

*fr*

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**

FZKA 5864

*Diss. Exemplar*

# **Entwicklung eines impliziten Verfahrens zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters**

**T. W. Ammann**

Institut für Reaktorsicherheit  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

März 1997



**Forschungszentrum Karlsruhe**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5864

**Entwicklung eines impliziten Verfahrens  
zur lokalen Verfeinerung  
eines strukturierten Gitters\***

Tibor Wilhelm Ammann

Institut für Reaktorsicherheit  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

\*Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1997

**Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**ISSN 0947-8620**

**Entwicklung eines impliziten Verfahrens  
zur lokalen Verfeinerung  
eines strukturierten Gitters**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Tibor Wilhelm Ammann**  
aus Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung:	5. Dezember 1996
Hauptreferent:	Prof. Dr. Dr. h.c. D. G. Cacuci
Korreferenten:	Prof. Dr.-Ing. W. Frank Dr.rer.nat.habil. C. Günther



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Institut für Reaktorsicherheit des Forschungszentrums Karlsruhe.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Cacuci, der mir die Möglichkeit zur wissenschaftlichen Bearbeitung des Dissertationsthemas gab.

Herrn Prof. Frank und Herrn Dr. Günther danke ich für die Übernahme der Korreferate und die wertvollen Anregungen, die sie mir bei der Umsetzung dieser Arbeit gaben. Insbesondere Herrn Dr. Günther danke ich für die Diskussionen und Informationen hinsichtlich seines Verfahrens.

Herrn Dr. Grötzbach danke ich besonders für die zahlreichen Diskussionen in fachlicher wie in menschlicher Hinsicht, die für die Reife dieser Arbeit und seines Autors sehr hilfreich waren.

Ich danke den vielen Kollegen am Institut, die aufzuzählen einigen Platz in Anspruch nehmen würde und bei denen ich für eine Diskussion oder ein hilfreiches Gespräch immer eine offene Tür fand.

Meiner Familie danke ich für die zurückliegenden Jahre der Unterstützung, in der Ihr mir in moralischer als auch finanzieller Hinsicht immer ein Rückhalt ward.

Schließlich danke ich Dir, Silke, für Deine vielfältige Unterstützung und Deinen Verzicht auf viele gemeinsame Stunden.

Im Dezember 1996





## Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein implizites Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters entwickelt, das auf einem Finite-Volumen Verfahren basiert.

Bei dem vorgeschlagenen Verfahren wird das Gitter an den Rändern der Verfeinerung in Teilgebiete aufgespalten. Diese Teilgebiete werden an den Rändern durch künstliche Maschen umgeben, wodurch die Approximation aller Terme in den Erhaltungsgleichungen im Innern dieser Teilgebiete ermöglicht wird. Für die Randmaschen des feineren Teilgitters werden Nachbarn definiert, die durch eine allgemeine Taylor-Reihenentwicklung 2. Ordnung an das grobe Gitter gekoppelt sind. Für die Randmaschen des groben Teilgitters werden künstliche Maschen als Nachbarn definiert, die die Konservativität des Gitterübergangs sicherstellen.

Alle Maschen werden vollimplizit behandelt, so daß die berechneten Drücke und Geschwindigkeiten immer die Kontinuitätsgleichung erfüllen. Damit ist es zum ersten Mal möglich, ein verfeinertes Gitter geschlossen in einem Gleichungssystem zu lösen. Darüber hinaus wird dadurch eine Iteration der Lösung auf den verschiedenen Teilgittern vermieden.

Es wird gezeigt, daß eine Kopplung 2. Ordnung zwischen den verschiedenen Verfeinerungsstufen notwendig ist, um eine konsistente Diskretisierung auch auf einem nicht-äquidistanten Gitter zu gewährleisten. Darüber hinaus ermöglicht eine solche Kopplung, die Genauigkeitsordnung eines Diskretisierungsverfahrens 2. Ordnung für den konvektiven Term zu erhalten. Diese Forderung ergibt sich in analoger Weise bei den Multigridverfahren für die bei diesen Verfahren benutzten Interpolationen zwischen den verschiedenen Gitterebenen. Für diese Interpolationen wird eine Genauigkeit gefordert, die mindestens von der gleichen Ordnung wie die Genauigkeitsordnung der gesamten Diskretisierung sein sollte.

Für die typischen Maschenweitensprünge an den Rändern der Teilgitter wird die Stabilität des vorgeschlagenen Verfahrens mit einer Von Neumann Stabilitätsanalyse untersucht. Damit kann auch bei expliziter Behandlung ein Zeitschritt gefunden werden, mit dem das Verfahren bei allen betrachteten Diskretisierungsverfahren für den konvektiven Term stabil bleibt. Durch die vollimplizite Behandlung der Ränder der Teilgitter ist deshalb keine Stabilitätseinbuße durch die lokale Verfeinerung zu erwarten. Damit ist es insbesondere möglich, mit größeren Zeitschritten als bei einem expliziten Verfahren zu rechnen, was die Effizienz des Gesamtverfahrens erheblich steigert. Die Effizienz des Gesamtverfahrens wird auch dadurch gesteigert, daß man durch das vorgeschlagene Verfahren mit einer erheblich geringeren Anzahl an Maschen, d. h. auch an Unbekannten, ein Problem mit einer hohen lokalen Ortsauflösung diskretisieren kann.

Das Verfahren wurde in das dreidimensionale Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN implementiert. Es wird an zwei laminaren Strömungen über eine zurückspringende Stufe und durch eine symmetrische Erweiterung sowie an einer turbulenten Strömung

hinter einem Düsenblock verifiziert. Der Einfluß der Diskretisierung und die Verbesserung des Simulationsergebnisses bei lokaler Verfeinerung werden gezeigt. Da es möglich ist, nur an den gewünschten Stellen eine hohe Ortsauflösung zu realisieren, kann im restlichen Simulationsgebiet ein wesentlich gröberes Gitter verwendet werden, was, wie gewünscht, eine Steigerung der Effizienz mit sich bringt.

Abschließend wird das Verfahren zur Simulation von Naturkonvektion in einem horizontalen, beheizten Ringspalt angewandt. Bei der stationären Strömung von Luft bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$  kann eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung mit Experimenten erzielt werden. Bei der Simulation der instationären Strömung von kryogenem Helium bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  kann bei einer zweidimensionalen Modellierung die auch im Experiment beobachtete Oszillation gefunden werden. Die dabei festgestellte Frequenz stimmt gut mit den Experimenten überein. Die in der Simulation gefundene Amplitude ist jedoch wesentlich zu klein. Detailuntersuchungen zu diesem Teilproblem sind hier noch notwendig.

# Development of an implicit method for the local refinement of a structured grid

## Abstract

An implicit method for the local refinement of a structured grid based on a finite volume method is developed. The grid is separated into subdomains at the boundary of the refinement zones. These refinement zones are surrounded by artificial meshes, allowing the approximation of all terms in the conservation equations inside these zones. Neighbours are defined for the boundary meshes of the finer grid, which are coupled by a general second order Taylor-expansion with the coarser grid. For the boundary meshes of the coarser grid, neighbours are also defined, ensuring conservation of the transported quantities at the refinement boundary.

All meshes are treated implicitly, therefore the calculated pressure and velocities fulfill the continuity equation during the iterations. With this method, it is for the first time possible to solve a refined grid in one closed system of equations. Additionally, further iterations due to decoupled solutions in the different zones are avoided.

It is demonstrated that a second order coupling of the different refinement levels is required to guarantee a consistent discretization on a non-equidistant grid. With such a coupling it is possible to conserve the accuracy of a second order discretization for the approximation of the convective term. This requirement is in analogy to the interpolations used within multigrid methods to couple the different grid levels. For these interpolations the accuracy of the interpolations should be of the same order as the accuracy of the discretization.

The stability of the method is analyzed for the typical jumps of the meshsizes with a Von Neumann stability analysis. A timestep can be found even for an explicit treatment, ensuring the stability of the method for all analysed discretization methods for the convective term. Because of the implicit treatment of the boundaries of the refinement zones, no loss of stability due to the refinement of the grid is expected. Therefore, it is possible to calculate using larger timesteps than timesteps permitted using explicit methods, which increases the efficiency of the method. In addition, the efficiency of the method is also increased because one is able to discretize a problem requiring a local high spatial resolution by using the suggested method with considerably fewer meshes and therefore fewer unknowns.

The method is implemented in the three-dimensional thermal fluid dynamic code FLUTAN. It is verified with two laminar flow simulations: one over a backward facing step, and the other through a sudden symmetric expansion; a third verification is with a simulation of a turbulent flow behind a jetblock. The influence of the discretization and the impro-

vement of the results due to the local refinement of the grid is demonstrated. Because it is possible to refine locally at special locations, one is able to use much coarser meshes in the main part of the computational domain, thereby yielding an increased efficiency.

Finally, the method is used to simulate natural convection in a horizontal heated annulus. For stationary flow of air at a Rayleigh-number of  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$  a good qualitative and quantitative agreement can be achieved. In the simulation of the instationary flow of cryogenic helium at a Rayleigh-number of  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  a two-dimensional oscillation can be found, which was also observed in the experiment. The frequency is in good agreement with the experiment. However, the simulated amplitude is considerably underpredicted. Detailed analyses of this problem are therefore necessary in the future.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis . . . . .	xi
Tabellenverzeichnis . . . . .	xii
Nomenklatur . . . . .	xiii
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Diskretisierung lokaler Vorgänge auf einem strukturierten Gitter . . . . .	4
1.2 Stand der Methoden zur lokalen Verfeinerung eines Gitters . . . . .	6
1.2.1 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Element Methoden . . . . .	6
1.2.2 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Differenzen Methoden . . . . .	7
1.2.3 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Volumen Methoden . . . . .	12
1.3 Bewertung und Ziel dieser Arbeit . . . . .	16
1.3.1 Anforderungen . . . . .	16
1.3.2 Bewertung . . . . .	17
1.3.3 Ziele dieser Arbeit . . . . .	18
<b>2 Grundgleichungen des Finite Volumen Verfahrens</b>	<b>20</b>
2.1 Analytische Form der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen . . . . .	20
2.2 Numerische Approximation der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen . . . . .	22
2.2.1 Verfahren der Finiten Volumen . . . . .	22
2.2.2 Approximation der Flußterme . . . . .	23
2.2.3 Zeitintegration . . . . .	26
2.2.4 Die vollimplizite Druckgleichung . . . . .	29
<b>3 Ein implizites Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters</b>	<b>31</b>
3.1 Verfahrensschema . . . . .	32
3.2 Zusätzliche Gleichungen an Verfeinerungsgrenzen . . . . .	35
3.2.1 Zusätzliche Gleichungen für die allgemeine Transportgleichung . . . . .	35
3.2.2 Behandlung der Impulsgleichung . . . . .	40
3.2.3 Zusätzliche Gleichungen in der Druckgleichung . . . . .	43
3.3 Numerische Eigenschaften des Verfahrens . . . . .	46

3.3.1	Konsistenz . . . . .	46
3.3.2	Stabilität . . . . .	49
3.3.3	Bewertung . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Implementierung in das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN</b>	<b>61</b>
4.1	Das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN . . . . .	61
4.2	Hierarchische Datenstruktur und ihre Umsetzung . . . . .	62
4.3	Umsetzung innerhalb des Lösungsalgorithmus von FLUTAN . . . . .	68
4.4	Effizienz des Verfahrens . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Verifikation und Anwendung des Verfahrens</b>	<b>72</b>
5.1	Verifikation des Verfahrens . . . . .	73
5.1.1	Laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe . . . . .	73
5.1.2	Laminare Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung . . . . .	80
5.1.3	Turbulente Strömung hinter einem Düsenblock . . . . .	88
5.1.4	Bewertung der Verifikation . . . . .	94
5.2	Anwendung des Verfahrens . . . . .	94
5.2.1	Stationäre laminare Strömung in einem beheizten Ringspalt . . . . .	96
5.2.2	Instationäre laminare Strömung in einem beheizten Ringspalt . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Schlußfolgerungen und Ausblick</b>	<b>109</b>
	<b>Literatur</b>	<b>112</b>
	<b>Anhang</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Literaturrecherche zu Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung</b>	<b>121</b>
<b>B</b>	<b>Berechnung der Koeffizienten des LECUSSO-Verfahrens</b>	<b>126</b>
<b>C</b>	<b>Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter</b>	<b>128</b>
C.1	Störungsanalyse . . . . .	128
C.2	Von Neumann Analyse . . . . .	129
<b>D</b>	<b>Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren auf einem nicht-äquidistanten Gitter</b>	<b>131</b>
<b>E</b>	<b>Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren in mehreren Raumdimensionen</b>	<b>134</b>

<b>F</b>	<b>Diskretisierte Form der Flußerhaltung an Verfeinerungsgrenzen in FLU-</b>	
	<b>TAN</b>	<b>136</b>
F.1	Flußerhaltung in der allgemeinen Transportgleichung . . . . .	136
F.1.1	Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung . . . . .	137
F.1.2	Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung . . . . .	138
F.2	Flußerhaltung in der Kontinuitätsgleichung . . . . .	140
F.2.1	Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung . . . . .	140
F.2.2	Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung . . . . .	141

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein strukturiertes Gitter als Basis eines Finite Differenzen Verfahrens . . .	3
1.2	Diskretisierung des Rechengebiets bei einem Finite Element Verfahren . . .	3
1.3	a) Ein strukturiertes Gitter und b) seine tatsächliche geometrische Gestalt	5
1.4	Verschiedene Verfeinerungsmöglichkeiten eines strukturierten Gitters, a) globale Verfeinerung, b) Gitterverzerrung, c) lokale Gitterverfeinerung . . .	5
1.5	Verfeinerung zweier Finiter Elemente . . . . .	6
1.6	Übergang vom groben zum feinen Gitter nach Evans (1991) . . . . .	7
1.7	Gitterzonen verschiedener Verfeinerung bei Berger (1982) . . . . .	9
1.8	Definition der verschiedenen Zonen nach Monnoyer et. al. (1988); die Strömungsrichtung ist von links nach rechts . . . . .	13
1.9	Gitter mit lokaler Verfeinerung nach Bassi (1986) . . . . .	13
1.10	Zusammengesetztes Gitter bei Lazarov et. al. (1994) . . . . .	14
1.11	Diskretisierung mit einem unstrukturierten Gitter bei Vilsmeier und Hänel (1993) . . . . .	15
1.12	Definition der überlappenden Gitterebenen bei Terasaka et. al. (1995) . . .	16
2.1	Die Kontrollvolumina für ein Finites Volumen Verfahren bei Verwendung eines versetzten Gitters . . . . .	22
2.2	Die Stützstellen bei der Diskretisierung des konvektiven Terms an den Rändern des Kontrollvolumens bei den verschiedenen Verfahren . . . . .	25
2.3	Beeinflussung der Punkte bei a) impliziter und b) expliziter Zeitintegration	27
2.4	Gebiet der Kontinuumsabhängigkeit für $C = 1$ . . . . .	28
3.1	Bestandteile und Gesamttopologie des zusammengesetzten, lokal verfeinerten Gitters . . . . .	32
3.2	Differenzensterne am Rand einer lokalen Gitterverfeinerung . . . . .	33
3.3	Aufspaltung des a) tatsächlichen Gitters an den Verfeinerungsrändern in die verschiedenen Verfeinerungsebenen und Definition der künstlichen Randmaschen mit b) Übergang von $n = 1 \rightarrow n = 0$ und c) Übergang von $n = 0 \rightarrow n = 1$ . . . . .	34
3.4	a) Unverfeinertes Ausgangsgitter und b) Gitter mit der Deklaration für den Grad $n$ der Verfeinerung (vgl. auch Abbildung 3.1) . . . . .	34
3.5	Definition der Halbmasche als künstlicher Nachbar des groben Gitters und der Flüsse über ihre Maschengrenzen . . . . .	37



3.6	Räumliche Lage der künstlichen Maschen für den Übergang vom groben zum feinen Gitter . . . . .	38
3.7	Definition der aus Impulsbilanzgleichungen bestimmten (durchgezogene Pfeile) und der interpolierten Geschwindigkeiten (gestrichelte Pfeile), a) für das grobe Gitter mit künstlicher Masche und b) für das feine Gitter mit den künstlichen Maschen . . . . .	42
3.8	Kontrollvolumina der Impulsmaschen am Rand einer Gitterverfeinerung, a) für das grobe Gitter mit künstlicher Masche und b) für das feine Gitter mit den künstlichen Maschen . . . . .	42
3.9	Definition der Halbmasche und der Flüsse über ihre Maschengrenzen für die Druckgleichung . . . . .	44
3.10	Definition der Maschenweiten $\Delta x_i$ . . . . .	47
3.11	Nachbarn am Rand einer Verfeinerung und ihre Benennung . . . . .	47
3.12	Maschenweitensprünge mit verschiedenen Werten von $r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}$ . . . . .	51
3.13	Stabilitätsgrenzen für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung . . . . .	52
3.14	Approximation der Stabilitätsgrenze für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung . . . . .	53
3.15	Stabilitätsgrenze für das LECUSSO-Verfahren für verschiedene $\lambda$ . . . . .	54
3.16	Anfachungsfaktor G für das LECUSSO-Verfahren für $\lambda = 0,5$ und zwei verschiedene Kombinationen von C und D . . . . .	55
3.17	Gegenüberstellung der numerisch gefundenen Stabilitätsgrenze und der analytisch abgeschätzten für das LECUSSO-Verfahren mit $\lambda = 0,5$ . . . . .	55
3.18	Anfachungsfaktor G für das LECUSSO-Verfahren für drei verschiedene $\lambda$ und $r1 = 2 \wedge r2 = 2$ . . . . .	56
3.19	Anfachungsfaktor G für das LECUSSO-Verfahren für drei verschiedene $\lambda$ und $r1 = 0,5 \wedge r2 = 0,5$ . . . . .	57
3.20	Gegenüberstellung der numerisch gefundenen Stabilitätsgrenze und der analytisch abgeschätzten für das LECUSSO-Verfahren auf einem nicht-äquidistanten Gitter $r1 = 2 \wedge r2 = 2$ und $\lambda = 0,5$ . . . . .	57
3.21	Eckmasche eines lokal verfeinerten Teilgebiets bei einem zweidimensionalen Gitter und die Benennung ihrer Nachbarn . . . . .	58
4.1	Baumstruktur für ein Gitter mit drei Verfeinerungsebenen . . . . .	63
4.2	Namenskonvention bei der lokalen Verfeinerung einer Masche in FLUTAN . . . . .	63
4.3	Namenskonvention bei der Benennung der künstlichen Maschen am Rand des feinen Gitters . . . . .	64
4.4	Namenskonvention bei der Benennung der künstlichen Maschen am Rand des groben Gitters . . . . .	64
4.5	Prinzipieller Ablauf der Abarbeitung eines Verfeinerungsgrades . . . . .	67
4.6	Aufbau des Adreßvektors in FLUTAN bei lokaler Verfeinerung . . . . .	68

4.7	Flußdiagramm für die iterative Lösung eines Zeitschritts in FLUTAN mit den Erweiterungen des implementierten Verfahrens zur lokalen Verfeinerung (gestrichelte Kästen) . . . . .	69
5.1	Geometrie der laminaren Strömung über eine zurückspringende Stufe nach Morgan et. al. (1984) . . . . .	73
5.2	Die räumliche Diskretisierung in der Nähe der zurückspringenden Stufe, a) ohne lokale Verfeinerung und b) mit lokaler Verfeinerung . . . . .	75
5.3	Verlauf der Stromlinien bei der zurückspringenden Stufe, a) im Experiment von Kueny und Binder (1984) und b) Rechnung mit lokaler Verfeinerung . . . . .	76
5.4	Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für $\frac{x-x_0}{h_s} = 1,5$ . . . . .	77
5.5	Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für $\frac{x-x_0}{h_s} = 4$ . . . . .	77
5.6	Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für $\frac{x-x_0}{h_s} = 8$ . . . . .	78
5.7	Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für $\frac{x-x_0}{h_s} = 4$ in der Nähe der unteren Wand . . . . .	79
5.8	Verlauf des Maximums der axialen Geschwindigkeit über dem dimensionslosen Abstand von der Stufenkante . . . . .	79
5.9	Definition der Geometrie bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung nach Cherdron et. al. (1978) . . . . .	81
5.10	Räumliche Diskretisierung der Erweiterung bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung, a) ohne lokale Verfeinerung und b) mit lokaler Verfeinerung . . . . .	83
5.11	Stromlinienfeld bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Erweiterung . . . . .	83
5.12	Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit $\frac{ul(z)}{ul_{max}(0)}$ über der dimensionslosen Kanalhöhe $\frac{z}{H}$ für $x - x_0 = 0$ . . . . .	84
5.13	Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit $\frac{ul(z)}{ul_{max}(0)}$ über der dimensionslosen Kanalhöhe $\frac{z}{H}$ für $x - x_0 = 5 \text{ mm}$ . . . . .	85
5.14	Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit $\frac{ul(z)}{ul_{max}(0)}$ über der dimensionslosen Kanalhöhe $\frac{z}{H}$ für $x - x_0 = 20 \text{ mm}$ . . . . .	85
5.15	Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit $\frac{ul(z)}{ul_{max}(0)}$ über der dimensionslosen Kanalhöhe $\frac{z}{H}$ für $x - x_0 = 40 \text{ mm}$ . . . . .	86
5.16	Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit $\frac{ul(z)}{ul_{max}(0)}$ über der dimensionslosen Kanalhöhe $\frac{z}{H}$ für $x - x_0 = 80 \text{ mm}$ . . . . .	86
5.17	Versuchsaufbau zur Untersuchung der Ausbreitung von Temperaturstörungen hinter einem Düsenblock nach Krebs (1979) . . . . .	89
5.18	Diskretisierung des zylindrischen Rohres, a) lokal unverfeinertes und b) in der Nähe der Kanalmitte lokal verfeinertes Gitter . . . . .	91
5.19	Geschwindigkeitsprofile über dem Radius bei a) $\frac{z}{d} = 20$ , b) $\frac{z}{d} = 27$ , c) $\frac{z}{d} = 93$ , d) $\frac{z}{d} = 162$ . . . . .	92

5.20	Temperaturprofile über dem Radius bei a) $\frac{z}{d} = 20$ , b) $\frac{z}{d} = 44$ , c) $\frac{z}{d} = 93$ , d) $\frac{z}{d} = 162$ . . . . .	93
5.21	Numerisch approximierter Temperaturgradient in der Nähe der Kanalachse, a) auf einem feinen Gitter, b) auf einem groben Gitter . . . . .	94
5.22	Definition der Geometrie und des Koordinatensystems bei einem horizontalen beheizten Ringspalt . . . . .	95
5.23	Geometrie der Konvektion in einem horizontalen beheizten Ringspalt nach Kuehn und Goldstein (1975), a Innenrohr, b Außenrohr, c Heizung, d Kühl- kanäle, e Plexiglasabschluß . . . . .	96
5.24	Die räumliche Diskretisierung des horizontalen beheizten Ringspalts bei $Ra = 4,9 \cdot 10^4$ . . . . .	98
5.25	Vektorplot der mit FLUTAN berechneten Geschwindigkeiten . . . . .	98
5.26	Vergleich der Temperaturisolines, links Rechnung mit FLUTAN und lo- kaler Gitterverfeinerung, rechts Interferogrammaufnahmen im Experiment von Kuehn und Goldstein (1978) . . . . .	99
5.27	Gegenüberstellung der simulierten und der im Experiment von Kuehn und Goldstein (1975) gemessenen radialen Temperaturprofile $T^* = \frac{T(r)-T_A}{T_I-T_A}$ über $r^* = \frac{r-r_I}{r_A-r_I}$ bei a) $\varphi = 90^\circ$ , b) $\varphi = 120^\circ$ , c) $\varphi = 150^\circ$ , d) $\varphi = 180^\circ$ , e) $\varphi = 210^\circ$ , f) $\varphi = 240^\circ$ . . . . .	100
5.28	Temperatur über dem Umfangswinkel bei $r^* = 0,99$ . . . . .	101
5.29	Die räumliche Diskretisierung des horizontalen beheizten Ringspalts bei $Ra = 1,05 \cdot 10^7$ . . . . .	104
5.30	Gegenüberstellung der simulierten und der im Experiment von McLeod (1978) gemessenen radialen Temperaturprofile $T^* = \frac{T(r)-T_A}{T_I-T_A}$ über $r^* =$ $\frac{r-r_I}{r_A-r_I}$ bei a) $\varphi = 90^\circ$ , b) $\varphi = 120^\circ$ , c) $\varphi = 150^\circ$ , d) $\varphi = 180^\circ$ , e) $\varphi = 210^\circ$ .	106
5.31	Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Temperaturen, a) im Experiment von McLeod (1978) und b) in der Simulation mit FLUTAN . . . . .	107

# Tabellenverzeichnis

2.1	Bedeutung der Terme in den verschiedenen Erhaltungsgleichungen . . . . .	21
3.1	Zusammenfassung der Gleichungen zur Berechnung der Interpolationskoeffizienten . . . . .	41
4.1	Anzahl der Unbekannten bei einem lokal verfeinerten Gitter . . . . .	70
5.1	Simulationsparameter bei der laminaren Strömung über eine Stufe . . . . .	74
5.2	Länge der Rezirkulationsgebiete in den Rechnungen und im Experiment . .	76
5.3	Simulationsparameter bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Erweiterung . . . . .	82
5.4	Simulationsparameter bei der turbulenten Strömung hinter einem Düsenblock	90
5.5	Simulationsparameter bei der stationären, laminaren Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt bei $Ra = 4,9 \cdot 10^4$ . . . . .	97
5.6	Simulationsparameter bei der instationären, laminaren Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt bei $Ra = 1,05 \cdot 10^7$ . . . . .	104

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

a	Diffusionskoeffizient in der thermischen Energiegleichung
A	Fläche
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x_i}$	Courant-Zahl
$C_i$	Koeffizienten des LECUSSO-Verfahrens
d	Durchmesser der Bohrungen im Düsenblock
$D = \frac{a\Delta t}{\Delta x_i^2}$	Diffusions-Zahl
D	Rohrdurchmesser
$D_H = \frac{4A}{U}$	hydraulischer Durchmesser
DX, DY, DZ	Maschenweite in x-, y- und z-Richtung
E	Amplitude bei der Von Neumann Analyse
EPS	Genauigkeit
IT	Anzahl der Iterationen
g	Erdbeschleunigung
$G = \frac{E^{n+1}}{E^n}$	Anfachungsfaktor bei der Von Neumann Analyse
$Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$	Grashof-Zahl
h	Kanalhöhe vor der Erweiterung
$h_l$	Enthalpie
$h_s$	Stufenhöhe
H	Kanalhöhe nach der Erweiterung
i,j,k	Indizes der Koordinatenrichtungen
$I = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
k	Wellenzahl
l	charakteristische Länge
L	Spaltweite

n	Verfeinerungsgrad
	Index für den Zeitpunkt
N, NM	Anzahl der Maschen
M1-M6	Nachbarmaschen
P	Druck
$Pr = \frac{\nu}{a}$	Prandtl-Zahl
Q	innere Wärmequelle
r	Radius
$Ra = Pr \cdot Gr$	Rayleigh-Zahl
$Re = \frac{u l}{\nu}$	Reynolds-Zahl
$Re = \frac{u \Delta x_i}{\nu}$	Maschen-Reynolds-Zahl
$r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}$	Maschenweitenverhältnis
$r2 = \frac{\Delta x_{i-2}}{\Delta x_i}$	Maschenweitenverhältnis
S	allgemeiner Quellterm
t	Zeit
T	Temperatur
u	Geschwindigkeit
$u_B$	mittlere Geschwindigkeit am Einlauftrand
$\hat{u}_j$	Pseudogeschwindigkeit in der Impulsgleichung
$u_{0,j}$	Koeffizient in der Impulsgleichung
V	Volumen
x,y,z	Koordinatenrichtungen

## Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma$	Koeffizienten der Diskretisierungsverfahren
$\beta$	Volumenausdehnungskoeffizient
$\Gamma$	allgemeiner Diffusionskoeffizient
$\Delta$	Differenz
$\varepsilon$	Fehler
$\eta$	dynamische Viskosität
$\varphi$	Winkel
$\lambda$	Leitfähigkeit
	Koeffizient des LECUSSO-Verfahrens
$\Phi$	Phasenwinkel
$\Phi^*$	Dissipation von kinetischer Energie

$\Psi$	allgemeine Transportgröße
$\nu$	kinematische Viskosität $\hat{=}$ Diffusivität in der Impulsgleichung
$\rho$	Dichte
$\zeta$	Volumenviskosität

## Superskripte

a	approximativ
f	fein
g	grob
MH	Maschenhälfte
MH1	Randmasche des groben Gitters
n	Zeitebene
TO	Tochtermasche oben
TO1	künstliche Nachbarmasche der Tochtermasche oben
TU	Tochtermasche unten
TU1	künstliche Nachbarmasche der Tochtermasche unten
*	dimensionslose Größe

## Subskripte

a	am Außenradius
A	auf die Oberfläche bezogen
F	auf das Fluid bezogen
i	am Innenradius
i,j	i'te bzw. j'te Koordinatenrichtung
$i + \frac{1}{2}$	auf dem Rand der Zelle in positiver x-Richtung
$i - \frac{1}{2}$	auf dem Rand der Zelle in negativer x-Richtung
n	normal
t	tangential
x,y	partielle Ableitung nach x bzw. y
V	auf das Volumen bezogen
0	auf die zentrierte Masche bezogen
1,...,6	Indizierung der negativen x-, positiven x-, ..., positiven z-Richtung

## Symbole und Abkürzungen

COMMIX	<b>Component Mixing</b>
$D_i$	Schreibvereinfachung bei der Diskretisierung des diffusiven Terms
$F_i$	Schreibvereinfachung bei der Diskretisierung des konvektiven Terms
FLUTAN	<b>FLU</b> iddynamic and <b>T</b> hermalhydraulic <b>A</b> pplicatio <b>N</b> s
<i>HOT</i>	Terme höherer Ordnung
LECUSSO	<b>L</b> ocally <b>E</b> xact and <b>C</b> onsistent <b>U</b> pwind <b>S</b> cheme of <b>S</b> econd <b>O</b> rd
LGV	Lokale Gitterverfeinerung
O	Ordnung von
QUICK	<b>Q</b> uadratic <b>U</b> pstream <b>I</b> nterpolation for <b>C</b> onvective <b>K</b> inematics
$\langle f \rangle$	flächengemittelter Wert
$\langle f \rangle_3$	volumengemittelter Wert in der lokalen Zelle
PDE	partial differential equation
$\mathcal{J}$	totaler Fluß
$\Delta_t$	zeitliche Änderung im Volumen



# 1. Einleitung

Das Ziel physikalischer Untersuchungen ist das bessere Verständnis der physikalischen Abläufe und des Zusammenwirkens der unterschiedlichen Einzeleffekte in der Natur. Dies gilt auch für das Gebiet der Strömungsmechanik. Hier hat sich neben den klassischen Methoden der experimentellen Untersuchung und der analytischen Lösung von strömungsmechanischen Problemen gerade in den letzten Jahrzehnten die numerische Strömungsmechanik (engl. CFD = Computational Fluid Dynamics) etabliert.

In dieser Zeit wurden die Methoden zur Lösung strömungsmechanischer Probleme stark weiterentwickelt. Neben der Entwicklung der analytischen Methoden sei hier insbesondere auf die Entwicklung der Meßtechnik und den daraus resultierenden Fortschritt im Bereich der experimentellen Strömungsmechanik hingewiesen. Die Weiterentwicklung der Methode der numerischen Strömungsmechanik ist naturgemäß eng mit den zur Verfügung stehenden Rechnern verknüpft. Hier profitierte man enorm von dem rasanten Zuwachs an Rechnerkapazitäten in den letzten Jahren.

Jede dieser Methoden zur Lösung strömungsmechanischer Probleme hat die ihr eigenen Vor- und Nachteile. So sind die analytischen Methoden in der Lage, für einfache Geometrien und vereinfachte, linearisierte Differentialgleichungen geschlossene Lösungen zu liefern. Die experimentellen Verfahren zeichnen sich dadurch aus, daß sie für die eingestellten Versuchsbedingungen den Einfluß aller relevanten Parameter abbilden und für die Kombination der eingestellten Versuchsparameter die Ergebnisse liefern. Aus Kostengründen ist es oft nicht möglich, Experimente im Maßstab 1:1 durchzuführen oder eine größere Anzahl von Versuchsparametern zu variieren. Darüber hinaus kann es durchaus problematisch sein, die im maßstäblichen Experiment gewonnenen Ergebnisse zu übertragen, falls das untersuchte Strömungsproblem durch mehr als eine dimensionslose Kennzahl beschrieben wird (vgl. Zierep 1991, Hoffmann et. al. 1994a, Hoffmann et. al. 1994b, Abendschön 1995). In der numerischen Strömungsmechanik ist man Dank der Rechnerentwicklung heute in der Lage, Vereinfachungen und Modellannahmen zu reduzieren und Berechnungen von Strömungen mit einem sehr guten Auflösungsvermögen durchzuführen.

Aus den genannten Vor- und Nachteilen der einzelnen Methoden sind diese nicht als Konkurrenten für die Bewältigung einer bestimmten Aufgabe zu sehen, sondern als Methoden, die sich gegenseitig ergänzen können und sollen. So kann in einem ersten Schritt das Problem vereinfacht und mit einem analytischen Verfahren abgeschätzt werden. Die analytischen Ergebnisse können für die Auslegung von maßstäblichen Experimenten be-

nutzt werden. Die experimentellen Ergebnisse können schließlich für die Validierung eines Rechenprogrammes der numerischen Strömungsmechanik verwendet werden, mit dem es danach möglich ist, die experimentellen Ergebnisse auf reale Geometrieabmessungen zu übertragen. Durch die stark gesunkenen Rechenkosten ist es dann darüber hinaus möglich, Geometrie- oder Parametervariationen schnell und kostengünstig durchzuführen. Dieser Zuwachs an Attraktivität der numerischen Strömungsmechanik durch sinkende Kosten bei besseren Ergebnissen und der Fortschritt bei der Entwicklung von effizienten Berechnungsverfahren und von physikalischen Modelle sind für die stetig zunehmende Weiterentwicklung und Anwendung der Verfahren der numerischen Strömungsmechanik verantwortlich.

Das Ziel der numerischen Strömungsmechanik ist die numerische Lösung der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen, z. B. für Masse, Impuls, Energie und turbulenten Erhaltungsgrößen. Dabei ist der Grundgedanke jeder numerischen Methode zur Lösung einer Differentialgleichung bzw. eines Systems von Differentialgleichungen, das gegebene kontinuierliche Problem mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu diskretisieren, d. h. in ein Gleichungssystem mit endlich vielen Unbekannten zu überführen, welches mit einem Rechner gelöst werden kann. Dies erfordert z. B. die Diskretisierung des Rechengebietes anhand eines numerischen Gitters und darauf aufbauend die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen. Damit erhält man einen Satz von algebraischen Gleichungen, der zu einer diskreten Lösung auf dem verwendeten numerischen Gitter führt.

Zur Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Die historisch gesehen älteren Verfahren sind die Verfahren der Finiten Differenzen (FD). Sie haben sich bei den verschiedensten Anwendungen bewährt. Sie benutzen ein strukturiertes Gitter, wie es in Abbildung 1.1 dargestellt ist. Die partiellen Ableitungen der zu lösenden Gleichungen werden durch geeignete Verknüpfung der diskreten Werte des lokalen Differenzensterns approximiert. Durch die Approximation der verschiedenen Ableitungen in den Erhaltungsgleichungen gelangt man zu einem System von Differenzgleichungen, das als Lösung die Werte der Erhaltungsgrößen an den diskreten Stellen des verwendeten Gitters liefert.

Eine Weiterentwicklung der Methode der Finiten Differenzen stellt die Methode der Finiten Volumen (FV) dar. Dabei werden die partiellen Differentialgleichungen über ein Kontrollvolumen des zugrunde liegenden numerischen Gitters integriert. Für diese Kontrollvolumina (vgl. das schraffierte Kontrollvolumen in Abbildung 1.1) entstehen dabei Bilanzgleichungen, bei denen die Terme, die den Transport des Fluids beschreiben, nicht mehr in der Mitte des Kontrollvolumens definiert sind. Stattdessen werden abgeleitete Flußterme auf den einzelnen Grenzflächen des Kontrollvolumens approximiert, wobei ähnliche Verfahren wie bei den Methoden der Finiten Differenzen eingesetzt werden können. Dieses Vorgehen stellt eine konservative, d. h. erhaltende, Behandlung der Gleichungen sicher, denn was aus einem Kontrollvolumen über eine Grenzfläche hinausfließt, fließt auch

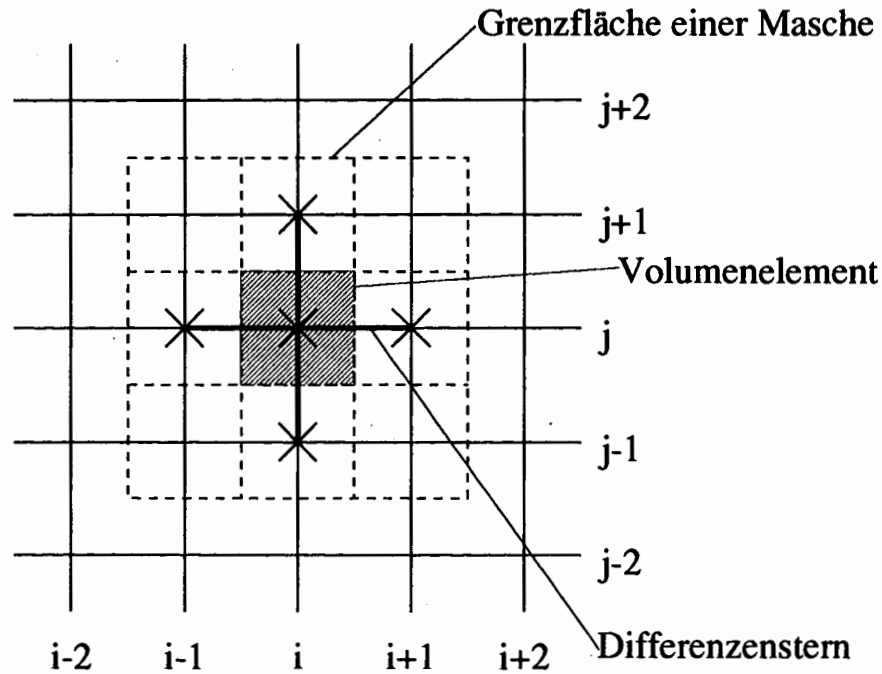


Abbildung 1.1: Ein strukturiertes Gitter als Basis eines Finite Differenzen Verfahrens. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Grenzflächen der einzelnen Maschen; die Schraffur kennzeichnet ein Volumenelement eines Finite Volumen Verfahrens.

exakt in das an diese Grenzfläche angrenzende, benachbarte Kontrollvolumen hinein. Aus dem Bereich der Strukturmechanik stammen die Methoden der Finiten Element (FE), welche heute an vielen Stellen auch zur Lösung von strömungsmechanischen Problemen eingesetzt werden. Bei diesen Verfahren wird der Raum in finite Elemente aufgeteilt, wie es in Abbildung 1.2a dargestellt ist. Die Elemente werden mit sogenannten Knoten belegt, typischerweise auf dem Rand des Elementes (vgl. die gefüllten Kreise • in Abbildung 1.2b). Es werden Ansatzfunktionen definiert, die die Verteilung der Erhaltungsgröße über das Element beschreiben. Mit diesen Ansatzfunktionen wird die partielle Differentialgleichung

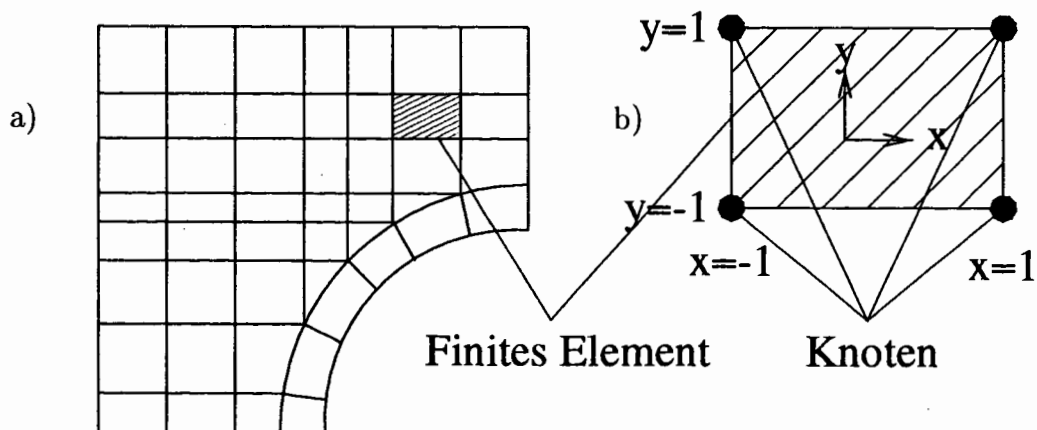


Abbildung 1.2: Diskretisierung des Rechengebiets bei einem Finite Element Verfahren, a) Diskretisierung des gesamten Rechengebietes und b) Definition der Knoten auf einem einzelnen Element

in eine diskrete Gleichung überführt. Diese diskrete Gleichung wird mit Gewichtsfunktionen, die von den Ansatzfunktionen verschieden sein können, multipliziert und über das Rechengebiet integriert. Damit erhält man ein diskretes Gleichungssystem. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert den Wert der Erhaltungsgröße an den Knotenpunkten. Bei allen Verfahren muß es die diskrete Beschreibung des Raumes erlauben, die Rand- und Anfangswerte des physikalischen Problems exakt zu beschreiben und die lokalen Gradienten mit einer ausreichenden Genauigkeit aufzulösen. Die FE-Verfahren sind bei der diskreten Beschreibung des Raumes wesentlich flexibler als die FD- und FV-Methoden, da nur hinsichtlich der Elementtypen und der Verteilungsfunktionen des Elementes Annahmen gemacht werden. Die Verfahren der FD/FV machen Annahmen über die Struktur, d. h. die Anordnung, der diskreten Elemente in den einzelnen Koordinatenrichtungen, da diskrete Werte aus verschiedenen Elementen zur Approximation lokaler Gradienten benutzt werden. Dies hat den Vorteil einer kompakten und deshalb schnellen Berechnung von Transporttermen. Eine derartige Struktur des Gitters schränkt aber die Anpassungsmöglichkeiten des Gitters hinsichtlich der Geometrie des tatsächlich zu lösenden Problems stark ein.

Im folgenden Abschnitt 1.1 werden die Diskretisierungsmöglichkeiten eines strukturierten Gitters zur Beschreibung lokaler Vorgänge dargestellt, da strukturierte Gitter heutzutage die Grundlage der meisten Rechenprogramme bilden. Daran anschließend werden im Abschnitt 1.2 bekannte Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines Gitters aus der Literatur vorgestellt und im dritten Abschnitt 1.3 die bekannten Verfahren bewertet und die Ziele dieser Arbeit formuliert.

## 1.1 Diskretisierung lokaler Vorgänge auf einem strukturierten Gitter

Ein strukturiertes Gitter wird dadurch definiert, daß die Indizes der Knotenpunkte entlang einer Koordinatenlinie monoton aufsteigend sind (Schönung 1990). Es gibt damit einen mathematisch beschreibbaren Zusammenhang zwischen der räumlichen Lage von Knotenpunkten und ihrer Indizierung, wie es in Abbildung 1.3 für ein körperangepaßtes Gitter schematisch skizziert ist. Es gibt eine Vielzahl von Anwendungen in der numerischen Strömungsmechanik, bei denen lokale Ereignisse das gesamte Verhalten der Strömung beeinflussen (z. B. Rust et. al. 1994). Diese lokalen Ereignisse müssen durch das numerische Gitter vernünftig abgebildet werden. Insbesondere auftretende Gradienten müssen durch eine ausreichende Anzahl von Maschen aufgelöst werden, um einen zu großen numerischen Fehler zu vermeiden. In Abbildung 1.4 sind die verschiedenen Verfeinerungsmöglichkeiten eines strukturierten Gitters dargestellt, wobei das Kreuz den Ort einer besser aufzulösenden starken Änderung von Strömungsgrößen markiert, was im folgenden als lokales Ereignis bezeichnet wird. Abbildung 1.4a zeigt die Möglichkeit eines strukturierten Gitters

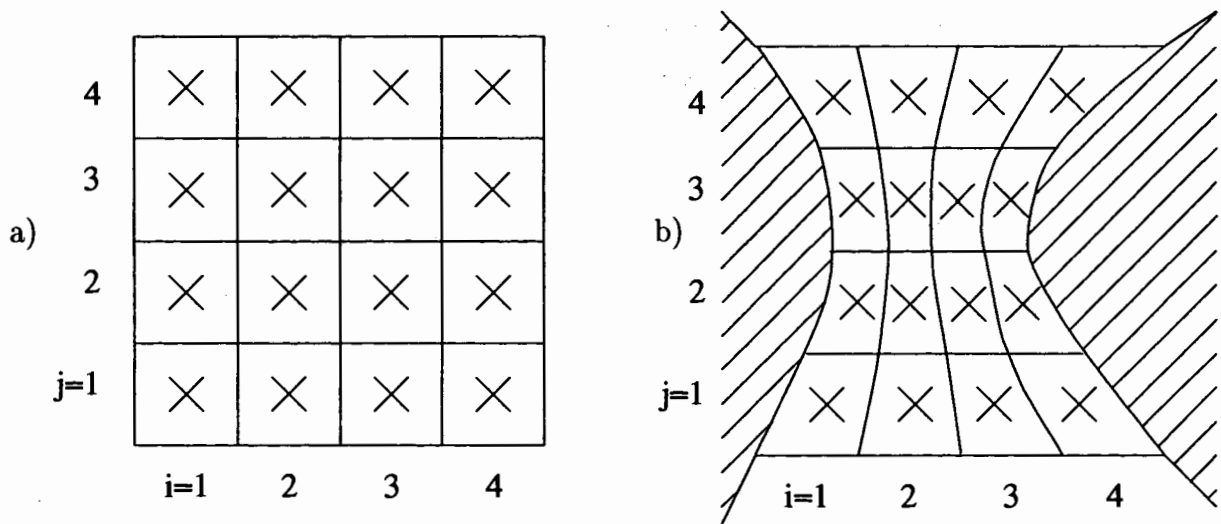


Abbildung 1.3: a) Ein strukturiertes Gitter und b) seine tatsächliche geometrische Gestalt

ohne methodische Erweiterung, wobei hier durch eine globale Verfeinerung eine höhere lokale Auflösung an der gewünschten Stelle erreicht wird. Die Bezeichnung globale Verfeinerung verdeutlicht dabei, daß nicht nur das Gitter in der Nähe des Kreuzes, sondern im gesamten Rechengebiet verfeinert wird. In Abbildung 1.4b hingegen ist ein Gitter dargestellt, wie man es mit einem algebraischen oder differentiellen Verfahren generieren kann (Thompson 1985). Durch ein solches Verfahren lassen sich neben körperangepaßten Gittern auch lokale Gitterkonzentrationen realisieren. Jedoch steigt der Aufwand in der Berechnung von Transporttermen für Koordinatensysteme, die nicht orthonormal sind, da gemischte Ableitungen auftreten. Außerdem kann es aufgrund der Verzerrung zu einem stark anisotropen Gitter kommen, was wiederum zu numerischen Problemen führen kann (Schönung 1990). In Abbildung 1.4c schließlich wird ein strukturiertes Gitter mit lokaler Verfeinerung eingesetzt. Dieses Gitter zeichnet sich sowohl durch geringe Anisotropien der Maschenweiten als auch durch eine räumliche Begrenzung der Verfeinerung aus. Da eine Verfeinerung von Maschen vermieden wird, die nicht direkt durch das lokale Ereignis

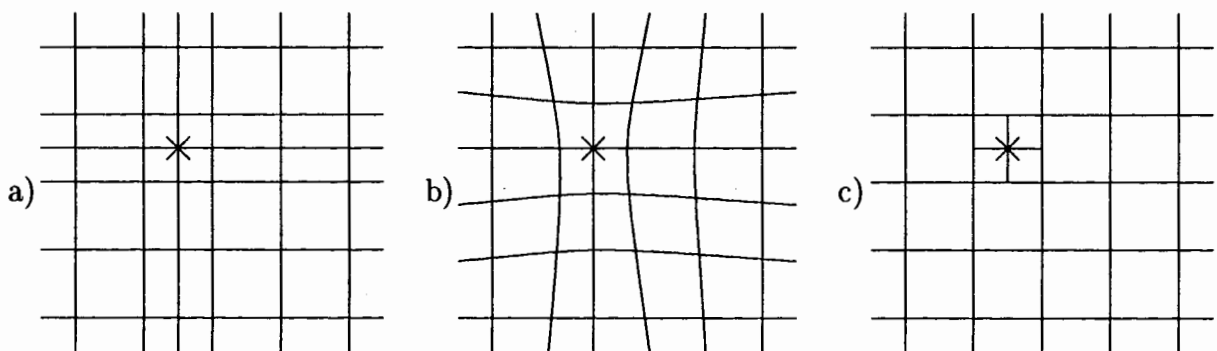


Abbildung 1.4: Verschiedene Verfeinerungsmöglichkeiten eines strukturierten Gitters, a) globale Verfeinerung, b) Gitterverzerrung, c) lokale Gitterverfeinerung

betroffen sind, bietet ein solches Verfahren eine sehr effiziente Möglichkeit, ein lokales Ereignis auf einem strukturierten Gitter adäquat aufzulösen. Diese Möglichkeit wird deshalb im folgenden weiterbetrachtet.

## 1.2 Stand der Methoden zur lokalen Verfeinerung eines Gitters

Um 1980 sind die ersten Veröffentlichungen zu Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung von Finiten Differenzen Verfahren zu finden. In den letzten 15 Jahren wurden diese Ideen auch im Bereich der Finiten Elemente und Finiten Volumen umgesetzt. Eine tabellarische Zusammenstellung relevanter Literaturstellen befindet sich in Anhang A. Diese Tabelle ist zum einen in die verschiedenen Diskretisierungsmethoden Finite Elemente, Finite Differenzen und Finite Volumen aufgeteilt. Zum anderen sind die Eigenschaften der verschiedenen Verfahren aufgelistet, soweit sie den Literaturstellen zu entnehmen sind. Für diese Arbeit besonders interessant und deshalb im folgenden diskutiert sind hierbei speziell die verwendeten Diskretisierungsverfahren, die benutzten Interpolationen, der Typ der gelösten Gleichungen und der Nachweis der Stabilität. Im Bereich der FE-Verfahren ist diese Zusammenstellung unvollständig, da Finite Element Verfahren unstrukturierte Gitter verwenden. Sie sind damit nur bedingt auf Verfahren übertragbar, die auf strukturierten Gittern basieren, und sind hier nur zur Vollständigkeit des Überblicks kurz dargestellt.

### 1.2.1 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Element Methoden

Die Verwendung eines unstrukturierten Gitters bei den Finite Element Methoden ermöglicht eine Verfeinerung der Elemente, ohne daß eine Sonderbehandlung dieser verfeinerten Elemente notwendig wäre. In Abbildung 1.5 ist dies skizziert, wobei die gefüllten Kreise • die Knoten von anfangs zwei Dreieckselementen markieren. Man sieht, daß durch einfache Teilung der Elemente in jeweils zwei neue Elemente unter Einführung eines neuen Knotens vier Elemente entstehen, die in analoger Weise wie die ursprünglichen berechnet werden

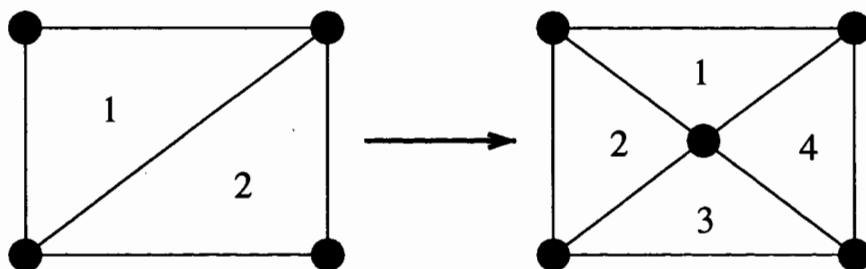


Abbildung 1.5: Verfeinerung zweier Finite Elemente

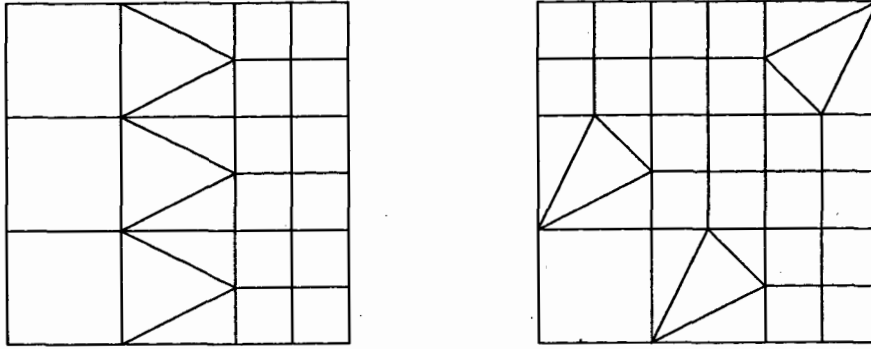


Abbildung 1.6: Übergang vom groben zum feinen Gitter nach Evans (1991)

können. Generell ist bei diesen Verfahren bei geschickter Elementwahl keine besondere numerische Behandlung der lokal verfeinerten Elemente notwendig. Insbesondere werden auch keine speziellen Koppelbedingungen, wie z. B. Interpolationen, benötigt.

Evans et. al. (1991) verwenden ein Verfahren, welches generell als Elementtyp nicht Dreiecke, sondern Rechtecke verwendet. Diese Rechteckelemente werden anhand des berechneten lokalen Gradienten adaptiv während der Simulation angepaßt, d. h. daß Rechteckelemente lokal geteilt werden, bei denen ein großer Gradient auftritt. Sie berechnen damit eine reibungsfreie zweidimensionale Tandem-Tragflügelumströmung bei einer Mach-Zahl von  $Ma = 0,85$ . Am Übergang des feinen Gitters zum groben Gitter an den verfeinerten Rechteckselementen führen sie Dreieckselemente (s. Abbildung 1.6) ein, die eine eindeutige Zuordnung aller Knoten zu den verschiedenen Elementen gewährleisten. Durch Einführung dieser Elemente sind sie in der Lage, das Problem geschlossen und ohne weitere methodische Erweiterung zu lösen.

Auch Mathew (1993) unterteilt die von ihm benutzten finiten Elemente in einzelnen Gebieten und löst damit eine allgemeine elliptische Gleichung.

### 1.2.2 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Differenzen Methoden

Viele Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines Gitters, welches als Grundlage eines Finite Differenzen Verfahrens dient, treten in Kombination mit anderen Methoden auf, die andere numerische Teilaspekte behandeln. Im folgenden wird auf die Kombination von FD-Methoden auf einem lokal verfeinerten Gitter mit Multigridmethoden, mit einer Adaption des Gitters und mit Mehrzonen- oder Gebietszerlegungsverfahren näher eingegangen.

Die Multigridverfahren gehen zurück auf Brandt (1977), dessen Idee darin bestand, die numerische Lösung auf einem groben Gitter zur besseren Fehlerdämpfung während eines iterativen Lösungsprozesses auf dem feineren Ausgangsgitter zu benutzen. Die daraus

resultierende Konvergenzbeschleunigung ist dadurch zu veranschaulichen, daß bei typischen Randwertproblemen der direkte Einfluß der Randbedingungen nur im Rahmen des Differenzensterns (s. Abbildung 1.1) zum Tragen kommt, d. h. durch die Verwendung der verschiedenen angrenzenden Volumenelemente zur Approximation der verschiedenen Terme in den Bilanzgleichungen des lokal betrachteten Volumenelementes. Bei Verwendung eines gröbereren Gitters können diese Randbedingungen räumlich größere Bereiche direkt beeinflussen und eine Beschleunigung der Konvergenz bewirken. Dieses Verfahren kann auch in umgekehrter Richtung benutzt werden, d. h. , daß ein grobes Grundgitter mit lokaler Verfeinerung benutzt wird, welches hinsichtlich der Konvergenzbeschleunigung ein ähnliches Verhalten wie das ursprüngliche Verfahren zeigt.

Ghia et. al. (1982) setzen ein solches Verfahren zur Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen ein. Die Approximation des konvektiven Terms ist von erster Ordnung und die notwendige Interpolation zwischen den verschiedenen Gittern ist eine allgemeine 9-Punkte Interpolation, was einer allgemeinen Interpolation zweiter Ordnung mit einem biquadratischen Ansatz entspricht. Es finden sich keine Angaben zur Stabilität des Verfahrens. Die Autoren berechnen damit eine 2D-Kavität mit bewegter Wand und zeigen die Effizienz ihres Verfahrens auf.

Stiller (1993) entwickelt in seiner Arbeit ein Modell zur Grobstruktursimulation turbulenter Strömungen. Mit seinem Verfahren berechnet er die dreidimensionale Umströmung eines quaderförmigen Hindernisses, wobei er das Gitter im Nahbereich dieses Hindernisses in Stufen verfeinert. Diese Verfeinerungen definiert er als Subgitter des bestehenden Grundgitters und löst die Navier-Stokes-Gleichungen mit einem Multigridverfahren auf allen Teilgittern. Die verwendeten Diskretisierungsverfahren sind alle von 2. Ordnung. Die verschiedenen Gitterebenen werden sogar durch eine Interpolation 4. Ordnung auf einem äquidistanten Gitter verknüpft. Für das benutzte Adams-Bashfort-Zeitintegrationsverfahren 2. Ordnung weist er die Stabilität nach. Seine Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten.

Die Methoden mit einer adaptiven Gitteranpassung zeichnen sich durch ein zeitlich veränderliches Gitter aus. Anhand eines Kriteriums werden diejenigen Bereiche des aktuellen Gitters bestimmt, welche zur Berechnung dieses Zeitschrittes verfeinert werden sollen. Das verwendete Kriterium kann dabei entweder auf Gradienten bzw. auf Maximalwerten der aktuellen Lösung oder auf einer Abschätzung des numerischen Fehlers beruhen. Weiterhin lassen sich die adaptiven Verfahren noch unterteilen in Verfahren mit Einbettung lokaler Subgitter und Verfahren zur Generierung eines Subgitters, welches über das schon bestehende Grundgitter gelegt wird.

Dwyer (1984) schlägt ein Verfahren vor, bei dem aus der aktuellen Lösung eine Gewichtsfunktion berechnet wird. Diese Funktion wird dazu benutzt, die lokale Gittergeometrie anzupassen, d. h. die Maschenweiten zu verändern und das Gitter damit zu verzerren. Mit diesem Verfahren berechnet er zwei eindimensionale exponentielle Testfunktionen, die an



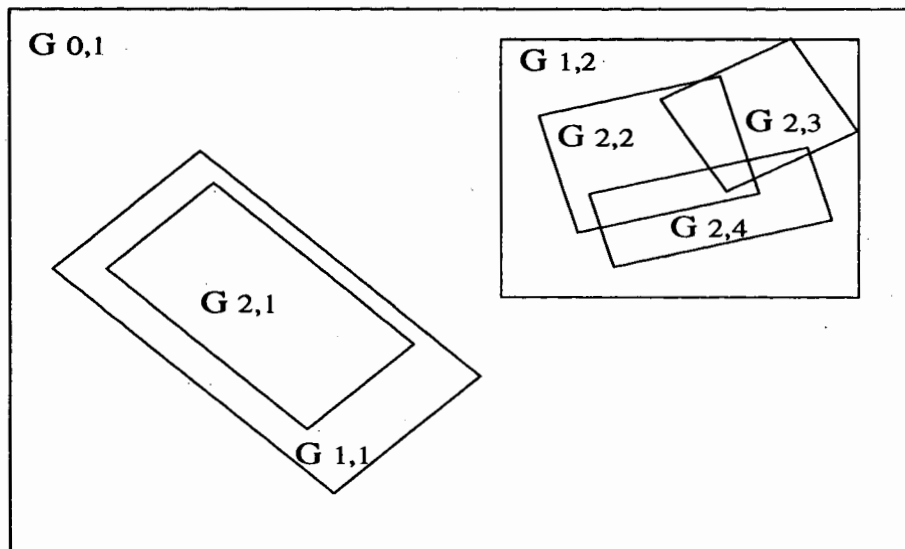


Abbildung 1.7: Gitterzonen verschiedener Verfeinerung bei Berger (1982),  $G_{k,n}$  bedeutet dabei das  $n$ te Teilgitter  $G$  mit dem Verfeinerungsgrad  $k$

einer Stelle einen steilen Gradienten aufweisen. Dieser Gradient bewirkt lokal relativ kleine Maschenweiten und konzentriert damit das Gitters an dieser Stelle, was zu einer genaueren Lösung an dieser Stelle führt. Darüber hinaus berechnet er eine zweidimensionale zeitabhängige Flammenentwicklung. Hierbei treten in der Nähe der wandernden Flammenfront die größten Gradienten auf und das Gitter wird bei jedem neuen Zeitschritt an einer anderen Stelle zusammengezogen.

Die ersten Arbeiten zur adaptiven Anpassung von Gittern bei transienten hyperbolischen Problemen stammen von Olinger (1979) und seinen Mitarbeitern Berger (1982) und Gropp (1992). Ziel des Verfahrens von Berger (1982) ist es, das Gitter durch eine Fehlerbeurteilung der zeitabhängigen Lösung immer wieder anzupassen. Dazu wird zuerst ein Anfangsgitter generiert und die Gleichungen gelöst. Mit einer Variante der Richardson Extrapolation wird dann der lokale Abbruchfehler in jeder Masche bestimmt. Maschen mit einem großen Fehlerwert werden gekennzeichnet. Diese markierten Maschen oder Zonen werden mit einem in der Orientierung freien, neuen und feineren Gitter überdeckt, wie in Abbildung 1.7 dargestellt. Jedes dieser neuen Gitter ist regulär und hat seine eigene Datenstruktur. Die Anfangs- und Randbedingungen werden für jedes neue Gitter von dem bereits gelösten gröberen Gitter auf das neue Gitter interpoliert und die Rechnung dort mit einem ebenfalls geteilten lokalen Zeitschritt wiederholt. Dieser Prozess kann mehrmals wiederholt werden. Die Interpolation der Anfangs- und Randbedingungen geschieht mit einem bilinearen Ansatz. Die Stabilität des Verfahrens wird bei der spezifischen Betrachtung eines Gitterübergangs nachgewiesen. Berger berechnet damit erfolgreich Schockwellen in 2D.

Arney und Flaherty (1986) schlagen ein ähnliches Verfahren mit frei orientierten adaptiven Teilgittern vor. Sie verwenden Diskretisierungsverfahren verschiedener Ordnung und

interpolieren ebenfalls mit einem bilinearen Ansatz. Über die Stabilität ihres Verfahrens machen sie keine Angaben. Sie berechnen damit mehrere partielle Differentialgleichungen in guter Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

Luchini (1987) entwickelt ein Verfahren zur Einbettung lokaler Berechnungsvolumina in ein bestehendes Gitter beim Auftreten großer Gradienten. Er teilt dabei die bestehenden Maschen in der Diagonalen und erhält Teilvolumina, die um den Faktor  $\sqrt{2}$  kleiner als die Ausgangsmaschen sind. Er setzt Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung ein und beobachtet die Stabilität seines Verfahrens. Es werden zwei Strömungen berechnet, die durch die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden. Zum einen die Hiemenz-Staupunktströmung und zum anderen eine seitlich beheizte Kavität. Für beide Simulationen kann eine gute Übereinstimmung mit der analytischen bzw. numerischen Referenzlösung gefunden werden.

Liang und Fung (1987) verfeinern ihr Gitter auch anhand eines Kriteriums aus dem lokalen Abbruchfehler. Es finden sich weder Angaben zu den verwendeten Diskretisierungsverfahren, noch zu den benutzten Interpolationen oder der Stabilität. Sie berechnen mit ihrem adaptiven Verfahren eine zweidimensionale transsonische Strömung um einen Keil und zeigen die gute Auflösung der Schockwelle.

Auch Trompert (1993) schlägt ein Verfahren vor, welches auf der Idee von Berger (1982) beruht. Ausgehend von einer Lösung auf einem Grundgitter werden in Gebieten steiler Gradienten Subgitter definiert und aus den Lösungen des groben Gitters die Anfangs- und Randbedingungen auf die Subgitter interpoliert. In den Subgittern wird der Zeitschritt dann wiederholt und die Lösung auf dem groben Ausgangsgitter damit verbessert. Trompert weist die Stabilität seines Verfahrens nach und verwendet sowohl einen linearen Ansatz für die Interpolation als auch eine Interpolation 4. Ordnung. Eine Begründung für diese beiden Varianten wird nicht gegeben. Trompert berechnet verschiedene partielle Differentialgleichungen und den Salzwassertransport in einem porösen Medium.

Lee und Tsuei (1993) kombinieren in ihrem Verfahren das Verfahren von Dwyer (1984), welches zu einer Konzentration des Gitters in der Nähe großer Gradienten führt, mit dem Verfahren von Berger (1982), welches anhand des lokalen Abbruchfehlers zu einer Verfeinerung führt. Zur Berechnung eines Zeitschrittes wird zuerst eine Lösung auf dem Ausgangsgitter berechnet. Anhand dieser Lösung wird eine neue Gitterverteilung berechnet und die Lösung für denselben Zeitschritt erneut berechnet. Das Gitter wird anhand des Abbruchfehlers dieser Lösung lokal verfeinert, die Anfangs- und Randbedingungen auf das neue Gitter interpoliert und der Zeitschritt lokal wiederholt. Die Lösungen auf dem verfeinerten Gitter werden zur Bestimmung der Randbedingungen an den Bereichsgrenzen auf das grobe Gitter interpoliert. Danach beginnt der nächste Durchlauf, was bis zur Unterschreitung einer bestimmten, normalisierten Änderung wiederholt wird. Die eingesetzten Diskretisierungsverfahren sind von 2. Ordnung und die Interpolationen erfolgen mit einem linearen Ansatz. Über die Stabilität des Verfahrens wird keine Angabe

gemacht.

De Lange und De Goey (1994) benutzen die verschiedenen Gradienten als Kriterium für die Anpassung des Gitters. Bei ihrem Verfahren werden in Maschen mit einem großen Gradienten neue Maschen eingebettet, die genau zwischen den Zentren der Maschen des Ausgangsgitters liegen. Das grobe Gitter wird damit automatisch ein Teil des feineren Gitters, wodurch nur noch eine Interpolation vom groben zum feinen Gitter durchgeführt werden muß. Es werden verschiedene Diskretisierungsverfahren für den konvektiven Term und das zentrale Differenzenverfahren für den diffusiven Term benutzt. Für die Interpolation kommt kein höherwertiges Verfahren zum Einsatz und der Nachweis der Stabilität bleibt aus. Die Autoren setzen ihr adaptives Verfahren zur Berechnung einer zweidimensionalen Kavität mit bewegter Wand, einer zweidimensionalen thermischen Stufe und einer zweidimensionalen Verbrennung ein.

Neben den bisher diskutierten Verfahren, die entweder reine Multigridverfahren mit lokaler Verfeinerung oder adaptive Verfahren ohne Verwendung des Multigridalgorithmus sind, gibt es auch Kombinationen dieser beiden Methoden. Fuchs (1986) löst die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen auf einem Ausgangsgitter. Aus der Bestimmung des normalisierten lokalen Abbruchfehlers bestimmt er die zu verfeinernden Maschen und Gebiete. Die Kopplung dieser Teilgitter läuft dann innerhalb eines Multigridverfahrens ab, wobei noch weitere Gitterebenen generiert werden können. Der diffusive Term wird mit einer zentralen Differenz und der konvektive Term mit dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung approximiert. Die Interpolationen innerhalb des Multigridverfahrens sind linear. Auch er macht keine Angaben über die Stabilität seines Verfahrens. Er berechnet eine zweidimensionale Kavität mit bewegter Wand und eine zweidimensionale Umlenkung, wobei er die Vergleichmäßigung des Abbruchfehlers nachweisen kann.

Thompson und Ferziger (1989) benutzen ebenfalls den lokalen Abbruchfehler zur Verfeinerung des Gitters innerhalb eines Multigridverfahrens. An zu verfeinernden Stellen wird eine Variante des Verfahrens von Berger (1982) angewandt. Für die Interpolationen wird ein linearer Ansatz benutzt. Die Stabilität ihres Verfahrens wird nicht nachgewiesen. Sie berechnen die zweidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und lösen das Problem einer Kavität mit bewegter Wand und die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe. Für beide Fälle können sie eine gute Übereinstimmung mit Experimenten und eine effizientere Berechnung als im Falle des reinen Multigridverfahrens nachweisen. Thompson (1992) wendet dieses Verfahren auch auf eine zweidimensionale Strömung an, bei der sich zwei Kanäle kreuzen.

Moukalled und Acharya (1991) verwenden ein adaptives Multigridverfahren mit körperangepaßten Koordinaten zur Berechnung der inkompressiblen zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen. Auch sie verwenden den lokalen Abbruchfehler als Kriterium zur Bestimmung der zu verfeinernden Gebiete. Sie berechnen damit eine Kavität mit bewegter Wand, die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe und die laminare

Strömung über eine zurückspringende Stufe, die zusätzlich stromab der Stufe beheizt wird.

Die dritte Gruppe von Verfahren bedient sich der Idee der Gebietszerlegungsverfahren. Die Grundidee dabei ist, das gesamte Rechengebiet in kleinere Teilgebiete zu zerlegen und an den dabei entstehenden künstlichen Rändern Randwerte einzuführen, die aus der Kopplung der Teilgebiete untereinander während des iterativen Lösungsprozesses bestimmt werden.

Gropp und Keyes (1992) zerlegen das zu berechnende Gebiet in bis zu 1024 Teilgebiete. Jedes dieser Teilgebiete kann darüber hinaus noch weiter aufgeteilt werden, wodurch eine Adaption des Gitters möglich wird. An den künstlichen Rändern zwischen den definierten Teilgebieten werden die Randbedingungen interpoliert und die Lösungen für die Teilgebiete iterativ ermittelt. Die Interpolation an den Rändern benutzt einen biquadratischen Ansatz.

Lee und Yeh (1993) zerlegen das zu berechnende Gebiet in verschiedene Zonen, die sie aus praktischen Gründen regulär verknüpfen, d. h. daß jedes Element der einen Zone ein entsprechendes Gegenüber besitzt. In jedem iterativen Berechnungsschritt werden dabei Randbedingungen an diesen Zonengrenzen ausgetauscht. Sie benutzen ein Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung für den konvektiven Term und interpolieren die Randbedingungen mit einem linearen Ansatz bzw. mit einer Flußerhaltung. Dieses Zonenverfahren wird zur Berechnung eines zweidimensionalen Verbrennungsvorganges in einem 2-Ring Flammenstabilisator und einer Verbrennung in einem zweidimensionalen Kanal mit einem keilförmigen Hindernis eingesetzt.

Monnoyer et. al. (1988) berechnen die dreidimensionale Strömung um Ellipsoide. Sie zerlegen dazu das Rechengebiet in verschiedene Zonen, innerhalb derer sie die vollen Navier-Stokes-Gleichungen bzw. verschiedene vereinfachte Gleichungen lösen, wie es in Abbildung 1.8 dargestellt ist. Eine gute Übereinstimmung mit Experimenten kann nachgewiesen werden.

Srinivasan und Rubin (1993) benutzen ein adaptives Multigridverfahren mit Gebietszerlegung. Sie benutzen den lokalen Abbruchfehler, um die zu verfeinernden Gebiete zu bestimmen. Die lokalen Subgitter werden innerhalb eines Multigridverfahrens verwendet. Sie berechnen die zwei- und dreidimensionale laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe und die dreidimensionale laminare Strömung über ein Hindernis.

### **1.2.3 Lokale Gitterverfeinerung bei Finite Volumen Methoden**

Seit 1986 sind auch Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines Gitters für ein Finite Volumen Verfahren in der Literatur bekannt.

Bassi et. al. (1986) benutzen ein Mehrzonenverfahren mit lokaler Verfeinerung zur Berechnung einer 2D-Tragflügelumströmung. Bei diesem Verfahren werden verschiedene Zonen definiert, in denen ggf. auch verschiedene Gleichungen betrachtet und gelöst werden

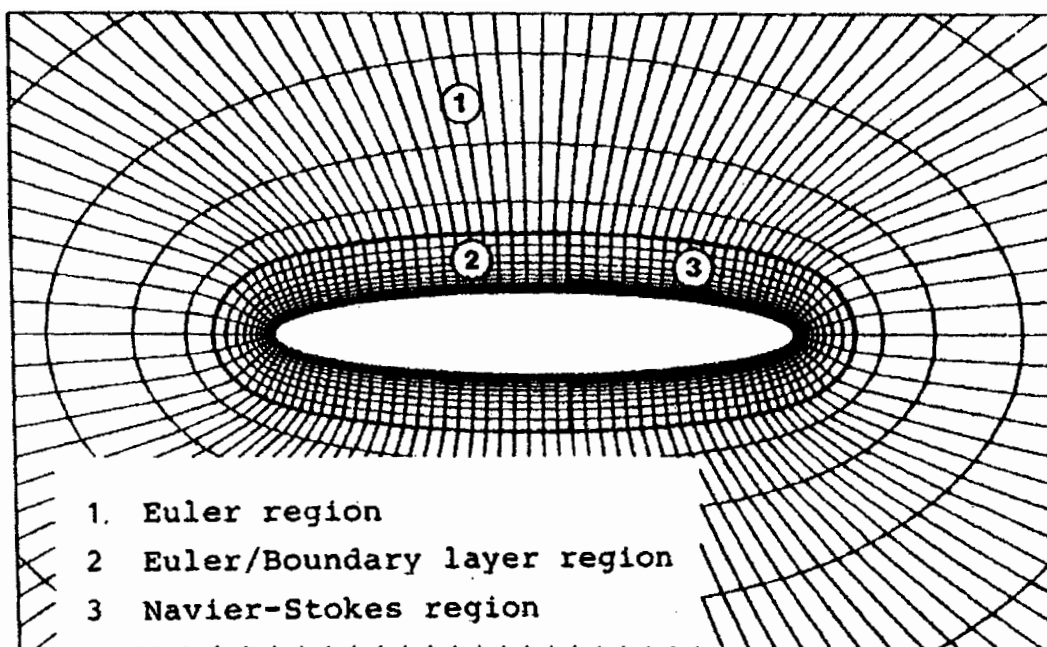


Abbildung 1.8: Definition der verschiedenen Zonen nach Monnoyer et. al. (1988); die Strömungsrichtung ist von links nach rechts

können (s. Abbildung 1.9). Der Druckgradient wird als Indikator für zu verfeinernde Gebiete benutzt, in denen dann mit einem Multigridverfahren die Gleichungen auf den Subgittern gelöst werden. Die notwendigen Interpolationen werden durch Legendre-Polynome bzw. aus der Erhaltung der Flüsse erzielt.

Hortmann et. al. (1990) lösen ebenfalls die Navier-Stokes-Gleichungen mit einem Multigridverfahren. Sie verwenden die zentrale Differenzenapproximation zur Diskretisierung der Gleichungen. Die Werte werden unter Annahme einer linearen Verteilung von einem Gitter zum anderen interpoliert und die Flüsse auf dem groben Gitter durch die Flüsse auf dem feineren Gitter korrigiert. Sie berechnen damit die Lösungen eines 2D-Benchmarks

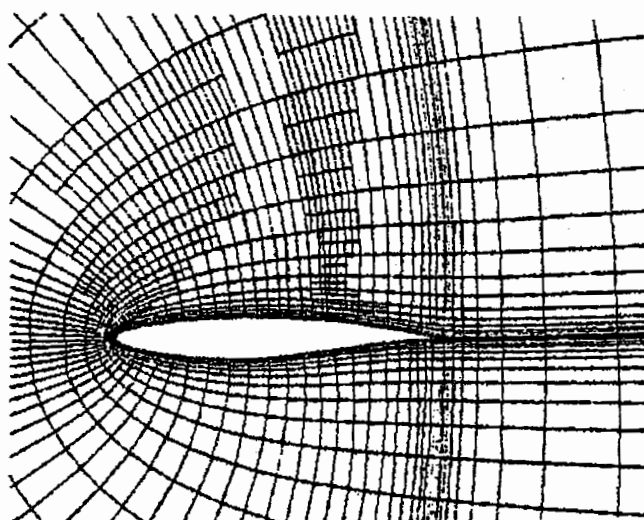


Abbildung 1.9: Gitter mit lokaler Verfeinerung nach Bassi (1986)

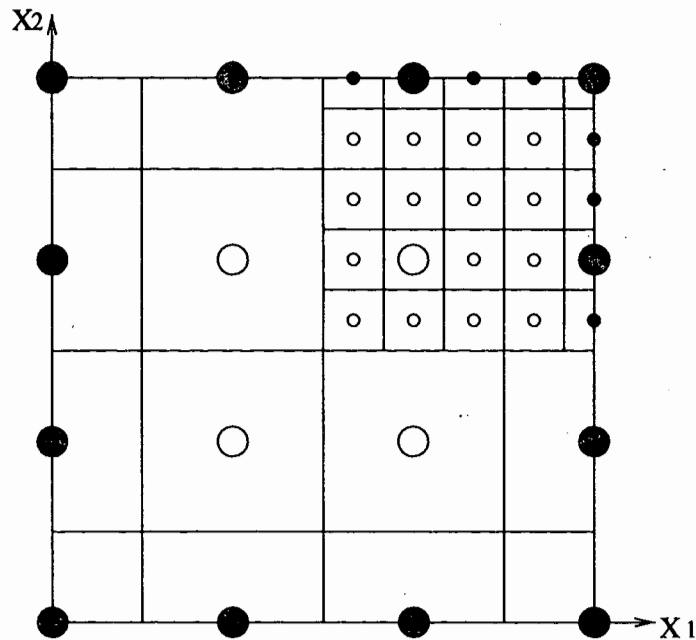


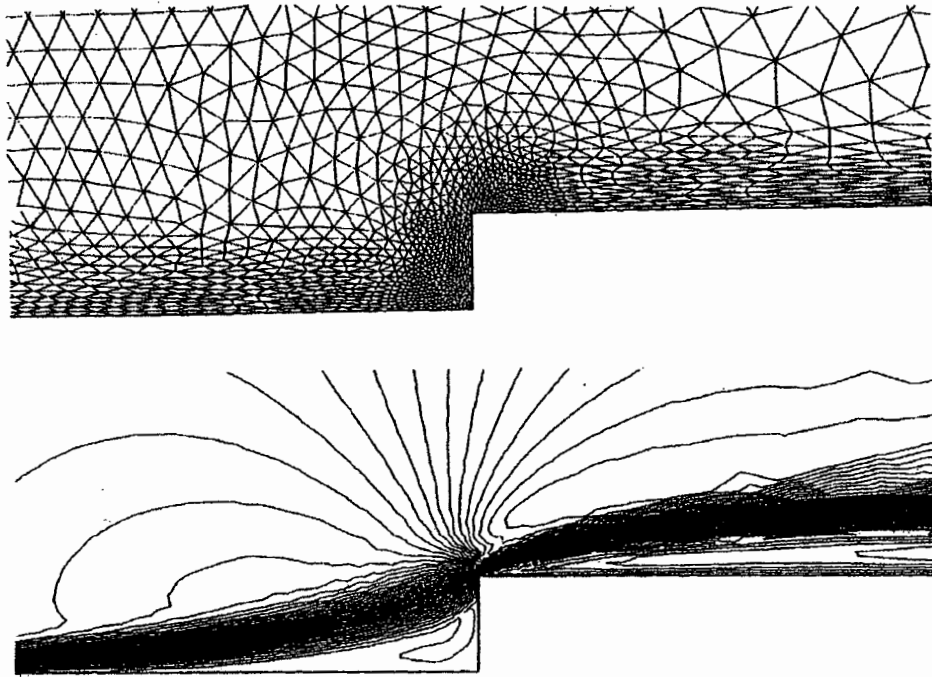
Abbildung 1.10: Zusammengesetztes Gitter bei Lazarov et. al. (1994)

mit laminarer Konvektion in einer Kavität.

Lazarov et. al. (1994) stellen ein Verfahren mit einem zusammengesetzten Gitter vor, wie es in Abbildung 1.10 dargestellt ist. Die Besonderheit dieses Verfahrens besteht darin, daß das Zentrum der ursprünglich groben Masche auf dem Zentrum einer neuen, feineren Masche zum Liegen kommt. Für die transportierte Größe wird eine lineare Verteilung angenommen und eine konservative Flußbilanz für diesen Fall hergeleitet. Es werden zwei verschiedene Konvektions-Diffusionsgleichungen in zwei Dimensionen gelöst und die Genauigkeit dieser Approximation dargestellt.

Vilsmeier und Hänel (1993) setzen ein FV-Verfahren auf einem unstrukturierten Gitter ein. Sie diskretisieren den Raum mit Dreieckselementen (s. Abbildung 1.11), die durch zwei unterschiedliche Methoden verfeinert werden können. Zum einen durch eine sukzessive Verfeinerung, bei der ein Dreieck durch Teilung in zwei neue Dreiecke aufgeht. Als Kriterien für die Identifikation der zu verfeinernden Maschen verwenden sie den Gradienten des Mach-Zahl-Vektors oder einen vorgegebenen Maximalwert der lokalen Mach-Zahl. Zum anderen verfeinern sie das Gitter durch eine sogenannte „virtuelle Streckung“. Dabei wird ein Anfangsgitter initialisiert und jeder Elementseite ein Streckungsfaktor zugeordnet. Danach wird ein Gleichungssystem aufgestellt, welches die verschiedenen Einflüsse auf die lokale Streckung der Seiten beschreibt. Einen Einfluß auf die lokale Streckung eines Elements nehmen dabei die Größe des Gradienten von Schlüsselvariablen, die Distanz zu Wänden, das Auftreten von Scherzonen und die interaktive Eingabe von markanten Punkten durch den Benutzer.

Coelho et. al. (1991) schlagen eine statische Verfeinerung zur Berechnung der 2-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen vor. Zur Diskretisierung benutzen sie eine zentrale Differenz für den diffusiven und ein hybrides Verfahren für den konvektiven Term. Die



*Abbildung 1.11: Diskretisierung mit einem unstrukturierten Gitter bei Vilsmeier und Hänel (1993)*

verschiedenen Gitter koppeln sie durch bilineare Interpolation bzw. durch die Erhaltung der Flüsse. Sie machen keine Aussagen hinsichtlich der Stabilität ihres Verfahrens. Sie berechnen mit ihren Verfahren die Strömung in einer Kavität mit bewegter Wand, bzw. in einer Kavität mit einer Oberfläche, an der Scherkräfte wirken, und die Strömung durch eine plötzliche Verengung.

Chen et. al. (1994) benutzen ein adaptives Verfahren innerhalb eines Multiblock-Finite-Volumen-Verfahrens. Sie verwenden sowohl die berechneten Gradienten als auch numerische Fehler als Kriterium für die Verfeinerung von Maschen. Es werden keine Angaben über die Genauigkeit der Interpolation oder die Stabilität des Verfahrens gemacht. Sie berechnen damit die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe, den Umschlag einer Plattengrenzschicht von laminar nach turbulent und die turbulente Strömung um eine Kaskade von Verdichterschaufeln.

Manzini und Rosella (1994) greifen das Verfahren von Berger (1982) auf und berechnen damit die Ausbreitung von Öl im Erdboden. Sie bilden dieses Problem als eine zweidimensionale Strömung eines Fluids in einem porösen Medium ab. Das Gitter wird dabei in Regionen verfeinert, in denen große Konzentrationsgradienten auftreten. Auch hier werden keine Angaben über die Genauigkeit der Interpolation oder die Stabilität des Verfahrens gemacht.

Terasaka et. al. (1995) benutzen die Idee von Berger (1982) in einem eingefrorenen, statischen Zustand. Sie definieren überlappende Gitterebenen, wie es in Abbildung 1.12 dargestellt ist. Diese verschiedenen Gitterebenen werden explizit gekoppelt und die Lö-

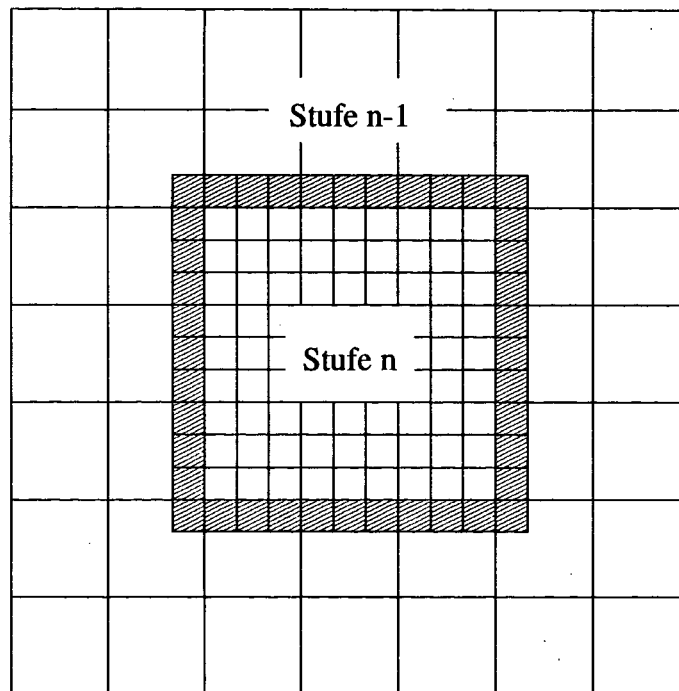


Abbildung 1.12: Definition der überlappenden Gitterebenen bei Terasaka et. al. (1995)

sung auf den Teilgittern innerhalb eines Zeitschritts ausiteriert. Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen werden die konvektiven Terme wahlweise mit dem Upwind- oder dem QUICK-Verfahren approximiert und die diffusiven Terme mit einer zentralen Differenz angenähert. Als Begründung für die Stabilität ihres Verfahrens führen sie die Stabilität des von ihnen verwendeten SIMPLE-Druckkorrekturverfahrens für die Berechnung des Drucks an. Das Verfahren ist damit in der Lage, eine 3D-Strömung mit freier Oberfläche zu simulieren.

## 1.3 Bewertung und Ziel dieser Arbeit

### 1.3.1 Anforderungen

Die Programme zur numerischen Berechnung von Strömungen in komplexen Geometrien stellen aus heutiger Sicht folgende Anforderungen an eine Methode zur lokalen Verfeinerung:

- Ein strukturiertes Gitter ist zu verwenden, da dies die Grundlage von sehr vielen strömungsmechanischen Rechenprogrammen bildet. Der Grund hierfür liegt in der effizienteren Lösung der Gleichungen auf einem strukturierten Gitter als auf einem unstrukturierten Gitter.
- Nichtäquidistante Maschenweiten sind zuzulassen, da dies eine Anforderung der in vielen strömungsmechanischen Rechenprogrammen benutzten physikalischen Modelle darstellt (z. B. Jones und Launder 1972).



- Eine feste, optimierbare Datenstruktur ist eine Voraussetzung für akzeptable Rechenzeiten auf heutigen und zukünftigen Hochleistungsrechnern.
- Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung (Leonard 1995) werden in den meisten strömungsmechanischen Rechenprogrammen eingesetzt. Deshalb sind solche Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung zu verwenden und durch die lokale Verfeinerung soll kein Genauigkeitsverlust verursacht werden.
- Die Stabilität des Verfahrens ist nachzuweisen und das gesamte Rechengebiet ist mit einem vollimpliziten Verfahren zu behandeln, um durch den Stabilitätsvorteil zu größeren Zeitschritten zu kommen.

### 1.3.2 Bewertung

Die adaptiven Verfahren bieten für Probleme, bei denen eine zeitlich veränderliche Geometrie oder ein sich in der Zeit räumlich bewegendes Phänomen betrachtet wird, eine adäquate Beschreibung durch ein sich zeitlich änderndes Gitter. Diese Möglichkeit der zeitlichen Anpassung ist jedoch schwer mit einer festen Datenstruktur zu vereinbaren. Diese Datenstruktur wiederum ist eine Voraussetzung für eine Optimierung, d. h. Vektorisierung eines Rechenprogrammes. Damit muß entweder auf eine solche Datenstruktur verzichtet werden oder die Datenstruktur muß zu jedem Anpassungszeitpunkt reorganisiert werden. Beide Möglichkeiten führen zu einer wesentlichen Erhöhung des Berechnungsaufwandes pro Zeitschritt. Damit ist auch zu erklären, warum die adaptiven Verfahren normalerweise nur bei der Simulation von zeitlich „wandernden“ Problemen eingesetzt werden (z. B. Berger 1982, Trompert 1993) und z. B. Terasaka et. al. (1995) das ursprünglich adaptive Verfahren von Berger (1982) einfrieren und auf einem stationären, d. h. zeitlich festen Gitter rechnen.

Die Multigridmethode bietet die Möglichkeit einer schnelleren Konvergenz, also einer effizienteren Berechnung der Lösung eines Zeitschrittes. Dies gilt aber auch nur bei einer angemessenen, d. h. genauen Interpolation der iterativen Zwischenwerte auf den verschiedenen Gitterebenen (Brandt 1977). Für den geforderten Fall nichtäquidistanter Gitter sind die notwendigen Interpolationen bei Verwendung von Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung sehr aufwendig (Stiller 1993). Da aber nichtäquidistante Maschenweiten für Simulationen in technisch relevanten Geometrien unverzichtbar sind, erscheint die Verwendung eines solchen Verfahrens als nicht effizient.

Ein vollimplizites Lösungsverfahren für die Behandlung des Drucks und der Kontinuitätsgleichung, wie z. B. die ICE-Technik (Harlow und Amsden 1971, Bottoni et. al. 1985), kommt bei keinem der in Abschnitt 1.2 diskutierten Verfahren zum Einsatz. Insbesondere die implizite Behandlung der Kontinuitätsgleichung stellt einen großen Vorteil für die Behandlung weiterer Transportgleichungen dar, wie der Enthalpie- oder der Transportgleichungen für die turbulenten Erhaltungsgrößen.

Fast alle diskutierten Verfahren lösen die Gleichungen nicht in einem geschlossenen Gleichungssystem sondern durch Iteration der Gleichungen auf den verschiedenen Teilgittern, zum einen innerhalb eines an sich schon iterativen Druckkorrekturalgorithmus oder zum anderen innerhalb eines iterativen Multigridalgorithmus. Eine vollimplizite Behandlung mit der ICE-Technik macht eine geschlossene Behandlung des Problems möglich. Eine geschlossene Behandlung wiederum hat die positive Eigenschaft, daß direkte Lösungsverfahren effizient einsetzbar sind. Diese direkten Lösungsverfahren sind in typischen Rechenprogrammen verfügbar und versetzen den Anwender in die Lage, die auf dem Rechner erreichbare Genauigkeit voll auszunutzen.

Die vorgestellten Verfahren benutzen Interpolationen ganz unterschiedlicher Genauigkeit für die Kopplung der verschiedenen Teilgitter. Hinsichtlich der geforderten Genauigkeit, insbesondere bei Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung, finden sich nur wenige Aussagen, die aber nicht hergeleitet werden. Chen et. al. (1994) verwenden bei ihrem Verfahren eine bilineare Interpolation und bemerken, daß eine Reihe von Testrechnungen den Einfluß der Genauigkeitsordnung des Interpolationsverfahrens gezeigt hat. Der konvektive Term wird dabei durch das QUICK-Verfahren 2. Ordnung und der diffusive Term durch eine zentrale Differenz approximiert. Thompson (1992) hält eine lineare Interpolation bei dominant konvektiven Problemen für angemessen, da Fehler bei der Diskretisierung des diffusiven Terms von untergeordneter Bedeutung sind. Das von ihm verwendete hybride Verfahren zur Diskretisierung des konvektiven Terms geht für stark konvektive Probleme in ein Upwind-Verfahren 1. Ordnung über, womit also die Interpolation und die Diskretisierung von gleicher Fehlerordnung sind. Dies deckt sich mit der Forderung von Brandt (1977), der ableitet, daß die Prolongations- und Restriktionsoperatoren, d. h. die Interpolationsoperatoren zwischen dem feineren und jeweils gröberen Gitter, von mindestens gleicher Ordnung sein müssen. In der Arbeit von Stiller (1993) kommt dies bei der Simulation einer 3D Gebäudeumströmung auch zum Tragen, da er ein Multigridverfahren mit Interpolation 2. und 4. Ordnung verwendet. Thompson begründet seine Aussage nicht weiter und läßt die Frage nach der notwendigen Interpolation bei Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung offen.

Die Stabilität der verschiedenen Verfahren wird nur von einigen der Autoren nachgewiesen. Für ein neues Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters ist insbesondere bei Verwendung eines Diskretisierungsverfahrens 2. Ordnung die Stabilität noch nachzuweisen.

### **1.3.3 Ziele dieser Arbeit**

Um die in Abschnitt 1.3.1 formulierten Forderungen zu erfüllen, werden damit folgende Ziele für diese Arbeit gestellt:

1. Es ist ein Verfahren zur statischen lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters als Basis eines Finite Volumen Verfahrens mit vollimpliziter Behandlung des gesamten Rechengebietes, insbesondere auch der Teilgitterränder, zu entwickeln.
2. Auch die Ränder der Teilgitter sind bei Verwendung von Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung zur Approximation des konvektiven Terms so zu behandeln, daß kein Genauigkeitsverlust eintritt. Für die dabei notwendigen Interpolationen ist zuerst die geforderte Genauigkeit zu bestimmen und anschließend umzusetzen.
3. Die Stabilität dieses Verfahrens ist nachzuweisen.
4. Eine vektorisierbare Datenstruktur ist einzuhalten.
5. Das entwickelte Verfahren ist in das hochvektorierte Thermohydraulikrechenprogramm FLUTAN (Willerdig und Baumann 1996) am Forschungszentrum Karlsruhe zu implementieren.
6. Das implementierte Verfahren ist an geeigneten Fällen zu verifizieren und anzuwenden.

Zur Verwirklichung dieser Ziele werden in Kapitel 2 die strömungsmechanischen Grundgleichungen, die Behandlung dieser Gleichungen mit einem Finite Volumen Verfahren und die Herleitung einer allgemeinen Transportgleichung dargestellt. Daran anschließend werden die vollimplizite Differenzenapproximation dieser allgemeinen Transportgleichung und die vollimplizite Druckgleichung nach dem ICE-Verfahren dargelegt. In Kapitel 3 wird zuerst das Verfahrensschema einer neuen Methode zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters dargestellt. Danach werden die zusätzlichen Gleichungen an den Rändern der Teilgitter in den verschiedenen Erhaltungsgleichungen vorgestellt und die numerischen Eigenschaften des Verfahrens analysiert. Dabei wird insbesondere die geforderte Genauigkeit aus der Analyse der Konsistenz des Verfahrens generell für verschiedene Diskretisierungsverfahren abgeleitet und die numerische Stabilität mit einer Von Neumann Analyse nachgewiesen. In Kapitel 4 wird die Implementierung dieses neuen Verfahrens in FLUTAN erläutert. Das Verfahren wird in Kapitel 5 durch Berechnung einer laminaren Strömung über eine zurückspringende Stufe, einer laminaren Strömung durch eine symmetrische Erweiterung und die turbulente Strömung nach einem Düsenblock in einem zylindrischen Rohr verifiziert. Anschließend wird es zur Berechnung einer sowohl stationären als auch transienten laminaren Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt angewandt. In Kapitel 6 werden abschließend die Schlußfolgerungen aus dieser Arbeit gezogen und ein Ausblick auf mögliche künftige Entwicklungen gegeben.

## 2. Grundgleichungen des Finite Volumen Verfahrens

In diesem Abschnitt werden zuerst die strömungsmechanischen Grundgleichungen, d. h. die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, dargestellt. Diese können in einer allgemeinen Form einer Erhaltungsgleichung zusammengefaßt werden. Diese allgemeine Erhaltungsgleichung kann auch die Erhaltung von charakteristischen Größen der Turbulenz beschreiben, wie man sie bei der Modellierung der Turbulenz mit statistischen Turbulenzmodellen zu lösen hat. Anschließend wird die numerische Approximation dieser allgemeinen Erhaltungsgleichung mit einem Finite Volumen Verfahren beschrieben.

### 2.1 Analytische Form der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen sind als partielle Differentialgleichungen unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention, der partiellen Ableitung nach der Zeit  $\frac{\partial}{\partial t}$  und der partiellen Ortsableitung  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  nach der Koordinatenrichtung  $x_j$  dargestellt und sind in dieser Form bei Hirsch (1988), Anderson et. al. (1984) und Spurk (1989) zu finden.

Es wird ein schwach-kompressibles Newtonsches Fluid vorausgesetzt. Weiterhin wird eine nichtisotherme Strömung ohne Verdunstung oder Kondensation betrachtet. Sowohl laminare als auch turbulente Strömungen werden zugelassen.

#### Die Massenerhaltung

Die Massenerhaltungsgleichung oder auch Kontinuitätsgleichung schreibt sich bei nicht-konstanter Dichte für ein Fluid ohne Quellen und Senken als:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (2.1)$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Fluids und  $u_j$  die Geschwindigkeitskomponente in die Koordinatenrichtung  $x_j$  bedeuten.

## Die thermische Energiegleichung

Die thermische Energiegleichung für die Enthalpie  $h_i$  lautet unter Annahme des Fourier'schen Gesetzes

$$\frac{\partial \rho h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j h_i) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \dot{Q} + \Phi^*, \quad (2.2)$$

wobei  $\lambda$  die thermische Leitfähigkeit,  $Q$  die innere Wärmequelle,  $\Phi^*$  die Dissipation von kinetischer in thermische Energie,  $T$  die Temperatur und  $P$  den Druck bedeuten.

## Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen, die die Erhaltung des Impulses  $\rho u_i$  für Newtonsche Fluide beschreiben, lauten

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + (\zeta + \eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right), \quad (2.3)$$

wobei  $g_i$  die Komponente der Volumenkraft,  $\eta$  die dynamische Viskosität und der letzte Term auf der rechten Seite die zusätzliche Dissipation mit der Volumenviskosität  $\zeta$  beschreiben (vgl. Wieghardt 1974).

## Die allgemeine Form einer Erhaltungsgleichung

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und thermische Energie können auf eine allgemeine Form (Bottoni 1985, Hirsch 1988) der Art

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Psi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \Psi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) + S_\Psi \quad (2.4)$$

gebracht werden, wobei der erste Term auf der linken Seite die zeitliche Ableitung der Größe  $\Psi$ , der zweite Term auf der linken Seite den konvektiven Transport, der erste Term auf der rechten Seite den diffusiven Transport und der letzte Term auf der rechten Seite den Quellterm der Gleichung darstellen.

In den einzelnen Gleichungen sind für  $\Psi$ ,  $\Gamma_\Psi$  und  $S_\Psi$  folgende Größen einzusetzen:

Gleichung	$\Psi$	$\Gamma_\Psi$	$S_\Psi$
Massenerhaltung	1	0	0
Energieerhaltung	$h_i$	$\frac{\lambda}{c_p}$	$\frac{\partial P}{\partial t} + \dot{Q} + \Phi^*$
Impulserhaltung	$u_i$	$\eta$	$-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + (\zeta + \eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$

Tabelle 2.1 Bedeutung der Terme in den verschiedenen Erhaltungsgleichungen

## 2.2 Numerische Approximation der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen

### 2.2.1 Verfahren der Finiten Volumen

Bei einem Finite Volumen Verfahren werden die partiellen Differentialgleichungen zuerst über ein Kontrollvolumen integriert. In Abbildung 2.1 sind zur Veranschaulichung die drei möglichen Kontrollvolumina für ein zweidimensionales, versetztes Gitter dargestellt. Integriert man Gleichung (2.4) unter Beachtung der verschiedenen Kontrollvolumina eines versetzten Gitters im dreidimensionalen Raum, so erhält man:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial(\mathcal{J}_\Psi)}{\partial x_i} dV = \int_V S_\Psi dV \quad (2.5)$$

Der dabei eingeführte totale Fluß  $\mathcal{J}_\Psi$  stellt die Summe aus konvektivem und diffusivem Transport über eine Grenzfläche des Kontrollvolumens dar und ist definiert als

$$\mathcal{J}_\Psi = \rho u_j \Psi - \Gamma_\Psi \frac{\partial\Psi}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den rechten Term der linken Seite von Gleichung (2.5), schreibt sich die Gleichung als:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} dV + \int_{A_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi x} dA - \int_{A_{i-\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi x} dA + \int_{A_{j+\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi y} dA - \int_{A_{j-\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi y} dA + \int_{A_{k+\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi z} dA - \int_{A_{k-\frac{1}{2}}} \mathcal{J}_{\Psi z} dA = \int_V S_\Psi dV \quad (2.7)$$

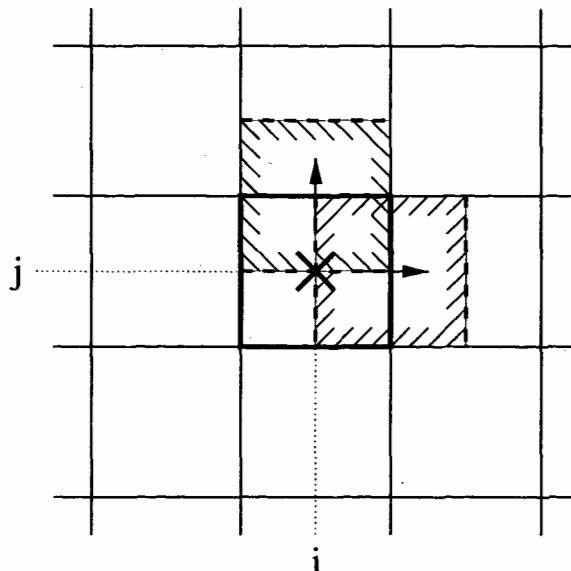


Abbildung 2.1: Die Kontrollvolumina für ein Finites Volumen Verfahren bei Verwendung eines versetzten Gitters in 2D. Das dick umrahmte Volumen beschreibt das zentrierte und die schraffiert angedeuteten Volumina beschreiben die in die jeweils positive Koordinatenrichtung versetzten Kontrollvolumina

Die Indizes  $i, j, k \pm \frac{1}{2}$  bezeichnen dabei die relative Lage der Grenzflächen in den jeweiligen positiven bzw. negativen Koordinatenrichtungen.

Definiert man als Abkürzung für die Volumen- und Oberflächenmittelung einer skalaren Größe  $f$

$$\langle f \rangle_3 = \frac{1}{V_F} \int_{V_F} f dV \quad \text{und} \quad \langle f \rangle = \frac{1}{A_F} \int_{A_F} f dA \quad , \quad (2.8)$$

so schreibt sich Gleichung (2.7) als:

$$\begin{aligned} V_F \frac{\partial \langle \varrho \Psi \rangle_3}{\partial t} + \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{i+\frac{1}{2}} - \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{i-\frac{1}{2}} + \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{j+\frac{1}{2}} \\ - \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{j-\frac{1}{2}} + \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{k+\frac{1}{2}} - \langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{k-\frac{1}{2}} = \langle S_\Psi \rangle_3 V_F \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nach der Definition der gemäß Gleichung (2.8) gemittelten Größen berechnet sich z. B. der totale Fluß an der Stelle  $i + \frac{1}{2}$  zu

$$\langle \langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F \rangle_{i+\frac{1}{2}} = (A_F \varrho u_i \Psi)_{i+\frac{1}{2}} - \left( A_F \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad . \quad (2.10)$$

Damit hat man die partielle Differentialgleichung (2.4) in eine konservative Bilanzgleichung (2.9) überführt. Die unbekanntenen, anzunähernden Größen sind jetzt nicht mehr in der Mitte eines Volumens, sondern auf den Rändern des jeweiligen Kontrollvolumens definiert. Bei gleicher Berechnung dieser Größe  $\Psi$  für die beiden angrenzenden Kontrollvolumina wird dadurch sichergestellt, daß die Größe  $\Psi$  beim Transport über eine Grenzfläche ihres Kontrollvolumens exakt erhalten bleibt.

## 2.2.2 Approximation der Flußterme

Die folgenden Approximationen werden für nichtäquidistante Maschenweiten dargestellt. Der äquidistante Fall ist ein Spezialfall dieses allgemeineren Falls und die dafür geltenden Beziehungen werden durch  $\Delta x_{i-2} = \Delta x_{i-1} = \Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \Delta x_{i+2}$  aus den folgenden Gleichungen erhalten.

## Die Approximation des diffusiven Flusses

Der diffusive Fluß über eine Grenzfläche ist in Gleichung (2.10) durch eine räumliche Ableitung an dieser Grenzfläche repräsentiert. Diese räumliche Ableitung wird durch eine einfache Differenz approximiert, was wiederum bei einer Differenzenbildung der beiden diffusiven Flüsse an den beiden Grenzflächen, die eine gemeinsame Normalenrichtung haben, insgesamt zu einer zentralen Differenzenapproximation führt.

Exemplarisch wird hier nur der diffusive Fluß über die Grenzfläche  $A_{i+\frac{1}{2}}$  bestimmt. Zur Bestimmung dieses diffusiven Flusses wird der Diffusionskoeffizient  $\Gamma_{\Psi i+\frac{1}{2}}$  benötigt. Dieser wird aus benachbarten, zentrierten Werten mittels einer harmonischen Interpolation

(s. Patankar 1978) bestimmt, wodurch die Schrittweiten  $\Delta x_i$  im Nenner auftauchen (s. Abbildung 2.2). Zur Vereinfachung wird die Abkürzung  $D_{i+\frac{1}{2}}$  eingeführt

$$D_{i+\frac{1}{2}} = \frac{A_{F_{i+\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x_i}{\Gamma_{\Psi_i}} + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Gamma_{\Psi_{i+1}}} \right)} \quad (2.11)$$

Damit gilt für den diffusiven Fluß über die Fläche  $A_{i+\frac{1}{2}}$

$$\left( A_F \Gamma_{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)_{i+\frac{1}{2}} = D_{i+\frac{1}{2}} (\Psi_{i+1} - \Psi_i) \quad (2.12)$$

## Die Approximation des konvektiven Flusses

Für die Approximation des konvektiven Flusses aus Gleichung (2.10) werden im folgenden drei verschiedene Diskretisierungsverfahren verwendet. Diese sind das Upwind-Verfahren 1. Ordnung, das QUICK-Verfahren 2. Ordnung (Leonard 1979) und das LECUSSO-Verfahren 2. Ordnung (Günther 1992).

Unter Einführung der Abkürzung

$$F_{i+\frac{1}{2}} = (A_F \varrho u_i)_{i+\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

schreibt sich der konvektive Fluß als

$$(A_F \varrho u_i \Psi)_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i+\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Die genannten drei Verfahren unterscheiden sich in der Bestimmung der durch die Konvektion transportierten Größe  $\Psi$  an der Stelle  $i + \frac{1}{2}$ .

Alle drei Diskretisierungsverfahren kann man aber auch in einem allgemeinen Dreipunkteansatz zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Psi_{i+\frac{1}{2}} &= \alpha_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i-1} + \beta_{i+\frac{1}{2}} \Psi_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i+1} & \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \Psi_{i+\frac{1}{2}} &= \alpha_{i+\frac{1}{2}} \Psi_i + \beta_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i+1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i+2} & \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{aligned}$$

Dieser Dreipunkteansatz wird im folgenden verwendet.

## Das Upwind-Verfahren 1. Ordnung

Dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung, auch Donor Cell Method genannt, liegt die Annahme zugrunde, daß der Zustand einer Größe in einer Masche direkt vom Zustand dieser Größe in der angrenzenden Masche stromaufwärts beeinflusst wird. Da damit die lokale Strömungsrichtung zur Approximation einer unbekanntenen Größe herangezogen wird, ist der verwendete Differenzenstern (s. Abbildung 1.1) asymmetrisch.



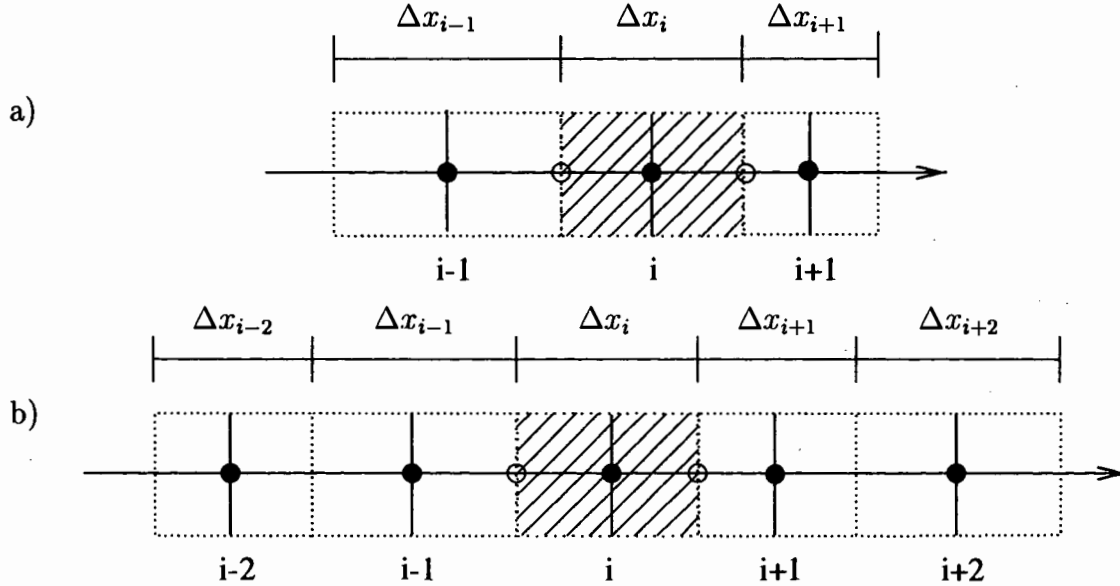


Abbildung 2.2: Die Stützstellen (•) bei der Diskretisierung des konvektiven Terms an den Rändern des Kontrollvolumens (o), a) beim Upwind-Verfahren 1. Ordnung, b) beim QUICK- oder LECUSSO-Verfahren 2. Ordnung

In Abbildung 2.2a sind die möglichen Stützstellen des Verfahrens gezeigt. Die unbekannte Größe  $\Psi_{i+\frac{1}{2}}$  wird approximiert als:

$$\begin{aligned}\Psi_{i+\frac{1}{2}} &= \Psi_i \quad \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \Psi_{i+\frac{1}{2}} &= \Psi_{i+1} \quad \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} < 0\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_{i+\frac{1}{2}} &= 0 \\ \beta_{i+\frac{1}{2}} &= 1 \\ \gamma_{i+\frac{1}{2}} &= 0\end{aligned} \quad (2.15)$$

## Das QUICK-Verfahren

Das QUICK-Verfahren (Leonard 1979) ist ein Upwind-Verfahren 2. Ordnung, das die unbekannte Größe mit einem quadratischen Ansatz aus den Größen von drei verschiedenen Maschen unter Beachtung der lokalen Strömungsrichtung bestimmt (vgl. Abbildung 2.2b). Aus der quadratischen Interpolation 2. Ordnung kann man die unbekannten Koeffizienten bestimmen. So lauten z. B. die Koeffizienten für den Fall  $u_{i+\frac{1}{2}} > 0$

$$\begin{aligned}\alpha_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{-\Delta x_i \Delta x_{i+1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \\ \beta_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{(2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \Delta x_{i+1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}\end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \Delta x_i}{(\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$$

Die entsprechende Herleitung der Koeffizienten für den Fall  $u_{i+\frac{1}{2}} < 0$  findet sich z. B. bei Sakai (1990).

## Das LECUSSO-Verfahren

Das LECUSSO-Verfahren (Günther 1992) ist ebenfalls ein Upwind-Verfahren 2. Ordnung, welches die gleichen möglichen Stützstellen wie das QUICK-Verfahren berücksichtigt. Es wird jedoch nicht ein quadratischer Ansatz zur Bestimmung der Größe  $\Psi_{i+\frac{1}{2}}$  gemacht, sondern es werden andere Ansatzfunktionen gewählt, für die die Approximation genau erfüllt sein muß.

Die unbekanntenen Koeffizienten werden aus den Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned}\Psi &\equiv 1 \\ \Psi &= x \\ \Psi &= e^{Re_{i+\frac{1}{2}} x}\end{aligned}$$

bestimmt, wobei die letzte Ansatzfunktion eine Lösung der stationären Konvektions-Diffusionsgleichung darstellt.

Für den Fall  $u_{i+\frac{1}{2}} > 0$  erhält man damit die Koeffizienten

$$\begin{aligned}\alpha_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{-\Delta x_i e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}} + (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i}{2}} - \Delta x_{i+1}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}\right)}} \\ \beta_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x_{i+1} e^{-Re_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}\right)} - (\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i}{2}}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}\right)}} \\ \gamma_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i}{2}} + \Delta x_i e^{-Re_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}} - 2\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) e^{Re_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}\right)}}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Die Koeffizienten für  $\Psi_{i-\frac{1}{2}}$  kann man durch einfaches Verschieben der tiefgestellten Indizes um  $-1$  erhalten. Für den Fall  $u_{i+\frac{1}{2}} < 0$  findet man die Koeffizienten bei Sakai (1990).

### 2.2.3 Zeitintegration

Bei der betrachteten allgemeinen Transportgleichung (2.4) handelt es sich um ein Rand- und Anfangswertproblem. Dies bedeutet, daß eine gegebene Anfangsverteilung der Transportgröße  $\Psi$  in der Zeit unter Beachtung der Randbedingungen integriert werden muß. Aus Gleichung (2.4) wird unter den Vereinfachungen  $u_i, \rho, \Gamma_\Psi = const.$  und  $S_\Psi = 0$ ,

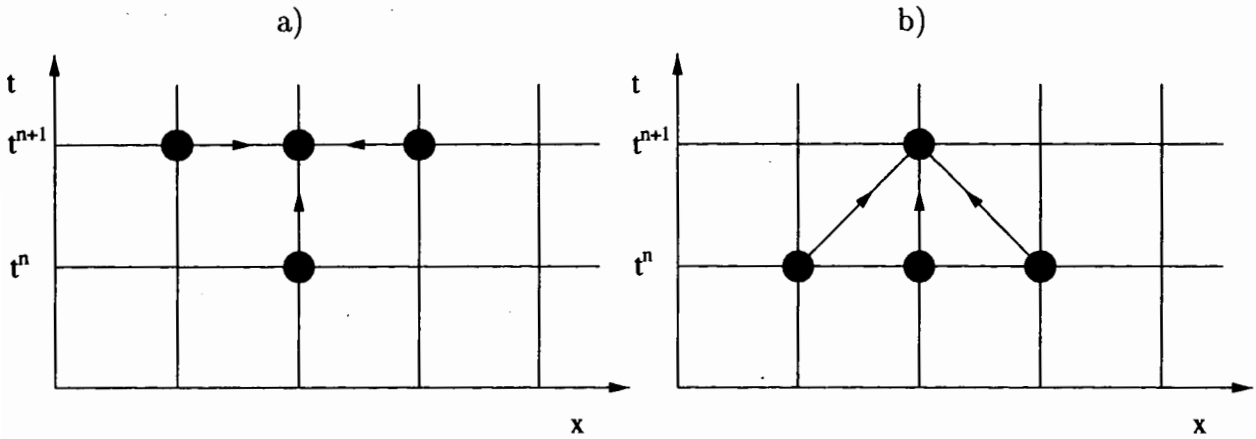


Abbildung 2.3: Beeinflussung der Punkte bei a) impliziter und b) expliziter Zeitintegration

unter Annahme eines äquidistanten Gitters mit  $\Delta x_i = \text{const.}$  und unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\rho u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \Gamma_\Psi \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Die Zeitabhängigkeit und damit verbunden die zeitliche Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung (2.4) ist an zwei Stellen wichtig. Zum einen gilt es die partielle Ableitung der Größe  $\Psi$  nach der Zeit zu approximieren und zum anderen die restliche Gleichung zu einem bestimmten Zeitpunkt anzunähern. Bei den Zeitintegrationsverfahren unterscheidet man explizite und implizite Verfahren. Bei expliziter Approximation wird ein in der Zeit vorwärtsgerichteter Differenzenquotient verwendet und die rechte Seite von Gleichung (2.18) zum bekannten Zeitpunkt  $n$  ausgewertet (vgl. Abbildung 2.3). Damit wird aus Gleichung (2.18)

$$\Psi_i^{n+1} = (1 - 2D) \Psi_i^n + \left(D + \frac{C}{2}\right) \Psi_{i-1}^n + \left(D - \frac{C}{2}\right) \Psi_{i+1}^n, \quad (2.19)$$

wobei die Courant-Zahl  $C$  und die Diffusions-Zahl  $D$

$$C = \frac{u \Delta t}{\Delta x}, \quad D = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.20)$$

als dimensionslose Kennzahlen eingeführt wurden.

Bei einem impliziten Verfahren wird ein rückwärtsgerichteter Differenzenquotient verwendet und die rechte Seite von Gleichung (2.18) zum neuen Zeitpunkt  $n + 1$  ausgewertet (vgl. Abbildung 2.3b). In analoger Weise gilt dann für Gleichung (2.18)

$$\left(\frac{C}{2} - D\right) \Psi_{i+1}^{n+1} + (1 + 2D) \Psi_i^{n+1} \left(-\frac{C}{2} - D\right) \Psi_{i-1}^{n+1} = \Psi_i^n \quad (2.21)$$

Es ist offensichtlich, daß bei einem impliziten Verfahren ein Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\Psi^{n+1}$  zu lösen ist, wohingegen bei einem expliziten Verfahren nur eine Gleichung für jeden Diskretisierungspunkt  $i$  zu lösen ist. Die expliziten Verfahren sind

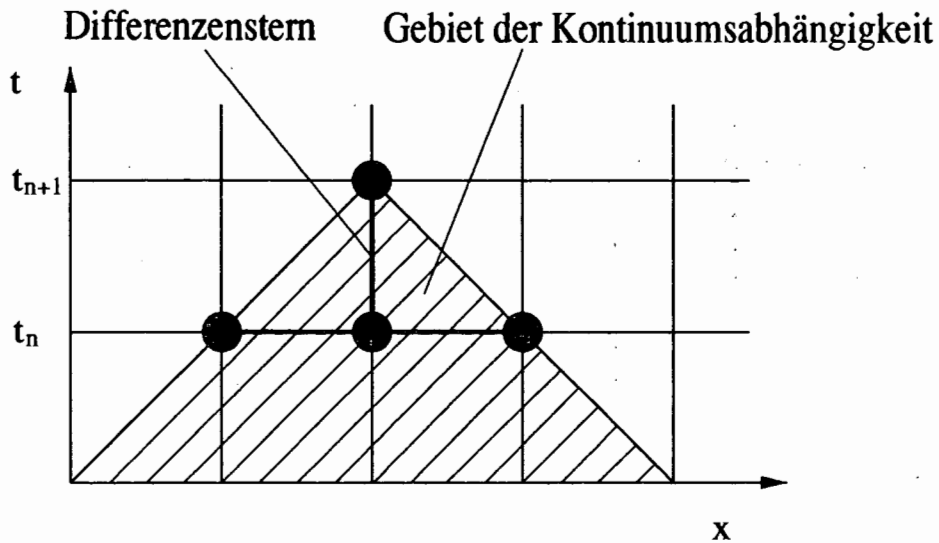


Abbildung 2.4: Gebiet der Kontinuumsabhängigkeit für  $C = 1$

damit numerisch wesentlich weniger aufwendig als die impliziten.

Dies gilt aber nur, solange der maximale Zeitschritt  $\Delta t$  durch das Strömungsproblem und nicht durch das Zeitintegrationsverfahren begrenzt wird. Denn die expliziten Verfahren unterliegen der Stabilitätsbedingung  $C \leq 1$ , die Courant-Friedrich-Levi-Bedingung (CFL-Bedingung) genannt wird. Die CFL-Bedingung besagt, daß das Gebiet der numerischen Abhängigkeit zumindest das Gebiet der Kontinuumsabhängigkeit einschließen muß (Roache 1972). Das Gebiet der numerischen Abhängigkeit ist bei einer Finiten Differenzen Approximation durch den verwendeten Differenzenstern charakterisiert. Das Gebiet der Kontinuumsabhängigkeit hängt dagegen von der Bewegung des Fluids und damit von der Konvektionsgeschwindigkeit  $u_i$  ab. In der Abbildung 2.4 ist das Gebiet der Kontinuumsabhängigkeit für  $C = 1$  als schraffierte Fläche dargestellt. Für den Fall  $C < 1$  bleibt diese Fläche innerhalb der Stützstellen des Differenzensterns, aber für den Fall  $C > 1$  wird sie größer und die Informationen, die zur korrekten Approximation der Größe zum neuen Zeitpunkt notwendig wären, stehen nicht mehr zur Verfügung. Da die Courant-Zahl  $C$  von der numerischen Diskretisierung, d. h. von der Maschenweite  $\Delta x$ , abhängt, kann es deshalb vorkommen, daß der maximale Zeitschritt einer Simulation von der Diskretisierung und nicht von der Physik des Strömungsproblems bestimmt wird.

Die impliziten Verfahren unterliegen dagegen nicht dieser Beschränkung und garantieren ein stabileres Verfahren, da sie die unbekanntenen Größen zum neuen Zeitpunkt untereinander koppeln. Sie erlauben damit insbesondere die Verwendung größerer Zeitschritte, die aber immer noch durch die Physik des betrachteten Problems beschränkt bleiben. Diese stabilisierende Eigenschaft der impliziten Behandlung wird auch bei teilimpliziten Verfahren eingesetzt, wo einzelne Terme implizit behandelt werden (Wörner 1994), um durch eine Erhöhung der Stabilität zu einem größeren Zeitschritt zu gelangen.

Durch die explizite Behandlung von Stoffgrößen und die explizite Behandlung des Einflusses von entfernteren Stützstellen bei der Verwendung von höherwertigen Differenzenver-

fahren zur Approximation des konvektiven Terms ist aber selbst bei impliziter Behandlung der Gleichungen immer noch eine Beschränkung hinsichtlich der Stabilität vorhanden.

## 2.2.4 Die vollimplizite Druckgleichung

Mit den Navier-Stokes-Gleichungen hat man drei Gleichungen für die drei unbekanntes Geschwindigkeiten. Als weitere Unbekannte in dieser Gleichung tritt der Druck  $P$  auf. Das Druckfeld ist nur bis auf eine Integrationskonstante genau bestimmt, da der Druck nur mit einer räumlichen Ableitung in den Navier-Stokes-Gleichungen auftritt. Die Idee aller Verfahren, bei denen eine Druckgleichung gelöst wird, ist es, die Kontinuitätsgleichung (2.1) mit den Navier-Stokes-Gleichungen (2.3) zu einer Bestimmungsgleichung für den Druck  $P$  zu kombinieren.

Zum einen kann dies durch ein Druckkorrekturverfahren geschehen. Dabei werden ausgehend von einem geschätzten Druckfeld zuerst die Impulsgleichungen gelöst und damit die Geschwindigkeiten bestimmt. Daran anschließend wird mit den berechneten Geschwindigkeiten das Druckfeld korrigiert, um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen. Mit diesem neuen Druckfeld beginnt der Zyklus von neuem, bis alle Gleichungen mit der geforderten Genauigkeit erfüllt sind. Bei diesen Verfahren erfüllt erst das nach einigen Iterationen konvergierte Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung. Diese reduzierte Genauigkeit führt bei der Berechnung von Transportgleichungen für andere Erhaltungsgrößen direkt zu einem Folgefehler.

Zum anderen kann aber auch die implizit betrachtete Kontinuitätsgleichung mit den ebenfalls implizit betrachteten Navier-Stokes-Gleichungen zu einer vollimpliziten Gleichung für den Druck kombiniert werden (Harlow und Amsden 1971). Die Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen führt zwar dennoch dazu, daß die berechneten Drücke und Geschwindigkeiten noch weiterhin iteriert werden müssen, da die Geschwindigkeiten sowohl als transportierte Teilgröße als auch als transportierende Größe auftreten. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt aber darin, daß die auch während dieser Iterationen bestimmten Geschwindigkeiten immer die Kontinuitätsgleichung erfüllen und damit keinerlei lokale Massenbilanzfehler zu Fehlern bei der Berechnung anderer Transportgleichungen, wie z. B. der Enthalpiegleichung, führen.

Die Navier-Stokes-Gleichungen (2.3) können in ihrer diskretisierten Form zu einer impliziten Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit  $u_j^{n+1}$  umgeschrieben werden (Bottoni et al. 1985, Sakai 1990). Unter Einführung einer sogenannten Pseudogeschwindigkeit  $\hat{u}_j$  und eines weiteren Koeffizienten  $u_{0,j}$  erhält man

$$u_j^{n+1} = \hat{u}_j^n - u_{0,j}^n \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j}, \quad (2.22)$$

wobei der hochgestellte Index  $n$  die bekannte Zeitebene, d. h. den expliziten Einfluß, und der hochgestellte Index  $n + 1$  die neue Zeitebene, d. h. den impliziten Einfluß, bezeichnen.

Bei Benutzung dieser Gleichung in der Kontinuitätsgleichung (2.1) erhält man mit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \hat{u}_j^n}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho u_{0,j}^n}{\partial x_j} \left( \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} \right) \quad (2.23)$$

eine implizite Poissongleichung für den Druck.

### 3. Ein implizites Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters

In diesem Kapitel wird eine neue Methode zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters vorgeschlagen, welches das gesamte Rechengebiet, d. h. insbesondere auch die Ränder der lokalen Verfeinerung, mit dem vollimpliziten ICE-Verfahren behandelt und die notwendigen Randwerte zur Kopplung der verfeinerten und unverfeinerten Gebiete mit einer Genauigkeit 2. Ordnung interpoliert.

Aus den in Kapitel 1 formulierten Zielen werden folgende Anforderungen abgeleitet:

- Es wird ein statisches, d. h. ein zeitlich festes, Gitter verwendet.
- Die zu verfeinernden Gebiete werden in der Programmeingabe spezifiziert.
- Die zu verfeinernden Maschen werden in jeder Koordinatenrichtung halbiert. Damit werden größere Maschenweitensprünge und damit verbundene Stabilitätseinbußen vermieden (vgl. Flad 1995).
- Die Variablen an den Rändern der Verfeinerung, die durch das lokal verfeinerte numerische Gitter zunächst nicht definiert sind, müssen auch für räumliche Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung angemessen, d. h. ohne Genauigkeitsverlust, bestimmt werden.
- Die Ränder der lokalen Verfeinerung sollen aus Effizienzgründen implizit behandelt werden.
- Eine hierarchische Datenstruktur in Kombination mit der Einführung künstlicher Maschen an den Rändern der verfeinerten Gebiete ermöglicht eine indirekte Adressierung und damit die optimale Vektorisierung und Parallelisierung.

Der methodische Ablauf, wie diese Anforderungen umgesetzt wurden, wird in Unterkapitel 3.1 generell skizziert. Dazu wird die verwendete Gittertopologie erläutert, die Problematik der Verfeinerungsränder eingeführt und die Lösung dieses Problems durch Aufspalten der Gitterstruktur und Einführung künstlicher Maschen dargelegt. Im folgenden Unterkapitel

3.2 werden die notwendigen Kopplungsbedingungen für die verschiedenen Erhaltungsgleichungen hergeleitet. Im dritten Unterkapitel 3.3 werden die numerischen Eigenschaften des Verfahrens hinsichtlich Konsistenz und Stabilität untersucht. Hierbei wird insbesondere auch die Notwendigkeit der Genauigkeit 2. Ordnung für die Kopplungsbedingungen hergeleitet.

### 3.1 Verfahrensschema

Ein lokal verfeinertes Gitter setzt sich aus verfeinerten und unverfeinerten Gebieten zusammen. Es ist deshalb naheliegend, das gesamte Gitter als ein aus Gittern verschiedener Verfeinerung zusammengesetztes Gitter zu betrachten. Die Gitter aller definierter Verfeinerungsgrade bilden damit in ihrer Summe den physikalisch zu simulierenden Raum numerisch ab. Diese Topologie des gesamten Gitters ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Jedes dieser Teilgitter beschreibt einen Teil des physikalischen Raumes, innerhalb dessen die Bilanzgleichungen gelten und gelöst werden können. Schwierigkeiten bei der Aufstellung der Bilanzgleichungen treten an den Rändern von Teilgittern auf. An diesen Stellen sind nicht mehr alle Werte durch das numerische Gitter gegeben, welche bei der Approximation der verschiedenen Terme in den Erhaltungsgleichungen benötigt werden. Jede dieser Approximationen benutzt einen lokalen Differenzenstern, wie er in Abbildung 3.2 für den Rand eines Teilgitters dargestellt ist. Die Differenzensterne der an diesen Rand

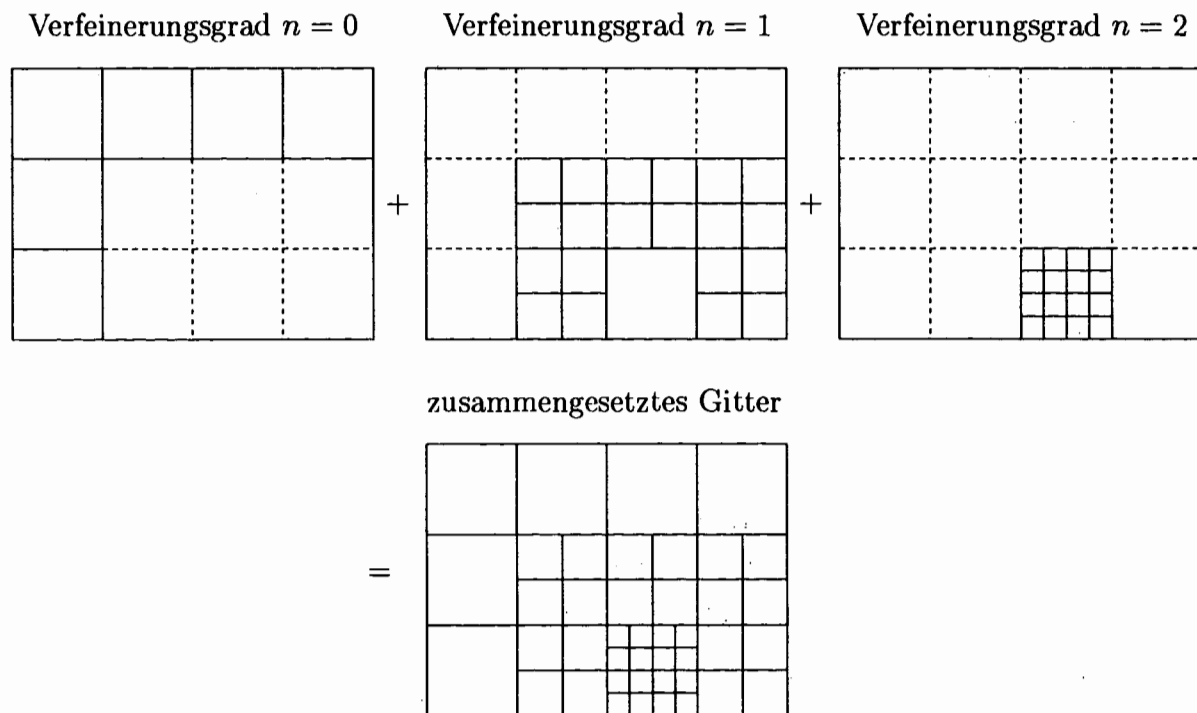


Abbildung 3.1: Bestandteile und Gesamttopologie des zusammengesetzten, lokal verfeinerten Gitters



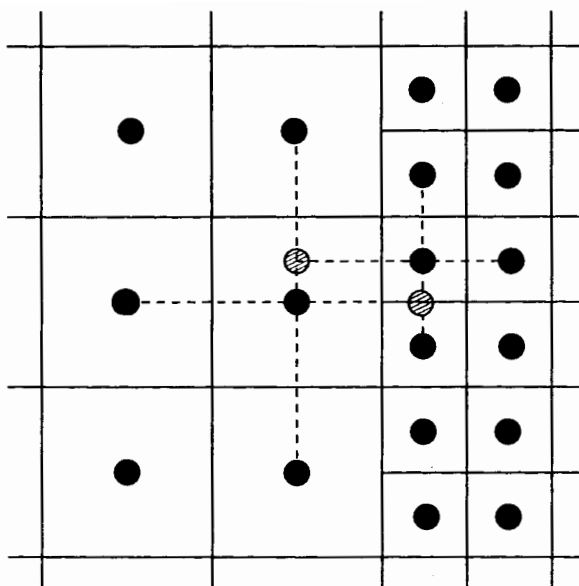


Abbildung 3.2: Differenzensterne am Rand einer lokalen Gitterverfeinerung

angrenzenden Maschen mit verschiedenem Verfeinerungsgrad sind durch gestrichelte Linien angedeutet und die Positionen mit unbekanntem Wert durch schraffierte Kreise markiert.

Dieser Problematik kann man auf zwei Wegen begegnen. Es können echte Randwerte an den Rändern der Verfeinerungen eingeführt werden, was zu einem nicht überlappenden Gitter führt. Außer dem Nachteil, zur Bestimmung dieser Randwerte Extrapolationen verwenden zu müssen, hat dieses Konzept den weiteren Nachteil, daß den höherwertigen Differenzenverfahren nur ein Randwert zur Verfügung steht, wodurch sie lokal in der Genauigkeitsordnung verlieren. Beim Konzept der überlappenden Gitter besteht dieser Nachteil nicht. Dabei werden am Rand dieser Teilgitter neue, sogenannte künstliche Maschen definiert. Diese stellen die unbekanntem Werte unter Benutzung der noch in Unterkapitel 3.2 zu diskutierenden Bestimmungsgleichungen für die Approximationen zur Verfügung. In Abbildung 3.3 ist die Aufspaltung des Gitters und Einführung dieser ebenfalls volumetrisch definierten künstlichen Maschen skizziert, wobei im Teilbild b) die Hilfsmasche für das gröbere Gitter  $n = 0$  und in Teilbild c) die Hilfsmaschen für das feinere Gitter  $n = 1$  dargestellt sind. Damit können zwar die Bilanzgleichungen auch in Maschen am Rand eines Teilgitters aufgestellt werden, jedoch hat man stattdessen das neue Problem, die impliziten Gleichungen für diese künstlichen Maschen aufzustellen.

Aufgrund des Genauigkeitsvorteils wird einem überlappenden Gitter der Vorzug gegeben. Die impliziten Bestimmungsgleichungen für die dadurch notwendigen künstlichen Maschen werden im nächsten Unterkapitel 3.2 hergeleitet.

Das Verfahren arbeitet nach folgendem Schema:

1. Ein Ausgangsgitter  $G$  (vgl. Abbildung 3.4a) wird als Basis des Verfahrens definiert, welches die Beschreibung der Geometrie und aller Anfangs- und Randbedingungen

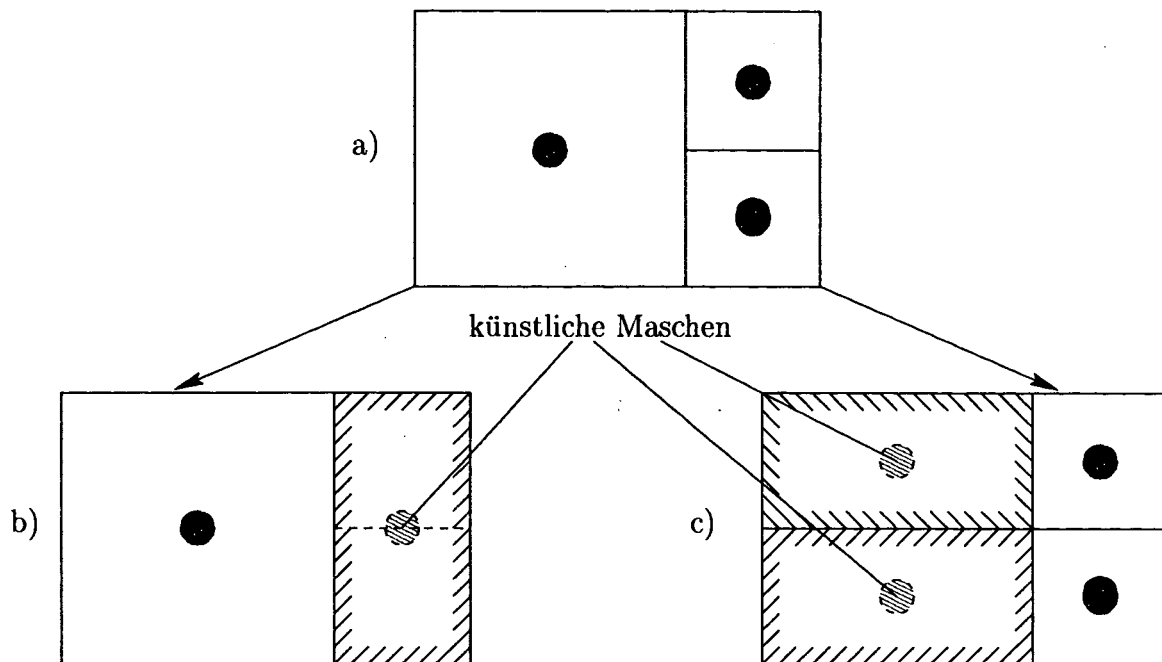


Abbildung 3.3: Aufspaltung des a) tatsächlichen Gitters an den Verfeinerungsrändern in die verschiedenen Verfeinerungsebenen und Definition der künstlichen Randmaschen mit b) Übergang von  $n = 1 \rightarrow n = 0$  und c) Übergang von  $n = 0 \rightarrow n = 1$

des Problems ermöglicht und welches weder äquidistant noch gleichseitig sein muß.

2. Verfeinerungsgebiete werden vom Anwender mit dem gewünschten Grad  $n$  der Verfeinerung definiert, wobei  $n$  als Exponent der Basis 2 des Maschenweitenverhältnisses zwischen dem Ausgangsgitter  $\Delta_0$  und dem tatsächlichen lokalen Gitter  $\Delta_n$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_n} = 2^n$$

definiert ist (vgl. Abbildungen 3.4b und 3.1).

3. Es wird das Adressierschema anhand der spezifizierten Verfeinerungsgebiete aufgebaut und die künstlichen Maschen an den Rändern der Verfeinerungen definiert.

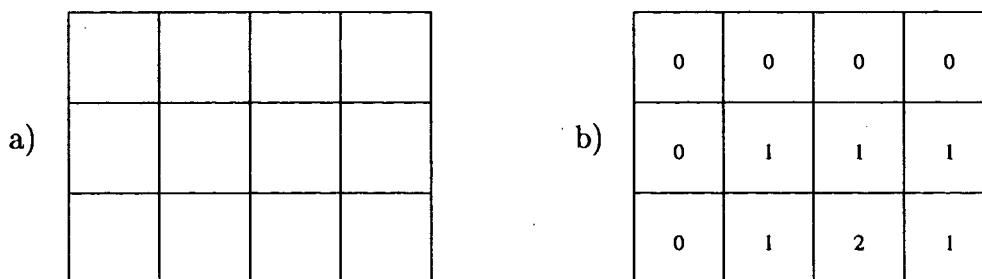


Abbildung 3.4: a) Unverfeinertes Ausgangsgitter und b) Gitter mit der Deklaration für den Grad  $n$  der Verfeinerung (vgl. auch Abbildung 3.1)

4. Es werden die Koeffizienten für die Kopplungsbedingungen an den Rändern der Verfeinerungen bestimmt. Damit ist das implizite Gleichungssystem für das gesamte Rechengebiet mit allen verfeinerten Gebieten geschlossen und kann gelöst werden.

## **3.2 Zusätzliche Gleichungen an Verfeinerungsgrenzen**

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für die in Abbildung 3.3 eingeführten künstlichen Maschen abgeleitet. Zuerst wird in Unterkapitel 3.2.1 die allgemeine Transportgleichung behandelt, die direkt für die Beschreibung der skalaren Transportgleichungen, d. h. der Enthalpiegleichung oder der Transportgleichungen für die charakteristischen Turbulenzgrößen, benutzt werden kann. Daran anschließend wird in Unterkapitel 3.2.2 der Sonderfall der Impulsgleichungen auf dem verwendeten versetzten Gitter betrachtet. Die Impulsgleichungen werden dann in Unterkapitel 3.2.3 bei der vollimpliziten Beschreibung des Drucks und der Massenerhaltung an den Rändern der Verfeinerungen verwendet.

### **3.2.1 Zusätzliche Gleichungen für die allgemeine Transportgleichung**

Die Grundidee der Herleitung der Gleichungen für die künstlichen Maschen ist die Erhaltung der Flüsse an den Rändern der Verfeinerung, d. h. daß der totale Fluß über die Oberfläche einer groben Masche genau die Summe der Flüsse der feinen Maschen bilanzieren muß. Die Größen, die in Abbildung 3.3 durch gefüllte Kreise markiert sind, werden aus den normalen Erhaltungsgleichungen bestimmt. Die Unbekannten in den künstlichen Maschen, als Nachbarn der feineren Maschen (vgl. Abbildung 3.3c), werden aus einer Interpolation 2. Ordnung gewonnen, wobei die bekannten Größen an den angrenzenden Stützstellen des groben Gitters verwendet werden. Für die künstliche Masche, als Nachbar einer groben Masche am Rand einer Verfeinerung (vgl. Abbildung 3.3b), wird hingegen eine Bilanzgleichung für dessen Kontrollvolumen aufgestellt. Die Besonderheit dieses Kontrollvolumens drückt sich in der unterschiedlichen Behandlung der verschiedenen Oberflächen dieses Kontrollvolumens aus. Bei der Oberfläche zur groben Masche hin wird nur der Fluß aus dem groben Kontrollvolumen heraus betrachtet und bei allen anderen Flächen werden die Flüsse über die Oberflächen der feinen Kontrollvolumina betrachtet. Diese modifizierte, volumetrisch gemittelte Bilanzgleichung erhält die Genauigkeit der approximierten Terme und stellt die konservative Behandlung dieses Verfeinerungsrandes sicher.

## Übergang vom feinen zum groben Gitter

Der erste Fall ist der in Abbildung 3.3b dargestellte Übergang vom feinen zum groben Gitter. Hier geht es darum, die unbekanntes Größen in den künstlichen Nachbarn des groben Gitters aus den bekannten Größen des feinen Gitters zu bestimmen.

Die Approximation der allgemeinen Transportgleichung (2.4) in der Bilanzgleichung (2.9) läßt sich schreiben als

$$\left[ V_F \frac{\partial \langle \rho \Psi \rangle_3}{\partial t} \right]_0 + \sum_{i=1}^6 (\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_i = \langle S_\Psi \rangle_3 V_F \quad , \quad (3.1)$$

wobei  $i$  hier eine der 6 möglichen Grenzflächen des Volumens bezeichnet. Unter Einführung der Abkürzungen

$$\Delta_t \Psi = \frac{\partial \langle \rho \Psi \rangle_3}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$F_i = (\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_i \quad (3.3)$$

gelangt man zur Formulierung

$$V_F \Delta_t \Psi + \sum_{i=1}^6 F_i = V_F \langle S_\Psi \rangle_3 \quad (3.4)$$

In Abbildung 3.5 ist der Rand einer Verfeinerung für ein zweidimensionales Gitter dargestellt, wobei insbesondere auch die Flüsse  $F_i$  eingetragen sind. Der künstliche Nachbar der Masche auf dem groben Muttergitter wird im folgenden  $MH$  und die Tochtermaschen auf dem feinen Gitter werden oben  $TO$  bzw. unten  $TU$  genannt. Die künstlichen Nachbarn der beiden Tochtermaschen auf dem feinen Gitter sind nur zur Vollständigkeit der Abbildung dargestellt. Sie spielen bei der hier betrachteten Kopplungsrichtung keine Rolle. Die Bestimmungsgleichungen für diese künstlichen Maschen werden im folgenden Abschnitt hergeleitet.

Der Wert der Erhaltungsgröße in künstliche Masche  $MH$  ist als Volumenmittel der Tochtermaschen  $TO$  und  $TU$  definiert, wobei an der Grenze zur groben Masche nur ein Flußterm auftritt, welcher in Abbildung 3.5 als  $F_1^{MH}$  benannt ist. Die Bilanzgleichung (3.4) für dieses Volumen schreibt man als:

$$V_F^{MH} \Delta_t \Psi + F_1^{MH} + F_2^{TU} + F_2^{TO} + F_3^{TU} + F_4^{TO} = V_F^{MH} \langle S_\Psi \rangle_3 \quad (3.5)$$

Die Summe der Bilanzgleichungen für die Tochtermaschen  $TO$  und  $TU$  lautet:

$$\begin{aligned} V_F^{TO} (\Delta_t \Psi)^{TO} + V_F^{TU} (\Delta_t \Psi)^{TU} + F_1^{TO} + F_1^{TU} + F_2^{TO} + F_2^{TU} \\ + F_3^{TO} + F_3^{TU} + F_4^{TO} + F_4^{TU} = V_F^{TO} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{TO} + V_F^{TU} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{TU} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aus der Flußerhaltung an der gemeinsamen Oberfläche der Tochtermaschen

$$F_3^{TO} = -F_4^{TU} \quad (3.7)$$

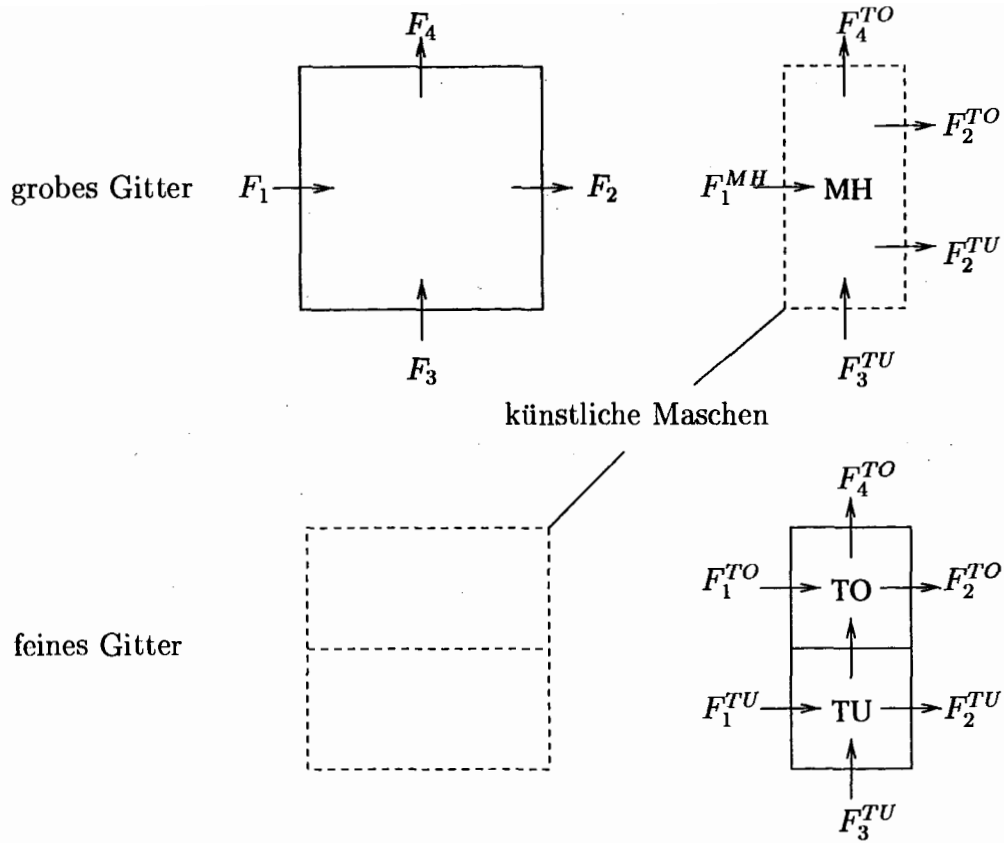


Abbildung 3.5: Definition der Halbmasche als künstlicher Nachbar des groben Gitters und der Flüsse über ihre Maschengrenzen

und der aus der Volumenmittelung des Werts in der künstlichen Masche abgeleiteten Definition für  $\Delta_t \Psi$  und  $\langle S_\Psi \rangle_3$

$$\begin{aligned} V_F^{MH} (\Delta_t \Psi)^{MH} &= V_F^{TO} (\Delta_t \Psi)^{TO} + V_F^{TU} (\Delta_t \Psi)^{TU} \\ V_F^{MH} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{MH} &= V_F^{TO} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{TO} + V_F^{TU} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{TU} \end{aligned} \quad (3.8)$$

folgt für Gleichung (3.6)

$$V_F^{MH} (\Delta_t \Psi)^{MH} + F_1^{TO} + F_1^{TU} + F_2^{TO} + F_2^{TU} + F_4^{TO} + F_3^{TU} = V_F^{MH} (\langle S_\Psi \rangle_3)^{MH} . \quad (3.9)$$

Die Differenz zwischen der Bilanzgleichung (3.5) und der Summe der Bilanzgleichungen nach Gleichung (3.9) ergibt sich zu

$$F_1^{MH} - (F_1^{TO} + F_1^{TU}) = 0, \quad (3.10)$$

was nichts anderes als die Erhaltung der Flüsse an den Grenzen der Verfeinerungen bedeutet. Die konservative Behandlung dieser Ränder liefert mit Gleichung (3.10) eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Größe in der künstlichen Masche  $MH$ , wie sie in Gleichung (3.5) definiert wurde.

### Übergang vom groben zum feinen Gitter

Der zweite Fall ist der in Abbildung 3.3c dargestellte Übergang vom groben zum feinen Gitter. Hier geht es darum, die unbekannten Größen in den künstlichen Nachbarn des

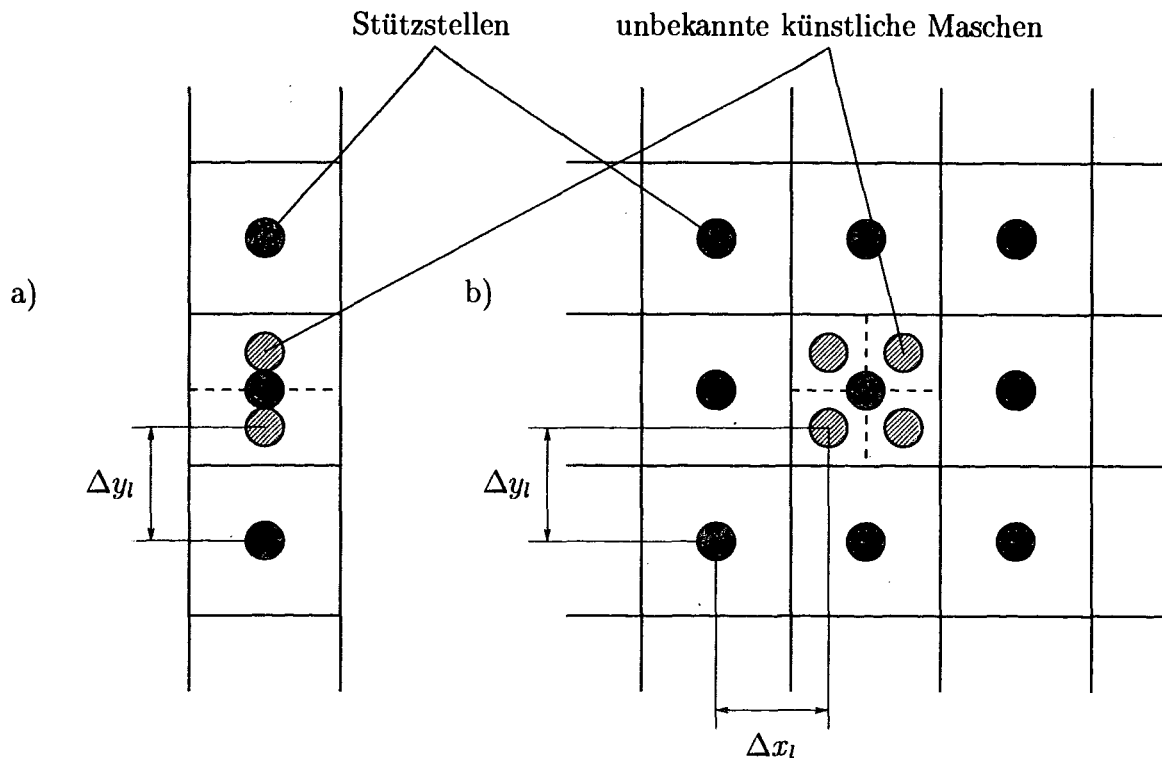


Abbildung 3.6: Räumliche Lage der künstlichen Maschen für den Übergang vom groben zum feinen Gitter, a) die eindimensionale Interpolation und b) die zweidimensionale Interpolation

feinen Gitters aus den umliegenden bekannten Größen des groben Gitters zu bestimmen. In Abbildung 3.6b ist ein Schnitt durch eine dreidimensionale grobe Masche und ihre Nachbarn gelegt, die an eine solche Verfeinerung angrenzen. Abbildung 3.6a stellt dabei den zweidimensionalen Fall dar, der auch in Abbildung 3.5 bei der Herleitung der zusätzlichen Gleichung für den künstlichen Nachbarn des groben Gitters aufgrund der übersichtlicheren Darstellung gewählt wurde. Bei diesem Fall treten am Rand des feinen Gitters nur zwei unbekannte künstliche Maschen auf und es ist nur eine eindimensionale Interpolation notwendig.

Im folgenden wird der allgemeinere dreidimensionale Fall (vgl. Abbildung 3.6b) weiter betrachtet, der den zweidimensionalen Fall einschließt. Bei einer dreidimensionalen Verfeinerung treten am Rand einer Verfeinerung insgesamt vier unbekannte künstliche Maschen auf. Die Zentren dieser künstlichen Maschen liegen in einer Ebene, die parallel zu der Oberfläche der groben Masche ist, die den Rand der Verfeinerung, d. h. den Übergang des groben zum feinen Gitters darstellt. Die Zentren der Maschen des bekannten groben Gitters liegen ebenfalls in dieser Ebene und sind dabei durch gefüllte Kreise und die der unbekanntenen künstlichen Maschen durch schraffierte Kreise dargestellt.

In Unterkapitel 3.3.1 wird die Forderung nach einer Interpolation 2. Ordnung für diesen Übergang bei der Verwendung von Differenzenverfahren 2. Ordnung aufgestellt. Für eine Interpolation 2. Ordnung für die unbekanntenen Werte  $\Psi_0$  wird der Ansatz gemacht, daß die

Werte  $\Psi_o$  allgemein als Summe der Produkte aus Koeffizient  $a_l$  und dem Wert auf dem groben Gitter  $\Psi_l$  über die im dreidimensionalen Fall maximal neun möglichen Punkte

$$\Psi_o \sim \Psi_o^a = \sum_{l=1}^9 a_l \Psi_l \quad (3.11)$$

approximiert werden. Zur Bestimmung dieser unbekanntenen Koeffizienten  $a_l$  wird  $\Psi$  an den Stützstellen  $\Psi_l$  auf dem groben Gitter in eine zweidimensionale Taylor-Reihe um die zu approximierende Stelle  $\Psi_o$  entwickelt. Führt man die lokalen Distanzen  $\Delta x_l$  und  $\Delta y_l$  als Differenz der Volumenmittelpunkte von  $\Psi_l$  zu  $\Psi_o$  ein, wie es in Abbildung 3.6 dargestellt ist, so ergibt sich für  $\Psi_l$

$$\begin{aligned} \Psi_l = & \Psi_o + \Delta x_l \Psi_x + \Delta y_l \Psi_y + \frac{1}{2} \left( \Delta x_l^2 \Psi_{xx} + 2\Delta x_l \Delta y_l \Psi_{xy} + \Delta y_l^2 \Psi_{yy} \right) \\ & + \frac{1}{6} \left( \Delta x_l^3 \Psi_{xxx} + 3\Delta x_l^2 \Delta y_l \Psi_{xxy} + 3\Delta y_l^2 \Delta x_l \Psi_{xyy} + \Delta y_l^3 \Psi_{yyy} \right) \\ & + \frac{1}{24} \Delta x_l^2 \Delta y_l^2 \Psi_{xxyy} + HOT(\Delta^4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei in dieser Gleichung  $\Psi_{x_j}$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}$  und  $HOT(\Delta^4)$  die nicht ausgeschriebenen Terme höherer Ordnung abkürzen, welche in diesem Fall mindestens von 4. Ordnung sind.

Benutzt man die Taylor-Reihenentwicklung aus Gleichung (3.12) in dem Ansatz von Gleichung (3.11) und gruppiert die dabei entstehende Gleichung nach den verschiedenen Ableitungen  $\Psi_x$  und  $\Psi_y$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_o^a = & \sum_{l=1}^9 a_l \Psi_o + \sum_{l=1}^9 a_l \Delta x_l \Psi_x + \sum_{l=1}^9 a_l \Delta y_l \Psi_y \\ & + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{2} \Delta x_l^2 \Psi_{xx} + \sum_{l=1}^9 a_l \Delta x_l \Delta y_l \Psi_{xy} + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{2} \Delta y_l^2 \Psi_{yy} \\ & + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{6} \Delta x_l^3 \Psi_{xxx} + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{2} \Delta x_l^2 \Delta y_l \Psi_{xxy} + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{2} \Delta x_l \Delta y_l^2 \Psi_{xyy} \\ & + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{6} \Delta y_l^3 \Psi_{yyy} + \sum_{l=1}^9 \frac{a_l}{24} \Delta x_l^2 \Delta y_l^2 \Psi_{xxyy} + HOT \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bei einer Interpolation 2. Ordnung dürfen nur Fehlerterme der Größenordnung  $\Delta^n$  mit  $n \geq 3$  auftreten. Dies führt hier zu 6 Bedingungen für die 9 unbekanntenen Koeffizienten  $a_l$ . Um aber alle Richtungen bei der Interpolation gleich zu gewichten, ist auf jeden Fall ein symmetrischer räumlicher Einfluß sicherzustellen. Dies wird durch die Auswahl der zu erfüllenden Bedingungen in Gleichung (3.13) in Abhängigkeit der lokal verfügbaren Stützstellen erreicht. Ähnlich wie bei Finiten Elementen mit biquadratischen Ansatzfunktionen wird dabei für jede Koordinatenrichtung eine quadratische Verteilung angenommen. Für den Fall, daß alle 9 Stützstellen verfügbar sind, lauten damit die 9 Bedingungen aus

Gleichung (3.13)

$$\sum_{i=1}^9 a_i = 1 \quad (3.14-a)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i = 0 \quad (3.14-b)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta y_i = 0 \quad (3.14-c)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i^2 = 0 \quad (3.14-d)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i \Delta y_i = 0 \quad (3.14-e)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta y_i^2 = 0 \quad (3.14-f)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i^2 \Delta y_i = 0 \quad (3.14-g)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i \Delta y_i^2 = 0 \quad (3.14-h)$$

$$\sum_{i=1}^9 a_i \Delta x_i^2 \Delta y_i^2 = 0 \quad (3.14-i)$$

In Tabelle 3.1 sind für jede mögliche Stützstellenzahl  $1 \leq l \leq 8$  die Gleichungsnummern der Bedingungen zusammengefaßt, wobei die Numerierung auf den maximalen Fall von  $l = 9$  bezogen ist. Dabei werden auch die zweidimensionalen Fälle als Untergruppen des allgemeinen dreidimensionalen Falles mit 9 Stützstellen betrachtet.

Stehen in einer Koordinatenrichtung in der Nähe von Wänden nur noch 2 Stützstellen zur Verfügung, so reduziert sich die Ansatzfunktion für diese Koordinatenrichtung auf eine lineare Funktion, womit sich die Approximation auf eine erster Ordnung reduziert. Der letzte Fall,  $l = 1$ , führt schließlich zur Identität von Muttermasche und künstlicher Masche. Dies ist in jedem Fall sichergestellt, da es zu jeder künstlichen Masche immer eine zugehörige Muttermasche gibt.

Für jede künstliche Masche kann damit ein Gleichungssystem zur Berechnung der lokalen Interpolationskoeffizienten aufgestellt werden, welches maximal 9 Unbekannte besitzt.

### 3.2.2 Behandlung der Impulsgleichung

Die Impulsgleichung nimmt aus zwei Gründen eine Sonderstellung ein. Zum einen kommen die Zentren der Kontrollvolumina der Impulsmaschen durch die Verschiebung genau auf dem Rand der Verfeinerung zu liegen, da die lokal verfeinerten Maschen auf dem nicht versetzten, zentrierten Grundgitter definiert sind (vgl. Abbildung 2.1). Zum anderen wird



l	Gleichungen zur Bestimmung der Interpolationskoeffizienten
8	3.14-a , 3.14-b , 3.14-c , 3.14-d , 3.14-e , 3.14-f , 3.14-g , 3.14-h
7	3.14-a , 3.14-b , 3.14-c , 3.14-d , 3.14-e , 3.14-f , 3.14-i
6	3.14-a , 3.14-b , 3.14-c , 3.14-d , 3.14-e , 3.14-f
5	3.14-a , 3.14-b , 3.14-c , 3.14-d , 3.14-f
4	3.14-a , 3.14-b , 3.14-c , 3.14-e
3	falls Stützstellen in der x- und y-Richtung vorhanden sind 3.14-a , 3.14-b , 3.14-c
3	falls nur Stützstellen in der x-Richtung vorhanden sind 3.14-a , 3.14-b , 3.14-d
3	falls nur Stützstellen in der y-Richtung vorhanden sind 3.14-a , 3.14-c , 3.14-f
2	falls nur Stützstellen in der x-Richtung vorhanden sind 3.14-a , 3.14-b
2	falls nur Stützstellen in der y-Richtung vorhanden sind 3.14-a , 3.14-c
1	3.14-a

*Tabelle 3.1: Zusammenfassung der Gleichungen zur Berechnung der Interpolationskoeffizienten*

für die Impulsgleichung kein Gleichungssystem gelöst.

Der Problematik des Verfeinerungsrandes wird durch die Koexistenz von groben und feinen Impulskontrollvolumina begegnet, die auf dem Verfeinerungsrand liegen. Es ist damit zwischen Geschwindigkeiten zu unterscheiden, die aus Interpolationen gewonnen werden, und Geschwindigkeiten, die aus einer Impulsbilanz bestimmt werden. Bei der Behandlung des Impulses werden deshalb zwei Fälle unterschieden:

1. Die Impulsgleichungen nach Bilanzgleichung (2.9), die auf dem Rand einer zentrierten Masche definiert sind.
2. Die Impulsgleichungen der künstlichen Maschen, die nicht den Transport normal zu einer Verfeinerungsgrenze beschreiben, und damit nicht auf dem Rand einer zentrierten Masche definiert sind.

Beide Fälle sind in Abbildung 3.7 für den Fall eines Verfeinerungsrandes dargestellt. Die durchgezogenen Pfeile markieren dabei Geschwindigkeiten, die aus echten Impulsbilanzen des ersten Falles berechnet werden. Die gestrichelten Pfeile stellen die interpolierten Geschwindigkeiten an den Rändern der künstlichen Maschen dar. Bei der Berechnung der einzelnen Impulstransportterme wird generell unterschieden zwischen dem Impulstrans-

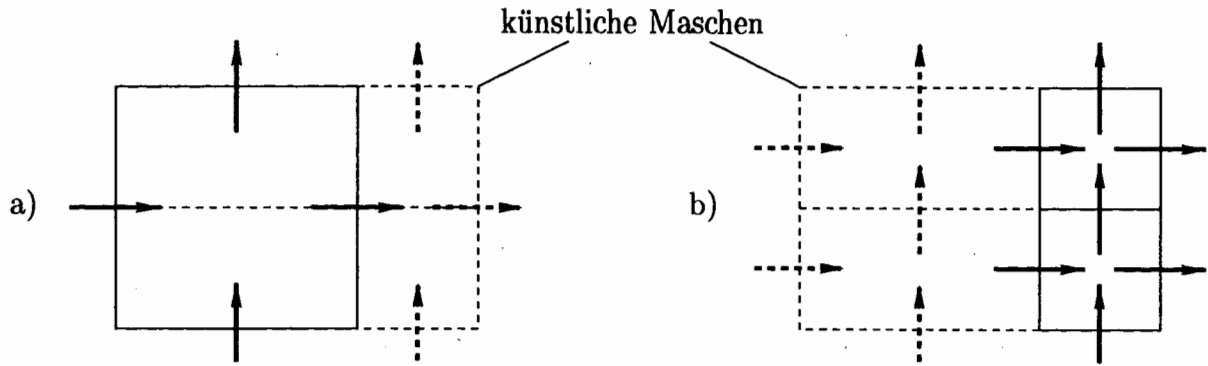


Abbildung 3.7: Definition der aus Impulsbilanzgleichungen bestimmten (durchgezogene Pfeile) und der interpolierten Geschwindigkeiten (gestrichelte Pfeile), a) für das grobe Gitter mit künstlicher Masche und b) für das feine Gitter mit den künstlichen Maschen

port über eine Fläche, die sowohl als Teil eines größeren als auch als Teil eines feineren Gitters definiert ist, und dem Impulstransport über eine Fläche, die nur auf einem der beiden Gitter definiert ist.

Als Beispiel für den ersten Fall werden die Impulsbilanzen normal zu einem Gitterverfeinerungsrand betrachtet. Dabei wird die Bilanzgleichung (2.9) für ein Kontrollvolumen auf einem versetzten Gitter benutzt, wie es in Abbildung 3.8 dargestellt ist. Abbildung 3.8a stellt dabei die Impulsmasche auf dem groben Gitter und Teilabbildung 3.8b die Impulsmasche auf dem feinen Gitter dar. Bei der Berechnung der Transportterme wird ausgenutzt, daß der totale Fluß  $\langle \mathcal{J}_\psi \rangle^g$  als Flächenmittel definiert ist. Für die Teilflüsse  $F_i^f$  wird auf beiden Gittern der totale Fluß des groben Gitters

$$F_i^f = \langle \mathcal{J}_\psi \rangle^g A_i^f \quad (3.15)$$

verwendet. Da für die Grenzflächen der übereinanderliegenden Impulsmaschen der verschiedenen Gitterverfeinerungsgrade

$$\sum A_i^f = A^g \quad (3.16)$$

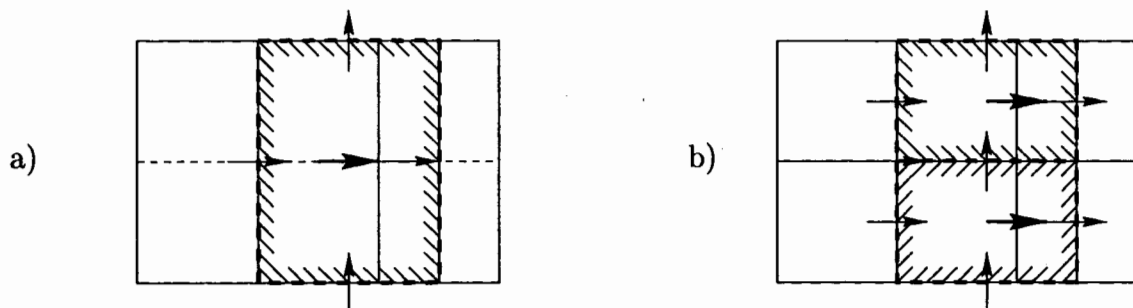


Abbildung 3.8: Kontrollvolumina der Impulsmaschen am Rand einer Gitterverfeinerung, a) für das grobe Gitter mit künstlicher Masche und b) für das feine Gitter mit den künstlichen Maschen

gilt, ist der Erhalt des Impulsflusses an jeder Oberfläche gesichert.

Der Querfluß zwischen den beiden feinen Impulsmaschen am Rand einer Verfeinerung bleibt gegenüber der Gesamtbilanz des groben Kontrollvolumens neutral, da er sowohl als Gewinn- als auch als Verlustterm innerhalb des Impulsvolumens der größeren Masche auftritt.

Für die weitere Behandlung der Impulsgleichung in der Kontinuitätsgleichung ist es wichtig, daß sich die Impulsgleichung (2.3) in ihrer diskretisierten Form in eine implizite Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit der Form

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i^n + du_i^n \Delta P^{n+1} \quad (3.17)$$

umschreiben läßt (vgl. Gleichung (2.22)). Darin sind die beiden neuen Koeffizienten  $\hat{u}_i^n$ , welches den expliziten Teil der Impulsgleichung mit dem Einfluß des Druckgradienten zum alten Zeitpunkt  $n$  beschreibt, und  $du_i^n$  eingeführt worden, welches den impliziten Einfluß des neuen Druckgradienten zum Zeitpunkt  $n + 1$  beschreibt.

### 3.2.3 Zusätzliche Gleichungen in der Druckgleichung

Auch bei der Druckgleichung wird die Idee einer Approximation 2. Ordnung für die unbekanntenen Drücke in den künstlichen Nachbarmaschen des feinen Gitters angewandt. Der Druck in der künstlichen Nachbarmasche des groben Gitters wird aus einer modifizierten Kontinuitätsgleichung für das in Abbildung 3.5 definierte Kontrollvolumen bestimmt.

#### Übergang vom groben zum feinen Gitter

Die allgemeine Bilanzgleichung (2.9) schließt auch den Fall der Massenerhaltung ein. Für den Fall der Kontinuitätsgleichung gilt  $\Psi = 1$ ,  $\Gamma_\Psi = S_\Psi = 0$ . Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$V_F \frac{\partial \langle \varrho \rangle_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 (\langle \varrho u_i \rangle A_F)_i = 0 \quad (3.18)$$

wobei  $i$  hier eine der 6 möglichen Grenzflächen des Volumens bezeichnet. Mit den Abkürzungen

$$\Delta_t \varrho = \frac{\partial \langle \varrho \rangle_3}{\partial t} \quad (3.19)$$

$$F_i = (\langle \varrho u_i \rangle A_F)_i \quad (3.20)$$

kann man die Gleichung schreiben als

$$V_F \Delta_t \varrho + \sum_{i=1}^6 F_i = 0 \quad (3.21)$$

In Abbildung 3.9 ist der Verfeinerungsrand für ein zweidimensionales Gitter und die Be-

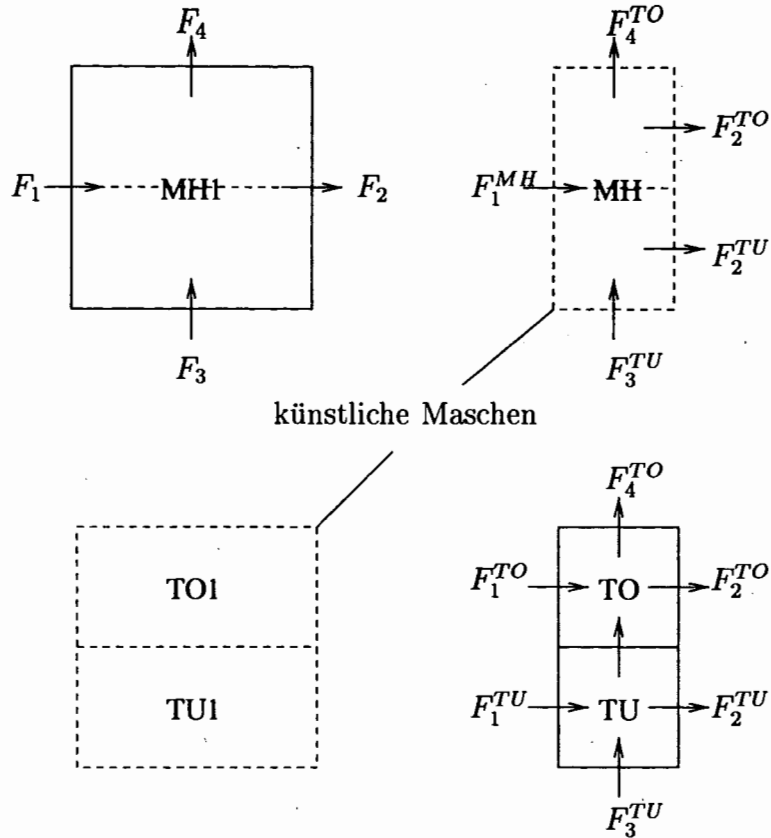


Abbildung 3.9: Definition der Halbmasche und der Flüsse über ihre Maschengrenzen für die Druckgleichung

nennung der Nachbarmaschen dargestellt. Die Maschen  $MH1$  bezeichnet die grobe Masche am Rand der Verfeinerung und  $TO1$  und  $TU1$  bezeichnen die jeweiligen künstlichen Nachbarn der Maschen  $TO$  und  $TU$  am Rand des feinen Gitters.

Die künstliche Masche  $MH$  ist wieder als Volumenmittel der Tochtermaschinen  $TO$  und  $TU$  definiert, wobei an der Grenze zur groben Masche nur ein Massenfluß auftritt, welcher in Abbildung 3.9 als  $F_1^{MH}$  benannt ist. Die Massenbilanz (3.21) für dieses Volumen schreibt sich

$$V_F^{MH} \Delta_t \varrho + F_1^{MH} + F_2^{TU} + F_2^{TO} + F_3^{TU} + F_4^{TO} = 0 \quad (3.22)$$

Die Summe der Massenbilanzgleichungen für die Tochtermaschinen  $TO$  und  $TU$  lautet

$$\begin{aligned} V_F^{TO} (\Delta_t \varrho)^{TO} + V_F^{TU} (\Delta_t \varrho)^{TU} + F_1^{TO} + F_1^{TU} + F_2^{TO} + F_2^{TU} \\ + F_4^{TO} + F_3^{TU} + F_3^{TO} + F_4^{TU} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aus der Massenflußerhaltung an der gemeinsamen Volumengrenze der Tochtermaschinen

$$F_3^{TO} = -F_4^{TU} \quad (3.24)$$

und der aus der Definition des Volumens der künstlichen Masche abgeleiteten Definition für  $\Delta_t \varrho$

$$V_F^{MH} \Delta_t \varrho^{MH} = V_F^{TO} \Delta_t \varrho^{TO} + V_F^{TU} \Delta_t \varrho^{TU} \quad (3.25)$$

folgt für Gleichung (3.23)

$$V_F^{MH} \Delta_t \varrho^{MH} + F_1^{TO} + F_1^{TU} + F_2^{TO} + F_2^{TU} + F_4^{TO} + F_3^{TU} = 0. \quad (3.26)$$

Die Differenz zwischen der Bilanzgleichung (3.22) und der Summe der Bilanzgleichungen nach Gleichung (3.26) ergibt sich zu

$$F_1^{MH} - (F_1^{TO} + F_1^{TU}) = 0, \quad (3.27)$$

was nichts anderes als die Erhaltung der Massenflüsse an den Grenzen der Verfeinerungen bedeutet.

Benutzt man die Definition der Massenflüsse aus Gleichung (3.20) und die implizite Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeiten aus der Impulsbilanz nach Gleichung (3.17), so erhält man:

$$\langle \varrho \rangle_1^{MH} A_F^{MH} du_i^{MH} \Delta P^{MH} - \left[ \langle \varrho \rangle_1^{TO} A_F^{TO} du_i^{TO} \Delta P^{TO} + \langle \varrho \rangle_1^{TU} A_F^{TU} du_i^{TU} \Delta P^{TU} \right] = \langle \varrho \rangle_1^{TO} A_F^{TO} \hat{u}_i^{TO} + \langle \varrho \rangle_1^{TU} A_F^{TU} \hat{u}_i^{TU} - \langle \varrho \rangle_1^{MH} A_F^{MH} \hat{u}_i^{MH}. \quad (3.28)$$

Mit der Definition der Druckdifferenzen

$$\Delta P^{MH} = P^{MH} - P^{MH1} \quad (3.29)$$

$$\Delta P^{TO} = P^{TO} - P^{TO1} \quad (3.30)$$

$$\Delta P^{TU} = P^{TU} - P^{TU1} \quad (3.31)$$

hat man damit mit Gleichung (3.28) eine Poissonähnliche Gleichung für den unbekanntem Druck  $P^{MH}$  erhalten.

Die konservative Behandlung des Massenflusses an den Rändern der Verfeinerung liefert eine Bestimmungsgleichung für das in Gleichung (3.22) als Nachbar der Masche am Rand des groben Gitters definierte Volumen dieser künstlichen Masche.

In Anhang F.2 ist die Umsetzung dieser Gleichung unter Berücksichtigung der in FLUTAN verwendeten Approximationen aus Abschnitt 2.2.2 für den allgemeinen Übergang des feinen zum groben Gitter dargestellt.

### Übergang vom feinen zum groben Gitter

Die Bestimmungsgleichungen für die unbekanntem Drücke in den Nachbarmaschen des feinen Gitters (s. Abbildung 3.9  $TO1$  und  $TU1$ ) können in analoger Weise wie im Fall der allgemeinen Transportgleichung nach Abschnitt 3.2.1 bestimmt werden. Damit erhält man wieder ein Gleichungssystem mit maximal 9 Unbekanntem für die unbekanntem Drücke in den künstlichen Maschen.

### 3.3 Numerische Eigenschaften des Verfahrens

Die numerische Simulation eines physikalischen Problems hat das Ziel, die exakte Lösung des betrachteten Problems an jedem diskretisierten Ort und zu jedem betrachteten Zeitpunkt mit einer bestimmten Genauigkeit anzunähern. Diese geforderte Eigenschaft, die man Konvergenz nennt, stellt sicher, daß die numerische Lösung der Näherungsgleichung für kleiner werdende Gitterweiten und einen kleiner werdenden Zeitschritt gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung strebt. Das Lax-Äquivalenz-Theorem sagt für lineare Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme aus, daß bei konsistenter Diskretisierung Stabilität ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Konvergenz ist (Hirsch 1988). Unter Konsistenz der Diskretisierung versteht man dabei, daß die Näherungsgleichung für kleiner werdende Gitterweiten und einen kleiner werdenden Zeitschritt gegen die Differentialgleichung strebt. Stabilität hingegen bedeutet, daß die Fehler in der Zeit nicht anwachsen.

Im folgenden werden deshalb die Konsistenz und die Stabilität des vorgeschlagenen lokalen Verfeinerungsverfahrens untersucht. Dies wird in dieser Arbeit für den vereinfachten Fall einer linearen Gleichung mit konstanten Stoffwerten durchgeführt.

#### 3.3.1 Konsistenz

Die Konsistenz des Verfahrens wird anhand der 2D-Konvektions-Diffusionsgleichung für die allgemeine Transportgröße  $\Psi$  überprüft. Diese Gleichung läßt sich unter Annahme einer konstanten Geschwindigkeit  $u$  und einer Diffusionskonstanten  $a$  allgemein schreiben als

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = a \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right) \quad j=1,2 \quad (3.32)$$

Für die Zeitintegration wird das explizite Euler-Vorwärts-Verfahren angewandt. Der diffusive Term wird mit einer zentralen Differenzen-Approximation und der konvektive Term mit einem allgemeinen 4-Punkt-Ansatz (unter der Annahme  $u > 0$ ) diskretisiert. Damit überführt man die Gleichung (3.32) bei Verwendung der Indizes  $i, j$  für die x,y-Richtung und unter Verwendung der Maschenweiten nach Abbildung 3.10 in:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.33-a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\left( \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} - \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \right)}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (3.33-b)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{C_1 \Psi_{i+1} + C_2 \Psi_i + C_3 \Psi_{i-1} + C_4 \Psi_{i-2}}{\Delta x_i} \quad (3.33-c)$$

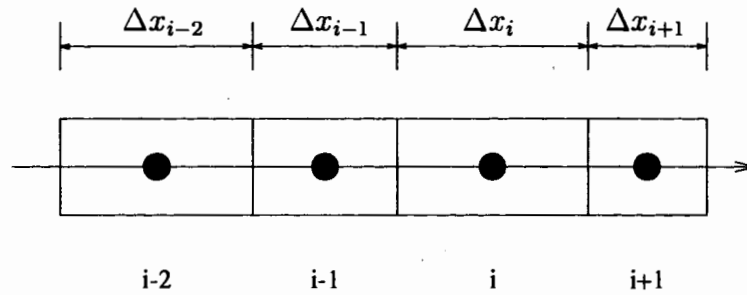


Abbildung 3.10: Definition der Maschenweiten  $\Delta x_i$

Für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung gilt dabei:

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1, C_4 = 0 \quad (3.34)$$

Für das LECUSSO-Verfahren (Günther 1992) gelten die Koeffizienten, wie sie im Anhang B dargestellt sind. Das QUICK-Verfahren kann als Spezialfall des LECUSSO-Verfahrens betrachtet werden, so daß auf eine getrennte Betrachtung verzichtet werden kann.

In Abbildung 3.11 ist der Fall einer Gitterverfeinerung mit der im folgenden verwendeten Benennung der Maschen zu sehen. Diskretisiert man die Gleichung für die Masche 0, so benötigt man als  $\Psi_{i+1}$  die Größe  $\Psi_X$ . Unter der Annahme, daß das Grundgitter äquidistant ist, d. h.  $\Delta x_i = \Delta x$  und  $\Delta y_j = \Delta y$ , wird der gesuchte Wert  $\Psi_X^a$  approximiert. Hier werden in einem ersten Schritt eine lineare und in einem zweiten Schritt eine quadratische Approximation auf ihre Auswirkungen hinsichtlich der Ordnung der Konsistenz untersucht.

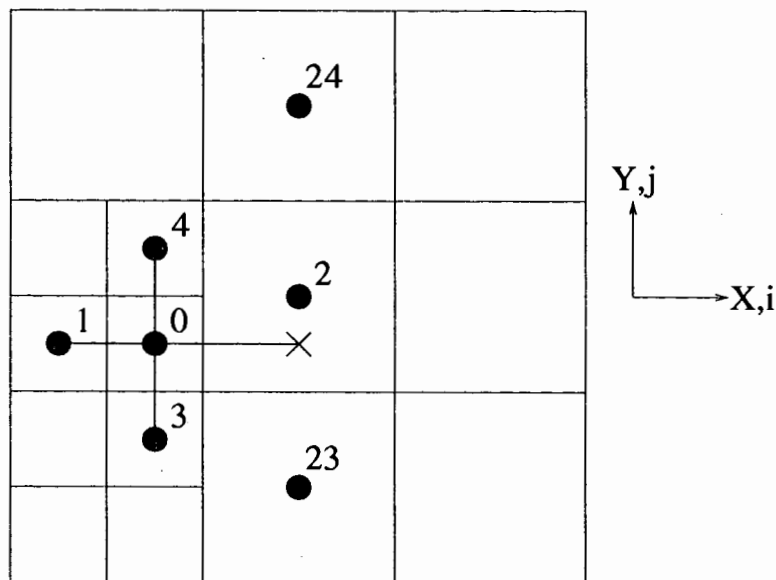


Abbildung 3.11: Nachbarn am Rand einer Verfeinerung und ihre Benennung

## Lineare Approximation

Approximiert man den gesuchten Wert  $\Psi_X^a$  linear, so erhält man

$$\Psi_X^a = 0,25\Psi_{23} + 0,75\Psi_2 \quad . \quad (3.35)$$

Entwickelt man die Funktion  $\Psi$  an den Stellen  $\Psi_{23}$  und  $\Psi_2$  in Taylor-Reihen um den Punkt  $\Psi_X$ , so erhält man für die Differenz zwischen dem approximierten Wert  $\Psi_X^a$  und dem exakten Wert  $\Psi_X$

$$\Psi_X^a - \Psi_X = \frac{3}{32}(\Delta y)^2\Psi_{yy} - \frac{1}{64}(\Delta y)^3\Psi_{yyy} + HOT \quad , \quad (3.36)$$

wobei *HOT* die Terme von höherer Ordnung als die in der Gleichung ausgeschriebenen Terme darstellt.

Benutzt man diese Approximation in dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung für den konvektiven Term und entwickelt  $\Psi$  an der Stelle  $X$  um 0, so gelangt man unter der Annahme  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  zu einer Differenz zwischen dem exakten Gradienten  $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$  und dem approximierten Gradienten  $\Psi_x$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi_x = \frac{3}{16}\Delta(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + HOT \quad . \quad (3.37)$$

Die Differenz ist proportional der Maschenweite  $\Delta$  und die numerische Approximation des Gradienten geht für kleiner werdende Maschenweiten  $\Delta \rightarrow 0$  gegen den exakten Gradienten. Unter Ordnung der Konsistenz versteht man dabei die Potenz der Maschenweite, zu der die Differenz proportional ist. Die Approximation des konvektiven Terms ist damit aufgrund der linearen Proportionalität auch für ein verfeinertes Gitter bei linearer Interpolation konsistent von 1. Ordnung, d. h. von  $\mathcal{O}(\Delta)$ .

Das gleiche Vorgehen für die Approximation des diffusiven Terms führt zu einer Differenz zwischen der exakten 2. Ableitung  $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$  und der approximierten 2. Ableitung  $\Psi_{xx}$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi_{xx} = \frac{1}{20}\Psi_{yy} + HOT \quad (3.38)$$

und damit zu einem Fehler der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$ . Da zwischen dem Fehler und der Maschenweite  $\Delta$  keine Proportionalität besteht, ist die Diskretisierung nicht konsistent. Der Abbruchfehler der linearen Approximation  $\mathcal{O}(\Delta^2)$  nach Gleichung (3.35) wird zum führenden Fehlerterm bei der Diskretisierung des diffusiven Terms der Differentialgleichung.

Um zu einer konsistenten Diskretisierung zu gelangen, die darüber hinaus wenn möglich keinen Genauigkeitsverlust gegenüber der unverfeinerten Diskretisierung haben soll, wird im folgenden die Verwendung einer quadratischen Interpolation mit einem Abbruchfehler  $\mathcal{O}(\Delta^3)$  überprüft.



## Quadratische Approximation

Verwendet man eine Approximation mit einem quadratischen Ansatz, welche für den hier angenommenen äquidistanten Fall lautet:

$$\Psi_X^a = \frac{15}{16}\Psi_2 + \frac{5}{32}\Psi_{23} - \frac{3}{32}\Psi_{24} \quad , \quad (3.39)$$

so führt dies im allgemeinen Fall der nicht-äquidistanten Diskretisierung zu einer Approximation

$$\Psi_X^a - \Psi_X \sim \Delta^3 \Psi_{yyy} \quad (3.40)$$

und damit unter Benutzung der Taylor-Reihen im diffusiven Term zu

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi_{xx} = \Delta \Psi_{yyy} + HOT \quad (3.41)$$

und im konvektiven Term zu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi_x = \frac{3}{16} \Delta \Psi_{xx} + \Delta^2 \Psi_{yy} + HOT \quad (3.42)$$

Der zusätzliche Fehler aus der Interpolation in y-Richtung an der Gitterunstetigkeit ist im Falle einer quadratischen Interpolation im diffusiven Term von der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta)$  und im konvektiven Term von der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta^2)$ , womit die Konsistenz der Differenzenapproximation auch an den Gitterunstetigkeiten gewährleistet ist. Darüber hinaus bringt diese Diskretisierung auch keinen Genauigkeitsverlust für die bei der Approximation des konvektiven Terms verwendeten Differenzenverfahren 2. Ordnung, das LECUSSO- und das QUICK-Verfahren.

### 3.3.2 Stabilität

Anhand einer Von Neumann Stabilitätsanalyse (Hirsch 1988) wird das Anfachungsverhalten des Verfahrens für verschiedene Wellenlängen untersucht und analytische Stabilitätskriterien abgeleitet. Diese analytischen Stabilitätskriterien können zur Bestimmung des zulässigen Zeitschritts in einem Rechenprogramm herangezogen werden.

#### Von Neumann Stabilitätsanalyse

Bei dieser Analyse wird die numerische Lösung in die exakte Lösung der Differentialgleichung und einen Fehler  $\varepsilon$  zerlegt. Angewandt auf lineare Gleichungen gilt, daß der Fehler und die exakte Lösung die gleiche Differenzgleichung erfüllen müssen. Unter der Annahme periodischer Randbedingungen kann dieser Fehler in eine Fourierreihe zerlegt werden. Die größte Wellenlänge  $\lambda_{max} = 2L$  korrespondiert dabei mit der makroskopischen Länge  $L$  des Rechengebietes und die zugehörige Wellenzahl  $k_{min} = \frac{\pi}{L}$  erreicht ihr Minimum. Die kleinste Wellenlänge ist durch  $\lambda_{min} = 2\Delta x$  bestimmt, womit die zugehörige maximale Wellenzahl  $k_{max} = \frac{\pi}{\Delta x}$  ist. Alle dazwischenliegenden harmonischen Wellen sind

an Vielfache der Maschenweite  $\Delta x$  gekoppelt. Mit der Anzahl der Maschen  $N$  ergibt sich für die Maschenweite

$$\Delta x = \frac{L}{N} \quad (3.43)$$

Damit gilt für die Wellenzahlen

$$k_j = jk_{min} = j\frac{\pi}{L} = j\frac{\pi}{N\Delta x} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.44)$$

und damit für den Fehler  $\varepsilon$

$$\varepsilon_i^n = \sum_{j=-N}^N E_j^n e^{Ik_j \cdot i\Delta x} \quad (3.45)$$

worin  $E_j^n$  die Amplitude der  $j$ -ten Schwingung zum Zeitpunkt  $n$  und  $I = \sqrt{-1}$  bedeuten. Das Produkt  $k_j\Delta x$  wird oft als Phasenwinkel  $\Phi$

$$\Phi = k_j\Delta x = j\frac{\pi}{N} \quad (3.46)$$

bezeichnet, der den betrachteten Raum  $-L \leq x \leq L$  auf den Bereich  $-\pi \leq \Phi \leq \pi$  abbildet.

Mit der Einführung des Anfachungsfaktors  $G$  als Verhältnis der Amplitude  $E$  zum Zeitpunkt  $n+1$  und zum Zeitpunkt  $n$

$$G = \frac{E^{n+1}}{E^n} \quad (3.47)$$

und der Forderung, daß keine der Fehlerschwingungen in der Zeit anwächst, ist

$$|G| = \left| \frac{E^{n+1}}{E^n} \right| \leq 1 \quad \text{für alle } \Phi \quad (3.48)$$

als Stabilitätskriterium definiert.

Im folgenden gilt es, dies auch für ein Gitter mit Verfeinerung zu untersuchen. Die Untersuchung beschränkt sich auf die typischen auftretenden Maschenweitesprünge, die bei der gewählten Halbierung von zu verfeinernden Maschen an den Rändern der Verfeinerung auftreten.

## Die Testfälle

Im eindimensionalen Fall äußert sich die Gitterverfeinerung in einem Sprung der Maschenweite am Rand der Verfeinerung um den Faktor 2 bzw.  $\frac{1}{2}$ . Es werden daher die Gitterunstetigkeiten  $r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} = 1, 2$  und  $0, 5$  untersucht, wie sie in Abbildung 3.12 dargestellt sind. Als Diskretisierungsverfahren für den konvektiven Term werden das Upwind-Verfahren 1. Ordnung und das LECUSSO-Verfahren untersucht. Das QUICK-Verfahren kann hier auch wieder als Spezialfall des LECUSSO-Verfahrens betrachtet werden (Günther 1992). Schreibt man Gleichung (3.32) für den eindimensionalen Fall in der  $x$ -Richtung (vgl. Gleichung

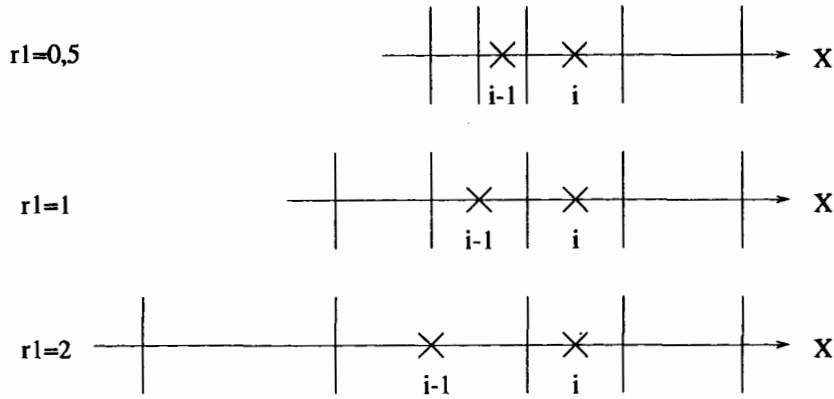


Abbildung 3.12: Maschenweiten sprünge mit verschiedenen Werten von  $r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}$

chungen (3.33-a) bis (3.33-c)) und führt neben der Courant-Zahl  $C$  und der Diffusions-Zahl  $D$

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x_i}, \quad D = \frac{a\Delta t}{\Delta x_i^2} \quad (3.49)$$

die Maschenweitenverhältnisse  $r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}$  und  $r2 = \frac{\Delta x_{i-2}}{\Delta x_i}$  ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi_i^{n+1} &= \frac{4D}{r1+3} (\Psi_{i+1}^n - \Psi_i^n) - \frac{8D}{(r1+3)(r1+1)} (\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n) \\ &- C (C_1 \Psi_{i+1}^n + C_2 \Psi_i^n + C_3 \Psi_{i-1}^n + C_4 \Psi_{i-2}^n) + \Psi_i^n \end{aligned} \quad (3.50)$$

Anwendung dieser Gleichung auf den in eine Fourierreihe entwickelten Fehler  $\varepsilon$  und Auflösen nach dem Anfachungsfaktor  $G$  führen zu

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{4D}{r1+3} (e^{I\Phi} - 1) - \frac{8D}{(r1+3)(r1+1)} (1 - e^{I\Phi(-\frac{r1+1}{2})}) \\ &- C (C_1 e^{I\Phi} + C_2 + C_3 e^{I\Phi(-\frac{r1+1}{2})} + C_4 e^{I\Phi(-\frac{r2+2r1+1}{2})}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Mit

$$e^{zI} = \cos(z) + I \sin(z) \quad (3.52)$$

läßt sich Gleichung (3.51) umschreiben zu

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{4}{r1+3} D (\cos(\Phi) - 1) \\ &- \frac{8}{(r1+3)(r1+1)} D \left( 1 - \cos\left(\frac{r1+1}{2}\Phi\right) \right) \\ &- C \left[ C_1 \cos(\Phi) + C_2 + C_3 \cos\left(\frac{r1+1}{2}\Phi\right) + C_4 \cos\left(\frac{r2+2r1+1}{2}\Phi\right) \right] \\ &+ I \left\{ \frac{4}{r1+3} D \sin(\Phi) - \frac{8}{(r1+3)(r1+1)} D \sin\left(\frac{r1+1}{2}\Phi\right) \right. \\ &\left. - C \left[ C_1 \sin(\Phi) - C_3 \sin\left(\frac{r1+1}{2}\Phi\right) - C_4 \sin\left(\frac{r2+2r1+1}{2}\Phi\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

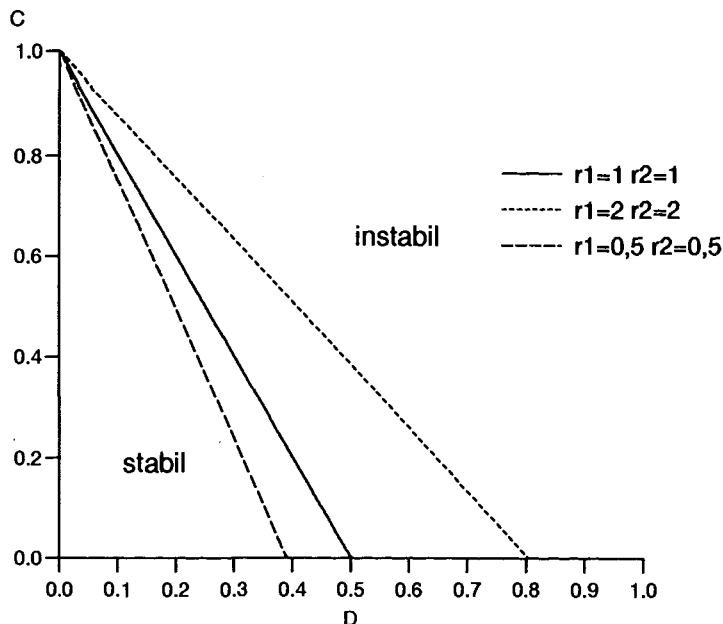


Abbildung 3.13: Stabilitätsgrenzen für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung

### Das Upwind-Verfahren 1. Ordnung

Bei dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung werden die Koeffizienten nach Gleichung (3.34) in Gleichung (3.33-c) eingesetzt. Damit wird aus Gleichung (3.53)

$$\begin{aligned}
 G &= 1 + \frac{4}{r_1 + 3} D (\cos(\Phi) - 1) \\
 &- \frac{8}{(r_1 + 3)(r_1 + 1)} D \left( 1 - \cos\left(\frac{r_1 + 1}{2} \Phi\right) \right) \\
 &- C \left[ 1 - \cos\left(\frac{r_1 + 1}{2} \Phi\right) \right] \\
 &+ I \left\{ \frac{4}{r_1 + 3} D \sin(\Phi) - \frac{8}{(r_1 + 3)(r_1 + 1)} D \sin\left(\frac{r_1 + 1}{2} \Phi\right) \right. \\
 &\left. - C \sin\left(\frac{r_1 + 1}{2} \Phi\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Gleichung (3.54) ist analytisch nicht mehr geschlossen zu lösen. Man kann sie jedoch numerisch auswerten, indem man zu einem gegebenen Maschenverhältnis  $r_1$  den Anfachungsfaktor  $G(\Phi)$  als Funktion von  $C$  und  $D$  bestimmt. Dazu läßt man z. B. die Diffusions-Zahl beginnend bei 0 in kleinen Schritten bis zur maximalen Diffusions-Zahl laufen und bestimmt zu jeder dieser diskreten Diffusions-Zahlen aufsteigend von  $C = 0$  die maximale Courant-Zahl, bei der der Anfachungsfaktor  $G(\Phi)$  für  $0 \leq \Phi \leq \pi$  zum ersten Mal  $\geq 1$  wird. Die so berechneten Paare von  $C$  und  $D$  beschreiben die Stabilitätsgrenze des Verfahrens für das gegebene Maschenverhältnis in der  $C$ - $D$ -Ebene. Für die drei verschiedenen typischen Maschenweitenverhältnisse der Verfeinerung ergibt sich dabei ein stabiler Bereich im Courant-Diffusions-Zahlen-Diagramm (vgl. Abbildung 3.13). Da  $G(\Phi = 0) = 1$  immer ein Grenzfall für die Stabilität ist und die trigonometrischen Funktionen für  $\Phi = \pi$  Extremwerte annehmen, wird  $G(\Phi = \pi)$  durch eine Reihenentwicklung um  $\pi$  abgeschätzt.

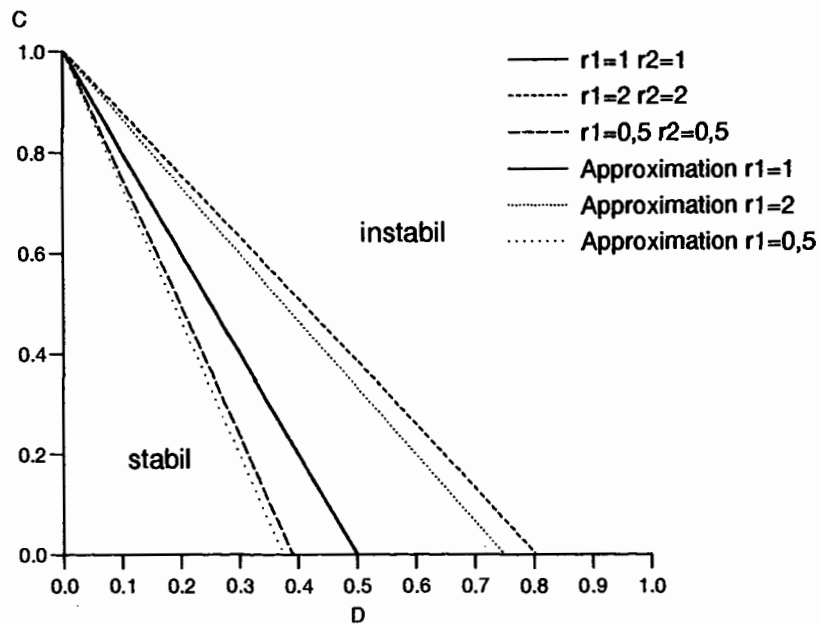


Abbildung 3.14: Approximation der Stabilitätsgrenze für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung

Man erhält aus der Taylor-Reihenentwicklung bis maximal zum quadratischen Glied für  $\cos(\pi - \varphi)$  und  $\sin(\pi - \varphi)$  :

$$\cos(\pi - \varphi) = -1 + \frac{\varphi^2}{2} \quad (3.55-a)$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \varphi \quad (3.55-b)$$

Benutzt man diese Approximation und betrachtet den Grenzfall  $\varphi \rightarrow 0$ , so erhält man als Bedingung an die Courant- bzw. Diffusions-Zahl

$$C \leq 1 - \frac{4D}{r1 + 1} \quad (3.56)$$

In Abbildung 3.14 sind die numerisch gewonnenen Stabilitätsgrenzen den analytisch abgeleiteten gegenübergestellt. Alle drei untersuchten Fälle zeigen ein ähnliches Ergebnis. Für kleine Diffusions-Zahlen  $D \rightarrow 0$  erhält man als Stabilitätsgrenze das CFL-Kriterium, d. h.  $C = 1$ . Mit zunehmender Diffusions-Zahl nimmt die zulässige Courant-Zahl linear ab. Die verschiedenen Fälle unterscheiden sich in der Steigung, mit der die zu einer gegebenen Diffusions-Zahl zugehörige maximale Courant-Zahl abnimmt, und als Folge davon in den maximal zulässigen Diffusions-Zahlen, d. h. bei  $C = 0$ .

Für den äquidistanten Fall sind beide Kriterien identisch, in den nicht-äquidistanten Fällen macht das analytisch abgeleitete Kriterium eine auf der sicheren Seite liegenden Aussage über die Stabilität des Verfahrens und kann als Näherungskriterium in einem Rechenprogramm verwendet werden.

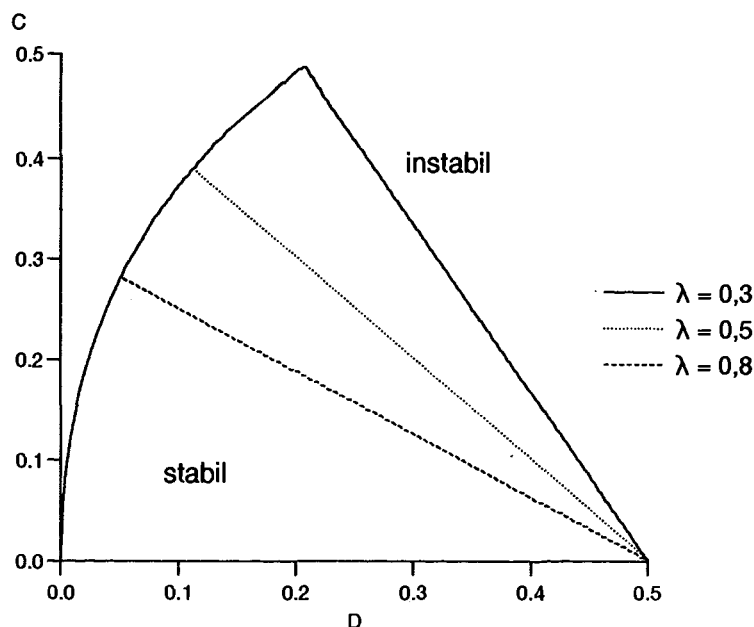


Abbildung 3.15: Stabilitätsgrenze für das LECUSSO-Verfahren für verschiedene  $\lambda$

### Das LECUSSO-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter

Die Koeffizienten  $C_1 - C_4$  aus Gleichung (3.33-c) werden für das LECUSSO-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter in Anhang B bestimmt.

Man erhält damit aus Gleichung (3.53)

$$G = 1 - (1 - \cos(\Phi)) [2D + 2\lambda C (1 - \cos(\Phi))] - IC \sin(\Phi) [1 + 2\lambda (1 - \cos(\Phi))] \quad (3.57)$$

Wird diese Gleichung in analoger Weise, wie beim Upwind-Verfahren, numerisch ausgewertet, so erhält man Stabilitätsgrenzkurven, wie sie in Abbildung 3.15 für drei verschiedene  $\lambda$  nach Gleichung B.4 dargestellt sind. Dabei ist für alle  $\lambda$  eine Beschränkung des stabilen Bereiches durch zwei Grenzkurven festzustellen, deren Schnittpunkt für verschiedene  $\lambda$  variiert. Die Ursache für dieses Verhalten ist in Abbildung 3.16 zu erkennen, wo der Verlauf zweier Anfachungsfunktionen  $G$  in der komplexen Ebene dargestellt ist. Die Kurve mit der kleineren Diffusions-Zahl tangiert dabei für sehr kleine  $\Phi$  in der Nähe des Punktes  $(1,0)$  den Einheitskreis. Die Kurve bei der größeren Diffusions-Zahl hingegen tangiert den Einheitskreis erst in der Nähe des Punktes  $(-1,0)$ , d. h. für  $\Phi$  um  $\pi$ .

Da diese beiden Extrempunkte den für die Stabilität wichtigen Fall  $G = 1$  beschreiben, wird das Verfahren hinsichtlich der Grenzfälle  $\Phi = 0$  und  $\Phi = \pi$  abgeschätzt (Günther 1995). Daraus gewinnt man folgende Stabilitätskriterien (s. Anhang C)

$$4\lambda C + 2D \leq 1 \quad (3.58-a)$$

$$C^2 \leq 2D \quad (3.58-b)$$

Diese Stabilitätskriterien beschreiben die Stabilität des LECUSSO-Verfahrens auf äquidistanten Gittern in guter Übereinstimmung mit den numerisch gefundenen Stabilitätsgrenzen, wie man in Abbildung 3.17 erkennen kann, in dem die numerisch gefundenen

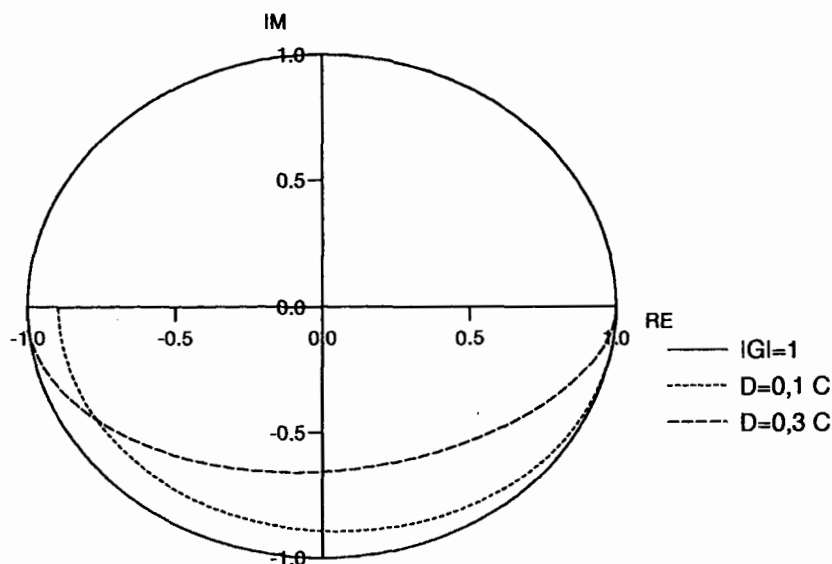


Abbildung 3.16: Anfachungsfaktor  $G$  für das LECUSSO-Verfahren für  $\lambda = 0,5$  und zwei verschiedene Kombinationen von  $C$  und  $D$

Stabilitätsgrenzen den analytisch abgeleiteten gegenübergestellt sind. Im Unterschied zu den Stabilitätsgrenzen beim Upwind-Verfahren 1. Ordnung werden die Stabilitätsgrenzen beim LECUSSO-Verfahren für kleine Diffusions-Zahlen wesentlich stärker beschränkt. Hier bringt das Diskretisierungsverfahren so wenig künstliche numerische Diffusion ein, daß die maximal zulässige Courant-Zahl für kleinere Diffusions-Zahlen wieder abnimmt und damit der maximal zulässige Zeitschritt auch kleiner wird.

Der Bereich, innerhalb dessen das LECUSSO-Verfahren bei expliziter Zeitintegration stabil arbeitet, ist kleiner als der des Upwind-Verfahrens 1. Ordnung. Dies ist aufgrund der

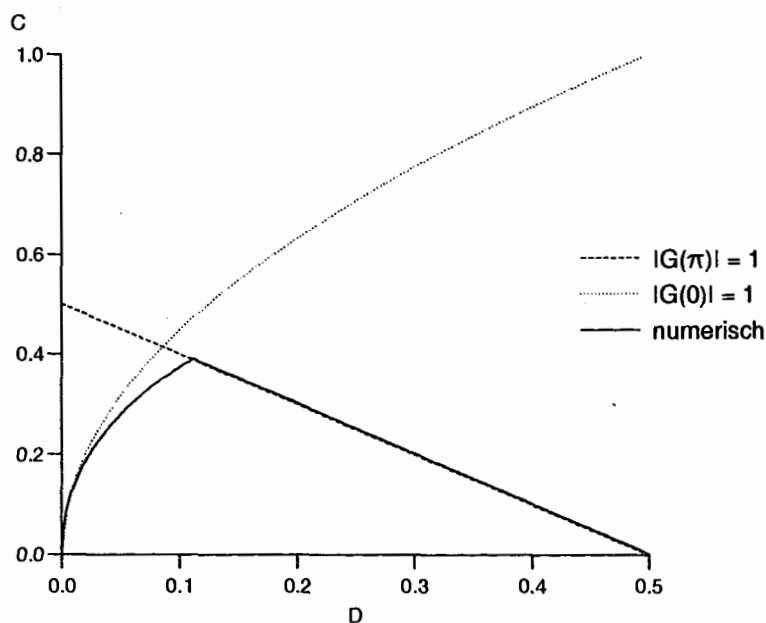


Abbildung 3.17: Gegenüberstellung der numerisch gefundenen Stabilitätsgrenze und der analytisch abgeschätzten für das LECUSSO-Verfahren mit  $\lambda = 0,5$

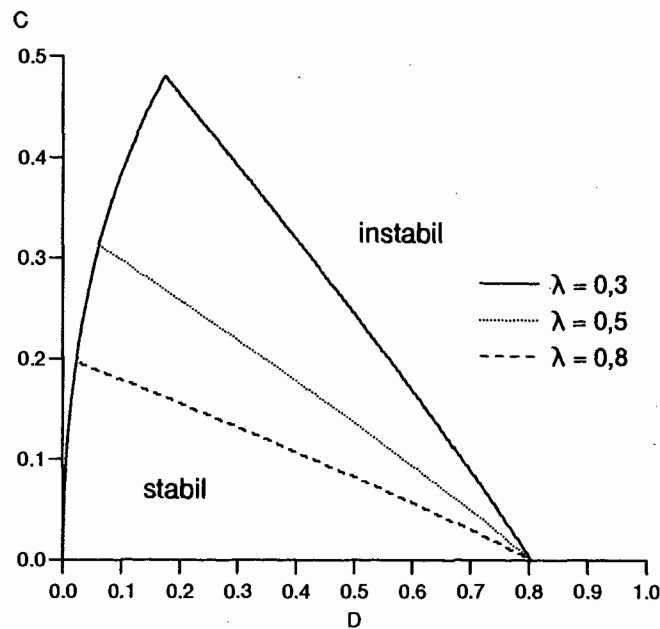


Abbildung 3.18: Anfachungsfaktor  $G$  für das LECUSSO-Verfahren für drei verschiedene  $\lambda$  und  $r_1 = 2 \wedge r_2 = 2$

wesentlich geringeren numerischen Diffusion des LECUSSO-Verfahrens auch so zu erwarten, da diese Diffusion zu einem Abbau von Gradienten beiträgt und damit einem „Aufschwingen“ des Fehlers entgegenwirkt. Der geringeren numerischen Diffusion des LECUSSO-Verfahrens muß hier also durch die Wahl eines kleineren Zeitschritts Rechnung getragen werden.

### Das LECUSSO-Verfahren auf einem nicht-äquidistanten Gitter

In analoger Weise wie im äquidistanten Fall kann der Verlauf des Anfachungsfaktors  $G$  in Abhängigkeit von der Courant-Zahl  $C$  und der Diffusions-Zahl  $D$  numerisch ausgewertet werden. Dies wurde für die beiden Testfälle  $r_1 = 0,5$  und  $r_1 = 2$  gemacht. Die dabei ermittelten Stabilitätsgrenzkurven sind in Abbildung 3.18 für den Fall  $r_1 = 2 \wedge r_2 = 2$  und in Abbildung 3.19 für den Fall  $r_1 = 0,5 \wedge r_2 = 0,5$  dargestellt.

Es zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie im äquidistanten Fall, so daß eine Abschätzung von  $G$  um  $\Phi = 0$  und  $\Phi = \pi$  sinnvoll erscheint. Man erhält aus einer solchen Entwicklung (vgl. Anhang D) die Kriterien

$$C^2 \leq 2D \quad (3.59-a)$$

$$C \leq \frac{1 - \frac{4D}{r_1+1}}{C_2} \quad (3.59-b)$$

In Abbildung 3.20 sind die analytisch abgeschätzten Stabilitätskriterien den numerisch bestimmten für  $r_1 = 2 \wedge r_2 = 2$  und  $\lambda = 0,5$  gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, wie schon im äquidistanten Fall, eine gute Übereinstimmung zwischen den analytisch und numerisch gefundenen Stabilitätsgrenzen. Somit kann die Stabilität des LECUSSO-Verfahrens



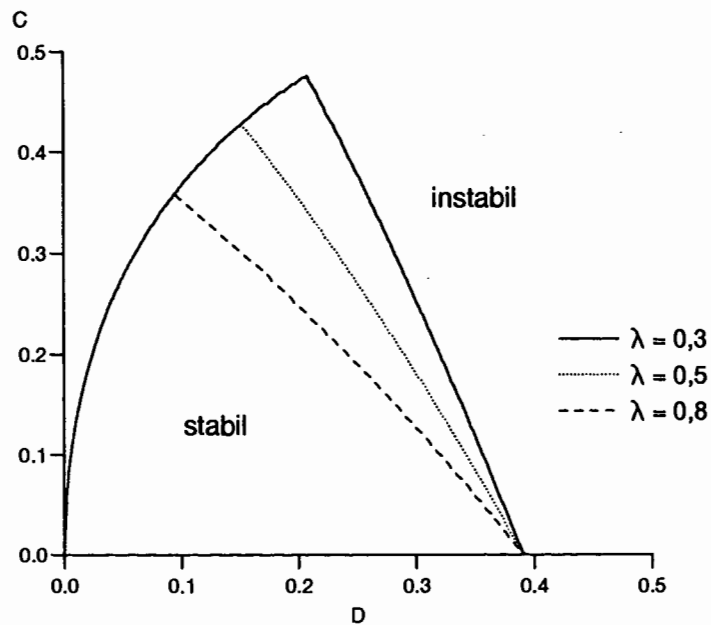


Abbildung 3.19: Anfachungsfaktor  $G$  für das LECUSSO-Verfahren für drei verschiedene  $\lambda$  und  $r_1 = 0,5 \wedge r_2 = 0,5$

bei den hier untersuchten typischen Maschenweitenunstetigkeiten der lokalen Gitterverfeinerung innerhalb dieser Stabilitätsgrenzen gewährleistet werden.

### Stabilität bei einer mehrdimensionalen Verfeinerung

In Abbildung 3.21 ist die Eckmasche eines lokal verfeinerten Teilgebiets bei einem zweidimensionalen Gitter und die Benennung ihrer Nachbarn dargestellt. Dabei stellt sich für die Maschen 1 und 4 eine eindimensionale Gitterunstetigkeit ein, wohingegen die Eckmasche

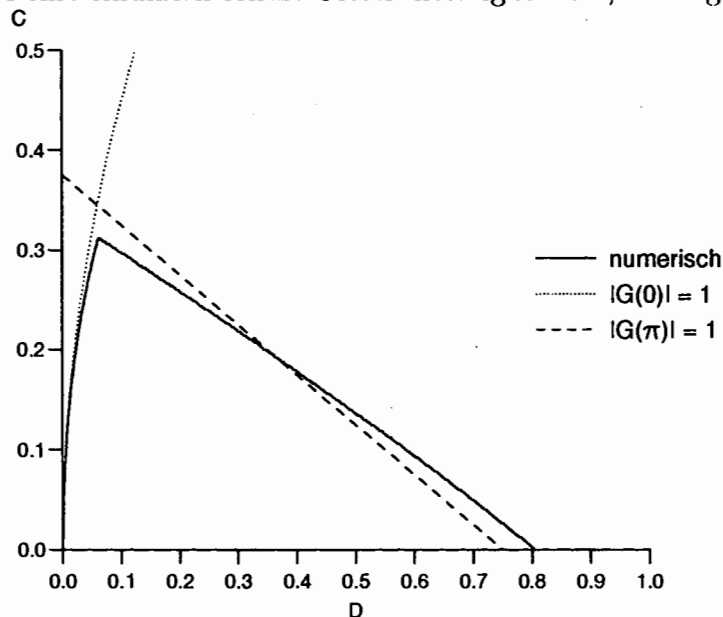


Abbildung 3.20: Gegenüberstellung der numerisch gefundenen Stabilitätsgrenze und der analytisch abgeschätzten für das LECUSSO-Verfahren auf einem nicht-äquidistanten Gitter  $r_1 = 2 \wedge r_2 = 2$  und  $\lambda = 0,5$

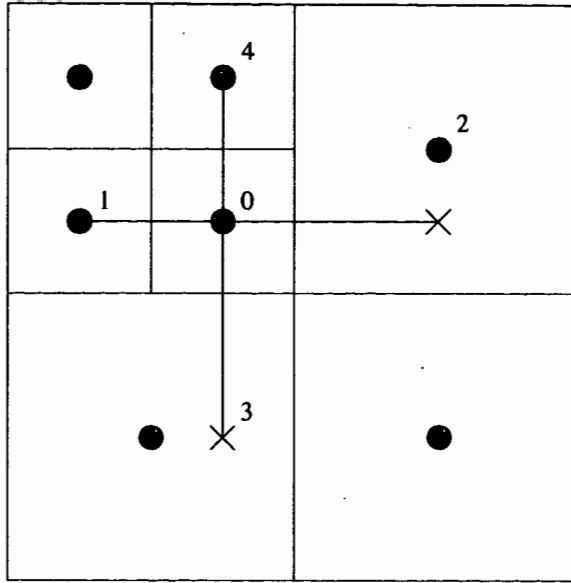


Abbildung 3.21: Eckmasche eines lokal verfeinerten Teilgebiets bei einem zweidimensionalen Gitter und die Benennung ihrer Nachbarn

0 einen Maschenweitungssprung in zwei Richtungen hat. Untersucht man eine solche Eckmasche für eine  $n$ -dimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung (s. Anhang E), so erhält man folgende zwei Kriterien für die Stabilität

$$\left[ \sum_{m=1}^n C_m \right]^2 \leq \sum_{m=1}^n 2D_m \quad (3.60-a)$$

$$\sum_{m=1}^n [C_{2m} C_m] \leq 1 - \sum_{m=1}^n \left[ \frac{4}{r_{1m} + 1} D_m \right] \quad (3.60-b)$$

Im Fall von  $n = 2$  Dimensionen gilt für das erste Kriterium nach Gleichung (3.60-a)

$$\left[ \sum_{m=1}^2 C_m \right]^2 = [C_x + C_y]^2 = C_x^2 + C_y^2 + 2C_x C_y \quad (3.61)$$

und unter Einführen des Fehlers  $\varepsilon_C = 2C_x C_y$  gilt

$$\left[ \sum_{m=1}^2 C_m \right]^2 = \sum_{m=1}^2 C_m^2 + \varepsilon_C \quad (3.62)$$

Der Fehler  $\varepsilon_C$  wird extrem, falls  $C_x \gg C_y$  oder  $C_y \gg C_x$ . Dieser Fall wurde aber bereits bei der eindimensionalen Betrachtung abgeschätzt (vgl. Gleichung (3.59-a)). Setzt man

$$C_x + C_y = K \quad (3.63)$$

und bestimmt für  $\varepsilon_C(C_x)$  den Extremwert, so gilt mit der Ableitung nach  $C_x$

$$2(K - 2C_x) = 0 \quad (3.64)$$

und damit

$$C_x = \frac{K}{2} = C_y \quad (3.65)$$

Dieser Fall der Schrägströmung ist ein weiterer Extremfall und führt mit  $C_x = C_y = C$  zu

$$\left[ \sum_{m=1}^2 C_m \right]^2 = 4C^2 \leq \sum_{m=1}^n 2D_m \quad (3.66)$$

und mit  $D_x = D_y = D$  zu

$$C^2 \leq D \quad (3.67)$$

Analoge Betrachtung des zweiten Kriteriums nach Gleichung (3.60-b) für die Schrägströmung führt zu

$$C \leq \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{r+1} D}{C_2} \quad (3.68)$$

Vergleicht man diese mit den Grenzen für den Fall der eindimensionalen Untersuchung, so werden die bei der Untersuchung im eindimensionalen Fall gefundenen Grenzen bei mehrdimensionalen Problemen eingeschränkt. Die beschränkte Stabilität des Verfahrens bleibt jedoch erhalten, was in Anbetracht der nachgewiesenen Konsistenz des Verfahrens unter Berücksichtigung der abgeleiteten Stabilitätskriterien nach den Gleichungen (3.67) und (3.68) die Konvergenz der Lösung auch in mehreren Dimensionen sicherstellt.

### 3.3.3 Bewertung

In diesem Unterkapitel konnte der Nachweis erbracht werden, daß bei einer Interpolation 2. Ordnung der unbekanntenen Größen am Rand einer Verfeinerung die Konsistenz des Gesamtverfahrens gesichert ist. Darüber hinaus bleibt dabei auch die Genauigkeitsordnung der Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung zur Approximation des konvektiven Terms erhalten.

Die Von Neumann Stabilitätsanalyse wurde am Beispiel einer linearen Konvektions-Diffusionsgleichung mit konstanten Stoffwerten durchgeführt. Die beschränkte Stabilität des Verfahrens konnte dabei selbst bei expliziter Zeitintegration nachgewiesen werden. Dieser Nachweis wurde für das Upwind-Verfahren 1. Ordnung und das LECUSSO-Verfahren durchgeführt. Das QUICK-Verfahren kann dabei als Spezialfall des LECUSSO-Verfahrens betrachtet werden und wurde nicht speziell untersucht. Auch für den Fall der typischen Maschenweitensprünge des vorgeschlagenen Verfahrens wurden analytisch abgeleitete Näherungen der numerisch gefundenen Stabilitätsgrenzen bestimmt. Dies konnte auch auf den mehrdimensionalen Fall erweitert werden. Die Stabilität des Verfahrens ist unter Beachtung der abgeleiteten Stabilitätsgrenzen selbst bei expliziter Zeitintegration gesichert. Durch die Verwendung eines impliziten Zeitintegrationsverfahrens ist damit ein sehr stabiles Verhalten dieses Verfahrens zu erwarten. In der Praxis wird ein gemischtes Zeitintegration angewandt, d. h. einzelne Terme werden explizit und andere Terme

implizit behandelt. Bei dominant impliziter Zeitintegration sind dann nur noch Stabilitätsbeschränkende Resteinflüsse durch explizite Terme vorhanden.

Da also die Konsistenz gewährleistet ist und innerhalb der Stabilitätsgrenzen auch ein stabiles Verhalten gefunden wurde, ist auch die Konvergenz des Verfahrens gesichert.

# 4. Implementierung in das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN

In diesem Kapitel werden zwei zentrale Aspekte der Implementierung des in Kapitel 3 vorgeschlagenen Verfahrens in das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN (Willerding und Baumann 1996) am Forschungszentrum Karlsruhe behandelt. Dies ist zum einen die Umsetzung der gewählten hierarchischen Datenstruktur und zum anderen die Eingliederung des Verfahrens in den bestehenden Lösungsalgorithmus von FLUTAN. Die diskretisierte Darstellung der Erhaltungsgleichungen, die für die konkrete programmtechnische Umsetzung benutzt wurde, ist für die allgemeine, skalare Transportgleichung in Anhang F.1 und für die implizite Druckgleichung in Anhang F.2 dargelegt. Abschließend wird die Effizienz des Verfahrens an einem Beispiel untersucht.

## 4.1 Das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN

FLUTAN (FLUiddynamic and Thermalhydraulic ApplicatioNs) (Willerding und Baumann 1996) ist ein Rechenprogramm zur Simulation von stationären oder zeitabhängigen thermohydraulischen Vorgängen in dreidimensionalen komplexen Geometrien.

FLUTAN ist eine Weiterentwicklung des COMMIX (COMponent MIXing) Rechenprogramms (Bottoni et. al. 1985), welches ursprünglich Anfang der achtziger Jahre (Domanus et. al. 1983) am Argonne National Laboratory, USA, zur Simulation und Analyse von Strömungen in komplexen Geometrien wie in einem Reaktordruckbehälter entwickelt wurde. Der FLUTAN-Code hat folgende generelle Eigenschaften:

- Es wird ein kartesisches oder zylindrisches, strukturiertes und versetztes numerisches Gitter verwendet.
- Es werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, thermische Energie, Impuls und ggf. für charakteristische turbulente Zustandsgrößen gelöst.
- Es wird die vollimplizite ICE-Technik (Harlow und Amsden 1971) verwendet und eine implizite Druckgleichung gelöst.

- Die Turbulenz kann durch 4 verschiedene Turbulenzmodelle beschrieben werden:
  1. durch das Prandtlsche Mischungswegmodell,
  2. durch das k-Turbulenzmodell,
  3. durch das k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell,
  4. durch das TMBF (Turbulence Model for Buoyant Flow (Carteciano 1996)), welches ein 7-Gleichungs-Turbulenzmodell ist.
- Die verschiedenen Erhaltungsgleichungen werden mit einem Finite Volumen-Verfahren behandelt.
- Das Rechenprogramm ist für den Einsatz auf einem Vektorrechner optimiert.

Die verschiedenen Terme in der Finiten Volumen-Form der Erhaltungsgleichungen werden mit folgenden Verfahren diskretisiert:

- Die diffusiven Terme werden mit einer zentralen Differenz approximiert.
- Die konvektiven Terme können mit drei verschiedenen Verfahren diskretisiert werden:
  1. mit dem Upwind-Verfahren 1. Ordnung,
  2. mit dem QUICK-Verfahren (Leonard 1979),
  3. mit dem LECUSSO-Verfahren (Günther 1992).
- Die Zeitintegration erfolgt mit einem impliziten Euler-Verfahren 1. Ordnung.

## 4.2 Hierarchische Datenstruktur und ihre Umsetzung

Im folgenden Unterkapitel wird die für die Realisierung in FLUTAN gewählte hierarchische Datenstruktur skizziert und die wesentlichen Aspekte der Umsetzung in FLUTAN angesprochen.

In Abbildung 3.4 kann man die räumliche Zuordnung der verschiedenen verfeinerten Teilgitter erkennen. Dabei gilt nicht nur, daß alle Teilgitter, z. B. die der ersten Verfeinerungsstufe  $G_1$  eine räumliche Untermenge des Ausgangsgitters  $G_0$  bilden. Sondern es gilt auch darüber hinaus, daß lokal jede verfeinerte Masche eine räumliche Untermenge der Muttermasche bildet, da die verfeinerten Tochtermaschen aus der lokalen Halbierung der Maschenweiten der Muttermasche in den verschiedenen Koordinatenrichtungen entstehen. Aufgrund dieser auch lokal gültigen Zuordnung bietet es sich an, das zusammengesetzte Gitter (s. Abbildung 3.1) in einer hierarchischen Baumstruktur zu verwalten (Edelsohn 1991). Die Muttermaschen werden dabei weiterhin zur Verwaltung und Adressierung der

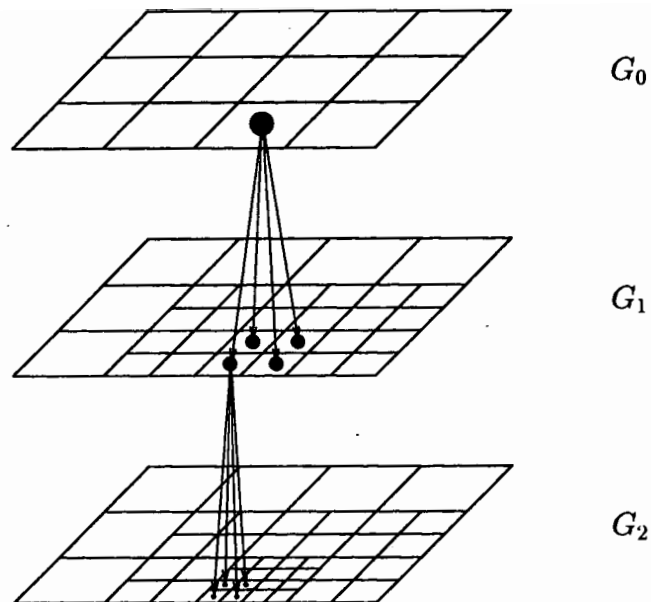


Abbildung 4.1: Baumstruktur für ein Gitter mit drei Verfeinerungsebenen

lokalen Subgitter, d. h. ihrer Tochtermaschen, benutzt. In Abbildung 4.1 ist eine solche hierarchische Struktur für drei Gitterebenen dargestellt, wobei die Pfeile zwischen den verschiedenen Gitterebenen die Mutter-Tochter-Beziehungen symbolisieren.

Die in FLUTAN realisierte lokale Teilung einer Muttermasche ist in Abbildung 4.2 für den dreidimensionalen Fall dargestellt. Neben der lokalen Maschengometrie, d. h. der Halbierung der Maschenweite in allen drei Raumrichtungen, ist auch die Benennung der Tochtermaschen dargelegt. Die Benennung dieser Tochtermaschen und auch der künstlichen Maschen folgt der in FLUTAN üblichen Namenskonvention (Bottoni 1985). Dabei bezeichnet 1 die negative x-Richtung und damit M1 den Nachbarn in der negativen x-Richtung, M2 in der positiven x-Richtung und respektive M3/M4, M5/M6 die Nachbarn in der jeweiligen y- bzw. z-Richtung. Darauf aufbauend bedeutet z. B. M135 die

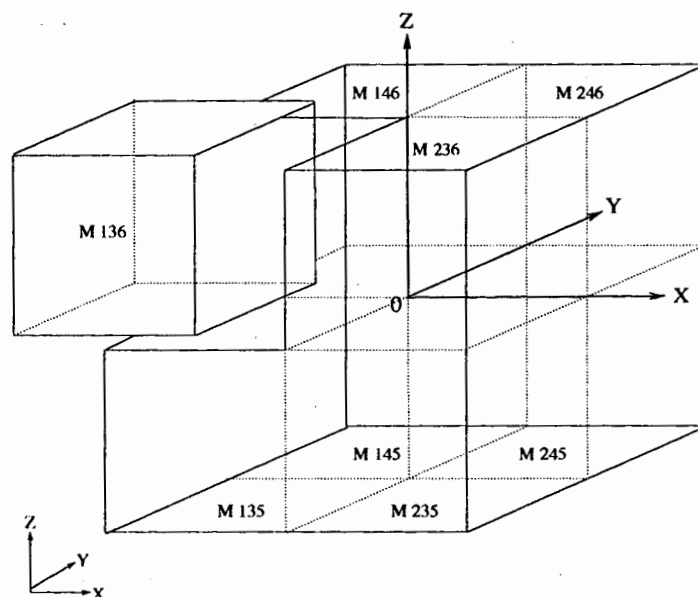


Abbildung 4.2: Namenskonvention bei der lokalen Verfeinerung einer Masche in FLUTAN

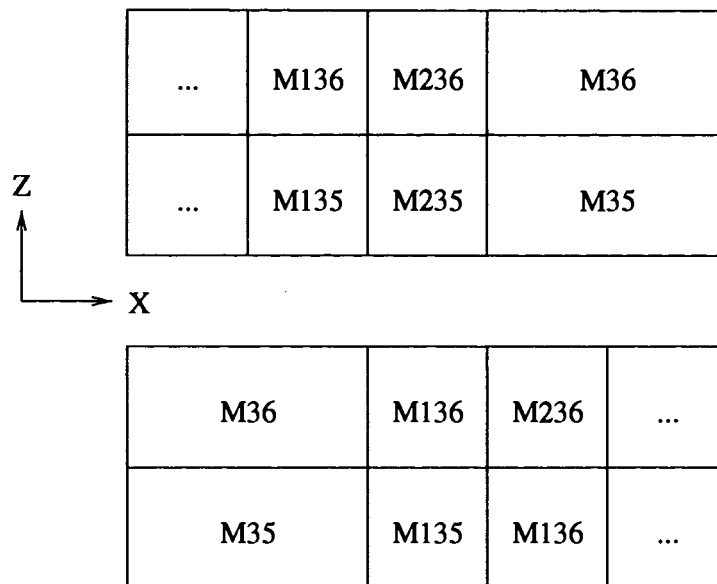


Abbildung 4.3: Namenskonvention bei der Benennung der künstlichen Maschen am Rand des feinen Gitters

Tochtermasche, die in der negativen x-, y-, z- Ecke der Muttermasche liegt. Die Benennung der weiteren 7 Tochtermaschen ergibt sich analog. Die in Abbildung 3.3c definierten künstlichen Randmaschen für die Tochtermaschen folgen auch dieser Konvention. So wird z. B. der Nachbar der Maschen M135 und M235 in x-Richtung als M35 bezeichnet, da diese künstliche Masche die volle Maschenweite in x-Richtung besitzt (s. Abbildung 4.3). In jeder der drei möglichen Schnittebenen liegen 4 Tochtermaschen, womit insgesamt 12 verschiedene künstliche Maschen auftreten, die in analoger Weise benannt werden.

Bei der lokalen Verfeinerung eines zweidimensionalen Gitters werden hingegen nur die 4 Tochtermaschen definiert und benutzt, die in der Hälfte der zweidimensionalen Ebene liegen, welche der negativen Koordinatenrichtung zugewandt ist. Analog werden auch nur die in dieser Hälfte liegenden künstlichen Maschen benutzt. Die in Abbildung 3.3a definierten künstlichen Randmaschen für die unverfeinerten Maschen des angrenzenden größeren Gitters werden z. B. in x-Richtung als MHX1/MHX2, d. h. als erste bzw. zweite halbe Masche, bezeichnet (s. Abbildung 4.4).

Zur Umsetzung dieser Datenstruktur im Rechenprogramm werden folgende Zeigervekto-

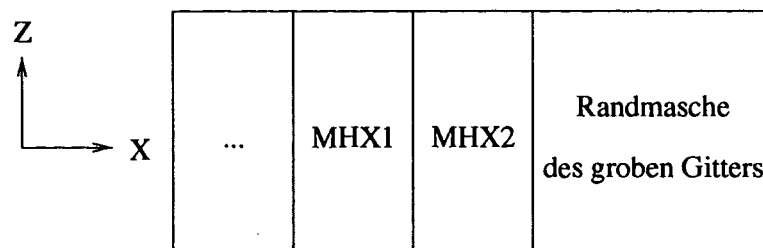


Abbildung 4.4: Namenskonvention bei der Benennung der künstlichen Maschen am Rand des groben Gitters



ren definiert (vgl. Abbildungen 4.2, 4.3, 4.4):

- Zeiger, der den Grad der Verfeinerung einer Masche bezogen auf das Ausgangsgitter beschreibt (**IVERF**).
- Zeiger, der die Nummer der Elternmasche beschreibt (**IELT**).
- Zeiger, der die Nummer der Tochtermasche beschreibt, die in der Ecke  $1 = x^-$ ,  $3 = y^-$ ,  $5 = z^-$  ihrer Muttermasche liegt (**M135**).
- usw.,
- Zeiger, der die Nummer der Tochtermasche beschreibt, die in der Ecke  $2 = x^+$ ,  $4 = y^+$ ,  $6 = z^+$  ihrer Muttermasche liegt (**M246**).
- Zeiger, der die Nummer der 1. Halbmasche in  $x$ -Richtung für den Rand des groben Gitters beschreibt (**MHX1**).
- Zeiger, der die Nummer der 2. Halbmasche in  $x$ -Richtung für den Rand des groben Gitters beschreibt (**MHX2**).
- usw.,
- Zeiger, der die Nummer der 2. Halbmasche in  $z$ -Richtung für den Rand des groben Gitters beschreibt (**MHZ2**).
- Zeiger, der die Nummer der künstlichen Masche in  $z$ -Richtung für den Rand des feinen Gitters beschreibt, die in der Ecke  $1 = x^-$ ,  $3 = y^-$  ihrer Muttermasche liegt (**M13**).
- usw.,
- Zeiger, der die Nummer der künstlichen Masche in  $x$ -Richtung für den Rand des feinen Gitters beschreibt, die in der Ecke  $4 = y^+$ ,  $6 = z^+$  ihrer Muttermasche liegt (**M46**).

Beginnend mit dem ersten Grad der Verfeinerung werden die verschiedenen Grade der Verfeinerung rekursiv nacheinander abgearbeitet. Dabei werden bei jedem Durchgang alle Maschen des aktuellen Verfeinerungsgrades  $n$  bearbeitet. Im ersten Durchgang sind dies die Maschen des Ausgangsgitter  $G_0$ . Jede Masche mit dem Verfeinerungsgrad  $n$  wird daraufhin untersucht, ob ihr Endverfeinerungsgrad (s. Zeiger **IVERF**)  $> n$  ist, d. h. größer als der des aktuellen Verfeinerungsgrades  $n$  ist. Falls dies zutrifft, so werden die Tochtermaschen des Verfeinerungsgrades  $n + 1$  generiert, adressiert und die künstlichen Maschen für die Übergänge  $n \rightarrow n + 1$  und  $n + 1 \rightarrow n$  erzeugt. Zu jeder verfeinerten Maschen mit  $n > 0$  gibt es auf jedem größeren Verfeinerungsgrad eine Elternmasche, da diese größeren

Eltermaschen im Zuge der rekursiven Abarbeitung bis zum Erreichen des Endverfeinerungsgrades immer weiter verfeinert wurden.

In Abbildung 4.5 ist der prinzipielle Ablauf für die Abarbeitung eines Verfeinerungsgrades dargestellt. Beide Schleifen arbeiten nur die Maschen des aktuellen Verfeinerungsgrades  $n$  ab, da durch die hierarchische Datenstruktur und die Umsetzung dieser in der rekursiven Abarbeitung auch die Maschen eines höheren Endverfeinerungsgrads durch Elternmaschen auf dem aktuellen Gitter präsent sind (s. Abbildung 4.1).

In der ersten Schleife werden alle Maschen des Grades  $n$  verfeinert, falls ihre Verfeinerungsstufe  $\geq n + 1$  ist. In der zweiten Schleife werden die künstlichen Maschen an den Verfeinerungsrändern zwischen den Verfeinerungsgraden  $n$  und  $n + 1$  generiert und adressiert. Bei  $n_{max}$  verschiedenen Verfeinerungsgraden sind damit nach  $n_{max} - 1$  Durchläufen alle Verfeinerungsgrade abgearbeitet.

Neben dem Aufbau der indirekten Adressierung, der durch die Aufspaltung des Gitters an den Verfeinerungsrändern möglich wurde, ist es auch wichtig, die Maschen in der richtigen Reihenfolge zu numerieren, um eine vektorielle Abarbeitung auf Hochleistungsrechnern zu ermöglichen.

In Abbildung 3.1 sieht man, daß die Vereinigung der Maschen aller Verfeinerungsgrade den physikalisch zu simulierenden Raum bilden. Da für diese Maschen die Erhaltungsgleichungen gelöst werden, ist es sinnvoll, diese in der logischen Reihenfolge ihrer Abarbeitung zu numerieren, d. h. beim Ausgangsgitter beginnend die Maschen jedes einzelnen Verfeinerungsgrades bis zum maximalen Verfeinerungsgrad  $n_{max}$  durchzunumerieren.

Daran anschließend werden die Nummern der Maschen verwaltet, die während der rekursiven Abarbeitung zwar verfeinert wurden, aber im nächsten Durchlauf selbst wieder verfeinert werden und nur noch zur hierarchischen Datenverwaltung benutzt werden. Am Ende dieses Adreßvektors werden dann die künstlichen Maschen verwaltet, die mit einem anderen Gleichungssatz behandelt werden (vgl. Unterkapitel 3.2). Der Aufbau des in FLUTAN benutzten Adreßvektors ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Dabei bezeichnen "0", "1" und "2" den Grad der Verfeinerung eines Teilgitters und der Maschen in diesem Teilgitter. "alte 0" bezeichnet daran anschließend die Maschen des Ausgangsgitters, die weiter verfeinert wurden, "alte 1" dementsprechend die weiter verfeinerten Maschen des Verfeinerungsgrades 1. Die Bezeichnungen "0-1" bzw. "1-0" kennzeichnen die künstlichen Maschen, wie sie in Abbildung 3.3 eingeführt wurden. "0-1" bedeutet dabei den Übergang vom gröberen Gitter "0" zum feineren Gitter "1" hin und "1-0" dementsprechend umgekehrt.

Mit dieser Datenstruktur ist es möglich, eine durchgehende numerische Abarbeitung ohne weitere Abfragen durchzuführen. Dies ist eine Voraussetzung für die Vektorisierung auf Hochleistungsrechnern.

1. Schleife über Maschen des Verfeinerungsgrades $n$	
Verfeinerungsgrad $\geq n + 1$	
nein	ja
keine Maßnahme	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Muttermaschen an das Ende des Adreßvektors stellen</li> <li>• Teilung der Muttermaschen mit Belegung der Zeiger <b>IELT</b>, <b>M135 ... M246</b></li> </ul>

2. Schleife über Maschen des Verfeinerungsgrades $n$	
Verfeinerungsgrad von M1 ... M6 = $n$	
ja	nein
keine Maßnahme	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Randmaschen für das grobe Gitter definieren mit Belegung von <b>IELT</b>, <b>MHX1 ... MHZ2</b></li> <li>• Randmaschen für das feine Gitter definieren mit Belegung von <b>IELT</b>, <b>M13 ... M46</b></li> </ul>

Abbildung 4.5: Prinzipieller Ablauf der Abarbeitung eines Verfeinerungsgrades

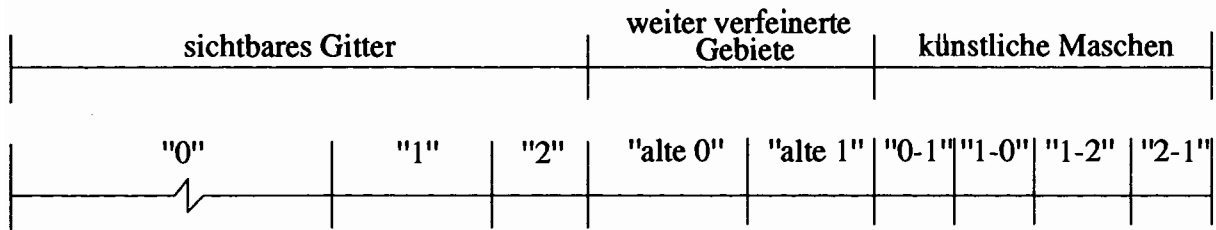


Abbildung 4.6: Aufbau des Adreßvektors in FLUTAN bei lokaler Verfeinerung

### 4.3 Umsetzung innerhalb des Lösungsalgorithmus von FLUTAN

Die nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen und die Abhängigkeit der Stoffeigenschaften von den unbekanntem Drücken und Temperaturen führen zu einem iterativen Lösungsprozeß für jeden Zeitschritt. In Abbildung 4.7 ist ein Flußdiagramm für diesen iterativen Prozeß schematisch dargestellt. Es existiert lediglich eine Iterationsschleife, die zur konsistenten Lösung aller Erhaltungsgleichungen während eines Zeitschritts bis zur Erfüllung des vorgegebenen Konvergenzkriteriums durchlaufen wird.

Zu Beginn einer Iterationsschleife werden die Koeffizienten der Impulsgleichungen nach Gleichung (2.22) bestimmt. Damit ist es möglich, die Koeffizienten der Druckgleichung nach Gleichung (2.23) zu bestimmen. Dieses Gleichungssystem wird gelöst. Mit diesen Drücken werden die Geschwindigkeiten nach Gleichung (2.22) und neue Stoffdaten berechnet. Danach können die Koeffizienten der thermischen Energiegleichung (s. Gleichung (2.4) und Tabelle 2.1) berechnet werden. Auch dieses Gleichungssystem wird gelöst und anschließend werden die neuen Stoffdaten mit den neuen Enthalpiewerten berechnet. Hieran können sich weitere Erhaltungsgleichungen, z. B. der charakteristischen Turbulenzgrößen anschließen. Am Ende der Iterationsschleife wird die Konvergenz der einzelnen Lösungen überprüft. Die Iterationsschleife wird dann beendet, wenn die normierten maximalen Änderungen der Geschwindigkeiten, der Enthalpie und ggf. der weiterer Transportgrößen eine vorgegebene Konvergenzschranke unterschreiten.

Das in Kapitel 3 vorgeschlagene Verfahren bringt aufgrund der impliziten Beschreibung der Verfeinerungsränder keine Notwendigkeit für weitere Iterationen innerhalb der vorhandenen Zeitschrittiteration ein. Die Koeffizienten für die künstlichen Maschen werden vor dem jeweiligen Lösungsschritt aufgestellt. Dies ist in Abbildung 4.7 durch die gestrichelten Rechtecke mit den Vorschriften für die Druckgleichung nach den Gleichungen (3.27) bzw. (3.1) und den Vorschriften für die thermische Energiegleichung nach den Gleichungen (3.10) bzw. (3.1) symbolisiert. Ein weiteres Eingreifen ist nicht notwendig.

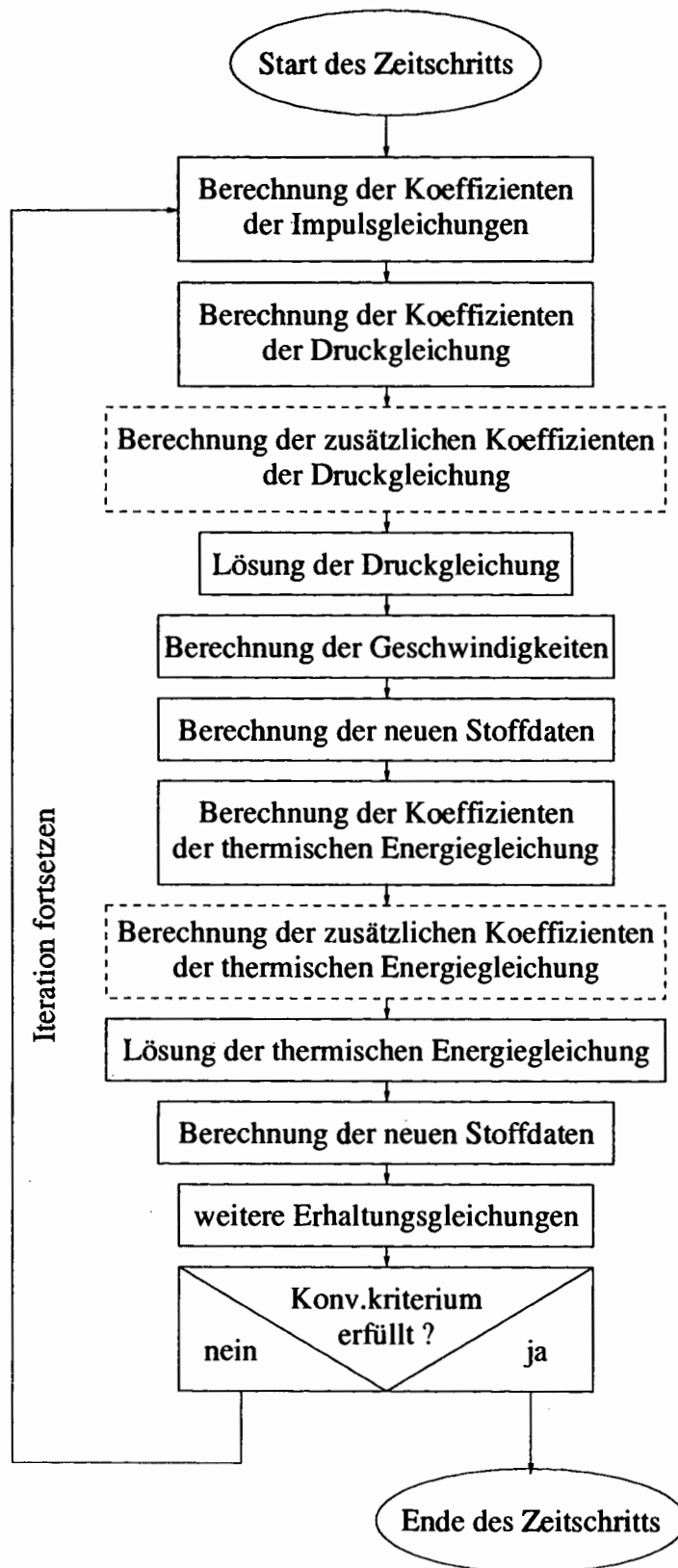


Abbildung 4.7: Flußdiagramm für die iterative Lösung eines Zeitschritts in FLUTAN mit den Erweiterungen des implementierten Verfahrens zur lokalen Verfeinerung (gestrichelte Kästen)

## 4.4 Effizienz des Verfahrens

In diesem Abschnitt wird an einem Beispiel exemplarisch die Effizienz des vorgeschlagenen Verfahrens untersucht. Als Beispiel wird ein horizontaler, beheizter Ringspalt benutzt (vgl. Abschnitt 5.2.1). Bei dem dort verwendeten numerischen Gitter wird speziell der Bereich senkrecht über dem Innenrohr fein aufgelöst. Dabei werden 50 Maschen in Umfangsrichtung benutzt, von denen wiederum 9 in beiden Raumrichtungen einmal um den Faktor 2 lokal verfeinert werden (vgl. Abbildung 5.24). In radialer Richtung werden 20 Maschen benutzt, was innerhalb des lokal verfeinerten Gebiets zu 40 radialen Maschen führt. In Tabelle 4.1 ist die Anzahl der Maschen und der sich ergebenden Anzahl der Unbekannten des dazugehörigen Gleichungssystems zusammengestellt.

Teilgitter	$N_y \cdot N_r$	Anzahl
grobe Maschen	$(50 - 9) \cdot 20$	820
feine Maschen	$(9 \cdot 2) \cdot (20 \cdot 2)$	720
Rand grobes Gitter	$2 \cdot 20$	40
Rand feines Gitter	$2 \cdot (20 \cdot 2)$	80
Summe		1660

Tabelle 4.1 Anzahl der Unbekannten bei einem lokal verfeinerten Gitter

Unter Einbeziehung der mitgelösten künstlichen Maschen ergeben sich daraus 1660 Unbekannte.

Die Diskretisierung dieses Problems mit einem strukturierten Gitter ohne die Möglichkeit einer lokalen Verfeinerung führt zu einer radialen Auflösung von 40 Maschen und zu ebenfalls 59 Maschen in Umfangsrichtung. Das dazugehörige Gleichungssystem setzt sich in diesem Fall aus 

unverfeinertes Gitter	$59 \cdot 40$	2360
-----------------------	---------------	------

 Unbekannten zusammen und hat damit ca. 30% mehr Unbekannte als der Fall mit einem lokal verfeinerten Gitter.

Verwendet man für die Lösung eines solchen Gleichungssystems z. B. ein iteratives SOR-Lösungsverfahren, so sind nach Stoer und Bulirsch (1978) bei  $N$  Unbekannten

$$3,6 N^3 \cdot \log N$$

Operationen zur Lösung dieses Systems notwendig. Bei diesem Beispiel führt aber die Möglichkeit der lokalen Verfeinerung zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten um 30%, d. h. auf  $0,7N$ . Dies führt zu einem dann ebenfalls reduzierten Aufwand von

$$1,235N^3 \cdot \log(0,7N)$$

Operationen, was einem um den Faktor 3 geringeren Aufwand entspricht.

Generell führt das Verfahren zur lokalen Verfeinerung zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten gegenüber der Anzahl der Unbekannten bei einem strukturierten Gitter ohne lokale Verfeinerung. Dies wiederum hat bei iterativen Lösungsverfahren generell

einen geringeren Aufwand zur Folge. Bei einem direkten Lösungsverfahren ist die Bandweite der Matrix eine der bestimmenden Größen für den Aufwand zur Lösung eines Gleichungssystems. Bei einem lokal verfeinerten Gitter ist es sehr schwer, große Bandweiten zu vermeiden, wodurch die Effizienz der direkten Lösungsverfahren eingeschränkt ist. Für diese Arbeit standen in erster Linie direkte Lösungsverfahren zur Verfügung. Als iterative Lösungsverfahren wurden ein Conjugate-Gradient-Lösungsverfahren (Lentati 1995) zur Lösung der Druckgleichung und ein Successive-Overrelaxation-Lösungsverfahren (Alef 1996) zur Lösung der Druck- und der thermischen Energiegleichung implementiert. Erste Erfahrungen bei Testbeispielen wurden mit dem Successive-Overrelaxation-Lösungsverfahren gemacht. Da diese Verfahren erst gegen Ende der Arbeit implementiert werden konnten und noch nicht vollständig für den Einsatz auf den Hochleistungsrechnern optimiert sind, ist die erwartete Steigerung der Effizienz in dieser Arbeit noch nicht durch Rechenzeiten belegbar.

## 5. Verifikation und Anwendung des Verfahrens

In diesem Kapitel wird das vorgeschlagene Verfahren zur statischen lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters verifiziert. Dazu werden im ersten Unterkapitel drei verschiedene Fälle simuliert. Diese Fälle zeichnen sich dadurch aus, daß sie sehr gut untersucht sind und der Einfluß einer lokalen Verfeinerung des numerischen Gitters direkt zu bewerten ist. In allen drei Fällen treten in begrenzten Bereichen der Geometrie starke Gradienten auf, die damit ein Gebiet mit einer hohen Anforderung an die Auflösung definieren. Zur Verifikation des Verfahrens wird jeweils eine Simulation auf einem groben Referenzgitter mit dem Rechenprogramm in seiner ursprünglichen Version durchgeführt. Ziel der jeweils zweiten Rechnung auf einem lokal verfeinerten Gitter ist es, die Ergebnisse der Referenzrechnung zu reproduzieren bzw. wenn möglich, eine bessere Übereinstimmung mit den zur Verfügung stehenden experimentellen Ergebnissen zu erzielen. Es werden zur Verifikation im Rahmen dieser Arbeit nur zweidimensionale Fälle verwendet, da für die Simulation von Strömungen in drei Dimensionen iterative Lösungsverfahren zur Erlangung vertretbarer Rechenzeiten notwendig sind, diese aber erst gegen Ende dieser Arbeit zur Verfügung standen. Jedoch wurden während der Implementierung Tests mit kleineren dreidimensionalen Problemen zur Überprüfung der aktuellen Änderungen durchgeführt.

Im einzelnen werden die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe bei einer Reynolds-Zahl von  $Re = 150$ , die laminare Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung bei  $Re = 287$  und die turbulente Strömung in einem zylindrischen Rohr bei  $Re = 308000$  berechnet. Die numerisch gewonnenen Ergebnisse werden den experimentellen Meßwerten gegenübergestellt und diskutiert. Die ersten beiden Fälle verifizieren dabei die Implementierung im Bereich der Impulsgleichungen, der Kontinuitätsgleichung und der Druckgleichung. Der dritte Fall schließlich wird zur Verifikation der Implementierung in der thermischen Energiegleichung und den Transportgleichungen des  $k - \epsilon$ -Turbulenzmodells benutzt.

Im zweiten Unterkapitel wird das Verfahren zur Berechnung laminarer Naturkonvektion in einem horizontalen, beheizten Ringspalt angewandt. Bei dieser Strömungsform verlangt nur ein relativ kleiner Teil des Rechengebiets eine sehr hohe räumliche Auflösung. Das Verfahren zur lokalen Verfeinerung stellt hierbei ein wesentliches Hilfsmittel dar, eine



effiziente numerische Simulation dieser Strömungsform durchzuführen. Dazu wird zuerst die stationäre Strömung in Luft bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$  und danach eine transiente Strömung in kryogenem Helium bei  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  simuliert.

## 5.1 Verifikation des Verfahrens

### 5.1.1 Laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe

Die laminare Strömung über eine zurückspringende Stufe ist eine oft benutzte Problemstellung für die Verifikation von Verfahren (vgl. Monnoyer et. al. 1988, Thompson und Ferziger 1989, Moukalled und Acharya 1991, Vilsmeier und Hänel 1993, Chen et. al. 1994). Diese Strömungskonfiguration wurde auch als Benchmark-Problem eines GAMM-Workshops ausgewählt (Morgan et. al. 1984). Zum Vergleich dienten diesem Benchmark experimentelle Untersuchungen von Kueny und Binder (1984).

#### Problembeschreibung

Die Geometrie ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Darin sind  $h$  die Kanalhöhe im Einlauf der Teststrecke und  $H$  die Kanalhöhe nach der Stufe. Aus den verschiedenen Fällen des Benchmarks wird im Rahmen dieser Arbeit der Fall mit dem Kanalhöhenverhältnis  $\frac{H}{h} = 2$  und mit der Reynolds-Zahl  $Re = 150$  simuliert. Die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{u_{max} h_s}{\nu} = 150 \quad (5.1)$$

wird dabei mit der Maximalgeschwindigkeit der voll eingelaufenen laminaren Strömung im Zulauf  $u_{max}$  und der Stufenhöhe  $h_s = H - h$  gebildet.

Das Experiment (Kueny und Binder 1984) wurde mit einem durchsichtigen Öl durchgeführt. Zur Vereinfachung des Vorbereitungsaufwandes wird für die Berechnung der

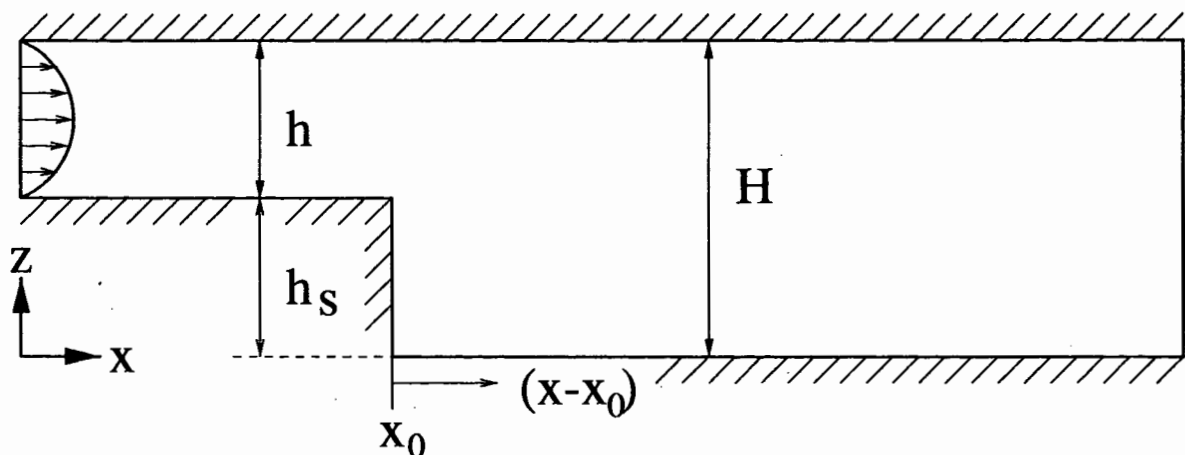


Abbildung 5.1: Geometrie der laminaren Strömung über eine zurückspringende Stufe nach Morgan et. al. (1984)

Stoffwerte dieses Fluids ein anderes Fluid verwendet, dessen Eigenschaften jedoch, da eine isotherme Strömung simuliert wird, durch die gleichen dimensionslosen Kennzahlen beschrieben werden. Damit ist es zulässig für die Simulation Luft bei Normalbedingungen, d. h. bei  $P = 1 \text{ bar}$  und  $T = 20^\circ \text{ C}$ , zu verwenden.

Die Viskosität  $\nu$  von Luft ist unter diesen Bedingungen

$$\nu = 153,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (5.2)$$

Unter Verwendung der Geometrieabmessungen des Experimentes,  $h_s = 0,02 \text{ m}$ , ergibt sich für die Maximalgeschwindigkeit

$$u_{max} = 0,115 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.3)$$

### Numerische Modellierung

Bei der numerischen Simulation wird als Eintrittsbedingung eine parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung mit der berechneten Maximalgeschwindigkeit vorgegeben. An der Austrittsfläche wird die hydrostatische Druckverteilung infolge des Schwerkraftvektors als Druckrandbedingung verwendet. An Boden und Decke des Kanals wird die Haftbedingung verwendet, d. h. sowohl die Komponente der Geschwindigkeit normal zur Wand,  $u_n = 0$ , als auch die Komponente der Geschwindigkeit tangential zur Wand verschwinden,  $u_t = 0$ . Das Rechenprogramm FLUTAN arbeitet in der aktuellen Fassung dreidimensional, so daß bei einer zweidimensionalen Modellierung in der dritten Raumrichtung eine Masche mit einer endlichen Ausdehnung definiert werden muß. Darüber hinaus sind in dieser Richtung auch Randbedingungen vorzugeben. Die Seitenwände werden daher als reibungsfreie Wände ohne Haftbedingung modelliert, d. h. die Komponente der Geschwindigkeit normal zur Wand verschwindet,  $u_n = 0$ , und die Komponente der Geschwindigkeit tangential zur Wand verschwindet nicht,  $u_t \neq 0$ .

Als Anfangsbedingungen werden für den Druck die hydrostatische Druckverteilung, für die Geschwindigkeiten, außer am Eintritt, ein ruhendes Fluid und für die Temperaturen der isotherme Temperaturwert von  $20^\circ \text{ C}$  im gesamten Rechenggebiet vorgegeben.

Es wird auf zwei verschiedenen Gittern, einem Gitter ohne lokale Verfeinerung und einem Gitter mit lokaler Verfeinerung, gerechnet. In Abbildung 5.2a ist das unverfeinerte Gitter und in Abbildung 5.2b das lokal verfeinerte Gitter in der Nähe der Stufe dargestellt. Die lokale Verfeinerung wird zur besseren Auflösung der Rezirkulationszone nach der Stufe benutzt und soll u. a. zu einer besseren Bestimmung des Wiederanlegepunktes beitragen. Die Rechnung wird aus den genannten Anfangswerten bis zu einem stationären Endzustand vorangetrieben. Der stationäre Endzustand wird als erreicht angesehen, wenn die normierten Änderungen der Geschwindigkeiten eine vorgegebene Schranke  $EPS$  unterschreiten.

In Tabelle 5.1 sind die Simulationsparameter für die beiden Simulationen zusammenge-

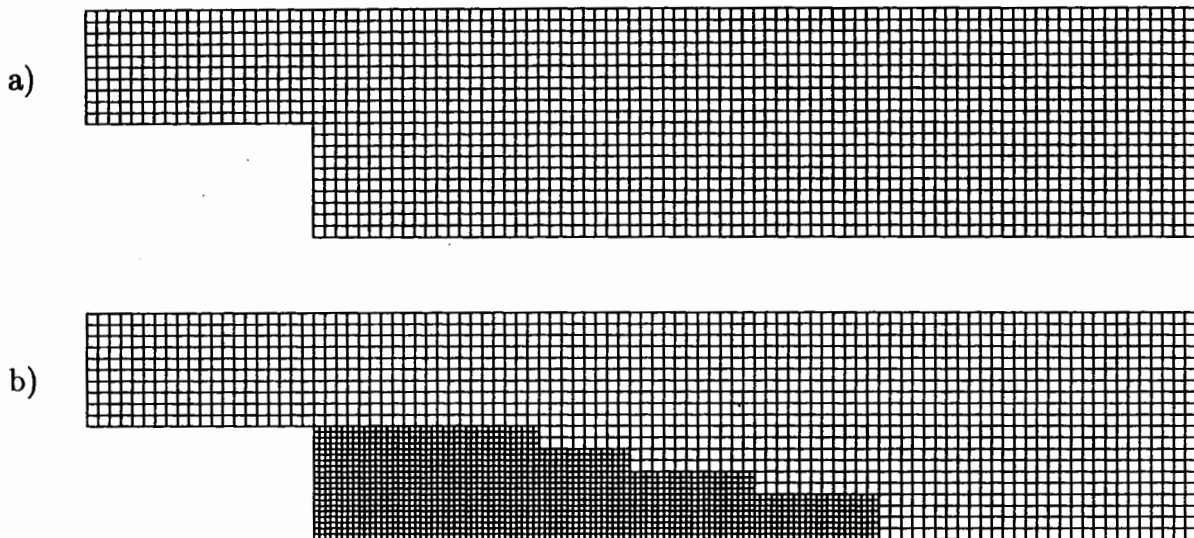


Abbildung 5.2: Die räumliche Diskretisierung in der Nähe der zurückspringenden Stufe, a) ohne lokale Verfeinerung und b) mit lokaler Verfeinerung

stellt. Dabei bezeichnen  $DX$  bzw.  $DZ$  die Maschenweiten in den jeweiligen Koordinatenrichtungen, die Subskripte  $min$  bzw.  $max$  deren Minimum oder Maximum,  $NM$  die Anzahl der realen Maschen im Rechengebiet,  $EPS$  die Konvergenzschranke und  $IT$  die Anzahl der benötigten Iterationen.

Fall	$DX_{min}$	$DX_{max}$	$DZ_{min}$	$DZ_{max}$	$NM$	$EPS$	$IT$
unverfeinert	0,002	0,008	0,002	0,002	2900	$10^{-6}$	1058
verfeinert	0,001	0,008	0,001	0,002	4085	$10^{-6}$	1207

Tabelle 5.1 Simulationsparameter bei der laminaren Strömung über eine Stufe

## Ergebnisse und Diskussion

Bei dieser Geometrie und unter diesen Strömungsbedingungen löst die Strömung an der Stufenkante ab und bildet einen Wirbel. Weiter stromab der Stufe legt die Strömung dann wieder an und bildet das laminare Strömungsprofil wieder über die gesamte Kanalhöhe aus.

Dieser stromab der Stufe liegende Wirbel zeigt sich besonders deutlich im Stromlinienfeld. Die Stromlinien sind in Abbildung 5.3a für das Experiment und in Abbildung 5.3b für die Rechnung mit lokaler Verfeinerung dargestellt. Die Stromlinien zeigen einen glatten Verlauf. Die Grenzen der Verfeinerung (vgl. Abbildung 5.2b) sind nicht zu erkennen. Dies läßt auf eine korrekte Implementierung des Verfahrens schließen. Darüber hinaus erkennt man in beiden Abbildungen die Lage des Rezirkulationsgebietes direkt nach der Stufenkante und seine Ausdehnung. Aus einem Vergleich ergibt sich dabei eine qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmung, welche sich insbesondere auch in der berechneten

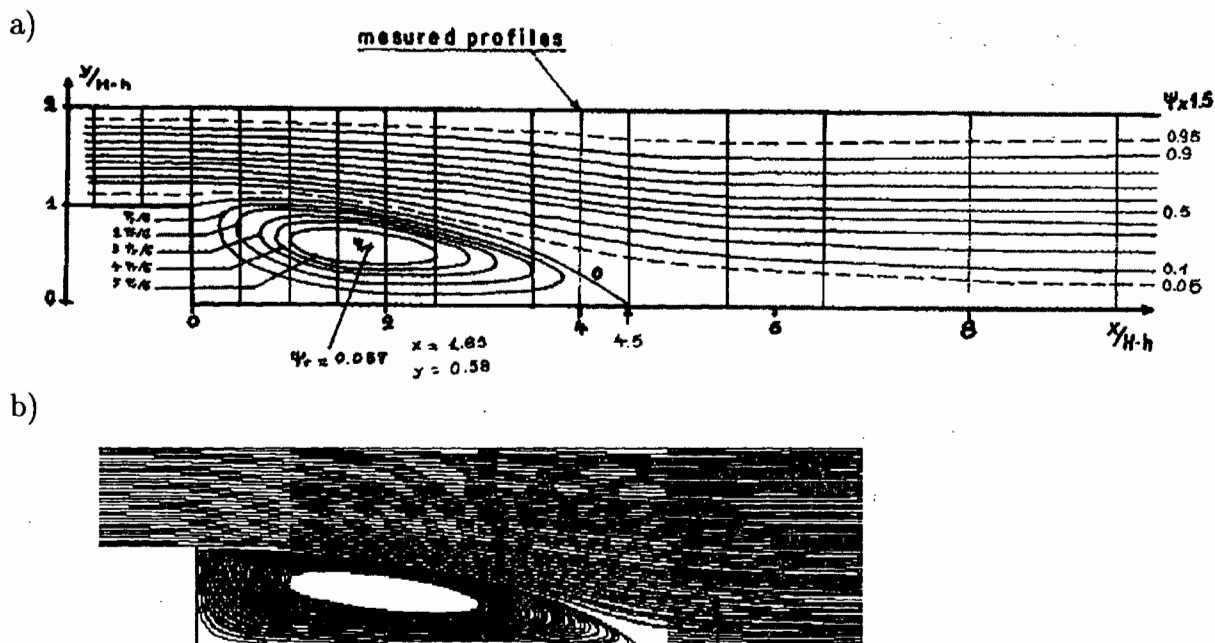


Abbildung 5.3: Verlauf der Stromlinien bei der zurückspringenden Stufe, a) im Experiment von Kueny und Binder (1984) und b) Rechnung mit lokaler Verfeinerung

Länge des Rezirkulationsgebietes ausdrückt. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 bezogen auf die Stufenhöhe  $h_s$  zusammengestellt. Die Lösung bei dem unverfeinerten Gitter (Rechnung ohne LGV) beschreibt ein etwa 5% kürzeres Rezirkulationsgebiet als bei einem verfeinerten Gitter (Rechnung mit LGV).

Experiment	4,50 $h_s$
Rechnung ohne LGV	4,09 $h_s$
Rechnung mit LGV	4,28 $h_s$

Tabelle 5.2 Länge der Rezirkulationsgebiete in den Rechnungen und im Experiment

Eine detailliertere quantitative Auswertung erfolgt anhand von Profilen der axialen Geschwindigkeitskomponente über dem Abstand zur unteren Wand. In Abbildung 5.3a sind diejenigen Stellen stromabwärts der Stufe eingezeichnet, an denen die horizontale Geschwindigkeit über der Kanalhöhe gemessen wurde. An drei dieser Meßpunkte werden die Geschwindigkeitsprofile für das Experiment und die Rechnungen mit lokaler Verfeinerung bzw. ohne lokale Verfeinerung gegenübergestellt. Die drei Meßpunkte liegen bezogen auf den Nullpunkt am Fußpunkt der Stufe (s. Abbildung 5.1) und mit der Stufenhöhe  $h_s$  dimensionslos dargestellt bei

$$\frac{x - x_0}{h_s} = 1,5, 4, 8$$

Die Ergebnisse für diese drei Fälle sind in den Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6 dargestellt. Die Maximalgeschwindigkeit wird bei beiden Rechnungen unterschätzt. Die Ursache dafür

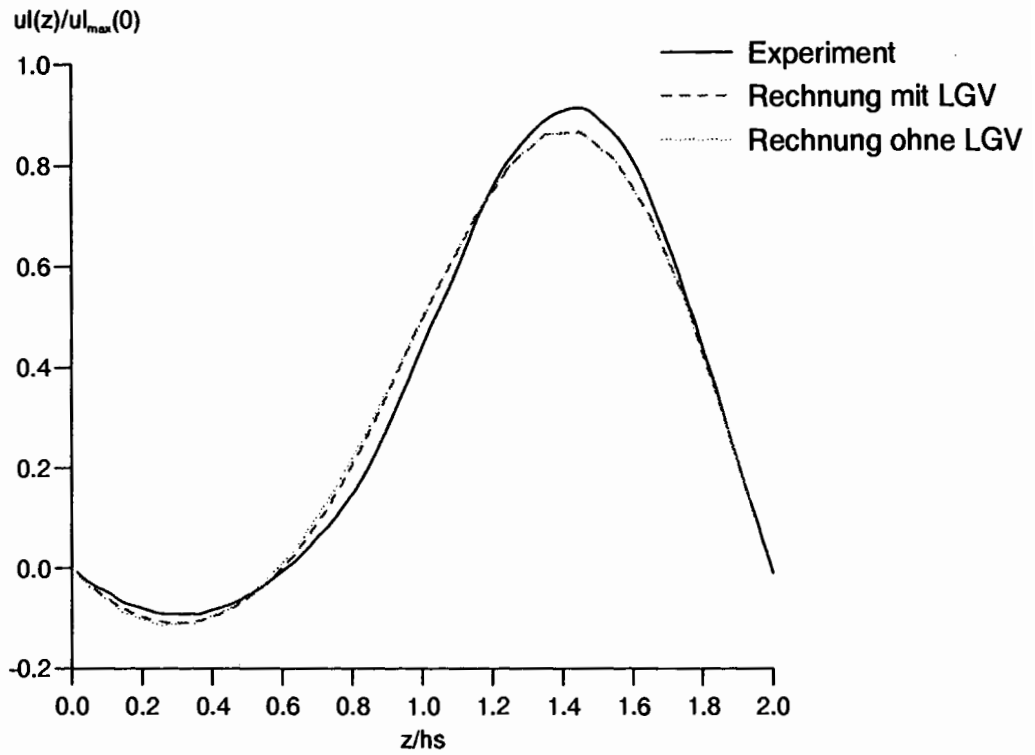


Abbildung 5.4: Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für  $\frac{x-x_0}{h_s} = 1,5$

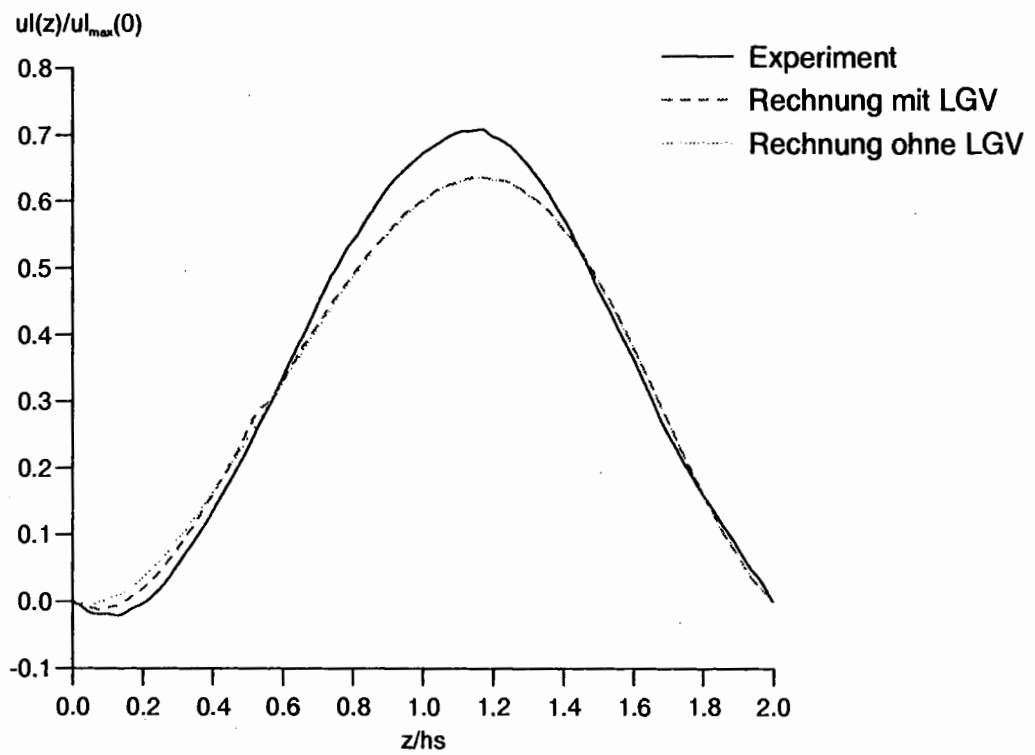


Abbildung 5.5: Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für  $\frac{x-x_0}{h_s} = 4$

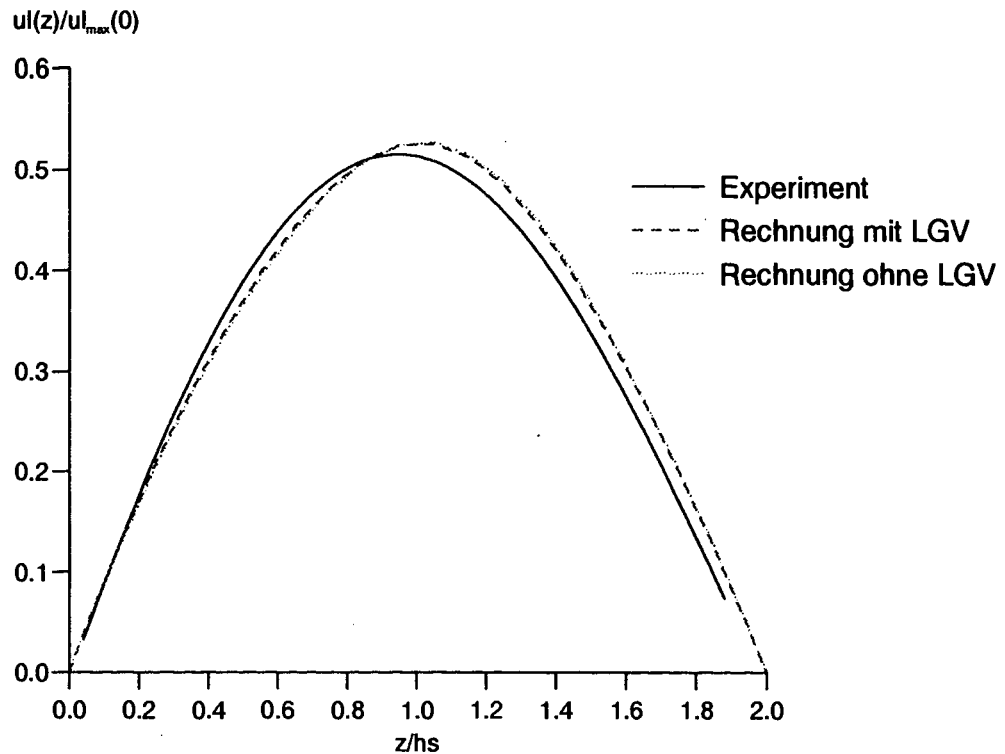


Abbildung 5.6: Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für  $\frac{x-x_0}{h_s} = 8$

liegt in der Modellierung der Kanalseitenwände, die für die Simulation als reibungsfreie Wände angenommen wurden. Das Experiment ist dreidimensional und die Seitenwände sind reibungsbehaftet, was zu einer höheren Maximalgeschwindigkeit führt, falls der gleiche Volumenstrom bei Experiment und Simulation betrachtet werden.

Die Unterschiede in den Ergebnissen auf den verschiedenen Gittern treten, wie es aus der Diskussion der Länge des Ablösegebietes zu erwarten war, in der Nähe des Wiederanlegepunktes an der unteren Wand auf. Dies erkennt man in der Abbildung 5.5 und in der Abbildung 5.7, in der der Bereich in der Nähe der unteren Wand vergrößert dargestellt ist. Die bessere Auflösung des Rezirkulationsgebietes führt zu höheren Rückstromgeschwindigkeiten innerhalb dieses Gebietes und stimmt mit den experimentellen Werten besser überein. Die Unterschätzung der Rückstromgeschwindigkeit bei der Simulation auf dem groben Gitter ohne lokale Verfeinerung in den Abbildungen 5.5 bzw. 5.7 ist auch verantwortlich für die zu geringe Länge des gesamten Rezirkulationsgebietes.

Neben den Geschwindigkeitsprofilen an ausgewählten Punkten des Kanals wird im Experiment auch der Wert der Maximalgeschwindigkeit in seiner axialen Entwicklung bestimmt. In Abbildung 5.8 sind die experimentellen Werte den berechneten Werten bei lokaler Verfeinerung gegenübergestellt. Die Maximalgeschwindigkeiten sind dabei auf die Maximalgeschwindigkeit an der Stufenkante bezogen und über den mit der Stufenhöhe  $h_s$  dimensionslos gemachten Abstand von der Stufenkante aufgetragen. Der Verlauf wird qualitativ sehr gut wiedergegeben. Die berechneten Werte sind allerdings innerhalb des Rezirkulationsgebietes bis maximal 10% kleiner als die im Experiment gemessenen Werte. Dies liegt wiederum an der oben bereits diskutierten zweidimensionalen Modellierung,

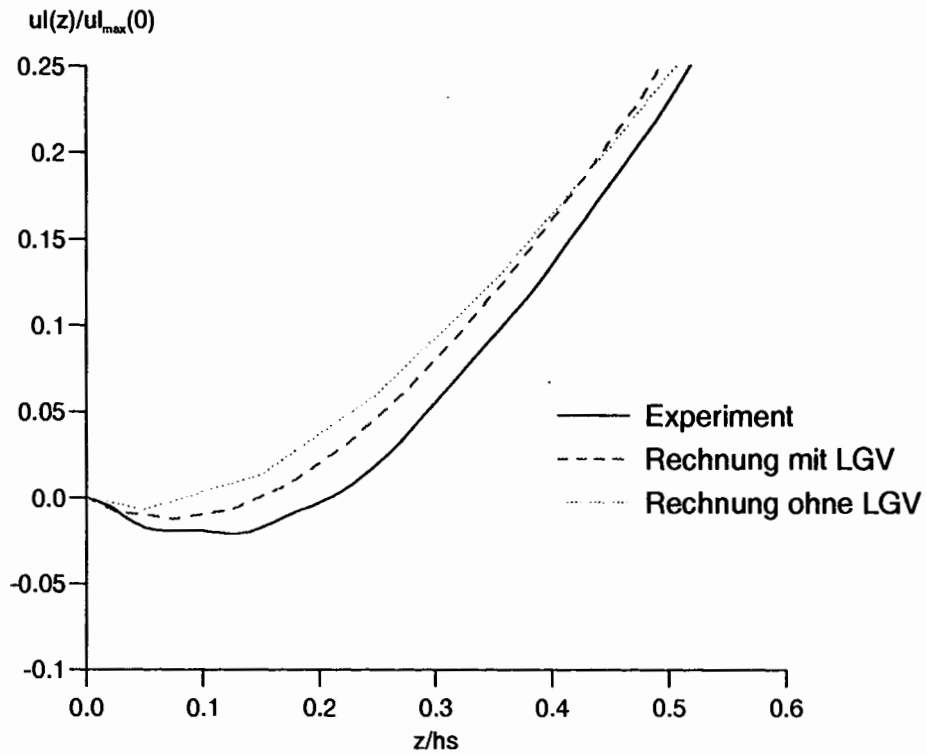


Abbildung 5.7: Geschwindigkeitsprofil über der Kanalhöhe für  $\frac{x-x_0}{h_s} = 4$  in der Nähe der unteren Wand

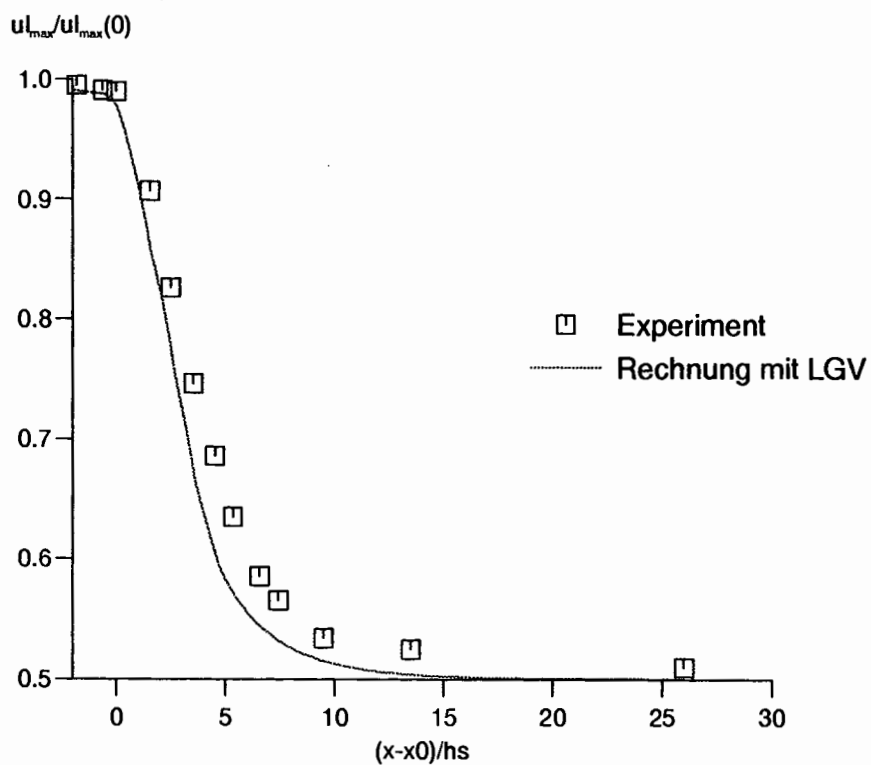


Abbildung 5.8: Verlauf des Maximums der axialen Geschwindigkeit über dem dimensionslosen Abstand von der Stufenkante

die für die Rechnung benutzt wird. In der Rechnung wird durch die reibungsfreien Seitenwände keinerlei Einfluß der Seitenwände auf die Strömung zugelassen. Im Experiment ist aber trotz der im Verhältnis zur Kanalhöhe großen Kanaltiefe immer noch der Einfluß der Reibung an den Seitenwänden zu bemerken. Im Experiment und in der Rechnung wird der gleiche Volumenstrom betrachtet, denn in der Rechnung wird am Eintritt das gleiche Geschwindigkeitsprofil verwendet, wie man es beim Experiment in der Symmetrieebene findet. Die Reibung an den Seitenwänden führt bei gleichem Volumenstrom zu einer relativ größeren Maximalgeschwindigkeit im Experiment als in der Rechnung.

Innerhalb des Rezirkulationsgebietes wird die Abweichung noch dadurch verstärkt, daß hier die Annahme einer zweidimensionalen Strömung nicht für das gesamte Gebiet stromabwärts der Stufe zulässig ist. Abbott u. Kline (1962) zeigen bei ihren Experimenten, daß sich direkt nach der Stufe eine dreidimensionale Konfiguration von gegensinnig drehenden Sekundärwirbeln ausbildet. Dies kann durch die zweidimensionale Modellierung in der Rechnung nicht wiedergegeben werden. Als Indiz dafür kann angesehen werden, daß im Gebiet der ausgeprägt dreidimensionalen Strömung direkt hinter der Stufe die größten Unterschiede zwischen Rechnung und Experiment auftreten (vgl. Abbildung 5.4, 5.5, 5.6). Für das Geschwindigkeitsprofil bei  $\frac{x-x_0}{h_s} = 8$  kann aber schon wieder eine bessere Übereinstimmung mit den Experimenten erzielt werden. Diese Stelle liegt schon deutlich außerhalb der Rezirkulationszone und im Experiment hat sich damit in der Mitte des Kanals wieder ein annähernd zweidimensionaler Zustand eingestellt, der von den Rechnungen gut wiedergegeben werden kann.

Insgesamt ergibt sich bei diesem Beispiel eine gute Übereinstimmung der beiden Rechnungen untereinander und eine zufriedenstellende qualitative und quantitative Übereinstimmung mit den Experimenten. Bei diesem Beispiel löst schon das Referenzgitter die wesentlichen Vorgänge der Strömung auf und beide Simulationen beschreiben eine sehr ähnliche Strömung. Die Simulation mit lokaler Verfeinerung zeigt erwartungsgemäß durch die höhere Auflösung des Rezirkulationsgebietes dort eine quantitativ etwas bessere Übereinstimmung mit den Experimenten als die Referenzrechnung ohne lokale Gitterverfeinerung. Die Auswirkungen der lokalen Verfeinerung bleiben auf das verfeinerte Gebiet beschränkt und Gebiete, die weit entfernt von der lokalen Verfeinerung liegen, werden kaum beeinflusst. Der Übergang der Stromlinien in Abbildung 5.3b ist trotz des stufigen Gitterübergangs sehr glatt, womit auf eine korrekte Implementierung des Verfahrens geschlossen werden kann.

### **5.1.2 Laminare Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung**

Als weitere Strömungskonfiguration für die Verifikation des Verfahrens wird die laminare Strömung durch einen Kanal mit einer symmetrischen beidseitigen Erweiterung unter-



sucht. Dieses Problem ist in vielen Experimenten untersucht worden (vgl. Abbott und Kline 1962, Cherdron et. al. 1978). In allen Experimenten konnte beobachtet werden, daß sich bei steigender Reynolds-Zahl zuerst asymmetrische Geschwindigkeitsprofile stromabwärts der Erweiterung ausbilden. Verfolgt man die Strömung weiter, so werden die Profile mit zunehmender Entfernung von der Erweiterung in Abhängigkeit vom betrachteten Parameterbereich wieder symmetrischer oder sie bleiben asymmetrisch. Als Ursache für dieses Phänomen werden Wirbel angesehen, die durch kleine Störungen an den Stufenkanten hervorgerufen werden. Diese Wirbel treten sowohl an der unteren als auch an der oberen Stufenkante auf und wechselwirken mit den Scherschichten an den Grenzen der Rezirkulationsgebiete, wodurch sich die Asymmetrie in den Geschwindigkeitsprofilen ausbilden kann. Nach dem Wiederanlegen der Strömung sind keine Scherschichten mehr im Kanalinnern vorhanden und die Strömung kann sich bei kleineren Reynolds-Zahlen relaminarisieren und symmetrische Profile ausbilden. Bei höheren Reynolds-Zahlen tritt diese Relaminarisierung nicht ein und die Strömung bleibt auch stromab verwirbelt (Cherdron et. al. 1978).

### Problembeschreibung

In Abbildung 5.9 ist die Geometrie der betrachteten Strömung dargestellt. Dabei bezeichnet  $h$  die Kanalhöhe im Einlauf und  $H$  die Kanalhöhe nach der symmetrischen Erweiterung, bei der der Nullpunkt  $x_0$  definiert ist. Bezogen auf diesen Nullpunkt wurden von Cherdron et. al. Geschwindigkeitsmessungen u. a. bei einer Reynolds-Zahl von  $Re = 287$  an 5 Stellen stromabwärts der Erweiterung, bei

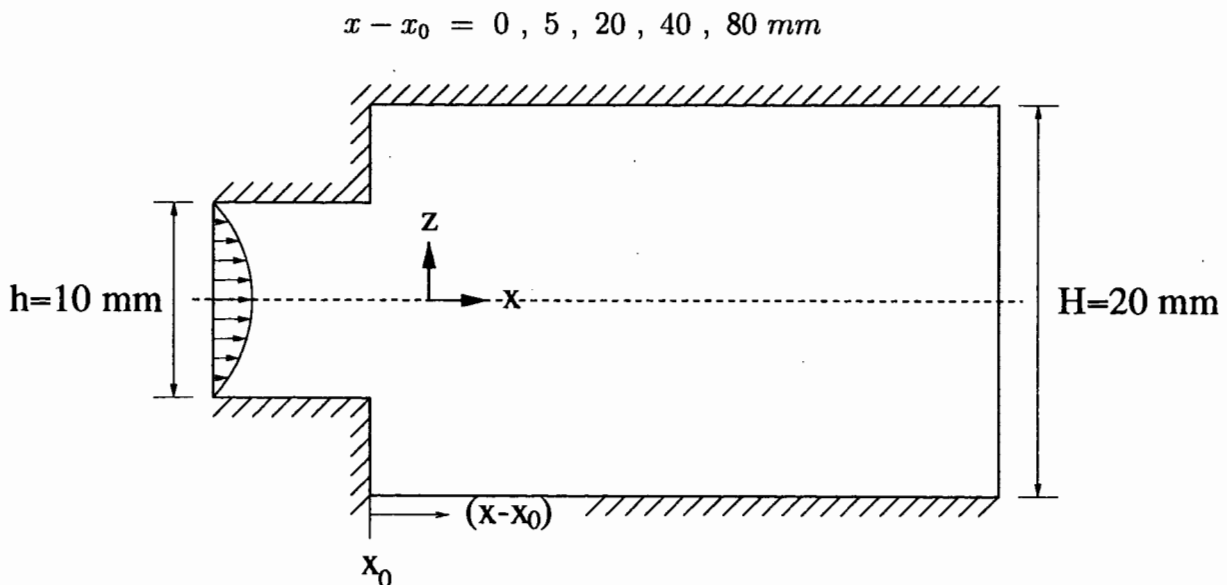


Abbildung 5.9: Definition der Geometrie bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung nach Cherdron et. al. (1978)

durchgeführt. Der Kanal im Experiment war 40 mm breit, womit man einen hydraulischen Durchmesser von

$$D_H = \frac{4A}{U} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (5.4)$$

erhält. Aus der Definition der Reynolds-Zahl als

$$Re = \frac{u_B D_H}{\nu} \quad (5.5)$$

erhält man mit der Viskosität von Luft bei Normbedingungen eine mittlere Einlaufgeschwindigkeit  $u_B$  von

$$u_B = 0,27534 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.6)$$

### Numerische Modellierung

Da im Experiment eine voll ausgebildete laminare Strömung im Einlauf zu finden war, wird als Eintrittsbedingung eine parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung mit einer Maximalgeschwindigkeit von  $1,5 \cdot u_B$  vorgegeben. An der Austrittsfläche wird die hydrostatische Druckverteilung infolge des Schwerkraftvektors als Druckrandbedingung verwendet. An Boden und Decke des Kanals wird die Haftbedingung verwendet und die Seitenwände werden als reibungsfreie Wände modelliert.

Als Anfangsbedingungen wird für den Druck die hydrostatische Druckverteilung, für die Geschwindigkeiten, außer dem Eintrittsprofil, ein ruhendes Fluid und für die Temperaturen der isotherme Temperaturwert des Experiments im gesamten Rechengebiet angenommen. Da das Experiment bei einer konstanten Temperatur durchgeführt wurde, wird auch in der numerischen Simulation keine Energiegleichung gelöst.

In Abbildung 5.10 sind die Diskretisierungen dieser Geometrie a) ohne und b) mit lokaler Verfeinerung des Gitters im Bereich der Erweiterung dargestellt. Durch die lokale Verfeinerung wird der Bereich der Ablösung an der oberen und unteren Stufenkante besser aufgelöst und soll zu einer besseren Beschreibung des Strömungsverhaltens innerhalb der Rezirkulationen beitragen.

Auch hier wurde die Simulation aus den genannten Anfangswerten in einen stationären Endzustand gerechnet. Der stationäre Endzustand wurde, wie im ersten Verifikationsbeispiel (s. Unterkapitel 5.1.1), als erreicht angesehen, wenn die normierten Änderungen der Geschwindigkeiten eine vorgegebene Schranke  $EPS$  unterschritten.

In Tabelle 5.3 sind die Simulationsparameter für die beiden Simulationen dieses Falles zusammengestellt. Die Bezeichnungen folgen der vorgestellten Bezeichnungsweise im vorherigen Unterkapitel 5.1.1.

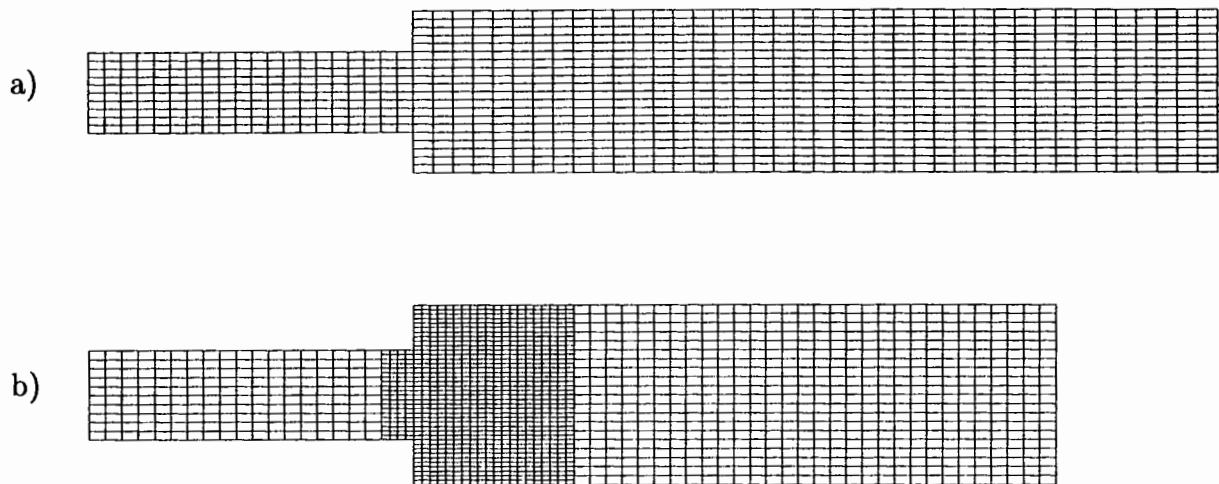


Abbildung 5.10: Räumliche Diskretisierung der Erweiterung bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Kanalaufweitung, a) ohne lokale Verfeinerung und b) mit lokaler Verfeinerung

Fall	$DX_{min}$	$DX_{max}$	$DZ_{min}$	$DZ_{max}$	NM	EPS	IT
unverfeinert	0,002	0,0025	0,001	0,001	1000	$3 \cdot 10^{-6}$	213
verfeinert	0,0005	0,002	0,0005	0,001	1660	$2 \cdot 10^{-6}$	513

Tabelle 5.3 Simulationsparameter bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Erweiterung

### Ergebnisse und Diskussion

Die Strömung tritt in einem volleingelaufenen laminaren Zustand in die Geometrie ein und bildet sowohl nach der oberen als auch nach der unteren Stufe einen Ablösewirbel. Die Strömung legt sich dann nach einer gewissen parameterabhängigen Lauflänge an Boden wie Decke wieder an und bildet wieder ein laminares Strömungsprofil aus (vgl. das Stromlinienfeld in Abbildung 5.11).

Zur Verifikation der Ergebnisse stehen Messungen der axialen Geschwindigkeitskompo-

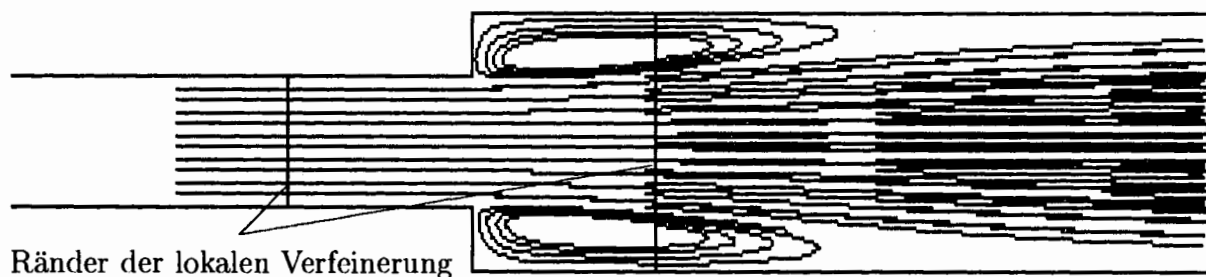


Abbildung 5.11: Stromlinienfeld bei der laminaren Strömung durch eine symmetrische Erweiterung

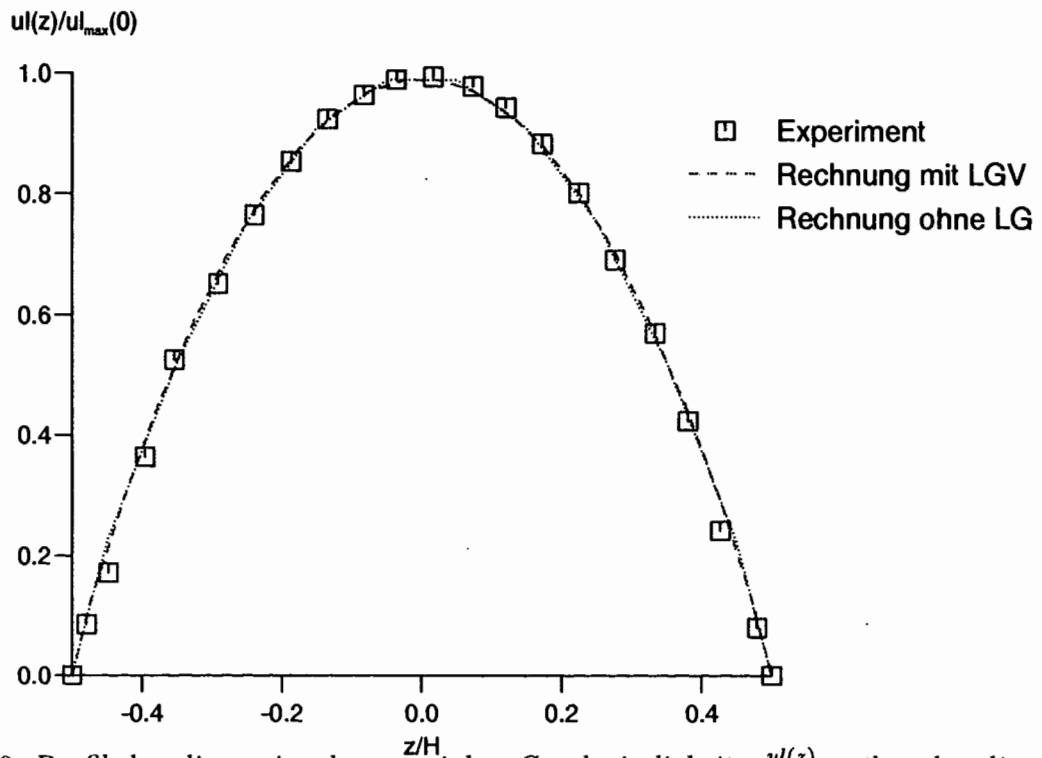


Abbildung 5.12: Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit  $\frac{u(z)}{u_{max}(0)}$  über der dimensionslosen Kanalhöhe  $\frac{z}{H}$  für  $x - x_0 = 0$

nente über der Koordinate  $z$  (vgl. Abbildung 5.9) an verschiedenen axialen Meßpunkten zur Verfügung. In den Abbildungen 5.12 bis 5.16 sind die berechneten Geschwindigkeitsprofile den jeweils im Experiment gemessenen Profilen dimensionslos gegenübergestellt, wobei die Geschwindigkeiten auf die maximale Geschwindigkeit am Eintritt  $u_{max}(0)$  und die  $z$ -Koordinate auf die Kanalhöhe  $H$  bezogen werden.

Das Profil an der Stufenkante (vgl. Abbildung 5.12) wird sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gut wiedergegeben. Die Maximalgeschwindigkeit ist hier in beiden Rechnungen um deutlich weniger als 1% kleiner als der experimentelle Wert. In der weiteren Entwicklung nimmt die Unterschätzung der Maximalgeschwindigkeit jedoch stark zu und beträgt an der letzten Meßstelle bei  $x - x_0 = 80 \text{ mm}$  ca. 14% (vgl. Abbildung 5.16).

Die Ursache hierfür liegt wiederum im Einfluß der Reibung an den Seitenwänden. Der im Experiment untersuchte Kanal hatte nur ein Seitenverhältnis von 2, d. h. seine Breite war zweimal größer als seine Höhe. In diesem Kanal gibt es aufgrund des geringen Seitenverhältnisses mit Sicherheit einen deutlichen Einfluß von Sekundärwirbeln. Kim et. al. (1980) führen ihre Experimente in einem Kanal mit einem Seitenverhältnis von 16 bzw. 24 durch, um festzustellen, wie groß das Seitenverhältnis sein muß, um in der Mittelebene von den Seitenwänden unbeeinflusste Strömungsbedingungen vorzufinden. Dies steht in Übereinstimmung mit De Brederode und Bradshaw (1972), die für einen zweidimensionalen Strömungszustand in der Kanalmitte ein Seitenverhältnis von mindestens 10 fordern. In den Rechnungen wurden die Seitenwände als reibungsfreie Wände modelliert. Diese Modellierung führt bei diesem geringen Seitenverhältnis im Experiment dazu, daß

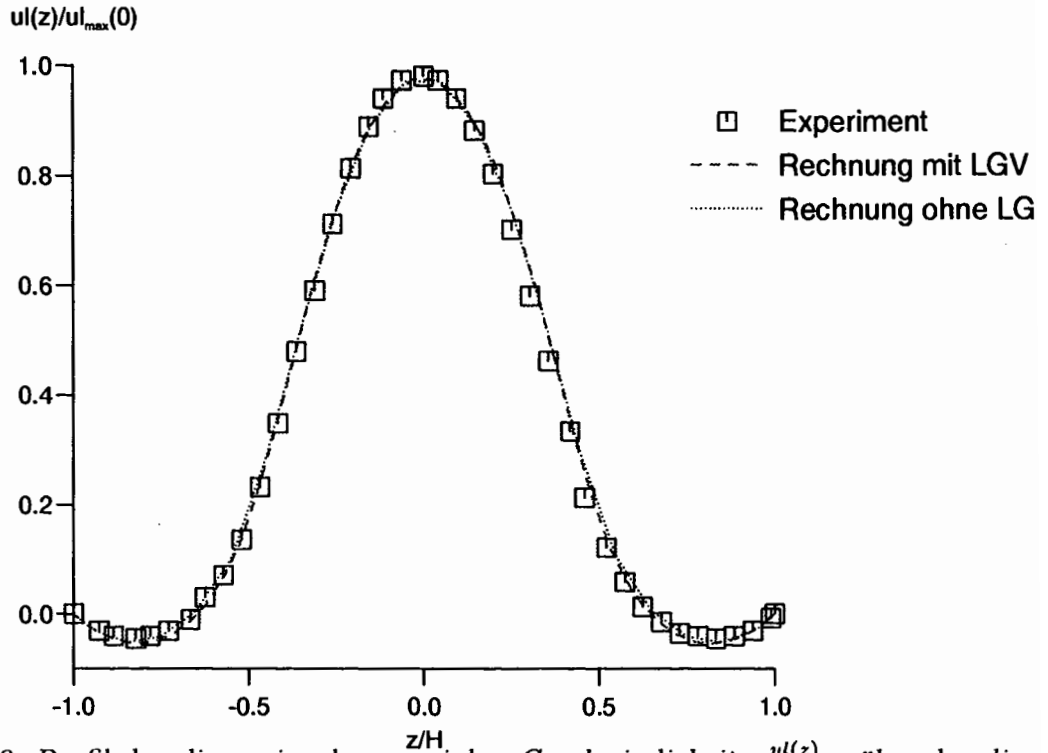


Abbildung 5.13: Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit  $\frac{u(z)}{u_{\max}(0)}$  über der dimensionslosen Kanalhöhe  $\frac{z}{H}$  für  $x - x_0 = 5 \text{ mm}$

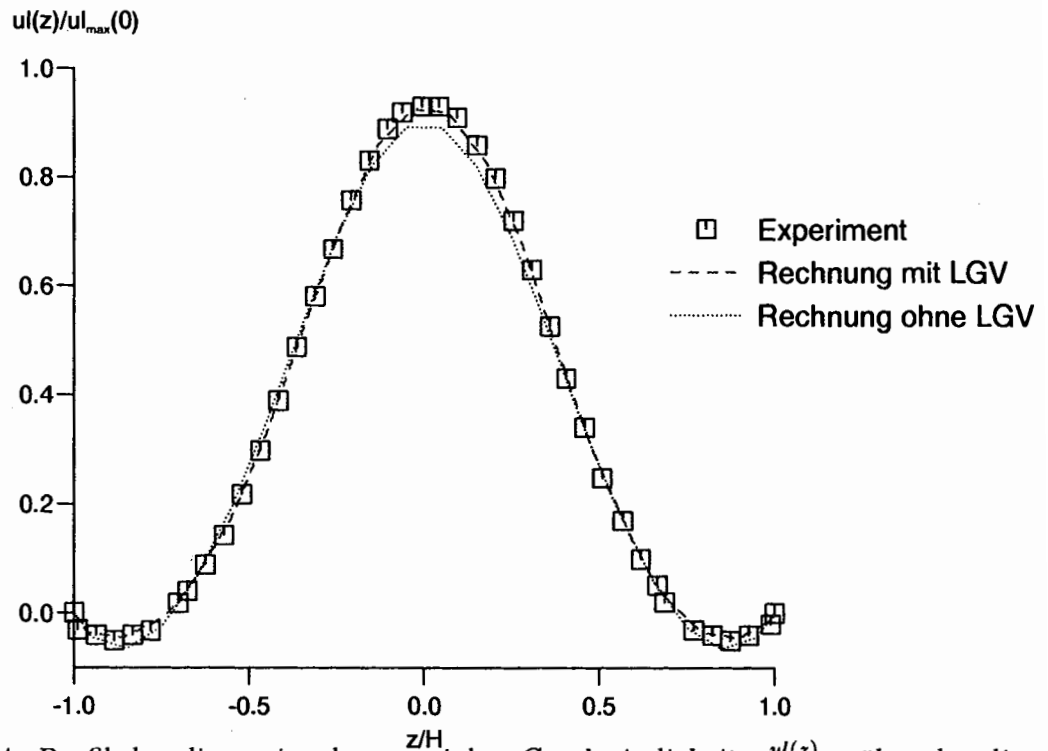


Abbildung 5.14: Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit  $\frac{u(z)}{u_{\max}(0)}$  über der dimensionslosen Kanalhöhe  $\frac{z}{H}$  für  $x - x_0 = 20 \text{ mm}$

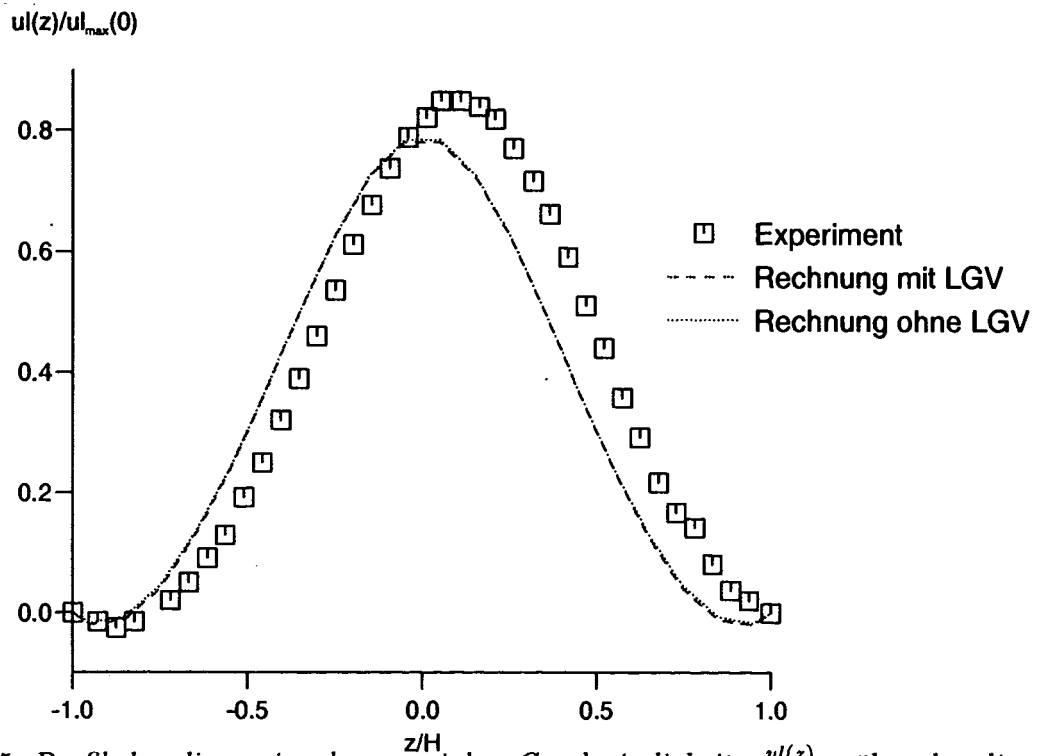


Abbildung 5.15: Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit  $\frac{u(z)}{u_{\max}(0)}$  über der dimensionslosen Kanalhöhe  $\frac{z}{H}$  für  $x - x_0 = 40 \text{ mm}$

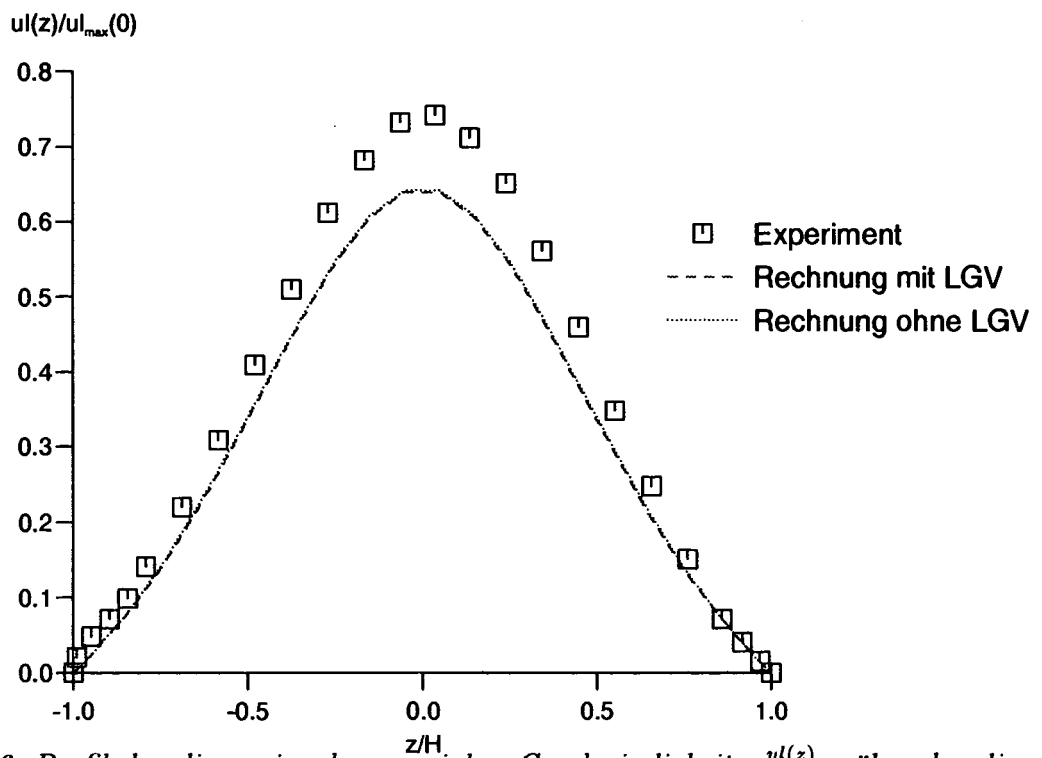


Abbildung 5.16: Profil der dimensionslosen axialen Geschwindigkeit  $\frac{u(z)}{u_{\max}(0)}$  über der dimensionslosen Kanalhöhe  $\frac{z}{H}$  für  $x - x_0 = 80 \text{ mm}$

die Geschwindigkeiten in den Rechnungen unterschätzt werden. Eine dreidimensionale Rechnung, bei der die Seitenwände mit einer Haftbedingung versehen werden, würde den Einfluß der Sekundärströmungen in Folge der Seitenwände richtig wiedergeben. Da dies nur zu einer quantitativen Verbesserung der Ergebnisse führen würde, wird an dieser Stelle auf eine solche, rechenaufwendige Rechnung verzichtet.

In Abbildung 5.15 erkennt man darüber hinaus, daß die im Experiment gemessene Asymmetrie von den beiden Rechnung nicht nachvollzogen wird. Die Rechnungen liefern ein nahezu symmetrisches Ergebnis. Um den Einfluß von Störungen im Einlauf näher zu untersuchen, wurde eine Rechnung durchgeführt, bei der die Position der Maximalgeschwindigkeit des Einlaufgeschwindigkeitsprofils um 5% der Kanalhöhe aus der Symmetrieachse der Geometrie heraus versetzt vorgegeben wurde. Die berechnete Strömung zeigte daraufhin ein stark asymmetrisches Verhalten der beiden Rezirkulationsgebiete. Weiter stromabwärts dieser Gebiete ergab sich dann aber wieder ein fast symmetrisches Geschwindigkeitsprofil, was qualitativ die Vorgänge im Experiment recht gut beschreibt.

Die Gründe für die im Experiment beobachteten Asymmetrien werden von den Experimentatoren eindeutig zeitabhängigen Phänomenen zugeordnet, wie der Ablösung von Wirbeln an den beiden Stufenkanten. Die durchgeführten stationären Rechnungen können diese zeitabhängigen Effekte nicht simulieren, sondern bestenfalls ein zeitliches Mittel dieser Vorgänge beschreiben. Eine transiente Simulation dieser Strömung könnte eine bessere Beschreibung der Vorgänge im Experiment liefern. Da jedoch beide Rechnungen die Strömung in dem diskutierten Rahmen dessen simulieren, was die Simulation mit den gewählten Rahmenbedingungen liefern kann, wird auf eine transiente Simulation verzichtet.

Bei diesem Verifikationsbeispiel beschreibt die Simulation mit lokaler Gitterverfeinerung aufgrund der besseren Auflösung des Rezirkulationsgebietes das Geschwindigkeitsfeld an den Meßstellen  $x - x_0 = 5 \text{ mm}$  und  $x - x_0 = 20 \text{ mm}$  quantitativ etwas besser als die Simulation ohne lokale Gitterverfeinerung. An den hinteren Meßstellen ist nahezu kein Unterschied mehr vorhanden, da hier die beiden Simulationen auf fast identischen Gittern durchgeführt wurden. Auch bei diesem Beispiel sind in den Ergebnissen keinerlei Unstetigkeiten trotz des unstetigen Gitters an den Rändern der Verfeinerung zu erkennen. Der Eingriff durch die lokale Gitterverfeinerung wirkt sich auch hier wirklich nur lokal positiv aus. Bereiche des Simulationsgebietes, die weit entfernt von dem verfeinerten Gebiet liegen, erfahren nur eine geringe Änderung durch die lokale Verfeinerung; insbesondere werden keine weiteren Fehler eingebracht.

Das Ziel der Verifikation, die Ergebnisse der Referenzrechnung zumindest zu reproduzieren, kann sowohl bei diesem Beispiel als auch bei dem vorherigen Beispiel in Unterkapitel 5.1.1 für die Umsetzung in den Impulsgleichungen und der Druckgleichung als erreicht angesehen werden.

### 5.1.3 Turbulente Strömung hinter einem Düsenblock

In den beiden ersten Fällen wurde das Verfahren für die Impulsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Druckgleichung verifiziert. In diesem Unterkapitel wird die Verifikation auf eine turbulente Strömung mit Wärmeübergang ausgedehnt.

Als Beispiel hierfür wird eine Strömung gewählt, die Krebs (1979) am Forschungszentrum Karlsruhe experimentell untersucht hat. Für diese turbulente Strömung in einem zylindrischen Rohr hinter einem Düsenblock bei einer Reynolds-Zahl von  $Re = 308000$  liegen sehr gute Meßdaten vor, die auch bereits bei der Verifikation eines verbesserten Turbulenzmodells benutzt wurden (Carteciano 1996).

#### Problembeschreibung

In Abbildung 5.17 ist der Versuchsaufbau des Experiments von Krebs dargestellt. Bei diesem Experiment wird ein zylindrisches Rohr mit einem Durchmesser von  $D = 110\text{ mm}$  und einer Länge von  $L = 2146\text{ mm}$  mit Wasser bei  $20^\circ\text{ C}$ , einem Druck von 1 bar und einer Geschwindigkeit von  $2,8\text{ m/s}$  durchströmt. In der Einlaufstrecke befinden sich Glättungs-siebe, die die Turbulenz gleichmäßig machen. Danach durchströmt das Fluid einen zylindrischen Düsenblock mit Bohrungen von  $d = 7,2\text{ mm}$ . Anschließend tritt es in die Meßstrecke ein, bei der ein Meßfühler an insgesamt 48 verschiedenen axialen Meßpunkten die Geschwindigkeiten bzw. Temperaturen in der Meßebeine bei verschiedenen Winkeln aufnehmen kann. Im zentralen Kanal auf der Symmetrieachse strömt Wasser mit der gleichen Geschwindigkeit, aber mit einer um  $\Delta T = 10,65\text{ K}$  erhöhten Temperatur zu. Diese Temperaturstörung in der Mitte der Strömung breitet sich durch Leitungs- und Konvektionsvorgänge stromabwärts des Düsenblocks aus.

#### Numerische Modellierung

Die Meßergebnisse weisen einen dreidimensionalen Strömungszustand aus, bei dem in Umfangsrichtung nur geringfügige Änderungen auftraten. Für die numerische Simulation wird das Experiment daher in einem zweidimensionalen zylindrischem  $r$ - $z$  Koordinatensystem dargestellt. Die Symmetrielinie an der Kanalmittelachse wird als reibungsfreie und adiabate Wand abgebildet, da es sichergestellt ist, daß durch die Symmetrie die radialen Gradienten auf der Symmetrieachse verschwinden und keine radialen Geschwindigkeiten zulässig sind. Die Kanalaußenwand wird als reibungsbehaftete und adiabate Wand modelliert. Als Eintrittsbedingungen werden die gemessenen Geschwindigkeits-, und Temperaturprofile und die Profile der turbulenten Größen bei  $\frac{z}{d} = 20$  vorgegeben. Am Austritt wird die hydrostatische Druckverteilung als Druckrandbedingung verwendet. Die turbulenten Austauschvorgänge werden durch ein  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell modelliert. Damit sind zusätzlich die Gleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und deren Dissipationsrate  $\varepsilon$  zu lösen. Durch das  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodell können die turbulenten Schubspannungen unter



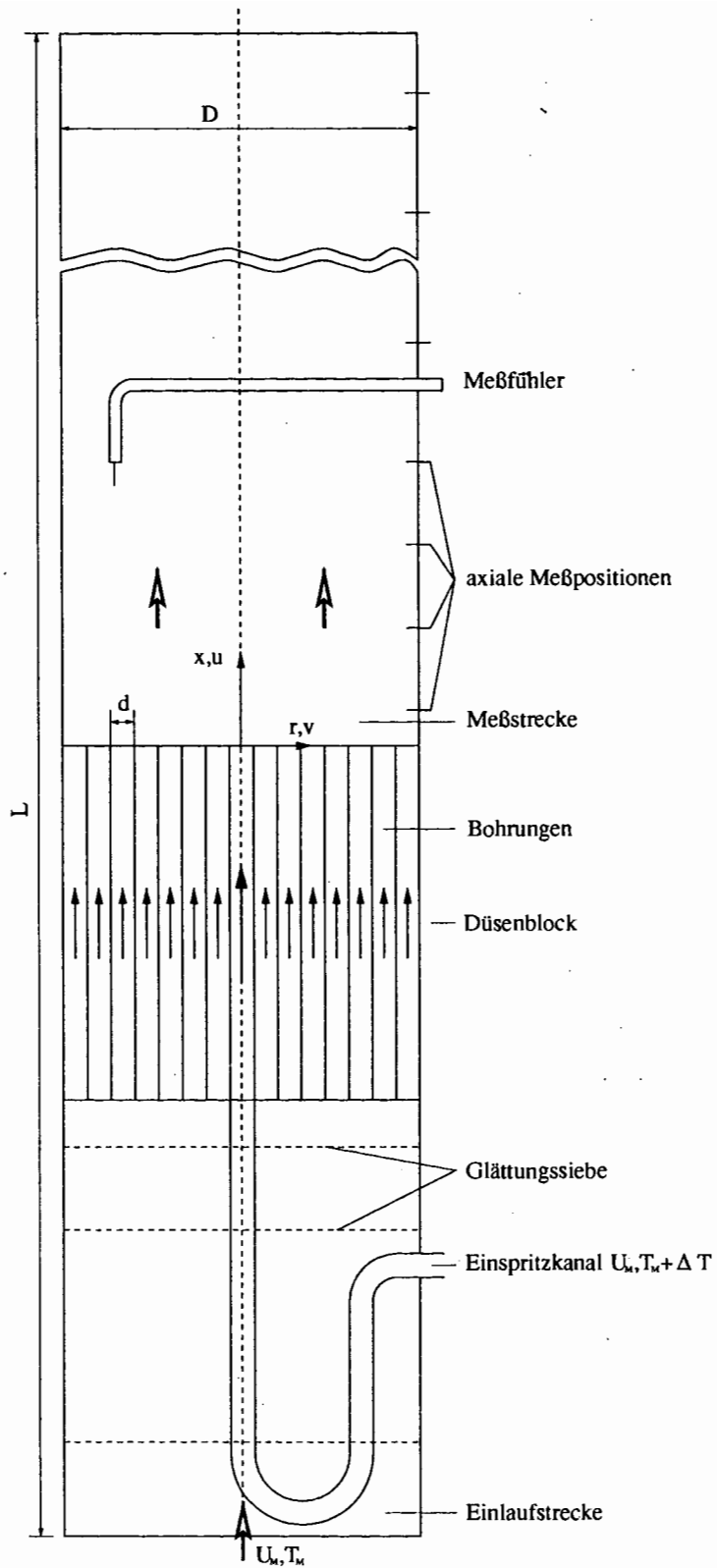


Abbildung 5.17: Versuchsaufbau zur Untersuchung der Ausbreitung von Temperaturstörungen hinter einem Düsenblock nach Krebs (1979)

Annahme einer isotropen Wirbeldiffusivität berechnet werden. Die turbulenten Wärmeströme werden unter Annahme der Reynoldsschen Analogie und damit durch Einführung der turbulenten Prandtl-Zahl modelliert.

In Abbildung 5.18 sind die beiden verwendeten Diskretisierungen dargestellt. Abbildung 5.18a zeigt das lokal unverfeinerte Gitter und 5.18b das lokal verfeinerte Gitter. Das Gitter wurde dabei in der Nähe der Kanalmitte und am Anfang des Kanals verfeinert, da in diesem Bereich die Einspeisung mit dem Fluid höherer Temperatur im Zentralkanal am stärksten wirksam ist. Durch diese Einspeisung treten am Rand dieses Strahls die größten Temperaturgradienten auf, die bei dem lokal verfeinerten Gitter wesentlich genauer aufgelöst werden sollen. Mit zunehmender Kanallänge wird die Temperaturüberhöhung abgebaut und es ist dann möglich, die wesentlich geringeren Temperaturgradienten durch ein gröberes Gitter aufzulösen.

In Tabelle 5.4 sind die Simulationsparameter für die beiden Simulationen dieses Falles zusammengestellt.

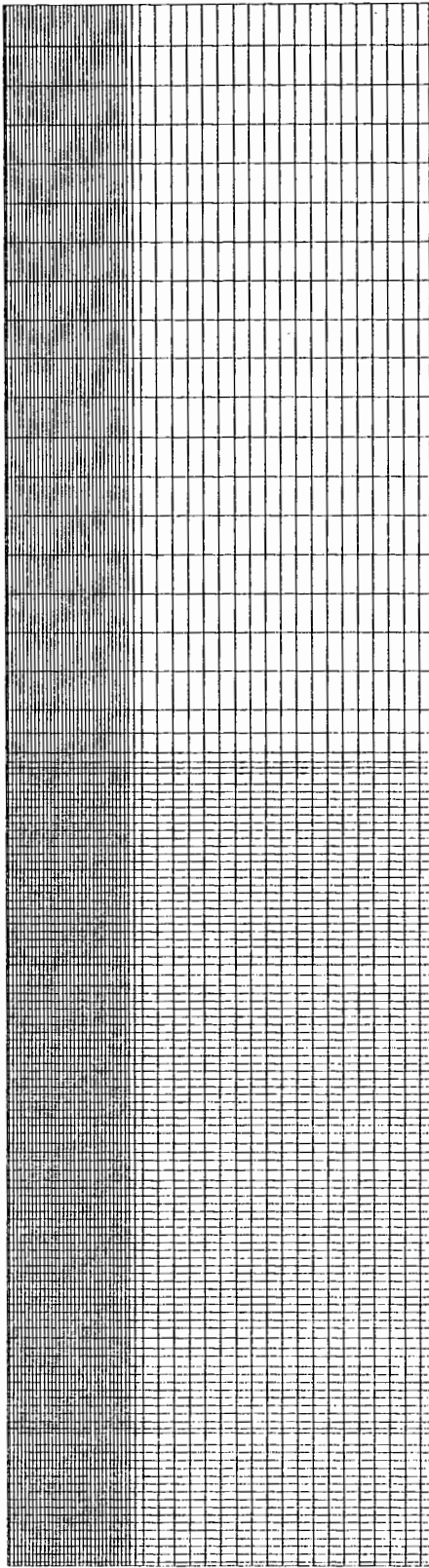
Fall	$DX_{min}$	$DX_{max}$	$DZ_{min}$	$DZ_{max}$	NM	$EPS$	IT
unverfeinert	0,00025	0,002	0,005	0,052	6466	$1 \cdot 10^{-6}$	10919
verfeinert	0,000125	0,002	0,0025	0,05	6127	$1 \cdot 10^{-6}$	17482

Tabelle 5.4 Simulationsparameter bei der turbulenten Strömung hinter einem Düsenblock

## Ergebnisse und Diskussion

Die über dem Radius gemessenen Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 5.19 den berechneten Profilen in verschiedenen axialen Abständen vom Düsenblock gegenübergestellt. Dabei wurde das Geschwindigkeitsprofil bei  $\frac{z}{d} = 20$  als Eintrittsbedingung für die numerische Simulation benutzt. In den Ebenen  $\frac{z}{d} = 27, 93, 162$  sind die experimentellen Werte den berechneten Werten auf den verschiedenen Gittern gegenübergestellt. Man erkennt dabei, daß schon das unverfeinerte Gitter die Gradienten im Geschwindigkeitsfeld gut auflöst. Nur in der Ebene  $\frac{z}{d} = 93$  liefert die Rechnung mit lokaler Verfeinerung des Gitters in der Nähe der Kanalmitte eine etwas bessere Übereinstimmung mit dem experimentellen Profil. Generell wird mit Ausnahme des hier weniger interessierenden wandnahen Bereichs die Entwicklung der Geschwindigkeiten entlang des Kanals gut wiedergegeben. Lokal auftretende Abweichungen zwischen Experiment und Simulation sind nach Carteciano (1996) im wesentlichen auf Mängel des Turbulenzmodells zurückzuführen. Die Temperaturstörung, die durch Einspritzung von wärmerem Wasser in der Kanalmitte der Strömung überlagert wird, wird hingegen nicht richtig wiedergegeben. In Abbildung 5.20 sind die berechneten Temperaturprofile den experimentell gemessenen in verschiedenen Ebenen gegenübergestellt. Bereits in der ersten Vergleichsebene bei  $\frac{z}{d} = 44$  werden in beiden Rechnungen zu geringe Temperaturen berechnet.

a)



b)

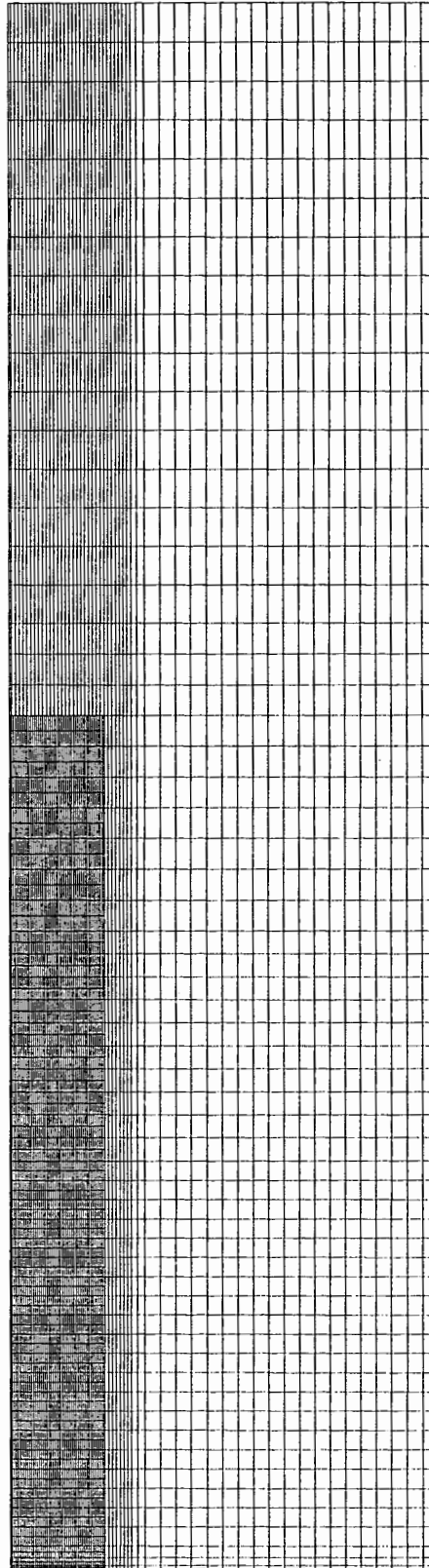


Abbildung 5.18: Diskretisierung des zylindrischen Rohres, a) lokal unverfeinertes und b) in der Nähe der Kanalmitte lokal verfeinertes Gitter

Dies liegt nach Carteciano (1996) hauptsächlich an der Modellierung des turbulenten Wärmestroms. Eine Annahme des  $k - \varepsilon$  Turbulenzmodells ist die Isotropie der turbulenten Diffusivitäten. Diese Isotropie ist im Temperaturfeld nicht gegeben, da hier nach der Einspeisung des warmen Wassers in radialer Richtung wesentlich größere Temperaturgradienten auftreten als in axialer Richtung. Dies führt dazu, daß zu große radiale turbulente Wärmeströme modelliert werden und die Temperaturstörung damit in den Rechnungen zu schnell radial umverteilt wird.

Bei einer Verfeinerung des Gitters in der Nähe der Kanalachse am Eintritt in das Rechenggebiet tritt dieser Effekt nicht so stark auf. In der Kanalmitte hat das radiale Temperaturprofil aufgrund der Symmetrie einen horizontalen Gradienten. Der Betrag dieses Gradienten nimmt zuerst mit wachsendem radiale Abstand von der Kanalmitte bis zum

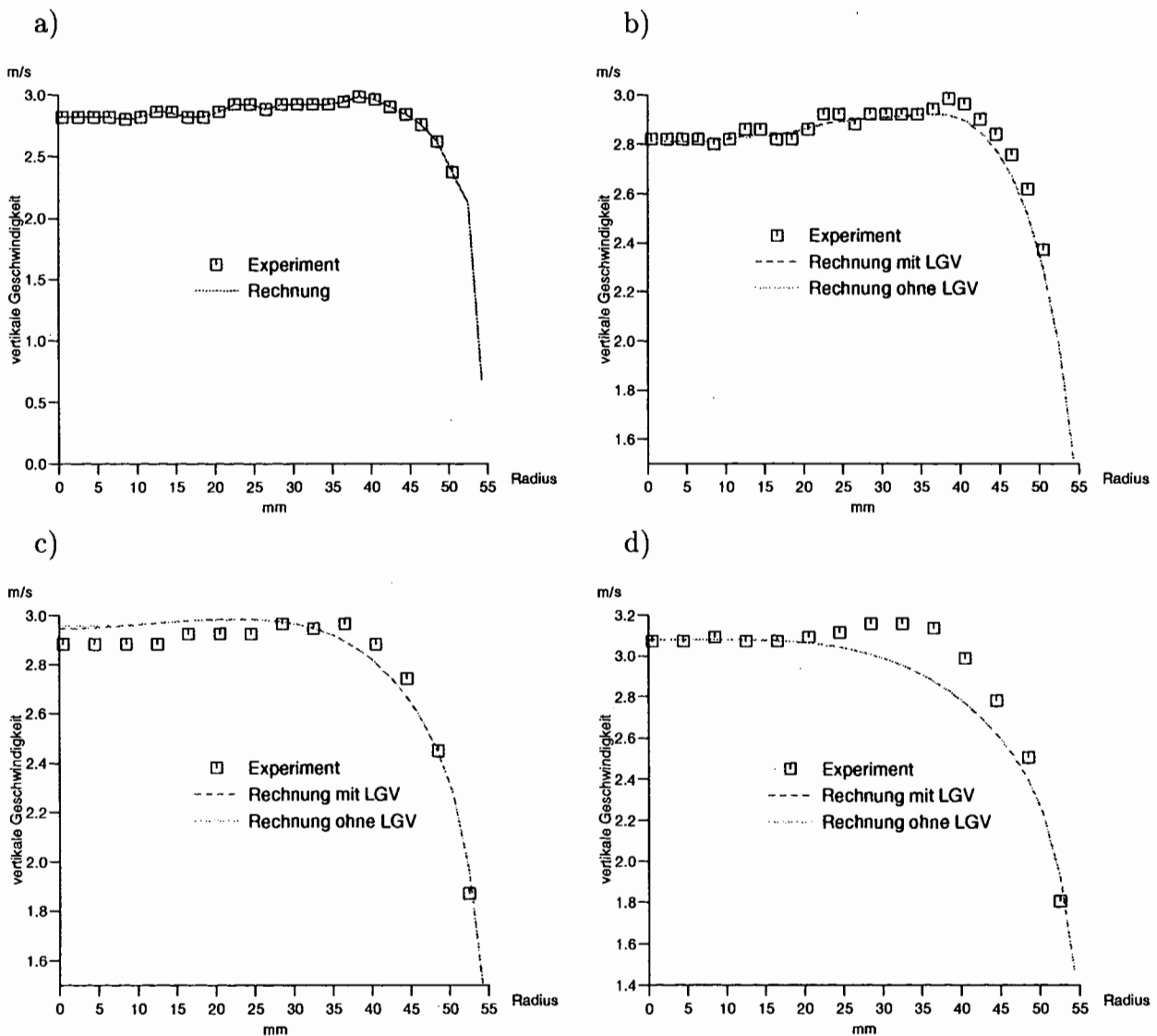


Abbildung 5.19: Geschwindigkeitsprofile über dem Radius bei a)  $\frac{z}{d} = 20$ , b)  $\frac{z}{d} = 27$ , c)  $\frac{z}{d} = 93$ , d)  $\frac{z}{d} = 162$

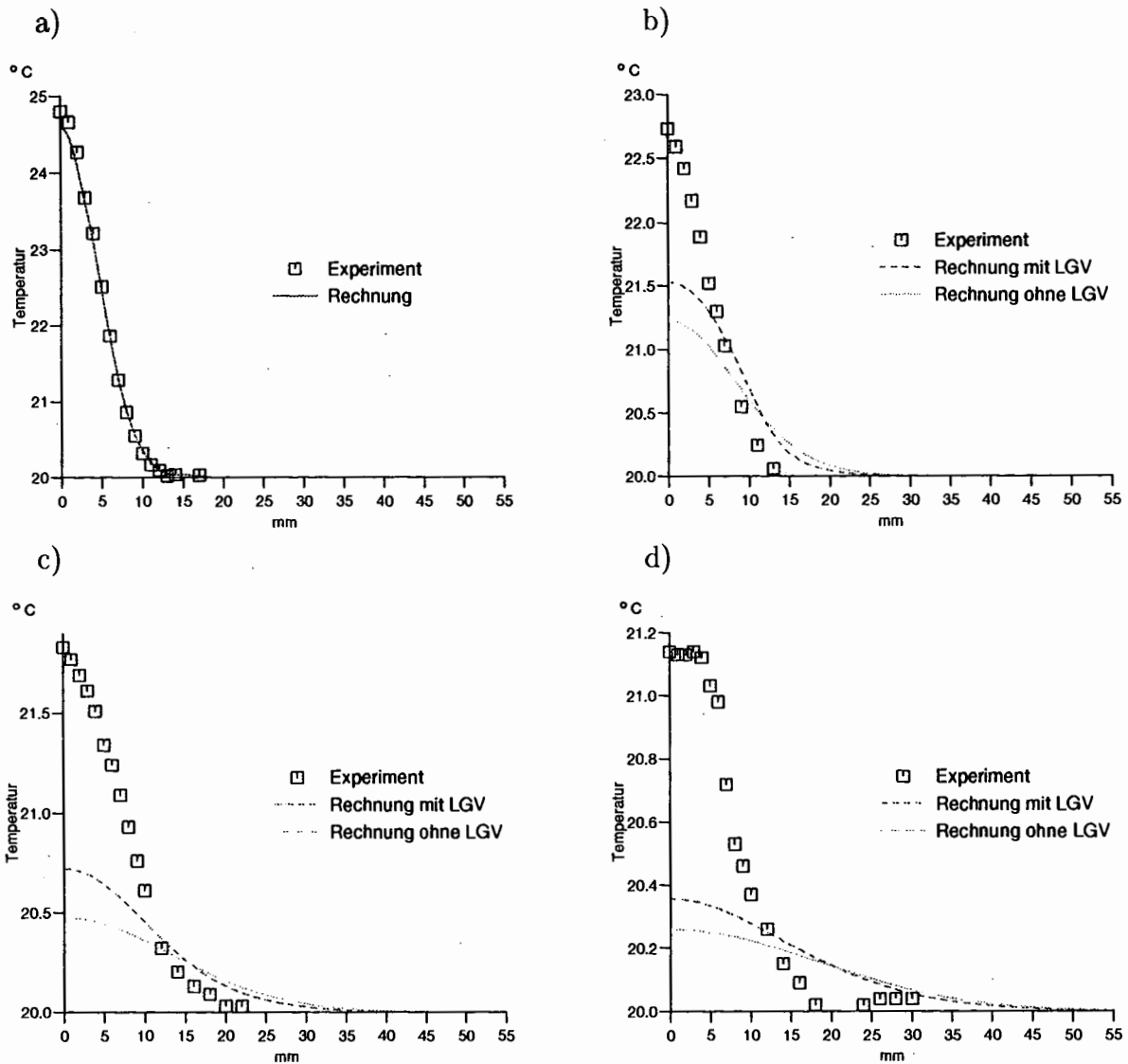


Abbildung 5.20: Temperaturprofile über dem Radius bei a)  $\frac{z}{d} = 20$ , b)  $\frac{z}{d} = 44$ , c)  $\frac{z}{d} = 93$ , d)  $\frac{z}{d} = 162$

Wendepunkt zu. Danach nimmt er wieder ab, um an der Außenwand wieder in einen horizontalen Gradienten überzugehen, da hier eine adiabate Wand angenommen wird. Im Bereich eines wachsenden radialen Temperaturgradienten wird aufgrund der Mittelung über die radiale Ausdehnung der einzelnen Volumina auf dem groben Gitter numerisch ein größerer Temperaturgradient simuliert als auf dem lokal verfeinerten Gitter (vgl. Abbildung 5.21b). Dies führt bei der Rechnung auf dem lokal verfeinerten Gitter zu einem geringeren modellierten radialen turbulenten Wärmestrom und damit zu einer besseren Übereinstimmung der Rechnung mit dem Experiment.

Auch an diesem Beispiel kann das Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters verifiziert werden. Bei diesem Beispiel konnte durch die lokale Verfeinerung eine signifikante Verbesserung bei der Lösung der thermischen Energiegleichung und damit

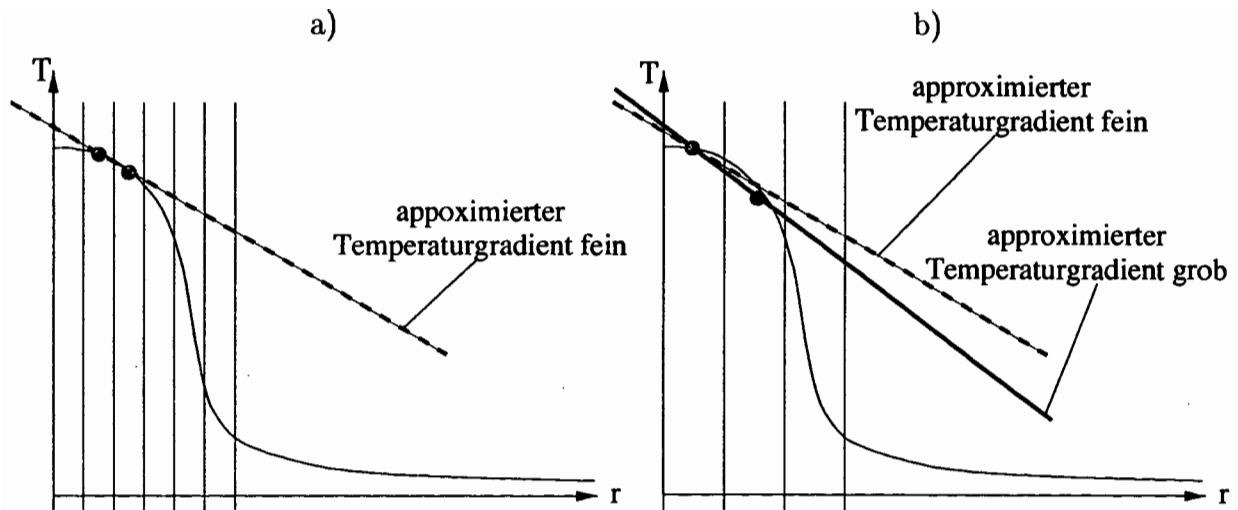


Abbildung 5.21: Numerisch approximierter Temperaturgradient in der Nähe der Kanalachse, a) auf einem feinen Gitter, b) auf einem groben Gitter

eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen als bei der Referenzrechnung auf dem groben Gitter erzielt werden.

#### 5.1.4 Bewertung der Verifikation

Das in Kapitel 3 vorgeschlagene neue Verfahren wurde erfolgreich an drei verschiedenen Beispielen verifiziert. Alle drei Beispiele sind gut dokumentierte Experimente, die auch schon in der Literatur zur Verifikation eingesetzt wurden.

Es konnte gezeigt werden, daß das Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters keine Fehler in die Berechnungen einbringt, da in allen untersuchten Fällen die numerische Referenzlösung zumindest reproduziert werden konnte, die auf einem groben Gitter ohne die methodische Erweiterung durch das Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung berechnet wurde. Es konnte insbesondere beim Auftreten großer Gradienten, die durch das lokal verfeinerte Gitter besser aufgelöst wurden, eine bessere Übereinstimmung mit den Experimenten gefunden werden.

Im folgenden Unterkapitel wird das nun verifizierte Verfahren auf eine typische Strömungskonfiguration angewandt, bei der aus der Möglichkeit der lokalen Verfeinerung ein besonderer Nutzen gezogen werden kann.

## 5.2 Anwendung des Verfahrens

In vielen Bereichen der Forschung und der Industrie gehört die Konvektion, d. h. der Transport von Energie durch die Bewegung des Fluids, zu den wichtigsten Transportmechanismen. Im speziellen wird hier die Naturkonvektion betrachtet, welche sich in einem abgeschlossenen Gefäß durch einen Temperaturgradienten selbständig einstellt. Durch die Temperaturunterschiede im Fluid stellen sich Dichteunterschiede ein. Der Auftrieb des

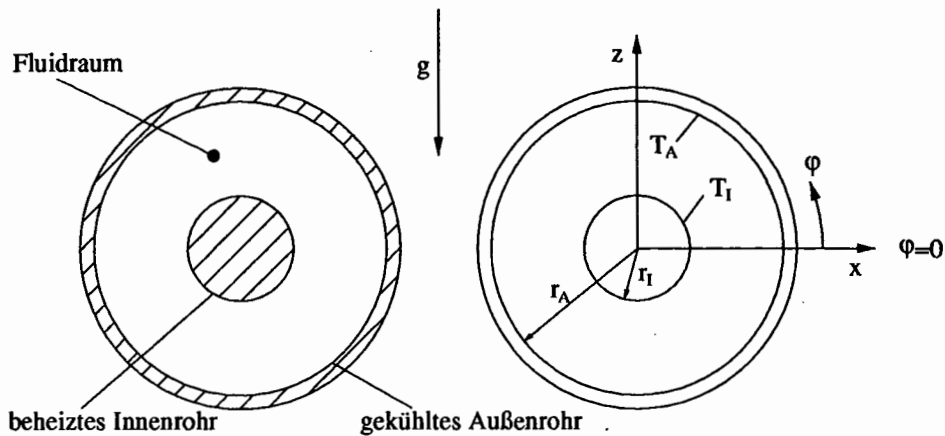


Abbildung 5.22: Definition der Geometrie und des Koordinatensystems bei einem horizontalen beheizten Ringspalt

leichteren Fluids führt schließlich zu einer Bewegung, d. h. Konvektion, des Fluids.

Die in diesem Unterkapitel betrachtete Geometrie ist ein horizontaler, an der Innenwand beheizter Ringspalt, wie er in Abbildung 5.22 dargestellt ist. Diese Geometrie beschreibt einen typischen Anwendungsfall, wie man ihn im Bereich der Technik als einfaches Modell für den Wärmeaustausch zweier Wärmetauscherrohre oder auch in der Solartechnik bei der Auslegung von Solarkollektoren (vgl. Dudley et. al. 1994) findet.

Bei einer nur geringfügig höheren Innenrohrtemperatur  $T_i > T_a$  wird die Wärme durch reine Wärmeleitung vom Innen- zum Außenrohr transportiert. Bei einer Erhöhung der Innenrohrtemperatur wird der Auftrieb des Fluids über dem warmen Innenrohr größer und das Fluid beginnt aufzusteigen. Das Fluid steigt bis zum kühleren Außenrohr auf. Dort wird es abgebremst und in Umfangsrichtung umverteilt, wodurch sich eine makroskopische Konvektion im gesamten Fluidraum einstellt. Da das Fluid über dem Innenrohr in einem sehr schmalen Bereich aufsteigt, spricht man hier auch von einer Auftriebsfahne. Dieser Strömungszustand ist für einen bestimmten Bereich der Temperaturdifferenz stationär (vgl. Grigull und Hauf 1966). Bei einer weiteren Erhöhung der Temperaturdifferenz wird die zuvor symmetrische Konvektionsform instationär und die Auftriebsfahne beginnt periodisch in Umfangsrichtung zu pendeln.

In den folgenden beiden Teilabschnitten wird zuerst die stationäre Naturkonvektion von Luft bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$  untersucht und mit experimentellen Ergebnissen von Kuehn und Goldstein (1975,1978) verglichen. Daran anschließend wird die instationäre Naturkonvektion von Helium bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  simuliert und den Experimenten von McLeod (1987) gegenübergestellt.

## 5.2.1 Stationäre laminare Strömung in einem beheizten Ringspalt

### Problembeschreibung

In Abbildung 5.23 sind die Geometrie und der schematische Aufbau des Experiments von Kuehn und Goldstein (1975) dargestellt. Da die Temperaturunterschiede über den Auftrieb die treibende Kraft zum Einsetzen der Konvektion liefern, ist es wichtig, die sehr schmale Auftriebsfahne fein aufzulösen. Im unteren Teil der Geometrie bildet sich ein relativ homogener, kühler Bereich aus. Dieser Bereich kann durchaus gröber aufgelöst werden. Es wird daher Ziel dieser Rechnung sein, die Auftriebsfahne durch die lokale Gitterverfeinerung fein aufzulösen und die restlichen Bereiche gröber zu diskretisieren.

### Numerische Modellierung

In der Simulation wird diese  $r-\varphi$ -Geometrie durch eine zweidimensionale Kreisscheibe abgebildet. Als Druckrandbedingung wird eine Ausgleichsmasche in der untersten Zelle auf der vertikalen Symmetrieachse definiert und der Referenzdruck des Experiments dort festgehalten (s. Willerding und Baumann 1996). Für die thermische Energiegleichung wird am Innenrohr von  $T = 48,38^\circ C$  und am Außenrohr eine Temperatur von  $T = 22,08^\circ C$  als isotherme Randbedingung für das jeweilige Rohr vorgegeben.

Verwendet man die Stoffwerte von Luft bei einer mittleren Temperatur von  $T = 35,23^\circ C$ , so erhält man für die Grashof-Zahl  $Gr$  einen Wert von

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} = 6,87 \cdot 10^4 \quad , \quad (5.7)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\beta$  der Volumenausdehnungskoeffizient,  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenrohr,  $L$  die Spaltweite, d. h. die Differenz zwischen

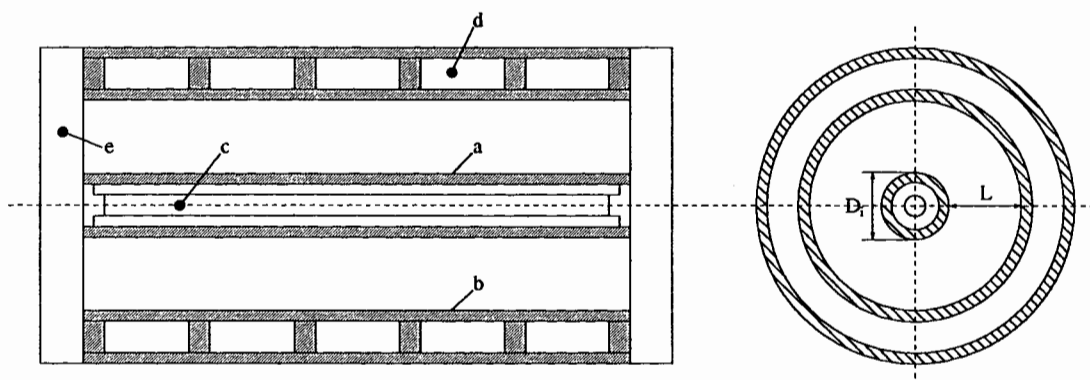


Abbildung 5.23: Geometrie der Konvektion in einem horizontalen beheizten Ringspalt nach Kuehn und Goldstein (1975), a Innenrohr, b Außenrohr, c Heizung, d Kühlkanäle, e Plexiglasabschluss



Außen- und Innenradius, und  $\nu$  die kinematische Viskosität bedeuten. Mit der Prandtl-Zahl von Luft bei diesen Bedingungen,  $Pr = 0,714$ , erhält man für die Rayleigh-Zahl  $Ra$  einen Wert von

$$Ra = Pr \cdot Gr = 4,9 \cdot 10^4 \quad , \quad (5.8)$$

welcher sich um ca. 4% von der Rayleigh-Zahl im Experiment  $Ra = 4,7 \cdot 10^4$  unterscheidet. Bei Naturkonvektion wird die Bewegung durch Dichteunterschiede des Fluids ausgelöst. Diese Dichteunterschiede sind im wesentlichen Folge der Temperaturunterschiede im Fluid. Deshalb ist eine genaue Beschreibung des Temperaturfeldes eine Voraussetzung, um die Naturkonvektion gut simulieren zu können. Die größten Temperaturgradienten sind in der Nähe der Auftriebsfahne oberhalb des warmen Innenrohrs zu erwarten. Dort löst sich das erwärmte Fluid in einem sehr schmalen Bereich von Innenrohr ab und steigt zum kalten Außenrohr auf. Um diese Temperaturunterschiede gut simulieren zu können, wird die Simulation auf einem Gitter durchgeführt, welches im Bereich dieser Auftriebsfahne lokal verfeinert ist (s. Abbildung 5.24).

In Tabelle 5.5 sind die Simulationsparameter für diese Simulation zusammengestellt. Die Bezeichnungen folgen der vorgestellten Bezeichnungsweise im Unterkapitel 5.1.1. Die minimalen und maximalen Maschenweiten in Umfangsrichtung, d. h.  $DY_{min}$  und  $DY_{max}$ , werden hier allerdings im Gradmaß angegeben.

Fall	$DX_{min}$	$DX_{max}$	$DY_{min}$	$DY_{max}$	NM	EPS	IT
verfeinert	0,00035	0,0016	3,6 °	7,2 °	1540	$1 \cdot 10^{-5}$	1495

Tabelle 5.5 Simulationsparameter bei der stationären, laminaren Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt bei  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$

## Ergebnisse und Diskussion

Das berechnete Geschwindigkeitsfeld ist als Vektorplot in Abbildung 5.25 dargestellt. Man erkennt, wie das warme Fluid entlang des warmen Innenrohrs nach oben aufsteigt, am Außenrohr oben symmetrisch nach beiden Seiten verdrängt wird und am Außenrohr entlang nach unten strömt. Am tiefsten Punkt des Ringspalts treffen sich die beiden seitlichen Strömungen wieder. Da beide Seiten aufgrund der Symmetrie der Strömung den gleichen Impuls tragen, bildet sich ein Staupunkt am tiefsten Punkt des Außenrohres aus. Aus Kontinuitätsgründen steigt das Fluid nun wieder auf, um das erwärmte, nach oben in der Auftriebsfahne aufgestiegene Fluid zu ersetzen. Damit gelangt es wieder an den oberen Punkt des Innenrohrs, wo das Fluid ablöst und sich der Vorgang wiederholt.

Die berechneten Temperaturisothermen sind in der linken Hälfte von Abbildung 5.26 dargestellt. Der Strömungspfad spiegelt sich auch an ihrem Verlauf wieder. In der Nähe des Innenrohrs sind die Isolinien höherer Temperatur angesiedelt. Im Bereich der Auftriebsfahne über dem Innenrohr sind diese Isolinien infolge des aufsteigenden, warmen

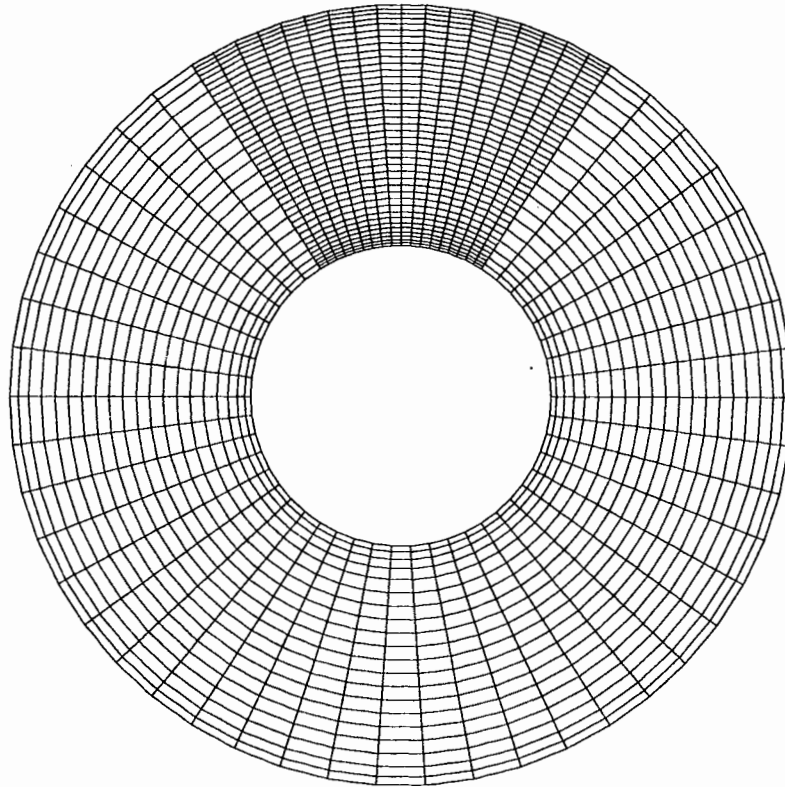


Abbildung 5.24: Die räumliche Diskretisierung des horizontalen beheizten Ringspalts bei  $Ra = 4,9 \cdot 10^4$

Rand der lokalen  
Verfeinerung

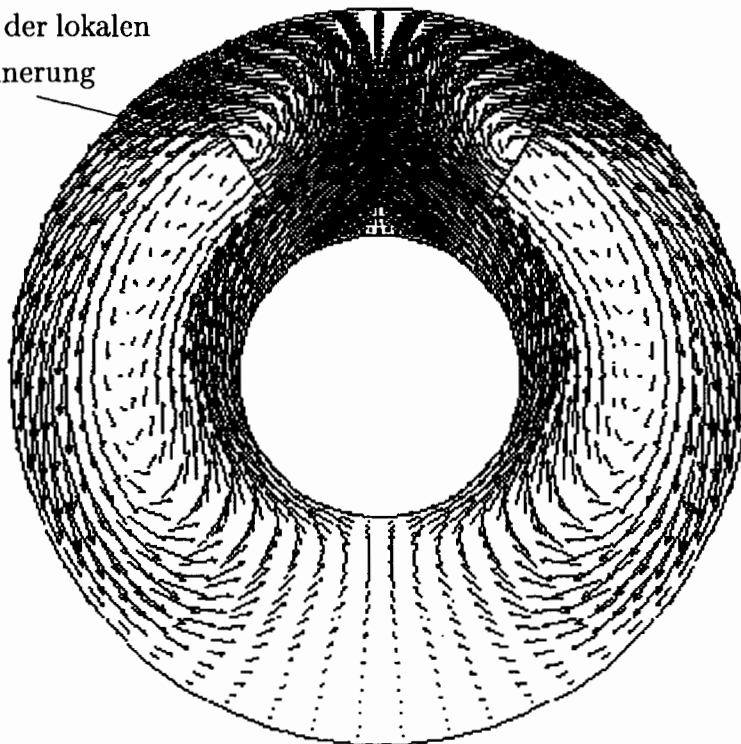


Abbildung 5.25: Vektorplot der mit FLUTAN berechneten Geschwindigkeiten

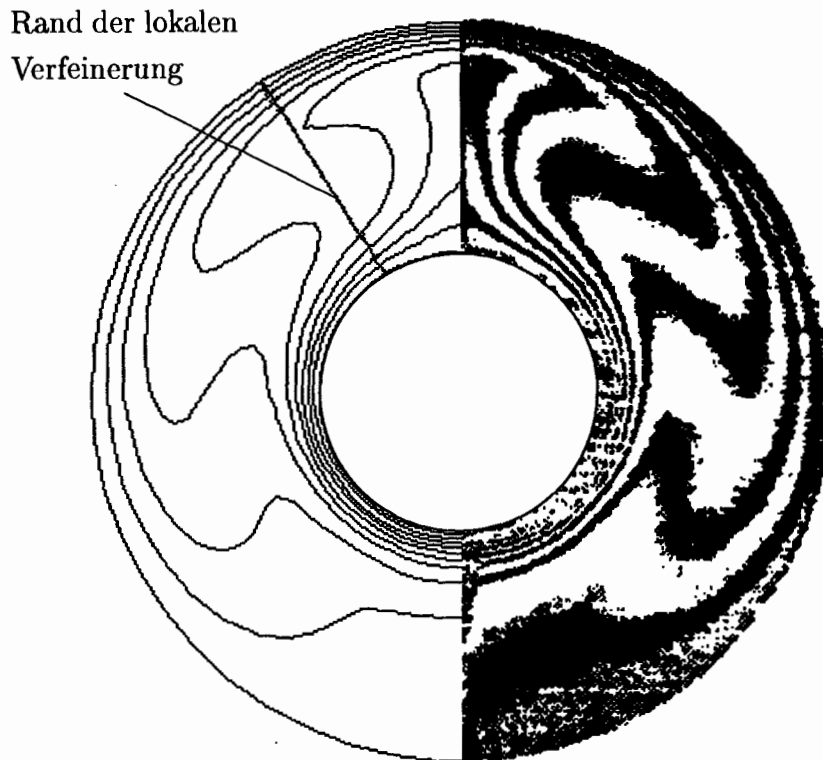


Abbildung 5.26: Vergleich der Temperaturisolines, links Rechnung mit FLUTAN und lokaler Gitterverfeinerung, rechts Interferogrammaufnahmen im Experiment von Kuehn und Goldstein (1978)

Fluids stark nach oben „ausgeweitet“. Im unteren Bereich des Ringspaltes bildet sich ein kühler, stabil geschichteter Pool. Die Inversion in den Isolinien ist eine Folge der außen sich abkühlenden und nach unten gerichteten Strömung und der innen sich erwärmenden und nach oben gerichteten Strömung, die hier im Innern des Ringspaltes eine Scherschicht bilden.

In der rechten Hälfte von Abbildung 5.26 sind Interferogrammaufnahmen des Temperaturfeldes aus dem Experiment von Kuehn und Goldstein (1978) dargestellt. Beide Hälften beschreiben ein sehr ähnliches Temperaturfeld; die qualitative Übereinstimmung ist sehr gut.

Im Experiment von Kuehn und Goldstein (1975) wurden darüber hinaus auch Temperaturmessungen an einigen Winkelpositionen durchgeführt. In Abbildung 5.27 sind die im Experiment gemessenen Werte den simulierten gegenübergestellt. Dabei wird die Temperatur mit der Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenwand dimensionslos gemacht und als  $T^* = \frac{T(r) - T_A}{T_I - T_A}$  über dem dimensionslosen Radius  $r^* = \frac{r - r_I}{r_A - r_I}$  aufgetragen. Der Verlauf der Temperaturen wird dabei sehr gut wiedergegeben, wie es schon die Isolinien der Temperatur in Abbildung 5.26 gezeigt haben. Die Abweichung der berechneten dimensionslosen Temperatur beträgt maximal 5%, was auch eine gute quantitative Übereinstimmung bedeutet.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Simulation und dem Experiment zeigt sich bei

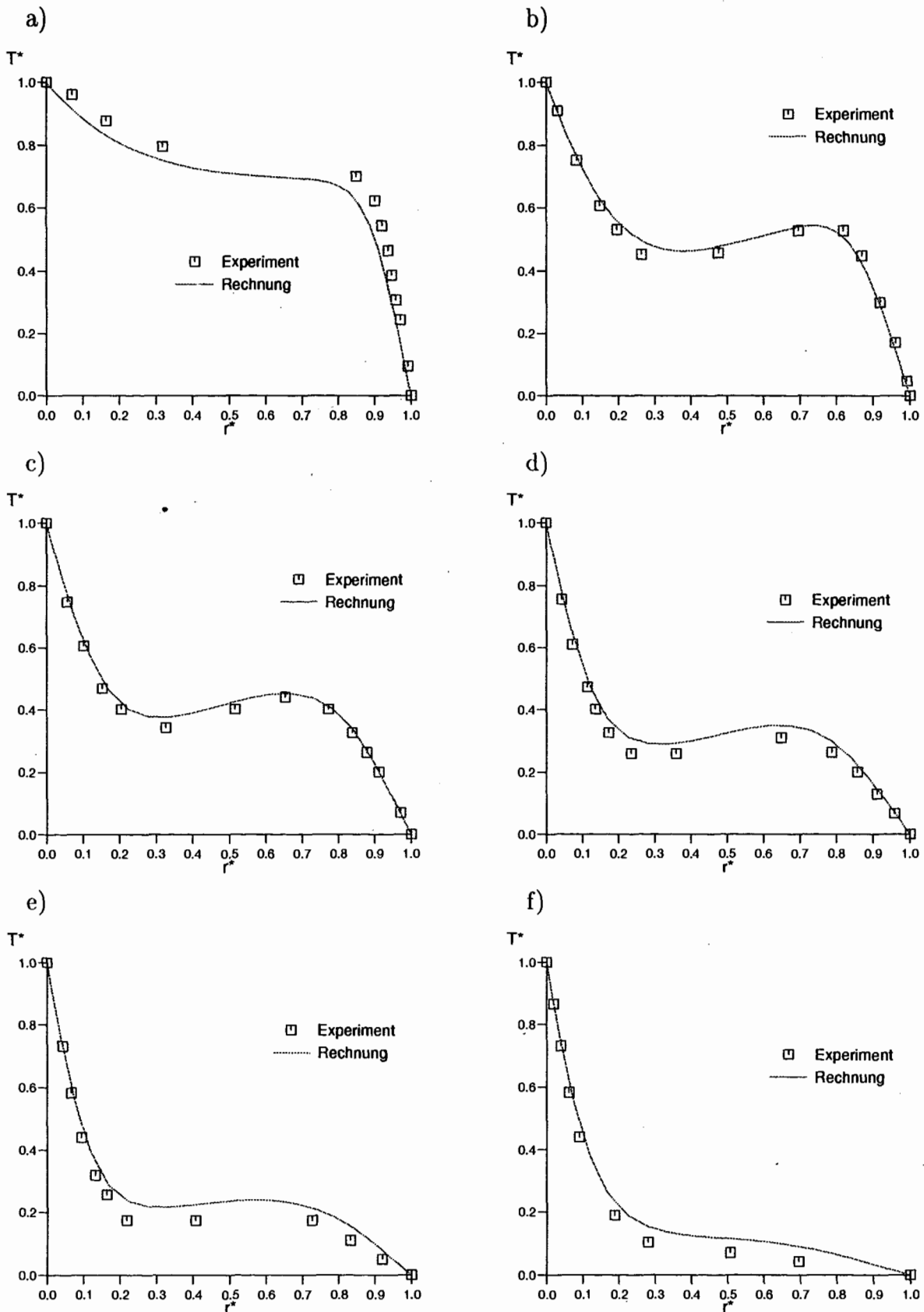


Abbildung 5.27: Gegenüberstellung der simulierten und der im Experiment von Kuehn und Goldstein (1975) gemessenen radialen Temperaturprofile  $T^* = \frac{T(r) - T_A}{T_I - T_A}$  über  $r^* = \frac{r - r_I}{r_A - r_I}$  bei a)  $\varphi = 90^\circ$ , b)  $\varphi = 120^\circ$ , c)  $\varphi = 150^\circ$ , d)  $\varphi = 180^\circ$ , e)  $\varphi = 210^\circ$ , f)  $\varphi = 240^\circ$

dem Profil für  $\varphi = 90^\circ$ . Im Experiment werden dabei durchweg etwas größere Temperaturen gemessen als sie in der Rechnung simuliert werden. Dafür gibt es zwei Erklärungen. Zum einen wird die Wärmeleitung in Umfangsrichtung durch die Diskretisierung der Auftriebsfahne bestimmt. In der Rechnung wird dabei durch die zu großen Maschenweiten in Umfangsrichtung eine zu große Wärmeleitung in Umfangsrichtung simuliert und das aufsteigende, erwärmte Fluid gibt deshalb in der Simulation beim Aufsteigen mehr Wärme an das umgebende kältere Fluid ab als es im Experiment der Fall war. Zum anderen hängt auch das bilanzierte Maschenvolumen direkt von den Maschenweiten ab. Da die Fahne sehr schmal ist, d. h. nur eine geringe Ausdehnung in Umfangsrichtung hat, hat eine größere Ausdehnung der Masche in Umfangsrichtung zur Folge, daß der Flankenabfall der Temperaturfahne im Maschenvolumen mitintegriert wird, wodurch der volumetrische Mittelwert wesentlich niedriger als der Maximalwert ist.

Im Interferogramm des Experiments (s. Abbildung 5.26) ist zu erkennen, daß sich die Auftriebsfahne nach oben hin stark verjüngt. An der äußeren Wand bildet sich auf der Symmetrieachse ein Staupunkt aus und das Fluid verteilt sich symmetrisch in Umfangsrichtung um.

Der simulierte Verlauf der Temperatur über dem Umfang in dem hier interessierenden Bereich um die Symmetrieachse bei  $\varphi = 90^\circ$  ist in Abbildung 5.28 für  $r^* = 0,99$  dargestellt, was der letzten Maschenreihe vor der äußeren Wand entspricht. Im Kernbereich der Fahne, direkt bei  $\varphi = 90^\circ$ , erkennt man den Einfluß des Staupunktes an der äußeren Wand. Die Konvektion ist hier in der vertikalen Richtung fast zum Erliegen gekommen. Über die äußere, kühle Wand wird infolgedessen mehr Wärme abgeführt als durch die

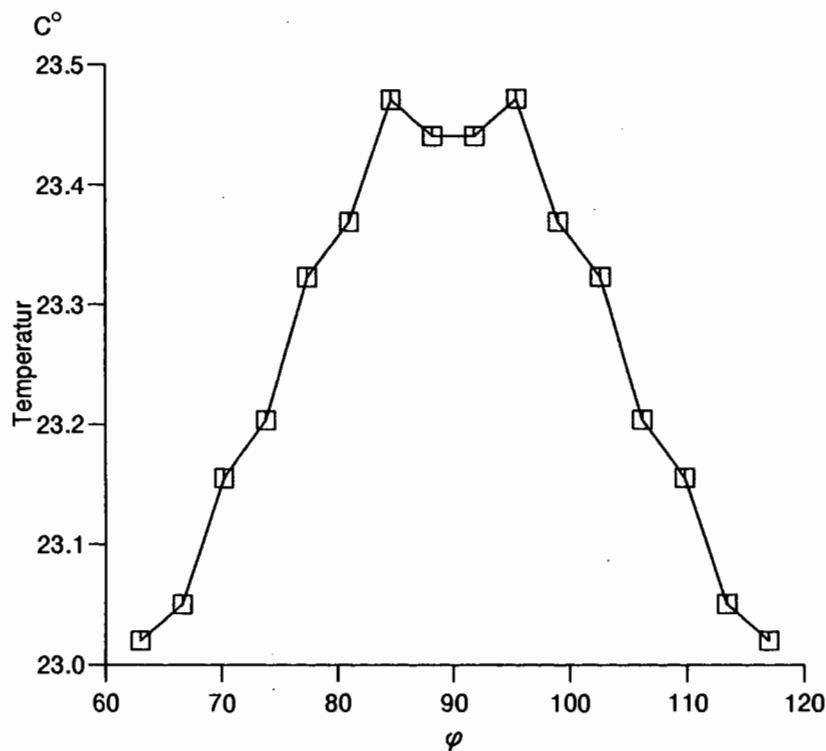


Abbildung 5.28: Temperatur über dem Umfangswinkel bei  $r^* = 0,99$

Konvektion vom warmen Innenrohr nachgeführt wird. Die Temperatur ist deshalb auf der Symmetrieachse etwas niedriger als an den Flanken der Fahne. An den Flanken der Fahne wird durch die Konvektion noch mehr Wärme als auf der Symmetrieachse nachgeführt. Dort bilden sich beidseits des Staupunktes kleine, symmetrische Temperaturerhöhungen aus. Bei der gewählten Diskretisierung wird die Auftriebsfahne im Kern durch zwei Maschen und die Temperaturerhöhung an der Flanke lediglich durch jeweils eine Masche diskretisiert.

Für eine genaue Beschreibung des Temperaturverlaufs und seiner Maxima in der Nähe des Staupunktes ist diese Auflösung nicht ausreichend. Mit einem weiter verfeinerten Gitter im Bereich der Auftriebsfahne könnte diese schmale Auftriebsfahne in der Simulation besser wiedergegeben werden. Auch von Perras (1993) wird bei der Nachrechnung dieses Falles bei einem in der Diskretisierung vergleichbaren, aber unverfeinerten Gitter im wesentlichen eine zu geringe Auflösung dieser Auftriebsfahne in Umfangsrichtung für die quantitativen Unterschiede zum Experiment verantwortlich gemacht. Kuehn und Goldstein (1975) verwenden bei der Nachrechnung ihrer Experimente im Bereich der Auftriebsfahne eine Maschenweite von  $DY = 2,5^\circ$ , was eine um 30% kleinere Maschenweite als die in dieser Arbeit verwendete ist. Sie können eine gute Übereinstimmung ihrer Simulation mit ihrem Experiment nachweisen.

Da bei einer Simulation auf einem nochmals verfeinerten Gitter keine neuen physikalischen Effekte auftreten würden und die Rechnung auf dem hier verwendeten verfeinerten Gitter alle wesentlichen Phänomene dieser Strömung simulieren kann, wird auf eine solche Rechnung verzichtet.

Bei der Diskretisierung einer solchen Ringspaltgeometrie hat man bei Rechenprogrammen, die auf äquidistanten Gittern basieren, einen sehr großen Berechnungsaufwand (Grötzbach 1996). In diesem Fall wird durch die Anforderung einer lokal hohen Auflösung über dem Innenrohr, die Diskretisierung im gesamten Ringspalt bestimmt. Die Diskretisierung mit einem nicht-äquidistanten Gitter hat diesen Nachteil nicht. Dennoch bleiben hier noch die Probleme stark anisotroper Maschenweiten, welche sich bei zylindrischen Koordinaten alleine schon durch den Einfluß des Radius auf die Maschenweite in Umfangsrichtung einstellen. Diese können sich numerisch negativ auswirken (Schönung 1990). Das Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung hat hier den Vorteil, daß es erlaubt, starke Anisotropien der Maschenweiten zu vermeiden.

### **5.2.2 Instationäre laminare Strömung in einem beheizten Ringspalt**

Für Rayleigh-Zahlen  $Ra > 10^5$  (McLeod 1987) beginnt die Auftriebsfahne in Umfangsrichtung zu pendeln. Im vorigen Unterkapitel 5.2.1 wurde die Notwendigkeit einer ausreichend feinen Auflösung des Gebietes über dem Innenrohr für den Fall einer stationären

Strömung abgeleitet. Bei dem hier betrachteten Fall der instationären Naturkonvektion in Helium bei einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  ist die Auftriebsfahne wesentlich schmaler als im vorherigen stationären Fall. Es ist aus denselben Gründen wie im vorigen Fall (vgl. Unterkapitel 5.2.1) wichtig, den Bereich der oszillierenden Auftriebsfahne fein aufzulösen. Dies wird auch in der Arbeit von Perras (1993) durch eine Gitterstudie belegt, bei der der Einfluß der Diskretisierung auf das Simulationsergebnis für dieses Beispiel untersucht wird.

Bei dem hier untersuchten Fall einer oszillierenden Konvektion sind insbesondere die Amplitude und die Frequenz der sich einstellenden Pendelbewegung von Interesse. Darüber hinaus gilt es herauszufinden, ob eine zweidimensionale Simulation in der Lage ist, dieses Phänomen zumindest qualitativ nachzuvollziehen.

### Problembeschreibung

McLeod (1987) führte Temperaturmessungen mit Helium als Fluid bei einer mittleren Temperatur von  $85^\circ K$  und einer Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,27 \cdot 10^7$  durch. Er benutzte bei seinem Experiment eine ähnliche Geometrie wie die in Abbildung 5.23 skizzierte Geometrie von Kuehn und Goldstein. Die geometrischen Abmessungen des Innen- und Außenrohres mußten für diese Simulation angepaßt werden.

Er fand in seinem Experiment eine nahezu stationär oszillierende Konvektionsform, d. h. mit gleichbleibender Amplitude und Frequenz. Neben zeitlich gemittelten radialen Temperaturprofilen an verschiedenen Winkelpositionen hat er auch das zeitliche Verhalten an einigen festen Punkten gemessen.

### Numerische Modellierung

Auch in dieser Simulation wird die  $r$ - $\varphi$ -Geometrie des Experiments durch eine zweidimensionale Kreisscheibe abgebildet. Als Ausgleichsmasche wird eine einzelne Masche in einer zweiten  $r$ - $\varphi$ -Ebene hinter der Kreisscheibe definiert. Diese Ausgleichsmasche liegt hinter der untersten Zelle auf der vertikalen Symmetrieachse. In dieser Masche wird als Druckrandbedingung für das gesamte System der Referenzdruck des Experiments festgehalten (s. Willerding und Baumann 1996). Für die thermische Energiegleichung wird am Innenrohr eine Temperatur von  $T = 99,1 K$  und am Außenrohr von  $T = 77,4 K$  als isotherme Randbedingung für das jeweilige Rohr angenommen.

Verwendet man die Stoffwerte von Helium bei der mittleren Temperatur und dem Referenzdruck von  $182,39 kPa$ , so erhält man für die Rayleigh-Zahl einen Wert von

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu a} = 1,05 \cdot 10^7 \quad , \quad (5.9)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\beta$  der Volumenausdehnungskoeffizient,  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenrohr,  $L$  die Spaltweite,  $\nu$  die kinematische Viskosität und  $a$  die Leitfähigkeit bedeuten. Der Wert dieser Kennzahl unterscheidet sich um

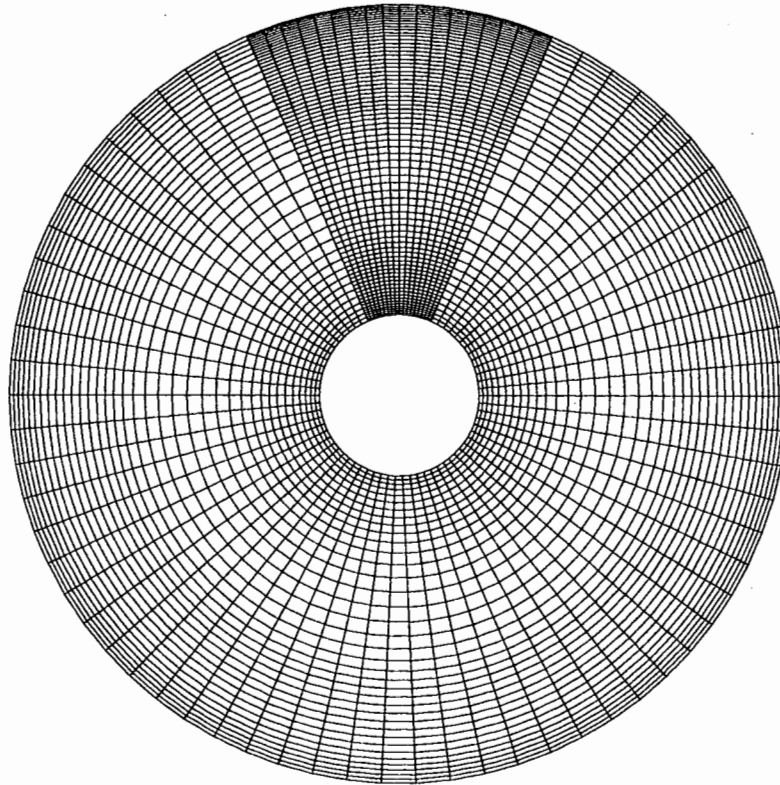


Abbildung 5.29: Die räumliche Diskretisierung des horizontalen beheizten Ringspalts bei  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$

20% von der Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,27 \cdot 10^7$  im Experiment.

In Abbildung 5.29 ist das für diese Simulation verwendete numerische Gitter dargestellt. Über dem Innenrohr wird das Gitter im erwarteten Pendelbereich der Auftriebsfahne lokal verfeinert.

Die Simulationsparameter sind in Tabelle 5.6 für diese Simulation zusammengestellt. Auch hier folgen die Bezeichnungen der in Unterkapitel 5.1.1 vorgestellten Bezeichnungsweise. Die minimalen und maximalen Maschenweiten in Umfangsrichtung, d. h.  $DY_{min}$  und  $DY_{max}$ , werden analog zum vorherigen Unterkapitel im Gradmaß angegeben. Eine Angabe der Iterationszahl unterbleibt, da sie von Zeitschritt zu Zeitschritt variiert.

Fall	$DX_{min}$	$DX_{max}$	$DY_{min}$	$DY_{max}$	NM	EPS	IT
verfeinert	0,000525	0,0039	2,57 °	5,14 °	4789	$5 \cdot 10^{-5}$	–

Tabelle 5.6 Simulationsparameter bei der instationären, laminaren Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt bei  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$

Den Anfang der Naturkonvektion bilden kleine Störungen, die z. B. durch äußere Erschütterungen hervorgerufen werden können und die sich in der weiteren zeitlichen Entwicklung zu einer makroskopischen Bewegung aufbauen. Durch die in einer numerischen Simulation unvermeidlichen numerischen Abbruchfehler könnte die Simulation auch aus einem



ruhenden Fluid mit anfangs homogener Temperaturverteilung gestartet werden. Bis zum Erreichen der eigentlich hier interessierenden oszillierenden Konvektionsform müßte man jedoch sehr viel Rechenzeit investieren.

Um diesen Aufwand zu reduzieren, wird daher der Weg beschritten, eine Störung direkt einzubringen und deren zeitliche Entwicklung zu betrachten. Dazu wird zuerst eine stationäre Rechnung mit den beschriebenen Randbedingungen durchgeführt. Als Anfangsbedingungen für diese Rechnung wird ein ruhendes, isothermes Fluid mit einer hydrostatischen Druckverteilung angenommen. Die Änderungen der sich während der Rechnung einstellenden Geschwindigkeiten und Temperaturen bleiben je nach Zeitschritt von einer endlichen Größe und werden nicht mehr kleiner. Sie unterschreiten damit auch insbesondere keine Konvergenzschranke mehr, wie sie zuvor definiert wurde. Dies ist auch zu erwarten, da die simulierte Strömung instationär ist.

Als Startbedingung für die transiente Rechnung wird daher ein Zustand definiert, bei dem sich der thermische Energiehaushalt mit einem maximalen Defekt von 3% der über das Innenrohr an das Fluid abgegebenen Wärme eingestellt hat. Daran anschließend wird die Temperatur an der äußeren Wand zwischen  $\varphi = 0^\circ$  und  $\varphi = 90^\circ$  über einen Zeitraum von 3s mit einer linearen Abhängigkeit von der Zeit um 20% ihres Wertes erhöht. Für eine weitere Sekunde wird diese inhomogene Randbedingung in der thermischen Energiegleichung konstant gehalten.

Durch diese Störung stellt sich insbesondere an der äußeren Wand eine andere Umfangsströmung ein und die Auftriebsfahne wird aus der symmetrischen Lage auf der Vertikalen in positive  $\varphi$ -Richtung herausbewegt.

An diesen Zustand schließt sich die eigentliche transiente Rechnung an. Beim Beginn dieser transienten Rechnung wird die um 20% erhöhte Temperatur an der Außenwand zurückgenommen und die Symmetrie in den Randbedingungen für die thermische Energiegleichung wieder hergestellt.

## Ergebnisse und Diskussion

Die dimensionslosen Temperaturen  $T^* = \frac{T(r)-T_A}{T_I-T_A}$  über dem dimensionslosen Radius  $r^* = \frac{r-r_I}{r_A-r_I}$  sind in Abbildung 5.30 für verschiedene Winkelpositionen aufgetragen. Die experimentellen Werte stellen dabei den zeitlichen Mittelwert aus 1024 Messungen während einer Zeitdauer von 20,48 s bei McLeod (1987) dar. Die simulierten Werte sind das Ergebnis einer stationären Rechnung.

Zwischen den gemessenen und den berechneten Temperaturen ist eine gute Übereinstimmung festzustellen. Allerdings wird die warme Auftriebsfahne nicht fein genug aufgelöst, um die im Experiment gemessenen höheren Temperaturen genauer zu simulieren (vgl. die Diskussion in Unterkapitel 5.2.1). Die Übereinstimmung wird aber als ausreichend angesehen, um diesen Zustand als Startbedingung für die transiente Rechnung zu benutzen. Der transiente Verlauf wird an einer bestimmten Position innerhalb der Geometrie bei

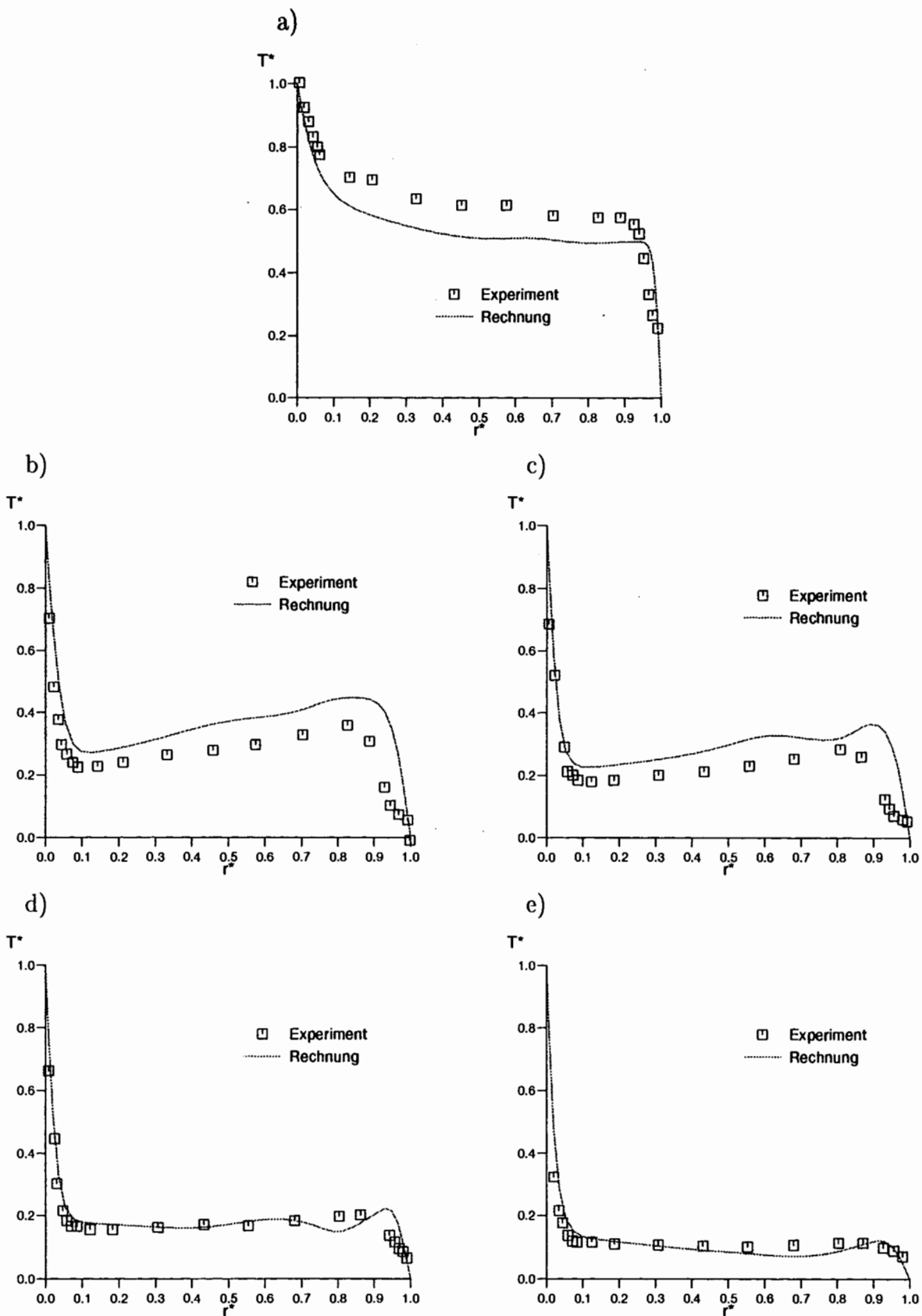


Abbildung 5.30: Gegenüberstellung der simulierten und der im Experiment von McLeod (1978) gemessenen radialen Temperaturprofile  $T^* = \frac{T(r) - T_A}{T_1 - T_A}$  über  $r^* = \frac{r - r_L}{r_A - r_L}$  bei a)  $\varphi = 90^\circ$ , b)  $\varphi = 120^\circ$ , c)  $\varphi = 150^\circ$ , d)  $\varphi = 180^\circ$ , e)  $\varphi = 210^\circ$

$\varphi = 90^\circ$  und einem Radius von  $r = 48 \text{ mm}$  ausgewertet. In Abbildung 5.31b ist der numerisch simulierte und in Abbildung 5.31a der im Experiment von McLeod gemessene Temperaturverlauf dargestellt. Die grundlegende Frequenz von  $\frac{1}{4s}$ , mit der die Auftriebsfahne pendelt, wird dabei gut wiedergegeben. Die im Experiment beobachtete Amplitude wird jedoch stark unterschätzt.

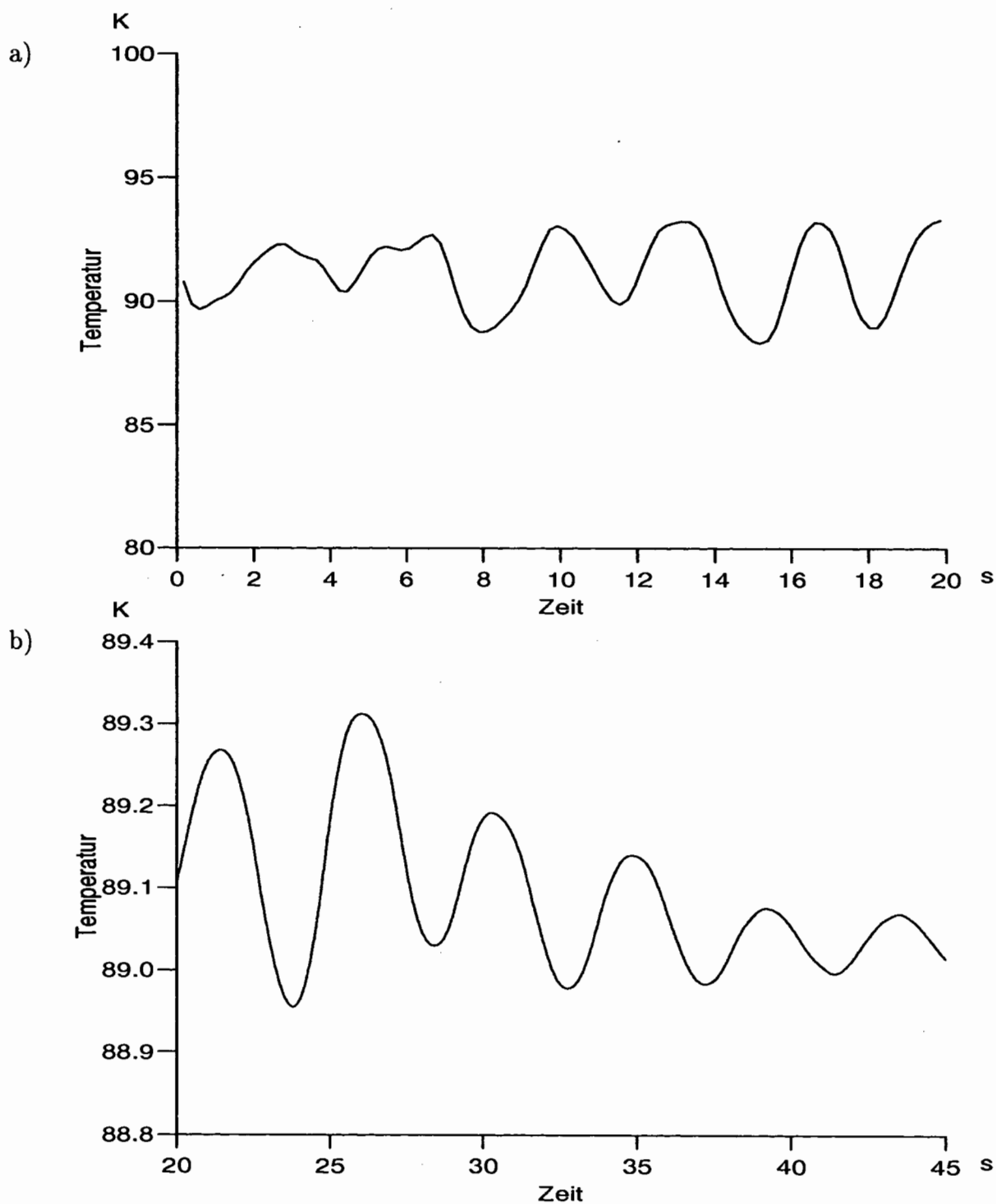


Abbildung 5.31: Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Temperaturen, a) im Experiment von McLeod (1978) und b) in der Simulation mit FLUTAN

Auch Perras (1993) findet bei seiner Simulation auf einem unverfeinerten Gitter eine ähnliche Oszillationsfrequenz, wie sie in der vorliegenden Arbeit und im Experiment gefunden wird. Die von ihm simulierte Amplitude ist um den Faktor 2 kleiner als die Amplitude des Experiments.

In ihren Experimenten beobachten Bishop et. al. (1968) in der axialen Richtung des Zylinders eine Wellenform, die mit der Pendelwegung der Auftriebsfahne in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene korreliert. Die nur in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene durchgeführte Simulation kann diesen Effekt nicht beschreiben, wodurch sie auch die im Experiment beobachtete Amplitude nicht erreichen kann.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die im Experiment beobachtete Oszillation qualitativ nachvollzogen werden kann. Die simulierte Frequenz stimmt gut mit der im Experiment und der Simulation von Perras (1993) gefundenen Frequenz überein. Die in dieser Arbeit simulierte Amplitude wird quantitativ stärker unterschätzt als bei Perras. Hier sind zukünftig noch einige Detailuntersuchungen notwendig, um das dynamische Verhalten bei diesem Anwendungsfall zu klären. Im Rahmen dieser Arbeit waren jedoch solch rechenintensive Untersuchungen, wie sie insbesondere bei der dreidimensionalen Simulation dieses Falls notwendig sind, nicht mehr möglich.

## 6. Schlußfolgerungen und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Verfahrens zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters, das in Verbindung mit einem Finite-Volumen Verfahren verwendet wird. Dieses Verfahren sollte die typischen Eigenschaften eines heutigen Rechenprogrammes zur numerischen Simulation von thermohydraulischen Fragestellungen berücksichtigen. Dazu zählen insbesondere die Verwendung eines nicht-äquidistanten, dreidimensionalen Gitters, der Einsatz von Verfahren 2. Ordnung zur Approximation des konvektiven Terms, die implizite Behandlung der Gleichungen zur Steigerung der Stabilität des Gesamtverfahrens und die Verwendung einer vektorisierbaren Datenstruktur zur Reduktion der Rechenzeiten auf modernen Höchstleistungsrechnern.

Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren spaltet das Gitter an jeder Verfeinerungsgrenze und führt künstliche Maschen als Randmaschen der beiden Teilgitter ein. Diese Aufspaltung stellt in Verbindung mit der eingesetzten hierarchischen Datenstruktur die vektorielle Abarbeitung sicher. Bei der Verfeinerung eines Teilgitters werden die Maschenweiten in allen Koordinatenrichtungen halbiert. Dadurch werden größere Anisotropieverhältnisse als 2 vermieden.

Die auf dem groben Gitter definierten Werte werden über eine allgemeine Taylor-Reihenentwicklung mit einer Genauigkeit 2. Ordnung auf die künstlichen Randmaschen des feinen Gitters interpoliert. Die Werte in den künstlichen Randmaschen des groben Gitters werden aus einer Bilanzgleichung für das neue Kontrollvolumen einer Halbmasche bestimmt, die die Maschen des feinen Gitters volumetrisch mittelt und eine konservative Behandlung des Gitterübergangs gewährleistet.

Die notwendigen zusätzlichen Gleichungen und insbesondere der Übergang vom groben zum feinen Gitter werden implizit mit dem ICE-Verfahren behandelt. Damit ist eine geschlossene Lösung für alle Maschen dieses numerischen Gitters möglich und es ist kein weiterer Iterationsprozeß zur Lösung für einen Zeitschritt nötig.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte der Nachweis erbracht werden, daß nur eine Kopplung 2. Ordnung der Gitter verschiedenen Verfeinerungsgrades die Genauigkeit bei der Verwendung von Verfahren 2. Ordnung für die Diskretisierung des konvektiven Terms erhält und die Konsistenz des Gesamtverfahrens bei einer zentralen Differenzenapproximation für den diffusiven Term erst sicherstellt.

Für den Modellfall einer linearen Konvektions-Diffusionsgleichung konnte für die typischen Maschenweitesprünge der lokalen Verfeinerung bei expliziter Zeitintegration die

Stabilität nachgewiesen werden. Durch die implizite Behandlung der künstlichen Maschen an den Rändern der Gitter verschiedenen Verfeinerungsgrades sind damit keine Stabilitätseinbußen zu erwarten. Durch das vorgeschlagene Verfahren zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters ist es damit zum ersten Mal möglich, Diskretisierungsverfahren 2. Ordnung ohne Genauigkeitsverlust zusammen mit den Stabilitätsvorteilen einer vollimpliziten Behandlung der Erhaltungsgleichungen zu benutzen.

Das Verfahren wurde in das Thermohydraulik-Rechenprogramm FLUTAN am Forschungszentrum Karlsruhe implementiert. Aufgrund der gewählten hierarchischen Datenstruktur ist das Rechenprogramm auch in der mit dem vorgeschlagenen Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung erweiterten Fassung vektorisierbar. Damit kann es auch in eine zukünftige Parallelisierung des Rechenprogramms einbezogen werden.

Zur Verifikation des Verfahrens wurden zwei laminare Kanalströmungen mit Luft und eine turbulente Rohrströmung mit Wasser simuliert. Die Ergebnisse zeigen eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung mit experimentellen Werten. Eine Verbesserung der Ergebnisse bei der Verwendung der lokalen Verfeinerung zur besseren numerischen Approximation von starken Gradienten konnte erzielt werden.

Das neue Verfahren wurde zur Simulation eines typischen Anwendungsfalles der numerischen Strömungsmechanik, der Naturkonvektion in einem horizontalen, beheizten Ringspalt, eingesetzt. Es wurden zwei verschiedene Rayleigh-Zahlen untersucht. Bei der kleineren Rayleigh-Zahl von  $Ra = 4,7 \cdot 10^4$  stellt sich eine stationäre Naturkonvektion ein, die eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen zeigt. Bei der größeren Rayleigh-Zahl von  $Ra = 1,05 \cdot 10^7$  stellt sich eine oszillierende Naturkonvektion ein. Die dabei beobachtete Frequenz stimmt mit der im Experiment beobachteten gut überein. Die simulierte Amplitude dieser Oszillation kann bei der gewählten zweidimensionalen Diskretisierung nur unbefriedigend wiedergegeben werden. Die künstliche Diffusion infolge der räumlichen Diskretisierung ist hierfür eine mögliche Ursache. Der Vergleich mit einer Rechnung auf einem weiter verfeinerten Gitter könnte dies klären. Als weitere Ursache kommt das zeitliche Verhalten des vorgeschlagenen Verfahrens in Betracht. Eine Vergleichsrechnung mit dem Rechenprogramm FLUTAN ohne methodische Erweiterung auf einem unverfeinerten Gitter mit ähnlicher Auflösung des Gebiets über dem Innenrohr sollte hier zur Klärung gemacht werden. Die Ergebnisse bei den stationären Rechnungen jedoch, bei denen gerade größere Gradienten bei lokaler Verfeinerung des Gitters simuliert wurden, lassen dies als Ursache nicht wahrscheinlich erscheinen. Generell sollten sich in Zukunft noch weitere Studien bezüglich des Gittereinflusses und des diffusiven Verhaltens des Verfahrens anschließen.

Zukünftige Aufgaben in diesem Umfeld könnten sich auf die Verifikation des Verfahrens an dreidimensionalen Fällen richten. In diesem Zusammenhang könnte dann auch der behandelte instationäre Anwendungsfall dreidimensional simuliert werden, womit eine der wesentlichen Einschränkungen der gewählten Modellierung nicht mehr vorhanden wäre.

Die implementierten iterativen Lösungsverfahren sollten vollständig für die vektorisierenden Hochleistungsrechner optimiert werden. Damit wäre es möglich, die erwartete Effizienzsteigerung mit einer detaillierten Studie quantitativ zu untersuchen. Insbesondere sollte dabei auch der Einfluß des Lösungsverfahrens für die Lösung der Poissonähnlichen Gleichungen näher analysiert werden.

Einen weiteren Aspekt für zukünftige Anwendungen des Verfahrens stellt die Möglichkeit dar, das Verfahren auch für eine Blockstrukturierung des Gitters einzusetzen. Dieses ist bei dem zunehmenden Einsatz von Parallelrechnern und insbesondere der parallelen Höchstleistungsrechner eine in Zukunft noch an Bedeutung gewinnende Eigenschaft dieses Verfahrens. Dies könnte entweder mit einer Blockstrukturierung des Gitters durch die verschiedenen Verfeinerungsstufen oder auch mit der Aufteilung von Gittern einer Verfeinerungsstufe bei einer Modifikation des Verfahrens realisiert werden.

In der Zukunft könnte es auch interessant sein, das Verfahren auf Probleme mit sich zeitlich während der Simulation ändernden Gitteranforderungen (z. B. Strömungen mit Verbrennungsvorgängen oder schwach kompressible Strömungen mit Schockwellen) anzuwenden. Das Verfahren kann hierzu zu einem adaptiven Verfahren erweitert werden. Es wäre dann notwendig, ein Kriterium zu definieren, anhand dessen zu verfeinernde Maschen detektiert werden und welches den physikalischen Anforderungen des betrachteten Problems numerisch Rechnung trägt. Die Vektorisierungsmöglichkeit des Rechenprogrammes sollte aber darüber hinaus durch die Aufspaltung des Gitters und die hierarchische Datenstruktur erhalten bleiben.

# Literaturverzeichnis

Abendschön, P. (1995)

*Experimentelle Untersuchungen zum möglichen optionalen Sumpfkühlungskonzept des europäischen Druckwasserreaktors EPR*, Studienarbeit, Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik, Forschungszentrum Karlsruhe

Abbott, D. E. und Kline, S. J. (1962)

*Experimental Investigation of Subsonic Turbulent Flow over Single and Double Backward Facing Steps*, Journal of Basic Engineering, Vol. 84, pp. 317-325

Adjerid, S. und Flaherty, J. E. (1988)

*Second-order Finite Element Approximations and a Posteriori Error Estimation for Two-Dimensional Parabolic Systems*, Numerische Mathematik, Vol. 53, pp. 183-198

Alef, M. (1996)

pers. Mitteilung, Forschungszentrum Karlsruhe

Anderson, D. A. , Tannehill, J. C. und Pletcher, R. H. (1984)

*Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill

Arney, D. C. und Flaherty, J. E. (1986)

*An Adaptive Local Mesh Refinement Method for Time-Dependent Partial Differential Equations*, Technical Report 86-10, Department of Computer Science, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York

Bassi, F. , Grasso, F. und Savini, M. (1986)

*A Local Strategy for Viscous Transonic Flows Around Airfoils*, Lecture Notes in Physics, Beiglböck Editor, Vol. 264, Springer Verlag, pp. 17-24

Berger, M. J. (1982)

*Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations*, Dissertation, Department of Computer Science, Stanford University

Berger, M. J. und Jameson, A. (1985)

*Automatic Adaptive Grid Refinement for the Euler Equations*, AIAA Journal, Vol. 23, pp. 561-568



- Bishop, E. H. , Carley, C. T. und Powe, R. E. (1968)  
*Natural convective oscillatory flow in cylindrical annuli*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 11, pp. 1741-1752
- Blom, J. G. und Verwer, J. G. (1991)  
*VLUGR2: A Vectorized Local Uniform Grid Refinement Code for PDEs in 2D*, Report NM-R9306, CWI, Amsterdam
- Bottoni, M. , Baumann, W. L. , Chi, H. N. , Chien, T. H. , Domanus, H. M. , Schmitt, R. C. , Sha, W. T. und Shah, V. L. (1985)  
*COMMIX 2: A Three-Dimensional Transient Computer Program for Thermal-Hydraulic Analysis of Two-Phase Flow*, Report ANL-85-47, Argonne National Laboratory
- Brandt, A. (1977)  
*Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems*, Mathematics of Computation, Vol. 31, pp. 333-390
- Carteciano, L. N. (1996)  
*Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen*, Dissertation, FZKA Bericht 5775, Forschungszentrum Karlsruhe
- Chen, W. L. ,Lien, F. S. und Leschziner, M. A. (1995)  
*A Local Grid Refinement Scheme within a Multiblock Structured-Grid Strategy for General Flows*, 6th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Lake Tahoe, Nevada, September 4-8, 1995, pp.169-174
- Cherdron, W. , Durst, F. und Whitelaw, J. H. (1978)  
*Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansions*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 84, pp. 13-31
- Coelho, P. ,Pereira, C. F. und Carvalho, M. G. (1991)  
*Calculation of Laminar Recirculating Flows Using a Local Non-Staggered Grid Refinement System*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 12, pp. 535-557
- de Brederode, U. und Bradshaw, P. (1972)  
*Three-Dimensional Flow in Nominally Two-Dimensional Separation Bubbles. 1. Flow Behind a Rearward Facing Step*, IC Aero Report 72-19, Imperial College of Science and Technology
- De Lange, H. C. und De Goye, L. P. H. (1994)  
*Numerical Flow Modelling in a Locally Refined Grid*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 497-515

- Domanus, H. M. , Schmitt, R. C. , Sha, W. T. und Shah, V. L. (1983)  
*COMMIX-1A: A Three-Dimensional Transient Single-Phase Computer Code for Thermal-Hydraulic Analysis of Single and Multicomponent Systems, Volume 1: User's Manual*, Report ANL-82-25, Argonne National Laboratory
- Dudley, V. E. , Kolb, G. J. , Mahoney, A. R. , Mancini, T. R. , Matthews, C. W. , Sloan, M. and Kearney, D. (1994)  
*Test-Results SEGS LS-2 Solar Collector*, Report SAND94-1884, Sandia National Laboratory
- Dwyer, H. A. (1984)  
*Grid Adaption for Problems in Fluid Dynamics*, AIAA Journal, Vol. 12, pp. 1705-1712
- Edelsohn, D. J. (1991)  
*Hierarchical Tree-Structures as Adaptive Meshes*, Report SCCS-193, Syracuse Center for Computational Science and Department of Physics, Syracuse University, New York 13244
- Evans, A. , Marchant, M. J. , Szmelter, J. und Weatherill, P. (1991)  
*Adaptivity for Compressible Flow Computations Using Point Embedding on 2-D Structured Multiblock Meshes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 895-919
- Ewing, R. E. , Lazarov, R. D. und Vassilevski, P. S. (1990)  
*Finite Difference Schemes on Grids with Local Refinement in Time and Space for Parabolic Problems I. Derivation, Stability and Error Analysis*, Computing, Vol. 45, pp. 193-215
- Flad, M. (1995)  
Forschungszentrum Karlsruhe, unveröffentlichter Bericht
- Fuchs, L. (1986)  
*A Local Mesh-Refinement Technique for Incompressible Flow*, Computers and Fluids, Vol. 14, pp. 69-81
- Ghia, U. , Ghia, K. N. und Shin, C. T. (1982)  
*High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*, Journal of Computational Physics, Vol. 48, pp. 387-411
- Grigull, U. und Hauf, W. (1966)  
*Natural Convection in Horizontal Annuli*, Proceedings of the Third International Heat Transfer Conference, Chicago, Illinois, August 7-12, 1966, pp. 182-195
- Grötzbach, G. (1996)  
pers. Mitteilung, Forschungszentrum Karlsruhe

- Gropp, W. D. und Keyes, D. E. (1992)  
*Domain Decomposition with Local Mesh Refinement*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 4, pp. 967-993
- Günther, C. (1992)  
*Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung*, Habilitation, KfK Bericht 4697, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- Günther, C. (1995)  
 pers. Mitteilung, Forschungszentrum Karlsruhe
- Harlow, F. H. und Amsden, A. A. (1971)  
*A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds*, Journal of Computational Physics, Vol. 8, pp. 197-213
- Hirsch, C. (1988)  
*Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1, John Wiley and Sons, Chichester
- Hoffmann, H. , Rust, K. und Weinberg, D. (1994a)  
*Erkenntnisse aus Modelluntersuchungen zum Naturumlauf in Flüssigmetall gekühlten Reaktoren*, KfK-Nachrichten, Jahrgang 26, pp. 200-208
- Hoffmann, H. , Ehrhard, P. , Weinberg, D. , Carteciano, L.N. , Dres, K. , Frey, H.-H. , Hayafune, H. , Hölle, Ch. , Marten, K. und Rust, K. (1994b)  
*Modellversuche in RAMONA und NEPTUN*, Jahresbericht 1994, Projekt Nukleare Sicherheitsforschung, FZKA 5600, pp. 357-365
- Hortmann, M. , Peric, M. und Scheurer, G. (1990)  
*Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Benchmark Solutions*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 11, 1990, pp. 189-207
- Jones, W. P und Launder, B. E. (1972)  
*The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314
- Kim, J. , Kline, S.J. und Johnston, J. P. (1980)  
*Investigation of a Reattaching Turbulent Shear Layer: Flow over a Backward Facing Step*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, pp. 302-308
- Krebs, L. (1979)  
*Ausbreitung von Temperaturstörungen in begrenzter Strömung hinter einem Düsenblock*, Dissertation, KfK Bericht 2846, Kernforschungszentrum Karlsruhe

- Kuehn, T. H. und Goldstein, R. J. (1975)  
*An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 74, pp. 695-719
- Kuehn, T. H. und Goldstein, R. J. (1978)  
*An Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli*, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 635-640
- Kueny, J. L. und Binder, G. (1984)  
*Viscous Flow over Backward Facing Steps - an Experimental Investigation*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Morgan, K. , Periaux, J. und Thomasset, F. Editoren, Vol. 9, Vieweg Verlag, pp. 32-47
- Lapworth, B. L. (1993)  
*Three-Dimensional Mesh Embedding for the Navier-Stokes Equations Using Upwind Control Volumes*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 17, pp. 195-220
- Lazarov, R. D. , Mishev, I. D. und Vassilevski, P. S. (1994)  
*Finite Volume Methods with Local Refinement for Convection-Diffusion Problems*, Computing, Vol. 53, pp. 33-57
- Lee, D. und Tsuei, Y. M. (1993)  
*A Hybrid Adaptive Gridding Procedure for Recirculating Fluid Flow Problems*, Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp. 122-141
- Lee, D. und Yeh, C.L. (1993)  
*Computation of Reacting Flame Stabilizer Flows Using a Zonal Grid Method*, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 24, pp. 273-285
- Lentati, A. M. (1995)  
 pers. Mitteilung, University of Virginia, Virginia
- Leonard, B. P. (1979)  
*A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, p. 59
- Leonard, B. P. (1995)  
*Why You Should not Use Hybrid, Power-Law or Related Exponential Schemes for Convective Modelling - There Are Much Better Alternatives*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp. 421-442
- Liang, S. -M. und Fung, K. -Y. (1987)  
*Refined Numerical Solution of the Transonic Flow Past a Wedge*, AIAA Journal, Vol. 25,

pp. 1171-1175

Luchini, P. (1987)

*An Adaptive-Mesh Finite-Difference Solution Method for the Navier-Stokes Equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 68, pp. 283-306

Manzini, G. und Rosella, A. (1994)

*The Adaptive Mesh Refinement Method Applied to 2D Flows in Porous Media*, 8th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry, University of Kaiserslautern, Germany, September 6-10, 1994, pp. 1-9

Mathew, T. P. (1993)

*Schwarz Alternating and Iterative Refinement Methods for Mixed Formulations of Elliptic Problems, Part I: Algorithms and Numerical Results*, Numerische Mathematik, Vol. 65, pp. 445-468

McCormick, S und Thomas, J. (1986)

*The Fast Adaptive Composite Grid (FAC) Method for Elliptic Equations*, Mathematics of Computation, Vol. 46, pp. 439-456

McLeod, A. E. (1987)

*Heat Transfer by Natural Convection of Helium Between Horizontal Isothermal Concentric Cylinders at Cryogenic Temperatures*, Masterthesis, Clemson University

Monnoyer, F. , Wanie, K.M. und Schmatz, M.A. (1988)

*Calculation of the Three-Dimensional Flow Past Ellipsoids at Incidence by Zonal Solutions*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 20, Ed. Deville, M. , Vieweg Verlag, Braunschweig, pp. 229-238

Morgan, K. , Periaux, J. und Thomasset, F. (Eds. ) (1984)

*Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.9, Vieweg Verlag, Braunschweig

Moukalled, F. und Acharya, S. (1991)

*A Local Adaptive Grid Procedure for Incompressible Flows with Multigriding and Equidistribution Concepts*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 13, pp. 1085-1111

Oliger, J. (1979)

*Approximate Methods for Atmospheric and Oceanographic Circulation Problems*, Lecture Notes in Physics, Glowinski, R. und Lions, J. Editoren, Vol. 91, Springer Verlag, pp. 171-184

Patankar, S. V. (1978)

*A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Irregular Geometries and Conjugate Heat Transfer*, Heat Transfer 1978, Proceedings of the 6th international heat transfer conference, Toronto, Canada, August 7-11, 1978, pp. 297-302

Perras, K. (1993)

*Numerische Simulation der Naturkonvektion in einem horizontalen Ringspalt mit beheiztem Innenrohr*, Diplomarbeit, Institut für Kerntechnik und Reaktorsicherheit, Universität Karlsruhe

Rai, M. M. (1986)

*A Conservative Treatment of Zonal Boundaries for Euler Equation Calculations*, Journal of Computational Physics, Vol. 62, pp. 472-503

Roache, P. J. (1972)

*Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico

Rust, K. , Tschöke, H. und Weinberg, D. (1994)

*Influence of the Position and Number of Decay Heat Exchangers on the Thermal Hydraulics of a Slab Test Facility*, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 9, pp. 413-425

Sakai, K. (1990)

Kernforschungszentrum Karlsruhe, unveröffentlichter Bericht

Schönung, B. (1990)

*Numerische Strömungsmechanik: inkompressible Strömungen mit komplexen Berandungen*, Springer Verlag, Heidelberg

Spurk, J. H. (1989)

*Strömungslehre*, Springer Verlag, Heidelberg

Srinivasan, K. und Rubin, S. G. (1993)

*Segmented Domain Decomposition Multigrid Solutions for Two and Three Dimensional Viscous Flows*, Transactions of the ASME, Vol. 115, pp. 608-613

Stiller, J. (1993)

*Ein numerisches Modell für die Grobstruktursimulation turbulenter Strömungen unter Verwendung lokal eingebetteter Gitter*, Dissertation, Universität Dresden

Stoer, J. und Bulirsch, R. (1978)

*Einführung in die numerische Mathematik II*, Springer Verlag

Terasaka, H. , Kajiwara, H. , Ogura, K. , Ueda, H. und Takizawa, A. (1995)

*Local Mesh Refinement for Incompressible Fluid Flow with Free Surfaces*, Proceedings of the 7th International meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics NURETH-7, Saratoga Springs, New York, September 10-15, 1995, pp. 2021-2034

Thompson, J. F. , Warsi, Z. U. und Mastin, C. W. (1985)

*Numerical Grid Generation : Foundations and Applications*, North-Holland

Thompson, M. C. und Ferziger, J. H. (1989)

*An Adaptive Multigrid Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Journal of Computational Physics, Vol. 82, pp. 94-121

Thompson, C. P. , Leaf, G. K. und Van Rosendale, J. (1992)

*A Dynamically Adaptive Multigrid Algorithm for the Incompressible Navier-Stokes Equations - Validation and Model Problems*, Applied Numerical Mathematics, Vol. 9, pp. 511-532

Trompert, R. A. und Verwer, J.G. (1993)

*Runge-Kutta Methods and Local Uniform Grids*, Mathematics of Computation, Vol. 60, pp. 591-616

Trompert, R. (1993)

*Local Uniform Grid Refinement and Systems of Coupled Partial Differential Equations*, Applied Numerical Mathematics, Vol. 12, pp. 331-355

Vilsmeier, R. und Hänel, D. (1993)

*Adaptive Methods on Unstructured Grids for Euler and Navier-Stokes Equations*, Computer Fluids, Vol. 22, pp. 485-499

Wieghardt, K. (1974)

*Theoretische Strömungslehre*, Teubner Verlag

Willerding, G. und Baumann, W. (1996)

*FLUTAN 2. 0 Input Specifications*, FZKA-Bericht 5712, Forschungszentrum Karlsruhe

Wörner, M. (1994)

*Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium*, Dissertation, KfK-Bericht 5228, Kernforschungszentrum Karlsruhe

Zierep, J. (1991)

*Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, Verlag G. Braun, Karlsruhe



# Anhang A

## Literaturrecherche zu Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung

Um zu einer Übersicht über bereits existierende Verfahren zur lokalen Gitterverfeinerung zu gelangen, wurde eine elektronische Literaturrecherche in der Datenbank INSPEC des Fachinformationszentrums Karlsruhe durchgeführt. INSPEC ist eine Literaturdatenbank, die die Physics Abstracts, die Electrical & Electronics Abstracts und die Computer & Control Abstracts einschließt. Als Quellen dienen ca. 4000 Zeitschriften, Forschungsberichte, Konferenzbeiträge, Bücher und Hochschulschriften, die wöchentlich ausgewertet werden. Die ermittelten Literaturstellen wurden gesichtet und ausgewertet. Durch Verfolgung der Querverweise der bereits ausgewerteten Veröffentlichungen wurde die Übersicht weiter verfeinert.

Die Übersicht in den folgenden Tabellen wird in vier Gruppen gegliedert:

1. Verfahren auf der Basis von Finiten Elementen (FE)
2. Multigridverfahren (MG) auf der Basis von Finiten Differenzen (FD)
3. Verfahren auf der Basis von Finiten Differenzen (FD)
4. Verfahren auf der Basis von Finiten Volumen (FV)

Die Auswertung wird in 9 Spalten organisiert, wobei in den einzelnen Spalten folgende Informationen aufgelistet sind:

**Quelle:** Der erstgenannte Autor der Veröffentlichung, Erscheinungsjahr.

**Adaption des Zeitschritts  $\Delta t$ :** Wird ein lokaler Zeitschritt bestimmt und benutzt ("local time stepping")?

**Raumdimensionen:** Anzahl der benutzten Raumdimensionen.

**gekoppelte Lösung:** Wird ein geschlossenes Gleichungssystem, d. h. ein zusammenhängendes Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Erhaltungsgrößen gelöst oder werden nur Teilgebiete gelöst und die Einzellösungen der Teilgebiete wechselseitig ausiteriert?

**Interpolation:** Art der verwendeten Interpolation oder Ansatzfunktionen an den Rändern der verfeinerten Gebiete.

**Gleichung:** Typ der betrachteten und gelösten Gleichungen.

**Verfahren:** Das grundlegende Verfahren zur räumlichen Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen.

**Diskretisierung:** Diskretisierungsverfahren für den konvektiven und diffusiven Term in den Differentialgleichungen.

**Stabilitätsbetrachtung:** Wurden Untersuchungen und Aussagen bezüglich der Stabilität des Verfahrens gemacht?

1. Übersicht über Verfahren auf der Basis Finiter Elemente								
Quelle	Adapt. von $\Delta t$	Raumdim.	gek. Lsg.	Interp.	Gl.	Verf.	Diskr.	Stab. betr.
McCormick 1986	k.A.	2	nein	5/9-Punkte Interpol.	Poisson	FE	biquadrat. Ansatzfkt.	k.A.
Adjerid 1988	k.A.	2	ja	n.nötig	parab.	FE	bilineare Ansatzfkt.	k.A.
Evans 1991	ja	2/3	ja	n.nötig	Euler	FE/FD	k.A.	k.A.
Mathew 1993	k.A.	2	nein	n.nötig	ellip.	FE	bilineare Ansatzfkt.	k.A.

k.A. = Keine Angabe

## 2. Übersicht über Multigridverfahren auf der Basis Finiter Differenzen

Quelle	Adapt. von $\Delta t$	Raum- dim.	gek. Lsg.	Interp.	Gl.	Verf.	Diskr.	Stab.- betr.
Ghia 1982	k.A.	2	nein	9-Punkte Interpol.	N.-S.	FD	zentr.Diff. 1.Upwind	k.A.
Thompson 1989	k.A.	2	nein	linear	N.-S.	FD	zentr.Diff.	k.A.
Moukalled 1991	k.A.	2	nein	linear	N.-S.	FD	"power-law" Approx.	k.A.
Thompson 1992	k.A.	2	nein	linear	N.-S.	FD	zentr.Diff. hybrid	k.A.
Srinivasan 1993	k.A.	2/3	nein	FLARE MG	N.-S.	FD	k.A.	k.A.
Stiller 1993	nein	3	nein	mind.2te O.	N.-S.	FD	2te Ord.	ja

### 3. Übersicht über Verfahren auf der Basis Finiter Differenzen

Quelle	Adapt. von $\Delta t$	Raum- dim.	gek. Lsg.	Interp.	Gl.	Verf.	Diskr.	Stab.- betr.
Berger 1982,1985)	ja	2	nein	bilinear quadr.?	hyperb. Euler	FD	k.A.	für Interface
Rai 1985	nein	2	nein	linear	Euler	FD	k.A.	k.A.
Arney 1986	ja	2	k.A.	bilinear	hyperb.	FD	versch.	k.A.
Fuchs 1986	ja	2	nein	linear	N.-S.	FD	zentr.Diff. 1.Upwind	k.A.
Lucchini 1987	k.A.	2	nein	bis 2te O.	N.-S.	FD	weighted 2.Upwind	Beob.
Liang 1987	k.A.	2	nein	k.A.	trans. Pot.gl	FD	k.A.	k.A.
Monnoyer 1988	nein	2/3	nein	Annahmen	versch. zonal	FD	1./2.Ordn. zonal	k.A.
Ewing 1990	ja	2	ja	linear o.besser	allgem. Erh.gl.	FD	versch.	ja
Blom 1991	k.A.	2	nein	k.A.	allgem. PDE	FD	2nd Order?	k.A.
Gropp 1992	k.A.	2	nein	biquadr.	Modellgl.	FD	k.A.	k.A.
Lapworth 1993	k.A.	3	nein	linear	N.-S.	FD	2.Upwind	Verweis
Lee 1993	k.A.	2	nein	linear Flüsse	N.-S.	FD	2.Upwind "power law"	k.A.
Trompert 1993	k.A.	2	nein	linear 4te Ord.	allgem. PDE	FD	k.A.	ja
de Lange 1994	k.A.	2	nein	n.höher	N.-S.	FD	zentr.Diff. hybrid/"power law"/1.Upwind	k.A.

#### 4. Übersicht über Verfahren auf der Basis Finiter Volumen

Quelle	Adapt. von $\Delta t$	Raum- dim.	gek. Lsg.	Interp.	Gl.	Verf.	Diskr.	Stab.- betr.
Bassi	nein	2	nein	Legendre- Pol.	N.-S.	FV	k.A.	k.A.
Hortmann 1990	k.A.	2	nein	bilinear	N.-S.	FV	zentr.Diff.	k.A.
Coelho 1991	k.A.	2	nein	linear	N.-S.	FV	zentr.Diff. hybrid	k.A.
Vilsmeier 1993	k.A.	2	ja	n.nötig	Euler N.-S	FV	quadr. Ansatzfkt.	k.A.
Chen 1994	k.A.	2	nein	k.A.	N.-S.	FV	k.A.	k.A.
Lazarov 1994	k.A.	1	k.A.	linear/ konstant	Konv.-Diff.	FV	zentr.Diff. 1.,weighted Upwind	k.A.
Manzini 1994	ja	2	nein	k.A.	PDE für Salztr.	FV	k.A.	k.A.
Terasaka 1995	k.A.	3	nein	k.A.	N.-S.	FV	zentr.Diff. 1.Upwind,Quick	Verweis SIMPLE

# Anhang B

## Berechnung der Koeffizienten des LECUSSO-Verfahrens

Die Koeffizienten  $C_1 - C_4$  des nicht-konservativen LECUSSO-Verfahrens für die Approximation des konvektiven Terms

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{C_1 \Psi_{i+1} + C_2 \Psi_i + C_3 \Psi_{i-1} + C_4 \Psi_{i-2}}{\Delta x_i} \quad (\text{B.1})$$

werden aus den Annahmen berechnet, daß die Approximation die unbekannte Funktion  $\Psi(x)$  für die Funktionen

$$\Psi(x) = 1 \quad (\text{B.2-a})$$

$$\Psi(x) = x \quad (\text{B.2-b})$$

$$\Psi(x) = x^2 \quad (\text{B.2-c})$$

$$\Psi(x) = e^{Re_i x} \quad , \quad (\text{B.2-d})$$

exakt erfüllt. Gleichung (B.2-d) stellt dabei eine Elementarlösung der stationären Konvektions-Diffusionsgleichung dar.  $Re_i$  bedeutet darin die Maschen-Reynolds-Zahl.

Die genannten Forderungen führen unter Beachtung der Maschenweiten nach Abbildung 3.10 zu folgendem Gleichungssystem

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \quad (\text{B.3-a})$$

$$C_1 (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) - C_3 (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) - C_4 (\Delta x_i + 2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) = 2 \Delta x_i \quad (\text{B.3-b})$$

$$C_1 (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})^2 + C_3 (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})^2 + C_4 (\Delta x_i + 2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})^2 = 0 \quad (\text{B.3-c})$$

$$C_4 = \lambda \quad , \quad (\text{B.3-d})$$

wobei das  $\lambda$  in Gleichung (B.3-d) aus der Forderung (B.2-d) bestimmt werden kann, im folgenden aber als Variable benutzt wird.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet unter Einführung der Maschenweitenverhältnisse

$$r1 = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}, r2 = \frac{\Delta x_{i-2}}{\Delta x_i} \text{ und der Annahme } \Delta x_{i+1} = \Delta x_i$$

$$C_1 = \frac{1+r1}{3+r1} - \frac{(1+2r1+r2)(r1+r2)}{2(3+r1)} \lambda$$

$$C_2 = \frac{1-r1}{1+r1} + \frac{(r1+r2)(3+2r1+r2)}{2(1+r1)} \lambda$$

$$C_3 = \frac{-4}{(1+r1)(3+r1)} - \frac{(1+2r1+r2)(3+2r1+r2)}{(1+r1)(3+r1)} \lambda$$

$$C_4 = \lambda$$

mit  $\lambda$  nach Sakai (1990)

$$\lambda = \frac{r1(r1Re_i - 2)e^{Re_i(1+r1+r2)} - (Re_i + 2)e^{Re_i r2}}{Re_i[r1r2(r1+r2)e^{Re_i(1+r1+r2)} + (r1+r2)(1+r1+r2)e^{Re_i r2} + (r1+1)(2+Re_i(1-r1))e^{Re_i(r1+r2)} - r1(1+r1)] - Re_i(r2(1+r1)(1+r1+r2)e^{Re_i(1+r2)}}$$

# Anhang C

## Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter

Dieses Kapitel folgt einer Stabilitätsbetrachtung nach Günther (1995). Es stellt damit die Grundlage der weiteren Untersuchung bei nicht-äquidistanten Gittern dar.

Für  $u > 0$  schreibt sich die 1D Konvektions-Diffusionsgleichung als

$$\begin{aligned}\Phi_i^{n+1} &= \left[ \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) C + D \right] \Phi_{i+1}^n + (1 - 3\lambda C - 2D) \Phi_i^n \\ &+ \left[ \left( 3\lambda + \frac{1}{2} \right) C + D \right] \Phi_{i-1}^n - \lambda C \Phi_{i-2}^n\end{aligned}\tag{C.1}$$

### C.1 Störungsanalyse

Prägt man dem Verfahren einen Störvektor  $\underline{\Phi}^n = (1, -1, 1, -1, \dots) \cdot \varepsilon$  auf, so entspricht der Forderung nach Stabilität die Forderung, daß die Amplitude der Störung zum Zeitpunkt  $n + 1$  kleiner oder gleich  $\varepsilon$  ist. Zum Zeitpunkt  $n + 1$  gilt für  $\underline{\Phi}$

$$\underline{\Phi}_i^{n+1} = \varepsilon [1 - 8\lambda C - 4D]\tag{C.2}$$

und damit

$$\begin{aligned}|1 - 8\lambda C - 4D| &\leq 1 \\ -1 &\leq 1 - 8\lambda C - 4D \leq 1\end{aligned}$$

Da  $\lambda, C, D > 0$ , ist der rechte Teil der Ungleichung erfüllt. Der linke Teil führt zur Bedingung

$$4\lambda C + 2D \leq 1\tag{C.3}$$



## C.2 Von Neumann Analyse

Man erhält für den Anfachungsfaktor folgende Gleichung

$$G = 1 - (1 - \cos(\Phi)) [2D + 2\lambda C (1 - \cos(\Phi))] - IC \sin(\Phi) [1 + 2\lambda (1 - \cos(\Phi))] \quad (C.4)$$

Für  $\Phi = 0$  erhält man  $G = 1$ . Für  $\Phi = \pi$  erhält man

$$G(\pi) = 1 - 2(2D + 4\lambda C) \quad (C.5)$$

und mit der Forderung, daß  $|G| \leq 1$

$$4\lambda C + 2D \leq 1 \quad , \quad (C.6)$$

welches die identische Bedingung ist, wie sie sich aus der Störanalyse ergibt.

Die Entwicklung von  $G$  um  $\Phi = 0$  (s. Gleichungen (D.1-a), (D.1-b)) für den Realteil  $\xi$  und den Imaginärteil  $\eta$  von  $G$  liefern

$$\xi = 1 - D\Phi^2 + \dots - \frac{\lambda C}{2}\Phi^4 + \dots \quad (C.7-a)$$

$$\eta = C\Phi + \lambda C\Phi^3 + \dots \quad (C.7-b)$$

Betrachtet man nur die führenden Terme in  $\Phi$  und  $\Phi^2$ , gelangt man durch Resubstitution zu

$$\xi = 1 - 2D(1 - \cos(\Phi)) \quad (C.8-a)$$

$$\eta = -C \sin(\Phi) \quad (C.8-b)$$

und damit auch zu

$$\cos(\Phi) = \frac{\xi - 1 + 2D}{2D} \quad (C.9-a)$$

$$\sin(\Phi) = -\frac{\eta}{C} \quad (C.9-b)$$

Der Einheitskreis stellt in der komplexen Ebene der Ort dar, bei dem  $|G| = 1$  gilt. Unter Verwendung der Beziehungen C.9-a und C.9-b in der Gleichung für den Einheitskreis ergibt sich eine Ellipsengleichung. Löst man nach  $\xi_{Eu}$  auf, so ergibt sich

$$\xi_{Eu} = 1 - 2D + \sqrt{\left(1 - \frac{\eta^2}{C^2}\right) 4D^2} \quad (C.10-a)$$

$$= 1 - 2D \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{C^2}}\right) \quad (C.10-b)$$

Für den Einheitskreis gilt

$$\xi_{Ek} = \sqrt{1 - \eta^2} \quad (C.11)$$

und mit einer Entwicklung von  $\sqrt{1 - \eta^2}$  für kleine  $\eta$ , d. h. um den Punkt  $(\xi = 1, \eta = 0)$ ,

$$\sqrt{1 - \eta^2} = 1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \dots \quad (\text{C.12})$$

und der Forderung, daß die Ellipse für kleine  $\eta$  innerhalb des Einheitskreises liegt

$$\xi_{Eu} \leq \xi_{Ek} \quad , \quad (\text{C.13})$$

folgt für die Stabilität als Bedingung an  $C$  und  $D$

$$C^2 \leq 2D \quad . \quad (\text{C.14})$$

## Anhang D

# Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren auf einem nicht-äquidistanten Gitter

Zur Stabilität des LECUSSO-Verfahrens auf nicht-äquidistanten Gittern wurden zwei Untersuchungen gemacht.

Sakai untersuchte 1990 die Abhängigkeit der vier Koeffizienten  $C_1$  bis  $C_4$  von den lokalen Maschenweitenverhältnissen und der lokalen Maschen-Reynolds-Zahl. Stabilität wurde dann angenommen, wenn keiner der Koeffizienten negativ wird. Bei dieser Untersuchung mußten die Fälle der Strömung in positiver und in negativer Koordinatenrichtung unterschieden werden. Das Ergebnis dieser Untersuchung war, daß nur äquidistante Maschenweiten in beiden Fällen das Auftreten negativer Koeffizienten vermeiden und damit die Stabilität sicherstellen.

Flad (1995) untersuchte im Rahmen seiner Erweiterung des LECUSSO-Verfahrens auf die Randbereiche des Rechengitters ebenfalls die Stabilität des LECUSSO-Verfahrens auf nicht-äquidistanten Gittern. Er untersuchte dabei die Abhängigkeit des Stromauf-Koeffizienten von der lokalen Maschen-Reynolds-Zahl und verschiedenen Maschenweiten. Stabilität liegt in seiner Untersuchung vor, wenn dieser Koeffizient positiv bleibt. Das Ergebnis seiner Untersuchung war, daß in Bereichen geringer Maschen-Reynolds-Zahl, d. h. relativ geringer Strömungsgeschwindigkeit, die Maschenweitensprünge nicht den Faktor 2 übersteigen sollten.

Diese Untersuchung geht einen neuen Weg, die Stabilität des LECUSSO-Verfahrens bei den typischen Maschenweitensprünge des vorgeschlagenen Verfahrens zur lokalen Verfeinerung eines strukturierten Gitters zu untersuchen. Es wird dabei in analoger Weise zur Von Neumann Analyse auf einem äquidistanten Gitter (vgl. Anhang C vorgegangen und der Anfachungsfaktor  $G$  aus Gleichung (3.53) um 0 und  $\pi$  entwickelt.

Bei der Entwicklung der trigonometrischen Funktionen um  $\Phi = 0$

$$\cos(\Phi) = 1 - \frac{\Phi^2}{2} + \dots \quad (\text{D.1-a})$$

$$\sin(\Phi) = \Phi + \dots \quad (\text{D.1-b})$$

erhält man unter Berücksichtigung der ersten Glieder bis zum quadratischen Term für den Realteil  $\xi$  und den Imaginärteil  $\eta$

$$\xi = 1 - D\Phi^2 + C\frac{\Phi^2}{2} \left( C_1 + \frac{(r1+1)^2}{4}C_3 + \frac{(1+2r1+r2)^2}{4}C_4 \right) \quad (\text{D.2-a})$$

$$\eta = -C \left( C_1 - \frac{r1+1}{2}C_3 - \frac{1+2r1+r2}{2}C_4 \right) \Phi \quad (\text{D.2-b})$$

Mit den Gleichungen für die Koeffizienten (B.3-b) und (B.3-c) aus Anhang B erhält man

$$\xi = 1 - D\Phi^2 \quad (\text{D.3-a})$$

$$\eta = -C\Phi \quad (\text{D.3-b})$$

und aus

$$G^2 = \xi^2 + \eta^2 \leq 1 \quad (\text{D.4})$$

für kleine  $\Phi$

$$C^2 \leq 2D \quad , \quad (\text{D.5})$$

welches die gleiche Bedingung wie im äquidistanten Fall ist.

Entwickelt man die trigonometrischen Funktionen um  $\Phi = \pi$ , so gilt die Taylorsche Reihe

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots \quad (\text{D.6})$$

und damit bei Einführung von  $\Phi = \pi - \varphi$

$$\cos(\pi - \varphi) = -1 + \frac{\varphi^2}{2} \quad (\text{D.7-a})$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \varphi \quad (\text{D.7-b})$$

Unter Verwendung von Gleichung (B.3-b) und (B.3-c) gilt

$$\xi = 1 - \left( \frac{8}{r1+1} - \varphi^2 \right) D - 2C_2C \quad (\text{D.8-a})$$

$$\eta = -C\varphi \quad (\text{D.8-b})$$

und im Grenzübergang für  $\varphi \rightarrow 0$  geht der Imaginärteil  $\eta \rightarrow 0$  und es gilt für den Anfachungsfaktor G

$$G = 1 - \frac{8}{r1+1}D - 2C_2C \quad , \quad (\text{D.9})$$

woraus mit der Forderung  $|G| \leq 1$  folgt

$$-1 \leq 1 - \frac{8}{r1+1}D - 2C_2C \leq 1 \quad (\text{D.10})$$

Der rechte Teil der Ungleichung ist trivialerweise erfüllt und der linke Teil führt zur Bedingung

$$C \leq \frac{1 - \frac{4D}{r_1+1}}{C_2} \quad (\text{D.11})$$

# Anhang E

## Stabilitätskriterien für das LECUSSO-Verfahren in mehreren Raumdimensionen

Die Stabilität des LECUSSO-Verfahrens in mehreren Raumdimensionen wird hier zum ersten mal untersucht. Dabei werden die in Anhang D gefundenen Ergebnisse auf mehrere Raumdimensionen übertragen.

Betrachtet man den allgemeinen Fall der n-dimensionalen Konvektions-Diffusionsgleichung, so gilt unter Einführung der Courant-Zahlen  $C_m$  und der Diffusions-Zahlen  $D_m$

$$C_m = \frac{u_m \Delta t}{\Delta x_m}, \quad D_m = \frac{a_m \Delta t}{\Delta x_m^2}, \quad (\text{E.1})$$

der Maschenweitenverhältnisse  $r1_m = \frac{\Delta x_{mi-1}}{\Delta x_{mi}}$  und  $r2_m = \frac{\Delta x_{mi-2}}{\Delta x_{mi}}$ , des Richtungsindex  $\kappa_m$

$$\kappa_m = (i, j, k, \dots) \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{E.2})$$

für die transportierte Größe  $\Psi$

$$\begin{aligned} \Psi^{n+1} &= \Psi^n + \sum_{m=1}^n \left[ \frac{4}{r1_m + 3} (\Psi_{\kappa_m+1}^n - \Psi_{\kappa_m}^n) \right. \\ &\quad - \frac{8}{(r1_m + 3)(r1 + 1)} (\Psi_{\kappa_m}^n - \Psi_{\kappa_m-1}^n) \\ &\quad \left. - C_m (C_{1m} \Psi_{\kappa_m+1}^n + C_{2m} \Psi_{\kappa_m}^n + C_{3m} \Psi_{\kappa_m-1}^n + C_{4m} \Psi_{\kappa_m-2}^n) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Zerlegt man den Fehler unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention in eine allgemeine Fourierreihe

$$\varepsilon^n = \sum_{-N}^N E^n e^{l(\kappa_m \Delta x_m)}, \quad (\text{E.4})$$

so erhält man für den Anfachungsfaktor  $G$

$$G = 1 + \sum_{m=1}^n \left[ \frac{4}{r1_m + 3} D_m (e^{l \Phi_m} - 1) \right] \quad (\text{E.5})$$

$$- \frac{8}{(r_{1m} + 3)(r_{1m} + 1)} \left( 1 - e^{I\Phi_m \left(-\frac{r_{1m}+1}{2}\right)} \right) - C \left( C_{1m} e^{I\Phi_m} + C_{2m} + C_{3m} e^{I\Phi_m \left(-\frac{r_{1m}+1}{2}\right)} + C_{4m} e^{I\Phi_m \left(-\frac{r_{2m}+2r_{1m}+1}{2}\right)} \right) ]$$

Entwickelt man  $\Phi = 0$  analog zu Abschnitt D, so ergibt sich für den Realteil  $\xi$  und den Imaginärteil  $\eta$  von  $G$

$$\xi = 1 - \sum_{m=1}^n [D_m \Phi_m^2] \quad (\text{E.6-a})$$

$$\eta = - \sum_{m=1}^n [C_m \Phi_m] \quad (\text{E.6-b})$$

Aus Bedingung (D.4) folgt damit für  $\Phi_m \rightarrow 0$

$$\left[ \sum_{m=1}^n C_m \right]^2 \leq \sum_{m=1}^n 2D_m \quad (\text{E.7})$$

Entwicklung von  $\Phi$  um  $\pi$  ergibt (vgl. Abschnitt D) für  $\xi$  und  $\eta$

$$\xi = 1 - \sum_{m=1}^n \left[ \left( \frac{8}{r_{1m} + 1} - \varphi^2 \right) D_m - 2C_{2m}C_m \right] \quad (\text{E.8-a})$$

$$\eta = - \sum_{m=1}^n C_m \varphi \quad (\text{E.8-b})$$

und im Grenzübergang für  $\varphi \rightarrow 0$

$$G = 1 - \sum_{m=1}^n \left[ \frac{8}{r_{1m} + 1} D_m + 2C_{2m}C_m \right] \quad (\text{E.9})$$

Daraus folgt mit der Forderung  $|G| \leq 1$

$$-1 \leq 1 - \sum_{m=1}^n \left[ \frac{8}{r_{1m} + 1} D_m + 2C_{2m}C_m \right] \leq 1 \quad (\text{E.10})$$

wobei auch hier der rechte Teil der Ungleichung immer erfüllt ist. Die linke Seite führt bei Umgruppierung der Summe zur Bedingung

$$1 - \sum_{m=1}^n \left[ \frac{8}{r_{1m} + 1} D_m + 2C_{2m}C_m \right] \geq -1 \quad (\text{E.11-a})$$

oder nach einigen Umformungen

$$\sum_{m=1}^n [C_{2m}C_m] \leq 1 - \sum_{m=1}^n \left[ \frac{4}{r_{1m} + 1} D_m \right] \quad (\text{E.11-b})$$

# Anhang F

## Diskretisierte Form der Flußerhaltung an Verfeinerungsgrenzen in FLUTAN

In diesem Kapitel werden die diskretisierten Gleichungen für die Implementierung in FLUTAN abgeleitet. Im Unterkapitel F.1 wird dabei der Fall der allgemeinen Erhaltungsgleichung behandelt, wie er bei der Implementierung des Verfahrens in der Energiegleichung und den Transportgleichungen des  $k - \varepsilon$ -Turbulenzmodells auftritt. Im zweiten Unterkapitel F.2 wird der Fall der implementierten Druckgleichung behandelt.

In beiden Kapiteln wird nur jeweils die x-Koordinatenrichtung behandelt, da die anderen Koordinatenrichtungen identisch behandelt werden.

### F.1 Flußerhaltung in der allgemeinen Transportgleichung

In Abschnitt 3.2.1 wird eine modifizierte Bilanzgleichung für die künstliche Masche als Nachbar einer groben Masche an einem Verfeinerungsrand hergeleitet. Diese modifizierte Bilanzgleichung läßt sich unter Benutzung der Bilanzgleichungen der feinen Maschen an diesem Verfeinerungsrand in eine Flußerhaltungsgleichung für die Flüsse (vgl. Gleichung (3.10)) umformen.

In den folgenden beiden Unterkapiteln werden die in FLUTAN implementierten diskretisierten Gleichungen für den Fall einer Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung (s. F.1.1), d. h. für die Flußerhaltung an der Grenzfläche in positiver Koordinatenrichtung einer groben Masche am Rand einer Verfeinerung, und für den Fall einer Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung (s. F.1.2), d. h. für die Flußerhaltung an der Grenzfläche in negativer Koordinatenrichtung einer groben Masche am Rand einer Verfeinerung, beschrieben.



## F.1.1 Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung

Der absolute Fluß nach Gleichung (2.10)

$$(\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_{i+\frac{1}{2}} = (A_F \varrho u \Psi)_{i+\frac{1}{2}} - \left( A_F \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{F.1})$$

setzt sich aus einem diffusiven Anteil nach Gleichung (2.12)

$$\left( A_F \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} = D_{i+\frac{1}{2}} (\Psi_2 - \Psi_0) \quad (\text{F.2})$$

und einem konvektiven Anteil zusammen

$$(A_F \varrho u \Psi)_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}} \Psi_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{F.3})$$

Eine allgemeine Schreibweise für die Approximation der transportierten Größe an der Stelle  $i + \frac{1}{2}$  ist nach Gleichung (2.15)

$$\Psi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+2} & \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} < 0 \\ \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i+1} & \text{falls } u_{i+\frac{1}{2}} > 0 \end{cases}, \quad (\text{F.4})$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  für die verschiedenen in FLUTAN implementierten Diskretisierungs-Verfahren für den konvektiven Term berechnet werden. Die Superskripte  $+$  bzw.  $-$  drücken dabei den lokalen Richtungssinn aus, d. h. ob das Fluid in die positive oder die negative Koordinatenrichtung strömt. Ersetzt man die Indizierung des Flusses  $F_{i+\frac{1}{2}}$  bei der in FLUTAN üblichen Konvention durch  $F_2$  und definiert

$$[F_2, 0] = \max(F_2, 0), \quad (\text{F.5})$$

so schreibt sich der konvektive Anteil als

$$(A_F \varrho u \Psi)_{i+\frac{1}{2}} = [F_2, 0] \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i+1} \right) - [-F_2, 0] \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+2} \right). \quad (\text{F.6})$$

Die Gleichung (3.10) wurde für den Fall einer zweidimensionalen Verfeinerung abgeleitet. Die allgemeinere, dreidimensionale Form dieser Gleichung lautet mit der Definition des totalen Flusses

$$(\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_2 - \sum_{l=1}^m (\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_2^l = 0, \quad (\text{F.7})$$

wobei bei einer zweidimensionalen Verfeinerung  $m = 2$  und bei einer dreidimensionalen Verfeinerung  $m = 4$  gilt. Setzt man in diese Gleichung die einzelnen Approximationen ein

und kürzt  $D_{i+\frac{1}{2}}$  durch  $D_2$  ab, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& [F_2, 0] \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i+1} \right) \\
& - [-F_2, 0] \left( \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+2} \right) + D_2 (\Psi_{i+1} - \Psi_i) \quad (\text{F.8}) \\
& = \sum_{l=1}^m \left\{ [F_{l,1}, 0] \left( \alpha_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i-2} + \beta_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i-1} + \gamma_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i} \right) \right. \\
& \left. - [-F_{l,1}, 0] \left( \alpha_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i-1} + \beta_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i} + \gamma_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i+1} \right) + D_{l,1} (\Psi_{l,i} - \Psi_{l,i-1}) \right\}.
\end{aligned}$$

Bei dieser Gleichung ist darauf zu achten, daß der Index  $i$  sich immer auf das Zentrum der lokal betrachteten Masche bezieht.

Diese Gleichung läßt sich in der Form einer diskretisierten Poissongleichung schreiben:

$$a_0 \Psi_i + a_1 \Psi_{i+1} + \sum_{l=1}^m (a_{2l} \Psi_{l,i} + a_{2l+1} \Psi_{l,i-1}) = b_0 \quad (\text{F.9})$$

Die einzelnen Terme sind:

$$a_0 = [F_2, 0] \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x-} - [-F_2, 0] \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x+} - D_2 \quad (\text{F.10-a})$$

$$a_1 = [F_2, 0] \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x-} - [-F_2, 0] \beta_{i+\frac{1}{2}}^{x+} + D_2 \quad (\text{F.10-b})$$

$$a_{2l} = -[F_{l,1}, 0] \gamma_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} + [-F_{l,1}, 0] \beta_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} - D_{l,1} \quad (\text{F.10-c})$$

$$a_{2l+1} = -[F_{l,1}, 0] \beta_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} + [-F_{l,1}, 0] \alpha_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} + D_{l,1} \quad (\text{F.10-d})$$

$$b_0 = -[F_2, 0] \alpha_{i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + [-F_2, 0] \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+2} \quad (\text{F.10-e})$$

$$+ \sum_{l=1}^m \left\{ [F_{l,1}, 0] \alpha_{l,i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i-2} - [-F_{l,1}, 0] \gamma_{l,i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i+1} \right\}.$$

## F.1.2 Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung

Der absolute Fluß nach Gleichung (2.10) schreibt sich für die Fläche  $i - \frac{1}{2}$ :

$$(\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_{i-\frac{1}{2}} = (A_F \varrho u \Psi)_{i-\frac{1}{2}} - \left( A_F \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \quad (\text{F.11})$$

Dieser Fluß setzt sich aus einem diffusiven Anteil, analog für diese Fläche nach Gleichung (2.12),

$$\left( A_F \Gamma_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} = D_{i-\frac{1}{2}} (\Psi_0 - \Psi_1) \quad (\text{F.12})$$

und einem konvektiven Anteil zusammen

$$(A_F \varrho u \Psi)_{i-\frac{1}{2}} = F_{i-\frac{1}{2}} \Psi_{i-\frac{1}{2}} \quad (\text{F.13})$$

Eine allgemeine Schreibweise für die Approximation der transportierten Größe an der Stelle  $i - \frac{1}{2}$  ist analog nach Gleichung (2.15)

$$\Psi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i-1} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} & \text{falls } u_{i-\frac{1}{2}} < 0 \\ \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-2} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i & \text{falls } u_{i-\frac{1}{2}} > 0 \end{cases}, \quad (\text{F.14})$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  für die verschiedenen in FLUTAN implementierten Diskretisierungs-Verfahren für den konvektiven Term berechnet werden. Die Superskripte + bzw. - drücken dabei den lokalen Richtungssinn aus, d. h. ob das Fluid in die positive oder die negative Koordinatenrichtung strömt. Ersetzt man die Indizierung des Flusses  $F_{i-\frac{1}{2}}$  bei der in FLUTAN üblichen Konvention durch  $F_1$  und definiert

$$[F_1, 0] = \max(F_1, 0), \quad (\text{F.15})$$

so schreibt sich der konvektive Anteil als

$$(A_F \varrho u \Psi)_{i-\frac{1}{2}} = [F_1, 0] \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-2} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i \right) - [-F_1, 0] \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i-1} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} \right). \quad (\text{F.16})$$

Die Gleichung (3.10) wurde für den Fall einer zweidimensionalen Verfeinerung abgeleitet. Die allgemeinere, dreidimensionale Form dieser Gleichung lautet mit der Definition des totalen Flusses

$$(\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_1 - \sum_{l=1}^m (\langle \mathcal{J}_\Psi \rangle A_F)_l^l = 0, \quad (\text{F.17})$$

wobei bei einer zweidimensionalen Verfeinerung  $m = 2$  und bei einer dreidimensionalen Verfeinerung  $m = 4$  gilt. Setzt man in diese Gleichung die einzelnen Approximationen ein und kürzt  $D_{i-\frac{1}{2}}$  durch  $D_1$  ab, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & [F_1, 0] \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-2} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-1} + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_i \right) \\ & - [-F_1, 0] \left( \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i-1} + \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_i + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} \right) + D_1 (\Psi_i - \Psi_{i-1}) \\ & = \sum_{l=1}^m \left\{ [F_{l,2}, 0] \left( \alpha_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i-1} + \beta_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i} + \gamma_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i+1} \right) \right. \\ & \left. - [-F_{l,2}, 0] \left( \alpha_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i} + \beta_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i+1} + \gamma_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i+2} \right) + D_{l,2} (\Psi_{l,i+1} - \Psi_{l,i}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Bei dieser Gleichung ist darauf zu achten, daß der Index  $i$  sich immer auf das Zentrum der lokal betrachteten Masche bezieht.

Diese Gleichung läßt sich in der Form einer diskretisierten Poissongleichung schreiben:

$$a_0 \Psi_i + a_1 \Psi_{i-1} + \sum_{l=1}^m (a_{2l} \Psi_{l,i} + a_{2l+1} \Psi_{l,i+1}) = b_0. \quad (\text{F.19})$$

Die einzelnen Terme sind:

$$a_0 = [F_1, 0] \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x-} - [-F_1, 0] \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x+} - D_1 \quad (\text{F.20-a})$$

$$a_1 = [F_1, 0] \beta_{i-\frac{1}{2}}^{x-} - [-F_1, 0] \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x+} + D_1 \quad (\text{F.20-b})$$

$$a_{2l} = -[F_{l,2}, 0] \beta_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} + [-F_{l,2}, 0] \alpha_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} + D_{l,2} \quad (\text{F.20-c})$$

$$a_{2l+1} = -[F_{l,2}, 0] \gamma_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} + [-F_{l,2}, 0] \beta_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} - D_{l,2} \quad (\text{F.20-d})$$

$$b_0 = -[F_1, 0] \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{i-2} + [-F_1, 0] \gamma_{i-\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{i+1} \quad (\text{F.20-e})$$

$$+ \sum_{l=1}^m \left\{ [F_{l,2}, 0] \alpha_{l,i+\frac{1}{2}}^{x-} \Psi_{l,i-1} - [-F_{l,2}, 0] \gamma_{l,i+\frac{1}{2}}^{x+} \Psi_{l,i+2} \right\} .$$

## F.2 Flußerhaltung in der Kontinuitätsgleichung

In Abschnitt 3.2.3 wird eine modifizierte Bilanzgleichung für die künstliche Masche als Nachbar einer groben Masche an einem Verfeinerungsrand für die Kontinuitätsgleichung hergeleitet. Diese modifizierte Bilanzgleichung läßt sich unter Benutzung der Bilanzgleichungen der feinen Maschen an diesem Verfeinerungsrand in eine Massenflußerhaltungsgleichung für die Flüsse (vgl. Gleichung (3.27)) umformen.

In den folgenden beiden Unterkapiteln werden die in FLUTAN implementierten diskretisierten Gleichungen für den Fall einer Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung (s. F.2.1), d. h. für die Flußerhaltung an der Grenzfläche in positiver Koordinatenrichtung einer groben Masche am Rand einer Verfeinerung, und für den Fall einer Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung (s. F.2.2), d. h. für die Flußerhaltung an der Grenzfläche in negativer Koordinatenrichtung einer groben Masche am Rand einer Verfeinerung, beschrieben.

### F.2.1 Verfeinerung in positiver Koordinatenrichtung

Der allgemeine, dreidimensionale Fall von Gleichung (3.28) lautet

$$\langle \varrho \rangle_1^{MH1} A_F^{MH1} du_i^{MH1} \Delta P^{MH} - \sum_{l=1}^m \left[ \langle \varrho \rangle_1^{l1} A_F^{l1} du_i^{l1} \Delta P^{l1} \right] = \sum_{l=1}^m \left[ \langle \varrho \rangle_1^{l1} A_F^{l1} \hat{u}_i^{l1} \right] - \langle \varrho \rangle_1^{MH1} A_F^{MH1} \hat{u}_i^{MH1} , \quad (\text{F.21})$$

wobei bei einer zweidimensionalen Verfeinerung  $m = 2$  und bei einer dreidimensionalen Verfeinerung  $m = 4$  gilt. Das Subskript  $MH1$  bezeichnet den Nachbarn der künstlichen Halbmasche und  $l1$  bezeichnet den Nachbarn der  $l$ ten Tochtermasche in negativer Koordinatenrichtung.

Unter Benutzung der in den Gleichungen (3.29) bis (3.31) definierten Druckdifferenzen

läßt sich diese Gleichung in der Form einer diskretisierten Poissongleichung schreiben:

$$a_0 P_i^{MH} + a_1 P_{MH1} + \sum_{l=1}^m (a_{2l} P_{l,i} + a_{2l+1} P_{l,i-1}) = b_0 \quad . \quad (\text{F.22})$$

Die einzelnen Terme sind:

$$a_0 = \langle \varrho \rangle_1^{MH1} A_F^{MH1} du_i^{MH1} \quad (\text{F.23-a})$$

$$a_1 = -\langle \varrho \rangle_1^{MH1} A_F^{MH1} du_i^{MH1} \quad (\text{F.23-b})$$

$$a_{2l} = -\langle \varrho \rangle_1^{l1} A_F^{l1} du_i^{l1} \quad (\text{F.23-c})$$

$$a_{2l+1} = \langle \varrho \rangle_1^{l1} A_F^{l1} du_i^{l1} \quad (\text{F.23-d})$$

$$b_0 = \sum_{l=1}^m \langle \varrho \rangle_1^{l1} A_F^{l1} \hat{u}_i^{l1} - \langle \varrho \rangle_1^{MH1} A_F^{MH1} \hat{u}_i^{MH1} \quad (\text{F.23-e})$$

## F.2.2 Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung

Eine analoge Betrachtung der Verfeinerung in negativer Koordinatenrichtung ergibt:

$$\langle \varrho \rangle_2^{MH} A_F^{MH} du_i^{MH} \Delta P^{MH} - \sum_{l=1}^m \left[ \langle \varrho \rangle_2^l A_F^l du_i^l \Delta P^l \right] = \quad (\text{F.24})$$

$$\sum_{l=1}^m \left[ \langle \varrho \rangle_2^l A_F^l \hat{u}_i^l \right] - \langle \varrho \rangle_2^{MH} A_F^{MH} \hat{u}_i^{MH} \quad ,$$

wobei auch hier bei einer zweidimensionalen Verfeinerung  $m = 2$  und bei einer dreidimensionalen Verfeinerung  $m = 4$  gilt.

Die Druckdifferenzen sind in diesem Fall definiert als:

$$\Delta P^{MH} = P^{MH2} - P^{MH} \quad (\text{F.25})$$

$$\Delta P^l = P^{l2} - P^l \quad , \quad (\text{F.26})$$

wobei  $MH2$  hier den Nachbarn der künstlichen Masche und  $l2$  den Nachbarn der feinen Maschen an diesem Verfeinerungsrand in positiver Koordinatenrichtung bedeuten.

Damit läßt sich wieder eine Gleichung in der Form einer diskretisierten Poissongleichung aufstellen:

$$a_0 P_i^{MH} + a_1 P_{MH2} + \sum_{l=1}^m (a_{2l} P_{l,i} + a_{2l+1} P_{l,i+1}) = b_0 \quad . \quad (\text{F.27})$$

Die einzelnen Terme sind:

$$a_0 = \langle \varrho \rangle_2^{MH} A_F^{MH} du_i^{MH} \quad (\text{F.28-a})$$

$$a_1 = -\langle \varrho \rangle_2^{MH} A_F^{MH} du_i^{MH} \quad (\text{F.28-b})$$

$$a_{2l} = \langle \varrho \rangle_2^l A_F^l du_i^l \quad (\text{F.28-c})$$

$$a_{2l+1} = -\langle \varrho \rangle_2^l A_F^l du_i^l \quad (\text{F.28-d})$$

$$b_0 = \langle \varrho \rangle_2^{MH} A_F^{MH} \hat{u}_i^{MH} - \sum_{l=1}^m \langle \varrho \rangle_2^l A_F^l \hat{u}_i^l \quad . \quad (\text{F.28-e})$$

