



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5655

Zellulare Strukturen laminarer Staupunktflammen

A. G. Class

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Schadstoff- und Abfallarme Verfahren

September 1995

FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Technik und Umwelt
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5655

Zellulare Strukturen laminarer Staupunktflammen

Andreas G. Class

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Schadstoff- und Abfallarme Verfahren

von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Zellulare Struktur laminarer Staupunktflammen

Laminare Vormischflammen von Staupunktburnern in Labormaßstab sind häufig instabil und weisen zellulare Muster auf.

Ein grundlegendes Verständnis dieses Instabilitätsmechanismus ist wichtig zur Beurteilung turbulenter Flammen, da Wechselwirkungen von Strömungs- und Flammeninstabilitäten auftreten können.

Eine nichtlineare Theorie für Zellularflammen liefert eine Evolutionsgleichung für die Flammenposition Φ bei schwach überkritischen Bedingungen. Es handelt sich hierbei um eine verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 4\nabla^4 \Phi + \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \beta \Phi = \rho.$$

Die rechte Seite ρ berücksichtigt allgemeine Störungen des Strömungs-, Temperatur- und Konzentrationsfelds. Sind diese ortsabhängig, ergeben sich nur nichtebene Lösungen dieser Gleichung.

Eine parabolisch gekrümmte Flamme wird durch numerische Simulation systematisch untersucht. Sind die Ränder einer solchen Flamme in Richtung des Brenners gekrümmt, werden, bedingt durch eine reduzierte Austrittsgeschwindigkeit oder eine erhöhte Austrittsenthalpie am Brennerrand, regelmäßige lokalisierte Zellmuster im Zentrum des Brenners gefunden. Andernfalls ergeben sich gestreckte Zellmuster mit zeitperiodischer Zellteilung.

Abstract

Cellular structure of laminar stagnation point flames

Laminar premixed flames in stagnation point burners of laboratory scale are frequently unstable exhibiting cellular patterns.

A basic understanding of the underlying instability mechanism is important to judge turbulent flames, since there may be interactions of flow and flame instabilities.

A nonlinear theory for cellular flames yields an evolution equation for the flame front position Φ at weakly supercritical conditions. In particular this is a generalized Kuramoto-Sivashinsky equation:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 4\nabla^4 \Phi + \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \beta \Phi = \rho.$$

The right hand side ρ takes into account general perturbations of the flow, temperature and concentration field. If these are spatially dependent, we only find nonplanar solutions of this equation.

A parabolically curved flame is investigated systematically by numerical simulations. If the edge of such a flame points towards the burner due to a reduced outlet velocity or an increased outlet enthalpy at the burner rim, we find ordered localized cellular patterns in the center of the burner. Otherwise we find stretched cellular patterns exhibiting time periodic subdivisions of cells.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Ausbreitungsmechanismus einer laminaren Flamme	3
1.3	Staupunktströmung und laminare Flammengeschwindigkeit	5
1.3.1	Der Einfluß des Geschwindigkeitsgradienten normal zur Flamme	7
1.3.2	Einfluß der Lewis-Zahl	8
1.3.3	Gemeinsame Wirkung von Geschwindigkeitsgradienten und Lewis-Zahl	12
1.4	Stabilität: Zellulare und pulsierende Flammen	13
1.4.1	Heuristische Erklärung der Instabilitätsmechanismen	18
1.5	Literaturübersicht	20
1.5.1	Theorie	20
1.5.2	Experimente	24
1.6	Gliederung der Arbeit	27
2	Grundgleichungen und Kennzahlen	29
2.1	Das thermisch-diffusive Modell	29
2.2	Vereinfachung der Grundgleichungen des thermisch-diffusiven Modells	36
2.3	Schwache Staupunktströmung ($\kappa \ll 1$)	38
2.4	Boussinesq-Erweiterung des thermisch- diffusiven Modells	41
3	Ebene Grundlösung für schwache Staupunktströmung	43
4	Lineare Stabilität	45
4.1	Stabilität gegen Störungen mit Variation auf der $\mathcal{O}(1)$ Raum- und Zeitskala	47

4.2	Langwellige langsam variierende Störungen	50
4.3	Kombinierte Dispersionsbeziehung für $\beta^* = \mathcal{O}(1)$ und $\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$	52
4.4	Diskussion der Stabilitätsergebnisse	52
5	Schwach nichtlineare Analyse für schwache Staupunktströmung	57
5.1	Längen- und Zeitskalen	57
5.2	Reale Brenner	61
5.3	Grundlösung	65
5.4	Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung	66
5.4.1	Störungen erster Ordnung	66
5.4.2	Störungen zweiter Ordnung	66
5.4.3	Störungen dritter Ordnung der Temperatur und Ent- halpie	68
5.4.4	Störungen dritter Ordnung des Strömungsfelds	71
5.5	Parabolisch gekrümmte Flammen	73
5.6	Lineare Stabilität	75
5.7	Instabilität durch nichtlineare Wechselwirkung von Moden	78
6	Invarianzeigenschaften der Grundgleichungen: Stabilität gegen Wanderwellen	79
6.1	Thermisch-diffusives Modell	79
6.2	Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung	82
7	Numerische Untersuchungen	85
7.1	Numerisches Verfahren	85
7.1.1	Spektralverfahren	85
7.1.2	Fourier-Kollokationsverfahren	86
7.1.3	Filter	88
7.1.4	Randbedingungen	89
7.2	Lokalisierte Flammen mit $\alpha_{eff} < 0$	90
7.2.1	Eindimensionale Muster	91
7.2.2	Zweidimensionale Muster	102
7.3	Gestreckte Flammen mit $\alpha_{eff} > 0$	105
7.3.1	Eindimensionale stationäre Muster	105
7.3.2	Eindimensionale zeitabhängige Muster	105
7.4	Gegenüberstellung von Experiment und Simulation	110
7.4.1	Lokalisierte Flammen	110
7.4.2	Gestreckte Flammen	112
7.4.3	Anforderungen an zukünftige Experimente	113

8 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	115
Anhang	119
A Flammenstreckung	119
B Ebene Grundlösung	125
C Lineare Stabilitätsanalyse	129
D Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung	131
D.1 Temperatur- und Enthalpiefeld	131
D.2 Geschwindigkeitsfeld	132
E Formelzeichen	139
E.1 Großbuchstaben	139
E.2 Kleinbuchstaben	140
E.3 Griechische Buchstaben	141
E.4 Koordinatensysteme	142
E.5 Indizes	142
E.6 Operatoren	143
Literaturverzeichnis	145

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Verbrennung ist ein Prozeß, bei dem Ausgangsstoffe, die Edukte, in Verbrennungsprodukte durch eine chemische Reaktion umgewandelt werden. Genutzt wird typischerweise die freigesetzte Reaktionswärme. Häufig ist die Umwandlung der Edukte in bestimmte nicht schädliche Produkte das Hauptziel, wie beispielsweise bei der Abfallentsorgung durch Verbrennung. Der Prozeß setzt sich aus einer Vielzahl von Teilphänomenen wie diffusivem und konvektivem Wärme- und Stofftransport, komplexen chemischen Reaktionen, Strömungs-Turbulenz und Mehrphasigkeit zusammen.

In der vorliegenden Arbeit soll die Verbrennung mit analytischen Methoden beschrieben werden. Dies erfordert stark vereinfachte Modelle der komplexen Vorgänge. Berücksichtigt werden in vollem Umfang Wärme- und Stofftransport. Der Ablauf der chemischen Reaktionen wird aber zu einem globalen Einzschrittschema vereinfacht. Alle Komponenten sollen in der gasförmigen Phase vorliegen. Es sollen nur Deflagrationen, also Flammgeschwindigkeiten weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit, zugelassen werden. Detonationen werden ausgeschlossen. Das Strömungsproblem in Form des Massen- und Impulstransports wird mit zwei vereinfachten Modellansätzen behandelt. Im thermisch-diffusiven Modell ist das Strömungsproblem vom Wärme- und Stofftransport voll entkoppelt. Im Boussinesq-Modell besteht dagegen eine schwache Kopplung über den Auftriebsterm. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß diese Modelle von Matkowsky & Sivashinsky (1979) als asymptotische Grenzfälle aus den allgemeinen Bilanzgleichungen abgeleitet werden.

Exemplarisch werden die Modelle auf Vormischflammen angewandt, für die Brennstoff und Oxidant optimal vorgemischt im Brenngas vorliegen. Die

Flamme sei eingebettet in eine laminare Staupunktströmung.

Diese Strömungsform eignet sich besonders gut zur Untersuchung des Einflusses von Geschwindigkeitsgradienten auf den Verbrennungsvorgang. Geschwindigkeitsgradienten sind dabei ortsunabhängig.

Der Einfluß von Gradienten des Geschwindigkeitsfelds ist im Zusammenhang mit der Modellierung turbulenter Verbrennung von besonderer Bedeutung. Turbulente Verbrennung ist charakterisiert durch ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld. Dieses führt zu einer stark zeitabhängigen Deformation der reaktiven Zonen. Im Falle kleiner bis mittlerer Turbulenzgrade führt diese Deformation nicht zur Zerstückelung der reaktiven Zone. Vielmehr ist das chemische Verhalten ähnlich dem einer laminaren Flamme, eingebettet in ein sich statistisch änderndes Strömungsfeld. Diese Ähnlichkeit ist Grundlage für ein wichtiges Verbrennungsmodell für turbulente Flammen, das "laminar flamelet"-Modell, siehe Peters (1986). Mögliche laminare Flammstrukturen werden in einer sogenannten "flamelet"-Bibliothek abgelegt und können im Verlauf einer Rechnung abgerufen werden. Der zeitlich gemittelte chemische Umsatz wird durch Mittelung dieser "flamelets" unter Berücksichtigung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt. Ein "flamelet" ist charakterisiert durch die chemische Zusammensetzung, die Temperatur und das Strömungsfeld. Die Eigenschaften des Strömungsfelds werden mit einem einzigen Parameter charakterisiert, der Flammenstreckung. Die Flammenstreckung ist ein Maß für die Größe von Geschwindigkeitsgradienten des Strömungsfelds und wird mit dem Turbulenzgrad der Strömung abgeschätzt. Im Modell unberücksichtigt bleibt der Einfluß möglicher Instabilitäten der Flamme. Diese könnten zu lokalen Löschvorgängen führen und so zu erhöhtem Schadstoffausstoß. Instabilitäten können aber auch zu einer erhöhten Geräusentwicklung führen. Es soll auch darauf hingewiesen werden, daß Flammen in laminaren Strömungen instabil sein können und so zu Geschwindigkeitsschwankungen führen.

Die Existenz einer Vielfalt von Instabilitäten ist bekannt und wird in der Literaturübersicht diskutiert. Ziel dieser Arbeit ist die mathematische Beschreibung einiger interessanter Instabilitätsmoden in Staupunktbrennern. Dies sind einerseits gestreckte Zellmuster und andererseits lokalisierte Zellmuster. Bei den gestreckten Zellmustern werden die Zellstrukturen der Flamme mit der Strömung zum Brennerand transportiert. Gleichzeitig erfolgt eine fortlaufende Generierung neuer Zellen, so daß die Gesamtzahl der Zellen weitgehend konstant ist. Die lokalisierten Muster weisen dagegen nur in Zentrumsnähe einzelne Zellen auf und zeigen im äußeren Bereich keine Muster. In dieser Arbeit wird speziell der Einfluß realer Austrittsbedingungen am Brenner behandelt. Es zeigt sich, daß reale Austrittsbedingungen im Gegensatz zu idealisierten Austrittsbedingungen das Auftreten der gefundenen

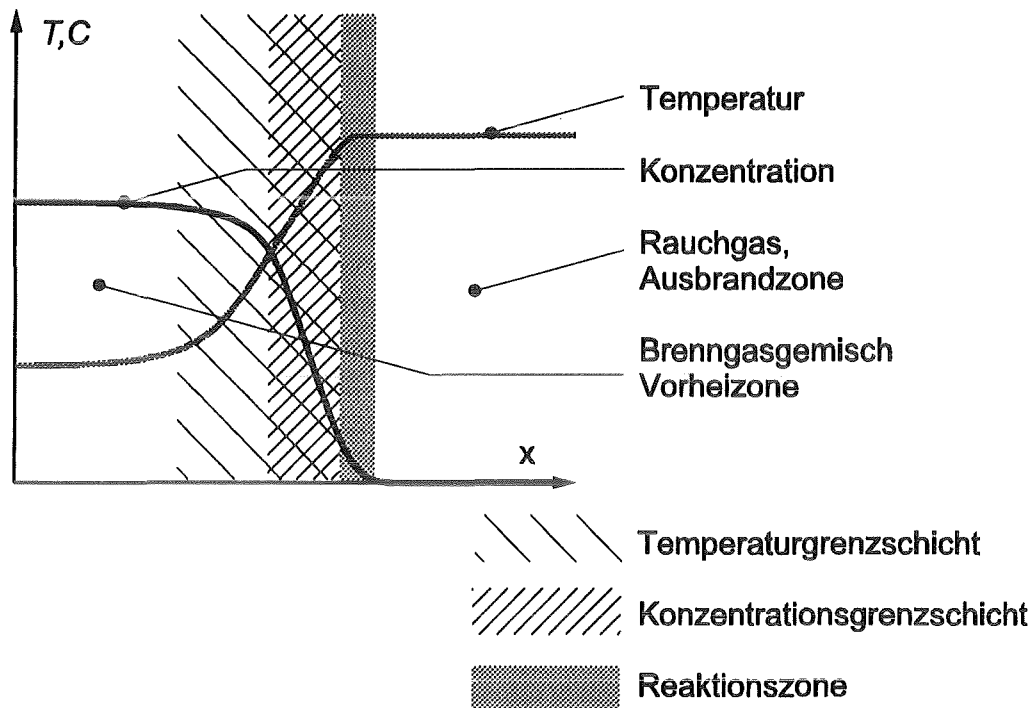


Abbildung 1.1: Schematischer Querschnitt durch eine Flamme

lokalisierten Zellmuster ermöglichen.

1.2 Ausbreitungsmechanismus einer laminaren Flamme

Von Flammen wird typischerweise gesprochen, wenn ein Brennstoff/Oxidant-Gemisch, das bei niedrigen Temperaturen stabil vorliegt, oberhalb einer bestimmten Zündtemperatur rasch mittels einer exothermen Reaktion in ein neues Produkt, das Rauchgas, umgewandelt wird.

Zur Erläuterung des Ausbreitungsmechanismus soll ein kleines Gedankenexperiment dienen. Wir stellen uns ein mit einem Brenngas/Oxidant-Gemisch gefülltes adiabates Rohr vor. Die Reaktionsrate im Gemisch ist typischerweise gegeben durch ein Arrhenius-Gesetz und ist proportional zu $\exp(-\tilde{E}/(\tilde{R}\tilde{T}))$. Hierin ist \tilde{E} die Aktivierungsenergie, \tilde{R} die allgemeine Gaskonstante und \tilde{T} die Temperatur. Die Aktivierungsenergie \tilde{E} ist typischerweise groß. Bei Umgebungsbedingungen, d.h. bei niedrigen Temperaturen

erfolgt kein wesentlicher Stoffumsatz. Mit wachsender Temperatur steigt der Umsatz exponentiell an. Im Gedankenexperiment wird die Wandtemperatur am Rohrende kontinuierlich erhöht. Zunächst wird sich am heißen Rohrende innerhalb des Gemischs eine Temperaturgrenzschicht ausbilden. Da die Gemischtemperatur überall klein ist, findet zunächst keine merkliche chemische Reaktion statt. Erst wenn eine Zündtemperatur an der Rohrwand überschritten wird, setzt eine sich selbst fortpflanzende Verbrennungsreaktion ein. Dabei wird das in der Reaktionszone enthaltene Brenngasgemisch vollständig in Verbrennungsprodukte umgesetzt. In Abbildung 1.1 ist dies schematisch dargestellt. Unmittelbar nach der Zündung liegt im Rohr ein kleiner Abschnitt von heißen ausgebrannten Rauchgasen vor, während der Großteil des Rohres weiterhin mit kaltem Brenngasgemisch gefüllt ist. Beide Bereiche sind durch eine Temperatur- bzw. eine Konzentrationsgrenzschicht getrennt. In den Grenzschichten steigt einerseits die Temperatur von einem niederen Niveau auf ein hohes Niveau. Andererseits fällt die Brenngasgemischkonzentration vom Ausgangswert auf Null ab. Entsprechend steigt die Rauchgaskonzentration von Null auf einen Endwert an. Die Schicht, in der sich Temperatur und Konzentration von ungestörten Ausgangs- bis zu Zündbedingungen ändern, wird als Vorheizzone bezeichnet und ist typischerweise 0.5mm dick. Es schließt sich hieran die Reaktionszone mit einer Dicke von typischerweise 0.05mm . Hinter der Reaktionszone folgt die Ausbrand- oder Rauchgaszone. Hier liegen die Rauchgase bei annähernd konstanter Temperatur vor. Der Stoffumsatz ist in der Ausbrandzone weitgehend abgeschlossen, allerdings können für die Schadstoffbildung relevante langsame Reaktionen stattfinden.

Die Wärme aus den Rauchgasen kann nicht durch die isolierten Rohrwände abfließen. Sie heizt vielmehr weiteres Gemisch auf. Durch diffusiven Stofftransport wird frisches Brenngas zu den heißen Rauchgasen transportiert. Dieses Gemisch entzündet sich jeweils beim Überschreiten der Zündtemperatur. Hierdurch steht neue Wärme aus der chemischen Reaktion zur Verfügung, um den Prozeß aufrechtzuerhalten.

Nach einer gewissen Einlauflänge können sich stationäre Bedingungen einstellen. Die Flamme frißt sich mit konstanter Geschwindigkeit in das frische Brenngasgemisch hinein und hinterläßt ausgebranntes Rauchgas. Die Relativgeschwindigkeit der Reaktionszone bezüglich des Gemisches wird als Flammengeschwindigkeit bezeichnet. Da diese Geschwindigkeit bei mehrdimensionalen Vorgängen über die Reaktionszone hinweg variieren kann, definieren wir die Flammengeschwindigkeit am Ort der maximalen Reaktionsrate.

Im Experiment ist die Reaktionszone in Form einer bläulich leuchtenden Schicht sichtbar. Das Leuchten ist auf Fluoreszenz von Radikalen, die als Zwischenprodukte der Reaktion entstehen, zurückzuführen. Häufig wird

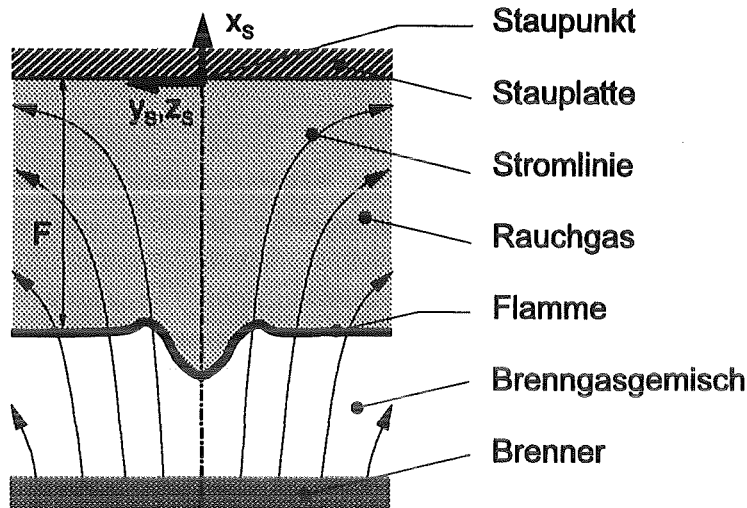


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung einer Staupunktflamme

auch gelb oder weiß leuchtendes Rauchgas beobachtet. Dieses Leuchten ist sichtbare Wärmestrahlung von Rußpartikeln bei unvollständiger Verbrennung.

1.3 Staupunktströmung und laminare Flammengeschwindigkeit

In Abbildung 1.2 ist das Strömungsfeld einer senkrecht angeströmten, unendlich ausgedehnten Platte dargestellt. Die Strömung sei reibungsfrei und drehungsfrei. Das Strömungsfeld ist durch einen Punkt ausgezeichnet, an dem alle Geschwindigkeitskomponenten verschwinden. Dieser Punkt liegt auf der Wand und wird als Staupunkt bezeichnet. Er fällt in der Abbildung mit dem Koordinatenursprung zusammen. Die y_S - und die z_S -Koordinaten liegen in der Wandebene, während die x_S -Koordinate normal auf der Wand steht. Der Index "S" wird benutzt, da der Koordinatenursprung im Staupunkt liegt. Die x_S -Geschwindigkeit des Strömungsfelds fällt stetig in Richtung der Wand ab. Die Beträge der y_S - und z_S -Geschwindigkeit nehmen, ausgehend von der Achse $(y_S, z_S) = 0$, kontinuierlich zu. In der Abbildung ist das Strömungsfeld durch Stromlinienpfeile angedeutet. Mit einer wachsenden Anströmgeschwindigkeit der Platte steigen die Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsfeld an. Die Größe des Geschwindigkeitsgradienten normal zur

Wand wird als Stärke der Staupunktströmung bezeichnet.

Etwa parallel zur Wand kann sich eine Flamme ausbilden. Zwischen der Flamme und der Wand liegt das Rauchgasgebiet. Vor der Flamme, das heißt unten in der Abbildung, ist die Vorheizzone.

In der Fachliteratur wird neben dem Begriff *Stärke der Staupunktströmung* auch der Begriff *Flammendehnung* bzw. *Flammenstreckung* benutzt. Die Flammenstreckung läßt sich leicht veranschaulichen. Dazu stellt man sich eine farblich markiertes Flächenelement einer Flamme vor und betrachtet dessen zeitliche Verformung durch das Strömungsfeld. Die Flammenstreckung ist die relative Flächenänderung pro Zeit. In der Staupunktströmung nimmt die wandparallele Geschwindigkeit vom Zentrum des Brenners zum Rand hin kontinuierlich zu. Die markierten Punkte des Flächenelements, die näher beim Zentrum des Brenners liegen, werden somit langsamer nach Außen transportiert als diejenigen Punkte, die weiter vom Zentrum entfernt liegen. Der Abstand dieser Punkte nimmt somit im Laufe der Zeit zu, die markierte Fläche wird gedehnt, wir sprechen von positiver Flammenstreckung. Die detaillierte Definition der Flammenstreckung findet sich in Kapitel 2.1 und in Anhang A. Mit zunehmender Stärke der Staupunktströmung wächst auch die Flammenstreckung an.

Es soll jetzt der Einfluß der Stärke der Staupunktströmung auf die Flammengeschwindigkeit mit physikalischen Argumenten beschrieben werden.

Bei der Argumentation wird stets auf den Fall einer angeströmten Platte Bezug genommen. Die Strömung kann jedoch ebenso gut in umgekehrter Richtung vorgegeben werden. Es ergeben sich dann ähnliche Schlüsse.

Das Verhalten einer stationären, ebenen Flamme in einer Staupunktströmung läßt sich mit anschaulichen Argumenten erklären. Es sollen hier zwei Mechanismen unterschieden werden, die auf die Flammengeschwindigkeit einwirken.

- Der erste Mechanismus folgt aus Geschwindigkeitsgradienten normal zur Flamme.
- Der zweite Mechanismus ändert die Flammengeschwindigkeit durch eine Variation der Verbrennungstemperatur.

Um beide Mechanismen zu verstehen, betrachtet man die wesentlichen Prozesse in der Vorheiz-, Reaktions- und Ausbrandzone einer stationären Flamme. Wie schon bei der Erläuterung des Ausbreitungsmechanismus ist es zweckmäßig den Vorgang von der Ausbrandzone ausgehend zu betrachten (siehe Abb. 1.1).

- *In der Ausbrandzone herrschen nahezu konstante Bedingungen, da die Reaktion weitgehend abgeschlossen ist.*
- *Aufgrund der Arrhenius-Chemie fällt der Reaktionsterm mit fallender Temperatur exponentiell ab. Eine relevante chemische Reaktion ergibt sich nur für Temperaturen in unmittelbarer Nähe der höchsten auftretenden Temperatur. Es folgt hieraus, daß die Temperatur in der Reaktionszone annähernd konstant ist. Somit ist auch der Temperaturgradient klein und der konvektive Wärmetransport gering. Entsprechendes gilt für den konvektiven Stofftransport. In der Reaktionszone besteht Gleichgewicht von Wärmeproduktion und Wärmeleitung sowie Gleichgewicht von Brennstoffverbrauch und Stoffdiffusion. Diffusiver Transport geht mit einer Änderung des Temperatur- und Konzentrationsgradienten einher. Da stromab der Reaktionszone die Ausbrandzone mit nahezu konstanten Bedingungen (verschwindenden Gradienten) vorliegt, wird der stromauf liegenden Vorheizzone ein Temperatur- und Konzentrationsgradient aufgeprägt. Eine erhöhte Reaktionsrate (z.B. durch eine erhöhte Temperatur) ergibt stärkere Temperatur- und Konzentrationsgradienten in der Vorheizzone.*
- *In der Vorheizzone ist die Reaktionsrate exponentiell klein, da die Temperatur unterhalb der Zündtemperatur liegt. Es liegt somit ein Gleichgewicht zwischen konvektivem und diffusivem Transport vor. Da die diffusiv abzuführende Wärme bzw. zuzuführende Brennstoffmenge von der Reaktionszone gesteuert wird, muß sich ein entsprechender konvektiver Transport einstellen. Dieser konvektive Transport ist proportional zu einer charakteristischen Geschwindigkeit in der Vorheizzone, d.h. zur mittleren Normalgeschwindigkeit in der Vorheizzone.*

Zusammengefaßt gilt: *Eine erhöhte Temperatur oder ein erhöhtes Brennstoffangebot führt zu einer erhöhten mittleren Geschwindigkeit in der Vorheizzone.*

1.3.1 Der Einfluß des Geschwindigkeitsgradienten normal zur Flamme

Der erste Mechanismus, der in der Staupunktströmung die Flammengeschwindigkeit beeinflusst, folgt unmittelbar aus dem Unterschied zwischen der mittleren Geschwindigkeit in der Vorheizzone und der Flammengeschwindigkeit, also der Geschwindigkeit in der Reaktionszone. In der Staupunktströmung nimmt die Geschwindigkeitskomponente normal zur Wand stetig ab, um auf

der Wand zu verschwinden. Da die Vorheizzone stromauf der Reaktionszone liegt, ist hier die Strömungsgeschwindigkeit stets höher als in der Reaktionszone. Dieser Effekt tritt mit wachsender Stärke der Staupunktströmung zunehmend in Erscheinung. Da die mittlere Geschwindigkeit in der Vorheizzone bei gegebener Reaktionsrate als fest vorgegeben aufgefaßt werden kann, folgt eine Absenkung der Flammengeschwindigkeit mit steigender Stärke der Staupunktströmung. Für eine große Stärke der Strömung erfolgt letztendlich eine Absenkung bis auf 0, d.h. die Reaktionszone liegt unmittelbar vor der Wand. Eine weitere Steigerung führt zum Auslöschen der Flamme, da eine negative Flammengeschwindigkeit in der vorgegebenen Geometrie nicht möglich ist. An der Löschgrenze verschwindet die Flammengeschwindigkeit. Experimente (vergl. z.B. Ishizuka & Law (1982)) und eine asymptotische Theorie von Buckmaster & Ludford (1983) zeigen, daß die Flamme für hinreichend starke Geschwindigkeitsgradienten der Strömung stets erlischt. In dieser Arbeit wird die Flammengeschwindigkeit als die Normalgeschwindigkeit des Fluids im Reaktionsmaximum definiert, obwohl die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Vorheizzone maßgebend ist für die Bilanzen. Die Definition an einem fest vorgegebenen Ort wird einer Definition durch einen willkürlich festzulegenden Mittelwert vorgezogen.

1.3.2 Einfluß der Lewis-Zahl

Um den zweiten Mechanismus zu verstehen, betrachte man den Temperatur- und Konzentrationsverlauf in der Vorheizzone. Die Temperatur steigt von der Brenngastemperatur bis zur Rauchgastemperatur an und die Brenngaskonzentration fällt vom Anfangswert bis auf Null ab. Die Dicke der Temperatur- bzw. der Konzentrationsgrenzschicht ist proportional zu der Wärmeleitfähigkeit bzw. zur Stoffdiffusivität. Die relative Dicke der Temperaturgrenzschicht zur Konzentrationsgrenzschicht ist somit gegeben durch die Lewis-Zahl Le . Diese ist definiert als das Verhältnis von Temperaturleitfähigkeit¹ $\tilde{\kappa} \left[\frac{m^2}{s} \right]$ zu Stoffdiffusivität $\tilde{D} \left[\frac{m^2}{s} \right]$.

$$(1.1) \quad Le = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{D}}.$$

Abbildung 1.3 zeigt neben dem Temperatur- und Konzentrationsprofil das Profil der Enthalpie. Die Enthalpie ist die Summe der Bildungsenthalpien aller Komponenten des Gemischs. Die chemisch gespeicherte Enthalpie und ggf. Phasenübergänge werden somit genauso berücksichtigt wie der Wärmeinhalt des Gemischs. Es ist zu beachten, daß für $Le > 1$ die

¹In Übereinstimmung mit der in der Literatur üblichen Notation wird κ später als die dimensionslose Stärke der Staupunktströmung eingeführt.

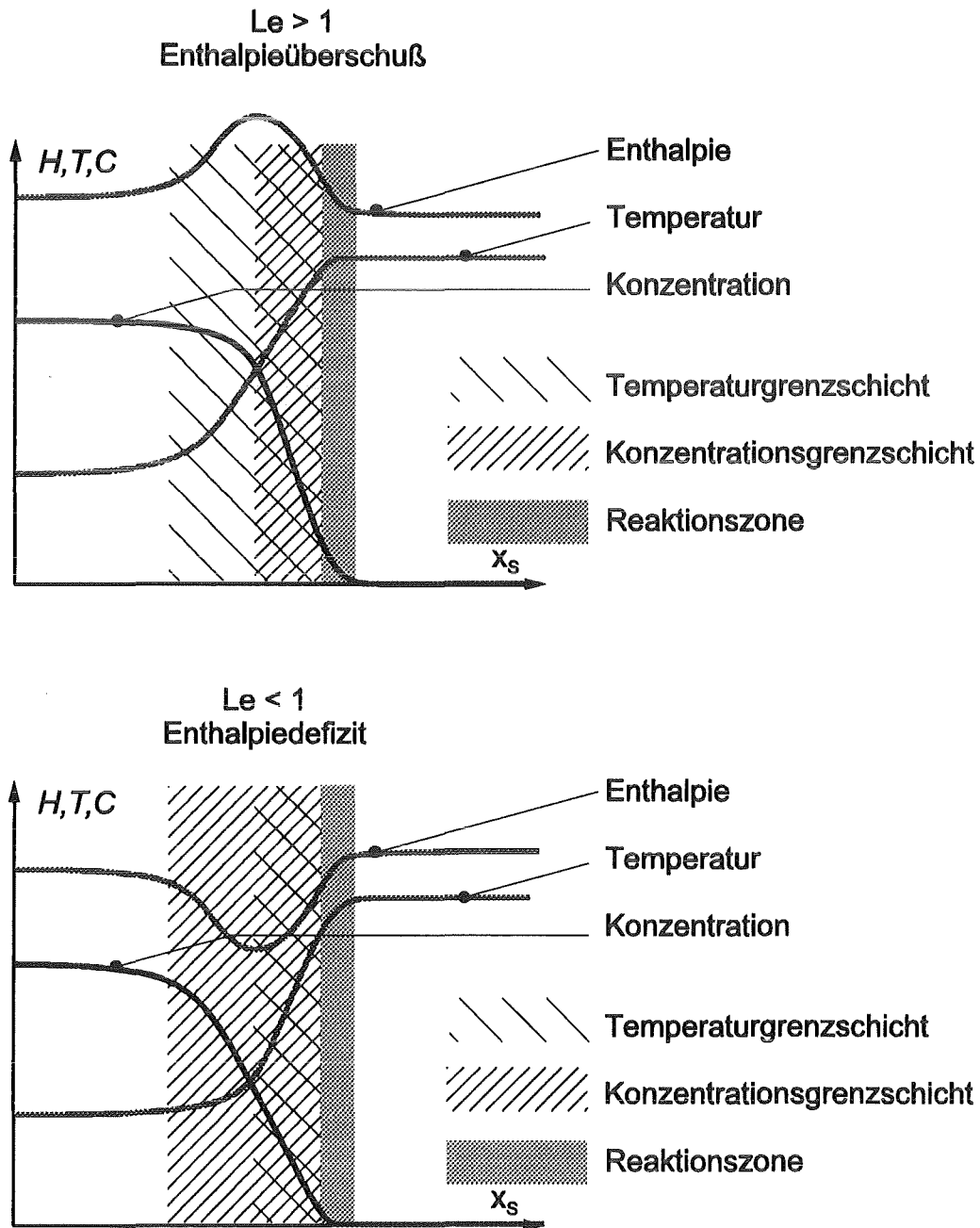


Abbildung 1.3: Einfluß der Lewis-Zahl auf das Enthalpieprofil

Temperaturgrenzschicht dicker als die Konzentrationsgrenzschicht ist, da die Temperaturleitfähigkeit größer als die Stoffdiffusivität ist. Das Enthalpieprofil weist ein Maximum vor der Flamme auf (siehe Abb. 1.3), da der Wärmeinhalt des Gemisches zunimmt bevor die chemisch gespeicherte Enthalpie abnimmt, die proportional zur Brenngaskonzentration ist. Es wird von Enthalpieüberschuß gesprochen. Für Lewis-Zahlen $Le < 1$ ist dagegen die Temperaturgrenzschicht dünner als die Konzentrationsgrenzschicht und so hat das Enthalpieprofil ein Minimum; es wird von Enthalpiedefizit gesprochen.

In einer Staupunktströmung hat das Strömungsfeld Geschwindigkeitskomponenten tangential zu der ebenen Reaktionsfront. Der Betrag dieser Komponenten wächst ausgehend von der Symmetrieachse $(y_S, z_S) = 0$ linear an. Wird ein Volumenelement betrachtet, in dem das Enthalpieextremum liegt und an der Flamme endet (siehe Abb. 1.4), zeigt sich, daß im Falle von Enthalpieüberschuß der Enthalpieabfluß (IV) in y_S - (z_S) Richtung größer ist als der Enthalpiezufluß (II). Enthalpieerhaltung erzwingt, daß der Enthalpiestrom (III), der das Volumenelement verläßt und zur Flamme gelangt, kleiner ist als der Enthalpiestrom (I), der in das Volumenelement eintritt. In der Reaktionsfront wird das Brenngasgemisch chemisch umgesetzt, so daß eine kleinere Enthalpie auch mit einer geringeren Verbrennungstemperatur einhergeht. Aus der geringeren Verbrennungstemperatur folgt eine kleinere Reaktionsrate und eine verringerte Wärmefreisetzung. *Enthalpieüberschuß* ($Le > 1$) führt somit zu einer Reduzierung der Flammengeschwindigkeit. Infolge der abgesenkten Wärmefreisetzung ergeben sich kleinere Temperaturgradienten und dies führt zu einer dickeren Vorheizzone. Dies hat zur Folge, daß auch die Schicht, in der Enthalpieüberschuß vorliegt, dicker ist. Somit kann ein nochmals größerer Betrag der Enthalpie das oben beschriebene Volumenelement tangential verlassen. Der Prozeß ist selbstverstärkend und kann für große Geschwindigkeitsgradienten zum Auslösen der Flamme führen. Unmittelbar vor dem Auslösen kann die Flammengeschwindigkeit von 0 verschieden sein. Tatsächlich zeigt Buckmaster & Ludford (1983), daß für hinreichend große Streckungsraten keine Flamme existiert und ein Löschvorgang mit nicht-verschwindender Flammengeschwindigkeit erfolgt.

Im Falle von Enthalpiedefizit ergeben sich dagegen ein Anwachsen der Verbrennungstemperatur, ein Anwachsen der Flammengeschwindigkeit und somit dünnere Vorheizzonen. Der Prozeß ist selbsthemmend.

Die hier erläuterten Mechanismen sind Lewis-Zahl-Effekte, die nur auftreten für $Le \neq 1$.

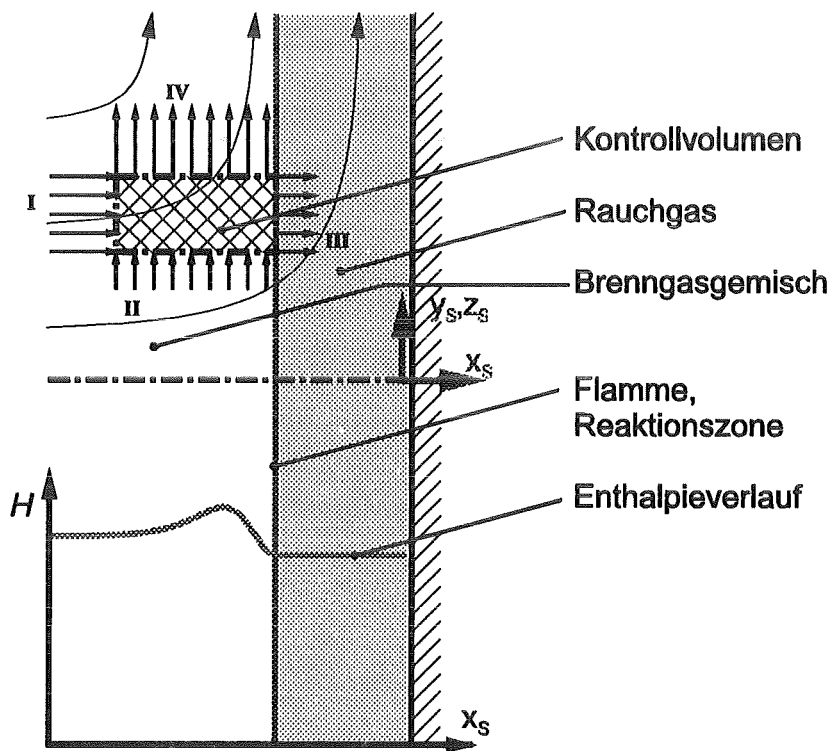


Abbildung 1.4: Konvektiver Enthalpietransport in der Vorheizzone

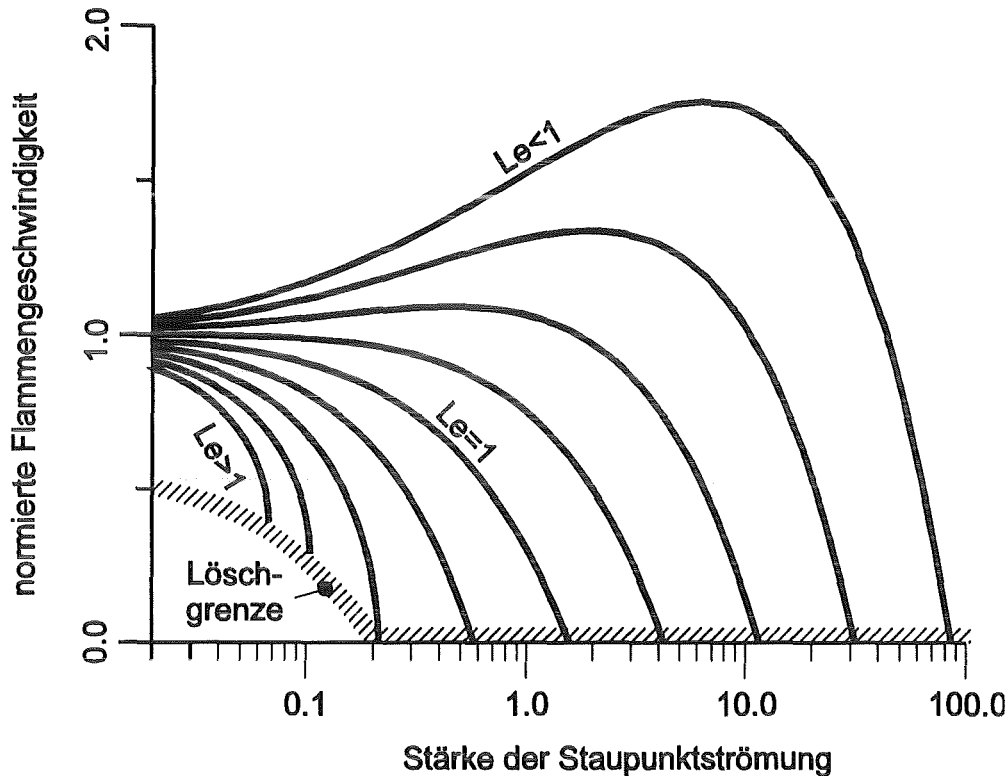


Abbildung 1.5: Flammengeschwindigkeit ebener Flammen in der Staupunktströmung

1.3.3 Gemeinsame Wirkung von Geschwindigkeitsgradienten und Lewis-Zahl

Die in den Kapiteln 1.3.1 und 1.3.2 beschriebenen Mechanismen wirken zusammen auf die Flammengeschwindigkeit ein.

- Für $Le > 1$ senken beide Mechanismen die Flammengeschwindigkeit.
- Für $Le < 1$ steigert der Lewis-Zahl-Effekt die Flammengeschwindigkeit, während der Geschwindigkeitsgradienten-Effekt sie weiterhin absenkt.
 - Für hinreichend kleine Lewis-Zahlen Le , und schwache Staupunktströmungen, dominiert der Lewis-Zahl-Effekt und führt zu erhöhter Flammengeschwindigkeit.
 - Für starke Staupunktströmung dominiert stets der auf Geschwindigkeitsgradienten beruhende Effekt.

In Abbildung 1.5 ist die Flammengeschwindigkeit über der Stärke der Staupunktströmung dargestellt, wie sie sich aus der asymptotischen Theorie von Buckmaster & Ludford (1982) ergibt. Im Diagramm sind Kurven für verschiedene Lewis-Zahlen aufgetragen. Dabei ist die Flammengeschwindigkeit mit der Flammengeschwindigkeit einer ebenen Flamme in einem ruhenden Medium normiert. Die Stärke der Staupunktströmung ist gemäß Gleichung (2.16) definiert. Das asymptotische Ergebnis zeigt deutlich das oben beschriebene Verhalten.

1.4 Stabilität: Zellulare und pulsierende Flammen

Bei den bisherigen Betrachtungen wird von einer ebenen, wandparallelen, stationären Flamme ausgegangen. Solche ebenen Flammen können mit eindimensionalen Modellen gefunden werden. Eine Grundvoraussetzung für die eindimensionale Betrachtung ist die Unabhängigkeit der wandnormalen (x_S) Komponente der Fluidgeschwindigkeit von der y_S und z_S -Koordinate. Diese Voraussetzung wird vom Strömungsfeld der Staupunktströmung (siehe Beziehung (2.15)) erfüllt. Es ist jedoch keinesfalls garantiert, daß ebene stationäre Lösungen auch in der Realität vorgefunden werden. Neben der ebenen stationären Lösung können zeitabhängige und/oder nichtebene Lösungen existieren und vom System angenommen werden.

Eine Stabilitätsanalyse der ebenen Staupunktflamme wirft folgende Fragen auf:

- Unter welchen Bedingungen kann der Grundzustand in Realität beobachtet werden, d.h. in welchem Parameterbereich ist der Grundzustand stabil?
- Bei welchen Werten der Systemparameter tritt ein Übergang von der Grundlösung zu einer strukturell anderen Lösung auf, d.h. unter welchen Bedingungen tritt eine Lösungsverzweigung auf?
- Wie sehen die neuen Zustände aus, die den Grundzustand ablösen, wenn die äußeren Systemparameter über ihre kritischen Werte anwachsen?

Eine ausführliche Literaturstudie zur Stabilitätstheorie kontinuumsmechanischer Probleme findet sich beispielsweise in Joseph (1976).

Um die Stabilität einer Grundlösung zu prüfen, wird üblicherweise das Zeitverhalten der Lösung nach einer beliebigen Anfangsstörung betrachtet. Um dem Begriff "Stabilität" einen eindeutigen Sinn zu geben wird ein Maß für die Größe der Störung in Form einer gemittelten Energie der Störung eingeführt.

$$(1.2) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$$

Hierin steht \mathbf{u} für die Auslenkung der Lösung aus dem Grundzustand und die Klammer $\langle \cdot \rangle$ steht für einen volumetrischen Mittelwert.

Der Grundzustand heißt dann *stabil* gegen eine Störung der Anfangsbedingung, wenn

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}(0)} \rightarrow 0.$$

Diese Definition wird auch als asymptotische Stabilität bezeichnet. Gibt es eine positive Schranke \mathcal{E}_c , so daß für alle Anfangsbedingungen $\mathcal{E}(0) < \mathcal{E}_c$ der Grundzustand stabil ist, dann heißt der Grundzustand *relativ stabil* bzw. *bedingt stabil*. Sofern $\mathcal{E}_c \rightarrow \infty$, dann heißt die Grundlösung *absolut stabil* bzw. *unbedingt stabil*. Entsprechend können zwei Arten der Instabilität unterschieden werden. Dies ist zunächst ein Zustand, der weder relativ noch absolut stabil ist, und andererseits ein Zustand, der zwar relativ stabil aber nicht absolut stabil ist.

Häufig ist das Problem für beliebige Anfangsstörungen nicht lösbar. Um dennoch zu Stabilitätsaussagen zu gelangen, ist es üblich nur infinitesimal kleine Störungen zuzulassen, so daß sich ein lineares Problem für die zeitliche Entwicklung der Störungen ergibt. Diese Vorgehensweise wird als *lineare Stabilitätsanalyse* bezeichnet. Klingt jede beliebige aber infinitesimal kleine Störung für $t \rightarrow \infty$ auf Null ab, so heißt die Grundlösung asymptotisch stabil gegenüber kleinen Störungen. Diese Definition von Stabilität prüft auf relative Stabilität und ist nicht hinreichend zur Bewertung der absoluten Stabilität des Grundzustands. Wird in der linearen Stabilitätsanalyse Instabilität gefunden, so ist dies ein hinreichendes Kriterium.

Da die Frage nach der Stabilität einer Flamme ein kontinuummechanisches Problem ist, soll hier eine typische Vorgehensweise zur Untersuchung der Stabilität skizziert werden. Zunächst wird dem Grundzustand, der auf Stabilität geprüft werden soll, eine infinitesimal kleine additive Störung überlagert. Für die Störung kann ebenso wie für das ursprüngliche Problem ein Satz von Bilanzgleichungen angegeben werden. Im Gegensatz zum ursprünglichen Problem sind die Gleichungen für die Störung jedoch linear, da die Kleinheit der Störung eine Linearisierung von nichtlinearen Termen erlaubt. Es wird jetzt die allgemeine Lösung des Störproblems gesucht. Dies kann häufig mittels eines Separationsansatzes geschehen. Beim Separationsansatz wird die

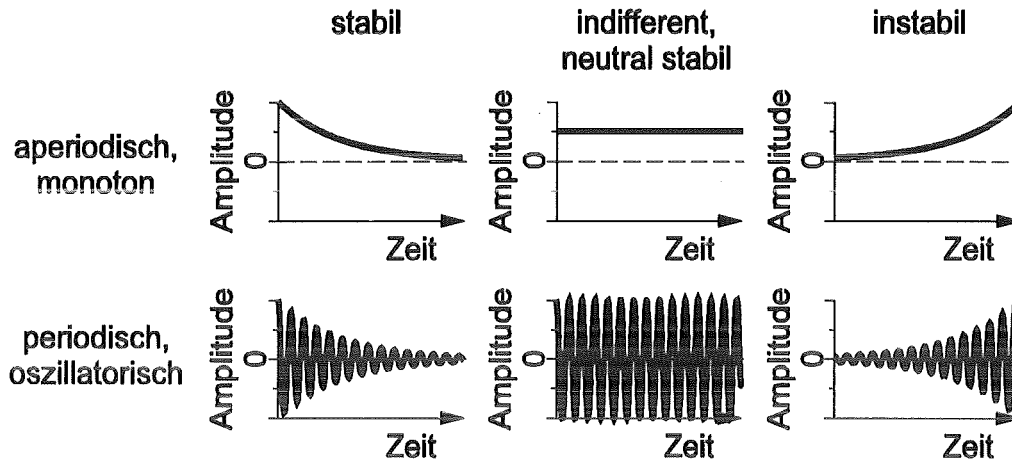


Abbildung 1.6: Übersicht zum Stabilitätsverhalten

Lösung als Produkt mehrerer Funktionen angesetzt. Im allgemeinen können hierbei abzählbar unendlich viele Lösungen gefunden werden, die sowohl die Gleichungen als auch die Randbedingungen des Problems erfüllen. Es handelt sich dabei um ein Eigenwertproblem mit der zeitlichen Anfachungsrate der Störlösung als Eigenwert. Jede der Lösungen ist charakterisiert durch eine zeitabhängige Amplitude und ein räumliches Muster. Über den Zeitverlauf der Amplitude wird die Stabilitätsaussage gewonnen. Klingt die Amplitude aller möglichen Störungen für $t \rightarrow \infty$ auf Null ab, so kehrt die Lösung zum Grundzustand zurück. Der Grundzustand ist stabil bezüglich dieser kleinen Störung. Wächst die Amplitude von mindestens einer Eigenfunktion, spricht man von Instabilität des Grundzustands. Bleibt die Amplitude einer oder mehrerer Eigenfunktionen konstant, während alle anderen Störungen abklingen, so spricht man von Neutralstabilität. Es ist des weiteren üblich zu unterscheiden, ob das Zeitverhalten monoton oder zeitperiodisch ist. In Abbildung 1.6 sind mögliche Zeitverläufe der Amplitude einer Störung zusammengefaßt. Im Falle der zeitperiodischen Oszillation spricht man von einer *pulsierenden Instabilität*, alle anderen Fälle bezeichnet man als *zellulare Instabilität*. Der Begriff "zellular" beschreibt die typische räumliche Zellstruktur einer durch eine aperiodische Instabilität aus dem Grundzustand hervorgehenden Lösung.

Typischerweise interessiert das Verhalten eines Systems, wenn ein oder mehrere Systemparameter variiert werden. Diese Parameter werden auch als *Verzweigungsparameter* bezeichnet. Das Ergebnis einer Stabilitätsuntersuchung wird übersichtlich in einer *Stabilitätskarte* dargestellt. Dazu werden

charakteristische Parameter, für die neutrale Stabilität besteht, über die Verzweigungsparameter aufgetragen. Die Parameterbereiche, für die Stabilität bzw. Instabilität besteht, werden durch sogenannte *Neutralkurven* voneinander abgegrenzt. Dabei wird das Stabilitätsverhalten im allgemeinen nach den Eigenfunktionen aufgeschlüsselt. Als Beispiel für diese Vorgehensweise wird die Stabilitätskarte in Abb. 1.7 diskutiert. Hier ist die Lewis-Zahl Verzweigungsparameter, die Wellenzahl charakterisiert die Eigenfunktionen. Aus der Stabilitätskarte kann abgelesen werden, welche Eigenfunktion bei der Variation eines Verzweigungsparameters zuerst angefacht wird.

Abbildung 1.7 zeigt schematisch die Stabilitätskarte einer ebenen, unendlich ausgedehnten, laminaren Vormischflamme in einem ruhenden Medium. Bei solchen Flammen wird sowohl eine zellulare als auch eine pulsierende Instabilität beobachtet. Die im Diagramm eingetragenen Kurven sind Kurven neutraler Stabilität. Auf der Abszisse ist die Wellenzahl k , die proportional zur reziproken Wellenlänge der Störung ist, dargestellt, während auf der Ordinate als Verzweigungsparameter die Lewis-Zahl aufgetragen ist.

Wird die Lewis-Zahl ausgehend von einem stabilen Zustand ($Le = 1$) abgesenkt, so werden zunächst Störungen jeder beliebigen Wellenzahl gedämpft. Erreicht die Lewis-Zahl einen kritischen Wert Le_{zell} , so wird eine ebene Störung mit der Wellenzahl $k_{zell} = 0$ neutral stabil. Die Wellenzahl für die erstmals neutrale Stabilität erzielt wird, wird als *kritische Wellenzahl* bezeichnet. Beim Unterschreiten von Le_{zell} wird ein Kontinuum langwelliger Störungen instabil. Die maximal angefachte Störung ist dabei im allgemeinen nicht eben. Flammen mit $Le < Le_{zell}$ zeigen eine charakteristische Zellstruktur. Der Bereich instabiler ebener Flammen ist im Diagramm unterlegt. Der zugehörige Instabilitätsmechanismus wird unten heuristisch erklärt.

Entsprechend findet man bei Steigerung der Lewis-Zahl auf Le_{puls} eine zweite Stabilitätsgrenze. Für die kritische Wellenzahl gilt $k_{puls} > 0$. Aus der Grundlösung verzweigt hier eine zeitperiodisch pulsierende Lösung. Die neue Lösung kann den Charakter einer Wanderwelle haben oder aber wie eine stehende Welle vor und zurück pulsieren.

In dieser Arbeit soll im wesentlichen geklärt werden, wie sich die Stabilitätsverhältnisse ändern, wenn zusätzlich das Feld der Staupunktströmung berücksichtigt wird. Insbesondere soll die Art der aus einer ebenen Grundlösung verzweigenden Lösungen gezeigt werden.

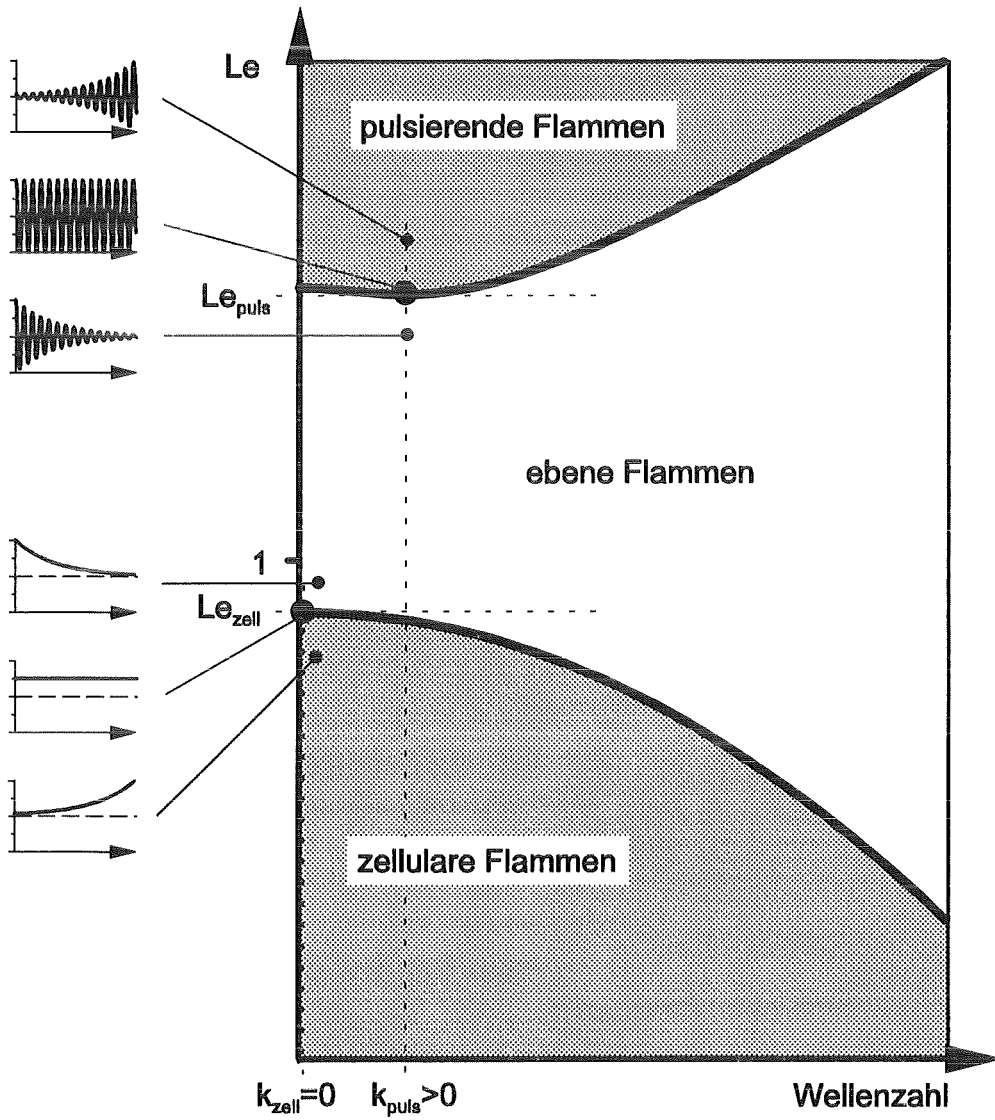


Abbildung 1.7: Schematisches Stabilitätsdiagramm für ebene Vormischflammen in einem ruhenden Medium

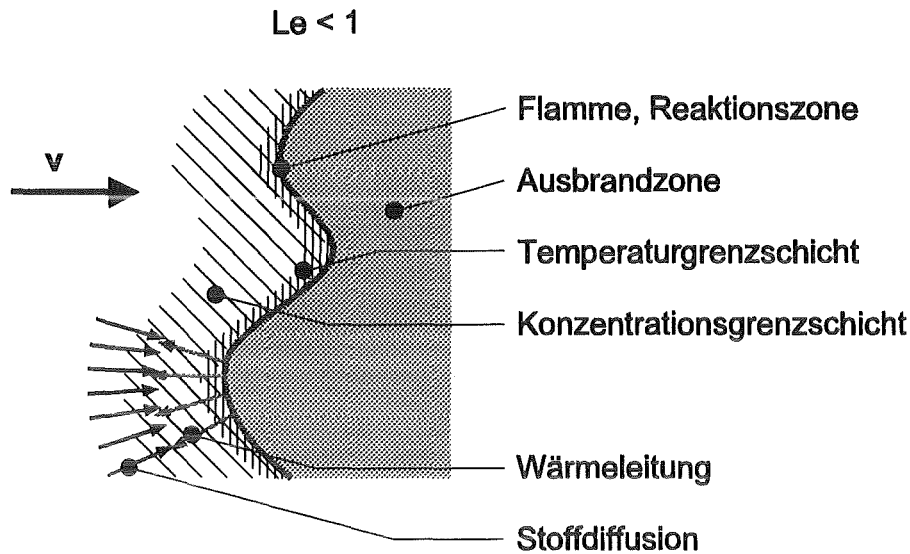


Abbildung 1.8: Instabilitätsmechanismus zellulärer Flammen

1.4.1 Heuristische Erklärung der Instabilitätsmechanismen

1.4.1.1 Zellularinstabilität

Der Mechanismus der Zellularinstabilität wird erstmals von Zeldovich (1944, 1985) vorgeschlagen und kann leicht veranschaulicht werden. Zunächst sei bemerkt, daß in der Ausbrandzone nahezu konstante Bedingungen vorliegen. Die wesentlichen Vorgänge müssen somit vor der Flamme in der Vorheizzone gesucht werden. Die Vorheizzone versorgt die Flamme mit Brennstoff und führt die Reaktionswärme ab. Wird nun die Flamme in Richtung der Vorheizzone ausgelenkt, werden beide Prozesse aus geometrischen Gründen verbessert (siehe Abbildung 1.8). Die Wärme kann jetzt nicht nur stromauf diffundieren, sondern auch zur Seite. Wie sehr jeder der Prozesse verstärkt wird, hängt vom Verhältnis aus der jeweiligen Grenzschichtdicke und dem Krümmungsradius der Flamme ab. Ist $Le \neq 1$ findet die Verstärkung der Prozesse nicht im gleichen Maße statt. Es profitiert der Prozeß mit der höheren Diffusivität. Ist die Wärmeleitfähigkeit kleiner als die Stoffdiffusivität ($Le < 1$), so kann im Verhältnis mehr Brennstoff an die Flamme herandiffundieren als zusätzlich Wärme wegdiffundiert. Durch das zusätzliche Brennstoffangebot entsteht nun zusätzliche Wärme, die Reaktionstemperatur steigt an, und die Flammengeschwindigkeit nimmt zu. Eine höhe-

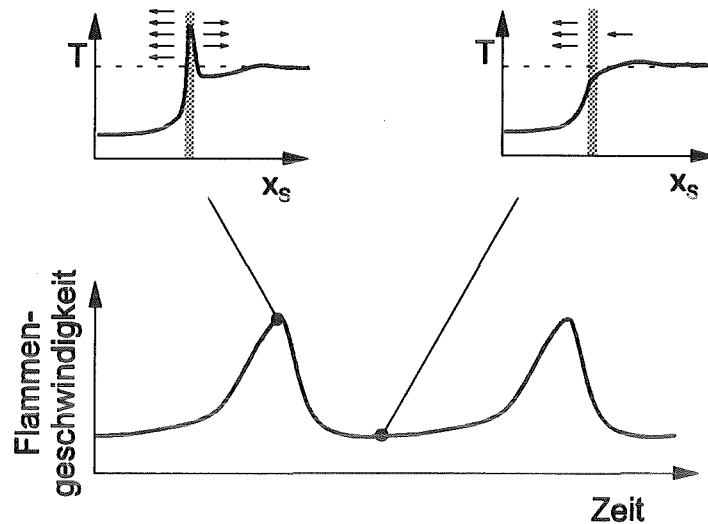


Abbildung 1.9: Temperaturprofile und Geschwindigkeitsverlauf einer pulsierenden Flamme

re Flammengeschwindigkeit bedeutet, daß sich die Flamme schneller in das Brenngasgemisch hineinfrißt, so daß die Größe der Auslenkung anwächst. Umgekehrtes gilt, wenn die Flamme in Richtung der Rauchgase ausgelenkt wird. Hier wird die Temperatur weiter abnehmen, und die Flamme wird langsamer, so daß die Auslenkung ebenfalls anwächst. Es folgt, daß langwellige Störungen für ausreichend kleine $Le < 1$ angefacht werden. Bei kurzwelligen Störungen findet der Ausgleich schon innerhalb der Grenzschichten statt, so daß keine Instabilität erwartet werden kann.

Es soll angemerkt werden, daß $Le < 1$ gilt, wenn die geschwindigkeitsbestimmende Komponente leichter als das Gemisch ist. Ein typischer Fall sind fette Propan/Luft-Flammen. Hier hemmt der Sauerstoff O_2 die Reaktion, da er im Unterschuß vorliegt. Das Molekulargewicht des Sauerstoffs ist kleiner als das Molekulargewicht des Gemisches. Somit ist die Wärmeleitfähigkeit, bewirkt durch Stöße beliebiger Moleküle, geringer als die Stoffdiffusivität, die auf Stößen der leichten O_2 -Moleküle mit allen Molekülen des Gemisches beruht. Ein weiteres typisches Beispiel sind magere Wasserstoff/Luft-Flammen, bei denen die hohe Stoffdiffusivität des Wasserstoffs zu kleinen Lewis-Zahlen führt.

1.4.1.2 Pulsierende Instabilität

Lewis und von Elbe (1934) haben schon 1934 den Enthalpieverlauf in Flammen untersucht. Sie finden für $Le > 0$ einen Enthalpieüberschuß (vergl. Abb. 1.3) in der Vorheizzone und folgern, daß dieser Fall instabil sein kann.

Abbildung 1.9 zeigt für eine pulsierende Flamme den zeitlichen Verlauf der Flammengeschwindigkeit, sowie Temperaturprofile für zwei Zeiten. In den Temperaturprofilen ist die Reaktionszone grau unterlegt. Die Pfeile symbolisieren die Richtung und Größe der fließenden Wärmeströme.

Der Prozeß läßt sich über die Enthalpie veranschaulichen.

Für große Lewis-Zahlen ist die Konzentrationsgrenzschicht dünn gegenüber der Temperaturgrenzschicht. Im Grenzfall ergibt sich ein Stufenprofil mit konstanter Konzentration vor und hinter der Flamme. Als Beispiel für diesen Grenzfall sei hier die gasfreie Thermitreaktion $Fe_2O_3 + 2 Al \rightarrow 2 Fe + Al_2O_3$ aufgeführt. Es liegt ein starkes Enthalpiemaximum in der Vorheizzone vor, die Vorheizzone hat einen erhöhten "Energie"-Inhalt. Wird die Flamme in Richtung der Vorheizzone ausgelenkt steht somit eine erhöhte Enthalpie zur Verfügung und die Flammengeschwindigkeit steigt entsprechend der Arrheniuskinetik exponentiell an. Während der Beschleunigungsphase der Flamme wird die Vorheizzone jedoch dünner, so daß die in der Vorheizzone "gespeicherte" Enthalpie abnimmt. Durch Wärmeleitung von der heißen Reaktionszone in das relativ kältere Ausbrandgebiet wird dieser Enthalpieanteil in die Ausbrandzone transportiert. Schließlich ist das "Energie"-Reservoir Vorheizzone aufgebraucht und die Temperatur der Reaktionszone fällt ab. Jetzt beginnt das "Energie"-Reservoir Ausbrandzone seinen Enthalpieinhalt durch Wärmeleitung in Richtung Vorheizzone auszuspeichern. Dieser Prozeß wiederholt sich periodisch.

1.5 Literaturübersicht

1.5.1 Theorie

In der vorliegenden Arbeit werden Flammen mittels asymptotischer Methoden und Störansätze untersucht. Die asymptotische Behandlung beruht auf der sinnvollen Annahme, daß die Aktivierungsenergie der globalen Reaktion groß ist (Williams (1971)). Die Reaktion ist stark temperaturabhängig und findet mit großer Reaktionsrate in Bereichen hoher Temperatur statt bis vollständiger Brennstoffumsatz eine weitere Reaktion ausschließt. Der asymptotische Ansatz liefert die ebene laminare Flammengeschwindigkeit. Es wird auch vom Eigenwert der Flammengeschwindigkeit gesprochen. Das erste Ergebnis dieser Art ist von Bush & Fendell (1970) und berücksichtigt

laminare adiabate Vormischflammen in einem ruhenden Medium und eine Arrhenius-Reaktion erster Ordnung. Diese Ansätze wurden erweitert für Reaktionen höherer Ordnung und nicht-stöchiometrische Phänomene (Sen & Ludford (1979, 1981), Bush (1980), Margolis (1980), Mitani (1980)) und Mehrschrittreaktionen (Berman & Riazantsev (1973, 1975), Kapila & Ludford (1977), Margolis & Matkowsky (1982), Margolis (1982)). Entsprechende Ergebnisse liegen auch für Verbrennung in der Feststoffphase vor (Berman & Riazantsev (1972) und Margolis (1983)).

Sivashinsky (1973, 1975, 1977) findet das erste asymptotische Modell für nichtebene Flammen. Sein Modell ist die führende Ordnung einer asymptotischen Entwicklung in Potenzen der reziproken Aktivierungsenergie. Das Modell zeigt eine formale Inkonsistenz, da in den sich ergebenden Gleichungen die Aktivierungsenergie weiterhin auftritt. Matkowsky & Sivashinsky (1979) leiten erstmals ein Modell für Gasflammen ab, das nicht diese formale Schwierigkeit nicht aufweist. Ihr Modell ist gültig für schwache thermische Expansion des Gasgemisches. Die Kopplung der Strömungsgleichungen an die Stoff- und Wärmebilanzgleichungen erfolgt lediglich über den Auftriebsterm. Das Modell ist dem Boussinesq-Ansatz in der Strömungsmechanik ähnlich.

Es wird allgemein angenommen, daß der Übergang von einem ebenen laminaren Zustand in einen turbulenten nicht abrupt geschieht. Vielmehr ist ein schrittweiser Übergang gegeben. So wird eine ebene stationär brennende Flamme schrittweise instabil gegen zunehmend komplexe Muster, wenn ein Systemparameter variiert wird.

Für laminare Flammen gibt es drei grundsätzlich verschiedene Mechanismen, die zur Instabilität einer adiabaten Flamme führen können. Der erste Mechanismus beruht auf einer hydrodynamischen Instabilität und wird erstmals von Landau (1944) und unabhängig von Darrieus (1945) beschrieben. Die Reaktions- ($0,05\text{mm}$) und Vorheizzone ($0,5\text{mm}$) einer Flamme ist außerordentlich dünn im Vergleich zu typischen Abmessungen ($0,05\text{m} - 5\text{m}$) von Brennräumen selbst im Labormaßstab. Auf dem für den Brennraum charakteristischen Längenmaßstab wirkt die Flamme als eine Diskontinuität bzw. als eine freie Oberfläche. Durch die thermische Expansion ist die Dichte des Rauchgases (Sivashinsky (1977b)) geringer als die des Brenngases. Es kann eine lineare Stabilitätsanalyse basierend auf den Eulerschen Strömungsgleichungen mit der Annahme einer konstanten Flammengeschwindigkeit durchgeführt werden (siehe z.B. Buckmaster & Ludford (1983)). Es zeigt sich, daß Störungen jeder Wellenlänge zur Instabilität führen, sofern der Gravitationseinfluß unberücksichtigt bleibt. Dieses unbefriedigende Ergebnis kann durch Einbeziehung des Gravitationseinflusses abgeschwächt werden. Dieser ist in der Lage, langwellige Störungen zu stabilisieren. Die Flamme ist jedoch in-

stabil gegenüber kurzweiligen Störungen im Sinne der Theorie von Landau. Es sollte beachtet werden, daß die Beschreibung einer Flamme als Diskontinuität auf einer kleinen Längenskala ggf. unzulässig ist, so daß andere stabilisierende Mechanismen wirksam werden können.

Die beiden anderen Mechanismen sind bereits in Abschnitt 1.4 diskutiert. Sie beruhen auf diffusiven Wärme- und Stofftransport. Die bestimmende Kennzahl ist die Lewis-Zahl. Ist die Lewis-Zahl der Mischung ausreichend niedrig, was einem Unterschub der leichteren Komponente des Brenngasgemisches entspricht, ergibt sich eine Zellularinstabilität der Flamme (Sivashinsky (1977b, 1979, 1981), Matkowsky et. al. (1980)). Sind die Verhältnisse umgekehrt, es liegt Unterschub der schwereren Komponente des Gasgemisches vor, ergibt sich eine pulsierende Instabilität der Flamme (Matkowsky & Olagunju (1981, 1982), Margolis & Matkowsky (1982, 1983)). Damit die pulsierende Instabilität beobachtet werden kann, muß die Lewis-Zahl allerdings so groß sein, daß nur ungewöhnliche Gasmischungen in Frage kommen. Durch nicht-adiabate Effekte, wie Wärmeverluste an einen Brenner, können die kritischen Lewis-Zahlen so weit abgesenkt werden, daß die pulsierende Instabilität beobachtbar wird (Joulin & Clavin (1979), Margolis (1980, 1981), Matkowsky & Olagunju (1981), Sivashinsky & Matkowsky (1981)). Ebene pulsierende Wasserstoff/Bromid-Flammen werden von Golovichev et al. (1978) numerisch nachgewiesen .

Sivashinsky (1977b, 1979, 1980) untersucht adiabate Flammen in einem ruhenden Medium. Durch einen langwelligen Störansatz bestimmt er eine skalare Evolutionsgleichung für die Flammenposition. Diese Gleichung wird als Kuramoto-Sivashinsky Gleichung² bezeichnet und mit KS-Gleichung abgekürzt. Numerische Berechnungen auf der Basis KS-Gleichung (Michelson & Sivashinsky (1977), Sivashinsky (1980), Aimar (1983), Pumir (1982), Pumir et. al. (1983), Pomeau et. al. (1984) zeigen die Koexistenz von kohärenten räumlichen Zellularstrukturen und zeitlichem Chaos. Hyman & Nicolaenko (1986) untersuchen die KS-Gleichung sehr sorgfältig und variieren die Größe des Rechengebietes als Verzweigungsparameter. Sie verwenden ein Spektralverfahren (siehe Canuto et. al. (1988)) mit höchster numerischer Genauigkeit. Mit wachsender Größe des Rechengebiets ergeben sich zunehmend komplexe Lösungen. Es werden viele dynamische Lösungen, wie periodische und intermittierende Lösungen bis hin zu räumlich und zeitlich chaotischen Lösungen, gezeigt.

Die KS-Gleichung wird von Sivashinsky & Law (1982) für eindimensiona-

²Die KS-Gleichung wird 1975 von Kuramoto (siehe Kuramoto & Tsuzuki (1975)) im Zusammenhang mit einem System von Reaktions/Diffusions-Gleichungen zur Beschreibung der Belousov-Zabotinskii-Reaktion gefunden. Sivashinsky findet die KS-Gleichung unabhängig für die laminare Flamme.

le Staupunktströmungen erweitert. Eine lineare Stabilitätsanalyse ergibt, daß harmonische Störungen jeder Wellenlänge stabil sind. Allerdings werden Störungen gefunden, die vorübergehend angefacht werden. Exemplarisch wird mit einer einzigen nichtlinearen numerischen Rechnung gezeigt, daß dennoch Zellmuster existieren. Für diese Rechnung werden periodische Randbedingungen in der Brennermitte und am Brennerand gewählt. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll, da die Strömungsgeschwindigkeit an diesen Rändern nicht periodisch ist. Detaillierte Untersuchungen dieser Muster fehlen jedoch. Andere numerische Untersuchungen zur Struktur zellulärer Flammen in der Staupunktströmung liegen in der Literatur bislang nicht vor.

Margolis & Sivashinsky (1984) erweitern die KS-Gleichung um einen Gravitationsterm für die nach unten brennende Flamme in vertikalen Kanälen. Hier ist der Gravitationseinfluß stabilisierend. Sie finden Stabilitätsgrenzen der ebenen Flamme in Abhängigkeit der Parameter Gravitation und Kanaldurchmesser. Bei einer geeigneten Wahl dieser Parameter wird die ebene Lösung gleichzeitig gegen zwei unterschiedliche Muster instabil. Es ergibt sich eine bimodale Zellstruktur, bei der die beiden Muster miteinander wechselwirken.

Matalon & Matkowsky (1983) finden ein asymptotisches Modell, das Flammen als eine Diskontinuität des Strömungsfelds beschreibt. Die wesentliche Annahme ist eine kleine Dicke der Vorheizzone gemessen an einer charakteristische Länge des Strömungsfeldes. Zusätzlich wird die Dicke der Reaktionszone als asymptotisch klein im Vergleich zu der Vorheizzone angenommen. Das Modell enthält somit drei Längenskalen und beschreibt die Stabilität sehr schwach gekrümmter oder gestreckter Flammen.

Matalon (1987) untersucht die lineare Stabilität einer Flamme in einer dreidimensionalen Geometrie bei zweidimensionaler Staupunktströmung. Hier verschwindet eine Komponente des Geschwindigkeitsfelds und es können harmonische Störungen in dieser Richtung angesetzt werden, während keine Störung in der anderen Richtung erfolgt. Es ergibt sich ein stabilisierender Einfluß durch die Staupunktströmung. Gefunden werden Rollenmuster, die entlang der streckenden Wirkung des Strömungsfeldes ausgerichtet sind. Kim & Matalon (1989, 1990) erweitern ihre linearen Stabilitätsergebnisse für starke Expansion des Gasgemisches. In einem 3-Längenskalen-Modell wird die Vorheizzone wiederum als dünn gegenüber der Längenskala des Strömungsfeldes angenommen. Es zeigt sich, daß die hydrodynamische Instabilität durch hinreichend starke Staupunktströmung unterdrückt wird. Die Ergebnisse gelten weiterhin nur für zweidimensionale Staupunktströmung und eindimensionale Störungen, die entlang der ungestreckten Richtung ausgerichtet sind. Es werden Entzündbarkeitsgrenzen der Flamme gefunden.

Jackson & Matalon (1992) finden für ein 3-Längenskalen-Modell Stabilitätsergebnisse für selbstähnliche zweidimensionale Störungen. Allgemeine zweidimensionale Störungen oder starke Staupunktströmungen werden weiterhin nicht zugelassen.

In der Literatur liegen zwar mehrere Untersuchungen zur Stabilität von Staupunktflammen vor, eine theoretische Beschreibung möglicher zellulärer Muster in der Staupunktflamme durch numerische Simulation oder analytische Beschreibung findet sich bislang nicht in der Literatur.

1.5.2 Experimente

Markstein (1951, 1953, 1964) berichtet bereits im Jahr 1951 von Experimenten die zelluläre Flammen zeigen. Abbildung 1.10 zeigt eine typische zelluläre Flamme. Hier ist die Flamme durch Wärmeverluste an den Brenner stabilisiert. Der Beobachter sieht schräg von der Rauchgasseite auf den Brenner.

- Es ergeben sich mehrere ungefähr gleich große Zellen.
- Die Zellzentren sind in Richtung des Brenners und die Zellränder sind in Richtung der Rauchgase ausgelenkt.
- Die Temperatur ist an den Zellrändern niedriger als in den Zellzentren.
- Bei stark ausgeprägten Zellularflammen, d.h. tiefen Zellen, kann ggf. eine Rußentwicklung an den Zellrändern beobachtet werden.

In Kapitel 7.4 findet sich ein ausführlicher Vergleich von experimentellen Befunden mit den Ergebnissen dieser Arbeit. Hier werden lediglich einige wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt. Law et al. (1981), Ishizuka et al. (1982) und Ishizuka & Law (1982) untersuchen systematisch Propan/Luft-Vormischflammen in axialsymmetrischer Staupunktströmung. Das wesentliche Ziel dieser Arbeiten ist die Bestimmung des Zündbereichs der Mischungen. Variiert wird neben dem Mischungsverhältnis des Brenngasgemisches die Austrittsgeschwindigkeit aus dem Brenner und der Abstand des Brenners von der Stauenebene.

Folgende Ergebnisse können festgehalten werden:

- Für starke Staupunktströmung werden unabhängig von der Mischung nur ebene Flammen beobachtet.
- Bei fetten Mischungen ($Le < 1$) werden für schwache Flammendehnung verschiedene Instabilitäten beobachtet.



Abbildung 1.10: Zellulare Flamme von Lee & Sohrab (1994)

- Für sehr schwache Staupunktströmung ergeben sich zweidimensionale instationäre Zellmuster.
 - Für mittlere Stärke der Strömung ergibt sich eine Verzerrung der Zellen durch das Strömungsfeld bis hin zu strahlenförmigen Sternmustern.
 - Für nochmals stärkere Gradienten ergibt sich ein rillenförmiges Muster das diametral durch das Brennerzentrum verläuft. Entlang der Rille treten keine Variationen der Auslenkung auf. Das Muster ist im allgemeinen transient. Es bewegt sich mit zunehmender Geschwindigkeit auf den Brennerrand zu. Die Bewegungsrichtung ist hierbei normal zur Erstreckung der Rille. Wenn das Muster den Brennerrand erreicht hat bleibt eine im wesentlichen ebene Flamme zurück. Auf dieser bildet sich eine neue Rille mit einer willkürlichen Winkelorientierung.
- In einer Gegenstrombrenneranordnung mit zwei aufeinandergerichteten Brenneren und zwei Flammen zwischen denen sich ein freier Staupunkt befindet, ergibt sich ebenfalls dieses rillenförmige Muster. Allerdings tritt es nur auf der oberen der beiden Flammen auf. Durch Wechselwirkungen zwischen den Flammen sind die beiden Flammen gekrümmt. Das Muster kann in dieser Brenneranordnung auch stationär sein.



Abbildung 1.11: Abgehobene Sternflamme von Lee & Sohrab (1994)

Erst kürzlich haben Lee & Sohrab (1994, 1994b) Sternflammen in einem axialsymmetrischen Staupunkt Brenner untersucht. Sie unterscheiden zwischen zwei Moden. Im brennerstabilisierten Modus sitzt die Flamme im Zentrum auf dem Brenner auf und wird durch Wärmeverluste an den Brenner stabilisiert. Die Flamme ist ringförmig um den zentralen Verankerungspunkt angeordnet und zeigt ein ausgeprägtes radial ausgerichtetes Streifenmuster. Mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit nimmt die Anzahl der Streifen des Musters ab. Gleichzeitig nimmt auch der Durchmesser des die Flamme verankernden Kerns ab. Schließlich verschwindet der Kern und die Flamme zeigt chaotisches Verhalten ohne erkennbare räumliche Struktur. Wird ausgehend von diesem Modus das Gemisch mit Brennstoff angereichert, so ergibt sich eine vom Brenner abgehobene Flamme. Diese ist nahezu eben, zeigt aber ein schwach ausgeprägtes sternförmiges Streifenmuster. (siehe Abb. 1.11) Die Zahl der intensiven Streifen ist hierbei in der Größenordnung von 5. Das Muster ist annähernd stationär.

Da nur in wenigen Experimenten die zellulare Struktur von Staupunktflammen untersucht wird, soll hier auf ein Experiment von Gorman et al. (1994) hingewiesen werden. Dieser untersucht zellulare Flammen, die durch Wärmeverluste an einen porösen Brenner stabilisiert werden. In dieser Arbeit findet sich eine systematische Klassifizierung von zellularen Mustern.

1.6 Gliederung der Arbeit

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die Grundgleichungen formuliert. In diesem Zusammenhang werden die notwendigen Voraussetzungen diskutiert. Die Gleichungen werden in dimensionsloser Darstellung eingeführt, so daß sich verschiedene dimensionslose Kennzahlen ergeben.

Im dritten Kapitel wird eine ebene Basislösung hergeleitet.

Im vierten Kapitel wird eine lineare Stabilitätsuntersuchung der ebenen Basislösung durchgeführt. Die Stabilität der Basislösung wird anhand einer Stabilitätskarte ausführlich diskutiert. Die lineare Stabilitätsanalyse erlaubt die Auswahl eines interessanten Parameterbereichs für eine nichtlineare Analyse.

Im fünften Kapitel wird eine nichtlineare Analyse für einen schwach instabilen Grundzustand entwickelt. Ergebnis dieser Analyse ist eine Beziehung vom Typ der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung. Diese Gleichung beschreibt die Auslenkung einer Flamme als Funktion der transversalen Koordinaten. Der Verlauf von Temperatur und Konzentration normal zur Flamme wird analytisch beschrieben. Bei der Herleitung der KS-Gleichung werden sehr allgemeine Randbedingungen des Strömungsfelds am Brenner zugelassen. Dadurch gelingt es, das Stabilitätsverhalten von ebenen und gekrümmten Flammen zu beschreiben.

Im sechsten Kapitel wird eine nichtlineare Stabilitätsanalyse für Wanderwellen vorgestellt. Diese gilt sowohl für die Grundgleichungen und gleichermaßen für die KS-Gleichung. Es ergibt sich mit einer einfachen Analyse ein für beliebige Muster geltendes Stabilitätsergebnis.

Im siebten Kapitel werden numerische Ergebnisse vorgestellt. Hier werden die Ergebnisse aus Simulationsrechnungen gezeigt, die mit Hilfe der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung erzielt werden. Es werden verschiedene Phänomene, die aus den oben aufgeführten Experimenten bekannt sind, erstmals numerisch erklärt und weitere interessante Strukturen vorhergesagt.

Im achten Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefaßt.

Kapitel 2

Grundgleichungen und Kennzahlen

2.1 Das thermisch-diffusive Modell

Verbrennung ist ein chemischer Prozeß in einem strömenden, wärmeleitenden Stoffgemisch. Da dies ein sehr komplexer Vorgang ist, werden hier mehrere Annahmen getroffen, um die Modellierung und Auswertung zu erleichtern. Alle Stoffe sollen in der Gasphase vorliegen. Es soll eine Vormischflamme betrachtet werden, deren Reaktionskinetik durch eine globale irreversible Einschritt-Arrhenius-Beziehung beschrieben wird. Der Brennstoff (B) reagiert dabei mit dem Oxidationsmittel (O) und bildet das Verbrennungsprodukt (P).



Hierin sind ν_B , ν_O und ν_P stöchiometrische Koeffizienten. Um zu einer noch stärker vereinfachten Beschreibung zu gelangen, wird $\nu_B = 1$ gesetzt und angenommen, daß das Oxidationsmittel in großem Überschuß vorliegt, so daß der Brennstoff die Reaktion alleine begrenzt. Die globale Reaktion ist dann eine Reaktion von erster Ordnung (Carrier & Fendell (1978)), deren Kinetik durch eine Arrhenius-Beziehung beschrieben wird.

$$(2.2) \quad \tilde{W} = \tilde{A}\tilde{C} \exp\left(-\frac{\tilde{E}}{\tilde{R}\tilde{T}}\right).$$

Die Beziehung ist hier in dimensionsbehafteten Größen angegeben. \tilde{W} ist die Reaktionsrate, \tilde{A} ist der Geschwindigkeitskoeffizient der Reaktion, \tilde{C} ist die Konzentration bzw. die Massendichte des Brennstoffs, \tilde{T} ist die Temperatur, \tilde{E} ist die Aktivierungsenergie der Reaktion und \tilde{R} ist die Gaskonstante. Die

Temperatur \tilde{T} wird hier in $[K]$ gemessen. Die hochgradig nichtlineare Form von (2.2) macht die Beschreibung selbst einfachster Verbrennungsprobleme schwierig.

Die Massenerhaltung für den Brennstoff ist gegeben durch

$$(2.3) \quad \underbrace{\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{t}} \right)}_{\text{instationär}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{C}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nabla \tilde{\rho} \tilde{D} \nabla \tilde{C}}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\tilde{W}}_{\text{Verbrauch}} .$$

Hierin ist \tilde{t} die Zeit, $\tilde{\mathbf{v}}$ das Geschwindigkeitsfeld und $\tilde{\rho}$ die Dichte. \tilde{D} ist die Diffusivität des Brennstoffs im Gemisch. Die instationäre Änderung und der konvektive Transport des Brennstoffs stehen im Gleichgewicht mit dem diffusiven Transport und dem Verbrauch des Brennstoffs durch die chemische Reaktion.

Die Energiegleichung hat die Form

$$(2.4) \quad c_p \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \right) = \nabla \tilde{\kappa} \nabla \tilde{T} + Q \tilde{W} ,$$

sofern Explosionen ausgeschlossen werden und Strömungen kleiner Mach-Zahl vorausgesetzt werden. Hier steht c_p , $\tilde{\kappa}$ und Q für die Wärmekapazität des Gasgemisches bei konstantem Druck, die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmetönung der chemischen Reaktion. Die Wärmekapazität wird als konstant angenommen.

Um das Verbrennungsproblem geschlossen zu beschreiben, werden des weiteren die Kontinuitätsgleichung, die Impulsgleichungen und die Zustandsgleichung für Gase, sowie geeignete Rand- und Anfangsbedingungen benötigt. Zunächst soll das thermisch-diffusive Modell (siehe Matkowsky & Sivashinsky (1979)) betrachtet werden. Dieses Modell läßt sich am einfachsten durch Vernachlässigung der thermischen Expansion des Gasgemisches ableiten. Es wird somit angenommen, daß die Dichte des Gemisches konstant ist. Die Strömungsgleichungen entkoppeln von den Wärme- und Stofftransport-Gleichungen. Das Strömungsfeld wird als eine von außen vorgegebene Größe aufgefaßt.

In Kapitel 1.2 wird der Ausbreitungsmechanismus der vorgemischten Flamme erklärt. Entscheidend für die Fortpflanzung der Flamme sind die Vorgänge in der Konzentrations- bzw. Temperaturgrenzschicht vor der Reaktionszone. Zur dimensionslosen Darstellung der Gleichungen eignen sich somit die folgenden Bezugsgrößen für Geschwindigkeiten, Temperaturen, Konzentrationen, Längen und die Zeit:

- *Flammengeschwindigkeit* \tilde{u}_F . Diese ist zunächst unbekannt und muß als "Eigenwert" des Problems bestimmt werden. Da die Flammengeschwindigkeit von der speziellen Strömungskonfiguration abhängt, wird

als Bezugswert die Flammgeschwindigkeit einer ebenen stationären Flamme in einem ruhenden Medium herangezogen.

- *Adiabate Verbrennungstemperatur* \tilde{T}_P .
- *Eintrittskonzentration des Brennstoffs* \tilde{C}_B .
- *Thermische Grenzschichtdicke* $\tilde{l}_{th} = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho} c_p u_F}$
- *Aufenthaltszeit in der Grenzschicht* $\tilde{t}_{th} = \frac{\tilde{l}_{th}}{u_F}$.

Alle Stoffgrößen werden als konstant angenommen.

Dimensionslose Größen ergeben sich aus dimensionsbehaftete Größen nach einer Division durch den entsprechenden Bezugswert. So ist die dimensionslose Temperatur definiert als

$$(2.5) \quad T = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_P}.$$

Dimensionsbehaftete Größen sind dabei im Gegensatz zu dimensionslosen Größen durch ein Tildesymbol gekennzeichnet.

In dimensionsloser Darstellung ist die Energiegleichung

$$(2.6) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + (1 - \sigma)W.$$

Die Massenerhaltungsgleichung für den Brennstoff schreibt sich als

$$(2.7) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} \nabla^2 C - W,$$

wobei der Reaktionsterm

$$(2.8) \quad W = A(1 - \sigma)^2 N^2 C \exp\left(N\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right)$$

ist. Die Größe A wird als Eigenwert der eindimensionalen Flammfrontausbreitung bezeichnet und wird so gewählt, daß die Flammgeschwindigkeit einer ebenen stationären Flamme sich zu 1 ergibt.

Die dimensionslosen Erhaltungsgleichungen enthalten die folgenden dimensionslosen Kennzahlen

- *Lewis-Zahl:*

$$(2.9) \quad Le = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho} c_p \tilde{D}}.$$

Die Lewis-Zahl ist das Verhältnis aus der Temperaturleitfähigkeit $\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho} c_p}$ zu der Massendiffusivität \tilde{D} . Für viele Gasmischungen ist $Le \approx 1$ charakteristisch.

- *Temperaturverhältnis:*

$$(2.10) \quad \sigma = \frac{\tilde{T}_F}{\tilde{T}_P}.$$

Das Temperaturverhältnis σ ist definiert als das Verhältnis der Eintrittstemperatur des Brenngasgemisches \tilde{T}_F zu der adiabaten Verbrennungstemperatur \tilde{T}_P . Für eine strenge Herleitung des thermisch-diffusiven Modells muß $(1 - \sigma) \ll 1$ angenommen werden.

- *dimensionslose Aktivierungsenergie:*

$$(2.11) \quad N = \frac{\tilde{E}}{\tilde{R}\tilde{T}_P}.$$

Für Verbrennungsreaktionen ist charakteristisch, daß der Reaktionsumsatz stark temperaturabhängig ist. Die dimensionslose Aktivierungsenergie N der Reaktion ist groß. Typische Werte für N liegen bei ca. 20.

- *Zeldovich-Zahl:*

$$(2.12) \quad Ze = (1 - \sigma)N.$$

Anstelle der dimensionslosen Aktivierungsenergie N , wird in der Literatur häufig eine zusammengesetzte Kennzahl benutzt. Für Verbrennungsreaktionen ist die Zeldovich-Zahl wie die dimensionslose Aktivierungsenergie groß. Typische Werte für Ze liegen etwa bei 10.

Eine große Aktivierungsenergie bedeutet, daß die Reaktion bei hohen Temperaturen mit sehr hoher Reaktionsrate abläuft und somit die chemische Reaktion nach einer sehr kurzen Zeitspanne abgeschlossen ist. Die Reaktionszone hat somit eine sehr kleine Ausdehnung, die mit $\frac{1}{Ze}$ skaliert. Für sehr große Aktivierungsenergie, d.h. Zeldovich-Zahl, schrumpft die Dicke der Reaktionszone gegen Null. Die Reaktionszone ist somit eine Fläche, die unverbranntes Brenngas von voll ausgebranntem Rauchgas trennt. Wir bezeichnen diese Fläche als die Reaktionsfront oder einfach als die Flamme. Vor der Reaktionsfront ist die Reaktionsrate vernachlässigbar klein, da die Temperatur zu niedrig ist. Hinter der Flamme findet keine Reaktion statt, da der gesamte Brennstoff in der Reaktionsfront umgesetzt wird. Für $Ze \rightarrow \infty$ kann der reaktionsbedingte Quell/Senkenterm W mittels der Dirac'schen Delta-Funktion konzentriert in der Reaktionsfront dargestellt werden (siehe z.B. Matkowsky & Sivashinsky (1979) oder Margolis & Matkowsky (1983)). Hierzu muß eine detaillierte Analyse der Vorgänge innerhalb der Reaktionszone erfolgen, d.h. es muß der Temperatur- und Konzentrationsverlauf bestimmt

werden und an das Temperatur- und Konzentrationsfeld der Vorheiz- und Ausbrandzone angekoppelt werden. Der vollständige Rechenweg befindet sich in der oben angegebenen Literatur.

$$(2.13) \quad W = \exp\left(\frac{1}{2}N(T-1)\right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \delta(x_S - F),$$

Es sind x_S, y_S und z_S kartesische Koordinaten und $\nabla_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial y_S}, \frac{\partial}{\partial z_S}\right)$ ist der Vektorgradient in der (y_S, z_S) -Ebene. Die Position der Reaktionszone ist gegeben durch $x_S = F(y_S, z_S, t)$ (siehe Abbildung 1.2). Der Vorfaktor der Dirac'schen Delta-Funktion ist proportional zum Brennstoffumsatz in der Flamme. Die Brennstoffzufuhr an die Flamme ist wiederum proportional der Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids bezüglich der Reaktionszone. Diese Geschwindigkeit wird als die Flammengeschwindigkeit bezeichnet. Die starke Temperaturabhängigkeit der Flammengeschwindigkeit spiegelt sich in dem exponentiellen Temperaturgesetz von W wieder. Der Geometriefaktor $\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}$ berücksichtigt die Vergrößerung der Flammenfläche, sofern die Normalenrichtung der Reaktionsfront nicht mit der x_S -Richtung übereinstimmt.

Aus der Analyse der Vorgänge innerhalb der Reaktionszone (siehe Margolis & Matkowsky (1983)), folgt der Eigenwert der eindimensionalen Flammausbreitung A und die Flammengeschwindigkeit:

$$(2.14) \quad \tilde{u}_F^2 = 2 \frac{\tilde{A}\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho} \tilde{c}_p} \cdot \frac{Le}{(1-\sigma)^2 N^2} \exp(-N).$$

In der Formulierung der Grundgleichungen wird bis hierher keine Festlegung des Geschwindigkeitsfeldes getroffen. Hier soll jetzt das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Staupunktströmung

$$(2.15) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\kappa} = \kappa (-x_S, (1-b)y_S, bz_S)$$

betrachtet werden. Als feste Wand ist hier die Ebene $x_S = 0$ gewählt. Der Wert von F ist der Abstand zwischen Flamme und Wand. Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} ist quell- und drehungsfrei.

Es ergeben sich mit der Wahl der speziellen Strömung zwei neue dimensionslose Kennzahlen.

- *Stärke der Staupunktströmung:*

$$(2.16) \quad \kappa = \frac{\tilde{u}_{\text{Brenner}}}{\tilde{h}_{\text{Brenner}}} \cdot \tilde{t}_{th}.$$

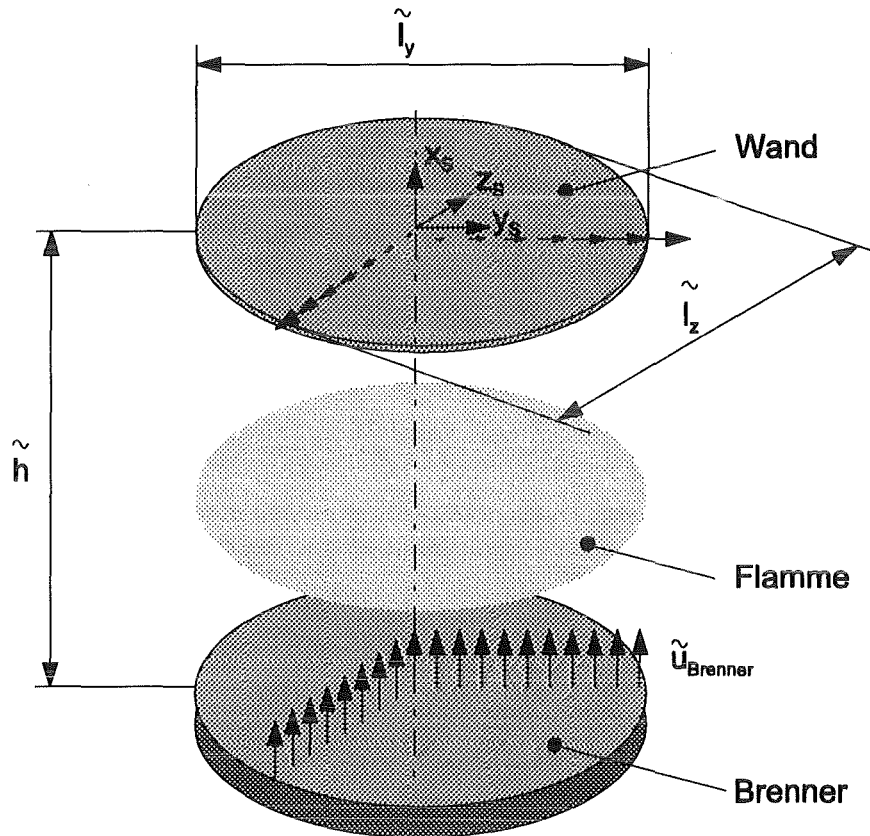


Abbildung 2.1: Skizze der Abmessungen des Staupunktbranders

Hierin ist $\tilde{u}_{\text{Brenner}}$ die Austrittsgeschwindigkeit des Gemisches am Brenner und $\tilde{h}_{\text{Brenner}}$ der Abstand der Stauplatte vom Brenner (vergl. Abb. 2.1). Die Stärke der Staupunktströmung κ ist also das Verhältnis von Geschwindigkeitsgradienten der Strömung zur Aufenthaltszeit des Gemisches in der Vorheizzone.

- *Seitenlängenverhältnis:*

$$(2.17) \quad b = \frac{\tilde{l}_y}{\tilde{l}_z}.$$

Die Größen \tilde{l}_y und \tilde{l}_z sind die Längen der beiden Hauptachsen eines elliptisch geformten Brenners. Es können mehrere Spezialfälle unterschieden werden.

- $b = 0$ steht für ein 2-dimensionales Strömungsfeld in der (x_s, y_s) -

Ebene. Der Brenner ist unendlich ausgedehnt in z_S -Richtung. Eine weitere Möglichkeit ist ein endlicher Brenner, der durch zwei Platten an den Positionen z_1 und z_2 abgeschlossen ist. Diese führen ebenfalls zu einer verschwindenden z_S -Geschwindigkeit des Strömungsfelds.

- $b = 1$ steht für ein 2-dimensionales Strömungsfeld in der (x_S, z_S) -Ebene. Der Brenner ist in y -Richtung unendlich ausgedehnt.
- $b = \frac{1}{2}$ entspricht einer rotationssymmetrischen Geometrie mit der x_S -Achse als Symmetrieachse.
- Für $0 < b < 1$ und $\kappa > 0$ sind beide wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten von der x -Achse weggerichtet.
- Für $b < 0$ und $b > 1$ weist eine dieser Komponenten in Richtung der x_S -Achse. Es findet ein Zustrom von Brenngas aus der z_S - oder y_S -Richtung statt.

Mit der Festlegung des Strömungsfelds durch Gl. (2.15) können geeignete Rand- und Anfangsbedingungen für Gl. (2.6) und Gl. (2.7) mit Bez. (2.13) formuliert werden. Ist der Abstand zwischen Flamme und Brenner groß gemessen an der Referenzlänge \tilde{l}_{th} so gilt:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} T &= \sigma && \text{für } x_S \rightarrow -\infty, \\ \frac{\partial T}{\partial x_S} &= 0 && \text{für } x_S = 0, \\ C &= 1 && \text{für } x_S \rightarrow -\infty, \\ C &= 0 && \text{für } F \leq x_S \leq 0 \end{aligned}$$

sowie geeignete Randbedingungen an den seitlichen Begrenzungen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Wand ($x_S = 0$) adiabatisch und undurchlässig ist. Die adiabatische Randbedingung an der Wand ist nicht zwingend erforderlich und wird später in der nichtlinearen Analyse nicht gefordert. Bei der Modellierung realer Brenner sind die Randbedingungen für T und C nicht für $x_S \rightarrow -\infty$ zu stellen sondern für $x_S = F_B$, wobei $F_B = \frac{\tilde{l}_{Brenner}}{\tilde{l}_{th}}$ für die Position des Brenners steht. Bei realen Brennern ist die Eintrittstemperatur und die Eintrittskonzentration gegebenenfalls ortsabhängig.

Unser Ziel ist es, Lösungen zu finden, die aus einer stationären, ebenen Grundlösung des Gleichungssatzes verzweigen. Deshalb soll sich der Anfangszustand nur schwach von der Grundlösung unterscheiden.

Das Geschwindigkeitsfeld der Staupunktströmung bewirkt eine Streckung der Flamme. Die Flammenstreckung K wird definiert als die instationäre relative Änderung eines Flächenelements der Flamme A_f im Lagrangeschen Sinne.

Die Flammenstreckung setzt sich aus einem Krümmungsanteil und einem den tangentialen Geschwindigkeitsgradienten proportionalen Anteil zusammen. Es gilt:

$$(2.19) \quad K = \frac{1}{A_f} \left(\frac{dA_f}{dt} \right)_L.$$

Die Herleitung der Flammenstreckung K aus der Geschwindigkeit v und der Flammenposition F findet sich im Anhang A.

Es soll hier der Spezialfall einer ebenen Flamme ($F = \text{const}$) und das in Beziehung (2.15) definierte Strömungsfeld betrachtet werden. Hier ist die Flammenstreckung ortsunabhängig. Es ist:

$$(2.20) \quad K = \nabla_{\perp} \cdot (v_y, v_z) = \kappa$$

Der Betrag der Flammendehnung ist identisch mit der Stärke der Staupunktströmung. Das Staupunktströmungsfeld bietet somit ideale Voraussetzungen, um den Einfluß der Flammenstreckung auf laminare Flammen zu untersuchen.

2.2 Vereinfachung der Grundgleichungen des thermisch-diffusiven Modells

Die Grundgleichungen (2.6) und (2.7) können in eine für die analytische Behandlung des Problems geeignetere Form überführt werden.

Zunächst wird die Temperatur gemäß

$$(2.21) \quad \Theta \equiv \frac{T - \sigma}{1 - \sigma} = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_F}{\tilde{T}_P - \tilde{T}_F}$$

neu skaliert.

Es wird die Totalenthalpie

$$(2.22) \quad H \equiv \Theta + C$$

eingeführt.

Die Totalenthalpie ist eine Erhaltungsgröße für ein offenes System ($p = \text{const}$) und berücksichtigt die chemisch gespeicherte Enthalpie und gegebenenfalls die Latentwärme aus Phasenübergängen.

Im Quellterm der Energiegleichung (2.6) kann Θ durch H ersetzt werden, da dieser Term nur auf der Reaktionsfront wirksam ist, und hier die Konzentration verschwindet. Dies gilt streng, da im asymptotischen Modell der gesamte Brennstoff nach Erreichen der Zündbedingung unendlich schnell umgesetzt wird.

Ausgedrückt in den Größen Θ und H ergibt sich folgender Gleichungssatz:

$$(2.23) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = \nabla^2 \Theta + W,$$

$$(2.24) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla H = \frac{1}{Le} \nabla^2 H - \left(1 - \frac{1}{Le}\right) \nabla^2 \Theta.$$

Der Quellterm in der Temperaturgleichung ist

$$(2.25) \quad W = \exp\left(\frac{1}{2}N(1-\sigma)(H-1)\right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \delta(x_S - F).$$

Da angenommen wird, daß die Lewis-Zahl Le ungefähr 1 ist, wird diese durch eine reduzierte Lewis-Zahl λ

$$(2.26) \quad \lambda \equiv Ze(Le - 1)$$

ersetzt, die jetzt von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ ist.

Unter der Annahme großer Ze -Zahlen wird für die Temperatur und die Enthalpie eine asymptotische Reiheentwicklung in Potenzen $\frac{1}{Ze}$ getätigt:

$$(2.27) \quad \Theta \sim \Theta_0 + \frac{1}{Ze} \Theta_1 + \dots, \quad H \sim H_0 + \frac{1}{Ze} H_1 + \dots$$

Wird dieser Ansatz in die Enthalpiegleichung (2.24) eingeführt, und die Randbedingungen (2.18) sowie Anfangsbedingungen $H(t=0) \equiv 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Ze}\right)$ ausgewertet, ergibt sich unmittelbar $H_0 = 1$. Die Enthalpie ist in der führenden Ordnung konstant.

Im folgenden sollen nun die Gleichungen für Θ_0 und für H_1 behandelt werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Index von Θ_0 gestrichen und H_1 wie folgt umbenannt¹:

$$(2.28) \quad S \equiv H_1.$$

So ergibt sich der relativ übersichtliche Gleichungssatz:

$$(2.29) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = \nabla^2 \Theta + \exp\left(\frac{1}{2}S\right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \delta(x_S - F),$$

$$(2.30) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \nabla^2 S + \lambda \nabla^2 \Theta$$

mit den Randbedingungen

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \Theta &= 0 && \text{für } x_S \rightarrow -\infty, \\ \frac{\partial S}{\partial x_S} &= 0 && \text{für } x_S = 0, \\ S &= 0 && \text{für } x_S \rightarrow -\infty, \\ \Theta &= 1 && \text{für } F \leq x_S \leq 0 \end{aligned}$$

¹Die Enthalpie wird in Übereinstimmung mit der in der Literatur üblichen Schreibweise als S eingeführt.

sowie geeigneten Anfangs- und seitlichen Randbedingungen.

Die Dirac'sche Delta-Funktion in der Temperaturgleichung (2.29) bewirkt einen Sprung im Temperatur- und Enthalpiegradient an der Reaktionsfront $x = F$. Der Betrag dieses Sprungs wird durch Integration der Grundgleichungen über die Flamme hinweg zu

$$(2.32) \quad \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x_S} \right] + \exp\left(\frac{1}{2}S\right) = 0,$$

$$(2.33) \quad \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \left[\frac{\partial S}{\partial x_S} \right] - \lambda \exp\left(\frac{1}{2}S\right) = 0.$$

bestimmt. Der Klammerausdruck $[f]$ steht für den Sprung der Größe f über die Reaktionsfront hinweg, d.h. $[f(F)] \equiv f(F^+) - f(F^-)$.

2.3 Schwache Staupunktströmung ($\kappa \ll 1$)

In der Einführung wird darauf hingewiesen, daß bei hinreichend starker Staupunktströmung nur ebene Flammen beobachtet werden. Das heißt, Instabilitäten der Flamme werden unterdrückt. Dieser Fall ist somit von geringem Interesse.

Die Stärke der Staupunktströmung κ wird deshalb als klein angenommen. Es wird von einer schwachen Staupunktströmung gesprochen. Die Annahme schwacher Staupunktströmung und damit auch schwacher Flammendehnung bedeutet nicht, daß die auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten klein sind (vergleiche dazu Beziehung (2.15)). Vielmehr sind die typischen Abmessungen des Brenners sehr groß, gemessen an der thermischen Grenzschichtdicke. Die Normalgeschwindigkeit der Strömung ist am Ort der Flamme, bedingt durch die Skalierung des Problems, stets von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$.

Das Auftreten eines Parameters $\kappa \ll 1$ macht eine Behandlung des Problems mittels asymptotischer Methoden möglich.

Die abhängigen Variablen Θ , S und F sowie der Parameter λ werden unter dieser Voraussetzung in Potenzen von κ gemäß

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \lambda &\sim \lambda^{(0)} + \kappa \lambda^{(1)} + \dots, \\ \Theta &\sim \Theta^{(0)} + \kappa \Theta^{(1)} + \dots, \\ S &\sim S^{(0)} + \kappa S^{(1)} + \dots, \\ F &\sim \frac{1}{\kappa} F^{(-1)} + F^{(0)} + \kappa F^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

entwickelt. Hier ist zu beachten, daß bei der Entwicklung der Flammenposition F ein Term der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ angesetzt werden muß, da das vorgegebene Strömungsfeld an der Flamme von der gleichen Größenordnung wie die Flammengeschwindigkeit sein muß.

Da es nicht möglich ist, die Dirac'sche Delta-Funktion in Gleichung (2.29) nach κ zu entwickeln, ist eine Betrachtung des Problems in einem mit der Flamme mitbewegten Koordinatensystem zweckmäßig.

Wir führen die Koordinaten

$$(2.35) \quad (x, y, z) = (x_S - F(y_S, z_S, t), y_S, z_S) \quad \text{und} \quad t_1 = t$$

ein. Der Index 1 wird im Folgenden nicht gesetzt, um die Schreibweise übersichtlich zu halten.

In angepaßten Koordinaten schreibt sich der Vektorgradient bzw. der Nabla-Operator als

$$(2.36) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Da im Nabla-Operator die Flammenposition F auftaucht, die wie oben dargestellt, in eine asymptotische Reihe entwickelt wird, ist auch ∇ gemäß

$$(2.37) \quad \nabla \sim \frac{1}{\kappa} \nabla^{(-1)} + \nabla^{(0)} + \kappa \nabla^{(1)} + \dots$$

zu entwickeln.

Hierin ist

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \nabla^{(-1)} &= \left(0, -\frac{\partial F^{(-1)}}{\partial y}, -\frac{\partial F^{(-1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \nabla^{(0)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \nabla^{(1)} &= \left(0, -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Schließlich wird auch das vorgegebene Geschwindigkeitsfeld als

$$(2.39) \quad \mathbf{v} \sim \mathbf{v}^{(0)} + \kappa \mathbf{v}^{(1)} + \dots$$

umgeschrieben, wobei

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= \left(-F^{(-1)}, \kappa(1-b)y, \kappa bz \right), \\ \mathbf{v}^{(1)} &= \left(-x - F^{(0)}, 0, 0 \right), \\ \mathbf{v}^{(1)} &= \left(-F^{(1)}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Es wird hier nur die x -Komponente des Geschwindigkeitsfelds entwickelt. Die beiden Tangentialkomponenten werden dagegen voll in der führenden Ordnung angerechnet. Die Querausdehnung ist bei typischen Brennern sehr

viel größer als die thermische Grenzschichtdicke. Somit nehmen y und z große Werte an und die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten werden in der führenden Ordnung relevant. Wird die Entwicklung auch in die Querrichtungen eingeführt, so ist eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Querausdehnung des Gebietes notwendig.

In der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right)$ steht:

$$(2.41) \quad (\nabla_{\perp} F^{(-1)})^2 \frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad (\nabla_{\perp} F^{(-1)})^2 \frac{\partial^2 S^{(0)}}{\partial x^2} = 0.$$

Diese Gleichung ergibt $\nabla_{\perp} F = 0$ und somit $F^{(-1)}(y, z, t) = F^{(-1)}(t)$. Die zweite mögliche Lösung $\frac{\partial^2 \Theta^{(0)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S^{(0)}}{\partial x^2} = 0$ beschreibt nichtreaktive kalte Lösungen und ist für das gegebene Problem nicht relevant.

In der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ ergibt sich für $x \neq 0$:

$$(2.42) \quad \frac{dF^{(-1)}}{dt} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F^{(-1)}}{\partial t} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} = 0.$$

Der Faktor $\frac{dF^{(-1)}}{dt}$ ergibt sich aus der zeitabhängigen Koordinatentransformation (2.35). Da die Lösung $\frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} = 0$ nicht interessiert, resultiert

$$(2.43) \quad F^{(-1)}(y, z, t) = F_b^{(-1)} = \text{konstant.}$$

Der Index b steht für die Basis- bzw. Grundlösung.

Aus der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ stammen die folgende Bestimmungsgleichung für $\Theta^{(0)}$ und $S^{(0)}$:

$$(2.44) \quad \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial x} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)} = \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)} + W^{(0)},$$

$$(2.45) \quad \frac{\partial S^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(0)} = \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(0)} + \lambda^{(0)} \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)}.$$

Der Quellterm ist hierin:

$$(2.46) \quad W^{(0)} = \exp\left(\frac{1}{2} S^{(0)}\right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F^{(0)})^2} \delta(x).$$

Schließlich erhalten wir den gewünschten Beitrag der Flammenstreckung auf Temperatur und Enthalpie in Form der $\mathcal{O}(1)$ Gleichungen:

$$(2.47) \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} + \\ \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(1)} \Theta^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(1)} = \\ 2 \nabla^{(1)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)} + \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(1)} + \\ \exp\left(\frac{1}{2} S^{(0)}\right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F^{(0)})^2} \left(\frac{S^{(1)}}{2} + \frac{\nabla_{\perp} F^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} F^{(1)}}{1 + (\nabla_{\perp} F^{(0)})^2} \right) \delta(x),$$

$$(2.48) \quad \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} + \\ \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(1)} S^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(1)} = \\ 2 \nabla^{(1)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(0)} + \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} S^{(1)} + \\ \lambda^{(0)} \left(2 \nabla^{(1)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)} + \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(1)} \right) + \lambda^{(1)} \nabla^{(0)} \cdot \nabla^{(0)} \Theta^{(0)}.$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind:

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \Theta^{(0)} = 0, \quad \Theta^{(1)} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ S^{(0)} = 0, \quad S^{(1)} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ \Theta^{(0)} = 1, \quad \Theta^{(1)} = 0 & \quad \text{für } x \leq 0, \\ \frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Es sind weiterhin seitliche Rand- und Anfangsbedingungen zu stellen.

Es sollte beachtet werden, daß bei der Herleitung des Modells davon ausgegangen wird, daß die charakteristischen Längenskalen normal und tangential zur Flamme gleich groß sind. Das Modell kann leicht für langwellige Störungen der Reaktionsfront abgewandelt werden, indem die y - und z -Koordinate gestreckt wird. Hierdurch ergibt sich eine Vereinfachung der Differentialoperatoren, da einige Terme in diesem Fall erst in einer noch höheren Ordnung relevant werden.

2.4 Boussinesq-Erweiterung des thermisch-diffusiven Modells

Das bislang diskutierte thermisch-diffusive Modell vernachlässigt den Einfluß der thermischen Expansion des Brenngasgemisches vollständig. Der Einfluß dieser thermischen Expansion kann mittels eines Boussinesq-Modells berücksichtigt werden. Die Dichte wird zwar weiterhin als konstant angenommen, jedoch wird ein temperaturabhängiger Auftriebsterm angesetzt.

Das Strömungsproblem wird mit der Kontinuitäts- und den Navier-Stokes-Gleichungen modelliert:

$$(2.50) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$(2.51) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \text{Pr} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \text{Fr} \mathbf{e}_g (1 - \Theta).$$

Hierin ist p der Druck und \mathbf{e}_g ein Einheitsvektor, der die Richtung des Gravitationsfelds angibt. Es ergeben sich zwei dimensionslose Kennzahlen Pr und Fr . Die Froude-Zahl Fr ist dabei das Verhältnis aus Schwerkraft zu Trägheitskräften. Die Prandtl-Zahl Pr ist der Quotient aus der kinematischen Viskosität des Gasgemischs und der Temperaturleitfähigkeit. Sie ist das Verhältnis der Diffusivitäten von Impuls und Wärme. Zu beachten ist, daß das Staupunktströmungsfeld (2.15) eine exakte Lösung der Strömungsgleichungen ist, wenn die Froude-Zahl $\text{Fr} = 0$ gesetzt wird. Es ergibt sich eine Druckverteilung gemäß

$$(2.52) \quad p = p_\kappa = p_0 - \kappa^2 \cdot (x^2 + (1 - b)^2 y^2 + b^2 z^2).$$

Somit ist der Druck maximal im Staupunkt.

Für kleine Fr wird das Geschwindigkeitsfeld als die Grundlösung

$$(2.53) \quad \mathbf{v}_\kappa = \kappa (-x, (1 - b) y, bz)$$

mit einer überlagerten Störung \mathbf{v}_g angesetzt. Entsprechendes gilt für den Druck. Es ergibt sich der Ansatz:

$$(2.54) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\kappa + \mathbf{v}_g,$$

$$(2.55) \quad p = p_\kappa + p_g.$$

Die Störgeschwindigkeit \mathbf{v}_g ist wiederum quellfrei und gehorcht einer Transportgleichung:

$$(2.56) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_g = 0,$$

$$(2.57) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_\kappa \cdot \nabla \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{v}_\kappa = -\nabla p_g + \text{Pr} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_g + \text{Fr} \mathbf{e}_g (1 - \Theta).$$

Das Strömungsfeld soll in der Anströmung und an der Wand ungestört sein. An der Wand gelte die Haftbedingung.

$$(2.58) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_g &= 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{v}_g &= 0 \quad \text{für} \quad x = 0. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen an den seitlichen Gebietsgrenzen geeignete Randbedingungen spezifiziert werden. Wird beispielsweise ein in y - und z -Richtung unendlich ausgedehntes Gebiet betrachtet, so muß \mathbf{v}_g endlich bleiben.

Das Strömungsproblem wird ausführlich in Kapitel 5 behandelt.

Kapitel 3

Ebene Grundlösung für schwache Staupunktströmung

Für die nachfolgende lineare Stabilitäts- und später die nichtlineare Analyse wird in diesem Kapitel ein Grundzustand definiert. Dieser ist eine ebene stationäre Lösung der Energie- und Konzentrationsgleichungen (2.44), (2.45), (2.47) und (2.48). Die ebene Grundlösung wird durch den tiefgestellten Index b gekennzeichnet.

Zur Bestimmung des Grundzustands müssen lediglich gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelöst werden.

Es ergibt sich nach einer kurzen Rechnung, die im Anhang B ausgeführt ist, das Temperatur- und Enthalpiefeld zu

$$(3.1) \quad \Theta_b = \begin{cases} \left(1 - \kappa \frac{1}{2} (\lambda^{(0)} x + x^2)\right) \exp x + \dots, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(3.2) \quad S_b = \begin{cases} -\lambda^{(0)} \left[x + \kappa \left(1 + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(0)}} - \frac{\lambda^{(0)} + 2}{2}\right) x - \frac{\lambda^{(0)} + 1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 \right] \exp x + \dots, & x < 0, \\ -\kappa \lambda^{(0)} + \dots, & x \geq 0. \end{cases}$$

Die Position der Flamme mit

$$(3.3) \quad F_b = -\frac{1}{\kappa} + \frac{\lambda^{(0)} + 2}{2} + \dots$$

gegeben.

Aus der Flammenposition F_b kann die Flammengeschwindigkeit bestimmt werden. Diese ist definiert als die Fluidgeschwindigkeit normal zur Flamme am Ort der Reaktionsfront $x = F_b$. Die Normalenrichtung ist hier die x -Richtung, so daß die Flammengeschwindigkeit die x -Komponente $\mathbf{v}_x = -\kappa x$

des Strömungsfelds (2.15) ist und

$$(3.4) \quad u_f = -\kappa F_b = 1 - \kappa \frac{\lambda^{(0)} + 2}{2} + \dots$$

lautet.

Die Flammengeschwindigkeit strebt gegen den Wert 1, wenn $\kappa \rightarrow 0$. Dies ist die Flammengeschwindigkeit einer ebenen Flamme in einem ruhenden Medium. Für Flammen mit abnehmenden reduzierten Lewis-Zahlen steigt die Flammengeschwindigkeit an. Dieses Ergebnis paßt zu der in der Einführung heuristisch beschriebenen Wirkung einer Staupunktströmung auf die Flammengeschwindigkeit.

Kapitel 4

Lineare Stabilität

In diesem Kapitel wird untersucht, ob die im vorherigen Kapitel gefundene Grundlösung stabil gegen kleine Störungen ist. Da die Grundlösung in Form einer asymptotischen Entwicklung vorliegt, muß auch die lineare Stabilitätsanalyse in Form asymptotischer Reihen durchgeführt werden. Dies macht es erforderlich, daß in Abhängigkeit von der Größenordnung der einzelnen Parameter der angesetzten Störung andersartig vorgegangen wird. Speziell wird unterschieden zwischen langsam variierenden langwelligen Störungen und Störungen, die in Raum oder Zeit auf einer Längen- oder Zeitskala der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ variieren.

Zunächst wird der Grundlösung eine infinitesimal kleine Störung überlagert. Die Gleichungen werden um den Grundzustand linearisiert. Im nächsten Schritt muß eine Lösung der Störgleichungen erfolgen. Dies geschieht durch Entwicklung der gesuchten Störgrößen in ein vollständiges System orthogonaler Funktionen. Diese Funktionen sind so auszuwählen, daß sie die seitlichen Randbedingungen erfüllen. Hier soll speziell der Fall eines in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnten Gebietes betrachtet werden. Als geeignete Randbedingung im Unendlichen wird die Beschränktheit der Störungen gefordert. Harmonische Funktionen bilden somit ein geeignetes Funktionensystem zur Entwicklung der Störgrößen.

Eine wesentliche Vereinfachung des Rechenweges ergibt sich, wenn der wichtigste Einfluß der Staupunktströmung, die Streckung der Flammenoberfläche, von Anfang an berücksichtigt wird. Die Wellenlänge einer aufgeprägten Störung wird durch das Strömungsfeld gedehnt. Dies gilt stets, wenn nicht Randbedingungen oder nichtlineare Effekte diesen Vorgang behindern. Ist die Strömung nach innen gerichtet, erfolgt entsprechend eine Stauchung der Wellenlänge. Diesem Mechanismus kann ein mitbewegtes Koordinatensy-

stem

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x &\rightarrow x, \\ y &\rightarrow \hat{y} \exp(- (1 - b) \kappa t), \\ z &\rightarrow \hat{z} \exp(- b \kappa t), \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

Rechnung tragen. Im neuen Koordinatensystem entfällt der konvektive Transport in \hat{y} - und \hat{z} -Richtung. Anstelle des konvektiven Terms ergeben sich zeitabhängige Koeffizienten in der Definition des Nabla-Operators:

$$(4.2) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, e^{-(1-b)\kappa t} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial x} \right), e^{-b\kappa t} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial F}{\partial \hat{z}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right),$$

$$(4.3) \quad \nabla_{\perp} = \left(e^{-(1-b)\kappa t} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial}{\partial x} \right), e^{-b\kappa t} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial F}{\partial \hat{z}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right).$$

Die Lösung wird jetzt als die Grundlösung mit einer überlagerten zeitabhängigen harmonischen Störung angesetzt.

$$(4.4) \quad \begin{aligned} F &\simeq F_b + A(t) \cdot \exp(ik\hat{y} + il\hat{z}), \\ \Theta &\simeq \Theta_b + A(t) \cdot \exp(ik\hat{y} + il\hat{z}) \cdot P(x), \\ S &\simeq S_b + A(t) \cdot \exp(ik\hat{y} + il\hat{z}) \cdot Q(x). \end{aligned}$$

Hier wird die komplexe Schreibweise verwandt. k und l sind Wellenzahlen in \hat{y} - und \hat{z} -Richtung. Es sollte beachtet werden, daß einer festen Wellenzahl eine Störung mit wachsender oder schrumpfender Wellenlänge im (x, y, z) -Koordinatensystem entspricht. Die Funktionen $\exp(ik\hat{y} + il\hat{z})$, $P(x)$, $Q(x)$ werden als Normmoden bezeichnet und $A(t)$ als die Amplitude. Mit der zeitabhängigen Amplitude $A(t)$ läßt sich die momentane Anfachungsrate

$$(4.5) \quad \omega = \frac{1}{A(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t}$$

definieren.

Ein positiver Realteil von ω bedeutet eine Anfachung der Störung, also Instabilität. Stabilität gegenüber kleinen Störungen ist gekennzeichnet durch $Re(\omega) < 0$. Ist der Imaginärteil von ω von Null verschieden, ist die Störung zeitperiodisch.

Das Problem schwacher Staupunktströmungen wird mittels einer asymptotischen Reihe in κ behandelt. Dementsprechend werden auch ω , P und Q nach dem Störparameter κ gemäß

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \omega &\sim \omega^{(0)} + \kappa \omega^{(1)} + \dots, \\ P &\sim P^{(0)} + \kappa P^{(1)} + \dots, \\ Q &\sim Q^{(0)} + \kappa Q^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

entwickelt.

Die Größenordnung der Wellenzahlen muß ebenso festgelegt werden. Es kann gezeigt werden, daß es nicht notwendig ist, alle Kombinationen der Größenordnungen von k , l und ω getrennt zu untersuchen, da sie in den Gleichungen in einer festen Kombination

$$(4.7) \quad \beta^* \equiv (k^*)^2 + \omega$$

auftreten. Hierin wird die effektive Wellenzahl k^* eingeführt, die durch

$$(4.8) \quad k^* \equiv \sqrt{k^2 e^{-2(1-b)\kappa t} + l^2 e^{-2b\kappa t}}$$

definiert ist. k^* ist der Momentanwert des geometrischen Mittels der Wellenzahlen.

Es werden hier zwei Fälle betrachtet.

- Dies ist zum Einen der Fall $\beta^* = \mathcal{O}(1)$. Hier variiert die Störung auf einer $\mathcal{O}(1)$ Raum- und Zeitskala, d.h. die Wellenlänge der Störung ist von der Größenordnung der thermischen Grenzschichtdicke, die typisch 0.5mm dick ist. Eine $\mathcal{O}(1)$ Zeitskala beschreibt Vorgänge, deren Ablaufgeschwindigkeit von der Größenordnung der Aufenthaltszeit des Fluids in der thermischen Grenzschicht, also typisch einige Tausendstel Sekunden, ist.
- Andererseits wird der Fall $\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$ behandelt. Für diesen Fall ist $k, l, \omega \ll 1$. Es handelt sich um langsam variierende langwellige Störungen. Dabei steht langwellig typisch für einige Millimeter und langsam variierend umfaßt Vorgänge, die in Zehntel Sekunden oder langsamer ablaufen.

Neben diesen Fällen sind weitere Fälle denkbar, wie beispielsweise kurzwellige Störungen $\beta^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, die jedoch keine neue Physik ergeben, da die Grundlösung gegen so kurzwellige Störungen stets stabil ist.

4.1 Stabilität gegen Störungen mit Variation auf der $\mathcal{O}(1)$ Raum- und Zeitskala

Zunächst wird der Fall $\beta^* = \mathcal{O}(1)$ untersucht. Es soll darauf hingewiesen werden, daß dieser Fall auch langwellige, zeitperiodische Störungen mit $\omega = \mathcal{O}(1)$ abdeckt. Der Ansatz (4.4) wird in die Gleichungen (2.47) und (2.48) eingesetzt.

Vor der Flamme ($x < 0$) gilt in der führenden Ordnung:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 P^{(0)}}{dx^2} - \frac{dP^{(0)}}{dx} - \beta^* P^{(0)} &= \rho_1^{(0)}, \\ \frac{d^2 Q^{(0)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(0)}}{dx} - \beta^* Q^{(0)} - \\ \lambda^{(0)} \left(-\frac{d^2 P^{(0)}}{dx^2} + (\beta^* - \omega) P^{(0)} \right) &= \rho_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten $\rho_1^{(0)}$ und $\rho_2^{(0)}$ sind im Anhang C gegeben.

Hinter der Flamme ($x > 0$) ergeben sich dieselben Gleichungen mit einer homogenen rechten Seite:

$$(4.10) \quad P^{(0)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 Q^{(0)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(0)}}{dx} - \beta^* Q^{(0)} = 0.$$

Über die Flamme hinweg gelten die Sprungbedingungen:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} [P^{(0)}] &= 0, & [Q^{(0)}] &= 0, \\ \left[\frac{dP^{(0)}}{dx} \right] + \frac{1}{2} Q^{(0)} &= 0, & \left[\frac{dQ^{(0)}}{dx} \right] - \frac{1}{2} \lambda^{(0)} Q^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen für die Störgrößen sind

$$(4.12) \quad \begin{aligned} P^{(0)} = 0, \quad Q^{(0)} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ P^{(0)} = 0, \quad \frac{dQ^{(0)}}{dx} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichungen wird schnell durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite gefunden. Zu beachten ist, daß für die Enthalpiegleichung die rechte Seite Lösungen der homogenen Gleichung enthält und Resonanz vorliegt.

Die Lösungen sind:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} P^{(0)} &= \begin{cases} \exp x - \exp\left(\frac{1}{2}(1+a)x\right), & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \\ Q^{(0)} &= \begin{cases} \left(1 - a + \lambda^{(0)} + \frac{1+a+2\omega}{2a}x\right) \exp\left(\frac{1}{2}(1+a)x\right) - \\ \lambda^{(0)}(1+x)\exp x, & x < 0, \\ (1-a)\exp\left(\left(\frac{1}{2}(1-a)\right)x\right), & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Hierin wird die Kurzschreibweise $a \equiv \sqrt{1 + 4\beta^*}$ eingeführt.

Aus der Lösbarkeitsbedingung, gegeben durch die Sprungbedingung des Enthalpiegradienten über die Flamme hinweg, wird eine Dispersionsbeziehung hergeleitet:

$$(4.14) \quad \lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(0)} \equiv \lambda^{(0)} = -2 \frac{a^2 (1 - a)}{1 - a + 2\omega}.$$

Diese ist eine implizite Bestimmungsgleichung für die Anfachungsrate ω in Abhängigkeit der Wellenzahlen einer Störung und der reduzierten Lewis-Zahl. Eine zusammenfassende Diskussion dieser Dispersionsbeziehung erfolgt am Ende des Kapitels.

Diese Dispersionsbeziehung ist identisch mit der entsprechenden Beziehung für die Stabilität einer Flamme in einem ruhenden Medium. Um den Einfluß des Strömungsfelds auf die Stabilität zu erfassen, soll ein Korrekturterm für die Dispersionsbeziehung der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ bestimmt werden.

In dieser Ordnung wird i.a. $\omega^{(1)}$ in Abhängigkeit der Kontrollparameter bestimmt. Der Kontrollparameter $\lambda^{(1)}$ darf beliebige Werte annehmen und kann somit auch zu 0 gesetzt werden. Es wird somit die Korrektur $\omega^{(1)}$ der Anfachungsrate bei einem festen Parameterwert $\lambda = \lambda^{(0)}$ gesucht. Gleichwertig kann auch anders vorgegangen werden. Es wird die Korrektur $\lambda^{(1)}$ des Kontrollparameters bestimmt, für die die Korrektur der Anfachungsrate verschwindet. Die zweite Methode führt zu leichter auswertbaren Ergebnissen.

In der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ ergeben sich formal die gleichen Differentialgleichungen wie in der führenden Ordnung. Die rechten Seiten berücksichtigen jetzt aber den Einfluß der führenden Ordnung, so daß sich komplizierte Ausdrücke ergeben, die im Anhang B gegeben sind.

Für $x < 0$ gilt:

$$(4.15) \quad \frac{d^2 P^{(1)}}{dx^2} - \frac{dP^{(1)}}{dx} - \beta^* P^{(1)} = \rho_1^{(1)},$$

$$(4.16) \quad \frac{d^2 Q^{(1)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(1)}}{dx} - \beta^* Q^{(1)} = \rho_2^{(1)} + \lambda^{(0)} \left(-\frac{d^2 P^{(1)}}{dx^2} + (\beta^* - \omega) P^{(1)} \right).$$

Im Ausbrandgebiet für $x > 0$ ergibt sich:

$$(4.17) \quad P^{(1)} = 0,$$

$$(4.18) \quad \frac{d^2 Q^{(1)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(1)}}{dx} - \beta^* Q^{(1)} = \rho_3^{(1)}.$$

Über die Flamme hinweg gelten die Sprungbedingungen:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} [P^{(1)}] &= [Q^{(1)}] = 0, \\ \left[\frac{dP^{(1)}}{dx} \right] + \frac{1}{2}Q^{(1)} - \frac{1}{4}\lambda^{(0)}Q^{(0)} &= 0, \\ \left[\frac{dQ^{(1)}}{dx} \right] - \lambda^{(0)} \left(\frac{1}{2}Q^{(1)} - \frac{1}{4}\lambda^{(0)}Q^{(0)} \right) - \frac{1}{2}\lambda^{(1)}Q^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen für die Störgrößen lauten wiederum:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} P^{(1)} &= 0, & Q^{(1)} &= 0 & \text{für } x &\rightarrow -\infty, \\ P^{(1)} &= 0, & \frac{dQ^{(1)}}{dx} &= 0 & \text{für } x &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt analog zur führenden Ordnung. Nach einer längeren Rechnung können die Größen $P^{(1)}$ und $Q^{(1)}$ bestimmt werden und sind im Anhang C aufgeführt. Die Auswertung der Sprungbedingungen über die Reaktionsfront hinweg liefert die gesuchte Korrektur der Dispersionsbeziehung in der Form

$$(4.21) \quad \lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(1)} \equiv \lambda^{(1)} = \frac{-4 + 5a + 3a^2 - 3a^3 + 3a^4 + 6a^5 - 2a^6}{\omega \frac{-4 + 5a + 1a^2 + 3a^3 - a^4}{2a^6}} +$$

Die Diskussion der Ergebnisse erfolgt gemeinsam für alle betrachteten Fälle am Ende des Kapitels.

4.2 Langwellige langsam variierende Störungen

Es soll jetzt der Fall langsam variierender langwelliger Störungen ($\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$) auf lineare Stabilität untersucht werden. Dieser Fall ist in der vorangehenden Analyse nicht enthalten, da die zu lösenden Differentialgleichungen entarten. Zunächst wird eine neue Skalierung für die Wellenzahlen und die Zeit definiert:

$$(4.22) \quad k' = \kappa^{-1/2}k, \quad l' = \kappa^{-1/2}l \quad \text{und} \quad t' = \kappa t.$$

Der Grundlösung wird wiederum eine harmonische Störung gemäß

$$(4.23) \quad \begin{aligned} F &\simeq F_b + A(t') \cdot \exp(ik'\hat{y} + il'\hat{z}), \\ \Theta &\simeq \Theta_b + A(t') \cdot \exp(ik'\hat{y} + il'\hat{z}) \cdot P(x), \\ S &\simeq S_b + A(t') \cdot \exp(ik'\hat{y} + il'\hat{z}) \cdot Q(x) \end{aligned}$$

überlagert. Analog zur Anfachungsrate ω wird die skalierte Anfachungsrate $\omega' = \frac{1}{A(t')} \frac{\partial A(t')}{\partial t'}$ definiert. Dieser Ansatz wird in die linearisierten Gleichungen eingeführt. Es zeigt sich, daß in der führenden Ordnung nur homogene Gleichungen entstehen. Zusammen mit der Lösbarkeitsbedingung ergibt sich lediglich die triviale Lösung. Es wird deshalb gleich mit der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ begonnen.

Für $x < 0$, d.h. vor der Flamme gilt:

$$(4.24) \quad \frac{d^2 P^{(1)}}{dx^2} - \frac{dP^{(1)}}{dx} = -a' \exp x,$$

$$(4.25) \quad \frac{d^2 Q^{(1)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(1)}}{dx} = -\lambda^{(0)} \left(\frac{d^2 P^{(1)}}{dx^2} - (1 + \omega' + a'x) \exp x \right).$$

Im Rauchgasgebiet $x > 0$ verschwindet die Temperaturstörung

$$(4.26) \quad P^{(1)} = 0$$

und die Enthalpiegleichung

$$(4.27) \quad \frac{d^2 Q^{(1)}}{dx^2} - \frac{dQ^{(1)}}{dx} = 0$$

ist homogen.

Die Sprungbedingungen an der Flamme $x = 0$ sind durch

$$(4.28) \quad \begin{cases} [P^{(1)}] = 0, & [Q^{(1)}] = 0, \\ \left[\frac{dP^{(1)}}{dx} \right] + \frac{1}{2} Q^{(1)} = 0, & \left[\frac{dQ^{(1)}}{dx} \right] + \frac{1}{2} \lambda^{(0)} Q^{(1)} = 0, \end{cases}$$

und die Randbedingungen sind durch

$$(4.29) \quad \begin{cases} P^{(1)} = 0, & Q^{(1)} = 0 & \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{dQ^{(1)}}{dx} = 0 & & \text{für } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

gegeben. Hier wird die Abkürzung

$$(4.30) \quad a' \equiv 1 + k'^2 e^{-2(1-b)\kappa t} + l'^2 e^{-2b\kappa t} + \omega'$$

eingeführt.

Die Lösung dieses Gleichungssatzes ist:

$$(4.31) \quad \begin{cases} P^{(1)} = \begin{cases} -a'x \exp x, & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}, \\ Q^{(1)} = \begin{cases} \{-2a' + \lambda^{(0)}(1 + \omega')x + a'x^2\} \exp x, & x < 0 \\ -2a', & x \geq 0 \end{cases}. \end{cases}$$

Aus der Sprungbedingung für den Gradienten von $Q^{(1)}$ ergibt sich wiederum eine Dispersionsbeziehung:

$$(4.32) \quad \lambda^{(0)} = -2 \frac{a'}{a' - 1 - \omega'}.$$

Diese kann auch in Abhängigkeit der Größen k , l und ω oder der Abkürzung β^* und ω umgeschrieben werden:

$$(4.33) \quad \lambda_{\mathcal{O}(\kappa)} \equiv \lambda = -2 \frac{\kappa + \beta^*}{\beta^* - \omega}.$$

4.3 Kombinierte Dispersionsbeziehung für $\beta^* = \mathcal{O}(1)$ und $\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$

Aus den oben gefundenen Dispersionsbeziehungen kann eine kombinierte Dispersionsbeziehung hergeleitet werden. Diese gilt dann für die beiden Fälle $\beta^* = \mathcal{O}(1)$ und $\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$.

Dazu werden die Dispersionsgleichungen für die beiden Fälle addiert und der gemeinsame Anteil wird subtrahiert, da dieser sonst doppelt auftritt. Den gemeinsamen Anteil bestimmt man, durch einen Grenzübergang $\beta^* \rightarrow \infty$ in der Beziehung (4.33) sowie $\beta^* \rightarrow 0$, d.h. $a \rightarrow 1$ und $\omega \rightarrow 0$, in den Beziehungen (4.14) und (4.21).

$$(4.34) \quad \lim_{\beta^* \rightarrow \infty} \lambda_{\mathcal{O}(\kappa)} = -2,$$

$$(4.35) \quad \lim_{\beta^* \rightarrow 0} (\lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(0)} + \kappa \cdot \lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(1)}) = -2.$$

Der gemeinsame Anteil ist -2 und die gemeinsame Dispersionsbeziehung ergibt sich zu:

$$(4.36) \quad \lambda = \lambda_{\mathcal{O}(\kappa)} + \lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(0)} + \kappa \cdot \lambda_{\mathcal{O}(1)}^{(1)} - 2.$$

4.4 Diskussion der Stabilitätsergebnisse

Die Abbildung 4.1 zeigt Kurven neutraler Stabilität. Aufgetragen ist λ über der effektiven Wellenzahl k^* (siehe Gl. (4.8)). Im Diagramm ist als zusätzlicher Parameter die Stärke der Staupunktströmung κ angegeben.

Zunächst soll nur der Fall einer positiven Stärke der Staupunktströmung κ diskutiert werden. Im Bereich unterhalb der Kurven ($\kappa > 0$) für negative λ tritt eine zellularen Instabilität (siehe Kapitel 1.4) auf. Auf der Kurve

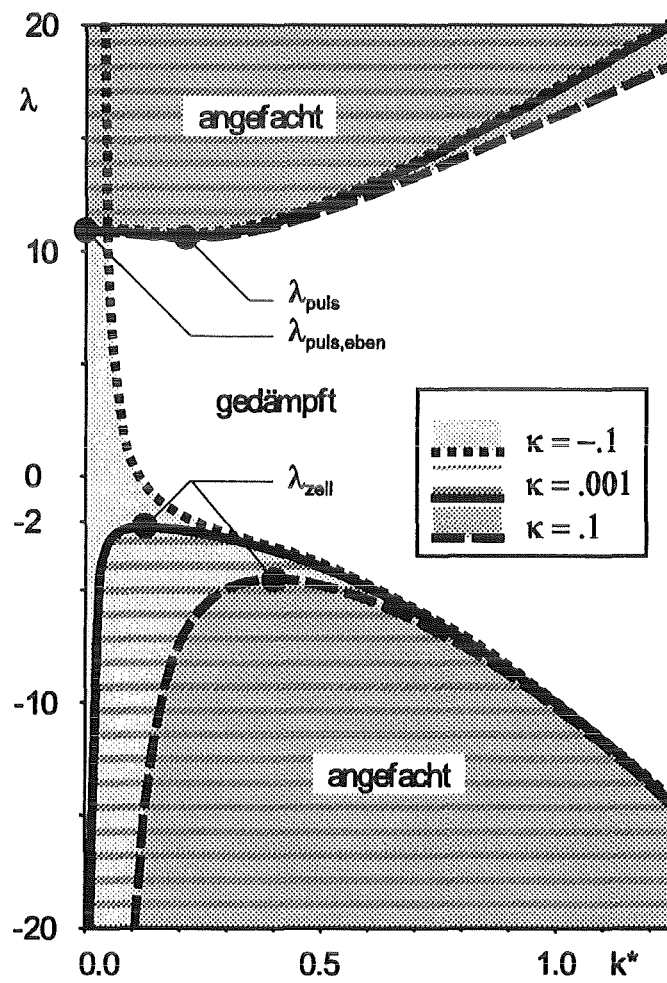


Abbildung 4.1: Kurven neutraler Stabilität

neutraler Stabilität verschwindet der Imaginärteil der Anfachungsrate ω . Instabilität ist gekennzeichnet durch einen einfachen reellen Eigenwert, der in die rechte Hälfte der komplexen Zahlenebene wandert, wenn die reduzierte Lewis-Zahl λ unterhalb einen kritischen Wert $\lambda_{\text{zell}} \leq -2$ abgesenkt wird. Es zeigt sich, daß kurz- und langwellige Störungen der Grundlösung abklingen, daß jedoch Störungen innerhalb des durch die Neutralkurven begrenzten Wellenlängenbereiches angefacht werden.

Es ist zu beachten, daß die Kurven im Diagramm über einen zeitabhängigen Parameter $k^* \equiv \sqrt{k^2 e^{-2(1-b)\kappa t} + l^2 e^{-2b\kappa t}}$ aufgetragen sind. Die Zeitabhängigkeit ist Folge der Koordinatentransformation (4.1) und berücksichtigt, daß eine Störung der Flamme mit dem Strömungsfeld mittransportiert wird. Die effektive Wellenzahl strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, wenn die y - und z -Strömungsgeschwindigkeiten von der x -Achse weggerichtet sind. Dagegen steigt die effektive Wellenzahl unbeschränkt an, wenn eine Strömungskomponente in Richtung der x -Achse zeigt. Eine Störung mit großer anfänglicher effektiver Wellenzahl, d.h. eine kurzwellige Störung, wird anfänglich gedämpft. Nach einer endlichen Zeit ist k^* auf einen kritischen Wert abgesunken und die Grenze der Neutralstabilität wird überschritten, die Störung wird angefacht. Die Anfachung ist jedoch zeitlich begrenzt, da die effektive Wellenzahl weiter absinkt und die Grenze der Neutralstabilität nochmals überschritten wird. Die Störung klingt jetzt exponentiell ab. Im Sinne einer linearen Stabilitätsanalyse bedeutet dies: Die Grundlösung ist stabil gegen kleine Störungen beliebiger Wellenlänge.

Die gleichen Argumente gelten, wenn eine Strömungskomponente in Richtung der x -Achse weist. Die Grenzen neutraler Stabilität werden lediglich in umgekehrter Reihenfolge überschritten. Auch hier folgt Stabilität gegen beliebige kleine Störungen.

Diese Argumente können relativiert werden. Man beachte, daß sich k^* auf einer langsamen Zeitskala $t_\kappa = \mathcal{O}(\kappa^{-1})$ ändert. Die Störung wird somit für eine lange Zeit angefacht bevor sie schließlich abklingt. Liegen im System kleine statistische Störungen durch äußere Einflüsse vor, so wird für ausreichend kleine κ eine deutliche Störung des Grundzustandes zu beobachten sein. Bislang nicht berücksichtigte nichtlineare Effekte können dann relevant werden.

Eine weitere Einschränkung der Argumente für Stabilität gegen beliebige Störungen gilt für endliche Gebiete. Für diese ist keine Koordinatentransformation gemäß Gleichung (4.1) möglich und die oben angeführten Argumente gelten nur mit Einschränkung.

Eine Stabilitätsanalyse für endliche Gebiete kann aber im Prinzip durchgeführt werden. Anstelle der Entwicklung in harmonische Funktionen ist dann eine Entwicklung in Hermitesche Polynome und/oder in Parabolische

Zylinderfunktionen in Abhängigkeit der Flammenstreckung κ und des Geometrieparameters b notwendig. Da wir an Staupunktströmungen in großen Gebieten interessiert sind, und eine solche Stabilitätsanalyse mit erheblichem Aufwand verbunden ist, wird hier darauf verzichtet.

Es wird darauf hingewiesen, daß die Kurve neutraler Stabilität im Bereich effektiver Wellenzahlen der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ ($k^*, \beta^* = \mathcal{O}(1)$) nur eine schwache Abhängigkeit von der aufgeprägten Flammenstreckung aufweist. Die führende Ordnung der zugehörigen Dispersionsbeziehung ist mit Gleichung (4.14) gegeben und ist unabhängig von der Flammenstreckung κ . Die Stabilitätsgrenze für langsam variierende langwellige Störungen zeigt dagegen eine ausgeprägte Abhängigkeit (siehe Gl. (4.33)), da die Dispersionsbeziehung nicht aus der führenden Ordnung folgt. Die Flammenstreckung wirkt hier stabilisierend auf langwellige Störungen sofern $\kappa > 0$.

Im Stabilitätsdiagramm Abb. 4.1 ergibt sich für positive λ eine weitere Kurve neutraler Stabilität. Im Bereich oberhalb dieser Kurven tritt eine pulsierenden Instabilität auf. Am Einsatz der Instabilität ist der Imaginärteil der Anfachungsrate ω von Null verschieden. Instabilität ist gekennzeichnet durch ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, die in die rechte Hälfte der komplexen Zahlenebene wandern, wenn die reduzierte Lewis-Zahl λ über einen kritischen Wert λ_{puls} hinaus erhöht wird. Da die effektive Wellenzahl zeitabhängig ist, ergeben sich harmonische Oszillationen auf einer $\mathcal{O}(1)$ Zeitskala. Die Frequenz ändert sich jedoch auf einer langsamen Zeitskala.

Für große $\lambda > \lambda_{\text{puls,eben}}$ (siehe Abb. 4.1) ist die ebene Flamme instabil. Eine kurzwellige Störung wird, wie im Falle der Zellular-Instabilität, zunächst gedämpft und überschreitet nach einer endlichen Zeit die Kurve neutraler Stabilität, um in das Gebiet angefachter Störungen einzutreten. Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall wird dieses Gebiet nicht mehr verlassen. Es liegt Instabilität gegen beliebige Störungen vor. Es kann jedoch keine Aussage über die zu erwartende Wellenzahl der Störung gemacht werden, da alle angesetzten Störungen nach unendlicher Zeit zu einer ebenen Störung gestreckt werden. Da die Störung gleichzeitig exponentiell anwächst, muß angenommen werden, daß nichtlineare Effekte nicht mehr vernachlässigt werden können bevor die Störung eben wird.

Ist $\lambda_{\text{puls}} < \lambda < \lambda_{\text{puls,eben}}$, so werden, wie im Falle der Zellular-Instabilität, sowohl langwellige als auch kurzwellige Störungen gedämpft, während Störungen mittlerer Wellenlänge angefacht werden. Alle Argumente der Zellular-Instabilität gelten entsprechend. Es liegt Stabilität gegen beliebige kleine Störungen vor.

Die Grenze $\lambda_{\text{puls,eben}}$ trennt somit ein Gebiet, in dem Stabilität gegen beliebige kleine Störungen vorliegt, von einem Gebiet, in dem Instabilität gegen beliebige Störungen vorliegt.

Zuletzt soll der Fall negativer κ diskutiert werden. Für negative κ wird eine ebene Störung ($k^* = 0$) für alle Lewis-Zahlen angefacht (siehe unterlegter Bereich in Abbildung 4.1 für $\kappa = -1$). Im Falle negativer κ strömt das frische Brenngasgemisch von den Seiten heran, und strömt normal zur Platte ab. Eine Auslenkung der Flamme in Richtung der Rauchgase bewegt die Flamme in ein Gebiet kleinerer Strömungsgeschwindigkeit, ohne daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme in entsprechender Weise verringert. Die Flamme ist somit schneller als die Strömung und entfernt sich ungebremst von der Platte. Soll eine Flamme mit $\kappa < 0$ realisiert werden, müssen zusätzliche stabilisierende Maßnahmen getroffen werden.

Kapitel 5

Schwach nichtlineare Analyse für schwache Staupunktströmung

5.1 Längen- und Zeitskalen

Ist die reduzierte Lewis-Zahl λ kleiner als $\lambda_c = -2$, so ist eine zellulare Instabilität vorstellbar, da für hinreichend kleine κ Störungen existieren, die zeitweise angefacht werden. In diesem Kapitel wird eine nichtlineare Analyse durchgeführt und eine Evolutionsgleichung für die Auslenkung der Flammenfront abgeleitet.

Für eine nichtlineare Analyse sind geeignete Längen- und Zeitskalen festzulegen. Die geeignete Wahl kann aus der linearen Theorie abgeleitet werden. Abbildung 5.1 zeigt einen Ausschnitt der Stabilitätskarte für die ebene Flamme in der Staupunktströmung. Aufgetragen ist eine Neutralkurve über der effektiven Wellenzahl k^* und der reduzierten Lewis-Zahl λ . Die Neutralkurve zeigt ein Maximum, das durch λ_{zell} gekennzeichnet ist. Um eine schwach nichtlineare Analyse durchführen zu können, muß ein schwach überkritischer Zustand ausgewählt werden. In der Abbildung ist dieser durch eine waagrechte punktierte Linie angedeutet.

Als kleiner Parameter soll die Abweichung der reduzierten Lewis-Zahl (vergleiche Abbildung 5.1) vom kritischen Wert dienen. Da der kritische Wert λ_{zell} von der Stärke der Staupunktströmung κ abhängt, wird hier der betragsmäßig kleinste mögliche kritische Wert $\lambda_c = -2$ ausgewählt:

$$(5.1) \quad \varepsilon = \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c}.$$

Der Betrag des positiven Parameters ε bestimmt, wie weit der gewählte Zu-

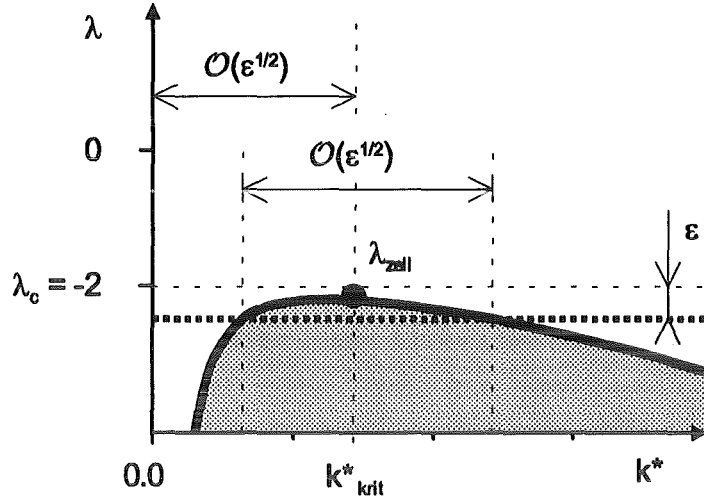


Abbildung 5.1: Skalierung für die nichtlineare Theorie

stand im Bereich angefachter Störungen liegt. Bei der Bestimmung einer geeigneten Skalierung für Längen und die Zeit, ergibt sich eine Schwierigkeit. Die Neutralkurve ist hier durch eine kombinierte Dispersionsbeziehung (4.36) gegeben. Zur Bestimmung geeigneter Längen und Zeitskalen, müssen deshalb die Dispersionsbeziehungen der betrachteten Fälle $\beta^* = \mathcal{O}(1)$ und $\beta^* = \mathcal{O}(\kappa)$ getrennt betrachtet werden.

In der Umgebung von $\lambda = -2$ ist die Kurve neutraler Stabilität ($\omega = 0$) (siehe Beziehungen (4.14) und (4.21)) für Wellenlängen der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ durch

$$(5.2) \quad \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c} \sim (4 + \kappa) k^{*2}$$

gegeben. Das Zeichen "∼" steht hier für "asymptotisch gleich". Hierin ist $k^* \equiv \sqrt{k^2 e^{-2(1-b)\kappa t} + l^2 e^{-2b\kappa t}}$ die effektive Wellenzahl. Es folgt die Größenordnung der kritischen Wellenzahlen

$$(5.3) \quad k_{c,\mathcal{O}(1)}^* = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

Langwellige Störungen der Grundlösung mit $k^* < k_{c,\mathcal{O}(1)}^*$ werden angefacht. Werden die Dispersionsbeziehungen (4.14) und (4.21) für kleine Werte der Wellenzahl k^* und der Anfachungsrate ω entwickelt, so ergibt sich

$$(5.4) \quad \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c} \sim \frac{\omega}{k^{*2}} + \kappa k^{*2}.$$

Auf der linken Seite steht die Definition von ε , so daß auch die rechte Seite von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sein muß. Für die Größenordnung der Anfachungsrate folgt in der Nähe der neutralen Stabilität

$$(5.5) \quad \omega = \mathcal{O}\left(t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(1)}^{-1}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Es ist zu beachten, daß mit der Größenordnung von ω auch eine langsame Zeitskala der Anfachung $t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(1)}$ festgelegt ist.

Analog kann die Auswertung für langwellige Störungen $k^{*2} = \mathcal{O}(\kappa)$ erfolgen. Setzt man in der Dispersionsbeziehung (4.33) die Anfachungsrate zu 0, ergibt sich

$$(5.6) \quad \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c} = -\frac{\kappa}{k^{*2}}$$

und damit ist die Größenordnung der kritischen effektiven Wellenzahl

$$(5.7) \quad k_{c, \mathcal{O}(\kappa)}^* = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}\right).$$

Hierin steht $k_{c, \mathcal{O}(\kappa)}^*$ für eine kritische effektive Wellenzahl, deren Betrag von der Größenordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ ist. Es ist zu beachten, daß jetzt Störungen angefacht werden für $k^* > k_{c, \mathcal{O}(\kappa)}^*$.

Entwickelt man jetzt die Beziehung (4.33) für kleine ω und setzt für die effektive Wellenzahl die gerade gefundene Beziehung ein, so ergibt sich die Größenordnung der Anfachungsrate zu

$$(5.8) \quad \omega = \mathcal{O}\left(t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(\kappa)}^{-1}\right) = \mathcal{O}(\kappa).$$

Auch in diesem Fall wird eine langsame Zeitskala der Anfachung $t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(1)}$ gefunden.

Bislang ist die Größenordnung von κ nicht festgelegt. Es werden im folgenden möglichen Größenordnungen diskutiert und anschließend der interessanteste Fall für die nichtlineare Analyse ausgewählt.

- Fall I: $\sqrt{\kappa} \gg \varepsilon$:
Für diesen Fall folgt aus (5.3) und (5.7) unmittelbar, daß $k_{c, \mathcal{O}(\kappa)}^* \gg k_{c, \mathcal{O}(1)}^*$. Dies heißt aber, daß es keine Überlappung der Bereiche angefachter Störungen gibt. Dieser Bereich liefert stets eine stabile Grundlösung und ist nicht von Interesse.
- Fall II: $\sqrt{\kappa} = \mathcal{O}(\varepsilon)$:
Die Größenordnungsbeziehungen (5.3) und (5.7) sind jetzt identisch. Wie die lineare Stabilitätsanalyse gezeigt hat, wird die Wellenlänge von

Störungen in einer Staupunktströmung durch das Strömungsfeld gedehnt. Die damit verknüpfte charakteristische Zeit ist gegeben durch $t_{\text{Dehnung}} = \frac{1}{\kappa}$ (siehe Gleichung (4.1)). Die charakteristische Zeitskala $t_{\text{Anfachung}} = t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(1)} = t_{\text{Anfachung}, \mathcal{O}(\kappa)} = \frac{1}{\varepsilon^2}$ auf der Störungen angelegt werden, folgt aus den Beziehungen (5.8) und (5.5).

Ist $t_{\text{Dehnung}} \simeq t_{\text{Anfachung}}$ werden die Störungen auf der gleichen Zeitskala gestreckt auf der sie angefacht werden. Es können interessante Wechselwirkungen der beiden Phänomene erwartet werden.

Dieser Fall wird im verbleibenden Teil dieser Arbeit ausführlich analysiert.

• Fall III: $\sqrt{\kappa} \ll \varepsilon$:

Die nachfolgende nichtlineare Analyse für $\kappa = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ kann leicht für Fall III modifiziert werden. Hierzu muß der Einfluß der Staupunktströmung aus den Gleichungen gestrichen werden, da die Wellenlänge einer Störung nur um einen vernachlässigbar kleinen Betrag gedehnt wird, während die Störung angefacht. Dieser Fall ist somit ebenfalls nicht von Interesse.

Schließlich soll auch noch die Froude-Zahl in ihrer Größenordnung festgelegt werden. Da die Impulsgleichungen nicht in der linearen Stabilitätsanalyse berücksichtigt worden sind, muß dies mit heuristischen Argumenten erfolgen. Es soll die Größenordnung von Fr so gewählt werden, daß der Gravitationseffekt sowie thermo-diffusive Effekte gleichermaßen Berücksichtigung finden.

Geeignet sind die nachfolgenden Skalierungsmaßstäbe:

$$(5.9) \quad k_c^* \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \omega_c \sim \varepsilon^2, \quad \kappa \sim \varepsilon^2 \quad \text{und} \quad Fr \sim \varepsilon^2,$$

wobei $\varepsilon = \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c}$ ist.

Diese Maßstäbe sind geeignet, langsam variierende langwellige Störungen zu beschreiben. Allerdings sind die Begriffe "langwellig" und "langsam variierend" relativ zu der thermischen Grenzschichtdicke \tilde{l}_{th} und zu der Aufenthaltszeit des Fluids in der Grenzschicht zu sehen. Wird $\varepsilon = .1$ angenommen, so kann eine Störung mit einer Wellenlänge von $\varepsilon^{-.5} \cdot \tilde{l}_{th} \approx 1.5mm$ bereits als langwellig aufgefaßt werden. Entsprechend heißt hier langsam variierend, daß eine charakteristische Zeitskala im Bereich von Zehntel Sekunden liegen kann.

Es wird jetzt mit skalierten Variablen und Parametern gearbeitet, die wie

folgt skaliert werden:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \alpha &= \varepsilon^{-2} \kappa, \\ \gamma &= \varepsilon^{-2} \text{Fr}, \\ \tau &= \varepsilon^2 t, & \eta &= \sqrt{\varepsilon} y, & \zeta &= \sqrt{\varepsilon} z, \\ F &= F_b(\varepsilon) + \psi(\eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon), \\ \Theta &= \Theta_b(x, \varepsilon) + \theta(x, \eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon), \\ S &= S_b(x, \varepsilon) + s(x, \eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_b(x, \eta, \zeta) + \mathbf{w}(x, \eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon), \\ p &= p_b(x, \eta, \zeta) + \Pi(x, \eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Normal zur Flamme, d.h. in x -Richtung, wird zunächst keine neue Skalierung eingeführt. Die ebene Grundlösung ist gegeben mit F_b , Θ_b , S_b , \mathbf{v}_b und p_b . Störungen des Temperatur-, Enthalpie-, Strömungs- und des Druckfelds sind θ , s , \mathbf{w} und Π . Dabei ist \mathbf{w} ein Vektorfeld. Die Auslenkung der Reaktionsfront ist ψ . Da das Problem mittels asymptotischer Ansätze analysiert wird, müssen auch die Störungen in Form von asymptotischen Reihen gefunden werden.

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \psi &\sim \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots, \\ \theta &\sim \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \dots, \\ s &\sim \varepsilon s^{(1)} + \varepsilon^2 s^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{w} &\sim \varepsilon \mathbf{w}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{w}^{(2)} + \dots, \\ \Pi &\sim \varepsilon \Pi^{(1)} + \varepsilon^2 \Pi^{(2)} + \dots. \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung der Störgrößen wird kein Term der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ angesetzt, da die Störungen voraussetzungsgemäß klein sind.

5.2 Reale Brenner

Bei allen bisherigen Betrachtungen (z.B. lineare Stabilität) wird davon ausgegangen, daß weit stromauf der Flamme ideale ungestörte Bedingungen vorliegen. Bei realen Verbrennungsvorgängen muß jedoch davon ausgegangen werden, daß Störungen des Geschwindigkeits- und Temperaturfelds die Flamme beeinflussen. So wird eine lokale Temperaturerhöhung der Brenngastemperatur zu einer lokal erhöhten Verbrennungstemperatur führen. Es nimmt die Reaktionsrate zu, wodurch die lokale Flammengeschwindigkeit ansteigt. Es stellt sich damit auch ohne das Auftreten einer Instabilität eine nichtebene Flamme ein. Entsprechendes gilt für lokale Störungen des Geschwindigkeitsfelds.

Um den Einfluß solcher Störungen qualitativ beschreiben zu können, sollen kleine Störungen des Temperatur- und Geschwindigkeitsfelds am Brenner angenommen werden. Die Größenordnung dieser Störungen wird so klein

angenommen, daß eine einfache mathematische Beschreibung erfolgen kann. Aus erst später ersichtlichen Gründen wird hier speziell eine Störung der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ angesetzt.

$$(5.12) \quad \begin{aligned} S &= S_b + \varepsilon^3 s_B^{(3)} + \dots \quad \text{für } x_S = F_B, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_b + \varepsilon^3 \mathbf{w}_B^{(3)} + \dots \quad \text{für } x_S = F_B. \end{aligned}$$

Hierin steht der Index "B" für "Brenner" und "b" für die Grund- bzw. die Basislösung. Es ist F_B der Abstand des Brenners von der Stauplatte. Es wird somit eine allgemeine Störung des Geschwindigkeits- und des Enthalpiefelds zugelassen. Da sich das Enthalpiefeld aus dem Temperatur- und dem Konzentrationsfeld zusammensetzt, sind somit auch allgemeine Konzentrations- bzw. Temperaturstörungen erlaubt.

In der Abbildung 5.2 ist die untersuchte Brennerkonfiguration schematisch dargestellt. Der Brenner besteht aus einer porösen ebenen Platte und einer parallel angeordneten Stauplatte. Der Gravitationsvektor stehe senkrecht zur Platte. Die poröse Platte wird vom vorgemischten Brenngas durchströmt. An der porösen Platte sei die Temperatur- und die Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben. Die Querausdehnung, d.h. der Durchmesser des Brenners, soll von der Größenordnung eines möglichen Zellularmusters der Flamme sein. Die Größe eines solchen Musters ist durch die lineare Stabilitätsanalyse bestimmt und ist von der Größenordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. Diese Längenskala ist typisch einige Millimeter groß und beschreibt Brenner im Labormaßstab. Die Annahme größerer Längenskalen stellt hier kein prinzipielles Problem dar und wird nicht weiter untersucht.

Es können jetzt mehrere Zonen unterschieden werden, in denen unterschiedliche physikalische Prozesse ablaufen.

Unmittelbar hinter dem Brenner befindet sich Zone I, die auch als Umverteilungszone bezeichnet werden soll. In dieser Zone liegt ein Gleichgewicht zwischen axialem konvektivem Impulstransport und Druckkräften vor. Der Begriff "axial" steht hier für die Hauptströmungsrichtung normal zum Brenner. In der Umverteilungszone werden Störungen der Quergeschwindigkeit in Störungen der axialen Geschwindigkeit umgewandelt. Die axiale Ausdehnung der Zone I ist von der Größenordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ also von der Größenordnung der Querausdehnung des Brenners. Diese Zone hat keine Bedeutung für das Temperatur- und Enthalpiefeld. Diese sind konstant in Zone I.

An Zone I schließt die Ausgleichszone bzw. Zone II an, deren axiale Erstreckung mit $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ groß gegenüber der Querausdehnung ist. Hier ist das dominante Gleichgewicht zwischen konvektivem axialem Transport und diffusivem Quertarnsport in Form von Reibung bzw. Wärmeleitung gegeben. Störungen der axialen Geschwindigkeit und des Temperaturfelds werden hier durch Reibung bzw. durch Wärmeleitung ausgeglichen.

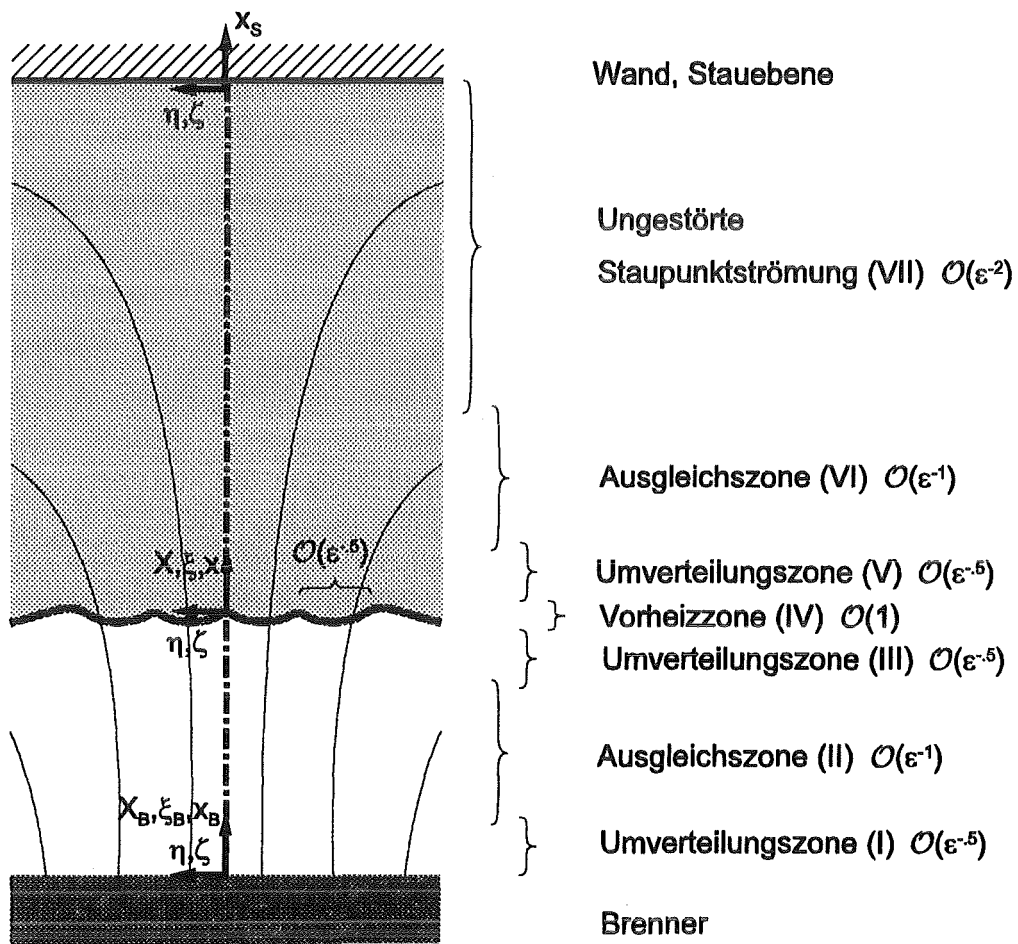


Abbildung 5.2: Einteilung des Brennraums in Zonen

Hinter dieser Ausgleichszone sind die Reststörungen exponentiell klein und somit zu vernachlässigen. Die Flamme wird durch Störungen am Brenner nur dann beeinflusst, wenn der Abstand zwischen Brenner und Flamme von der Größenordnung der Dicke der Ausgleichszone ist.

Vor der Flamme ist Zone III, in der die durch die Flamme verursachten Störungen der Quergeschwindigkeit abklingen. Die axiale Ausdehnung dieser Zone ist wieder von der Größenordnung der Querausdehnung des Brenners $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

Wie schon in der Einleitung diskutiert, ist unmittelbar vor der Reaktionszone die Vorheizzone, in der das heranströmende Gasgemisch bis zur Zündgrenze aufgeheizt wird ($\mathcal{O}(1)$). Die Vorheizzone soll als Zone IV bezeichnet werden. Es folgt dann die eigentliche Flamme, d.h. die außerordentlich dünne Reaktionszone ($\mathcal{O}\left(\frac{1}{Ze}\right)$). Da diese hier durch Sprungbedingungen und nicht durch Differentialgleichungen beschrieben wird, entfällt eine gesonderte Bezeichnung mit einer römischen Ziffer und die Behandlung der Reaktionszone erfolgt gemeinsam mit Zone IV.

Hinter der Flamme ist Zone V, deren axiale Ausdehnung wiederum $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ ist. Hier werden die Störungen der Quergeschwindigkeit analog zu Zone I und III ausgeglichen.

In der daran anschließenden Zone VI ($\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$) klingen die Störungen der Temperatur und der axialen Geschwindigkeit wie in Zone II ab.

In Zone VII klingt die axiale Geschwindigkeit der Grundströmung ab. Die axiale Ausdehnung ist durch das Staupunktströmungsfeld zu $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ vorgegeben. In Zone VII liegen nur exponentiell kleine Störungen der Grundlösung vor, so daß eine ausführliche Behandlung dieser Zone entfällt.

Unmittelbar vor der Stauplatte ist eine Reibungs- und Temperaturgrenzschicht. Diese soll hier jedoch nicht untersucht werden, da sie im Rahmen der asymptotischen Modellierung wie auch Zone VII keine Auswirkungen auf die Flamme hat.

Bevor die mathematische Behandlung jeder einzelnen der oben aufgeführten Zonen erfolgt, soll der Lösungsweg kurz erläutert werden.

Zunächst wird die in Kapitel 3 gewonnene Grundlösung auf die neue Skalierung umgeschrieben. Danach werden die Störgleichungen sukzessive für jede Ordnung in ε gelöst. Innerhalb jeder Ordnung werden zunächst die Temperatur- und Enthalpiegleichungen gelöst, wobei zuerst Zone II, dann Zone IV und Zone VI betrachtet werden.

Dann wird der Einfluß von Geschwindigkeitsstörungen untersucht. Hierzu werden alle Zonen, ausgehend vom Brenner, hintereinander betrachtet. Es stellt sich heraus, daß sich nichttriviale Störungen des Geschwindigkeitsfelds erst in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ergeben. In den niedrigeren Ordnungen ergeben sich ausschließlich homogene lineare Differentialgleichungen mit homo-

genen Randbedingungen, da die Kopplung an die thermisch-diffusiven Prozesse erst in $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ erfolgt und die Randbedingungen am Brenner bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ homogen sind. Es ist somit nur die triviale Lösung möglich. Deshalb kann auf eine Behandlung der Impulsbilanz in Form der Boussinesq-Gleichungen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ verzichtet werden.

5.3 Grundlösung

Zunächst muß die Grundlösung (3.1), (3.2) und (3.3) umgeschrieben werden. Bislang ist sie gegeben in Form einer asymptotischen Reihe in κ . Die Grundlösung wird hier jedoch als eine asymptotische Reihe in ε benötigt. Es erweist sich als ausreichend, die gewählte Skalierung (5.10) in die alte Grundlösung einzusetzen:

$$(5.13) \quad F_b \sim \varepsilon^{-2} F_b^{(-2)} + \varepsilon^{-1} F_b^{(-1)} + \dots = -\varepsilon^{-2} \frac{1}{\alpha} - \varepsilon + \dots$$

$$(5.14) \quad \Theta_b \sim \Theta_b^{(0)} + \varepsilon \Theta_b^{(1)} + \dots = \begin{cases} \left(1 + \varepsilon^2 \alpha \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon^3 \alpha x\right) \exp x + \dots, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(5.15) \quad S_b \sim S_b^{(0)} + \varepsilon S_b^{(1)} + \dots = \begin{cases} (2x + \varepsilon 2x + \varepsilon^2 \alpha (2 + x^2 - x^3) + \\ \quad + \varepsilon^3 \alpha (2 + 2x + 3x^2 - x^3)) \exp x + \dots, & x < 0, \\ 2\alpha (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + \dots, & x \geq 0. \end{cases}$$

Das Geschwindigkeitsfeld der Grundlösung ist für das thermisch/diffusive Modell ohne und mit der Boussinesq Erweiterung:

$$(5.16) \quad \mathbf{v}_b = \mathbf{v}_{\kappa,b} \sim \left(1 - \varepsilon^2 \alpha x - \alpha \varepsilon^3 + \dots, \varepsilon^{3/2} (1 - b) \eta, \varepsilon^{3/2} b \zeta\right).$$

Dies bedeutet das die Grundlösung des durch die Gravitation bedingten Geschwindigkeitsfelds

$$(5.17) \quad \mathbf{v}_{g,b} = 0$$

verschwindet. Vom Druckfeld wird nur der gravitationsbedingte Zusatzbeitrag benötigt:

$$(5.18) \quad p_{g,b} \sim \begin{cases} \varepsilon^2 \gamma \cdot (1 + x - \exp x) + \dots, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

5.4 Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung

Die skalierten Variablen und Parameter (5.10) werden in die Grundgleichungen für schwache Staupunktströmungen (2.44)-(2.48) mit der Boussinesq-Erweiterung (2.56)-(2.57) eingesetzt. Gesucht werden Lösungen für die Störungen der Temperatur θ , der Enthalpie s , des Geschwindigkeitsfelds \mathbf{w} und des Drucks Π . Es wird zunächst der Beitrag der Grundlösungen subtrahiert dann werden die Terme nach ihrer Größenordnung geordnet. Es ergibt sich für jede Potenz von ε ein Gleichungssatz für die Störgrößen θ^i , s^i , \mathbf{w}^i und Π^i . In jeder Ordnung gibt es neben den Randbedingungen, die zur Bestimmung der Lösung notwendig sind, auch die aus der Dirac'schen Delta-Funktion resultierenden Sprungbedingungen an der Reaktionszone. Diese Sprungbedingungen stellen eine Lösbarkeitsbeziehung dar, aus der die zulässigen Auslenkungen der Reaktionsfront ψ der Flamme ermittelt werden.

5.4.1 Störungen erster Ordnung

Für die Störungen erster Ordnung ergeben sich ausschließlich homogene Gleichungen für alle Störgrößen. Die alleine zulässige Lösung dieses Gleichungssatzes ist die triviale Lösung $\theta^{(1)} = s^{(1)} = \mathbf{w}^{(1)} = \Pi^{(1)} = 0$.

Es muß somit das Problem in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ gelöst werden.

5.4.2 Störungen zweiter Ordnung

Die Gleichungen für die Druck- und Geschwindigkeitsstörung von zweiter Ordnung haben weiterhin eine homogene rechte Seite und es folgt

$$(5.19) \quad \mathbf{w}^{(2)} = \Pi^{(2)} = 0.$$

Dies gilt auch für die Enthalpiestörung in der Ausgleichszone II und es folgt $s^{(2)} = 0$.

Die Variablen werden zur Kennzeichnung der betrachteten Zone jeweils mit einem tiefgestellten Index, der für die einzelnen Zonen steht, gekennzeichnet. Da sich in Zone IV sehr umfangreiche Gleichungen ergeben, wird in Zone IV von dieser Nomenklatur abgewichen und kein Index benutzt.

In Zone IV ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Störgrößen zweiter

Ordnung:

$$\begin{aligned}
 x < 0 : \quad & \frac{\partial^2 \theta^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} = \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right) \exp x, \\
 & \frac{\partial^2 s^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 \theta^{(2)}}{\partial x^2} = 2 \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right) x \exp x, \\
 x > 0 : \quad & \theta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial^2 s^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} = 0, \\
 (5.20) \quad x = 0 : \quad & [\theta^{(2)}] = 0, \quad [s^{(2)}] = 0, \\
 & \left[\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} s^{(2)} = 0, \quad \left[\frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} \right] + s^{(2)} = 0, \\
 x \rightarrow -\infty : \quad & \theta^{(2)} = 0, \quad s^{(2)} = 0, \\
 x \rightarrow +\infty : \quad & \frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} = 0.
 \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Flamme bei $x = 0$ liegt. Die Lösung des $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ -Problems in Zone IV lautet:

$$(5.21) \quad \begin{aligned}
 \theta^{(2)} &= \begin{cases} \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right) x \exp x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \\
 s^{(2)} &= \begin{cases} 2 \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right) (1 + x^2) \exp x, & x < 0 \\ 2 \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right), & x \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aus Beziehung (5.21) läßt sich die Größe der Enthalpiestörung an der Flamme $s^{(2)} = 2 \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right)$ bestimmen. Es soll daran erinnert werden, daß die Enthalpie an der Reaktionsfront identisch ist mit der Temperatur, da die Konzentration verschwindet. $\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)}$ ist die Krümmung der Flamme. Somit liegt eine hohe Temperatur in Bereichen positiver Krümmung und eine niedrigere Temperatur in Bereichen negativer Krümmung vor. Dies gilt in Übereinstimmung mit der heuristischen Erklärung der Zellularinstabilität, die in Kapitel 1.4 erläutert wird. Wird eine Flamme mit einem Zellmuster von der Rauchgasseite her betrachtet, so erscheinen die Erhebungen dunkel, da hier die Krümmung negativ ist.

Alle Rand- und Sprungbedingungen an der Flamme sind automatisch erfüllt, d.h. es ergibt sich keine Lösbarkeitsbedingung in dieser Ordnung.

Die Enthalpiestörung hinter der Flamme ist konstant in der Zone IV. Die Störung klingt erst auf einer sehr viel größeren Längenskala $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ in Zone VI ab. Zunächst wird eine neue axiale Raumkoordinate

$$(5.22) \quad X = \varepsilon x$$

eingeführt und in die Gleichung (2.45) eingesetzt. Die Lösung für s wird in Form einer asymptotischen Reihe

$$(5.23) \quad s \sim \varepsilon s_{VI}^{(1)} + \varepsilon^2 s_{VI}^{(2)} + \varepsilon^3 s_{VI}^{(3)} + \dots$$

bestimmt. Auf der X -Skala ergibt sich die Gleichung für $s_{VI}^{(2)}$ für $X > 0$ in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ zu

$$(5.24) \quad \frac{\partial s_{VI}^{(2)}}{\partial X} = \nabla_{\perp}^2 s_{VI}^{(2)}$$

zusammen mit geeigneten seitlichen Randbedingungen und der Übergangsbedingung zwischen den Zonen IV und VI

$$(5.25) \quad s_{VI}^{(2)} \rightarrow 2 \left(\nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} \right) \quad \text{für } X \rightarrow 0^+.$$

In dieser Gleichung stehen axialer konvektiver Transport und diffusiver Quertransport im Gleichgewicht. Die Lösung $s_{VI}^{(2)}$ zeigt somit klar ein Abklingen der Störungen für $X \rightarrow +\infty$. Da $s_{VI}^{(2)}$ für den weiteren Lösungsweg nicht gebraucht wird, kann von einer expliziten Lösung abgesehen werden.

5.4.3 Störungen dritter Ordnung der Temperatur und Enthalpie

In Zone II klingen Störungen des Enthalpiefelds, die durch einen realen Brenner stets verursacht werden, ab. Die Behandlung dieser Zone erfolgt analog zu Zone VI.

Die Beschreibung erfolgt wiederum mit einer großen Längenskala

$$(5.26) \quad X_B = \varepsilon (x_S - F_B).$$

Dies ist ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung auf dem Brenner liegt. Die Flamme befindet sich im Abstand $X_F = \varepsilon (F_b - F_B)$ vom Brenner entfernt. Das neue Koordinatensystem wird in Gleichung (2.45) eingeführt. Die Lösung für s wird wieder als eine asymptotische Reihe der Form

$$(5.27) \quad s \sim \varepsilon s_{II}^{(1)} + \varepsilon^2 s_{II}^{(2)} + \varepsilon^3 s_{II}^{(3)} + \dots$$

gesucht. Analog zu Zone VI ergibt sich auf der X_B -Skala die Gleichung für $s_{II}^{(3)}$ für $X_B > 0$ in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ zu

$$(5.28) \quad \frac{\partial s_{II}^{(3)}}{\partial X} = \nabla_{\perp}^2 s_{II}^{(3)}$$

zusammen mit geeigneten seitlichen Randbedingungen und der Randbedingung am Brenner

$$(5.29) \quad s_{II}^{(3)}(0) = s_B^{(3)}.$$

Die lineare Gleichung (5.28) kann leicht mittels einer Fouriertransformation gelöst werden. Der Lösungsweg sei hier dargestellt für ein unendlich ausge dehntes Gebiet in (η, ζ) -Richtung.

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ ist definiert als:

$$(5.30) \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik\eta - il\zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\zeta.$$

Der tiefgestellte Index "k" kennzeichnet die Variablen im Spektralbereich und steht symbolisch für eine Wellenzahl k . Im Fourierbereich gehen die Ableitungen nach den (η, ζ) -Koordinaten in Produkte mit den Wellenzahlen k und l über.

Im Spektralbereich lautet (5.28):

$$(5.31) \quad \frac{\partial s_{II,k}^{(3)}}{\partial X} = -k_{eff}^2 \cdot s_{II,k}^{(3)}$$

wobei

$$(5.32) \quad k_{eff}^2 = k^2 + l^2.$$

Die Lösung der Gleichung (5.31) in der Ausgleichszone ist

$$(5.33) \quad s_{II,k}^{(3)} = s_{B,k}^{(3)} \cdot \exp(-k_{eff}^2 \cdot X_B).$$

Aus dieser Lösung wird schließlich die Übergangsbedingung zur Vorheizzone bestimmt. Es gilt

$$(5.34) \quad s_{\infty,k}^{(3)} = s_{II,k}^{(3)}(X_F) = s_{B,k}^{(3)} \cdot \exp(-k_{eff}^2 \cdot X_F).$$

Hierin ist $X_F = \varepsilon \cdot (F_b - F_B)$ der Abstand der Flamme vom Brenner. Dieser Abstand läßt sich durch die Ausströmgeschwindigkeit am Brenner frei einstellen. Die Flammenstreckung kann unabhängig hiervon durch eine Variation des Abstands zwischen dem Brenner und der Stauebene geändert werden.

Es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Enthalpieverteilung am Brenner und derjenigen am Eintritt in die Vorheizzone.

Soll die Enthalpiestörung $s_\infty^{(3)}$ am Eintritt in die Vorheizzone bestimmt werden, muß somit zunächst die Enthalpiestörung am Brenner in den Spektralbereich transformiert werden. Anschließend wird die Fouriertransformierte $s_{\infty,k}^{(3)}$ der gesuchten Enthalpiestörung aus Gleichung (5.34) bestimmt und diese zurück in den physikalischen Bereich transformiert. Umgekehrt kann aber auch die notwendige Enthalpiestörung am Brenner bestimmt werden, die eine gewünschte Enthalpieverteilung am Eintritt in die Vorheizzone liefert.

Es wird jetzt die Vorheizzone und die Reaktionszone, d.h. Zone IV, betrachtet. In der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ergeben sich die nachfolgenden Energie- und Enthalpiegleichungen:

$$\begin{aligned}
 x < 0 : \quad & \frac{\partial^2 \theta^{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial x} + \mathbf{w}_x^{(3)} e^x = \rho_1^{(3)}, \\
 & \frac{\partial^2 s^{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial s^{(3)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 \theta^{(3)}}{\partial x^2} + 2 \mathbf{w}_x^{(3)} (1+x) e^x = \rho_2^{(3)}, \\
 x > 0 : \quad & \theta^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial^2 s^{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial s^{(3)}}{\partial x} = \rho_3^{(3)}, \\
 (5.35) \quad x = 0 : \quad & [\theta^{(3)}] = 0, \quad \left[\frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} s^{(3)} = \frac{1}{2} (\nabla_\perp^2 \psi^{(1)})^2, \\
 & [s^{(3)}] = 0, \quad \left[\frac{\partial s^{(3)}}{\partial x} \right] + s^{(3)} + s^{(2)} = (\nabla_\perp^2 \psi^{(1)})^2, \\
 x \rightarrow -\infty : \quad & \theta^{(3)} = 0, \quad s^{(3)} = s_\infty^{(3)}, \\
 x \rightarrow +\infty : \quad & \frac{\partial s^{(3)}}{\partial x} = 0.
 \end{aligned}$$

Die rechten Seiten $\rho_i^{(3)}$ der Gleichungen sowie die Lösungen der Gleichungen sind im Anhang D.1 angegeben.

Diese Lösungen existieren jedoch nur dann, wenn eine Lösbarkeitsbedingung erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
 (5.36) \quad & \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} + 4 \nabla_\perp^4 \psi^{(1)} + \nabla_\perp^2 \psi^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \psi^{(1)})^2 + \\
 & \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_\perp \psi^{(1)} + \alpha \psi^{(1)} - \mathbf{w}_1^{(3)} = -s_\infty^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Dies ist eine skalare Evolutionsgleichung für die Auslenkung der Flamme aus der Grundlösung. Diese Gleichung stellt jedoch noch keine geschlossene Beschreibung des Problems dar, da die Normalkomponente (x -Richtung) der Störgeschwindigkeit $w_1^{(3)}$ noch unbekannt ist. Zur Schließung des Problems muß $w_1^{(3)}$ mit Hilfe der Auslenkung $\psi^{(1)}$ und den Randbedingungen am Brenner ausgedrückt werden. Die Inhomogenität $s_\infty^{(3)}$ (siehe (5.34)) ist die von einem realen Brenner aufgeprägte Störung des Enthalpiefelds.

In der Gleichung (5.36) wird der zweidimensionale Nabla-Operator $\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)$, der zweidimensionale Laplace-Operator $\nabla_\perp^2 = \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp$ und der zweidimensionale Biharmonische-Operator $\nabla_\perp^4 = \nabla_\perp^2 \cdot \nabla_\perp^2$ benutzt. Des Weiteren wird eine Kurzschreibweise für das Geschwindigkeitsfeld in der (η, ζ) -Ebene eingeführt:

$$(5.37) \quad \mathbf{v}_\perp = (\alpha(1-b)\eta, \alpha b\zeta).$$

Um das Temperatur- und Enthalpieproblem abzuschließen, muß nur noch Zone VI betrachtet werden. Die Behandlung erfolgt analog der Behandlung von Störungen zweiter Ordnung. Hier muß jedoch eine inhomogene Version von Gleichung (5.24) für $s_{VI}^{(3)}$ in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ gelöst werden:

$$(5.38) \quad \frac{\partial s_{VI}^{(3)}}{\partial X} - \nabla_\perp^2 s_{VI}^{(3)} = -\frac{\partial s_{VI}^{(2)}}{\partial \tau} - \alpha X \frac{\partial s_{VI}^{(2)}}{\partial X} + \frac{\partial^2 s_{VI}^{(2)}}{\partial X^2}.$$

Die Bestimmung der Lösung dieser Gleichung ist nicht für die Lösbarkeitsbedingung (5.36) erforderlich. Gleichung (5.38) wird nur zur Vervollständigung der Darstellung angegeben. Die Inhomogenität setzt sich aus Ableitungen der Störungen zweiter Ordnung zusammen und klingt somit wie die Störung zweiter Ordnung für $X \rightarrow \infty$ ab. Damit ist gewährleistet, daß auch die Störung dritter Ordnung auf der X -Skala abklingt.

Das Temperatur- und Enthalpieproblem ist hier abgeschlossen und es muß das Strömungsproblem betrachtet werden.

5.4.4 Störungen dritter Ordnung des Strömungsfelds

In diesem Abschnitt soll das Störgeschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}^{(3)}$ bestimmt werden. Dieses setzt sich aus den Komponenten $(w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, w_3^{(3)})$ zusammen. Das eigentliche Ziel ist die Bestimmung der axialen Geschwindigkeitskomponente $w_1^{(3)}$ am Ort der Flamme für die Lösbarkeitsbeziehung (5.36).

Die Herleitung dieser Geschwindigkeitskomponente erfordert einen sehr langen Formalismus, da die Impulsgleichungen in jeder der Zonen I bis VI gelöst und aneinander angepaßt werden müssen. Deshalb werden hier nur die wesentlichen Ergebnisse angegeben. Der ausführliche Rechenweg ist im Anhang D.2 dargestellt.

Der gesuchte Zusammenhang zwischen axialen Geschwindigkeitsstörung $w_1^{(3)}$ am Ort der Flamme und der Auslenkung der Flamme $\Psi^{(1)}$ sowie der Geschwindigkeitsstörung am Brenner $w_B^{(3)}$ ist

$$(5.39) \quad \boxed{w_1^{(3)} = -\frac{\gamma}{2}\psi^{(1)} + w_{1,\infty}^{(3)}}$$

wobei $w_{1,\infty}^{(3)}$ aus Geschwindigkeitsstörungen am Brenner resultiert. Der Zusammenhang zwischen $w_{1,\infty}^{(3)}$ und den Störgeschwindigkeitskomponenten $w_{1,B}^{(3)}$, $w_{2,B}^{(3)}$ und $w_{3,B}^{(3)}$ im Spektralbereich ist durch

$$(5.40) \quad w_{1,\infty,k}^{(3)} = \begin{cases} \left(w_{1,B,k}^{(3)} - \frac{ikw_{2,B,k}^{(3)} + ilw_{3,B,k}^{(3)}}{\sqrt{k^2 + l^2}} \right) \cdot \exp\left(-\sqrt{\text{Pr}(k^2 + l^2)} \cdot X_F\right), & k^2 + l^2 \neq 0, \\ w_{1,B,k}^{(3)}, & k^2 + l^2 = 0. \end{cases}$$

gegeben. Hierin steht der Index "B" für Brenner und der Index "k" für Terme im Spektralbereich. k und l sind die Wellenzahlen in den Raumrichtungen η und ζ . X_F ist der Abstand zwischen Brenner und Flamme.

Wird schließlich die Geschwindigkeitsstörung an der Flamme (siehe Gleichung (5.39)) in die Evolutionsgleichung für die Auslenkung der Flamme (5.36) eingesetzt, ergibt sich eine geschlossene skalare Beziehung zur Bestimmung der Auslenkung der Flamme:

$$(5.41) \quad \boxed{\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\tau} + 4\nabla_{\perp}^4\psi^{(1)} + \nabla_{\perp}^2\psi^{(1)} + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp}\psi^{(1)})^2 + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}\psi^{(1)} + \beta\psi^{(1)} = w_{1,\infty}^{(3)} - s_{\infty}^{(3)}}.$$

wobei

$$(5.42) \quad \beta \equiv \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right).$$

Hierin ist α die skalierte Stärke der Staupunktströmung und γ die skalierte Froude-Zahl. Gleichung (5.41) ist eine verallgemeinerte Version der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung

$$(5.43) \quad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\tau} + 4\nabla_{\perp}^4\psi^{(1)} + \nabla_{\perp}^2\psi^{(1)} + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp}\psi^{(1)})^2 = 0,$$

die Flammen in einer ruhenden Gasmischung ohne Gravitationseinfluß beschreibt. Es ergeben sich zusätzlich ein konvektiver und ein der Auslenkung proportionaler Term sowie eine inhomogene rechte Seite. Die Inhomogenität kann dabei einen beliebigen glatten Verlauf annehmen und läßt sich, wie

gezeigt wurde, in eindeutiger Weise aus den Randbedingungen am Brenner bestimmen.

Diese Gleichung ist eine starke Vereinfachung des ursprünglichen Problems. Es muß lediglich eine skalare Gleichung in Abhängigkeit der Raumkoordinaten (η, ζ) und der Zeit gelöst werden. Das ursprüngliche Problem erfordert die Lösung von vier Skalaren (Flammposition, Temperatur, Enthalpie und Druck) und einem Vektorfeld (Geschwindigkeit) im dreidimensionalen Raum und der Zeit, wobei sechs unterschiedliche Zonen mit unterschiedlichen charakteristischen Längenskalen auftreten. In der verallgemeinerten Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung entfällt die Abhängigkeit von der x -Richtung und damit die Zoneneinteilung. Außerdem wird das freie Randwertproblem einer freien Oberfläche in ein einfaches Randanfangswertproblem überführt.

5.5 Parabolisch gekrümmte Flammen

Bei realen Brennern läßt sich im allgemeinen keine konstante axiale Geschwindigkeitsverteilung einstellen. Durch viskose Reibung in der Zuführung zum Brenner ergibt sich typischerweise ein Geschwindigkeitsabfall in Richtung des Brennerrands. Entsprechende Argumente gelten für die Temperaturverteilung. Um den Einfluß solcher Störungen auf die Flamme exemplarisch untersuchen zu können, wird eine parabolisch gekrümmte Flamme als Grundlösung angenommen (vergleiche Abbildung 5.3).

$$(5.44) \quad \psi_b^{(1)} = -q \left((1-b)\eta^2 + b\zeta^2 \right) + r.$$

Für positive q ist die Flamme am Brennerrand in Richtung des Brenners gekrümmt. Die Vorfaktoren $(1-b)$ bzw. b werden analog zum Geschwindigkeitsfeld eingeführt und erlauben die gemeinsame Behandlung eindimensionaler ($b=0$), runder ($b=\frac{1}{2}$) und elliptischer Geometrie.

Da schon in Kapitel 3 eine Grundlösung F_b eingeführt wird, soll der Unterschied der Grundlösungen F_b und $\Psi_b^{(1)}$ hervorgehoben werden. F_b ist die Flammenposition einer ebenen Flamme im thermisch/diffusiven Modell. Diese wird unter der Voraussetzung eines idealen Brenners ohne Störungen des Enthalpie- und Geschwindigkeitsfelds ermittelt. Im Gegensatz hierzu ist $\Psi_b^{(1)}$ eine stationäre Grundlösung der verallgemeinerten Kuramoto-Sivashinsky Gleichung (5.41). Diese wird eingeführt, da Gleichung (5.41) eine inhomogene rechte Seite besitzt, so daß $\Psi^{(1)} = 0$ keine stationäre Lösung darstellt.

Wird diese Grundlösung $\psi_b^{(1)}$ in Gleichung (5.41) eingesetzt, kann leicht die zugehörige Inhomogenität

$$(5.45) \quad w_{1,\infty}^{(3)} - s_{\infty}^{(3)} = -q \left(2(\alpha - q)(1-b) + \beta \right) (1-b)\eta^2 - q \left(2(\alpha - q)b + \beta \right) b\zeta^2 + r\beta$$

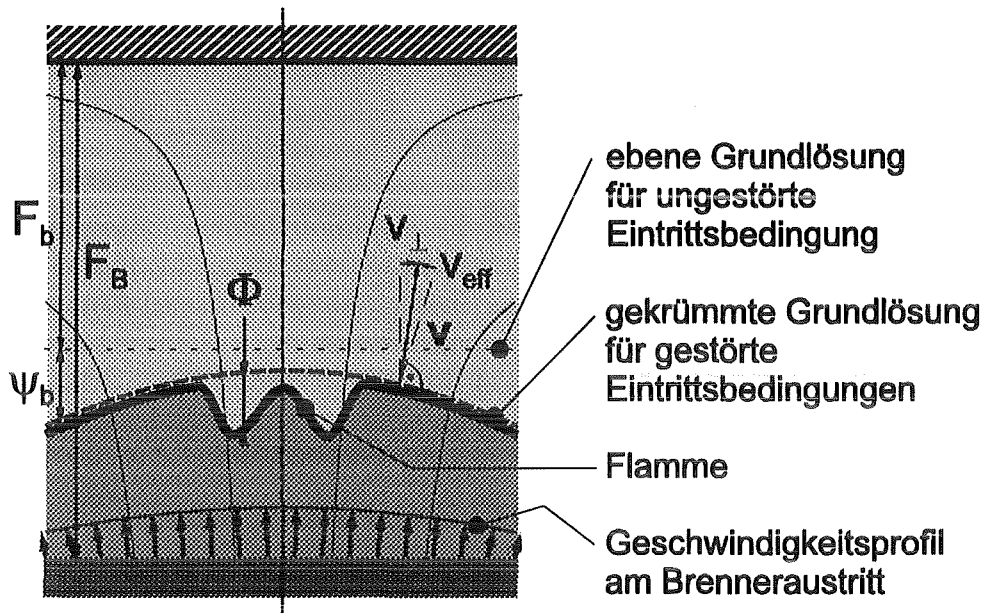


Abbildung 5.3: Gekrümmte Flamme in einem Staupunktverbrenner

bestimmt werden. Diese stellt eine parabolische Verteilung dar. Für schwach gekrümmte Flammen $q < \alpha + \frac{\beta}{2} \min\left(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{b}\right)$ geht eine Erhöhung der Krümmung der Flamme in Richtung des Brenners mit einer Erniedrigung der Inhomogenität $w_{1,\infty}^{(2)} - s_{\infty}^{(2)}$ am Brennerrand einher. Eine weitere Erniedrigung der Inhomogenität am Brennerrand führt zu keiner parabolisch gekrümmten Lösung.

- Für den Grenzfall $s_{\infty}^{(2)} = 0$ bedeutet dies, daß eine erhöhte Krümmung der Flamme einer abgesenkten Geschwindigkeit am Brennerrand entspricht. Ein solcher Verlauf kann für reale Brenner erwartet werden, da am Brennerrand Reibungseinflüsse innerhalb des Brenners stets zu einer leichten Absenkung der Austrittsgeschwindigkeit führen.
- Für den Grenzfall $w_{1,\infty}^{(2)} = 0$ führt eine erhöhte Krümmung der Flamme zu einer erhöhten Enthalpie (d.h. erhöhte Temperatur oder Konzentration) am Brennerrand. Auch hier ist die Tendenz richtig. Zelluläre Flammen werden typischerweise in fetten Gemischen schwerer Brennstoffe beobachtet. Hier ist die begrenzende Komponente der Sauerstoff. Am Brennerrand kann typischerweise zusätzlicher Sauerstoff aus der Umgebung in das Brenngasgemisch hineindiffundieren, so daß die Enthalpie am Brennerrand erhöht ist.

Für die weitere Behandlung wird Gleichung (5.41) in eine homogene Form überführt. Zu diesem Zweck wird die gekrümmte Grundlösung von $\psi^{(1)}$ subtrahiert. Es wird dann eine Evolutionsgleichung für die Auslenkung der Flamme aus der gekrümmten Grundlösung

$$(5.46) \quad \Phi \equiv \psi^{(1)} - \psi_b^{(1)}$$

hergeleitet. Wird Beziehung (5.46) in Gleichung (5.41) eingesetzt, so gehen alle linearen Terme identisch ineinander über. Lediglich aus dem nichtlinearen Term folgt ein zusätzlicher Beitrag

$$(5.47) \quad \begin{aligned} (\nabla_{\perp} \psi^{(1)})^2 &= (\nabla_{\perp} \Phi + \nabla_{\perp} \psi_b^{(1)})^2 \\ &= (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + 2\nabla_{\perp} \psi_b^{(1)} \cdot \nabla_{\perp} \Phi + (\nabla_{\perp} \psi_b^{(1)})^2, \end{aligned}$$

so daß schließlich eine Evolutionsgleichung für Φ folgt:

$$(5.48) \quad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 4\nabla_{\perp}^4 \Phi + \nabla_{\perp}^2 \Phi + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + \mathbf{v}_{\perp, eff} \cdot \nabla_{\perp} \Phi + \beta \Phi = 0,}$$

wobei das effektive Geschwindigkeitsfeld definiert ist zu

$$(5.49) \quad \mathbf{v}_{\perp, eff} \equiv \mathbf{v}_{\perp} + \nabla_{\perp} \psi_b^{(1)}.$$

Da sich $\nabla_{\perp} \psi_b^{(1)}$ in weiten Grenzen durch die Wahl der Randbedingungen am Brenner einstellen läßt, ergibt sich für nahezu beliebige $\mathbf{v}_{\perp, eff}$ eine physikalisch sinnvolle Evolutionsgleichung.

Speziell soll hier das effektive Geschwindigkeitsfeld einer parabolisch gekrümmten Flamme betrachtet werden:

$$(5.50) \quad \mathbf{v}_{\perp, eff} = \alpha_{eff} \cdot ((1-b)\eta, b\zeta)$$

wobei die effektive Flammenstreckung durch

$$(5.51) \quad \alpha_{eff} = -2q + \alpha.$$

gegeben ist. Von besonderem Interesse sind hierbei die Fälle mit negativen $\alpha_{eff} < 0$, da diese hier erstmals betrachtet werden.

5.6 Lineare Stabilität

Für die verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.48) kann eine lineare Stabilitätsanalyse erfolgen. Zunächst wird sie linearisiert für kleine

Amplituden Φ . Dazu muß lediglich der quadratische Term gestrichen werden. Da normale Moden für diese Gleichung vierter Ordnung schwer zu bestimmen sind, nutzen wir die Transformation auf bewegte Koordinaten in der Form

$$(5.52) \quad \begin{aligned} \hat{\eta} &= \eta \exp(-(1-b)\alpha_{eff}\tau), \\ \hat{\zeta} &= \zeta \exp(-b\alpha_{eff}\tau), \\ \tau &\rightarrow \tau. \end{aligned}$$

Hiermit entfällt der konvektive Term und an seiner Stelle treten zeitabhängige Koeffizienten auf. Geeignete normale Moden sind wiederum harmonische Funktionen, so daß die Lösung als eine zeitabhängige Amplitude multipliziert mit harmonischen Moden dargestellt wird.

$$(5.53) \quad \Phi = A(\tau) \exp(ik\hat{\eta} + il\hat{\zeta}).$$

Hierin sind k und l Wellenzahlen.

Wird der Ansatz in die linearisierte verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.48) eingesetzt, so ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Amplitude der Störung (vergleiche hierzu Abbildung 5.4):

$$(5.54) \quad \frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau} = l^{*2} - 4l^{*4} - \beta$$

mit der effektiven Wellenzahl

$$(5.55) \quad l^* = \sqrt{k^2 \exp(-2(1-b)\alpha_{eff}\tau) + l^2 \exp(-b\alpha_{eff}\tau)}.$$

Für $\beta < \frac{1}{16}$ gibt es Moden, die zeitweise angefacht werden. Die Bedingung für Anfachtung ist gegeben zu:

$$(5.56) \quad \frac{1}{8} \left(1 - \sqrt{1 - 16\beta}\right) < l^{*2} < \frac{1}{8} \left(1 + \sqrt{1 - 16\beta}\right).$$

In Abbildung 5.4 ist die Anfachtungsrate $\frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau}$ über der effektiven Wellenzahl dargestellt. Es werden drei Kurven für verschiedene Parameter β gezeigt. Für $\beta < 0$ wird eine ebene Störung mit $l^* = 0$ angefacht. Dieser Fall ist instabil. Für $\beta > 0$ werden Störungen im unterlegten Bereich unterhalb der Kurven angefacht. Da die Wellenzahl zeitabhängig ist, ergibt sich wie zuvor bei der linearen Stabilitätsanalyse der Gleichungen des thermisch-diffusiven Modells, daß eine Störung anfänglich gedämpft wird. Für mittlere Zeiten wird sie angefacht und für lange Zeiten wird sie schließlich gedämpft. Es ist somit Stabilität gegen beliebige kleine Störungen gegeben. Es gelten jedoch alle bei der linearen Stabilitätsanalyse des thermisch-diffusiven Modells angeführten Argumente ohne Änderung. Da eine Störung für längere Zeit angefacht wird,

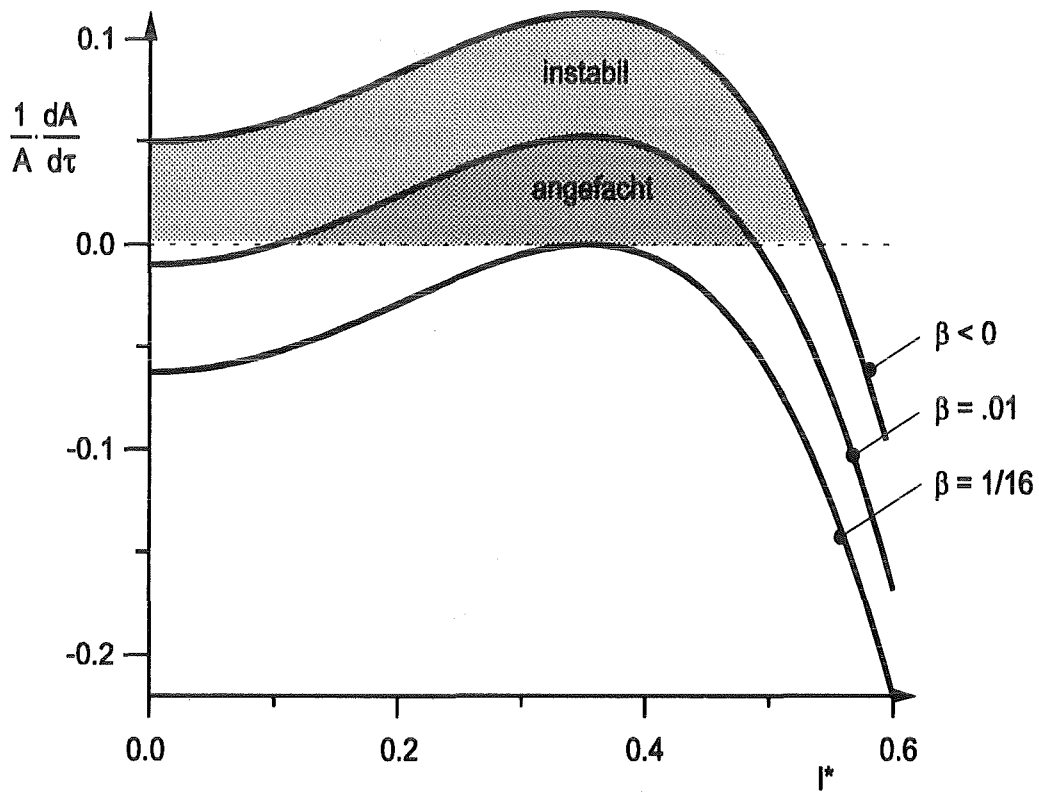


Abbildung 5.4: Stabilität der KS-Gleichung

kann davon ausgegangen werden, daß für ausreichend kleine $|\alpha_{eff}|$ und $\beta \ll \frac{1}{16}$ Instabilität, d.h. ein "Muster", beobachtet werden kann.

Neu ist hier, daß der Einfluß der Gravitation und einer nichtebenen Grundlösung berücksichtigt ist. Mit zunehmenden Froude-Zahlen γ (beachte $\beta = \alpha + \frac{\gamma}{2}$) wird die Flamme jetzt zunehmend instabil. Positive γ stehen für entgegen der x -Richtung gerichtete Gravitation.

Wird eine Brennerkonfiguration mit zwei vertikal aufeinander gerichteten Brennern analysiert, folgt, daß die obere Flamme stets zuerst instabil wird.

5.7 Instabilität durch nichtlineare Wechselwirkung von Moden

Hier soll ein einfacher nichtlinearer Instabilitätsmechanismus für positive α_{eff} diskutiert werden. Angenommen wird eine Störung in Form von Kosinus-Moden in die beiden Raumrichtungen.

$$(5.57) \quad \Phi = A(\tau) \cos(k(\tau)\hat{\eta}) \cos(l(\tau)\hat{\zeta}).$$

Aufgrund der streckenden Wirkung des Strömungsfelds wird die Wellenlänge der Kosinus-Moden zunehmen. Der quadratische Term in Gleichung (5.48) führt gemäß

$$(5.58) \quad (\nabla_{\perp} \Phi)^2 = \frac{1}{2} A(\tau)^2 \left[k(\tau)^2 \cos(l(\tau)\hat{\zeta}) (1 - \cos(2k(\tau)\hat{\eta})) + l(\tau)^2 \cos(k(\tau)\hat{\eta}) (1 - \cos(2l(\tau)\hat{\zeta})) \right]$$

zu Wechselwirkungen zwischen den Moden wobei insbesondere kurzwellige Moden mit den Wellenzahlen $2k$ und $2l$ entstehen. Ist die durch Wechselwirkung angeregte Mode von geeigneter Wellenlänge, so wird sie vorübergehend angefacht. Ist diese Zeit mit $\alpha_{eff} \ll 1$ ausreichend lang, so erzeugt diese Mode eine neue Mode, die ihrem Anfangszustand entspricht, bis ihre anfängliche Wellenlänge auf die doppelte Wellenlänge gestreckt wird. Dieser Vorgang kann sich zeitperiodisch wiederholen und ist als ein fortwährendes Strecken der Wellenlänge mit zeitperiodischer Zellteilung zu beobachten. Die Periodendauer entspricht der Zeit, die zur Dehnung des Musters auf die doppelte Wellenlänge benötigt wird, und kann aus der Koordinatentransformation (5.52) abgeleitet werden. Für ein eindimensionales Muster mit $l = 0$ ist diese Zeit beispielsweise $\tau_{doppel} = \frac{\ln 2}{(1-b)\alpha_{eff}}$.

Kapitel 6

Invarianzeigenschaften der Grundgleichungen: Stabilität gegen Wanderwellen

6.1 Thermisch-diffusives Modell

Die folgenden Betrachtungen gelten für ungestörte Bedingungen am Brenner. Wird das thermisch-diffusive Modell in einem ruhenden Gasgemisch angesetzt, so zeigt sich eine Invarianz der Gleichungen gegen Verschiebung in y_S - oder z_S -Richtung. Ist $\mathbf{L}(x_S, y_S, z_S, t)$ eine Lösung der Gleichungen des thermisch-diffusiven Modells mit Boussinesq Erweiterung, wobei

$$(6.1) \quad \mathbf{L}(x_S, y_S, z_S, t) \equiv \begin{pmatrix} \Theta(x_S, y_S, z_S, t) \\ S(x_S, y_S, z_S, t) \\ F(y_S, z_S, t) \\ \mathbf{v}_g(x_S, y_S, z_S, t) \end{pmatrix}$$

so ist auch $\mathbf{L}(x_S, y_S - y_0, z_S - z_0, t)$ eine Lösung. Es liegt des weiteren Spiegelsymmetrie bezüglich der Achsen $y_S = 0$ und $z_S = 0$ vor, d.h. $\mathbf{L}(x_S, -y_S, z_S, t)$ und $\mathbf{L}(x_S, y_S, -z_S, t)$ sind ebenfalls eine Lösung der Gleichungen.

In Staupunktströmungen ist das Strömungsfeld $\mathbf{v}_\kappa = \kappa(-x_S, (1-b)y_S, bz_S)$ nicht invariant gegen eine Querverschiebung, d.h. $\mathbf{v}_\kappa(x_S, y_S - y_0, z_S - z_0) \neq \mathbf{v}_\kappa(x_S, y_S, z_S)$. Eine Invarianz der Gleichungen gegen Querverschiebung ist lediglich für die Spezialfälle $b = 0$ oder $b = 1$ in eine Raumrichtung gegeben. Die Spiegelsymmetrie bleibt in allen Fällen erhalten.

Es soll untersucht werden, ob dennoch eine Invarianz gegen Querverschiebung vorliegt, sofern ein bewegtes Koordinatensystem zugelassen wird.

Zunächst werden bewegte Koordinaten eingeführt:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} y_I &= y_S - y_0(t), \\ z_I &= z_S - z_0(t). \end{aligned}$$

Die Funktionen $y_0(t)$ und $z_0(t)$ sind die zeitabhängigen Verschiebungen des (x_S, y_I, z_I) -Koordinatensystems gegenüber dem (x_S, y_S, z_S) -Koordinatensystem. Wird diese Transformation in die Gleichungen eingeführt, so gehen die Diffusions- und Quellterme sowie der axiale Konvektionsterm $(\mathbf{v}_x \frac{\partial}{\partial x_S})$ identisch ineinander über. Änderungen ergeben sich lediglich in den anderen Konvektionstermen sowie im instationären Term.

$$(6.3) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} + \kappa(1-b)y_S \frac{\partial}{\partial y_S} + \kappa b z_S \frac{\partial}{\partial z_S} \rightarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t} + \left(\kappa(1-b)(y_I + y_0(t)) - \frac{dy_0(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y_I} + \\ &\left(\kappa b(z_I + z_0(t)) - \frac{dz_0(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial z_I}. \end{aligned}$$

Wird nun

$$(6.4) \quad \kappa(1-b)y_0(t) - \frac{dy_0(t)}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \kappa b z_0(t) - \frac{dz_0(t)}{dt} = 0$$

gesetzt, so gehen die Gleichungen identisch ineinander über. Aus diesen Beziehungen folgt

$$(6.5) \quad y_0(t) \propto \exp(\kappa(1-b)t) \quad \text{und} \quad z_0(t) \propto \exp(\kappa b t).$$

Ist eine Lösung $L(x_S, y_S, z_S, t)$ des Gleichungssatzes bekannt, so ergibt sich durch eine Querverschiebung um beliebige Beträge y_0 und z_0 eine neue Lösung $L(x_S, y_S - y_0 \exp(\kappa(1-b)t), z_S - z_0 \exp(\kappa b t), t)$. Die neue Lösung bewegt sich mit exponentiell anwachsender oder abfallender Geschwindigkeit gegenüber der ursprünglichen Lösung.

Dieser Effekt kann auch als Instabilität der Lösung interpretiert werden. Wird eine Lösung durch eine kleine Verschiebung in die y_0 oder z_0 -Richtung gestört, so ist sie instabil gegen diese Störung, sofern sich die Lösung vom ursprünglichen Zustand weiter entfernt. Nimmt die Verschiebung zeitlich ab, so ist die Lösung stabil gegen Querverschiebung. Da sich diese Form der Instabilität durch ein Wandern des Musters auszeichnet, wird diese hier als Wanderwelleninstabilität bezeichnet.

- Lösungen des thermisch-diffusiven Modells mit oder ohne Boussinesq-Erweiterung sind somit instabil gegen Wanderwellen in y_S -Richtung, wenn $\kappa(1-b) > 0$ und in z_S -Richtung, wenn $\kappa b > 0$. In diesen Fällen ist die Strömung vom Zentrum zum Rand hin gerichtet.

- Es liegt Stabilität gegen Wanderwellen in y_S -Richtung vor, wenn $\kappa(1-b) < 0$ und in z -Richtung, wenn $\kappa b < 0$. In diesen Fällen weist die entsprechende Strömungskomponente zum Zentrum d.h. in Richtung der x_S -Achse.

Im unendlich ausgedehnten Gebiet liegt stets Instabilität in wenigstens einer Richtung vor, sofern die Flammenstreckung positiv ist. Ist die Flammenstreckung κ klein, findet das Anwachsen der Geschwindigkeit auf einer langsamen Zeitskala $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ statt. Eine Lösung kann somit lange Zeit stabil erscheinen.

Es soll darauf hingewiesen werden, daß für ein Gebiet mit endlicher Querausdehnung im allgemeinen Randbedingungen zu stellen sind, die kein Wandern eines Musters ohne Formänderung zulassen. Dies gilt beispielsweise für einen adiabaten Rand, aber auch für eine vorgegebene Temperatur am Rand. Unsere numerischen Rechnungen zeigen jedoch, daß solche Randbedingungen nur im Falle kleiner Gebiete die Wanderwelleninstabilität unterdrücken können. Voraussetzung für Instabilität ist eine auf den Rand gerichtete Strömung. Da der diffusive Transport stromauf nur über kurze Distanzen wirkt, ergibt sich eine Wandgrenzschicht, in der sich die Lösung an die Randbedingungen anpaßt. Weitab von den Wänden ist deren Einfluß gering. Die Lösung verhält sich wie im unendlich ausgedehnten Gebiet und kann somit instabil werden. Erst wenn die Lösung im Verlauf ihrer Wanderbewegung in den Einflußbereich der Wand gerät, wird die Randbedingung wirksam und unterdrückt die weitere Wanderbewegung. Die Invarianz der Gleichungen gegen Querverschiebung gilt weiterhin im Inneren des Strömungsgebiets.

Die Invarianz der Gleichungen gegen Querverschiebung ist nicht gegeben, wenn Bedingungen auf den Ebenen $y_S = 0$ und $z_S = 0$ gestellt werden. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dann vom Zentrum oder einem Rand weggerichtet. Konvektiver Transport beeinflußt jetzt das gesamte Gebiet. Unsere numerischen Rechnungen zeigen, daß durch Symmetriebedingungen Stabilität gegen die Wanderbewegung erzielt werden kann. Symmetriebedingungen sind identisch mit den Bedingungen an einer adiabaten undurchlässigen Wand und sind deshalb nicht als willkürliche Vorgabe aufzufassen.

Wird anstelle des Boussinesq-Modells ein kompressibles Modell angesetzt, ergibt sich keine Invarianz der Gleichungen gegen Querverschiebung. Dies ist jedoch nicht hinreichend, um eine Wanderwelleninstabilität auszuschließen. Es ist lediglich methodisch sehr viel schwieriger zu zeigen, ob eine ähnliche Instabilität weiterhin besteht. In Kapitel 1.5 werden Experimente von Ishizuka et. al. (1982) beschrieben. Sie finden in einer axialsymmetrischen

Staupunktströmung ein Muster in Form einer diametral verlaufenden Rille. Dieses Muster ist instabil gegen Wanderwellen, so daß es mit zunehmender Geschwindigkeit in Richtung des Brennerrands läuft. Zurück bleibt eine ebene Flamme. Es bildet sich dann eine neue Rille mit willkürlicher Winkelorientierung. Dieser experimentelle Befund bestätigt die Existenz einer Wanderwelleninstabilität für reale Bedingungen.

Eine wichtige Konsequenz der Wanderwelleninstabilität ist, daß auf großen Rechengebieten ohne eine Symmetriebedingung keine stationäre nichtebene Lösung gefunden werden kann, wenn beide Quergeschwindigkeitskomponenten nach außen gerichtet sind. Die Lösung beginnt stets mit exponentiell anwachsender Geschwindigkeit zu wandern. In der Numerik wird Achsensymmetrie bezüglich der y - und z -Achse zur Stabilisierung benutzt. Diese Maßnahme ist nur erforderlich, wenn die Strömung in Richtung der seitlichen Ränder gerichtet ist.

6.2 Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung

Alle für das thermisch-diffusive Modell beschriebenen Phänomene gelten uneingeschränkt für die verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky Gleichung zur Beschreibung von Störungen einer ebenen Flamme in der Staupunktströmung, da diese aus den Grundgleichungen hergeleitet wird und somit die gleichen Invarianzeigenschaften aufweist.

Es zeigt sich, daß die oben beschriebenen Stabilitätsargumente auch auf den allgemeineren Fall einer parabolisch gekrümmten Flamme angewandt werden können. Es muß lediglich mit den effektiven Quergeschwindigkeiten $v_{\perp,eff}$ anstelle der Quergeschwindigkeiten v_{\perp} argumentiert werden.

- Stabilität ist hier gegeben für $\alpha_{eff}(1-b) \leq 0$ und gleichzeitig $\alpha_{eff}b \leq 0$. Da im allgemeinen $0 \leq b \leq 1$, ist Stabilität gegeben für $\alpha_{eff} \leq 0$. Es sei daran erinnert, daß dieser Situation zwei unterschiedliche Konfigurationen entsprechen.
 - Erstens kann es sich um eine parabolisch gekrümmte Flamme handeln, deren Ränder in Richtung des Brenners ausgelenkt sind. Dies läßt sich durch eine schwache Reduzierung der Brenngasgeschwindigkeit am Brennerrand bzw. durch eine Erhöhung der Temperatur oder der Brenngaskonzentration am Brennerrand verwirklichen.

- Die zweite Konfiguration entspricht einer ebenen Flamme, die in der Staupunktströmung am Ende eines umströmten stumpfen Körpers eingebettet ist. Diese Situation ist nur stabil, wenn der Gravitationseinfluß stabilisierend wirkt, d.h. für eine vertikale Anordnung bei der die leichten Rauchgase oberhalb der relativ schwereren Brenngase liegen.
- Instabilität ist gegeben für $\alpha_{eff}(1 - b) > 0$ und gleichzeitig $\alpha_{eff}b > 0$. Da typisch $0 \leq b \leq 1$ gilt, liegt Instabilität für $\alpha_{eff} > 0$ vor.

Kapitel 7

Numerische Untersuchungen

7.1 Numerisches Verfahren

7.1.1 Spektralverfahren

Zur numerischen Simulation von Lösungen der verallgemeinerten Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung wird ein Spektralverfahren benutzt. Hier soll zunächst die Grundidee von Spektralverfahren und anschließend das speziell benutzte Verfahren erläutert werden.

Die wichtigsten Bausteine für ein Spektralverfahren sind ein Satz von Entwicklungs- oder Approximationsfunktionen und ein Satz von Wichtungsfunktionen. Die Approximationsfunktionen werden als Basisfunktionen für eine endliche Reihenentwicklung der Lösung benutzt. Die Wichtungsfunktionen sollen eine optimale Übereinstimmung der Lösung mit der endlichen Reihenentwicklung gewährleisten. Hierzu wird der Fehler in der Differentialgleichung, der sich durch die Verwendung der Reihe anstelle der exakten Lösung ergibt, mittels einer geeigneten Norm minimiert.

Die Approximationsfunktionen sind glatte, also beliebig oft differenzierbare globale Funktionen. Typischerweise sind die Approximationsfunktionen die Eigenfunktionen eines Sturm-Liouville-Problems. Die Wahl globaler Funktionen unterscheidet Spektralverfahren von Finite-Element-, Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Verfahren. Bei all diesen Verfahren wird die Lösung mittels lokaler Funktionen approximiert.

Die Art der Wichtungsfunktionen unterscheidet drei Gruppen von Spektralverfahren. Sind die Wichtungsfunktionen identisch mit den Approximationsfunktionen und jede Wichtungsfunktion erfüllt individuell die Randbedingungen des Problems, wird vom Galerkin-Verfahren gesprochen. Es wird hier gefordert, daß der Fehler in der Differentialgleichung orthogonal zu den Approximationsfunktionen ist, d.h. das Produkt aus dem Fehler mit je-

der einzelnen Wichtungsfunktion integriert über das Rechengebiet muß verschwinden.

Das Tau-Verfahren unterscheidet sich vom Galerkin-Verfahren insofern, als die Wichtungsfunktionen jetzt nicht die Randbedingungen erfüllen. Es sind zusätzliche Bedingungen zu stellen, um die Randbedingungen dem Verfahren aufzuprägen.

Die dritte Gruppe sind die Kollokationsverfahren. Hier sind die Wichtungsfunktionen Dirac'sche-Deltafunktionen. Die Differentialgleichung wird also nur an speziellen Punkten, den Kollokationspunkten formuliert. Diese Methode ist besonders günstig für nichtlineare Probleme. Die Reihenentwicklung wird lediglich benutzt, um räumliche Ableitungen der Lösung mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Nichtlinearitäten werden hieraus an den diskreten Kollokationspunkten berechnet.

7.1.2 Fourier-Kollokationsverfahren

In der vorliegenden Arbeit wird ein Fourier-Kollokationsverfahren benutzt. Die Approximationsfunktionen sind harmonische Funktionen, die hier für den eindimensionalen Fall in komplexer Schreibweise dargestellt werden.

$$(7.1) \quad \varphi_k(\tilde{\eta}) = \exp(ik\tilde{\eta}) \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ und } -\pi \leq \tilde{\eta} \leq \pi.$$

Es ist zu beachten, daß jede der Approximationsfunktionen periodisch im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist. Hat das interessierende Gebiet eine andere Größe, wird es mit einer linearen Abbildung auf $-\pi \leq \tilde{\eta} \leq \pi$ gestreckt bzw. gestaucht. Die gesuchte Lösung $\Phi(\eta)$ bzw. nach der Abbildung $\Phi(\tilde{\eta})$ wird in die Approximationsfunktionen entwickelt:

$$(7.2) \quad \Phi(\tilde{\eta}) = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \Phi_k \varphi_k(\tilde{\eta}).$$

Die Φ_k sind hierin die komplexen Entwicklungskoeffizienten der Reihenentwicklung. Der Übergang von der Lösung Φ im physikalischen Bereich an den Kollokationspunkten

$$(7.3) \quad \tilde{\eta}_k = \frac{2\pi k}{M}$$

zu den Entwicklungskoeffizienten Φ_k erfolgt über eine Fourier-Transformation

$$(7.4) \quad \Phi_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \Phi(\tilde{\eta}_j) \exp(-ik\tilde{\eta}_j) \quad \text{mit } -\frac{M}{2} \leq k \leq \frac{M}{2} - 1.$$

Entsprechend kann aus den Entwicklungskoeffizienten die physikalische Lösung bestimmt werden.

$$(7.5) \quad \Phi(\tilde{\eta}_j) = \frac{1}{M} \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \Phi_k \exp(ik\tilde{\eta}_j) \quad \text{mit } 0 \leq j \leq M-1.$$

Diese beiden Operationen benötigen M^2 Operationen, wenn die hier angegebene Definition zur Berechnung benutzt wird. Die Umformungen können jedoch über eine schnelle Fourier Transformation (FFT) mit nur $5 \log_2 M - 6M$ Operationen durchgeführt werden.

Im Zusammenhang mit Differentialgleichungen interessiert insbesondere die Berechnung von Ableitungen. Dies gestaltet sich für das Fourierrechenverfahren sehr einfach, da $\frac{d\Phi(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}} \rightarrow \sum_k ik\Phi_k(\tilde{\eta})$. Die Berechnung einer Ableitung erfolgt durch Multiplikation jedes Modes mit einer Wellenzahl.

Es soll jetzt die numerische Methode anhand der verallgemeinerten Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung diskutiert werden. Die Gleichung hat einen Aufbau der Form:

$$(7.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = c_4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tilde{\eta}^4} + c_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{\eta}^2} + c_0 \Phi + NL \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\eta}} \right) \quad \text{für } -\pi \leq \tilde{\eta} \leq \pi.$$

Hierin steht $NL(\Phi)$ für alle nichtlinearen Terme und Terme mit nichtkonstanten Koeffizienten. Diese Gleichung wird zunächst in den Spektralbereich transformiert, der durch den tiefgestellten Index "k" gekennzeichnet wird.

Es ergibt sich:

$$(7.7) \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = (c_4 k^4 - c_2 k^2 + c_0) \Phi_k + NL(ik\Phi_k)_k \quad \text{für } -\frac{M}{2} \leq k \leq \frac{M}{2} - 1.$$

Es muß jetzt eine Diskretisierung in der Zeit erfolgen. Gewählt wird eine Mischung aus dem Crank-Nicholson und dem Adams-Bashforth Verfahren. Das Crank-Nicholson Verfahren ist ein implizites Verfahren zweiter Ordnung und wird für die linearen Terme benutzt. Das Adams-Bashforth Verfahren ist ein explizites Verfahren zweiter Ordnung und wird für nichtlineare Terme benutzt.

Für die Darstellung wird folgende Notation vereinbart. Die neu zu berechnende Lösung wird durch den hochgestellten Index $t+\Delta t$, die aktuelle Lösung durch den Index t und die Lösung des vorausgehenden Zeitschritts wird durch $t-\Delta t$ gekennzeichnet. Mit der gewählten Diskretisierung erhält man:

$$(7.8) \quad \frac{\Phi_k^{t+\Delta t} - \Phi_k^t}{\Delta t} = C \frac{1}{2} (\Phi_k^{t+\Delta t} + \Phi_k^t) + \frac{3}{2} NL(ik\Phi_k)_k^t - \frac{1}{2} NL(ik\Phi_k)_k^{t-\Delta t}.$$

Hierin ist $C \equiv c_4 k^4 - c_2 k^2 + c_0$. Die Gleichung wird nach der gesuchten Änderung von Φ_k aufgelöst.

$$(7.9) \quad \Phi_k^{t+\Delta t} - \Phi_k^t = \frac{C\Phi_k^t + \frac{3}{2}NL(ik\Phi_k)_k^t - \frac{1}{2}NL(ik\Phi_k)_k^{t-\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2}C}.$$

Die Verwendung eines impliziten Diskretisierungsverfahrens ist hier ohne numerischen Mehraufwand möglich. Die Nichtlinearitäten werden im physikalischen Bereich berechnet, wobei hier der günstige Fall vorliegt, bei dem die Nichtlinearität lediglich von $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ bzw. im Spektralbereich von $ik\Phi_k$ abhängt. Die Transformation dieser Größe erfolgt mit einer einzigen FFT. Im physikalischen Bereich wird jetzt die Nichtlinearität durch eine Multiplikation für jeden Kollokationspunkt berechnet. Das Ergebnis wird durch eine FFT in den Spektralbereich transformiert. Die Zahl der notwendigen Operationen pro Zeitschritt ist mit derjenigen für ein Finite-Differenzen-Verfahren vergleichbar. Wesentlicher Vorteil der spektralen Methode ist die räumliche Genauigkeit. Da das Verfahren auf einer Reihenentwicklung beruht, konvergiert es bei einer Erhöhung der Zahl der Kollokationspunkte schneller als jedes Finite-Differenzen-Verfahren beliebiger Ordnung gegen die exakte Lösung. Typischerweise werden so viele Moden benutzt bis die Amplitude der hochfrequenten Moden (große $|k|$) sehr viel kleiner ist als die der Moden mit der größten Amplitude. Typischerweise kann hier ein Faktor 10^6 bis 10^9 erzielt werden, wenn eindimensionale Rechnungen mit hoher Auflösung gemacht werden. Dies läßt den Schluß zu, daß der räumliche Fehler in der Größenordnung von 10^{-6} ist. Der Einfluß der Zeitdiskretisierung auf die Lösung wird für alle in dieser Arbeit angegebenen Lösungen durch Variation der Zeitschrittweite untersucht. Für zeitabhängige Lösungen werden typischerweise 100 oder mehr Zeitschritte pro Periodendauer bzw. pro charakteristischer Zeit benutzt. Es zeigt sich kein merklicher Einfluß der Zeitdiskretisierung auf die Lösung.

7.1.3 Filter

Bei den zweidimensionalen Rechnungen wird typischerweise eine geringere räumliche Auflösung als bei den eindimensionalen Rechnungen in jeder Raumrichtung benutzt, so daß die höchsten Moden nicht ganz vernachlässigt werden können. Wird nun bei der Berechnung des nichtlinearen Terms ein Produkt aus hochfrequenten Moden gebildet, so entstehen dabei nochmals höherfrequente Moden, die nicht aufgelöst werden können. Diese Signalanteile werden als niederfrequente Moden fehlinterpretiert. Diese sogenannten "Alias-Fehler" lassen sich für quadratische Nichtlinearitäten durch die Benutzung eines Filters unterdrücken. Dazu werden bei der Transformation des

Signals aus dem Spektralbereich in den physikalischen Bereich $\frac{3}{2}M$ Kollaktionspunkte anstelle der erforderlichen M Punkte benutzt. Wird nun ein Produkt im physikalischen Bereich berechnet, entstehen Signale mit bis zu $2M$ Moden. Die oberen $\frac{1}{2}M$ Moden können wiederum nicht aufgelöst werden und werden als die Moden $M + 1$ bis $\frac{3}{2}M$ fehlinterpretiert. Wird nach der Rücktransformation dieser Anteil der Moden wieder zu Null gesetzt, d.h. gefiltert, ist das gewonnene Signal frei von "Alias-Fehlern". Diese Methode wird zur Berechnung des quadratischen Terms und des konvektiven Terms in Gleichung (5.48) benutzt.

7.1.4 Randbedingungen

Die Benutzung eines Fourier-Verfahrens setzt periodische Lösungen voraus. Hierdurch wird implizit eine periodische Randbedingung gestellt, die für die verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung nicht geeignet ist. Um dennoch das Fourierrechnungsverfahren benutzen zu können, wird wie folgt vorgegangen. Es werden zwei Varianten benutzt:

- **Fall I: Ausströmbedingungen:**

Ist die Strömung in Richtung der Ränder gerichtet, sind geeignete Randbedingungen ein verschwindender Gradient von Φ am Rand und eine verschwindende dritte Ableitung. Diese beiden Bedingungen werden automatisch von Cosinus-Moden erfüllt. Die Lösung ist jedoch nicht zwingend periodisch wie diese Moden. Abhilfe schafft eine Spiegelung der Lösung an einem der Ränder. Der Verlauf wird jetzt auf dem doppelt so großen Gebiet betrachtet. Jede Mode erfüllt weiterhin die Randbedingungen und Periodizität ist auf dem vergrößerten Rechengebiet gegeben. Ein Nachteil ist das doppelt so große Gitter.

- **Fall II: Einströmbedingungen:**

Ist die Strömung vom Rand nach innen gerichtet, muß der Wert von Φ am Rand spezifiziert werden. Dieser Wert wird zu Null festgesetzt. Andere Werte sind prinzipiell möglich und können durch die Wahl einer passenden Grundlösung (siehe hierzu: Kapitel 5.5) berücksichtigt werden. Als zweite Randbedingung wird eine verschwindende zweite Ableitung angesetzt. Diese Randbedingungen werden automatisch von Sinus-Moden erfüllt. Allerdings sind Sinus-Moden punktsymmetrisch bezüglich der Mitte des Rechengebiets. Dies ist eine unphysikalische Einschränkung. Wird die Lösung jedoch an einem der Ränder ungerade gespiegelt und wieder ein doppelt so großes Gebiet betrachtet, so erfüllt jede Mode individuell die Randbedingungen und es sind nicht

punktsymmetrische Lösungen bezüglich der Mitte des physikalischen Rechengebiets möglich.

Die Erweiterung des Verfahrens auf zwei Raumdimensionen erfolgt analog.

7.2 Lokalisierte Flammen mit $\alpha_{eff} < 0$

Ist $\alpha_{eff} < 0$, so sind die Komponenten des effektiven Geschwindigkeitsfelds $\mathbf{v}_{\perp,eff} = \alpha_{eff} ((1-b)\eta, b\zeta)$ zum Zentrum $(\eta, \zeta) = 0$ hin gerichtet.

Im Kapitel 6 wurde Stabilität gegen Wanderwellen für den Fall $\alpha_{eff} < 0$ gefunden.

Unsere numerischen Ergebnisse zeigen, daß die grundlegende Eigenschaft von Lösungen mit einem zum Zentrum hin gerichteten Geschwindigkeitsfeld eine lokalisierte Zellularinstabilität ist. Die Instabilität wird als lokalisiert bezeichnet, da die Lösungen, die die Grundlösung ablösen, in einem Bereich um das Zentrum herum ein Muster zeigen aber außerhalb dieses Bereichs glatt sind.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß stationäre Lösungen der verallgemeinerten Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.48) lokalisiert sind. Um dies zu überprüfen, wird die Gleichung weit außerhalb des Zentrums betrachtet. Da hier das Geschwindigkeitsfeld große Werte annimmt, ergibt sich hier ein entsprechend großer konvektiver Transport, dem kein anderer Term gegenüber steht. Eine ausgeglichene Balance ergibt sich nur, wenn die Lösung auf einer großen Längenskala variiert.

Es werden großskalige Koordinaten gemäß

$$(7.10) \quad \begin{aligned} Y &= \delta \cdot \eta, \\ Z &= \delta \cdot \zeta \end{aligned}$$

eingeführt, wobei $\delta \ll 1$ und $Y, Z = \mathcal{O}(1)$. Die verallgemeinerte KS-Gleichung vereinfacht sich zu einer linearen Gleichung:

$$(7.11) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \mathbf{v}_{\perp,eff} \cdot \nabla_{\perp} \Phi + \beta \Phi = 0.$$

Hierin ist

$$(7.12) \quad \mathbf{v}_{\perp,eff} = \alpha_{eff} ((1-b)Y, bZ)$$

und $\nabla_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right)$ ist der zweidimensionale Nabla-Operator. Für diese einfache Gleichung können stationäre Lösungen gefunden werden

$$(7.13) \quad \Phi = C \cdot Y^{c_y} \cdot Z^{c_z}$$

mit

$$(7.14) \quad bc_z + (1 - b)c_y = \frac{-\beta}{\alpha_{eff}}.$$

Eindimensionale Lösungen mit $c_y = 0$ sind gegeben durch:

$$(7.15) \quad \Phi = C \cdot Z^{\frac{-\beta}{b\alpha_{eff}}}.$$

Da $\beta > 0$ und $b\alpha_{eff} < 0$ ist, wird der Exponent positiv¹. Dies bedeutet für $C \neq 0$, ein unbeschränktes Wachsen der Auslenkung Φ . Dies ist nicht zulässig, so daß $C = 0$ die allein mögliche Lösung darstellt. Entsprechend kann für zweidimensionale Fälle argumentiert werden.

Die Flamme ist somit im Außenfeld eben und kann lediglich in Zentrumsnähe für $\eta = \mathcal{O}(1)$, $\zeta = \mathcal{O}(1)$ bzw. $Y = Z \rightarrow 0$, Störungen aufweisen, d.h. ein lokalisiertes Muster annehmen. Diese Argumente gelten streng nur für stationäre Lösungen. Die numerischen Simulationen zeigen jedoch, daß auch instationäre Lösungen mit zum Zentrum gerichteter effektiver Strömung lokalisiert sind.

7.2.1 Eindimensionale Muster

Wir untersuchen zunächst speziell die eindimensionale Form der Gleichung (5.48) mit $b = 1$. Anstelle die beiden Parameter α_{eff} und β im zweidimensionalen Parameterraum zu variieren, wählen wir speziell $\tilde{\alpha} = -\alpha_{eff} > 0$ und $\beta = \tilde{\alpha}$. Diese spezielle Wahl ist analog dem eindimensionalen Fall einer ebenen Flamme ohne Gravitationseinfluß mit $b = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = \alpha$ und $\alpha = \alpha_{eff}$. Lediglich das Vorzeichen der Quergeschwindigkeit hat sich umgekehrt.

Es wird die Gleichung:

$$(7.16) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 - \tilde{\alpha} \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \tilde{\alpha} \Phi = 0$$

gelöst.

Die numerische Lösung von Gl. (7.16) erfolgt mit dem oben beschriebenen Fourier-Kollokations-Spektralverfahren.

Es soll daran erinnert werden, daß die lineare Stabilitätsanalyse für positive $\tilde{\alpha} < \frac{1}{16}$ Stabilität gegen beliebige kleine Störungen liefert. Es liegt jedoch eine zeitlich begrenzte Anfachung von kleinen Störungen mittlerer Wellenlänge vor.

¹Nur Lösungen mit $\beta > 0$ weisen eine stabile ebene Grundlösung auf. Dies ist eine Grundvoraussetzung für die Gültigkeit der Theorie, da andernfalls Instabilität gegen ebene Störungen vorliegt.

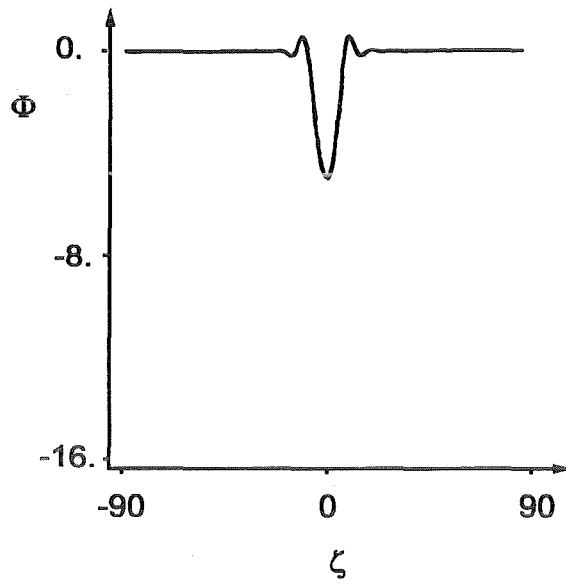


Abbildung 7.1: Lösung auf dem S1-Lösungsast, $\tilde{\alpha} = 0.04$

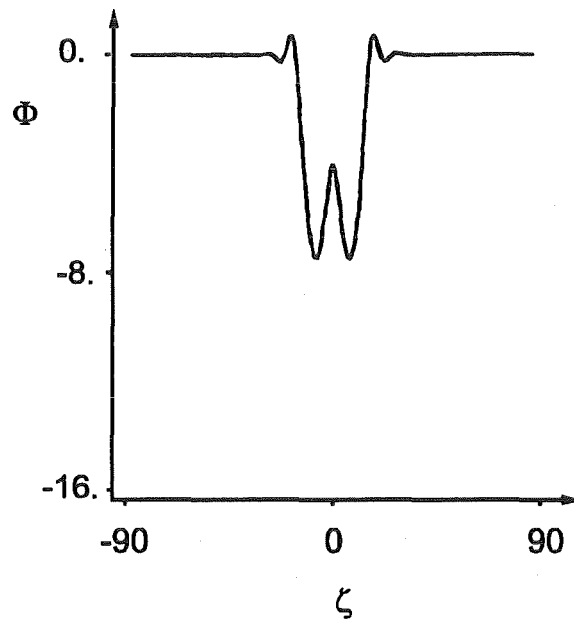


Abbildung 7.2: Lösung auf dem S2-Lösungsast, $\tilde{\alpha} = 0.03$

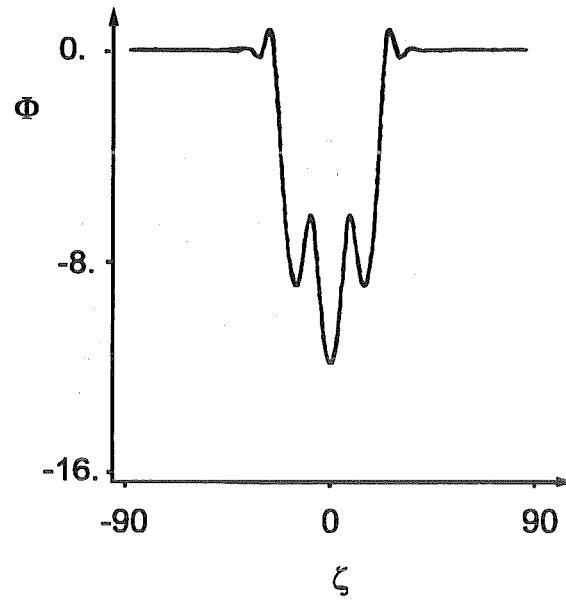


Abbildung 7.3: Lösung auf dem S3-Lösungsast, $\tilde{\alpha} = 0.0223$

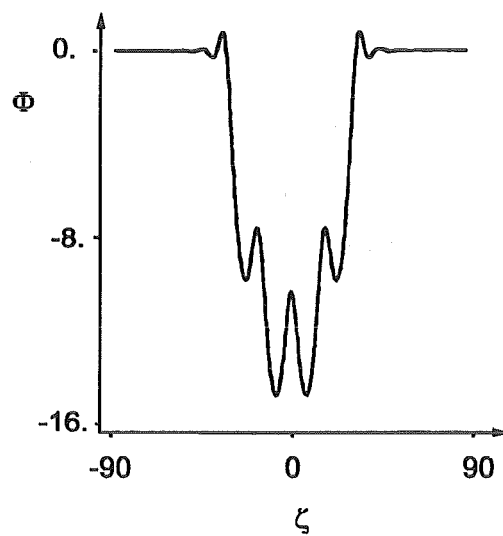


Abbildung 7.4: Lösung auf dem S4-Lösungsast, $\tilde{\alpha} = 0.019$

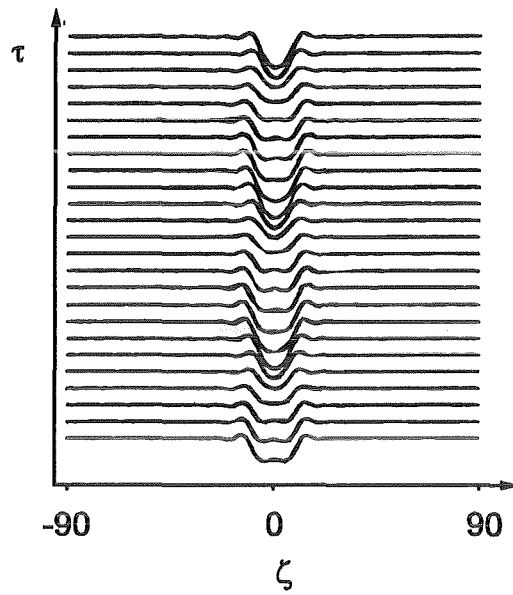


Abbildung 7.5: $\Phi - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P1-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.0244$

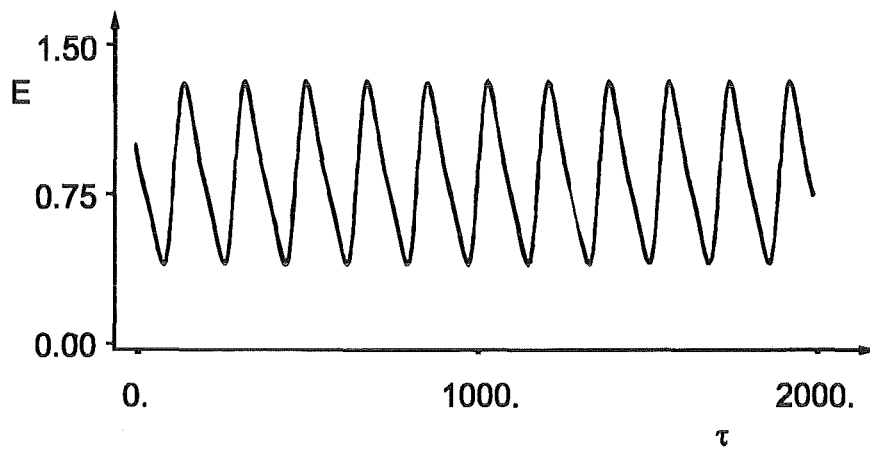


Abbildung 7.6: $E - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P1-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.0244$

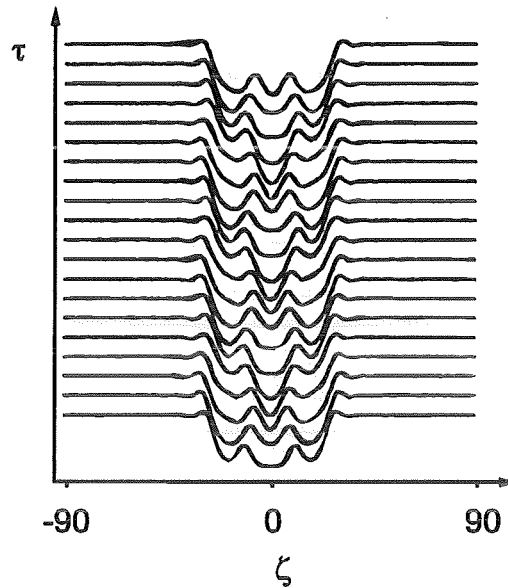


Abbildung 7.7: $\Phi - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P3-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.0171$

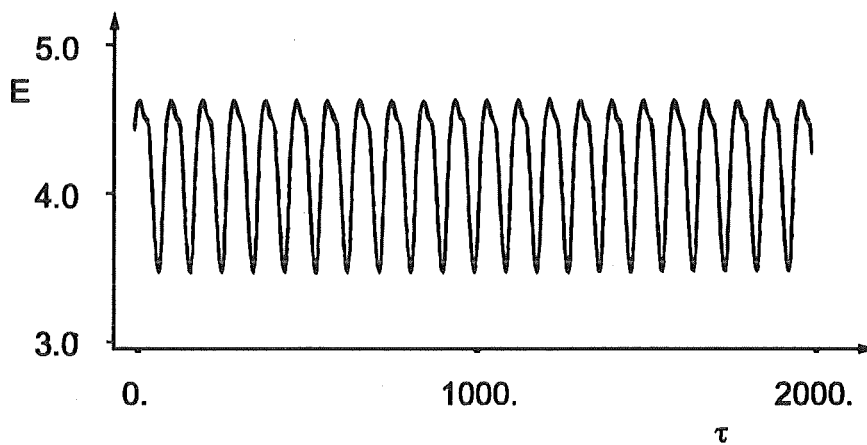


Abbildung 7.8: $E - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P3-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.0244$

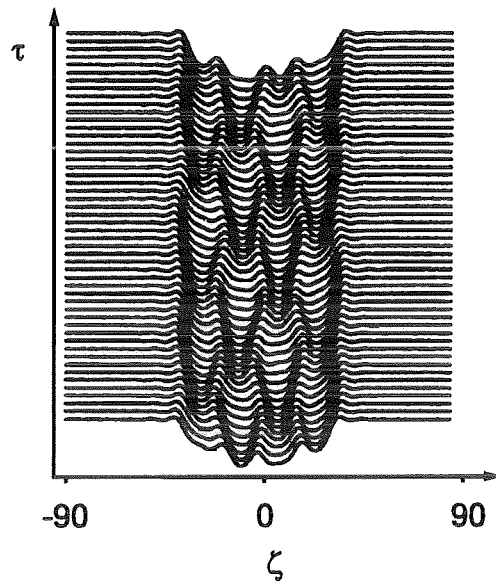


Abbildung 7.9: $\Phi - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P4-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.01425$

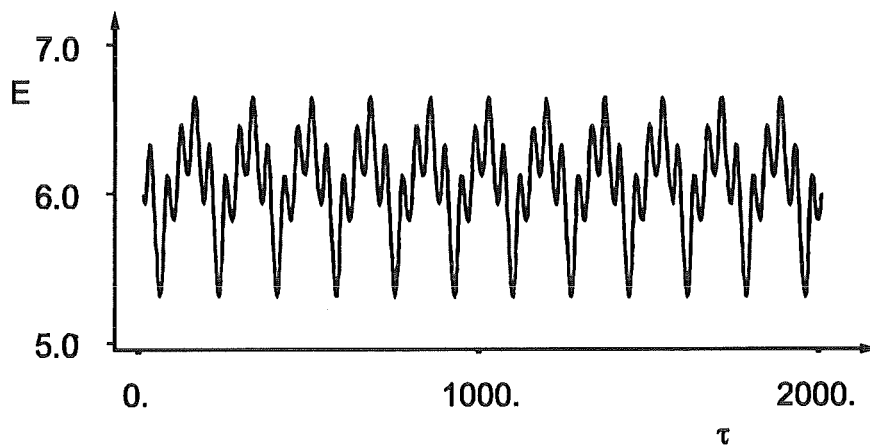


Abbildung 7.10: $E - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P4-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.01425$

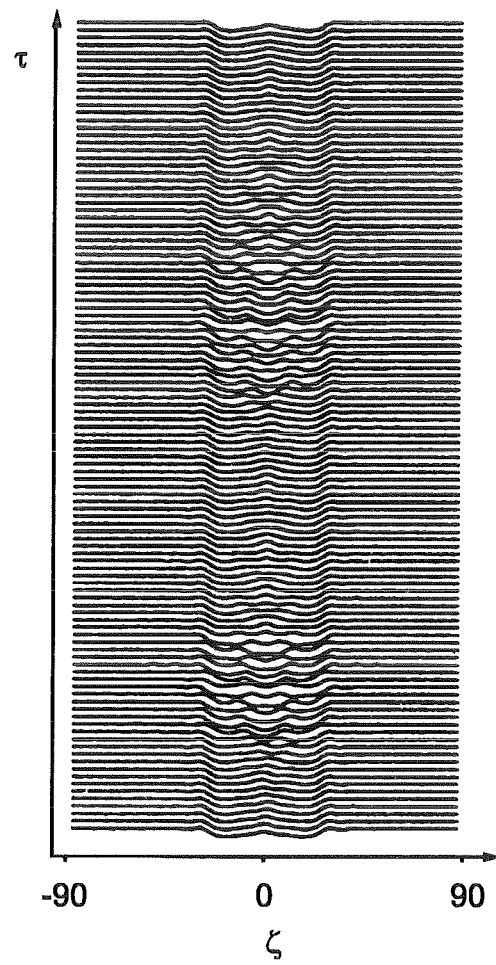


Abbildung 7.11: $\Phi - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem P1-Lösungsast,
 $\tilde{\alpha} = 0.0162$

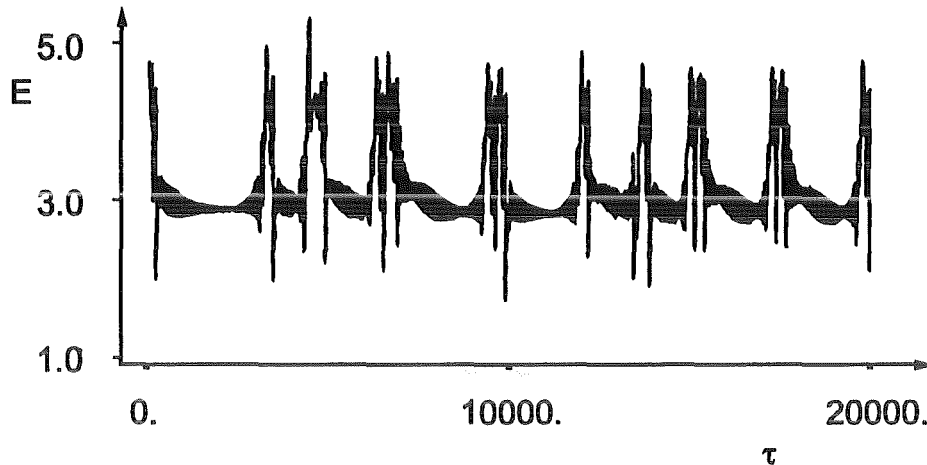


Abbildung 7.12: $E - \tau$ -Verlauf für eine Lösung auf dem I234-Lösungsast, $\tilde{\alpha} = 0.0162$

Werden hinreichend stark gestörte Anfangsbedingungen gewählt, so kehrt die Lösung nicht zum Grundzustand zurück. Vielmehr weist die Lösungen jetzt regelmäßige lokalisierte Muster auf. Die Struktur dieser Muster wird zunehmend komplex in Raum und Zeit, wenn der Verzweigungsparameter $\tilde{\alpha}$ ausgehend von einem kritischen Wert $\tilde{\alpha}_c < \frac{1}{16}$ reduziert wird.

Gleichung (7.16) wird für verschiedene Werte $\tilde{\alpha}$ gelöst. Durch eine sorgfältige Wahl der Anfangsbedingungen werden mehrere lokalisierte nichtebene Lösungsäste gefunden. Diese Lösungen weisen je nach Parameterwahl stationäres, zeitperiodisches, quasi-periodisches oder chaotisches Zeitverhalten auf.

Zunächst soll das grundsätzliche Verhalten der in den Abbildungen 7.1 bis 7.9 dargestellten Lösungen beschrieben und eine geeignete Klassifikation der Lösungsäste gegeben werden.

- Φ ist im wesentlichen negativ im nichtebenen Bereich der Lösung. Die nichtebene Flamme ist in Richtung der unverbrannten Gase ausgelenkt.
- Das nichtebene Verhalten der Flamme ist um den Punkt $\zeta = 0$ zentriert.
- Die Auslenkung der Flamme und deren Ableitung strebt gegen Null für große $|\zeta|$.
- Der lokalisierte Bereich nichtebenen Verhaltens ist gekennzeichnet durch

eine schnelle Abnahme von Φ , wobei der Lösungsgraph eine ausgeprägte Delle formt (siehe Abbildung 7.1).

- Die verschiedenen Lösungsäste sind durch spikeartige Zellstrukturen gekennzeichnet, die sich im Bereich der Delle ausbilden. Diese Zellen entstehen in systematischer Weise, wobei ihre Anzahl zunimmt, wenn $\tilde{\alpha}$ abgesenkt wird. Es soll besonders hervorgehoben werden, daß diese nichtlinearen Lösungen für $\tilde{\alpha}$ knapp unterhalb $\frac{1}{16}$ existieren, obwohl die lineare Stabilitätsanalyse Stabilität des Grundzustands für beliebige kleine Störungen ergibt und für $\tilde{\alpha} = \frac{1}{16}$ lediglich eine Mode für eine infinitesimal kurze Zeit neutral stabil ist.
- Für einige Lösungsäste ist die Struktur achsensymmetrisch bezüglich $\zeta = 0$, wogegen andere Lösungsäste (z.B. Abb. 7.9) unsymmetrisch sind.
- Zeitabhängige Lösungen sind gekennzeichnet durch zeitliche Oszillationen der Größe und Position einiger oder aller Zellen. Die komplexeren zeitabhängigen Lösungen zeigen überdies Entstehung und Vernichtung von Zellen.

Ganz allgemein gesprochen nimmt die Komplexität der Lösungen sowohl räumlich als auch zeitlich zu, wenn die Flammenstreckung, das heißt $\tilde{\alpha}$ reduziert wird. Gleichzeitig nimmt der Grad der Lokalisierung ab. Dieses Verhalten kann erwartet werden, da sich im Grenzfall $\tilde{\alpha} = 0$ die ursprüngliche Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.43) ergibt. Es ist bekannt, daß diese Gleichung hochgradig komplexe nichtlokalisierte Lösungen aufweist.

Die verschiedenen Lösungsäste unterscheiden sich durch die Breite der Delle. Diese Breite korreliert mit der Zahl der in diesem Bereich unterscheidbaren Maxima und Minima, die die Zellstruktur der Flamme formt (siehe Abbildungen 7.1 bis 7.4). Wird $\tilde{\alpha}$ reduziert, ergeben sich Übergänge zu Lösungsästen mit höheren Zellanzahlen. Jeder Übergang ist dabei mit einem sprunghaften Anstieg in der Dellenbreite verbunden. Beispielsweise verdoppelt sich die Breite des Musters, wenn sich ein Übergang von einer zweizelligen Lösung zu einer vierzelligen Lösung ereignet. Die Breite jeder einzelnen Zelle ist verhältnismäßig unsensibles gegen Änderungen von $\tilde{\alpha}$ und deren Wellenlänge beträgt ca. $2\pi/k_{\max}$. Hierin ist k_{\max} die Wellenzahl, für die sich nach der linearen Stabilitätsanalyse eine momentan maximale Anfachungsrate ergibt. Zur Charakterisierung der Lösungsverzweigungen wird jeder der Lösungsäste mit einer Buchstaben-Zahlenkombination gekennzeichnet, wobei die Zahl für die Anzahl der Zellen auf der Delle steht und der Buchstabe für die dynamischen Eigenschaften der Lösung. In dieser Terminologie sind die Lösungen

auf dem S1-Lösungsast stationär und zeigen ein Hauptminimum auf der Delle. Das Muster besitzt eine einzelne Zelle. Lösungen auf dem P1-Lösungsast sind einzellige zeitperiodische Lösungen. Entlang der nichtstationären Lösungen können sich einzelne Zellen zeitweise in zwei Zellen aufteilen (siehe Abb. 7.5 und 7.7). Da das diese Zellen trennende Maximum nur schwach ausgeprägt ist, kann leicht entschieden werden, wieviele Zellen den Lösungsast charakterisieren.

Bei der numerischen Analyse wurden vier Lösungsäste mit stationären Lösungen gefunden, wobei die Anzahl der Zellen von 1 bis 4 variiert. Beispiele der Lösungen auf dem S1-, S2-, S3- und S4-Lösungsast sind in den Abbildungen 7.1 bis 7.4 wiedergegeben. Bei dem Übergang von einem zum anderen Lösungsast treten bistabile Zustände mit Hysterese-Charakter auf. Es kann jedoch generell gesagt werden, daß eine Erhöhung der Zellenzahl innerhalb der Delle einhergeht mit einer Reduzierung des Verzweigungsparameters $\tilde{\alpha}$. Dabei ist eine Zunahme der Dellentiefe und eine Abnahme im Lokalisierungsgrad zu verzeichnen.

Die Lösungsäste S1, S3 und S4 verlieren Ihre Stabilität gegenüber nichtstationären Lösungen, die durch periodische Oszillationen einiger oder aller Zellen charakterisiert sind. Das Zeitverhalten dieser Lösungen wird durch ein Funktional E verdeutlicht.

$$(7.17) \quad E(\vartheta, \tilde{\alpha}) = \int_{\zeta_L}^{\zeta_R} \left(\frac{\partial \Phi(\zeta, \vartheta, \tilde{\alpha})}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta.$$

Dieses Funktional ist ähnlich einer mittleren kinetischen Energie gebildet und mißt den Grad der Unebenheit oder Strukturierung eines Musters. Für jede zeitabhängige Lösung wird der räumliche Verlauf nach mehreren äquidistanten Zeitintervallen und das Funktional E über der Zeit für einen ausreichend langen Zeitraum aufgetragen, so daß die Dynamik der Lösung veranschaulicht wird. In den Abbildungen 7.5 und 7.6 wird der räumliche Verlauf $\Phi(\zeta)$ gegen die Zeit und die Energie E gegen die Zeit für eine Lösung auf dem P1-Lösungsast gezeigt. In den Abbildungen 7.7 und 7.8 sowie 7.9 und 7.10 sind entsprechende Schaubilder für den P3- und P4-Lösungsast wiedergegeben. Die Abbildungen zeigen deutlich, daß die Dynamik im Wesentlichen in einem Pulsieren einiger Zellen besteht, wobei die Zellposition in der Delle nahezu unverändert bleibt. Bei P1- und P3-Lösungen zerfällt eine der mittleren Zellen in zwei Zellen, die sich anschließend wieder vereinigen. Diese beiden Zellen sind jedoch nur schwach voneinander getrennt und haben gemeinsam eine nur unwesentlich größere Breite wie die anderen Zellen.

Für $\tilde{\alpha} < \approx .017$ wird auch nichtperiodisches Verhalten gefunden. Speziell verzweigt der S2-Lösungsast nicht zu einer periodischen Lösung. Vielmehr

findet ein Übergang zu einer nichtperiodischen Lösung, charakterisiert durch ein intermittierendes Auftreten von Mustern mit 2,3 und 4 Zellen, statt. Die Ursache für dieses merkwürdige Phänomen könnte der Sachverhalt sein, daß die S2-Lösung am Rande ihres Existenzbereichs sowohl mit dem S3- als auch mit dem S4-Lösungsast bistabil ist. Ein Beispiel für dieses Lösungsverhalten ist in den Abbildungen 7.11 und 7.12 dargestellt. Es werden noch andere Lösungen mit hochgradig komplexer Dynamik gefunden, die hier aber nicht dargestellt und diskutiert werden.

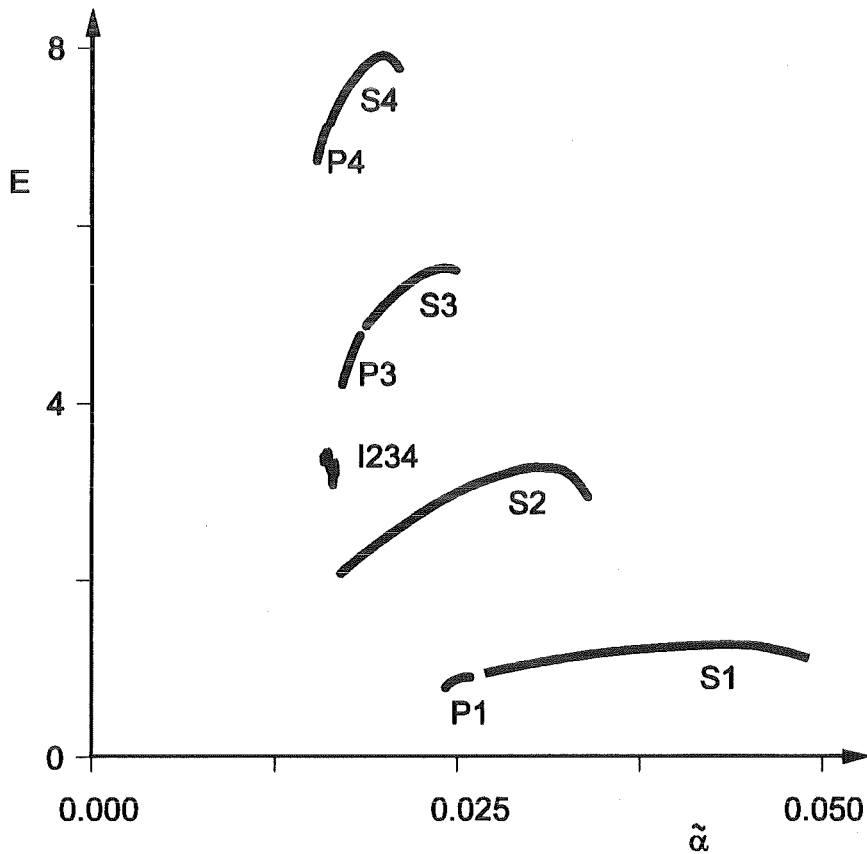


Abbildung 7.13: Verzweigungsdiagramm lokalisierter Lösungen

In Abbildung: 7.13 sind die verschiedenen Lösungsäste in einem Verzweigungsdiagramm veranschaulicht. Aufgetragen ist die zeitlich gemittelte Energie E über dem Verzweigungsparameter $\tilde{\alpha}$.

7.2.2 Zweidimensionale Muster

Neben den eindimensionalen Rechnungen werden auch zweidimensionale Rechnungen mit dem Ziel durchgeführt, möglichst viele regelmäßige Zellmuster zu identifizieren. Hierzu wird die verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.48) gelöst, wobei $b = \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Es wird im Gegensatz zum eindimensionalen Fall nicht die Strategie der Verfolgung einzelner Lösungsäste angewandt, sondern jede Rechnung wird ausgehend von geeigneten Anfangsbedingungen gestartet. Als besonders günstige Anfangsverteilungen erweisen sich superponierte zweidimensionale Gaußfunktionen in der Form:

$$(7.18) \quad \Phi = \sum_j G_j \exp\left(-r_j \left((\eta - \eta_j)^2 + (\zeta - \zeta_j)^2\right)\right).$$

Dabei entspricht jede dieser Gaußfunktionen qualitativ einer Zelle der gesuchten lokalisierten Lösungen. Die Zelltiefe G_j jeder Gaußfunktion wird ungefähr der erwarteten Tiefe des Zellmusters gesetzt. Entsprechendes gilt für den Radius r_j . Die Positionen (η_j, ζ_j) erlauben eine beliebige Anordnung der Zellen.

Speziell wurden Startdaten mit einer bis sieben kreisförmig angeordneten Zellen sowie einige Startdaten mit mehreren Ringen mit unterschiedlicher Zellenzahl erzeugt, wie z.B. ein äußerer Ring mit 10 Zellen und ein innerer Ring mit 4 Zellen. Für jeden Satz der Startdaten wurden etwa 100 Parameterkombinationen gerechnet.

Durch dieses Verfahren konnte eine Vielzahl stabiler Lösungen identifiziert werden. Wie im eindimensionalen Fall ergibt sich eine zunehmende Komplexität der Lösungen mit abnehmender Stärke des Strömungsfelds, charakterisiert durch α_{eff} , und abnehmenden Parametern β . In den Abbildungen 7.14 sind einige der gefundenen Lösungen wiedergegeben. Die Bilder zeigen jeweils eine dreidimensionale Ansicht der zellularen Flammenfront. Der Betrachter schaut dabei von den Rauchgasseite in Richtung des Brenners. Die Farbe der Oberfläche entspricht der Temperatur der Flamme. Hierbei verläuft die Farbskala mit zunehmender Temperatur von Blau über Violett, Rot und Orange nach Gelb.

Die Bilder zeigen mehrere stationäre Muster mit unterschiedlicher Zellenzahl. Numerisch simuliert wurden eine einzelne mittige Zelle (Abb. 7.14 a) und mehrzellige Muster mit einer gleichmäßigen Verteilung der Zellenzentren auf einem konstanten Radius (Abb. 7.14 b-e). Ein zweizelliges Muster konnte jedoch nicht gefunden werden. Bei mehreren hundert Rechnungen mit verschiedenen Parameterkombinationen α_{eff} und β und zweizelligen Startdaten ergibt sich stets ein Übergang zu einem einzelligen Muster oder ein Übergang zu einem vier- oder mehrzelligen Muster. Bei identischen Para-

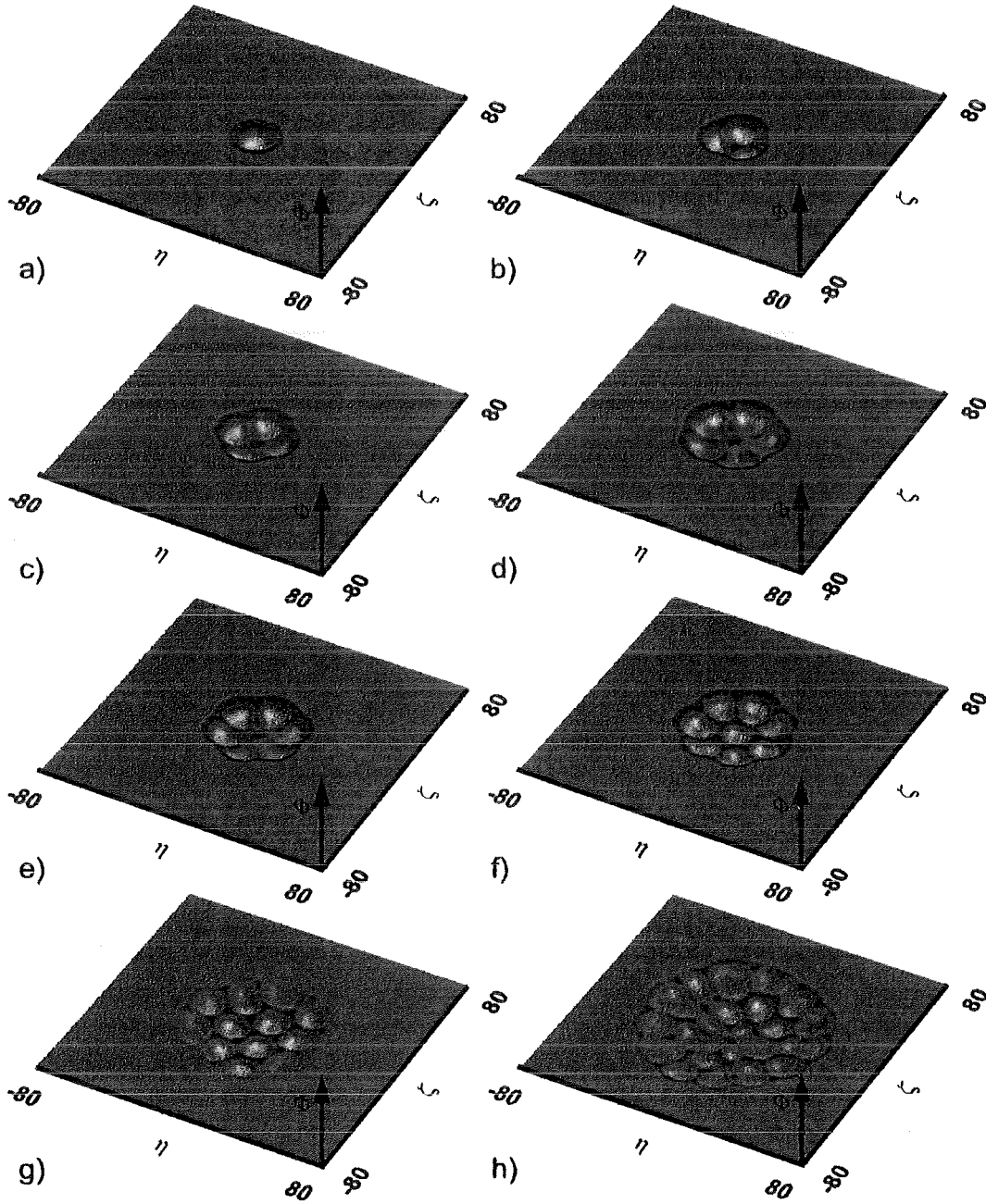


Abbildung 7.14: Zweidimensionale lokalisierte Muster

	α_{eff}	β		α_{eff}	β
a)	-0.08	0.14	b)	-0.08	0.12
c)	-0.08	0.11	d)	-0.07	0.11
e)	-0.06	0.05	f)	-0.04	0.055
g)	-0.105	0.045	h)	-0.025	0.04

meterwerten werden in Abhängigkeit der Startdaten verschiedene stationäre bistabile Muster gefunden.

Neben diesen stationären Mustern werden auch zeitperiodische Muster gefunden. In Abbildung 7.14 d ist beispielsweise ein zeitperiodisches fünfzelliges Muster dargestellt. Bei diesem Muster nimmt die Amplitude und die Temperatur der Zellen periodisch zu und wieder ab. Dabei sind die Zellen ortsfest.

Für schwächere Strömung mit kleineren Werten $|\alpha_{eff}|$ und β werden weniger stark lokalisierte Muster gefunden. In Abbildung 7.14 f ist ein Muster mit einer ringförmigen Anordnung von 7 Zellen um eine zentrale Zelle dargestellt. Jede der Zellen bleibt an einem festen Ort, die Amplitude und Größe der Zellen ist jedoch zeitperiodisch. Abbildung 7.14 g zeigt eine Anordnung von zwei Zellringen mit drei bzw. neun Zellen. Auch dieses Muster ist zeitperiodisch. Dabei sind alle Zellzentren ortsfest. Im äußeren Ring findet jedoch eine Schwingung der Größe und der Temperatur der vom Zentrum am weitesten entfernten Zellen statt.

Für nochmals kleinere Werte $|\alpha_{eff}|$ ergeben sich räumlich und zeitlich hochkomplexe Muster mit chaotischer Dynamik. In Abbildung 7.14 h ist ein chaotisches Muster bestehend aus einem äußeren Ring bestehend aus etwa 10 Zellen und etwa vier im inneren Bereich liegenden Zellen dargestellt. Die Zellen zeigen starke Oszillationen in ihrer Amplitude und Lage. Dabei können Zellen miteinander koaleszieren oder es entstehen neue Zellen. Dieser Vorgang verläuft häufig über folgende Zwischenschritte. Zunächst wandert eine Zelle aus dem äußeren Ring in Richtung des Zentrums. Die Strömung transportiert diese dann weiter in Richtung Zentrum. Die Zellen des äußeren Rings verteilen sich daraufhin neu, um die entstandene Lücke zu schließen. Im weiteren Verlauf wird eine Zelle im Zentrum vernichtet, da die Zellen hier zu stark aneinandergedrängt sind, während im äußeren Ring eine neue Zelle entsteht. Es zeigt sich, daß auch bei den hochkomplexen Mustern ein geordnetes Verhalten des äußeren Rings beobachtet wird, während die Zellen im inneren ein völlig ungeordnete Dynamik zeigen. Dies ist analog zu den eindimensionalen Ergebnissen bei denen die zentralen Zellen häufig starke Schwingungen zeigen, während die äußeren Zellen nahezu ortsfest bleiben und lediglich schwach mit dem inneren Geschehen korrelieren.

7.3 Gestreckte Flammen mit $\alpha_{eff} > 0$

7.3.1 Eindimensionale stationäre Muster

Für eine nach außen gerichtete Strömungen wird die verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung (5.48) mit $b = 1$ und $\alpha_{eff} = \beta = \alpha$ untersucht:

$$(7.19) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 + \alpha \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \alpha \Phi = 0$$

Aus Gl. (7.14) folgt für stationäre Lösungen auf großen Gebieten ein äußeres Abklingverhalten $\Phi \sim \zeta^{-1}$. Stationäre Lösungen von Gleichung (7.19) sind somit lokalisiert und zeigen große Amplituden in einer Umgebung des Ursprungs. Bedingt durch die Wanderwelleninstabilität, die in Kapitel 6 beschrieben ist, können stationäre Lösungen nur gefunden werden, wenn diese stabilisiert werden; beispielsweise durch eine Symmetriebedingung. Eine systematische Untersuchung des Parameterbereichs liefert hier lediglich einen einzigen stationären S1-Lösungsast. Dieser Lösungsast zeigt im Randbereich einen Abfall gemäß $\Phi \sim \zeta^{-1}$. Die Flamme ist hierbei in Richtung der Brenngase ausgelenkt. Im Zentrum befindet sich eine einzelne Zelle großer Amplitude, die in Richtung der Rauchgase gerichtet ist. Ein Beispiel dieser S1-Lösung ist in Abbildung 7.15 wiedergegeben. Eine entsprechende Lösung wird experimentell von Ishizuka & Law (1982) gefunden (siehe Abbildung 7.19) und wird auf Gravitationseffekte zurückgeführt. Unsere Analyse zeigt jedoch, daß diese Lösung auch ohne Gravitation existiert. Durch die destabilisierende Wirkung der Gravitation kann die Amplitude der Lösung beliebig erhöht werden. Eine Verminderung von α bewirkt ebenfalls eine Vergrößerung der lokalen Absenkung der Flammenfront.

7.3.2 Eindimensionale zeitabhängige Muster

Für $\alpha < \alpha_{crit} \approx .015$ wird das stationäre S1 Muster instabil gegenüber zeitabhängigen Mustern. In Abbildung 7.16 ist dieses Muster für ein α unterhalb α_{crit} in Abhängigkeit der Zeit dargestellt. Bei der Rechnung wird eine Symmetriebedingung gestellt, so daß sich ein bezüglich $\zeta = 0$ achsensymmetrisches Muster ergibt. Zur Darstellung des Musters werden der Auslenkung der Flamme proportional Grauwerte zugeordnet. Das Muster hat folgende Eigenschaften:

- Zur Zeit $\tau_0 = 100$ ist die Lösung periodisch in ζ wobei die Amplitude aller Zellen etwa gleich groß ist.

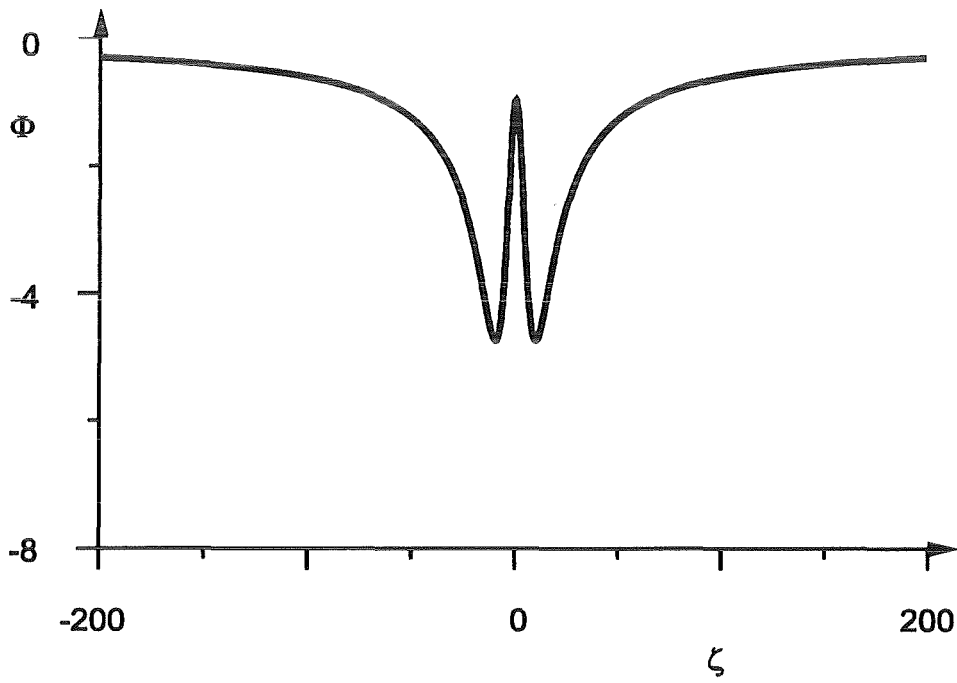


Abbildung 7.15: Lokalisiertes Muster für $\alpha = 0.019$

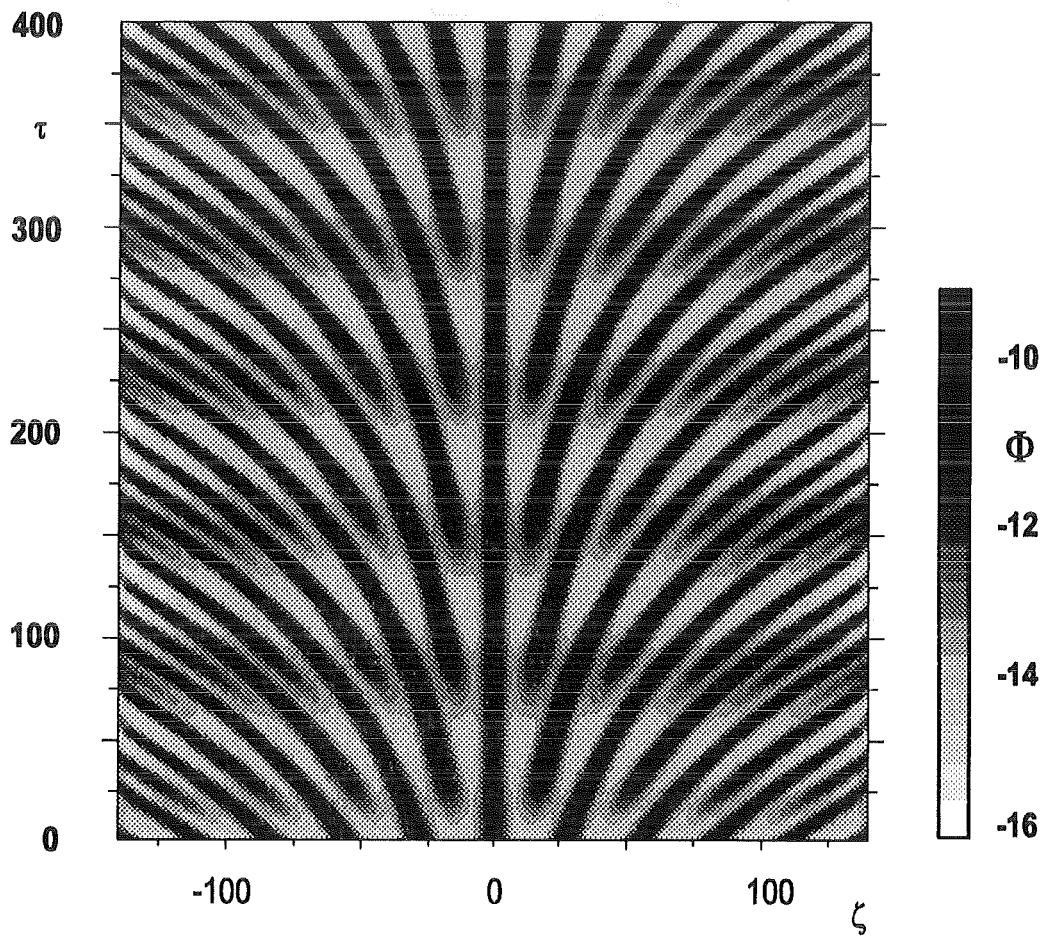


Abbildung 7.16: Zeitperiodisches Muster für $\alpha = .01$

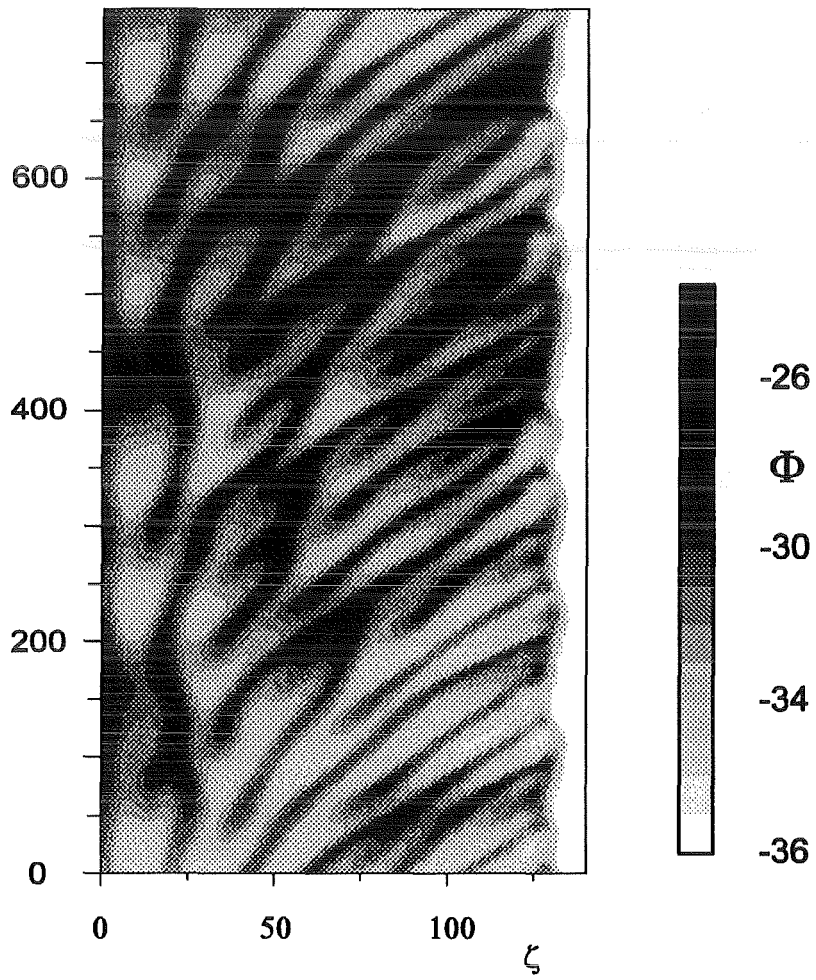


Abbildung 7.17: Stochastisches Muster mit $\alpha_{eff} = .01$

- Durch die streckende Wirkung des Strömungsfelds werden die einzelnen Zellen gedehnt, so daß die Wellenlänge des Musters stetig zunimmt.
- Zur Zeit $\tau_1 \approx 140$ entsteht in allen Tälern des Musters eine neue Zelle, d.h. es erscheint ein weiterer Wellenkamm, dessen Amplitude im weiteren Verlauf anwächst.
- Bis zum Zeitpunkt $\tau_2 \approx 170$ wächst die Amplitude der neu entstandenen Zellen bis zur Amplitude der ursprünglichen Zellen heran während die Amplitude der ursprünglichen Zelle etwas absinkt.
- Das Muster zum Zeitpunkt τ_2 entspricht wieder dem Muster am Anfangszeitpunkt τ_1 .

Der dynamische Vorgang ist zeitperiodisch. Der Beobachter sieht eine Wanderbewegung der Zellen mit der Strömung. Dabei steigt die Geschwindigkeit jeder Einzelzelle in Richtung des seitlichen Rands linear an. Mit dieser Wanderbewegung geht eine Expansion der Wellentäler einher. In regelmäßigen Zeitintervallen entsteht in jedem Wellental ein neuer Wellenkamm, der mit der Strömung weiterwandert. Diese Form der Instabilität wird hier als gestrecktes Zellmuster mit periodischer Zellteilung bezeichnet. Der dynamische Vorgang entspricht den in den Kapiteln 4 und 5 diskutierten Instabilitätsmechanismen.

In Abbildung 7.17 ist ein Muster für $\alpha \ll \alpha_{crit}$ dargestellt. Das Muster zeigt weiterhin den Transport der einzelnen Zellen mit der Strömung und die Entstehung neuer Zellen. Da die Stärke der Strömung jetzt geringer ist, findet die Wanderbewegung der Zellen wesentlich langsamer statt. Der Wanderbewegung der Zellen sind jetzt Sekundärinstabilitäten überlagert, die zu unregelmäßigen Bewegungen der Einzelzellen führen. Diese unregelmäßigen Bewegungen führen häufig zu einer Koaleszenz benachbarter Zellen. Durch diese Zellverschmelzung entstehen in der Umgebung vergrößerte Wellentäler, so daß hier neue Zelle entstehen können. Die Zahl der Zellen im gesamten Gebiet bleibt stets etwa gleich groß und die mittlere Wellenlänge des Musters entspricht etwa der maximal angefachten Wellenlänge, die sich aus der linearen Stabilitätsanalyse des ebenen Grundzustands ergibt.

7.4 Gegenüberstellung von Experiment und Simulation

7.4.1 Lokalisierte Flammen

Für die experimentelle Untersuchung von Staupunktflammen wird vom Experimentator stets eine ebene Flamme angestrebt. Hierzu wird der Brenner möglichst ideal ausgeführt, so daß die Krümmung der Flamme sehr schwach ist. Das effektive Strömungsfeld weist stets in Richtung des Brennerstands, weshalb in der Literatur keine experimentellen Ergebnisse zu lokalisierten Flammen vorliegen.

Dennoch finden sich in der Literatur Experimente, die zum Vergleich herangezogen werden können.

Gorman et al. (1994) untersuchen sehr detailliert Vormischflammen in einer Unterdruckbrennkammer. In ihrer Brenneranordnung wird die Flamme durch Wärmeverluste an den Brenner stabilisiert. Es liegt keine Staupunktströmung vor. Dennoch finden sie viele Zellmuster (vergleiche Abb. 7.18), die starke Ähnlichkeiten zu den in dieser Arbeit gezeigten lokalisierten Zellmustern aufweisen.

Gefunden werden regelmäßige ringförmige Anordnungen von Zellen. Die Größe jeder einzelnen Zelle ist hierbei ungefähr gleich. Lediglich der äußere Ring der Zellen ist vom Brennerstand beeinflusst. Die Zahl der inneren Zellen wächst von Abb. 7.18 d-i von Eins bis Sechs. Dabei rotiert das zweizellige Muster und existiert nur für eine begrenzte Zeit. In Bild j wird ein Muster mit einer zentralen Zelle und sieben ringförmig darum angeordneten Zellen gezeigt und in Bild k ein Ring mit drei Zellen umgeben von neun Zellen. Diese Muster entsprechen den in Kapitel 7.2.2 und den in Abbildung 7.14 a-g gezeigten Bildern.

Die Struktur und Aufeinanderfolge der Muster für eine brennerstabilisierte Zellularflamme entspricht somit derjenigen von lokalisierten Zellularflammen in gekrümmten Staupunktflammen. In der brennerstabilisierten Flamme entfällt lediglich der stabilisierende Einfluß des Strömungsfelds. Dieser ist am Brennerstand stärker wirksam als im Brennerzentrum, so daß die Muster in hinreichend stark gekrümmten Staupunktflammen lokalisiert sind, aber in brennerstabilisierten Flammen nicht. Dies hat auch zur Folge, daß bei den Staupunktflammen keine regelmäßigen Muster mit mehr als drei Zellringen (siehe Abb. 7.14 g) gefunden werden.

Die Aufeinanderfolge der Muster wird bei brennerstabilisierten Flammen durch die relative Größe der Zellgröße zum Brennerdurchmesser, also der Gemischzusammensetzung, gesteuert. Bei Staupunktflammen kann dies auch

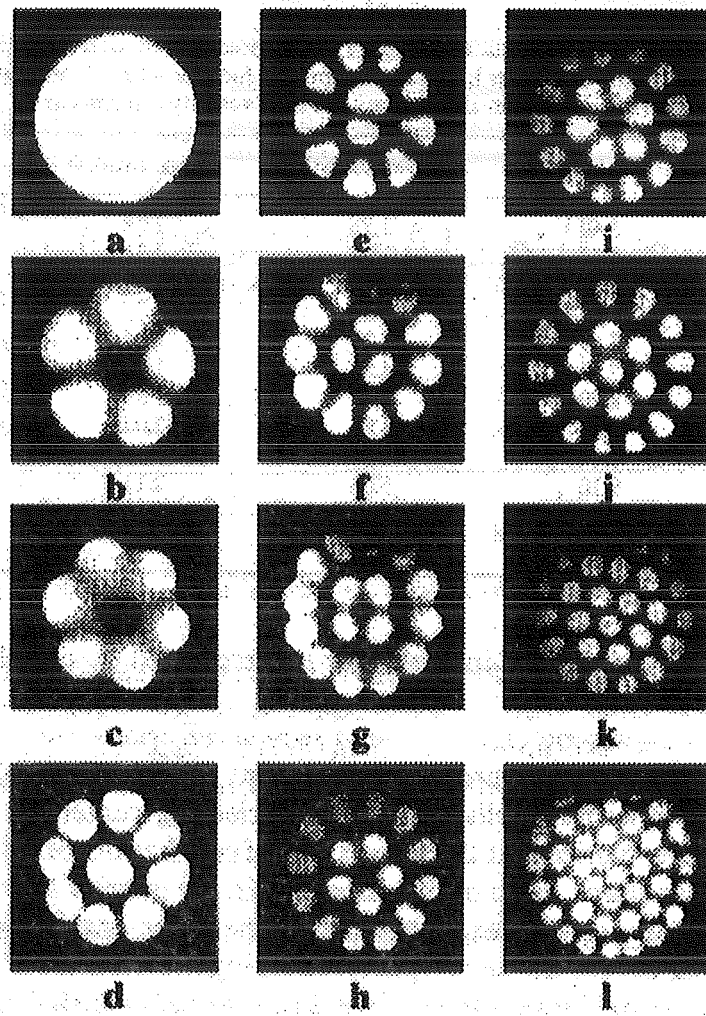


Abbildung 7.18: Geordnete Zellmuster nach Gorman et. al. (1994)

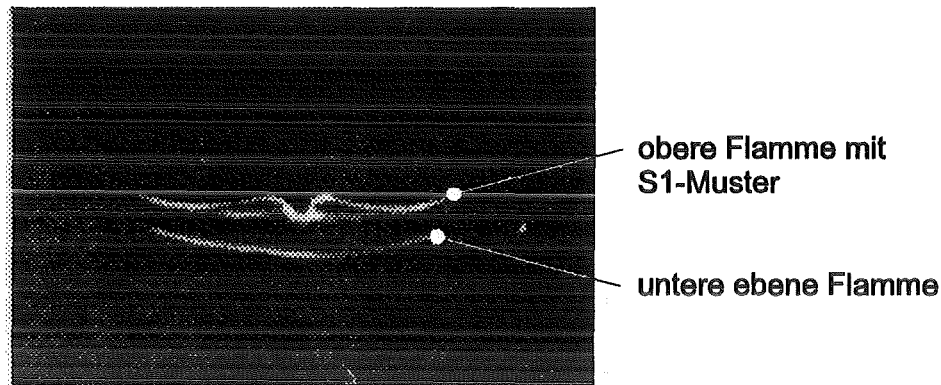


Abbildung 7.19: Eindimensionales Muster von Ishizuka & Law (1982)

durch eine Variation der Stärke der Staupunktströmung geschehen.

7.4.2 Gestreckte Flammen

Im Kapitel 1.5 werden Experimente von Ishizuka & Law (1982) beschrieben. Hauptziel ihrer Arbeiten ist die Bestimmung des Zündbereichs der Mischungen. Instabilitäten werden lediglich qualitativ beschrieben. Für jeden Instabilitätstyp wird ein Foto gezeigt, das die Struktur des Musters belegt. Da diese Fotos von der Seite her aufgenommen werden, ist die Struktur zweidimensionaler Muster nicht sehr deutlich. Zum direkten Vergleich kann lediglich ein stationäres eindimensionales Muster herangezogen werden (vergl. Abb. 7.19). Dieses Muster ergibt sich bei fetten Propan/Luft-Flammen und löst eine ebene Flamme ab, wenn die Stärke der Staupunktströmung reduziert wird.

Die Abbildung zeigt zwei Flammen zwischen zwei aufeinander gerichteten vertikal übereinander angeordneten Brennern. Der Massendurchsatz ist in beiden Brennern gleich groß, so daß sich zwischen den beiden Brennern bzw. zwischen den Flammen ein freier Staupunkt ergibt. Nach unserer Theorie gilt für jede der Flammen eine verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung. Diese unterscheiden sich lediglich durch den Gravitationsterm, der für die obere Flamme destabilisierend wirkt. Für die untere Flamme ist der Gravitationseinfluß stabilisierend, da die leichteren Rauchgase oberhalb des dichteren Brenngasgemisches liegen. Dementsprechend zeigt nur die obere Flamme ein Muster. Die untere Flamme ist lediglich durch eine Wechselwirkung der Flammen, die in unserer Theorie nicht berücksichtigt wird, schwach gekrümmt. Die obere Flamme weist ein rillenförmiges Muster auf.

Dieses Muster ist achsensymmetrisch bezüglich der Brennermitte. Entlang der Rille, d.h. normal zur Bildebene, ergeben sich keine Variationen der Auslenkung. Im Zentrum ist die Flamme in Richtung der Stauebene zwischen den beiden Flammen ausgelenkt. Zum Brennerrand hin wird die Flamme zunehmend eben. Dieses Muster stellt eine lokalisierte Struktur dar, da die Störung mit zunehmendem Abstand zu der Symmetrieachse abnimmt und die Flamme in den Außenbereichen annähernd eben ist.

Eine Gegenüberstellung von Abbildung 7.19 mit Abbildung 7.15 zeigt eine deutliche Übereinstimmung der in Experiment und Theorie gefundenen Muster. Es sollte beachtet werden, daß eine positive Auslenkung von Φ einer Auslenkung in Richtung des Staupunkts entspricht und somit im Experiment als eine Auslenkung der oberen Flamme nach unten zu beobachten ist.

Es ergeben sich folgende qualitative Übereinstimmungen von Theorie und den Experimenten von Ishizuka & Law (1982):

- Form des stationären Musters.
- Mit sinkender Stärke der Staupunktströmung nimmt die Auslenkung des Musters zu. Im Experiment wächst die Auslenkung so stark, daß sich die obere Flamme und die untere Flamme schließlich vereinigen.
- Mit wachsender Stärke der Staupunktströmung ergibt sich ein Übergang zu ebenen Flammen.
- Im Experiment ergibt sich durch eine Änderung der Gemischzusammensetzung in Richtung Stöchiometrie ein Übergang zu zeitabhängigen zellularen Flammen, die jedoch nicht detailliert beschrieben werden. In der Theorie entspricht dies einer Änderung der Lewis-Zahl bei gleichzeitiger Reduzierung der Stärke der Staupunktströmung. In der Theorie werden für schwache Staupunktströmungen ebenfalls zeitabhängige zellulare Flammen gefunden (vergl. Abb. 7.16 und 7.17).

7.4.3 Anforderungen an zukünftige Experimente

Für die in der Literaturübersicht angegebenen Experimente gilt generell, daß das Stabilitätsverhalten ebener Flammen nicht das primäre Untersuchungsziel der Arbeiten ist und somit quantitativ unzureichend ausgewertet wird. Für einen quantitativen Vergleich von Experimenten mit der Theorie ist zu beachten, daß die in dieser Arbeit benutzte Theorie das Verhalten zellulärer Staupunktflammen qualitativ beschreibt, da im Modell stark vereinfachende Annahmen getroffen werden. Besonders soll in diesem Zusammenhang auf

die Annahmen einer konstanten Dichte und einer einzelnen den Reaktionsverlauf bestimmenden Komponente hingewiesen werden. Wird dennoch ein quantitativer Vergleich angestrebt, so müssen diese Annahmen in der Auswertung der experimentellen Daten berücksichtigt werden.

- Die Zeldovich-Zahl kann nicht aus einer Elementarreaktion abgeleitet werden. Sie muß indirekt über die Temperaturabhängigkeit der Flammengeschwindigkeit aus Beziehung (2.14) ermittelt werden.
- Entsprechend kann die Lewis-Zahl indirekt aus der Abhängigkeit der Flammengeschwindigkeit von der Flammenstreckung, gemäß Abbildung 1.5 oder aus Beziehung (3.4), abgeleitet werden.
- Schließlich kann die Flammenstreckung nicht direkt aus dem Abstand des Brenners von der Stauplatte sowie der Brenngasaustrittsgeschwindigkeit bestimmt werden. Sie folgt aus Geschwindigkeitsgradienten am Ort der Flamme gemäß Beziehung (A.24).

Die erforderlichen Daten können gegebenenfalls durch eindimensionale Flammensimulationen unter Berücksichtigung komplexer Chemie ermittelt werden.

Am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik des Forschungszentrums Karlsruhe, Technik und Umwelt, wird derzeit ein Brenner entworfen, der so instrumentiert werden soll, daß ein quantitativer Vergleich von Theorie und Experiment möglich wird. Dieser Brenner wird ähnlich dem in Weyrauch (1986) beschriebenen Flachbrenner ausgeführt. Dieser wird mit einer zusätzlichen Stauplatte in Form einer Quarzglasscheibe ausgerüstet, um eine Staupunktströmung zu realisieren.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Laminare Vormischflammen in einer Staupunktströmung zeigen häufig zellulare Muster. Mit den in dieser Arbeit entwickelten Ansätzen können einige markante Erscheinungen an Staupunktflammen berechnet werden. Zur Beschreibung der Flammenstruktur wird eine asymptotische Approximationstheorie für hohe Aktivierungsenergien herangezogen.

Die Formulierung der Grundgleichungen beruht auf einem thermisch-diffusiven Modell mit einer Boussinesq-Erweiterung, so daß eine schwache Kopplung zwischen den Impuls- und den Wärme- und Stoffbilanzgleichungen besteht. Es wird ein asymptotisches Modell für eine schwache Staupunktströmung unter der Voraussetzung hergeleitet, daß eine charakteristische Längenskala des Strömungsfelds groß ist im Vergleich zu einer typischen thermischen Längenskala von einigen Zehntel Millimetern.

Im Rahmen des asymptotischen Modells wird die Stabilität ebener Flammen für schwache Staupunktströmung auf lineare Stabilität geprüft. Die Analyse ergibt, daß kleine Störungen für $Le < Le_{\text{zell}} < 1$ zeitweise angefacht werden. Diese klingen jedoch letztendlich in der Zeit asymptotisch ab und somit ergibt sich stabiles Verhalten der Flammfront für alle $Le < 1$. Für $Le > 1$ wird ferner die Kurve der Grenzstabilität für pulsierende Flammen hergeleitet.

Eine Untersuchung der Invarianzeigenschaften der Grundgleichungen im Zeitbereich ergibt eine Invarianz der Gleichungen gegen eine Querbewegung von Lösungen nach einem exponentiellen Zeitgesetz. Diese Eigenschaft kann als Instabilität der Flammfront gegenüber Wanderwellen interpretiert werden. Diese Wanderwelleninstabilität beliebiger der Grundlösung überlagerter Muster besteht, wenn die Staupunktströmung von der Brennerachse aus gesehen nach außen gerichtet ist. Diese Instabilität wird auch in Experimenten

beobachtet.

Für $Le < Le_{\text{zell}}$ wird eine schwach nichtlineare Theorie für Störungen großer Wellenlänge hergeleitet. Sie liefert eine verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung. Diese Gleichung stellt eine nichtlineare Evolutionsgleichung für die Auslenkung der Flamme aus dem Grundzustand dar.

Die verallgemeinerte KS-Gleichung weist einen neuen Term auf, der beliebige, aber kleine Störungen des Enthalpie- und Geschwindigkeitsfelds am Brenner berücksichtigt. Mit Hilfe des Zusatzterms können nichtebene Grundzustände der Flamme modelliert werden. Das zu einem vorgegebenen Grundzustand der Flamme passende Störfeld ist so eindeutig bestimmt. Da bei technischen Brennern i.a. eine Krümmung der Flamme in Richtung des Brenners am Brennerrand vorliegt, wird eine parabolisch gekrümmte Flamme ausführlich untersucht. Es ergeben sich je nach der Krümmung der Flammfront grundverschiedene Strukturen der Flamme.

Zur detaillierten Auswertung der KS-Gleichung im stark nichtlinearen Bereich werden ausgiebige numerische Simulationsrechnungen durchgeführt. Hierfür wird ein Fourier-Kollokationsspektralverfahren entwickelt und eingesetzt. Es sind die bislang ersten systematischen Untersuchungen für die Staupunktflamme.

Zwei neue Ergebnisse sollen hier ausdrücklich hervorgehoben werden:

- Für eine schwache gekrümmte Flammen ergeben sich gestreckte Zellmuster mit "periodischer" Zellteilung. Bei diesen Flammen nimmt die Größe der einzelnen Zellen durch die streckende Wirkung des Strömungsfelds kontinuierlich zu, bis diese durch nichtlineare Wechselwirkungen der Zellen untereinander in mehrere Zellen zerfallen. Dies ist ein rein nichtlinearer Effekt. Die Stärke der Staupunktströmung hat einen stabilisierenden Einfluß auf gestreckte Zellmuster.
- Für eine hinreichend starke Krümmung der Flamme ergeben sich regelmäßige lokalisierte Zellmuster. Die Krümmung der Flamme hat für lokalisierte Flammenmuster einen stabilisierenden Einfluß. Es werden erstmals auch Lösungen berechnet, die stationäres, periodisches und chaotisches Zeitverhalten aufweisen.

Sowohl für gestreckte als auch für lokalisierte Muster gilt, daß, mit einer Reduzierung des stabilisierenden Einflusses der Stärke der Staupunktströmung bzw. der Krümmung der Flamme, sich in zunehmendem Maße komplexere räumliche und zeitliche Strukturen ergeben.

Diese Arbeit hat eine Reihe offener Fragestellungen zur zellularen Struktur von Staupunktflammen beantwortet. Es ergeben sich weitere interessante Ansatzpunkte für zukünftige Arbeiten:

Es wäre sicher wünschenswert, lokalisierte Flammenmuster experimentell nachzuweisen .

Weiterhin sollte durch numerische Simulationen gezeigt werden, ob sich durch eine volle Berücksichtigung der thermischen Expansion des strömenden und reagierenden Gases ein qualitativ neues Verhalten von Staupunktflammen ergibt. Hierbei interessiert u.a., ob die Wanderwelleninstabilität unterdrückt werden kann.

Es sollte untersucht werden, ob die hier gewonnen Ergebnisse zur Struktur laminarer Flammen im 'laminar flamelet'-Modell berücksichtigt werden können, um eine bessere Modellierung turbulenter Flammen zu erzielen.

Anhang A

Flammenstreckung

Dieser Anhang gibt die Herleitung der Flammenstreckung wieder, wie sie von Matalon (1983) dargestellt wird.

Es wird ein infinitesimal dicke Flamme angenommen. Die Flamme ist dann eine Fläche.

Es soll jetzt ein Punkt betrachtet werden, der auf der Flamme liegt und auch für spätere Zeiten auf der Flamme verbleibt. Der Punkt werde durch das Strömungsfeld entlang der Oberfläche bewegt. Aus solchen Punkten kann ein differentiell kleines Flächenelement A gebildet werden. Dieses Flächenelement wird kontinuierlich von der Strömung deformiert, wodurch sich auch die Fläche des Elements ändert. Ein Maß für diese Deformation wird von Williams (1975) vorgeschlagen

$$(A.1) \quad K = \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right).$$

Es ist zu beachten, daß alle Größen in dimensionsloser Schreibweise angegeben sind. Längen sind mit der thermischen Grenzschichtdicke und die Zeit mit der Aufenthaltszeit in der thermischen Grenzschicht dimensionslos gemacht.

Die Größe K wird als Flammenstreckung bzw. als Flammendehnung bezeichnet.

Die Flammenstreckung ist eine skalare Größe und variiert in Raum und Zeit. Positive K bedeuten eine Dehnung der Flamme während negative K für eine Kompression der Flamme stehen.

Das Konzept der Flammenstreckung geht bereits auf Karlovitz et. al. (1953) zurück. Die Flammenstreckung wird von ihnen als wichtige Größe beim Quenchen (Auslösen) von Flammen identifiziert. Die Flammendehnung

wird von ihnen durch die Karlovitz-Zahl

$$(A.2) \quad Ka = \frac{1}{v_t} \frac{dv_t}{dy}$$

charakterisiert. Hierin ist v_t die Geschwindigkeitskomponente tangential zur Flamme. Die Karlovitz-Zahl ist jedoch nur für stationäre zweidimensionale Vorgänge definiert. Buckmaster & Ludford (1982) findet eine für allgemeine Flammen gültige Definition der Flammendehnung, die auf Gleichung (A.1) beruht. Schließlich wird eine koordinatenunabhängige Formulierung der Flammenstreckung von Matalon (1983) gefunden.

Die Flamme ist eine Fläche, deren Position in kartesischen Koordinaten $\mathbf{X} = (x, y, z)$ gegeben ist

$$(A.3) \quad \mathcal{F}(\mathbf{X}, t) = x - F(y, z, t) = 0.$$

Die Geschwindigkeit der Flamme ist

$$(A.4) \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}.$$

Auf der Flamme gilt

$$(A.5) \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla \mathcal{F} = 0.$$

Die Normale \mathbf{n} der Flamme ist

$$(A.6) \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla \mathcal{F}}{|\nabla \mathcal{F}|} = \frac{\left(1, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}}.$$

Die Normalgeschwindigkeit der Flamme ist

$$(A.7) \quad \mathbf{w}_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}}{|\nabla \mathcal{F}|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}}.$$

Die Vektorfunktion (siehe hierzu Abbildung A.1)

$$(A.8) \quad \mathbf{x}(y, z, t) = (F(y, z, t), y, z)$$

ist eine parametrische Darstellung der Flammenfläche.

Es sei 0 ein Punkt dieser Fläche zur Zeit t , gegeben durch $\mathbf{x}(y_0, z_0, t)$. Aus diesem Punkt und drei benachbarten Punkten $\mathbf{x}(y_0 + \delta y, z_0, t)$, $\mathbf{x}(y_0, z_0 + \delta z, t)$

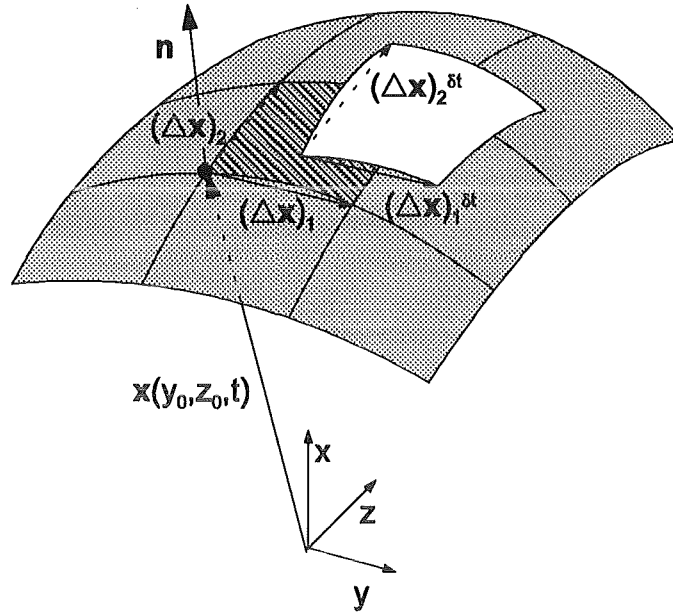


Abbildung A.1: Flammendehnung

und $\mathbf{x}(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t)$ kann ein infinitesimal kleines Parallelogramm gebildet werden, dessen Seiten die Vektoren

$$(A.9) \quad (\Delta \mathbf{x})_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} \delta y = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, 1, 0 \right) \delta y,$$

$$(A.10) \quad (\Delta \mathbf{x})_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \delta z = \left(\frac{\partial F}{\partial z}, 0, 1 \right) \delta z$$

sind. Hier sind die partiellen Ableitungen am Punkt 0 zu berechnen. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist

$$(A.11) \quad A(t) = \|(\Delta \mathbf{x})_1 \times (\Delta \mathbf{x})_2\| = \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \delta y \delta z.$$

Die Flamme bewegt sich im Fluid mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ und deformiert gleichzeitig. Nach einem Zeitintervall δt ist die Oberfläche gegeben durch

$$(A.12) \quad \mathbf{x}(y, z, t + \delta t) = (F(y, z, t) + w_1 \delta t, y + w_2 \delta t, z + w_3 \delta t).$$

Das deformierte Flächenelement kann durch ein neues infinitesimal kleines Parallelogramm approximiert werden. Die zugehörigen Seitenvektoren sind

$$(A.13) \quad (\Delta \mathbf{x})_1^{\delta t} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \delta t, 1 + \frac{\partial w_2}{\partial y} \delta t, \frac{\partial w_3}{\partial y} \delta t \right) \delta y,$$

$$(A.14) \quad (\Delta \mathbf{x})_2^{\delta t} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \delta t, \frac{\partial w_2}{\partial z} \delta t, 1 + \frac{\partial w_3}{\partial z} \delta t \right) \delta z.$$

Der zugehörige Flächeninhalt ist

$$(A.15) \quad A(t + \delta t) = \left\| (\Delta \mathbf{x})_1^{\delta t} \times (\Delta \mathbf{x})_2^{\delta t} \right\|.$$

Ein Punkt bleibt auf der Flamme sofern die folgende kinematische Beziehung (siehe (A.5)) erfüllt ist:

$$(A.16) \quad w_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + w_2 \frac{\partial F}{\partial y} + w_3 \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wird Gleichung (A.16) benutzt, um w_1 zu substituieren, ergibt sich der neue Flächeninhalt zu

$$(A.17) \quad A(t + \delta t) = \left\{ 1 + \delta t \left[\nabla_{\perp} \mathbf{w}_{\perp} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \right) \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}} \right] \right\} \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \delta y \delta z + \mathcal{O}((\delta t)^2) \dots$$

Es ist $\mathbf{w}_{\perp} = (w_2, w_3)$ das Geschwindigkeitsfeld in den (y, z) -Richtungen. Die Flammenstreckung an einem Punkt zur Zeit t wird durch eine Grenzwertbildung $\delta t \rightarrow 0$ bestimmt

$$(A.18) \quad K = \frac{1}{A(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{A(t + \delta t) - A(t)}{\delta t} \right).$$

Es folgt

$$(A.19) \quad K = \frac{\frac{\partial \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \left(\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2} \mathbf{w}_{\perp} \right)}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} F)^2}}.$$

Schließlich muß der Zusammenhang zwischen der Relativgeschwindigkeit der Flamme bezüglich des Fluids \mathbf{w} und der Fluidgeschwindigkeit \mathbf{v} bestimmt werden. Es ist zu beachten, daß das Flächenelement sich auf der Flamme mit der Tangentialgeschwindigkeit des Fluids bewegt

$$(A.20) \quad \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} |_{x=F}.$$

Werden jetzt die Beziehungen (A.6) und (A.7) sowie eine Aufspaltung des Geschwindigkeitsfelds in

$$(A.21) \quad \mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_{\perp} \cdot (\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$$

benutzt (d.h. $\mathbf{v}_\perp = (v_y, v_z)$), folgt für die Flammendehnung

$$(A.22) \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp F)^2}} \nabla_\perp \cdot \left(\frac{(1 + (\nabla_\perp F)^2) \mathbf{v}_\perp + (v_x - \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_\perp F) \nabla_\perp F}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp F)^2}} \right) - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp F)^2}} \nabla_\perp \cdot \left(\frac{\nabla_\perp F}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp F)^2}} \right).$$

Dieser Ausdruck wird von Matalon (1983) in eine koordinateninvariante Form überführt

$$(A.23) \quad K = - \left[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})|_{\mathcal{F}=0} \cdot \mathbf{n} + \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}}{|\nabla \mathcal{F}|} \nabla \cdot \mathbf{n} \right]_{\mathcal{F}=0}.$$

Der erste Term berücksichtigt den Effekt eines ungleichförmigen Geschwindigkeitsfelds, während der zweite Term die Wirkung der Bewegung einer gekrümmten Flamme erfaßt.

Es ist zu beachten, daß die Flammendehnung einer ebenen Flamme

$$(A.24) \quad K = [\nabla_\perp \mathbf{v}_\perp]_{\mathcal{F}=0}$$

ist.

Anhang B

Ebene Grundlösung

Die Grundlösung hat zwei wesentliche Eigenschaften:

- Sie ist eben, d.h. $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$.
- Sie ist stationär, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Hieraus folgt, daß der Abstand der Flamme F von der Stauenebene konstant ist.

Die Gleichungen (2.44) und (2.45) der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ vereinfachen sich vor der Flamme für $x < 0$ zu:

$$(B.1) \quad \frac{d^2 \Theta_b^{(0)}}{dx^2} + F_b^{(-1)} \frac{d\Theta_b^{(0)}}{dx} = 0,$$

$$(B.2) \quad \frac{d^2 S_b^{(0)}}{dx^2} + F_b^{(-1)} \frac{dS_b^{(0)}}{dx} + \lambda^{(0)} \frac{d^2 \Theta_b^{(0)}}{dx^2} = 0.$$

Hinter der Flamme für $x > 0$ gilt:

$$(B.3) \quad \Theta_b^{(0)} = 1,$$

$$(B.4) \quad \frac{d^2 S_b^{(0)}}{dx^2} + F_b^{(-1)} \frac{dS_b^{(0)}}{dx} = 0.$$

Aus der Dirac'schen Delta-Funktion an der Flamme resultieren die nachfolgenden Sprungbedingungen:

$$(B.5) \quad [\Theta_b^{(0)}] = [S_b^{(0)}] = 0,$$

$$(B.6) \quad \left[\frac{d\Theta_b^{(0)}}{dx} \right] = -\exp\left(\frac{1}{2} S_b^{(0)}\right),$$

$$(B.7) \quad \left[\frac{dS_b^{(0)}}{dx} \right] = \exp\left(\frac{1}{2} S_b^{(0)}\right).$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$(B.8) \quad \begin{aligned} \Theta_b^{(0)} = S_b^{(0)} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{dS_b^{(0)}}{dx} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Die Energiegleichung (B.1) ist unabhängig von der Enthalpiegleichung (B.2). Die zugehörige Lösung ist

$$(B.9) \quad \Theta_b^{(0)} = \exp\left(-F_b^{(-1)}x\right) \quad \text{für } x < 0.$$

Die Auswertung der Sprungbedingung (B.6) liefert die Enthalpie $S_b^{(0)}(x=0) = 2 \ln(-F_b^{(-1)})$ an der Flamme. Dieser Wert wird als Randbedingung der Gleichungen (B.2) und (B.4) an der Flamme, d.h. für $x=0$ benutzt. Hiermit bestimmt sich die Enthalpieverteilung zu

$$(B.10) \quad S_b^{(0)} = \begin{cases} \left(2 \ln(-F_b^{(-1)}) + \lambda^{(0)} F_b^{(-1)} x\right) \exp(-F_b^{(-1)}x), & x < 0, \\ 2 \ln(-F_b^{(-1)}), & x > 0. \end{cases}$$

Die Sprungbedingung (B.7) stellt eine Lösbarkeitsbedingung dar, aus der sich die Flammenposition $F_b^{(-1)}$ zu

$$(B.11) \quad F_b^{(-1)} = -1$$

ergibt.

Die Gleichungen der führenden Ordnung sind hiermit gelöst und es wird mit der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ fortgefahren. Unter der Voraussetzung eines ebenen stationären Zustands vereinfachen sich die Gleichungen (2.47) und (2.48) vor der Flamme zu:

$$(B.12) \quad \frac{d^2 \Theta_b^{(1)}}{dx^2} - \frac{d\Theta_b^{(1)}}{dx} = -(x + F_b^{(0)}) \exp x,$$

$$(B.13) \quad \frac{d^2 S_b^{(1)}}{dx^2} - \frac{dS_b^{(1)}}{dx} + \lambda^{(0)} \frac{d^2 \Theta_b^{(1)}}{dx^2} = -\left(\lambda^{(0)} + (x + F_b^{(0)})(1 + x)\right) \exp x.$$

Hinter der Flamme für $x > 0$ gilt:

$$(B.14) \quad \Theta_b^{(1)} = 0,$$

$$(B.15) \quad \frac{d^2 S_b^{(1)}}{dx^2} - \frac{dS_b^{(1)}}{dx} = 0.$$

An der Flamme bei $x = 0$ gelten die nachfolgenden Sprungbedingungen:

$$(B.16) \quad [\Theta_b^{(1)}] = [S_b^{(1)}] = 0,$$

$$(B.17) \quad \left[\frac{d\Theta^{(1)}}{dx} \right] = -\frac{1}{2} S_b^{(1)},$$

$$(B.18) \quad \left[\frac{dS_b^{(1)}}{dx} \right] = \frac{1}{2} \lambda^{(0)} S_b^{(1)} + \lambda^{(1)}.$$

Das Problem muß für die Randbedingungen

$$(B.19) \quad \begin{aligned} \Theta_b^{(1)} = S_b^{(1)} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{dS_b^{(1)}}{dx} = 0 & \quad \text{für } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

gelöst werden.

Der Lösungsweg ist analog dem für die führende Ordnung ausgeführten Weg und birgt keine Schwierigkeiten in sich. Die sich ergebende Temperaturstörung $\Theta_b^{(1)}$, die Enthalpiestörung $S_b^{(1)}$ und die Störung der Flammenposition $F_b^{(0)}$ ist im Hauptteil durch die Beziehungen (3.1), (3.2) und (3.3) gegeben.

Anhang C

Lineare Stabilitätsanalyse

Rechte Seiten in der $\mathcal{O}(1)$:

$$(C.1) \quad \rho_1^{(0)} = -(k^{*2} + \omega) \exp x,$$

$$(C.2) \quad \rho_2^{(0)} = \lambda^{(0)} (\omega + (k^{*2} + \omega)x) \exp x.$$

Rechte Seiten in der $\mathcal{O}(\kappa)$:

$$(C.3) \quad \rho_1^{(1)} = -\frac{dP^{(0)}}{dx} \left(\frac{1}{2}\lambda^{(0)} + 1 + x \right) + \left\{ -1 + \frac{1}{2}(k^{*2} + \omega)\lambda^{(0)} + (k^{*2} + \omega) \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^{(0)} \right) x + \frac{1}{2}(k^{*2} + \omega)x^2 \right\} \exp x,$$

$$(C.4) \quad \rho_2^{(1)} = -\frac{dQ^{(0)}}{dx} \left(\frac{1}{2}\lambda^{(0)} + 1 + x \right) - \lambda^{(1)} \left\{ \frac{d^2P^{(0)}}{dx^2} + k^{*2}P^{(0)} \right\} + \left(\lambda^{(0)} - \frac{1}{2}(\lambda^{(0)})^2\omega + \lambda^{(1)}\omega \right) \exp x + \left\{ \lambda^{(0)} \left(1 - (k^{*2} + 2\omega) \right) - \left(k^{*2} + \frac{3}{2}\omega \right) (\lambda^{(0)})^2 + \lambda^{(1)}(k^{*2} + \omega) \right\} x \exp x - \frac{1}{2}\lambda^{(0)} \left(3k^{*2} + 4\omega + \lambda^{(0)}(k^{*2} + \omega) \right) x^2 \exp x - \lambda^{(0)}(k^{*2} + \omega)x^3 \exp x,$$

$$(C.5) \quad \rho_3^{(1)} = -\frac{dQ^{(0)}}{dx} \left(\frac{1}{2}\lambda^{(0)} + 1 + x \right).$$

Die Lösungen sind in der Ordnung $\mathcal{O}(\kappa)$ für $x < 0$:

$$(C.6) \quad P^{(1)} = \left\{ -\frac{1}{2}\lambda^{(0)} - \left(\frac{1}{2}\lambda^{(0)} + 1\right)x + \frac{1}{2}x^2 \right\} \exp x + \left\{ \frac{1}{2}\lambda^{(0)} + \frac{2(a^2-1)+\lambda^{(0)}(a+a^2)}{4a}x + \frac{1+a}{4a}x^2 \right\} \exp\left(\frac{1+a}{2}x\right)$$

$$(C.7) \quad Q^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}\lambda^{(0)} - \lambda^{(1)}\right) \exp x + \left(2\lambda^{(0)} + \frac{3}{2}\left(\lambda^{(0)}\right)^2 - \lambda^{(1)}\right) x \exp x + \left(\frac{1}{2}\left(\lambda^{(0)}\right)^2 + 2\lambda^{(0)}\right) x^2 \exp x + \frac{1}{2}\lambda^{(0)}x^3 \exp x + \frac{1}{4}a^{-4} \left\{ -4\lambda^{(0)}(1+2\omega) + a\left(\lambda^{(0)}\right)^2(1+2\omega) + a^2(2+6\lambda^{(0)}) + a^3\left((-2-3\lambda^{(0)}-4\left(\lambda^{(0)}\right)^2 + 2\lambda^{(1)} - 2\left(\lambda^{(0)}\right)^2\omega + 4\lambda^{(1)}\omega)\right) + a^4(-2-4\lambda^{(0)}-3\left(\lambda^{(0)}\right)^2 + 2\lambda^{(1)}) + a^5(2+\lambda^{(0)}) \right\} x \exp\left(\frac{1+a}{2}x\right) + \frac{1}{8}a^{-3} \left\{ 4\lambda^{(0)}(1+2\omega) + a\left(2\lambda^{(0)} - \left(\lambda^{(0)}\right)^2(1+2\omega)\right) - a^2\left(2+8\lambda^{(0)} + 2\left(\lambda^{(0)}\right)^2 + 4\lambda^{(0)}\omega + 2\left(\lambda^{(0)}\right)^2\omega\right) - a^3\left(6\lambda^{(0)} + \left(\lambda^{(0)}\right)^2\right) + a^4 \right\} x^2 \exp\left(\frac{1+a}{2}x\right) + \frac{1}{8}a^{-2} \left\{ \lambda^{(0)}(1+2\omega) + a\left(2\lambda^{(0)} + 2\lambda^{(0)}\omega\right) + a^2\lambda^{(0)} \right\} x^3 \exp\left(\frac{1+a}{2}x\right)$$

und für $x \geq 0$:

$$(C.8) \quad P^{(1)} = 0,$$

$$(C.9) \quad Q^{(1)} = \left\{ -1 - a^{-2} - \frac{1}{2}\lambda^{(0)} + \frac{1}{2}a^{-2}\lambda^{(0)} - \right\} \exp\left(\frac{1-a}{2}x\right) + \frac{1}{2}a^{-2} \left\{ 2 + a\left(\lambda^{(0)} - 2\right) - 2a^2\left(1 + \lambda^{(0)}\right) - a^3\left(2 + \lambda^{(0)}\right) \right\} x \exp\left(\frac{1-a}{2}x\right) + \frac{1}{4}a^{-1} \left\{ 1 - 2a + a^2 \right\} x^2 \exp\left(\frac{1-a}{2}x\right).$$

Anhang D

Verallgemeinerte Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung

D.1 Temperatur- und Enthalpiefeld

Die rechten Seiten sind:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^{(3)} &= -\nabla_{\perp}^2 \theta^{(2)} - \left\{ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} + \left(\nabla_{\perp} \psi^{(1)} \right)^2 + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} + \right. \\
 &\quad \left. \alpha \psi^{(1)} - \nabla_{\perp}^2 \psi^{(2)} \right\} \exp x, \\
 \rho_2^{(3)} &= -\nabla_{\perp}^2 s^{(2)} + 2\nabla_{\perp}^2 \theta^{(2)} - \\
 \text{(D.1)} \quad &\left\{ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} + \left(\nabla_{\perp} \psi^{(1)} \right)^2 + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} + \alpha \psi^{(1)} \right\} \exp x - \\
 &\left\{ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} + \left(\nabla_{\perp} \psi^{(1)} \right)^2 + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} + \alpha \psi^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. \nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} - \nabla_{\perp}^2 \psi^{(2)} \right\} x \exp x, \\
 \rho_3^{(3)} &= -\nabla_{\perp}^2 s^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Die Lösungen in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ sind für $x < 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{(D.2)} \quad \theta^{(3)} &= -\mathbf{w}_1^{(3)} x \exp x - \frac{1}{2} \left(\nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)} \right) x^2 \exp x + \\
 &\left(-2 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} - \left(\nabla_{\perp} \psi^{(1)} \right)^2 - \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. \alpha \psi^{(1)} + \nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)} + \nabla_{\perp}^2 \psi^{(2)} \right) x \exp x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D.3) \quad s^{(3)} &= s_{\infty}^{(3)} + (s^{(3)}(0) - s_{\infty}^{(3)}) \exp x - \\
&\quad \mathbf{w}_1^{(3)} x^2 \exp x - (\nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)}) x^3 \exp x + \\
&\quad \left(-2 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} - 2 (\nabla_{\perp} \psi^{(1)})^2 - 2 \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} + 2 \alpha \psi^{(1)} + \right. \\
&\quad \left. 3 \nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)} + 2 \nabla_{\perp}^2 \psi^{(1)} + 2 \nabla_{\perp}^2 \psi^{(2)} \right) x^2 \exp x - \\
&\quad \left(2 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} + 2 (\nabla_{\perp} \psi^{(1)})^2 + 2 \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi^{(1)} + \right. \\
&\quad \left. 2 \alpha \psi^{(1)} + 6 \nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)} \right) x \exp x
\end{aligned}$$

und für $x > 0$:

$$(D.4) \quad \theta^{(3)} = 0$$

$$(D.5) \quad s^{(3)} = s^{(3)}(0) + 2 (\nabla_{\perp}^4 \psi^{(1)}) x.$$

D.2 Geschwindigkeitsfeld

In diesem Anhang wird das Störgeschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}^{(3)}$ bestimmt. Dieses setzt sich aus den Komponenten $(\mathbf{w}_1^{(3)}, \mathbf{w}_2^{(3)}, \mathbf{w}_3^{(3)})$ zusammen.

Zunächst wird Zone I betrachtet, in der Störungen der Quergeschwindigkeit in Störungen der axialen Geschwindigkeit umgewandelt werden. Dies ist ein reibungsfreier Prozeß. Die geeignete Längenskala zur Beschreibung dieses Umverteilungsprozesses ist $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, d.h. diese Zone hat eine axiale Längenausdehnung von der Größenordnung der Abmessungen des Brenners. Eine neue axiale Raumkoordinate wird mit

$$(D.6) \quad \xi_B = \sqrt{\varepsilon} (x_S - F_B)$$

eingeführt und in die Gleichungen (2.57) und (2.56) eingesetzt. Das ξ_B -Koordinatensystem ist ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung am Brenneraustritt liegt. Die Lösung für \mathbf{w} und Π wird als eine asymptotischen Reihe der Form

$$\begin{aligned}
(D.7) \quad \mathbf{w} &\sim \varepsilon \mathbf{w}_I^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{w}_I^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{w}_I^{(3)} + \dots, \\
\Pi &\sim \varepsilon \Pi_I^{(1)} + \varepsilon^2 \Pi_I^{(2)} + \varepsilon^3 \Pi_I^{(3)} + \dots.
\end{aligned}$$

angesetzt. Wie schon oben erläutert, ergibt sich für die erste und zweite Ordnung nur die triviale Lösung. Auf der ξ_B -Skala ergeben sich die Gleichungen

für $w_I^{(3)}$ und für $\xi_B > 0$ in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{7/2})$ zu:

$$(D.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_{1,I}^{(3)}}{\partial \xi_B} + \frac{\partial \Pi_I^{(3)}}{\partial \xi_B} &= 0, \\ \frac{\partial w_{2,I}^{(3)}}{\partial \xi_B} + \frac{\partial \Pi_I^{(3)}}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial w_{3,I}^{(3)}}{\partial \xi_B} + \frac{\partial \Pi_I^{(3)}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial w_{1,I}^{(3)}}{\partial \xi_B} + \frac{\partial w_{2,I}^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial w_{3,I}^{(3)}}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned}$$

zusammen mit geeigneten seitlichen Randbedingungen und

$$(D.9) \quad \begin{aligned} w_{1,I}^{(3)} &= w_{1,B} \quad \text{für } \xi_B = 0, \\ w_{2,I}^{(3)} &= w_{2,B} \quad \text{für } \xi_B = 0, \\ w_{3,I}^{(3)} &= w_{3,B} \quad \text{für } \xi_B = 0. \end{aligned}$$

Wobei $w_{1,B}$, $w_{2,B}$ und $w_{3,B}$ beliebige Funktionen der Koordinaten η und ζ sein können. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (D.8) erfolgt wiederum mittels einer Fouriertransformation. Im Spektralbereich ergibt sich:

$$(D.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_{1,I,k}^{(3)}}{\partial \xi_B} + \frac{\partial \Pi_{I,k}^{(3)}}{\partial \xi_B} &= 0, \\ \frac{\partial w_{\perp,I,k}^{(3)}}{\partial \xi_B} - k_{eff}^2 \Pi_{I,k}^{(3)} &= 0, \\ \frac{\partial w_{1,I,k}^{(3)}}{\partial \xi_B} + w_{\perp,I,k}^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

Hierin sind die Fouriertransformierten der beiden Quergeschwindigkeitskomponenten zusammengefaßt:

$$(D.11) \quad w_{\perp,I,k}^{(2)} = ik w_{2,I,k}^{(2)} + il w_{3,I,k}^{(2)}$$

und

$$(D.12) \quad k_{eff}^2 \equiv k^2 + l^2.$$

Diese Gleichungen können leicht im Spektralbereich gelöst werden. Für $k_{eff} \neq 0$ gilt:

$$(D.13) \quad \begin{aligned} w_{1,I,k}^{(3)} &= w_{1,B,k}^{(3)} - \frac{w_{\perp,B,k}^{(3)}}{k_{eff}} (1 - \exp(-k_{eff} \xi_B)), \\ w_{\perp,I,k}^{(3)} &= w_{\perp,B,k}^{(3)} \exp(-k_{eff} \xi_B), \\ \Pi_{I,k}^{(3)} &= -\frac{w_{\perp,B,k}^{(3)}}{k_{eff}} \exp(-k_{eff} \xi_B). \end{aligned}$$

Für $k_{eff} = 0$ sind die Lösungen unabhängig von ξ_B :

$$(D.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,I,k}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,B,k=0}^{(3)}, \\ \mathbf{w}_{2,I,k}^{(3)} &= \mathbf{w}_{2,B,k=0}^{(3)} = 0, \\ \mathbf{w}_{3,I,k}^{(3)} &= \mathbf{w}_{3,B,k=0}^{(3)} = 0, \\ \Pi_{I,k=0}^{(3)} &= \Pi_{\gamma}^{(3)}. \end{aligned}$$

Die Mittelwerte der Quergeschwindigkeiten $\mathbf{w}_{2,I,0}^{(3)}$ und $\mathbf{w}_{3,I,0}^{(3)}$ werden zu Null gesetzt, da diese im allgemeinen durch eine Querverschiebung des Koordinatensprungs mittelwertfrei gemacht werden können. Die Druckstörung $\Pi_{\gamma}^{(3)}$ kann erst nach der Analyse aller Zonen bestimmt werden, da die Druckrandbedingung stromab der Flamme gestellt wird. Aus den Randbedingungen am Brenner $\mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)}$ und $\mathbf{w}_{\perp,B,k}^{(3)}$ lassen sich die Übergangsbedingungen ($\xi_B \rightarrow \infty$) für die Ausgleichszone II bestimmen:

$$(D.15) \quad \begin{aligned} k_{eff} \neq 0 : \quad \mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)*} &= \mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)} - \frac{\mathbf{w}_{\perp,B,k}^{(3)}}{k_{eff}}, \\ &\mathbf{w}_{\perp,B,k}^{(3)*} = 0, \\ &\Pi_{I,k}^{(3)*} = 0, \\ k_{eff} = 0 : \quad \mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)*} &= \mathbf{w}_{1,B,k=0}^{(3)}, \\ &\mathbf{w}_{2,I,k}^{(3)} = 0, \\ &\mathbf{w}_{3,I,k}^{(3)} = 0, \\ &\Pi_{I,k=0}^{(3)} = \Pi_{\gamma}^{(3)}. \end{aligned}$$

In Zone II steht axialer konvektiver Transport mit diffusivem Quertransport im Gleichgewicht. Dies ist im Gegensatz zum vorherigen Umverteilungsvorgang ein reibungsbehafteter Prozeß. Die Beschreibung dieses Ausgleichsprozesses erfolgt wie das Abklingen der Temperaturstörung auf der großen Längenskala $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ und wird wieder mit der axialen Raumkoordinate $X_B = \varepsilon(x_S - F_B)$ erfaßt. Die Lösung für \mathbf{w} und Π wird in Form einer asymptotischen Reihe ausgedrückt:

$$(D.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{w} &\sim \varepsilon \mathbf{w}_{II}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{w}_{II}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{w}_{II}^{(3)} + \dots, \\ \Pi &\sim \varepsilon \Pi_{II}^{(1)} + \varepsilon^2 \Pi_{II}^{(2)} + \varepsilon^3 \Pi_{II}^{(3)} + \dots. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Störgrößen dritter Ordnung ergeben sich in der Ord-

nung $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$:

$$(D.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_{1,II}^{(3)}}{\partial X_B} + \frac{\partial \Pi_{II}^{(3)}}{\partial X_B} + \text{Pr} \cdot \nabla_{\perp}^2 \mathbf{w}_{1,II}^{(3)} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_{II}^{(3)}}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \Pi_{II}^{(3)}} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \Pi_{II}^{(3)}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{2,II}^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{w}_{3,II}^{(3)}}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned}$$

zusammen mit geeigneten seitlichen Randbedingungen und den Übergangsbedingungen:

$$(D.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,II}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,B}^{(3)*} \quad \text{für } X_B = 0, \\ \mathbf{w}_{2,II}^{(3)} &= 0 \quad \text{für } X_B = 0, \\ \mathbf{w}_{3,II}^{(3)} &= 0 \quad \text{für } X_B = 0, \\ \Pi_{II}^{(3)} &= \Pi_{\gamma}^{(3)} \quad \text{für } X_B = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt mittels einer Fouriertransformation im Spektralraum:

$$(D.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,II,k}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)*} \cdot \exp(-\sqrt{\text{Pr}} \cdot k_{eff} \cdot X_B), \\ \mathbf{w}_{2,II}^{(3)} &= \mathbf{w}_{3,II}^{(3)} = 0, \\ \Pi_{II}^{(3)} &= \Pi_{\gamma}^{(3)}. \end{aligned}$$

Hieraus kann jetzt die Übergangsbedingung für Zone III bestimmt werden. Bei der Berechnung der Übergangsbedingungen muß beachtet werden, daß in Zone III im Gegensatz zu Zone II ein mit der Flamme mitbewegtes Koordinatensystem benutzt wird. Da das Druckfeld der Grundlösung (5.18) mit der axialen Koordinate variiert, ergibt sich ein der Auslenkung der Flamme proportionaler Druckanteil

$$(D.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,\infty,k}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)*} \cdot \exp(-\sqrt{\text{Pr}} \cdot k_{eff} \cdot X_F), \\ &= \begin{cases} \left(\mathbf{w}_{1,B,k}^{(3)} - \frac{\mathbf{w}_{\perp,B,k}^{(3)}}{k_{eff}} \right) \cdot \exp(-\sqrt{\text{Pr}} \cdot k_{eff} \cdot X_F), & k_{eff} \neq 0, \\ \mathbf{w}_{1,B,k=0}^{(3)}, & k_{eff} = 0, \end{cases} \\ \mathbf{w}_{2,\infty}^{(3)} &= \mathbf{w}_{3,\infty}^{(3)} = 0, \\ \Pi_{\infty}^{(3)} &= \Pi_{\gamma}^{(3)} - \gamma \Psi^{(1)}. \end{aligned}$$

Bevor mit der Behandlung der Zone III fortgefahren wird, soll die Beschreibung der Vorheiz- und Reaktionszone (Zone IV) vorgezogen werden. Dies ist

sinnvoll, da sich zeigt, daß innerhalb der vierten Zone ein in axialer Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckfeld vorliegt, so daß die Zonen III und V gemeinsam behandelt werden können.

In der Vorheizzone wird das mit der Flamme mitbewegte Koordinatensystem (x, η, ζ) benutzt. Die Lösungen für w und Π werden in Form einer asymptotischen Reihe bestimmt:

$$(D.21) \quad \begin{aligned} w &\sim \varepsilon w_{IV}^{(0)} + \varepsilon^2 w_{IV}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{IV}^{(3)} + \dots, \\ \Pi &\sim \varepsilon \Pi_{IV}^{(1)} + \varepsilon^2 \Pi_{IV}^{(2)} + \varepsilon^3 \Pi_{IV}^{(3)} + \dots. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Störung zweiter Ordnung ergeben sich bei asymptotischer Entwicklung in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ und lauten:

$$(D.22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_{1,IV}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{IV}^{(3)}}{\partial x} &= \text{Pr} \frac{\partial^2 w_{1,IV}^{(3)}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w_{2,IV}^{(3)}}{\partial x} &= \text{Pr} \frac{\partial^2 w_{2,IV}^{(3)}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w_{3,IV}^{(3)}}{\partial x} &= \text{Pr} \frac{\partial^2 w_{3,IV}^{(3)}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w_{1,IV}^{(3)}}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Da exponentiell anwachsende Störungen nicht zulässig sind, folgt aus diesen Gleichungen lediglich die Unabhängigkeit der Lösung von x :

$$(D.23) \quad \begin{aligned} w_{1,IV}^{(3)} &= w_{1,IV}^{(3)}(\eta, \zeta, \vartheta), & w_{2,IV}^{(3)} &= w_{2,IV}^{(3)}(\eta, \zeta, \vartheta), \\ w_{3,IV}^{(3)} &= w_{3,IV}^{(3)}(\eta, \zeta, \vartheta), & \Pi_{IV}^{(3)} &= \Pi_{IV}^{(3)}(\eta, \zeta, \vartheta). \end{aligned}$$

Es erfolgt jetzt die gemeinsame Behandlung der Zonen III und V. In beiden Zonen ist Reibung vernachlässigbar. Es findet im wesentlichen eine Umverteilung der Störungen der Quergeschwindigkeiten in axiale Geschwindigkeitsstörungen statt. Die geeignete Längenskala zur Beschreibung dieses Prozesses ist in alle drei Raumrichtungen von der Größenordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. Das geeignete Koordinatensystem ist ein mit der Flamme mitbewegtes Koordinatensystem.

$$(D.24) \quad \xi = \sqrt{\varepsilon} x.$$

Auf der neuen Längenskala wird die Lösung wieder in Form von asymptotischen Reihen gesucht:

$$(D.25) \quad \begin{aligned} w &\sim \varepsilon w_{III/V}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{III/V}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{III/V}^{(3)} + \dots, \\ \Pi &\sim \varepsilon \Pi_{III/V}^{(1)} + \varepsilon^2 \Pi_{III/V}^{(2)} + \varepsilon^3 \Pi_{III/V}^{(3)} + \dots. \end{aligned}$$

In der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{7/2})$ ergibt sich der folgende Gleichungssatz:

$$(D.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_{1,III/V}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi_{III/V}^{(3)}}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{2,III/V}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi_{III/V}^{(3)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \eta} \begin{cases} \gamma + \alpha, & \xi < 0 \\ \alpha & \xi > 0 \end{cases} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{3,III/V}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi_{III/V}^{(3)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \zeta} \begin{cases} \gamma + \alpha, & \xi < 0 \\ \alpha & \xi > 0 \end{cases} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{1,III/V}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{w}_{2,III/V}^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{w}_{3,III/V}^{(3)}}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Die Rand- bzw. Übergangsbedingungen sind

$$(D.27) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,III}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,\infty}^{(3)} && \text{für } \xi \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{w}_{2,III}^{(3)} &= \mathbf{w}_{3,III}^{(3)} = 0 && \text{für } \xi \rightarrow -\infty, \\ \Pi_{III}^{(3)} &= \Pi_{\gamma}^{(3)} && \text{für } \xi \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{w}_{1,V}^{(3)} &= \mathbf{w}_{1,IV}^{(3)} = \mathbf{w}_{1,III}^{(3)} \Big|_{\xi \rightarrow -0} && \text{für } \xi \rightarrow +0, \\ \mathbf{w}_{2,V}^{(3)} &= \mathbf{w}_{2,IV}^{(3)} = \mathbf{w}_{2,III}^{(3)} \Big|_{\xi \rightarrow -0} && \text{für } \xi \rightarrow +0, \\ \mathbf{w}_{3,V}^{(3)} &= \mathbf{w}_{3,IV}^{(3)} = \mathbf{w}_{3,III}^{(3)} \Big|_{\xi \rightarrow -0} && \text{für } \xi \rightarrow +0, \\ \Pi_{1,V}^{(3)} &= \Pi_{1,IV}^{(3)} = \Pi_{1,III}^{(3)} \Big|_{\xi \rightarrow -0} && \text{für } \xi \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Es ist $\mathbf{w}_{1,\infty}^{(3)}$ bzw. die zugehörige Fouriertransformierte $\mathbf{w}_{1,\infty,k}^{(3)}$ in Gleichung (D.20) definiert. Aus den Gleichungen (D.26) wird für alle $\xi \neq 0$:

$$(D.28) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}_{1,III/V,k}^{(3)}}{d\xi} + \frac{d\Pi_{III/V,k}^{(3)}}{d\xi} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{w}_{\perp,III/V,k}^{(3)}}{d\xi} - k_{eff}^2 \Pi_{III/V,k}^{(3)} + & \\ k_{eff}^2 \psi_k^{(1)} \begin{cases} -\gamma, & \xi < 0 \\ 0 & \xi > 0 \end{cases} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{w}_{1,III/V,k}^{(3)}}{d\xi} + \mathbf{w}_{\perp,III/V,k}^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

Hierin wird wiederum eine Kurzschreibweise für die Quergeschwindigkeiten benutzt

$$(D.29) \quad \mathbf{w}_{\perp,III/V,k}^{(3)} \equiv ik\mathbf{w}_{2,III/V,k}^{(3)} + il\mathbf{w}_{3,III/V,k}^{(3)}.$$

und $k_{eff}^2 = k^2 + l^2$. Die Lösung des Gleichungssystems (D.28) läßt sich leicht bestimmen.

$$(D.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{1,III,k}^{(3)} &= -\psi_k^{(1)} \frac{\gamma}{2} \exp(k_{eff}\xi) + \mathbf{w}_{1,\infty,k}^{(3)}, \\ \mathbf{w}_{\perp,III,k}^{(3)} &= \psi_k^{(1)} \frac{\gamma}{2} k_{eff} \exp(k_{eff}\xi), \\ \Pi_{III,k}^{(3)} &= \psi_k^{(1)} \left(-\gamma + \frac{\gamma}{2} \exp(k_{eff}\xi) \right), \\ \mathbf{w}_{1,IV,k}^{(3)} &= \psi_k^{(1)} \gamma \left(-1 + \frac{1}{2} \exp(-k_{eff}\xi) \right) + \mathbf{w}_{1,\infty,k}^{(3)}, \\ \mathbf{w}_{\perp,IV,k}^{(3)} &= \psi_k^{(1)} \frac{\gamma}{2} k_{eff} \exp(-k_{eff}\xi), \\ \Pi_{IV,k}^{(3)} &= \psi_k^{(1)} \left(-\frac{\gamma}{2} \exp(-k_{eff}\xi) \right). \end{aligned}$$

Aus Gleichung (D.30) ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen der Normalkomponente der Geschwindigkeit, der Auslenkung der Flamme und den Geschwindigkeitsrandbedingungen am Brenner im Fourier-Spektralbereich:

$$(D.31) \quad \mathbf{w}_{1,IV,k}^{(3)} = \mathbf{w}_{1,III,k}^{(3)} (\xi \rightarrow 0) = -\frac{\gamma}{2} \psi_k^{(1)} + \mathbf{w}_{1,\infty,k}^{(3)}$$

bzw. nach einer Rücktransformation in den physikalischen Bereich

$$(D.32) \quad \boxed{\mathbf{w}_{1,IV}^{(3)} = -\frac{\gamma}{2} \psi^{(1)} + \mathbf{w}_{1,\infty}^{(3)}}.$$

Es muß jetzt nur noch gezeigt werden, daß die durch die Flamme verursachten Störungen des Geschwindigkeitsfelds in Zone VI abklingen. Die Behandlung dieser Zone ist analog der Behandlung von Zone II. Für Zone II wurde bereits gezeigt, daß sich auf der Längenskala $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ exponentiell abklingende Störungen ergeben. Zone VI ist auf der $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ Längenskala im Gegensatz zu Zone II unendlich ausgedehnt, so daß alle durch den Brenner und die Flamme verursachten Störungen auf Null abklingen. Von einer expliziten Lösung der Gleichungen kann abgesehen werden.

Anhang E

Formelzeichen

E.1 Großbuchstaben

A	[1]	Amplitude in linearer Stabilitätsanalyse
A	[1]	Eigenwert der Flammenfrontausbreitung
\tilde{A}	$\left[\frac{kg}{m^3s}\right]$	Geschwindigkeitskoeffizient der Reaktion
A_f	[1]	dimensionsloses Flächenelement der Flamme
B	[1]	Amplitude in linearer Stabilitätsanalyse
C	[1]	Konzentration
C	[1]	linearer Operator im Spektralbereich
\tilde{D}	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$	Stoffdiffusivität
E	$\left[\frac{J}{mol}\right]$	Aktivierungsenergie einer chemischen Reaktion
F	[1]	Abstand der Flamme von der Stauenebene
F_B	[1]	Abstand des Brenners von der Stauenebene
\mathcal{F}	[1]	implizite Formulierung der Flammenfront
Fr	[1]	Froude-Zahl
Gr	[1]	Grashof-Zahl
H	[1]	Enthalpie
K	[1]	Flammenstreckung
Ka	[1]	Karlovitz-Zahl
Le	[1]	Lewis-Zahl
M	[1]	Zahl der Fourier-Moden des numerischen Verfahrens
N	[1]	dimensionslose Aktivierungsenergie
P	[1]	normale Mode in linearer Stabilitätsanalyse
Pr	[1]	Prandtl-Zahl
Q	[1]	normale Mode in linearer Stabilitätsanalyse
R	$\left[\frac{J}{mol K}\right]$	allgemeine Gaskonstante

Re	[1]	Reynolds-Zahl
S	[1]	Enthalpie erster Ordnung in asymptotischer Reihe in Potenzen $\frac{1}{Ze}$
T	[1]	Temperatur
\tilde{T}	[K]	Temperatur
T_r	[K]	adiabate Verbrennungstemperatur
X	[1]	axiale Koordinate $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$
\mathbf{X}	[1]	kartesische Koordinaten
Y	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$
Z	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$
Ze	[1]	Zeldovich-Zahl

E.2 Kleinbuchstaben

a	[1]	Kurzschreibweise für $\sqrt{1 + 4k^* + 4\omega}$
b	[1]	Geometrie-Faktor des Strömungsfelds
c_0, c_2, c_4	[1]	Konstanten der KS-Gleichung im numerischen Verfahren
c_p	$\left[\frac{J}{kg K} \right]$	Wärmekapazität
\mathbf{e}_g	[1]	Richtungsvektor der Gravitation
$] $	[1]	Energie einer Störung
f	[1]	allgemeine Funktion
i	[1]	$\sqrt{-1}$
k	[1]	Wellenzahl
l	[1]	Wellenzahl
\tilde{l}_{th}	[m]	thermische Grenzschichtdicke
\mathbf{n}	[1]	Normalenvektor auf Flamme
o	[1]	von kleinerer Größenordnung als
p	[1]	Druck
q	[1]	Formfaktor einer gekrümmten Flamme
r	[1]	Formfaktor einer gekrümmten Flamme
s	[1]	Enthalpiestörung
t	[1]	Zeit
\tilde{t}_{th}	[m]	Aufenthaltszeit in thermischer Grenzschichtdicke
\mathbf{u}	[1]	Auslenkung der Lösung aus dem Grundzustand
u_f	[1]	Flammengeschwindigkeit
\tilde{u}_F	$\left[\frac{m}{s} \right]$	laminare Flammgeschwindigkeit
\mathbf{v}	[1]	Geschwindigkeitsfeld

$\tilde{\mathbf{v}}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Geschwindigkeitsfeld
\mathbf{w}	[1]	Störgeschwindigkeitsfeld
w_1	[1]	axiale Störgeschwindigkeit
w_2	[1]	Störgeschwindigkeit in η -Richtung
w_3	[1]	Störgeschwindigkeit in ζ -Richtung
x	[1]	axiale Koordinate $\mathcal{O}(1)$
\mathbf{x}	[1]	parametrische Darstellung der Flammenfront
y	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}(1)$
z	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}(1)$

E.3 Griechische Buchstaben

α	[1]	skalierte Stärke der Staupunktströmung
β	[1]	Konstante in Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung
γ	[1]	skalierte Froude-Zahl
δ	[1]	Dirac-Delta-Funktion
$\delta y, \dots$	[1]	differenzielle Länge
ϵ	[1]	kleiner Parameter $\frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c}$
η	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$
ζ	[1]	Querkoordinate $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$
Θ	[1]	Temperatur
θ	[1]	Temperaturstörung
κ	[1]	Stärke der Staupunktströmung
$\tilde{\kappa}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Temperaturleitfähigkeit
λ	[1]	reduzierte Lewis-Zahl
ξ	[1]	axiale Koordinate $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$
Π	[1]	Druckstörung
ω	[1]	Anfachungsrate in linearer Stabilität
ρ	[1]	rechte Seite verschiedener Gleichungen
$\tilde{\rho}$	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Dichte
σ	[1]	Verhältnis aus Brenngas- zu Rauchgastemperatur
τ	[1]	skalierte Zeit
Φ	[1]	Auslenkung der Flamme von der Grundlösung
Ψ	[1]	Auslenkung der Flamme aus ebener Grundlösung

E.4 Koordinatensysteme

(x, y, z)	bewegt mit Ursprung auf Flamme
(x_S, y_S, z_S)	kartesisch mit Ursprung an Stauebene
(x, \hat{y}, \hat{z})	bewegt mit Ursprung auf Flamme und gedehnt durch Strömung
(x, η, ζ)	bewegt mit Ursprung auf Flamme
(X, η, ζ)	kartesisch mit Ursprung auf ungestörter Flamme
(X_B, η, ζ)	kartesisch mit Ursprung auf Brenner
(ξ, η, ζ)	bewegt mit Ursprung auf Flamme
(ξ_B, η, ζ)	kartesisch mit Ursprung auf Brenner
(η, ζ)	kartesisch in Flammfront
$(\tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$	normierte (η, ζ) -Koordinaten im numerischen Verfahren
$(\hat{\eta}, \hat{\zeta})$	bewegt mit Strömung in Flammfront

E.5 Indizes

b	Grundlösung
B	Brenner
B	Brennstoff
c	kritisch in Stabilitätsanalyse
eff	effektiv
f	Flamme
g	Gravitationseinfluß
I	invariant
k	Fourier-Transformation
L	linker Rand
n	normal zur Flamme
O	Oxidant
P	Produkt
$puls$	pulsierend
r	Rauchgas
R	rechter Rand
t	aktueller Zeitschritt (Numerik)
$t + \Delta t$	nächster Zeitschritt (Numerik)
$t - \Delta t$	vorheriger Zeitschritt (Numerik)
κ	Staupunktströmung
κ	von $\mathcal{O}(\kappa)$
$zell$	zellular

0, 1, 2	Ordnung in asymptotischer Reihe in $\frac{1}{Ze}$
(0), (1), (2)	Ordnung in asymptotischer Reihe in ϵ oder κ
I	Umverteilungszone hinter Brenner
II	Ausgleichszone zwischen Brenner und Flamme
III	Umverteilungszone vor Flamme
IV	Vorheizzone und Reaktionszone
V	Umverteilungszone hinter Flamme
VI	Ausgleichszone hinter Flamme
'	langwellige Störung
*	effektiv (zeitabhängig)
\perp	tangential zur Flamme bzw. zum Brenner
\sim	normiert in Numerik
\wedge	bewegt mit Strömung
∞	effektive Anströmung

E.6 Operatoren

∇	Nabla-Operator (Vektorgradient)
∇^2	Laplace Operator
∇^4	Biharmonischer Operator

Literaturverzeichnis

- [1] M. T. Aimar , *Etudes numérique d'une équation d'évolution non linéair dérivant l'instabilité thermodiffusive front de flamme*, Thèse 3ème cycle Université de Provence (1982)
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions*, Dover Pub. (1970)
- [3] A. Bayliss, D. Gottlieb, B. J. Matkowsky and M. Minkoff, *An adaptive pseudo-spectral method for reaction diffusion problems*, J. Comput. Phys. **81**(2) (1989), 421-443
- [4] A. Bayliss, B. J. Matkowsky, *Fronts, relaxation oscillations, and period doubling in solid fuel combustion*, J. Comput. Phys. **71**(1) (1987), 147-168
- [5] A. Bayliss, B. J. Matkowsky and M. Minkoff, *Period doubling gained, period doubling lost*, SIAM J. Appl. Math. **49**(4) (1989), 1047-1063
- [6] A. Bayliss, B. J. Matkowsky and M. Minkoff, *Cascading cellular flames*, SIAM J. Appl. Math. **49**(4) (1989), 1421-1432
- [7] A. Bayliss, B. J. Matkowsky, *Two routes to chaos in condensed phase combustion*, SIAM J. Appl. Math. **50**(2) (1990), 437-459
- [8] A. Bayliss, B. J. Matkowsky, *Nonlinear dynamics of cellular flames*, SIAM J. Appl. Math. **52**(2) (1992), 396-415
- [9] V. S. Berman and Iu. S. Riazantsev , *Application of the method of matched asymptotic expansions to the calculation of the stationary thermal propagation of the front of an exothermic reaction in a condensed medium*, J. Appl. Mech. Tech. **13** (1972), 688
- [10] V. S. Berman and Iu. S. Riazantsev , *Asymptotic analysis of stationary propagation of the front of a two-stage exothermic reaction in a gas*, J. Appl. Math. Mech. **37** (1973), 995

- [11] V. S. Berman and Iu. S. Riazantsev , *Asymptotic analysis of stationary propagation of the front of a parallel exothermic reaction*, J. Appl. Math. Mech. **39** (1975), 286
- [12] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, Vol. 2, Gauthier-Villars (1903)
- [13] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch (1981)
- [14] J. D. Buckmaster and G. S. S. Ludford, *Theory of laminar flames*, Cambridge Uni. Press (1982)
- [15] J. D. Buckmaster and G. S. S. Ludford, *Lectures on mathematical combustion*, SIAM CBMS **43** (1983)
- [16] W. B. Bush, *Stoichiometry effects on a one-dimensional flame*, Combust. Sci. and Tech. **23** (1980), 263
- [17] W. B. Bush and F. E. Fendell, *Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general Lewis numbers*, Combust. Sci. and Tech. **1** (1970), 421
- [18] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer (1988)
- [19] G. F. Carrier, F. E. Fendell, *Stoichiometry and flame holder effects on a one-dimensional flame*, Combust. Sci and Tech. **18** (1978), 33
- [20] P. Cho, C. K. Law, J. R. Hertzberg and R. K. Cheng, *Structure and propagation of turbulent premixed flames stabilized in a stagnation flow*, 21st Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1986), 1493-1499
- [21] A. Class, A. Bayliss and B. J. Matkowsky, *Localized ordered structures and flame stretch*, Appl. Math. Lett. **6**(5) (1993), 3-7
- [22] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Band I und II, Springer (1968)
- [23] G. Darrieus , *Propagation d'un front de flamme*, (nicht veröffentlicht), vorgetragen auf Le Congrès de Mécanique Appliquée, Paris (1945),
- [24] E. Eteng, G. S. S. Ludford and M. Matalon, *Displacement effect of a flame in a stagnation-point flow*, Phys. Fluids **29** (1986), 2172-2180

- [25] D. A. Frank-Kamenetzki, *Stoff- und Wärmeübertragung in der chemischen Kinetik*, Springer (1959)
- [26] I. Glassman, *Combustion*, Academic Press (1987)
- [27] C. F. Gerald and P. O. Wheatley, *Applied numerical analysis*, Addison Wesley (1994)
- [28] V. I. Golovichev, A. M. Grishin, V. M. Agranat and V. N. Bertsun , *Thermokinetic oscillations in distributed chemical systems*, Sov. Phys. Dokl. **23** (1978), 477
- [29] D. Gottlieb and S. A. Orszag, *Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications*, SIAM CBMS **26** (1977)
- [30] M. Gorman, M. el-Hamdi and K. A. Robbins, *Experimental observation of ordered states of cellular flames*, Combust. Sci. and Tech. **98** (1994), 37-45
- [31] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer (1983)
- [32] R. Günther, *Verbrennung und Feuerungen*, Springer (1974)
- [33] J. M. Hyman and B. Nicolaenko, *The Kuramoto-Sivashinsky equation: A bridge between pdes and dynamical systems*, Physica **18D** (1986), 113-126
- [34] S. Ishizuka, *An experimental study of tubular flames in rotating and non-rotating stretched flow fields*, J. D. Buckmaster and T. Takeno (eds.), *Mathematical Modeling in Combustion Science*, Springer (1987), 94-102
- [35] S. Ishizuka and C. K. Law, *An experimental study on extinction and stability of stretched premixed flames*, 19th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1982), 327-335
- [36] S. Ishizuka, K. Miyasaka and C. K. Law, *Effects of heat loss, preferential diffusion, and flame stretch on flame-front instability and extinction of propane/air mixtures*, Combust. and Flame **45** (1982), 293-308
- [37] T. L. Jackson and M. Matalon, *Stability of a premixed flame in stagnation-point flow against general disturbances*, NASA CR-189666, ICASE Rep. **92-25** (1992), submitted to Combust. Sci and Tech.

- [38] D. D. Joseph, *Stability of Fluid Motions I*, Springer (1976)
- [39] G. Joulin and P. Clavin, *Linear stability analysis of nonadiabatic flames: Diffusional thermal model*, *Combust. and Flame* **35** (1979), 139
- [40] G. Joulin and G. I. Sivashinsky, *On the linear hydrodynamic stability and response of premixed flames in stagnation-point flows*, 24th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1992),
- [41] A. K. Kapila and G. S. S. Ludford, *Two-step sequential reactions for large activation energies*, *Combust. and Flame* **29** (1977), 167
- [42] B. Karlovitz, D. W. Denniston, H. D. Knapschaefer and F. E. Wells, *Studies on turbulent flames*, 4th Int. Symp. Combust. (1953), 613-620
- [43] Y. Kim and M. Matalon, *Propagation and extinction of a flame in a stagnation-point flow*, *Combust. and Flame* **73** (1988), 303-313
- [44] Y. Kim and M. Matalon, *On the stability of near-equidiffusional strained premixed flames*, *Combust. Sci. and Tech.* **69** (1990), 85-97
- [45] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems*, *Prog. Theor. Phys.* **54** (1975) 687-699
- [46] L. D. Landau, *On the theory of slow combustion*, *Acta Physicochimic URSS* **19** (1944), 77
- [47] C. K. Law, S. Ishizuka and M. Mizomoto, *Lean limit extinction of propane/air mixtures in the stagnation-point flow*, 18th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1981), 1791-1798
- [48] C. K. Law, D. L. Zhu and G. Yu, *Propagation and extinction of stretched premixed flames*, 21st Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1986), 1419-1426
- [49] H. Lee and S. H. Sohrab, *Hydrodynamic aspects of premixed flame stripes in two-dimensional stagnation point flow*, persönliche Notiz (1994),
- [50] H. Lee and S. H. Sohrab, *Star and stripe shaped premixed flames in axi-symmetric and two-dimensional stagnation point flows*, persönliche Notiz (1994)
- [51] B. Lewis and G. von Elbe, *On the theory of flame propagation*, *J. Chem. Phys.*, **2** (1934), 537

- [52] S. B. Margolis, *Bifurcation phenomena in burner-stabilized premixed flames*, Combust. Sci. and Tech. **22** (1980), 143
- [53] S. B. Margolis, *Effects of selective diffusion on the stability of burner-stabilized premixed flames*, 18th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1981), 679
- [54] S. B. Margolis, *Lean flame propagation with competing chemical reactions*, Combust. Sci. and Tech. **28** (1982), 107
- [55] S. B. Margolis, *An asymptotic theory of condensed two-phase flame propagation*, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983), 351
- [56] S. B. Margolis and B. J. Matkowsky, *Flame propagation with a sequential reaction mechanism*, SIAM J. Appl. Math. **42** (1982), 1175
- [57] S. B. Margolis and B. J. Matkowsky, *Steady and pulsating modes of sequential flame propagation*, Combust. Sci. and Tech. **27** (1982), 193
- [58] S. B. Margolis and B. J. Matkowsky, *Nonlinear stability and bifurcation in the transition from laminar to turbulent flame propagation*, Combust. Sci. and Tech. **34** (1983), 45-77
- [59] S. B. Margolis and G. I. Sivashinsky, *Flame propagation in vertical channels: Bifurcation to bimodal cellular flames*, SIAM J. Appl. Math. **44** (1984), 344-368
- [60] G. H. Markstein, *Experimental and theoretical studies of flame front stability*, J. Aero. Sci. **18** (1953), 199
- [61] G. H. Markstein, *Instability phenomena in combustion waves*, 4th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1953), 44
- [62] G. H. Markstein and L. M. Somers, *Cellular flame structure and vibratory flame movement in N-butane-methane mixtures*, 4th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1953), 527
- [63] G. H. Markstein (ed.), *Nonsteady flame propagation*, Pergamon Press (1964)
- [64] M. Matalon and B. J. Matkowsky, *Flames as gasdynamic discontinuities*, J. Fluid Mech. **124** (1982), 239-259
- [65] M. Matalon and B. J. Matkowsky, *Flames in fluids: Their interaction and stability*, Combust. Sci. and Tech. **34** (1983), 295-316

- [66] M. Matalon, *On flames stretch*, Combust. Sci and Tech. **31** (1983), 169-181
- [67] M. Matalon and B. J. Matkowsky, *On the stability of plane and curved flames*, SIAM. J. Appl. Math. **44** (1984), 327-343
- [68] M. Matalon and B. J. Matkowsky, *Propagating flames and their stability*, G. Nicolis and F. Baras (eds.), Chemical instabilities, Reidel Pub. Com. (1984)
- [69] M. Matalon, *The stability of weakly stretched flames*, J. D. Buckmaster and T. Takeno (eds.), Mathematical Modeling in Combustion Science, Springer (1987), 131-143
- [70] B. J. Matkowsky, D. O. Olagunju, *Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture*, SIAM J. Appl. Math. **39** (1980), 290
- [71] B. J. Matkowsky, D. O. Olagunju, *Pulsations in a burner-stabilized premixed plane flame*, SIAM J. Appl. Math. **40** (1981), 551
- [72] B. J. Matkowsky, D. O. Olagunju, *Travelling waves along the front of a pulsating flame*, SIAM J. Appl. Math. **42** (1982), 486
- [73] B. J. Matkowsky, D. O. Olagunju, *Spinning waves in gaseous combustion*, SIAM J. Appl. Math. **42** (1982), 1138
- [74] B. J. Matkowsky, L. J. Putnick and G. I. Sivashinsky, *A nonlinear theory of cellular flames*, SIAM J. Appl. Math. **38** (1980), 489
- [75] B. J. Matkowsky and G. I. Sivashinsky, *An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation*, SIAM J. Appl. Math. **37** (1979), 686-699
- [76] J. M. C. Mendes-Lopes and H. Daneshyar, *Influence of strain fields on flame propagation*, Combust. and Flame **60** (1985), 29-48
- [77] D. M. Michelson and G. I. Sivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames II: Numerical experiments*, Acta Astronautica **4** (1977), 1207-1221
- [78] T. Mitani, *Propagation velocities of two-reactant flames*, Combust. Sci. and Tech. **21** (1980), 175

- [79] N. Peters, *Laminar flamelet concepts in turbulent combustion*, 21st Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1986), 1231-1250
- [80] Y. Pomeau, A. Pumir and P. Pelce, *Intrinsic stochasticity with many degrees of freedom*, C.E.A. S.P.T., Saclay, France (1984)
- [81] A. Pumir, *Structures Localisées et Turbulence*, Thèse 3ème cycle Paris (1982)
- [82] A. Pumir, P. Manneville and Y. Pomeau, *On solitary waves running down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **135** (1983), 27-50
- [83] J. Sata, *Effects of Lewis number on extinction behavior of premixed flames in a stagnation flow*, 19th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1982), 1541-1548
- [84] A. K. Sen and G. S. S. Ludford, *The near-stoichiometric behavior of combustible mixtures - Part I.: Diffusion of the reactants*, Combust. Sci. and Tech. **21** (1979), 15
- [85] A. K. Sen and G. S. S. Ludford, *The near-stoichiometric behavior of combustible mixtures - Part II.: Dissociation of the products*, Combust. Sci. and Tech. **26** (1981), 183
- [86] G. I. Sivashinsky, *On a steady corrugated flame front*, Astronautica Acta **18** (1973), 253
- [87] G. I. Sivashinsky, *Structure of Bunsen flames*, J. Chem. Phys. **62** (1975), 638
- [88] G. I. Sivashinsky, *Diffusional-thermal theory of cellular flames*, Combust. Sci. and Tech. **15** (1977), 137
- [89] G. I. Sivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames*, Acta Astronautica **4** (1977), 1177-1206
- [90] G. I. Sivashinsky, *On self-turbulization of a laminar flame*, Acta Astronautica **6** (1979), 569-591
- [91] G. I. Sivashinsky, *On flame propagation under conditions of stoichiometry*, SIAM J. Appl. Math. **39** (1980), 67-82
- [92] G. I. Sivashinsky, *On spinning propagation of combustion waves*, SIAM J. Appl. Math. **40** (1981), 432

- [93] G. I. Sivashinsky and B. J. Matkowsky, *On stability of nonadiabatic flames*, SIAM J. Appl. Math **40** (1983), 255-260
- [94] G. I. Sivashinsky, *Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames*, Annual Review of Fluid Mech. **15** (1983), 67-82
- [95] G. I. Sivashinsky, C. K. Law and G. Joulin, *On stability of premixed flames in stagnation-point flow*, Combust. Sci. and Tech. **28** (1982), 155-159
- [96] T. Takeno, M. Nishioka and S. Ishizuka, *Burning velocity of stretched flames*, J. D. Buckmaster and T. Takeno (eds.), Mathematical modeling in combustion science, Springer (1987), 103-111
- [97] H. Tsuji and I. Yamaoka, *Structure and extinction of near-limit flames in a stagnation flow*, 19th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1982), 1533-1540
- [98] J. Warnatz, *Laminare "flamelet"-Modelle zur Beschreibung der Verbrennung in vorgemischten und nicht-vorgemischten turbulenten Flammen*, 2. TECFLAM-Seminar, Stuttgart (1986), 7-22
- [99] V. W. Weyrauch, *Untersuchungen zum Verbrennungsablauf in Methanol-Sauerstoff-Stickstoff- und Kohlenwasserstoff-Sauerstoff-Stickstoff-Flammen unter besonderer Berücksichtigung der Stickstoffmonoxidbildung*, Dissertation, TH Darmstadt (1986)
- [100] F. A. Williams, *Combustion in laminar flows*, Annual Review of Fluid Mech. **3** (1971), 171
- [101] F. A. Williams, *A review of some theoretical models of turbulent flame structure*, Agard Conference Proceedings **164** (1975)
- [102] S. Wolfram, *MathematicaTM*, A system for doing mathematics by computer, Addison Wesley (1988)
- [103] C. K. Wu and C. K. Law, *On the determination of laminar flame speeds from stretched flames*, 20th Symp. (Int.) Combust./Combust. Inst. (1984), 1941-1949
- [104] Ya. B. Zeldovich, *Theory of combustion and detonation of gases*, Acad. Sci. USSR (in Russisch)

- [105] Ya. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich and G. M. Makhviladze, *The mathematical theory of combustion and explosions*, Consultants Bureau (1985)
- [106] J. Zierep, *Grundzüge der Strömungslehre*, Braun (1982)
- [107] J. Zierep, *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, Braun (1982)