Zur Theorie der corner cutting-Flächen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Matthias Gercken
aus Flensburg

Tag der mündlichen Prüfung:	27. November 2002
Referent:	Prof. Dr. Günter Aumann
Korreferent:	Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Karlsruhe
2002

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe. Ich möchte an dieser Stelle all jenen herzlich danken, die diese Arbeit ermöglicht und zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Aumann, der sowohl das Thema anregte als auch durch zahlreiche Hinweise und Vorschläge die Anfertigung der Arbeit großzügig unterstützte. Herrn Prof. Dr. E. Leuzinger danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Desweiteren bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen für ein sehr angenehmes Arbeitsklima, insbesondere Herrn Dr. Thorsten Thies, mit dem ich stets Freud und Leid teilen konnte.

Karlsruhe, im November 2002 Matthias Gercken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Computer Aided Geometric Design – kurz CAGD – beschäftigt sich mit der Approximation und der Darstellung von Kurven und Flächen.
Dieser Zweig der Geometrie enstand, als Paul Faget de Casteljau 1959 und Paul Bézier 1962 unabhängig voneinander die Theorie derjenigen Freiformkurven entwickelten, die wir heute als Bézier-Kurven kennen. Mit der rasanten Entwicklung der Informatik und der Computertechnik nahm die Entwicklung der Freiform-Kurven und -Flächen eine schnelle, vielbeachtete Entwicklung. Eine Übersicht über grundlegende Methoden des CAGD findet man in [BOE1].

Bei der Suche nach Kurven- und Flächendarstellungen spielen zwei wesentliche Gesichtspunkte eine Rolle. Zum einen möchte man die Kontrolle über das modellierte Objekt haben, zum anderen möchte man eine schnelle Auswertung ermöglichen, um die Kurve oder Fläche am Computer schnell darstellen und bearbeiten zu können.

Ersteren Punkt realisiert man durch verschiedenste Ansätze für Objektdarstellungen, wobei Parameter für die nötigen Freiheitsgrade sorgen. Zum Zwecke der effizienten Auswertung wurden für Kurven rekursive Dreiecksschemata entwickelt, zu denen zum Beispiel die Algorithmen von de Casteljau, de Boor oder der Algorithmus von Goldmann zählen (siehe [FAR]).

Zu den grundlegendsten Eigenschaften, die man bei Kurven und Flächen designen und kontrollieren möchte, zählen unter Anderem Interpolation, Berührung, Unterteilung und Graderhöhung.

Diese Eigenschaften hat man bei Bézierkurven fest im Griff, auch wenn höhere Anforderungen an die Modellierungsmöglichkeiten zu einem hohen Kurvengrad und somit zu einem hohen zeitlichen Auswertungsaufwand führen.
Die Definition und Entwicklung der B-Spline-Theorie beseitigte diese Schwäche in gewisser Hinsicht und stellte zudem eine Obermenge der Objekte aus der Bézier-Theorie zur Verfügung. Die NURBS-Theorie, die mit rationalen Kurven- und Flächendarstellungen arbeitet, kann ihrerseits als Verallgemeinerung der B-Spline-Theorie angesehen werden (siehe die ausführliche Darstellung in [PIE]). In [BAR2] wird eine weitere Verallgemeinerung der Bézierkurven vorgestellt, die anstelle von B-Spline-Funktionen Pólya-Polynome

als Bindefunktionen benutzen.

Viele der bekannten Algorithmen sind *corner cutting*-Algorithmen.

Ausgehend von einem (zur Kurve gehörenden) Polygon aus Kontrollpunkten $P_0, \ldots, P_N$ wird in jedem Verarbeitungsschritt eine Ecke P_k des Polygons $P_0 \ldots P_N$ „abgeschnitten" und durch je einen Punkt auf den Polygonseiten $\overline{P_{k-1}P_k}$ beziehungsweise $\overline{P_kP_{k+1}}$ ($k = 1, \ldots, N-1$) ersetzt.

Diese Techniken werden beispielsweise bei der Auswertung von Bézierkurven (Algorithmus von de Casteljau) und B-Spline-Kurven (Algorithmus von de Boor) angewendet.

Für die Unterteilung einer Bézier-Kurve liefert der Algorithmus von de Casteljau gleichzeitig die Kontrollpunkte der beiden Kurven, in die der betrachtete Punkt die gegebene Kurve unterteilt (siehe zum Beispiel [CAS] oder [AUM1]). Ebenso lassen sich die neuen Kontrollpunkte bei durchgeführter Graderhöhung der Kurve gewinnen. Auch in anderer Hinsicht lassen sich aus dem Algorithmus zahlreiche (geometrische) Eigenschaften ableiten (siehe zum Beispiel [MIC1] und [CAR]).

In der vorliegenden Arbeit werden wir corner cutting-Kurven so definieren, dass jeder Punkt einer corner cutting-Kurve c durch N Schritte eines zu definierenden corner cutting-Algorithmus angewandt auf ein gegebenes $(N+1)$-Eck ausgewertet werden kann (siehe dazu auch die grundlegende Arbeit [AUM2]).

Entsprechend werden wir zum Begriff der corner cutting-Fläche geführt, die jeden Punkt einer Fläche Φ durch $N+M$ Schritte evaluiert, wenn der entsprechende Algorithmus auf das zur Fläche gehörende $(M+1)\times(N+1)$-Netz aus Kontrollpunkten Anwendung findet.

Im Unterschied zu diesem Ansatz beschäftigen sich zahlreiche andere Arbeiten mit der Frage, welche Kurven und Flächen entstehen, wenn verschiedene corner cutting-Prozesse unendlich oft angewendet werden. Insbesondere die Frage nach der C^r-Stetigkeit spielt dabei eine große Rolle, so zum Beispiel in den Arbeiten [BOO2], [BOO3], [RIO] und [GRE].

Als Blending bezeichnet man die Übergangskurven und -flächen, die konstruiert werden, um bei konstruierten Kurven und Flächen unerwünschte Übergänge oder Bereiche, in denen Spitzen, Kanten oder ähnliche Effekte auftreten, zu glätten oder zu ersetzen. Einführende Übersichten zu verschiedenen Blendingmethoden im Computer Aided Geometric Design finden sich zum Beispiel in [HOS] sowie [VAR].
Auch in diesem Bereich des computerunterstützten Designs hat das corner cutting Anwendung gefunden, wobei vor Allem der Algorithmus von Chaikin zu nennen ist (siehe [CHA1]), der als Ergebnis einen rekursiven Blend (Blendingkurve oder -fläche) liefert.
Ausgegangen wird dabei von Objekten (Kurven oder Flächen), die polyedrisch definiert sind. Gehen wir in der Behandlung des Kurvenblendings von einem Polygon $P_0^0 \ldots, P_N^0$

aus, so wird jede Polygonseite $\overline{P_i^k P_{i+1}^k}$ des k-ten Schritts im Verhältnis $1:2:1$ unterteilt. Auf jeder Polygonseite entstehen also zwei neue Punkte gemäß der Verarbeitungsvorschrift

$$B_i^0 := B_i, B_{2i}^{k+1} \text{ mit } \boldsymbol{b}_{2i}^{k+1} := \frac{3}{4}\boldsymbol{b}_i^k + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}_{i+1}^k, B_{2i+1}^{k+1} \text{ mit } \boldsymbol{b}_{2i+1}^{k+1} := \frac{1}{4}\boldsymbol{b}_i^k + \frac{3}{4}\boldsymbol{b}_{i+1}^k.$$

Es lässt sich zeigen, dass die Fortführung dieses Algorithmus auf eine C^1-stetige Grenzkurve führt, die man als B-Spline-Kurve vom Grad 2 mit den Kontrollpunkten $D_i = B_i$ $(i = 0, \ldots, N)$ und einem uniformen Knotenvektor bestimmt (siehe [RIE2]).

Unter den gleichen Voraussetzungen ergibt die Rekursion

$$B_i^0 := B_i, B_{2i}^{k+1} \text{ mit } \boldsymbol{b}_{2i}^{k+1} := \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^k + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_{i+1}^k, B_{2i+1}^{k+1} \text{ mit } \boldsymbol{b}_{2i+1}^{k+1} := \frac{1}{8}\boldsymbol{b}_i^k + \frac{3}{4}\boldsymbol{b}_{i+1}^k + \frac{1}{8}\boldsymbol{b}_{i+2}^k$$

eine B-Spline-Kurve vom Grad 3 mit den Kontrollpunkten $D_i = B_i$ $(i = 0, \ldots, N)$ und einem uniformen Knotenvektor als Grenzkurve (siehe [DYN1] und [DYN2]). Nach [HOS] lässt sich zeigen, dass jede B-Spline-Kurve durch derartige rekursive Unterteilungsalgorithmen erzeugt werden kann.

Ein Ziel dieser Arbeit wird sein, beliebige B-Spline-Kurven so zu segmentieren, dass ein allgemeiner Algorithmus die Segmente als corner cutting-Kurven vom gleichen Typ bestimmt. Der auftretende corner cutting-Algorithmus wird dabei im Gegensatz zum Chaikin-Algorithmus endlich sein, die Segmente werden sich zu gleichförmig berührenden corner cutting-Kurven ergeben.

In [CAT] findet sich ein Algorithmus, der durch corner cutting an polyedrischen Netzen B-Spline-Flächen vom Grad $(2, 2)$ beziehungsweise vom Grad $(3, 3)$ produziert.
Anwendungen und Verallgemeinerungen dieser Ansätze finden sich beispielsweise in [DOO], [CAT] und [BRU].

Auch für B-Spline-Flächen werden in dieser Arbeit ausführliche Untersuchungen in Hinblick auf den Zusammenhang mit corner cutting-Flächen durchgeführt.

Wie bereits erwähnt spielt auch die Unterteilung von Kurven und Flächen im CAGD eine große Rolle (siehe [BOE1]).

Angefangen bei der Unterteilung von Bézierkurven (siehe [BOE2] und [STA]) über die Knoteneinfügung bei B-Spline-Kurven (siehe [BOE3]) und die Betrachtung der Grenzkurve (siehe [PRA1] und [COH]) bis hin zu grundlegenden Techniken bei NURBS-Kurven und -Flächen (siehe [FAR]) werden corner cutting-Algorithmen eingesetzt.

Auch für weitere Kurvenklassen und Freiformflächen sind zahlreiche Arbeiten zur Unterteilung erschienen (siehe [CAV], [PRA1], [JEN], [MIC2] und [RHA3]).

Viele der auftretenden Algorithmen behandeln die Frage, wie und ob ein unendlicher corner cutting-Algorithmus eine C^r-stetige Grenzkurve oder Fläche ergibt (siehe [PRA2],

[PRA3], [PRA4], [PRA5], [PAL] und [MIC1]). Wir wollen unser Augenmerk jedoch auf corner cutting-Algorithmen im Sinne unserer Definition richten und uns die Frage vorgeben, wann lineare corner cutting-Objekte (also corner cutting-Kurven und -Flächen, deren definierende Schnittfunktionen allesamt linear sind) eine Unterteilung in einem Punkt der Kurve oder entlang einer Parameterlinie der Fläche erlauben. Wichtige Ergebnisse finden sich in [AUM3], wir werden darüberhinaus die Unterteilung von linearen corner cutting-Flächen behandeln.

Die vorliegende Arbeit ist in acht Kapitel unterteilt.

In der vorliegenden Einleitung geben wir einen kurzen Überblick zu Begriffen und Methoden des corner cutting und einen Ausblick auf die Ziele, die in den folgenden Kapiteln verfolgt werden.

Kapitel 1 dient zur Einführung von verwendeten Bezeichnungen. Ferner geben wir einen Überblick über Definitionen grundlegender geometrischer Begriffe, die für spätere Kapitel unverzichtbar sind.

Im zweiten Kapitel definieren wir corner cutting-Kurven und leiten erste Eigenschaften der so definierten Kurven in Parameterform ab. Ferner leiten wir Bedingungen für Eigenschaften wie Interpolation und Berührung her.

Das dritte Kapitel behandelt eines der zentralen Themen der Arbeit, nämlich die Beziehung zwischen der zuvor behandelten Klasse von corner cutting-Kurven und den grundlegendsten Freiformkurven, nämlich Bézier- und B-Spline-Kurven.

Im vierten Kapitel definieren wir corner cutting-Flächen und leiten wie bei corner cutting-Kurven erste, für das weitere Vorgehen bedeutsame Eigenschaften her, bevor wir im fünften Kapitel analog zum Vorgehen bei Kurven verschiedene Berühreigenschaften ableiten.

Das sechste Kapitel behandelt die bestehende Zusammenhänge von corner cutting-Flächen mit Bézier- und B-Spline-Flächen. Es wird insbesondere untersucht, ob und wie sich solche Flächen als corner cutting-Flächen in unserem Sinne der Definition darstellen lassen und wie man umgekehrt erkennt, wann eine gegebene corner cutting-Fläche eine der behandelten Freiformflächen darstellt.

Kapitel 7 untersucht die Möglichkeiten, die sich bei den wichtigen Eigenschaften der Unterteilungsmöglichkeiten bei den Kurven und Flächen bietet. Für spezielle corner cutting-Kurven und -Flächen werden dabei weitergehende Untersuchungen angestellt, bevor im letzten Kapitel die Ergebnisse über corner cutting-Kurven und -Flächen zusammengefasst sowie offene Fragestellungen und ungelöste Probleme kurz erörtert werden.

Im vorliegenden Text werden Formeln kapitelweise nummeriert. Sätze, Lemmata und Korollare werden gemeinsam und unterabschnittweise, Definitionen, Bemerkungen und Beispiele hingegen separat und unterabschnittweise nummeriert.

Kapitel 1

Bezeichnungen

In diesem und in allen weiteren Kapiteln der vorliegenden Arbeit werden Punkte eines euklidischen Raums $\mathbb{E}^d$ mit großen Buchstaben bezeichnet: $P, Q, R, \ldots$.
Die zugehörigen Ortsvektoren, bezogen auf (soweit nicht anders gesagt) ein kartesisches Koordinatensystem (also ein orthonormiertes Rechtssystem), werden mit kleinen, fettgedruckten Buchstaben $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \ldots$ bezeichnet. Für die Koordinatendarstellung von Punkten verwenden wir die Schreibweise $P = P(p_x|p_y|p_z)$.

Wir benutzen die im Folgenden angegebene Schreibweise für Matrizen und ihre Untermatrizen. Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine (m,n)-Matrix, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq m$ und $\beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq \beta_1 < \ldots < \beta_l \leq n$. Dann bezeichnen wir mit $A[\alpha_1, \ldots, \alpha_k|\beta_1, \ldots, \beta_l]$ die (k,l)-Untermatrix von A, deren Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch das Element der α_i-ten Zeile und β_j-ten Spalte von A gegeben ist.
Mit $A = ((a_{pq}))_{\substack{p=1,\ldots,m\\ q=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A[\alpha_1, \ldots, \alpha_k|\beta_1, \ldots, \beta_l] = ((b_{ij}))_{\substack{i=1,\ldots,k\\ j=1,\ldots,l}} \in \mathbb{R}^{k\times l}$ gilt also

$$b_{ij} = a_{\alpha_i\,\beta_j}.$$

Die i-te Zeile der Matrix A lässt sich mithin durch $A[i|1, \ldots, n]$ und die j-te Spalte durch $A[1, \ldots, m|j]$ beschreiben.

Beispiel 1.0.1 Wir betrachten die $(4,6)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt zum Beispiel

$$A[1,3,4|1,4,6] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{16} \\ a_{31} & a_{34} & a_{36} \\ a_{41} & a_{44} & a_{46} \end{pmatrix}.$$

Die i-te Zeile ($i \in \{1, \dots, 4\}$) beziehungsweise j-te Spalte ($j \in \{1, \dots, 6\}$) der Matrix A erhält man als

$$A[i|1, \dots, 6] = (a_{i1} \ \cdots \ a_{i6})$$

beziehungsweise

$$A[1, \dots, 4|j] = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{4j} \end{pmatrix}.$$

Um die Indizierung von Matrizen möglichst übersichtlich zu gestalten, bezeichnen wir die zu einer mit $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ vierfach indizierten Matrix Z^{ki}_{lj} transponierte Matrix mit ${}^TZ^{ki}_{lj}$.

Die Ableitung einer Funktion nach einem Parameter u werden wir im Folgenden durch einen Punkt über der Funktion abkürzen, die Ableitung nach einem Parameter v durch einen Schrägstrich über der Funktion, also zum Beispiel

$$\frac{d}{du} f(u) =: \dot{f}(u) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dv} g(v) =: \acute{g}(v).$$

Zur Schreibweise einer (quadratischen) Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definieren wir abkürzend

$$A =: \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}).$$

Definition 1.0.1 Eine Matrix $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nennen wir **stochastisch**, wenn ihre Einträge a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ nichtnegativ sind und ihre Spalteneinträge sich jeweils zu Eins summieren. Insbesondere gilt also

$$A^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.0.2 a) Sei $\mathbb{E}$ ein euklidischer Raum. Eine Menge $M_1 \subset \mathbb{E}$ heißt **konvex**, wenn für alle Punkte $P, Q \in M$ die Strecke $\overline{PQ}$ zu M_1 gehört.
b) Sei $M_2 \subset \mathbb{E}$. Dann heißt der Durchschnitt aller konvexen Mengen in $\mathbb{E}$, welche M_2 enthalten, die **Konvexe Hülle** $H(M_2)$ von M_2.

Satz 1.0.1 Für die Konvexe Hülle der Punkte $P_1, \ldots, P_N \in \mathbb{E}$ gilt

$$H(P_1, \ldots, P_N) = \{X \in \mathbb{E} \,|\, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{p}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\}.$$

Beweis: Siehe [AUM1], Seite 39.

Definition 1.0.3 Sind $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{E}$ kollineare Punkte mit $P_2 \neq P_1$, so heißt die reelle Zahl λ, für die

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$$

gilt, das **Teilverhältnis** $TV(P_1, P_2, P_3)$ der Punkte P_1, P_2, P_3 (in dieser Reihenfolge).

Definition 1.0.4 Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $d \in \{2, 3\}$, $r \geq 1$ und

$$\varphi : \begin{cases} I \;\rightarrow & \mathbb{E}^d \\ u \;\mapsto & X(u) = X\big(x^1(u)|\ldots|x^d(u)\big) \end{cases}$$

eine C^r-Abbildung. Dann heißt die durch

$$c := \{X(u) \mid u \in I\}$$

definierte Punktmenge eine C^r**-Kurve** mit der **Parameterdarstellung** φ. Das Intervall I nennen wir auch das **Parameterintervall** von c. Um eine kürzere Schreibweise zu ermöglichen, schreiben wir für die Kurve auch $c : \boldsymbol{x}(u),\ u \in I$.

Definition 1.0.5 Ist $c : \boldsymbol{x}(u),\ u \in I$ eine gemäß Definition 1.0.4 gegebene Kurve im $\mathbb{E}^d,\ d \in \{2,3\}$, so nennen wir für $u_0 \in I$ den Vektor

$$\dot{\boldsymbol{x}}(u_0) := \begin{pmatrix} \dot{x}^1(u_0) \\ \vdots \\ \dot{x}^d(u_0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{du}(u_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^d}{du}(u_0) \end{pmatrix} = \frac{d\boldsymbol{x}}{du}(u_0)$$

einen **Tangentenvektor** von c im Punkt $X(u_0)$. Für $\dot{\boldsymbol{x}}(u_0) \neq \boldsymbol{o}$ nennen wir den Punkt $X(u_0)$ **regulär**, andernfalls **singulär**. Sind alle Punkt bezüglich der Funktion φ regulär, so nennen wir die Kurve c **regulär**. In einem regulären Punkt definieren wir die durch

$$t : \boldsymbol{y}(\lambda) = \boldsymbol{x}(u_0) + \lambda\dot{\boldsymbol{x}}(u_0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

bestimmte Gerade als **Tangente** von c im Punkt $X(u_0)$.

Definition 1.0.6 Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $r \geq 1$ und

$$\varphi : \begin{cases} G \;\rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ u \;\mapsto & X(u,v) = X\big(x^1(u,v)|x^2(u,v)|x^3(u,v)\big) \end{cases}$$

eine C^r-Abbildung. Dann heißt die durch

$$\Phi := \{X(u,v)|(u,v) \in G\}$$

definierte Punktmenge eine C^r**-Fläche** mit der **Parameterdarstellung** φ. Das Gebiet G nennen wir auch das **Parametergebiet** von Φ. Wie bei Kurven schreibt man auch bei den so definierten Flächen kurz $\Phi : \boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in G$.

Definition 1.0.7 Ein Flächenpunkt $X(u_0, v_0)$ einer gemäß Definition 1.0.6 gegebenen Fläche Φ heißt **regulär**, wenn die Vektoren

$$\boldsymbol{x}_1(u_0, v_0) := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{und } \boldsymbol{x}_2(u_0, v_0) := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

linear unabhängig sind. Andernfalls nennen wir den Flächenpunkt **singulär**. Analog zur Kurventheorie nennen wir eine Fläche Φ **regulär**, falls sie nur aus regulären Punkten besteht. In einem regulären Flächenpunkt $X(u_0, v_0)$ nennen wir die Ebene

$$T_\Phi : \boldsymbol{y}(\lambda, \nu) = \boldsymbol{x}(u_0, v_0) + \lambda \boldsymbol{x}_1(u_0, v_0) + \nu \boldsymbol{x}_2(u_0, v_0), \ \ \lambda, \nu \in \mathbb{R}$$

die **Tangentialebene** von Φ im Punkt $X(u_0, v_0)$. Für die Tangentialebene in einem Punkt Y der Fläche Φ schreiben wir auch $T_\Phi(Y)$. Die Flächenkurven, für die $u \equiv \text{const}$ beziehungsweise $v \equiv \text{const}$ gilt, heißen **Parameterlinien**. Im ersten Fall spricht man auch von einer v-**Linie**, im zweiten Fall entsprechend von einer u-**Linie**.

Um die Eindeutigkeit von Tangenten und Tangentialebenen zu gewährleisten, setzen wir stets *einfache*, das heißt reguläre und doppelpunktsfreie Kurven und Flächen voraus.

Definition 1.0.8 Seien f_i beziehungsweise g_j $(i = 0, \ldots, M;\ j = 0, \ldots, N)$ Funktionen aus einem $(M+1)$-dimensionalen beziehungsweise $(N+1)$-dimensionalen Vektorraum von reellwertigen Funktionen, ferner sei G ein rechteckiges Parametergebiet und B_{ij} Punkte eines euklidischen Vektorraums $\mathbb{E}^3$. Dann heißt die Fläche

$$\Phi : \boldsymbol{x}(u, v) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} f_i(u) g_j(v) \boldsymbol{b}_{ij}, \quad (u, v) \in G$$

die **Tensorproduktfläche** zu den Funktionen f_i und g_j und den Punkten B_{ij}.

Tensorproduktflächen lassen sich auch in Matrixschreibweise darstellen, was in der vorliegenden Arbeit eine wesentliche Rolle spielen wird.

Lemma 1.0.2 Eine Fläche Φ gemäß Definition 1.0.8 lässt sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$\Phi : \ \boldsymbol{x}(u, v) = \big(f_0(u) \ \ldots \ f_M(u)\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix}, \ (u, v) \in G.$$

Kapitel 2

Corner cutting-Kurven

Wir stellen in diesem Kapitel den Begriff der corner cutting-Kurve bereit, der später auf corner cutting-Flächen verallgemeinert werden soll (siehe Kapitel 4).
Definitionen und Sätze stammen im Wesentlichen aus [AUM2].
Zahlreiche Beweise, auf die in diesem und im folgenden Kapitel zum Großteil verzichtet wird, finden sich jedoch in den Kapiteln 4 und 5 wieder, wenn man die (einfachen) Modifikationen selber vornimmt.

2.1 Definition

Wir geben zunächst die grundlegende

Definition 2.1.1 Seien $B_0, \ldots, B_N$ Punkte im euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$ und seien $\alpha_j^i : [a,b] \to \mathbb{R}\,(1 \leq i \leq j \leq N)$ C^r-Funktionen $(r \geq 1)$ mit

$$\forall u \in [a,b] : \alpha_j^i(u) \in [0,1] \quad (1 \leq i \leq j \leq N) \tag{2.1}$$

und

$$\forall u \in [a,b] : \frac{d}{du}\alpha_j^i(u) = \dot{\alpha}_j^i(u) > 0 \quad (1 \leq i \leq j \leq N). \tag{2.2}$$

Weiter seien die $(N+2-i, N+1-i)$-Matrizen $A_N^i = A_N^i(u)$ für $i = 1, \ldots, N$ definiert

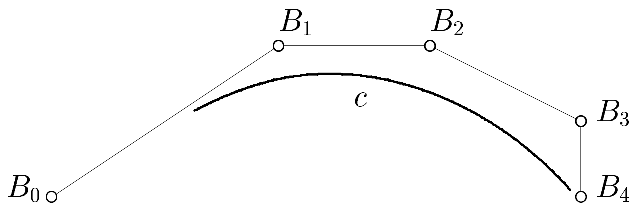


Abbildung 2.1: cc-Kurve vom Grad 4 und zugehöriges Kontrollpolygon.

durch

$$A_N^i(u) := \begin{pmatrix} 1-\alpha_i^i & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_i^i & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_N^i \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N^i \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Dann heißt die C^r-Kurve

$$c:\ \boldsymbol{x}(u) = \big(\boldsymbol{b}_0\ \ldots\ \boldsymbol{b}_N\big)A_N^1(u)\cdots A_N^N(u) =: \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{b}_k f_k(u), \quad u \in [a,b] \tag{2.4}$$

die **Eckschnitt-Kurve**, **corner cutting-Kurve** oder **cc-Kurve** vom **Grad** N mit **Schnittfunktionen**[1] α_j^i, **Kontrollpunkten** B_k und **Bindefunktionen**[2] f_k. Sind alle Schnittfunktionen Polynome vom Grad 1, so heißt c **linear**.
Die Schnittfunktion α_N^N heißt auch **Hauptschnittfunktion**.

Wir gehen in diesem Kapitel stets von corner cutting-Kurven gemäß Definition 2.1.1 aus.

Beispiel 2.1.1 Die in Abbildung 2.1 dargestellte cc-Kurve $c:\ \boldsymbol{x}(u),\ u \in [0,1]$ im $\mathbb{R}^2$ vom Grad $N=4$ besitzt die Schnittfunktionen

$$\alpha_1^1(u) = \alpha_4^4(u) := -\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{4},$$

[1]engl. cutting functions
[2]engl. blending functions

$$\alpha_2^1(u) = \alpha_3^1(u) = \alpha_4^1(u) = \alpha_2^2(u) = \alpha_3^2(u) \;:=\; u^2,$$

$$\alpha_4^2(u) = \alpha_4^3(u) = \alpha_3^3(u) \;:=\; \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}$$

und die Kontrollpunkte $B_0 = B_0(0|0)$, $B_1 = B_1(3|2)$, $B_2 = B_2(5|2)$, $B_3 = B_3(7|1)$ und $B_4 = B_4(7|0)$.

Bemerkung 2.1.1 Wir können die Definition (2.4) einer corner cutting-Kurve als Algorithmus auffassen, in dem eine zulässige Eingabe *Ein* aus Kontrollpunkten und Schnittfunktionen gemäß Definition 2.1.1 besteht.
Die Ausgabe *Aus* der Kurve (beziehungsweise ihrer Bindefunktionen) wird in N Verarbeitungsschritten erreicht, wenn wir die rechtsseitige Matrixmultiplikation

$$\big((\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\big)\cdot A_N^i(u)$$

als den i-ten Schritt des Algorithmus auffassen.

Bemerkung 2.1.2 Sei für feste i, j mit $1 \le i \le j \le N$ die lineare Funktion $\overline{\alpha}_j^i$ mit

$$\overline{\alpha}_j^i(a) = \alpha_j^i(a),\; \overline{\alpha}_j^i(b) = \alpha_j^i(b)$$

gegeben. Wegen (2.1) und (2.2) ist somit

$$\overline{\alpha}_j^i([a,b]) = \alpha_j^i([a,b])$$

und der zulässige Parameterwechsel

$$h_j^i \;:\; \begin{cases} [a,b] \;\rightarrow & [a,b] \\ \quad v \quad\mapsto & u = \left(\alpha_j^i\right)^{-1}\overline{\alpha}_j^i(v) \end{cases}$$

überführt die Schnittfunktion α_j^i in die lineare Schnittfunktion $\overline{\alpha}_j^i$. Dies zeigt, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit zumindest *eine* Schnittfunktion als linear angenommen werden kann.

Da das Produkt der stochastischen Matrizen $A_N^i(u)$ $(i = 1, \ldots, N)$ wiederum stochastisch ist (siehe zum Beispiel [LUE]), gelten mit

$$A_N^1(u)\cdots A_N^N(u) = \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix},\; u \in [a,b]$$

für alle $u \in [a, b]$ die Beziehungen

$$\sum_{k=0}^{N} f_k(u) \;=\; 1, \tag{2.5}$$

$$f_k(u) \;\geq\; 0. \tag{2.6}$$

Aus diesen Beziehungen findet man grundlegende wichtige Eigenschaften der so definierten Kurven.

Satz 2.1.1 Sei c eine corner cutting-Kurve gemäß (2.4).

a) Die Kurve c liegt in der Konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte.

b) Das Bild von c unter einer affinen Abbildung ist die Kurve zu denselben Schnittfunktionen und den affinen Bildern ihrer Kontrollpunkte.

Beweis. a) Folgt sofort aus Satz 1.0.1, da sich die Konvexe Hülle der Kontrollpunkte von c mit (2.5) und (2.6) schreiben lässt als

$$H(B_0, \ldots, B_N) = \{X \in \mathbb{E}^3 \mid \boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \boldsymbol{b}_k,\ \lambda_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k = 1\}.$$

b) Ist durch $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ eine affine Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3 \\ \;X \;\mapsto\; X^\star \quad \text{mit } \boldsymbol{x}^\star = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \end{cases}$$

gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\star(u) \;&=\; A\boldsymbol{x}(u) + \boldsymbol{t} = A\left(\sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{b}_i B_N^i(u)\right) + \boldsymbol{t}\cdot 1 \\ &\overset{(2.5)}{=} \sum_{i=0}^{N} \left(A\boldsymbol{b}_i(u)\right) f_i(u) + \sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{t} f_i(u) \\ &=\; \sum_{i=0}^{N} \big(A\boldsymbol{b}_i(u) + \boldsymbol{t}\big) f_i(u) = \sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{b}_i^\star f_i(u). \end{aligned}$$

□

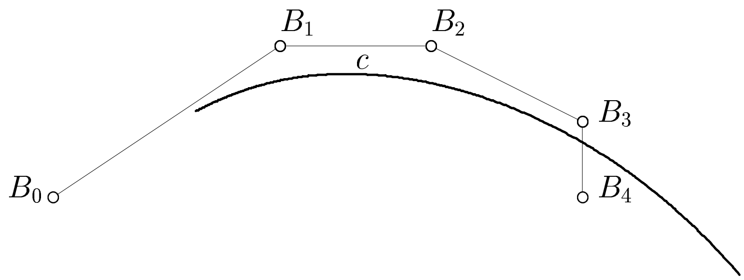


Abbildung 2.2: Verletzung der Bedingung (2.1).

Verzichtet man auf die Bedingung (2.1) für eine gemäß (2.4) gegebene Kurve, so sind die Aussagen a) und b) des Satzes im Allgemeinen falsch. Dies sieht man am

Beispiel 2.1.2 Die in Abbildung 2.2 dargestellte cc-Kurve $c: \ \boldsymbol{x}(u), \ u \in [0,1]$ im $\mathbb{R}^2$ vom Grad $N = 4$ besitzt die Schnittfunktionen

$$\begin{aligned} \alpha_1^1(u) = \alpha_4^4(u) &:= -\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{4}, \\ \alpha_2^1(u) = \alpha_3^1(u) = \alpha_4^1(u) = \alpha_2^2(u) = \alpha_3^2(u) &:= 2u^2, \\ \alpha_4^2(u) = \alpha_3^3(u) = \alpha_4^3(u) &:= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und die Kontrollpunkte aus Beispiel 2.1.1.

Im Allgemeinen sind cc-Kurven nicht variationsmindernd[3] (siehe [AUM2], Bemerkung 11, Seite 457f).

2.2 Interpolierende corner cutting-Kurven

Definition 2.2.1 Eine cc-Kurve c gemäß (2.4) heißt **interpolierend**, wenn für beliebige Punkte $B_0, \ldots, B_N \in \mathbb{E}^3$

$$X(a) = B_0, \ X(b) = B_N$$

gilt.

[3] engl. variation diminishing

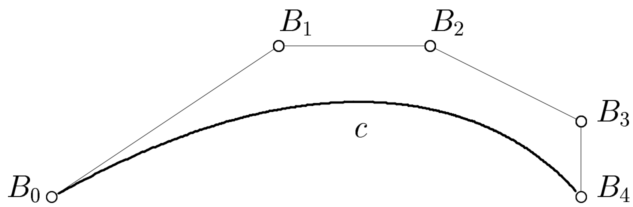


Abbildung 2.3: Interpolierende cc-Kurve

Satz 2.2.1 Sei c eine durch (2.4) gegebene cc-Kurve.

Für beliebige Wahl der Kontrollpunkte gilt dann $X(a) = B_0$ genau für

$$\alpha_1^1(a) = \alpha_2^2(a) = \ldots = \alpha_N^N(a) = 0$$

und $X(b) = B_N$ genau für

$$\alpha_N^1(b) = \alpha_N^2(b) = \ldots = \alpha_N^N(b) = 1.$$

Beispiel 2.2.1 Die cc-Kurve c mit den Kontrollpunkten aus Beispiel 2.1.1 und den Schnittfunktionen

$$\begin{aligned} \alpha_1^1(u) = \alpha_2^2(u) = \alpha_3^3(u) &:= \frac{1}{2}u, \\ \alpha_2^1(u) = \alpha_3^1(u) = \alpha_3^2(u) &:= \frac{1}{2}u + \frac{1}{5}, \\ \alpha_4^1(u) = \alpha_4^2(u) = \alpha_4^3(u) = \alpha_4^4(u) &:= u \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 2.3) ist eine interpolierende cc-Kurve.

Definition 2.2.2 Eine interpolierende cc-Kurve c heißt **grenztangential**[4], wenn c im Punkt $B_0 = X(a)$ die Tangente B_0B_1 und im Punkt $B_N = X(b)$ die Tangente $B_{N-1}B_N$ besitzt.

[4]engl. boundary tangent

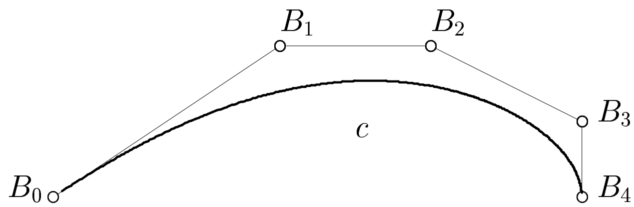


Abbildung 2.4: Grenztangentiale cc-Kurve

Satz 2.2.2 Sei c eine interpolierende cc-Kurve. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. c ist grenztangential.
2. Es gelten die Gleichungen
$$\alpha_2^1(a) = \alpha_3^2(a) = \ldots = \alpha_N^{N-1}(a) \;=\; 0,$$
$$\alpha_{N-1}^1(b) = \alpha_{N-1}^2(b) = \ldots = \alpha_{N-1}^{N-1}(b) \;=\; 1.$$
3. Im vorletzten Schritt des durch (2.4) gegebenen Algorithmus – siehe Bemerkung 2.1.1 – erhält man für $u = a$ die Punkte B_0, B_1 und für $u = b$ die Punkte B_{N-1}, B_N.

Beispiel 2.2.2 Die cc-Kurve c mit den Kontrollpunkten aus Beispiel 2.1.1 und den Schnittfunktionen
$$\alpha_1^1(u) = \alpha_2^1(u) = \alpha_2^2(u) = \alpha_3^3(u) \;:=\; \frac{1}{2}u,$$
$$\alpha_3^1(u) = \alpha_4^1(u) = \alpha_3^2(u) = \alpha_4^2(u) = \alpha_3^3(u) = \alpha_4^3(u) = \alpha_4^4(u) \;:=\; u$$
(siehe Abbildung 2.4) ist eine interpolierende, grenztangentiale cc-Kurve.

2.3 Vollständig berührende corner cutting-Kurven

Definition 2.3.1 Sei eine cc-Kurve c gemäß (2.4) gegeben. Dann heißt die Kurve
$$c_B : \boldsymbol{c}(u) = A_N^1(u) \cdots A_N^N(u), \quad u \in [a, b]$$
des $(N+1)$-dimensionalen Raums $\mathbb{E}^{N+1}$ die **Basiskurve**[5] **zur cc-Kurve** c.

[5] engl. basis curve

Bemerkung 2.3.1 Ist im euklidischen Raum $\mathbb{E}^{N+1}$ ein beliebiges Koordinatensystem mit dem Ursprung O gegeben und ist Q_k^0 der Einheitspunkt auf der k-ten Koordinatenachse, so gibt es zu beliebigen $N+1$ Punkten $B_0, \ldots, B_N \in \mathbb{E}^3$ genau eine affine Abbildung $\Gamma: \ \mathbb{E}^{N+1} \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\Gamma(O) = O$ und $\Gamma(Q_k^0) = B_k, \ (k = 0, \ldots, N)$. Für diese Abbildung gilt $\Gamma(c_B) = c$.

Zur weiteren Charakterisierung bestimmter cc-Kurven betrachten wir die Spalten der $(N+1, N+1-i)$-Matrix $A_N^1(u) \cdots A_N^i(u)$ (also die Spalten $A_N^1(u) \cdots A_N^i(u)[1, \ldots, N+1, j]$ für $j = 1, \ldots, N+1-i$) und interpretieren diese als Kurven $c_{q_j^i}: \ \boldsymbol{q}_j^i(u), \ u \in [a, b], \ (j = i, \ldots, N)$ im $\mathbb{E}^{N+1}$:

$$A_N^1(u) \cdots A_N^i(u) = \big(\boldsymbol{q}_i^i(u) \ \ldots \ \boldsymbol{q}_N^i(u)\big).$$

Es gilt $c_B = c_{q_N^N}$. Zu Ortsvektoren $\boldsymbol{q}_j^i(u)$ gehörige Punkte bezeichnen wir vereinbarungsgemäß mit $Q_j^i(u)$ (siehe Kapitel 1).
Aufgrund der Eigenschaft (2.1) und $\boldsymbol{q}_j^i(u_0) = \big(1 - \alpha_j^i(u_0)\big)\boldsymbol{q}_{j-1}^{i-1}(u_0) + \alpha_j^i(u_0)\boldsymbol{q}_j^{i-1}(u_0)$ gilt für alle $u_0 \in [a, b]$

$$Q_j^i(u_0) \in \overline{Q_{j-1}^{i-1}(u_0)Q_j^{i-1}(u_0)}, \quad 1 < i \leq j \leq N.$$

Wir geben die folgende

Definition 2.3.2 Eine cc-Kurve c vom Grad N heißt **vollständig berührend**[6], wenn zu jeder Kurve $c_{q_j^i}: \ \boldsymbol{q}_j^i(u), \ u \in [a, b], \ 1 \leq i \leq j \leq N$ die Tangente in einem Punkt $Q_j^i(u_0)$ dieser Kurve ($u_0 \in [a, b]$ beliebig) mit der Geraden $Q_{j-1}^{i-1}(u_0)Q_j^{i-1}(u_0)$ identisch ist.

Beispiel 2.3.1 Wir betrachten die cc-Kurve vom Grad 3, die durch die Kontrollpunkte $B_0, \ldots, B_3$ und die Schnittfunktionen $\alpha_j^i(u) = u, \ u \in [0, 1], \ 1 \leq i \leq j \leq 3$ gegeben ist.
Damit ist

$$A_3^1(u) = \begin{pmatrix} 1-u & 0 & 0 \\ u & 1-u & 0 \\ 0 & u & 1-u \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} = \big(\boldsymbol{q}_1^1(u) \ \boldsymbol{q}_2^1(u) \ \boldsymbol{q}_3^1(u)\big),$$

[6] engl. totally tangent

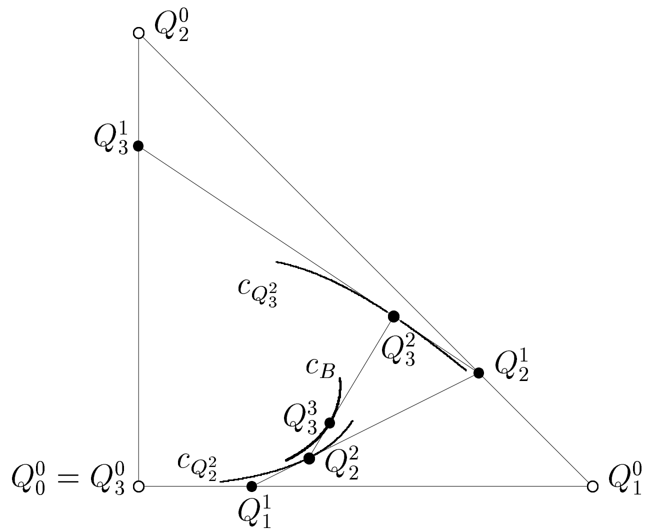


Abbildung 2.5: Zur vollständig berührenden cc-Kurve aus Beispiel 2.3.1. Kurven $c_{q_j^i}$ und Punkte $Q_j^i(\frac{1}{4})$ $(0 \leq i \leq j \leq 3)$.

$$A_3^1(u)A_3^2(u) = \begin{pmatrix} (1-u)^2 & 0 \\ 2u(1-u) & (1-u)^2 \\ u^2 & 2u(1-u) \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = \big(\boldsymbol{q}_2^2(u) \quad \boldsymbol{q}_3^2(u)\big),$$

$$A_3^1(u)A_3^2(u)A_3^3(u) = \begin{pmatrix} (1-u)^3 \\ 3u(1-u)^2 \\ 3u^2(1-u) \\ u^3 \end{pmatrix} = \big(\boldsymbol{q}_3^3(u)\big).$$

Wir betrachten

$$c_{q_2^2}: \ \boldsymbol{q}_2^2(u) = \begin{pmatrix} (1-u)^2 \\ 2u(1-u) \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass

$$\dot{\boldsymbol{q}}_2^2(u) = \begin{pmatrix} -2(1-u) \\ 2(1-2u) \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \big(\boldsymbol{q}_2^1(u) - \boldsymbol{q}_1^1(u)\big) = \begin{pmatrix} -(1-u) \\ 1-2u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallel zueinander sind. Analog findet man

$$\dot{\boldsymbol{q}}_3^2(u) \quad \| \quad \big(\boldsymbol{q}_3^1(u) - \boldsymbol{q}_2^1(u)\big)$$

und

$$\dot{\boldsymbol{q}}_3^3(u) \quad \| \quad \big(\boldsymbol{q}_3^2(u) - \boldsymbol{q}_2^2(u)\big).$$

Für $i = 1$ ist die Bedingung wegen der Parameterunabhängigkeit der Punkte Q_k^0 ($k = 0, \ldots, N$) trivialerweise erfüllt und damit ist die so gegebene Kurve eine vollständig berührende corner cutting-Kurve (siehe Abbildung 2.5). Wir sehen, dass die hier untersuchte Kurve eine Bézier-Kurve ist und werden später zeigen, dass alle Bézier-Kurven vollständig berührende cc-Kurven sind (siehe Abschnitt 3.1).

Satz 2.3.1 Eine gemäß (2.4) gegebene cc-Kurve c ist genau dann vollständig berührend, wenn zu jedem $u \in [a,b]$ und jedem $i \in \{2, \ldots, N\}$ eine Diagonalmatrix

$$\Lambda^i(u) := \operatorname{diag}\big(\lambda_i^i(u), \ldots, \lambda_N^i(u)\big), \ \lambda_j^i(u) \in \mathbf{R}, \ i \leq j \leq N$$

existiert, sodass

$$\big(A_N^1(u) \cdots A_N^{i-1}(u)\big)^{\dot{}} A_N^i(u) = \big(A_N^1(u) \cdots A_N^{i-1}(u)\big) \dot{A}_N^i(u) \Lambda^i(u)$$

gilt.

Satz 2.3.2 Für eine *lineare* cc-Kurve c gilt für jedes $i \in \{2, \ldots, N\}$

$$\Big(\forall u \in [a,b]: \ \dot{A}_N^{i-1}(u)A_N^i(u) = A_N^{i-1}(u)\dot{A}_N^i(u)\Lambda^i(u)\Big) \ \Rightarrow \ \lambda_i^i = \ldots = \lambda_N^i = 1.$$

Satz 2.3.3 Sei eine lineare cc-Kurve c gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

a) c ist vollständig berührend.

b) Für $i = 2, \ldots, N$ und $u \in [a,b]$ gilt

$$A_N^{i-1}(u)\dot{A}_N^i(u) = \dot{A}_N^{i-1}(u)A_N^i(u). \tag{2.7}$$

c) Für $i = 2, \ldots, N$ und $u \in [a,b]$ gilt

$$\big(A_N^1(u) \cdots A_N^i(u)\big)^{\cdot} = i\big(A_N^1(u) \cdots A_N^{i-1}(u)\big)\dot{A}_N^i. \tag{2.8}$$

Für nichtlineare cc-Kurven sind die Aussagen nicht äquivalent. Wir betrachten als Beispiel die cc-Kurve vom Grad 3 mit $[a,b] = [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\big(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\big)$ und den Schnittfunktionen $\alpha_1^1(u) = -u^2 + 2u$, $\alpha_2^2(u) = u$, $\alpha_2^1(u) = \alpha_3^1(u) = \alpha_3^2(u) = u^2$, $\alpha_3^3(u) = \frac{3u}{4-u}$. Diese ist wegen Satz 2.3.1 mit $\lambda_2^2(u) = 2$, $\lambda_3^2(u) = 1$, $\lambda_3^3(u) = 4 - u$ eine vollständig berührende cc-Kurve. Die Aussage b) aus Satz 2.3.3 ist jedoch nicht erfüllt, so ist zum Beispiel für $i = 2$

$$A_3^1(u)\dot{A}_3^2(u) = \begin{pmatrix} 1 + 4u - 2u^2 & 0 \\ 1 - 2u & -u^2(1-u^2) \\ u^2 & u^2(1-2u^2) \\ 0 & u^4 \end{pmatrix},$$

$$\dot{A}_3^1(u)A_3^2(u) = \begin{pmatrix} -2(1-u)u^2 & 0 \\ 2(1-u)^2 - 2u^2 & -2u(1-u) \\ 2u^2 & 2u(1-u) - 2u^2 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A_3^1(u)\dot{A}_3^2(u) \neq \dot{A}_3^1(u)A_3^2(u).$$

Die Äquivalenz der Aussagen (2.7) und (2.8) aus Satz 2.3.3 gilt auch für nichtlineare cc-Kurven (siehe [AUM2]). Aus (2.7) folgt dann

$$\begin{aligned}
&\left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)^{\cdot} A_N^i(u) + \left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)\dot{A}_N^i(u) \\
&= \left(A_N^1(u)\cdots A_N^i(u)\right)^{\cdot} \\
&\overset{(2.8)}{=} i\left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)\dot{A}_N^i(u).
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $E_{N-(i-1)}$ die $\big(N-(i-1), N-(i-1)\big)$-Einheitsmatrix und folgern

$$\begin{aligned}
\left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)^{\cdot} A_N^i(u) &= (i-1)\left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)\dot{A}_N^i(u) \\
&= \left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)\dot{A}_N^i(u)\big((i-1)E_{N-(i-1)}\big) \\
&=: \left(A_N^1(u)\cdots A_N^{i-1}(u)\right)\dot{A}_N^i(u)\Lambda^i.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.3.1 ist eine cc-Kurve mit der Eigenschaft (2.7) eine vollständig berührende cc-Kurve, bei der die Diagonalmatrizen Λ^i wegen $\Lambda^i = (i-1)E_{N-(i-1)}$ $(i = 2,\ldots,N)$ eine besonders einfache Struktur haben und nicht vom Parameter u abhängen. Diese Kurven erhalten einen eigenen Namen und stehen im Mittelpunkt des nächsten Abschnitts.

2.4 Gleichförmig berührende corner cutting-Kurven

Definition 2.4.1 Eine gemäß (2.4) gegebene cc-Kurve c mit der Eigenschaft

$$A_N^{i-1}(u)\dot{A}_N^i(u) = \dot{A}_N^{i-1}(u)A_N^i(u)$$

für $i = 2,\ldots,N$ und jedes $u \in [a,b]$ heißt **gleichförmig berührend**[7].

Bemerkung 2.4.1 1. Für die Ableitung einer gleichförmig berührenden cc-Kurve gilt

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(u) &= N(\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)A_N^1(u)\cdots A_N^{N-1}(u)\dot{A}_N^N(u) \\
&= N(\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\dot{A}_N^1(u)A_N^2(u)\cdots A_N^N(u).
\end{aligned}$$

[7] engl. uniformly tangent

2. Für die höheren Ableitungen einer *linearen*, gleichförmig berührenden cc-Kurve gelten die Formeln

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(r)}(u) &= \frac{N!}{(N-r)!}(\boldsymbol{b}_0 \ \dots \ \boldsymbol{b}_N)A_N^1(u)\cdots A_N^{N-r}(u)\dot{A}_N^{N-r+1}(u)\cdots\dot{A}_N^N(u) \\ &= \frac{N!}{(N-r)!}(\boldsymbol{b}_0 \ \dots \ \boldsymbol{b}_N)\dot{A}_N^1(u)\cdots\dot{A}_N^r(u)A_N^{r+1}(u)\cdots A_N^N(u), \end{aligned} \tag{2.9}$$

da für alle $i = 1, \dots, N$ und alle $u \in [a, b]$ die zweite Ableitung $\frac{d}{du}\dot{A}_N^i(u)$ in jeder Komponente verschwindet (also die Nullmatrix liefert).

Satz 2.4.1 Sei c eine cc-Kurve und $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) c ist gleichförmig berührend.

b) Es gelten für $1 \leq i \leq j \leq N-1$ die $2(N-i)$ Gleichungen

$$\alpha_{j+1}^i(u)\dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u) = \dot{\alpha}_{j+1}^i(u)\alpha_{j+1}^{i+1}(u), \tag{2.10}$$

$$\big(1-\alpha_j^i(u)\big)\dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u) = \dot{\alpha}_j^i(u)\big(1-\alpha_{j+1}^{i+1}(u)\big). \tag{2.11}$$

Anhand der Beziehungen (2.10) und (2.11) der Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Kurve werden wir nun untersuchen, welche Schnittfunktionen vorgegeben sein müssen, um die Existenz und Eindeutigkeit einer gleichförmig berührenden cc-Kurve mit diesen Schnittfunktionen sicherzustellen.

Durch Umformungen und Integration nach u lässt sich eine allgemeine Formel für Schnittfunktionen $\alpha_j^i(u)$ $(1 \leq i \leq j \leq N)$ angeben, in der lediglich eine Abhängigkeit von $\alpha_N^N(u)$ und Integrationskonstanten besteht. Wir formulieren dazu den folgenden

Satz 2.4.2 Seien $\alpha_N^N(u), u \in [a, b]$ eine Schnittfunktion, c^i, d^i $(i = 1, \dots N-1)$ positive Konstanten und $c^N = d^N := 1$. Durch die Vorschrift

$$\alpha_j^i(u) = \gamma_j^i(d^j\alpha_N^N(u) + 1 - d^j) \quad \text{mit} \quad \gamma_j^i = \frac{c^{N+i-j}}{d^j + (1-d^j)c^{N+i-j}} \ (1 \leq i \leq j \leq N)$$

werden Schnittfunktionen definiert, welche den Bedingungen (2.10) und (2.11) genügen und somit Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Kurve sind (siehe [AUM2] und vergleiche mit Abschnitt 5.2).

Nun ist man in der Lage einen Eindeutigkeitssatz für gleichförmig berührende cc-Kurven aufzustellen. Dies geschieht im

Satz 2.4.3 Seien für $u \in [a,b]$ die Schnittfunktionen

$$\alpha_N^1(u), \alpha_N^2(u), \ldots, \alpha_N^{N-1}(u), \alpha_N^N(u), \alpha_{N-1}^{N-1}(u), \alpha_{N-2}^{N-2}(u), \ldots, \alpha_1^1(u)$$

mit der Eigenschaft

$$\alpha_N^i(u) = c^i \alpha_N^N(u), \ \alpha_j^j(u) = 1 - d^j\big(1 - \alpha_N^N(u)\big) \quad (c^i > 0, d^j > 0;\ i, j = 1, \ldots, N-1)$$

gegeben. Dann gibt es zu je $N+1$ gegebenen Kontrollpunkten genau eine gleichförmig berührende cc-Kurve mit diesen Schnittfunktionen.

Eine daraus abgeleitete Aussage beinhaltet das folgende

Korollar 2.4.4 Zu je $N+1$ Kontrollpunkten und einer Schnittfunktion $\alpha_N^N(u),\ u \in [a,b]$ gibt es eine $2(N-1)$-parametrige Schar von gleichförmig berührenden cc-Kurven mit den Parametern $c^1, d^1, c^2, d^2, \ldots, c^{N-1}, d^{N-1}$ aus Satz 2.4.3.

Wir schließen dieses Kapitel mit drei Sätzen, die Beziehungen zwischen verschiedenen Klassen von cc-Kurven herstellen. Satz 2.4.2 zeigt, dass die Bindefunktionen in (2.4) einer gleichförmig berührenden cc-Kurve Polynome vom Grad N in der Hauptschnittfunktion $\alpha_N^N(u)$ sind. Nach Bemerkung 2.1.2 erhalten wir aber dieselbe corner cutting-Kurve, wenn wir die Hauptschnittfunktion $\alpha_N^N(u)$ durch die lineare Schnittfunktion

$$\overline{\alpha}_N^N(v) = \alpha_N^N(a) + (v-a) \cdot \frac{\alpha_N^N(b) - \alpha_N^N(a)}{b-a}, \ v \in [a,b]$$

ersetzen. Damit folgt, dass nach dem Parameterwechsel

$$g_N^N : \begin{cases} [a,b] & \to \qquad\qquad [a,b] \\ \quad v & \mapsto \ u = \left(\alpha_N^N\right)^{-1}\left(\overline{\alpha}_N^N(v)\right) \end{cases}$$

alle Schnittfunktionen $\alpha_j^i(v)$ $(1 \le i \le j \le N)$ linear sind. Somit gilt der

Satz 2.4.5 Jede gleichförmig berührende cc-Kurve ist eine lineare cc-Kurve.

Aus Definition 2.4.1, Satz 2.3.3 und Satz 2.4.5 folgt damit

Satz 2.4.6 Eine cc-Kurve c gemäß (2.4) ist genau dann gleichförmig berührend, wenn sie linear und vollständig berührend ist.

Ferner ist eine gleichförmig berührende cc-Kurve nach Satz 2.4.3 und Satz 2.4.5 (zu $N+1$ gegebenen Kontrollpunkten) eindeutig bestimmt, wenn die Bilder $\alpha_N^N(a)$ und $\alpha_N^N(b)$ der Hauptschnittfunktion $\alpha_N^N(u)$ in den Randpunkten des Parameterintervalls und je ein Bild der Schnittfunktionen

$$\alpha_N^1(u), \alpha_N^2(u), \ldots, \alpha_N^{N-1}(u); \alpha_{N-1}^{N-1}(u), \alpha_{N-2}^{N-2}(u), \ldots, \alpha_1^1(u)$$

festgelegt sind. Mit Satz 2.2.1 folgt somit der

Satz 2.4.7 Zu N Kontrollpunkten $B_0, \ldots, B_N \in \mathbb{E}^3$ und jeder Hauptschnittfunktion $\alpha_N^N(u)$ (mit $\alpha_N^N(a) = 0$ und $\alpha_N^N(b) = 1$) gibt es genau eine interpolierende, gleichförmig berührende cc-Kurve.

Im Satz 3.1.3 werden wir sehen, dass für das Parameterintervall $[a, b] = [0, 1]$ die einzige cc-Kurve mit den Eigenschaften aus Satz 2.4.7 eine Bézier-Kurve ist.

Kapitel 3

Bézier-, B-Spline- und corner cutting-Kurven

Wir untersuchen im vorliegenden Kapitel die Zusammenhänge zwischen cc-Kurven und zwei Arten von klassischen Freiformkurven — Bézier- und B-Spline-Kurven.

3.1 Bézier-Kurven als corner cutting-Kurven

Seien $N \in \mathbb{N}$, $B_0, \ldots, B_N \in \mathbb{E}^3$ und $B_i^N(u)$ $(i = 0, \ldots, N)$ die Bernsteinpolynome

$$B_i^N(u) = \binom{N}{i}(1-u)^{N-i}u^i \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Dann ist die Bézier-Kurve d vom Grad N zu den Kontrollpunkten $B_0, \ldots, B_N$ gegeben durch

$$d: \boldsymbol{x}(u) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(u)\boldsymbol{b}_i, \; u \in [0,1] \tag{3.1}$$

(siehe zum Beispiel [AUM1] oder [PIE]).

Lemma 3.1.1 Sind für $1 \le i \le j \le N$ die Schnittfunktionen gegeben durch $\alpha_j^i(u) = \alpha(u)$, so erhält man durch den Algorithmus (2.4) die Bindefunktionen

$$f_k(u) = \binom{N}{k}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-k}\big(\alpha(u)\big)^k, \; (k = 0, \ldots, N).$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach N.

Für $N = 1$ gilt

$$A_N^1(u) = \begin{pmatrix} 1-\alpha(u) \\ \\ \alpha(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{1}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^1 \alpha(u)^0 \\ \\ \binom{1}{1}\big(1-\alpha(u)\big)^0 \alpha(u)^1 \end{pmatrix}.$$

Wir schließen von $N-1$ auf N, es gelte also

$$A_{N-1}^1(u)\cdots A_{N-1}^{N-1}(u) = \begin{pmatrix} \binom{N-1}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-1}\alpha(u)^0 \\ \vdots \\ \binom{N-1}{N-1}\big(1-\alpha(u)\big)^0\alpha(u)^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A_{N-1}^{i-1}(u) = A_N^i(u)$ unter der Voraussetzung $\alpha_j^i(u) = \alpha(u)$ und damit ist mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A_N^1(u)\cdots A_N^N(u) &= A_N^1(u)A_{N-1}^1(u)\cdots A_{N-1}^{N-1}(u) \\ &= \begin{pmatrix} 1-\alpha(u) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha(u) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha(u) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{N-1}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-1}\alpha(u)^0 \\ \vdots \\ \binom{N-1}{N-1}\big(1-\alpha(u)\big)^0\alpha(u)^{N-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\binom{N-1}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-1}\big(1-\alpha(u)\big) \\
\binom{N-1}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-1}\alpha(u) + \binom{N-1}{1}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-2}\alpha(u)\big(1-\alpha(u)\big) \\
\vdots \\
\Big(\binom{N-1}{k-1}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-k}\alpha(u)^{k-1}\alpha(u) \\
+\binom{N-1}{k}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-k-1}\alpha(u)^{k}\big(1-\alpha(u)\big)\Big) \\
\vdots \\
\binom{N-1}{N-2}\big(1-\alpha(u)\big)\alpha(u)^{N-2} + \binom{N-1}{N-1}\alpha(u)^{N-1}\big(1-\alpha(u)\big) \\
\binom{N-1}{N-1}\alpha(u)^{N-1}\alpha(u)
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\binom{N}{0}\big(1-\alpha(u)\big)^{N} \\
\binom{N}{1}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-1}\alpha(u)^{1} \\
\vdots \\
\binom{N}{k}\big(1-\alpha(u)\big)^{N-k}\alpha(u)^{k} \\
\vdots \\
\binom{N}{N-1}\big(1-\alpha(u)\big)^{1}\alpha^{N-1} \\
\binom{N}{N}\alpha(u)^{N}
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow \ (k+1)\text{-te Zeile,} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wählen wir die Schnittfunktionen speziell als $\alpha_j^i(u) = \alpha(u) := u$, so erhalten wir nach Lemma 3.1.1 als Bindefunktionen $f_k(u)$ die Bernsteinpolynome $B_k^N(u),\ k = 0, \dots, N$:

$$
f_k(u) = \binom{N}{k}(1-u)^{N-k}u^k = B_k^N(u).
$$

Da für diese Wahl der Schnittfunktionen die Bedingungen (2.10) und (2.11) erfüllt sind, ergibt sich sofort der

Satz 3.1.2 Jede Bézier-Kurve (3.1) ist eine gleichförmig berührende cc-Kurve.

Wir erinnern uns an Satz 3.4.7 und folgern den

Satz 3.1.3 Für eine cc-Kurve gemäß (2.4) ist die einzige interpolierende, gleichförmig berührende cc-Kurve eine Bézier-Kurve.

Beweis: Durch eine lineare Parametertransformation lässt sich das Parameterintervall als $[a,b]=[0,1]$ festlegen. Mittels Satz 3.1.2 und Satz 3.4.7 folgt damit unmittelbar die Behauptung. □

3.2 B-Spline-Kurven als corner cutting-Kurven

Wir betrachten eine weitere wichtige Klasse der Freiformkurven. Die B-Spline-Kurven wurde (noch nicht als Verallgemeinerung der Bézier-Kurven) bereits früh eingeführt (siehe [BOO1]). Erst etwas später erkannte man die vollständigen Beziehungen zwischen Bézier- und B-Spline-Kurven (und -Flächen) (siehe [RIE1] und [GOR]).

Die Bindefunktionen werden wie folgt definiert. Für $N, K \in \mathbb{N}$, $N \geq K$ und die Knoten

$$u_0 \leq \ldots \leq u_K \leq \ldots \leq u_N \leq \ldots \leq u_{N+K+1}$$

definieren wir die normalisierten B-Splines (vom Grad K mit dem Knotenvektor $\boldsymbol{u} = (u_0 \ \ldots \ u_{N+K+1})^T$) durch

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in [u_i, u_{i+1}[\\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 0, \ldots, N+K)$$

und für $r = 1, \ldots, N+K$ und $i = 0, \ldots, N+K-r$ durch

$$N_i^r(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+r} - u_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{u_{i+r+1} - u}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u).$$

Seien nun $B_0, \ldots, B_N \in \mathbb{E}^3$ Kontrollpunkte und $N_i^K(u)$ $(i = 0, \ldots, N)$ (normalisierte) B-Splines. Dann ist die B-Spline-Kurve e vom Grad K mit dem Knotenvektor $\boldsymbol{u}$ zu den Kontrollpunkten $B_0, \ldots, B_N$ gegeben durch

$$e: \boldsymbol{x}(u) = \sum_{i=0}^{N} N_i^K(u) \boldsymbol{b}_i, \ \ u \in [u_K, u_{N+1}]. \tag{3.2}$$

Wir fordern im Folgenden stets, dass der Knotenvektor $\boldsymbol{u}$ höchstens $p \leq K$-fache Knoten besitzt. Damit besitzt e keine Unstetigkeitsstelle und die Betrachtung des abgeschlossenen Intervalls $u \in [u_K, u_{N+1}]$ ist sinnvoll.

3.2.1 B-Spline-Kurven vom Grad N

Wir zeigen, dass eine B-Spline-Kurve gemäß (3.2) mit $K = N$ mit der cc-Kurve vom Grad K übereinstimmt, die die Kontrollpunkte $B_0, \ldots, B_K$, die Matrizen aus (2.3) mit den Schnittfunktionen

$$\alpha_j^i(u) = \frac{u - u_j}{u_{K+j-i+1} - u_j}, \; 1 \leq i \leq j \leq K \tag{3.3}$$

und das Parameterintervall $[a, b] = [u_K, u_{K+1}]$ besitzt.

Zunächst sind die Funktionen $\alpha_j^i(u), \; u \in [u_K, u_{K+1}]$ Schnittfunktionen gemäß (2.1) und (2.2), da wegen $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_K < u_{K+1} \leq \ldots \leq u_{2K} \leq u_{2K+1}$ für $1 \leq i \leq j \leq K$ mit der Vereinbarung „$\frac{0}{0} = 0$“ (beim Auftreten mehrfacher Knoten)

$$\alpha_j^i(u) \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}_j^i(u) = \frac{1}{u_{K+j-i+1} - u_j} > 0 \;\text{ für }\; u \in [u_K, u_{K+1}]$$

gilt.

Um zu zeigen, dass die B-Spline-Kurve (3.2) eine Darstellung (2.4) als cc-Kurve besitzt, weisen wir auf dem Intervall $[u_K, u_{K+1}[$ die Identität

$$\begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_K(u) \end{pmatrix} = A_K^1(u) \cdots A_K^K(u) \equiv \begin{pmatrix} N_0^K(u) \\ \vdots \\ N_K^K(u) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$\big($vergleiche (3.2) und (2.4)$\big)$ nach. Für $u = u_{K+1}$ folgt die Gleichheit aus Stetigkeitsgründen.

Für $r \in \{1, \ldots, K\}$ und $i \in \{0, \ldots, 2K - r\}$ folgt aus

$$N_i^r(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+r} - u_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{u_{i+r+1} - u}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u)$$

zunächst mit (3.3)

$$N_i^r(u) = \alpha_i^{K-r+1}(u) N_i^{r-1}(u) + \left(1 - \alpha_{i+1}^{K-r+1}(u)\right) N_{i+1}^{r-1}(u) \tag{3.5}$$

(die hier auftretenden Funktionen $\alpha_j^i(u)$ mit $i > j$ spielen nur temporär eine Rolle und beeinflussen unser weiteres Vorgehen nicht, siehe das später folgende Lemma 3.2.1). Für $r = 0$ gilt für alle $u \in [u_K, u_{K+1}[$

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1, & i = K \\ 0, & i \neq K. \end{cases} \tag{3.6}$$

Definiert man zu gegebenem Knotenvektor $\boldsymbol{u}$ für die gemäß (3.3) gegebenen Schnittfunktionen die $(2K-r+1, 2K-r+2)$-Matrizen

$$T^{K-r+1}(u) := \begin{pmatrix} \alpha_0^{K-r+1} & 1-\alpha_1^{K-r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1^{K-r+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_{2K-r}^{K-r+1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2K-r}^{K-r+1} & 1-\alpha_{2K-r+1}^{K-r+1} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$(r = 1, \ldots, K)$, so lautet (3.5) in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} N_0^r(u) \\ \vdots \\ N_{2K-r}^r(u) \end{pmatrix} = T^{K-r+1}(u) \begin{pmatrix} N_0^{r-1}(u) \\ \vdots \\ N_{2K-r+1}^{r-1}(u) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $i = K - r + 1$, so schreibt sich für $i \in \{1, \ldots, K\}$ die $(K+i, K+i+1)$-Matrix $T^i(u)$ als

$$T^i(u) := \begin{pmatrix} \alpha_0^i & 1-\alpha_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1^i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_{K+i-1}^i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{K+i-1}^i & 1-\alpha_{K+i}^i \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Für $r = K$ erhält man damit für $u \in [u_K, u_{K+1}[$

$$\begin{pmatrix} N_0^K(u) \\ \vdots \\ N_K^K(u) \end{pmatrix} = T^1(u) \begin{pmatrix} N_0^{K-1}(u) \\ \vdots \\ N_{K+1}^{K-1}(u) \end{pmatrix} = \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&= T^1(u)\cdots T^K(u)\begin{pmatrix} N_0^0(u) \\ \vdots \\ N_{2K}^0(u) \end{pmatrix} \\
&\overset{(3.6)}{=} T^1(u)\cdots T^K(u)\cdot \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{(K+1)-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \\
&= \big(T^1(u)\cdots T^K(u)\big)[1,\ldots,K+1|K+1]
\end{aligned}
$$

(zur Schreibweise von Untermatrizen und insbesondere zu Zeilen und Spalten einer Matrix siehe Kapitel 1). Damit erhält die nachzuweisende Identität (3.4) die Gestalt

$$A_K^1(u)\cdots A_K^K(u) = \big(T^1(u)\cdots T^K(u)\big)[1,\ldots,K+1|K+1]. \tag{3.9}$$

Wir beweisen allgemein folgendes

Lemma 3.2.1 Sei die $(K+k, 2K+1)$-Matrix T_k für $k = K,\ldots,1$ definiert durch

$$T_k(u) := T^k(u)\cdots T^K(u)$$

$\big($siehe (3.8)$\big)$. Dann gilt mit (2.3) für $k = K,\ldots,1$

$$
\begin{aligned}
T_k[k,\ldots,K+1|K+1] &= A_K^k(u)\cdots A_K^K(u), \\
T_k[l|K+1] &= 0,\ l\in\{\underbrace{1,\ldots,k-1,K+2,\ldots,K+k}_{\text{leer für } k=1}\}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach k.

Für $k = K$ gilt nach Definition

$$T_K[K, K+1|K+1] \;=\; T^K[K, K+1|K+1] = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_K^K(u) \\ \\ \alpha_K^K(u) \end{pmatrix} = A_K^K(u),$$

$$T_K[l|K+1] \;=\; 0,\; l \in \{1, \ldots, K-1, K+2, \ldots 2K\}.$$

Induktionsschluss von k auf $k-1$ ($k \in \{K, \ldots, 2\}$).

Die Induktionsbehauptung gelte für ein $k \in \{K, \ldots, 2\}$. Zu zeigen ist

$$T_{k-1}[k-1, \ldots, K+1|K+1] \;=\; A_K^{k-1}(u) \cdots A_K^K(u),$$

$$T_{k-1}[l|K+1] \;=\; 0,\; l \in \{\underbrace{1, \ldots, k-2, K+2, \ldots, K+k-1}_{\text{leer für } k=2}\}.$$

Es ist nach Induktionsvoraussetzung

$$T_{k-1}[1, \ldots, K+k-1|K+1]$$

$$= \big(T^{k-1}T_k\big)[1, \ldots, K+k-1|K+1] = T^{k-1} \cdot T_k[1, \ldots, K+k|K+1]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0^{k-1} & 1-\alpha_1^{k-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_{k-2}^{k-1} & 1-\alpha_{k-1}^{k-1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_K^{k-1} & 1-\alpha_{K+1}^{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{K+k-2}^{k-1} & 1-\alpha_{K+k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_k[k|K+1] \\ \vdots \\ T_k[K+1|K+1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (1-\alpha_{k-1}^{k-1})T_k[k|K+1] \\ \alpha_{k-1}^{k-1}\cdot T_k[k|K+1] + (1-\alpha_{k}^{k-1})T_k[k+1|K+1] \\ \vdots \\ \alpha_{K-1}^{k-1}\cdot T_k[K|K+1] + (1-\alpha_{K}^{k-1})T_k[K+1|K+1] \\ \alpha_{K}^{k-1}\cdot T_k[K+1|K+1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow (k-1)-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow (K+1)-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Damit ist

$$T_{k-1}[k-1,\ldots,K+1|K+1]$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha_{k-1}^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{k-1}^{k-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_{K}^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{K}^{k-1} \end{pmatrix} \cdot T_k[k,\ldots,K+1|K+1]$$

$$= A_K^{k-1}(u)\cdot T_k[k,\ldots,K+1|K+1] \overset{I.V.}{=} A_K^{k-1}(u)\cdots A_K^{K}(u)$$

und

$$T_{k-1}[l|K+1] = 0,\ l \in \{\underbrace{1,\ldots,(k-1)-1, K+2,\ldots,K+(k-1)}_{\text{leer für } k-1=1}\}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Aus dem Lemma folgt für $k = 1$ die Identität (3.9).

Wegen

$$\alpha_{j+1}^{i}(u) \cdot \dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u) \overset{(3.3)}{=} \frac{u - u_{j+1}}{u_{K+j-i+2} - u_{j+1}} \cdot \frac{1}{u_{K+j-i+1} - u_{j+1}} \overset{(3.3)}{=} \dot{\alpha}_{j+1}^{i}(u) \cdot \alpha_{j+1}^{i+1}(u)$$

und

$$\big(1 - \alpha_{j}^{i}(u)\big) \cdot \dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u) \overset{(3.3)}{=} \frac{u_{K+j-i+1} - u}{u_{K+j-i+1} - u_{j}} \cdot \frac{1}{u_{K+j-i+1} - u_{j+1}} \overset{(3.3)}{=} \dot{\alpha}_{j}^{i}(u)\big(1 - \alpha_{j+1}^{i+1}(u)\big)$$

$(1 + N_0 \leq i \leq j \leq K - 1)$ sind die Bedingungen (2.10) und (2.11) an eine gleichförmig berührende cc-Kurve erfüllt. Es gilt insgesamt der

Satz 3.2.2 Jede B-Spline-Kurve (3.2) vom Grad N ist eine gleichförmig berührende cc-Kurve.

Wir illustrieren den vorhergehenden Satz am

Beispiel 3.2.1 Wir betrachten eine B-Spline-Kurve vom Grad $K = N = 2$ mit den Kontrollpunkten $B_0, B_1, B_2 \in \mathbf{E}^3$ und einem Knotenvektor $\boldsymbol{u} = (u_0 \ \ldots \ u_5)^T$. Für die zugehörigen B-Splines – eingeschränkt auf das Parameterintervall $[u_2, u_3]$ – erhalten wir mit (3.3)

$$\begin{aligned}
N_0^2(u) &= \frac{(u_3 - u)^2}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} = \big(1 - \alpha_1^1(u)\big)\big(1 - \alpha_2^2(u)\big), \\
N_1^2(u) &= \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} \cdot \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} \cdot \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} \\
&= \alpha_1^1(u)\big(1 - \alpha_2^2(u)\big) + \big(1 - \alpha_2^1(u)\big)\alpha_2^2(u), \\
N_2^2(u) &= \frac{(u - u_2)^2}{(u_4 - u_2)(u_3 - u_2)} = \alpha_2^1(u)\alpha_2^2(u).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$T_2 = T^2 = \begin{pmatrix} \alpha_0^2(u) & 1 - \alpha_1^2(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2(u) & 1 - \alpha_2^2(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^2(u) & 1 - \alpha_3^2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3^2(u) & 1 - \alpha_4^2(u) \end{pmatrix}$$

und damit

$$T_2[2,3|3] = A_2^2,\ T_2[1,4|3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$T_1[1,2,3|3] = T^1T^2[1,2,3|3] = \begin{pmatrix} \big(1-\alpha_1^1(u)\big)\big(1-\alpha_2^2(u)\big) \\ \alpha_1^1(u)\big(1-\alpha_2^2(u)\big) + \big(1-\alpha_2^1(u)\big)\alpha_2^2(u) \\ \alpha_2^1(u)\alpha_2^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0^2(u) \\ N_1^2(u) \\ N_2^2(u) \end{pmatrix}$$

$$= A_2^1A_2^2 = \begin{pmatrix} f_0(u) \\ f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.2.1 Es ist bekannt, dass jede Bézier-Kurve vom Grad N eine B-Spline-Kurve vom Grad N ist, deren Knoten durch

$$u_1 = \ldots = u_N = 0,\ u_{N+1} = \ldots = u_{2N} = 1$$

gegeben sind. In diesem Sinn erhält der Satz 3.2.2 als Spezialfall die Aussage des Satzes 3.1.2.

3.2.2 Beliebige B-Spline-Kurven

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass allgemeine B-Spline-Kurven (mit einem Grad $K < N$) Vereinigung von gleichförmig berührenden cc-Kurven sind.

Wir setzen also eine B-Spline-Kurve gemäß (3.2) mit $K < N$ voraus und benutzen folgende Bezeichnungen:

$$P := |\{u_K, \ldots, u_{N+1}\}| - 2,$$

$$N_j := \sum_{i=0}^{j} n_i \quad (j = 0, \ldots, P) \quad \text{mit } n_i \in \{0, \ldots, K\}.$$

Die n_k $(k = 0, \ldots, P)$ sind dabei für $k = 0$ durch die Beziehung

$$u_K = u_{K+1} = \ldots = u_{K+N_0} \neq u_{K+N_0+1} (= u_{K+n_0+1})$$

beziehungsweise für $k = 1, \ldots, P$ durch

$$u_{K+N_{k-1}+1} = \ldots = u_{K+\underbrace{N_{k-1}+n_k}_{=N_k}} \neq u_{K+\underbrace{N_{k-1}+n_k}_{=N_k}+1}$$

festgelegt. Also ist der Knoten u_K ein (n_0+1)-facher Knoten, während (für $P > 0$) die Knoten $u_{K+N_{i-1}+1}$ $(i = 1, \ldots, P)$ jeweils n_i-fache Knoten sind. In dieser Notation lautet der Knotenvektor

$$\begin{array}{rcl}
(\ldots, u_K & = & \ldots = u_{K+N_0}, \\
u_{K+N_0+1} & = & \ldots = u_{K+N_1}, \\
u_{K+N_1+1} & = & \ldots = u_{K+N_2}, \\
& \ldots & \\
u_{K+N_{P-1}+1} & = & \ldots = u_{K+N_P}, \\
u_{K+N_P+1} & = & \ldots = u_{N+1}, \ldots)^T
\end{array}$$

Im Folgenden konstruieren wir $P+1$ gleichförmig berührende cc-Kurvensegmente, deren Vereinigung die durch (3.2) gegebene B-Spline-Kurve liefert.

Schritt 0

Wir konstruieren zunächst eine cc-Kurve

$$c_0 \ : \ \boldsymbol{x}(u), \ u \in [u_{K+N_0}, u_{K+N_0+1}]$$

vom Grad K mit den Kontrollpunkten $B_{N_0}, \ldots, B_{K+N_0}$ (vgl. Abbildung 3.1) und betrachten dazu die Funktionen

$$\alpha_j^i \ : \ \begin{cases} [u_{K+N_0}, u_{K+N_0+1}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{u - u_j}{u_{K+N_0+j-i+1} - u_j} \end{cases} \tag{3.10}$$

$(1 + N_0 \leq i \leq j \leq K + N_0)$. Es gilt

$$\alpha_j^i(u) \in [0,1] \text{ für alle } u \in [u_{K+N_0}, u_{K+N_0+1}]$$

und

$$\dot{\alpha}_j^i(u) = \frac{1}{u_{K+N_0+j-i+1} - u_j} > 0 \quad \text{für alle } u \in [u_{K+N_0}, u_{K+N_0+1}],$$

weshalb die Funktionen α_j^i in (3.10) Schnittfunktionen sind.

$$B_0, \ldots, B_{N_0-1}, \underline{B_{N_0}, \ldots, B_{K+N_0}}, B_{K+N_0+1}, \ldots, B_N$$

$$u_0, \ldots, u_{N_0}, \underline{u_{1+N_0}, \ldots, u_{2K+N_0}}, u_{2K+N_0+1}, \ldots, u_{N+K+1}$$

Abbildung 3.1: Kontrollpunkte und Knoten der Kurve c_0 (unterstrichen)

Somit kann mit ihnen eine cc-Kurve

$$c_0: \ \boldsymbol{x}(u) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{N_0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{K+N_0} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\alpha_{1+N_0}^{1+N_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1+N_0}^{1+N_0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_{K+N_0}^{1+N_0} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{K+N_0}^{1+N_0} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1-\alpha_{K+N_0}^{K+N_0} \\ \alpha_{K+N_0}^{K+N_0} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{b}_{N_0} \ \ldots \ \boldsymbol{b}_{K+N_0})\, A_{K+N_0}^{1+N_0}(u) \cdots A_{K+N_0}^{K+N_0}(u), \quad u \in [u_{K+N_0}, u_{K+N_0+1}]$$

definiert werden (man beachte die zum besseren Verständnis gewählte, von (2.4) abweichende Indizierung, die wir in diesem Abschnitt bei den auftretenden corner cutting-Kurven in ähnlicher Art des Öftern verwenden werden).

Wegen

$$\alpha_{j+1}^i(u) \cdot \dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u) = \frac{u - u_{j+1}}{u_{K+N_0+j-i+2} - u_{j+1}} \cdot \frac{1}{u_{K+N_0+j-i+1} - u_{j+1}} = \dot{\alpha}_{j+1}^i(u) \cdot \alpha_{j+1}^{i+1}(u)$$

und

$$\big(1-\alpha_j^i(u)\big)\cdot\dot{\alpha}_{j+1}^{i+1}(u)=\frac{u_{K+N_0+j-i+1}-u}{u_{K+N_0+j-i+1}-u_j}\cdot\frac{1}{u_{K+N_0+j-i+1}-u_{j+1}}=\dot{\alpha}_j^i(u)\big(1-\alpha_{j+1}^{i+1}(u)\big)$$

$(1+N_0\leq i\leq j\leq K+N_0-1)$ sind die Bedingungen (2.10) und (2.11) an eine gleichförmig berührende cc-Kurve erfüllt.

Wegen der Äquivalenz der Aussagen (3.4) und (3.9) folgt aus dem Lemma 3.2.1, dass für eine gemäß (2.4) gegebene cc-Kurve mit den durch (3.3) gegebenen Schnittfunktionen einer B-Spline-Kurve vom Grad $K=N$ auf dem Parameterintervall $[u_K,u_{K+1}]$

$$A_K^1(u)\cdots A_K^K(u)=\begin{pmatrix}N_0^K(u)\\ \vdots\\ N_K^K(u)\end{pmatrix}$$

gilt.

Wegen

$$\begin{aligned}N_{i+N_0}^r(u)&=\frac{u-u_{i+N_0}}{u_{i+N_0+r}-u_{i+N_0}}N_{i+N_0}^{r-1}(u)+\frac{u_{i+N_0+r+1}-u}{u_{i+N_0+r+1}-u_{i+N_0+1}}N_{i+N_0+1}^{r-1}(u)\\&=\alpha_{i+N_0}^{K+N_0-r+1}(u)N_{i+N_0}^{r-1}(u)+\big(1-\alpha_{i+N_0+1}^{K+N_0-r+1}(u)\big)N_{i+N_0+1}^{r-1}(u).\end{aligned}$$

ergibt sich hieraus mit Hilfe der Indextransformation

$$\alpha_j^i\hookrightarrow\alpha_{j+N_0}^{i+N_0}$$

$$N_i^r\hookrightarrow N_{i+N_0}^r$$

$(r\in\{1,\ldots,K\},\ i\in\{0,\ldots,2K-r\})$ auf dem Intervall $[u_{K+N_0},u_{K+N_0+1}]$

$$A_{K+N_0}^{1+N_0}(u)\cdots A_{K+N_0}^{K+N_0}(u)=\begin{pmatrix}N_{N_0}^K(u)\\ \vdots\\ N_{K+N_0}^K(u)\end{pmatrix}.$$

Da sich $e\big|_{[u_{K+N_0},u_{K+1+N_0}]}$ schreiben lässt als

$$e\big|_{[u_{K+N_0},u_{K+1+N_0}]}:\ \boldsymbol{x}(u)=\sum_{i=N_0}^{K+N_0}N_i^K(u)\boldsymbol{b}_i$$

ist damit

$$e\big|_{[u_{K+N_0},u_{K+1+N_0}]} = c_0$$

nachgewiesen.

Schritt 1

Nun konstruieren wir eine corner cutting-Kurve

$$c_1 \ : \ \boldsymbol{x}(u), \ u \in [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}]$$

vom Grad K mit den Kontrollpunkten $B_{N_1}, \ldots, B_{K+N_1}$ und betrachten dazu die Funktionen

$$\alpha_j^i \ : \begin{cases} [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{u-u_j}{u_{K+N_1+j-i+1}-u_j} \end{cases} \tag{3.11}$$

$(1 + N_1 \leq i \leq j \leq K + N_1)$. Es gilt

$$\alpha_j^i(u) \in [0,1] \text{ für alle } [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}]$$

und

$$\dot{\alpha}_j^i(u) = \frac{1}{u_{K+N_1+j-i+1}-u_j} > 0 \text{ für alle } [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}],$$

weshalb die Funktionen α_j^i in (3.11) Schnittfunktionen sind.

Damit stellen wir c_1 als corner cutting-Kurve gemäß (2.4) mit Hilfe der Schnittfunktionen aus (3.11) (bis auf die vereinbarungsgemäß abgeänderte Indizierung) wie folgt dar:

$$\begin{aligned} c_1 : \ \boldsymbol{x}(u) \ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{N_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{K+N_1} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\alpha_{1+N_1}^{1+N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1+N_1}^{1+N_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_{K+N_1}^{1+N_1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{K+N_1}^{1+N_1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1-\alpha_{K+N_1}^{K+N_1} \\ \alpha_{K+N_1}^{K+N_1} \end{pmatrix} \\ &= \ (\boldsymbol{b}_{N_1} \ \ldots \ \boldsymbol{b}_{K+N_1})\, A_{K+N_1}^{1+N_1}(u) \cdots A_{K+N_1}^{K+N_1}(u), \ u \in [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}]. \end{aligned}$$

Die Kurve c_1 können wir uns aus c_0 entstanden denken, wenn wir die Kontrollpunkte B_l $(l = n_0, \ldots, K + n_0)$ durch B_{l+n_1} und die Knoten u_m $(m = 1 + n_0, \ldots, 2K + n_0)$ durch u_{m+n_1} ersetzen (siehe Abbildung 3.2).

$$B_0, \ldots, B_{N_0-1}, \overline{B_{N_0}, \ldots, \underline{B_{N_1}, \ldots, B_{K+N_0}}}\underline{, \ldots, B_{K+N_1}}, B_{K+N_1+1}, \ldots, B_N$$

$$u_0, \ldots, u_{N_0}, \overline{u_{1+N_0}, \ldots, \underline{u_{1+N_1}, \ldots, u_{2K+N_0}}}\underline{, \ldots, u_{2K+N_1}}, u_{2K+N_1+1}, \ldots, u_{N+K+1}$$

Abbildung 3.2: Kontrollpunkte und Knoten der Kurve c_0 (überstrichen) und der Kurve c_1 (unterstrichen)

Wegen

$$\alpha^i_{j+1}(u) \cdot \dot\alpha^{i+1}_{j+1}(u) = \frac{u - u_{j+1}}{u_{K+N_1+j-i+2} - u_{j+1}} \cdot \frac{1}{u_{K+N_1+j-i+1} - u_{j+1}} = \dot\alpha^i_{j+1}(u) \cdot \alpha^{i+1}_{j+1}(u)$$

und

$$\big(1 - \alpha^i_j(u)\big) \cdot \dot\alpha^{i+1}_{j+1}(u) = \frac{u_{K+N_1+j-i+1} - u}{u_{K+N_1+j-i+1} - u_j} \cdot \frac{1}{u_{K+N_1+j-i+1} - u_{j+1}} = \dot\alpha^i_j(u)\big(1 - \alpha^{i+1}_{j+1}(u)\big)$$

$(1 + N_1 \leq i \leq j \leq K + N_1 - 1)$ genügt die Kurve den Bedingungen (2.10) und (2.11) an die Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Kurve.

Wegen

$$\begin{aligned} N^r_{i+N_1}(u) &= \frac{u - u_{i+N_1}}{u_{i+N_1+r} - u_{i+N_1}} N^{r-1}_{i+N_1}(u) + \frac{u_{i+N_1+r+1} - u}{u_{i+N_1+r+1} - u_{i+N_1+1}} N^{r-1}_{i+N_1+1}(u) \\ &= \alpha^{K+N_1-r+1}_{i+N_1}(u) N^{r-1}_{i+N_1}(u) + \big(1 - \alpha^{K+N_1-r+1}_{i+N_1+1}(u)\big) N^{r-1}_{i+N_1+1}(u), \\ & \qquad r \in \{1, \ldots, K\},\ i \in \{0, \ldots, 2K - r\} \end{aligned}$$

ergibt sich in Analogie zum Vorgehen beim Schritt 0 mittels der Indextransformation

$$\alpha^i_j \hookrightarrow \alpha^{i+N_1}_{j+N_1}$$

$$N^r_i \hookrightarrow N^r_{i+N_1}$$

aus (3.4), dass für alle $u \in [u_{K+N_1}, u_{K+1+N_1}]$

$$A^{1+N_1}_{K+N_1}(u) \cdots A^{K+N_1}_{K+N_1}(u) = \begin{pmatrix} N^K_{N_1}(u) \\ \vdots \\ N^K_{K+N_1}(u) \end{pmatrix}$$

gilt.

Da sich $e\big|_{[u_{K+N_1}, u_{K+1+N_1}]}$ schreiben lässt als

$$e\big|_{[u_{K+N_1}, u_{K+1+N_1}]} : \ \boldsymbol{x}(u) = \sum_{i=N_1}^{K+N_1} N_i^K(u)\boldsymbol{b}_i$$

haben wir somit

$$e\big|_{[u_{K+N_1}, u_{K+1+N_1}]} = c_1.$$

Schritt p ($p \in \{1, \ldots, P\}$)

Allgemein konstruieren wir eine corner cutting-Kurve

$$c_p \ : \ \boldsymbol{x}(u), \ u \in [u_{K+N_p}, u_{K+N_p+1}]$$

vom Grad K mit den Kontrollpunkten $B_{N_p}, \ldots, B_{K+N_p}$ und betrachten dazu die Funktionen

$$\alpha_j^i \ : \ \begin{cases} [u_{K+N_p}, u_{K+N_p+1}] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{u - u_j}{u_{K+N_p+j-i+1} - u_j} \end{cases} \tag{3.12}$$

($1 + N_p \leq i \leq j \leq K + N_p$). Es gilt

$$\alpha_j^i(u) \in [0, 1] \text{ für alle } [u_{K+N_p}, u_{K+N_p+1}]$$

und

$$\dot{\alpha}_j^i(u) = \frac{1}{u_{K+N_p+j-i+1} - u_j} > 0 \text{ für alle } [u_{K+N_p}, u_{K+N_p+1}].$$

Mit der getroffenen Indizierungsvereinbarung ist die Kurve c_p mit den Schnittfunktionen aus (3.12) eine corner cutting-Kurve gemäß (2.4) mit der Hauptschnittfunktion

$$\alpha_{K+N_p}^{K+N_p}(u) = \frac{u - u_{K+N_p}}{u_{K+N_p+1} - u_{K+N_p}}$$

und einer Darstellung

$$c_p : \ \boldsymbol{x}(u) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{N_p} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{K+N_p} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{1+N_p}^{1+N_p} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1+N_p}^{1+N_p} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 - \alpha_{K+N_p}^{1+N_p} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{K+N_p}^{1+N_p} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{K+N_p}^{K+N_p} \\ \alpha_{K+N_p}^{K+N_p} \end{pmatrix}$$

$$= \big(\boldsymbol{b}_{N_p} \ \dots \ \boldsymbol{b}_{K+N_p}\big)\, A^{1+N_p}_{K+N_p}(u)\cdots A^{K+N_p}_{K+N_p}(u),\ \ u \in [u_{K+N_p}, u_{K+N_p+1}].$$

Die Kurve c_p können wir uns aus c_{p-1} entstanden denken, wenn wir die Kontrollpunkte B_l $(l = N_{p-1}, \dots, K + N_{p-1})$ durch B_{l+n_p} und die Knoten u_m $(m = 1 + N_{p-1}, \dots, 2K + N_{p-1})$ durch u_{m+n_p} ersetzen (siehe Abbildung 3.3).

$$B_0, \dots, B_{N_{p-1}-1}, \overline{B_{N_{p-1}}, \dots,}\,\overline{\underline{B_{N_p}, \dots, B_{K+N_{p-1}}}}\underline{, \dots, B_{K+N_p}}, B_{K+N_p+1}, \dots, B_N$$

$$u_0, \dots, u_{N_{p-1}}, \overline{u_{1+N_{p-1}}, \dots,}\,\overline{\underline{u_{1+N_p}, \dots, u_{2K+N_{p-1}}}}\underline{, \dots, u_{2K+N_p}}, u_{2K+N_p+1}, \dots, u_{N+K+1}$$

Abbildung 3.3: Kontrollpunkte und Knoten der Kurve c_{p-1} (überstrichen) und der Kurve c_p (unterstrichen)

Wegen

$$\alpha^i_{j+1}(u) \cdot \dot\alpha^{i+1}_{j+1}(u) = \frac{u - u_{j+1}}{u_{K+N_p+j-i+2} - u_{j+1}} \cdot \frac{1}{u_{K+N_p+j-i+1} - u_{j+1}} = \dot\alpha^i_{j+1}(u) \cdot \alpha^{i+1}_{j+1}(u)$$

und

$$\big(1 - \alpha^i_j(u)\big) \cdot \dot\alpha^{i+1}_{j+1}(u) = \frac{u_{K+N_p+j-i+1} - u}{u_{K+N_p+j-i+1} - u_j} \cdot \frac{1}{u_{K+N_p+j-i+1} - u_{j+1}} = \dot\alpha^i_j(u)\big(1 - \alpha^{i+1}_{j+1}(u)\big)$$

$(1+N_p \le i \le j \le K+N_p-1)$ sind die Bedingungen (2.10) und (2.11) an eine gleichförmig berührende cc-Kurve erfüllt.

Wegen

$$N^r_{i+N_p} = \frac{u - u_{i+N_p}}{u_{i+N_p+r} - u_{i+N_p}} N^{r-1}_{i+N_p}(u) + \frac{u_{i+N_p+r+1} - u}{u_{i+N_p+r+1} - u_{i+N_p+1}} N^{r-1}_{i+N_p+1}(u)$$

$(r \in \{1, \dots, K\},\ i \in \{0, \dots, 2K - r\})$ gilt

$$N^r_{i+N_p}(u) = \alpha^{K+N_p-r+1}_{i+N_p}(u) N^{r-1}_{i+N_p}(u) + \big(1 - \alpha^{K+N_p-r+1}_{i+N_p+1}(u)\big) N^{r-1}_{i+N_p+1}(u).$$

Damit ist auf dem Intervall $[u_{K+N_p}, u_{K+1+N_p}]$

$$A^{1+N_p}_{K+N_p}(u)\cdots A^{K+N_p}_{K+N_p}(u) = \begin{pmatrix} N^K_{N_p}(u) \\ \vdots \\ N^K_{K+N_p}(u) \end{pmatrix}.$$

Da sich $e\big|_{[u_{K+N_p}, u_{K+1+N_p}]}$ schreiben lässt als

$$e\big|_{[u_{K+N_p}, u_{K+1+N_p}]}: \ \boldsymbol{x}(u) = \sum_{i=N_p}^{K+N_p} N_i^K(u)\boldsymbol{b}_i$$

ist damit

$$e\big|_{[u_{K+N_p}, u_{K+1+N_p}]} = c_p$$

nachgewiesen.

Insgesamt haben wir also

$$e = \bigcup_{i=0}^{P} c_i$$

und so die B-Spline-Kurve durch $P+1$ gleichförmig berührende cc-Kurven segmentiert.

Sei $n_{\max}$ die maximale Vielfachheit eines Knotens. Dann ist bekannt, dass die zugehörige B-Spline-Kurve vom Grad K eine $C^{K-n_{\max}}$-Kurve ist (siehe zum Beispiel [AUM1], Seite 373).

Betrachten wir die segmentierte Kurve mit den beiden Kurvensegmenten c_q und c_{q+1} für ein $q \in \{0, \dots, P-1\}$, so ergibt sich eine B-Spline-Kurve vom Grad K mit den $K+n_{q+1}+1$ Kontrollpunkten

$$B_{N_q}, \dots, B_{N_{q+1}}, \dots, B_{K+N_q}, \dots, B_{K+N_{q+1}}$$

und dem Knotenvektor $\boldsymbol{u}$ mit den Knoten

$$u_{N_q}, u_{1+N_q}, \dots, u_{1+N_{q+1}}, \dots, u_{2K+N_q}, \dots, u_{2K+N_{q+1}}, u_{2K+N_{q+1}+1},$$

wobei u_{N_q} und $u_{2K+N_{q+1}+1}$ mit $u_{N_q} < u_{1+N_q}$ beziehungsweise $u_{2K+N_{q+1}} < u_{2K+N_{q+1}+1}$ beliebig gewählt seien. Dabei ist $u_{K+N_q+1} = \ldots = u_{K+N_{q+1}}$ ein n_{q+1}-facher Knoten und nach Konstruktion der einzige (mehrfache) Knoten, der im Innern des Parameterintervalls $[u_{K+N_q}, u_{K+N_{q+1}+1}]$ liegt.
Es ist ein bekanntes Ergebnis der B-Spline-Kurventheorie, dass die entstehende Kurve eine $C^{K-n_{q+1}}$-Kurve ist. Für dieses Ergebnis geben wir nun einen weiteren Beweis, den wir mittels des corner cutting-Kalküls führen werden.

Satz 3.2.3 In einer hinreichend kleinen Umgebung der Nahtstelle

$$c_q(u_{K+N_q+1}) = c_{q+1}(u_{K+N_{q+1}})$$

ist die durch c_q und c_{q+1} segmentierte Kurve für $q = 0, \dots, P-1$ eine $C^{K-n_{q+1}}$-Kurve.

Beweis. Wir betrachten für ein $q \in \{0, \ldots, P-1\}$ die beiden Kurvensegmente

$$c_q: \ \boldsymbol{x}(u) = \left(\boldsymbol{b}_{N_q} \ldots \boldsymbol{b}_{K+N_q}\right) A_{K+N_q}^{1+N_q}(u) \cdots A_{K+N_q}^{K+N_q}(u), \ u \in [u_{K+N_q}, u_{K+N_q+1}]$$

und

$$c_{q+1}: \ \boldsymbol{y}(u) \ = \ \left(\boldsymbol{b}_{N_{q+1}} \ldots \boldsymbol{b}_{K+N_{q+1}}\right) \widehat{A}_{K+N_{q+1}}^{1+N_{q+1}}(u) \cdots \widehat{A}_{K+N_{q+1}}^{K+N_{q+1}}(u),$$
$$u \in [u_{K+N_{q+1}}, u_{K+N_{q+1}+1}].$$

Die Schnittfunktionen der $A_{K+N_q}^i$ $(i = 1+N_q, \ldots, K+N_q)$ sind nach (3.12) gegeben durch

$$\alpha_l^k(u) = \frac{u - u_l}{u_{K+N_q+l-k+1} - u_l}, \quad 1 + N_q \leq k \leq l \leq K + N_q, \tag{3.13}$$

die der $\widehat{A}_{K+N_{q+1}}^i$ $(i = 1 + N_{q+1}, \ldots, K + N_{q+1})$ durch

$$\widehat{\alpha}_n^m(u) = \frac{u - u_n}{u_{K+N_{q+1}+n-m+1} - u_n}, \quad 1 + N_{q+1} \leq m \leq n \leq K + N_{q+1}. \tag{3.14}$$

Aus (3.13) ergibt sich insbesondere für $1 + N_q \leq k \leq l \leq K + N_q$ im rechtsseitigen Randpunkt des Parameterintervalls $[u_{K+N_q}, u_{K+N_q+1}]$

$$\alpha_l^k(u_{K+N_q+1}) = \frac{u_{K+N_q+1} - u_l}{u_{K+N_q+l-k+1} - u_l}, \tag{3.15}$$

aus (3.14) für $1 + N_{q+1} \leq m \leq n \leq K + N_q$ im linksseitigen Randpunkt des Parameterintervalls $[u_{K+N_{q+1}}, u_{K+N_{q+1}+1}]$

$$\widehat{\alpha}_n^m(u_{K+N_{q+1}}) = \frac{u_{K+N_{q+1}} - u_n}{u_{K+N_{q+1}+n-m+1} - u_n}. \tag{3.16}$$

Für $m = p + n_{q+1}$ gilt somit für $1 + N_{q+1} \leq p + n_{q+1} \leq n \leq K + N_q$ beziehungsweise gleichbedeutend für $1 + N_q \leq p \leq n - n_{q+1} \leq K + N_q - n_{q+1}$

$$\widehat{\alpha}_n^{p+n_{q+1}}(u_{K+N_{q+1}}) \ = \ \frac{u_{K+N_{q+1}} - u_n}{u_{K+N_q+n-p+1} - u_n}. \tag{3.17}$$

Damit gilt für alle p, n mit $1 + N_q \leq p \leq n - n_{q+1} \leq K + N_q - n_{q+1}$ aber auch

$$\alpha_n^p(u_{K+N_q+1}) = \widehat{\alpha}_n^{p+n_{q+1}}(u_{K+N_{q+1}}). \tag{3.18}$$

$$
\begin{pmatrix}
1-\alpha_i^i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
\alpha_i^i & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \\
0 & \ddots & \begin{smallmatrix}1-\alpha^i_{i+n_{q+1}}\\ =1-\widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{i+n_{q+1}}\end{smallmatrix} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \begin{smallmatrix}\alpha^i_{i+n_{q+1}}\\ =\widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{i+n_{q+1}}\end{smallmatrix} & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \begin{smallmatrix}1-\alpha^i_{K+N_q}\\ =1-\widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{K+N_q}\end{smallmatrix} & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \begin{smallmatrix}\alpha^i_{K+N_q}\\ =\widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{K+N_q}\end{smallmatrix} & \ddots & 0 \\
 & & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1-\widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \widehat{\alpha}^{i+n_{q+1}}_{K+N_{q+1}}
\end{pmatrix}
$$

Abbildung 3.4: Die Beziehung der Matrizen $A^i_{K+N_q}$ und $\widehat{A}^{i+n_{q+1}}_{K+N_{q+1}}$ für $i \in \{1+N_q, \dots, K+N_q-n_{q+1}\}$ und $u = u_{K+N_q+1}$ (siehe (3.18)).

Weiter gilt für $i = K+N_q-n_{q+1}+1, \dots, K+N_q$ (man beachte, dass stets $i \geq 1+N_q$ gilt)

$$\alpha^i_{K+N_q}(u_{K+N_q+1}) = \frac{u_{K+N_q+1}-u_{K+N_q}}{u_{2K+2N_q-i+1}-u_{K+N_q}} = 1 \tag{3.19}$$

und für $j = K+N_q+1, \dots, K+N_{q+1}$

$$\widehat{\alpha}^j_{K+N_{q+1}}(u_{K+N_{q+1}}) = \frac{u_{K+N_{q+1}}-u_{K+N_{q+1}}}{u_{2K+2N_{q+1}-j+1}-u_{K+N_q+1}} = 0, \tag{3.20}$$

da $u_{K+N_q+1} = \ldots = u_{K+N_{q+1}} \neq u_{K+N_{q+1}+1}$ ein n_{q+1}-facher Knoten ist.

Für den C^0-Übergang zeigen wir

$$\boldsymbol{x}(u_{K+N_q+1}) = \boldsymbol{y}(u_{K+N_{q+1}}).$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(u_{K+N_q+1}) = \quad & (\boldsymbol{b}_{N_q} \ldots \underline{\boldsymbol{b}_{N_{q+1}} \ldots \boldsymbol{b}_{K+N_q}})A^{1+N_q}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q} \\
= \quad & (\boldsymbol{z}^1_{N_q+1} \ldots \underline{\boldsymbol{z}^1_{N_{q+1}+1} \ldots \boldsymbol{z}^1_{K+N_q}})A^{2+N_q}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \dots \\
&= \quad (\boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q-n_{q+1}} \dots \underline{\boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}}) A^{K+N_q-n_{q+1}+1}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&\overset{(3.19)}{=} \quad \boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(u_{K+N_{q+1}}) &= (\underline{\boldsymbol{b}_{N_{q+1}} \dots \boldsymbol{b}_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{b}_{K+N_{q+1}}) \widehat{A}^{1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\overset{(3.18),(3.21)}{=} (\underline{\boldsymbol{z}^1_{N_{q+1}+1} \dots \boldsymbol{z}^1_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{z}^1_{K+N_{q+1}}) \widehat{A}^{2+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\overset{(3.18)}{=} \dots \\
&\overset{(3.18)}{=} (\underline{\boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_{q+1}}) \widehat{A}^{K+N_q+1}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\overset{(3.20)}{=} \boldsymbol{z}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Sei nun $1 \leq s \leq n_{q+1}$. Zu zeigen bleibt

$$
\frac{d^s}{du^s}\boldsymbol{x}(u_{K+N_q+1}) = \frac{d^s}{du^s}\boldsymbol{y}(u_{K+N_{q+1}}).
$$

Es ist nach (2.9) und aufgrund der Tatsache, dass

$$
\frac{d}{du}\alpha^p_n(u)\Big|_{u=u_{K+N_q+1}} = \frac{d}{du}\hat{\alpha}^{p+n_{q+1}}_n(u)\Big|_{u=u_{K+N_{q+1}}}
\tag{3.23}
$$

für $1 + N_q \leq p \leq n - n_{q+1} \leq K + N_q - n_{q+1}$ gilt (siehe (3.13) und (3.14)):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^s\boldsymbol{x}}{du^s}(u_{K+N_q+1}) \\
&= \frac{N!}{(N-s)!}(\boldsymbol{b}_{N_q} \dots \underline{\boldsymbol{b}_{N_{q+1}} \dots \boldsymbol{b}_{K+N_q}}) \dot{A}^{1+N_q}_{K+N_q} \cdots \dot{A}^{s+N_q}_{K+N_q} A^{s+1+N_q}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&= \frac{N!}{(N-s)!}(\boldsymbol{u}^1_{N_q+1} \dots \underline{\boldsymbol{u}^1_{N_{q+1}+1} \dots \boldsymbol{u}^1_{K+N_q}}) \\
&\quad \cdot \dot{A}^{2+N_q}_{K+N_q} \cdots \dot{A}^{s+N_q}_{K+N_q} A^{s+1+N_q}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \frac{N!}{(N-s)!}(\boldsymbol{u}^s_{N_q+s} \dots \underline{\boldsymbol{u}^s_{N_{q+1}+s} \dots \boldsymbol{u}^s_{K+N_q}})A^{s+1+N_q}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&= \frac{N!}{(N-s)!}(\boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q-n_{q+1}} \dots \underline{\boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}})A^{K+N_q-n_{q+1}+1}_{K+N_q} \cdots A^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&\overset{(3.19)}{=} \frac{N!}{(N-s)!}\boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^s\boldsymbol{y}}{du^s}(u_{K+N_{q+1}}) \\
&\quad = \frac{N!}{(N-s)!}(\underline{\boldsymbol{b}_{N_{q+1}} \dots \boldsymbol{b}_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{b}_{K+N_{q+1}}) \\
&\quad \quad \cdot \dot{\widehat{A}}^{1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \dot{\widehat{A}}^{s+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \widehat{A}^{s+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\quad \overset{(3.23),(3.24)}{=} \frac{N!}{(N-s)!}(\underline{\boldsymbol{u}^1_{N_{q+1}+1} \dots \boldsymbol{u}^1_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{u}^1_{K+N_{q+1}}) \\
&\quad \quad \cdot \dot{\widehat{A}}^{2+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \dot{\widehat{A}}^{s+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \widehat{A}^{s+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\quad \overset{(3.23)}{=} \dots \\
&\quad \overset{(3.23)}{=} \frac{N!}{(N-s)!}(\underline{\boldsymbol{u}^s_{N_{q+1}+s} \dots \boldsymbol{u}^s_{K+N_q}} \dots \boldsymbol{u}^s_{K+N_{q+1}})\widehat{A}^{s+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\quad \overset{(3.18)}{=} \frac{N!}{(N-s)!}(\underline{\boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}} \ \dots \ \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_{q+1}})\widehat{A}^{K+N_q+1}_{K+N_{q+1}} \cdots \widehat{A}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \\
&\quad \overset{(3.20)}{=} \frac{N!}{(N-s)!}\boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{K+N_q}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

(3.24) und (3.25) beweisen damit den $C^{K-n_{q+1}}$-Übergang der Kurven c_q und c_{q+1}. □

Beispiel 3.2.2 Gegeben seien der Knotenvektor $\boldsymbol{u} = (0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 5\ 5\ 6)^T$, die Kontroll-

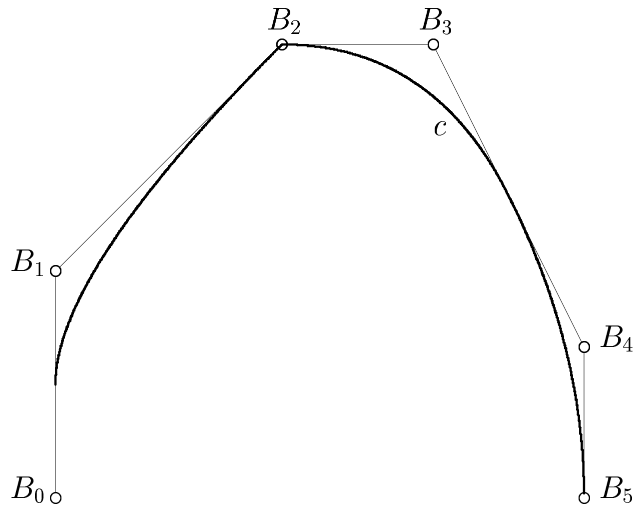


Abbildung 3.5: B-Spline-Kurve ...

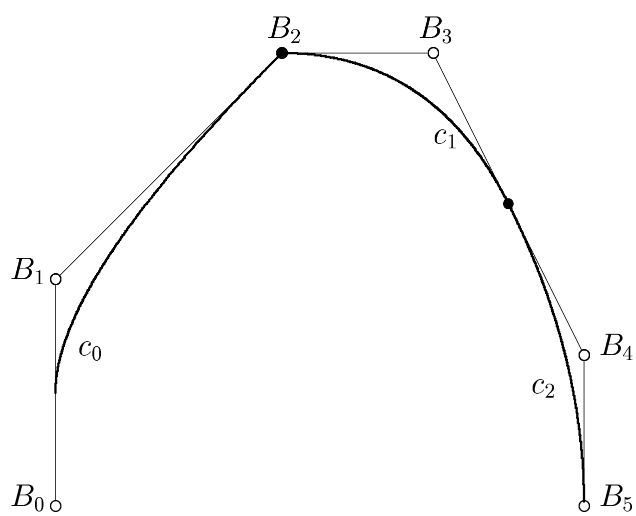


Abbildung 3.6: ... als Vereinigung von drei gleichförmig berührenden cc-Kurven.

punkte $B_0, \ldots, B_5 \in \mathbb{E}^3$ und damit die B-Spline-Kurve

$$c: \ \boldsymbol{x}(u) = \sum_{i=0}^{5} \boldsymbol{b}_i N_i^2(u), \ u \in [u_2, u_6] = [2, 5]$$

vom Grad 2 (siehe Abbildung 3.5). Dann lässt sich c mittels der B-Spline-Funktionen abschnittsweise wie folgt schreiben.

$$c: \ \boldsymbol{x}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-u)^2\boldsymbol{b}_0 + \big((3-u)(u-2) + \frac{1}{2}(u-1)(3-u)\big)\boldsymbol{b}_1 \\ \quad +(u-2)^2\boldsymbol{b}_2, \ u \in [2,3[, \\ (4-u)^2\boldsymbol{b}_2 + \big(\frac{1}{2}(5-u)(u-3) + (u-3)(4-u)\big)\boldsymbol{b}_3 \\ \quad +\frac{1}{2}(u-3)^2\boldsymbol{b}_4, \ u \in [3,4[, \\ \frac{1}{2}(5-u)^2\boldsymbol{b}_3 + \big((5-u)(u-4) + \frac{1}{2}(u-3)(5-u)\big)\boldsymbol{b}_4 \\ \quad +(u-4)^2\boldsymbol{b}_5, \ u \in [4,5[, \\ \boldsymbol{b}_5, \ u = 5. \end{cases} \tag{3.26}$$

Da wir eine B-Spline-Kurve vom Grad 2 betrachten, deren Knotenvektor neben einfachen auch doppelte Knoten enthält, handelt es sich um eine C^0-Kurve.

Nun stellen wir c als Vereinigung von gleichförmig berührenden cc-Kurven dar, indem wir das zuvor angegebene Verfahren verwenden.

Wir starten mit

$$c_0: \ \boldsymbol{y}(u), \ u \in [u_2, u_3[,$$

mit $n_0 = 0$, den Kontrollpunkten B_0, B_1, B_2, den Knoten $u_1, \ldots, u_4$ und den Schnittfunktionen

$$\alpha_j^i(u) = \frac{u - u_j}{u_{K+n_0+j-i+1} - u_j}, \quad 1 + n_0 = 1 \leq i \leq j \leq K + n_0 = K$$

$\big($siehe (3.10)$\big)$. Wir erhalten

$$\alpha_2^2(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} = u - 2,$$

$$\alpha_2^1(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} = u - 2,$$

$$\alpha_1^1(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} = \frac{1}{2}(u - 1).$$

Damit ist c_0 gegeben durch

$$
\begin{aligned}
c_0 :\ \boldsymbol{x}(u) &= (\boldsymbol{b}_0\ \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2) \begin{pmatrix} 1-\alpha_1^1(u) & 0 \\ \alpha_1^1(u) & 1-\alpha_2^1(u) \\ 0 & \alpha_2^1(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\alpha_2^2(u) \\ \alpha_2^2(u) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)\boldsymbol{b}_0 + \left(-\frac{3}{2}u^2 + 7u - \frac{15}{2}\right)\boldsymbol{b}_1 \qquad (3.27) \\
&\quad +(u^2 - 4u + 4)\boldsymbol{b}_2,\ \ u \in [2,3[. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Es ist $3 = u_{K+n_0+1} = u_{K+n_0+2}$ ein doppelter Knoten und damit $n_1 = 2$. Damit finden wir die Kurve

$$c_1 :\ \boldsymbol{x}(u),\ u \in [u_{K+N_1}, u_{K+N_1+1}[= [u_4, u_5[= [3,4[,$$

bestimmt durch die Kontrollpunkte $B_{0+n_1} = B_2$, $B_{1+n_1} = B_3$, $B_{2+n_1} = B_4$, die Knoten $u_{1+n_1} = u_3, \ldots, u_{4+n_1} = u_6$ und die Schnittfunktion

$$\alpha_{K+N_1}^{K+N_1}(u) = \alpha_4^4(u) = \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} = u - 3.$$

Es resultiert

$$
\begin{aligned}
\alpha_4^3(u) &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} = \frac{1}{2}(u-3), \\
\alpha_3^3(u) &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} = (u-3).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
c_1 :\ \boldsymbol{x}(u) &= (\boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4) \begin{pmatrix} 1-\alpha_3^3(u) & 0 \\ \alpha_3^3(u) & 1-\alpha_4^3(u) \\ 0 & \alpha_4^3(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\alpha_4^4(u) \\ \alpha_4^4(u) \end{pmatrix} \\
&= (u^2 - 8u + 16)\boldsymbol{b}_2 + \left(-\frac{3}{2}u^2 + 11u - \frac{39}{2}\right)\boldsymbol{b}_3 \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}(u^2-6u+9)\boldsymbol{b}_4,\ \ u\in[3,4[. \tag{3.30}$$

Im nächsten (und wegen $P=2$ letzten) Schritt konstruieren wir unter Beachtung von $n_2=1$

$$c_2:\ \boldsymbol{x}(u),\ \ u\in[u_{K+N_2},u_{K+N_2+1}[=[u_5,u_6[=[4,5[,$$

bestimmt durch $B_{0+N_2}=B_3,\ B_{1+N_2}=B_4,\ B_{2+N_2}=B_5$, die Knoten $u_{1+N_2}=u_4,\dots,u_{4+N_2}=u_7$ und der Schnittfunktion

$$\alpha_{K+N_2}^{K+N_2}(u)=\alpha_5^5(u)=\frac{u-u_5}{u_6-u_5}=u-4.$$

Es resultiert

$$\begin{aligned}\alpha_5^4(u) &= \frac{u-u_5}{u_7-u_5}=(u-4),\\ \alpha_4^4(u) &= \frac{u-u_4}{u_6-u_4}=\frac{1}{2}(u-3).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}c_2:\ \boldsymbol{x}(u) &= (\boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4\ \boldsymbol{b}_5)\begin{pmatrix}1-\alpha_4^4(u) & 0\\ \alpha_4^4(u) & 1-\alpha_5^4(u)\\ 0 & \alpha_5^4(u)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\alpha_5^5(u)\\ \alpha_5^5(u)\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{1}{2}u^2-5u+\frac{25}{2}\right)\boldsymbol{b}_3+\left(-\frac{3}{2}u^2+13u-\frac{55}{2}\right)\boldsymbol{b}_4 \qquad (3.31)\\ &\quad +(u^2-8u+16)\boldsymbol{b}_5,\ \ u\in[4,5].\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ein Vergleich von (3.26) mit (3.28), (3.30) und (3.32) zeigt

$$c=c_0\cup c_1\cup c_2$$

(siehe Abbildung 3.6). Der Übergang zwischen c_0 und c_1 ist nach Satz 3.2.3 ein C^0-Übergang, der Übergang zwischen c_1 und c_2 ist nach Satz 3.2.3 ein C^1-Übergang.

3.3 Corner cutting-Kurven als B-Spline-Kurven

Satz 3.3.1 Eine cc-Kurve c gemäß (2.4) ist genau dann eine B-Spline-Kurve vom Grad N, wenn c vom Grad N und gleichförmig berührend ist, sowie für die Parameter c^i ($i = 1, \ldots, N$) und d^j ($j = 1, \ldots, N$) aus Satz 2.4.3

$$0 < c^1 \leq c^2 \leq \ldots \leq c^{N-2} \leq c^{N-1} \leq 1 =: c^N,$$

$$0 < d^1 \leq d^2 \leq \ldots \leq d^{N-2} \leq d^{N-1} \leq 1 =: d^N$$

gilt.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Nach Satz 3.2.2 ist eine B-Spline-Kurve c vom Grad N eine gleichförmig berührende corner cutting-Kurve vom Grad N. Zu zeigen bleibt die Monotonieeigenschaft der Parameterfolge.

Für die Hauptschnittfunktion der gleichförmig berührenden corner cutting-Kurve (respektive B-Spline-Kurve) gilt

$$\alpha_N^N(u) = \frac{u - u_N}{u_{N+1} - u_N},$$

allgemein sind die Schnittfunktionen von c nach (3.3) gegeben durch

$$\alpha_j^i(u) = \frac{u - u_j}{u_{N+j-i+1} - u_j} \quad (1 \leq i \leq j \leq N).$$

Somit gilt (vergleiche mit Satz 2.4.3) mit $c^i = \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{2N-i+1} - u_N}$

$$\alpha_N^i(u) = \frac{u - u_N}{u_{2N-i+1} - u_N} = \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{2N-i+1} - u_N} \cdot \alpha_N^N(u) = c^i \cdot \alpha_N^N(u) \quad (1 \leq i \leq N)$$

und wegen

$$u_1 \leq \ldots \leq u_{2N}$$

gilt

$$0 < c^1 \leq c^2 \leq \ldots \leq c^{N-1} \leq 1.$$

Weiter ist mit $d^j = \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{N+1} - u_j}$

$$\alpha_j^j(u) = \frac{u - u_j}{u_{N+1} - u_j} = 1 - \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{N+1} - u_j} \cdot \big(1 - \alpha_N^N(u)\big) = 1 - d^j \cdot \big(1 - \alpha_N^N(u)\big) \quad (1 \leq j \leq N)$$

und somit auch

$$0 < d^1 \leq d^2 \leq \ldots \leq d^{N-1} \leq 1.$$

„$\Leftarrow$“ Aus Satz 2.4.5 wissen wir, dass jede gleichförmig berührende cc-Kurve eine lineare cc-Kurve ist.
Sei c gemäß (2.4) gegeben, α_N^N sei die lineare Hauptschnittfunktion von c.

Aus (2.10), (2.11) und der Voraussetzung, dass c eine gleichförmig berührende cc-Kurve ist, folgt

$$\alpha_N^i(u) = c^i \alpha_N^N(u) \text{ mit } c^i > 0 \; (i = 1, \ldots, N-1)$$

und

$$\alpha_j^j(u) := 1 - d^j\big(1 - \alpha_N^N(u)\big) \text{ mit } d^j > 0 \; (j = 1, \ldots, N-1),$$

allgemein haben wir nach Satz 2.4.2 damit

$$\alpha_j^i(u) = \gamma_j^i(d^j \alpha_N^N(u) + 1 - d^j) \quad \text{mit} \quad \gamma_j^i = \frac{c^{N+i-j}}{d^j + (1-d^j)c^{N+i-j}} \; (1 \leq i \leq j \leq N).$$

Schreiben wir die lineare Hauptschnittfunktion in der Form

$$\alpha_N^N(u) = \frac{u - u_N}{u_{N+1} - u_N}$$

mit eindeutig bestimmten $u_N, u_{N+1} \in \mathbb{R}$ und $u_N \leq a < b \leq u_{N+1}$, so ergibt sich

$$\alpha_N^i(u) = \frac{u - u_N}{u_{2N-i+1} - u_N} \text{ mit } u_{2N-i+1} = u_N + \frac{u_{N+1} - u_N}{c^i} \; (i = 1, \ldots, N-1)$$

und

$$\alpha_i^i(u) = \frac{u - u_i}{u_{N+1} - u_i} \text{ mit } u_i = u_{N+1} + \frac{u_{N+1} - u_N}{d^i} \; (i = 1, \ldots, N-1).$$

Sei nun

$$0 < c^1 \leq c^2 \leq \ldots \leq c^{N-2} \leq c^{N-1} \leq c^N = 1 \tag{3.33}$$

und

$$0 < d^1 \leq d^2 \leq \ldots \leq d^{N-2} \leq d^{N-1} \leq d^N = 1. \tag{3.34}$$

Dann gilt für $i = 1, \ldots, N-1$

$$c^i \leq c^{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{2N-i+1} - u_N} \leq \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{2N-i} - u_N}$$

$$\overset{u_N \leq u_{N+1}}{\Leftrightarrow} \quad u_{2N-i} \leq u_{2N-i+1}.$$

Also ist (3.33) gleichbedeutend mit

$$u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \ldots \leq u_{2N-2} \leq u_{2N-1} \leq u_{2N}.$$

Analog erhält man wegen

$$d^i \leq d^{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{N+1} - u_i} \leq \frac{u_{N+1} - u_N}{u_{N+1} - u_{i+1}}$$

$$\overset{u_N \leq u_{N+1}}{\Leftrightarrow} \quad u_i \leq u_{i+1}$$

aus (3.34)

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{N-2} \leq u_{N-1} \leq u_N.$$

Damit folgt insgesamt

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_N \leq u_{N+1} \leq u_{2N-1} \leq u_{2N}.$$

Nach Abschnitt 3.2.1 gilt mit den obigen Schnittfunktionen

$$\begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_K(u) \end{pmatrix} = A_K^1(u) \cdots A_K^K(u) \equiv \begin{pmatrix} N_0^K(u) \\ \vdots \\ N_K^K(u) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die gleichförmig berührende cc-Kurve c vom Grad N eine B-Spline-Kurve zu denselben Kontrollpunkten und den Knoten $u_0 := u_1, u_2, \ldots, u_{2N-1}, u_{2N} =: u_{2N+1}$. □

Kapitel 4

Corner cutting-Flächen

Um eine Bézier-Kurve $c : \boldsymbol{x}(u)$ oder eine Bézier-Fläche $\Phi : \boldsymbol{x}(u,v)$ in einem Punkt der Kurve beziehungsweise Fläche auszuwerten, kann man sich des de Casteljau-Algorithmus bedienen.
Für Bézier-Kurven sind nach Vorgabe eines Parameters u_0 nicht nur der gesuchte Punkt $X(u_0)$, sondern auch alle während des Algorithmus auftretenden Zwischenpunkte eindeutig festgelegt.
Dieses Verhalten unterscheidet sich von dem der Flächenauswertung. Den gesuchten Flächenpunkt $X(u_0, v_0)$ kann man nämlich bestimmen, indem man zunächst eine Parameterlinie (v-Linie) $\boldsymbol{x}(u = u_0, v)$ oder eine Parameterlinie (u-Linie) $\boldsymbol{x}(u, v = v_0)$ betrachtet und durch mehrfache Anwendung des Algorithmus von de Casteljau die zugehörigen Bézierpunkte der Parameterlinie bestimmt. Eine weitere Anwendung des de Casteljau-Algorithmus liefert dann den gesuchten Flächenpunkt (siehe zum Beispiel [AUM1], Seite 355ff und Seite 480ff).
Alternativ läßt sich die Auswertung mittels des de Casteljau-Algorithmus abwechselnd in u- und v-Richtung durchführen (siehe zum Beispiel [HOS], Seite 252).
Insgesamt gibt es bei einer Bézier-Fläche vom Grad (M, N) genau $\frac{(M+N)!}{M!\,N!}$ verschiedene Vorgehensmöglichkeiten den gewünschten Punkt zu bestimmen. Zur Minimierung des Rechenaufwandes arbeitet man im Falle $M > N$ zunächst in u-Richtung, im Falle $N \geq M$ zunächst in v-Richtung (siehe [HOS], Seite 252).
Das abwechselnde Arbeiten in u- und v-Richtung nennt man nach [KAH] das *bilineare Interpolationsschema*. Durch die bilineare Interpolation erhalten wir einen anschaulichen Zugang zu einer möglichen Realisierung von corner cutting-Flächen, den es im Folgenden zu präzisieren gilt.

4.1 Definition

Abgeleitet von den corner cutting-Kurven (siehe Definition 2.1.1) geben wir für die Flächentheorie zunächst die

Definition 4.1.1 Seien B_{mn} $(m = 0, \ldots, M;\ n = 0, \ldots, N)$ Punkte im euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Weiter seien für $r \geq 1$ und $1 \leq k \leq l \leq M$ die C^r-Funktionen

$$\alpha_l^k : \begin{cases} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \alpha_l^k(u) \end{cases}$$

und für $1 \leq i \leq j \leq N$ die C^r-Funktionen

$$\beta_j^i : \begin{cases} [c,d] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \beta_j^i(v) \end{cases}$$

gegeben, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\forall u \in [a,b] \ : \ \alpha_l^k(u) \in [0,1], \tag{4.1}$$

$$\forall u \in [a,b] \ : \ \dot{\alpha}_l^k(u) > 0, \tag{4.2}$$

$$\forall v \in [c,d] \ : \ \beta_j^i(v) \in [0,1], \tag{4.3}$$

$$\forall v \in [c,d] \ : \ \acute{\beta}_j^i(v) > 0 \tag{4.4}$$

(zur Schreibweise siehe Kapitel 1).

Weiter seien die $(M+2-k, M+1-k)$-Matrizen $A_M^k = A_M^k(u)$ für $k = 1, \ldots, M$ definiert durch

$$A_M^k(u) := \begin{pmatrix} 1-\alpha_k^k(u) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_k^k(u) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\alpha_M^k(u) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_M^k(u) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

sowie die $(N+2-i, N+1-i)$-Matrizen $B_N^i = B_N^i(v)$ für $i = 1, \ldots, N$ definiert durch

$$B_N^i(v) := \begin{pmatrix} 1-\beta_i^i(v) & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_i^i(v) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\beta_N^i(v) \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_N^i(v) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Dann heißt die C^r-Fläche

$$\Phi: \boldsymbol{x}(u,v) = {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v),$$
$$(u,v) \in [a,b] \times [c,d] \tag{4.7}$$

(zur Schreibweise siehe Kapitel 1) die **Eckschnitt-Fläche**, **corner cutting-Fläche** oder **cc-Fläche** vom **Grad** (M,N) mit **Schnittfunktionen** α_l^k und β_j^i und den **Kontrollpunkten** B_{mn}. Sind alle Schnittfunktionen Polynome vom Grad 1, so heißt Φ **linear**. Die Schnittfunktionen $\alpha_M^M(u)$ und $\beta_N^N(v)$ heißen **Hauptschnittfunktionen**.

Lemma 4.1.1 a) Sei für $u \in [a,b[$ die $(M+1-k, M+2-k)$-Matrix $C_M^k = C_M^k(u)$ $(k = 1, \ldots, M)$ gegeben durch

$$C_M^k := \begin{pmatrix} \eta_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \eta_{Mk} & \cdots & \eta_{MM} & 0 \end{pmatrix}$$

mit
$$\eta_{lm}(u) := (-1)^{l+m} \prod_{n=m}^{l} \frac{1}{1-\alpha_n^k(u)} \prod_{n=m}^{l-1} \alpha_m^k(u) \quad (1 \leq m \leq l \leq M).$$
Dann gilt $C_M^k A_M^k = E_{M+1-k}$.

b) Sind die Elemente von $(m, M+1-k-l)$-Matrizen $M(u), \overline{M}(u)$ stetige Funktionen, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ist } u \in [a,b] \quad \text{und} \quad & M(u)\, {}^T\!A_M^{k+l}(u) \cdots {}^T\!A_M^k(u) \\ & = \overline{M}(u)\, {}^T\!A_M^{k+l}(u) \cdots {}^T\!A_M^k(u), \\ \text{so folgt} \quad & M(u) = \overline{M}(u). \end{aligned}$$

Beweis: a) Offensichtlich gilt

$$C_M^k[m \,|\, 1, \ldots, N+2-k] \cdot A_M^k[1, \ldots, N+2-k \,|\, n] = \begin{cases} 0 & \text{für } m < n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}.$$

Es bleibt der Fall $m > n$. Hier finden wir

$$\begin{aligned} & C_M^k[m \,|\, 1, \ldots, N+2-k] \cdot A_M^k[1, \ldots, N+2-k \,|\, n] \\ & = \eta_{k+k-1,n+k-1} \cdot (1-\alpha_{n+k-1}^k) + \eta_{k+k-1,n+k} \cdot \alpha_{n+k-1}^k \\ & = \pm \prod_{l=n+k}^{m+k-1} \frac{1}{1-\alpha_l^k} \prod_{l=n+k}^{m+k-2} \alpha_l^k \Big((1-\alpha_{n+k-1}^k) \frac{1}{1-\alpha_{n+k-1}^k} \cdot \alpha_{n+k-1}^k - \alpha_{n+k-1}^k \Big) \\ & = 0 \end{aligned}$$

b) Für $u \in [a,b[$ folgt die Behauptung unmittelbar aus a), für $u = b$ folgt sie aus Stetigkeitsgründen. □

Wir untersuchen nun, welche Eigenschaften corner cutting-Flächen besitzen und wie durch weitere Forderungen an die Schnittfunktionen zusätzliche Eigenschaften (Interpolation, Berührung etc.) erreicht werden können.

Zunächst stellen wir fest, daß die Matrizen $A_M^k(u)$ für $k = 1, \ldots, M$ und $u \in [a,b]$ sowie $B_N^i(u)$ für $i = 1, \ldots, N$ und $v \in [c,d]$ stochastisch sind; das heißt, die Matrizen besitzen ausschließlich nichtnegative Einträge und die Spalteneinträge summieren sich jeweils zu

Eins (siehe Definition 1.0.1).
Da das Produkt stochastischer Matrizen ebenfalls stochastisch ist (siehe zum Beispiel [LUE], Seite 140), ist mit

$$ {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) =: \big(f_0(u) \ldots f_M(u)\big) \tag{4.8} $$

und

$$ B_N^1(v) \cdots B_N^N(v) =: \big(g_0(v) \ldots g_N(v)\big)^T \tag{4.9} $$

offensichtlich, dass die Beziehungen

$$ \sum_{m=0}^{M} f_m(u) = 1,\ \ f_m(u) \geq 0 \quad (u \in [a,b],\ \ m = 0,\ldots,M), \tag{4.10} $$

$$ \sum_{n=0}^{N} g_n(v) = 1,\ \ g_n(v) \geq 0 \quad (v \in [c,d],\ \ n = 0,\ldots,N) \tag{4.11} $$

gelten. Wegen

$$ \begin{aligned} \Phi:\ \boldsymbol{x}(u,v) &= \big(f_0(u) \ldots f_M(u)\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{m0} f_m(u) \\ \vdots \\ \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{mN} f_m(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} f_m(u) g_n(v) \boldsymbol{b}_{mn} \end{aligned} \tag{4.12} $$

gilt der

Satz 4.1.2 Eine gemäß (4.7) gegebene cc-Fläche Φ liegt in der Konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte.

Ebenfalls folgt sofort die Aussage über affine Invarianz (vgl. den Beweis zu Satz 2.1.1 b)) im

Satz 4.1.3 Das Bild einer cc-Fläche unter einer affinen Abbildung ist die cc-Fläche ist die cc-Fläche gleichen Grades zu den affinen Bildern ihrer Kontrollpunkte.

Bemerkung 4.1.1 Analog zu Bemerkung 2.1.1 können wir (4.7) als Algorithmus auffassen, der aus einer zulässigen Eingabemenge *Ein* von $(M+1)\cdot(N+1)$ Kontrollpunkten und $\frac{M(M+1)}{2}+\frac{N(N+1)}{2}$ Schnittfunktionen gemäß (4.1) bis (4.4) besteht.
Die Ausgabe *Aus* besteht analog zur corner cutting-Kurventheorie aus der resultierenden corner cutting-Fläche.
Die Anzahl der Verarbeitungsschritte beträgt $M+N$, wobei ein Verarbeitungsschritt aus einer links- oder rechtsseitigen Matrixmultiplikation sich aus

$$\left({}^T\!A_M^j \cdots {}^T\!A_M^1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1 \cdots B_N^{i-1} \right) B_N^i$$

beziehungsweise

$${}^T\!A_M^j \left({}^T\!A_M^{j-1} \cdots {}^T\!A_M^1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1 \cdots B_N^i \right)$$

für ein $i \in \{1,\ldots,N\}$ beziehungsweise $j \in \{1,\ldots,M\}$ ergibt (Matrixprodukt existiert natürlich nur für $i>1$ beziehungsweise $j>1$).

Für die Ausgabe ist die Reihenfolge der Verarbeitungsschritte offensichtlich irrelevant.

Wir betrachten den Fall, dass wir zunächst M linksseitige Matrixmultiplikationen durchführen. Aus (4.7) mit (4.8) ergibt sich

$$\Phi \,:\, \boldsymbol{x}(u,v) \;=\; {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{m0} f_m(u) \\ \vdots \\ \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{mN} f_m(u) \end{pmatrix}^T B_N^1(v) \cdots B_N^N(v).$$

Damit entsteht nach M linksseitigen Schritten des Algorithmus für festes $u_0 \in [a, b]$ formal eine corner cutting-Kurve vom Grad N mit den Kontrollpunkten

$$\sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{m0} f_m(u_0), \ldots, \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{b}_{mN} f_m(u_0).$$

Analog ergibt sich eine corner cutting-Kurve vom Grad M mit Kontrollpunkten

$$\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{0n} g_n(v_0), \ldots, \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{Mn} g_n(v_0),$$

$v_0 \in [c, d]$ fest; man beachte dabei

$$^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{0n} g_n(v_0) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{Mn} g_n(v_0) \end{pmatrix} =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{0n} g_n(v_0) \;\; \ldots \;\; \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{b}_{Mn} g_n(v_0) \right) A_M^1(u) \cdots A_M^M(u).$$

Bemerkung 4.1.2 Es gilt

$$f_0(u) = \prod_{p=1}^{M} \left(1 - \alpha_p^p(u)\right), \tag{4.13}$$

$$f_M(u) = \prod_{p=1}^{M} \alpha_M^p(u), \tag{4.14}$$

$$g_0(v) \;=\; \prod_{q=1}^{N} \big(1-\beta_q^q(v)\big), \tag{4.15}$$

$$g_N(v) \;=\; \prod_{q=1}^{N} \beta_N^q(v), \tag{4.16}$$

sowie

$$\begin{aligned} f_1(u) \;=\; \sum_{p=1}^{M} & \underbrace{\big(1-\alpha_2^1(u)\big)\cdots\big(1-\alpha_p^{p-1}(u)\big)}_{\text{leer für } p=1}\alpha_p^p(u) \\ & \cdot \underbrace{\big(1-\alpha_{p+1}^{p+1}(u)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^M(u)\big)}_{\text{leer für } p=M}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} g_1(v) \;=\; \sum_{q=1}^{N} & \underbrace{\big(1-\beta_2^1(v)\big)\cdots\big(1-\beta_q^{q-1}(v)\big)}_{\text{leer für } q=1}\beta_q^q(v) \\ & \cdot \underbrace{\big(1-\beta_{q+1}^{q+1}(v)\big)\cdots\big(1-\beta_N^N(v)\big)}_{\text{leer für } q=N}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Beispiel 4.1.1 Wir betrachten als Beispiel die corner cutting-Fläche

$$\Phi:\ \boldsymbol{x}(u,v) \;=\; {}^T\!A_3^3(u)\cdots{}^T\!A_3^1(u)\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{04}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{b}_{30} & \cdots & \boldsymbol{b}_{34}\end{pmatrix} B_4^1(v)\cdots B_4^4(v),\ \ (u,v)\in[0,1]\times[0,1] \tag{4.19}$$

vom Grad $(M,N)=(3,4)$ mit den Schnittfunktionen

$$\alpha_1^1(u)=\alpha_2^2(u)=\alpha_3^3(u)=\tfrac{1}{2}u,\ \ \alpha_2^1(u)=\alpha_3^2(u)=\tfrac{1}{3}u,\ \ \alpha_3^1(u)=\tfrac{1}{4}u,$$

$$\beta_1^1(v)=\ \beta_2^1(v)=\ \beta_4^1(v)=\ \beta_2^2(v)=\ \beta_3^3(v)=\ \beta_4^4(v)=\tfrac{1}{2}v,$$

$$\beta_3^1(v)=\ \beta_4^3(v)=\tfrac{1}{3}v,\ \ \beta_3^2(v)=\tfrac{3}{4}v,\ \ \beta_4^2(v)=\tfrac{1}{4}v$$

und den Kontrollpunkten

$$\boldsymbol{b}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{01} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{02} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{03} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{04} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{11} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{12} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{13} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{14} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{22} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{23} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{24} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{31} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{32} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{33} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{34} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung 4.1 und zur Verdeutlichung die Abbildung 4.2, insbesondere beachte man, dass die Fläche aufgrund der Wahl der Schnittfunktionen nicht eckinterpolierend (siehe Abschnitt 4.2) ist).

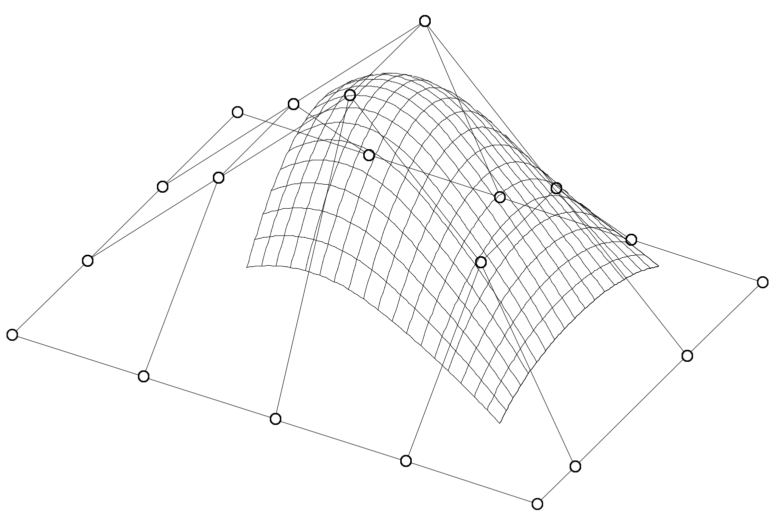


Abbildung 4.1: cc-Fläche mit Kontrollpunktnetz.

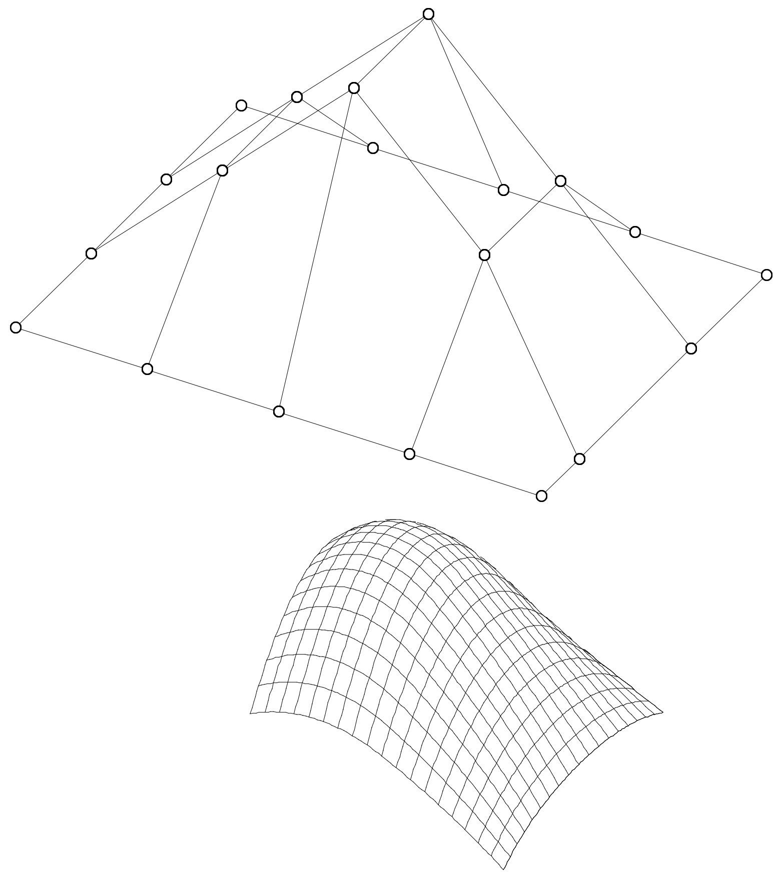


Abbildung 4.2: cc-Fläche mit nach oben verschobenem Kontrollpunktnetz.

In den Abbildungen 4.3 bis 4.6 sind jeweils die Kontrollpunktnetze der Schritte des Algorithmus dargestellt, die zur Berechnung des Punktes $X = X(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ führen. Das jeweilige Kontrollpunktnetz ist fett gedruckt, das des vorangegangenen Schrittes nicht fett.
Begonnen wurde hier mit einem rechtsseitigen Verarbeitungsschritt; anschließend wurden Schritte ausgeführt, die aus je einer links- und rechtsseitigen Matrixmultiplikation bestehen.

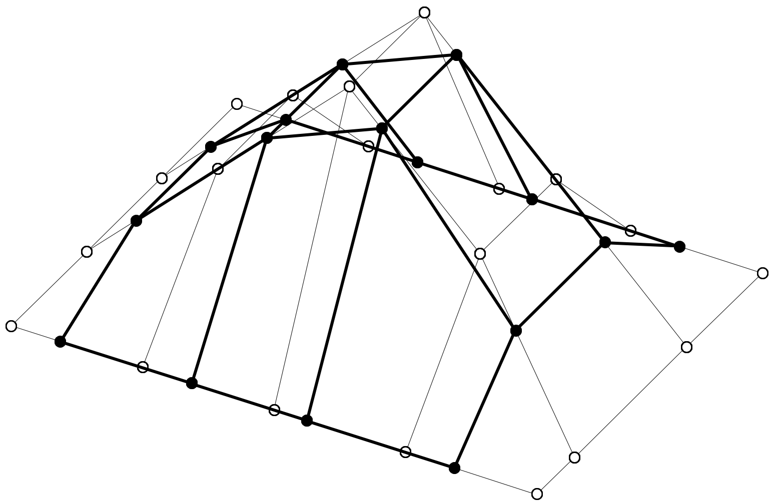


Abbildung 4.3: Kontrollpunktnetz im 1. Schritt: $((\boldsymbol{b}_{ij})) \cdot \underline{B_4^4}$.

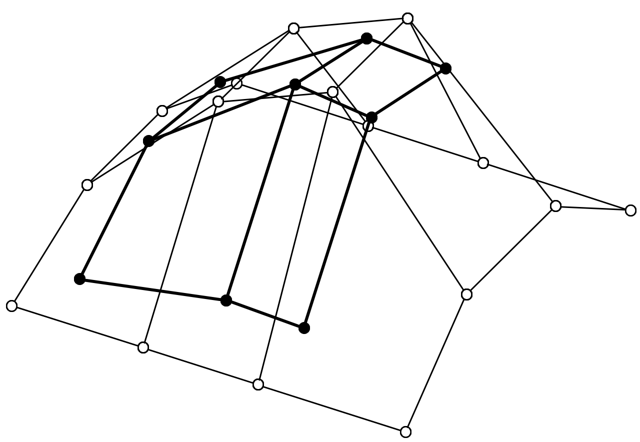


Abbildung 4.4: Kontrollpunktnetz im 2. Schritt: $\underline{{}^T\!A_3^3} \cdot (\,((\boldsymbol{b}_{ij}))B_4^4) \cdot \underline{B_4^3}$.

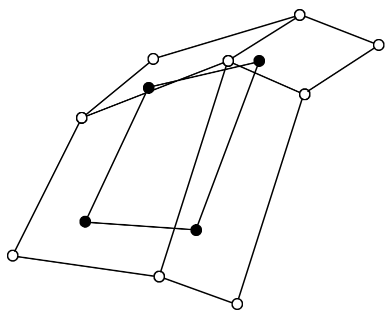


Abbildung 4.5: Kontrollpunktnetz im 3. Schritt: $\underline{{}^{T}\!A_3^2} \cdot \left({}^{T}\!A_3^3((\boldsymbol{b}_{ij}))B_4^4 B_4^3\right) \cdot \underline{B_4^2}$.

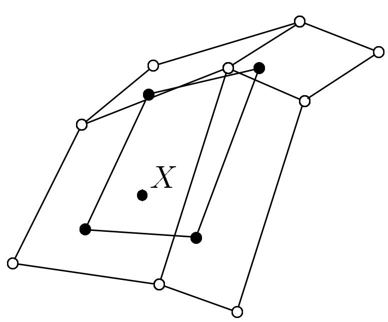


Abbildung 4.6: Kontrollpunktnetz im 4. Schritt: $\underline{{}^{T}\!A_3^1} \cdot \left({}^{T}\!A_3^2\,{}^{T}\!A_3^3((\boldsymbol{b}_{ij}))B_4^4 B_4^3 B_4^2\right) \cdot \underline{B_4^1}$ und der Punkt $X = X(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

4.2 Eckinterpolierende corner cutting-Flächen

Es ist bekannt, dass die Kontrollpunkte B_{00}, B_{M0}, B_{0N} und B_{MN} einer Bézier-Fläche vom Grad (M, N) Punkte der Fläche sind (siehe Kapitel 5 oder [AUM1], Seite 479).

Für eine B-Spline-Fläche vom Grad (L, K) mit den Kontrollpunkten D_{mn} ($m = 0, \dots, M$; $n = 0, \dots, N$) sind die Eckpunkte des Kontrollnetzes Flächenpunkte, wenn beispielsweise für die Knoten der Knotenvektoren $\boldsymbol{u} = (u_0 \ \dots \ u_{M+L+1})^T$ und $\boldsymbol{v} = (v_0 \ \dots \ v_{N+K+1})^T$ die Beziehungen

$$u_1 = \dots = u_L, \quad u_{M+1} = \dots = u_{M+L},$$

$$v_1 = \dots = v_K, \quad v_{N+1} = \dots = v_{N+K}$$

gelten (siehe Kapitel 5 oder [AUM1], Seite 377f und Seite 502). Für corner cutting-Kurven wird die Frage, wann die Anfangs- und Endpunkte mit den zugehörigen Kontrollpunkten zusammenfallen, im Satz 2.2.1 beantwortet. Im Folgenden leiten wir die entsprechenden Ergebnisse für corner cutting-Flächen her.

Für diese Untersuchung gehen wir von einer allgemeinen, durch (4.7) gegebenen corner cutting-Fläche aus. Dann gilt (siehe Abbildung 4.7)

$$\begin{aligned}
&\big(\forall B_{00}, \dots, B_{M0}, \dots, B_{0N}, \dots, B_{MN} : \ B_{00} = X(a, c)\big) \\
&\overset{(4.12)}{\Longleftrightarrow} f_0(a) g_0(c) = 1 \\
&\overset{(4.10),(4.11)}{\Longleftrightarrow} f_0(a) = 1 \ \wedge \ g_0(c) = 1 \\
&\overset{(4.13),(4.15)}{\Longleftrightarrow} \big(1 - \alpha_1^1(a)\big) \cdots \big(1 - \alpha_M^M(a)\big) = 1, \ \big(1 - \beta_1^1(c)\big) \cdots \big(1 - \beta_N^N(c)\big) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \alpha_1^1(a) = \dots = \alpha_M^M(a) = 0, \ \beta_1^1(c) = \dots = \beta_N^N(c) = 0,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
&\big(\forall B_{00}, \dots, B_{M0}, \dots, B_{0N}, \dots, B_{MN} : \ B_{M0} = X(b, c)\big) \\
&\overset{(4.12)}{\Longleftrightarrow} f_M(b) g_0(c) = 1 \\
&\overset{(4.10),(4.11)}{\Longleftrightarrow} f_M(b) = 1 \ \wedge \ g_0(c) = 1 \\
&\overset{(4.14),(4.15)}{\Longleftrightarrow} \alpha_M^1(b) \cdots \alpha_M^M(b) = 1, \ \big(1 - \beta_1^1(c)\big) \cdots \big(1 - \beta_N^N(c)\big) = 1
\end{aligned}$$

$$\iff \alpha_M^1(b) = \ldots = \alpha_M^M(b) = 1,\ \beta_1^1(c) = \ldots = \beta_N^N(c) = 0, \tag{4.21}$$

$$\big(\forall B_{00}, \ldots, B_{M0}, \ldots, B_{0N}, \ldots, B_{MN}:\ B_{0N} = X(a,d)\big)$$

$$\overset{(4.12)}{\iff} f_0(a)g_N(d) = 1$$

$$\overset{(4.10),(4.11)}{\iff} f_0(a) = 1 \ \wedge\ g_N(d) = 1$$

$$\overset{(4.13),(4.16)}{\iff} \big(1-\alpha_1^1(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^M(a)\big) = 1,\ \beta_N^1(d)\cdots\beta_N^N(d) = 1$$

$$\iff \alpha_1^1(a) = \ldots = \alpha_M^M(a) = 0,\ \beta_N^1(d) = \ldots = \beta_N^N(d) = 1, \tag{4.22}$$

$$\big(\forall B_{00}, \ldots, B_{M0}, \ldots, B_{0N}, \ldots, B_{MN}:\ B_{MN} = X(b,d)\big)$$

$$\overset{(4.12)}{\iff} f_M(b)g_N(d) = 1$$

$$\overset{(4.10),(4.11)}{\iff} f_M(b) = 1 \ \wedge\ g_N(d) = 1$$

$$\overset{(4.14),(4.16)}{\iff} \alpha_M^1(b) = \ldots = \alpha_M^M(b) = 1,\ \beta_N^1(d) = \ldots = \beta_N^N(d) = 1. \tag{4.23}$$

Definition 4.2.1 Eine corner cutting-Fläche $\Phi:\ \boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in [a,b]\times[c,d]$ heißt **eckpunktinterpolierend** oder kurz **eckinterpolierend**, wenn für beliebige Wahl der Kontrollpunkte B_{mn} $(m = 0,\ldots,M; n = 0,\ldots,N)$ gilt:

$$B_{00} = X(a,c),\ B_{0N} = X(a,d),\ B_{M0} = X(b,c),\ B_{MN} = X(b,d).$$

Wie man an den Schnittfunktionen erkennt, ob eine corner cutting-Fläche eckinterpolierend ist, lässt sich also mittels obiger Beziehungen (4.20) bis (4.23) überprüfen (siehe Abbildung 4.7).

Beispiel 4.2.1 Sei $\Phi:\ \boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$ eine lineare corner cutting-Fläche vom Grad (M,N) mit

$$\alpha_l^k(u) = \gamma_l^k\, u + \delta_l^k, \quad 1 \le k \le l \le M,$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
|\alpha_1^1| & & & & & & & & & & |\underline{\beta_1^1} \\
\alpha_2^1 & |\alpha_2^2| & & & & & & & & |\underline{\beta_2^2} & \beta_2^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \iddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{M-1}^1 & \alpha_{M-1}^2 & \cdots & |\alpha_{M-1}^{M-1}| & & & & |\underline{\beta_{N-1}^{N-1}} & \cdots & \beta_{N-1}^2 & \beta_{N-1}^1 \\
\underline{\overline{\alpha_M^1}} & \underline{\overline{\alpha_M^2}} & \cdots & \underline{\overline{\alpha_M^{M-1}}} & |\underline{\overline{\alpha_M^M}}| & & |\underline{\overline{\beta_N^N}}| & \overline{\beta_N^{N-1}}| & \cdots & \overline{\beta_N^2}| & \overline{\beta_N^1}|
\end{array}
$$

$|*$: Bedingung an Schnittfunktion für $X(a,c) = B_{00}$,
$\underline{*}$: Bedingung an Schnittfunktion für $X(b,c) = B_{M0}$,
$*|$: Bedingung an Schnittfunktion für $X(a,d) = B_{0N}$,
$\overline{*}$: Bedingung an Schnittfunktion für $X(b,d) = B_{MN}$.

Abbildung 4.7: Bedingungen an Schnittfunktionen eckinterpolierender corner cutting-Flächen

$$\beta_j^i(v) = \mu_j^i\, v + \nu_j^i, \quad 1 \le i \le j \le N.$$

Dann ist Φ eckinterpolierend, wenn

$$\delta_1^1 = \ldots = \delta_M^M = 0, \quad \gamma_M^1 + \delta_M^1 = \ldots = \gamma_M^M + \delta_M^M = 1,$$

$$\nu_1^1 = \ldots = \nu_N^N = 0, \quad \mu_N^1 + \nu_N^1 = \ldots = \mu_N^N + \nu_N^N = 1.$$

Insbesondere ergeben sich in diesem Beispiel die Hauptschnittfunktionen zu $\alpha_M^M(u) = u$ und $\beta_N^N(v) = v$.

Die Frage, wie die Tangentialebene einer eckinterpolierenden cc-Fläche Φ gemäß (4.7) in einem Eckpunkt $B_{mn},\ m \in \{0, M\},\ n \in \{0, N\}$ mit den Kontrollpunkten zusammenhängt, klärt exemplarisch für den Punkt B_{00} der folgende

Satz 4.2.1 Es sei Φ eine eckinterpolierende corner cutting-Fläche gemäß (4.7). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es gilt

$$\alpha_2^1(a) = \alpha_3^2(a) = \ldots = \alpha_M^{M-1}(a) = 0,\ \beta_2^1(c) = \beta_3^2(c) = \ldots = \beta_N^{N-1}(c) = 0.$$

b) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$ {}^{T}\!A_M^{M-1}(a)\cdots {}^{T}\!A_M^{1}(a) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(c)\cdots B_N^{N-1}(c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} \end{pmatrix}. $$

c) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00}) $$

und

$$ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(a,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{01} - \boldsymbol{b}_{00}). $$

d) Für beliebige Kontrollpunkte enthält die Tangentialebene $T_\Phi(B_{00})$ von Φ im Punkt B_{00} die Punkte B_{01} und B_{10}.

e) Für beliebige Kontrollpunkte wird die Tangentialebene $T_\Phi(B_{00})$ von Φ im Punkt B_{00} durch die Vektoren $\boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00}$ und $\boldsymbol{b}_{01} - \boldsymbol{b}_{00}$ aufgespannt.

Beweis: „a) $\Rightarrow$ b)“

Nach (4.20) bis (4.23) und der Voraussetzung gilt

$$ A_M^k(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, M-1 $$

und

$$ B_N^i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, N-1. $$

Damit folgt

$$ {}^{T}\!A_M^{M-1}(a)\cdots {}^{T}\!A_M^{1}(a) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(c)\cdots B_N^{N-1}(c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} \end{pmatrix}. $$

„b) ⇒ a)"
Es ist

$$
{}^{T}\!A_M^{M-1}(a)\cdots {}^{T}\!A_M^{1}(a)\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(c)\cdots B_N^{N-1}(c)
$$

$$
= {}^{T}\!A_M^{M-1}(a)\cdots {}^{T}\!A_M^{1}(a)\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \big(1-\beta_2^1(c)\big)\cdots\big(1-\beta_N^{N-1}(c)\big)\boldsymbol{b}_{01}+\sum_{n=2}^N \lambda_{0n}\boldsymbol{b}_{0n} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \big(1-\beta_2^1(c)\big)\cdots\big(1-\beta_N^{N-1}(c)\big)\boldsymbol{b}_{11}+\sum_{n=2}^N \lambda_{1n}\boldsymbol{b}_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \big(1-\beta_2^1(c)\big)\cdots\big(1-\beta_N^{N-1}(c)\big)\boldsymbol{b}_{M1}+\sum_{n=2}^N \lambda_{Mn}\boldsymbol{b}_{Mn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & c_{01}\boldsymbol{b}_{01}+\sum_{n=2}^N \widetilde{\lambda}_{0n}\boldsymbol{b}_{0n} \\ c_{10}\boldsymbol{b}_{10}+\sum_{m=2}^M \widetilde{\lambda}_{m0}\boldsymbol{b}_{m0} & c_{11}\boldsymbol{b}_{11}+\sum_{\substack{m,n=1\\ m\cdot n\neq 1}}^{M,N} \widetilde{\lambda}_{mn}\boldsymbol{b}_{mn} \end{pmatrix}
$$

$\big($siehe (4.20) bis (4.23)$\big)$ mit $\lambda_{mn}, \widetilde{\lambda}_{mn} \in \mathbb{R}$ und

$$
\begin{aligned}
c_{01} &= \big(1-\beta_2^1(c)\big)\cdots\big(1-\beta_N^{N-1}(c)\big) \\
c_{10} &= \big(1-\alpha_2^1(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^{M-1}(a)\big) \\
c_{11} &= \big(1-\alpha_2^1(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^{M-1}(a)\big)\big(1-\beta_2^1(c)\big)\cdots\big(1-\beta_N^{N-1}(c)\big) \\
&= c_{01}\cdot c_{10}.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung gilt somit

$$
\alpha_2^1(a) = \ldots = \alpha_M^{M-1}(a) = \beta_2^1(c) = \ldots = \beta_N^{N-1}(c) = 0.
$$

„a) ⇒ c)"
Wir berechnen die partiellen Ableitungen von Φ im Punkt $X(a,c)$. Es ist

$$
\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c)
$$

$$= \sum_{k=1}^{M} {}^{T}\!A^{M}_{M}(a) \cdots {}^{T}\!A^{k+1}_{M}(a)\, {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}(a)\, {}^{T}\!A^{k-1}_{M}(a) \cdots {}^{T}\!A^{1}_{M}(a) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix}$$

$$\cdot B^{1}_{N}(c) \cdots B^{N}_{N}(c).$$

Nun ist nach Voraussetzung für $l = 1, \ldots, M-1$

$${}^{T}\!A^{l}_{M}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \ldots & \ldots & \ldots & * \end{pmatrix} \qquad {}^{T}\!\dot{A}^{l}_{M}(a) = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}^{l}_{l}(a) & \dot{\alpha}^{l}_{l}(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}^{l}_{l+1}(a) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c) = \sum_{k=1}^{M} \dot{\alpha}^{k}_{k}(a) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^{T} \cdot \underbrace{B^{1}_{N}(c) \cdots B^{N}_{N}(c)}_{= (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#N})^{T}}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \dot{\alpha}^{k}_{k}(a) \cdot (\boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00}) \parallel (\boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00}).$$

Analog zeigt man

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(a,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{01} - \boldsymbol{b}_{00}).$$

„c) $\Rightarrow$ a)“ Wir schreiben $\boldsymbol{x}(a,c)$ als

$$\boldsymbol{x}(a,c) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} f_m(a) g_n(c) \boldsymbol{b}_{mn}$$

(vergleiche (4.12)). Damit schreiben sich die partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{x}(u,v)$ an der Stelle $(u,v) = (a,c)$ als

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \dot{f}_m(a) g_n(c) \boldsymbol{b}_{mn}$$

$$= g_0(c)\left(\dot{f}_1(a)\boldsymbol{b}_{10} + \dot{f}_0(a)\boldsymbol{b}_{00}\right) + \sum_{m=0}^{1}\sum_{n=1}^{N}\dot{f}_m(a)g_n(c)\boldsymbol{b}_{mn} + \sum_{m=2}^{M}\sum_{n=0}^{N}\dot{f}_m(a)g_n(c)\boldsymbol{b}_{mn}. \tag{4.24}$$

Da Φ eine eckinterpolierende corner cutting-Fläche ist, gilt nach (4.20) und (4.15)

$$g_0(c) = \prod_{i=1}^{N}\big(1 - \underbrace{\beta_i^i(c)}_{=0}\big) = 1,$$

also wegen (4.11) $g_1(c) = \ldots = g_N(c) = 0$. (4.24) vereinfacht sich daher zu

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c) = \dot{f}_1(a)\boldsymbol{b}_{10} + \dot{f}_0(a)\boldsymbol{b}_{00} + \sum_{m=2}^{M}\dot{f}_m(a)\boldsymbol{b}_{m0}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\dot{f}_1(a) \;=\; -\dot{f}_0(a).$$

Aus (4.20) und (4.13) folgt weiter

$$-\dot{f}_0(a) \;=\; \sum_{k=1}^{M}\dot{\alpha}_k^k(a).$$

Andererseits berechnet sich $\dot{f}_1(a)$ wegen (4.17) zu

$$\begin{aligned}
\dot{f}_1(a) \;=\; & \Bigg(\sum_{k=1}^{M}\cdot\big(1-\alpha_2^1(u)\big)\big(1-\alpha_3^2(u)\big)\cdots\big(1-\alpha_k^{k-1}(u)\big)\alpha_k^k(u) \\
& \cdot\big(1-\alpha_{k+1}^{k+1}(u)\big)\big(1-\alpha_{k+2}^{k+2}(u)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^M(u)\big)\Bigg)^{\cdot}\Bigg|_{u=a} \\
=\; & \sum_{k=1}^{M}\underbrace{\big(1-\alpha_2^1(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_k^{k-1}(a)\big)}_{\text{leer für } k=1}\dot{\alpha}_k^k(a)\underbrace{\big(1-\alpha_{k+1}^{k+1}(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_M^M(a)\big)}_{=1 \text{ nach Vor., leer für } k=M} \\
=\; & \sum_{k=1}^{M}\underbrace{\big(1-\alpha_2^1(a)\big)\cdots\big(1-\alpha_k^{k-1}(a)\big)}_{\text{leer für } k=1}\dot{\alpha}_k^k(a).
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber wegen $\left(1-\alpha_i^{i-1}(a)\right) \in [0,1]$ $(i=2,\ldots,k)$ und $\dot\alpha_k^k(a) > 0$

$$\dot f_1(a) = \sum_{k=1}^{M} \dot\alpha_k^k(a) \iff \alpha_2^1(a) = \ldots = \alpha_M^{M-1}(a) = 0,$$

womit das Behauptete bewiesen ist. Analog zeigt man

$$\beta_2^1(c) = \ldots = \beta_N^{N-1}(c) = 0.$$

„c) $\Rightarrow$ d)“ Klar.

„d) $\Rightarrow$ c)“ Es ist

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(a,c) &= \dot f_1(a)\boldsymbol{b}_{10} + \dot f_0(a)\boldsymbol{b}_{00} + \sum_{m=2}^{M} \dot f_M(a)\boldsymbol{b}_{m0}, \\ \acute{\boldsymbol{x}}(a,c) &= \acute g_1(c)\boldsymbol{b}_{01} + \acute g_0(c)\boldsymbol{b}_{00} + \sum_{n=2}^{N} \acute g_N(x)\boldsymbol{b}_{0n}.\end{aligned}$$

Damit ist eine Parameterdarstellung der Tangentialebene $T_\Phi(B_{00})$ gegeben durch

$$T_\Phi(B_{00}):\ \boldsymbol{y}(\lambda,\mu) = \boldsymbol{b}_{00} + \lambda\sum_{m=0}^{M} \dot f_M(a)\boldsymbol{b}_{m0} + \mu\sum_{n=0}^{N} \acute g_N(x)\boldsymbol{b}_{0n},\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

(nichtentarteter Fall sei vorausgesetzt). Da nach Voraussetzung $B_{10} \in T_\Phi(B_{00})$ gilt, gibt es $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\lambda\dot f_1(a) &= 1, \\ 1+\lambda\dot f_0(a) &= 0, \\ \mu &= 0, \\ \lambda\dot f_2(a) = \lambda\dot f_3(a) = \ldots = \lambda\dot f_M(a) &= 0,\end{aligned}$$

was man durch Koeffizientenvergleich erhält. Daraus folgt

$$\lambda = \frac{1}{\dot f_1(a)} \neq 0,\ \ \dot f_0(a) = -\dot f_1(a),\ \ \dot f_2(a) = \dot f_3(a) = \ldots = \dot f_M(a) = 0$$

und somit

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}(a,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{10} - \boldsymbol{b}_{00}).$$

Analog zeigt man

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(a,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{01} - \boldsymbol{b}_{00}).$$

„d) $\Leftrightarrow$ e)“ Klar.

Somit gilt der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil wird analog bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.2.1 Analog ergeben sich die Aussagen für die anderen Eckpunkte einer eckinterpolierenden corner cutting-Fläche Φ gemäß (4.7), die wir im Folgenden ohne Beweis auflisten:

$\underline{B_{M0}}$: Es sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es gilt

$$\alpha_{M-1}^1(b) = \alpha_{M-1}^2(b) = \ldots = \alpha_{M-1}^{M-1}(b) = 1,\ \beta_2^1(c) = \beta_3^2(c) = \ldots = \beta_N^{N-1}(c) = 0.$$

b) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$ {}^{T}\!A_M^{M-1}(b) \cdots {}^{T}\!A_M^{1}(b) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(c) \cdots B_N^{N-1}(c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M-1,0} & \boldsymbol{b}_{M-1,1} \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \boldsymbol{b}_{M1} \end{pmatrix}.$$

c) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(b,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{M-1,0} - \boldsymbol{b}_{M0})$$

und

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(b,c) \parallel (\boldsymbol{b}_{M1} - \boldsymbol{b}_{M0}).$$

d) Für beliebige Kontrollpunkte enthält die Tangentialebene $T_\Phi(B_{M0})$ von Φ im Punkt B_{M0} die Punkte $B_{M-1,0}$ und B_{M1}.

e) Für beliebige Kontrollpunkte wird die Tangentialebene $T_\Phi(B_{M0})$ von Φ im Punkt B_{M0} durch die Vektoren $(\boldsymbol{b}_{M-1,0} - \boldsymbol{b}_{M0})$ und $(\boldsymbol{b}_{M1} - \boldsymbol{b}_{M0})$ aufgespannt.

$\underline{B_{0N}}$: Es sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es gilt

$$\alpha_2^1(a) = \alpha_3^2(a) = \ldots = \alpha_M^{M-1}(a) = 0,\ \beta_{N-1}^1(d) = \beta_{N-1}^2(d) = \ldots = \beta_{N-1}^{N-1}(d) = 1.$$

b) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$^T\!A_M^{M-1}(a) \cdots {}^T\!A_M^1(a) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(d) \cdots B_N^{N-1}(d) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{0,N-1} & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \boldsymbol{b}_{1,N-1} & \boldsymbol{b}_{1N} \end{pmatrix}.$$

c) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(a,d) \parallel (\boldsymbol{b}_{1N} - \boldsymbol{b}_{0N})$$

und

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(a,d) \parallel (\boldsymbol{b}_{0,N-1} - \boldsymbol{b}_{0N}).$$

d) Für beliebige Kontrollpunkte enthält die Tangentialebene $T_\Phi(B_{0N})$ von Φ im Punkt B_{0N} die Punkte $B_{0,N-1}$ und B_{1N}.

e) Für beliebige Kontrollpunkte wird die Tangentialebene $T_\Phi(B_{0N})$ von Φ im Punkt B_{0N} durch die Vektoren $(\boldsymbol{b}_{1N} - \boldsymbol{b}_{0N})$ und $(\boldsymbol{b}_{0,N-1} - \boldsymbol{b}_{0N})$ aufgespannt.

$\underline{B_{MN}}$: Es sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es gilt

$$\alpha_{M-1}^1(b) = \alpha_{M-1}^2(b) = \ldots = \alpha_{M-1}^{M-1}(b) = 1,\ \beta_{N-1}^1(d) = \beta_{N-1}^2(d) = \ldots = \beta_{N-1}^{N-1}(d) = 1.$$

b) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$^T\!A_M^{M-1}(b) \cdots {}^T\!A_M^1(b) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(d) \cdots B_N^{N-1}(d) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M-1,N-1} & \boldsymbol{b}_{M-1,N} \\ \boldsymbol{b}_{M,N-1} & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix}.$$

c) Für beliebige Kontrollpunkte gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(b,d) \parallel (\boldsymbol{b}_{M-1,N} - \boldsymbol{b}_{MN})$$

und

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(b,d) \parallel (\boldsymbol{b}_{M,N-1} - \boldsymbol{b}_{MN}).$$

d) Für beliebige Kontrollpunkte enthält die Tangentialebene $T_\Phi(B_{MN})$ von Φ im Punkt B_{MN} die Punkte $B_{M-1,N}$ und $B_{M,N-1}$.

e) Für beliebige Kontrollpunkte wird die Tangentialebene $T_\Phi(B_{MN})$ von Φ im Punkt B_{MN} durch die Vektoren $(\boldsymbol{b}_{M-1,N} - \boldsymbol{b}_{MN})$ und $(\boldsymbol{b}_{M,N-1} - \boldsymbol{b}_{MN})$ aufgespannt.

Definition 4.2.2 Eine eckinterpolierende corner cutting-Fläche Φ, die eine der Bedingungen des Satzes 4.2.1 erfüllt, heißt **grenztangential bezüglich** B_{00}.
Eine eckinterpolierende corner cutting-Fläche Φ, die grenztangential bezüglich aller vier Eckpunkte B_{00}, B_{M0}, B_{0N} und B_{MN} ist, heißt **grenztangential** (bezüglich der Eck-Kontrollpunkte).

Beispiel 4.2.2 Die corner cutting-Fläche Φ aus Beispiel 4.2.1 ist zusätzlich grenztangential, wenn die Gleichungen

$$\delta_2^1 = \ldots = \delta_M^{M-1} = 0, \quad \nu_2^1 = \ldots = \nu_N^{N-1} = 0,$$

$$\gamma_{M-1}^1 + \delta_{M-1}^1 = \ldots = \gamma_{M-1}^{M-1} + \delta_{M-1}^{M-1} = 1, \quad \mu_{N-1}^1 + \nu_{N-1}^1 = \ldots = \mu_{N-1}^{N-1} + \nu_{N-1}^{N-1} = 1.$$

erfüllt sind.

Bemerkung 4.2.2 Damit eine corner cutting-Kurve c vom Grad N grenztangential sein kann, müssen insgesamt $2(2N-1)$ Bedingungen erfüllt sein (vergleiche Abschnitt 2.2). Damit eine corner cutting-Fläche Φ vom Grad (M,N) grenztangential ist, sind an die Schnittfunktionen von Φ insgesamt $4(M+N-1)$ Bedingungen zu stellen.

Bemerkung 4.2.3 Analog zu interpolierenden, grenztangentialen corner cutting-Kurven sieht man, dass nur für eine eckinterpolierende, grenztangentiale corner cutting-Fläche vom Grad (M,N) mit $\max(M, N) \geq 5$ Schnittfunktionen auftreten, an die außer den Bedingungen (4.1) bis (4.4) keine weiteren Bedingungen zu stellen sind.

Beispiel 4.2.3 Für eine eckinterpolierende, grenztangentiale corner cutting-Fläche Φ vom Grad $(M, N) = (5, 5)$ sind die Schnittfunktionen $\alpha_3^1(u)$ und $\beta_3^1(v)$ mit den Einschränkungen (4.1) bis (4.4) frei wählbar.

Eine solche corner cutting-Fläche wollen wir nun betrachten. Dabei wollen wir speziell zeigen, wie sich unter Beibehaltung der eckinterpolierenden und grenztangentialen Eigenschaften der Einfluss derjenigen Schnittfunktionen eine Rolle spielt, an die a priori keine zusätzlichen Forderungen gestellt werden müssen, in diesem Fall also der Einfluss der Schnittfunktionen α_3^1 sowie β_3^1.

Wir betrachten das folgende Kontrollpunktnetz (vergleiche Abbildung 4.8):

$$\boldsymbol{b}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{04} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{05} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{14} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{15} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{20} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{23} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{24} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{25} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{30} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{31} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{32} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{33} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{34} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_{35} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{40} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{41} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{42} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{43} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{44} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{54} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{50} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{51} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{52} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{53} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{54} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_{55} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

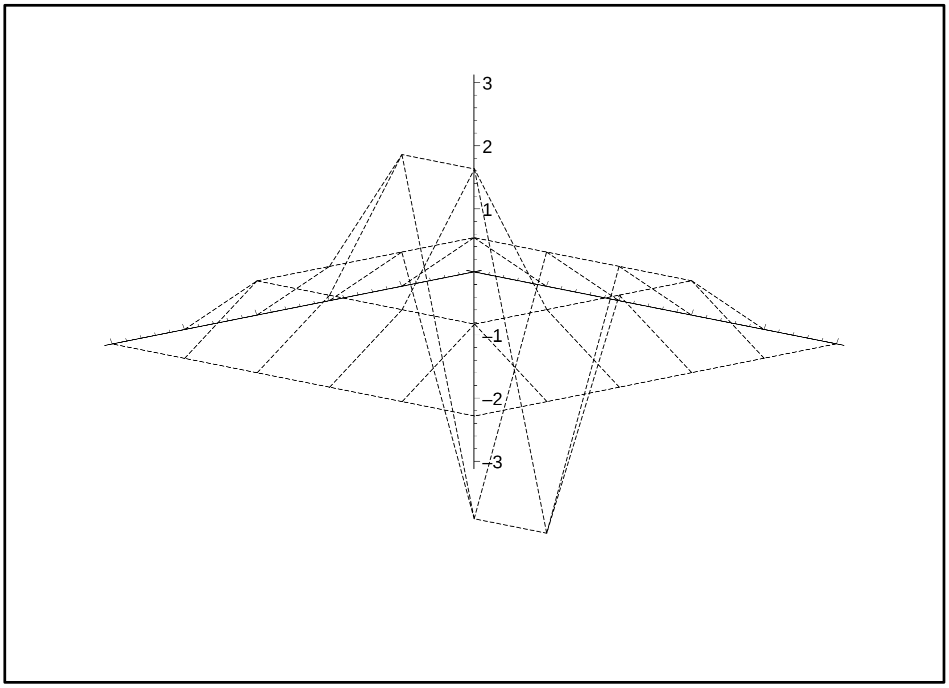


Abbildung 4.8: Kontrollpunktnetz der in Beispiel 4.2.3 behandelten Flächen

Nun betrachten wir die Flächen

$$\Phi : \boldsymbol{x}(u,v) \ = \ {}^{T}\!A_5^5(u) \cdots {}^{T}\!A_5^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{05} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{50} & \cdots & \boldsymbol{b}_{55} \end{pmatrix} B_5^1(v) \cdots B_5^5(v), \ \ (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

mit den Schnittfunktionen

$$\alpha_l^k = \begin{cases} u & \text{für } 1 \leq k \leq l \leq 5,\ (k,l) \neq (1,3) \\ \frac{1}{100}u + \frac{9}{10} & \text{für } (k,l) = (1,3) \end{cases}$$

und

$$\beta_j^i = \begin{cases} v & \text{für } 1 \leq i \leq j \leq 5,\ (i,j) \neq (1,3) \\ \frac{1}{100}v + \frac{9}{10} & \text{für } (i,j) = (1,3) \end{cases}$$

(siehe Abbildung 4.9) sowie

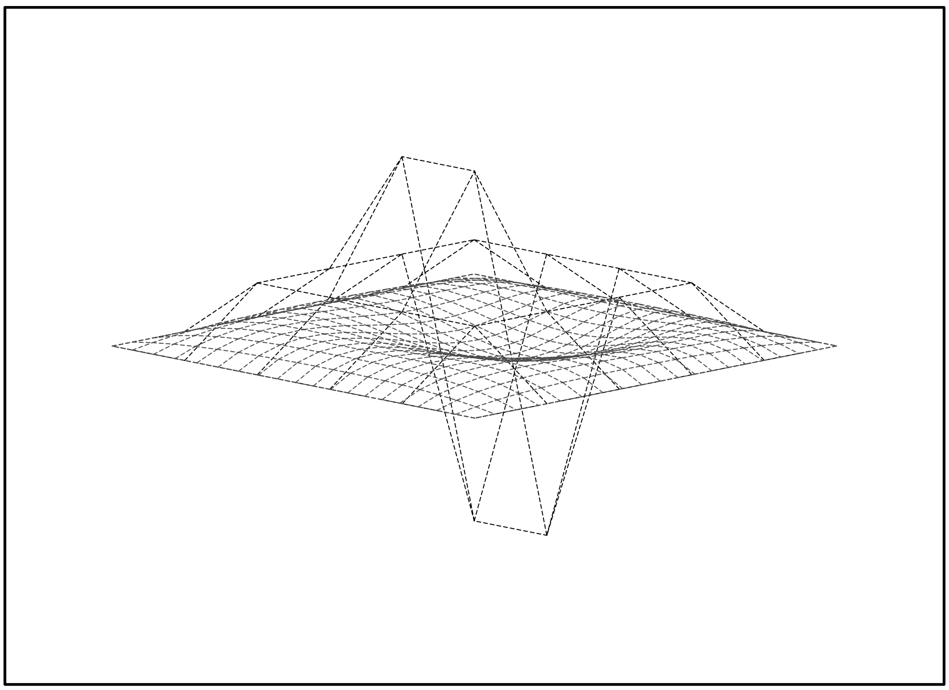


Abbildung 4.9: Corner cutting-Fläche Φ aus Beispiel 4.2.3

$$\hat{\Phi} : \hat{\boldsymbol{x}}(u,v) = {}^T\!\hat{A}_5^5(u) \cdots {}^T\!\hat{A}_5^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{05} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{50} & \cdots & \boldsymbol{b}_{55} \end{pmatrix} \hat{B}_5^1(v) \cdots \hat{B}_5^5(v),\ (u,v) \in [0,1] \times [0,1],$$

deren Schnittfunktionen durch

$$\hat{\alpha}_l^k = \begin{cases} u & \text{für } 1 \leq k \leq l \leq 5,\ (k,l) \neq (1,3) \\ \frac{1}{100}u & \text{für } (k,l) = (1,3) \end{cases}$$

und

$$\hat{\beta}_j^i = \begin{cases} v & \text{für } 1 \leq i \leq j \leq 5,\ (i,j) \neq (1,3) \\ \frac{1}{100}v & \text{für } (i,j) = (1,3) \end{cases}$$

bestimmt seien (siehe Abbildung 4.10).

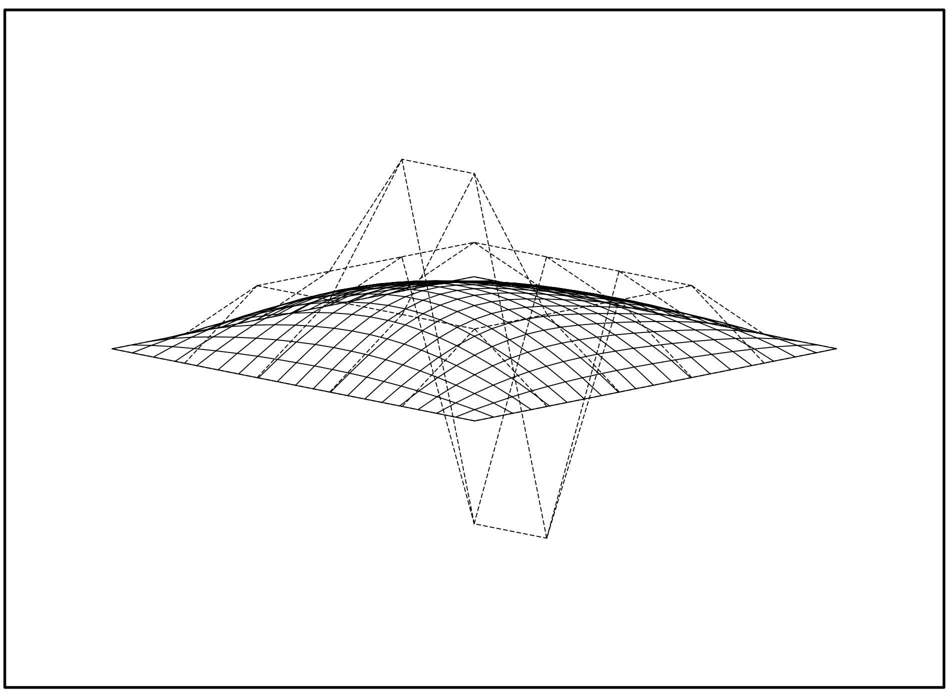


Abbildung 4.10: Corner cutting-Fläche $\hat{\Phi}$ aus Beispiel 4.2.3

Für Φ beziehungsweise $\hat{\Phi}$ ergeben sich damit die Bindefunktionen zu

$$\begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_5(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-u)^5 \\ 5u(1-u)^4 \\ 4\frac{3}{5}u^2 - 13\frac{13}{50}u^3 + 12\frac{18}{25}u^4 - 4\frac{3}{50}u^5 \\ +5\frac{2}{5}u^2 - 6\frac{37}{50}u^3 - 2\frac{18}{25}u^4 + 4\frac{3}{50}u^5 \\ 5u^4(1-u) \\ u^5 \end{pmatrix},$$

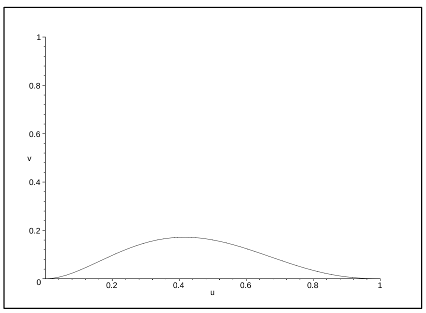
$$\begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_5(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-v)^5 \\ 5v(1-v)^4 \\ 4\frac{3}{5}v^2 - 13\frac{13}{50}v^3 + 12\frac{18}{25}v^4 - 4\frac{3}{50}v^5 \\ +5\frac{2}{5}v^2 - 6\frac{37}{50}v^3 - 2\frac{18}{25}v^4 + 4\frac{3}{50}v^5 \\ 5v^4(1-v) \\ v^5 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_0(u) \\ \vdots \\ \hat{f}_5(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-u)^5 \\ 5u(1-u)^4 \\ 10u^2 - 24\frac{3}{50}u^3 + 18\frac{3}{25}u^4 - 4\frac{3}{50}u^5 \\ -4\frac{3}{50}u^3 + -4\frac{3}{50}u^5 \\ 5u^4(1-u) \\ u^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{g}_0(v) \\ \vdots \\ \hat{g}_5(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-v)^5 \\ 5v(1-v)^4 \\ 10v^2 - 24\frac{3}{50}v^3 + 18\frac{3}{25}v^4 - 4\frac{3}{50}v^5 \\ -4\frac{3}{50}v^3 + -4\frac{3}{50}v^5 \\ 5v^4(1-v) \\ v^5 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildungen 4.11 und 4.12).



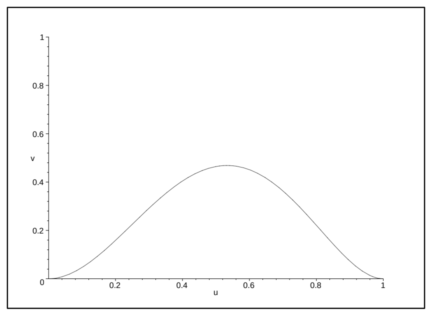


Abbildung 4.11: Bindefunktionen $f_2(= g_2)$ (links) und $f_3(= g_3)$ (rechts) auf dem Intervall $[0, 1]$

Wie sich die Wahl dieser Schnittfunktionen auf die Fläche auswirkt, erkennt man an Abbildung 4.13, in der die Flächen Φ und $\hat{\Phi}$ samt Kontrollnetz dargestellt sind. Zur Verdeutlichung ist die x_1x_2-Ebene projizierend.

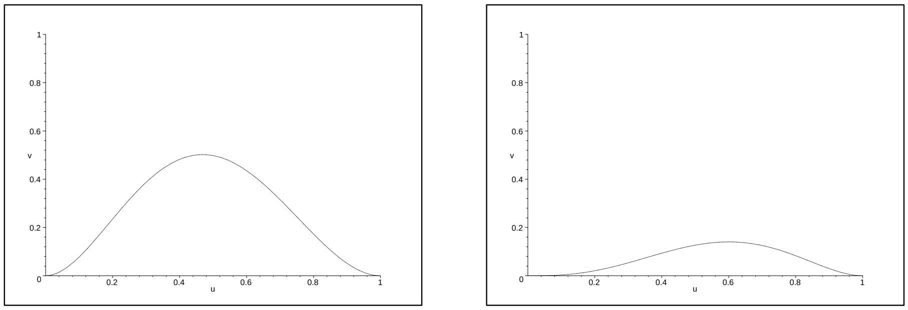


Abbildung 4.12: Bindefunktionen $\hat{f}_2(=\hat{g}_2)$ (links) und $\hat{f}_3(=\hat{g}_3)$ (rechts) auf dem Intervall $[0,1]$

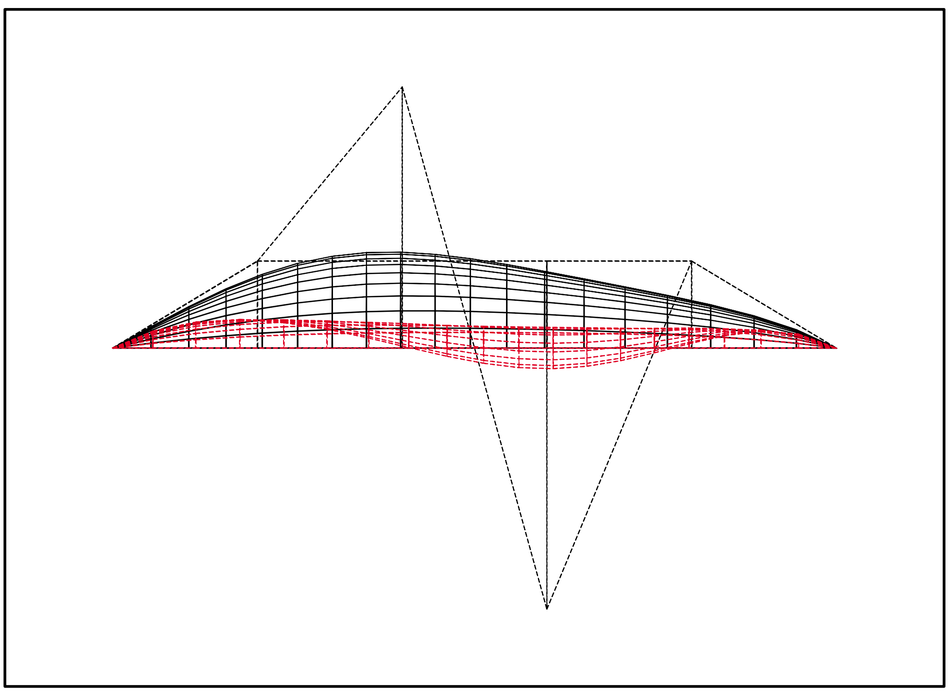


Abbildung 4.13: Flächen Φ (rot), $\hat{\Phi}$ (schwarz) samt Kontrollnetz aus Beispiel 4.2.3

Kapitel 5

Berührende corner cutting-Flächen

5.1 Vollständig berührende corner cutting-Flächen

Ähnliche Überlegungen, die zur Definition der Basiskurve (siehe Definition 2.3.1) geführt haben, werden wir für corner cutting-Flächen anstellen und so zum Begriff der Basisfläche gelangen.

Definition 5.1.1 Sei Φ eine corner cutting-Fläche gemäß (4.7) vom Grad (M, N).
Mit den reellen $(M+1, N+1)$-Matrizen

$$\boldsymbol{e}_{mn} = \left((\varepsilon_{ij}) \right)_{\substack{i=0,\dots,M, \\ j=0,\dots,N}}, \qquad\qquad 0 \leq m \leq M;\ 0 \leq n \leq N$$

mit

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{für } (i,j) = (m,n) \quad (m = 0, \dots, M; n = 0, \dots, N) \\ 0 \ \text{sonst} \end{cases}$$

definieren wir die Fläche

$$\Phi_B : \ {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v),\ (u,v) \in [a,b] \times [c,d].$$

Φ_B heißt **Basisfläche** der corner cutting-Fläche Φ.

Bemerkung 5.1.1 Identifizieren wir $(M+1, N+1)$-Matrizen mit Vektoren im $\mathbb{E}^{(M+1)\cdot(N+1)}$, so können wir Φ_B als eine Fläche im euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(M+1)\cdot(N+1)}$ interpretieren. Im Folgenden setzen wir diese Identifizierung voraus, wo sie aus sprachlichen oder logischen Gründen von Nöten ist.

Ist in diesem euklidischen Raum $\mathbb{E}^{(M+1)\cdot(N+1)}$ ein beliebiges Koordinatensystem mit dem Ursprung O gegeben und sind Q_{ij}^0 $(i = 0, \dots, M; j = 0, \dots, N)$ die Einheitspunkte auf den $(M+1)\cdot(N+1)$ Koordinatenachsen, so gibt es zu diesen Punkten in allgemeiner Lage und den $(M+1)\cdot(N+1)$ Kontrollpunkten B_{ij} $(i = 0, \dots, M; j = 0, \dots, N)$ genau eine affine Abbildung $\Gamma : \mathbb{E}^{(M+1)\cdot(N+1)} \to \mathbb{E}^3$ mit $\Gamma(O) = O$ und $\Gamma(Q_{ij}^0) = B_{ij}$ $(i = 0, \dots, M; j = 0, \dots, N)$. Für diese Abbildung gilt dann $\Gamma(\Phi_B) = \Phi$.

In weiterer Analogie zu cc-Kurven betrachten wir die Einträge der $(M+1-k, N+1-i)$-Matrix

$$\underbrace{{}^{T}\!A_M^k(u)\cdots{}^{T}\!A_M^1(u)}_{\text{leer für } k=0}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix}\underbrace{B_N^1(v)\cdots B_N^i(v)}_{\text{leer für } i=0}$$
$$=: \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{ki}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{ki}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{ki}(u,v) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

und interpretieren die Einträge als Flächen

$$\Phi_{lj}^{ki} \ : \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u,v), \ (u,v) \in [a,b] \times [c,d] \qquad (0 \le k \le l \le M; \ 0 \le i \le j \le N)$$

im Raum $\mathbb{E}^{(M+1)\cdot(N+1)}$.

Dabei gilt

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k,i-1}^{k,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{k,i-1}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k,i-1}(u,v) \end{pmatrix} = {}^{T}\!A_M^k(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix},$$

womit sich das Element der $(l-k+1)$-ten Zeile und $(j-i+2)$-ten Spalte schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{lj}^{k,i-1}(u,v) &= \big(1-\alpha_l^k(u)\big)\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) + \alpha_l^k(u)\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \\ &= \big(1-\alpha_l^k(u) \quad \alpha_l^k(u)\big)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

analog ergibt sich die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k-1,i}^{k-1,i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{k-1,i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix} B_N^i(v),$$

womit sich das Element der $(l-k+2)$-ten Zeile und $(j-i+1)$-ten Spalte schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i}(u,v) &= \big(1-\beta_j^i(v)\big)\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) + \beta_j^i(v)\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i(v) \\ \beta_j^i(v) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Schließlich gilt

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{ki}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{ki}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{ki}(u,v) \end{pmatrix} = {}^{T}\!A_M^k(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix} B_N^i(v).$$

Das Element in der $(l-k+1)$-ten Zeile und $(j-i+1)$-ten Spalte ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u,v) &= \big(1-\alpha_l^k(u)\big)\big(1-\beta_j^i(v)\big)\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) + \big(1-\alpha_l^k(u)\big)\beta_j^i(v)\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) \\ &\quad +\alpha_l^k(u)\big(1-\beta_j^i(v)\big)\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) + \alpha_l^k(u)\beta_j^i(v)\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 1-\alpha_l^k(u) & \alpha_l^k(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i(v) \\ \beta_j^i(v) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Damit ist für festes $(u_0, v_0) \in [a,b] \times [c,d]$

$$Q_{lj}^{ki}(u_0,v_0) \in H\big(\{Q_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u_0,v_0), Q_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u_0,v_0), Q_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u_0,v_0), Q_{lj}^{k-1,i-1}(u_0,v_0)\}\big),$$

wobei $H(M)$ die Konvexe Hülle einer Menge M bezeichnet (siehe Definition 1.0.2).

Wir untersuchen nun genauer, wie die Lage des Punktes Q_{lj}^{ki} von der Lage der Punkte $Q_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}$, $Q_{l,j-1}^{k-1,i-1}$, $Q_{l-1,j}^{k-1,i-1}$, $Q_{lj}^{k-1,i-1}$ und den Schnittfunktionen α_l^k und β_j^i abhängt.

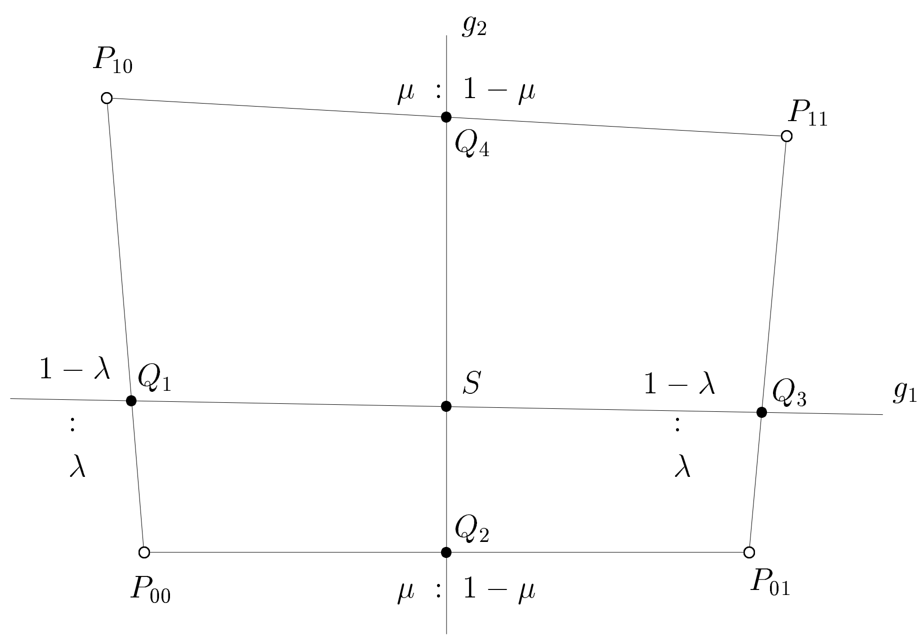


Abbildung 5.1: Zur Konstruktion des Punktes $Q_{lj}^{ki}(u_0, v_0)$.

Dazu betrachten wir zunächst ein nichtentartetes Viereck $P_{00}P_{01}P_{10}P_{11}$ im Raum. Ferner seien vier Punkte $Q_1 \in \overline{P_{00}P_{10}}$, $Q_2 \in \overline{P_{00}P_{01}}$, $Q_3 \in \overline{P_{01}P_{11}}$ und $Q_4 \in \overline{P_{10}P_{11}}$ gegeben mit den Teilverhältnissen (zum Teilverhältnis siehe Definition 1.0.3)

$$\mathrm{TV}(P_{00}, P_{10}, Q_1) = \mathrm{TV}(P_{01}, P_{11}, Q_3) =: \lambda$$

und

$$\mathrm{TV}(P_{00}, P_{01}, Q_2) = \mathrm{TV}(P_{10}, P_{11}, Q_4) =: \mu$$

(siehe Abbildung 5.1). Dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit P_{00} der Ursprung des gegebenen Koordinatensystems.

Dann gilt

$$\lambda \boldsymbol{p}_{10} = \boldsymbol{q}_1,\ \lambda(\boldsymbol{p}_{11} - \boldsymbol{p}_{01}) = \boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{p}_{01}$$

und

$$\mu \boldsymbol{p}_{01} = \boldsymbol{q}_2,\ \mu(\boldsymbol{p}_{11} - \boldsymbol{p}_{10}) = \boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_{10}.$$

Wir betrachten die beiden Geraden

$$g_1 :\ \boldsymbol{x}(\nu_1) \ = \ \boldsymbol{q}_1 + \nu_1(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1),\ \nu_1 \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \ \boldsymbol{y}(\nu_2) \ = \ \boldsymbol{q}_2 + \nu_2(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{q}_2), \ \nu_2 \in \mathbb{R}.$$

Geraden, die auf diese Weise konstruiert sind, haben stets genau einen Schnittpunkt S, dessen Ortsvektor $\boldsymbol{s}$ sich zu

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x}(\mu) = \boldsymbol{y}(\lambda) = (1-\lambda)\mu \boldsymbol{p}_{01} + (1-\mu)\lambda \boldsymbol{p}_{10} + \lambda\mu \boldsymbol{p}_{11}$$

berechnet.

Insbesondere ergibt sich mit (5.4), dass Q_{lj}^{ki} der Schnittpunkt der Geraden

$$\begin{aligned} g_u \ : \ \boldsymbol{c}_u(\mu) \ &= \ \Big(\mu\big((1-\beta_j^i)\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} + \beta_j^i \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}\big) \\ &\quad +(1-\mu)\big((1-\beta_j^i)\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} + \beta_j^i \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}\big)\Big)\Big|_{(u_0,v_0)} \\ &=: \ \big(1-\beta_j^i(v_0)\big)\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u_0,v_0) + \beta_j^i(v_0)\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u_0,v_0) + \mu \boldsymbol{w}_u(u_0,v_0), \ \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_v \ : \ \boldsymbol{c}_v(\lambda) \ &= \ \Big(\lambda\big((1-\alpha_l^k)\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} + \alpha_l^k \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}\big) \\ &\quad +(1-\lambda)\big((1-\alpha_l^k)\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} + \alpha_l^k \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}\big)\Big)\Big|_{(u_0,v_0)} \\ &=: \ \big(1-\alpha_l^k(u_0)\big)\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u_0,v_0) + \alpha_l^k(u_0)\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u_0,v_0) + \lambda \boldsymbol{w}_v(u_0,v_0), \ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist, denn es gilt

$$\boldsymbol{c}_u\big(\alpha_l^k(u_0)\big) = \boldsymbol{c}_v\big(\beta_j^i(v_0)\big) = \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u_0,v_0)$$

(siehe Abbildung 5.2).

Besonders einfach wäre die Beschreibung der Tangentialebene in einem Punkt $Q_{lj}^{ki}(u_0,v_0)$ der Fläche Φ_{lj}^{ki}, wenn die partiellen Ableitungen nach den Parametern u beziehungsweise v in $Q_{lj}^{ki}(u_0,v_0)$ parallel zu g_u beziehungsweise g_v wären. Corner cutting-Flächen, die diese Eigenschaft in jedem Punkt besitzen, werden wir im Folgenden genauer studieren. Wir starten mit der

Definition 5.1.2 Eine cc-Fläche Φ vom Grad (M,N) heißt **vollständig berührend**, wenn zu jeder Fläche

$$\Phi_{lj}^{ki}: \ \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u,v), \ (u,v) \in [a,b] \times [c,d]$$

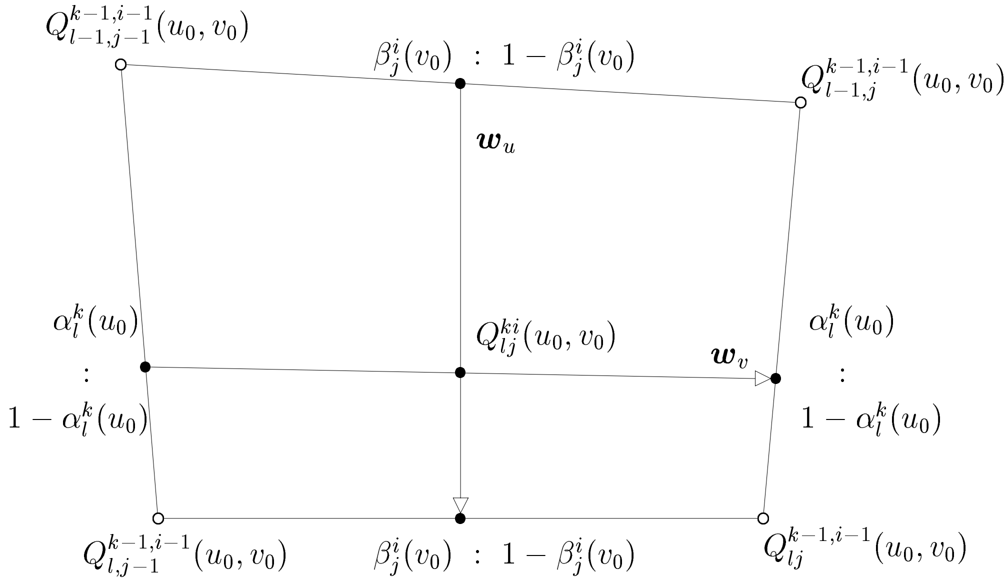


Abbildung 5.2: Zur Konstruktion des Punktes $Q^{ki}_{lj}(u_0,v_0)$.

für $k = 2,\dots,M$; $i = 2,\dots,N$; $l = k,\dots,M$; $j = i,\dots,N$ in jedem Punkt $Q^{ki}_{lj}(u_0,v_0)$ der Fläche $\big((u_0,v_0)\in[a,b]\times[c,d]$ beliebig$\big)$ gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}^{ki}_{lj}(u_0,v_0) \parallel \boldsymbol{w}_u(u_0,v_0) \;:=\; & \big(1-\beta^i_j(v_0)\big)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l,j-1}(u_0,v_0)+\beta^i_j(v_0)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{lj}(u_0,v_0)\\ & -\Big(\big(1-\beta^i_j(v_0)\big)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l-1,j-1}(u_0,v_0)+\beta^i_j(v_0)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l-1,j}(u_0,v_0)\Big)\end{aligned} \tag{5.5}$$

und

$$\begin{aligned}\acute{\boldsymbol{q}}^{ki}_{lj}(u_0,v_0) \parallel \boldsymbol{w}_v(u_0,v_0) \;:=\; & \big(1-\alpha^k_l(u_0)\big)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l-1,j}(u_0,v_0)+\alpha^k_l(u_0)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{lj}(u_0,v_0)\\ & -\Big(\big(1-\alpha^k_l(u_0)\big)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l-1,j-1}(u_0,v_0)+\alpha^k_l(u_0)\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{l,j-1}(u_0,v_0)\Big).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Bemerkung 5.1.2 Im allgemeinen Fall lässt sich die Tangentialebene im betrachteten Punkt durch $T_{\Phi_{lj}^{ki}}:\ \boldsymbol{z}(\lambda,\nu) = \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u_0,v_0) + \lambda \boldsymbol{w}_u(u_0,v_0) + \nu \boldsymbol{w}_v(u_0,v_0),\ \lambda,\nu \in \mathbb{R}$ beschreiben.

Bemerkung 5.1.3 Die Parallelitätsfaktoren $\pm\frac{||\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}||}{||\boldsymbol{w}_u||}$ und $\pm\frac{||\acute{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}||}{||\boldsymbol{w}_v||}$ in (5.5) und (5.6) bezeichnen wir im Folgenden mit ν_{lj}^{ki} beziehungsweise μ_{lj}^{ki}, sodass sich (5.5) und (5.6) schreiben lassen als

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}(u,v) \;=\; \nu_{lj}^{ki}(u,v)\cdot(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\beta_j^i(v) \\ \beta_j^i(v) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$\acute{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}(u,v) \;=\; \mu_{lj}^{ki}(u,v)\cdot\big(1-\alpha_l^k(u) \quad \alpha_l^k(u)\big)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}(u,v) & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

In Satz 5.1.7 werden wir eine Charakterisierung von vollständig berührenden Flächen beweisen, die der Aussage des Satzes 2.3.1 über vollständig berührende Kurven entspricht. Wir stellen zunächst einige Vorüberlegungen an.

Lemma 5.1.1 a) Seien $1 \le k \le M-1$, $0 \le i \le N$ und seien $\boldsymbol{b}_{lj}$ $(l = k,\dots,M;\ j = i,\dots,N)$ linear unabhängige Matrizen aus $\mathbb{E}^{(M-k+1)\times(N-i+1)}$. Dann sind die Matrizen

$$\boldsymbol{c}_{l+1,j} := (1-\alpha_{l+1})\boldsymbol{b}_{lj} + \alpha_{l+1}\boldsymbol{b}_{l+1,j}$$

$(l = k,\dots,M-1;\ j = i,\dots,N)$ für

$$\big(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_M \neq 0\big) \vee \big((1-\alpha_{k+1})(1-\alpha_{k+2})\cdots(1-\alpha_M) \neq 0\big)$$

linear unabhängig.

b) Seien $1 \le i \le N-1$, $0 \le k \le M$ und seien $\boldsymbol{b}_{lj}$ $(l = k,\dots,M;\ j = i,\dots,N)$ linear unabhängige Matrizen aus $\mathbb{E}^{(M-k+1)\times(N-i+1)}$. Dann sind die Matrizen

$$\boldsymbol{d}_{l,j+1} := (1-\beta_{j+1})\boldsymbol{b}_{lj} + \beta_{j+1}\boldsymbol{b}_{l,j+1}$$

$(l = k,\dots,M;\ j = i,\dots,N-1)$ für

$$\big(\beta_{i+1}\beta_{i+2}\cdots\beta_N \neq 0\big) \vee \big((1-\beta_{i+1})(1-\beta_{i+2})\cdots(1-\beta_N) \neq 0\big)$$

linear unabhängig.

Beweis: a) Sei

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{o} &= \sum_{l=k}^{M-1} \sum_{j=i}^{N} \gamma_{l+1,j} \boldsymbol{c}_{l+1,j} \qquad\qquad (\gamma_{l+1,j} \in \mathbb{R}) \\
&= \sum_{l=k}^{M-1} \sum_{j=i}^{N} \gamma_{l+1,j} \big((1-\alpha_{l+1}) \boldsymbol{b}_{lj} + \alpha_{l+1} \boldsymbol{b}_{l+1,j} \big) \\
&= \sum_{l=k}^{M-1} \sum_{j=i}^{N} \gamma_{l+1,j} (1-\alpha_{l+1}) \boldsymbol{b}_{lj} + \sum_{l=k+1}^{M} \sum_{j=i}^{N} \gamma_{lj} \alpha_l \boldsymbol{b}_{lj} \\
&= \sum_{j=i}^{N} \gamma_{k+1,j} (1-\alpha_{k+1}) \boldsymbol{b}_{kj} + \sum_{l=k+1}^{M-1} \sum_{j=i}^{N} \big(\gamma_{lj} \alpha_l + \gamma_{l+1,j} (1-\alpha_{l+1}) \big) \boldsymbol{b}_{lj} + \sum_{j=i}^{N} \gamma_{Mj} \alpha_M \boldsymbol{b}_{Mj}.
\end{aligned}
$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\boldsymbol{b}_{lj}$ gilt somit für $j = i, \ldots, N$

$$
\begin{array}{llr}
\gamma_{k+1,j}(1-\alpha_{k+1}) & & = 0 \\
\gamma_{k+1,j}\alpha_{k+1} & +\gamma_{k+2,j}(1-\alpha_{k+2}) & = 0 \\
\gamma_{k+2,j}\alpha_{k+2} & +\gamma_{k+3,j}(1-\alpha_{k+3}) & = 0 \\
 & \vdots & \\
\gamma_{M-1,j}\alpha_{M-1} & +\gamma_{M,j}(1-\alpha_M) & = 0 \\
 & \gamma_{Mj}\alpha_M & = 0
\end{array}
$$

Gilt nun $(1-\alpha_{k+1})(1-\alpha_{k+2})\cdots(1-\alpha_M) \neq 0$, so folgt für alle $j = i, \ldots, N$

$$\gamma_{k+1,j} = 0 \Rightarrow \gamma_{k+2,j} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_{Mj} = 0$$

und somit die Behauptung. Teil b) beweist man analog.

Gilt andererseits $(1-\alpha_{k+1})(1-\alpha_{k+2})\cdots(1-\alpha_M) = 0$, so ist nach Voraussetzung $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_M \neq 0$ und man schließt für alle $j = i, \ldots, N$

$$\gamma_{Mj} = 0 \Rightarrow \gamma_{M-1,j} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_{k+1,j} = 0,$$

womit das Behauptete bewiesen wäre. $\square$

Lemma 5.1.2 Für alle $k \in \{0, \dots, M\}$, alle $i \in \{0, \dots, N\}$ und die mit Vektoren identifizierten Matrizen $\boldsymbol{q}_{lj}^{ki}$ aus (5.4) sind für alle $(u_0, v_0) \in [a, b] \times [c, d]$ die Mengen

$$\left\{ \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u_0, v_0) \,|\, l \in \{k, \dots, M\},\, j \in \{i, \dots, N\} \right\}$$

linear unabhängig.

Beweis: Die Menge

$$\left\{ \boldsymbol{e}_{lj} = \boldsymbol{q}_{lj}^{00} \,|\, l \in \{0, \dots, M\},\, j \in \{0, \dots, N\} \right\}$$

ist nach Konstruktion linear unabhängig.

Nun gilt wegen

$$\boldsymbol{q}_{lj}^{10}(u_0, v_0) \overset{(5.2)}{=} \left(1 - \alpha_l^1(u_0)\right) \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{00} + \alpha_l^1(u_0) \boldsymbol{q}_{lj}^{00}$$

und der Eigenschaft $\alpha_l^1(u) \in [0, 1],\ \dot{\alpha}_l^1(u) > 0$ für alle $u_0 \in [a, b]$, dass die Voraussetzungen des Lemmas 5.1.1 a) erfüllt sind und somit die Menge

$$\left\{ \boldsymbol{q}_{lj}^{10}(u_0, v_0) \,|\, l \in \{1, \dots, M\},\, j \in \{0, \dots, M\} \right\}$$

linear unabhängig ist. Induktiv schließt man wegen

$$\boldsymbol{q}_{lj}^{k0}(u_0, v_0) \overset{(5.2)}{=} \left(1 - \alpha_l^k(u_0)\right) \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,0} + \alpha_l^k(u_0) \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,0}$$

für alle $k = 2, \dots, M$ und wegen $\alpha_l^k(u) \in [0, 1],\ \dot{\alpha}_l^k(u) > 0$ für alle $u_0 \in [a, b]$, dass die Mengen

$$\left\{ \boldsymbol{q}_{lj}^{k0}(u_0, v_0) \,|\, l \in \{k, \dots, M\},\, j \in \{0, \dots, M\} \right\}$$

linear unabhängig sind.

Weiter folgt mit

$$\boldsymbol{q}_{lj}^{k1}(u_0, v_0) \overset{(5.3)}{=} \left(1 - \beta_j^1(v_0)\right) \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k0} + \beta_j^1(v_0) \boldsymbol{q}_{lj}^{k0}$$

und den Eigenschaften (4.3) und (4.4), dass eine Anwendung des Lemmas 5.1.1 b) die lineare Unabhängigkeit der Mengen

$$\left\{ \boldsymbol{q}_{lj}^{k1}(u_0, v_0) \,|\, l \in \{k, \dots, M\},\, j \in \{1, \dots, M\} \right\}$$

liefert. Abschließend beweist die Induktion nach i wegen

$$\boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u_0, v_0) \overset{(5.3)}{=} \left(1 - \beta_j^i(v_0)\right) \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k,i-1} + \beta_j^i(v_0) \boldsymbol{q}_{lj}^{k,i-1}$$

für alle $j = i, \dots, N$ und wegen $\beta_j^i(u) \in [0, 1],\ \acute{\beta}_j^i(v) > 0$ für alle $v_0 \in [c, d]$ die lineare Unabhängigkeit der Mengen

$$\left\{ \boldsymbol{q}_{lj}^{ki}(u_0, v_0) \,|\, l \in \{k, \dots, M\},\, j \in \{i, \dots, M\} \right\}$$

und damit die Behauptung. □

Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir die Aussage des zuvor aufgestellten Korollars ausnutzen. Zum besseren Verständnis der dortigen Beweisführung formulieren wir zusätzlich das

Korollar 5.1.3 a) Ist eine $(l, M-k+1)$-Matrix M gegeben, so gilt

$$M \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{ki}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{ki}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{ki}(u,v) \end{pmatrix} = O \quad \Rightarrow \quad M = O.$$

b) Ist eine $(N-i+1, l)$-Matrix N gegeben, so gilt

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{ki}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{ki}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{ki}(u,v) \end{pmatrix} N = O \quad \Rightarrow \quad N = O.$$

Lemma 5.1.4 a) Seien $\nu_{lj}^{ki}, \alpha_l^k$ sowie $\acute{\alpha}_l^k$ reelle Zahlen und $\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}$, $\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}$, $\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}$, $\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}$ Matrizen aus $\mathbb{E}^{(M-k)\times(N-i)}$ gemäß (5.4). Dann gilt:
Aus den Gleichungen

$$(\nu_{lj}^{ki} - \acute{\alpha}_l^k) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} = (1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

und

$$(\nu_{l,j+1}^{ki} - \acute{\alpha}_l^k) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j+1}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l,j+1}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} = (1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j+1}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j+1}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

folgt

$$\nu_{lj}^{ki} = \nu_{l,j+1}^{ki}.$$

b) Seien $\mu_{lj}^{ki}, \beta_j^i \notin \{0,1\}$ sowie $\acute{\beta}_j^i > 0$ reelle Zahlen und $\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}, \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}, \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1}, \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1}$ Matrizen aus $\mathbb{E}^{(M-k)\times(N-i)}$ gemäß (5.4). Dann gilt:
Aus den Gleichungen

$$(\mu_{lj}^{ki} - \acute{\beta}_j^i) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

und

$$(\mu_{l+1,j}^{ki} - \acute{\beta}_j^i) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l+1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l+1,j}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l+1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l+1,j}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

folgt

$$\mu_{l+1,j}^{ki} = \mu_{lj}^{ki}.$$

Beweis: a) Wir betrachten das Element der jeweils zweiten Spalte der Gleichung (5.9) sowie das das Element der jeweils ersten Spalte der Gleichung (5.10). Somit gilt

$$\begin{aligned}
(\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k)(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}) &= (1 - \alpha_l^k)\dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} + \alpha_l^k \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1}, \\
(\nu_{l,j+1}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k)(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}) &= (1 - \alpha_l^k)\dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} + \alpha_l^k \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$(\nu_{l,j+1}^{ki} - \nu_{lj}^{ki})(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1}) = O$$

und wegen Lemma 5.1.2 folgt die Behauptung.

Der Teil b) der Behauptung kann analog bewiesen werden. □

Satz 5.1.5 Sei Φ eine vollständig berührende Fläche gemäß (4.7) und Definition 5.1.2.
a) Für festes $k \in \{2, \dots, M\}$, alle $l \in \{k, \dots, M\}$ und für $2 \leq i \leq j \leq N-1$ sowie beliebiges $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ gilt für die Parallelitätsfaktoren aus (5.7)

$$\nu_{lj}^{ki} = \nu_{l,j+1}^{ki}.$$

b) Für festes $i \in \{2, \dots, N\}$, alle $j \in \{i, \dots, N\}$ und für $2 \leq k \leq l \leq M-1$ sowie beliebiges $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ gilt für die Parallelitätsfaktoren aus (5.8)

$$\mu_{lj}^{ki} = \mu_{l+1,j}^{ki}.$$

Beweis: a) Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach k und betrachten ein beliebiges, aber festes Parameterpaar $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ der zugrunde liegenden, vollständig berührenden Fläche Φ. Im Beweis seien $i \in \{2, \dots, N\}$ beliebig und $l \in \{k, \dots, M\}$ beliebig, aber fest gewählt.

Wir betrachten zunächst das Matrixprodukt

$$
{}^T\!A_M^2(u)\,{}^T\!A_M^1(u)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v)\cdots B_N^i(v)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1-\alpha_2^2(u) & \alpha_2^2(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha_3^2(u) & \alpha_3^2(u) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha_M^2(u) & \alpha_M^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{1i}^{1i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{1N}^{1i}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{1i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{1i}(u,v) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{2i}^{2i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{2N}^{2i}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{2i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{2i}(u,v) \end{pmatrix}
$$

und zeigen für beliebiges $j \in \{i, \ldots, N-1\}$

$$
\nu_{lj}^{2i}(u,v) = \nu_{l,j+1}^{2i}(u,v).
$$

Nach der Definition vollständig berührender Flächen gilt

$$
\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{2i} = \nu_{lj}^{2i} \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}.
$$

Andererseits gilt nach (5.2)

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{2i} \;&=\; (-\dot{\alpha}_l^2 \quad \dot{\alpha}_l^2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix} \\
&\quad + (1-\alpha_l^2 \quad \alpha_l^2) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

woraus die Identität

$$(\nu_{lj}^{2i} - \dot{\alpha}_l^2) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha_l^2 \quad \alpha_l^2) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

folgt. Wegen

$$\boldsymbol{q}_{pq}^{1,i-1} = (1-\alpha_p^1 \quad \alpha_p^1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{p-1,q-1}^{0,i-2} & \boldsymbol{q}_{p-1,q}^{0,i-2} \\ \boldsymbol{q}_{p,q-1}^{0,i-2} & \boldsymbol{q}_{pq}^{0,i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_q^{i-1} \\ \beta_q^{i-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{pq}^{1,i-1} = (-\dot{\alpha}_p^1 \quad \dot{\alpha}_p^1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{p-1,q-1}^{0,i-2} & \boldsymbol{q}_{p-1,q}^{0,i-2} \\ \boldsymbol{q}_{p,q-1}^{0,i-2} & \boldsymbol{q}_{pq}^{0,i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_q^{i-1} \\ \beta_q^{i-1} \end{pmatrix}$$

für $(p,q) \in \{l-1, l\} \times \{j-1, j\}$ (siehe (5.4)) ergibt sich

$$(\nu_{lj}^{2i} - \dot{\alpha}_l^2) \cdot \begin{pmatrix} (1-\alpha_l^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} + (1-\alpha_l^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} \\ +\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2} + \alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2} \\ -(1-\alpha_{l-1}^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2} \\ -\alpha_{l-1}^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} - \alpha_{l-1}^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} \\ \hline (1-\alpha_l^1)(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} + (1-\alpha_l^1)\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{0,i-2} \\ +\alpha_l^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2} + \alpha_l^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{lj}^{0,i-2} \\ -(1-\alpha_{l-1}^1)(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^1)\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{0,i-2} \\ -\alpha_{l-1}^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} - \alpha_{l-1}^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{0,i-2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\dfrac{\begin{array}{c}(1-\alpha_l^2)\left(-\dot\alpha_{l-1}^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2} - \dot\alpha_{l-1}^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2}\right.\\
\left.+\dot\alpha_{l-1}^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} + \dot\alpha_{l-1}^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\right)\\
+\alpha_l^2\left(-\dot\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} - \dot\alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\right.\\
\left.+\dot\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2} + \dot\alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2}\right)\end{array}}{\begin{array}{c}(1-\alpha_l^2)\left(-\dot\alpha_{l-1}^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2} - \dot\alpha_{l-1}^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{0,i-2}\right.\\
\left.+\dot\alpha_{l-1}^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} + \dot\alpha_{l-1}^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{0,i-2}\right)\\
+\alpha_l^2\left(-\dot\alpha_l^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2} - \dot\alpha_l^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{0,i-2}\right.\\
\left.+\dot\alpha_l^1(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2} + \dot\alpha_l^1\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{lj}^{0,i-2}\right)\end{array}}
\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}. \qquad (5.13)
$$

Nach Lemma 5.1.2 sind die Matrizen beziehungsweise die damit identifizierten Vektoren $\boldsymbol{q}_{pq}^{0,i-2}$, $(p = l-2,\dots,l;\ q = j-2,\dots,j)$ linear unabhängig, sodass ein Koeffizientenvergleich der Gleichung

$$
\begin{aligned}
O \;=\; & \boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\left(-(\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_{l-1}^1) + (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2}\left(\beta_{j-1}^{i-1}(1-\beta_j^i) + (1-\beta_j^{i-1})\beta_j^i\right)\left(-(\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_{l-1}^1) + (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{0,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left(-(\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_{l-1}^1) + (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1) - (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 + \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\left(\beta_{j-1}^{i-1}(1-\beta_j^i) + (1-\beta_j^{i-1})\beta_j^i\right)\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1)\right.\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.-(1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 + \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{0,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)(1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1) - (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 + \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)\alpha_l^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2}\left(\beta_{j-1}^{i-1}(1-\beta_j^i) + (1-\beta_j^{i-1})\beta_j^i\right)\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)\alpha_l^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)\\
& +\boldsymbol{q}_{lj}^{0,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left((\nu_{lj}^{2i}-\dot\alpha_l^2)\alpha_l^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\right)
\end{aligned}
$$

ergibt, dass die Vorfaktoren der Matrizen allesamt verschwinden müssen. Daraus folgt (insbesondere auch für $\beta_j^i\beta_j^{i-1}\beta_{j-1}^{i-1} = 0$ oder $\left(1-\beta_j^i\right)\left(1-\beta_j^{i-1}\right)\left(1-\beta_{j-1}^{i-1}\right) = 0$)

$$\left.\begin{aligned}(\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)(1-\alpha_{l-1}^1) &= (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1,\\ (\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)(1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1) &= (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1,\\ (\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)\alpha_l^1 &= \alpha_l^2\dot\alpha_l^1.\end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\left((\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1}\\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1}\end{pmatrix}\right)[1,1]\\
\overset{\text{vgl. (5.13)}}{=}\;& (\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)\cdot\big\{(1-\alpha_l^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} + (1-\alpha_l^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\\
&+\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2} + \alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2}\\
&-(1-\alpha_{l-1}^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2}\\
&-\alpha_{l-1}^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} - \alpha_{l-1}^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\big\}\\
=\;& (\nu_{lj}^{2i} - \dot\alpha_l^2)\cdot\big\{-(1-\alpha_{l-1}^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2}\\
&+(1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2} + (1-\alpha_l^1-\alpha_{l-1}^1)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\\
&+\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2} + \alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2}\big\}\\
\overset{(5.14)}{=}\;& -(1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{0,i-2} - (1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{0,i-2}\\
&+\big((1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\big)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{0,i-2}\\
&+\big((1-\alpha_l^2)\dot\alpha_{l-1}^1 - \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\big)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{0,i-2}\\
&+\alpha_l^2\dot\alpha_l^1(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{0,i-2} + \alpha_l^2\dot\alpha_l^1\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{0,i-2}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{vgl. (5.13)}}{=} \left((1-\alpha_l^2 \quad \alpha_l^2) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1,1],$$

analog finden wir

$$\left((\nu_{lj}^{2i} - \dot{\alpha}_l^2) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1,2]$$

$$= \left((1-\alpha_l^2 \quad \alpha_l^2) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1,2],$$

sodass insgesamt

$$(\nu_{lj}^{2i} - \dot{\alpha}_l^2) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix} = (1-\alpha_l^2 \quad \alpha_l^2) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix}$$

für alle $1 \le i \le j \le N$ gilt. Nach Lemma 5.1.4 gilt somit

$$\nu_{lj}^{2i}(u,v) = \nu_{l,j+1}^{2i}(u,v) \qquad (u,v) \in [a,b] \times [c,d]$$

für alle $i = 2, \ldots, N$, $j = i, \ldots, N-1$.

Wir schließen von $k-1$ auf k und betrachten dazu das Matrixprodukt

$${}^T\!A_M^k(u)\, {}^T\!A_M^{k-1}(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^i(v)$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha_k^k(u) & \alpha_k^k(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha_{k+1}^k(u) & \alpha_{k+1}^k(u) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha_M^k(u) & \alpha_M^k(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{k-1,i}^{k-1,i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{k-1,i}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{ki}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{kN}^{ki}(u,v) \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Mi}^{ki}(u,v) & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN}^{ki}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Zu zeigen ist

$$\nu_{lj}^{ki} = \nu_{l,j+1}^{ki}, \quad 2 \leq i \leq j \leq N-1$$

unter der Voraussetzung

$$\nu_{lt}^{k-1,s} = \nu_{l,t+1}^{k-1,s}, \quad 2 \leq s \leq t \leq N-1.$$

Nach der Definition von vollständiger Berührung gilt

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki} = \nu_{lj}^{ki} \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix},$$

ferner gilt durch Ableiten der Beziehung (5.4)

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki} = (-\dot{\alpha}_l^k \quad \dot{\alpha}_l^k) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

$$+(1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$(\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Nun gilt

$$\boldsymbol{q}_{pq}^{k-1,i-1} = (1-\alpha_p^{k-1} \quad \alpha_p^{k-1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{p-1,q-1}^{k-2,i-2} & \boldsymbol{q}_{p-1,q}^{k-2,i-2} \\ \boldsymbol{q}_{p,q-1}^{k-2,i-2} & \boldsymbol{q}_{pq}^{k-2,i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\beta_q^{i-1} \\ \beta_q^{i-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{pq}^{k-1,i-1} = \nu_{pq}^{k-1,i-1}(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{p-1,q-1}^{k-2,i-2} & \boldsymbol{q}_{p-1,q}^{k-2,i-2} \\ \boldsymbol{q}_{p,q-1}^{k-2,i-2} & \boldsymbol{q}_{pq}^{k-2,i-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\beta_q^{i-1} \\ \beta_q^{i-1} \end{pmatrix}$$

für $(p,q) \in \{l-1,l\} \times \{j-1,j\}$.

Daraus und aus (5.15) folgt somit

$$(\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k) \cdot \left(\frac{\begin{matrix} (1-\alpha_l^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} + (1-\alpha_l^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \\ +\alpha_l^{k-1}(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2} + \alpha_l^{k-1}\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} \\ -(1-\alpha_{l-1}^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\ -\alpha_{l-1}^{k-1}(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} - \alpha_{l-1}^{k-1}\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \end{matrix}}{\begin{matrix} (1-\alpha_l^{k-1})(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} + (1-\alpha_l^{k-1})\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-2,i-2} \\ +\alpha_l^{k-1}(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} + \alpha_l^{k-1}\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{lj}^{k-2,i-2} \\ -(1-\alpha_{l-1}^{k-1})(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^{k-1})\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{k-2,i-2} \\ -\alpha_{l-1}^{k-1}(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} - \alpha_{l-1}^{k-1}\beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-2,i-2} \end{matrix}} \right)^T \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\begin{matrix} (1-\alpha_l^k)\nu_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\ +(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} + \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2}\Big) \\ +\alpha_l^k\nu_{l,j-1}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} - \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \\ +(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2} + \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2}\Big) \end{matrix}}{\begin{matrix} (1-\alpha_l^k)\nu_{l-1,j}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} - \beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{k-2,i-2} \\ +(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} + \beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-2,i-2}\Big) \\ +\alpha_l^k\nu_{lj}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} - \beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-2,i-2} \\ +(1-\beta_j^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} + \beta_j^{i-1}\boldsymbol{q}_{lj}^{k-2,i-2}\Big) \end{matrix}} \right)^T \begin{pmatrix} 1-\beta_j^i \\ \beta_j^i \end{pmatrix}. \qquad (5.16)$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\nu_{l-1,j}^{k-1,i-1} = \nu_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} =: \nu_{l-1}^{k-1,i-1}$ und $\nu_{lj}^{k-1,i-1} = \nu_{l,j-1}^{k-1,i-1} =: \nu_{l}^{k-1,i-1}$, womit sich folgende Gleichheit ergibt:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\left(-(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_{l-1}^{k-1})+\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2}\left((1-\beta_j^i)\beta_{j-1}^{i-1}+(1-\beta_j^{i-1})\beta_j^i\right)\left(-(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_{l-1}^{k-1})+\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{l-2,j}^{k-2,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left(-(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_{l-1}^{k-1})+\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\Big((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1}) \\
& \qquad\qquad -\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)+\nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\Big) \\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2}\left(\beta_{j-1}^{i-1}(1-\beta_j^i)+\beta_j^i(1-\beta_j^{i-1})\right)\Big((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1}) \\
& \qquad\qquad -\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)+\nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\Big) \\
& +\boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-2,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1})-\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)+\nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2}(1-\beta_{j-1}^{i-1})(1-\beta_j^i)\left((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\alpha_l^{k-1}-\alpha_l^k\nu_l^{k-1,i-1}\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2}\left(\beta_{j-1}^{i-1}(1-\beta_j^i)+(1-\beta_j^{i-1})\beta_j^i\right)\left((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\alpha_l^{k-1}-\alpha_l^k\nu_l^{k-1,i-1}\right) \\
& +\boldsymbol{q}_{lj}^{k-2,i-2}\beta_j^{i-1}\beta_j^i\left((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\alpha_l^{k-1}-\alpha_l^k\nu_l^{k-1,i-1}\right).
\end{aligned}
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert wegen Lemma 5.1.2 (auch für $\beta_j^i\beta_j^{i-1}\beta_{j-1}^{i-1}=0$ oder $\left(1-\beta_j^i\right)\left(1-\beta_j^{i-1}\right)\left(1-\beta_{j-1}^{i-1}\right)=0$)

$$
\left.
\begin{aligned}
(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_{l-1}^{k-1}) &= \nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k), \\
(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1}) &= \nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)-\nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k, \\
(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\alpha_l^{k-1} &= \alpha_l^k\nu_l^{k-1,i-1}.
\end{aligned}
\right\} \tag{5.17}
$$

Es folgt

$$\left((\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k) \cdot (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1|1]$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{vgl. }(5.16)}{=} && (\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k) \cdot \Big\{ (1-\alpha_l^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} + (1-\alpha_l^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +\alpha_l^{k-1}(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2} + \alpha_l^{k-1}\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& -(1-\alpha_{l-1}^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& -\alpha_{l-1}^{k-1}(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} - \alpha_{l-1}^{k-1}\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \Big\} \\
&= && (\nu_{lj}^{ki} - \dot{\alpha}_l^k) \cdot \Big\{ -(1-\alpha_{l-1}^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - (1-\alpha_{l-1}^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1})(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} \\
&&& +(1-\alpha_l^{k-1}-\alpha_{l-1}^{k-1})\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +\alpha_l^{k-1}\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} + \alpha_l^{k-1}(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2} \Big\} \\
&\overset{(5.17)}{=} && -\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - \nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +\big(\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k) - \nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\big)(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} \\
&&& +\big(\nu_{l-1}^{k-1,i-1}(1-\alpha_l^k) - \nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\big)\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +\nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2} + \nu_l^{k-1,i-1}\alpha_l^k(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2} \\
&= && (1-\alpha_l^k)\nu_{l-1,j-1}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-2,j-2}^{k-2,i-2} - \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-2,j-1}^{k-2,i-2} \\
&&& +(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} + \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2} \Big) \\
&&& +\alpha_l^k\nu_{l,j-1}^{k-1,i-1}\Big(-(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l-1,j-2}^{k-2,i-2} - \beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-2,i-2}
\end{aligned}$$

$$+(1-\beta_{j-1}^{i-1})\boldsymbol{q}_{l,j-2}^{k-2,i-2}+\beta_{j-1}^{i-1}\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-2,i-2}\Big)$$

$$\overset{\text{vgl. (5.16)}}{=} \left((1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1|1]$$

Analog zeigt man

$$\left((\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\cdot(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1|2]$$

$$= \left((1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} \right) [1|2],$$

sodass also für alle $j=i,\ldots,N$

$$(\nu_{lj}^{ki}-\dot{\alpha}_l^k)\cdot(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i-1} \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i-1} & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i-1} \end{pmatrix} = (1-\alpha_l^k \quad \alpha_l^k) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{l-1,j}^{1,i-1} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{1,i-1} & \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{1,i-1} \end{pmatrix}$$

folgt. Somit gilt nach Lemma 5.1.4 für alle $(u,v)\in[a,b]\times[c,d]$

$$\nu_{li}^{ki}=\nu_{l,i+1}^{ki}=\ldots=\nu_{lN}^{ki}=:\nu_l^{ki},$$

was den induktiven Beweis abschließt.
Teil b) beweist man in derselben Weise. □

Wir beweisen eine weitere Eigenschaft der Faktoren aus (5.7) und (5.8).

Satz 5.1.6 Sei Φ eine vollständig berührende Fläche gemäß (4.7) und Definition 5.1.2.
a) Für festes $k\in\{2,\ldots,M\}$, alle $l\in\{k,\ldots,M\}$ und für $2\leq i\leq j\leq N-1$ sowie beliebiges $(u,v)\in[a,b]\times[c,d]$ gilt für die Parallelitätsfaktoren aus (5.7)

$$\nu_l^{ki}(u,v)=\nu_l^{k,i+1}(u,v).$$

b) Für festes $i\in\{2,\ldots,N\}$, alle $j\in\{i,\ldots,N\}$ und für $2\leq k\leq l\leq M-1$ sowie beliebiges $(u,v)\in[a,b]\times[c,d]$ gilt für die Parallelitätsfaktoren aus (5.8)

$$\mu_j^{ki}(u,v)=\mu_j^{k+1,i}(u,v).$$

Beweis: a) Nach (5.7) und Satz 5.1.5 gilt

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k,i+1}(u,v) = \nu_l^{k,i+1}(u,v)\cdot(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i}(u,v) & \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i}(u,v) & \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i}(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\beta_j^{i+1}(v) \\ \beta_j^{i+1}(v) \end{pmatrix},$$

was sich mit (5.3) schreiben lässt als

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k,i+1}(u,v) = \nu_l^{k,i+1}(u,v)\big(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i+1}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i+1}(u,v)\big) \tag{5.18}$$

Andererseits gilt mit

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{ki}(u,v) = \nu_l^{ki}(u,v)\big(\boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i}(u,v)\big)$$

sowie

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}(u,v) = \nu_l^{ki}(u,v)\big(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i}(u,v)\big)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{k,i+1}(u,v) &\overset{(5.3)}{=} \big(1-\beta_j^{i+1}(v)\big)\dot{\boldsymbol{q}}_{l,j-1}^{ki}(u,v) + \beta_j^{i+1}(v)\dot{\boldsymbol{q}}_{lj}^{ki}(u,v) \\ &= \nu_l^{ki}(u,v)\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{l,j-1}^{k-1,i}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j-1}^{k-1,i}(u,v) \\ \boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i}(u,v) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\beta_j^{i+1}(v) \\ \beta_j^{i+1}(v) \end{pmatrix} \\ &\overset{(5.3)}{=} \nu_l^{ki}(u,v)\big(\boldsymbol{q}_{lj}^{k-1,i+1}(u,v) - \boldsymbol{q}_{l-1,j}^{k-1,i+1}(u,v)\big). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (5.18) liefert die erste Hälfte der Behauptung, den b)-Teil beweist man entsprechend. □

Satz 5.1.7 Eine cc-Fläche Φ vom Grad (M,N) ist genau dann vollständig berührend, wenn für $k=2,\ldots,M$; $i=2,\ldots,N$ und zu jedem $(u,v)\in[a,b]\times[c,d]$ Diagonalmatrizen

$$\Lambda_M^k := \operatorname{diag}(\lambda_k^k,\ldots,\lambda_M^k) = \operatorname{diag}\big(\lambda_k^k(u),\ldots,\lambda_M^k(u)\big)$$

und

$$\Pi_N^i := \operatorname{diag}(\mu_i^i,\ldots,\mu_N^i) = \operatorname{diag}\big(\mu_i^i(v),\ldots,\mu_N^i(v)\big)$$

existieren, sodass die $M+N-2$ Gleichungen

$$\begin{aligned} (A_M^1\cdots A_M^{k-1})^{\dot{}}A_M^k &= (A_M^1\cdots A_M^{k-1})\dot{A}_M^k\Lambda_M^k, \\ (B_N^1\cdots B_N^{i-1})^{\acute{}}B_N^i &= (B_N^1\cdots B_N^{i-1})\acute{B}_N^i\Pi_N^i \end{aligned}$$

$(k=2,\ldots,M;\ i=2,\ldots,N)$ gelten.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Seien $k \in \{2, \ldots, M\}$, $i \in \{2, \ldots, N\}$ und $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ beliebig, E_s bezeichne die (s, s)-Einheitsmatrix. Dann gilt

$$
\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}^{ki}_{ki} & \cdots & \dot{\boldsymbol{q}}^{ki}_{kN} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\boldsymbol{q}}^{ki}_{Mi} & \cdots & \dot{\boldsymbol{q}}^{ki}_{MN} \end{pmatrix}
$$

$$
= \left({}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M} ({}^{T}\!A^{k-1}_{M} \cdots {}^{T}\!A^{1}_{M}) + {}^{T}\!A^{k}_{M} ({}^{T}\!A^{k-1}_{M} \cdots {}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^{1}_{N} \cdots B^{i}_{N}
$$

$$
\overset{\text{Vor.}}{=} (E_{M-k+1} + \Lambda^{k}_{M}) \, {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M} ({}^{T}\!A^{k-1}_{M} \cdots {}^{T}\!A^{1}_{M}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^{1}_{N} \cdots B^{i}_{N}
$$

$$
= (E_{M-k+1} + \Lambda^{k}_{M}) \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}^{k}_{k} & \dot{\alpha}^{k}_{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}^{k}_{k+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dot{\alpha}^{k}_{M-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\dot{\alpha}^{k}_{M} & \dot{\alpha}^{k}_{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,i-1} & \cdots & \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M,i-1} & \cdots & \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{MN} \end{pmatrix} B^{i}_{N}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\begin{array}{r} \dot{\alpha}^{k}_{k}(1+\lambda^{k}_{k}) \\ \cdot\big((1-\beta^{i}_{i})(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k,i-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,i-1}) \\ +\beta^{i}_{i}(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{ki} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,i})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{r} \dot{\alpha}^{k}_{k}(1+\lambda^{k}_{k}) \\ \cdot\big((1-\beta^{i}_{N})(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k,N-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,N-1}) \\ +\beta^{i}_{N}(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{kN} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,N})\big) \end{array} \\
\vdots & & \vdots \\
\begin{array}{r} \dot{\alpha}^{k}_{M}(1+\lambda^{k}_{M}) \\ \cdot\big((1-\beta^{i}_{i})(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M,i-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,i-1}) \\ +\beta^{i}_{i}(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{Mi} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,i})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{r} \dot{\alpha}^{k}_{M}(1+\lambda^{k}_{M}) \\ \cdot\big((1-\beta^{i}_{N})(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M,N-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,N-1}) \\ +\beta^{i}_{N}(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{MN} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,N})\big) \end{array}
\end{pmatrix}.
$$

Analog finden wir das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} \acute{\boldsymbol{q}}_{ki}^{ki} & \cdots & \acute{\boldsymbol{q}}_{kN}^{ki} \\ \vdots & & \vdots \\ \acute{\boldsymbol{q}}_{Mi}^{ki} & \cdots & \acute{\boldsymbol{q}}_{MN}^{ki} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{l} \acute{\beta}_i^i(1+\mu_i^i) \\ \cdot\big((1-\alpha_k^k)(\boldsymbol{q}_{k-1,i}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\alpha_k^k(\boldsymbol{q}_{ki}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k,i-1}^{k-1,i-1})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{l} \acute{\beta}_N^i(1+\mu_N^i) \\ \cdot\big((1-\alpha_k^k)(\boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\alpha_k^k(\boldsymbol{q}_{kN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k,N-1}^{k-1,i-1})\big) \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{l} \acute{\beta}_i^i(1+\mu_i^i) \\ \cdot\big((1-\alpha_M^k)(\boldsymbol{q}_{M-1,i}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,i-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\alpha_M^k(\boldsymbol{q}_{Mi}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{l} \acute{\beta}_N^i(1+\mu_N^i) \\ \cdot\big((1-\alpha_M^k)(\boldsymbol{q}_{M-1,N}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\alpha_M^k(\boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M,N-1}^{k-1,i-1})\big) \end{array} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt, dass Φ eine vollständig berührende cc-Fläche ist.

„$\Rightarrow$“ Sei nun Φ vollständig berührend. Also gilt für festes $k \in \{2,\dots,M\}$, $i \in \{2,\dots,N\}$ und für geeignete ν_{st}^{ki} $(s \in \{k,\dots,M\}, t \in \{i,\dots,N\})$

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{ki}^{ki} & \cdots & \dot{\boldsymbol{q}}_{kN}^{ki} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{Mi}^{ki} & \cdots & \dot{\boldsymbol{q}}_{MN}^{ki} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{l} \nu_{ki}^{ki}\big((1-\beta_i^i)(\boldsymbol{q}_{k,i-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\beta_i^i(\boldsymbol{q}_{ki}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,i}^{k-1,i-1})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{l} \nu_{kN}^{ki}\big((1-\beta_N^i)(\boldsymbol{q}_{k,N-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\beta_N^i(\boldsymbol{q}_{kN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1})\big) \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{l} \nu_{Mi}^{ki}\big((1-\beta_i^i)(\boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,i-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\beta_i^i(\boldsymbol{q}_{Mi}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,i}^{k-1,i-1})\big) \end{array} & \cdots & \begin{array}{l} \nu_{MN}^{ki}\big((1-\beta_N^i)(\boldsymbol{q}_{M,N-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ \qquad +\beta_N^i(\boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,N}^{k-1,i-1})\big) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$
= ({}^T\!A^k_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N \cdots B^i_N
$$

$$
= \Big({}^T\!\dot{A}^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M) + {}^T\!A^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} \Big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N \cdots B^i_N
$$

$$
= \begin{pmatrix} \dot{\alpha}^k_k \big((1-\beta^i_i)(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k,i-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,i-1}) & \cdots & \dot{\alpha}^k_k \big((1-\beta^i_N)(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k,N-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,N-1}) \\ \quad + \beta^i_i (\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{ki} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,i}) \big) & & \quad + \beta^i_N (\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{kN} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{k-1,N}) \big) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\alpha}^k_M \big((1-\beta^i_i)(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M,i-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,i-1}) & \cdots & \dot{\alpha}^k_M \big((1-\beta^i_N)(\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M,N-1} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,N-1}) \\ \quad + \beta^i_i (\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{Mi} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,i}) \big) & & \quad + \beta^i_N (\boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{MN} - \boldsymbol{q}^{k-1,i-1}_{M-1,N}) \big) \end{pmatrix}
$$

$$
+ {}^T\!A^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N \cdots B^i_N .
$$

Wegen Satz 5.1.5 a) gilt dabei für alle $l = k, \ldots, M$

$$
\nu^{ki}_{li} = \nu^{ki}_{l,i+1} = \ldots = \nu^{ki}_{lN} =: \nu^{ki}_l
$$

sowie

$$
\nu^{ki}_l = \nu^{k,i+1}_l = \ldots = \nu^{kN}_l =: \nu^k_l .
$$

Mit der Einführung $\xi^k_l := \nu^k_l - \dot{\alpha}^k_l$ $(l = k, \ldots, M;\ k \in \{2, \ldots, M\})$ folgt

$$
{}^T\!A^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N \cdots B^i_N
$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_k^k\big((1-\beta_i^i)(\boldsymbol{q}_{k,i-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,i-1}^{k-1,i-1}) & \cdots & \xi_k^k\big((1-\beta_N^i)(\boldsymbol{q}_{k,N-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ +\beta_i^i(\boldsymbol{q}_{ki}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,i}^{k-1,i-1})\big) & & +\beta_N^i(\boldsymbol{q}_{kN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{k-1,N}^{k-1,i-1})\big) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_M^k\big((1-\beta_i^i)(\boldsymbol{q}_{M,i-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,i-1}^{k-1,i-1}) & \cdots & \xi_M^k\big((1-\beta_N^i)(\boldsymbol{q}_{M,N-1}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,N-1}^{k-1,i-1}) \\ +\beta_i^i(\boldsymbol{q}_{Mi}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,i}^{k-1,i-1})\big) & & +\beta_N^i(\boldsymbol{q}_{MN}^{k-1,i-1} - \boldsymbol{q}_{M-1,N}^{k-1,i-1})\big) \end{pmatrix}$$

$$=: \Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k ({}^T\!A_M^{k-1} \cdots {}^T\!A_N^1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1 \cdots B_N^i$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_M^k &= \operatorname{diag}(\lambda_k^k, \ldots, \lambda_M^k) \\ &:= \operatorname{diag}\left(\frac{\xi_k^k}{\dot\alpha_k^k}, \ldots, \frac{\xi_M^k}{\dot\alpha_M^k}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(\frac{\nu_k^k - \dot\alpha_k^k}{\dot\alpha_k^k}, \ldots, \frac{\nu_M^k - \dot\alpha_M^k}{\dot\alpha_M^k}\right). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} & {}^T\!A_M^k ({}^T\!A_M^{k-1} \cdots {}^T\!A_M^1)^{\cdot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1 \cdots B_N^i \\ &= \Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k ({}^T\!A_M^{k-1} \cdots {}^T\!A_M^1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1 \cdots B_N^i. \end{aligned}$$

Mit Korollar 5.1.3 a) folgt somit für alle $k \in \{2, \ldots, M\}$

$${}^T\!A_M^k ({}^T\!A_M^{k-1} \cdots {}^T\!A_M^1)^{\cdot} = \Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k ({}^T\!A_M^{k-1} \cdots {}^T\!A_M^1).$$

Analog zeigt man die Existenz von Diagonalmatrizen Π_N^i $(i = 2, \ldots, N)$ mit der Eigenschaft

$$(B_N^1 \cdots B_N^{i-1})' B_N^i = (B_N^1 \cdots B_N^{i-1}) \acute{B}_N^i \Pi_N^i$$

durch partielles Ableiten nach dem Parameter v und mit Hilfe der Sätze 5.1.5 b) und 5.1.6 b). □

Im Folgenden übertragen wir Aussagen und Definitionen über (vollständig berührende) cc-Kurven auf (vollständig berührende) cc-Flächen.

Satz 5.1.8 Für eine *lineare* cc-Fläche Φ gilt für alle $k \in \{2, \ldots, M\}$ und $i \in \{2, \ldots, N\}$

$$ {}^T\!A_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^{k-1} = \Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k \, {}^T\!A_M^{k-1} \implies \lambda_k^k = \ldots = \lambda_M^k = 1,$$

$$\acute{B}_N^{i-1} B_N^i = B_N^{i-1} \acute{B}_N^i \Pi_N^i \implies \mu_i^i = \ldots = \mu_N^i = 1.$$

Beweis: Es gilt für $p = 1, \ldots, M-k+1$

$$\begin{aligned}
({}^T\!A_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^{k-1})[p|p] &= -(1-\alpha_{k+p-1}^k)\dot{\alpha}_{k+p-1}^{k-1} \\
&= -\lambda_{k+p-1}^k \dot{\alpha}_{k+p-1}^k (1-\alpha_{k+p-2}^{k-1}) = (\Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k \, {}^T\!A_M^{k-1})[p|p], \quad (5.19) \\
({}^T\!A_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^{k-1})[p|p+2] &= \alpha_{k+p-1}^k \dot{\alpha}_{k+p-1}^{k-1} \\
&= \lambda_{k+p-1}^k \dot{\alpha}_{k+p-1}^k \alpha_{k+p-1}^{k-1} = (\Lambda_M^k \, {}^T\!\dot{A}_M^k \, {}^T\!A_M^{k-1})[p|p+2]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Für die Schnittfunktionen einer linearen cc-Fläche gilt

$$\alpha_l^k(u) = \gamma_l^k \, u + \delta_l^k \ (\gamma_l^k \neq 0, \, k = 1, \ldots, M; \, l = k, \ldots, M).$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (5.19) und Auflösen nach λ_{k+p-1}^k ergibt

$$\lambda_{k+p-1}^k = \frac{(1-\gamma_{k+p-1}^k u - \delta_{k+p-1}^k)\gamma_{k+p-2}^{k-1}}{\gamma_{k+p-1}^k (1-\gamma_{k+p-2}^{k-1} u - \delta_{k+p-2}^{k-1})}.$$

Analog erhält man mit (5.20)

$$\lambda_{k+p-1}^k = \frac{(\gamma_{k+p-1}^k u + \delta_{k+p-1}^k)\gamma_{k+p-1}^{k-1}}{\gamma_{k+p-1}^k (\gamma_{k+p-1}^{k-1} u + \delta_{k+p-1}^{k-1})}.$$

Dies ergibt

$$\lambda_{k+p-1}^{k} = \frac{u + \frac{\delta_{k+p-1}^{k}-1}{\gamma_{k+p-1}^{k}}}{u + \frac{\delta_{k+p-2}^{k-1}-1}{\gamma_{k+p-2}^{k-1}}} = \frac{u + \frac{\delta_{k+p-1}^{k}}{\gamma_{k+p-1}^{k}}}{u + \frac{\delta_{k+p-1}^{k-1}}{\gamma_{k+p-1}^{k-1}}},$$

woraus

$$\frac{\delta_{k+p-1}^{k}}{\gamma_{k+p-1}^{k}} = \frac{\delta_{k+p-1}^{k-1}}{\gamma_{k+p-1}^{k-1}}$$

folgt. Denn für $u \in [a,b]$ und reelle Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \rho, \gamma, \delta$ $(\mu, \rho, \delta \neq 0)$ mit

$$\frac{u + \frac{\lambda-1}{\mu}}{u + \frac{\nu-1}{\rho}} = \frac{u + \frac{\lambda}{\mu}}{u + \frac{\gamma}{\delta}}$$

gilt

$$u^2 + \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\lambda-1}{\mu}\right) u + \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda-1}{\mu}\right) = u^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\nu-1}{\rho}\right) u + \left(\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\nu-1}{\rho}\right)$$

und damit

$$\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\lambda-1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\nu-1}{\rho} \quad \wedge \quad \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda-1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\nu-1}{\rho}.$$

Es folgt

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{\mu} + \frac{\nu-1}{\rho} \ \wedge \ \frac{\lambda-1}{\mu} = \frac{\nu-1}{\rho},$$

und damit

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Somit ergibt sich $\lambda_{k+p-1}^{k} = 1$ für $p = 1, \ldots, M-k+1$.
Die Betrachtungen für die μ_j^i $(j = i, \ldots, N)$ verlaufen analog. □

Satz 5.1.9 Sei Φ eine *lineare* cc-Fläche vom Grad (M, N) gemäß (4.7). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

a) Die cc-Fläche Φ ist vollständig berührend.

b) Für $k = 2, \ldots, M$; $i = 2, \ldots, N$ und $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ gelten die $(M + N - 2)$ Gleichungen

$$ {}^T\!A^k_M \, {}^T\!\dot{A}^{k-1}_M = {}^T\!\dot{A}^k_M \, {}^T\!A^{k-1}_M, \;\; \acute{B}^{i-1}_N B^i_N = B^{i-1}_N \acute{B}^i_N. $$

c) Für $k = 2, \ldots, M$; $i = 2, \ldots, N$ und $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ gelten die $(M + N - 2)$ Gleichungen

$$ ({}^T\!A^k_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} = k \cdot {}^T\!\dot{A}^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M), $$

$$ (B^1_N \cdots B^i_N)' = i \cdot (B^1_N \cdots B^{i-1}_N) \acute{B}^i_N. $$

Beweis: Wir beweisen lediglich die Aussagen über die A^*_*, die entsprechenden Beweise über die B^*_* verlaufen analog.

„b) $\Rightarrow$ c)“ Vollständige Induktion nach k.

Induktionsanfang für $k = 2$. Es gilt nach Satz 5.1.8 für eine lineare, vollständig berührende corner cutting-Fläche

$$ {}^T\!\dot{A}^2_M \, {}^T\!A^1_M = {}^T\!A^2_M \, {}^T\!\dot{A}^1_M, $$

woraus der Induktionsanfang

$$ ({}^T\!A^2_M \, {}^T\!A^1_M)^{\cdot} = {}^T\!\dot{A}^2_M \, {}^T\!A^1_M + {}^T\!A^2_M \, {}^T\!\dot{A}^1_M = 2 \, {}^T\!\dot{A}^2_M \, {}^T\!A^1_M $$

folgt.

Induktionsschluss von $k - 1$ auf k. Es gilt

$$ \begin{aligned} ({}^T\!A^k_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} &= {}^T\!\dot{A}^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M) + {}^T\!A^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M)^{\cdot} \\ &\overset{\text{IVor.}}{=} {}^T\!\dot{A}^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M) + (k-1) \, {}^T\!A^k_M \, {}^T\!\dot{A}^{k-1}_M ({}^T\!A^{k-2}_M \cdots {}^T\!A^1_M) \\ &\overset{\text{b)}}{=} k \, {}^T\!\dot{A}^k_M ({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M), \end{aligned} $$

was zu beweisen war.

„c) ⇒ b)“

Es gilt für $k = 2, \ldots, M$

$$
\begin{aligned}
k\,{}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) &\overset{\text{c)}}{=} ({}^{T}\!A^{k}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} \\
&= {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}({}^{T}\!A^{k-1}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) + {}^{T}\!A^{k}_{M}({}^{T}\!A^{k-1}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} \\
&\overset{\text{c)}}{=} {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) \\
&\quad +(k-1)\,{}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) \\
\Rightarrow \quad {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) &= {}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}).
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung ${}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M} = {}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}$ ($k \in \{2, \ldots, M\}$) nach Lemma 4.1.1 b).

„a) ⇒ c)“ Vollständige Induktion nach k.

Induktionsanfang für $k = 2$. Es gilt mit Satz 5.1.7 und Satz 5.1.8

$$({}^{T}\!A^{2}_{M}\,{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} = {}^{T}\!\dot{A}^{2}_{M}\,{}^{T}\!A^{1}_{M} + {}^{T}\!A^{2}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{1}_{M} = 2\,{}^{T}\!\dot{A}^{2}_{M}\,{}^{T}\!A^{1}_{M},$$

was die Induktion verankert.

Induktionsschluss von $k-1$ auf k. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) &\overset{\text{a)}}{=} {}^{T}\!A^{k}_{M}({}^{T}\!A^{k-1}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} \\
&= {}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) + {}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} \\
&\overset{\text{IVor.}}{=} {}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) \\
&\quad +(k-2)\,{}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}({}^{T}\!A^{k-2}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) \\
\overset{\text{Lemma 4.1.1 b)}}{\Rightarrow} \quad \Lambda^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}\,{}^{T}\!A^{k-1}_{M} &= (k-1)\,{}^{T}\!A^{k}_{M}\,{}^{T}\!\dot{A}^{k-1}_{M}.
\end{aligned}
$$

Mit Satz 5.1.7 folgt $\lambda^{k}_{l} = (k-1) \quad (l = k, \ldots, M)$. Damit folgt

$$({}^{T}\!A^{k}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot} = {}^{T}\!\dot{A}^{k}_{M}({}^{T}\!A^{k-1}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M}) + {}^{T}\!A^{k}_{M}({}^{T}\!A^{k-1}_{M}\cdots{}^{T}\!A^{1}_{M})^{\cdot}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{a)}{=} {}^T\!\dot{A}^k_M({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M) + \Lambda^k_M\, {}^T\!\dot{A}^k_M({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M) \\
&= k \cdot {}^T\!\dot{A}^k_M({}^T\!A^{k-1}_M \cdots {}^T\!A^1_M)
\end{aligned}
$$

„c) $\Rightarrow$ a)“ Es gelten für $k = 2, \ldots, M$ die Beziehungen

$$
(A^1_M \cdots A^{k-1}_M)^{\cdot} A^k_M = (A^1_M \cdots A^{k-1}_M)\dot{A}^k_M \Lambda^k_M
$$

mit den Diagonalmatrizen $\Lambda^k_M := \operatorname{diag}(\lambda^k_k, \ldots, \lambda^k_M)$ mit $\lambda^k_l = k - 1$ für $l = k, \ldots, M$ $(k = 2, \ldots, M)$.

Analog zeigt man die Existenz der Diagonalmatrizen Π^i_N mit

Damit ist Φ nach Satz 5.1.7 vollständig berührend. $\square$

Bemerkung 5.1.4 Der zuvor geführte Beweis ist gleichzeitig ein Beweis über die entsprechende Aussage über vollständig berührende cc-Kurven (siehe Satz 2.3.3).

Bemerkung 5.1.5 Für eine beliebige (insbesondere nicht notwendigerweise lineare) cc-Fläche Φ, die die Bedingung b) aus Satz 5.1.9 erfüllt, gilt

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(u,v) &= M \cdot {}^T\!\dot{A}^M_M(u)\, {}^T\!A^{M-1}_M(u) \cdots {}^T\!A^1_M(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N(v) \cdots B^N_N(v) \\
&= M \cdot {}^T\!A^M_M(u)\, {}^T\!\dot{A}^{M-1}_M(u)\, {}^T\!A^{M-2}_M(u) \cdots {}^T\!A^1_M(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N(v) \cdots B^N_N(v) \\
&= \ldots \\
&= M \cdot {}^T\!A^M_M(u) \cdots {}^T\!A^2_M(u)\, {}^T\!\dot{A}^1_M(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B^1_N(v) \cdots B^N_N(v) \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\acute{\boldsymbol{x}}(u,v) &= N \cdot {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^{N-1}(v) \acute{B}_N^N(v) \\
&= N \cdot {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^{N-2}(v) \acute{B}_N^{N-1}(v) B_N^N(v) \\
&= \ldots \\
&= N \cdot {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} \acute{B}_N^1(v) B_N^2(v) \cdots B_N^N(v). \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

Ist Φ eine lineare vollständig berührende cc-Fläche (gelten also insbesondere die Sätze 5.1.8 und 5.1.9), so lassen sich (5.21) und (5.22) wie folgt auf partielle Ableitungen der Ordnung p ($p \geq 1$) verallgemeinern. In diesem Fall gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^p \boldsymbol{x}}{\partial u^p} &= \frac{M!}{(M-p)!} {}^{T}\!\dot{A}_M^M(u) \cdots {}^{T}\!\dot{A}_M^{M-p+1}(u) \, {}^{T}\!A_M^{M-p}(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot B_N^1(v) \cdots B_N^N(v) \\
&= \frac{M!}{(M-p)!} {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^{p+1}(u) \, {}^{T}\!\dot{A}_M^p(u) \cdots {}^{T}\!\dot{A}_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot B_N^1(v) \cdots B_N^N(v)
\end{aligned} \qquad (5.23)
$$

und

$$
\frac{\partial^q \boldsymbol{x}}{\partial v^q} = \frac{N!}{(N-q)!} {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \acute{B}_N^1(v)\cdots \acute{B}_N^q(v) B_N^{q+1}(v)\cdots B_N^N(v)\\
= \; & \frac{N!}{(N-q)!}\, {}^{T}\!A_M^M(u)\cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix}\\
&\cdot B_N^1(v)\cdots B_N^{N-q}(v)\acute{B}_N^{N-q+1}(v)\acute{B}_N^N(v); \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

allgemein gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{p+q}\boldsymbol{x}}{\partial u^p \partial v^q} = \; & \frac{M!\; N!}{(M-p)!(N-q)!}\, {}^{T}\!A_M^M(u)\cdots {}^{T}\!A_M^{p+1}(u)\, {}^{T}\!\dot{A}_M^p(u)\cdots {}^{T}\!\dot{A}_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{00} & \cdots & \boldsymbol{e}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{e}_{MN} \end{pmatrix}\\
&\cdot \acute{B}_N^1(v)\cdots \acute{B}_N^q(v) B_N^{q+1}(v)\cdots B_N^N(v). \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

Den Beweis führt man durch vollständige Induktion; man beachte dabei

$$
\frac{\partial^2 A_M^k}{\partial u^2}(u) = O \text{ und } \frac{\partial^2 B_N^i}{\partial v^2}(v) = O \quad (k = 1, \ldots, M;\; i = 1, \ldots, N).
$$

Die Linearität einer cc-Fläche wurde im Beweis des Satzes 5.1.9 in den Beweisrichtungen „b) $\Longleftrightarrow$ c)“ nicht benötigt. Wir geben denjenigen cc-Flächen, die die Eigenschaft b) aus Satz 5.1.9 besitzen, einen eigenen Namen.

5.2 Gleichförmig berührende corner cutting-Flächen

Definition 5.2.1 Sei Φ eine cc-Fläche vom Grad (M, N) gemäß (4.7). Dann heißt Φ **gleichförmig berührend**, wenn die $M + N - 2$ Gleichungen

$$
\begin{aligned}
{}^{T}\!A_M^k(u)\, {}^{T}\!\dot{A}_M^{k-1}(u) &= {}^{T}\!\dot{A}_M^k(u)\, {}^{T}\!A_M^{k-1}(u) \quad (u \in [a, b];\; k = 2, \ldots, M),\\
\acute{B}_N^{i-1}(v) B_N^i(v) &= B_N^{i-1}(v)\acute{B}_N^i(v) \quad (v \in [c, d];\; i = 2, \ldots, N) \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

gelten.

Eine erste Charakterisierung der Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Fläche erhalten wir durch den

Satz 5.2.1 Sei Φ eine cc-Fläche vom Grad (M, N) und $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Φ ist eine gleichförmig berührende corner cutting-Fläche.

b) Es gelten für $k \in \{1, \ldots, M\}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ die $2(M + N - k - i)$ Gleichungen

$$\alpha_{l+1}^{k}\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1} = \dot{\alpha}_{l+1}^{k}\alpha_{l+1}^{k+1} \quad (l = k, \ldots, M-1), \tag{5.27}$$

$$(1-\alpha_{l}^{k})\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1} = \dot{\alpha}_{l}^{k}(1-\alpha_{l+1}^{k+1}) \quad (l = k, \ldots, M-1), \tag{5.28}$$

$$\beta_{j+1}^{i}\acute{\beta}_{j+1}^{i+1} = \acute{\beta}_{j+1}^{i}\beta_{j+1}^{i+1} \quad (j = i, \ldots, N-1), \tag{5.29}$$

$$(1-\beta_{j}^{i})\acute{\beta}_{j+1}^{i+1} = \acute{\beta}_{j}^{i}(1-\beta_{j+1}^{i+1}) \quad (j = i, \ldots, N-1). \tag{5.30}$$

Beweis: Es ist

$${}^{T}\!\dot{A}_{M}^{k+1}\,{}^{T}\!A_{M}^{k} = {}^{T}\!A_{M}^{k+1}\,{}^{T}\!\dot{A}_{M}^{k}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}_{k+1}^{k+1} & \dot{\alpha}_{k+1}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}_{k+2}^{k+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dot{\alpha}_{M-1}^{k+1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\dot{\alpha}_{M}^{k+1} & \dot{\alpha}_{M}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha_{k}^{k} & \alpha_{k}^{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha_{k+1}^{k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{M-1}^{k} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha_{M}^{k} & \alpha_{M}^{k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha_{k+1}^{k+1} & \alpha_{k+1}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha_{k+2}^{k+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{M-1}^{k+1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\alpha_{M}^{k+1} & \alpha_{M}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}_{k}^{k} & \dot{\alpha}_{k}^{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}_{k+1}^{k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dot{\alpha}_{M-1}^{k} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\dot{\alpha}_{M}^{k} & \dot{\alpha}_{M}^{k} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -(1-\alpha_k^k)\dot\alpha_{k+1}^{k+1} & (1-\alpha_{k+1}^k-\alpha_k^k)\dot\alpha_{k+1}^{k+1} & \alpha_{k+1}^k\dot\alpha_{k+1}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(1-\alpha_{k+1}^k)\dot\alpha_{k+2}^{k+1} & (1-\alpha_{k+2}^k-\alpha_{k+1}^k)\dot\alpha_{k+2}^{k+1} & \alpha_{k+2}^k\dot\alpha_{k+2}^{k+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -(1-\alpha_{M-1}^k)\dot\alpha_M^{k+1} & (1-\alpha_M^k-\alpha_{M-1}^k)\dot\alpha_M^{k+1} & \alpha_M^k\dot\alpha_M^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-\alpha_{k+1}^{k+1})\dot\alpha_k^k & \begin{matrix}(1-\alpha_{k+1}^{k+1})\dot\alpha_k^k \\ -\alpha_{k+1}^{k+1}\dot\alpha_{k+1}^k\end{matrix} & \alpha_{k+1}^{k+1}\dot\alpha_{k+1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(1-\alpha_{k+2}^{k+1})\dot\alpha_{k+1}^k & \begin{matrix}(1-\alpha_{k+2}^{k+1})\dot\alpha_{k+1}^k \\ -\alpha_{k+2}^{k+1}\dot\alpha_{k+2}^k\end{matrix} & \alpha_{k+2}^{k+1}\dot\alpha_{k+2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -(1-\alpha_M^{k+1})\dot\alpha_{M-1}^k & \begin{matrix}(1-\alpha_M^{k+1})\dot\alpha_{M-1}^k \\ -\alpha_M^{k+1}\dot\alpha_M^k\end{matrix} & \alpha_M^{k+1}\dot\alpha_M^k \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -(1-\alpha_l^k)\dot\alpha_{l+1}^{k+1} &= -(1-\alpha_{l+1}^{k+1})\dot\alpha_l^k && (l=k,\dots,M-1), \\ -\alpha_l^k\dot\alpha_{l+1}^{k+1} + (1-\alpha_{l+1}^k)\dot\alpha_{l+1}^{k+1} &= (1-\alpha_{l+1}^{k+1})\dot\alpha_l^k - \alpha_{l+1}^{k+1}\dot\alpha_{l+1}^k && (l=k,\dots,M-1), \\ \alpha_{l+1}^k\dot\alpha_{l+1}^{k+1} &= \alpha_{l+1}^{k+1}\dot\alpha_{l+1}^k && (l=k,\dots,M-1) \end{aligned} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} (1-\alpha_l^k)\dot\alpha_{l+1}^{k+1} &= (1-\alpha_{l+1}^{k+1})\dot\alpha_l^k && (l=k,\dots,M-1), \\ \alpha_{l+1}^k\dot\alpha_{l+1}^{k+1} &= \alpha_{l+1}^{k+1}\dot\alpha_{l+1}^k && (l=k,\dots,M-1). \end{aligned} \right.$$

Analog beweist man die Äquivalenz $\big((5.29) \text{ und } (5.30)\big) \Leftrightarrow (5.26)$. □

Wir beschäftigen uns nun mit den Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Fläche. Man vergleiche die Vorgehensweise und die Ergebnisse mit den Resultaten für gleichförmig berührende cc-Kurven (siehe Abschnitt 2.4).

Aus (5.27) bis (5.30) folgt

$$\frac{\dot\alpha_{l+1}^k}{\alpha_{l+1}^k} = \frac{\dot\alpha_{l+1}^{k+1}}{\alpha_{l+1}^{k+1}} \quad (1 \le k \le l \le M-1), \tag{5.31}$$

$$\frac{\acute{\beta}^i_{j+1}}{\beta^i_{j+1}} = \frac{\acute{\beta}^{i+1}_{j+1}}{\beta^{i+1}_{j+1}} \quad (1 \le i \le j \le N-1), \tag{5.32}$$

$$\frac{(1-\alpha^k_l)^{\cdot}}{1-\alpha^k_l} = \frac{(1-\alpha^{k+1}_{l+1})^{\cdot}}{1-\alpha^{k+1}_{l+1}} \quad (1 \le k \le l \le M-1), \tag{5.33}$$

$$\frac{(1-\beta^i_j)'}{1-\beta^i_j} = \frac{(1-\beta^{i+1}_{j+1})'}{1-\beta^{i+1}_{j+1}} \quad (1 \le i \le j \le N-1). \tag{5.34}$$

Wegen (5.31) gilt für $1 \le k < l \le M$

$$(\ln \alpha^k_l)^{\cdot} = (\ln \alpha^{k+1}_l)^{\cdot},$$

daraus folgt $\ln \alpha^k_l = \ln \alpha^{k+1}_l + c$ ($c =$ const.) oder

$$\alpha^k_l(u) = c^k_l\, \alpha^{k+1}_l(u),\ c^k_l > 0 \quad (1 \le k < l \le M). \tag{5.35}$$

An (5.33) sehen wir für $1 \le k \le l \le M-1$, dass

$$\big(\ln(1-\alpha^k_l)\big)^{\cdot} = \big(\ln(1-\alpha^{k+1}_{l+1})\big)^{\cdot}$$

gilt. Damit ist $\ln(1-\alpha^k_l) = \ln(1-\alpha^{k+1}_{l+1}) + d$ ($d =$ const.) oder

$$\alpha^k_l(u) = d^k_l\, \alpha^{k+1}_{l+1}(u) + 1 - d^k_l,\ d^k_l > 0\ (1 \le k \le l \le M-1). \tag{5.36}$$

Diese Beziehungen gelten wegen (5.27) und (5.28) auch dann, wenn in (5.31) beziehungsweise (5.33) verschwindende Nenner auftreten.

Analog findet man aus (5.32) beziehungsweise (5.34)

$$\beta^i_j(v) = e^i_j\, \beta^{i+1}_j(v),\ e^i_j > 0 \quad (1 \le i < j \le N) \tag{5.37}$$

beziehungsweise

$$\beta^i_j(v) = f^i_j\, \beta^{i+1}_{j+1}(v) + 1 - f^i_j,\ f^i_j > 0 \quad (1 \le i \le j \le N-1). \tag{5.38}$$

Ebenso gilt eine entsprechende Aussage über die Gültigkeit dieser Gleichungen bezüglich verschwindender Nenner.

Seien nun Hauptschnittfunktionen $\alpha^M_M(u)$ und $\beta^N_N(v)$ gegeben. Wir definieren für $k, l = 1, \ldots, M-1$ und $i, j = 1, \ldots, N-1$ die Größen

$$\left.\begin{aligned}
c_M^k \cdots c_M^{M-1} &=: c^k, \\
d_l^l \cdots d_{M-1}^{M-1} &=: d^l, \\
e_N^i \cdots e_N^{N-1} &=: e^i, \\
f_j^j \cdots f_{N-1}^{N-1} &=: f^j,
\end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

und setzen für eine später folgende einheitliche Darstellung zusätzlich

$$c^M := d^M := e^N := f^N := 1.$$

Damit erhält man speziell aus (5.35) bis (5.38)

$$\left.\begin{array}{lll}
\alpha_M^k(u) = c^k \alpha_M^M(u) & (c^k > 0,\ k = 1, \ldots, M-1), \\
\alpha_l^l(u) = 1 - d^l\big(1 - \alpha_M^M(u)\big) & (d^l > 0,\ l = 1, \ldots, M-1), \\
\beta_N^i(v) = e^i \beta_N^N(v) & (e^i > 0,\ i = 1, \ldots, N-1), \\
\beta_j^j(v) = 1 - f^j\big(1 - \beta_N^N(v)\big) & (f^j > 0,\ j = 1, \ldots, N-1).
\end{array}\right\} \tag{5.40}$$

Durch welche Vorgaben von Schnittfunktionen alle weiteren Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Fläche eindeutig festgelegt sind, klärt der

Satz 5.2.2 Seien die beiden Hauptschnittfunktionen $\alpha_M^M(u)$ und $\beta_N^N(v)$ sowie Schnittfunktionen

$$\alpha_M^1(u), \alpha_M^2(u), \ldots, \alpha_M^{M-1}(u), \alpha_{M-1}^{M-1}(u), \alpha_{M-2}^{M-2}(u), \ldots, \alpha_1^1(u),$$
$$\beta_N^1(v), \beta_N^2(v) \ldots, \beta_N^{N-1}(v), \beta_{N-1}^{N-1}(v), \beta_{N-2}^{N-2}(v), \ldots, \beta_1^1(v)$$

gemäß (5.40) gegeben. Dann ist durch $(M+1)\cdot(N+1)$ Kontrollpunkte und obige Schnittfunktionen eine gleichförmig berührende cc-Fläche eindeutig bestimmt.

Beweis: Unter Berücksichtigung der vorgegebenen Schnittfunktionen findet man aus (5.27) beziehungsweise (5.35) für $l = M$

$$\alpha_M^k(u) = c_M^k \cdots c_M^{M-1} \alpha_M^M(u) \overset{\text{Def.}}{=} c^k \alpha_M^M(u).$$

und aus (5.28) beziehungsweise (5.36) folgt für $k = l$

$$\alpha_k^k(u) = 1 - d_k^k \cdots d_{M-1}^{M-1}\big(1 - \alpha_M^M(u)\big) \overset{\text{Def.}}{=} 1 - d^k\big(1 - \alpha_M^M(u)\big).$$

Für $l \neq k$ und $l \neq M$ folgt einerseits

$$\begin{aligned} \alpha_l^k(u) &\overset{(5.35)}{=} c_l^k \alpha_l^{k+1}(u) = \cdots = c_l^k \cdots c_l^{l-1} \alpha_l^l(u) \\ &\overset{(5.40)}{=} \underbrace{c_l^k \cdots c_l^{l-1}}_{=:\mu} (d^l \alpha_M^M(u) + 1 - d^l) \end{aligned} \tag{5.41}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \alpha_l^k(u) &\overset{(5.36)}{=} d_l^k \alpha_{l+1}^{k+1} + 1 - d_l^k = \ldots \overset{(5.36)}{=} 1 - d_l^k \cdots d^{M+k-l-1}\big(1 - \alpha_M^{M+k-l}(u)\big) \\ &\overset{(5.40)}{=} 1 - \underbrace{d_l^k \cdots d_{M-1}^{M+k-l-1}}_{=:\lambda} \big(1 - c^{M+k-l} \alpha_M^M(u)\big). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Aus (5.41) und (5.42) erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda = \frac{d^l}{d^l + (1 - d^l)c^{M+k-l}} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{c^{M+k-l}}{d^l + (1 - d^l)c^{M+k-l}} =: \gamma_l^k$$

und somit

$$\alpha_l^k(u) \ = \ \gamma_l^k (d^l \alpha_M^M(u) + 1 - d^l), \ \gamma_l^k = \frac{c^{M+k-l}}{d^l + (1 - d^l)c^{M+k-l}}, \ 1 \le k < l \le M. \tag{5.43}$$

Wir zeigen, dass diese Funktionen Schnittfunktionen sind; das heißt, dass sie die Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllen, dass also die Gleichungen

$$\dot{\alpha}_l^k(u) > 0 \qquad \forall u \in [a, b], \tag{5.44}$$

$$\alpha_l^k(a) \geq 0, \tag{5.45}$$

$$\alpha_l^k(b) \leq 1 \tag{5.46}$$

gelten.

Nach Voraussetzung wissen wir

$$\alpha_l^l(a) \;=\; d^l \alpha_M^M(a) + 1 - d^l \geq 0, \tag{5.47}$$

$$\alpha_M^{M+k-l}(b) \;=\; c^{M+k-l} \alpha_M^M(b) \leq 1. \tag{5.48}$$

Wir zeigen zunächst

$$d^l + (1-d^l)c^{M+k-l} > 0, \text{ das heißt } (d^l - 1)(c^{M+k-l} - 1) < 1. \tag{5.49}$$

Wegen $c^{M+k-l} > 0$ und $d^l > 0$ gilt die Gleichung insbesondere für $(c^{M+k-l} \leq 1) \vee (d^l \leq 1)$. Sei also $c^{M+k-l} > 1 \;\wedge\; d^l > 1$. Aus (5.47) und (5.48) folgt dann

$$0 < d^l - 1 \leq \frac{1}{1 - \alpha_M^M(a)} - 1 = \frac{\alpha_M^M(a)}{1 - \alpha_M^M(a)},$$

$$0 < c^{M+k-l} - 1 \leq \frac{1}{\alpha_M^M(b)} - 1 = \frac{1 - \alpha_M^M(b)}{\alpha_M^M(b)},$$

also folgt

$$(d^l - 1)(c^{M+k-l} - 1) \leq \frac{\alpha_M^M(a)\big(1 - \alpha_M^M(b)\big)}{\big(1 - \alpha_M^M(a)\big)\alpha_M^M(b)} < 1.$$

Die Beziehung (5.49) liefert (5.44), denn (5.43) – nach dem Parameter u abgeleitet – ergibt

$$\dot{\alpha}_l^k(u) = \frac{\overbrace{c^{M+k-l} d^l}^{> 0 \text{ nach Vor.}}}{\underbrace{d^l + (1-d^l)c^{M+k-l}}_{> 0 \text{ nach } (5.49)}} \underbrace{\dot{\alpha}_M^M(u)}_{>0 \text{ nach Vor.}} > 0.$$

Weiter erhalten wir

$$\alpha_l^k(a) \overset{(5.43),(5.47)}{=} \underbrace{\frac{\overbrace{c^{M+k-l}}^{>0 \text{ nach Vor.}}}{d^l + (1-d^l)c^{M+k-l}}}_{>0 \text{ nach } (5.49)} \cdot \underbrace{\alpha_l^l(a)}_{\geq 0} \geq 0$$

und

$$\begin{aligned}\alpha_l^k(b) &\overset{(5.43),(5.48)}{=} \frac{1}{d^l + (1-d^l)c^{M+k-l}} \cdot (\underbrace{d^l}_{>0} \underbrace{\alpha_M^{M+k-l}(b)}_{\leq 1 \text{ nach } (5.48)} + (1-d^l)c^{M+k-l}) \\ &\leq \frac{1}{d^l + (1-d^l)c^{M+k-l}} \cdot (d^l + (1-d^l)c^{M+k-l}) = 1.\end{aligned}$$

Damit sind die Funktionen (5.43) Schnittfunktionen.

Somit erhalten wir aus den vorgegebenen Schnittfunktionen und mittels Satz 5.2.1 eindeutig die restlichen Schnittfunktionen der so entstehenden gleichförmig berührenden cc-Fläche.

Die Betrachtungen für die Funktionen β_j^i, die wir durch

$$\beta_j^i(v) := \delta_j^i(f^j \beta_N^N(v) + 1 - f^j), \;\; \delta_j^i := \frac{e^{N+i-j}}{f^j + (1-f^j)f^{N+i-j}}, \;\; 1 \leq i < j \leq N \tag{5.50}$$

angeben können, verlaufen analog. □

Korollar 5.2.3 Zu gegebenen Hauptschnittfunktionen gibt es eine $2(M+N-2)$-parametrige Schar von gleichförmig berührenden cc-Flächen (mit Parametern $c^1, d^1, c^2, d^2, \ldots, c^{M-1}, d^{M-1}$ und $e^1, f^1, e^2, f^2, \ldots, e^{N-1}, f^{N-1}$).

Bemerkung 5.2.1 Zu gegebenen Hauptschnittfunktionen $\alpha_M^M(u)$ und $\beta_N^N(v)$ sind an die Parameter c^k, d^l $(k, l = 1, \ldots, M-1)$ und e^i, f^j $(i, j = 1, \ldots, N-1)$ Bedingungen zu stellen, sodass die Funktionen α_l^k und β_j^i Schnittfunktionen gemäß (4.1) bis (4.4) sind und man so eine gleichförmig berührende corner cutting-Fläche erhält.

Hinreichend dafür, dass die Funktionen

$$\alpha_M^1, \alpha_M^2, \ldots, \alpha_M^{M-1} \;,\; \alpha_{M-1}^{M-1}, \alpha_{M-2}^{M-2}, \ldots, \alpha_1^1,$$

$$\beta_N^1, \beta_N^2, \ldots, \beta_N^{N-1} \;,\; \beta_{N-1}^{N-1}, \beta_{N-2}^{N-2}, \ldots, \beta_1^1$$

Schnittfunktionen sind, sind die Bedingungen

$$(0 <)\, c^k \leq 1 \quad (k = 1, \ldots, M), \tag{5.51}$$

$$(0 <)\, d^l \leq 1 \quad (l = 1, \ldots, M), \tag{5.52}$$

$$(0 <)\, e^i \leq 1 \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{5.53}$$

$$(0 <)\, f^j \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, N), \tag{5.54}$$

wie man (5.40) entnimmt.

Diese Bedingungen sind jedoch nicht notwendig, denn beispielsweise erhält man für $[a, b] = [0, 1]$ und

$$\alpha_M^M(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$$

mit $d^l = 2$ $(l = 1, \ldots, M-1)$ nach (5.47) Schnittfunktionen

$$\alpha_l^l(u) = u.$$

Gilt jedoch $\alpha_M^M(a) = 0$, so folgt aus (5.47), dass (5.52) notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\alpha_{M-1}^{M-1}, \alpha_{M-2}^{M-2}, \ldots, \alpha_1^1$ Schnittfunktionen sind.

Ist $\alpha_M^M(b) = 1$, so folgt aus (5.48), dass (5.51) notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\alpha_M^1, \alpha_M^2, \ldots, \alpha_M^{M-1}$ Schnittfunktionen sind.

Ist $\beta_N^N(c) = 0$, so gilt, dass (5.54) notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\beta_{N-1}^{N-1}, \beta_{N-2}^{N-2}, \ldots, \beta_1^1$ Schnittfunktionen sind. Für $\beta_N^N(d) = 1$ schließlich folgt, dass (5.53) notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\beta_N^1, \beta_N^2, \ldots, \beta_N^{N-1}$ Schnittfunktionen sind.

Wir schließen dieses Kapitel mit Aussagen über cc-Flächen, die den Aussagen der Sätze 2.4.5 bis 2.4.7 über cc-Kurven entsprechen.

Man kann durch einen Parameterwechsel erreichen, dass eine der Schnittfunktionen $\alpha_l^k(u)$ einer gemäß (2.4) gegebenen cc-Kurve linear wird ohne die Gestalt der Kurve zu ändern (siehe Bemerkung 2.1.2).
Analog kann man bei einer gemäß (4.7) gegebenen cc-Fläche von je einer linearen Schnittfunktion $\alpha_l^k(u)$ $(1 \leq k \leq l \leq M)$ beziehungsweise $\beta_j^i(v)$ $(1 \leq i \leq j \leq N)$ ausgehen, so

zum Beispiel ohne Einschränkung von linearen Hauptschnittfunktionen $\alpha_M^M(u)$ und $\beta_N^N(v)$. Dies erreicht man wie folgt. Sind die linearen Funktionen $\overline{\alpha}_M^M$ mit

$$\overline{\alpha}_M^M(a) = \alpha_M^M(a) \quad \text{und} \quad \overline{\alpha}_M^M(b) = \alpha_M^M(b)$$

sowie $\overline{\beta}_N^N$ mit

$$\overline{\beta}_N^N(c) = \beta_N^N(c) \text{ und } \overline{\beta}_N^N(d) = \beta_N^N(d)$$

gegeben, so überführt der Parameterwechsel

$$h: \begin{cases} [a,b] \times [c,d] \to & [a,b] \times [c,d] \\ (\overline{u}, \overline{v}) \mapsto & (u,v) = \Big((\alpha_M^M)^{-1} \overline{\alpha}_M^M(\overline{u}), (\beta_N^N)^{-1} \overline{\beta}_N^N(\overline{v}) \Big) \end{cases}$$

die Hauptschnittfunktionen in lineare Funktionen (man vergleiche mit Bemerkung 2.1.2).

Man entnimmt den Gleichungen (5.43) und (5.50) mittels Satz 5.2.2, dass dann die Schnittfunktionen einer gleichförmig berührenden cc-Fläche allesamt linear sind. Also gilt der

Satz 5.2.4 Jede gleichförmig berührende cc-Fläche ist eine lineare cc-Fläche.

Wie bei cc-Kurven ist die Umkehrung im Allgemeinen falsch. Dies zeigt das

Beispiel 5.2.1 Gegeben sei die cc-Fläche vom Grad $(2,2)$

$$\Phi: \ \boldsymbol{x}(u,v) = {}^T\!A_2^2(u)\, {}^T\!A_2^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{02} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{22} \end{pmatrix} B_2^1(v) B_2^2(v), \ (u,v) \in [0,1]^2$$

mit $B_{mn} \in \mathbb{R}^3$ $(m,n = 0,\ldots,2)$ und den Schnittfunktionen

$$\alpha_l^k(u) = u, \ 1 \le k \le l \le 2,$$

$$\beta_1^1(v) = \frac{1}{2}v, \ \beta_2^1(v) = \beta_2^2(v) = v.$$

Dann gilt

$$B_2^1(v)\acute{B}_2^2(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v - 1 \\ 1 - \frac{3}{2}v \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}v \\ v \end{pmatrix} = \acute{B}_2^1(v)B_2^2(v).$$

Somit ist Φ nach Satz 5.1.9 nicht vollständig berührend und damit auch nicht gleichförmig berührend (siehe Definition 5.2.1).

Es gilt jedoch mit Satz 5.1.9 und Satz 5.2.4 (vergleiche mit Satz 2.4.6) der

Satz 5.2.5 Eine cc-Fläche Φ ist genau dann gleichförmig berührend, wenn sie linear und vollständig berührend ist.

Beweis: Ist Φ gleichförmig berührend, so ist Φ linear nach Satz 5.2.4. Damit ist Φ aber nach Satz 5.1.9 auch vollständig berührend.

Die Umkehrung ergibt sich mit Definition 5.2.1 sofort aus Satz 5.1.9. □

Satz 5.2.6 Zu Hauptschnittfunktionen mit

$$\alpha_M^M(a) = 0,\ \alpha_M^M(b) = 1,\ \beta_N^N(c) = 0,\ \beta_N^N(d) = 1$$

gibt es genau eine eckinterpolierende, gleichförmig berührende cc-Fläche $\Phi:\ \boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in [a,b] \times [c,d]$.

Beweis: Nach (4.14) bis (4.17) gibt es zu gegebenen Hauptschnittfunktionen mit $\alpha_M^M(a) = 0,\ \alpha_M^M(b) = 1,\ \beta_N^N(c) = 0,\ \beta_N^N(d) = 1$ eindeutig bestimmte Schnittfunktionen $\alpha_M^i = \alpha_i^i = \alpha_M^M$ $(i = 1, \ldots, M-1)$ und $\beta_N^j = \beta_j^j = \beta_N^N$ $(j = 1, \ldots, N-1)$, die der Charakterisierung (5.40) von Schnittfunktionen einer eckinterpolierenden, gleichförmig berührenden corner cutting-Fläche genügen. Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.2.2. □

Später (in Satz 6.1.3) werden wir sehen, dass eine Bézier-Fläche die einzige eckinterpolierende, gleichförmig berührende cc-Fläche ist.

Kapitel 6

Bézier-, B-Spline- und corner cutting-Flächen

Wir untersuchen im vorliegenden Kapitel die Zusammenhänge zwischen corner cutting-Flächen und Bézier- beziehungsweise B-Spline-Flächen.

6.1 Bézier-Flächen als corner cutting-Flächen

Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $B_{mn} \in \mathbb{E}^3$ $(m = 0, \ldots, M; n = 0, \ldots, N)$. Dann ist die Bézier-Fläche Ψ vom Grad (M, N) zu den Kontrollpunkten B_{mn} gegeben durch

$$\Psi : \ \boldsymbol{x}(u, v) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} B_m^M(u) B_n^N(v) \boldsymbol{b}_{mn}, \ (u, v) \in [0, 1]^2 \tag{6.1}$$

(siehe zum Beispiel [AUM1], [PIE]).

Nach Lemma 3.1.1 gilt für eine cc-Fläche mit den Schnittfunktionen $\alpha_l^k(u) = \alpha(u) = u$ $(1 \leq k \leq l \leq M)$ und $\beta_j^i(v) = \beta(v) = v$ $(1 \leq i \leq j \leq N)$

$$\begin{aligned} f_m(u) &= \binom{M}{m} (1-u)^{M-m} u^m = B_m^M(u) \quad (m = 0, \ldots, M), \\ g_n(v) &= \binom{N}{n} (1-v)^{N-n} v^n = B_n^N(v) \quad (n = 0, \ldots, N), \end{aligned}$$

wir erhalten also die Bernsteinpolynome. Da zusätzlich die Schnittfunktionen die Eigenschaften (5.27) bis (5.30) erfüllen, gilt nach Satz 5.2.1 der

Satz 6.1.1 Jede Bézier-Fläche (6.1) ist eine gleichförmig berührende cc-Fläche.

Als Spezialfall von Satz 5.2.6 erhalten wir analog zu Satz 3.1.3 den

Satz 6.1.2 Für das Parametergebiet $[a,b] \times [c,d] = [0,1]^2$ einer cc-Fläche gemäß (4.7) ist die einzige eckinterpolierende, gleichförmig berührende cc-Fläche eine Bézier-Fläche.

Satz 6.1.3 Für beliebiges Parametergebiet $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ einer cc-Fläche gemäß (4.7) ist die einzige eckinterpolierende, gleichförmig berührende cc-Fläche eine Bézier-Fläche.

Beweis: Nach Satz 5.2.6 gibt es zu jedem Parametergebiet $[a,b] \times [c,d]$ genau eine eckinterpolierende, gleichförmig berührende corner cutting-Fläche. Durch eine lineare Parametertransformation können wir das Parametergebiet auf $[a,b] \times [c,d] = [0,1]^2$ transformieren. Aus Satz 6.1.2 folgt somit unmittelbar die Behauptung. □

6.2 B-Spline-Flächen als corner cutting-Flächen

Seien $M, N, K, L \in \mathbb{N}$ mit $M \geq L$ und $N \geq K$ gegeben, $\boldsymbol{u} = (u_0 \ \dots \ u_{M+L+1})^T$ und $\boldsymbol{v} = (v_0 \ \dots \ v_{N+K+1})^T$ seien zwei Knotenvektoren und $B_{mn} \in \mathbb{E}^3$ $(m = 0, \dots, M; n = 0, \dots, N)$ seien $(M+1) \cdot (N+1)$ Kontrollpunkte. Dann ist die B-Spline-Fläche Υ vom Grad (L, K) mit den Knotenvektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ zu den Kontrollpunkten B_{mn} gegeben durch

$$\Upsilon : \ \boldsymbol{z}(u,v) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} N_m^L(u) N_n^K(v) \boldsymbol{b}_{mn}, \ \ (u,v) \in [u_L, u_{M+1}] \times [v_K, v_{N+1}] \qquad (6.2)$$

(siehe zum Beispiel [AUM1], [PIE]).

6.2.1 B-Spline-Flächen vom Grad (M, N)

In Abschnitt 3.2.1 haben wir gesehen, dass eine B-Spline-Kurve (3.2) mit $N = K$ eine gleichförmig berührende cc-Kurve ist.
Wir zeigen nun, dass eine B-Spline-Fläche (6.2) mit $M = L$ und $N = K$ eine gleichförmig berührende cc-Fläche ist.

Wir setzen diese corner cutting-Fläche durch die Kontrollpunkte B_{mn} $(m = 0, \dots, M; n = 0, \dots, N)$, die Schnittfunktionen

$$\alpha_l^k(u) = \frac{u - u_l}{u_{M+l-k+1} - u_l}, \ 1 \leq k \leq l \leq M$$

und

$$\beta_j^i(v) = \frac{v - v_j}{v_{N+j-i+1} - v_j}, \ 1 \leq i \leq j \leq N$$

sowie das Parametergebiet $[a,b]\times[c,d] = [u_M, u_{M+1}]\times[v_N, v_{N+1}]$ an $\big($vergleiche mit (3.3)$\big)$. Nach Lemma 3.2.1 erhält man so auch für die Bindefunktionen f_m $(m = 0, \ldots, M)$ die Beziehung (3.4), also

$$\begin{aligned} {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \ &= \ \big(f_0(u) \ \ldots \ f_M(u)\big) \\ &= \ \big(N_0^M(u) \ \ldots \ N_M^M(u)\big). \end{aligned}$$

Entsprechend beweist man für die Bindefunktionen g_n $(n = 0, \ldots, N)$

$$\begin{aligned} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v) \ &= \ \big(g_0(v) \ \ldots \ g_N(v)\big)^T \\ &= \ \big(N_0^N(v) \ \ldots \ N_N^N(v)\big)^T. \end{aligned}$$

Da aus Abschnitt 3.2.1 bekannt ist, dass α_l^k und entsprechend β_j^i Schnittfunktionen im Sinne von (4.1) bis (4.4) sind, welche die Bedingungen (5.27) bis (5.30) erfüllen, folgt mit Satz 5.2.1 der

Satz 6.2.1 Jede B-Spline-Fläche (6.2) vom Grad (M,N) ist eine gleichförmig berührende cc-Fläche vom Grad (M,N).

Die Frage nach der Umkehrbarkeit dieser Aussage klären wir im später folgenden Satz 6.3.1.

Bemerkung 6.2.1 Gilt

$$u_1 = \ldots = u_M = 0, \quad u_{M+1} = \ldots = u_{2M} = 1,$$

$$v_1 = \ldots = v_N = 0, \quad v_{N+1} = \ldots = v_{2N} = 1,$$

so ist die B-Spline-Fläche vom Grad (M,N) die Bézier-Fläche vom Grad (M,N) zu denselben Kontrollpunkten. Der Satz 6.2.1 enthält also den Satz 6.1.1 als Spezialfall.

6.2.2 Beliebige B-Spline-Flächen

Wir werden nun zeigen, dass sich eine allgemeine B-Spline-Fläche als Vereinigung von gleichförmig berührenden corner cutting-Flächen darstellen lässt.

Wir gehen dabei von einer B-Spline-Fläche gemäß (6.2) mit $M > L$ und $N > K$ aus $\big($für den Fall $(M,N) = (L,K)$ siehe Abschnitt 6.2.1$\big)$ und verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} P &:= \left|\{u_L, \ldots, u_{M+1}\}\right| - 2 \geq 0, \\ Q &:= \left|\{v_K, \ldots, v_{N+1}\}\right| - 2 \geq 0, \\ M_k &:= \sum_{p=0}^{k} m_p \qquad (k = 0, \ldots, P), \\ N_q &:= \sum_{i=0}^{q} n_i \qquad (q = 0, \ldots, Q). \end{aligned}$$

Dabei seien die m_p $(p = 0, \ldots, P)$ definiert durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} u_L = u_{L+1} = \ldots = u_{L+m_0} &\neq u_{L+m_0+1} \quad \text{für } p = 0, \\ u_{L+M_{p-1}+1} = u_{L+M_{p-1}+2} = \ldots = u_{L+\underbrace{M_{p-1}+m_p}_{=M_p}} &\neq u_{L+M_p+1} \quad \text{für } p = 1, \ldots, P; \end{aligned}$$

entsprechend definieren sich die n_q $(q = 0, \ldots, Q)$ über die Beziehungen

$$\begin{aligned} v_K = v_{K+1} = \ldots = v_{K+n_0} &\neq v_{K+n_0+1} \text{ für } q = 0, \\ v_{K+N_{q-1}+1} = v_{K+N_{q-1}+2} = \ldots = v_{K+\underbrace{N_{q-1}+n_q}_{=N_q}} &\neq v_{K+N_q+1} \text{ für } q = 1, \ldots, Q. \end{aligned}$$

Damit sind die u_L $[v_K]$ (m_0+1)-fache $[(n_0+1)$-fache$]$ Knoten, während die $u_{L+m_{k-1}+1}$ $[v_{K+n_{i-1}+1}]$ m_k-fache $[n_i$-fache$]$ Knoten sind.

Die Knotenvektoren lauten mit diesen Bezeichnungen

$$\begin{aligned}(\ldots, u_L = \ldots &= u_{L+M_0},\\ u_{L+M_0+1} = \ldots &= u_{L+M_1},\\ &\vdots\\ u_{L+M_{p-1}+1} = \ldots &= u_{L+M_p},\\ u_{L+M_p+1} = \ldots &= u_{M+1}, \ldots)^T\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(\ldots, v_K = \ldots &= v_{K+N_0},\\ v_{K+N_0+1} = \ldots &= v_{K+N_1},\\ &\vdots\\ v_{K+N_{q-1}+1} = \ldots &= v_{K+N_q},\\ v_{K+N_q+1} = \ldots &= v_{N+1}, \ldots)^T.\end{aligned}$$

Im Folgenden geben wir eine Konstruktionsvorschrift an, mit der sich $(P+1)\cdot(Q+1)$ gleichförmig berührenden corner cutting-Flächen erzeugen lassen, die die gegebene B-Spline-Fläche segmentieren.

Schritt (0,0)

Wir konstruieren eine Fläche

$$\Phi_{00}: \ \boldsymbol{x}(u,v), (u,v) \in [u_{L+M_0}, u_{L+M_0+1}] \times [v_{K+N_0}, v_{K+N_0+1}]$$

vom Grad (L, K) mit den Kontrollpunkten B_{mn} $(m = M_0, \ldots, L+M_0; n = N_0, \ldots, K+N_0)$ und betrachten die Schnittfunktionen

$$\alpha_l^k : \begin{cases} [u_{L+M_0}, u_{L+M_0+1}] & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad u & \mapsto \frac{u-u_l}{u_{L+M_0+l-k+1}-u_l} \end{cases} \tag{6.3}$$

$(1 + M_0 \leq k \leq l \leq L + M_0)$ sowie

$$\beta_j^i : \begin{cases} [v_{K+N_0}, v_{K+N_0+1}] & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{v-v_j}{v_{K+N_0+j-i+1}-v_j} \end{cases} \tag{6.4}$$

$(1 + N_0 \leq i \leq j \leq K + N_0)$.

Wie in Abschnitt 3.2.2 zeigt man, dass die Funktionen aus (6.3) und (6.4) die Bedingungen (4.1) bis (4.4) erfüllen und somit Schnittfunktionen sind.

Wir definieren damit die corner cutting-Fläche

$$\Phi_{00}: \; \boldsymbol{x}(u,v) \; = \; {}^T\!A_{L+M_0}^{L+M_0} \cdots {}^T\!A_{L+M_0}^{1+M_0} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_0\;N_0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_0,K+N_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_0,N_0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_0,K+N_0} \end{pmatrix} B_{K+N_0}^{1+N_0} \cdots B_{K+N_0}^{K+N_0},$$

$$(u,v) \in [u_{L+M_0}, u_{L+M_0+1}] \times [v_{K+N_0}, v_{K+N_0+1}].$$

Die so gegebene Fläche ist gleichförmig berührend, denn es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1}^k(u)\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1}(u) &= \frac{u - u_{l+1}}{u_{L+M_0+l-k+2} - u_{l+1}} \cdot \frac{1}{u_{L+M_0+l-k+1} - u_{l+1}} \\ &= \dot{\alpha}_{l+1}^k(u)\alpha_{l+1}^{k+1}(u), \\ \big(1 - \alpha_l^k(u)\big)\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1}(u) &= \frac{u_{L+M_0+l-k+1} - u}{u_{L+M_0+l-k+1} - u_l} \cdot \frac{1}{u_{L+M_0+l-k+1} - u_{l+1}} \\ &= \dot{\alpha}_l^k(u)\big(1 - \alpha_{l+1}^{k+1}(u)\big) \end{aligned}$$

für $1 + M_0 \leq k \leq l \leq L + M_0 - 1$ und

$$\beta_{j+1}^i(v)\acute{\beta}_{j+1}^{i+1}(v) \; = \; \frac{v - v_{j+1}}{v_{K+N_0+j-i+2} - v_{j+1}} \cdot \frac{1}{v_{K+N_0+j-i+1} - v_{j+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \acute{\beta}^i_{j+1}(v)\beta^{i+1}_{j+1}(v), \\
\big(1-\beta^i_j(v)\big)\acute{\beta}^{i+1}_{j+1}(v) &= \frac{v_{K+N_0+j-i+1}-v}{v_{K+N_0+j-i+1}-v_j}\cdot\frac{1}{v_{K+N_0+j-i+1}-v_{j+1}} \\
&= \acute{\beta}^i_j(u)\big(1-\beta^{i+1}_{j+1}(v)\big)
\end{aligned}$$

für $1+N_0 \le i \le j \le K+N_0-1$.

Mittels (3.4) und der Indextransformation

$$\begin{aligned}
\alpha^k_l &\hookrightarrow \alpha^{k+M_0}_{l+M_0} \\
N^r_k &\hookrightarrow N^r_{k+M_0}
\end{aligned}$$

$(r \in \{1,\ldots,L\}, l \in \{0,\ldots,2L-r\})$ erhalten wir auf dem Intervall $[u_{L+M_0}, u_{L+M_0+1}]$

$$^T\!A^{L+M_0}_{L+M_0}\cdots {}^T\!A^{1+M_0}_{L+M_0} = \big(N^L_{M_0}(u) \;\ldots\; N^L_{L+M_0}(u)\big).$$

Analog leiten wir mittels (3.4) und der Transformation

$$\begin{aligned}
\beta^i_j &\hookrightarrow \beta^{i+N_0}_{j+N_0} \\
N^s_i &\hookrightarrow N^s_{i+N_0}
\end{aligned}$$

$(s \in \{1,\ldots,K\}, j \in \{0,\ldots,2K-s\})$ auf dem Intervall $[v_{K+N_0}, v_{K+N_0+1}]$ die Beziehung

$$B^{1+N_0}_{K+N_0}(v)\cdots B^{K+N_0}_{K+N_0}(v) = \big(N^K_{N_0}(v) \;\ldots\; N^K_{K+N_0}(v)\big)^T$$

ab.

Wegen

$$\Upsilon|_{[u_{L+M_0},u_{L+M_0+1}]\times[v_{K+N_0},v_{K+N_0+1}]} : \boldsymbol{x}(u,v) = \sum_{m=M_0}^{L+M_0}\sum_{n=N_0}^{K+N_0} N^L_m(u)N^K_n(v)\boldsymbol{b}_{mn}$$

gilt damit

$$\Phi_{00} = \Upsilon|_{[u_{L+M_0},u_{L+M_0+1}]\times[v_{K+N_0},v_{K+N_0+1}]}$$

(beschreibt einen Punkt für $M_0 \neq 0 \neq N_0$ beziehungsweise eine Kurve, falls entweder $M_0 \neq 0$ oder $N_0 \neq 0$).

Wir beschreiben den allgemeinen

Schritt (p,q), $(p,q) \in \{0,\ldots,P\} \times \{0,\ldots,Q\}$

Im allgemeinen Schritt wird eine Fläche

$$\Phi_{pq}: \ \boldsymbol{x}(u,v), (u,v) \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]$$

konstruiert. Diese Fläche vom Grad (L,K) habe die Kontrollpunkte B_{mn} $(m = M_p, \ldots, L+M_p; n = N_q, \ldots, K+N_q)$ und wir definieren

$$\alpha_l^k : \begin{cases} [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{u-u_l}{u_{L+M_p+l-k+1}-u_l} \end{cases} \tag{6.5}$$

$(1 + M_p \leq k \leq l \leq L + M_p)$ sowie

$$\beta_j^i : \begin{cases} [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}] & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{v-v_j}{v_{K+N_q+j-i+1}-v_j} \end{cases} \tag{6.6}$$

$(1 + N_q \leq i \leq j \leq K + N_q)$.

Man verifiziert leicht $\big($analog zum Schritt (0,0)$\big)$, dass die Funktionen α_l^k, β_j^i $(1 + M_p \leq k \leq l \leq L + M_p; 1 + N_q \leq i \leq j \leq K + N_q)$ Schnittfunktionen gemäß (4.1) bis (4.4) sind.

Damit definieren wir die corner cutting-Fläche

$$\Phi_{pq}: \ \boldsymbol{x}(u,v) \ = \ {}^T\!A_{L+M_p}^{L+M_p}(u) \cdots {}^T\!A_{L+M_p}^{1+M_p}(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_p\,N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_q} \end{pmatrix}$$

$$\cdot B_{K+N_q}^{1+N_q}(v) \cdots B_{K+N_q}^{K+N_q}(v), \ \ (u,v) \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}].$$

Die Fläche Φ_{pq} entsteht aus $\Phi_{p,q-1}$ $(p = 0, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$, indem die Kontrollpunkte B_{mn} durch $B_{m,n+n_q}$ $(m = M_p, \ldots, L + M_p; n = N_{q-1}, \ldots, K + N_{q-1})$ und die Knoten v_n durch v_{n+n_q} $(n = 1 + N_{q-1}, \ldots, 2K + N_{q-1})$ ersetzt werden.

Aufgrund der Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned}
\alpha_{l+1}^{k}(u)\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1}(u) &= \frac{u-u_{l+1}}{u_{L+M_p+l-k+2}-u_{l+1}}\cdot\frac{1}{u_{L+M_p+l-k+1}-u_{l+1}}\\
&= \dot{\alpha}_{l}^{k}(u)\alpha_{l+1}^{k+1}(u)\\
\big(1-\alpha_{l}^{k}(u)\big)\dot{\alpha}_{l+1}^{k+1}(u) &= \frac{u_{L+M_p+l-k+1}-u}{u_{L+M_p+l-k+1}-u_{l}}\cdot\frac{1}{u_{L+M_p+l-k+1}-u_{l+1}}\\
&= \dot{\alpha}_{l}^{k}(u)\big(1-\alpha_{l+1}^{k+1}(u)\big)\\
\beta_{j+1}^{i}(v)\acute{\beta}_{j+1}^{i+1}(v) &= \frac{v_{K+N_q+j-i+1}-v}{v_{K+N_q+j-i+2}-v_{j+1}}\cdot\frac{1}{v_{K+N_q+j-i+1}-v_{j+1}}\\
&= \acute{\beta}_{j+1}^{i}(v)\beta_{j+1}^{i+1}(v)\\
\big(1-\beta_{j}^{i}(v)\big)\acute{\beta}_{j+1}^{i+1}(v) &= \frac{v_{K+N_q+j-i+1}-v}{v_{K+N_q+j-i+1}-v_{j}}\cdot\frac{1}{v_{K+N_q+j-i+1}-v_{j+1}}\\
&= \acute{\beta}_{j}^{i}(u)\big(1-\beta_{j+1}^{i+1}(v)\big)
\end{aligned}$$

für $1+M_p \le k \le l \le L+M_p-1$ und $1+N_q \le i \le j \le K+N_q-1$ handelt es sich bei Φ_{pq} nach (5.27) und (5.28) um eine gleichförmig berührende corner cutting-Fläche.

Aus (3.4) gewinnen wir hier mit den Indextransformationen

$$\begin{aligned}
\alpha_{l}^{k} &\hookrightarrow \alpha_{l+M_p}^{k+M_p}\\
N_{k}^{r} &\hookrightarrow N_{k+M_p}^{r}
\end{aligned}$$

$(r\in\{1,\dots,L\}, l\in\{0,\dots,2L-r\})$
und den Transformationen

$$\begin{aligned}
\beta_{j}^{i} &\hookrightarrow \beta_{j+N_q}^{i+N_q}\\
N_{i}^{s} &\hookrightarrow N_{i+N_q}^{s}
\end{aligned}$$

($s \in \{1, \dots, K\}, j \in \{0, \dots, 2K-s\}$) auf den Intervallen $[u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}]$ beziehungsweise $[v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]$ die Beziehungen

$$^{T}A_{L+M_p}^{L+M_p} \cdots {}^{T}A_{L+M_p}^{1+M_p} = \begin{pmatrix} N_{M_p}^{L}(u) & \dots & N_{L+M_p}^{L}(u) \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$B_{K+N_q}^{1+N_q} \cdots B_{K+N_q}^{K+N_q} = \begin{pmatrix} N_{N_q}^{K}(v) & \dots & N_{K+N_q}^{K}(v) \end{pmatrix}^{T}.$$

Aus

$$\Upsilon|_{[u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]} : \boldsymbol{x}(u,v) = \sum_{m=M_p}^{L+M_p} \sum_{n=N_q}^{K+N_q} N_m^L(u) N_n^K(v) \boldsymbol{b}_{mn}$$

folgt somit

$$\Phi_{pq} = \Upsilon|_{[u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]}.$$

Insgesamt erhalten wir also die Segmentierung

$$\Upsilon = \bigcup_{p=0,\dots,P; q=0,\dots,q} \Phi_{pq}.$$

Sei $m_{\max}$ die maximale Vielfachheit eines $\boldsymbol{u}$-Knotens und $n_{\max}$ die maximale Vielfachheit eines $\boldsymbol{v}$-Knotens. Damit ist dann ist die segmentierte Fläche Υ eine $C^{\min(L-m_{\max}, K-n_{\max})}$-Fläche.

Abschließend untersuchen wir mittels des Kalküls der corner cutting-Flächen, welcher Art der Übergang zwischen zwei Patches $\Phi_{p_1 q_1}$ und $\Phi_{p_2 q_2}$ mit

$$(p_1 = p_2) \ \wedge \ (q_1 = q_2 - 1) \quad (p_1 \in \{0, \dots, P\}, q_1 \in \{0, \dots, Q-1\})$$

oder

$$(p_1 = p_2 - 1) \ \wedge \ (q_1 = q_2) \quad (p_1 \in \{0, \dots, P-1\}, q_1 \in \{0, \dots, Q\})$$

mit genau einer gemeinsamen Randkurve ist.

Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit zwei Flächensegmente $\Phi_{p_1q_1}$ und $\Phi_{p_2q_2}$ mit $p_1, q_1, p_2, q_2 > 0$ und einer u-Linie als gemeinsamer Randkurve und setzen

$$p := p_1 = p_2 \qquad (p \in \{1, \dots, P\}),$$

$$q := q_1 = q_2 - 1 \qquad (q \in \{0, \dots, Q-1\}).$$

Satz 6.2.2 Die aus zwei Segmenten Φ_{pq} und $\Phi_{p,q+1}$ ($p \in \{0, \dots, P\}; q \in \{0, \dots, Q-1\}$) (mit genau einer gemeinsamen Randkurve) entstehende Fläche ist mit $r := \min\{L - m_p, K - n_{q+1}\}$ eine C^r-Fläche.

Beweis: Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L - m_p > K - n_{q+1}$. Somit betrachten wir die Flächen

$$\Phi_{pq}: \ \boldsymbol{x}(u,v) \ = \ {}^T\!A^{L+M_p}_{L+M_p}(u) \cdots {}^T\!A^{1+M_p}_{L+M_p}(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_pN_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_q} \end{pmatrix}$$

$$\cdot B^{1+N_q}_{K+N_q}(v) \cdots B^{K+N_q}_{K+N_q}(v), (u,v) \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}].$$

und

$$\Phi_{p,q+1}: \ \boldsymbol{y}(u,v) \ = \ {}^T\!A^{L+M_p}_{L+M_p}(u) \cdots {}^T\!A^{1+M_p}_{L+M_p}(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_pN_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_{q+1}} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \widetilde{B}^{1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}(v) \cdots \widetilde{B}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}(v),$$

$$(u,v) \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}] \times [v_{K+N_{q+1}}, v_{K+N_{q+1}+1}].$$

mit der gemeinsamen Randkurve

$$c: \ \boldsymbol{x}(u, v_{K+N_q+1}) = \boldsymbol{y}(u, v_{K+N_{q+1}}), \ u \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}].$$

Die Schnittfunktionen der Matrizen $B^i_{K+N_q}$ ($i = 1 + N_q, \dots, K + N_q$) sind gegeben durch

$$\beta_j^i(v) = \frac{v - v_j}{v_{K+N_q+j-i+1} - v_j} \; (1 + N_q \leq i \leq j \leq K + N_q), \tag{6.7}$$

die der Matrizen $\widetilde{B}^k_{K+N_{q+1}}$ $(k = 1 + N_{q+1}, \dots, K + N_{q+1})$ durch

$$\widetilde{\beta}_l^k(v) = \frac{v - v_l}{v_{K+N_{q+1}+l-k+1} - v_l} \; (1 + N_{q+1} \leq k \leq l \leq K + N_{q+1}). \tag{6.8}$$

Aus (6.7) ergibt sich insbesondere für $1 + N_q \leq i \leq j \leq K + N_q$ im rechtsseitigen Randpunkt des Parameterintervalls $[v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]$

$$\beta_j^i(v_{K+N_q+1}) = \frac{v_{K+N_q+1} - v_j}{v_{K+N_q+j-i+1} - v_j} \tag{6.9}$$

und aus (6.8) für $1 + N_{q+1} \leq k \leq l \leq K + N_{q+1}$ im linksseitigen Randpunkt des Parameterintervalls $[v_{K+N_{q+1}}, v_{K+N_{q+1}+1}]$ (man beachte $v_{K+N_q+1} = v_{K+N_{q+1}}$)

$$\widetilde{\beta}_l^k(v_{K+N_q+1}) = \frac{v_{K+N_{q+1}} - v_l}{v_{K+N_{q+1}+l-k+1} - v_l}. \tag{6.10}$$

Für $k = p + n_{q+1}$ haben wir somit für $1 + N_{q+1} \leq p + n_{q+1} \leq l \leq K + N_q$ beziehungsweise $1 + N_q \leq p \leq l - n_{q+1} \leq K + N_q - n_{q+1}$

$$\widetilde{\beta}_l^{p+n_{q+1}}(v_{K+N_q+1}) = \frac{v_{K+N_{q+1}} - v_l}{v_{K+N_q+l-p+1} - v_l}. \tag{6.11}$$

Für $k = i + n_{q+1}$ und $l = j$ gewinnen wir die Beziehung

$$\beta_j^i(v_{K+N_q+1}) = \widetilde{\beta}_j^{i+n_{q+1}}(v_{K+N_{q+1}}) \quad (K + N_q - n_{q+1} \leq i \leq j \leq K + N_q). \tag{6.12}$$

Schließlich gilt für $s = K + N_q - n_{q+1} + 1, \dots, K + N_q$

$$\beta_{K+N_q}^s(v_{K+N_q+1}) = \frac{v_{K+N_q+1} - v_{K+N_q}}{v_{2K+2N_q-s+1} - v_{K+N_q}} = 1 \tag{6.13}$$

und für $t = K + N_q + 1, \dots, K + N_{q+1}$

$$\widetilde{\beta}_{K+N_{q+1}}^t(v_{K+N_{q+1}}) = \frac{v_{K+N_q+1} - v_{K+N_q+1}}{v_{2K+2N_{q+1}-t+1} - v_{K+N_q+1}} = 0, \tag{6.14}$$

da $v_{K+N_q+1} = \dots = v_{K+N_{q+1}} \neq v_{K+N_{q+1}+1}$ ein n_{q+1}-facher Knoten ist.

Aus (6.7) und (6.8) gewinnt man ferner die Beziehung

$$\frac{d}{dv}\beta_j^i(v)\bigg|_{v=v_{K+N_q+1}} = \frac{d}{dv}\widetilde{\beta}_j^{i+n_{q+1}}(v)\bigg|_{v=v_{K+N_{q+1}}} \tag{6.15}$$

für $K+N_q-n_{q+1} \leq i \leq j \leq K+N_q$.

Für den C^0-Übergang hat man

$$\boldsymbol{x}(u, v_{K+N_q+1}) = \boldsymbol{y}(u, v_{K+N_{q+1}}) \quad \forall u \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}]$$

zu zeigen, was aber nach den bisherigen Betrachtungen und aus dem Beweis zu Satz 3.2.3 folgt.

Es ist weiter nach (5.24) für festes $\widetilde{u} \in [u_{L+M_p}, u_{L+M_p+1}]$

$$\begin{aligned}
\frac{d^w\boldsymbol{x}}{dv^w}(\widetilde{u}, v) \;&=\; \frac{K!}{(K-w)!}\, {}^{T}\!A_{L+M_p}^{L+M_p} \cdots {}^{T}\!A_{L+M_p}^{1+M_p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_pN_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_q} \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \acute{B}_{K+N_q}^{1+N_q} \cdots \acute{B}_{K+N_q}^{w+N_q} B_{K+N_q}^{w+1+N_q} \cdots B_{K+N_q}^{K+N_q}, \\
\frac{d^w\boldsymbol{y}}{dv^w}(\widetilde{u}, v) \;&=\; \frac{K!}{(K-w)!}\, {}^{T}\!A_{L+M_p}^{L+M_p} \cdots {}^{T}\!A_{L+M_p}^{1+M_p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{M_pN_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_{q+1}} \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \acute{\widetilde{B}}_{K+N_{q+1}}^{1+N_{q+1}} \cdots \acute{\widetilde{B}}_{K+N_{q+1}}^{w+N_{q+1}} \widetilde{B}_{K+N_{q+1}}^{w+1+N_{q+1}} \cdots \widetilde{B}_{K+N_{q+1}}^{K+N_{q+1}}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Kurve c mit den Segmenten

$$c_1 : \; \overline{\boldsymbol{x}}(v) = \boldsymbol{x}(\widetilde{u}, v), \; v \in [v_{K+N_q}, v_{K+N_q+1}]$$

und

$$c_2 : \; \overline{\boldsymbol{y}}(v) = \boldsymbol{y}(\widetilde{u}, v), \; v \in [v_{K+N_{q+1}}, v_{K+N_{q+1}+1}]$$

eine C^r-Kurve ist, dass also für $w = 1, \ldots, K - n_{q+1}$

$$\frac{d^w\overline{\boldsymbol{x}}}{dv^w}(v_{K+N_q+1}) = \frac{d^w\overline{\boldsymbol{y}}}{dv^w}(v_{K+N_{q+1}})$$

gilt.

Es ist mit der abkürzenden Schreibweise $A := \frac{K!}{(K-w)!}\, {}^{T}\!A^{L+M_p}_{L+M_p}(\widetilde{u}) \cdots {}^{T}\!A^{1+M_p}_{L+M_p}(\widetilde{u})$ nach (5.24)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^w \overline{\boldsymbol{x}}}{dv^w}(v_{K+N_q+1}) &= A \cdot \left(\begin{array}{cc|ccc|}
\cline{3-5}
\boldsymbol{b}_{M_p N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p, K+N_q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{b}_{L+M_p, N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p, N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p, K+N_q} \\
\cline{3-5}
\end{array} \right) \\
&\quad \cdot \acute{B}^{1+N_q}_{K+N_q} \cdots \acute{B}^{w+N_q}_{K+N_q} B^{w+1+N_q}_{K+N_q} \cdots B^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&= A \cdot \left(\begin{array}{cc|ccc|}
\cline{3-5}
\boldsymbol{u}^1_{M_p, N_q+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{M_p, N_{q+1}+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{M_p, K+N_q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{u}^1_{L+M_p, N_q+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{L+M_p, N_{q+1}+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{L+M_p, K+N_q} \\
\cline{3-5}
\end{array} \right) \\
&\quad \cdot \acute{B}^{2+N_q}_{K+N_q} \cdots \acute{B}^{w+N_q}_{K+N_q} B^{w+1+N_q}_{K+N_q} \cdots B^{K+N_q}_{K+N_q} \\
&= \ldots \\
&= A \cdot \left(\begin{array}{cc|ccc|}
\cline{3-5}
\boldsymbol{u}^w_{M_p, N_q+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{M_p, N_{q+1}+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{M_p, K+N_q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{u}^w_{L+M_p, N_q+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{L+M_p, N_{q+1}+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{L+M_p, K+N_q} \\
\cline{3-5}
\end{array} \right) \\
&\quad \cdot B^{w+1+N_q}_{K+N_q} \cdots B^{K+N_q}_{K+N_q}
\end{aligned}
$$

$$
= \quad A \cdot \left(\begin{array}{ccc|c|} \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q-n_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q-1} & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q-n_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q-1} & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q} \end{array} \right)
$$

$$
\cdot B^{K+N_q-n_{q+1}+1}_{K+N_q} \cdots B^{K+N_q}_{K+N_q}
$$

$$
\stackrel{(6.13)}{=} \quad A \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q} \end{pmatrix}.
$$

Weiter ist nach (5.24)

$$
\frac{d^w \overline{\boldsymbol{y}}}{dv^w}(v_{K+N_{q+1}}) \quad = \quad A \cdot \left(\begin{array}{|ccc|cc} \boldsymbol{b}_{M_p N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{M_p,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{L+M_p,N_{q+1}} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{b}_{L+M_p,K+N_{q+1}} \end{array} \right)
$$

$$
\cdot \acute{\widetilde{B}}^{1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \acute{\widetilde{B}}^{w+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \widetilde{B}^{w+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widetilde{B}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}
$$

$$
\stackrel{(6.15)}{=} \quad A \cdot \left(\begin{array}{|ccc|cc} \boldsymbol{u}^1_{M_p,N_{q+1}+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{M_p,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{u}^1_{L+M_p,N_{q+1}+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{L+M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{u}^1_{L+M_p,K+N_{q+1}} \end{array} \right)
$$

$$
\cdot \acute{\widetilde{B}}^{2+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \acute{\widetilde{B}}^{w+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \widetilde{B}^{w+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widetilde{B}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}
$$

$$
\stackrel{(6.15)}{=} \quad \ldots
$$

$$\overset{(6.15)}{=} A \cdot \left(\begin{array}{|ccc|cc} \hline \boldsymbol{u}^w_{M_p,N_{q+1}+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{M_q,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{u}^w_{L+M_p,N_{q+1}+w} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{L+M_p,K+N_q} & \cdots & \boldsymbol{u}^w_{L+M_q,K+N_{q+1}} \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\cdot \widetilde{B}^{w+1+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}} \cdots \widetilde{B}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}$$

$$\overset{(6.12)}{=} A \cdot \left(\begin{array}{|c|ccc} \hline \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q} & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_q,K+N_{q+1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q} & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q+1} & \cdots & \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_{q+1}} \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\cdot \widetilde{B}^{K+N_q+1}_{K+N_{q+1}} \cdots \widetilde{B}^{K+N_{q+1}}_{K+N_{q+1}}$$

$$\overset{(6.14)}{=} A \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{M_p,K+N_q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{K-n_{q+1}}_{L+M_p,K+N_q} \end{pmatrix} .$$

Somit ist c eine C^r-Kurve. Damit ist (siehe [AUM1], Seite 463, 12.5.4 Korollar) die betrachtete Fläche mit den Segmenten Φ_{pq_1} und Φ_{pq_2} eine C^r-Fläche.

Segmente mit einer v-Linie als gemeinsamer Randkurve behandelt man analog, was den Beweis vervollständigt. □

Wir behandeln zur Veranschaulichung ein einfach gehaltenes (vergleiche Beispiel 3.2.2)

Beispiel 6.2.1 Gegeben sei die B-Spline-Fläche

$$\Upsilon = \sum_{m=0}^{3} \sum_{n=0}^{4} N_m^2(u) N_n^2(v) \boldsymbol{b}_{mn}, \;\; (u,v) \in [u_2, u_4] \times [v_2, v_5]$$

vom Grad $(L,K) = (2,2)$ mit $M = 3$ und $N = 4$ durch die Knotenvektoren

$$\boldsymbol{u} = (0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)^T \text{ und } \boldsymbol{v} = (0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^T$$

und den $(M+1)\cdot(N+1)$ Kontrollpunkten B_{mn} $(m = 0,\dots,M; n = 0,\dots,N)$ mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\boldsymbol{b}_{00} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{01} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{02} = \begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{03} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{04} = \begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{10} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{11} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{12} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{13} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{14} = \begin{pmatrix}8\\5\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{20} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{21} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{22} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{23} = \begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{24} = \begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{30} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{31} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{32} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{33} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{34} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}\Upsilon:\ \boldsymbol{z}(u,v) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} N_m^L(u)N_n^K(v)\boldsymbol{b}_{mn}, \quad (u,v)\in[u_L,u_{M+1}]\times[v_K,v_{N+1}]\\ &= \sum_{m=0}^{3}\sum_{n=0}^{4} N_m^2(u)N_n^2(v)\boldsymbol{b}_{mn}, \quad (u,v)\in[1,3]\times[1,4]. \qquad (6.16)\end{aligned}$$

(siehe Abbildung 6.1).

Es ist mit den am Beginn des Abschnittes vereinbarten Bezeichnungen

$$P = 1, Q = 2, \quad m_0 = n_0 = 0, \quad m_1 = n_1 = n_2 = 1,$$

$$M_0 = N_0 = 0, \quad M_1 = N_1 = 1 \quad \text{und } N_2 = 2.$$

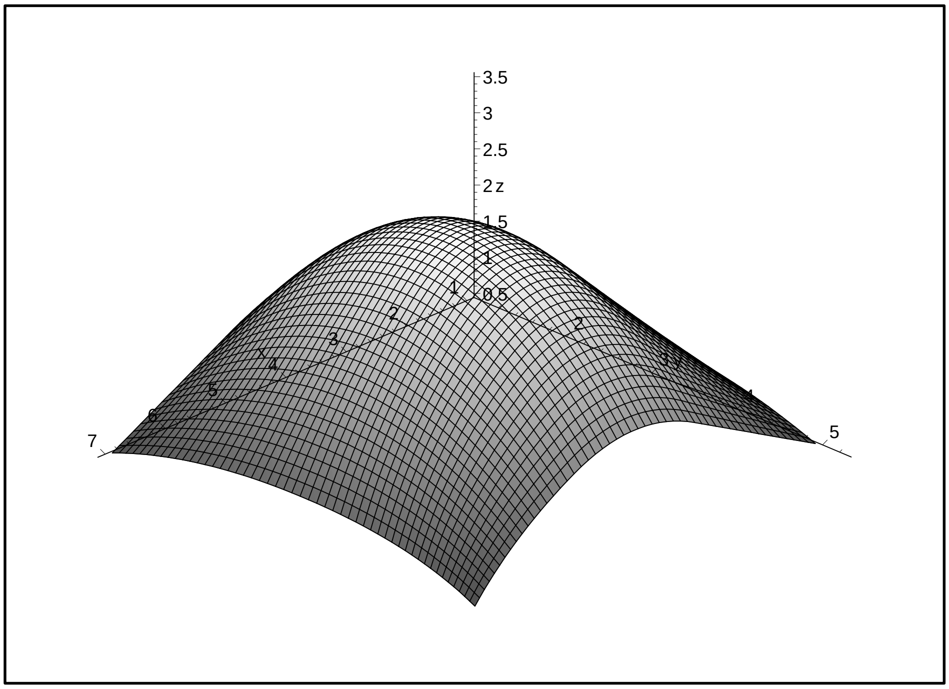


Abbildung 6.1: B-Spline-Fläche Υ

Im Folgenden konstruieren wir die Flächen $\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{12}$ mit

$$\Upsilon = \bigcup_{\substack{m=0,1\\ n=0,1,2}} \Phi_{mn}$$

(siehe Abbildung 6.2).

Φ_{00} : $\boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in [1,2] \times [1,2]$,
Kontrollpunkte: B_{mn} $(m,n = 0,\dots,2)$,
Schnittfunktionen:

$$\alpha_l^k(u) \overset{(6.5)}{=} \frac{u - u_l}{u_{2+l-k+1} - u_l} \ (1 \le k \le l \le 2)$$

$$\beta_j^i(v) \overset{(6.6)}{=} \frac{v - v_j}{v_{2+j-i+1} - v_j} \ (1 \le i \le j \le 2)$$

Es folgt

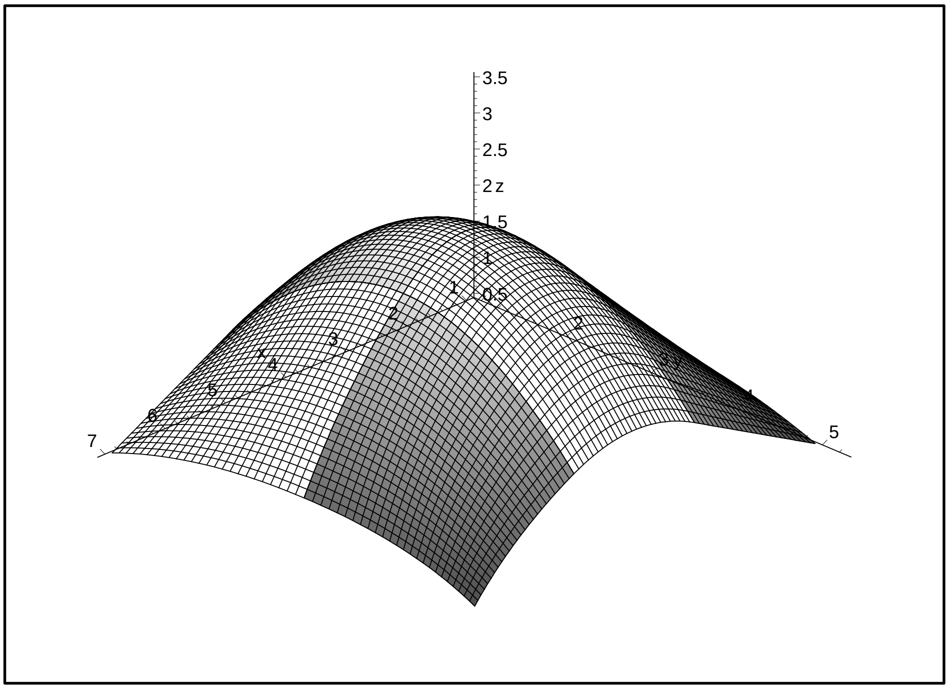


Abbildung 6.2: Segmentierung der B-Spline-Fläche Υ durch 6 corner cutting-Flächen

$$
\begin{aligned}
\Phi_{00}:\ \boldsymbol{x}(u,v) &= {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} & \boldsymbol{b}_{02} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{20} & \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} \end{pmatrix} B_2^1(v) B_2^2(v) \\
&= \big(N_0^2(u)\ N_1^2(u)\ N_2^2(u)\big)^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} & \boldsymbol{b}_{02} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{20} & \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} \end{pmatrix} \big(N_0^2(v)\ N_1^2(v)\ N_2^2(v)\big), \\
&\qquad (u,v) \in [1,2] \times [1,2]
\end{aligned}
$$

und damit

$$\Upsilon|_{[1,2]\times[1,2]} = \Phi_{00}.$$

So fährt man für $\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{10}, \Phi_{11}$ fort und beendet das Verfahren mit

$\Phi_{12}:\ \boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v) \in [2,3] \times [3,4]$,

Kontrollpunkte: B_{mn} $(m = 1, \dots, 3;\ n = 2, \dots, 4)$,
Schnittfunktionen:

$$\alpha_l^k(u) \overset{(6.5)}{=} \frac{u - u_l}{u_{3+l-k+1} - u_l} \ (2 \le k \le l \le 3)$$

$$\beta_j^i(v) \overset{(6.6)}{=} \frac{v - v_j}{v_{4+j-i+1} - v_j} \ (3 \le i \le j \le 4)$$

Es folgt analog

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}:\ \boldsymbol{x}(u,v) &= {}^T\!A_3^3(u)\,{}^T\!A_3^2(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{12} & \boldsymbol{b}_{13} & \boldsymbol{b}_{14} \\ \boldsymbol{b}_{22} & \boldsymbol{b}_{23} & \boldsymbol{b}_{24} \\ \boldsymbol{b}_{32} & \boldsymbol{b}_{33} & \boldsymbol{b}_{34} \end{pmatrix} B_4^3(v) B_4^4(v) \\
&= (N_1^2(u)\ N_2^2(u)\ N_3^2(u))^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{12} & \boldsymbol{b}_{13} & \boldsymbol{b}_{14} \\ \boldsymbol{b}_{22} & \boldsymbol{b}_{23} & \boldsymbol{b}_{24} \\ \boldsymbol{b}_{32} & \boldsymbol{b}_{33} & \boldsymbol{b}_{34} \end{pmatrix} \big(N_2^2(v)\ N_3^2(v)\ N_4^2(v)\big), \\
&\quad (u,v) \in [2,3] \times [3,4]
\end{aligned}$$

und somit

$$\Upsilon|_{[2,3]\times[3,4]} = \Phi_{12}.$$

6.3 Corner cutting-Flächen als B-Spline-Flächen

Satz 6.3.1 Eine cc-Fläche Φ gemäß (4.7) ist genau dann eine B-Spline-Fläche vom Grad (M, N), wenn Φ vom Grad (M, N) und gleichförmig berührend ist, sowie für die Parameter c^k, d^l $(k, l = 1, \dots, M)$ und e^i, f^j $(i, j = 1, \dots, N)$ aus (5.40)

$$0 < c^1 \le c^2 \le \dots \le c^{M-2} \le c^{M-1} \le 1 =: c^M,$$

$$0 < d^1 \le d^2 \le \dots \le d^{M-2} \le d^{M-1} \le 1 =: d^M,$$

$$0 < e^1 \leq e^2 \leq \ldots \leq e^{N-2} \leq e^{N-1} \leq 1 =: e^N,$$

$$0 < f^1 \leq f^2 \leq \ldots \leq f^{N-2} \leq f^{N-1} \leq 1 =: f^N$$

gilt.

Beweis: „$\Rightarrow$ “: Nach Satz 6.2.1 ist Φ eine gleichförmig berührende corner cutting-Fläche vom Grad (M, N). Die Monotonie der Parameterfolgen folgt analog zum Beweis von Satz 3.3.1.

„$\Leftarrow$“: Nach Satz 5.2.4 ist jede gleichförmig berührende corner cutting-Fläche eine lineare corner cutting-Fläche.

Analog zum Beweis des Satzes 3.3.1 zeigt man

$${}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) = \big(N_0^M(u) \;\; \ldots \;\; N_M^M(u)\big)$$

und

$$B_N^1(v) \cdots B_N^N(v) = \big(N_0^N(v) \;\; \ldots \;\; N_N^N(v)\big)^T. \qquad \square$$

Kapitel 7

Unterteilung von corner cutting-Kurven und corner cutting-Flächen

Wir untersuchen nun die Unterteilbarkeit von linearen corner cutting-Kurven und linearen corner cutting-Flächen. Es wird sich herausstellen, dass der Eigenschaft der *gleichförmigen Berührung* dabei eine besondere Rolle zukommen wird. Im ersten Abschnitt betrachten wir einige nützliche Eigenschaften der Bernsteinpolynome, bevor wir die Unterteilung von corner cutting-Objekten herleiten.

Die grundlegenden Aussagen und Beweise über die Behandlung der Unterteilung bei corner cutting-Kurven stammen dabei aus [AUM3].

7.1 Lemma

Wir betrachten abermals die Bernsteinpolynome (siehe Abschnitte 3.1 und 6.1)

$$B_i^N(u) = \binom{N}{i}(1-u)^{N-i}u^i \quad (i = 0, \ldots, N)$$

und geben einige für das weitere Vorgehen nützliche Beziehungen der Bernsteinpolynome an.

Lemma 7.1.1 Für die Bernsteinpolynome gilt das Folgende:

a) $$\begin{pmatrix} B_0^N(u_0u) \\ \vdots \\ B_N^N(u_0u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^N(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_N^N(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} B_0^N(u_0(1-u)+u) \\ \vdots \\ B_N^N(u_0(1-u)+u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^N(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_N^N(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^0(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix}$$

c) $$\frac{d^k B_j^N}{du^k}(u) = N(N-1)\cdots(N-k+1)\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^{k-\lambda}\binom{k}{\lambda}B_{j-\lambda}^{N-k}(u)$$

Beweis: a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{N} B_i^j(u_0)B_j^N(u) &= \sum_{j=i}^{N}\binom{j}{i}(1-u_0)^{j-i}u_0^i\binom{N}{j}(1-u)^{N-j}u^j \\
&= \frac{1}{i!}\sum_{j=i}^{N}\frac{N!}{(j-i)!(N-j)!}(1-u_0)^{j-i}(1-u)^{N-j}u_0^iu^j \\
&= \frac{N!}{(N-i)!\cdot i!}\sum_{j=i}^{N}\frac{(N-i)!}{(j-i)!(N-j)!}(1-u_0)^{j-i}(1-u)^{N-j}u_0^iu^j \\
&= \binom{N}{i}\sum_{j=i}^{N}\begin{pmatrix} N-i \\ N-j \end{pmatrix}(1-u_0)^{j-i}(1-u)^{N-j}u^{j-i}(uu_0)^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{N}{i}(uu_0)^i \sum_{j=0}^{N-i} \left(\begin{array}{c} N-i \\ \\ N-j-i \end{array} \right) (u-uu_0)^j (1-u)^{N-j-i} \\
&= \binom{N}{i}(uu_0)^i \big((u-uu_0)+(1-u)\big)^{N-i} \\
&= \binom{N}{i}(uu_0)^i (1-uu_0)^{N-i} \\
&= B_i^N(uu_0)
\end{aligned}
$$

□

b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i} B_j^{N-i+j}(u_0) B_{i-j}^N(u) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{N-i+j}{j} (1-u_0)^{N-i+j-j} u_0^j \binom{N}{i-j} (1-u)^{N-i+j} u^{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{N!}{(N-i)!j!(i-j)!} (1-u_0)^{N-i} u_0^j (1-u)^{N-i+j} u^{i-j} \\
&= \binom{N}{i} (1-u_0)^{N-i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} u_0^j (1-u)^{N-i+j} u^{i-j} \\
&= \binom{N}{i} \big((1-u_0)(1-u)\big)^{N-i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \big(u_0(1-u)\big)^j u^{i-j} \\
&= \binom{N}{i} \big((1-u_0)(1-u)\big)^{N-i} (u_0(1-u)+u)^i \\
&= B_i^N(u_0(1-u)+u)
\end{aligned}
$$

□

c) Wir beweisen durch vollständige Induktion nach k. Allgemein gilt

$$
\frac{d}{du} B_j^N(u) = N\big(B_{j-1}^{N-1}(u) - B_j^{N-1}(u)\big). \tag{7.1}
$$

Damit ist also

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} B_j^N(u) &= N(N-1)\cdots(N-k+1)\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^{k-\lambda}\binom{k}{\lambda}\frac{d}{du}B_{j-\lambda}^{N-k}(u) \\
&\overset{(7.1)}{=} N(N-1)\cdots(N-k+1)\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^{k-\lambda}\binom{k}{\lambda} \\
&\qquad \cdot \left((N-k)\left(B_{j-\lambda-1}^{N-k-1}(u) - B_{j-\lambda}^{N-k-1}(u)\right)\right) \\
&= N(N-1)\cdots(N-k)\left(\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^{k+1-\lambda}\binom{k}{\lambda}B_{j-\lambda}^{N-k-1}(u)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\lambda=1}^{k+1}(-1)^{k+1-\lambda}\binom{k}{\lambda-1}B_{j-\lambda}^{N-k-1}(u)\right)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\binom{k}{\lambda} + \binom{k}{\lambda-1} = \binom{k+1}{\lambda}$$

folgt induktiv die Behauptung. □

7.2 Unterteilung linearer corner cutting-Kurven

In diesem Abschnitt gehen wir von linearen corner cutting-Kurven

$$c : \boldsymbol{x}(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)A_N^1(u)\cdots A_N^N(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

aus, deren Parameterintervall wir ohne Einschränkung durch $[0,1]$ festlegen (siehe Abschnitt 2.1). Ziel des vorliegenden Abschnitts ist es, eine gegebene lineare corner cutting-Kurve in einem Punkt $X(u_0)$, $u_0 \in]0,1[$ in zwei corner cutting-Kurven zu unterteilen, die vom gleichen Typ wie die Ausgangskurve sind; das soll bedeuten, dass die gesuchten Kurven die gleichen Bindefunktionen besitzen. Wir treffen dazu die folgenden Grundüberlegungen und -annahmen. Da die Bernsteinpolynome $B_j^N, j = 0,\ldots,N$ eine Basis des linearen Raums aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich N bilden, existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $R \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ mit

$$A_N^1(u)\cdots A_N^N(u) = \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

wobei R unabhängig von u ist. Wir nehmen im Folgenden an, dass R *regulär* ist. Nun unterteilen wir c im Punkt $X(u_0)$ in zwei Kurven

$$c_1: \ \boldsymbol{y}(u) \ = \ \boldsymbol{x}(u_0 u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \dots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u_0 u) \\ \vdots \\ f_N(u_0 u) \end{pmatrix}, \ u \in [0,1] \tag{7.4}$$

und

$$c_2: \ \boldsymbol{z}(u) \ = \ \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \dots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u_0(1-u)+u) \\ \vdots \\ f_N(u_0(1-u)+u) \end{pmatrix},$$

$$u \in [0,1]. \tag{7.5}$$

Wir suchen Parameterdarstellungen von c_1 und c_2 als corner cutting-Kurven vom Typ c, das heißt, wir suchen Kontrollpunkte $Q_0, \dots, Q_N$ mit

$$c_1: \ \boldsymbol{y}(u) = \boldsymbol{x}(u_0 u) = (\boldsymbol{q}_0 \ \dots \ \boldsymbol{q}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}, \ u \in [0,1]$$

und Kontrollpunkte $S_0, \ldots, S_N$ mit

$$c_2: \ \boldsymbol{z}(u) = \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u) = (\boldsymbol{s}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{s}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}, \ u \in [0,1].$$

Dazu betrachten wir zunächst die Kurve c_1 und gehen von der Darstellung (7.4) aus. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_1: \ \boldsymbol{y}(u) &= \boldsymbol{x}(u_0 u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u_0 u) \\ \vdots \\ f_N(u_0 u) \end{pmatrix} \\
&\overset{(7.3)}{=} (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, R \begin{pmatrix} B_0^n(u_0 u) \\ \vdots \\ B_N^N(u_0 u) \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Lemma} \\ 7.1.1 \text{ a)}}}{=} (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, R \begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^N(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_N^N(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix} \\
&\overset{(7.3)}{=} (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, \underbrace{R \begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^N(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_N^N(u_0) \end{pmatrix} R^{-1}}_{=:T_1(u_0)} \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \quad \underbrace{(\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, T_1(u_0)}_{=:(\boldsymbol{q}_0 \ \cdots \ \boldsymbol{q}_N)} \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}$$

$$=: \quad (\boldsymbol{q}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{q}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}$$

Analog finden wir ausgehend von der Darstellung (7.5)

$$c_2 : \ \boldsymbol{z}(u) \quad = \quad \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u_0(1-u)+u) \\ \vdots \\ f_N(u_0(1-u)+u) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Lemma} \\ 7.1.1 \ \text{b)}}}{=} \quad (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, R \begin{pmatrix} B_0^N(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_N^N(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^0(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(7.3)}{=} \quad (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\ \underbrace{R \begin{pmatrix} B_0^N(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_N^N(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^0(u_0) \end{pmatrix} R^{-1}}_{=:T_2(u_0)} \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}$$

$$= \quad \underbrace{(\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, T_2(u_0)}_{=:(\boldsymbol{s}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{s}_N)} \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}$$

$$=: \quad (\boldsymbol{s}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{s}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}.$$

Wir fassen zusammen.

Satz 7.2.1 Gegeben sei eine lineare corner cutting-Kurve

$$c : \boldsymbol{x}(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) A_N^1(u) \cdots A_N^N(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}, \ u \in [0,1]$$

ferner sei

$$\begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} B_0^N(u) \\ \vdots \\ B_N^N(u) \end{pmatrix}$$

mit $R \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ und $\det R \neq 0$. Dann lässt sich die cc-Kurve c mit $u_0 \in]0,1[$ in zwei Kurven unterteilen, die ebenfalls ein Darstellung als lineare cc-Kurven

$$c_1 : \ \boldsymbol{y}(u), \ u \in [0,1],$$

$$c_2 : \ \boldsymbol{z}(u), \ u \in [0,1]$$

mit gleichen Bindefunktionen wie die Ausgangskurve c haben. Die zugehörigen Kontrollpunkte ergeben sich zu

$$(\boldsymbol{q}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{q}_N) \ = \ (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N)\, T_1(u_0)$$

$$
= (\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\, R \underbrace{\begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^N(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_N^N(u_0) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_1(u_0)} R^{-1}
$$

$$
= (\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\, R\, \Delta_1(u_0) R^{-1}
$$

beziehungsweise

$$
(\boldsymbol{s}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{s}_N) = (\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\, T_2(u_0)
$$

$$
= (\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\, R \underbrace{\begin{pmatrix} B_0^N(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_N^N(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^0(u_0) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_2(u_0)} R^{-1}
$$

$$
= (\boldsymbol{b}_0 \;\ldots\; \boldsymbol{b}_N)\, R\, \Delta_2(u_0) R^{-1}.
$$

Die Matrizen $T_1(u_0)$ und $T_2(u_0)$, die die neuen Kontrollpunkte der Kurven c_1 und c_2 liefern, hängen sowohl vom Parameterwert u_0 als auch von den Blendingfunktionen f_0 bis f_N ab. Durch die durchgeführte Auflösung dieser Abhängigkeiten ergeben sich jedoch einige Vorteile. Die Wahl der Schnittfunktionen und damit unmittelbar der Blendingfunktionen gehen jetzt nur noch in die Matrix R ein, nicht aber in die Matrizen $\Delta_i(u_0)$ $(i = 1, 2)$. Umgekehrt beeinflusst die Wahl des Parameterwertes $u_0 \in]0, 1[$ das Aussehen der Matrizen $\Delta_i(u_0)$, nicht aber die Gestalt der Matrizen R. Ein Vorteil, der sich direkt aus diesen Tatsachen ablesen lässt, ist der Folgende.

Eine weitere Unterteilung der gleichen Ausgangskurve erfordert weniger Rechenaufwand, da in diesem Fall nur die Matrizen $\Delta_i(u_0)$ $(i = 1, 2)$ neu berechnet werden müssen. Streng genommen muss davon nur eine der leicht zu berechnenden Matrizen evaluiert werden, da sich die jeweils andere durch Umordnung der Einträge ergibt. Der größere Rechenaufwand ergibt sich damit in der Regel durch die Bestimmung der Matrix R, die für die Berechnung der $T_i(u_0)$ benötigt wird.

Eine weitere Vereinfachung der Situation tritt im Spezialfall der Bézierkurven ein, da die Transformationsmatrix R trivialerweise aus der $(N+1)\times(N+1)$-Einheitsmatrix besteht.

Im Falle einer Graderhöhung muss bei den Matrizen $\Delta_i(u_0)$ aufgrund Ihrer Bauart nur genau eine neue Spalte beziehungsweise Zeile neu berechnet werden, während die bestehenden Einträge unverändert bleiben.

Beispiel 7.2.1 Wir betrachten die corner cutting-Kurve

$$c: \ \boldsymbol{x}(u) = (\boldsymbol{b}_0\ \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)A_3^1(u)A_3^2(u)A_3^3(u), u \in [0,1]$$

mit

$$A_3^1(u) = \begin{pmatrix} 1-u & 0 & 0 \\ u & \frac{3}{4}-\frac{1}{2}u & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}u+\frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\frac{1}{2}u \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u+\frac{1}{4} \end{pmatrix}, A_3^2(u) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{3}{4}u & 0 \\ \frac{3}{4}u+\frac{1}{4} & 1-\frac{1}{2}u \\ 0 & \frac{1}{2}u \end{pmatrix}, A_3^3(u) = \begin{pmatrix} 1-u \\ u \end{pmatrix}$$

und den Kontrollpunkten

$$B_0 = B_0(0|0), B_1 = B_1(0|3), B_2 = B_2(5|3), B_3 = B_3(7|1).$$

Die zur Kurve c gehörigen Bindefunktionen ergeben sich damit zu

$$\begin{pmatrix} f_0(u) \\ f_1(u) \\ f_2(u) \\ f_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{9}{4}u+\frac{9}{4}u^2-\frac{3}{4}u^3 \\ \frac{3}{16}+\frac{7}{4}u-\frac{51}{16}u^2+\frac{11}{8}u^3 \\ \frac{1}{16}+\frac{1}{2}u+\frac{13}{16}u^2-\frac{7}{8}u^3 \\ \frac{1}{8}u^2+\frac{1}{4}u^3 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir die Kurve an der Stelle $u_0 = \frac{2}{5}$ unterteilen. Dazu beschaffen wir uns die im zuvor hergeleiteten Abschnitt nötigen Kontrollpunkte, so dass wir zu zwei linearen corner cutting-Kurven c_1 und c_2 kommen, die die Kurve c segmentieren. Die Matrizen R und

R^{-1} lauten

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{37}{48} & \frac{7}{24} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{11}{48} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{22} & \frac{3}{2} & -\frac{15}{22} & \frac{9}{22} \\ -\frac{3}{176} & -\frac{9}{16} & \frac{333}{176} & -\frac{411}{176} \\ \frac{1}{528} & \frac{1}{16} & -\frac{37}{176} & \frac{515}{176} \end{pmatrix}.$$

Abschließend ergeben sich die Matrizen $\Delta_1(u_0)$ und $\Delta_2(u_0)$ zu

$$\Delta_1(\tfrac{2}{5}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{9}{25} & \frac{27}{125} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{12}{25} & \frac{54}{125} \\ 0 & 0 & \frac{4}{25} & \frac{36}{125} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{125} \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2(\tfrac{2}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{27}{125} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{54}{125} & \frac{9}{25} & 0 & 0 \\ \frac{36}{125} & \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{8}{125} & \frac{4}{25} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix},$$

womit sich wiederum die Transformationsmatrizen in diesem Beispiel zu

$$T_1(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{37511}{44000} & \frac{2133}{4000} & \frac{7479}{44000} & \frac{243}{8800} \\ \frac{299}{2750} & \frac{97}{250} & \frac{1461}{2750} & \frac{111}{275} \\ \frac{1707}{44000} & \frac{321}{4000} & \frac{12923}{44000} & \frac{843}{1760} \\ -\frac{1}{22000} & -\frac{3}{2000} & \frac{111}{22000} & \frac{79}{880} \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$T_2(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{27}{125} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{10513}{22000} & \frac{43}{80} & \frac{89}{880} & \frac{17}{880} \\ \frac{6289}{22000} & \frac{167}{400} & \frac{617}{880} & \frac{1141}{4400} \\ \frac{223}{11000} & \frac{9}{200} & \frac{87}{440} & \frac{1587}{2200} \end{pmatrix}$$

berechnen.

Die Kontrollpunkte $Q_0, \ldots, Q_3$ der Kurve c_1 werden also gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{q}_0 \ \ldots \boldsymbol{q}_3) &= (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \boldsymbol{b}_3) R \Delta_1(u_0) R^{-1} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \frac{8521}{44000} \\ \frac{4577}{8800} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1563}{4000} \\ 1\frac{451}{800} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\frac{22169}{44000} \\ 3\frac{593}{8800} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{41}{1760} \\ 4\frac{6121}{8800} \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}
$$

die Kontrollpunkte $S_0, \ldots, S_3$ der Kurve c_2 errechnen sich zu

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{s}_0 \ \ldots \boldsymbol{s}_3) &= (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \boldsymbol{b}_3) R \Delta_2(u_0) R^{-1} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1\frac{12567}{22000} \\ 2\frac{1943}{2200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{161}{400} \\ 3\frac{149}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\frac{783}{880} \\ 4\frac{3}{440} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\frac{1323}{4400} \\ 2\frac{167}{2200} \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

In den Abbildungen 7.1 bis 7.3 sieht man die Kurven c, c_1 und c_2 sowie die Kontrollpolygone der zugehörigen Kurven.

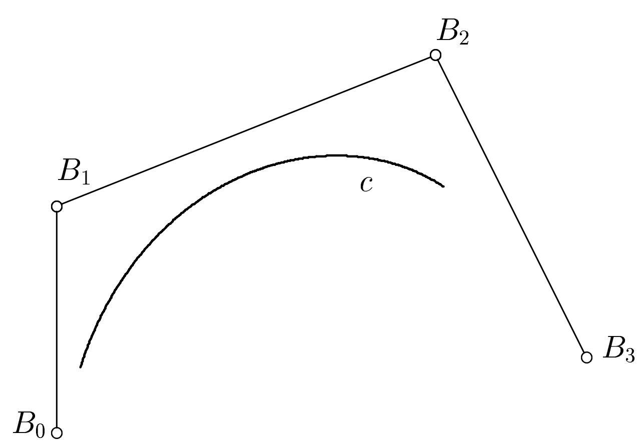


Abbildung 7.1: Kurve c samt Kontrollpolygon

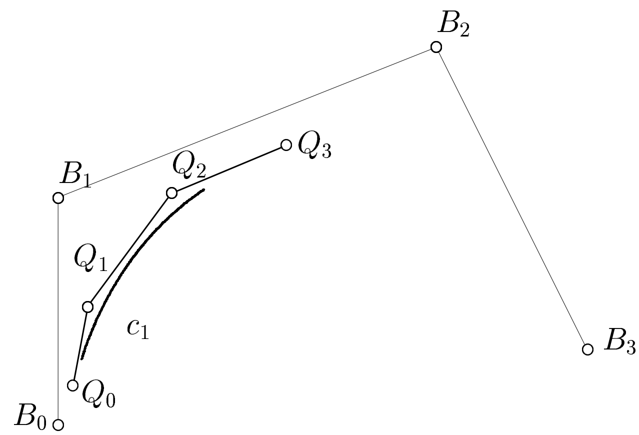


Abbildung 7.2: Kurve c_1 sowie Kontrollpolygon der Kurven c_1 und c.

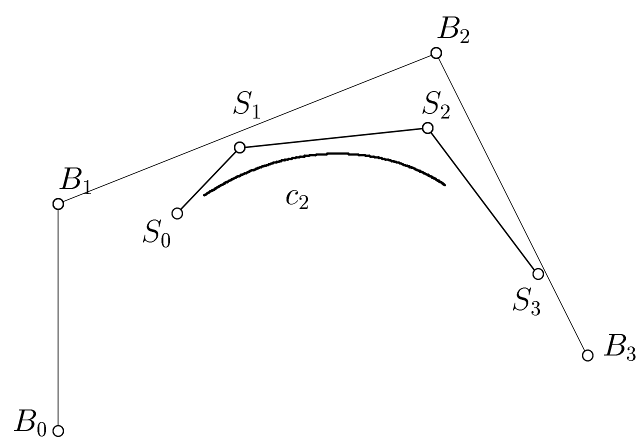


Abbildung 7.3: Kurve c_2 sowie Kontrollpolygon der Kurven c_2 und c.

7.3 Unterteilung linearer corner cutting-Flächen

Im vorliegenden Kapitel werden sowohl die Bernsteinpolynome als auch Schnittmatrizen mit B bezeichnet.

Der jeweilige Zusammenhang und die Indizierung sollte aber jeweils deutlich machen, um welchen Typ es sich handelt, auch wenn für B_N^N eine Doppeldeutigkeit auftritt.

Wir gehen aus von einer *linearen* corner cutting-Fläche (vergleiche mit Abschnitt 7.2)

$$\Phi : \boldsymbol{x}(u,v) \;=\; {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v),\;\; (u,v) \in [0,1]^2$$

gemäß (4.7), die wir für festes $u_0 \in]0,1[$ entlang einer v-Parameterlinie der Fläche Φ unterteilen wollen. Dazu suchen wir zwei Flächen Φ_1 und Φ_2 vom gleichen Typ wie die Ausgangsfläche Φ, also

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \boldsymbol{y}(u,v) \;&=\; \boldsymbol{x}(u_0 u, v) \\ &=\; {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{00} & \cdots & \boldsymbol{q}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{q}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v), \\ & \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1] \end{aligned} \tag{7.6}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \boldsymbol{z}(u,v) \;&=\; \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v) \\ &=\; {}^{T}\!A_M^M(u) \cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_{00} & \cdots & \boldsymbol{t}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{t}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{t}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v), \\ & \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die Situation ist in Abbildung 7.4 exemplarisch dargestellt.

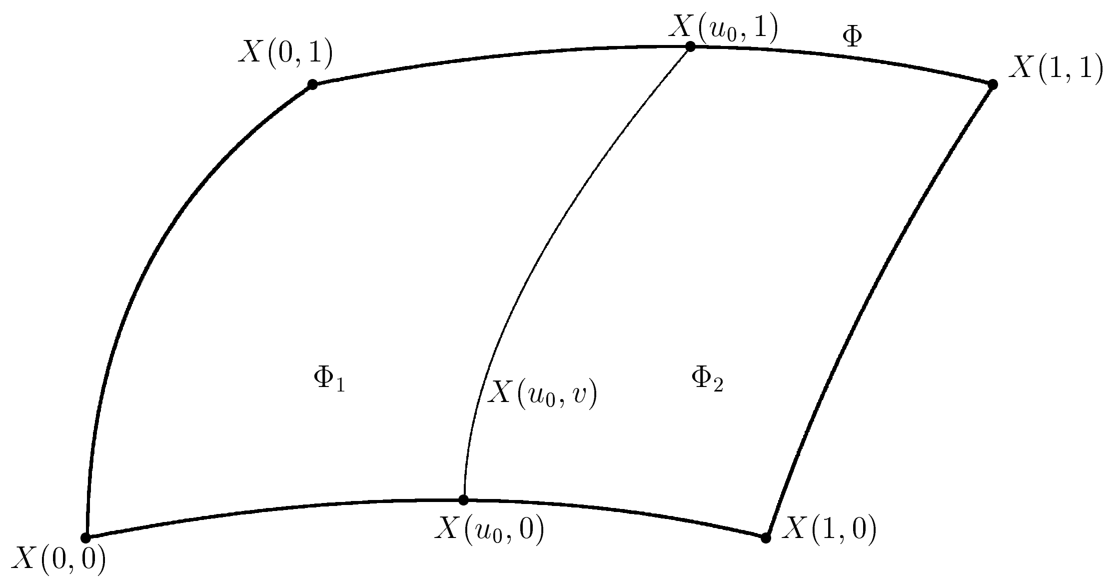


Abbildung 7.4: Unterteilung entlang einer v-Linie

In Analogie zur Unterteilung von corner cutting-Kuren betrachten wir dabei die eindeutig bestimmten Matrizen R und S mit

$$A_M^1(u)\cdots A_M^M(u) = \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_M(u) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} B_0^M(u) \\ \vdots \\ B_M^M(u) \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

und

$$B_N^1(v)\cdots B_N^N(v) = \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} B_0^N(v) \\ \vdots \\ B_N^N(v) \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

wobei R unabhängig von u und S unabhängig von v ist. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Matrizen R und S regulär sind. Die Unterteilung an der Parameterlinie $u = u_0$ liefert uns zunächst die beiden Flächen

$$\Phi_1 : \boldsymbol{y}(u,v) = \boldsymbol{x}(u_0u, v) \;=\; \big(f_0(u_0u) \,\ldots\, f_M(u_0u)\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix},$$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1] \tag{7.10}$$

und

$$\begin{aligned}
\Phi_2 : \boldsymbol{z}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v) \\
&= \begin{pmatrix} f_0(u_0(1-u)+u) \\ \vdots \\ f_M(u_0(1-u)+u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1]. \tag{7.11}$$

Ausgehend von (7.10) leiten wir im Folgenden die Kontrollpunkte Q_{ij} $(i = 1, \ldots, M; j = 1, \ldots, N)$ her, um zu einer Darstellung (7.6) zu gelangen.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 : \boldsymbol{y}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0 u, v) = \big(f_0(u_0 u) \ \ldots \ f_M(u_0 u)\big) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_0^M(u_0 u) \\ \vdots \\ B_M^M(u_0 u) \end{pmatrix}^T R^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v) \\
&\overset{\substack{\text{Lemma} \\ 7.1.1\ \text{a)}}}{=} \left[\begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^M(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_M^M(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^M(u) \\ \vdots \\ B_M^M(u) \end{pmatrix} \right]^T R^T((\boldsymbol{b}_{ij})) \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_M(u) \end{pmatrix}^T \left(R^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_0^M(u_0) & \cdots & \cdots & B_M^M(u_0) \end{pmatrix} R^T((\boldsymbol{b}_{ij})) \begin{pmatrix} g_0(v) \\ \vdots \\ g_N(v) \end{pmatrix}$$

Wir definieren

$$T_1(u_0) := R \cdot \begin{pmatrix} B_0^0(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^M(u_0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_M^M(u_0) \end{pmatrix} \cdot R^{-1} =: R\Delta_1(u_0)R^{-1}$$

und

$$((\boldsymbol{q}_{ij})) := T_1^T(u_0) \cdot ((\boldsymbol{b}_{ij}))$$

und gelangen so zur gewünschten Darstellung (7.6). Analog erhält man mit

$$T_2(u_0) := R \cdot \begin{pmatrix} B_0^M(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ B_M^M(u_0) & \cdots & \cdots & B_0^0(u_0) \end{pmatrix} \cdot R^{-1} =: R\Delta_2(u_0)R^{-1}$$

und

$$((\boldsymbol{t}_{ij})) := T_2^T(u_0) \cdot ((\boldsymbol{b}_{ij}))$$

die Darstellung (7.7). Entsprechend verläuft die Unterteilung entlang einer u-Linie.

Die Vorteile, die in der Regel die Nachteile der zunächst komplexeren Berechnung/Darstellung der Flächensegmente rechtfertigen, lassen sich von der Kurventheorie des vorigen Abschnitts übertragen.

Ein weiteres Unterteilen gestaltet sich nun einfach. Insbesondere ist es leicht möglich, eine lineare corner cutting-Fläche in einem Punkt $X(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in]0,1[^2$ (also einem Nicht-Randpunkt) von Φ entlang der Parameterlinien $X(u_0, v)$ und $X(u, v_0)$ derart zu

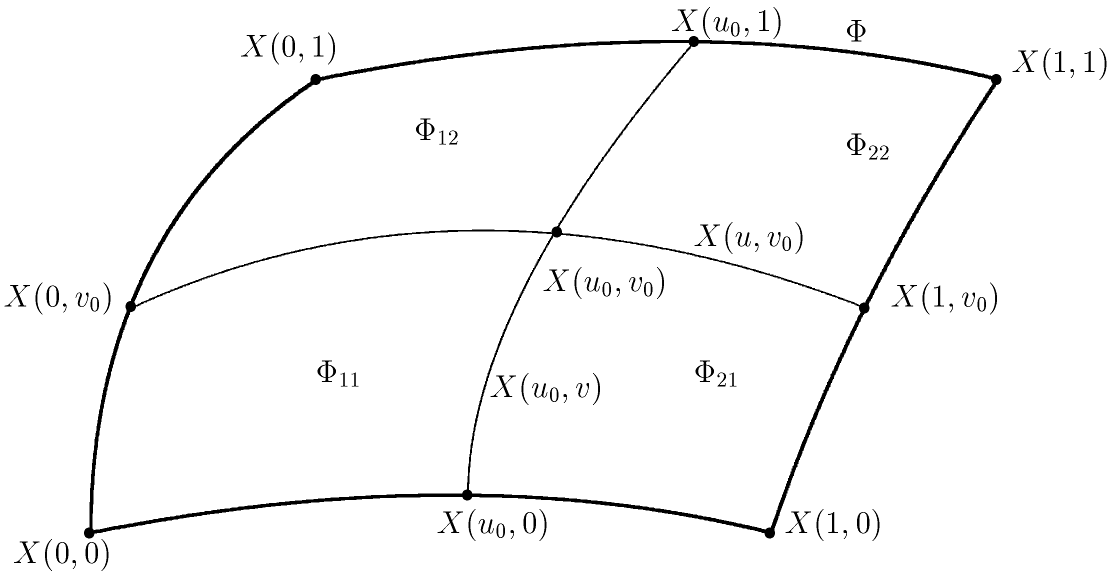


Abbildung 7.5: Unterteilung entlang einer u-Linie und einer v-Linie

unterteilen, dass insgesamt vier lineare corner cutting-Flächen mit denselben Bindefunktionen zu neuen Kontrollpunkten entstehen. Die Situation ist schematisch der Abbildung 7.5 zu entnehmen.

Die vier Flächen haben dann die Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} : \boldsymbol{x}_{11}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0 u, v_0 v) \\
&= {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \big(R^{-1}\big)^T \Delta_1(u_0) R((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_1(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v), \\
&\qquad (u,v) \in [0,1]^2 \\
\Phi_{12} : \boldsymbol{x}_{12}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0 u, v_0(1-v)+v) \\
&= {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \big(R^{-1}\big)^T \Delta_1(u_0) R((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_2(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v), \\
&\qquad (u,v) \in [0,1]^2 \\
\Phi_{21} : \boldsymbol{x}_{21}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v_0 v) \\
&= {}^T\!A_M^M(u) \cdots {}^T\!A_M^1(u) \big(R^{-1}\big)^T \Delta_2(u_0) R((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_1(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^N(v),
\end{aligned}$$

$$(u,v) \in [0,1]^2$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22} : \boldsymbol{x}_{22}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v_0(1-v)+v) \\ &= {}^T\!A_M^M(u)\cdots {}^T\!A_M^1(u)\left(R^{-1}\right)^T \Delta_2(u_0)R((\boldsymbol{b}_{ij}))S\Gamma_2(v_0)S^{-1}B_N^1(v)\cdots B_N^N(v),\end{aligned}$$

$$(u,v) \in [0,1]^2$$

Will man eines der auftretenden Parameterintervalle so aufteilen, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ das Intervall in $2^n - 1$ Punkten geteilt wird, deren Abstände benachbarter Punkte äquidistant sind, so ist die Berechnung der der Transformationsmatrizen T_1, T_2 beziehungsweise S_1, S_2 nur einmal von Nöten. Die jeweiligen Kontrollpunkte zu denselben Bindefunktionen ergeben sich durch rekursives Anwenden der Gleichungen (7.10) beziehungsweise (7.11).

Beispiel 7.3.1 Wir betrachten eine corner cutting-Fläche vom Grad $(M,N) = (2,3)$

$$\Phi : \boldsymbol{x}(u,v) = {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u)\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{23}\end{pmatrix} B_3^1(v)\cdots B_3^3(v),\ (u,v) \in [0,1]\times[0,1] \tag{7.12}$$

mit den Schnittfunktionen

$$\alpha_1^1(u) = \tfrac{1}{2}u,\ \alpha_2^1(u) = \tfrac{3}{4}u + \tfrac{1}{4},\ \alpha_2^2(u) = u$$

$$\beta_1^1(v) = \ \beta_3^3(v) = v,\ \beta_2^1(v) = \ \beta_3^1(v) = \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{4},\ \beta_2^2(v) = \tfrac{3}{4}v + \tfrac{1}{4},\ \beta_3^2(v) = \tfrac{1}{2}v$$

und den Kontrollpunkten

$$\boldsymbol{b}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{10} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{11} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{13} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{20} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{21} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_{22} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{b}_{23} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung 7.6).

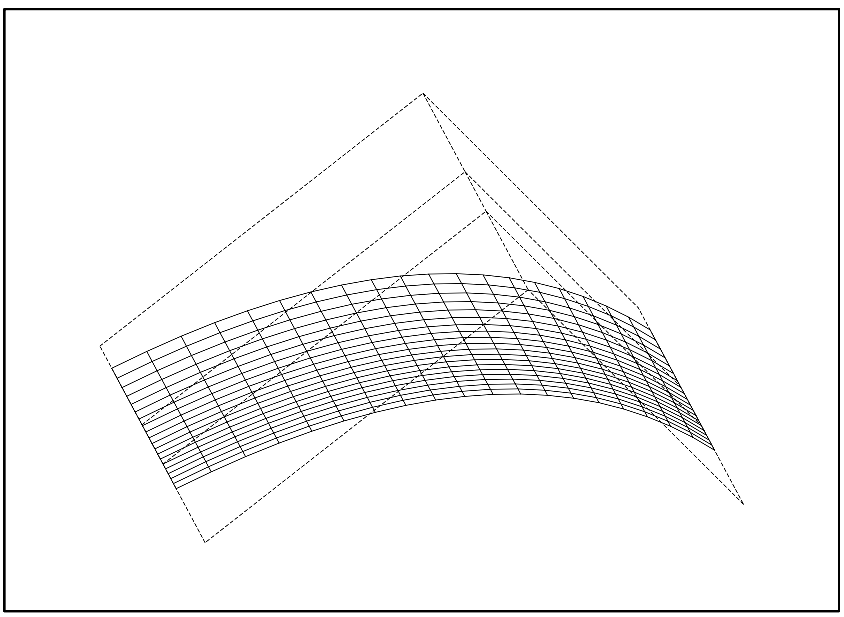


Abbildung 7.6: Die Fläche Φ aus (7.12) samt Kontrollnetz

Wir untersuchen nun die Unterteilung dieser Fläche an der v-Linie $u = u_0 = \frac{2}{5}$, an der u-Linie $v = v_0 = \frac{1}{2}$ sowie der Unterteilung der Fläche in vier Segmente mit dem Trennungspunkt $X(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$.

Die im laufenden Abschnitt auftretenden Transformationsmatrizen berechnen sich in diesem speziellen Beispiel zu

$$R := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{37}{48} & \frac{7}{24} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{11}{48} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1(\tfrac{2}{5}) := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \Delta_2(\tfrac{2}{5}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{9}{25} & \frac{27}{125} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{12}{25} & \frac{54}{125} \\ 0 & 0 & \frac{4}{25} & \frac{36}{125} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{125} \end{pmatrix} \text{ und } \Gamma_2 := \begin{pmatrix} \frac{27}{125} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{54}{125} & \frac{9}{25} & 0 & 0 \\ \frac{36}{125} & \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{8}{125} & \frac{4}{25} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Unterteilung an den Parameterlinien liefert uns für die Parameterlinie $v = v_0 = \frac{2}{5}$ die Flächen (siehe Abbildungen 7.7 und 7.8)

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \boldsymbol{y}(u,v) &= {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{00} & \cdots & \boldsymbol{q}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{20} & \cdots & \boldsymbol{q}_{23} \end{pmatrix} B_3^1(v) \cdots B_3^3(v) \\ &= {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u) \left(R^{-1}\right)^T \Delta_1(u_0) R \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{23} \end{pmatrix} B_3^1(v) \cdots B_3^3(v),\ (u,v) \in [0,1]^2 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\Phi_2 : \boldsymbol{z}(u,v) = {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_{00} & \cdots & \boldsymbol{t}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{t}_{20} & \cdots & \boldsymbol{t}_{23} \end{pmatrix} B_3^1(v) \cdots B_3^3(v)$$

$$= {}^T\!A_2^2(u)\,{}^T\!A_2^1(u) \big(R^{-1})\big)^T \Delta_2(u_0) R \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{23} \end{pmatrix} B_3^1(v) \cdots B_3^3(v),$$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1].$$

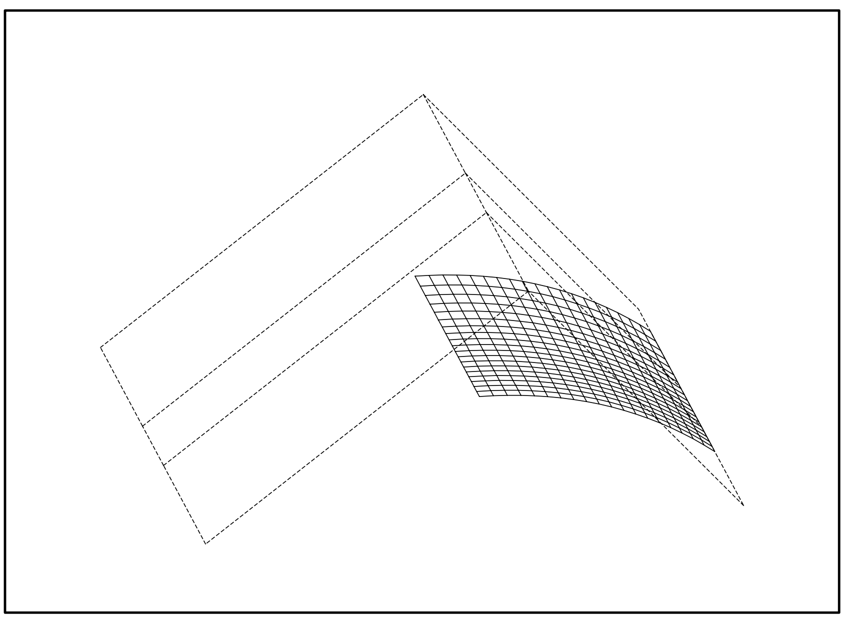


Abbildung 7.7: Fläche Φ_1 mit Kontrollnetz der Fläche Φ

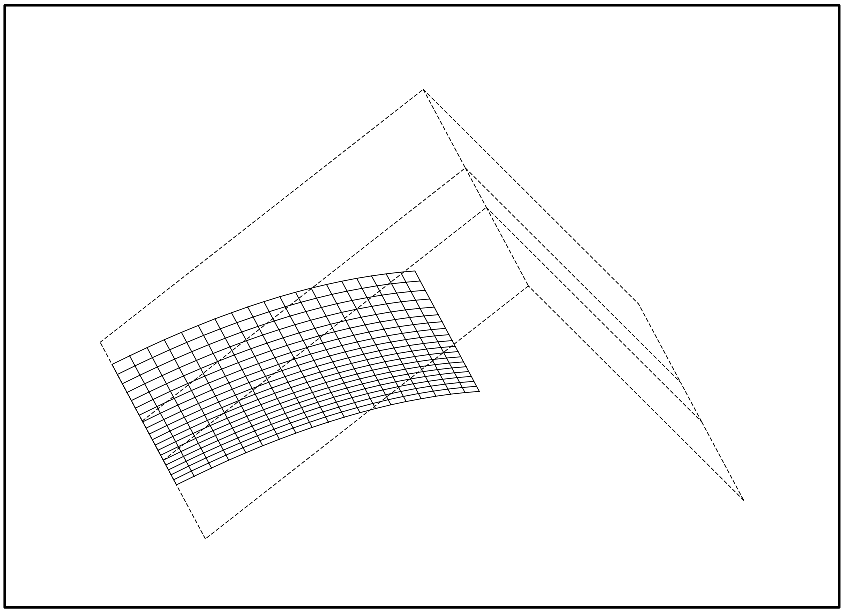


Abbildung 7.8: Fläche Φ_2 mit Kontrollnetz der Fläche Φ

Die Kontrollpunkte berechnen sich in diesem Fall zu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{00} & \cdots & \boldsymbol{q}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{20} & \cdots & \boldsymbol{q}_{23} \end{pmatrix} = \left(R^{-1}\right)^T \Delta_2(u_0) R \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\frac{11}{80} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\frac{11}{80} \\ 1\frac{79}{80} \\ \frac{71}{160} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\frac{11}{80} \\ 4\frac{77}{160} \\ \frac{71}{160} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\frac{11}{80} \\ 7\frac{15}{32} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5\frac{1}{5} \\ 2\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5\frac{1}{5} \\ 4\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5\frac{1}{5} \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{53}{80} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{53}{80} \\ \frac{17}{80} \\ -\frac{7}{160} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{53}{80} \\ \frac{51}{160} \\ -\frac{7}{160} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{53}{80} \\ \frac{17}{32} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

aus

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{00} & \cdots & \boldsymbol{q}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_{20} & \cdots & \boldsymbol{q}_{23} \end{pmatrix} = \left(R^{-1}\right)^T \Delta_2(u_0) R \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{03} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{20} & \cdots & \boldsymbol{b}_{23} \end{pmatrix},$$

erhält man die entsprechenden Kontrollpunkte der Fläche Φ_2.

Bei der Unterteilung in vier Segmente erhalten wir die Flächen

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &: \boldsymbol{x}_{11}(u,v),\ (u,v) \in [0,u_0] \times [0,v_0], \\ \Phi_{12} &: \boldsymbol{x}_{12}(u,v),\ (u,v) \in [u_0,1] \times [0,v_0], \\ \Phi_{21} &: \boldsymbol{x}_{21}(u,v),\ (u,v) \in [0,u_0] \times [v_0,1], \\ \Phi_{22} &: \boldsymbol{x}_{22}(u,v),\ (u,v) \in [u_0,1] \times [v_0,1], \end{aligned}$$

die wir als corner cutting-Flächen „desselben Typs“ mittels

$$\begin{aligned} \Phi_{11} : \boldsymbol{x}_{11}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0 u, v_0 v) \\ &= {}^T\!A_2^2(u)\, {}^T\!A_2^1(u) \left(R^{-1}\right)^T \Delta_1(u_0) R^T ((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_1(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^3(v), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (u,v) \in [0,1] \times [0,1], \\
\Phi_{12}: \ \boldsymbol{x}_{12}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0 u, v_0(1-v)+v) \\
&= {}^{T\!}A_2^2(u)\, {}^{T\!}A_2^1(u) \left(R^{-1}\right)^T \Delta_1(u_0) R^T((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_2(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^3(v), \\
& (u,v) \in [0,1] \times [0,1], \\
\Phi_{21}: \ \boldsymbol{x}_{21}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v_0 v) \\
&= {}^{T\!}A_2^2(u)\, {}^{T\!}A_2^1(u) \left(R^{-1}\right)^T \Delta_2(u_0) R^T((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_1(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^3(v), \\
& (u,v) \in [0,1] \times [0,1], \\
\Phi_{22}: \ \boldsymbol{x}_{22}(u,v) &= \boldsymbol{x}(u_0(1-u)+u, v_0(1-v)+v) \\
&= {}^{T\!}A_2^2(u)\, {}^{T\!}A_2^1(u) \left(R^{-1}\right)^T \Delta_2(u_0) R^T((\boldsymbol{b}_{ij})) S \Gamma_2(v_0) S^{-1} B_N^1(v) \cdots B_N^3(v), \\
& (u,v) \in [0,1] \times [0,1]
\end{aligned}
$$

darstellen können.

Die Flächen mitsamt ihrer Kontrollpunktnetze und dem Kontrollpunktnetz der Ausgangsfläche Φ sind in den Abbildungen 7.9 bis 7.12 dargestellt.

Bemerkung 7.3.1 Man sieht an diesem Beispiel, dass die Kontrollpunkte der segmentierenden Flächen nicht notwendigerweise in der Konvexen Hülle der Kontrollpunkte der Ausgangsfläche liegen (siehe zum Beispiel den Kontrollpunkt Q_{13} der Fläche Φ_1 des vorangegangenen Beispiels).

7.4 Unterteilung von gleichförmig berührenden corner cutting-Kurven

Nachdem wir in Abschnitt 7.2 bei der Unterteilung einer linearen cc-Kurve die Regularität der Transformationsmatrix R noch voraussetzen mussten, können wir sie bei

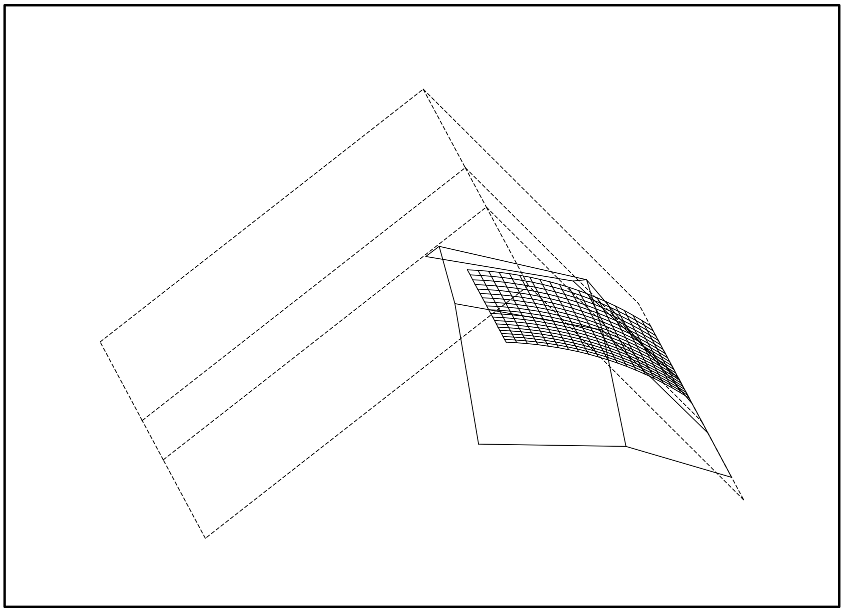


Abbildung 7.9: Fläche Φ_{11} mit Kontrollnetz und Kontrollnetz der Fläche Φ

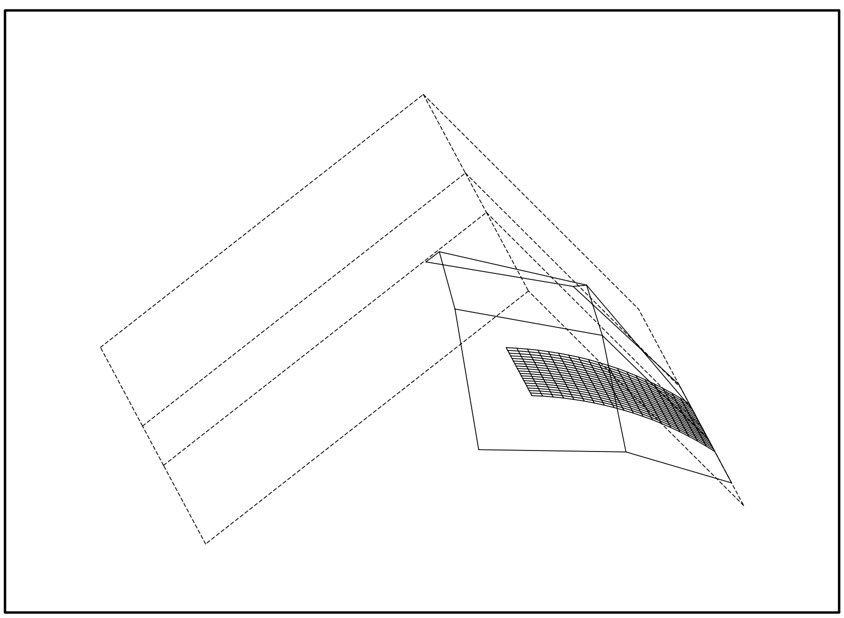


Abbildung 7.10: Fläche Φ_{12} mit Kontrollnetz und Kontrollnetz der Fläche Φ

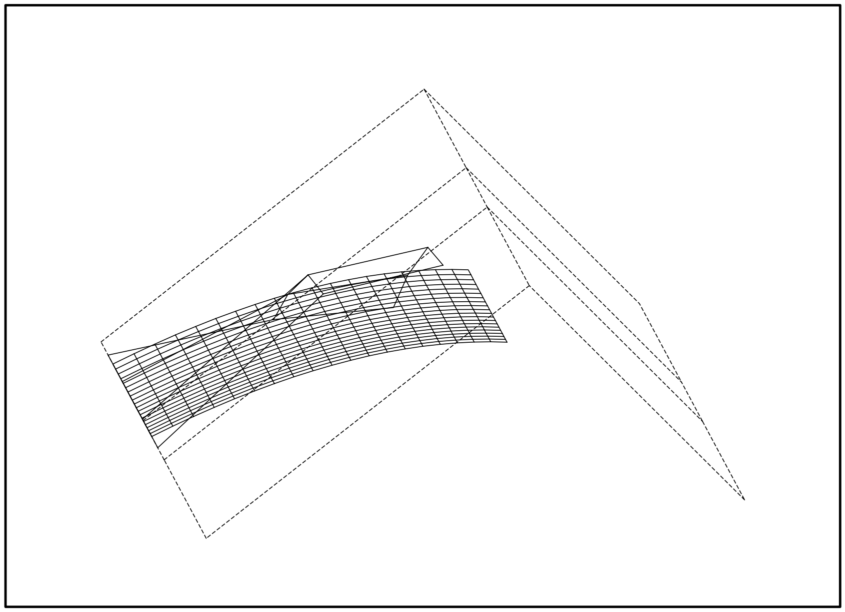


Abbildung 7.11: Fläche Φ_{21} mit Kontrollnetz und Kontrollnetz der Fläche Φ

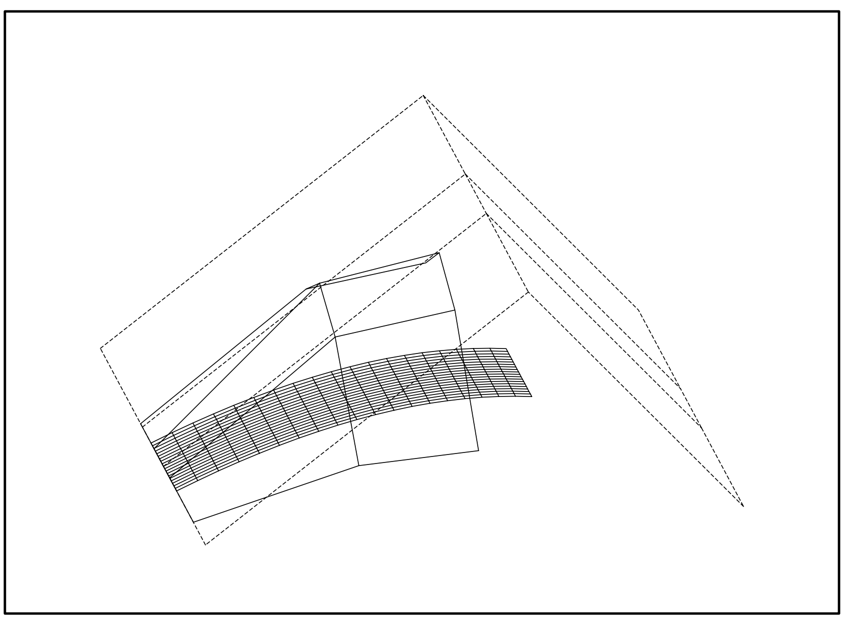


Abbildung 7.12: Fläche Φ_{22} mit Kontrollnetz und Kontrollnetz der Fläche Φ

gleichförmig berührenden corner cutting-Kurven beweisen und gleichzeitig eine Konstruktionsvorschrift der Matrix angeben. Da gleichförmig berührende corner cutting-Kurven ebenfalls linear sind (siehe Satz 2.4.5), gehen wir wieder von einer linearen corner cutting-Kurve

$$c : \boldsymbol{x}(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) A_N^1(u) \cdots A_N^N(u) = (\boldsymbol{b}_0 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_N) \begin{pmatrix} f_0(u) \\ \vdots \\ f_N(u) \end{pmatrix}, \ u \in [0,1]$$

aus. Um die Regularität und die Konstruktionsvorschrift von R beweisen beziehungsweise formulieren zu können, sind einige Vorüberlegungen notwendig. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{r}_j := R[1,\ldots,N+1|j+1]$ $(j = 0,\ldots,N)$ die Spalten der Matrix R und bezeichnen weiter mit

$$\Delta^0 \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_j, \qquad \Delta^i \boldsymbol{r}_j = \Delta^{i-1}\boldsymbol{r}_{j+1} - \Delta^{i-1}\boldsymbol{r}_j$$

die Vorwärtsdifferenzen von $\boldsymbol{r}_j$. Für $i = 0,\ldots,N$ definieren wir die Größen

$$C_i(u) = \underbrace{\dot{A}_N^1(u) \cdots \dot{A}_N^i(u)}_{\text{leer für } i=0} \cdot \underbrace{A_N^{i+1}(u) \cdots A_N^N(u)}_{\text{leer für } i=N}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} C_i(u) &= \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-i+1)} \cdot \frac{d^i C_0(u)}{du^i} \quad (\text{wegen } A_N^{i-1}\dot{A}_N^i = \dot{A}_N^{i-1}A_N^i) \\ &= \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-i+1)} \cdot \sum_{j=0}^{N} \frac{d^i B_j^N(u)}{du^i} \boldsymbol{r}_j \\ &\overset{\substack{\text{Lemma} \\ 7.1.1 \text{ c)}}}{=} \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-\lambda} \binom{i}{\lambda} B_{j-\lambda}^{N-i}(u). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Satz 7.4.1 Für $i = 0,\ldots,N$ gilt

$$C_i(0) = \dot{A}_N^1(0) \cdots \dot{A}_N^i(0) A_N^{i+1}(0) \cdots A_N^N(0) = \Delta^i \boldsymbol{r}_0.$$

Damit folgt für die Spalten der Matrix R

$$\boldsymbol{r}_i = C_i(0) - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \boldsymbol{r}_j \quad (i = 0,\ldots,N)$$

Beweis: Es ist
$$C_0(0) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j B_j^N(0) = \boldsymbol{r}_0.$$
Für $i \geq 1$ gilt weiter
$$\begin{aligned}
C_i(0) &\overset{(7.13)}{=} \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} B_{j-\lambda}^{N-i}(0) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j (-1)^{i-j} \binom{i}{j} B_0^{N-i}(0) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \boldsymbol{r}_j (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = \Delta^i \boldsymbol{r}_0,
\end{aligned}$$
denn mittels Induktion zeigt man
$$\begin{aligned}
\Delta^i \boldsymbol{r}_0 &= \Delta^{i-1}\boldsymbol{r}_1 - \Delta^{i-1}\boldsymbol{r}_0 \\
&= \Delta^{i-2}\boldsymbol{r}_2 - \Delta^{i-2}\boldsymbol{r}_1 - \Delta^{i-2}\boldsymbol{r}_1 + \Delta^{i-2}\boldsymbol{r}_0 \\
&= \dots \\
&= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \boldsymbol{r}_j
\end{aligned}$$
□

Eine weitere Aussage über die Konstruktion der Spalten der Matrix R erhalten wir, wenn wir den Parameterwert $u = 1$ in die Funktionen C_i $(i = 0, \dots, N)$ einsetzen. Dies beinhaltet die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 7.4.2 Für $i = 0, \dots, N$ gilt
$$C_i(1) = \dot{A}_N^1(1) \cdots \dot{A}_N^i(1) A_N^{i+1}(1) \cdots A_N^N(1) = \Delta^i \boldsymbol{r}_{N-i}.$$
Damit gilt für die Spalten der Matrix R
$$\boldsymbol{r}_i = (-1)^{N-i} C_{N-i}(1) - \sum_{j=1}^{N-i} (-1)^j \binom{N-i}{j} \boldsymbol{r}_{i+j} \quad (i = N, \dots, 0).$$

Beweis: Für $i = 0$ erhalten wir die Beziehung

$$C_0(1) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j B_j^N(1) = \boldsymbol{r}_N.$$

Für $i = 1, \ldots, N$ gilt weiter

$$\begin{aligned} C_i(1) &\stackrel{(7.13)}{=} \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} B_{j-\lambda}^{N-i}(1) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{r}_j (-1)^{N-j} \binom{i}{i+j-N} B_{N-i}^{N-i}(1) \\ &= \sum_{j=N-i}^{N} \boldsymbol{r}_j (-1)^{N-j} \binom{i}{i+j-N} \\ &= \sum_{j=0}^{i} \boldsymbol{r}_{j+(N-i)} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = \Delta^i \boldsymbol{r}_{N-i}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\boldsymbol{r}_{N-i} = (-1)^i C_i(1) - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \boldsymbol{r}_{N-i+j}.$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung $N - i$ und i, so erhalten wir den zweiten Teil der Behauptung. □

Satz 7.4.3 Die Blendingfunktionen $f_0, \ldots, f_N$ einer gleichförmig berührenden corner cutting-Kurve sind linear unabhängig.

Beweis: Zunächst gilt wegen (7.3) und Satz 7.4.1

$$f_0, \ldots, f_N \text{ lin. unabhängig } \Leftrightarrow \; Rg\ R = N+1 \; \Leftrightarrow \; \det\big(C_0(0)\, C_1(0)\, \ldots\, C_N(0)\big) \neq 0,$$

Der Rang der Matrix $\dot{A}_N^j$ ist für $j = 1, \ldots, N$ gegeben durch $N + 1 - j$, daher sind die Abbildungen

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{N+1-j} & \to \; R^{N+2-j} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto \; \dot{A}_N^j \boldsymbol{x} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{N-j+2} & \to & R^{N+1} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \dot{A}_N^1 \dot{A}_N^2 \cdots \dot{A}_N^{j-1} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

injektiv. Damit gilt für $i = 1, \ldots, N$:

$$\dot{A}_N^1 \dot{A}_N^2 \cdots \dot{A}_N^{i-1} A_N^i(0) \cdots A_N^N(0) \in [\bigcup_{k=0}^{N} \underbrace{\dot{A}_N^1 \cdots \dot{A}_N^k}_{\text{leer für } i=0} \underbrace{A_N^{k+1}(0) \cdots A_N^N(0)}_{\text{leer für } i=N}]$$

$$= [\dot{A}_N^1 \cdots \dot{A}_N^i A_N^{i+1}(0) \cdots A_N^N(0),$$

$$\dot{A}_N^1 \cdots \dot{A}_N^{i+1} A_N^{i+2}(0) \cdots A_N^N(0),$$

$$\ldots,$$

$$\dot{A}_N^1 \cdots \dot{A}_N^N]$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i, \ldots, \lambda_N :$$

$$\dot{A}_N^1 \cdots \dot{A}_N^{i-1} \left(A_N^i(0) \cdots A_N^N(0) - \sum_{k=i}^{N} \lambda_k \dot{A}_N^i \cdots \dot{A}_N^k A_N^{k+1}(0) \cdots A_N^N(0) \right)$$

$$= \boldsymbol{o}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i, \ldots, \lambda_N : A_N^i(0) \cdots A_N^N(0) = \sum_{k=i}^{N} \lambda_k \dot{A}_N^i \cdots \dot{A}_N^k A_N^{k+1}(0) \cdots A_N^N(0).$$

Die Elemente des Vektors auf der linken Seite addieren sich als Produkt stochastischer Matrizen zu Eins, die Elemente der Vektoren in der Summe auf der rechten Seite addieren sich zu Null, denn $\dot{A}_N^i$ besitzt für $i = 1, \ldots, N$ verschwindende Spalteneintragssummen und somit auch Matrixprodukte

$$A_N^i(u) \cdot H \text{ mit } H \in \mathbb{R}^{(N+i-1)\times r} \text{ und } r \in \mathbb{N}.$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 7.4.1 Die Spalten $R[1, \ldots, N+1|1]$ und $R[1, \ldots, N+1|N+1]$ lassen sich wie gesehen besonders einfach evaluieren. Es ist

$$\boldsymbol{r}_0 = A_N^1(0) A_N^2(0) \cdots A_N^N(0)$$

und

$$\boldsymbol{r}_N = A_N^1(1)A_N^2(1)\cdots A_N^N(1).$$

Ob R stochastisch ist, ist nicht geklärt. R^{-1} ist es nach [AUM3] nicht. Dass die Einträge der Spalten von R sich zu Eins summieren, lässt sich jedoch beweisen.

Satz 7.4.4 Die Einträge der Spalten der Matrix R summieren sich zu Eins, also gilt für $j = 1, \ldots, N+1$

$$\sum_{i=1}^{N+1} R[i|j] = 1.$$

Beweis: Nach obigen Überlegungen hat das Matrixprodukt

$$C_i(0) = \dot{A}_N^1(0)\cdots\dot{A}_N^i(0)\cdot A_N^{i+1}(0)\cdots A_N^N(0)$$

die Spalteneintragssumme Null für $i \neq 0$ und die Spalteneintragssumme Eins für $i = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} -\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j} &= (-1)^{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j} \\ &= (-1)^{i+1}\cdot(-1)^{i+1} = 1. \end{aligned}$$

Wegen

$$\boldsymbol{r}_i = C_i(0) - \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\boldsymbol{r}_j$$

folgt die Behauptung für die Spalten $\boldsymbol{r}_k$ durch Induktion nach k. □

Bemerkung 7.4.2 Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{N} f_i(u_0u) \\ &= f_0(u)\sum_{i=1}^{N+1} T_1(u_0)[i|1] \\ &\quad +\ldots \end{aligned}$$

$$+f_N(u)\sum_{i=1}^{N+1} T_1(u_0)[i|N+1]$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} T_1(u_0)[i|N+1] f_{k-1}(u),$$

woraus wegen der eindeutigen Basisdarstellung in den Funktionen f_k ebenfalls folgt, dass die Einträge der Spalten der Matrizen $T_i(u_0)$ $(i = 1, 2)$ sich zu Eins summieren. Wie bei der Inversen R^{-1} der Transformationsmatrix R lässt sich aber zeigen, dass die Matrizen $T_i(u_0)$ nicht stochastisch sind (siehe [AUM3], Seite 100f).

7.5 Unterteilung von gleichförmig berührenden corner cutting-Flächen

Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts lassen sich auf die Theorie der corner cutting-Flächen anwenden und erweitern diese. Die Ergebnisse werden wir in diesem Abschnitt zusammenfassen. Für die Beweise der Sätze verweisen wir auf die entsprechenden Sätze über corner cutting-Kurven, die mit den entsprechenden Bezeichnungen übertragbar sind.

Wir gehen von einer gleichförmig berührenden und damit linearen (siehe Satz 5.2.4) corner cutting-Fläche

$$\Phi :\ \boldsymbol{x}(u,v) \ =\ {}^{T}\!A_M^M(u)\cdots {}^{T}\!A_M^1(u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \cdots & \boldsymbol{b}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_{M0} & \cdots & \boldsymbol{b}_{MN} \end{pmatrix} B_N^1(v)\cdots B_N^N(v),\ \ (u,v)\in[0,1]^2 \tag{7.14}$$

aus.

Für die Transformationsmatrizen R und S aus (7.8) und (7.9) bezeichnen wir mit

$$\boldsymbol{r}_l := R[1,\ldots,M+1|l+1] \quad (l = 0,\ldots,M)$$

die Spalten von R und mit

$$\boldsymbol{s}_j := S[1,\ldots,N+1|j+1] \quad (j = 0,\ldots,N)$$

die Spalten von S.

Ferner seien für $l = 0, \dots, M$ und $j = 0, \dots, N$ die Größen

$$C_l(u) := \dot{A}_M^1(u) \cdots \dot{A}_M^l(u) A_M^{l+1}(u) \cdots A_M^M(u)$$

und

$$D_j(v) := \acute{B}_N^1(v) \cdots \acute{B}_N^j(v) B_N^{j+1}(v) \cdots B_N^N(v)$$

definiert.

Damit erhalten wir (vgl. mit Satz 7.4.1) den

Satz 7.5.1 Die Spalten der Transformationsmatrizen R und S lassen sich durch

$$\boldsymbol{r}_l = C_l(0) - \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{l-k} \binom{i}{k} \boldsymbol{r}_k \quad (l = 0, \dots, M)$$

beziehungsweise

$$\boldsymbol{s}_j = D_j(0) - \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \boldsymbol{s}_i \quad (i = 0, \dots, N)$$

berechnen.

Eine weitere Konstruktionsvorschrift (vgl. mit Satz 7.4.2) gewinnen wir aus dem

Satz 7.5.2 Die Spalten der Transformationsmatrizen R und S erhalten wir für $l = 0, \dots, M$ und $j = 0, \dots, N$ aus den Beziehungen

$$\boldsymbol{r}_l = (-1)^{M-l} C_{M-l}(1) - \sum_{k=1}^{M-l} (-1)^k \binom{M-l}{k} \boldsymbol{r}_{l+k}$$

beziehungsweise

$$\boldsymbol{s}_j = (-1)^{N-j} D_{N-j}(1) - \sum_{i=1}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \boldsymbol{s}_{j+i}.$$

Das zu Satz 7.4.3 analoge Resultat für gleichförmig berührende corner cutting-Flächen ist gegeben im

Satz 7.5.3 Sowohl die Blendingfunktionen $f_0, \dots, f_M$ als auch die Blendingfuntkionen $g_0, \dots, g_N$ einer gleichförmig berührenden corner cutting-Fläche sind linear unabhängig.

Bemerkung 7.5.1 Die Einträge der Spalten der Transformationsmatrizen R und S summieren sich jeweils zu Eins (vgl. Satz 7.4.4). Um zu zeigen, dass R und S stochastische Matrizen sind, müsste man die Nichtnegativität aller Einträge nachweisen, um diese Vermutung zu bestätigen.
Für die Inversen R^{-1} und S^{-1} ist gezeigt, dass im Allgemeinen keine stochastischen Matrizen vorliegen (vgl. Bemerkung 7.4.1).

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, die Theorie der corner cutting-Kurven und corner cutting-Flächen ein- beziehungsweise fortzuführen. Für die praktische Anwendung wurden Bedingungen hergeleitet, die es ermöglichen Interpolationseigenschaften oder Berührungscharakteristiken zu erreichen.

Die vollkommene Kontrolle der Objekte wird dabei durch die Wahl des Kontrollpunktpolygons beziehungsweise des Kontrollpunktnetzes sowie der Wahl der Schnittfunktionen erreicht. Obwohl an die Schnittfunktionen relativ starke Forderungen gestellt werden, gewinnen wir durch diese Reglementierung eine einfach zu handhabende Steuerungsmöglichkeit der entstehenden Kurven und Flächen.

Durch die Verwendung von bidiagonalen unteren Dreiecksmatrizen als Schnittmatrizen gelingt es (wenn überhaupt) nicht ohne Weiteres, bereits bestehende corner cutting-Algorithmen im Sinne unserer Definition darzustellen (man denke zum Beispiel an den Chaikin-Algrithmus oder die Algorithmen von de Rham, siehe [CHA2], [RHA1] und [RHA2]).

Die Theorie der corner cutting-Kurven, die in [AUM1] eingeführt wurde, wurde wiederholt, teilweise erweitert und anhand von Beispielen illustriert. Die Kurventheorie wurde auf die Theorie der corner cutting-Flächen erweitert. Wir konnten nachweisen, dass die entstehenden Tensorproduktflächen nahezu sämtliche Eigenschaften, die wir bei der Behandlung der Kurven kennengelernt haben, auch in der Theorie der Flächen Anwendung finden.

Ein Schwerpunkt der Arbeit lag auf der Untersuchung der Zusammenhänge von Bézier- und B-Spline-Kurven und -Flächen mit der entwickelten Klasse von corner cutting-Kurven und -Flächen.

Wir haben gezeigt, dass die Menge der corner cutting-Kurven die Bézier-Kurven und die B-Spline-Kurven von Grad $N = K$ als Obermenge enthält. Ebenso verhält es sich in der

Flächentheorie.

Für B-Spline-Kurven mit $N > K$ wurde gezeigt, dass sich jede Kurve als Vereinigung von gleichförmig berührende corner cutting-Kurven darstellen lässt. Parallel zum Beweis wurde ein Algorithmus angegeben, der die gesuchten Segmente liefert.

B-Spline-Flächen von Grad (M, N) mit $M \geq L,\ N \geq K$ lassen sich ebenfalls in derselben Art und Weise segmentieren; auch dafür ist ein Algorithmus entwickelt worden, der die entsprechenden Patches liefert.

Ich vermute, dass auch die Erweiterung der Klasse von Bézier- und B-Spline-Objekten auf NURBS-Kurven und -Flächen sich in die Theorie des corner cutting einbinden lässt, wobei auf diesen Aspekt in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden konnte.

Das Unterteilen von linearen corner cutting-Kurven und -Flächen behandelten wir unter der Grundannahme der Regularität von einer der auftretenden Transformationsmatrizen (siehe auch [AUM3]). Nur für die Wahl von Schnittmatrizen, die eine gleichförmig berührende corner cutting-Kurve oder-Fläche ergeben, ist die Regularität bewiesen, in anderen Fällen bleibt es bei der (bisher nicht widerlegten) Hypothese, die wir als wahr voraussetzten. Auch für diese wichtige Methode des CAGD konnten wir die bekannten Methoden auf corner cutting-Flächen anwenden.

Wir haben gezeigt, dass die Theorie des *corner cutting* Mengen von Kurven und Flächen bereitstellt, die grundlegende Eigenschaften von Freiformkurven und -flächen besitzen beziehungsweise zur Verfügung stellen. Ferner wurde nachgewiesen, dass sich Bézier-Flächen als einzige eckinterpolierende, gleichförmig berührende corner cutting-Flächen ergeben.

Wie sich NURBS-Kurven und -Flächen mittels der Eigenschaften der corner cutting-Theorie charakterisieren lassen, könnte weitere interessante Einsichten in das Verständnis unserer Definition des *corner cutting* liefern.

Literaturverzeichnis

[AUM1] Aumann, G. und Spitzmüller, K.: *Computerorientierte Geometrie*, BI-Wiss.-Verl., Mannheim, 1993.

[AUM2] Aumann, G.: *Corner cutting curves and a new charcterization of Bézier and B-Spline curves.* Computer Aided Geometric Design 14, Seiten 449-474, 1997.

[AUM3] Aumann, G.: *Subdivision of Linear Corner Cutting Curves*, Journal for Geometry and Graphics Volume 1, No. 2, Seiten 91-103, 1997.

[BAR1] Barry, P.J. und Goldman, R.N.: *De Casteljau-type subdivision is peculiar to Bézier curves*, Computer Aided Design 20, Seiten 114-116, 1988.

[BAR2] Barry, P.J. und Goldman, R.N.: *What is the natural generalization of a Bézier curve?*. In: Lyche, T. und Schumaker, L.L. (eds.): *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, Seiten 71-85, 1989.

[BOE1] Böhm, W., Farin, G. und Kahmann, J.: *A survey of curve and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design 1, Seiten 1-60, 1984.

[BOE2] Böhm, W. und Gose, G.: *Einführung in die Methoden der Numerischen Mathematik*, Vieweg Verlag, 1977.

[BOE3] Böhm, W.: *Inserting new knots into B-Spline curves*, Computer Aided Design 12, Seiten 199-201, 1980.

[BOO1] de Boor, C.: *On calculating with B-Splines*, Journal Approximation Theory 6, Seiten 50-62, 1972.

[BOO2] de Boor, C.: *Cutting corners always works*, Computer Aided Geometric Design 4, Seiten 125-131, 1987.

[BOO3] de Boor, C.: *Local corner cutting and the smoothness of the limiting curve*, Computer Aided Geometric Design 7, Seiten 289-297, 1990.

[BRO] Bronstein, I.N. und Semendjajew, A.N.: *Taschenbuch der Mathematik*, H. Deutsch, Thun, 22. Auflage, 1985.

[BRU] Brunet, P.: *Including shape handles in recursive subdivision surfaces*, Computer Aided Geometric Design 5, Seiten 41-50, 1988.

[CAR] Carstensen, C., Mhlbach, G. und Schmidt, G.: *De Casteljau's algorithm is an extrapolation method*, Computer Aided Geometric Design 12, Seiten 371-380, 1995.

[CAS] De Casteljau, P.: *Courbes et Surfâces à Pôles*, André Citroën, Automobilies SA, Paris, 1963.

[CAT] Catmull, E.E. und Clark, J.: *Recursively generated B-Spline surfaces on arbitrary topological meshes*, Computer Aided Geometric Design 10, Seiten 350-355, 1978.

[CAV] Cavaretta, A.S. und Micchelli, C.A.: *The design of curves and surfaces by subdivision algorithms*. In: Lyche, T. und Schumaker, L.L. (eds.): *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Tampa, Seiten 115-153, 1989.

[CHA1] Char, B.W. et al.: *Maple V, Library Reference Manual*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[CHA2] Chaikin, G.M.: *An Algorithm for high-speed curve generation*, Computer Graphics and Image Processing 3, Seiten 346-349, 1974.

[COH] Cohen, E., Lyche, T. und Riesenfeld, R.F.: *Discrete B-Splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics*, Computer Graphics and Image Processing 14, Seiten 87-111, 1980.

[DOO] Doo, D.W.H. und Sabin, M.A.: *Behaviour of Recursive Division Surfaces Near Extraordinary Points*, Computer Aided Geometric Design 10, Seiten 356-360, 1978.

[DYN1] Dyn, N.: *Interpolation and Approximation by Radial and Related Funcrions*. In: Chui, C.K., Schumaker, L.L. und Ward, J.D. (eds.): *Approximation Theory VI: Volume 1*, Academic Press, Seiten 211-234, 1989.

[DYN2] Dyn, N., Levin, D. und Gregory, J.A.: *A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control*, ACM Transactions on Graphics, Seiten 160-169, 1990.

[FAR] Farin, G.: *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Boston, 1992.

[GOO] Goodman, T.N.T. und Micchelli, C.A.: *Corner cutting algorithms for the representation of free form curves*, Linear Algebra and its Applications 99, Seiten 225-252, 1988.

[GOR] Gordon, W. und Riesenfeld, R.F.: *B-Spline curves and surfaces.* In: Barnhill, R.E. und Riesenfeld, R.F. (eds.): *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, Seiten 95-126, 1974.

[GRA] Gray, A.: *Differentialgeometrie*, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1994.

[GRE] Gregory, J.A. und Qu, R.: *Nonuniform corner cutting*, Computer Aided Geometric Design 13, Seiten 763-772, 1996.

[GRO] Grosche, G. und Ziegler, V.: *Ergänzende Kapitel zu I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik*, H. Deutsch, Thun, 19. Auflage, 1980.

[HOS] Hoschek, J. und Lasser, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1992.

[JEN] Jena, M.K., Shunmugaraj, P.C. und Das, P.C.: *A subdivision algorithm for generalized Bernstein-Bézier curves*, Computer Aided Geometric Design 18, Seiten 673-698, 2001.

[KAH] Kahmann, J.: *Krümmungsübergänge zusammengesetzter Kurven und Flächen*, Dissertation, Braunschweig, 1982.

[LUE] Lütkepohl, H.: *Handbook of Matrices*, John Wiley and Sous Ltd., Chichester, 1996.

[MAI] Mainar, E., Peña, J.M.: *Corner cutting algorithms associated with optimal shape preserving representations*, Computer Aided Geometric Design 16, Seiten 883-906, 1999.

[MIC1] Michelli, C.A. und Pinkus, A.: *Descartes systems from corner cutting*, Constructive Approximation 7, Seiten 161-194, 1991.

[MIC2] Michelli, C.A. und Prautzsch, H.: *Computing surfaces invariant under subdivision*, Computer Aided Geometric Design 4, Seiten 321-328, 1987.

[PAL] Paluszny, M, Prautzsch, H. und Schäfer, M.: *A geometric look at corner cutting*, Computer Aided Geometric Design 14, Seiten 421-447, 1997.

[PIE] Piegl, L. und Tiller, W.: *The NURBS Handbook*, Springer, Berlin, 1997.

[PRA1] Prautzsch, H.: *Unterteilungsalgorithmen für Bézier- und B-Spline-Flächen*, Diplom-Arbeit, TU Braunschweig, 1983.

[PRA2] Prautzsch, H.: *Generalized subdivision and convergence*, Computer Aided Geometric Design 2, Seiten 69-75, 1985.

[PRA3] Prautzsch, H. und Micchelli, C.A.: *Computing Curves invariant under halving*, Computer Aided Geometric Design 4, Seiten 133-140, 1987.

[PRA4] Prautzsch, H.: *Linear subdivision*, Linear Algebra and its applications 143, Seiten 223-230, 1991.

[PRA5] Prautzsch, H. und Kobbelt, L.: *Convergence of subdivision and degree elevation*. Ann. Numer. Math. 3, Seiten 333-343, 1996.

[RHA1] de Rham, G.: *Un peu de mathematique à propos d'une courbe plane*, Elem. Math. 2, Seiten 73-76 und 89-97 (Collected Works, Seiten 678-689), 1947.

[RHA2] de Rham, G.: *Sur les courbes limites de polygones obtenus par trisection*, Enseign. math. 5, Seiten 29-43 und 89-97 (Collected Works, Seiten 728-743), 1959.

[RHA3] de Rham, G.: *Sur une courbe plane*, J. Math. Pures Appl. 35, Seiten 25-42 (Collected Works Seiten 696-713), 1956.

[RIE1] Riesenfeld, R.F.: *On Chaikins Algorithm*, Computer Graphics and Image Processing 4, Seiten 304-310, 1975.

[RIE2] Riesenfeld, R.F.: *Application of B-Spline approximation to geometric problems of computer aided design*, Dissertation, Syracuse University, 1973.

[RIO] Rioul, O.: *Simple regularity criteria for subdivision schemes*, SIAM Journal Math. Anal. 23, Seiten 1544-1576, 1992.

[ROV] Rovenski, V: *Geometry of curves and surfaces with Maple*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[STA] Stärk, E.: *Mehrfach differenzierbare Bézier-Kurven und Bézier-Flächen*, Dissertation, TU Braunschweig, 1976.

[VAR] Varady, T., Martin, R.R. und Vida, J.:*Topological considerations in blending boundary representation solid models.* In: Straßer, W. und Seidel, H.P. (eds.): *Theory and Practice of Geometric Modeling*, Springer, Berlin, Seiten 205-220, 1989.

Lebenslauf

Matthias Gercken

6. Juni 1972	Geboren in Flensburg

Schulbildung

1978-1982	Falkenberg–Grundschule Flensburg
1982-1991	Auguste-Viktoria-Schule Flensburg
Juni 1991	Abitur

Zivildienst

1991-1992	Diakonissen-Krankenhaus Flensburg

Studium

1992-1998	Mathematik- und Physik-Studium für das Lehramt an Gymnasien an der Universität Karlsruhe
Mai 1998	1. Staatsexamen

Berufstätigkeit

seit Oktober 1998	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe