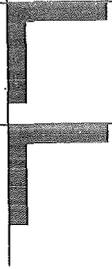


---



**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5850

**Zur Bestimmung von  
mechanischen Eigenschaften  
mit dem Eindruckversuch**

**N. Huber**

Institut für Materialforschung

Dezember 1996

---



Forschungszentrum Karlsruhe  
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte  
FZKA 5850

**Zur Bestimmung von mechanischen Eigenschaften  
mit dem Eindruckversuch**

Norbert Huber  
Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1996

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**ISSN 0947-8620**

## Kurzfassung

Der Eindruck eines kugelförmigen Prüfkörpers in metallische Werkstoffe wurde sowohl mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen als auch anhand von Experimenten studiert. Dabei wurden im ersten Teil der Arbeit phänomenologische Effekte in Bezug auf das verwendete Materialmodell untersucht.

So konnten während des Entlastungsvorgangs unterschiedliche Auswirkungen isotroper und kinematischer Verfestigung festgestellt werden. Die bei vorhandener kinematischer Verfestigung auftretende verstärkte Rückverformung konnte auf plastische Deformationen während des Entlastungsvorganges zurückgeführt werden, was eine Analogie zum Bauschinger-Effekt darstellt. Weiterführende Untersuchungen zeigten, daß bei der Existenz von kinematischer Verfestigung unter erneuter Belastung die Ausbildung einer Hysterese im Last-Eindrucktiefe Diagramm zu erwarten ist. Deren Flächeninhalt und Öffnung sind mit der Stärke der vorhandenen kinematischen Verfestigung korreliert.

Die Betrachtung viskoser Effekte beschränkte sich auf Kriech- und Relaxationsvorgänge. Für verschieden viskose Materialien wurden die Endpunkte der Last-Eindrucktiefe-Trajektorien im stationären Zustand betrachtet und mit dem zugeordneten Punkt eines geschwindigkeitsunabhängigen Materials mit gleichen Verfestigungseigenschaften verglichen. Es ergab sich bei zunehmender Viskosität beziehungsweise zunehmender Belastungsgeschwindigkeit ein wachsender Abstand der Kriech- und Relaxationsendpunkte von der Lage des zugeordneten geschwindigkeitsunabhängigen Punktes, wobei sowohl die Kriech- als auch die Relaxationstrajektorien die Kurve des nicht viskosen Materials durchstießen.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde der Eindruckversuch hinsichtlich der Bestimmung des Elastizitätsmoduls betrachtet. Unter Verwendung bekannter Methoden ergaben sich erhebliche Fehler, weshalb eine verbesserte iterative Methode entwickelt wurde. Durch die Einbeziehung einer auf FE-Simulationen gestützten Datenbasis und robuste Modellierung ist es gelungen, den Einfluß der plastischen Verformung auf die Entlastung geeignet zu berücksichtigen, wodurch der Fehler des damit bestimmten E-Moduls auf 5% reduziert werden konnte.

## Abstract

### On the Determination of Mechanical Properties using the Indentation Test

Using Finite Element calculations and experimental investigations, the indentation of a sphere into metallic specimens has been investigated. In the first part of this work, attention was focussed on phenomenological effects related to the constitutive model that has been used.

A different behavior during unloading with respect to isotropic and kinematic hardening has been observed. The increased recovery of the surface due to the presence of kinematic hardening could be attributed to the existence of plastic deformation during unloading, which is in analogy to the Bauschinger effect. Further, it has been shown that for complete unloading and reloading of the indenter a hysteresis loop develops in the load-depth plot. The enclosed area and the opening of the hysteresis are correlated to the contribution of kinematic hardening to the total hardening response.

The investigation of viscous effects was restricted to creep and relaxation processes. For different rate-dependent materials, the final points, given by the load-depth trajectory in the stationary state, have been compared with the corresponding points of a rate-independent material, which exhibits the same hardening properties. It turns out that with increasing viscosity or rate of loading the distance between these points increases, and the trajectories of creep and relaxation process penetrate the trajectory related to the rate-independent material.

The second part deals with determination of Young's modulus from the load-depth response. In case of ductile materials, a pronounced error has been determined when known methods from literature are applied. Therefore an improved iterative method has been developed. Incorporating Finite Element results, the correct contribution of the effect of plastic deformation on the unloading response has been established. This way, it was possible to reduce the error in determining the value of Young's modulus to 5%.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundgedanken zum Eindruckversuch</b>	<b>3</b>
2.1	Das Prinzip des Eindruckversuchs . . . . .	3
2.2	Prüfkörpergeometrie . . . . .	5
2.3	Methodik der Dimensionsanalyse . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Zur Lösung des Randwertproblems</b>	<b>9</b>
3.1	Materialmodelle . . . . .	10
3.1.1	Viskoplastizität . . . . .	10
3.1.2	Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung . . . . .	12
3.1.3	Plastizität mit linearer Verfestigung . . . . .	13
3.2	Randbedingungen . . . . .	15
3.2.1	Probenlagerung . . . . .	15
3.2.2	Modellierung des Prüfkörpers . . . . .	15
3.3	Diskretisierung der Probe . . . . .	16
3.4	Große Deformationen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Experimentelles Vorgehen</b>	<b>20</b>
4.1	Last- und Eindrucktiefemessung . . . . .	20
4.1.1	Kalibrierung der Eindrucktiefe . . . . .	22
4.1.2	Bestimmung des Nullpunktes . . . . .	23
4.2	Eindrucktiefensteuerung . . . . .	24
4.3	Prüfkörper . . . . .	26
4.4	Probenmaterial . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Eindruckversuch und Zugversuch</b>	<b>29</b>
5.1	Tabor's Idee . . . . .	29

5.2	Bestimmung des Kontaktradius . . . . .	30
5.3	Effekte kinematischer und isotroper Verfestigung . . . . .	33
5.3.1	Belastung . . . . .	35
5.3.2	Entlastung . . . . .	35
5.3.3	Zyklische Belastung . . . . .	40
5.3.4	Nichtlineare Verfestigung . . . . .	43
5.3.5	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	44
5.4	Reibung . . . . .	46
5.5	Viskosität . . . . .	51
5.5.1	Gleichgewichtskennlinie . . . . .	51
5.5.2	Eingefügte Haltezeiten . . . . .	53
5.5.3	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Bestimmung des Elastizitätsmoduls</b>	<b>56</b>
6.1	Methoden in der Literatur . . . . .	56
6.1.1	Ableitung aus der Lösung für kugelförmige Prüfkörper . . . . .	57
6.1.2	Auswertung mit der Lösung für den zylindrischen Stempel . . . . .	58
6.1.3	Betrachtung der bekannten Methoden . . . . .	59
6.2	Berücksichtigung der plastischen Vorgeschichte . . . . .	63
6.2.1	Belastungskurve und plastische Materialeigenschaften . . . . .	63
6.2.2	Entlastungskurve und plastische Vorgeschichte . . . . .	66
6.2.3	Die $L_t$ -Methode . . . . .	69
6.2.4	Verformung von Prüfkörper und Maschine . . . . .	74
6.3	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>83</b>

# Symbole und Operatoren

## Symbole

$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$a$	Kontaktradius
$A$	Kontaktfläche
$b, c$	Materialparameter für nichtlineare kinematische Verfestigung
$c_r, c_t$	Faktor zur Berücksichtigung der plastischen Deformation nach dem $P_u^{(t)}$ - bzw. dem $P_u^{(r)}$ -Ansatz
$C$	Probennachgiebigkeit zu Beginn der Entlastung
$C_i$	Prüfkörpernachgiebigkeit
$C_m$	Maschinennachgiebigkeit
$E$	Elastizitätsmodul der Probe
$E_i$	Elastizitätsmodul des Prüfkörpers
$E_r$	reduzierter Modul
$E_T$	Tangentenmodul
$\mathbf{E}$	linearisierter Green'scher Verzerrungstensor
$F$	Überspannung
$G$	Schubmodul
$h$	Eindrucktiefe
$\dot{h}$	Eindruckgeschwindigkeit
$h_r$	bleibende Eindrucktiefe nach Entlastung
$h_t$	maximale Eindrucktiefe nach Belastung
$I_i$	Eindrucktiefenintervall
$k$	isotrope Verfestigung
$n$	Potenz der Überspannung bei Viskoplastizität
$n$	Verfestigungsexponent

$P$	Last
$P_t$	maximale Last
$P_m$	mittlerer Druck in der Kontaktfläche
$\Delta P$	Öffnung der Schleifenfläche
$r$	Rückverformung
$r_i, r_k$	Rückverformung bei rein isotroper bzw. rein kinematischer Verfestigung
$\Delta r$	plastische Rückverformung
$R$	Radius des Prüfkörpers
$R_1$	Radius der plastisch deformierten, entlasteten Oberfläche
$R'$	relativer Radius zwischen Prüfkörper und Oberfläche
$s$	akkumulierte plastische Bogenlänge
$S$	Entlastungssteife der Probe
$t$	Zeit
$\mathbf{T}$	Cauchy-Spannungstensor
$W$	Arbeit des Lastzyklus
$z_i$	Parameter zur Beschreibung der Belastungskurve im Intervall $I_i$
$\beta, \gamma$	Materialparameter für nichtlineare isotrope Verfestigung
$\Gamma_i$	Parameter zur Beschreibung der Belastungskurve im Intervall $I_i$
$\delta = h - h_r$	Eindrucktiefe bezüglich des verbleibenden Eindrucks
$\delta_t = h_t - h_r$	maximale Eindrucktiefe bezüglich des verbleibenden Eindrucks
$\varepsilon$	Dehnung
$\varepsilon_r$	repräsentative Dehnung des Eindrucks
$\eta$	Viskosität
$\lambda$	Kompressionsmodul
$\mu$	Reibkoeffizient
$\nu$	Querkontraktionszahl der Probe
$\nu_i$	Querkontraktionszahl des Prüfkörpers
$\xi$	Tensor der kinematischen Verfestigung
$\sigma$	Spannung
$\sigma_r$	repräsentative Spannung des Eindrucks
$\sigma_y$	Fließspannung

## Dimensionslose Größen

$$a^* = \frac{a}{R}$$

$$E_T^* = \frac{E_T}{E}$$

$$h^* = \frac{h}{R}$$

$$P^* = \frac{P}{ER^2}$$

$$\Delta P^* = \frac{\Delta P}{P_t}$$

$$r = \frac{h_t - h_r}{h_t}$$

$$W^* = \frac{W}{P_t(h_t - h_r)}$$

$$\Gamma_i^* = \frac{\Gamma_i}{E_r R^2}$$

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\eta^* = \frac{\eta \dot{h}}{E^n R}$$

## Operatoren

$tr \mathbf{A}$	Spur des Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} tr \mathbf{A}$	Deviator des Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Transponierte von $\mathbf{A}$
$\dot{\mathbf{A}}$	Materielle Zeitableitung von $\mathbf{A}$
$\mathbf{AB}$	Multiplikative Verknüpfung zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = tr \mathbf{AB}^T$	Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe
$\langle F \rangle$	$\langle F \rangle = 0$ wenn $F \leq 0$ , $\langle F \rangle = F$ wenn $F > 0$

# 1 Einleitung

Die Kenntnis von mechanischen Werkstoffeigenschaften ist zur Auslegung von Bauteilen eine notwendige Voraussetzung. Im konventionellen Maschinenbau werden die mechanischen Eigenschaften mit einachsigen Versuchen bestimmt. Aufgrund der homogenen Verformung des Probenmaterials kann die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie auf einfache Weise aus der gemessenen Kraft und der Längenänderung im Gleichmaßbereich ermittelt werden. Diese wiederum bildet die Grundlage für die Modellbildung und für die Bestimmung der im Modell enthaltenen Materialparameter.

Eine weitere Möglichkeit der mechanischen Charakterisierung stellt die Härteprüfung dar, die im klassischen Maschinenbau weit verbreitet ist. Härte ist keine mechanische Größe, die zur Dimensionierung von Bauteilen herangezogen werden kann. Sie eignet sich lediglich zum qualitativen Vergleich. Der entscheidende Vorteil liegt in der nahezu zerstörungsfreien Prüftechnik unter Vermeidung einer aufwendigen Probenpräparation, womit die Härteprüfung z.B. zur schnellen Qualitätskontrolle im Wareneingang oder in der Produktion eingesetzt werden kann.

Eine Weiterentwicklung der Härtemessung ist der Eindruckversuch. Insbesondere Tabor [44] gebührt besondere Anerkennung aufgrund seiner richtungsweisenden Experimente und deren Korrelation mit Spannungs-Dehnungs-Kennlinien.

Bei modernen Eindruckexperimenten werden mittels registrierender Meßverfahren kontinuierlich Kraft und Eindringtiefe des Prüfkörpers gemessen. Die Form des Prüfkörpers entspricht meist einer der bei gewöhnlichen Härteprüfverfahren verwendeten Geometrien. Die gebräuchlichsten sind die dreiseitige Pyramide (Berkovich), die vierseitige Pyramide (Vickers) oder die Kugel (Brinell oder Rockwell).

Bei der Last-Eindringtiefe-Kurve wird entsprechend dem Prozeß in Belastungs- und Entlastungskurve unterschieden. Finden inelastische Deformationen statt, unterscheiden sich die Bahnen der beiden Kurven auf eine für den betreffenden Werkstoff typische Weise. Auf diese Weise kann unter Verwendung der Last-Eindringtiefe-Kurve ein Werkstoff charakterisiert werden.

In den letzten Jahren hat sich eine neue Disziplin des Maschinenbaus mit dem Ziel der Miniaturisierung mechanischer Komponenten, die „Mikrostrukturtechnik“, entwickelt. Aus dieser neuen Richtung erwachsen ständig neue Anwendungsmöglichkeiten für die Durchführung von Eindruckversuchen, da konventionelle Prüftechniken infolge des Pro-

benmaterials, das kleinste Abmessungen besitzt, nicht mehr zur Anwendung kommen können. Entsprechend den neuen Abmessungsverhältnissen resultieren geringste Eindrucktiefen des Prüfkörpers, die eine Auflösung der Meßgeräte bis zu einigen  $10^{-6} \text{ mm}$  und  $10^{-6} \text{ N}$  erforderlich machen. Neben der Messung von Mikrohärtigkeit und elastischen sowie inelastischen Eigenschaften werden auch Untersuchungen zur Haftfestigkeit von Schichten und bruchmechanischen Eigenschaften von Keramikschichten durch den registrierenden Eindruckversuch ermöglicht.

Die Zusammenhänge zwischen den Materialeigenschaften und der Systemantwort des Eindruckversuchs sind bisher nur bruchstückhaft bekannt. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist es, einen tiefergehenden Einblick in diese Zusammenhänge zu gewinnen. Hierbei sollen sowohl Effekte, die aus der Wahl eines bestimmten Materialmodells resultieren, als auch Auswirkungen der darin vorkommenden Parameter betrachtet werden.

Ein Schwerpunkt in dieser Arbeit bildet die Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Im Gegensatz zu bestehenden Methoden, die hierfür lediglich die Entlastung heranziehen, werden Daten der Belastungskurve und der Entlastungskurve verwendet. Dadurch ist eine umfassende Berücksichtigung der Vorgeschichte möglich. Diese Vorgehensweise stützt sich auf Finite-Elemente-Simulationen, mit denen die Beziehungen zwischen den Materialparametern und der Form der Be- und Entlastungskurve ermittelt werden.

Bei der Entwicklung der Methoden wurde der Realisierbarkeit der Messung besonderes Augenmerk geschenkt. So wurde darauf verzichtet, Ergebnisse aus den FE-Simulationen zu verwenden, die bei Mikro-Eindrücken nicht oder nur mit großem Aufwand gemessen werden können, wenngleich deren Kenntnis von großem Wert wäre. Dazu zählen z.B. der bleibende Radius des Eindrucks, der Kontaktradius oder die Aufwölbung des Materials um den Eindruck herum.

Um Mißverständnissen vorzubeugen sei hier erwähnt, daß diese Arbeit nicht von Mikro- oder gar Nano-Skalen geprägt ist. Vordergründiges Ziel ist die Entwicklung und Verifikation von Methoden zur Ermittlung mechanischer Werkstoffeigenschaften anhand des Eindruckversuches, was nur auf der Basis von kontinuumsmechanisch gültigen Berechnungen und Experimenten möglich ist. Das hierbei vorausgesetzte homogene und isotrope Werkstoffverhalten läßt sich in Experimenten nur im Makromaßstab, d.h. mit Abmessungen in der Größenordnung von einem Millimeter verwirklichen. Durch die Formulierung der Auswertalgorithmen in dimensionsloser Form ist eine Übertragung auf beliebige Größenordnungen ohne Änderungen möglich. Eine Verletzung der Voraussetzungen ab einer bestimmten Abmessung ist dabei vom Zustand des Probenmaterials abhängig.

## 2 Grundgedanken zum Eindruckversuch

### 2.1 Das Prinzip des Eindruckversuchs

Der Eindruckversuch als Weiterentwicklung der Härtemessung unterscheidet sich in der Versuchsdurchführung zunächst nicht. Während der Belastung wird ein harter Prüfkörper in das weichere, zu prüfende Material gepreßt und anschließend wieder entlastet (siehe Bild 2.1a).

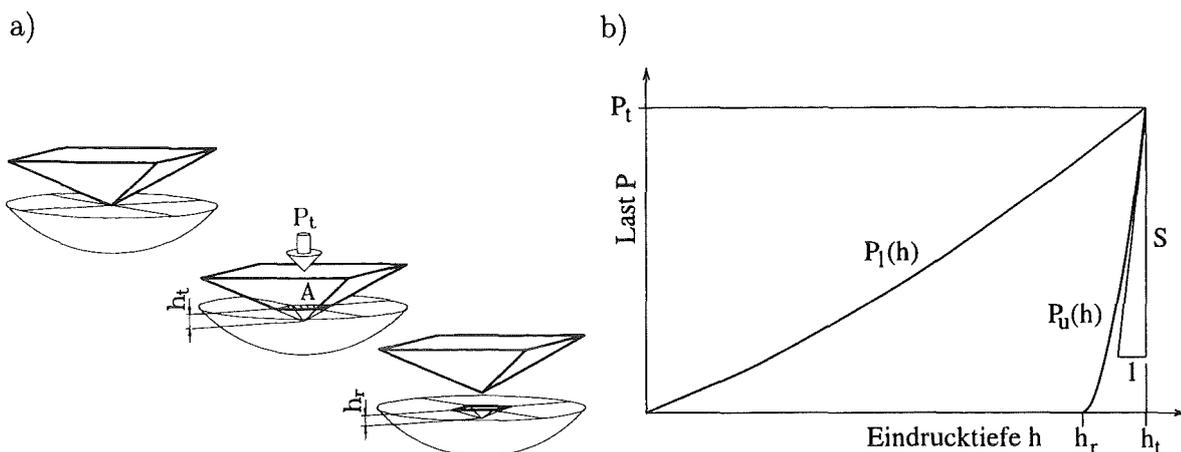


Abbildung 2.1: Prinzip des Eindruckversuchs: a) Skizze von Probe und Prüfkörper mit Eindringtiefe  $h_t$ , Last  $P_t$  und Kontaktfläche  $A_t$  sowie der verbleibenden Eindringtiefe  $h_r$ ; b) Skizze einer typischen Last-Eindringtiefe-Kurve mit Belastungspfad  $P_l(h)$  und Entlastungspfad  $P_u(h)$ : maximale Last  $P_t$ , totale Eindringtiefe  $h_t$ , verbleibende Eindringtiefe  $h_r$  und Entlastungssteife  $S$ .

Zur Auswertung wird von den Meßdaten der Last  $P$  und der Eindringtiefe  $h$  ausgegangen, wobei in der Regel  $P$  über  $h$  in einem Last-Eindringtiefe-Diagramm ( $P$ - $h$ -Diagramm) aufgetragen wird (siehe z.B. Bild 2.1b und [31]). Dieser Graph zeigt entsprechend dem Prozeßverlauf die für den Werkstoff charakteristische Be- und Entlastungskurve. Liegt z.B. ein elastisches Materialverhalten in Kombination mit reibungsfreiem Kontakt zwischen Probe und Prüfkörper vor, so sind beide Kurven, abgesehen von der Bewegungsrichtung, identisch. Für das Probenmaterial bedeutet dies, daß nach dem

Experiment keine zurückbleibenden Verformungen und Eigenspannungen im Werkstoff vorhanden sind. Die Geometrie entspricht exakt derjenigen zu Beginn des Versuches.

Bei inelastischem Materialverhalten finden irreversible Prozesse statt, so daß Be- und Entlastungspfad voneinander abweichen. Wird die maximale Last vor Beginn der Entlastung eine gewisse Zeit konstant gehalten, zeigt ein Zunehmen der Eindringtiefe mit der Zeit, daß es sich um einen Werkstoff handelt, der geschwindigkeitsabhängige Eigenschaften besitzt.

Der  $P$ - $h$ -Kurvenverlauf gibt also Aufschluß darüber, ob ein Werkstoff mit dem Materialmodell der Elastizität, der Plastizität oder der Viskoplastizität beschrieben werden kann (siehe Kap. 3.1).

Der Last-Eindringtiefe-Pfad in Bild 2.1b entspricht z.B. einem Werkstoff, der mit dem Materialgesetz der Plastizität beschrieben werden kann. In diesem Fall gibt es bei einer konstant gehaltenen maximalen Last  $P_t$  keine Änderung der Eindringtiefe und die Entlastungskurve endet bei einer verbleibenden Eindringtiefe  $h(P = 0) = h_r$ . Der Werkstoff hat sich also bleibend deformiert.

Zusätzlich zur Klassifizierung eines Werkstoffes ist es notwendig, die Parameter des gewählten Materialmodells zu bestimmen. Erst dann ist es möglich, z.B. durch numerische Simulation, das Verhalten eines belasteten Bauteils unter Berücksichtigung des vorliegenden Materialverhaltens zu berechnen.

Zur Bestimmung der Materialparameter anhand einachsiger Experimente werden in der Regel Optimierungsverfahren, wie z.B. das Gradientenverfahren, angewandt (siehe z.B. [41]). Hierfür muß bei jedem Optimierungsschritt die gesamte Belastungsgeschichte erneut mit Hilfe eines Integrationsverfahrens mehrfach berechnet werden.

Im Fall des Eindruckversuchs wären hierfür Finite-Elemente-Simulationen notwendig, da aufgrund der inhomogenen Deformation die alleinige numerische Integration der Materialgleichungen nicht ausreichend ist.

Eine andere Möglichkeit ist die Entwicklung von Methoden, mit denen unter der Annahme eines bestimmten Materialmodells die Systemantwort des Eindruckversuchs direkt auf die im Modell vorkommenden Materialparameter zurückgeführt werden kann.

Zur Entwicklung einer leistungsfähigen Methode sollten die Meßdaten möglichst vielfältige Informationen über das Materialverhalten beinhalten. Hier bietet der Eindruckversuch als registrierendes Meßverfahren den entscheidenden Vorteil gegenüber der gewöhnlichen Härtemessung. Die zusätzliche Information im  $P$ - $h$ -Kurvenverlauf kann z.B. durch Modelle, die auf analytische Lösungen aus der Elastizitätstheorie aufbauen, zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei inelastischem Werkstoffverhalten genutzt

werden. Als Arbeiten hierzu sind unter anderem [31, 37] für spitze und [11, 21, 39] für kugelförmige Prüfkörper zu nennen.

## 2.2 Prüfkörpergeometrie

Grundsätzlich ist die Geometrie des Prüfkörpers zunächst frei wählbar. Ergebnisse, die mit unterschiedlichen Prüfkörpergeometrien gewonnen werden, können unter Umständen nicht ineinander umgerechnet werden.

Die am meisten verwendeten Prüfkörperformen sind Kegel, vierseitige Pyramide (Vickers-Pyramide), dreiseitige Pyramide (Berkovich-Pyramide) und die Kugel. Die ersten drei Geometrien sind spitze Prüfkörper und zeichnen sich durch die Unabhängigkeit des Ergebnisses von der Eindringtiefe aus. Ursache hierfür ist, daß der Prüfkörper durch keine charakteristische Länge, sondern lediglich einen bereits dimensionslosen Winkel vollständig definiert wird. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeit von Atkins & Tabor [2] hingewiesen. Atkins & Tabor kommen zu dem Erkenntnis, daß jedem Winkel eine charakteristische Dehnung (nicht zu verwechseln mit tatsächlicher lokaler Dehnung) zugeordnet werden kann. Diese charakteristische Dehnung ist eine Größe, die entsprechend dem globalen Deformationszustand bei geometrischer Ähnlichkeit einen konstanten Wert annimmt. Ein Standard-Vickers-Prüfkörper mit einem Winkel von  $136^\circ$  erzeugt somit eine charakteristische Dehnung von etwa 11%, unabhängig von der aufgetragenen Last bzw. Eindringtiefe.

Wie in Kap. 5.1 noch genauer erläutert wird, ändert sich die charakteristische Dehnung bei kugelförmigen Prüfkörpern mit der Eindringtiefe. Dies folgt aus der sich stetig verändernden Geometrie des Kontaktgebietes. Folglich kann das Spektrum der inelastischen Eigenschaften kontinuierlich im Last-Eindringtiefe-Verlauf erfaßt werden. Anhand dieser Überlegung wird in der vorliegenden Arbeit die Kugel als Prüfkörpergeometrie zugrundegelegt. Bild 2.2 zeigt die entsprechenden geometrischen Verhältnisse am Ende der Be- und Entlastungsphase.

## 2.3 Methodik der Dimensionsanalyse

Die Wahl des kugelförmigen Prüfkörpers führt unmittelbar auf die charakteristische Länge in Form des Radius  $R$ , welche zur Beschreibung der geometrischen Verhältnisse herangezogen werden muß. Um einen ersten Einblick in die mechanischen Zusammenhänge zu gewinnen, bietet sich die Dimensionsanalyse an. Hierbei wird grundsätz-

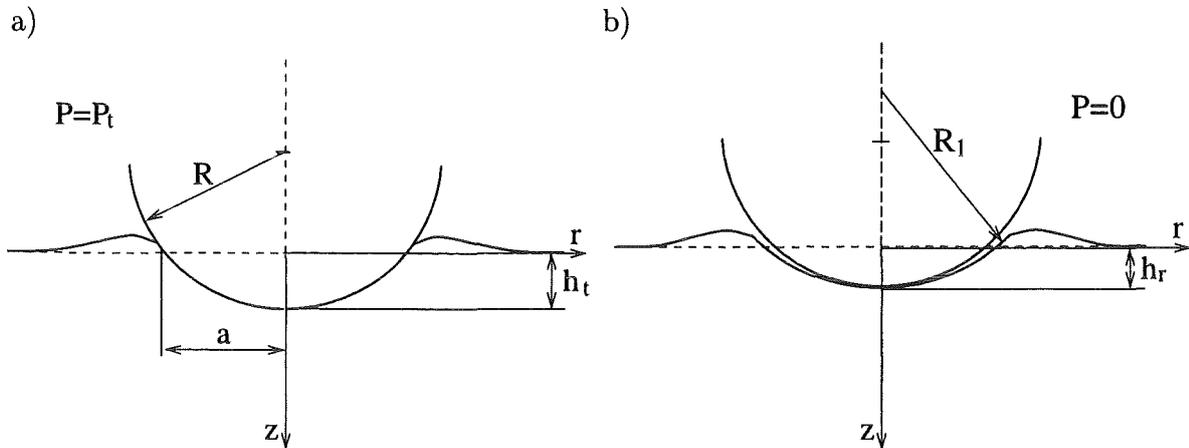


Abbildung 2.2: Geometrie des Eindrucksversuchs mit kugelförmigem Prüfkörper (Kugelradius  $R$ ): a) Maximale Last ( $P = P_t$ ,  $h = h_t$ ): Kontakttradius  $a$ ; b) Nach Entlastung ( $P = 0$ ,  $h = h_r$ ): Radius des bleibenden Eindrucks  $R_1$ .

lich zwischen abhängigen und unabhängigen Größen unterschieden. Die unabhängigen Größen bestehen im vorliegenden Fall aus Material- und Prozeßgrößen.

Unter der Annahme, der Prozeß sei weggesteuert, sind die unabhängigen Prozeßgrößen gegeben durch die Eindringtiefe  $h$ , den Kugelradius  $R$  und die Eindringgeschwindigkeit  $\dot{h}$ .

Der Einfluß der elastischen Eigenschaften des Prüfkörpers, welche zu den Materialgrößen zählen, wird an dieser Stelle als vernachlässigbar angenommen. Die mechanischen Eigenschaften des Probenmaterials seien in Form eines Satzes von Differentialgleichungen gegeben. Es wird angenommen, daß diese den zu untersuchenden Werkstoff in seinem phänomenologischen Verhalten durch eine geeignete Wahl der darin enthaltenen Materialparameter  $q_i$ ,  $i = 1..N$  hinreichend gut beschreiben können. Somit sind die unabhängigen Materialgrößen durch die Materialparameter  $q_i$  gegeben.

Die Zahl der abhängigen Größen, mit  $\mathcal{A}_j$  bezeichnet, ist unbestimmt und deren Abhängigkeit von den unabhängigen Größen ist zunächst ein Funktional der Vorgeschichte. Als relevante Beispiele sind der Kontakttradius  $a$ , die verbleibende Eindringtiefe  $h_r$ , die maximale Last  $P_t$ , die Entlastungssteife  $S$  oder der verbleibende Radius des Eindruckes  $R_1$  zu nennen. Ebenso könnte  $\mathcal{A}_j$  das gesamte Spannungsfeld beinhalten. Für unsere Zwecke sind jedoch nur diejenigen Größen von Bedeutung, die während des Experimentes meßbar sind.

Handelt es sich um einen Prozeß mit  $|\dot{h}| = \text{const}$ , bestehend aus einer Belastung von  $h = 0$  bis  $h = h_t$  und einer anschließenden Entlastung von  $h = h_t$  bis  $h = h_r$  (siehe Bild 2.1b), so ist jede abhängige Größe  $\mathcal{A}_j$  bei einem definierten Zeitpunkt als Funktion der unabhängigen Größen gegeben durch

$$\mathcal{A}_j = \hat{\mathcal{A}}_j(h_t, R, |\dot{h}|, q_1, \dots, q_N) . \quad (2.1)$$

Für die weiteren Überlegungen wird angenommen, daß der Werkstoff homogen und isotrop sei und im allgemeinsten Fall viskoplastisches Materialverhalten aufweist. Temperaturänderungen werden damit nicht betrachtet und der Werkstoff wird zu jeder Zeit als isotherm angenommen. In Anbetracht der im Realfall geringen Prozeßgeschwindigkeiten bleiben Trägheitskräfte unberücksichtigt.

Zunächst soll die Dimensionsanalyse für elastisches Materialverhalten ( $N = 2$ ) durchgeführt werden. Die Parameter  $q_1, q_2$  werden durch den Elastizitätsmodul  $E$  bzw. die Querkontraktionszahl  $\nu$  ersetzt. Aufgrund der Geschwindigkeitsunabhängigkeit bei elastischem Materialverhalten entfällt die Abhängigkeit von  $\dot{h}$ . Die Dimension jeder Größe wird in der Dimensionsmatrix (siehe Tab. 2.1) übersichtlich dargestellt. Die eingetragenen Zahlen stellen die Potenz dar, mit der die jeweilige SI-Einheit in die Dimension eingeht.

Die Bestimmung des Rangs der Dimensionsmatrix erfolgt durch das Auffinden der größten Unterdeterminante, deren Wert nicht null ist. Deren Dimension gibt den Rang  $r$  der Matrix an, in unserem Falle  $r = 2$  (siehe Tab 2.1). Damit läßt sich der Zusammenhang von  $m$  dimensionsbehafteten Größen auf  $m - r$  dimensionslose Größen reduzieren [48]. Für

$$P_t = \hat{P}_t(h_t, R, E, \nu) \quad (2.2)$$

mit fünf Größen ergibt sich

$$\frac{P_t}{ER^2} = \hat{P}_t^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu \right) \quad (2.3)$$

SI-Einheit	$P_t$	$h_t$	$R$	$E$	$\nu$
$[m]$	0	1	1	-2	0
$[N]$	1	0	0	1	0
$[s]$	0	0	0	0	0

Tabelle 2.1: Dimensionsmatrix für den kugelförmigen Eindruck im Falle eines Materialmodells der Elastizität.

mit drei Größen oder mit  $P_t^* = P_t/ER^2$  und  $h_t^* = h_t/R$  auch

$$P_t^* = \hat{P}_t^*(h_t^*, \nu) , \quad (2.4)$$

wobei die korrespondierenden dimensionslosen Größen mit \* bezeichnet werden.

Bei Betrachtung von (2.2) und (2.4) ist zu erkennen, daß die Anzahl der zu variierenden Parameter für Messungen oder Simulationen um zwei reduziert wurde. Zusätzlich ergibt sich ein erster Einblick in den mechanischen Zusammenhang:

- Für geometrisch ähnliche Eindrücke mit verschiedenen Kugeln in den gleichen Werkstoff, also bei gleichbleibendem Verhältnis von Eindringtiefe zu Kugelradius  $h_t^*$ , ist die Last  $P_t$  proportional zu  $R^2$ .
- Werden Eindrücke gleicher Tiefe  $h^*$  mit verschiedenen elastischen Werkstoffen durchgeführt, so ändert sich die Last linear mit dem E-Modul.

### 3 Zur Lösung des Randwertproblems

Die analytische Lösbarkeit von Kontaktproblemen beschränkt sich auf Kombinationen zweier elastischer Körper [16] oder solche, bei denen ein starrer Körper mit einem elastischen Körper in Kontakt gebracht wird (starr-elastisch) [13, 32]. Für die zweite Kategorie beschränken sich die Lösungen auf zweidimensionale Fälle, wodurch nur axialsymmetrische Eindruckkörper (Kegel, Kugel, flacher Stempel) oder in einer Richtung unendlich ausgedehnte Eindruckkörper (Schneide, Zylinder) betrachtet werden können. Eine zusammenfassende Darstellung technisch relevanter Lösungen von Kontaktproblemen bietet das Buch von Johnson [23].

Allen bekannten Lösungen ist gemeinsam, daß sie gültig sind solange kleine Deformationen vorliegen, d.h. es dürfen nur kleine Verzerrungen und kleine Rotationen auftreten. Der Anwendungsbereich ist somit speziell bei spitzen Prüfkörpern, z.B. Kegeln, auf große Spitzenwinkel beschränkt. Für die Geometrie des flachen Stempels und der Kugel ist der Gültigkeitsbereich durch die im wesentlichen horizontale Tangente im Kontaktbereich deutlich größer. Für die Anwendung auf experimentelle Eindruckversuche können die analytischen Lösungen nur übernommen werden, solange keine plastischen Deformationen auftreten. Dies trifft z.B. auf gummiartige Werkstoffe oder auf Keramiken bis zum Einsetzen ersten Rißfortschritts zu.

Für die Anwendung auf metallische Werkstoffe oder Polymere, die keinen oder nur einen kleinen elastischen Bereich bei Eindruckversuchen aufweisen, stellen die inelastischen Materialeigenschaften zusätzliche Einflußgrößen dar; die Systemantwort ist abhängig von der gesamten Vorgeschichte. In diesem Fall führen ausschließlich numerische Methoden zu einer Lösung. Erste numerische Lösungen des Eindruckproblems sind für idealplastisches Materialverhalten mit der Anwendung von Gleitlinienverfahren gewonnen worden (siehe dazu die Literatur, die in [23], Kap.6 zitiert ist).

Mit Hilfe moderner Rechner hat sich die Finite-Elemente-Methode in den letzten Jahren zu dem vielseitigsten und leistungsfähigsten numerischen Werkzeug auf dem Gebiet der strukturmechanischen Berechnung entwickelt. In diesem Zusammenhang wurden auch zur Berechnung des Eindruckproblems im letzten Jahrzehnt eine große Zahl von Arbeiten veröffentlicht, in denen die verschiedensten Materialmodelle und Geometrien im Hinblick auf Spannungs- und Verschiebungsfelder studiert worden sind, z.B. [19, 25, 26, 27, 43]. Andere Arbeiten befassen sich mit der Ermittlung von Materialeigenschaften anhand

des Eindruckversuchs, wie z.B. Härte oder Elastizitätsmodul, in Verbindung mit FEM-Analysen [4, 5, 29, 30].

Für die vorliegende Arbeit wird die FEM als Mittel zur Klärung der Zusammenhänge zwischen Materialeigenschaften und Antwort des Eindruckversuchs in Form der  $P$ - $h$ -Kurve verwendet. Auf die Darstellung von Deformations- und Spannungsfeldern wird weitgehend verzichtet, es sei denn, deren Ansicht trägt zum Verständnis bei.

## 3.1 Materialmodelle

Innerhalb eines Finite-Elemente-Programms ist es notwendig, das Materialverhalten in Form eines Materialmodells zu definieren. Hierfür stellt das verwendete FE-Programm *ABAQUS* Routinen zur Verfügung, in denen die Integration der Materialgleichungen durchgeführt wird. Wird ein nicht standardmäßig implementiertes Materialmodell benötigt, muß dieses in einer Benutzerroutine UMAT definiert werden [17, 18].

### 3.1.1 Viskoplastizität

Das in dieser Arbeit u.a. verwendete Materialmodell von Chaboche, formuliert für große Deformationen (siehe Kap. 3.4), steht in Form einer solchen UMAT-Routine zur Verfügung [22].

Zur übersichtlicheren Darstellung werden die Gleichungen unter der Voraussetzung kleiner Deformationen erläutert (siehe auch [46]), da die Bedeutung der Materialparameter im wesentlichen erhalten bleibt. In diesem Fall besteht das Modell von Chaboche aus einer additiven Zerlegung des Verzerrungstensors in seinen elastischen und inelastischen Anteil

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_e + \dot{\mathbf{E}}_i, \quad (3.1)$$

einem Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}_e + \lambda(\text{tr}\mathbf{E}_e)\mathbf{1} \quad (3.2)$$

und einer Überspannung

$$F(t) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D} - k. \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{A}^D$  den deviatorischen Anteil des Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{A}$ . Ist die Überspannung  $\leq 0$ , so liegt eine rein elastische Verformung vor. Für Werte  $F > 0$  werden

die Evolutionsgleichungen für die inelastische Verzerrung

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \frac{\langle F \rangle^n}{\eta} \frac{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}}, \quad (3.4)$$

die kinematische Verfestigung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = c\dot{\mathbf{E}}_i - b\dot{s}\boldsymbol{\xi} \quad (3.5)$$

und die isotrope Verfestigung

$$\dot{k} = \beta(\gamma - k)\dot{s} \quad (3.6)$$

zur Berechnung der plastischen Deformation integriert.

Die zeitliche Ableitung der plastischen Bogenlänge ist hierbei definiert mit

$$\dot{s} := \|\dot{\mathbf{E}}_i\|_D = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\mathbf{E}}_i \cdot \dot{\mathbf{E}}_i)}. \quad (3.7)$$

Die im Materialmodell vorkommenden Materialparameter der Elastizität, Schubmodul  $G$  und Kompressionsmodul  $\lambda$ , lassen sich aus dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl berechnen nach

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

und

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

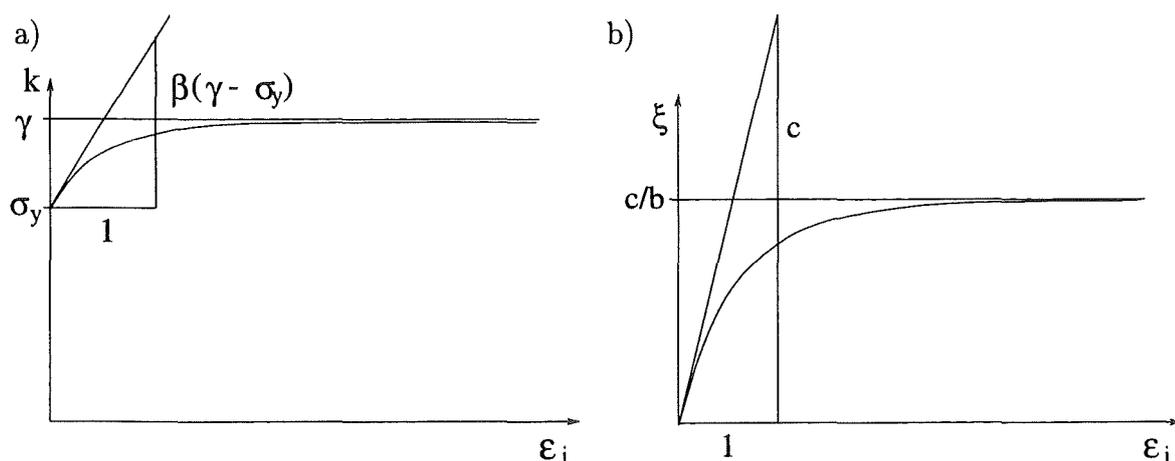


Abbildung 3.1: Evolution der Verfestigung bei monoton anwachsender inelastischer Dehnung  $\varepsilon_i := (l_i - l_0)/l_0$ : a) isotrope Verfestigung; b) kinematische Verfestigung.

Zur Zeit  $t = 0$  nimmt die isotrope Verfestigung den Wert  $k(t = 0) = \sigma_y$  und die kinematische Verfestigung den Wert  $\xi(t = 0) = \mathbf{0}$  an. Die Parameter  $\beta, \gamma, b, c$  bestimmen den Zuwachs der Verfestigung und deren obere Schranke (siehe Abb. 3.1).

Die Viskosität  $\eta$  und der Parameter  $n$  dienen der Beschreibung geschwindigkeitsabhängiger Effekte. Nach (3.4) bewirkt eine Erhöhung von  $\eta$  oder eine Verringerung von  $n$  einen zunehmenden Einfluß der Verformungsgeschwindigkeit.

Tabelle 3.1 zeigt die Dimensionsmatrix für den Eindruckversuch mit viskoplastischem Materialverhalten, die einen Rang  $r = 3$  besitzt. Damit läßt sich der Zusammenhang von 13 dimensionsbehafteten Größen auf  $13 - 3 = 10$  dimensionslose Größen reduzieren, z.B. in der Form

$$\frac{P_t}{ER^2} = P_{t,vp}^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu, \frac{\eta \dot{h}}{E^n R}, n, \frac{\sigma_y}{E}, \frac{\beta(\gamma - \sigma_y)}{E}, \frac{\gamma - \sigma_y}{\sigma_y}, \frac{c}{E}, \frac{c}{b\sigma_y} \right). \quad (3.8)$$

SI-Einheit	$P_t$	$h_t$	$\dot{h}$	$R$	$E$	$\nu$	$\eta$	$n$	$\sigma_y$	$\beta$	$\gamma$	$c$	$b$
[m]	0	1	1	1	-2	0	$-2n$	0	-2	0	-2	-2	0
[N]	1	0	0	0	1	0	$n$	0	1	0	1	1	0
[s]	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Tabelle 3.1: Dimensionsmatrix für den kugelförmigen Eindruck im Falle eines Materialmodells der Viskoplastizität.

### 3.1.2 Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung

Sollen keine geschwindigkeitsabhängigen Effekte eingehen, so wird ein Materialmodell der Plastizität gewählt (siehe dazu [45], Kap. 2). Dieses enthält per Definition keine Überspannung. Der Spannungstensor befindet sich zu jedem Zeitpunkt einer plastischen Belastung, d.h. wenn

$$F = 0 \quad \& \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \right)_{s,\xi,k=konst} > 0, \quad (3.9)$$

auf der Fließfläche. Im Modell wird dies durch Einführung der Konsistenzbedingung

$$\dot{F}(t) = 0 \quad (3.10)$$

erreicht. Die Bedingung  $F = 0$  ergibt sich z.B. auch aus (3.4) mit der Wahl von  $\eta = 0$  als Zusatzbedingung. Gleichung (3.4) wird in diesem Fall durch

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \begin{cases} \dot{s} \frac{3(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{2k} & \text{für Belastung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.11)$$

ersetzt, wodurch die Geschwindigkeitsunabhängigkeit des gesamten Gleichungssystems hergestellt wird.

Damit entfallen  $\dot{h}$ ,  $\eta$  und  $n$  in der Dimensionsmatrix (Tab. 3.2), die für die verbleibenden zehn Größen einen Rang  $r = 2$  besitzt. Die Abhängigkeit von  $P_t^*$  kann daher von

$$\frac{P_t}{ER^2} = P_{t,vp}^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu, 0, 1, \frac{\sigma_y}{E}, \frac{\beta(\gamma - \sigma_y)}{E}, \frac{\gamma - \sigma_y}{\sigma_y}, \frac{c}{E}, \frac{c}{b\sigma_y} \right) \quad (3.12)$$

in die Form

$$\frac{P_t}{ER^2} = P_{t,pnl}^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu, \frac{\sigma_y}{E}, \frac{\beta(\gamma - \sigma_y)}{E}, \frac{\gamma - \sigma_y}{\sigma_y}, \frac{c}{E}, \frac{c}{b\sigma_y} \right) \quad (3.13)$$

gebracht werden.

SI-Einheit	$P_t$	$h_t$	$R$	$E$	$\nu$	$\sigma_y$	$\beta$	$\gamma$	$c$	$b$
[m]	0	1	1	-2	0	-2	0	-2	-2	0
[N]	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
[s]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 3.2: Dimensionsmatrix für den kugelförmigen Eindruck im Falle eines Materialmodells der Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung.

### 3.1.3 Plastizität mit linearer Verfestigung

Einen weiteren Sonderfall stellt die Plastizität mit linearer Verfestigung dar. Mathematisch wird dies erreicht für den isotropen Verfestigungsanteil mit

$$\beta \rightarrow 0, \quad \beta\gamma \rightarrow konst = \left( \frac{1}{E_{T,i}} - \frac{1}{E} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

und für den kinematischen Verfestigungsanteil durch

$$b = 0, \quad c = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{E_{T,k}} - \frac{1}{E} \right)^{-1}, \quad (3.15)$$

wobei der Faktor  $2/3$  aus dem Anschluß der dreidimensionalen an die eindimensionalen Gleichungen resultiert. Der Tangentenmodul  $E_{T,i}$  bzw.  $E_{T,k}$  ist im Fall kleiner Deformationen gegeben durch die Steigung der jeweiligen Verfestigungskennlinie im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm, wobei sich der resultierende Tangentenmodul  $E_T$  berechnet nach

$$E_T = E / \left\{ 1 + \frac{\left(1 - \frac{E_{T,i}}{E}\right) \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E}\right)}{\left(1 - \frac{E_{T,i}}{E}\right) \frac{E_{T,k}}{E} + \left(1 - \frac{E_{T,k}}{E}\right) \frac{E_{T,i}}{E}} \right\}.$$

Damit folgt aus (3.13)

$$\frac{P_t}{ER^2} = P_{t,pl}^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu, \frac{\sigma_y}{E}, \frac{1}{\frac{E_{T,i}}{E} - 1} - \frac{\sigma_y}{E}, \infty, \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{E_{T,k}}{E} - 1}, \infty \right). \quad (3.16)$$

Aus der zugehörigen Dimensionsmatrix (siehe Tab 3.3) ergibt sich der Rang zu  $r = 2$ . Es reduziert sich demnach der Zusammenhang von zunächst acht dimensionsbehafteten Größen auf sechs dimensionslosen Größen in der Form

$$\frac{P_t}{ER^2} = P_{t,pl}^* \left( \frac{h_t}{R}, \nu, \frac{\sigma_y}{E}, \frac{E_{T,i}}{E}, \frac{E_{T,k}}{E} \right) \quad (3.17)$$

bzw. mit den zuvor eingeführten Definitionen für  $P_t^*$ ,  $h_t^*$  sowie  $\sigma_y^* = \sigma_y/E$ ,  $E_{T,i}^* = E_{T,i}/E$  und  $E_{T,k}^* = E_{T,k}/E$  zu

$$P_t^* = P_{t,pl}^* \left( h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_{T,i}^*, E_{T,k}^* \right). \quad (3.18)$$

SI-Einheit	$P_t$	$h_t$	$R$	$E$	$\nu$	$\sigma_y$	$E_{T,i}$	$E_{T,k}$
$[m]$	0	1	1	-2	0	-2	-2	-2
$[N]$	1	0	0	1	0	1	1	1
$[s]$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 3.3: Dimensionsmatrix für den kugelförmigen Eindruck im Falle eines Materialmodells der Plastizität mit linearer Verfestigung.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen betreffen speziell die Auswirkung der plastischen Materialeigenschaften auf die  $P$ - $h$ -Kurve, da sich viele Arbeiten auf Lösungen aus der Elastizitätstheorie und daraus aufgebaute Modelle stützen. Zur Begrenzung der Parameteranzahl wird die Querkontraktionszahl für alle Berechnungen mit einem für Metalle typischen Wert von  $\nu = 0.3$  angenommen.

## 3.2 Randbedingungen

### 3.2.1 Probenlagerung

Das Verhältnis der Proben- zu Eindruckabmessungen sollte so gewählt werden, daß die Probenränder keinen Einfluß auf das Ergebnis haben. Im Rahmen analytischer Berechnungen kann die Probe als halbunendlicher Raum formuliert werden. Für die FE-Studien stehen mit der verwendeten Version 4.9 des FE-Programms *ABAQUS* „Unendlich“-Elemente nicht zur Verfügung. Die zur Bestimmung eines möglichst kleinen Probenvolumens mit entsprechend geringer Elemente-Zahl durchgeführten Rechnungen zeigen, daß obige Bedingung für ein Verhältnis des Proben- zu Kugelradius von  $\geq 5$  genüge getan wird. Dieses Verhältnis wird von Storåkers & Larsson [43] bestätigt, die hervorragende Übereinstimmung der lokalen und globalen Größen bis zu einem Verhältnis des Proben- zu Kontaktradius von 5 für duktilen Materialverhalten feststellen konnten.

Für die Modellierung der axialsymmetrischen Geometrie reichen jeweils die rechte Symmetriehälfte von Probe und Kugel aus (siehe Abb. 3.2). Die Knoten der Symmetrieachse werden in radialer Richtung fixiert. Am unteren Rand der Probe sind die Knoten in vertikaler Richtung fixiert und in radialer Richtung frei beweglich. Die restlichen Knoten unterliegen keinen Einschränkungen in den Freiheitsgraden, solange sie sich nicht im Kontakt mit der Kugel befinden.

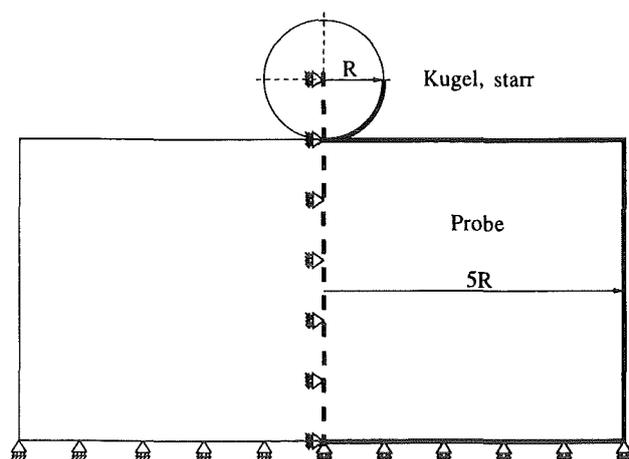


Abbildung 3.2: Randbedingungen für die FE-Simulation. Fett gezeichnete Linien markieren den Bereich der FE-Modellierung.

### 3.2.2 Modellierung des Prüfkörpers

Zur Modellierung des Prüfkörpers in *ABAQUS* (Vers.4.9) sind die Optionen *deformierbar* oder *starr* verfügbar. Der Kontaktalgorithmus für deformierbare Prüfkörper kann

von vornherein nur für kleine Gleitbewegungen (Kontakt zwischen *Inter-Elementen*) bzw. für große Gleitbewegungen (Kontakt zwischen *Slideline* und *Inter-Element*) ausgewählt werden. Im Fall eines starren Kontaktpartners (Kontakt zwischen *Rigid Surface* und *Inter-Element*) sind grundsätzlich große Gleitungen zugelassen. Zur detaillierten Beschreibung der mathematischen Formulierung solcher Kontaktprobleme für Finite-Elemente Programme siehe z.B. [20], Kap. 2 und die darin zitierte Literatur.

Aufgrund des hervorragenden Konvergenzverhaltens und damit geringen Rechenkosten des *Rigid Surface*-Typs sowie der Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit analytischen Lösungen wurde für die FE-Berechnungen die Paarung starrer Prüfkörper – deformierbare Probe gewählt. Die Möglichkeit, den Einfluß der Materialparameter des Prüfkörpers zu studieren, entfällt damit. Zur Auswertung experimenteller Meßdaten wird daher eine Prüfkörperkorrektur notwendig. Da solche Korrekturmethode jedoch bereits in der Literatur bekannt sind (siehe z.B. [39]), sollte dies keine einschränkende Bedeutung haben. Als weitere Option bei Kontaktproblemen bietet das Programm *ABAQUS* die Berücksichtigung Coulomb'scher Reibung mit dem Reibkoeffizienten  $\mu$  als Parameter. Die hierbei maximal aufbringbare Tangentialkraft an der betreffenden Kontaktstelle beträgt

$$F_t = \mu |\lambda_n| \operatorname{sgn}(\lambda_s), \quad (3.19)$$

wobei mit  $\lambda_n$  und  $\lambda_s$  die Kontaktkräfte in Normalen- und Tangentialrichtung auf der Kontaktfläche bezeichnet werden (siehe z.B. [24]). Dies bedeutet, daß Haft- und Gleitreibung im Betrag der Reibkraft nicht unterschieden werden können. Damit ist das Auftreten von „Stick-Slip“-Effekten, d.h. ein abwechselndes Haften und Gleiten bei monotoner Lastaufbringung, ausgeschlossen.

### 3.3 Diskretisierung der Probe

Bei Anwendung der Finite-Elemente-Methode ist es notwendig, die zu berechnenden Strukturen zu diskretisieren. Dadurch wird eine beliebig komplizierte Geometrie in Elemente zerlegt, die von einem Programm einheitlich verarbeitet werden können. Bei der Wahl der Elementgröße und Form ist zu berücksichtigen, ob im betreffenden Gebiet große Verzerrungen auftreten werden. Insbesondere bei plastischem Materialverhalten können ungeschickt diskretisierte Strukturen unangenehme Eigenschaften bezüglich Verformungs- oder Konvergenzverhalten zeigen. Ebenso spielt die Diskretisierung bei Kontaktproblemen eine bedeutende Rolle. An den Kontakträndern entstehen erhebliche Spannungsgradienten, welche nur durch eine genügend feine Elementierung genau

beschrieben werden können. Da beim Eindruckversuch der Kontaktradius während der Belastung ständig zunimmt, ist das gesamte Gebiet, das vom Kontaktrand überstrichen wird, entsprechend fein zu diskretisieren.

Eine Studie, bei der die Elemente solange verfeinert werden, bis die  $P$ - $h$ -Kurve einen von der Verfeinerung unabhängigen Verlauf aufweist, liefert die in Abb. 3.3 dargestellten Netze. Abb. 3.3a zeigt Netz A mit 282 achtknotigen axialsymmetrischen Elementen, während in Abb. 3.3b Netz B mit 726 vierknotigen axialsymmetrischen Elementen dargestellt ist. Die Höhe und der Radius von Netz A betragen jeweils  $25\text{ mm}$ . Die zugehörige Kugel besitzt einen Radius von  $R = 5\text{ mm}$ . Netz B, konzipiert als „Einheitsnetz“, hat eine Höhe und einen Radius von  $1\text{ mm}$ , wobei der Kugelradius  $0.2\text{ mm}$  beträgt. Beide Netze wurden unabhängig voneinander generiert.

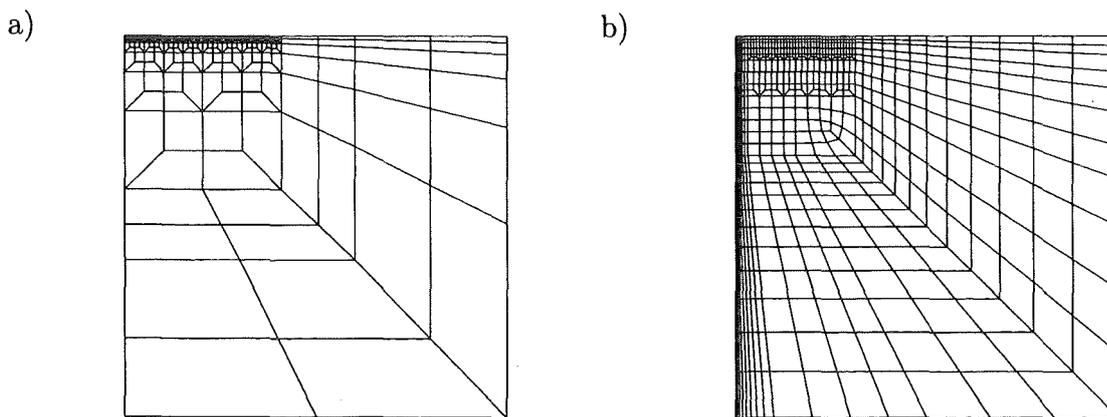


Abbildung 3.3: Modellierung der Probe durch Diskretisierung einer Symmetriehälfte mit axialsymmetrischen Elementen: a) Netz A: achtknotige Elemente, geeignet für Parameterstudien, b) Netz B: vierknotige Elemente, geeignet zur Darstellung von Spannungs- und Deformationsfeldern.

Vergleichsrechnungen zeigen aufgrund der unterschiedlich diskretisierten Oberfläche geringe Abweichungen im  $P^*$ - $h^*$ -Verlauf (siehe Abb. 3.4), welche aber innerhalb der Schwankungsbreite liegen, die durch die diskrete Formulierung des Kontaktgebietes hervorgerufen wird.

Die geringe Elementzahl von Netz A resultiert aus der Eigenschaft, daß achtknotige Elemente in der Lage sind, Biegung zu beschreiben. Die vierknotigen Elemente bieten dagegen den Vorteil einer einfachen Interpolation zwischen den Knoten, womit die korrekte Visualisierung mit dem verwendeten Postprozessor *FEMVIEW* ermöglicht wird.

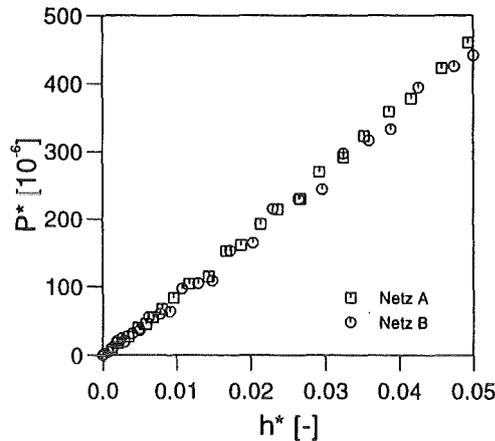


Abbildung 3.4: Vergleich von Netz A und Netz B für Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung ( $\sigma_y^* = 10^{-3.5}$ ,  $E_{T,i}^* = 10^{-3.0}$ ). Die auftretenden Schwankungen sind durch die Diskretisierung der Oberfläche bedingt.

Daher wird Netz A im folgenden für Parameterstudien verwendet, da hier auf die Darstellung von Spannungsfeldern und deformierten Strukturen verzichtet werden kann. Für diese Aufgabe sowie für die Simulation konkreter Beispiele wird Netz B eingesetzt.

### 3.4 Große Deformationen

Die Theorie großer Deformationen berücksichtigt sowohl große Verzerrungen als auch große Rotationen durch Hinzunahme der quadratischen Terme im Verschiebungsgradienten (siehe dazu z.B. [1]). Die daraus resultierenden Gleichungen nehmen dadurch eine nichtlineare Form an, so daß nur noch wenige Sonderfälle analytisch lösbar sind.

Selbst bei Finite-Elemente-Programmen gestaltet sich die Berücksichtigung großer Deformationen in Verbindung mit geringen Rechenzeiten als sehr aufwendig [15]. Auch unter Verwendung effektiver Algorithmen ist die Rechenzeit bei Berücksichtigung großer Deformationen deutlich erhöht.

In der Regel wird zur Vereinfachung der Modellformulierung die realistische Annahme eingearbeitet, daß die elastischen Verzerrungen klein bleiben [9, 22]. Dies trifft auch auf die in dieser Arbeit durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen zu.

Die Notwendigkeit der Berücksichtigung großer Deformationen zeigt Abb. 3.5. Werden nur kleine Deformationen berücksichtigt, ergibt sich selbst bei einem kleinen Eindruck wie in Abb. 3.5a ein deutlich anderes Verformungsfeld. Wird die Eindrucktiefe noch weiter erhöht, so kann es sogar zur Invertierung und Durchdringung von Elementen in der oberflächennahen Zone kommen.

Gerade die Oberfläche im Kontaktgebiet wird durch die fälschlich vorausgesetzten kleinen Deformationen in Mitleidenschaft gezogen, wodurch die Last- und Eindrucktiefe-

daten fehlerbehaftet sind. Die Aussagekraft von Kurven, die unter der Voraussetzung kleiner Deformationen gewonnen wurden, ist demnach von rein qualitativer Natur (siehe Abb. 3.6). Zum Beispiel ergibt sich hier eine Entlastungssteife  $S$  von nur 93% des korrekten Wertes.

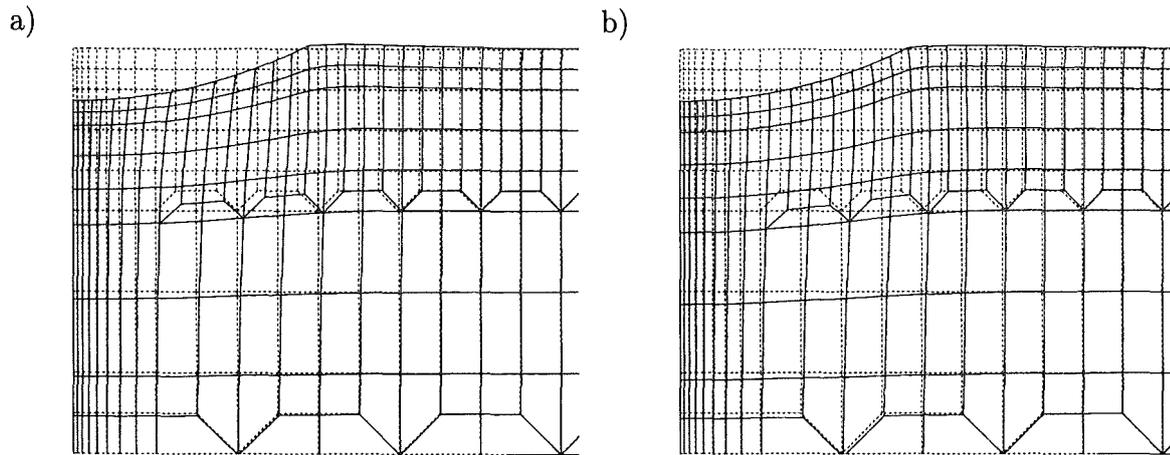


Abbildung 3.5: Finite-Elemente-Simulation für Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung ( $\sigma_y^* = 10^{-3.0}$ ,  $E_T^* = E_{T,i}^* = 10^{-2.0}$ ,  $h^* = 0.1$ ). a) Theorie kleiner Deformationen; b) Theorie großer Deformationen.

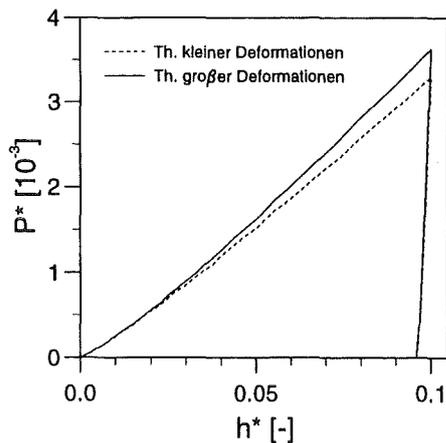


Abbildung 3.6: Vergleich der Last-Eindrucktiefe-Kurven aus den Finite-Elemente-Simulationen in Abb. 3.5.

## 4 Experimentelles Vorgehen

Zusätzlich zur Verifikation der theoretischen Untersuchungen dienen die Experimente der Ergänzung der Finite-Elemente-Simulationen. Wegen der Vergleichbarkeit mit einachsigen Zugversuchen ist die Wahl der Prüfkörperabmessung im Makrobereich günstig. Die entsprechenden Proben können aus der gleichen Charge gefertigt und sowohl den Eindruck- als auch den Zugexperimenten unterworfen werden.

### 4.1 Last- und Eindrucktiefemessung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 4.1 dargestellt. Durch die Nutzung einer konventionellen INSTRON-Zugprüfmaschine konnte die Kraftmessung und -regelung mit der integrierten Kraftmeßdose (1) und Regelelektronik vorgenommen werden. Die zylindrische Probengeometrie (6) mit einer Höhe von 25 *mm* und einem Durchmesser von 50 *mm* entspricht dem Abmessungsverhältnis der FE-Struktur. Das Kugel- zu Probenradien-Verhältnis sollte nach Kap. 3 kleiner als 0.2 gehalten werden, wodurch Kugeln von einem Radius  $R \leq 10$  *mm* in Betracht kommen.

Der in die Schaftmutter (3) eingepreßte Schaft aus Hartmetall (4) trägt den hartgelöteten, kugelig geschliffenen Diamanten (5). Zum Auswechseln des Prüfkörpers ist die Schaftmutter mit Zentrierpassungen versehen, welche einen axial fluchtenden Einbau gewährleisten. Das Anziehen der Schaftmutter über ein Feingewinde bewirkt eine Vorspannung zwischen Schaft und Stempel (2), wodurch Setzeffekte und sich verändernde Steifigkeiten des Aufbaus während eines Experiments vermieden werden.

Sowohl die Belastungs- als auch die Entlastungskurve müssen gleichermaßen genau gemessen werden, wobei die Wertebereiche der Eindrucktiefe typischerweise ein Verhältnis von mehr als einer Größenordnung aufweisen. Dies bedeutet, daß mit dem Meßbereich der Belastungskurve und gleichzeitig mit einer Mindestauflösung für die Entlastungskurve gearbeitet werden muß, womit höhere Anforderungen an die Meßtechnik resultieren.

Bei der Messung der Eindrucktiefe wird daher eine Kombination aus einem kommerziellen Lasersystem und zwei induktiven Wegaufnehmern verwendet. Der Laser (8) emittiert einen parallelen, rechteckförmigen Strahl bei einer Wellenlänge von 780 *nm*. Seine Ab-

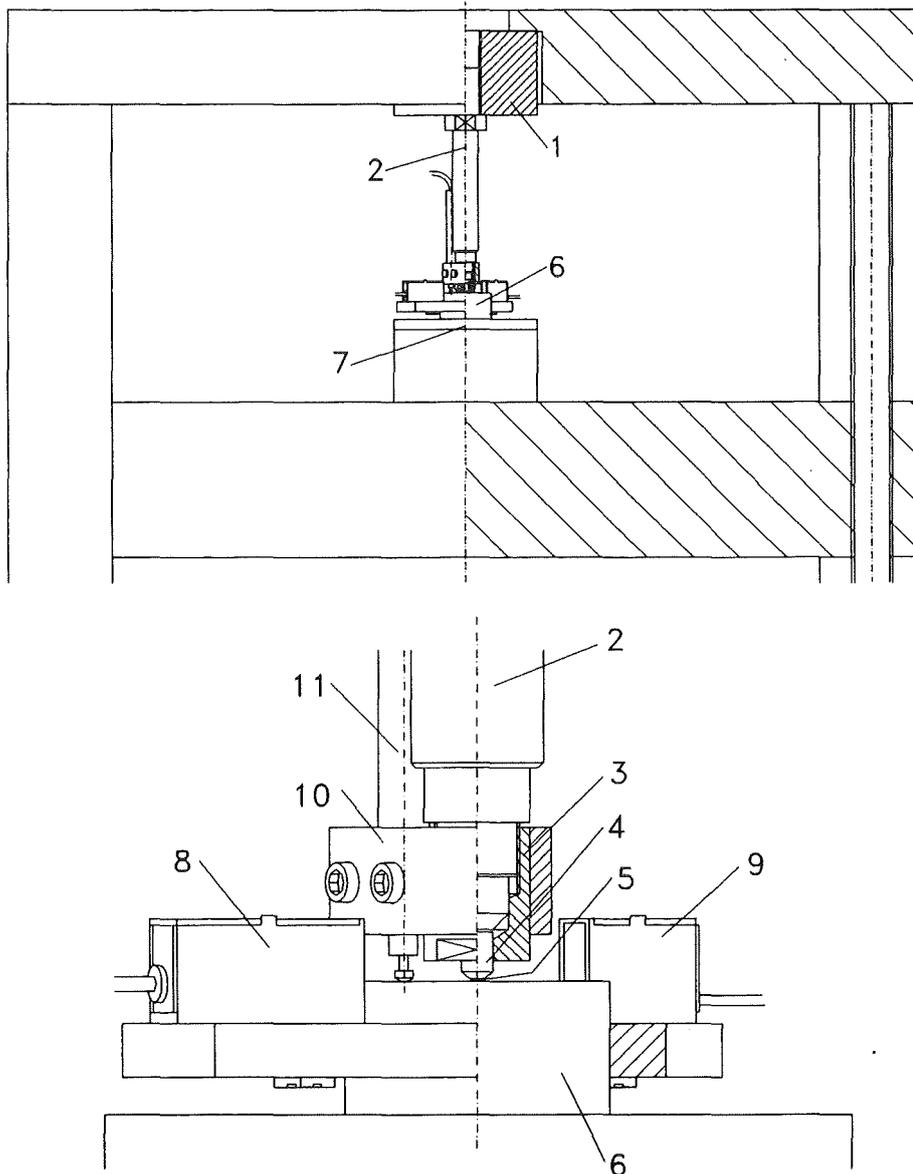


Abbildung 4.1: Gesamtansicht und Detail des Versuchsaufbaus zur Durchführung von Eindruckversuchen: (1) Kraftmeßdose, (2) Stempel, (3) Schaftmutter, (4) Hartmetall-Schaft, (5) Prüfkörper (6) Probe, (7) Auflager, (8) Laser, (9) Photoempfänger, (10) Halterung für Wegaufnehmer, (11) Induktiver Wegaufnehmer.

messungen betragen  $1\text{ mm}$  in der Höhe und  $10\text{ mm}$  in der Breite.

Ihm gegenüber befindet sich ein Photoempfänger (9), der aus der auftreffenden Lichtleistung ein Gleichspannungssignal  $U_L$  erzeugt. Eine Änderung der ankommenden Lichtleistung infolge einer teilweisen Abschattung des Strahles bewirkt eine Änderung der Spannung am Empfängerausgang proportional zur Größe der abgeschatteten Fläche.

Zur Vermeidung von zusätzlichen Störeinflüssen sind Sender und Empfänger auf einer Platte angebracht, die unmittelbar auf der Probe befestigt wird. Beim Eintauchen des konisch geschliffenen Hartmetallschaftes in den Laserstrahl kann eine sich zur Verschiebung proportional ändernde Spannung am Empfängerausgang abgegriffen werden.

#### 4.1.1 Kalibrierung der Eindringtiefe

Die Ermittlung der Kalibrierkurve für den Laser-Aufnehmer ist in Abb. 4.2a skizziert. Im Verlauf der Belastung bewirkt die vorherrschende Last eine Verformung des Stempels. Somit messen die induktiven Aufnehmer (11), die mit einer Halterung (10) am Stempel befestigt sind, aufgrund der elastischen Verkürzung der Teile zwischen dem Laserstrahl und der Halterung ein zu großes Wegsignal. Erst nach Erreichen einer vollständigen Entlastung  $P = 0$  und  $h < h_t$ , im Verlauf des zurückziehens des Prüfkörpers, messen die induktiven Aufnehmer das dem Laser-Signal korrekt zugeordnete Wegsignal. Um den Einfluß zufälliger Störungen, wie z.B. Luftschlieren, während der Messung der Kalibrier-

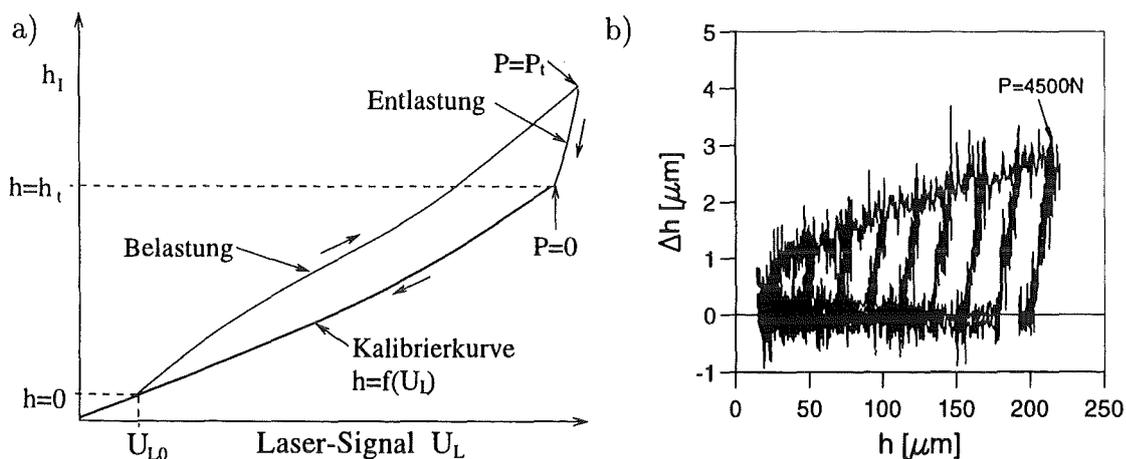


Abbildung 4.2: Prinzip der Kalibrierung des Laser-Meßsystems: a) Skizze zur Ermittlung der Kalibrierkurve; b) Qualität der Laser-Messung und Verformung  $\Delta h$  des Aufbaus zwischen Laser und induktiven Aufnehmern für eine Stahlprobe (St 52-3).

kurve zu vermindern, wird diese dreifach aufgenommen, indem der Prüfkörper nochmals bis zum Kontakt auf die Probe zu und wieder zurückbewegt wird.

Mit dem im unbelasteten Zustand gemessenen Signal der induktiven Wegaufnehmer wird das Lasersignal nachträglich kalibriert. Dazu werden die drei Kalibrierkurven gleichzeitig durch ein Polynom dritten Grades

$$h(U_L) = A_0 + A_1(U_L - U_{L0}) + A_2(U_L - U_{L0})^2 + A_3(U_L - U_{L0})^3 \quad (4.1)$$

gefittet, worin  $A_i$  die anzupassenden Parameter und  $U_{L0}$  die Laserspannung bei Aufsetzen des Prüfkörpers ( $h = 0$ ) darstellen. An dieser Stelle ist eine gute Abschätzung von  $U_{L0}$  anhand des Lastanstieges völlig ausreichend, da die Kalibrierkurve eine rein geometrische Beziehung wiedergibt und damit einen glatten Verlauf über die Grenzen der Lastaufbringung hinaus aufweist. Wegen den hohen Genauigkeitsansprüchen an die Eindrucktiefemessung wird dieser Vorgang bei jedem Experiment erneut durchgeführt. Durch Auftragen von  $\Delta h$ , definiert mit

$$\Delta h = h_I - h, \quad (4.2)$$

über  $h$  ist die Verformung des Aufbaus zwischen der Lasermeßstelle und der Halterung der induktiven Aufnehmer zu erkennen (siehe Abb. 4.2b). In ihr spiegelt sich die Last-Eindrucktiefe-Kurve in ihrer typischen Form wieder. Die Streuung der Meßpunkte um den Wert  $\Delta h = 0$  ergibt zusätzlich ein Maß für die Meßgenauigkeit des Laser-Meßsystems. Eine Verminderung der Streuung kann durch Erhöhung der Abtastfrequenz und Mittelung der Meßwerte erreicht werden.

#### 4.1.2 Bestimmung des Nullpunktes

Eine hohe Genauigkeit in der Nullpunktbestimmung ist für solche Methoden notwendig, bei denen Absolutwerte des Weges  $h$  betrachtet werden. Insbesondere bei lastgesteuerten Experimenten ergibt sich beim Positionieren des Prüfkörpers auf der Oberfläche mit einer Last nahe Null oft ein kleiner Eindruck von etwa  $1-2 \mu m$  Tiefe infolge der Trägheit der Maschine. In diesem Fall beginnt die folgende Messung bereits bei einer Eindrucktiefe  $h > 0$ . Die nachträgliche Korrektur des Nullpunktes erfolgt durch Addition eines Wertes  $h_0$  zu den gemessenen Wegdaten, so daß der inelastische Teil der Belastungskurve einen linearen Verlauf in der doppelt-logarithmischen Darstellung annimmt.

Es wird dabei davon ausgegangen, daß sich die Last-Eindrucktiefe-Kurve im Intervall ( $0 < h^* < 0.03$ ) durch ein Potenzgesetz der Form  $P(h) = Ah^z$  approximieren läßt.

Als Beispiel zeigt Abb. 4.3 die Nullpunkt-Korrektur für ein Experiment, bei dem durch ungeschickte Handhabung bereits ein deutlicher Eindruck beim Positionieren erzeugt wurde und damit der eigentlichen Belastungskurve zuerst ein kleiner elastischer Anstieg vorausgeht.

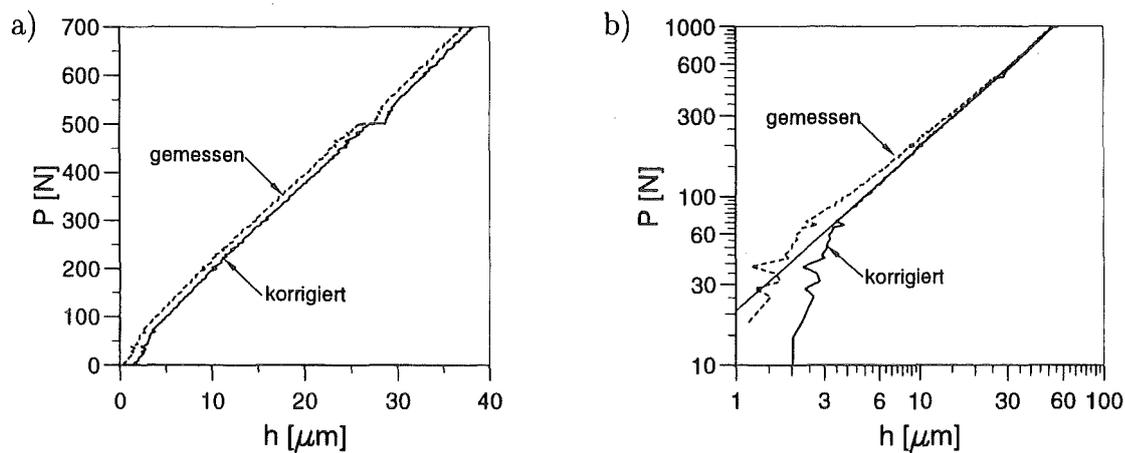


Abbildung 4.3: Nullpunktbestimmung der Eindringtiefe für eine Probe aus austenitischem Stahl, die durch das Positionieren bei Kraftsteuerung eine deutliche Vordeformation aufweist: a) Original und nullpunktkorrigierte Belastungskurve; b) Korrektur durch Herstellung der Linearität im  $\log P$ - $\log h$ -Diagramm für  $(0 < h^* < 0.03)$ .

## 4.2 Eindringtiefensteuerung

Im Gegensatz zur Kraftsteuerung, die mit der Standardelektronik der Prüfmaschine durchgeführt wird, muß die Eindringtiefensteuerung extern realisiert werden.

Der Laserausgang besitzt ein Spannungssignal von etwa  $0.5 \text{ V/mm}$ . Dieses Signal ist jedoch ständigen stochastischen Störungen unterworfen, die durch Staubpartikel und Schlieren ausgelöst werden. Deshalb wird zur Regelung der Eindringtiefe das Signal der induktiven Wegaufnehmer herangezogen. Dieses hat den Vorteil einer verhältnismäßig großen Verstärkung von  $20 \text{ V/mm}$  bei gleichzeitig geringem Rauschen. Da sich bei einer Relaxation die Kraft nur um Bruchteile des Absolutwertes verändert, kann die Verformung des Stempels während des Relaxationsvorgangs als konstant angesehen werden.

Trotz hoher Steifigkeit und Axialität des Aufbaus können geringe Biegeeffekte nicht vermieden werden. Die Biegekompensation wird durch zwei symmetrisch zur Stempelachse

angeordnete induktive Wegaufnehmer erreicht. Die Summe der Signale entspricht genau der doppelten Verschiebung in achsialer Richtung.

Das Schaltbild zur Wegsteuerung ist in Abb. 4.4 dargestellt. Zur Regelung wird der in der Prüfmaschine vorhandene P-Regler herangezogen. Der analoge Funktionsgenerator der Prüfmaschine kann wegen seiner beschränkten Möglichkeiten nicht eingesetzt werden. Als Steuersignal steht dafür ein von einem PC erzeugtes, über eine Meßdatenerfassungskarte (DAP-Karte) ausgegebenes Analogsignal zur Verfügung. Der PC dient somit gleichzeitig der Datenerfassung und als Funktionsgenerator.

Die Signale der Wegaufnehmer und des PC-Ausgangs werden addiert und über eine speziell angefertigte Modulationskarte in die Dehnungs-Regelungskarte der Prüfmaschine eingeschleust.

Die Regelung hat hierbei die Aufgabe, das Wegaufnehmersignal durch Bewegen der Traverse entgegengesetzt zum Sollsignal des PC-Ausgangs derart zu verändern, daß die Summe beider den konstant vorgegebenen Sollwert des Potentiometers ergibt.

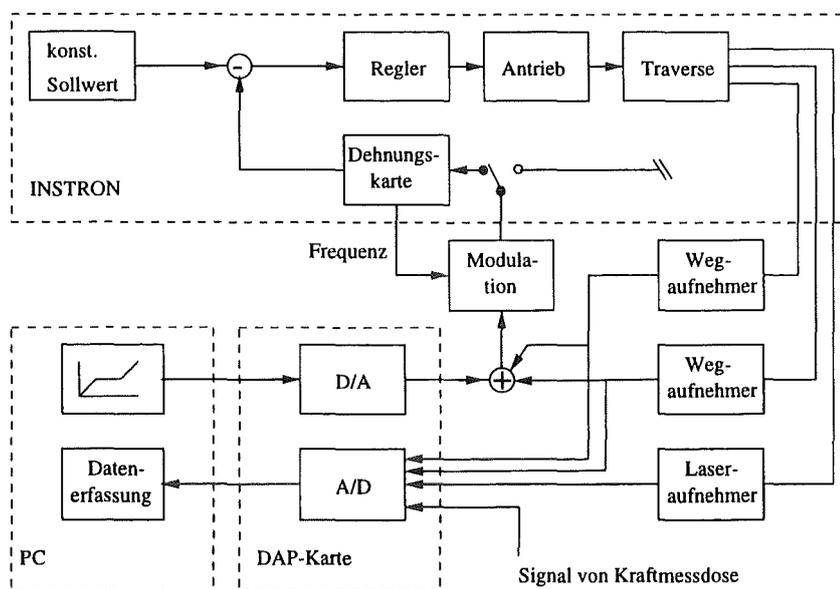


Abbildung 4.4: Schaltbild der Eindrucktiefensteuerung.

### 4.3 Prüfkörper

Die ersten Experimente mit halbkugelförmigen, monokristallinen Rubinen ergaben keine zufriedenstellenden Ergebnisse, da die Rubinkugeln im Verlauf des Experimentes zerbrachen. Das Wechseln der Rubinkugel war mit Unsicherheiten bezüglich der Axialität verbunden, womit die Reproduzierbarkeit nicht gewährleistet war.

Der schließlich verwendete Prüfkörper wurde aus einem zylindrischen, monokristallinen, synthetischen Diamanten von der holländischen Firma *TECHNODIAMANT* hergestellt. Im allgemeinen ist das Bearbeiten von Diamanten unabhängig von den Orientierungsrichtungen des Kristallgitters schwierig. Deshalb wurde der Diamant vor dem Schleifen durch Hartlöten auf einen Hartmetallschaft aufgebracht (siehe Abb. 4.5a). Damit wurde gleichzeitig die Axialität der Kugelkalotte und des Schafts nach dem Bearbeitungsprozeß gewährleistet. Die Aufnahmevorrichtung für den Prüfkörper wurde deshalb in ihrer Funktion auf den Hartmetallschaft abgestimmt.

Der Diamant wurde nach Anlieferung unter einem Lichtmikroskop vermessen, das mit einem x-y-Verschiebetisch ausgerüstet ist. Die Auflösung des Tisches betrug hierbei  $\pm 1 \mu\text{m}$ . Ein Fit des gemessenen Profils ergibt einen Radius von  $2.03 \text{ mm}$ . Dies entspricht einer Abweichung von 1.5% bezüglich des nominellen Radius'. Abbildung 4.5b zeigt die Meßdaten und den Fit mit einer Kreisfunktion sowie die Abweichung der Meßdaten von der Fitfunktion. Diese Abweichung dürfte aufgrund ihres quantisierten Charakters

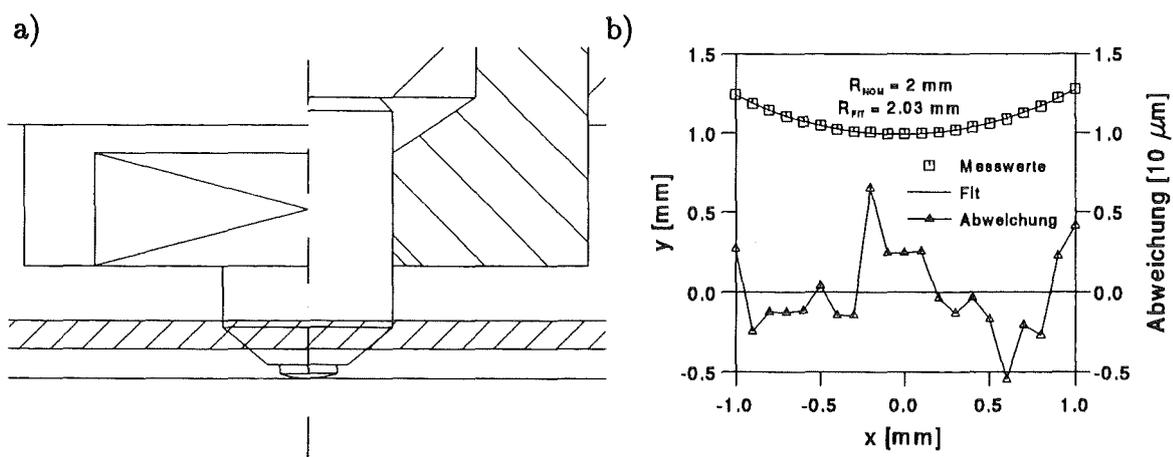


Abbildung 4.5: a) Fassung des HM-Schaftes mit Prüfkörper. Der schraffierte Streifen markiert die Lage des Laserstahls. b) Profil des Prüfkörpers und Abweichung vom Kugelprofil mit  $R = 2.03 \text{ mm}$ .

zusätzlich auf die begrenzte Auflösung des Verschiebetisches zurückzuführen sein, womit die Formabweichung effektiv unter  $5 \mu m$  liegt. Dies wäre etwa 0.25% bezogen auf den Radius des Prüfkörpers.

## 4.4 Probenmaterial

Als Probenwerkstoffe wurden ein austenitischer Stahl (X 10 CrNiMoTi 18 10), ein Baustahl (St 52-3) sowie eine Aluminium-Legierung (AlMgSi 1) mit Härte- und Vergütungsbehandlung (F29-F31) bzw. in weichgeglühter Form ausgewählt. Die Glühbehandlung der Werkstoffe wurde nach Tabelle 4.1 im Vakuum vorgenommen.

Anhand von einachsigen Zugversuchen wurden die zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ermittelt (siehe Abb. 4.6). Zur Herstellung der Zugproben wurden einzelne Stäbe aus den Reststücken des Stangenmaterials zur Herstellung der Eindruckproben herausgerodiert und nach der Drehbearbeitung zusammen mit den Eindruckproben geätzt. Somit ist sichergestellt, daß beide Probentypen die gleiche Vorgeschichte besitzen. Die ermittelten Werte des E-Moduls sowie der Fließgrenze sind in Tab. 4.2 dargestellt, ergänzt um die Literaturwerte für die Querkontraktionszahl sowie den E-Modul für Diamant und Hartmetall.

Werkstoff	Glühtemperatur [ $^{\circ}C$ ]	Glühdauer [h]	Abkühlgeschwindigkeit [ $^{\circ}C/h$ ]
X10 CrNiMoTi 18 10	700	5	300
St 52-3	650	5	300
AlMgSi 1	350	5	100

Tabelle 4.1: Verwendete Probenwerkstoffe und Glühbehandlungen

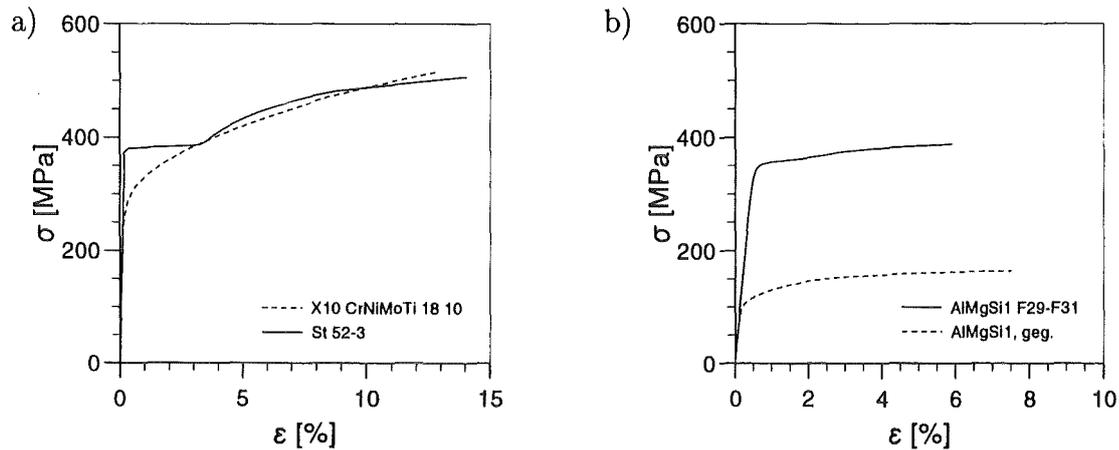


Abbildung 4.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der verwendeten Werkstoffe mit Nennspannung  $\sigma = F/A_0$  und Ingenieurs-Dehnung  $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$ : a) austenitischer Stahl und Baustahl; b) gehärtete und weichgeglühte Aluminium-Legierung.

Werkstoff	$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$R_{es}/R_{p0.2}$ [MPa]
X10 CrNiMoTi 18 10	196	0.3	285
St 52-3	210	0.3	375
AlMgSi 1 F29-F31	71	0.33	350
AlMgSi 1 geg.	71	0.33	110
Diamant	1000	0.07	
Hartmetall	610		

Tabelle 4.2: Mechanische Eigenschaften der Werkstoffe

## 5 Eindruckversuch und Zugversuch

Der Zugversuch ist bezüglich einer umfassenden Ermittlung von mechanischen Eigenschaften von hoher Effizienz. Viele andere Methoden liefern diesbezüglich nur teilweise Informationen. Anhand des Eindruckversuchs wird bisher meist nur die Härte und der E-Modul bestimmt. Literatur zur Ermittlung von Fließspannung, Verfestigungseigenschaften oder Viskosität mit dem Eindruckversuch ist spärlich und ein einheitliches Konzept wäre von Nutzen.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Leistungsfähigkeit des Eindruckversuchs zu untersuchen und, wo möglich, Parallelen zum Zugversuch zu finden, wodurch das dort vorhandene Wissen genutzt werden kann.

Die gemeinsame Basis hierzu bildet das Materialmodell, das den Werkstoff in seinem phänomenologischen Verhalten beschreibt. Die komplizierte inhomogene Verformung des Eindruckes läßt den Schluß von den globalen Meßgrößen Last und Eindrucktiefe auf die lokalen Spannungs- und Dehnungsgrößen aber nicht zu. Mit Hilfe von FE-Simulationen ist es jedoch möglich, bestimmte Phänomene im  $P$ - $h$ -Kurvenverlauf auf deren Abhängigkeit von der Struktur des Materialmodells und den darin vorhandenen Parametern zu untersuchen.

Bereits von Tabor wurden für Kugeleindrücke empirische Zusammenhänge zwischen den globalen Größen der Last  $P$ , dem Kontaktradius  $a$  und einem Teil der inelastischen Spannungs-Dehnungs-Kennlinie gefunden, so daß es denkbar ist, mit Hilfe moderner Methoden weitere Erkenntnisse zu gewinnen.

### 5.1 Tabor's Idee

Das Buch „*The Hardness of Metals*“ von D. Tabor [44] bildet die Grundlage des modernen Eindruckversuchs. Darin zeigt Tabor, wie aus gewöhnlichen Härteeindrücken in metallische Werkstoffe mit dem im folgenden beschriebenen Verfahren weitere Informationen über das Werkstoffverhalten zu gewinnen sind.

Für eine Anpassung an Spannungs-Dehnungs-Kennlinien müssen die Eindruckdaten in Form geeigneter Dehnungs- und Spannungsmaße zur Verfügung gestellt werden. Tabor

benutzt hierzu den entdimensionierten Kontaktradius

$$a^* = \frac{a}{R} \quad (5.1)$$

und den mittleren Druck

$$P_m = \frac{P}{\pi a^2} . \quad (5.2)$$

Zentrale Idee dabei ist, die bei steigender Belastung monoton steigende  $P_m$ - $a^*$ -Kurve durch eine geeignete Transformation mit der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie in Verbindung zu bringen. Kann eine solche Transformation gefunden werden, die für verschiedene Werkstoffe gleichermaßen anwendbar ist, so ist es möglich, aus dem Eindruckversuch die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie zu ermitteln.

Tabor konnte zeigen, daß ab einem gewissen Quantum an plastischer Deformation eine einfache Beziehung zwischen dem mittleren Druck in der Kontaktfläche und der Fließspannung existiert. Die charakteristische Spannung, berechnet mit

$$\sigma_r = \frac{P_m}{2.8} , \quad (5.3)$$

wird daher als Spannungsmaß herangezogen. Die charakteristische Dehnung

$$\varepsilon_r = 0.2a^* \quad (5.4)$$

ermittelte er durch Anpassung der  $\sigma_r$ - $a^*$ - Eindruckdaten an Spannungs-Dehnungs-Kennlinien von Kupfer und Stahl. Die Bezeichnung *charakteristische Dehnung* resultiert aus der globalen Bedeutung dieses Dehnungsmaßes:  $\varepsilon_r$  repräsentiert die deformierte Geometrie und ist für geometrisch ähnliche Eindrücke konstant.

Die Gültigkeit obiger Relationen ist beschränkt auf den *vollplastischen Zustand*, d.h. der Werkstoff im gesamten Kontaktbereich muß bereits plastische Verformung aufweisen. Dieser vollplastische Zustand wird je nach Werkstoff bei unterschiedlichem  $P_m$  bzw.  $a/R$  erreicht.

Die zunächst empirisch ermittelten Gleichungen (5.3) und (5.4) wurden für nichtlineare Elastizität von Hill et al. [19] und für Materialverhalten nach dem Norton-Gesetz von Storåkers & Larsson [43] mit guter Übereinstimmung bestätigt.

## 5.2 Bestimmung des Kontaktradius

Die Gleichungen (5.3) und (5.4) verdeutlichen die wichtige Rolle des Kontaktradius zur Auswertung von Eindruckversuchen. Viele Arbeiten, z.B. die eben zitierten, folgen diesem Beispiel und betrachten  $a/R$  als unabhängige Variable. Diese Vorgehensweise ist für

die praktische Anwendung problematisch, da der Kontaktradius ein Ergebnis des Eindruckversuchs darstellt und erst nach Wegnahme der Last durch optische Vermessung zu ermitteln ist. Solche aufwendigen und nicht automatisierbaren Meßverfahren sollen hier vermieden werden. Dazu werden alle Beziehungen als Abhängigkeit der Eindrucktiefe  $h^* = h/R$  formuliert. Für Auswertungen wie oben, bei denen der Kontaktradius benötigt wird, muß dieser mit einer geeigneten Abschätzung aus den Last-Eindrucktiefe-Daten ermittelt werden.

Wird der Kontaktradius  $a'$  unter der Annahme berechnet, daß die Oberfläche außerhalb des Kontaktbereiches keine vertikale Verformung aufweist, folgt

$$a' = \sqrt{2Rh - h^2} . \quad (5.5)$$

Der korrekte Kontaktradius  $a$  liegt bei Aufwölben oder Einsinken des Kontaktrandes über bzw. unter dem Wert von  $a'$ .

Nach Field & Swain [11] wird unter der Annahme, die Entlastung sei elastisch, die Eigenschaft der Lösung von Sneddon [13] (siehe auch folgendes Kapitel) ausgenutzt. Danach ist die Verschiebung in  $z$ -Richtung am Kontaktrand  $w(r = a)$  exakt halb so groß wie die Eindrucktiefe  $w(r = 0) = h$ . Aus diesen geometrischen Verhältnissen folgt

$$a = \sqrt{2Rh_p - h_p^2} , \quad (5.6)$$

wobei die Tiefe des Kontaktrandes  $h_p = w(r = a)$  gegeben ist durch

$$h_p = \frac{h_t + h_r}{2} . \quad (5.7)$$

Mit (5.6) kann der Kontaktradius an solchen Stellen bestimmt werden, an denen eine Entlastung zur Ermittlung von  $h_r$  eingeführt wird. Dazu ist zu beachten, daß die Entlastung als rein elastisch angenommen wurde.

Eine Betrachtung der Sonderfälle elastischen und starrplastischen Materialverhaltens zeigt zugleich die Grenzen von (5.6). Für elastische Eindrücke ist  $h_r = 0$  und der Kontaktradius wird nach (5.7) korrekt mit  $h_p = h_t/2$  ermittelt. Im Falle starrplastischen Materialverhaltens ist  $h_r = h_t$ , wodurch (5.6) in (5.5) übergeht. Dies entspricht einer undeformierten Oberfläche außerhalb des Kontaktbereiches. Mit (5.6) kann also lediglich der Effekt des *sinking in*, d.h. ein Absinken des Kontaktrandes unter das Niveau der undeformierten Oberfläche, beschrieben werden. Ein *piling up*, also ein Aufwölben des Gebietes für  $r \geq a$  kann mit diesem einfachen Modell aber nicht erfaßt werden.

Hill et al. bestimmten in ihrer Arbeit [19] mit Hilfe von Finite-Elemente-Rechnungen das Aufwölben im Bereich des Kontaktrandes als Funktion der Verfestigung. Das zu-

grundliegende Materialmodell ist formuliert als nichtlineare Elastizität für kleine Deformationen nach Ramberg-Osgood. Die Verfestigung wird hier durch ein Potenzgesetz mit dem Verfestigungsexponenten  $n$  modelliert.

Die geometrischen Größen werden in der Invarianten

$$c^2 = \frac{a^2}{2Rh} \quad (5.8)$$

zusammengefaßt, wobei die Voraussetzung kleiner Eindrücke gilt ( $h \ll R$ ). Aus (5.5) und (5.8) erhält man somit

$$a = ca' . \quad (5.9)$$

Ein Fit der numerischen Lösungen liefert die Beziehung

$$c^2 = \frac{5}{2} \left( \frac{2n-1}{4n+1} \right) . \quad (5.10)$$

Gleichung (5.9) wird z.B. von Field & Swain [12] zur genaueren Abschätzung des Kontaktradius benutzt. Der dafür benötigte Verfestigungsexponent  $n$  wird durch Fit der Gleichung

$$\log(P) = \alpha + \left(2 + \frac{1}{n}\right) \log(a') \quad (5.11)$$

bestimmt, die durch Einsetzen von (5.8) in

$$P_m = k_1 \left( \frac{a}{2R} \right)^{1/n} \quad (5.12)$$

folgt. Die Gültigkeit von (5.12) wurde von Meyer in [34] für eine große Auswahl an Metallen bestätigt. Da (5.10) ohnehin nur für kleine Deformationen gültig ist, wurde bei der Herleitung von (5.11)  $h^2$  gegen  $a^2$  vernachlässigt.

Als abschließendes Beispiel für diesen und den vorangegangenen Abschnitt wird die Bestimmung des Kontaktradius und die Ermittlung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie nach Tabor für eine numerisch simulierte Last-Eindrucktiefe-Kurve durchgeführt. Die in Abb. 5.1b dargestellte Belastungskurve basiert auf einem Materialmodell der Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung, wie sie in Abb. 5.1a aufgetragen ist. Zur Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen (5.5) und (5.9), der in der Berücksichtigung des Aufwölbens besteht, wurde der Kontaktradius jeweils anhand beider Relationen bestimmt. Hiermit resultieren die in Abb. 5.1a dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien nach Tabor, wobei für die Ermittlung von  $c$  mit (5.10) der Verfestigungsexponent aus (5.11) mit  $n = 4.76$  bestimmt wurde. Der gezackte Verlauf bei kleinen Dehnungen resultiert aus numerischen Ungenauigkeiten, die durch die Diskretisierung der Oberfläche in Verbindung mit kleinen Eindrucktiefen entstehen.

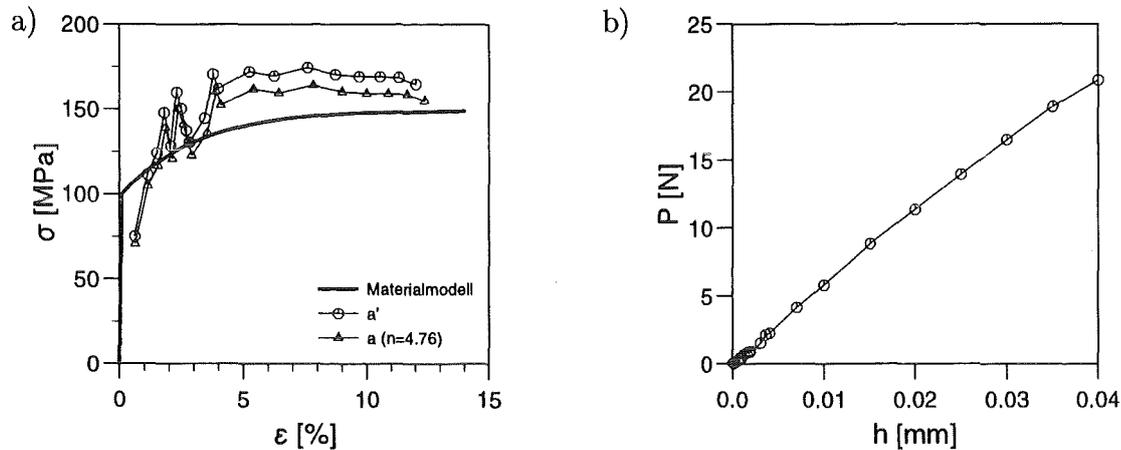


Abbildung 5.1: a) Original Spannungs-Dehnungs-Kennlinie für FE-Simulation mit Theorie großer Deformationen ( $\sigma =$  wahre Spannung;  $\epsilon := \ln(l/l_0)$ ) und Spannungs-Dehnungs-Relation nach Tabor-Auswertung der in b) dargestellten  $P$ - $h$  Kennlinie ( $R = 0.2 \text{ mm}$ ).

### 5.3 Effekte kinematischer und isotroper Verfestigung

Die kinematische Verfestigung ist nach (3.3) verantwortlich für die Bewegung des Mittelpunktes der Fließfläche im Raum der Spannungstensoren, während die isotrope Verfestigung ein gleichmäßiges Ausdehnen der Fließfläche um deren Mittelpunkt bewirkt. Im Fall einachsiger, monotoner Belastung sind die beiden Verfestigungsarten in ihrer Wirkung nicht zu unterscheiden. Erst bei zyklischer plastischer Belastung wird der Unterschied deutlich. In Abb. 5.2 ist ein solches Verhalten anschaulich dargestellt. Hierzu werden reine isotrope Verfestigung, reine kinematische Verfestigung und ein Beispiel mit isotroper und kinematischer Verfestigung jeweils gleichen Anteils betrachtet. Die Parameter sind so gewählt, daß in allen drei Fällen die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie unter einachsigem Zug übereinstimmend ist. Die Verkleinerung des Betrags der Fließspannung im Druckbereich durch die kinematische Verfestigung, auch als *Bauschinger-Effekt* bekannt, kann so stark sein, daß bei der Entlastung noch im positiven Spannungsbereich plastische Deformation einsetzt. Ein solches Verhalten wird als *frühzeitiger Bauschinger-Effekt* bezeichnet.

Im allgemeinen müssen zur Identifikation kinematischer Verfestigung zyklische Zug-

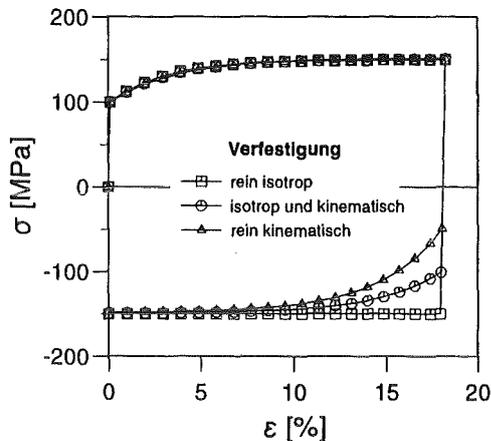


Abbildung 5.2: Verhalten des Materialmodells der Plastizität unter einachsiger Beanspruchung für verschiedene Anteile an kinematischer Verfestigung (Theorie großer Deformationen).

Druckversuche durchgeführt werden, die einen erhöhten experimentellen Aufwand darstellen. Hier wäre der Eindruckversuch als eine denkbare Alternative einsetzbar. In einigen Literaturstellen sind bereits Hinweise für einen Bauschinger-Effekt beim Eindruckversuch zu finden [38]:

*„... This unloading part of the curve is almost exactly reversible, implying that the movement involves the release of elastic strains under the indenter. It is possible that some small amount of nonelastic backflow is occurring; however, it is not a significant effect. ...“*

In einem anderen Fall wurde ein Unterschied in der Rückverformung bei Verwendung des Materialmodells rein isotroper bzw. rein kinematischer Verfestigung in einer Finite-Elemente-Studie zu Vickers-Härteeindrücken festgestellt [35].

Im folgenden sollen die Vorgänge während der Entlastung näher betrachtet werden. Die dazu durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen gehen von den folgenden Voraussetzungen aus. Zur Einschränkung der Zahl an zu variierenden Parametern wird das Materialmodell der Plastizität mit linearer Verfestigung gewählt (siehe Abschnitt 3.1). Die Verfestigung wird dabei jeweils als reine isotrope ( $E_{T,k} = 0$ ,  $E_{T,i} = E_T$ ) bzw. reine kinematische Verfestigung ( $E_{T,k} = E_T$ ,  $E_{T,i} = 0$ ) modelliert. Der Elastizitätsmodul beträgt  $E = 100 \text{ GPa}$ .

Abb. 5.3 zeigt die  $P^*$ - $h^*$ -Kurve für die Materialparameter  $\log E_T^* = -2.0$  und  $\log \sigma_y^* = -3.0$ . Der Kurvenverlauf für kinematische Verfestigung unterscheidet sich von dem für isotrope Verfestigung sowohl im Belastungs- als auch im Entlastungspfad.

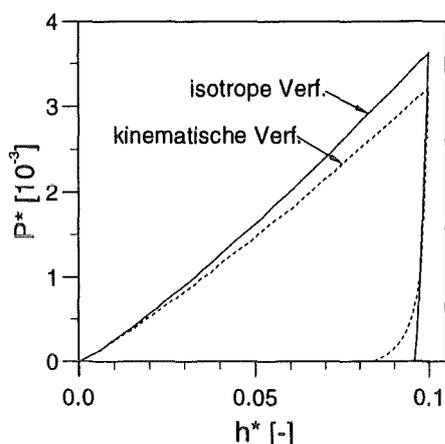


Abbildung 5.3: Vergleich der  $P^*$ - $h^*$ -Kurve für lineare isotrope und lineare kinematische Verfestigung gleichen Tangentenmoduls und Fließgrenze.

### 5.3.1 Belastung

Kinematische Verfestigung kann bei monotoner, mehrachsiger Belastung einen Unterschied zu isotroper Verfestigung in der Systemantwort zeigen. Ursache hierfür ist die tensorielle Eigenschaft der kinematischen Verfestigung. Bei nichtradialer Beanspruchung wird die Trajektorie des Mittelpunktes der Fließfläche beeinflusst. Dies führt zu unterschiedlichen Beträgen an Verfestigung bei rein isotroper und rein kinematischer Verfestigung.

Betrachtet man die Spannungsverteilung während der Belastung in der Probe, so nehmen die Diagonalelemente des Spannungsdeviators monoton und fast proportional wachsende Werte an. Der Kugeleindruck bewirkt zusätzlich eine Scherung des Materials im Bereich unter dem Kontaktrand, wodurch das Schubspannungsmaximum mit zunehmender Eindringtiefe nach außen wandert (siehe Abb. 5.4a).

Ein materieller Punkt im betreffenden Bereich zwischen dem Kontaktradius und der Symmetrieachse erfährt demnach bei monoton wachsenden Diagonalkomponenten einen Anstieg und darauffolgenden Abfall der Schubkomponenten, womit eine deutlich nicht-radiale Beanspruchung vorliegt. Die daraus resultierende Abweichung der  $P$ - $h$ -Kurven während der Belastung kann im Fall linearer Verfestigung je nach Materialverhalten bis zu 12% betragen. Ein Beispiel hierzu zeigt Abb. 5.4b. Wie sich in Abschnitt 5.3.4 zeigen wird, verschwindet dieser Effekt für beschränkte nichtlineare Verfestigung.

### 5.3.2 Entlastung

Im oberen Teil der Entlastung zeigt sich zunächst ein vernachlässigbarer Unterschied in der Entlastungssteigung von 0.3%. Im weiteren Verlauf weichen die Kurven jedoch

deutlich voneinander ab.

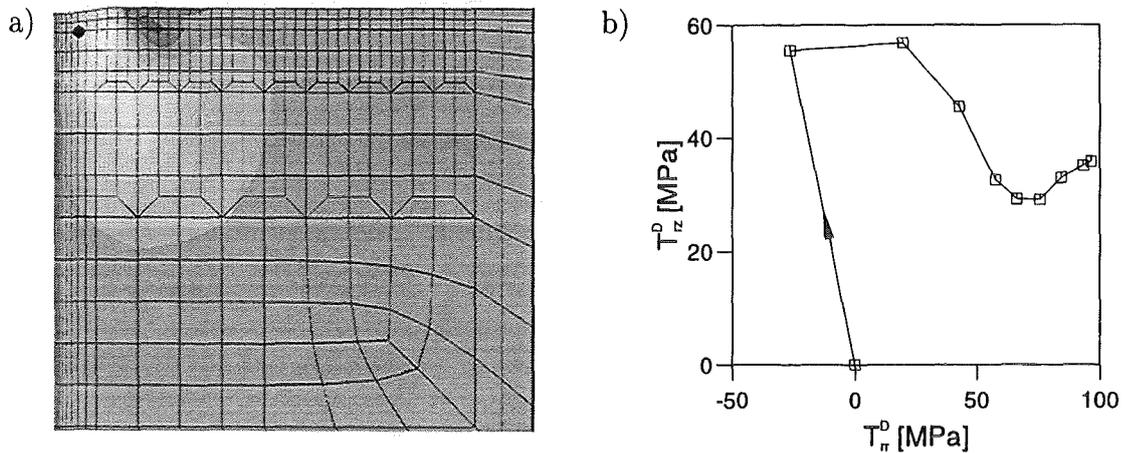


Abbildung 5.4: Nichtradiale Belastung durch wanderndes Schubspannungsmaximum. a) Ausschnitt des FE-Netzes mit  $T_{rz}$ -Spannungsverlauf; b) Spannungstrajektorie für den in a) markierten Knoten ( $r/R = 0.0878$ ,  $z/R = 0.0781$ ) während des Belastungsprozesses.

Für den Fall kinematischer Verfestigung treten ausgeprägte Rückverformungen auf, die ein vielfaches derer bei rein isotroper Verfestigung betragen können. Ein Vergleich der deformierten Oberfläche nach Be- und Entlastung in Abbildung 5.5 verdeutlicht dies.

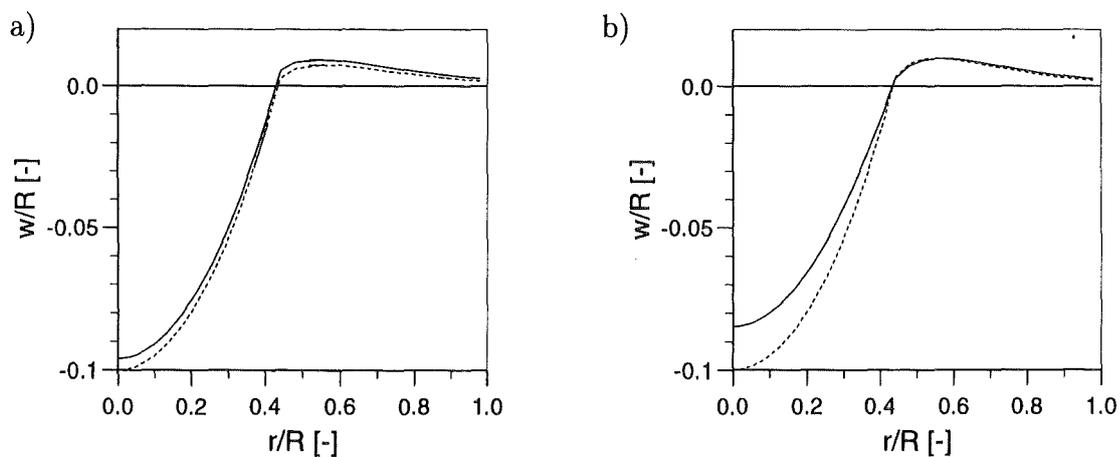


Abbildung 5.5: Deformierte Oberfläche nach Belastung (---) und Entlastung (—) für a) isotrope Verfestigung; b) kinematische Verfestigung.

In der Literatur [38] werden hierfür plastische Deformationen verantwortlich gemacht und wegen der phänomenologischen Ähnlichkeit zum Bauschinger-Effekt mit diesem Begriff in Verbindung gebracht. Im folgenden soll dieses Phänomen näher erläutert werden. Abbildung 5.6 zeigt die Verteilung der  $T_{zz}$ -Spannung nach Entlastung für das Beispiel in Abb. 5.3. Deutliche Unterschiede treten um die Symmetrieachse in einem kugelförmigen Volumen mit der Abmessung von etwa dem 1.5-fachen des Kontaktradius auf.

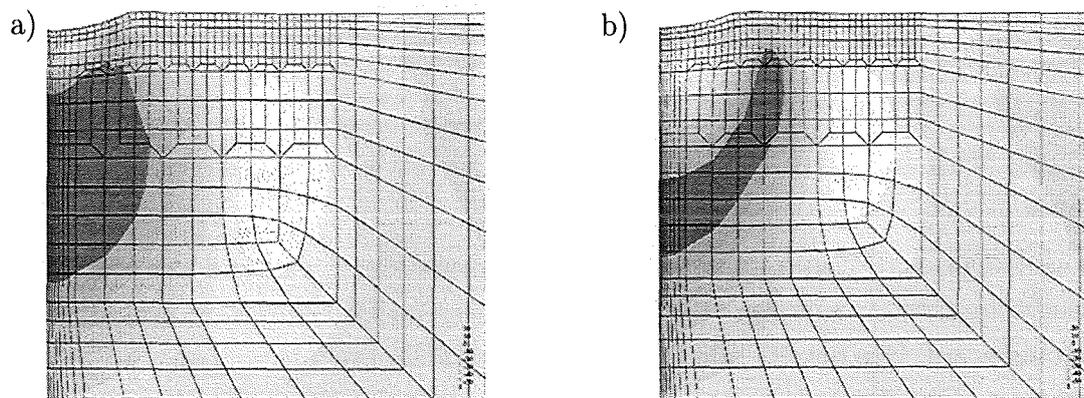


Abbildung 5.6:  $T_{zz}$ -Spannungskomponente nach Entlastung a) isotrope Verfestigung; b) kinematische Verfestigung bei gleicher Skalierung.

Zur Beurteilung des Effektes kinematischer Verfestigung kann die Bewegung des Spannungstensors und der Fließfläche im Verlaufe des Be- und Entlastungsvorgangs dargestellt werden. Die Symmetrieachse zeichnet sich insbesondere durch ihren biaxialen, schubfreien Spannungszustand aus. Für einen solchen Punkt hat der Spannungstensor die besonders einfache Form

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & T_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & T_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

d.h.  $\mathbf{T}$  bewegt sich immer in der Ebene, die aufgespannt wird durch die Winkelhalbierende zwischen  $rr$ - und  $\varphi\varphi$ -Achse und der  $zz$ -Achse. Damit läßt sich der Spannungstensor in dieser Ebene durch den Vektor

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} T_x \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}T_{rr} \\ T_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

darstellen.

Abb. 5.7 zeigt die Bahn des Spannungstensors bei  $r/R = 0$  und  $z/R = 0.15625$  jeweils für isotrope und kinematische Verfestigung. Der Spannungstensor beginnt seine Bahnkurve im Punkt  $\mathbf{T}'_0$ , nimmt bei  $h = h_t$  den Punkt  $\mathbf{T}'_t$  ein und bewegt sich während der Entlastung bis zum Punkt  $\mathbf{T}'_r$ . Die eingezeichneten Geraden stellen die Fließfläche des Mises-Zylinders und dessen Achse im Zustand  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'_t$  dar. Die Veränderung der Fließfläche erfolgt bei isotroper Verfestigung durch Vergrößerung des Fließradius in Abb. 5.7a, bzw. durch Bewegung der Zylinderachse infolge kinematischer Verfestigung (Abb. 5.7b). Betrachtet man die Bewegung von  $\mathbf{T}'_t$  nach  $\mathbf{T}'_r$ , so trifft  $\mathbf{T}'$  im Fall kinematischer Verfestigung auf die Fließfläche gegenüber, wodurch erneute plastische Deformation einsetzt. Dieses Verhalten ist in diesem Beispiel bis zu der Koordinate  $z/R = 0.937$  zu beobachten.

Im Fall isotroper Verfestigung sind plastische Deformationen während der Entlastung nicht ausgeschlossen. In unserem Beispiel treten diese im Bereich direkt außerhalb des Kontakttrandes auf. Das betreffende Gebiet ist jedoch klein und befindet sich weitab vom Kontaktgebiet. Die Ergebnisse einer Finite-Elemente-Studie über Mehrfach-Eindrücke bei isotroper Verfestigung [47] zeigen, daß die dabei entstehenden Hysteresen vernachlässigbar sind. Dies deckt sich mit den Erfahrungen dieser Arbeit. Aufgrund dessen wird die Rückverformung bei rein isotroper Verfestigung im folgenden als elastische Rückverformung bezeichnet.

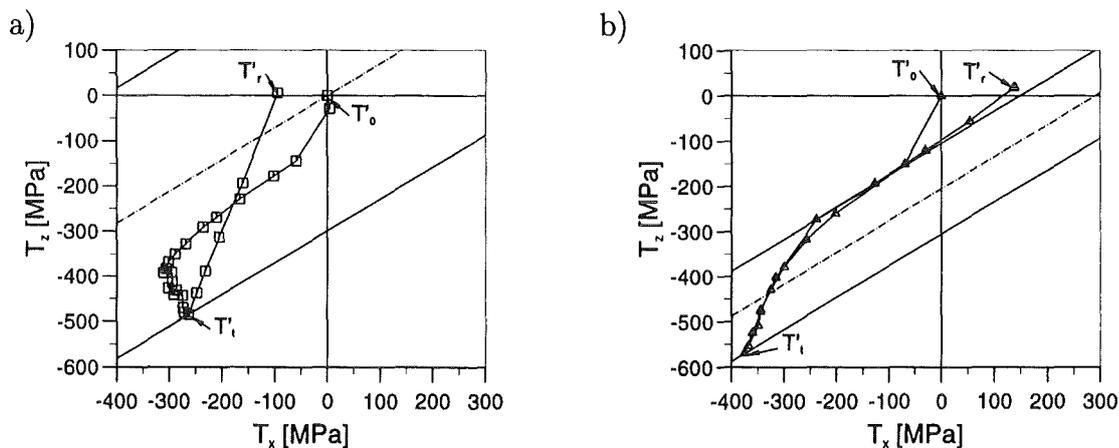


Abbildung 5.7: Trajektorie des Spannungstensors  $\mathbf{T}'$  für einen materiellen Punkt in der Symmetrieachse a) isotrope Verfestigung; b) kinematische Verfestigung.

Als Maß der Rückverformung, im Englischen als *recovery* bezeichnet, wird die Größe  $r$  eingeführt, definiert mit

$$r := \frac{h_t - h_r}{h_t} \quad (5.15)$$

(s. Abb. 2.1b). Die Rückverformung gibt an, um welchen Anteil von  $h_t$  sich die Oberfläche während der Entlastung zurückbewegt. Für lineare Verfestigung besteht eine Abhängigkeit von den dimensionslosen Parametern in der Form (siehe dazu auch die in (3.17), (3.18) eingeführten Definitionen über dimensionslose Größen)

$$r = \hat{r} \left( h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_{T,i}^*, E_{T,k}^* \right) . \quad (5.16)$$

Zur Reduzierung der Variationen sind die folgenden Betrachtungen auf gleich tiefe Eindrücke mit  $h_t^* = 0.1$  und jeweils rein isotrope, bzw. rein kinematische Verfestigung beschränkt. Zur vereinfachten Darstellung werden die Rückverformungen unterschieden mit

$$\begin{aligned} r_i &= \hat{r}_i \left( 0.1, 0.3, \sigma_y^*, E_T^*, 0 \right) \\ &= \tilde{r}_i \left( \sigma_y^*, E_T^* \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

und

$$\begin{aligned} r_k &= \hat{r}_k \left( 0.1, 0.3, \sigma_y^*, 0, E_T^* \right) \\ &= \tilde{r}_k \left( \sigma_y^*, E_T^* \right) . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Werte von  $r_i$  und  $r_k$  für die Simulationen mit den Parametern  $10^{-4} \leq \sigma_y^* \leq 10^{-2}$  und  $10^{-3} \leq E_T^* \leq 1$  sind in Abb. 5.8 dargestellt.

Durch Differenzbildung ergibt sich die plastische Rückverformung

$$\Delta r = r_k - r_i \quad (5.19)$$

als Maß für den Effekt kinematischer Verfestigung. Die in Abb. 5.9 dargestellte Kurvenschar für  $\Delta r$  zeigt, daß der Unterschied in der Rückverformung für solche Fälle gegen Null geht, welche elastischem ( $E_T \rightarrow E$  bzw.  $\sigma_y \rightarrow \infty$ ) oder ideal plastischem ( $E_i \rightarrow 0$ ) Materialverhalten nahe kommen.

Die experimentelle Ermittlung von  $r$  läßt nicht den direkten Schluß auf die Existenz kinematischer Verfestigung zu, da das zugehörige  $r_i$  unbekannt ist. Deshalb muß eine erneute Belastung  $P_r(h)$  durchgeführt werden, womit wiederum plastische Verformungen induziert werden.

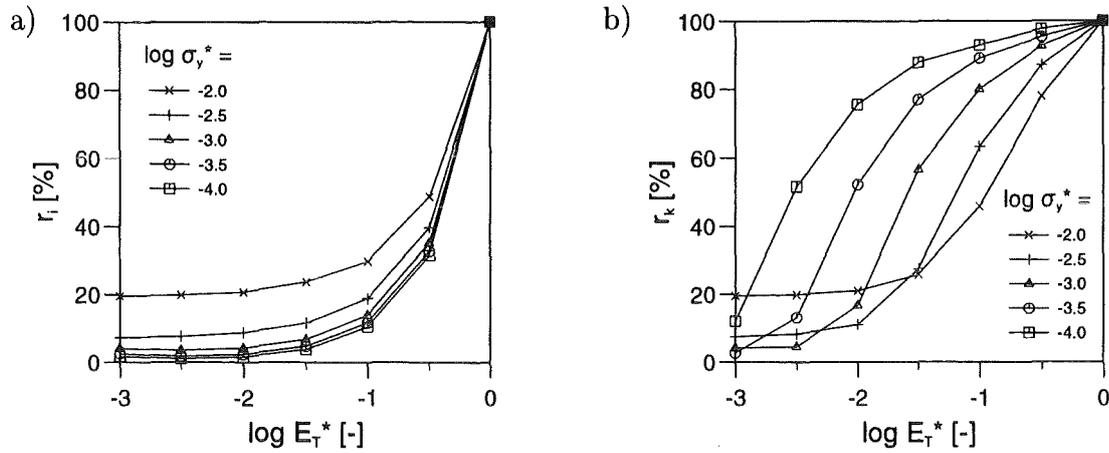


Abbildung 5.8: Rückverformung  $r$  für a) isotrope Verfestigung; b) kinematische Verfestigung.

### 5.3.3 Zyklische Belastung

Ein eindeutiger Nachweis für kinematische Verfestigung gelingt, indem die dafür charakteristischen plastischen Deformationen im Entlastungspfad sichtbar gemacht werden.

Bei Erreichen der Eindringtiefe  $h_r$  am Ende der Entlastung ist die plastische Deformation für eine verringerte Steigung der  $P$ - $h$ -Kurve verantwortlich (siehe Abb. 5.10). Bei der Wiederbelastung ist die Deformation zunächst elastisch, bis erneut plastische Verformung einsetzt. Daraus resultiert eine im Vergleich zur Entlastung steilere Tangente im Punkt  $h = h_r$ . Die entstehende Hysterese spiegelt die plastischen Deformationsabläufe im Werkstoff wieder und bietet somit ein geeignetes Mittel zur Untersuchung des Ver-

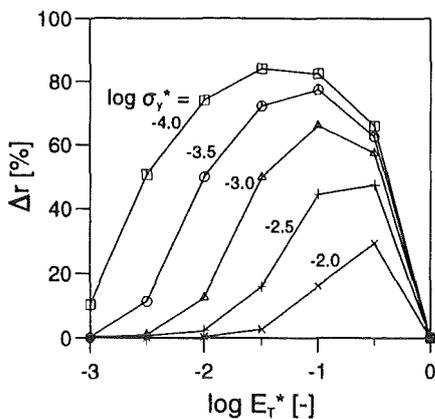


Abbildung 5.9: Plastische Rückverformung  $\Delta r$ .

festigungstyps. Um eine eindeutige Bezeichnung der betrachteten Last-Eindrucktiefen-Daten zu ermöglichen, wird die Entlastungskurve im folgenden als  $P_u$ - $h$ -Kurve und die Wiederbelastungskurve als  $P_r$ - $h$ -Kurve bezeichnet (siehe Abb. 5.10).

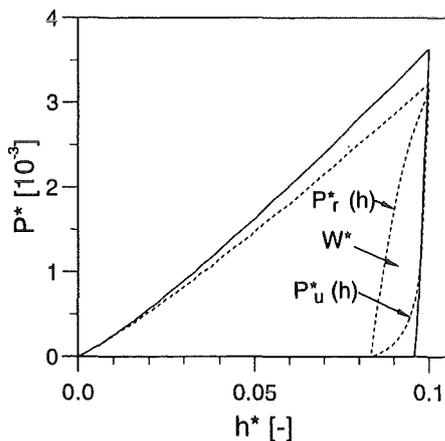


Abbildung 5.10: Zyklische Belastung für  $\sigma_y^* = 10^{-3,0}$  und  $E_T^* = 10^{-2,0}$ : reine isotrope (—) und reine kinematische Verfestigung (- - -).

Die Arbeit des Zyklus ist zu berechnen nach

$$W = W_u + W_r, \quad (5.20)$$

wobei die Entlastungsarbeit mit

$$W_u = \int_{h_t}^{h_r} P_u(h) dh \quad (5.21)$$

und die Arbeit der Wiederbelastung mit

$$W_r = \int_{h_r}^{h_t} P_r(h) dh \quad (5.22)$$

berechnet wird.

Analog (5.16) kann die Abhängigkeit von  $W$  dimensionslos in der Form

$$W^* = \hat{W}(h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_{T,i}^*, E_{T,k}^*) \quad (5.23)$$

geschrieben werden. Zur Entdimensionierung der Schleifenfläche werden sinnvollerweise Größen herangezogen, die für die Schleife selbst charakteristische Abmessungen darstellen. Dazu bietet sich die von den Eckpunkten der Schleife aufgespannte rechteckige Fläche an, womit

$$W^* = \frac{W}{P_t(h_t - h_r)}. \quad (5.24)$$

Eine weitere Charakterisierung der Hysterese kann z.B. durch Betrachtung der Öffnung  $\Delta P$  in der Schleifenmitte vorgenommen werden, definiert durch

$$\Delta P = P_r(h_m) - P_u(h_m) \quad (5.25)$$

mit

$$h_m = \frac{h_t + h_r}{2} . \quad (5.26)$$

Die Öffnung  $\Delta P$  wird in der Form

$$\Delta P^* = \frac{\Delta P}{P_t} \quad (5.27)$$

entdimensioniert.

Wie im vorigen Abschnitt werden die Simulationen für die Parameter  $h_i^* = 0.1$  und  $\nu = 0.3$  bei rein kinematischer Verfestigung durchgeführt, womit

$$W^* = \tilde{W}(\sigma_y^*, E_T^*) \quad (5.28)$$

bzw.

$$\Delta P^* = \Delta \tilde{P}(\sigma_y^*, E_T^*) . \quad (5.29)$$

Die in Abb. 5.11 dargestellten Ergebnisse zeigen in Übereinstimmung zu  $\Delta r$  ausgeprägte Schleifenflächen für kleine Fließspannungen und hohe Werte des Tangentenmoduls.

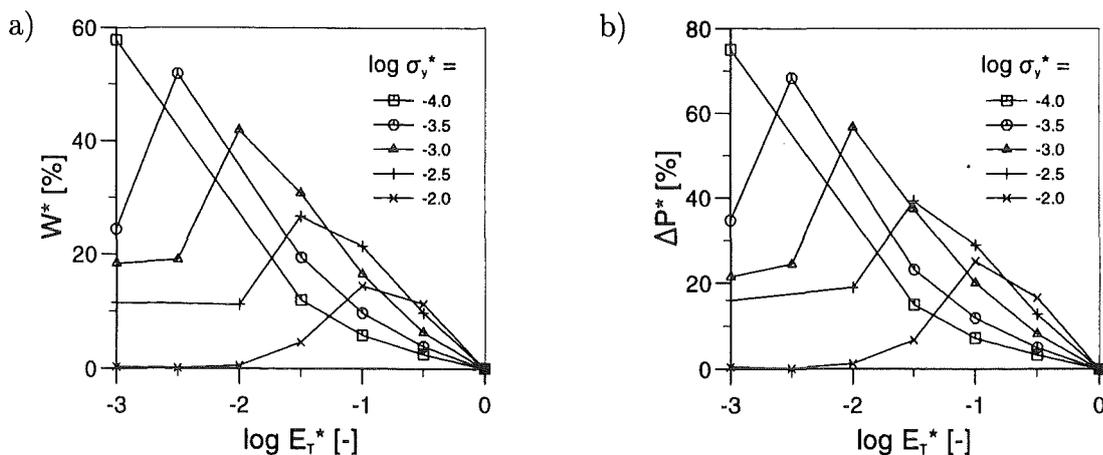


Abbildung 5.11: a) Arbeit  $W^*$  und b) Öffnung  $\Delta P^*$  bei zyklischer Belastung für lineare kinematische Verfestigung.

Der Vergleich der Diagramme in Abb. 5.11 deutet auf eine starke Korrelation der beiden Größen hin. Die Auftragung von  $\Delta P^*$  über  $W^*$  für alle Materialparameter-Kombinationen in Abb. 5.12 zeigt eine weitgehend lineare Abhängigkeit. Die Regressionsgerade durch die Datenpunkte liefert den Zusammenhang

$$\Delta P^* = 1.316W^* . \quad (5.30)$$

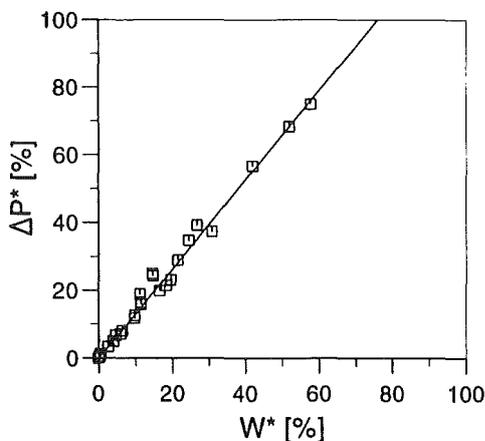


Abbildung 5.12: Korrelation der Öffnung  $\Delta P^*$  und der Arbeit  $W^*$ .

### 5.3.4 Nichtlineare Verfestigung

Die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte zeigen, daß lineare kinematische Verfestigung plastische Rückverformung und Hysteresebildung nach sich zieht. Reales Werkstoffverhalten weist nichtlineare Verfestigung auf, die z.B. mit den Evolutionsgleichungen (3.5) und (3.6) modelliert werden kann. Zunächst ist es denkbar, daß die beschränkte Verfestigung zu einem Verschwinden der Hysteresen führen könnte. Um dies nachzuprüfen, werden für die drei Beispiele, die in Abb. 5.2 dargestellt sind, zyklische Eindruckversuche bei einer Eindrucktiefe  $h^* = 0.2$  simuliert. Die so erzeugten Last-Eindrucktiefe-Kurven sind in Abb. 5.13a dargestellt.

Die Belastungskurven sind im Gegensatz zu linearer Verfestigung deckungsgleich. Daran wird deutlich, wie stark die Verfestigung bei hohen Dehnungen den Kraft-Eindrucktiefe-Verlauf beeinflusst. Da die beschränkte Verfestigung der Realität näher kommt als lineare Verfestigung, kann davon ausgegangen werden, daß sich Effekte kinematischer Verfestigung in der Belastungskurve im praktischen Fall kaum bemerkbar machen.

Der Unterschied in der Rückverformung ist anhand der Entlastungskurven schwer zu quantifizieren. Es findet sich jedoch eine deutlich sichtbare Korrelation zwischen der

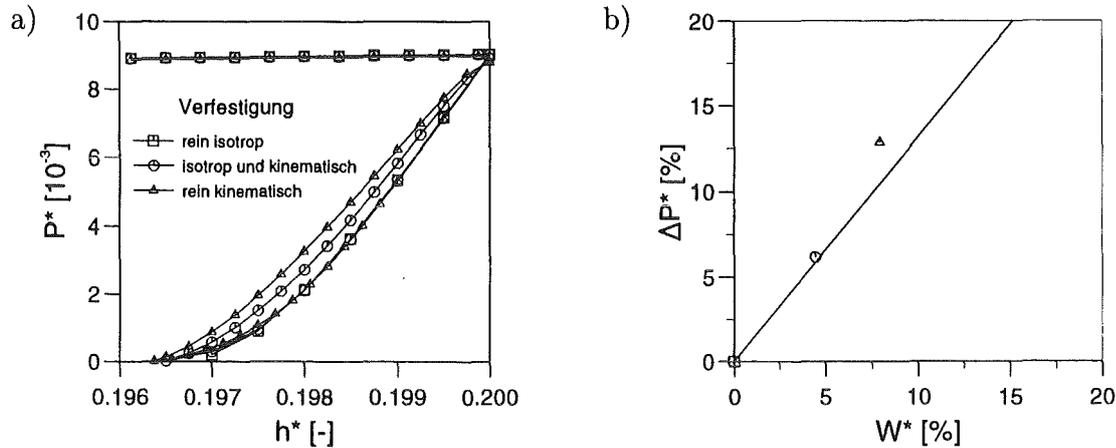


Abbildung 5.13: a) Hysteresebildung für nichtlineare Verfestigung bei verschiedenen Anteilen kinematischer Verfestigung (Theorie großer Deformationen); b) Arbeit und Öffnung. Die Gerade entspricht der Beziehung (5.30).

Schleifenöffnung  $\Delta P^*$  und dem Anteil an kinematischer Verfestigung. Wie in Abb. 5.13b zu erkennen ist, beträgt der Wert von  $\Delta P^*$  für reine kinematische Verfestigung etwa das Doppelte im Vergleich zu dem Ergebnis mit isotroper und kinematischer Verfestigung gleichen Anteils.

Die Messung der Hysterese ist folglich nicht nur geeignet, kinematische Verfestigung nachzuweisen, sondern auch deren Anteil an der Verfestigung qualitativ abzuschätzen. Zusätzlich ist in Abb. 5.13b die Regressionsgerade, gewonnen für lineare Verfestigung bei der Eindringtiefe  $h^* = 0.1$ , unterlegt. Es zeigt sich, daß im Fall gemischter Verfestigung der Zusammenhang nach (5.30) gut wiedergegeben wird, während der Punkt  $(W^*, \Delta P^*)$  für reine kinematische Verfestigung etwas nach oben abweicht. Die hier im wesentlichen bestätigte Beziehung (5.30) ist demnach weitgehend unabhängig von der Eindringtiefe. Eine umfassende Betrachtung der zyklischen Belastungen in Bezug auf (5.30) bei unterschiedlichen Eindringtiefen wird im folgenden Abschnitt durchgeführt.

### 5.3.5 Experimentelle Untersuchungen

Mit den Erkenntnissen der vorangegangenen Abschnitte sollte es möglich sein, die Existenz kinematischer Verfestigung mit einfachen zyklischen Eindruckexperimenten nachzuweisen.

Bislang ist noch nicht geklärt, ob die Eindringtiefe, bei der die Hysterese aufgenommen

wird, einen Einfluß auf die Werte von  $\Delta P^*$ ,  $W^*$  und deren Verhältnis hat. Dazu wurden experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Die in Kap. 4 vorgestellten Werkstoffe werden zyklischen Eindruckversuchen unterworfen, wobei die Last  $P_t$  von Zyklus zu Zyklus erhöht wird. Viskose Effekte bei der Hysteresebildung werden durch das Einfügen einer Kriechphase vor der Entlastung minimiert. Dadurch entsteht ein horizontaler Bereich in der  $P$ - $h$ -Kurve zwischen dem Be- und Entlastungsprozeß (siehe Abb. 5.14).

Aus den  $P$ - $h$ -Kurven in Abb. 5.14 entsteht durch die Auswertung der Lastzyklen das  $\Delta P^*$ - $W^*$ -Diagramm in Abb. 5.15. Jeder Punkt entspricht einer Hysterese des betreffenden Werkstoffes.

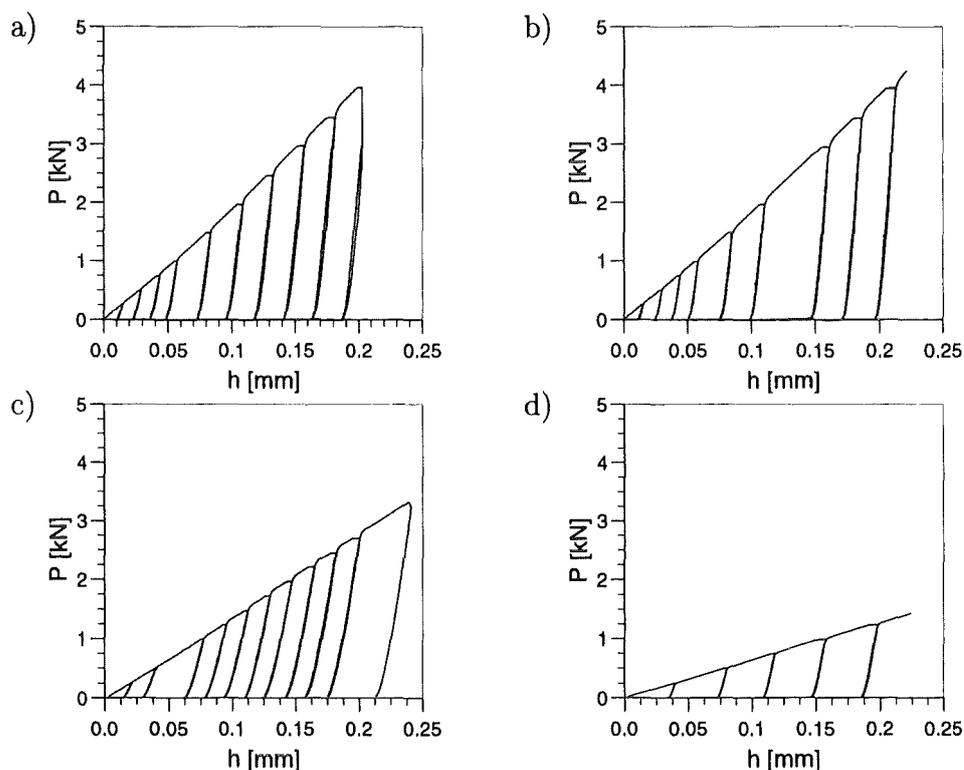


Abbildung 5.14: Zyklische Eindruckversuche für a) X10 CrNiMoTi 18 10; b) St52-3; c) AlMgSi 1, gehärtet; d) AlMgSi 1, gegläht.

Für den betrachteten Eindrucktiefenbereich ist die Streuung der Werte regellos und kann nicht auf eine Abhängigkeit von der Eindrucktiefe zurückgeführt werden. Die Lage der  $\Delta P^*$ - $W^*$ -Wertepaare bestätigt weitgehend die in Gleichung (5.30) ermittelte Beziehung, die in Abb. 5.14 als Gerade eingezeichnet ist. Lediglich der austenitische Stahl zeigt eine

deutliche Abweichung nach oben, wie sie in den FE-Simulationen für reine nichtlineare kinematische Verfestigung festgestellt wurde.

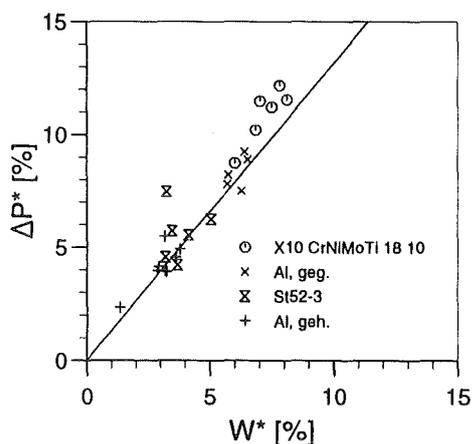


Abbildung 5.15: Auswertung der Schleifenflächen bei verschiedenen Eindringtiefen. Die Gerade entspricht der Relation nach Gleichung (5.30).

Zum Vergleich sind geeignete Spannungs-Dehnungs- und Last-Eindringtiefe-Hysteresen in Abb. 5.16 dargestellt. Die Graphen sind nach dem  $\Delta P^*$ -Wert sortiert. Die Verhältnisse, wie sie in Abb. 5.13 aus Finite-Elemente-Simulationen vorausgesagt wurden, werden von den Experimenten sehr gut wiedergegeben. Die Werkstoffe mit den größten Werten von  $W^*$  bzw.  $\Delta P^*$  zeigen auch bei den Zugversuchen deutliche Effekte einer kinematischen Verfestigung. Selbst gehärtetes Aluminium mit dem geringsten Anteil an kinematischer Verfestigung zeigt eine Hysteresebildung. Daher kann davon ausgegangen werden, daß bei Eindringversuchen mit realem Materialverhalten kinematische Verfestigung immer in Form von Hysteresen festzustellen sein wird.

## 5.4 Reibung

Ein weiterer Aspekt des Eindringversuchs ist die Frage nach dem Einfluß der Reibung. In der neueren Literatur finden sich Beispiele für Finite-Elemente-Simulationen mit kegelförmigen Prüfkörpern, die den Reibungseinfluß bei Variation des Reibkoeffizienten [36] (Theorie kleiner Deformationen) und Variation des Spitzenwinkels [6] untersuchen. Für den Fall eines starren Prüfkörpers, der unter Adhäsion in den elastischen Halbraum gedrückt wird, leitete Spence eine analytische Lösung für kleine Deformationen her [42]. Adhäsion bedeutet eine ideale Haftung im Kontaktgebiet. Von Interesse ist der Einfluß auf die Last-Eindringtiefe-Kurve. Spence gibt die Lösungen für die Last als Funktion des Kontaktradius für den Fall mit und ohne Haftung an, wobei das Verhältnis der beiden Lasten allein von der Querkontraktionszahl  $\nu$ , wie in Abb. 5.17 dargestellt, abhängt.

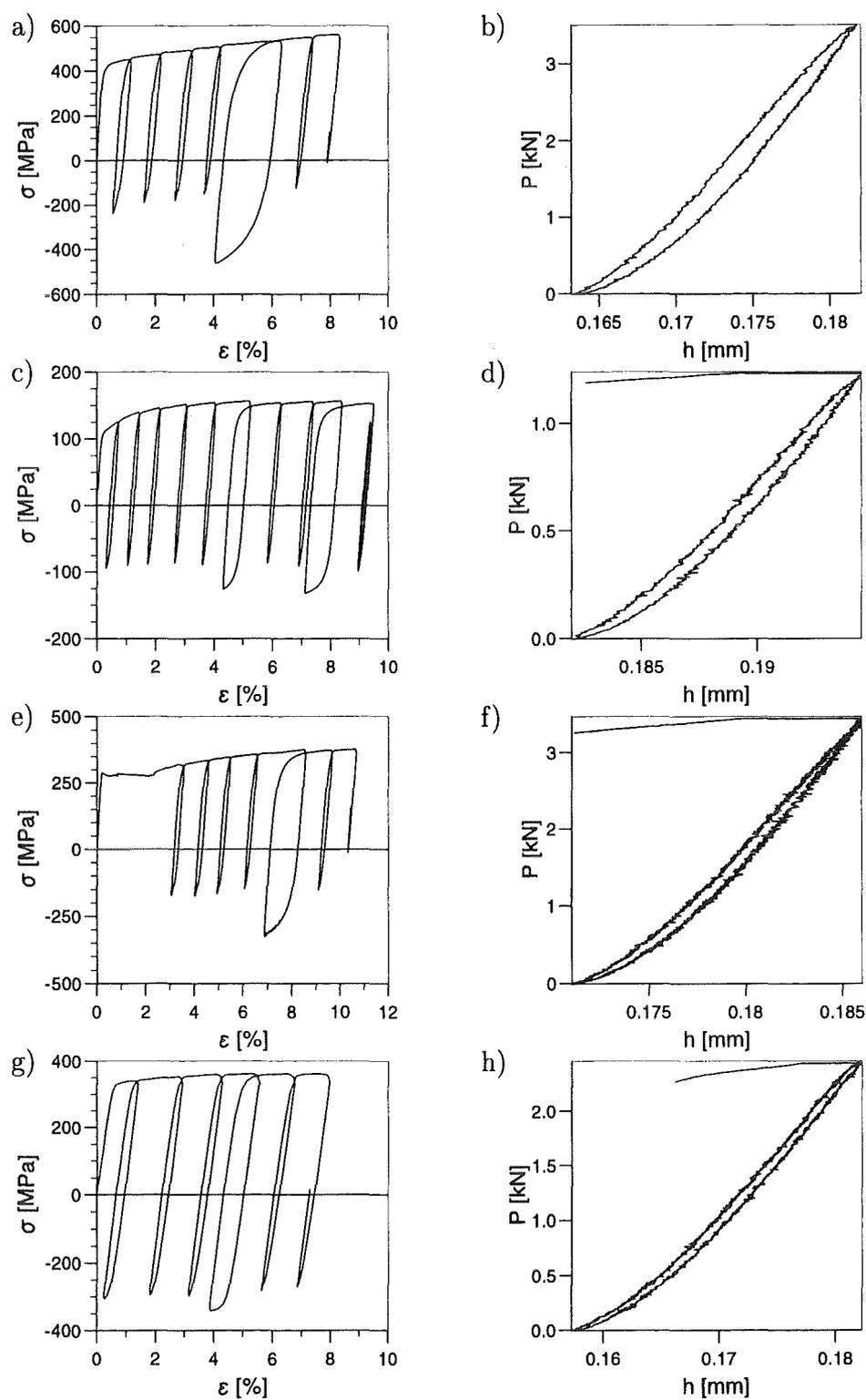


Abbildung 5.16: Zugversuche ( $\sigma := F/A_0$ ,  $\varepsilon := \Delta l/l_0$ ) und Eindruckversuche für a,b) X10 CrNiMoTi 18 10; c,d) AlMgSi 1, gegläht; e,f) St52-3; g,h) AlMgSi 1, gehärtet.

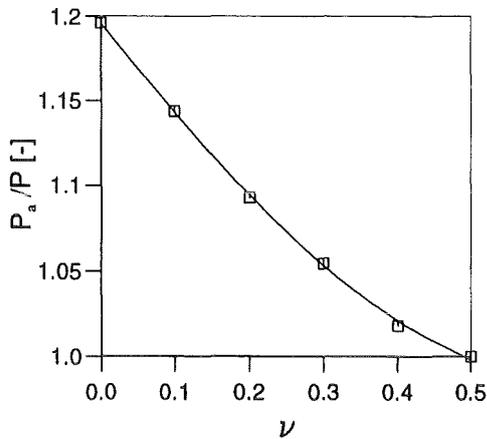


Abbildung 5.17: Verhältnis der Last mit Adhäsion  $P_a$  zur Last  $P$  im reibungsfreien Fall als Funktion der Querkontraktionszahl  $\nu$ , entnommen aus [42].

Das Ergebnis stellt für das Reibungsproblem eine obere Schranke dar, d.h. für z.B. eine Querkontraktionszahl von  $\nu = 0.3$  wird die Last infolge Reibung bei gegebenem Kontaktradius nicht stärker als 5% von der reibungsfrei ermittelten Last abweichen. Es sei angemerkt, daß die Eindringtiefe dabei ebenfalls unterschiedliche Werte annimmt. Im Fall von Coulomb'scher Reibung bildet sich ein Gebiet idealer Haftung ausgehend vom Mittelpunkt bis zu einem Kontaktradius  $r = c$  (siehe [23], Kap.5.4). Außerhalb finden Gleitungen statt, die die Schubspannungen mit zunehmendem Radius bis  $r = a$  vollständig abbauen. Die Lage des äußeren Haftrandes  $c$  ist abhängig von dem Quotienten des Reibkoeffizienten  $\mu$  und des Dundurs-Parameters

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{(1 - 2\nu_i)/G_i - (1 - 2\nu)/G}{(1 - \nu_i)/G_i - (1 - \nu)/G}, \quad (5.31)$$

wobei mit monoton wachsendem  $\mu/\beta$  zwischen 0 und  $1.5c$  monoton von 0 bis  $a$  ansteigt. Für die Verhältnisse der hier durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen mit einem starren Prüfkörper ( $G_i \rightarrow \infty$ ) und der Querkontraktionszahl des Probenmaterials  $\nu = 0.3$  ergibt sich  $\beta = 0.286$ . Somit dürfte sich die gesamte Kontaktfläche für Werte von  $\mu > 0.43$  in haftendem Zustand befinden, womit nach Spence eine etwa 1.05-fache Last im Verhältnis zum reibungsfreien Fall vorliegt.

Der Einfluß der Reibung auf den Absolutwert der Last  $P$  ist somit von untergeordneter Bedeutung. Andererseits könnte der dissipative Charakter der Reibung bei zyklischer Belastung zur Ausbildung einer Hysterese führen. Sollte dies der Fall sein, so wäre die Identifikation der kinematischen Verfestigung infolge von Reibungseffekten mit Unsicherheiten beaufschlagt.

An einem Beispiel gemäß Abb. 5.10 soll diese Möglichkeit untersucht werden. Dazu werden Finite-Elemente-Simulationen für lineare isotrope Verfestigung mit Coulomb'scher

Reibung bei verschiedenen Reibkoeffizienten  $\mu$  durchgeführt. Die Werte für  $\mu$  sind so gewählt, daß die Fälle reibungsfreien Gleitens ( $\mu = 0$ ), perfekter Haftung ( $\mu = 1.0 > 0.43$ ) und etwa 50% Haftung und 50% Gleiten ( $\mu = 0.2$ ) berücksichtigt werden. Abb. 5.18 zeigt die Ergebnisse, wobei die  $P$ - $h$ -Kurven der Übersicht wegen jeweils um  $0.5 \cdot 10^{-3}$  nach oben versetzt dargestellt sind.

Anhand dieser Ergebnisse wird ersichtlich, daß die Kurven einen leicht unterschiedlichen Wert für  $h_r$  aufweisen. Sinnvollerweise werden die Abweichungen anhand des Entlastungsweges verglichen, der definiert ist durch

$$\delta_t = h_t - h_r . \quad (5.32)$$

Mit wachsendem  $\mu$  sinkt  $h_r$ , was zu einer Vergrößerung von  $\delta_t$  um 3% für  $\mu = 0.2$  und um 6% für  $\mu = 1.0$  führt.

Die Ent- und Wiederbelastungskurven decken sich bis zum Erreichen einer Eindringtiefe von 87.5% von  $\delta$  für  $\mu = 0.2$  und 80.0% von  $\delta$  für  $\mu = 1.0$ . Bei Überschreitung dieses Wertes zweigt die Wiederbelastungskurve unter die Entlastungskurve ab, d.h. es wird über den Lastzyklus Energie frei.

Die Deckungsgleichheit der Kurven im unteren Bereich ist wie folgt zu erklären. Im entlasteten Zustand ( $h = h_r, P = 0$ ) ist die Tangente im Kontaktpunkt horizontal und Reibkomponenten können nur in radialer Richtung auftreten. Wegen der stetigen Form des kugeligen Prüfkörpers kann dies auf Eindringtiefen  $h \gtrsim h_r$  übertragen werden. Damit können kleine Auslenkungen  $h > h_r$  aufgrund von Reibungseffekten keine vertikale Kraftkomponente von einem solchen Ausmaß erzeugen, daß diese zu einer Änderung der Steigung im Punkt ( $h = h_r, P = 0$ ) ähnlich der kinematischen Verfestigung führen könnte (vergleiche Abb. 5.10).

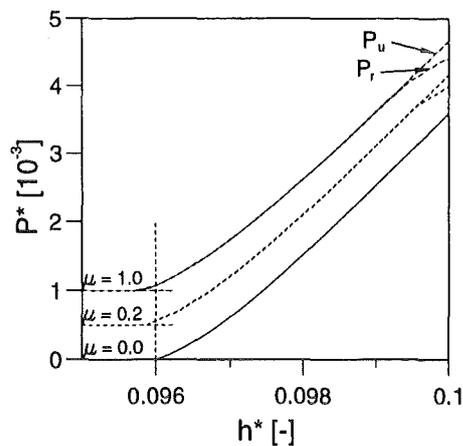


Abbildung 5.18: Zyklische Belastung für lineare isotrope Verfestigung unter Coulomb'scher Reibung (Kurven versetzt dargestellt).

Die verrichtete Arbeit des betreffenden Zyklus hat im Vergleich zu der entsprechenden Arbeit bei kinematischer Verfestigung das entgegengesetzte Vorzeichen.

Aus diesen Betrachtungen ist ersichtlich, daß Reibungseffekte bei der Beurteilung der Verfestigungsart keine Rolle spielen. Zugleich wird deutlich, daß die gezielte Ermittlung des Reibkoeffizienten mit Hilfe des Eindruckversuchs zumindest mit kugelförmigen Prüfkörpern nicht durchführbar ist.

Zu diesem Zweck sind spitze Prüfkörper besser geeignet. Die von Atkins & Tabor durchgeführten Untersuchungen [2] zeigen einen Übergang vom drückenden Prüfkörper mit großem Spitzenwinkel zum schneidenden Prüfkörper bei einem Spitzenwinkel bei etwa  $105^\circ$ . An diesem Scheidepunkt ändert sich nicht nur der Deformationsmode und damit der Zusammenhang zur charakteristischen Dehnung, sondern auch der Einfluß der Reibung aufgrund stärkerer Gleitungen.

Der Standard Vickers-Prüfkörper mit  $136^\circ$  Spitzenwinkel zählt demnach zu den drückenden Prüfkörpern, bei denen Reibungseffekte vernachlässigbar sind. Die Finite-Elemente-Simulationen von Bhattacharya & Nix [5] sowie von Cai [7] bestätigen dies. In der letzteren Arbeit wurde zudem der merkliche Einfluß der Reibung bei einem Spitzenwinkel von  $60^\circ$  festgestellt.

Die in [36] gefundenen Effekte des Reibkoeffizienten bei Vickers-Prüfkörpern widersprechen den obigen Beobachtungen. Als Grund hierfür ist die verwendete Formulierung des Materialmodells unter der Voraussetzung kleiner Deformationen zu vermuten, die speziell im Kontaktbereich zu falschen Verschiebungsfeldern führt. Für das Beispiel des kugelförmigen Prüfkörpers wurden in Kap. 3.4 bereits Vergleiche zwischen den Ergebnissen mit kleinen bzw. großen Deformationen durchgeführt. Die zugehörigen Radialverschiebungen an der Oberfläche, in Abb. 5.19 dargestellt, bestätigen obige These.

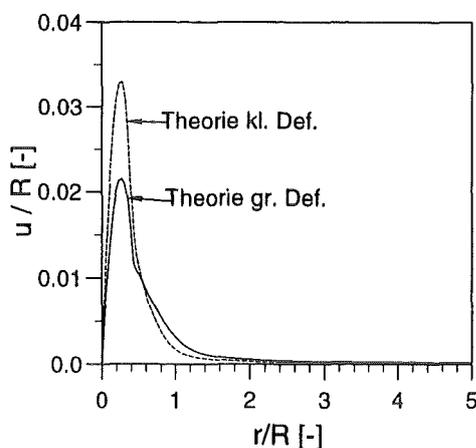


Abbildung 5.19: Vergleich der radialen Verschiebung  $u(r)$  aus den Finite-Elemente-Simulationen in Abb. 3.5.

Aufgrund der Theorie kleiner Deformationen ergeben sich nahezu doppelt so hohe radiale Verschiebungen in der Kontaktfläche. Bei spitzen Prüfkörpern wird dieser Effekt noch größer, wodurch der vermeintlich signifikante Reibungseinfluß infolge zu hoher Gleitungen zu erklären ist.

## 5.5 Viskosität

Durch die Viskosität eines Werkstoffes wird die Systemantwort geschwindigkeitsabhängig. Bei einachsigen Zugversuchen haben sich Standardversuche etabliert, die zur Untersuchung von viskosen Eigenschaften geeignet sind. Die Aufzeichnung der Probenverlängerung über der Zeit bei konstantgehaltener Kraft wird Kriechkurve genannt. Eine Haltezeit bei weggesteuerten Versuchen wird als Relaxation bezeichnet. Die Einführung von Haltezeiten hat zwei Gründe. Zum einen kann aus der Relaxations- bzw. der Kriechkurve auf die Parameter der Viskosität geschlossen werden, zum anderen kann das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes mit einem Punkt der Gleichgewichtskennlinie identifiziert werden (siehe z.B. [45], Kap.6).

Für den Eindruckversuch sollen die Begriffe Kriechen und Relaxation übernommen werden, wobei zu berücksichtigen ist, daß das Konstanthalten der globalen Größen  $P$  oder  $h$  eine zeitliche Veränderung sowohl des Spannungs- als auch des Dehnungsfeldes infolge von Umlagerungseffekten nach sich ziehen kann.

Die Literatur zur Untersuchung von viskosen Effekten mittels Eindruckversuchen beschränkt sich auf Kriechvorgänge [40] und Belastungen mit verschiedenen aber konstanten Lastraten [33]. Die untersuchten Werkstoffe, wie z.B. Zinn und Blei-Zinn-Legierungen, zeigen bereits bei Raumtemperatur ausgeprägte Kriecheigenschaften. Unter der Annahme eines Norton-Kriechgesetzes wurden für Zug- und Eindruckversuche unter Verwendung geeigneter Dehnungs- und Spannungsmaße analog Tabor die zugehörigen Kriechexponenten bestimmt und eine gute Übereinstimmung festgestellt.

Im folgenden Abschnitt werden weitergehende Untersuchungen bezüglich Effekten der Viskoplastizität, siehe (3.1)-(3.7), durchgeführt. Betrachtet werden insbesondere die Verhältnisse zwischen den Systemantworten des viskoplastischen und des plastischen Stoffgesetzes bei gleichen Materialparametern.

### 5.5.1 Gleichgewichtskennlinie

Das Materialmodell der Viskoplastizität, formuliert mit den Gleichungen (3.1)-(3.7) besitzt bei monotoner, einachsiger Beanspruchung eine zugeordnete Gleichgewichtskennli-

nie, die dem Materialmodell der Plastizität entspricht.

Die experimentelle Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie geschieht im Fall von Zugversuchen punktweise mit Hilfe einer dehnungsgesteuerten, monotonen Belastung und eingefügten Relaxationsphasen ( $\varepsilon = \text{const}$ ). Mit zunehmender Dauer der Relaxation nähert sich die Spannungs-Dehnungs-Trajektorie asymptotisch dem korrespondierenden Punkt der zugeordneten Gleichgewichtskennlinie.

Werden solche Experimente mit Kriechphasen ( $\sigma = \text{const}$ ) durchgeführt, so kann eine unbegrenzte Zunahme der Dehnung auftreten. In diesem Fall hat die angelegte Spannung die maximal erreichbare Spannung der Gleichgewichtskennlinie überschritten, wodurch eine asymptotische Annäherung ausgeschlossen ist.

Die Fragestellung, ob die Gleichgewichtskennlinie analog zum Zugversuch mit Hilfe von Relaxations- oder Kriechphasen ermittelt werden kann, ist von grundsätzlicher Bedeutung bei der Ermittlung mechanischer Materialeigenschaften.

Mit Hilfe von Finite-Elemente-Berechnungen wurden Eindruckversuche für das Materialmodell der Plastizität und der Viskoplastizität mit Relaxations- bzw. Kriechphasen simuliert. Die nicht variierten Materialparameter sind in Tab. 5.1 eingetragen. Der Kugelradius beträgt  $R = 0.2 \text{ mm}$ .

Die dimensionslose Viskosität wird analog Gleichung 3.8 definiert mit

$$\eta^* = \frac{\eta \dot{h}}{E^n R} \quad (5.33)$$

Die in Abb. 5.20 dargestellten Verläufe zeigen das Verhalten für das Materialgesetz der Viskoplastizität bei Kriech- und Relaxationsversuchen mit unterschiedlichem  $\eta^*$ . Mit aufgetragen ist der entsprechende Verlauf für ein Plastizitätsmodell mit gleichen Verfestigungsparametern. Es ist zu beobachten, daß sowohl für den Kriech- als auch für den Relaxationsvorgang die Endpunkte unterhalb der Kennlinie des Plastizitätsmodells zu liegen kommen, wobei der Abstand mit zunehmendem  $\eta^*$  anwächst. Dieses Verhalten unterscheidet sich deutlich von dem bei Zugversuchen.

Größe	$E$	$\sigma_y$	$\beta$	$\gamma$	$n$
Einheit	[GPa]	[MPa]	[-]	[MPa]	[-]
Wert	100	100	33	150	1.5

Tabelle 5.1: Materialparameter für Studien mit dem Materialmodell der Viskoplastizität.

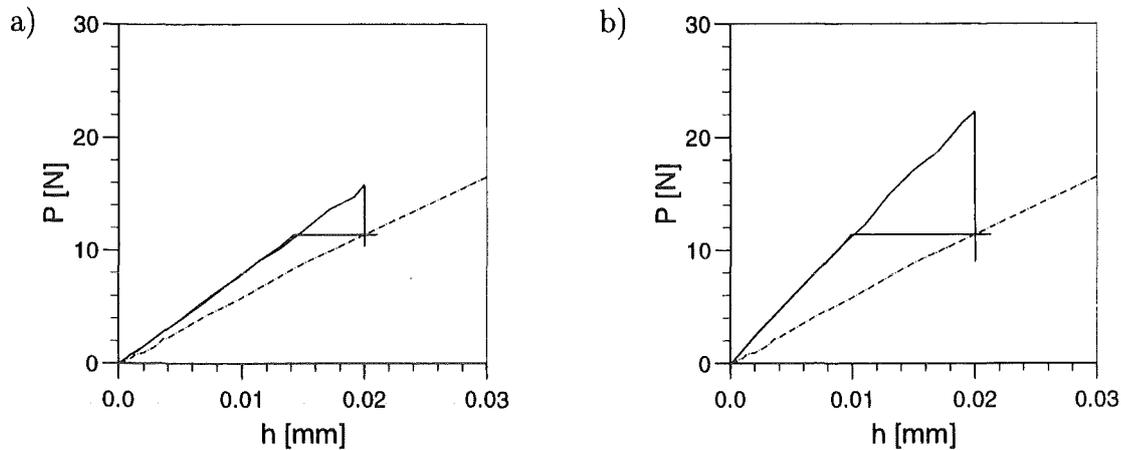


Abbildung 5.20: Simulation von Kriech- und Relaxationsphasen für viskoplastisches Materialverhalten. Die strichpunktierte Kurve entspricht der Kennlinie für das Materialmodell der Plastizität bei sonst gleichen Materialparametern: a)  $\eta^* = 1.075 \cdot 10^{-5}$ ; b)  $\eta^* = 5.376 \cdot 10^{-5}$ .

Als Ursache hierfür kann ein Effekt verantwortlich gemacht werden, den Storåkers und Larsson in [43] beschreiben. Sie führten FE-Simulationen mit einem Norton-Kriechgesetz durch und fanden einen Druckverlauf im Kontaktgebiet, der von innen nach außen deutlich ansteigt. Dies stellt ein gegensätzliches Verhalten zum Materialmodell der Plastizität dar, bei dem der Druck in der Symmetrieachse maximal ist und zum Kontaktrand kontinuierlich abfällt. Die stark unterschiedlichen Druckverläufe bewirken somit eine unterschiedliche inelastische Deformation.

Abb. 5.21 zeigt die Kriech- und Relaxationskurven aus Abb. 5.20. Bis zum Erreichen eines stationären Zustandes benötigen die Kriechexperimente eine Zeit von einigen tausend Sekunden während die Relaxationsversuche bereits nach einigen zehn Sekunden praktisch zum Stillstand gekommen sind. Materialien mit höherer Viskosität erreichen den stationären Zustand schneller. Die Kurve des entsprechenden plastischen Materials wird zur Zeit von etwa einer Größenordnung darunter geschnitten.

### 5.5.2 Eingefügte Haltezeiten

Zur Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie bei Zugexperimenten werden sukzessiv Relaxationen in gleichen Dehnungsabständen eingefügt. Beim einachsigen Zugversuch findet in diesem Fall keine Beeinflussung des Gleichgewichtswertes einer Relaxation durch

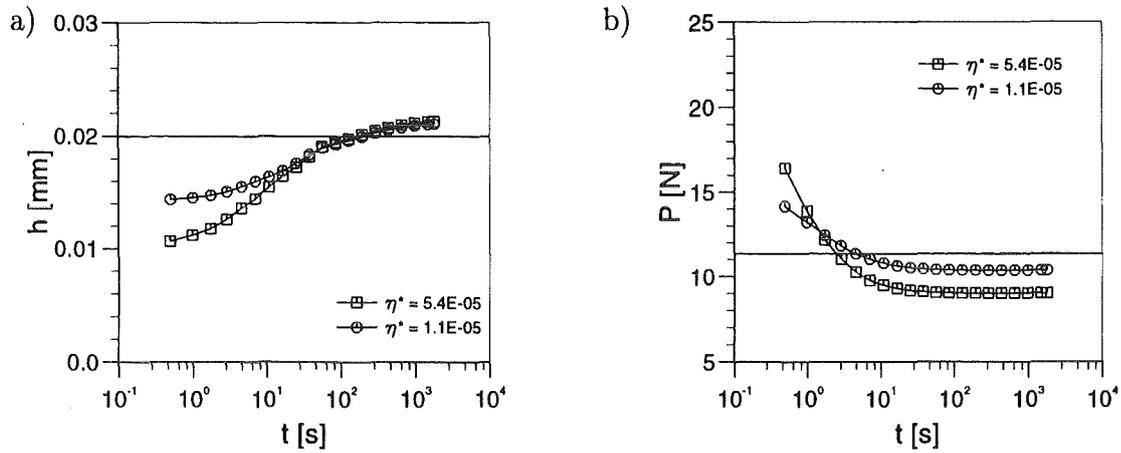


Abbildung 5.21: Darstellung der Kriechkurven a) und der Relaxationskurven b). Die horizontale Linie repräsentiert den zugeordneten Wert des Materialmodells der Plastizität.

vorangegangene Relaxationsphasen statt.

Im Fall des Eindruckversuchs kann dies zunächst nicht ausgeschlossen werden. Finite-Elemente-Simulationen mit  $\eta^* = 5.376 \cdot 10^{-5}$  und gleichem  $|\dot{h}|$ , in Abb. 5.22 dargestellt, zeigen, daß in der Tat beim Eindruckversuch ein kleiner Unterschied im Relaxationsendpunkt vorhanden ist. Der Effekt ist aber klein und kann in der Praxis vernachlässigt werden.

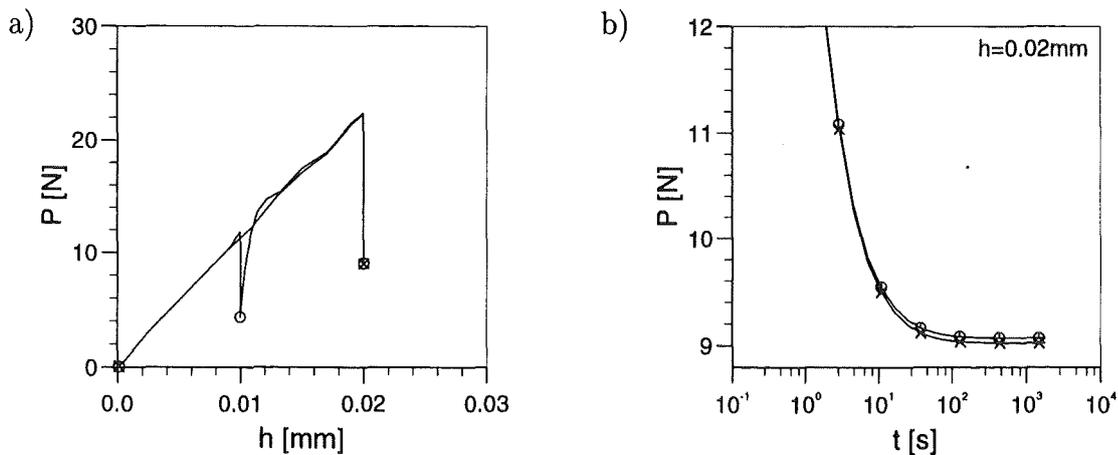


Abbildung 5.22: Eindrücke mit und ohne eingefügter Relaxationsphase bei gleicher Eindruckgeschwindigkeit: a)  $P$ - $h$ -Kurven; b) Relaxationskurven bei  $h/R = 0.1$ .

### 5.5.3 Experimentelle Untersuchungen

Für geglühtes Aluminium wurden sowohl Eindrücke mit eingefügten Relaxations- als auch mit eingefügten Kriechphasen durchgeführt. Zwei Meßkurven mit Relaxationsphasen und eine mit Kriechphasen sind in Abb. 5.23 dargestellt. Die Kurven weisen eine gute Reproduzierbarkeit auf. Die kraftgesteuerten Versuche wurden mit einer Lastrate von  $\dot{P} = 0.94 \text{ N/s}$  und einer Dauer der Kriechphasen von  $T_P = 870 \text{ s}$  gefahren. Die Lastrate entspricht in diesem Fall etwa einer Eindringtieferate zwischen  $0.15$  und  $0.18 \mu\text{m/s}$ . Bei den eindringtieferategesteuerten Versuchen wurden mit  $T_h = 240 \text{ s}$  Haltezeit und einer Eindringtieferate von  $\dot{h} = 1.58 \mu\text{m/s}$  gearbeitet.

Eine Erhöhung der Lastrate ist regelungstechnisch schwierig, da die hohe Steifigkeit des Versuchsaufbaus schnell zu Instabilitäten führt. Eine weitere Verringerung der Eindringtieferate scheitert an der begrenzten Auflösung der DAP-Karte. Aufgrund der nahezu identischen Verläufe der Belastungskurve kann jedoch davon ausgegangen werden, daß trotz dem Unterschied in den Eindringtieferaten die Messungen beider Typen verglichen werden können.

Entsprechend den Finite-Elemente-Simulationen befindet sich die Kurve der Relaxationsendpunkte unterhalb der Kurve, gebildet durch die Kriechendpunkte. Die korrespondierende Kurve für das Materialmodell der Plastizität mit gleichen Parametern dürfte demnach dicht oberhalb der Kurve der Kriechendpunkte liegen (vergleiche Abb. 5.20).

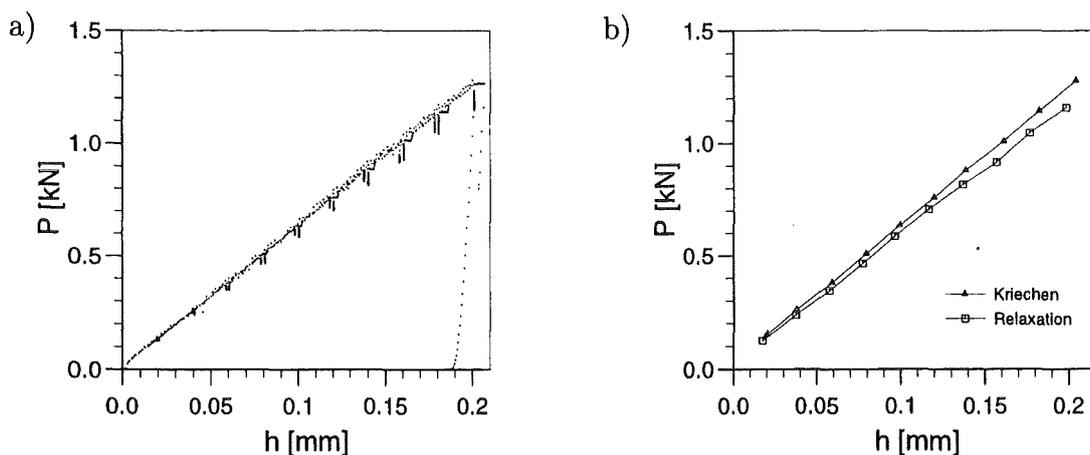


Abbildung 5.23: Eindrücke mit eingefügten Relaxations- und Kriechphasen bei geglühtem AlMgSi 1: a)  $P$ - $h$ -kurven; b) Kurven der Endpunkte von Kriech- und Relaxationsphasen.

## 6 Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Beim Eindruckversuch spiegeln sich die elastischen Eigenschaften analog dem Zugversuch im oberen Abschnitt der Entlastungskurve wieder. Es bietet sich daher an, anhand dieser den E-Modul zu ermitteln. Dies geschieht in der Regel mit Hilfe einer aus der Elastizitätstheorie bekannten, an die plastischen Verformungen angepaßten Lösung. In den folgenden Abschnitten werden zunächst die wesentlichen Methoden aus der Literatur näher erläutert und auf ihre Eigenschaften untersucht. Anschließend folgt die Entwicklung und Verifikation einer neuen Methode, speziell für kugelförmige Prüfkörper.

### 6.1 Methoden in der Literatur

Als Ausgangspunkt dient meist eine der Lösungen, wie sie z.B. von Harding & Sneddon für starre, rotationssymmetrische Eindruckkörper hergeleitet wurde [13]. Für die Berechnungen wurde ein elastischer Halbraum unter der Theorie kleiner Verzerrungen betrachtet, in den der starre Körper eingedrückt wird. Eine kurze Zusammenfassung dieser Herleitung findet sich z.B. in [36], weswegen im folgenden nur die Ergebnisse angegeben werden. Es sei hier noch erwähnt, daß im weiteren die Fälle der Kugel und des Zylinders betrachtet werden. Die Lösung für den Kegel ist in diesem Abschnitt lediglich aus Gründen einer vollständigen Darstellung enthalten.

Das Eindringen eines Kegels ergibt unter obigen Voraussetzungen bei gegebenem Kontaktradius  $a$  die Last

$$P = \frac{\pi}{2} E_r a^2 \cot \alpha , \quad (6.1)$$

wobei der halbe Spitzenwinkel des Kegels mit  $\alpha$  bezeichnet wird. Dabei befindet sich der Kontaktrand auf einer Tiefe von

$$w(r = a) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)h , \quad (6.2)$$

woraus sich der Zusammenhang zwischen dem Kontaktradius und der Eindrucktiefe mit

$$a = \frac{2}{\pi} h \tan \alpha \quad (6.3)$$

ergibt. Gleichung (6.3) eingesetzt in (6.1) liefert

$$P = \frac{2}{\pi} E_r h^2 \tan \alpha . \quad (6.4)$$

Für die Kugel mit dem Radius  $R$  ergibt sich die Last bei einem Kontaktradius der Größe  $a$  mit

$$P = \frac{4}{3} E_r \frac{a^3}{R}. \quad (6.5)$$

Mit der Voraussetzung von  $h^2/4 \ll Rh$  und unter Berücksichtigung der Tiefe des Kontaktrandes, gegeben durch

$$w(r = a) = \frac{1}{2} h, \quad (6.6)$$

ergibt sich der Zusammenhang

$$a = \sqrt{Rh}. \quad (6.7)$$

Somit kann (6.5) auch als Funktion der Eindrucktiefe geschrieben werden in der Form

$$P = \frac{4}{3} E_r \sqrt{Rh^3}. \quad (6.8)$$

Schließlich im Fall des zylindrischen Stempels resultiert

$$P = 2E_r a h, \quad (6.9)$$

wobei der Kontaktradius  $a$  gleich dem Radius des Zylinders und daher unabhängig von der Eindrucktiefe ist. Der in allen Gleichungen auftretende reduzierte Modul  $E_r$  ist definiert mit

$$E_r = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (6.10)$$

Für eine elastische Entlastung eines Eindrucks wird in der Regel davon ausgegangen, daß eine Verbindung zu den obigen analytischen Lösungen besteht. Daher werden die Gleichungen (6.8) und (6.9), wie im folgenden beschrieben, bei Eindruckexperimenten zur Auswertung von Entlastungen angewendet, denen plastische Verformungen im Verlauf der Belastung vorausgegangen sind [10, 11, 37].

### 6.1.1 Ableitung aus der Lösung für kugelförmige Prüfkörper

Bei kugelförmigen Prüfkörpern nutzen Field & Swain in [11] die Gleichung (6.8), wobei  $h$  durch die Entlastungsstrecke  $\delta = h - h_r$  ersetzt wird (siehe auch [23], S. 90–93). Die veränderte Oberflächenform durch die vorangegangene plastische Verformung spiegelt sich in der relativen Krümmung der gegenüberliegenden Flächen von Kugel und Probe im entlasteten Zustand wieder.

Bei Kontakt zweier kugelförmig gekrümmter, nicht konformer elastischer Körper ( $R/R_1 \ll 1$ ) wird der Radius  $R$  in (6.8) durch den relativen Radius  $R'$ , definiert mit

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}, \quad (6.11)$$

ersetzt (siehe dazu [23], Kap.4).  $R_1$  entspricht hierbei dem Radius des ehemaligen Kontaktbereiches der entlasteten Oberfläche (siehe Abb. 2.2). Als konforme Körper müssen dabei solche Körper aufgefaßt werden, die in kraftlosem Zustand annähernd gleiche Geometrie im zukünftigen Kontaktbereich aufweisen. Ein typisches Beispiel hierfür wäre ein in einer Bohrung gelagerter Zapfen bei geringem Spiel.

Für die Bestimmung von  $R'$  aus der Last-Eindrucktiefe-Kurve in [11] wird zunächst (6.7) aufgelöst nach  $R$

$$R = \frac{a^2}{h}. \quad (6.12)$$

Zur Anpassung an die Entlastung nach vorangegangener plastischer Deformation wird nun  $h$  durch  $\delta$  und  $R$  durch  $R'$  ersetzt, woraus

$$R' = \frac{a^2}{\delta_t} \quad (6.13)$$

folgt.

Analog ergibt sich aus (6.8)

$$E_r = \frac{3}{4} \frac{P_t}{\sqrt{R' \delta_t^3}}, \quad (6.14)$$

wobei  $\delta_t = h_t - h_r$  (siehe auch [8]).

Mit Einsetzen von (6.13) in (6.14) ergibt sich schließlich die Formel, wie sie in [11] angegeben ist:

$$E_r = \frac{3}{4} \frac{P_t}{a \delta_t}. \quad (6.15)$$

### 6.1.2 Auswertung mit der Lösung für den zylindrischen Stempel

In den Methoden von Doerner & Nix [10] sowie Pharr & Oliver [37] wird die Lösung des zylindrischen Stempels zur Ermittlung des E-Moduls bei Eindrücken mit spitzen Prüfkörpern verwendet. Pharr & Oliver konnten für elastisches Materialverhalten bei kleinen Deformationen zeigen, daß die Entlastungssteife  $S$  im Punkt  $(h_t, P_t)$  unabhängig von der Prüfkörperform und nur vom Wert des Kontaktradius bestimmt ist [39].

Es ergibt sich folglich die für jede Prüfkörperform unter den genannten Voraussetzungen gültige Beziehung (vergleiche Abb. 2.1b)

$$S = \left. \frac{dP_u}{dh} \right|_{h=h_t} = 2E_r a . \quad (6.16)$$

Da in der Praxis häufig pyramidenförmige Prüfkörper benutzt werden, wird wegen der quadratischen Kontaktfläche der Größe  $A$  (6.16) in die Form

$$S = \left. \frac{dP_u}{dh} \right|_{h=h_t} = 2E_r \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (6.17)$$

gebracht, woraus die Beziehung zur Ermittlung des reduzierten Moduls

$$E_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{A}} S \quad (6.18)$$

folgt.

Gleichung (6.18) wird ohne weitere Modifikation zur Auswertung von Entlastungen bei inelastischem Materialverhalten mit der folgenden Begründung verwendet. Zunächst treten bei der Entlastung wie im elastischen Fall lediglich kleine elastische Verformungen auf. Bezüglich der plastisch verformten Probenoberfläche wird argumentiert, daß diese, wie z.B. bei kugelförmigen Prüfkörpern, allein durch Verwendung von (6.11), ohne Veränderung der Struktur von (6.8) zu berücksichtigen ist. Somit sollte der Nachweis von Pharr & Oliver für den Fall der elastischen Entlastung einer plastisch deformierten Oberfläche analog gelten.

Ein praktisches Problem bei der Anwendung ist die Ermittlung der Kontaktfläche  $A$  aus den Last-Eindrucktiefe-Daten. Diese unterliegt wiederum den speziellen Annahmen, die ein Einsinken oder Aufwölben des Kontaktrandes mehr oder weniger berücksichtigen. Bei spitzen Prüfkörpern besteht bislang keine Möglichkeit zur Erfassung des Aufwölbens (siehe z.B. [37]).

### 6.1.3 Betrachtung der bekannten Methoden

Die Gleichungen (6.14) und (6.18) werden im folgenden anhand eines konkreten numerisch simulierten Beispiels auf ihre Eigenschaften untersucht. Für die Simulation wurde ein Materialgesetz der Plastizität mit multilinearer isotroper Verfestigung gewählt (siehe Abb. 6.1a). Zyklische Belastungen bei verschiedenen Eindrucktiefen liefern die Last-Eindrucktiefe-Kurve, dargestellt in Abb. 6.1b.

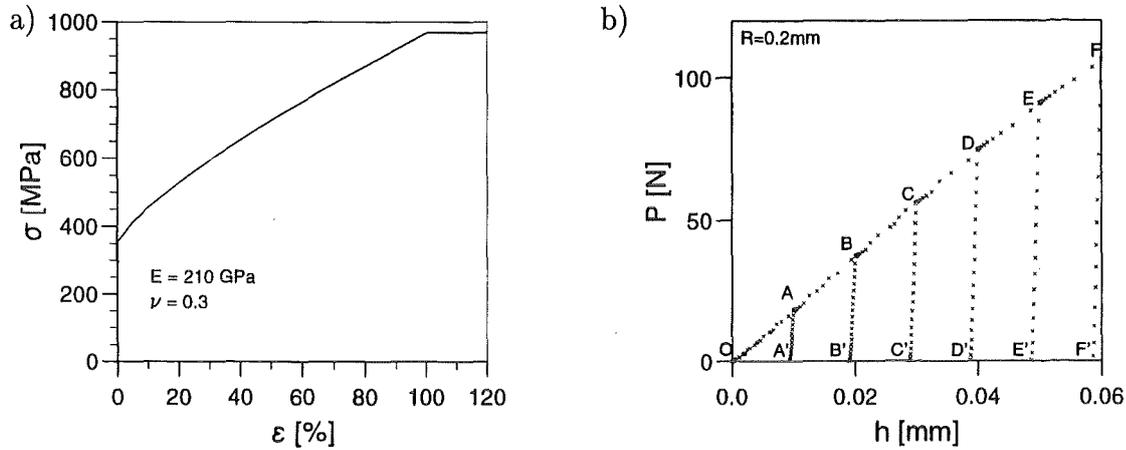


Abbildung 6.1: Simulation eines Eindruckversuchs für Plastizität mit multilinearer isotroper Verfestigung: a) Spannungs-Dehnungs-Kennlinie; b) Last-Eindrucktiefe-Kurve mit zyklischer Belastung bei steigender Eindrucktiefe.

Abb. 6.2a zeigt die deformierte Oberfläche nach jeder Entlastung sowie die gefitteten Kreisfunktionen. Die den Entlastungen zugeordneten geometrischen Daten sind in Tab. 6.1 aufgeführt.

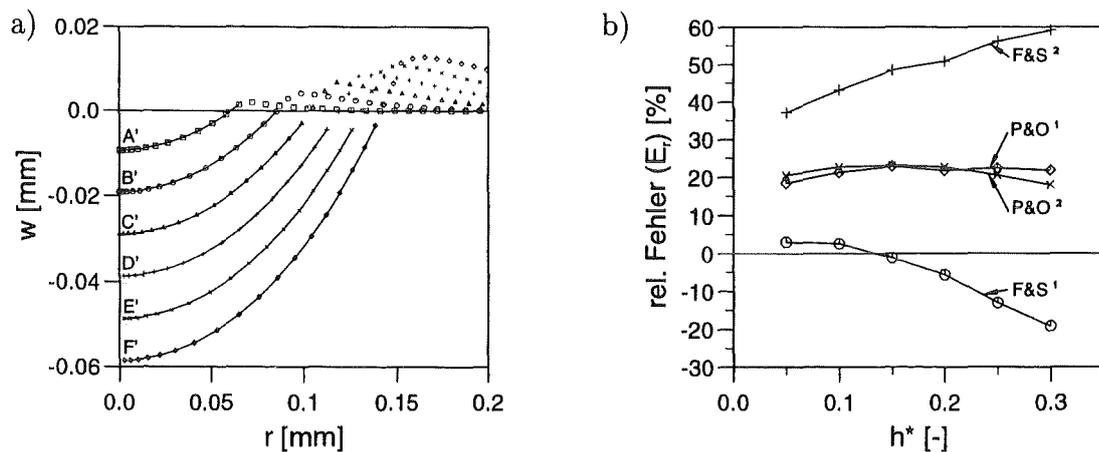


Abbildung 6.2: a) Fit der entlasteten Oberflächen aus der Simulation in Abb. 6.1; b) Fehler des berechneten reduzierten Moduls nach P&O (6.18) bzw. F&S (6.14), jeweils mit Geometriedaten aus dem deformiertem Netz <sup>1</sup> bzw. abgeleitet aus der Last-Eindrucktiefe-Kurve <sup>2</sup>.

R=0.2mm	$P_t$	$h_t$	$\delta_t$	$S$	$R'{}^1$	$R'{}^2$	$a{}^1$	$a{}^2$
Entlastung	[N]	[ $\mu m$ ]	[ $\mu m$ ]	[N/mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
A-A'	18.18	10	0.6597	35690.0	11.46	6.46	0.0653	0.0642
B-B'	37.24	20	0.9203	51410.0	17.85	9.18	0.0919	0.0908
C-C'	55.99	30	1.1000	63190.0	25.44	11.28	0.1114	0.1112
D-D'	74.19	40	1.2350	72715.0	34.62	13.56	0.1294	0.1284
E-E'	90.76	50	1.3370	79800.0	48.10	14.93	0.1413	0.1435
F-F'	106.14	60	1.4240	85618.0	63.09	16.29	0.1523	0.1527

Tabelle 6.1: Auswertung der FE-Simulation in Abb. 6.1a. Die Werte von  $R'$  und  $a$  wurden sowohl aus der Geometrie des deformierten Netzes <sup>1</sup> als auch nach (6.11) und (6.13) bzw. (5.9) <sup>2</sup> bestimmt.

Die für (6.18) benötigte Kontaktfläche  $A = \pi a^2$  kann auch anhand von (5.9) über die Belastungskurve bestimmt werden. Hierfür wird zusätzlich der Verfestigungsexponent aus (5.11) zu  $n = 4.0$  und damit der Faktor  $c = 1.015$  für (5.9) nach (5.10) ermittelt. Es wird dabei davon ausgegangen, daß die Verfestigungskurve des Materials durch ein Potenzgesetz zu approximieren ist. Die Ermittlung der Werte von  $R'$  mit (6.13) und  $a$  mit (5.9) sowie die Übereinstimmung der eingearbeiteten Annahmen mit der Realität wird durch die Bestimmung der korrekten Werte direkt aus der deformierten Finite-Elemente-Struktur überprüfbar. Anhand von Tab. 6.1 ist ersichtlich, daß die mit (5.9) aus der Last-Eindrucktiefe-Kurve bestimmten Werte des Kontaktradius eine gute Übereinstimmung mit den korrekten Werten zeigen, während die Werte von  $R'$  deutliche Abweichungen aufweisen.

Der relative Fehler des nach (6.14) und (6.18) berechneten reduzierten Moduls ist in Abb. 6.2b über der totalen Eindrucktiefe aufgetragen. Wie bereits in Abschnitt 6.1.1 erläutert, basieren die klassischen Lösungen der Elastizitätstheorie, wie z.B. die von Hertz, auf der Voraussetzung, daß die Kontaktpartner nicht konform sind. Die Grenze der Gültigkeit dieser Lösungen wird in [23], S.118, bei einem Wert von  $E(R_1 - R)/P_t \approx 6 \text{ mm}^{-1}$  angegeben. Für kleinere Werte sind solche Lösungen nicht anwendbar. Der Graph von (6.14) in Abb. 6.2a bestätigt diese Verhältnisse. Das Ergebnis der Entlastung C-C' mit  $E(R_1 - R)/P_t = 5.9 \text{ mm}^{-1}$  liegt nahe dem korrekten Wert, während D-D' mit  $E(R_1 - R)/P_t = 3.9 \text{ mm}^{-1}$  eine deutliche Abweichung liefert.

Die aus der Last-Eindrucktiefe-Kurve bestimmten Werte von  $R'$  nach (6.13) führen zu

einer deutlichen Erhöhung des Fehlers, weshalb auf eine zu ungenaue Erfassung der Verformungsverhältnisse geschlossen werden kann. Folglich ist (6.15) von vornherein mit der ungenauen  $R'$ -Bestimmung nach (6.13) behaftet. Da im Experiment die Ermittlung des exakten Wertes von  $R_1$  aus der Topographie der Probe vermieden werden sollte, wird auch (6.14) zur Ermittlung des E-Moduls in der hier gezeigten Form nicht weiter verwendet.

Die Auswertung des reduzierten Moduls nach Oliver & Pharr weist für den gesamten Eindrucktiefebereich einen beträchtlichen Fehler auf. Ebenso wie (6.14) stützt sich (6.18) auf die korrekte Berücksichtigung der plastischen Verformung durch die Einführung von  $R'$  statt  $R$ . Dabei wird vorausgesetzt, daß die Struktur der Gleichung unberührt bleibt. Im Hinblick auf den großen Fehler im gesamten Eindrucktiefenbereich (siehe Kurve  $P\&O^1$  in Abb. 6.2b) ist zu vermuten, daß die Ansätze zur Ermittlung von  $E_r$  über die Entlastungssteife  $S$  bzw. über die Last  $P$  unterschiedliche Abhängigkeiten bezüglich der Kontakteigenschaften besitzen. Damit wäre es denkbar, daß die Grenze für die Verletzung der Voraussetzungen bezüglich nahezu konformer Kontaktpartner ebenfalls unterschiedlich ist.

Um dies besser zu verstehen, wird im folgenden der reduzierte Modul analog zu (6.14) aus der Entlastungssteife ermittelt (siehe hierzu auch [21]). So ergibt sich die Gleichung

$$E_r = \frac{S}{2\sqrt{R'\delta_t}}. \quad (6.19)$$

Betrachtet man die Ergebnisse für  $E_r$  nach (6.14) und (6.19) in Abb. 6.3, so kann ein wesentlich höherer Fehler bei Verwendung der Entlastungssteife im Zusammenhang mit einer  $R'$ -Formulierung festgestellt werden, obwohl gleiche Werte für  $R_1$  eingesetzt wurden.

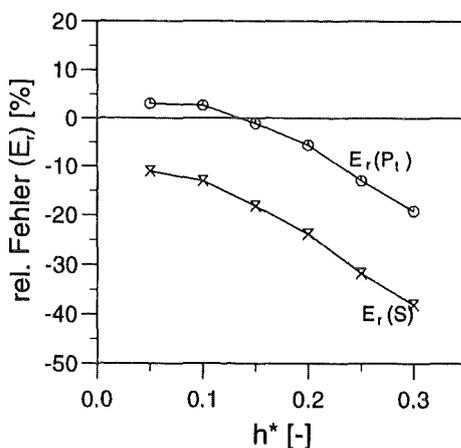


Abbildung 6.3: Vergleich des Fehlers für den reduzierten Modul  $E_r(P_t)$  aus der Last nach (6.14) und  $E_r(S)$  aus der Entlastungssteife nach (6.19) für  $R'$  aus deformiertem Netz.

Offensichtlich ist die Entlastungssteife und damit die Form der Entlastungskurve insbesondere bei Annäherung an die Konformität stark von der Geometrie der Kontaktpartner abhängig. Damit kann die elastische Lösung nicht mehr allein durch Einsetzen eines relativen Krümmungsradius wie in (6.19) an die Gegebenheiten angepaßt werden. Vielmehr müßte z.B. die feste Potenz von  $\delta^{3/2}$  (vergleiche (6.14)) durch eine an die Kontaktbedingungen anpaßbare Potenz  $\delta^z$  ersetzt werden. In Bestätigung hierzu ergaben Fitkurven eines solchen Potenzgesetzes an numerisch simulierte Entlastungskurven Werte von  $1.1 \leq z \leq 1.5$  abhängig von den elastischen und plastischen Materialeigenschaften sowie der Eindringtiefe. Die Rechtfertigung der Übertragbarkeit von (6.18) auf Eindrücke mit plastischer Deformation nach Pharr & Oliver [39] (siehe Abschnitt 6.1.2) kann somit nicht bestätigt werden.

## 6.2 Berücksichtigung der plastischen Vorgeschichte

Aus den vorangegangenen Abschnitten ist zu erkennen, daß die Bestimmung des E-Moduls anhand des Entlastungsprozesses ohne die korrekte Berücksichtigung der plastischen Verformung mit großen Fehlern verbunden sein kann. Selbst die Einbeziehung von geometrischen Größen wie  $R'$  und  $a$  auf die oben erläuterte Art und Weise führt nicht zum Erfolg.

Aus diesem Grund werden in den folgenden Abschnitten neue Ansätze eingeführt, die sowohl die Belastungs- als auch die Entlastungskurve approximieren. Die Wahl der Ansätze ist derart motiviert, daß die elastische Lösung (6.8) als Spezialfall enthalten ist (siehe hierzu auch [21]).

Das Materialgesetz für die FE-Simulationen wird zur Reduzierung der Parametervielfalt auf das der Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung beschränkt. Hierbei wird davon ausgegangen, daß nichtlineare Verfestigung näherungsweise durch lineare Verfestigung mit der Wahl geeigneter Materialparameter derart ersetzt werden kann, daß für die betrachtete Eindringtiefe eine Oberflächengestalt mit gleichen Kontakteigenschaften resultiert.

Die dimensionslosen Materialparameter, die in Abschnitt 3.1.3 eingeführt wurden, bilden im folgenden die gemeinsame Basis für die Beschreibung der Be- und Entlastung.

### 6.2.1 Belastungskurve und plastische Materialeigenschaften

Die Belastungskurve kann im allgemeinen sowohl konvex als auch konkav gekrümmte Bereiche aufweisen (siehe z.B. Abb. 6.1b). Die allgemeine Form der Belastungskurve,

gegeben durch

$$P_l^* = \hat{P}_l^* (h^*, \sigma_y^*, E_T^*, \nu) \quad (6.20)$$

mit

$$P_l^* = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{P_l}{R^2} \quad (6.21)$$

und  $h^* = h/R$ , wird daher stückweise angenähert durch eine Potenzfunktion

$$P_l^* = \Gamma_i^* (h^*)^{z_i} \quad \text{für } h^* \in I_i, \quad (6.22)$$

deren Parameter  $\Gamma_i^*$  und  $z_i$  innerhalb eines jeden Intervalls  $I_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , konstant sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß  $\Gamma_i^*$  und  $z_i$  im wesentlichen von den Materialparametern  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  in der Form

$$z_i = \hat{z}_i(\sigma_y^*, E_T^*) \quad (6.23)$$

$$\Gamma_i^* = \hat{\Gamma}_i^*(\sigma_y^*, E_T^*) \quad (6.24)$$

abhängen, wenn  $\nu$  nach (6.21) in  $P^*$  eingearbeitet ist. Die Intervalle  $I_i$  seien so gewählt, daß  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = (0, 0.1]$ .

Durch einen Fit der Meßdaten im betreffenden Intervall mit

$$P_l(h) = \Gamma_i \left( \frac{h}{R} \right)^{z_i} \quad (6.25)$$

wird zunächst der dimensionsbehaftete Wert  $\Gamma_i$  bestimmt. Ist der reduzierte Modul bekannt, so kann  $\Gamma_i^*$  analog  $P^*$  mit

$$\Gamma_i^* = \frac{\Gamma_i}{E_T R^2} \quad (6.26)$$

berechnet werden.

Auf der anderen Seite können  $z_i$  und  $\Gamma_i^*$  durch Finite-Elemente-Simulationen für Variationen der Materialparameter  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  bestimmt und für jedes Intervall  $I_i$  in ein Diagramm eingetragen werden (siehe Abb.6.4), wobei die  $(z_i, \Gamma_i^*)$ -Punkte mit  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  parametrisiert sind. Zu diesem Zweck wird der in Frage kommende Meßbereich in zwei Intervalle unterteilt, mit  $I_1 = (0, 0.05]$  und  $I_2 = (0.05, 0.1]$ .

Aus den gemessenen Größen  $\Gamma_i^*$  und  $z_i$  werden die unbekanntenen Materialparameter  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  mit Hilfe der Relationen

$$\sigma_y^* = \hat{\sigma}_y^*(z_i, \Gamma_i^*) \quad (6.27)$$

$$E_T^* = \hat{E}_T^*(z_i, \Gamma_i^*) \quad (6.28)$$

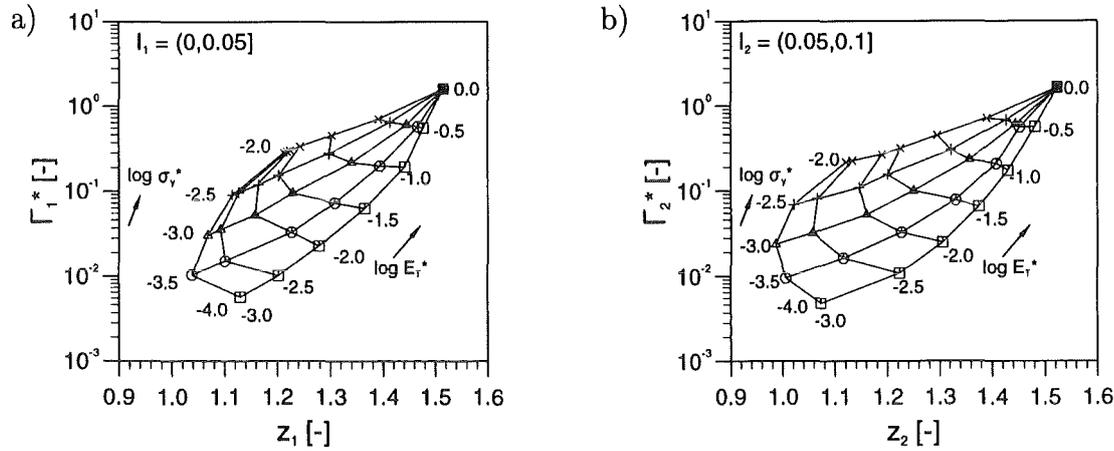


Abbildung 6.4: Zusammenhang zwischen den Parametern  $\Gamma_i^*$ ,  $z_i$  und den dimensionslosen Materialparametern  $\sigma_y^*$ ,  $E_T^*$  für die Intervalle a)  $0 < h^* \leq 0.05$  und b)  $0.05 < h^* \leq 0.1$ .

bestimmt. Aufgrund der diskreten Datenbasis wird die Inversion (6.27), (6.28) nach dem im folgenden beschriebenen Verfahren vorgenommen.

Zunächst wird dazu die Masche bestimmt, in der sich der betreffende  $(z_i, \Gamma_i^*)$ -Punkt befindet, gegeben durch die Knoten  $(^j \sigma_y^*, ^j E_T^*)$ ,  $j = 1..4$  mit den zugehörigen Wertepaaren  $(^j z_i, ^j \Gamma_i^*)$ . Die Numerierung der Knoten  $j$  ist dabei im mathematisch positiven Umlauf um die Masche so definiert, daß  $^1 \sigma_y^* = ^2 \sigma_y^*$ ,  $^3 \sigma_y^* = ^4 \sigma_y^*$ ,  $^1 E_T^* = ^4 E_T^*$  und  $^2 E_T^* = ^3 E_T^*$ . Die betreffende Masche wird auf ein Einheits-element transformiert nach

$$\log E_T^* = \log ^1 E_T^* + x(\log ^2 E_T^* - \log ^1 E_T^*) \quad (6.29)$$

$$\log \sigma_y^* = \log ^1 \sigma_y^* + y(\log ^4 \sigma_y^* - \log ^1 \sigma_y^*), \quad (6.30)$$

womit  $x$  und  $y$  die gesuchten Größen sind und deren Werte  $0 \leq x \leq 1$  und  $0 \leq y \leq 1$  betragen können. Für eine bilineare Interpolation ist an jedem Punkt  $(x, y)$  im Element der Wert von  $z_i$  und  $\gamma_i^* := \log \Gamma_i^*$  zu berechnen nach

$$\gamma_i^*(x, y) = ^1 \gamma_i^*(1-x)(1-y) + ^2 \gamma_i^* x(1-y) + ^3 \gamma_i^* xy + ^4 \gamma_i^*(1-x)y \quad (6.31)$$

$$z_i(x, y) = ^1 z_i(1-x)(1-y) + ^2 z_i x(1-y) + ^3 z_i xy + ^4 z_i(1-x)y. \quad (6.32)$$

Die Inversion des Problems erfolgt durch Auflösen nach den unbekanntenen  $x$  und  $y$ , wodurch sich eine quadratische Gleichung mit der Lösung

$$y = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}$$

$$x = \frac{(z_i - {}^1z_i) + ({}^1z_i - {}^4z_i)y}{({}^2z_i - {}^1z_i) + ({}^1z_i - {}^2z_i + {}^3z_i - {}^4z_i)y}$$

ergibt, wobei  $A$ ,  $B$  und  $C$  gegeben sind durch die Ausdrücke

$$A = ({}^1z_i - {}^4z_i)({}^1\gamma_i^* - {}^2\gamma_i^* + {}^3\gamma_i^* - {}^4\gamma_i^*) - ({}^1\gamma_i^* - {}^4\gamma_i^*)({}^1z_i - {}^2z_i + {}^3z_i - {}^4z_i)$$

$$B = ({}^1z_i - {}^4z_i)({}^2\gamma_i^* - {}^1\gamma_i^*) + (z_i - {}^1z_i)({}^1\gamma_i^* - {}^2\gamma_i^* + {}^3\gamma_i^* - {}^4\gamma_i^*) \\ - ({}^1\gamma_i^* - {}^4\gamma_i^*)({}^2z_i - {}^1z_i) - (\gamma_i^* - {}^1\gamma_i^*)({}^1z_i - {}^2z_i + {}^3z_i - {}^4z_i)$$

$$C = (z_i - {}^1z_i)({}^2\gamma_i^* - {}^1\gamma_i^*) - (\gamma_i^* - {}^1\gamma_i^*)({}^2z_i - {}^1z_i).$$

## 6.2.2 Entlastungskurve und plastische Vorgeschichte

Betrachten wir die Entlastung eines kugelförmigen Eindruckes nach vorangegangener plastischer Deformation, so kann die Form der Entlastungskurve, z.B. durch Verallgemeinerung von (6.8), mit der Gleichung

$$P_u = \frac{4}{3}E_r\sqrt{R}f_p(h) \quad (6.33)$$

beschrieben werden, wobei  $0 \leq P_u \leq P_t$  und die Funktion  $f_p(\cdot)$  von der plastischen Vorgeschichte abhängt. Im folgenden wird angenommen, daß der Graph von (6.33) für Werte von  $h$  nahe  $h_t$  durch den Graph der Funktion

$$P_u^{(t)}(h) = \frac{4}{3}E_r\sqrt{R}(c_t\sqrt{h^3} - p_0) \quad (6.34)$$

mit  $c_t = \text{const}$  und  $p_0 = \text{const}$  während des Entlastungsvorganges approximiert werden kann (siehe Abb. 6.5). Die Konstanten  $c_t$  und  $p_0$  seien hierbei so gewählt, daß

$$P_u^{(t)}(h = h_t) = P_t \quad (6.35)$$

und

$$\left. \frac{dP_u^{(t)}}{dh} \right|_{h=h_t} = 2E_r c_t \sqrt{R h_t} = S, \quad (6.36)$$

wobei mit  $S$  die Entlastungssteife an der Stelle  $h = h_t$  bezeichnet wird (siehe Abb. 2.1b). Wenn der Wert von  $c_t$  bekannt ist, kann (6.36) nach  $E_r$  aufgelöst und zur Bestimmung des E-Moduls herangezogen werden nach

$$E_r = \frac{S}{2c_t\sqrt{R h_t}}. \quad (6.37)$$

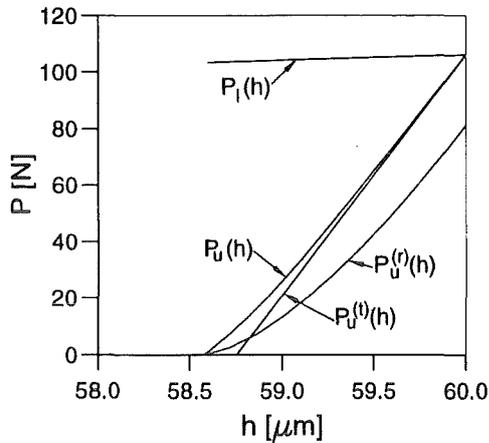


Abbildung 6.5: Graph der Funktionen  $P_u(h)$ ,  $P_u^{(t)}(h)$  und  $P_u^{(r)}(h)$  für die 6<sup>te</sup> Entlastung in Abb. 6.1b.

Ein weiterer Ansatz entsteht durch die Annahme, daß der Graph von (6.33) für  $h$  nahe  $h_r$  näherungsweise durch den Graph der Funktion

$$P_u^{(r)}(h) = \frac{4}{3} E_r c_r \sqrt{R(h - h_r)^3} \quad (6.38)$$

beschrieben wird, mit den Eigenschaften

$$P_u^{(r)}(h = h_r) = 0 \quad (6.39)$$

und

$$\left. \frac{dP_u^{(r)}}{dh} \right|_{h=h_r} = 0, \quad (6.40)$$

wobei  $c_r = \text{const}$  während der Entlastung (siehe Abb. 6.5). Als Anmerkung sei erwähnt, daß sich aus (6.38) für den Punkt  $(h_t, P_t)$  Gleichung (6.14) ergibt, wenn  $c_r$  den Wert von  $(1 - R/R_1)^{-\frac{1}{2}}$  annimmt.

Es ist zweckmäßig, (6.34) und (6.38) durch eine zusätzliche Bedingung bezüglich der Entlastungssteife  $S$  eine gemeinsame Basis zu verschaffen, in der Form

$$\left. \frac{dP_u^{(r)}}{dh} \right|_{h=h_t} = 2E_r c_r \sqrt{R\delta_t} = S. \quad (6.41)$$

Somit kann der reduzierte Modul berechnet werden nach

$$E_r = \frac{S}{2c_r \sqrt{R\delta_t}}, \quad (6.42)$$

vorausgesetzt, der Wert von  $c_r$  ist bekannt.

Aus (6.36) und (6.41) folgt unmittelbar der Zusammenhang

$$c_t = c_r \sqrt{1 - \frac{h_r}{h_t}} \quad (6.43)$$

zwischen den Konstanten  $c_t$  und  $c_r$ . Aus der Form von (6.43) ist zu erkennen, daß  $c_r \gg c_t$  für  $h_r \rightarrow h_t$ .

Die Aufgabe von  $c_t$  und  $c_r$  ist es, die plastische Vorgeschichte zu berücksichtigen. Allerdings ist deren Abhängigkeit von den Materialeigenschaften und der Eindringtiefe zunächst nicht bekannt. Für den Fall des Materialgesetzes der Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung (siehe Abschnitt 3.1.3) ergibt sich analog (3.18) der Zusammenhang dimensionsloser Größen der Form

$$c_t = \hat{c}_t(h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_T^*) \quad (6.44)$$

sowie

$$c_r = \hat{c}_r(h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_T^*) , \quad (6.45)$$

wobei  $\hat{c}_t$  und  $\hat{c}_r$  stetige Funktionen repräsentieren sollen.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß (6.44) und (6.45) Gleichung (6.43) nicht widersprechen, da  $h_r^* = h_r/R$  ebenfalls von der Vorgeschichte abhängt und als Funktion der Form

$$h_r^* = \hat{h}_r^*(h_t^*, \nu, \sigma_y^*, E_T^*) \quad (6.46)$$

angegeben werden kann.

Zur Reduzierung der Anzahl an Finite-Elemente-Simulationen wird ein Wert  $\nu = 0.3$  angenommen. Die Abhängigkeiten (6.44) und (6.45) werden somit reduziert zu

$$c_t = \tilde{c}_t(h_t^*, \sigma_y^*, E_T^*) \quad (6.47)$$

und

$$c_r = \tilde{c}_r(h_t^*, \sigma_y^*, E_T^*) . \quad (6.48)$$

Typische Verläufe von  $\tilde{c}_t$  und  $\tilde{c}_r$  sind in Abb. 6.6 für  $h_t^* = 0.1$  dargestellt. Die Graphen mit zusätzlicher Variation der Eindringtiefe sind in Abb. 6.7 für  $\tilde{c}_t$  und in Abb. 6.8 für  $\tilde{c}_r$  zu sehen.

Im Fall von  $c_t$  ist die wesentliche Einflußgröße der Tangentenmodul  $E_T^*$ . Die Eindringtiefe  $h_t^*$  hat nur für sehr hohe Fließspannungen im Bereich von  $\log \sigma_y^* \geq -2.5$  zusätzlich Einfluß auf den  $c_t$ -Wert. Der  $P_u^{(t)}$ -Ansatz kann somit in großen Bereichen als unempfindlich gegen die Parametervariation von  $\sigma_y^*$  und  $h_t^*$  bezeichnet werden.

Beim  $P_u^{(r)}$ -Ansatz hingegen ist eine starke Abhängigkeit von allen drei Parametern zu erkennen. Dies bedeutet wiederum, daß der  $c_r$ -Wert eine starke Kopplung an die plastischen Eigenschaften des Materials besitzt. Aus den insgesamt hohen  $c_r$ -Werten folgt, daß der Ansatz mit der  $\delta$ -Formulierung bereits bei kleinen plastischen Verformungen eine drastische Anpassung an die veränderten Kontakteigenschaften erfordert.

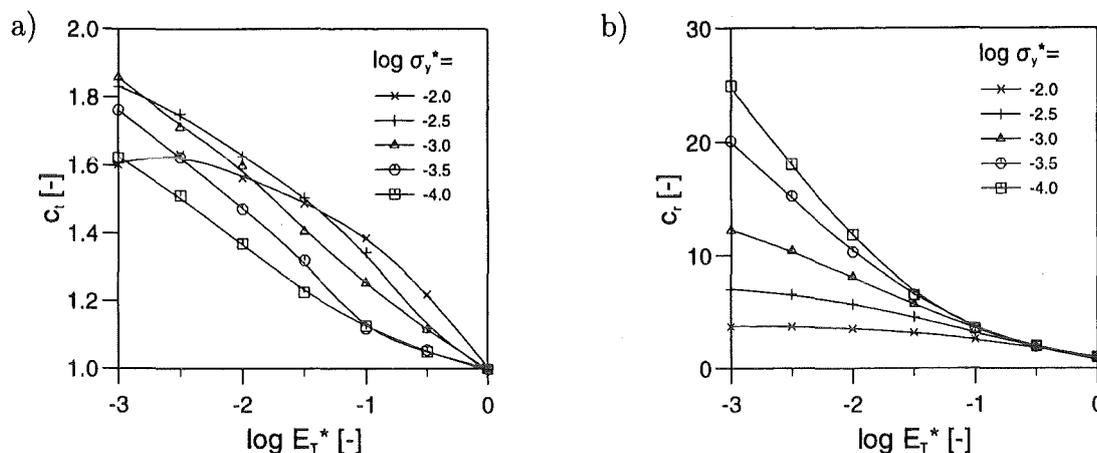


Abbildung 6.6: Typische Verläufe von  $\tilde{c}_t$  und  $\tilde{c}_r$  für  $h_t^* = 0.1$  ( $\nu = 0.3$ ).

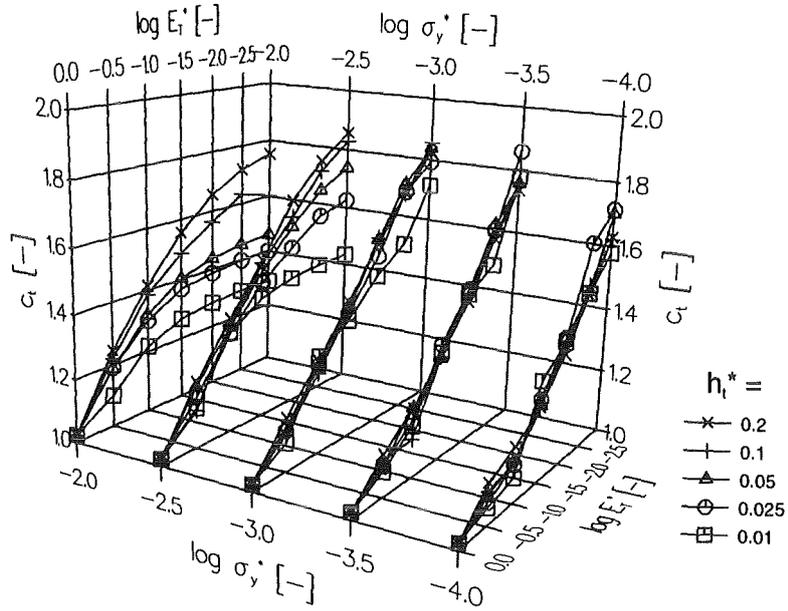
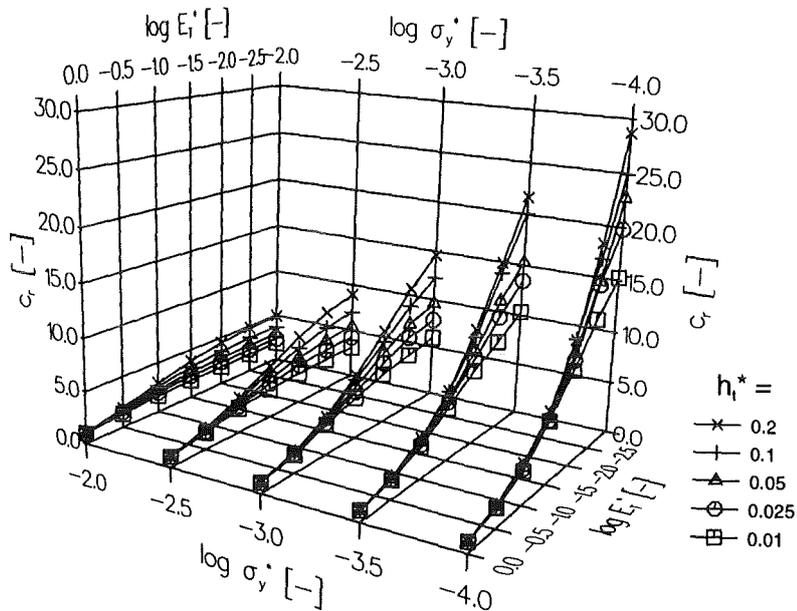
### 6.2.3 Die $L_t$ -Methode

Der reduzierte Modul kann mit einer iterativen Methode, bezeichnet als  $L_t$ -Methode, ermittelt werden. Der Ablauf ist in Abb. 6.9a dargestellt und beinhaltet die im folgenden beschriebenen Schritte.

Eine Last-Eindrucktiefe-Kurve sei gegeben durch einen Belastungspfad als Menge der Punkte  $(h, P_l)$ ,  $0 \leq h \leq h_t$ , und einen Entlastungspfad, der die Punkte  $(h, P_u)$ ,  $h_r \leq h \leq h_t$  umfaßt. Für das betreffende Eindrucktiefenintervall  $i$ , das die auszuwertende Entlastung beinhaltet, werden die Parameter  $z_i$  und  $\Gamma_i$  aus dem Belastungspfad bestimmt. Die Entlastungssteife  $S$  wird aus dem Entlastungspfad ermittelt.

Die unbekannte Größe  $c_t$  wird zu Anfang auf den Wert  ${}^0c_t = 1$  gesetzt. Den Beginn der Iterationsschleife bildet die Berechnung des reduzierten Moduls  ${}^lE_r^{(t)}$  nach (6.37). Der dimensionslose Belastungsparameter  ${}^l\Gamma_i^*$  kann somit nach (6.26) berechnet werden. Anhand der Beziehungen nach (6.27), (6.28) wird das Paar der dimensionslosen Materialparameter  ${}^l\sigma_y^*$  und  ${}^lE_T^*$  ermittelt. Mit diesen und der betreffenden Eindrucktiefe  $h_t^*$  wird aus (6.47) der Wert von  ${}^{l+1}c_t$  bestimmt. Die Iteration wird solange wiederholt, bis die relative Änderung von  ${}^lE_r^{(t)}$  ein festgelegtes Maß  $\epsilon$  unterschreitet.

Alternativ (aber nicht äquivalent) hierzu besteht die Möglichkeit, den reduzierten Modul mit Hilfe der  $L_r$ -Methode unter Ausnutzung des  $P_u^{(r)}$ -Ansatzes nach Abb. 6.9b zu bestimmen. Dazu wird (6.37) und (6.47) durch (6.42) bzw. (6.48) ersetzt und  $h_r$  als zusätzliche Eingabegröße berücksichtigt.

Abbildung 6.7: Graph der Funktion  $\tilde{c}_t$  ( $\nu = 0.3$ ).Abbildung 6.8: Graph der Funktion  $\tilde{c}_r$  ( $\nu = 0.3$ ).

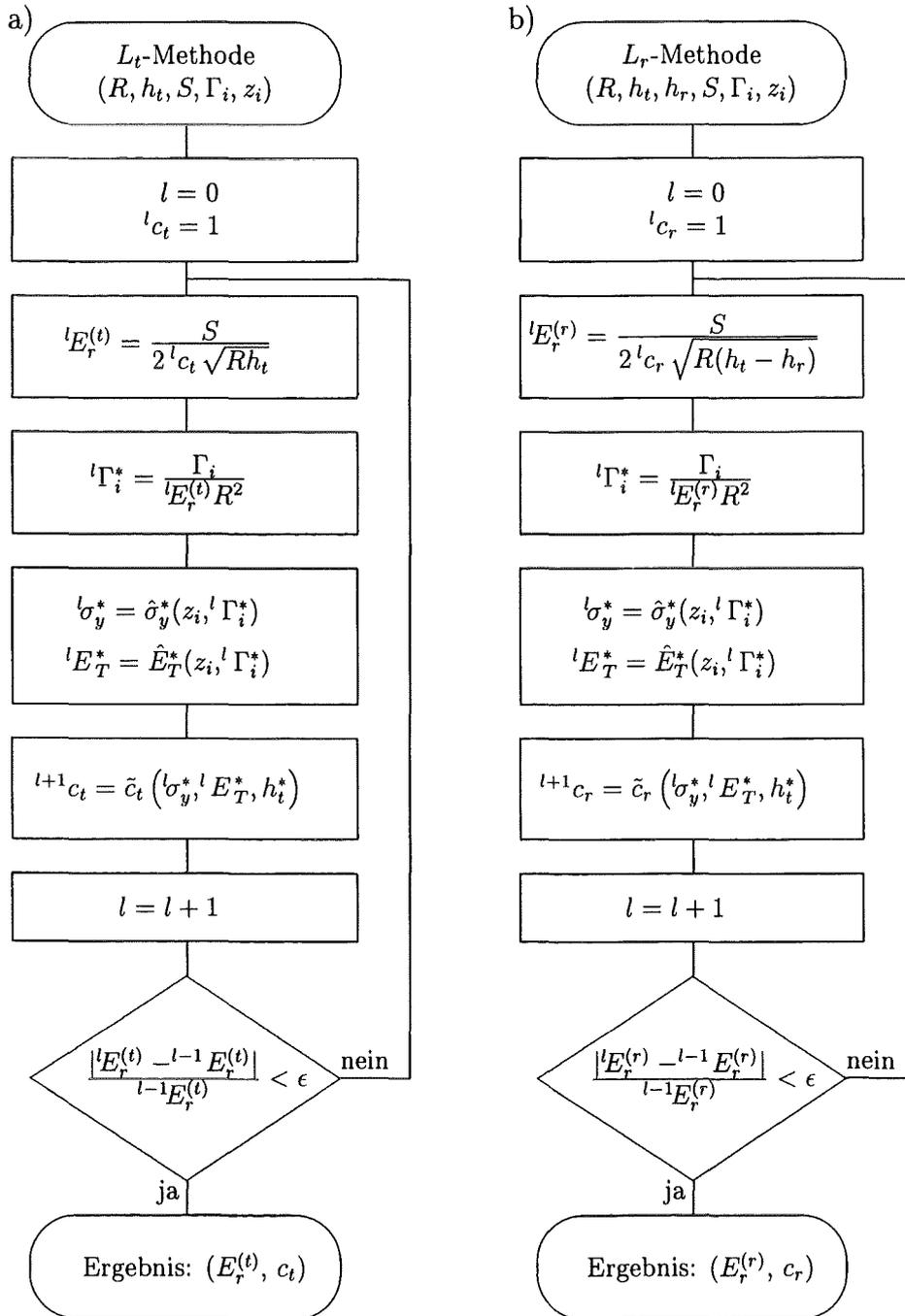


Abbildung 6.9: Iterative Bestimmung des reduzierten Moduls anhand von Be- und Entlastungsdaten: a)  $L_t$ -Methode mit dem  $P_u^{(t)}$ -Ansatz; b)  $L_r$ -Methode mit dem  $P_u^{(r)}$ -Ansatz.

Der zugehörige Wert des E-Moduls kann nun mittels der Definition von  $E_r$  berechnet werden nach

$$E = (1 - \nu^2)E_r . \quad (6.49)$$

Da bis zum jetzigen Zeitpunkt keine Möglichkeit bekannt ist, die Querkontraktionszahl anhand des Eindruckversuchs zu ermitteln, ist man hier darauf angewiesen, diese abzuschätzen (siehe hierzu auch [14]).

Um die Genauigkeit der oben beschriebenen Methoden zu untersuchen, werden diese auf das Beispiel aus Abschnitt 6.1.3 angewendet, welchem ein Materialverhalten der Plastizität mit multilinearer isotroper Verfestigung zugrunde liegt. Die  $L_t$ - bzw.  $L_r$ -Methode ist in diesem Fall gezwungen, das Materialverhalten durch das der Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung so zu approximieren, daß die Belastungskurve in ihrer Form möglichst gut wiedergegeben wird.

Die Konvergenzeigenschaften der beiden Methoden sind in Abb. 6.10a am Beispiel der 6<sup>ten</sup> Entlastung dargestellt. An diesem Beispiel zeigt sich zusätzlich eine angenehme Eigenschaft der  $L_t$ -Methode. Da für diese Eindringtiefe keine Belastungsparameter aus den Simulationen vorhanden sind, werden die des vorangegangenen Eindringtiefenintervalls übernommen. Dennoch ist der ermittelte  $E_r$ -Wert von vergleichbarer Genauigkeit mit den vorangegangenen Werten. Als Grund hierfür ist die in weiten Bereichen glatte Belastungskurve zu nennen, womit die Werte von  $\Gamma_i$  und  $z_i$  des vorangegangenen Intervalls

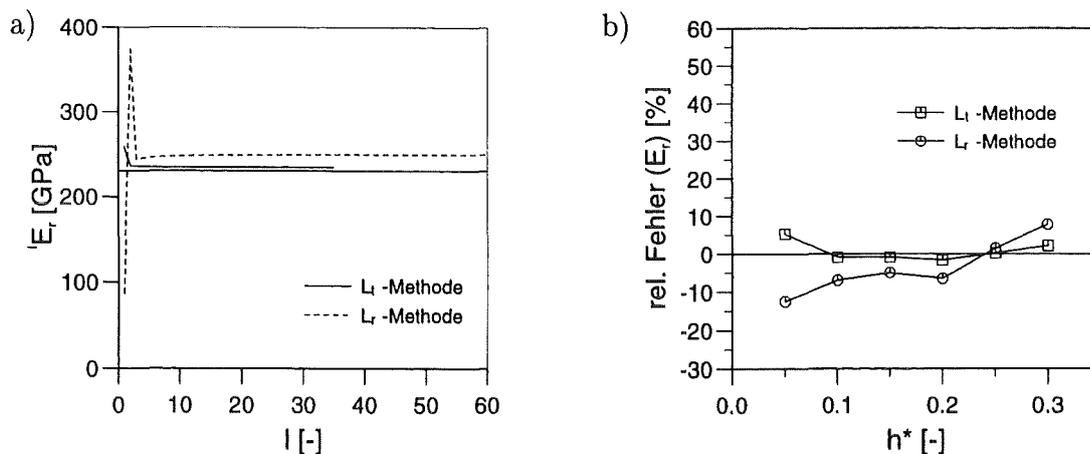


Abbildung 6.10: Bestimmung des reduzierten Moduls mit der  $L_t$ - und der  $L_r$ -Methode: a) Konvergenz; b) Fehler und Eindringtiefenabhängigkeit.

eine gute Schätzung darstellen.

Die bereits im vorigen Abschnitt diskutierten Empfindlichkeiten des  $c_t$ - bzw. des  $c_r$ -Wertes bezüglich der Materialparameter  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  schlagen sich sichtbar in den Eigenschaften der  $L_t$ - und  $L_r$ -Methode nieder. Wegen der moderaten Empfindlichkeit des  $c_t$ -Wertes auf Änderungen von  $\sigma_y^*$  und  $E_T^*$  geht die  $L_t$ -Iteration schnell in einen stationären Zustand über und der ermittelte Wert von  $E_r$  liegt nahe dem korrekten Wert. Im Gegensatz hierzu zeigt die  $L_r$ -Iteration zunächst ein starkes Überschwingen, bevor sie asymptotisch in einen stationären Zustand mündet.

Der über der Eindringtiefe  $h^*$  aufgetragene relative Fehler des ermittelten  $E_r$ -Wertes zeigt ebenfalls bessere Ergebnisse im Fall der  $L_t$ -Methode (siehe Abb. 6.10b). Testrechnungen für Plastizität mit linearer Verfestigung ergaben für die  $L_r$ -Methode sehr kleine Fehler. Die stärkere Eindringtiefeabhängigkeit der  $E_r$ -Werte der  $L_r$ -Methode ist daher auf die nichtlineare Verfestigung zurückzuführen. Ein weiterer Kritikpunkt bezüglich der  $L_r$ -Methode ist die Verwendung von  $h_r$ , das durch kinematische Verfestigung deutlich beeinflusst wird. Wie in Abschnitt 5.3.5 gezeigt wurde, ist jedoch eine phänomenologische Beschreibung mit rein isotroper Verfestigung nicht realistisch.

Die  $L_r$ -Methode kann daher aufgrund ihrer Empfindlichkeit gegenüber sowohl nichtlinearer als auch kinematischer Verfestigung nicht zur Bestimmung des E-Moduls eingesetzt werden. Eine weitere Methode, die als  $U_{tr}$ -Methode bezeichnet wird, vereint den  $P_u^{(t)}$ -Ansatz und den  $P_u^{(r)}$ -Ansatz. Die Information über die Vorgeschichte wird allein aus der simultanen Auswertung zweier verschiedener Entlastungen gewonnen [21]. Aus denselben Gründen wie bei der  $L_r$ -Methode hat die  $U_{tr}$ -Methode bei der Anwendung auf experimentelle Eindruckversuche ungenügende Konvergenzeigenschaften, verbunden mit hoher Empfindlichkeit. Deshalb wird im folgenden von deren Anwendung ebenfalls abgesehen.

Da eine Beeinflussung der Entlastungssteife  $S$  durch kinematische Verfestigung nur geringfügig vorhanden ist (siehe z.B. Abb. 5.13a), wird davon ausgegangen, daß die  $L_t$ -Methode keinen bemerkenswerten Fehler aufgrund kinematischer Verfestigung aufweist.

## Fließspannung und Tangentenmodul

Wie bereits in Abschnitt 6.2 erläutert wurde, erfolgt die Berücksichtigung der plastischen Materialeigenschaften mit Hilfe eines Materialgesetzes der Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung. Die darin enthaltenen Materialparameter  $\sigma_y/E$  und  $E_T/E$  werden durch die  $L_t$ -Methode so angepaßt, daß die Belastungskurve möglichst gut wiedergegeben wird. Die ermittelten Werte von  $\sigma_y/E$  und  $E_T/E$  sind abhängig von der Eindruck-

tiefe und insbesondere vom betreffenden Intervall  $I_i$ . Daher liefert die  $L_t$ -Methode für jedes Intervall  $I_i$  eine Schar bilinearer Materialkurven entsprechend der Anzahl an darin befindlichen Entlastungen.

Abbildung 6.11 zeigt die bilinearen Materialkurven als Resultat der  $L_t$ -Methode sowie die korrekte Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des oben betrachteten Beispiels. Grundsätzlich kann mit Zunahme des Eindringtiefenintervalls eine Zunahme der Fließspannung und eine Abnahme des Tangentenmoduls festgestellt werden. Die Ergebnisse von  $\sigma_y$  und  $E_T$  können daher weder der korrekten Fließspannung noch dem Tangentenmodul bei einer bestimmten Dehnung zugeordnet werden. Aus diesem Grund werden die resultierenden Werte von  $\sigma_y$  und  $E_T$  im weiteren nicht näher betrachtet.

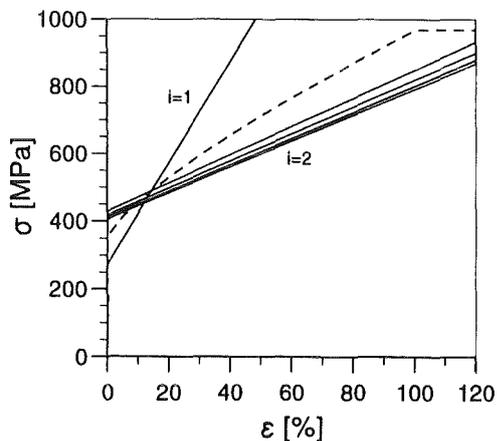


Abbildung 6.11: Bilineare Materialkurven (—) nach den Lösungen der  $L_t$ -Methode und korrekte Spannungs-Dehnungs-Kennlinie (- - -).

#### 6.2.4 Verformung von Prüfkörper und Maschine

Das bei den zuvor beschriebenen Methoden zur Ermittlung des E-Moduls definierte Maß für die Eindringtiefe berücksichtigt die Bewegung des Kugelpols bezüglich der unverformten Probenoberfläche. Im Realfall kann diese Größe nicht unmittelbar gemessen werden, da sich in jedem Fall zumindest elastisch nachgebende Teile zwischen der Prüfkörperspitze und der Meßeinrichtung für den Weg befinden.

So sind dies in unserem Fall das Prüfkörpermaterial, die Hartlotschicht und der Teil des Hartmetallschaftes unterhalb des Laserstrahls (siehe Abb. 4.5a).

Die zusätzlich zu berücksichtigenden Verformungen können in einen zur Last linearen und in einen nichtlinearen Teil aufgespalten werden. Der lineare Teil wird durch die Bauteile weitab vom Kontaktgebiet verursacht und üblicherweise durch eine konstante Maschinennachgiebigkeit berücksichtigt. Der nichtlineare Teil entsteht durch das inhomogene Verformungsfeld im Prüfkörper und ist von der Eindringtiefe abhängig.

## Prüfkörperkorrektur

Der in den Finite-Elemente-Simulationen als starr formulierte Prüfkörper wird im Realfall elastisch deformiert. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, daß dieser Effekt selbst für einen Prüfkörper aus Diamant bei der Ermittlung des Elastizitätsmoduls metallischer Werkstoffe nicht vernachlässigt werden kann.

Zur Berücksichtigung der Prüfkörperverformung wird üblicherweise der effektive Modul  $E'_r$  anstelle des reduzierten Moduls  $E_r$  eingesetzt (siehe z.B. auch [10, 37]), gegeben durch

$$\frac{1}{E'_r} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}, \quad (6.50)$$

wobei  $E$  und  $\nu$  die elastischen Konstanten der Probe und  $E_i$  und  $\nu_i$  die des Prüfkörpers repräsentieren.

Zum besseren Verständnis dieser Beziehung wird im folgenden die Herkunft von (6.50) im Sinne von Hertz [16] näher erläutert. Dazu betrachten wir zwei axialsymmetrische elastische Körper  $j$  ( $j = 1, 2$ ), die sich in der Symmetrieachse zunächst kraftlos berühren. In diesem Berührungspunkt wird der Ursprung des Koordinatensystems definiert. Im weiteren besitzt jeder Körper auf der Symmetrieachse, weit vom Kontaktpunkt entfernt, einen zugeordneten Bezugspunkt. Unter der Voraussetzung einer gegenüber den Körperabmessungen kleinen Kontaktfläche gehen die Dehnungen mit zunehmendem Abstand von der Kontaktfläche in Richtung des Bezugspunktes gegen Null. Hierzu muß gewährleistet sein, daß die Kontaktpartner nicht konform sind. Somit ist die Annäherung des Bezugspunktes  $\delta_j$  an den Ursprung des Koordinatensystems unabhängig von der genauen geometrischen Lage des Bezugspunktes. Dann ergibt sich die Annäherung  $\delta$  zweier elastischer Körper (1,2) aus der Summe der Annäherungen der Bezugspunkte zur Kontaktfläche  $\delta_j$  eines jeden Körpers, mit

$$\delta_j = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \frac{\pi}{2} p_0 a, \quad (6.51)$$

wobei  $p_0$  im Fall der Hertz'schen Pressung ermittelt wird nach

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (6.52)$$

(siehe hierzu [23], S.92). Als Annäherung  $\delta$  der Bezugspunkte ergibt sich somit

$$\delta = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi}{2} p_0 a. \quad (6.53)$$

Durch Einsetzen von (6.52) in (6.53) und Auflösen nach dem reduzierten Modul  $E_r$  ergibt sich die Beziehung

$$E_r' = \frac{3}{4} \frac{P}{a\delta}, \quad (6.54)$$

wobei

$$\frac{1}{E_r'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (6.55)$$

Übertragen auf das Problem des Eindruckversuchs erhält man somit eine Proportionalität zwischen der Last  $P$  und dem effektiven Modul  $E_r'$ , ermittelt nach (6.50).

Als ergänzende Anmerkung sei hier erwähnt, daß (6.15) für den Sonderfall  $E_2 \rightarrow \infty$ ,  $\delta = \delta_t$  und  $P = P_t$  in (6.54) enthalten ist. Dies bedeutet, daß die dort gemachten Vereinfachungen zur Bestimmung der relativen Krümmung die erarbeitete Gleichung auf die Hertz'sche Lösung reduzieren.

Die Ermittlung von  $E_r$  anhand Gleichung (6.50) aus dem effektiven Modul kann nur durchgeführt werden, wenn eine explizite Bestimmung von  $E_r'$  erfolgt, wie z.B. im Fall von (6.15) oder (6.18). Die  $L_t$ -Methode ist jedoch ausschließlich für die Verarbeitung von Probeneigenschaften in Form von  $S$  als Eingabegröße und  $E_r$  als Ergebnis entwickelt worden. Bei der Eingabe einer mit Prüfkörperverformungen behafteten Steife  $S'$  kann deshalb nicht davon ausgegangen werden, daß das Ergebnis mit  $E_r'$  nach (6.50) übereinstimmt. Deshalb muß bei der Anwendung der iterativen Methode die Prüfkörperkorrektur bereits für die Entlastungssteife durchgeführt werden, um  $S$  von  $S'$  zu separieren.

Zweckmäßigerweise wird im folgenden statt der Steife  $S$  die Nachgiebigkeit  $C$  verwendet, wobei generell der einfache Zusammenhang  $S = 1/C$  gilt.

Die Zerlegung der gemessenen Entlastungsnachgiebigkeit  $C' = 1/S'$  in die Nachgiebigkeit von Probe  $C$  und die des Prüfkörpers  $C_i$  geschieht unter der Annahme, daß Prüfkörper und Probe im Zustand  $(h_t, P_t)$  als zwei in Reihe angeordneter Federn betrachtet werden können, für die dann gilt:

$$C' = C + C_i. \quad (6.56)$$

Im Fall eines elastisch verformbaren Prüfkörpers wird in (6.34)  $E_r = E/(1 - \nu^2)$  durch  $E_r'$  ersetzt, wodurch die Entlastungssteife

$$S' = 2E_r' c_t \sqrt{R h_t} \quad (6.57)$$

als Ableitung von (6.34) die Steife von Probe und Prüfkörper enthält. Die reziproke Form von (6.57) kann zusammen mit (6.50) in (6.56) eingesetzt werden, womit unmittelbar

$$\left( \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \right) \frac{1}{2c_t \sqrt{Rh_t}} = C + C_i \quad (6.58)$$

folgt. Durch Ausmultiplizieren der linken Seite und Einsetzen von (6.36) kann schließlich die Prüfkörpernachgiebigkeit  $C_i$  mit dem Ausdruck

$$C_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \frac{1}{2c_t \sqrt{Rh_t}} \quad (6.59)$$

identifiziert werden.

Die Entlastungsnachgiebigkeit der Probe berechnet sich demnach zu

$$C = C' - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \frac{1}{2c_t \sqrt{Rh_t}} \quad (6.60)$$

Wegen des zunächst unbekanntes  $c_t$ -Wertes ist hierfür eine weitere Iteration notwendig, die nach jedem Lauf der  $L_t$ -Methode die Probennachgiebigkeit neu berechnet, in der Form

$${}^{k+1}C = C' - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \frac{1}{2^k c_t \sqrt{Rh_t}} \quad (6.61)$$

Das Konvergenzverhalten der Iteration für die Prüfkörperkorrektur ist in Abb. 6.12a an einem Beispiel für austenitischen Stahl bei zwei Eindrucktiefen dargestellt. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist sehr hoch und für alle Entlastungen annähernd gleich. In Abb. 6.12b ist der Wert von  $C_i$  über der Eindrucktiefe aufgetragen.

Die vorgestellte Prüfkörperkorrektur sollte jedoch unter Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen angewendet werden. Insbesondere die Bedingung der gegenüber dem Kontaktgebiet großen Körperabmessungen wird bei dem Versuchsaufbau, dargestellt in Abb. 4.5a, nur für Eindrücke mit  $a \ll 1 \text{ mm}$  erfüllt. Bei einer Eindrucktiefe im Bereich von  $h^* = 0.1$  umfaßt jedoch die Kontaktfläche bereits fast den gesamten Prüfkörperquerschnitt. Die Dehnungen im Prüfkörper weitab vom Kontakt werden in diesem Fall nicht gegen Null, sondern gegen einen konstanten Wert streben. Daraus folgt, daß für den so ermittelten E-Modul bei  $h^* \rightarrow 0.1$  mit Abweichungen zu rechnen ist.

### Maschinennachgiebigkeit

Die Berücksichtigung der Maschinennachgiebigkeit hat wie die Prüfkörperkorrektur einen festen Platz in der Bestimmung des E-Moduls, da generell elastische Verformungen zwischen Prüfkörper und Wegaufnehmer infolge des Kraftflusses auftreten.

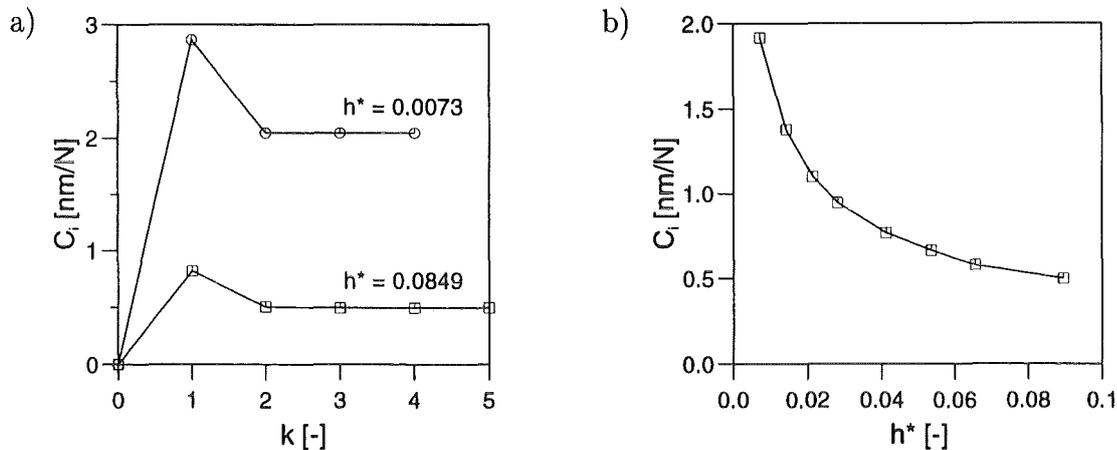


Abbildung 6.12: Bestimmung der Prüfkörperrnachgiebigkeit für ein Eindruck-Experiment mit austenitischem Stahl: a) Konvergenzverhalten; b) Verlauf als Funktion der Eindrucktiefe.

Die Maschinennachgiebigkeit ist bei dem hier verwendeten Versuchsaufbau von Experiment zu Experiment unterschiedlich. Zum einen ist die Position des Laserstrahles durch das Befestigen auf einer neuen Probe trotz einer Montagevorrichtung abhängig von den Fertigungstoleranzen der Probenhöhe. Zum anderen ist es ein bekanntes Phänomen, daß die Maschinennachgiebigkeit auch vom Probenwerkstoff abhängt [3]. Dies könnte damit zusammenhängen, daß die Maschinennachgiebigkeit als Sammelgröße aller konstant verbleibenden Nachgiebigkeiten herangezogen wird. Damit wird auch der konstante Anteil des Prüfkörpers berücksichtigt, der wiederum vom Spannungsfeld im Prüfkörper und schließlich von der Druckverteilung in der Kontaktfläche abhängt.

Zur Ermittlung der Maschinennachgiebigkeit wird die Vorgehensweise nach Oliver & Pharr [37] aufgegriffen und an die hier vorhandenen Gegebenheiten angepaßt. Hierzu wird vorausgesetzt, daß die Maschinennachgiebigkeit  $C_m$  und der effektive Modul  $E_r'$  konstant und damit unabhängig von der Eindrucktiefe sind. In unserer Betrachtung wird somit die Unabhängigkeit des Ergebnisses von  $E_r'$  von der Eindrucktiefe als Eigenschaft der  $L_t$ -Methode verlangt, welche diese Bedingung mit guter Genauigkeit erfüllt (vergleiche Abb. 6.2b und 6.10b).

Unter der Annahme der wiederum in Reihe angeordneten Federn setzt sich die gemessene Nachgiebigkeit  $C''$  zusammen nach

$$C'' = C' + C_m = C + C_i + C_m . \quad (6.62)$$

Einsetzen von (6.57) liefert somit

$$C'' = \frac{1}{2E'_r c_t \sqrt{R h_t}} + C_m . \quad (6.63)$$

Die mit der Eindrucktiefe veränderlichen Größen auf der rechten Seite sind  $c_t$  und  $h_t$ , womit

$$C'' = \frac{K}{c_t \sqrt{h_t}} + C_m \quad (6.64)$$

und  $K = 1/2E'_r \sqrt{R}$  einen konstanten Wert annimmt.

Wegen der zunächst unbekanntem Maschinennachgiebigkeit wird zunächst ein Startwert  ${}^1C_m = 0$  angenommen. Für die iterative Ermittlung von  $C_m$  wird (6.64) in die Form

$${}^j C' = C'' - {}^j C_m = \frac{K}{c_t \sqrt{h_t}} + {}^j \Delta C_m \quad (6.65)$$

gebracht, wobei  ${}^j \Delta C_m$  den Fehler des aktuellen  ${}^j C_m$  angibt. Anhand des Wertes von  ${}^j C'$  wird nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren die Probennachgiebigkeit  $C$  und mit der  $L_t$ -Methode die Werte von  $E_r$  und  $c_t$  ermittelt.

Trägt man für alle Entlastungen den Wert von  ${}^j C'$  über  $1/c_t \sqrt{h_t}$  in einem Diagramm auf, so ergibt sich eine Reihe von Punkten, anhand deren durch Extrapolation, z.B. mittels einer Regressionsgeraden, der Wert von

$${}^j \Delta C_m = {}^j C' \left( \frac{1}{c_t \sqrt{h_t}} = 0 \right) \quad (6.66)$$

bestimmt werden kann (siehe Abb. 6.13a).

Der Wert von  ${}^j C_m$  wird um das ermittelte  ${}^j \Delta C_m$  korrigiert nach

$${}^{j+1} C_m = {}^j C_m + {}^j \Delta C_m \quad (6.67)$$

und der obige Vorgang wird n-mal wiederholt, bis  ${}^n \Delta C_m$  gegen Null geht.

Die Prozedur zur Bestimmung der Maschinennachgiebigkeit ist in Abb. 6.13a an einem Experiment mit austenitischem Stahl dargestellt. Für die Extrapolation wurden Regressionsgeraden verwendet. Deren Achsenabschnitt entspricht dem Wert von  ${}^j \Delta C_m$ . Der Wert des E-Moduls, resultierend aus der  $L_t$ -Methode für die Iterationen ( $j = 1, 2, 3$ ) ist in Abb. 6.13b aufgetragen. Die Ergebnisse nehmen für  $j = 3$  einen deutlich konstanteren Verlauf an. Abbildung 6.13b zeigt, daß die Werte von  $E$  weitgehend mit dem Ergebnis des Zugversuchs übereinstimmen.

Der ermittelte Wert von  $C_m = 0.530 \text{ nm}/N$  besitzt dieselbe Größenordnung wie die Prüfkörpernachgiebigkeit  $C_i$ , die in diesem Beispiel Werte zwischen  $0.5 \text{ nm}/N \leq C_i \leq 2 \text{ nm}/N$  annimmt. Dies bedeutet, daß weder die Nachgiebigkeit des Prüfkörpers noch die Maschinennachgiebigkeit vernachlässigt werden können.

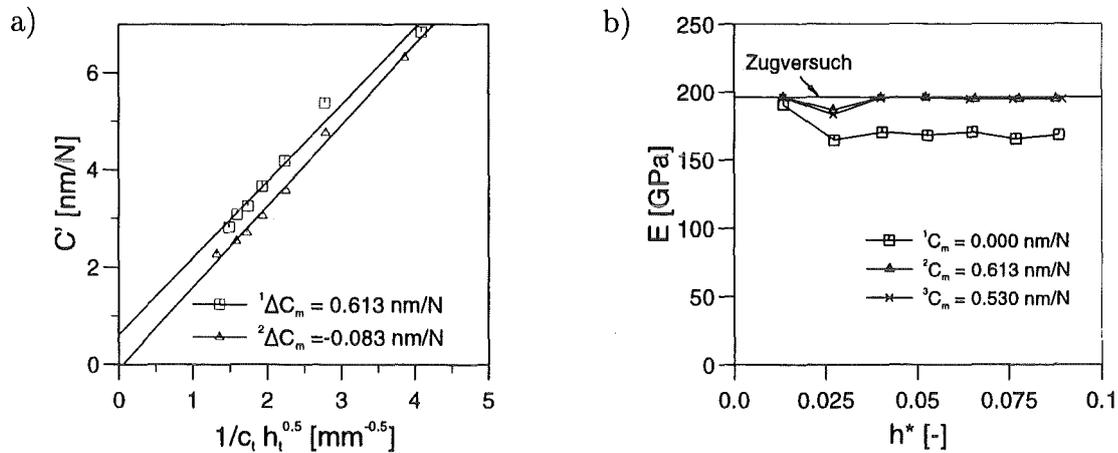


Abbildung 6.13: Beispiel für die Bestimmung der Maschinennachgiebigkeit an einem Experiment mit austenitischem Stahl: a) Konvergenzverhalten; b) Diagramm des E-Moduls über der Eindringtiefe.

### 6.3 Experimentelle Untersuchungen

Mit den Werkstoffen, die bereits in Kap. 4 beschrieben worden sind, werden im folgenden Eindruckversuche durchgeführt. Dabei bietet sich die zusätzliche Gelegenheit, sowohl geglühte als auch ungeglühte Proben zu untersuchen. Insbesondere bei austenitischem Stahl, dessen mechanische Eigenschaften vom Glühvorgang im wesentlichen unberührt bleiben, bietet sich die Möglichkeit, einen Vergleich zwischen den Ergebnissen von eigenspannungsfreien und eigenspannungsbehafteten Proben vorzunehmen. Dies ist zum einen von grundsätzlicher Bedeutung, zum anderen soll die Leistungsfähigkeit der Methode an gehärtetem und weichgeglühtem AlMgSi 1 demonstriert werden. Dazu muß jedoch sichergestellt sein, daß eventuell auftretende Abweichungen des gemessenen E-Moduls nicht auf Eigenspannungen zurückzuführen sind.

Der Wert des E-Moduls wird aus den ermittelten  $P$ - $h$ -Kurven mit der  $L_t$ -Methode unter Berücksichtigung der Prüfkörperverformungen und Maschinennachgiebigkeit nach der in den obigen Abschnitten dargestellten Vorgehensweise bestimmt. Anhand der bereits in Kap. 4 durchgeführten Zugexperimente können die Ergebnisse der Eindruckversuche auf ihre Genauigkeit überprüft werden.

Jeweils ein Beispiel gemessener Last-Eindringtiefe-Kurven für jeden Werkstoff in geglühtem und ungeglühtem Zustand ist in Abb. 6.14a-6.16a gegeben. Die Werte des E-Moduls sind in Abb. 6.14b-6.16b über der Eindringtiefe  $h^*$  für jeweils mindestens

drei Experimente aufgetragen. Die durchgezogene Linie markiert das Ergebnis aus den Zugversuchen mit geglühten Proben. Zwei gestrichelte Linien markieren zusätzlich den Bereich für  $\pm 5\%$  Abweichung.

Wie aus den Ergebnissen der Stahlproben zu entnehmen ist, kann kein Unterschied zwischen den Proben in geglühtem und ungeglühtem Zustand festgestellt werden.

Auch im Fall des Aluminiums, bei dem durch das Glühen des gehärteten Materials ein völlig anderes Verfestigungsverhalten erzielt wurde (siehe Abb. 4.6), zeigen die Ergebnisse einen nahezu übereinstimmenden Wert.

Insgesamt ist eine gute Übereinstimmung mit den Zugversuchen innerhalb des  $\pm 5\%$ -Bereiches festzustellen. Die Werte, die mit großen Abweichungen behaftet sind, treten meist bei Eindringtiefen von  $h^* < 0.025$  auf. Sie sind jedoch von geringer Zahl und können in der Regel bereits bei der Ermittlung der Maschinennachgiebigkeit durch ihre Lage weitab von der Regressionsgeraden erkannt und vom weiteren Verfahren ausgeschlossen werden. In den hier gezeigten Diagrammen sind sie lediglich aus Gründen einer vollständigen Darstellung eingetragen.

Im Hinblick auf die Materialeigenschaften des geglühten Aluminiums und des austenitischen Stahls kann die verwendete  $L_t$ -Methode somit als unempfindlich gegenüber nichtlinearer und kinematischer Verfestigung bezeichnet werden.

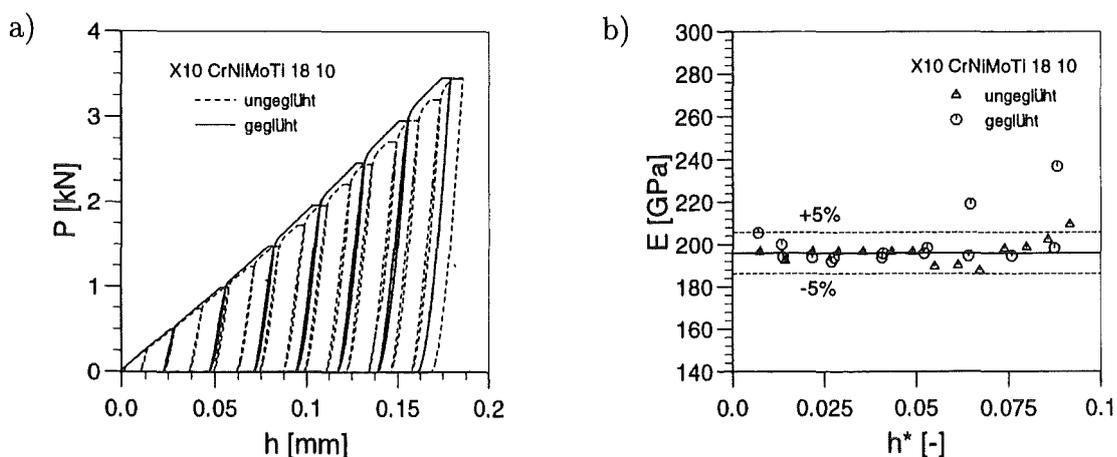


Abbildung 6.14: X10 CrNiMoTi 18 10: a) Eindruckversuch; b) E-Modul nach der  $L_t$ -Methode.

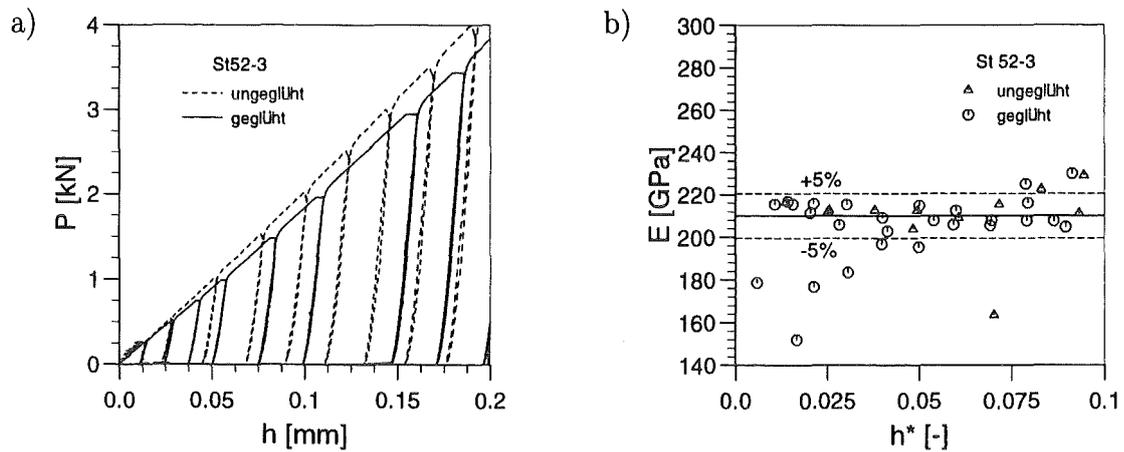


Abbildung 6.15: St52-3: a) Eindruckversuch; b) E-Modul nach der  $L_t$ -Methode.

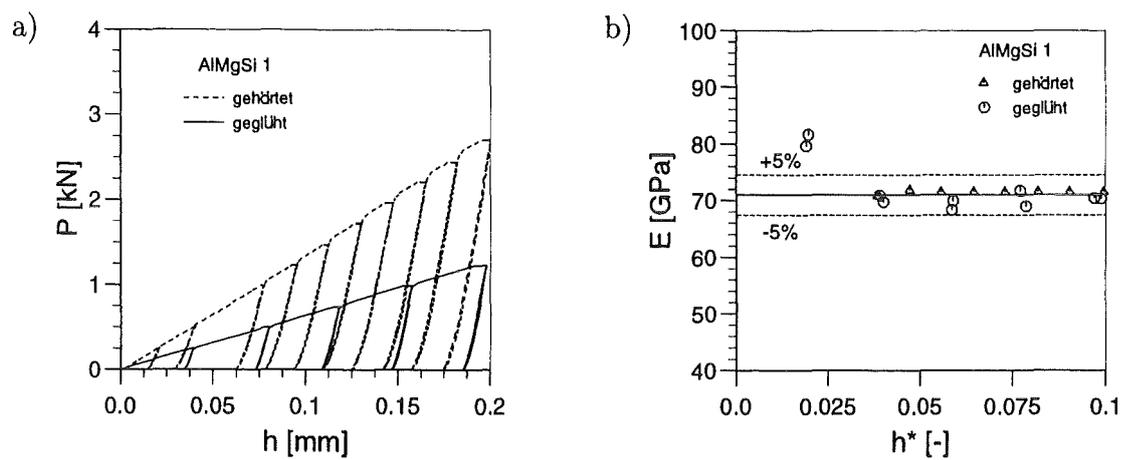


Abbildung 6.16: AlMgSi 1: a) Eindruckversuch; b) E-Modul nach der  $L_t$ -Methode.

## 7 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, den Eindruckversuch im Hinblick auf seine Leistungsfähigkeit bei der Untersuchung mechanischer Eigenschaften zu studieren und zu erweitern.

Grundsätzliche Überlegungen in Kapitel 2 führten zu der Wahl des kugelförmigen Prüfkörpers, motiviert durch die bekannten Analogien zwischen Eindruckversuch und Zugversuch. Diese begleiteten den kugelförmigen Eindruckversuch seit den grundlegenden Untersuchungen von Meyer (1908) und Tabor (1951) über die Arbeit von Hill et al. (1989). Deshalb stellte sich im Verlauf dieser Arbeit immer wieder die Frage, ob speziell im Hinblick auf erweiterte Materialmodelle, die z.B. kinematische Verfestigung berücksichtigen, weitere Analogien, über die bereits bekannten hinaus, existieren.

Die zu betrachtenden Materialmodelle wurden in Kapitel 3 für die Theorie kleiner Deformationen eingeführt. Ausgehend von der Viskoplastizität mit nichtlinearer isotroper und kinematischer Verfestigung nach dem Armstrong-Frederick-Typ wurden das Materialmodell der Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung und schließlich das der Plastizität mit linearer Verfestigung erläutert. In diesem Zusammenhang wurde für jedes Materialmodell eine Dimensionsanalyse durchgeführt, welche erste Einblicke in die Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen des Eindruckprozesses und den unabhängigen Material- und Prozeßgrößen erlaubte.

Die Materialmodelle, formuliert für große Deformationen, standen in Form einer leistungsfähigen Software, implementiert in das Finite-Elemente-Programm *ABAQUS*, zur Verfügung. Generelle Vereinbarungen zu den Finite-Elemente-Simulationen stellen damit den zweiten Teil des dritten Kapitels dar.

In Ergänzung und zur Untermauerung der numerischen Berechnungen wurden Experimente durchgeführt. Zweckmäßigerweise kamen hierzu Makroproben zum Einsatz, womit parallele Untersuchungen desselben Materials mit konventionellen Zugexperimenten ermöglicht wurden. Kapitel 4 ist der Beschreibung des Versuchsaufbaus zur Durchführung von Makro-Eindruckversuchen gewidmet. Sowohl konstruktive und meßtechnische Maßnahmen als auch die grundlegenden Verfahren zur Kalibrierung und Nullpunktbestimmung der Eindrucktiefe wurden erläutert. Abschließend sind in diesem Kapitel die Vorbereitung der Proben und die Ergebnisse der Zugexperimente enthalten.

Im fünften Kapitel wurde das phänomenologische Verhalten der Last-Eindrucktiefe-

Trajektorie in Verbindung mit Verfestigungseigenschaften, Reibung und Viskosität betrachtet. Finite-Elemente-Studien ermöglichten die Isolation von Effekten, die auf bestimmte Teile des zugrundegelegten Materialmodells zurückzuführen sind. Auf diese Weise konnte gezeigt werden, daß die Ausbildung von Hysteresen infolge zyklischer Belastung auf kinematischer Verfestigung basiert. Dabei bildet sich der Grad der vorhandenen kinematischen Verfestigung in der dabei verrichteten Arbeit ab. Mit weiteren Simulationen konnte demonstriert werden, daß hierbei Reibungseffekte keine Rolle spielen. Vergleichende experimentelle Untersuchungen an vier Werkstoffen lieferten den Nachweis, daß die bezogene Arbeit während eines solchen Zyklus als ein einfaches Maß für den Anteil der kinematischen Verfestigung heranzuziehen ist. Die charakteristischen plastischen Verformungen während der Entlastung, hervorgerufen durch kinematische Verfestigung, bilden somit ein weiteres Analogon zum Zugversuch.

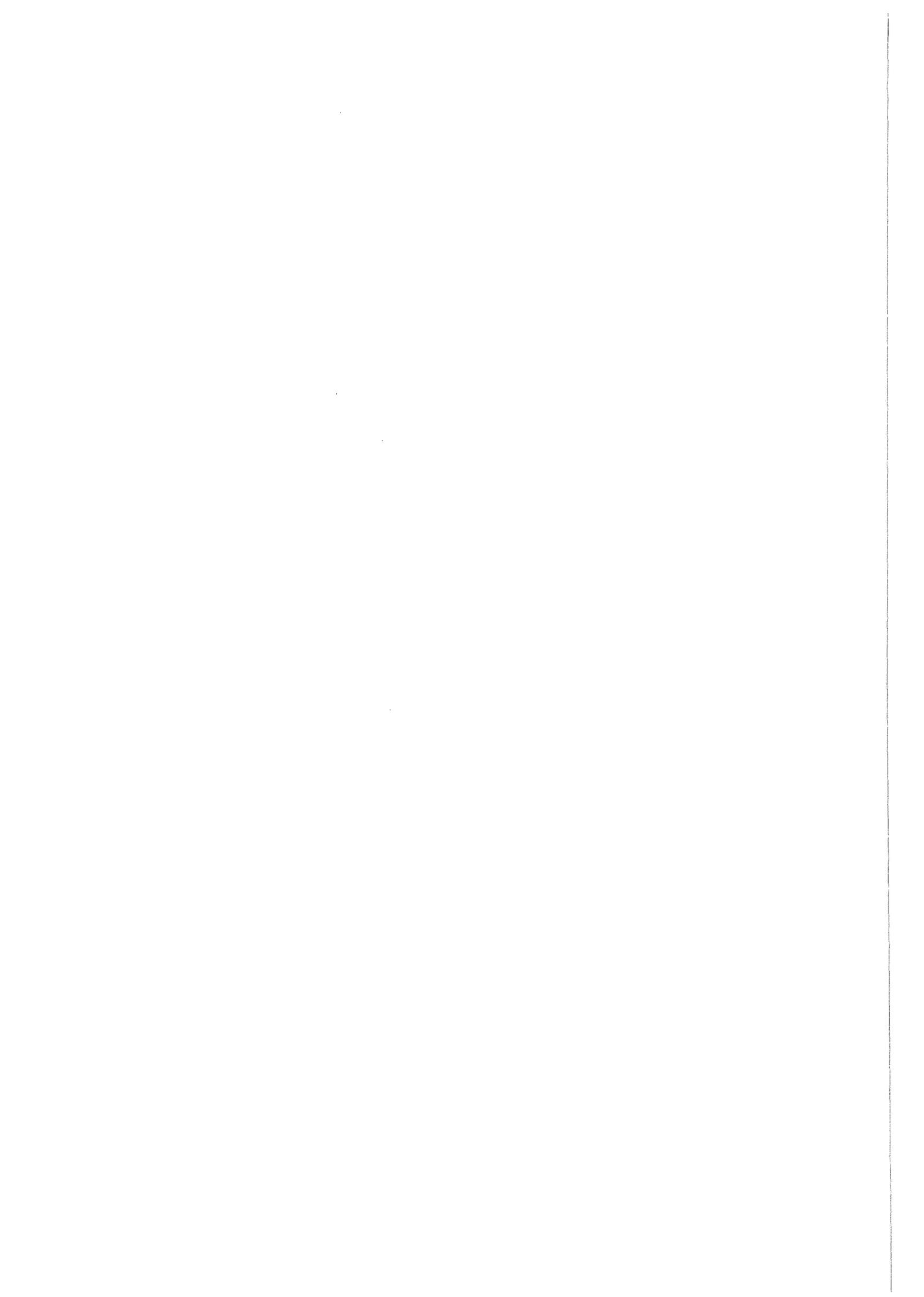
Für den Fall viskoser Effekte ist die Analogie zum Zugversuch jedoch nicht direkt zu erweitern. Sowohl numerische Simulationen als auch Experimente bestätigten, daß beim Eindruckversuch weder Kriech- noch Relaxationsprozesse bei Erreichen des stationären Zustandes den gleichen Punkt der Last-Eindrucktiefe-Bahn annehmen, wie das vergleichbare geschwindigkeitsunabhängige Material. Vielmehr durchstoßen die Trajektorien der Kriech- und Relaxationsprozesse die Bahn des zugeordneten plastischen Materials und der Punkt des stationären Zustandes entfernt sich mit zunehmender Viskosität.

Die nach der Härte mit dem Eindruckversuch meist gemessene Größe ist der Elastizitätsmodul. Die Methode zu dessen Ermittlung, wie sie z.B. in [10] vorgeschlagen und in [39] für ein Materialmodell der Elastizität als gültig nachgewiesen wurde, führte bei der Auswertung von numerisch simulierten Last-Eindrucktiefe-Kurven mit plastischem Materialverhalten zu fehlerhaften Werten. Ebenso zeigte die für Kugeleindrücke entwickelte Methode nach [11] für plastisches Materialverhalten eine deutliche Abweichung vom korrekten Wert des E-Moduls. Die Gründe hierfür, in Kapitel 6 ausführlich diskutiert, sind im wesentlichen in einer nicht korrekten Berücksichtigung der plastisch deformierten Probenoberfläche zu sehen.

Aus diesem Anlaß wurde eine neue Methode, als  $L_t$ -Methode bezeichnet, zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei plastischem Materialverhalten entwickelt. Diese besitzt die Eigenschaft, sowohl die Belastungskurve als auch die Entlastungskurve einzubeziehen. Hierzu werden die plastischen Eigenschaften des Werkstoffes durch eine geeignete Auswertung der Belastungskurve ermittelt und auf einen Faktor zur Berücksichtigung der plastischen Verformung abgebildet, der in die Auswertung der Entlastung einfließt. Aufgrund der iterativen Lösungsstrategie mußten bekannte Verfahren zur Be-

stimmung der Prüfkörper- und Maschinennachgiebigkeit modifiziert werden. Mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen und Experimenten konnte festgestellt werden, daß die  $L_t$ -Methode auch bei realem viskoplastischen Materialverhalten eine geeignete Methode zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls darstellt. Die Genauigkeit der Ergebnisse kann mit 5% angegeben werden.

Die vorliegende Arbeit bestätigt, daß der Eindruckversuch das Potential bietet, mechanische Eigenschaften zu ermitteln. Sind umfassende Auswertemethoden vorhanden, so kann in kurzer Zeit aus einem Experiment eine Fülle an Informationen über den untersuchten Werkstoff bereitgestellt werden. Einige Schritte in dieser Richtung wurden hier getan und es mag der Zukunft vorbehalten sein, die Entwicklung von der Härteprüfung zur „Alternative des Zugversuches“ zu vollenden.



# Literaturverzeichnis

- [1] ATKIN, R.J. and N. FOX: *An Introduction to the Theory of Elasticity*. Longman (1980).
- [2] ATKINS, A.G. and D.T. TABOR: *Plastic indentation in metals with cones*. J. Mech. Phys. Solids, 13, 149–164 (1965).
- [3] BAKER, S.P.: *The analysis of depth-sensing indentation data*. Mater. Res. Soc. Symp. Proc., 308, 209–216 (1993).
- [4] BHATTACHARYA, A.K. and W.D. NIX: *Finite element simulation of indentation experiments*. Int. J. Solids Structures, 24, 881–891 (1988).
- [5] BHATTACHARYA, A.K. and W.D. NIX: *Analysis of elastic and plastic deformation associated with indentation testing of thin films on substrates*. Int. J. Solids Structures, 24, 1287–1298 (1988).
- [6] CAI, X.: *Finite-element method for simulation of elasto-plastic indentations by various indenters*. J. of Materials Science Letters, 11, 1527–1531 (1992).
- [7] CAI, X.: *Effect of friction in indentation hardness testing: a finite element study*. J. of Materials Science Letters, 12, 301–302 (1993).
- [8] CSIRO AUSTRALIA, DIVISION OF APPLIED PHYSICS: *Operating Manual UMIS 2000* (1993).
- [9] DIEGELE, E., W. JANSOHN, and CH. TSAKMAKIS: *Viscoplasticity using dual variables*. In BATRA, R.C. and T.W. WRIGHT (editors): *Proceedings of the ASME Materials Division - Finite Deformation, Vol.1*, pages 449 – 467 (1995).
- [10] DOERNER, M.F. and W.D. NIX: *A method for interpreting the data from depth-sensing indentation*. J. Mater. Res., 1, 601–609 (1986).
- [11] FIELD, J.S. and M.V. SWAIN: *A simple predictive model for spherical indentation*. J. Mater. Res, 8, 297–306 (1993).

- [12] FIELD, J.S. and M.V. SWAIN: *Determining the mechanical properties of small volumes of material from submicrometer spherical indentations*. J. Mater. Res, 10, 101–112 (1995).
- [13] HARDING, J.W. and I.N. SNEDDON: *The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch*. Proc. Camb. Phil. Soc., 43, 16–26 (1945).
- [14] HARDWICK, D.A.: *The mechanical properties of thin films: a review*. Thin Solid Films, 154, 109–124 (1987).
- [15] HARTMANN, ST.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität-Gesamthochschule Kassel (1993).
- [16] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. J. Reine Angew. Math., 92, 156–171 (1882).
- [17] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS user's manual version, 4.9*.
- [18] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS theory, version 4.9*.
- [19] HILL, R., B. STORÅKERS, and A.B. ZDUNEK: *A theoretical study of the Brinell hardness test*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 423, 301–330 (1989).
- [20] HUBER, N., S. KERPE und CH. TSAKMAKIS: *Simulation eines Abformvorgangs*. KfK-Bericht 5418, Kernforschungszentrum Karlsruhe, November 1994.
- [21] HUBER, N., D. MUNZ, and CH. TSAKMAKIS: *Determination of Young's modulus by spherical indentation*. J. Mater. Res., (1996). in press.
- [22] JANSOHN, W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*. Wird als Dissertation eingereicht, Universität Karlsruhe (TH) (1996).
- [23] JOHNSON, K.L.: *Contact Mechanics*. Oxford University Press (1985).
- [24] KATONA, M.G.: *A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts*. Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomechanics, 7, 371–384 (1983).
- [25] KOMVOPOULOS, K.: *Elastic-plastic finite-element analysis of indented layered media*. Journal of Tribology, 111, 430–439 (1989).

- [26] KRAL, E.R., K. KOMVOPOULOS, and D.B. BOGY: *Elastic-plastic finite-element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere*. J. Appl. Mech., 60, 829–841 (1993).
- [27] KRAL, E.R., K. KOMVOPOULOS, and D.B. BOGY: *Finite element analysis of repeated indentation of an elastic-plastic layered medium by a rigid sphere, Part I: Surface results*. J. Appl. Mech., 62, 20–28 (1995).
- [28] KRAL, E.R., K. KOMVOPOULOS, and D.B. BOGY: *Finite element analysis of repeated indentation of an elastic-plastic layered medium by a rigid sphere, Part II: Subsurface results*. J. Appl. Mech., 62, 29–42 (1995).
- [29] LARSSON, P.-L., A.E. GIANNAKOPOULOS, E. SÖDERLUND, D.J. ROWCLIFFE, and R. VESTERGAARD: *Analysis of Berkovich indentation*. Int. J. Solids Structures, 33, 221–248 (1996).
- [30] LAURSEN, T.A. and J.C. SIMO: *A study of the mechanics of microindentation using finite elements*. J. Mater. Res, 7, 618–626 (1992).
- [31] LOUBET, J.L., J.M. GEORGES, and G. MEILLE: *Vickers indentation curves of elastoplastic materials*. In BLAU, J.B. and B.R. LAWN (editors): *Microindentation Techniques in Materials Science and Engineering*, no. 889 in STP, pp. 72–89. American Society for Testing and Materials (ASTM) (1985).
- [32] LOVE, A.E.H.: *Boussinesq's problem for a rigid cone*. Quart. J. Math., 10, 161–175 (1939).
- [33] MAYO, M.J. and W.D. NIX: *A micro-indentation study of superplasticity in Pb, Sn and Sn-38 wt% Pb*. Acta Metall., 36, 2183–2192 (1988).
- [34] MEYER, E.: *Untersuchungen über Härteprüfungen und Härte*. Zeits. Ver. Dt. Ing., 52, 82–85 (1908).
- [35] MURAKAMI, Y. and K. MATSUDA: *Analysis of Vickers hardness by the Finite Element Method*. ASME J. Appl. Mech., 61, 822–828 (1994).
- [36] OLAF, J.M.: *Ein Verfahren zur Bewertung des mechanischen Verhaltens von Randschichten*. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau (1992).

- [37] OLIVER, W.C. and G.M. PHARR: *An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments*. J. Mater. Res., 7, 1564–1583 (1992).
- [38] OLIVER, W.C., R. HUTCHINGS, and J.B. PETHICA: *Measurement of hardness at indentation depths as low as 20 nanometers*. In BLAU, J.B. and B.R. LAWN (editors): *Microindentation Techniques in Materials Science and Engineering*, no. 889 in *STP*, pp. 90–108. American Society for Testing and Materials (ASTM) (1985).
- [39] PHARR, G.M., W.C. OLIVER, and F.R. BROTZEN: *On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation*. J. Mater. Res, 7, 613–617 (1992).
- [40] RAMAN, V. and R. BERRICHE: *An investigation of the creep process in tin and aluminium using a depth-sensing indentation technique*. J. Mater. Res., 7, 627–638 (1992).
- [41] J., SCHWERTEL: *Modellierung des einachsigen mechanischen Verhaltens von Werkstoffen durch viskoplastische Stoffmodelle*. Fortschrittsberichte VDI / Reihe 5, Grund- und Werkstoffe 306, VDI-Verlag, Düsseldorf (1993).
- [42] SPENCE, D.A.: *Self similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading*. Proc. Roy. Soc. A, 305, 55–80 (1968).
- [43] STORÅKERS, B. and P-L. LARSSON: *On Brinell and Bousinesq indentation of creeping solids*. J. Mech. Phys. Solids, 42, 307–332 (1994).
- [44] TABOR, D.: *Hardness of Metals*. Cambridge University Press (1951).
- [45] TSAKMAKIS, CH.: *Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen*. Habilitation, Universität-Gesamthochschule Kassel (1994).
- [46] TSAKMAKIS, CH.: *Formulation of viscoplasticity laws using overstresses*. Acta Mechanica, 115, 179–202 (1996).
- [47] YOKOUCHI, Y., G. GREENFIELD, T.-W. CHOU, and E.B. ITURBE: *Elastic-plastic analysis of indentation damage: cyclic loading of copper*. J. Mater. Science, 22, 3087–3094 (1987).
- [48] ZIEREP, J.: *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*. Braun, Karlsruhe (1982).