

KfK 4687  
Februar 1990

# **Untersuchungen zur Auslegung eines Helium II-Kühlkreises mit thermomechanischer Pumpe**

H.-P. Krämer  
Institut für Technische Physik  
Projekt Kernfusion

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



**KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**

Institut für Technische Physik

Projekt Kernfusion

**KfK 4687**

**Untersuchungen zur Auslegung eines Helium II-  
Kühlkreises mit thermomechanischer Pumpe\***

**H.-P. Krämer**

\*Von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die wesentlichen Aspekte zu dem Konzept der Zwangskühlung von supraleitenden Magneten mit superfluidem Helium (He II) unter Verwendung thermomechanischer Pumpen betrachtet. Dazu gehören die Untersuchungen der Strömung von He II in Strukturen mit Poren im Submikrometerbereich (Superfiltern) sowie in makroskopischen Kanälen mit Durchmessern im Millimeterbereich, außerdem die Messung der Wärmeleitfähigkeit von He II, die Berechnung des Temperaturverlaufs in Kanälen mit strömendem He II und die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten von Kupfer an strömendes He II.

Die Untersuchungen der Strömungsverhältnisse in Superfiltern aus gepreßtem  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver und in solchen aus Zellulosenitrat-Filterscheiben zeigen, daß die Strömung bis zu einer von Material und Temperatur abhängigen kritischen Durchflußrate ( $0.2 \dots 0.8 \text{ g/s cm}^2$ ) dissipationsfrei ist. Obwohl bei überkritischen Durchflußraten, besonders in den Grenzschichten der Superfilter, Verluste durch innere Reibung auftreten, die sich als Differenz der chemischen Potentials an beiden Enden der Superfilter äußern, können die Systeme in solchen Zuständen stationär betrieben werden. Dies gilt nicht, wenn die Superfilter größere Hohlräume enthalten.

Bezüglich des Druckabfalls in makroskopischen Kanälen ( $\varnothing \geq 1 \text{ mm}$ ) verhält sich He II wie eine normale Newtonsche Flüssigkeit mit der Viskosität der normalfluiden Komponente  $\eta_n$ .

Durch präzise Messung der Wärmeleitfähigkeit von He II in makroskopischen Kanälen ohne Nettomassenstrom wird die Beziehung  $\dot{q}^{3.4} = f_{GM}(T) \nabla T$  gefunden. Es wird gezeigt, daß die Abweichung des Exponenten von 3 kein experimentelles Artefakt aufgrund der endlichen Temperaturdifferenz ist, wie zum Teil in der Literatur angenommen wird. Für die Wärmeleitfähigkeit  $f_{GM}(T)$  wird im Bereich  $1.4 \text{ K} < T < 2.1 \text{ K}$  eine analytische Näherung angegeben.

Es wird gezeigt, daß der Temperaturverlauf in strömendem He II sich im Falle eines kleinen Durchmesser/Länge-Verhältnisses durch numerisches Lösen einer eindimensionalen nicht-linearen Differentialgleichung unter Zugrundelegung der in ruhendem He II ermittelten Wärmeleitfähigkeit bestimmen läßt.

Auch der stationäre Wärmeübergang von Kupfer an strömendes He II erweist sich als unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig und läßt sich daher durch die für ruhendes He II übliche Beziehung  $\dot{q} = a (T_s^n - T_f^n)$  beschreiben. Diese Beziehung gilt bis zu kritischen Wärmeströmen, die in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit bis ca  $1 \text{ m/s}$  ermittelt worden sind.

## Investigations on cooling by forced flow of helium II driven by fountain effect pumps

The use of superfluid helium (He II) driven by a fountain effect pump as a forced flow coolant of a superconducting magnet is considered. The investigations cover the flow resistance of He II in porous plugs (superfilters) as well as in macroscopic ducts, the heat conductivity of He II, the calculation of the temperature profile in flowing He II and the heat transfer from technical copper to flowing He II.

The investigations on superfilters made of pressed  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -powder and of stacked membrane filters show that the massflow is dissipationless up to critical values ( $0.2 \dots 0.8 \text{ g/s cm}^2$ ), depending on material and temperature. At supercritical flow rates losses due to internal friction occur mainly at the boundary layers of the superfilters. In spite of those losses which show themselves as a difference of the chemical potentials at both ends of the superfilters the systems can be driven continuously in that state. This is not the case when there are large cavities in the superfilters.

Concerning the pressure drop in macroscopic ducts ( $\varnothing \geq 1\text{mm}$ ) He II behaves like a normal Newtonian fluid with the viscosity of the normal fluid component  $\eta_n$ .

The measurements of the heat conductivity of He II in macroscopic ducts with zero net massflow yield the relation  $q^{3.4} = f_{GM}(T) \nabla T$ . An analytic approximation for the heat conductivity function  $f_{GM}(T)$  is given in the range  $1.4 \text{ K} < T < 2.1 \text{ K}$ . Moreover it is shown that the exponent value of 3.4 instead of 3 is not an experimental artifact due to the finite temperature difference as sometimes is assumed in literature.

In the case of a low diameter/length ratio the temperature profile in flowing He II can be evaluated by numerically solving a one-dimensional nonlinear differential equation.

The steady state heat transfer from technical copper to flowing He II is independent of the flow velocity up to at least  $1.5 \text{ m/s}$  and therefore follows the relation  $q = a (T_s^n - T_f^n)$  known for stagnant He II. This relation is valid up to critical heat fluxes, whose dependence of the flow velocity has been determined.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1 Eigenschaften von Helium	6
2.2 Zweiflüssigkeitsmodell	8
2.3 Gegenseitige Reibung	11
2.4 Kritische Geschwindigkeiten	14
2.5 Wärmeleitfähigkeit	16
2.6 Wärmeübergang und Kapitza-Widerstand	18
<b>3 Apparatur</b>	<b>20</b>
3.1 Kryostat und allgemeiner Aufbau	21
3.2 Thermomechanische Pumpe	21
3.3 Herstellung der Superfilter	22
3.4 Charakterisierung der Superfilter	23
3.5 Meßstrecke und Wärmeübergangszelle	24
3.6 Flowmeter	25
3.7 Temperaturmessung	26
3.8 Druckmessung	27
3.9 Datenerfassung	27
<b>4 Meßergebnisse und Diskussion</b>	<b>28</b>
4.1 Strömungswiderstand in makroskopischen Kanälen	28
4.2 Wärmeleitfähigkeit in makroskopischen Kanälen	30
4.3 Temperaturverlauf in strömendem Helium	36
4.4 Wärmeübergang an strömendes Helium	40
4.4.1 Bestimmung der Fluidtemperatur nahe der Heizung	41
4.4.2 Experimente bei konstanter Fluidtemperatur nahe der Heizung	42
4.4.3 Experimente bei konstanter Wärmestromdichte	44
4.4.4 Numerische Beschreibung der Daten	45
4.4.5 Experimente bei konstanter Fluidtemperatur am Eintritt der Meßstrecke	46

4.4.6 Kritische Wärmeströme	49
4.5 Thermomechanische Pumpen	51
4.5.1 Ideale thermomechanische Pumpe	51
4.5.2 Reale thermomechanische Pumpe	54
4.5.2.1 Verluste im Einlauf	56
4.5.2.2 Verluste in der Heizkammer	57
4.5.2.3 Verluste im Superfilter	58
4.6 Dissipative Effekte in Superfiltern	59
4.6.1 Leerlaufbetrieb der TMP mit blockierten Massenstrom	59
4.6.2 Normaler Betrieb der TMP bei endlichem Massenstrom	60
4.6.3 Experimente bei isothermen Bedingungen am Superfilter	63
4.6.4 Dissipation im Hohlraum eines Superfilters	66
4.6.5 Superfilter aus Membranfilterscheiben	69
4.7 Vorschläge zur Auslegung einer TMP	71
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>73</b>
<b>6 Literatur</b>	<b>75</b>
<b>Anhang</b>	<b>77</b>
<b>A: Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>77</b>
<b>B: Effektiver Querschnitt des Flowmeterrohrs</b>	<b>79</b>
<b>C: Thermodynamisches Potential im Hohlraum eines Superfilters</b>	<b>81</b>

## 1 Einleitung

In vielen Bereichen der Technik werden starke, großvolumige und zeitlich langanhaltende Magnetfelder benötigt, so z.B. in der Kernspin-Tomographie und Spektroskopie oder bei Teilchenbeschleunigern. Ein immer größerer Teil dieses Bedarfs wird durch supraleitende Magnete gedeckt, da diese bei konstantem Magnetfeld praktisch verlustfrei arbeiten. Insbesondere sind für den Einsatz in geplanten Fusionsreaktoren supraleitende Magnete zur Erzielung einer positiven Energiebilanz unabdingbar.

Da die neuen keramischen hoch- $T_c$ -Supraleiter noch keinen Einzug in die Magnettechnik gehalten haben, müssen die supraleitenden Magnete mit flüssigem Helium gekühlt werden. Außer für das anfängliche Abkühlen braucht man die Kühlung für die thermische Stabilisierung des Magneten. Die Kühlung muß nämlich so ausgelegt sein, daß die bei einem spontanen, räumlich begrenzten Übergang zur Normalleitung freiwerdende Ohmsche Wärmeleistung abgeführt werden kann, ohne daß der Magnet einen bleibenden Schaden davonträgt. Dafür gibt es unterschiedliche Konzepte. Stand der Technik ist die Badkühlung in gesättigtem Helium bei atmosphärischem Druck und einer Temperatur von 4.2 K. Dabei werden die Windungen der supraleitenden Spule direkt von flüssigem Helium umspült. Vorteil der Badkühlung ist neben dem relativ einfachen Aufbau und folglich günstigen Herstellungskosten die große Menge flüssigen Heliums, die als guter Wärmepuffer wirkt. Ein Nachteil dieses Konzepts ist die schlechte Wärmeleitfähigkeit von normalfluidem Helium. Dadurch kann in gesättigtem, ruhendem Helium bei einer großen Wärmelast relativ schnell der Fall des Filmsiedens auftreten. Dabei bildet sich an der warmen Oberfläche des Leiters ein isolierender Gasfilm, der die Wärmeabfuhr drastisch verschlechtert und zur Überhitzung des Leiters führen kann. Ein weiterer Nachteil der Badkühlung ist, daß ein großer Teil der Leiteroberfläche von Helium benetzt sein muß. Dies kann bei hohen Feldern zu Schwierigkeiten bei der mechanischen Abstützung der auftretenden starken Lorentzkräfte führen. Aus diesem Grund bevorzugt man bei hochwertigen supraleitenden Spulen heute das Konzept der Zwangskühlung. Dabei laufen parallel zu dem Leiter ein oder mehrere Kühlkanäle, durch die mithilfe einer Pumpe kontinuierlich flüssiges Helium gepreßt wird. Da der Heliumdruck auf dem Weg durch die Spule abnimmt, muß hier mit unterkühltem oder überkritischem Helium gearbeitet. Da Supraleiter und Kühlkanäle eine Einheit bilden, sind zwangsgekühlte Leiter von vornherein mechanisch stabiler und können leicht zusätzlich abgestützt werden. Außerdem sind zwangsgekühlte Magnete in der Regel kompakter, sodaß sich der Mehraufwand für den Leiter und die Heliumumwälzung besonders bei großen Spulen lohnt.

Die weitere Entwicklung auf dem Gebiet des Magnetbaus geht zu höheren Feldern, die besonders für die Kernspinspektroskopie und für Fusionsreaktoren benötigt werden. Der Felderhöhung durch einfaches Verstärken des Stromes steht im Weg, daß die supraleitende Phase nur stabil ist, solange Temperatur  $T$ , Magnetfeld  $B$  und Stromdichte  $j$  kritische Werte nicht überschreiten, die

sowohl von dem Material als auch von den beiden anderen momentan herrschenden Größen abhängen, also z.B.  $j_c(T, B)$ . In Abb. 1.1 ist der Zusammenhang dieser kritischen Größen für die Legierung Niob-Titan, den zur Zeit gebräuchlichsten technischen Supraleiter, dargestellt.

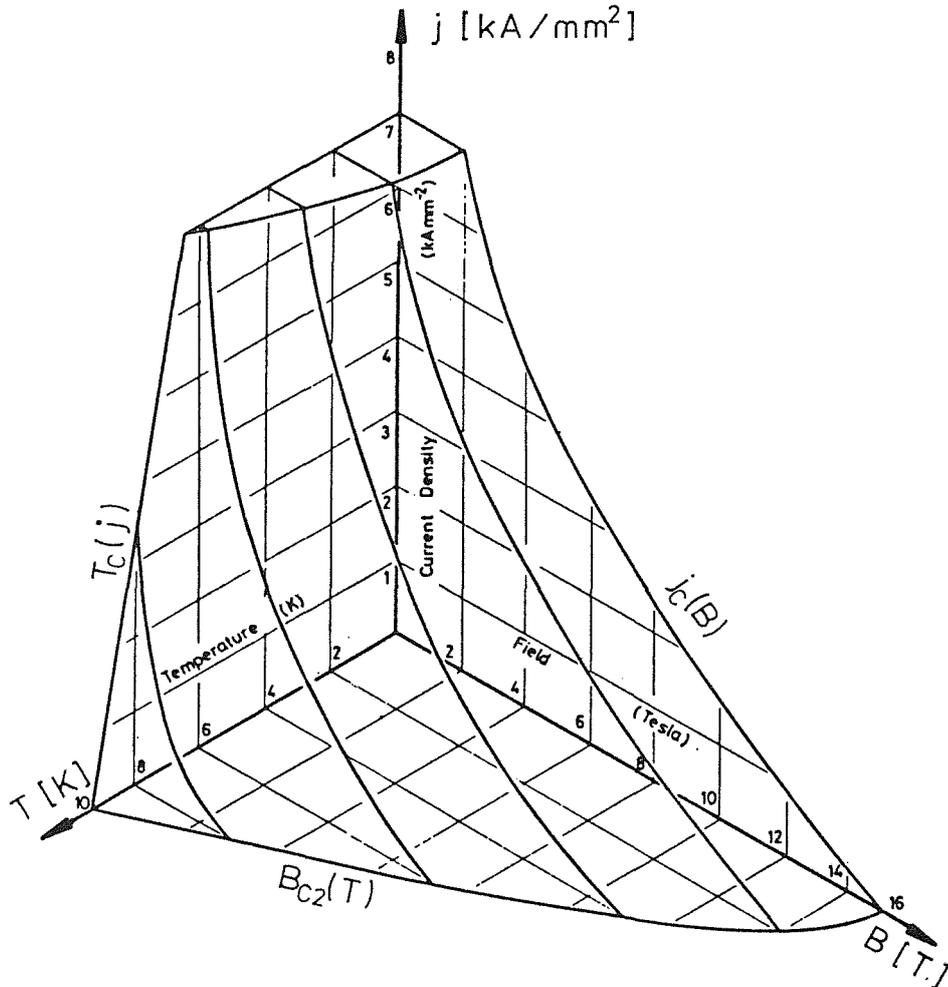


Abb. 1.1: Existenzbereich der supraleitenden Phase von NbTi im  $T, B, j$ -Raum (Wilson, 1983)

Um stärkere Magnete bauen zu können, muß man die Werte für  $B_c$  und  $j_c$  erhöhen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich den Einsatz von anderen Materialien mit höheren kritischen Werten oder, wie man aus Abb. 1.1 erkennt, die Absenkung der Betriebstemperatur. Die aussichtsreichsten Kandidaten für die erste Möglichkeit sind die Verbindungen der Chevrel- und der A15-Phasen, wobei von den letzteren am ehesten Nb<sub>3</sub>Sn in Frage kommt. Alle diese Verbindungen haben im Vergleich zu NbTi höhere kritische Werte, machen aber aufgrund ihrer Sprödigkeit bei der Verarbeitung deutlich mehr Schwierigkeiten als das relativ duktile NbTi.

Die Absenkung der Betriebstemperatur dagegen bietet die Möglichkeit, das vorhandene Potential in den kritischen Größen besser auszunutzen. Dieses Verfahren läßt sich prinzipiell bei allen Materialien einsetzen. So kann man z.B. mit einer NbTi-Spule, die bei 4.2 K für ein Magnetfeld

von 8 T ausgelegt ist, durch Betreiben bei 1.8 K fast 11 T erreichen, wenn die mechanische Stabilität in dem hohen Feld gewährleistet ist. Die Kühlung mit superfluidem Helium von 1.8 K wird dabei allgemein als vernünftiger Kompromiß zwischen kryotechnischem Mehraufwand und dem Gewinn an Feldstärke angesehen. Weitere Vorteile bietet die tiefere Betriebstemperatur durch die ungewöhnlich gute Wärmeleitfähigkeit von superfluidem Helium sowie durch die deutlich bessere stationäre Wärmeübertragung von Metall an Helium. Während die Badkühlung mit superfluidem Helium von 1.8 K im Labormaßstab schon eingesetzt wird, gibt es noch keine supraleitenden Magnete mit 1.8 K-Zwangskühlung. Bei diesem Konzept bietet es sich an, die Strömung mit einer sog. thermomechanischen Pumpe anzutreiben. Diese nutzt die im superfluiden Helium auftretenden makroskopischen Quanteneffekte aus und beruht auf dem umgekehrten Prinzip eines Vortex-Kühlers: In beiden Fällen strömt superfluides Helium durch einen feinporigen Stopfen, der für die elementaren Anregungen unpassierbar ist, wodurch an dessen Einlauf die Entropie des Fluids gleichsam abgestreift wird. Während man beim Vortex-Kühler das Helium durch den Stopfen drückt, so daß es diesen praktisch ohne Entropie verläßt und daher zur Kühlung benutzt werden kann, prägt man bei der thermomechanischen Pumpe zwischen den Enden des Stopfens eine Temperaturdifferenz auf, die eine Druckdifferenz und damit eine Strömung erzeugt. Der zu erwartende Förderdruck einer solchen Pumpe beträgt einige Hundert hPa, sodaß sie für den Strömungsantrieb einer Zwangskühlung durchaus in Frage kommt, insbesondere auch deshalb, weil sie ganz ohne bewegliche Teile auskommt, und somit eine extrem geringe Störanfälligkeit sowie günstige Herstellungskosten zu erwarten sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, die physikalischen Grundlagen für dieses Konzept der Zwangskühlung mit superfluidem Helium unter Verwendung thermomechanischer Pumpen zu schaffen und für den technischen Einsatz verfügbar zu machen. Dazu wurden untersucht

der Strömungswiderstand von superfluidem Helium in makroskopischen Kanälen,  
der Wärmeübergang von einem Metall an strömendes superfluides Helium,  
die Wärmeleitfähigkeit von superfluidem Helium,  
den Temperaturverlauf in strömendem superfluidem Helium,  
die Leistungsfähigkeit einer realen im Vergleich zu einer idealen thermomechanischen Pumpe, sowie die  
Verluste in einer thermomechanischen Pumpe unter besonderer Berücksichtigung der dissipativen Verluste in porösen Medien.

Dieser experimentelle Teil wird eingerahmt von einer Darstellung der theoretischen Grundlagen zum Verständnis der ungewöhnlichen Eigenschaften von superfluidem Helium, einer Beschreibung der verwendeten Apparatur sowie einer Zusammenfassung der Ergebnisse.

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen dargestellt werden, die zum Verständnis der experimentellen Resultate wichtig sind. Der erste Teil enthält eine Beschreibung der normalen Eigenschaften von Helium und der außergewöhnlichen Eigenschaften des superfluiden Heliums. Darauf folgt eine Einführung in das einfache Zweiflüssigkeitsmodell ohne Berücksichtigung der Dissipation. Im dritten Abschnitt werden dann die Theorien von Vinen und Schwarz zum turbulenten superfluiden Zustand vorgestellt. Daran schließen sich drei spezielle Abschnitte zu den Themen kritische Geschwindigkeiten, Wärmeleitfähigkeit sowie Wärmeübergang Metall-Helium II an.

### 2.1 Eigenschaften von Helium

Helium ist das leichteste Edelgas. Die beiden stabilen Isotope sind  $^3\text{He}$  und  $^4\text{He}$ , wobei  $^4\text{He}$  weitaus häufiger vorkommt und auch im folgenden ausschließlich behandelt werden wird. Das Helium-„Molekül“ besteht aus einem Atom mit einer abgeschlossenen 1s-Elektronenschale, ist also kugelsymmetrisch und unterliegt daher nur der sehr schwachen van der Waals-Wechselwirkung.

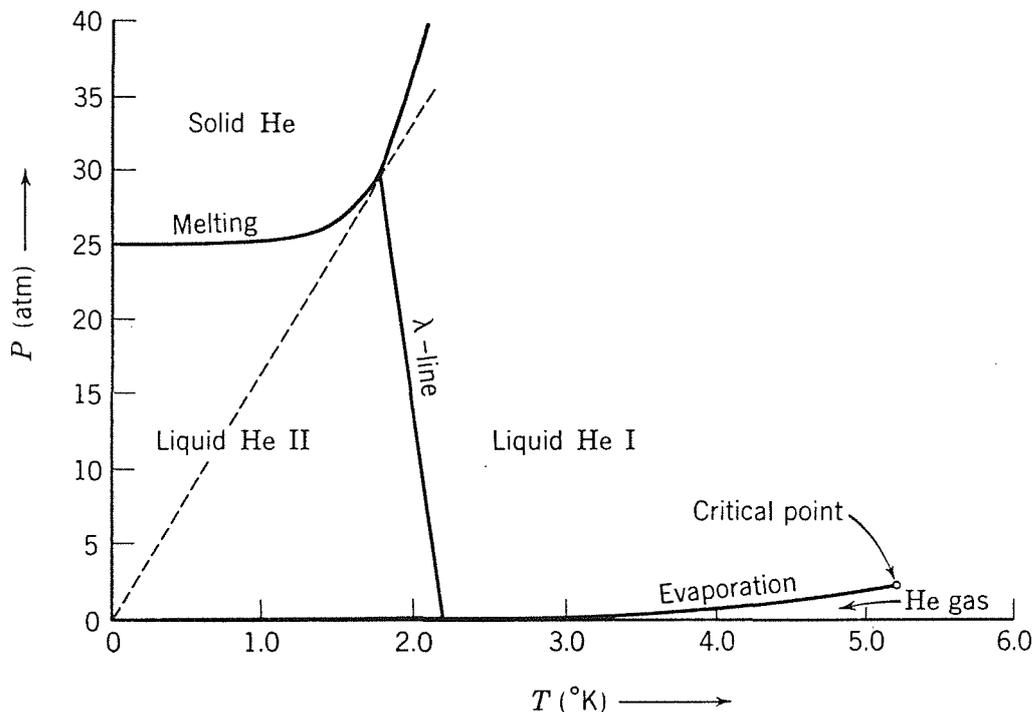
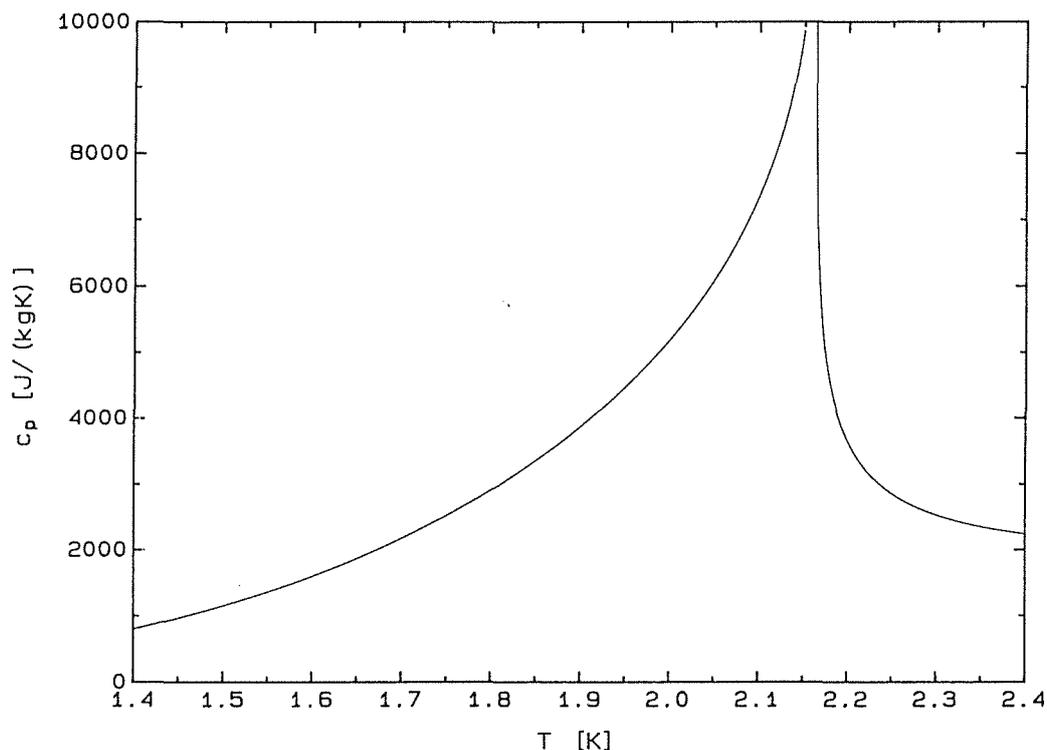


Abb. 2.1: Phasendiagramm von  $^4\text{He}$  nach London (1954)

Aufgrund der kleinen relativen Atommasse von 4 ist die quantenmechanische Nullpunktsenergie groß genug, um die schwachen attraktiven Kräfte zu überwinden. Somit ist Helium der einzige Stoff, der unter seinem eigenen Dampfdruck bis zum absoluten Temperaturnullpunkt flüssig bleibt (Abb.2.1). Eine Flüssigkeit bei extrem tiefer Temperatur wird von Quantenphänomenen geprägt. Aufgrund seines ganzzahligen Spins ist das  $^4\text{He}$ -Atom ein Boson; man erwartet also eine Einstein-Kondensation. Für ein ideales Bose-Gas aus Teilchen der Masse  $4u$  errechnet man eine Kondensationstemperatur von etwa 3 K (London, 1954, §9). Tatsächlich findet man in flüssigem Helium eine Phasentransformation. Die Übergangstemperatur liegt allerdings aufgrund der interatomaren Wechselwirkungen, die beim idealen Bose-Gas vernachlässigt werden, nur bei 2.17 K. Dieser Wert gilt für den Sättigungsdampfdruck von 50 hPa und wird mit zunehmendem Druck noch niedriger. Außerdem zeigt die spezifische Wärme eine  $\lambda$ -Anomalie (Abb.2.2), die zu dem Namen  $T_\lambda$  für die Übergangstemperatur führte. Flüssiges Helium bei Temperaturen oberhalb  $T_\lambda$  nennt man He I, unterhalb  $T_\lambda$  nennt man es He II oder superfluides Helium. Während He I eine normale Newtonsche Flüssigkeit ist, weist He II einige außergewöhnliche Eigenschaften auf, die nicht durch die klassische Hydrodynamik beschrieben werden können. So ist z.B. die Wärmeleitfähigkeit von He II um bis zu fünf Zehnerpotenzen größer als die von He I und um zwei Zehnerpotenzen größer als die von reinstem Kupfer bei tiefen Temperaturen. Weiterhin mißt man je nach experimentellem Aufbau unterschiedliche Werte für die Viskosität. Insbesondere ist die Viskosität in engen Kapillaren bei nicht zu großen Strömungsgeschwindigkeiten praktisch null. Schließlich seien noch das Filmfließen erwähnt, durch das sich ein frei aufgehängter Behälter mit



**Abb. 2.2:** Spezifische Wärme von  $^4\text{He}$  als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck, berechnet nach Arp und Agatsuma (1985)

He II von selbst entleert, sowie der thermomechanische oder Fountain-Effekt, der im folgenden noch ausführlich behandelt werden wird.

## 2.2 Zweiflüssigkeitsmodell

Das 1938 von Tisza vorgeschlagene Zweiflüssigkeitsmodell ist geeignet, die ungewöhnlichen Eigenschaften von He II zu beschreiben. Danach hat man sich He II als ein Gemisch aus zwei Komponenten vorzustellen, die unterschiedliche Eigenschaften besitzen und sich unabhängig voneinander bewegen können. Die normalfluide Komponente mit der Dichte  $\rho_n$  ist dabei als ein Gas aus elementaren Anregungen zu interpretieren und besitzt wie jede normale Flüssigkeit eine endliche Entropie und eine endliche Viskosität  $\eta_n$ . Die superfluide Komponente mit der Dichte  $\rho_s$  hat dagegen sowohl die Entropie als auch die Viskosität null. Die relativen Anteile der beiden Komponenten sind stark temperaturabhängig (Abb. 2.3) und die Summe von  $\rho_n$  und  $\rho_s$  ist gleich der makroskopischen Gesamtdichte  $\rho$ . Zur Beschreibung eines He II-Zustandes benötigt man im Zweiflüssigkeitsmodell außer Druck und Temperatur noch die Geschwindigkeitsfelder der beiden Komponenten, deren räumliche Mittelwerte im folgenden als  $\mathbf{v}_n$  und  $\mathbf{v}_s$  bezeichnet werden (Fettgedruckte Größen stellen Vektoren dar). Die Verbindungen zwischen  $\mathbf{v}_n$  und  $\mathbf{v}_s$ , die i.A. nicht

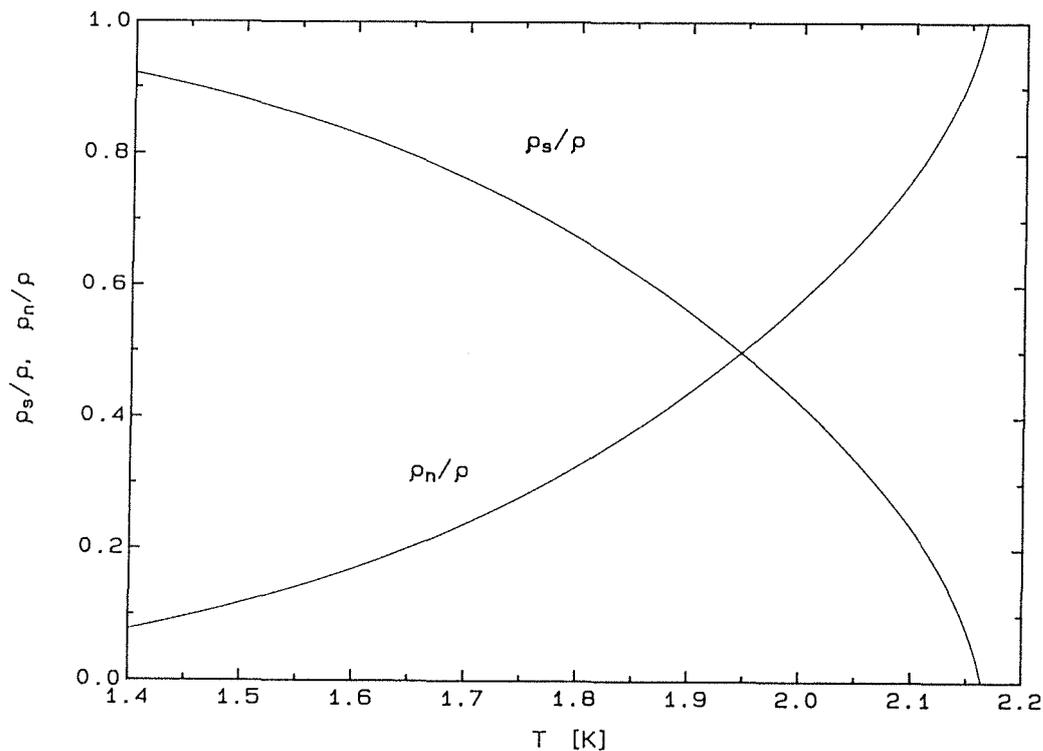


Abb. 2.3: Relativer Anteil der normal- bzw. superfluiden Komponente als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck, berechnet nach Arp und Agatsuma (1985)

direkt gemessen werden können, und den meßbaren Größen Massenstromdichte  $\mathbf{J}$  und Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  im Schwerpunktsystem des Fluids ( $\mathbf{J}=0$ ) werden durch die beiden folgenden Beziehungen hergestellt:

$$\mathbf{J} = \frac{\dot{\mathbf{m}}}{A} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{A} = \rho_s s T (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnen  $\dot{\mathbf{m}}$  den Massenstrom,  $A$  die Querschnittsfläche,  $\dot{\mathbf{Q}}$  den Wärmestrom und  $s$  die spezifische Entropie. Ein Wärmestrom in He II wird also durch eine Relativbewegung der beiden Komponenten beschrieben und daher als thermische Gegenströmung bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen für die beiden Komponenten von He II wurden 1941 von Landau hergeleitet und lauten in der linearisierten Form für nicht zu große Geschwindigkeiten (*London, 1954, §14, §17*):

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \rho_s s \nabla T - \frac{\rho_s}{\rho} \nabla p = -\rho_s \nabla \mu \quad (2.3)$$

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = -\rho_s s \nabla T - \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n \quad (2.4)$$

Dabei ist als einziger dissipativer Effekt der Strömungswiderstand der normalfluiden Komponente berücksichtigt. Die bei höheren Geschwindigkeiten zusätzlich auftretende Dissipation durch Wechselwirkung der superfluiden Komponente mit der normalfluiden Komponente bzw. der Wand wird in Teil 2.3 behandelt. Die dissipationsfreie superfluide Strömung wird auch laminar genannt im Gegensatz zur dissipativen turbulenten Strömung.

Die Summe der zwei letzten Gleichungen liefert für den stationären Zustand die sog. Poiseuille-Gleichung:

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\nabla p + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n = 0 \quad (2.5)$$

Dies bedeutet, daß sich die normalfluide Komponente wie eine Newtonsche Flüssigkeit verhält.

Aus Gl. 2.3 erkennt man, daß die Kraft, die die superfluide Komponente beschleunigt, nicht wie bei einer normalen Flüssigkeit durch den Druckgradienten  $\nabla p$  sondern durch den Gradienten des chemischen Potentials  $\nabla \mu$  gegeben ist. Dies hat zur Folge, daß in einem stationären Zustand ( $d\mathbf{v}_s/dt=0$ ) mit laminarer superfluider Strömung der Gradient des chemischen Potentials überall null ist und die folgende Beziehung zwischen dem Druckgradienten  $\nabla p$  und dem Temperaturgradienten  $\nabla T$  gilt:

$$\nabla p = \rho s \nabla T \quad (2.6)$$

Diese sog. London-Gleichung beschreibt den thermomechanischen oder Fountain-Effekt, den man in der thermomechanischen Pumpe ausnutzt, um eine He II-Strömung anzutreiben. Dazu erzeugt

man zwischen den beiden Enden eines porösen Stopfens durch Heizen eine Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_o - T_i$ . Ein poröser Stopfen, im folgenden auch Superfilter genannt, mit Porendurchmessern der Größenordnung 0.01 - 1  $\mu\text{m}$  stellt im Idealfall für die normalfluide Komponente einen unendlichen Strömungswiderstand dar, während die superfluide Komponente bis zu hohen Geschwindigkeiten laminar strömen und damit widerstandslos passieren kann. Dabei stellt sich zwischen den Enden des Superfilters eine Druckdifferenz, der sogenannte Fountain-Druck ein, die zum Antrieb einer He II-Strömung durch makroskopische Kanäle ausgenutzt werden kann. Der exakte Fountain-Druck  $\Delta p$  kann aus der Beziehung

$$\mu(p_i, T_i) = \mu(p_i + \Delta p, T_o) \quad (2.7)$$

bestimmt werden. Es zeigt sich aber, daß in den experimentell erreichbaren Temperatur- und Druck-Bereichen die Dichte  $\rho$  als druck- und temperaturunabhängig und die spezifische Entropie  $s$  als druckunabhängig angenommen werden dürfen, ohne daß der resultierende Fehler größer als 2% wird. Unter dieser Annahme kann (2.6) leicht integriert werden und der Fountain-Druck ergibt sich zu

$$\Delta p = \rho \int_{T_i}^{T_o} s dT \quad (2.8)$$

Abb. 2.4 zeigt den für  $T_o = T_\lambda$  erreichbaren Fountain-Druck in Abhängigkeit von der Temperatur  $T_i$  am kalten Ende des Superfilters. Da der Massenstrom proportional zu  $\rho_s$  ist, darf die

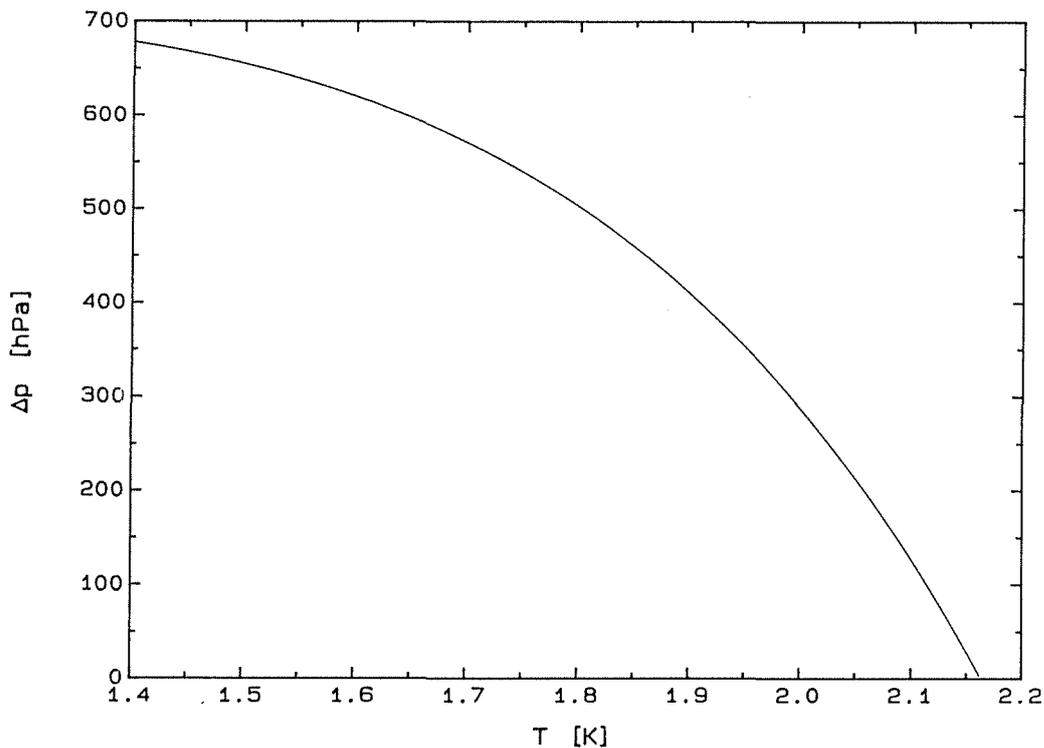


Abb. 2.4: Maximaler thermomechanischer Druck als Funktion der Temperatur am kalten Ende des Superfilters, Stoffdaten berechnet nach Arp und Agatsuma (1985)

Temperatur  $T_o$  am Auslauf des Superfilters nicht zu nahe bei  $T_\lambda$  liegen, da sonst  $\rho_s$  zu klein wird. Realistische Werte für die Anwendung sind  $T_i = 1.8$  K und  $T_o = 2.1$  K, für die man aus Abb.2.4 einen Förderdruck von ca. 400 hPa abliest; durch eine Erniedrigung von  $T_i$  auf 1.6 K erhöht sich der Wert auf ca. 520 hPa.

### 2.3 Gegenseitige Reibung

Experimentell findet man, daß beim Überschreiten einer gewissen kritischen Geschwindigkeit die Bewegungsgleichungen des einfachen Zweiflüssigkeitsmodells nicht mehr erfüllt sind; insbesondere ist  $\nabla\mu$  in einem stationären Zustand ungleich null. Die Ursache hierfür ist eine Wechselwirkung zwischen der normal- und der superfluiden Komponente, die in einer nicht-konservativen gegenseitigen Reibungskraft (mutual friction force) und damit in dissipativer Strömung zum Ausdruck kommt. Die Bewegungsgleichungen müssen dann durch die Reibungskraft pro Volumen  $\mathbf{F}_{sn}$  erweitert werden :

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = - \frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho_s s \nabla T - \mathbf{F}_{sn} \quad (2.9)$$

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = - \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p - \rho_s s \nabla T + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n + \mathbf{F}_{sn} \quad (2.10)$$

Bei Messungen der Wärmeleitfähigkeit von He II in makroskopischen Kanälen fanden *Gorter und Mellink (1949)* eine kubische Abhängigkeit des Temperaturgradienten vom Wärmestrom und machten daher folgenden Ansatz für  $\mathbf{F}_{sn}$  :

$$\mathbf{F}_{sn} = - A_{GM}(T) \rho_n \rho_s (v_{ns} - v_o)^2 \mathbf{v}_{ns} \quad , \quad (2.11)$$

wobei  $\mathbf{v}_{ns} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  die Relativgeschwindigkeit der beiden Komponenten,  $v_o$  eine kleine Geschwindigkeit um 1 cm/s und  $A_{GM}$  den temperaturabhängigen Gorter-Mellink-Koeffizienten bezeichnen.

Ausführlichere Messungen von *Vinen (1957a,b)*, insbesondere Messungen der zusätzlichen Dämpfung des zweiten Schalls in Anwesenheit einer thermischen Gegenströmung, bestätigten *Feynmans (1955)* Vorstellung der turbulenten superfluiden Strömung, wonach sich beim Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit in der superfluiden Komponente ein ungeordnetes Gewirr von Wirbelfäden ausbildet. Die Wirbel enden entweder an der Wand oder bilden in sich geschlossene Wirbelringe, sodaß außerhalb des Wirbelkerns die superfluide Komponente rotationsfrei ( $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ ) strömt. Die Zirkulation um einen Wirbelfaden ist in Einheiten von  $\kappa = h/m_{He}$  quantisiert :

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = n \kappa = n \frac{h}{m_{He}} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

wobei aus energetischen Gründen experimentell fast immer  $n=1$  auftritt. Der Radius  $a_0$  des Wirbelkerns liegt theoretisch in der Größenordnung des interatomaren Abstandes von ca.  $4 \text{ \AA}$  und wurde in einem Experiment von *Rayfield und Reif (1964)* zu  $1.2 \text{ \AA}$  bestimmt.

An diesen superfluiden Wirbeln werden die elementaren Anregungen, bei  $T > 1 \text{ K}$  hauptsächlich die Rotonen, gestreut und der dabei auftretende Impulsübertrag ist für die gegenseitige Reibungskraft verantwortlich.

Basierend auf dieser Vorstellung entwickelte *Vinen (1957c)* eine phänomenologische Theorie der gegenseitigen Reibung. Er betrachtete einen turbulenten superfluiden Zustand mit homogener und isotroper Wirbelverteilung, der durch die Wirbelliniendichte  $L$ , die Wirbellinienlänge pro Volumen, charakterisiert ist. Für die Änderung von  $L$  erhielt er die folgende Beziehung, die sog. Vinen-Gleichung:

$$\frac{dL}{dt} = \chi_1 \frac{B}{2} \frac{\rho_n}{\rho} (v_{ns} - v_0) L^{3/2} - \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} L^2 \quad (2.13)$$

Hierin sind  $\chi_1$  und  $\chi_2$  unbekannte Parameter und  $B$  charakterisiert die Wechselwirkung zwischen einer einzelnen Wirbellinie und der normalfluiden Komponente. Der erste Term auf der rechten Seite von Gl (2.13) beschreibt die Erhöhung der Wirbelliniendichte durch nichtkonservative Wechselwirkungen zwischen der normalfluiden Komponente und den Wirbeln, der zweite ihre Verringerung durch die Vernichtung zweier kollidierender gegensinnig orientierter Wirbelfäden. Für den stationären Zustand ( $dL/dt=0$ ) ergibt sich:

$$L^{1/2} = \frac{\chi_1}{\chi_2} \pi \frac{B}{\kappa} \frac{\rho_n}{\rho} (v_{ns} - v_0) = \gamma (v_{ns} - v_0) \quad (2.14)$$

Beide Gleichungen wurden durch Experimente weitgehend bestätigt, obwohl sich später herausstellte, daß Vinen's Interpretation der Mechanismen für Produktion und Vernichtung von Wirbellinien nicht zutrifft.

Fast 20 Jahre nach Vinen stellte *Schwarz (1978 - 1985)* eine mikroskopische Theorie der Turbulenz im superfluiden Helium auf, die hier in den Grundzügen beschrieben werden soll. Basis ist wiederum die Existenz von quantisierten Wirbeln in der superfluiden Komponente. Schwarz stellt eine komplizierte Bewegungsgleichung für ein Wirbellinienelement auf, die im wesentlichen die folgenden Anteile enthält:

- 1.) Der *lokal induzierte Anteil* hängt nur von der momentanen Krümmung des Wirbellinienelements ab. Ohne äußeren Einfluß bewegt sich das Wirbellinienelement in die Richtung der Strömung an der "Innenseite" der Krümmung mit einer Geschwindigkeit, die annähernd proportional zu seiner Krümmung ist.

- 2.) Der *nicht-lokale Anteil* beschreibt den Einfluß des restlichen Teils der Wirbellinie sowie aller anderen vorhandenen Wirbellinien, in deren Feld sich das betrachtete Wirbelnienelement bewegt.
- 3.) Der *Grenzflächen-Anteil* kommt daher, daß  $v_s$  an einer Grenzfläche parallel zu dieser sein muß. Diesen Anteil kann man sich als den Einfluß der an den Grenzflächen gespiegelten Wirbellinien vorstellen.
- 4.) Der *aufgeprägte Anteil* kommt von einer extern aufgeprägten superfluiden Strömung, mit der sich die Wirbellinie mitbewegt.
- 5.) Der *Reibungs-Anteil* erfaßt den Einfluß der Streuung von elementaren Anregungen an den Wirbellinien. Hier setzt Schwarz experimentell bestimmte Koeffizienten ein, die aus Messungen der Dämpfung des zweiten Schalls in rotierendem Helium, also in einer homogenen und parallelen Anordnung der Wirbel, hervorgehen.

In einer analytischen Betrachtung der homogenen superfluiden Turbulenz mit statistischen Methoden bestimmt Schwarz (1978) die Verteilung der Wirbellinienlänge  $\lambda(v_l, t)$  als Funktion ihrer Geschwindigkeit  $v_l$  und der Zeit. Unter Vernachlässigung des nicht-lokalen und des Grenzflächen-Anteils und der Annahme, daß die Unordnung durch die Kollision von Wirbellinien aufrechterhalten wird, erhält er theoretische Werte für  $A_{GM}(T)$  in Gl. (2.11) und  $\gamma$  in Gl. (2.14), die gut mit experimentell bestimmten Werten übereinstimmen. Außerdem zeigt er, daß die Vinen-Gl. (2.13) aus seiner Theorie folgt, allerdings mit einer neuen physikalischen Interpretation: sowohl der Erzeugungs- als auch der Vernichtungs-Term kommen ausschließlich von der nichtkonservativen gegenseitigen Reibungskraft. Zu bemerken ist hierzu noch, daß Vinen's Theorie die zwei unbekannt Parameter  $\chi_1$  und  $\chi_2$  enthält, während bei Schwarz außer dem Wirbelkernradius  $a_0$  und zwei Koeffizienten der gegenseitigen Reibung, die alle experimentell bestimmt werden können, keine freien Parameter eingehen.

In einer späteren Arbeit berechnet Schwarz (1985) mit Hilfe von Computersimulationen das dynamische Verhalten eines Wirbels in Anwesenheit einer Grenzfläche oder eines anderen Wirbels. Die Kombination Wirbel-Grenzfläche stellt dabei einen Spezialfall der Kombination Wirbel-Wirbel dar, da der Einfluß einer Grenzfläche gleich dem der an ihr gespiegelten Wirbel ist. Die Rechnungen zeigen, daß eine Wirbellinie von einer Grenzfläche erst beeinflusst wird, wenn ihr Abstand in die Größenordnung  $R/\ln(R/a_0)$  kommt, wobei  $R$  der lokale Krümmungsradius der Wirbellinie ist. In diesem Fall bildet sich an der der Grenzfläche nächstgelegenen Stelle des Wirbels eine Beule aus, die von der Oberfläche angezogen wird, bis schließlich der Wirbelkern die Grenzfläche berührt. Hier macht Schwarz die naheliegende Annahme, daß sich die Wirbellinie an dem Berührungspunkt auftrennt und sich beide Enden mit der Wand verbinden. Die weitere Rechnung zeigt, daß die Wirbel dann in entgegengesetzten Richtungen an der Wand weiterlaufen. Im allgemeineren Fall zweier beliebig orientierter Wirbel, die sich nahe genug kommen, findet

Schwarz, daß in fast allen Fällen sich in den Wirbelfäden Beulen bilden, die einander anziehen. Wenn sich die Wirbelkerne dann berühren, nimmt er an, daß sie sich auftrennen und über Kreuz neu verbinden. Die Rechnung zeigt, daß sich die beiden Wirbel danach wieder voneinander entfernen. Die einzigen Ausnahmen, in denen keine Topologie-Änderung stattfindet, sind die Konstellationen, in denen die Wirbel fast parallel orientiert sind. Dies erklärt auch, daß in einem rotierenden Gefäß eine homogene und parallele Wirbelanordnung stabil sein kann.

## 2.4 Kritische Geschwindigkeiten

Die superfluide Komponente kann nur dissipationsfrei strömen, solange die Relativgeschwindigkeit der beiden Komponenten kleiner als eine bestimmte kritische Geschwindigkeit ist. Obwohl es eine Menge Daten und theoretische Überlegungen zu den kritischen Geschwindigkeiten gibt, herrscht noch immer Unklarheit über ihre korrekte Beschreibung. Unumstritten ist lediglich, daß sie in der Größenordnung 1 bis 10 cm/s liegen, mit abnehmendem Kanaldurchmesser größer und bei Annäherung an  $T_\lambda$  kleiner werden.

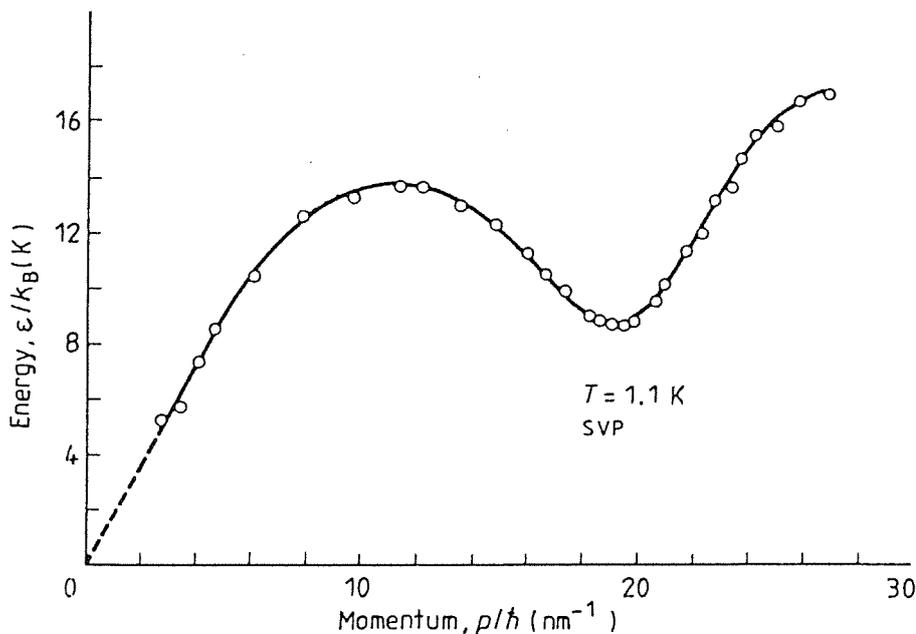


Abb. 2.5: Energie-Impuls-Zusammenhang der elementaren Anregungen von  $^4\text{He}$  nach Henshaw und Woods (1961)

Die einfachsten theoretischen Überlegungen führen zunächst zur Landauschen kritischen Geschwindigkeit. In Abb. 2.5 ist das Spektrum der elementaren Anregungen in Helium II dargestellt. Wenn durch Wechselwirkung des Fluids mit einem freien Teilchen - das kann z.B. die

Gefäßwand sein - eine elementare Anregung mit der Energie  $\varepsilon$  und dem Impuls  $p$  erzeugt werden soll, so zeigt die Energie- und Impuls-Bilanz, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Teilchen und Fluid mindestens  $\varepsilon/p$  betragen muß. Für elementare Anregungen in Helium II liegt der kleinstmögliche Wert von  $\varepsilon/p$  je nach Druck zwischen 45 und 60 m/s und wird Landausche kritische Geschwindigkeit genannt. Da dieser Wert um drei Zehnerpotenzen zu groß ist, muß es in He II andere Anregungen geben, für die  $\varepsilon/p$  kleinere Werte annimmt. Eine Möglichkeit für solche Anregungen sind quantisierte Wirbelringe. Ein Wirbelring mit Radius  $R$  hat, sofern er sich nicht zu nahe einer festen Wand befindet, Energie und Impuls der Form (Vinen, 1963)

$$\varepsilon = \frac{\rho}{2} \kappa^2 R \left( \ln \frac{8R}{a_0} - \frac{7}{4} \right) \quad (2.15)$$

und

$$p = \pi \rho \kappa R^2 \quad (2.16)$$

Unter der Annahme, daß der Wirbelringradius  $R$  nicht größer sein kann als der halbe Kanaldurchmesser  $d$  findet man eine kritische Geschwindigkeit

$$v_c = \frac{\varepsilon}{p} = \frac{\kappa}{\pi d} \left( \ln \frac{4d}{a_0} - \frac{7}{4} \right) \quad (2.17)$$

wie sie in ganz ähnlicher Form erstmals von Feynman (1955) vorgeschlagen wurde und wie sie mit unterschiedlichen Vorfaktoren von vielen Autoren angegeben wird. Sie gibt in der Geometrie- und Temperatur-Abhängigkeit den richtigen Trend wieder und stimmt auch in der Größenordnung grob mit Experimenten überein.

An einer Sammlung von Daten verschiedener Autoren, die Kanaldurchmesser in dem weiten Bereich von  $10^{-7}$  bis 1 cm umfaßt, fanden van Alphen et al (1966), daß die empirische Beziehung

$$v_c^4 d \approx 1 \frac{\text{cm}^5}{\text{s}^4} \quad (2.18)$$

sehr gut erfüllt ist, solange es sich um rein superfluide Strömungen ( $\mathbf{v}_n = 0$ ) handelt. Die Tatsache, daß man bei thermischer Gegenströmung ( $\dot{m} = 0$ ) in relativ weiten Kanälen kleinere kritische Geschwindigkeiten findet, konnten sie auf das Einsetzen der Turbulenz in der normalfluiden Komponente zurückführen. Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experimenten wurde durch die Arbeiten von Craig (1966) und Jones (1968) verringert, die berücksichtigten, daß sich die Energie einer Wirbellinie in der Nähe einer Wand ändert. Sie fanden Ausdrücke der folgenden Formen für die kritische Geschwindigkeit

$$v_c^3 d = B \ln \left( 1 + \frac{C}{v_c} \right) \quad (2.19)$$

bzw.

$$v_c^3 d = \text{const} \quad (2.20)$$

die beide mit van Alphens Datensammlung noch gut verträglich sind. Im Widerspruch dazu stehen allerdings die Ergebnisse neuerer Arbeiten von Schwarz (1982) sowie von Swanson und Donnelly (1985), die beide aufgrund von Skalierungsüberlegungen zu einer Form

$$v_c d \approx \text{const} \quad (2.21)$$

kommen, die von Tough (1982) in folgender Form angegeben wird :

$$(L^{1/2} d)_c \approx \text{const} \quad (2.22)$$

Bezüglich der Temperaturabhängigkeit der kritischen Geschwindigkeiten ist die Situation ähnlich verwirrend. Während Chase (1962) in thermischer Gegenströmung von einem schwer zu erklärenden Anstieg der kritischen Geschwindigkeit bei Annäherung an  $T_\lambda$  berichtet, finden Childers und Tough (1976) ebenfalls in thermischer Gegenströmung einen starken Abfall der kritischen Geschwindigkeit mit zunehmender Temperatur, der von Schwarz (1982) theoretisch bestätigt wird. Interessanterweise finden Baehr und Tough (1984) in Messungen mit unabhängig variierbaren Geschwindigkeiten  $v_n$  und  $v_s$  keine Temperaturabhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit und können außerdem zeigen, daß die obengenannten Daten von Childers und Tough wie ihre eigenen auf einer temperaturunabhängigen kritischen Linie in der  $v_n$ - $v_s$ -Ebene liegen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß auch anerkannte He II-Experten wie Wilks und Betts (1987, §14) die Situation der kritischen Geschwindigkeiten als "not yet fully understood" bezeichnen.

## 2.5 Wärmeleitfähigkeit

In einem "normalen" Medium ist die Wärmestromdichte proportional dem Temperaturgradienten und die Wärmeleitfähigkeit  $k$  daher definiert durch

$$\nabla T = \frac{-\dot{q}}{k} \quad (2.23)$$

Da der Mechanismus der Wärmeleitung im superfluidem Helium ein anderer ist, ergeben sich auch andere Beziehungen für die Wärmeleitfähigkeit. Die Wärmeleitung wird im Zweiflüssigkeitsmodell durch die thermische Gegenströmung von normal- und superfluider Komponente beschrieben. In ruhendem Helium II gilt für die Wärmestromdichte :

$$\dot{q} = \rho_s s T (v_n - v_s) = \rho_s s T v_n \quad (2.24)$$

die somit durch die gleichen Mechanismen begrenzt ist, die die normal- und superfluide Strömung begrenzen. Da beide Komponenten jeweils laminar oder turbulent strömen können, gibt es vier verschiedene Fälle, von denen hier die zwei wichtigsten dargestellt werden sollen.

Bei kleinen Wärmestromdichten und in engen Kanälen sind beide Strömungen laminar. Während die laminare superfluide Strömung durch die London-Gleichung beschrieben wird

$$\nabla\mu = \frac{1}{\rho} \nabla p - s \nabla T = 0 \quad , \quad (2.25)$$

hat die Lösung der Poiseuille-Gleichung 2.5 für die laminare normalfluide Strömung in einem runden Rohr mit Durchmesser  $d$  die Form

$$\nabla p = - \frac{32}{d^2} \eta_n \mathbf{v}_n = - \frac{1}{K_p} \eta_n \mathbf{v}_n \quad . \quad (2.26)$$

Durch Verknüpfung der letzten drei Formeln erhält man eine lineare Beziehung zwischen Wärmestromdichte und Temperaturgradient :

$$\nabla T = - \frac{32 \eta_n}{d^2 (\rho s)^2 T} \dot{\mathbf{q}} = - \frac{\eta_n}{K_p (\rho s)^2 T} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.27)$$

Diese Gleichung ähnelt stark der normalen Definition der Wärmeleitfähigkeit, allerdings mit der ungewöhnlichen Eigenschaft, daß die Wärmeleitfähigkeit proportional der Querschnittsfläche ist. Diese Beziehung wird experimentell sehr gut bestätigt und kann benutzt werden, um die Viskosität der normalfluiden Komponente  $\eta_n$  oder bei engen Kapillaren den Durchmesser  $d$  zu bestimmen.

Im anderen Extremfall, also bei hohen Wärmestromdichten und weiten Kanälen, sind sowohl die normal- als auch die superfluide Strömung turbulent. Für den Gradienten des chemischen Potentials  $\nabla\mu$  gilt dann :

$$\nabla\mu = \frac{1}{\rho} \nabla p - s \nabla T \approx \rho_n A_{GM}^{(T)} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^3 \quad (2.28)$$

Nach dem *VDI-Wärmeatlas (1977)* gilt für die turbulente normalfluide Strömung

$$\nabla p \approx - \xi \frac{\rho}{2} \frac{v_n}{d} \mathbf{v}_n \quad , \quad (2.29)$$

wobei der Widerstandsbeiwert  $\xi$  in der Größenordnung 0.05 liegt. Durch Verknüpfen der beiden letzten Formeln mit Gl. 2.24 findet man :

$$\nabla T \approx - \frac{\xi}{2 d} \frac{1}{s (\rho s T)^2} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\rho_n A_{GM}^{(T)}}{s (\rho_s s T)^3} \dot{\mathbf{q}}^3 \quad . \quad (2.30)$$

Der Temperaturgradient enthält also einen Term proportional zum Quadrat der Wärmestromdichte, der von dem Strömungswiderstand der turbulent fließenden normalfluiden Komponente kommt, und einen kubischen Term, der von der gegenseitigen Reibung herrührt.

Bei technischen Anwendungen sind die relevanten Wärmestromdichten und die Rohrabmessungen i.A. so groß, daß der quadratische Term in  $\dot{q}$  gegenüber dem kubischen vernachlässigt werden kann. Man erhält dann

$$\nabla T = - \frac{\dot{q}^3}{f_{GM}(T)}, \quad (2.31)$$

wobei die Gorter-Mellink-Wärmeleitungsfunktion  $f_{GM}(T)$  definiert ist als :

$$f_{GM}(T) = \frac{s(\rho_s s T)^3}{\rho_n A_{GM}(T)}. \quad (2.32)$$

Die Experimente lassen sich meist durch einen etwas größeren Exponenten als 3 besser beschreiben. So finden *Chase (1962)* für Temperaturen oberhalb 1.7 K einen Wert um 3.5 und *Ahlers (1969)* nahe bei  $T_\lambda$  sogar den Wert 4. Außerdem gibt es inzwischen auch theoretische Ansätze (*Swanson und Donnelly, 1985*), die für einen Exponenten größer als 3 sprechen.

## 2.6 Wärmeübergang und Kapitza-Leitfähigkeit

Wenn man durch die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien einen Wärmestrom schiebt, so ist der Temperaturverlauf an dieser Grenze nicht stetig, sondern es tritt dort ein Temperatursprung auf. An der Grenzfläche zwischen einem Metall und Helium II ist dieser Effekt besonders ausgeprägt und bei einem entsprechendem Wärmestrom kann die Temperaturdifferenz einige Grad Kelvin erreichen. Der Wärmeübergangskoeffizient  $h$  an einer Grenzfläche ist definiert als Quotient aus Wärmestromdichte  $\dot{q}$  und Temperatursprung  $\Delta T$  und sein Grenzwert für kleine  $\dot{q}$  und  $\Delta T$  wird als Kapitza-Leitfähigkeit  $h_K$  bezeichnet :

$$h_K = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\dot{q}}{\Delta T} \quad (2.33)$$

Die Theorie liefert zunächst eine zu große Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten in Form des Phononen-Strahlungs-Limits. Nach dem Debye-Modell ist die Phononen-Energiedichte in einem Festkörper bei tiefen Temperaturen proportional zu  $T^4$ . Damit ergibt sich als Nettoenergiestromdichte durch die Grenzfläche zwischen zwei Körpern mit unterschiedlicher Temperatur (*van Sciver, 1986, § 5.3*) :

$$\dot{q} = \frac{\pi^4}{10 \hbar} \left( \frac{k_B}{\Theta_D} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \frac{n}{\pi} \right)^{2/3} (T_S^4 - T_L^4) \quad (2.34)$$

Dabei bezeichnen  $T_S, T_L$  die Temperaturen des Festkörpers bzw. des Fluids,  $k_B$  den Boltzmann-Faktor,  $\Theta_D$  die Debye-Temperatur und  $n$  die Zahl der Atome pro Volumen des Metalls. Für  $\Delta T \ll T$  ergibt sich daraus die Kapitza-Leitfähigkeit zu

$$h_K = \frac{2 \pi^4}{5 \hbar} \left( \frac{k_B}{\Theta_D} \right)^2 \left( \frac{3 n}{4 \pi} \right)^{2/3} T^3 \quad (2.35)$$

Die  $T^3$ -Abhängigkeit wird bei einigen Materialien experimentell näherungsweise bestätigt aber die Absolutwerte sind um ungefähr eine Größenordnung kleiner als die Abschätzung. Die Erweiterung zur Theorie der akustischen Fehlanpassung (acoustic mismatch) durch Khalatnikov berücksichtigt u.a., daß aufgrund des Unterschiedes der akustischen Impedanzen der beiden Materialien ein Großteil der Phononen an der Grenzfläche reflektiert wird und deshalb nicht zu dem Wärmestrom beitragen kann. Für die Wärmestromdichte erhält man hiermit :

$$\dot{q} = \frac{4 \pi^5 k_B^4}{15 \hbar^3} \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S^3} (T_S^4 - T_L^4) \quad (2.36)$$

Die daraus bestimmten Kapitza-Leitfähigkeiten liegen um ungefähr eine Größenordnung unter den experimentellen Werten. Auch mit weiteren Verfeinerungen der Theorie gelingt es bestenfalls, die Kapitza-Leitfähigkeiten von speziell behandelten Oberflächen bei sehr tiefen Temperaturen ( $T \ll 1K$ ) zuverlässig vorherzusagen. Da man außerdem bei technischen Materialien ohne speziell behandelte Oberfläche oft auch kleinere Exponenten als 4 findet, ist es üblich, für praktische Anwendungen die halb-empirische Formel :

$$\dot{q} = a (T_S^n - T_L^n) \quad (2.36)$$

mit  $a$  und  $n$  als Fitparameter zu benutzen (*van Sciver, 1980*).

### 3 Apparatur

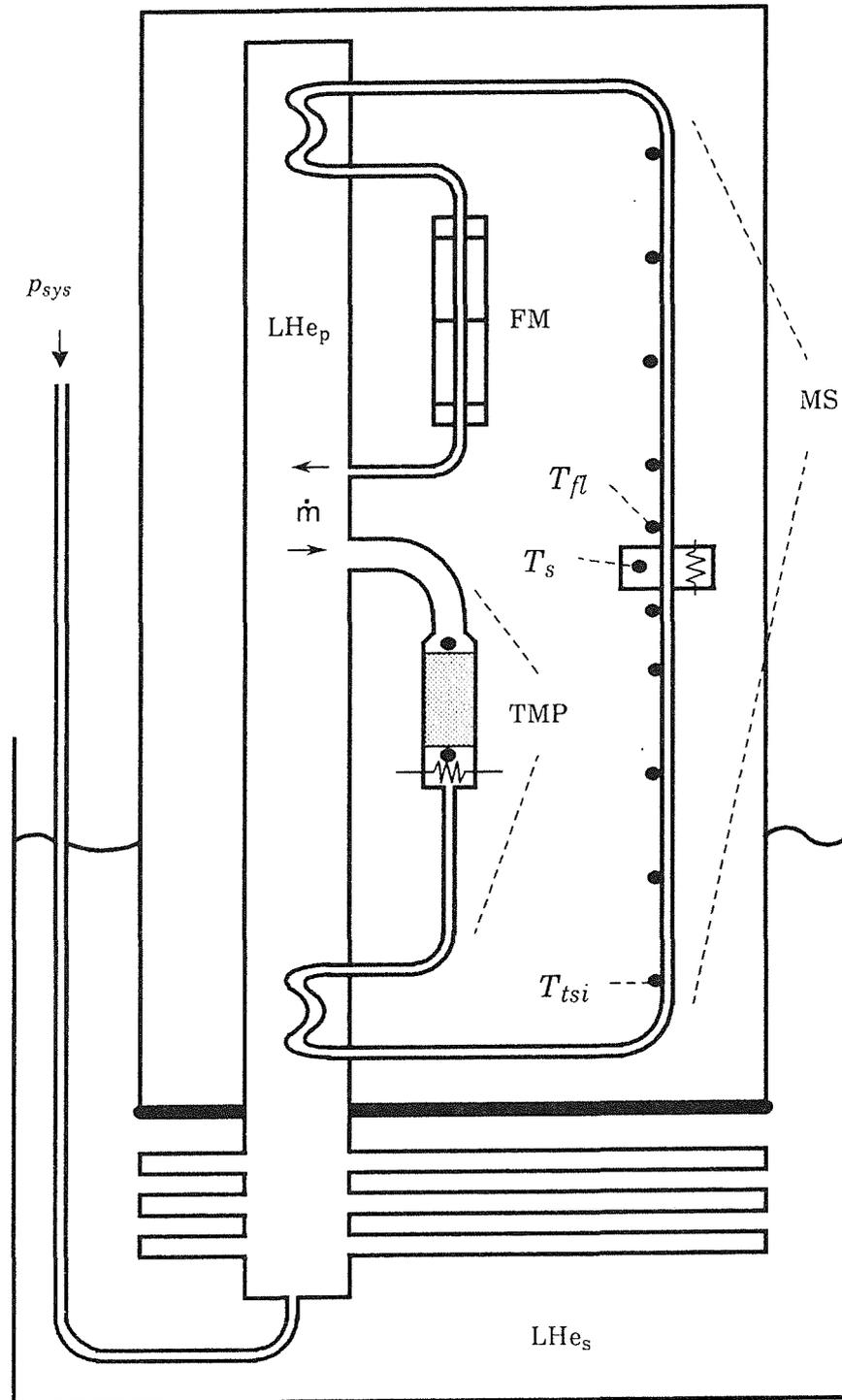


Abb. 3.1: Schematische Darstellung des Helium II - Kühlkreises

Alle Experimente mit flüssigem Helium wurden in derselben Apparatur durchgeführt, die jeweils für bestimmte Messungen geringfügig modifiziert wurde. Hier soll zunächst der Standardaufbau

beschrieben werden. Abweichungen davon werden in den entsprechenden Kapiteln vor den jeweiligen Messungen beschrieben.

### 3.1 Kryostat und allgemeiner Aufbau

Der gesamte Heliumkreislauf befindet sich in einem Kryostaten mit einem Heliumraum von ca. 2 m Höhe und 60 cm Durchmesser. Dieser enthält ein Heliumbad unter Sättigungsdampfdruck ( $\text{He II}_s$ ), dessen Druck und somit auch Temperatur mithilfe eines Pumpstandes (Drehschieberpumpe:  $100 \text{ m}^3/\text{h}$ , Rootspumpe:  $1000 \text{ m}^3/\text{h}$ ) und steuerbarer Ventile im Bereich 1.4 K bis  $T_\lambda$  geregelt werden können. Die Regelschwankungen der Temperatur sind dabei kleiner als 1 mK und die abführbare Leistung beträgt ca. 8 W bei 1.8 K und 5 W bei 1.6 K. In dieses Helium II-Bad mit konstanter Temperatur taucht der Hauptwärmetauscher des He II-Kreislaufs, der in Abb.3.1 schematisch dargestellt ist. Der gesamte He II-Kreislauf befindet sich im Vakuum hinter einem Kupferschild, das thermisch an das He II-Bad angekoppelt ist. Von dem Hauptwärmetauscher führt ein Steigrohr mit einem Innendurchmesser von 30 mm nach oben in den Vakuumraum, an das die Komponenten des He II-Kreises angeflanscht sind. Der He II-Kreislauf besteht aus einer thermomechanischen Pumpe (TMP) zum Antrieb der Strömung, einem akustischen Flowmeter (FM) zum Messen der Strömungsgeschwindigkeit und der Meßstrecke (MS) zur Untersuchung des Wärmeübergangs an stömendes Helium II und des Wärmetransports in stömendem Helium II. Diese Komponenten sind jeweils durch Wärmetauscher im Steigrohr thermisch voneinander entkoppelt und werden im folgenden einzeln beschrieben.

Der Systemdruck im Heliumkreislauf kann von außen über ein Druckaufbaurohr zwischen Dampfdruck und 1.0 MPa vorgegeben werden und beträgt in der Regel 0.1 MPa, in manchen Fällen auch 0.25 MPa.

### 3.2 Thermomechanische Pumpe

Eine thermomechanische Pumpe (TMP) besteht aus einem porösen Stopfen genannt Superfilter und einer Heizung zum Erzeugen einer Temperaturdifferenz zwischen den beiden Enden des Superfilters. Die Heizung der TMP befindet sich in einer Kammer am Auslaß des Superfilters und besteht aus lackisoliertem Widerstandsdraht, der direkt von flüssigem Helium umspült ist. Da zur Erzeugung eines hohen Förderdrucks eine möglichst große Temperaturdifferenz am Superfilter erforderlich ist, sollte der Einlauf des Superfilters thermisch so gut wie möglich an die Badtemperatur angekoppelt sein, was durch einen großen Querschnitt einfach erreicht werden kann. Im Gegensatz dazu muß die Kammer am Auslaß des Superfilters thermisch von dem Bad

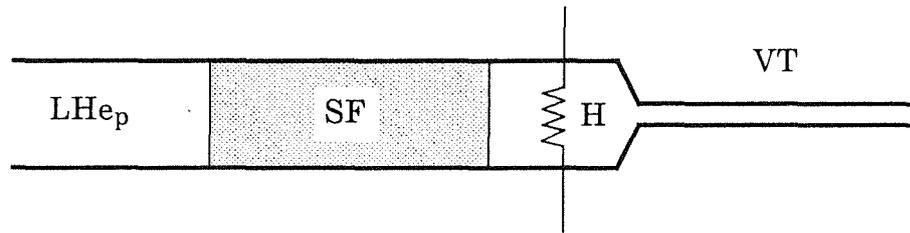


Abb. 3.2: Schematische Darstellung einer thermomechanischen Pumpe

entkoppelt sein, damit der über Wärmeleitung durch das Helium abgeführte Teil der eingespeisten Heizleistung möglichst klein bleibt. Aus diesem Grund schließt sich an die Kammer mit der Heizung ein sogenanntes "Wirbelrohr"\* an, ein Edelstahlrohr, dessen Abmessungen (3.6 mm Durchmesser, 300 mm Länge) einen Kompromiß zwischen geringem Strömungswiderstand und hohem Wärmewiderstand darstellen. Abb.3.2 zeigt den schematischen Aufbau einer TMP mit Superfilter (SF), Heizung (H) und Wirbelrohr (VT).

### 3.3 Herstellung der Superfilter

Es wurden zwei unterschiedliche Typen von Superfiltern benutzt und untersucht, nämlich solche aus gepreßtem  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver und solche aus dichtgepackten Membranfilterscheiben aus Zellulose-nitrat.

Aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver mit verschiedenen nominellen Korngrößen wurden Superfilter in unterschiedlichen Abmessungen hergestellt (siehe Tabelle 3.1). In allen Fällen wurden die Pulver in Edelstahlrohre mit 1 mm Wandstärke gepreßt, die während des Pressens armiert waren, um ein seitliches Ausbeulen zu verhindern. Die Superfilter wurden in Schritten von 5 % des Gesamtvolumens gefüllt und nach jedem Schritt mit ca. 130 MPa gepreßt. Das Pulver war in gepreßtem Zustand von kreideartiger Konsistenz.

Die Membranfilterscheiben wurden in das Edelstahlrohr geklebt. Dazu wurden genügend viele Filterscheiben mit einem Durchmesser von 25 mm zu einem Zylinder von 14 mm Höhe gestapelt, dieser Zylinder konzentrisch in dem Edelstahlrohr von 26 mm innerem Durchmesser fixiert und

---

\* Dieser Begriff ist als terminus technicus zu verstehen. Er wurde im Zusammenhang mit Arbeiten zu "vortex coolers" geprägt. (Staas und Severijns, 1969)

Kapitel	4.5.2	4.6.3	4.6.4	4.6.5
Material	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -Pulver	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -Pulver	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -Pulver	Zellulosenitrat-Filterscheiben
mittl. Korn- bzw. Poren-Durchmesser [µm]	0.05	0.05	1.5	0.01
Füllfaktor $k$	30 %	33 %	48 %	25 %
Porosität $\varepsilon$	0.7	0.67	0.52	0.75
Länge [mm]	100	65	100	14
Durchm. [mm]	10	10	34	23
Fläche [cm <sup>2</sup> ]	0.785	0.785	9.08	4.15
Darcy-Permeabilität $\varepsilon K_p$ [m <sup>2</sup> ]	$3.5 \cdot 10^{-16}$	$2.4 \cdot 10^{-16}$	$1.47 \cdot 10^{-15}$	$3.37 \cdot 10^{-16}$
Darcy-Durchmesser $d_D$ [µm]	0.13	0.11	0.30	0.12

Tab. 3.1: Verzeichnis der verwendeten Superfilter

dann der Ringspalt zwischen Filterscheiben und Edelstahlrohr mit einem Tieftemperaturkleber (Stycast) aufgefüllt. An beiden Enden des Superfilters ist noch ein Zentrierring angebracht, so daß der effektive freie Durchmesser des Superfiltermaterials 23 mm beträgt.

### 3.4 Charakterisierung der Superfilter

Zur Charakterisierung der Superfilter wurden die Porosität sowie die Darcy-Permeabilität für Heliumgas bei Raumtemperatur bestimmt.

#### Porosität

Die Porosität  $\varepsilon$  eines Superfilter ist definiert als das Verhältnis von offenem Querschnitt zu Gesamtquerschnitt. Bei der Herstellung der Superfilter wird der Füllfaktor  $k$  bestimmt als Quotient aus der Dichte des gepreßten Materials und der Dichte des massiven Materials. Unter der Annahme einer homogenen und isotropen Zusammensetzung kann man daraus eine mittlere Porosität zu :

$$\varepsilon = 1 - k \quad (3.1)$$

abschätzen. Die Größe  $\varepsilon A$  ist dann die der Strömung im Superfilter zur Verfügung stehende Querschnittsfläche.

### Permeabilität

Die Darcy-Permeabilität  $K_p$  ist gegeben durch :

$$K_p = \frac{v \eta}{\nabla p} \quad (3.2)$$

Sie wird aus laminaren Durchflußmessungen mit Heliumgas bei Raumtemperatur bestimmt. Dazu wird Helium aus der Druckflasche mit einem Überdruck von 0.05 und 0.1 MPa durch die Filter gepreßt. Nach Erreichen des Gleichgewichtszustands wird die Volumen-Durchflußrate  $\dot{V}_0 = v_0 A$  gemessen. Der Index 0 bezieht sich dabei auf Größen bei atmosphärischem Druck. Unter Annahme von  $\rho = \rho_0 p/p_0$  und der dichteunabhängigen Viskosität  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$  sowie nach Einsetzen von  $\dot{V}_0 = \dot{m}/\rho_0 = \rho/\rho_0 v \varepsilon A$  und Integrieren erhält man :

$$K_p = \frac{\eta l}{\varepsilon A} \frac{\dot{V}_0 p_0}{(p_I^2 - p_0^2)} \quad (3.3)$$

Die Darcy-Permeabilität ist unabhängig von der äußeren Geometrie des Superfilters und charakterisiert die Porengröße des Materials. Eine runde Kapillare mit dem Durchmesser  $d$  hätte die Darcy-Permeabilität  $K_p = d^2/32$ . Aus dieser Beziehung ergibt sich der Darcy-Durchmesser  $d_D$ , der eine mittlere Porengröße auch für nicht runde Poren darstellt, zu :

$$d_D = \left( \frac{K_p}{32} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Die Werte der verwendeten Superfilter finden sich in Tab. 3.1.

### 3.5 Meßstrecke und Wärmeübergangsmesszelle

Die Meßstrecke (Abb. 3.1, MS) besteht aus einem 1 m langen Edelstahlrohr mit einem Innendurchmesser von 3 mm, das in Abständen von 100 mm mit Thermometern versehen ist. Als Thermometer dienen Kohlewiderstände, die sich in kleinen Kammern seitlich an der Meßstrecke befinden. Auf diese Art kann die Fluidtemperatur ohne wesentliche Beeinflussung der Strömung gemessen werden. Bevor das He II in die Meßstrecke gelangt, durchläuft es einen Wärmetauscher im Steigrohr, den es mit einer Temperatur  $T_{tsi}$  nahe der Badtemperatur verläßt.

In der Mitte der Meßstrecke befindet sich die Wärmeübergangsmesszelle, die in Abb. 3.3 dargestellt ist. Sie besteht im wesentlichen aus einem Kupferring (OFHC-Kupfer, 3 mm Innendurchmesser, 20 mm Außendurchmesser, 5 mm Länge), der zwischen zwei Edelstahlflansche geklemmt ist. Der Kupferring wird durch einen Widerstandsdraht, der längs des äußeren Umfangs aufgewickelt und verklebt ist, geheizt und ist durch Kaptonfolien thermisch von den Edelstahlflanschen isoliert. In einer tangentialen Bohrung 1 mm vom inneren Durchmesser

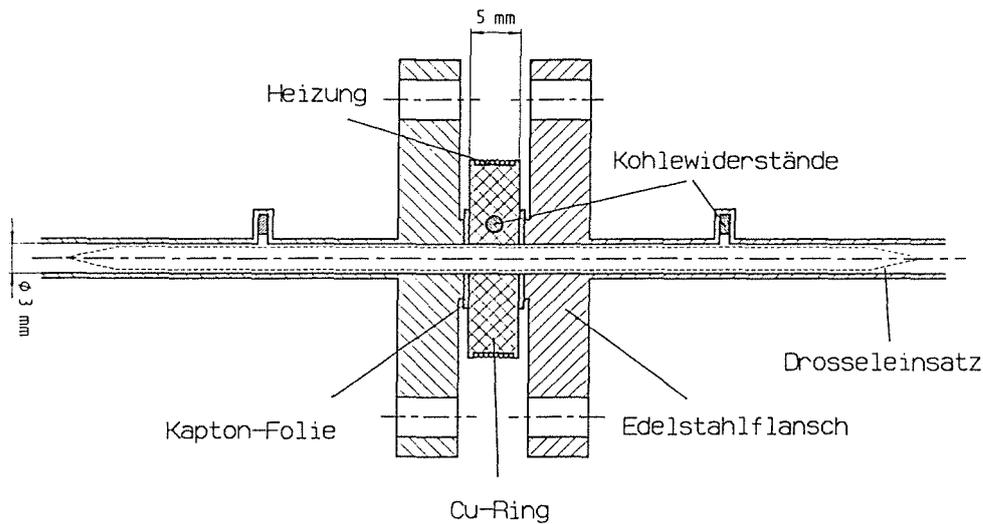


Abb. 3.3: Wärmeübergangsmesszelle

entfernt befindet sich ein Kohlewiderstand zur Bestimmung der Temperatur des Cu-Rings. Der in Abb. 3.3 gestrichelt gezeichnete nadelförmige Einsatz mit 2.35 mm Durchmesser und 180 mm Länge dient dazu, den Heliumquerschnitt von  $0.072 \text{ mm}^2$  auf  $0.025 \text{ mm}^2$  zu verringern und so bei fast unverändertem Massenstrom die Strömungsgeschwindigkeit in der Wärmeübergangsmesszelle fast um den Faktor 3 zu erhöhen. Außerdem wird dadurch auch der Strömungswiderstand des gesamten Kreislaufs um ungefähr den Faktor 3 erhöht.

### 3.6 Flowmeter

Das akustische Flowmeter (Hofmann und Vogeley, 1984) besteht aus drei identischen ringförmigen elektrostatischen Schallwandlern im Abstand von je 100 mm (siehe Anhang B). Die Schallwandler und die sie verbindenden Edelstahlröhren haben einen Innendurchmesser von 4 mm. Um die akustische Ankopplung zu verbessern sind die Edelstahlröhren an beiden Enden konisch aufgeweitet, wodurch sich der effektive Querschnitt  $A'$  auf 111% des realen Querschnitts  $A_0$  erhöht. Der mittlere Schallwandler wird mit einem rechteckähnlichen Puls angeregt und die an den beiden äußeren Schallwandlern ankommenden Signale werden auf einem Oszilloskop registriert. Eine turbulente Strömung der Geschwindigkeit  $v$  in dem Flowmeter erzeugt eine Laufzeitdifferenz der beiden entgegengesetzt laufenden Signale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l}{(c-v)} - \frac{l}{(c+v)} = \frac{2 v l}{(c^2 - v^2)} \approx \frac{2 v l}{c^2} = \frac{2 \dot{m}}{c^2 \rho} \frac{l}{A'} \quad (3.5)$$

die am Oszilloskop auf 0.1  $\mu$ s genau gemessen werden kann. Bei einer Schallgeschwindigkeit  $c$  von 240 m/s entspricht dies einer Genauigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von 3 cm/s bzw. des Massenstroms von 0.05 g/s. Durch Einsatz eines elektronischen Zählers kann diese Genauigkeit je nach Stabilität der Flowmetersignale auf bis zu 0.01 g/s verbessert werden.

### 3.7 Temperaturmessung

Im Tieftemperaturbereich werden 100  $\Omega$ -Kohlewiderstände (Allen-Bradley) benutzt, die in situ individuell kalibriert werden. Als Referenz dient die aus dem gemessenen Druck bestimmte Temperatur des gesättigten Heliumbades. Diese Kalibrierung ist allerdings nur im Helium II-Bereich sinnvoll, da nur die extrem gute Wärmeleitfähigkeit von He II eine Temperaturgleichheit im gesamten Heliumkreislauf gewährleistet. Zur Kalibrierung werden im Bereich 1.4 K bis 2.15 K gleichverteilt ca. 20 Badtemperaturen eingestellt und nach Erreichen des Gleichgewichtszustands zwei Messung im Abstand von einer Minute aufgenommen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate werden dann für jeden Kohlewiderstand die drei Parameter A, B, C der folgenden Relation (*Kes et al, 1974*) ermittelt:

$$\left(\frac{\log R}{T}\right)^{1.049} = A \log^2 R + B \log R + C \quad (3.6)$$

Direkt nach einer Kalibrierung ist die Übereinstimmung der Kohlethermometer untereinander besser als 0.5 mK. Aufgrund einer Drift werden die Abweichungen mit der Zeit größer, bleiben aber in der Regel unterhalb 2 mK, sodaß eine Neukalibrierung meist erst erforderlich wird, wenn die Apparatur aufgewärmt und wieder abgekühlt wird. Zur Kontrolle der Absolutgenauigkeit der Kalibrierung ist ein vom Hersteller geeichter Germaniumwiderstand im Steigrohr eingebaut. Die Abweichungen zwischen Germaniumthermometer und der aus dem Dampfdruck ermittelten Temperatur sind kleiner als 5 mK.

Als Temperatursensoren im Bereich über 5 K dienen 100  $\Omega$ -Platinwiderstände (Pt 100) ohne individuelle Kalibrierung.

Alle benutzten Widerstandsthermometer werden nach der 4-Punkt-Methode mit einem Konstantstrom von 1  $\mu$ A betrieben, sodaß keine Verfälschung der Meßergebnisse durch die Leitungswiderstände oder durch Selbsterwärmung auftreten kann.

### 3.8 Druckmessung

Die Druckmessungen im He II-Kreislauf erfolgen mit Hilfe von kommerziell erhältlichen piezoresistiven Druckaufnehmern (Siemens KPY 10, 0-1 MPa), die mit einer Konstantspannung von 5 V betrieben werden. Aufgrund der Drift bei starken Temperaturänderungen müssen auch sie in situ bei tiefen Temperaturen kalibriert werden. Dazu werden im System über das Druckaufbaurohr von außen ca. 20 Druckwerte im Bereich 0.08 MPa bis 0.3 MPa eingestellt und die Sensorsignale gemessen. An die außerhalb des Systems am Druckaufbaurohr gemessenen Druckwerte wird ein Polynom dritten Grades im Sensorsignal angepaßt und zur Umrechnung benutzt. Die Genauigkeit des Absolutwertes wird auf ca. 50 hPa geschätzt, die der Druckdifferenz zwischen zwei Sensoren dagegen auf 1 hPa, bei höheren Werten auf 1 % der Druckdifferenz.

### 3.9 Datenerfassung

Für die Messungen steht ein Tischrechner (HP 86 B) mit Diskettenlaufwerk und Drucker zur Verfügung. Dieser steuert eine Datenerfassungseinheit (HP 9734) bestehend aus Digitalvoltmeter, Meßstellenumschalter sowie ansteuerbaren Strom- und Spannungsquellen. Es wurde ein Meßprogramm erstellt, mit dessen Hilfe alle vorhandenen Meßgrößen in unterschiedlichen Kombinationen erfaßt, dargestellt und abgespeichert werden können. Zusätzlich können bestimmte Größen wie z.B. Heizleistungen oder der Sollwert der Badtemperatur vom Programm aus eingestellt werden, sodaß u.a. auch die Eichmessungen automatisch durchgeführt werden können. Nach dem Erfassen und Abspeichern werden die Daten auf einen PC (HP 310) übertragen und dort weiterverarbeitet und graphisch dargestellt.

## 4 Ergebnisse und Diskussion

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen Messungen beschrieben und ihre Ergebnisse diskutiert werden. Der erste Abschnitt behandelt den Strömungswiderstand von superfluidem Helium in weiten Kanälen. Diese Messungen fielen nebenbei mit an und werden nur sehr kurz beschrieben. Der nächste Teil enthält die Messungen der Wärmeleitfähigkeit in weiten Kanälen. Die Ergebnisse werden bezüglich des Exponenten  $m$  der Wärmeleitfähigkeit diskutiert und es wird eine analytische Näherung angegeben. Diese Näherung wird benötigt, um im folgenden Abschnitt den Temperaturverlauf in strömendem Helium II in der Nähe einer Wärmequelle zu berechnen und mit gemessenen Werten zu vergleichen. Es schließen sich die beiden größten Teile an, die den Wärmeübergang von technischem Kupfer an strömendes Helium sowie die Untersuchungen an den thermomechanischen Pumpen zum Thema haben. Ihre weitere Aufgliederung wird an Ort und Stelle erfolgen. Den Abschluß des Kapitels bildet ein Abschnitt mit Vorschlägen für die Auslegung einer TMP.

### 4.1 Strömungswiderstand in weiten Kanälen

Bei annähernd isothermer Strömung ( $v_{ns} \ll v_n \approx v_s$ ) in weiten Kanälen verhält sich superfluides Helium wie eine Newtonsche Flüssigkeit und zeigt einen Strömungswiderstand entsprechend der Viskosität der normalfluiden Komponente. Schon bei einer Geschwindigkeit von 1 cm/s liegt in einem Kanal mit 3 mm Durchmesser die Reynoldszahl  $R_D = (\rho v d) / \eta_n$  bei 3000. Dies bedeutet, daß bei allen hier vorgestellten Experimenten die Strömung vollständig turbulent ist. Bei turbulenter Strömung gilt für den Druckabfall  $\Delta p$  an einem Rohr mit Länge  $l$  und Durchmesser  $d$  (VDI Wärmeatlas, 1977):

$$\Delta p = \xi \frac{\rho}{2} v^2 \frac{l}{d} \quad (4.1)$$

Der Widerstandsbeiwert  $\xi$  ist für glatte Oberflächen und Reynoldszahlen kleiner  $10^5$  gegeben durch die Blasius-Formel  $\xi = 0.3164 R_D^{-1/4}$  und nähert sich für große Reynoldszahlen einem konstanten Wert an, der je nach Rauigkeit der Wand zwischen 0.01 und 0.1 liegt. Abb. 4.1 zeigt den an dem He II-Kreislauf gemessenen Druckabfall als Funktion des Massenstromes  $\dot{m}$  für die Fälle mit und ohne Einsatz zur Erhöhung des Strömungswiderstands. An den durchgezogenen Kurven der Form  $\Delta p = a \dot{m}^2$  erkennt man den quadratischen Zusammenhang zwischen Druckabfall und Massenstrom. Da die Rohrdurchmesser des He II-Kreises zwischen 3 und 34 mm variieren, sind die Messungen nicht quantitativ auswertbar. Allerdings kann man aus dem ohne Drosseleinsatz bestimmten Vorfaktor der Beziehung

$$\Delta p = 1.68 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{kg m}} \dot{m}^2 \quad (4.2)$$

unter Verwendung von

$$\dot{m} = \rho v \frac{\pi d^2}{4} \quad (4.3)$$

einen effektiven Rohrdurchmesser  $d_0$  des gesamten Heliumkreises abschätzen. Bei einer Gesamtlänge von 5 m und einem grob geschätzten Widerstandsbeiwert  $\xi$  von 0.04, der einer Oberflächenrauigkeit von ca. 1% entspricht, erhält man den Wert

$$d_0 = \left( \xi \frac{\rho}{2} \frac{16 l}{\pi^2} \frac{\dot{m}^2}{\Delta p} \right)^{\frac{1}{5}} \approx 3.6 \text{ mm} , \quad (4.4)$$

der durchaus realistisch ist. Dies zeigt, auch in Übereinstimmung mit Untersuchungen anderer Autoren (*Johnson und Jones, 1978* sowie *Dorra et al, 1985*), daß der Strömungswiderstand von Helium II in hinreichend weiten Kanälen durch Beziehungen der klassischen Hydrodynamik beschrieben werden kann.

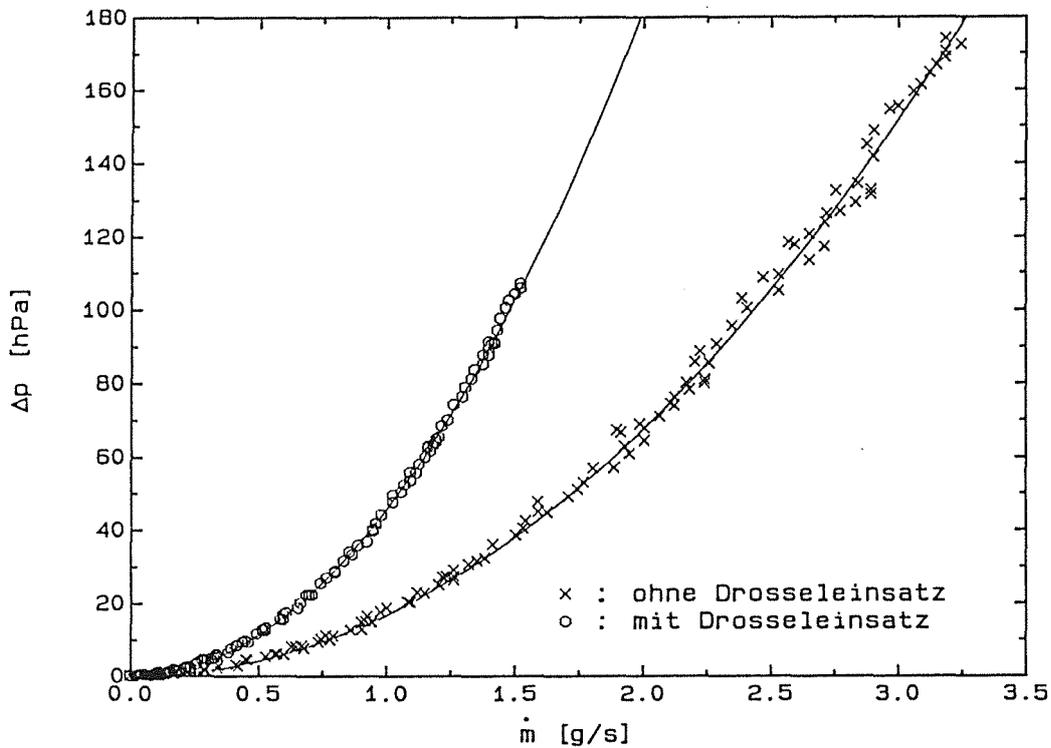
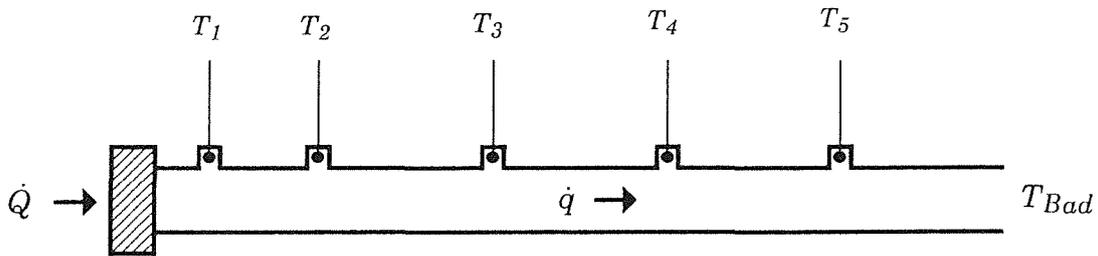


Abb. 4.1: Druckabfall an der Meßstrecke als Funktion des Massenstroms

## 4.2 Wärmeleitfähigkeit von Helium II

Zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit werden die Wärmestromdichte und der Temperaturgradient an der gleichen Stelle benötigt. Die entsprechenden Messungen wurden in dem in Abb. 4.2 schematisch dargestellten Teil der Meßstrecke durchgeführt, der durch Einfügen einer thermisch gut isolierenden Kaptonscheibe zwischen dem Kupferring mit der Heizung und dem Flansch von dem Rest der Meßstrecke abgetrennt wurde. Der unbenutzte Teil der Meßstrecke war während der Messungen evakuiert, sodaß durch ihn keine Wärme abgeführt werden konnte. Die Abstände zwischen den Thermometern betragen 100 bzw. 77 mm und die Heliumquerschnittsfläche  $A$  hatte  $7.07 \text{ mm}^2$ . Eine Abschätzung ergibt, daß der Wärmestrom durch das Edelstahlrohr



$$\Delta T_{ij} = T_i - T_j ; 1 \leq i < j \leq 5$$

Abb. 4.2: Schema des Aufbaus für die Wärmeleitfähigkeitsmessungen

der Meßstrecke  $10^{-5}$  mal kleiner ist als der durch das Helium und daher vernachlässigt werden kann. Alle Messungen wurden bei dem Standard-Systemdruck von 0.1 MPa durchgeführt. Bei vier Badtemperaturen  $T_{Bad}$  (1.4, 1.8, 1.9, 2.0 K) wurde die Heizleistung  $\dot{Q}$  jeweils solange schrittweise erhöht, bis die Temperatur  $T_1$  größer als  $T_\lambda$  war. Nach jedem Schritt wurde der Gleichgewichtszustand abgewartet und dann  $T_1$  bis  $T_5$  und  $\dot{Q}$  gemessen. Durch Auswertung aller möglichen Kombinationen ergaben sich aus einer Messung insgesamt 10 Meßpunkte bestehend aus einer niederen und einer hohen Temperatur  $T_i$  und  $T_j$ , dem Abstand  $l$  zwischen den entsprechenden Thermometern und der Wärmestromdichte  $\dot{q} = \dot{Q}/A$ . Um den relativen Meßfehler zu begrenzen, wurden die Meßpunkte mit  $\Delta T = (T_i - T_j) < 10 \text{ mK}$  verworfen. Die Messungen decken damit in der Wärmestromdichte den Bereich von 0.3 bis  $2 \text{ W/cm}^2$  ab und die mittleren Temperaturen  $T_{av} = (T_i + T_j)/2$  liegen zwischen 1.4 und 2.1 K.

Im Kapitel 2.5 wurde gezeigt, daß je nachdem, ob die beiden Komponenten des He II laminar oder turbulent strömen, die Wärmeleitung durch ganz unterschiedliche Beziehungen beschrieben wird. Mithilfe der Beziehungen (2.1) und (2.2) wurden für  $\dot{m} = 0$  aus der Temperatur und der Wärmestromdichte die mittleren Geschwindigkeiten der beiden Komponenten bestimmt. Es zeigt

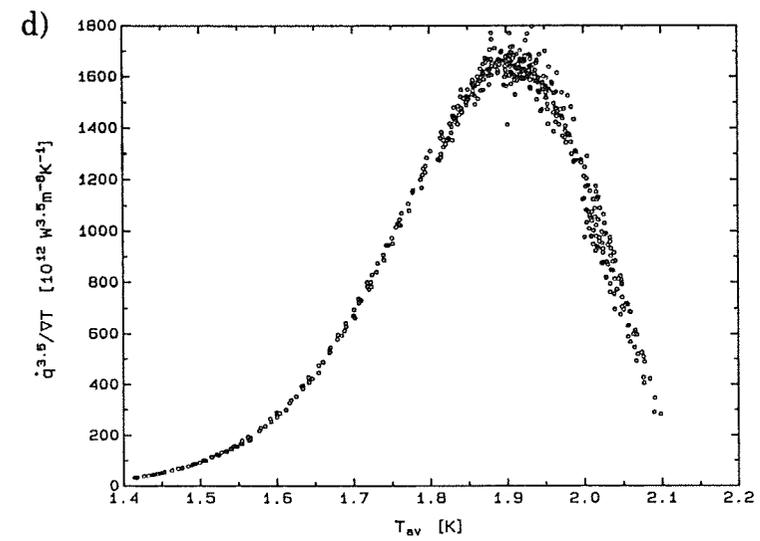
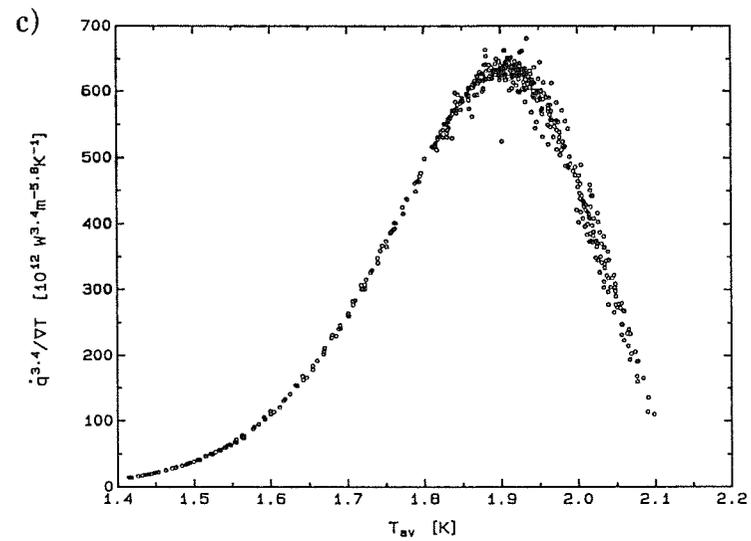
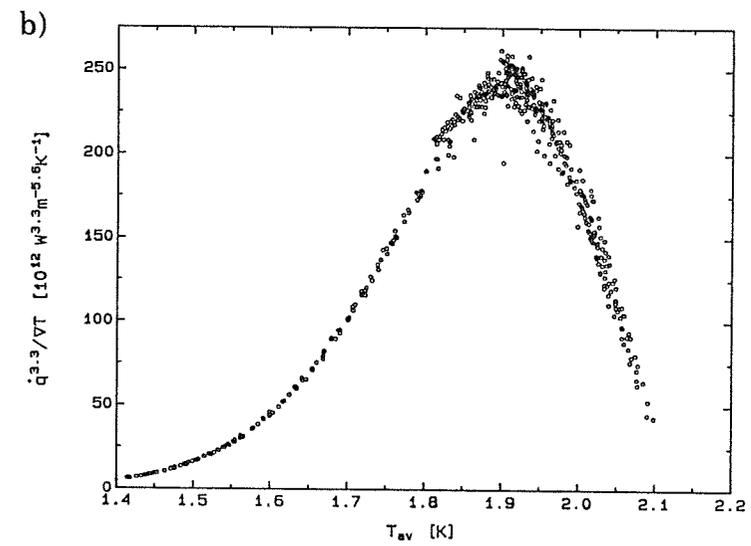
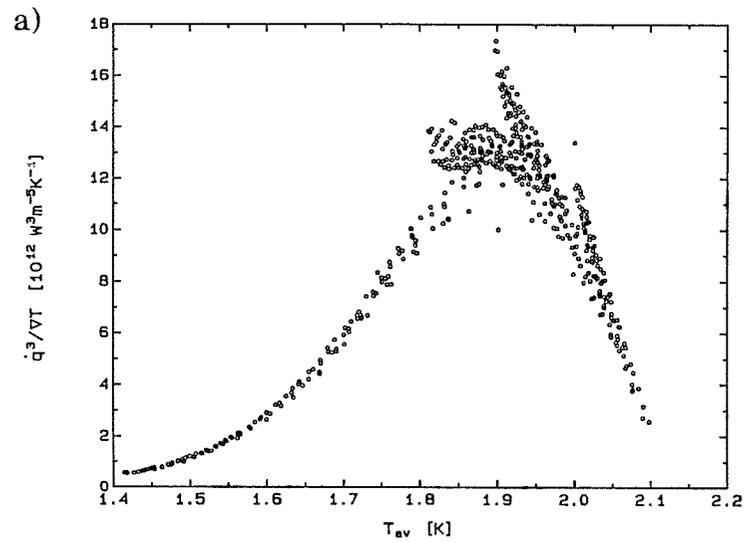


Abb. 4.3: Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeitsmessungen in der Form  $\dot{q}^m / \nabla T$  über der mittleren Temperatur  
 a)  $m=3$ , b)  $m=3.3$ , c)  $m=3.4$ , d)  $m=3.5$

sich, daß die Reynoldszahlen für die normalfluide Strömung  $R_D = (\rho v_n d) / \eta_n$  im Bereich 6000 bis 60000 liegen. Weiterhin findet man für die Relativgeschwindigkeit  $|v_n - v_s|$  einen Minimalwert von 6 cm/s, der deutlich über der kritischen Geschwindigkeit von 1.4 cm/s liegt, die man aus der empirischen Beziehung nach *van Alphen (1966)* für einen Rohrdurchmesser von 3 mm erhält. Somit sind beide Strömungen vollständig turbulent und es gilt die in Kap. 2.5 hergeleitete Beziehung (2.30)

$$\nabla T \approx - \frac{\xi}{2d} \frac{1}{s(\rho_s T)^2} \dot{q} \dot{q} - \frac{\rho_n A_{GM}(T)}{s(\rho_s T)^3} \dot{q}^3 \quad (4.5)$$

Eine Abschätzung des quadratischen Terms zeigt, daß sein Wert stets kleiner als 1%, in den meisten Fällen sogar kleiner als 0.1% des gesamten Temperaturgradienten ist und er in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Die Wärmeleitfähigkeit wird dann durch die Beziehung (2.31) beschrieben:

$$\nabla T = \frac{\dot{q}^m}{f_{GM}(T)} \quad (4.6)$$

In den Abb. 4.3 a) bis d) sind die angenäherten Werte  $f_{av} = \dot{q}^m L / \Delta T$  der Gorter-Mellink-Wärmeleitungsfunktion über der mittleren Temperatur  $T_{av} = (T_i - T_j) / 2$  aufgetragen. Diese sind zusätzlich zum normalen Meßfehler mit einem Mittelungsfehler behaftet, der beim Ersetzen des Temperaturgradienten durch den Differenzenquotienten  $\Delta T / l$  entsteht und dessen Konsequenzen unten diskutiert werden. In allen vier Abbildungen sind die gleichen Meßpunkte dargestellt, wobei in Abb. a) der "traditionelle" Gorter-Mellink-Exponent  $m = 3$  benutzt wurde und in b) bis d) die Werte  $m = 3.3, 3.4$ , und  $3.5$ . Offensichtlich liegen für  $m = 3.4$  die Meßwerte am ehesten auf einer gemeinsamen Kurve, während für  $m = 3$  die Werte stark streuen, da, wie eine genauere Analyse zeigt, die Wärmeleitungsfunktion sowohl von der Temperatur als auch von der Wärmestromdichte abhängt. Während *Bon Mardion et al. (1979)* ebenfalls  $m = 3.4$  finden, behaupten *Dimotakis und Broadwell (1974)* sowie *Kamioka et al. (1982)*, der richtige Wert des Exponenten sei 3 und die beobachteten Abweichungen nach oben seien experimentelle Artefakte, die durch den obengenannten Mittelungsfehler verursacht würden. Im folgenden soll gezeigt werden, daß diese Behauptung für die hier vorgestellten Messungen nicht gilt.

Angenommen, man kennt die richtige Funktion  $f(T)$ , so kann man daraus mit den in der Auswertung benutzten Größen  $T_i, T_j$  und  $l$  die Näherungswerte

$$f_{av1}(T_{av}) = \frac{\dot{q}^m l}{T_i - T_j} = \frac{\int_{T_j}^{T_i} f(T) dT}{T_i - T_j} \quad (4.7)$$

berechnen, die mit dem gleichen Mittelungsfehler behaftet sind wie die Werte in Abb. 4.3. In Abb. 4.4 sind die so bestimmten  $f_{av1}$  zusammen mit der angenommenen Funktion  $f(T)$  dargestellt. Die Streuung der Werte ist die, die man erwartet, wenn man die Messungen mit dem richtigen

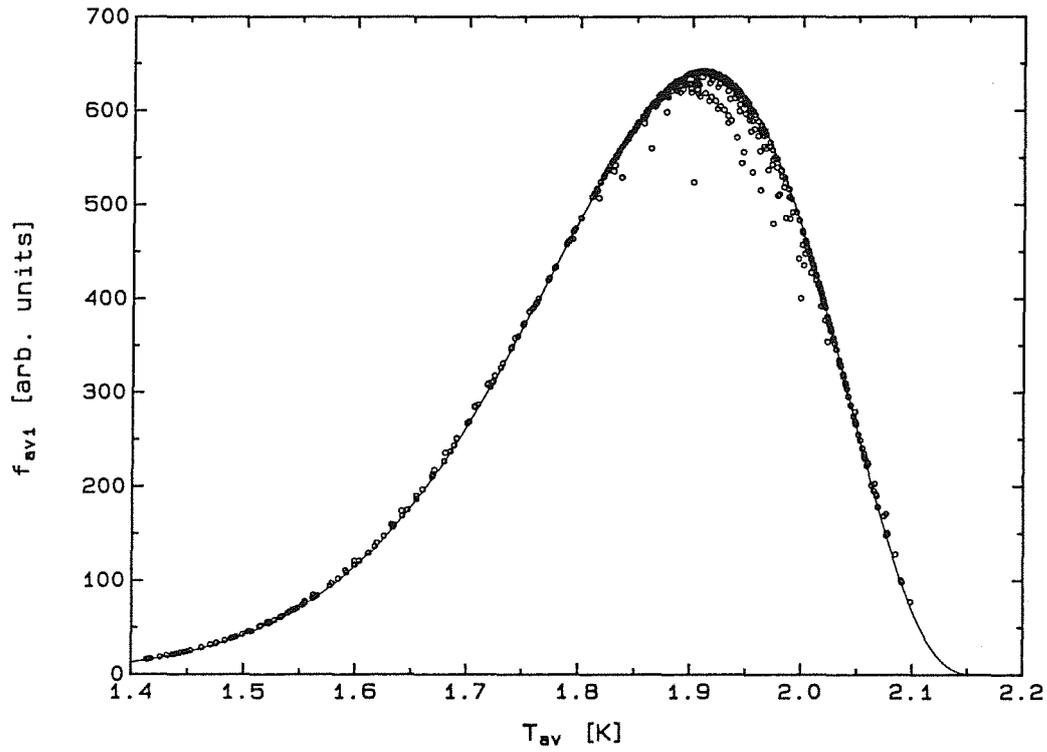


Abb. 4.4: Einfluß des Mittelungsfehlers auf die Wärmeleitfähigkeitsmessung

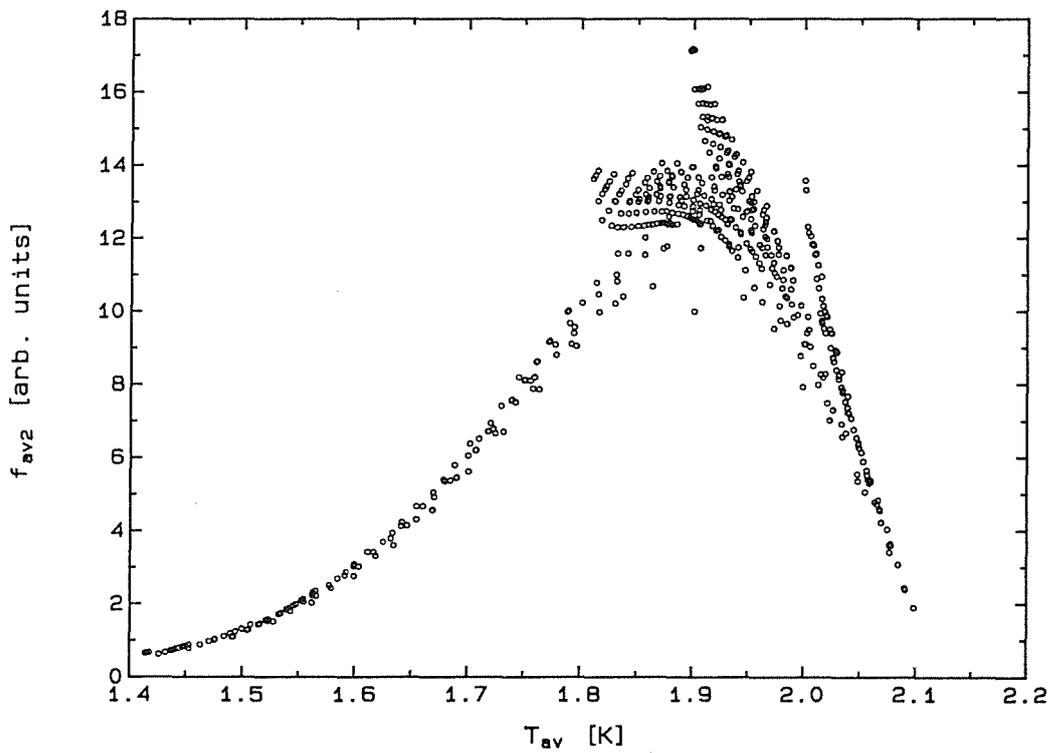


Abb. 4.5: Einfluß des Exponenten auf die Wärmeleitfähigkeitsmessung

Exponenten ausgewertet, und sie ähnelt am meisten der aus Abb. 4.3 c), also der für  $m=3.4$ . Man kann noch weitergehen und aus der angenommenen Funktion, den gemessenen Werten  $T_i, T_j$  und  $l$  mit dem Exponenten  $m=3.4$  die Wärmestromdichte bestimmen und daraus mit  $m=3$  den fehlerbehafteten Wert

$$f_{aw2} = \frac{\dot{q}^3 l}{T_i - T_j} = \frac{\left( \int_{T_j}^{T_i} f(T) dT \right)^{3/3.4} l^{0.4/3.4}}{T_i - T_j} \quad (4.8)$$

berechnen. Die daraus resultierende Streuung der Meßwerte würde man erwarten, wenn der richtige Exponent 3.4 wäre, für die Auswertung aber  $m=3$  benutzt worden wäre. Diese Werte sind in Abb. 4.5 dargestellt und die Ähnlichkeit mit Abb. 4.3 a) spricht für sich. Damit ist klar gezeigt, daß diese Experimente nicht mit dem Exponenten 3 in Einklang zu bringen sind, sondern eindeutig für  $m \approx 3.4$  sprechen.

Eine analytische Näherung für  $f_{GM}(T)$  wird von *van Sciver (1986, § 5.1)* angegeben. Ausgehend von  $m=3$  und der Beziehung (2.32)

$$f_{GM} = \frac{s (\rho_s s T)^m}{\rho_n A_{GM}} \quad (4.9)$$

erhält er durch Einsetzen von  $t=T/T_\lambda$  und  $A_{GM}=A_\lambda t^3$  sowie der Näherungen  $s=s_\lambda t^{5.7}$ ,  $\rho_n=\rho t^{5.7}$  und  $\rho_s=\rho(1-t^{5.7})$  die Form

$$f_{GM} = \frac{T_\lambda^3 s_\lambda^4 \rho^2}{A_\lambda} \left( t^{5.7} (1 - t^{5.7}) \right)^3 \quad (4.10)$$

Da sich der Exponent  $m=3.4$  als besser erwies und ein Fit an die Daten der spezifischen Entropie bei atmosphärischem Druck  $s \approx s_\lambda t^{5.41}$  ergab, wurde versucht eine Funktion der Form

$$f_{GM}(T) = a t^b (1 - t^{5.41})^{3.4} \quad (4.11)$$

an die gemessenen Daten aus Abb. 4.3 c) anzupassen. Das Ergebnis ist in Abb. 4.6 als durchgezogene Linie dargestellt und lautet:

$$f(T) = 7.92 \cdot 10^{16} t^{19.2} (1 - t^{5.41})^{3.4} \frac{W^{3.4}}{m^{5.8} K} \quad (4.12)$$

Im Temperaturbereich oberhalb 1.6 K ist die Übereinstimmung mit den Messungen sehr gut, während bei tieferen Temperaturen die angepaßte Funktion etwas über den Meßwerten liegt.

Es liegt nahe, van Scivers Ansatz für  $A_{GM}$  zu verallgemeinern zu  $A_{GM}=A_{GM0} t^m$  und in (4.9) einzusetzen, wodurch sich die folgende Beziehung ergibt:

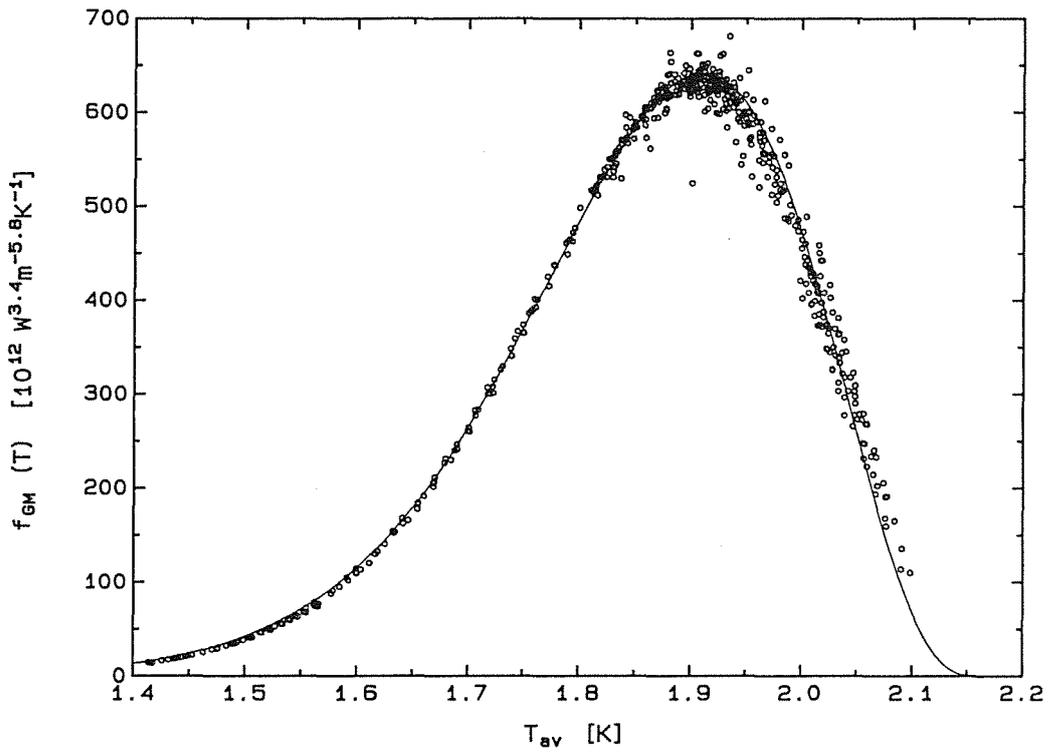


Abb. 4.6: Analytische Näherung der Wärmeleitfähigkeitsfunktion

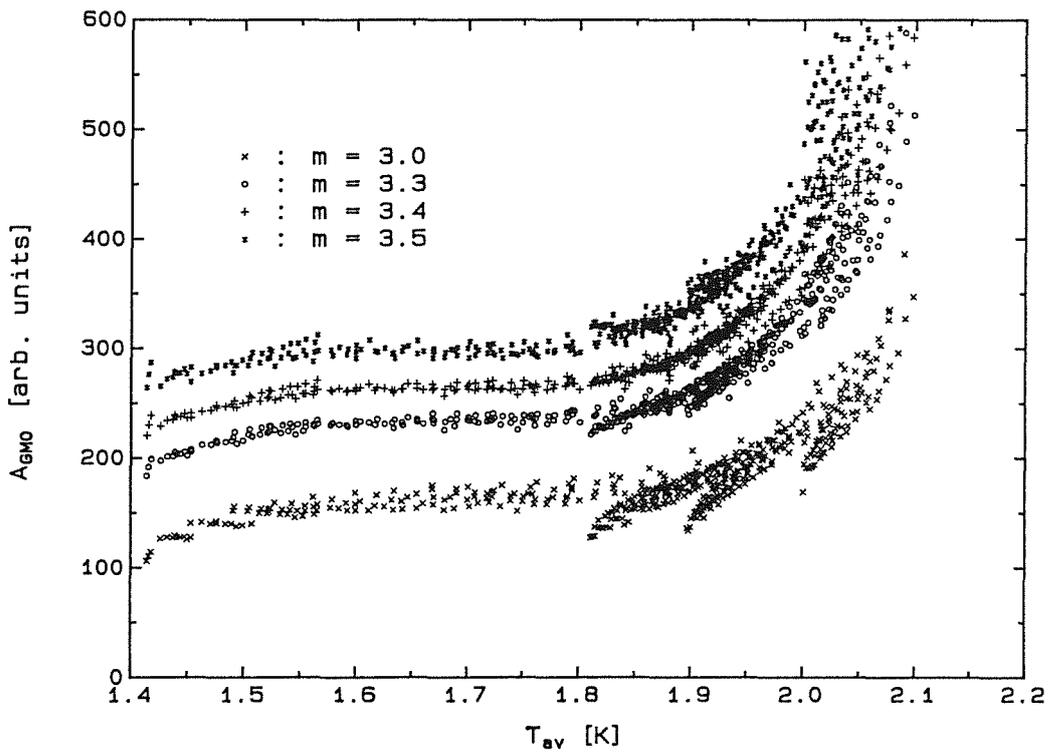


Abb. 4.7: Reduzierter Gorter-Mellink-Koeffizient bei verschiedenen Exponenten  $m$

$$f_{GM}(T) = \frac{T_\lambda^m}{A_{GM0}} \frac{s(\rho_s s)^m}{\rho_n} \quad (4.13)$$

Wenn man dies in die integrierte Version von (4.6) einsetzt, kann man  $A_{GM0}$  aus den Messungen bestimmen :

$$A_{GM0} = \frac{T_\lambda^m}{\dot{q}^m L} \int_{T_j}^{T_i} \frac{s(\rho_s s)^m}{\rho_n} dT \quad (4.14)$$

Abb. 4.7 zeigt  $A_{GM0}$  für verschiedene Exponenten  $m$  aufgetragen über der Temperatur  $T_{av}$ , wobei die Stoffdaten  $s$ ,  $\rho_s$  und  $\rho_n$  mithilfe eines Computercodes von *Arp und Agatsuma (1985)* bestimmt wurden. Zunächst erkennt man noch einmal deutlich, daß  $m=3.4$  die Messungen am besten beschreibt. Außerdem sieht man, daß  $A_{GM}(T)$  im Bereich unterhalb 1.8 K ziemlich genau proportional zu  $T^{3.4}$  ist, während es bei höheren Temperaturen sehr viel stärker ansteigt und bei Annäherung an  $T_\lambda$  möglicherweise divergiert. Eine genauere Auswertung des oberen Temperaturbereichs wird durch die starke Streuung der Meßwerte verhindert.

### 4.3 Temperaturverlauf in strömendem Helium II

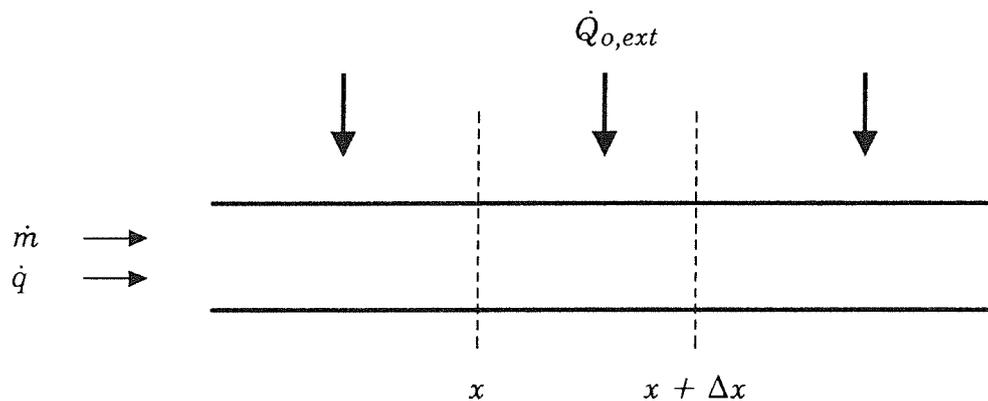


Abb. 4.8: Schema für die Energiebilanz in einem strömendem Fluid

In diesem Abschnitt soll der Temperaturverlauf in strömendem He II in Anwesenheit einer externen Wärmequelle mithilfe der im vorigen Kapitel bestimmten Wärmeleitfähigkeit berechnet und mit Messungen verglichen werden. Dazu stellt man zunächst die Energiebilanz in einem strömendem Fluid auf (Abb. 4.8). Da der Rohrdurchmesser ( $d=3$  mm) klein gegen die betrachtete Länge (0.8 m) ist, wird das Problem eindimensional\* behandelt, d.h. alle Eigenschaften werden als

---

\* In diesem Abschnitt stellen fettgedruckte Zeichen den mit einem die Richtung kennzeichnenden Vorzeichen versehenen Betrag der entsprechenden Größen dar.

konstant über dem Rohrquerschnitt angenommen. Die Energieströme, die dem Kontrollvolumen zugeführt werden bzw. es verlassen, sind :

$$E_{in} = \dot{m} h(x) + A \dot{q}(x) + \frac{\dot{Q}(x)}{l} \Delta x \quad (4.15)$$

$$E_{out} = \dot{m} h(x + \Delta x) + A \dot{q}(x + \Delta x) \quad (4.16)$$

Hierin sind  $h$  die spezifische Enthalpie und  $\dot{Q}$  die externe Heizleistung, die auf der Länge  $l$  zugeführt wird. Die Energiebilanz ergibt dann für den stationären Zustand (*Johnson und Jones, 1978*) :

$$\dot{m} \frac{d}{dx} h(x) + A \frac{d}{dx} \dot{q}(x) = \frac{\dot{Q}(x)}{l} \quad (4.17)$$

Die spezifische Enthalpie und die Wärmestromdichte müssen jetzt über den Temperaturverlauf  $T(x)$  miteinander verknüpft werden, wozu zwei Annahmen nötig sind. Die erste, nämlich die einer inkompressiblen Flüssigkeit, ist für Helium II in guter Näherung erfüllt. Die spezifische Enthalpie ist dann unabhängig vom Druck ( $\partial h / \partial p = 0$ ) und allein eine Funktion der Temperatur :

$$h(x) = h(T(x)) \quad (4.18)$$

Zweitens muß man annehmen, daß die Wärmestromdichte nicht von dem überlagerten Nettomassenstrom abhängt. Dies ist wegen des besonderen Mechanismus der Wärmeleitung in He II nicht selbstverständlich, aber diese Annahme wird durch das Ergebnis nachträglich gerechtfertigt. Die Wärmestromdichte ist damit nur von dem Temperaturverlauf abhängig :

$$\dot{q}(x) = \dot{q}(T(x), \nabla T(x)) = - \frac{\nabla T(x)}{\nabla T(x)} \left( f_{GM}(T(x)) \nabla T(x) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.19)$$

Durch Einsetzen der beiden letzten Beziehungen in Gl. (4.17) erhält man die folgende nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $T(x)$  :

$$\dot{m} h' \nabla T(x) + \frac{A}{m} \frac{f_{GM} \nabla^2 T(x) + f'_{GM} (\nabla T(x))^2}{(f_{GM} \nabla T(x))^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{\dot{Q}(x)}{l} \quad (4.20)$$

in der  $h'$  und  $f'$  die nach der Temperatur abgeleiteten Größen bedeuten

Bevor man sich an die numerische Lösung dieser Gleichung macht, kann man sich an einer stark vereinfachten und damit analytisch lösbaren Variante das prinzipielle Verhalten des Temperaturverlaufs in einer strömenden Flüssigkeit veranschaulichen. Durch Annahme von konstanten Werten für  $\partial h / \partial T = c_{p0}$  und  $f_{GM}(T) = f_0$ , ohne externe Heizung ( $\dot{Q} = 0$ ) und für  $m = 3$  erhält man eine sog. Bernoulli-Differentialgleichung :

$$\dot{m} c_{p0} \nabla T(x) + A \left( f_0 \nabla T(x) \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\nabla T(x)}{\nabla T(x)} = 0 \quad (4.21)$$

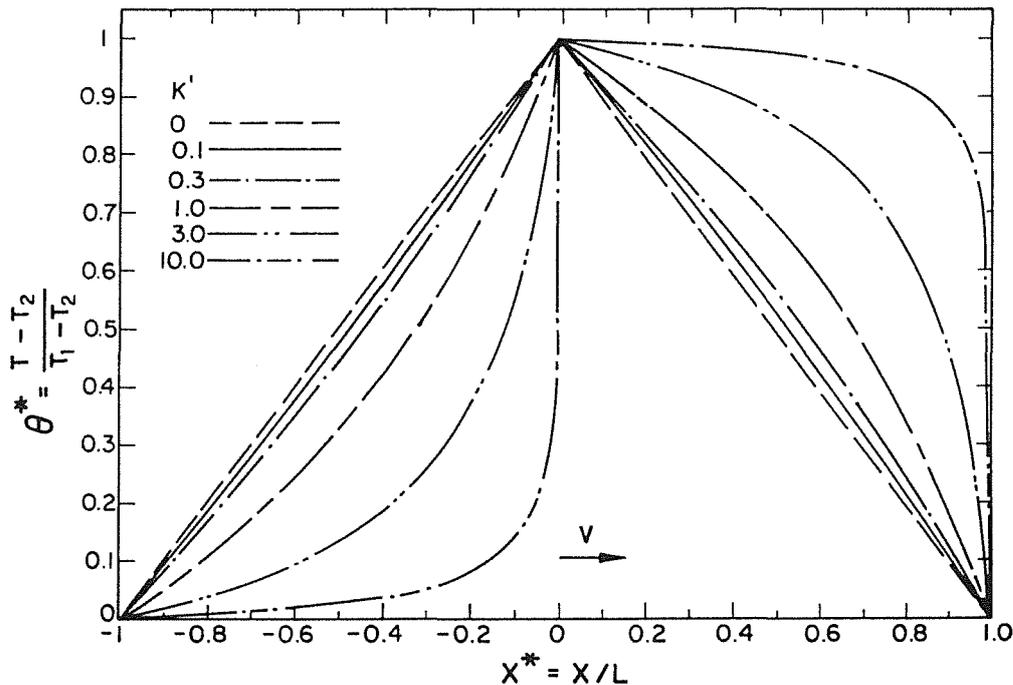
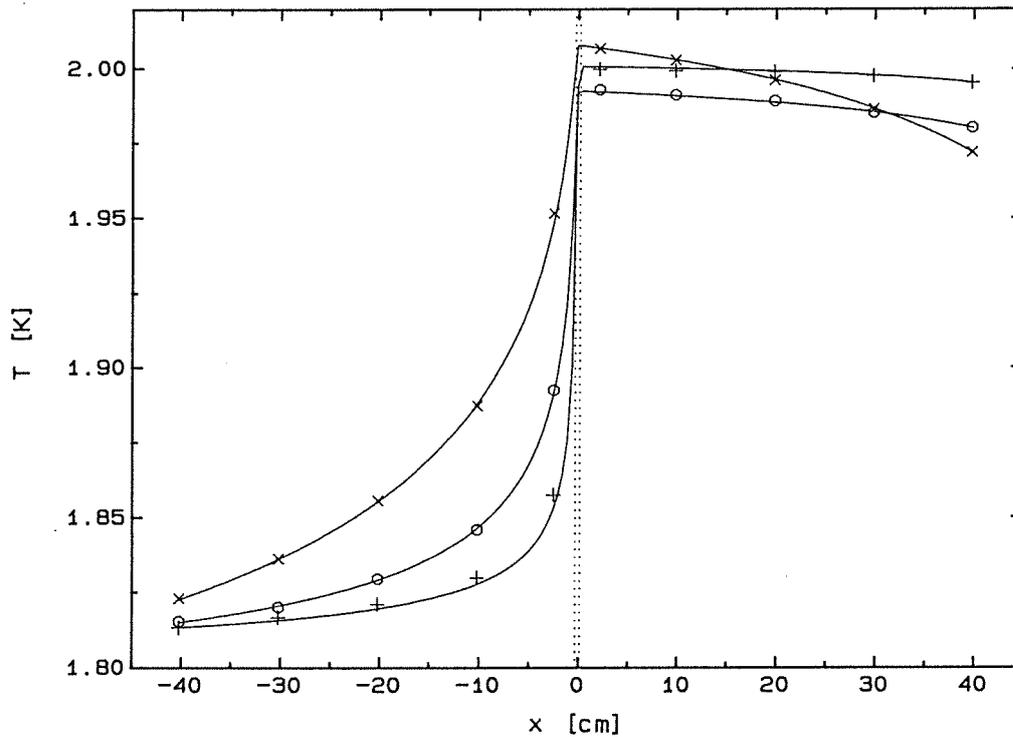


Abb. 4.9: Analytisch bestimmter Temperaturverlauf nach van Sciver (1984)

In Abb. 4.9 sind einige von *van Sciver (1984)* angegebene Lösungen dieser Dgl. in den dimensionslosen Variablen  $\Theta = (T - T_{min}) / (T_{max} - T_{min})$  und  $\lambda = x/l$  dargestellt. Die linke Hälfte zeigt die Lösungen für die Randbedingungen  $\Theta(0) = 0$ ,  $\Theta(1) = 1$ , also für entgegengerichtete , und die rechte Hälfte solche für gleichgerichtete Massen- und Wärmeströme. Der Parameter  $K'$  ist dabei ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit. Man beachte, daß es in diesem Fall ohne externe Heizung keine Lösung gibt, bei der der Temperaturgradient sein Vorzeichen ändert.

Im realen Fall mit stark temperaturabhängigen Größen  $h(T)$  und  $f_{GM}(T)$  sowie mit externer Heizung muß die Dgl. numerisch gelöst werden. Für die Gorter-Mellink-Wärmeleitfähigkeit wurde dabei die im vorigen Abschnitt für den Exponentem  $m = 3.4$  gefundene analytische Näherung benutzt. Die Dgl. (4.20) wurde iterativ nach dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst, wobei als Randbedingung die Temperaturen an zwei Stellen vorgegeben wurden. Abb. 4.10 zeigt drei Temperaturverläufe in der Meßstrecke mit unterschiedlichen Massenströmen und Heizleistungen. Die Symbole stellen die gemessenen Temperaturen dar und die durchgezogenen Linien die Lösungen der obigen Dgl. . Eingabewerte für die Rechnungen waren die gemessenen Temperaturen an den beiden Enden sowie die zugeführte Heizleistung. Die Strömungsgeschwindigkeiten im Rechenmodell wurden so angepaßt, daß die Abweichungen der acht inneren Temperaturen minimal wurden. Tab. 4.1 zeigt, daß die in der Rechnung benutzten Massenströme  $\dot{m}_c$  im Rahmen der Meßgenauigkeit ( $\pm 0.05$  g/s) mit den gemessenen Werten  $\dot{m}_m$



*Abb. 4.10: Gemessener und berechneter Temperaturverlauf in der Meßstrecke*

übereinstimmen. Daraus kann man sehen, daß dieses Rechenmodell geeignet ist, den Temperaturverlauf in strömendem He II für praktische Anwendungen zu berechnen. Außerdem ist es ein Hinweis darauf, daß man die Wärmeleitfähigkeit als unabhängig von dem überlagerten Nettomassenstrom betrachten darf und nicht zuletzt ist es eine Bestätigung der verwendeten Gorter-Mellink-Wärmeleitungsfunktion mit dem Exponenten  $m = 3.4$ .

$\dot{m}_m$	0.18	0.43	0.84
$\dot{m}_c$	0.206	0.448	0.828

*Tab. 4.1: Vergleich der berechneten und der gemessenen Massenströme*

### 4.4 Wärmeübergang an strömendes Helium

In diesem Kapitel werden die Messungen zum Wärmeübergang von technischem Kupfer an strömendes Helium beschrieben. Der Wärmeübergang zwischen einem Festkörper und einer Flüssigkeit ist charakterisiert durch die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  und durch die Temperaturen an den beiden Seiten der Grenzfläche  $T_s$  und  $T_{fl}$ . Um große Wärmestromdichten bei geringer Wärmelast zu erreichen wurde die zylinderförmige geheizte Fläche relativ klein gehalten ( $47.12 \text{ mm}^2$ ). Da sich in der verwendeten Geometrie die Fluidtemperatur nicht beliebig nahe an der Heizeroberfläche messen läßt, ist hier eine Abschätzung nötig, die im ersten Abschnitt diskutiert wird. Wie im folgenden gezeigt wird, ist der Wärmeübergangskoeffizient

$$h = \frac{\dot{q}}{\Delta T} = \frac{\dot{q}}{T_s - T_{fl}} = h(\dot{q}, T, p, m) \tag{4.22}$$

im allgemeinen Fall eine Funktion der Betriebsparameter Druck , Temperatur , Massenstrom und auch der Wärmestromdichte selbst. Dabei kann man prinzipiell  $T_s$  oder  $T_{fl}$  als unabhängige Temperatur wählen. Da es für die Anwendung günstiger ist, wurde die Fluidtemperatur als unabhängige Größe gewählt und  $h$  als Funktion von  $\dot{q}$  und  $T_{fl}$  bestimmt, wobei Druck und Massenstrom jeweils konstantgehalten wurden. In den Abschnitten 2 und 3 werden diese Messungen beschrieben, wobei einmal die Wärmestromdichte und das andere Mal die Fluid-

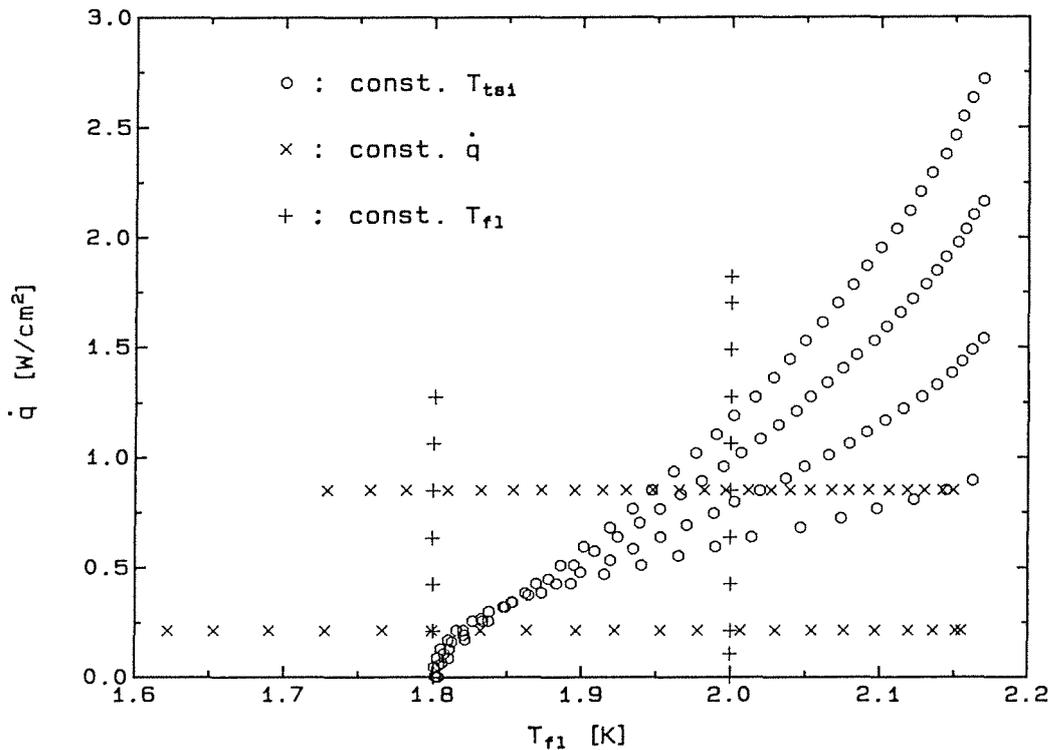


Abb. 4.11: Durch die unterschiedlichen Wärmeübergangsmessungen abgedeckter Bereich in der  $T_{fl}$ - $\dot{q}$ -Ebene

temperatur variiert werden. Im Anschluß daran werden diese Messungen durch Funktionen numerisch angenähert, um sie für Auslegungsberechnungen verfügbar zu machen. Messungen, die dem Anwendungsfall näher kommen, nämlich solche bei konstanter Fluidtemperatur am Eintritt der Meßstrecke, werden im anschließenden 5. Abschnitt beschrieben. Dabei wurden kritische Wärmeströme beobachtet, die im 6. Abschnitt gesondert behandelt werden. Einen Überblick über die gesamten Messungen im He II-Bereich gibt Abb. 4.11, in der die unterschiedlichen Messungen in der  $T_f$ - $\dot{q}$ -Ebene aufgetragen sind.

#### 4.4.1 Bestimmung der Fluidtemperatur nahe der Heizung

In den Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  geht die Fluidtemperatur an der geheizten Oberfläche ein. Da sich diese experimentell nur schwer messen läßt, wurde sie durch die Fluidtemperatur  $T_f$  angenähert, die 23 mm in Strömungsrichtung vom Heizer entfernt gemessen wurde. Im folgenden soll diese Abschätzung diskutiert und gerechtfertigt werden. Dazu wurde mithilfe des in 4.3 vorgestellten eindimensionalen Modells für typische Massen- und Wärmeströme der Temperaturverlauf in der Umgebung der Wärmeübergangszelle berechnet. In Abb. 4.12 sind für vier verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten die berechneten Temperaturverläufe dargestellt, wobei als Eingabewerte jeweils die experimentell bestimmten Werte für die Heizleistung  $\dot{Q}$  und

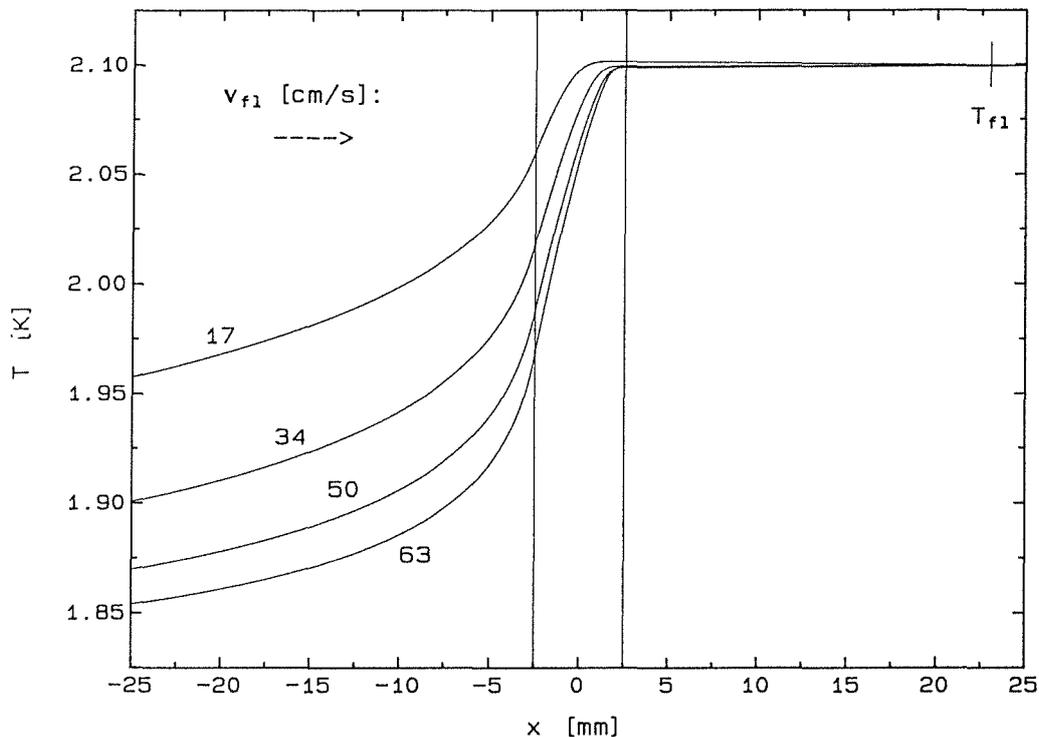


Abb. 4.12: Berechneter Temperaturverlauf in der Umgebung der Wärmeübergangszelle

die Strömungsgeschwindigkeit  $v_{fl}$  sowie die Temperaturen  $T_{tsi} = T(x = -400\text{mm}) \approx 1.8\text{ K}$  und  $T_{fl} = T(x = 23\text{mm}) \approx 2.1\text{ K}$  benutzt wurden. Wie zu erwarten, ist die Fluidtemperatur nicht an der gesamten Heizeroberfläche konstant, sondern über einen Bereich  $\Delta T_h$  verteilt. Für die Auswertung sollten daher in erster Näherung die gewichteten Mittelwerte  $T_m = 1/l \int T(x) dx$  benutzt werden, die zusammen mit anderen wichtigen Größen in Tab. 4.2 angegeben sind. Der Fehler, den man bei der Abschätzung von  $T_m$  durch  $T_{fl}$  macht, liegt bei 10 bis 50 mK und entspricht weniger als 3% des Temperaturabfalls an der geheizten Grenzfläche  $T_s - T_{fl}$ . Hinzu kommt, daß in dem ein-dimensionalen Modell der Temperaturgradient senkrecht zur Strömungsrichtung vernachlässigt wird, sodaß in Wirklichkeit die Fluidtemperaturen nahe der Heizung höher sind als im Rechenmodell und dadurch der Fehler, mit dem die Abschätzung behaftet ist, noch verringert wird.

$v_{fl}$ [cm/s]	17	34	50	63
$\dot{Q}$ [mW]	362	548	745	930
$T_{fl}$ [K]	2.100	2.100	2.100	2.100
$T_{h1}$ [K]	2.060	2.018	1.987	1.968
$T_{h2}$ [K]	2.102	2.099	2.099	2.099
$T_m$ [K]	2.091	2.073	2.058	2.050
$T_{fl} - T_m$ [mK]	9	27	42	50
$T_{h2} - T_{h1}$ [mK]	42	81	112	131
$T_s$ [K]	3.03	3.33	3.60	3.79
$T_s - T_{fl}$ [K]	0.93	1.23	1.50	1.69
$\frac{(T_{fl} - T_m)}{(T_s - T_{fl})}$	1 %	2 %	3 %	3 %

Tab. 4.2: Abschätzung des Fehlers in der Bestimmung der Fluidtemperatur

#### 4.4.2 Experimente bei konstanter Fluidtemperatur nahe der Heizung

Zunächst wurden zwei Serien von Experimenten bei den konstanten Fluidtemperaturen 1.8 K und 2.0 K durchgeführt. Bei den Messungen wurde eine feste Strömungsgeschwindigkeit eingestellt und dann die Heizleistung schrittweise erhöht. Bei jedem Schritt wurde mithilfe einer zusätzlichen Heizung die Temperatur des einlaufenden Fluids variiert, bis sich die gewünschte Fluidtemperatur  $T_{fl}$  am Auslauf einstellte. In Abb. 4.13 sind für fünf Strömungsgeschwindigkeiten bei  $T_{fl} = 1.8\text{ K}$  und für drei Strömungsgeschwindigkeiten bei  $T_{fl} = 2.0\text{ K}$  die Temperaturdifferenzen  $\Delta T = T_s - T_{fl}$  über der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  aufgetragen. Man erkennt, daß im Rahmen der Meßgenauigkeit in dem erfaßten Bereich  $v \leq 1\text{ m/s}$  kein Einfluß der Strömungsgeschwindigkeit

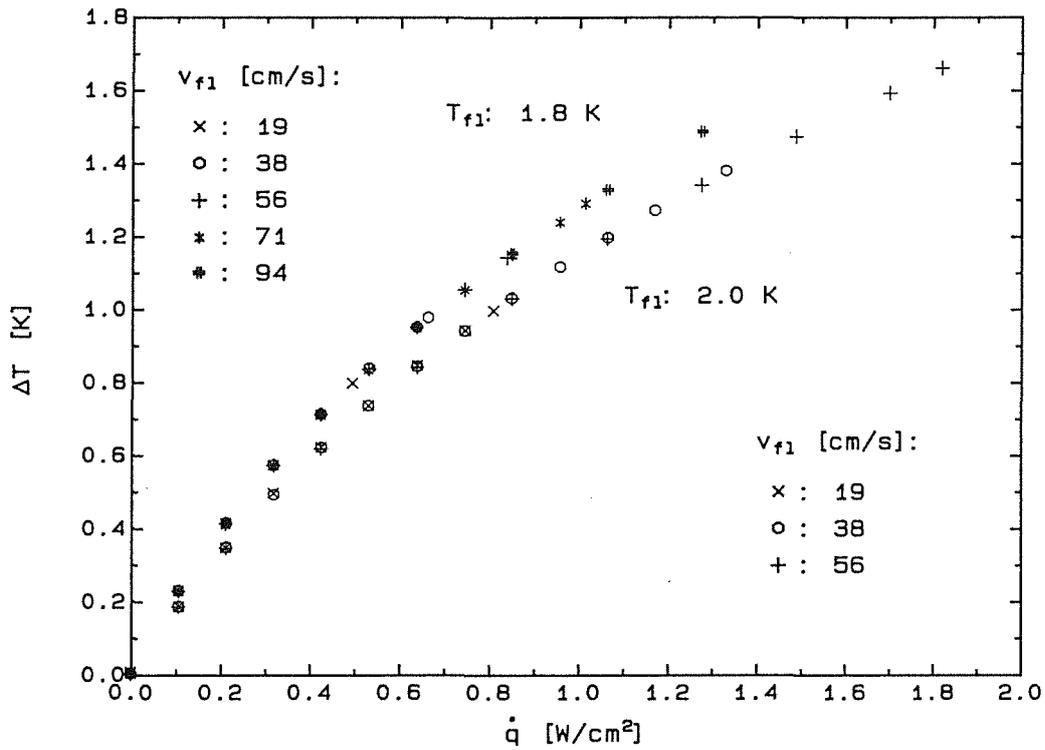


Abb. 4.13: Temperaturdifferenz an der geheizten Oberfläche als Funktion der Wärmestromdichte bei verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten

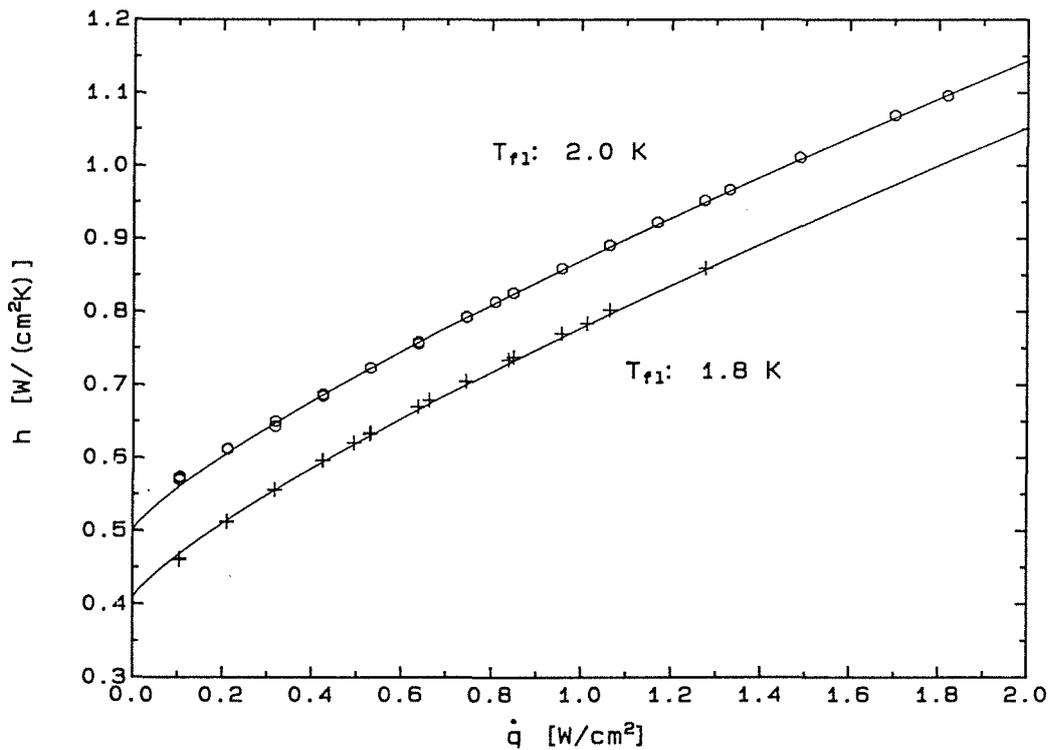


Abb. 4.14: Wärmeübergangskoeffizient als Funktion der Wärmestromdichte

festzustellen ist. Der Wärmeübergangskoeffizient  $h$  ist in Abb. 4.14 aufgetragen. Er nimmt sowohl mit steigender Wärmestromdichte als auch mit steigender Fluidtemperatur zu.

#### 4.4.3 Experimente bei konstanter Wärmestromdichte

Um die Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten von der Fluidtemperatur genauer zu untersuchen, wurde dieser bei konstanter Wärmestromdichte  $\dot{q}$  als Funktion der Fluidtemperatur  $T_{f1}$  gemessen. Dazu wurden konstante Strömungsgeschwindigkeit und konstante Wärmestromdichte eingestellt und durch schrittweises Erhöhen der Leistung der Zusatzheizung im Vorlauf die Fluidtemperatur variiert. Diese Messungen wurden bei zwei Wärmestromdichten sowie bei unter- und überkritischem Druck des Heliums durchgeführt. Alle Ergebnisse sind in Abb. 4.15 dargestellt. Im Helium II-Bereich findet man einen näherungsweise linearen Anstieg des Wärmeübergangskoeffizienten mit der Temperatur sowie keine Abhängigkeit vom Systemdruck zwischen 0.1 und 0.25 MPa. Beim Überschreiten von  $T_\lambda$  fällt der Wärmeübergangskoeffizient stark ab auf Werte von weniger als 30% der Werte unterhalb  $T_\lambda$ . Außerdem hängt im Helium I-Bereich der Wärmeübergang vom Systemdruck ab. Auf den He I-Bereich wird hier nicht näher eingegangen, da die experimentelle Anordnung für die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten in diesem Bereich nicht geeignet ist.

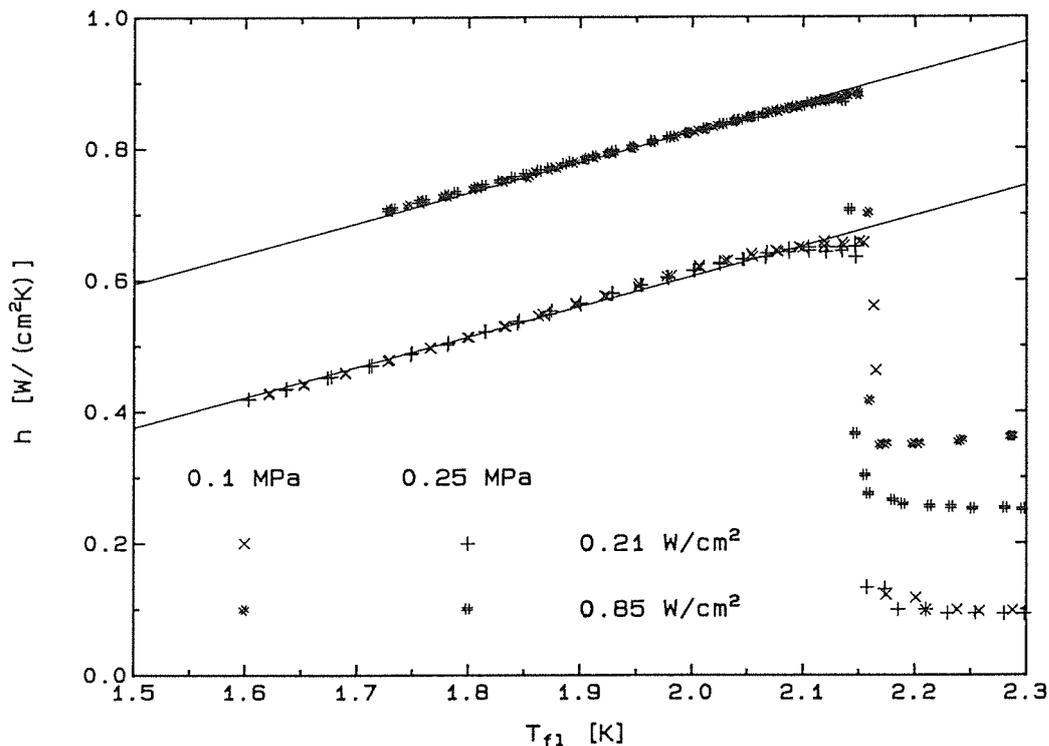


Abb. 4.15: Wärmeübergangskoeffizient als Funktion der Fluidtemperatur

#### 4.4.4 Numerische Beschreibung der Daten

Zur Auslegung von Supraleiterkabeln oder Wärmetauschern benötigt man die Wärmeübergangsdaten in einer gut handhabbaren Form. Aus diesem Grund wurde versucht, analytische Funktionen an die gemessenen Daten anzupassen. Zunächst soll der Wärmeübergangskoeffizient als Funktion der Wärmestromdichte und der Fluidtemperatur dargestellt werden. Abb. 4.14 und 4.15 legen den Ansatz

$$h(\dot{q}, T_{fl}) = a + b \dot{q}^c + d T_{fl} \quad (4.23)$$

nahe. Eine Anpassung dieser Funktion an die Messungen aus den vorigen beiden Abschnitten ergibt:

$$\frac{h(\dot{q}, T_{fl})}{\text{W cm}^{-2} \text{K}^{-1}} = -0.42 + 0.37 \left( \frac{\dot{q}}{\text{W cm}^{-2}} \right)^{0.8} + 0.46 \left( \frac{T_{fl}}{\text{K}} \right). \quad (4.24)$$

Dieser Zusammenhang wird durch die durchgezogenen Linien in den Abb. 4.14 und 4.15 dargestellt. Da diese Funktion rein empirischen Ursprungs ist, kann man nicht auf eine Gültigkeit außerhalb des durch Messungen abgedeckten Bereiches  $0.1 \text{ W/cm}^2 < \dot{q} < 2.0 \text{ W/cm}^2$  und  $1.6 \text{ K} < T_{fl} < 2.15 \text{ K}$  schließen. Da der Wärmeübergangskoeffizient bei Fluidtemperaturen im He II-Bereich offensichtlich nicht von der Strömung abhängt, liegt es nahe, ihn als reinen Effekt der Grezschicht Cu/He II zu erklären und somit die Messungen mit dem "Kapitza"-Formalismus (2.35) zu beschreiben:

$$\dot{q}(T_s, T_{fl}) = a \left( T_s^n - T_{fl}^n \right). \quad (4.25)$$

Diese Verallgemeinerung der theoretisch erwarteten Beziehung, die in der Literatur zur Beschreibung des Wärmeübergangs benutzt wird, läßt auch einen größeren Gültigkeitsbereich erwarten. Eine Anpassung dieser Funktion an dieselben Messungen ergibt:

$$\dot{q}(T_s, T_{fl}) = 0.037 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \left( \left( \frac{T_s}{\text{K}} \right)^{3.12} - \left( \frac{T_{fl}}{\text{K}} \right)^{3.12} \right) \quad (4.26)$$

Diese Werte für  $a$  und  $n$  stimmen gut mit denjenigen überein, die *Kashani und van Sciver (1985)* für den Wärmeübergang von Kupfer mit unterschiedlich behandelten Oberflächen an Helium II angeben.

#### 4.4.5 Experimente bei konstanter Fluidtemperatur am Eintritt der Meßstrecke

In der Praxis ist es die Fluidtemperatur am Eintritt der Spule oder des Wärmetauschers, die kontrolliert und konstant gehalten werden kann. Um diese Bedingung zu simulieren, wurden Experimente bei einer konstanten Fluidtemperatur am Eintritt der Meßstrecke  $T_{tsi}$  von 1.8 K durchgeführt. Da in diese Ergebnisse sehr stark die spezielle Geometrie der Meßstrecke, insbesondere Länge und Querschnitt der Meßstrecke sowie Heizeroberfläche, eingeht, sind sie nicht ohne weiteres zu skalieren und deshalb eher von qualitativer Aussagekraft. Bei den Messungen wurde jeweils eine Strömungsgeschwindigkeit eingestellt, dann die Heizleistung schrittweise bis zu einem Maximalwert erhöht und danach wieder schrittweise erniedrigt. Die Ergebnisse sind in den folgenden Abbildungen in der Form Oberflächentemperatur  $T_s$  als Funktion der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  dargestellt. Abb. 4.16 zeigt eine typische Kurve für unterkritisches Helium ( $p_{sys} = 0.1$  MPa). Man erkennt drei charakteristische Bereiche des Wärmeübergangs:

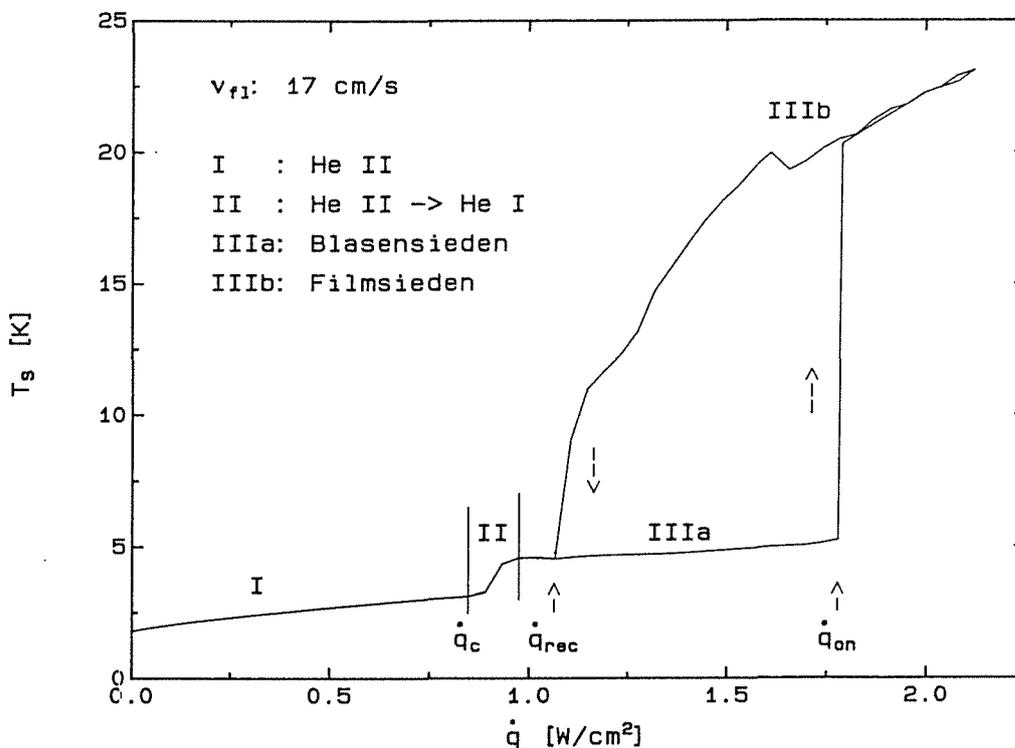


Abb. 4.16: Temperatur der geheizten Oberfläche als Funktion der Wärmestromdichte

- I): den Helium II-Bereich, in dem die Heizeroberfläche vollständig mit He II bedeckt ist. Dieser Bereich wird von der Kapitza-Leitfähigkeit beherrscht und wurde in den Abschnitten 2 bis 4 behandelt und numerisch erfaßt.

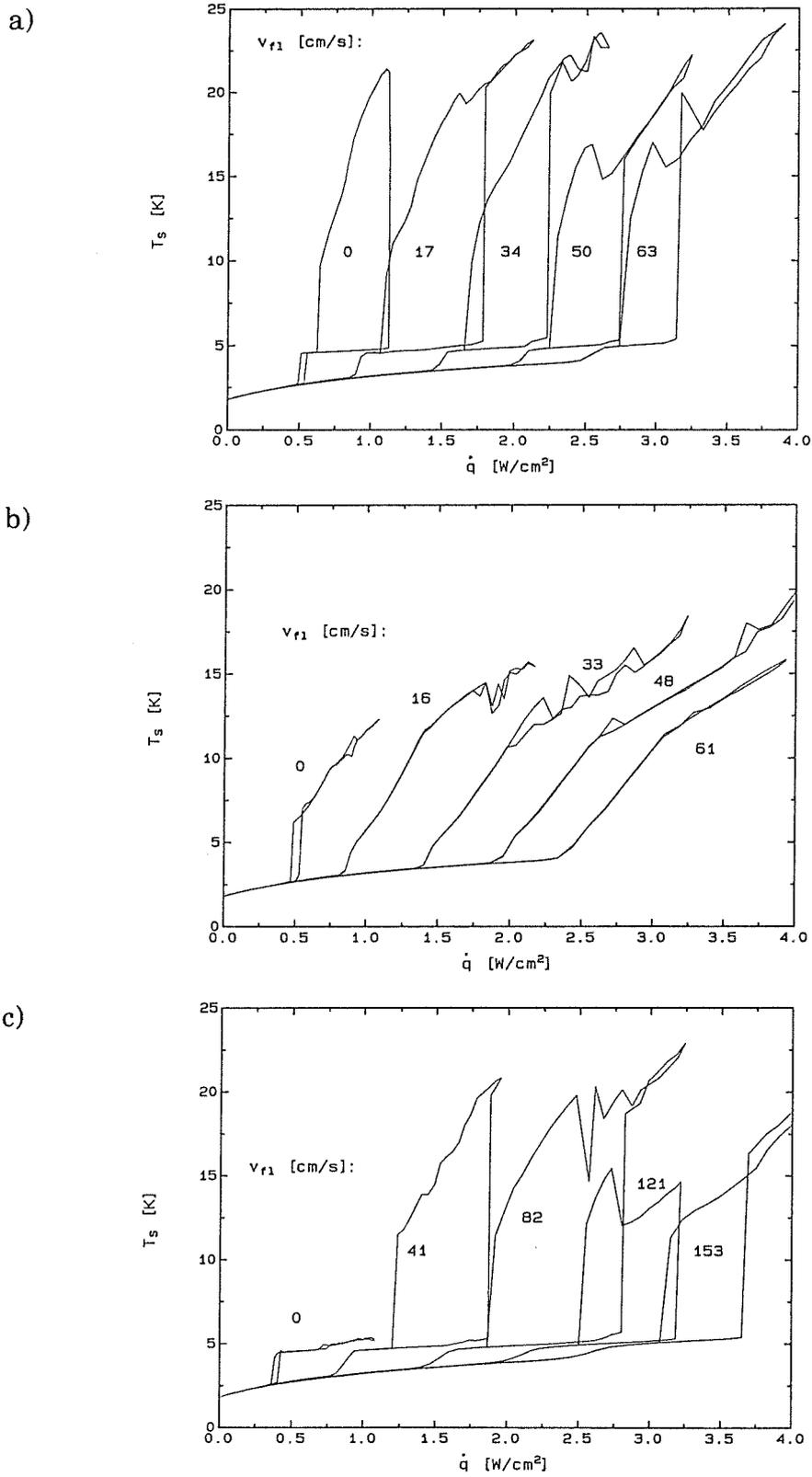
- II) : den Helium II-Helium I-Übergangsbereich. Hier liegt die über den Querschnitt gemittelte Temperatur am Austritt der Heizung immer noch unter  $T_\lambda$  aber ein zunehmender Teil der Heizeroberfläche ist mit Helium I bedeckt. Dadurch wird der Wärmeübergang verschlechtert und die Oberflächentemperatur steigt stark an.
- III) : den Siede-Bereich, der im unterkritischen Helium aus zwei Ästen besteht. Der Ast des Blasensiedens (IIIa) ist durch einen guten Wärmeübergang und daher niedrige Oberflächentemperaturen gekennzeichnet. Bei einem bestimmten Wärmestrom findet ein schlagartiger irreversibler Übergang zum Filmsieden (IIIb) statt, der durch einen schlechten Wärmeübergang und Oberflächentemperaturen über 10 K gekennzeichnet ist. Erst bei starker Erniedrigung des Wärmestroms findet wieder ein Übergang zum Blasensieden statt.

Die entsprechenden Kurven für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten sind in Abb. 4.17 a) dargestellt. Bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten treten alle Übergänge bei höheren Wärmeströmen auf und der He II-He I-Übergangsbereich (II) wird breiter. Dies rührt daher, daß bei höherer Strömungsgeschwindigkeit der gesamte Wärmetransport immer mehr durch die Konvektion und weniger durch die Wärmeleitung bestimmt wird. Je kleiner aber der Anteil der Wärmeleitung wird, umso inhomogener wird die Temperaturverteilung an der Heizeroberfläche und umso breiter wird der He II-He I-Übergangsbereich.

Abb. 4.17 b) zeigt die Ergebnisse von ähnlichen Experimenten in überkritischem Helium ( $p_{sys} = 0.25$  MPa). Im Vergleich zu den Ergebnissen im unterkritischen Helium findet man, abgesehen von der um 15 mK niedrigeren  $\lambda$ -Temperatur, keine Unterschiede in den Bereichen I und II. Die Bereiche III sind dagegen völlig unterschiedlich, da es im überkritischen Helium kein Sieden gibt. Stattdessen verlaufen die Kurven in diesem Bereich reversibel und die Oberflächentemperaturen  $T_s$  liegen zwischen denjenigen für Blasen- und Film-Sieden im unterkritischen Helium.

Abb. 4.17 c) schließlich zeigt die Ergebnisse von Experimenten in unterkritischem Helium mit eingebautem Einsatz zur Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit in der Nähe des Heizers. Bei vergleichbarem Massenstrom wird dadurch die Strömungsgeschwindigkeit ungefähr um den Faktor drei erhöht. Die Ergebnisse ähneln sehr stark denjenigen ohne Verwendung des Einsatzes. Die starke Verbreiterung des Übergangsbereiches II kann man mit der obigen Argumentation durch die nochmals größeren Strömungsgeschwindigkeiten erklären.

An dieser Stelle soll erwähnt werden, daß es sich bei den hier vorgestellten Experimenten zum Wärmeübergang an He I stets um stationäre Wärmeübergänge handelt und daß in transienten Experimenten der Wärmeübergangskoeffizient kurzzeitig deutlich größer sein kann als in stationären.



**Abb. 4.17:** Temperatur der geheizten Oberfläche als Funktion der Wärmestromdichte  
a)  $p=0.1$  MPa, ohne Drosseleinsatz, b)  $p=0.25$  MPa, ohne Drosseleinsatz,  
c)  $p=0.1$  MPa, mit Drosseleinsatz

#### 4.4.6 Kritische Wärmeströme

Bei den im vorigen Abschnitt beschriebenen Experimenten konnten verschiedene kritische Wärmeströme beobachtet werden (siehe Abb. 4.16) :

$\dot{Q}_c$  ist der maximale Wärmestrom, bei dem die Heizeroberfläche noch vollständig mit Helium II bedeckt ist. Abb. 4.18 zeigt  $\dot{Q}_c$  als eine Funktion des Massenstroms  $\dot{m}$ . Die durchgezogene Linie stellt die Beziehung  $\dot{Q}_c = \dot{m} \Delta h_\lambda$  dar, wobei  $\Delta h_\lambda$  die Differenz der spezifischen Enthalpie zwischen 1.8 K und  $T_\lambda$  bezeichnet. Diese Beziehung würde gelten, wenn die Konvektion der einzige Mechanismus des Wärmetransports wäre und wenn die Fluidtemperatur über den Rohrquerschnitt konstant wäre. Für kleine Massenströme sind die gemessenen kritischen Wärmeströme größer als  $\dot{m} \Delta h_\lambda$ , da durch die Wärmeleitung zusätzlich Wärme abgeführt werden kann. Mit zunehmendem Massenstrom wird dieser Anteil relativ immer kleiner. Außerdem wird der Temperaturgradient senkrecht zur Strömungsrichtung größer, sodaß nicht mehr die ganze Enthalpiedifferenz  $\Delta h_\lambda$  zur Verfügung steht. Daher sind die kritischen Wärmeströme bei großen Massenströmen kleiner als  $\dot{m} \Delta h_\lambda$ .

$\dot{Q}_{on}$  und  $\dot{Q}_{rec}$  sind die kritischen Wärmeströme für das Einsetzen (onset) des Filmsiedens bzw. für die Rückkehr (recovery) zum Blasensieden in unterkritischem Helium. Beide sind in Abb.4.19 als Funktion des Massenstroms dargestellt. Die systematisch höheren Werte bei eingebautem

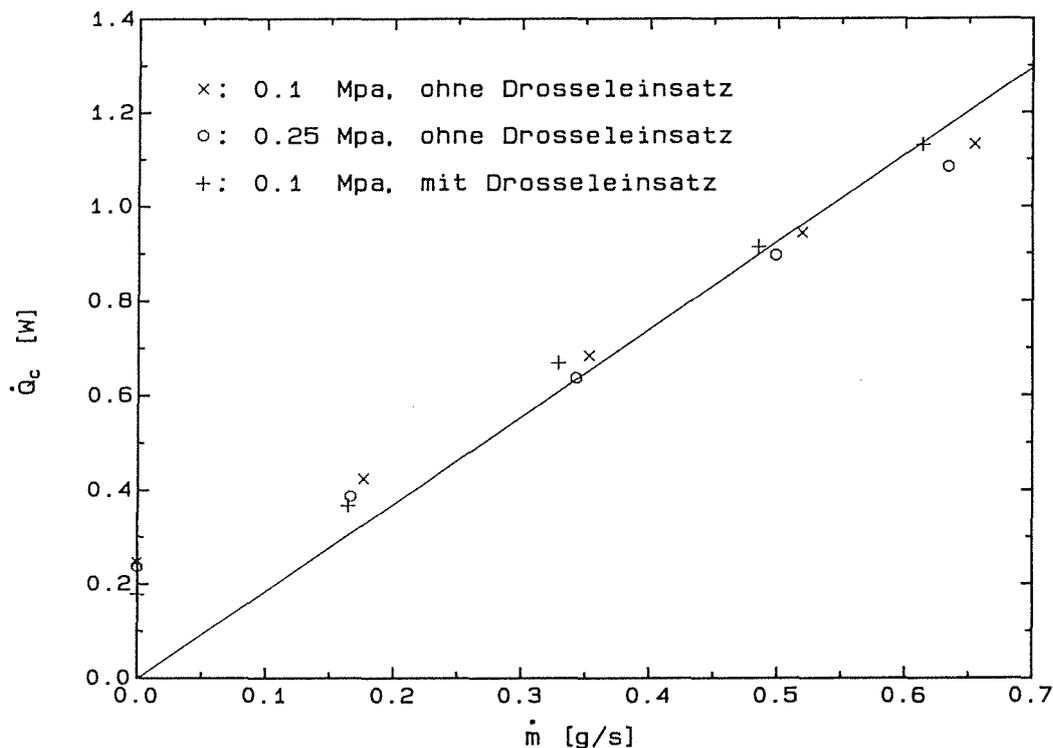


Abb. 4.18: Kritischer Wärmestrom für den Übergang von He II nach He I als Funktion des Massenstroms

Drosseleinsatz kommen von den größeren Strömungsgeschwindigkeiten, die die Bildung und das Aufrechterhalten des Gasfilms an der Heizeroberfläche erschweren.

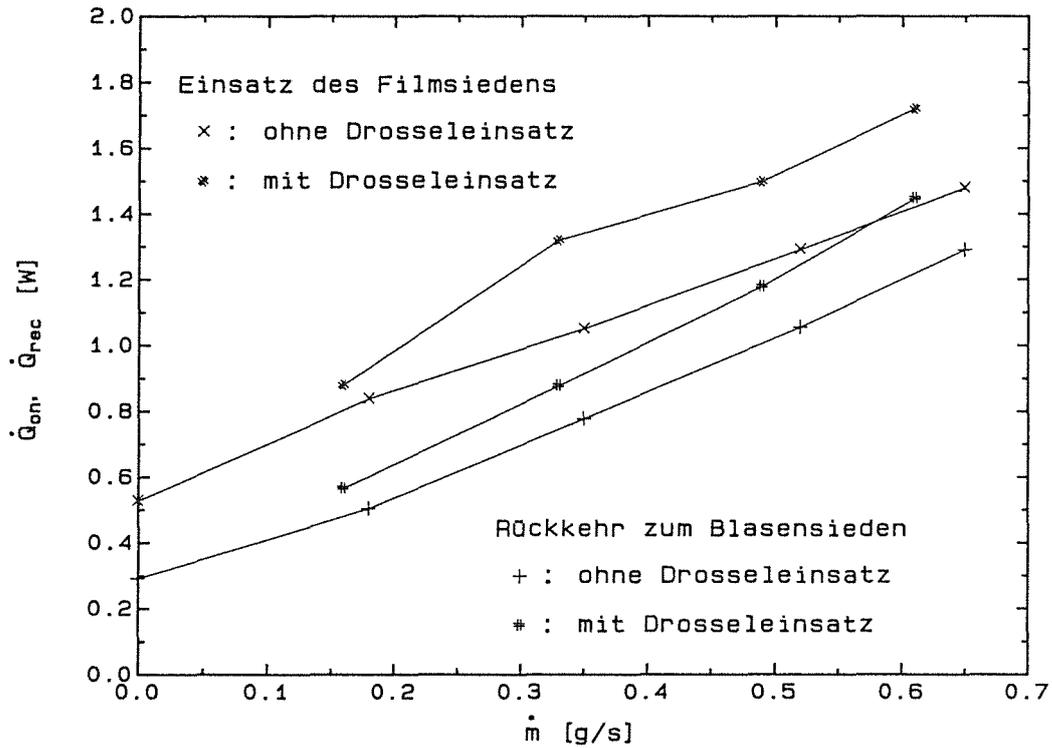


Abb. 4.19: Kritische Wärmeströme für das Einsetzen des Filmsiedens und für die Rückkehr zum Blasensieden als Funktion des Massenstroms

## 4.5 Thermomechanische Pumpen

Bei den bisherigen Messungen wurde die TMP lediglich als Mittel zur Erzeugung der He II-Strömung verwendet. Im folgenden soll sie selbst Gegenstand vertiefter Untersuchungen sein. Zunächst wird die ideale TMP betrachtet und ihre Leistungsfähigkeit sowie ihr Wirkungsgrad bestimmt. Danach werden die Messungen an dem Prototyp einer TMP vorgestellt und mit den Werten der idealen TMP verglichen. Dabei zeigt sich, daß in der realen TMP Verluste auftreten. Diese Verluste werden dem Einlaufrohr, der Heizkammer und dem Superfilter zugeordnet und einzeln diskutiert. Da speziell die dissipativen Verluste im Superfilter ausführlicher untersucht wurden, ist diesen Experimenten ein eigenes Teilkapitel gewidmet.

### 4.5.1 Ideale thermomechanische Pumpe

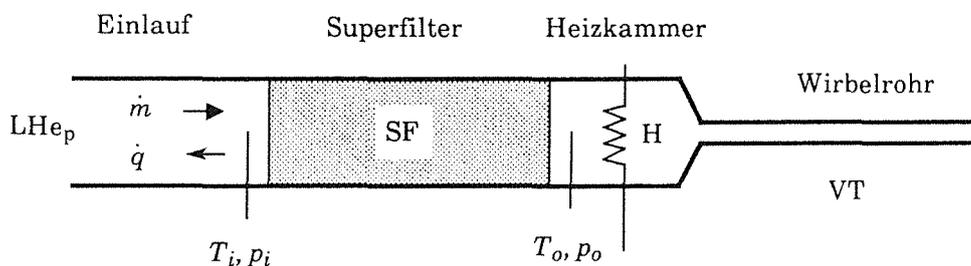


Abb. 4.20: Schema einer thermomechanischen Pumpe

In diesem Abschnitt soll anhand der idealen TMP die Obergrenze der zu erwartenden Leistungsfähigkeit einer TMP aufgezeigt werden. Dazu ist in Abb. 4.20 noch einmal das Schema einer TMP, bestehend aus Einlauf, Superfilter, Heizkammer und Wirbelrohr, dargestellt. Die ideale TMP unterscheidet sich von der realen TMP in den folgenden Punkten:

- 1) Der Einlauf ist thermisch ideal an das Heliumbad angekoppelt, sodaß die durch das Abstreifen der Entropie am Eintritt des Superfilters freigesetzte Wärmeleistung an das Bad abgeführt werden kann, ohne daß ein nennenswerter Temperaturgradient entsteht.
- 2) Die Porengröße eines idealen Superfilters ist so klein, daß die superfluide Komponente stets laminar strömt und daher im Superfilter keine Dissipation auftritt. Außerdem ist aufgrund der kleinen Permeabilität die Geschwindigkeit der normalfluiden Komponente so klein, daß die Rückströmrate durch das Superfilter vernachlässigt werden kann.
- 3) In der idealen Heizkammer ist der Temperaturgradient vernachlässigbar.

4) Ein ideales Wirbelrohr ist so dimensioniert, daß die über Gorter-Mellink-Wärmeleitung durch das He II abgeführte Leistung gegenüber der zugeführten elektrischen Heizleistung vernachlässigt werden kann; gleichzeitig soll aber auch sein Strömungswiderstand vernachlässigbar klein sein.

Unter den oben genannten Bedingungen gelten für die zuzuführende Heizleistung  $\dot{Q}$  gemäß (2.2) und mit  $v_n=0$

$$\dot{Q} = \dot{m} s(T_o) T_o \quad (4.27)$$

und für die erzeugte Druckdifferenz  $\Delta p$  gemäß (2.8)

$$\Delta p = \rho \int_{T_i}^{T_o} s(T) dT \quad (4.28)$$

Diese beiden Beziehungen beschreiben unter Hinzunahme der Relation für den Strömungswiderstand aus Kap. 4.1

$$\Delta p = a \dot{m}^2 \quad (4.29)$$

einen Kreislauf mit idealer TMP vollständig.

Für den Kreislauf mit eingebautem Drosseleinsatz ( $a=5.2 \cdot 10^8 \text{ (kg m)}^{-1}$ ) wurden für verschiedene Werte von  $T_i$  (1.5, ..., 2.1)  $\Delta p$ ,  $\dot{m}$  und  $\dot{Q}$  als Funktion von  $T_o$  bestimmt, wobei als maximale Auslauftemperatur  $T_o = 2.15 \text{ K}$  gewählt wurde. Abb. 4.21 zeigt den Massenstrom  $\dot{m}$  als Funktion der Heizleistung  $\dot{Q}$ . Bei konstanter Einlauftemperatur nimmt der Massenstrom mit steigender

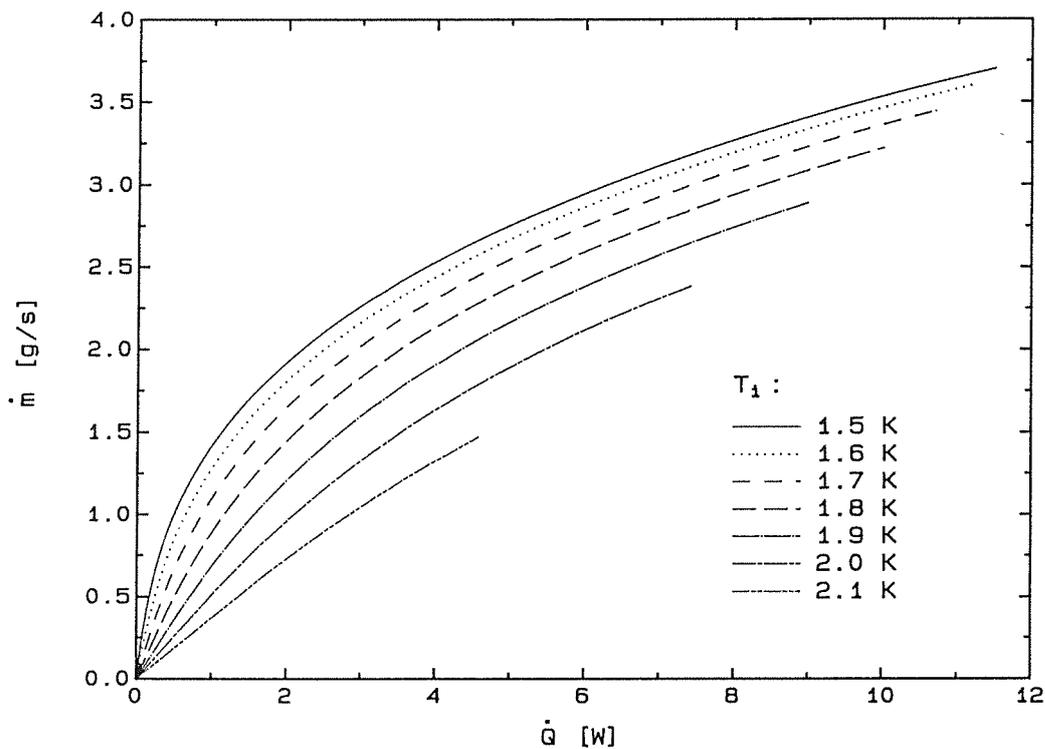


Abb. 4.21: Massenstrom als Funktion der Heizleistung bei der idealen TMP im Kreislauf mit Drosseleinsatz

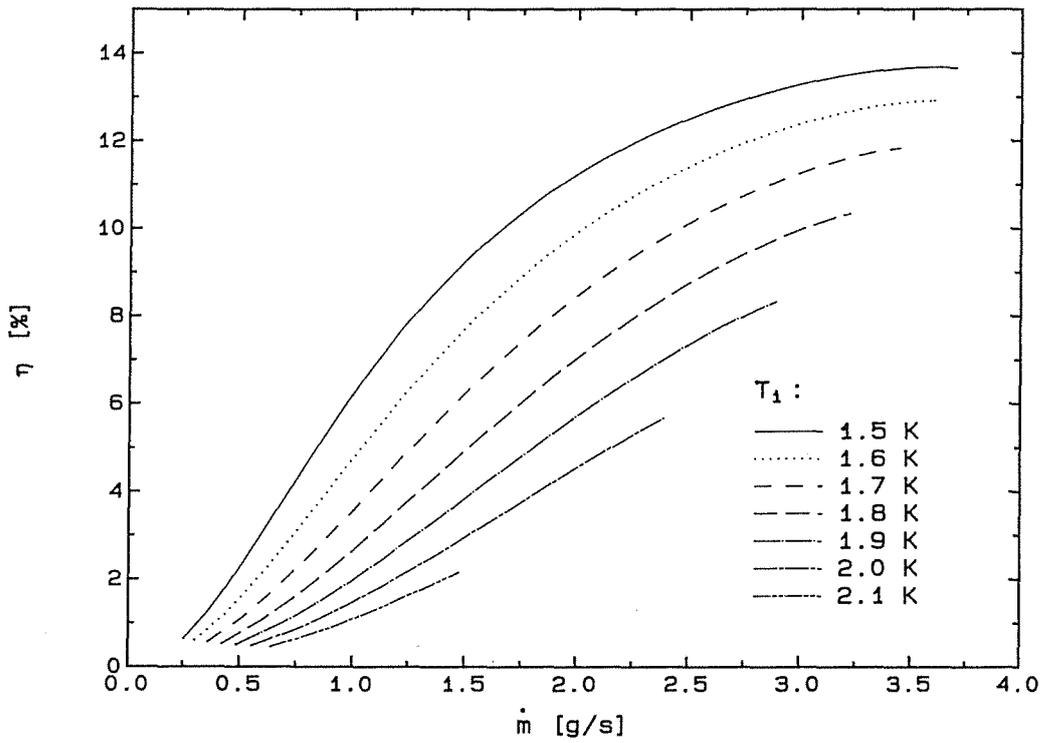


Abb. 4.22: Wirkungsgrad der idealen TMP als Funktion des Massenstromes

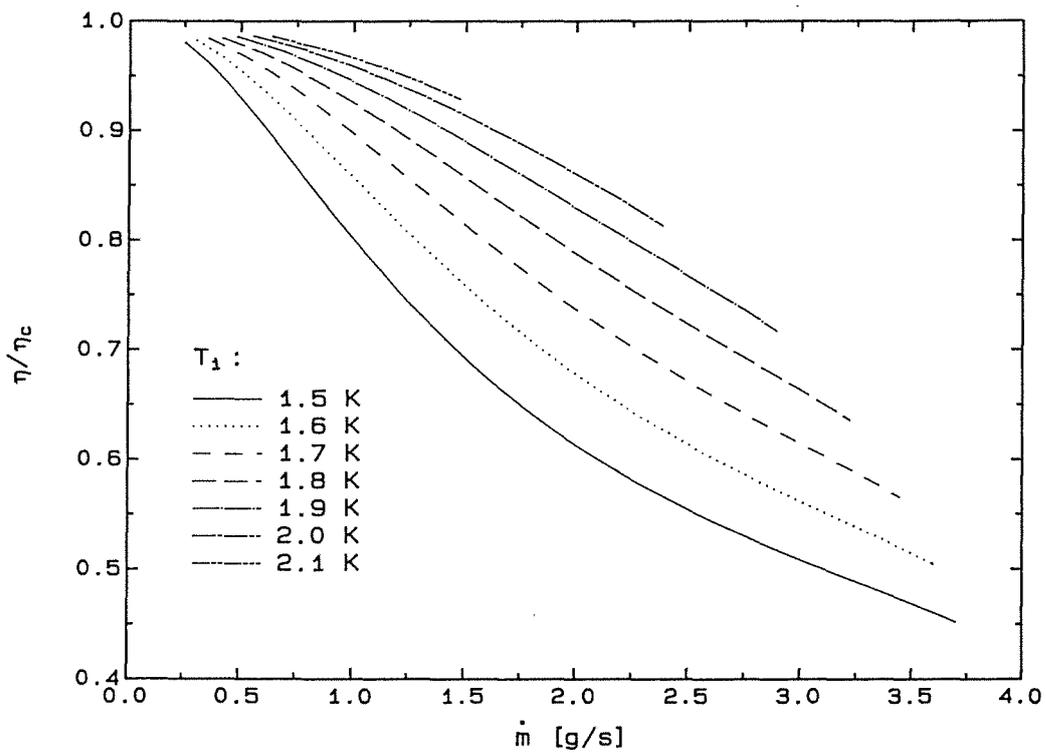


Abb. 4.23: Reduzierter Wirkungsgrad der idealen TMP als Funktion des Massenstromes

Heizleistung zu und bei einer niedrigeren Einlauf­temperatur reicht eine kleinere Heizleistung, um den gleichen Massenstrom zu erzeugen. Dieser Zusammenhang spiegelt sich auch im Wirkungsgrad, dem Quotient aus hydraulischer und thermischer Leistung,

$$\eta = \frac{(\dot{m} \Delta p / \rho)}{\dot{Q}} = \frac{\int_{T_i}^{T_o} s dT}{s T_o} \quad (4.30)$$

wider, der in Abb. 4.22 als Funktion des Massenstromes aufgetragen ist. Der absolute Wirkungsgrad ist zwar mit ca. 10% relativ niedrig, beträgt aber durchweg mehr als 50% des Carnot-Wirkungsgrades

$$\eta_c = \frac{T_o - T_i}{T_o}, \quad (4.31)$$

wie aus Abb.4.23 zu ersehen ist, in der der Quotient  $\eta/\eta_c$  über dem Massenstrom aufgetragen ist.

#### 4.5.2 Reale thermomechanische Pumpe

Im folgenden werden anhand von Messungen an einem Prototyp die Unterschiede zwischen einer realen und einer idealen TMP untersucht. Das Superfilter besteht aus Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Pulver mit einer nominellen Korngröße von 0.05 µm, hat eine Länge von 100 mm und einen Durchmesser von 10 mm. (siehe Tab. 3.1). Einlaufrohr und Heizkammer haben ebenfalls einen Durchmesser von 10 mm und Längen von 220 bzw. 70 mm. Diese Pumpe wurde in dem Kreislauf mit eingebautem Drosseleinsatz betrieben. Abb. 4.24 zeigt als Maß für die Leistungsfähigkeit den Massenstrom  $\dot{m}$  als Funktion der Heizleistung  $\dot{Q}$  bei unterschiedlichen Badtemperaturen (1.6, 1.8, 2.0 K). Die gestrichelten Kurven stellen die entsprechenden Werten der idealen TMP dar. Die Abweichungen vom idealen Verhalten werden mit zunehmendem  $\dot{Q}$  größer und der Massenstrom strebt gegen einen Sättigungswert, während er bei der idealen TMP stetig zunimmt. Die Verluste, die diese Abweichungen verursachen, sollen jetzt lokalisiert und im einzelnen betrachtet werden. Wichtige Aussagen dazu liefert schon der Temperaturverlauf längs der TMP, der in Abb. 4.25 dargestellt ist. Zunächst erkennt man, daß sich am Einlauf der TMP eine Temperaturdifferenz von bis zu 100 mK aufbauen kann, die für die Erzeugung des thermomechanischen Drucks verloren ist. Ähnliches gilt für die Heizkammer: auch hier treten Temperaturdifferenzen bis zu 100 mK auf, die nicht zur Erhöhung des Förderdrucks genutzt werden können. Man erkennt auch, daß der Temperaturgradient am Einlauf des Wirbelrohrs sehr klein ist, woraus sich schließen läßt, daß es für diesen Kreislauf richtig dimensioniert ist. Über die Verluste im Superfilter kann man aus der Temperaturverteilung nichts aussagen. Sie werden aber im folgenden noch ausführlich behandelt.

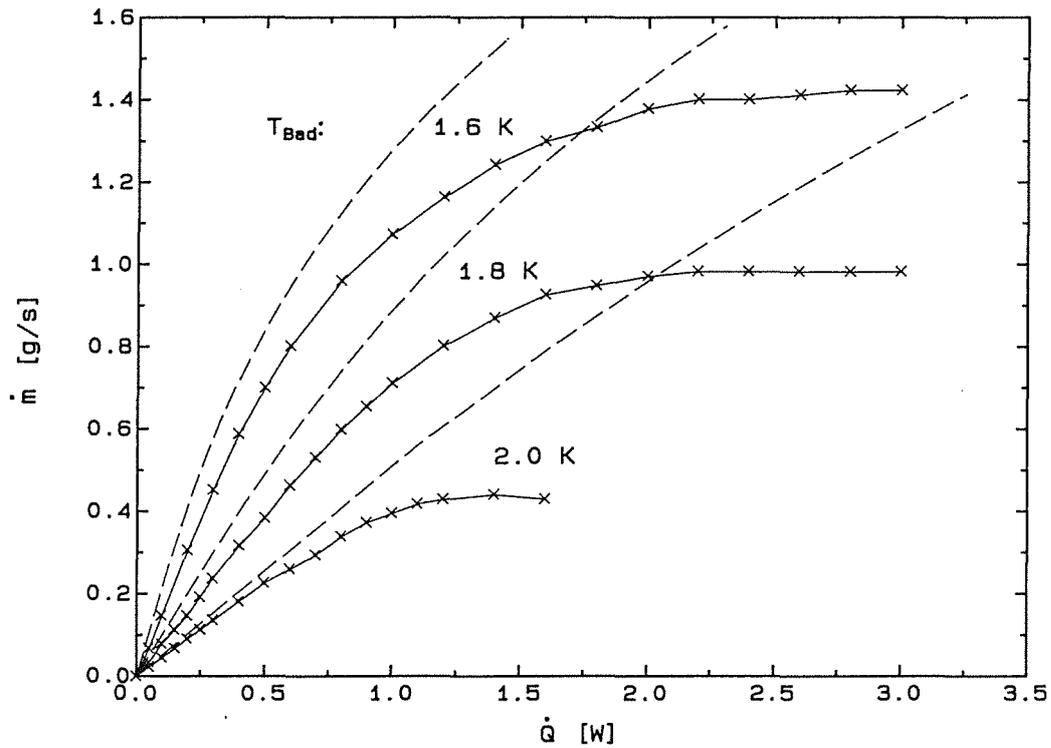


Abb. 4.24: Massenstrom als Funktion der Heizleistung bei der TMP mit dem Superfilter aus  $Al_2O_3$ -Pulver im Vergleich mit der idealen TMP

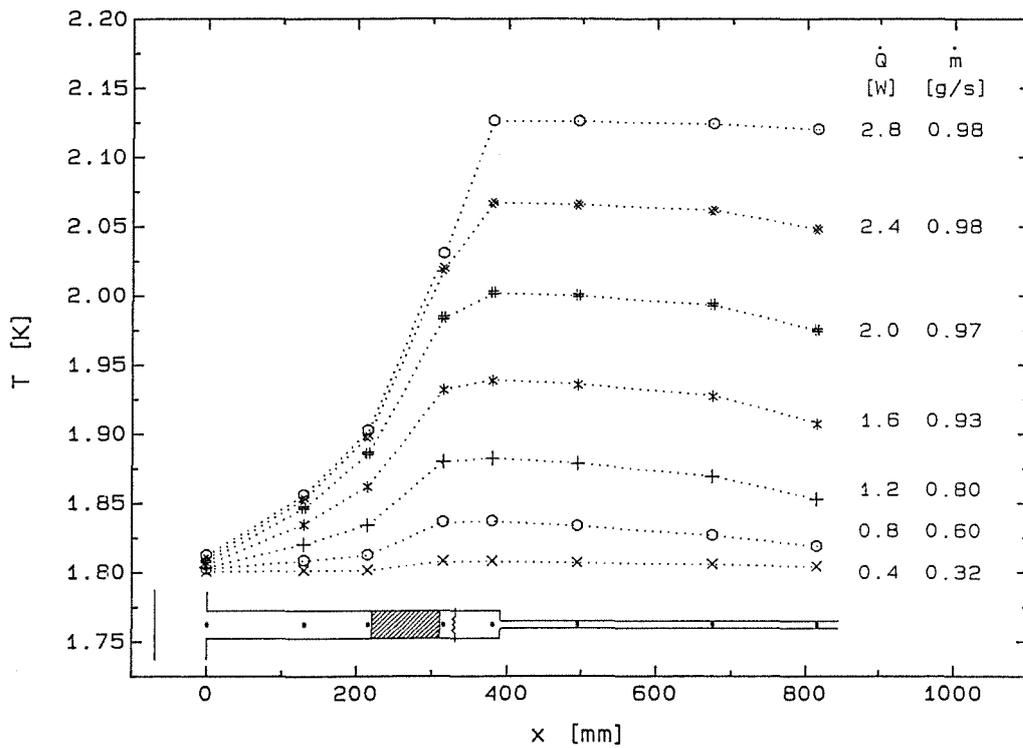


Abb. 4.25: Gemessener Temperaturverlauf an der TMP

### 4.5.2.1 Verluste im Einlauf der TMP

Am Einlauf des Superfilters wird die gesamte Entropie des ankommenden Fluids abgestreift, sodaß dort die thermische Leistung

$$\dot{Q}_i = \dot{m} s(T_i) T_i \quad (4.32)$$

frei wird. Diese muß über Gorter-Mellink-Wärmeleitung entgegen dem Massenstrom durch das Einlaufrohr an das Bad abgegeben werden. Um die dadurch entstehende Temperaturdifferenz zwischen dem Heliumbad und dem kalten Ende des Superfilters möglichst klein zu halten, muß das Einlaufrohr richtig dimensioniert sein. Dazu wurde mithilfe des Rechenmodells aus Kap. 4.2 die Temperaturverteilung im Einlaufrohr bestimmt. Die Randbedingungen sind dabei die Temperatur  $T_i$  und die Wärmestromdichte

$$\dot{q} = - \frac{\dot{m}}{A} s(T_i) T_i = - \nu \rho s(T_i) T_i \quad (4.33)$$

am kalten Ende des Superfilters. In Abb. 4.26 sind die berechneten Temperaturverteilungen für Einlaufemperaturen von 1.6 und 1.8 K und Strömungsgeschwindigkeiten von 5 bis 20 cm/s aufgetragen, wobei sich der Anfang des Superfilters bei  $x=0$  befindet. Typische Massenstromdichten an den Filteroberflächen liegen bei maximal 2 g/(cm<sup>2</sup>s), was einer Strömungsgeschwindigkeit von ca. 15 cm/s entspricht, wenn Einlaufrohr und Superfilter die gleiche Querschnittsfläche haben. Aus Abb. 4.26 kann man entnehmen, daß z.B. bei  $T_i=1.8$  K und  $\nu=15$  cm/s

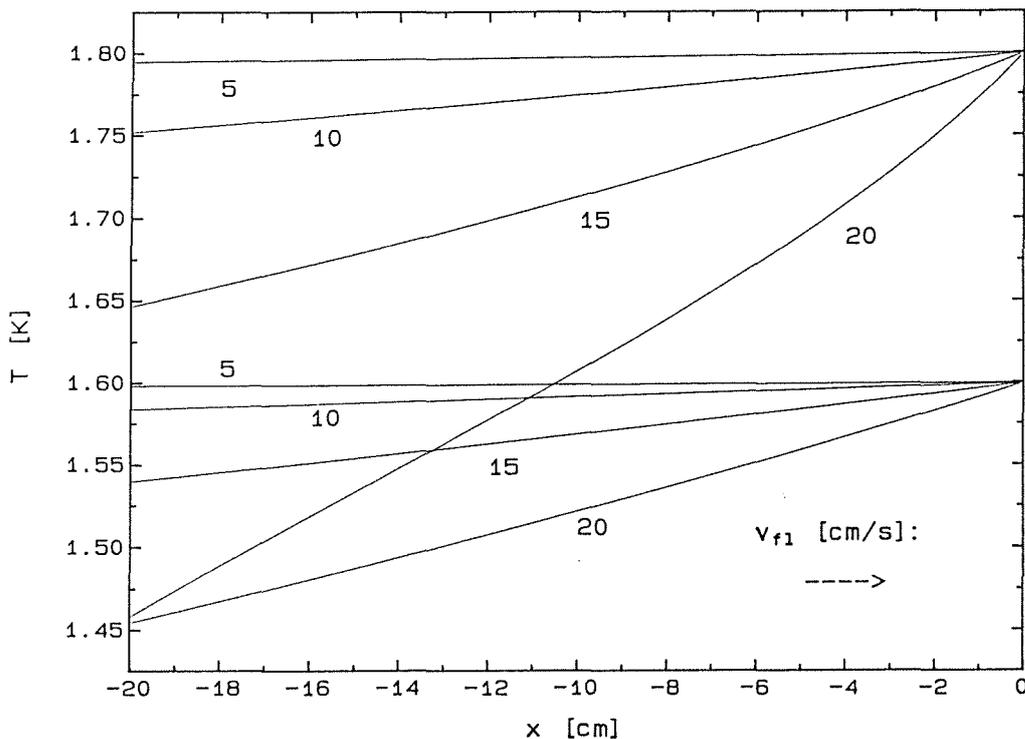


Abb. 4.26: Berechneter Temperaturverlauf im Einlauf der TMP

die Temperaturdifferenz im Abstand von 10 cm schon fast 80 mK beträgt. Wenn so hohe Strömungsgeschwindigkeiten erreicht werden, sollte das Einlaufrohr so kurz wie möglich gehalten werden und evtl. sogar einen größeren Durchmesser als das Superfilter selbst haben. Außerdem ist in diesem Zusammenhang wichtig, daß der Hauptwärmetauscher zwischen dem gesättigten Heliumbad und dem unterkühlten Heliumkreislauf richtig dimensioniert ist und möglichst kleine Temperaturdifferenzen erzeugt.

#### 4.5.2.2 Verluste in der Heizkammer

Auch am Auslauf des Superfilters muß ein Wärmestrom, nämlich

$$\dot{Q}_o = \dot{m} s(T_o) T_o \quad (4.34)$$

entgegen dem Massenstrom fließen, und zwar von der Heizung zur Filteroberfläche, um das dort austretende "entropielose" Fluid auf  $T_o$  zu erwärmen. Auch hier wurde die Temperaturverteilung berechnet, wobei die Randbedingungen jetzt am warmen Ende des Superfilters ( $x=0$ ) zu nehmen sind. Abb. 4.27 zeigt einige Temperaturverläufe in der Heizkammer. Man sieht, daß die zulässigen Strömungsgeschwindigkeiten stark von der Auslauftemperatur des Superfilters abhängen und außerdem wegen der höheren Temperaturen deutlich kleiner sind als diejenigen am Einlauf. Dies bedeutet, daß ein großer Querschnitt und ein kleiner Abstand zwischen Superfilter und Heizung

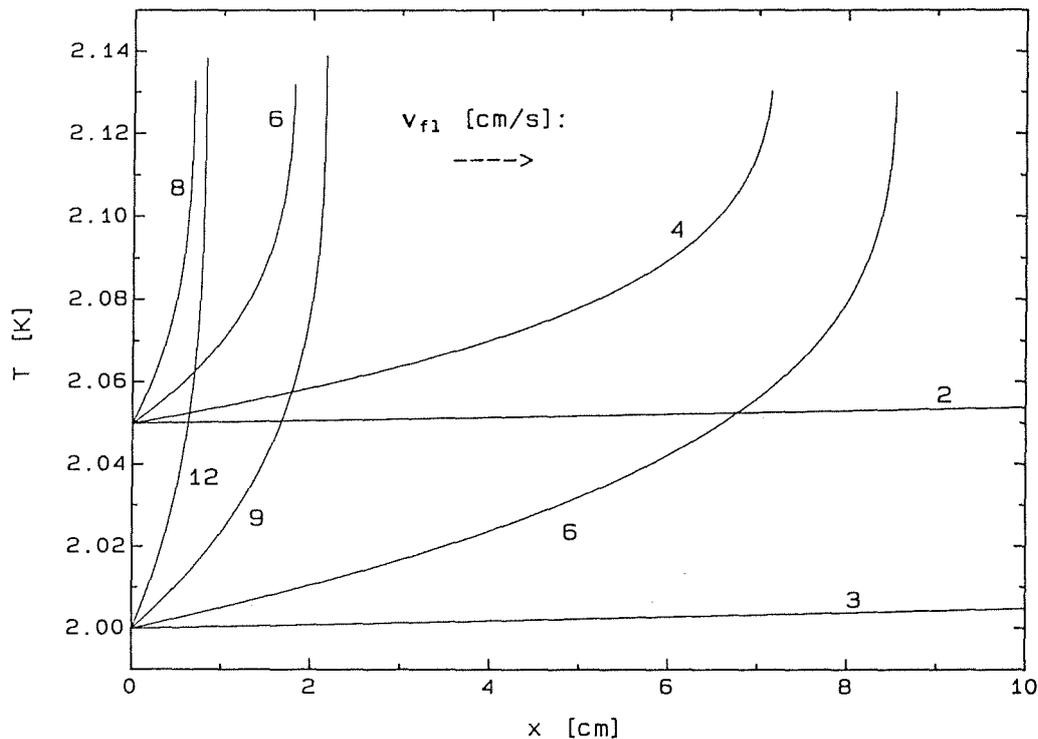


Abb. 4.27: Berechneter Temperaturverlauf in der Heizkammer der TMP

sehr wichtig sind. Ein anderer wichtiger Aspekt ist der der Sicherheit gegen Überhitzung. Die Temperatur im Superfilter darf nirgends  $T_\lambda$  überschreiten, da es für He I praktisch undurchlässig ist und dadurch der Kreislauf blockiert würde. Die zum  $\lambda$ -Punkt hin stark abnehmende Gorter-Mellink-Wärmeleitfähigkeit von He II und die sehr schlechte Wärmeleitfähigkeit von He I bieten in diesem Sinn einen Schutz für das Superfilter, da die Wärme über Wärmeleitung gegen die Strömung von der Heizung zum Auslauf des Superfilters transportiert werden muß.

#### 4.5.2.3 Verluste im Superfilter

In einem realen Superfilter gibt es zwei Mechanismen, die die Leistungsfähigkeit einer TMP beeinträchtigen, nämlich die Rückströmverluste durch eine zu große Permeabilität sowie die Verluste durch dissipative Strömung der superfluiden Komponente. Während die ersteren in diesem Abschnitt behandelt werden, ist den letzteren und wichtigeren ein eigenes Teilkapitel gewidmet.

##### Permeabilität

Da die treibende Kraft für die normalfluide Komponente der Druckgradient ist, wird diese beim Betrieb der TMP gegen die superfluide Strömung durch das Superfilter zurückfließen. Durch dieses Rückströmen wird der Förderdruck der TMP zwar nicht reduziert, aber die zurückströmende normalfluide Komponente bedeutet einen zusätzlichen Wärmestrom durch das Superfilter. Dadurch erhöht sich die zuzuführende Wärmeleistung und außerdem muß am Einlauf der TMP entsprechend mehr Wärme abgeführt werden. Ein oberer Grenzwert dieses zusätzlichen Wärmestroms kann aus der Wärmeleitfähigkeit (siehe Kap. 2.5, Gl. 2.27) abgeschätzt werden

$$\dot{Q}_{rück} = \frac{\varepsilon A K_p}{\eta_n} (\rho_s)^2 T \nabla T \leq \frac{\varepsilon A K_p}{\eta_n} (\rho_s(T_o))^2 T \frac{\Delta T}{l}, \quad (4.35)$$

wenn man die Temperatur  $T_o$  am warmen Ende des Superfilters einsetzt und den Temperaturgradienten durch  $\Delta T/l$  annähert. Für die hier beschriebene TMP bedeutet dies, daß z.B. bei  $T_{bad} = 1.8$  K und  $\dot{Q} = 2.8$  W weniger als 1.3 mW aufgrund der Permeabilität zusätzlich zugeführt werden müssen. Da  $\dot{Q}_{rück}$  umgekehrt proportional zur Länge des Superfilters ist, wäre in diesem Fall selbst bei einer Länge von 1 cm  $\dot{Q}_{rück}$  noch kleiner als 1% der gesamten Heizleistung und damit vernachlässigbar.

## 4.6 Dissipative Effekte in Superfiltern

In diesem Teil der Arbeit werden die Untersuchungen der Verluste im Superfilter behandelt, die aufgrund der dissipativen Wechselwirkung zwischen der normal- und der superfluiden Komponente auftreten. Im ersten Abschnitt wird das Verhalten der TMP im Leerlauf, also mit blockiertem Massenstrom, beschrieben. Dabei konnte am Superfilter selbst keine Dissipation festgestellt werden. Es folgen Experimente im normalen Betrieb der TMP, bei denen oberhalb eines kritischen Massenstromes Dissipation auftritt. Um den Einfluß des Temperaturverlaufs im Superfilter auszuschalten, wurden Messungen bei gleicher Ein- und Auslauftemperatur des Superfilters durchgeführt. Die dabei im Superfilter auftretende dissipierte Leistung und die Bestimmung einer kritischen Geschwindigkeit werden diskutiert. Aus den Messungen kann man schließen, daß die dissipativen Effekte nur in dünnen Schichten an den Enden des Superfilters auftreten. Weiterhin wird der Einfluß von Hohlräumen im Superfilter auf die Wirkung der TMP untersucht. Es zeigt sich, daß größere Hohlräume in einem Superfilter dieses zum Blockieren bringen können und daher vermieden werden müssen. Im daran anschließenden Teil werden Experimente mit Superfiltern aus Membranfilterscheiben beschrieben. Dabei wird ein schärferer Übergang zu einer dissipativen Strömung beobachtet, der auf eine schmalere Verteilung der Porengrößen als in den  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfiltern hindeutet.

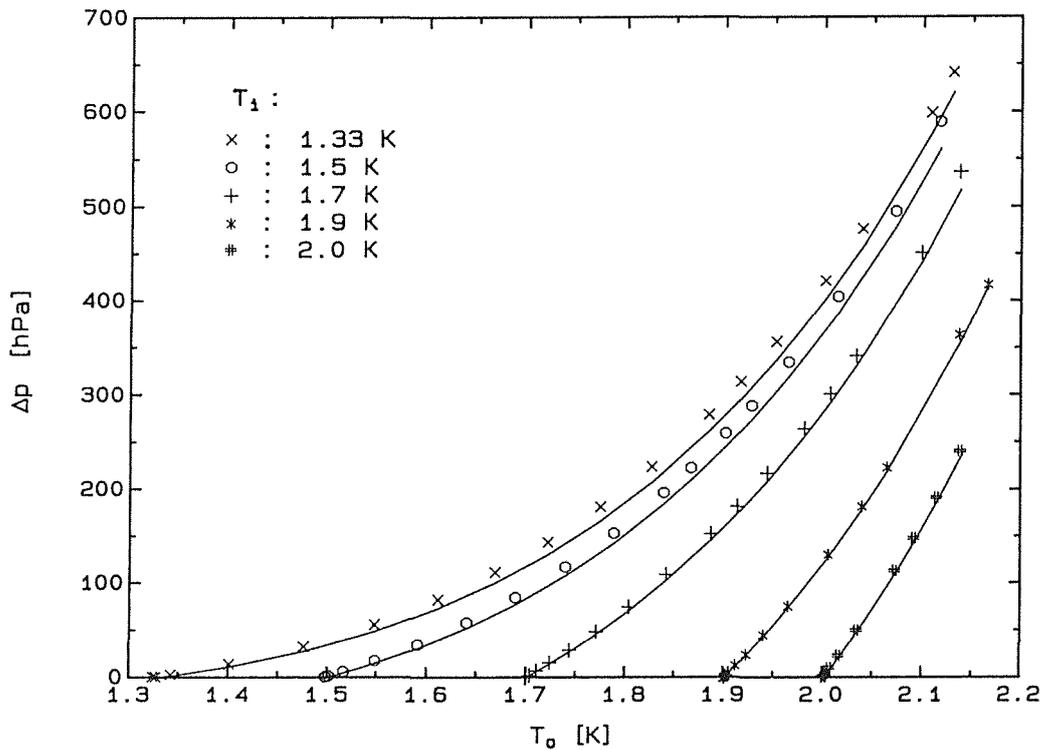
### 4.6.1 Leerlaufbetrieb der TMP mit blockiertem Massenstrom

Erzeugt man zwischen den beiden Enden eines Superfilters eine Temperaturdifferenz  $T_o - T_i$ , so beträgt die zu erwartende Druckdifferenz (Kap. 2.2, Gl 2.8):

$$\Delta p = \rho \int_{T_i}^{T_o} s dT \quad (4.36)$$

Um festzustellen, ob das verwendete Superfilter überhaupt die erwarteten Druckdifferenzen erzeugen kann, wurde zunächst das Verhalten einer TMP im Leerlauf untersucht. Dazu wurden der Massenstrom durch Einfügen einer Messingscheibe an einer Flanschverbindung blockiert und durch Heizen eine Temperaturdifferenz am Superfilter erzeugt. In Abb. 4.28 sind die gemessenen Druckdifferenzen dargestellt. Man findet innerhalb der Meßgenauigkeit eine gute Übereinstimmung mit den aus den Endtemperaturen berechneten Druckdifferenzen, die den durchgezogenen Linien entsprechen. Die größte erzeugte Druckdifferenz liegt bei 650 hPa und wurde für  $T_i = 1.32 \text{ K}$  und  $T_o \approx T_\lambda$  erreicht. Der Fehler, den man durch die Vernachlässigung der Druckabhängigkeit der spezifischen Entropie macht, beträgt in diesem Extremfall weniger als 3% und ist normalerweise kleiner als 1% und damit vernachlässigbar. Außer der Tatsache, daß der verwendete "Pulverpreßling" prinzipiell als Superfilter taugt, zeigen diese Messungen auch eine

Konsistenz der Temperatur- und Druckmessungen mit den verwendeten Heliumdaten von *Arp und Agatsuma (1985)*.



*Abb. 4.28: Vergleich des gemessenen und des erwarteten Förderdrucks der TMP bei blockiertem Massenstrom*

#### 4.6.2 Normaler Betrieb der TMP mit endlichem Massenstrom

Wenn die TMP mit endlichem Massendurchsatz betrieben wird, kann es, vor allem bei hohen Durchsätzen, zu einer größeren Diskrepanz zwischen den Messungen und den theoretischen Vorhersagen kommen. Dies ist in Abb. 4.29 veranschaulicht. Dort sind der gemessene Förderdruck  $\Delta p$  und die aus den gemessenen Endtemperaturen des Superfilters berechnete Druckdifferenz über dem Massenstrom  $\dot{m}$  aufgetragen. Man erkennt, daß beide nur bis zu einem Massenstrom von ca. 0.4 g/s übereinstimmen und daß darüber die gemessene Druckdifferenz deutlich kleiner als die erwartete ist. Nach Gl. 2.3 ist die Differenz dieser beiden Größen gleich der Dichte  $\rho$  multipliziert mit der Differenz des chemischen Potentials  $\Delta\mu$  zwischen den Enden des Superfilters und wird im folgenden als innerer Reibungsverlust oder kurz als Dissipation bezeichnet:

$$-\rho \Delta\mu = \int_{T_i}^{T_o} \rho s dT - \Delta p \quad (4.37)$$

In Abb. 4.30 ist diese Größe als Funktion der Massenstromdichte  $J_o = \dot{m}/A$  bezogen auf den

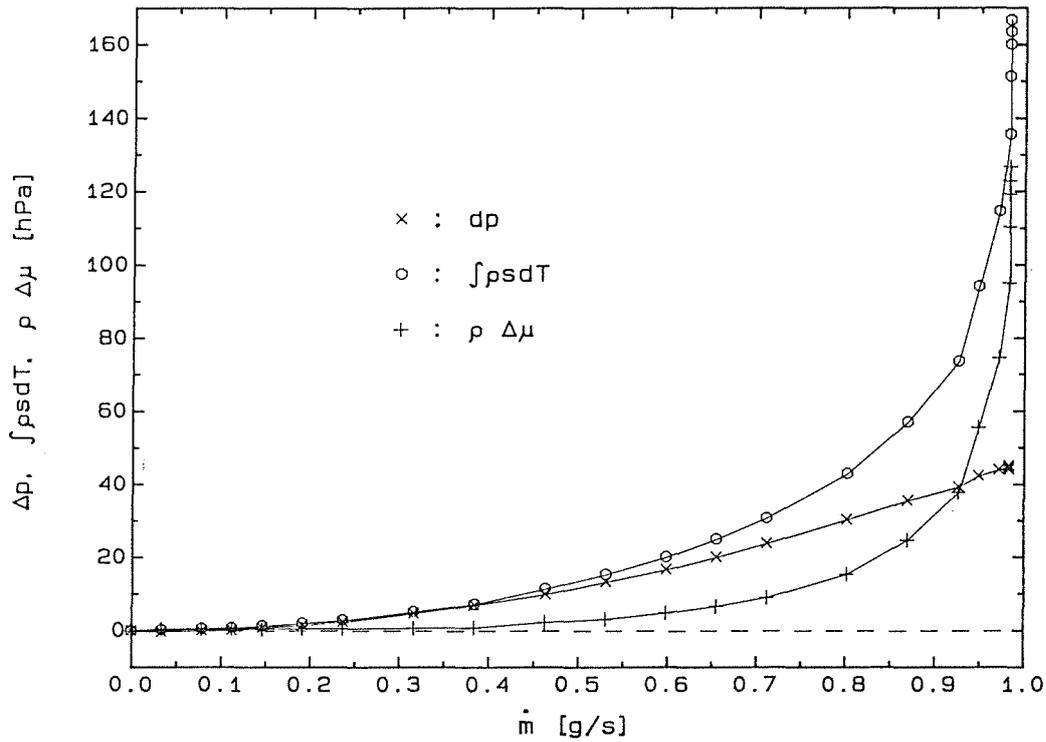


Abb. 4.29: Vergleich des gemessenen und des erwarteten Förderdrucks der TMP als Funktion des Massenstromes

Gesamtquerschnitt des Superfilters dargestellt, wobei die verschiedenen Kurven unterschiedlichen Badtemperaturen (1.6, 1.7, ... 2.0 K) entsprechen. Für jede Badtemperatur gibt es eine maximale Massenstromdichte  $J_{max}$ , bei der die Dissipation divergiert, und die mit zunehmender Badtemperatur kleiner wird. In den Bereichen  $J_{max}/2$  bis  $J_{max}$  nimmt die Dissipation stetig zu, während sie unterhalb  $J_{max}/2$  im Rahmen der Meßgenauigkeit null ist. Dieser beobachtete dissipative Druckabfall wird verursacht durch die gegenseitige Reibung zwischen der normal- und der superfluiden Komponente, die einsetzt, wenn ihre Relativgeschwindigkeit einen kritischen Wert überschreitet. Diese kritische Geschwindigkeit hängt in erster Linie von der Porengröße ab und sollte daher im ganzen Superfilter gleich sein, sofern das Pulver homogen genug gepreßt ist. Da  $v_n$  im Superfilter fast null ist, ist die Relativgeschwindigkeit  $v_s - v_n$  praktisch gleich  $v_s$ , die wiederum gegeben ist durch

$$v_s(T) = \frac{\dot{m}}{\rho_s(T) \varepsilon A} \quad (4.38)$$

Da die Porosität  $\varepsilon$  nur mit einer relativ großen Unsicherheit aus dem Füllfaktor des Superfilters bestimmt werden kann und außerdem eine Konstante ist, wird im folgenden anstatt  $v_s$  meist die reduzierte Strömungsgeschwindigkeit  $\varepsilon v_s = J_o / \rho_s$  benutzt.  $\varepsilon v_s$  ist dort am größten, wo die Temperatur am höchsten ist, nämlich am Auslaß des Superfilters. In Abb. 4.31 ist der dissipative Druckabfall über  $\varepsilon v_{s,0}$  aufgetragen. Man kann erkennen, daß eine nennenswerte Dissipation erst bei Werten zwischen 5 und 8 cm/s einsetzt. Bei einer Porosität von  $\varepsilon \approx 0.7$  entspricht dies einer

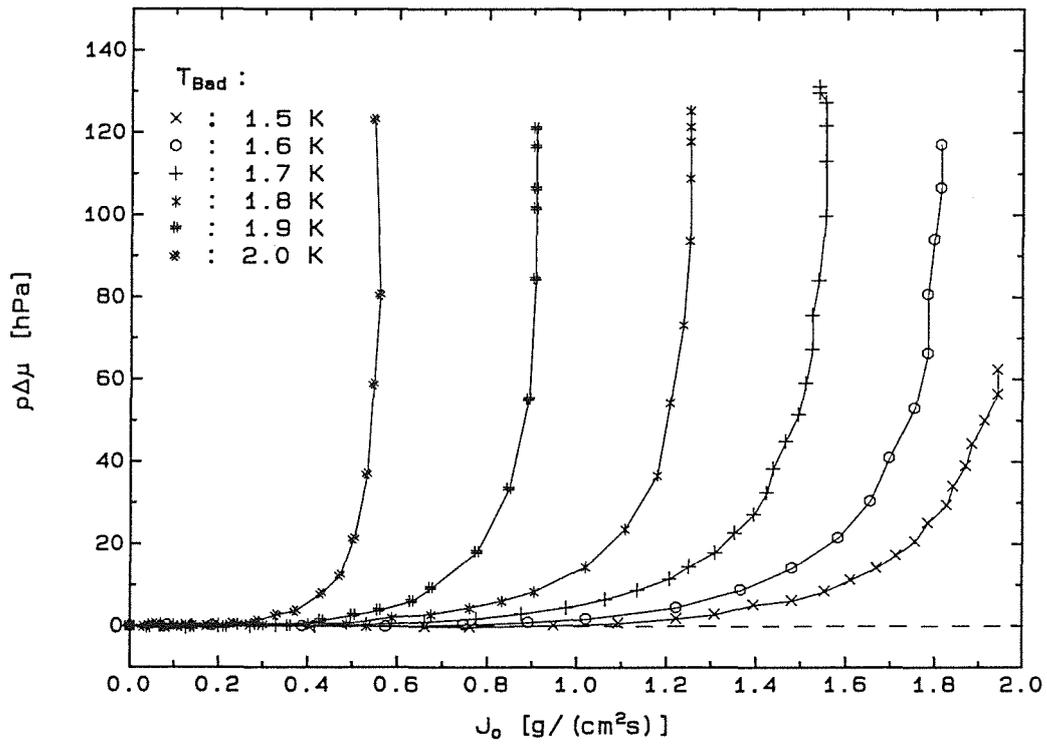


Abb. 4.30: Dissipativer Druckabfall am Superfilter aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver als Funktion der Massenstromdichte

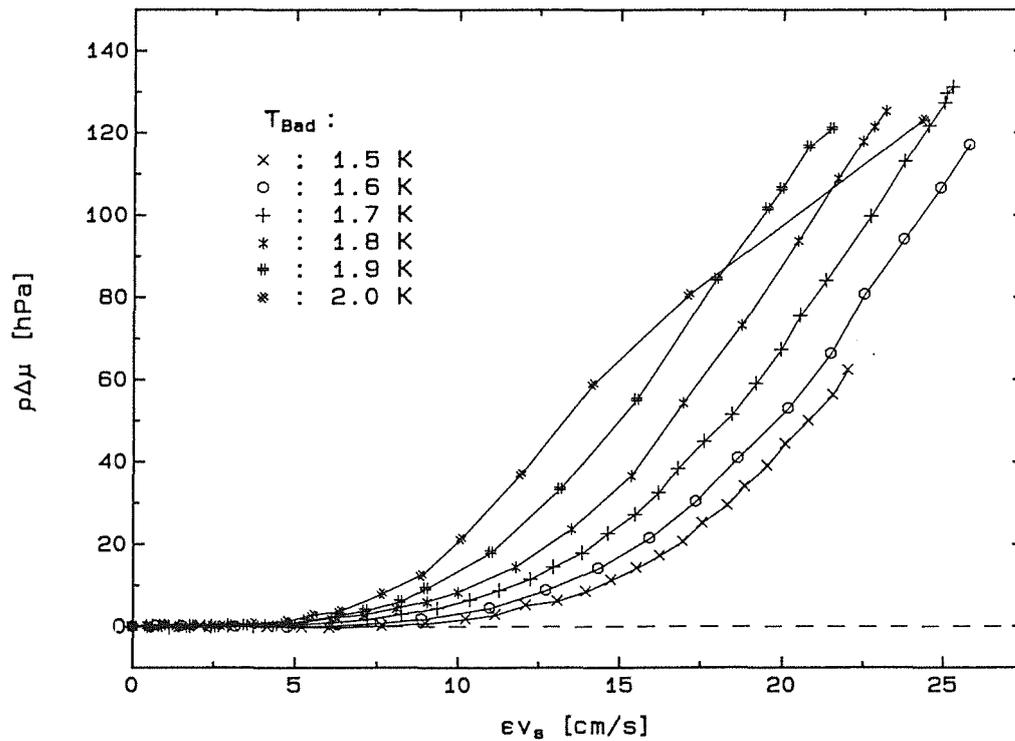
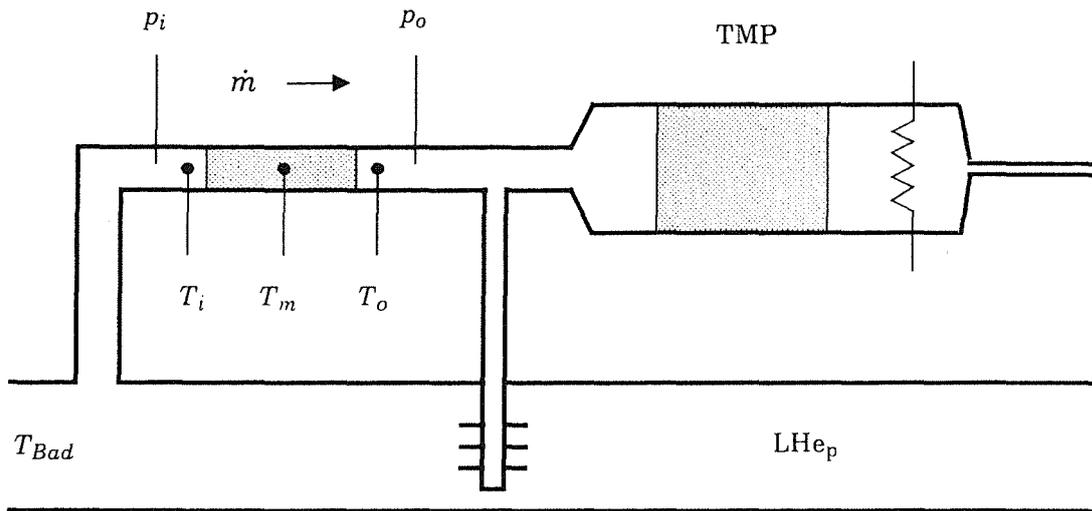


Abb. 4.31: Dissipativer Druckabfall am Superfilter aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver als Funktion der reduzierten Strömungsgeschwindigkeit der superfluiden Komponente

echten Geschwindigkeit  $v_s$  von 7 bis 11 cm/s. Obwohl sich aufgrund des stetigen Einsatzes der Dissipation keine echten kritischen Geschwindigkeiten angeben lassen, sind diese Werte für die praktische Anwendung dennoch als Obergrenze der verlustfreien superfluiden Strömung brauchbar.

#### 4.6.3 Experimente bei isothermen Bedingungen am Superfilter



*Abb. 4.32: Schematischer Aufbau der Experimente bei isothermen Bedingungen am Superfilter*

Bei den bisher beschriebenen Experimenten war das untersuchte Superfilter in die TMP eingebaut. Damit herrschen beim Betrieb zwangsläufig unterschiedliche Temperaturen an Ein- und Auslauf und folglich variiert auch die Geschwindigkeit der superfluiden Komponente  $v_s$  längs des Superfilters. Bei der Analyse dieser Messungen wurde angenommen, daß die Dissipation  $\rho \nabla \mu$  am warmen Ende des Superfilters am stärksten ist, da dort  $v_s$  am größten ist. Die Interpretation der Dissipationsmessungen würde aber durch homogene Bedingungen im Superfilter stark vereinfacht. Daher wurden Experimente durchgeführt, bei denen das zu untersuchende Superfilter zusätzlich zur TMP in den Kreislauf eingebaut war. Dessen Austritt war durch einen Wärmetauscher thermisch an das große Steigrohr angekoppelt (Abb. 4.32), sodaß die Temperaturdifferenz zwischen Einlauf und Auslauf meist deutlich kleiner als 15 mK gehalten werden konnte. Im Experiment wurde bei konstanter Badtemperatur die Heizleistung der TMP bis zu einem Maximalwert kontinuierlich erhöht und danach wieder reduziert. Gemessen wurden dabei die Temperaturen und Drucke am Superfilter sowie die Strömungsgeschwindigkeit als Funktion der Heizleistung der TMP. Die Heizleistung wurde so langsam verändert, daß die Messungen als

quasistationär betrachtet werden können. Dies erkennt man daran, daß zwischen dem Erhöhen und dem Erniedrigen der Heizleistung keine Hysterese auftritt. Dieses Experiment wurde für fünf Badtemperaturen (1.6, 1.7, ..., 2.0 K) jeweils bei Atmosphärendruck durchgeführt. Abb. 4.33 zeigt den dissipativen Druckabfall am Superfilter  $\rho\Delta\mu_{SF}$  als Funktion der reduzierten Massenstromdichte  $J_0 = \dot{m}/A$ . Man erkennt, daß auch bei isothermen Bedingungen die Dissipation langsam und stetig einsetzt und daß sie erwartungsgemäß bei höheren Temperaturen sehr viel stärker ist. Zur weiteren Diskussion ist es auch hier sinnvoller, die Dissipation als Funktion der reduzierten superfluiden Strömungsgeschwindigkeit  $\epsilon v_s$  zu betrachten. Aus der Darstellung in Abb. 4.34 erkennt man, daß auch bei dieser Messung keine eindeutige kritische Geschwindigkeit für den Einsatz der Dissipation angegeben werden kann. Da für  $\epsilon v_s \leq 2$  cm/s der dissipative Druckabfall im Bereich der Meßgenauigkeit liegt, läßt sich folgern, daß die kritische Geschwindigkeit kleiner als ca. 3 cm/s sein muß. Das Ergebnis, daß in dem hier vorliegenden Filter auch bei sehr kleinen Strömungsgeschwindigkeiten **keine** reine Superströmung beobachtet wird, erscheint zunächst im Widerspruch zu anderen Untersuchungen. So wurden beispielsweise mit ähnlichem Material, das allerdings einen geschlossenen Ringkanal bildete, Dauerströme mit  $v_s \approx 70$  cm/s beobachtet (Tilley und Tilley, § 6.5.4, 1986). Auch die von Vinen (1963) angegebene Beziehung für die kritische Geschwindigkeit (2.17) ergibt für einen Darcy-Durchmesser von 0.11  $\mu\text{m}$  fast 100 cm/s, während man aus dem von van Alphen *et al* (1966) angegebenen empirischen Zusammenhang (2.18) nur ca. 17 cm/s erwartet. Besonders der Vergleich mit dem geschlossenen

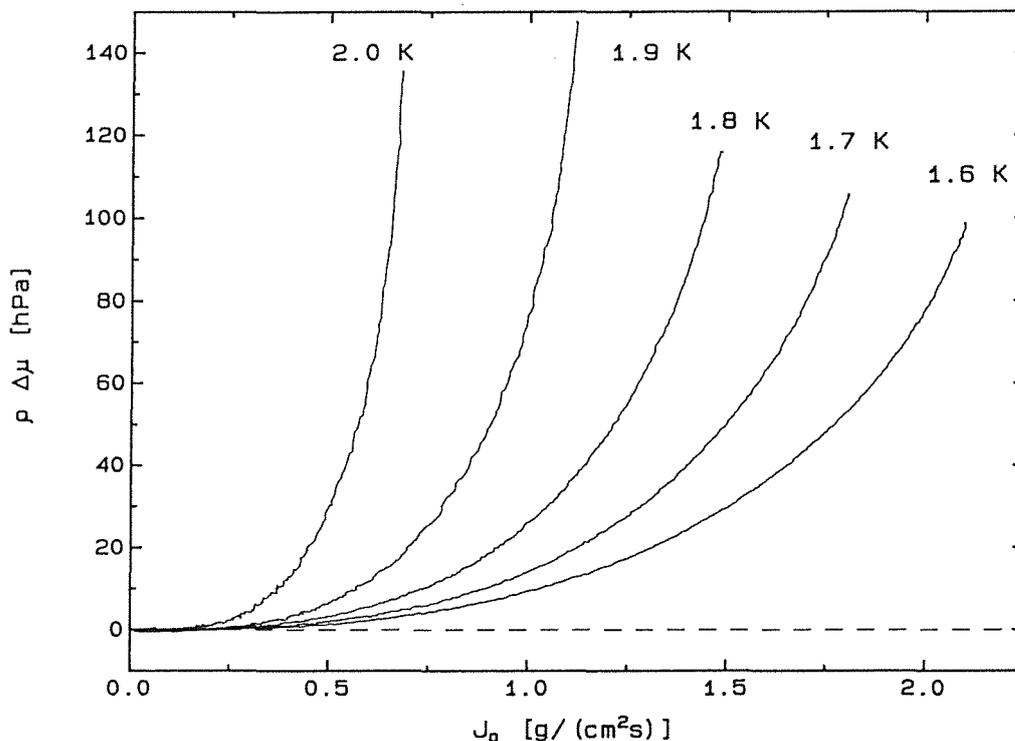


Abb. 4.33: Dissipativer Druckabfall am Superfilter als Funktion der Massenstromdichte

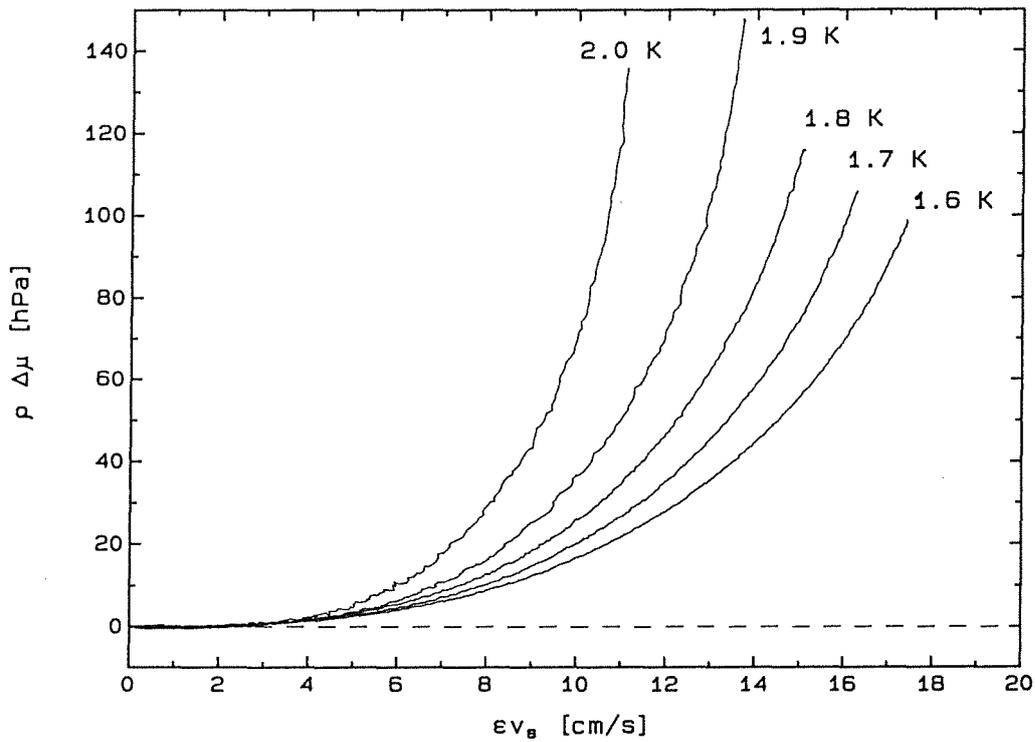


Abb. 4.34: Dissipativer Druckabfall am Superfilter als Funktion der reduzierten Strömungsgeschwindigkeit der superfluiden Komponente

Ringkanal deutet daraufhin, daß die hier beobachteten niedrigen kritischen Geschwindigkeiten mit dissipativen Effekten in den Randschichten des Superfilters zusammenhängen.

Gestärkt wird diese Annahme durch eine Betrachtung der im Superfilter dissipierten Leistung

$$\dot{Q} = \dot{m} \Delta\mu = \varepsilon A v_s \rho_s \Delta\mu, \quad (4.39)$$

die als Wärme frei werden muß. In Tab 4.3 sind für die verschiedenen Badtemperaturen die maximale dissipierte Leistung, die spezifische Wärme des im Superfilter enthaltenen Heliums sowie die Temperaturanstiegsrate angegeben, die man unter Vernachlässigung der Wärmeleitung im Superfilter erwarten würde. Diese Werte sind so hoch, daß sich das Superfilter innerhalb von Sekundenbruchteilen auf  $T_\lambda$  erwärmen und den Massenstrom blockieren müßte. Demgegenüber

$T_o$ [K]	$(\dot{m}\Delta\mu)_{max}$ [mW]	$M_{He} c_p$ [J/K]	$\dot{T}_{adiab}$ [K/s]	$d_{10mK}$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.6	110	0.784	140	15
1.7	100	1.11	90	33
1.8	90	1.48	61	73
1.9	80	1.96	41	155
2.0	50	2.63	19	453

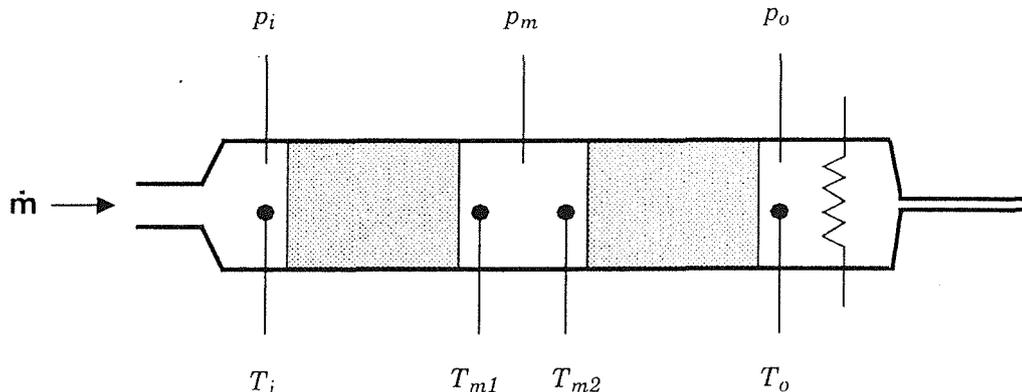
Tab. 4.3: Abschätzung der Dicke der Grenzschicht, in der Dissipation auftritt

können im Experiment diese Zustände quasistationär aufrechterhalten werden und für die Temperaturanstiegsrate in der Mitte des Superfilters ergeben sich Werte kleiner als  $2 \cdot 10^{-2}$  mK/s. Damit ist klar, daß die dissipierte Leistung nicht homogen im ganzen Superfilter als Wärme freigesetzt wird, sondern nur in den Grenzschichten an Ein- und Austritt. Diese Grenzschichten müssen so dünn sein, daß die dissipierte Leistung durch Wärmeleitung abgeführt werden kann. Unter der Annahme, daß die maximale dissipierte Leistung homogen in zwei Randschichten der Dicke  $d$  frei wird und mit der Beobachtung, daß die Temperaturdifferenz zwischen Rand und Mitte des Superfilters sicher kleiner als 10 mK ist, läßt sich eine obere Grenze für die Dicke der Grenzschicht aus der Beziehung

$$d = \frac{2 k A \Delta T}{\dot{Q}} \quad (4.40)$$

abschätzen, wobei  $k$  die effektive Wärmeleitfähigkeit von He II ist. Diese Dicke ist in Tab 4.3 als  $d_{10mK}$  aufgeführt und liegt je nach Temperatur zwischen 15 und 500  $\mu\text{m}$ . In der Darstellung  $m\Delta\mu$  gegen  $\varepsilon v_s$  zeigen die isothermen Messungen keinen signifikanten Unterschied zu den Messungen mit endlichem  $\Delta T$  zwischen den Enden des Superfilters. Dies deutet darauf hin, daß die Verluste vor allem in der Grenzschicht am warmen Ende des Superfilters auftreten.

#### 4.6.4 Dissipation im Hohlraum eines Superfilters



*Abb. 4.35: Schematischer Aufbau der Experimente mit einem Hohlraum zwischen zwei Superfiltern*

Um den Einfluß von Grenzflächen bzw. Hohlräumen innerhalb des Superfilters genauer zu erfassen, wurde ein Experiment mit zwei in Reihe angeordneten Superfiltern durchgeführt. Ein Schema des Aufbaus mit den Bezeichnungen und der Anordnung der Temperatur- und Druckfühler ist in Abb. 4.35 dargestellt. Das Experiment wurde so durchgeführt, daß bei einer Badtemperatur von 1.8 K eine konstante Heizleistung von 6 W eingespeist und dann die

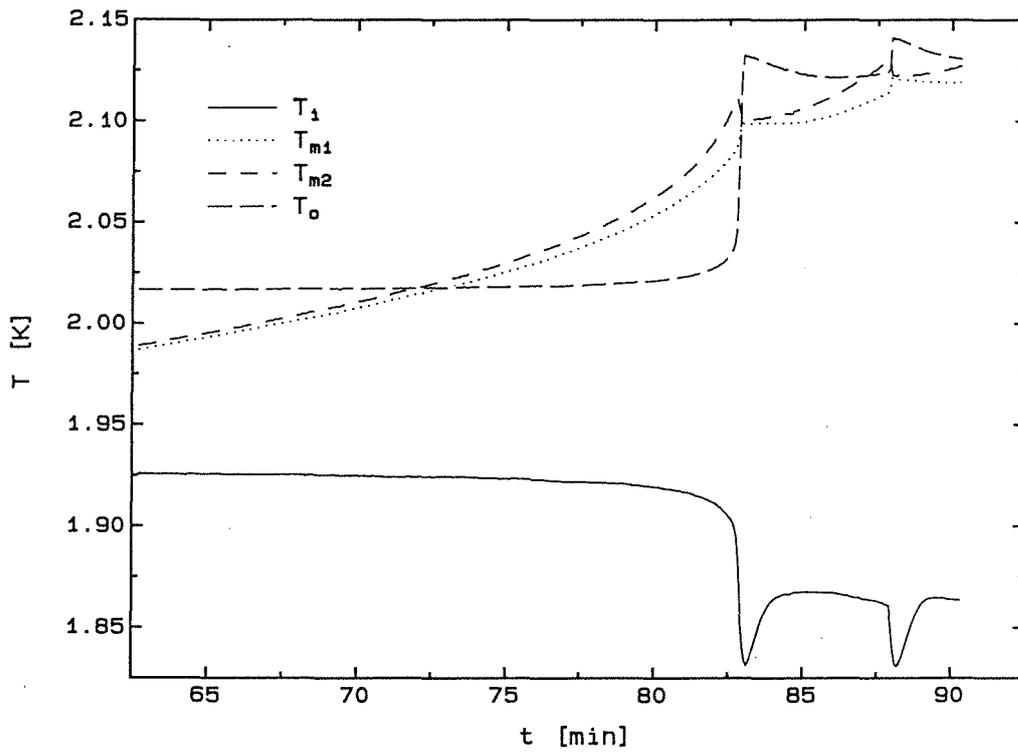


Abb. 4.36 a): Zeitlicher Verlauf der Temperaturen an den Superfiltern

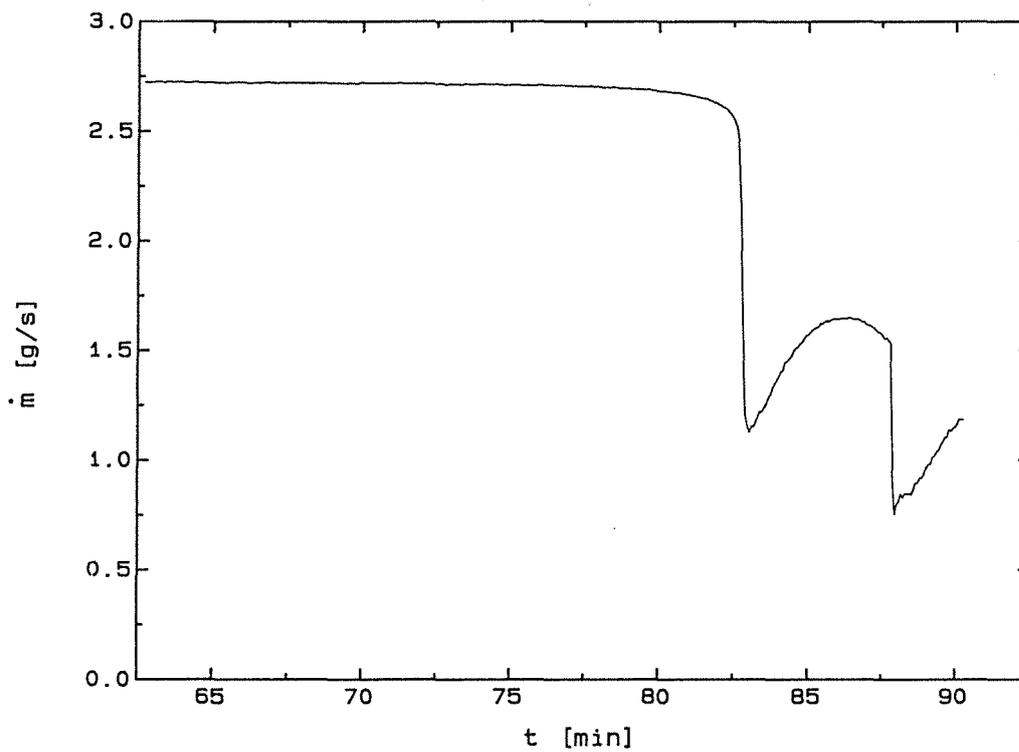


Abb. 4.36 b): Zeitlicher Verlauf des Massenstromes

Zeitabhängigkeit der obengenannten Größen gemessen wurde. In der Tat zeigt sich hierbei ein kontinuierlicher Anstieg der Temperatur im Zwischenraum (Abb. 4.36 a), der schließlich zu einem plötzlichen und fast vollständigen Zusammenbruch der Strömung führt (Abb. 4.36 b). Dies deutet auf eine Wärmeerzeugung aufgrund dissipativer Strömungsvorgänge im Zwischenraum und in den Grenzschichten hin. Die im Zwischenraum beobachtete Temperaturdifferenz  $T_{m2}-T_{m1}$  zeigt, daß dort Dissipation durch gegenseitige Reibung der beiden Komponenten auftritt. Da in dem Hohlraum der Druckgradient praktisch null ist, ergibt sich die dort dissipierte Leistung zu

$$\dot{Q} = \dot{m} \Delta\mu = \dot{m} s \Delta T \quad (4.41)$$

Sie bewirkt, daß sich Druck und Temperatur des Fluids im Hohlraum erhöhen. Diese Leistung kann man mit derjenigen vergleichen, die für die beobachteten Temperatur- und Druck-Erhöhungen benötigt wird (siehe Anhang D):

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} U_{\mu}(S, V, \mu) = \frac{d}{dt} (U - \mu N) \quad (4.42)$$

Dabei zeigt sich (Abb. 4.37), daß der Hauptanteil der Wärmeerzeugung durch innere Reibung in dem Zwischenraum zustande kommt, während der Einfluß der inneren Grenzflächen vernachlässigbar ist. Außerdem findet man, daß sich der Temperaturgradient im Hohlraum gut durch die Gorter-Mellink-Wärmeleitfähigkeit beschreiben läßt, obwohl es sich hier nicht um thermische Gegenströmung ( $\dot{m}=0$ ) sondern um rein superfluide Strömung ( $v_n=0$ ) handelt.

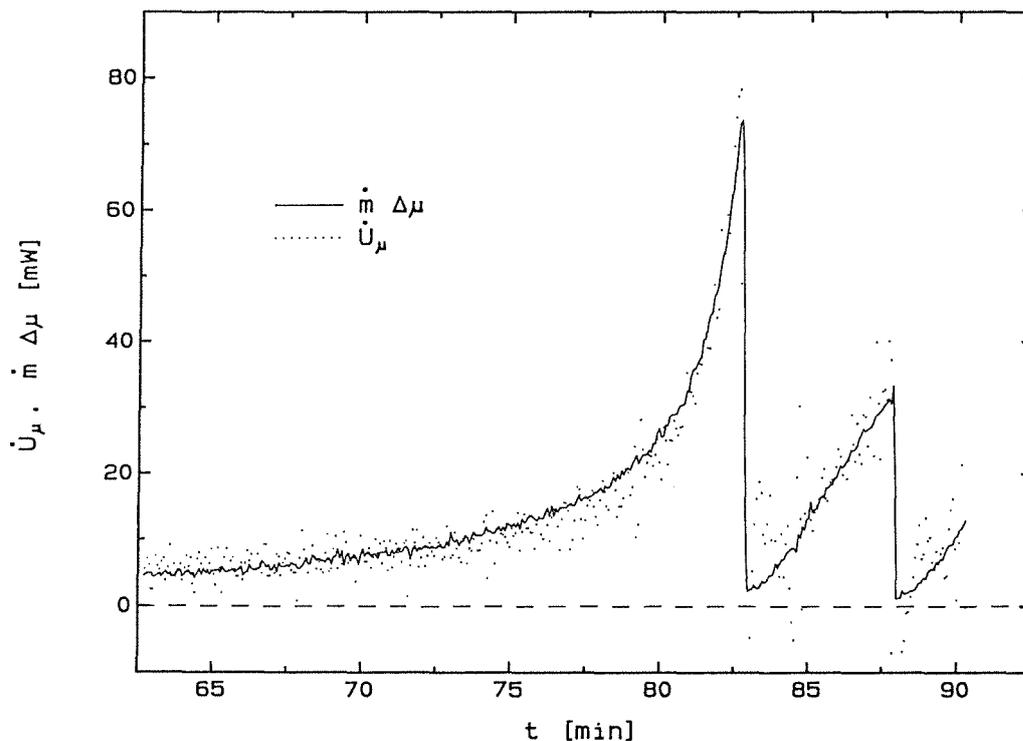


Abb. 4.37: Vergleich der im Hohlraum dissipierten mit der vom Fluid aufgenommenen Leistung

Konsequenz aus diesen Messungen ist, daß bei der Herstellung der Superfilter darauf geachtet werden muß, daß keine Hohlräume entstehen, da diese die Leistungsfähigkeit einer TMP erheblich reduzieren können. Das unangenehme dabei ist, daß sich diese Effekte u.U. erst mit einer zeitlichen Verzögerung von mehreren Stunden bemerkbar machen.

#### 4.6.5 Superfilter aus Membranfilterscheiben

Aufgrund der bisherigen Untersuchungen ist es keineswegs trivial, daß eine Anordnung mit einer Vielzahl von inneren Grenzflächen überhaupt funktioniert. Daher wurde als Alternative zu den Superfiltern aus gepreßtem  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver eines aus einem Stapel Membranfilterscheiben untersucht. Seine Abmessungen betragen 23 mm im Durchmesser und 14 mm in der Länge (siehe Tab 3.1). Eine TMP mit diesem Superfilter wurde in dem ungedrosselten Kreislauf betrieben. In Abb. 4.38 ist der gemessene Massenstrom über der Heizleistung  $\dot{Q}$  für drei Badtemperaturen (1.6, 1.8 und 2.0 K) zusammen mit den entsprechenden Kurven der idealen TMP aufgetragen. Man erkennt, daß die Abweichungen von den idealen Werten deutlich kleiner sind als bei der TMP mit  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfilter (Abb. 4.24). Dies liegt u.a. auch daran, daß hier Einlauf und Heizkammer günstiger dimensioniert sind. Um Aussagen über die Dissipation im Superfilter machen zu können, ist in Abb. 4.39 der dissipative Druckabfall  $\rho\Delta\mu_{SF}$  über der reduzierten Massenstromdichte

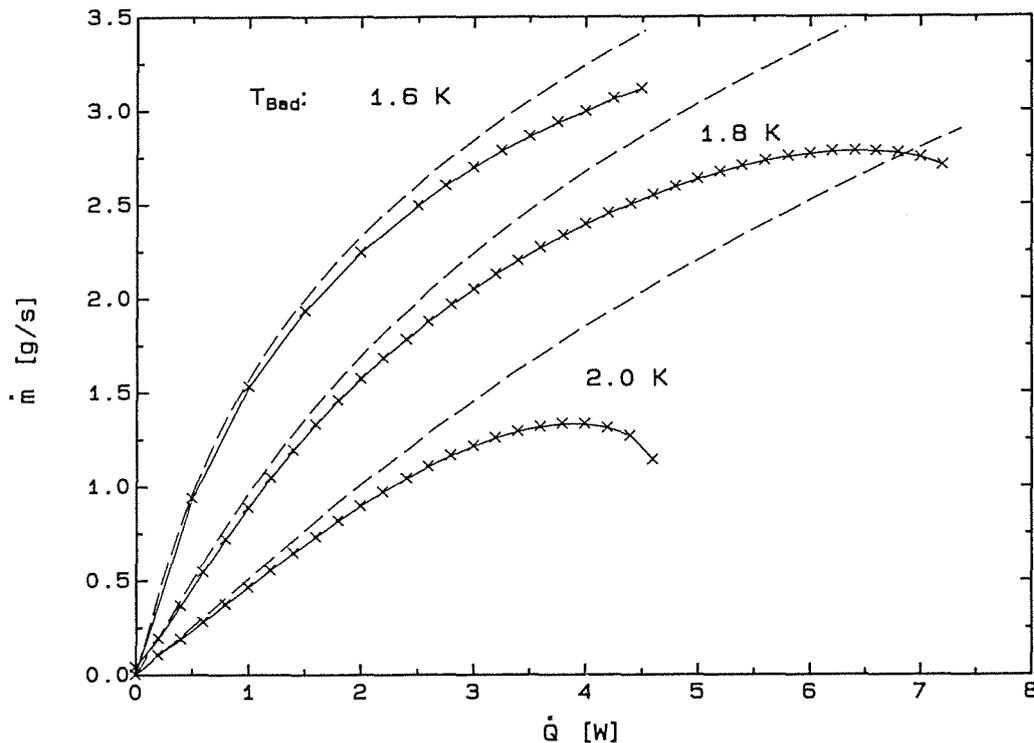


Abb. 4.38: Massenstrom als Funktion der Heizleistung bei der TMP mit dem Superfilter aus Zellulosenitratscheiben im Vergleich mit der idealen TMP

$J_0$  aufgetragen. Man findet, daß die Strömung im gesamten Bereich unterhalb der maximalen Massenstromdichte dissipationfrei ist. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die Dissipation so scharf einsetzt, daß danach trotz Erhöhung der Heizleistung keine nennenswerte Steigerung des Massenstroms mehr möglich ist, während sich bei den  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfiltern der Massenstrom nach Einsatz der Dissipation noch verdoppeln läßt. Dies bedeutet, daß die Porengrößen im Superfilter aus Membranfilterscheiben sehr viel einheitlicher sind als die im  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfilter. Aufgrund des größeren Querschnitts und der anderen Strömungscharakteristik (mit/ohne Drosseleinsatz) sind die Massenstromdichten nicht direkt mit denen des  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfilters (Abb. 4.30) vergleichbar. Aus diesem Grund ist in Abb. 4.40 der dissipative Druckabfall als Funktion der reduzierten superfluiden Strömungsgeschwindigkeit  $\varepsilon v_s$  am Austritt dargestellt. Erstaunlicherweise findet man auch hier einen stetigen Einsatz der Dissipation, sodaß wieder nur eine Obergrenze für die kritische Geschwindigkeit von  $\varepsilon v_s \approx 10$  cm/s angegeben werden kann. Dies entspricht bei  $\varepsilon \approx 0.75$  einer echten Strömungsgeschwindigkeit von ca. 13 cm/s und stimmt in Anbetracht der Unsicherheit in  $\varepsilon$  recht gut mit den 17 cm/s der empirischen Beziehung von *van Alphen* (1966) überein, während es wiederum deutlich kleiner ist als die nach *Vinen* (1963) theoretisch zuerwartenden ca. 100 cm/s. Interessant ist dabei weiterhin, daß man keine dissipativen Effekte an den inneren Grenzschichten beobachtet. Dies hängt damit zusammen, daß die Membranfilterscheiben dicht genug gepackt sind, sodaß ihre Abstände in der Größenordnung der Porendurchmesser liegen. Dies und eine offenbar sehr schmale Verteilung der Porendurchmesser sind auch die Ursache für das relativ scharfe Einsetzen der dissipativen Effekte. Zum Vergleich

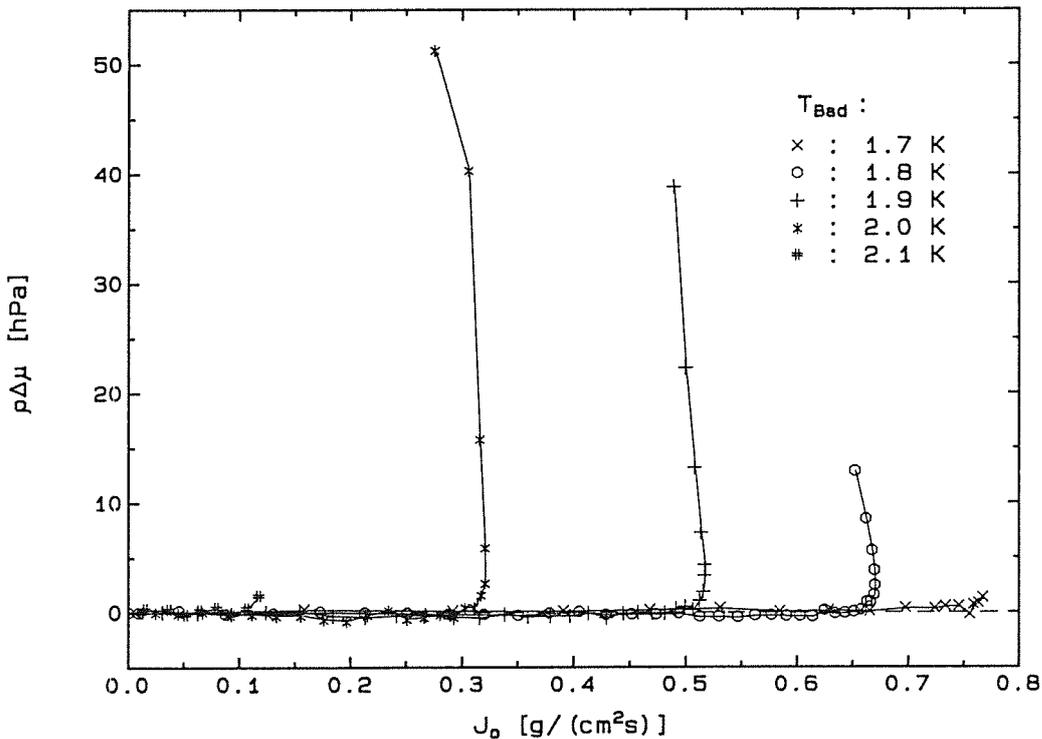


Abb. 4.39: Dissipativer Druckabfall als Funktion der Massenstromdichte am Superfilter aus Zellulosenitratscheiben

sind in Abb. 4.40 auch die entsprechenden Werte für das  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Superfilter noch einmal dargestellt. Man sieht, daß das Superfilter aus Membranfilterscheiben deutlich höhere Geschwindigkeiten bei praktisch dissipationsfreier Strömung zuläßt, sodaß es aus dieser Sicht für den praktischen Einsatz geeigneter erscheint. Allerdings muß noch erwähnt werden, daß beim Abkühlen und Aufwärmen mechanische Spannungen auftraten, die in einigen Filterscheiben Risse erzeugten. Die Beeinträchtigung der Leistungsfähigkeit der TMP durch diese Risse liegt im Prozentbereich, wie von *Kasthurirengan et al (1988)* gezeigt wird. Außerdem sollte man dieses Problem durch eine geänderte Herstellungsart beseitigen können.

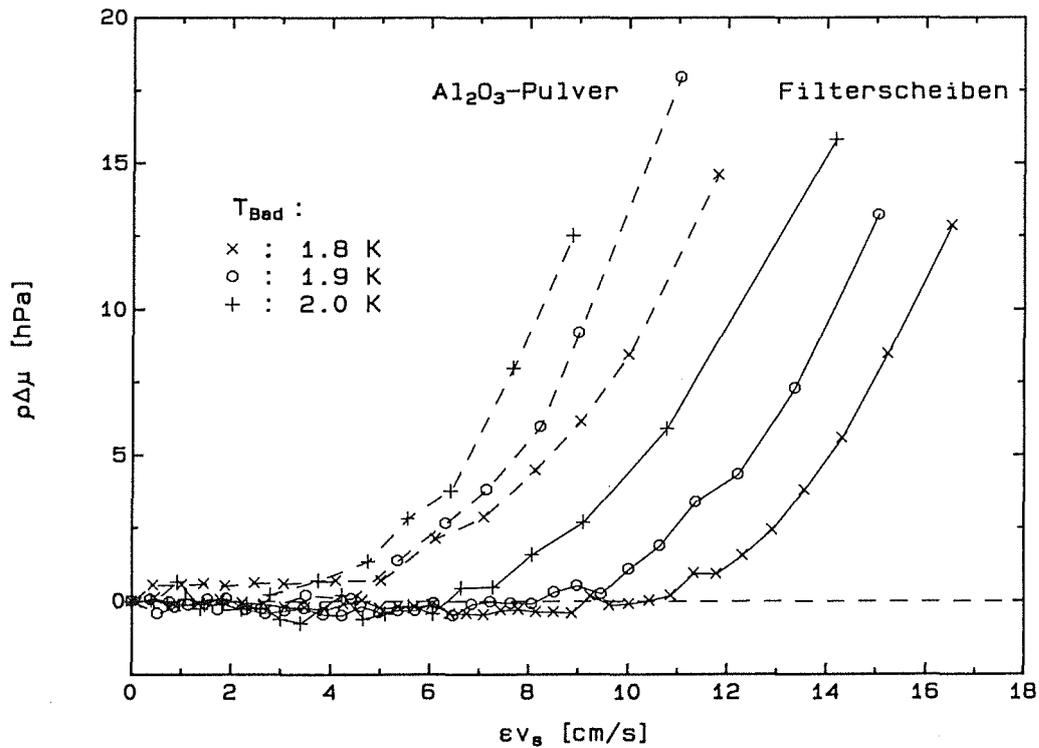


Abb. 4.40: Dissipativer Druckabfall als Funktion der reduzierten superfluiden Strömungsgeschwindigkeit an den Superfiltern aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver und aus Zellulosenitrat-scheiben

#### 4.7 Vorschläge zur Auslegung einer TMP

Obwohl es durchaus möglich ist, eine TMP im Bereich dissipativer Strömung im Superfilter zu betreiben, ist ein Betrieb mit minimalen Verlusten anzustreben, um den gesamten der Temperaturdifferenz entsprechenden Förderdruck ausnutzen zu können. Dazu sollte, wie Abb. 4.40 zeigt, bei den hier untersuchten Superfiltermaterialien die reduzierte Strömungsgeschwindigkeit der superfluiden Komponente  $ev_s$  am Auslauf des Superfilters nicht größer als

5 cm/s bei den Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Filtern bzw. 7 cm/s bei den Membranfiltern sein. Der benötigte Querschnitt des Superfilters ist dann gegeben durch

$$A = \frac{\dot{m}}{\varepsilon v_s \rho_s(T_o)} \quad (4.43)$$

und hängt von der Austrittstemperatur des Superfilters  $T_o$  ab. Da bei Annäherung an  $T_\lambda$  die Dichte der superfluiden Komponente  $\rho_s$  auf null abfällt, sollte  $T_o$  nicht über 2.0 bis 2.05 K liegen. Damit ergeben sich Massenstromdichten im Superfilter zwischen 0.25 g/(cm<sup>2</sup>s) für Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Filter bei 2.05 K und 0.44 g/(cm<sup>2</sup>s) für Membranfilter bei 2.0 K. Nach den Erfahrungen dieser Arbeit reicht eine Länge von einigen Zentimetern aus, um die Verluste durch den Rückstrom der normalfluiden Komponente genügend klein zu halten. Wenn man die Querschnittsflächen von Einlauf und Heizkammer so groß wählt wie die des Superfilters, liegen dort die Strömungsgeschwindigkeiten zwischen 1.7 und 3 cm/s. Die Berechnungen des Temperaturverlaufs im Einlauf (Abb. 4.26) zeigen, daß damit selbst bei einer Länge von 20 cm die Temperaturdifferenz vernachlässigbar bleibt. Dagegen sollte der Abstand zwischen der Heizung und dem Austritt des Superfilters besonders bei  $T_o = 2.05$  K nicht über 5 cm liegen (Abb. 4.27). Das verwendete Wirbelrohr mit einer Länge von 300 mm und einem Durchmesser von 3.6 mm hat sich bei allen untersuchten Superfiltern von 10 bis 34 mm Durchmesser als tauglich erwiesen. Somit scheint seine Dimensionierung unkritisch zu sein. Dennoch können für spezielle Anwendungen seine Abmessungen durch Bestimmung des Temperaturverlaufs in seinem Inneren optimiert werden.

Wenn sich der bei einer Badtemperatur von 1.8 K realisierbare Förderdruck von 200 bis 300 hPa als für die Anwendung zu klein erweist, gibt es die Möglichkeit, die Badtemperatur zu erniedrigen, wodurch man z.B. bei  $T_{Bad} = 1.6$  K ca. 100 hPa mehr zur Verfügung hat. Wenn dies noch nicht reicht, kann man mehrere Pumpen in Reihe anordnen (*Severijns, 1980*), sodaß sich die Förderdrucke summieren. Außerdem sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, durch einen Wärmetauscher in der Heizkammer die im Magneten anfallende Wärmelast zum Antrieb der TMP zu nutzen (*Hofmann, 1986*) und so die bei tiefer Temperatur abzuführende Wärmeleistung zu verringern.

## 5 Zusammenfassung

In gewissen Bereichen der Technik, wie zum Beispiel bei bestimmten Konfigurationen von supraleitenden Magneten, erscheint es sinnvoll, erzwungene Strömung von superfluidem Helium (He II) zur Kühlung in Betracht zu ziehen. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß der thermomechanische Effekt des He II zum Antrieb solcher Strömungen genutzt werden kann, und einige wesentliche Aspekte zur Auslegung solcher Kühlkreise werden genaueren Betrachtungen unterzogen. Der Schwerpunkt liegt auf den Untersuchungen der Strömungsverhältnisse in den Superfiltern aus unterschiedlichen Materialien, nämlich a)  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Pulver mit  $0.05 \mu\text{m}$  nomineller Korngröße und b) Zellulosenitrat-Scheiben mit einem nominellen Filtrationsgrad von  $0.01 \mu\text{m}$ . Bis zu bestimmten kritischen Durchflußraten, die je nach Material und Temperatur zwischen  $0.2$  und  $0.8 \text{ g}/(\text{cm}^2\text{s})$  liegen, erweist sich die Strömung als dissipationsfrei und der gemessene Förderdruck stimmt sehr gut mit der London'schen Beziehung

$$\Delta p = \int_{T_i}^{T_o} \rho s dT \quad (5.1)$$

überein. Dabei können Druckdifferenzen von einigen hundert hPa realisiert werden. Bei höheren Massenstromdichten weicht der Förderdruck aufgrund innerer Reibungsverluste immer mehr von der obigen Beziehung ab. Diese setzen bei der schmalen Verteilung der Porengröße in den Zellulosenitrat-Filtern später ein, wachsen danach jedoch schneller an als bei den  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -Filtern mit breiterer Verteilung der Porengröße. Es wird gezeigt, daß diese Verluste vornehmlich an den Grenzschichten bis zu einer Dicke von etwa  $10 \mu\text{m}$  auftreten. Dies erklärt auch die Beobachtung, daß es zu keiner reibungsbedingten Aufheizung im Inneren solcher Filterblöcke kommt, wenn sie mit "überkritischen" Durchflußraten betrieben werden. Das Betriebsverhalten ist jedoch ganz anders, wenn im Inneren solcher Superfilter größere Hohlräume bestehen. Dann wird auch bei unterkritischem Massenstrom in diesem Hohlraum ein kontinuierlicher Temperaturanstieg beobachtet, und der Massenstrom wird stark reduziert, wenn dort die Übergangstemperatur  $T_\lambda$  erreicht wird. Es wird gezeigt, daß diese Erwärmung vorwiegend durch innere Reibung im Hohlraum selbst zustande kommt. Der eventuelle Beitrag der inneren Grenzflächen erscheint in diesem Fall vernachlässigbar.

Zum Verständnis dieser Phänomene und auch zur Beantwortung der Fragen, wie der Massen- und Wärmetransport in den Kanälen mit makroskopischen Durchmessern im Bereich  $1$  bis  $40 \text{ mm}$ , die den Pumpenkreislauf schließen, beschrieben werden, wurde eine Reihe diesbezüglicher Untersuchungen durchgeführt, deren Ergebnisse im folgenden zusammengefaßt werden:

Bezüglich des Druckabfalls verhält sich superfluides Helium in solchen Kanälen wie eine normale Newtonsche Flüssigkeit mit der Viskosität der normalfluiden Komponente  $\eta_n$ .

Die Messung der Wärmeleitfähigkeit in makroskopischen Kanälen ohne Nettomassenstrom ergibt die Beziehung

$$\dot{q}^{3,4} = f_{GM}(T) \nabla T . \quad (5.2)$$

Für die Wärmeleitungsfunktion  $f_{GM}(T)$  wird im Bereich  $1.4 \text{ K} < T < 2.1 \text{ K}$  eine analytische Näherung angegeben. Es wird außerdem gezeigt, daß die Abweichung des Exponenten von 3 kein experimentelles Artefakt aufgrund der endlichen Temperaturdifferenz ist, wie zum Teil in der Literatur angenommen wird.

Der Temperaturverlauf in strömendem Helium II läßt sich im Falle eines kleinen Durchmesser/Länge-Verhältnisses durch numerisches Lösen einer eindimensionalen nichtlinearen Differentialgleichung bestimmen. Daraus folgt, daß sich in makroskopischen Kanälen Massen- und Wärmeströme unabhängig überlagern.

Der stationäre Wärmeübergang von Kupfer an strömendes Helium II ist zumindest unterhalb ca. 1.5 m/s von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig und läßt sich daher durch die übliche Beziehung

$$\dot{q} = a ( T_s^n - T_{fl}^n ) \quad (5.3)$$

beschreiben. Diese Beziehung gilt bis zu kritischen Wärmeströmen, deren Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls ermittelt worden ist.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind für die Auslegung komplizierterer Kühlkreise herangezogen worden. Sie ermöglichen die Skalierung thermomechanischer Pumpen wie auch des gesamten Kühlkreises einschließlich der Wärmeaustauscher und der Leitungen, die He II-Bäder unterschiedlicher Temperaturen miteinander verbinden. Der Einsatz derartiger Pumpen erscheint vor allem auch dann sinnvoll, wenn die evtl. im Leiter entstehende Wärmeleistung in einem rückgekoppelten Kreislauf zum Antrieb der Strömung genutzt und dadurch die benötigte Kühlleistung bei He II-Temperatur verringert werden kann.

## 6 Literatur

- Ahlers, G. ; 1969 ; *Phys. Rev. Lett.* **18**, 54
- van Alphen, W.M. ; van Haasteren, G.J. ; de Bruyn Ouboter, R. und Taconis, K.W. ; 1966 ; *Phys. Lett.* **20** , 474
- Arp, V. und Agatsuma, K. ; 1985 ; *Int. J. Thermophysics* **6**, 63
- Baehr, M.L. und Tough, J.T. ; 1984 ; *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1669
- Barenghi, C.F. ; Donnelly, R.J. und Vinen, W.F. ; 1983 ; *J. Low Temp. Phys.* **52**, 189
- Bon Mardion, G. ; Claudet, G. und Seyfert, P. ; 1979 ; *Cryogenics* **19**, 45
- Chase, C.E. ; 1962 ; *Phys. Rev.* **127**, 361
- Childers, R.K. und Tough, J.T. ; 1976 ; *Phys. Rev. B* **13**, 1040
- Craig, P.P. ; 1966 ; *Phys. Lett.* **21**, 385
- Dimotakis, P.E. und Broadwell, J.E. ; 1973 ; *Phys. Fluids* **16**, 1973
- Dorra, L. ; Horvath, I. ; Kwasnitza, K. und Deotto, T. ; 1985 ; *Proc. MT-9*, Eds. Marinucci und Weymuth, SIN, Villingen, CH
- Feynman, R. P. ; 1955 ; *Progress in Low Temperature Physics*, Ed. Gorter, Vol.1, Ch. 2, North Holland Publ. Comp., Amsterdam
- Gorter, C.J. und Mellink, F.H. ; 1949 ; *Physica* **15**, 285
- Henshaw, D.G. und Woods, A.D.B. ; 1961 ; *Phys. Rev.* **121**, 1266
- Hofmann, A. und Vogeley, B. ; 1984 ; *Proc ICEC 10*, 448, Butterworth, Guildford, UK
- Hofmann, A. ; 1986 ; *Proc. ICEC 11*, 306, Butterworth, Guildford, UK
- Johnson, W. und Jones, M.C. ; 1978 ; *Adv. Cryog. Eng.* **23**, 363
- Jones, B.K. ; 1969 ; *Phys. Rev.* **177**, 292
- Kamioka, Y. ; Lee, J.M. und Frederking, T.H.K. ; 1982 ; *Proc. ICEC 9*, 283, Butterworth, Guildford, UK
- Kashani, A. und van Sciver, S.W. ; 1985 ; *Cryogenics* **25**, 238
- Kasthuriengan, S. ; Krämer, H.P. und Hofmann, A. ; 1988 ; *Proc. ICEC 12*, 251, Butterworth, Guildford, UK
- Kes, P.H. ; van der Klein, C.A.M. und de Klerk, D. ; 1974 ; *Cryogenics* **14**, 168
- Landau, L.D. und Lifshitz, E.M. ; 1959 : *Fluid Dynamics*, Pergamon Press, Oxford

- London, F.; **1954**; *Superfluids Vol. II: Macroscopic Theory of Superfluid Helium*, John Wiley & Sons, New York
- Puttermann, S.J.; **1974**; *Superfluid Hydrodynamics*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam
- Rayfield, G.W. und Reif, F.; **1964**; *Phys. Rev.* **136**, 1194
- Schwarz, K.W.; **1978**; *Phys. Rev.* **B 18**, 245
- Schwarz, K.W.; **1982**; *Phys. Rev. Lett.* **49**, 283
- Schwarz, K.W.; **1985**; *Phys. Rev.* **B 31**, 5782
- van Sciver, S.W.; **1980**; *Proc. ICEC 8*, 228, IPC Business Press, Guildford, UK
- van Sciver, S.W.; **1984**; *Adv. Cryog. Eng.* **29**, 315
- van Sciver, S.W.; **1986**; *Helium Cryogenics*, Plenum Press, New York
- Severijns, A.P.; **1980**; *Cryogenics* **20**, 115
- Staas, F.A. und Severijns, A.P.; **1969**; *Cryogenics* **9**, 422
- Swanson, C.E. und Donnelly, R.J.; **1985**; *J. Low. Temp. Phys.* **61**, 363
- Tilley, D.R. und Tilley, J.; **1986**; *Superfluidity and Superconductivity*, Adam Hilger, Bristol
- Tough, J.T.; **1982**; *Progress in Low Temperature Physics*, Ed. Brewer, Vol. **8**, Ch.3, North Holland Publ. Comp., Amsterdam
- VDI-Wärmeatlas; **1977**; 3. Aufl., Lb1, VDI-Verlag, Düsseldorf
- Vinen, W.F.; **1957 a**; *Proc. Roy. Soc. A* **240**, 114
- Vinen, W.F.; **1957 b**; *Proc. Roy. Soc. A* **240**, 128
- Vinen, W.F.; **1957 c**; *Proc. Roy. Soc. A* **242**, 493
- Vinen, W.F.; **1963**; *Proc. Intern. School of Physics "Enrico Fermi"*, Ed. Careri, Vol. **XXI**, 336, Academic Press, New York
- Wilson, M.N.; **1983**; *Superconducting Magnets*, Clarendon Press, Oxford
- Wilks, J. und Betts, D.S.; **1987**; *An Introduction to Liquid Helium*, Clarendon Press, Oxford

## Anhang A: Verzeichnis der verwendeten Symbole

$A$	Querschnittsfläche
$A_{GM}$	Gorter-Mellink-Koeffizient
$a_0$	Wirbelkernradius
$B$	Magnetfeld
$B$	Vinen-Parameter
$c$	Schallgeschwindigkeit
$c_p$	spezifische Wärme
$d, d_D$	Durchmesser, Darcy-Durchmesser
$F_{sn}$	gegenseitige Reibungskraft
$f_{GM}$	Gorter-Mellink-Wärmeleitungsfunktion
$h, \hbar$	Plancksches Wirkungsquantum
$h$	spezifische Enthalpie
$h$	Wärmeübergangskoeffizient
$h_K$	Kapitza-Leitfähigkeit
$J$	Massenstromdichte
$j$	elektrische Stromdichte
$K_p$	Darcy-Permeabilität
$k$	Füllfaktor
$k$	Wärmeleitfähigkeit
$k_B$	Boltzmann-Faktor
$L$	Wirbelliniendichte
$l$	Länge
$\dot{m}$	Massenstrom
$m$	Exponent der HeII-Wärmeleitfähigkeit
$m_{He}$	Masse des Helium-Atoms
$N$	Teilchenzahl
$n$	atomare Dichte
$p$	Druck
$p$	Impuls einer Anregung
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$\dot{q}$	Wärmestromdichte
$R$	elektrischer Widerstand
$R$	Krümmungsradius einer Wirbellinie
$R_D$	Reynoldszahl
$r$	Radius

$S$	Entropie
$s$	spezifische Entropie
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$U$	innere Energie
$U_\mu$	thermodynamisches Potential zu den unabhängigen Variablen $S, V, \mu$
$V$	Volumen
$\dot{V}$	Volumen-Durchflußrate
$v, v_n, v_s$	Strömungsgeschwindigkeit (der normal- bzw. superfluiden Komponente)
$x$	Ort
$\alpha$	Koeffizient der Wärmestromdichte
$\gamma$	Koeffizient der Wirbellinienlänge
$\varepsilon$	Energie einer Anregung
$\varepsilon$	Porosität
$\eta$	Viskosität
$\lambda$	Verteilung der Wirbellinienlänge
$\rho, \rho_n, \rho_s$	Dichte (der normal- bzw. superfluiden Komponente)
$\kappa$	Zirkulationsquantum
$\mu$	chemisches Potential
$\chi_1, \chi_2$	Vinen-Parameter
$\xi$	Widerstandsbeiwert

## Anhang B: Effektiver Querschnitt des Flowmeterrohrs

In Kapitel 3.6 wird ein effektiver Querschnitt  $A'$  eingeführt, um die konischen Aufweitungen an den Enden des Flowmeterrohres zu berücksichtigen. Dieser effektive Querschnitt wird im folgenden hergeleitet.

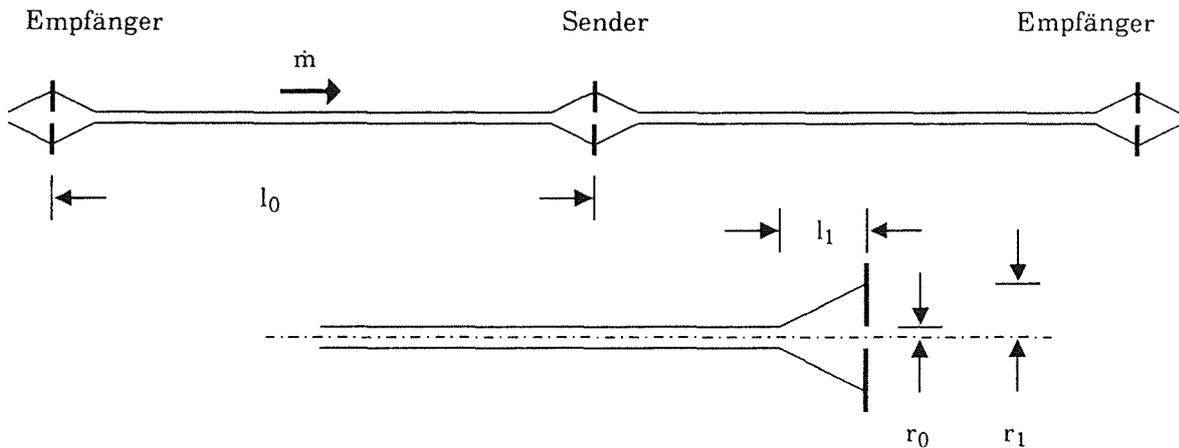


Abb. B.1: Schematischer Aufbau des Flowmeters

Da bei Strömungsgeschwindigkeiten im Bereich der Meßgenauigkeit des Flowmeters (ca. 3cm/s) die Reynoldszahl schon ca. 10000 beträgt, liegt in dem Flowmeter immer turbulente Strömung vor und es kann in guter Näherung eine über den gesamten Querschnitt konstante Strömungsgeschwindigkeit  $v = \dot{m}/\rho A$  angenommen werden. Damit ergibt sich für ein Rohr der Länge  $l_0$  mit konstantem Querschnitt  $A_0$  eine Laufzeitdifferenz der beiden Signale (siehe Kap. 3.6):

$$\Delta t = \frac{2 v_0 l_0}{c^2} = \frac{2 \dot{m}}{c^2 \rho} \frac{l_0}{A_0} \quad (\text{B.1})$$

Bei einem veränderlichen Querschnitt  $A(x)$  muß in dieser Beziehung der Quotient durch ein Integral bzw. der Querschnitt durch einen effektiven Querschnitt  $A'$  ersetzt werden:

$$\Delta t = \int_0^{\Delta t} dt = \frac{2 \dot{m}}{c^2 \rho} \int_0^{l_0} \frac{1}{A(x)} dx \equiv \frac{2 \dot{m}}{c^2 \rho} \frac{l_0}{A'} \quad (\text{B.2})$$

Für den effektiven Querschnitt erhält man die folgende Beziehung

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \frac{1}{A(x)} dx, \quad (\text{B.3})$$

die bei der verwendeten Geometrie zu

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{l_0 \pi} \int_0^{l_0} \frac{1}{r^2(x)} dx = \frac{l_0 - 2l_1(1 - r_0/r_1)}{l_0 \pi r_0^2} \quad (\text{B.4})$$

führt. Daraus folgt durch Einsetzen der Zahlenwerte ( $l_0=100\text{mm}$ ,  $l_I=8.5\text{ mm}$ ,  $r_0=2\text{ mm}$ ,  $r_I=5\text{ mm}$ )

$$\frac{A'}{A_0} = 1.11 \quad , \quad (\text{B.5})$$

wobei  $A_0$  den Querschnitt im Mittelteil des Rohres bezeichnet.

## Anhang C: Thermodynamisches Potential im Hohlraum zwischen zwei Superfiltern

Ein System aus einer homogenen komprimierbaren Flüssigkeit kann Energie in Form von Wärme, Kompressionsenergie und chemischer Energie austauschen. Das totale Differential der inneren Energie ist damit gegeben durch

$$dU(S,V,N) = T dS - p dV + \mu dN . \quad (D.1)$$

Bei superfluidem Helium reichen jedoch Entropie, Volumen und Teilchenzahl nicht aus, um einen Zustand vollständig zu beschreiben. Es gibt vielmehr eine weitere unabhängige thermodynamische Variable, nämlich das Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der superfluiden und der normalfluiden Komponente  $(v_n - v_s)^2$ . Die entsprechende Gibbs-Duhem-Beziehung lautet damit (Puttermann, 1974, §4) :

$$s dT - \frac{1}{\rho} dp + d\mu + \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho} (v_n - v_s)^2 = 0 . \quad (D.2)$$

Eine Abschätzung ergibt allerdings, daß eine typische Änderung der Relativgeschwindigkeit von 10 cm/s eine Energieänderung mit sich bringt, die bei 0.1 MPa und 2.0 K nur ca. 1% des Wertes beträgt, der mit einer Temperaturänderung um 1 mK bzw. einer Druckänderung um 1 hPa verknüpft ist. Aus diesem Grund kann bei der Auswertung der in dieser Arbeit durchgeführten Experimente auf die Berücksichtigung dieser Variablen verzichtet werden

Wenn bei einem Prozeß einem System nur Energie in Form von Wärme zugeführt wird, ist die zugeführte Wärmemenge  $dQ$  gleich dem totalen Differential des zu den unabhängigen Variablen gehörigen thermodynamischen Potentials  $dU_x$ . Für ein System aus Helium II, das in einem festen Volumen aus Superfiltern eingeschlossen ist, sind die kontrollierbaren und damit unabhängigen Variablen

die Entropie  $S$ , da nur die entropielose superfluide Komponente dem System zugeführt oder entzogen werden kann,

das Volumen  $V$ , das in diesem Fall konstant ist, und

das chemische Potential  $\mu$ , da an einem Superfilter bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten  $d\mu=0$  gilt und damit das chemische Potential im System von außen vorgegeben werden kann.

Das zu diesen unabhängigen Variablen gehörende thermodynamische Potential  $U_\mu$  erhält man durch eine Legendre-Transformation der inneren Energie  $U$

$$U_\mu(S,V,\mu) = U(S,V,N) - \mu N . \quad (D.3)$$

Aus dem totalen Differential

$$dU_\mu = T dS - p dV - N d\mu \quad (D.4)$$

ergibt sich für die zugeführte Heizleistung

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} U_{\mu} = T \frac{dS}{dt} - p \frac{dV}{dt} - N \frac{d\mu}{dt} \quad (D.5)$$

Die Verknüpfung mit den gemessenen Größen  $T(t)$  und  $p(t)$  erhält man unter Verwendung der Stoffdaten für  $\rho(T,p)$  und  $s(T,p)$ . Sie lauten wie folgt :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho V s) = V \frac{d}{dt} (\rho(T,p) s(T,p)) \quad (D.6)$$

$$\frac{dV}{dt} \equiv 0 \quad (D.7)$$

$$N = V \rho(T,p) \quad (D.8)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\rho(T,p)} \frac{d}{dt} p(t) - s(T,p) \frac{d}{dt} T(t) \quad (D.9)$$

Abschließend sei noch erwähnt, daß die Eigenschaft der Superfluidität über die Kombination der unabhängigen Variablen in das thermodynamische Potential  $U_{\mu}$  eingeht. Es gibt nämlich kein "normales" thermodynamisches System, bei dem man die Teilchenzahl verändern kann und dabei die Entropie konstant bleibt. Dies geht nur mit der entropielosen superfluiden Komponente des Helium II.