen. Im Fall eines gleichmäßigen Gitters, z.B. bei homogener Turbulenz, soll die Zahl der Zellen in einer Richtung mindestens L/η betragen. Dieses Verhältnis ist proportional zu $Re^{3/4}$, siehe Tennekes und Lumley (1976). Für dreidimensionale und instationäre Simulation ist die Zahl der Zellen ungefähr der Größenordnung von Re^3 . Wegen der geringen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit heutiger Computer werden die DNS durch die Reynolds-Zahl stark begrenzt. Deshalb sind die DNS bisher noch auf kleine Turbulenzgrade der Strömung und auf einfache Geometrie beschränkt. Der Vorteil der DNS gegenüber der statistischen Betrachtungsweise und der Grobstruktursimulation ist, daß kein durch Turbulenzmodelle eingeführter Empirismus verwendet wird. Direkte numerische Simulationen werden hauptsächlich zur Validierung und Hilfe bei der Entwicklung von Turbulenzmodellen benutzt, die in der statistischen Betrachtungsweise und in der Grobstruktursimulation angewendet werden.

2.5 Dynamik nichtlinearer Systeme

In Rahmen der modernen Theorie nichtlinearer Dynamik in dissipativen Systemen entwickelte Edward N. Lorenz (1963) ein hydrodynamisches Modell, das eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen darstellt. Diese Gleichungen führen ein Gebilde im Phasenraum, das ein regelloses Verhalten der Trajektorien offenbart. Unabhängig von Lorenz entdeckten Ruelle und Takens (1971) in ihrer Modellbeschreibung zur Turbulenz auch ein begrenztes Gebiet, das im Phasenraum gleichsam die

Trajektorien global anzieht und sie lokal wieder exponentiell voneinander entfernt. Diese Region des Phasenraums wurde seltsamer Attraktor genannt.

Die Dimension des Attraktors bestimmt die Anzahl N der turbulenten Freiheitsgrade des untersuchten Phänomens. Dies bedeutet, daß N Parameter existieren, die zu einer richtigen Annäherung der Strömung notwendig sind. Deshalb können turbulente Strömungen auch bei unendlichdimensionalen Problemen durch eine endliche Anzahl N von Parametern beschrieben werden. Dies stellt eine neue Möglichkeit dar, charakteristische Eigenschaften der Turbulenz, wie Durchmischung und Unvorhersagbarkeit der Bewegung, auf der Grundlage deterministischer Gleichungen zu beschreiben.

Trotz der Verarbeitung zu endlichdimensionalen Problemen bleibt die numerische Berechnung der großskaligen Turbulenzstrukturen ein mühsames Problem. Zwei große Schwierigkeiten treten auf: die Attraktordimension d_L und die Wahl der richtigen Parameter. In vielen Fällen ist die Attraktordimension und daher die Anzahl N der notwendigen Parameter zu groß für die Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der heutigen Computer. Die gegenwärtig beste Abschätzung, wie groß die Attraktordimension höchstens sein kann, lautet nach Ruelle (1982):

$$\frac{d_L}{\text{Volumen}} \leq 0.175 \eta_T^{-3} .$$

Die aus dieser Gleichung berechneten turbulenten Freiheitsgrade reichen in der Fluidmechanik von 10^9 für Experimente in Windkanälen bis 10^{20} für geophysikalische Strömungen. Die heutigen Computer sind teilweise in der Lage, mit einigen signifikanten Problemen in der Fluidmechanik, wie Windkanäle und Aeronautik, umzugehen. Jedoch bleiben Berechnungen von komplexen Strömungen in Meteorologie und Plasma nur möglich unter Verwendung von vereinfachten Modellen.

Ein weiteres Problem ist die Wahl der relevanten Parameter zur richtigen Beschreibung einer turbulenten Strömung. Die Aussage, daß die Attraktordimension gleich der Anzahl N der turbulenten Freiheitsgrade ist, bedeutet, daß die Strömung durch N Parameter beschrieben werden kann. Jedoch weist nichts darauf hin, welche Parameter das sind. Die Wahl dieser Parameter kann mühsamer sein als die Bestimmung der notwendigen Anzahl N , siehe Foias et al. (1985).

Eine lange Reihe von mathematischen Modellen, die das Einsetzen turbulenten Verhaltens und die entwickelte Turbulenz beschreiben, werden auf der Basis der Theorie der Dynamik nichtlinearer Systeme entwickelt, wie z.B. Argoul et al. (1989), Aubry et al. (1988) und Großmann (1990).

3. TMBF, ein Turbulenzmodell für Auftriebsströmungen

3.1 Beschreibung des turbulenten Impulstransports

Das im k - ϵ Modell verwendete Prinzip der Wirbelviskosität ν_t wird im TMBF zur Beschreibung des turbulenten Impulstransports übernommen. Die turbulenten Spannungen werden mit dem Boussinesq-Ansatz in Analogie zum Newtonischen Ansatz für die Schubspannungen bei zähen Flüssigkeiten zur Darstellung des molekularen Spannungstensors modelliert:

$$(3.1) \quad -\overline{U'_i U'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} .$$

Die Wirbelviskosität wird mit Hilfe der Kolmogorov-Prandtl-Beziehung aus den Turbulenzgrößen k und ϵ berechnet:

$$(3.2) \quad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} .$$

Die Transportgleichungen für k und ϵ werden im TMBF gelöst.

Die exakte Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k lautet nach Hinze (1975) oder Jischa (1982) folgendermaßen:

$$(3.3) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\overline{U}_i \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{K_k} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{U'_i \left(\frac{U'_j U'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}_{D_k} - \underbrace{\overline{U'_i U'_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\beta g_i \overline{U'_i T'}}_{G_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_j}}_{\epsilon} .$$

Die kinetische Energie der Turbulenz wird durch das Hauptströmungsfeld konvektiv transportiert, Term K_k , und durch diffusiven Transport örtlich umverteilt, Term D_k .

Der Produktionsterm P_k stellt die Erzeugung der kinetischen Energie der Turbulenz durch Wechselwirkungen der turbulenten Spannungen mit dem Gradienten der mittleren Geschwindigkeit dar. Damit geht Energie von der Hauptströmung zum Turbulenzfeld über.

Der Auftriebsterm G_k stellt den Austausch zwischen potentieller Energie des Systems und kinetischer Energie dar. Bei stabiler Temperaturschichtung ist G_k ein Senkenterm, bei instabiler Schichtung ein Quellterm.

Die Dissipationsrate ϵ stellt die Vernichtung der turbulenten kinetischen Energie durch viskose Kräfte dar. Dieser Term ist in der k-Gleichung immer negativ.

Da D_k und P_k unbekannte Korrelationen enthalten, werden sie durch die aus der Literatur für hohe Reynolds-Zahlen bekannten Schließungs-Ansätze von Rodi (1972) ersetzt. Die dreifach Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen und die zweifach Korrelation der Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen, die zusammen den Diffusionstransport von k durch die Turbulenzbewegung darstellen, werden durch ein einfaches Gradientenmodell dargestellt. Es wird gesetzt:

$$(3.4) \quad \overline{U'_i \left(\frac{U'_j U'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i}.$$

Die mit dem Boussinesq-Ansatz modellierten turbulenten Spannungen werden in den Produktionsterm von k eingeführt. Man schreibt:

$$(3.5) \quad P_k = -\overline{U'_i U'_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}.$$

Eine exakte Transportgleichung für die Dissipationsrate ϵ für hohe Reynolds-Zahlen, bei denen ihre Produktion durch die Hauptströmung unter der Annahme der lokalen Isotropie vernachlässigbar ist, wurde von Tennekes und Lumley (1972) hergeleitet. Die Gleichung lautet:

$$(3.6) \quad \underbrace{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}_{K_\epsilon} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \overline{U'_i} \left(\frac{\partial \overline{U'_j}}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right)}_{D_\epsilon} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x'_j} \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x'_k} \frac{\partial \overline{U'_j}}{\partial x'_k}}_{P_\epsilon} - \underbrace{2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{U'_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_{V_\epsilon}.$$

Die Dissipationsrate ϵ der turbulenten kinetischen Energie wird bei hohen Reynolds-Zahlen durch die Wirbelfadenstreckung produziert, Term P_ϵ , und durch viskose Vernichtung reduziert, Term V_ϵ .

Die Terme der Transportgleichung (3.6) auf der rechten Seite enthalten weitere unbekannte Korrelationen, die modelliert werden müssen. Dabei wird für den

turbulenten Anteil des Diffusionsterms D_ϵ ein Gradientenansatz nach Rodi (1972) benutzt. Es wird angesetzt:

$$(3.7) \quad - \left(\overline{\rho U'_i \left(\frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right)^2} + 2 \frac{\nu}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \right)} \right) = \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} .$$

Außerdem wird die von Launder und Spalding (1974) vorgeschlagene Modellierung für die Terme P_ϵ und V_ϵ verwendet. Man setzt:

$$(3.8) \quad P_\epsilon + V_\epsilon = -2\nu \overline{\frac{\partial U'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial U'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial U'_j}{\partial x'_k}} - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 U'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} = \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k}{\epsilon} - c_{\epsilon 2} \right) .$$

Obwohl der Auftriebseinfluß in der ϵ -Gleichung nicht vorhanden ist, soll dieser Einfluß dennoch durch einen Modellierungsansatz berücksichtigt werden. Hier wird die von Rodi (1980) vorgeschlagene Modifizierung des Launder-Modells für den Produktionsterm P_ϵ benutzt:

$$(3.9) \quad P_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k}{\epsilon} \right) \Rightarrow \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + G_k}{\epsilon} (1 + c_{\epsilon 3} Ri_f) \right) .$$

Die hier eingeführte sogenannte Fluß-Richardson-Zahl Ri_f ist definiert als das Verhältnis von Auftriebsproduktion G_v durch Querschwankungen V' ,

$$(3.10) \quad G_v = -\beta g_v \overline{V' T'} ,$$

zu Gesamtproduktion $(P_k + G_k)$, in Kurzform:

$$(3.11) \quad Ri_f = - \frac{G_v}{(P_k + G_k)} .$$

Die Auftriebskorrektur in der Gleichung (3.9) zeigt die maximale Auswirkung in vertikaler Auftriebsschicht und die minimale in horizontaler Auftriebsschicht. Im ersten Fall ist die Auftriebsproduktion durch die Querschwankungen G_v gleich null und die Gleichung (3.9) reduziert sich zu:

$$(3.12) \quad P_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k}{\epsilon} \right) \Rightarrow \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + G_k}{\epsilon} \right) .$$

Deshalb wird die Auftriebskorrektur zu G_k . Im zweiten Fall entspricht die Auftriebsproduktion G_v dem gesamten Auftriebsbeitrag G_k , deshalb schreibt sich die Gleichung (3.9) zu:

$$(3.13) \quad P_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k}{\epsilon} \right) \Rightarrow \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + 0.2 G_k}{\epsilon} \right) .$$

In einer horizontalen Auftriebsschicht beträgt die Auftriebskorrektur nur ein fünftel von G_k , wenn der Standard-Wert 0.8 für $c_{\epsilon 3}$ benutzt wird.

Die für hohe Peclet- bzw. Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für k und ϵ können nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$(3.14) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\overline{U}_i \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{K_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{D_k} + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\beta g_i \overline{U}_i' T'}_{G_k} - \epsilon,$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \underbrace{\overline{U}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}_{K_\epsilon} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}}_{D_\epsilon} + \underbrace{\frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + G_k}{\epsilon} (1 + c_{\epsilon 3} Ri_f) - c_{\epsilon 2} \right)}_{P_\epsilon + V_\epsilon}.$$

Zur Nachbildung einer turbulenten, auftriebsbehafteten Strömung sollen die für hohe Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für k und ϵ auf den Bereich von kleinen Reynolds-Zahlen erweitert werden. Dieses Ziel wird durch die Einführung von zusätzlichen Gliedern in die Transportgleichungen für k und ϵ und von weiteren Korrekturfunktionen erreicht. Für das TMBF wird das von Nagano und Hishida (1987) entwickelte Modell für kleine Reynolds-Zahlen übernommen.

In die Kolmogorov-Prandtl-Beziehung zur Berechnung der Wirbelviskosität ν_t wird zusätzlich eine Dämpfungsfunktion f_μ eingeführt. Es wird gesetzt:

$$(3.16) \quad \nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}.$$

Mit Hilfe dieser Funktion f_μ sollen zwei physikalische Effekte berücksichtigt werden, die sich auf die turbulenten Spannungen auswirken und im Wandbereich zu beachten sind: a) der Einfluß von kleinen Reynolds-Zahlen und b) der der Wand. Der erste Einfluß ist auf die vorherrschenden viskosen Kräften in der Strömung zurückzuführen. Der zweite betrifft die Dämpfung der Geschwindigkeitsfluktuation senkrecht zur Wand. Da die Wandschubspannung τ_w vom Druckgradienten in Strömungsrichtung und von der Reynolds-Zahl abhängt, ist τ_w ein passender Strömungsparameter zur Erfassung der oben zitierten Effekte. Deshalb haben Nagano und Hishida die Dämpfungsfunktion f_μ vorgeschlagen, die von der lokalen Reynolds-Zahl Re_τ wie folgt abhängt:

$$(3.17) \quad f_\mu = [1 - \exp(-Re_\tau/26.5)]^2.$$

Dabei gilt

$$(3.18) \quad Re_\tau = \frac{U^* y}{\nu} = \sqrt{\frac{\tau_w y}{\rho \nu}}.$$

Hier ist y der Wandabstand. Die Funktion f_μ wird bei hohen Reynolds-Zahlen zu eins.

Für den Bereich von kleinen Reynolds-Zahlen wird ein zusätzlicher Term D ,

$$(3.19) \quad D = -2\nu \left(\frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \right)^2,$$

in die Transportgleichung für k eingeführt. Obwohl dieser Term den Beitrag zur viskosen Dissipation in der laminaren Wandschicht darstellt, ist der Grund der Einführung dieses Terms nach Jones und Launder (1972 und 1973) mehr numerisch als physikalisch. Der Term D erlaubt die Anwendung der Wandbedingung $\epsilon_w = 0$, so daß die Bilanz in der Transportgleichung für k bestehen bleibt, denn der Term D entspricht dem richtigen physikalischen Wert von ϵ an der Wand. In der Tat wird die Dissipation von k an der Wand bei einer turbulenten zweidimensionalen Rohrströmung wie folgt definiert:

$$(3.20) \quad \epsilon_w = -\nu \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 \right] \approx D.$$

Hier ist y die Richtung senkrecht zur Wand. Die Anwendung der Wandbedingung $\epsilon_w = 0$ bringt gewisse numerische Vorteile bei der Lösung der Transportgleichung für ϵ . Der Term D wird im Bereich für hohe Reynolds-Zahlen vernachlässigbar.

Entsprechend wird ein zusätzlicher Term E in die Transportgleichung für ϵ eingeführt. Der Term E hat die Form:

$$(3.21) \quad E = \nu \nu_t (1 - f_\mu) \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2.$$

Dieser Term stellt den Beitrag zur Produktion von ϵ durch die viskosen Kräfte im Wandbereich dar. Seine Einführung ist notwendig, damit eine sinnvolle Verteilung der kinetischen Energie der Turbulenz im Wandbereich nachgebildet werden kann. Auch dieser Term wird vernachlässigbar bei hohen Reynolds-Zahlen.

Aus den von Batchelor und Townsend (1948) sowie von Comte-Bellot und Corrsin (1966) durchgeführten Experimenten des Zerfalls der isotropen Turbulenz einer Strömung hinter einem Gitter wird eine Exponentialfunktion für den Abfall der kinetischen Energie der Turbulenz in Strömungsrichtung x bestimmt:

$$(3.22) \quad k \propto x^{-n}.$$

Der Wert des Exponenten n beträgt ungefähr 1.1 bei hohem Turbulenzgrad, d.h. bei hohen Reynolds-Zahlen, und steigt auf 2.5 bei kleinem Turbulenzgrad. Für diese Strömung können die Transportgleichungen für k und ϵ , siehe Gleichungen 3.14 und 3.15, sehr vereinfacht werden. Man erhält:

$$(3.23) \quad \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} = -\epsilon,$$

$$(3.24) \quad \overline{U} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = -c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}.$$

Wenn das Gesetz des Abfalls für k (3.22) in diese Gleichungen eingesetzt wird, ergibt sich:

$$(3.25) \quad c_{\epsilon 2} = \frac{n+1}{n}.$$

Bei hohen Reynolds-Zahlen, bei denen $n=1.1$ gilt, nimmt $c_{\epsilon 2}$ den Standardwert 1.92 an. Wenn der Exponent n auf 2.5 erhöht wird, reduziert sich der Wert von $c_{\epsilon 2}$ auf 1.4. Deshalb muß eine Korrekturfunktion f_2 als Vorzahl für den empirischen Koeffizient $c_{\epsilon 2}$ eingeführt werden, um den Vernichtungsterm $-c_{\epsilon 2}(\epsilon^2/k)$ in der Transportgleichung für ϵ auf kleine Reynolds-Zahlen erweitern zu können. Nagano und Hishida benutzen die von Launder und Jones (1972 und 1973) vorgeschlagene Korrekturfunktion für den empirischen Koeffizienten $c_{\epsilon 2}$:

$$(3.26) \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-\text{Re}_t^2),$$

mit

$$(3.27) \quad \text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}.$$

Re_t wird auch als turbulente Reynolds-Zahl bezeichnet. Bei hohen Reynolds-Zahlen, d.h. bei hohen turbulenten kinetischen Energien, nimmt die Funktion f_2 den Wert eins an. Die Gleichung (3.8) wird demnach unter Berücksichtigung der von Rodi vorgeschlagenen Auftriebskorrektur und der Funktion f_2 wie folgt modifiziert:

$$(3.28) \quad P_\epsilon + V_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + G_k}{\epsilon} (1 + c_{\epsilon 3} R_f) - f_2 c_{\epsilon 2} \right).$$

Zur Erweiterung des Gültigkeitsbereichs des TMBF wird die von Rodi (1972) vorgeschlagene Korrekturfunktion $c_\mu^* = c_\mu f\left(\frac{P_k}{\epsilon}\right)$ für den dimensionslosen empirischen Faktor c_μ verwendet. Sein Wert wurde mit Hilfe von Experimenten zu 0.09 bestimmt. Es handelt sich dabei um Experimente, bei denen sich die Produktion P_k und die Dissipation ϵ der kinetischen Energie der Turbulenz im lokalen Gleichgewicht befinden. Dieses Gleichgewicht ist nicht vorhanden in Strömungen mit turbulentem Nachlauf, in denen der Geschwindigkeitsunterschied quer zur Strömungsrichtung nur einen kleinen Anteil der Anströmungsgeschwindigkeit ausmacht. In diesen Fällen nimmt c_μ unterschiedliche Werte an, wie Rodi (1975) gezeigt hat. Diese Korrekturfunktion drückt die Abhängigkeit dieses empirischen Koeffizienten vom Verhältnis Produktion zu Vernichtung der turbulenten kinetischen Energie aus. Wenn dieses Verhältnis eins ist, nimmt auch die Korrekturfunktion den Wert eins an. Sie wurde jedoch für Strömungen ohne Auftriebseffekt ausgewertet, in denen der Beitrag des Auftriebsterms G_k in der Bilanz der Transportgleichung für k vernachlässigt wurde. In einem Modell für Auftriebsströmungen soll dieser Beitrag berücksichtigt werden, deshalb wird im TMBF die von Rodi vorgeschlagene Funktion entsprechend modifiziert. Als Produktionsanteil der kinetischen Energie der Turbulenz wird also nicht der Term P_k allein sondern die Summe $P_k + G_k$ betrachtet und folgendermaßen eingeführt:

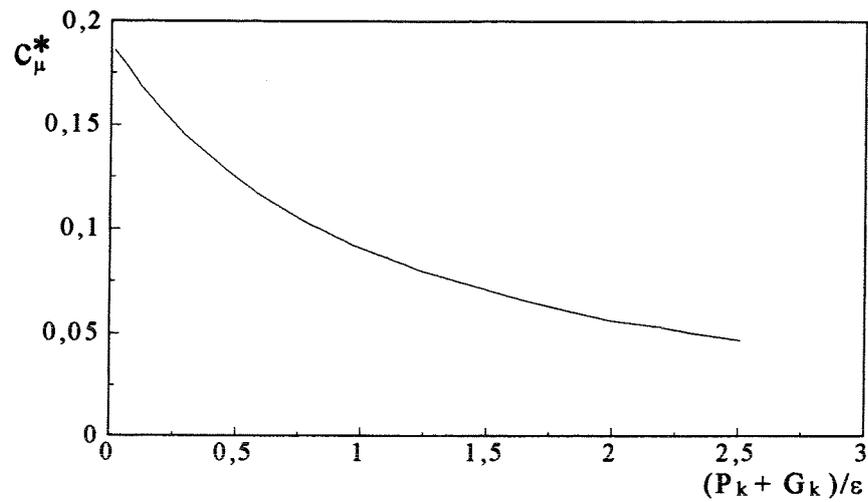


Abbildung 3.1: Korrekturfunktion für c_μ nach Rodi.

$$(3.29) \quad c_\mu^* = c_\mu f\left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon}\right) = c_\mu \left(\frac{2}{3}\right) \frac{1 - \alpha}{0.125 \omega} \frac{1 - \frac{1}{\omega} \left(1 - \alpha \frac{P_k + G_k}{\epsilon}\right)}{\left[1 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon} - 1\right)\right]^2}.$$

In dieser Gleichung werden $\omega = 2.8$ und $\alpha = 0.3$ gesetzt. In der Abbildung 3.1 ist die Funktion dargestellt.

In der Tabelle 3.1 auf Seite 37 sind die für kleine Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für k und ϵ im Zusammenhang dargestellt.

3.2 Beschreibung des turbulenten Wärmetransports

3.2.1 Die Transportgleichungen für die turbulenten Wärme-flüsse

Der turbulente Wärmetransport wird durch die Transportgleichungen für die Wärme-flüsse, die Varianz der Temperatur und deren Dissipationsrate beschrieben. Die Transportgleichungen für die Wärme-flüsse werden aus der Impuls- und Energie-gleichung abgeleitet, vergl. Hinze (1975) und Jischa (1982). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{U_i' T'}}{\partial t} + \underbrace{\overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i' T'}}{\partial x_j}}_{K_{\overline{U_i' T'}}} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\overline{U_i' U_j' T'}}_{TD_{\overline{U_i' T'}}} + \frac{1}{\rho} \delta_{ij} \overline{p' T'} - \underbrace{\overline{\Gamma U_i' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} - \overline{\nu T' \frac{\partial U_i'}{\partial x_j}}}_{MD_{\overline{U_i' T'}}} \right) \\
 &\quad - \underbrace{\left(\overline{U_i' U_j' \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}} + \overline{U_j' T' \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} \right)}_{P_{\overline{U_i' T'}}} - \underbrace{\beta g_i \overline{T'^2}}_{G_{\overline{U_i' T'}}} \\
 (3.30) \quad &\quad + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}}}_{\pi_i} - \underbrace{(\nu + \Gamma) \left(\frac{\partial \overline{U_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} \right)}_{\epsilon_{\overline{U_i' T'}}}.
 \end{aligned}$$

Die Größe Γ ,

$$(3.31) \quad \Gamma = \frac{\lambda}{\rho c_p},$$

ist die Diffusivität, die den molekularen Wärmetransport charakterisiert. Diese Transportgleichungen lassen sich wie folgt interpretieren. Der turbulente Wärme-fluß wird durch die Hauptströmung konvektiv transportiert, Term $K_{\overline{U_i' T'}}$, und dif-fusiv örtlich umverteilt, Terme $TD_{\overline{U_i' T'}}$ und $MD_{\overline{U_i' T'}}$. Der Term $P_{\overline{U_i' T'}}$ stellt den Produktionsterm des turbulenten Wärme-flusses dar. Er bildet den Hauptterm der Gleichung und enthält die Gradienten der mittleren Geschwindigkeit und Tempera-tur. Er produziert den turbulenten Wärme-fluß, der durch andere Terme abgebaut oder abtransportiert wird. Der Auftriebsterm $G_{\overline{U_i' T'}}$ stellt einen Quellterm für den vertikalen Wärme-fluß dar. Die letzten zwei Terme Druck-Temperatur-Korrelation π_i und molekulare Dissipation $\epsilon_{\overline{U_i' T'}}$ stellen Senkenterme dar. Unbekannte zweifach und dreifach Korrelationen erscheinen in den folgenden Termen der Gleichung (3.30):

- im turbulenten und molekularen Diffusionsterm $TD_{\overline{U_i T_i}}$ und $MD_{\overline{U_i T_i}}$,
- in der Druck-Temperatur-Korrelation π_i und
- in der molekularen Dissipation $\epsilon_{\overline{U_i T_i}}$.

Diese Terme müssen modelliert werden. Aus der Literatur sind die für hohe Peclet-Zahlen gültigen Modellierungen bekannt. Dagegen stellen die entsprechenden Modellierungen bei kleinen Peclet-Zahlen ein ungelöstes Problem dar.

Die turbulente Diffusion der Wärmeflüsse $TD_{\overline{U_i T_i}}$ wird durch Geschwindigkeits- und Druckschwankungen bewirkt. Bei hohen Peclet-Zahlen wird nur die turbulente Diffusion durch Geschwindigkeitsschwankungen modelliert, da der Beitrag der Diffusion durch Druckfluktuationen vernachlässigbar ist. Dagegen zeigen Rechnungen mit Hilfe einer DNS von Wörner und Grötzbach (1993), daß die turbulente Diffusion durch Druckschwankungen bei Naturkonvektion eine wesentliche Rolle spielt. Eine entsprechende Modellierung für kleine Peclet-Zahlen existiert nicht.

Die Druck-Temperatur-Korrelation π_i ist bei hohen Peclet-Zahlen das Hauptgegengewicht zum Produktionsterm, weil die molekulare Dissipation $\epsilon_{\overline{U_i T_i}}$ vernachlässigt werden kann. Bei lokalisotroper Turbulenz, d.h. für hohe Peclet-Zahlen, ist die Korrelation, die die molekulare Dissipation darstellt, nach Launder (1978) gleich null:

$$(3.32) \quad \epsilon_{\overline{U_i T_i}} = (\nu + \Gamma) \left(\frac{\partial U_i'}{\partial x_j} \frac{\partial T_i'}{\partial x_j} \right) = 0 .$$

Deshalb beschränkt π_i das Anwachsen von $\overline{U_i T_i}$ allein. Bei kleinen Peclet-Zahlen darf jedoch die molekulare Dissipation nicht mehr vernachlässigt werden. Außerdem modifiziert sich dabei der Beitrag von π_i in der Transportgleichung. Die Modellierung für diese zwei Senkenterme bei kleinen Peclet-Zahlen sind in der Literatur nicht vorhanden.

In dieser Arbeit wird eine neue Modellierung für die Senkenterme $\epsilon_{\overline{U_i T_i}}$ und π_i entwickelt, die bis zu kleinen Peclet-Zahlen gültig ist. In den nächsten zwei Abschnitten werden zuerst die in der Literatur schon bekannten Schließungsansätze für hohe Peclet-Zahlen vorgestellt und dann die Entwicklung der neuen Modellierung für kleine Peclet-Zahlen erläutert.

3.2.2 Die Modellierungen für hohe Peclet-Zahlen

Bei hohen Peclet-Zahlen werden der molekulare und turbulente Diffusionsterm sowie die Druck-Temperatur-Korrelation modelliert. Dagegen wird die molekulare Dissipation vernachlässigt.

Die molekulare Diffusion der Wärmeflüsse $MD_{\overline{U_i T_i}}$ wird durch den folgenden Gradientenansatz von Weissenfluh (1984) modelliert:

$$(3.33) \quad \overline{\Gamma U'_i \frac{\partial T'}{\partial x_j}} + \overline{\nu T' \frac{\partial U'_i}{\partial x_j}} = \left(\frac{\Gamma + \nu}{2} \right) \frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_j}.$$

Die skalare Form des für hohe Peclet-Zahlen von Launder (1978) vorgeschlagenen Gradientenmodells wird hier für den turbulente Diffusionsterm ausgewählt. Dementsprechend wird gesetzt:

$$(3.34) \quad \overline{U'_i U'_j T'} + \frac{1}{\rho} \delta_{ij} \overline{p' T'} = - \left(c_{TD} \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_j}.$$

Die Druck-Temperatur-Korrelation läßt sich aus einem turbulenten Anteil π_{i1} , einem Hauptströmungsanteil π_{i2} , einem Auftriebsanteil π_{i3} und einer Wandkorrektur w_i additiv zusammensetzen, wenn die Druckschwankung durch eine Poisson-Gleichung eliminiert wird, vergl. Launder (1978):

$$(3.35) \quad \pi_i = \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}} = \pi_{i1} + \pi_{i2} + \pi_{i3} + w_i.$$

Für eine Modellierung des turbulenten Anteils π_{i1} wird der von Monin (1965) vorgeschlagene Ansatz ausgewählt. Er hat die Form:

$$(3.36) \quad \pi_{i1} = -c_{T1} \frac{\epsilon}{k} \overline{U'_i T'}.$$

Auf Grund von Dimensionsbetrachtungen erscheint hier als Proportionalitätsfaktor der Kehrwert des Zeitmaßstabs der Geschwindigkeitsschwankungen k/ϵ . Da die Druck-Temperatur-Korrelation einen Senkenterm darstellt, ist das Vorzeichen in dieser Modellierung negativ zu wählen. Der Einfluß der Hauptströmung π_{i2} und der der Auftriebskräfte π_{i3} werden von Launder (1975) jeweils proportional und im Vorzeichen entgegengesetzt zum Produktionsterm $P_{\overline{U'_i T'}}$ durch die mittleren Geschwindigkeitsgradienten und zum Auftriebsterm $G_{\overline{U'_i T'}}$ ausgedrückt:

$$(3.37) \quad \pi_{i2} = c_{T2} \overline{U'_j T'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j},$$

$$(3.38) \quad \pi_{i3} = c_{T3} \beta g_i \overline{T'^2}.$$

Experimente von Wyngaard et al. (1971) und Young (1975) haben gezeigt, daß der turbulente Wärmefluß senkrecht zu einer Wand in Wandnähe stark gedämpft wird und die Komponente des Wärmeflusses in Hauptstromrichtung bei Wandscherschichten größer ist als bei freien Scherschichten. Dieser Einfluß kann durch die Einführung einer Wandkorrektur in der Druck-Temperatur-Korrelation im Teilterm w_i berücksichtigt werden. Es wird die von Gibson und Launder (1978) vorgeschlagene Wandkorrektur in der Form

$$(3.39) \quad w_i = -c_{T4} \frac{\epsilon}{k} \overline{U'_n T'} \delta_{in} f \left(\frac{L}{x_n} \right)$$

verwendet. Darin bezeichnet der Index n die Richtung senkrecht zu einer Wand und x den Wandabstand. Mit Hilfe einer Ähnlichkeitsbetrachtung nach Art der Kolgomorov-Prandtl-Beziehung ergibt sich die Funktion f zu:

$$(3.40) \quad f\left(\frac{L}{x_n}\right) = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{x_n \epsilon}.$$

Mit dieser Funktion wird auch der Einfluß der stabilen Temperaturstratifikation auf die turbulenten Wärmeflüsse in Wandnähe berücksichtigt. Der Wandeinfluß nimmt mit Anwachsen der stabilen Stratifikationsstärke ab. Eine stabile Stratifikation wirkt dabei der Wanddämpfungsfunktion f entgegen.

3.2.3 Das neue Modell für kleine Peclet-Zahlen

Die für hohe Peclet-Zahlen gültigen Modellierungen für die molekulare und turbulente Diffusion in den Gleichungen (3.33) und (3.34) werden im TMBF beibehalten. In der Tat bringt eine Modellierung, die den Beitrag durch die Druckschwankungen berücksichtigt, keinen großen Vorteil, weil das verwendete Gradientenmodell die skalare Form k^2/ϵ anstelle der tensoriellen $\overline{kU'_i U'_j}/\epsilon$ besitzt. Die skalare Form dieses Ansatzes stellt eine wesentliche Vereinfachung des Diffusionsterms durch die Turbulenz dar.

Dagegen spielen neue Modellierungen für die Senkenterme eine große Rolle. Wie schon erwähnt, handelt sich um:

- die molekulare Dissipation $\epsilon_{\overline{U'_i T'_i}} = (\nu + \Gamma) \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial T'_i}{\partial x_j} \right)$ und
- die Druck-Temperatur-Korrelation $\pi_i = \frac{1}{\rho'} \overline{p' \frac{\partial T'_i}{\partial x_i}}$.

Daten aus DNS-Rechnungen von Shikazono und Kasagi (1990) für kleine Peclet-Zahlen zeigen, daß der Beitrag der molekularen Dissipation $\epsilon_{\overline{U'_i T'_i}}$ nicht mehr vernachlässigbar ist und daß der Beitrag der Druck-Temperatur-Korrelation π_i abnimmt. Eine neue Modellierung für diese Terme, die diese Effekte berücksichtigt, wird hier entwickelt. Es handelt sich dabei um:

- Eine neue Modellierung der molekularen Dissipation $\epsilon_{\overline{U'_i T'_i}}$. Es wird der Leitgedanke verfolgt, daß $\epsilon_{\overline{U'_i T'_i}}$ für hohe Peclet-Zahlen zu null werden soll.
- Eine Modifizierung der für hohe Peclet-Zahlen bereits modellierten Druck-Temperatur-Korrelation π_i nach der Gleichung (3.35). Damit soll erreicht werden, daß der Einfluß dieses Terms für kleine Peclet-Zahlen abnimmt.

Es wird zu diesem Zweck hier ein Korrekturterm P_i vorgeschlagen, der in die Gleichung (3.35) eingeführt wird. Dementsprechend wird gesetzt:

$$(3.41) \quad \pi_i = \frac{1}{\rho'} \overline{p' \frac{\partial T'_i}{\partial x_i}} = \pi_{i1} + \pi_{i2} + \pi_{i3} + w_i + P_i.$$

Dabei soll der Korrekturterm P_i bei hohen Peclet-Zahlen zu null werden.

Zur Modellierung der molekularen Dissipation $\overline{\epsilon_{U_i T'}}$ und des Korrekturterms P_i werden jetzt Maßstäbe für die Anisotropie der turbulenten Wärmeflüsse, der molekularen Dissipation und der Druck-Temperatur-Korrelation eingeführt. Sie werden durch die folgenden dimensionslosen Ausdrücke definiert:

$$(3.42) \quad a_i = \frac{\overline{U_i T'}}{\sqrt{2kT'^2}} \quad ,$$

$$(3.43) \quad e_i = \frac{\overline{\partial U_i \partial T'}}{\partial x_j \partial x_j} / \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_{T'}}{\nu \Gamma}} \quad ,$$

$$(3.44) \quad p_i = \frac{1}{\rho'} \frac{\overline{\partial T'}}{\partial x_i} / k \sqrt{\frac{\epsilon_{T'}}{\Gamma}} \quad .$$

Die molekulare Dissipation wird mit Hilfe des Anisotropiemaßstabs e_i folgend formuliert:

$$(3.45) \quad \overline{\epsilon_{U_i T'}} = (\nu + \Gamma) \left(\frac{\overline{\partial U_i \partial T'}}{\partial x_j \partial x_j} \right) = (\nu + \Gamma) \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_{T'}}{\nu \Gamma}} e_i = \frac{1 + \text{Pr}}{\sqrt{\text{Pr}}} e_i \quad .$$

Der Anisotropiemaßstab e_i soll modelliert werden. Es wird angenommen, daß der Anisotropiemaßstab e_i eine Funktion von den folgenden dimensionslosen Parametern sein soll:

$$(3.46) \quad e_i = f(a_i, \text{Re}_t, \text{Pr}, R, \dots) \quad .$$

Hier ist R das turbulente Zeitmaßstabsverhältnis, das als das Verhältnis des Zeitmaßstabs der Temperaturschwankungen $T'^2/\epsilon_{T'}$ zum Zeitmaßstab der Geschwindigkeitsschwankungen k/ϵ definiert wird:

$$(3.47) \quad R = \left(\frac{T'^2}{2\epsilon_{T'}} \right) / \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \quad .$$

Ausführliche Informationen über die physikalische Bedeutung dieses turbulenten Parameters werden im nächsten Abschnitt gegeben.

Zur Modellierung für die molekulare Dissipation wird angenommen, daß ein Proportionalitätsverhältnis von e_i zum Anisotropiemaßstab a_i der Wärmeflüsse gilt:

$$(3.48) \quad e_i = f_e a_i \quad .$$

Die Funktion f_e soll dabei von null bei hohen Peclet-Zahlen auf eins bei kleinen Peclet-Zahlen monoton steigen. Es wird eine Exponentialfunktion für die Darstellung von f_e ausgewählt. DNS Rechnungen von Wörner und Grötzbach (1995) für Strömungen in Naturkonvektion mit drei verschiedenen Fluiden, Natrium, Quecksilber und Luft, haben gezeigt, daß sich die Funktion f_e gut durch eine von turbulenten Reynolds- und Peclet-Zahlen abhängige Exponentialfunktion darstellen läßt. Daher wird

$$(3.49) \quad f_e = \exp(-c_e (\text{Re}_t + \text{Pe}_t))$$

gesetzt. Die turbulente Peclet-Zahl wird dabei wie folgt definiert:

$$(3.50) \quad Pe_t = \frac{k^2}{\Gamma \epsilon} .$$

Wenn der Ausdruck des Anisotropiemaßstabs a_i , siehe Gleichung (3.42), in die Gleichung (3.48) eingesetzt wird, ergibt sich:

$$(3.51) \quad e_i = f_e \frac{\overline{U_i' T'}}{\sqrt{2kT'^2}} .$$

Wenn diese Beziehung in die Gleichung (3.45) eingesetzt wird, kann die folgende Darstellung für die molekulare Dissipation hergeleitet werden:

$$(3.52) \quad \epsilon_{\overline{U_i' T'}} = \frac{1 + \text{Pr}}{2\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{R}} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) f_e \overline{U_i' T'} .$$

In dieser Modellierung werden die Abhängigkeiten von R und Pr berücksichtigt.

Zur Modellierung des Korrekturterms P_i wird der Anisotropiemaßstab p_i verwendet. Auch dieser Maßstab kann in Form von dimensionslosen Parametern formuliert werden. Es wird angesetzt:

$$(3.53) \quad p_i = f(a_i, \text{Re}_t, \text{Pr}, R, \dots) .$$

Da p_i für hohe Peclet-Zahlen zu null werden soll, wird eine ähnliche Modellierung von p_i wie für e_i , Gleichung (3.48), ausgewählt, nämlich:

$$(3.54) \quad p_i = f_p a_i .$$

Die Funktion f_p soll ähnliche Abhängigkeiten wie f_e besitzen. Eine ähnliche Darstellung wie die Gleichung (3.52) kann für den Korrekturterm P_i hergeleitet werden.

Die molekulare Dissipation und der Korrekturterm P_i werden ähnlich modelliert, da beide Terme proportional zum turbulenten Wärmefluß gesetzt werden. Deshalb können die zwei Modellierungen superponiert werden, auch wenn die zwei modellierten Terme unterschiedliche physikalische Vorgänge darstellen. An dieser Stelle wird nun praktisch angenommen, daß die Modellierung der molekularen Dissipation $\epsilon_{\overline{U_i' T'}}$ und des Korrekturterms P_i in einem einzigen Schließungsansatz Z_i zusammengefaßt werden und daß der Schließungsansatz nach der Gleichung (3.52) für Z_i ausgewählt wird. Der so formulierte Ausdruck

$$(3.55) \quad Z_i = - \frac{1 + \text{Pr}}{2\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{R}} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \exp(-c_{T5} (\text{Re}_t + Pe_t)) \overline{U_i' T'}$$

wird als Zusatzterm in die Transportgleichungen für die Wärmeflüsse eingesetzt. Dieser Term ermöglicht die Erweiterung dieser Transportgleichungen für den Bereich der kleinen Peclet-Zahlen. Der Wert des empirischen Koeffizienten c_{T5} muß mit Hilfe von Validierungsrechnungen bestimmt werden.

3.2.4 Die Transportgleichungen für $\overline{T'^2}$ und $\epsilon_{T'}$

Da der Auftriebsterm in den Wärmefluß-Transportgleichungen die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ enthält, liegt es nahe auch eine Transportgleichung für diese Größe herzuleiten, damit der Auftriebseinfluß angemessen erfaßt wird. Analog zur turbulenten kinetischen Energie k ist $\overline{T'^2}$ ein Maß für die Temperaturfluktuationen. Die exakte Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ kann aus der Energiegleichung hergeleitet werden, vergl. Spalding (1971):

$$(3.56) \quad \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \underbrace{\overline{U_i} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i}}_{K_{T'}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{U_i T'^2} - \Gamma \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i} \right)}_{D_{T'}} - \underbrace{2\overline{U_i T'} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_i}}_{P_{T'}} - \underbrace{2\Gamma \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_i}}_{\epsilon_{T'}}.$$

Diese exakte Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ enthält keinen Auftriebs- und Druckterm. Durch das Temperaturfeld wird $\overline{T'^2}$ produziert, Term $P_{T'}$, und durch die molekularen Einflüsse im Term $\epsilon_{T'}$ reduziert.

Die in der Gleichung (3.55) auftretenden unbekanntenen Korrelationen werden mit Hilfe von Schließungsansätze für hohe Peclet-Zahlen auf bekannte Zustandsvariablen zurückgeführt. Im turbulenten Diffusionsterm $D_{T'}$ wird der unbekanntene Ausdruck $\overline{U_i T'^2}$ durch das von Spalding (1971) vorgeschlagene Gradientenmodell wie folgt approximiert:

$$(3.57) \quad \overline{U_i T'^2} = - \left(c_{TT} \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i}.$$

Das Dissipationsglied $\epsilon_{T'}$ wird in der Literatur u.a. von Gibson und Launder (1978) durch die folgende Beziehung modelliert, die eine Umschreibung der Definition für das turbulente Zeitmaßstabsverhältnis R ist:

$$(3.58) \quad \epsilon_{T'} = \Gamma \frac{\overline{\partial T'} \partial T'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\epsilon \overline{T'^2}}{2Rk}.$$

In dieser Beziehung wird R als konstant angesehen, obwohl R vom Fluid, der Strömungsform und der Peclet-Zahl abhängig ist.

Die Abhängigkeit des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses von den Eigenschaften des Fluides wurde schon von anderen Autoren bestätigt; z.B. fanden Wörner und Grötzbach (1994) durch DNS der turbulenten Rayleigh-Bernard Konvektion im Medium Luft und in flüssigem Natrium, daß der Wert von R bei Natrium wesentlich geringer als bei Luft ist. Dieses Ergebnis ist physikalisch plausibel. Wegen der größeren molekularen Wärmediffusivität Γ im Vergleich zur molekularen Viskosität ν werden die Temperaturfluktuationen im Natrium viel schneller als die Geschwindigkeitsschwankungen gedämpft. Es ergibt sich ein kleinerer Zeitmaßstab $\overline{T'^2}/\epsilon_{T'}$ für die Temperaturfluktuationen im Vergleich zum Zeitmaßstab k/ϵ der

Geschwindigkeitsschwankungen. Es ist deshalb zu erwarten, daß das Zeitmaßstabverhältnis R bei Natrium geringer wird als bei anderen Fluiden wie Luft und Wasser. Für die Modellierung von $\epsilon_{T'}$ existiert somit ein unbefriedigender Zustand.

Die Verwendung eines konstanten R wird nur für Strömungen empfohlen, deren Turbulenz sich im lokalen Gleichgewicht befindet. In diesen Fällen bleiben die Zeitmaßstäbe für die Temperaturfluktuationen und für die Geschwindigkeitsfluktuationen konstant. In anderen Fällen wird von Lumley (1975) die Lösung der Transportgleichungen für $\epsilon_{T'}$ empfohlen.

Außerdem wirkt das Zeitmaßstabverhältnis R im TMBF auf zwei wichtige Terme der Transportgleichungen der Wärmeflüsse ein. Es hat

- einen indirekten Einfluß durch $\overline{T'^2}$ im Auftriebsterm und
- einen direkten Einfluß im Zusatzterm Z_i .

Aus diesen Überlegungen heraus folgt, daß die Transportgleichung für $\epsilon_{T'}$ anstelle der Modellierung (3.57) im TMBF gelöst wird. Damit wird die Schwierigkeit vermieden, daß das Zeitmaßstabverhältnis R als konstant angenommen werden muß. Es kann dann aus der Gleichung (3.47) berechnet werden.

Die exakte Transportgleichungen für $\epsilon_{T'}$ wurde von Craft (1991) hergeleitet. Die Gleichung lautet:

$$(3.59) \quad \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial t} + \underbrace{\overline{U}_i \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_i}}_{K_{\epsilon_{T'}}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{U'_i \epsilon'_{T'}} - \Gamma \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_i} \right)}_{D_{\epsilon_{T'}}} - \underbrace{2\Gamma \left(\frac{\partial \overline{U'_i} \partial \overline{T'}}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial \overline{T'} \partial \overline{T'}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} + \overline{U'_i} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} \right)}_{H_{\epsilon_{T'}}} - \underbrace{2\Gamma \frac{\partial \overline{U'_i} \partial \overline{T'}}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i}}_{I_{\epsilon_{T'}}} - \underbrace{2\Gamma^2 \frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_j \partial x_i \partial x_i \partial x_j}}_{V_{\epsilon_{T'}}}.$$

Diese Gleichung läßt sich wie folgt interpretieren: Die Dissipationsrate der Temperaturfluktuationen $\epsilon_{T'}$ wird durch die Hauptströmung konvektiv transportiert, Term $K_{\epsilon_{T'}}$, und durch diffusiven Transport örtlich umverteilt, Term $D_{\epsilon_{T'}}$. Der Term $H_{\epsilon_{T'}}$ stellt die Produktion bzw. Vernichtung von $\epsilon_{T'}$ durch die Hauptströmung dar. Der Term $I_{\epsilon_{T'}}$ stellt die entsprechende Produktion bzw. Vernichtung von $\epsilon_{T'}$ an dem Zusammenwirken zwischen den Gradienten der Temperatur- und Geschwindigkeitsschwankungen dar. Die Vernichtung von $\epsilon_{T'}$ durch molekulare Effekte wird durch den Term $V_{\epsilon_{T'}}$ dargestellt.

Sämtliche Terme, die unbekannte Korrelationen enthalten, müssen entsprechend modelliert werden. Die zweifach Korrelation der Geschwindigkeit- und der $\epsilon_{T'}$ -

Schwankungen werden genauso wie für die entsprechenden Terme in anderen Transportgleichungen des TMBF durch einen Gradientenansatz modelliert. Es ist:

$$(3.60) \quad \overline{U_i' \epsilon_{T'}} = - \left(c_{DD} \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_i}.$$

Die Produktion bzw. Vernichtung von $\epsilon_{T'}$, d.h. die Terme $H_{\epsilon_{T'}}$, $I_{\epsilon_{T'}}$ und $V_{\epsilon_{T'}}$, werden nach Hanjalic (1994) durch eine Modellierung erfaßt, die 4 empirische Koeffizienten enthält:

$$(3.61) \quad H_{\epsilon_{T'}} + I_{\epsilon_{T'}} + V_{\epsilon_{T'}} = \underbrace{-\epsilon_{T'} \left(c_{D1} \frac{\epsilon_{T'}}{\overline{T'^2}} + c_{D2} \frac{\epsilon}{k} \right)}_S - \underbrace{\epsilon_{T'} \left(c_{P1} \frac{\overline{U_i' T'_j}}{\overline{T'^2}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + c_{P2} \frac{\overline{U_i' U'_j}}{k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)}_P.$$

Der Senkenterm S besteht aus zwei Anteilen, die proportional zu $\epsilon_{T'}$ sind. Die zwei Proportionalkoeffizienten enthalten jeweils die Kehrwerte des turbulenten Zeitmaßstabs der Temperaturschwankungen ($\overline{T'^2}/\epsilon_{T'}$) und der Geschwindigkeitschwankungen (k/ϵ). Das Vorzeichen soll zur Kennzeichnung eines Senkentermes negativ sein.

Der Term P stellt die Produktion bzw. Vernichtung von $\epsilon_{T'}$ durch die Hauptströmung dar. Er besteht aus zwei Anteilen, die jeweils folgende Effekte berücksichtigen:

- einem Beitrag des mittleren Temperaturfeldes durch das Zusammenwirken vom Gradienten der mittleren Temperatur mit den Wärmeflüssen,
- einem Beitrag des mittleren Geschwindigkeitsfeldes durch das Zusammenwirken vom Gradienten der mittleren Geschwindigkeit mit den turbulenten Reynoldsspannungen.

Wenn der Fourier-Ansatz zur Beschreibung des turbulenten Wärmetransports gilt, dann ist der Term P ein Produktionsterm. Allein wenn ein gegen den Temperaturgradienten laufender Wärmefluß vorliegt, wird dieser Term negativ.

Die oben vorgestellten modellierten Transportgleichungen für die skalaren Größen $\overline{T'^2}$ und $\epsilon_{T'}$ sollen fernerhin auf den Bereich von kleinen Peclet-Zahlen erweitert werden, damit ihr Anwendungsbereich nicht nur die Zwangskonvektion erfaßt. Daher werden zusätzliche Terme in die beiden Gleichungen eingeführt, die die molekularen Effekte im Wandbereich betrachten. Das Verfahren dieser Erweiterung ist ähnlich wie für die Transportgleichungen für k und ϵ , aber unter Verwendung von entsprechenden Strömungsparametern, \overline{T} , $\overline{T'^2}$, λ und λ_{ti} , die den turbulenten Wärmetransport bestimmen.

Nagano und Kim (1988) schlagen vor, einen zusätzlichen Term D_T in die Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ einzuführen. Dieser Term hat die Form:

$$(3.62) \quad D_T = -2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{T'^2}}}{\partial x_i} \right)^2.$$

Dieser Term erfaßt die Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ an der Wand. Damit kann die Wandbedingung $(\epsilon_{T'})_w = 0$ benutzt werden, ohne die Bilanz der Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ zu verletzen. Daraus ergeben sich numerische Vorteile bei der Lösung der Transportgleichung für $\epsilon_{T'}$.

Der entsprechende zusätzliche Term E_T in der Transportgleichung für $\epsilon_{T'}$ ist:

$$(3.63) \quad E_T = 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\lambda_{ti}}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

Mit diesem Term werden die molekularen Effekte auf $\epsilon_{T'}$ betrachtet. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit λ_{ti} wird so definiert:

$$(3.64) \quad \lambda_{ti} = -\rho c_p \frac{\overline{U'_i T'}}{\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}}.$$

Diese Erweiterungen sollten auch Dämpfungsfunktionen enthalten, die aber noch unbekannt sind. Diese werden im TMBF nicht berücksichtigt, weil sie nur aus DNS-Rechnungen abgeleitet werden können.

3.3 Zusammenfassung

Das gesamte für kleine Peclet- bzw. Reynolds-Zahlen modellierte TMBF, ist in den Tab. 3.1 und 3.2 dargestellt. Es enthält sieben Transportgleichungen, 18 empirische Koeffizienten und drei Korrekturfunktionen zur Erweiterung des Anwendungsbereiches einiger empirischer Koeffizienten. In der Tab. 3.3 wird der Standardsatz dieser Koeffizienten nach Gibson und Launder (1978) und Hanjalic (1994) zusammengefaßt. In der Tabelle fehlt jedoch der Wert des noch unbekanntem Koeffizienten c_{T5} . Dieser Wert soll in dieser Arbeit ermittelt werden. Die Standardwerte der anderen Koeffizienten wurden bereits durch frühere Untersuchungen anderer Autoren aus experimentellen Versuchen und numerischen Rechnungen bestimmt.

Zur Beschreibung des turbulenten Impulstransports wird das Konzept der isotropen Wirbelviskosität übernommen. Dabei werden im TMBF die Transportgleichungen für k und ϵ unter Verwendung von sechs empirischen Koeffizienten gelöst.

Für eine konsistente Modellierung des turbulenten Wärmetransports werden fünf Transportgleichungen mit 12 empirischen Koeffizienten benutzt. Durch diese detaillierte Beschreibung entfällt im Modell das Konzept der isotropen Wirbeldiffusivität mit der Annahme der Reynolds-Analogie. Zur Erweiterung des Anwendungsbereiches der Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse auf kleine Peclet-Zahlen wird eine neue Modellierung entwickelt. Sie manifestiert sich als Zusatzterm in den Transportgleichungen für $\overline{U'_i T'}$.

Diese neue Beschreibung hat gegenüber dem klassischen k - ϵ - σ_t -Modell den Vorteil, daß Auftriebseffekte automatisch berücksichtigt werden und nicht empirisch eingeführt werden müssen. In der Abb. 3.2 sind Verknüpfung und Auswirkung des Auftriebs im TMBF durch ein Flußdiagramm dargestellt. Im Diagramm existieren

zwei Markierungen, in denen der Auftrieb auf den Ereignisfluß einwirkt. Es sind dies:

- der Auftriebsterm in den Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse, $G_{U'T'} = -\beta g_i \overline{T'^2}$,
- die Produktion bzw. Vernichtung der turbulenten kinetischen Energie durch Auftrieb, die mit dem Term $G_k = -\beta g_i \overline{U'_i T'}$ dargestellt wird. Dieser Term ist in den Transportgleichungen für k und ϵ vorhanden.

Der Term G_k stellt im Modell die einzige durch den Auftrieb erzeugte Verknüpfung zwischen dem turbulenten Wärme- und Impulstransport dar. Dies läßt den Schluß zu, daß die Einwirkung des Auftriebs auf das Geschwindigkeitsfeld durch den Term G_k erfolgt. Im TMBF muß dieser Term nicht weiter modelliert werden, da die Wärmeflüsse $\overline{U'_i T'}$ direkt durch die Lösung ihrer Transportgleichungen angegeben werden. Das ist ein wichtiger Vorteil gegenüber dem einfachen k - ϵ - σ_t -Modell. Im k - ϵ - σ_t -Modell wird der Auftriebsterm G_k mit dem Fourier-Ansatz und der konstanten turbulenten Prandtl-Zahl modelliert.

Die Transportgleichung des turbulenten Wärmeflusses enthält seinerseits den Auftriebsterm $G_{U'T'}$, der eine wesentliche Rolle in der Bilanz spielt. Im Term $G_{U'T'}$ tritt die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ auf. Auch dieser Term muß im TMBF nicht weiter modelliert werden, weil eine Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ gelöst wird.

Das TMBF berücksichtigt deshalb den Auftriebsbeitrag zum turbulenten Transport sehr detailliert und vollständig.

Das TMBF - Beschreibung des turbulenten Impulstransports

Transportgleichung für die kinetische Energie der Turbulenz

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\beta g_i \overline{U}_i T'}_{G_k} - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \right)^2$$

Transportgleichung für die Dissipationsrate von k

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{\epsilon^2}{k} \left(c_{\epsilon 1} \frac{P_k + G_k}{\epsilon} (1 + c_{\epsilon 3} Ri_f) - f_2 c_{\epsilon 2} \right) + \nu \nu_t (1 - f_\mu) \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2$$

$$\nu_t = c_\mu^* f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$c_\mu^* = c_\mu f \left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon} \right) \quad f_\mu = [1 - \exp(-Re_\tau/26.5)]^2 \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2)$$

$$-\overline{U'_i U'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

Tabelle 3.1: Das TMBF - Beschreibung des turbulenten Impulstransports

Das TMBF - Beschreibung des turbulenten Wärmetransports
<p><u>Transportgleichungen für die Wärmeflüsse</u></p> $\frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial t} + \overline{U'_j} \frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma + \frac{\nu}{2} + c_{TD} \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_j}$ $- \left(\overline{U'_i U'_j} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \overline{U'_j T'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) - \beta g_i \overline{T'^2} + \Pi_i + Z_i$ $\Pi_i = -c_{T1} \frac{\epsilon}{k} \overline{U'_i T'} + c_{T2} \overline{U'_j T'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + c_{T3} \beta g_i \overline{T'^2} - c_{T4} \frac{\epsilon}{k} \overline{U'_n T'} \delta_{in} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{x_n \epsilon}$ $Z_i = -\frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \exp(-c_{T5} (Re_t + Pe_t)) \overline{U'_i T'}$
<p><u>Transportgleichung für $\overline{T'^2}$</u></p> $\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma + c_{TT} \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i} - 2\overline{U'_i T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - 2\epsilon_{T'} - 2\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{T'^2}}}{\partial x_i} \right)^2$
<p><u>Transportgleichung für die Dissipationsrate von $\overline{T'^2}$</u></p> $\frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{DD} \frac{k^2}{\epsilon} + \Gamma \right) \frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_i} - \epsilon_{T'} \left(c_{D1} \frac{\epsilon_{T'}}{\overline{T'^2}} + c_{D2} \frac{\epsilon}{k} \right)$ $- \epsilon_{T'} \left(c_{P1} \frac{\overline{U'_i T'}}{\overline{T'^2}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + c_{P2} \frac{\overline{U'_i U'_j}}{k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) + 2\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\lambda_{ii}}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2$

Tabelle 3.2: Das TMBF - Beschreibung des turbulenten Wärmetransports

k-Tr.		ϵ -Tr.		$U_i' T'$ -Tr.		$\overline{T'^2}$ -Tr.		$\epsilon_{T'}$ -Tr.	
Koeff.	Wert	Koeff.	Wert	Koeff.	Wert	Koeff.	Wert	Koeff.	Wert
σ_k	1.0	σ_ϵ	1.3	c_{TD}	0.11	c_{TT}	0.13	c_{DD}	0.13
c_μ	0.09	$c_{\epsilon 1}$	1.44	c_{T1}	3.0			c_{D1}	2.2
		$c_{\epsilon 2}$	1.92	c_{T2}	0.33			c_{D2}	0.8
		$c_{\epsilon 3}$	0.8	c_{T3}	0.5			c_{P1}	1.8
				c_{T4}	0.5			c_{P2}	0.72
				c_{T5}	?				

Tabelle 3.3: Standardsatz der Modellkoeffizienten

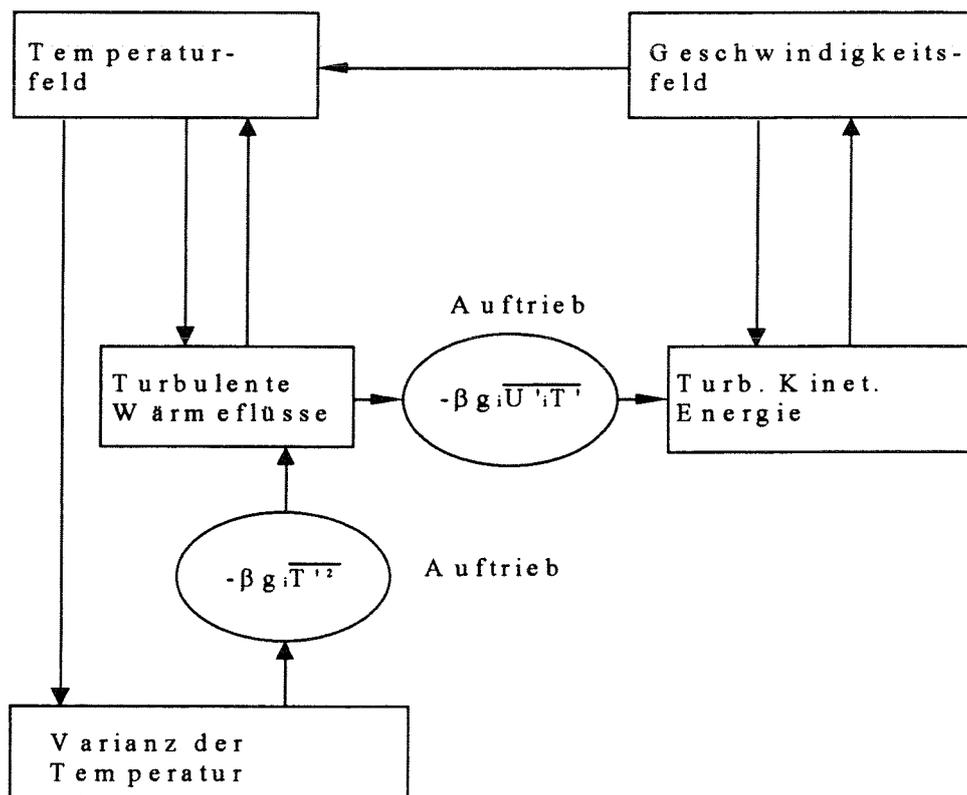


Abbildung 3.2: Verknüpfung und Auswirkung des Auftriebs im TMBF

4. Implementierung des TMBF

4.1 Fragestellung

Das in Kapitel 3 entwickelte TMBF wurde in das thermohydraulische Rechenprogramm FLUTAN (*Fluid- and Thermo-dynamic ANalysis computer code*) implementiert. Dazu waren die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- Das TMBF wird so implementiert, daß es eine weitere Option bei der Auswahl einer Anzahl unterschiedlich komplexer Turbulenzmodelle darstellt. Es hat sich dabei an den Rahmen der in FLUTAN vorhandenen Programmierung zu halten.
- Die numerische Behandlung der Transportgleichungen hat für die konvektiven Terme und die Randbedingungen nach den gleichen mathematischen Gesetzmäßigkeiten zu erfolgen, wie sie bei der Darstellung der Impuls- und Energiegleichung verwendet werden.

An einigen Stellen im Rechenprogramm reichten die vorhandenen Optionen im FLUTAN nicht aus. So mußten neue Randbedingungen mit neuen Eingaben sowie weitere Ergebnis-Darstellungen entwickelt und ins Programm eingebracht werden.

Außerdem wurden die schon im FLUTAN vorhandenen Transportgleichungen für k und ϵ nicht für das TMBF übernommen, sondern es wurde eine neue eigene Implementierung dieser Transportgleichungen durchgeführt. Der Grund für diese Entscheidung ergab sich aus folgenden Zwängen:

- Zur Diskretisierung der im FLUTAN vorhandenen Transportgleichungen für k und ϵ wurde bis dahin nur das Upwind-Verfahren erster Ordnung für die Behandlung der konvektiven Terme eingesetzt.
- Es bestand die Forderung in allen Gleichungen des TMBF einheitlich Differenzenapproximationen zweiter Ordnung einzuführen. Als solche standen das QUICK- und das LECUSSO-Verfahren zur Verfügung.

- Die Formulierung der konvektiven Terme der Transportgleichungen nach dem QUICK- und LECUSSO-Verfahren, die für alle im FLUTAN-Code implementierten Differentialgleichungen bei inneren Zellen verwendet wird, sollte auf die Randzelle ausgedehnt werden.

Somit stellt das TMBF mit den erweiterten Eingabe- und Ausgabe-Optionen, sowie einer eigenständigen Beschreibung sämtlicher Transportgleichungen eine eigene Entwicklung mit einem einheitlichen Approximationsverfahren zweiter Ordnung im FLUTAN Rechenprogramm dar.

4.2 Das Rechenprogramm FLUTAN

FLUTAN ist ein Rechenprogramm für dreidimensionale fluid- und thermodynamische Analysen sowohl in kartesischen als auch Zylinder-Koordinaten. Es ist eine Weiterentwicklung aus der Familie der COMMIX-Rechenprogramme, bzw. der Versionen COMMIX-1B von Shah et al. (1985) und COMMIX-2 von Bottoni et al. (1985). Diese Programme wurden zur numerischen Analyse von stationären/transienten, ein- und zweiphasigen und dreidimensionalen inkompressiblen Strömungen und thermischen Fragen entworfen. Die Reynolds-Bilanzgleichungen für die Masse, die Energie und den Impuls werden ohne die Vereinfachung der Boussinesq-Approximation gelöst. FLUTAN wurde im Forschungszentrum Karlsruhe mit wesentlichen Verbesserungen ausgestattet. Im einzelnen sind dies:

- Vektorisierung des Codes,
- Implementierung der CRESOR Algorithmus durch Borgwaldt (1990) und allgemeine dreidimensionale Grobmaschen-Bilanzierung zur Lösung der Druckgleichung,
- Einführung des LECUSSO-Verfahrens nach Günther (1987), des QUICK-Verfahrens nach Leonard (1979) und des FRAM-Verfahrens nach Chapman (1981). Es handelt sich hier um verbesserte Differenzenapproximationen zweiter Ordnung zur Verminderung numerischer Diffusion zur Beschreibung des Impuls- und Energietransports. Diese Verfahren wurden bis dahin nur in den inneren Zellen des Rechengebietes implementiert.

Das FLUTAN Programm enthält drei verschiedene Turbulenzmodelle, vergl. Borgwaldt et al. (1992):

- das Prandtl'sche Mischungswegmodell (ITURKE=10),
- das k-Turbulenzmodell (ITURKE=11),
- das k- ϵ - σ_t -Turbulenzmodell für hohe Reynolds-Zahlen (ITURKE=12).

Die Bilanzgleichungen für die Zustandsgrößen und für die turbulenten Größen werden im Rechengebiet örtlich und zeitlich diskretisiert. Im einzelnen werden

Differenzialgleichung		optionale Löser		
1.	Druckgleichung	CRESOR	SOR	DIREKT-L.
1.1	Berechnung der Geschwindigkeiten	—	—	—
TURBULENZMODELLE				
2.	K-Gleichung (ITURKE=11 oder 12)	—	SOR	DIREKT-L.
	ϵ -Gleichung (ITURKE=12)	—	SOR	DIREKT-L.
3.	Energiegleichung	—	SOR	DIREKT-L.
Überprüfung der Konvergenz				

Tabelle 4.1: Lösungssequenz im FLUTAN Programm

- die Diffusionsterme mittels eines zentralen Differenzenquotienten (CDS) diskretisiert,
- die Konvektionsglieder mittels der oben genannten drei verschiedenen Upwind-Verfahren diskretisiert,
- alle Gleichungen mittels des impliziten Euler-Verfahrens zeitlich diskretisiert.

In der Tabelle 4.1 wird die Lösungssequenz der Differentialgleichungen im FLUTAN Programm dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus der Lösungssequenz wird von Shah et al. (1985) gegeben.

4.3 Diskretisierung der Transportgleichungen des TMBF

Jede in den Tab. 3.1 und 3.2 dargestellten modellierten Transportgleichungen des TMBF läßt sich aus folgenden Termen zusammensetzen:

1. Änderungsrate der transportierten Größe;
2. Konvektionsterm;
3. Diffusionsterm;
4. Quell- Senkenterm.

Deshalb kann eine Transportgleichung für die Größe Φ allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$(4.1) \quad \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \bar{U}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + S_{c\Phi} + S_{p\Phi} \Phi .$$

Damit ist Φ die transportierte Größe und Γ_{Φ} deren Diffusionskoeffizient. Der Quellterm wird in eine Summe aufgespalten. Diese 'Diskretisierung' ist notwendig, um numerische Stabilität und Konvergenz zu erhalten. Außerdem soll $S_{p\Phi}$ immer kleiner oder gleich null sein, da sonst Instabilität, Divergenz oder unphysikalische Lösungen auftreten.

Der Diffusionskoeffizient Γ_{Φ} , die Quellterme $S_{c\Phi}$ und $S_{p\Phi}$, deren Form von der transportierten Größe Φ abhängig ist, werden in den Tab. 4.2 und 4.3 für die Größe k , ϵ , $\overline{T'^2}$, $\epsilon_{T'}$ und $\overline{U_i T'}$ dargestellt.

Die sieben Transportgleichungen des TMBF wurden nach der Vorschrift von Shah et al. (1985) diskretisiert und über das Kontrollvolumen integriert, siehe Abbildungen 4.1 und 4.2.

Im einzelnen ergeben sich:

1. Änderungsrate:

$$(4.2) \quad \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) dx dy dz = \frac{(\rho \Phi)_0 - (\rho \Phi)_0^n}{\Delta t} V_0 .$$

Hier ist $V_0 = \Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0$ das Volumen der Zelle M0, Δt der Zeitschritt und der Index n eine Kennzeichnung für die alten Werte.

2. Konvektionsterm:

$$(4.3) \quad \int_{V_0} \left(\frac{\Delta (\rho \bar{U} \Phi)}{\Delta x} + \frac{\Delta (\rho \bar{V} \Phi)}{\Delta y} + \frac{\Delta (\rho \bar{W} \Phi)}{\Delta z} \right) dx dy dz = F_2 \Phi_{i+\frac{1}{2}} - F_1 \Phi_{i-\frac{1}{2}} + F_4 \Phi_{j+\frac{1}{2}} - F_3 \Phi_{j-\frac{1}{2}} + F_6 \Phi_{k+\frac{1}{2}} - F_5 \Phi_{k-\frac{1}{2}} .$$

Φ	Γ_Φ	$S_{c\Phi}$	$S_{p\Phi}$
k	$\mu + \mu_t/\sigma_k$	$\rho P_k + \rho G_k + \rho D$	$-\rho\epsilon/k$
ϵ	$\mu + \mu_t/\sigma_\epsilon$	$\rho C_{\epsilon 1}(\epsilon/k)(P_k + G_k)(1 + C_{\epsilon 3} Ri_f) + \rho E$	$-C_{\epsilon 2}\rho\epsilon/k$
$\overline{T'^2}$	$\rho\Gamma + \rho c_{TT}k^2/\epsilon$	$\rho P_{T'} + \rho D_T$	$-\rho\epsilon_{T'}/\overline{T'^2}$
$\epsilon_{T'}$	$\rho\Gamma + \rho c_{DD}k^2/\epsilon$	$\rho\epsilon_{T'} \left(c_{P1} \frac{P_{T'}}{\overline{T'^2}} + c_{P2} \frac{P_k}{k} - c_{D2} \frac{\epsilon}{k} \right) + \rho E_T$	$-\rho c_{D1} \frac{\epsilon_{T'}}{\overline{T'^2}}$
$\overline{U'T'}$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$ $\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$-\rho \overline{U'U'_j} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_x \overline{T'^2} +$ $\rho(c_{T2} - 1)(\overline{V'T'} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{W'T'} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}) + \rho Z_x$	$\rho(c_{T2} - 1) \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} -$ $\rho c_{T1} \frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4} \frac{\sqrt{k}}{x_w}$
$\overline{V'T'}$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$ $\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$-\rho \overline{V'U'_j} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_y \overline{T'^2} +$ $\rho(c_{T2} - 1)(\overline{U'T'} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{W'T'} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}) + \rho Z_y$	$\rho(c_{T2} - 1) \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} -$ $\rho c_{T1} \frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4} \frac{\sqrt{k}}{y_w}$
$\overline{W'T'}$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$ $\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$-\rho \overline{W'U'_j} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_z \overline{T'^2} +$ $\rho(c_{T2} - 1)(\overline{U'T'} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} + \overline{V'T'} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y}) + \rho Z_z$	$\rho(c_{T2} - 1) \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} -$ $\rho c_{T1} \frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4} \frac{\sqrt{k}}{z_w}$

Tabelle 4.2: Diffusionskoeffizienten und Quell/Senkentermen in kartesischen Koordinaten

Φ	Γ_Φ	$S_{c\Phi}$	$S_{p\Phi}$
k	$\mu + \mu_t/\sigma_k$	$\rho P_k^c + \rho G_k + \rho D$ $P_k^c = P_k + 2\frac{\bar{U}}{r}(\frac{\bar{U}}{r} + 2\frac{\partial \bar{V}}{r\partial \Theta}) +$ $\frac{\bar{V}}{r}(\frac{\bar{V}}{r} - 2(\frac{\partial \bar{U}}{r\partial \Theta} + \frac{\partial \bar{V}}{r}))$	$-\rho\epsilon/k$
ϵ	$\mu + \mu_t/\sigma_\epsilon$	$\rho C_{\epsilon 1}(\epsilon/k)(P_k^c + G_k)(1 + C_{\epsilon 3} Ri_f) + \rho E$	$-C_{\epsilon 2}\rho\epsilon/k$
\bar{T}'^2	$\rho\Gamma + \rho c_{TT}k^2/\epsilon$	$\rho P_{T'} + \rho D_T$	$-\rho\epsilon_{T'}/\bar{T}'^2$
$\epsilon_{T'}$	$\rho\Gamma + \rho c_{DD}k^2/\epsilon$	$\rho\epsilon_{T'}(c_{P1}\frac{P_{T'}}{\bar{T}'^2} + c_{P2}\frac{P_k^c}{k} - c_{D2}\frac{\epsilon}{k}) + \rho E_T$	$-\rho c_{D1}\frac{\epsilon_{T'}}{\bar{T}'^2}$
$\bar{U}'T'$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$ $\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$-\rho\bar{U}'U'_j\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_x \bar{T}'^2 +$ $\rho(c_{T2} - 1)(\bar{V}'T'_i\frac{\partial \bar{U}}{r\partial \theta} + \bar{W}'T'_i\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}) +$ $\rho(2 - c_{T2})\bar{V}'\frac{\partial \bar{T}}{r} - \mu_t\frac{\bar{V}}{r}\frac{\partial \bar{T}}{r\partial \Theta} -$ $2\frac{\Gamma_\Phi}{r}\frac{\partial \bar{V}'T'}{r\partial \Theta} + \rho Z_r$	$\rho(c_{T2} - 1)\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} -$ $\rho c_{T1}\frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4}\frac{\sqrt{k}}{x_w} -$ $\frac{\Gamma_\Phi}{r^2}$
$\bar{V}'T'$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$ $\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$-\rho\bar{V}'U'_j\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_\theta \bar{T}'^2 +$ $\rho(c_{T2} - 1)(\bar{U}'T'_i\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{W}'T'_i\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}) -$ $\rho\bar{V}'\frac{\partial \bar{T}}{r} + 2\frac{\Gamma_\Phi}{r}\frac{\partial \bar{U}'T'}{r\partial \Theta} +$ $\mu_t(2\frac{\bar{U}}{r}\frac{\partial \bar{T}}{r\partial \Theta} - \frac{\bar{V}}{r}\frac{\partial \bar{T}}{r}) + \rho Z_\theta$	$\rho(c_{T2} - 1)\frac{\partial \bar{V}}{r\partial \theta} -$ $\rho c_{T1}\frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4}\frac{\sqrt{k}}{y_w} +$ $\rho(c_{T2} - 1)\frac{\bar{U}}{r} - \frac{\Gamma_\Phi}{r^2}$
$\bar{W}'T'$	$\rho(\Gamma + \nu)/2 +$	$-\rho\bar{W}'U'_j\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + (c_{T3} - 1)\rho\beta g_z \bar{T}'^2 +$	$\rho(c_{T2} - 1)\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} -$
	$\rho c_{TD}k^2/\epsilon$	$\rho(c_{T2} - 1)(\bar{U}'T'_i\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V}'T'_i\frac{\partial \bar{W}}{r\partial \theta}) + \rho Z_z$	$\rho c_{T1}\frac{\epsilon}{k} - \rho c_{T4}\frac{\sqrt{k}}{z_w}$

Tabelle 4.3: Diffusionskoeffizienten und Quell/Senkerterme in zylindrischen koordinaten

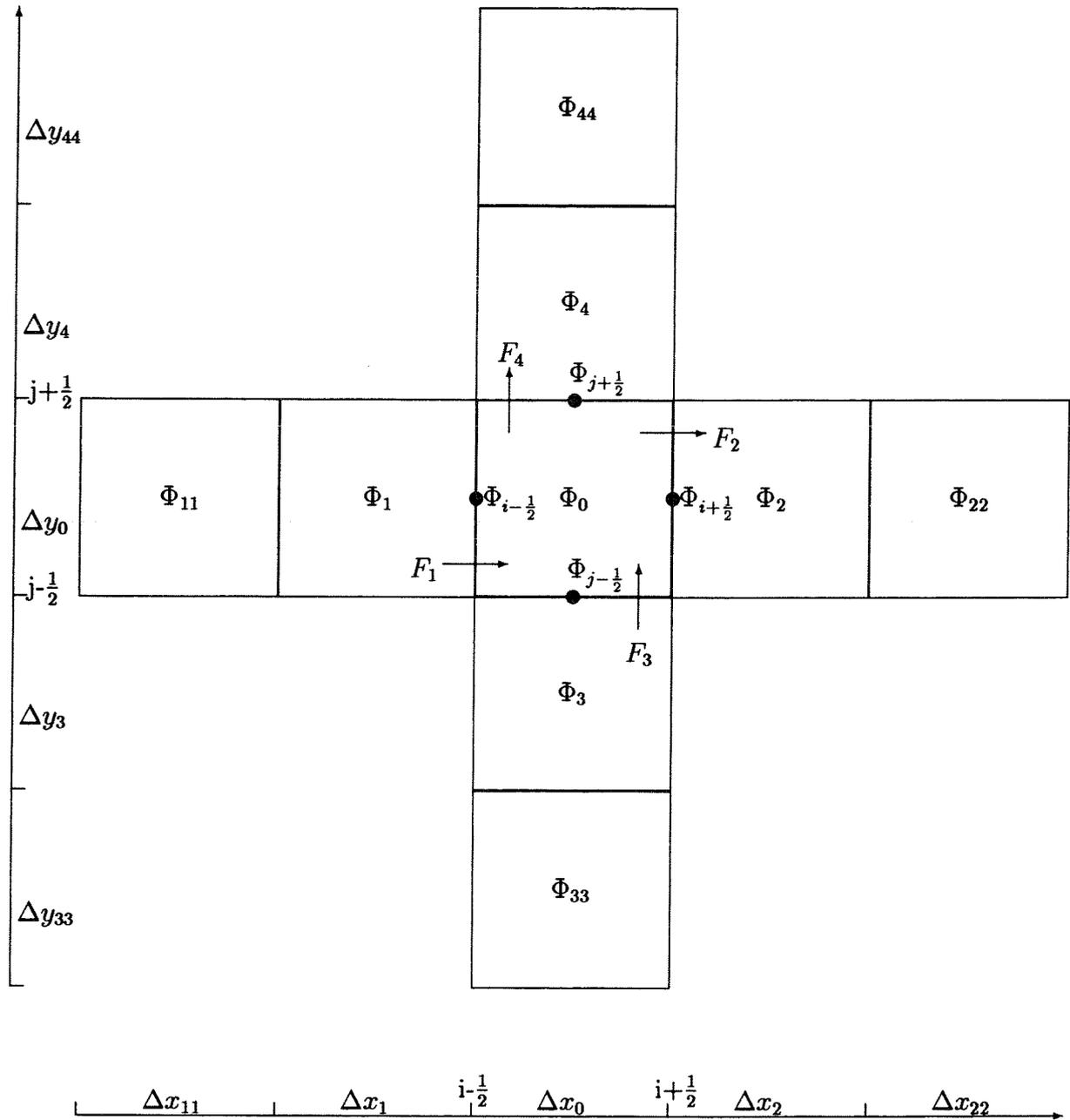


Abbildung 4.1: Kontrollvolumen mit benachbarten Zellen in x und y Richtungen für Transportgleichung (4.1).

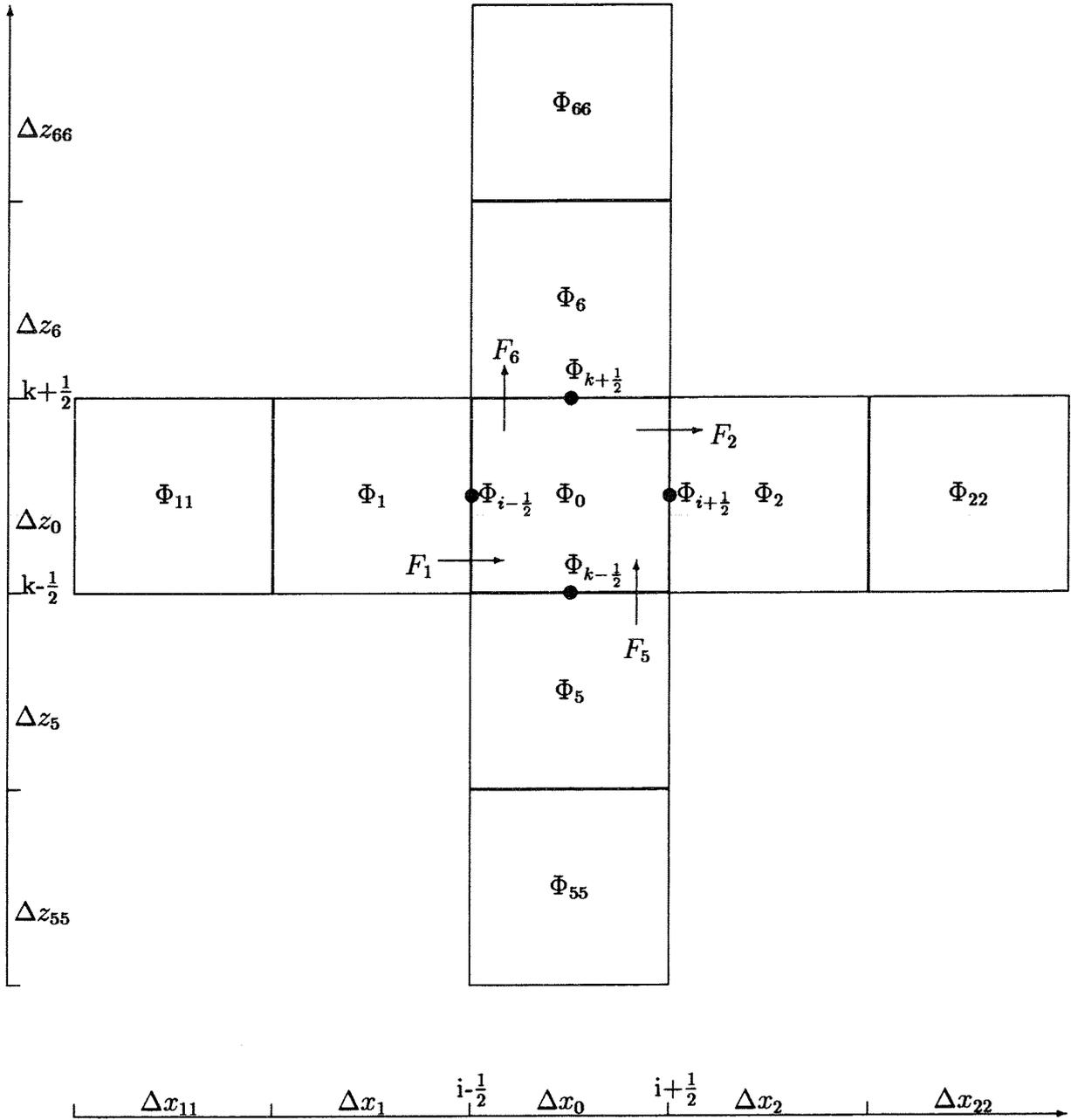


Abbildung 4.2: Kontrollvolumen mit benachbarten Zellen in x und z Richtungen für die Transportgleichung (4.1).

Dabei sind F_i die Massenströme an den Oberflächen der Kontrollvolumen, nämlich:

$$(4.4) \quad F_1 = (\rho \bar{U} A_x)_{i-\frac{1}{2}},$$

$$(4.5) \quad F_2 = (\rho \bar{U} A_x)_{i+\frac{1}{2}},$$

$$(4.6) \quad F_3 = (\rho \bar{V} A_y)_{j-\frac{1}{2}},$$

$$(4.7) \quad F_4 = (\rho \bar{V} A_y)_{j+\frac{1}{2}},$$

$$(4.8) \quad F_5 = (\rho \bar{W} A_z)_{k-\frac{1}{2}},$$

$$(4.9) \quad F_6 = (\rho \bar{W} A_z)_{k+\frac{1}{2}}.$$

Die unbekanntenen Werte von Φ werden mittels Upwind-Verfahren angenähert, z.B. ergibt sich für $\Phi_{i+\frac{1}{2}}$:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} F_2 \Phi_{i+\frac{1}{2}} &= F_2 \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_1 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_2 \right) && \text{wenn } F_2 > 0, \\ &= F_2 \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_1 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_{22} \right) && \text{wenn } F_2 < 0. \end{aligned}$$

Mit der Einführung des folgenden Operators,

$$(4.11) \quad \begin{aligned} |A, B| &= A && \text{wenn } A > B \\ &= B && \text{wenn } B > A, \end{aligned}$$

läßt sich die Gleichung (4.10) auch in der Form

$$(4.12) \quad \begin{aligned} F_2 \Phi_{i+\frac{1}{2}} &= |F_2, 0| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_1 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_2 \right) - \\ &| -F_2, 0| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_1 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_{22} \right) \end{aligned}$$

schreiben.

Der gesamte Konvektionsterm wird folgendermaßen geschrieben:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_0} \left(\frac{\Delta(\rho \bar{U} \Phi)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho \bar{V} \Phi)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho \bar{W} \Phi)}{\Delta z} \right) dx dy dz = \\
& |F_{2,0}| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_1 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_2 \right) - \\
& |-F_{2,0}| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_2 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_{22} \right) - \\
& |F_{1,0}| \left(\alpha_{i-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{11} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^+ \Phi_1 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) + \\
& |-F_{1,0}| \left(\alpha_{i-\frac{1}{2}}^- \Phi_1 + \beta_{i-\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^- \Phi_2 \right) + \\
& |F_{4,0}| \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^+ \Phi_3 + \beta_{j+\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^+ \Phi_4 \right) - \\
& |-F_{4,0}| \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \beta_{j+\frac{1}{2}}^- \Phi_4 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^- \Phi_{44} \right) - \\
& |F_{3,0}| \left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{33} + \beta_{j-\frac{1}{2}}^+ \Phi_3 + \gamma_{j-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) + \\
& |-F_{3,0}| \left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^- \Phi_3 + \beta_{j-\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{j-\frac{1}{2}}^- \Phi_4 \right) + \\
& |F_{6,0}| \left(\alpha_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_5 + \beta_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 + \gamma_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_6 \right) - \\
& |-F_{6,0}| \left(\alpha_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \beta_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_6 + \gamma_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_{66} \right) - \\
& |F_{5,0}| \left(\alpha_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{55} + \beta_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_5 + \gamma_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) + \\
(4.13) \quad & |-F_{5,0}| \left(\alpha_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_5 + \beta_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_6 \right)
\end{aligned}$$

Im Anhang A wird die Bedeutung und die Herleitung der Koeffizienten α , β und γ erläutert.

3. Diffusionsterm:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_0} \left(\frac{\Delta(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x})}{\Delta x} + \frac{\Delta(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})}{\Delta y} + \frac{\Delta(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z})}{\Delta z} \right) dx dy dz = \\
& D_2(\Phi_2 - \phi_0) - D_1(\Phi_0 - \phi_1) + D_4(\Phi_4 - \phi_0) - \\
(4.14) \quad & D_3(\Phi_0 - \phi_3) + D_6(\Phi_6 - \phi_0) - D_5(\Phi_0 - \phi_5) .
\end{aligned}$$

Dieser Term wird mittels des zentralen Differenzen-Verfahrens örtlich diskretisiert und die Ausdrücke von D_i sind, wenn die Diffusionskoeffizienten Γ_Φ an den Oberflächen des Volumens M_0 mittels harmonischer Interpolation angenähert werden, folgendermaßen:

$$(4.15) \quad D_1 = \left(A_{x_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_1}{\Delta x_0 \Gamma_1 + \Delta x_1 \Gamma_0} \right),$$

$$(4.16) \quad D_2 = \left(A_{x_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_2}{\Delta x_0 \Gamma_2 + \Delta x_2 \Gamma_0} \right),$$

$$(4.17) \quad D_3 = \left(A_{y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_3}{\Delta y_0 \Gamma_3 + \Delta y_1 \Gamma_0} \right),$$

$$(4.18) \quad D_4 = \left(A_{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_4}{\Delta y_0 \Gamma_4 + \Delta y_4 \Gamma_0} \right),$$

$$(4.19) \quad D_5 = \left(A_{z_{k-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_5}{\Delta z_0 \Gamma_5 + \Delta z_5 \Gamma_0} \right),$$

$$(4.20) \quad D_6 = \left(A_{z_{k+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\Gamma_0 \Gamma_6}{\Delta z_0 \Gamma_6 + \Delta z_6 \Gamma_0} \right).$$

4. Quell- und Senkenterm:

$$(4.21) \quad \int_{V_0} (S_{c\Phi} + S_{p\Phi} \Phi_0) dx dy dz = S_{c\Phi} V_0 + S_{p\Phi} V_0 \Phi_0.$$

Die Gleichung (4.1) läßt sich nach der Diskretisierung und der Integration in der folgenden Form schreiben:

$$(4.22) \quad a_0 \Phi_0 = \sum_{l=1}^6 a_l \Phi_l + b_0.$$

Dabei bedeuten:

$$(4.23) \quad \begin{aligned} a_0 = & \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ |F_2, 0| + \beta_{i-\frac{1}{2}}^- |F_1, 0| + \beta_{j+\frac{1}{2}}^+ |F_4, 0| + \\ & \beta_{j-\frac{1}{2}}^- |F_3, 0| + \beta_{k+\frac{1}{2}}^+ |F_6, 0| + \beta_{k-\frac{1}{2}}^- |F_5, 0| + \\ & (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6) + \\ & \frac{\rho_0 V_0}{\Delta t} - S_{p\Phi} V_0, \end{aligned}$$

$$(4.24) \quad a_1 = \beta_{i-\frac{1}{2}}^+ |F_1, 0| + D_1 ,$$

$$(4.25) \quad a_2 = \beta_{i+\frac{1}{2}}^- | - F_2, 0| + D_2 ,$$

$$(4.26) \quad a_3 = \beta_{j-\frac{1}{2}}^+ |F_3, 0| + D_3 ,$$

$$(4.27) \quad a_4 = \beta_{j+\frac{1}{2}}^- | - F_4, 0| + D_4 ,$$

$$(4.28) \quad a_5 = \beta_{k-\frac{1}{2}}^+ |F_5, 0| + D_5 ,$$

$$(4.29) \quad a_6 = \beta_{k+\frac{1}{2}}^- | - F_6, 0| + D_6 ,$$

$$(4.30) \quad \begin{aligned} b_0 = & |F_1, 0| \left(\alpha_{i-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{11} + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) - \\ & | - F_1, 0| \left(\alpha_{i-\frac{1}{2}}^- \Phi_1 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^- \Phi_2 \right) - \\ & |F_2, 0| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_1 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_2 \right) + \\ & | - F_2, 0| \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_{22} \right) + \\ & |F_3, 0| \left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{33} + \gamma_{j-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) - \\ & | - F_3, 0| \left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^- \Phi_3 + \gamma_{j-\frac{1}{2}}^- \Phi_4 \right) - \\ & |F_4, 0| \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^+ \Phi_3 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^+ \Phi_4 \right) + \\ & | - F_4, 0| \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^- \Phi_{44} \right) + \\ & |F_5, 0| \left(\alpha_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_{55} + \gamma_{k-\frac{1}{2}}^+ \Phi_0 \right) - \\ & | - F_5, 0| \left(\alpha_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_5 + \gamma_{k-\frac{1}{2}}^- \Phi_6 \right) - \\ & |F_6, 0| \left(\alpha_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_5 + \gamma_{k+\frac{1}{2}}^+ \Phi_6 \right) + \\ & | - F_6, 0| \left(\alpha_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_0 + \gamma_{k+\frac{1}{2}}^- \Phi_{66} \right) + \\ & \frac{\rho_0^n V_0^n}{\Delta t} + S_{c\Phi} V_0 . \end{aligned}$$

4.4 Ablaufstruktur und Randbedingungen des TMBF

Das auf kleine Reynolds-Zahlen erweiterte k - ϵ Modell kann für den gesamten Anwendungsbereich benutzt werden. Wenn von vornherein nur Strömungen mit hohen Reynolds-Zahlen berechnet werden, so kann das für hohe Reynolds-Zahlen gültige k - ϵ Modell verwendet werden. Es muß dann keine feine Gittereinteilung im Wandbereich gewählt werden, weil als Randbedingung das universelle Wandgesetz der Geschwindigkeit angewendet wird. Es ist dann auch eine geringere Rechenzeit erforderlich. Daher wird das TMBF ins FLUTAN Programm mit den folgenden zwei Optionen implementiert, siehe Tabelle 4.4:

- TMBF mit Verwendung des k - ϵ Modells für hohe Reynolds-Zahlen (ITURKE=20);
- TMBF mit Verwendung des k - ϵ Modells für kleine Reynolds-Zahlen (ITURKE=21).

Die Validierung des TMBF für Strömungen in Zwangskonvektion wird mit der ersten Option durchgeführt, und die Validierung des TMBF für Auftriebsströmungen in Mischkonvektion mit der zweiten Option. Das TMBF mit Verwendung des k - ϵ Modells für kleine Reynolds-Zahlen (ITURKE=21) umfaßt aber auch die andere Option (ITURKE=20). Diese unterschiedliche Benutzung der beiden Modell-Optionen wird nur aus Gründen der Rechenzeit empfohlen und hat keinen Einfluß auf die Validierung des TMBF, weil beide Optionen zu den gleichen numerischen Ergebnisse bei Strömungen in Zwangskonvektion führen.

In der Tabelle 4.5 werden die Randbedingungen der sieben Transportgleichungen des TMBF zusammengefaßt.

Zu beachten ist in der Tabelle 4.5 der Unterschied bei den Wandbedingungen zwischen dem k - ϵ Modell für hohe und kleine Reynolds-Zahlen. Beim Modell für hohe Reynolds-Zahlen werden durch die Verwendung des universellen Wandgesetzes der Geschwindigkeit die folgenden Probleme bei der Behandlung der Randbedingungen von k und ϵ überwunden:

- die Forderung eines feinen Maschennetzes in der Nähe der Wände beim Auftreten von starken Gradienten von k und ϵ ,
- die nicht Anwendbarkeit der für hohe Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für k und ϵ in der wandnahen viskosen Unterschicht.

Im FLUTAN Programm werden die Transportgleichungen für k und ϵ für hohe Reynolds-Zahlen nicht bis an die physikalischen Wände gelöst, sondern nur bis zu einem Knoten P, der im Bereich des universellen Wandgesetzes liegt. In diesem Bereich werden die Wandschubspannungen und die Randwerte von k und ϵ aus der Wandfunktion der Geschwindigkeitsverteilung abgeleitet und berechnet. Die Transportgleichung für k wird bei Wandzellen wie folgt behandelt:

Differenzialgleichung		Löser		
1.	Druckgleichung	CRESOR	SOR	DIREKT-L.
1.1	Berechnung der Geschwindigkeiten	—	—	—
TURBULENZMODELLE				
2.	K-Gleichung (ITURKE=11, 12, 20 oder 21)	—	SOR	DIREKT-L.
	ϵ -Gleichung (ITURKE=12, 20 oder 21)	—	SOR	DIREKT-L.
	T'^2 -Gleichung (ITURKE=20 oder 21)	—	SOR	DIREKT-L.
	$\epsilon_{T'}$ -Gleichung (ITURKE=20 oder 21)		SOR	DIREKT-L.
	$\overline{U'_i T'}$ -Gleichungen (ITURKE=20 oder 21)	—	SOR	DIREKT-L.
3.	Energiegleichung	—	SOR	DIREKT-L.
Überprüfung der Konvergenz				

Tabelle 4.4: Lösungssequenz im FLUTAN Programm mit der Einführung des TMBF

	Eintritt	Austritt
k	vorgegebene Werte oder $k_{in} = (TKIN) V_{in}^2$	$\frac{\partial k}{\partial x_n} = 0$
ϵ	vorgegebene Werte oder $\epsilon_{in} = (TDIN) k_{in}^{\frac{3}{2}}$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_n} = 0$
$\overline{T'^2}$	vorgegebene Werte oder $\overline{T'^2}_{in} = (TFIN) T_{in}^2$	$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_n} = 0$
$\epsilon_{T'}$	$(\epsilon_{T'})_{in} = (TEPI) \frac{\overline{T'^2} \epsilon}{k}$	$\frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_n} = 0$
$\overline{U'_i T'}$	vorgegebene Werte oder $\overline{U'_i T'}_{in} = (THIXN) \frac{\partial \overline{T'}}{\partial X_i}$	$\frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_n} = 0$
	Freie Oberfl.	Wand
k	$\frac{\partial k}{\partial x_n} = 0$	hohe Re-Zahl: Wandfunktion kleine Re-Zahl: $k_w = 0$
ϵ	$\frac{\partial \epsilon}{\partial x_n} = 0$	hohe Re-Zahl: nicht gelöst in der Wandzelle kleine Re-Zahl: $\epsilon_w = 0$
$\overline{T'^2}$	$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_n} = 0$	adiab.: $\overline{T'^2}_w = 0$ diab.: Gl. 4.41
$\epsilon_{T'}$	$\frac{\partial \epsilon_{T'}}{\partial x_n} = 0$	$(\epsilon_{T'})_w = 0$
$\overline{U'_i T'}$	$\frac{\partial \overline{U'_i T'}}{\partial x_n} = 0 \quad i \neq n$ $\overline{U'_i T'} = 0 \quad i = n$	$(\overline{U'_i T'})_w = 0$

Tabelle 4.5: Randbedingungen

- Die erste Ableitung von k nach der Normalenrichtung zur Wand wird zu null gesetzt.
- Der Produktionsterm P_k wird mit Hilfe des universellen Wandgesetzes der Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Es gilt

$$(4.31) \quad P_k = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\tau_w U_p}{y_p} .$$

Dabei ist U_p die Geschwindigkeit parallel zur Wand, y_p der Wandabstand des zentralen Knotens P der Randzelle und τ_w die Wandschubspannung.

Falls der Wandknoten P sich in der laminaren Unterschicht befindet, d.h. $y_p \leq y^*$, hat man

$$(4.32) \quad \tau_w = \frac{\mu U_p}{y_p} .$$

Wenn der Wandknoten P sich im turbulenten Bereich befindet, d.h. $y_p > y^*$, hat man

$$(4.33) \quad \tau_w = \frac{\kappa \rho C_\mu^{\frac{1}{4}} U_p \sqrt{k}}{\ln \left(\frac{E C_\mu^{\frac{1}{4}} y_p \sqrt{k}}{\nu} \right)} .$$

Dabei ist κ die Von-Karman-Konstante und E eine Konstante, die die Wandrauigkeit charakterisiert. Für glatte Wände wird $E=9$ angenommen. Hier ist y^* die Dicke der laminaren Unterschicht:

$$(4.34) \quad y^* = 20 \frac{\nu}{k^{\frac{1}{2}}} .$$

Die Transportgleichung für ϵ wird in den Randzellen nicht gelöst. Die Dissipationsrate von k wird im Wandknoten P durch die Beziehung berechnet:

$$(4.35) \quad \epsilon_p = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}}}{L} .$$

L ist das typische Längenmaß der Turbulenz:

$$(4.36) \quad L = \kappa y_{min} ,$$

wo y_{min} der minimale Wandabstand ist, mit der weiteren Bedingung

$$(4.37) \quad L \leq 0.175 \kappa D_h .$$

Dabei ist D_h der hydraulische Durchmesser.

Beim k - ϵ Modell für kleine Reynolds-Zahlen werden dagegen Zusatzterme zur Betrachtung der viskosen Effekte im Wandbereich verwendet. Die universelle Wandfunktion der Geschwindigkeit wird nicht benutzt. Dies bedeutet, daß ein feines Maschennetz im Wandbereich erforderlich wird. Die Transportgleichung für ϵ wird

hier bis zur Wandzelle mit der Verwendung des 'künstlichen' Wandwertes $\epsilon_w = 0$ gelöst.

Bei der Simulation des turbulenten Impulstransports ist die Verwendung der richtigen Eintrittsverteilung von k und ϵ wichtig. Während eine Eintrittsverteilung der kinetischen Energie der Turbulenz mit Hilfe von gemessenen normalen turbulenten Spannungen $\overline{U_i^2}$ berechnet werden kann, ist das nicht möglich für die Dissipationsrate ϵ , da diese Größe zur Zeit für allgemeine Strömungsfälle nicht gemessen werden kann. Die Eintrittsverteilung von ϵ wird deshalb mit Hilfe von semiempirischen Gleichungen festgelegt. Hier wird die folgende Gleichung verwendet:

$$(4.38) \quad \epsilon = TDIN k^{\frac{3}{2}} .$$

Die Größe TDIN, "Turbulence Dissipation at INlet", wird nach der Gleichung (2.16) und unter Verwendung der Mischungsweglänge der Turbulenz l_m nach Rodi (1980) durch folgenden Ausdruck erfaßt:

$$(4.39) \quad TDIN = \frac{c_\mu^{\frac{3}{4}}}{l_m} .$$

Die Mischungsweglänge l_m ist im Wandbereich proportional zum Wandabstand y und bei freier Scherschicht zur lokalen Scherschicht-Dicke δ . Der Proportionalitätsfaktor bei freier Scherschicht wurde für verschiedene Strömungen bestimmt, vergl. Rodi (1980).

Für die Wandbedingungen für $\overline{T'^2}$ werden zwei Fälle unterschieden.

Bei adiabatischer Wand wird

$$(4.40) \quad \overline{T'^2}_w = 0$$

gesetzt.

Bei diabatischer Wand wird der folgende Vorschlag von Sinai (1986) verwendet:

$$(4.41) \quad \sqrt{\overline{T'^2}_w} = \frac{\sqrt{4/\pi - 1}}{1 + \gamma} T^* \sqrt{Pr/0.004} ,$$

mit:

$$(4.42) \quad \gamma = \sqrt{\frac{\rho_w c_w K_w}{\rho_f c_f K_f}} ,$$

$$(4.43) \quad T^* = \frac{q}{\rho_f c_f U^*} ,$$

$$(4.44) \quad U^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_f}} ,$$

hier sind ρ_w , ρ_f , c_w , c_f , K_w und K_f die Dichte, die spezifische Wärme und die Temperaturleitzahl jeweils der Wand und des Fluides. Pr ist die molekulare Prandtl-Zahl und q die Wärmestromdichte.

Die Ablaufstruktur des erweiterten TMBF wird in der Abb. 4.3 dargestellt. Die Bedeutungen der in dieser Ablaufstruktur auftretenden Subroutinen werden in der Tab.4.6 erläutert.

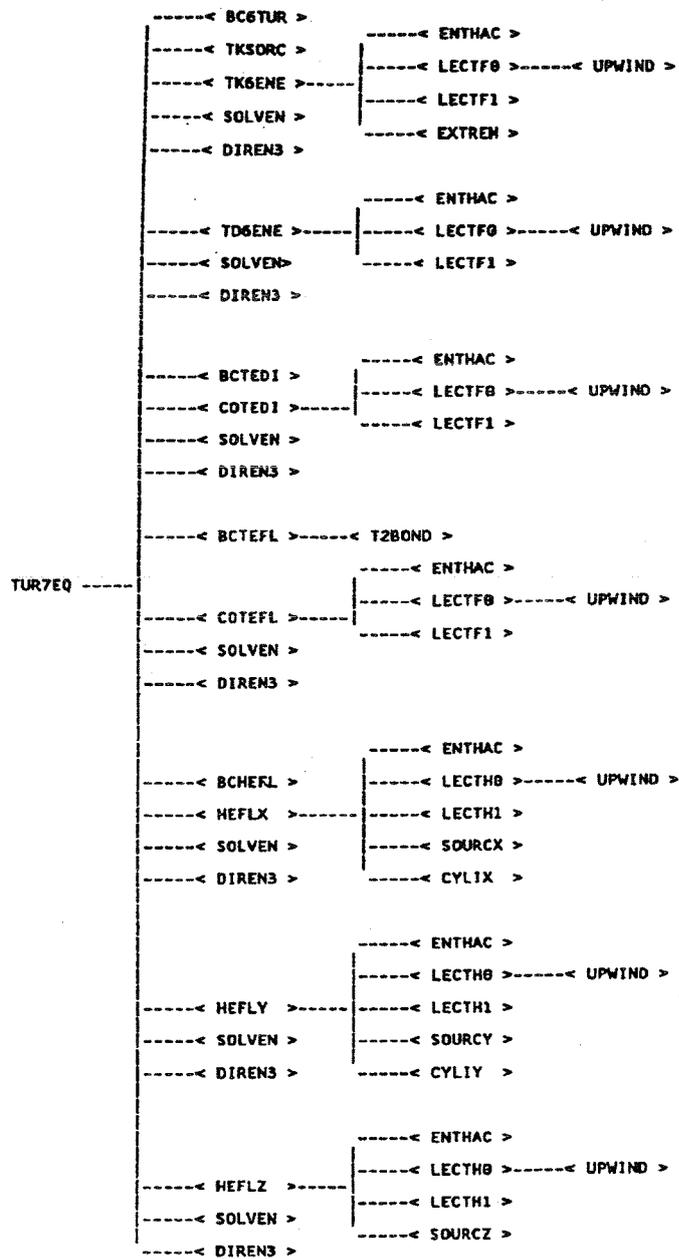


Abbildung 4.3: Zusammenfassung der Subroutinen in FLUTAN zur Behandlung des TMBF.

Subroutine	Erläuterung der Subroutine
BCHEFL	Berechnung der Randbedingungen für $\overline{U'_i T'}$
BCTEDI	Berechnung der Randbedingungen für $\epsilon_{T'}$
BCTEFL	Berechnung der Randbedingungen für T'^2
BC6TUR	Berechnung der Randbedingungen für k und ϵ
COTEDI	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die $\epsilon_{T'}$ -Gleichung
COTEFL	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die T'^2 -Gleichung
CYLIX	Berechnung der zusätzlichen Terme bei zylindrischen Koordinaten in der $\overline{U'_i T'}$ -Gleichung
CYLIY	Berechnung der zusätzlichen Terme bei zylindrischen Koordinaten in der $\overline{V'_i T'}$ -Gleichung
DIREN3	Direkt-Löser
ENTHAC	Berechnung der Koeffizienten D_i
HEFLX	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die $\overline{U'_i T'}$ -Gleichung
HEFLY	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die $\overline{V'_i T'}$ -Gleichung
HEFLZ	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die $\overline{W'_i T'}$ -Gleichung
INITU6	Berechnung der Anfangswerte für $\overline{U'_i T'}$, T'^2 und $\epsilon_{T'}$
KEPSFU	Berechnung der Korrekturfunktionen f_μ und f_2
LECTF0	Berechnung der Koeffizienten α , β und γ nach Upwind-Verfahren für k, ϵ , T'^2 und $\epsilon_{T'}$
LECTF1	Berechnung der Konvektions- und Diffusionsanteile der Koeffizienten a_i und b_0 für die k, ϵ , T'^2 und $\epsilon_{T'}$ Gleichungen
LECTH0	Berechnung der Koeffizienten α , β und γ nach Upwind-Verfahren für $\overline{U'_i T'}$
LECTH1	Berechnung der Konvektions- und Diffusionsanteile der Koeffizienten a_i und b_0 für die $\overline{U'_i T'}$ Gleichungen
NORDIS	Berechnung des Wandabstands
SOLVEN	SOR Löser
SOURCX	Berechnung der Quellen- bzw. Senken-Terme in der $\overline{U'_i T'}$ Gleichung
SOURCY	Berechnung der Quellen- bzw. Senken-Terme in der $\overline{V'_i T'}$ Gleichung
SOURCZ	Berechnung der Quellen- bzw. Senken-Terme in der $\overline{W'_i T'}$ Gleichung
TDDLO1	Berechnung des Zusatzterms $E_{T'}$ in der $\epsilon_{T'}$ -Gleichung
TDRLO1	Berechnung des Zusatzterms E in der ϵ -Gleichung
TDRLO2	Berechnung des Zusatzterms E in der ϵ -Gleichung
TDRLO3	Berechnung des Zusatzterms E in der ϵ -Gleichung
TD6ENE	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die k-Gleichung
TK6ENE	Berechnung der Koeffizienten a_i und b_0 für die ϵ -Gleichung
TKSORC	Berechnung der Quellen- bzw. Senken-Terme in der k-Gleichung
TUR7EQ	Hauptsubroutine des TMBF
T2BOND	Berechnung des Wandwertes von T'^2 aus der Gleichung (4.41)

Tabelle 4.6: Zusammenfassung der Subroutinen im FLUTAN zur Behandlung des TMBF

5. Validierung des TMBF für Zwangskonvektion

5.1 Einführung

Der erste Schritt der Validierung des TMBF behandelt zunächst turbulente Strömungen bei Zwangskonvektion. Dazu werden drei verschiedene Strömungen mit Zwangskonvektion mit dem TMBF nachgerechnet, die von Interesse für die Anwendung sind:

- eine turbulente Rohrströmung hinter einem Düsenblock mit einer Überhöhung des radialen Temperaturprofils in der Achse des Rohres, wobei das Fluid Wasser eine konstante radiale Verteilung der mittleren Geschwindigkeit besitzt;
- ein beheizter, achsensymmetrischer turbulenter Freistrahler in flüssigem Natrium mit schwachem Auftriebseinfluß, wobei die radialen Profile der mittleren Geschwindigkeit und Temperatur eine Überhöhung im Achsenbereich zeigen;
- eine horizontale turbulente Nachlaufströmung in Luft, die einen konstanten vertikalen Temperaturunterschied aufweist.

Im letzteren Fall werden zwei Zustände nachgerechnet, nämlich eine stabile und eine instabile Schichtung der Strömung, die beide gleichen Temperaturunterschied aufweisen. In der Tabelle 5.1 werden die wichtigsten Parameter dieser Experimente zusammengefaßt. Bei diesen Strömungen entfällt die im $k-\epsilon-\sigma_t$ -Modell vorausgesetzte Reynolds-Analogie aus folgenden Gründen:

- Die radialen Temperaturverteilungen in der turbulenten Rohrströmung zeigen in der Achse eine Überhöhung und unterscheiden sich somit stark vom mittleren Geschwindigkeitsfeld, dessen Verlauf über den Querschnitt konstant ist.
- Beim Freistrahler in flüssigem Natrium wird der Wärmetransport durch Turbulenz wegen der starken molekularen Wärmediffusion wesentlich gedämpft, weil die molekulare Diffusivität Γ beim Natrium im Gegensatz zum Wasser viel größer als die molekulare Zähigkeit ist.

	Fluid	Strömung	ΔU	U_0	ΔT	T_0
1.	Wasser	Beheizte Rohrströmung	0 m/s	2.8 m/s	10°C	20°C
2.	Natrium	Beheizter, achsensym. Freistrahler	0.5 m/s	0.05 m/s	30°C	300°C
3.	Luft	Beheizter, horiz. Nachlauf	1.19 m/s	7.0 m/s	$\pm 30^\circ\text{C}$	20°C

ΔU ist der maximale radiale Geschwindigkeitsunterschied
 U_0 ist die Geschwindigkeit der Anströmung
 ΔT ist der maximale radiale Temperaturunterschied
 T_0 ist die Temperatur der Anströmung für Exp.1 und 2
 und die Temperatur des kalten Fluides für Exp.3

Tabelle 5.1: Parameter der Experiments in Wasser, Natrium und Luft mit Zwangskonvektion

- Bei der Nachlaufströmung in Luft sind das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld stark unterschiedlich.

Eine getrennte Beschreibung des turbulenten Impuls- und Wärmetransports ist für diese Strömungen erforderlich. Der turbulente Impulstransport kann hier noch durch die Verwendung der isotropen Wirbelviskosität beschrieben werden.

Außerdem werden Experimente mit drei verschiedenen Fluiden ausgewählt, um einen breiten Bereich der molekularen Prandtl-Zahl zu erfassen: Es sind dies Wasser (7.0), Luft (0.71) und Natrium (0.006).

Aus den in Abschnitt 4.4 erläuterten Gründen wird in dieser Phase der Validierung das TMBF mit den für hohe Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für k und ϵ (ITURKE=20) verwendet. Die mit dem TMBF durchgeführten numerischen Rechnungen werden nicht nur mit den Meßwerten aus den Experimenten verglichen, sondern auch mit Ergebnissen, die durch Anwendung des k - ϵ - σ_t Modells für hohe Reynolds-Zahlen erzielt wurden. Zweck dieses zusätzlichen Vergleichs ist es, die Vorteile zu verdeutlichen, die die Verwendung der detaillierten Beschreibung des turbulenten Wärmetransports (TMBF) anstelle des einfachen Fourier-Ansatzes und unter Anwendung der konstanten turbulenten Prandtl-Zahl (k - ϵ - σ_t -Modell) mit sich bringt. Deshalb konzentriert sich die Aufmerksamkeit bei dieser Validierung besonders auf die Simulation des turbulenten Wärmetransports.

Das TMBF und das k - ϵ - σ_t -Modell verwenden die gleiche Beschreibung des turbulenten Impulstransports abgesehen von der Modellierung des Auftriebsterms G_k in

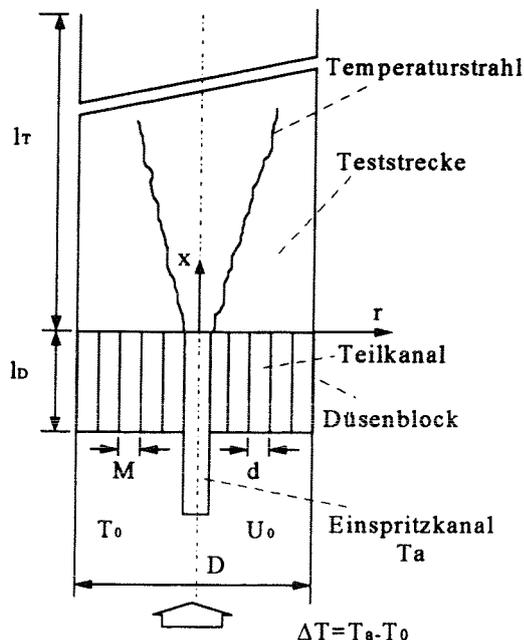


Abbildung 5.1: Teststrecke TEFLU

den Transportgleichungen für k und ϵ . Da die Auftriebskräfte in den oben genannten Experimenten vernachlässigbar sind, unterscheiden sich die beiden Turbulenzmodelle für diese Fälle nur in der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports.

5.2 Turbulente Rohrströmung in Wasser

Die Simulation der Ausbreitung von Temperaturstörungen in einer turbulenten Rohrströmung hinter einem Düsenblock wurde in der Teststrecke TEFLU (TEmperatur FLUktationen) im Forschungszentrum Karlsruhe durch Krebs (1979) durchgeführt.

Die in der Abbildung 5.1 dargestellte Teststrecke TEFLU bestand aus einem Plexiglasrohr und einem Düsenblock. Das Rohr hatte einen inneren Durchmesser von $D=110$ mm und eine Gesamtlänge von $l_T=2146$ mm. Der $l_D=120$ mm lange Düsenblock enthielt 158 Bohrungen mit einem Durchmesser von $d=7.2$ mm. Die Bohrungen des Düsenblocks lagen auf den Eckpunkten gleichseitiger Dreiecke und hatten einen Lochmittenabstand von $M=8.2$ mm.

Zur Erzeugung der Überhöhung des radialen Temperaturprofils wurde Wasser durch den Zentralkanal des Düsenblocks mit einer höheren Temperatur $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ eingespritzt. Die Temperatur der Anströmung war $\bar{T}_0=20^\circ\text{C}$. Das radiale Geschwindigkeitsprofil war gleichmäßig. Der mittlere Wert oberhalb des Düsenaustritts war $\bar{U}_0=2.8$ m/s. Die Reynolds-Zahl hatte den Wert $Re_D=308000$, daher war

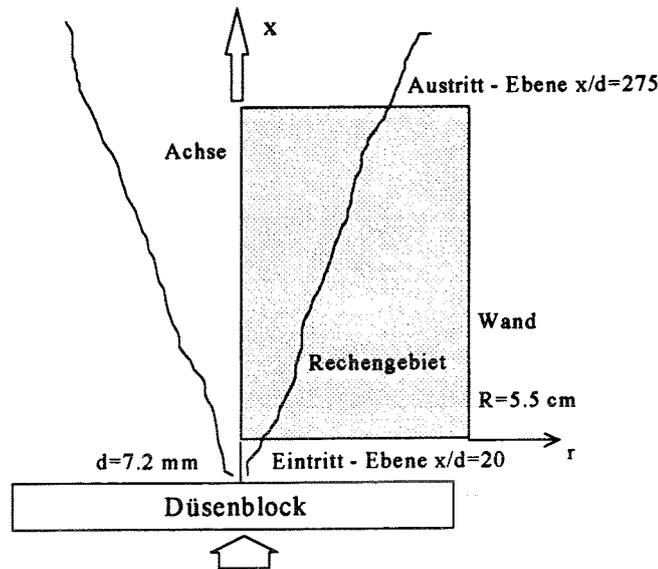


Abbildung 5.2: Rechengebiet der Rohrströmung in Wasser

die Strömung turbulent und ohne Auftriebseffekt. Beim Experiment wurden radiale Profile der mittleren Geschwindigkeit und Temperatur sowie der Varianz der Temperatur in verschiedenen Abständen vom Düsenaustritt gemessen.

5.2.1 Geometrie des Rechengebietes und Eintrittswerte

Die Geometrie des Rechengebietes besteht aus einem vertikalen Zylinder, der das Rohr hinter dem Düsenblock simuliert, mit einem Radius von $R=55$ mm und einer Länge von 2000 mm. Da diese Strömung achsensymmetrisch ist, vereinfacht sich die Geometrie des Rechengebietes in ein zweidimensionales Gitter, das nur die Hälfte des Zylinders simuliert, siehe Abbildung 5.2. Das Rechengebiet besteht aus 4514 Zellen, von denen 37 in radialer Richtung und 122 in axialer Richtung liegen. Die obere Fläche des Zylinders simuliert den Austritt. Die äußeren und inneren Vertikalen stellen die physikalische Wand bzw. die Achse des Rohres dar. Die untere Fläche des Zylinders, die Eintrittsfläche des Rechengebietes, simuliert die Meßebe $x/d=20$. In der Tat ist dies die erste Meßebe nach dem Düsenaustritt, in der die Strömung nicht zu stark von der Geometrie des Düsenblocks beeinflusst ist.

Die Eintrittsfläche wird durch 37 'Flächenelemente' in FLUTAN simuliert. Deshalb existieren 37 'Gitterknoten', aus denen sich die Eintrittsverteilungen der zu berechnenden Größen zusammensetzen.

In der Abbildung 5.3 sind die radialen Eintrittsprofile der mittleren Geschwindigkeit \bar{U} , der mittleren Temperatur \bar{T} , der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$, von k und von ϵ dargestellt.

Das radiale Eintrittsprofil für die mittlere Geschwindigkeit ist fast gleichmäßig,

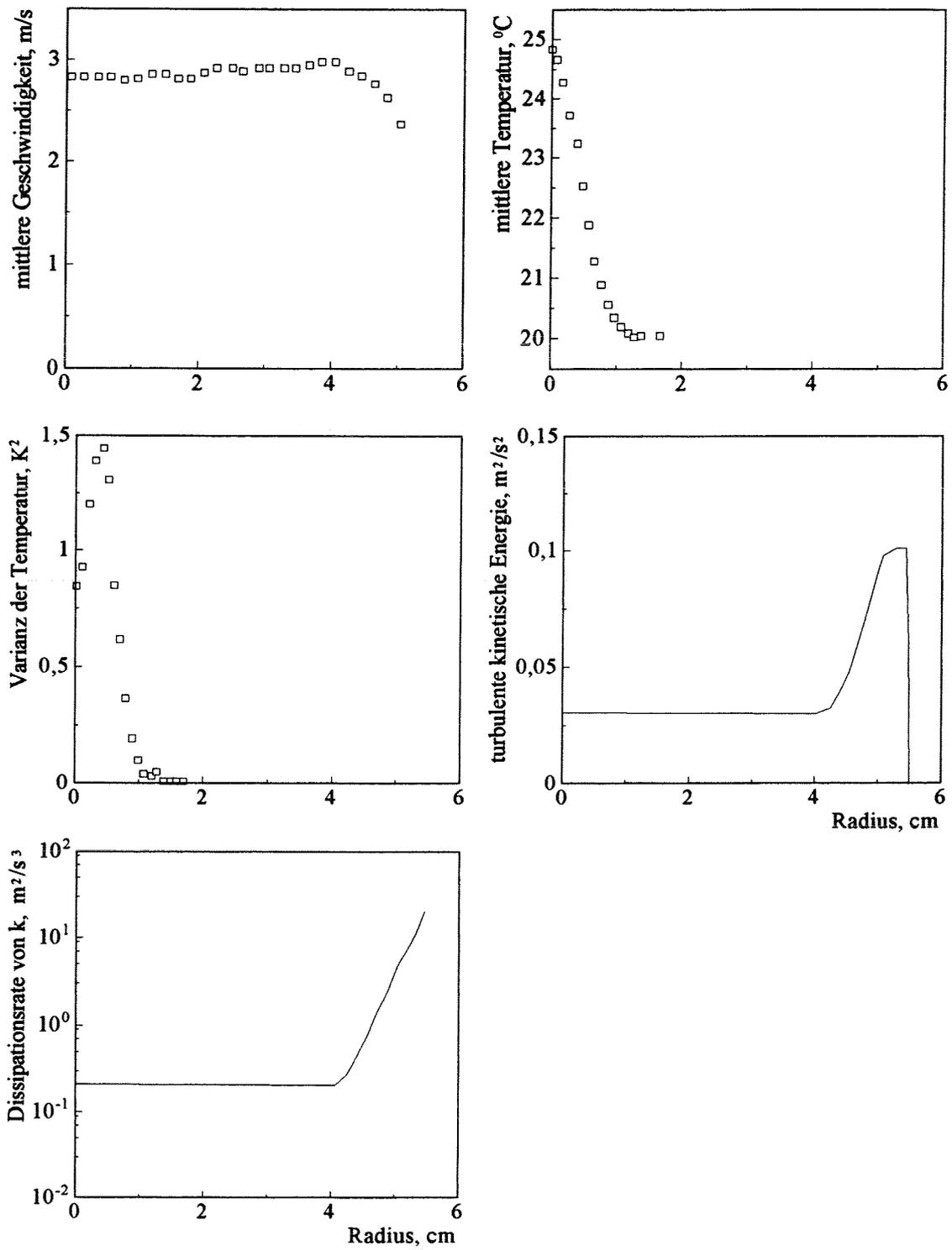


Abbildung 5.3: Eintrittsprofile (Ebene $x/d=20$) für die turbulente Rohrströmung in Wasser.

nämlich $\overline{U}_0=2.8$ m/s. Die dargestellten Werte sind Meßwerte in der Ebene $x/d=20$. Das radiale Eintrittsprofil für die mittlere Temperatur erreicht einen maximalen Wert auf der Achse. Die radiale Überhöhung der Temperatur ist ungefähr 5° C. Auch dies sind Meßwerte in der Ebene $x/d=20$.

Da das radiale Eintrittsprofil für die Varianz der Temperatur dem Gradienten der mittleren Temperatur proportional ist, zeigt es ein Maximum an der Stelle des Wendepunktes des Eintrittsprofils der mittleren Temperatur. Diese Werte wurden im Experiment ebenfalls in der Ebene $x/d=20$ gemessen

Die turbulente kinetische Energie k zeigt am Eintritt des Rechengebietes das typische Profil einer turbulenten Rohrströmung bei Zwangskonvektion. Bei dieser Strömung entsteht die Turbulenz an der Wand. In der Tat treten hier starke Gradienten der mittleren Geschwindigkeit auf, weil die Strömung sich an die Wand anpassen muß. Deshalb erreicht das Profil von k , das in der Kernströmung konstant ist, einen maximalen Wert in der Nähe der Wand. Direkt an der Wand ist der Wert der turbulenten kinetischen Energie null, weil sich dort eine viskose Scherschicht ausbildet. Dieses Profil wird mit Hilfe der von Krebs (1979) gemessenen axialen Geschwindigkeitsfluktuationen nachgebildet.

Das Eintrittsprofil für ϵ folgt dem Profil der turbulenten kinetischen Energie, abgesehen in Wandnähe. In der viskosen Unterschicht behält ϵ einen endlichen Wert. Die Eintrittswerte von ϵ werden mit Hilfe der von Brinkworth-Smith (1969) vorgeschlagenen Gleichung

$$(5.1) \quad \nu_t = 0.0315 D \bar{u}_\tau \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] \left[1 + 2 \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]$$

und der Gleichung (3.2) berechnet. Mit der Gleichung (5.1) kann die turbulente Viskosität ν_t bei turbulenter Rohrströmung in Zwangskonvektion berechnet werden. Hier sind r/D der mit dem Kanaldurchmesser D normierte Abstand von der Rohrachse und \bar{u}_τ die mittlere Wandschubspannung, die sich mit dem Verlustbeiwert λ_{turb} schreibt als:

$$(5.2) \quad \bar{u}_\tau = U_0 \sqrt{\frac{\lambda_{turb}}{8}}.$$

Die Eintrittsprofile der Wärmeflüsse und der Dissipationsrate ϵ_T' werden nach den Eintrittsbedingungen, die in der Tabelle 4.5 dargestellt werden, mit THIXN=0.1 und TEPI=1.0 berechnet.

5.2.2 Ergebnisse

Die Abbildung 5.4 zeigt die gerechneten und gemessenen radialen Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit jeweils in den Ebenen $x/d=27$ und $x/d=162$. Die Rechnungen wurden mit dem TMBF und dem k - ϵ - σ_t -Modell durchgeführt. Beide Rechenergebnisse stimmen gut mit den Meßwerten überein. Die Rechnungen zeigen untereinander keine Abweichungen.

In der Abbildung 5.5 wird der radiale Verlauf der mittleren Temperatur in zwei verschiedenen Ebenen dargestellt. Die mit dem TMBF durchgeführte Rechnung zeigt

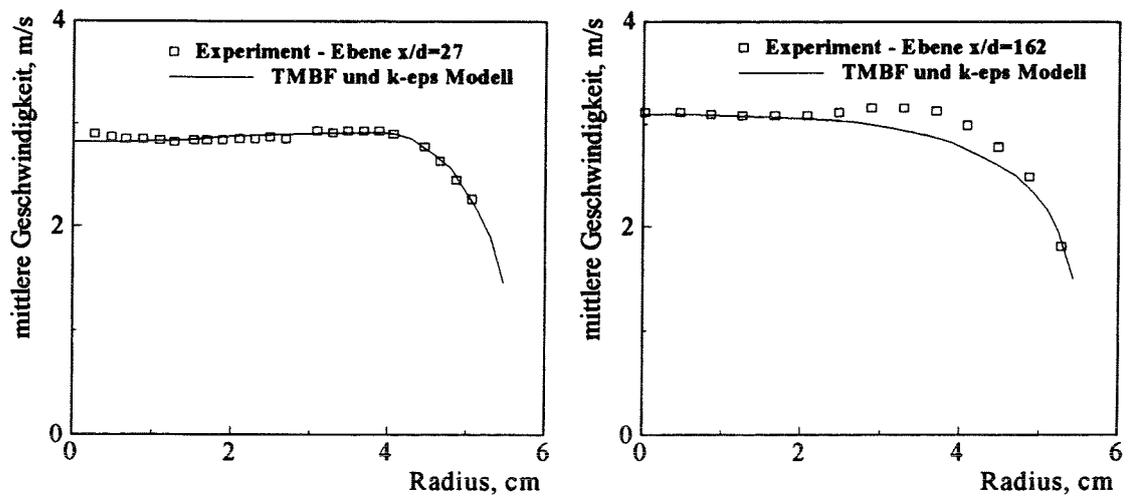


Abbildung 5.4: Radiale Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit. Rohrströmung in Wasser - Ebene $x/d=27$ und 162

Abbildung 5.5: Radiale Profile der mittleren Temperatur. Rohrströmung in Wasser - Ebene $x/d=43$ und 161

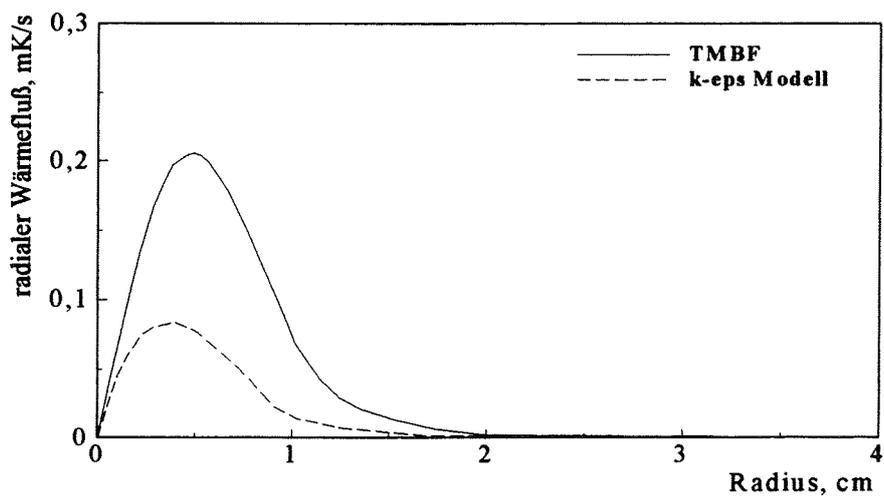


Abbildung 5.6: Radiales Profil des radialen turbulenten Wärmeflusses. Rohrströmung in Wasser - Ebene $x/d=22$.

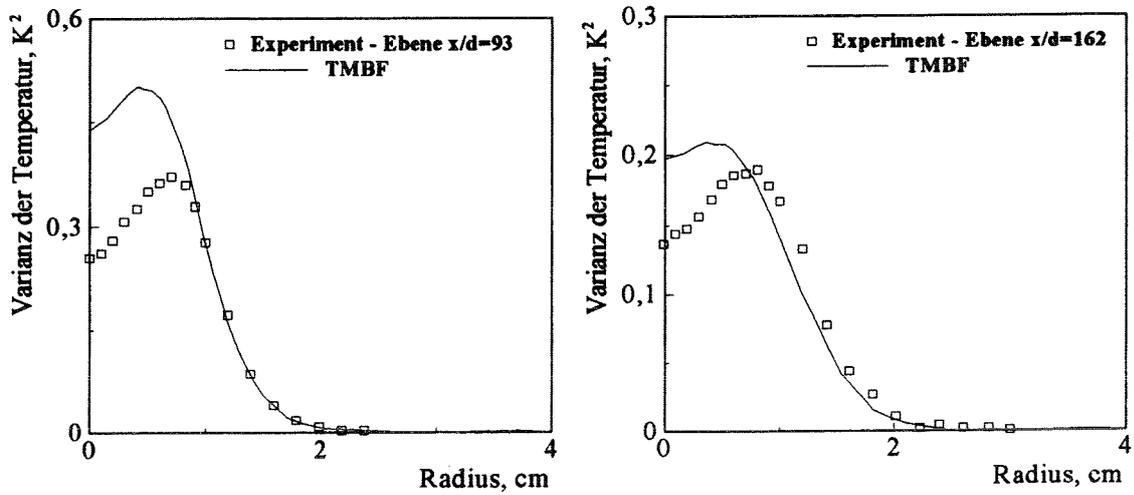


Abbildung 5.7: Radiale Profile der Varianz der Temperatur. Rohrströmung in Wasser - Ebene $x/d=93$ und 162.

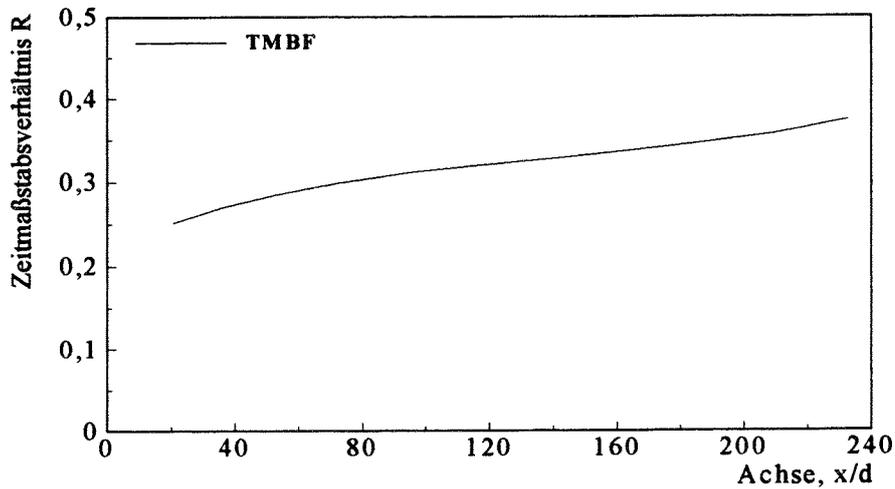


Abbildung 5.8: Axiales Profil des turbulenten Zeitmaßstabsverhältnisses R . Rohrströmung in Wasser.

eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Dagegen überschätzt das $k-\epsilon-\sigma_t$ -Modell unter Verwendung des Standard-Wertes $\sigma_t=0.9$ deutlich die Ausbreitung des mittleren Temperatur-Strahles in der radialen Richtung und simuliert in der Ebene $x/d=162$ ein vollkommen flaches Profil. Der Grund für diesen Unterschied liegt in der Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse. In der Abbildung 5.6 ist zu sehen, daß der mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechnete radiale Wärmefluß $\overline{U'T'}$ die TMBF-Rechnung stark überschätzt. In der Tat wird der radiale Wärmefluß unter Verwendung des Fourier-Ansatzes proportional zum hohen radialen Gradienten der mittleren Temperatur gesetzt. Damit verursacht er eine zu hohe radiale Vermischung der mittleren Temperatur. Mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ -Modell kann eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten der mittleren Temperatur nur dadurch erzielt werden, daß der radiale turbulente Wärmefluß durch einen angepaßten höheren Wert der turbulenten Prandtl-Zahl σ_t verringert wird.

Wie die Abbildung 5.7 zeigt, werden die Meßwerte der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ durch die Rechenergebnisse qualitativ gut wiedergegeben. Das axiale Profil des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R wird nach der Gleichung (3.47) berechnet. Das Ergebnis ist in der Abbildung 5.8 dargestellt und zeigt einen Wert R von ungefähr 0.3 an. Dieser Wert ist kleiner als der Standard-Wert, 0.5-0.8, den das Modell für die Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ nach der Gleichung (3.58) benutzt.

5.3 Der Freistrah in Natrium

Ein beheizter, achsensymmetrischer, turbulenter Impulsstrahl wurde in der Natrium-Teststrecke TEFLU von Knebel (1993) verwirklicht. Die Teststrecke, die in der Abbildung 5.1 zu sehen ist, wird im Abschnitt 5.2 schematisch dargestellt. Die radialen Profile der mittleren Temperatur und Geschwindigkeit zeigen am Düsenaustritt eine Überhöhung ΔT und ΔU , deren Werte in der Tabelle 5.1 angegeben sind.

Die densimetrische Froude-Zahl Fr , eine charakteristische Kennzahl für Auftriebsstrahlen, hat am Düsenaustritt den Wert:

$$(5.3) \quad Fr_0 = \frac{(\overline{U}_0^2 - \overline{U}_a^2) \rho_0}{g(\rho_a - \rho_0) d} \cong 521$$

Darin bezeichnen die Indizes a und 0 jeweils die Werte auf der Achse und in der gleichmäßigen Anströmung. Der relativ große Werte der Froude-Zahl deutet an, daß die Auftriebskräfte in diesem Experiment bedeutungslos sind. Die Reynolds-Zahl, die mit dem Wert der Anströmungsgeschwindigkeit 0.05 m/s berechnet wird, hat den Wert $Re=14000$, daher ist die Strömung turbulent.

Radiale Profile der mittleren Geschwindigkeit und Temperatur sowie der Varianz der Temperatur wurden beim Experiment in verschiedenen Abständen vom Düsenaustritt gemessen.

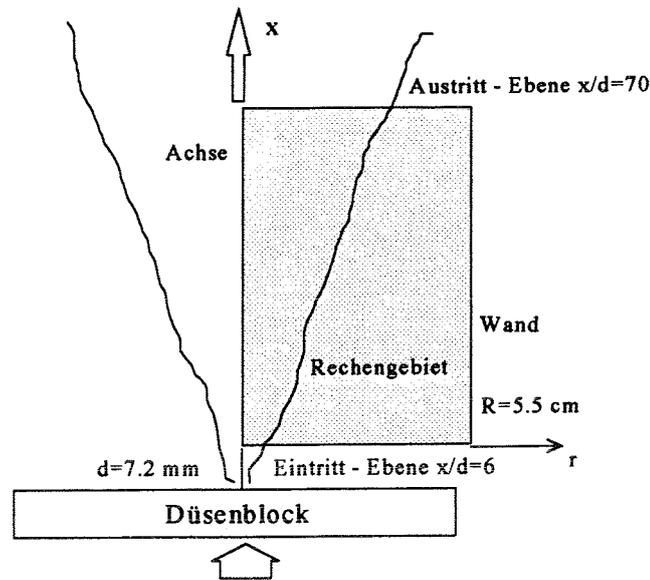


Abbildung 5.9: Rechengebiet des Freistrahls in Natrium

5.3.1 Geometrie des Rechengebietes und Eintrittswerte

Die Geometrie des Rechengebietes besteht aus einem vertikalen zweidimensionalen Gitter, das eine Seite des Rohres hinter dem Düsenblock simuliert. Das Gitter hat in zylindrischen Koordinaten einen Radius von $R=55$ mm und eine Höhe von 500 mm, siehe Abbildung 5.9. Da stärkere Gradienten der mittleren Temperatur verglichen mit der turbulenten Rohrströmung auftreten, wird ein feineres Gitter für diese Simulation verwendet. Das Gitter enthält 10128 Zellen, 78 Zellen liegen in der radialen Richtung und 131 Zellen in axialer Richtung.

Es wird die gleiche Art von Randbedingungen wie in der turbulenten Rohrströmung verwendet. Die Wand ist genügend weit vom Freistrahls entfernt, so daß der Wandeinfluß auf den Freistrahls vernachlässigbar ist. Die Meßebebene $x/d=6$ wird als Eintrittsfläche des Rechengebietes aus dem gleichen Grund wie in der turbulenten Rohrströmung ausgewählt. Die radialen Eintrittswerte werden auf 78 'Gitterknoten' vorgegeben.

In der Abbildung 5.10 werden die Eintrittsprofile der mittleren Geschwindigkeit \bar{U} , der mittleren Temperatur \bar{T} , der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$, von k und von ϵ dargestellt. Die Eintrittsprofile \bar{U} , \bar{T} und für $\overline{T'^2}$ wurden in der Ebene $x/d=6$ gemessen. Die Eintrittsprofile für k und ϵ werden mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen aus den gerechneten Profilen eines Luftfreistrahlexperiments von Corrsin (1943) hergeleitet.

Das radiale Eintrittsprofil für die mittlere Geschwindigkeit zeigt eine Überhöhung von ca. 35 cm/s. Die Überhöhung der mittleren Temperatur beträgt 18°C . Das Eingabeprofil für die Varianz der Temperatur folgt dem Gradienten der mittleren Temperatur. Die Eingabeprofile von k und ϵ folgen dem Gradienten der mittleren

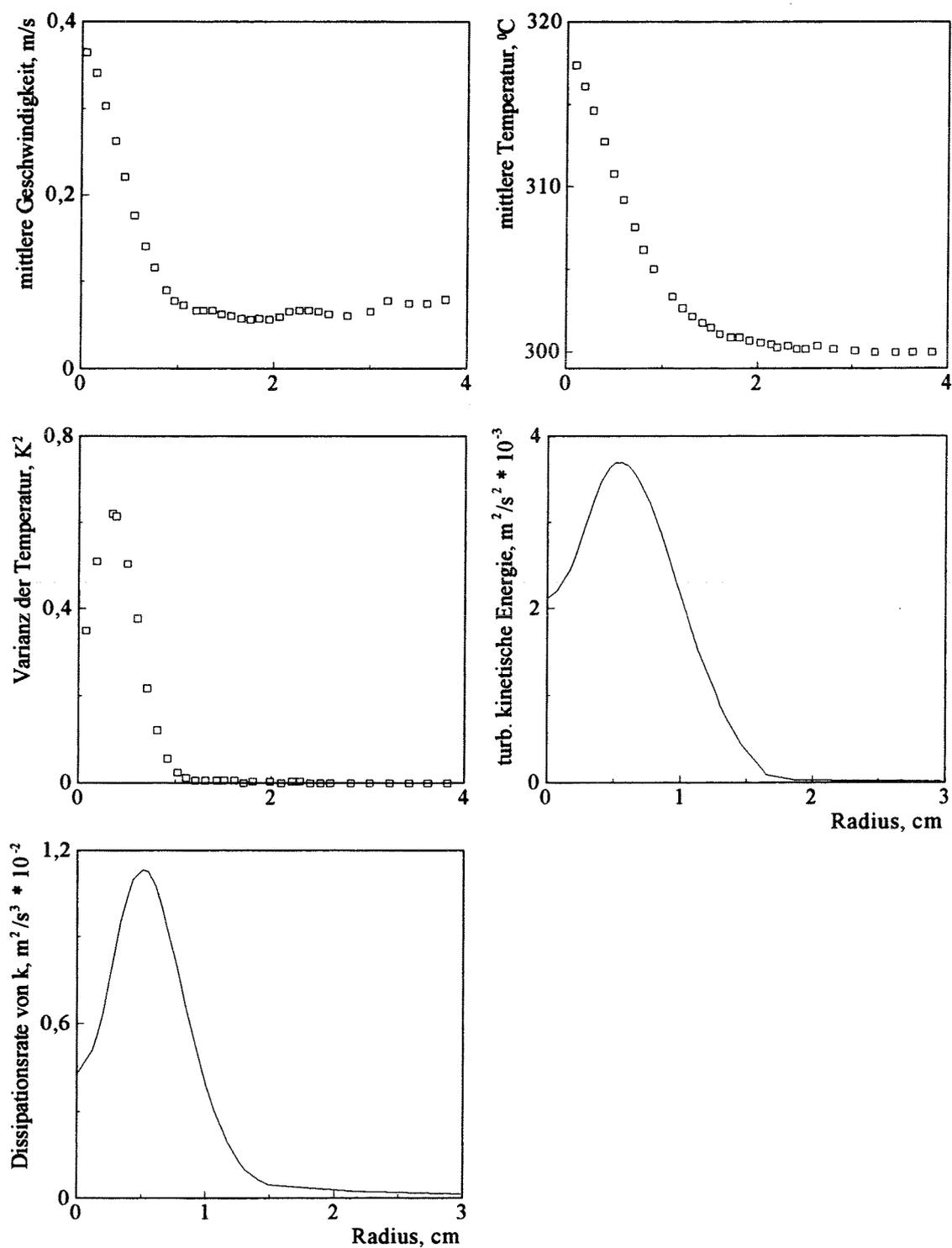


Abbildung 5.10: Eintrittsprofile (Ebene $x/d=6$) für den turbulenten Freistrah in Natrium.

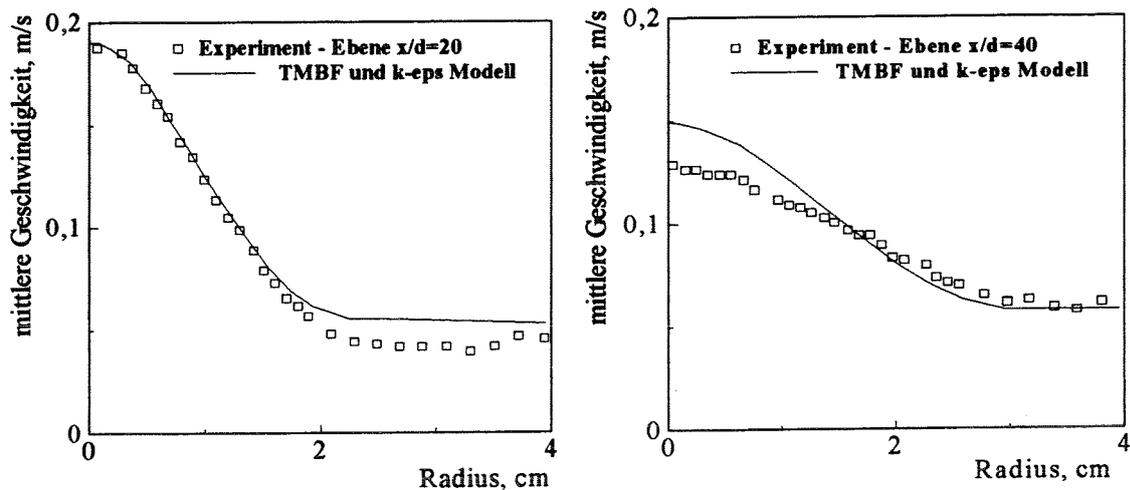


Abbildung 5.11: Radiale Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit. Freistrah in Natrium - Ebene $x/d=20$ und 40 , Vergleich für $c_\mu=0.022$.

Geschwindigkeit. Die Eintrittsprofile der Wärmeflüsse und der Dissipationsrate ϵ_T werden nach den Eintrittsbedingungen, die in der Tabelle 4.5 dargestellt werden, mit $\text{THIXN}=0.1$ und $\text{TEPI}=1.0$ berechnet.

5.3.2 Ergebnisse

Die Abbildung 5.11 zeigt den radialen Verlauf der mittleren Geschwindigkeit in zwei verschiedenen Ebenen. Eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Meßwerten der mittleren Geschwindigkeit zeigen die Rechnungen mit dem TMBF und dem $k-\epsilon$ -Modell nur, wenn ein geringerer Wert von c_μ (0.022) als der Standard-Wert (0.09) verwendet wird. Dieser Wert entspricht dem mittleren Wert, der mit der von Rodi (1980) vorgeschlagenen Korrekturfunktion für Freistrahle berechnet wird. Sie ist für die zufriedenstellende Simulation der Ausbreitung eines achsensymmetrischen Freistrahls notwendig.

Die Abbildung 5.12 zeigt den Vergleich zwischen den Meßwerten und den numerischen Rechnungen der mittleren Temperatur. Das TMBF leistet eine gute Simulation des Temperatur-Feldes, dagegen weist das $k-\epsilon-\sigma_t$ -Modell geringere Werte der Temperatur im Freistrahzentrum auf. Das Temperatur-Feld wird vom radialen turbulenten Wärmefluß bestimmt, der die Wärme von der Achse zur Außenströmung durch die Turbulenzbewegung transportiert. Im Gegensatz zum Experiment in Wasser wird der turbulente Wärmetransport in flüssigem Natrium infolge einer hohen molekularen Wärmeleitfähigkeit wesentlich gedämpft. Im Fourier-Ansatz kann diese Dämpfung nur durch die turbulente Prandtl-Zahl berücksichtigt werden. Deshalb verursacht die Verwendung des Standard-Wertes $\sigma_t=0.6$, der aus Experimenten in Wasser und Luft bestimmt wurde, eine Überschätzung des radialen Wärmeflusses in der Rechnung mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell. Das ist in der Abbildung 5.13 zu sehen. Der radiale turbulente Wärmefluß im $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell kann nur durch eine Anpassung von σ_t reduziert werden, so daß eine gute Simulation der mittleren Tempe-

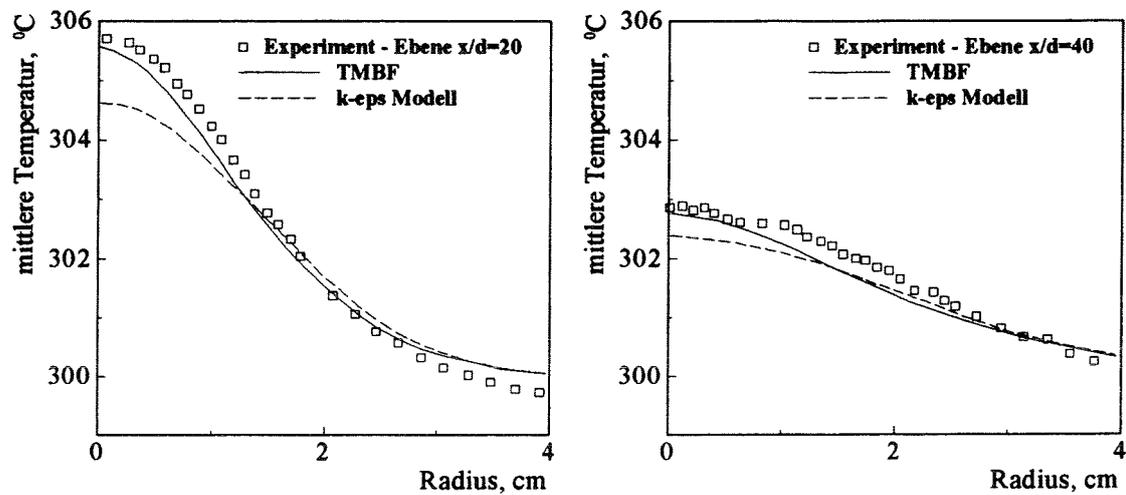


Abbildung 5.12: Radiale Profile der mittleren Temperatur. Freistrah in Natrium - Ebene $x/d=20$ und 40 .

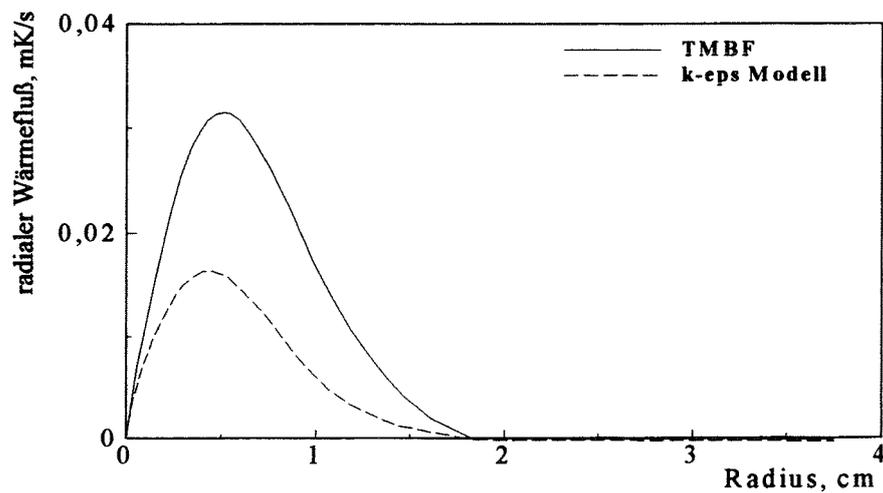


Abbildung 5.13: Radiales Profil des radialen turbulenten Wärmeflusses. Freistrah in Natrium - Ebene $x/d=8$

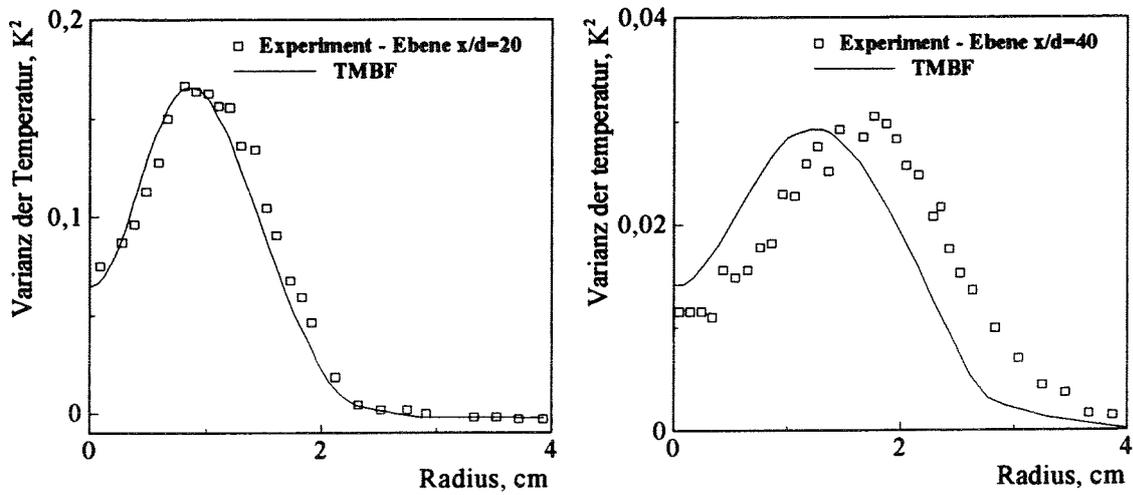


Abbildung 5.14: Radiale Profile der Varianz der Temperatur. Freistrah in Natrium - Ebene $x/d=20$ und 40.

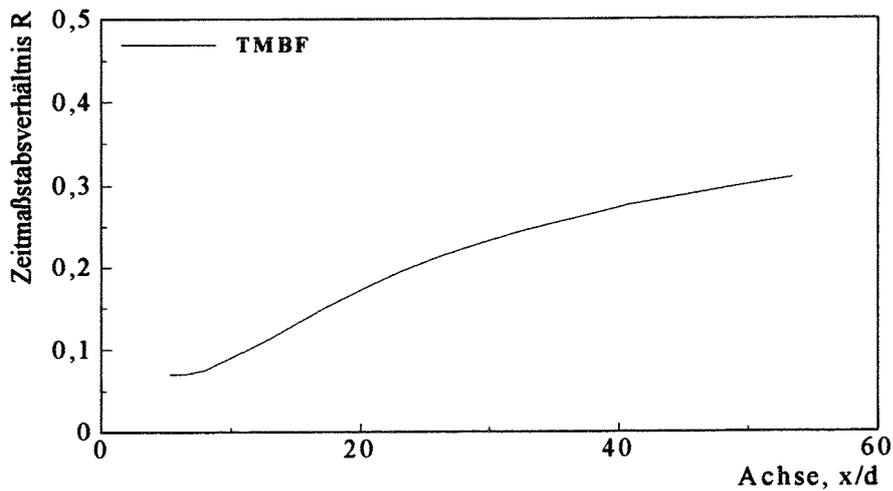


Abbildung 5.15: Axiales Profil des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R . Freistrah in Natrium.

ratur erreicht wird. Die vom TMBF gelösten Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse berücksichtigen automatisch die Abhängigkeit der molekularen Wärmeleitfähigkeit des Fluides. Eine entsprechende Anpassung wie im $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell ist deshalb nicht erforderlich.

Die radialen Verläufe der Varianz der Temperatur sind in der Abbildung 5.14 dargestellt. Die numerische Simulation mit Hilfe des TMBF ist zufriedenstellend. Der in der Abbildung 5.15 dargestellte axiale Verlauf des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R zeigt, daß R nicht konstant ist, sondern vom Geschwindigkeits- und Temperaturfeld abhängig ist. Aus den berechneten Werten des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R kann ein Mittelwert von 0.17 festgelegt werden. Dieser Wert ist noch geringer als der mittlere Wert $R=0.3$, der in einer Rohrströmung mit Wasser bestimmt wurde. Dies bedeutet, daß R nicht nur vom Geschwindigkeits- und Temperaturfeld abhängig ist, sondern auch von den physikalischen Eigenschaften des Fluides. Die Abnahme des Wertes von R von Wasser zu Natrium wurde im Abschnitt 3.2.4 im einzelnen erläutert.

5.4 Die beheizte horizontale Nachlaufströmung in Luft

Dieses von Tureaud et al. (1988) durchgeführte Experiment bestand aus einer horizontalen turbulenten zweidimensionalen Nachlaufströmung in Luft. Der turbulente Nachlauf wurde durch eine 1.063 m lange Platte erzeugt, die horizontal in einem 0.4m x 0.4m Windkanal angeordnet war, siehe Abbildung 5.16. Die mit einer Geschwindigkeit von $\bar{U}_o=7\text{m/s}$ in den Kanal einströmende Luft wurde durch die Platte in zwei Teilströme getrennt. Der Teilstrom über der Platte wurde auf einer gleichförmigen Temperatur T_b gehalten, der Teilstrom unterhalb der Platte hatte die Temperatur T_u . Der Temperaturunterschied T_b-T_u der Einlaufströmung blieb auch für die Nachlaufströmung erhalten. Die transversale Verteilung der Temperatur wurde von der transversalen Ausbreitung der Nachlaufströmung bestimmt. Deshalb wurde die Dicke der Temperaturgrenzschicht mit zunehmendem Abstand von der Platte breiter bis zur kompletten Ausbreitung der Nachlaufströmung. Die Anströmgeschwindigkeit $\bar{U}_o=7\text{m/s}$ wurde über das gesamte Feld konstant gehalten.

Die Versuche wurden mit verschiedenen Temperaturdifferenzen T_b-T_u ausgeführt. Sie betragen: 0°C , 5°C , 16°C und 30°C bei stabiler Temperaturschichtung und -5°C , -16°C und -30°C bei instabiler Temperaturschichtung. Die niedrigste Temperatur war für jedes Experiment 20°C . Der Auftriebseffekt auf die Hauptströmung war wegen des hohen Wertes der mittleren Geschwindigkeit schwach. Die Temperaturstratifikation beeinflusste jedoch das k -Feld bei Temperaturdifferenzen von $\pm 16^\circ\text{C}$ und $\pm 30^\circ\text{C}$. Die mittlere axiale Geschwindigkeit \bar{U} , die mittlere Temperatur \bar{T} , die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ sowie der axialen und radialen Geschwindigkeitsfluktuationen $\overline{U'^2}$, $\overline{V'^2}$, der axiale Wärmefluß $\overline{U'T'}$ und der radiale Wärmefluß $\overline{V'T'}$ wurden bei diesen Experimenten in 11 verschiedenen Meßebenen hinter der Platte gemessen. Die dimensionslosen Abstände betragen im einzelnen: $x/\delta_m = 0, 10, 29, 59, 117, 176, 235, 283, 420, 528$ und 645 . Hier war δ_m die Dicke der Geschwindigkeits-

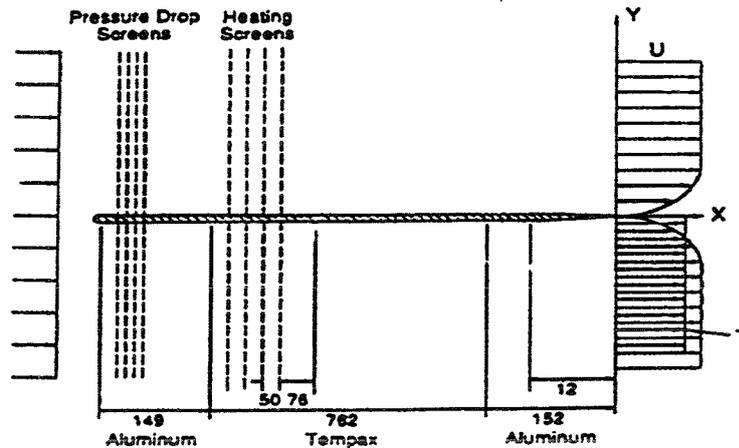


Abbildung 5.16: Beheite, horizontale Nachlaufströmung - Teststrecke.

grenzschicht an der Abrißkante der Platte mit der Definition:

$$(5.4) \quad \delta_m = \int_0^{\infty} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_o} \right) \left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_o} \right) dy .$$

In dieser Definition ist y die Richtung quer zur Strömung. Der Wert $\delta_m = 0.0026$ m wurde beim unbeheizten Nachlauf ermittelt. Die mit δ_m definierte Reynolds-Zahl $2\delta_m \bar{U}_o / \nu$ hatte den Wert von 2300. Weitere Details dieser Experimente sind in Tureaud et al. (1988) zu finden.

5.4.1 Geometrie des Rechengebietes

Das Rechengebiet der zweidimensionalen Nachlaufströmung beginnt in der Meßebebene $x/\delta_m = 117$, da die Nachlaufströmung ab dieser Ebene eingelaufen ist, und reicht bis zur letzten Meßebebene $x/\delta_m = 645$. Deshalb wird das Rechengebiet durch ein zweidimensionales Gitter in kartesischen Koordinaten mit einer Breite von 0.2 m und mit einer Länge von 1.52 m erzeugt, vergleiche dazu Abbildung 5.17. Das Rechengitter besteht aus 14200 Zellen, von denen 71 in radialer Richtung und 200 in axialer Richtung liegen. Die linke Fläche des Gitters simuliert den Eintritt, die obere und untere Fläche stellen freie Oberflächen dar. Die Wände des Windkanals sind weit genug von der Nachlaufplatte entfernt, so daß kein Wandeinfluß auf das Nachlaufgebiet erfolgt. Die rechte Fläche simuliert den Austritt. Durch 71 Flächenelemente der Eintrittsfläche werden die Eintrittsverteilungen der zu berechnenden Größen vorgegeben.

Zur Validierung des TMBF werden von der gesamten Versuchsreihe die folgenden zwei ausgewählt:

- stabile Temperaturschichtung mit $T_b - T_u = 30^\circ C$;
- instabile Temperaturschichtung mit $T_b - T_u = -30^\circ C$.

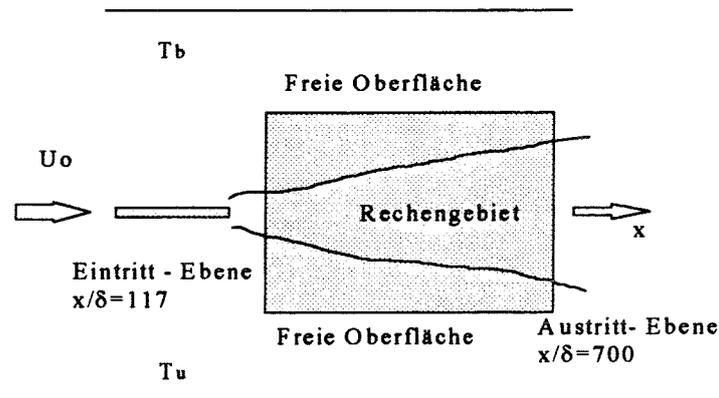


Abbildung 5.17: Rechengebiet der Nachlaufströmung in Luft

Die beiden hier ausgewählten Experimente stellen die größten Anforderungen an die Beschreibung des turbulenten Wärmetransports. In den nächsten zwei Abschnitten werden die Ergebnisse der Rechnungen unter Verwendung des TMBF und des $k\text{-}\epsilon\text{-}\sigma_t$ Modells vorgestellt.

5.4.2 Ergebnisse bei stabiler Temperaturschichtung

In der Abbildung 5.18 werden die Eintrittsverteilungen der axialen mittleren Geschwindigkeit \bar{U} , der turbulenten kinetischen Energie k , der mittleren Temperatur \bar{T} , der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und des transversalen Wärmeflusses $\overline{V'T'}$ für den Fall der Nachlaufströmung mit stabiler Temperaturschichtung $\Delta T = T_b - T_u = 30^\circ\text{C}$ dargestellt. Die Werte dieser Eintrittsverteilungen stammen aus Messungen an der Ebene $x/\delta_m = 117$. Das transversale Profil der axialen mittleren Geschwindigkeit besitzt einen Nachlauf gegenüber der Hauptströmung von $\Delta U = 1.19$ m/s.

Das transversale Profil der kinetischen Energie der Turbulenz k wird hier von der Summe der Varianz der axialen und transversalen Geschwindigkeit bestimmt, $k = 0.5(\overline{U'^2} + \overline{V'^2})$. Die Schwankungen der axialen Geschwindigkeit werden dabei nicht vom Auftrieb beeinflusst, sondern vom transversalen Gradienten der axialen mittleren Geschwindigkeit. Deshalb erreicht $\overline{U'^2}$ zwei maximale Werte jeweils im warmen und kalten Teil der Nachlaufströmung und einen minimalen auf der Achse. Die Schwankungen der transversalen Geschwindigkeit werden dabei von der Temperaturstratifikation beeinflusst. In diesem Experiment erreicht $\overline{V'^2}$ einen maximalen Wert auf der Achse, weil hier der maximale transversale Gradient der mittleren Temperatur vorliegt. Wenn $\overline{U'^2}$ in der Strömung dominant ist, dann zeigt k ein M-Formprofil. Dies bedeutet, daß der Auftrieb vernachlässigbar ist. Wenn dagegen $\overline{V'^2}$ in der Strömung überwiegt, dann zeigt k ein achsensymmetrisches Glockenprofil. Das heißt, daß ein Auftriebseffekt auf das k -Feld vorhanden ist. Das ist bei den ermittelten Meßwerten der Fall. Das gemessene transversale Profil von k besitzt ein

Glockenprofil. Diese beiden physikalischen Effekte werden in der Transportgleichung für k von den Termen P_k und G_k erfaßt. Der Produktionsterm P_k enthält die Gradienten der mittleren Geschwindigkeit und trägt dabei zu einem M-Formprofil bei. Der Auftriebsterm G_k wird vom Gradient der mittleren Temperatur bestimmt und trägt hier zur Ausbildung eines Glockenprofils bei.

Die gemessene mittlere Temperatur zeigt eine transversale Verteilung, die durch die transversale Ausbreitung der Nachlaufströmung bestimmt wird. Ein Glockenprofil besitzt ebenso die gemessene transversale Verteilung der Varianz der Temperatur, da sie dem transversalen Gradienten der mittleren Temperatur folgt. Das gemessene Profil des transversalen turbulenten Wärmeflusses ist nicht symmetrisch, sondern besitzt ein zum 'warmen' Teil der Nachlaufströmung versetztes Maximum.

Die Eintrittsverteilung der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ϵ wird mit Hilfe der Gleichungen (4.38 und 4.39) festgelegt. In diesen Gleichungen ist der Wert von TDIN bzw. der Mischungsweglänge l_m zu bestimmen, vergl. Abschnitt 4.4. Die Mischungsweglänge l_m wird bei freien Scherschichten proportional zur lokalen Dicke δ der Scherschicht gesetzt. Beim Nachlauf ist die Proportionalitätsfaktor l_m/δ gleich 0.08, Rodi (1980). In der Ebene $x/\delta_m=117$ beträgt die Dicke des Nachlaufs $\delta=7.1$ cm, damit ergibt sich der folgende Wert von TDIN:

$$(5.5) \quad TDIN = \frac{(c_\mu^*)^{\frac{3}{4}}}{l_m} = \frac{[0.09 f \left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon} \right)]^{\frac{3}{4}}}{0.08 \delta} = 29.0 \left[f \left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon} \right) \right]^{\frac{3}{4}}.$$

In der Abbildung 5.19 werden die berechneten radialen Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit in zwei verschiedenen Ebenen, $x/\delta_m=283$ und 528 , dargestellt. Die jeweils mit dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechneten Profile werden mit Meßwerten verglichen. Der Vergleich zeigt, daß die gemessenen transversalen Verteilungen der axialen mittleren Geschwindigkeit durch beide Rechnungen gut nachgebildet werden. Die gute Simulation der mittleren Geschwindigkeiten wird trotz einer teilweise nicht zufriedenstellenden Simulation der turbulenten kinetischen Energie erreicht. Dies ist in der Abbildung 5.20 zu sehen. Die berechneten transversalen Profile von k zeigen keine Überhöhung auf der Achse. Statt dessen ergibt sich näherungsweise ein M-Formprofil für k , das typisch für eine nicht auftriebsbehaftete Nachlaufströmung ist. In den Rechnungen überwiegt der Produktionsterm P_k den Auftriebsterm G_k in der Bilanz der Transportgleichung für k wegen des hohen transversalen Gradienten der axialen mittleren Geschwindigkeit.

Das Temperaturfeld wird in Abbildung 5.21 durch radiale Verteilungen in zwei verschiedenen Ebenen dargestellt. Die mit dem TMBF berechneten Profile stimmen qualitativ und quantitativ gut mit den Meßwerten überein. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell unter Verwendung des Standard-Wertes $\sigma_t=0.6$ zeigt dagegen eine qualitative weniger zufriedenstellende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, denn die berechneten Temperaturen sind im oberen Teil der Nachlaufströmung zu gering und im unteren Teil zu hoch. Die transversalen Verteilungen der mittleren Temperatur werden vom transversalen turbulenten Wärmefluß bestimmt, der die Wärme vom oberen zum unteren Teil der Nachlaufströmung transportiert. Mit dem Fourier-Ansatz ergeben sich höhere transversale turbulente Wärmeflüsse in Vergleich zu denjenigen, die aus der Lösung der Transportgleichung berechnet werden, vergl. dazu

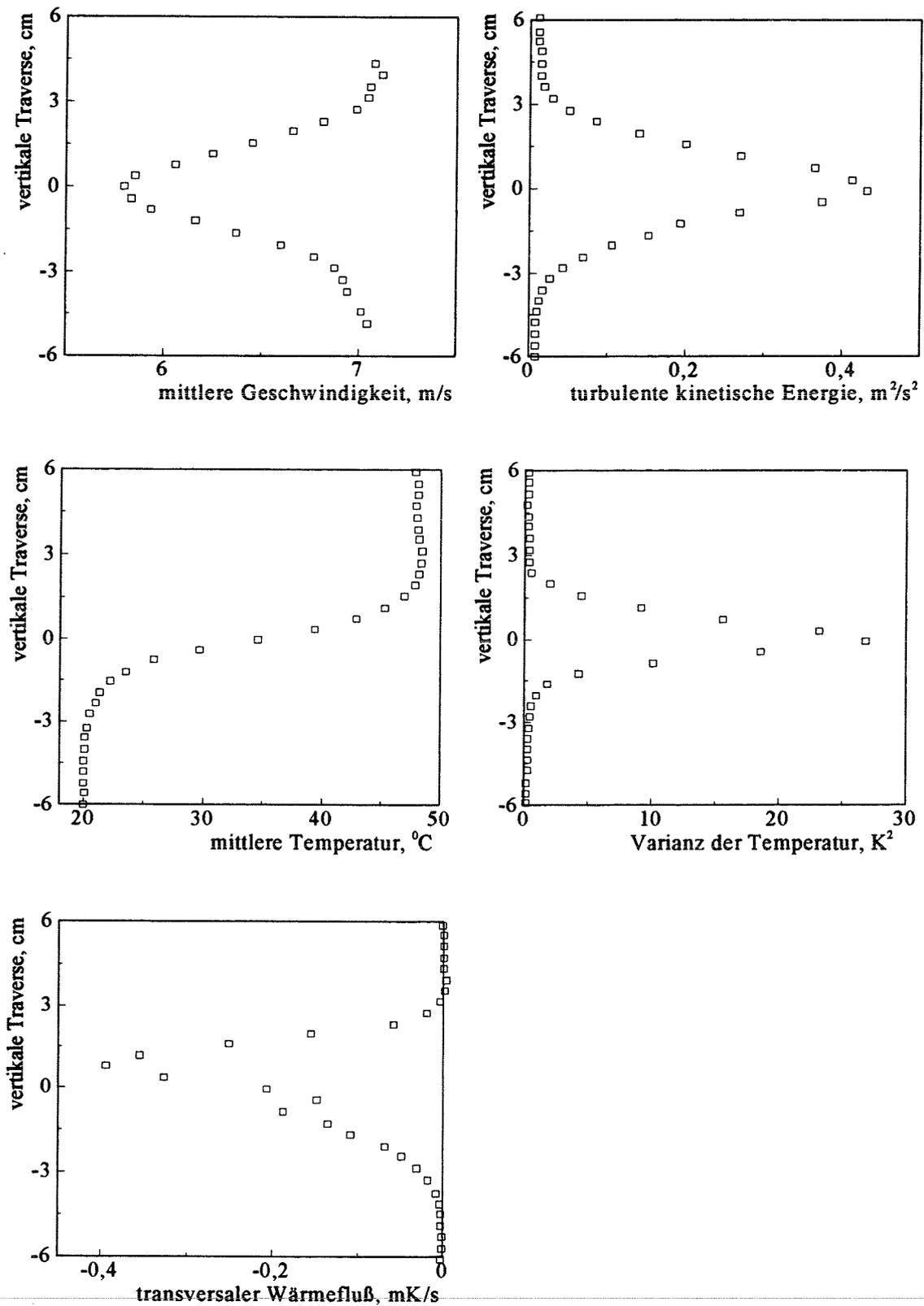


Abbildung 5.18: Eintrittsprofile (Ebene $x/\delta_m=117$) für die turbulente, beheizte Nachlaufströmung mit stabiler Temperaturschicht.

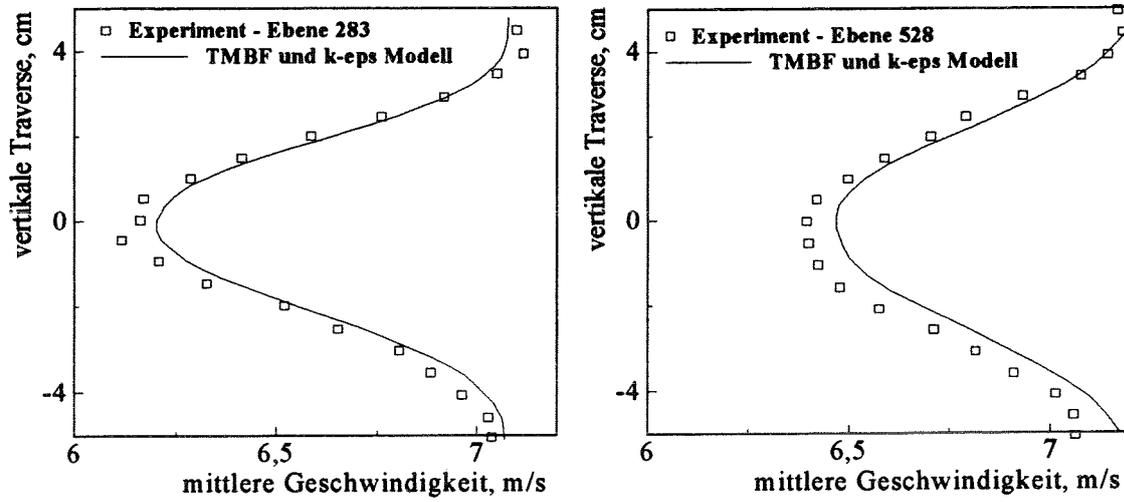


Abbildung 5.19: Transversale Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit. Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

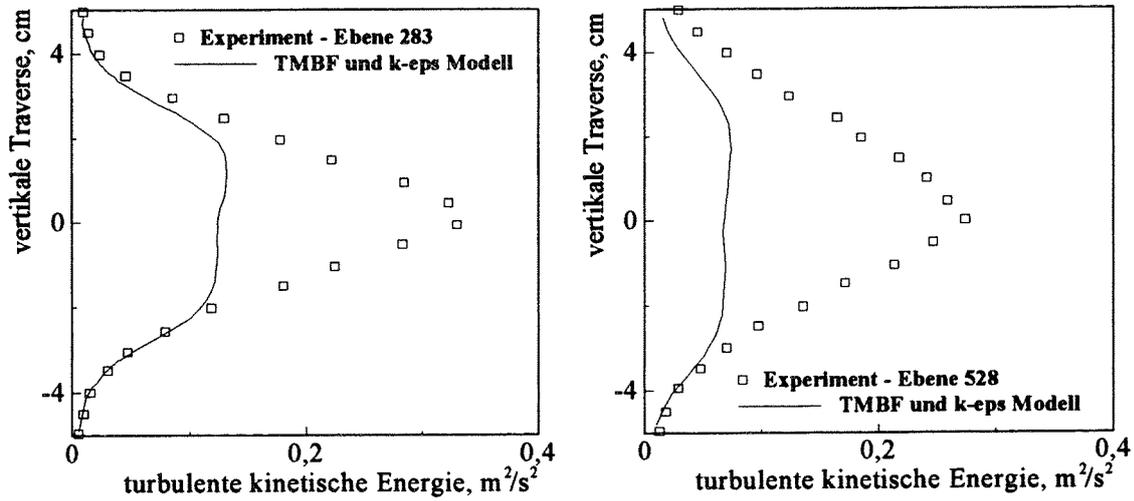


Abbildung 5.20: Transversale Profile der turbulenten kinetischen Energie. Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

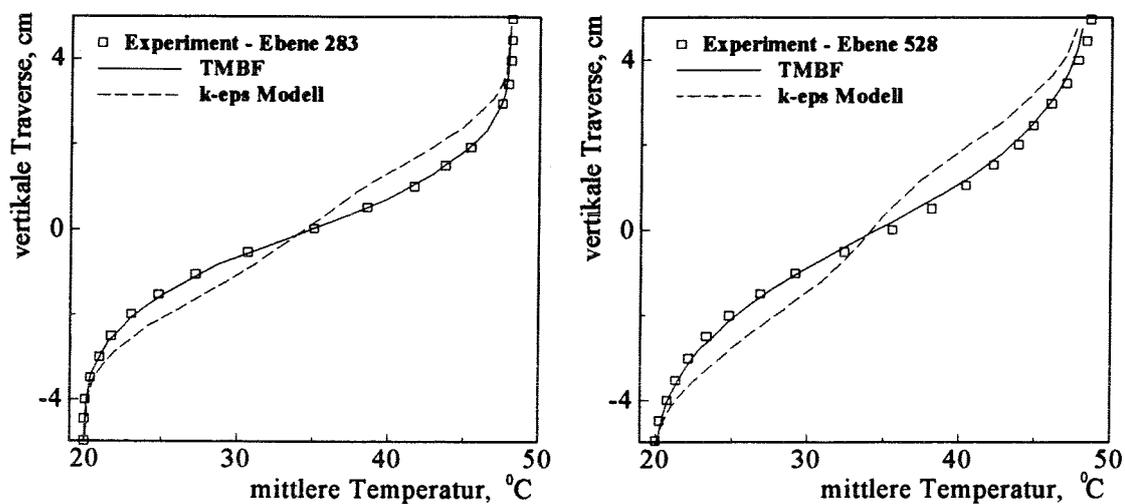


Abbildung 5.21: Transversale Profile der mittleren Temperatur. Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

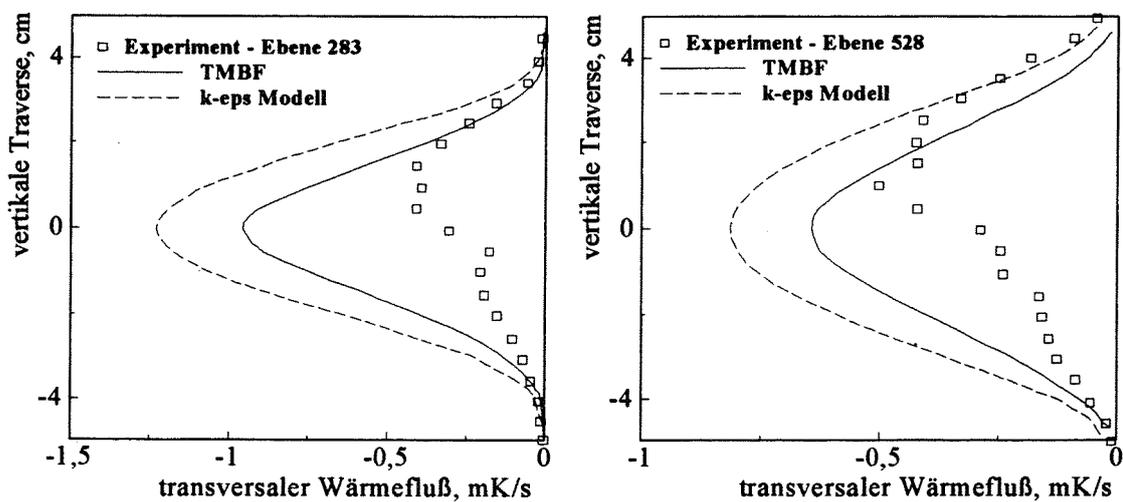


Abbildung 5.22: Transversale Profile des transversalen turbulenten Wärmeflusses. Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht- Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

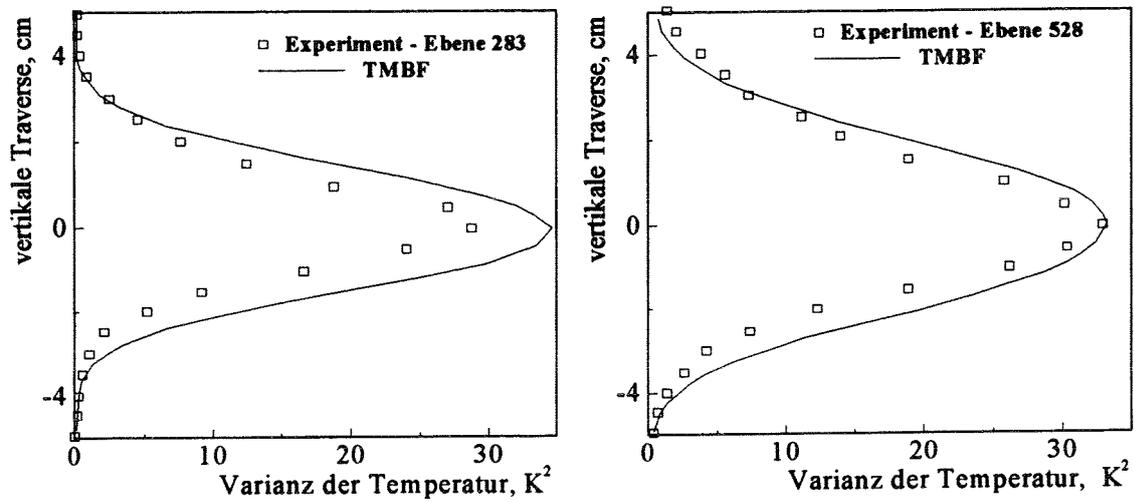


Abbildung 5.23: Transversale Profile der Varianz der Temperatur. Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht- Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

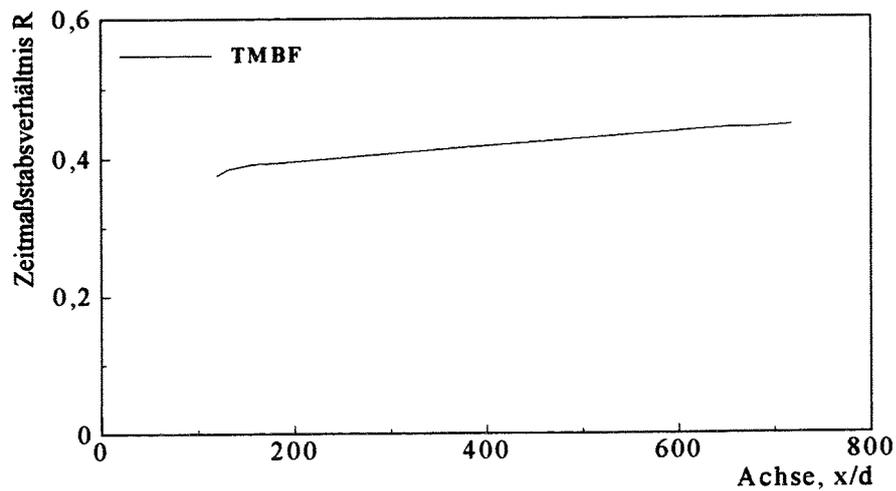


Abbildung 5.24: Axiales Profil des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R . Nachlaufströmung in Luft mit stabiler Temperaturschicht.

Abbildung 5.22. Die Berechneten Profile des transversalen turbulenten Wärmeflusses zeigen jedoch sowohl mit TMBF also auch mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell eine deutliche Überschätzung der Meßwerte und ein achsensymmetrisches Glockenprofil. Dagegen liegt der maximale Wert des gemessenen transversalen Profils von $\overline{V'T'}$ nicht auf der Achse sondern im 'warmen' Teil der Nachlaufströmung. Der transversale turbulente Wärmefluß tritt im Produktionsterm der Varianz der Temperatur auf, der eine wesentliche Rolle in der Bilanz der Transportgleichung für $\overline{T'^2}$ spielt. Dies bedeutet, daß sich die Asymmetrie in den transversalen Profilen von $\overline{V'T'}$ auf die gemessenen Verteilungen von $\overline{T'^2}$ auswirken sollte. Die gemessenen Profile von $\overline{T'^2}$ sind jedoch symmetrisch zur Strömungsrichtung. Damit ergeben sich Widersprüche bei den Meßwerten des transversalen turbulenten Wärmeflusses zu denen der Varianz der Temperatur. Die Profile von $\overline{T'^2}$ werden mit TMBF gut berechnet, wie die Abbildung 5.23 zeigt.

Die Abbildung 5.24 zeigt das berechnete turbulente Zeitmaßstabverhältnis R . Es bleibt entlang der Achse fast konstant bei einem Wert von etwa 0.45 und unterscheidet sich damit von den vorher bestimmten Werten. Dies bestätigt erneut die Abhängigkeit des Zeitmaßstabverhältnisses R vom Fluid und von der Strömungsart.

5.4.3 Ergebnisse bei instabiler Temperaturschichtung

Die Eintrittsverteilungen der verschiedenen Zustandsgrößen sind bei instabiler Temperaturschichtung $\Delta T = -30^0$ C qualitativ und quantitativ ähnlich wie im Fall der stabilen Temperaturschichtung. Die mittlere Temperatur und der transversale turbulente Wärmefluß besitzen jedoch hier eine spiegelsymmetrische Eintrittsverteilung. Auch in diesem Experiment stimmen die mit TMBF berechneten transversalen Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit, vergl. dazu Abbildung 5.25, der mittleren Temperatur, vergl. Abbildung 5.26, und der Varianz der Temperatur, vergl. Abbildung 5.27, gut mit den Meßwerten überein. Die mit $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechneten transversalen Profile der mittleren Temperatur weichen systematisch von den Meßwerten ab. Der Grund liegt wiederum darin, daß der mit dem Fourier-Ansatz berechnete transversale turbulente Wärmefluß durch den hohen transversalen Gradienten der mittleren Temperatur überschätzt wird.

Obwohl die Felder der mittleren Geschwindigkeit und Temperatur vom TMBF gut simuliert werden, weichen die berechneten Profile der turbulenten kinetischen Energie und des transversalen turbulenten Wärmeflusses signifikant von den Meßwerten ab. Die berechneten Profile von k besitzen ein M-Formprofil im Gegensatz zu einem gemessenen Glockenprofil, vergl. dazu Abbildung 5.28. Die berechneten transversalen Verteilungen des Wärmeflusses $\overline{V'T'}$ überschätzen deutlich die entsprechenden Meßwerte und besitzen ein symmetrisches Profil. Bei den gemessenen Profilen liegt der maximale Wert im 'warmen' Teil der Nachlaufströmung, vergl. Abbildung 5.29.

Das im TMBF berechnete turbulente Zeitmaßstabverhältnis R hat auch in diesem Experiment etwa den Wert $R=0.45$.

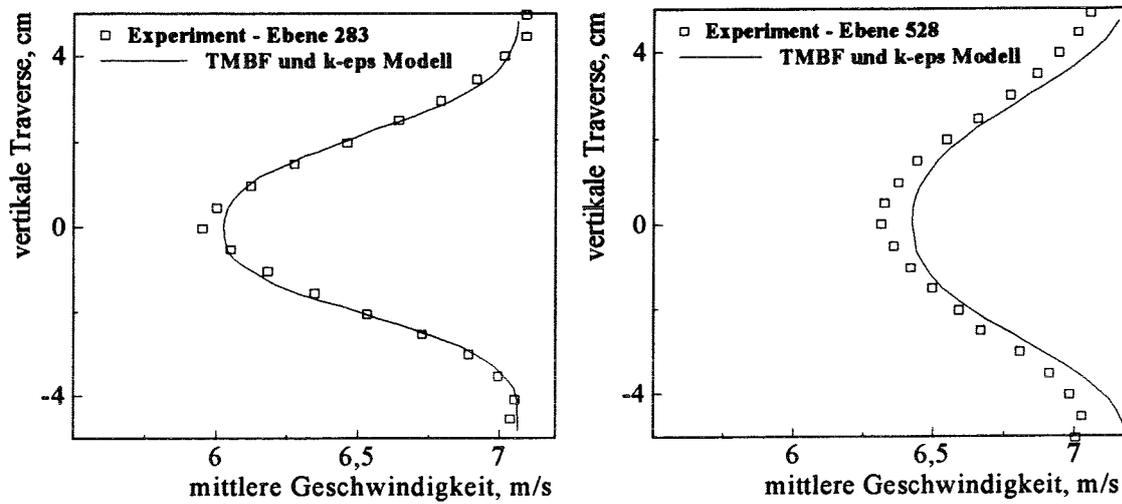


Abbildung 5.25: Transversale Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit. Nachlaufströmung in Luft mit instabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

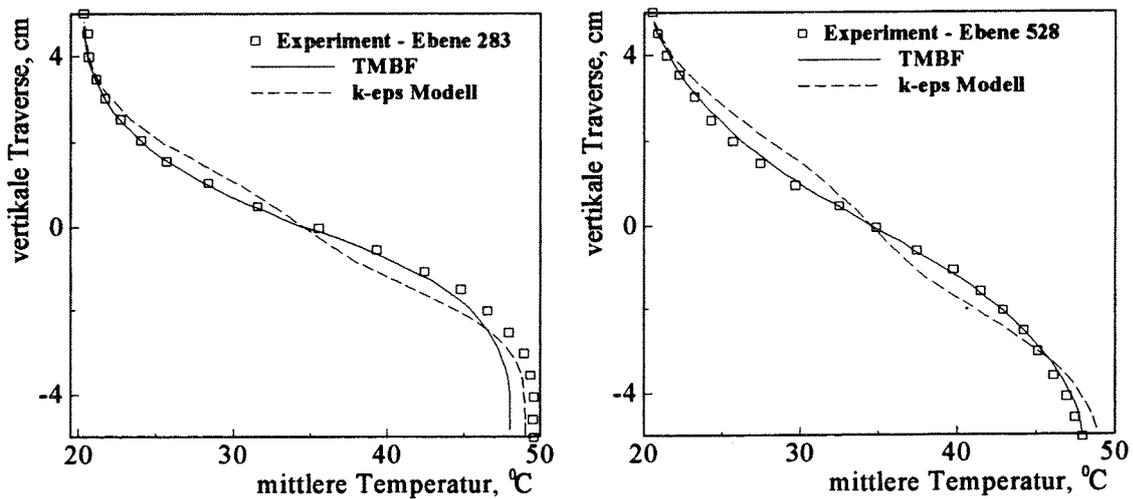


Abbildung 5.26: Transversale Profile der mittleren Temperatur. Nachlaufströmung in Luft mit instabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

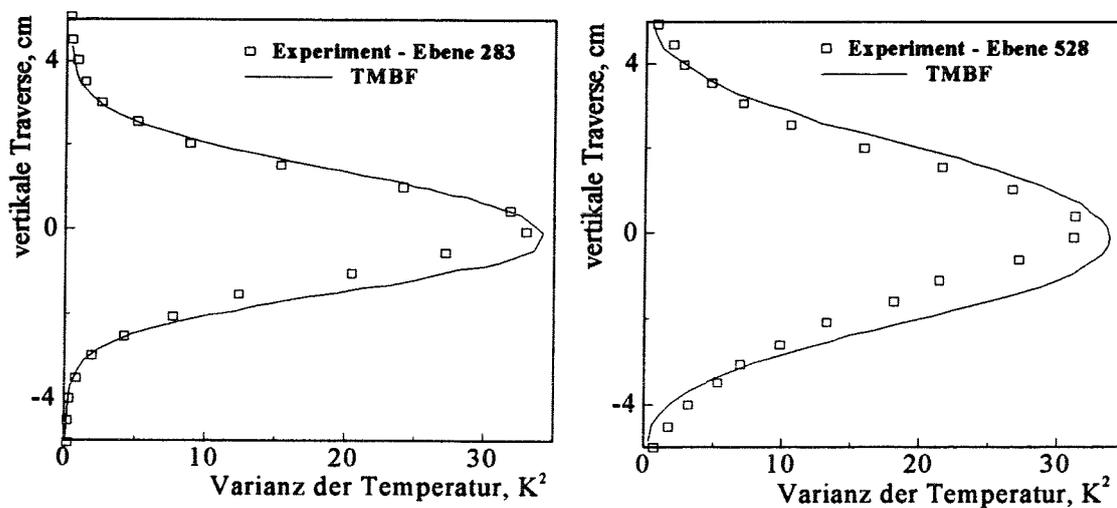


Abbildung 5.27: Transversale Profile der Varianz der Temperatur. Nachlaufströmung in Luft mit instabiler Temperaturschicht- Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

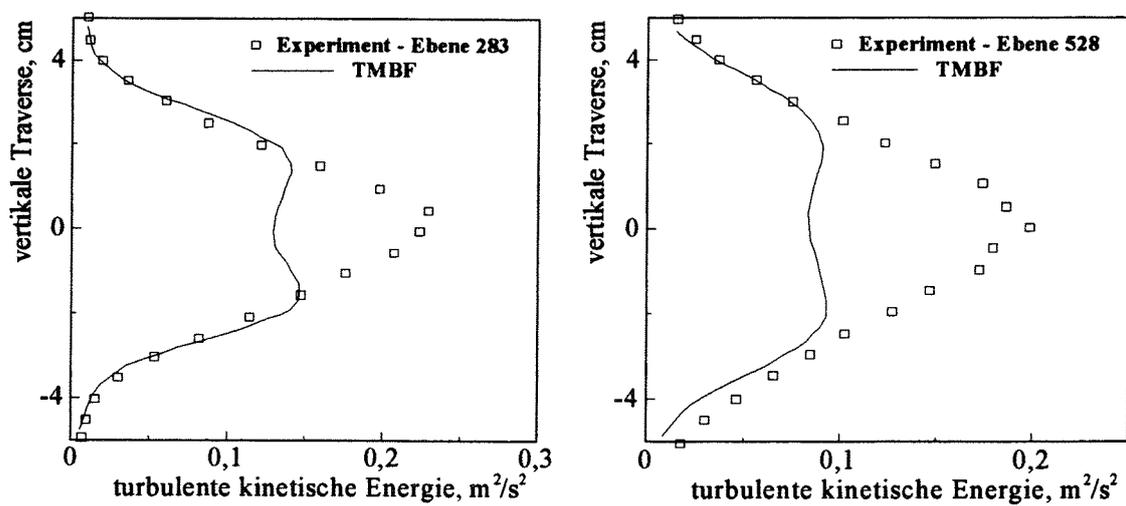


Abbildung 5.28: Transversale Profile der turbulenten kinetischen Energie. Nachlaufströmung in Luft mit instabiler Temperaturschicht - Ebene $x/\delta_m=283$ und 528.

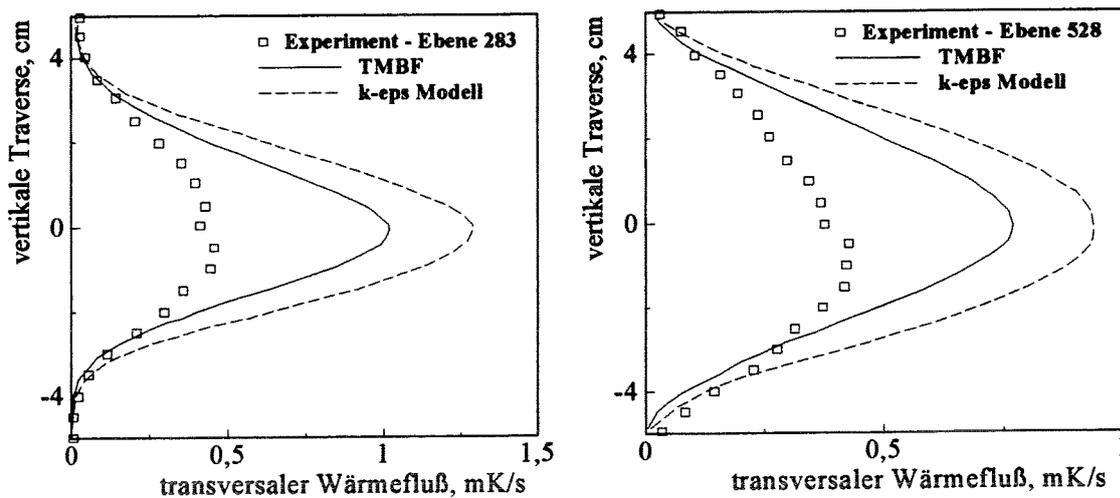


Abbildung 5.29: Transversale Profile des transversalen turbulenten Wärmeflusses. Nachlaufströmung in Luft mit instabiler Temperaturschicht- Ebene $x/\delta_m=283$ und 528 .

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden vier turbulente Strömungen mit Zwangskonvektion, bei denen die Reynolds-Analogie nicht gültig ist, zur Validierung des TMBF nachgerechnet.

Das TMBF simuliert die mittlere Geschwindigkeit gut bei allen vier Experimenten. Bei den horizontalen Nachlaufströmungen wird jedoch die gute Simulation der mittleren Geschwindigkeit trotz einer teilweise nicht zufriedenstellenden Berechnung der turbulenten kinetischen Energie erreicht. Das TMBF berechnet im Achsenbereich qualitativ einen unterschiedlichen Verlauf von k im Vergleich zu den experimentellen Werten, die im Gegensatz zu den Rechnungen einen Einfluß der Temperaturstratifikation zeigen. Dieses unterschiedliche Verhalten konnte nicht geklärt werden, auch weil sich der folgende Widerspruch bei der Auswertung der Meßergebnisse von k ergibt. Die turbulente Bewegung wird von einer stabilen Temperaturschichtung gedämpft und von einer instabilen Temperaturschichtung entfacht. Da der Auftrieb im Achsenbereich das gemessene k -Feld bestimmt, sollten die Meßwerte von k auf der Achse bei stabiler Schichtung geringer sein als bei instabiler Schichtung. Die Meßergebnisse zeigen das Gegenteil.

Die Rechenergebnisse des TMBF für die mittlere Geschwindigkeit und die turbulente kinetische Energie unterscheiden sich nicht von denen, die mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell erzielt werden. Dieses ist auf die schon angeführte Tatsache zurückzuführen, daß beide Modelle allerdings unter Vernachlässigung der Auftriebseffekte die gleiche Beschreibung des turbulenten Impulstransports enthalten.

Signifikante Verbesserungen zeigt das TMBF gegenüber dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell bei

der Simulation des turbulenten Wärmetransports. Die Rechnungen mit dem TMBF erreichen eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten der mittleren Temperatur in allen vier Strömungen, wobei der Standardsatz der empirischen Koeffizienten beibehalten wird. Die gute Simulation der mittleren Temperatur mit dem TMBF beruht auf der Anwendung der Transportgleichungen für die turbulenten Wärme-flüsse anstelle des vom $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell benutzen Fourier-Ansatzes. Wegen des stark anisotropen Charakters des Temperaturfeldes besitzen die berechneten Beispiele vor allem hohe Temperaturgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung. Der mit diesem Temperaturgradienten im Fourier-Ansatz gebildete senkrecht zur Hauptströmung wirkende turbulente Wärme-fluß erhält deshalb zu hohe Werte. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell zeigt aus diesem Grund eine nicht zufriedenstellende Simulation der mittleren Temperatur. Trotz der guten Simulation der mittleren Temperatur überschätzt das TMBF, allerdings weniger stark als das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell, den transversalen turbulenten Wärme-fluß bei den horizontalen Nachlaufströmungen. Beide Modelle berechnen hier einen monoton fallenden Verlauf des transversalen Wärme-flusses $\overline{V'T'}$ entlang der Achse. Dies bedeutet, daß der Verlauf vom transversalen Temperatur-Gradienten geprägt wird. Im Gegensatz dazu bleiben die Meßwerte von $\overline{V'T'}$ mit der Lauflänge konstant.

Die vom TMBF berechneten Ergebnisse für $\overline{T'^2}$ zeigen für sämtliche Beispiele eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Meßwerten. Die unterschiedlichen Werte des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R bestätigen, daß R i.a. nicht konstant ist, sondern von den Fluideigenschaften und den Strömungszuständen, nämlich dem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld abhängt.

6. Validierung des TMBF für Mischkonvektion

6.1 Einführung

In diesem Kapitel wird der zweite Schritt der Validierung des TMBF vorgestellt und diskutiert. Er wird hier für auftriebsbehaftete turbulente Strömungen im Bereich der Mischkonvektion mit folgenden Zielen vorgenommen:

- Austesten der neuen Modellierung in Form des Z_i Terms zur Erweiterung der Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse auf kleine Peclet-Zahlen und Festlegung des Koeffizienten c_{T5} ,
- numerische Analyse des Auftriebseinflusses auf den turbulenten Impulstransport. Es wird die Verknüpfung im TMBF zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld durch die Kombination eines Modells zweiter Ordnung für den turbulenten Wärmetransport und eines Modells erster Ordnung für den turbulenten Impulstransport überprüft.

Diese Analysen werden mit Hilfe von Meßergebnissen in einem auftriebsbehafteten, achsensymmetrischen Nachlauf einer beheizten Kugel durchgeführt. Dieses Experiment wird nicht nur mit dem TMBF, sondern auch mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell für kleine Reynolds-Zahlen nachgerechnet.

6.2 Das Experiment

Von Suckow (1993) wurde in einer Wasserteststrecke ein achsensymmetrischer Nachlauf hinter einer angeströmten und beheizten Kugel mit einem Durchmesser von $d=10$ mm untersucht. Die Teststrecke ist in der Abbildung 6.1 dargestellt. Sie bestand aus einem vertikal angeordneten Kanal, der von einer turbulenten eingelaufenen Strömung von unten nach oben mit einer axialen mittleren Geschwindigkeit \bar{U}_0 von 0.071 m/s durchflossen wurde. Die lichte Weite D des quadratischen Querschnittes des Kanals war 14 cm. Für die Kanal-Reynolds-Zahl ergab sich der Wert

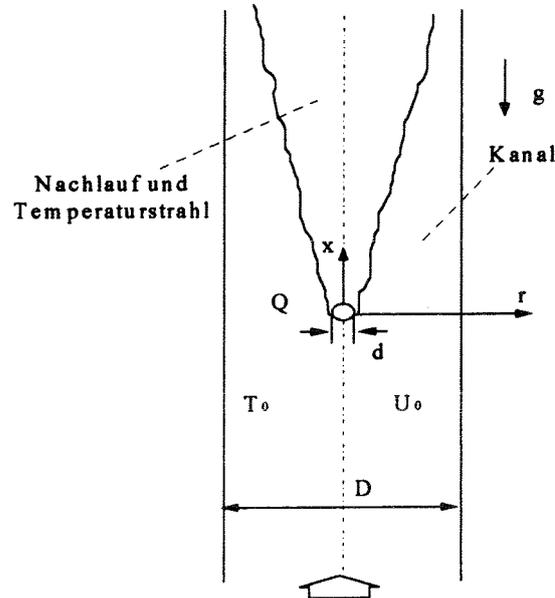


Abbildung 6.1: Teststrecke - FLUTMIK.

$Re_D=9810$ und die entsprechende Peclet-Zahl betrug $Pe=69000$. Die Kugel wurde mit einer Leistung von $Q=100$ W beheizt. Stromab der Kugel bildete sich eine Nachlaufströmung aus, die durch Auftriebskräfte maßgeblich beeinflusst war. Die Strömung stand deshalb unter dem Einfluß einer nicht linearen Wechselwirkung von Nachlaufströmung und Auftriebsstrahl.

Durch einen Mischkonvektionsparameter γ_m kann der gesamte Bereich einer vertikalen auftriebsbehafteten Scherschicht charakterisiert werden. Der Mischkonvektionsparameter γ_m wird von Afzal (1985) folgendermaßen definiert:

$$(6.1) \quad \gamma_m = \frac{Re_x}{\sqrt{Re_x + Gr_x}}.$$

Hier sind Re_x und Gr_x die mit der Lauflänge x gebildeten Reynolds- und Grashof-Zahlen in der Form:

$$(6.2) \quad Re_x = \frac{\bar{U}_0 x}{\nu_0},$$

$$(6.3) \quad Gr_x = \frac{1}{2\pi} \frac{g\beta_0 Q}{\rho_0 c_p \nu_0^3} x^2.$$

Darin bezeichnet der Index 0 die Werte in der Anströmung. Der Parameter γ_m wichtet den Einfluß der Zwangskonvektion zur Naturkonvektion. Der Wert von γ_m ist bei fest vorgegebenen Strömungsbedingungen konstant. Er kann folgende Grenzwerte annehmen:

$$\gamma_m = 0 \text{ in Naturkonvektion, wenn } Re_x=0 \text{ ist;}$$

$\gamma_m = 1$ in Zwangskonvektion, wenn $Gr_x=0$ ist.

Im vorliegenden Experiment nahm γ_m den Wert 0.61 an, was einer Strömung im Bereich der Mischkonvektion entspricht.

Die Messungen zeigten, daß die Mischkonvektionsströmung bei größeren Entfernungen stromab der Kugel durch die Grenzschicht der Kanalwände beeinflusst wurde. Die gemessenen radialen Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit waren deshalb in diesem Bereich der Strömung ein Resultat von drei Einflußgrößen: Nachlauf, Auftrieb und Wand. Die Erfassung aller Einflüsse stellte erhöhte Anforderungen an das Turbulenzmodell, weil die Turbulenz nicht nur in der Kernströmung durch Nachlauf und Auftrieb, sondern auch im Wandbereich entstand. Beide Turbulenzprozesse, die sich wechselseitig beeinflussen, mußten numerisch richtig simuliert werden.

Die mittleren axialen und radialen Geschwindigkeiten, \bar{U} , \bar{V} , die axialen und radialen r.m.s Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen, $\sqrt{\overline{U'^2}}$, $\sqrt{\overline{V'^2}}$, die mittlere Temperatur \bar{T} , die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und die axialen und radialen turbulenten Wärmeflüsse, $\overline{U'T'}$, $\overline{V'T'}$, wurden in verschiedenen Ebenen von $x/d=5$ bis $x/d=106$ stromab der Kugel gemessen. Weitere Informationen über das Experiment und die Meßverfahren befinden sich bei Suckow (1993).

6.3 Geometrie des Rechengebietes und Eintrittswerte

Da der Kanal stromab der Kugel numerisch simuliert wird, beginnt das Rechengebiet mit der ersten Meßebeene $x/d=5$ hinter der Kugel und es endet nach der letzten Meßebeene $x/d=106$. Es wird aus Symmetriegründen nur die Hälfte des Kanals dargestellt, weil die Nachlaufströmung und der Auftrieb nach Suckow (1993) in etwa achsensymmetrisch angenommen werden können. Deshalb besteht das Rechengebiet aus einem vertikalen Zylinder mit einer Länge von 1.15 m und einem Radius von 7 cm, siehe Abbildung 6.2. Das zweidimensionale Rechengitter wird durch 140 und 142 Rechenzellen jeweils in radialer und axialer Richtung erzeugt. Das Gitter ist in r-Richtung gleichmäßig mit einer Maschenweite von $\Delta r=0.5$ mm unterteilt. Die untere Fläche simuliert den Eintritt der Strömung in das Rechengebiet. Die aus dem Experiment vorgegebenen Eintrittsbedingungen der Strömung werden mit Hilfe von 140 Flächenelementen nachgebildet. Die obere Fläche simuliert den Austritt der Strömung vom Rechengebiet. Die rechte und linke Linie in der Abbildung 6.2 stellen die Zylinder-Wand bzw. die Zylinderachse dar.

In der Abbildung 6.3 werden die radialen Eintrittsverteilungen der axialen mittleren Geschwindigkeit \bar{U} , der turbulenten kinetischen Energie k , der mittleren Temperatur \bar{T} , der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und des axialen und radialen turbulenten Wärmeflusses, $\overline{U'T'}$, $\overline{V'T'}$, dargestellt. Diese Eintrittsverteilungen sind Meßwerte in der Ebene $x/d=5$.

Die radiale Eintrittsverteilung der axialen mittleren Geschwindigkeit besitzt einen Nachlauf gegenüber der Hauptströmung von $\Delta U=1.5$ cm/s. Der Auftriebs-effekt ist deutlich in der radialen Eintrittsverteilung von k zu sehen, die anstelle eines für einen reinen Nachlauf typischen M-Formprofils ein Glockenprofil besitzt.

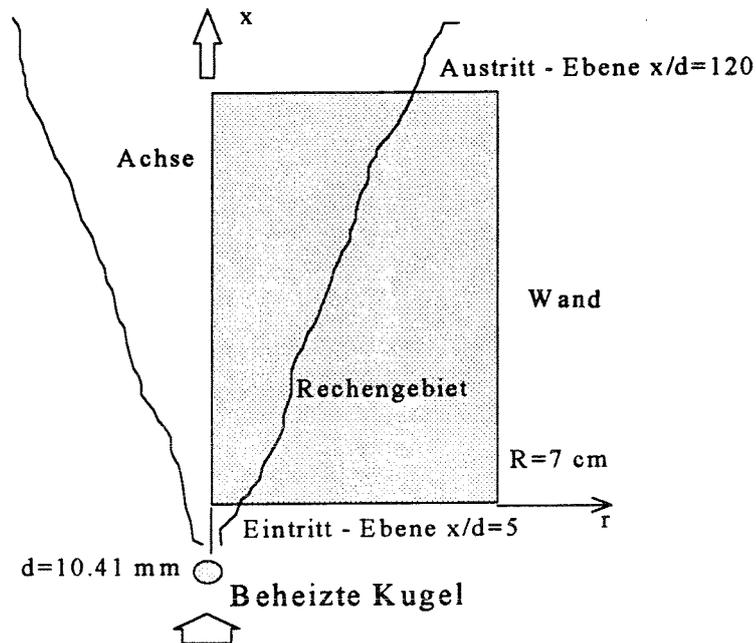


Abbildung 6.2: Rechengebiet des Nachlaufs stromab einer beheizten Kugel in Wasser.

In der Abbildung wird aber nur die Hälfte dieses Profils dargestellt. Die radiale Eintrittsverteilung der mittleren Temperatur zeigt ebenfalls ein Glockenprofil mit einer Überhöhung von 5.9°C . Das radiale Eintrittsprofil von \overline{T}^2 besitzt ein schwach ausgeprägtes M-Formprofil, das vom radialen Gradienten der mittleren Temperatur verursacht wird. Das Eintrittsprofil des radialen turbulenten Wärmeflusses zeigt ein Maximum an der Stelle, an der der radiale Gradient der mittleren Temperatur den maximalen Wert erreicht. Die radiale Eintrittsverteilung des axialen turbulenten Wärmeflusses besitzt ein Maximum auf der Achse.

Da kein Meßwert der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ϵ vorhanden ist, wird die Eintrittsverteilung für ϵ aus den Gleichungen (4.38) und (4.39) berechnet. Da die Mischungsweglänge für den Nachlauf nach Rodi (1980) $l_m = 0.08 \delta$ ist, und da in der Ebene $x/d=5$ die lokale Dicke δ des Nachlaufs 3.1 cm beträgt, ergibt sich der Wert für TDIN zu:

$$(6.4) \quad TDIN = \frac{(c_\mu^*)^{\frac{3}{4}}}{0.08 \delta} = 66.0 \left[f \left(\frac{P_k + G_k}{\epsilon} \right) \right]^{\frac{3}{4}}.$$

6.4 Bestimmung des Koeffizienten c_{T5}

Die Bestimmung des Wertes von c_{T5} wird für den Bereich der Mischkonvektion mit Hilfe von Meßwerten der mittleren Temperatur durchgeführt, die vom radialen turbulenten Wärmefluß bestimmt wird. Der Zusatzterm Z_r in der Transportgleichung

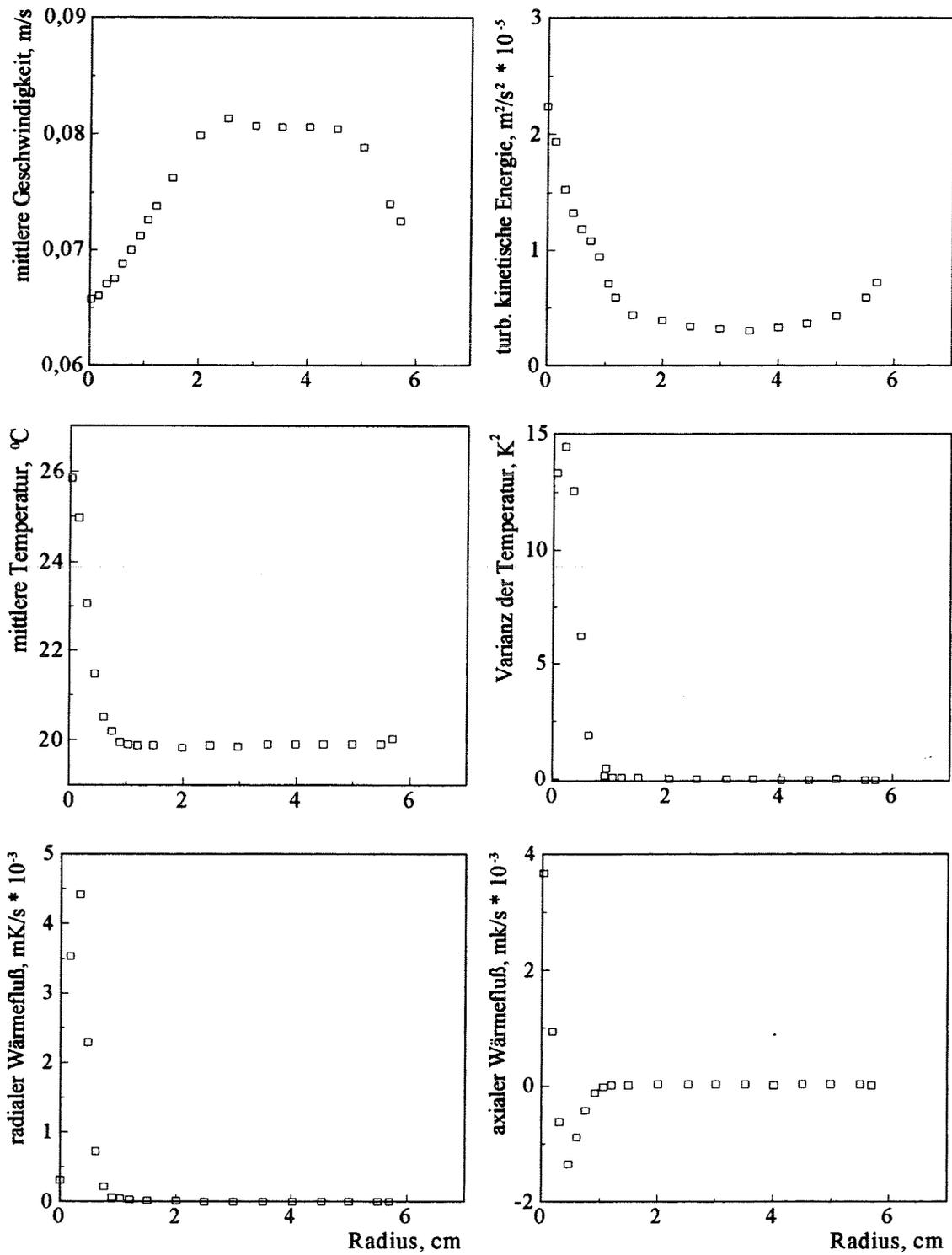


Abbildung 6.3: Eintrittsprofile (Ebene $x/d=5$) für die Nachlaufströmung in Wasser.

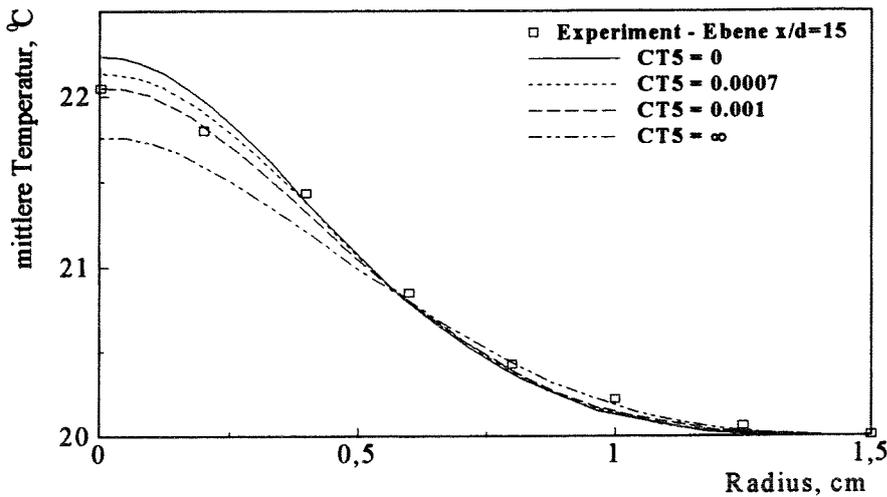


Abbildung 6.4: Radiales Profil der mittlere Temperatur. Nachlaufströmung in Wasser. Ebene $x/d=15$.

für den radialen turbulenten Wärmefluß lautet nach (3.54):

$$(6.5) \quad Z_r = -\frac{1 + \text{Pr}}{2\sqrt{\text{Pr}}\sqrt{R}} \left(\frac{\epsilon}{k}\right) \exp(-c_{T5}(\text{Re}_t + \text{Pe}_t)) \overline{V'T'}$$

Da die Exponentialfunktion Werte zwischen null bei hohen Peclet-Zahlen und eins bei kleinen Peclet-Zahlen annimmt, werden die folgenden Fälle numerisch analysiert:

- Die Exponentialfunktion wird zu null, das heißt $c_{T5} = \infty$.
- Die Exponentialfunktion wird zu eins, das heißt $c_{T5} = 0$.
- Die Exponentialfunktion nimmt den Wert an, der sich aus dem von Wörner und Grötzbach (1995) vorgeschlagenen Wert für $c_{T5} = 0.0007$ ergibt. Dieser Wert wurde für Naturkonvektion ermittelt, aber nur für den Term, der die molekulare Dissipation modelliert.

In der Abbildung 6.4 werden vier berechnete radiale Profile der mittleren Temperatur in der Ebene $x/d=15$ mit den Meßwerten verglichen. Die Rechnungen wurden mit vier verschiedenen Werten von c_{T5} erzielt:

- $c_{T5} = \infty$,
- $c_{T5} = 0$,
- $c_{T5} = 0.0007$,
- $c_{T5} = 0.001$.

Die im Fall (a) berechneten Temperaturen sind im Achsenbereich kleiner als die Meßwerte. Dies bedeutet, daß zuviel Wärme von der Achse zur Außenströmung durch den radialen turbulenten Wärmefluß transportiert wird. Der Wärmefluß wird deshalb überschätzt. Der Grund liegt darin, daß der Senkenterm Z_r in der Bilanz der Transportgleichung zu null wird. Deshalb ist eine erweiterte Modellierung für die Mischkonvektion unter Berücksichtigung der Senkentermes Z_r angezeigt.

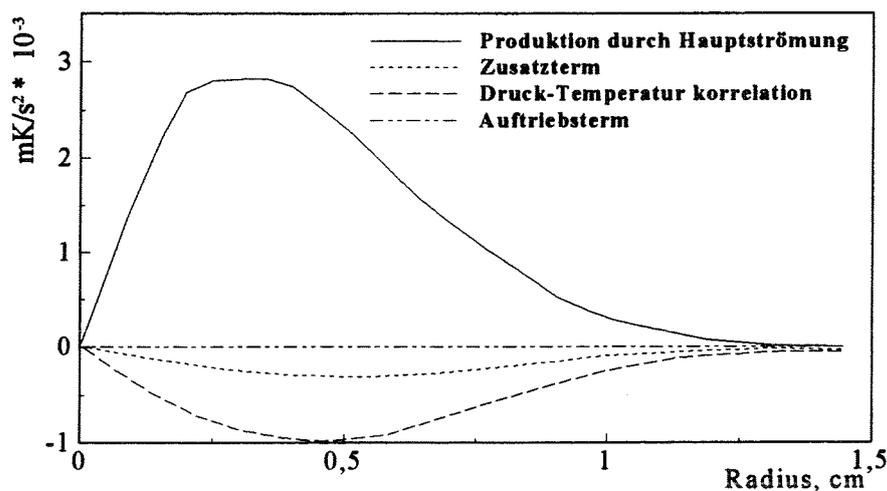


Abbildung 6.5: Produktions- und Senkenterme in der Transportgleichung für den radialen Wärmefluß. Nachlaufströmung in Wasser. Ebene $x/d=15$.

Im Fall (b), in dem der Term Z_r die maximale Auswirkung auf $\overline{U'T'}$ hat, sind die berechneten Temperaturen zu hoch. In diesem Fall wird der turbulente Wärmefluß unterschätzt. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da der Term Z_r seinen maximalen Wert nur bei sehr kleineren Werten der Peclet-Zahl erreicht.

Mit dem Wert $c_{T5} = 0.0007$ im Fall (c) wird der radiale turbulente Wärmefluß ebenfalls noch unterschätzt, denn die berechnete Temperatur ist höher als die gemessene. Im Vergleich zum Fall (b) ist die Unterschätzung hier geringer. Dieses Ergebnis war auch zu erwarten, da dieser Wert von c_{T5} allein für die Modellierung der molekularen Dissipation vorgeschlagen wird. Der Term Z_r soll jedoch auch die Druck-Temperatur Korrelation berücksichtigen. Der Beitrag dieses Einflusses fehlt, wenn $c_{T5} = 0.0007$ ist. Deshalb wird der Beitrag der Senkenterme überschätzt.

Mit der Erhöhung des Wertes c_{T5} von 0.0007 auf 0.001 im Fall (d) wird der Druck-Temperatur-Korrelation in gewissem Umfang Rechnung getragen. Die entsprechende Rechnung zeigt eine quantitative gute Übereinstimmung mit den Meßwerten für die radiale Temperaturverteilung in der Meßebe $x/d=15$.

In der Abbildung 6.5 wird das Gewicht des Zusatzterms Z_r mit $c_{T5}=0.001$ gegenüber den anderen Produktions- und Senkentermen in der Transportgleichung für $\overline{V'T'}$ dargestellt. Der Term Z_r kann, verglichen mit der Druck-Temperatur-Korrelation, im Mischkonvektionsbereich nicht mehr vernachlässigt werden. Beide Terme sind als Senkenterme in der Transportgleichung wesentlich.

6.5 Ergebnisse

Für die Validierung des TMBF sind die folgenden physikalischen Vorgänge des Experiments wichtig:

1. die radiale Ausbreitung des mittleren Temperatur-Feldes,

2. der Auftrieb und sein Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld.

Der turbulente Wärmefluß in Radialrichtung transportiert die Wärme durch die Turbulenzbewegung von der Achse zur Außenströmung und bestimmt deshalb die radiale Ausbreitung des Temperatur-Feldes. Der radiale turbulente Wärmefluß wird nicht direkt vom Auftrieb beeinflusst.

Der axiale turbulente Wärmefluß transportiert dagegen die Wärme unter der Wirkung des Auftriebs stromab. Er spielt keine Rolle für die radiale Ausbreitung des mittleren Temperatur-Feldes. Er hat aber einen maßgeblichen Einfluß auf den im Achsenbereich durch Auftriebskräfte verstärkten Impulstransport. Durch ihn wird der Nachlauf der axialen mittlere Geschwindigkeit reduziert. Deshalb ist diese Komponente des turbulenten Wärmeflusses entscheidend für den Einfluß des Temperaturfeldes auf das Geschwindigkeitsfeld.

Die mit dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell erzielten numerischen Ergebnisse für dieses Experiment werden im einzelnen in diesem Abschnitt vorgestellt.

In der Abbildung 6.6 werden die mittlere Temperatur auf der Achse und in den Ebenen $x/d=10, 15, 35$ und 70 dargestellt. In dieser Abbildung werden die Rechnungen mit den Meßwerten verglichen. Die gemessene mittlere Temperatur zeigt einen starken axialen Abfall bis zur Ebene $x/d=30$. In dieser Ebene hat sich die radiale Temperaturüberhöhung ΔT von $5.9^\circ C$ auf $0.9^\circ C$ reduziert. Der axiale Verlauf und die radialen Profile der mittleren Temperatur werden vom TMBF mit dem Parameterwert $c_{T5}=0.001$ gut nachgebildet. Die mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell durchgeführten Rechnungen zeigen ein gleiches Bild wie im ersten Schritt der Validierung des TMBF bei stark anisotropem Temperaturfeld. Die radiale Ausbreitung und der daraus folgende axiale Abfall der mittleren Temperatur wird überschätzt. Dies ist auf die vereinfachte Modellierung des radialen turbulenten Wärmeflusses zurückzuführen.

Der radiale turbulente Wärmefluß wird in der Abbildung 6.7 im Vergleich zwischen berechneten und gemessenen radialen Profilen in den Ebenen $7.5, 10$ und 15 dargestellt. Da die stärkste Änderung der mittleren Temperatur stromab der Kugel bis zur Ebene $x/d=20$ erfolgt, ist die richtige Simulation des radialen turbulenten Wärmeflusses in diesem Bereich entscheidend. In den Ebenen 7.5 und 10 zeigen die mit dem TMBF berechneten Profile von $\overline{V'T'}$ eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Meßwerten. Die mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechneten radialen turbulenten Wärmeflüsse überschätzen in diesen Ebenen deutlich die Meßwerte. Ab der Ebene $x/d=15$ berechnet das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell einen kleineren radialen Wärmefluß als das TMBF, weil der mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechnete radiale Gradient der mittleren Temperatur stärker reduziert wird. Beide berechneten Profile von $\overline{V'T'}$ überschätzen die Meßwerte.

Der radiale turbulente Wärmefluß spielt eine wesentliche Rolle bei der Berechnung der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ durch den Produktionsterm $P_{T'}$ in der Gleichung (3.56), da der Temperaturgradient in Radialrichtung sehr hohe Werte im Experiment annimmt.

Die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ wird in der Abbildung 6.8 mit Hilfe eines axialen Verlaufs und vier radialen Profilen in den Ebenen $10, 15, 35$ und 70 dargestellt. Die entsprechenden Bilder besitzen stark unterschiedliche Ordinaten-Maßstäbe. Die

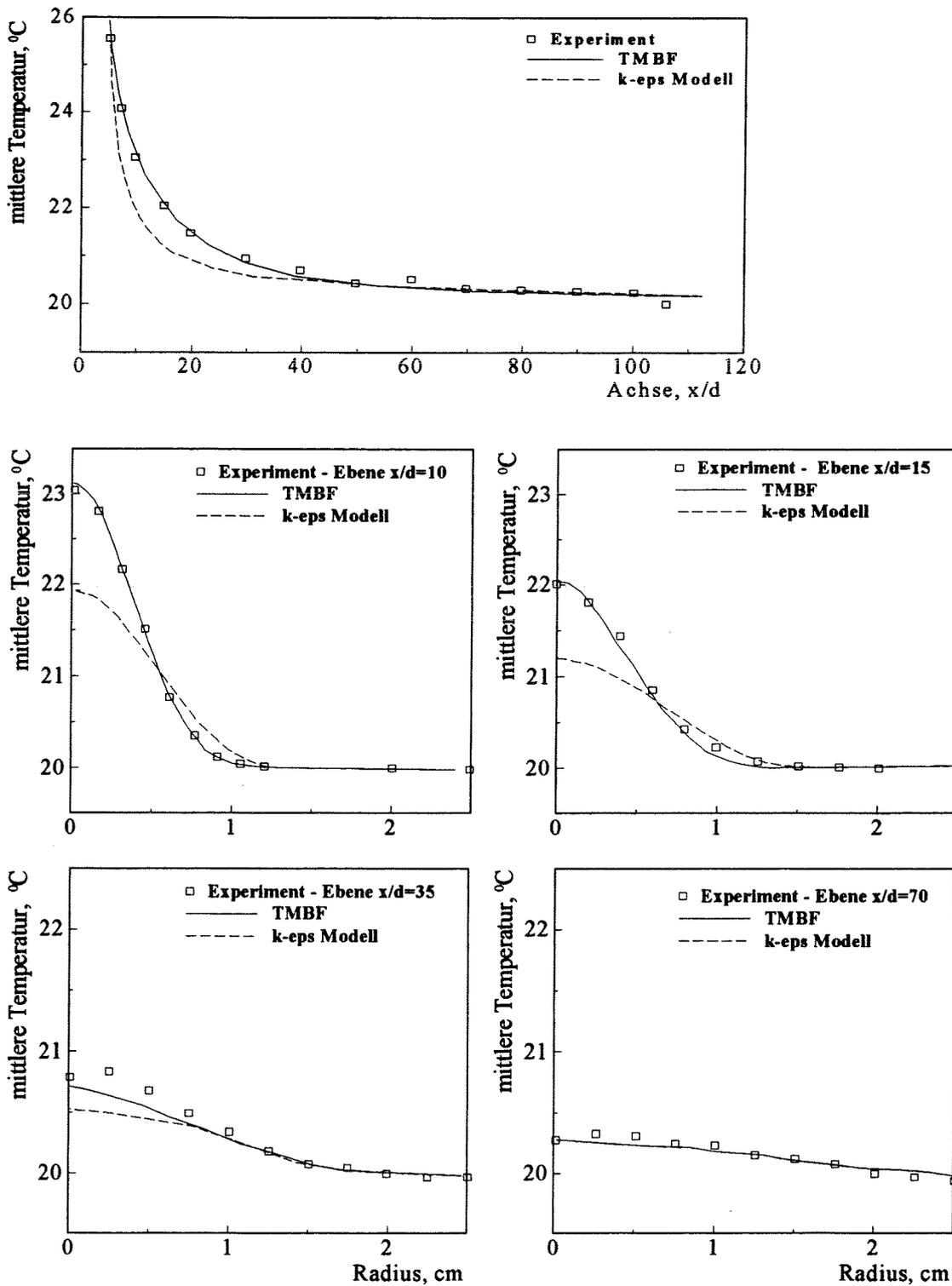


Abbildung 6.6: Axiale und radiale Verteilungen der mittleren Temperatur. Nachlaufströmung in Wasser.

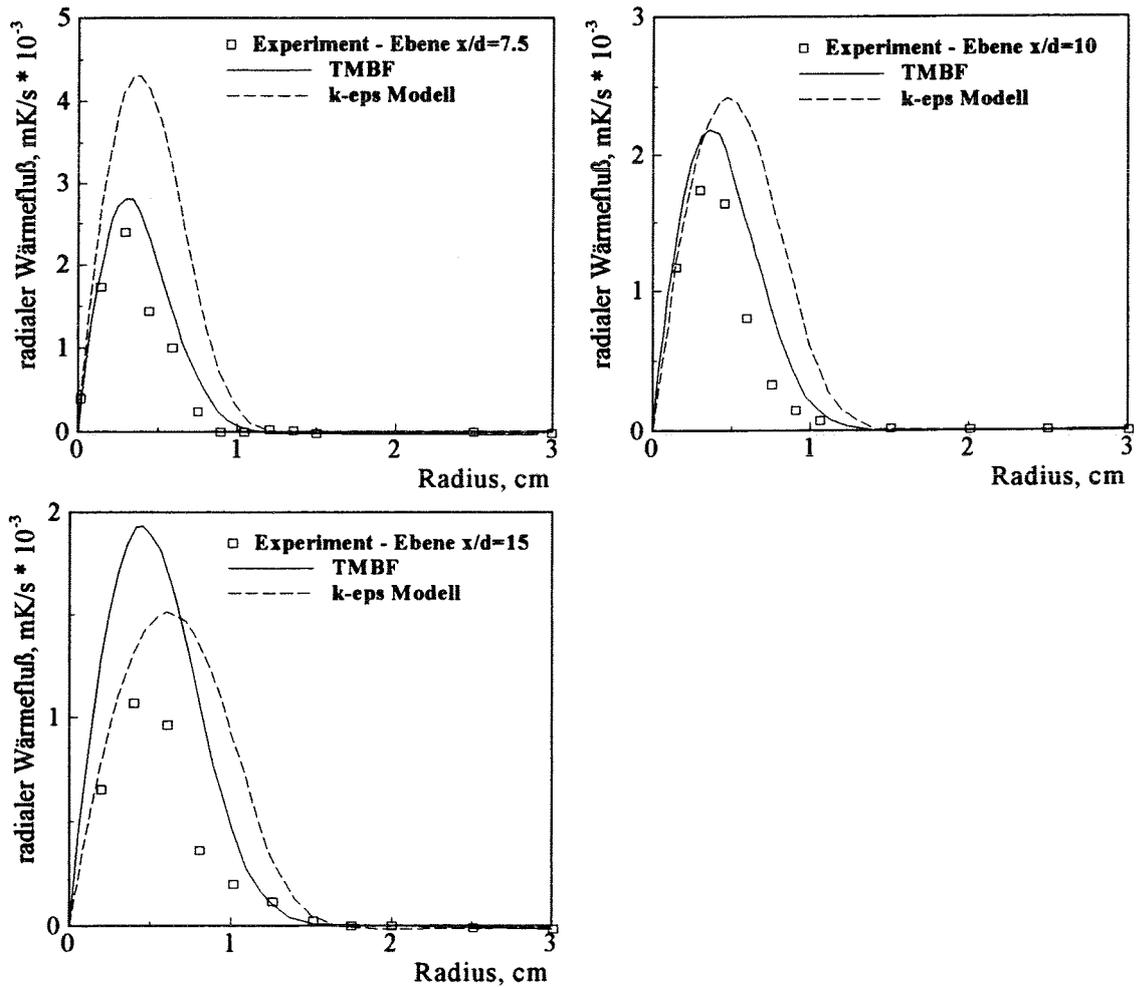


Abbildung 6.7: Radiale Verteilungen des radialen turbulenten Wärmeflusses. Nachlaufströmung in Wasser.

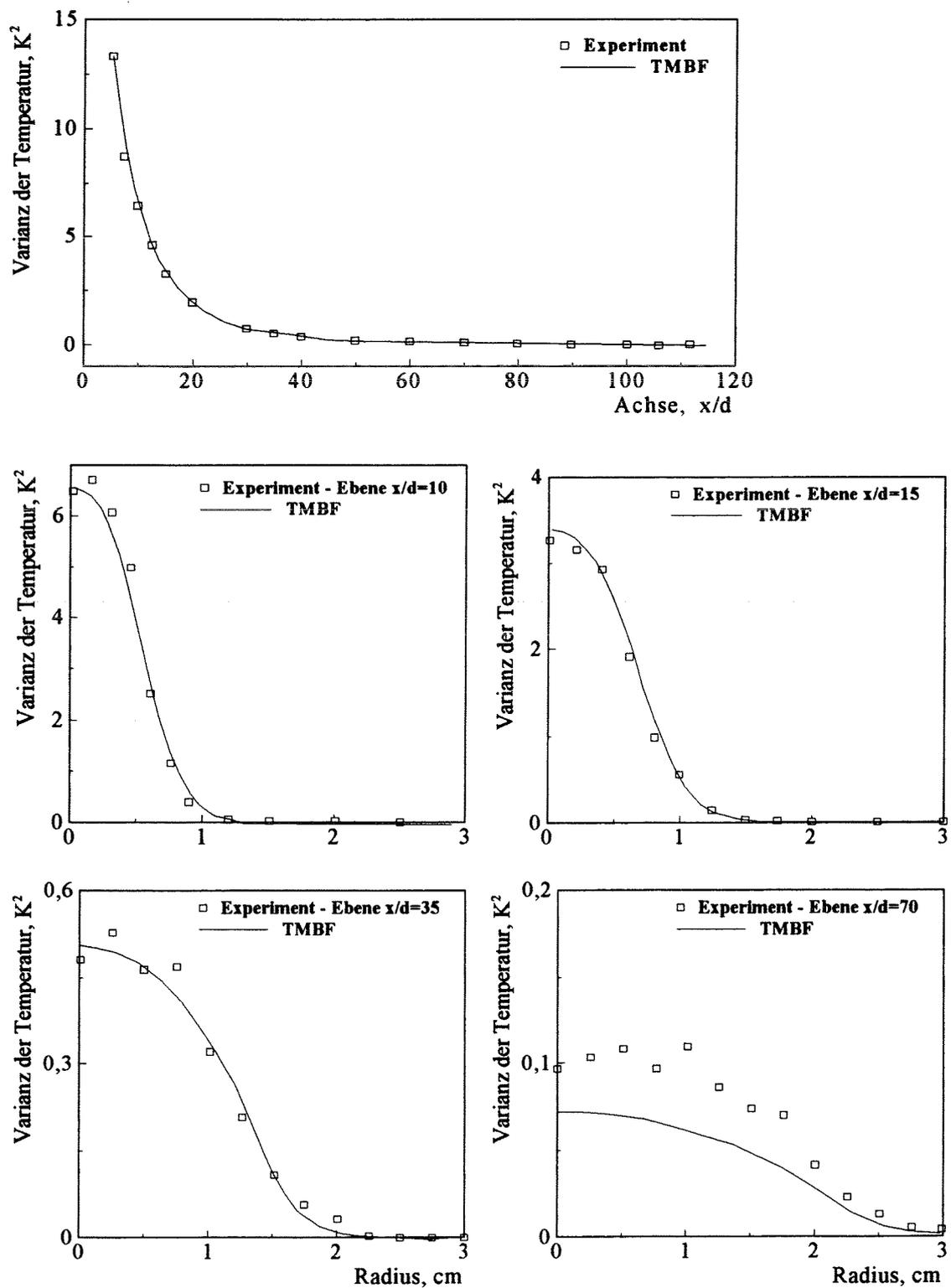


Abbildung 6.8: Axiale und Radiale Verteilungen der Varianz der Temperatur. Nachlaufströmung in Wasser.

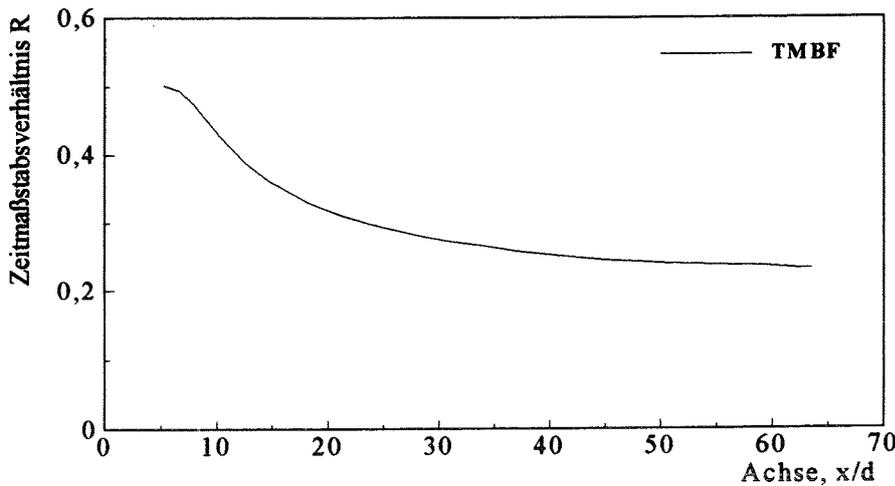


Abbildung 6.9: Axiales Profil des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R . Nachlaufströmung in Wasser.

Profile, die mit dem TMBF berechnet wurden, zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Die gute numerische Nachbildung der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ ist einerseits darauf zurückzuführen, daß die Transportgleichung für $\overline{V'T'}$ gelöst wird, und andererseits darauf, daß die Transportgleichung für die Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ der Varianz der Temperatur verwendet wird. In der Tat zeigt das berechnete axiale Profil des turbulenten Zeitmaßstabverhältnisses R einen starken Abfall stromab der Kugel bis zur Ebene $x/d=30$, vergl. dazu Abbildung 6.9. Da dieser Bereich, wie schon erwähnt, für die Simulation des Temperaturfeldes entscheidend ist, ist die Verwendung der Modellierung für $\epsilon_{T'}$ mit konstantem Wert R anstelle der Transportgleichung nicht zu empfehlen. Bei Benutzung eines konstanten Wertes von R können die experimentellen Profile von $\overline{T'^2}$ nur in einer Ebene x/d gut nachgebildet und nicht im gesamten Gebiet.

Im TMBF tritt $\overline{T'^2}$ im Auftriebsterm der Transportgleichung für den axialen turbulenten Wärmefluß $\overline{U'T'}$ auf, der die Übertragung des Auftriebseffekts vom Temperaturfeld zum Geschwindigkeitsfeld bewirkt. Deshalb stellt die richtige Bestimmung des $\overline{T'^2}$ -Feldes eine wichtige Voraussetzung für die Simulation des Auftriebs dar.

Eine Übersicht über das Feld des axialen turbulenten Wärmeflusses gibt die Abbildung 6.10. Hier sind Rechnungen mit Hilfe des TMBF und des $k-\epsilon-\sigma_t$ Modells sowie Meßwerte in einem axialen Verlauf und in vier radialen Profilen für die Ebenen $x/d=10, 15, 35$ und 70 zu sehen. Die unterschiedlichen Ergebnisse aus den Rechnungen mit dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell zeigen sich hier sehr drastisch. Der mit dem TMBF berechnete axiale Verlauf von $\overline{U'T'}$ zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Mit dem TMBF können sowohl der anfängliche axiale Anstieg von $\overline{U'T'}$ bis zur Ebene $x/d=15$ als auch der darauffolgende axiale Abfall simuliert werden. Auch die mit dem TMBF berechneten radialen Profile des axialen turbulenten Wärmeflusses zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechneten Werte von $\overline{U'T'}$ zeigen

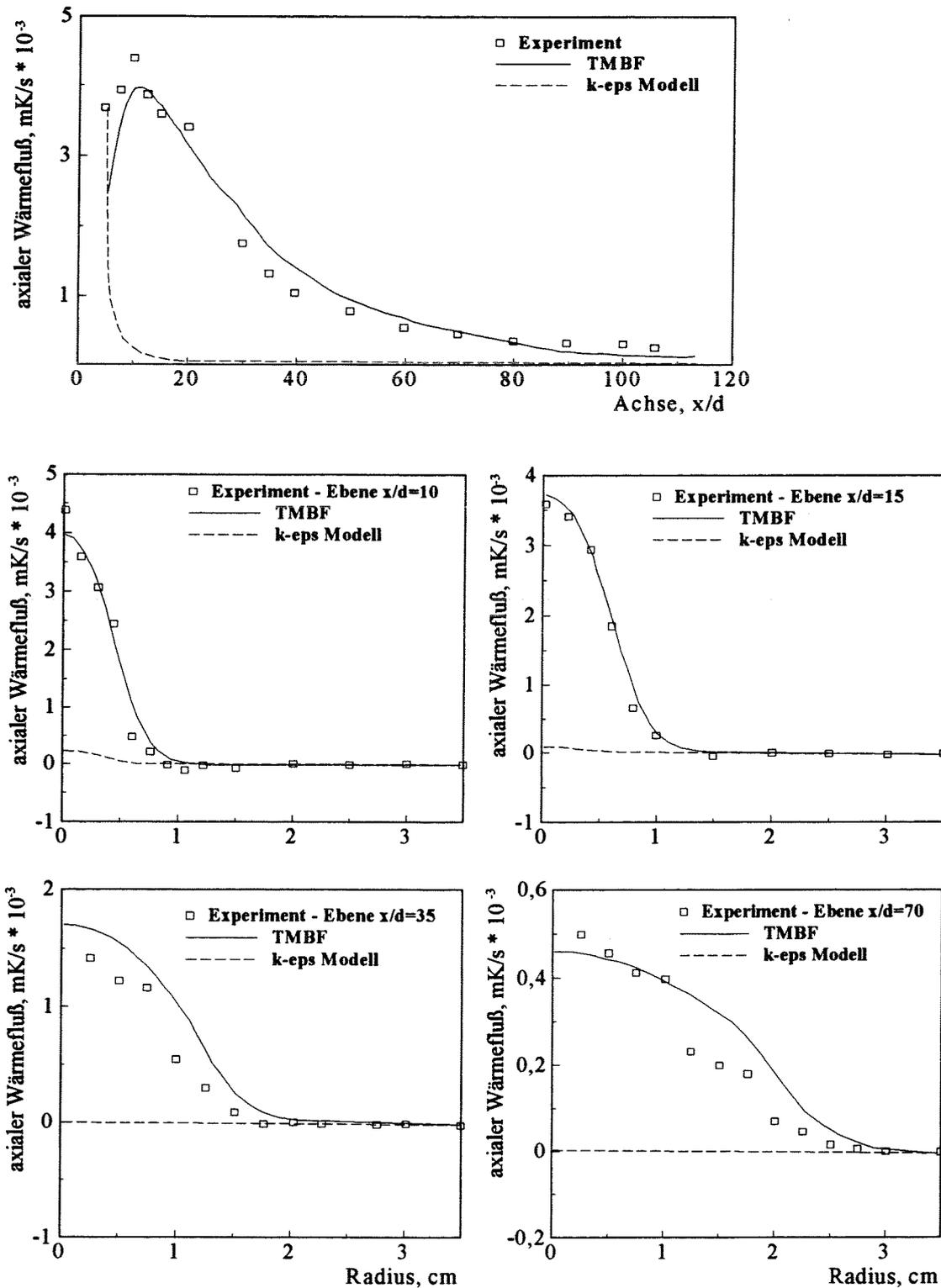


Abbildung 6.10: Axiale und radiale Verteilungen des axialen turbulenten Wärmeflusses. Nachlaufströmung in Wasser.

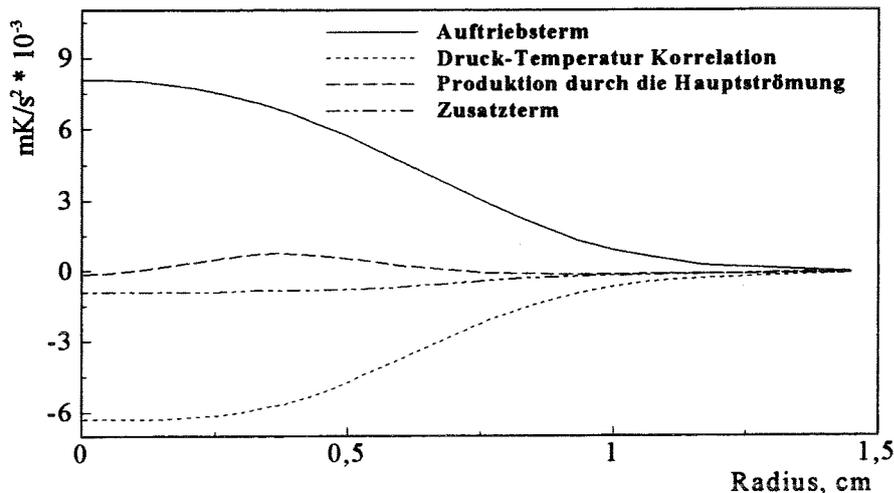


Abbildung 6.11: Produktions- und Senkenterme in der Transportgleichung für den axialen Wärmefluß. Nachlaufströmung in Wasser. Ebene $x/d=15$.

keine Übereinstimmung mit den Meßwerten. Schon in der Ebene $x/d=10$ sind die berechneten Werte verglichen mit den Meßwerten viel zu klein. Der Grund für diese großen Differenzen zwischen dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell liegt in der unterschiedlichen Beschreibung des turbulenten Wärmetransports. Der axiale turbulente Wärmefluß wird mit einem Fourier-Ansatz mit isotroper Wirbeldiffusivität ($k-\epsilon-\sigma_t$ Modell) proportional zu den kleinen axialen Gradienten der mittleren Temperatur gesetzt. Diese Beschreibung des turbulenten Wärmetransports ist nicht in der Lage, den Auftrieb zu simulieren. Die erfolgreiche Simulation im TMBF ist auf die Lösung der Transportgleichung für $\overline{U'T'}$ und auf die gut berechnete Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ zurückzuführen. Der Auftriebsterm $G_{\overline{U'T'}} = -\beta g_x \overline{T'^2}$ ist der Hauptproduktionssterm in der Transportgleichung für den axialen turbulenten Wärmefluß, Vergl. dazu Abbildung 6.11.

Die Verknüpfung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes erfolgt durch den Auftriebsterm $G_k = -\beta g_x \overline{U'T'}$ in der Transportgleichung für k . Deshalb wird das berechnete $\overline{U'T'}$ -Feld die turbulente kinetische Energie k wesentlich beeinflussen.

Das Feld der turbulenten kinetischen Energie k wird in der Abbildung 6.12 durch den axialen Verlauf und die radialen Profile in den Ebenen $x/d=10, 15, 35$ und 70 dargestellt. Mit dem TMBF wird die turbulente kinetische Energie zufriedenstellend nachgerechnet. Im axialen Verlauf stromab der Kugel bis zur Ebene $x/d=15$ sind die Meßwerte vermutlich fehlerbehaftet, da sie unphysikalische Oszillationen zeigen. Trotz eines dadurch bedingten falschen Eintrittswertes von k in der Ebene $x/d=5$ zeigt der mit dem TMBF berechnete axiale Verlauf einen Anstieg zwischen den Ebenen $x/d=10$ und $x/d=25$, der physikalisch sinnvoll ist. Die Ursache dafür ist der bis zur Ebene $x/d=15$ zunehmende Auftrieb, wie er durch den Verlauf des axialen turbulenten Wärmeflusses erkennbar ist, vergl. dazu Abbildung 6.10. Die mit dem TMBF berechneten radialen Profile von k zeigen in der Nähe der Achse einen Verlauf, der einer Glockenkurve gleicht, und stimmen mit dem Verlauf der Meßwerte überein. Die Nachrechnungen mit dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell zeigen weniger befriedigende

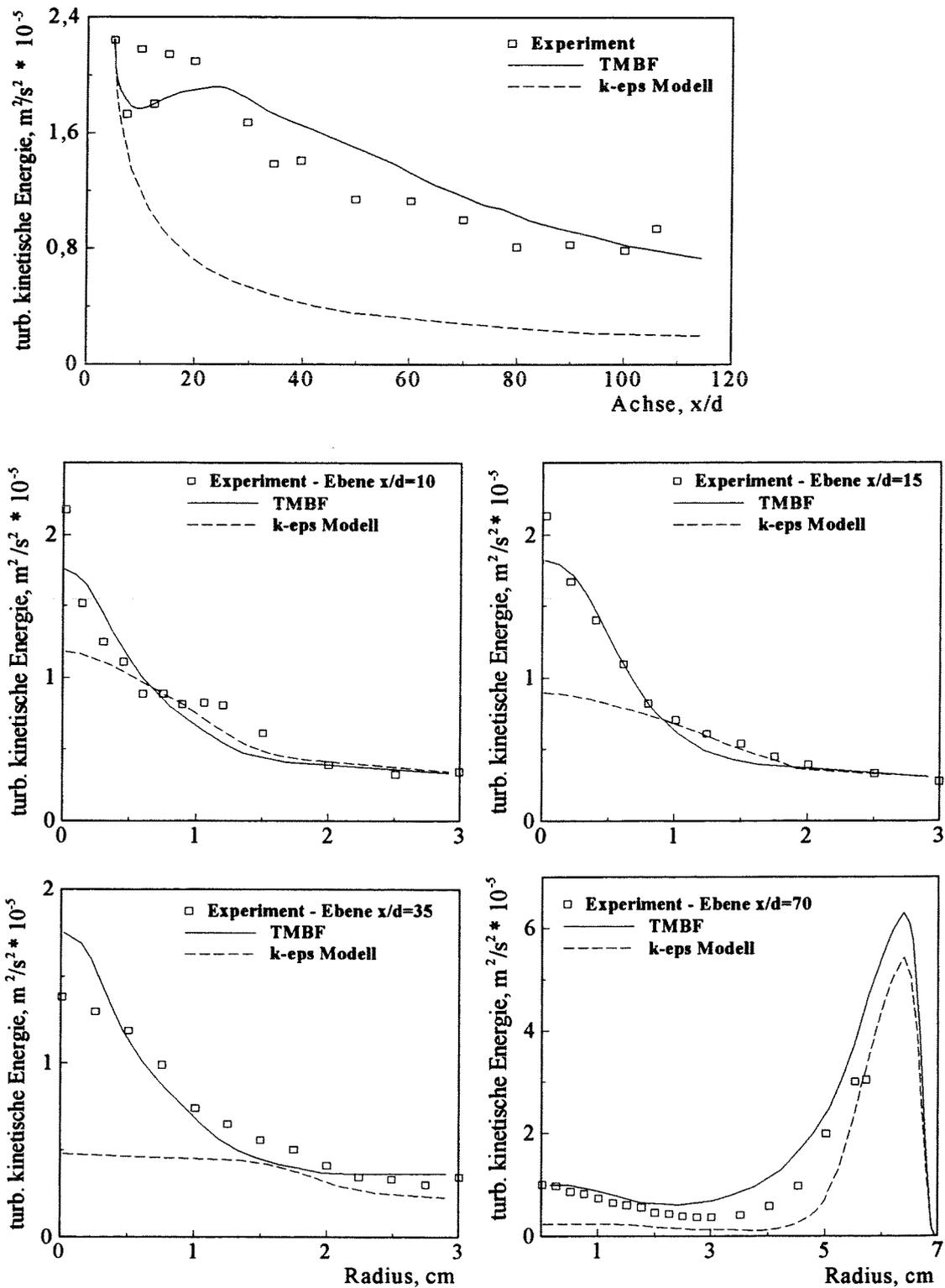


Abbildung 6.12: Axiale und radiale Verteilungen der turbulenten kinetischen Energie. Nachlaufströmung in Wasser.

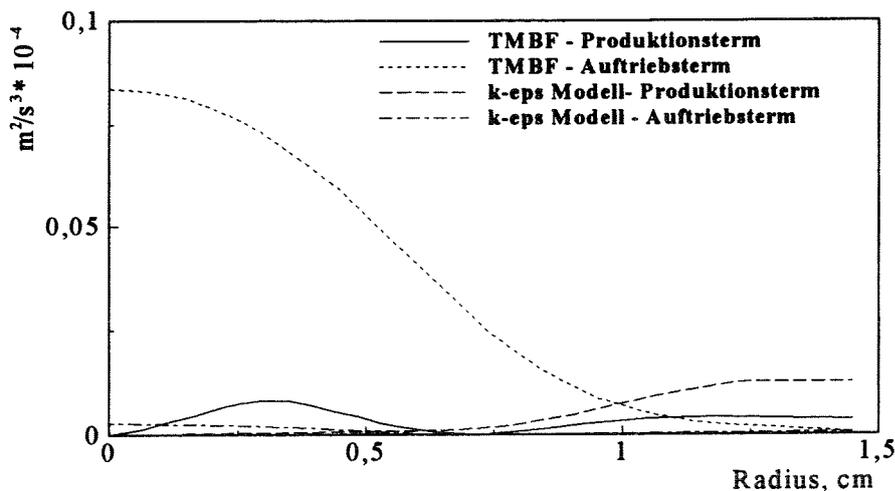


Abbildung 6.13: Produktions- und Auftriebsterme in der Transportgleichung für k . Nachlaufströmung in Wasser. Ebene $x/d=15$.

Übereinstimmung mit den Meßwerten. Der Grund für diesen Unterschied zwischen dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell ist deutlich in der Abbildung 6.13 zu erkennen. Hier sind die mit dem TMBF und dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell berechneten Produktions- P_k und Auftriebsterme G_k der Transportgleichung für k dargestellt. Der Auftriebsterm G_k ist in der TMBF-Rechnung im Achsenbereich dominant gegenüber dem Produktionsterm P_k und prägt damit die gut nachgerechneten radialen Glockenprofile der turbulenten kinetischen Energie. Im Gegensatz dazu ist der Auftriebsterm G_k in der $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell-Rechnung vernachlässigbar klein. Deshalb berechnet das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell keine starke Überhöhung von k im Achsenbereich. Der vom $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell nicht erfaßte axiale turbulente Wärmefluß hat einen völlig falschen axialen Verlauf der turbulenten kinetischen Energie zu Folge.

Das Geschwindigkeitsfeld wird natürlich vom Feld der turbulenten kinetischen Energie geprägt. Der axiale Verlauf und die radialen Profile in den Ebenen $x/d=10$, 15 , 35 und 70 werden in Abbildung 6.14 zur Darstellung der axialen mittleren Geschwindigkeit \bar{U} benutzt. Im gemessenen axialen Verlauf zeigt sich der wesentliche Auftriebseinfluß durch die anfänglich starke Zunahme von \bar{U} mit der Lauflänge bis zur Ebene $x/d=15$. Ab dieser Ebene besitzt der gemessene axiale Verlauf von \bar{U} eine geringere Steigung. Die mit dem TMBF berechneten axialen mittleren Geschwindigkeiten bilden den gemessenen axialen Verlauf gut nach. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell unterschätzt dagegen die anfänglich starke axiale Zunahme der axialen mittleren Geschwindigkeit.

Die gemessenen radialen Profile der axialen mittleren Geschwindigkeit zeigen innerhalb des Nachlaufs eine vom Auftrieb verursachte Überhöhung im Achsenbereich. Die in den ersten Ebenen ausgeprägte relative Überhöhung wird mit zunehmender Lauflänge schwächer, da sich die Nachlaufströmung reduziert und der Wandeinfluß auf die Scherschicht zunimmt. Die radialen Profile in den Ebenen $x/d=10$, 15 und 35 zeigen, daß das TMBF sowohl die Nachlaufströmung als auch den Auftriebseffekt im Achsenbereich richtig nachbildet. Dagegen simuliert das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell einen reinen

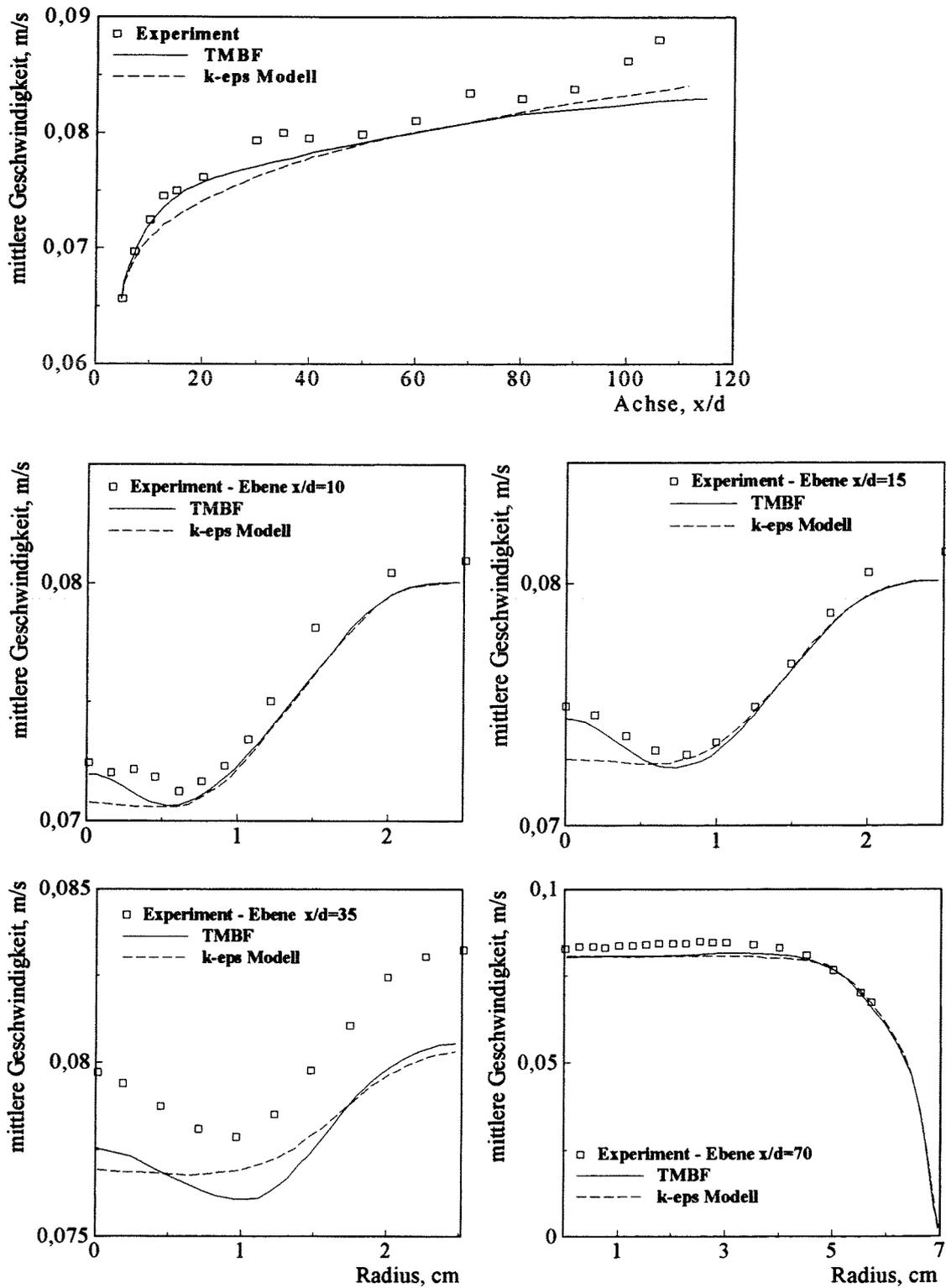


Abbildung 6.14: Axiale und radiale Verteilungen der axialen mittleren Geschwindigkeit. Nachlaufströmung in Wasser.

Nachlauf ohne Überhöhung durch den Auftrieb im Achsenbereich.

Der axiale Verlauf der axialen mittleren Geschwindigkeit wird mit zunehmender Lauflänge immer mehr von der Wand beeinflusst. Die richtige Nachbildung dieses Bereiches, vergl. dazu Abbildung 6.14, Meßebene $x/d=70$, ist auf die Verwendung der Modellierungen für kleine Reynolds-Zahlen bei der Beschreibung des turbulenten Impulstransports in beiden Turbulenzmodellen zurückzuführen. Dabei werden die Effekte der viskosen Kräfte im unmittelbaren Wandbereich berücksichtigt.

6.6 Zusammenfassung

Bei der Simulation eines achsensymmetrischen, auftriebsbehafteten Nachlaufs stromab einer beheizten Kugel sind für die Validierung des TMBF zwei Vorgänge besonders zu betrachten:

1. die radiale Ausbreitung des Temperatur-Feldes,
2. der Auftrieb.

Der erste Vorgang wird wegen der Anisotropie des Temperatur-Feldes ganz wesentlich vom radialen turbulenten Wärmefluß bestimmt. Der zweite Vorgang wird vom axialen turbulenten Wärmefluß beeinflusst, da der Auftrieb in Richtung der Hauptströmung wirkt. Beide Komponenten des turbulenten Wärmeflusses sind daher für verschiedene Vorgänge zuständig.

Die Meßwerte der mittleren Temperatur werden gut vom TMBF wiedergegeben, wenn der neue zusätzliche Term Z_r in der Transportgleichung für den radialen Wärmefluß verwendet wird. Für diesen Term konnte der Wert von c_{T5} in Mischkonvektion ermittelt werden. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell zeigt dagegen Abweichungen zu den Meßwerten der mittleren Temperatur, die von einer Überschätzung des turbulenten Wärmetransports in radialer Richtung verursacht werden. In der Tat werden unter Verwendung des Fourier-Ansatzes höhere Werte des radialen turbulenten Wärmeflusses stromab der Kugel bis zur Ebene $x/d=12$ berechnet. Dagegen zeigt in diesem Bereich der durch die Transportgleichung berechnete radiale Wärmefluß eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten.

Eine Bilanz der Transportgleichung für den axialen Wärmefluß $\overline{U'T'}$ verdeutlicht, daß der Auftriebsterm $G_{\overline{U'T'}} = -\beta g_x \overline{T'^2}$ gegenüber den anderen Termen dominant ist. Da die Varianz der Temperatur in $G_{\overline{U'T'}}$ auftritt, ist die richtige Bestimmung des $\overline{T'^2}$ -Feldes im TMBF eine wesentliche Voraussetzung für die Simulation des axialen Wärmeflusses. Die Varianz wird vom TMBF gut simuliert, und damit wird eine zufriedenstellende Übereinstimmung des axialen Wärmeflusses mit den Meßwerten erreicht. Dagegen werden vom $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell sehr geringe Werte des axialen Wärmeflusses berechnet, weil er unter Anwendung des Fourier-Ansatzes proportional zu den kleinen axialen Temperaturgradienten gesetzt wird.

Der signifikante Unterschied im Feld des axialen turbulenten Wärmeflusses zwischen TMBF und $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell beeinflusst wesentlich die berechnete turbulente kinetische Energie durch den Auftriebsterm $G_k = -\beta g_x \overline{U'T'}$ in ihrer Transportgleichung. Die Meßwerte von k werden nur vom TMBF zufriedenstellend

wiedergegeben. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell unterschätzt drastisch die experimentellen Werte von k . Das Feld der mittleren Geschwindigkeit wird natürlich von der turbulenten kinetischen Energie k geprägt. Das TMBF zeigt eine gute Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeit mit den Meßwerten, da es sowohl die Nachlaufströmung als auch den Auftriebseffekt im Achsenbereich richtig nachbildet. Im Gegensatz dazu simuliert das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell nur eine reine Nachlaufströmung ohne Auftriebseffekt.

Aus diesen Validierungsrechnungen ist folgender Schluß zu ziehen: Das TMBF bringt deutliche Verbesserungen gegenüber dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell in der Erfassung beider Effekte, die in diesem Experiment speziell zu betrachten sind. Besonders Signifikant ist die Verbesserung in der Beschreibung der Auftriebseffekte. Dabei besteht vor allem ein qualitativer Unterschied zwischen den beiden Modellen. Er liegt in der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports. Das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell kann mit einer Anpassung der turbulenten Prandtl-Zahl σ_t den Auftrieb nicht richtig simulieren. Eine detaillierte Beschreibung des turbulenten Wärmetransports wie im TMBF ist erforderlich, um Auftriebseffekte richtig zu erfassen.

7. Anwendung des TMBF bei reiner Naturkonvektion

Die Anwendung des TMBF wurde in dieser Arbeit erfolgreich für den Bereich von der Zwangs- bis zur Mischkonvektion validiert. Für die Anwendung bei reiner Naturkonvektion wäre das TMBF zu untersuchen und seine Grenzen festzustellen. Da bei reiner Naturkonvektion der turbulente Impulstransport sehr komplex ist, könnten diese Grenzen vom verwendeten Impulsmodell erster Ordnung gesetzt werden. In der Tat ist bei reiner Naturkonvektion die für hohe Reynolds-Zahlen gültige Annahme der lokalen Isotropie für die Beschreibung des turbulenten Impulstransports i.a. verletzt. Allerdings kann bei Verwendung von Turbulenzmodellen erster Ordnung, die das Standard k - ϵ Modell auf den Bereich kleiner Reynolds-Zahlen erweitern, der turbulente Impulstransport in reiner Naturkonvektion für bestimmte turbulente Strömungen mit Erfolg beschrieben werden. Diese Modelle verwenden zusätzliche Glieder sowie Korrekturfunktionen in den Transportgleichungen für k und ϵ , die hauptsächlich die molekularen Effekte in den Wandschichten beschreiben, wie es im TMBF geschieht. Deshalb können diese Modelle für turbulente Wandströmungen wie z.B. eine beheizte vertikale Wand oder eine vertikale Kavität mit Erfolg benutzt werden. Nachrechnungen dieser typischen turbulenten Strömungen in Naturkonvektion von Hanjalic und Vasic (1993) und von Peeters und Henkes (1992) zeigen, daß die k - ϵ Modelle für kleine Reynolds-Zahlen eine zufriedenstellende Simulation des Impulsfeldes leisten. Dabei ist aber eine detaillierte Beschreibung des turbulenten Wärmetransports erforderlich und für kleine Peclet-Zahlen gültig, um eine zufriedenstellende Simulation des Temperaturfeldes zu erreichen. Da das TMBF sowohl die Erweiterung für kleine Reynolds-Zahlen als auch die detaillierte Beschreibung des turbulenten Wärmetransports besitzt, kann das Modell ohne weiteres auf diese Fälle der turbulenten Naturkonvektion angewendet werden.

Die oben angeführten turbulenten Strömungen reiner Naturkonvektion repräsentieren jedoch nur zweidimensionale Fälle. Dabei vereinfacht sich der turbulente Impulstransport im Vergleich zu den dreidimensionalen Fällen wesentlich. In der Tat wird das turbulente Impulsfeld in diesen zweidimensionalen Experimenten allein von einer Komponente der turbulenten Spannungen bestimmt. Deshalb ist die Beschreibung des Transports einzelner turbulenter Spannungen mit einem Modell zweiter

Ordnung nicht erforderlich, auch wenn der turbulente Impulstransport anisotrop ist. Unter diesen Bedingungen wird nur eine geringe Anforderung an die Beschreibung des turbulenten Impulstransports gestellt, so daß die Annahme der Isotropie der Wirbelviskosität benutzt werden kann. Aus diesen Gründen berechnen die für kleine Reynolds-Zahlen gültigen k - ϵ Modelle den turbulenten Impulstransport bei diesen zweidimensionalen Fällen richtig. Es bleibt jedoch zu untersuchen, wie die k - ϵ Modelle für kleine Reynolds-Zahlen dreidimensionale Experimente nachbilden. Einige dreidimensionalen Effekte, wie z.B. die von Turbulenz erzeugte Sekundärströmung in quadratischen Kanäle, benötigen eine vollkommene Beschreibung des Transports einzelner Komponenten der turbulenten Spannungen, Tatchell (1975) und Reece (1977). Dies bedeutet für den turbulenten Impulstransport, daß ein Modell zweiter Ordnung notwendig wird. Der Boussinesq-Ansatz stellt deshalb in den dreidimensionalen Fällen, auch wenn die Erweiterungen auf kleine Reynolds-Zahlen benutzt werden, eine zu einfache Beschreibung des turbulenten Impulstransports dar.

Aus diesen Überlegungen heraus folgt, daß bei dreidimensionalen Strömungen in Naturkonvektion die Lösung der Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen erforderlich wird. Die Grenzen des Anwendungsbereichs des TMBF in reiner Naturkonvektion sollten in diesen dreidimensionalen Strömungen ermittelt werden. Für derartige Strömungen stehen jedoch bisher keine Meßdaten zur Verfügung, die zur Validierung erforderlich wären.

8. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

In dieser Arbeit ist ein statistisches Turbulenzmodell für Auftriebsströmungen, genannt *Turbulence Model for Buoyant Flows* (TMBF), entwickelt worden. Das TMBF ist eine Kombination eines Modells erster Ordnung mit zwei Gleichungen für den turbulenten Impulstransport und eines Modells zweiter Ordnung mit fünf Gleichungen für den turbulenten Wärmetransport. Die turbulenten Spannungen werden mit dem Prinzip der isotropen Wirbelviskosität ν_t beschrieben. Sie wird mit Hilfe der für große und kleine Reynolds-Zahlen modellierten Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und deren Dissipationsrate ϵ berechnet. Eine Korrekturfunktion für die Wirbelviskosität wird im Modell benutzt, die das lokale Ungleichgewicht zwischen der Produktion und Dissipation von k berücksichtigt. Die Komponenten des turbulenten Wärmeflusses $\overline{U_i T'}$ werden direkt durch die Lösung ihrer Transportgleichungen berechnet. Bei der Beschreibung des turbulenten Wärmetransports werden auch die für große und kleine Peclet-Zahlen modellierten Transportgleichungen für die Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ und deren Dissipationsrate $\epsilon_{T'}$ gelöst.

Zur Erweiterung des Anwendungsbereichs der für hohe Peclet-Zahlen modellierten Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse zu kleinen Peclet-Zahlen wird eine Modellierung in dieser Arbeit entwickelt, bei der die Modellierung als Zusatzterm Z_i in die Transportgleichungen für $\overline{U_i T'}$ eingeführt wird. Dieser Zusatzterm Z_i erfaßt die molekulare Dissipation der turbulenten Wärmeflüsse und die Modifizierung der Druck-Temperatur-Korrelation für kleine Peclet-Zahlen. Der Term Z_i enthält einen neuen Koeffizienten c_{T5} . Das TMBF besitzt insgesamt sieben Transportgleichungen und 18 empirische Koeffizienten.

Die Zielsetzung dieser Entwicklung ist es, den Anwendungsbereich des klassischen $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell auf die folgenden turbulenten Strömungen zu erweitern:

- Zwangskonvektionsströmungen, bei denen die Reynolds-Analogie nicht gültig ist,
- Auftriebsströmungen, in denen der turbulente Impulstransport noch quasi isotrop ist.

In der Literatur ist nur das Turbulenzmodell von Hanjalic et al. (1993 und 1994) bekannt geworden, das mit einer ähnlichen Vorstellung dieser Zielsetzung folgt. In diesem Modell wird jedoch der Anwendungsbereich des $k-\epsilon-\sigma_t$ Modells mit Hilfe der algebraischen Beziehungen für die Wärmeflüsse erweitert, genannt Algebraic heat Flux Model (AFM). Das TMBF besitzt im Gegensatz zum AFM einen potentiell breiteren Anwendungsbereich, da das AFM die konvektiven und diffusiven Effekte auf den Transport der turbulenten Wärmeflüsse vernachlässigt. Diese Effekte können eine wesentliche Rolle in auftriebsbehafteten Strömungen spielen, wie Peeters und Henkes (1992) bestätigen.

Der breitere Anwendungsbereich des TMBF gegenüber dem AFM wird mit einem größeren Aufwand an Rechenzeit und einer höheren Zahl empirischer Koeffizienten erkauft. Diese nachteilige Aussage bedarf jedoch einer Relativierung:

- Die algebraischen Modelle zeigen größere Schwierigkeiten bei der numerischen Konvergenz.
- Die Zahl der empirischen Koeffizienten ist im TMBF nicht sehr viel größer als im AFM, weil sich die meisten empirischen Koeffizienten in den Produktions- und Senkentermen der Transportgleichungen befinden. Diese Terme werden bei den algebraischen Beziehungen ebenso verwendet.

Aus diesen Überlegungen heraus wurde für diese Arbeit die Entscheidung getroffen, daß die Beschreibung des turbulenten Wärmetransports durch ein Modell zweiter Ordnung anstelle eines algebraischen Modells verwirklicht wird.

Außerdem ist der im TMBF entwickelte Zusatzterm Z_i in den Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse im zitierten AFM von Hanjalic (1994) nicht vorhanden. Hanjalic hat jedoch bereits ausgeführt, daß dieser Term notwendig ist.

Das so entwickelte TMBF wurde in das dreidimensionale thermohydraulische Rechenprogramm FLUTAN implementiert. Die Validierung des TMBF konzentriert sich auf die folgenden Ziele:

1. Es soll die neue Kombination im TMBF zwischen den Modellen erster und zweiter Ordnung für die Beschreibung des turbulenten Impuls- und Wärmetransports geprüft werden.
2. Die neue Modellierung Z_i soll ausgetestet werden. Dabei soll der Wert des empirischen Koeffizienten c_{T5} festgelegt werden.

Für die Validierung des TMBF werden deshalb hauptsächlich experimentelle Ergebnisse von turbulenten Strömungen bei Zwangs- und Mischkonvektion herangezogen.

Die berechneten turbulenten Strömungen bei Zwangskonvektion stellen drei unterschiedliche Strömungsformen dar, nämlich eine Rohrströmung, ein vertikaler Freistrahler und eine horizontale Nachlaufströmung. Sie erfassen außerdem einen breiten Bereich der molekularen Prandtl-Zahl, nämlich Wasser (7.0), Luft (0.71) und Natrium (0.006). Für die Strömung in Mischkonvektion wird ein auftriebsbehafteter, vertikaler Nachlaufstrom ab einer beheizten Kugel betrachtet.

Das erste Ziel der Validierung des TMBF konnte erreicht werden, weil das TMBF sowohl in Zwangs- als auch vor allem in Mischkonvektion signifikante Verbesserungen gegenüber dem $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell zeigt.

So wird das Feld der mittleren Temperatur vom TMBF mit demselben Standardsatz der empirischen Koeffizienten in sämtlichen Strömungen gut nachgerechnet. Dagegen werden die Meßwerte der mittleren Temperatur vom $k\text{-}\epsilon\text{-}\sigma_t$ Modell regelmäßig nicht richtig wiedergegeben. Der Grund für diese Abweichungen ist die Verwendung des Fourier-Ansatzes, der den turbulenten Wärmefluß quer zur Strömungsrichtung überschätzt.

Der turbulente Wärmefluß $\overline{U'T'}$ in Strömungsrichtung wird bei dem Mischkonvektion-Experiment vom Auftrieb stark geprägt. Die Meßwerte von $\overline{U'T'}$ werden vom TMBF zufriedenstellend wiedergegeben. Wesentlich für die gute Nachbildung des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{U'T'}$ ist die Lösung seiner Transportgleichung, die einen Auftriebsterm enthält. Der Auftriebsterm dominiert dabei die anderen Terme und wird von der Varianz der Temperatur $\overline{T'^2}$ bestimmt. Die Varianz der Temperatur wird vom TMBF ebenfalls gut nachgerechnet. Das ist eine wesentliche Voraussetzung zur richtigen Simulation des Auftriebs. Das $k\text{-}\epsilon\text{-}\sigma_t$ Modell rechnet dagegen sehr kleine Werte des turbulenten Wärmeflusses $\overline{U_i T'_i}$, weil er nur aus dem sehr kleinen Temperaturgradienten in Strömungsrichtung berechnet wird. Die drastischen Abweichungen von $\overline{U'T'}$ zwischen TMBF und $k\text{-}\epsilon\text{-}\sigma_t$ Modell beeinflussen das Feld der mittleren Geschwindigkeit durch die turbulente kinetische Energie. Die Meßwerte der mittleren Geschwindigkeit werden im Achsenbereich, wo der Auftrieb dominiert, nur vom TMBF gut wiedergegeben. Das $k\text{-}\epsilon\text{-}\sigma_t$ Modell simuliert dagegen keinen signifikanten Auftriebseffekt.

Die Simulationsrechnungen zeigen weiterhin, daß das turbulente Zeitmaßstabverhältnis R für sämtliche Experimente nicht konstant ist, sondern vom Fluid, der Strömung und den Geschwindigkeits- und Temperaturfeldern abhängt. Das Zeitmaßstabverhältnis R beeinflusst den Auftriebs- und Zusatzterm Z_i der Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeflüsse. Deshalb ist die Verwendung der Transportgleichung für $\epsilon_{T'}$ im TMBF anstelle einer Modellierung mit vorgegebenem konstantem R erforderlich.

Das zweite Ziel der Validierung des TMBF wurde ebenso erreicht. Bei dieser Validierung des neu modellierten Zusatzterms Z_i wurde der empirische Koeffizienten c_{T5} mit einem Wert von 0.001 festgelegt.

In dieser Arbeit wurde das TMBF für den Bereich der Zwangs- bis zur Mischkonvektion validiert. Die im Kapitel sieben diskutierten Überlegungen über die Anwendung des TMBF im Bereich der reinen Naturkonvektion zeigen, daß das Modell auch für eine Reihe zweidimensionaler turbulenter Wandströmungen in Naturkonvektion benutzt werden kann. Dagegen dürfte bei reiner dreidimensionaler Naturkonvektion die Lösung der Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen anstelle des Boussinesq-Ansatzes erforderlich sein. Für derartige Strömungen stehen jedoch bisher keine Meßergebnisse zur Validierung zur Verfügung.

Die im TMBF gewählte Turbulenzmodellierung für die Beschreibung des turbulenten Impuls- und Wärmetransports bietet für eine Reihe von thermisch relevanten Wärmeübertragungsproblemen neue Möglichkeiten für eine numerische Simulation, weil der Wärmetransport für auftriebsbehaftete Strömungen erfaßt werden kann, ohne daß die sechs Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen gelöst werden müssen. So betrachtet ist das TMBF ein Kompromiß zwischen einem Mo-

dell erster Ordnung, wie das $k-\epsilon-\sigma_t$ Modell, und einem kompletten Modell zweiter Ordnung, wie das sogenannte "Reynolds-Spannungsmodell". Dennoch erreicht das TMBF eine deutliche Verbesserung gegenüber den Modellen erster Ordnung bei der Beschreibung von komplexen Vorgängen des turbulenten Wärmetransports.

Anhang A

Diskretisierung mittels Upwind Verfahren

Diese Beschreibung wird auf die x-Richtung beschränkt, die anderen Richtungen werden ähnlich betrachtet. Bei der Diskretisierung der ersten Ableitung im Konvektionsterm,

$$(A.1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x},$$

sollen die gesuchten Werte $\Phi_{i+\frac{1}{2}}$ und $\Phi_{i-\frac{1}{2}}$ an der linken und rechten Fläche des Kontrollvolumens M_0 durch die in der Mitte der Zellen befindlichen bekannten Werte von Φ angenähert werden, Abb. A.1.

Wird die örtliche Ableitung des Konvektionsterms mittels zentraler Differenzen im Fall des Diffusionsterms angenähert, liefert diese Methode (CDS) örtlich oszillierende Lösungen, wenn der Wert der Maschen-Reynolds-Zahl,

$$(A.2) \quad Re_{\Delta x} = \frac{U \Delta x}{\Gamma_{\Phi}},$$

den Wert zwei übersteigt.

Die örtliche Ableitung $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ wird mittels modifizierter Verfahren angenähert, um dieses Fehlverhalten zu vermeiden. In FLUTAN werden drei verschiedene Upwind-Verfahren, Upwind-1.Ordnung, QUICK und LECUSSO, für das Konvektionsglied der Grundgleichungen verwendet. Deswegen wurden diese Methoden auch für die zu implementierenden Transportgleichungen des TMBF verwendet.

A.1 Upwind-Verfahren für innere Zellen des Rechengitters

Zur Näherung der ersten Ableitung werden im Upwind-Verfahren die Gitterknoten, die sich in Anströmrichtung befinden, bevorzugt, siehe Gleichungen (4.10) und (4.13).

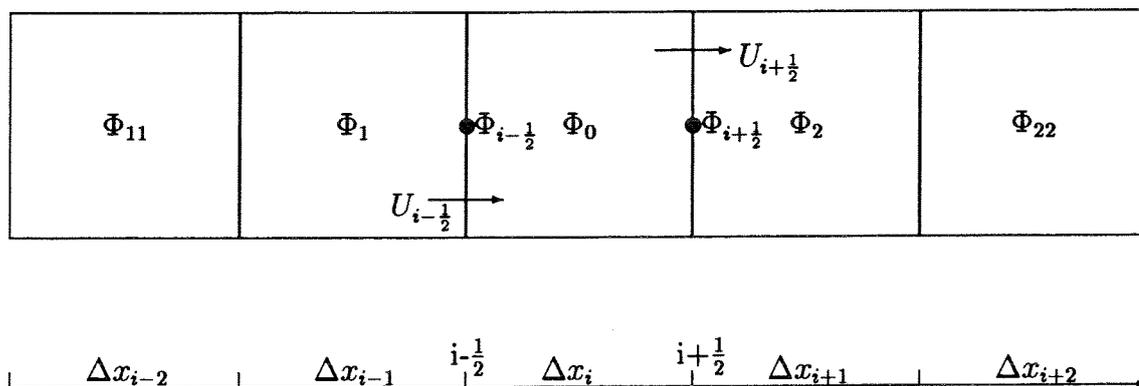


Abbildung A.1: Numerisches Gitter

UPWIND-VERFAHREN 1.ORDNUNG

Im einfachsten Upwind-Verfahren werden die gesuchten Werte durch den nächsten bekannten Wert, der sich in der Anströmungsrichtung befindet, ersetzt:

$$(A.3) \quad \Phi_{i+\frac{1}{2}} = \Phi_{i+1} \quad \text{wenn } U_{i+\frac{1}{2}} < 0 ,$$

$$(A.4) \quad \Phi_{i+\frac{1}{2}} = \Phi_i \quad \text{wenn } U_{i+\frac{1}{2}} > 0 ,$$

$$(A.5) \quad \Phi_{i-\frac{1}{2}} = \Phi_i \quad \text{wenn } U_{i-\frac{1}{2}} < 0 ,$$

$$(A.6) \quad \Phi_{i-\frac{1}{2}} = \Phi_{i-1} \quad \text{wenn } U_{i-\frac{1}{2}} > 0 .$$

Nach diesem Verfahren sind die Koeffizienten α und γ gleich null und β gleich eins in der Gleichung (4.13).

Durch die sehr einfache Behandlung des Konvektionsterms wird bei der Verwendung von Upwind-Verfahren 1.Ordnung eine künstliche numerische Diffusion hervorgerufen. Um diese numerische Diffusion zu vermeiden, werden Upwind-Verfahren höherer Ordnung verwendet.

QUICK-VERFAHREN

In dem QUICK-Schema von Leonard (1979) werden die gesuchten Werte durch eine quadratische 'upstream' Interpolation berechnet. Der gesuchte Wert $\Phi_{i+\frac{1}{2}}$ wird durch die drei örtlich nächsten bekannten Werte, von denen zwei sich in der Anströmrichtung befinden, angenähert, siehe Gleichung (4.10). Deshalb ergibt sich, wenn $U_{i+\frac{1}{2}}$ größer als null ist:

$$(A.7) \quad \Phi(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} \Phi_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} \Phi_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} \Phi_{i+1}.$$

Wenn $x = x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta x_i}{2}$, lassen sich die Koeffizienten α , β und γ in $i + \frac{1}{2}$ im Fall des Massenstroms in positiver Richtung berechnen:

$$(A.8) \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ = - \frac{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$(A.9) \quad \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\Delta x_{i+1}(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i)}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$(A.10) \quad \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i)}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}.$$

Die Koeffizienten sind nur von der Geometrie abhängig.

Da dieses Schema örtlich unphysikalische Oszillationen hervorrufen kann, Sakai (1992), wurde auch die FRAM-Technik nach Chapman (1981) implementiert.

LECUSSO-VERFAHREN

Auch in dem von Günther (1987) entwickelten Verfahren werden die gesuchten Werte durch die drei örtlich nächsten bekannten Werte angenähert, von denen zwei sich in der Anströmrichtung befinden. Wenn die Näherungsformulierung (4.10) der analytischen Lösung der Diffusion-Konvektion Gleichung genügt, die aus (4.1) abgeleitet werden kann, dann ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem bei Massenstrom in positiver Richtung in $i + \frac{1}{2}$:

$$(A.11) \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ + \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ = 1,$$

$$(A.12) \quad -\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) = \Delta x_i,$$

$$(A.13) \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ \exp\left(-R_{i+\frac{1}{2}}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})/2\right) + \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ \exp\left(R_{i+\frac{1}{2}}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})/2\right) = \exp\left(R_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_i/2\right),$$

mit $R_{i+\frac{1}{2}} = -U_{i+\frac{1}{2}}\rho/\Gamma_\Phi$.

Aus diesem Gleichungssystem werden die LECUSSO Koeffizienten berechnet:

$$(A.14) \quad \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) A - (\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i) B + \Delta x_i C}{W},$$

$$(A.15) \quad \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i - (\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) A + \Delta x_{i+1} C}{W},$$

$$(A.16) \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ = 1 - \beta_{i+\frac{1}{2}}^+ - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^+.$$

Darin sind:

$$(A.17) \quad A = \exp(-\Delta x_{i+1} R_{i+\frac{1}{2}}/2),$$

$$(A.18) \quad B = \exp(-(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i) R_{i+\frac{1}{2}}/2),$$

$$(A.19) \quad C = \exp(-(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) R_{i+\frac{1}{2}}/2),$$

$$(A.20) \quad W = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i - (\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) B + (\Delta x_{i+1} + \Delta x_i) C.$$

Verglichen mit dem QUICK-Verfahren sind die Koeffizienten α , β und γ beim LECUSSO-Verfahren nicht nur von der Geometrie abhängig, sondern auch von den Geschwindigkeiten und Diffusionskoeffizienten. Bei gleichmäßigen Gittern erzeugt das LECUSSO-Verfahren keine örtliche Oszillationen. Obwohl Oszillationen bei ungleichmäßigen Gittern auftreten können, zeigt dieses Schema eine bessere numerische Stabilität als QUICK.

A.2 Upwind-Verfahren für Randzellen des Rechengitters

Die Konvektionsglieder der Erhaltungsgleichungen und der Transportgleichungen für k und ϵ wurden im FLUTAN Programm für Randzellen nur mit dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung behandelt, auch bei Verwendung des QUICK- oder LECUSSO-Verfahrens. Um eine konsistente Behandlung sämtlicher Zellen mit dem QUICK- oder LECUSSO-Verfahren im FLUTAN Rechenprogramm zu ermöglichen, wurden diese Verfahren auf die Randzellen erweitert.

Die Randformulierungen der Koeffizienten α , β und γ für das QUICK- und LECUSSO-Verfahren wurden hergeleitet und ins FLUTAN Programm für die sieben

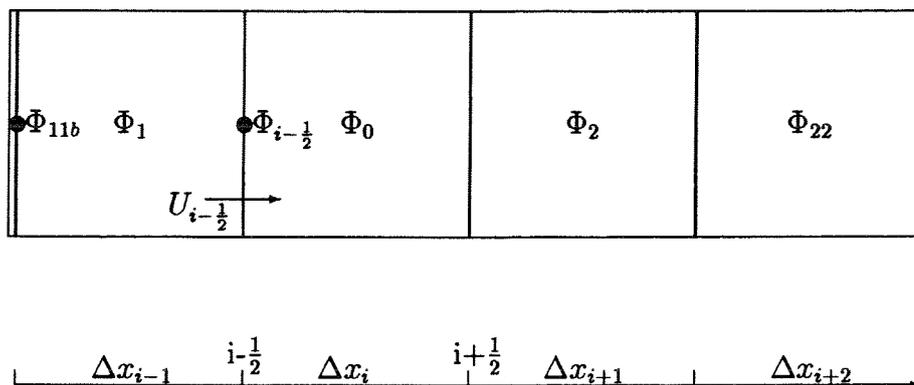


Abbildung A.2: Randzelle - 1.Fall

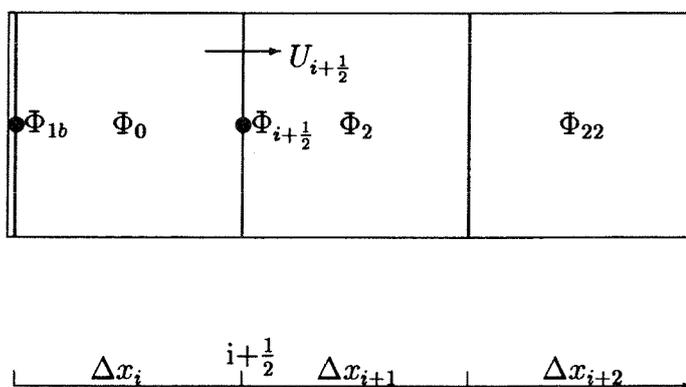


Abbildung A.3: Randzelle - 2.Fall

Transportgleichungen des TMBF implementiert. Bei der Herleitung der Randformulierungen sind die folgenden Fälle zu unterscheiden, in denen sich der Rand immer in der Anströmrichtung befindet:

1. Linke Kontrolloberfläche - Abb. A.2

$$(A.21) \quad \Phi_{i-\frac{1}{2}} = \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_{11b} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_1 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_0 \quad \text{wenn} \quad U_{i-\frac{1}{2}} > 0,$$

2. Linke Kontrolloberfläche - Abb. A.3

$$(A.22) \quad \Phi_{i+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_{1b} + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_0 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{b+} \Phi_2 \quad \text{wenn} \quad U_{i+\frac{1}{2}} > 0,$$

3. Rechte Kontrolloberfläche - Abb. A.4

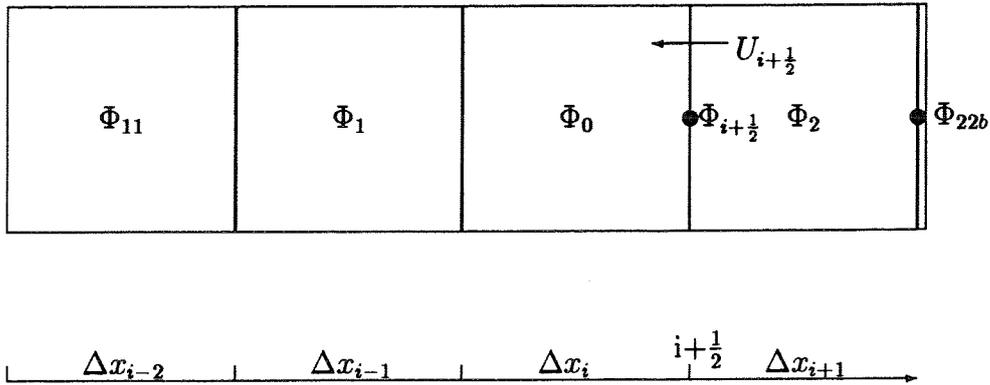


Abbildung A.4: Randzelle - 3.Fall

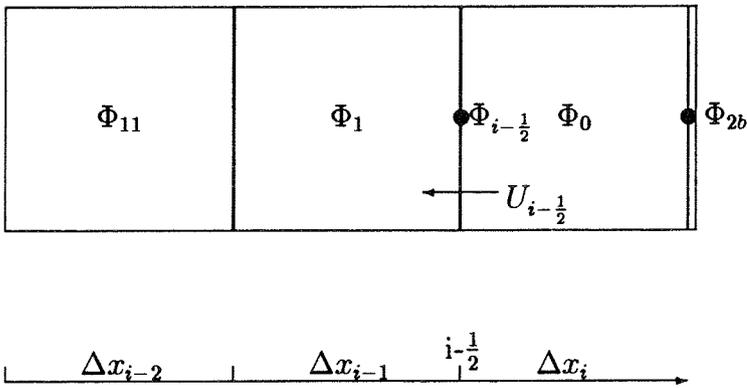


Abbildung A.5: Randzelle - 4.Fall

$$(A.23) \quad \Phi_{i+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_0 + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_2 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_{22b} \quad \text{wenn} \quad U_{i+\frac{1}{2}} < 0,$$

4. Rechte Kontrolloberfläche - Abb. A.5

$$(A.24) \quad \Phi_{i-\frac{1}{2}} = \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_1 + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_0 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{b-} \Phi_{2b} \quad \text{wenn} \quad U_{i-\frac{1}{2}} < 0.$$

Ein allgemeiner Ausdruck für die Randformulierungen der Koeffizienten α , β und γ , der alle vier Fälle berücksichtigt, läßt sich sowohl für das QUICK als auch für das LECUSSO-Verfahren angeben:

$$(A.25) \quad X = 1 - Y - W,$$

$$(A.26) \quad W = 2 - \frac{2b+c}{b} Y.$$

Tabelle A.1: QUICK-LECUSSO Verfahren bei Randzellen

	R	X	W	Y	b	c
1.	$\rho U_{i-1/2}/\Gamma_{\Phi}$	$\alpha_{i-1/2}^{b+}$	$\beta_{i-1/2}^{b+}$	$\gamma_{i-1/2}^{b+}$	Δx_{i-1}	Δx_i
2.	$\rho U_{i+1/2}/\Gamma_{\Phi}$	$\alpha_{i+1/2}^{b+}$	$\beta_{i+1/2}^{b+}$	$\gamma_{i+1/2}^{b+}$	Δx_i	Δx_{i+1}
3.	$\rho U_{i+1/2}/\Gamma_{\Phi}$	$\gamma_{i+1/2}^{b-}$	$\beta_{i+1/2}^{b-}$	$\alpha_{i+1/2}^{b-}$	$-\Delta x_{i+1}$	$-\Delta x_i$
4.	$\rho U_{i-1/2}/\Gamma_{\Phi}$	$\gamma_{i-1/2}^{b-}$	$\beta_{i-1/2}^{b-}$	$\alpha_{i-1/2}^{b-}$	$-\Delta x_i$	$-\Delta x_{i-1}$

Die unbekannte Y ist

$$(A.27) \quad Y = \frac{2b^2}{2b^2 + c^2 + 3bc}$$

beim QUICK-Verfahren und

$$(A.28) \quad Y = \frac{\exp(-Rc/2) + \exp(-R(2b+c)/2) - 2\exp(-R(b+c)/2)}{\left(\frac{2b+c}{b} - 1\right) \exp(-R(2b+c)/2) - \frac{2b+c}{b} \exp(-R(b+c)/2) + 1}$$

beim LECUSSO-Verfahren.

Die Tabelle A.1 erläutert die Bedeutung der Größen R, X, W, Y, b und c. Die oben dargestellten Ausdrücke der Randformulierungen können von den entsprechenden Formulierungen für innere Zelle abgeleitet werden, wenn die Randfläche als fiktive Zelle mit Gitterabstand null betrachtet wird.

Verzeichnis der Symbole

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$A_{x,y,z}$	m^2	Oberfläche der Kontrollvolumen
c_p	J/Kg K	spezifische Wärmekapazität
d	m	Durchmesser der Bohrungen (TEFLU)
d	m	Durchmesser der Kugel (FLUTMIK)
D	m	Durchmesser der Teststrecke (TEFLU und FLUTMIK)
D_h	m	hydraulischer Durchmesser
Fr	—	densimetrische Froude-Zahl
$F_{1,6}$	Kg/s	Massenströme im Kontrollvolumen
g_i	m/s^2	Erdbeschleunigung in Tensornotation
G_k	m^2/s^3	Auftriebsterm in k-Gleichung
$G_{\overline{U'T'}}$	mK/s^2	Auftriebsterm in $\overline{U'T'}$ -Gleichung
k	m^2/s^2	kinetische Energie der Turbulenz
\tilde{k}	—	Wellenzahl
L	m	Längenmaß der Turbulenz
l_m	m	Mischungslänge der Turbulenz
p	N/m^2	Momentanwert des Druckes
p'	N/m^2	Druckschwankungen
\bar{p}	N/m^2	mittlerer Druck
Pe	—	molekulare Peclet-Zahl
Pe_t	—	turbulente Peclet-Zahl
P_k	m^2/s^3	Produktionsterm in k-Gleichung
Pr	—	molekulare Prandtl-Zahl
Q	W	Heizleistung
R	—	turbulentes Zeitmaßstabverhältnis
Re	—	Reynolds-Zahl
Re_t	—	turbulente Reynolds-Zahl
$Re_{\Delta x}$	—	Maschen-Reynolds-Zahl
Re_r	—	lokale Reynolds-Zahl
Ri_f	—	Fluß-Richardson-Zahl
$S_{c\Phi}, S_{p\Phi}$	var.	Quell- oder Senkenterm
t	s	Zeit
T	K	Momentanwert der Temperatur
T'	K	Fluktuationen der Temperatur
\bar{T}	K	mittlere Temperatur
$\overline{T'^2}$	K^2	Quadrat der Temperaturfluktuationen
\bar{U}	m/s	mittlere Geschwindigkeit in x- oder axialer Richtung
$\overline{U'^2}$	m^2/s^2	Normalspannung in x- oder axialer Richtung
$\overline{U'T'}$	mK/s	turbulenter Wärmefluß in x- oder axialer Richtung

Symbol	Einheit	Bezeichnung
U_i	m/s	Momentanwert der Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation
U'_i	m/s	Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation
\overline{U}_i	m/s	mittlere Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation
$\overline{U'_i T'_i}$	mK/s	turbulenter Wärmefluß in Tensornotation
$\overline{U'_i U'_j}$	m ² /s ²	turbulente Spannung in Tensornotation
V	m/s	Geschwindigkeitsmaßstab
\overline{V}	m/s	mittlere Geschwindigkeit in y- oder radialer Richtung
$\overline{V'^2}$	m ² /s ²	Normalspannung in y- oder radialer Richtung
$\overline{V' T'}$	mK/s	turbulenter Wärmefluß in y- oder radialer Richtung
V_0	m ³	Kontrollvolumen
\overline{W}	m/s	mittlere Geschwindigkeit in z-Richtung
$\overline{W'^2}$	m ² /s ²	Normalspannung in z-Richtung
x_i	m	Koordinaten in Tensornotation
x, y, z	m	Koordinaten
y^*	m	Dicke der viskosen Unterschicht (Gl. 4.34)

Griechisches Alphabet:

Symbol	Einheit	Bezeichnung
α	—	Koeffizient in den Upwind-Verfahren
β	—	Koeffizient in den Upwind-Verfahren
β	K ⁻¹	thermischer Ausdehnungskoeffizient
γ	—	Koeffizient in den Upwind-Verfahren
γ_m	—	Mischkonvektionsparameter
Γ	m ² /s	molekulare Diffusivität
Γ_t	m ² /s	Wirbeldiffusivität
δ	m	Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht
δ_{ij}	—	Kronecker-Symbol
Δx	m	Maschenweite in x- Richtung
Δy	m	Maschenweite in y- Richtung
Δz	m	Maschenweite in z- Richtung
ϵ	m ² /s ³	Dissipationsrate von k
$\epsilon_{T'}$	K ² /s	Dissipationsrate von $\overline{T'^2}$
λ	W/m K	Wärmeleitfähigkeit
λ_t	W/m K	turbulente Wärmeleitfähigkeit
ν	m ² /s	kinematische Viskosität
ν_t	m ² /s	Wirbelviskosität

Symbol	Einheit	Bezeichnung
ρ	kg/m ³	Dichte
σ_t	—	turbulente Prandtl-Zahl
τ_w	N/m ²	Wandschubspannung
Φ	var.	allgemeine transportierte Größe
κ	—	Von Karman Konstante

Indizes:

Symbol	Bezeichnung
a	Achsenwerte
i, j, k	Indizes der Tensornotation
i, j, k	Indizes der Zellen-Indizierung
n	Normalrichtung zur Wand
o	Anströmungswerte
p	Knoten der Randzelle
t	turbulent
w	Wand
0	} Zellen-Indizierung in FLUTAN (Abb. 4.1)
1÷6	
11÷66	

Sonstige Zeichen:

Symbol	Bezeichnung
—	zeitliche Mittelwertbildung
'	Schwankungsgröße
+	Kennzeichnung des Massenstroms in positiver Richtung
-	Kennzeichnung des Massenstroms in negativer Richtung
n	Werte des vorhergehenden Zeitschrittes

Sonstiges:

Symbol	Bezeichnung
ITURKE	Steuergröße für Turbulenzmodelle in FLUTAN
TDIN	Koeffizient zur Berechnung der Eintrittsverteilung von ϵ in FLUTAN
TEPI	Koeffizient zur Berechnung der Eintrittsverteilung von ϵ_T in FLUTAN
TFIN	Koeffizient zur Berechnung der Eintrittsverteilung von $\overline{T'^2}$ in FLUTAN
TKIN	Koeffizient zur Berechnung der Eintrittsverteilung von k in FLUTAN
THIXN	Koeffizient zur Berechnung der Eintrittsverteilung von $\overline{U_i' T'}$ in FLUTAN

Abkürzungen:

Symbol	Bezeichnung
ASM	Algebraic Stress Model
CDS	Central Difference Scheme
CRESOR	Conjugate REsiduals Succesive OverRelaxation
DNS	Direkte Numerische Simulation
FLUTMIK	FLUktuationen in Turbulenter MIschKonvektion
LECUSSO	Locally Exact Consistent Upwind Scheme of Second Order
LES	Large Eddy Simulation
QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
TEFLU	TEmperature FLUktuationen
TMBF	Turbulence Model for Buoyant Flows
UDS	Upwind Difference Scheme

Literaturverzeichnis

N.Afzal (1985)

Mixed convection plume above a point heat source in a vertical free stream. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.28, No.11, pp.2043-2047.

F. Argoul, A. Arneodo, G. Grasseau, Y. Gagne, E.J. Hopfinger und U. Frisch (1989)

Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade. *Nature*, Vol.338, pp. 51-53.

N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley und E. Stone (1988)

The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, Vol.192, pp. 303-354.

G.K. Batchelor und Townsend (1948)

Decay of isotropic turbulence in the initial period. *Proc.of the Royal Society, London, Series A*, Vol. 193, pp. 539-558.

D.J. Bergstrom, A.B. Strong und G.D. Stubbley (1990)

Algebraic stress model prediction of a plane vertical plume. *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol.18, pp. 263-281.

H. Borgwaldt (1990)

CRESOR, a robust vectorized Poisson solver implemented in the COMMIX-2(V) thermal-hydraulic code Paper AC064, *Int. Conf. On Supercomputing in Nuclear Application (SNA 90)*, Mito City, Japan, March 12-16, 1990, pp. 346-351.

H. Borgwaldt, W. Baumann und G. Willerding (1992)

FLUTAN input specification. KfK 5010, Karlsruhe.

M.Bottoni et al. (1985)

COMMIX 2: A three-dimensional transient computer program for thermal hydraulic analysis of two phase flows, multicomponent systems. NUREG/CR-4371.

B.J. Brinkworth und P.C. Smith (1969)

Velocity distribution in the core of turbulent pipe flow. *Chem. Engin. Science*, Vol. 24, pp. 787-791.

M. Chapman (1981)

FRAM-nonlinear damping algorithms for the continuity equation. *J. Comp. Phys.*, Vol.44, pp.84-103.

- J.P.Chollet, M.Si Aneur und M.R.Vallcorba (1994)
Direct and large-eddy simulation of chemically reacting flows. *Direct and Large-Eddy Simulation*, Kluwer Academic Publishers, Vol. 1, pp.375-386.
- G. Comte-Bellot und S.Corrin (1966)
The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.25, pp. 657-682.
- S. Corrsin (1943)
Investigation of flow in an axially symmetric heated jet of air. NACA wartime Rept., W-94.
- T.J. Craft (1991)
Second-moment modelling of turbulent scalar transport. Ph.D. Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology.
- L. Davidson (1990)
Calculation of the turbulent buoyancy driven flow in a rectangular cavity using an efficient solver and two different low Reynolds number k - ϵ turbulence model. *Numer. Heat Transfer*, Vol.18, pp. 129-147.
- J.W. Deardorff (1970)
A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, Vol. 41, pp. 453-480.
- J.W. Deardorff (1974)
Three dimensional numerical modeling of the planetary boundary layer. *Boundary layer meteorology*, Vol. 1, 191.
- C.Foias, O.Manley, R.Temam und Y.Treue (1983).
Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations. *Physica*, Vol. 9d, pp. 155-197.
- S.Fu, P.G.Huang, B.E.Lauder und M.A.Leschziner (1988)
A comparison of algebraic and differential second-moment closures for axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl. *Trans. of the ASME*, Vol.110, pp.216-221.
- M.M.Gibson and B.E. Lauder (1978)
Ground effect on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanic*, Vol.86, p. 491-511.
- M.M.Gibson and B.E. Lauder (1979)
On the calculation of horizontal nonequilibrium turbulent shear flows und gravitational influence. *J. Heat Transfer*, vol. 101, pp. 532-584.

- S. Großmann (1990)
Turbulenz: Verstehen wir endlich dieses nichtlineare Phänomen? Phys. Bl., Vol.46(1), pp. 2-7.
- G. Grötzbach (1977)
Direkte numerische Simulation turbulenter Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder bei Kanalströmungen. Dissertation, Universität Karlsruhe, KfK 2426.
- G. Grötzbach (1987)
Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows. Encyclopedia of Fluid Mechanics, N.P. Chermisinoff Editor. Vol. 6. pp. 1337-1391.
- C. Günther (1987)
A consistent Upwind method of second order for the convection-diffusion equation. Proc. of the Inter. Conf. on Computational Techniques and Applic., Sidney, Aug. 24-27, 1987, pp.249-258.
- K.Hanjalic und S.Vasic (1993)
Computation of turbulent natural convection in rectangular enclosures with an algebraic flux model. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.36, No.14, pp. 3603-3624.
- K.Hanjalic (1994)
Achievements and limitations in modelling and computation of buoyant turbulent flows and heat transfer. Proc. 10th Int. Heat Transfer Conference Brighton, Aug. 14-18, 1994, Vol 1. pp. 1-18. Ed. GF Hewitt.
- K.Hanjalic, S.Kenjeres und F.Durst (1994)
Numerical study of natural convection in partitioned 2-dimensional enclosures at transitional rayleigh numbers. Proc. 10th Int. Heat Transfer Conference Brighton, Aug. 14-18, 1994, Vol. 5 pp. 477-482. Ed. GF Hewitt.
- J.O. Hinze (1975)
Turbulence. Mac Graw-Hill Company.
- M.S. Hossain (1980)
Mathematische Modellierung von turbulenten Auftriebsströmungen. Dissertation, Karlsruhe.
- M. Jischa (1982)
Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffausstausch. Vieweg Verlag.
- W.P. Jones und B.E.Lauder (1972)
The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.15, pp. 301-314.

W.P. Jones und B.E.Launder (1973)

The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.16, pp. 1119-1130.

W.P.Jones und P.Musonge (1988)

Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations. *Phys. Fluids*, Vol.31, pp.3589-3604.

J.Kim, P.Moin und R.Moser (1987)

Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133-166.

J.U. Knebel, L.Krebs und U.Müller (1993)

Experimental investigations on the velocity and temperature field in axi-symmetric turbulent buoyant jets of sodium. Ninth Symp. on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Aug. 16-18, 1993. pp. 12.2.1-12.2.6.

A.N. Kolmogorov (1942)

Equations of turbulent motion of an incompressible fluid, *Izv. Akad. Nauk. SSR, Seria fizicheska Vi.*, No. 1-2, pp. 56-58.

L. Krebs (1979)

Ausbreitung von Temperaturströmungen in begrenzter Strömung hinter einem Düsenblock. KfK 2846.

C.K.G. Lam und K.A. Bremhorst (1981)

Modified form of the $k-\epsilon$ model for predicting wall turbulence. *J. Fluid Engng*, Vol.103, pp. 456-460.

B.E. Launder und D.B. Spalding (1974)

The numerical computation of turbulent flow. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol.3, p.269.

B.E. Launder (1975)

On the effect of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.67, pp.569-581.

B.E. Launder, G.J. Reece und W.Rodi (1976)

Progress in the development of a Reynolds-Stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.68, part.3, pp.537-566.

B.E. Launder (1978)

Heat and mass transport in turbulence. Ed.P.Bradshaw, *Topics in Appl. Phys.*, Vol.12, Springer Verlag.

B.P. Leonard (1979)

A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 19, pp. 59-98.

E.N. Lorenz (1963)

Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, Vol.20, pp.130-141.

J.L. Lumley (1975)

Prediction methods for turbulent flows. Lecture Series 76, von Karman Institute, Belgium.

M.R. Malin und B.A. Younis (1990)

Calculation of turbulent buoyant plumes with a Reynolds stress and heat transport closure. *J. Heat Mass Transfer*, Vol.33, pp.2247-2264.

A.S. Monin (1965)

On symmetry properties of turbulence in the surface layer of air. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Fizika atmosf. i.okeana*, Vol.11.

Y.Nagano und M.Hischida (1987)

Improved form of the $k-\epsilon$ model for wall turbulent shear flows. *J. Fluid Engng*, Vol.109, pp. 156-160.

Y.Nagano und C.Kim (1988)

A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. *J. Heat Transfer*, vol. 110, pp. 583-589.

Y.Nagano, M.Shimada und M.S.Youssef (1994)

Progress in the development of a two-equation heat transfer model based on dns databases. *Proc. Int. symposium on turbulence, heat and mass transfer, Lissabon*, Aug. 9-12, 1994, pp. 3.2.1-3.2.6.

L. Prandtl (1945)

Über eine neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, *Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, p. 6.

S.A. Orszag, V. Yakhot, W.S. Flannery, F. Boysan, D. Choudhury, J. Maruzewski und B. Patel (1993)

Renormalization group modeling and turbulence simulations. *New-Wall Turbulent Flows*, Elsevier Science Publishers B.V., pp.1031-1046.

T.W.J.Peeters und R.A.W.M.Henkes (1992)

The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.35, No.2, pp.403-420.

G.J. Reece (1977)

A generalized Reynolds-stress model of turbulence. Ph.D. Thesis, University of London.

W. Rodi (1972)

The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence. Ph.D. Thesis, Imperial College London.

W.Rodi (1975)

A note on the empirical constant in the Kolmogorov-Prandtl eddy-viscosity expression. *J. of Fluids Engg., Trans. ASME*, pp.386-389.

W. Rodi (1976)

A new algebraic relation for calculating the Reynolds-stresses. *ZAMM*, cap.56, pp. T219-T221.

W. Rodi (1980)

Turbulence models and their application in hydraulic. MH DELFT, The Netherlands.

W.Rodi und N.N. Mansour (1993)

Low Reynolds number $k-\epsilon$ modelling with the aid of direct simulation data. *J. Fluid Mech.*, Vol.250, pp. 509-529.

D. Ruelle (1982)

Large volume limit of distribution of characteristic exponents in turbulence, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 82, pp. 287-302.

D. Ruelle und F. Takens (1971)

On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, Vol.20, pp. 167-192.

K. Sakai (1992)

Locally exact numerical scheme for transport equations with source terms-LENS. *J. of Nucl. Sci. and Techn.*, Vol.29, pp.824-827.

U. Schumann (1973)

Ein Untersuchung über der Berechnung der turbulenten Strömungen im Platten- und Ringspalt-Kanälen. Dissertation, Universität Karlsruhe.

Y.L. Sinai (1986)

A second-order wall function for the temperature variance in turbulent flow adjacent to a diabatic wall. Proc. 8th Int. Heat Transfer Conference San Francisco, 1986, Vol 3. pp. 1127-1131. Ed. Hemisphere Publ. Corp..

D.B. Spalding (1971)

Concentration fluctuations in a round turbulent free jet. Chem. Eng. Sci., Vol.26, pp. 95-107.

A.Soufiani, P. Mignon und J. Taine (1990)

Radiation effects on turbulent heat transfer in channel flows of infrared active gases. Radiation Heat Transfer: Fundamentals and Applications, HTD-137, pp. 141-148. ASME, New York.

Shah et al. (1985)

COMMIX 1-B: A three-dimensional transient single-phase computer program for thermal hydraulic analysis of single and multicomponent systems. NUREG/CR-4348, Vol. I und II.

N.Shikazono und N.Kasagi (1993)

Modeling Prandtl number influence on scalar transport in isotropic and sheared turbulence. Proceedings, 9th Symp. on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, August 16-18, 1993, Vol.2, pp. 18.3.1-18.3.6.

D.Suckow (1993)

Experimentelle Untersuchung turbulenter Mischkonvektion im Nachlauf einer beheizter Kugel. KfK Bericht, KfK 5174.

F.Tamanini (1978)

The effect of buoyancy on the turbulence structure of vertical round jets. Journal Heat Transfer, Vol.100, pp.659-664.

D.G. Tatchell (1975)

Convection processes in confined three-dimensional boundary layers. Ph.D. Thesis, University of London.

H. Tennekes und Lumley (1972)

A first course in turbulence. The MIT press, London.

T.F.Tureaud, A.A. Szewczyk, V.W. Nee und K.T.Yang (1988)

Experimental investigation of large temperature difference effects on a turbulent wake. First World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Dubrovnik, Sep. 4-9, 1988, pp. 335-343.

T.H. von Weissenfluh (1984)

Turbulenter Wärmetransport in flüssigem Natrium. Dissertation, Zürich.

M. Wörner und G. Grötzbach (1993)

Turbulent heat flux balance for natural convection in air and sodium analysed by direct numerical simulations. 5th Int. Symposium of Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Paris, Sep. 7-10, 1993, pp. 335-343.

M. Wörner und G. Grötzbach (1994)

Analysis of thermal variance equation for natural convection of air and sodium. Proceeding ICHMT Int.Symp. on Turb., Heat and Mass Transfer, Lissabon. Aug. 9-12, 1994. Begell House Inc. 1995, pp. 332-337.

M. Wörner und G. Grötzbach (1995)

Modelling the molecular terms in the turbulent heat flux equation for natural convection. Proc. 10th Symposium on Turbulent Shear Flows, State College, PA, USA, Vol. 2, P2-73-P2-78, August 14-16.

J.C. Wyngaard, O.R. Cote und Y. Izumi (1971)

Local free convection, similarity and the budget of shear stress and heat flux. J. Atmosf. Sci., Vol.28, pp.1171-1182.

V. Yakhot und S.A. Orszag (1986)

Renormalization group analysis of turbulence: 1. basic theory. J. Sci. Comput., Vol.1, pp.3.

S.T.B. Young (1975)

Turbulence measurements in a stably-stratified turbulent shear flow. Queen Mary Coll. London Rep. QMC-EP 6018.

