

# Zur Modellierung von Schädigungsprozessen in elastoplastischen Materialien

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**  
von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe

genehmigte  
**Dissertation**  
von

Dipl.-Phys. Olaf Hesebeck  
aus Bremen

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Januar 2000  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Schnack  
Korreferenten: Prof. Dr. J.-L. Chaboche  
Priv.-Doz. Dr. H. Andrä



# Vorwort

Diese Dissertation entstand am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe. Sie wurde ermöglicht durch Herrn Prof. Eckart Schnack, dem ich für die große Freiheit bei der Wahl und Bearbeitung meines Forschungsthemas danken möchte.

Im Januar 1998 hielt Herr Prof. Jean-Louis Chaboche einen Seminarvortrag in Karlsruhe, so daß ich die Gelegenheit hatte, mit ihm über meine Arbeit zu diskutieren. Seine Kritik gab den Anstoß zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit grundlegenden Fragen der Schadensmechanik. Ich danke ihm für viele hilfreiche Hinweise und für die Übernahme des Korreferats.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. habil. Heiko Andrä. Ich kann mir nicht vorstellen, wie meine Doktorarbeit jetzt aussehen würde, wenn er nicht als ein interessierter und kompetenter Diskussionspartner am Institut gewesen wäre.

Herr Dr.-Ing. Karsten Türke befaßte sich zeitweise ebenfalls mit Fragen der Modellierung von Schädigungsprozessen, so daß er mir ein wertvolles Feedback zu meinen Ideen geben konnte. Ich möchte ihm nicht nur für seine fachliche Hilfe, sondern auch für seine Unterstützung im Rahmen seiner Tätigkeit als Akademischer Rat danken.

Allen meinen Kollegen am Institut, die in vielfältiger Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, danke ich für die gute Zusammenarbeit.

Bei Herrn Gerhard Mayer und Herrn Rolf Stober sowie den Auszubildenden der feinmechanischen Werkstatt des Instituts möchte ich mich für die Unterstützung des experimentellen Teils meiner Arbeit bedanken.

Karlsruhe, den 4.2.2000

Olaf Hesebeck



# Abstract

The relation between the maximum dissipation principle, the irreversibility condition of Ilyushin and Drucker's stability postulate is studied in the first part of the present thesis. For simple elastoplastic material models, it is well known that these three postulates require orthogonality between the plastic strain rate and the yield surface. This relation is investigated for more general material models containing internal variables coupled with the elastic strains. It can be shown that the irreversibility and stability conditions pose the same restriction on the directions of dissipative fluxes, but do not determine this direction uniquely. The postulate of maximum dissipation is a stronger restriction to the evolution equations than Ilyushin's condition.

The results are applied to damage mechanics models. For models describing elasticity and damage, a normality law in damage force space is obtained. In the case of plasticity with damage, the postulates imply orthogonality neither in the stress space nor in the damage force space. Usual non-associated flow rules for elastoplasticity with damage violate Drucker's stability postulate. The only convenient way to formulate a model, which fulfills the postulates of Ilyushin and Drucker a priori, is the use of an associated flow rule.

In the second part of this work, a new model for combined elastoplasticity and damage is developed. The model is based on the maximum dissipation principle and implements a strong coupling between plasticity and damage. First the evolution equations of different kinds of phenomenological damage models for ductile materials are discussed. Nonassociated flow rules violate the postulates of Ilyushin and Drucker and the maximum dissipation principle. Some other models use two independent associated flow rules for plasticity and damage. It is shown that these models are a special case of maximal dissipative models with a weak coupling of plasticity and damage.

A strong coupling can be obtained by using a single, smooth yield surface in the space of dissipative forces. This approach, which has not correctly been implemented before, is used in the new model. Uniaxial tension tests with unloadings have been performed to investigate the damage growth in a high strength steel. A good agreement between the experimental results and the simulation was obtained using elementary ansatz functions for the free energy and the yield function. The model shows a qualitatively correct behavior under multiaxial loadings.

Thus, it has been shown for the first time how a material model with a strong coupling between plasticity and damage can be formulated systematically.

The application of the new model to the simulation of delaminations in laminated composites is proposed in the last part of this work. The process zone is presented by an interface layer, which is the limit case of an intermediate layer. The crack growth criterion is defined by a critical value of the damage variable.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Thermodynamik . . . . .	7
2.1.1	Das Prinzip der maximalen Dissipation . . . . .	9
2.1.2	Irreversibilitäts- und Stabilitätsbedingungen . . . . .	14
2.1.3	Stabilität und maximale Dissipation . . . . .	15
2.2	Kontinuumschadensmechanik . . . . .	17
2.2.1	Definition der Schädigungsvariablen . . . . .	18
2.2.2	Evolutionsgleichungen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Stabilität und maximale Dissipation</b>	<b>23</b>
3.1	Anwendung der Postulate . . . . .	24
3.1.1	Definition der Modellklasse . . . . .	24
3.1.2	Ilyushins Postulat . . . . .	25
3.1.3	Druckers Postulat . . . . .	33
3.2	Konsequenzen für die Schadensmechanik . . . . .	36
3.2.1	Elastizität und Schädigung . . . . .	37
3.2.2	Elastoplastizität und Schädigung . . . . .	37
3.2.3	Nichtasoziierte Fließregeln . . . . .	39
3.3	Zusammenfassung . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Ein neues schadensmechanisches Modell</b>	<b>53</b>
4.1	Schadensmechanische Entwicklungsgleichungen . . . . .	53
4.1.1	Nicht-asoziierte Fließregeln . . . . .	54
4.1.2	Asoziierte Fließregeln . . . . .	54
4.1.3	Orthogonale Potentialflächen . . . . .	58
4.2	Ansatz des Modells . . . . .	60
4.2.1	Thermomechanischer Rahmen des Modells . . . . .	60
4.2.2	Wahl der Zustandsvariablen . . . . .	62
4.2.3	Wahl der freien Energie und der Fließfunktion . . . . .	62
4.2.4	Schädigung ohne Plastizität . . . . .	63
4.3	Vereinfachtes Modell . . . . .	65

4.3.1	Evolutionsgleichungen . . . . .	65
4.3.2	Reduktion und Substitution der Variablen . . . . .	66
4.3.3	Schwache Formulierung . . . . .	70
4.4	Zusammenfassung . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Modellierung eines Vergütungsstahls</b>	<b>75</b>
5.1	Einachsige Belastungen . . . . .	75
5.1.1	Einachsige Zugentlastungsversuche . . . . .	76
5.1.2	Anpassung des Modells . . . . .	80
5.2	Mehrachsige Belastungen . . . . .	82
5.2.1	Betrachtung des Modellverhaltens . . . . .	82
5.2.2	Erweiterung des Modells . . . . .	86
5.3	Zusammenfassung . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Anwendung auf Grenzflächenrisse</b>	<b>93</b>
6.1	Einleitung . . . . .	93
6.2	Materialmodell der Prozeßzone . . . . .	95
6.2.1	Bruch- und schadensmechanische Ansätze . . . . .	95
6.2.2	Das Modell von Allix, Ladeveze et al. . . . .	98
6.2.3	Das Modell von Chaboche et al. . . . .	100
6.2.4	Das Modell von Lemaitre . . . . .	102
6.2.5	Verwendung des neuen Materialmodells . . . . .	102
6.3	Darstellung der Prozeßzone . . . . .	103
6.3.1	Zwischenschicht . . . . .	103
6.3.2	Grenzfläche . . . . .	105
6.4	Rißwachstumskriterium . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>113</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>115</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>116</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>118</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Kontinuums-Schadensmechanik (*continuum damage mechanics* = CDM) beschreibt die Veränderung der Materialeigenschaften einer Struktur infolge von Schädigungsprozessen durch die zeitliche Entwicklung einer Feldvariablen. Als Schädigungsvorgänge werden die Entstehung und das Wachstum von Mikrorissen und Poren betrachtet, die aufgrund mechanischer und thermischer Beanspruchung entstehen.

Risse und Poren sind räumlich diskrete Materialdefekte, die jedoch in der CDM im Gegensatz zur Bruchmechanik durch eine Kontinuumsdarstellung erfaßt werden. Die Bruchmechanik modelliert Risse explizit durch die Einführung von Reißoberflächen in einem ansonsten ungeschädigtes Material. Diese Herangehensweise ist nur dann praktikabel, wenn die Anzahl der Risse gering ist. Daher ist die direkte Anwendung der Bruchmechanik in der Regel auf die Beschreibung makroskopischer Risse beschränkt, die kurz vor dem Versagen der Struktur auftreten. Um die Entstehung und das Wachstum von Mikrorissen und Poren zu erfassen, wird in der CDM zu einer Kontinuumsdarstellung übergegangen. Anstatt jeden einzelnen Mikroriß zu betrachten, wird die Reißdichte bzw. die Auswirkung der Risse auf die lokal gemittelten elastischen Eigenschaften durch eine Schädigungsvariable ausgedrückt.

Die Arbeiten von PALMGREN [78] und MINER [68] können als ein erster Ansatz angesehen werden, mit dem die Schädigung vor dem endgültigen Versagen einer Struktur durch eine Variable beschrieben wird. Der entscheidende Schritt zur Entwicklung der Schadensmechanik erfolgte 1958 durch KACHANOV, der eine skalare, dimensionslose Feldvariable  $\psi$  zur Beschreibung der Schädigung einführte [49]. Diese als Kontinuität bezeichnete Größe hat den Wert  $\psi = 1$  im ungeschädigten Material und wird null, wenn die Steifigkeit des Materials durch die Schädigung verloren geht.

Während KACHANOV Schädigung als Reduzierung der Steifigkeit definiert, wird in dem 1977 von GURSON veröffentlichten Modell der Einfluß der Entstehung und des Wachstums von Poren auf das Fließverhalten duktiler Materialien beschrieben [40]. Ausgehend von GURSONS Ansatz entwickelte sich eine zweite Klasse schadensmechanischer Modelle, die sich jedoch grundsätzlich von den Modellen nach KACHANOV unterscheidet und nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

Um ein schadensmechanisches Modell zu formulieren, müssen eine geeignete Schädigungsvariable definiert und die Evolutionsgleichungen für die irreversiblen Prozesse aufgestellt werden. Im Fall isotroper Schädigung wird die Schädigungsvariable über das Prinzip der Dehnungsäquivalenz in die Konstitutivgleichungen eingeführt (RABOTNOV [83], LEMAITRE [57]). Da diese Vorgehensweise nicht direkt auf tensorielle Schädigungsvariablen übertragbar ist, wurde stattdessen von SIDOROFF das Prinzip der Komplementärenergieäquivalenz postuliert [93].

Die Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen werden entweder aus mikromechanischen Betrachtungen gewonnen [14, 56, 108] oder direkt auf makroskopischer Ebene formuliert (z.B. [9, 35, 57, 63, 71, 92, 109]). Der mikromechanische Ansatz verwendet stark vereinfachende Modelle von Rißkonfigurationen, während phänomenologische Modelle auf eine explizite Rißmodellierung verzichten.

Die phänomenologische Modellbildung läßt weitgehende Freiheit bei der Wahl der Evolutionsgleichungen, die i.Allg. von der Form  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\{\mathbf{x}(\tau) \mid \tau \leq t\})$  sind, wobei  $\mathbf{x}$  die Zustandsvariablen ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $T$ ,  $D$ , ... ) bezeichnen soll. Ein systematischerer Zugang im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse wurde von französischen Forschungsgruppen (CHABOCHE, LEMAITRE [20, 21, 59]) entwickelt. Aus der Thermodynamik erhält man die Clausius-Duhem-Ungleichung als Einschränkung für die Entwicklungsgleichungen. Weitere Restriktionen für die Gestalt der Gleichungen lassen sich gewinnen, wenn man die Existenz gewisser Potentiale für die dissipativen Prozesse annimmt. Die Existenz derartiger Dissipationspotentiale kann aus dem Postulat maximaler Dissipation abgeleitet werden [103, 112, 67].

Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu untersuchen, ob ausgehend von allgemeinen thermomechanischen Postulaten schadensmechanische Modelle elastoplastischer Materialien systematisch entwickelt und an experimentelle Ergebnisse angepaßt werden können.

Für elastoplastische Materialien findet man in der Literatur einige schadensmechanische Modelle, die verallgemeinerte nicht-assozierte Fließregeln verwenden [57, 9, 87, 109]. Im Kapitel 3.2.3 wird gezeigt, daß durch diesen Ansatz das Irreversibilitätspostulat von ILYUSHIN [47] und die Stabilitätsbedingung von DRUCKER [33] zwangsläufig verletzt werden. Andere Modelle fügen zu einer assoziierten Fließregel eine ähnliche Entwicklungsgleichung für die Schädigung

hinzu, indem sie eine Schädigungsfläche in Analogie zur Fließfläche definieren [44, 23, 35, 71, 104]. Durch eine Darstellung als Spezialfall einer verallgemeinerten assoziierten Fließregel wird nachgewiesen (Abschnitt 4.1.3), daß diese Modelle das Postulat der maximalen Dissipation erfüllen. Sie verwenden jedoch eine sehr spezielle Form der verallgemeinerten Fließfläche im Raum der dissipativen Kräfte, die eine weitgehende Entkopplung von Plastizität und Schädigung verursacht.

Als alternativer Ansatz wird in dieser Arbeit ein Modell auf Basis des Prinzips der maximalen Dissipation entwickelt, das durch eine glatte verallgemeinerte Fließfläche eine starke Kopplung der zwei dissipativen Prozesse realisiert. In bisherigen Modellen, die assoziierte Fließregeln zu verwenden scheinen [92, 114], wurde dieser Ansatz nicht konsequent umgesetzt.

Nachdem im folgenden Kapitel einige grundlegende Begriffe und Modelle der Thermodynamik und Schadensmechanik kurz erläutert werden, wendet sich das Kapitel 3 zunächst einer allgemeineren Fragestellung zu. Um ein elastoplastisches Materialmodell zu formulieren, dessen Evolutionsgleichungen nicht vollständig willkürlich gewählt werden, sondern das von einer allgemeinen physikalischen Annahme ausgeht, bieten sich drei Postulate an. Das Irreversibilitätspostulat von Ilyushin, die Stabilitätsbedingung von Drucker und das Prinzip der maximalen Dissipation führen bei einfachen elastoplastischen Modellen zu einer assoziierten Normalenregel im Spannungsraum. Die Beziehung zwischen den drei Postulaten und der Normalenregel soll nun für Modelle mit zusätzlichen inneren Variablen untersucht werden. Die Resultate werden auf schadensmechanische Modelle elastischer und elastoplastischer Materialien angewendet.

Auf Grundlage der Ergebnisse dieses Abschnitts wird in Kapitel 4 ein neues schadensmechanisches Modell entwickelt, welches das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllt und eine starke Kopplung zwischen Plastizität und Schädigung beinhaltet. Eine vereinfachte Variante des Modells wird in eine schwache Formulierung überführt.

Die Anwendung des Modells auf ein konkretes Material erfolgt im Kapitel 5. Geeignete elementare Ansatzfunktionen für die freie Energie und die Fließfunktion werden gewählt, wobei die Modellparameter für einen Vergütungsstahl in uniaxialen Zugentlastungsversuchen bestimmt werden. Das Modell zeigt ein qualitativ richtiges Verhalten bei mehrachsigen Spannungszuständen.

In Kapitel 6 wird vorgeschlagen, das neue Modell für die Simulation des Wachstums von Grenzflächenrissen einzusetzen. Hierbei wird auf Fragen des Materialmodells der Prozeßzone, der räumlichen Darstellung der Zwischenschicht und des Rißwachstumskriteriums eingegangen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung sowie Abbildungs-, Symbol- und Literaturverzeichnis.



# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige Grundbegriffe der Thermodynamik im Bezug auf mechanische Kontinuumsmodelle und der Schadensmechanik eingeführt werden. Speziell wird auf das Prinzip der maximalen Dissipation eingegangen. Für elastoplastische Materialien werden diesem Extremalprinzip das Irreversibilitätspostulat von Ilyushin sowie Druckers Stabilitätsbedingung gegenübergestellt. Die Definition einer schadensmechanischen Zustandsvariablen und die Formulierung von Entwicklungsgleichungen werden erläutert.

### 2.1 Thermodynamik

Um die Deformation eines Festkörpers unter mechanischer Belastung zu modellieren, wird sein Zustand in der Kontinuumsmechanik durch ein Feld von Zustandsvariablen beschrieben [59]. Jedem Punkt des Körpers können die Verschiebung  $\mathbf{u}$ , die Temperatur  $T$ , die irreversible (plastische) Dehnung  $\mathbf{p}$  sowie weitere geeignete innere Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  zugeordnet werden. Im Folgenden wird die Näherung eines isothermen Prozesses verwendet. Nicht berücksichtigt wird dabei insbesondere, daß die bei plastischer Deformation und Schädigung erzeugte Wärme thermische Spannungen hervorrufen kann.

Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen wird die Verformung durch den Eulerschen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ausgedrückt

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) , \quad (2.1)$$

während die Spannung durch den Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  beschrieben wird. Bei gegebenen Volumenkräften  $\mathbf{k}$  muß die Bedingung des statischen Gleich-

gewichts erfüllt werden:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k} = 0 \quad (2.2)$$

Zu den Feldgleichungen (2.1) und (2.2) treten an jedem Punkt des Körpers die Konstitutivgleichungen, welche Spannung und Dehnung verknüpfen, und gewöhnliche Differentialgleichungen, die die Änderung der Zustandsvariablen infolge dissipativer Prozesse beschreiben.<sup>1</sup>

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \boldsymbol{\sigma}, \quad (\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \quad (2.3)$$

Als Randbedingungen ist auf dem Rand des Körpers, welcher ein zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  umfaßt, jeweils entweder die Verschiebung  $\mathbf{u}^*$  oder die Randspannung  $\mathbf{t}^*$  gegeben:

$$\partial\Omega = \text{, }_u \cup \text{, }_t, \quad \text{, }_u \cap \text{, }_t = \emptyset \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ auf } \text{, }_u \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \text{ auf } \text{, }_t \quad (2.6)$$

In dieser Arbeit soll nicht das Feldproblem (2.1)-(2.6) behandelt werden, sondern es steht die Aufstellung der lokalen Gleichungen (2.3) zur Modellierung des Materialverhaltens im Mittelpunkt des Interesses. Die Konstitutivgleichungen können durch die Wahl der spezifischen Helmholtzschen freien Energie  $f$  festgelegt werden. Den Zustandsvariablen  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi})$  werden konjugierte Kräfte als Ableitungen der freien Energie zugeordnet:

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (2.7)$$

$\boldsymbol{\sigma}^e$  bezeichnet hierbei den elastischen (reversiblen) Anteil der Spannung und  $\boldsymbol{\Xi}$  die den inneren Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  assoziierten Kräfte. Bei elasto-visko-plastischen Materialien werden Spannung und Dehnung jeweils in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil zerlegt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{p} \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^v \quad (2.9)$$

Üblicherweise wird angenommen, daß die freie Energie von der elastischen, nicht aber von der plastischen Dehnung abhängt.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right|_e = 0 \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup>Bei räumlich nicht-lokalen Modellen wird auch die Entwicklung der dissipativen Variablen durch partielle Differential- oder Integralgleichungen beschrieben.

Die Wahl der Entwicklungsgleichungen wird durch den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik eingeschränkt:

$$\dot{u} = w \Leftrightarrow \nabla q + h \quad (2.11)$$

$$\dot{s} + \nabla \frac{\mathbf{q}}{T} \Leftrightarrow \frac{h}{T} \geq 0 \quad (2.12)$$

$s$  sei die spezifische Entropie,  $\mathbf{q}$  der Wärmestrom,  $h$  die Leistung von Wärmequellen,  $u$  die spezifische innere Energie und  $w$  die äußere mechanische Arbeit. Mit den Beziehungen

$$f = u \Leftrightarrow T s, \quad (2.13)$$

$$w = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.14)$$

und der Annahme konstanter Temperatur

$$\dot{T} = 0, \quad \nabla T = 0 \quad (2.15)$$

erhält man die Bedingung positiver Dissipationsleistung:

$$\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \dot{f} \geq 0 \quad (2.16)$$

Die Dissipationsleistung läßt sich als ein Produkt von dissipativen Kräften und Flüssen darstellen:

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \dot{f} \quad (2.17)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow \Xi \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.18)$$

$$= \mathbf{X}^d \dot{\boldsymbol{x}}^d \quad (2.19)$$

$$\text{wobei } \dot{\boldsymbol{x}}^d = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}), \quad \mathbf{X}^d = (\boldsymbol{\sigma}^v, \boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow \Xi) \quad (2.20)$$

Die dissipativen Kräfte sind als „treibende Kraft“ für den Ablauf der dissipativen Prozesse verantwortlich.

### 2.1.1 Das Prinzip der maximalen Dissipation

Eine stärkere Restriktion für die Evolutionsgleichungen als den zweiten Hauptsatz ( $\mathcal{D} \geq \iota$ ) erhält man durch das Postulat der maximalen Dissipation [112, 113, 67]: Zu einer gegebenen Kraft  $\mathbf{X}^d$  maximiert der zugehörige Wert der dissipativen Flüsse  $\dot{\boldsymbol{x}}^d$  die Dissipationsleistung  $\mathcal{D}$  unter der Nebenbedingung (2.19):

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^d) = \max\{\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) \mid \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{X}^d \hat{\boldsymbol{x}}\} \quad (2.21)$$



abhängige Modelle näher erläutert werden. Zum Verständnis der nachfolgenden Abschnitte ist die Kenntnis dieser Ableitung nicht unbedingt notwendig.

Die Dissipationsleistung als Funktion der dissipativen Flüsse wird als Dissipationsfunktion bezeichnet. Sie kann zusätzlich noch von den Zustandsvariablen abhängen. Ein Modell mit maximaler Dissipation ist durch die Wahl der Freien Energie  $f(\boldsymbol{x})$  und der Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^d, \boldsymbol{x})$  weitgehend<sup>3</sup> festgelegt. Die Dissipationsfunktion ist so zu wählen, daß die Flächen konstanter Dissipationsleistung konvex sind und daß  $\mathcal{D}$  auf jedem vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahl stärker als linear wächst.

Das Prinzip der maximalen Dissipationsleistung (2.21) läßt sich auch folgendermaßen als Ungleichung formulieren: Für alle  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , die die Bedingung

$$h_1(\hat{\boldsymbol{x}}) := \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^d \hat{\boldsymbol{x}} = 0 \quad (2.24)$$

erfüllen, gilt:

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^d) \Leftrightarrow \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) \geq 0 \quad (2.25)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}^d (\dot{\boldsymbol{x}}^d \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}) \geq 0 \quad (2.26)$$

Dies bedeutet geometrisch (Abb. 2.1.1), daß die Normale der durch  $h_1(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$  (2.24) beschriebenen Hyperfläche am Punkt  $\dot{\boldsymbol{x}}^d$  die Richtung von  $\boldsymbol{X}^d$  hat.

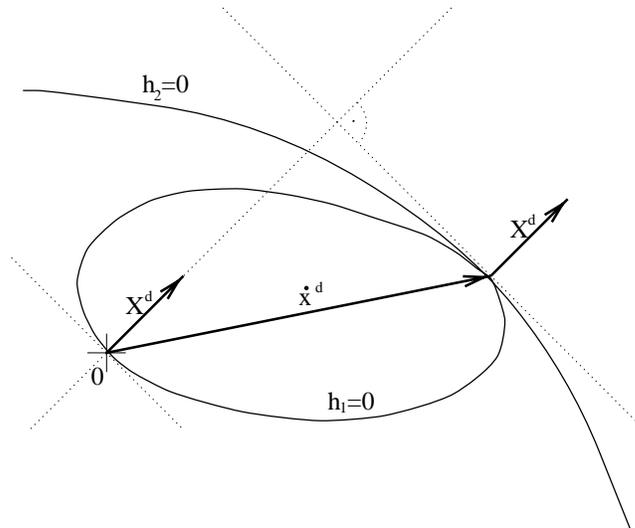


Abbildung 2.2: Veranschaulichung der maximalen Dissipation

<sup>3</sup>An Stellen, an denen die Fläche konstanter Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{x}}^d)$  nicht glatt ist, ist die Richtung von  $\boldsymbol{X}^d$  nicht eindeutig bestimmt. Ferner werden gyroskopische Kräfte nicht erfaßt.

Man betrachte nun die Funktion

$$h_2(\hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{D}(\hat{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^d) \quad (2.27)$$

Auf der Hyperfläche  $h_1 = 0$  ist diese wegen (2.26) nicht positiv:

$$h_2(\dot{\mathbf{x}}^d) = \mathbf{X}^d \hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{X}^d \dot{\mathbf{x}}^d = \mathbf{X}^d (\hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}^d) \leq 0 \quad (2.28)$$

Im Punkt  $\dot{\mathbf{x}}^d$  ist  $h_2(\dot{\mathbf{x}}^d) = 0$ . Folglich haben  $h_1 = 0$  und  $h_2 = 0$  in diesem Punkt eine gemeinsame Tangentialebene. Somit ist die Normale von  $h_1 = 0$  gleich der Richtung des Gradienten von  $\mathcal{D}$ , und es gilt

$$\mathbf{X}^d = \lambda \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^d} \quad (2.29)$$

Ist  $\mathcal{D}$  nicht differenzierbar, so tritt das Subdifferential<sup>4</sup> an Stelle des Gradienten.

$$\mathbf{X}^d \in \lambda \partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^d) \quad (2.30)$$

Der Multiplikator  $\lambda$  läßt sich durch Einsetzen von (2.19) in (2.29) bestimmen.

$$\lambda = \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^d} \dot{\mathbf{x}}^d \right)^{-1} \mathcal{D} \quad (2.31)$$

Existiert eine Funktion  $g$  mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^d} \dot{\mathbf{x}}^d = g(\mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^d)) \quad , \quad (2.32)$$

so nennt man die Dissipationsfunktion quasihomogen. In diesem Fall existiert ein Dissipationspotential  $\Psi$ , und die Evolutionsgleichung (2.29) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{X}^d = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{x}}^d} \quad . \quad (2.33)$$

Die dissipativen Flüsse können mittels der Legendre-Fenchel-Transformierten  $\Psi^*$  dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}^d = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{X}^d} \quad (2.34)$$

$$\Psi^*(\mathbf{X}^d) = \sup_{\dot{\mathbf{x}}^d} \{ \mathbf{X}^d \dot{\mathbf{x}}^d \Leftrightarrow \Psi(\dot{\mathbf{x}}^d) \} \quad (2.35)$$

Für nicht differenzierbare Dissipationsfunktionen erhält man entsprechend

$$\mathbf{X}^d \in \partial \Psi(\dot{\mathbf{x}}^d), \quad \dot{\mathbf{x}}^d \in \partial \Psi^*(\mathbf{X}^d) \quad . \quad (2.36)$$

---

<sup>4</sup>Das Subdifferential einer Funktion  $\phi$  an der Stelle  $x$  ist definiert als  $\partial \phi(x) = \{z \mid \forall y : \phi(y) - \phi(x) \geq z(y - x)\}$ . Im Falle einer differenzierbaren Funktion ist  $\partial \phi(x) = \{\frac{\partial \phi}{\partial x}\}$ .

Im Falle eines Materialverhaltens, bei dem die Kräfte nicht explizit von der Verformungsgeschwindigkeit abhängen, also beispielsweise bei der Elastoplastizität, ist Gleichung (2.33) invariant gegen eine Reskalierung der Zeitachse.

$$\tau = \kappa t, \quad \kappa > 0 \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^d = \frac{d\mathbf{x}^i}{d\tau} = \frac{1}{\kappa} \dot{\mathbf{x}}^d \quad (2.38)$$

$$\mathbf{X}^d = \frac{\partial \Psi(\hat{\mathbf{x}}^d)}{\partial \hat{\mathbf{x}}^d} = \frac{\partial \Psi(\dot{\mathbf{x}}^d)}{\partial \dot{\mathbf{x}}^d} \quad (2.39)$$

$$= \frac{\partial \Psi(\kappa \dot{\mathbf{x}}^d)}{k \partial \dot{\mathbf{x}}^d} \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow \Psi(\kappa \dot{\mathbf{x}}^d) = \kappa \Psi(\dot{\mathbf{x}}^d) \quad (2.41)$$

Folglich ist  $\Psi$  positiv homogen vom Grad eins.<sup>5</sup> Man kann beweisen, daß die Legendre-Fenchel-Transformierte einer solchen Funktion<sup>6</sup> die Indikatorfunktion  $I_K$  einer konvexen Menge  $K$  ist, d.h.

$$\Psi^*(\mathbf{X}^d) = I_K := \begin{cases} 0 & \mathbf{X}^d \in K \\ \infty & \mathbf{X}^d \notin K \end{cases}. \quad (2.42)$$

Mit der Evolutionsgleichung (2.36) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}}^d \in \begin{cases} \{0\} & \mathbf{X}^d \in K \setminus \partial K \\ \partial \Psi^* & \mathbf{X}^d \in \partial K \\ \emptyset & \mathbf{X}^d \notin K \cup \partial K \end{cases}. \quad (2.43)$$

Kann man die Menge  $K$  durch eine differenzierbaren Funktion  $F(\mathbf{X}^d)$  mit

$$\forall \mathbf{X}^d \in K : F(\mathbf{X}^d) < 0 \quad (2.44)$$

$$\forall \mathbf{X}^d \in \partial K : F(\mathbf{X}^d) = 0 \quad (2.45)$$

$$\forall \mathbf{X}^d \notin K \cup \partial K : F(\mathbf{X}^d) > 0 \quad (2.46)$$

beschreiben, so erhält man die bei elastoplastischen Materialmodellen übliche Darstellung der Entwicklungsgleichungen:

$$\dot{\mathbf{x}}^d = \begin{cases} 0 & \text{für } F(\mathbf{X}^d) < 0 \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}^d} & \text{für } F(\mathbf{X}^d) = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Der Multiplikator  $\lambda$  ist aus der Bedingung  $\dot{F} = 0$  zu ermitteln.

<sup>5</sup>Eine Funktion  $f$  heißt positiv homogen vom Grad  $n$ , wenn  $f(\alpha x) = \alpha^n f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ .

<sup>6</sup>Zusätzlich ist zu verlangen, daß  $\Psi$  unterhalbstetig (lower semicontinuous) ist.

Im Falle idealer Plastizität ist  $\boldsymbol{x}^d$  die plastische Dehnung  $p$ ,  $\boldsymbol{X}^d$  ist die Spannung  $\sigma$  und  $F$  die Fließfunktion. Die Evolutionsgleichung (2.47) ist eine assoziierte Normalenregel.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich die aus der allgemeinen Formulierung des Prinzips der maximalen Dissipation (2.21) abgeleitete Normalenregel auf eine „Fließfläche“ bezieht, die im Raum aller dissipativen Kräfte (nicht nur der Spannungen) liegt. Es ist daher möglich, Modelle mit maximaler Dissipation zu konstruieren, die im Spannungsraum als nicht-assoziierte Fließregeln erscheinen. Beispiele für derartige Modelle im Bereich geotechnischer Materialien findet man bei COLLINS und HOULSBY [27].

## 2.1.2 Irreversibilitäts- und Stabilitätsbedingungen

Nachdem das Prinzip der maximalen Dissipation in einer sehr allgemeinen Formulierung eingeführt und für elastoplastische Materialien spezialisiert wurde, sollen nun zwei andere Postulate definiert werden, die für elastoplastische Modelle entwickelt wurden. [47, 33, 7, 95]

Das Irreversibilitätspostulat von ILYUSHIN [47]

$$\oint_{(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (2.48)$$

fordert, daß die Verformungsarbeit für jeden im Raum der Gesamtdehnung geschlossenen Pfad nicht negativ sein darf. Bei einer reversiblen elastischen Deformation ist diese Arbeit Null, während bei plastischer Verformung Energie dissipiert werden soll. Diese Bedingung geht über den zweiten Hauptsatz hinaus, da ein im Raum der Dehnungen geschlossener Pfad nicht immer ein im Zustandsraum geschlossener Pfad ist.

Eine ähnliche Integralungleichung wurde von DRUCKER [34, 33] als Stabilitätsbedingung für verfestigende Materialien eingeführt. Sein Postulat, das eine stärkere Restriktion für die Entwicklungsgleichungen darstellt, bezieht sich auf Zyklen im Spannungsraum. Er betrachtet einen Gleichgewichtszustand, in dem eine zusätzliche äußere Last aufgebracht und wieder entfernt wird. Das Stabilitätspostulat verlangt, daß das System im Gleichgewicht bleibt und daß die von der zusätzlichen Last geleistete Arbeit positiv ist, wenn eine plastische Verformung stattfindet:

$$\oint_{(\boldsymbol{\sigma})} (\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (2.49)$$

$A$  bezeichnet hierbei den Anfangspunkt des Lastzyklus.

BEREZHNOI und IVLEV [7] haben gezeigt, daß Ilyushins Postulat auch durch die Integralungleichung

$$\oint_{(\varepsilon)} (\varepsilon \Leftrightarrow e_A) d\varepsilon \leq 0 \quad (2.50)$$

ausgedrückt werden kann, und daß Druckers Bedingung äquivalent ist zu der von HILL [45] vorgeschlagenen Ungleichung

$$\oint_{(\sigma)} \varepsilon d\sigma \leq 0. \quad (2.51)$$

### 2.1.3 Stabilität und maximale Dissipation

Die Postulate von Ilyushin und Drucker sowie das Prinzip der maximalen Dissipation stellen unterschiedliche physikalische Annahmen dar, die einem elastoplastischen Modell zu Grunde gelegt werden können. Bei einfachen elastoplastischen Modellen folgt aus allen drei Postulaten die gleiche Normalenregel im Spannungsraum [7]. Die Ableitung der Normalenregel aus dem Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat soll im folgenden kurz skizziert werden. Für eine allgemeinere Klasse von Modellen werden die Konsequenzen von Ilyushins und Druckers Bedingungen im Kapitel 3 im Detail betrachtet werden.

Um aus Ilyushins Integralungleichung (2.48) Bedingungen für die Zeitableitungen von Spannung und Dehnung zu gewinnen, betrachten wir einen Lastzyklus, der bezüglich der Gesamtdehnung geschlossen ist und einen kurzen Abschnitt plastischer Verformung beinhaltet (Abb. 2.3). Das Ringintegral in (2.48) ist die von der Kurve eingeschlossene Fläche. Berücksichtigt man den Term erster Ordnung, der für  $\sigma_A = \sigma_B$  verschwindet, und die Beiträge zweiter Ordnung, so erhält man zwei Ungleichungen [7, 51]. ( $\mathbf{C}$  bezeichnet den Steifigkeitstensor.)

$$(\sigma_B \Leftrightarrow \sigma_A) \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p} \mathbf{C} \Delta \mathbf{p} \geq 0 \quad (2.52)$$

$$\Leftrightarrow (\sigma \Leftrightarrow \hat{\sigma}) \dot{\mathbf{p}} \geq 0 \quad \forall \hat{\sigma} \in K \quad (2.53a)$$

$$\wedge \dot{\sigma} \dot{\mathbf{p}} \geq \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}} \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} \quad (2.53b)$$

Die erste Ungleichung (2.53a) ist die Normalenregel im Spannungsraum, und die zweite Ungleichung (2.53b) beschränkt die zulässige Entfestigung. Eine detailliertere Ableitung dieser Beziehungen in einem allgemeineren Rahmen erfolgt im nächsten Kapitel.

Behandelt man Druckers Stabilitätsbedingung (2.49) analog, so erhält man dieselbe Normalenregel aus dem Term erster Ordnung:

$$(\sigma_B \Leftrightarrow \sigma_A) \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta \mathbf{p} \geq 0 \quad (2.54)$$

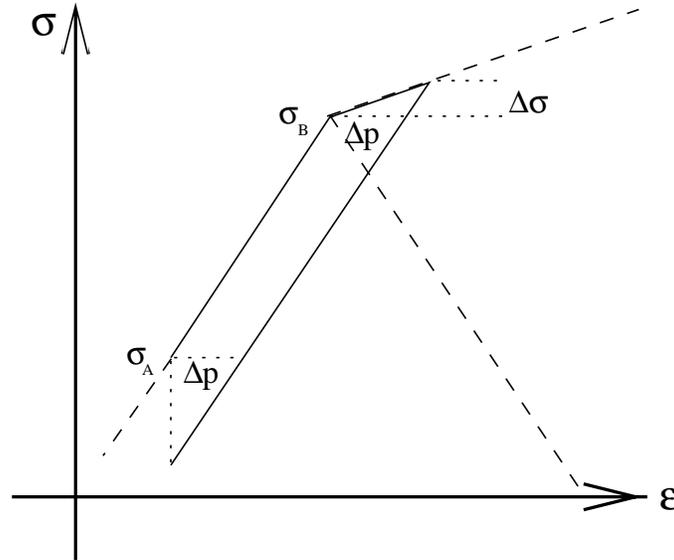


Abbildung 2.3: Lastzyklus zur Ableitung von (2.52) in 1D

$$\iff (\sigma \leftrightarrow \hat{\sigma}) \dot{p} \geq 0 \quad \forall \hat{\sigma} \in K \quad (2.55a)$$

$$\wedge \dot{\sigma} \dot{p} \geq 0 \quad (2.55b)$$

Die aus dem Term zweiter Ordnung gewonnene Bedingung (2.55b) kann als Stabilitätsbedingung für die plastische Verformung verstanden werden. Die Ungleichung ist hinreichend aber nicht notwendig für punktweise<sup>7</sup> Stabilität („stability in the small“), welche durch die Bedingung

$$\dot{\sigma} \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (2.56)$$

charakterisiert wird. Die punktweise Stabilität bedeutet anschaulich, daß eine stabile Zustandsänderung eine Änderung der Kraft mit gleichem Vorzeichen erfordert. Druckers Bedingung (2.55b) ist schärfer, da eine kleine Instabilität der plastischen Deformation durch die stabile elastische Materialantwort kompensiert werden kann.

In der Literatur wird sowohl die Integralungleichung (2.49) als auch die lokale Ungleichung (2.55b) häufig als Druckersches Stabilitätspostulat bezeichnet. Da beide Bedingungen nicht äquivalent sind, soll die Bezeichnung im folgenden nur für die Integralungleichung (2.49) verwendet werden.

Sowohl bei Ilyushins Irreversibilitätspostulat als auch bei Druckers Stabilitätsbedingung folgt aus der Betrachtung der Terme erster Ordnung eine Normalenregel

<sup>7</sup>Die punktweise Stabilität, d.h. Stabilität des lokalen Materialverhaltens, ist von der Stabilität eines räumlich ausgedehnten Körpers zu unterscheiden, welche hier nicht näher betrachtet werden soll. [64, 62]

(2.53a), (2.55a) ähnlich der Normalenregel, die aus dem Prinzip der maximalen Dissipation für zeitunabhängige Systeme resultiert (2.23). Hierbei ist jedoch zu beachten, daß Ungleichung (2.53a) Orthogonalität der Dehnungsänderung an einer Fließfläche im Spannungsraum fordert, während die „Fließfläche“ bei maximaler Dissipation (2.23) eine Fläche im Raum aller dissipativen Kräfte ist. Das Prinzip der maximalen Dissipation postuliert eine gemeinsame Orthogonalitätsbedingung für alle dissipativen Flüsse, nicht nur für die Zeitableitung der plastischen Dehnung.

Im Falle einfacher elastoplastischer Modelle mit isotroper Dehnungs-Verfestigung sind die zwei Normalenregeln gleichbedeutend, wie an folgender Darstellung zu erkennen ist:

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, r) = f_e(\mathbf{e}) + f_r(r) \quad (2.57)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R) = F_\sigma(\boldsymbol{\sigma}) \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \sigma_y \quad (2.58)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \lambda \frac{\partial F_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{r} = \lambda \quad (2.59)$$

Diese Modellklasse erfüllt die Normalenregel im Raum der dissipativen Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow R)$ . Eine gegebene Verfestigung  $R(r)$  kann durch eine geeignete Wahl der Verfestigungsenergie  $f_r(r) = \int R(r) dr$  realisiert werden.

## 2.2 Kontinuumsschadensmechanik

In der Kontinuumsschadensmechanik (CDM) wird das geschädigte Material durch ein Kontinuum beschrieben, für welches als zusätzliche Zustandsgröße eine Schädigungsvariable definiert wird. Die Entstehung und das Wachstum von Mikrorissen oder Poren wird durch das Wachstum der Schädigungsvariablen ausgedrückt. Die derzeit angewandten schadensmechanischen Modelle lassen sich in zwei Gruppen unterteilen.

GURSON entwickelte auf Grundlage mikromechanischer Betrachtungen von Poren in duktilen Materialien ein Modell, das die zeitliche Entwicklung des Porenvolumens und ihren Einfluß auf die Fließfunktion wiedergibt [40, 102, 66].

Die zweite Klasse von Modellen geht im wesentlichen auf einen Ansatz von KACHANOV [49] zurück und erlaubt die Modellierung des durch Mikrorißbildung verursachten Verlustes an makroskopischer Steifigkeit sowie der zeitlichen Entwicklung der Schädigung [59, 57]. Zu dieser Gruppe, die in den folgenden Abschnitten näher vorgestellt wird, zählt auch das in dieser Arbeit entwickelte Modell.

Ein CDM-Modell muß eine Schädigungsvariable definieren und ihren Einfluß auf

die konstitutiven Gleichungen beschreiben. Sodann sind Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariable und ggf. andere innere Variablen zu formulieren.

### 2.2.1 Definition der Schädigungsvariablen

In den schadensmechanischen Modellen nach KACHANOV soll die Schädigungsvariable den Verlust an Steifigkeit beschreiben und kann daher durch die Konstitutivgleichungen definiert werden. Alternativ kann die Variable aus mikromechanischen Modellvorstellungen gewonnen werden. Zur Definition des Kontinuumsmodells über ein mikromechanisches Modell ist eine Homogenisierung notwendig.

#### Definition einer isotropen Schädigungsvariablen

Um die Schädigungsvariable an einem Punkt des makroskopischen Kontinuums zu definieren, betrachtet man ein repräsentatives Volumenelement (RVE), das etliche Mikrorisse bzw. Poren enthält (Abb. 2.4). Das RVE muß so groß sein, daß durch Mittelwertbildung Größen gewonnen werden können, die die Mikroprozesse repräsentieren. Andererseits sollte das RVE klein genug sein, um Gradienten der makroskopischen Zustandsgrößen zu erfassen. Der Durchmesser eines RVE ist materialabhängig und liegt typischerweise zwischen 0,1 mm bei Stahl und Keramiken und 100 mm bei Beton. Durch das RVE lege man eine Schnittebene.

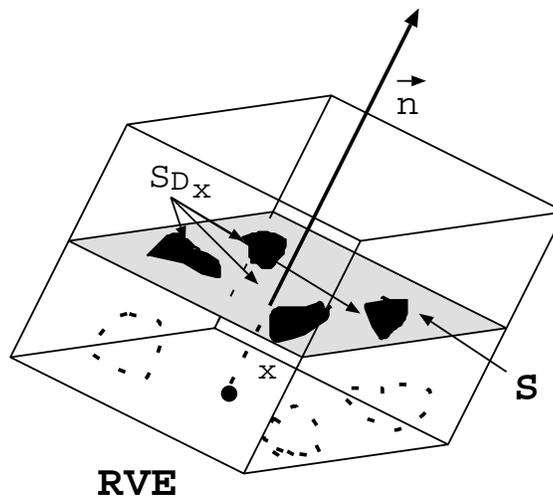


Abbildung 2.4: Repräsentatives Volumenelement (RVE)

Diese Ebene schneidet einen Teil der Mikrorisse. Als ein Maß für die Schädigung bietet sich das Verhältnis der Schnittfläche der Ebene mit den Mikrorissen zur

Schnittfläche mit dem RVE an:

$$D_{\text{RVE}}(\mathbf{n}) = \frac{S_D}{S} \quad (2.60)$$

Im Fall einer isotropischen Schädigung hängt dieser Wert nicht von der Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  der Fläche ab, so daß eine skalare Variable  $D$  zur Beschreibung der Schädigung ausreicht. Im ungeschädigten Material ist  $D = 0$ , eine obere Schranke ist 1.

### Prinzip der Dehnungsäquivalenz

Um die Wirkung der Schädigung auf das Materialverhalten zu erfassen, verwendet man das Konzept der effektiven Spannung. Im Falle einer Belastung durch eine äußere Kraft  $F$  trägt nicht mehr der gesamte Querschnitt  $S$  des RVE die Last, sondern nur der ungeschädigte Teil  $S \Leftrightarrow S_D$ . In diesem wirkt eine höhere sogenannte „effektive Spannung“:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \Leftrightarrow S_D} = \frac{\sigma S}{S \Leftrightarrow S_D} = \frac{\sigma}{1 \Leftrightarrow D} \quad (2.61)$$

Nun fordert man, daß das Materialverhalten des geschädigten Materials bei gegebener Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  in gewisser Weise dem Verhalten des ungeschädigten Materials bei der effektiven Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(1 \Leftrightarrow D)$  gleichen soll. Beim Prinzip der Dehnungsäquivalenz wird die effektive Spannung direkt in den Konstitutivgleichungen eingeführt [57]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, D) = \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, 0) \quad (2.62)$$

Für linear elastisches Materialverhalten bedeutet dies beispielsweise

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, D) = \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [(1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C}]^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.63)$$

d.h. die Steifigkeit  $\mathbf{C}$  wird durch die Schädigung reduziert.

Das Prinzip der Dehnungsäquivalenz stellt eine Annahme dar, die bei der Modellbildung getroffen wird. Sie wurde bislang nur in einigen Spezialfällen aus der mikromechanischen Definition der Schädigungsvariablen durch Homogenisierungsverfahren abgeleitet.

### Prinzip der Energieäquivalenz

Um eine anisotrope Schädigung zu modellieren, muß das Konzept der effektiven Spannung erweitert werden. Eine einfache Form richtungsabhängiger Schädigung

kann durch einen Schädigungstensor  $\mathbf{D}$  zweiter Stufe eingeführt werden [73], z.B. durch [72]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{D})^{-1}] . \quad (2.64)$$

Eine allgemeinere Darstellung anisotroper Schädigung erhält man mit der Definition eines Schadens-Effekt-Tensors  $\mathbf{M}$  vierter Stufe (z.B. [19, 93, 70, 94, 35, 104, 107, 109, 17]).

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.65)$$

Dieser Tensor wird meist als Funktion eines Schädigungstensors zweiter Stufe definiert. Man findet jedoch auch Modelle, die auf einem Schädigungsvektor [50, 109] oder einem Vektor und einer skalaren Variablen [31] basieren.

Das Prinzip der Verzerrungsäquivalenz kann nicht auf anisotrope Schädigung übertragen werden [93]. Formuliert man nämlich analog zu (2.63)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} =: \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \boldsymbol{\sigma} , \quad (2.66)$$

so erhält man eine erhebliche Einschränkung für  $\mathbf{M}$ , da sowohl die Steifigkeit als auch die effektive Steifigkeit  $\tilde{\mathbf{C}}$  symmetrisch sind:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} \quad (2.67)$$

Beispielsweise folgt aus der Symmetrie mit Bedingung (2.67), daß einer isotrope bzw. deviatorische Spannung eine gleichfalls isotrope bzw. deviatorische effektive Spannung zugeordnet wird, was der Idee einer allgemein anisotropen Schädigung widerspricht.

Statt der Dehnungsäquivalenz wird daher für anisotrope Schädigung meist eine Komplementärenergieäquivalenz postuliert [93]

$$W^c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = W^c(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, 0) , \quad (2.68)$$

oder eine Äquivalenz der Inkremente der Komplementärenergie [69]

$$\delta W^c(d\boldsymbol{\sigma}_D, \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{D}+d\mathbf{D}}^{-1}, \mathbf{D} + d\mathbf{D}) = \delta W^c(d\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D}+d\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{D}}^{-1}, \mathbf{D}) . \quad (2.69)$$

Auch durch eine explizite Symmetriesierung [22] läßt sich ein effektiver Steifigkeitstensor mit der gewünschten Eigenschaft konstruieren:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{C}^{-1}) \quad (2.70)$$

## 2.2.2 Evolutionsgleichungen

Während sich die Definition der skalaren Schädigungsvariable bereits etabliert hat und mehrere Ansätze für anisotrope Schädigung herausgearbeitet wurden, besteht über die Wahl geeigneter Entwicklungsgleichungen selbst im isotropen Fall keine Einigkeit. Einige Autoren leiten die Evolutionsgleichungen aus mikromechanischen Modellen ab [14, 56, 108]. Die Mehrzahl der in letzter Zeit veröffentlichten Modelle bevorzugt jedoch eine phänomenologische Beschreibung auf thermomechanischer Grundlage.

Schädigung von elastischen Materialien kann durch eine Schadensfläche im Raum von Spannung und Schädigung beschrieben werden [63]. Ein anderer Ansatz [100] postuliert eine Normalenregel ähnlich wie Modelle der Plastizität. Wenn die Normalenregel nicht im Spannungsraum sondern im Raum der zur Schädigungsvariable konjugierten Kraft  $Y$  definiert wird [22, 36, 41], kann man ein Modell in dem in den vorigen Abschnitten vorgestellten thermomechanischen Rahmen formulieren, wobei das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllt wird.

Thermomechanische Modelle für Plastizität oder Viskoplastizität mit Schädigung gehen meist von üblichen plastischen Fließregeln aus. Eine Möglichkeit zur Erweiterung eines Plastizitätsmodells auf Schädigung ist die Verwendung einer nicht-assoziierten Fließregel [57, 9, 87, 109]. In der Fließfunktion wird die Schädigung beispielsweise berücksichtigt, indem die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt wird; und das plastische Potential unterscheidet sich von der Fließfunktion durch einen zusätzlichen Term, der für die Entwicklung der Schädigung verantwortlich ist. Ein typisches Beispiel für diese Klasse von Modellen ist ein Modell von LEMAITRE [57]. Er verwendet eine skalare Schädigungsvariable  $D$ , eine isotrope Verfestigungsvariable  $r$ , und geht von einer von-Mises-Fließfunktion aus:

$$f(\mathbf{e}, r, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} + f_r(r) \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (2.72)$$

$$Y = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial D} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (2.73)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R \quad (2.74)$$

$$G(\boldsymbol{\sigma}, R, Y; D) = F(\boldsymbol{\sigma}, R; D) + G_Y(Y; D) \quad (2.75)$$

$$(\dot{\mathbf{p}}, \dot{r}, \dot{D}) = \begin{cases} \lambda \frac{\partial G}{\partial (\boldsymbol{\sigma}, -R, Y)} & \text{für } F = 0 \\ 0 & \text{für } F < 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

Die zur Schädigungsvariable  $D$  konjugierte Kraft  $Y$ , im folgenden kurz Schädigungskraft genannt, wurde von CHABOCHE eingeführt und wird meist als schadensmechanische Energiefreisetzungsrates bezeichnet [18].

Andere Modelle verwenden eine assoziierte Fließregel im Raum von Spannung  $\sigma$  und Schädigungskraft  $Y$  [52, 92, 114]. Als Spezialfall dieser Klasse kann man Modelle auffassen, die unabhängige Potentialflächen für Plastizität und Schädigung besitzen [96, 94, 44, 111, 35, 71, 104]. Im Abschnitt 4.1 werden einige Modelle mit assoziierten Fließregeln im Detail kritisch diskutiert werden.

# Kapitel 3

## Stabilität und maximale Dissipation

Im vorhergehenden Kapitel wurde der Zusammenhang zwischen dem Irreversibilitätspostulat von Ilyushin, der Stabilitätsbedingung von Drucker und dem Prinzip der maximalen Dissipation dargestellt. Die bisherigen Arbeiten bezogen sich hierbei auf einfache Modelle elastoplastischen Materialverhaltens. Für diesen Fall wurde gezeigt, daß die assoziierte Fließregel aus allen drei Postulaten folgt.

Das Prinzip der maximalen Dissipation wird jedoch bei einer wesentlich größeren Klasse von Modellen eingesetzt. Häufig wird dabei keine spezielle physikalische Begründung für diese Annahme gegeben. Daher stellt sich die Frage, ob die maximale Dissipation auch in einem allgemeineren Fall aus den Integralungleichungen von Ilyushin und Drucker folgt. In den folgenden Abschnitten soll diese Frage für eine allgemeinere Klasse elastoplastischer Materialmodelle untersucht werden. Anschließend werden die Resultate speziell auf schadensmechanische Modelle angewendet. Am Ende des Kapitels findet man eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die Resultate dieses Kapitels bilden die Grundlage für die Entscheidung, das im anschließenden Kapitel 4 vorgestellte neue schadensmechanische Materialmodell auf der Basis des Prinzips der maximalen Dissipation zu entwickeln. Die Betrachtungen zu Stabilität und maximaler Dissipation gehen jedoch über den speziellen Fall des neuen schadensmechanischen Modells hinaus.

### 3.1 Anwendung der Postulate auf Modelle mit inneren Variablen

Zunächst muß die Klasse von Modellen definiert werden, die in diesem Kapitel untersucht werden soll. In den zwei folgenden Abschnitten werden dann die Postulate von Ilyushin und Drucker auf diese Modellklasse angewendet. Die hierdurch abgeleiteten Restriktionen für die Evolutionsgleichungen werden jeweils mit der Normalenregel verglichen, die aus dem Prinzip der maximalen Dissipation folgt.

#### 3.1.1 Definition der Modellklasse

In diesem Kapitel werden thermomechanische Kontinuumsmodelle für infinitesimale Deformationen und isotherme Prozesse betrachtet (vgl. Abschnitt 2.1). Das Materialverhalten soll invariant gegenüber einer Reskalierung der Zeitachse sein. Als Zustandsvariablen werden die elastische und plastische Dehnung sowie weitere innere Variablen (z.B. Verfestigung oder Schädigung) verwendet. Bei den inneren Variablen werden Variablen  $\mathbf{s}$ , die in der freien Energie<sup>1</sup>  $f$  mit der elastischen Dehnung gekoppelt sind, von nicht gekoppelten inneren Variablen  $\mathbf{r}$  unterschieden.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{e}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (3.1)$$

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{e}, \mathbf{s}) + f_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{e}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{e}} \neq 0 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (\boldsymbol{\sigma}, 0, \mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^d = (\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}), \quad \mathbf{X}^d = (\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow \mathbf{R}, \Leftrightarrow \mathbf{S}) \quad (3.5)$$

Es wird vorausgesetzt, daß ein konvexer elastischer Bereich im Raum der dissipativen Kräfte  $\mathbf{X}^d$  existiert, der durch eine „Fließfläche“  $F(\mathbf{X}^d) = 0$  begrenzt wird. Die Lage der Fließfläche darf von den Zustandsvariablen abhängen. Diese Klasse von Modellen ist nicht auf die Elastoplastizität beschränkt, sondern die Fläche  $F = 0$  kann beispielsweise auch die Schädigungsfläche in einem schadensmechanischen Modell eines elastischen Materials beschreiben [36, 63, 100].

Ferner nehmen wir an, daß die Umkehrung einer Verformung elastisch erfolgt: Nach einer Deformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_2$  ist eine Verformung auf dem bzgl. der Gesamtdehnung umgekehrten Weg  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1$  reversibel, d.h. die dissipativen Flüsse  $\dot{\mathbf{x}}^d$

---

<sup>1</sup>Im folgenden wird mit  $f$  die auf das Volumen bezogene Helmholtzsche freie Energie bezeichnet.

sind Null. Um auch Modelle mit kinematischer Verfestigung zuzulassen, kann diese Bedingung auf kleine Wege beschränkt werden.

Die Verfestigung bei der plastischen Verformung soll endlich sein, d.h. es existiert ein  $c \in \mathbb{R}^+$ , so daß auf einem Pfad  $AB$  gilt

$$\|\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_B\| \leq c \|\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_B\|. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Ilyushins Postulat

Da Ilyushins Irreversibilitätspostulat eine weniger restriktive Annahme als Druckers Stabilitätsbedingung ist, sollen zunächst die Konsequenzen von Ilyushins Integralungleichung für die soeben definierte Modellklasse untersucht werden. Als Ergebnis werden wir eine Variationsungleichung ähnlich der Normalenregel bei maximaler Dissipation erhalten:

Sei  $B$  ein Zustand auf der Fließfläche. Dann gilt die Ungleichung

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow (\boldsymbol{S}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{S}_A) \dot{\boldsymbol{s}} \geq 0 \quad (3.7)$$

für alle Zustände  $A$ , die von  $B$  durch elastische Verformung erreichbar sind.

Im Falle maximaler Dissipation gilt die Ungleichung

$$(\boldsymbol{X}^d \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{X}}^d) \dot{\boldsymbol{x}}^d \geq 0 \quad (3.8)$$

für alle Kräfte  $\hat{\boldsymbol{X}}^d$  im elastischen Bereich, woraus die Orthogonalität folgt. Ilyushins Bedingung impliziert hingegen eine entsprechende Ungleichung, bei der  $\hat{\boldsymbol{X}}^d$  nur aus einer Mannigfaltigkeit  $M$  innerhalb des elastischen Bereichs zu nehmen ist.<sup>2</sup> Wie man schematisch an der Abbildung 3.1 erkennt, läßt diese Bedingung nicht nur die Normale auf der Fließfläche, sondern eine ganze Schar von Richtungen der dissipativen Flüsse zu.

Diese Bedingung (3.7) soll im folgenden bewiesen und an einem Beispiel demonstriert werden. Speziell wird auf die Frage eingegangen, unter welchen Voraussetzungen (3.7) wie im Fall einfacher Plastizität eine Normalenregel im Spannungsraum impliziert.

#### Auswertung der Terme erster Ordnung

Um die Konsequenzen von Ilyushins Postulat für die Evolutionsgleichungen abzuleiten, betrachten wir einen bezüglich der Gesamtdehnung geschlossenen Be-

---

<sup>2</sup>Ilyushins Bedingung berücksichtigt nicht alle Komponenten von  $\hat{\boldsymbol{X}}^d$ , sondern nur  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $-\boldsymbol{S}$ .

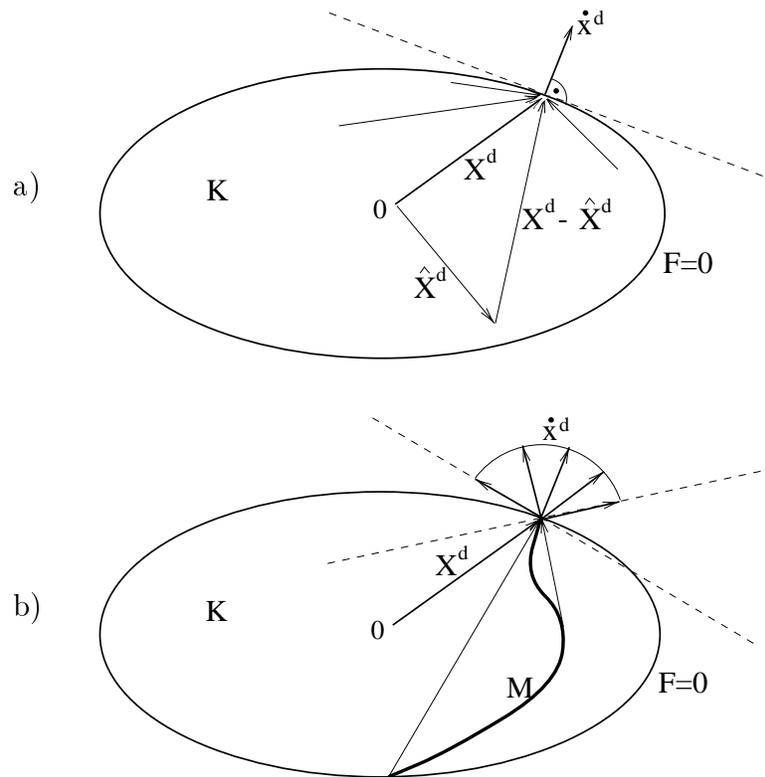


Abbildung 3.1: Schematischer Vergleich von a) maximaler Dissipation  
b) Ilyushins Bedingung

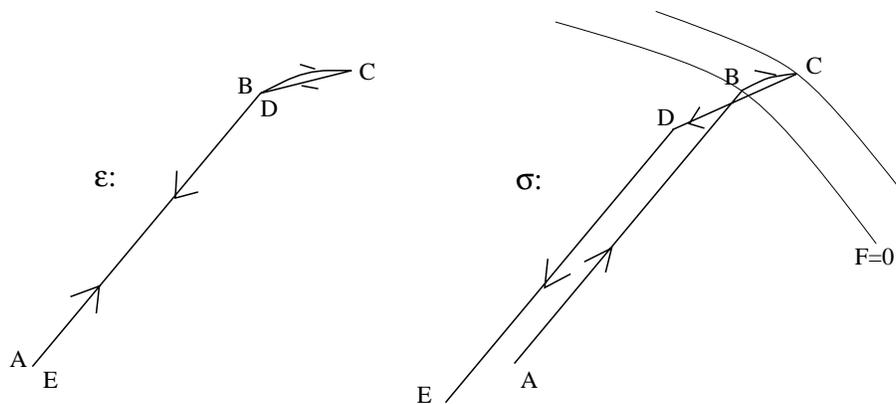


Abbildung 3.2: Belastungspfad:  $\epsilon$ : Dehnungsraum,  $\sigma$ : Spannungsraum

lastungspfad  $ABCDE$ , der sich aus elastischer Belastung  $AB$ , plastischer Verformung  $BC$  und elastischer Entlastung  $CDE$  zusammensetzt (Abb. 3.2). Die Dehnung soll bei Be- und Entlastung auf dem gleichen Weg geführt werden ( $\boldsymbol{\varepsilon}_A = \boldsymbol{\varepsilon}_E$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_B = \boldsymbol{\varepsilon}_D$ ).

Die Länge der Wege  $AB$  und  $BC$  wird so gewählt, daß die plastische Deformation  $BC$  sehr klein ist gegenüber der elastischen Belastung  $AB$ . Dann trägt der Integrationsweg  $BCD$  nur durch Terme zweiter und höherer Ordnung in  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_C \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_B$  zur Arbeit bei:

$$\begin{aligned} |W_{BCD}| &= \left| \int_{BCD} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \right| = \left| \int_{BC} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \int_{DC} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \right| \\ &\leq \int_{BC} \|\boldsymbol{\sigma}_{BC}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{DC}(\boldsymbol{\varepsilon})\| \|d\boldsymbol{\varepsilon}\| \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Entlastung erfolgt rein elastisch:

$$|W_{BCD}| \leq \int_{BC} \|\boldsymbol{\sigma}_{BC}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{e}_{DC}(\boldsymbol{\varepsilon})\| \|d\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad (3.10)$$

Mit (3.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} |W_{BCD}| &\leq \int_{BC} (c + \|\mathbf{C}\|) \|\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_C\| \|d\boldsymbol{\varepsilon}\| \\ &= \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^2) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Somit müssen nur die Integrationswege  $AB$  und  $DE$  berücksichtigt werden, um die Arbeit in erster Ordnung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} W &= \oint_{(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \int_{AB} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \int_{ED} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Integrationswege  $AB$  und  $ED$  sind identisch in der Dehnung, aber unterscheiden sich in den anderen Zustandsvariablen durch eine kleine Änderung, die während der plastischen Verformung  $BC$  erfolgte :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ED}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{p}_{AB}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta\mathbf{p} , & \mathbf{e}_{ED}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{e}_{AB}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \Delta\mathbf{p} , \\ \boldsymbol{\xi}_{ED}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \boldsymbol{\xi}_{AB}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta\boldsymbol{\xi} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Differenz der Integrale (3.12) kann in erster Ordnung durch die Ableitung des Integranden nach den Zustandsvariablen ausgedrückt werden:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_D \Leftrightarrow \mathbf{x}_B = (\Leftrightarrow\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{s}) \quad (3.14)$$

$$W = \Leftrightarrow\Delta\mathbf{x} \int_{AB} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{x}} d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{x}^2) \quad (3.15)$$

Stellt man die Spannung als Ableitung der freien Energie dar, so erhält man

$$W \approx \Leftrightarrow \Delta \mathbf{x} \int_{AB} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{e}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.16)$$

$$= \Leftrightarrow \Delta \mathbf{e} \int_{AB} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}^2} d\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \Delta \mathbf{s} \int_{AB} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{e}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.17)$$

$$= \Delta \mathbf{p} \int_{AB} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}^2} d\mathbf{e} \Leftrightarrow \Delta \mathbf{s} \int_{AB} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{s}} d\mathbf{e} \quad (3.18)$$

$$= \Delta \mathbf{p} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} \right]_A^B \Leftrightarrow \Delta \mathbf{s} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right]_A^B \quad (3.19)$$

$$= (\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \Delta \mathbf{p} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \Delta \mathbf{s} . \quad (3.20)$$

Für eine infinitesimale plastische Deformation  $BC$  folgt somit aus Ilyushins Postulat

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \dot{\mathbf{s}} \geq 0 . \quad (3.21)$$

Hierbei ist  $B$  ein beliebiger Zustand auf der Fließfläche. Zu gegebenem  $B$  gilt die Ungleichung für jeden Zustand  $A$ , der von  $B$  durch elastische Deformation erreichbar ist. Die zulässigen Zustände  $\{A\}$  haben den gleichen Wert der dissipativen Variablen  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{s}$ , unterscheiden sich aber in der elastischen Dehnung  $\mathbf{e}$ . Daher liegen sie sowohl im Raum der Zustandsvariablen als auch im Raum der dissipativen Kräfte auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , deren Dimension gleich der Anzahl der Komponenten der Dehnung bzw. Spannung ist.

Wenn keine gekoppelte innere Variable  $\mathbf{s}$  existiert, wie dies z.B. bei üblicher Plastizität mit isotroper Verfestigung der Fall ist, vereinfacht sich die Aussage von Ungleichung (3.21). Bei konstantem  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{r}$  ist auch  $\mathbf{R}$  konstant, da  $\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{e} = 0$  ist. Die Mannigfaltigkeit  $M$  der reversibel erreichbaren Zustände liegt auf einer Schnittebene zu konstantem  $\mathbf{R}$  im Raum der Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R})$ . Aus Ilyushins Postulat folgt somit die übliche Normalenregel im Spannungsraum.

Dieser Spezialfall besitzt zudem die Eigenschaft, daß die Menge  $M$  konvex ist. Wenn man nur Zustände  $A$  aus einer infinitesimalen Umgebung  $U \subset M$  des Punktes  $B$  betrachtet, liefert die Ungleichung (3.21) daher die gleiche Restriktion für die Evolutionsgleichungen, als wenn man die gesamte Mannigfaltigkeit  $M$  berücksichtigt. Die Betrachtung der gesamten Mannigfaltigkeit oder nur einer Umgebung von  $B$  kann als globale oder lokale Formulierung von Ilyushins Bedingung verstanden werden, ähnlich wie man globale und lokale Extrema oder globale und lokale Stabilität unterscheidet. Im allgemeinen ist  $M$  jedoch nicht konvex, und die lokale und globale Form von Ilyushins Bedingung müssen unterschieden werden.

Das Resultat (3.21) von Ilyushins Irreversibilitätspostulat ähnelt dem Prinzip der maximalen Dissipation (2.23), das für die hier betrachtete Modellklasse die

Gestalt

$$(\sigma_B \Leftrightarrow \sigma_A) \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \dot{\mathbf{s}} \Leftrightarrow (\mathbf{R}_B \Leftrightarrow \mathbf{R}_A) \dot{\mathbf{r}} \geq 0 \quad \forall A \in K \quad (3.22)$$

annimmt. Diese Variationsungleichung unterscheidet sich von Ilyushins Bedingung (3.21) dadurch, daß die ungekoppelten inneren Variablen  $\mathbf{r}$  in gleicher Weise wie die gekoppelten Variablen  $\mathbf{s}$  berücksichtigt werden. Ferner ist bei dem Postulat der maximalen Dissipation der Zustand  $A$  nicht auf die Mannigfaltigkeit  $M$  beschränkt, sondern die Ungleichung (3.22) ist gültig für jeden Zustand  $A$  im elastischen Bereich ( $F(A) \leq 0$ ). Da die Bedeutung dieses Unterschiedes nicht unmittelbar klar ist, soll er an einem stark vereinfachten Beispiel erläutert werden.

### Beispiel

Das Beispiel soll den Unterschied zwischen dem Prinzip der maximalen Dissipation und der aus Ilyushins Irreversibilitätspostulat abgeleiteten Variationsungleichung veranschaulichen. Diese Betrachtung gilt ebenso für Druckers Stabilitätspostulat, aus dem die gleiche Bedingung wie aus dem Irreversibilitätspostulat gewonnen werden kann (siehe Abschnitt 3.1.3).

Wir betrachten ein elastoplastisches Modell mit einer skalaren inneren Variable  $s$ , die mit der elastischen Dehnung gekoppelt ist. Um die Darstellung zu vereinfachen, seien Spannung und Dehnung zweidimensionale Vektoren.

$$\mathbf{x} = (e_1, e_2, p_1, p_2, s), \quad \mathbf{X}^d = (\sigma_1, \sigma_2, \Leftrightarrow S) \quad (3.23)$$

Als verallgemeinerte Fließfläche im Raum der dissipativen Kräfte wählen wir eine Kugel (Abb. 3.3,3.4):

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \Leftrightarrow S) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + S^2 \Leftrightarrow 1 \quad (3.24)$$

Zu einem willkürlich gewählten Punkt  $B$  auf der Kugel sollen nun die Restriktionen bestimmt werden, die das Irreversibilitätspostulat und die maximale Dissipation der Richtung des Flusses  $(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{s})$  auferlegen.

Da keine ungekoppelte Variable  $\mathbf{r}$  vorliegt, erhalten wir in beiden Fällen aus (3.7) bzw. (3.22) dieselbe Ungleichung:

$$(\sigma_{1B} \Leftrightarrow \sigma_{1A}) \dot{p}_1 + (\sigma_{2B} \Leftrightarrow \sigma_{2A}) \dot{p}_2 + (\Leftrightarrow S_B + S_A) \dot{s} \geq 0 \quad (3.25)$$

Anschaulich bedeutet diese Bedingung, daß der Vektor  $B \Leftrightarrow A$  einen spitzen Winkel mit dem Vektor der dissipativen Flüsse am Punkt  $B$  bilden muß.

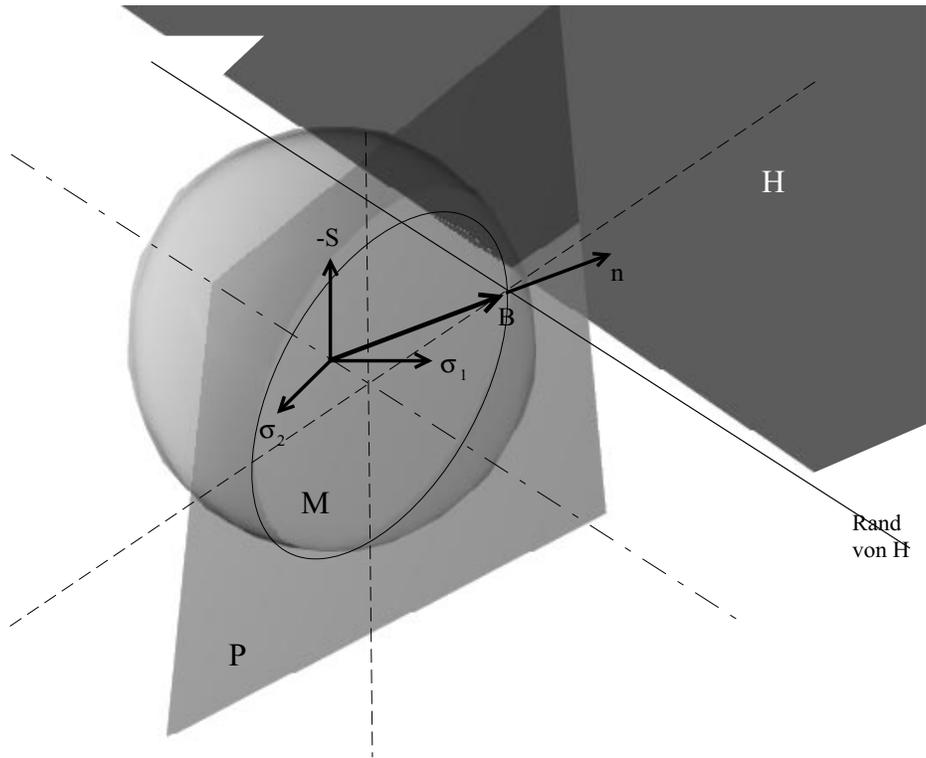


Abbildung 3.3: Beispiel für den Unterschied zwischen Ilyushins Postulat und maximaler Dissipation

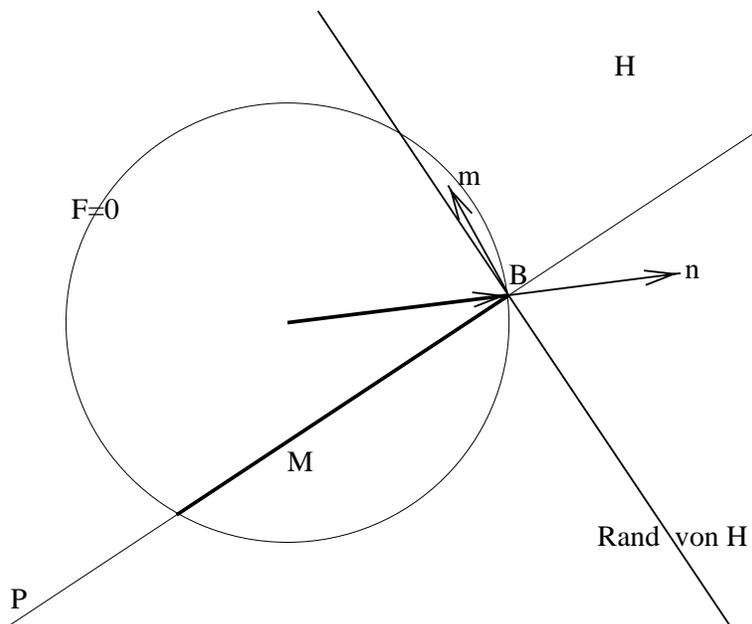


Abbildung 3.4: Schnitt mit der Ebene, in der die Halbebene  $H$  liegt

Im Falle maximaler Dissipation gilt (3.25) für jeden Punkt  $A$  innerhalb von der durch die Fließgrenze begrenzten Kugel. Daher ist die Richtung des Flusses eindeutig bestimmt:  $\dot{\mathbf{x}}^d$  zeigt in Richtung der Normalen  $\mathbf{n}$  an der Fließfläche im Punkt  $B$  (Abb. 3.3).

Bei Ilyushins Postulat (bzw. Druckers Stabilitätsbedingung) sind die Punkte  $A$  hingegen auf diejenigen Zustände beschränkt, die von  $B$  durch elastische Deformation erreichbar sind. In einem rein elastischen Prozeß sind die dissipativen Variablen  $p_1$ ,  $p_2$  und  $s$  konstant, während sich  $e_1$  und  $e_2$  ändern können. Somit sind die Kräfte  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $S$  ebenfalls auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  eingeschränkt. In unserem Beispiel sei diese Mannigfaltigkeit der Schnitt der Kugel mit einer Ebene  $P$ . Die Ungleichung (3.25) läßt dann solche Richtungen von  $\dot{\mathbf{x}}^d$  zu, die als Vektor am Punkt  $B$  eingezeichnet in einer Halbebene  $H$  liegen. Diese Halbebene  $H$  ist senkrecht zur Ebene  $P$ , berührt die Mannigfaltigkeit  $M$  im Punkt  $B$  und ist nach außen gerichtet.

Die Normale  $\mathbf{n}$  liegt in der Halbebene  $H$ , d.h. ein maximal dissipatives Modell erfüllt die aus den Postulaten von Ilyushin und Drucker resultierende Bedingung. Andererseits gibt es offensichtlich Richtungen der Flüsse, welche die die Normalenregel der maximalen Dissipation verletzen, aber von den Integralungleichungen von Ilyushin und Drucker zugelassen werden. Letztere erlauben sogar Flüsse, die von der Fließfläche nach innen zeigen, denn die Halbebene  $H$  schneidet die Kugel (Abb. 3.4, Fluß in Richtung  $m$ ).<sup>3</sup>

Projiziert man die Halbebene  $H$  senkrecht in den Spannungsraum ( $S = S_B$ ), so erhält man wiederum eine Halbebene. Dies bedeutet, daß auch für die plastische Dehnungsänderung  $\dot{\mathbf{p}}$  ein ganzes Intervall von Richtungen zulässig ist. Aus Ilyushins Bedingung folgt somit bei diesem Beispiel keine Orthogonalität im Spannungsraum. Um die Normalenregel im Spannungsraum zu erhalten, müßte die Mannigfaltigkeit  $M$  eine andere Gestalt haben. Wenn die Ebene  $P$  senkrecht auf der  $S$ -Achse stehen würde, wäre die Halbebene  $H$  senkrecht auf dem Spannungsunterraum, und die Projektion ergäbe eine Halbgerade, d.h. eine eindeutige Richtung für  $\dot{\mathbf{p}}$ .

### Normalenregel im Spannungsraum

Im allgemeinen hängt die Frage, ob Ilyushins Bedingung eine Normalenregel im Spannungsraum impliziert, von der Orientierung des Schnitts  $Z$  zwischen Fließfläche  $F = 0$  und Mannigfaltigkeit  $M$  in der Umgebung des Punktes  $B$  ab. Diese Abhängigkeit (3.34) soll nun abgeleitet werden.

---

<sup>3</sup>Eine solche Richtung der dissipativen Flüsse wird auch nicht generell durch die aus Druckers Postulat folgende lokale Stabilitätsbedingung (2.55b) unterbunden [7].

Die Normalenregel gilt im Spannungsraum, wenn die Projektion aller zulässigen Flüsse auf den Spannungsunterraum ( $\mathbf{S} = \text{const.}$ ) eine (Halb-)Gerade ergibt. Dies kann man auch folgendermaßen ausdrücken: Bei erfüllter Normalenregel im Spannungsraum muß eine Orthonormalbasis  $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_m\}$  des Raumes der Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S})$  existieren, so daß  $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_n\}$  eine Basis des Spannungsraumes ist und  $\{\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_m\}$  die Richtungen aller zulässigen Flüsse beinhaltet. Die Richtung der plastischen Dehnung ist dann eindeutig durch  $\boldsymbol{\sigma}_n$  festgelegt.

Wenn wir die Ungleichung (3.22) auf Punkte  $A \in Z$  in der Schnittmenge in einer infinitesimalen Umgebung von  $B$  anwenden, erhalten wir die Aussage, daß die Richtung der Flüsse senkrecht auf allen an der Schnittmenge  $Z$  im Punkt  $B$  tangentialen<sup>4</sup> Vektoren sein muß.

Um die zulässigen Flüsse auf diese Richtungen zu beschränken, müssen die Vektoren  $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_{n-1}\}$  eine Basis für den Raum aller an der Schnittmenge  $Z$  im Punkt  $B$  tangentialen Vektoren sein. Dies bedeutet, daß die an  $Z$  tangentialen Vektoren im Spannungsunterraum liegen müssen und keine Komponente in Richtung der inneren Variablen  $\mathbf{S}$  besitzen dürfen.

Diese Bedingung soll nun durch die Fließfunktion und die Konstitutivgleichungen ausgedrückt werden. Bei einem elastischen, also reversiblen Prozeß sind die dissipativen Variablen  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{r}$  konstant, während sich die elastische Dehnung  $\mathbf{e}$  ändert. Die zur ungekoppelten Variable  $\mathbf{r}$  adjungierte Kraft  $\mathbf{R}$  ist nur von  $\mathbf{r}$  abhängig und somit konstant. Die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  ist eine Funktion von  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{s}$ , die bezüglich der elastischen Dehnung invertierbar ist. Somit sind die Zustände  $A$  in der Mannigfaltigkeit  $M$  der elastisch zugänglichen Zustände durch die Spannung eindeutig bestimmt, und alle Kräfte für diese Zustände können als Funktion der Spannung geschrieben werden.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{s}, \mathbf{r} = \text{const.} \quad (3.28)$$

Die Schnittmenge  $Z$  wird beschrieben durch die Gleichungen

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{R}) = 0, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) . \quad (3.29)$$

Die Bedingungen für tangentiale Vektoren  $(d\boldsymbol{\sigma}, d\mathbf{S})$  an  $Z$  lauten (im Punkt  $B$ )

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) d\boldsymbol{\sigma} = 0 , \quad (3.30)$$

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} . \quad (3.31)$$

---

<sup>4</sup>Falls  $Z$  in  $B$  nicht glatt ist, sondern eine Ecke bzw. Kante besitzt, bestimmt selbst das Prinzip der maximalen Dissipation die Richtung von  $\dot{\mathbf{x}}^d$  nicht eindeutig.

Es liegen genau dann alle Vektoren  $(d\boldsymbol{\sigma}, d\mathbf{S})$  im Spannungsunterraum ( $d\mathbf{S} = 0$ ), wenn

$$\text{Kern} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \subseteq \text{Kern} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right). \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \text{Kern} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \subseteq \text{Kern} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (3.33)$$

Bezeichnet man mit  $n$  die Anzahl der Komponenten von  $\boldsymbol{\sigma}$ , so ist die Dimension der beiden Kerne jeweils gleich  $n \Leftrightarrow 1$  oder  $n$ . Daher erhalten wir als notwendige Bedingung dafür, daß aus Ilyushins Postulat die Normalität im Spannungsraum folgt,

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \propto \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.34)$$

Um diese Bedingung für alle Punkte  $B$  auf der Fließfläche zu erfüllen, darf die Fließfunktion entweder nur von der Spannung oder nur von der Kraft  $\mathbf{S}$  abhängen, oder die direkte Spannungsabhängigkeit muß die gleiche Form haben wie die indirekte Abhängigkeit über  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})$ .

### 3.1.3 Druckers Postulat

Durch die Betrachtung der Stabilitätsbedingung für einen speziellen Lastzyklus kann unter Berücksichtigung von ausschließlich Termen erster Ordnung dieselbe Variationsungleichung (3.7) wie aus Ilyushins Postulat gewonnen werden. Die Ableitung, die in diesem Abschnitt kurz skizziert werden soll, erfolgt analog zur Behandlung des Irreversibilitätspostulats. Anstatt Druckers Postulat direkt zu verwenden, gehen wir von HILLS Integralungleichung aus. An die Stelle der freien Energie tritt eine Legendre-Transformierte. Im Anschluß an die Ableitung von (3.7) sollen die Terme zweiter Ordnung in HILLS Integral ausgewertet werden, woraus wir eine lokale Stabilitätsbedingung erhalten.

#### Auswertung der Terme erster Ordnung

HILLS Ungleichung

$$\oint_{(\boldsymbol{\sigma})} \boldsymbol{\varepsilon} d\boldsymbol{\sigma} \leq 0 \quad (3.35)$$

besitzt gegenüber dem äquivalenten Druckerschen Postulat den Vorzug, daß der Integrationsweg bezüglich der Integrationsvariablen geschlossen ist. Im Gegensatz zu Ilyushins Postulat muß der Integrationsweg diesmal im Spannungsraum

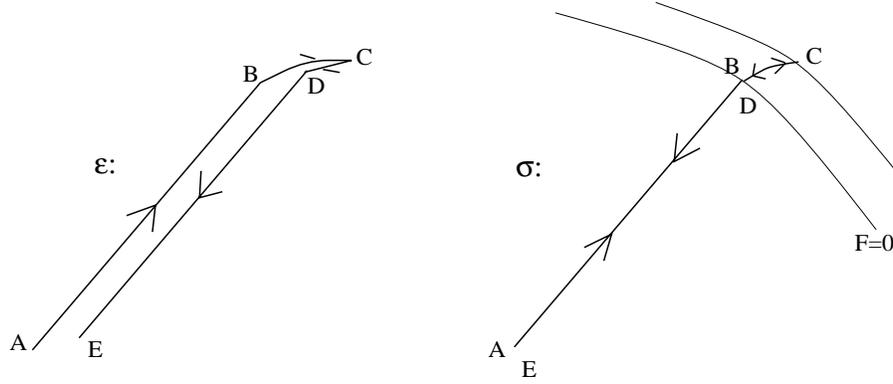


Abbildung 3.5: Belastungspfad: a) Dehnungsraum, b) Spannungsraum

geschlossen sein. Wiederum wählen wir einen Lastzyklus, der aus einer elastischen und einer viel kleineren plastischen Deformation besteht (Abb. 3.5).

Um den Term erster Ordnung zu ermitteln, brauchen nur die elastischen Belastungspfade  $AB$  und  $DE$  berücksichtigt zu werden. Der Weg  $BCD$  wird im nächsten Unterkapitel betrachtet werden, um die lokale Stabilitätsungleichung in Analogie zu (2.55b) abzuleiten.

$$\oint_{(\sigma)} \varepsilon d\sigma = \int_{AB} (\varepsilon_{AB} \Leftrightarrow \varepsilon_{ED}) d\sigma + \mathcal{O}(\Delta\varepsilon^2) \quad (3.36)$$

Die Spannung ist an den entsprechenden Stellen der Integrationswege  $AB$  und  $ED$  gleich, aber die inneren Variablen unterscheiden sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{ED} &= \sigma_{AB}, & \mathbf{p}_{ED} &= \mathbf{p}_{AB} + \Delta\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\xi}_{ED} &= \boldsymbol{\xi}_{AB} + \Delta\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Gesamtdehnung setzt sich aus plastischer und elastischer Dehnung zusammen, von denen letztere durch die Ableitung der Gibbschen freien Enthalpie  $h$  ausgedrückt werden kann.

$$h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{q} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} = (\Leftrightarrow \mathbf{e}, 0, \mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{p} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.41)$$

Die Differenz der elastischen Dehnungen wird durch die Ableitung nach den Zu-

standsvariablen  $\mathbf{q}$  approximiert.

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_D \Leftrightarrow \mathbf{q}_B = (0, \Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{s}) \quad (3.42)$$

$$\oint_{(\sigma)} \varepsilon d\sigma \approx \Leftrightarrow \Delta \mathbf{q} \int_{AB} \left( \mathbf{p} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{q} \partial \sigma} \right) d\sigma \quad (3.43)$$

$$= \Leftrightarrow \Delta \mathbf{p} [\sigma]_A^B + \Delta \mathbf{s} \left[ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{s}} \right]_A^B \quad (3.44)$$

Im Grenzfall eines infinitesimalen plastischen Anteils am Weg folgt also aus Druckers Postulat ebenfalls die Ungleichung (3.7)

$$(\sigma_B \Leftrightarrow \sigma_A) \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \dot{\mathbf{s}} \geq 0 . \quad (3.45)$$

### Auswertung der Terme zweiter Ordnung: Stabilitätsbedingung

Nachdem für Ilyushins Irreversibilitätspostulat und Druckers Stabilitätsbedingung die Terme erster Ordnung ausgewertet wurden, soll nun bei Druckers Postulat der Term zweiter Ordnung berücksichtigt werden, welcher im Falle einfacher elastoplastischer Modelle eine lokale Stabilitätsbedingung (2.55b) ergeben hatte. Dieser Anteil zweiter Ordnung spielt dann eine Rolle, wenn wir  $\sigma_A = \sigma_B$  wählen, so daß der Term erster Ordnung verschwindet. Das heißt, es wird der Belastungspfad  $BCD$  bestehend aus plastischer Belastung  $BC$  und elastischer Entlastung  $CD$  betrachtet.

Anstelle von Druckers Bedingung soll wiederum HILLS Integralungleichung (3.35) verwendet werden. Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.1.1 getroffenen Annahmen setzen wir voraus, daß die Dehnung  $\varepsilon(\sigma)$  sowohl für die Be- als auch für die Entlastung in eine Taylor-Reihe (mit positivem Konvergenzradius) um  $C$  entwickelt werden kann. Dann ist

$$\oint_{(\sigma)} \varepsilon d\sigma = \int_{CB} (\varepsilon_{CD} \Leftrightarrow \varepsilon_{CB}) d\sigma \quad (3.46)$$

$$= \int_{CB} \left[ \left( \varepsilon_C + \frac{d\varepsilon_{CD}}{d\sigma} \Big|_C (\sigma \Leftrightarrow \sigma_C) + O(\Delta\sigma^2) \right) + \Leftrightarrow \left( \varepsilon_C + \frac{d\varepsilon_{CB}}{d\sigma} \Big|_C (\sigma \Leftrightarrow \sigma_C) + O(\Delta\sigma^2) \right) \right] d\sigma \quad (3.47)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{d\varepsilon_{CD}}{d\sigma} \Big|_C \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon_{CB}}{d\sigma} \Big|_C \right) \Delta\sigma^2 + O(\Delta\sigma^3) \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{2} (\varepsilon_B \Leftrightarrow \varepsilon_D) \Delta\sigma + O(\Delta\sigma^3) . \quad (3.49)$$

Die Dehnungsdifferenz wird durch Ableitungen der freien Enthalpie ausgedrückt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_B = (\boldsymbol{e}_D \Leftrightarrow \boldsymbol{e}_C) + (\boldsymbol{p}_D \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_C) \Leftrightarrow (\boldsymbol{e}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{e}_C) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_C) \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} &= \Leftrightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \Big|_C (\boldsymbol{\sigma}_D + \boldsymbol{\sigma}_C) + \frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \Big|_C (\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_C) + \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{s} \partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_C (\boldsymbol{s}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_C) + \Delta \boldsymbol{p} + \mathcal{O}(\Delta \boldsymbol{\sigma}^2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$= \Delta \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{s} \Big|_C + \mathcal{O}(\Delta \boldsymbol{\sigma}^2) \quad (3.52)$$

$$\oint_{(\boldsymbol{\sigma})} \boldsymbol{\varepsilon} d\boldsymbol{\sigma} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \Delta \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{s} \right) \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{O}(\Delta \boldsymbol{\sigma}^3) \quad (3.53)$$

$$= \Leftrightarrow \Delta \boldsymbol{p} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{S} \Delta \boldsymbol{s} + \mathcal{O}(\Delta \boldsymbol{\sigma}^3) \quad (3.54)$$

Aus der Hillschen Bedingung, daß das Ringintegral nicht positiv sein darf, folgt somit

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{S}} \dot{\boldsymbol{s}} \geq 0 . \quad (3.55)$$

Im Vergleich zu Ungleichung (2.55b) ist zu dem Term  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{p}}$ , der die Stabilität der plastischen Materialantwort charakterisiert, der Beitrag  $\dot{\boldsymbol{S}} \dot{\boldsymbol{s}}$  der zusätzlichen inneren Variablen  $\boldsymbol{s}$  hinzugetreten. Die mit der elastischen Dehnung nicht gekoppelten Variablen  $\boldsymbol{r}$  erscheinen hingegen nicht.

## 3.2 Konsequenzen für die Schadensmechanik

Nachdem die Postulate von Ilyushin und Drucker für eine relativ große Klasse von Materialmodellen untersucht wurden, sollen die Ergebnisse nun auf die Schadensmechanik angewendet werden. Es wurde gezeigt, daß die Postulate zu einer anderen Bedingung als der Normalenregel im Spannungsraum führen, wenn eine innere Variable mit der elastischen Dehnung in der elastischen Energie gekoppelt ist, d.h.  $\partial^2 f / \partial \boldsymbol{e} \partial \boldsymbol{s} \neq 0$ . Dies ist bei schadensmechanischen Modellen der Fall, da Schädigung einen Verlust an Steifigkeit bedeutet.

Zunächst soll Ilyushins Postulat auf elastische Materialien mit Schädigung angewendet werden, bevor der Fall von Elastoplastizität und Schädigung untersucht wird. Abschließend werden speziell nicht-assozierte Fließregeln behandelt. Es kann gezeigt werden, daß diese üblicherweise das Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat verletzen.

### 3.2.1 Elastizität und Schädigung

Für elastische Materialmodelle mit Schädigung folgt aus Ilyushins Postulat ebenso wie aus der Bedingung der maximalen Dissipation eine Normalenregel im Raum der Schädigungskraft:

Der Zustand des elastischen Materials sei bestimmt durch die Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , eine Schädigungsvariable  $\mathbf{D}$ , die ein Tensor oder eine skalare Größe sein darf, sowie eventuell innere Variablen  $\mathbf{r}$ , die nicht in die elastische Energie eingehen. Die konjugierten Kräfte werden definiert durch

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbf{r}) = f_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) + f_i(\mathbf{D}, \mathbf{r}) \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{Y} = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}}, \quad \mathbf{R} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.57)$$

Einige schadensmechanische Modelle definieren eine Schädigungsfläche im Raum der Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, Y, \Leftrightarrow \mathbf{R})$  in Analogie zur Fließfläche bei der Plastizität [22, 36, 63, 100, 41]. Die Betrachtung der Terme erster Ordnung in Ilyushins bzw. Druckers Postulat (2.53b) mit  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  und  $\mathbf{s} = \mathbf{D}$  ergibt dann die Variationsungleichung

$$(\mathbf{Y}_B \Leftrightarrow \mathbf{Y}_A) \dot{\mathbf{D}} \geq 0. \quad (3.58)$$

Hierbei ist  $B$  ein Zustand auf der Schädigungsfläche, bei dem die Schädigungsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{D}}$  herrscht, und die Ungleichung muß erfüllt werden für beliebige Zustände  $A$  im rein elastischen Bereich. Also folgt aus der Stabilitäts- und Irreversibilitätsbedingung eine Normalenregel im Raum der Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$ . Die gleiche Restriktion für die Evolutionsgleichungen erhält man aus dem Prinzip der maximalen Dissipation (3.22).

Im Falle isotroper Schädigung, d.h.

$$f_e(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.59)$$

$$Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}{(1 \Leftrightarrow D)^2}, \quad (3.60)$$

impliziert die Bedingung (3.58) zusammen mit der physikalischen Forderung  $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$ , daß  $Y$  auf der Fließfläche konstant ist. Also darf  $F$  nicht (wie in [63, 100]) direkt von der Spannung abhängen:

$$F = F(Y, R; D, r). \quad (3.61)$$

### 3.2.2 Elastoplastizität und Schädigung

Aus Ilyushins Postulat und Druckers Stabilitätsbedingung folgt für einfache elastoplastische Modelle die Normalenregel im Spannungsraum, und im Falle von

Elastizität mit Schädigung folgt eine Normalenregel im Raum der Schädigungskraft. Daher könnte man vermuten, bei einem Modell für Elastoplastizität mit Schädigung eine Normalenregel im Raum von Spannung und Schädigungskraft, d.h. aller dissipativen Kräfte, oder in den beiden Unterräumen zu erhalten. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie im folgenden gezeigt wird.

Als Zustandsvariablen wählen wir die elastische und plastische Dehnung  $\mathbf{e}, \mathbf{p}$ , eine skalare oder tensorielle Schädigungsvariable  $\mathbf{D}$  und eine ebenfalls skalare oder tensorielle Verfestigungsvariable  $\mathbf{r}$ . Die freie Energie sei unabhängig von  $\mathbf{p}$  und in zwei Anteile additiv zu zerlegen:

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, \mathbf{D}, \mathbf{r}) = f_e(\mathbf{e}, \mathbf{D}) + f_r(\mathbf{r}) \quad (3.62)$$

Die konjugierten Kräfte werden mit  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Leftrightarrow \mathbf{Y}$  und  $\mathbf{R}$  bezeichnet. (In der Notation von Abschnitt 3.1 ist  $\mathbf{D}$  die gekoppelte Variable  $\mathbf{s}$ , und  $\mathbf{Y}$  entspricht  $\Leftrightarrow \mathbf{S}$ .)

Für dieses Modell erhält die aus Ilyushins und Druckers Postulaten resultierende Ungleichung (3.7) folgende Gestalt:

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{Y}_B \Leftrightarrow \mathbf{Y}_A) \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (3.63)$$

Diese Beziehung gilt für alle Zustände  $A$ , die von  $B$  durch elastische Verformung erreichbar sind.

Im Abschnitt 3.1.2 wurde festgestellt, daß eine Normalenregel im Spannungsraum aus (3.63) folgt, wenn (3.34) erfüllt ist. Wenn wir vom einfachsten Fall absehen, in dem die Fließfunktion nur von der Schädigungskraft oder nur von der Spannung (vgl. Abschnitt 3.2.3) abhängt, so lautet die Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \propto \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.64)$$

Diese Proportionalität zwischen der direkten Abhängigkeit der Fließfunktion von der Spannung und der indirekten Abhängigkeit über die Schädigungskraft besteht i.Allg. nicht.

Im Fall isotroper Schädigung beispielsweise lautet die Beziehung zwischen Spannung und Schädigungskraft

$$f_e(\mathbf{e}, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (3.65)$$

$$Y(\boldsymbol{\sigma}, D) = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}{(1 \Leftrightarrow D)^2} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}{(1 \Leftrightarrow D)^2}. \quad (3.67)$$

In die Schädigungskraft bzw. deren Ableitung geht sowohl die hydrostatische Spannung als auch der Spannungsdeviator ein. Wenn die Fließfunktion jedoch auf einer von-Mises-Fließregel basiert, hängt sie nicht direkt von der hydrostatischen Spannung ab, so daß (3.64) nicht erfüllt werden kann. An diesem Beispiel wird deutlich, daß für schadensmechanische elastoplastische Materialmodelle nur in Ausnahmefällen die Normalenregel im Spannungsraum aus dem Irreversibilitäts- oder Stabilitätspostulat abgeleitet werden kann.

Ebenso läßt sich zeigen, daß auch die Normalenregel im Raum der Schädigungskraft, die im Falle von Elastizität mit Schädigung aus Ilyushins Postulat folgt, bei komplexeren elastoplastischen Schädigungsmodellen nicht mehr impliziert wird. Stattdessen erhalten wir nur die Plastizität und Schädigung verknüpfende Ungleichung (3.63).

### 3.2.3 Nichtassozierte Fließregeln

Als Spezialfall sollen nun nicht-assozierte Fließregeln betrachtet werden, die bei vielen Modellen für die Schädigung von elastoplastischen Materialien eingesetzt werden [57, 9, 87, 109]. Eine nicht-assozierte Fließregel soll hier bedeuten, daß die dissipativen Flüsse nicht senkrecht auf der Fließfläche im Raum aller Kräfte stehen. Die Zeitableitung der plastischen Dehnung kann dennoch orthogonal zur Fließfläche im Spannungsraum sein.

Zunächst soll gezeigt werden, daß die üblichen nicht-assozierten schadensmechanischen Modelle die Postulate von Ilyushin und Drucker nicht erfüllen. Die Bedeutung der aus den Postulaten folgenden Ungleichung (3.7) für diese Modellklasse wird an einem Beispiel veranschaulicht. Die aus der Arbeit zweiter Ordnung abgeleitete lokale Stabilitätsbedingung (3.55) wird ebenfalls durch die nicht-assozierten Modelle verletzt. Abschließend soll die Frage untersucht werden, wie schadensmechanische Modelle zu konstruieren sind, die die Stabilitätsbedingung, nicht aber das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllen.

#### Überprüfung der Bedingungen von Ilyushin und Drucker

Üblicherweise werden die nicht-assozierten schadensmechanischen Modelle gerade so auf einem assoziierten elastoplastischen Modell aufgebaut, daß die Normalenregel im Spannungsraum erhalten bleibt. Hierzu wird ein plastisches Potential aus der elastoplastischen Fließfunktion und einem Schädigungsterm gebildet:

$$G(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}, R, \mathbf{X}, \mathbf{D}) = F(\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \mathbf{X}, R, \mathbf{D}) + G_Y(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) \quad (3.68)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.69)$$

$$\dot{r} = \lambda \frac{\partial G}{\partial(\Leftrightarrow R)} = \lambda \frac{\partial F}{\partial(\Leftrightarrow R)} \quad (3.70)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda \frac{\partial G}{\partial(\Leftrightarrow \mathbf{X})} = \lambda \frac{\partial F}{\partial(\Leftrightarrow \mathbf{X})} \quad (3.71)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}} = \lambda \frac{\partial G_Y}{\partial \mathbf{Y}} \quad (3.72)$$

$$F \leq 0, \quad \lambda F = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.73)$$

Die Zustandsvariable  $\boldsymbol{\alpha}$  und ihre konjugierte Kraft  $\mathbf{X}$  beschreiben die kinematische Verfestigung,  $r$  und  $R$  sind für die isotrope Verfestigung verantwortlich. Sowohl  $r$  als auch  $\alpha$  sind in der freien Energie von der elastischen Dehnung entkoppelt.

Zunächst betrachten wir nur den Fall **isotroper Schädigung** [57, 9, 87]. Dann ist die aus Druckers und Ilyushins Postulaten folgende Bedingung

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\mathbf{p}} + (Y_B \Leftrightarrow Y_A) \dot{D} \geq 0 \quad (3.74)$$

eine Variationsungleichung im Raum der Spannungskomponenten und der skalaren Schädigungskraft  $Y$ . Zu einem gegebenem Zustand  $B$  auf der Fließfläche gilt die Ungleichung für jeden von  $B$  durch elastische Deformation erreichbaren Zustand  $A$ . Die Mannigfaltigkeit  $M$  dieser Zustände wird durch (3.66) beschrieben. Da die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  positiv definit ist, ist  $M$  geometrisch ein Hyperparaboloid, dessen Achse auf der  $Y$ -Achse liegt.

Die Fließfläche im  $\boldsymbol{\sigma}$ - $Y$ -Raum steht senkrecht auf dem Spannungsunterraum, weil  $F$  nicht von  $Y$  abhängt. Der Schnitt  $Z$  von Fließfläche und Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \Leftrightarrow 1$ , wobei  $n$  die Anzahl der Komponenten von  $\boldsymbol{\sigma}$  bezeichnet.

Wie in Abschnitt 3.1.2 gezeigt wurde, sind die zulässigen Richtungen der dissipativen Flüsse  $(\dot{\mathbf{p}}, \dot{D})$  senkrecht auf allen an der Schnittmenge  $Z$  tangentialen Vektoren. In diesem Fall sind sie also auf eine (zweidimensionale) Ebene  $E$  beschränkt. Eine zulässige Richtung ist immer die Normale auf der Fließfläche. Damit die durch die nicht-assozierte Fließregel bestimmte Richtung, deren  $\boldsymbol{\sigma}$ -Komponente ebenfalls senkrecht auf der Fließfläche steht, auch mit Ilyushins Postulat verträglich ist, muß also die  $Y$ -Achse in der Ebene  $E$  liegen. Gemäß (3.32) erfordert dies

$$\text{Kern} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \subseteq \text{Kern} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (3.75)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \propto \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} . \quad (3.76)$$

Die Schädigungskraft läßt sich im isotropen Fall als Funktion von hydrostatischer und deviatorischer Spannung ( $\sigma_H, \boldsymbol{\sigma}'$ ) darstellen:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{1}{E(1 \Leftrightarrow D)^2} \left( \frac{2}{3} (1 + \nu) \sigma_{\text{eq}}^2 + 3(1 \Leftrightarrow 2\nu) \sigma_m^2 \right) \quad (3.77)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \sigma_H \mathbf{1} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}'} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{1 + \nu}{E(1 \Leftrightarrow D)^2} \boldsymbol{\sigma}' \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_m} = \frac{3(1 \Leftrightarrow 2\nu) \sigma_m}{E(1 \Leftrightarrow D)^2} \quad (3.82)$$

Für  $\nu \approx 1/3$  gehen die hydrostatische und deviatorische Spannung in etwa gleichem Maße in die Schädigungskraft ein. Die Fließfunktion hingegen hängt gewöhnlich im wesentlichen vom Spannungsdeviator ab, so daß die Proportionalität (3.76) nicht erfüllt werden kann.

Hiermit wurde gezeigt, daß alle üblichen isotropen, nicht-assozierten schadensmechanischen Modelle, die die Orthogonalität im Spannungsraum aufrecht erhalten, die Postulate von Ilyushin und Drucker verletzen.

Für **anisotrope Schädigung** läßt sich ein entsprechender allgemeiner Nachweis nicht so leicht führen. Die Stabilitäts- und Irreversibilitätsbedingungen erlauben in diesem Fall dissipative Flüsse, die in einer Mannigfaltigkeit mit einer Dimension größer als zwei liegen. Die Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$  wird zu einer tensoriellen Größe, so daß der Schluß von (3.75) auf (3.76) nicht mehr möglich ist. Dennoch stellen die Postulate eine Restriktion dar, die von nicht-assozierten Modellen im Gegensatz zu Modellen mit maximaler Dissipation nicht a priori erfüllt wird.

Die Überprüfung der Postulate von Ilyushin und Drucker ist somit bei anisotropen Modellen im Einzelfall vorzunehmen und stellt eine nicht triviale Aufgabe dar. Die größere Komplexität des anisotropen Falls ist schon daran zu erkennen, daß auch im von der Schädigung unabhängigen Teil der Modelle Unstimmigkeiten leicht übersehen werden können. WOHUA und VALLIAPPAN schlagen in [109] ein Modell für anisotrope Schädigung elastoplastischer Materialien vor, das auf folgender Fließfunktion beruht:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{R}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}_f \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{K} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow (1 + R_{\text{eq}}^2(\mathbf{R})) \quad (3.83)$$

Hierbei bezeichnet  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  eine effektive Spannung, auf deren Definition hier nicht näher eingegangen werden soll. Die Tensoren  $\mathbf{K}_f$  und  $\mathbf{K}$ , welche die Festigkeits-eigenschaften angeben, werden von den Autoren nur für den ebenen Spannungs-

und Verzerrungszustand angegeben. Im ebenen Spannungszustand lauten diese in Voigt-Notation

$$\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_{1t} F_{1c}} & \frac{-1}{2 F_{1t} F_{1c}} & 0 \\ \frac{-1}{2 F_{1t} F_{1c}} & \frac{1}{F_{2t} F_{2c}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{12}^2} \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{K} = \left( \frac{F_{1t} - F_{1c}}{F_{1t} F_{1c}} \quad \frac{F_{2t} - F_{2c}}{F_{2t} F_{2c}} \quad 0 \right)^T, \quad (3.85)$$

wobei  $F_{1t}$ ,  $F_{1c}$ ,  $F_{2t}$ ,  $F_{2c}$ ,  $F_{12}$  die Zug-, Druck- und Scherfestigkeiten bezeichnen. Es fällt auf, daß die quadratische Form  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}_f \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  nicht invariant gegen die Vertauschung der Achsen ist. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, daß sie sowohl für  $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_{12}) = (0, \tilde{\sigma}, 0)$  als auch für  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}, 0)$  den Wert  $\tilde{\sigma}^2 / (F_{2t} F_{2c})$  annimmt. Dies ist offenbar kein sinnvolles Verhalten für eine Fließfunktion.

### Beispiel

Die Konsequenzen der Irreversibilitäts- und Stabilitätsbedingungen für nicht-assozierte Fließregeln sollen jetzt an einem Beispiel veranschaulicht werden. Wie LEMAITRE [57] gehen wir von der von-Mises-Fließfunktion aus, in der die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt wird. Um eine grafische Darstellung zu ermöglichen, betrachten wir nur zwei Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .

$$F(\sigma_1, \sigma_2, R; D) = \frac{|\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1|}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R \quad (3.86)$$

Die Schädigungskraft ist für ein isotropes Material

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{E(1 \Leftrightarrow D)^2}. \quad (3.87)$$

Die Fließfläche ist somit ein Paar paralleler Ebenen und die Mannigfaltigkeit der durch elastische Deformation erreichbaren Zustände ein Paraboloid (siehe Abb. 3.6).

Die Schnittmenge  $Z$  zwischen Fließfläche und Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Paar von Parabeln. Senkrecht zur Tangente an  $Z$  in einem Punkt  $B$  steht die Ebene  $E_1$ . In dieser Ebene liegen alle von Ilyushins Postulat erlaubten Richtungen der dissipativen Flüsse. Sofern  $B$  nicht gerade am Fuß der Parabel liegt (d.h. ein rein deviatorischer Spannungszustand ist), ist die Ebene  $E_1$  nicht parallel zur  $Y$ -Achse. Richtungen der Flüsse, die die Normalenregel im Spannungsraum erfüllen, liegen alle in einer zur  $Y$ -Achse parallelen Ebene  $E_2$ . Die einzige Richtung, die in beiden Ebenen liegt, ist die Normale an der Fließfläche, d.h. die von einer assoziierten Fließregel vorgeschriebene Richtung.

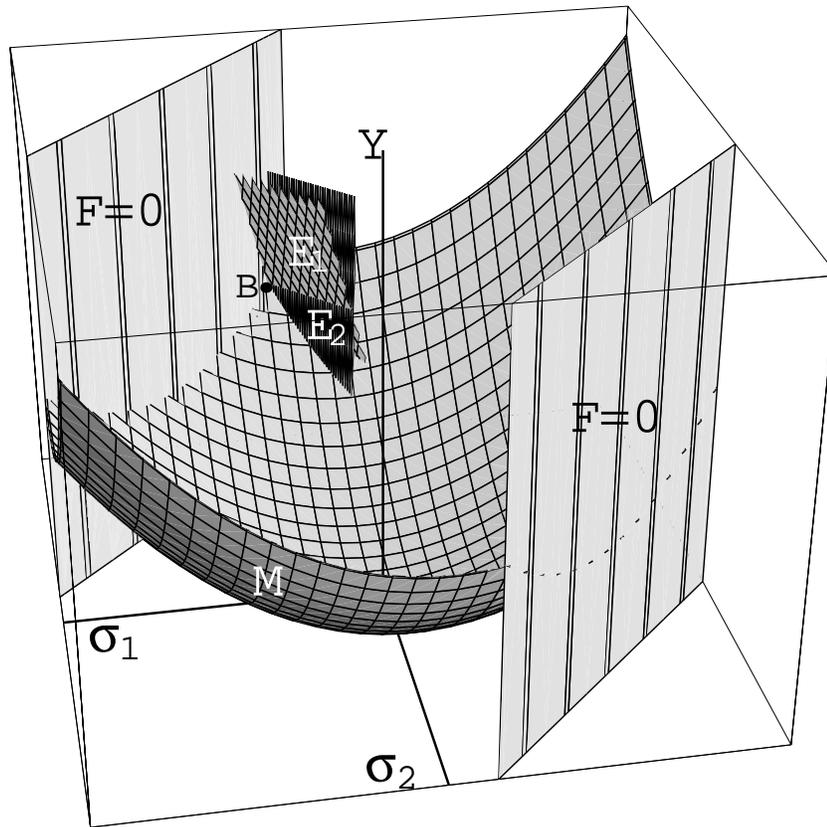


Abbildung 3.6: Fließfläche (3.86) und Mannigfaltigkeit  $M$  (3.87) für das Beispiel

Nicht nur durch die Betrachtung von Punkten  $A \in Z$  aus einer infinitesimalen Umgebung von  $B$  kann man erkennen, daß eine nicht-assozierte Fließregel mit der gegebenen Fließfläche (3.86) das Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat verletzt. Auch die Betrachtung weit entfernter Punkte  $A$  führt zu diesem Ergebnis. Bei einer Parabel findet man zu jedem Punkt  $B$  auf der Parabel Sekanten mit beliebig großer Steigung. Aus der Bedingung, daß der Vektor  $B \Leftrightarrow A$  mit dem Vektor der Flüsse  $(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{D})$  einen spitzen Winkel bilden muß, folgt somit  $\dot{D} \leq 0$ . Eine solche Bedingung ist für ein schadensmechanisches Modell natürlich nicht sinnvoll, vielmehr gilt hier  $\dot{D} \geq 0$ . Diesen Widerspruch erhalten wir, ohne die Annahme einer Normalenregel im Spannungsraum einzubringen. Allerdings ist zur Betrachtung weit entfernter Punkte  $A$  anzumerken, daß die von-Mises-Fließregel bei sehr großen hydrostatischen Spannungen ohnehin ihre Gültigkeit verliert.

Dieselbe Bedingung  $\dot{D} \leq 0$  kann man auch durch eine Betrachtung einer infinitesimalen Umgebung von  $B$  ableiten. Zunächst beschränken wir uns auf zwei Dimensionen, wie in Abbildung 3.7 skizziert. Der Vektor der dissipativen Flüsse muß mit den Sekanten  $B \Leftrightarrow A_1$  und  $B \Leftrightarrow A_2$  an der Kurve  $Z$  spitze Winkel bilden, daher sind die in die schraffierten Halbebenen weisenden Richtungen nicht

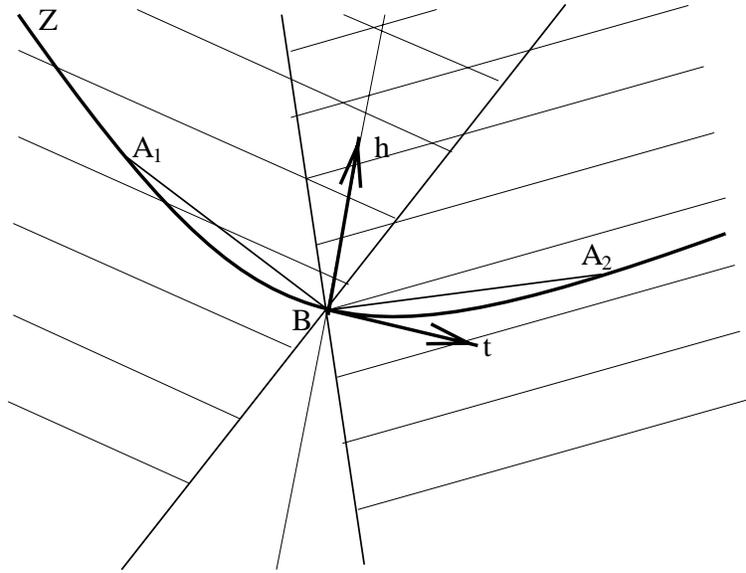


Abbildung 3.7: Schnittmenge  $Z$  und zulässige Richtungen der Flüsse (2D)

zulässig. Betrachtet man den Grenzfalle, bei dem die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  an den Punkt  $B$  herangeschoben werden, so erhält man nicht nur die Bedingung, daß die Richtung der Flüsse senkrecht zur Tangente sein muß, sondern zudem die Forderung, daß die Richtung vom Krümmungsmittelpunkt nach außen zeigen muß, d.h. dem Normalenvektor  $\mathbf{h}$  entgegengesetzt ist.

In unserem dreidimensionalen Beispiel ist  $Z$  eine Raumkurve, und man erhält die Bedingung, daß die Richtung der Flüsse  $\dot{\mathbf{x}}^d$  in der durch die Hauptnormale  $\mathbf{h}$  und Binormale<sup>5</sup> aufgespannten Halbebene liegt, wobei  $\mathbf{h} \dot{\mathbf{x}}^d \leq 0$ . Im Falle der von-Mises-Fließfunktion (3.86) liegt  $Z$  in einer Ebene parallel zur  $Y$ -Achse, so daß die Binormale senkrecht zur  $Y$ -Achse ist. Da  $Z$  eine in positiver  $Y$ -Richtung geöffnete Parabel ist, weist die Halbebene, in der zulässige Richtungen der Flüsse liegen, in Richtung negativer  $Y$ -Komponente. Somit ist  $\dot{D} \leq 0$ .

Dieses Resultat ist nicht auf unser Beispiel mit einem dreidimensionalen Raum der dissipativen Kräfte beschränkt. Vielmehr ist es hinreichend, wenn eine Kurve in der Mannigfaltigkeit  $Z$  durch den Punkt  $B$  verläuft, deren Tangente und Hauptnormale eine Ebene parallel zur  $Y$ -Achse aufspannen und deren Hauptnormale in Richtung positiver  $Y$ -Komponente zeigt. Bei jeder „Mises-ähnlichen“ Fließfunktion, die nicht von der hydrostatischen Spannung und von der Schädigungskraft abhängt, erfüllt die Kurve, auf der der Spannungsdeviator konstant ist und die hydrostatische Spannung sich ändert, diese Bedingung.

<sup>5</sup>Sei  $\mathbf{r}(s)$  die Parameterdarstellung einer (differenzierbaren) Raumkurve. Dann werden die Einheitsvektoren in Richtung von  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2}$  und  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2}$  als Tangente, Haupt- und Binormale bezeichnet.

Es wurde also gezeigt, daß ein elastoplastisches, isotropes schadensmechanisches Modell, bei dem die Fließfunktion nicht von der Schädigungskraft abhängt, die Postulate von Ilyushin und Drucker verletzt, wenn die Fließfunktion ähnlich der von-Mises-Fließfunktion ist oder wenn die Normalenregel im Spannungsraum gilt.

### Lokale Stabilitätsbedingung

Die im vorangegangenen Abschnitt untersuchte Variationsungleichung war aus den Termen erster Ordnung der Postulate von Ilyushin und Drucker abgeleitet worden. Nun soll die lokale Ungleichung für die Stabilität der plastischen Materialantwort, die im Abschnitt 3.1.3 analog zu Druckers Vorgehen aus den Termen zweiter Ordnung gewonnen wurde, überprüft werden.

$$\dot{\sigma} \dot{p} + \dot{Y} \dot{D} \geq 0 \quad (3.88)$$

Aus der Wahl einer im Spannungsraum assoziierten Fließregel folgt, daß der Term  $\dot{\sigma} \dot{p}$  nicht negativ ist. Die Zeitableitung der Schädigung  $\dot{D}$  ist bei allen isotropen schadensmechanischen Modellen niemals negativ, jedoch kann  $\dot{Y}$  durchaus negative Werte annehmen. Im anisotropen Fall kann der zweite Summand ebenfalls einen negativen Beitrag liefern.

Die Ungleichung (3.88) hat formal exakt die gleiche Gestalt wie Druckers Ungleichung  $\dot{\sigma} \dot{p} \geq 0$  im Falle einfacher Plastizität ohne Schädigung. Die hierfür bekannten Ergebnisse [62, 61] lassen sich somit übertragen. Im Falle einer assoziierten Fließregel ist gewährleistet, daß (3.88) erfüllt wird. Bei nicht-assozierten Fließregeln treten jedoch negative Werte des Produkts aus der Zeitableitung von dissipativen Zustandsvariablen und Kräften auf, wenn die Änderung der Kraft in einem Keil zwischen Fließfläche und Potentialfläche liegt (Abb. 3.8).

Die Verletzung obiger Ungleichung bedeutet jedoch nicht automatisch eine Instabilität des globalen Materialverhaltens. Selbst wenn die lokale Instabilität der dissipativen Prozesse nicht durch die Stabilität des elastischen Verhaltens kompensiert werden kann, ist eine punktweise Instabilität keine hinreichende Bedingung für eine Instabilität einer räumlich ausgedehnten Struktur [61].

### Y-abhängige Fließfunktion

Nichtassozierte Fließregeln von elastoplastischen Modellen mit isotroper Schädigung können nicht das Stabilitäts- und Irreversibilitätspostulat erfüllen, wenn die Schädigungskraft nicht in die Fließfunktion eingeht und wenn die Fließfunktion auf der von-Mises-Fließregel basiert oder eine Normalenregel im Spannungsraum gilt. Unter Verzicht auf die Annahme der Orthogonalität im Spannungsraum soll

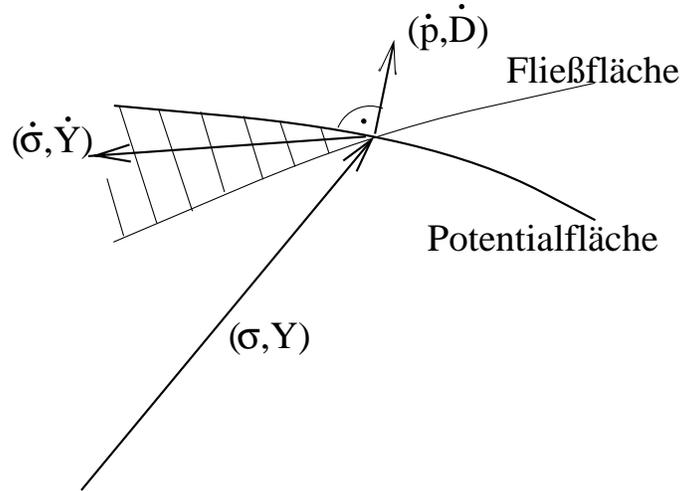


Abbildung 3.8: Region möglicher Instabilität bei nicht-assozierten Fließregeln

nun ein Beispiel gezeigt werden, wie ein Modell mit  $Y$ -abhängiger Fließfunktion aussehen kann, das zwar das Stabilitätspostulat, aber nicht das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllt.

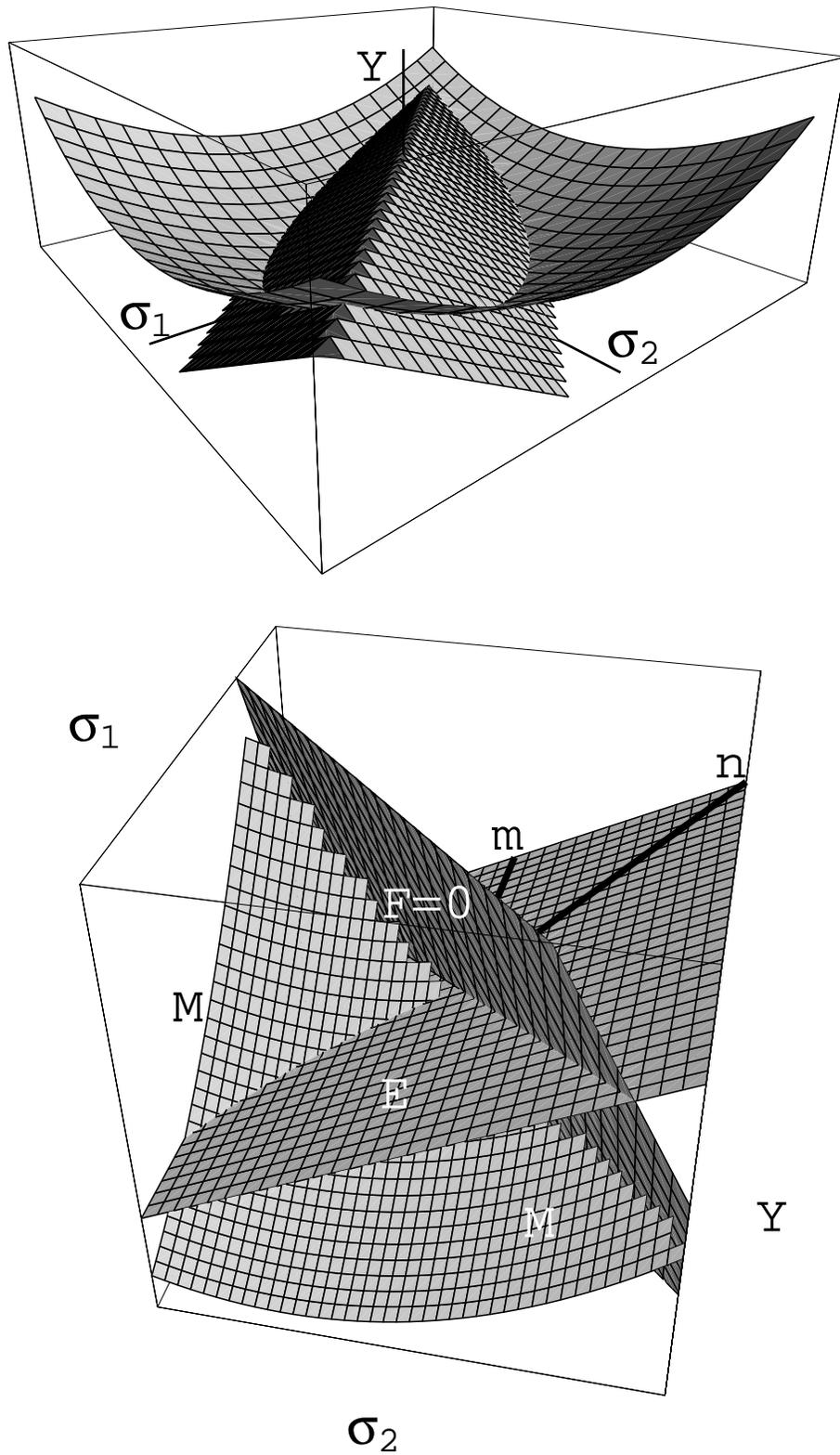
Hierzu gehen wir wieder von dem einfachen Beispiel aus, verwenden jedoch statt der Fließfunktion (3.86) eine  $Y$ -abhängige Fließfläche:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{|\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1|}{(1 \Leftrightarrow D)} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + bY \quad (3.89)$$

Als einfachster Fall einer solchen Abhängigkeit wurde hier ein linearer Term gewählt, wobei  $b$  eine positive Konstante ist.<sup>6</sup> Anstatt der zwei parallelen Ebenen erhält man dadurch einen aus zwei Halbebenen gebildeten Keil (Abb. 3.9).

Die Schnittmenge  $Z$  von Fließfläche und Mannigfaltigkeit  $M$  ist weiterhin ein Paar von Parabeln, die allerdings oben an der Spitze des Keils abgeschnitten sind. Wiederum gilt, daß die von Ilyushins Postulat zugelassenen Richtungen der Flüsse in einer Ebene  $E$  liegen, die senkrecht auf der Tangente von  $Z$  im betrachteten Punkt  $B$  auf der Fließfläche steht (Abb. 3.9 unten). Die Berücksichtigung der Krümmung der Kurve  $Z$  liefert die zusätzliche Restriktion, daß die zulässigen Richtungen unterhalb der Binormalen an  $Z$  liegen müssen, welche identisch mit der durch die Normalenregel der maximalen Dissipation festgelegten Richtung  $\mathbf{n}$  ist. Zudem ergibt die Betrachtung von Punkten  $A$  im Innern von  $M$ , daß die Richtungen nach außen gerichtet sein müssen. Verlangt man ferner aus physikalischen Gründen, daß  $\dot{D} \geq 0$  ist, bleiben schließlich die Richtungen zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  übrig.

<sup>6</sup>Dieser Ansatz wird später auch in der einfachsten Form des neuen maximal dissipativen schadensmechanischen Modells verwendet (Abschnitt 4.3).

Abbildung 3.9: Modell mit von  $Y$  abhängiger Fließfläche

Überträgt man diese geometrisch formulierten Bedingungen auf die Entwicklungsgleichungen, so erhalten diese die folgende Gestalt.

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \lambda(1 \Leftrightarrow \alpha) b \quad \text{wobei } 0 \leq \alpha < 1 \\ \dot{p}_2 \Leftrightarrow \dot{p}_1 &= \lambda \frac{\text{sign}(\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1)}{1 \Leftrightarrow D} (1 + \alpha b^2 (1 \Leftrightarrow D)^2) \\ \dot{p}_2 + \dot{p}_1 &= \lambda \alpha E (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\text{sign}(\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1) + b^2 (1 \Leftrightarrow D)^2}{2(1 \Leftrightarrow D)^2 + b E |\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1| (1 \Leftrightarrow D)} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die Konstante  $\alpha$  ist hierbei ein zwischen 0 und 1 wählbarer Parameter, der angibt, wie stark die Geschwindigkeit der Schädigung im Vergleich zur assoziierten Fließregel verringert ist.

### Konstruktion nicht-assoziierter Modelle

Im Fall elastoplastischer schadensmechanischer Modelle legen die Postulate von Ilyushin und Drucker den Richtungen der dissipativen Flüsse geringere Einschränkungen auf als das Prinzip der maximalen Dissipation, welches die Orthogonalität zur Fließfläche fordert. Nachdem im vorangegangenen Abschnitt ein spezielles Modell konstruiert wurde, das zwar Ilyushins Bedingung, nicht aber die Normalenregel erfüllt, stellt sich nun die Frage nach der praktischen Bedeutung solcher Modelle. Hierbei ist entscheidend, wie viel mehr Möglichkeiten zur Gestaltung des Modells Ilyushins Bedingung zuläßt als die maximale Dissipation und wie auf diesen Postulaten basierende Modelle systematisch formuliert werden können.

Bei der Evolutionsgleichung (3.90) fällt auf, daß für  $\alpha > 0$  durch die plastische Verformung eine Volumenänderung auftritt. In der Regel ist dies bei elastoplastischen Modellen unerwünscht. Dies macht deutlich, daß die Freiheit bei der Wahl von Evolutionsgleichungen, die Ilyushins Bedingung genügen, nicht sehr groß ist. Bei einem Modell mit einer an die elastische Dehnung gekoppelten skalaren inneren Variable erhalten wir einen zusätzlichen Freiheitsgrad gegenüber der Normalenregel. Ein solches Modell ist durch die Wahl der Fließfunktion und einer zusätzlichen Bedingung vollständig bestimmt (oder sogar überbestimmt). Stellt man an das Modell eine Bedingung wie die Volumenerhaltung und geht von einer Fließfunktion aus, bei der die assoziierte Fließregel diese Restriktion erfüllt, so verstößt i.Allg. jede nicht-assozierte Fließregel gegen diese Bedingung. Bei Modellen mit mehr inneren Variablen, wie z.B. anisotroper Schädigung, läßt die Irreversibilitäts- bzw. Stabilitätsbedingung entsprechend mehr Freiheitsgrade bei der Wahl der Entwicklungsgleichungen. Dennoch ist die systematische und physikalisch motivierte Formulierung eines stabilen, nicht-assozierten, anisotropen Schädigungsmodells eine noch schwierigere Aufgabe.

Jedes geschwindigkeitsunabhängige<sup>7</sup> Modell, das das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllt, kann durch die Wahl einer Fließfläche, die den elastischen Bereich begrenzt, konstruiert werden. Es ist relativ einfach, physikalische Bedingungen wie die Volumenerhaltung bei plastischer Verformung in der Konstruktion der Fließfunktion zu berücksichtigen. Im Gegensatz dazu scheint es keine allgemeine, systematische Methode zu geben, um ein Modell zu formulieren, das a priori das Postulat von Ilyushin oder Drucker sowie weitere Nebenbedingungen erfüllt. Das einfachste Verfahren zur Konstruktion eines solchen Modells ist die Formulierung eines maximal dissipativen Modells. Die maximale Dissipation ist zwar eine etwas schärfere Bedingung als die aus der Betrachtung der Terme erster Ordnung in Ilyushins oder Druckers Postulat folgende Ungleichung (3.7), aber dafür ist sie auch erheblich leichter zu begreifen und umzusetzen. Es kann derzeit noch nicht entschieden werden, ob es Materialien gibt, die ein Modell benötigen, das Druckers Stabilitätsbedingung aber nicht das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllen.

### 3.3 Zusammenfassung

Um ein elastoplastisches Materialmodell zu formulieren, dessen Evolutionsgleichungen nicht willkürlich gewählt werden, sondern das von einer allgemeinen physikalischen Annahme ausgeht, bieten sich drei Postulate an. Das Irreversibilitätspostulat von Ilyushin, die Stabilitätsbedingung von Drucker und das Prinzip der maximalen Dissipation, das auch in anderen Bereichen angewendet wird, führen bei einfachen elastoplastischen Modellen zu einer assoziierten Normalenregel im Spannungsraum.

Die Beziehung zwischen diesen Postulaten wurde in dieser Arbeit erstmalig für komplexere Modelle untersucht. Bei Modellen mit zusätzlichen inneren Variablen liefern die Postulate von Ilyushin und Drucker weiterhin eine Restriktion für die Richtung der dissipativen Flüsse, unterscheiden sich jedoch vom Prinzip der maximalen Dissipation (Abb. 3.10). Es seien mit  $\mathbf{r}$  die von der elastischen Dehnung entkoppelten und mit  $\mathbf{s}$  die gekoppelten inneren Variablen bezeichnet, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s} \partial \mathbf{e}}, \quad (3.91)$$

und mit  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  die konjugierten Kräfte. Dann fordert das Prinzip der maximalen Dissipation die Normalenregel im Raum aller dissipativen Kräfte  $\mathbf{X}^d = (\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow \mathbf{S}, \Leftrightarrow \mathbf{R})$ . Anders ausgedrückt verlangt das Postulat, daß für einen gegebenen

---

<sup>7</sup>Maximal dissipative Modelle, die nicht invariant gegenüber einer Reskalierung der Zeitachse sind, können durch die Wahl der Dissipationsfunktion definiert werden, die weniger anschaulich als die Fließfunktion ist.

Zustand  $\mathbf{X}_B^d$  auf der Fließfläche der Vektor der Flüsse  $(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{r}})$  mit der Differenz aus  $\mathbf{X}_B^d$  und jeder dissipativen Kraft  $\mathbf{X}_A^d \in K$  im Innern des elastischen Bereichs  $K$  einen spitzen Winkel bilden muß:

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \dot{\mathbf{s}} \Leftrightarrow (\mathbf{R}_B \Leftrightarrow \mathbf{R}_A) \dot{\mathbf{r}} \geq 0 \quad \forall A \in K \quad (3.92)$$

Aus den Postulaten von Ilyushin und Drucker folgt eine ähnliche Ungleichung, die allerdings die ungekoppelten Variablen  $\mathbf{r}$  nicht berücksichtigt:

$$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow (\mathbf{S}_B \Leftrightarrow \mathbf{S}_A) \dot{\mathbf{s}} \geq 0 \quad \forall A \in M \subset K \quad (3.93)$$

Hier müssen die Flüsse  $(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{s}})$  mit den Differenzen der Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}_B, \Leftrightarrow \mathbf{S}_B)$  und  $(\boldsymbol{\sigma}_A, \Leftrightarrow \mathbf{S}_A)$  nur für solche Zustände  $A$  einen spitzen Winkel bilden, die auf einer gewissen Mannigfaltigkeit  $M$  im elastischen Bereich  $K$  liegen. Diese Mannigfaltigkeit besteht aus den Zuständen, die von  $B$  durch elastische Deformation erreichbar sind.

Somit stellt die maximale Dissipation eine strengere Bedingung dar. Sie erscheint in der Darstellung durch die Variationsungleichung jedoch als eine natürliche Erweiterung der Bedingungen von Ilyushin und Drucker.

Das Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat unterscheiden sich dadurch, daß Druckers Postulat eine schärfere lokale Stabilitätsbedingung impliziert. Für Modelle mit inneren Variablen erhalten wir die verallgemeinerte Bedingung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\mathbf{p}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{s}} \geq 0 . \quad (3.94)$$

Bei schadensmechanischen Modellen elastischer Materialien implizieren alle drei Postulate eine Normalenregel im Raum der Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$ . Wird die Plastizität ins schadensmechanische Modell einbezogen, so verlangen die Postulate von Ilyushin und Drucker weder eine Normalenregel im Spannungsraum noch im Raum der Schädigungskraft.

Übliche nicht-assozierte, elastoplastische schadensmechanische Modelle verletzen das Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat. Falls die Fließfunktion nicht von der Schädigungskraft abhängt, kann Ilyushins Bedingung nicht erfüllt werden, wenn die Fließfläche der von-Mises-Bedingung ähnelt oder eine Normalenregel im Spannungsraum gilt.

Es ist möglich, Modelle zu formulieren, die zwar das Stabilitätspostulat, aber nicht das Prinzip der maximalen Dissipation erfüllen. Diese nicht-assozierten Modelle lassen einerseits nicht viel mehr Freiheit bei der Gestaltung der Entwicklungsgleichungen als die maximale Dissipation, sind andererseits aber deutlich schwieriger zu konstruieren. Falls keine speziellen Gründe für eine im Raum der dissipativen Kräfte nicht-assozierte Fließregel vorliegen, ist daher einer Modellbildung auf Basis des Prinzips der maximalen Dissipation der Vorzug zu geben.

Ilyushin	$\Rightarrow$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{S}} \dot{\boldsymbol{s}} \geq \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{C} \dot{\boldsymbol{p}}$
Drucker	$\Rightarrow$	$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow (\boldsymbol{S}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{S}_A) \dot{\boldsymbol{s}} \geq 0 \quad \forall A \in M \subset K \quad (*)$
	$\Rightarrow$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{S}} \dot{\boldsymbol{s}} \geq 0$
max. Dissipation	$\Leftrightarrow$	$(\boldsymbol{\sigma}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A) \dot{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow (\boldsymbol{S}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{S}_A) \dot{\boldsymbol{s}} \Leftrightarrow (\boldsymbol{R}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_A) \dot{\boldsymbol{r}} \geq 0 \quad \forall A \in K$

Fall	Beispiel	Beziehung der Postulate
keine Kopplung $s = 0$	einfache Plastizität	max. Dissipation $\Leftrightarrow (*)$
keine Plastizität $p = 0$	elast. Schädigung	max. Dissipation $\Leftrightarrow (*)$
allgemeiner Fall	elastoplast. Schädigung	max. Dissipation $\Rightarrow (*)$

Abbildung 3.10: Überblick über die Beziehung zwischen den Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulaten und dem Prinzip der maximalen Dissipation



# Kapitel 4

## Ein neues schadensmechanisches Modell

In diesem Kapitel soll ein neues Modell für elastoplastische Materialien mit isotroper Schädigung vorgestellt werden. Das Modell basiert auf dem Prinzip der maximalen Dissipation und erfüllt die Postulate von Ilyushin und Drucker. Um die Wahl der Entwicklungsgleichungen zu begründen, werden zunächst einige Modelle aus der Literatur systematisch zusammengestellt und kritisch diskutiert. Anschließend soll der Ansatz des neuen Modells erläutert werden. Eine stark vereinfachte Modellvariante wird dargestellt. Bei diesem vereinfachten Modell kann die Anzahl der Zustandsvariablen reduziert werden. Schließlich wird das Modell in eine schwache Formulierung überführt.

### 4.1 Entwicklungsgleichungen schadensmechanischer Modelle

Wie bereits im Abschnitt 2.2.2 erwähnt wurde, bieten sich bei der Wahl der Evolutionsgleichungen für ein schadensmechanisches Modell zwei grundsätzliche Alternativen an. Eine Möglichkeit ist die bruchmechanische Modellierung eines einzelnen Risses auf der Mikroebene [14, 56, 108]. Die bruchmechanischen Entwicklungsgleichungen müssen dann auf die Ebene des schadensmechanischen Kontinuumsmodells übertragen werden. Der andere Ansatz beschränkt sich auf eine phänomenologische Betrachtung auf der Ebene des Kontinuums. Diese Herangehensweise wird gerade bei Modellen für elastoplastische Materialien bevorzugt, da hier von den phänomenologischen Modellen der Plastizität ausgegangen werden kann.

Erweitert man ein übliches elastoplastisches Materialmodell, um die Schädigung zu erfassen, so kann man zu assoziierten oder nicht-assoziierten Fließregeln gelangen. Die assoziierten Fließregeln lassen sich wiederum aufgrund der Form der Fließfläche in zwei Klassen unterteilen. Diese Möglichkeiten zur Erweiterung elastoplastischer Materialmodelle und ihre Umsetzung in bereits publizierten Arbeiten sollen in den nächsten drei Abschnitten diskutiert werden.

### 4.1.1 Nicht-assoziierte Fließregeln

Als Beispiele für nicht-assoziierte Fließregeln in schadensmechanischen Modellen sind die Arbeiten von LEMAITRE [57], BONORA und NEWATZ [9], SAANOUNI, FORSTER und HATIRA [87] sowie WOHUA und VALLIAPPAN [109] zu nennen. Diesen Modellen ist gemeinsam, daß sie von einem elastoplastischen Modell mit assoziierter Fließregel ausgehen. Die Fließfunktion wird durch die Schädigungsvariable  $\mathbf{D}$  modifiziert, bleibt jedoch unabhängig von der Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$ . In das plastische Potential, welches die Richtung der dissipativen Flüsse bestimmt, wird jedoch zur Fließfunktion ein Term hinzugefügt, der von der Schädigungskraft abhängt. Somit erhält man eine Fließregel, die weiterhin im Raum der Spannungen eine Normalenregel erfüllt, nicht jedoch im Raum aller dissipativen Kräfte.

Im Abschnitt 3.2.3 wurde diese Klasse von Modellen genauer beschrieben und in Bezug auf die Bedingungen von Ilyushin und Drucker untersucht. Es wurde gezeigt, daß diese Modelle sowohl das Irreversibilitätspostulat als auch das Stabilitätspostulat sowie das Prinzip der maximalen Dissipation verletzen.

Ein Nachteil nicht-assoziierter Fließregeln für die numerische Lösung von Randwertproblemen besteht darin, daß eine asymmetrische tangentielle Steifigkeitsmatrix auftritt (siehe Abschnitt 4.3.2).

### 4.1.2 Assoziierte Fließregeln

Modelle, die eine Normalenregel im Raum aller dissipativen Kräfte verwenden, erfüllen das Postulat der maximalen Dissipation. Ein solches Modell kann man konstruieren, indem man die elastoplastische Fließfunktion um einen  $\mathbf{Y}$ -abhängigen Term ergänzt und die Schädigungsvariable als Parameter eingehen läßt. Somit erhält man eine Fließfläche im Raum aller dissipativen Kräfte. Eine andere Möglichkeit ist die Definition von zwei Fließfunktionen, von denen eine die plastische Fließgrenze im Raum der Spannungen (und Verfestigungskraft) beschreibt, während die andere eine Schädigungsfläche im Raum der Schädigungskraft definiert. Dieser Spezialfall soll erst im nächsten Unterkapitel betrachtet werden.

In diesem Abschnitt sollen drei Modelle aus der Literatur untersucht werden,

die das Prinzip der maximalen Dissipation zu erfüllen scheinen. Es kann jedoch gezeigt werden, daß zwei dieser Modelle das Postulat nicht umsetzen und das Dritte einen Fehler bei der Berechnung der Fließfunktion macht.

### Das Modell von Shin, Nho und Yim

SHIN, NHO und YIM schlagen ein elastoplastisches Modell vor, das isotrope und kinematische Verfestigung sowie anisotrope Schädigung berücksichtigt [92]. Zustandsvariablen sind hier die elastische und plastische Dehnung  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{p}$ , die kinematische Dehnung  $\boldsymbol{\alpha}$ , eine Variable  $r$  für die isotrope Verfestigung und der Schädigungstensor  $\mathbf{D}$ . Die konjugierten thermodynamischen Kräfte werden mit  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $R$  und  $\Leftrightarrow\mathbf{Y}$  bezeichnet.

Die Fließfunktion wird aus einem plastischen Anteil und einem Schädigungsterm zusammengesetzt. Zur Bestimmung der dissipativen Flüsse wird formal eine assoziierte Fließregel verwendet:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Z}, R, \mathbf{Y}) = F_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Z}, R) + F_d(\mathbf{Y}) \quad (4.1)$$

$$(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{r}) = \lambda \frac{\partial F}{\partial (\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow\mathbf{Z}, \Leftrightarrow R)} \quad (4.2)$$

$$= \lambda \frac{\partial F_p}{\partial (\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow\mathbf{Z}, \Leftrightarrow R)} \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} = \lambda \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \quad (4.4)$$

$$F \leq 0, \quad \lambda \dot{F} \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.5)$$

Bei Gleichung (4.3) geht die Separation der Fließfunktion ein, d.h. die Voraussetzung, daß der Schädigungsterm  $F_d$  nicht von der Spannung abhängt. Diese Annahme wird jedoch durch den von Shin, Nho und Yim gewählten Ansatz verletzt:

$$F_d(\mathbf{Y}) = F_D(\mathbf{e}, \mathbf{D}) \mathbf{Q} \mathbf{Y} \quad (4.6)$$

Die skalare Funktion  $F_D$  soll alle Nicht-Linearitäten der Schädigungsentwicklung durch eine Abhängigkeit von den Zustandsvariablen beinhalten, während  $F_d$  nur linear von der Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$  abhängt. Durch den Tensor  $\mathbf{Q}$  wird die Anisotropie der Schädigungsentwicklung in die Evolutionsgleichungen eingebracht. Dieser Tensor soll von den Hauptrichtungen des Tensors der effektiven Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  abhängen. Hierdurch ist jedoch i.Allg.  $F_d$  eine Funktion sowohl der Schädigungskraft als auch der Spannung. Diese Abhängigkeit wurde in den Entwicklungsgleichungen nicht berücksichtigt, so daß das Postulat der maximalen Dissipation durch dieses Modell nicht erfüllt wird.

### Das Modell von Laborde und Michrafy

Eine Erweiterung des Konzepts der Normalenregel bei elastoplastischen Materialien wird von LABORDE und MICHRAFY formuliert und für schadensmechanische Modelle eingesetzt [52]. Als Zustandsvariablen werden zunächst recht allgemein elastische und plastische Dehnung sowie innere Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  verwendet.

Die Fließfunktion  $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$  wird nicht in Abhängigkeit von den dissipativen Kräften, sondern als Funktion der Spannung und der inneren Zustandsvariablen definiert. Die Evolutionsgleichungen haben die Gestalt einer Normalenregel:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (4.8)$$

Der Tensor  $\boldsymbol{M}$ , der von Spannung und inneren Variablen abhängen darf, soll bei dieser Fließregel die Erweiterung gegenüber der gewöhnlichen assoziierten Fließregel darstellen. Während bei der maximalen Dissipation die dissipativen Flüsse  $(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\xi}})$  senkrecht auf der Fließfläche stehen, wird hier eine Orthogonalitätsbedingung für  $(\dot{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}})$  formuliert.

LABORDE und MICHRAFY weisen jedoch nicht darauf hin, daß sich ihre Normalenregel auf einen anderen Raum bezieht als die Normalenregel der maximalen Dissipation. Eine Grundidee der Thermodynamik von Prozessen nahe am Gleichgewicht besteht in der Annahme, daß die konjugierten Variablen die treibenden Kräfte für die dissipativen Prozesse sind. Dem entsprechend ergibt das Prinzip der maximalen Dissipation für zeitunabhängige Vorgänge eine Normalenregel im Raum der dissipativen Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow \boldsymbol{\Xi})$ . In der Entwicklungsgleichung (4.8) hingegen wird eine Orthogonalität an der Fließfläche im Raum von Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und inneren Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  gefordert. Somit stellt dieser Ansatz keine Verallgemeinerung der maximalen Dissipation dar. Selbst für  $\boldsymbol{M} = \mathbf{1}$  erfüllt die Modellklasse von Laborde und Michrafy nicht notwendigerweise das Prinzip der maximalen Dissipation.

### Das Modell von Zysset und Curnier

ZYSSET und CURNIER wählen einen Ansatz für das Dissipationspotential  $\Psi$  (siehe Abschnitt 2.1.1), aus welchem die Fließfunktion und nachfolgend die Entwicklungsgleichungen abgeleitet werden [114]. Als Zustandsvariablen werden Gesamtdehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , plastische Dehnung  $\boldsymbol{p}$  und eine Variable  $\alpha$ , die sowohl Verfestigung als auch Schädigung beschreibt, verwendet. Die zu  $\alpha$  konjugierte Kraft sei mit  $\Leftrightarrow A$  bezeichnet.

Unter der Annahme, daß die Schädigung nur einen Teil des Steifigkeitstensors  $\mathbf{C}$  betrifft, wird dieser in zwei orthogonale Anteile zerlegt. Eine entsprechende Zerlegung wird auch für den Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{E}$  durchgeführt.

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{C}', \quad \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}' = 0, \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}' \quad (4.9)$$

Die freie Energie erhält die folgende Gestalt:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \alpha) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{p}) \bar{\mathbf{C}} (\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \omega(\alpha) (\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{p}) \bar{\mathbf{C}} (\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{p}) + f_\alpha(\alpha) \quad (4.10)$$

Hierbei ist  $\omega$  eine positive, zweimal stetig differenzierbare, monoton fallende Funktion mit  $\omega(0) = 1$ . Die Verfestigungsenergie  $f_\alpha$  sei eine konvexe, zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Das Dissipationspotential setzt sich additiv aus einem plastischen und einem Schädigungs-/Verfestigungs-Term zusammen.

$$\Psi(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\alpha}) = \Psi_p(\dot{\mathbf{p}}) + \Psi_\alpha(\dot{\alpha}) \quad (4.11)$$

$$\Psi_p(\dot{\mathbf{p}}) = (\sigma_y + g(\alpha)) \sqrt{\mathbf{p} \mathbf{C}' \mathbf{p}} \quad (4.12)$$

$$\Psi_\alpha(\dot{\alpha}) = (h(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha)) \dot{\alpha} + I_{[0, \infty)}(\dot{\alpha}) \quad (4.13)$$

$\sigma_y$  bezeichnet die Fließgrenze.  $g$  ist eine positive, stetig differenzierbare Verfestigungsfunktion mit  $g(0) = 0$ ,  $I_{[0, \infty)}$  die Indikatorfunktion des Intervalls  $[0, \infty)$ , und  $h$  wird definiert durch

$$h(\alpha) = \Leftrightarrow \sigma_y^2 \frac{\omega'(\alpha)}{2\omega^2(\alpha)}. \quad (4.14)$$

Berechnet man die Legendre-Fenchel-Transformierte des Dissipationspotentials, so erhält man die Indikatorfunktion einer konvexen Menge  $K$ , die den elastischen Bereich darstellt.

$$\Psi^* = I_K(\boldsymbol{\sigma}, A) \quad (4.15)$$

$$= I_{K_p}(\boldsymbol{\sigma}) + I_{K_D}(A) \quad (4.16)$$

$$K = \left\{ (\boldsymbol{\sigma}, A) \mid \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}' \boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow g(\alpha) \leq 0 \wedge A \Leftrightarrow h(\alpha) + g(\alpha) \leq 0 \right\} \quad (4.17)$$

$$K_p = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}' \boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow g(\alpha) \leq 0 \right\} \quad (4.18)$$

$$K_D = \left\{ A \mid A \Leftrightarrow h(\alpha) + g(\alpha) \leq 0 \right\} \quad (4.19)$$

Die Fließfunktion  $F$  muß nun die Eigenschaft haben, daß  $F$  im Innern von  $K$  negativ und auf dem Rand Null ist.

ZYSSET und CURNIER geben jedoch folgende Fließfunktion an:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, A) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}' \boldsymbol{\sigma}} + A \Leftrightarrow h(\alpha) \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.20)$$

Diese Fließfunktion beschreibt nicht obige Menge  $K$ , sondern eine Menge

$$K_F = \left\{ (\boldsymbol{\sigma}, A) \mid \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}' \boldsymbol{\sigma}} + A \Leftrightarrow h(\alpha) \Leftrightarrow \sigma_y \leq 0 \right\} \quad (4.21)$$

$$\supset K. \quad (4.22)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Mengen ist am einfachsten zu erkennen, wenn man die Vergleichsdehnung  $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}' \boldsymbol{\sigma})^{1/2}$  und  $A$  als Variablen betrachtet (Abb. 4.1). In dieser Darstellung ist  $K$  ein Rechteck, während die Fließfunktion ein Dreieck  $K_F$  beschreibt, das dieses Rechteck enthält.

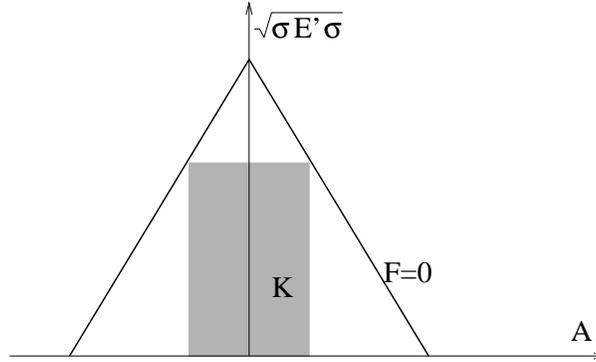


Abbildung 4.1: Fließfunktion beim Modell von Zysset und Curnier

### 4.1.3 Orthogonale Potentialflächen

Der Ansatz von ZYSSET und CURNIER, der durch ihre Fließfunktion allerdings nicht korrekt umgesetzt wurde, ist ein erstes Beispiel für die Klasse von Modellen, die durch den Begriff „orthogonale Potentialflächen“ charakterisiert werden kann. Zu diesem Spezialfall assoziierter Fließregeln gelangt man, wenn man wie in (4.11) eine additive Zerlegung des Dissipationspotentials<sup>1</sup> vornimmt:

$$\Psi(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{D}}, \dot{\boldsymbol{z}}) = \Psi_p(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{r}}) + \Psi_D(\dot{\boldsymbol{D}}, \dot{\boldsymbol{z}}) \quad (4.23)$$

Hierbei bezeichnet  $\boldsymbol{r}$  Verfestigungsvariablen und  $\boldsymbol{z}$  ggf. weitere innere Variablen im Zusammenhang mit der Schädigung.

Diese Annahme ist als eine weitgehende Entkopplung von Plastizität und Schädigung zu verstehen. Da die Zustandsvariablen auch in das Potential eingehen dürfen, sind die beiden Prozesse dennoch nicht vollständig unabhängig.

<sup>1</sup>Das Dissipationspotential  $\Psi$  (2.33) ist bei den hier betrachteten zeitunabhängigen Modellen gleich der Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}$ .

Ein Dissipationspotential von dieser Gestalt hat eine Legendre-Fenchel-Transformierte, die wie in (4.16) als Summe zweier Indikatorfunktionen bzgl. der plastischen und Schädigungsvariablen dargestellt werden kann:

$$\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = I_K(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = I_{K_p}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}) + I_{K_D}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad (4.24)$$

Damit ist der elastische Bereich  $K$  durch eine Bedingung an die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  (und Verfestigung  $\mathbf{r}$ ) sowie eine unabhängige Bedingung an die Schädigungskraft  $\mathbf{Y}$  (und  $\mathbf{Z}$ ) festgelegt. Die Fließfläche setzt sich also aus Bereichen, in denen die elastoplastischen Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R})$  konstant sind, und aus Abschnitten konstanter schadensmechanischer Kräfte  $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  zusammen. In der Abbildung 4.1 zum Modell von ZYSSET und CURNIER ist der elastische Bereich daher ein Rechteck.

Da diese Bereiche der Fließfläche senkrecht aufeinander stehen, kann man das Modell auch mit zwei unabhängigen, orthogonalen Fließflächen und zwei Normalenregeln formulieren. Hierzu bestimmt man zu  $K_p$  und  $K_D$  Fließfunktionen  $F_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R})$  und  $F_D(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  und setzt

$$\dot{\mathbf{p}} = \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial (\Leftrightarrow \mathbf{R})} \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda_D \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \dot{\mathbf{z}} = \lambda_D \frac{\partial F_D}{\partial (\Leftrightarrow \mathbf{Z})} \quad (4.26)$$

$$F_p \leq 0, \quad \lambda_p \dot{F}_p \geq 0, \quad \lambda_p \geq 0 \quad (4.27)$$

$$F_D \leq 0, \quad \lambda_D \dot{F}_D \geq 0, \quad \lambda_D \geq 0. \quad (4.28)$$

Die beiden Multiplikatoren  $\lambda_p$  und  $\lambda_D$  sind (unabhängig) aus ihren jeweiligen Konsistenzbedingungen zu ermitteln. Daher kann in einem solchen Modell auch Plastizität ohne Schädigung oder Schädigung ohne Plastizität auftreten.

In dieser Darstellung mittels zweier Potentialflächen, die Fließ- und Schädigungsfläche genannt werden, werden Modelle dieser Art gewöhnlich formuliert. Aktuelle Beispiele findet man bei HANSEN und SCHREYER [44], ZHU und CESCETTO [111], FANG, CHOW und YANG [35], MURAKAMI, HAYAKAWA und LIU [71] sowie VOYIADJIS und PARK [104]. Auch Schädigungsmodelle für viskoplastische Materialien wurden in ähnlicher Weise realisiert (z.B. CHABOCHE [23]).

Wie oben gezeigt wurde, können wir diese Modelle als Modelle mit maximaler Dissipation und einer speziellen Gestalt der Fließfläche ansehen. Aus dem Prinzip der maximalen Dissipation folgen bei der speziellen Fließfläche die Entwicklungsgleichungen (4.25) bis (4.28) für alle diejenigen Zustände, bei denen entweder nur Plastizität oder nur Schädigung auftritt. Bei einem Zustand, der auf beiden Potentialflächen  $F_p = 0$  und  $F_D = 0$  liegt, ist die Richtung der dissipativen Flüsse durch die maximale Dissipation nicht eindeutig bestimmt. Bei Abbildung 4.1 wäre ein solcher Zustand in der Ecke des Rechtecks, wo keine eindeutige

Normale existiert. In diesen Ecken wählen die Modelle mit zwei Potentialflächen eine bestimmte Richtung der dissipativen Flüsse, die vom Prinzip der maximalen Dissipation zugelassen wird.

## 4.2 Ansatz des Modells

Nachdem verschiedene Möglichkeiten zur Konstruktion der Evolutionsgleichungen elastoplastischer schadensmechanischer Modelle vorgestellt und einige konkrete Modelle diskutiert wurden, soll nun der allgemeine Ansatz für das neue schadensmechanische Modell formuliert werden.

### 4.2.1 Thermomechanischer Rahmen des Modells

#### Maximale Dissipation

Das Modell strebt keine mikromechanische Simulation der Schädigungsprozesse an, sondern stellt eine thermomechanische Beschreibung auf makroskopischer Ebene dar. Bei einem solchen phänomenologischen Modell besteht eine sehr große Freiheit bei der Wahl der Entwicklungsgleichungen. Die in der Regel sehr beschränkten experimentellen Daten können durch viele unterschiedliche Ansätze erfaßt werden. Um weniger willkürlich vorzugehen, soll das Modell auf der Basis eines allgemeinen thermomechanischen Postulats aufgebaut werden.

Für elastoplastische Materialien bieten sich hierzu das Irreversibilitätspostulat von Ilyushin, das Stabilitätspostulat von Drucker und das Prinzip der maximalen Dissipation an. Diese Bedingungen wurden im Kapitel 3 untersucht, wobei insbesondere auf die Anwendung auf die Schadensmechanik eingegangen wurde. In Modellen ohne Schädigung fordern alle drei Postulate eine Normalenregel als Evolutionsgleichung. Bei elastoplastischen Modellen mit Schädigung stellen die Bedingungen von Ilyushin und Drucker eine schwächere Restriktion an die Richtung der dissipativen Flüsse als das Prinzip der maximalen Dissipation. Diese Restriktion hat jedoch eine sehr ähnliche Gestalt wie die aus der maximalen Dissipation folgende Normalenregel und läßt nicht viel mehr Freiraum bei der Modellbildung. Zudem sind Modelle, die den Postulaten von Ilyushin und Drucker genügen, erheblich schwieriger zu konstruieren, wenn man kein maximal dissipatives Modell wählen möchte. Ein praktischer Vorteil von Modellen mit Normalenregel bei der mathematischen Behandlung und numerischen Umsetzung ist, daß die tangential Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist.

Aus diesem Grund soll das neue Modell von dem Prinzip der maximalen Dissipa-

tion ausgehen, also eine assoziierte Fließregel besitzen. Wenn ein solches Modell in der Lage ist, die experimentellen Ergebnisse befriedigend wiederzugeben, ist es gegenüber Ansätzen mit nicht-assozierten Fließregeln zu bevorzugen. Nicht-assozierte Modelle in der üblichen Form kämen auch dann nicht in Frage, wenn nur das Postulat von Ilyushin vorausgesetzt würde (Abschnitt 3.2.3).

### **Einfache Fließfläche oder orthogonale Potentialflächen**

Mit einer assoziierten Fließregel hat man bei der Wahl der Fließfunktion zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten. Entweder variiert die Fließfunktion überall mit der Spannung und der Schädigungskraft, so daß plastische Verformung und Schädigung immer gemeinsam auftreten, oder man wählt orthogonale Potentialflächen für Plastizität und Schädigung, so daß die Prozesse weitgehend entkoppelt sind (Abschnitt 4.1.3). Für Modelle mit orthogonalen Potentialflächen findet man in der Literatur mehrere Beispiele (Abschnitt 4.1.3), während noch keine konsistenten Modelle mit starker Kopplung entwickelt wurden (Abschnitt 4.1.2). Bislang ist noch nicht entschieden, welcher Weg zu einer besseren Beschreibung der physikalischen Vorgänge führt.

Wenn duktile Materialien stark plastisch deformiert werden, hat die plastische Verformung häufig einen großen Einfluß auf die Schädigung und umgekehrt. Zum Beispiel führt die plastische Verformung eines Polykristalls mit Einschlüssen zur Bildung von Rissen an der Grenzfläche zwischen Einschlüssen und Matrix. Mikrorisse und Poren können andererseits durch ihr Spannungsfeld und die inneren Oberflächen, die als Versetzungsquellen und Senken wirken, die plastische Verformung beeinflussen. MURAKAMI, HAYAKAWA und LIU haben das Einsetzen der Schädigung bei plastischer Verformung durch Messung der akustischen Emissionen beobachtet. Bei reiner Torsion – in diesem Fall sollte die mit Plastizität gekoppelte Schädigung der dominante Mechanismus sein – begannen plastische Verformung und Schädigung bei der gleichen Spannung. Diese Argumente sprechen dafür, daß die starke Kopplung von Plastizität und Schädigung durch ein einziges Potential die angemessene Beschreibung für solche Materialien und Belastungen sein könnte, bei denen die Schädigung gemeinsam mit einer starken plastischen Deformation auftritt.

Andererseits kann ein gekoppeltes Modell offensichtlich nicht alle Lastfälle richtig wiedergeben. Bei rein hydrostatischer Zugbelastung tritt sicherlich eine Schädigung auf, ehe die plastische Verformung einsetzen kann. In solchen Fällen scheint eine Beschreibung durch zwei orthogonale Potentialflächen passender zu sein.

In dem neuen Modell wird eine einfache, glatte Fließfläche verwendet, um eine starke Kopplung zwischen Plastizität und Schädigung simulieren zu können. Das Modell ist daher natürlich nur für solche Materialien und Versagensprozesse

sinnvoll, bei denen die plastische Verformung eine wesentliche Rolle spielt. Im Abschnitt 4.2.4 werden zwei Möglichkeiten genannt werden, um das Modell zu modifizieren bzw. zu erweitern, so daß z.B. auch der Grenzfall hydrostatischer Spannung erfaßt wird.

### 4.2.2 Wahl der Zustandsvariablen

Da nicht die vielfältigen Möglichkeiten der Definition einer anisotropen Schädigung, sondern die Modellentwicklung auf Basis thermomechanischer Postulate einen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet, soll das Modell auf isotrope Schädigung beschränkt werden. Dadurch lassen sich die wesentlichen Eigenschaften des Modells leichter erkennen, ohne daß sie in den komplexen Problemen anisotroper Modelle untergehen, und die praktische Brauchbarkeit des Ansatzes kann einfacher qualitativ überprüft werden, als wenn eine Vielzahl von Parametern eines anisotropen Modells an die Meßwerte angepaßt werden muß. Aus dem gleichen Grund wird auch die Plastizität relativ einfach beschrieben und nur isotrope Verfestigung berücksichtigt.

Die Zustandsvariablen setzen sich somit zusammen aus der elastischen Dehnung  $\mathbf{e}$ , der plastischen Dehnung  $\mathbf{p}$ , einer Variablen  $r$  für die isotrope Verfestigung und der skalaren Schädigungsvariable  $D$ . Die Schädigung ist hierbei als der relative Verlust an Steifigkeit definiert.

### 4.2.3 Wahl der freien Energie und der Fließfunktion

Als Konstitutivgleichung für die lineare Elastizität mit Schädigung wird die bei isotroper Schädigung übliche Gleichung (2.63) verwendet. Zur hieraus folgenden elastischen Energie tritt in der spezifischen freien Energie die Verfestigungsenergie hinzu:

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, r, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} + f_r(r) \quad (4.29)$$

Die Funktion  $f_r$ , welche den Verlauf der Verfestigung bestimmt, sei zweimal differenzierbar.

Die konjugierten Kräfte werden durch die Ableitungen der freien Energie definiert und bezeichnet mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (4.30)$$

$$R = \frac{\partial f}{\partial r} = f'_r(r) \quad (4.31)$$

$$Y = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial D} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} . \quad (4.32)$$

Die Fließfunktion muß als Funktion der dissipativen Kräfte  $(\boldsymbol{\sigma}, \Leftrightarrow R, Y)$  und der Zustandsvariablen definiert werden. Sie soll sich hier aus einem plastischen Anteil und einem Schädigungsterm additiv zusammensetzen. Als ein einfacher, aber bewährter Ansatz für den plastischen Anteil wird die von-Mises-Fließfunktion verwendet. Die Zustandsvariablen gehen nur ein, indem die Spannung in der plastischen Fließfunktion durch die effektive Spannung entsprechend dem Prinzip der Dehnungsäquivalenz ersetzt wird. Auch im Schädigungsterm darf die Schädigungsvariable auftreten:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + F_Y(Y, D) \quad (4.33)$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (4.35)$$

Der Schädigungsterm  $F_Y$ , der partiell nach  $Y$  und  $D$  differenzierbar sein soll, ist im einfachsten Fall nur von der Schädigungskraft  $Y$  abhängig. Es wird jedoch gezeigt werden, daß dieser Ansatz zur Beschreibung realer Materialien nicht ausreicht, sondern daß eine Abhängigkeit von  $D$  und  $Y$  notwendig ist. Um diese Abhängigkeit möglichst einfach zu halten, wird der Separationsansatz

$$F_Y(Y, D) = g(Y) h(D) \quad (4.36)$$

verwendet.

#### 4.2.4 Schädigung ohne Plastizität

Da im obigen Ansatz nicht zwei orthogonale Potentialflächen verwendet werden, sondern eine Fließfläche, deren Normale i.Allg. eine Komponente sowohl in Richtung der Spannungen als auch in Richtung der Schädigungskraft hat, treten Schädigung und Plastizität hier immer gemeinsam auf. Es sollen nun zwei Möglichkeiten genannt werden, wie man das Modell auch auf Fälle erweitern kann, in denen die Schädigung fast unabhängig von der Plastizität ist.

Der naheliegendste Gedanke ist sicherlich, die Fließfläche so zu gestalten, daß sie sich im Bereich hoher hydrostatischer Spannung an den Grenzfall der orthogonalen Flächen annähert. Damit hätte man dort nur eine sehr schwache Kopplung von Plastizität und Schädigung, während im Bereich von Schubbelastungen eine starke Kopplung bestände.

Die zweite Möglichkeit beruht auf der Vorstellung, daß man zwei verschiedene Schädigungsmechanismen unterscheiden kann. Bei dem einen Mechanismus sind Plastizität und Schädigung miteinander gekoppelt, während der andere Schädigungsprozeß unabhängig von plastischer Verformung abläuft. Je nach Belastung ist bei duktilen Materialien einer der Schädigungsmechanismen dominant. In unserem thermomechanischen Rahmen können die zwei Prozesse durch zwei additive Beiträge zur Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}$  ausgedrückt werden:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{pD}(\dot{\mathbf{p}}, \dot{r}, \dot{D}) + \mathcal{D}_{eD}(\dot{D}) \quad (4.37)$$

Für den Anteil  $\mathcal{D}_{pD}$  ist die Dissipationsfunktion des Modells mit starker Kopplung von Plastizität und Schädigung zu verwenden.<sup>2</sup> Der von der Plastizität unabhängige Term  $\mathcal{D}_{eD}$  kann aus Modellen gewonnen werden, die zur Beschreibung von elastischen Materialien mit Schädigung entwickelt wurden.

Die Dissipationsfunktion  $\mathcal{D}_{pD}$  ist positiv homogen vom Grad 1. Wenn dies für die Funktion  $\mathcal{D}_{eD}$  nicht der Fall ist, d.h. wenn die elastische Schädigung nicht geschwindigkeitsunabhängig ist, ist die Summe  $\mathcal{D}$  i.Allg. nicht mehr quasihomogen. Dann existiert kein Dissipationspotential, was die Darstellung und numerische Lösung des Modells erheblich erschwert.

Als ein Beispiel für ein ratenabhängiges Modell von Elastizität und Schädigung sei hier ein Modell von LADEVEZE genannt [53]:

$$D = k \left\langle \sqrt{\frac{Y}{Y_C}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{Y_0}{Y_C}} \right\rangle_+ \quad (4.38)$$

$$\text{wobei } \langle x \rangle_+ = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad k > 0 \quad (4.39)$$

Es ist möglich, für dieses Modell die Legendre-Fenchel-Transformierte des Dissipationspotentials zu konstruieren, aus welcher wiederum die Dissipationsfunktion berechnet werden kann.

$$\dot{D} = \frac{\partial \Psi_{eD}^*}{\partial Y} \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow \Psi_{eD}^*(Y; D) = \frac{k}{\sqrt{Y_C}} \langle q \rangle_+ \left( \frac{2}{3} q^2 + (\sqrt{Y} \Leftrightarrow q) q \right) + \text{const.} \quad (4.41)$$

$$\text{mit } q = \sqrt{Y} \Leftrightarrow \sqrt{Y_0} \Leftrightarrow \sqrt{Y_C} D \quad (4.42)$$

Die Untersuchung dieser Möglichkeiten zur Erweiterung des Modells soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Vielmehr ging es in diesem Abschnitt darum zu zeigen, daß das elastoplastische schadensmechanische Modell innerhalb des durch das Prinzip der maximalen Dissipation gesteckten Rahmens konsistent erweitert werden kann, um weitere Schädigungsmechanismen einzubeziehen.

<sup>2</sup>Die Dissipationsfunktion kann aus der Fließfunktion berechnet werden.

## 4.3 Vereinfachtes Modell

Bevor der in Abschnitt 4.2 eingeführte Ansatz im nächsten Kapitel in einem Modell für ein reales Material angewendet wird, soll der Ansatz zunächst in einer möglichst einfachen Form umgesetzt und untersucht werden. Hierzu wählen wir eine quadratische Verfestigungsenergie  $f_r$ , was einer linearen Verfestigung entspricht, und einen Schädigungsanteil  $F_Y$  in der Fließfunktion, der linear in der Schädigungskraft ist. Dies ist die einfachste Möglichkeit, ein qualitativ sinnvolles schadensmechanisches Modell in dem zuvor gesteckten Rahmen zu definieren.

$$f_r(r) = \frac{1}{2} k r^2 \quad (4.43)$$

$$F_Y(Y, D) = b Y \quad (4.44)$$

Als Materialkonstanten treten in diesem Modell die Verfestigungskonstante  $k$ , eine Konstante  $b$ , die die Größe der Schädigung bestimmt, sowie die elastische Steifigkeit  $\mathbf{C}$  und die Fließgrenze  $\sigma_y$  auf.

In den folgenden Abschnitten werden die Entwicklungsgleichungen aufgestellt, die Darstellung vereinfacht und in eine schwache Formulierung überführt.

### 4.3.1 Evolutionsgleichungen

Die Zeitableitungen der dissipativen Variablen sind durch die Ableitungen der Fließfunktion gegeben:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{(1 \Leftrightarrow D) \sigma_{\text{eq}}} \lambda \quad (4.45)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial F}{\partial (\Leftrightarrow R)} \lambda = \lambda \quad (4.46)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \lambda = b \lambda \quad (4.47)$$

Aus der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$  erhält man für den Multiplikator  $\lambda$  den Wert

$$\lambda = \left( k (1 \Leftrightarrow D) \Leftrightarrow b \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \Leftrightarrow b^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \left( \frac{3 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{2 \tilde{\sigma}_{\text{eq}}} + b \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.48)$$

$$\text{wobei } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 \Leftrightarrow D}. \quad (4.49)$$

Trotz des einfachen Ansatzes für  $f_r$  und  $F_Y$  haben die Entwicklungsgleichungen also keine ganz einfache Gestalt. Ferner fällt in (4.48) auf, daß  $\lambda$  schon singulär

sein kann, bevor bei  $D = 1$  die Steifigkeit verloren geht. Diese Singularität tritt auf, wenn bei weiterer Dehnung die Spannung durch die Zunahme der Schädigung mehr reduziert werden würde als sie infolge der Verfestigung ansteige.

Diese Darstellung der Modells kann durch geeignete Substitutionen erheblich vereinfacht werden.

### 4.3.2 Reduktion und Substitution der Variablen

Aufgrund einer linearen Abhängigkeit von Verfestigung und Schädigung kann die Anzahl der Zustandsvariablen reduziert werden. Ferner wird die Schädigungsvariable durch Variablentransformation aus Fließfunktion und Dissipationsfunktion eliminiert, so daß die Entwicklungsgleichungen eine einfache Gestalt erhalten. Der tangentielle Steifigkeitstensor ist im Gegensatz zu nicht-assozierten Modellen symmetrisch.

#### Reduktion der Variablen

Da sowohl die Verfestigung  $R$  als auch die Schädigungskraft  $Y$  linear in die Fließfunktion eingehen, sind die zwei dissipativen Variablen  $r$  und  $D$  direkt voneinander abhängig.

$$\dot{D} = b \lambda = b \dot{r}, \quad D(t_0) = r(t_0) = 0 \quad (4.50)$$

$$\Rightarrow D = b r \quad (4.51)$$

Somit können Verfestigung und Schädigung durch eine einzige Zustandsvariable, die hier mit  $D$  bezeichnet werden soll, ausgedrückt werden. Hierzu ersetzen wir  $r$  in der freien Energie durch  $b^{-1} D$ :

$$\mathbf{x}^r = (\mathbf{e}, \mathbf{p}, D), \quad \mathbf{X}^r = (\boldsymbol{\sigma}, 0, \Leftrightarrow Y) \quad (4.52)$$

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} + \frac{1}{2} k b^{-2} D^2 \quad (4.53)$$

Die dissipativen Kräfte sind dann

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (4.54)$$

$$Y = \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} \Leftrightarrow k b^{-2} D \quad (4.55)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}{(1 \Leftrightarrow D)^2} \Leftrightarrow k b^{-2} D . \quad (4.56)$$

Die Kraft  $Y$  ist also die ursprüngliche Schädigungskraft abzüglich  $b^{-1} R$ . Somit ist der Term  $bY \Leftrightarrow R$  in der ursprünglichen Fließfunktion durch  $Y$  zu substituieren, und man erhält

$$F(\boldsymbol{\sigma}, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} + bY \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.57)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{(1 \Leftrightarrow D) \sigma_{\text{eq}}} \lambda \quad (4.58)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \lambda = b \lambda . \quad (4.59)$$

Der Multiplikator hat natürlich den gleichen Wert wie zuvor:

$$\lambda = (k(1 \Leftrightarrow D) \Leftrightarrow b \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \Leftrightarrow b^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^{-1} \left( \frac{3 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{2 \tilde{\sigma}_{\text{eq}}} + b \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.60)$$

### Effektive Spannung und Dehnungsrate

Die Fließfunktion wurde aus der von-Mises-Fließfunktion gewonnen, indem unter anderem die Spannung durch die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  ersetzt wurde. Dies legt den Gedanken nahe, daß sich die Modellgleichungen vereinfachen könnten, wenn wir statt der Spannung die effektive Spannung als Variable betrachten:

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + bY \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.61)$$

In dieser Formulierung ist die Fließfunktion nicht mehr direkt von der Zustandsvariable  $D$  abhängig. Es zeigt sich jedoch, daß diese Substitution alleine zur Vereinfachung der Entwicklungsgleichungen nicht ausreicht.

Eine einfachere Formulierung des Modells erhält man erst, wenn man durch eine weitere Substitution auch in der Dissipationsfunktion die Zustandsvariablen eliminiert. Dann sind sowohl das Dissipationspotential als auch dessen Legendre-Fenchel-Transformierte nicht mehr von den Zustandsvariablen abhängig. Hierzu bestimmen wir zunächst die Dissipationsfunktion:

$$\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, Y) = I_K(\boldsymbol{\sigma}, Y) \quad (4.62)$$

$$K = \{(\boldsymbol{\sigma}, Y) \mid F(\boldsymbol{\sigma}, Y, D) \leq 0\} \quad (4.63)$$

$$\Psi(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{D}, D) = \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, Y)} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{p}} + Y \dot{D} \Leftrightarrow \Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, Y) \right\} \quad (4.64)$$

$$= \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, Y) \in K} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{p}} + Y \dot{D} \right\} \quad (4.65)$$

$$= \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, Y)} \left\{ \sigma_{\text{eq}} \dot{p}_{\text{eq}} + Y \dot{D} \mid \sigma_{\text{eq}} (1 \Leftrightarrow D)^{-1} + bY \Leftrightarrow \sigma_y = 0 \right\} \quad (4.66)$$

$$\Psi(\dot{\mathbf{p}}, \dot{D}, D) = \sup_Y \left\{ \sigma_y (1 \Leftrightarrow D) \dot{p}_{\text{eq}} + Y \left( \dot{D} \Leftrightarrow b^{-1} (1 \Leftrightarrow D) \dot{p}_{\text{eq}} \right) \right\} \quad (4.67)$$

$$= \begin{cases} \sigma_y (1 \Leftrightarrow D) \dot{p}_{\text{eq}} & \text{für } (1 \Leftrightarrow D) \dot{p}_{\text{eq}} \geq b \dot{D} \\ \infty & \text{für } (1 \Leftrightarrow D) \dot{p}_{\text{eq}} < b \dot{D} \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\mathcal{D} = \Psi \quad (4.69)$$

Die Dissipationsfunktion läßt sich durch die Einführung einer effektiven plastischen Dehnungsrate vereinfachen:

$$\tilde{\dot{\mathbf{p}}} = (1 \Leftrightarrow D) \dot{\mathbf{p}} \quad (4.70)$$

Anstatt als Produkt von dissipativen Kräften und Flüssen kann die Dissipation als Produkt der effektiven Werte geschrieben werden.

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{p}} + Y \dot{D} \quad (4.71)$$

$$= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\dot{\mathbf{p}}} + Y \dot{D} \quad (4.72)$$

Die Normalenregel läßt sich nun im Raum der effektiven dissipativen Kräfte und effektiven dissipativen Flüsse formulieren.

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\text{d}} = (\tilde{\dot{\mathbf{p}}}, \dot{D}), \quad \tilde{\mathbf{X}}^{\text{d}} = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) \quad (4.73)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\text{d}} \in \partial \Psi(\tilde{\mathbf{x}}^{\text{d}}), \quad \tilde{\mathbf{x}}^{\text{d}} \in \partial \Psi^*(\tilde{\mathbf{X}}^{\text{d}}) \quad (4.74)$$

$$\Psi(\tilde{\dot{\mathbf{p}}}, \dot{D}) = \begin{cases} \sigma_y \dot{p}_{\text{eq}} & \text{für } \dot{p}_{\text{eq}} \geq b \dot{D} \\ \infty & \text{für } \dot{p}_{\text{eq}} < b \dot{D} \end{cases} \quad (4.75)$$

$$\Psi^*(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + bY \Leftrightarrow \sigma_y \leq 0 \\ \infty & \text{für } \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + bY \Leftrightarrow \sigma_y > 0 \end{cases} \quad (4.76)$$

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + bY \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.77)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{p}}} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\tilde{\sigma}_{\text{eq}}} \lambda \quad (4.78)$$

$$\dot{D} = b \lambda \quad (4.79)$$

$$\lambda = \left( \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\tilde{\sigma}_{\text{eq}}} + b \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^{-1} \right) \frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{k} \quad (4.80)$$

Man kann leicht nachprüfen, daß diese Entwicklungsgleichungen äquivalent zu den ursprünglichen Evolutionsgleichungen (4.45) bis (4.48) sind.

In der obigen Darstellung der Zeitentwicklung ((4.78) bis (4.80)) erhält das Modell eine wesentlich einfachere Gestalt als in der ursprünglichen Formulierung. Insbesondere der plastische Multiplikator  $\lambda$  (4.80) ist gegenüber (4.48) stark vereinfacht. Man kann deutlich einen plastischen Anteil vom Schädigungsterm unterscheiden. Im Grenzfall  $b \rightarrow 0$  liefert das Modell die gewöhnliche von-Mises-Fließregel, wenn man vor der Grenzwertbildung die Variable  $D$  durch die Verfestigungsvariable  $r = b^{-1} D$  ausdrückt.

### Symmetrie der tangentiellen Steifigkeit

Aufgrund der assoziierten Fließregel und der Symmetrie der Fließfunktion führt das Modell zu einem symmetrischen tangentiellen Steifigkeitstensor. Zur Berechnung der tangentiellen Steifigkeit  $\mathbf{K}$  wird die Ableitung der Spannung betrachtet.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.81)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}) \Leftrightarrow \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{p}) \dot{D} \quad (4.82)$$

$$= (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1 \Leftrightarrow D} \mathbf{n} \right) \Leftrightarrow b \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \lambda \quad (4.83)$$

$$\text{mit } \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\tilde{\sigma}_{\text{eq}}} \quad (4.84)$$

Aus der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$  erhält man den Multiplikator

$$\lambda = h^{-1} (\mathbf{n} \mathbf{C} + b \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.85)$$

wobei der Verfestigungsmodul  $h$  den Wert

$$h = k + \frac{\mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n}}{1 \Leftrightarrow D} + \frac{b \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}}{1 \Leftrightarrow D} \quad (4.86)$$

hat. Nach Einsetzen von  $\lambda$  erkennt man die Symmetrie der tangentiellen Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{h} \left[ h (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{C} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{C} + \right. \\ &\quad \left. \Leftrightarrow b (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{C} \Leftrightarrow b \mathbf{C} (\mathbf{n} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \Leftrightarrow b^2 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Bei einer nicht-assozierten Fließregel wird hingegen die Symmetrie durch die Schädigung gebrochen. Als Beispiel betrachte man ein Modell mit dem gleichen plastischen Potential, bei dem die Fließfunktion jedoch nur den plastischen Anteil und nicht den Schädigungsterm enthält. Schädigung und Verfestigung sind hier wieder durch zwei Variablen ausgedrückt.

$$G(\boldsymbol{\sigma}, R, Y, D) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \Leftrightarrow R + b Y \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.88)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, Y, D) = \tilde{\sigma}_{\text{eq}} \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \sigma_y \quad (4.89)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda = \frac{\mathbf{n}}{1 \Leftrightarrow D} \lambda \quad (4.90)$$

$$\dot{r} = \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial R} \lambda = \lambda \quad (4.91)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial G}{\partial Y} \lambda = b \lambda \quad (4.92)$$

Die Entwicklungsgleichungen gleichen denen des assoziierten Modells, nur der Multiplikator ist ein anderer:

$$\lambda = h^{-1} \mathbf{n} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.93)$$

$$h = k + \frac{\mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n}}{1 \Leftrightarrow D} \quad (4.94)$$

Mit (4.83) erhalten wir

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{k} [k(1 \Leftrightarrow D) \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{C} \Leftrightarrow b(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{C}] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.95)$$

Im Gegensatz zu (4.87) wird der Term  $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{C}$  hier nicht durch einen Term  $\mathbf{C}(\mathbf{n} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$  ausgeglichen, so daß die Symmetrie gebrochen ist.

### 4.3.3 Schwache Formulierung

Das Anfangs-Randwertproblem zu diesem Materialmodell soll nun in eine schwache Formulierung überführt werden. Zunächst werden geeignete Räume für die Zustandsvariablen und konjugierten Kräfte gewählt.

$$U = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \forall \mathbf{x} \in \cdot, u : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \quad (4.96)$$

$$V = \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{3 \times 3} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (4.97)$$

$$W = L^2(\Omega) \quad (4.98)$$

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{v} : [0, T] \mapsto U \} \quad (4.99)$$

$$\mathcal{V} = \{ \boldsymbol{\tau} : [0, T] \mapsto V \} \quad (4.100)$$

$$\mathcal{W} = \{ w : [0, T] \mapsto W \} \quad (4.101)$$

Als Anfangsbedingungen für die dissipativen Variablen und Kräfte in Abhängigkeit von Ort und Zeit wählen wir den unbelasteten, ungeschädigten Zustand

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega : \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad D(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (4.102)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad Y(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (4.103)$$

Auf Teilen des Randes  $\partial\Omega$  seien jeweils kinematische oder statische Randbedingungen gegeben:

$$\forall \mathbf{x} \in \cdot, u \subset \partial\Omega : \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.104)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \cdot, t \subset \partial\Omega : \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) \perp \cdot, t \quad (4.105)$$

$$\partial\Omega = \cdot, u \cup \cdot, t, \quad \cdot, u \cap \cdot, t = \emptyset \quad (4.106)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (2.2) lautet in schwacher Formulierung

$$\forall \mathbf{v} \in U : \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d, \quad (4.107)$$

Die Entwicklung der dissipativen Variablen ist durch die Normalenregel gegeben, welche sich als (lokale) Variationsungleichung ausdrücken läßt. Zur Vereinfachung werden die effektive Spannung und Dehnungsrate verwendet.

$$(\tilde{\mathbf{p}}, \dot{D}) \in N_K(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) \quad (4.108)$$

$$K = \{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) \mid \tilde{\sigma}_{\text{eq}} + bY \Leftrightarrow \sigma_y \leq 0\} \quad (4.109)$$

$$\Rightarrow \forall (\boldsymbol{\tau}, Z) \in K : \tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\tau} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \dot{D}(Z \Leftrightarrow Y) \leq 0 \quad (4.110)$$

Die dissipativen Flüsse können durch die Dehnungsrate und die Kräfte ausgedrückt werden. Auch die Schädigungsvariable kann in diesem Modell durch die Kräfte substituiert werden:

$$\tilde{\mathbf{p}} = (1 \Leftrightarrow D)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \mathbf{C}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}) \quad (4.111)$$

$$D = k^{-1} b^2 \left( \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow Y \right) \quad (4.112)$$

Aus der Variationsungleichung (4.110) folgt somit durch eine Ungleichung, die als Variablen die Dehnungsrate  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sowie die Kräfte  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y$  und deren Zeitableitungen  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}, \dot{Y}$  enthält. Durch Integration über  $\Omega$  und Hinzufügen der Gleichgewichtsbedingung (4.107) gelangt man zu folgender schwacher Formulierung des Problems. Hierbei sei

$$P = \{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, Y) \in V \times W \mid \forall \mathbf{x} \in \Omega : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), Y(\mathbf{x})) \in K\} . \quad (4.113)$$

Zu gegebener Belastung  $\mathbf{t} : ,_t \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3$  sucht man  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{V}$  und  $Y \in \mathcal{W}$ , so daß für fast<sup>3</sup> alle  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  und alle  $\mathbf{v} \in U$ ,  $(\boldsymbol{\tau}, Z) \in P$  folgende zwei Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \left[ 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{k} \left( \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow Y(\mathbf{x}, t) \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d, \quad (\text{Gleichgewicht}) \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \left[ 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{k} \left( \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{C}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow Y(\mathbf{x}, t) \right) \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) \Leftrightarrow \mathbf{C}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}, t)] \cdot \right. \\ & \quad \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) + \frac{b^2}{k} \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{C}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow \dot{Y}(\mathbf{x}, t) \right) (Z(\mathbf{x}) \Leftrightarrow Y(\mathbf{x}, t)) \left. \right\} d\Omega \\ & \leq 0 \quad (\text{Evolution der dissipativen Variablen}) \end{aligned} \quad (4.115)$$

---

<sup>3</sup> $t \in M_t \subseteq [0, T]$ , wobei  $M_t$  eine Menge vom Maß null ist.

Dieser Formulierung des schadensmechanischen Modells soll nun die entsprechende Darstellung des elastoplastischen Modells ohne Schädigung gegenübergestellt werden. Letztere wurde von HAN und REDDY [43, 42] in Bezug auf Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung untersucht. Wir gehen wieder zu den Zustandsvariablen  $\mathbf{e}, \mathbf{p}, r$  über und definieren

$$P' = \{(\boldsymbol{\sigma}, R) \in V \times W \mid \forall \mathbf{x} \in \Omega : \sigma_{\text{eq}} \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \sigma_y \leq 0\} . \quad (4.116)$$

Zu gegebener Belastung  $\mathbf{t}$  sucht man nun  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{V}$  und  $R \in \mathcal{W}$ , so daß für fast alle  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  und alle  $\mathbf{v} \in U$ ,  $(\boldsymbol{\tau}, S) \in P'$  folgende zwei Beziehungen gelten:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d, \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (4.117)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ [\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) \Leftrightarrow \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)] \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) + \right. \\ \left. \Leftrightarrow k^{-1} \dot{R}(\mathbf{x}, t) (S(\mathbf{x}) \Leftrightarrow R(\mathbf{x}, t)) \right\} d\Omega \leq 0 \quad (\text{Evolution}) \quad (4.118)$$

Das rein elastoplastische Problem ist somit erheblich einfacher als das schadensmechanische Modell. Insbesondere fallen dabei zwei Unterschiede zwischen Gleichung (4.115) und (4.118) auf. Durch die Schädigung kommen nichtlineare Terme hinzu, und es treten gemischte Terme auf, während in (4.118) Spannung und Verfestigungskraft getrennt sind.

Im Fall ohne Schädigung können die Terme in der Variationsgleichung und Ungleichung durch Bilinearformen und ein lineares Funktional ausgedrückt werden:

$$T = V \times W \quad (4.119)$$

$$L(t) : U \mapsto \mathbb{R}, \quad \langle L(t), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(t) \boldsymbol{\varepsilon} d, \quad (4.120)$$

$$A : T \times T \mapsto \mathbb{R}, \quad A((\boldsymbol{\sigma}, R), (\boldsymbol{\tau}, S)) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\tau} + R k^{-1} S) d\Omega \quad (4.121)$$

$$B : U \times V \mapsto \mathbb{R}, \quad B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\tau} d\Omega \quad (4.122)$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man für (4.115) und (4.118)

$$\forall \mathbf{v} \in U : \quad B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}(t)) = \langle L(t), \mathbf{v} \rangle \quad (4.123)$$

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, S) \in P' : \quad A((\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t), \dot{R}(t)), (\boldsymbol{\tau}, S) \Leftrightarrow (\boldsymbol{\sigma}(t), R(t))) + \\ \Leftrightarrow B(\dot{\mathbf{u}}(t), \boldsymbol{\tau} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(t)) \geq 0 \quad (4.124)$$

Das schadensmechanische Modell erlaubt keine solche Darstellung mittels Linear- und Bilinearformen. Da aufgrund der multiplikativen Kopplung der Schädigungsvariable mit der elastischen Energie die freie Energie keine quadratische Form

mehr ist, besitzt zwangsläufig auch die schwache Formulierung eine kompliziertere Gestalt.

Die hier abgeleitete Formulierung des vereinfachten schadensmechanischen Modells kann als Ausgangspunkt dienen, um die grundlegenden mathematischen Eigenschaften der Modellklasse zu untersuchen. Eine solche mathematische Untersuchung würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

## 4.4 Zusammenfassung

Die Formulierung des neuen schadensmechanischen Modells für elastoplastische Materialien geht vom Prinzip der maximalen Dissipation aus. Da Modelle mit nicht-assoziierter Fließregel gegen diese Annahme verstoßen und in ihrer üblichen Form sogar die Postulate von Ilyushin und Drucker verletzen, wurde eine assoziierte Fließregel im Raum aller dissipativen Kräfte verwendet.

In der Literatur findet man mehrere Modelle, die auf separaten Fließflächen für Plastizität und Schädigung basieren. In diesem Kapitel wurde gezeigt, daß diese Modelle einen Spezialfall von maximal dissipativen Modellen darstellen, bei dem die Fließfläche im Raum aller Kräfte aus orthogonalen Teilflächen besteht und bei dem die beiden dissipativen Prozesse weitgehend entkoppelt sind. Mit einer glatten Fließfläche hingegen erhält man eine starke Kopplung von Plastizität und Schädigung. Im neuen Modell wird dieser Ansatz starker Kopplung erstmalig konsequent umgesetzt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Modell zu erweitern, um auch Fälle schwacher Kopplung zu erfassen.

Für die freie Energie und die Fließfunktion wurde folgender Ansatz gewählt, bei dem durch die Wahl der Funktionen  $f_r$ ,  $g$  und  $h$  die Anpassung an spezielle Materialien erfolgen muß.

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, D, r) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} + f_r(r) \quad (4.125)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + g(Y) h(D) \quad (4.126)$$

Als einfachste Realisierung dieses Ansatzes wurde zunächst eine quadratische Verfestigungsenergie  $f_r$  verwendet. Für die Fließfunktion wurde ein Schädigungsterm gewählt, der linear in der Schädigungskraft ist und nicht von der Schädigungsvariablen abhängt. In diesem Fall sind Verfestigung und Schädigung linear abhängig und können durch eine einzige Zustandsvariable ausgedrückt werden. Führt man die effektive Spannung  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  und die effektive plastische Dehnungsrate  $\tilde{\dot{\mathbf{p}}}$  ein, so läßt sich die Schädigungsvariable aus Dissipations- und Fließfunktion eliminieren, und

die Evolutionsgleichungen erhalten eine einfache Gestalt. Aus dieser vereinfachten Darstellung wurde eine schwache Formulierung abgeleitet.

# Kapitel 5

## Modellierung eines Vergütungsstahls

Im vorangehenden Kapitel wurden die Grundideen des neuen Modells erläutert und in einer sehr einfachen Form konkretisiert. Der lineare Ansatz des vereinfachten Modells ist geeignet, die grundsätzlichen mathematischen Eigenschaften dieser Art von Modellen zu untersuchen, aber er ist zu einfach, um reale Materialien zu simulieren.

Die Anpassung der Ansatzfunktionen von freier Energie und Fließfunktion zur Beschreibung eines Vergütungsstahls steht im Mittelpunkt dieses Kapitels. Zunächst soll das Modell die Ergebnisse einachsiger Zugentlastungsversuche wiedergeben, bevor mehrachsige Belastungen betrachtet werden.

### 5.1 Einachsige Belastungen

Um experimentelle Daten für einachsige Belastungen zu gewinnen, wurden Zugentlastungsversuche durchgeführt. Die Ergebnisse können mit einem einfachen exponentiellen Ansatz für freie Energie und Fließfunktion gut wiedergegeben werden.

### 5.1.1 Einachsige Zugentlastungsversuche

#### Materialeigenschaften und Probenpräparation

Als Material wurde der Vergütungsstahl 30CrNiMo8 gewählt, da dieser bereits in einer vorhergehenden Arbeit [39] zur Schadensmechanik untersucht wurde. Das Material wurde von der Thyssen Stahl AG zur Verfügung gestellt. Alle Proben entstammen der gleichen Charge (263160/92).

Vom Hersteller wurde folgende chemische Zusammensetzung (in Gewichtsprozent) angegeben: 0,33 C, 2,1 Ni, 2,08 Cr, 0,53 Mn, 0,35 Mo, 0,18 Si, 0,08 Cu, 0,025 Co, 0,024 P, 0,021 Al, 0,02 W, 0,02 S, <0,01 V und <0,004 B.

Dieser Vergütungsstahl, der in der Industrie häufig für große, hoch belastete Maschinenteile eingesetzt wird, weist eine sehr homogene Textur auf (Abb. 5.1). Die bei Schnitten in Längsrichtung beobachtete Textur gleicht der quer zur Probenachse.

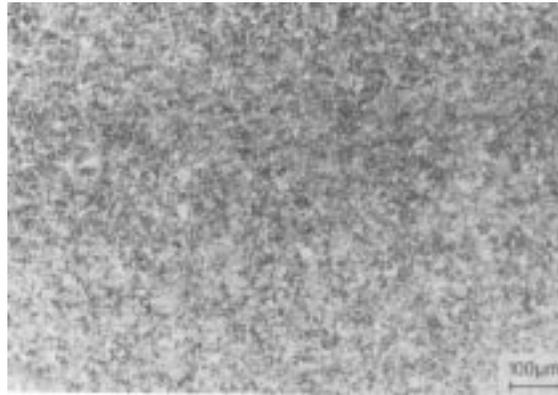


Abbildung 5.1: Textur des Vergütungsstahls 30CrNiMo8

Die Rohlinge wurden bei 860° C gehärtet und anschließend bei 600° C zwei Stunden angelassen, wodurch  $333 \pm 5$  HRB erreicht wurde. Für die einachsigen Zugentlastungsversuche wurden rotationssymmetrische Proben gemäß Abbildung 5.2 angefertigt.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Zugversuche wurden auf einer servohydraulischen Prüfmaschine der Carl Schenk AG durchgeführt (Serie S56, bis 1000kN). Zur Dehnungsmessung wurde der Wegaufnehmer DSA25/20 der Carl Schenk AG eingesetzt. Die Versuche wurden über die Kraft gesteuert, da hierdurch eine höhere Genauigkeit als bei Weg-

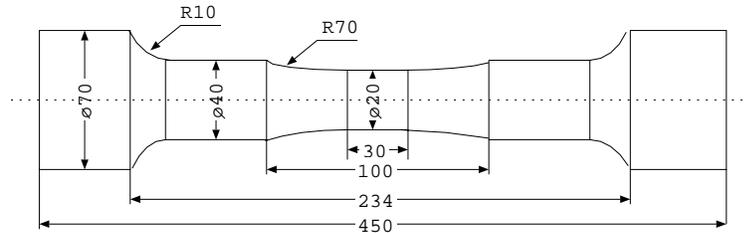


Abbildung 5.2: Probengeometrie

steuerung erreicht werden konnte. Als Spannungszunahmegeschwindigkeit wurde  $\dot{\sigma}_N = \pm 30 \text{ MPa s}^{-1}$  gewählt (entsprechend EN 10 002).

Bei einer Wegsteuerung wäre es möglich, den Versuch über die Gleichmaßdehnung hinaus zu führen. Da dann jedoch die Probe einschnürt und die Deformation stark lokalisiert wird, wäre eine solche Versuchsführung nur sinnvoll, wenn die Möglichkeit zu einer lokalen Spannungs- und Dehnungsmessung bestände. Eine Auswertung der gemessenen Kraft und einer integrierten Dehnung erlaubt keine direkte Bestimmung von schadensmechanischen Modellparametern. Dieses Problem wurde bei einigen früheren Arbeiten nicht beachtet (z.B. [39, 57]).

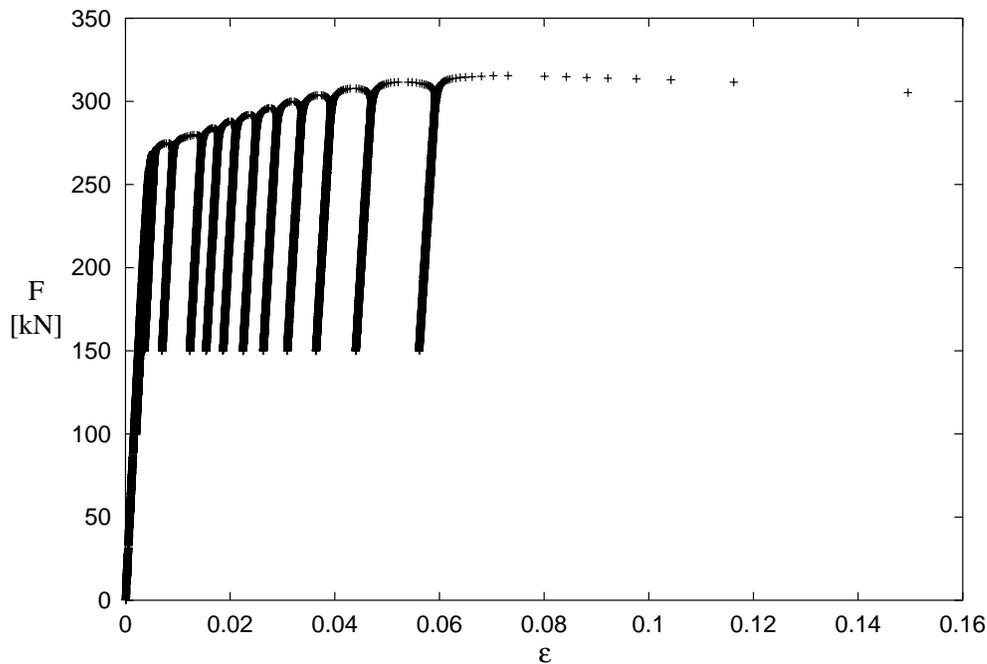


Abbildung 5.3: Zugentlastungsversuch

Beim Zugentlastungsversuch wird die Probe im Gegensatz zum einfachen Zugversuch an verschiedenen Punkten der plastischen Deformation entlastet und wieder belastet (Abb. 5.3). Die Entlastung wird nicht vollständig durchgeführt, da an-

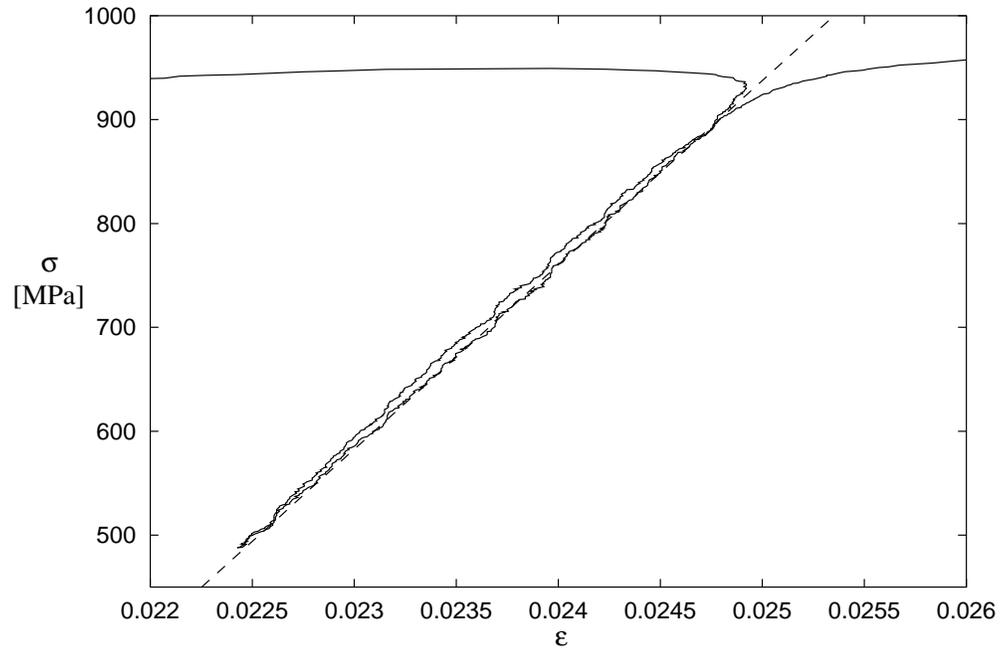


Abbildung 5.4: Hystereseschleife bei Ent- und Belastung

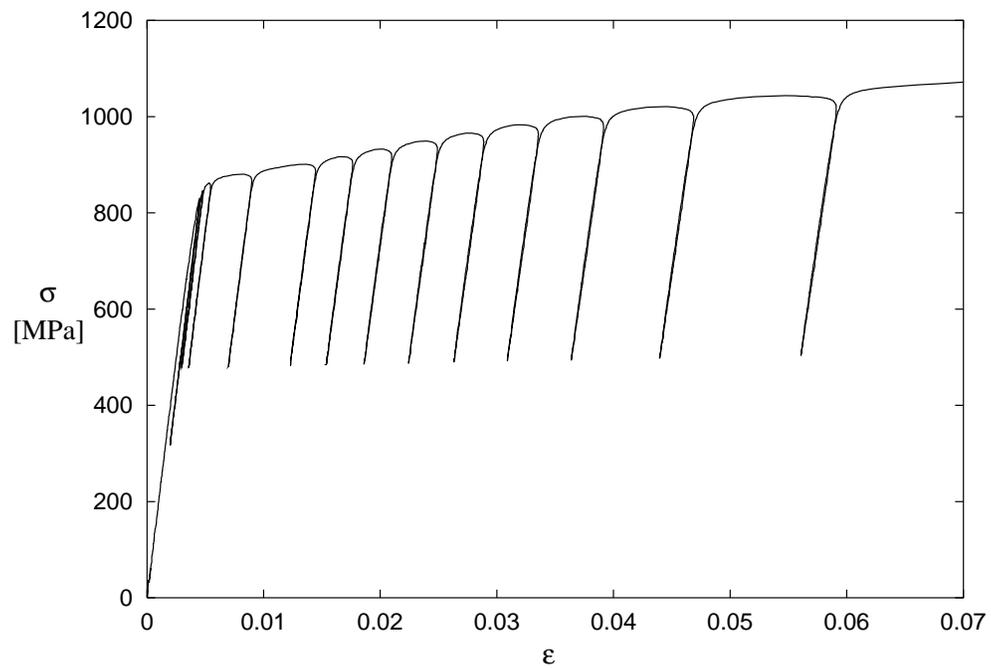


Abbildung 5.5: Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Zugentlastungsversuchs

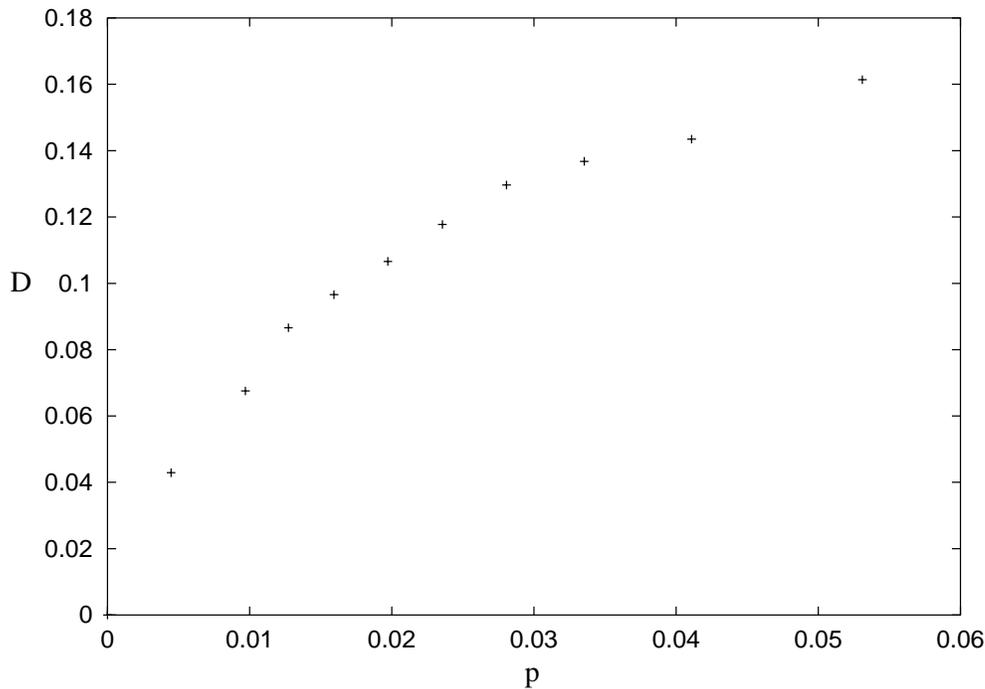


Abbildung 5.6: Schädigung in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung

derenfalls eine negative plastische Verformung und somit eine wesentlich größere Hysterese auftreten würde. Zur Bestimmung der effektiven Steifigkeit wird jeweils die Entlastung ausgewertet, wobei der Anfang der Entlastung (10%) wegen kleiner viskoplastischer Effekte nicht berücksichtigt wird (Abb. 5.4).

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 sind die Spannung<sup>1</sup> über der Dehnung und die Schädigung über der plastischen Dehnung aufgetragen. Zu Beginn der plastischen Verformung ist die Schädigungsrate relativ hoch, anschließend nimmt das Verhältnis der Schädigungsgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der plastischen Dehnung ab.

Eine Diskussion der Ursachen für die unterschiedliche Gestalt von  $\varepsilon$ - $D$ -Kurven verschiedener Metalle findet man bei BONORA [8]. Die hier vorliegende konkave Form wird einem Schädigungsprozeß zugeordnet, bei dem das Wachstum der Schädigung im wesentlichen von der Nukleation von Poren und weniger durch deren Wachstum bestimmt wird. Bei einer konvexen Kurve hingegen wird das Wachstum der einzelnen Defekte als der dominante Prozeß angesehen.

---

<sup>1</sup>Bei der Berechnung der Spannung aus der Nennspannung wurde für die Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  angesetzt [39].

### 5.1.2 Anpassung des Modells

Das im Abschnitt 4.2 entwickelte Konzept für ein schadensmechanisches Modell soll nun verwendet werden, um ein Modell an die soeben vorgestellten experimentellen Daten anzupassen. Der Modellansatz ließ drei Funktionen ( $f_r, g, h$ ) offen, die in die freie Energie und in die Fließfunktion eingehen und so die Entwicklung von Verfestigung und Schädigung bestimmen.

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{p}, r, D) = \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow D) \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} + f_r(r) \quad (5.1)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + g(Y) h(D) \quad (5.2)$$

Bei einem isotropen Material ist speziell

$$Y = \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{E (1 \Leftrightarrow D)^2} \left( \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 \Leftrightarrow 2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{eq}}} \right)^2 \right) \quad (5.4)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (5.5)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul des ungeschädigten Materials und  $\nu$  die Querkontraktionszahl bezeichnet.

Da wir an der Wiedergabe der Realität durch ein möglichst einfaches Modell interessiert sind, soll der Schädigungsanteil der Fließfunktion (zunächst) unabhängig von der Schädigungsvariable sein:

$$h(D) = 1 \quad (5.6)$$

Somit bleiben zwei relativ frei wählbare Funktionen zur Anpassung an die experimentellen Ergebnisse, welche beim einachsigen Versuch ebenfalls durch zwei Funktionen, nämlich  $\sigma(\varepsilon)$  und  $D(p)$  ausgedrückt werden können. Es überrascht also nicht, daß die Resultate des einachsigen Zugentlastungsversuchs durch ein maximal dissipatives Modell dieser Gestalt simuliert werden können. Nicht selbstverständlich ist jedoch, daß die Funktionen  $f_r$  und  $g$  eine einfache Gestalt haben.

Durch folgenden exponentiellen Ansatz für die beiden Funktionen, bei dem vier Parameter auftreten, kann eine gute Übereinstimmung von Modell und Experiment erreicht werden.

$$f_r(r) = k_1 (1 \Leftrightarrow e^{-k_2 r}) \quad (5.7)$$

$$g(Y) = b_1 (1 \Leftrightarrow e^{-b_2 (Y - Y_0)}) \quad (5.8)$$

$$\text{mit } Y_0 = \frac{1}{2} E^{-1} \sigma_y^2 \quad (5.9)$$

$$k_1, k_2, b_1, b_2 > 0 \quad (5.10)$$

Eine direkte Parameteridentifikation, wie beispielsweise für  $E$  und  $\sigma_y$ , ist für die Konstanten  $k_1, k_2, b_1$  und  $b_2$  nicht möglich. Eine Änderung eines dieser vier Parameter hat jeweils sowohl eine Änderung der Zeitentwicklung der Schädigung als auch der plastischen Dehnung zu Folge; denn es liegt gerade im Wesen der assoziierten Fließregel, daß Schädigung und Plastizität stark gekoppelt sind. Dies ist jedoch keine Einschränkung für die praktische Anwendbarkeit des Modells. Um die homogene Verformung im einachsigen Zugversuch zu simulieren, braucht kein Randwertproblem gelöst zu werden, sondern es sind nur die gewöhnlichen Differentialgleichungen des Materialmodells an einem Raumpunkt zu integrieren. So konnte mit einem primitiven Suchalgorithmus in vertretbarer Rechenzeit eine gute Approximation der Meßwerte erreicht werden.

Bei der zur Parameteridentifikation verwendeten Messung waren  $E = 199$  MPa und  $\sigma_y = 870$  MPa. Die Optimierung, bei welcher gleichzeitig die  $p(\sigma)$ - und  $D(\sigma)$ -Kurven angepaßt wurden, lieferte folgende Parameter:

$$k_1 = 509 \text{ MPa} \qquad k_2 = 29.8 \qquad (5.11)$$

$$b_1 = 8.54 \text{ MPa} \qquad b_2 = 1.36 \text{ MPa}^{-1} \qquad (5.12)$$

In den Abbildungen 5.7 und 5.8 werden die Ergebnisse der Simulation (durchgezogene Linie) mit den Meßwerten verglichen. Es ist eine gute Übereinstimmung festzustellen.

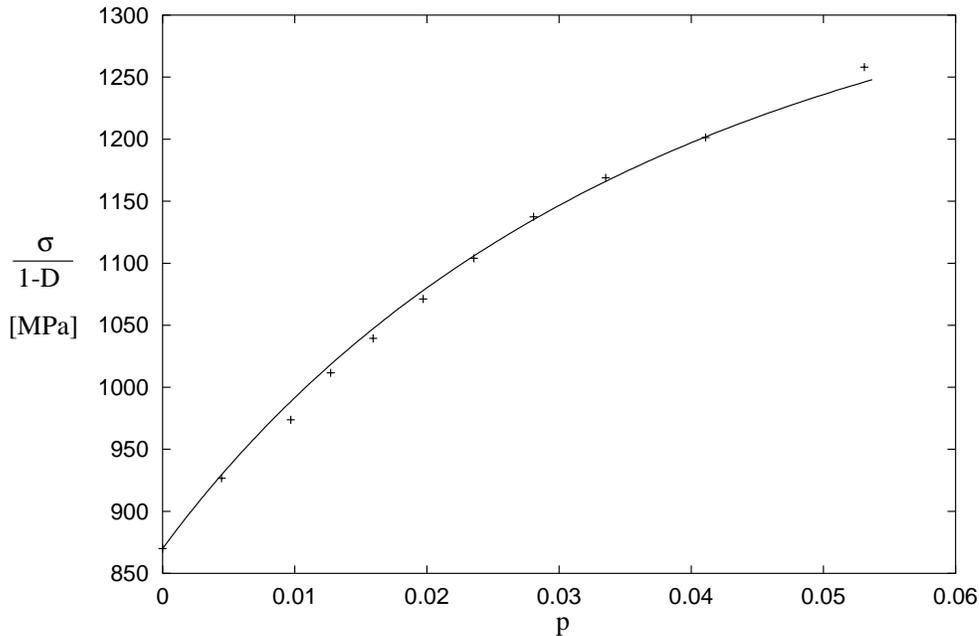


Abbildung 5.7: Experimentelle Daten und Fit mit dem Modell:  $\tilde{\sigma}(p)$

Es ist somit möglich, mit sehr einfachen Ansätzen für die freie Energie und für

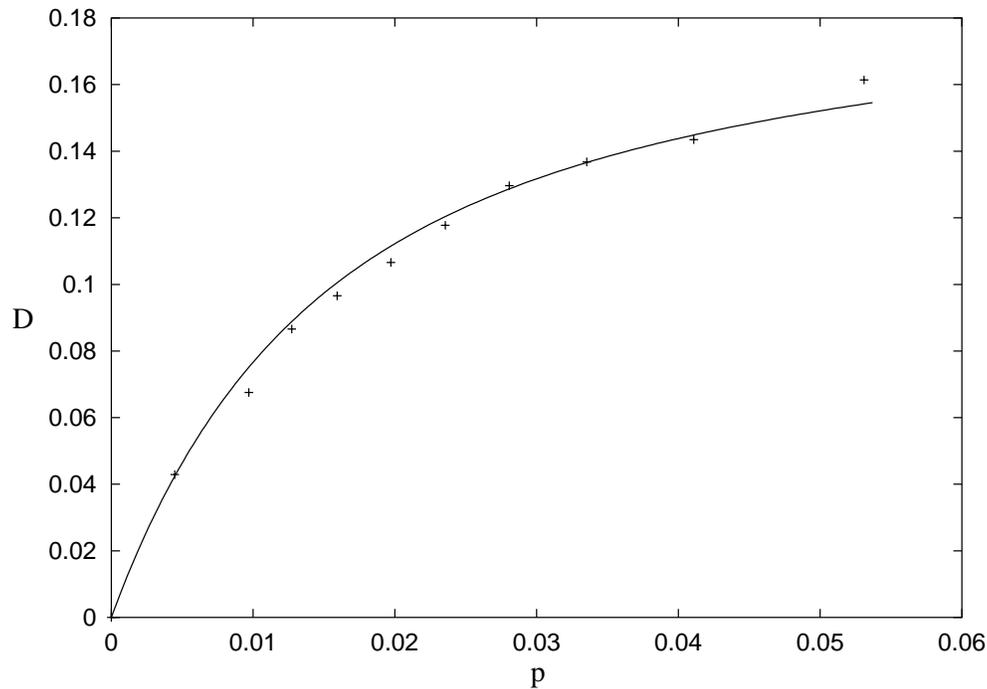


Abbildung 5.8: Experimentelle Daten und Fit mit dem Modell:  $D(p)$

die Fließfunktion sowie einer assoziierten Fließregel das experimentell beobachtete Materialverhalten zu simulieren.

## 5.2 Mehrachsige Belastungen

Nachdem das Modell an die Daten des einachsigen Zugversuchs angepaßt wurde, muß nun untersucht werden, ob auch das Modellverhalten bei mehrachsigen Belastungen richtig wiedergegeben werden kann. Es wird gezeigt werden, daß die Prognosen dieses Modells im mehrachsigen Lastfall nicht sinnvoll sind. Um das Modell auf diesen Fall zu erweitern, muß die Vereinfachung, daß der Schädigungsanteil  $F_Y(Y)$  der Fließfunktion von  $D$  unabhängig ist (5.6), fallen gelassen werden.

### 5.2.1 Betrachtung des Modellverhaltens

#### Materialverhalten bei mehrachsigen Belastungen

Während einachsige Zugversuche häufig zur Parameteridentifikation bei schadensmechanischen Modellen eingesetzt werden, findet man in der Literatur sehr

viel weniger Resultate zu mehrachsigen Belastungen. Messungen des Verlusts an Steifigkeit im Laufe der plastischen Verformung wurden – soweit dem Autor bekannt – nur bei einachsiger Belastung durchgeführt.

Eine Messung der Änderung des elektrischen Widerstandes während der plastischen Verformung (WANG [106]) ergab eine lineare Abhängigkeit zwischen der über den Widerstand definierten Schädigungsvariable und der plastischen Dehnung. Der Proportionalitätsfaktor stieg hierbei mit zunehmendem Mehrachsighkeitsgrad  $\sigma_m/\sigma_{eq}$  an. Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Widerstand und der Steifigkeit wurde nicht untersucht. Zudem entspricht der lineare Zusammenhang von  $D$  und  $p$  nicht den Meßergebnissen im Abschnitt 5.1.1, so daß die Resultate von Wang nicht für diese Arbeit übertragbar sind.

In einigen Veröffentlichungen findet man Messungen der Duktilität, d.h. der Bruchdehnung, in Abhängigkeit vom Mehrachsighkeitsgrad (z.B. BONORA [8], DECAMP, BAUVINEAU und PINEAU [32], SHICHUN und HUA [91]). Zur Bestimmung der schadensmechanischen Modellparameter sind solche Versuche insofern etwas problematisch, als daß in der Simulation die Bruchdehnung sowohl von den Entwicklungsgleichungen als auch vom Versagenskriterium abhängt. Da auch die Wahl des Versagenskriteriums keineswegs unumstritten ist (siehe Abschnitt 6.4), wäre es günstiger, die Evolutionsgleichungen unabhängig vom Versagenskriteriums mit experimentellen Werten vergleichen zu können.

Aus den Messungen der Duktilität geht hervor, daß bei höherem Mehrachsighkeitsgrad  $\sigma_m/\sigma_{eq}$  der Bruch bei kleinerer plastischer Dehnung eintritt. Im Verhältnis zur plastischen Deformation wird also der Schädigungsprozeß durch eine zusätzliche hydrostatische (Zug-)Spannung  $\sigma_m$  beschleunigt. Dies ist auch anschaulich klar, denn eine positive hydrostatische Spannung sollte das Wachstum von Poren oder Rissen begünstigen. An das Modell ist somit die Forderung zu stellen, daß bei einer zusätzlichen hydrostatischen Spannung die Schädigung als Funktion der plastischen Dehnung stärker wächst.

### Modellverhalten bei mehrachsigen Belastungen

Das im Abschnitt 5.1.2 aufgestellte Modell zeigt jedoch gerade das entgegengesetzte Verhalten: Bei größerem Mehrachsighkeitsgrad und gleicher Vergleichsspannung wächst die Schädigung wesentlich langsamer (Abb. 5.10). Der Effekt hat die falsche Richtung und ist deutlich größer als erwünscht. Andererseits ist zu beobachten, daß der Verlauf der plastischen Dehnung kaum durch die zusätzliche hydrostatische Spannung beeinflußt wird (Abb. 5.9).

Trägt man die Vergleichsspannung als Funktion der Dehnung auf (Abb. 5.11), so stellt man einen deutlichen Unterschied zwischen den zwei Kurven bei unter-

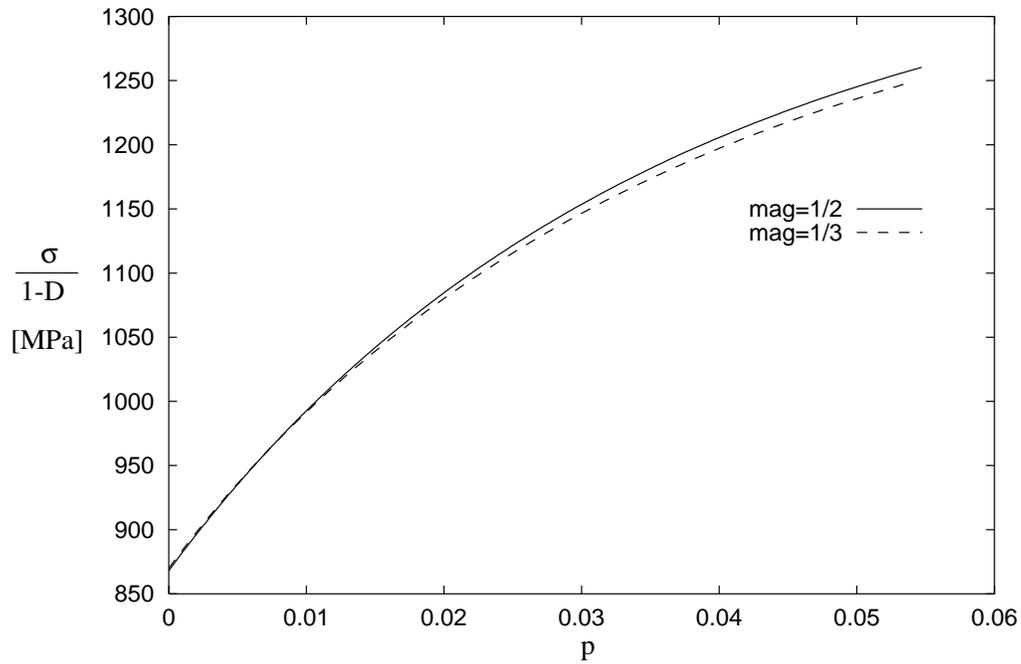


Abbildung 5.9: Modellverhalten  $\tilde{\sigma}(p)$  bei Mehrachsigsigkeitsgrad  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{eq}}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$

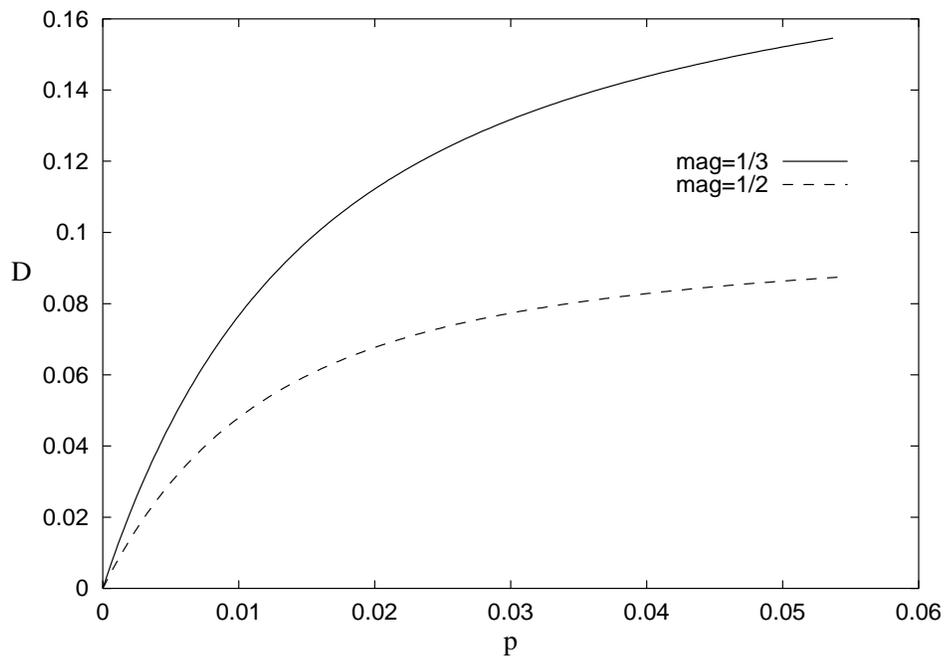


Abbildung 5.10: Modellverhalten  $D(p)$  bei Mehrachsigsigkeitsgrad  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{eq}}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$

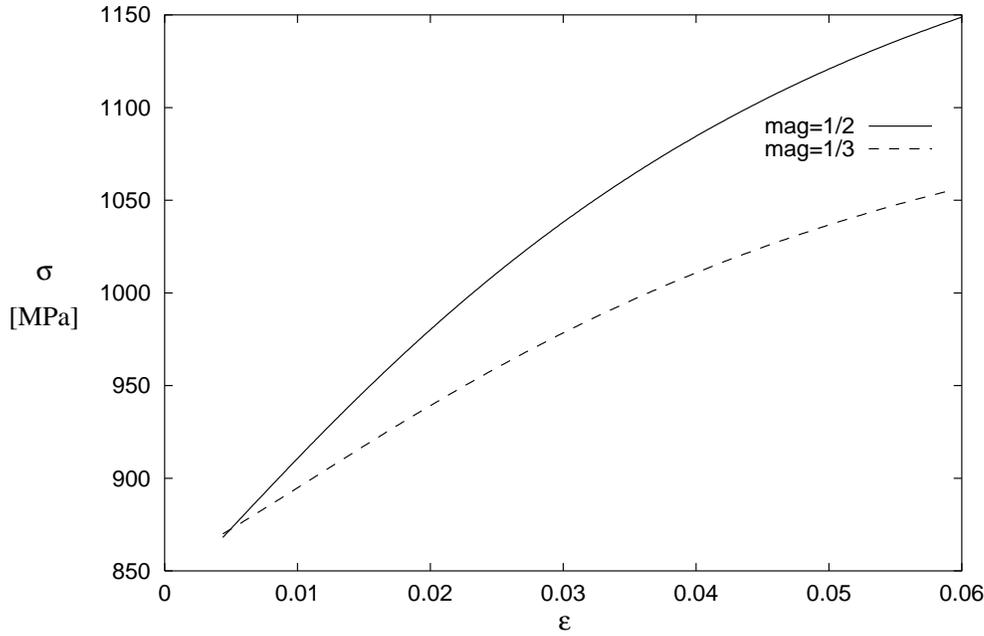


Abbildung 5.11: Modellverhalten  $\sigma(\varepsilon)$  bei Mehrachsigsigkeitsgrad  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$

schiedlicher hydrostatischer Spannung fest. Diese Differenz ist jedoch nicht auf den Schädigungsterm  $F_Y$  in der Fließfunktion, sondern auf die unterschiedliche Entwicklung der Schädigungsvariable zurückzuführen, deren Einfluß auf die Fließfunktion durch den Term  $\sigma_{eq}/(1 \Leftrightarrow D)$  erwünscht ist. Um zu überprüfen, ob die Abhängigkeit der Fließfunktion von der Schädigungskraft zu einem unerwünschten Einfluß des Mehrachsigsigkeitsgrades auf das plastische Verhalten führt, ist es daher sinnvoll, wie in Abbildung 5.9 die effektive Spannung an Stelle der Spannung zu betrachten.

Ausgehend von den Entwicklungsgleichungen soll nun untersucht werden, welche Eigenschaft der Fließfunktion die Abhängigkeit des Schädigungsprozesses von der hydrostatischen Spannung bestimmt. Aus den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda = \frac{1}{1 \Leftrightarrow D} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \lambda, \quad \dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \lambda = \frac{\partial F_Y}{\partial Y} \lambda \quad (5.13)$$

folgt für das Verhältnis von Schädigungs- und Deformationsgeschwindigkeit

$$\frac{\dot{D}}{\dot{p}_{eq}} = (1 \Leftrightarrow D) \frac{\partial F_Y}{\partial Y}. \quad (5.14)$$

Mit (5.4) erhält man

$$\frac{\partial(\dot{D}/\dot{p}_{eq})}{\partial \sigma_m} = \frac{3}{2} (1 \Leftrightarrow 2\nu) \frac{\sigma_m^2}{E(1 \Leftrightarrow D)} \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Y^2}, \quad (5.15)$$

und mit  $F_Y(Y, D) = g(Y) h(D)$

$$\frac{\partial(\dot{D}/\dot{p}_{\text{eq}})}{\partial\sigma_m} = \frac{3}{2} (1 \Leftrightarrow 2\nu) \frac{\sigma_m^2}{E(1 \Leftrightarrow D)} g''(Y). \quad (5.16)$$

Damit die Schädigungsgeschwindigkeit mit der hydrostatischen Spannung wächst, muß daher die zweite Ableitung der Funktion  $g$  positiv sein. Im exponentiellen Ansatz (5.8) wurde jedoch eine Funktion mit negativer Krümmung gewählt, um die experimentell beobachtete Sättigung in der Kurve  $D(p)$  (Abb. 5.6) zu erhalten.

### 5.2.2 Erweiterung des Modells

Läßt man im Modell eine Fließfunktion zu, deren Schädigungsanteil sowohl von der Schädigungskraft  $Y$  als auch von der Schädigungsvariable  $D$  abhängt, so kann man sowohl eine Zunahme der Schädigungsgeschwindigkeit mit der hydrostatischen Spannung und als auch eine sehr gute Wiedergabe der Meßwerte des einachsigen Versuchs erreichen. Es wird gezeigt werden, daß die Ansatzfunktionen  $f_r(r)$ ,  $g(Y)$  und  $h(D)$  weiterhin eine sehr einfache Gestalt haben.

#### Modifizierte Fließfunktion

Das Modell für unseren Vergütungsstahl muß drei Bedingungen erfüllen:

- Der Verlauf der Spannung in Abhängigkeit von der Dehnung ist (bei einachsiger Belastung) durch Abbildung 5.5 gegeben.
- Die Schädigung als Funktion der plastischen Dehnung hat eine negative zweite Ableitung gemäß Abbildung 5.6: Die Funktion

$$\frac{\partial D}{\partial p} = \frac{\dot{D}}{\dot{p}} = (1 \Leftrightarrow D) g'(Y) h(D) \quad (5.17)$$

ist monoton fallend.

- Die Schädigungsgeschwindigkeit soll gegenüber der Rate der plastischen Dehnung zunehmen, wenn die hydrostatische Spannung erhöht wird. Gemäß (5.16) ist die Ableitung

$$g'(Y)$$

also monoton wachsend.

Wenn  $h(D) = 1$  ist und die Schädigungsvariable nicht besonders groß wird, so daß der Faktor  $1 \Leftrightarrow D$  in (5.17) keine entscheidende Rolle spielt, dann stehen die zweite und dritte Bedingung im Widerspruch. Um die Mehrachsichtigkeit richtig zu erfassen, muß offenbar der Schädigungsanteil der Fließfunktion  $F_Y$  auch von der Schädigungsvariable abhängen.

Die Grundidee des Separationsansatzes

$$F_Y(Y, D) = g(Y) h(D) \quad (5.18)$$

besteht darin, daß die Funktion  $g$  verwendet wird, um die dritte Bedingung zu erfüllen, während der zweiten Bedingung durch eine geeignete Wahl von  $h$  genüge getan werden kann. Es gibt beliebig viele Paare von Funktionen  $(g, h)$ , die im einachsigen Fall alle die gleiche Zeitentwicklung liefern. Somit besteht hier ein zusätzlicher Freiheitsgrad bei der Modellbildung, so daß die Abhängigkeit vom Mehrachsichtigkeitsgrad erfaßt werden kann.

Wählt man

$$f_r(r) = k_1 (1 \Leftrightarrow e^{-k_2 r}) \quad (5.19)$$

$$g(Y) = \frac{b_1}{2} Y^2 \quad (5.20)$$

$$h(D) = e^{-b_2 D}, \quad (5.21)$$

so ist  $g'' > 0$ , und die Funktion  $h$  ist abklingend, so daß sie für die gewünschte negative Krümmung von  $D(p)$  sorgen kann. Damit der Parameter  $\sigma_y$  weiterhin die Bedeutung der Anfangsfließgrenze behält, addieren wir noch eine Konstante zur Fließfunktion:

$$F(\sigma, R, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + \frac{b_1}{2} (Y^2 e^{-b_2 D} \Leftrightarrow Y_0^2) \quad (5.22)$$

$$\text{mit } Y_0 = \frac{1}{2} E \sigma_y^2 \quad (5.23)$$

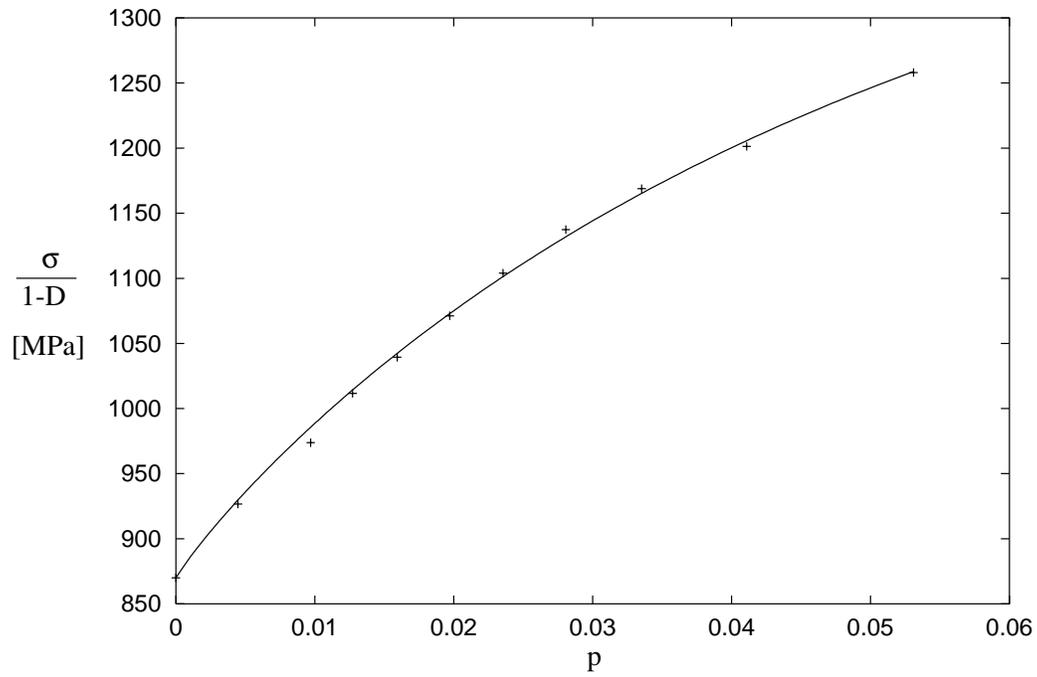
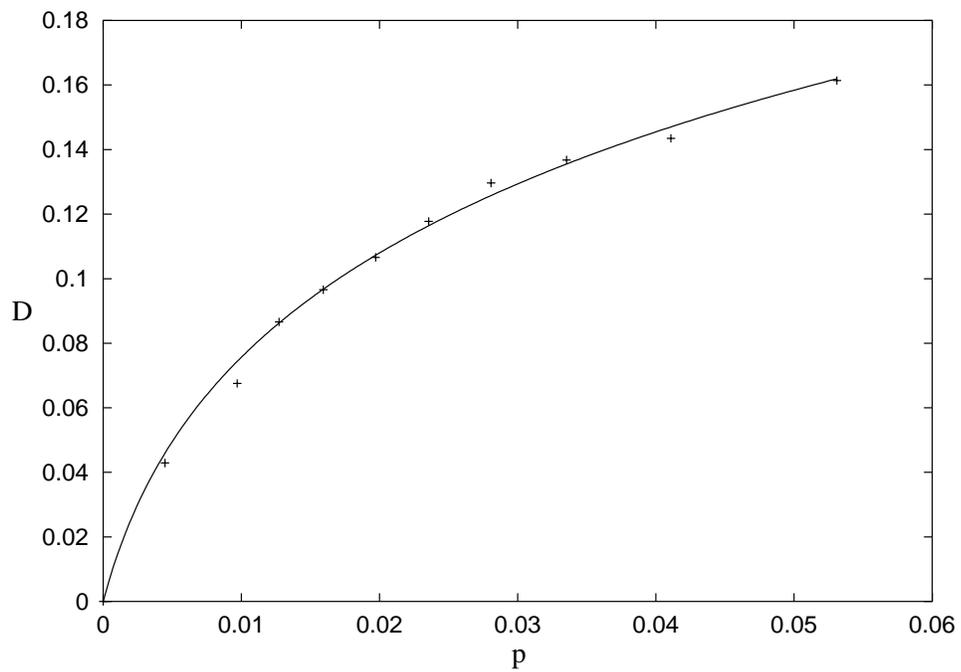
### Einachsige Belastungen

Dieser Ansatz liefert einen optimalen Fit der Daten des uniaxialen Versuchs mit den Parametern

$$k_1 = 597 \text{ MPa} \quad k_2 = 21.1 \quad (5.24)$$

$$b_1 = 8.46 \text{ MPa}^{-3} \quad b_2 = 20.0 . \quad (5.25)$$

Wie man anhand der Abbildungen 5.12 und 5.13 erkennen kann, wird das Experiment durch dieses Modell noch besser simuliert als durch den ursprünglichen Ansatz.

Abbildung 5.12: Fit von  $\tilde{\sigma}(p)$  durch modifiziertes Modell (5.22)Abbildung 5.13: Fit von  $D(p)$  durch modifiziertes Modell (5.22)

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß – ebenso wie im Abschnitt 5.1.2 beim ursprünglichen Modell – eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten durch einen relativ einfachen Ansatz mit elementaren Funktionen erreicht wurde. Sowohl die exponentielle Verfestigungsfunktion  $f_r$  als auch die quadratische  $Y$ -Abhängigkeit der Fließfunktion findet man bereits bei LEMAITRE [57], der allerdings keine assoziierte Fließregel verwendet. Der Rückgang der Schädigungsgeschwindigkeit im Laufe der Verformung wird durch eine der einfachsten möglichen Funktionen  $h(D)$  bewirkt, nämlich eine abklingende Exponentialfunktion. Es ist also nicht notwendig, den in dieser Arbeit vorgeschlagenen Ansatz eines maximal dissipativen Modells durch komplizierte, ad hoc eingeführte Terme zu retten, sondern die Vorgehensweise führt zu einer relativ eleganten Darstellung des Materialverhaltens.

### Mehrachsige Belastungen

Die Reaktion des modifizierten Modells auf eine zusätzliche hydrostatische Spannung ist in den Abbildungen 5.14 und 5.15 zu erkennen. Dieses Modellverhalten ist qualitativ sinnvoll. Eine quantitative Anpassung an experimentelle Ergebnisse für mehrachsige Belastungen ist durch Veränderung von  $F_Y$  möglich.

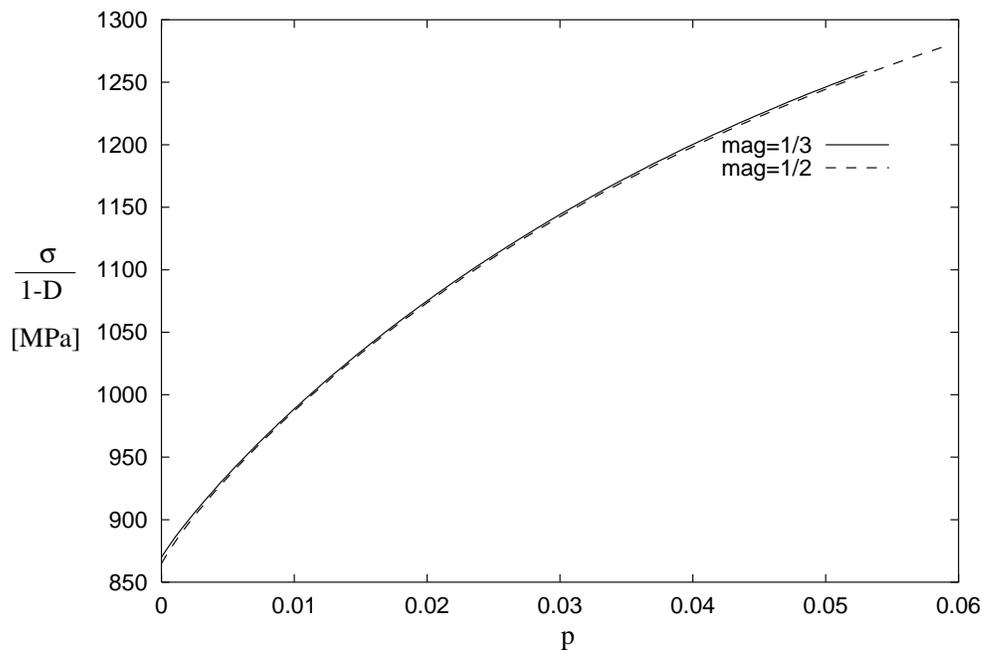


Abbildung 5.14: Modellverhalten  $\tilde{\sigma}(p)$  bei Mehrachsigsigkeitsgrad  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$

Zunächst soll auf Abbildung 5.14 eingegangen werden. Eine zusätzliche hydrostatische Spannung hat offenbar keinen nennenswerten unerwünschten Einfluß auf

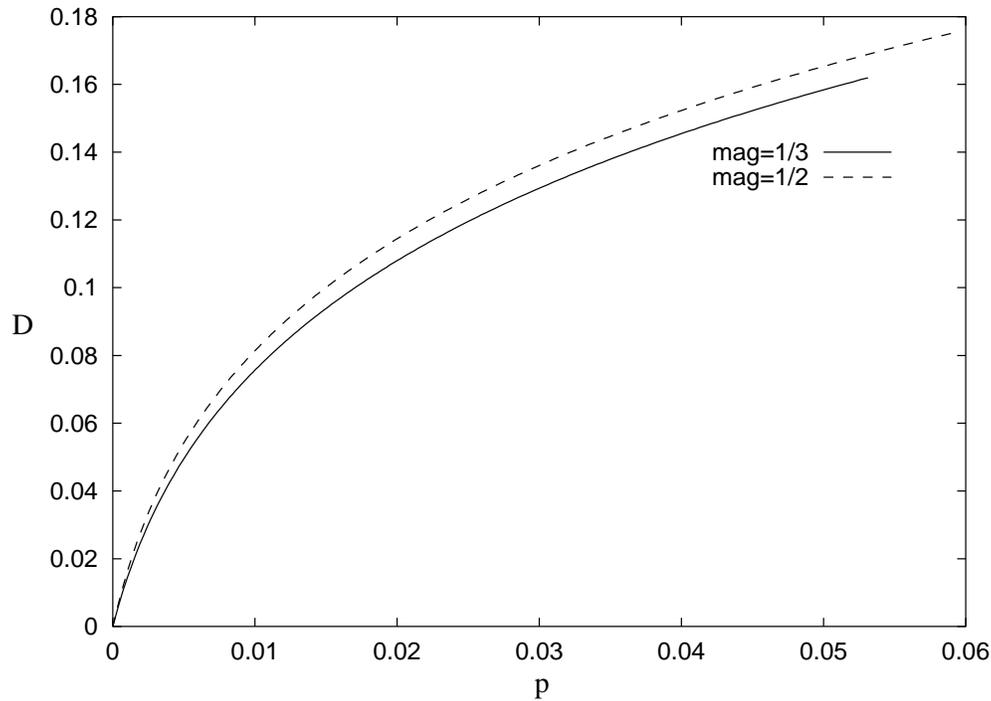


Abbildung 5.15: Modellverhalten  $D(p)$  bei Mehrachsigsiggrad  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$

die plastische Verformung. Durch das Hinzufügen des Schädigungsterms zur von-Mises-Fließfunktion wird die Unabhängigkeit der Fließspannung vom hydrostatischen Spannungsanteil nicht beeinträchtigt. Eine Abhängigkeit von der hydrostatischen Spannung wird nur durch die Einführung der effektiven Spannung in die Fließfunktion verursacht. Diese Übertragung des Prinzips der Dehnungsäquivalenz auf die Fließfunktion ist allgemein üblich. Selbstverständlich wäre es auch möglich, ein schadensmechanisches Modell zu konstruieren, das eine stärkere Abhängigkeit von der Mehrachsigkeit aufweist, indem man nicht von der von-Mises-Fließfunktion sondern von einer anderen Fließregel ausgeht.

In der Darstellung der Schädigung als Funktion der plastischen Dehnung (Abb. 5.15) ist ein unterschiedlicher Verlauf bei Änderung der hydrostatischen Spannung hingegen klar zu erkennen. Der Unterschied ist jedoch nicht so übertrieben groß wie beim ursprünglichen Modell. Durch eine zusätzliche hydrostatische Spannung wird im Modell das Wachstum der Schädigung gegenüber dem der plastischen Dehnung beschleunigt. Somit zeigt das Modell qualitativ das richtige Verhalten.

Will man das Modell quantitativ an Daten von Experimenten mit multiaxialer Belastung anpassen, so muß man die Krümmung der Funktion  $g$  ändern, da nach Gleichung (5.16)

$$\frac{\partial(\dot{D}/\dot{p}_{\text{eq}})}{\partial\sigma_{\text{m}}} \propto g''(Y) \quad (5.26)$$

ist. Dazu bietet sich beispielsweise eine Fließfunktion folgender Gestalt mit einem zusätzlichen Parameter an.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y, D) = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{1 \Leftrightarrow D} \Leftrightarrow \sigma_y \Leftrightarrow R + \frac{b_1}{2} (Y^{b_3} e^{-b_2 D} \Leftrightarrow Y_0^{b_3}) \quad (5.27)$$

### 5.3 Zusammenfassung

An Proben aus einem Vergütungsstahl 30CrNiMo8 wurden kraftgesteuerte, einachsige Zugentlastungsversuche durchgeführt, um die Entwicklung von plastischer Dehnung und Schädigung zu beobachten. Die Meßergebnisse können durch ein elastoplastisches Modell mit isotroper Verfestigung und Schädigung, das auf dem Prinzip der maximalen Dissipation basiert, reproduziert werden. Das Modell verwendet einen exponentiellen Ansatz für die Verfestigungsenergie und für den Schädigungsanteil der Fließfunktion, welcher nicht von der Schädigungsvariable abhängt. Die Fließfunktion setzt sich aus dem Schädigungsterm und der von-Mises-Fließfunktion zusammen, in der die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt wird.

Während das Modell eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten für uniaxiale Belastungen erzielt, ist es nicht möglich, ein sinnvolles Modellverhalten für mehrachsige Belastungen zu erhalten, solange der Schädigungsterm in der Fließfunktion ausschließlich von der Schädigungskraft abhängt. In diesem Fall folgt aus der negativen Krümmung der  $D(p)$ -Kurve nämlich, daß eine zusätzliche, positive hydrostatische Spannung den Schädigungsprozeß verlangsamten würde.

Wählt man hingegen eine Fließfunktion, in welcher der Schädigungsanteil quadratisch in der Schädigungskraft und exponentiell in der Schädigungsvariablen ist, so zeigt das Modell ein qualitativ richtiges Verhalten bei mehrachsiger Belastung. Das modifizierte Modell besitzt vier Parameter und zeichnet sich durch die einfache Gestalt des Ansatzes aus. Durch ein einfaches Optimierungsverfahren konnten die Parameter so angepaßt werden, daß die Simulation die Meßwerte sehr genau wiedergibt.



# Kapitel 6

## Anwendung auf Grenzflächenrisse

Nachdem das schadensmechanische Materialmodell zur Beschreibung eines homogenen Materials eingesetzt wurde, soll nun als weitere Anwendungsmöglichkeit die Modellierung von Delaminationen in anisotropen, geschichteten Verbundwerkstoffen diskutiert werden. Zunächst werden einige Delaminationsmodelle aus der Literatur wiedergegeben. Anschließend werden die Fragen nach einer geeigneten Darstellung der Prozeßzone und nach dem richtigen Rißfortschrittskriterium und der Darstellung des Risses behandelt. Die Umsetzung eines Delaminationsmodells auf Basis des neuen schadensmechanischen Modells steht derzeit noch aus.

### 6.1 Einleitung

Geschichtete Verbundwerkstoffe zeichnen sich durch eine sehr hohe spezifische Steifigkeit und Festigkeit aus. Diese herausragenden Eigenschaften sowie die Möglichkeit, durch die Wahl der Orientierungen der anisotropen Laminae das Material an spezielle Belastungen anzupassen, haben zum weitverbreiteten Einsatz von Verbundwerkstoffen in der Luft- und Raumfahrt und in vielen anderen Bereichen geführt.

Ein wichtiger Versagensmechanismus für geschichtete Verbundwerkstoffe ist die Delamination [16] aufgrund von interlaminaren Spannungen an Ecken [76] oder bei Einschlag mit geringer Geschwindigkeit [48]. Zur Modellierung von Grenzflächenrissen in Laminaten existiert eine Vielzahl von Arbeiten. Im Folgenden soll speziell das Delaminationswachstum bei quasistatischer mechanischer Belastung betrachtet werden.

Erste Ansätze zur Beschreibung von Delaminationen verwendeten Spannungs-

kriterien<sup>1</sup>. Die meisten Arbeiten, die in den letzten Jahren zu diesem Thema veröffentlicht wurden, beruhen hingegen auf Konzepten der linear-elastischen Bruchmechanik (z.B. [11, 12, 15, 29, 30, 46, 55, 60, 75, 77, 80, 86, 88, 89, 97, 99]). Ausgehend von der Annahme linear-elastischen Materialverhaltens werden die Spannungen im Laminat berechnet, wobei an der Delaminationsfront eine Singularität auftritt. Die Energiefreisetzungsrates für das Delaminationswachstum wird ermittelt und als Rißfortschrittskriterium verwendet.

Dieser klassische Ansatz hat sich in vielen Anwendungen bewährt, stößt jedoch bei der Beschreibung von komplexen Schädigungsprozessen auf Schwierigkeiten. Ein einparametrisches bruchmechanisches Rißkriterium ist nicht in der Lage, das lokale Wachstum von Rissen mit komplexer Rißfrontgeometrie zu beschreiben [6]. Ebenso wird das Rißwachstum in Proben, die eine hohe und eine niedrige Mehrachsichtigkeit der Spannung aufweisen können, nicht richtig vorhergesagt [79]. Das  $J$ -Integral verliert direkt nach der Rißinitiierung seine Wegunabhängigkeit [110], und auch andere gängige Bruchparameter wie  $CTOD$ ,  $\delta_5$  und  $CTOA$  scheitern bei der Beschreibung eines großen Rißwachstums.

Aus diesem Grund wurde in einigen Arbeiten (z.B. [4, 5, 1, 24, 26, 28, 54, 58, 65, 81, 84, 85]) ein anderer Weg eingeschlagen, um das Rißwachstum zu beschreiben. In einem kleinen Bereich vor der Spitze des makroskopischen Delaminationsrisses, der Prozeßzone, bilden sich Mikrorisse oder Poren [10]. Dieser dissipative Vorgang wird durch ein schadensmechanisches Kontinuumsmodell oder ähnliche Ansätze dargestellt. Als Rißfortschrittskriterium gilt je nach Modell das Erreichen des kritischen Wertes der Schädigungsvariable bzw. der schadensmechanischen Energiefreisetzungsrates.

Einige Delaminationsmodelle lassen sich nicht in die Klassen der bruch- oder schadensmechanischen Modelle einordnen. SCHELLEKENS und DE BORST [89] formulierten beispielsweise Modelle mit einer elastoplastischen Grenzfläche und mit Coulombscher Reibung. Zur Beschreibung des Delaminationswachstums bei Ermüdung hat BUCINELL [13] ein stochastisches Modell vorgeschlagen. TAKADA, TSUKUI und KIMPARA [98] entwickelten sogenannte „bonding spring elements“ zur FE-Simulation von Delaminationen, wobei unglücklicherweise Modellbildung und numerische Lösung nicht unterschieden wurden, so daß kein Kontinuumsmodell explizit vorliegt.

Fast alle Delaminationsmodelle sind (räumlich) lokal formuliert. Während bei allgemeinen Rißproblemen in lokalen schadensmechanischen Modellen eine Lokalisierung der Schädigung auftritt und zu einer Netz-Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse führt, vermeidet man dieses Problem, wenn die Rißebebe bekannt ist. Daher kann die Schädigung zweidimensional modelliert werden [90].

---

<sup>1</sup>Zum Vergleich von Spannungskriterien mit bruchmechanischer Modellierung siehe z.B. [30, 55]

Bislang wurde bei Arbeiten zu schadensmechanischen Delaminationsmodellen nicht von größeren Lokalisierungsproblemen berichtet. Einen Vorschlag für ein Grenzflächenmodell mit nicht-lokalen inneren Variablen findet man bei Chen und Schreyer [26].

## 6.2 Materialmodell der Prozeßzone

Die schadensmechanischen Delaminationsmodelle verwenden unterschiedliche Ansätze zur Beschreibung der Entwicklung der Schädigung vor der Spitze des makroskopischen Grenzflächenrisses. Einige dieser Materialmodelle werden in diesem Abschnitt diskutiert, bevor Argumente für die Verwendung des in den vorangehenden Kapitel entwickelten schadensmechanischen Modells genannt werden.

### 6.2.1 Beziehung zwischen bruch- und schadensmechanischen Ansätzen

Zunächst soll die Beziehung zwischen bruch- und schadensmechanischen Delaminationsmodellen näher erläutert werden. Die naheliegende Vermutung, daß der bruchmechanische Ansatz als Grenzfall schadensmechanischer Modelle darstellbar ist (z.B. [84]), wurde von POINT und SACCO [81, 82] erstmalig mathematisch untersucht.

POINT und SACCO formulieren ein maximal dissipatives Modell [81], das auf FREMONDS Adhäsionsmodell [37] basiert. Sie beschreiben den Zustand der Grenzfläche, in welcher die Delamination verläuft, durch den Sprung der Verschiebungen  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(2)} \Leftrightarrow \mathbf{u}^{(1)}$  und eine Schädigungsvariable  $\gamma$ . Diese Schädigungsvariable wird hier nicht als Verlust an Steifigkeit definiert. Bei  $\gamma = 0$  soll vollständige Adhäsion vorliegen, bei  $0 < \gamma < 1$  unvollständige Adhäsion, und  $\gamma = 1$  bezeichnet den delaminierten Bereich der Grenzfläche.

Ein sehr einfaches Verhalten der Grenzfläche, nämlich Kontinuität der Verschiebungen ( $\mathbf{u} = 0$ ) bei Adhäsion ( $0 \leq \gamma < 1$ ) und Undurchdringbarkeit ( $u_n \geq 0$ ) bei fehlender Adhäsion ( $\gamma = 1$ ), wird erzwungen durch die Wahl der Grenzflächenenergie  $f$ :

$$K = \{(\mathbf{u}, \gamma) \mid (1 \Leftrightarrow \gamma) \mathbf{u} = 0 \wedge u_n \geq 0\} \quad (6.1)$$

$$f(\mathbf{u}, \gamma) = I_K(\mathbf{u}, \gamma) \quad (6.2)$$

Die konjugierten Variablen (reversible Grenzflächenspannung und Schädigungskraft) werden wie üblich definiert.

$$\mathbf{t}^r \in \partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \gamma), \quad Y \in \partial_{\gamma} f(\mathbf{u}, \gamma) \quad (6.3)$$

Ausgehend von der Existenz eines Dissipationspotentials  $\Psi$  erhält man für den irreversiblen Teil  $\mathbf{t}^i$  der Grenzflächenspannung sowie für die Schädigungskraft  $Y$  die Beziehungen

$$\mathbf{t}^i \in \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \Psi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\gamma}), \quad Y \in \partial_{\dot{\gamma}} \Psi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\gamma}), \quad (6.4)$$

$$\text{bzw. } \dot{\mathbf{u}} \in \partial_{\mathbf{t}^i} \Psi^*(\mathbf{t}^i, Y), \quad \dot{\gamma} \in \partial_Y \Psi^*(\mathbf{t}^i, Y). \quad (6.5)$$

Als Potential wählen POINT und SACCO

$$\Psi^*(\mathbf{t}^i, Y) = I_{W(t)}(Y) \quad (6.6)$$

$$W(t) = (\Leftrightarrow \infty, \bar{Y}(t)] \quad (6.7)$$

$$\bar{Y}(t) = \max\{\omega, \sup_{\tau \leq t} Y(\tau)\}, \quad (6.8)$$

wobei  $\omega$  Dupres Adhäsionsenergie bezeichnet. Da die Größe  $\bar{Y}$  i.Allg. von der gesamten Verformungsgeschichte abhängt, handelt es sich hierbei nicht um einen zeitlich lokalen Ansatz.

Mit diesem Potential implizieren die Entwicklungsgleichungen (6.4),(6.5), daß keine irreversible Spannung  $\mathbf{t}^i$  auftritt und daß die Schädigung wächst, wenn  $Y = \bar{Y}$  erreicht ist:

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{falls } Y < \bar{Y} \quad (6.9)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{falls } Y = \bar{Y} \quad (6.10)$$

Als eine Konsequenz dieser einfachen Evolutionsgleichungen folgt die Monotonie der Schädigung. Zusätzlich wird nun die Bedingung  $\gamma \leq 1$  auferlegt, indem zur freien Energie die Indikatorfunktion

$$I_A(\gamma) = I_{[\gamma_i, 1]}(\gamma) \quad (6.11)$$

hinzugefügt wird, wobei  $\gamma_i$  die Anfangsschädigung bezeichnet. Hiermit wird die ansonsten sehr systematische Vorgehensweise durchbrochen, da dieser zusätzliche Term in der freien Energie bei der Definition der zu  $\gamma$  konjugierten thermodynamischen Kraft  $Y$  nicht berücksichtigt wurde. Zudem ist dieser Ansatz komplizierter als nötig, denn die Bedingung  $\gamma_i \leq \gamma$  wird bereits durch die Evolutionsgleichungen garantiert.

Nähere Betrachtung dieses Modells ergibt, daß für  $\gamma_i < 1$  entweder

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_i \wedge \mathbf{u} = 0 \\ \text{oder } \gamma &= 1 \wedge \mathbf{u} \neq 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

gilt. Somit wird genau wie bei bruchmechanischen Modellen nur perfekte Adhäsion oder vollständige Trennung der Laminae zugelassen. POINT und SACCO konnten zeigen, daß die bruchmechanische Energiefreisetzungsrate an der Delaminationsfront gerade den Wert  $\omega$  erreicht. Also ist das Modell äquivalent zum Griffith-Kriterium, wobei  $\omega$  die kritische Energiefreisetzungsrate ist.

Die freie Energie, welche die Indikatorfunktionen  $I_K$  und  $I_A$  enthält, ist nicht differenzierbar. Um mathematische Schwierigkeiten zu vermeiden, werden die Indikatorfunktionen regularisiert.

$$I_K^r(\mathbf{u}, \gamma) = \frac{1}{2\eta_n} ((1 \Leftrightarrow \gamma) \langle u_n \rangle_+^2 + \langle \Leftrightarrow u_n \rangle_+^2) + \frac{1}{2\eta_t} (1 \Leftrightarrow \gamma) \|\mathbf{u}_t\|^2 \quad (6.13)$$

$$I_A^r(\gamma) = \Leftrightarrow \eta_A (|1 \Leftrightarrow 2\gamma| + \ln |1 \Leftrightarrow |1 \Leftrightarrow 2\gamma||) \quad (6.14)$$

Im regularisierten Modell können nicht nur die Werte  $\gamma_i$  und 1 als Schädigung  $\gamma$  auftreten, sondern das gesamte Intervall  $[\gamma_i, 1]$  ist zulässig. Als Kräfte erhält man

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\eta_n} ((1 \Leftrightarrow \gamma) \langle u_n \rangle_+ \Leftrightarrow \langle \Leftrightarrow u_n \rangle_+) \mathbf{n} + (1 \Leftrightarrow \gamma) \frac{1}{\eta_t} \mathbf{u}_t, \quad (6.15)$$

$$Y = \frac{1}{2\eta_n} \langle u_n \rangle_+^2 + \frac{1}{2\eta_t} \|\mathbf{u}_t\|^2. \quad (6.16)$$

Es handelt sich hierbei offenbar um ein einfaches schadensmechanisches Grenzflächenmodell, das dem Modell von ALLIX und LADEVEZE (Abschnitt 6.2.2) sehr ähnlich ist. Diese Ähnlichkeit beschränkt sich nicht auf die freie Energie, sondern auch die Entwicklungsgleichungen für  $\gamma$  basieren auf dem gleichen Ansatz. Ersetzt man in (6.15) den Faktor  $1 \Leftrightarrow \gamma$  durch  $(1 \Leftrightarrow \gamma)^2$ , so erhält man den erstmalig von TVERGAARD für Grenzflächen formulierten Zusammenhang zwischen Verschiebungssprung und Grenzflächenspannung [101]. TVERGAARDs Ansatz wurde von CHABOCHE et al. weiterentwickelt, deren Modell im Abschnitt 6.2.3 vorgestellt wird.

Im Grenzfall verschwindender Regularisierungsparameter  $\eta_n, \eta_t, \eta_A \rightarrow 0$ , d.h. bei unendlich großer Steifigkeit der Grenzfläche, konvergiert die Lösung des regularisierten Modells gegen die Lösung des zur Bruchmechanik äquivalenten ursprünglichen Modells [82].<sup>2</sup> Somit wurde gezeigt, daß bruchmechanische Delaminationsmodelle als ein Grenzfall schadensmechanischer Modelle anzusehen sind. Zur Darstellung von POINT und SACCO ist allerdings anzumerken, daß die Wahl eines bruch- oder schadensmechanischen Ansatzes gewöhnlich nicht aus mathematischen Gründen erfolgt. Die schadensmechanischen Grenzflächenmodelle sind nicht nur eine Regularisierung des bruchmechanischen Modells, sondern vielmehr handelt es sich beim bruchmechanischen Ansatz um eine starke Idealisierung der physikalischen Vorgänge. Es ist zu vermuten, daß schadensmechanische Modelle das Verhalten der Grenzschicht zwischen den Laminae präziser beschreiben. Ferner können schadensmechanische Modelle die Entstehung einer Delamination voraussagen, was mit dem bruchmechanischen Ansatz nicht möglich ist.

---

<sup>2</sup>Der Beweis wurde genau genommen nur für das statische Problem geführt, ohne explizit die Entwicklung der Schädigung zu betrachten.

### 6.2.2 Das Modell von Allix, Ladeveze et al.

LADEVEZE, ALLIX und DAUDEVILLE stellten 1990 ein schadensmechanisches Delaminationsmodell vor [53], das seitdem in mehreren Arbeiten verwendet und modifiziert wurde (z.B. [3, 2, 5], RINDERKNECHT [84, 85]). CORIGLIANO stellte dieses Modell in einen allgemeineren thermomechanischen Rahmen [28]. Obwohl das Modell inzwischen auf geometrische Nichtlinearitäten erweitert wurde [1], soll hier nur der Fall kleiner Verzerrungen referiert werden, um die Eigenschaften des zu Grunde liegenden Materialmodells klarer hervor treten zu lassen.

Ebenso wie im vorangehenden Abschnitt wird die Grenzschicht zwischen den Laminae, in der die Mikroschädigung stattfindet, als eine Grenzfläche modelliert, deren Zustand durch die Verschiebungsdifferenz  $\mathbf{u}$  sowie durch Schädigungsvariablen  $D_1, D_2, D_3$  beschrieben wird. Speziell für faserverstärkte Verbundwerkstoffe wird die Grenzfläche als ein orthotropes Medium angesehen, bei dem die Hauptrichtungen 1, 2 und 3 die Winkelhalbierenden zwischen den Faserrichtungen der angrenzenden Laminae sowie die Richtung senkrecht zum Laminat sind. Die drei Schädigungsvariablen sind drei Moden der Deformation der Grenzfläche zugeordnet.

- $D_3$  ist der Öffnung der interlaminaren Verbindung (mode I) assoziiert,
- $D_1, D_2$  bezeichnen die Schädigung bezüglich Scherung.
- Bei Kompression  $\sigma_{33} < 0$  bewirkt  $D_3$  keinen Verlust an interlaminarer Steifigkeit.

Die freie Energie wird – hier in Abhängigkeit von den interlaminaren Spannungen – wie folgt gewählt, wobei  $k_1, k_2$  und  $k_3$  die Konstanten der interlaminaren Steifigkeit bezeichnen.

$$f = \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle \Leftrightarrow \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3 (1 \Leftrightarrow D_3)} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2 (1 \Leftrightarrow D_2)} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1 (1 \Leftrightarrow D_1)} \right] \quad (6.17)$$

Hieraus erhält man die konjugierten Kräfte

$$Y_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{31}^2}{k_1 (1 \Leftrightarrow D_1)^2}, \quad Y_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{32}^2}{k_2 (1 \Leftrightarrow D_2)^2}, \quad (6.18)$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3 (1 \Leftrightarrow D_3)^2}. \quad (6.19)$$

Für die Evolution der Schädigung findet man bei dieser Klasse von Modellen unterschiedliche Ansätze. Gemeinsam ist diesen, daß jeweils (mindestens) eine

geschichtsabhängige Größe definiert wird. In [5] ist die Schädigungsentwicklung beispielsweise gegeben durch

$$\bar{Y}(t) = \sup_{\tau \leq t} \left[ \left( (Y_3)^\alpha + (\gamma_1 Y_1)^\alpha + (\gamma_2 Y_2)^\alpha \right)^{1/\alpha} \Big|_{\tau} \right], \quad (6.20)$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = \left[ \frac{n}{n+1} \frac{\langle \bar{Y} \Leftrightarrow Y_0 \rangle_+}{Y_c \Leftrightarrow Y_0} \right]^n \quad (6.21)$$

mit Materialparametern  $Y_c$ ,  $Y_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha$  und  $n$ .  $Y_0$  bestimmt den Beginn der Schädigung, der Exponent  $n$  die Form der Schädigungsakkumulation, und die übrigen Parameter lassen sich mit kritischen Energiefreisetzungsraten verknüpfen. In [53] findet man eine regularisierte Form der Evolutionsgleichungen.

Die Formulierung der Entwicklungsgleichungen erfolgte nicht in dem im ersten Kapitel dieser Arbeit vorgestellten thermomechanischen Rahmen. Von CORIGLIANO [28] wurde eine allgemeinere Darstellung dieser Modellklasse angegeben, die eine plastische Deformation der Grenzfläche zuläßt und auch Modelle von SCHELLEKENS und DE BORST [89] umfaßt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^p \quad (6.22)$$

$$f = \frac{1}{2} \left[ (1 \Leftrightarrow D_1) K_1 (u_1^e)^2 + (1 \Leftrightarrow D_2) K_2 (u_2^e)^2 + (1 \Leftrightarrow D_3) K_3^+ \langle u_3^e \rangle_+^2 + K_3^- \langle \Leftrightarrow u_3^e \rangle_+^2 + f_r(r) \right] \quad (6.23)$$

$$\mathbf{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^e}, \quad Y_i = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial D_i}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial R} \quad (6.24)$$

$$F = F(t_i, Y_i, R; D_i), \quad G = G(t_i, Y_i, R; D_i) \quad (6.25)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^p = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{t}} \lambda, \quad \dot{r} = \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial R} \lambda \quad (6.26)$$

$$\dot{D}_i = l_i(t_i, Y_i, R; D_i) \lambda \quad (6.27)$$

$$F \leq 0, \quad F \lambda = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (6.28)$$

Für die Zeitentwicklung der Elastoplastizität wird hier eine nicht-assozierte Fließregel verwendet. Der Ansatz für die Evolution der Schädigung ist sehr allgemein und wird durch die Funktion  $l$  anstelle eines Potentials bestimmt.

Die im vorangehenden Abschnitt vorgestellte Arbeit von POINT und SACCO [81] zeigt, daß das Modell von Allix et al. zumindest in vereinfachter Form auch ausgehend vom Postulat maximaler Dissipation durch die Konstruktion eines geeigneten Dissipationspotentials formuliert werden kann. Auch in dieser Darstellung bleibt jedoch ein deutlicher Unterschied zu den in Kapitel 4 und 5 entwickelten schadensmechanischen Materialmodellen bestehen. Die für die Zeitentwicklung der Schädigungsvariablen entscheidende Größe  $\bar{Y}$  (6.20,6.8) ist nicht nur eine Funktion der Zustandsvariablen zum jeweiligen Zeitpunkt, sondern der gesamten Verformungsgeschichte. Somit ist das Modell zeitlich nicht lokal.

Die Einführung innerer Variablen hat jedoch gerade das Ziel, den Zustand des Materials durch die Zustandsvariablen hinreichend zu charakterisieren, so daß die weitere Entwicklung durch den aktuellen Wert der Zustandsvariablen und die Randbedingungen eindeutig bestimmt ist. Aus formaler Sicht wäre es daher vorzuziehen, eine zusätzliche innere Variable einzuführen (ähnlich der Verfestigungsvariable bei elastoplastischen Modellen), anstatt eine Funktion zu verwenden, die von der gesamten Geschichte des Materials abhängt.

### 6.2.3 Das Modell von Chaboche et al.

Zwei von CHABOCHE, GIRARD, LEVASSEUR und SCHAFF entwickelte Grenzflächenschädigungsmodelle [24, 25] basieren auf Arbeiten von NEEDLEMAN [74] und TVERGAARD [101]. Im Gegensatz zum Modell von ALLIX et al. wurden von NEEDLEMAN und TVERGAARD Kontakt und Reibung der Rißflanken berücksichtigt, was zur korrekten Beschreibung von mixed-mode Belastungen notwendig ist. Ihr Ansatz wurde in den Modellen von CHABOCHE et al. so modifiziert, daß der Übergang von der Dekohäsion zur Reibung stetig und monoton erfolgt.

Die beiden in [24] veröffentlichten Modelle unterscheiden sich dadurch voneinander, daß das zweite Modell ein tangenciales Abgleiten auf der Grenzfläche auch schon vor der vollständigen Dekohäsion zuläßt. Ferner ist es möglich, dieses Modell im thermodynamischen Rahmen darzustellen, was im folgenden kurz wiedergegeben werden soll.

Zur Vereinfachung sei die Darstellung auf zwei räumliche Dimensionen beschränkt; sie kann jedoch problemlos auf drei Dimensionen erweitert werden [24]. Als Zustandsvariablen auf der Grenzfläche werden der normale und tangentialer Verschiebungssprung  $u_n$  und  $u_t$ , ein tangentialer, irreversibler Verschiebungssprung  $u_t^p$  sowie eine Schädigungsvariable  $D$  definiert.<sup>3</sup> Für die freie Energie wird ein Ansatz der Form

$$2f = [E h(D) H(u_n) + K H(\Leftrightarrow u_n)] \frac{u_n^2}{\delta_n} + G \frac{(u_t \Leftrightarrow u_t^p)^2}{\delta_t} + G \frac{h(D)}{1 \Leftrightarrow h(D)} \frac{(u_t^p)^2}{\delta_t} \quad (6.29)$$

gewählt, wobei  $E$ ,  $K$  und  $G$  Steifigkeitskonstanten (für Zug, Druck, Schub) sowie  $\delta_n$  und  $\delta_t$  die maximalen Werte von  $u_n$  und  $u_t$  vor der Trennung der Schichten sind.  $H$  bezeichnet die Heaviside-Funktion, und  $h : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  ist eine monoton fallende Funktion<sup>4</sup>, die den Verlust an Steifigkeit infolge der Schädigung

<sup>3</sup>In [24] wird die Schädigungsvariable mit  $\lambda_{\max}$  bezeichnet.

<sup>4</sup>Bei TVERGAARD ist  $h(D) = \frac{4}{27} \sigma_{\max} (1 - D)^2$ .

beschreibt. Als thermodynamische Kräfte erhält man damit

$$T_n = \frac{\partial f}{\partial u_n} = [E h(D) H(u_n) + K H(\Leftrightarrow u_n)] \frac{u_n}{\delta_n}, \quad (6.30)$$

$$T_t = \frac{\partial f}{\partial u_t} = G \frac{u_t \Leftrightarrow u_t^p}{\delta_t}, \quad (6.31)$$

$$T_t^p = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial u_t^p} = T_t \Leftrightarrow G \frac{h(D)}{1 \Leftrightarrow h(D)} \frac{u_t^p}{\delta_t} =: T_t \Leftrightarrow X_t, \quad (6.32)$$

$$Y = \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial D} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial D} G \delta_t \left[ \omega \frac{\langle u_n \rangle_+^2}{\delta_t^2} + \frac{1}{(1 \Leftrightarrow h(D))^2} \frac{(u_t^p)^2}{\delta_t^2} \right], \quad (6.33)$$

wobei  $\omega = (E \delta_n)/(G \delta_t)$  das Verhältnis der gesamten zur Trennung der Grenzfläche aufzubringenden Arbeiten unter Mode I und Mode II ist.

Die Zeitentwicklung der dissipativen Variablen  $u_t^p$  und  $D$  wird mit Hilfe von Fließflächen im Raum der Grenzflächenspannung sowie der Schädigungskraft beschrieben. Um das Coulombsche Reibungskriterium zu erhalten, wird als Fließfunktion

$$\phi_T = |T_t^p| \Leftrightarrow \langle \Leftrightarrow \mu T_n \rangle_+ = |T_t \Leftrightarrow X_t| \Leftrightarrow \langle \Leftrightarrow \mu T_n \rangle_+ \quad (6.34)$$

und als plastisches Potential

$$\psi_T = |T_t^p| = |T_t \Leftrightarrow X_t| \quad (6.35)$$

gewählt, wobei  $\mu$  den Reibungskoeffizienten bezeichnet. Wie bei der Modellierung von Reibung üblich, wird eine nicht-assozierte Fließregel verwendet, so daß eine irreversible Verschiebung nur in tangentialer Richtung auftritt:

$$\dot{u}_t^p = \lambda \frac{\partial \psi_T}{\partial T_t^p} = \lambda \operatorname{sgn}(T_t \Leftrightarrow X_t), \quad \dot{u}_n^p = 0 \quad (6.36)$$

Das Modell hat somit den Charakter von nicht-assoziierter Plastizität mit kinematischer Verfestigung. Die tangentiale Steifigkeit ist zu Beginn unendlich groß und fällt mit wachsender Schädigung.

Das Wachstum der Schädigung wird durch ein zweites Potential beschrieben. Die Schädigungsfläche ist hierbei gegeben durch

$$\phi_d = Y \Leftrightarrow Y_m(D) = 0 \quad (6.37)$$

mit einer monoton wachsenden Funktion  $Y_m$ , wobei  $Y_m(0) = 0$  ist. Aufgrund dieser Konstruktion stellt sich für  $D$  der Wert ein, bei dem der Funktionswert  $Y_m(D)$  gleich dem größten in der Belastungsgeschichte aufgetretenen Wert von  $Y$  ist.

Im Fall  $\omega = 1$  erreichen CHABOCHE et al. durch eine spezielle Wahl von  $Y_m$ , daß die Schädigungsvariable als Funktion des Verschiebungssprunges ausgedrückt werden kann:

$$Y_m(D) = \Leftrightarrow \frac{1}{2} G \delta_t \frac{\partial h}{\partial D} D^2 \quad (6.38)$$

$$\Rightarrow \psi_d \propto \left( \frac{\langle u_n \rangle_+^2}{\delta_t^2} + \frac{1}{(1 \Leftrightarrow h(D))^2} \frac{(u_t^p)^2}{\delta_t^2} \right) \Leftrightarrow D^2 \quad (6.39)$$

Während des Schädigungswachstums hat  $D$  somit den Wert

$$D = \sqrt{\frac{\langle u_n \rangle_+^2}{\delta_t^2} + \frac{1}{(1 \Leftrightarrow h(D))^2} \frac{(u_t^p)^2}{\delta_t^2}}. \quad (6.40)$$

Für  $\omega \neq 1$  wird die Beziehung (6.40) weiterhin verwendet. Die Entwicklungsgleichungen besitzen dann keine Potentialdarstellung ((6.34)-(6.37)) mehr, erfüllen aber noch die Bedingung nicht-negativer Dissipation.

## 6.2.4 Das Modell von Lemaitre

Das Modell von LEMAITRE ist ebenfalls ein zweidimensionales Grenzflächenmodell [58]. An dieser Stelle soll nur kurz auf das zu Grunde liegende Modell für homogene Materialien eingegangen werden. Die Definition der Zustandsvariablen in der Grenzfläche erscheint fragwürdig und wird in Abschnitt 6.3.2 diskutiert werden.

LEMAITRE unterscheidet die in-plane und out-of-plane Komponenten der Zustandsvariablen. Für die in-plane Dehnung setzt er ein viskoelastisches Materialverhalten an, das durch ein Dissipationspotential bestimmt wird. Die Entwicklung der out-of-plane Dehnungen wird durch ein elastoplastisches Materialgesetz beschrieben. Die Zeitableitung der isotropen Schädigungsvariable setzt sich aus einem viskoelastischen und einem elastoplastischen Anteil zusammen. Ersterer ist die Ableitung des für das viskoelastische Verhalten der in-plane Dehnungen verantwortlichen Potentials nach der Schädigungskraft, erfüllt also das Postulat der maximalen Dissipation. Der elastoplastische Term basiert auf einer nicht-assozierten Fließregel (siehe Abschnitt 3.2.3), so daß die Postulate von Ilyushin und Drucker sowie das Prinzip der maximalen Dissipation durch dieses Modell verletzt werden.

## 6.2.5 Verwendung des neuen Materialmodells

Das im vorangehenden Kapitel entwickelte neue Materialmodell zeichnet sich gegenüber bisherigen elastoplastischen, schadensmechanischen Modellen dadurch

aus, daß die Entwicklungsgleichungen konsequent in einem thermomechanischen Rahmen ausgehend vom Postulat der maximalen Disipation formuliert wurden und die Kopplung von Plastizität und Schädigung erfassen. Seine Verwendung zur Modellierung von Delaminationen ist aus zwei Gründen sinnvoll.

Zum einen mangelt es bislang an schadensmechanischen Delaminationsmodellen, welche die plastische Deformation der Grenzfläche berücksichtigen. Die Plastizität ist jedoch sicherlich von entscheidender Bedeutung, um Verbundwerkstoffe mit metallischer Matrix (MMCs) richtig zu beschreiben. Auch bei Materialien, die makroskopisch ein sprödes Verhalten aufweisen, können evt. nahe der Delaminationsfront irreversible Dehnungen auftreten. Als bislang einziges schadensmechanisches Delaminationsmodell, das plastische Deformationen erfaßt, ist das Modell von LEMAITRE zu nennen, welches jedoch aufgrund seiner Definition der Zustandsvariablen in der Grenzfläche nicht überzeugt (siehe Abschnitt 6.3.2).

Die in den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.2 diskutierten Delaminationsmodelle, welche von spröden Materialien ausgehen, sind als Modelle mit inneren Variablen nicht ganz befriedigend, da eine geschichtsabhängige Größe  $\bar{Y}$  auftritt. Das neue Materialmodell hingegen ist zeitlich lokal. Es wurde systematisch aus der Annahme maximaler Dissipation und einfachen Ansatzfunktionen gewonnen. Somit erscheint seine Verwendung auch aus theoretischer Sicht als vorteilhaft.

## 6.3 Darstellung der Prozeßzone

Nachdem im vorangehenden Abschnitt die Wahl des Materialmodells für die Prozeßzone erörtert wurde, soll nun die Darstellung der räumlichen Dimensionen der Prozeßzone diskutiert werden. Es besteht die Möglichkeit, die Prozeßzone entweder dreidimensional als sehr dünne Grenzschicht oder zweidimensional als Grenzfläche zu modellieren.

### 6.3.1 Zwischenschicht

Die Entstehung und das Wachstum von Grenzflächenrissen in geschichteten Faserverbundwerkstoffen sind komplexe Prozesse. Die Wechselwirkung mit Matrixrissen in den benachbarten Laminae kann beispielsweise dazu führen, daß die Delamination die Grenzfläche verläßt und in einer anderen Ebene weiter wächst [105]. Zur Entwicklung von Delaminationsmodellen ist es sinnvoll, sich anfangs auf einen einfacheren Fall zu beschränken. Im folgenden sollen nur Delaminationen betrachtet werden, die sich in einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Laminae unterschiedlicher Orientierung ausbreiten. Die Laminae werden als un-

geschädigt betrachtet.

In einem kleinen Bereich vor der Delaminationsfront bilden sich Mikrorisse oder Poren, bevor der makroskopische Grenzflächenriß weiter fortschreitet. Diese Prozeßzone soll schadensmechanisch modelliert werden (Abb. 6.1). Während die Delamination wächst, breitet sich der geschädigte Bereich entlang der Delaminationsebene aus. Somit ist für eine dünne Zwischenschicht, welche die Delaminationsebene umgibt, das Material schadensmechanisch zu beschreiben, hingegen genügt für den Rest der Probe ein linear-elastisches Materialmodell. Sowohl die Laminae als auch die Zwischenschicht werden als homogene Kontinua modelliert, d.h. Strukturen auf Mikroebene wie beispielsweise Fasern in faserverstärkten Verbundwerkstoffen werden nicht explizit dargestellt. Die Kopplung der Schichten erfolgt über die Bedingung stetiger Verschiebungen und out-of-plane-Spannungen.

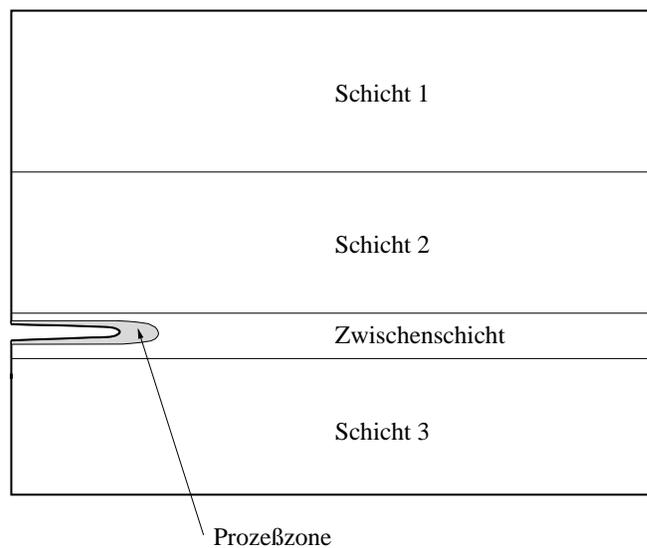


Abbildung 6.1: Prozeßzone und Zwischenschicht

Die Ausdehnung der Prozeßzone senkrecht zur Delaminationsebene liegt bei geschichteten Faserverbundwerkstoffen gewöhnlich nur in der Größenordnung des Faserdurchmessers [10]. Somit ist die Dicke der Zwischenschicht sehr klein im Verhältnis zur Dicke der Laminae  $h \ll H$ , und als Alternative zur dreidimensionalen Modellierung bietet sich die Beschreibung als Granzfläche an, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

Auf den ersten Blick mag es erscheinen, als müßte eine dreidimensionale Repräsentation der Zwischenschicht die Realität am genauesten wiedergeben. Schließlich ist es gerade die Prozeßzone, die bei der Modellierung der Delamination besonderes Interesse verdient und auch einen höheren Diskretisierungsaufwand rechtfertigt. So wurden zweidimensionale Modelle, sofern ihre Wahl überhaupt begründet wurde, bislang im Wesentlichen aufgrund des geringeren numerischen

Aufwands bevorzugt. Einen numerischen Vergleich von einem Grenzschicht- und Grenzflächenmodell findet man beispielsweise bei CHABOCHE, GIRARD und SCHAFF [25]. Unbeachtet geblieben sind die theoretischen Schwierigkeiten, die bei einer dreidimensionalen Modellierung auftreten.

Die Modellierung des Verbundwerkstoffs durch homogene Schichten setzt nicht nur voraus, daß die einzelnen Schichten groß genug sind im Vergleich zu ihrer Mikrostruktur, um eine Homogenisierung zu erlauben. Auch die Dicke der Zwischenschicht ist in Relation zur inneren Struktur der angrenzenden Laminae zu sehen. Bei Faserverbundwerkstoffen liegt die Dicke der Prozeßzone in der Größenordnung eines oder mehrerer Faserdurchmesser. Eine dreidimensionale Zwischenschicht bedeutet also eine sehr hohe räumliche Auflösung in Normalenrichtung. Die angrenzenden Laminae werden jedoch auf einer weitaus gröberen Skala beschrieben. Ihre innere Struktur bestehend aus Fasern und Matrix wird nicht wiedergegeben, sondern sie werden als homogenisierte Kontinua dargestellt. Eine direkte Verknüpfung dieses groben Modells der Laminae mit einer dünnen, dreidimensionalen Zwischenschicht ist nicht sinnvoll.

Besonders deutlich wird das Problem, wenn man sich fragt, an welche Stelle im realen Laminat die Grenzen zwischen Zwischenschicht und Laminae zu legen sind; ob die Grenze vielleicht direkt an einer Faserlage vorbeiführt oder sich mehr in der Matrix befindet. Die Dicke der Zwischenschicht, welche entscheidend für das Verhalten des Modells ist, ergibt sich somit nicht eindeutig aus der Betrachtung auf Mikroebene. Ferner ist es fraglich, ob die Gradienten der Zustandsvariablen in Dickenrichtung die Situation im realen Material richtig wiedergeben, wenn die benachbarten Fasern nicht explizit modelliert werden. Daher bietet die dreidimensionale Simulation keine Vorteile gegenüber einer zweidimensionalen Darstellung. Um die Prozeßzone genauer zu modellieren, müßten auch die Laminae in der Umgebung der dreidimensionalen Zwischenschicht als Verbund von Fasern und Matrix im Detail dargestellt werden.

### 6.3.2 Grenzfläche

In diesem Abschnitt soll zunächst das Grenzflächenmodell von LEMAITRE diskutiert werden. Anschließend wird gezeigt, wie ein Grenzflächenmodell als Grenzfall eines Zwischenschichtmodells verstanden werden kann.

#### Das Grenzflächenmodell von Lemaitre

LEMAITRE geht bei seiner Argumentation von der Frage aus, welche der im Dreidimensionalen definierten Observablen  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  sich auch auf einer Grenzfläche

definieren lassen [58, 57]. Es sind dies die in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$  und die out-of-plane Spannungen  $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ , denn diese Größen sind an der Grenzfläche stetig und somit wohldefiniert. Nicht als Observable gegeben sind hingegen die jeweiligen konjugierten Variablen: die in-plane Spannungen und out-of-plane Dehnungen.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \bullet \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \sigma_{13} \\ \bullet & \bullet & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

• : in Grenzfläche undefinierte Observable

Um dennoch ein Materialmodell basierend auf den in Kapitel 2 vorgestellten Konzepten einführen zu können, postuliert LEMAITRE, daß eine Grenzflächenenergie analog zu üblichen dreidimensionalen Modellen (2.71) eingeführt werden kann. Aus dieser lassen sich die konjugierten Variablen ableiten:

$$i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

$$f = \frac{1}{2}(1 \Leftrightarrow D) \left( K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} + K_{ij}^{(\sigma)} e_{i3}^e e_{j3}^e \right) + f_r(r) \quad (6.41)$$

$$S_{\alpha\beta}^e = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \quad (6.42)$$

$$\sigma_{i3} = \frac{\partial f}{\partial e_{i3}^e} \quad (6.43)$$

Mit  $S_{\alpha\beta}^e$  seien die den in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  zugeordneten Variablen bezeichnet; die  $e_{i3}^e$  seien den out-of-plane Spannungen assoziiert.  $\mathbf{K}^{(\varepsilon)}$  und  $\mathbf{K}^{(\sigma)}$  sind Materialkonstanten. Der Anteil der elastischen Energie an der freien Energie (6.41) ist wie üblich eine quadratische Form der dehnungsartigen Variablen  $\varepsilon_{\alpha\beta}, e_{i3}^e$ . Zusätzlich ist angenommen worden, daß diese in einen Term der in-plane Dehnungen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  und einen Anteil der neu eingeführten Variablen  $e_{i3}^e$  separierbar ist.<sup>5</sup>

LEMAITRES Modell weist den Nachteil auf, daß der Zusammenhang zu dreidimensionalen Zwischenschichtmodellen unklar bleibt. Es wird daher nicht deutlich, welche physikalischen Annahmen der Beschreibung als Grenzfläche zu Grunde liegen und wie die Materialkonstanten zu bestimmen sind. LEMAITRE schlägt vor, wie bei schadensmechanischen Modellen dreidimensionaler Körper üblich, die Schädigung über die verringerte Steifigkeit (2.63) zu messen [58]. Dies ist aus zwei Gründen jedoch nicht möglich. Um den Steifigkeitstensor zu bestimmen, muß sowohl der Dehnungstensor als auch der Spannungstensor gemessen werden, d.h. es werden sowohl die Zustandsvariablen als auch die konjugierten Kräfte benötigt. Von diesen zwei Größen ist in LEMAITRES Modell aber jeweils nur eine ( $\varepsilon_{\alpha\beta}, \sigma_{i3}$ )

<sup>5</sup>Zur Zeitentwicklung siehe Abschnitt 6.2.4.

beobachtbar, während es sich bei der anderen ( $e_{i3}^e, S_{\alpha\beta}^e$ ) um eine innere Variable handelt (6.3.2). Ferner dürfte es äußerst schwierig sein, eine Probe mit homogener Grenzflächenschädigung zu präparieren sowie Dehnungen und Spannungen an der Grenzfläche zu messen. Bei Modellen, die von der Vorstellung einer dreidimensionalen Zwischenschicht die Grenzflächendarstellung ableiten, können hingegen zumindest erste Näherungen der Materialparameter an homogenen Proben ohne Grenzfläche gemessen werden.

### Grenzfläche als Grenzfall der Zwischenschicht

Aufgrund der geringen Dicke der Zwischenschicht ist der Sinn einer räumlichen Auflösung in Normalenrichtung fragwürdig (siehe Abschnitt 6.3.1), und es bietet sich ein linearer Ansatz für die Verschiebungen entlang dieser Richtung an. Sei  $x_3$  die Richtung senkrecht zur Delaminationsebene, und durch  $x_3 = 0$  sei der untere Rand der Zwischenschicht bestimmt.  $\mathbf{u}$  bezeichne die Verschiebung.

$$\mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) \quad (6.44)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2, h) \Leftrightarrow \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) \quad (6.45)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2) + \frac{x_3}{h} \Delta \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad x_3 \in (0, h) \quad (6.46)$$

Mit dieser Linearisierung erhält man für die Dehnungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} \text{ analog} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{h} \Delta u_3 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \Delta u_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{x_3}{h} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{23} \text{ analog} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Falls die Differenz der Dehnungen an Ober- und Unterseite der Zwischenschicht klein ist im Vergleich zu den Dehnungen, kann man die  $x_3$  enthaltenden Terme vernachlässigen, und die Dehnung hängt nur noch von der Position auf der Delaminationsebene ab.

$$|\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, h) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, 0)| < c |\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, 0)| \quad (6.48)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right| < c \left| \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} \right| \quad (6.49)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2) (1 + \mathcal{O}(c)) \quad (6.50)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} \text{ analog}$$

$$\varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \Delta u_3$$

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \Delta u_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} \text{ analog} \quad (6.51)$$

Für sehr dünne Zwischenschichten  $h \rightarrow 0$  ist das linearisierte Zwischenschichtmodell gleichbedeutend mit einem Grenzflächenmodell der Prozeßzone, wie es beispielsweise von ALLIX (Abschnitt 6.2.2) verwendet wird. RINDERKNECHT stellt die Interface-Formulierung als Grenzfall dar, indem er diejenigen Komponenten des Dehnungstensors null setzt, die im Grenzwert  $h \rightarrow 0$  nicht singulär werden, d.h. die in-plane Komponenten  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  und  $\varepsilon_{12}$  [84]. Er erklärt diesen Ansatz nicht; offenbar setzt er jedoch bei der Bildung des Grenzwertes voraus, daß  $\Delta \mathbf{u}$  konstant bleibt oder zumindest schwächer als  $h$  gegen null strebt. Seine Argumentation bleibt somit unklar. Stattdessen soll hier eine andere Möglichkeit vorgeschlagen werden, um zu einem Grenzflächenmodell überzugehen.

Verringert man die Zwischenschichtdicke  $h$  unter der physikalisch sinnvollen Annahme beschränkter Dehnungen, so strebt die Energie der Zwischenschicht ebenfalls gegen null und wird klein gegenüber den Energien der Laminae. Die Verschiebungen  $\mathbf{u}^{(0)}$  am Rand der Zwischenschicht gehen sowohl über die Zwischenschichtenergie als auch über die Energie der Laminae in die gesamte freie Energie ein. Da der Beitrag der Grenzschicht jedoch für  $h \rightarrow 0$  vernachlässigbar wird, wird  $\mathbf{u}^{(0)}$  im Grenzfall nur noch durch das elastische Verhalten der Laminae und nicht mehr durch das Materialverhalten der Zwischenschicht bestimmt. Die Verschiebungsdifferenz  $\Delta \mathbf{u}$  hingegen fließt weiterhin zum größten Teil über die Energie der Zwischenschicht in die Gesamtenergie ein. Somit wird die dünne Zwischenschicht im Wesentlichen durch die Verschiebungsdifferenz  $\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2)$  charakterisiert, und ihre elastische Energiedichte (ohne Schädigung) ist

$$w = \frac{1}{2} \int_0^h \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} dx_3 \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \approx \frac{h}{2} & \left( C_{3333} \left( \frac{\Delta u_3}{h} \right)^2 + 2C_{1333} \frac{\Delta u_1}{h} \frac{\Delta u_3}{h} + 2C_{2333} \frac{\Delta u_2}{h} \frac{\Delta u_3}{h} + \right. \\ & \left. + 2C_{1213} \frac{\Delta u_1}{h} \frac{\Delta u_2}{h} + C_{1313} \left( \frac{\Delta u_1}{h} \right)^2 + C_{2323} \left( \frac{\Delta u_2}{h} \right)^2 \right) \quad (6.53) \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  stimmt das Zwischenschichtmodell also mit dem Modell einer Grenzfläche überein, an der eine Verschiebungsdiskontinuität  $\Delta \mathbf{u}$  auftritt und deren Grenzflächenenergie durch obige Gleichung (6.53) bestimmt ist. Wählt man als Richtungen des Koordinatensystems die Hauptachsen des Steifigkeitstensors, so erhält man eine Energiedichte ähnlich derer, die im Modell von ALLIX und LADEVEZE verwendet wird.

$$w = \frac{1}{2} (k_3 (\Delta u_3)^2 + k_1 (\Delta u_1)^2 + k_2 (\Delta u_2)^2) \quad (6.54)$$

$$k_3 = \frac{C_{3333}}{h}; \quad k_1 = \frac{2C_{1313}}{h}; \quad k_2 = \frac{2C_{2323}}{h} \quad (6.55)$$

Diese Gestalt der elastischen Energie kann durch ein Federmodell veranschaulicht werden. Die zwei benachbarten Laminae werden an der Grenzfläche durch Federn verknüpft, welche bei einer Relativverschiebung  $\Delta \mathbf{u}$  der Laminae gespannt werden.  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  sind hierbei als Federkonstanten zu verstehen. Auf der Ebene einer Finite Elemente Diskretisierung wurde ein ähnlicher Ansatz von TAKADA et al. formuliert [98] („bonding spring elements“).

## 6.4 Rißwachstumskriterium

In den vorangehenden Abschnitten wurde die Modellierung der Schädigung in der Prozeßzone an der Delaminationsfront diskutiert. Nun ist an diese Mikroschädigung ein Rißfortschrittskriterium für den makroskopischen Delaminationsriß zu knüpfen.

Viele Delaminationsmodelle greifen zur Modellierung des Rißfortschritts auf die klassische Bruchmechanik zurück. In Analogie zur Bruchmechanik kann ein Rißkriterium mittels der schadensmechanischen Energiefreisetzungsrates formuliert werden. Ein anderer Ansatz verwendet einen kritischen Wert der Schädigungsvariablen.

### Vergleich mit bruchmechanischem Kriterium

Die meisten Veröffentlichungen zur Modellierung der Delamination greifen auf Konzepte der Bruchmechanik zurück [11, 12, 15, 29, 30, 46, 55, 60, 75, 77, 80, 86, 88, 89, 97, 99]). Beim GRIFFITH-Kriterium [38]) wird die bei Wachstum des Risses freigesetzte elastische Energie  $W^e$  mit der zur Erzeugung der zusätzlichen Rißoberfläche aufzubringenden Arbeit  $W^s$  verglichen. Ist die Bilanz der Energie-

freisetzung positiv, schreitet der Riss fort.

$$G := \frac{\partial W^e}{\partial a} > G_C := \frac{\partial W^S}{\partial a}, \quad a : \text{Rißlänge} \quad (6.56)$$

Ausgehend von dieser Grundidee wurden verschiedene Rißkriterien entwickelt, die das unterschiedliche Verhalten der drei Rißmoden berücksichtigen.

Analog zum Vergleich von bruchmechanischer Energiefreisetzungsrate  $G$  und kritischer Energiefreisetzungsrate  $G_C$  wurde ein schadensmechanisches Kriterium aufgestellt, das im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

### Kritische Energiefreisetzungsrate

In den Delaminationsmodellen von ALLIX, LADEVEZE, RINDERKNECHT und anderen wird der Rißfortschritt durch die zu den Schädigungsvariablen konjugierten Kräfte, die schadensmechanischen Energiefreisetzungsraten  $Y_i$ , gesteuert. Bei RINDERKNECHT findet man beispielweise das Kriterium [84]

$$\frac{Y_1}{Y_1^C} + \frac{Y_2}{Y_2^C} + \frac{Y_3}{Y_3^C} > 1. \quad (6.57)$$

Die kritischen Energiefreisetzungsraten  $Y_1^C, Y_2^C$  und  $Y_3^C$  sollen hierbei Materialkonstanten sein.

Obwohl die Analogie zu bewährten Rißfortschrittskriterien der Bruchmechanik für das Kriterium einer kritischen schadensmechanischen Energiefreisetzungsrate  $Y_C$  spricht, ist dieses mangels physikalischer Begründung abzulehnen.<sup>6</sup> Die schadensmechanische Energiefreisetzungsrate  $Y$  ist gleich der Änderung der elastischen Energie bei fortschreitender Mikroschädigung [18]:

$$Y = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial w^e}{\partial D} \right|_{\sigma = \text{const}} \quad (6.58)$$

Es handelt sich hierbei nicht um die Energieänderung aufgrund von Bildung oder Wachstum eines makroskopischen Risses, sondern  $Y$  ist die verallgemeinerte treibende Kraft für die Mikroschädigung. Die Tatsache, daß zur Bildung der Mikrorisse Oberflächenenergie aufzubringen ist, ist bereits in den Entwicklungsgleichungen der Schädigung enthalten, in welche  $Y$  entscheidend eingeht (5.17).

$Y$  ist nicht die treibende Kraft des Delaminationswachstums und erscheint auch nicht geeignet, um den Übergang von mikroskopischer zu makroskopischer Rißbildung zu erkennen. Als Kriterium für die Entstehung oder das Wachstum eines

---

<sup>6</sup>In [84] besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen  $D$  und  $Y$ , so daß das Rißfortschrittskriterium auch durch die Schädigungsvariable ausgedrückt werden könnte, was physikalisch sinnvoller wäre.

Makrorissen benötigen wir eine Größe, die angibt, wann der Gültigkeitsbereich des schadensmechanischen Modells verlassen wird.

### Kritische Schädigung

In der ersten Phase der Materialschädigung entstehen und wachsen Mikrorisse und Löcher. Diese Phase kann in einem schadensmechanischen Kontinuumsmodell beschrieben werden. Sobald die Rißdichte eine gewisse Größe erreicht, kommt es zur Koagulation von Mikrorissen, und schließlich bilden sich Makrorisse. Als Versagenskriterium wird daher in schadensmechanischen Modellen häufig das Erreichen einer kritischen Schädigung  $D_C$  gewählt. Hierbei wird angenommen, daß  $D_C$  eine Materialkonstante ist.

In einigen Modellen der Grenzflächenschädigung charakterisiert ebenfalls die Variable, welche die Schädigung bzw. Dekohäsion beschreibt, den Beginn des delaminierten Bereichs (CHABOCHE [24], POINT [81], mit  $D_C = 1$ ). Obwohl dieser Ansatz keine direkte Ähnlichkeit mit dem bruchmechanischen Kriterium aufweist, läßt sich das bruchmechanische Modell dennoch als Grenzfall von schadensmechanischen Modellen darstellen (Abschnitt 6.2.1, [81]).

Das Kriterium einer kritischen Schädigung  $D_C$  ist somit gegenüber einer kritischen schadensmechanischen Energiefreisetzungsrates  $Y_C$  zu bevorzugen, da es besser physikalisch motiviert ist und ebenfalls einen klaren Bezug zur Bruchmechanik aufweist. Der Materialparameter  $D_C$  muß experimentell bestimmt werden. Er ist kleiner als 1, da kein stetiger, vollständiger Verlust der Steifigkeit beobachtet wird bzw. dieser so schnell eintritt, daß eine Modellierung als Trennung der Grenzfläche bei  $D = D_C$  am einfachsten ist.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Um ein elastoplastisches schadensmechanisches Materialmodell zu formulieren, dessen Evolutionsgleichungen nicht willkürlich gewählt werden, kann die Gestalt der Gleichungen durch allgemeine physikalische Annahmen festgelegt werden. Hierzu bieten sich drei Postulate an: das Irreversibilitätspostulat von Ilyushin, die Stabilitätsbedingung von Drucker und das Prinzip der maximalen Dissipation. Es ist bereits bekannt, daß diese Postulate bei einfachen elastoplastischen Modellen zu einer assoziierten Normalenregel im Spannungsraum führen.

Bei komplexeren Modellen mit inneren Variablen liefern die Postulate von Ilyushin und Drucker eine Restriktion für die Richtung der dissipativen Flüsse, die weniger streng als das Prinzip der maximalen Dissipation ist (Kapitel 3). In der Darstellung durch Variationsungleichungen (3.7),(3.8) zeigt sich das Prinzip der maximalen Dissipation als eine natürliche Erweiterung von Ilyushins Bedingung. Druckers Postulat impliziert dieselbe Variationsungleichung wie Ilyushins Bedingung, verlangt aber zusätzlich eine strengere lokale Stabilitätsbedingung.

Bei schadensmechanischen Modellen elastischer Materialien implizieren alle drei Postulate eine Normalenregel im Raum der Schädigungskraft. Wird die Plastizität ins schadensmechanische Modell einbezogen, so verlangen die Postulate von Ilyushin und Drucker weder eine Normalenregel im Spannungsraum noch im Raum der Schädigungskraft.

Übliche nicht-assozierte, elastoplastische schadensmechanische Modelle verletzen das Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulat. Falls die Fließfunktion nicht von der Schädigungskraft abhängt, kann Ilyushins Bedingung nicht erfüllt werden, wenn die Fließfläche der von-Mises-Bedingung ähnelt oder eine Normalenregel im Spannungsraum gilt.

Das Prinzip der maximalen Dissipation ist keine notwendige Bedingung wie die Hauptsätze der Thermodynamik. Dennoch ist ein Modell mit maximaler Dissipation zu bevorzugen, sofern es mit den experimentellen Ergebnissen über-

einstimmt. Die Anwendung eines allgemeinen Postulats, das durch den zweiten Hauptsatz sowie die Irreversibilitäts- und Stabilitätsbedingungen motiviert ist, ist eine weniger willkürliche Vorgehensweise als die freie Wahl der Entwicklungsgleichungen.

Zur Beschreibung des Schädigungsprozesses in elastoplastischen Materialien findet man in der Literatur mehrere Modelle, die auf separaten Fließflächen für Plastizität und Schädigung basieren. In Kapitel 4 wurde gezeigt, daß diese Modelle einen Spezialfall von maximal-dissipativen Modellen darstellen, bei dem die Fließfläche im Raum aller Kräfte aus orthogonalen Teilflächen besteht und bei dem die beiden dissipativen Prozesse weitgehend entkoppelt sind. Mit einer glatten Fließfläche hingegen erhält man eine starke Kopplung von Plastizität und Schädigung. In einem neuen Modell wurde dieser Ansatz starker Kopplung erstmalig konsequent umgesetzt. Für den Fall linearer Verfestigung und Schädigung wurden die Modellgleichungen vereinfacht und ausgehend von einer Variationsungleichung in eine schwache Formulierung überführt.

An Proben aus einem Vergütungsstahl 30CrNiMo8 wurden kraftgesteuerte, einachsige Zugentlastungsversuche durchgeführt, um die Entwicklung von plastischer Dehnung und Schädigung zu beobachten (Kapitel 5). Die Meßergebnisse können durch ein elastoplastisches Modell mit isotroper Verfestigung und Schädigung, das auf dem Prinzip der maximalen Dissipation basiert, sehr gut reproduziert werden. Das Modell verwendet einen exponentiellen Ansatz für die Verfestigungsenergie. Der Schädigungsanteil der Fließfunktion ist quadratisch von der Schädigungskraft und exponentiell von der Schädigungsvariable abhängig. Das Modell konnte für mehrachsigen Spannungszustände mangels experimenteller Daten noch nicht verifiziert werden, liefert aber qualitativ richtige Aussagen.

In der vorliegenden Arbeit wurde somit erstmals gezeigt, wie schadensmechanische Modelle für Materialien mit starker Kopplung von Schädigung und Plastizität systematisch formuliert werden können.

Die Anwendung des neuen Materialmodells zur Beschreibung des Delaminationswachstums in geschichteten, anisotropen Verbundwerkstoffen wurde im Kapitel 6 vorgeschlagen. Die Prozeßzone wird hierbei als Grenzfläche modelliert, welche als Grenzfall einer dünnen Zwischenschicht verstanden werden kann. Als Rißwachstumskriterium dient eine kritische Schädigung. Es wurde gezeigt, daß die Verwendung der schadensmechanischen Energiefreisetzungsrate als Kriterium nicht sinnvoll ist.

Die quantitative Anpassung des neuen schadensmechanischen Modells an experimentelle Ergebnisse bei mehrachsigen Belastungen wird Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein. Weiterhin ist zu untersuchen, wie der Übergang zwischen Fällen starker und schwacher Kopplung von Plastizität und Schädigung durch die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methoden erfaßt werden kann.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Die Normalenregel als Ungleichung . . . . .	10
2.2	Veranschaulichung der maximalen Dissipation . . . . .	11
2.3	Lastzyklus zur Ableitung von (2.52) in 1D . . . . .	16
2.4	Repräsentatives Volumenelement (RVE) . . . . .	18
3.1	Vergleich von Ilyushins Postulat und maximaler Dissipation . . . . .	26
3.2	Belastungspfad: $\boldsymbol{\varepsilon}$ : Dehnungsraum, $\boldsymbol{\sigma}$ : Spannungsraum . . . . .	26
3.3	Beispiel für den Unterschied zwischen Ilyushins Postulat und maximaler Dissipation . . . . .	30
3.4	Schnitt mit der Ebene, in der die Halbebene $H$ liegt . . . . .	30
3.5	Belastungspfad: a) Dehnungsraum, b) Spannungsraum . . . . .	34
3.6	Fließfläche (3.86) und Mannigfaltigkeit $M$ (3.87) für das Beispiel . . . . .	43
3.7	Schnittmenge $Z$ und zulässige Richtungen der Flüsse (2D) . . . . .	44
3.8	Region möglicher Instabilität bei nicht-assozierten Fließregeln . . . . .	46
3.9	Modell mit von $Y$ abhängiger Fließfläche . . . . .	47
3.10	Überblick über die Beziehung zwischen den Irreversibilitäts- und Stabilitätspostulaten und dem Prinzip der maximalen Dissipation . . . . .	51
4.1	Fließfunktion beim Modell von Zysset und Curnier . . . . .	58
5.1	Textur des Vergütungsstahls 30CrNiMo8 . . . . .	76
5.2	Probengeometrie . . . . .	77
5.3	Zugentlastungsversuch . . . . .	77
5.4	Hystereseschleife bei Ent- und Belastung . . . . .	78
5.5	Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Zugentlastungsversuchs . . . . .	78
5.6	Schädigung in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung . . . . .	79
5.7	Experimentelle Daten und Fit mit dem Modell: $\tilde{\sigma}(p)$ . . . . .	81
5.8	Experimentelle Daten und Fit mit dem Modell: $D(p)$ . . . . .	82
5.9	Modellverhalten $\tilde{\sigma}(p)$ bei Mehrachsigsigkeitsgrad $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ . . . . .	84
5.10	Modellverhalten $D(p)$ bei Mehrachsigsigkeitsgrad $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ . . . . .	84
5.11	Modellverhalten $\sigma(\varepsilon)$ bei Mehrachsigsigkeitsgrad $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ . . . . .	85
5.12	Fit von $\tilde{\sigma}(p)$ durch modifiziertes Modell (5.22) . . . . .	88
5.13	Fit von $D(p)$ durch modifiziertes Modell (5.22) . . . . .	88
5.14	Modellverhalten $\tilde{\sigma}(p)$ bei Mehrachsigsigkeitsgrad $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ . . . . .	89

5.15	Modellverhalten $D(p)$ bei Mehrachsigsigkeitsgrad $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ . . .	90
6.1	Prozeßzone und Zwischenschicht . . . . .	104

# Symbolverzeichnis

Vektorielle bzw. tensorielle Größen werden durch **Fettdruck** gekennzeichnet. Für das Skalarprodukt zweier Vektoren wird folgende abkürzende Schreibweise verwendet:

$$\mathbf{X} \mathbf{x} := X_i x_i$$

Für Tensoren zweiter ( $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ ) und vierter Stufe ( $\mathbf{C}$ ) sei

$$\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} := \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} , \quad \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} := C_{ijkl} \varepsilon_{kl} .$$

Symbol	Bedeutung	siehe
$b$	Parameter im schadensmechanischen Modell	(4.44)
$b_1, b_2$	Parameter im schadensmechanischen Modell	(5.8), (5.22)
$\mathbf{C}$	Steifigkeitstensor	
$D$	skalare Schädigungsvariable	2.2.1
$\mathbf{D}$	tensorielle Schädigungsvariable	
$\mathcal{D}$	Dissipationsleistung, Dissipationsfunktion $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}^d)$	(2.17)
$e$	elastische Dehnung	
$E$	Elastizitätsmodul	
$f$	spezifische freie Helmholtz-Energie (pro Volumen)	
$F$	Fließfunktion	S. 10
$F_Y$	Schädigungsanteil in der Fließfunktion	(4.33)
$g$	Ansatzfunktion (in Kap. 4,5)	(4.36)
$G$	plastisches Potential (in Kap. 2 bis 4), Energiefreisetzungsrates (in Kap. 6)	
$h$	spezifische freie Enthalpie (in Kap. 3.1.3); Ansatzfunktion (in Kap. 4,5)	(3.38); (4.36)
$I_K$	Indikatorfunktion der Menge $K$	(2.42)
$k$	Parameter im schadensmechanischen Modell	(4.43)
$k_1, k_2$	Parameter im schadensmechanischen Modell	(5.7)
$\mathbf{k}$	Volumenkraft	

Symbol	Bedeutung	siehe
$K$	konvexe Menge, elastischer Bereich	(2.23)
$M$	Mannigfaltigkeit der elastisch erreichbaren Zustände	S. 28
$\mathbf{n}$	Normale; Normalenvektor an der Fließfläche	
$\mathbf{p}$	plastische Dehnung	
$\tilde{\mathbf{p}}$	effektive plastische Dehnungsrate	(4.70)
$r$	Verfestigungsvariable	
$\mathbf{r}$	von der elastischen Dehnung entkoppelte innere Variable	(3.3)
$\mathbf{R}$	zu $\mathbf{r}$ konjugierte Kraft	
$R$	konjugierte Kraft zur Verfestigungsvariable	
$\mathbf{s}$	mit der elastischen Dehnung gekoppelte innere Variable	(3.3)
$\mathbf{S}$	zu $\mathbf{s}$ konjugierte Kraft	
$t$	Zeit	
$\mathbf{t}$	Grenzflächenspannung	6.2.1
$u$	innere Energie	
$\mathbf{u}$	Verschiebung; Verschiebungssprung (in Kap. 6)	
$W$	elastische Arbeit	
$\mathbf{x}$	Zustandsvariablen	
$\mathbf{x}^d$	dissipative Variablen	(2.19)
$\mathbf{X}$	konjugierte Kräfte	
$\mathbf{X}^d$	dissipative Kräfte	(2.19)
$\Leftrightarrow Y$	zur skalaren Schädigungsvariable konjugierte Kraft	(2.73);(6.4)
$\Leftrightarrow \mathbf{Y}$	zur tensoriellen Schädigungsvariable konjugierte Kraft	
$\varepsilon$	Gesamtdehnung	
$\gamma$	Schädigungsvariable (nicht über Steifigkeit definiert)	6.2.1
$\lambda$	Multiplikator	
$\nu$	Querkontraktionszahl	
$\Psi$	Dissipationspotential	(2.33)
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannung	
$\sigma_y$	Fließgrenze	
$\boldsymbol{\sigma}'$	Spannungsdeviator	(3.79)
$\sigma_m$	hydrostatischer Spannungsanteil	(3.78)
$\sigma_{\text{eq}}$	von-Mises-Vergleichsspannung	(3.80)
$\tilde{\sigma}$	effektive Spannung	2.2.1
$\boldsymbol{\xi}$	innere Variablen	
$\Xi$	zu den inneren Variablen konjugierte Kräfte	(2.7)

# Literaturverzeichnis

- [1] O. Allix, A. Corigliano. Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. *Int. J. Solids Structures*, **36**, 2189–2216 (1999).
- [2] O. Allix, L. Daudeville, J. L. Neau, P. Ladeveze. Necessity of using damage mechanics for the analysis of delamination specimen. In D. R. J. Owen, E. Onate (editors), *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications Proc. of the Fourth Int. Conf.*, pages 1057–1068 (1995).
- [3] O. Allix, P. Ladeveze. Interlaminar modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, **22**, 235–242 (1992).
- [4] O. Allix, P. Ladeveze, E. L. Dantec, E. Vittecoq. Damage mechanics for composite laminates under complex loading. In J. P. Boehler (editor), *Yielding, Damage, and Failure of Anisotropic Solids*, volume EGF5, pages 551–569. Mechanical Engineering Publ. (1990).
- [5] O. Allix, D. Leveque, L. Perret. Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Sci. Tec.*, **58**, 671–8 (1998).
- [6] D. Aurich. Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte. Forschungsbericht 192, BAM, Berlin (1993).
- [7] I. A. Bereznoi, D. D. Ivlev. On integral inequalities of the theory of elastico-plastic body. *PMM U.S.S.R.*, **44**, 379–385 (1981).
- [8] N. Bonora. A nonlinear CDM model for ductile failure. *Engng. Fracture Mech.*, **55**(1/2), 11–28 (1997).
- [9] N. Bonora, G. M. Newaz. Low cycle fatigue life estimation for ductile materials using a nonlinear continuum damage mechanics model. *Int. J. Solids Structures*, **35**(16), 1881–94 (1998).
- [10] W. L. Bradley. Relationship of matrix toughness to interlaminar fracture toughness. In K. Friedrich (editor), *Application of Fracture Mechanics to*

- Composite Materials*, volume 6 of *Composite Material Series*, chapter 5, pages 159–187. Elsevier Science Publ., Amsterdam (1989).
- [11] D. Braess, O. Klaas, R. Niekamp, E. Stein, F. Wibschal. Error indicators for mixed finite elements in 2-dimensional linear elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **127**(1-4), 345–356 (1996).
- [12] J. C. Brewer, P. A. Lagace. Failure of graphite/epoxy induced by delamination. In *Advanced materials. Looking ahead the 21. century Int. SAMPE technical conf. 22*, pages 532–545 (1990).
- [13] R. B. Bucinell. Development of a stochastic free edge delamination model for laminated composite materials subjected to constant amplitude fatigue loading. *J. Composite Materials*, **32**(12), 1138–56 (1998).
- [14] A. Burr, F. Hild, F. A. Leckie. Continuum description of damage in ceramic-matrix composites. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **16**(1), 53–78 (1997).
- [15] D. S. Cairns, P. J. Minguet, M. G. Abdallah. Theoretical and experimental response of composite laminates with delaminations loaded in compression. In *The 33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ACE structures, structural dynamics and materials conf., paper 92-2223*, pages 1–9. (1992).
- [16] W. J. Cantwell, J. Morton. The significance of damage and defects and their detection in composite materials: a review. *J. of Strain Analysis*, **27**(1), 29–42 (1992).
- [17] A. Cauvin, R. B. Testa. Damage mechanics: basic variables in continuum theories. *Int. J. Solids Structures*, **36**, 747–61 (1999).
- [18] J.-L. Chaboche. Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement. In *Symposium franco-polonais: Problemes non-lineaires de mecanique*, Cracovic (1977).
- [19] J.-L. Chaboche. Le concepte de contrainte effective, applique a l'elasticite et la viscoplasticite en presence d'un endommagement anisotrope. In *Col. Euro-mech 115*, volume 295 of *Editions du CNRS*, pages 737–760, Grenoble (1979).
- [20] J.-L. Chaboche. Continuum damage mechanics: part I – general concepts. *J. App. Mech.*, **55**, 59–64 (1988).
- [21] J.-L. Chaboche. Continuum damage mechanics: part II – damage growth, crack initiation, and crack growth. *J. App. Mech.*, **55**, 65–72 (1988).

- [22] J.-L. Chaboche. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *Int. J. Damage Mech.*, **2**, 311–29 (1993).
- [23] J.-L. Chaboche. Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers. *Int. J. Solids Structures*, **34**(18), 2239–2254 (1997).
- [24] J.-L. Chaboche, R. Girard, P. Lévassieur. On the interface debonding models. *Int. J. Damage Mech.*, **6**, 220–38 (1997).
- [25] J.-L. Chaboche, R. Girard, A. Schaff. Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, **20**, 3–11 (1997).
- [26] Z. Chen, H. L. Schreyer. Nonlocal damage models for interface problems. *Int. J. Solids Structures*, **31**(9), 1241–1260 (1994).
- [27] I. F. Collins, G. T. Houlsby. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **453**, 1975–2001 (1997).
- [28] A. Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *J. Solids Structures*, **30**(20), 2779–2811 (1993).
- [29] J. H. Crews, K. N. Shivakumar, I. S. Raju. A fibre-resin micromechanics analysis of the delamination in a double cantilever beam specimen. In *Phase interaction in composite materials, The 2nd Int. Symp. COMP '88*, pages 396–405. (1992).
- [30] W. C. Cui, M. R. Wisnom, M. Jones. A comparison of fracture criteria to predict delamination of unidirectional glass/epoxy specimens with cut central plies. In *Fibre reinforced composites FRC '92 Fifth int. conf. of the plastics and rubber institute*, pages 25.1 – 25.10. (1992).
- [31] M. D. Dacheva, S. A. Shesterikov, M. A. Yumasheva. Damage under complex nonstationary stress state. *Mechanics of Solids*, **33**(1), 35–7 (1998).
- [32] K. Decamp, L. Bauvineau, J. Besson, A. Pineau. Size and geometry effects on ductile rupture of notched bars in a C-Mn steel: experiments and modelling. *Int. J. Fracture*, **88**, 1–18 (1997).
- [33] D. C. Drucker. Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quart. Appl. Math.*, **7**(4), 411–18 (1950).

- [34] D. C. Drucker. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In *Proceedings of the US National Congress of Applied Mechanics*, volume 1, pages 487–91 (1951).
- [35] H. E. Fang, C. L. Chow, F. Yang. A method of damage mechanics analysis for solder material. *Key Engineering Materials Vols.*, **145-49**, 367–74 (1998).
- [36] J. Florez-Lopez, A. Benallal, G. Geymonat, R. Billardon. A two-field finite element formulation for elasticity coupled to damage. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **114**, 193–212 (1994).
- [37] M. Fremond. *Topics in Nonsmooth Mechanics*, chapter "Contact with adhesion". Birkhäuser (1988).
- [38] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A221**, 163–197 (1921).
- [39] J. Grunwald. *A fatigue model for shape optimization based on continuum damage mechanics*. Dissertation, Universität Karlsruhe (1996).
- [40] A. L. Gurson. Porous rigid-plastic materials containing rigid inclusions - yield function, plastic potential and void nucleation. *Fracture*, **2**, 357–364 (1977).
- [41] D. Halm, A. Dragon. A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effects. *Int. J. Damage Mech.*, **5**, 383–402 (1996).
- [42] W. Han, B. D. Reddy. Computational plasticity: the variational basis and numerical analysis. *Com. Mec. Adv.*, **2**, 283–400 (1995).
- [43] W. Han, B. D. Reddy, G. C. Schroeder. Qualitative and numerical analysis of quasi-static problems in elastoplasticity. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**(1), 143–177 (1997).
- [44] N. R. Hansen, H. L. Schreyer. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. *Int. J. Solids Structures*, **31**(3), 359–89 (1994).
- [45] R. Hill. A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *The Quarterly journal of mechanics and applied mathematics*, **1**, 18–29 (1948).
- [46] C. Hwu, C. J. Kao, L. E. Chang. delamination fracture criteria for composite laminates. *J. Composite Materials*, **29**(15), 1962–1987 (1995).

- [47] A. A. Ilyushin. On a postulate of plasticity. *Prikl. Math. Mekh.*, **18**, 503–7 (1961).
- [48] S. P. Joshi, C. T. Sun. Impact induced fracture in a laminated composite. *J. Composite Materials*, **19**, 51–66 (1985).
- [49] L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademia Nauk, USSR Otd. Tekh.*, **8**, 26–31 (1958).
- [50] D. Krajcinovic, G. U. Fonseka. The continuous damage theory of brittle materials. *J. App. Mech.*, **48**, 809–24 (1981).
- [51] E. Kröner. Plastizität und Versetzungen. In A. Sommerfeld (editor), *Mechanik der deformierbaren Medien*, volume 2 of *Vorlesungen über theoretische Physik*, chapter 9. Verlag Harry Deutsch, Frankfurt (1978).
- [52] P. Laborde, A. Michrafy. On general constitutive equations involving damage. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **10**(2), 213–37 (1991).
- [53] P. Ladeveze, O. Allix, L. Daudeville. Mesomodelling of damage for laminate composites: Application to delamination. In *IUTAM Symposium on Inelastic Deformation of Composite Materials*, Troy (1990).
- [54] P. Ladeveze, O. Allix, L. Daudeville. Mesomodelling of damage for laminate composites: application to delamination. In Dvorak (editor), *Inelastic deformation of composite materials*, pages 607–622. New York (1991).
- [55] P. A. Lagace, N. V. Bhat. On the prediction of delamination initiation. In *Advanced Composites '93 ICACM, Warrendale: TMS, Minerals, Metals, Materials*, pages 335–351. (1993).
- [56] U. Lee, G. A. Lesieutre, L. Fang. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *Int. J. Solids Structures*, **34**(33-34), 4377–4397 (1997).
- [57] J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin (1992).
- [58] J. Lemaitre. Endommagement et rupture des interfaces. Technical Report 94.1023/A, PEAU (1994).
- [59] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [60] J. Li, Y. Wang. Analysis of a symmetric laminate with mid-plane free edge delamination under torsion: theory and application to the edge crack torsion (ECT) specimen for mode III toughness characterization. *Engng. Fracture Mech.*, **49**(2), 179–194 (1994).

- [61] M. Li. *On the instabilities resulting from a non-associated flow rule*. PhD thesis, University of Florida (1993).
- [62] M. Li, D. C. Drucker. Instability and bifurcation of a nonassociated extended Mises model in the hardening regime. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**(12), 1883–1904 (1994).
- [63] S. Li, S. R. Reid, P. D. Soden. A continuum damage model for transverse matrix cracking in laminated fibre-reinforced composites. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **356**, 2379–2412 (1998).
- [64] W. F. Li, S. Y. Du. Modelling of anisotropic damage at a crack tip in composite laminates. *Engng. Fracture Mech.*, **45**(3), 381–385 (1993).
- [65] D. C. Lo, F. Constanzo, M. A. Zocher, D. H. Allen. Modeling of damage evolution in thick laminates subjected to low velocity impact. In *Mechanics of Thick Composites The first Joint Mechanics Meeting of the ASME*, pages 137–150. ASME (1993).
- [66] E. B. Marin, D. L. McDowell. Models for compressible elasto-plasticity based on internal state variables. *Int. J. Damage Mech.*, **7**, 47–83 (1998).
- [67] G. A. Maugin. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press (1992).
- [68] M. A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *J. App. Mech.*, **12**, A159–A164 (1945).
- [69] Y. Mou, R. P. S. Han. Damage zones in strain-hardening materials. *Mechanics of Materials*, **22**, 131–147 (1996).
- [70] S. Murakami. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. *J. Engng. Math. Tec.*, **105**, 99–105 (1983).
- [71] S. Murakami, K. Hayakawa, Y. Liu. Damage evolution and damage surface of elastic-plastic damage materials under multiaxial loading. *Int. J. Damage Mech.*, **7**, 103–28 (1998).
- [72] S. Murakami, N. Ohno. A constitutive equation of creep damage in polycrystalline materials. Euromech colloquium 111, Marianske Lazne (1978).
- [73] J. Murzewski. Cumulative damage of solids for random stress. *Engng. Fracture Mech.*, **8** (1976).
- [74] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. App. Mech.*, **54**, 525–31 (1987).

- [75] K. F. Nilsson, A. E. Giannakopoulos. Finite element simulation of delamination growth. In *Proc. of the first Int. Conf. on Computer-Aided Assessment and Control of Localized Damage*, pages 299–313 (1990).
- [76] T. K. O'Brien. Characterization of delamination onset and growth in composite laminate. In K. I. Reifsnider (editor), *Damage in Composite Materials*, pages 140–67. Am. Soc. Testing Mat. (1982).
- [77] Y. Ousset. Numerical simulation of delamination growth in layered composite plates. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **18**, 291–312 (1999).
- [78] A. Palmgren. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Zeitschrift VDI*, **68**, 339–41 (1924).
- [79] P. Pawliska. *Stabiles Rißwachstum in duktilen Materialien bei kombinierter Normal- und Schubbeanspruchung*. Number 194 in VDI-Fortschrittberichte, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik. VDI Verlag, Düsseldorf (1996).
- [80] Z. Petrossian, M. R. Wisnom. Prediction of delamination initiation and growth from discontinuous plies using interface elements. *Composites Part A*, **29**, 503–15 (1998).
- [81] N. Point, E. Sacco. A delamination model for laminated composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**(4), 483–509 (1996).
- [82] N. Point, E. Sacco. Mathematical properties of a delamination model. *Mathl. Comput. Modelling*, **28**(4-8), 359–371 (1998).
- [83] Y. N. Rabotnov. Creep rupture. In *Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech.*, pages 342–49, Berlin (1969). Springer-Verlag.
- [84] S. Rinderknecht. *Delamination in Faserverbundplatten. Ein vereinfachtes Berechnungsmodell*. Dissertation, Universität Stuttgart (1994).
- [85] S. Rinderknecht, B. Kröplin. A computational method for the analysis of delamination growth in composite plates. *Composite Structures*, **64**(1-4), 359–374 (1997).
- [86] D. H. Robbins, J. N. Reddy, A. V. K. Muty. On the modeling of delamination in thick composites. In *Enhancing analysis techniques for composite materials. Presented on the winter annual meeting of the American Society of Mechanical Engineers*, pages 133–149. (1991).
- [87] K. Saanouni, C. Forster, F. B. Hatira. On the anelastic flow with damage. *Int. J. Damage Mech.*, **3**, 140–169 (1994).

- [88] B. V. Sankar, S. Hu. Dynamic delamination propagation in composite beams. *J. Composite Materials*, **25**, 1414–1426 (1991).
- [89] J. C. J. Schellekens, R. de Borst. Nonlinear fracture mechanics of mode-I and mixed-mode free edge delamination in carbon-epoxy composites. In *Advanced Composites '93 ICAACM, Warrendale: TMS, Minerals, Metals, Materials*, pages 359–366. (1993).
- [90] J. C. J. Schellekens, R. de Borst. The application of interface elements and enriched or rate-dependent continua to micro-mechanical analyses of fracture in composites. *Comp. Math.*, **14**, 68–83 (1994).
- [91] W. Shichun, L. Hua. A kinetic equation for ductile damage at large plastic strains. *J. Mat. Proc. Tec.*, **21**, 295–302 (1990).
- [92] J. G. Shin, I. S. Nho, S. J. Yim. A finite element approach to anisotropic damage of ductile materials in large deformations. Part I. *Int. J. Fracture*, **84**, 261–277 (1997).
- [93] F. Sidoroff. Description of anisotropic damage application to elasticity. In *Physical nonlinearities in structural analysis*, pages 237–244, Berlin (1981).
- [94] J. C. Simo, J. W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation. *Int. J. Solids Structures*, **23**(7), 821–40 (1987).
- [95] A. Sommerfeld. *Mechanik der deformierbaren Medien*. Vorlesungen über Theoretische Physik. Verlag Harri Deutsch, Thun (1978).
- [96] D. J. Stevens, D. Liu. Strain-based constitutive model with mixed evolution rules for concrete. **118**(6), 1184–1200 (1992).
- [97] C. T. Sun, C. J. Jih. A quasi-static treatment of delamination crack propagation in laminates subjected to low velocity impact. In *Proc. of the American Society for Composites, 7th Techn. Conf., Composites Materials Mechanics and Processing*, pages 949–961. ASC (1992).
- [98] S. Takada, K. Tsukui, I. Kimpara. Analysis of flexural failure process of hybrid composite materials. In *FRC '90 Fibre Reinforced Composites Proceedings of the institution of mechanical engineers, 4th Int. Conf.*, pages 35–45 (1990).
- [99] N. Takeda, S. Ogihara. Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in CFRP cross-ply laminates. *Composites Sci. Tec.*, **52**, 309–318 (1994).

- [100] Y. Toi, T. Kiyosue. Damage mechanics models for brittle microcracking solids based on three-dimensional mesoscopic simulations. *Engng. Fracture Mech.*, **50**(1), 11–27 (1995).
- [101] V. Tvergaard. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mat. Sci. Engng.*, **125**, 203–13 (1990).
- [102] V. Tvergaard, A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met.*, **32**(1), 157–169 (1984).
- [103] R. von Mises. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **8**, 161–185 (1928).
- [104] G. Z. Voyiadjis, T. Park. Local and interfacial damage analysis of metal matrix composites using the finite element method. *Engng. Fracture Mech.*, **56**(4), 483–511 (1998).
- [105] A. S. D. Wang. Fracture analysis of interlaminar cracking. In N. P. Paganò (editor), *Interlaminar response of composite materials*, volume 5 of *Composite Material Series*, chapter 2, pages 69–109. Elsevier (1989).
- [106] T.-J. Wang. Thermal and mechanical load included damage behaviour of a low alloy steel: mechanisms and modelling. *Engng. Fracture Mech.*, **44**(4), 971–980 (1993).
- [107] S. Weihe, B. Kröplin, R. de Borst. Classification of smeared crack models based on material and structural properties. *Int. J. Solids Structures*, **35**(12), 1289–1308 (1998).
- [108] S. A. Wimmer, D. G. Karr. Compressive failure of microcracked porous brittle solids. *Mechanics of Materials*, **22**, 265–277 (1996).
- [109] Z. Wohua, S. Valliappan. Continuum damage mechanics theory and application – part I: theory. *Int. J. Damage Mech.*, **7**, 250–73 (1998).
- [110] H. Yuan, M. Eng. *Untersuchung bruchmechanischer Parameter für elastisch-plastisches Rißwachstum*. Number 82 in VDI-Fortschrittberichte, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik. VDI Verlag, Düsseldorf (1990). 90A3535.
- [111] Y. Y. Zhu, S. Cescetto. A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. *Int. J. Solids Structures*, **32**(11), 1607–41 (1995).
- [112] H. Ziegler. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics. In I. N. Sneddon, R. Hill (editors), *Progress in Solid Mechanics*, volume 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1963).

- [113] H. Ziegler. *An introduction to thermomechanics*, volume 21 of *Applied Mathematics and Mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1977).
- [114] P. K. Zysset, A. Curnier. An implicit projection algorithm for simultaneous flow of plasticity and damage in standard generalized materials. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **39**, 3065–3083 (1996).