

KfK 5095
Februar 1993

**Magneto hydrodynamische
Strömungen flüssiger Metalle
in allgemeinen
dreidimensionalen Geometrien
unter der Einwirkung
starker, lokal variabler
Magnetfelder**

L. Bühler
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe
Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Kernfusion

KfK 5095

*Magnetohydrodynamische Strömungen flüssiger Metalle in
allgemeinen dreidimensionalen Geometrien unter der
Einwirkung starker, lokal variabler Magnetfelder*

L. Bühler

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (T.H.)
genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Magneto hydrodynamische Strömungen flüssiger Metalle in allgemeinen dreidimensionalen Geometrien unter der Einwirkung starker, lokal variabler Magnetfelder

Zusammenfassung

Die Beschreibung von induktionsfreien magneto hydrodynamischen Strömungen bei großen Hartmann – Zahlen erfolgt durch eine Aufteilung des Strömungsgebiets in einen reibungsfreien Kernströmungsbereich, "Core" genannt, und in sehr dünne, viskose Wandgrenzschichten. Durch Vernachlässigung der Trägheitsterme für große Interaktionsparameter werden die Impulsgleichungen linearisiert. Auf diese Weise lassen sich die allgemeinen Grundgleichungen in den jeweils betrachteten Strömungsgebieten stark vereinfachen. Im reibungsfreien Core werden die dreidimensionalen Grundgleichungen durch eine analytische Integration auf zweidimensionale Gleichungen reduziert. Die exakte Erfüllung der physikalischen Randbedingungen an den Kanalwänden wird durch die Lösung von Grenzschichtgleichungen erreicht. Die Gleichung der Ladungserhaltung in der dünnen, elektrisch leitenden Kanalwand und innerhalb der viskosen Wandgrenzschicht führt ebenfalls zu zweidimensionalen Gleichungen.

Durch eine Koordinatentransformation wird das Innere jedes beliebig geformten Strömungskanals auf ein Einheitsvolumen abgebildet, auf dessen Oberfläche die zweidimensionalen gekoppelten Gleichungen numerisch gelöst werden.

Durch die Berücksichtigung der viskosen Wandgrenzschichten und Verwendung von geeigneten geometrieangepaßten Koordinaten ist es erstmals möglich, mit dem Kernströmungsmodell dreidimensionale MHD – Strömungen in isolierten Kanälen beliebiger Geometrie zu berechnen. Die analytische Behandlung der Grenzschichten erweitert die Anwendbarkeit des reinen Kernströmungsmodells auf Fälle mit endlichen Hartmann – Zahlen. Vergleichsrechnungen zu speziellen bekannten analytischen Lösungen zeigen in allen betrachteten Fällen sehr gute Übereinstimmung. Anhand von einigen ausgewählten dreidimensionalen Beispielen werden die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten des numerischen Rechenprogramms demonstriert. Berechnungen, selbst in physikalischen Grenzfällen, stimmen gut mit experimentellen Befunden überein.

*Magnetohydrodynamic liquid metal flow in arbitrary
three – dimensional geometries in strong,
non – uniform magnetic fields.*

Abstract

Inductionless magnetohydrodynamic (MHD) flows at high Hartmann numbers are calculated by splitting the whole flow region into an inviscid core and into very thin boundary layers near channel walls. The momentum equations are linearized for high interaction parameters by neglecting inertial terms. These assumptions allow considerable simplifications of the governing equations in all subregions. In the core the general 3D equations are reduced to 2D equations by an analytical integration. The boundary conditions at channel walls are satisfied by the solution of boundary layer equations, leading to 2D equations for charge conservation in the layer.

The interior of every arbitrary shaped channel is mapped by a coordinate transformation to a standard volume. The coupled 2D equations are solved numerically on the surface of this standard volume.

Using the core flow model, calculations of 3D MHD–flows in arbitrary ducts with insulating channel walls become possible because viscous wall shear layers are taken into account. The analytical treatment of boundary layers equations enlarges the applicability of the completely inviscid core flow model to calculations of flows at finite Hartmann numbers. A comparison of known analytical solutions with numerically calculated results shows good agreement for all compared cases. Calculations agree well with experimental data, even in the range of the model's limits. The big variety of 3D application possibilities of the numerical code is shown by some examples.

Inhalt

	Seite
1 Einleitung	11
2 Physikalische Grundlagen	15
2.1 Hydrodynamische Gleichungen	15
2.2 Elektrodynamische Gleichungen	16
2.3 Das Ohmsche Gesetz	16
2.4 Vereinfachungen	17
2.5 Skalierung und Kennzahlen	17
2.6 Randbedingungen	19
2.7 Physikalische Effekte bei MHD – Kanalströmungen	20
3 Lösungsansätze für MHD – Strömungen	22
3.1 Eindimensionale MHD – Strömung	22
3.1.1 Hartmann – Strömung	22
3.2 Zweidimensionale MHD – Strömungen	24
3.2.1 MHD – Strömungen in Kreisrohren	24
3.2.2 MHD – Strömungen in Rechteckkanälen	25
3.3 Dreidimensionale MHD – Strömungen	26
3.3.1 MHD – Strömungen in inhomogenen Magnetfeldern	26
3.3.2 MHD – Strömungen in expandierenden Kanälen	28
3.3.3 MHD – Strömungen in Krümmern	28
3.3.4 MHD – Strömungen in allgemeinen Geometrien	30
3.4 MHD – Instabilitäten und Übergang zu Turbulenz	30
4 Mathematisches Modell	33
4.1 Induktionsfreie Approximation	33
4.2 Linearisierung der Impulsgleichung	33
4.3 Approximation für große Hartmann – Zahlen	34
4.4 Vergleich mit hydrodynamischen Potentialströmungen	35
5 Koordinatensysteme	37
5.1 Transformation für die Lösung nach den Core – Variablen	37
5.2 Transformation für die Lösung der Grenzschichtgleichungen	39

6	Integration der Gleichungen	41
6.1	Bestimmung der Core – Variablen	41
6.2	Bestimmung der Grenzschicht–Variablen	45
6.2.1	Darstellung des Magnetfeldes in Grenzschichtkoordinaten	45
6.2.2	Reibungsterm in Grenzschichtkoordinaten	45
6.2.3	Grundgleichungen in Grenzschichtkoordinaten	47
6.3	Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen	51
7	Ergebnisse	55
7.1	Zweidimensionale Strömungsprobleme	55
7.1.1	Kreisrohrgeometrie	55
7.1.2	Rechteckkanal mit elliptisch deformierten Seitenwänden	57
7.2	Dreidimensionale Ergebnisse	66
7.2.1	Elliptisch approximierter Rechteckkanal im variablen Magnetfeld	66
7.2.2	Gekrümmter elliptisch approximierter Rechteckkanal im konstanten Magnetfeld	69
7.2.3	Dreidimensionale Ergebnisse in physikalischen Grenzbereichen	70
8	Zusammenfassung	81
9	Anhang	83
9.1	Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen	83
9.1.1	Numerische Approximation der gesuchten Größen	85
9.1.2	Lineares algebraisches Gleichungssystem	91
10	Literaturverzeichnis	93

Bezeichnungen

Skalare Größen:

a	-	charakteristische Länge
b	-	Breite, Magnetfeldkomponente
c	-	Lichtgeschwindigkeit
d	-	Grenzschichtkoordinate der Hartmann – Grenzschicht
e	-	elliptische Deformation
f	-	Funktion
g	-	Determinante bzw. Komponente des metrischen Tensors
h	-	Höhe, halbe Kanalabmessung in Magnetfeldrichtung
i, k, l	-	diskrete Koordinaten
j	-	Komponente der elektrischen Stromdichte
p	-	Druck
q	-	quadratische Funktion, Polynom zweiter Ordnung
s	-	Koordinate innerhalb der Seitenschicht von Rechteckkanälen
t	-	Wandstärke, Zeit
u	-	Koordinate innerhalb des Strömungskerns
v	-	Geschwindigkeitskomponente
x, y, z	-	kartesische Koordinaten
A	-	Flächenelement
V	-	Volumenelement, speziell normierte Geschwindigkeit
Y	-	Funktion der Wandkontur
α	-	Koeffizient, Winkel
β	-	Koeffizient
δ	-	Grenzschichtdicke
ϵ	-	Dielektrizitätskonstante
φ	-	Winkel
ϕ	-	elektrisches Potential
μ	-	magnetische Permeabilität
ν	-	kinematische Viskosität
ρ	-	Dichte
σ	-	elektrische Leitfähigkeit

Vektoren (fett gedruckt), Tensoren, Matrizen:

<i>a</i>	-	allgemeiner Basisvektor
<i>b_{ik}</i>	-	Magnetfeldtensor
<i>e</i>	-	kartesischer Basisvektor
<i>g_{ik}</i>	-	metrischer Tensor
<i>h</i>	-	Vektor in Magnetfeldrichtung (halbe Kanalhöhe)
<i>j</i>	-	Stromdichtevektor
<i>n</i>	-	normaler Einheitsvektor
<i>t</i>	-	tangentialer Einheitsvektor
<i>v</i>	-	Geschwindigkeitsvektor
<i>x</i>	-	Ortsvektor
<i>B</i>	-	Vektor der magnetischen Induktion
<i>E</i>	-	elektrisches Feld
<i>A</i>	-	Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems
<i>R</i>	-	diskreter Vektor des Residuums
<i>X</i>	-	diskreter Lösungsvektor

Indizes:

<i>c</i>	-	in Core oder Strömungskern
<i>el</i>	-	elektrisch
<i>g</i>	-	Gleichungsnummer $g=1$ Potentialgleichung oben, $g=2$ Druckgleichung, $g=3$ Potentialgleichung unten
<i>H</i>	-	an der Hartmann – Wand
<i>i, j, k</i>	-	bezeichnen Vektor- und Tensorkomponenten
<i>L</i>	-	lokal
<i>o</i>	-	oben
<i>s</i>	-	Seitenwand, in der Seitenwandgrenzschicht
<i>s_w</i>	-	an der Seitenwand
<i>t</i>	-	tangential
<i>u</i>	-	unten

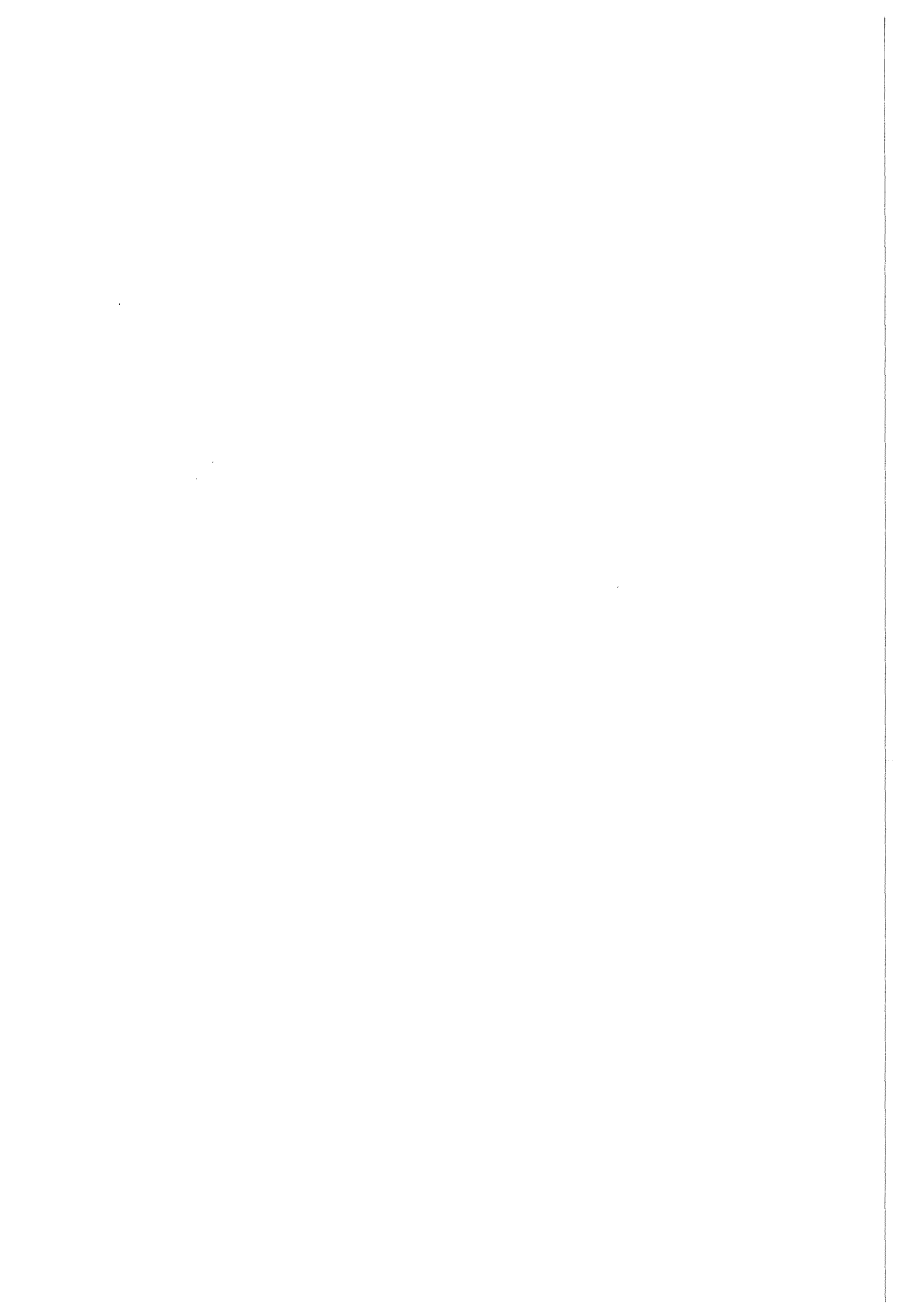
w	-	an der Wand
δ	-	in der Grenzschicht
o	-	Bezugswerte
$3d$	-	dreidimensional

Kennzahlen:

c	-	Wandleitparameter
M	-	Hartmann – Zahl
N	-	Interaktionsparameter
Re	-	Reynolds – Zahl
R_m	-	magnetische Reynolds – Zahl

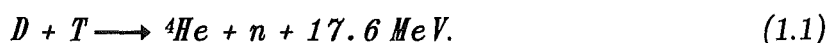
Operatoren:

∇	-	Gradient
∂_i	-	partielle Ableitung in Richtung der i -ten Koordinate
L	-	linearer Operator
\bar{L}	-	diskrete Approximation des Operators L
\bar{D}_i	-	diskrete Approximation der partiellen Ableitung ∂_i



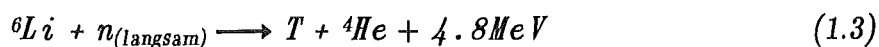
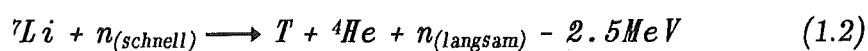
1 Einleitung

Begrenzte Vorkommen an fossilen Brennstoffen sowie die sich verschärfende Umweltproblematik ihrer Nutzung erfordern die Erforschung alternativer Energieträger. Regenerative Energien können hierzu lediglich einen begrenzten Beitrag leisten. Neben der konventionellen Kernenergie erscheint die Kernfusion als mögliche Energiequelle der Zukunft. Der für eine technische Nutzung aussichtsreichste Fusionsprozeß ist die Deuterium – Tritium – Reaktion.

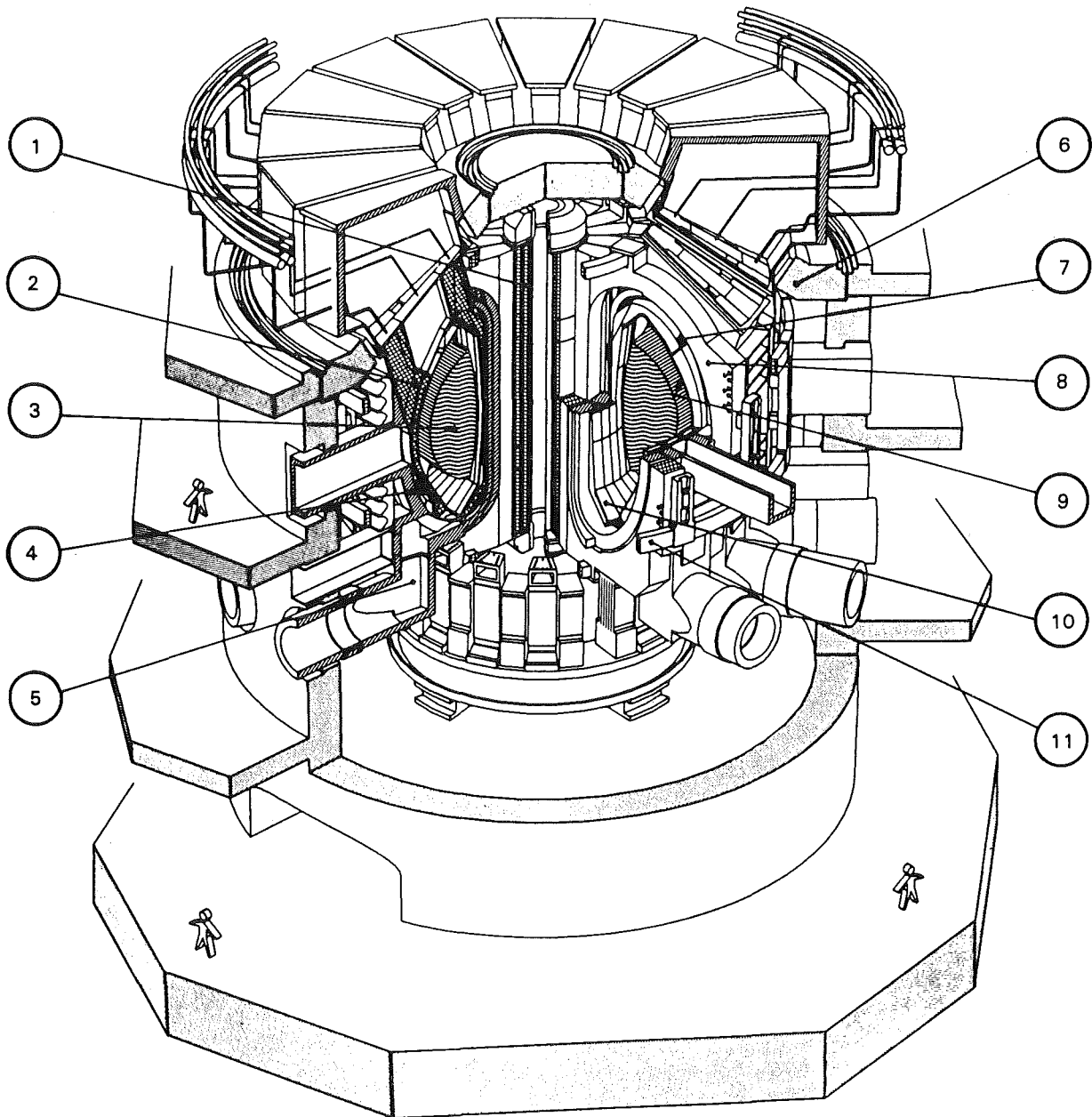


Dabei ist es notwendig die beiden Reaktionspartner gegen die Abstoßungskraft ihrer Kernladung so dicht zusammen zu bringen, daß eine "Verschmelzung" möglich wird. Die hierzu erforderliche Energie wird den Teilchen in Form von kinetischer Energie durch die sogenannte "Plasmaheizung" zugeführt. Bei den benötigten sehr hohen Temperaturen liegen die Fusionspartner als Plasma im ionisierten Zustand vor, sodaß ihr kontrollierter Einschluß durch magnetische Felder möglich wird. Ein magnetischer Plasmaeinschluß in einem kompakt gebauten Reaktor kann in einem toroidalen Magnetfeld erfolgen.

Für einen kontinuierlichen Reaktorbetrieb muß das als "Brennstoffkomponente" eingesetzte Tritium ständig erbrütet werden, da es in der Natur praktisch nicht vorkommt. Folgende Brutreaktionen sind wichtig, wenn Lithium als Ausgangsstoff eingesetzt wird:



In der Abbildung (1.1) ist der Aufbau eines Fusionsreaktors skizziert. Das Plasma befindet sich in einem torusförmigem Gefäß, dessen Wände vom sogenannten Blanket gebildet werden. Das Blanket ist eine Struktur, die zwischen dem heißen Plasma und den supraleitenden Magnetfeldspulen angeordnet ist, die den Torus umschließen.



1 Innere Poloidal­feldspule
 2 Blanket
 3 Plasma
 4 Vakuumgefäß und Abschirmung
 5 Abgaskanal
 6 Kryostat und biologische Abschirmung

7 Steuerspulen
 8 Hauptfeldspulen
 9 Erste Wand
 10 Divertor
 11 Äußere Poloidal­feldspulen

Abb. 1.1 Ansicht eines Fusionsreaktors (Toschi et al. 1988)

Das Blanket hat die folgenden Aufgaben zu erfüllen:

- Abschirmung der supraleitenden Magnete von Strahlungsverlusten des Plasmas
- Sichere Kühlung der "ersten Wand" des Reaktors
- Erbrüten des erforderlichen Tritiums
- Abfuhr der thermischen Leistung sowie des erbrüteten Tritiums aus dem Reaktorbereich.

Zur Erfüllung dieser Aufgaben sind unterschiedliche Blanket– Konzepte denkbar, deren Realisierung derzeit in internationaler Zusammenarbeit geprüft wird. Besonders attraktiv erscheint dabei das selbstgekühlte Flüssigmetall – Blanket. Durch Verwendung von *Li* oder *PbLi* als Fluid werden alle zuvor genannten Aufgaben gleichzeitig erfüllt. Das selbstgekühlte Blanket hat gegenüber anderen Konzepten den Vorteil eines einfachen konstruktiven Aufbaus, da lediglich ein Fluid zum Einsatz kommt und somit ein einziger Kreislauf pro Blanket – Element ausreicht.

Das in selbstgekühlten Blankets eingesetzte Fluid ist aufgrund seiner elektrischen Leitfähigkeit während der Durchströmung des magnetfelddurchsetzten Reaktorbereichs der starken elektromagnetischen Wechselwirkung ausgesetzt, die die Druckverluste und Geschwindigkeitsverteilungen in den Kühlkanälen maßgebend bestimmen. Entlang der thermisch hochbelasteten ersten Wand erscheint eine in Magnetfeldrichtung orientierte toroidale Strömungsführung sinnvoll, da selbst bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten, die zu einer effektiven Kühlung erforderlich sind, zusätzliche Druckverluste durch elektromagnetische Effekte vermieden werden. Da einzelne Blanketelemente konstruktionsbedingt nur poloidal (von oben oder von unten) mit Flüssigmetall versorgt werden können, sind jedoch Strömungen mit einer zu Magnetfeldlinien senkrechten Geschwindigkeitskomponente unvermeidbar. Möglichst große Kanalquerschnitte dieser Versorgungsleitungen erlauben niedrigere poloidale Strömungsgeschwindigkeiten und reduzieren folglich die Druckverluste. Die Verbindung der poloidalen Versorgungskanäle mit den toroidalen Kühlkanälen erfolgt mit radialer Strömungsrichtung ebenfalls senkrecht zum toroidalen Magnetfeld über eine möglichst kurze Distanz. Eine weitere Möglichkeit zur Reduktion von Druckverlusten besteht durch Verwendung einer elektrischen Isolation der poloidalen und radialen Kanäle, oder zumindest durch eine Verminderung ihrer Leitfähigkeit, wodurch elektrische Ströme innerhalb des Fluids minimiert werden. Aus dieser Strömungsführung mit zahlreichen Querschnittsänderungen und Strömungsumlenkungen ergibt sich die Notwendigkeit, dreidimensionale magnetohydrodynamische Strö-

mungen für allgemeine beliebige Kanalformen und Orientierungen bezüglich des magnetischen Feldes berechnen zu können. Neben der Kanalgeometrie geht dabei auch die elektrische Leitfähigkeit der Kanalwände als Randbedingung in die Rechnung ein.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die physikalischen Grundgleichungen zur Beschreibung magnetohydrodynamischer Strömungen eingeführt. Eine Übersicht sowohl über analytische Lösungen als auch über bestehende Computercodes zeigt, daß diese Verfahren lediglich für spezielle Geometrien verfügbar sind, und— oder daß sie den fusionstechnisch relevanten Parameterbereich, bedingt durch die extrem starken Magnetfelder, nicht erreichen. Eine gute Approximation des Strömungsverhaltens ergibt sich bereits, wenn lediglich die wichtigsten physikalischen Effekte berücksichtigt werden. Im Innern eines Kanals sind dies Druckkräfte und elektromagnetische Kräfte. In wandnahen Grenzschichten stehen Reibungskräfte und elektromagnetische Kräfte im Gleichgewicht. Die Voraussetzungen, die zu diesen Annahmen führen, werden diskutiert. Durch die Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation wird jeder beliebige Strömungskanal auf ein Standardvolumen abgebildet, sodaß eine einheitliche teils analytische, teils numerische Behandlung für die unterschiedlichsten Geometrien möglich wird. Das entwickelte numerische Rechenprogramm wird an einigen ausgewählten bekannten Beispielen und Experimenten getestet.

2 Physikalische Grundlagen

Das Strömungsverhalten elektrisch leitender Fluide in magnetischen Feldern wird durch die hydrodynamischen Bilanzgleichungen für die Massenerhaltung, Impulserhaltung sowie für die Energieerhaltung beschrieben. Diese enthalten Terme der elektromagnetischen Wechselwirkung. Magneto hydrodynamische (MHD) – Strömungen stellen somit eine Verbindung der Fluidodynamik mit der klassischen Elektrodynamik dar.

2.1 Hydrodynamische Gleichungen

Für inkompressible Fluide der konstanten Massendichte ρ läßt sich die Massenbilanz in der folgenden einfachen Form als Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} angeben:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.1)$$

Die Navier – Stokes – Gleichung für Newtonsche Fluide der konstanten kinematischen Viskosität ν , die die Impulserhaltung beschreibt, muß um Terme für die elektrodynamischen Kräfte erweitert werden.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Die elektromagnetische Wechselwirkung, auch Lorentz – Kraft genannt, wird einerseits hervorgerufen durch die elektrostatische Ladungsdichte ρ_{el} in dem elektrischen Feld \mathbf{E} , zum anderen durch die elektrische Stromdichte \mathbf{j} in dem Magnetfeld mit der Induktion \mathbf{B} . Trägheitskräfte, Reibungskräfte und Lorentz – Kräfte bestimmen den Verlauf des Drucks p . Unter der Voraussetzung $\rho = konst$ wird durch die Energiebilanz lediglich der Temperaturverlauf innerhalb des Fluids festgelegt. Eine Rückwirkung der Energiebilanz auf das Strömungsgeschehen gibt es nicht. Auf eine Darstellung der Energiegleichung wird an dieser Stelle verzichtet.

2.2 Elektrodynamische Gleichungen

Die elektrodynamischen Phänomene werden durch die sogenannten Maxwellschen Gleichungen beschrieben. Für die konstanten Werte der magnetischen Permeabilität μ und der Dielektrizitätskonstanten ϵ lauten diese:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{el}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Die Gleichung (2.3) beschreibt den Einfluß von zeitlichen Änderungen des magnetischen Feldes \mathbf{B} auf den Verlauf des elektrischen Feldes \mathbf{E} . Die Verteilung der elektrischen Ladungen ergibt sich aus Gl.(2.4). Durch elektrische Ströme und zeitlich variable elektrische Felder werden divergenzfreie magnetische Felder entsprechend den Gleichungen (2.5) und (2.6) induziert.

2.3 Das Ohmsche Gesetz

In elektrisch leitenden Medien wird der Zusammenhang zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} durch das Ohmsche Gesetz hergestellt. In teilchenfesten, also mitbewegten Koordinaten, ist die elektrische Stromdichte direkt proportional dem resultierenden elektrischen Feld \mathbf{E}^* .

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*. \quad (2.7)$$

σ ist die elektrische Leitfähigkeit des Mediums. Das von einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Leiter verspürte elektrische Feld \mathbf{E}^* ergibt sich durch einen Wechsel des Bezugssystems (siehe Shercliff 1965, S.14) aus den ortsfesten Größen \mathbf{E} und \mathbf{B} zu

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

2.4 Vereinfachungen

Elektrostatische Ladungen sind wegen der hohen Leitfähigkeit der betrachteten Fluide klein. Ihre Kraftwirkung im elektrischen Feld \mathbf{E} kann deshalb in der Impulsbilanz Gl.(2.2) vernachlässigt werden (siehe Chang und Lundgren 1961). Dadurch wird die Berechnung elektrischer Ladungen entsprechend Gl.(2.4) überflüssig.

Der Verschiebungsstrom $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ in Gl.(2.5) kann vernachlässigt werden. Shercliff (1965) zeigt, daß der entstandene Fehler von der Größenordnung $(v/c)^2$ ist. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Für verschwindende zeitliche Änderungen der magnetischen Induktion ($\partial \mathbf{B} / \partial t \rightarrow 0$), auf die wir uns beschränken werden, ergibt sich das elektrische Feld \mathbf{E} als Gradient des skalaren elektrischen Potentials ϕ .

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2.9)$$

Diese Gleichung erfüllt die stationäre Gleichung (2.3) identisch.

2.5 Skalierung und Kennzahlen

Durch eine Skalierung der Geschwindigkeit \mathbf{v} , der magnetischen Induktion \mathbf{B} , des Drucks p , sowie der elektrischen Stromdichte \mathbf{j} und des elektrischen Potentials ϕ mit den Bezugswerten v_0 , B_0 , $a\sigma v_0 B_0^2$, $\sigma v_0 B_0$, $a v_0 B_0$ ergeben sich die folgenden dimensionslosen Gleichungen. Dabei ist v_0 die mittlere Geschwindigkeit, B_0 der Maximalbetrag der magnetischen Induktion und a eine charakteristische Abmessung eines Kanalquerschnitts. Da im weiteren nur noch dimensionslose Größen auftreten und somit eine Verwechslung ausgeschlossen ist, können für diese die gleichen Bezeichnungen wie im dimensionsbehafteten Fall verwendet werden.

Hydrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{1}{M^2} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.11)$$

Elektrodynamische Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = R_m \mathbf{j}. \quad (2.13)$$

Ohmsches Gesetz:

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.14)$$

Dabei ergeben sich drei charakteristische Kennzahlen, die die verschiedenen physikalischen Effekte gegeneinander gewichten. Der

Interaktionsparameter
$$N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho \nu} \quad (2.15)$$

beschreibt das Verhältnis von elektrodynamischen Kräften im Vergleich zu Trägheitskräften. Das Quadrat der

Hartmann – Zahl
$$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \quad (2.16)$$

entspricht dem Verhältnis von elektrodynamischen Kräften zu Reibungskräften. Die

Magnetische Reynolds – Zahl
$$R_m = \mu \sigma \nu a \quad (2.17)$$

ist ein Maß für die Stärke des induzierten magnetischen Feldes, verglichen mit dem von außen angelegten Feld.

Für Flüssigmetallströmungen in einem Fusionsblanket nehmen diese Kennzahlen die folgenden Werte an (siehe Holroyd und Mitchel 1984):

$$M \approx 10^4, N \approx 10^5, R_m \approx 0.07 \quad (2.18)$$

Die Konsequenzen, die sich aus den extrem großen Werten der Hartmann – Zahl M und des Interaktionsparameters N sowie durch die relativ kleine magnetische Reynolds – Zahl R_m ergeben, werden später diskutiert.

2.6 Randbedingungen

Von besonderem Interesse sind MHD – Strömungen in Rohren und Kanälen. Als Randbedingung einer viskosen Strömung wird an der Rohrwand (Fluid – Wand – Grenzfläche) die Haftbedingung

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

gefordert. Am Ein – und Austritt der Strömung aus dem betrachteten Strömungsbereich werden definierte Strömungszustände vorausgesetzt. Dies können zum Beispiel aus Experimenten bekannte Geschwindigkeitsprofile sein, oder voll ausgebildete Strömungszustände in großer Entfernung von dreidimensionalen Effekten. Das Fluid wird im allgemeinen durch eine Druckdifferenz Δp zwischen beiden Rohrenden in Bewegung gehalten.

Im Gegensatz zu den hydrodynamischen Gleichungen endet das Rechengebiet zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Größen nicht an der Fluid – Wandgrenzfläche. Elektrische Ströme, die den Fluidbereich verlassen, fließen in der Wand weiter. Aus diesem Grund muß an der Fluid – Wandgrenzfläche Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Stromdichte gefordert werden.

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_{Fluid} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_{Wand} . \quad (2.20)$$

\mathbf{n} ist der Normalenvektor der betrachteten Grenzfläche. Zusammen mit der Haftbedingung des Fluids ergibt sich für das elektrische Potential

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}\right)_{Fluid} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}\right)_{Wand} . \quad (2.21)$$

Sofern Kontaktwiderstände zwischen dem Fluid und der Wand vernachlässigt werden, ist das elektrische Potential über die Grenzfläche hinweg stetig.

$$\phi_{Fluid} = \phi_{Wand} . \quad (2.22)$$

Für gleiche magnetische Permeabilität der Kanalwand und des Fluids sind alle Komponenten der magnetischen Induktion \mathbf{B} über die Grenzfläche hinweg stetig, sofern keine elektrischen Grenzflächenströme auftreten.

$$\mathbf{B}_{\text{Fluid}} = \mathbf{B}_{\text{Wand}}. \quad (2.23)$$

Durch ähnliche Überlegungen an der Grenzfläche der elektrisch leitenden Kanalwand zur nichtleitenden Umgebung folgt unmittelbar:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0. \quad (2.24)$$

Hier ist \mathbf{B}_0 das von außen angelegte zeitlich konstante magnetische Feld. Für elektrisch isolierte Rohre gilt Gl.(2.24) bereits im Fluid, unmittelbar an der Fluid – Wandgrenzfläche.

Die Gleichungen (2.10 – 2.14) mit den Randbedingungen (2.19 – 2.24) werden im allgemeinen zur Berechnung von MHD – Strömungen in starken Magnetfeldern herangezogen. Ist man jedoch am hydrodynamischen Grenzfall für kleine Magnetfelder ($\mathbf{B} \rightarrow 0$) interessiert, so ist Gl.(2.11) zweckmäßigerweise mit dem Interaktionsparameter N zu multiplizieren. Das Verhältnis $M^2/N = Re$ ergibt die bekannte Reynoldssche Kennzahl viskoser hydrodynamischer Strömungen. Das Produkt $p \cdot N = p'$ entspricht dann dem mit ρv_0^2 normierten Druckwert.

2.7 Physikalische Effekte bei MHD – Kanalströmungen

Bevor wir uns der Lösung der oben genannten Gleichungen zuwenden, soll das Zusammenspiel der für MHD – Kanalströmungen wichtigsten physikalischen Effekte anhand der Skizze Abb. 2.1 diskutiert werden. Wir sehen in dieser Abbildung ein Rohr von beliebigem Querschnitt in einem Magnetfeld der Induktion \mathbf{B} . Die Rohrwand besitze die Wandstärke t , sowie die elektrische Leitfähigkeit σ_w . Die Hauptströmungsrichtung ist durch den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} dargestellt. Für große Hartmann – Zahlen, $M \gg 1$ (sehr starkes Magnetfeld), beschränkt sich der Einflußbereich von Reibungseffekten auf sehr dünne, wandnahe Grenzschichten der Dicke δ . Durch die Bewegung des elektrisch leitenden Fluids im \mathbf{B} – Feld wird das elektrische Feld $\mathbf{E}^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ im Fluid induziert.

Dieses steht senkrecht zur Strömungsrichtung und senkrecht zum angelegten Magnetfeld. Durch das elektrische Feld E^* werden elektrische Ströme hervorgerufen, die innerhalb der leitenden Kanalwand und innerhalb der viskosen Grenzschicht eine Rückflußmöglichkeit zur gegenüberliegenden Kanalseite finden. Die elektrischen Ströme ihrerseits verursachen im Magnetfeld eine Kraftwirkung, die sowohl senkrecht zur Stromrichtung als auch senkrecht zur Magnetfeldrichtung orientiert ist, die Lorentz - Kraft $F_L = j \times B$. Diese elektromagnetische Kraft ist im Kern der Strömung der Geschwindigkeit entgegengesetzt und verursacht deshalb erhebliche Druckverluste. Diese sind direkt proportional der elektrischen Stromdichte. In Grenzschichten, in denen die Normalkomponente von B nicht verschwindet, zeigt die Lorentz - Kraft jedoch in Strömungsrichtung und steht mit viskosen Kräften im Gleichgewicht. Große Stromdichten innerhalb dieser Grenzschichten erklären ihre geringe Dicke. Die Reduktion von Druckverlusten kann durch Verwendung sehr dünner Kanalwände erfolgen. Diese Maßnahme erhöht den elektrischen Widerstand, gegen den zurückfließende Ströme ankämpfen müssen. Für isolierte Kanalwände erfolgt der Stromrückfluß ausschließlich innerhalb der dünnen Reibungsgrenzschicht mit minimalen, aber immer noch beachtlichen Druckverlusten. Nahezu die gesamte Leistung, die zur Bewegung des Fluids innerhalb des Magnetfeldes nötig ist, wird durch Ohmsche Verluste innerhalb des Fluids und innerhalb der Kanalwand in Wärme überführt.

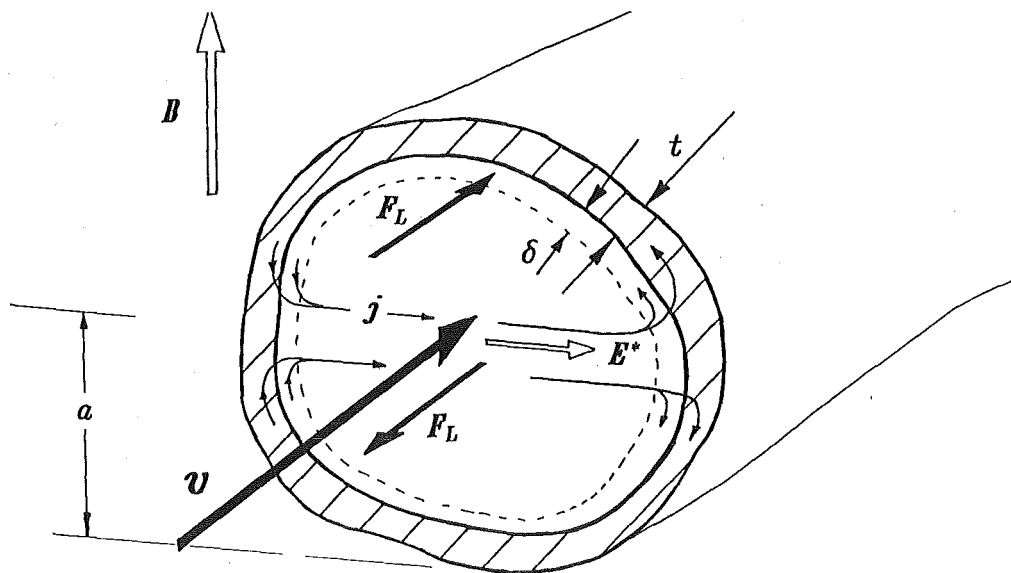


Abb. 2.1 Prinzipskizze magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

3 Lösungsansätze für MHD – Strömungen

Obwohl die elektrodynamischen Phänomene schon relativ lange bekannt waren, dauerte es bis 1937, ehe Hartmann die ersten theoretischen Lösungsversuche der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen unternahm und seine Ergebnisse durch systematische Experimente bestätigen konnte. Allerdings gab es schon wesentlich früher Versuche, MHD – Effekte nachzuweisen. So wird zum Beispiel berichtet, daß Faraday 1836 induzierte elektrische Potentialdifferenzen bei Strömungen im Erdmagnetfeld nachweisen wollte. Als Fluid diente ihm das Flußwasser der Themse, in das er Elektroden eintauchte (L. Dragos 1975). Jedoch waren alle Versuche vor 1937, MHD – Strömungen zu messen oder zu nutzen, eher von qualitativer Natur.

3.1 Eindimensionale MHD – Strömung

3.1.1 Hartmann – Strömung

Hartmann, der bereits 1918 eine MHD – Pumpe vorschlug, gilt als Begründer der Flüssigmetall – Magnetohydrodynamik. In seiner 1937 veröffentlichten Arbeit (Hartmann J. 1937) beschreibt er das Strömungsverhalten eines elektrisch leitenden Fluids (Quecksilber) zwischen zwei parallelen, elektrisch isolierten Platten in einem Magnetfeld. Diese voll eingelaufene laminare Strömung wird durch einen angelegten Druckgradienten angetrieben. Hartmann findet für dieses Problem eine analytische Lösung, die 1937 (Hartmann J., Lazarus F. 1937) experimentell bestätigt wird. Diese experimentelle Arbeit zeigt gleichzeitig, daß turbulente Strömungsformen in Anwesenheit starker Magnetfelder unterdrückt werden.

Hartmanns Lösung für den isolierten Plattenkanal wurde durch Chang und Lundgren (1961) wesentlich erweitert. Chang und Lundgren geben die Lösung für die eingelaufene MHD – Strömung in einem Kanal aus dünnen, elektrisch leitenden parallelen Platten an, deren Abstand $2a$ beträgt. Durch Verwendung der von Shercliff (1956) vorgeschlagenen Approximation elektromagnetischer Größen in dünnen Kanalwänden bleibt das Rechengebiet auf das Fluidvolumen beschränkt. Durch die Einführung des sogenannten Wandleitparameters

$$c = \frac{\sigma_w t}{\sigma a}, \quad (3.1)$$

kann an der Fluid – Wandgrenzfläche die folgende Randbedingung für das induzierte Magnetfeld B_i formuliert werden, das in diesem Fall lediglich eine Komponente B_i in Strömungsrichtung besitzt.

$$\frac{\partial B_i}{\partial n} + \frac{1}{c} B_i = 0. \quad (3.2)$$

σ_w ist hier die Leitfähigkeit der Kanalwand, t ihre Dicke. Diese Bedingung ist als "**dünne Wandapproximation**" bekannt. Sie enthält weiterhin den Grenzfall isolierter Kanalplatten für $c = 0$, sowie den Fall perfekt leitender Kanalwände für $c \rightarrow \infty$. Chang und Lundgren finden bei gegebenem Druckgradienten die folgende Beziehung für die normierte Geschwindigkeit V :

$$V = \frac{1}{M} \frac{c + 1}{Mc + \tanh M} \left[1 - \frac{\cosh My}{\cosh M} \right], \quad (3.3)$$

mit

$$V = v / [(a^2 / \rho \nu) (-dp/dz)].$$

Dieser Ausdruck strebt für große M gegen

$$V = \frac{1}{M} \frac{c + 1}{Mc + 1} \left[1 - e^{-M(1 - |y|)} \right], \quad M \gg 1, \quad (3.4)$$

sowie für kleine M gegen die Formel für die Geschwindigkeitsverteilung der bekannten hydrodynamischen Poiseuille – Strömung

$$V = \frac{1}{2} (1 - y^2), \quad M \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Man erkennt an dieser Beziehung unmittelbar die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften magnetohydrodynamischer Strömungen bei großen Hartmann – Zahlen:

- Die Geschwindigkeit ist für große Werte von M nahezu über dem gesamten Querschnitt konstant.
- Der Abfall der Geschwindigkeit auf den Wert $v = 0$ an der Kanalwand erfolgt in einer sehr dünnen Grenzschicht der Größenordnung $\delta \sim 1/M$. Diese Grenzschicht wird **Hartmann – Grenzschicht** genannt.

- Bei gegebenem Volumenstrom ist der Druckverlust proportional dem Reziprokwert von Gl.(3.4). Der Druckverlust ist deshalb für isolierte Kanäle ($c = 0$) direkt proportional der Hartmann - Zahl M , für perfekt leitende Kanalwände ($c \rightarrow \infty$) jedoch proportional dem Quadrat der Hartmann - Zahl.

3.2 Zweidimensionale MHD - Strömungen

Voll eingelaufene MHD - Kanalströmungen senkrecht zu einem von außen angelegten Magnetfeld bilden eine für technische Anwendungen wichtige Klasse zweidimensionaler MHD - Strömungen. Das Interesse gilt hierbei vor allem der Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt, speziell bei Problemen der Wärmeübertragung, aber auch dem Druckverlust, der als wichtige Größe zur Auslegung technischer Anlagen bekannt sein muß. Der mathematische Aufwand zur Berechnung von Strömungsgrößen hält sich in Grenzen, da die im allgemeinen in v , j und B nichtlinearen Gleichungen im zweidimensionalen Fall linear werden. Chang und Lundgren (1961) zeigen, daß in jedem beliebig geformten, perfekt leitenden Kanal die Geschwindigkeit außerhalb von Wandgrenzschichten einen konstanten Wert annimmt. Für isolierte Kanäle hingegen finden sie eine Geschwindigkeitsverteilung quer zur Magnetfeldrichtung (x - Richtung), die zur Kanalabmessung $Y(x)$ in Magnetfeldrichtung proportional ist. Voll eingelaufene MHD - Strömungen gelten heute als weitgehend bekannt. Wir wollen hier besonders auf Arbeiten zu zwei technisch interessante Kanalformen hinweisen. Dies sind Strömungen in Kanälen von rechteckigem Querschnitt sowie in Kreisrohren, die nachfolgend besprochen werden.

3.2.1 MHD - Strömungen in Kreisrohren

Voll ausgebildete MHD - Strömungen in Kreisrohren wurden bereits von Shercliff 1956 detailliert untersucht. Durch Einführung der Approximation dünner leitender Kanalwände und durch Berücksichtigung von Hartmann - Grenzschichten gelangt er zu einer asymptotischen Lösung für große Hartmann - Zahlen. Chang und Lundgren (1961) erweitern den Gültigkeitsbereich dieser Lösung. Sie geben die folgende Verteilung der Geschwindigkeit V_c im Kanalquerschnitt (außerhalb von Grenzschichten) an:

$$V_c = \frac{1}{M} \frac{(c+1)Y(x)}{1 + McY(x)}, \quad (3.6)$$

mit

$$V_c = v / [(a^2 / \rho \nu) (-dp/dz)] .$$

$Y(x) = \sqrt{1-x^2}$ gibt die Position der Kanalwand in Magnetfeldrichtung als Funktion der zur Magnetfeldrichtung senkrechten Koordinate x an. Für den Grenzfall $c \rightarrow 0$ führt Gl.(3.6) zu dem entsprechend Kapitel 2.5 normierten dimensionslosen Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{3\pi}{8M}, \quad M \gg 1 . \quad (3.7)$$

Für elektrisch isolierte Rohre wurde diese Lösung durch Berücksichtigung weiterer Terme verbessert.

$$\frac{\partial p / \partial z}{(-3\pi/8M)} = \frac{1}{1 - \frac{3\pi}{2M} + 2.273 \frac{1}{M^{4/3}}} . \quad (3.8)$$

Hierbei stammt der zweite Term von Gold und Shercliff (1962_a), der dritte Term von Roberts (1967).

3.2.2 MHD – Strömungen in Rechteckkanälen

Exakte Lösungen für voll eingelaufene MHD – Strömungen in Rechteckrohren mit zwei magnetfeldparallelen Seitenwänden sind nur für bestimmte Kombinationen der Wandleitparameter c_s dieser Seitenwände und der Hartmann – Wände c_H (Wände senkrecht zum Magnetfeld) bekannt. So finden zum Beispiel Chang und Lundgren (1961) eine Lösung für perfekt leitende Kanäle ($c_s = c_H = \infty$), Hunt (1964) findet Lösungen für ($c_s = \infty$, c_H), sowie für (c_s , $c_H = 0$) in Form von unendlichen Reihen. Asymptotische Lösungen für große Hartmann – Zahlen werden von verschiedenen Autoren angegeben (Williams 1963; Hunt, Stewartson 1965; Temperley, Todd 1970; Walker 1981). Neben den in der eindimensionalen Theorie bereits erwähnten Hartmann – Grenzschichten $\delta_H \sim 1/M$ an Wänden senkrecht zu magnetischen Feldlinien, tritt in Rechteckkanälen ein neuer Grenzschichttyp auf, die **Seitenwandgrenzschicht**, mit einer Dicke $\delta_s \sim 1/\sqrt{M}$. In diesen Grenzschichten können starke Geschwindigkeitsüberhöhungen vorliegen, es können aber auch gleichzeitig Rückströmungen auftreten (Hunt 1964). Die wichtigsten Arbeiten werden 1984 von Temperley zusammengefaßt. Er prüft dabei Ergebnisse von zuvor

genannten Autoren und gibt gegebenenfalls Fehlerquellen sowie Korrekturen an. Sterl (1989) unternimmt einen rein numerischen Lösungsversuch der vollen zweidimensionalen Gleichungen. Er findet relativ allgemeine Lösungen für beliebige Wandleitparameter und Magnetfeldorientierungen. Seine Lösungen sind jedoch wegen zu großem Speicherplatzbedarf und wegen zu großer Rechenzeiten auf Hartmann – Zahlen von $M \sim 10^2$ beschränkt. Tillack und McCarthy (1989) beschreiben den durch Seitenwandjets verursachten erhöhten Volumenstrom. Auf dieser Grundlage findet Tillack (1990) die folgende einfache Druckverlustbeziehung:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \left[\frac{a}{3b} \frac{\sqrt{M}}{1+c_s\sqrt{M}} + \frac{c_H+1}{c_H+1/M} \right]^{-1} \quad (3.9)$$

Sie stimmt mit Walkers Ergebnissen (1981) für große M und $c_H = c_s$ überein.

3.3 Dreidimensionale MHD – Strömungen

Dreidimensionale MHD – Strömungen spielen in vielen technischen Anwendungen eine bedeutende Rolle. Sie ergeben sich nicht nur im Bereich von Krümmern, oder in Kanälen von variablem Querschnitt, sondern ebenfalls in geraden Kanälen in einem inhomogenen Magnetfeld (z.B. beim Eintritt der Strömung in den Magneten) oder bei inhomogener Verteilung der Wandleitfähigkeit. Man beobachtet für alle dreidimensionalen Strömungszustände eine starke Umverteilung des Volumenstroms innerhalb des Kanalquerschnitts, verbunden mit einer erheblichen Zunahme des Druckverlustes. Die Berechnung dreidimensionaler Strömungen erweist sich als äußerst schwierig, da alle nichtlinearen Kopplungen wirksam werden.

3.3.1 MHD – Strömungen in inhomogenen Magnetfeldern

Erste dreidimensionale Strömungszustände wurden von Hartmann 1937 im Plattenkanal am Eintritt der Strömung ins magnetische Feld beobachtet. Seine Vermutung, daß diese Effekte auf dreidimensionale elektrische Ströme zurückzuführen sind, wurde von Shercliff 1962_b mit Hilfe einer linearisierten Theorie bestätigt. Er findet im Bereich der Magnetfeldänderung höhere Geschwindigkeiten in der Nähe der magnetfeldparallelen Kanalwände, während in Kanalmitte die Strömung stark verzögert wird. "M – förmige"

Geschwindigkeitsprofile dieser Art werden uns noch häufig begegnen. Man findet sie nahezu in allen dreidimensionalen MHD – Strömungen. Diese Umverteilung der Geschwindigkeit ist mit einem erhöhten Druckverlust verbunden, dessen Größe vom Gradienten des Magnetfeldes abhängt. MHD – Strömungen in geraden Kanälen unter der Einwirkung eines lokal variablen Magnetfeldes werden in zahlreichen Arbeiten behandelt. (so z.B. Holroyd, Hunt 1978; Hua, Walker, Picologlou, Reed 1988; McCarthy 1989; McCarthy, Tillack, Abdou 1989; Madarame, Tokoh 1988; Madarame, Hagiwara 1989). In allen diesen Arbeiten werden induzierte Magnetfelder vernachlässigt (**Induktionsfreie MHD – Strömungen**). Diese Annahme ist für kleine magnetische Reynolds – Zahlen, $R_m \ll 1$, wie sie praktisch in allen Laborexperimenten, aber auch in Rohrströmungen technischer Anlagen auftreten, gerechtfertigt. (Hunt, Holroyd 1977). Die Approximation für dünne, leitende Kanalwände Gl.(3.2) kann in dieser Form nicht mehr angewandt werden, da induzierte magnetische Felder nun vernachlässigt werden. An ihre Stelle tritt die von Walker (1981) vorgeschlagene Bedingung

$$c \nabla_t^2 \phi_W = - \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} . \quad (3.10)$$

Sie beschreibt die Ladungserhaltung innerhalb der Kanalwand. ∇_t^2 ist der **tangentiale zweidimensionale Laplace-Operator** angewandt auf das Wandpotential ϕ_W . Die aus dem Fluid in die Wand überfließenden Ströme $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ gehen hierbei als Quellterm ein. In den meisten dieser Arbeiten wird das Strömungsgebiet in verschiedene Teilbereiche aufgeteilt. Im Kern der Strömung, auch **Core** genannt, werden Reibungs- und Trägheitseinflüsse vernachlässigt (**Core Flow Approximation**). Die Strömungsverhältnisse in den Seitenschichten, entlang den magnetfeldparallelen Wänden, werden durch integrale Aussagen berücksichtigt. Die Zulässigkeit der getroffenen Annahmen wird in vielen dieser Arbeiten durch Vergleiche zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen bestätigt. Die wesentlich dünneren Hartmann – Schichten werden von vielen Autoren komplett vernachlässigt. Hua und Walker (1989) berücksichtigen die elektrische Leitfähigkeit dieser Schichten für den Fall eines isolierten Kreisrohres. Kim 1989, sowie Sterl 1989 unternehmen für Rechteckrohre rein numerische Lösungsversuche der induktionsfreien dreidimensionalen Gleichungen. Die Anwendung ihrer numerischen Verfahren bleibt jedoch aus Speicherplatzgründen auf Probleme mit Hartmann – Zahlen von $M \lesssim 100$ beschränkt.

3.3.2 MHD – Strömungen in expandierenden Kanälen

MHD – Strömungen in expandierenden isolierten Kreisrohren werden von Walker und Ludford (1974) behandelt. Die modifizierte Lösung für elektrisch leitende, expandierende Rohre geben diese Autoren 1975 an. Sie finden durch Betrachtungen an charakteristischen Oberflächen ähnliche Strömungsverhältnisse wie im variablen Magnetfeld. Im Bereich der Expansion wird das Fluid in "seitliche Schichten" gedrängt. Im Kern liegt nahezu stagnierendes, beziehungsweise zurückströmendes Fluid vor. Die dimensionslosen Einlaufstrecken bis zum Erreichen voll ausgebildeter Strömungsverhältnisse vor und hinter der Expansion betragen im Fall isolierter Rohre $l_e \sim 1/\sqrt{M}$, für elektrisch leitende Rohre $l_e \sim 1/\sqrt{c}$. McMichael (1984) berechnet MHD – Strömungen in Kreisrohren mit schwach variierendem Radius entlang der Rohrachse mit Hilfe einer Störungsrechnung. Experimente sowie Berechnungen für einen periodisch sich verengenden und expandierenden Rechteckkanal werden von Picologlou *et al.* 1989 durchgeführt. Mit diesen Experimenten wird gezeigt, daß eine für Wärmeübertragungszwecke günstige Strömungsverteilung durch eine geeignete Wahl der Kanalform erreicht werden kann. Von McCarthy 1989 mit Hilfe der Core Flow Approximation durchgeführte Berechnungen für expandierende Rechteckkanäle zeigen keine ausreichende Konvergenz der Lösung. Ein Vergleich ihrer Ergebnisse mit Experimenten liefert deshalb auch nur qualitative Übereinstimmung. Aitov, Kalyutik und Tananaev (1983) geben eine vollnumerische Lösung für eine MHD – Strömung in einem Carnot – Diffusor an. Sie stellen fest, daß schon bei der relativ niedrigen von ihnen betrachteten Hartmann – Zahl von $M = 10$ die Rezirkulationsgebiete verschwinden. Vollnumerische Lösungen von Kim (1989) für Rechteckrohre bleiben auf kleine bis mittlere Hartmann – Zahlen $M \lesssim 100$ beschränkt.

3.3.3 MHD – Strömungen in Krümmern

Umgelenkte MHD – Strömungen sind ebenfalls in zahlreichen Arbeiten beschrieben. Von besonderem Interesse sind hierbei zwei Fälle:

- Umlenkungen in einer Ebene senkrecht zu magnetischen Feldlinien
- Umlenkungen in der Ebene magnetischer Feldlinien.

Senkrecht zu magnetischen Feldlinien umgelenkte MHD – Strömungen werden z.B. von Baylis 1971 experimentell untersucht. Theoretische Arbeiten zu diesem Thema sind z.B. von Tabeling und Chabrier 1981, Shih 1984, Walker 1986 bekannt. Walker, der sich besonders auf die Analyse von MHD – Strömungen bei sehr großen Hartmann – Zahlen und sehr großen Interaktionsparametern konzentriert, findet eine Umverteilung der Strömung im umgelenkten Querschnitt. Er berechnet erhöhte Strömungsgeschwindigkeiten an der inneren Kanalwand und eine verzögerte Strömung an der Außenwand der Umlenkung. Erhöhte Druckverluste, verglichen mit einer Strömung in einem geraden Kanal gleicher Länge, werden nicht beobachtet.

Experimentelle Untersuchungen an MHD – Strömungen, die in der Ebene magnetischer Feldlinien umgelenkt werden, werden von Holroyd und Hunt 1978 angegeben. Sie finden einen zusätzlichen Druckverlust Δp_{3d} im Bereich von Umlenkungen, der für kleine bis mittlere Werte des Interaktionsparameters N eine Abhängigkeit der Form $\Delta p_{3d} \sim N^{-1/3}$ zeigt. Sie äußern die Vermutung, daß für Umlenkungen in eine exakt magnetfeldparallele Richtung die Strömung in dünnen Grenzschichten entlang der inneren magnetfeldparallelen Wand verläuft. Moon und Walker (1988) berechnen Strömungen in kontinuierlich umgelenkten Kanälen mit einem relativ großen Krümmungsradius. Moon und Walker 1989, Moon, Hua und Walker 1990, sowie Hua und Walker 1990 betrachten die scharfkantige Umlenkung einer MHD – Strömung. In Abhängigkeit der Kanalorientierung zum angelegten Magnetfeld unterscheiden sie zwischen einer "vorwärts" und einer "rückwärts" umgelenkten Strömung. In beiden Fällen finden sie zusätzliche Druckverluste aufgrund von dreidimensionalen Effekten im Umlenkbereich. Diese Verluste sind hier jedoch nicht ausschließlich auf hydrodynamische Phänomene zurückzuführen, sondern ergeben sich hauptsächlich aus zusätzlichen dreidimensionalen elektrischen Strömen. Für die sogenannte Rückwärtsumlenkung ergibt sich an der inneren Krümmerkante eine dünne Scherschicht, die entlang magnetischer Feldlinien im Innern des betrachteten Krümmers verläuft. Diese Scherschicht kann einen beachtlichen Teil des Volumenstroms von einer Kanalhälfte zur gegenüberliegenden Hälfte übertragen. Trägheitseffekte bei einer abrupten Änderung der Strömungsrichtung können nur für sehr große Interaktionsparameter vernachlässigt werden.

Vollnumerische dreidimensionale Lösungen für umgelenkte MHD – Strömungen sind bisher nicht geeignet, für sehr große Hartmann – Zahlen und große Interaktionsparameter das Strömungsgeschehen zu beschreiben. Erste Lösungsversuche (Aitov 1978)

bleiben auf relativ kleine Hartmann – Zahlen von $M \lesssim 10$ beschränkt. Neuere Rechen-codes und modernere Rechenanlagen ermöglichen eine bessere Diskretisierung des Rechengebiets und erlauben die Berechnung von umgelenkten Strömungen bei etwas größeren M ($M = 100$, Kunugi, Kim, Abdou 1991).

3.3.4 MHD – Strömungen in allgemeinen Geometrien

Nahezu alle Arbeiten zur Berechnung dreidimensionaler MHD – Strömungen beschränken sich auf spezielle Kanalquerschnitte, die mit den üblichen kartesischen Koordinaten gut zu modellieren sind. Insbesondere alle vollnumerischen Rechenverfahren sind auf quaderförmige Rechengebiete (oder Teilgebiete) angewiesen. Kulikovskii (1968 sowie 1973) gibt Gleichungen zur Beschreibung allgemeiner MHD – Strömungszustände für langsam strömende ($N \gg 1$), elektrisch leitende inkompressible Fluide bei großen Hartmann – Zahlen an. Aufgrund dieser Annahmen vereinfacht sich die Impulsbilanz im reibungsfrei angenommenen Strömungskern zur sogenannten *magnetostatischen* Approximation, bei der sich Druck und Lorentz – Kräfte das Gleichgewicht halten. Die Verteilung der Geschwindigkeit ergibt sich hierbei entsprechend dem Ohmschen Gesetz. Kulikovskii betrachtet Anteile von vektoriellen Größen in einer Ebene senkrecht zu magnetischen Feldlinien. Gleichungen, die Anteile in Magnetfeldrichtung enthalten, werden analytisch integriert. Er kommt zu dem Ergebnis, daß jede dreidimensionale Strömung auf die Berechnung von vier Integrationskonstanten zurückzuführen ist, die nur noch von den zwei zu magnetischen Feldlinien senkrechten Koordinaten abhängen. Eine dieser Integrationskonstanten ist dabei der Druck p . Auf dieser Idee basieren alle Berechnungsverfahren zur Bestimmung der reibungsfreien Lösung im Strömungskern (auch die zuvor genannten Lösungen für spezielle Geometrien von Tillack, McCarthy, Hua, ...). Sie wird auch als Grundlage dieser Arbeit zur Formulierung eines Computer-codes zur Berechnung von MHD – Strömungen in allgemeinen Kanalgeometrien bei beliebig orientiertem, lokal variablen Magnetfeld dienen.

3.4 MHD – Instabilitäten und Übergang zu Turbulenz

Theoretische Untersuchungen zum Umschlag einer laminaren MHD – Strömung in eine turbulente werden von Lock (1955) am Beispiel der Hartmann– Strömung durchgeführt. Eine Störungsrechnung des stationären Strömungszustands führt auf eine Orr– Sommer-

feld Gleichung, in der die elektromagnetischen Effekte berücksichtigt werden. Lock findet bei großen Hartmann– Zahlen ($M > 20$) für den laminar– turbulenten Umschlagpunkt, gegeben durch die kritische Reynolds– Zahl Re_{cr} , die folgende lineare Abhängigkeit:

$$Re_{cr} = 5 \cdot 10^4 M . \quad (3.11)$$

Die lineare Abhängigkeit wird experimentell z.B. von Brouillette und Lykoudis (1967) bestätigt. Es zeigt sich jedoch, daß der experimentell ermittelte Koeffizient in Gl.(3.11) wesentlich niedriger liegt.

$$\frac{Re_{cr}}{M} = 225 \quad (3.12)$$

Berechnungen des Druckverlustkoeffizienten im Bereich turbulenter MHD– Strömungen basierend auf der Theorie eines Mischungsweg– Ansatzes stimmen gut mit experimentellen Befunden überein (Lykoudis und Brouillette 1967). Branover (1978) gibt eine Übersicht über Turbulenzuntersuchungen in Kreisrohren und Rechteckrohren. Er vergleicht Arbeiten verschiedener Autoren und findet schließlich die allgemeinen Aussagen:

$$\textit{laminare MHD – Strömung für } Re < 130 M, \quad (3.13)$$

$$\textit{turbulente MHD – Strömung für } Re > 215 M. \quad (3.14)$$

In einer neueren Arbeit von Ting *et al.* (1991) wird durch eine lineare Stabilitätsanalyse gezeigt, daß Instabilitäten in Kanälen mit rechteckförmigem Querschnitt von den Seitenwandjets ausgehen. Experimentell kann diese Aussage bestätigt werden. Gleichzeitig findet man jedoch experimentell, daß diese Instabilitäten (Turbulenz) für große M auf die Bereiche der Seitenjets beschränkt bleiben. Der Kern der Strömung verhält sich weiterhin laminar (siehe z.B. Reed und Picologlou 1989). Für MHD – Strömungen in Rohren mit kreisförmigem Querschnitt finden diese Autoren stets laminare Strömungszustände im gesamten fusionsrelevanten Parameterbereich.

Die Anwendung der Beziehung (3.13) für fusionsrelevante Magnetfelder ($B = 5T$) und Fluide (Stoffdaten siehe Lyon 1952) liefert die maximal zulässige Strömungsgeschwindigkeit $v_{lam,max}$ in einem Kanal, bei der noch laminare Verhältnisse vorliegen.

$$v_{lam,max} \approx 2.6 \text{ m/s für } Li_{17}Pb_{83} \quad (3.15)$$

$$v_{lam,max} \approx 46.2 \text{ m/s für } Li \quad (3.16)$$

Für Lithium liegen diese Grenzwerte um zwei Größenordnungen höher als die vorgesehenen Strömungsgeschwindigkeiten v im Blanket. Für $Li_{17}Pb_{83}$ ist $v_{lam,max}/v \approx 5$. Die Annahme laminarer MHD – Strömungen, die den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt wird, erscheint somit gerechtfertigt.

4 Mathematisches Modell

Da eine allgemeine Lösung der vollen magnetohydrodynamischen Grundgleichungen durch numerische Methoden in absehbarer Zeit nicht möglich sein wird, erscheint es sinnvoll, sich bei der Modellierung zunächst auf die wesentlichen physikalischen Effekte zu konzentrieren. Daraus ergeben sich die im folgenden eingeführten Vereinfachungen.

4.1 Induktionsfreie Approximation

Für kleine magnetische Reynolds – Zahlen R_m , wie sie in praktisch allen technischen MHD – Kanalströmungen vorliegen, sind durch elektrische Ströme innerhalb des Fluids induzierte Magnetfelder klein. Die rechte Seite der Gleichung (2.13) kann vernachlässigt werden. Das Magnetfeld wird somit alleine durch das von außen angelegte Magnetfeld \mathbf{B}_0 bestimmt, das dann divergenz- und wirbelfrei sein muß. Das Magnetfeld ist, auch innerhalb des Fluids, eine vom Experimentator vorgegebene Größe, auf die die Strömung keinen Einfluß hat. Durch diese Approximation werden die nichtlinearen Terme $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ der Gleichungen Gl.(2.11) und Gl.(2.14) linearisiert. Durch Anwendung des Divergenzoperators auf Gl.(2.13) erhalten wir die Gleichung der Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.1)$$

als Analogon zur hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung. Diese Gleichung ersetzt die Gleichungen (2.12 und 2.13) bei gegebenem Magnetfeld.

4.2 Linearisierung der Impulsgleichung

Beschränkt man sich ferner auf MHD – Strömungen mit großen Interaktionsparametern $N \gg 1$, so läßt sich die Impulsgleichung Gl.(2.11) durch einen Reihenansatz der Form:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{N}\right)^i \mathbf{v}_i, \quad (4.2)$$

für die Geschwindigkeit \mathbf{v} , sowie durch entsprechende Ansätze für alle weiteren

Unbekannten p , ϕ und j linearisieren. Für sehr große Interaktionsparameter, auf die wir uns im folgenden beschränken werden ($N > 10^4$), approximiert bereits eine Lösung in der Ordnung $n=0$ das nichtlineare MHD – Problem hinreichend genau. Dabei entfällt in der Impulsgleichung Gl.(2.11) die linke Seite vollständig.

4.3 Approximation für große Hartmann – Zahlen

Für sehr große Hartmannzahlen ($M > 10^4$) beschränkt sich der Einflußbereich von Reibungseffekten auf sehr dünne Grenzschichten. In Magnetfeldrichtung orientierte Grenzschichten besitzen eine Dicke δ_s der Größenordnung $\delta_s \sim O(M^{-\frac{1}{2}})$ (z.B. Walker 1981). Grenzschichten, in denen die Normalkomponente des Magnetfeldes nicht verschwindet, zeigen Grenzschichtdicken $\delta \sim O(M^{-1})$. Vernachlässigt man den Reibungsterm in der Impulsgleichung Gl.(2.11), so erhält man bereits eine recht gute Approximation der Strömungsgrößen v , j , p und ϕ außerhalb dieser Reibungsschichten im sogenannten Strömungskern oder Core (magnetostatische Approximation). Durch die Vernachlässigung des Reibungsterms in der Impulsgleichung kann die kinematische Randbedingung Gl.(2.19) lediglich für die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors erfüllt werden

$$v \cdot n = 0 \quad (4.3)$$

Das Kernströmungsmodell erfüllt also die vollständigen physikalischen Randbedingungen nicht. Die Erfüllung aller physikalischen Randbedingungen liefert eine Grenzschichtbetrachtung. An der Kanalwand erfolgt eine Korrektur der Kernströmungsvariablen unter Berücksichtigung aller in der Wandgrenzschicht wichtigen physikalischen Effekte einschließlich der Reibung. Die physikalischen Größen ergeben sich somit zu

$$(v, j, p, \phi) = (v, j, p, \phi)_{Core} + (v, j, p, \phi)_{\delta} \quad (4.4)$$

$(v, j, p, \phi)_{\delta}$ sind dabei Funktionen, die unmittelbar an der Kanalwand zusammen mit den Funktionen $(v, j, p, \phi)_{Core}$ des reibungsfreien Strömungskerns die exakten physikalischen Randbedingungen erfüllen, die aber in hinreichend großem Abstand von der Kanalwand verschwinden (siehe hierzu Abb 4.1).

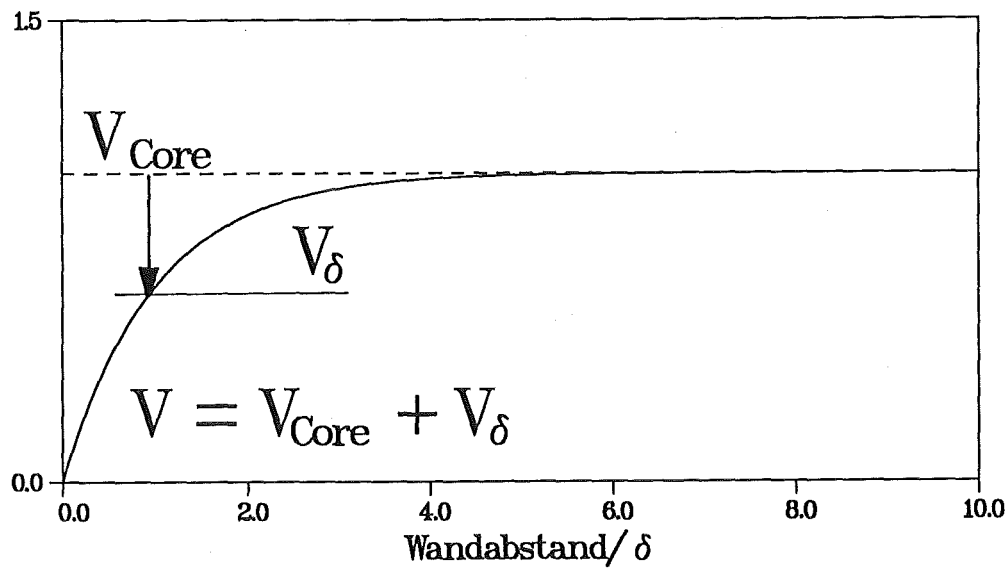


Abb. 4.1 Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Wandgrenzschicht

4.4 Vergleich mit hydrodynamischen Potentialströmungen

Die Vernachlässigung von Reibungseffekten im Strömungskern legt einen Vergleich der vereinfachten MHD – Gleichungen mit der potentialtheoretischen Approximation hydrodynamischer Strömungen nahe. Die Massenerhaltung hydrodynamischer Potentialströmungen führt, durch Einführung eines Geschwindigkeitspotentials Φ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi, \quad (4.5)$$

zur Laplacegleichung

$$\Delta\Phi = 0, \quad (4.6)$$

deren Lösung das rotationsfreie Geschwindigkeitsfeld ohne Bezug zur Impulsgleichung festlegt. Für zweidimensionale Strömungsprobleme erfüllt bereits jedes Geschwindigkeitsfeld mit

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (4.7)$$

die Kontinuitätsgleichung exakt. ψ wird Stromfunktion genannt. Linien $\psi = konst$ reprä-

sentieren Stromlinien des zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeldes. Falls die Druckverteilung im Strömungsfeld gesucht ist, wird diese anschließend aus der Euler – Gleichung oder der Bernoulli – Gleichung gewonnen.

Im Gegensatz zu hydrodynamischen Potentialströmungen ist das Geschwindigkeitsfeld reibungs– und trägheitsfreier MHD – Strömungen im allgemeinen nicht wirbelfrei. Das Geschwindigkeitsfeld kann nicht unabhängig von der Druckverteilung ermittelt werden. Lediglich für einige zweidimensionale (in einer Ebene senkrecht zu magnetischen Feldlinien) Spezialfälle finden wir gewisse Analogien. Für den Fall $\phi = 0$, was perfekt leitenden Kanalwänden entspricht, kann der Druck selbst als Geschwindigkeitspotential in Analogie zum Darcyschen Reibungsgesetz poröser Medien (Müller 1991) dienen. Der Druck kann in diesem Fall gleichzeitig als Stromfunktion der elektrischen Stromdichte \mathbf{j} interpretiert werden. In einem zweiten Grenzfall, nämlich für konstanten Druck, beziehungsweise für sehr kleine elektrische Ströme ($c \ll 1$), bildet das elektrische Potential ϕ entsprechend dem Ohmschen Gesetz eine Stromfunktion für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} . Im allgemeinen jedoch unterscheiden sich trägheits– und reibungsfreie MHD – Strömungen erheblich von hydrodynamischen Potentialströmungen.

5 Koordinatensysteme

Wie in Abschnitt 4.3 bereits beschrieben, läßt sich die allgemeine Lösung der linearisierten Gleichungen Gl.(2.10 – 2.14) mit den Randbedingungen Gl.(2.19 – 2.24) nach den gesuchten Funktionen $\mathbf{v}, \mathbf{j}, p, \phi$ auf die Lösung des reibungsfreien Strömungsproblems nach den Core – Variablen $(\mathbf{v}, \mathbf{j}, p, \phi)_{Core}$ und einer Lösung des Grenzschichtproblems mit den Grenzschichtvariablen $(\mathbf{v}, \mathbf{j}, p, \phi)_\delta$ zurückführen. Den unterschiedlichen physikalischen Randbedingungen, sowie einer möglichst allgemeinen Formulierung der Gleichungen wird durch zwei unterschiedliche Koordinatentransformationen für den vom Fluid eingenommenen Raum Rechnung getragen. Eine Transformation beschreibt dabei den gesamten Strömungsbereich und dient der Bestimmung der Core – Variablen. Die zweite Transformation gilt lediglich in den als dünn vorausgesetzten wandnahen Grenzschichten.

5.1 Transformation für die Lösung nach den Core – Variablen

In dem vom Fluid eingenommenen Volumen werden allgemeine krummlinige Koordinaten u^i eingeführt. Um gewisse charakteristische Eigenschaften der MHD – Gleichungen ausnutzen zu können, wird die Koordinatenrichtung u^3 magnetfeldparallel gewählt. Obwohl theoretisch eine Berechnung für allgemeine Magnetfelder möglich wäre, beschränken wir uns im folgenden auf ebene Magnetfelder. Alle magnetischen Feldlinien seien im Fluid zumindest näherungsweise parallel. Deshalb kann die Koordinatenrichtung u^3 mit der kartesischen Koordinatenrichtung x^3 zusammenfallen. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die folgende Koordinatentransformation (Bühler 1991), die eine möglichst einfache Beschreibung der geometrischen Randbedingungen beliebig geformter Strömungskanäle erlaubt:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(u^1, u^2) + \mathbf{h}(u^1, u^2)u^3. \quad (5.1)$$

Die geometrischen Verhältnisse, die zu dieser Transformation führen, sind in Abb. 5.1 dargestellt. Der Schnittpunkt einer Magnetfeldlinie mit der mittleren Fläche $\bar{\mathbf{x}}$ halbiert den Abstand $2h$ der beiden Durchstoßpunkte dieser Magnetfeldlinie durch die Kanalwand. \mathbf{h} ist ein Vektor parallel zu magnetischen Feldlinien. u^1 und u^2 sind die *Gaußschen Flächenkoordinaten* der Fläche $\bar{\mathbf{x}}$ (Klingbeil 1966). Die Gleichung der Kanalwand erhält die einfache Form $u^3 = \pm 1$. Durch eine Transformation der Form (5.1) kann

jeder beliebig geformte Strömungsbereich auf ein Standardvolumen $0 < u^1, u^2 < 1, -1 < u^3 < 1$ abgebildet werden.

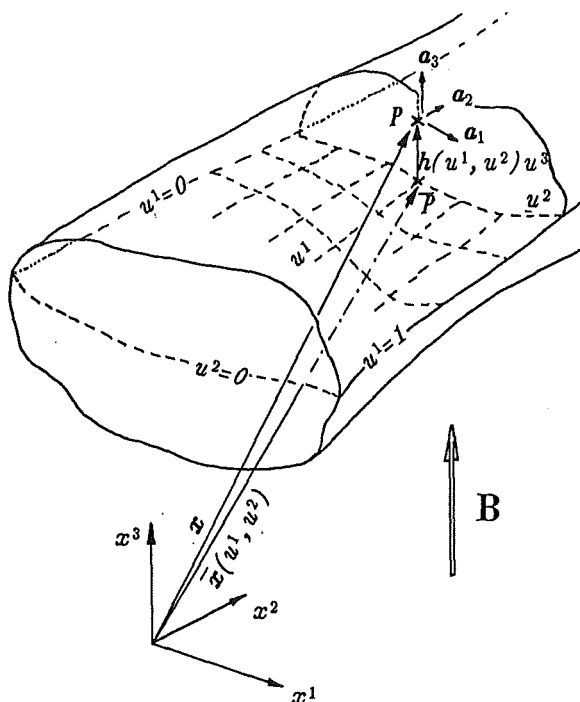


Abb. 5.1 Koordinatensysteme

Eine differentielle Verschiebung $d\mathbf{x}$ im Raum ergibt sich aus dem totalen Differential des Ortsvektors \mathbf{x} .

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} du^3. \quad (5.2)$$

Die partiellen Ableitungen des Ortsvektors nach den Koordinaten u^i

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} = \partial_i \mathbf{x} = \mathbf{a}_i \quad (5.3)$$

können als neue allgemeine Basisvektoren \mathbf{a}_i interpretiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \partial_1 \mathbf{x} = \partial_1 \bar{\mathbf{x}} + u^3 \partial_1 \mathbf{h}, \\ \mathbf{a}_2 &= \partial_2 \mathbf{x} = \partial_2 \bar{\mathbf{x}} + u^3 \partial_2 \mathbf{h}, \\ \mathbf{a}_3 &= \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Skalarprodukte

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = g_{ik} = g_{ki} \quad (5.5)$$

sind die Komponenten des metrischen Tensors. Dabei zeigt sich, daß alle Komponenten höchsten quadratische Funktionen der dritten Koordinatenrichtung sind. Sowohl g_{33} als auch das von der Basis aufgespannte Volumen $V = \sqrt{g}$ hingegen sind von u^3 unabhängig.

5.2 Transformation für die Lösung der Grenzschichtgleichungen

In der wandnahen Reibungsgrenzschicht werden durch eine etwas abgeänderte Koordinatentransformation die Grenzschichtkoordinaten d^i eingeführt.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_w(d^1, d^2) + \mathbf{n}(d^1, d^2) \delta d^3. \quad (5.6)$$

\mathbf{n} ist der Normaleneinheitsvektor der Fluid–Wand– Grenzfläche, an der eine Reibungsgrenzschicht der Dicke δ vorliegt. Der Normalenvektor zeige hier in das Innere des Strömungsbereichs. \mathbf{x}_w ist ein Punkt der Grenzfläche. Er ergibt sich aus Gl.(5.1) für $u^1=d^1$, $u^2=d^2$ und $u^3=\pm 1$. Die Basisvektoren der so definierten Grenzschichttransformation ergeben sich ähnlich wie in Gl.(5.4) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \partial_1 \mathbf{x} = \partial_1 (\mathbf{x}_w + \mathbf{n} \delta d^3) \approx \partial_1 \mathbf{x}_w, \\ \mathbf{a}_2 &= \partial_2 \mathbf{x} = \partial_2 (\mathbf{x}_w + \mathbf{n} \delta d^3) \approx \partial_2 \mathbf{x}_w, \\ \mathbf{a}_3 &= \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{n} \delta = \mathbf{n} \delta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Approximation Gl.(5.7) gilt für dünne Grenzschichten an glatten Kanalwänden. Der metrische Tensor der Grenzschichttransformation hat die folgenden Elemente:

$$\left[g_{ij} \right] \delta \approx \begin{bmatrix} \partial_1 \mathbf{x}_w \partial_1 \mathbf{x}_w & \partial_1 \mathbf{x}_w \partial_2 \mathbf{x}_w & 0 \\ \partial_2 \mathbf{x}_w \partial_1 \mathbf{x}_w & \partial_2 \mathbf{x}_w \partial_2 \mathbf{x}_w & 0 \\ 0 & 0 & \delta \cdot \delta \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Wegen der Orthogonalität der Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3 = \mathbf{n} \delta$ verschwinden vier Tensor-komponenten in Gl.(5.8). Alle Elemente des metrischen Tensors sind bei dieser Transformation von der dritten Koordinatenrichtung d^3 unabhängig. Die Komponenten g_{ik} mit $i, k=1, 2$ sind für die gewählte Transformation des Kernströmungsbereichs Gl.(5.1) an der

Kanalwand und für die Grenzschichttransformation Gl.(5.6) identisch. Sie repräsentieren die Größe und Orientierung eines Wandflächenelementes A . Das durch die Basis aufgespannte Volumenelement ergibt sich wegen der Orthogonalität von \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 zu

$$V = A \delta . \quad (5.9)$$

6 Integration der Gleichungen

Die Lösung der Gleichungen für die Core – Variablen, also ohne Berücksichtigung des Reibungsterms, kann nicht unabhängig von der Lösung des Grenzschichtproblems erfolgen, da die Grenzschichtlösung als Randbedingung in die Lösung der Gleichungen für die Core – Variablen eingeht. Besonders wichtig ist dieser Kopplungseffekt für nichtleitende Kanalwände. In diesem Fall stellt nämlich gerade die Reibungsgrenzschicht mit kleinen Strömungsgeschwindigkeiten in Wandnähe die einzige Rückflußmöglichkeit für im Kern induzierte elektrische Ströme dar. Sie bestimmt somit direkt alle Core – Größen. Mit zunehmender Wandleitfähigkeit nimmt jedoch der Einfluß der Grenzschichtvariablen auf die Lösung im reibungsfreien Strömungskern stark ab. Im folgenden werden wichtige charakteristische Eigenschaften der trägheits- und reibungsfreien Gleichungen diskutiert. Diese erlauben eine analytische Integration dieser Gleichungen entlang magnetischer Feldlinien, wodurch das allgemeine dreidimensionale MHD – Problem sozusagen als "Projektion" auf der Kanalwand erscheint, und dort zusammen mit den reibungsbehafteten Grenzschichtgleichungen behandelt wird.

6.1 Bestimmung der Core – Variablen

Die Gleichungen zur Bestimmung der Core – Lösung werden in transformierten Koordinaten u^i entsprechend Gl.(5.1) formuliert. Wenn der Vektor der magnetischen Induktion \mathbf{B} mit den Komponenten $b^1=b^2=0$, $b^3=B/h$ durch den Magnetfeldtensor b_{ik} mit den Elementen $b_{12}=-b_{21}=b^3$, alle anderen $b_{ik}=0$, ersetzt wird, so lauten die Gleichungen zur Beschreibung der stationären trägheitsfreien Strömungsverhältnisse im reibungsfreien Kern:

Impulsgleichung:

$$\partial_i p = b_{ik} (V j^k), \quad (6.1)$$

Ohmsches Gesetz:

$$j_i = -\partial_i \phi + b_{ik} (V v^k), \quad (6.2)$$

Massenerhaltung:

$$\partial_k (V v^k) = 0, \quad (6.3)$$

Ladungserhaltung:

$$\partial_k (V j^k) = 0. \quad (6.4)$$

Größen mit oberen Indizes werden die kontravarianten Komponenten eines Vektors genannt, Größen mit unteren Indizes sind seine kovarianten Komponenten. Beide sind durch den metrischen Tensor miteinander verknüpft. So z.B.

$$j_i = g_{ik} j^k. \quad (6.5)$$

Bei allen unbekanntem Größen dieses Abschnitts handelt es sich um Core – Variablen, die hier jedoch wegen der besseren Übersicht nicht zusätzlich durch ein 'c' ausgewiesen werden, sofern eine Verwechslung ausgeschlossen ist.

Wir erhalten aus der dritten Komponente der Impulsgleichung (6.1) unmittelbar die wichtige Aussage für den reibungsfreien Kern der MHD–Strömung:

→ *Der Druck ist entlang von Magnetfeldlinien konstant!* (A.1)

$$\partial_3 p = 0. \quad (6.6)$$

Unter dieser Voraussetzung kann die Impulsgleichung Gl.(6.1) direkt nach den Stromdichtekomponenten j^1 und j^2 aufgelöst werden. Die unbekanntem Komponente j^3 ergibt sich aus der Ladungserhaltung Gl.(6.4)

$$\partial_3 (V j^3) = - \sum_{k=1}^2 \partial_k (V j^k) \quad (6.7)$$

durch eine Integration entlang der Koordinate u^3 . Dabei wird die Konstanz des Druckes Gl.(6.6) und des Volumenelementes V entlang magnetischer Feldlinien beachtet. Nach einer Multiplikation der kontravarianten Stromdichtekomponenten mit dem metrischen Tensor und nach Einsetzen in das Ohmsche Gesetz erfolgt eine zweite Integration entlang Magnetfeldlinien zur Bestimmung des elektrischen Potentials. Als zunächst unbekanntem Integrationskonstanten werden die beiden Potentialwerte an der Kanaloberseite ϕ_o und an der Kanalunterseite ϕ_u eingeführt. Ihre Berechnung erfolgt später durch Grenzschichtbetrachtungen. Zur Bestimmung der Core – Variablen seien sie zunächst als gegeben vorausgesetzt. Mit diesen Integrationskonstanten ergeben sich die folgenden

Gleichungen für die kontravarianten Stromdichtekomponenten und für das elektrische Potential entlang einer Magnetfeldlinie u^3 :

$$V \begin{bmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{bmatrix} = \frac{h}{B} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{g_{32}}{g_{33}} + \frac{\partial_2 B}{B} u^3 & \frac{g_{31}}{g_{33}} - \frac{\partial_1 B}{B} u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \end{bmatrix} - \frac{V}{g_{33}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_u \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\phi = \frac{1}{2} (u^3 u^3 - 1) g_{33} \frac{h}{BV} \begin{bmatrix} -\frac{\partial_2 B}{B} & \frac{\partial_1 B}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+u^3 & 1-u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_o \\ \phi_u \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Man erkennt, daß alle elektrischen Größen durch die drei Skalare, nämlich p , ϕ_o und ϕ_u beschreiben werden. Der physikalische Zusammenhang wird alleine durch den Betrag der magnetischen Induktion B sowie durch die Geometrie g_{ik} bestimmt. Die Gleichungen zur Bestimmung der Stromdichtekomponenten Gl.(6.8) und des elektrischen Potentials Gl.(6.9) enthalten weitere charakteristische Aussagen einer MHD-Kernströmung.

→ **Die kontravarianten Stromdichtekomponenten j^1 und j^2 sind entlang magnetischer Feldlinien konstant!** (A.2)

→ **Die kontravariante Stromdichtekomponente j^3 ist eine lineare Funktion der Koordinate in Magnetfeldrichtung!** (A.3)

Durch eine Multiplikation der kontravarianten Stromdichtekomponenten j^k mit dem metrischen Tensor g_{ik} gelangt man schließlich zu der folgenden Aussage für die kovarianten Komponenten j_i :

→ **Die kovarianten Stromdichtekomponenten j_i sind quadratische Funktionen der Koordinate in Magnetfeldrichtung!** (A.4)

Da alle elektrischen Größen alleine durch die drei Skalare p , ϕ_o und ϕ_u beschreiben werden, sind damit auch die Geschwindigkeitskomponenten v^k entsprechend dem Ohmschen Gesetz alleine durch p , ϕ_o und ϕ_u gegeben. Die Komponenten v^1 und v^2 ergeben sich unmittelbar aus dem Ohmschen Gesetz Gl.(6.2).

$$V \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = \frac{h}{B} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 + \partial_1 \phi \\ j_2 + \partial_2 \phi \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Geschwindigkeitskomponente v^3 kann aus dem Ohmschen Gesetz nicht ermittelt werden. Ihre Bestimmung erfolgt aus der Massenbilanz Gl.(6.3)

$$\partial_3 (Vv^3) = - \sum_{k=1}^2 \partial_k (Vv^k) \quad (6.11)$$

durch eine Integration über u^3 .

$$\Delta (Vv^3) = - \int_{u^3}^{u^3 + \Delta u^3} \sum_{k=1}^2 \partial_k (Vv^k) du^3. \quad (6.12)$$

Beginnt die Integration an der unteren Kanalwand ($u^3 = -1$) so verschwindet die von Kulikovskii (1968) angegebene vierte Konstante aufgrund der kinematischen Randbedingung der Core-Geschwindigkeit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Die linke Seite der Gleichung Gl.(6.12) verschwindet vollständig, wenn bis zur oberen Kanalwand ($u^3 = 1$) integriert wird. Die Geschwindigkeitskomponenten v^1 und v^2 lassen sich mit den Gleichungen Gl.(6.10), sowie Gl.(6.5, 6.8 und 6.9) durch partielle Druckableitungen und Oberflächenpotentiale ausdrücken. Somit erhält man nach der Integration von Gl.(6.12) eine **partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung des Drucks p** bei gegebenen Oberflächenpotentialen ϕ_o und ϕ_u . Geometrische und magnetische Verhältnisse gehen als bekannte Funktionen der in Magnetfeldrichtung orientierten Koordinate u^3 in den Integranden ein. Dies ermöglicht eine analytische Integration entlang magnetischer Feldlinien.

Die Bestimmung der Oberflächenpotentiale ϕ_o und ϕ_u erfolgt durch eine Betrachtung der elektrischen Randbedingungen an der Kanalwand in der viskosen wandnahen Grenzschicht (siehe hierzu den folgenden Abschnitt 6.2.3).

6.2 Bestimmung der Grenzschicht-Variablen

6.2.1 Darstellung des Magnetfeldes in Grenzschichtkoordinaten

In Grenzschichtkoordinaten besitzt der Vektor der magnetischen Induktion die folgende Darstellung:

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}^3 = b^1 \mathbf{a}_1 + b^2 \mathbf{a}_2 + b^3 \mathbf{a}_3. \quad (6.13)$$

Seine kontravarianten Komponenten ergeben sich durch eine skalare Multiplikation der Gleichung Gl.(6.13) mit den reziproken Basisvektoren \mathbf{a}^i , für die $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_k = \delta^i_k$ gilt.

$$\begin{aligned} b^1 &= B \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}^1, \\ b^2 &= B \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}^2, \\ b^3 &= B \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}^3 = B \frac{1}{\delta} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}}{\delta}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Es zeigt sich, daß in sehr dünnen Grenzschichten, wie sie für MHD-Strömungen bei großen Hartmannzahlen $M \gg 1$ zu erwarten sind, der Betrag der Magnetfeldkomponente b^3 die Beträge der beiden anderen Komponenten weit übersteigt, sofern $\delta \ll \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}$ ist. Unter diesen Voraussetzungen kann man von dem vereinfachten Magnetfeldtensor

$$b_{ik} \approx \begin{bmatrix} 0 & b^3 & 0 \\ -b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

ausgehen.

6.2.2 Reibungsterm in Grenzschichtkoordinaten

Zur Berechnung der Grenzschicht-Variablen ist eine Darstellung des Vektors $\nabla^2 \mathbf{v}$ in den Grenzschichtkoordinaten erforderlich. Durch die vektorielle Identität

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})}_{=0} \quad (6.16)$$

kann die Berechnung von $\nabla^2 \mathbf{v}$ auf die zweimalige Anwendung des Rotationsoperators auf

den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} zurückgeführt werden. In allgemeinen krummlinigen Koordinaten lauten die kontravarianten Komponenten von $\nabla \times \mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} (\nabla \times \mathbf{v})^1 \\ (\nabla \times \mathbf{v})^2 \\ (\nabla \times \mathbf{v})^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Die kovarianten Geschwindigkeitskomponenten werden durch eine Multiplikation mit dem metrischen Tensor der Grenzschichttransformation Gl.(5.8) aus den kontravarianten Komponenten gewonnen.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \cdot \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ 0 & O(\delta^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Damit vereinfacht sich der Rotationsoperator in der wandnahen Reibungsgrenzschicht erheblich und man erhält:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\nabla \times \mathbf{v})^1 \\ (\nabla \times \mathbf{v})^2 \end{bmatrix} &\approx \frac{1}{V} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}, \\ (\nabla \times \mathbf{v})^3 &= \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die dritte Komponente ist dabei unwichtig, da sie nach einer Multiplikation mit δ^2 im Rahmen der von uns betrachteten Ordnung in der weiteren Rechnung keine wesentlichen Beiträge leisten kann. Durch zweimalige Anwendung erhält man für die ersten beiden kontravarianten Komponenten von $\nabla^2 \mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} (\nabla^2 \mathbf{v})^1 \\ (\nabla^2 \mathbf{v})^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{V^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \partial_3 \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Durch Berechnung der Tensorprodukte (mit dem Ergebnis $-A^2 \delta^i_k$) vereinfacht sich Gl.(6.20) schließlich zu

$$\begin{bmatrix} (\nabla^2 \mathbf{v})^1 \\ (\nabla^2 \mathbf{v})^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta^2} \partial_3 \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Die dritte Komponente ist uninteressant, da sie in der weiteren Rechnung keine Rolle spielt.

6.2.3 Grundgleichungen in Grenzschnittkoordinaten

Mit den zuvor getroffenen Annahmen innerhalb der dünnen wandnahen Reibungsgrenzschicht lassen sich nun die Grundgleichungen in Grenzschnittkoordinaten formulieren.

Impulsgleichung:

$$\partial_i p = b_{ik} (V j^k) + \frac{1}{M^2 \delta^2} g_{ik} \partial_3 \partial_3 (v^k), \quad (6.22)$$

Ohmsches Gesetz:

$$j_i = -\partial_i \phi + b_{ik} (V v^k), \quad (6.23)$$

Massenerhaltung:

$$\partial_k (V v^k) = 0, \quad (6.24)$$

Ladungserhaltung:

$$\partial_k (V j^k) = 0. \quad (6.25)$$

Aus dem Ohmschen Gesetz mit Gl.(6.15)

$$\partial_3 \phi = -j_3 = -g_{3k} j^k = -\delta \cdot \delta j^3 \approx 0 \quad (6.26)$$

folgt die Aussage:

→ **Das elektrische Potential ϕ in der Grenzschnitt ist in Normalenrichtung n bzw. d^3 näherungsweise konstant!** (A.5)

Deshalb folgt unmittelbar für das elektrische Potential in der Grenzschnitt:

$$\phi = \phi_c + \phi_\delta = \phi_c, \quad \phi_\delta = 0. \quad (6.27)$$

Aus der linearisierten Impulsgleichung Gl.(6.22) kann die folgende Aussage über den Druckverlauf in der Grenzschicht abgeleitet werden:

↳ **Druckgradienten in Grenzschichtnormalenrichtung sind von der Ordnung $O(M^{-2})$ und werden deshalb vernachlässigt!** (A.6)

Für den Druck p ergibt sich eine zu Gl.(6.27) analoge Beziehung in der wandnahen Reibungsgrenzschicht.

$$p = p_c + p_\delta = p_c, \quad p_\delta = 0. \quad (6.28)$$

Aus der Impulsgleichung folgen weiterhin die beiden Grenzschichtkomponenten der Stromdichte j_δ^k

$$V \begin{bmatrix} j^1 \\ j^2 \end{bmatrix}_\delta = - \frac{1}{M^2 \delta^2} \frac{1}{b^3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \partial_3 \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta, \quad (6.29)$$

Die Komponenten der Core-Stromdichten erfüllen bereits die im Core gültige Gleichung Gl.(6.8) und entfallen deshalb zusammen mit den Druckableitungen.

Mit den Stromdichtekomponenten nach Gl.(6.29) können nach einer Multiplikation mit dem metrischen Tensor g_{ik} die kovarianten Stromdichtekomponenten des Ohmschen Gesetzes Gl.(6.23) eliminiert werden. Auch hier entfallen die Core-Variablen und Potentialableitungen, da sie bereits die im Core gültige Gleichung Gl.(6.2) erfüllen. Man erhält auf diese Weise **gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung des Geschwindigkeitsverlaufs** innerhalb der Grenzschicht.

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta + \left[\frac{1}{M \delta b^3} \right]^2 \frac{1}{V^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \partial_3 \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Wie in Gleichung Gl.(6.20) können die Tensorprodukte durch $-A^2 \delta^i_k$ ersetzt werden. Mit der Magnetfeldkomponente $b^3 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) / \delta$ folgt deshalb:

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta - \left[\frac{1}{M \delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})} \right]^2 \partial_3 \partial_3 \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Durch eine geeignete Wahl der noch unbestimmten Grenzsichtdicke δ wird der Koeffizient der Geschwindigkeitsableitungen zu Eins normiert. Diese Normierung erfolgt hier rein willkürlich und hat auf spätere Ergebnisse keinen Einfluß. Sie führt jedoch zu einer einfachen Darstellung der weiteren Rechenschritte und ist in sofern gerechtfertigt, da Reibungskräfte und Lorentz – Kräfte innerhalb der Grenzsicht von gleicher Größenordnung sind. Damit folgt für die Grenzsichtdicke

$$\delta = \frac{1}{M(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})} = \frac{1}{M_L} . \quad (6.32)$$

Die Grenzsichtdicke ist also umgekehrt proportional der mit der Normalkomponente des Magnetfeldes gebildeten lokalen Hartmann – Zahl M_L .

Die einzige Lösung für die Grenzsicht – Geschwindigkeiten, die in hinreichender Entfernung der Kanalwand ($d^3 \rightarrow \infty$) verschwindet und dennoch die exakte kinematische Randbedingung

$$\mathbf{v}(d^3=0) = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\delta(d^3=0) = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

erfüllt, lautet somit

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_\delta = - \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_c e^{-d^3} . \quad (6.34)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes für die Geschwindigkeits– und Stromdichtekomponenten ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\delta$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_\delta$) in das Ohmsche Gesetz Gl.(6.23) ergibt sich mit

$$b_{ik}(V v^k)_c = j_{ic} + \partial_i \phi \quad (6.35)$$

für die gesamte Stromdichte

$$j_i = j_{ic} - (j_{ic} + \partial_i \phi) e^{-d^3}, \quad i=1,2 . \quad (6.36)$$

Man erkennt die folgenden Grenzfälle:

$$\begin{array}{lll} d^3 = 0 & j_i = -\partial_i \phi & \text{Ohmsches Gesetz für einen unbewegten Leiter,} \\ d^3 \rightarrow \infty & j_i \rightarrow j_{ic} & \text{Core-Lösung in großer Entfernung der Kanalwand.} \end{array}$$

Durch eine Multiplikation der Stromdichtekomponenten nach Gl.(6.36) mit den kontravarianten Komponenten g^{ik} des metrischen Tensors und anschließendes Einsetzen in die Ladungsbilanz Gl.(6.25) gewinnt man eine Gleichung zur Bestimmung der dritten kontravarianten Stromkomponente j^3 . Eine Integration dieser Gleichung über die gesamte Grenzschicht ($0 \leq d^3 \leq \infty$) ergibt schließlich mit $V=A\delta$ die Bedingung

$$(Vj^3)_{\delta,0} = -\sum_{i=1}^2 \partial_i \sum_{k=1}^2 A\delta g^{ik} \partial_k \phi_c. \quad (6.37)$$

Stromflüsse in die Grenzschicht der Diche δ bestimmen die Potentialverteilung innerhalb dieser Grenzschicht ($\phi=\phi_c$).

Analog lassen sich im Fall einer elektrisch leitenden dünnen Kanalwand der dimensionslosen Wandstärke t und der auf die Fluidleitfähigkeit bezogenen relativen Leitfähigkeit σ_w die Stromflüsse über die Fluid-Wandgrenzfläche mit der Potentialverteilung in der Kanalwand verbinden. Mit dem

$$\text{Wandleitparameter} \quad c = \sigma_w t \quad (6.38)$$

ergibt sich analog zu Gl.(6.37) für die in die Wand eintretenden Stromflüsse

$$(Vj^3)_{W,0} = -\sum_{i=1}^2 \partial_i \sum_{k=1}^2 A c g^{ik} \partial_k \phi_c. \quad (6.39)$$

Diese in allgemeinen Koordinaten formulierte Gleichung stellt gegenüber der von Walker 1981 angegebenen Approximation für dünne leitende Kanalwände (Gl.(3.10)) eine Erweiterung auf variable Wandleitparameter dar.

Eine Bilanz der Stromflüsse über die Fläche A der Kanalwand – Fluid – Grenzfläche besagt, daß Ströme, die den Core-Bereich verlassen, sowohl in die Wand als auch in die Grenzschicht eintreten.

$$(Vj^3)_C = (Vj^3)_{W,0} + (Vj^3)_{\delta,0} \quad (6.40)$$

Diese Gleichung liefert zusammen mit den beiden Gleichungen Gl.(6.37 und 6.39) sowie mit Gl.(6.8) und der Stetigkeitsbedingung Gl.(2.22) eine **partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung des Core – Potentials** $\phi_c = \phi_o$ bzw. ϕ_u an der Kanaloberfläche.

$$(Vj^3)_C = -\sum_{i=1}^2 \partial_i \sum_{k=1}^2 (c+\delta) A g^{ik} \partial_k \phi_c. \quad (6.41)$$

Man erkennt sofort, daß für relativ gut leitende Kanalwände mit $c \gg \delta$ die Verteilung des elektrischen Potentials nur durch den Verlauf des Wandleitparameters c der Kanalwand bestimmt wird. Für relativ schlecht leitende Kanalwände mit $c \ll \delta$ wird die Verteilung des elektrischen Potentials alleine durch die Grenzschichtdicke $\delta = 1/M_L$ festgelegt. Da die Verteilung der Oberflächenpotentiale direkt in die Berechnung aller Strömungsgrößen, auch des reibungsfreien Strömungskerns eingeht, besteht grundsätzlich die Möglichkeit, über eine geeignete Wahl von c das Geschwindigkeitsprofil zu beeinflussen. Auf diese Weise kann zum Beispiel der konvektive Wärmetransport an thermisch hoch belasteten Kanalwänden durch eine gezielte Vorgabe des Wandleitparameters oder der Geometrie optimiert werden (Picologlou et al 1989_a). Ist man jedoch an einem minimalen MHD – Druckverlust interessiert, so muß $c = 0$ gewählt werden.

6.3 Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen

Die Lösung für allgemeine dreidimensionale MHD – Strömungen ist nun auf die Lösung gekoppelter zweidimensionaler partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für den Druck p sowie für die Oberflächenpotentiale ϕ_o und ϕ_u zurückgeführt. Ihre Lösung kann für allgemeine Probleme nur numerisch erfolgen. Hierzu wird die Massenerhaltung und Ladungserhaltung bereits für ein diskretes Kontrollvolumen (siehe Abb 6.1)

$$\Delta V = V \Delta u^1 \Delta u^2 \Delta u^3 \quad (6.42)$$

endlicher Abmessung gefordert.

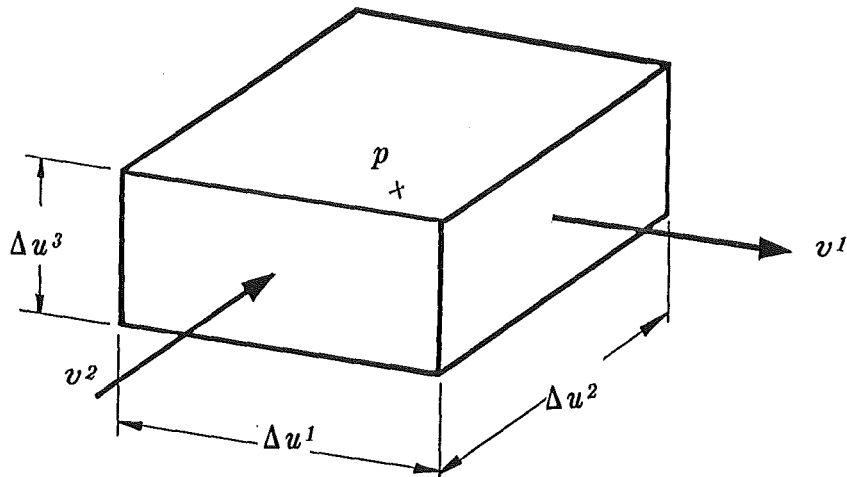


Abb. 6.1 Diskretes Kontrollvolumenelement

Partielle Ableitungen $\partial_i f$ einer Funktion f werden hierzu durch zentrale partielle Differenzen $\Delta_i f$ approximiert.

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \approx \frac{f(u^{i+\frac{1}{2}}\Delta u^i) - f(u^{i-\frac{1}{2}}\Delta u^i)}{\Delta u^i} = \frac{\Delta f}{\Delta u^i} = \Delta_i f. \quad (6.43)$$

Nach einer Integration vom unteren bis zum oberen Rand des Kontrollvolumens lautet die Gleichung der diskreten Massenerhaltung:

$$\Delta_3(Vv^3) = - \frac{1}{\Delta u^3} \int_{u^{3-\frac{1}{2}}\Delta u^3}^{u^{3+\frac{1}{2}}\Delta u^3} \sum_{i=1}^2 \Delta_i(Vv^i) du^3. \quad (6.44)$$

Das Produkt der kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten v^i mit dem von der Basis aufgespannten Volumen V repräsentiert die über die Fläche $u^i = \text{konst}$ in das Volumenelement ΔV eintretende (bzw. austretende) Volumstromdichte. Die Summe der Volumenstromänderungen in den Richtungen u^1 und u^2 über die Grenzflächen des Volumenelementes ist gleich der Änderung der Volumenstromdichte in der Richtung u^3 . Die Volumenstromdichten Vv^i ergeben sich dabei entsprechend dem Ohmschen Gesetz, in Form der Gleichung Gl.(6.10), aus den Stromdichten j_i und dem Potential ϕ , die ihrerseits durch Druckwerte und Oberflächenpotentiale entsprechend Gl.(6.8 und 6.9) zu ersetzen sind. Es kann gezeigt werden, daß alle Koeffizienten des Integrals höchstens

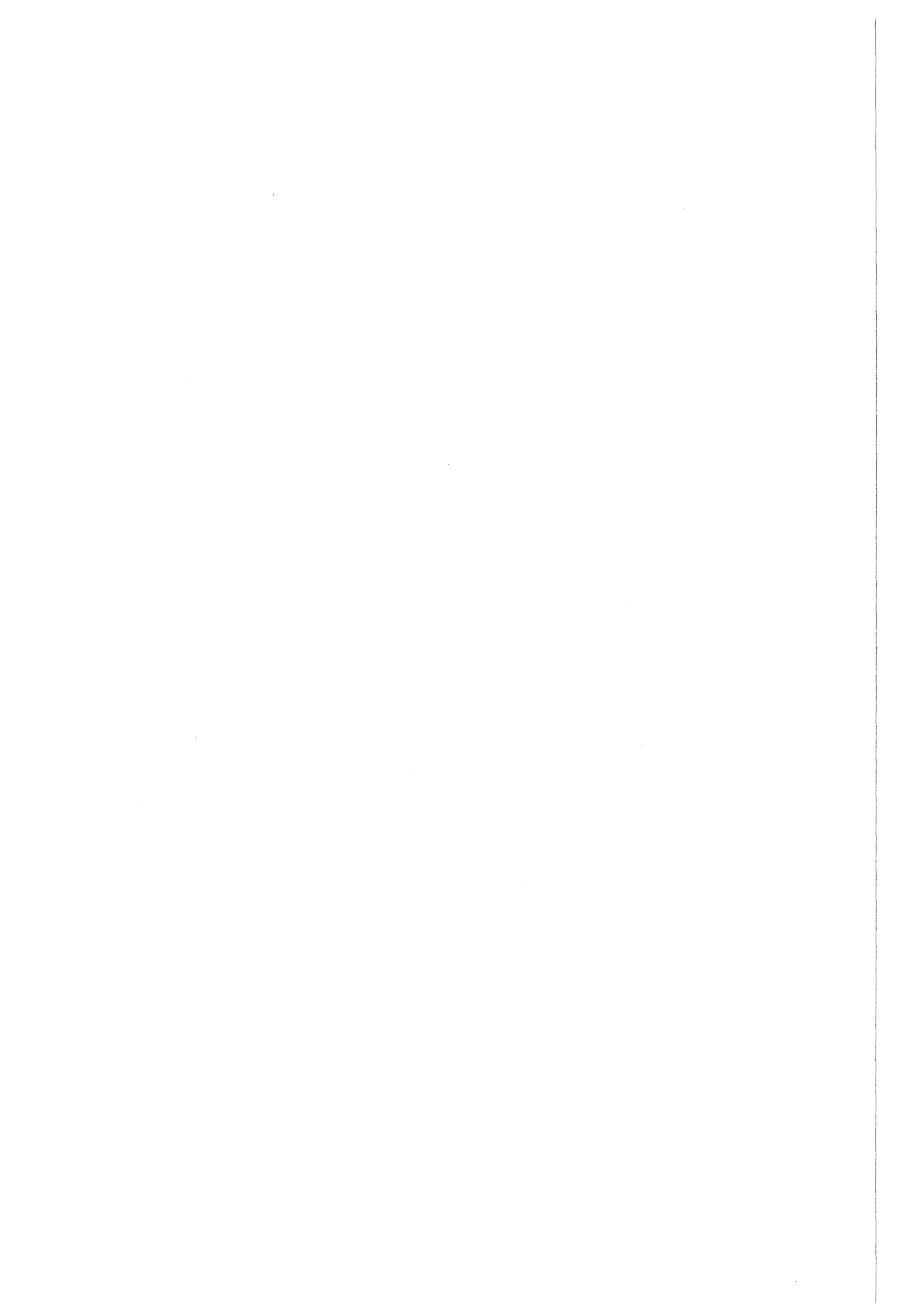
quadratische Funktionen $q(u^3)$ der in Magnetfeldrichtung orientierten Koordinate bilden. Deshalb kann eine analytisch exakte Berechnung des Integrals mit drei Stützstellen der Simpsonschen Regel erfolgen, die Polynome bis zur Ordnung 3 exakt integriert.

$$\int_a^b q(u) du = \frac{1}{6} \left[q(a) + 4q\left(\frac{a+b}{2}\right) + q(b) \right] (b-a) . \quad (6.45)$$

Wird Gl.(6.44) vom unteren bis zum oberen Kanalrand integriert, so ergibt sich bei verschwindender linker Gleichungsseite eine algebraische Gleichung zur Bestimmung des Druckwertes p im Innern des betrachteten Volumenelements in Abhängigkeit aller Nachbardruckwerte und Potentialgradienten. Die Auswertung der Ladungserhaltung entsprechend Gl.(6.41) in diskreter Form führt gleichfalls zu algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der Oberflächenpotentiale ϕ_o bzw. ϕ_w im Zentrum des betrachteten Wand – Grenzschichtvolumenelements im Abhängigkeit aller Nachbarpotentialwerte und Druckgradienten. Druck und Potentialwerte sind zweckmäßigerweise auf einem versetzten Maschengitter angeordnet.

Die allgemeine Form der Potential– und Druckgleichungen führt zu einem linearen Gleichungssystem, das leider die Konvergenzbedingungen schneller iterativer Lösungsverfahren nicht erfüllt. Aus diesem Grund wird ein direktes Lösungsverfahren gewählt, das dank der großen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit moderner Großrechenanlagen zum Ziel führt. Nachdem Druck und Wandpotentiale bekannt sind, werden dreidimensionale Strömungszustände im Innern des Kanals mit Hilfe der analytischen Beziehungen (6.8 – 6.10) ermittelt.

Diese kurzen Erläuterungen zum numerischen Verfahren sollen an dieser Stelle genügen. Dem an numerischen Details interessierten Leser steht im Anhang eine ausführliche Beschreibung zur Verfügung.



7 Ergebnisse

Mit dem zuvor beschriebenen numerischen Rechenprogramm wurden einige ausgewählte Beispiele berechnet, die die Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens zeigen sollen. Es wurden Vergleichsrechnungen zu bekannten Lösungen durchgeführt, um den erstellten Rechencode zu validieren. Zunächst werden Ergebnisse zweidimensionaler Strömungsprobleme vorgestellt. Dreidimensionale Lösungen für Kanäle in variablen Magnetfeldern oder für gekrümmte bzw. scharfkantig abgewinkelte Kanäle demonstrieren die Anwendbarkeit des Rechenverfahrens, selbst in Grenzbereichen des Modells.

7.1 Zweidimensionale Strömungsprobleme

7.1.1 Kreisrohrgeometrie

Als einfachste zweidimensionale Strömungsform wird eine voll ausgebildete MHD – Strömung in einem Kreisrohr von konstantem Querschnitt in einem zur Strömungsrichtung senkrechten, konstanten Magnetfeld betrachtet. Für eine Hartmannzahl von $M = 1000$ sind in *Abb. 7.1* Geschwindigkeitsprofile bei verschiedenen Wandleitparametern dargestellt. Für $c = 0.1$, also für relativ gut leitende Kanalwände, schließen sich die im bewegten Fluid induzierten elektrischen Ströme fast ausschließlich innerhalb der Kanalwand. Hartmannschichten der Größenordnung $\delta \sim O(M^{-1})$ spielen deshalb keine Rolle. Das im Strömungskern kolbenförmige Geschwindigkeitsprofil fällt innerhalb dieser viskosen, wandnahen Grenzschicht steil auf den Wert $v=0$ an der Wand ab. Für $c \rightarrow 0$ nähert sich das Geschwindigkeitsprofil der von Chang und Lundgren 1961 angegebenen Lösung, die für isolierte Kanalwände ein Geschwindigkeitsprofil der Form $v_y \sim \sqrt{1-x^2}$ besitzt. Für $c = 0$ zeigt das axiale Geschwindigkeitsfeld einen elliptischen Verlauf quer zur Magnetfeldrichtung. In Magnetfeldrichtung hingegen bleibt der kolbenförmige Charakter mit starken Wandgradienten erhalten. Die elektrischen Ströme schließen sich in diesem Fall innerhalb der viskosen wandnahen Grenzschicht.

Ein Vergleich des numerisch ermittelten Druckgradienten mit der asymptotischen analytischen Lösung *Gl.(3.7)* (Chang und Lundgren 1961) liefert schon bei relativ niedrigen Hartmann – Zahlen, $M \simeq 25$, sehr gute Übereinstimmung (siehe hierzu *Abb. 7.2*).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{3\pi}{8M} \quad (7.1)$$

Der Druckgradient für relativ gut leitende Kanalwände kann numerisch ebenfalls in sehr guter Übereinstimmung mit dem von Hua und Walker 1989 genannten analytischen Ergebnis

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{c}{1+c} \tag{7.2}$$

gefunden werden. Diese numerischen Ergebnisse, die von Gl.(7.2) praktisch nicht abweichen, werden hier nicht weiter diskutiert.

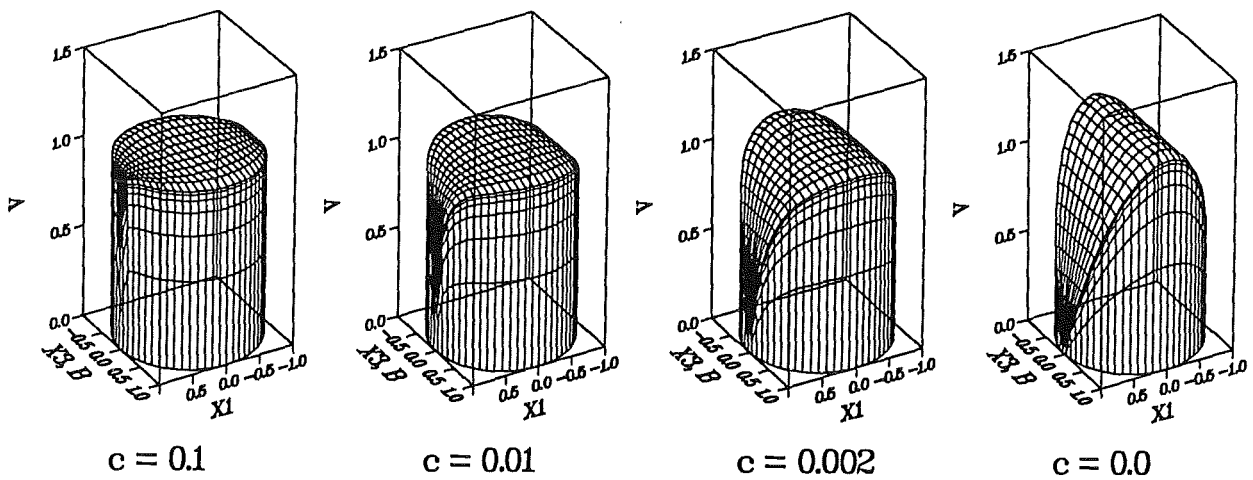


Abb. 7.1 MHD – Geschwindigkeitsprofile einer voll ausgebildeten MHD – Strömung senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld in einem isolierten Kreisrohr für verschiedene Wandleitparameter c bei einer Hartmann – Zahl $M = 1000$.

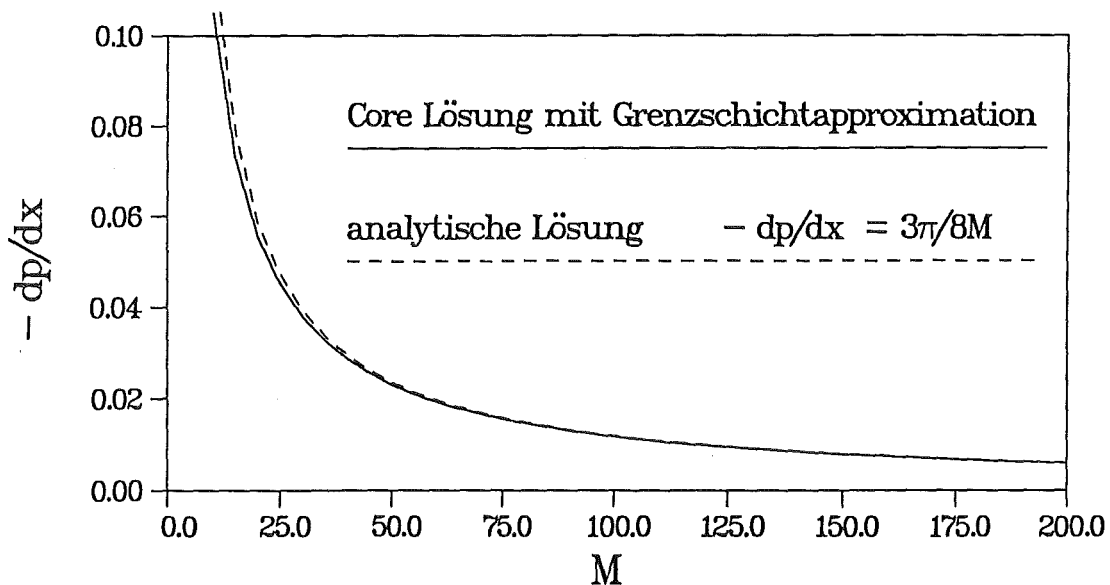


Abb. 7.2 Dimensionsloser Druckgradient einer MHD – Strömung in einem isolierten Kreisrohr

7.1.2 Rechteckkanal mit elliptisch deformierten Seitenwänden

Die direkte Behandlung von Kanalgeometrien mit exakt magnetfeldparallelen Kanalwänden ist wegen Singularitäten der gewählten Koordinatentransformation nicht möglich. Um solche Geometrien dennoch zumindest näherungsweise zu beschreiben, kann der Kanal entweder gegenüber der Magnetfeldrichtung leicht geneigt werden oder die magnetfeldparallele Seitenwand kann schwach elliptisch ausgebeult werden (Bühler 1991). In beiden Fällen wird eine Singularität entlang einer Kanalwand vermieden. Im folgenden wollen wir uns auf die Beschreibung von MHD – Strömungen in elliptisch approximierten Rechteckkanälen entsprechend Abb. 7.3 beschränken. Es wird angestrebt, im Grenzfall für kleine elliptische Deformationen $e \rightarrow 0$ eine Approximation des Strömungsverhaltens in Rechteckkanälen zu erhalten.

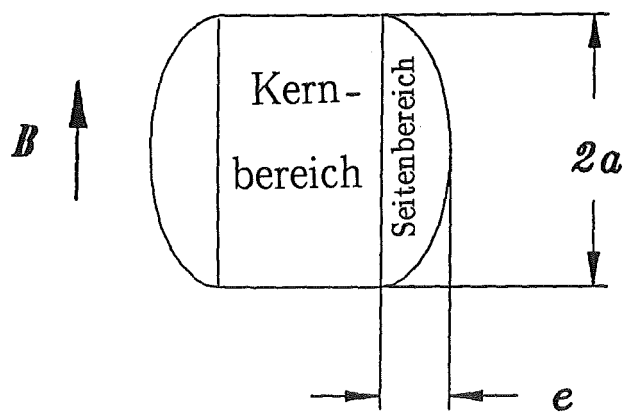


Abb. 7.3 Elliptisch deformierter Rechteckkanal

Für eine elliptisch verformte Rechteckgeometrie entsprechend Abb.7.3 findet Molokov 1991 die folgende analytische Druckverlustbeziehung für Strömungen bei großen Hartmannzahlen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{A_1 + A_2}, \quad (7.3)$$

mit den Koeffizienten

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}\pi e\right) \frac{c+1}{c+1/M}$$

und

$$A_2 = e \int_0^{\pi/2} \frac{ce + \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}{ce \cos \varphi + \frac{1}{M} \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \cos^3 \varphi \, d\varphi.$$

Ein Vergleich der analytisch berechneten Druckverluste nach Molokov mit numerisch bestimmten Werten liefert eine sehr gute Übereinstimmung über den gesamten betrachteten Bereich von $e > 0$. Schon bei einer relativ kleinen Hartmann-Zahl von $M = 100$ liegen die Abweichungen bei weniger als 1.5%. Für größere Hartmann-Zahlen z.B. $M = 1000$ sind beide Ergebnisse praktisch identisch (siehe Abb. 7.4).

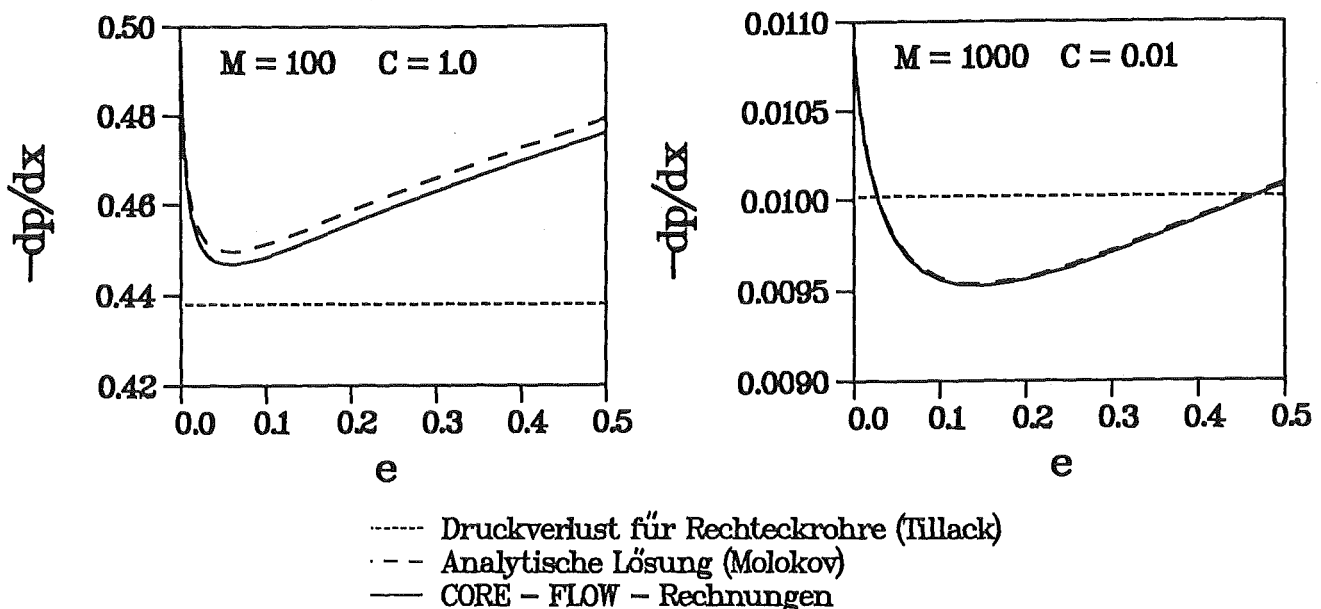


Abb 7.4 MHD - Druckgradient in einem elliptisch deformierten Rechteckrohr für zwei Parameterkombinationen von M und c .

Schließlich bleibt noch die Frage zu klären, in wieweit ein elliptisch deformierter Kanal als Approximation eines Rechteckkanals mit magnetfeldparallelen Seiten Verwendung finden kann. Die Antwort wird sofort klar, wenn man in *Abb. 7.4* die Lösungen eines elliptisch deformierten Kanals mit Lösungen für Rechteckkanäle entsprechend *Gl.(3.9)* (Tillack 1990) vergleicht, die als horizontale Linien in die beiden Diagramme eingezeichnet sind. Tillacks Lösung gilt speziell für den Grenzfall $e = 0$, für den wir uns interessieren. Für elektrisch leitende Kanäle stellt man für $e \rightarrow 0$ zunächst eine Verbesserung der Druckgradientenapproximation fest. Für

$$e \sim \frac{1}{\sqrt{M}}, \text{ mit } M \gg 1, \quad (7.4)$$

liefert dieses Modell bereits eine gute Approximation für den Druckgradienten. Die Abweichung zum exakten Ergebnis beträgt weniger als 5%. Eine weitere Verkleinerung des e – Wertes liefert schlechtere Ergebnisse. Diese Tatsache läßt sich physikalisch folgendermaßen begründen: Elektrische Ströme aus dem Strömungskern treten in die sogenannten *Seitenschichten* der Dicke $\delta_s \sim O(M^{-1/2})$ ein. Innerhalb dieser Schichten fließen die Ströme nun in Magnetfeldrichtung, bis sie in den Kanalecken auf die *Hartmann – Schichten* treffen, in denen sie eine Rückflußmöglichkeit finden. Das von uns eingeführte Grenzschichtmodell versagt an exakt magnetfeldparallelen Wänden. Für $e \rightarrow 0$ wird die Dicke der Seitenschichten und somit ihre Leitfähigkeit überschätzt. Die Strömungsverhältnisse in den Seitenschichten können nur durch eine detaillierte Betrachtung aller relevanten Effekte innerhalb dieser Grenzschichten ermittelt werden. Wir betrachten hierzu einen Bereich, in dem der Ortsvektor \mathbf{x} eines Punktes durch die Seitenschichttransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{n}\delta_s s^1 + \mathbf{t}s^2 + \mathbf{h}_C s^3 \quad (7.5)$$

gegeben ist. Die s^i sind orthogonale Seitenschichtkoordinaten; $\mathbf{x}_s = \bar{\mathbf{x}}(u^1=u^1_C, u^2)$ ist, für $e \rightarrow 0$, ein Punkt der Seitenwand, $\mathbf{h}_C = \mathbf{h}(u^1=u^1_C, u^2)$ ist die halbe Kanalhöhe entlang dieser Seitenwand entsprechend *Gl.(5.1)*. u^1_C ist die u^1 – Koordinate an der Grenzfläche zwischen Core und Seitenschicht. \mathbf{n} ist der zur Seitenwand normale Einheitsvektor, der in das Kanalinnere zeigt. Der zur Kanalwand tangentialen Einheitsvektor \mathbf{t} wird senkrecht zur Magnetfeldrichtung angesetzt.

Der metrische Tensor der Seitenschichttransformation sowie das von der Basis aufgespannte Volumenelement sind

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} \delta_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h_C^2 \end{bmatrix}, \quad V = h_C \delta_s. \quad (7.6)$$

Die ersten beiden Komponenten der Impulsgleichung in Seitenschichtkoordinaten lauten nun:

$$\begin{aligned} \partial_1 p &= \frac{B}{h_C} (V j^2) + O\left(\frac{1}{M^2}\right), \\ \partial_2 p &= -\frac{B}{h_C} (V j^1) + \frac{1}{M^2 \delta_s^2} \partial_1 \partial_1 v^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Falls in der Gleichung der Ladungserhaltung

$$\partial_k (V j^k) = 0 \quad (7.8)$$

alle auftretenden Terme von gleicher Größenordnung sind, kann die Stromkomponente

$$j_1 = g_{11} j^1 = \delta_s^2 j^1 \quad (7.9)$$

in der ersten Komponente des Ohmschen Gesetzes vernachlässigt werden. Somit ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitskomponente v^2 und dem Potential ϕ

$$\partial_1 \phi = \frac{B}{h_C} (V v^2). \quad (7.10)$$

Mit Gl.(7.10) kann die Geschwindigkeitskomponente v^2 der Impulsgleichung eliminiert werden. Zusammen mit der Ladungsbilanz folgt nach Elimination des Drucks in Gl.(7.7) folgende Differentialgleichung vierter Ordnung zur Bestimmung des Seitenschichtpotentials:

$$\partial_3 \partial_3 \phi = \frac{h_C^2}{M^2 B^2 \delta_s^4} \partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_1 \phi. \quad (7.11)$$

Die noch unbestimmte Dicke der Seitenschicht δ_s wird so festgelegt, daß die Ableitungsterme beider Gleichungsseiten von gleicher Größenordnung sind. Dies führt zur Seitenschichtdicke

$$\delta_s = \sqrt{h_C / (MB)}, \quad (7.12)$$

die entlang der Seitenwände die elektrische Leitfähigkeit in Gleichung (6.41) festlegt, sobald die Approximation der Hartmann – Grenzschicht entsprechend Gl(6.32) versagt. Die Lösung von Gl.(6.41) liefert die Verteilung des Potentials entlang der Kanalwand, aus der anschließend die Lösung im wandnahen Fluidbereich ermittelt wird. Die Verbesserung des mit diesem Modell ermittelten Druckgradienten, verglichen mit dem ursprünglichen Ansatz im Grenzfall $e \rightarrow 0$, ist durch einen Vergleich der Diagramme in Abb.(7.4) mit den entsprechenden Diagrammen in Abb.(7.5) offensichtlich. Für alle betrachteten Fälle wird bei einem Grenzübergang, für $e \rightarrow 0$, der theoretische Wert des Druckgradienten eines Kanals mit zwei exakt magnetfeldparallelen Wänden sehr gut approximiert.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils in Seitenwandnähe erfolgt durch eine Auswertung der Potentialverteilung entlang dieser Wand. Durch Aufspalten der Variablen in Kern und Grenzschichtanteile

$$\phi = \phi_C + \phi_\delta, \quad v^2 = v_C^2 + v_\delta^2, \quad (7.13)$$

ergibt sich als Lösung von Gl.(7.11) für das Seitenschichtpotential ϕ_δ

$$\phi_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n s^1} \left[A_{1n} \cos(\alpha_n s^1) + A_{2n} \sin(\alpha_n s^1) \right] F_n(\beta_n s^3) \quad (7.14)$$

und der Seitenschicht– Geschwindigkeit v_δ^2

$$v_\delta^2 = \frac{h_C}{BV} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\alpha_n s^1} \left[(A_{2n} - A_{1n}) \cos(\alpha_n s^1) - (A_{2n} + A_{1n}) \sin(\alpha_n s^1) \right] F_n(\beta_n s^3). \quad (7.15)$$

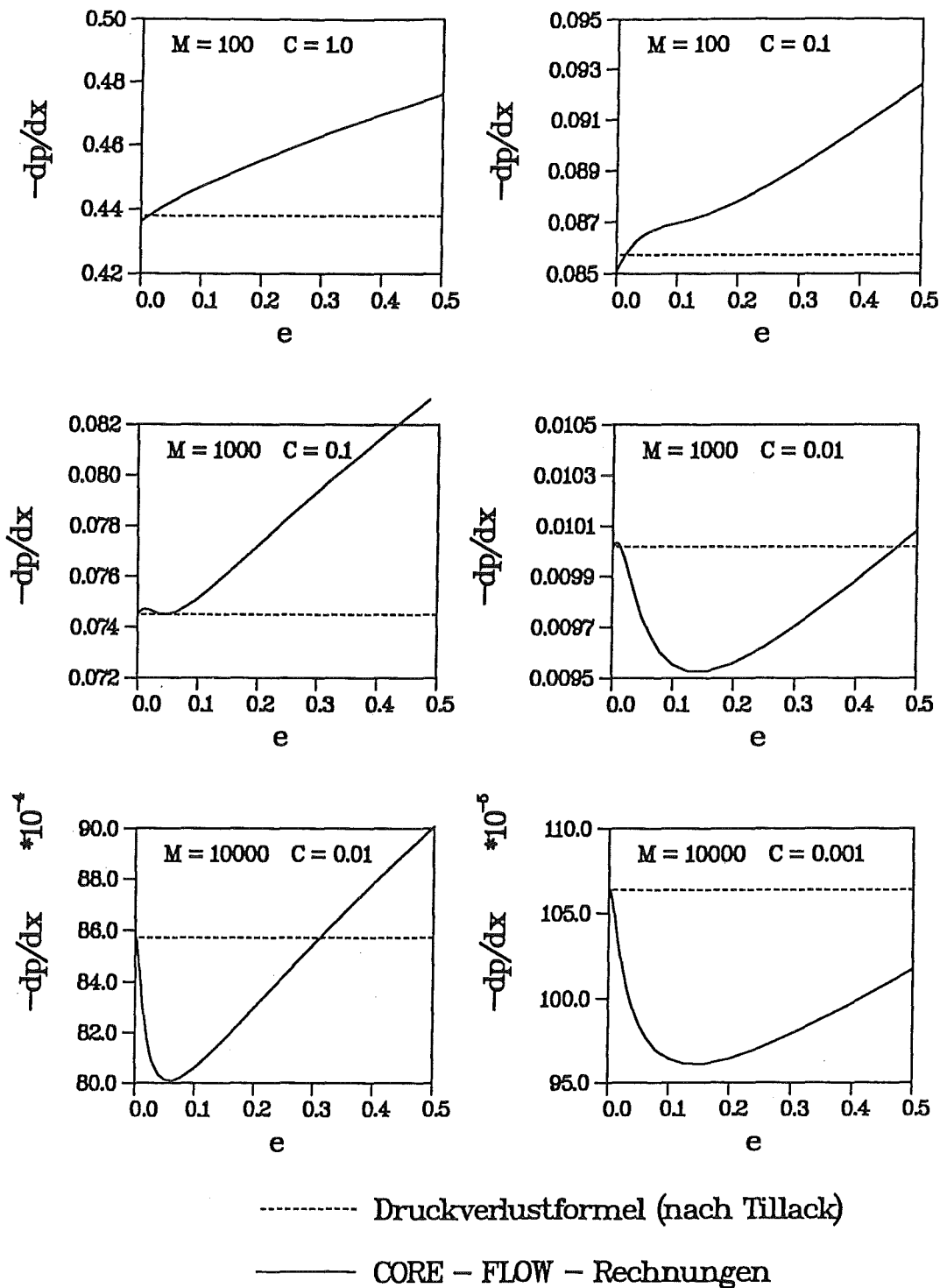


Abb. 7.5 MHD – Druckgradient in einem leicht elliptisch deformierten Rechteckkanal mit einem verbesserten Ansatz für die Leitfähigkeit der Seitenschichten

Die beiden Ansätze (7.14, 7.15) erfüllen bereits die Randbedingungen

$$\phi_\delta(s^1 \rightarrow \infty) = 0, \quad v_\delta^2(s^1 \rightarrow \infty) = 0 \quad (7.16)$$

in großem Abstand zur Seitenwand. Durch Anpassen an die Randbedingungen

$$\phi_\delta(s^3 = \pm 1) = 0 \quad (7.17)$$

werden β_n und α_n festgelegt,

$$\beta_n = \frac{1}{2}n\pi, \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{1}{2}}\beta_n. \quad (7.18)$$

Die zugehörigen Funktionen F_n sind

$$\begin{aligned} F_n(\beta_n s^3) &= \sin(\beta_n s^3), \\ F_n(\beta_n s^3) &= \cos(\beta_n s^3), \end{aligned} \quad \text{für } n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \quad (7.19)$$

Für $s^1=0$ muß das Potential der Seitenschichten stetig in das Potential der Seitenwand übergehen. Dies führt zu

$$\phi_{Sw} - \phi_C = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} F_n(\beta_n s^3). \quad (7.20)$$

Die A_{1n} sind somit die Fourier – Koeffizienten der Differenz zwischen Seitenwandpotential ϕ_{Sw} und Corepotential ϕ_C . Die Haftbedingung an der Seitenwand $v_\delta^2(s^1=0) = -v_C^2$ liefert die Bedingung zur Bestimmung von A_{2n} .

$$-v_C^2 = \frac{h_C}{B\bar{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (A_{2n} - A_{1n}) F_n(\beta_n s^3). \quad (7.21)$$

Hier sind die $\alpha_n (A_{2n} - A_{1n})$ proportional den Fourier – Koeffizienten der negativen Core – Geschwindigkeit. Somit sind alle Koeffizienten zur Berechnung der Geschwindigkeiten in den Seitenschichten bekannt. In Abb. 7.6 sind Geschwindigkeitsprofile bei einer Hartmann – Zahl von $M = 1000$ für verschiedene Wandleitparameter dargestellt. Man erkennt entlang der magnetfeldparallelen Seitenwand starke Geschwindigkeitsüberhöhungen, im Kern jedoch eine konstante Verteilung. Die Ursache dieser in hydrodynamischen

Strömungen nicht zu erwartenden Geschwindigkeitsprofile liegt in dem Verlauf der elektrischen Ströme begründet. Im Strömungskern werden elektrische Ströme senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur Strömungsrichtung induziert. Im Falle perfekt leitender Kanalwände treten die Ströme unmittelbar in diese Wände ein, über die sich der Stromkreis schließt. Die der Strömungsrichtung entgegengesetzte Lorentzkraft ist nahezu im gesamten Fluidbereich wirksam, auch in den Seitenwandgrenzschichten. Bei schlechter leitenden Kanalwänden tritt nicht der gesamte Strom in die Seitenwände ein. Ein Teil fließt tangential an den Seitenwänden entlang. Hierdurch wird die zum Magnetfeld senkrechte Stromkomponente reduziert, was einen geringeren Strömungswiderstand und deshalb höhere Strömungsgeschwindigkeiten in den Seitenschichten zur Folge hat. Für sehr schlecht leitende Kanalwände wird die gesamte Stromdichte so stark reduziert, daß der Unterschied zwischen Lorentzkraften im Kern und Reibungsverlusten in den Seitenschichten stark abnimmt. Die Geschwindigkeitsüberhöhungen nehmen deshalb auch für $c \rightarrow 0$ ab.

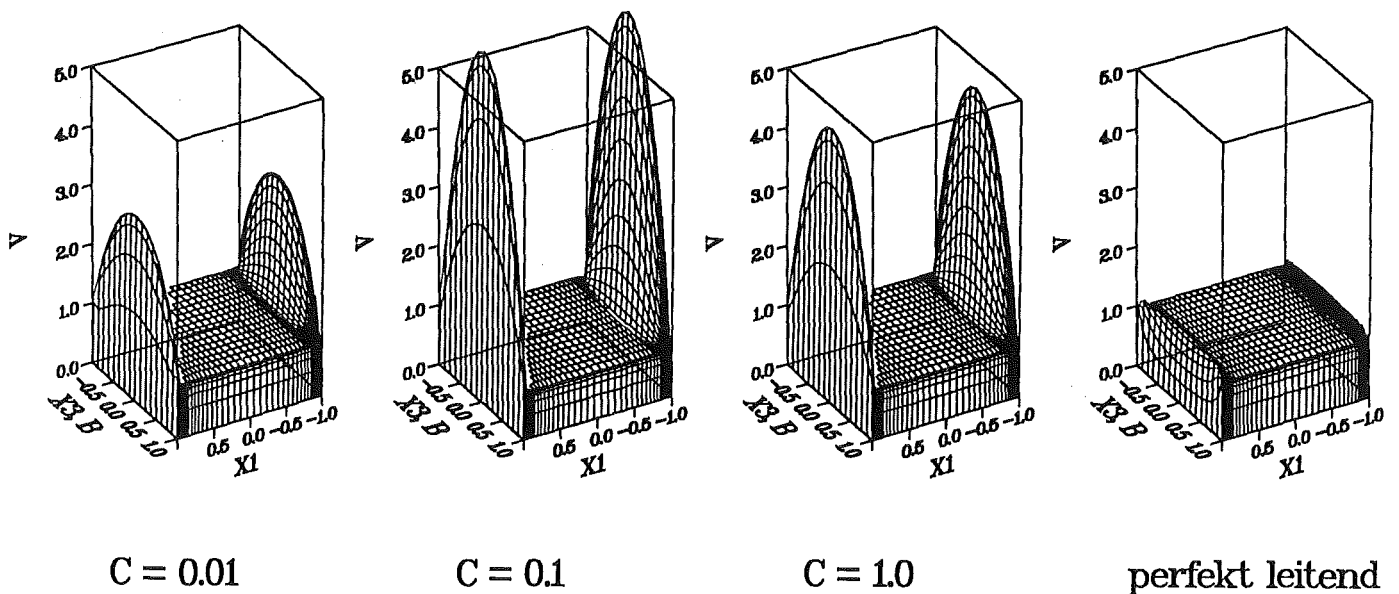


Abb. 7.6 MHD – Geschwindigkeitsprofile in einem elliptisch approximierten Rechteckrohr, bei verschiedenen Wandleitfähigkeiten, $M = 1000$.

Die Approximation der seitlichen Geschwindigkeitsüberhöhungen wird anhand des *USSR, USA, FRG* – Benchmarkproblems (MHD – Workshop St. Petersburg 1991) überprüft. Hierbei handelt es sich um einen Rechteckkanal mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Seitenwände. Der Kanal mit den Abmessungen $h = 1.37$, $b = 1$, besitzt den Wandleitparameter $c = 0.044$. Eine Seitenwand ist besser (bzw. schlechter) leitend ausgeführt. $c_1 = 2c$ (bzw. $c_1 = 0.5c$). Die für eine Hartmannzahl von $M = 2850$ ermittelten Geschwindigkeitsspitzen zeigen eine gute Übereinstimmung mit relativen Abweichungen von weniger als 1% (4%), verglichen mit Ergebnissen, die während dieses Workshops von Sidorenkov (USSR) gezeigt wurden. Die Übereinstimmung mit Ergebnissen Huas (USA) fällt hingegen etwas schlechter aus, was jedoch durch seine vereinfachenden Annahmen über elektrische Ströme innerhalb der Seitenschichten zu erklären ist. Zwei typische Geschwindigkeitsprofile solcher Vergleichsrechnungen sind in *Abb. 7.7* zu sehen.

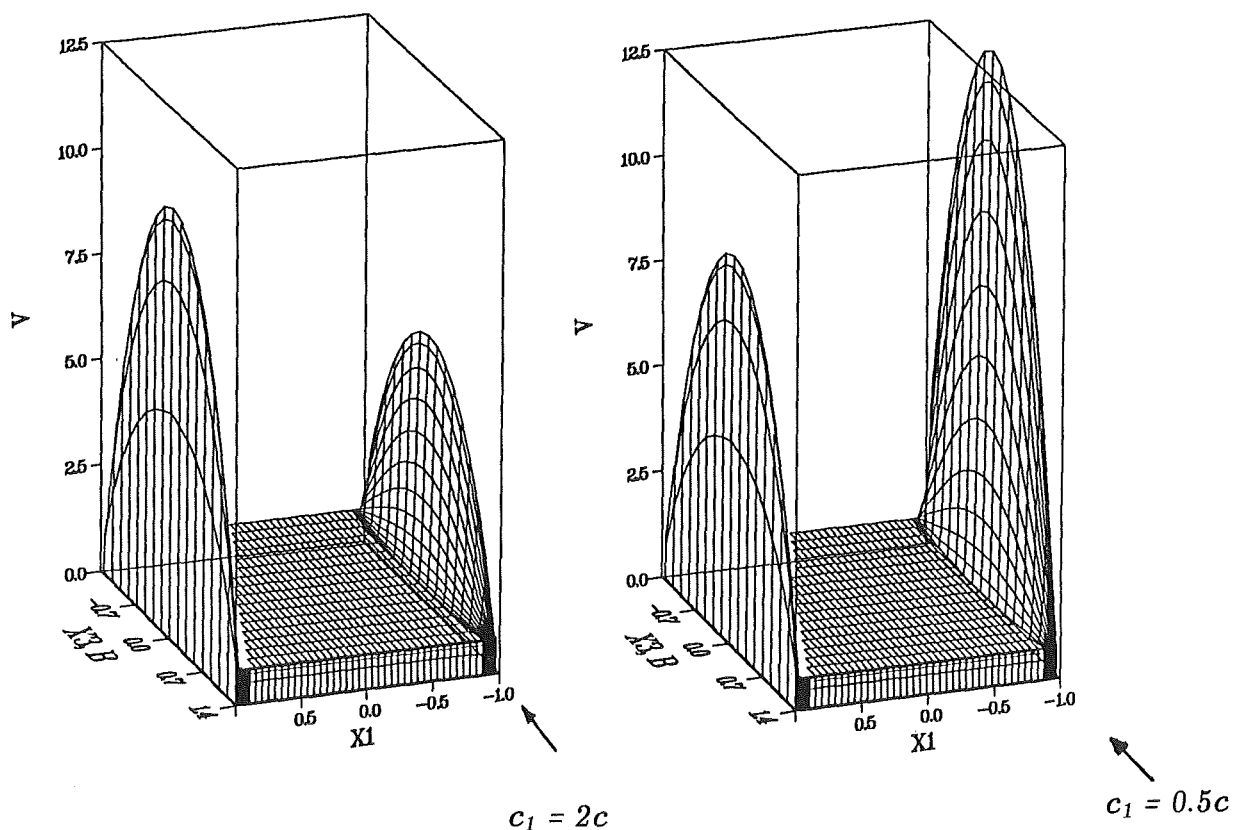


Abb. 7.7 MHD – Geschwindigkeitsprofile entsprechend dem *USSR/USA/FRG* Benchmarkproblem (Workshop 1991) $h = 1.37$, $b = 1$, $e \rightarrow 0$, $M = 2850$, $c = 0.044$

Zusammenfassend erhält man das Ergebnis, daß eingelaufene Strömungsverhältnisse in Rechteckkanälen mit zwei magnetfeldparallelen Seitenwänden durch einen leicht elliptisch ausgebeulten Kanal recht gut approximiert werden. Diese Lösungen werden im Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ angenommen. Geschwindigkeitsprofile innerhalb der Seitenschichten werden durch eine detaillierte Betrachtung der Strömungsverhältnisse in Seitenwandnähe ermittelt. Die vorgestellten Beispiele zeigen, daß der Geschwindigkeitsverlauf entlang der Seitenwand durch die Wahl der Wandleitfähigkeit festgelegt wird. Wird lediglich die Leitfähigkeit der Seitenwände variiert, so erhält man beachtliche Veränderungen der maximalen Seitenschichtgeschwindigkeiten bei relativ kleinen Änderungen des Gesamtdruckverlustes. Durch eine gezielte Wahl der Leitfähigkeiten kann somit aktiv auf das Strömungsgeschehen eingewirkt werden, um beispielsweise den konvektiven Wärmetransport entlang von Seitenwänden zu optimieren.

7.2 Dreidimensionale Ergebnisse

7.2.1 Elliptisch approximierter isolierter Rechteckkanal im variablen Magnetfeld

Als erstes dreidimensionales Anwendungsbeispiel wird eine MHD – Strömung in einem isolierten Rechteckkanal von konstantem Querschnitt senkrecht zu einem entlang der Strömungsrichtung variablen Magnetfeld vorgestellt. Der Betrag der dimensionslosen magnetischen Induktion fällt von dem Wert $B(x < -1) = 1$ am Eintritt auf den Wert $B(x > 1) = 0.5$ ab. Die zwei magnetfeldparallelen Seitenwände werden durch schwache elliptische Deformationen approximiert. Im Bereich starker Magnetfeldgradienten wird der größte Teil der Strömung in seitliche Schichten verdrängt (siehe Abb. 7.8). Im Kern liegt an dieser Stelle praktisch stagnierendes Fluid vor, das den Kanalquerschnitt größtenteils blockiert. Die Ursache dafür ist in dreidimensionalen elektrischen Strömen begründet, die nun entlang der Kanalachse und in Bereichen mit kleineren magnetischen Feldstärken eine zusätzliche Kurzschlußmöglichkeit finden. Diese ermöglichen in Bereichen hoher Feldstärken größere Stromflüsse und somit größere, die Strömung hemmende Lorentz – Kräfte. Man erkennt dies an den starken Druckverlusten im zentralen Strömungsbereich (Abb. 7.9). Ein Teil dieser Verluste kann im Bereich kleinerer Feldstärken durch Lorentzkräfte zurückgewonnen werden. Trotzdem verbleiben bei einer Strömung im variablen Magnetfeld erhebliche zusätzliche dreidimensionale Druckverluste Δp_{3d} , die denen einer eingelaufenen MHD – Strömung über eine dimensionslose Kanallänge von $l = \Delta l_{3d} \sim O(\sqrt{M})$ vergleichbar sind.

$$\Delta p_{3d} = \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{2d} \Delta I_{3d}. \quad (7.22)$$

Elektrische Ströme, die im Strömungskern induziert werden, treten in die Seitenschichten ein, in denen sie in axialer Richtung zu niedrigeren Potentialen fließen. Der von ihnen zu überwindende elektrische Widerstand wird dabei im wesentlichen von der Dicke der Seitenschichten bestimmt, was die Größenordnung $O(1/\sqrt{M})$ der zusätzlichen Druckverluste erklärt.

In elektrisch leitenden Kanälen hingegen findet man dreidimensionale Druckverluste als Funktion des Wandleitparameters c ($\Delta I_{3d} = 0$ für $c = \infty$).

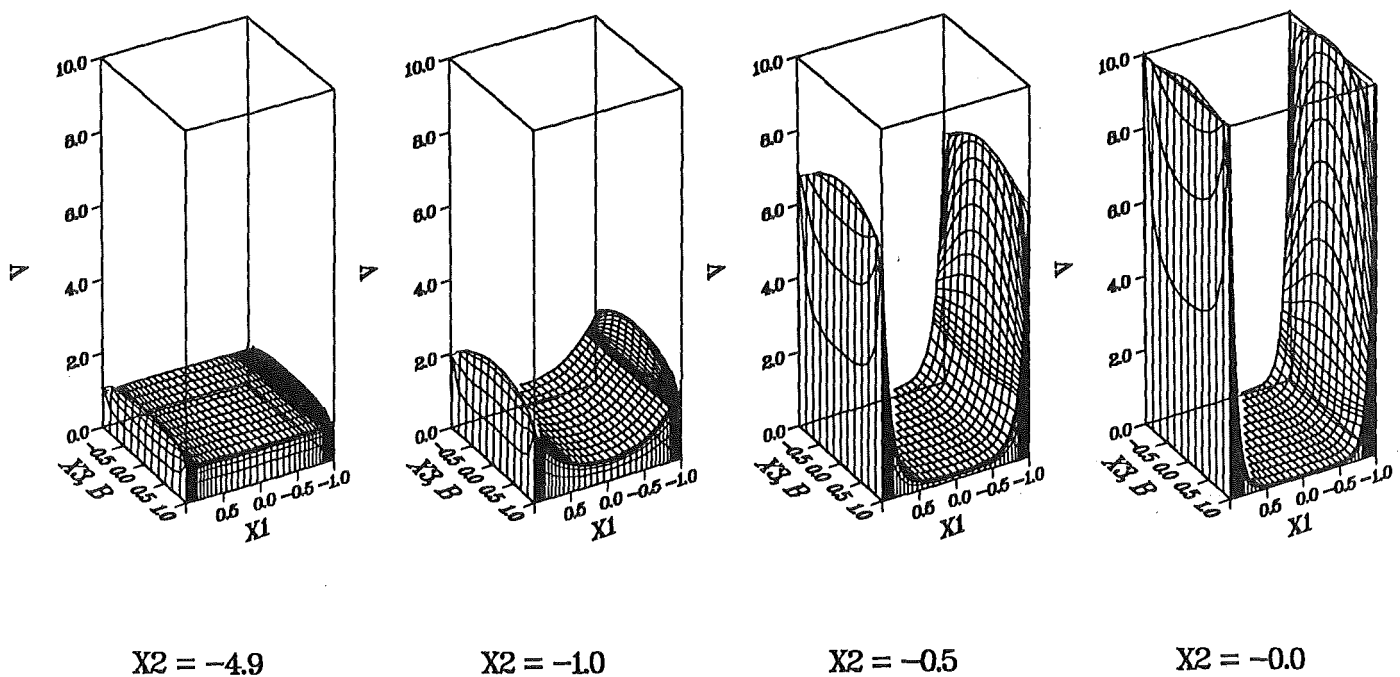


Abb. 7.8 3d - MHD - Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen axialen Positionen in einem isolierten Rechteckkanal bei lokal variablem Magnetfeld $B(x)$, $M = 1000$.

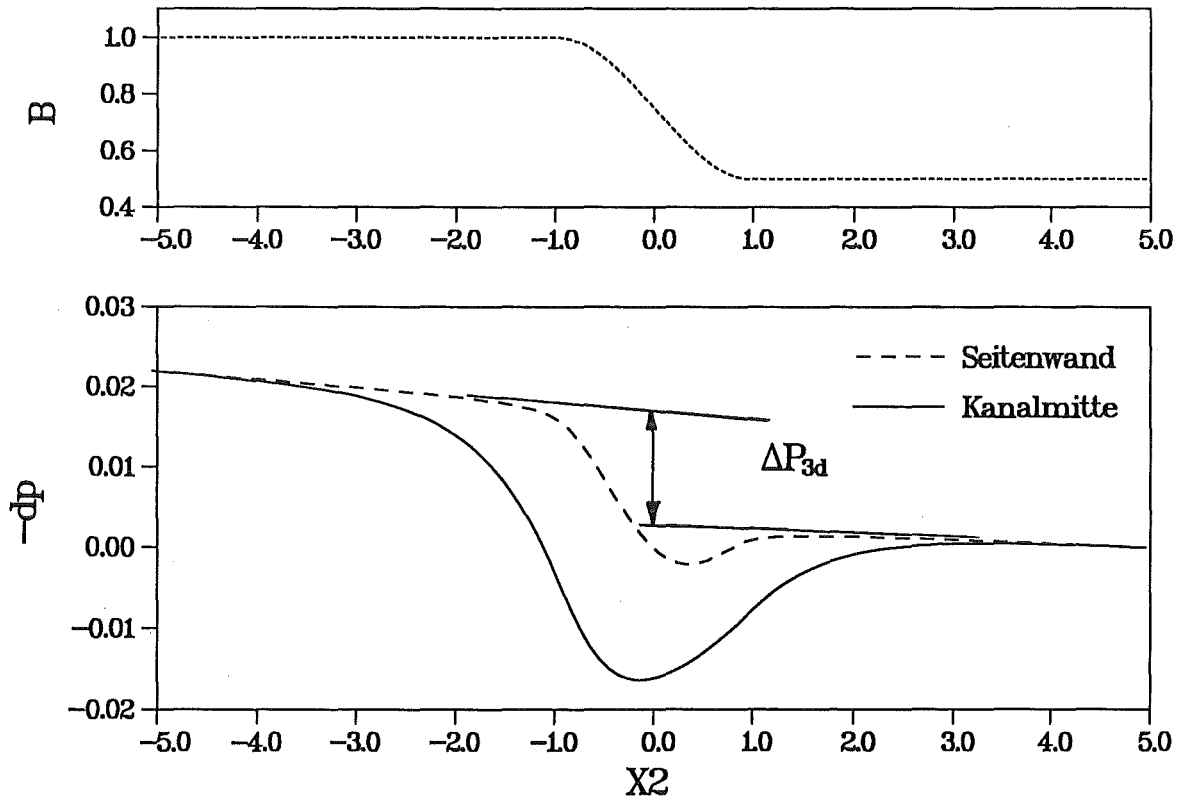


Abb. 7.9 Axialer MHD – Druckverlauf in einem isolierten Rechteckkanal bei lokal variablem Magnetfeld $B(x)$, $M = 1000$.

7.2.2 Gekrümmter, elliptisch approximierter Rechteckkanal im konstanten Magnetfeld

Ein wichtiges Bauelement eines Flüssigmetallblankets stellt der 180° Krümmer dar, der eine Strömungsumlenkung in einer Ebene senkrecht zum angelegten Magnetfeld bewirkt. Solche Krümmer finden sowohl bei dem von KfK verfolgten selbstgekühlten Blanketkonzept mit radial-toroidaler Strömungsführung als auch in Alternativkonzepten mit reiner Poloidalströmung ihre Anwendung. Elektrisch leitende Krümmer von kreisförmigem Querschnitt wurden bereits von mehreren Autoren, z.B. von Walker 1986 behandelt. Dabei konnte keine merkliche Druckverlusterhöhung durch zusätzliche dreidimensionale Effekte gefunden werden. Der Druckverlust eines Krümmers mit Kreisquerschnitt entspricht etwa dem einer Geradrohrstrecke von gleichem Querschnitt und gleicher mittleren Kanallänge. Obwohl die Umlenkung auf den Gesamtdruckverlust keinen Einfluß hat, zeigen die Geschwindigkeitsprofile im Bereich der Umlenkung dennoch ein starkes dreidimensionales Strömungsverhalten. Im Bereich der Umlenkung stellt man an der inneren Kanalwand erhöhte Geschwindigkeiten fest. Die Geschwindigkeiten an der Kanalaußenwand sind abgesenkt. Die gleichen physikalischen Effekte können auch für Krümmer mit rechteckigem Querschnitt gefunden werden. Der betrachtete Rechteckquerschnitt wird hier ebenfalls durch eine kleine elliptische Deformation der Seitenwände approximiert. Das zunächst eingelaufene Geschwindigkeitsprofil verschiebt sich bei der Umlenkung der Strömung zunehmend in Richtung der inneren Kanalwand. Die Geschwindigkeit an der inneren Seitenwand erhöht sich im Bereich der Umlenkung um etwa den Faktor 2.5, während an der äußeren Kanalwand die Geschwindigkeit gegenüber eingelaufenen Verhältnissen halbiert wird. Ergebnisse einer umgelenkten MHD – Strömung sind in den Abbildungen *Abb.7.10* für eine Hartmannzahl von $M = 1000$ dargestellt. Linien konstanten Potentials sind in dieser Darstellung auf der gekrümmten Kanalgeometrie eingezeichnet. Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen Querschnitten demonstrieren die erheblichen Umverteilungen des strömenden Mediums. Ob allerdings die dargestellten Geschwindigkeitsprofile mit ihren enormen Überhöhungen für sehr enge Umlenkungen real existieren, kann mit dieser Methode der stationären, trägheitsfreien Theorie nicht beantwortet werden.

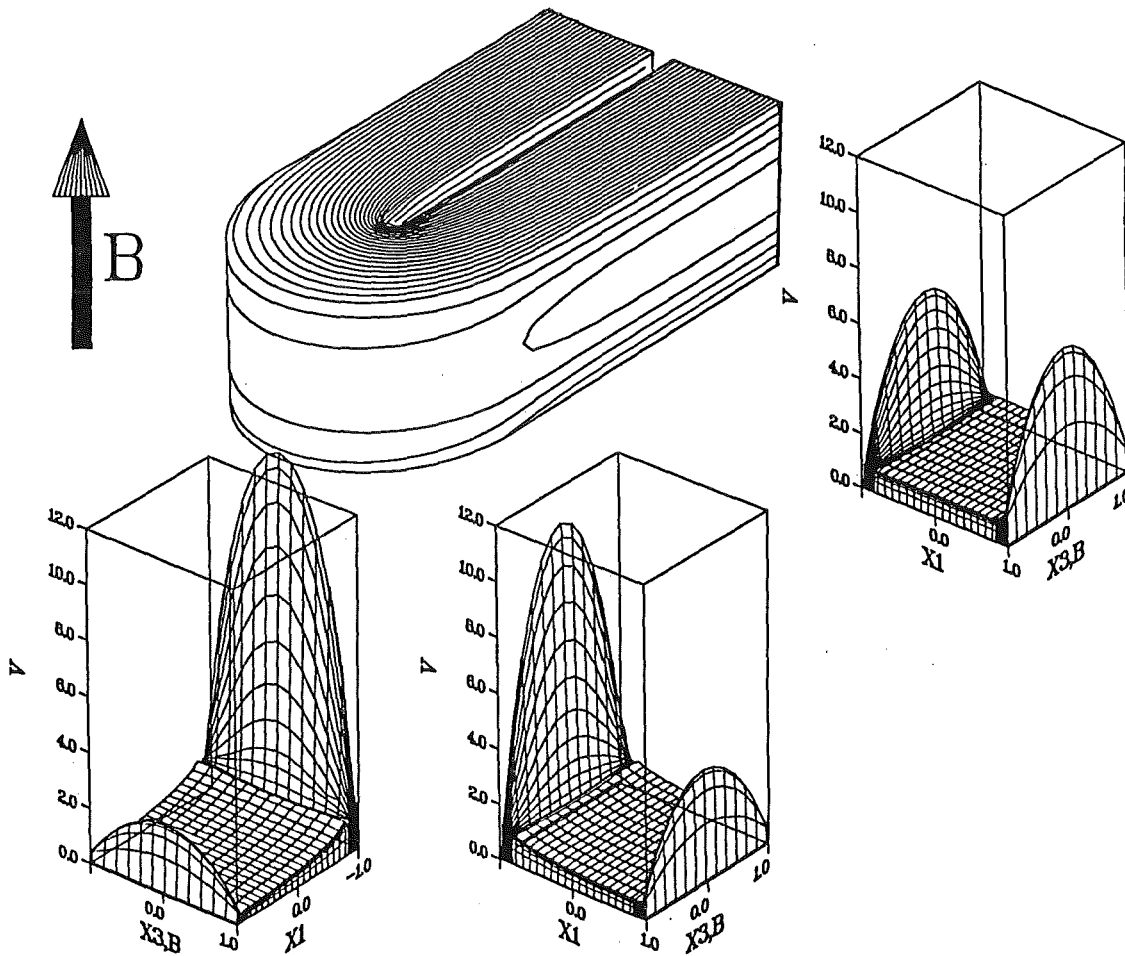
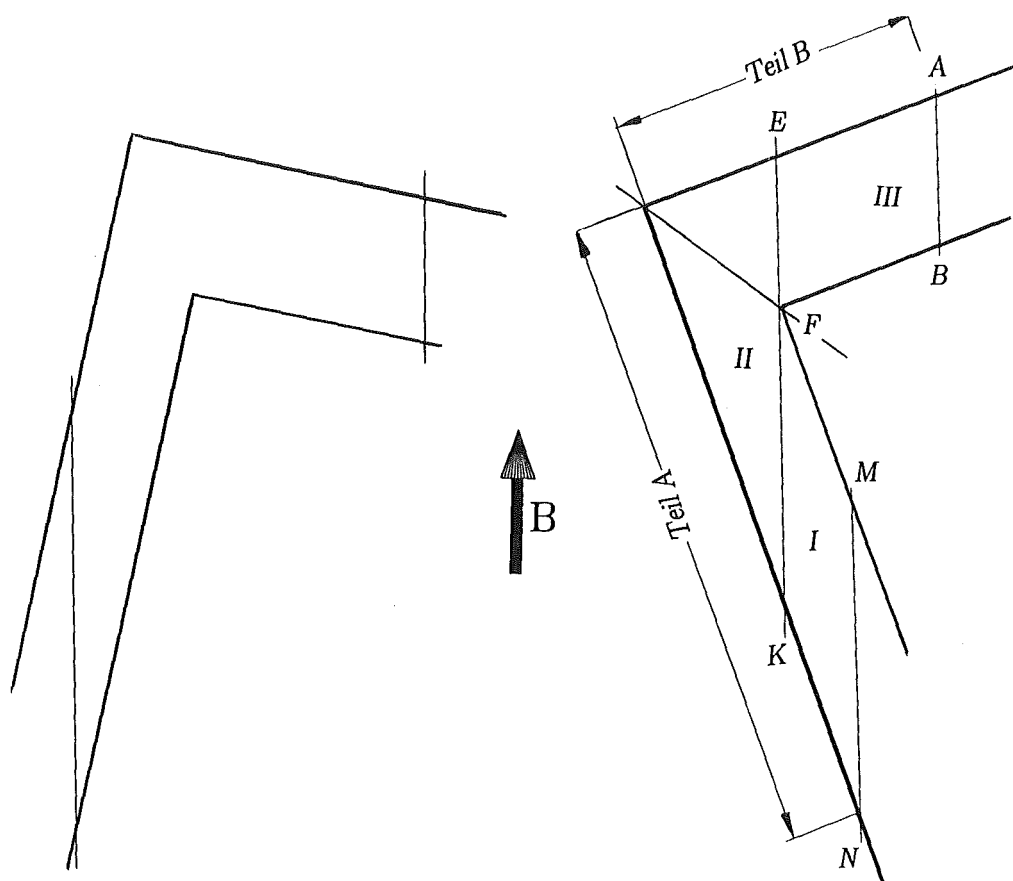


Abb. 7.10 3D MHD – Geschwindigkeitsprofile in einem leitenden, gekrümmten Rechteckkanal, Linien konstanten Potentials sind auf der Kanaloberfläche dargestellt. $M = 1000$, $c = 0.1$.

7.3 Dreidimensionale Ergebnisse in physikalischen Grenzbereichen

Neben dem zuvor besprochenen Krümmer mit einer Strömungsumlenkung in einer Ebene senkrecht zu magnetischen Feldlinien spielt der 90° Krümmer mit einer Umlenkung der Strömung in exakt magnetfeldparallele Strömungsrichtung im toroidalen Blanketkonzept eine der Schlüsselrollen. Im Gegensatz zu den meisten anderen Reaktorkomponenten kann dieses Problem nicht direkt mit dem entwickelten Berechnungsverfahren behandelt werden, da im toroidalen Bereich die Strömung keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu Magnetfeldlinien besitzt. Experimentelle Untersuchungen zu diesem Problem erweisen sich ebenfalls als schwierig, da in exakt magnetfeldparallelen Kanalstücken sehr große Einlaufängen erwartet werden, die in verfügbaren Magneten keinen Platz

finden. Aus diesen Gründen wird die Geometrie leicht geneigt, so daß an keiner Kanalwand die Normalkomponente der magnetischen Induktion verschwindet (Siehe dazu *Abb.7.11a* und *Abb.7.11b*). Betrachtet wird hier ein Kanal mit rechteckigem Querschnitt, dessen Seitenwände für die numerische Behandlung schwach elliptisch deformiert werden. Die Strömungsumlenkung um 90° erfolgt scharfkantig. Bei einer Neigung des Kanals entsprechend *Abb.7.11a* kann das vorgestellte numerische Rechenprogramm ohne Schwierigkeiten direkt angewandt werden, da jede magnetische Feldlinie die Kanalwand in höchstens zwei Punkten durchstößt. Auf die Lösung dieses Problems wird deshalb an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Stattdessen wollen wir uns hier auf das Strömungsproblem entsprechend *Abb.7.11b* konzentrieren, das interessantere Strömungsformen im Umlenkbereich erwarten läßt.



a) vorwärts –

b) rückwärts – Umlenkung

Abb 7.11 Scharfkantig umgelenkter Rechteckkanal

Man erwartet entlang der Magnetfeldlinie *EFK* einen beachtlichen Volumenstrom in einer relativ dünnen Schicht, da sich das Fluid entlang von magnetischen Feldlinien nahezu kräftefrei bewegen kann. Alle anderen Bewegungsrichtungen unterliegen den sehr starken, die Bewegung hemmenden Lorentzkräften. Ob dann allerdings Trägheitskräfte und Reibungskräfte im Innern des Fluids vernachlässigbar sind, kann nicht unmittelbar beantwortet werden. Trotzdem werden in der weiteren Rechnung diese Effekte ignoriert, um mit dem erstellten numerischen Rechenprogramm wenigstens annähernd den physikalischen Sachverhalt beschreiben zu können. Versuche, dieses Problem mit den vollständigen Gleichungen zu beschreiben, wurden bereits von Kunugi, Tillack und Abdou 1991 erfolgreich durchgeführt. Ihre numerischen Ergebnisse beschränken sich allerdings auf Strömungen mit Hartmannzahlen bis $M \approx 200$. Ergebnisse bei höheren Hartmann – Zahlen sind wegen zu großem Speicherbedarf oder wegen zu großer Rechenzeiten durch vollnumerische Lösungen bisher nicht zu erhalten. Für blanketrelevante MHD – Strömungen mit Hartmann – Zahlen von $M \approx 10000$ und recht großen Interaktionsparametern von $N \approx 1000$ verspricht deshalb die trägheitsfreie Approximation die größten Erfolgchancen. Die Annahme der Trägheitsfreiheit wird später durch einen Vergleich der numerisch bestimmten Lösung mit experimentellen Befunden bestätigt.

MHD – Strömungen in einer Geometrie entsprechend *Abb.7.11b* können mit dem erstellten numerischen Rechenprogramm nicht direkt behandelt werden, da Feldlinien rechts der Position *EFK* den Kanal in mehr als zwei Punkten schneiden. Daraus resultiert eine Mehrdeutigkeit der gewählten Transformationsgleichung, die entlang einer Magnetfeldlinie höchstens zwei Kanalwände (obere und untere Wand) zulässt. Moon, Hua und Walker (1991) umgehen dieses Problem, indem sie den Krümmer in drei Teilstücke unterteilen (Teil I, II, III), für die jeweils die Core – Lösungen ermittelt werden können. Die Gesamtlösung ergibt sich dann durch Einführung geeigneter Kopplungsbedingungen an den Grenzflächen. Diese Grenzflächen liegen jedoch alle auf der Linie *EFK*, entlang der ein nicht zu vernachlässigender Volumenstrom zu erwarten ist. Im Gegensatz zu ihrem Teilungsvorschlag zerlegen wir den Krümmer bei der vorliegenden Berechnung entlang der Diagonalen in nur zwei Teilstücke (Teil A und B). Dies hat den Vorteil, nur an einer Grenzfläche Kopplungsbedingungen einführen zu müssen. Außerdem liegt der erwartete erhöhte Volumenstrom entlang der Linie *EFK* nun nicht in unserer Grenzfläche, sondern führt durch sie hindurch. Dies kann auf einfache Weise durch die Kopplungsbedingung für die normal zur Kopplungsfläche zeigenden Geschwindigkeitskompo

nenten berücksichtigt werden:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_A = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_B \quad (7.23)$$

Fluid, das den Kanalteil A über die Kopplungsfläche verläßt, muß auf der gegenüberliegenden Seite in den Teil B des Kanals eintreten. Die gleiche Bedingung muß selbstverständlich auch für die elektrischen Ströme gelten:

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_A = -(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_B \quad (7.23)$$

Aufgrund der Stetigkeit aller gesuchten Größen entlang von magnetischen Feldlinien gilt weiterhin die Kopplungsbedingung für den Druck p an der Kopplungsfläche,

$$p_A = p_B \quad (7.24)$$

sowie für die Oberflächenpotentiale

$$\phi_A = \phi_B \quad (7.25)$$

Durch die Aufteilung der Rechengebiets und durch Verwendung der plausiblen Kopplungsbedingungen Gl.(7.23–7.25) wird das Strömungsproblem für die trägheitsfreie Theorie zugänglich.

Mit dem zuvor beschriebenen numerischen Rechenprogramm werden zur Geometrie entsprechend der Abbildung *Abb. 7.11b* Berechnungen der Druck – und Oberflächenpotentiale durchgeführt. Dabei wird ein Wandleitparameter von $c = 0.052$ gewählt. Gegenüber diesem Wert des Wandleitparameters sind die Hartmann – Schichten der Dicke $\delta \sim 1/M$ für den Stromrückfluß bei großen M – Werten vernachlässigbar. Reibungseffekte bleiben deshalb in diesem Beispiel auch an den Kanalwänden unberücksichtigt.

Ergebnisse in Form von Geschwindigkeitsverteilungen und Oberflächenpotentialen sind in der Abbildung 7.12 dargestellt. Linien konstanten Potentials überziehen die Oberfläche der Kanalwand. Bei den gezeigten Geschwindigkeitsprofilen im Core – Bereich der magnetischen Querschnitte AB , EFK und MN handelt es sich um die zu diesen Querschnitten senkrechte Komponente der Geschwindigkeit, oder anders ausgedrückt, um den

durch diese Querschnitte hindurchtretenden Volumenstrom. Auf die unanschauliche Darstellung von Geschwindigkeiten in den Seitenschichten, die für große Hartmann – Zahlen sehr dünn werden, wird hier verzichtet.

Im Querschnitt *AB* liegt eine eingelaufene MHD – Strömung vor, bei der die Strömung fast senkrecht zu magnetischen Feldlinien verläuft. Im Strömungskern ist hier das flache Geschwindigkeitsprofil einer eingelaufenen MHD – Strömung mit $v_{core} \approx 0.75$ zu erkennen. Dieser Wert stimmt mit dem von Tillack und McCarthy 1989 angegebenen Wert entsprechend dem Kernströmungsmodell überein. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit bezüglich des größeren magnetischen Querschnitts *MN* besitzt entsprechend niedrigere Werte der Kerngeschwindigkeit. Auch hier liegen eingelaufene Strömungsverhältnisse vor. Nähern wir uns, ausgehend vom Querschnitt *MN* kommend, der magnetischen Ebene *EFK*, so stellt man eine Verlagerung der Strömung in seitliche Bereiche fest. Im Querschnitt *FK* erkennt man an der Kanalaußenwand (untere Kanalwand im Kanalteil *A*) ein in die Seitenschichten gedrängtes Geschwindigkeitsprofil, das immer noch in die Hauptströmungsrichtung des Teilkanals *A* zeigt. Dies erkennt man an den negativen Geschwindigkeitskomponenten normal zur magnetischen Querschnittsfläche *EFK* an der Kanalaußenwand. An der Innenwand des Teilkanals *A* (oben) ist deutlich eine Rückströmung zu erkennen. Zwischen Innen– und Außenwand verläuft das Geschwindigkeitsprofil linear. Im zweiten Kanalstück ist das Geschwindigkeitsprofil in ähnlicher Weise deformiert. Rückströmungen treten hier jedoch nicht auf. Die zur magnetischen Querschnittsfläche *EFK* normalen Geschwindigkeitsanteile zeigen alle in positive Richtung. Eine Massenbilanz im Querschnitt *EFK* bestätigt, daß der über den Querschnitt *FK* in den Eckenbereich einfließende Volumenstrom sich mit dem ausfließenden Volumenstrom bei *EF* gerade aufhebt.

Hunt und Holroyd (1977) äußern die Befürchtung, daß im Eckbereich einer umgelenkten Strömung praktisch stagnierendes Fluid existieren könnte. Die vorliegenden Ergebnisse zeigen dieses Verhalten für einen geneigten Kanal nicht. Zwar wechselt ein beachtlicher Teil des Volumenstroms direkt entlang des Querschnitts *EFK* vom ersten zum zweiten Kanalteil, trotzdem verbleibt jedoch ein Anteil, der entlang der unteren Kanalwand zur Ecke hin und an der oberen Kanalwand wieder zurück führt. Zwischen der oberen und unteren Kanalwand verläuft dabei das Geschwindigkeitsprofil linear, zu den Seitenschichten hin ergibt sich eine parabolische Verschiebung (siehe Geschwindigkeitsprofil im Querschnitt *GJ*). Die oben beschriebenen Umverteilungen des Volumenstroms ergeben sich hauptsächlich durch dreidimensionale elektrische Ströme, die im Umlenkbereich

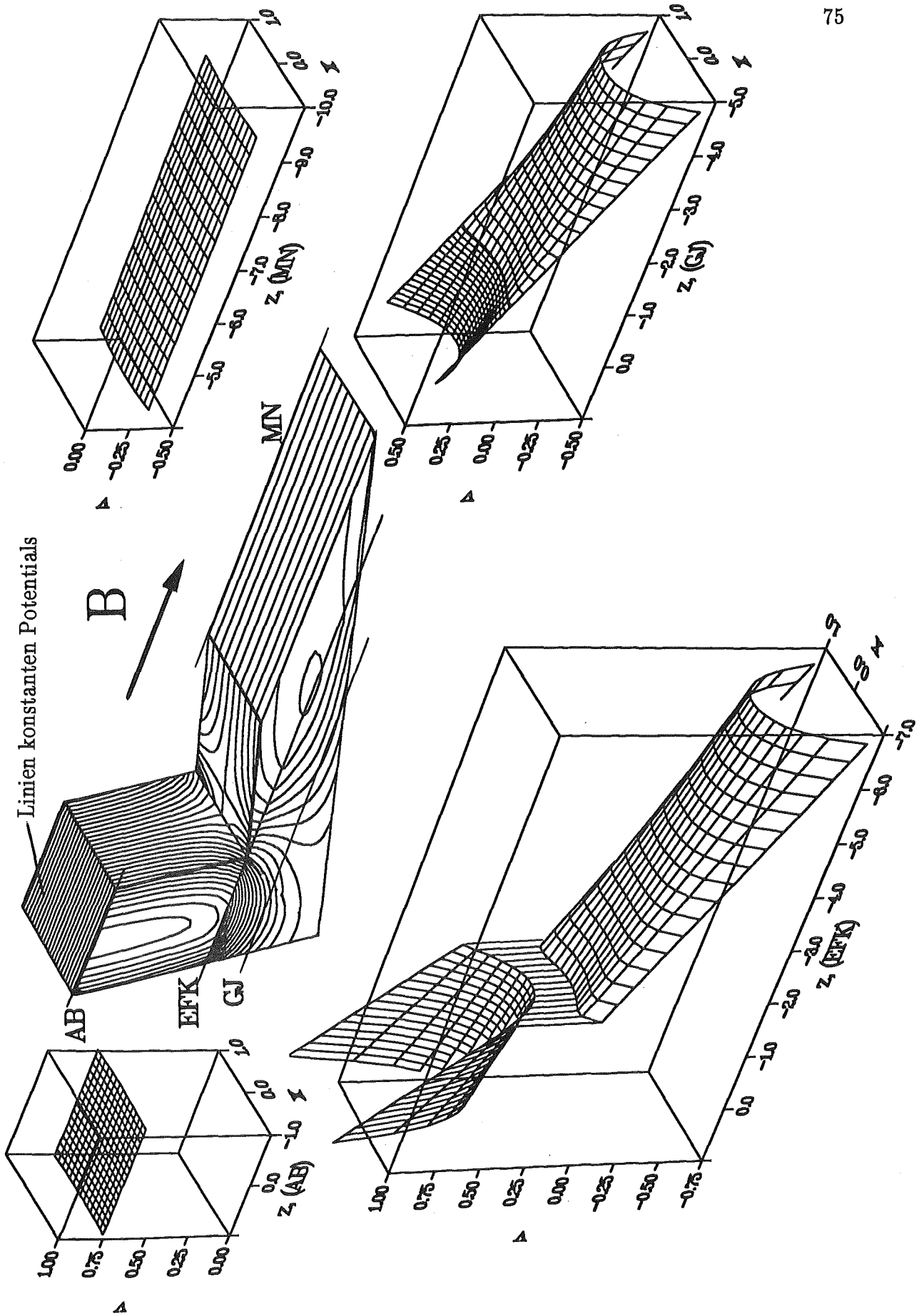


Abb. 7.12 Scharfkantige Umlenkung einer MHD - Strömung in einem Rechteckrohr

zusätzliche Lorentzkräfte hervorrufen. Als wichtiges Ergebnis dieser Rechnungen ist festzustellen, daß in einem zur Magnetfeldrichtung leicht geneigten Krümmerteil weder in der äußeren Ecke des Krümmers noch entlang der unteren Kanalwand des ersten Kanalteils Bereiche mit stagnierendem Fluid auftreten. Eine Kühlung aller Kanalwände durch strömendes Flüssigmetall erscheint deshalb im ganzen Krümmerbereich möglich.

Die Annahme der Trägheitsfreiheit erscheint bei einer Umlenkung um eine scharfe Kante zunächst zweifelhaft. Daß diese Annahme dennoch gerechtfertigt ist, zeigt ein Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Werten der Oberflächenpotentiale und Drücke (*MEKKA* – Experiment des Kernforschungszentrums Karlsruhe, Barleon *et al.* 1992). Die Theorie der trägheitsfreien Approximation stützt sich auf die Berechnung von Oberflächenpotentialen und Druckwerten, aus denen anschließend mit Hilfe analytischer Beziehungen auf das Innere des Fluidbereichs geschlossen werden kann. Gleichzeitig sind diese beiden Größen auch experimentell leicht zugänglich und liefern deshalb eine unmittelbare Vergleichsmöglichkeit zwischen Theorie und Praxis.

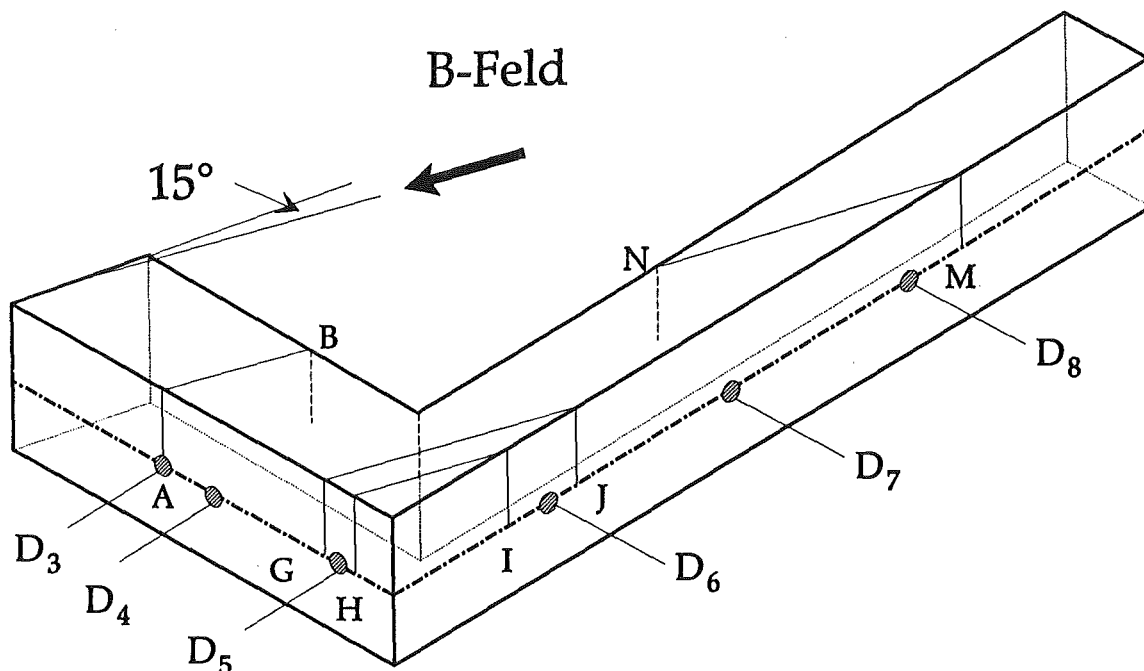


Abb. 7.13 Lage der Potentialmeßebenen bezüglich der Gesamtgeometrie

Potentialmessungen werden entlang Umfangslinien (AB, GJ, IH, MN) bestimmter magnetischer Querschnitte durchgeführt. Ihre Lage bezüglich der Gesamtgeometrie ist in *Abb. 7.13* eingezeichnet. Die *Abbildung 7.14* zeigt einen Vergleich der gemessenen Potentialwerte in Form von Messpunkten mit dem theoretisch ermittelten Potentialverlauf. Es sind jeweils Messungen für verschiedene Interaktionsparameter dargestellt, um das asymptotische Verhalten für $N \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen, was im Grenzfall der verwendeten trägheitsfreien Theorie entspricht. Der Vergleich der Potentiale bei AB und MN soll hierbei sicherstellen, daß die an die Theorie gestellten Randbedingungen einer voll ausgebildeten MHD – Strömung trotz der relativ kurzen Einlaufängen auch experimentell realisiert werden können. Man erkennt am Umfang AB , daß die gemessenen Potentialwerte für wachsende Interaktionsparameter gegen die berechnete Lösung des trägheitsfreien Problems streben. Auch entlang des Umfangs MN ist die Potentialrandbedingung gut erfüllt. Am Umfang GJ , im Bereich der Umlenkung, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment immer noch ausgezeichnet. Nähern wir uns jedoch der äußeren Ecke, so wird der Verlauf des elektrischen Potentials nur noch qualitativ durch die Rechnung erfaßt. Obwohl die absolute Differenz zwischen Experiment und Rechnung hier von gleicher Größenordnung ist wie die im Querschnitt AB , unterscheiden sich Rechnung und Experiment im Querschnitt IH relativ gesehen erheblich. Die Meßwerte zeigen an dieser Stelle selbst bei großen Interaktionsparametern noch eine deutliche N – Abhängigkeit. Obwohl für den Strömungskern bei großen Interaktionsparametern längst trägheitsfreie Verhältnisse vorliegen sollten, scheint dies im Bereich der umgelenkten Seitenschichten mit den dort herrschenden großen Geschwindigkeitsüberhöhungen selbst bei $N = 121300$ noch nicht der Fall zu sein. Die Abweichung zur Theorie wird in IH deshalb so deutlich, weil die durch Trägheitseffekte der Seitenschichten verursachten Potentialdifferenzen gegenüber denen der relativ langsamen Kernströmung an dieser Stelle nicht mehr vernachlässigbar sind. Tananayev (1989) findet trägheitsfreie umgelenkte MHD – Strömungen im Bereich mittlerer Hartmannzahlen bereits bei Interaktionsparametern $N < 1000$. Eine Extrapolation seiner vorgestellten Meßergebnisse hin zu blanketrelevanten Hartmann – Zahlen $M > 1000$ zeigt, daß wirklich trägheitsfreie Strömungszustände erst bei Interaktionsparametern $N > 10^4$ zu erwarten sind. Bezogen auf das Gesamtströmungsgeschehen sind die Abweichungen jedoch nicht besonders gravierend und haben auf globale Aussagen, die den Strömungskern betreffen (z.B. den Gesamtdruckverlust), kaum einen Einfluß. Da bereits bei GJ die Übereinstimmung zwischen theoretischen und experimentell ermittelten Potentialwerten sehr gut ist, bleibt der Bereich etwas schlechterer Übereinstimmung auf die unmittelbare Umgebung der äußeren Ecke beschränkt.

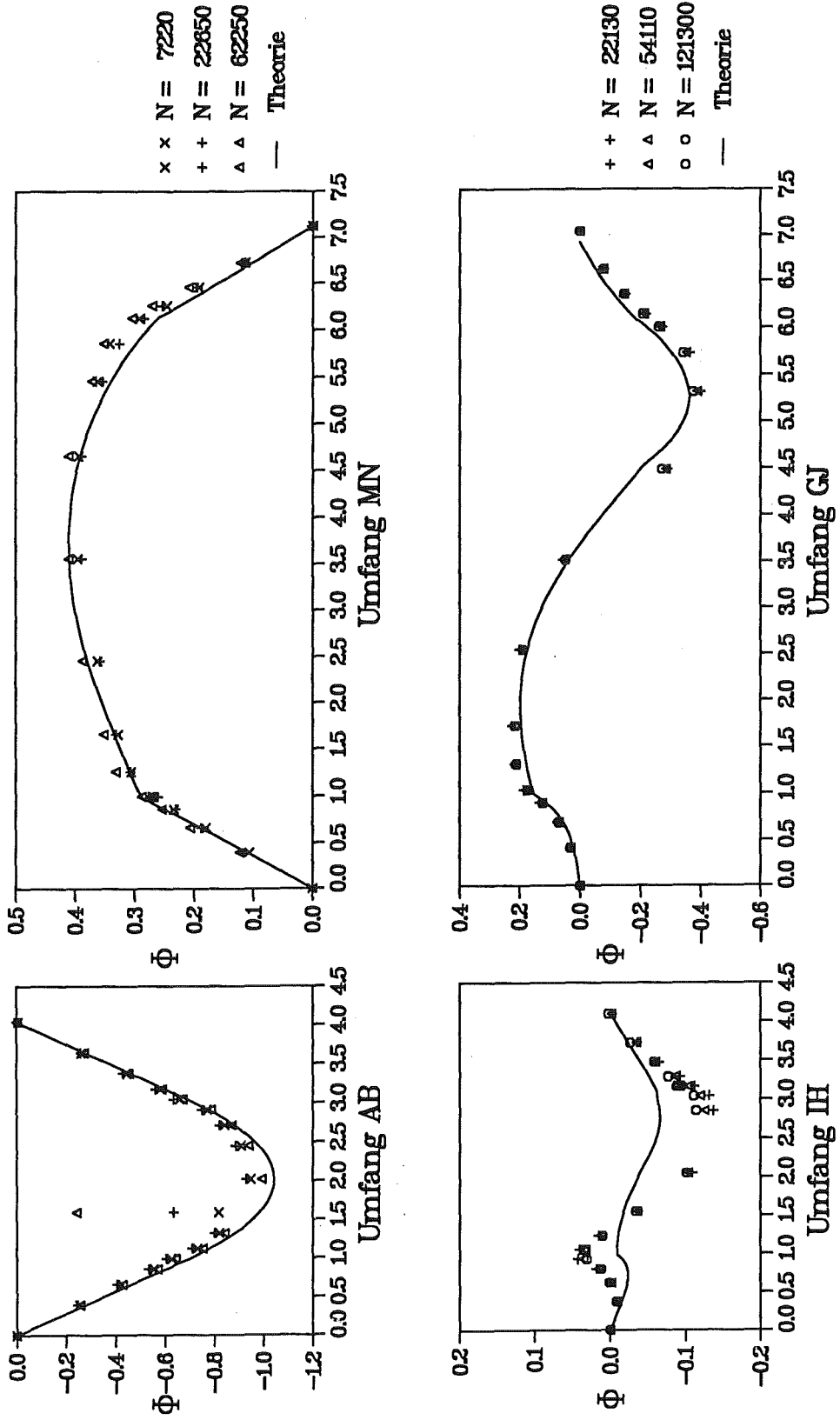


Abb. 7.14 Vergleich zwischen experimentell ermittelten Oberflächenpotentialwerten und dem theoretisch ermittelten Potentialverlauf an den magnetischen Umfanglinien AB, GJ, IH, MN

Da das gesamte trägheitsfreie MHD – Strömungsgeschehen durch Oberflächenpotentiale und Drücke gemeinsam bestimmt wird, erhalten wir erst Gewißheit über die Qualität der berechneten Lösung, wenn gemessene und berechnete Druckwerte ähnlich gut übereinstimmen, wie dies bei den zuvor betrachteten Potentialwerten der Fall war. Gemessene Druckwerte liegen an den Positionen D_3, D_4, \dots, D_8 auf der Symmetrielinie des Kanals vor, die in *Abb. 7.13* eingezeichnet sind. Berechnete und gemessene Druckwerte sind in *Abb. 7.15* als Funktion einer Umfangskoordinate l entlang der Symmetrielinie $D_8 \rightarrow D_3$ dargestellt. Da aus dem Experiment lediglich Differenzdrücke verfügbar sind, kann das absolute Druckniveau entsprechend der berechneten Druckkurve angepaßt werden. Die für verschiedene Interaktionsparameter dargestellten Druckmessungen zeigen im Bereich zwischen $D_5 - D_8$ eine sehr gute Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage. Da die verwendete Druckmeßtechnik bei dem größten dargestellten Interaktionsparameter an ihre Auflösungsgrenze stößt, können diese Werte bei einer Beurteilung der Lösungsqualität außer acht gelassen werden. Die übrigen Druckmeßwerte werden für zunehmende Interaktionsparameter mit der durchgeführten Rechnung sehr gut wiedergegeben. Die

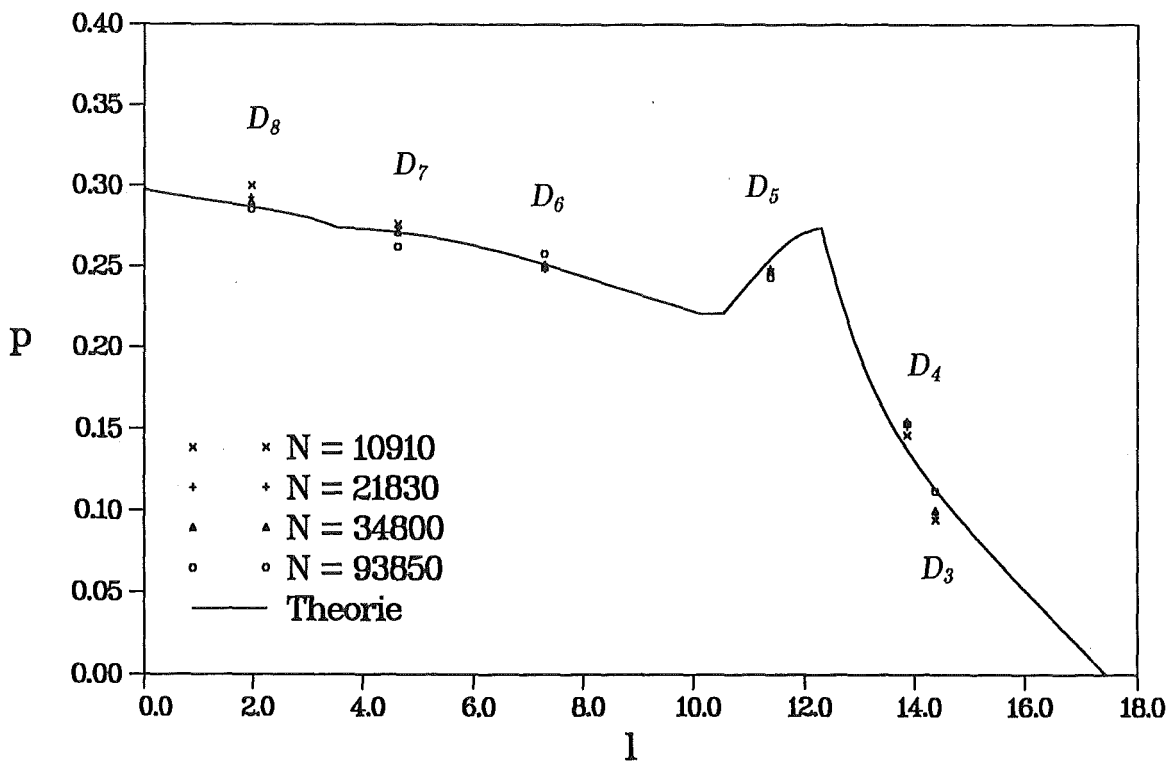


Abb. 7.15 Vergleich zwischen experimentell und theoretisch ermittelten Druckwerten

Abweichungen an den Druckmeßstellen D_3 und D_4 fallen etwas größer aus. Sie entsprechen jedoch immer noch gut dem berechneten Druckverlauf. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre eine Strömungsablösung an der inneren Krümmerkante. Totwasser- oder Rückströmgebiete entlang der inneren Kanalwand würden elektrischen Strömen eine zusätzliche Kurzschlußmöglichkeit bieten und somit in diesem Bereich zu etwas höheren Druckverlusten führen, als dies durch die trägheitsfreie Theorie vorhergesagt wird. Dennoch stimmen sowohl die Gesamtdruckdifferenzen als auch die lokalen Druckwerte im gesamten betrachteten Strömungsbereich gut mit den theoretisch ermittelten Ergebnissen überein, so daß MHD – Druckverluste selbst in scharfkantig umgelenkten Kanälen mit der trägheitsfreien Theorie berechnet werden können.

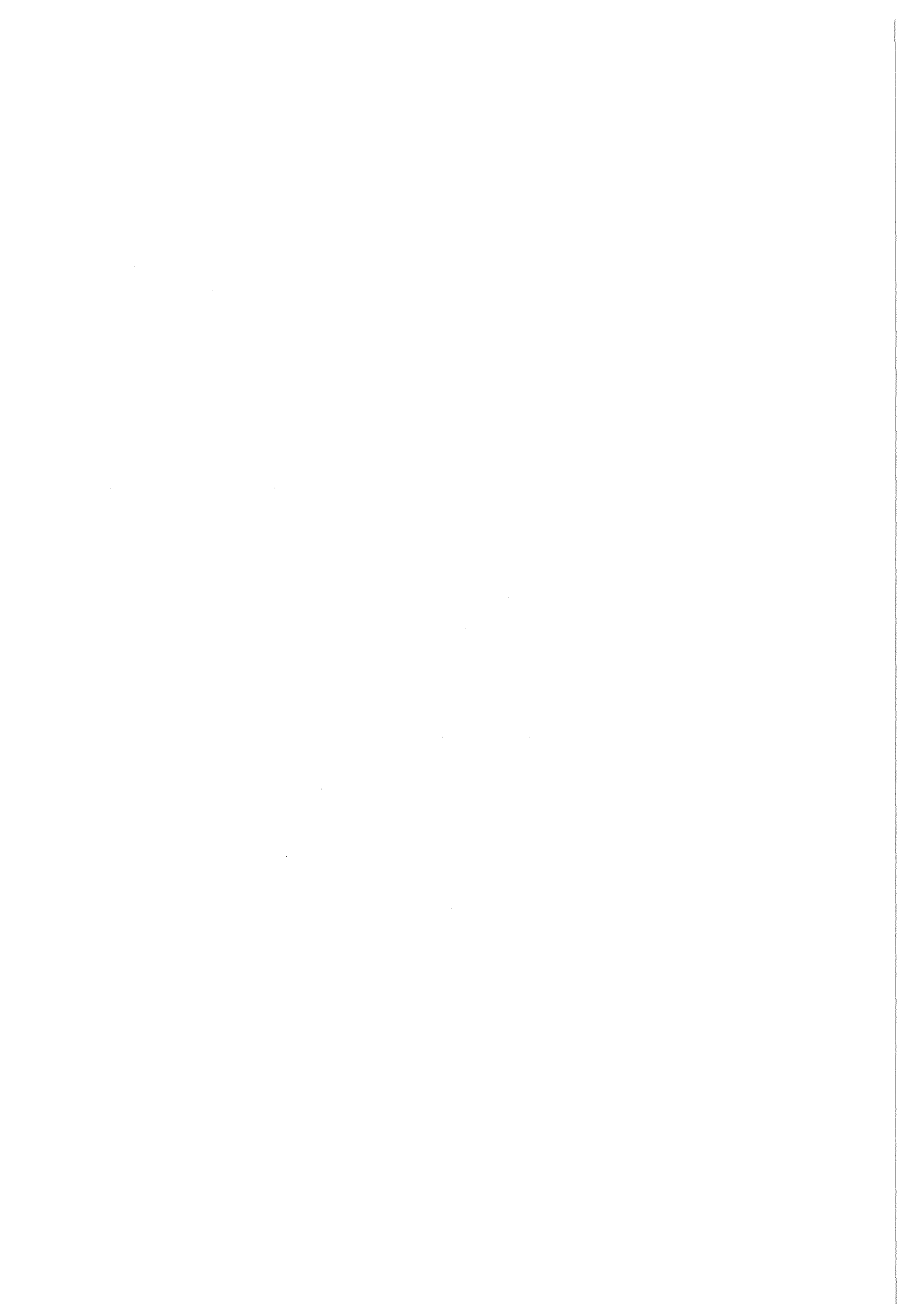
Direkte Meßwerte der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids sind bisher leider nicht verfügbar. Da jedoch eine gute Übereinstimmung der Potential- und Druckwerte vorliegt, die entsprechend der trägheitsfreien Theorie alleine alle anderen Strömungsgrößen bestimmen, sollten auch die berechneten Geschwindigkeitsverteilungen sowohl qualitativ als auch quantitativ den physikalischen Sachverhalt korrekt wiedergeben.

8 Zusammenfassung

Die Beschreibung von induktionsfreien magnetohydrodynamischen Strömungen bei großen Hartmann – Zahlen erfolgt durch eine Aufteilung des Strömungsgebiets in einen reibungsfreien Kernströmungsbereich, "Core" genannt, und in sehr dünne, viskose Wandgrenzschichten. Durch Vernachlässigung der Trägheitsterme für große Interaktionsparameter werden die Impulsgleichungen linearisiert. Auf diese Weise lassen sich die allgemeinen Grundgleichungen in den jeweils betrachteten Strömungsgebieten stark vereinfachen. Im reibungsfreien Core werden die dreidimensionalen Grundgleichungen durch eine analytische Integration auf zweidimensionale Gleichungen reduziert. Die exakte Erfüllung der physikalischen Randbedingungen an den Kanalwänden wird durch die Lösung von Grenzschichtgleichungen erreicht. Die Gleichung der Ladungserhaltung in der dünnen, elektrisch leitenden Kanalwand und innerhalb der viskosen Wandgrenzschicht führt ebenfalls zu zweidimensionalen Gleichungen.

Durch eine Koordinatentransformation wird das Innere jedes beliebig geformten Strömungskanals auf ein Einheitsvolumen abgebildet, auf dessen Oberfläche die zweidimensionalen gekoppelten Gleichungen numerisch gelöst werden.

Durch die Berücksichtigung der viskosen Wandgrenzschichten und Verwendung von geeigneten geometriengepaßten Koordinaten ist es erstmals möglich, mit dem Kernströmungsmodell dreidimensionale MHD – Strömungen in isolierten Kanälen beliebiger Geometrie zu berechnen. Die analytische Behandlung der Grenzschichten erweitert die Anwendbarkeit des reinen Kernströmungsmodells auf Fälle mit endlichen Hartmann – Zahlen. Vergleichsrechnungen zu speziellen bekannten analytischen Lösungen zeigen in allen betrachteten Fällen sehr gute Übereinstimmung. Anhand von einigen ausgewählten dreidimensionalen Beispielen werden die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten des numerischen Rechenprogramms demonstriert. Berechnungen, selbst in physikalischen Grenzfällen, stimmen gut mit experimentellen Befunden überein.



9 Anhang

9.1 Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen

Die partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung des Drucks p und der Oberflächenpotentiale ϕ_o und ϕ_v , die in Abschnitt 6 hergeleitet wurden, können für allgemeine Probleme nur numerisch gelöst werden. Das für eine konsistente Lösung verwendete Kontrollvolumenelement ist in *Abb. 9.1* dargestellt. Teile der oberen und unteren Kanalwand sind als Flächenelemente angedeutet. Diskrete Werte des Drucks sind im Zentrum des Volumenelements angeordnet. Die Geschwindigkeitskomponenten v^i werden den entsprechenden Seitenmitten, Potentialwerte ϕ den Kantenmitten zugewiesen. Druckwerte, Geschwindigkeitskomponenten und Potentiale sind gegeneinander um $\frac{1}{2}\Delta u^1$ bzw. $\frac{1}{2}\Delta u^2$ versetzt angeordnet. Die Wandpotentiale ϕ_o und ϕ_v sind um Δu^1 gegeneinander versetzt. Bereits für das diskrete Kontrollvolumen

$$\Delta V = V \Delta u^1 \Delta u^2 \Delta u^3 \quad (9.1)$$

endlicher Abmessung wird die Erhaltung der Masse gefordert. Auf die in Abschnitt 6.3 bereits genannte diskrete Form der Massenerhaltung für obiges Kontrollvolumen sei hier nochmals hingewiesen:

$$\Delta_3(Vv^3) = - \frac{1}{\Delta u^3} \int_{u^{3-\frac{1}{2}\Delta u^3}}^{u^{3+\frac{1}{2}\Delta u^3}} \sum_{i=1}^2 \Delta_i(Vv^i) du^3. \quad (9.2)$$

Partielle Ableitungen $\partial_i f$ einer Funktion f werden durch zentrale partielle Differenzen $\Delta_i f$ approximiert.

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \approx \frac{f(u^{i+\frac{1}{2}\Delta u^i}) - f(u^{i-\frac{1}{2}\Delta u^i})}{\Delta u^i} = \frac{\Delta f}{\Delta u^i} = \Delta_i f. \quad (9.2)$$

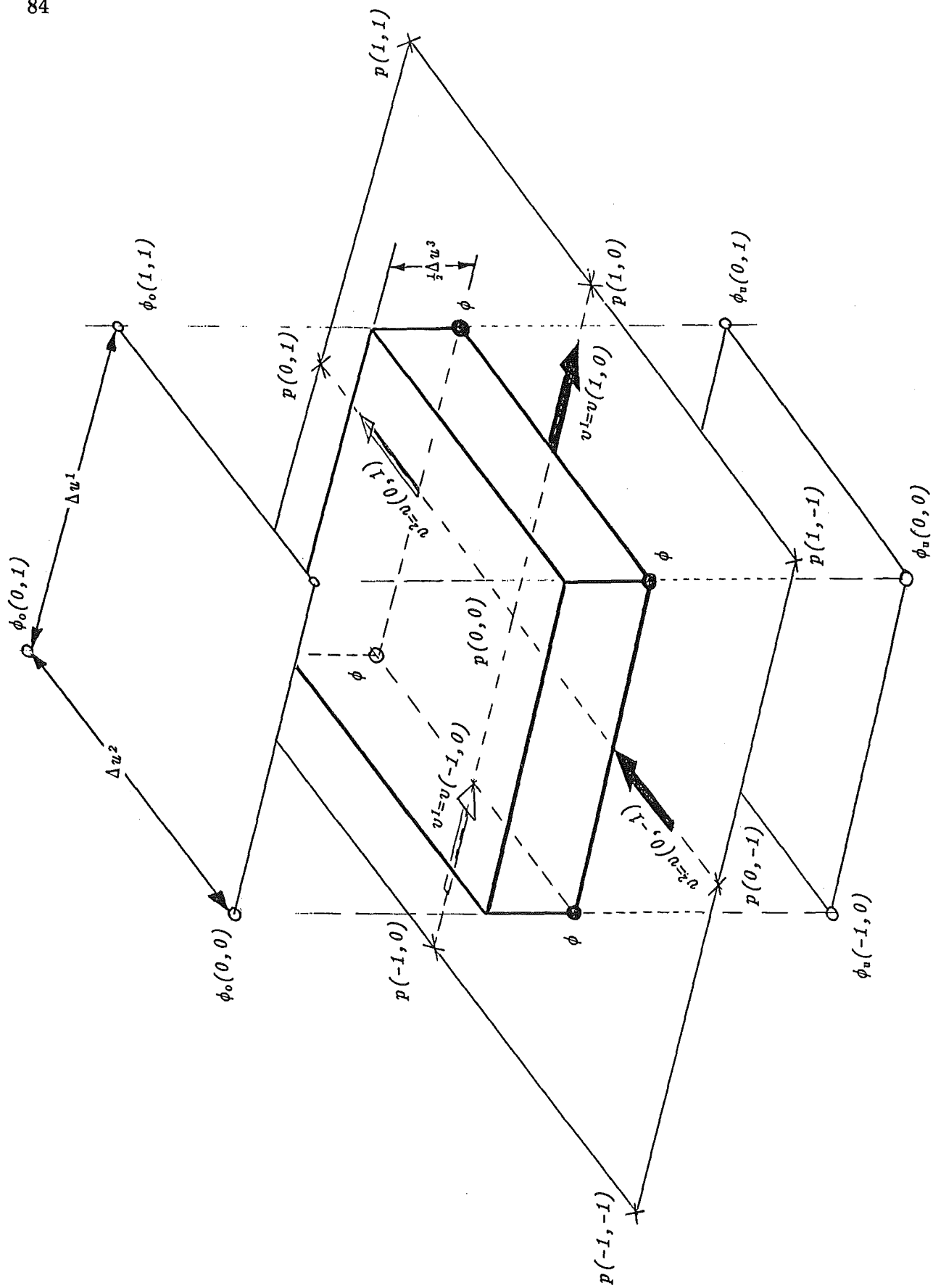


Abb. 9.1 Diskretes Volumenelement

9.1.1 Numerische Approximation der gesuchten Größen

Die Berechnung der Stromdichten kann als linearer Operator, angewandt auf p , ϕ_o , ϕ_u , interpretiert werden.

$$Vj_i = L_{j_i} \{p, \phi_o, \phi_u\}. \quad (9.4)$$

Dieser zerfällt in die drei Anteile $L_{j_i p}$, $L_{j_i \phi_o}$ sowie in $L_{j_i \phi_u}$.

$$Vj_i = L_{j_i p} \{p\} + L_{j_i \phi_o} \{\phi_o\} + L_{j_i \phi_u} \{\phi_u\}. \quad (9.5)$$

Die einzelnen Anteile können entsprechend Gl.(6.8) und Gl.(6.5) berechnet werden. So ergibt sich z.B. für $L_{j_i p}$

$$\begin{bmatrix} L_{j_1 p} \\ L_{j_2 p} \\ L_{j_3 p} \end{bmatrix} \{p\} = \frac{h}{B} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{g_{32}}{g_{33}} + \frac{\partial_2 B}{B} u_3 & \frac{g_{31}}{g_{33}} - \frac{\partial_1 B}{B} u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

sowie für $L_{j_i \phi_o}$ und $L_{j_i \phi_u}$

$$\begin{bmatrix} L_{j_1 \phi_o} \\ L_{j_2 \phi_o} \\ L_{j_3 \phi_o} \end{bmatrix} \{\phi_o\} = -\frac{1}{2} \frac{V}{g_{33}} \begin{bmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{bmatrix} \phi_o, \quad \begin{bmatrix} L_{j_1 \phi_u} \\ L_{j_2 \phi_u} \\ L_{j_3 \phi_u} \end{bmatrix} \{\phi_u\} = \frac{1}{2} \frac{V}{g_{33}} \begin{bmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{bmatrix} \phi_u. \quad (9.7)$$

Für eine numerische Näherungslösung des Problems soll die Kenntnis von j_i an endlich vielen diskreten Punkten genügen. Der Druck p , sowie die Oberflächenpotentiale ϕ_o und ϕ_u seien ebenfalls nur an endlich vielen Stellen definiert. Die Lage der diskreten Größen, die in die Massenbilanz Gl.(9.2) eingehen, ist in der Abb 9.1 dargestellt. Für ein Kontrollvolumen, das sich an der Stelle (U^1, U^2) , mit den Koordinaten $U^1 = (i^1 + \frac{1}{2}) \Delta u^1$, $U^2 = (i^2 + \frac{1}{2}) \Delta u^2$ ($0 < i^1 < n^1$, $0 < i^2 < n^2$) befindet, sind die Geschwindigkeitskomponenten v^i , die Stromdichten j_i sowie Potentialwerte ϕ an den diskreten Stellen $u^1 = U^1 + \frac{1}{2} \Delta u^1$, $u^2 = U^2 + \frac{1}{2} \Delta u^2$ ($-1 \leq i^1 \leq 1$, $-1 \leq i^2 \leq 1$) definiert. Mit i^1 und i^2 wird die Lage des Kontrollvolumens innerhalb des transformierten Kanalvolumens beschrieben. Sie bilden deshalb

die **diskreten Koordinaten** eines Volumenelementes. l^1 und l^2 markieren Punkte auf der Oberfläche des betrachteten Elementes. Sie werden **relative diskrete Koordinaten physikalischer Größen** des Volumenelements genannt. Durch die Angabe der relativen Koordinaten ist entsprechend Abb 9.1 direkt die jeweilige Komponente einer gesuchten vektoriel- len Größe gegeben. Auf eine Unterscheidung der einzelnen Vektorkomponenten durch einen entsprechenden Index kann deshalb verzichtet werden. So ist z.B. in einem Volu- menelement an der Stelle U^1, U^2 :

$$\begin{aligned} v(l^1 \neq 0, l^2 = 0) &= v^1(U^{1+\frac{1}{2}l^1} \Delta u^1, U^2), \\ v(l^1 = 0, l^2 \neq 0) &= v^2(U^1, U^{2+\frac{1}{2}l^2} \Delta u^2), \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} j(l^1 \neq 0, l^2 = 0) &= j_2(U^{1+\frac{1}{2}l^1} \Delta u^1, U^2), \\ j(l^1 = 0, l^2 \neq 0) &= j_1(U^1, U^{2+\frac{1}{2}l^2} \Delta u^2), \end{aligned} \quad (9.9)$$

sofern $l^1 = -1, 1$ oder $l^2 = -1, 1$.

Werte des Drucks $p(k^1, k^2)$ sind in den Punkten $u^1 = U^1 + k^1 \Delta u^1$, $u^2 = U^2 + k^2 \Delta u^2$ ($-1 \leq k^1 \leq 1$, $-1 \leq k^2 \leq 1$) definiert. k^1 und k^2 sind die **relativen diskreten Koordinaten der skalaren Größe** p des Volumenelementes.

$$p(k^1, k^2) = p(U^1 + k^1 \Delta u^1, U^2 + k^2 \Delta u^2). \quad (9.10)$$

Der Druckwert mit den relativen Koordinaten $k^1 = k^2 = 0$ liegt somit im Zentrum des betrachteten Volumentes. Die Werte der Oberflächenpotentiale sind bezüglich den Druckwerten um eine halbe Gitterweite verschoben angeordnet. Sie liegen an den dis- kreten Positionen

$$\phi_o(k^1, k^2) = \phi_o(U^{1+(k^1-\frac{1}{2})} \Delta u^1, U^{2+(k^2-\frac{1}{2})} \Delta u^2) \quad (9.11)$$

und

$$\phi_u(k^1, k^2) = \phi_u(U^{1+(k^1+\frac{1}{2})} \Delta u^1, U^{2+(k^2+\frac{1}{2})} \Delta u^2). \quad (9.12)$$

Für eine eindeutige Beschreibung der physikalischen Verhältnisse innerhalb eines Volu- menelements genügt die Angabe der relativen diskreten Koordinaten (l^1, l^2) sowie (k^1, k^2) . Für die linearen Operatoren Gl.(9.6, 9.7) kann die Unterscheidung nach den ersten beiden Vektorkomponenten entsprechend Gl.(5.9) durch die Angabe der relativen diskreten Koordinaten geschehen.

$$L_{jp}(l^1, l^2)\{p\} \approx L_{jp}(l^1, l^2, k^1, k^2)p(k^1, k^2) =$$

$$\frac{h}{B} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{g_{32}}{g_{33}} + \frac{\partial_2 B}{B} u_3 & \frac{g_{31}}{g_{33}} - \frac{\partial_1 B}{B} u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(l^1, l^2, k^1, k^2) \\ D_2(l^1, l^2, k^1, k^2) \end{bmatrix} p(k^1, k^2).$$
(9.13)

Die ersten beiden Matrizen besitzen analytisch darstellbare Elemente des relativen Ortes l^1, l^2 innerhalb des Volumenelementes. Sie sind durch die Geometrie und durch den Verlauf des Magnetfeldes gegeben. $D_i(l^1, l^2, k^1, k^2)p(k^1, k^2) \approx \partial_i p(l^1, l^2)$ approximiert die i -te kovariante Komponente des Druckgradienten an der Stelle l^1, l^2 durch die Druckwerte an den Positionen k^1, k^2 . Über doppelt vorkommende Indizes dieses Produkts ist zu summieren. So erhält man z.B. an der Stelle $l^1 = -1, l^2 = 0$ als Approximation für $\partial_1 p$:

$$\partial_1 p(l^1 = -1, l^2 = 0) \approx \frac{p(0, 0) - p(-1, 0)}{\Delta u^1}. \quad (9.14)$$

$D_1(-1, 0, k^1, k^2)$ besitzt also die Darstellung:

$$D_1(-1, 0, k^1, k^2) = \frac{1}{\Delta u^1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.15)$$

Eine Approximation der zweiten Komponente des Druckgradienten $\partial_2 p$ an der selben Stelle ergibt sich durch Multiplikation der Matrix $D_2(-1, 0, k^1, k^2)$ mit allen im Kontrollvolumen definierten Druckwerten $p(k^1, k^2)$. Dabei besitzt D_2 die folgende Darstellung:

$$D_2(-1, 0, k^1, k^2) = \frac{1}{4\Delta u^1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Durch die Approximation des Druckgradienten wird der kontinuierliche lineare Operator L durch einen diskreten linearen Operator \bar{L} approximiert.

$$L_{jp}(1^1, 1^2) \approx \bar{L}_{jp}(1^1, 1^2, k^1, k^2) . \quad (9.17)$$

Die Anwendung dieses diskreten Operators auf den Druck p ergibt sich durch eine Multiplikation mit allen im Volumenelement definierten lokalen Druckwerten $p(k^1, k^2)$ als Summe über alle k^1, k^2 . Analog lassen sich die Abhängigkeiten der Stromdichten als Funktion der Oberflächenpotentiale durch eine Multiplikation mit allen für das Volumenelement relevanten diskreten Potentialwerten approximieren.

$$L_{j\phi_o}(1^1, 1^2)\{\phi_o\} \approx \bar{L}_{j\phi_o}(1^1, 1^2, k^1, k^2)\phi_o(k^1, k^2) , \quad (9.18)$$

$$L_{j\phi_u}(1^1, 1^2)\{\phi_u\} \approx \bar{L}_{j\phi_u}(1^1, 1^2, k^1, k^2)\phi_u(k^1, k^2) . \quad (9.19)$$

Die gesamte Stromdichte ergibt sich aus der Summe der vom Druck verursachten Anteile Gl.(9.17) und der von den Wandpotentialen verursachten Anteile Gl.(9.18, 9.19).

Für die Berechnung des Potentials ϕ ergibt sich analog

$$\phi = L_{\phi}\{p, \phi_o, \phi_u\} = L_{\phi p}\{p\} + L_{\phi\phi_o}\{\phi_o\} + L_{\phi\phi_u}\{\phi_u\}. \quad (9.20)$$

Die diskrete Approximation der linearen Operatoren liefert hier entsprechend Gl.(6.9)

$$L_{\phi p}(1^1, 1^2)\{p\} \approx \bar{L}_{\phi p}(1^1, 1^2, k^1, k^2)p(k^1, k^2) = \\ \frac{1}{2} (u^3 u^3 - 1) g_{33} \frac{h}{BV} \left[-\frac{\partial_2 B}{B} \quad \frac{\partial_1 B}{B} \right] \begin{bmatrix} D_1(1^1, 1^2, k^1, k^2) \\ D_2(1^1, 1^2, k^1, k^2) \end{bmatrix} p(k^1, k^2), \quad (9.21)$$

sowie

$$L_{\phi\phi_o}(1^1, 1^2)\{\phi_o\} \approx \bar{L}_{\phi\phi_o}(1^1, 1^2, k^1, k^2)\phi_o(k^1, k^2) \quad (9.22)$$

und

$$L_{\phi\phi_u}(1^1, 1^2)\{\phi_u\} \approx \bar{L}_{\phi\phi_u}(1^1, 1^2, k^1, k^2)\phi_u(k^1, k^2). \quad (9.23)$$

Die Berechnung der Volumenstromdichten entsprechend dem Ohmschen Gesetz erfolgt nun unter Verwendung der diskreten Approximationen der Stromdichten und der Potentiale. Für die erste Komponente der Volumenstromdichten

$$Vv^1 = -\frac{\hbar}{B}(j_2 + \partial_2\phi) \quad (9.24)$$

ergibt sich an den relativen Positionen $l^1=\pm 1, l^2=0$

$$Vv(l^1=\pm 1, l^2=0) = -\frac{\hbar}{B} \left[j(l^1, l^2) + \frac{\phi(l^1, l^2+1) - \phi(l^1, l^2-1)}{\Delta u^2} \right]. \quad (9.25)$$

An den relativen Positionen $l^1=0, l^2=\pm 1$ erhält man entsprechend dem Ohmschen Gesetz für die zweite Komponente der Volumenstromdichte

$$Vv(l^1=0, l^2=\pm 1) = \frac{\hbar}{B} \left[j(l^1, l^2) + \frac{\phi(l^1+1, l^2) - \phi(l^1-1, l^2)}{\Delta u^1} \right]. \quad (9.26)$$

Wenn man die Volumenstromdichte ebenfalls als Funktion der Größen p, ϕ_o und ϕ_u mit Hilfe eines linearen Operators gewinnt, so erhält man die folgende kurze Darstellung:

$$Vv(l^1, l^2) = L_{vp}(l^1, l^2, k^1, k^2)p(k^1, k^2) + L_{v\phi_o}(l^1, l^2, k^1, k^2)\phi_o(k^1, k^2) + L_{v\phi_u}(l^1, l^2, k^1, k^2)\phi_u(k^1, k^2). \quad (9.27)$$

Wiederum ist über gleiche Indizes k^1, k^2 zu summieren. Beispielhaft sei hier lediglich der erste Operator an der relativen Positionen $l^1=\pm 1, l^2=0$ formuliert. Er ergibt sich aus der Darstellung des Ohmschen Gesetzes in der Form Gl.(9.25)

$$L_{vp}(l^1=\pm 1, l^2=0, k^1, k^2) = -\frac{\hbar}{B} \left[L_{jp}(l^1, l^2, k^1, k^2) + \frac{1}{\Delta u^2} \left\{ L_{\phi p}(l^1, l^2+1, k^1, k^2) - L_{\phi p}(l^1, l^2-1, k^1, k^2) \right\} \right]. \quad (9.28)$$

Für die Stelle $l^1=0, l^2=\pm 1$ besitzt er die Darstellung

$$L_{vp}(l^1=0, l^2=\pm 1, k^1, k^2) = \frac{\hbar}{B} \left[L_{jp}(l^1, l^2, k^1, k^2) + \frac{1}{\Delta u^1} \left\{ L_{\phi p}(l^1+1, l^2, k^1, k^2) - L_{\phi p}(l^1-1, l^2, k^1, k^2) \right\} \right]. \quad (9.29)$$

Somit ist die Volumenstromdichte über alle seitlichen Begrenzungsflächen des betrachteten Kontrollvolumenelementes bekannt. Die Änderung der dritten Komponente der Volumenstromdichte wird nun der Zellmitte $l^1=l^2=0$ zugeordnet.

$$\Delta(Vv^3) = Vv(l^1=0, l^2=0) \quad (9.30)$$

Die Gleichung der Massenbilanz stellt sich damit folgendermaßen dar:

$$Vv(l^1=0, l^2=0) = \int_{u^{3-\frac{1}{2}}\Delta u^3}^{u^{3+\frac{1}{2}}\Delta u^3} \left[\frac{Vv(l^1+1, l^2) - Vv(l^1-1, l^2)}{\Delta u^1} + \frac{Vv(l^1, l^2+1) - Vv(l^1, l^2-1)}{\Delta u^2} \right] du^3, \quad (9.31)$$

oder in der Operatorschreibweise

$$Vv(l^1=0, l^2=0) = L_{vp}(0, 0, k^1, k^2)p(k^1, k^2) + L_{v\phi_o}(0, 0, k^1, k^2)\phi_o(k^1, k^2) + L_{v\phi_v}(0, 0, k^1, k^2)\phi_v(k^1, k^2). \quad (9.32)$$

Die Bildung dieser Operatoren sei wiederum am Beispiel des Druckanteils gezeigt.

$$L_{vp}(l^1=0, l^2=0, k^1, k^2) = \int_{u^{3-\frac{1}{2}}\Delta u^3}^{u^{3+\frac{1}{2}}\Delta u^3} \frac{1}{\Delta u^1} \left[L_{vp}(l^1+1, l^2, k^1, k^2) - L_{vp}(l^1-1, l^2, k^1, k^2) \right] du^3 + \int_{u^{3-\frac{1}{2}}\Delta u^3}^{u^{3+\frac{1}{2}}\Delta u^3} \frac{1}{\Delta u^2} \left[L_{vp}(l^1, l^2+1, k^1, k^2) - L_{vp}(l^1, l^2-1, k^1, k^2) \right] du^3. \quad (9.33)$$

Wird die Integration von der unteren bis zur oberen Kanalwand durchgeführt, dann gilt für $Vv(0, 0)$:

$$Vv(0, 0) = 0. \quad (9.34)$$

Die Gleichung Gl.(9.31) liefert dann in der Summe über alle k^1, k^2 eine lineare algebraische Gleichung zur Bestimmung des Drucks $p(0, 0)$ aus umliegenden Druckwerten und Potentialwerten. Die Koeffizienten der diskreten Operatoren der Stromdichten und der Geschwindigkeitskomponenten, bzw. ihre integralen Werte, werden in dem Unterprogramm **KOJV** berechnet.

Algebraische Gleichungen zur Bestimmung der Oberflächenpotentiale werden aus der Ladungsbilanz innerhalb der viskosen Reibungsgrenzschicht und der leitenden Kanalwand gewonnen. Die Herleitung erfolgt analog zu den Gleichungen Gl.(9.3 – 9.34). Auf ihre Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet. Die diskreten Operatoren zur Bestimmung der Wand- und Grenzschichtströme werden im Bereich der oberen Kanalwand im Unterprogramm **KOJWO** und für den Bereich der unteren Kanalwand mit **KOJWU** berechnet. Die Bilanz aller Stromflüsse über die Grenzen eines Kontrollvolumens erfolgt in dem Unterprogramm **JWBILA**. Dieses Unterprogramm liefert die algebraische Gleichung zur Bestimmung des Oberflächenpotentials an der Stelle $k^1=k^2=0$ aus umliegenden Potential- und Druckwerten.

9.1.2 Lineares algebraisches Gleichungssystem

Wenn man um jeden unbekanntem Druck- oder Potentialwert ein Kontrollvolumen legt und auf die oben beschriebene Weise eine algebraische Gleichung formuliert, so erhält man ein eindeutig lösbares System linearer Gleichungen zur Bestimmung aller Unbekannten. Druck- und Oberflächenpotentialwerte an den diskreten Positionen können zu einem Lösungsvektor X zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned} X(i^g=1, i^1, i^2) &= \phi_o(i^1, i^2) , \\ X(i^g=2, i^1, i^2) &= p(i^1, i^2) , \\ X(i^g=3, i^1, i^2) &= \phi_u(i^1, i^2) . \end{aligned} \quad (9.35)$$

Das System von Gleichungen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$A(i^g, i^1, i^2, k^g, k^1, k^2) \cdot X(k^g, i^1+k^1, i^2+k^2) = R(i^g, i^1, i^2). \quad (9.36)$$

Über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren ($1 \leq k^g \leq 3, -1 \leq k^1 \leq 1, -1 \leq k^2 \leq 1$).

$A(i^g, i^1, i^2, k^g, k^1, k^2)$ enthält die Koeffizienten aller umliegenden unbekanntenen Größen, zur Bestimmung der Unbekannten i^g an der diskreten Position i^1, i^2 . So z.B. zur Beschreibung der Massenerhaltung ($i^g=2$) an der Position i^1, i^2 .

$$\begin{aligned} A(i^g=2, i^1, i^2, k^g=1, k^1, k^2) &= L_{v\phi_o}(0, 0, k^1, k^2), \\ A(i^g=2, i^1, i^2, k^g=2, k^1, k^2) &= L_{vp}(0, 0, k^1, k^2), \\ A(i^g=2, i^1, i^2, k^g=3, k^1, k^2) &= L_{v\phi_u}(0, 0, k^1, k^2). \end{aligned} \quad (9.37)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 bei i^1, i^2

Die rechten Seiten von Gl.(9.37) werden entsprechend Gl.(9.33) gebildet. $R(i^g, i^1, i^2)$ verschwindet über den ganzen inneren Bereich $0 \leq i^1 \leq n^1$, $0 < i^2 < n^2$. Lediglich an beiden Kanalenden $i^2=0, n^2$ enthält $R(2, i^1, i^2)$ vorgebbare Randwerte des Drucks.

Die Darstellung der Gleichungen in Form von Gl.(9.36) ist für eine effiziente iterative Lösung der Gleichungen besonders gut geeignet. Es zeigt sich jedoch, daß für allgemeine Fälle iterative Methoden nicht immer zu einem konvergenten Ergebnis führen. Die Konvergenz iterativer Lösungsmethoden stellt gewisse Bedingungen an die Matrix A des linearen Gleichungssystems. Sie sollte symmetrisch, positiv definit und diagonaldominant sein. Einige dieser Voraussetzungen sind für allgemeine Geometrien nicht erfüllt. Aus diesem Grund wird ein direktes Lösungsverfahren gewählt, das dank der enormen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit moderner Großrechenanlagen in angemessener Rechenzeit die numerische Lösung des Problems liefert. Als direkter Löser wird die HARWELL Routine MA28AD (Harwell Subroutine Library 1984) verwendet.

10 Literaturverzeichnis

Aitov, T.N., Kalyutik, A.I., Tananaev, A.V. 1978

"Numerical investigation of three-dimensional MHD flow in a curved channel of rectangular cross section"; *Magnetohydrodynamics* 4, 458–462

Aitov, T.N., Kalyutik, A.I., Tananaev, A.V. 1983

"Numerical analysis of three-dimensional MHD flow in channel with abrupt change of cross section"; *Magnetohydrodynamics* 19(2), 223–229

Baylis, J.A. 1971

"Experiments on laminar flow in curved channels of square section"; *J.Fluid Mech.*, 48(3), 417–422

Barleon, L., Bühler, L., Mack, K.J., Molokov, S., Stieglitz, R., Hua, T.Q., Picologlou, B.F., Reed, C.B., 1992 "Investigations of liquid metal flow through a right angle bend under fusion relevant conditions"; zur Veröffentlichung eingereicht bei SOFT, Symposium on Fusion Technology Sept. 1992, Rom.

Branover, H. 1978

"Magnetohydrodynamic flow in ducts"; Israel University Press, Jerusalem

Brouillette, E.C., Lykoudis, P.S. 1967

"Magneto-fluid-mechanic channel flow. I. Experiment"; *Phys. Fluids* Vol.10(5), 995–1001

Bühler, L. 1991

"Liquid metal flow in arbitrary thin-walled channels under a strong transverse variable magnetic field"; *Fusion Engineering and Design* 17, 215–220

Chang, C., Lundgren, S. 1961

"Duct flow in Magnetohydrodynamics"; *ZAMP* Vol.XII, 100–114.

Dragos, L. 1975

"Magnetofluid Dynamics"; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England.

Gold, R.R. 1962

"Magnetohydrodynamic pipe flow Part 1."; J.Fluid Mech. 13,505-512

Hartmann, J. 1937

"Hg-Dynamics I Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field"; Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser XV(6)

Hartmann, J., Lazarus, F. 1937

"Hg-Dynamics II Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field"; Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser XV(7)

HARWELL Subroutine Library 1984 Computer Science and System Division AERE
Harwell Oxfordshire

Holroyd, R.J., Mitchel, J.T.D. 1984

"Liquid Lithium as a coolant for tokamak reactors"; Nuclear Engineering and Design/Fusion 1,17-38

Holroyd, R.J., Hunt, J.C. 1978

"Theoretical and experimental studies of liquid metal flow in strong non-uniform magnetic fields in ducts with complex geometries"; MHD-Flow and Turbulence II, Proc. of the second Beersheva Seminar, March 28-31,1978, Israel Universities Press, Jerusalem, 23-43

Hua, T.Q., Walker, J.S., Picologlou, B.F., Reed, C.B. 1988

"Three-dimensional magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts of liquid-metal-cooled blankets"; Fusion Technology, Vol.14,1389-1398

Hua, T.Q., Walker, J.S., Picologlou, B.F., Reed, C.B. 1988

"Three-dimensional MHD flows in rectangular ducts of liquid-metal-cooled blankets"; ANL-Report, ANF/FPP/TM-228

- Hua, T.Q., Walker, J.S. 1989
"MHD flow in insulating circular ducts for fusion blankets"; Fusion Technology, Vol. 15, 699–704
- Hua, T.Q., Walker, J.S. 1990
"MHD considerations for poloidal–toroidal coolant ducts of self–cooled blankets"; Presented at the Ninth Topical Meeting on the Technology of Fusion Energy, Oct. 7–10, Oak Brook, IL
- Hua, T.Q. 1991
Benchmark results, presented at the USSR/USA/FRG workshop on liquid metal blanket concepts, D.V.Efrimov Institute, St. Petersburg
- Hunt, J.C.R. 1965
"Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts"; J.Fluid Mech. 21(4), 577–590
- Hunt, J.C.R. Holroyd, R.J. 1977
"Application of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion reactor technology"; UKAEA–Report CLM–R 169
- Hunt, J.C.R., Stewartson, K. 1965
"Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts II"; J.Fluid Mech. 23(3), 563
- Kim, C.N. 1989
"Development of a numerical method for the full solution of magnetohydrodynamic flows an application to fusion blankets"; Dissertation, University of California, Los Angeles
- Kim, C.N., Hadid, A.H., Abdou, M.A. 1989
"Development of a computational method for the full solution of MHD flow in fusion blankets"; Fusion Engineering and Design 8, 265–270
- Klingbeil, E. 1966
"Tensorrechnung für Ingenieure"; Bibliographisches Institut Mannheim/ Wien/ Zürich

- Kunugi, T., Tillack, M.S., Abdou, M.A. 1991
"Analysis of liquid metal MHD fluid flow and heat transfer using the KAT code";
Fusion Technology, Vol.19,1000–1005
- Kulikovskii, A.G. 1968
"Slow steady flows of a conducting fluid at large Hartmann numbers"; Fluid
Dynamics Vol.3(1),1–5
- Kulikovskii, A.G. 1973
"Flows of a conducting incompressible liquid in an arbitrary region with a strong
magnetic field"; Fluid Dynamics Vol.8(1),462–467
- Lock, R.C. 1955
"Stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes
under a transverse magnetic field"; Proc. Roy. Soc. A233,105
- Lykoudis, P.S., Brouillette, E.C. 1967
"Magneto–fluid–mechanic channel flow. II. Theory"; Phys. Fluids Vol.10(5),
1002–1007
- Lyon, N. 1952
"Liquid metals handbook"; Navox p–733, second edition
- Madarame, H., Hagiwara, T. 1989
"Computer code for analyzing liquid metal MHD flow in rectangular duct under
strong transverse magnetic field"; Fusion Engineering and Design 8,265–270
- Madarame, H., Tokoh, H. 1988
"Development of computer code for analyzing liquid metal MHD flow in fusion
reactor blankets"; J.of Nuclear Science and Technology 25(3),233–244
- McCarthy, K.A., Tillack, M.S., Abdou, M.A. 1989
"Analysis of liquid metal MHD flow using an iterative method to solve the core
flow equations"; Fusion Engineering and Design 8,257–264

McMichael, J.M. 1984

"Magnetohydrodynamics of laminar flow in slowly varying tubes in an axial magnetic field"; Phys. Fluid 27(1) 110–118

Molokov, S. 1991

Persönliche Mitteilung; Okt. 1991

Moon, T.J. Walker, J.S. 1988

"Liquid metal flow in a large radius elbow with a uniform magnetic field"; ANL-Report, ANL/FPP/TM-227

Moon, T.J., Walker, J.S. 1991

"Liquid metal flow through a sharp elbow in the plane of a strong magnetic field"; J.Fluid Mech. 213,397–418

Moon, T.J., Hua, T.Q., Walker, J.S. 1991

"Liquid metal flow in a backward elbow in the plane of a strong magnetic field"; J.Fluid Mech. 227,273–292

Müller, U. 1991

"Potentialströmungen"; Skriptum einer Vorlesung, Wintersemester 90/91, Universität Karlsruhe

Picologlou, B.F., Reed, C.B., Hua, T.Q. Barleon, L., Kreuzinger, H.

Walker, J.S. 1989

"MHD flow tailoring in first wall coolant channels of self-cooled blankets"; Fusion Engineering and Design 8,297–303

Reed, C.B., Picologlou, B.F. 1989

"Sidewall flow instabilities in liquid metal MHD flow under blanket relevant conditions"; Fusion Technology, Vol.15,705–715

Shercliff, J.A. 1956

"The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields"; J.Fluid Mech. 1, 644–666

Shercliff, J.A. 1962_a

"Magnetohydrodynamic pipe flow Part 2. High Hartmann number"; J.Fluid Mech. 13, 513–518

Shercliff, J.A. 1962_b

"The theory of electromagnetic flow measurement"; University Press, Cambridge

Shercliff, J.A. 1965

"A Textbook of Magnetohydrodynamics"; Pergamon Press, Oxford

Shih, Y.D. 1984

"MHD flow in curved circular pipes at high Hartmann Number"; Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers. Vol.5, No.1, 1–8

Sidorenkov, S.I. 1991

Benchmark results, presented at the USSR/USA/FRG workshop on liquid metal blanket concepts, D.V.Efrimov Institute, St. Petersburg

Tabeling, P., Chabrerie, J.P. 1981

"Magnetohydrodynamic secondary flows at high Hartmann numbers"; J.Fluid Mech. 103, 225–239

Tananayev, A.V., Aitov, T.N., Chudov, A.V., Shmatenko, V.A. 1989

"Linear approximation application limits in MHD – flow theory for strong magnetic fields. Experimental results"; Veröffentlicht durch J.Lielpetris und R.Moreau, in "Liquid metal magnetohydrodynamics"; Kluwer Academic Publisher, 37–43

Temperley, D.J. 1984

"Reconciliation of some discrepancies in results obtained for magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct under an uniform transverse magnetic field at high Hartmann number"; Arch.Mech. 35(5–6), 673–686

Temperley, D.J. Todd, L. 1971

"The effects of wall conductivity in magnetohydrodynamic duct flow at high Hartmann numbers"; Proc.Camb.Phil.Soc. 69, 337–351

- Tillack, M.S. 1990
"MHD flow in rectangular ducts. Design equations for pressure drop and flow quantity." UCLA-Report, UCLA-FNT-41
- Tillack, M.S., McCarthy, K.A. 1989
"Flow quantities in side layers" UCLA-Report, UCLA-FNT-89-01
- Ting, A.L. Walker, J.S., Moon, T.J., Reed, C.B., Picologlou, B.F. 1991
"Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows"; Int. J. Engng. Sci. Vol.29(8),939-948
- Toschi, R., Chazalon, M. Engelmann, F. Nihoul, J. Raeder, J. Salpietro, E. 1988
"Next european torus objectives, general requirements, and parameter choices"; Fusion Technology, Vol.14,19-29
- Walker, J.,S. 1981
"Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls. Part I: Constant area and variable area ducts with strong uniform magnetic fields"; J.de Mécanique 20, 79-112
- Walker, J,S. 1986
"Liquid metal flow through a thin walled elbow in a plane perpendicular to a uniform magnetic field"; Int.J.of Engng.Sci 24, 1741-1754
- Williams, W.E. 1963
"Magnetohydrodynamic flow in a rectangular tube at high Hartmann number"; J.Fluid Mech. 16, 262